ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Δυναμική, Γένεση και Διαχείριση Σολιτονίων σε συμπυκνώματα Bose-Einstein

---

Φωτεινή Τσίτουρα

Διδακτορική Διατριβή

Αθήνα, Ιούλιος 2016

Στους γονείς μου
και τον αδερφό μου.

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Τμήμα Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Δημητρίου Φραντζεσκάκη και τη συνεπίβλεψη του Καθηγητή Ιωάννη Στρατή και του Επίκουρου Καθηγητή Έκτορα Νισταζάκη. Η επιστημονική αρτιότητα και η ευρύτητα των ερευνητικών ενδιαφερόντων του Καθηγητή Δ. Φραντζεσκάκη με παρακίνησαν να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο ερευνητικό πεδίο και για το λόγο αυτό τρέφω ιδιαίτερη εκτίμηση στο πρόσωπό του. Θα ήθελα λοιπόν να τον ευχαριστήσω καθώς στη διάρκεια της παρούσας απαιτητικής ερευνητικής προσπάθειας καταλυτική υπήρξε η συνεχής καθοδήγησή του, η επιμονή του και η εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διατριβής είχα τη χαρά και την τιμή να γνωρίσω και να συνεργαστώ με τον Καθηγητή Π. Κεβρεκίδη του Πανεπιστημίου Μασαχουσσέτης. Η συνεργασία μας υπήρξε πολύ σημαντική και ουσιαστική καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της εργασίας, και τον ευχαριστώ θερμά για την υποστήριξή του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Φ. Διάκονο, τον Επίκουρο Καθηγητή Θ. Χωρίκη και τον Καθηγητή Ν. Καραχάλιο όπου μέσα από τις επιστημονικές μας συζητήσεις, μου έδωσαν ιδέες και λύσεις σε πολλά προβλήματα.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά τον Επίκουρο Καθηγητή Ε. Νισταζάκη, ο οποίος μέσα από τις πολύωρες συζητήσεις μας με στήριξε τόσο επιστημονικά όσο και ηθικά. Για τη καθημερινή συμπαράσταση και τις γόνιμες συζητήσεις θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον Επίκουρο Καθηγητή Δ. Ρείση καθώς και όλα τα μέλη της ομάδας των Ψηφιακών Συστημάτων.

Δε θα μπορούσα φυσικά να παραλείψω τις ευχαριστίες μου προς τους συνεργάτες μου στην ερευνητική ομάδα Μη Γραμμικών Συστημάτων, τον Δρ. Β. Αχιλλέως, τον Γ. Βελντέ καθώς και την Δρ. Λ. Κατσιμίγα, με τους οποίους μοιραστήκαμε αρμονικά τον ίδιο χώρο και αναπτύξαμε μία γόνιμη καθημερινή συνεργασία.

Τέλος, από τα βάθη της καρδιάς μου θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Γιώργο και Γωγώ και τον αδερφό μου Δημήτρη καθώς και τους αγαπημένους μου φίλους Γιώργο και Φωτούλα αλλά και τους υπόλοιπους αγαπημένους μου ανθρώπους, για την στήριξη και την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν στο δύσκολο αυτό έργο. Χωρίς την αγάπη και τη βοήθειά τους θα ήταν αδύνατη κάθε προσπάθεια. Γι'αυτό το λόγο, τους αφιερώνω αυτή τη διατριβή.

Φωτεινή Τσίτουρα

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στη διατριβή αυτή μελετώνται οι πλέον βασικές μη γραμμικές διεγέρσεις που μπορούν να υπάρξουν στα συμπυκνώματα Bose-Einstein (BECs), δηλαδή τα λεγόμενα υλικά κύματα σολιτονίων. Η προσέγγιση που ακολουθείται βασίζεται στη θεωρία μέσου πεδίου και ιδιαίτερα στην ανάλυση της εξίσωσης Gross-Pitaevskii (GP). Στο πλαίσιο αυτο μελετάται η δυναμική των μη γραμμικών διεγέρσεων σε BEC ενός συστατικού που παρουσιάζει χωρική ή χρονική ανομοιογένεια (με την ανομοιογένεια να προέρχεται από το εξωτερικό δυναμικό παγίδευσης αλλά και από το μήκος σκέδασης), αλλά και σε BEC αποτελούμενο από δύο και τρία συστατικά. Υποδεικνύονται αφ'ενός μηχανισμοί γένεσης σολιτονικών δομών και περιγράφεται αναλυτικά η δυναμική και οι αλληλεπιδράσεις υλικών κυμάτων σολιτονίων μέσω αναλυτικών τεχνικών, ενώ επίσης προτείνονται τρόποι διαχείρισης της δυναμικής τους και των ιδιοτήτων σκέδασής τους μέσω κατάλληλης - χωρικής ή χρονικής - διαμόρφωσης των φυσικών παραμέτρων (μήκος σκέδασης, συχνότητα του παραβολικού εξωτερικού δυναμικού, σύζευξη Rabi, κοκ).

Abstract

The present thesis studies macroscopic nonlinear excited states of the condensate, in the form of matter wave solitons. The different types of solitons are studied in the framework of the mean-field theory and in particular using the Gross-Pitaevskii (GP) equation in (1+1) dimensions. In particular, the dynamics of the matter wave solitons are studied in inhomogeneous atomic Bose-Einstein condensate mixtures (with space or time dependance in the external potential and/or the scattering length), composed of one or multiple different states of the same atomic species. Different generation mechanisms of solitonic structures are suggested while the dynamics and the stability of the respective solitons are achieved, by developing novel perturbative analytical methods, based on the integrable limit of the corresponding GP equations. Furthermore, it turns out that with appropriate time or space modulation of the parameters of the equation (through the scattering length, the frequency of the external potential, the Rabi coupling, etc.) it is achievable to manipulate their dynamics. Numerical simulations are also employed, and are found to be in a very good agreement with respect to the analytical results.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Συμπυκνώματα Bose-Einstein

Η συμπύκνωση Bose-Einstein [Bose-Einstein condensation (BEC)] αποτελεί μία μακροσκοπική κβαντική κατάσταση σε ένα σύστημα πολλών ατόμων, και προβλέφθηκε θεωρητικά για πρώτη φορά από τους Satyendra Nath Bose και τον Albert Einstein το 1920 [1, 2]. Σε αυτήν τη κατάσταση, όλα τα άτομα ενός αερίου αποτελούμενου από μποζόνια, καταλαμβάνουν την χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη. Τότε το πραγματικό μέγεθος των επιμέρους ατόμων γίνεται συγκρίσιμο με το αντίστοιχο μήκος κύματος De Broglie, και όλα τα άτομα συμπεριφέρονται συλλογικά σαν ένα γιγάντιο *υλικό κύμα* (matter wave). Η συμπύκνωση έχει υλοποιηθεί στις αντίστοιχες πειραματικές διατάξεις, για θερμοκρασίες του αερίου, της τάξης των μερικών nano-Kelvin (nK), όπου είναι και η μικρότερη θερμοκρασία που έχει μέχρι τώρα επιτευχθεί. Έτσι τα συμπυκνώματα Bose-Einstein είναι το πιο κρύο αντικείμενο που υπάρχει στο σύμπαν. Αυτό στο εργαστήριο, καθίσταται εφικτό μέσω της εφαρμογής ειδικών λέιζερ που προκαλούν ψύξη (η μέθοδος αυτή βραβεύθηκε με βραβείο Nobel to 1997 [3--5]) σε αέρια που βρίσκονται παγιδευμένα με μαγνητικά και οπτικά εξωτερικά πεδία και δημιουργεί μία υπέρψυχρη κατάσταση, θερμοκρασίας περίπου 100 μK. Μετά από αυτό το στάδιο, το αέριο υποβάλλεται σε εξαναγκασμένη ψύξη λόγω εξάτμισης, χάνοντας έτσι το $\sim$ 90% περίπου του αρχικού αριθμού ατόμων; ενω τα εναπομείναντα άτομα αυθόρμητα σχηματίζουν ένα συμπύκνωμα Bose-Einstein (BEC). Ο αριθμός των ατόμων σε ένα τέτοιο συμπύκνωμα, κυμαίνεται από μερικές εκατοντάδες άτομα ενώ μπορεί να φτάσουν και αρκετά εκατομμύρια άτομα. Οι διαστάσεις ενός τυπικού BEC είναι περίπου 10 μm. Η χαρακτηριστική χρονική κλίμακα που αφορά το χρόνο ζωής τους στο εργαστήριο είναι τα milliseconds (ms), ενώ ο συνολικός χρόνος ζωής του μπορεί να φτάσει πλέον μέχρι και μερικά λεπτά.

Η πρώτη πειραματική υλοποίηση του BEC, έλαβε χώρα το 1995, με δύο πρωτοποριακά πειράματα. Το πρώτο από την ομάδα του JILA, στο πανεπιστήμιο του Κολοράντο [6] χρησιμοποιώντας άτομα ^{87}Rb, και το άλλο στο MIT [7] χρησιμοποιώντας άτομα ^{23}Na. Οι επικεφαλής των αντίστοιχων πειραμάτων E. Cornell, C. Weiman (Colorado) και W. Ketterle (MIT), τιμήθηκαν το 2001 με το βραβείο Νόμπελ Φυσικής. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι ενώ τα παραπάνω πειράματα διεξήχθησαν χρησιμοποιώντας άτομα με *απωστικές* αμοιβαίες αλληλεπιδράσεις, ενδείξεις συμπύκνωσης μποζονικού αερίου με ελκτικές αλληλεπιδράσεις είχαν αναφερθεί παράλληλα και στα πειράματα στο Πανεπιστήμιο Rice [8], χρησιμοποιώντας άτομα $^{7}\mathrm{Li}$. Αρκετά ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, μεταξύ των πιο πρόσφατων εξελίξεων στον πειραματικό τομέα, αποτελούν η δημιουργία BEC σε αέρια Χρωμίου $^{52}\mathrm{Cr}$ [9, 10] και Δυσπροσίου $^{164}\mathrm{Dy}$ [11], όπου τα άτομα έχουν μεγάλες μαγνητικές ροπές, κάτι το οποίο καθιστά εφικτή τη πρόβλεψη και παρατήρηση πολλών φαινομένων που προκύπτουν από μεγάλης εμβέλειας αλληλεπιδράσεις διπόλου-διπόλου [12]. Τα προαναφερθέντα, αποτέλεσαν το έναυσμα για την έντονη δραστηριότητα στην περιοχή αυτή, που αφορά τόσο τα πειράματα (σήμερα υπάρχουν πάνω από 100 εργαστήρια με BEC) όσο και τη θεωρία [13, 14].

Θεωρία μέσου πεδίου -- Η εξίσωση Gross- Pitaevskii (GP)

Από θεωρητικής σκοπιάς, πολλά φαινόμενα που παρατηρούνται στα BECs μελετώνται χρησιμοποιώντας τη θεωρία *μέσου πεδίου* (mean field), μέσω της εξίσωσης Gross-Pitaevskii (GP) [15], που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) \;=\; \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) + g(\mathbf{r},t)|\Psi(\mathbf{r},t)|^2\Big]\Psi(\mathbf{r},t). \tag{1.1}$$

Η $\Psi(\mathbf{r},t)$ είναι η μακροσκοπική κυματοσυνάρτηση του συμπυκνώματος, $V_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$ είναι το εξωτερικό δυναμικό (που παγιδεύει ή/και ελέγχει τα άτομα) ενώ η παράμετρος $g(\mathbf{r},t)$ περιγράφει το μέγεθος των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των ατόμων. Ένα μεγάλο πλεονέκτημα που προσφέρεται από τη φυσική των συμπυκνωμάτων Bose-Einstein, για μικρής πυκνότητας ατομικά αέρια, είναι ότι σε αυτά τα μέσα μπορεί να διαμορφωθεί πειραματικά η μη γραμμικότητα καθώς και το εξωτερικό δυναμικό τόσο χωρικά όσο και χρονικά, κάνοντας τα συμπυκνώματα με αυτό το τρόπο εύκολα διαχειρίσιμα. Αυτό επιτρέπει την υλοποίηση πολλών πειραμάτων και παρέχει το πλαίσιο για λεπτομερείς θεωρητικές μελέτες.

Απωστικές και Ελκτικές Αλληλεπιδράσεις: Συντονισμοί Feshbach

Ο συντελεστής g ο οποίος περιγράφει το μέγεθος των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των ατόμων στην GP (1.1), μπορεί να πάρει είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές; αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι το μήκος σκέδασης μπορεί να παίρνει τιμές $\alpha > 0$ (π.χ., για συμπυκνώματα ρουβιδίου ή νατρίου) ή $\alpha < 0$ (π.χ., για συμπυκνώματα λιθίου). Οι δύο περιπτώσεις αντιστοιχούν σε αφεστιάζουσες, ή σε εστιάζουσες Kerr-τύπου μη γραμμικότητες στην γλώσσα της μη γραμμικής οπτικής [16, 17]. Τα υπέρψυχρα ατομικά αέρια, προσφέρουν την μοναδική δυνατότητα, να ελέγχεται πειραματικά η μη γραμμικότητά τους, μέσω των συντονισμών Feshbach και να διαμορφώνεται κατάλληλα η φάση τους με χρήση εξωτερικών μαγνητικών πεδίων (βλέπε, π.χ., [18] για θεωρητική μελέτη, όπως επίσης και τις ακόλουθες ανάφορες [19,20] και [21,22] που σχετίζονται με πειράματα σε συμπυκνώματα αποτελούμενα από νάτριο και ρουβίδιο αντίστοιχα). 'Ενας συμπληρωματικός τρόπος ρύθμισης του μήκους σκέδασης ο οποίος είναι εφαρμόσιμος σε μικρότερης διαστατικότητας μοντέλα, πραγματοποιείται μέσω συντονισμού λόγω της ισχυρής εγκάρσιας παγίδευσης του συμπυκνώματος; στη περίπτωση αυτή το διαμορφωμένο μήκος σκέδασης αποκλίνει [23, 24]. Μία τρίτη εναλλακτική προσέγγιση, χρησιμοποιεί την δυνατότητα ρύθμισης του μήκους σκέδασης μέσω των συντονισμών Feshbach χρησιμοποιώντας εξωτερικά οπτικά πεδία [25]. Η χρήση του συντονισμού Feshbach, για την αλλαγή της φύσης των αλληλεπιδράσεων, μέσω της χρήσης οπτικών και μαγνητικών εξωτερικών πεδίων, αποτελεί την πιο υποσχόμενη μέθοδο για τον χειρισμό των BECs. Η δυνατότητα του ελέγχου των αλληλεπιδράσεων των ατόμων στα συμπυκνώματα υπήρξε καίριας σημασίας για την διεκπεραίωση πολλών πειραμάτων στα οποία εκτός των άλλων ανακαλύφθηκε ο σχηματισμός φωτεινών υλικών κυμάτων σολιτονίων [26--29] και ο σχηματισμός μοριακών συμπυκνωμάτων [30--32].

Είναι πολύ σημαντικό ότι οι συντονισμοί Feshbach χρησιμόποιηθηκαν σε πρόσφατα πειράματα για την εφαρμογή χωρικής ανομοιόγενειας του μήκους σκέδασης [33--35], κάτι το οποίο ανοίγει το δρόμο για την εφαρμογή πολλών φαινομένων στο πείραμα. Αυτά περιλαμβάνουν την αδιαβατική συμπίεση των υλικών κυμάτων [36--38], Bloch ταλαντώσεις υλικών κυμάτων σολιτονίων [36, 37], την εκπομπή σολιτονίων, το σχεδιασμό ατομικών λέιζερ [39], την δυναμική παγίδευση υλικών κυμάτων σολιτονίων [40,41], την ενίσχυση της μετάδοσης των υλικών κυμάτων μέσα από εμπόδια [41, 42], την δημιουργία ευσταθών συμπυκνωμάτων που παρουσιάζουν τόσο ελκτικές όσο και απωστικές διατομικές αλληλεπιδράσεις [40], την δημιουργία σκοτεινών σολιτονίων και vortex δαχτυλιδιών [43, 44], τον έλεγχο των κυμάτων Faraday [45] και πολλά ακόμη. Παράλληλα, πρέπει να αναφερθεί ότι έχει πραγματοποιηθεί και χρονική εξάρτηση της μη γραμμικότητας στα συμπυκνώματα Bose-Einstein αλλά και σε άλλους τομείς πέραν της ατομικής φυσικής, όπως για παράδειγμα στην μη γραμμική οπτική [46, 47].

Το εξωτερικό Δυναμικό

Το εξωτερικό δυναμικό $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ στην εξίσωση GP (1.1) μπορεί να πάρει διαφορετικές μορφές, οι οποίες εξαρτώνται από τον τύπο του εξωτερικού πεδίου που εφαρμόζεται, μαγνητικός ή οπτικός. Πιο συγκεκριμένα, ενώ στα πρώτα πειράματα BECs χρησιμοποιήθηκαν εξωτερικά μαγνητικά πεδία [13, 14, 48--50], αργότερα κατέστη δυνατή και η παγίδευση του συμπυκνώματος μέσω καθαρά οπτικών εξωτερικών πεδίων. Το πρώτο πείραμα που επιτεύχθηκε μέσω οπτικού περιορισμού χρονολογείται το 1998 [51], όπου το συμπύκνωμα πρώτα δημιουργήθηκε σε μία μαγνητική παγίδα και μετά παγιδευτηκε σε ένα οπτικό δίπολο (βλέπε τις σχετικές μελέτες [52, 53]). Ωστόσο, από ένα πείραμα που χρονολογείται το 2001 [54] αποδείχθηκε ότι είναι δυνατή η δημιουργία και παγίδευση του συμπυκνώματος καθαρά και μόνο μέσω οπτικών πεδίων. Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου παγίδευσης των συμπυκνωμάτων είναι ότι αυτά μπορούν να αποκτήσουν σχήμα αρκετά διαχειρίσιμο και ελαστικό. Παράδειγμα της ανωτέρω μεθόδου είναι τα οπτικά πλέγματα στα οποία το φωτεινό πεδίο είναι ένα στάσιμο κύμα [55--58] .

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαγνητικές ή/και οπτικές διπολικές παγίδες μπορούν να συνδυασθούν πειραματικά είτε μεταξύ τους είτε με άλλα δυναμικά; ένα παράδειγμα είναι ο συνδυασμός ενός αρμονικού δυναμικού με ένα απωστικό δυναμικό το οποίο εντοπίζεται στο κέντρο της αρμονικής παγίδας και από αυτό το συνδυασμό προκύπτει το λεγομενο διπλό δυναμικό (double well) [59]. 'Αλλοι συνδυασμοί περιλαμβάνουν γραμμικά δυναμικά σε μία διάσταση, π.χ. $V_{\text{ext}} = mgz$, τα οποία έχουν εφαρμοσθεί πειραματικά (βλέπε, π.χ. [60, 61]). Επιπροσθέτως, πρόσφατες δυνατότητες οι οποίες περιλαμβάνουν τον σχεδιασμό και την εφαρμογή των εξωτερικών δυναμικών προσφέρονται για εφαρμογές στη κβαντική πληροφορική (βλ. τις σχετικές αναφορές [62--65]). Γενικά, σήμερα υπάρχει μια σημαντική ευελιξία για τη δημιουργία μιας ευρείας ποικιλίας σχημάτων και τύπων (π.χ., στάσιμα, εξαρτώμενα από το χρόνο, κ.τ.λ.) των εξωτερικών δυναμικών.

Πολύ σημαντικές για τη μελέτη των ιδιοτήτων των συμπυκνωμάτων είναι επίσης οι πρόσφατες πειραματικές τεχνικές, όπου μέσω μιας ακτίνας λέιζερ που δύναται να σαρώσει όλο το συμπύκνωμα κατά μήκος του, δημιουργείται σε αυτό ένα δυναμικό δίπολο μέσω της αστάθειας διαμόρφωσης [66] (παρόμοια πειραματικά αποτελέσματα έχουν γίνει και για το ^{4}He [67, 68]). Μέσω αυτής της μεθόδου μπορούμε να παρατηρήσουμε τη γένεση καινούργιων δομών στο συμπύκνωμα ή για μεγαλύτερες ταχύτητες της δέσμης την κατάρρευση της υπερρευστότητας του ρευστού. Αν και μέχρι τώρα αυτά τα φαινόμενα έχουν παρατηρηθεί στα πειράματα δεν έχει υπάρξει κάποια θερητική μελέτη που να περιγράφει με αναλυτικό τρόπο τις καινούργιες δομές που παρατηρούνται. Στα πλαίσια αυτής της διατριβής και συγκεκριμένα στο δεύτερο μέρος του Κεφ. 3, υποδεικνύουμε έναν παράλληλο τρόπο περιγραφής της παραπάνω διαδικασίας, μέσω της σύγκρουσης ενός “μικρού” συμπυκνώματος το οποίο διαδίδεται σε ένα “μεγάλο” συμπύκνωμα. Βρίσκουμε με αυτό το τρόπο τα όρια των ταχυτήτων στα οποία η ροή του ρευστού (στο “μεγάλο” συμπύκνωμα) παύει να είναι στάσιμη καθώς επίσης προσδιορίζουμε αναλυτικά και τις καινούργιες δομές που παρουσιάζονται.

Πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι η έννοια της χρονικης διαχείρισης, μπορεί να εφαρμοστεί και στα δυναμικά παγίδευσης, καθιστώντας για παράδειγμα το αρμονικό δυναμικό παγίδευσης χρονικά μεταβαλλόμενο. Ένα τυπικό παράδειγμα (στην απλούστερη περίπτωση $1D$), αναφέρεται στην πρόβλεψη των παραμέτρων του συντονισμό που οδηγεί σε αυτο-παγίδευση υλικών κυμάτων (σολιτονίων) [69].

Μείγματα BECs

Μεταξύ των συναρπαστικών χαρακτηριστικών που έχουν τα BEC, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ικανότητα να κατασκευαστούν πειραματικά τα λεγόμενα *Μείγματα* συμπυκνωμάτων. Ένας τρόπος που χρησιμοποιείται για την επίτευξη τους είναι μέσω της συμπύκνωσης των διαφορετικών καταστάσεων υπέρλεπτης υφής του ίδιου ατομικού αερίου τα επονομαζόμενα "σπινοριακά" συμπυκνώματα (spinor BECs), π.χ. για την περίπτωση του ^{23}Na βλέπε τα πειράματα της ομάδας του MIT [70, 71]. Άλλος τρόπος αναφέρεται στα μέιγματα συμπυκνωμάτων που δεν ανήκουν στην ίδια κατάσταση F του αερίου τα λεγόμενα "ψευδο-σπινοριακά" συμπυκνώματα (pseudo-spinor BEC), έτσι σχετικές αναφορές προκύπτουν για τις καταστάσεις $|2, 2>$ και $|1, -1>$ του ^{87}Rb που πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο του JILA [72, 73]. Πιο εξελιγμένες ακόμα πειραματικές τεχνικές επιτρέπουν την κατασκευή μειγμάτων αποτελούμενων από διαφορετικά είδη αερίων όπως ^{41}K-^{87}Rb [74], ^{39}K-^{85}Rb [74], και ^{85}Rb-^{87}Rb [76].

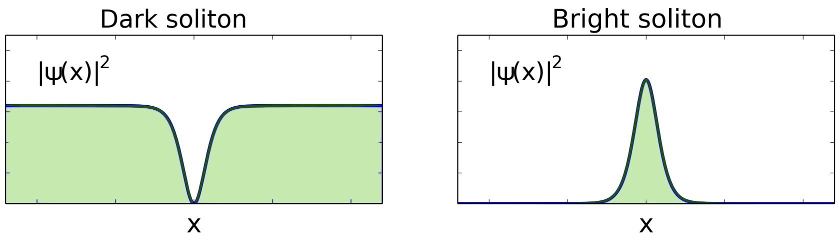
Όπως και στα βαθμωτά BECs έτσι και στα μείγματα συμπυκνωμάτων είναι δυνατή η διαχείριση του μείγματος, η οποία βασίζεται στη χρήση μεταβαλλόμενων μαγνητικών πεδίων. Αυτά καθιστούν το δυναμικό και τις διατομικές αλληλεπιδράσεις που υπεισέρχονται στις εξισώσεις GP κατάλληλα χωρικά και χρονικά ματαβαλλόμενα μεγέθη. Επίσης πολύ σημαντική όσον αφορά την δυναμική των συμπυκνωμάτων είναι η ύπαρξη γραμμικής σύζευξης μεταξύ τους η οποία επιτρέπει τη μεταφορά ατόμων από το ένα συμπύκνωμα στο άλλο. Θεωρητικά τα παραπάνω συστήματα μπορούν επίσης να μελετηθούν μέσω της θεωρίας μέσου πεδίου με ένα συζευγμένο σύστημα Gross-Pitaevskii εξισώσεων (GPEs), που έχει την ακόλουθη αδιάστατη μορφή:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j(\mathbf{r},t) = \Big[-\frac{1}{2}\nabla^2 + V_j(\mathbf{r},t) + \sum_{l=1}^{n} g_{jl}(x,t)|\Psi_l(\mathbf{r},t)|^2\Big]\Psi_j(\mathbf{r},t) + \sum_{l=1}^{n}\sigma_l\Psi_l(\mathbf{r},t), \quad (1.2)$$

όπου n ο αριθμός των συμπυκνωμάτων που αποτελούν το μείγμα, τα $\Psi_j(\mathbf{r},t)$, $j = 1, 2, .., n$ είναι οι κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν τα συστατικά του μείγματος, τα $V_j(\mathbf{r},t)$ αναφέρωνται στα δυναμικά παγίδευσης, οι συντελεστές $g_{jl}(x,t)$ αντιστοιχούν στις ενδο- ($i = l$) και δια- ($i \neq l$) ατομικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων των διαφορετικών συμπυκνωμάτων; θετικές και αρνητικές τιμές του g αντιστοιχούν σε απωστικές και ελκτικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων, αντίστοιχα. Η γραμμική σύζευξη (Rabi) σ_l, αντιπροσωπεύει την μεταφορά ατόμων μεταξύ των δύο ή και περισσότερων συστατικών του μείγματος η οποία μπορεί να προκληθεί μέσω ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατάλληλης ραδιοσυχνότητας [72, 77] (ενώ αντίστοιχες θεωρητικές μελέτες και εφαρμογές βρίσκονται στις αναφορές [78--80]).

1.2 Υλικά κύματα σολιτονίων σε BEC

Η εφαρμογή της θεωρίας μέσου πεδίου στα BEC, προβλέπει την ύπαρξη και δίνει το υπόβαθρο για την περιγραφή της δυναμικής *εντοπισμένων* μη γραμμικών υλικών κυμάτων, όπως αυτά παρατηρούνται στα πειράματα. Σε μία διάσταση, τα εντοπισμένα υλικά κύματα έχουν την μορφή σολιτονίων ενώ σε ανώτερες διαστάσεις έχουν τη μορφή δομών με στροβιλισμό (στρόβιλοι, δακτύλιοι στροβίλων, πλέγματα στροβίλων, κλπ). Τα σολιτόνια είναι μη γραμμικά εντοπισμένα κύματα που η μελέτη τους ξεκινά από τις παρατηρήσεις του J. S. Russel το 1840 [81],



Σχήμα 1.1: Η πυκνότητα $|\Psi(x)|^2$ ενός σκοτεινού (αριστερά) και ενός φωτεινού (δεξιά) σολιτονίου.

και τα οποία απαντώνται στα περισσότερα φυσικά συστήματα τα οποία παρουσιάζουν διασπορά και μη γραμμικότητα.

Τα υλικά κύματα σολιτονίων (που όπως αναφέραμαι απαντώνται στη μία διάσταση), χωρίζονται σε δύο τύπους; τα φωτεινά (bright) και τα σκοτεινά (dark), για ελκτικές ($g < 0$) και για απωστικές ($g > 0$) διατομικές αλληλεπιδράσεις αντίστοιχα, βλεπε Σχ. 1.1. Οι δύο παραπάνω τύποι αποτελούν ακριβείς λύσεις της GP (1.1) στην ομογενή περίπτωση, όπου το $V(\mathbf{r}, t) = 0$. Τα φωτεινά σολιτόνια παρουσιάζονται σαν μία έξαρση πυκνότητας; το όνομα τους προέρχεται από την οπτική και αναφέρεται στο γεγονός ότι το φωτεινό σολιτόνιο παρατηρείται σαν μία εντοπισμένη δέσμη φωτός σε ένα σκοτεινό υπόβαθρο. Το σκοτεινό σολιτόνιο από την άλλη παρουσιάζεται σαν ένα βύθισμα πυκνότητας σε ένα ομογενές υπόβαθρο; το όνομα του που προέρχεται και αυτό από την οπτική αναφέρεται στη διάδοση μίας σκοτεινής "λωρίδας" (εντοπισμένη απώλεια φωτός) σε ένα φωτεινό υπόβαθρο.

Σολιτόνια σε BEC ενός συστατικού

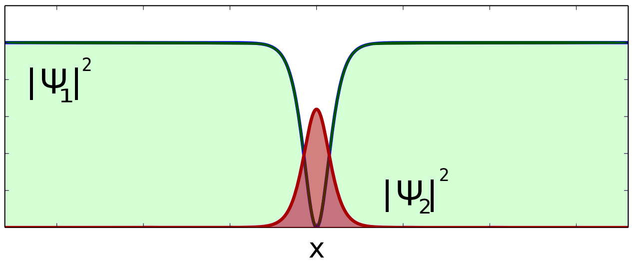
Η παρατήρηση των ανωτέρω υλικών κυμάτων έχει επιτευχθεί πειραματικά σε βαθμωτά BEC, με τη βοήθεια σύγχρονων τεχνικών. Πιο συγκεκριμένα, για την δημιουργία φωτεινών σολιτονίων χρησιμοποίειται κυρίως η αλλαγή προσήμου της παραμέτρου g (δηλαδή η αλλαγή της φύσης των διατομικών αλληλεπιδράσεων από απωστικές σε ελκτικές) [26, 28, 82]. Από την άλλη πλευρά για την δημιουργία σκοτεινών σολιτονίων χρησιμοποιείται η μέθοδος "τυπώματος φάσης" (phase imprinting) [83--87], η μέθοδος "διαχείρισης της πυκνότητας" (density engineering) [88--90], ή συνδυασμός και των δύο [91]. Τόσο τα φωτεινά όσο και τα σκοτεινά σολιτόνια, συμπεριφέρονται σαν κλασσικά νευτώνια σωμάτια ικανοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης της κλασσικής Μηχανικής. Αυτός είναι και ένας από τους λόγους όπου τα υλικά κύματα σολιτονίων έχουν προσελκύσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον [92, 93]. Οι προαναφερθείσες μη γραμμικές διεγέρσεις οι οποίες προβλέπονται στα BECs, παρουσιάζουν επίσης μεγάλο ενδιφέρον ως προς τις πιθανές τους εφαρμογές και στη μη γραμμική οπτική. Πιο συγκεκριμένα, η συχνότητα ταλάντωσης των σκοτεινών σολιτονίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διαγνωστικό εργαλείο για την διαστατικότητα ή την ισχύ των διατομικών αλληλεπιδράσεων [94]. Άλλη εφαρμογή των σκοτεινών σολιτονίων προσδιορίζεται στην ανίχνευση της μεταβολής φάσης σε ατομικά συμβολόμετρα [95--98]. Στα ατομικά συμβολόμετρα εφαρμογή έχουν επίσης και τα φωτεινά σολιτόνια αξιοποιώντας ιδιότητες που προκύπτουν από τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις [99--103]. Εφαρμογές των φωτεινών σολιτονίων απαντώνται και στα ατομικά λέιζερ [104--106], ενώ με κατάλληλη διαχείριση τους μέσω περιοδικών δυναμικών [107] μπορούν να χρησιμοποιηθούν για εφαρμογές στην κβαντική πληροφορική [108]. Πράγματι, οι ομοιότητες στις ιδιότητες μεταξύ των μη γραμμικών και των υλικών κυμάτων στην οπτική [109] δείχνουν ότι τα συνεκτικά υλικά κύματα μπορούν να ελέγχονται παρόμοια με αυτά που παρουσιάζονται στην οπτικές ίνες, στους κυματοδηγούς, στους φωτονικούς κρυστάλλους, κλπ [110].

Τα τελευταία χρόνια, μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον προσελκύουν τα συμπυκνώματα Bose-Einstein όπου παρουσιάζουν χωρική ανομοιογένεια στη μη γραμμικότητα (collisionally inhomogeneous condensates) [111, 112]; Πειράματα απέδειξαν τον σχηματισμό φωτεινών υλικών κυμάτων σολιτονίων και σολιτονικών τραίνων σε συμπυκνώματα μέσω κατάλληλης ρύθμισης της μη γραμμικότητας ώστε οι διατομικές αλληλεπιδράσεις να εναλλάσσονται από απωστικές σε ελκτικές [26, 28, 113--115]. Η ελεγξιμότητα και κατανόηση τέτοιας μορφής γένεσης σολιτονικών δομών είναι πολύ χρήσιμη ως προς τις εφαρμογές της. Γι'αυτό το λόγο στη παρούσα διατριβή στο πρώτο μέρος του Κεφ. 2, θα δώσουμε απαντήσεις στην γένεση και τη διαχείριση τραίνων φωτεινών σολιτονίων που προκύπτουν από σκεδάσεις υλικών κυματών σε περιοχή του χώρου όπου οι διατομικές αλληλεπιδράσεις είναι ελκτικές.

Σε μεγαλύτερης διαστατικότητας συμπυκνώματα, μία ακόμη εφαρμογή των συντονισμών Feshbach που ασχολείται με τη διαχείριση των χαμηλών συχνοτήτων του μαγνητικού πεδίου της παγίδας έχει ως απότέλεσμα την περιοδική εναλλαγή της μη γραμμικότητας από απωστική σε ελκτική. Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σταθεροποιήσει σολιτόνια σε $2D$ στον ελέυθερο χώρο [116, 117] (στην πραγματικότητα, ένα ασθενές δισδιάστατο αρμονικό δυναμικό παγίδευσης είναι απαραίτητο για το πείραμα). Η ίδια επίσης τεχνική, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την γένεση ευσταθών περιοδικών εντοπισμένων λύσεων που ταλαντώνονται περιοδικά στο χρόνο [118--122].

Η απόδειξη της γένεσης υλικών κυμάτων μέσω κατάλληλης χωρικής ή/και χρονικής διαχείρισης του συμπυκνώματος ενέπνευσε πολλές θεωρητικές μελέτες στη φυσική της συμπυκνωμένης ύλης. Μία θεωρητική επισκόπηση που επικεντρώνεται στην περιοδική εναλλαγή της φύσης των διατομικών αλληλεπιδράσεων παρουσιάζεται στην αναφορά [123]). Σχετικές μελέτες σε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο περιλαμβάνουν την συμπίεση των υλικών κυμάτων [38, 111], τις ταλαντώσεις Bloch των σολιτονίων [111], την εκπομπή ατομικών σολιτονίων [124, 125], την σκέδαση υλικών κυμάτων από εμπόδια [41, 42, 126], την εμφάνιση ασταθειών των σολιτονίων λόγω της περιοδικής εναλλαγής του μήκους σκέδασης [127], την εμφάνιση σολιτονίων όπου το εξωτερικό δυναμικό παγίδευσης συνδυάζει ένα γραμμικό και ένα μη γραμμικό μέρος [128--132], την γένεση σολιτονίων [43, 133] και δαχτύλων στροβίλων [134], τον έλεγχο κυμάτων Faraday [135] κ.α.

Αν και όλες οι προαναφερθείσες μελέτες αφορούν τη χωρική (ή χρονική) ανομοιογένεια



Σχήμα 1.2: Η πυκνότητα ενός σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου, όπου στα $|\Psi_1|^2$ και $|\Psi_2|^2$ εμφανίζεται ένα σκοτεινό και ένα φωτεινό σολιτόνιο αντίστοιχα.

της μη γραμμικότητας, ερωτήματα προκύπτουν για τη δυναμική των σολιτονίων σε περιβάλλοντα με εξωτερικά μαγνητικά πεδία που ελέγχουν χωρικά τόσο τις διατομικές αλληλεπιδράσεις όσο και το εξωτερικό δυναμικό παγίδευσης. Η απάντηση του παραπάνου ερωτήματος αποτελεί το δεύτερο μέρος του Κεφ. 2 της παρούσας διατριβής. Συγκεκριμένα μελετάται θεωρητικά (αφού εώς σήμερα δεν υπάρχουν σχετικά πειραματικά δεδομένα σε ατομικά συμπυκνώματα) η σκέδαση σολιτονίων σε βηματικές ασυνέχειες στο δυναμικό ή/και στο μήκος σκέδασης αποκαλύπτωντας τα φαινόμενα που προκύπτουν έπειτα από κατάλληλο συνδυασμό μεταξύ τους. Αν και παρόμοια πειράματα στα ατομικά συμπυκνώματα εώς σήμερα δεν υπάρχουν η αναλυτική προσέγγιση που αναπτύσσεται στο πλαίσιο της διατριβής μπορεί να βρει χρήσιμες εφαρμογές στην Μη Γραμμική Οπτική. Η μαθηματική μοντελοποίηση της δυναμικής οπτικών δεσμών σε διηλεκτρικά υλικά και σε συστοιχίες διηλεκτρικών κυματοδηγών που παρουσιάζουν διαφορετικούς δείκτες διάθλασης οδηγεί σε εξισώσεις διάδοσης των οπτικών δεσμών ανάλογες με τις εξισώσεις Gross-Pitaevskii που μελετώνται στο Κεφ. 2 της παρούσας διατριβής.

Σολιτόνια σε μείγματα από δύο και περισσότερα BECs

Αντίστοιχα με την παρουσία μη γραμμικών διεγέρσεων σε συμπυκνώματα ενός συστατικού, μπορούμε να διακρίνουμε εντοπισμένα κύματα ύλης στη μορφή σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου (dark-bright, DB), Σχ. 1.2 ή σκοτεινού-σκοτεινού (dark-dark, DD) σολιτονίου σε μείγματα δύο συστατικών (με αντίστοιχα πειράματα για το ^{87}Rb να παρουσιάζονται στις αναφορές [72, 73]), ή και συνδυασμούς σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων σε μείγματα που αποτελούνται από περισσότερα συστατικά.

Ο διανυσματικός τύπος των σολιτονίων, της μορφής σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου (dark-bright, DB), στη περίπτωση δύο συστατικών αποτελείται από ένα σκοτεινό σολιτόνιο στο ένα συμπύκνωμα το οποίο δημιουργεί ένα φαινομενικό δυναμικό στο σύστημα, που μπορεί να υποστηρίξει μία δέσμια κατάσταση, στη μορφή φωτεινού σολιτονίου στο άλλο συμπύκνωμα. Γι'αυτό και τα DB σολιτόνια αναφέρονται και ως συμβιωτικά. Το φωτεινό σολιτόνιο δεν μπορεί να υπάρξει μόνο του σε αυτά τα μείγματα (υποστηρίζεται μόνο στα ελκτικά συμπυκνώματα [136]; δείτε επίσης την αναφορά [137]).

Το πρώτο πείραμα στο οποίο παρατηρήθηκαν αυτά τα ζεύγη ήταν της ομάδας του Αμβούργου το 2008 [86] το οποίο έγινε με τη μέθοδο τυπώματος φάσης (phase imprinting) και έδειξε επίσης τις ευσταθείς ταλαντώσεις τους σε οιωνεί-μονοδιάστατο αρμονικό δυναμικό; ενώ σύντομα ακολούθησαν και άλλα [138--141]. Επίσης, έχουν παρατηρηθεί διανυσματικές λύσεις σολιτονίων σε συμπυκνώματα αποτελούμενα από τρία συστατικά (δηλ. για τιμή σπιν $F = 1$) [143--145] και έχει μελετηθεί η δυναμική τους [146]. Αρχικά τα ζεύγη σκοτεινών-φωτεινών (DB) σολιτονίων τα πρόβλεψαν και τα μελέτησαν θεωρητικά οι Th. Bush και J. R. Anglin [142]. Η θεωρητική αυτή ανακάλυψη σε συνδυασμό με την εξέλιξη των πειραμάτων στο πλαίσιο αυτό, ξεκίνησαν μία σειρά από θεωρητικές μελέτες [138--141].

Αξίζει να σημειωθεί οτί τα ζεύγη DB σολιτονίων σε συζευγμένες GP εξισώσεις αποτελούν ακριβείς λύσεις στην περίπτωση που βρισκόμαστε στο όριο Manakov (όταν δηλαδή οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων του ενός συστατικού αλλά και μεταξύ των ατόμων των διαφορετικών συστατικών λαμβάνονται ίσες με τη μονάδα). Στην πραγματικότητα, στο εργαστήριο οι τιμές αυτές ανάλογα με το είδος των ατόμων του αερίου που χρησιμοποιείται αποκλίνουν της μονάδας κατά ένα μικρό ποσοστό. Στο πρώτο μέρος του Κεφ. 3 της παρούσας διατριβής, θα δώσουμε μία περιγραφή για το πόσο καλά μπορούμε να περιγράψουμε την ύπαρξη και την δυναμική των διανυσματικών λύσεων έξω από το όριο Manakov, πιο κοντά δηλαδή στις πραγματικές συνθήκες.

Μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, ως προς τις εφαρμογές της, ομάδα πειραμάτων εμφανίστηκε αργότερα, όπου διανυσματικά ζεύγη σκοτεινών-φωτεινών (DB) σολιτονίων [138--140] και σκοτεινών-σκοτεινών (DD) σολιτονίων [141, 147] δημιουργούνται αυθόρμητα μέσω των μηχανισμών αστάθειας ύστερα από τη σύγκρουση των δύο διαφορετικών συστατικών του μείγματος. Πιο συγκεκριμένα, συμπυκνώματα αποτελούμενα από δύο διαφορετικά συστατικά που χαρακτηρίζονται από διαφορετική κατάσταση υπέρλεπτης υφής του ίδιου αερίου, διαχωρίζονται χωρικά το ένα από το άλλο και στη συνέχεια συγκρούονται μεταξύ τους οδηγώντας σε αυθόρμητη δημιουργία των ευσταθών δομών που αναφέραμε προηγουμένως. Ανοιχτά θέματα που προκύπτουν από την παραπάνω πειράματα είναι οι αναλυτικές λύσεις των δομών που προκύπτουν αυθόρμητα σε αυτό το πλάισιο καθώς και ο προσδιορισμός θεμελιωδών φαινομένων όπως είναι η κατάρρευση της υπερρευστότητας των ρευστών. Η απάντηση των παραπάνω ερωτημάτων αποτελεί το δεύτερο μέρος του 3ου κεφαλαίου της παρούσας διατριβής.

Ένας άλλος τρόπος διαχείρισης των μειγμάτων BECs είναι η χρονική διαμόρφωση του μήκους σκέδασης καθώς και του εξωτερικού δυναμικού παγίδευσης, παρουσία σύζευξης Rabi. Σε μείγματα δύο ή και περισσότερων συστατικών η σύζευξη Rabi αποτελεί ουσιαστικά τη γράμμικη σύζευξη μεταξύ των διαφορετικών κυματοσυναρτήσεων των συστατικών του μείγματος η οποία εισάγεται πειραματικά μέσω μιας ραδιο-συχνότητας [72]. Αυτός ο τρόπος διαχείρισης πυροδότησε πολλές θεωρητικές μελέτες λόγω των εφαρμογών που έχει [78--80]. Πρόσφατα παρατηρήθηκαν πειραματικά και θεωρητικά ευσταθείς Rabi ταλαντώσεις οι οποιές παρουσιάζονται στην αναφορά [148]. Ωστόσο μία αναλυτική προσέγγιση αυτών των λύσεων δεν έχει ακόμα παρουσιαστεί κάτι με το οποίο θα ασχοληθούμε εμείς στο τελευταίο μέρος του Κεφ. 3 της παρούσας διατριβής.

Αντικείμενο και οργάνωση της διατριβής

Στη παρούσα διατριβή μελετώνται οι πλέον βασικές μη γραμμικές διεγέρσεις που μπορούν να υπάρξουν στα BEC, δηλαδή τα λεγόμενα υλικά κύματα σολιτονίων. Σε BEC ενός συστατικού, οι διεγέρσεις αυτές έχουν είτε τη μορφή βυθισμάτων πυκνότητας (σκοτεινά σολιτόνια) όταν οι διατομικές αλληλεπιδράσεις είναι απωστικές, είτε τη μορφή εντοπισμένων παλμών (φωτεινά σολιτόνια) όταν οι αλληλεπιδράσεις είναι ελκτικές. Επιπλέον, στην περίπτωση μειγμάτων BEC από δύο ή τρία συστατικά, με απωστικές αλληλεπιδράσεις, μελετώνται διανυσματικά σολιτόνια, που έχουν τη δομή συζευγμένων σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων. Πιο συγκεκριμένα, η διατριβή ασχολείται:

(α) με τη σκέδαση υλικών κυμάτων σε συμπυκνώματα Bose-Einstein ενός συστατικού με χωρική ανομοιογένεια στις διατομικές αλληλεπιδράσεις,

(β) με τη μη γραμμική δυναμική και τις σολιτονικές διεγέρσεις μειγμάτων από δύο ή τρία ατομικά BEC. Η μελέτη βασίζεται στη χρήση της θεωρίας μέσου πεδίου, δηλαδή στην ανάλυση της βαθμωτής ή της διανυσματικής εξίσωσης Gross-Pitaevskii (GP) σε (1+1)-διαστάσεις. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην αναλυτική περιγραφή της δυναμικής και της ευστάθειας των διαφόρων σολιτονικών δομών, μέσω διαφόρων διαταρακτικών προσεγγίσεων. Επιπλέον, χρησιμοποιούνται αριθμητικές προσομοιώσεις, τα αποτελέσματα των οποίων βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τις αναλυτικές προβλέψεις και τις πειραματικές παρατηρήσεις.

Η παρουσίαση της διατριβής οργανώνεται ως εξής:

Στο Κεφ. 2 , μελετάται η σκέδαση υλικών κυμάτων σε ένα περιβάλλον με εξωτερικά μαγνητικά πεδία, που ελέγχουν χωρικά τις διατομικές αλληλεπιδράσεις καθώς και το εξωτερικό δυναμικό παγίδευσης, σε ατομικά συμπυκνώματα ενός συστατικού. Το πρόβλημα περιγράφεται με τη βοήθεια μιας εξίσωσης Gross-Pitaevskii με χωρικά ανομοιογενή μη γραμμικότητα και χωρικά ανομοιογενές εξωτερικό δυναμικό.

Αρχικά μελετάται η πρόσπτωση ενός Γκαουσσιανού κυματοπακέτου σε περιοχή του χώρου όπου οι διατομικές αλληλεπιδράσεις είναι ελκτικές (με το εξωτερικό δυναμικό να παραμένει σταθερό). Αναδεικνύεται το γεγονός ότι η σκέδαση αυτή αποτελεί μια αποδοτική διαδικασία παραγωγής υλικών κυμάτων σολιτονίων: βρίσκεται ότι το μεταδιδόμενο υλικό κύμα αυτοοργανώνεται σε ένα τραίνο φωτεινών σολιτονίων, με χαρακτηριστικά (λ.χ. αριθμό και μέγεθος σολιτονίων) που είναι ελέγξιμα από την αρχική μορφή του κυματοπακέτου και τις παραμέτρους της διάταξης.

Στη συνέχεια μελετάται συστηματικά η σκέδαση σολιτονίων σε βηματικές ασυνέχειες στο δυναμικό ή/και στο μήκος σκέδασης (που καθορίζει το μέγεθος των διατομικών αλληλεπιδράσεων. Χρησιμοποιείται μια αδιαβατική θεωρία διαταραχών, η οποία χειρίζεται το σολιτόνιο ως κλασσικό νευτώνειο σωματίδιο: έτσι, αποδεικνύεται ότι η δυναμική του κέντρου του σολιτονίου διέπεται από μια εξίσωση κίνησης, ανάλογη με αυτή ενός σωματιδίου παρουσία ενός φαινομενικού δυναμικού που παίρνει είτε την μορφή υπερβολικής εφαπτομένης, είτε πιο σύνθετες μορφές, οι οποίες παρουσιάζουν τοπικά ακρότατα - δηλ. ένα υπερβολικό και ένα ελλειπτικό σημείο ισορροπίας στο αντίστοιχο δυναμικό σύστημα. Βρίσκεται ότι το σολιτόνιο μπορεί να παγιδευτεί για πεπερασμένο και πειραματικά παρατηρήσιμο χρόνο στο υπερβολικό σημείο.

Η εν λόγω αναλυτική προσέγγιση συγκρίνεται, εν συνεχεία, με συστηματικές αριθμητικές προσομοιώσεις στο πλαίσιο της εξίσωσης GP. Βρίσκεται ότι η σωματιδιακή περιγραφή περιγράφει με πολύ καλή ακρίβεια τις απαιτούμενες συνθήκες ώστε το σολιτόνιο να παρουσιάζει ανάκλαση, μετάδοση ή οιονεί-παγίδευση στη γραμμική ή/και μη γραμμική ασυνέχεια, τουλάχιστον για μικρές τέτοιες ασυνέχειες. Για μεγαλύτερες ασυνέχειες, το σκεδαζόμενο σολιτόνιο εκπέμπει ακτινοβολία στη μορφή «ηχητικών» κυμάτων που υπολογίζεται αριθμητικά, ενώ η δυναμική της σκέδασης χαρακτηρίζεται από μερική ανάκλαση/μετάδοση στην ασυνέχεια.

Βρίσκεται επίσης ότι μερική ανάκλαση παρατηρείται και στην περίπτωση όπου το μήκος σκέδασης αλλάζει επιπρόσθετα και πρόσημο. Σε αυτό το πλαίσιο, μελετήθηκε η πρόσπτωση ενός φωτεινού σολιτονίου από περιοχή του χώρου με ελκτικές διατομικές αλληλεπιδράσεις σε περιοχή του χώρου όπου οι διατομικές αλληλεπιδράσεις είναι απωστικές (όπου υποστηρίζονται μόνο λύσεις σκοτεινών σολιτονίων). Η περιγραφή της κίνησης του σολιτονίου πραγματοποιήθηκε τόσο για αρχικά μικρό πλάτος (γραμμικό όριο) όσο και για μεγάλο πλάτος, χρησιμοποιώντας τη θεωρία διαταραχών για τα σολιτόνια. Με την εφαρμογή των αναλυτικών τεχνικών, βρέθηκε η ταχύτητα που χρειάζεται το υλικό κύμα για την ολική ανάκλαση του, και στα δύο όρια του μικρού και του μεγάλου πλάτους.

Στο Κεφ. 3, μελετάται η μη γραμμική δυναμική μειγμάτων BEC, αποτελούμενων από δύο ή τρία συστατικά. Επίσης, μελετώνται υλικά κύματα σολιτονίων που υποστηρίζονται από τα μείγματα αυτά.

Στην αρχή του κεφαλαίου, μελετήθηκαν οι στατικές λύσεις ενός και πολλαπλών ζευγών σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων – με τις τελευταίες να αποτελούν «πλέγματα» φωτεινών - σκοτεινών σολιτονίων – σε μείγματα δύο συμπυκνωμάτων Bose-Einstein, με γενικά διαφορετικούς συντελεστές διατομικών αλληλεπιδράσεων. Σημειώνεται ότι ενώ στην πράξη αυτοί οι συντελεστές είναι διαφορετικοί (όπως, λ.χ., στο μείγμα διαφορετικών καταστάσεων σπιν του BEC ^{87}Rb που χρησιμοποιείται εκτενώς σε πειράματα), συνήθως χρησιμοποιείται η προσέγγιση ότι είναι ίσοι. Έτσι, το θεωρούμενο πρόβλημα είναι σημαντικό, αφού συνδέεται άμεσα με πειραματικά δεδομένα, όπου έχουν παρατηρηθεί ένα αλλά και πολλαπλά σολιτόνια στο πείραμα. Η ανάλυση δείχνει ότι, για συγκεκριμένο εύρος τιμών των συντελεστών που προσδιορίζουν τις ανωτέρω αλληλεπιδράσεις, οι προαναφερθείσες λύσεις υπάρχουν και μπορούν να βρεθούν σε κλειστή αναλυτική μορφή, ενώ αριθμητικές προσομοιώσεις επιβεβαιώνουν την ύπαρξη και την ευστάθειά τους για ακόμα μεγαλύτερο εύρος τιμών των συντελεστών των διατομικών αλληλεπιδράσεων.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, μελετάται η σύγκρουση δύο ατομικών συμπυκνωμάτων Bose-Einstein με πολύ διαφορετικούς αριθμούς ατόμων. Από την αναλυτική και αριθμητική μελέτη της δυναμικής της σύγκρουσης στις περιπτώσεις που το “μικρό” συμπύκνωμα διαδίδεται είτε ελεύθερο είτε όντας παγιδευμένο στο “μεγάλο” συμπύκνωμα, προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα.

Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει ένα διάστημα ταχυτήτων του μικρού συμπυκνώματος στο οποίο η σύγκρουση έχει ως αποτέλεσμα την αυτοοργάνωση του μικρού συμπυκνώματος σε ένα φωτεινό σολιτόνιο, που με τη σειρά του «επάγει» τη γένεση ενός σκοτεινού σολιτονίου στο μεγάλο συμπύκνωμα. Αναπτύσσεται μια θεωρία διαταραχών πολλαπλών κλιμάκων, μέσω της οποίας το αρχικό σύστημα των δύο εξισώσεων GP ανάγεται στο ολοκληρώσιμο σύστημα Mel'nikov. Από το τελευταίο εξάγονται αναλυτικά οι λύσεις σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου, του οποίου η δυναμική βρίσκεται σε πολύ καλή συμφωνία με αριθμητικά αποτελέσματα. Στη δεύτερη περίπτωση, που το μικρό συμπύκνωμα διαδίδεται όντας παγιδευμένο στο μεγάλο συμπύκνωμα με οιωνεί-υπερηχητική ταχύτητα, παρατηρείται η κατάρρευση της υπερρευστότητας του μεγάλου συμπυκνώματος, που διαπιστώνεται με τη γένεση μη γραμμικών διεγέρσεων στη μορφή σκοτεινών σολιτονίων.

Στη συνέχεια, προτείνεται μια μέθοδος για τον έλεγχο των σολιτονίων σε μείγματα γραμμικά συζευγμένων BEC δύο και τριών συστατικών, που βασίζεται στη χρήση χρονικά - μεταβαλλόμενων μαγνητικών πεδίων. Αυτά, καθιστούν το παραβολικό δυναμικό, τις διατομικές αλληλεπιδράσεις και τη γραμμική σύζευξη (Rabi) που υπεισέρχονται στις εξισώσεις GP κατάλληλα χρονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη. Στο σύστημα αυτό, αρχικά μελετάται η δυναμική των σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων. Αποδεικνύεται ότι, με κατάλληλο μετασχηματισμό των συντεταγμένων και των κυματοσυναρτήσεων, το αρχικό σύστημα ανάγεται στο ολοκληρώσιμο σύστημα Manakov, μέσω του οποίου εξάγονται ακριβείς αναλυτικές λύσεις σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων του αρχικού μη αυτόνομου συστήματος εξισώσεων GP.

Στο εν λόγω πρόβλημα, δίνεται έμφαση στη μελέτη των αλληλεπιδράσεων μεταξύ διαφορετικών σολιτονίων, τόσο στην περίπτωση δύο όσο και στην περίπτωση τριών συζευγμένων συμπυκνωμάτων. Ένα σημαντικό εύρημα στην τελευταία περίπτωση είναι η δυνατότητα μετατροπής ενός σολιτονίου από φωτεινό σε σκοτεινό, στο ίδιο συμπύκνωμα, και αντίστροφα (δηλαδή η μετατροπή από σκοτεινό σε φωτεινό). Το φαινόμενο αυτό μπορεί να βρεί εφαρμογές στο σχεδιασμό στοιχείων για επεξεργασία πληροφορίας, αφού κατάλληλη χωρική/χρονική μεταβολή των χαρακτηριστικών του συμπυκνώματος (τιμές των μηκών σκέδασης, συχνοτήτων παγίδευσης, και γραμμικής σύζευξης) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εφαρμογές μεταγωγής (switching).

Κεφάλαιο 2

Σκέδαση Υλικών κυμάτων σε χωρικές βηματικές ασυνέχειες

Έπειτα από αρκετές θεωρητικές μελέτες που έγιναν σε συμπυκνώματα ενός (ή και περισσότερων συστατικών) σχετικά με τη δυναμική υλικών κυμάτων σε χωρικά ανομοιογενή περιβάλλοντα (βλ. 1.2), ερωτήματα προκύπτουν για την αντίστοιχη δυναμική τους σε συστήματα που περιγράφονται επιπροσθέτως και από ανομοιογένειες στο εξωτερικό δυναμικό. Το ερώτημα αυτό, έχει προκύψει ύστερα από την εξέλιξη των πειραμάτων, η οποία επιτρέπει μέσω κατάλληλων εξωτερικά μαγνητικών πεδίων, στο εξωτερικό δυναμικό να πάρει οποιαδήποτε μορφή (βλ. 1.1). Γι'αυτό το λόγο στο παρών κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη δυναμική αλλά και την ευστάθεια υλικών κυμάτων σε ένα περιβάλλον όπου μπορούμε να ελέγξουμε χωρικά τόσο τις διατομικές αλληλεπιδράσεις όσο και το εξωτερικό δυναμικό παγίδευσης, σε ατομικά συμπυκνώματα ενός συστατικού.

Το πρόβλημα στις 3-Διαστάσεις (3D), περιγράφεται μέσω της εξίσωσης GP (1.1). Στη 1-Διάσταση (1D) η μακροσκοπική κυματοσυνάρτηση του συμπυκνώματος είναι προσανατολισμένη κατά μήκος του άξονα x και περιορίζεται από ένα έντονα ανισότροπικό (οιονεί-1D) εξωτερικό δυναμικό. Το τελευταίο, στην μελέτη που ακολουθεί, έχει την μορφή ενός τετραγωνικού δυναμικού με μήκη $L_x \gg L_y = L_z \equiv L_\perp$, ενώ η εγκάρσια διάσταση $L_\perp$ είναι της τάξης του μήκους αποκατάστασης ξ. Μπορεί να προσεγγιστεί πολύ καλά με μία γενικευμένη συνάρτηση Gauss της μορφής:

$$V_b(x) = V_0 \left[1 - \exp\left(- \left(\frac{x}{w} \right)^\gamma \right) \right], \tag{2.1}$$

όπου τα V_0 και w υποδηλώνουν το πλάτος και αντίστροφο εύρος του δυναμικού, αντίστοιχα. Η τιμή του εκθέτη $\gamma \gg 1$ πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη; στη παρακάτω αριθμητική ανάλυση χρησιμοποιούμε $\gamma = 50$. Στη παρούσα μελέτη, θεωρούμε σολιτόνια σε περιβάλλον με χωρικές βηματικές ασυνέχειες. Στην 1D η εξίσωση GP παίρνει τη μορφή:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g_{1\mathrm{D}}(x)|\Psi|^2 + V(x)\Big]\Psi, \tag{2.2}$$

όπου το $V(x)$ αντιπροσωπεύει το εξωτερικό δυναμικό, ενώ $g_{1\mathrm{D}} = (9/4L_\perp^2)g$ είναι το μήκος αλληλεπίδρασης στη μία διάσταση (1D), με τον συντελεστή $g = 4\pi\hbar^2\alpha(x)/m$ να αντιστοιχεί στην τιμή του στο τρισδιάστατο (3D) πρόβλημα (βλ. Εξ. (1.1)), ενώ τέλος το $\alpha(x)$ είναι το μήκος σκέδασης (scattering length) (όπου για απωστικές διατομικές αλληλεπιδράσεις παίρνει θετικές τιμές $\alpha > 0$ ενώ για ελκτικές διατομικές αλληλεπιδράσεις αντιπροσωπεύει μία αρνητική ποσότητα $\alpha < 0$).

Το εξωτερικό δυναμικό και το μήκος σκέδασης παίρνουν τις ακόλουθες τιμές:

$$V(x) = V_b(x) + \begin{cases} V_{\mathrm{L}}, & x < 0 \\ V_{\mathrm{R}}, & x > 0 \end{cases}, \tag{2.3}$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_{\mathrm{L}}, & x < 0 \\ \alpha_{\mathrm{R}}, & x > 0 \end{cases}, \tag{2.4}$$

όπου τα $V_{\mathrm{L,R}}$ και $\alpha_{\mathrm{L,R}}$ είναι σταθερές τιμές του δυναμικού και του μήκους σκέδασης, στην αριστερή και δεξιά περιοχή από τη θέση $x = 0$, όπου οι αντίστοιχες αλλαγές λαμβάνουν χώρα.

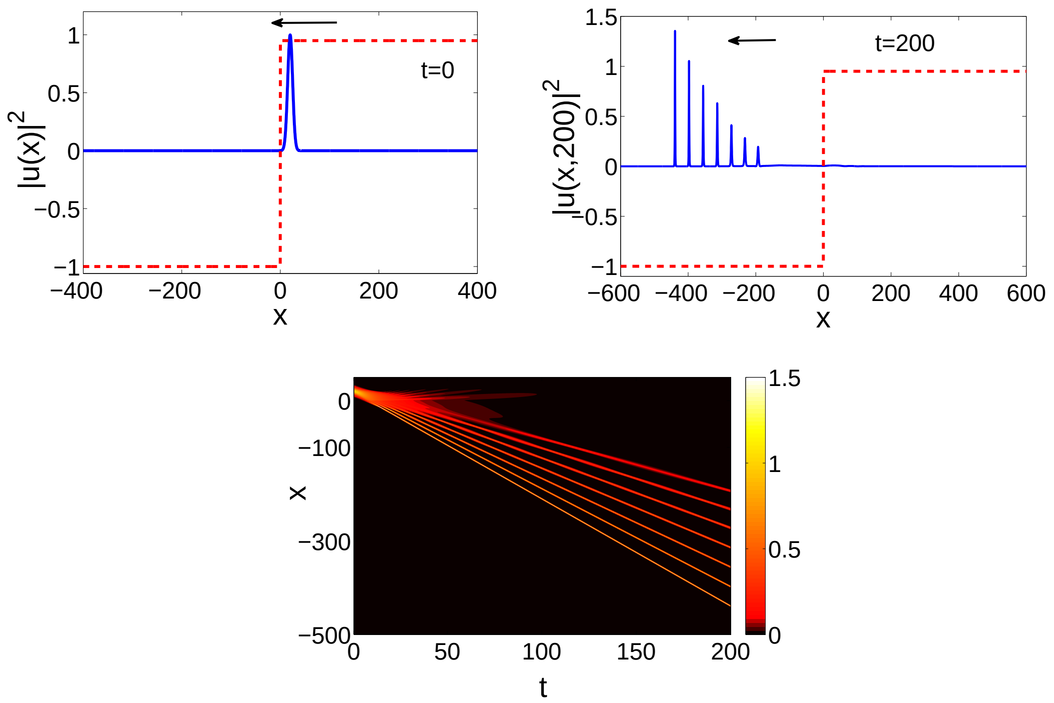
Μετρούμε την παράμετρο x που αποτελεί τη χωρική κλίμακα, σε μονάδες $\sqrt{2}\xi$ (όπου $\xi \equiv \hbar/\sqrt{2mng_{1D}}$ είναι το μήκος αποκατάστασης (healing length), τον χρόνο t σε μονάδες $\sqrt{2}\xi/c_s$ (όπου $c_s \equiv \sqrt{g_{1D}n/m}$ είναι η ταχύτητα του ήχου και n η μεγαλύτερη τιμή της πυκνότητας) και την ενέργεια σε μονάδες $g_{1D}n$ και εξάγουμε την εξής αδιάστατη μορφή (βλ. αναφορά [149]) της Εξ. (2.2):

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\alpha(x)}{\alpha_{\mathrm{L}}}|u|^2 u + V(x)u, \tag{2.5}$$

όπου $u = \sqrt{n}\Psi$.

2.1 "Γένεση" τραίνου Φωτεινών Σολιτονίων

Αρχικά θα ασχοληθούμε με ένα μηχανισμό σκέδασης ο οποίος οδηγεί στη διαδικασία παραγωγής σολιτονικών δομών. Η παρούσα μελέτη πηγάζει από την υλοποίηση σχετικών πειραμάτων [124], όπου σε ένα τμήμα του συμπυκνώματος παρατηρούνται ελκτικές και στο υπόλοιπο συμπύκνωμα απωστικές διατομικές αλληλεπιδράσεις. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι για $x < 0$ το μήκος σκέδασης λαμβάνει τιμή $\alpha_{\mathrm{L}} = -1$ που αντιστοιχεί σε ελκτικές διατομικές αλληλεπιδράσεις, ενώ στη περιοχή $x > 0$ παίρνει την τιμή $\alpha_{\mathrm{R}} = 0.95$ και αναφέρεται σε απωστικές διατομικές αλληλεπιδράσεις. Η συγκεκριμένη τιμή $\alpha_{\mathrm{R}} = 0.95$ δεν είναι καθοριστική



Σχήμα 2.1: Εξέλιξη ενός Γκαουσιανού κυματοπακέτου από την περιοχή όπου χαρακτηρίζεται από απωστικές αλληλεπιδράσεις στην περιοχή ελκτικών αλληλεπιδράσεων. Η πάνω αριστερή και δεξιά εικόνα δείχνουν αντίστοιχα την πυκνότητα της κυματοσυνάρτησης για χρόνους $t = 0$ και $t = 200$ [συνεχείς (μπλέ) γραμμές]; η μορφή του μήκους σκέδασης απεικονίζεται στην ίδια εικόνα [διακεκομμένη (κόκκινη) γραμμή]; Η κάτω εικόνα δείχνει την χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας του κυματοπακέτου.

για την ανάλυσή μας; παρόμοια ποιοτικά αποτελέσματα εξάγονται και για τιμές κοντινές από αυτήν.

Μελετάμε την περίπτωση όπου ένα Γκαουσσιανό πακέτο με πλάτος U_0 και εύρος l, το οποίο αρχικά τοποθετείται στη θέση $x = x_0 > 0$ (όπου αντιστοιχεί στην απωστική περιοχή), κινείται προς την κατεύθυνση της ελκτικής περιοχής. Η συγκεκριμένη μορφή του κυματοπακέτου, η οποία χρησιμοποιείται και ως αρχική συνθήκη στην Εξ. (2.5) για τις αριθμητικές προσομοιώσεις, είναι η εξής:

$$u(x,0) \;=\; U_0 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{l^2}\right)\exp\left(-iKx\right), \tag{2.6}$$

όπου το K αντιστοιχεί στην αρχική ορμή του κυματοπακέτου.

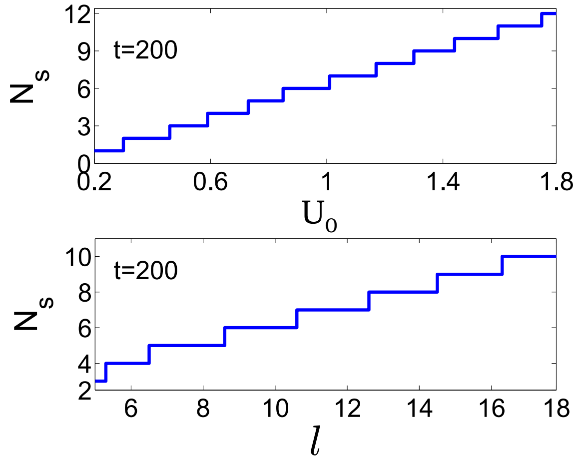
Να σημειωθεί επίσης, ότι αυτή η μορφή του κυματοπακέτου προσεγγίζει το προφίλ της θεμελιώδους κατάστασης που θα είχε ένα συμπύκνωμα με σχετικά μικρό αριθμό ατόμων (που αντιστοιχεί σε ασθενής μη γραμμικότητα) κατά τη δημιουργία του σε ένα παραβολικό δυναμικό, στην απωστική περιοχή.

Χρησιμοποιούμε τις εξής τιμές για τις παραμέτρους $x_0 = 20$, $l = 10$, και $K = 1.5$ (όπως επίσης $U_0 = 1$ και $\alpha_{\mathrm{R}} = 0.95$), και η αντίστοιχη απεικόνιση της αρχικής κατάστασης φαίνεται στο Σχ. 2.1. Στις πάνω δεξιά και κάτω εικόνες του ίδιου σχήματος φαίνεται η δυναμική του κυματοπακέτου: παρατηρείται ότι το κυματοπακέτο μεταδίδεται μέσω της ασυνέχειας του μήκους σκέδασης στη θέση $x \approx 0$ και αφού εισέρχεται στην περιοχή όπου χαρακτηρίζεται από ελκτικές διατομικές αλληλεπιδράσεις, μετασχηματίζεται σε ένα τραίνο φωτεινών σολιτονίων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαδικασία γένεσης των σολιτονίων είναι τέτοια ώστε κάθε σολιτόνιο που δημιουργείται έχει μεγαλύτερο πλάτος από το το επερχομενό του. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μόλις ένα μέρος του συμπυκνώματος εισέλθει στην ελκτική περιοχή και αυτοοργανώθεί σε ένα σολιτόνιο τότε ο αριθμός των ατόμων του κυματοπακέτου στην απωστική περιοχή μειώνεται και, κατα συνέπεια, ένα μικρότερο σολιτόνιο θα δημιουργηθεί στη συνέχεια.

Όπως γνωρίζουμε, σολιτόνια μεγαλύτερου πλάτους ταξιδεύουν πιό γρήγορα από εκείνα που έχουν μικρότερο πλάτος. Ωστόσο, είναι ενδιαφέρον να παρατηρηθεί ότι ο λόγος των ταχυτήτων ανάμεσα στα γειτονικά σολιτόνια παραμένει σταθερός. Ως αποτέλεσμα για δεδομένη χρονική στιγμή, η απόσταση μεταξύ των γειτονικών σολιτονίων παραμένει σταθερή. Επιπρόσθετα, πρέπει να σημειωθεί ότι το αρχικό Γκαουσσιανό κυματοπακέτο (το οποίο δεν αποτελεί ακριβής λύση της απωστικής περιοχής), διασπείρεται όσο πλησιάζει την διαχωριστική επιφάνεια, έχοντας μία ταχύτητα ίση με την αρχική του, η οποία εν γένει είναι διαφορετική από την ταχύτητα την οποία έχουν τα παραγόμενα σολιτόνια.

Εδώ, αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα για τη δημιουργία και τα χαρακτηριστικά του σολιτονικού τραίνου θυμίζουν αυτά που εξήχθησαν στην εργασία [124], αλλά με έναν διαφορετικό μηχανισμό: στη προαναφερθείσα μελέτη το Γκαουσσιανό κυματοπακέτο βρίσκεται παγιδευμένο σε μία αρμονική παγίδα. Μέσω μιάς βηματικής ασυνέχειας της μη γραμμικότητας στο χώρο παρατηρείται η γένεση τραίνου φωτεινών σολιτονίων στην περιοχή των ελκτικών αλληλεπιδράσεων, ο αριθμός των οποίων εξαρτάται από το μέγεθος του προαναφερόμενου βήματος.

Βρήκαμε λοιπόν ότι ο αριθμός των σολιτονίων που δημιουργούνται, N_s, εξαρτάται από την ορμή K, το πλάτος U_0 και το εύρος l του Γκαουσσιανού κυματοπακέτου, όπως επίσης και από το ύψος της διαχωριστικής επιφάνειας α_{R}. Τα αποτελέσματα που αφορούν τον αριθμό των φωτεινών σολιτονίων στην ελκτική περιοχή παρουσιάζονται στο Σχ. 2.2: μεγαλύτερα αρχικά πλάτη και /ή εύροι του αρχικού κυματοπακέτου καταλήγουν σε μεγαλύτερο αριθμό σολιτονίων. Από την άλλη πλευρά, η αύξηση της αρχικής ταχύτητας k και/ή του ύψους α_{R} της διεπιφάνειας φαίνεται να έχει μικρότερη επίδραση στην διαδικασία παραγωγής σολιτονίων; για το συγκεκριμένο παράδειγμα που παρουσιάζεται στο Σχ. 2.1, ο αριθμός των σολιτονίων για χρόνο $t = 200$ παραμένει σταθερός και ισος με 7. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι για τον υπολογισμό του συνολικού παραγόμενου αριθμού σολιτονίων για δεδομένη χρονική στιγμή εχούν συμπεριληφθεί μόνο όσα σολιτόνια έχουν πλάτος πάνω από το 10% του πλάτους του πρώτου σολιτονίου.



Σχήμα 2.2: Η πάνω και η κάτω εικόνα δείχνουν, αντίστοιχα, τον αριθμό των σολιτονίων, $\mathrm{N_s}$, ο οποίος παρατηρείται για χρόνο $t = 200$, ως συνάρτηση του αρχικού πλάτους U_0 (για καθορισμένη τιμή $l = 10$) ή ως συνάρτηση του αρχικού εύρους l (για καθορισμένη τιμή $U_0 = 1$) του Γκαουσσιανού κυματοπακέτου. Οι υπόλοιπες τιμές των παραμέτρων είναι οι εξής: $\alpha_{\mathrm{L}} = 0.95 = 1$, $\alpha_{\mathrm{R}} = 0.95$, $K = 1.5$, και $x_0 = 20$.

2.2 Σκέδαση Σολιτονίων σε βηματικές ασυνέχειες

Θα προχωρήσουμε σε μία πιό συστηματική μελέτη της σκέδασης σολιτονίων σε βηματικές ασυνέχειες στο δυναμικό ή/και στο μήκος σκέδασης (που καθορίζει το μέγεθος των διατομικών αλληλεπιδράσεων). Η παρακάτω αναλυτική προσέγγιση αφορά σκοτεινά σολιτόνια σε περιβάλλον με απωστικές διατομικές αλληλεπιδράσεις, όπου και τα προαναφερθέντα σολιτόνια αποτελούν ακριβείς λύσεις.

2.2.1 Αδιαβατική θεωρία διαταραχών για τα Σκοτεινά Σολιτόνια

Υποθέτουμε, σαν μία πρώτη προσέγγιση, ότι το τετραγωνικό δυναμικό μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο και έτσι μελετούμε την δυναμική ενός σολιτονίου, το οποίο είναι αρχικά τοποθετημένο στην περιοχή $x < 0$, και κινείται κατά μήκος του άξονα x προς τα δεξιά, (με αντίστοιχο τρόπο θα μπορούσαμε να μελετήσουμε τη περίπτωση όπου το σολιτόνιο είναι αρχικά τοποθετημένο στην περιοχή $x > 0$ και κινείται προς τα αριστερά). Σε αυτήν την περίπτωση, ψάχνουμε για λύση της Εξ. (2.5) της μορφής:

$$u(x,t) = \sqrt{\mu_{\mathrm{L}} - V_{\mathrm{L}}} \exp\left(-i\mu_{\mathrm{L}} t\right) \upsilon(x,t), \tag{2.7}$$

όπου μ_{L} είναι το χημικό δυναμικό, και $\upsilon(x,t)$ είναι η κυματοσυνάρτηση του σκοτεινού σολιτονίου. Στη συνέχεια εισάγουμε τους μετασχηματισμούς $t \to (\mu_{\mathrm{L}} - V_{\mathrm{L}})\, t$ και $x \to \sqrt{\mu_{\mathrm{L}} - V_{\mathrm{L}}} x$, και εκφράζουμε με αυτό το τρόπο την Εξ. (2.5) σαν μία διαταραγμένη NLS εξίσωση για το σκοτεινό σολιτόνιο:

$$i\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} - \left(|\upsilon|^2 - 1\right)\upsilon = P(\upsilon). \tag{2.8}$$

Η διαταραχή $P(\upsilon)$ που αποτελεί το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι η εξής:

$$P(\upsilon) \;=\; \left(A + B|\upsilon|^2\right)\upsilon\mathcal{H}(x), \tag{2.9}$$

όπου $\mathcal{H}$ είναι η βηματική συνάρτηση, και οι συντελεστές A, B δίνονται από τις σχέσεις:

$$A \;=\; \frac{V_{\rm R} - V_{\rm L}}{\mu_{\rm L} - V_{\rm L}}, \quad B = \frac{\alpha_{\rm R}}{\alpha_{\rm L}} - 1. \tag{2.10}$$

Οι παραπάνω συντελεστές, προσδιορίζουν την ένταση της μεταβολής του δυναμικού και της μη γραμμικότητας και θεωρούνται μικρές ποσότητες. Μία τέτοια περίπτωση αντίστοιχει π.χ. για τις εξής τιμές των παραμέτρων $\mu_{\rm L} = 1$, $V_{\rm L} = 0$, $V_{\rm R} \sim \epsilon$, και $\alpha_{\rm R}/\alpha_{\rm L} \sim 1$, όπου $0 < \epsilon \ll 1$ είναι μία αυθαίρετη μικρή παράμετρος (αυτή η επιλογή τιμών θα χρησιμοποιηθεί και στις αριθμητικές προσομοιώσεις που θα ακολουθήσουν). Η μελέτη που έχει γίνει αναφέρεται σε απότομη αλλαγή των τιμών του δυναμικού και/ή της μη γραμμικότητας.

Η Εξ. (2.8) μπορεί να μελετηθεί αναλυτικά εφαρμόζωντας την αδιαβατική θεωρία διαταραχών για τα σκοτεινά σολιτόνια (για σχετική μελέτη βλ. τις αναφορές. [137,150,151]). Αρχικά αναφέρουμε ότι απουσία της διαταραχής (2.9), η Εξ. (2.8) έχει ακριβής λύση αυτή ενός σκοτεινού σολιτονίου της μορφής:

$$\upsilon(x,t) = \cos\phi \tanh X + i \sin\phi, \tag{2.11}$$

όπου $X = \cos\phi[x - x_0(t)]$, ϕ είναι η φασική γωνία του σολιτονίου, η οποία συνδέεται άμεσα με τη σκοτεινότητα του σολιτονίου μέσω της σχέσης ($|\phi| < \pi/2$), $\cos\phi$ είναι το πλάτος του σκοτεινού σολιτονίου ($\phi = 0$ και $\phi \neq 0$ αντιστοιχούν στο στάσιμο μαύρο σολιτόνιο και στο λεγόμενο γκρι σολιτόνιο, αντίστοιχα), ενώ οι ποσότητες $x_0(t)$ και $dx_0/dt = \sin\phi$ υποδεικνύουν το κέντρο του σολιτονίου και την ταχύτητά του αντίστοιχα. Στη συνέχεια, εξετάζουμε την αδιαβατική εξέλιξη του σκοτεινού σολιτονίου, υποθέτωντας ότι παρουσία της διαταραχής οι παράμετροι του μετατρέπονται σε αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χρόνου t. Έτσι, η φασική γωνία του σολιτονίου μετατρέπεται σε $\phi \to \phi(t)$ και, ως αποτέλεσμα, η ποσότητα X καθίσταται ίση με $X = \cos\phi(t)\big(x - x_0(t)\big)$, με $dx_0(t)/dt = \sin\phi(t)$.

Η εξέλιξη της φασικής γωνίας του σολιτονίου μπορεί να βρεθεί μέσω της εξέλιξης της κανονικοποιημένης ενέργειας του σολιτονίου, E_{ds}, που δίνεται από [137, 150]:

$$E_{ds} \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left|\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right|^2 + \left(|\upsilon|^2 - 1\right)^2\right]dx. \tag{2.12}$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.11), μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι

$$dE_{ds}/dt = -4\cos^2\phi\ \sin\phi\ d\phi/dt \tag{2.13}$$

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.8) και την μιγαδική συζυγή της, μπορούμε να εξάγουμε την παρακάτω σχέση που περιγράφει την μεταβολή της ενέργειας λόγω της παρουσίας των διαταραχών:

$$dE_{ds}/dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \big(P\partial\bar{\upsilon}/\partial t + \bar{P}\partial\upsilon/\partial t\big)dx, \tag{2.14}$$

όπου με $\bar{\upsilon}$ δηλώνεται ο μιγαδικός συζυγής της συνάρτησης. Έτσι έχουμε υποδείξει δύο διαφορετικούς μηχανισμούς που οδηγούν στη μεταβολή της ενέργειας:

(i) μεταβάλλεται όταν οι παράμετροι του σολιτονίου γίνονται χρονικά εξαρτημένες μεταβλητές, και

(ii) μεταβάλλεται λόγω της παρουσίας των διαταραχής P.

Εξισώνοντας τις Εξ. (2.13) και (2.14) παίρνουμε την χρονική εξέλιξη του ϕ, δηλαδή:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2\cos^2\phi\sin\phi}\mathrm{Re}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} P(\upsilon)\frac{\partial\bar{\upsilon}}{\partial t}dx\Big\}. \tag{2.15}$$

Εισάγωντας την διαταραχή (2.9) μέσα στην Εξ. (2.15), και αφού εκτελέσουμε τις πράξεις μέσα στο ολοκλήρωμα, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{4}\big(A+B\big)\mathrm{sech}^2\big(\mathrm{x}_0\big) + \frac{1}{8}\mathrm{Bsech}^4\big(\mathrm{x}_0\big), \tag{2.16}$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι το σολιτόνιο είναι σχεδόν "μαύρο", δηλαδή $\cos\phi \approx 1$ (και $\sin\phi \approx \phi$). Συνδυάζοντας την Εξ. (2.16) με την προηγούμενη εξίσωση που αφορούσε την ταχύτητα του σολιτονίου, $dx_0(t)/dt = \sin\phi(t)$, μπορούμε να εξάγουμε την ακόλουθη εξίσωση κίνησης για το κέντρο του σολιτονίου:

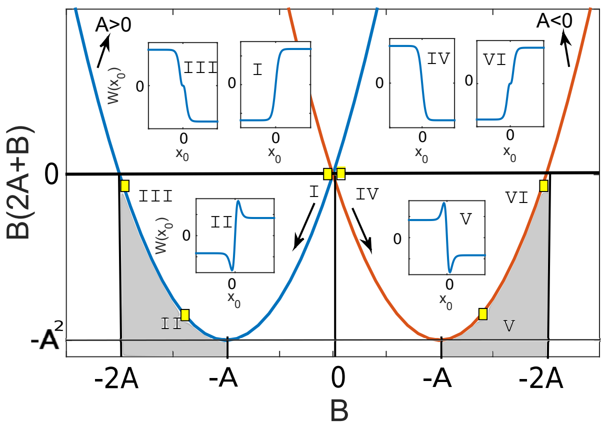
$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{dW}{dx_0}, \tag{2.17}$$

όπου το φαινομενικό δυναμικό $W(x_0)$ δίνεται από:

$$W(x_0) = \frac{1}{8}\big(2A+B\big)\tanh\big(x_0\big) + \frac{1}{24}B\tanh^3\big(x_0\big). \tag{2.18}$$

2.2.2 Μορφές του φαινομενικού δυναμικού

Η ύπαρξη τόσο γραμμικής όσο και μη γραμμικής ασυνέχειας, μας παραπέμπει σε μία πολύ ενδιαφέρουσα μορφή του "φαινομενικού" δυναμικού. Συγκεκριμένα, υποδηλώνει ότι είτε παίρνει τη μορφή υπερβολικής εφαπτομένης, είτε πιο σύνθετες μορφές, οι οποίες παρουσιάζουν ακρότατα -- δηλαδή ένα υπερβολικό και ένα ελλειπτικό σημείο ισορροπίας στο αντίστοιχο δυναμικό σύστημα. Η τελευταία περίπτωση εμφανίζεται μόνο στη περίπτωση συνδυασμού της χωρικής ανομοιόγενειας, στο δυναμικό και τη μη γραμμικότητα ($A \neq 0$,$B \neq 0$). Είναι δηλαδή



Σχήμα 2.3: Σχέδιο στο οποίο φαίνονται οι περιοχές ύπαρξης των ακροτάτων του φαινομενικού δυναμικού $W(x_0)$ (υποδεικνύονται από τις γκρίζες περιοχές) για $A > 0$ (μπλέ γραμμή) και $A < 0$ (κόκκινη γραμμή). Οι ένθετες εικόνες I − III (IV − VI) απεικονίζουν τη μορφή του $W(x_0)$, αρχίζοντας από --και τελειώνοντας σε -- μία μικρή πεπερασμένη τιμή της μεταβολής του μη γραμμικού συντελεστή B, ο οποίος σταδιακά μειώνεται (αυξάνεται) για $A > 0$ ($A < 0$), βλέπε τα μάυρα βέλη.Τα μικρά τετράγωνα (κίτρινα) σημεία δείχνουν τις τιμές των παραμέτρων που αντιστοιχούν στις διαφορετικές μορφές του φαινομενικού δυναμικού $W(x_0)$ που φαίνεται στις ένθετες εικόνες I − VI.

ο συνδυασμός μεταξύ της γραμμικής και της μη γραμμικής βηματικής ασυνέχειας, ο οποίος καθιστά ικανή τη παρουσία σταθερών σημείων και επομένως δίνει τη δυνατότητα για τη παρουσία πιο σύνθετης δυναμικής.

Σε αυτό το πλάισιο λοιπόν, προκύπτει ότι υπάρχουν δύο σταθερά σημεία, τα οποία βρίσκονται στις θέσεις:

$$x_{0\pm} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-A \mp \sqrt{-B\,(2A+B)}}{A+B}\right), \tag{2.19}$$

για $B(2A + B) < 0$, και $-2A < B < -A$ για $A > 0$ ή $-A < B < -2A$ για $A < 0$. Στο Σχ. 2.3 σχεδιάζουμε την ποσότητα $B(2A+B)$ σαν συνάρτηση του B, για $A > 0$ (μπλέ γραμμή) και $A < 0$ (κόκκινη γραμμή). Οι αντίστοιχες περιοχές στις οποίες παρατηρούνται τα σταθερά σημεία, υποδεικνύονται από τις γκρίζες περιοχές. Οι ένθετες εικόνες δείχνουν το τυπικά προφίλ του φαινομενικού δυναμικού $W(x_0)$, για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου B.

Στη συνέχεια της διατριβής, θα εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση όπου δεν υπάρχει μη γραμμική βηματική ασυνέχεια, $B = 0$, όπως φαίνεται στις ένθετες εικόνες I και IV του Σχ. 2.3, για $A > 0$ και $A < 0$, αντίστοιχα. Αυτή η μορφή διατηρείται, αν και οι ασυμπτωτικές τιμές του δυναμικού $W(x_0)$ (για $x \to \pm\infty$) παίρνουν μικρότερες τιμές, παρουσία και της μη γραμμικής ασυνέχειας, $B \neq 0$, και συγκεκριμένα όταν αυτή παίρνει τιμές $-A < B < 0$ και $0 < B < -A$, για $A > 0$ και $A < 0$, αντίστοιχα.

Μία πιο ενδιαφέρουσα κατάσταση προκύπτει όταν η μεταβολή της μη γραμμικότητας παίρνει τις ακόλουθες τιμές: $-2A < B < -A$ για $A > 0$, ή $-A < B < -2A$ για $A < 0$. Σε αυτή τη περίπτωση το φαινομενικό δυναμικό διαθέτει ένα τοπικό ελάχιστο (μέγιστο), δηλαδή ένα ελλειπτικό (υπερβολικό) σταθερό σημείο, στη περιοχή $x < 0$ ($x > 0$) για $A > 0$ κοντά στη θέση όπου πραγματοποιούνται οι αλλαγές στη μη γραμμικότητα και στο δυναμικό, δηλαδή στο $x = 0$; μία παρόμοια κατάσταση προκύπτει για $A < 0$, αλλά τώρα το τοπικό ελάχιστο παίρνει τη μορφή τοπικού μεγίστου και αντίστροφα. Οι θέσεις $x_{0\pm}$ των σταθερών σημείων δίνονται από την Εξ. (2.19); ως παράδειγμα αναφέρουμε ότι για τιμές των παραμέτρων $V_{\rm L} = 0$, $V_{\rm R} = -0.01$, $\alpha_{\rm L} = 1$ και $\alpha_{\rm R} = 1.015$, βρίσκουμε ότι $x_{0+} = 0.66$ ($x_{0-} = -0.66$) για το ελλειπτικό (υπερβολικό) σταθερό σημείο.

Όσο η ένταση της βηματικής ασυνέχειας της μη γραμμικότητας γίνεται μεγαλύτερη, οι ασυμπτωτικές τιμές (για $x_0 \to \pm\infty$) του $W(x_0)$ γίνονται μικρότερες και τελικά μηδενίζονται. Εάν πάρουμε σταθερές τις τιμές των εξής παραμέτρων $V_{\rm L} = 0$ (και $\mu_{\rm L} = 1$), η Εξ. (3.65) δείχνει ότι αυτό συμβαίνει για $B = -(3/2)A$; σε αυτή τη περίπτωση, το δυναμικό χαρακτηρίζεται από ένα "οξύ" προφίλ στη περιοχή $x_0 = 0$ (βλέπε, π.χ., τη πάνω εικόνα του Σχ. 2.15 παρακάτω).

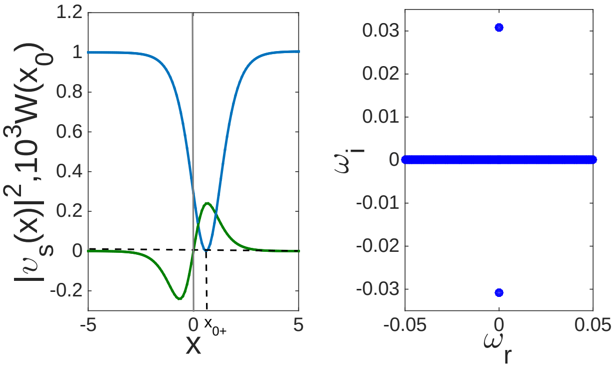
Για $B < -(3/2)A$, οι ασυμπτωτικές τιμές του $W(x_0)$ γίνονται πεπερασμένες ξανά, και παίρνουν μία θετική (αρνητική) τιμή για $x_0 < 0$, και μία αρνητική (θετική) τιμή $x_0 > 0$, στη περίπτωση όπου $A > 0$ ($A < 0$). Το "οξύ" προφίλ του $W(x_0)$ στη περιοχή $x_0 = 0$ διατηρείται επίσης στη περίπτωση αυτή, αλλά όσο το B μειώνεται αυτό σταδιακά εξαφανίζεται, όπως φαίνεται και από τις ένθετες εικόνες III και VI του Σχ. 2.3.

2.2.3 Σολιτόνια στα τοπικά ακρότατα του φαινομενικού δυναμικού

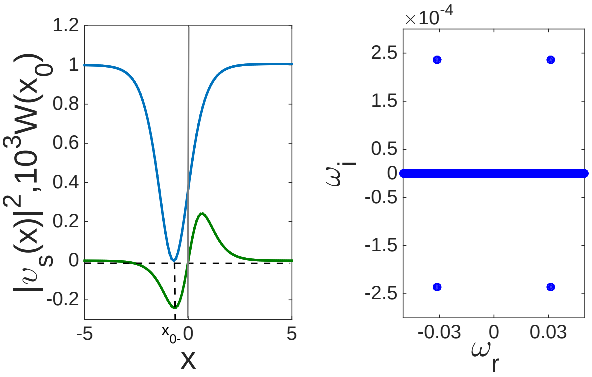
Εκτός από τις αναλυτικές προσεγγίσεις που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω για να περιγράψουν τις ταλαντώσεις των σολιτονίων στην παγίδα, έγινε και μελέτη της ευστάθειας και της εξέλιξης των σολιτονίων στα ακρότατα του φαινομενικού δυναμικού Εξ. (3.65). Σημειώνουμε ότι στάσιμες λύσεις σολιτονίων, που αντιστοιχούν σε λύσεις όπου το σκοτεινό σολιτόνιο έχει μηδενική ταχύτητα $\phi = 0$ και το κέντρο του βρίσκεται στα σταθερά σημεία που ορίζονται από την εξίσωση κίνησης (2.17), μπορούν να βρεθούν αριθμητικά λύνοντας την αντίστοιχη στάσιμη εξίσωση (2.5). Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση ενός αλγόριθμου Newton-Krylov, (τροποποιημένη μορφή της μεθόδου Newton για εύρεση ριζών [153]). Στον αλγόριθμο αυτό εισάγωντας μία αρκούντως καλή αρχική μορφή για τη λύση, πολλαπλασιασμένη με το υπόβαθρο TF, η σύγκλιση του αλγορίθμου οδηγεί στην εύρεση της ακριβούς λύσης, (με προεπιλεγμένη αριθμητική ακρίβεια).

Η παραπάνω ανάλυση θέτει ένα ενδιαφέρον ερώτημα σχετικά με την ύπαρξη στατικών λύσεων της Εξ. (2.5) στα ακρότατα του φαινομενικού δυναμικού. Έτσι πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $u(x,t) = \exp(-it)\upsilon_s(x)$, για ένα στάσιμο σολιτόνιο $\upsilon_s(x)$, και βρίσκουμε από την Εξ. (2.5) την εξίσωση:

$$\upsilon_s = -\frac{1}{2}\frac{d^2\upsilon_s}{dx^2} + \frac{\alpha(x)}{\alpha_{\rm L}}|\upsilon_s|^2\upsilon_s + V(x)\upsilon_s. \tag{2.20}$$



Σχήμα 2.4: Αριστερή εικόνα: απεικόνιση της πυκνότητας του στάσιμου σολιτονίου (μπλέ γραμμή) στο υπερβολικό σταθερό σημείο $x_{0+} = 0.66$, όπως αυτή βρέθηκε αριθμητικά χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $\upsilon_s(x) = [1 - V(x)]^{1/2}\tanh(x)$ στην Εξ. (2.20), για $\alpha_\mathrm{R}/\alpha_\mathrm{L} = 0.985$, $V_\mathrm{R} = 0.01$, $V_\mathrm{L} = 0$, $\mu_\mathrm{L} = 1$; η πράσινη γραμμή παρουσιάζει το αντίστοιχο φαινομενικό δυναμικό $W(x_0)$. Δεξιά εικόνα: το αντίστοιχο φάσμα ιδιοτιμών (ω_r, ω_i), το οποίο υποδηλώνει εκθετική αύξηση, λόγω του μιγαδικού ζεύγους των ιδιοσυχνοτήτων.



Σχήμα 2.5: Το ίδιο όπως στο Σχ. 2.4, αλλά όταν το σκοτεινό σολιτόνιο βρίσκεται στο ελλειπτικό σταθερό σημείο $x_{0-} = -0.66$; αυτή η στάσιμη κατάσταση βρέθηκε βάζοντας ως αρχική συνθήκη $\upsilon_s(x) = [1 - V(x)]^{1/2}\tanh(x + 0.2)$. Το φάσμα των ιδιοτιμών στην δεξιά εικόνα υποδηλώνει μια ταλαντούμενη αύξηση λόγω της παρουσίας της τετραπλέτας των ιδιοσυχνοτήτων.

Η παραπάνω εξίσωση ολοκληρώνεται αριθμητικά μέσω της μεθόδου Newton-Raphson, για την εξής αρχική συνθήκη:

$$\upsilon_s(x) = n^{1/2}(x)\tanh(x - x_0), \tag{2.21}$$

όπου

$$n(x) = (1 - V(x))\,/\,(\alpha(x)/\alpha_\mathrm{L})\,, \tag{2.22}$$

είναι η αντίστοιχη πυκνότητα του υποβάθρου (υπενθυμίζουμε ότι $n(x) = n_\mathrm{L} = 1$ για $x < 0$, και $n(x) = n_\mathrm{R} = (1 - V_\mathrm{R})/(\alpha_\mathrm{R}/\alpha_\mathrm{L})$ για $x > 0$, όσον αφορά την κανονικοποίηση που έχουμε χρησιμοποιήσει). Έτσι αρχικά υποθέτουμε μία αρχική συνθήκη όπως φαίνεται στην Εξ. (2.21) στην οποία το σολιτόνιο τοποθετείται στη θέση $x_0 = 0$ και προκύπτει μια στατική λύση ακριβώς στο υπερβολικό σταθερό σημείο $x_{0+} = 0.66$, όπως αυτό υπολογίζεται από την Εξ. (2.19); τα απότελέσματα φαίνονται στην αριστερή εικόνα του Σχ. 2.4. Χρησιμοποιώντας αντίστοιχα την περίπτωση όπου το σολιτόνιο αρχικά τοποθετείται στη θέση $x_0 = -0.2$, οδηγούμαστε στη στατική λύση του σολιτονίου όπου το κέντρο του βρίσκεται ακριβώς στο ελλειπτικό σημείο $x_{0-} = -0.66$ όπως αυτό προβλέπεται από την Εξ. (2.19) και αυτό φαίνεται στην αριστερή εικόνα του Σχ. 2.5.

Συνεχίζουμε με τη μελέτη της ευστάθειας των διαφόρων στατικών λύσεων των σκοτεινών σολιτονίων, μέσω του φάσματος Bogoliubov-de Gennes (BdG) [14, 92, 137]. Η ανάλυση BdG μελετάει μικρές διαταραχές πάνω σε μία στατική λύση $\upsilon_s(x)$, όπου το χημικό δυναμικό είναι μονάδα στη περίπτωση μας, και παίρνει τη μορφή:

$$u(x,t) = e^{-it}\left[\upsilon_s(x) + \delta\left(b(x)e^{-i\omega t} + \bar{c}(x)e^{i\bar{\omega}t}\right)\right], \tag{2.23}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (2.23) στην Εξ. (2.5), και κρατώντας τους όρους πρώτης τάξης ως προς τη παράμετρο δ, παίρνουμε ένα γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών. Το τελευταίο έχει ιδιοανύσματα τα (b, c) και ιδιοτιμές ω (και $\bar{\omega}$). Πρέπει να σημειωθεί ότι οι τελευταίες είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί $\omega = \omega_r + i\omega_i$, και το φάσμα είναι ευσταθές αν όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, δηλαδή $\omega_i = 0$, ενώ εάν εμφανιστούν πεπερασμένα φανταστικά μέρη $\omega_i > 0$ σηματοδοτούν την ύπαρξη αστάθειας.

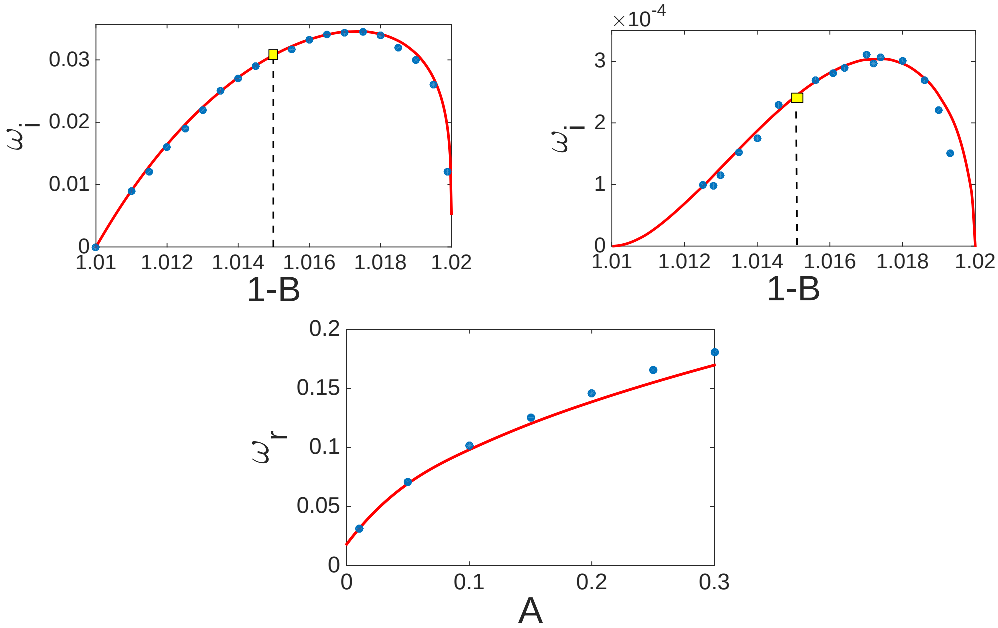
$$\left[\hat{H} - 1 + 2\frac{\alpha(x)}{\alpha_{\mathrm{L}}}\upsilon_s^2\right]b + \frac{\alpha(x)}{\alpha_{\mathrm{L}}}\upsilon_s^2 c = \omega b, \tag{2.24}$$

$$\left[\hat{H} - 1 + 2\frac{\alpha(x)}{\alpha_{\mathrm{L}}}\upsilon_s^2\right]c + \frac{\alpha(x)}{\alpha_{\mathrm{L}}}\upsilon_s^2 b = -\omega c, \tag{2.25}$$

όπου $\hat{H} = -(1/2)\partial_x^2 + V(x)$. Το πρόβλημα ιδιοτιμών σε αυτή τη περίπτωση μπορεί να λυθεί μόνο αριθμητικά. Παραδείγματα των στατικών σκοτεινών σολιτονίων στα ακρότατα $x_{0\pm}$ του φαινομενικού δυναμικού W, όπως επίσης και το αντίστοιχο BdG φάσμα, φαίνονται στα Σχ. 2.4 και 2.5. Παρατηρείται ότι ένας ιδιοτρόπος ταλάντωσης είναι *ευσταθής* αν οι ω είναι αμιγως πραγματικοί αριθμοί. Τότε η διέγερση κάποιου τέτοιου τρόπου οδηγεί σε καθαρά ταλαντωτική δυναμική γύρω από την στατική λύση. Αντιθέτως αν οποιαδήποτε τιμή των ω έχει πεπερασμένο φανταστικό μέρος τότε αυτή αποκαλείται *ασταθής*, αφού οδηγεί σε εκθετική αύξηση της αντίστοιχης διαταραχής.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα αυτές τις αστάθειες, χρησιμοποιήσαμε μία αναλυτική προσέγγιση για τον υπολογισμό των σχετικών ιδιοσυχνοτήτων ακολουθώντας την ανάλυση των αναφορών [154, 155]. Σύμφωνα με τις παραπάνω αναφορές τα σολιτόνια εξακολουθούν να υπάρχουν παρουσία της διαταραχής $P(\upsilon)$ της Εξ. (2.9) (όταν $A,\ B \sim \epsilon$) υπό την προυπόθεση ότι η συνάρτηση Melnikov:

$$M'(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U(\upsilon)}{\partial x}\mathrm{sech}^2(x - x_0)dx, \tag{2.26}$$



Σχήμα 2.6: Επάνω αριστερή εικόνα: το φανταστικό μέρος της ιδιοσυχνότητας, ω_i, ως συνάρτηση του $1 - B$ (με $B < 0$), για ένα σολιτόνιο το οποίο βρίσκεται στο υπερβολικό σταθερό σημείο, $x = x_{0+}$. Η μεσαία και κάτω εικόνες δείχνουν την εξάρτηση από τα φανταστικά και πραγματικά μέρη ω_i και ω_r, της ιδιοσυχνότητας από την ποσότητα $1 - B$ και A, για ένα σολιτόνιο το οποίο βρίσκεται στο ελλειπτικό σταθερό σημείο, $x = x_{0-}$, δηλαδή για την περίπτωση που έχουμε τετραπλέτα ιδιοσυχνοτήτων. Οι συνεχείς γραμμές αναφέρονται στην αναλυτική πρόβλεψη [βλ. τις Εξισώσεις (2.27) και (2.28)], οι μπλέ κύκλοι προσδιορίζουν τα αριθμητικά αποτελέσματα, ενώ τα κίτρινα τετράγωνα αναφέρονται στις ιδιοσυχνότητες που εξετάσαμε στα Σχ. 2.4 και 2.5. Για τις πάνω εικόνες ισχύει $A = 0.01$, ενώ για την κάτω εικόνα $A = -(2/3)B$; ενώ σε όλες τις περιπτώσεις $\mu_{\mathrm{L}} = 1$.

μηδενίζεται, δηλαδή η εξίσωση $M'(x_0) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα, έστω $\tilde{x}_0$, εδώ, U ορίζεται ως εξής: $P(\upsilon) \equiv U(\upsilon(x))\upsilon$. Στην περίπτωσή μας, βρίσκουμε ότι η εξίσωση παρουσιάζει ακριβώς δύο ρίζες, οι οποίες είναι τα δύο σταθερά σημεία $x_{0\pm}$ του φαινομενικού δυναμικού, δηλαδή $\tilde{x}_0 = x_{0\pm}$.

Τότε η ευστάθεια του σκοτεινού σολιτονίου στα σημεία $x_{0\pm}$ εξαρτάται από το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης Melnikov της Εξ. (2.26), στο σημείο $\tilde{x}_0 = x_{0\pm}$. Γενικά η θεωρία αποκαλύπτει ότι παρουσιάζεται αστάθεια, με τη μορφή ενός ζεύγους μιγαδικών ιδιοσυχνοτήτων όταν $\epsilon M''(\tilde{x}_0) < 0$, και με τη μορφή μίας τετραπλέτας από μιγαδικές ιδιοσυχνότητες όταν $\epsilon M''(\tilde{x}_0) > 0$. Η αστάθεια αυτή καθορίζεται από την μετακίνηση των ιδιοτιμών από το σύστημα BdG μέσω των εξισώσεων (2.25), οι οποίες διακλαδώνονται από το αρχικό σημείο μόλις η διαταραχή στο σύστημα κάνει την εμφάνισή της. Για $\epsilon M''(\tilde{x}_0) < 0$, το σχετικό ζεύγος ιδιοσυχνοτήτων κινείται κατά μήκος του φανταστικού άξονα, οδηγώντας σε μια άμεση αστάθεια που εκδηλώνεται με εκθετική αύξηση της διαταραχής κατα μήκος της σχετικής διεύθυνσης. Στην άλλη περίπτωση, για $\epsilon M''(\tilde{x}_0) > 0$, η ιδιοσυχνότητα κινείται κατά μήκος του πραγματικού άξονα; (έτσι μετά τη σύγκρουση με ιδιοσυχνότητες ιδιοτρόπου με αντίθετο πρόσημο από εκείνη), οδηγεί στην ανάπτυξη μιας τετραπλέτας μιγαδικών ιδιοσυχνοτήτων ($\pm\omega_j$ και $\pm\bar{\omega}_j$), σηματοδοτώντας την παρουσία μίας ταλαντωτικής αστάθειας.

Οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων μπορούν να προσδιορισθούν μέσω μίας χαρακτηριστικής εξίσωσης η οποία παίρνει την ακόλουθη μορφή [154],

$$\lambda^2 + \frac{1}{4}M''(\tilde{x}_0)\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{2.27}$$

όπου οι ιδιοτιμές λ σχετίζονται με τις ιδιοσυχνότητες ω μέσω της σχέσης $\lambda^2 = -\omega^2$. Από τη στιγμή που στην περίπτωση μας, οι τιμές που μηδενίζεται η $M'(x_0)$ είναι τα δύο σταθερά σημεία $x_{0\pm}$ όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, υπολογίζουμε την $M''(\tilde{x}_0)$ στα $\tilde{x}_0 = x_{0\pm}$ και βρίσκουμε ότι:

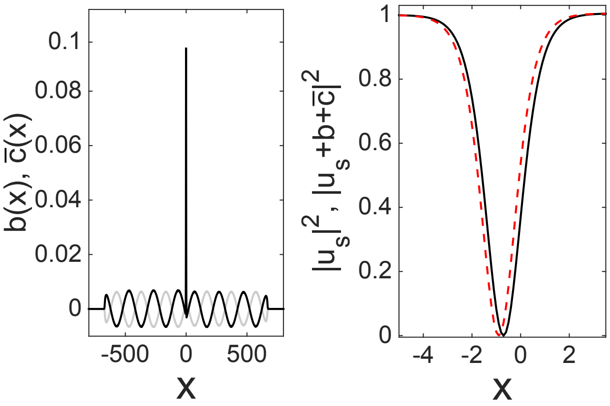
$$M''(x_{0\pm}) = - 2\mathrm{sech}^2(x_{0\pm})\tanh(x_{0\pm}) \times \left[A + B\tanh^2(x_{0\pm})\right]. \tag{2.28}$$

Για το σκοπό αυτό, αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα της Εξ. (2.28) στην Εξ. (2.27), δίνοντας με αυτό το τρόπο μία αναλυτική πρόβλεψη για τις τιμές των σχετικών ιδιοσυχνοτήτων, στις περιπτώσεις που το σολιτόνιο βρίσκεται είτε στο υπερβολικό είτε στο ελλειπτικό σημείο.

Το Σχήμα 2.6, δείχνει τα σχετικά αναλυτικά αποτελέσματα [τα οποία υποδεικνύονται από τις (κόκκινες) συνεχείς καμπύλες], και τα οποία συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα [τα οποία υποδεικνύονται από τα (μπλέ) σημεία]. Πιο συγκεκριμένα, η πάνω αριστερή εικόνα του σχήματος παρουσιάζει την εξάρτηση του φανταστικού μέρους της ιδιοσυχνότητας ω_i από την παράμετρο $1 - B$ (με $B < 0$), για ενα σολιτόνιο που βρίσκεται τοποθετημένο στο υπερβολικό σταθερό σημείο, $x = x_{0+}$; η περίπτωση αυτή σχετίζεται με το σενάριο $M''(x_0) < 0$. Οι πάνω δεξιά και κάτω εικόνες του σχήματος δείχνουν την εξάρτηση του ω_i και ω_r από την παράμετρο $1 - B$ και A αντίστοιχα, αλλά για ένα σολιτόνιο που βρίσκεται στο ελλειπτικό σημείο, $x = x_{0-}$; σε αυτήν την περίπτωση, $M''(x_0) > 0$, όπου και αντιστοιχεί σε ταλαντωτική αστάθεια όπως αναφέρθηκε προηγουμένως.

Εύκολα παρατηρείται ότι η συμφωνία μεταξύ των θεωρητικών προβλέψεων που προέρχονται από τις Εξ. (2.27) και (2.28) και των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι πολύ καλή; ειδικά, για τιμές της ποσότητας $1 - B$ κοντά στη μονάδα, π.χ., στην περίπτωση $|B| \lesssim 0.15$ όπου η θεωρία διαταραχών είναι πιο ακριβής, η συμφωνία είναι εξαιρετική.

Πρέπει επίσης να αναφερθεί εδώ, ότι παρόμοια καλή συμφωνία μεταξύ των αναλυτικών και των αριθμητικών αποτελεσμάτων έχει βρεθεί (τα ανάλογα αποτελέσματα δεν παρουσιάζονται εδώ) χρησιμοποιώντας ως ανεξάρτητη παράμετρο την ένταση της βηματικής ασυνέχειας της μη γραμμικότητας ($\sim A$), αντί για την ένταση της γραμμικής βηματικής ασυνέχειας ($\sim B$), όπως φαίνεται στο Σχ. 2.6.



Σχήμα 2.7: Αριστερή εικόνα: οι ιδιοσυναρτήσεις $b(x)$ (μαύρη γραμμή) και $c(x)$ (γκρί γραμμή), που αντιστοιχούν σε μία τετραπλέτα μιγαδικών ιδιοσυναρτήσεων (οι οποίες σχετίζονται με το ελλειπτικό σταθερό σημείο). Δεξιά εικόνα: συνεχής (μαύρη) γραμμή η οποία υποδεικνύει την πυκνότητα του στάσιμου σκοτεινού σολιτονίου στο ελλειπτικό σταθερό σημείο $x_{0-} = -0.66$; η διακεκομμένη (κόκκινη) γραμμή δείχνει την πυκνότητα του σκοτεινού σολιτονίου όταν αυτό διεγείρεται από την παρούσα κατάσταση, το οποίο οδηγεί σε μία μετατόπιση από το σημείο x_{0-} κατά $(\Delta x_0) = -0.1$. Οι παραμετρικές τιμές είναι ίδιες όπως στο Σχ. 2.5.

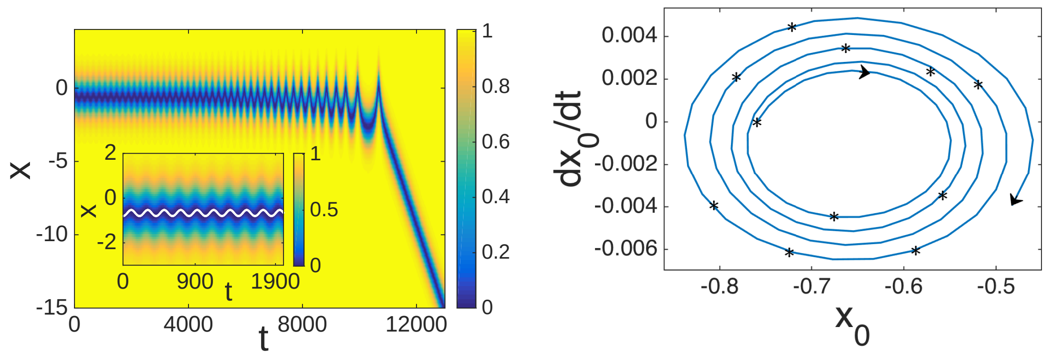
2.2.4 Αστάθειες στην PDE και ODE ανάλυση

Ένας από τους λόγους που ερευνούμε τις περιπτώσεις όπου συνδυάζεται η γραμμική και μη γραμμική χωρική ασυνέχεια, είναι να ερευνήσουμε την πιθανή παγίδευση του σολιτονίου. Πιθανές περιοχές όπου αυτό μπορεί να παρατηρηθεί είναι εκεί όπου το φαινομενικό δυναμικό παρουσιάζει ακρότατα (εκέι όπου οι στατικές λύσεις των σολιτονίων υπάρχουν όπως αναλύσαμε και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο). Ωστόσο, και τα δύο σταθερά σημεία φάνηκε να μην είναι ευσταθή όπως έδειξε η ανάλυση BdG. Γι'αυτό το λόγο, θα συζητήσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες τη φύση και τη σημασία αυτών των ασταθειών τόσο μέσω της PDE όσο και μέσω της ODE ανάλυσης.

Αρχικά, στην περίπτωση του υπερβολικού σταθερού σημείου, η ύπαρξη ενός ζεύγους μη ευσταθών BdG ιδιοτιμών είναι αναμενόμενη και έρχεται σε συμφωνία με την αναλυτική προσέγγιση και την σχετική εικόνα από την ODE: Πράγματι, αυτές οι πραγματικές ιδιοτιμές είναι στην πραγματικότητα μια εκδήλωση της ασταθούς φύσης του σταθερού σημείου. Από την άλλη πλευρά, η ύπαρξη του ελλειπτικού σταθερού σημείου φανερώνει ότι σε αυτό μπορεί δυνητικά να παγιδευτούν σολιτόνια για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Παρ'όλα αυτά, τα σολιτόνια στο ελλειπτικό σταθερό σημείο υπόκεινται σε ταλαντωτική αστάθεια, όπως υποδεικνύεται και από την ανάλυση BdG. Αυτό το γεγονός χρειάζεται να διερευνηθεί περαιτέρω, τόσο μέσω της ανάλογης σωματιδιακής εικόνας, μέσω της θεωρίας διαταραχών που αναπτύξαμε, όσο και μέσω της δυναμικής τους συμπεριφοράς.

Γι'άυτό το λόγο, αρχικά χρησιμοποιήσαμε την ανάλυση BdG για να προσδιορίσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $b(x)$ και $c(x)$ από τις Εξ. (2.25), που αντιστοιχούν στη τετραπλέτα μιγαδικών ιδιοσυχνοτήτων. Τα αποτελέσματα φαίνονται στην αριστερή εικόνα του Σχ. 2.7. Είναι σημαντικό ότι η διέγερση του σκοτεινού σολιτονίου το οποίο βρίσκεται στο ελλειπτικό σταθερό



Σχήμα 2.8: Αριστερή εικόνα: Χωροχρονικό διάγραμμα που περιγράφει την εξέλιξη της πυκνότητας του σκοτεινού σολιτονίου, το οποίο είναι αρχικά εκτοπισμένο κατά $(\Delta x_0) = -0.1$ από το ελειπτικό σταθερό σημείο $x_{0-} = -0.66$ (βλ. δεξιά εικόνα στο Σχ. 2.7); η αρχική ταχύτητα του σολιτονίου είναι μηδενική. Στο πρώτο στάδιο της δυναμικής του εξέλιξης, η συχνότητα ταλάντωσης του σολιτονίου όπως αυτή προσδιορίζεται από την ODE ανάλυση Εξ. (2.17) είναι σχεδόν ταυτόσημη με το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ιδιοτιμής $\omega = \omega_r + i\omega_i$, δηλαδή $\omega_{\text{osc}} = \omega_r = 0.031$ (βλ. ένθετη εικόνα). Το πλάτος των ταλαντώσεων μεγαλώνει λόγω της ύπαρξης του φανταστικού μέρους της ω, δηλαδή του $\omega_i = 0.00023$. Η φαρδιά (μπλέ) συνεχής γραμμή στο χωροχρονικό διάγραμμα υποδεικνύει τα αποτελέσματα της PDE, ενώ η λεπτή (λευκή) γραμμή τα αποτελέσματα από την ODE. Δεξιά εικόνα: το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα, το οποίο τονίζει την ασταθή σπείρα που προκύπτει από την δυναμική εικόνα της PDE (συνεχής γραμμή) και από την Εξ. (2.29) (αστερίσκοι), για χρόνο μέχρι $t = 6000$.

σημείο $x_{0-} = -0.66$ από αυτό τον ιδιοτρόπο, οδηγεί σε μία *μετατόπιση* $(\Delta x_0) = -0.1$ του σολιτονίου από το x_{0-}; το παραπάνω φαίνεται στην δεξιά εικόνα του Σχ. 2.7, όπου παρουσιάζεται η πυκνότητα τόσο του μη διαταραγμένου (συνεχής μαύρη γραμμή) όσο και του διαταραγμένου (διακεκομμένη μαύρη γρμμή) σκοτεινού σολιτονίου.

Παρ'όλα αυτά, μία τέτοια διέγερση του σολιτονίου, δεν μπορεί να οδηγήσει το σολιτόνιο σε σταθερή περιοδική τροχιά γύρω από το σταθερό σημείο (όπως υποστηρίζεται από την ODE εικόνα): αυτό συμβαίνει λόγω του γεγονότος ότι ότι αυτή η κατεύθυνση είναι ασταθής και χαρακτηρίζεται από μιγαδική ιδιοσυχνότητα. Έτσι το σολιτόνιο αναμένεται να εκτελεί ταλαντώσεις αυξανόμενου πλάτους γύρω από το ελλειπτικό σημείο, με συχνότητα και ρυθμό αύξησης που δίνονται αντίστοιχα από το πραγματικό και φανταστικό μέρος της ιδιοσυχνότητας. Αυτό σημαίνει ότι για μεγάλους χρόνους, το σολιτόνιο θα ξεφύγει από την περιοχή του ελλειπτικού σημείου. Έτσι αν και η ODE εικόνα προτείνει ότι το σταθερό σημείο x_{0-} είναι ελλειπτικό, η ανάλυση BdG [και κατά συνέπεια η ολόκληρωση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (PDE)], υποδηλώνουν ότι το σταθερο σημείο είναι στη πραγματικότητα μία *ασταθής σπείρα*.

Τα παραπάνω επιχειρήματα έχουν επιβεβαιωθεί ύστερα από αριθμητική ολοκλήρωση της GP Εξ. (2.5). Στην αριστερή εικόνα του Σχ. 2.8, φαίνεται η χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας του σκοτεινού σολιτονίου, το οποίο αρχικά είναι μετατοπισμένο κατά $(\Delta x_0) = -0.1$ από το ελλειπτικό σταθερό σημείο. Χρησιμοποιήσαμε δηλαδή ως αρχική συνθήκη την $u(0) = u_s + b + \bar{c}$, όπου u_s είναι το σκοτεινό σολιτόνιο στο ελλειπτικό σημείο -- βλ. επίσης την δεξιά εικόνα του

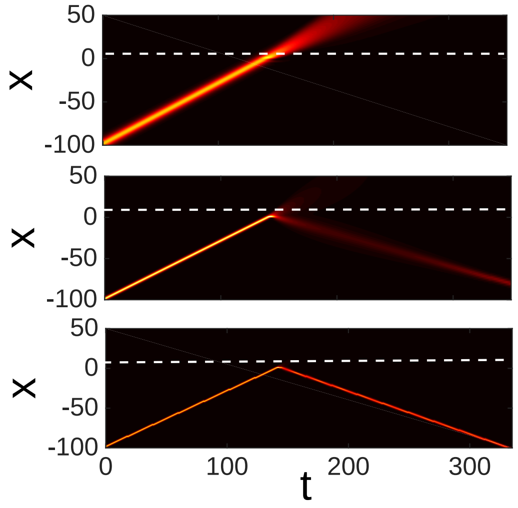
Σχ. 2.7 (οι παραμετρικές τιμές που χρησιμοποιούνται είναι ταυτόσημες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στο Σχ. 2.5). Φαίνεται ότι το σολιτόνιο, αφού έχει μετατοπιστεί από την θέση ισορροπίας του, εκτελεί μικρού πλάτους ταλαντώσεις γύρω από αυτό. Στο πρώτο στάδιο της εξελιξής του -- βλ. την ένθετη εικόνα στην πάνω εικόνα του Σχ. 2.8 -- οι ταλαντώσεις του σολιτονίου προσεγγίζονται πολύ καλά από την ODE ανάλυση μέσα από την Εξ. (2.17): η συχνότητα που προκύπτει από την τελευταία εξίσωση, για αρχική συνθήκη $x_0(0) = x_{0-} + (\Delta x_0)$ και μηδενική αρχική ταχύτητα, είναι ταυτόσημη με το πραγματικό μέρος ω_r της ιδιοσυχνότητας του ασταθούς τρόπου ταλάντωσης, δηλαδή της $\omega = \omega_r + i\omega_i = 0.031 + i0.00023$. Η παραπάνω ομοιότητα παρουσιάζεται στο ένθετο της πάνω εικόνας του Σχ. 2.8, όπου το αποτέλεσμα της ODE υποδεικνύεται από την λευκή γραμμή. Ωστόσο, οι ταλαντώσεις έχουν αυξανόμενο πλάτος -- λόγω του μη μηδενικού φανταστικού μέρους της ιδιοσυχνότητας; αυτό γίνεται φανερό για μεγαλύτερους χρόνους και ως αποτέλεσμα έχει την "απόδραση" του σκοτεινού σολιτονίου από το ελλειπτικό σημείο.

Η δεξιά εικόνα του Σχ. 2.8 απεικονίζει το γεγονός ότι το σταθερό σημείο της ODE όπως προβλέπεται από την Εξ. (2.17) είναι στην πραγματικότητα μία ασταθής σπείρα σύμφωνα με την PDE ανάλυση: όντως σε αυτήν την εικόνα παρουσιάζεται η τροχιά του σολιτονίου, όπως προκύπτει από αριθμητική ολοκλήρωση της PDE, στο φασικό διάγραμμα $(dx_0/dt,\ x_0)$ για χρόνους μικρότερους από $t = 6000$ -- βλ. συνεχής μπλέ γραμμή. Η τροχιά του σολιτονίου μπορεί να προβλεφθεί πολύ καλά αναλυτικά -- βλ. αστερίσκους στη κάτω εικόνα του Σχ. 2.8 -- χρησιμοποιώντας την ακόλουθη έκφραση που περιγράφει την προς τα έξω σπειροειδής κίνηση του κέντρου του σολιτονίου:

$$x_0(t) = x_{0-} + (\Delta x_0)\exp(\omega_i t)\cos(\omega_r t), \tag{2.29}$$

όπου $x_{0-} = -0.66$ είναι η τοποθεσία του ελλειπτικού σταθερού σημείου όπως αυτό βρίσκεται από την ODE, $(\Delta x_0) = -0.1$ είναι η μετατόπιση του σολιτονίου λόγω του επιπρόσθετου ασταθούς ιδιοτρόπου (βλ. διακεκομμένη κόκκινη γραμμή στη δεξιά εικόνα του Σχ. 2.7), ενώ $\omega_r = 0.031$ και $\omega_i = 0.00023$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος της ιδιοσυχνότητας, όπως περιγράφεται παραπάνω. Η αρχική θέση του σολιτονίου είναι $x_0(0) = x_{0-} + (\Delta x_0) = -0.76$, ενώ η αρχική του ταχύτητα $dx_0(0)/dt = 0$ (βλ. τον σχετικό αστερίσκο στο σχήμα που υποδεικνύει το σημείο όπου η ασταθής σπείρα ξεκινάει). Ξεκάθαρα, η προσέγγιση για χρόνους μέχρι $t = 6000$, είναι πολύ καλή.

Συμπεραίνουμε με την παραπάνω ανάλυση ότι η παγίδευση του σολιτονίου στο ελλειπτικό σημείο δεν είναι δυνατή. Για αυτό το λόγο θα επικεντρωθούμε παρακάτω στην πιθανότητα παγίδευσης του σολιτονίου στο υπερβολικό σταθερό σημείο όταν αυτό προβλέπεται από τη μορφή του φαινομενικού δυναμικού μέσα από τη σωματιδιακή εικόνα.



Σχήμα 2.9: Χωροχρονική εξέλιξη πυκνότητας για ένα σολιτόνιο με διαφορετικές αρχικές ταχύτητες, το οποίο σκεδάζεται από τη διεπιφάνεια που χωρίζει την ασυνέχεια του δυναμικού ή της μη γραμμικότητας, στη θέση $x = 0$ [υποδεικνύεται από την διακεκομμένη (λευκή) γραμμή]. Η πρώτη και η τελευταία εικόνα αντιστοιχούν σε ολική μετάδοση και ανάκλαση αντίστοιχα; η μεσαία εικόνα αντιστοιχεί σε μερική ανάκλαση.

2.3 Δυναμική Σολιτονίων σε Βηματικές Γραμμικές ή Μη Γραμμικές ασυνέχειες

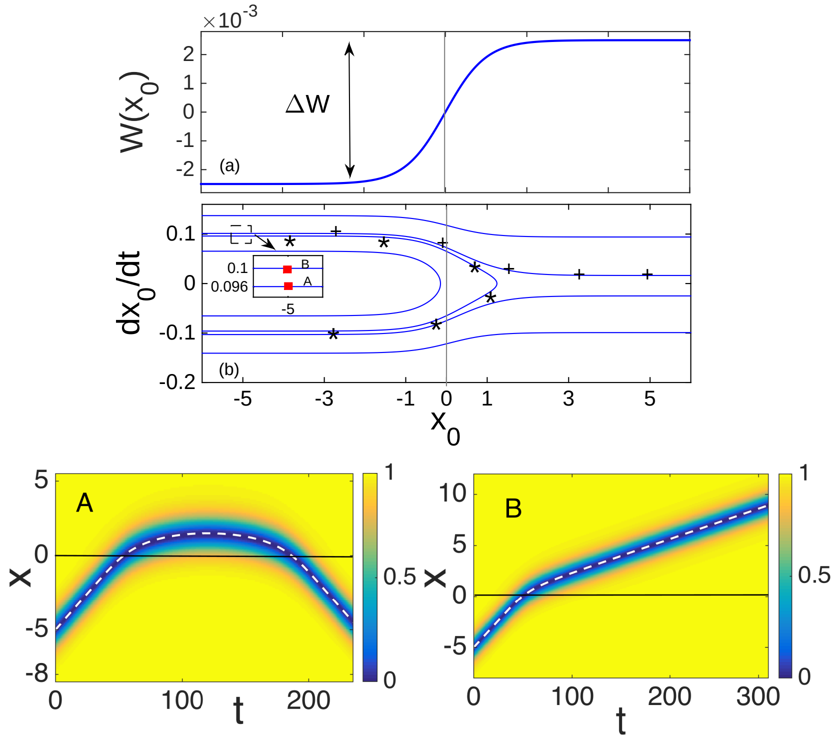
Αρχικά θα επικεντρωθούμε στο πρόβλημα σκέδασης στην περίπτωση όπου εμφανίζεται ασυνέχεια μόνο στο δυναμικό ή μόνο στη μη γραμμικότητα. Σε αυτή τη περίπτωση, το φαινομενικό δυναμικό έχει τη μορφή μίας υπερβολικής εφαπτομένης. Τυπικά σενάρια αυτής της διαδικασίας φαίνονται στο Σχ. 2.9; και αναφέρονται σε περιπτώσεις ολικής μετάδοσης (πάνω εικόνα), ολικής ανάκλασης (κάτω εικόνα) ή ακόμα και μερικής ανάκλασης.

2.3.1 Σκεδάσεις Σκοτεινών Σολιτονίων

Θα ασχοληθούμε αρχικά με την σκέδαση σκοτεινών σολιτονίων και θα επικεντρωθούμε στο σενάριο που αντιστοιχεί σε $A > 0$ και $B = 0$ (βλ. ένθετο I στο Σχ. 2.3). Το φαινομενικό δυναμικό έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχ. 2.10, ενώ το φασικό διάγραμμα που συνδέεται με αυτή τη περίπτωση απεικονίζεται στη μεσαία εικόνα του ίδιου σχήματος. Σύμφωνα με την σωματιδιακή εικόνα του σολιτονίου (που αναλύσαμε στη προηγούμενη παράγραφο), το σκοτεινό σολιτόνιο μπορεί είτε να ανακλαστεί ή να μεταδοθεί: εάν το σολιτόνιο έχει ταχύτητα $v = dx_0/dt$, και ωστόσο η κινητική του ενέργεια είναι

$$K = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\sin^2\phi \approx \frac{1}{2}\phi^2, \tag{2.30}$$

μικρότερη (μεγαλύτερη) από το πλάτος του φαινομενικού δυναμικού όπως υπολογίζεται από $\Delta W = W(+\infty) - W(-\infty)$ και φαίνεται επίσης στην πάνω εικόνα του Σχ. 2.10, τότε θα ανακλαστεί (μεταδοθεί). Η προσέγγιση που έχει γίνει ($\sin\phi \approx \phi$) κάνει το μοντέλο έγκυρο μικρές



Σχήμα 2.10: Η περίπτωση μίας βηματικής ασυνέχειας στο δυναμικό, $A = 0.01$ και $B = 0$, που αντιστοιχούν σε $V_{\mathrm{L}} = 0$, $V_{\mathrm{R}} = 0.01$, $\alpha_{\mathrm{R}} = \alpha_{\mathrm{L}}$, και $\mu_{\mathrm{L}} = 1$. Πάνω εικόνα (a): φαινομενικό δυναμικό $W(x_0)$; υποδεικνύεται επίσης η διαφορά της τιμής του δυναμικού $\Delta W = W(+\infty) - W(-\infty) = 4.99 \times 10^{-3}$. Μεσαία εικόνα (b): το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα; η ένθετη εικόνα δείχνει τις αρχικές συνθήκες (κόκκινα τετράγωνα A και B) που έχουν χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή των τροχιών που αντιστοιχούν σε ανάκλαση και μετάδοση αντίστοιχα, ενώ τα αστέρια και οι σταυροί υποδεικνύουν τα αντίστοιχα PDE αποτελέσματα. Οι κάτω εικόνες δείχνουν την χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας του σκοτεινού σολιτονίου για τις αρχικές συνθήκες που υποδεικνύονται στη μεσαία εικόνα, δηλαδή, $x_0 = -5$ και $\phi = 9.6 \times 10^{-2}$ (αριστερά), ή $\phi = 0.1$ (δεξιά); σημειώνεται επίσης ότι εδώ $\phi_{\mathrm{c}} = 0.099$.

ταχύτητες/κινητικές ενέργειες. Αυτή η θεώρηση οδηγεί σε $\phi < \phi_{\mathrm{c}}$ ή $\phi > \phi_{\mathrm{c}}$ για ανάκλαση ή μετάδοση, όπου η κρίσιμη τιμή ϕ_{c} της φάσης του σολιτονίου δίνεται από:

$$\phi_{\mathrm{c}} = \sqrt{2\Delta W}. \tag{2.31}$$

Ολοκληρώνοντας αριθμητικά την Εξ. (2.8), βρίσκουμε ότι το όριο μεταξύ των δύο περιπτώσεων είναι αρκετά "απότομο" και προβλέπεται με μεγάλη ακρίβεια από την Εξ. (2.31). Πράγματι, ας θεωρήσουμε το σενάριο, που φαίνεται στο Σχ. 2.10, και αντιστοιχεί σε τιμές παραμέτρων $V_{\mathrm{L}} = 0$, $V_{\mathrm{R}} = 0.01$, $\alpha_{\mathrm{R}} = \alpha_{\mathrm{L}}$ και $\mu_{\mathrm{L}} = 1$. Σε αυτή τη περίπτωση, βρίσκουμε ότι $\Delta W = 4.99 \times 10^{-3}$, το οποίο μας οδηγεί στην κρίσιμη τιμή (για ανάκλαση/μετάδοση) της φάσης του σολιτονίου $\phi_{\mathrm{c}} = 9.99 \times 10^{-2}$. Τότε, για ένα σολιτόνιο αρχικά τοποθετημένο στη θέση $x_0 = -5$, και για αρχικές ταχύτητες που αντιστοιχούν σε φασικές γωνίες $\phi = 9.6 \times 10^{-2}$ ή $\phi = 0.1$, παρατηρούμε ανάκλαση ή μετάδοση, αντίστοιχα. Οι αντίστοιχες τροχιές του σολιτονίου υποδεικνύονται στο φασικό διάγραμμα $(x_0, dx_0/dt)$ στη μεσαία εικόνα του Σχ. 2.10 και στα χωροχρονικά σχήματα όπου και φαίνεται η εξέλιξη της πυκνότητας του σολιτονίου, στις κάτω εικόνες του ίδιου σχήματος (βλ. τις τροχιές Α και Β για την περίπτωση της ανάκλασης και της μετάδοσης αντίστοιχα). Πρέπει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι τα αστέρια και οι σταυροί στην μεσαία εικόνα υποδεικνύουν τα αποτελέσματα από την αριθμητική ολοκλήρωση της μερικώς διαφορίσιμης εξίσωσης (PDE), Εξ. (2.5), ενώ οι (λευκές) διακεκομμένες γραμμές στις κάτω εικόνες παρουσιάζουν τα αποτελέσματα από την συνήθης διαφορική εξίσωση (ODE), Εξ. (2.17). Προφανώς, η συμφωνία μεταξύ των θεωρητικών προβλέψεων και των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι πολύ καλή.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός, ότι στην περίπτωση όπου η μη γραμμικότητα αλλάζει και αυτή τιμή στη θέση $x = 0$ ($B \neq 0$), και όταν $B > -A$ (για $A > 0$) ή $B < -A$ (για $A < 0$), η μορφή του φαινομενικού δυναμικού είναι παρόμοια με αυτήν που φαίνεται στην πάνω εικόνα του Σχ. 2.10. Σε αυτές τις περιπτώσεις, αντίστοιχα αποτελέσματα (τα οποία δεν παρουσιάζονται στη παρούσα διατριβή) είναι ποιοτικά παρόμοια με αυτά που παρουσιάστηκαν παραπάνω (για $A \neq 0$ και $B = 0$); Σε αυτές τις περιπτώσεις επίσης προσδιορίζεται με ακρίβεια το όριο της ταχύτητας προκειμένου να έχουμε ανάκλαση/μετάδοση.

2.3.2 Σκεδάσεις Φωτεινών Σολιτονίων

Υπάρχει ακόμα ένα τυπικό σενάριο σκέδασης το οποίο όμως δεν παρατηρήθηκε προηγουμένως, διότι συμβαίνει μόνο στη περίπτωση όπου το μήκος σκέδασης αλλάζει επιπρόσθετα και πρόσημο. Για τη μελέτη της δυναμικής σε αυτή τη περίπτωση, υποθέτουμε, ότι ένα φωτεινό σολιτόνιο βρίσκεται στην ελκτική περιοχή ($x < 0$) και κινείται προς την απωστική περιοχή ($x > 0$) και κατά συνέπεια σκεδάζεται στην διεπιφάνεια που σχηματίζεται, στη θέση $x = 0$.

Για λόγους ευκολίας της θεωρητικής ανάλυσης που θα ακολουθήσει θεωρούμε ότι το μήκος σκέδασης στην Εξ.(2.5) έχει την μορφή (οι μετασχηματισμοί που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή της αδιάστατης εξίσωσης παραμένουν οι ίδιοι):

$$\alpha(x) = (1/2)[(\alpha_{\mathrm{R}} - \alpha_{\mathrm{L}}) + (\alpha_{\mathrm{L}} + \alpha_{\mathrm{R}})\tanh(x/w)], \tag{2.32}$$

όπου W είναι η χωρική κλίμακα μέσω της οποίας γίνεται η μετάβαση των ασυμπτωτικών τιμών του μήκους σκέδασης από $-\alpha_{\mathrm{L}} < 0$ (για $x/w \to -\infty$) στην $\alpha_{\mathrm{R}} > 0$ (για $x/w \to +\infty$).

Για μία ακόμα φορά υποθέτουμε, σαν μία πρώτη προσέγγιση, ότι το τετραγωνικό δυναμικό μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο ($V(x) = 0$). Το φωτεινό σολιτόνιο το οποίο διαδίδεται στην ελκτική περιοχή έχει την μορφή:

$$u(x,t) \;=\; \eta \mathrm{sech}\left[\eta\left(x - x_0(t)\right)\right] \exp\left(i\left(kx - \omega t\right)\right), \tag{2.33}$$

όπου η, k, x_0 και ω αντιστοιχούν στο πλάτος, ταχύτητα, αρχική θέση και συχνότητα του σολιτονίου. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε αριθμητικά την Εξ. (2.5) με αρχική συνθήκη την εξής:

$$u(x,0) \;=\; \eta \mathrm{sech}\left[\eta\left(x - x_0(0)\right)\right] \exp\left(ikx\right) \exp\left(i\phi\right), \tag{2.34}$$

και παρατηρούμε την δυναμική εξέλιξη της σκεδασής του.

Όπως ήδη αναφέραμε, εκτός από ολική ανάκλαση και μετάδοση όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, παρατηρούμε και μερική ανάκλαση, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.9 (μεσαία εικόνα); αυτό συμβαίνει λόγω του ότι το μήκος σκέδασης αλλάζει και πρόσημο μετατρέπωντας την περιοχή $x > 0$ απωστική όπου και τα φωτεινά σολιτόνια παύουν να είναι λύσεις. Έτσι ακόμα και στην περίπτωση ολικής ή μερικής μετάδοσης του, το μεταδιδόμενο κυματοπακέτο διασπείρεται γρήγορα καθώς εισέρχεται στην απωστική περιοχή, με την ταχύτητά του να είναι περίπου η ίδια με αυτήν που είχε στην ελκτική περιοχή.

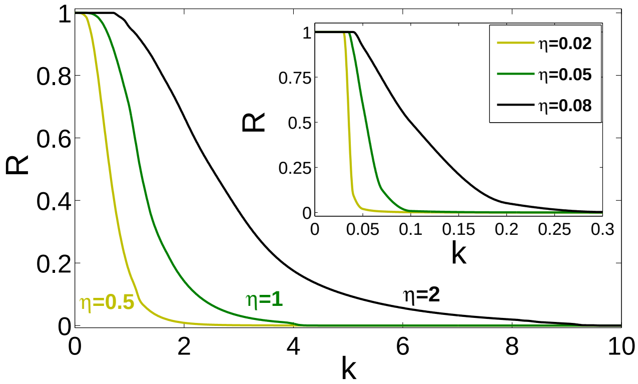
Η ανακλαστικότητα του σολιτονίου μπορεί να υπολογισθεί αριθμητικά με τον καθορισμό του συντελεστή ανάκλασης R, ο οποίος ορίζεται από τον αριθμό των μορίων τα οποία παραμένουν στην ελκτική περιοχή $x < 0$ ως προς τον αριθμό των συνολικών μορίων που είχε το αρχικό σολιτονίο. Λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι ο τελευταίος όρος δίνεται από την εξής σχέση $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,0)|^2 dx = 2\eta$, μπορούμε να εκφράσουμε το R ως:

$$R = \frac{1}{2\eta} \int_{-\infty}^{0} |u(x,t_\star)|^2 dx. \tag{2.35}$$

Ως $t_\star$ ορίζουμε ένα χρόνο αρκούντως μεγάλο έτσι ώστε τα μεταδιδόμενα και τα ανακλώμενα μέρη του σολιτονίου να έχουν διαχωριστεί μεταξύ τους; ο διαχωρισμός αυτός έχει οριστεί να έχει έκταση $\Delta x \approx kt_\star$ γύρω από το $x = 0$ και, κατά συνέπεια, το $t_\star$ επιλέγεται κατάλληλα για κάθε διαφορετικό αριθμητικό πείραμα.

Στο Σχ. 2.11 φαίνεται ο συντελεστής ανάκλασης ως συνάρτηση της αρχικής ταχύτητας του σολιτονίου (για $0 \leq k \leq 10$) για διαφορετικές τιμές του πλάτους του σολιτονίου η. Παρατηρούμε ότι όταν το η αυξάνεται, οι αντίστοιχες καμπύλες του συντελεστή σκέδασης μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές ταχυτήτων και γίνονται ομαλότερες: η μετάβαση από την ολική σκέδαση στην ολική μετάδοση γίνεται λιγότερο απότομη. Αυτό σημαίνει ότι η περιοχή των ταχυτήτων για την οποία συμβαίνει μερική μετάδοση και σκέδαση (όπως απεικονίζεται στη μεσαία εικόνα του Σχ. 2.9) μεγαλώνει με την αύξηση του αρχικού πλάτους του σολιτονίου.

Από την προηγούμενη συζήτηση, γίνεται φανερό ότι το σολιτόνιο κρατάει τον σωματιδιακό του χαρακτήρα μόνο στην περίπτωση της ολικής ανάκλασης (βλ. κάτω εικόνα από το Σχ. 2.9): στις περιπτώσεις ολικής και μερικής μετάδοσης, το σολιτόνιο δεν αποτελεί λύση στην απωστική περιοχή και τελικά καταστρέφεται. Μπορούμε γι'αυτό το λόγο να εξάγουμε την σωματιδιακή εικόνα, για την περιγραφή της δυναμικής του σολιτονίου στην περιοχή της ολικής ανάκλασης, και να περιγράψουμε αναλυτικά την τροχιά και τις ανακλαστικές ιδιότητες του. Η θεωρητική προσέγγιση που έχει γίνει για την περιγραφή της κίνησης του κέντρου μάζας του σολιτονίου αποτελεί μία προέκταση της μεθοδολογίας της εργασίας [152], όπου είχε μελετηθεί η περίπτωση βηματικής αλλαγής του δυναμικού.



Σχήμα 2.11: Ο συντελεστής ανάκλασης R ως συνάρτηση της αρχικής ταχύτητας k, για διαφορετικές τιμές του πλάτους του σολιτονίου η. Το πλαίσιο δείχνει περιπτώσεις που αναφέρονται σε σολιτόνια με μικρό πλάτος.

Ξεκινάμε με τον ορισμό του κέντρου του σολιτονίου ο οποίος δίνεται απο:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x|u(x,t)|^2 dx, \tag{2.36}$$

και σχετίζεται με την ορμή του σολιτονίου $P = (i/2)\int_{-\infty}^{\infty}(uu_x^* - u^* u_x)\,dx$ μέσω της εξίσωσης $d\overline{x}/dt = P$. Έτσι, παραγωγίζοντας την τελευταία εξίσωση ως προς το χρόνο t, και χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.5), καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση κίνησης για το κέντρο του σολιτονίου $\overline{x}$:

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{da(x)}{dx}|u(x,t)|^4 dx. \tag{2.37}$$

Το ολοκλήρωμα στην δεξιά πλευρά της Εξ. (2.37) μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά, προσεγγίζοντας την $\alpha(x)$ [βλ. Εξ. (2.32)] με μία βηματική συνάρτηση στην οριακή περίπτωση όπου $w \ll 1/\eta$. Τότε, το $d\alpha(x)/dx$ μπορεί να αντικατασταθεί από μία δέλτα συνάρτηση, και ακολούθως αφού χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω προσεγγίσεις, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

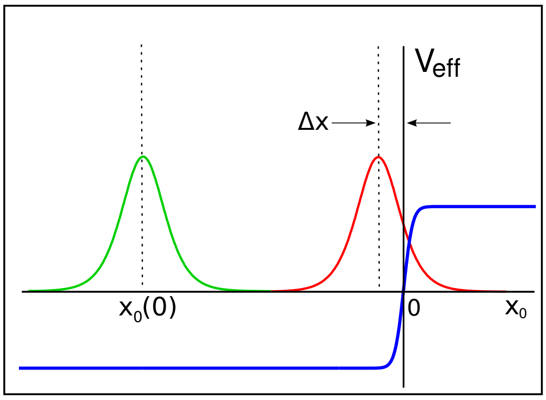
$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} \approx -\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_{\rm R}}{\alpha_{\rm L}}\right)\eta^4 \text{sech}^4\left(\eta x_0(t)\right). \tag{2.38}$$

Στη συνέχεια παίρνοντας υπ΄όψιν ότι το κέντρο του σολιτονίου συνδέεται με το κέντρο μάζας μέσω της σχέσης $\overline{x} = 2\eta x_0$, μπορούμε να εκφράσουμε την Εξ. (2.38) ως εξής:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = -\frac{dV_{\rm eff}}{dx_0}, \tag{2.39}$$

όπου το φαινομενικό δυναμικό $V_{\rm eff}$ δίνεται από:

$$V_{\rm eff}(x_0) = \frac{1}{12}\left(1+\frac{\alpha_{\rm R}}{\alpha_{\rm L}}\right)\eta^2 \times \left[3\tanh(\eta x_0) - \tanh^3(\eta x_0)\right]. \tag{2.40}$$

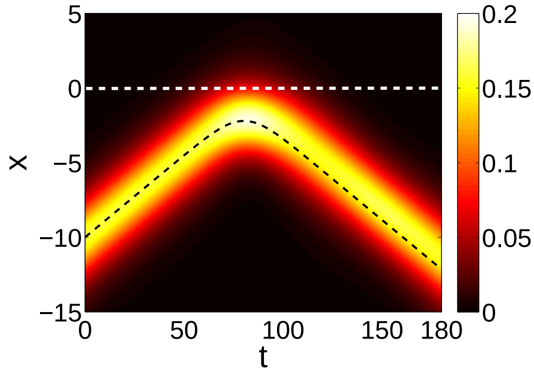


Σχήμα 2.12: Σχέδιο που δείχνει το φαινομενικό δυναμικό V_{eff} (μπλέ γραμμή) ως συνάρτηση του x_0. Απεικονίζεται επίσης το σολιτόνιο, αρχικά τοποθετημένο στο $x_0(0)$ [αριστερή (πράσινη) καμπύλη], μακριά από τη θέση όπου η αλλαγή της τιμής του μήκους σκέδασης λαμβάνει χώρα, και σε κοντινή απόσταση από την θέση αυτή [δεξιά (κόκκινη) καμπύλη], όπου η θέση του κέντρου είναι $x_0(|\Delta x|)$.

Η εξίσωση (2.39) δείχνει ότι το σολιτόνιο μπορεί να μελετηθεί (θεωρηθεί) σαν ένα Νευτώνιο σωμάτιο με μοναδιαία μάζα, το οποίο κινείται παρουσία ενός fainomeniko;y δυναμικού V_{eff}; το τελευταίο, έχει την μορφή υπερβολικής εφαπτομένης, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.12. Έτσι, σύμφωνα με τη σωματιδιακή εικόνα, το σολιτόνιο θα υποστεί ολική ανάκλαση, εάν η αρχική του ενέργεια E_{s} είναι μικρότερη από το "ύψος" του εμποδίου. Από τη στιγμή που το σολιτόνιο αλληλεπιδρά με το φαινομενικό δυναμικό μόνο μέσω της "ουράς" του, το κέντρο του σολιτονίου αναμένεται να μη φτάσει ποτέ στην διεπιφάνεια $x = 0$, αλλά την πλησιάζει μόνο μέχρι την απόσταση που ισοδυναμεί με το μισό εύρος του σολιτονίου στη περιοχή όπου έχει το μισό πλάτος (HWHM); η παραπάνω κατάσταση σχηματικά παρουσιάζεται στο Σχ. 2.12. Έτσι, λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι το HWHM του σολιτονίου, το οποίο συμβολίζεται με Δx, συνδέεται με το ανάστροφο πλάτος η μέσω της εξίσωσης $\Delta x = \ln(1+\sqrt{2})/\eta$, μπορούμε να βρούμε ότι το φαινομενικό ύψος του εμποδίου δίνεται από τη σχέση $V_{\text{eff}}(\Delta x) - V_{\text{eff}}(x_0(0))$, όπου $x_0(0)$ είναι η αρχική θέση του σολιτονίου. Σύμφωνα με τον παραπάνω ισχυρισμό, το σολιτόνιο θα παθαίνει ολική ανάκλαση εάν η αρχική ενεργειά του είναι μικρότερη (ή ίση) με το ύψος του φαινομενικού εμποδίου, ως εξής:

$$E_{\text{s}} \equiv \frac{1}{2}k^2 + V_{\text{eff}}(x_0(0)) \leq V_{\text{eff}}(\Delta x) \tag{2.41}$$

Έχουμε ελέγξει την εγκυρότητα της ανάλυσης αυτής συγκρίνοντας, την τροχιά του κέντρου μάζας του σολιτονίου μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσης την Εξ. (2.8), στην περίπτωση ολικής ανάκλασης, με την προσεγγιστική αναλυτική λύση από την Εξ. (2.39). Ένα τυπικό παράδειγμα, που αντιστοιχεί σε ένα σολιτόνιο πλάτους $\eta = 0.4$ και ταχύτητας $k = 0.1$, παρουσιάζεται στο Σχ. 2.13. Η χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας του σολιτονίου παρουσιάζεται, με τα αντίστοιχα αναλυτικά αποτελέσματα, από την Εξ. (2.39), να υποδεικνύονται στο ίδιο σχήμα με τη διακεκομμένη γραμμη. Ας σημειωθεί επίσης ότι παρόμοια αποτελέσματα έχουμε βρει για τιμές σολιτονικών πλατών $0.2 < \eta < 2$. Μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι η λευκή διακεκομμένη

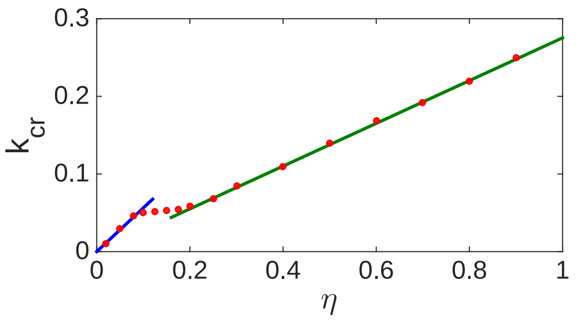


Σχήμα 2.13: Χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας του σολιτονικού κέντρου. Το φωτεινό σολιτόνιο αρχικά τοποθετείται στο $x_0(0) = -10$, ενώ το πλάτος και η ταχύτητα του είναι $\eta = 0.4$ και $k = 0.1$. Η διακεκομμένη (μαύρη) γραμμή δείχνει το αναλυτικό αποτέλεσμα της Εξ. (2.39), ενώ η οριζόντια (λευκή) γραμμή υποδεικνύει τη θέση $x = 0$.

γραμμή ακολουθεί με μεγάλη ακρίβεια την εξέλιξη του σολιτονικού κέντρου. Η μικρή ασυμφωνία μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: η "ουρά" του φωτεινού σολιτονίου στην περίπτωση ολικής ανάκλασης (βλ. Σχ. 2.12 και 2.13), αλληλεπιδρά με την διεπιφάνεια, και τελικά επιστρέφει στην ελκτική περιοχή. Το φαινόμενο αυτό το οποίο δεν μπορεί να εξηγηθεί μέσω της σωματιδιακής προσέγγισης προκαλεί μία μικρή μετατόπιση στη τροχιά του σολιτονικού κέντρου. Έτσι, η αναλυτική τροχιά που εξάγεται από την Εξ. (2.37) θα έχει αυτή τη μικρή ασυμφωνία για κάθε αρχικό πλάτος η του σολιτονίου. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.41), μπορούμε να εξάγουμε αναλυτικά την κρίσιμη τιμή για την αρχική ταχύτητα $k_{\rm cr}$ [όταν ισχύει δηλαδή η ισότητα της Εξ. (2.41)], για την οποία συμβαίνει ολική ανάκλαση, σαν συνάρτηση του πλάτους του σολιτονίου και των παραμέτρων που καθορίζουν τις τιμές του μήκους σκέδασης. Το αποτέλεσμα είναι:

$$k_{\rm cr} \;=\; \left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{\alpha_{\rm R}}{\alpha_{\rm L}}\right)(1+C)\right]^{1/2}\eta, \tag{2.42}$$

όπου η σταθερά ορίζεται ως $C = (1/2)[\,3\tanh(\eta\Delta x) - \tanh^3(\eta\Delta x)]$ και $\eta\Delta x = -\ln(1+\sqrt{2}) \approx -0.88$. Από την Εξ. (2.42) φαίνεται ότι υπάρχει μια γραμμική εξάρτηση της $k_{\rm cr}$ με το η, η οποία επιβεβαιώνεται από τα αριθμητικά αποτελέσματα. Όντως όπως φαίνεται στο Σχ. 2.14, για σολιτόνια με αρκούντως μεγάλα πλάτη, π.χ., για $\eta \gtrsim 0.2$, η αναλυτική πρόβλεψη [η οποία παρουσιάζεται με τη συνεχή (πράσινη) ευθεία γραμμή] βρίσκεται σε εξαιρετική συμφωνία με τα αριθμητικά αποτελέσματα για την $k_{\rm cr}$ [τα οποία παρουσιάζονται με τις (κόκκινες) κουκκίδες]. Ας σημειωθεί ότι οι τιμές των αριθμητικών αποτελεσμάτων για την $k_{\rm cr}$ υπολογίσθηκαν ώστε οι αντίστοιχες τιμές του συντελεστή ανάκλασης να είναι μικρότερες από την μονάδα κατά ένα παράγοντα της τάξης 10^{-3}; ωστόσο, οφείλουμε να παρατηρήσουμε εδώ ότι τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται είναι ασθενώς ευαίσθητα στην επιλογή του συγκεκριμένου ορίου. Για πιο ασθενή σολιτόνια (με μικρότερο αρχικό πλάτος) αναμένεται ότι η αναλυτική προσέγγιση που περιγράφεται παραπάνω θα είναι λιγότερο ακριβής: αυτό συμβαίνει διότι για πολύ μικρές του



Σχήμα 2.14: Η κρίσιμη ταχύτητα $k_{\rm cr}$, κάτω από την οποία ολική ανάκλαση συμβαίνει, σαν συνάρτηση του πλάτους του σολιτονίου η. Οι (κόκκινες) κουκίδες απεικονίζουν τα αριθμητικά αποτελέσματα, ενώ η αριστερη (μπλέ) και η δεξιά (κόκκινη) γραμμή αντιστοιχούν στις αναλυτικές προβλέψεις των Εξ. (2.46) και (2.42), αντίστοιχα. Οι παραμετρικές τιμές είναι οι εξής: $\alpha_{\rm L}=1$, $\alpha_{\rm R}=0.95$ και $W=0.01$.

η, η μη γραμμικότητα γίνεται πολύ μικρή, και σε αυτή τη περίπτωση μια γραμμική θεωρητική προσέγγιση θα ήταν πιο ακριβής. Σε αυτή τη περίπτωση το σολιτόνιο μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα γραμμικό κυματοπακέτο, το οποίο σκεδάζεται από ένα φαινομενικό δυναμικό; το τελευταίο προκύπτει ως αποτέλεσμα της βηματικής αλλαγής του μήκους σκέδασης. Τότε, ο συντελεστής ανάκλασης προσεγγίζεται από το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα [156] ως εξής:

$$R = 1 - \frac{4\sqrt{(E-V_0)E}}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^2}, \tag{2.43}$$

όπου τα E και V_0 δηλώνουν αντίστοιχα, την ενέργεια του κυματοπακέτου και το ύψος του φαινομενικού δυναμικού. Ας σημειωθεί εδώ ότι η Εξ. (2.43) ισχύει για επίπεδα κύματα; ωστόσο εξακολουθεί να παρέχει μια καλή προσέγγιση στην περιπτωσή μας όσο το αντίστροφο πλάτος του σολιτονίου η^{-1} είναι αρκούντος μεγάλο, δηλ. για πολύ ασθενή σολιτόνια. Στη περίπτωση αυτή η ενέργεια του σολιτονίου δίνεται από (βλέπε, π.χ., αναφορά [93]):

$$E = \eta k^2 - \frac{1}{3}\eta^3, \tag{2.44}$$

ενώ η ένταση του φαινομενικού δυναμικού δίνεται από:

$$V_0 \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)|u|^4 dx = \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_{\rm R}}{\alpha_{\rm L}}-1\right)\eta^3. \tag{2.45}$$

Τότε, ολική ανάκλαση, δηλ. $R=1$ όπως προβλέπει η Εξ. (2.43), συμβαίνει για $E=V_0$; η τελευταία εξίσωση οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα για την κρίσιμη ταχύτητα $k_{\rm cr}$:

$$k_{\rm cr} \;=\; \left(\frac{\alpha_{\rm R}}{3\alpha_{\rm L}}\right)^{1/2}\eta. \tag{2.46}$$

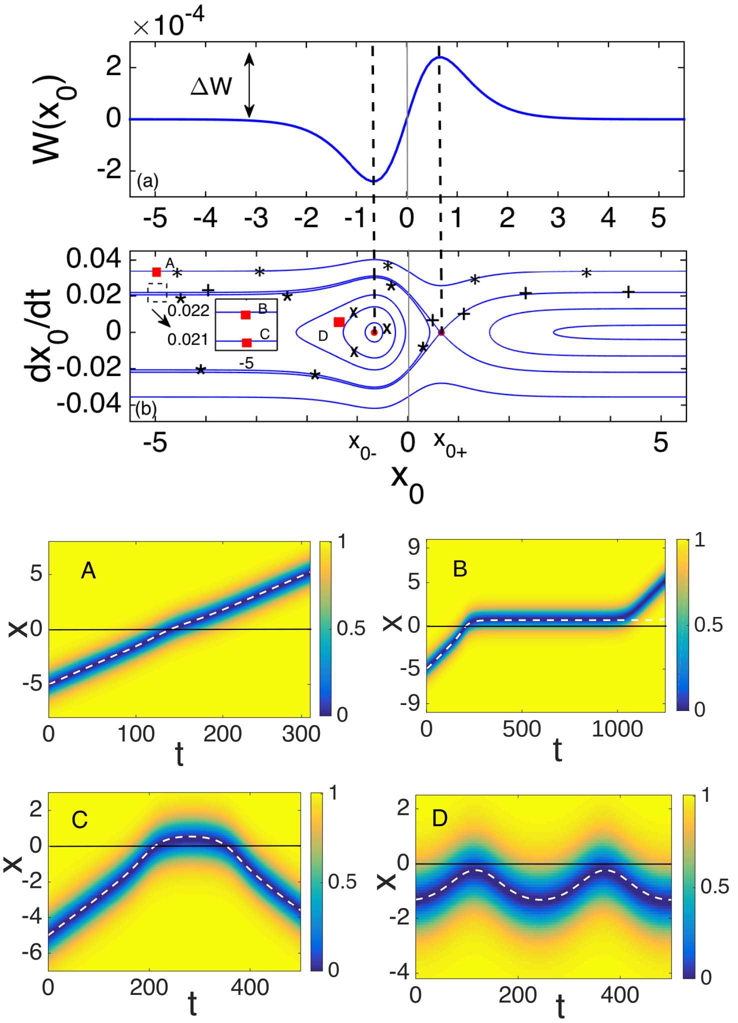
Το παραπάνω προσεγγιστικό αναλυτικό αποτέλεσμα, για σολιτόνια μικρού πλάτους δείχνει επίσης μία γραμμική εξάρτηση της $k_{\rm cr}$ στο η και βρίσκεται σε πολύ καλή συμφωνία με τα αριθμητικά αποτελέσματα, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.14 για $\eta \lesssim 0.1$.

Συνοψίζοντας, έχουμε προσεγγίσει με μεγάλη ακρίβεια την περίπτωση για μικρά η μέσω γραμμικής θεωρίας καθώς και τις περιπτώσεις σολιτονίων με μεγάλα πλάτη η μέσω της σωματιδιακής θεωρίας για τα σολιτόνια (μη γραμμική θεωρία), και παρέχουμε επίσης αριθμητικά αποτελέσματα και ανάμεσα σε αυτά τα δύο όρια όπως δείχνει το Σχ. 2.14.

2.4 Δυναμική Σολιτονίων σε συνδυασμό Γραμμικών και Μη Γραμμικών Βηματικών Ασυνεχειών

Η αρχική ιδέα στη μελέτη του συνδυασμού των γραμμικών και μη γραμμικών χωρικών ασυνεχειών ήταν να προβλέψουμε και να μελετήσουμε αναλυτικά φαινόμενα παγίδευσης. 'Ετσι αφού στα προηγούμενα υποκεφάλαια είδαμε τις τυπικές περιπτώσεις ανάκλασης και μετάδοσης υλικών κυμάτων θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου υπάρχει βηματική χωρική ασυνέχεια τόσο στο δυναμικό όσο και στη μη γραμμικότητα, (δηλ., $A, B \neq 0$), και στην μορφή του φαινομενικού δυναμικού παρουσιάζονται ακρότατα. Μία παραμετρική περίπτωση όπου αυτό συμβαίνει και θα μελετήσουμε στη συνέχεια είναι αυτή που αντιστοιχεί σε $A = 0.01$ και $B = -0.015$ (που αντιστοιχούν στις παραμετρικές τιμές $V_{\rm L} = 0$, $V_{\rm R} = 0.01$, $\alpha_{\rm R}/\alpha_{\rm L} = 0.985$, και $\mu_{\rm L} = 1$). Να σημειωθεί ότι σε αυτή περίπτωση οι ασυμπτωτικές τιμές του φαινομενικού δυναμικού τείνουν στο μηδέν, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.15; ωστόσο τα αποτελέσματα είναι ποιοτικά παρόμοια με τις περιπτώσεις όπου οι ασυμπτωτικές τιμές του $W(x_0)$ παίρνουν άλλες θετικές (ή αρνητικές) τιμές.

Η μορφή του φαινομενικού δυναμικού τώρα υποδηλώνει την ύπαρξη ενός ελλειπτικού και ενός υπερβολικού σταθερού σημείου, τα οποία βρίσκονται στα σημεία $x_0 \approx \mp 0.65$ αντίστοιχα. Σε αυτή τη περίπτωση επίσης, μπορεί να αναγνωρισθεί ένα κατώφλι ενέργειας ΔW, το οποίο ορίζεται ως $\Delta W = W(x_{0+}) - W(-\infty) = W(x_{0+})$, και πρέπει να ξεπεραστεί από την κινητική ενέργεια του σολιτονίου έτσι αυτό να μπορεί να μεταδοθεί (στις υπολοιπες περιπτώσεις όπου η κινητικη του ενέργεια είναι μικρότερη από αυτό το όριο τότε το σολιτόνιο ανακλάται). Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων, βρίσκουμε ότι $\Delta W = 2.4 \times 10^{-4}$ και, έτσι σύμφωνα με την Εξ. (2.31), η κρίσιμη φασική γωνία για μετάδοση/ανάκλαση είναι $\phi_{\rm c} \approx 0.022$. Στις αριθμητικές προσομοιώσεις, θεωρούμε ένα σολιτόνιο με αρχική θέση και αρχική φασική γωνία $x_0 = -5$ και $\phi = 0.034 > \phi_{\rm c}$, αντίστοιχα (βλ. το σημείο A στο φασικό διάγραμμα που υπάρχει στην δεύτερη εικόνα του Σχ. 2.15), και πράγματι, το σολιτόνιο μεταδίδεται διαμέσου του εμποδίου έντασης ΔW που εμφανίζεται στη μορφή του φαινομενικού δυναμικού. Η αντίστοιχη τροχιά του σολιτονίου (ξεκινώντας από το σημείο A) φαίνεται στη δεύτερη εικόνα του Σχ. 2.15. Οι αστερίσκοι κατά μήκος της τροχιάς, όπως επίσης και στο χωροχρονικό διάγραμμα A του ίδιου σχήματος, υποδηλώνουν τα αποτελέσματα της PDE τα οποία πάρθηκαν ύστερα



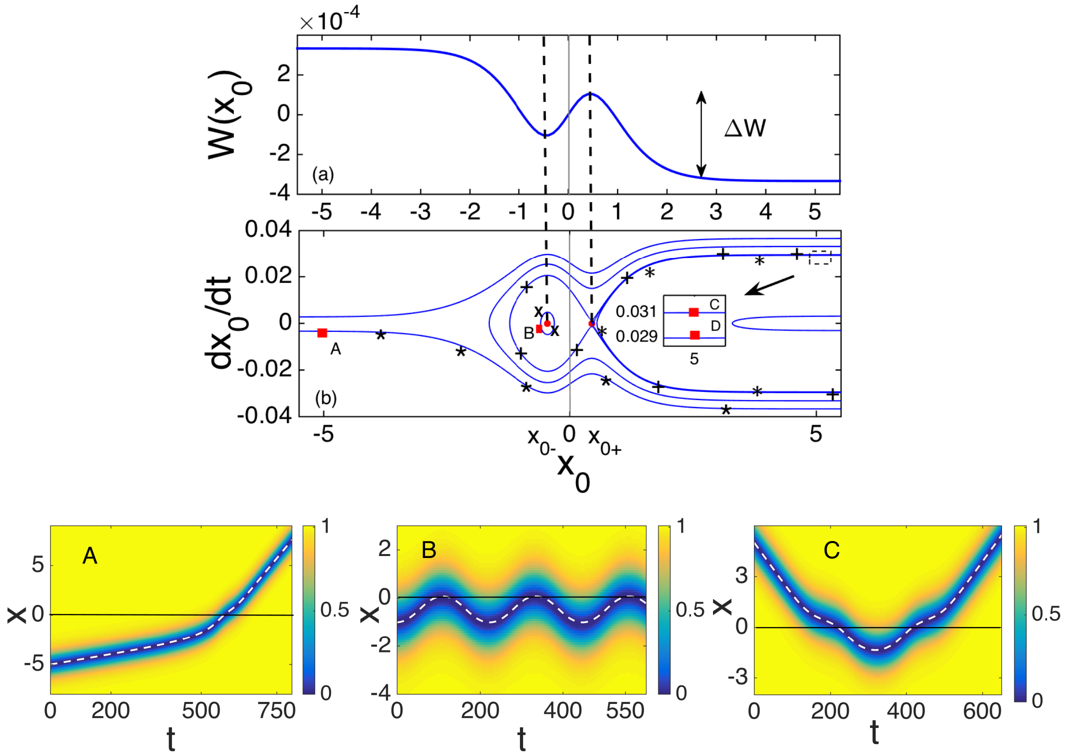
Σχήμα 2.15: Παρόμοια με το Σχ. 2.10, αλλά στη περίπτωση γραμμικής και μη γραμμικής βηματικής ασυνέχειας, με $B = -(3/2)A$, δηλ., $A = 0.01$ και $B = -0.015$, που αντιστοιχεί σε $V_{\mathrm{L}} = 0$, $V_{\mathrm{R}} = 0.01$, $\alpha_{\mathrm{R}}/\alpha_{\mathrm{L}} = 0.985$, και $\mu_{\mathrm{L}} = 1$. Οι πρώτες δύο εικόνες δείχνουν το φαινομενικό δυναμικό $W(x_0)$ και το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα, αντίστοιχα; σε αυτή τη περίπτωση βλέπουμε τη παρουσία ενός ελλειπτικού και ενός υπερβολικού σταθερού σημείου στα σημεία $x_0 \approx \pm 0.65$ (βλ. κάθετες διακεκομμένες γραμμές). Στο φασικό διάγραμμα, οι αρχικές συνθήκες -- οι οποίες σημειώνονται με κόκκινα τετράγωνα -- στα σημεία A ($x_0 = -5$, $\phi = 0.034$), B ($x_0 = -5$, $\phi = 0.022$), C ($x_0 = -5$, $\phi = 0.021$) και D ($x_0 = -1.3$, $\phi = 0.002$) οδηγούν το σολιτόνιο σε μετάδοση, οιονεί-παγίδευση, ανάκλαση και ταλαντώσεις γύρω από το ελλειπτικό σταθερό σημείο, αντίστοιχα; οι αστερίσκοι, συν, σταυροί και αστέρια υποδηλώνουν τα αποτελέσματα από την PDE. Τα τέσσερα χωροχρονικά διαγράμματα δείχνουν την εξέλιξη της πυκνότητας του σολιτονίου; και πάλι, οι διακεκομμένες (λευκές) καμπύλες δείχνουν τα αποτελέσματα της ODE.

από την αριθμητική ολοκλήρωση της Εξ. (2.5); ενώ στην περίπτωση του Σχ. 2.10, η (λευκή) διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στα αποτελέσματα της ODE.

Για να μελετήσουμε την πιθανότητα παγίδευσης του σολιτονίου, χρησιμοποιήσαμε επίσης μία αρχική συνθήκη στο σταθερό κλάδο, με κατεύθυνση προς το υπερβολικό σταθερό σημείο, και συγκεκριμένα για τις τιμές $x_0 = -5$ και $\phi = \phi_{\mathrm{c}} \approx 0.022$ (σημείο B στη δεύτερη εικόνα του Σχ. 2.15). Σε αυτή τη περίπτωση, το σολιτόνιο φθάνει στην θέση του υπερβολικού σημείου (βλ. τον βρόχο ο οποίος έχει μαρκαριστεί από τα συν) και φαίνεται ότι παγιδεύεται εκεί; ωστόσο, η παγίδευση του κρατάει για πεπερασμένο χρόνο (για $t \approx 600$). Στο επίπεδο της PDE, αυτό μπορεί να κατανοηθεί από το γεγονός ότι μία τέτοια σύνθεση (δηλ., ένα στάσιμο σολιτόνιο τοποθετημένο ακριβώς στο υπερβολικό σημείο) είναι ασταθής, σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στο Υποκεφάλαιο 2.2.3. Μετά το σολιτόνιο δραπετεύει και κινείται προς την περιοχή $x > 0$, ακολουθώντας την τροχιά που υποδεικνύουν τα συν για $x > x_{0+}$ (εδώ τα συν δείχνουν τα αποτελέσματα της PDE). Το αντίστοιχο χωροχρονικό διάγραμμα B, στη τρίτη εικόνα του Σχ. 2.15, δείχνει την εξέλιξη της πυκνότητας του σκοτεινού σολιτονίου. Να σημειωθεί ότι σε αυτή τη περίπτωση, τα αποτελέσματα από την ODE (δηλ. αυτά που φαίνονται με την λευκή διακεκομμένη γραμμή) είναι ακριβή μόνο μέχρι την στιγμή της παγίδευσης, καθώς μικρές διαταραχές μέσα στο άπειρο διαστάσεων σύστημα μπορεί να καταστρέψει την ευαίσθητη ισορροπία του ασταθούς σταθερού σημείου.

Για την ίδια μορφή του φαινομενικού δυναμικού, χρησιμοποιήσαμε επίσης αρχικές συνθήκες που οδηγούν το σολιτόνιο σε ανάκλαση και ταλαντώσεις γύρω από το ελλειπτικό σημείο. Πιο συγκεκριμένα, επιλέξαμε ως πρώτη αρχική συνθήκη τις τιμές: $x_0 = -5$ και $\phi = 0.021 < \phi_c$, όπως επίσης και μία αρχική συνθήκη πιο κοντά στην ασυνέχεια, δηλαδή για τιμές: $x_0 = -1.3$ και $\phi = 0.002$. Οι ανωτέρω συμβολίζονται με (κόκκινα) τετράγωνα C και D στη δεύτερη εικόνα του Σχ. 2.15. Σχετικές τροχιές στο φασικό διάγραμμα, όπως επίσης κια τα αντίστοιχα αποτελέσματα PDE (βλ. αστέρια και σταυρούς), μπορούν επίσης να βρεθούν στην ίδια εικόνα ενώ τα χωροχρονικά διαγράμματα C και D στην κάτω εικόνα του Σχ. 2.15 δείχνουν την εξέλιξη της πυκνότητας του σολιτονίου. Παρατηρείται ότι για τιμή της φασικής γωνίας ελάχιστα μικρότερη ($\phi = 0.021$), από την κρίσιμη το σολιτόνιο και πάλι παγιδεύεται στο υπερβολικό σταθερό σημείο αλλά αυτή τη φορά για σημαντικά πολυ μικρότερο χρόνο (για $t \approx 150$). Από την άλλη πλευρά, όταν το σολιτόνιο αρχικά τοποθετείται πιο κοντά στην ασυνέχεια που υπάρχει και με μικρότερη αρχική ταχύτητα, εκτελεί ταλαντώσεις, ακολουθώντας μία περιοδική τροχια όπως φαίνεται στην δεύτερη εικόνα του Σχ. 2.15.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις βρίσκουμε να υπάρχει πολύ καλή συμφωνία ανάμεσα στις αναλυτικές προβλέψεις και στα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα. Παρόμοια αποτελέσματα βρίσκουμε επίσης και για άλλες μορφές του δυναμικού όπως φαίνεται για παράδειγμα στο Σχ. 2.16 (βλ. επίσης την ένθετη εικόνα III του Σχ. 2.3). Για αυτή τη μορφή του $W(x_0)$, οι παράμετροι A και B είναι $A = 0.01$ και $B = -0.017$ (για $V_{\rm L} = 0$, $V_{\rm R} = 0.01$, $\alpha_{\rm R}/\alpha_{\rm L} = 0.983$, και $\mu_{\rm L} = 1$), ενώ υπάρχει και πάλι η παρουσία ενός υπερβολικού και ενός ελλειπτικού σταθερού σημείου, στα σημεία $x_{0\pm} = \pm 0.44$, αντιστοιχα. Σε αυτή τη περίπτωση, εάν το σολιτόνιο κινείται από τα αριστερά προς την βηματική ασυνέχεια, και είναι αρχικά τοποθετημένο μακριά (κοντά) από αυτή -- βλ. αρχική συνθήκη στο σημείο A (σημείο B) -- τότε θα μεταδοθεί (εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από το x_{0-}). Στην άλλη περίπτωση, εάν αρχικά τοποθετηθεί $x_0 > x_{0+}$ και κινείται με κατεύθυνση προς το σημείο όπου η γραμμική και μη γραμμική ασυνέχεια λαμβάνουν χώρα, έρχεται αντιμέτωπο με ένα εμπόδιο έντασης ΔW (βλ.πάνω εικόνα του Σχ. 2.16), που τώρα ορίζεται ως $\Delta W = W(x_{0+}) - W(+\infty)$.



Σχήμα 2.16: Παρόμοια όπως στο Σχ. 2.15, για γραμμική και μη γραμμική βηματική ασυνέχεια αλλά τωρα για $A = 0.01$ και $B = -0.017$, που αντιστοιχούν σε $V_{\mathrm{L}} = 0$, $V_{\mathrm{R}} = 0.01$, $\alpha_{\mathrm{R}}/\alpha_{\mathrm{L}} = 0.983$, και $\mu_{\mathrm{L}} = 1$. Η μορφή του $W(x_0)$ (πάνω εικόνα) υποστηρίζει την ύπαρξη ενός ελλειπτικού και ενός υπερβολικού σταθερού σημείου, στα σημεία $x_{0\pm} = \pm 0.44$ (κάθετες διακεκομμένες γραμμές). Στο φασικό διάγραμμα (δεύτερη εικόνα) σημειώνονται οι αρχικές συνθήκες, για ένα σολιτόνιο κινούμενο προς τα δεξιά, από τα σημεία A ($x_0 = -5$, $\phi = 0.005$) και B ($x_0 = -1$, $\phi = 0.001$), όπως επίσης και για ένα σολιτόνιο που κινείται προς τα αριστερά, από τα σημεία C ($x_0 = 5$, $\phi = 0.031 > \phi_{\mathrm{c}} \approx 0.030$) και D ($x_0 = 5$, $\phi = 0.029 < \phi_{\mathrm{c}}$); στις σχετικές τροχιές, τα αστέρια, οι σταυροί, τα συν και οι αστερίσκοι υποδηλώνουν αντίστοιχα τα αποτελέσματα της PDE. Τα αντίστοιχα χωροχρονικά διαγράμματα A, B, και C για την εξέλιξη της πυνότητας του σολιτονίου παρουσιάζονται στις κάτω εικόνες, με τις λευκές διακεκομμένες γραμμές να δείχνουν τα αποτελέσματα της ODE.

Σε αυτή τη περίπτωση, επιλέγοντας μία αρχική συνθήκη από το σταθερό βρόχο του φασικού διαγράμματος, με κατεύθυνση προς το x_{0+}, δηλ., για την κρίσιμη ταχύτητα $\phi_{\mathrm{c}} \approx 0.03$, είναι επίσης δυνατό να επιτύχουμε παγίδευση του σολιτονίου για πεπερασμένο χρονικό διάστημα, της τάξης του $t \approx 600$. Επειδή αυτή τη περίπτωση την εξετάσαμε και προηγουμένως (βλ. εικόνα B του Σχ. 2.15), τώρα θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που το σολιτόνιο έχει αρχική φασική γωνία μεγαλύτερη της κρίσιμης, δηλαδή $\phi = 0.031 > \phi_{\mathrm{c}}$; η αρχική συνθήκη υποδεικνύεται από το σημείο C στην δεύτερη εικόνα, και το αντίστοιχο χωροχρονικό διάγραμμα στην κάτω εικόνα του ίδιου σχήματος 2.16. Το σολιτόνιο αρχικά μεταδίδεται διαμέσου της ασυνέχειας; ωστόσο μετά ακολουθεί την ομοκλινική τροχιά (βλ. την τροχιά που υποδεικνύεται από τα σύμβολα συν, που δείχνουν τα αποτελέσματα από την PDE), και τελικά ανακλάται. Ας σημειωθεί ότι στην υποκρίσιμη περίπτωση, $\phi = 0.029 < \phi_{\mathrm{c}}$ (βλ. τα σημεία D στην δεύτερη εικόνα του Σχ. 2.16), το σολιτόνιο φθάνει στο σημείο x_{0+}, παραμένει εκεί για $t \approx 180$, και τελικά ανακλάται πίσω ακολουθώντας την τροχιά που υποδεικνύεται από τους αστερίσκους, βλ. την δεύτερη εικόνα του Σχ. 2.16. Πάλι σε όλες τις περιπτώσεις που σχετίζονται με αυτή τη μορφή $W(x_0)$, η συμφωνία μεταξύ των αναλυτικών προβλέψεων και των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι πολύ καλή.

2.4.1 Πολλαπλές Βηματικές Ασυνέχειες

Οι αναλυτικές προβλέψεις μπορούν με ευθύ τρόπο να επεκταθούν και στην περίπτωση πολλαπλών χωρικών ασυνεχειών του δυναμικού και της μη γραμμικότητας. Στη παρούσα διατριβή θα παρουσιάσουμε την περίπτωση όπου δύο βηματικές ασυνέχειες, που λαμβάνουν χώρα στα σημεία $x = -L$ και $x = L$, συνδυάζονται μεταξύ τους έτσι ώστε να σχηματίσουν ένα τετραγωνικό εμπόδιο ως προς τη μορφή του φαινομενικού δυναμικού που προκύπτει. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε τις εξής μορφές για το δυναικό και το μήκος σκέδασης:

$$V(x) = V_b(x) + \begin{cases} V_{\mathrm{R}}, & |x| > L \\ V_{\mathrm{L}}, & |x| < L \end{cases}, \tag{2.47}$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_{\mathrm{R}}, & |x| > L \\ \alpha_{\mathrm{L}}, & |x| < L \end{cases}. \tag{2.48}$$

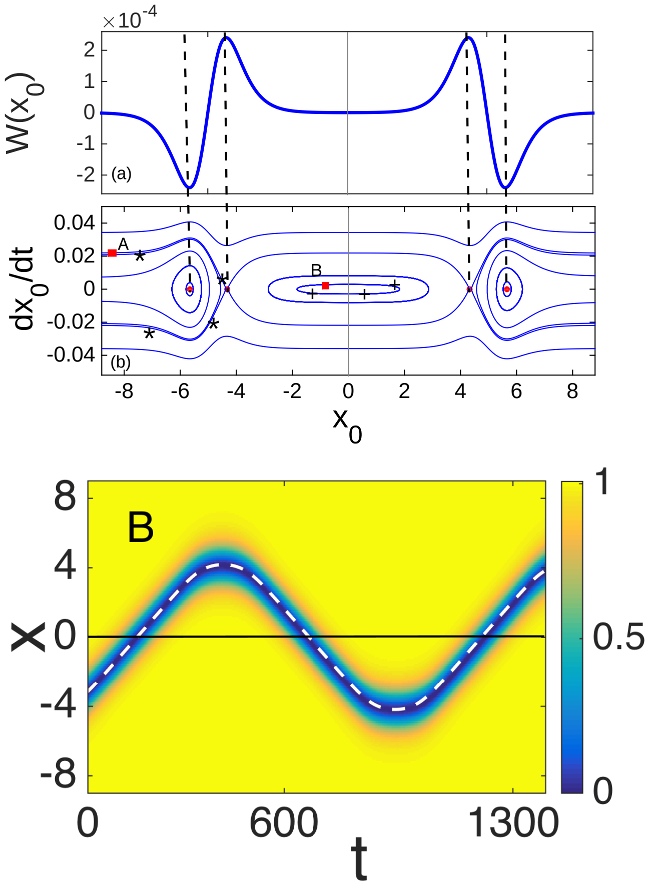
Σε μία τέτοια περίπτωση, το φαινομενικό δυναμικό μπορεί να βρεθεί ακολουθώντας την ανάλυση που έγινε στο Υποκεφάλαιο 2.14: παίρνοντας υπ'όψιν ότι η διαταραχή $P(v)$ στην Εξ. (2.8) έχει τώρα την μορφή:

$$P(v) = \left(A + B|v|^2\right) v \left[\mathcal{H}(x+L) - \mathcal{H}(x-L)\right], \tag{2.49}$$

προκύπτει ότι το φαινομενικό δυναμικό θα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} W(x_0) &= \frac{1}{8}\big(2A + B\big)[\tanh(L - x_0) + \tanh(L + x_0)] \\ &+ \frac{1}{24}B[\tanh^3(L - x_0) + \tanh^3(L + x_0)]. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Για αρκούντως μεγάλες τιμές του L, το φαινομενικό δυναμικό έχει τη μορφή που φαίνεται στην πάνω εικόνα του Σχ. 2.17; σε αυτό το παράδειγμα, χρησιμοποιήσαμε $L = 5$, ενώ $A = 0.01$ και $B = -0.015$. Διακρίνεται ότι, στην περίπτωση αυτή, το φαινομενικό δυναμικό λαμβάνει τη μορφή υπέρθεσης αυτών που εμφανίζονται στο Σχ. 2.15, που τώρα τοποθετείται στα σημεία ± 5. Το σχετικό φασικό διάγραμμα παρουσιάζεται στην μεσαία εικόνα του Σχ. 2.17; στο οποίο φαίνεται το σημείο μίας ακόμα αρχικής συνθήκης (στο κόκκινο τετράγωνο A) η οποία παραπέμπει σε ταλαντώσεις του σολιτονίου γύρω από το ελλειπτικό σημείο που βρίσκεται στο κέντρο. Η σχετική τροχιά του σολιτονίου φαίνεται και στο φασικό διάγραμμα, στη μεσαία εικόνα ατου Σχ. 2.17 και στο χωροχρονικό διάγραμμα στην κάτω εικόνα του ίδιου σχήματος. Να σημειωθεί

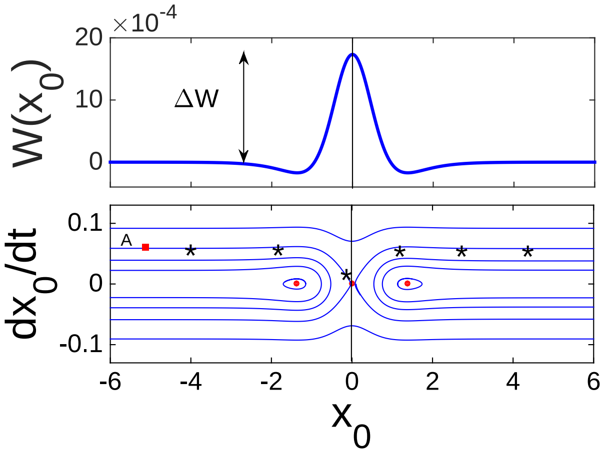


Σχήμα 2.17: Η περίπτωση όπου δύο χωρικές ασυνέχειες από το δυναμικό και το μήκος σκέδασης υπεισέρχονται στη διάταξη του προβλήματος, για $L = 5$, $A = 0.01$ και $B = -0.015$, που αντιστοιχούν σε $V_{\mathrm{L}} = 0$, $V_{\mathrm{R}} = 0.01$, $\alpha_{\mathrm{R}}/\alpha_{\mathrm{L}} = 0.985$, $\mu_{\mathrm{L}} = 1$. Πάνω εικόνα (a): το φαινομενικό δυναμικό $W(x_0)$ -- βλ. Εξ. (2.50); οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τα ελλειπτικά σταθερά σημεία στο κέντρο καθώς και στα σημεία ± 5.66, όπως επίσης και δύο υπερβολικά σταθερά σημεία στις περιοχές ± 4.34. Μεσαία εικόνα (b): το σχετικό φασικό διάγραμμα; τα (κόκκινα) τετράγωνα A και B υποδεικνύουν τις αρχικές συνθήκες που αντιστοιχούν σε οιονεί-παγίδευση ($x_0 = -8.6$ και $\phi = 2.2 \times 10^{-3}$) ή ταλαντώσεις ($x_0 = -3$ και $\phi = 3 \times 10^{-3}$), ενώ τα αστέρια και τα συν δείχνουν τα αποτελέσματα από την PDE. Κάτω εικόνα: χωροχρονικό διάγραμμα που δείχνει την εξέλιξη της πυκνότητας του σολιτονίου για την αρχική συνθήκη που υποδεικνύεται από το σημείο B στη μεσαία εικόνα; όπως προηγουμένως, η διακεκομμένη (λευκή) γραμμή αναφέρεται στα θεωρητικά αποτελέσματα από την ODE.

ότι οιονεί-παγίδευση του σολιτονίου μπορεί επίσης να προκύψει και σε αυτή τη περίπτωση: πράγματι, ξεκινώντας από το σταθερό βρόχο του φασικού διαγράμματος, στη θέση $x_0 = -8.6$ και $\phi = 2.2 \times 10^{-2}$ (σημείο A στη μεσαία εικόνα του Σχ. 2.17), το σολιτόνιο παγιδεύεται στο υπερβολικό σημείο στη θέση -4.34 για χρόνο $t \approx 600$, και τελικά ανακλάται πίσω (βλ. την τροχιά που υποδεικνύεται με τα αστέρια); η τροχιά του σολιτονίου στο χωροχρονικό διάγραμμα είναι ποιοτικά παρόμοια με αυτή που φαίνεται στην αριστερή εικόνα του Σχ. 2.10.

Για ακόμα μια φορά, η συμφωνία μεταξύ των θεωρητικών προβλέψεων και των αριθμητικών αποτελεσμάτων έρχεται σε πολύ καλή συμφωνία.

Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει όταν το L μειώνεται. Για να κατανοηθεί καλυτερα αυτή η περίπτωση και επίσης για να μπορέσουμε να κάνουμε μία σύγκριση με μελέτη



Σχήμα 2.18: Η περίπτωση που σχηματίζονται δύο βηματικές ασυνέχειες λόγω των χωρικών γραμμικών και μη γραμμικών ασυνεχειών, διαμορφώνοντας έτσι ένα ορθογώνιο εμπόδιο, για $L = 0.1$, $A = 0.1$ και $B = -0.13$, που αντιστοιχούν σε $a_{\mathrm{R}}/a_{\mathrm{L}} = 0.87$, $V_{\mathrm{R}} = 0.1$ και $\mu_{\mathrm{L}} = 1$. Πάνω εικόνα: το φαινομενικό δυναμικό $W(x_0)$; σε αυτή τη περίπτωση, υπάρχει ένα υπερβολικό στθερό σημείο στο κέντρο και ένα ζεύγος ελλειπτικών σταθερών σημείων στις θέσεις ± 1.38. Κάτω εικόνα: το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα; το (κόκκινο) τετράγωνο A υποδεικνύει την αρχική συνθήκη ($x_0 = -5$ και $\phi = 5.8 \times 10^{-2}$) και αντιστοιχεί σε παγίδευση του σκοτεινού σολιτονίου, ενώ τα αστέρια δείχνουν τα αποτελέσματα της PDE.

που έχει ήδη γίνει [157], θεωρούμε την απλή περίπτωση όπου $B = 0$ (δηλ. όταν δεν υπάρχει μη γραμμική χωρική ασυνέχεια). Τότε υποθέτωντας ότι $A = b/(2L)$ (με b να είναι μία αυθαίρετη μικρή παράμετρος), και στο όριο όπου $L \to 0$, η βηματική ασυνέχεια παίρνει τη μορφή (μέσω της σωματιδιακής εικόνας) ενός εμποδίου που έχει τη μορφή δέλτα-συνάρτησης έντασης b. Σε αυτή τη περίπτωση, το φαινομενικό δυναμικό της Εξ. (2.50) ανάγεται στη μορφή $W(x_0) = (b/4)\mathrm{sech}^2(x_0)$. Το αποτέλεσμα αυτό ανακτά αυτό που αναφέρεται στην Αναφ. [157] (βλ. επίσης τις αναφορές [158, 159]) όπου η μελετάται η αλληλεπίδραση του σκοτεινού σολιτονίου με άλλα εντοπισμένα εμπόδια.

Στην ίδια περίπτωση, για μικρά L, και για $B \neq 0$, το φαινομενικό δυναμικό έχει τυπικά τη μορφή που παρουσιάζεται στην πάνω εικόνα του Σχ. 2.18; εδώ, χρησιμοποιήσαμε $L = 0.1$, ενώ $A = 0.1$ και $B = -0.13$, που αντιστοιχούν σε $a_{\mathrm{R}}/a_{\mathrm{L}} = 0.87$, $V_{\mathrm{R}} = 0.1$ και $\mu_{\mathrm{L}} = 1$. Συγκρίνοντας τη μορφή του $W(x_0)$ με αυτή που φαίνεται στο Σχ. 2.17, γίνεται ξεκάθαρο ότι όσο το $L \to 0$, τα επιμέρους τμήματα του φαινομενικού δυναμικού του Σχ. 2.17 που αφορούν τις δύο βηματικές ασυνέχειες κινούνται προς το κέντρο. Εκεί συγχωνεύονται στη θέση του κεντρικού ελλειπτικού σταθερού σημείου, το οποίο γίνεται ασταθές μέσω μιας διακλάδωσης. Ως αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας, ένα υπερβολικό ασταθές σημείο εμφανίζεται στο κέντρο, ενώ το ζευγάρι των ελλειπτικών σημείων κινείται και αυτό προς το κέντρο -- και βρίσκονται στη θέση ± 1.38.

Στη κάτω εικόνα του Σχ. 2.18, φαίνεται επίσης το φασικό διάγραμμα που σχετίζεται με τη μορφή του δυναμικού της πάνω εικόνας του ίδιου σχήματος. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις που μελετήθηκαν στο ίδιο κεφάλαιο μπορούμε να μελετήσουμε την περίπτωση της παγίδευσης στο υπερβολικό σημείο -- εδώ χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $x_0 = -5$

και $\phi = \phi_c = 5.8 \times 10^{-2}$ (σημείο A, για το οποίο η αντίστοιχη ένταση του φαινομενικού εμποδίου είναι $\Delta W = 1.7 \times 10^{-3}$), και βρίσκουμε τα εξής: το σολιτόνιο κινείται προς το κέντρο, παραμένει εκεί για χρόνο $t \approx 600$, και μετά μεταδίδεται στην περιοχή $x > 0$. Η αντίστοιχη τροχιά που υπολογίζεται από την PDE υποδεικνύεται από αστέρια στην τελευταία εικόνα του Σχ. 2.18. Για μια ακόμα φορά, η θεωρία και τα αριθμητικά συμβαδίζουν απόλυτα.

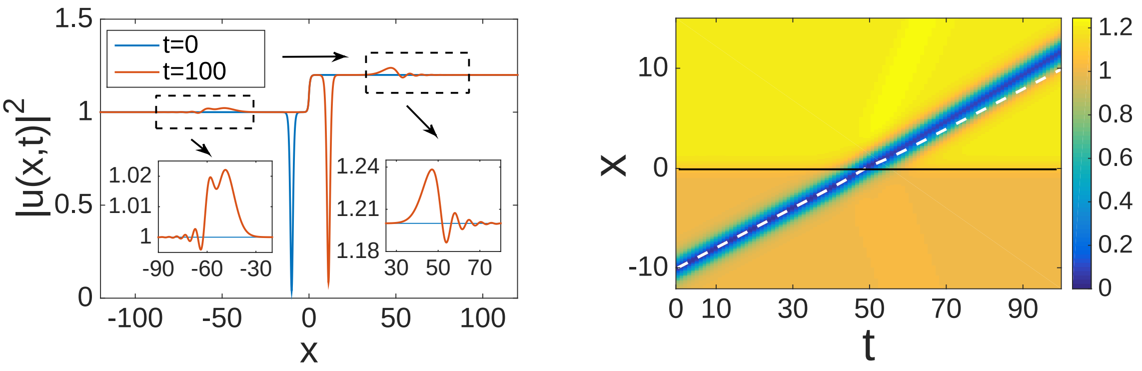
Σημειώνεται ότι για τις ίδιες παραμέτρους, αλλά για $B = 0$, τα ελλειπτικά σταθερά σημεία δεν υπάρχουν, και το φαινομενικό δυναμικό παρουσιάζεται ως ένα εμπόδιο που έχει τη μορφή της πυκνότητας μίας υπερβολικής τέμνουσας, δηλ. sech^2, (όπως έχει ήδη αναφερθεί [157]). Σε αυτή τη περίπτωση, για την ίδια αρχική συνθήκη, $x_0 = -5$, και για $\phi = 0.1$ (που αντιστοιχούν σε $\phi_c = \sqrt{2\Delta W} \approx 0.1$), βρίσκουμε ότι ο χρόνος παγίδευσης είναι$t \approx 320$, δηλ., περίπου ο μισός χρόνος από αυτόν που παρατηρήσαμε παρουσία και χωρικής ανομοιογένειας της μη γραμμικότητας. Αυτό το αποτέλεσμα, μαζί με τα υπόλοιπα που αναφέρθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, αποδεικνύουν την αναγκαιότητα της ταυτόχρονης παρουσίας γραμμικής και μη γραμμικής ασυνέχειας με σκοπό την παγίδευση σολιτονίων σε παρόμοια ανομοιογενή μέσα.

2.5 Εύρος ισχύος της θεωρίας διαταραχών και οι επιπτώσεις της ακτινοβολίας

Μέχρι τώρα, επικεντρωθήκαμε σε μικρές βηματικές ασυνέχειες του δυναμικού και της μη γραμμικότητας, όπως $V_{\mathrm{R}} \sim \epsilon \ll 1$ και $\alpha_{\mathrm{R}}/\alpha_{\mathrm{L}} \sim 1$ (για $\mu_{\mathrm{L}} = 1$ και $V_{\mathrm{L}} = 0$). Ωστόσο, θα πρέπει να γίνει μια μελέτη για περιπτώσεις μεγαλύτερων βηματικών ασυνεχειών έτσι ώστε να ερευνηθούν τα όρια όπου η προαναφερθείσα θεωρία διαταραχών είναι έγκυρη. Στο σημείο αυτό πρέπει να ερευνηθεί επίσης τα φαινόμενο της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από την εξέλιξη των σολιτονίων σε μεγαλύτερα εμπόδια και την συσχέτιση αυτής με την εγκυρότητα της θεωρίας.

Βασική προυπόθεση για την εφαρμογή της θεωρίας διαταραχών είναι να βρισκόμαστε στο διαταρακτικό όριο, κάτι που συμβαίνει όπως εξηγήσαμε και νωρίτερα για μικρές αλλάγές του δυναμικού και της μη γραμμικότητας. Μεγαλώνοντας τις τιμές των τελευταίων μεγεθών οδηγούμαστε στο φαινόμενο όπου το σολιτόνιο συμπεριφέρεται περισσότερο ως κύμα παρά ως σωματίδιο: όντως ένα σολιτόνιο όταν σκεδάζεται από μεγάλες ασυνέχειες (γραμμικές ή/και μη γραμμικές), εκπέμπει ακτινοβολία στη μορφή ηχητικών κυμάτων. Αυτά τα ηχητικά κύματα διαδίδονται καί στις δύο κατευθύνσεις $x < 0$ και $x > 0$, με ταχύτητες ίσες της ταχύτητας του ήχου του συμπυκνώματος, δηλαδή $c_s^{(\mathrm{L})} = 1$ για $x < 0$ και $c_s^{(\mathrm{R})} = \sqrt{n_{\mathrm{R}}}$ για $x > 0$ (όπου n_{R} είναι η πυκνότητα του υποβάθρου σε αυτήν την περιοχή).

Για να φανεί καλύτερα η παραπάνω συμπεριφορά, θεωρούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα; τη σκέδαση ενός σκοτεινού σολιτονίου σε μία βηματική ασυνέχεια η οποία είναι αποτέλεσμα της γραμμικής και μη γραμμικής χωρικής ανομοιογένειας, όπου $B = -(3/2)A$ (βλ. Σχ. 2.15), αλλά σε αυτή τη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε σχετικά μεγάλες τιμές για την



Σχήμα 2.19: Αριστερή εικόνα: η πυκνότητα του υποβάθρου $|u|^2$ παρουσία μίας μεγάλης ασυνέχειας λόγω του δυναμικού και της μη γραμμικότητας, για $A = 0.25$, $B = -(3/2)A = -0.375$, που αντιστοιχούν σε $V_{\rm L} = 0$, $V_{\rm R} = 0.25$, $\alpha_{\rm R}/\alpha_{\rm L} = 0.625$, και $\mu_{\rm L} = 1$. Η μπλέ συνεχής γραμμή υποδεικνύει την πυκνότητα του σολιτονίου όταν $t = 0$, με αρχική θέση $x_0 = -10$ και ταχύτητα $\phi = 0.2$, ενώ η κόκκινη συνεχής γραμμή δείχνει την πυκνότητα του σολιτονίου καθώς και της ανακλώμενης και μεταδιδόμενης ακτινοβολίας για χρόνο $t = 100$; οι ένθετες εικόνες παρουσιάζουν κοντινά πλάνα από την εκπεμπόμενη ακτινοβολία. Δεξιά εικόνα: χωροχρονικό διάγραμμα που δείχνει την εξέλιξη της πυκνότητας του σκοτεινού σολιτονίου; η λευκή διακεκομμένη γραμμή υποδεικνύει τα αποτελέσματα από την ODE [βλ. Εξ. (2.17)].

παράμετρο A, δηλαδή $A = 0.25$; οι αντίστοιχες παραμετρικές τιμές είναι $V_{\rm L} = 0$, $V_{\rm R} = 0.25$, $\alpha_{\rm R}/\alpha_{\rm L} = 0.625$, και $\mu_{\rm L} = 1$.

Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στην αριστερή εικόνα του Σχ. 2.19, όπου φαίνεται η πυκνότητα του σκοτεινού σολιτονίου και η ακτινοβολία που αυτό εκπέμπει. Πιο συγκεκριμένα, η μπλέ συνεχής γραμμή υποδηλώνει την πυκνότητα του σολιτονίου, για χρόνο $t = 0$, με αρχική θέση και ταχύτητα που δίνονται αντίστοιχα από τις τιμές $x_0 = -10$ και $\phi = 0.2c_s^{(\rm L)} = 0.2$, (η ταχύτητα του ήχου είναι $c_s^{(\rm L)} = 1$ για $x < 0$). Το σολιτόνιο έχει αρκούντως μεγάλη ταχύτητα τέτοια ώστε να ξεπεράσει το φαινομενικό εμπόδιο, έτσι μεταδίδεται από τη γραμμική και τη μη γραμμική βηματική ασυνέχεια. Η συνεχής κόκκινη γραμμή δείχνει ένα στιγμιότυπο της πυκνότητας του μεταδιδόμενου σολιτονίου για χρόνο $t = 100$; επιπροσθέτως, για τον ίδιο χρόνο, η πυκνότητα των σκεδαζόμενων και μεταδιδόμενων ηχητικών κυμάτων είναι επίσης φανερή (ένθετες εικόνες στο ίδιο σχήμα δείχνουν κοντινά πλάνα αυτών των κυμάτων).

Η δεξιά εικόνα του Σχ. 2.19 δείχνει την χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας του σκοτεινού σολιτονίου; σε αυτό το σχήμα, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία είναι επίσης παρατηρήσιμη. Ας σημειωθεί, ότι στο συγκεκριμένο σχήμα γίνεται επίσης σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων που αντλώνται από την PDE και των αντίστοιχων θεωρητικών μέσω της ODE (λευκή διακεκομμένη γραμμή), τα οποία υπολογίζονται από την Εξ. (2.17). Στην περιοχή $x > 0$, υπάρχει μία φανερή διαφορά μεταξύ τους, η οποία υποδεικνύει ξεκάθαρα την κατάρρευση της αναλυτικής προσέγγισης για τόσο μεγάλες βηματικές ασυνέχειες. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι η αναλυτική (ODE) προσέγγιση υποτιμά την ταχύτητα του σολιτονίου, αφού η ολοκλήρωση της PDE δείχνει ότι μετά την διαδικασία της σκέδασης, το κέντρο του σολιτονίου γίνεται πιο ρηχό και γι'αυτό το λόγο το σολιτόνιο αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα. Αυτό υποδεικνύει ότι η ενέργεια και ο αριθμός των ατόμων του σολιτονίου *αυξάνονται*; η διαφορά μεταξύ των αρχικών και των τελικών τιμών αυτών των ποσοτήτων οφείλεται στην εκπεμπόμενη ακτινοβολία (η οποία είναι μεγαλύτερη, συγκρινόμενη με αυτή που εκπέμπεται από μικρότερες ασυνέχειες). Συγκεκριμένα αυτή η ακτινοβολία βοηθάει το σολιτόνιο να προσαρμοστεί στην διαφορά φάσης, αφού αναγκάζεται να εξελιχθεί, για $x > 0$, σε ένα μεγαλύτερης πυκνότητας υπόβαθρο. Προφανώς η ακτινοβολία διασπείρεται στην πάροδο του χρόνου.

Για να μελετήσουμε ποσοτικά την εκπομπή της ακτινοβολίας θα επικεντρωθούμε στην προαναφερθείσα διάταξη όπου $B = -(3/2)A$, και θα μελετήσουμε αριθμητικά την επανανικοποιημένη ενέργεια του σολιτονίου E_s καθώς και τον αριθμό των ατόμων του N_s [137, 150] για διαφορετικές τιμές του πλάτους A της μεταβολής του δυναμικού; οι αρχικές συνθήκες του σολιτονίου κρατούνται σταθερές για όλα τα ακόλουθα σενάρια ($x_0 = -10$ και $\phi = 0.2$, δηλαδή το σολιτόνιο κινείται από τα αριστερά με κατεύθυνση προς τα δεξιά). Ακολουθώντας την Αναφ. [160, 161], ο υπολογισμός της περιοχής του σολιτονίου καθορίζεται να είναι πάντα $x_0 \pm 2\xi$, έτσι ώστε οι ποσότητες E_s και N_s να ορίζονται ως εξής:

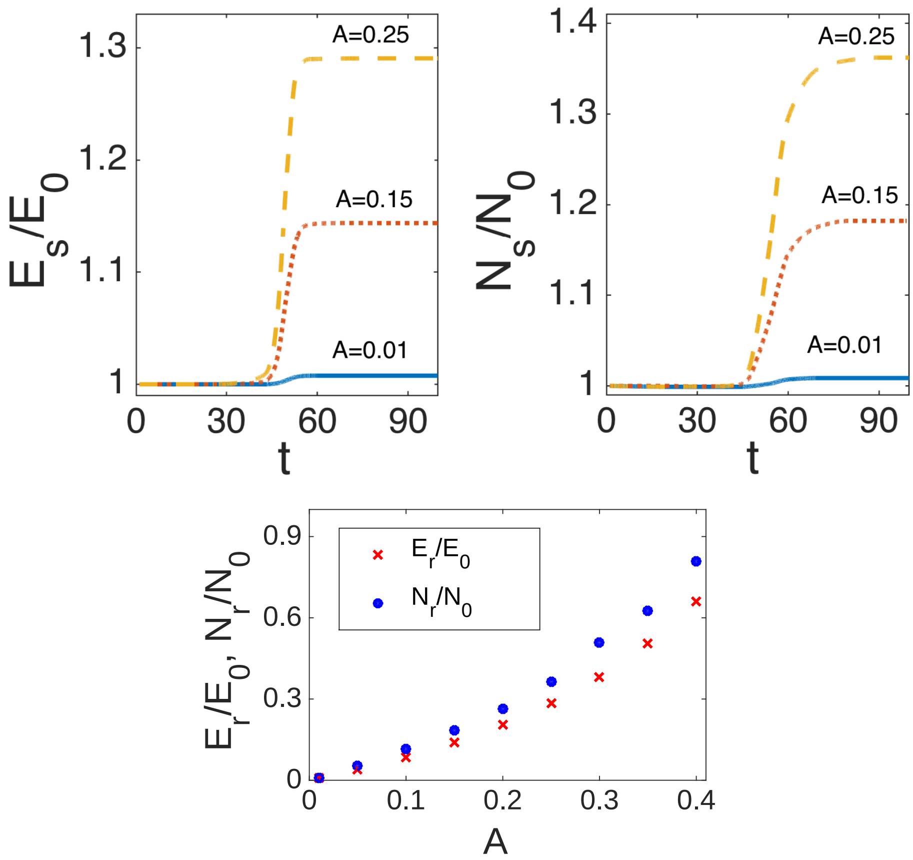
$$E_s = \frac{1}{2}\int_{x_0-2\xi}^{x_0+2\xi} \left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left[|u|^2 - n(x)\right]^2 \right\} dx, \tag{2.51}$$

$$N_s = \int_{x_0-2\xi}^{x_0+2\xi} \left[n(x) - |u|^2\right] dx, \tag{2.52}$$

όπου $n(x)$ είναι η πυκνότητα του υποβάθρου, η οποία δίνεται από την Εξ. (2.22). Οι παραπάνω ποσότητες κανονικοποιούνται ως προς τις αρχικές τιμές (τις οποίες έχει το σολιτόνιο για $t = 0$), δηλαδή: $E_0 = (4/3)\cos^3\phi = 1.26$ και $N_0 = 2\cos\phi = 1.96$, και παρουσιάζονται για κάθε χρονική στιγμή στην πάνω αριστερή εικόνα του Σχ. 2.20, για τρείς διαφορετικές τιμές της γραμμικής βηματικής ασυνέχειας: $A = 0.01$ (μπλέ συνεχής γραμμή), $A = 0.15$ (πορτοκαλί διάστικτη γραμμή), και $A = 0.25$ (κίτρινη διακεκομμένη γραμμή).

Όπως φαίνεται στο σχήμα οι τιμές E_s/E_0 και N_s/N_0 αυξάνονται μετά τη σκέδαση του σολιτόνιου. Πιο συγκεκριμένα, για $A = 0.01$, που είναι και η τιμή που μελετήσαμε εκτενέστατα στην αρχή του κεφαλαίου η ενέργεια του σολιτονίου αυξάνεται κατά $\approx 0.8\%$ και ο αριθμός των ατόμων κατά $\approx 0.9\%$. Τέτοιες αλλαγές βέβαια είναι πολύ μικρές και οδηγούν σε μία αμελητέα ποσότητα εκπεμπόμενης ακτινοβολίας. Γι'αυτό το λόγο, η θεωρία διαταραχών μπορεί με ακρίβεια να περιγράψει την δυναμική του σολιτονίου όπως αποδείχθηκε και νωρίτερα.

Ωστόσο, μία σημαντική αύξηση της τιμής του A, οδηγεί σε αντίστοιχη σημαντική αύξηση των τιμών της κανονικοποιημένης ενέργειας E_s/E_0 και του κανονικοποιημένου αριθμού ατόμων N_s/N_0 μετά τη σκέδαση του σολιτονίου: όντως, για $A = 0.15$ η ενέργεια και ο αριθμός ατόμων του σολιτονίου αυξάνονται κατά $\approx 15\%$ και $\approx 18\%$, αντίστοιχα, ενώ για $A = 0.25$ (όπου είναι και η τιμή που χρησιμοποιούμε στ Σχ. 2.19) οι αντίστοιχες ποσοστιαίες αλλαγές είναι $\approx 30\%$ και $\approx 36\%$. Γίνεται ξεκάθαρο ότι σε αυτές τις περιπτώσεις η εκπομπή ακτινοβολίας είναι αρκούντως μεγάλη και δεν μπορεί να αγνοηθεί; αυτό οδηγεί κατά συνέπεια στην κατάρρευση της θεωρίας διαταραχών για αυτά τα όρια, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως



Σχήμα 2.20: Αποτελέσματα όταν $B = -(3/2)A$, για ένα σολιτόνιο το οποίο κινείται από την αριστερή στην δεξιά περιοχή και σκεδάζεται (σε χρόνο $t \approx 45$) στη γραμμική/μη γραμμική βηματική ασυνέχεια. Επάνω εικόνες: κανονικοποιημένη ενέργεια του σολιτονίου (αριστερά) και αριθμός των ατόμων (δεξιά) ως συναρτήσεις του χρόνου, για $A = 0.01$ ($B = -0.015$, $V_{\rm R} = 0.01$, $\alpha_{\rm R}/\alpha_{\rm L} = 0.985$, βλ. μπλέ συνεχής γραμμή), $A = 0.15$ ($B = -0.225$, $V_{\rm R} = 0.15$ και $\alpha_{\rm R}/\alpha_{\rm L} = 0.775$, βλ. κόκκινη διάστικτη γραμμή), και $A = 0.25$ ($B = -0.375$, $V_{\rm R} = 0.25$ και $\alpha_{\rm R}/\alpha_{\rm L} = 0.625$, βλ. κίτρινη διακεκομμμένη γραμμή); σε όλες τις περιπτώσεις, $V_{\rm L} = 0$ και $\mu_{\rm L} = 1$, όπου η αρχική θέση και ταχύτητα του σολιτονίου είναι $x_0 = -10$ και $\phi = 0.2$. Κάτω εικόνα: κανονικοποιημένη ενέργεια (κόκκινοι σταυροί) και αριθμός των ατόμων (μπλε κουκκίδες) της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας, για $t = 100$, ως συναρτήσεις της έντασης της ασυνέχειας του δυναμικού A.

στο παράδειγμα του Σχ. 2.19.

Για την περίπτωση που εξετάσαμε δηλ. για $B = -(3/2)A$, μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα. Εάν το σολιτόνιο κινείται από ένα μικρότερο σε ένα μεγαλύτερης πυκνότητας υπόβαθρο (δηλ. στην περίπτωση που εξετάζουμε από τα αριστερά προς τα δεξιά) τότε η ενέργεια E_r και ο αριθμός των ατόμων N_r της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας δίνεται από:

$$E_r = E_s - E_0, \quad N_r = N_s - N_0, \tag{2.53}$$

όπου, όπως προηγουμένως, E_s (N_s) είναι η ενέργεια του σολιτονίου (αριθμός ατόμων) μετά τη σκέδαση του σολιτονίου στην ασυνέχεια που σχηματίζεται λόγω της γραμμικής και μη γραμμικής ασυνέχειας στο χώρο -- δηλαδή όταν το σολιτόνιο βρίσκεται στη περιοχή του συμπυκνώματος με τη μεγαλύτερη πυκνότητα -- ενώ οι τιμές E_0 (N_0) αντιστοιχούν στις αρχικές τιμές -- δηλαδή, όταν το σολιτόνιο βρίσκεται τοποθετημένο στο υπόβαθρο με τη μικρότερη πυκνότητα.

Από την άλλη πλευρά εάν το σολιτόνιο κινείται από ένα μεγαλύτερο σε ένα μικρότερης πυκνότητας υπόβαθρο (δηλ. από δεξιά προς τα αριστερά) τότε η ενέργεια του σολιτονίου και ο αριθμός των ατόμων μειώνονται μετά τη διαδικασία σκέδασης -- δηλ., το σολιτόνιο γίνεται πιο αργό από την αντίστοιχη ODE πρόγνωση. Σε αυτή τη περίπτωση η ενέργεια E_r και ο αριθμός ατόμων N_r της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας ορίζεται ως:

$$E_r = E_0 - E_s, \quad N_r = N_0 - N_s, \tag{2.54}$$

όπου τώρα, E_s (N_s) είναι η ενέργεια του σολιτονίου (αριθμός ατόμων) όταν το σολιτόνιο βρίσκεται σε μικρότερης πυκνότητας υπόβαθρο, ενώ E_0 (N_0) είναι οι αντίστοιχες αρχικές τιμές -- δηλ. όταν το σολιτόνιο βρίσκεται στο μεγαλύτερης πυκνότητας υπόβαθρο.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να βρεθεί η ενέργεια και ο αριθμός ατόμων της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας ως συνάρτηση του A -- κρατώντας σταθερή την παράμετρο $B = -(3/2)A$, και για ένα σολιτόνιο κινούμενο από μικρότερο σε μεγαλύτερης πυκνότητας υπόβαθρο, δηλ. προς τα δεξιά. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην κάτω εικόνα του Σχ. 2.20. Οι ποσότητες E_r και N_r μετρήθηκαν σε αρκούντως μεγάλο χρόνο (για $t = 100$) έτσι ώστε τα εκπεμπόμενα μέρη να έχουν πλήρως διαχωριστεί από το σολιτόνιο (παράδειγμα αποτελεί το Σχ. 2.19).

Παρατηρείται ότι όσο η ένταση ης γραμμικής βηματικής ασυνέχειας παίρνει τιμές $A \lesssim 0.1$, η ενέργεια και ο αριθμός ατόμων παραμένουν μικρά, της τάξης του $\approx 10\%$ από τις αρχικές ποσότητες. Προφανώς η δυναμική των σολιτονίων παραμένει σε πολυ καλή συμφωνία με την θεωρία σε αυτό το όριο. Από την άλλη πλευρά, έξω από αυτό το διαταρακτικό όριο η ακτινοβολία γίνεται σημαντικά μεγάλη; για παράδειγμα, για $A = 0.25$, η ενέργεια και ο αριθμός των ατόμων της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας γίνεται μεγαλύτερος από 30% συγκρινόμενος με τις αρχικές τιμές όπως επίσης βρέθηκε και παρουσιάστηκε στις πάνω εικόνες του Σχ. 2.19 (βλ., διακεκομμένες κίτρινες γραμμές) και Σχ. 2.20. Γιάυτό το λόγο για τόσο σημαντικές ακτινοβολίες αναμένεται η κατάρρευση της ODE εικόνας, βλ. κάτω εικόνα στο Σχ. 2.20.

Κεφάλαιο 3

Μείγματα Συμπυκνωμάτων

3.1 Σολιτόνια σε Μείγματα Συμπυκνωμάτων με γενικά διαφορετικές διατομικές αλληλεπιδράσεις

Στο Κεφάλαιο 2, εξάγαμε κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα σχετικά με τη δημιουργία σολιτονικών δομών μέσω της σκέδασης υλικών κυμάτων σε χωρικές ανομοιογένειες, ενώ ταυτόχρονα περιγράψαμε αναλυτικά τη δυναμική των σολιτονίων σε αυτά τα μέσα, τα οποία εκτός από ανάκλαση ή/και μετάδοση αποδείξαμε ότι μπορούν να υποστούν παγίδευση. Γι'αυτό το λόγο, επεκτείναμε τη μελέτη μας σε μείγματα συμπυκνωμάτων αποτελούμενα από δύο ή περισσότερα συστατικά τα οποία παρουσιάζουν επίσης γραμμικές ή/και μη γραμμικές ανομοιογένειες.

Αρχικά θα παρουσιάσουμε μία μελέτη που αφορά τις λύσεις ενός και πολλαπλών ζευγών σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων – με τις τελευταίες να αποτελούν «πλέγματα» φωτεινών-σκοτεινών σολιτονίων – σε μείγματα δύο συμπυκνωμάτων Bose-Einstein, με γενικά διαφορετικές διατομικές αλληλεπιδράσεις. Σημειώνεται ότι ενώ, στην πράξη, αυτές οι αλληλεπιδράσεις είναι διαφορετικές, συνήθως χρησιμοποιείται η προσέγγιση ότι είναι ίσες. Έτσι, το θεωρούμενο πρόβλημα είναι σημαντικό, αφού συνδέεται άμεσα με πειραματικά δεδομένα σε πραγματικά συστήματα, όπου έχουν παρατηρηθεί ένα αλλά και πολλαπλά σολιτόνια στο πείραμα.

Το σύστημα συζευγμένων εξισώσεων GP [13, 14] που περιγράφει το μοντέλο μας στο θεωρούμενο πρόβλημα στις (3D) είναι το αυτό που περιγράφεται από την Εξ. (1.2), όταν $j = 1, 2, n = 2$; ενώ στη περίπτωση που θα μελετήσουμε δεν υπάρχει γραμμική σύζευξη μεταξύ των συμπυκνωμάτων (δηλ., $\sigma = 0$) και οι διατομικές αλληλεπιδράσεις είναι σταθερές ποσότητες.

Επιπρόσθετα το δυναμικό παγίδευσης είναι αρμονικού και έχει την ακόλουθη μορφή στην :

$$V(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right). \qquad (3.1)$$

Οι σταθερές σύζευξης g_{11} και g_{22}, χαρακτηρίζουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων της ίδιας κατάστασης, ενώ οι g_{12} και g_{21} τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων που βρίσκονται σε διαφορετική κατάσταση. Οι σταθερές αυτές υπολογίζονται μέσω του αντίστοιχου μήκους σκέδασης (s-wave scattering length) α_{ij} όπου $i, j = 1, 2$ μέσω της σχέσης $g_{ij} = 4\pi\hbar^2\alpha_{ij}/m$. Τα μήκη σκέδασης μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά, περιγράφοντας απωστικές ή ελκτικές αλληλεπιδράσεις αντίστοιχα, ενώ χρησιμοποιώντας την τεχνική του συντονισμού Feshbach είναι δυνατόν να μεταβάλλει κανείς πειραματικά τις τιμές που παίρνουν ακόμα και το πρόσημό τους.

Οι κυματικές λύσεις των παραπάνω εξισώσεων που θα μελετήσουμε και συγκεκριμένα οι λύσεις ενός και πολλαπλών ζευγών φωτεινών - σκοτεινών σολιτονίων είναι μονοδιάστατα αντικείμενα γι'αυτό κρίνεται απαραίτητη η αναγωγή των εξισώσεων GPEs από 3D σε 1D. Με αυτό το τρόπο το συμπύκνωμα ή τα μείγματα αποτελούμενα από δύο ή περισσότερα συμπυκνώματα, θα μπορούν από τρισδιάστατες δομές να θεωρούνται φαινομενικά μονοδιάστατα. Πιό συγκεκριμένα όταν το δυναμικό παγίδευσης είναι ισοτροπικό, έχει δηλαδή ίσες συχνότητες σε κάθε διεύθυνση δηλαδή $\omega_x = \omega_y = \omega_z$, το συμπύκνωμα είναι ένα πλήρως τρισδιάστοτο αντικείμενο (3D) με σφαιρικό σχήμα. Από την άλλη πλευρά, σε ένα ανισοτροπικό δυναμικό όπου $\omega_x < \omega_y = \omega_z \equiv \omega_\perp$, το συμπύκνωμα αποκτά τη μορφή πούρου (είναι δηλαδή επιμήκες στην x-διεύθυνση). Ενώ στην περίπτωση που το δυναμικό γίνεται ισχυρά ανισοτροπικό $\omega_x \ll \omega_\perp$, οι εγκάρσιοι τρόποι διέγερσης γίνονται ενεργειακά μη διαθέσιμοι και το συμπύκνωμα αποκτά ένα σχεδόν μονοδιάστατο (1D) χαρακτήρα. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αποπλέξουμε την εγκάρσια από τη διαμήκη τομή του συμπυκνώματος, υποθέτωντας ότι

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = U(x, t)\Phi(r_\perp, t) \tag{3.2}$$

όπου $\Phi(r_\perp, t) = \tilde{\Phi}_0(r_\perp)\exp(-i\mu t)$ και ${r_\perp}^2 \equiv y^2 + z^2$. Τότε το χημικό δυναμικό μ και η διαμήκης κυματοσυνάρτηση $\tilde{\Phi}_0(r_\perp)$ ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2\tilde{\Phi}_0 - \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r_\perp^2\tilde{\Phi}_0 + \mu\tilde{\Phi}_0 = 0, \tag{3.3}$$

όπου $\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Η Εξ. (3.3) είναι ένα γνωστό πρόβλημα ιδιοτιμών που στην κβαντομηχανική περιγράφει τον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή, του οποίου η λύση της θεμελιώδους κατάστασης έχει την ακόλουθη μορφή Γκαουσσιανής συνάρτησης:

$$\Phi_0(r_\perp) = \pi^{-1/2}\alpha_\perp^{-1}\exp\left(-r_\perp^2/2\alpha_\perp^2\right). \tag{3.4}$$

όπου $\alpha_i = \sqrt{\hbar/m\omega_i}$ $(i \in x, \perp)$. Κατόπιν αντικαθιστούμε τις λύσεις (3.4) στο σύστημα των (3D) εξισώσεων GP 1.2, πολλαπλασιάζουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν με $\Phi_0^*(r_\perp)$ και ακολούθως ολοκληρώνουμε στην εγκάρσια διατομή του συμπυκνώματος. Τελικά προκύπτει το ακόλουθο σύστημα μονοδιάστατων εξισώσεων GP:

$$
\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\Psi_1(x,t) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x) - \mu_1 + g_{11}|\Psi_1(x,t)|^2 + g_{12}|\Psi_2(x,t)|^2\right)\Psi_1(x,t), \\
i\hbar\partial_t\Psi_2(x,t) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x) - \mu_2 + g_{21}|\Psi_1(x,t)|^2 + g_{22}|\Psi_2(x,t)|^2\right)\Psi_2(x,t) \quad (3.5)
\end{aligned}
$$

όπου $V(x) = (1/2)m\omega_x^2 x^2$ ενώ οι φαινομενικές σταθερές ζεύξης δίνονται τώρα από τη σχέση $g_{ij} = 2\alpha_{ij}\hbar\omega_\perp$.

Αδιάστατες εξισώσεις κίνησης παρουσία παραβολικού δυναμικού

Στο παραπάνω μοντέλο, τα $\Psi_j(x,t)$ ($j = 1, 2$) υποδηλώνουν τις κυματοσυναρτήσεις μέσου πεδίου των δύο συμπυκνωμάτων (κανονικοποιημένα στον αριθμό των ατόμων $N_j = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_j|^2 dx$), m είναι η ατομική μάζα, και μ_j τα χημικά δυναμικά; επιπλέον, $g_{jk} = 2\hbar\omega_\perp a_{jk}$ είναι οι φαινομενικά μονοδιάστατες (1D) σταθερές σύζευξης, με τα a_{jk} να ορίζουν τα μήκη σκέδασης (s-wave scattering lengths) ($a_{12} = a_{21}$), τα οποία αναφέρονται σε συγκρούσεις μεταξύ ατόμων που ανήκουν είτε στην ίδια (a_{jj}) ή σε διαφορετική ($a_{jk}, j \neq k$) κατάσταση. Το εξωτερικό δυναμικό είναι παραβολικό, και έχει τη μορφή $V(x) = (1/2)m\omega_x^2 x^2$. Εισάγωντας τις κανονικοποιημένες πυκνότητες $|u_j|^2 = 2a|\psi_j|^2$, και μετρώντας το μήκος, τον χρόνο και την ενέργεια σε μονάδες $a_\perp = \sqrt{\hbar/\omega_\perp}$, $\omega_\perp^{-1}$ και $\hbar\omega_\perp$, αντίστοιχα, οι Εξ. (3.5) εκφράζονται στην εξής αδιάστατη μορφή:

$$
i\partial_t u_1 = -\frac{1}{2}\partial_x^2 u_1 + V(x)u_1 + \left(g_{11}|u_1|^2 + g_{12}|u_2|^2 - \mu_1\right)u_1, \tag{3.6}
$$

$$
i\partial_t u_2 = -\frac{1}{2}\partial_x^2 u_2 + V(x)u_2 + \left(g_{12}|u_2|^2 + g_{22}|u_1|^2 - \mu_2\right)u_2. \tag{3.7}
$$

Το κανονικοποιημένο εξωτερικό δυναμικό των Εξ. (3.6)-(3.7) παίρνει την μορφή

$$
V(x) = \frac{1}{2}\Omega^2 x^2, \tag{3.8}
$$

όπου $\Omega = \omega_x/\omega_\perp$ η κανονικοποιημένη συχνότητα του δυναμικού παγίδευσης.

Προσέγγιση Thomas-Fermi

Η πιο απλή, μη τετριμμένη λύση του συστήματος των Εξ. (3.6)-(3.7) είναι η ακόλουθη: η μία συνιστώσα έχει τη μορφή νέφους Thomas Fermi (TF), ενώ η άλλη είναι μηδενική. Καθώς το νέφος TF χρησιμοποιείται σε πολλά σημεία της παρούσας διατριβής, κρίνεται σκόπιμη μια αναλυτικότερη περιγραφή του σε αυτό το σημείο. Πρέπει να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη προσέγγιση ισχύει για αρκετά μεγάλους αριθμούς ατόμων και περιγράφει --με αποτελεσματικό τρόπο -- την μορφή της θεμελιώδους κατάστασης. Αφού το ένα από τα δύο συστατικά του μείγματος είναι μηδέν, μπορούμε να μελετήσουμε ξεχωριστά οποιαδήποτε από τις εξισώσεις

(3.6), (3.7) που αφορούν στο εκάστοτε συστατικό και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u(x)}{\partial x^2} + V(x)u(x) + g|u(x)|u(x) - \mu u(x) \quad = \quad 0 \tag{3.9}$$

όπου $u = u_j$, $g = g_{jj}$ ενώ $V(x) = \frac{1}{2}\Omega^2 x^2$. Στην προσέγγιση TF θεωρείται ότι οι χωρικές μεταβολές της κυματοσυνάρτησης είναι αρκούντως μικρές συγκρινόμενες με τους υπόλοιπους όρους και έτσι, αγνοώντας τους κινητικούς όρους $\partial^2/\partial x^2$, προκύπτει η λύση:

$$|u_{TF}|^2 = g^{-1}\left(\mu - V(x)\right), \mu > V(x) \tag{3.10}$$

ενώ $|\Psi_{TF}|^2 = 0$ οπουδήποτε αλλού. Μέσω αυτής της προσέγγισης μπορούμε να υπολογίσουμε ποσότητες όπως την ακτίνα του συμπυκνώματος στην x διεύθυνση η οποία είναι $R^2 = 2\mu/\Omega^2$. Η προσέγγιση TF αποτελεί πιο ακριβή προσέγγιση όσο αυξάνει το χημικό δυναμικό μ, συνεπώς και ο αριθμός των ατόμων.

3.1.1 Στατικές λύσεις εντοπισμένων ζευγών σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι εντοπισμένες λύσεις που έχουν τη μορφή ζευγών σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων μπορούν να βρεθούν σε αναλυτική μορφή ακόμα και μακριά από το ολοκληρώσιμο όριο, όπου δηλαδή $g_{ij} = 1$ και η μέθοδος αντίστροφης σκέδασης προβλέπει αναλυτικές λύσεις [162]. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε την περίπτωση του ομογενούς προβλήματος όπου δηλαδή $V(x) = 0$ των Εξ. (3.6)-(3.7).

Ψάχνουμε στατικές λύσεις των Εξ. (3.6)-(3.7), άρα $\partial_t u_j = 0$, και προκύπτει το εξής σύστημα:

$$\mu_1 u_1 \quad = \quad -\frac{1}{2}u_1'' + (g_{11}u_1^2 + g_{12}u_2^2)u_1, \tag{3.11}$$

$$\mu_2 u_2 \quad = \quad -\frac{1}{2}u_2'' + (g_{12}u_1^2 + g_{22}u_2^2)u_2, \tag{3.12}$$

όπου οι "τόνοι" στις συναρτήσεις υποδηλώνουν την δεύτερη παράγωγο ως προς x. Υποθέτουμε λύσεις ενός σκοτεινού (μαύρου) σολιτονίου για την κυματοσυνάρτηση u_1 και ενός φωτεινού σολιτονίου για την u_2, δηλαδή:

$$u_1 \quad = \quad A_1 \tanh(bx), \tag{3.13}$$

$$u_2 \quad = \quad A_2 \,\mathrm{sech}(bx), \tag{3.14}$$

όπου A_1 και A_2 υποδεικνύουν το πλάτος του σκοτεινού και φωτεινού σολιτονίου, αντίστοιχα, ενώ το b αντιπροσωπεύει το κοινό αντίστροφο εύρος. Εισάγωντας τις (3.13)-(3.14) στις εξισώσεις κίνησης, βρίσκουμε ότι για να αποτελούν λύσεις των ανωτέρω, οι συντελεστές τους πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες.

Πιο συγκεκριμένα, για να ικανοποιείται η Εξ. (3.11), πρέπει να ισχύει:

$$\mu_1 = b^2 + g_{12}A_2^2, \tag{3.15}$$

$$b^2 = g_{11}A_1^2 - g_{12}A_2^2, \tag{3.16}$$

ενώ για να ικανοποιείται η Εξ. (3.12), θα πρέπει να ισχύει:

$$\mu_2 = -\frac{b^2}{2} + g_{12}A_1^2, \tag{3.17}$$

$$b^2 = g_{12}A_1^2 - g_{22}A_2^2. \tag{3.18}$$

Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές από τις παραπάνω συνθήκες θεωρούμε τις εξισώσεις (3.15), (3.16) και (3.18) ως ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους (A_1^2, A_2^2 και b^2), υπό την προυπόθεση ότι οι διατομικές αλληλεπιδράσεις g_{ij} και το χημικό δυναμικό μ_1 είναι ορισμένες ποσότητες. Τότε, η εναπομείνουσα εξίσωση (3.17) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον αυτοπροσδιορισμό του χημικού δυναμικού του δεύτερου (φωτεινού) συστατικού. Υπό αυτήν την προυπόθεση, στις αναλυτικές λύσεις τα πλάτη A_1 και A_2 ορίζονται ως εξής:

$$A_1^2 = \frac{\mu_1}{g_{11}}, \tag{3.19}$$

$$A_2^2 = \frac{\mu_1}{g_{11}}\frac{g_{11}-g_{12}}{g_{12}-g_{22}}, \tag{3.20}$$

και η παράμετρος που χαρακτηρίζει το αντίστροφο εύρος b καθορίζεται ως εξής:

$$b^2 = \frac{\mu_1}{g_{11}}\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{g_{22}-g_{12}}, \tag{3.21}$$

ενώ η Εξ. (3.17), με την συμβολή των (3.21) και (3.19) ολοκληρώνει τον υπολογισμό.

Θεμελιώδης κατάσταση του μείγματος - κριτήριο αναμιξιμότητας

Η μορφή της θεμελιώδους κατάστασης του μείγματος, όταν και τα δύο συστατικά είναι πεπερασμένα, εξαρτάται με το αν το μείγμα είναι αναμείξιμο ή όχι. Αυτό ρυθμίζεται κατά κύριο λόγο από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων και μας δείχνει για τη περίπτωση που μελετάμε ότι το φωτεινό σολιτόνιο στο ένα συμπύκνωμα μπορεί να υπάρχει μόνο όταν ισχύει:

$$\min(g_{11}, g_{22}) < g_{12} < \max(g_{11}, g_{22}). \tag{3.22}$$

Συμπεραίνεται τότε από την Εξ. (3.21) ότι εάν $g_{22} > g_{12}$ (δηλ., εάν το μήκος σκέδασης του δεύτερου συστατικού είναι μεγαλύτερο από του πρώτου, στο οποίο βρίσκεται και το σκοτεινό σολιτόνιο), τότε ακριβής λύση διανυσματικού φωτεινού-σκοτεινού σολιτονίου μπορεί να υπάρξει μόνο στην περίπτωση που τα συστατικά είναι αναμίξιμα μεταξύ τους δηλαδή για $g_{11}g_{22} > g_{12}^2$. Στην αντίθετη περίπτωση, όπου $g_{22} < g_{12}$ (δηλ., όταν το πρώτο συστατικό το οποίο έχει και ως λύση το σκοτεινό σολιτόνιο έχει μεγαλύτερο μήκος σκέδασης από το δεύτερο συστατικό), τότε ακριβής λύση σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου παρατηρείται στα μη αναμίξιμα συστατικά δηλ. όταν $g_{11}g_{22} < g_{12}^2$.

3.1.2 Στατικές λύσεις πλεγμάτων σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων

Θεωρούμε τώρα, δύο τύπους περιοδικών λύσεων σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων σε μείγματα δύο συμπυκνωμάτων Bose-Einstein. Στο πρώτο, τα σκοτεινά σολιτόνια παρουσιάζονται ως Jacobian ελλειπτικές συναρτήσεις sn-τύπου, ενώ τα φωτεινά σολιτόνια θεωρούνται λύσεις cn-τύπου. Οι παραπάνω υποθέσεις σολιτονικών λύσεων είναι εκτός φάσης μεταξύ τους. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε σκοτεινά σολιτόνια με την προαναφερθείσα δομή και αντίστοιχες λύσεις φωτεινών σολιτονίων dn-τύπου, κάτι που καθιστά τα πλέγματα σολιτονίων να βρίσκοντα εντός φάση.

Πλέγματα σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων εκτός-φάσης

Αρχικά υποθέτουμε για το σύστημα εξισώσεων (3.11)-(3.12), λύσεις της μορφής:

$$u_1 = A_1 \,\mathrm{sn}(bx, k), \tag{3.23}$$

$$u_2 = A_2 \,\mathrm{cn}(bx, k), \tag{3.24}$$

όπου k είναι το ελλειπτικό μέτρο (elliptic modulus). Σε αυτή τη περίπτωση, δύο αλγεβρικές εξισώσεις απορρέουν από την Εξ. (3.11) και είναι οι εξης:

$$\mu_1 = \frac{1+k^2}{2}b^2 + g_{12}A_2^2, \tag{3.25}$$

$$k^2b^2 = g_{11}A_1^2 - g_{12}A_2^2. \tag{3.26}$$

Παρόμοια, οι συνθήκες που απορρέουν από την Εξ. (3.12) είναι:

$$\mu_2 = \frac{1-2k^2}{2}b^2 + g_{12}A_1^2, \tag{3.27}$$

$$k^2b^2 = g_{12}A_1^2 - g_{22}A_2^2. \tag{3.28}$$

Στην ειδική οριακή περίπτωση όπου $k \to 1$, παίρνουμε τις αντίστοιχες λύσεις για το ζεύγος φωτεινού-σκοτεινού σολιτονίου που εξάγαμε από τις Εξ. (3.15)-(3.18). Ένα άλλο όριο που αξίζει να σημειωθεί, είναι το τριγωνομετρικό όταν δηλαδή $k \to 0$, το οποίο παρέχει ημιτονοειδής και συνημιτονοειδής λύσεις, αντίστοιχα για τα δύο διαφορετικά συστατικά του μείγματος; παρ'όλα αυτά, διερεύνηση των εξισώσεων δείχνει ότι αυτό ισχύει μόνο κατά την μετάβαση των παραμέτρων από το όριο που ισχύει για τα αναμίξιμα συμπυκνώματα στα μη αναμίξιμα (αφού αυτές οι λύσεις υπάρχουν μόνο για τιμές των διατομικών αλληλεπιδράσεων όπου ισχύει $g_{11}g_{22} = g_{12}^2$).

Έτσι, αν υποτεθεί ότι οι Εξ. (3.25), (3.26) και (3.28) απαρτίζουν ένα γραμμικό σύστημα για τα A_1^2, A_2^2 και b^2, ενώ η Εξ. (3.27) καθορίζει το μ_2 (για καθορισμένο μ_1 και g_{ij}), βρίσκουμε τις εξής τιμές για τα πλάτη:

$$A_1^2 = \frac{2k^2(g_{12} - g_{22})\mu_1}{(g_{12}^2 - g_{11}g_{22}) + k^2(2g_{11}g_{12} - g_{12}^2 - g_{11}g_{22})}, \tag{3.29}$$

$$A_2^2 = \frac{2k^2(g_{11} - g_{12})\mu_1}{(g_{12}^2 - g_{11}g_{22}) + k^2(2g_{11}g_{12} - g_{12}^2 - g_{11}g_{22})}, \tag{3.30}$$

όπου η αντίστοιχη έκφραση για το αντίστροφο εύρος b δίνεται από:

$$b^2 = \frac{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\mu_1}{(g_{12}^2 - g_{11}g_{22}) + k^2(2g_{11}g_{12} - g_{12}^2 - g_{11}g_{22})}. \tag{3.31}$$

Θα πρέπει τώρα, να οριστούν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτές οι λύσεις υπάρχουν. Πιο συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα των εξισώσεων (3.29)-(3.30) δείχνει ότι η Εξ. (3.22) εξακολουθεί να είναι έγκυρη. Από τις εξισώσεις (3.29)-(3.30) συμπεριλαμβανομένης της Εξ. (3.31) οδηγούμαστε στα εξής συμπεράσματα για την ύπαρξη των περιοδικών λύσεων: εάν η περιοδική λύση για το σκοτεινό σολιτόνιο βρίσκεται στο συστατικό με το μικρότερο μήκος σκέδασης, οι διαφορετικές καταστάσεις της υπέρλεπτης υφής πρέπει να είναι αναμίξιμες, (δηλ. όταν $g_{11} < g_{12} < g_{22}$, πρέπει να ισχύει $g_{12}^2 < g_{11}g_{22}$). Από την άλλη πλευρά εάν η περιοδική σκοτεινή λύση βρίσκεται στο συστατικό με το μεγαλύτερο μήκος σκέδασης, τότε οι καταστάσεις πρέπει να είναι μη αναμίξιμες (δηλ. όταν $g_{22} < g_{12} < g_{11}$, θα πρέπει να ισχύει $g_{12}^2 > g_{11}g_{22}$).

Παρ'όλα αυτά μία πιο σύνθετη κατάσταση προκύπτει από τον παρανομαστή $D_e = (g_{12}^2 - g_{11}g_{22}) + k^2(2g_{11}g_{12} - g_{12}^2 - g_{11}g_{22})$ που παρατηρείται στις Εξ. (3.29)-(3.31). Έτσι μία πρόσθετη συνθήκη, θα πρέπει να ληφθεί υπ'όψιν; πρέπει να σημειωθεί ότι όταν οι τιμές των διατομικών αλληλεπιδράσεων είναι $g_{11} < g_{12} < g_{22}$ θα πρέπει να ισχύει $D_e < 0$, ενώ όταν $g_{22} < g_{12} < g_{11}$, θα πρέπει να ισχύει το αντίθετο, δηλαδή $D_e > 0$. Θεωρώντας τον παρονομαστή, μία διωνυμική συνάρτηση ως προς g_{12}, είναι ξεκάθαρο ότι το g_{12} πρέπει να βρίσκεται εκτός του διαστήματος των ριζών του για $D_e > 0$ και μέσα στο διάστημα αυτών για $D_e < 0$. Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός που να αφορά την ελλειπτική παράμετρο k που εμφανίζεται στις ανωτέρω εξισώσεις, πέρα από την απαίτηση του να ισχύει $D_e < 0$ ή $D_e > 0$, ανάλογα με τις τιμές των τιμών σκέδασης. Βέβαια η παράμετρος k είναι κρίσιμη από τη στιγμή που διαχωρίζει τη δομή των σολιτονικών δομών που θα υπάρξουν ως λύσεις. Για τις παραπάνω λύσεις, δίνεται από τη σχέση $s = 2K(k)/b$, όπου η παράμετρος K υποδεικνύει το ελλειπτικό ολοκλήρωμα του πρώτου είδους.

Πλέγματα σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων εντός-φάσης

Τώρα εξετάζουμε την περίπτωση όπου το πρώτο συστατικό εξακολουθεί να έχει την ίδια μορφή με το προηγούμενο παράδειγμα, δηλαδή $u_1 = A_1\mathrm{sn}(bx, k)$, ενώ το δεύτερο συστατικό έχει την ακόλουθη μορφή:

$$u_2 = A_2\mathrm{dn}(bx, k). \tag{3.32}$$

Σε αυτή τη περίπτωση, η συνθήκη για την ύπαρξη λύσης από την Εξ. (3.11) γίνεται:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1+k^2}{2}b^2 + g_{12}A_2^2, & (3.33) \\ k^2b^2 &= g_{11}A_1^2 - k^2 g_{12}A_2^2, & (3.34) \end{aligned}$$

ενώ εκείνοι που απορρέουν από την Εξ. (3.12) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{2-k^2}{2}b^2 + \frac{g_{12}}{k^2}A_1^2, & (3.35) \\ k^2b^2 &= g_{12}A_1^2 - k^2 g_{22}A_2^2. & (3.36) \end{aligned}$$

Όπως και προηγουμένως για το όριο όπου $k \to 1$ οδηγούμαστε στη λύση του φωτεινού-σκοτεινού ζεύγους σολιτονίων. Ενώ τώρα το τριγωνομετρικό όριο $k \to 0$ δεν συνιστά κάποια λύση σε μείγματα BEC.

Λύνωντας με τον τρόπο που ακολουθήσαμε και προηγουμένως τις Εξ. (3.33), (3.34) και (3.36), λαμβάνουμε τις σχέσεις για τα πλάτη

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \frac{2k^2(g_{12}-g_{22})\mu_1}{2g_{11}g_{12} - g_{12}^2 - g_{11}g_{22} + k^2(g_{12}^2 - g_{11}g_{22})}, & (3.37) \\ A_2^2 &= \frac{2k^2(g_{11}-g_{12})\mu_1}{2g_{11}g_{12} - g_{12}^2 - g_{11}g_{22} + k^2(g_{12}^2 - g_{11}g_{22})}, & (3.38) \end{aligned}$$

ενώ η παράμετρος b που αναφέρεται στο αντίστροφο εύρος δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$b^2 = \frac{2(g_{12}^2 - g_{11}g_{22})\mu_1}{2g_{11}g_{12} - g_{12}^2 - g_{11}g_{22} + k^2(g_{12}^2 - g_{11}g_{22})}. \tag{3.39}$$

Εκτός από τους περιορισμούς για την ύπαρξη ζεύγους φωτεινού-σκοτεινού σολιτονίου, όπως εξήχθη στην προηγούμενη ενότητα, μία επιπρόσθετη προυπόθεση πηγάζει από τον παρονομαστή $\tilde{D}_e = 2g_{11}g_{12} - g_{12}^2 - g_{11}g_{22} + k^2(g_{12}^2 - g_{11}g_{22})$, ο οποίος θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε, εάν $g_{11} < g_{12} < g_{22}$, τότε $\tilde{D}_e < 0$, ενώ εάν $g_{11} > g_{12} > g_{22}$, τότε $\tilde{D}_e > 0$.

Αντίστοιχα με το Υποκεφάλαιο 3.1.2, αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μία διωνυμική εξίσωση της παραμέτρου g_{12}.

3.1.3 Αδιαβατική θεωρία διαταραχών για τα σκοτεινά-φωτεινά σολιτόνια

Δεδομένου ότι σε κάθε πειραματικά ρεαλιστική διάταξη το δυναμικό παγίδευσης είναι παρόν η μελέτη των Εξ. (3.6)-(3.7) θα γίνει παρουσία του δυναμικού παγίδευσης. Έτσι, θα εφαρμόσουμε την Χαμιλτονιανή αδιαβατική θεωρία διαταραχών (βλ., αναφορές, [140,163,164] και την αντίστοιχη μελέτη [137]). Για να μελετήσουμε τα σκοτεινά- φωτεινά σολιτόνια υπό την επίδραση διαφόρων εξωτερικών παραγόντων (συμπεριλαμβανομένου και του δυναμικού). Για λόγους απλότητας, θα αλλάξουμε το συμβολισμό των κυματοσυναρτήσεων σε $u_1 = u_d$ και $u_2 = u_b$ (όπως επίσης και τα χημικά δυναμικά ως $\mu_1 = \mu_d$ και $\mu_2 = \mu_b$), υποδεικνύοντας ότι το συστατικό 1 (2) θα επιδέχεται ως λύση ένα σκοτεινό (φωτεινό) σολιτόνιο. Χρησιμοποιούμε την εξής κανονικόποιηση για τα μήκη σκέδασης, $\tilde{g}_{12} = \alpha_{12}/\alpha_{11} = \alpha_{21}/\alpha_{11}$, $\tilde{g}_{22} = \alpha_{22}/\alpha_{11}$ και ανάγουμε τις Εξ. (3.6)-(3.7) στην ακόλουθη μορφή:

$$i\partial_t u_d = -\frac{1}{2}\partial_x^2 u_d + V(x)u_d + \left(|u_d|^2 + \tilde{g}_{12}|u_b|^2 - \mu_d\right)u_d, \tag{3.40}$$

$$i\partial_t u_b = -\frac{1}{2}\partial_x^2 u_b + V(x)u_b + \left(\tilde{g}_{12}|u_b|^2 + \tilde{g}_{22}|u_d|^2 - \mu_b\right)u_b. \tag{3.41}$$

Στη συνέχεια, γράφουμε την μορφή του υποβάθρου για την u_d συνιστώσα στην προσέγγιση Thomas-Fermi (TF) νέφους, όπου η αντίστοιχη πυκνοτητά του γράφεται ως $|u_{\rm TF}|^2 = \mu_d - V(x)$. Αντικαθιστούμε την πυκνότητα $|u_d|^2$ στις Εξ. (3.40)-(3.41) με $|u_d|^2 \to |u_{\rm TF}|^2|u_d|^2$ [137]. και χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς $t \to \mu_d t$, $x \to \sqrt{\mu_d}x$, $|u_b|^2 \to \mu_d^{-1}|u_b|^2$, φέρνοντας τελικά τις Εξ. (3.40)-(3.41) στην ακόλουθη μορφή:

$$i\partial_t u_d + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_d - \left(|u_d|^2 + \tilde{g}_{12}|u_b|^2 - 1\right)u_d = R_d, \tag{3.42}$$

$$i\partial_t u_b + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_b - \left(\tilde{g}_{12}|u_d|^2 + \tilde{g}_{22}|u_b|^2 - \tilde{\mu}\right)u_b = R_b, \tag{3.43}$$

όπου $\tilde{\mu} = \mu_b/\mu_d$, ενώ οι διαταραχές R_d και R_b δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$R_d \equiv \left(2\mu_d^2\right)^{-1}\left[2\left(1 - |u_d|^2\right)V(x)u_d + V'(x)\partial_x u_d\right], \tag{3.44}$$

$$R_b \equiv \mu_d^{-2}\left(1 - \tilde{g}_{12}|u_d|^2\right)V(x)u_b, \tag{3.45}$$

με $V'(x) \equiv dV/dx$. Οι εξισώσεις (3.42)-(3.43) αποτελούν ένα σύστημα από δύο συζευγμένες εξισώσεις NLS, που βρίσκονται υπό την επίδραση των διαταραχών του δεξιού μέρους, δηλαδή τις εξισώσεις (3.44)-(3.45). Παρατηρεί κανείς, ότι η διαταραχή (3.44) περιλαμβάνει όρους αλληλεπίδρασης του u_d με το δυναμικό V που προήλθαν από το υπόβαθρο του. Από την άλλη πλευρά η εξίσωση (3.45) περιγράφει αλληλεπιδράσεις του u_b όχι μόνο με το δυναμικό V αλλά και με τη συνάρτηση u_d. Στην αδιατάρακτη περίπτωση (δηλαδή στο ομογενές πρόβλημα $V(x) = 0$) το σύστημα (3.42)-(3.43) επιδέχεται μία ακριβής σολιτονική λύση [βλ. Εξ. (3.13)-(3.14)].

Ακριβής λύση

Εδώ είναι σημαντικό, να θεωρήσουμε την πιό γενική μορφή ενός διανυσματικού φωτεινού-σκοτεινού σολιτονίου, των Εξ. (3.42)-(3.43), (βλ. αναφορές [163--165] για μία παρόμοια λύση αλλά στο ολοκληρώσιμο όριο Manakov όπου $V = 0$ και $g_{ij} = 1$):

$$u_d(x,t) = \cos\phi \tanh\Big[D\Big(x - x_0(t)\Big)\Big] + i\sin\phi, \tag{3.46}$$

$$u_b(x,t) = \eta \mathrm{sech}\Big[D\Big(x - x_0(t)\Big)\Big] \times \exp\Big[ikx + i\theta(t) + i\left(\tilde{\mu} - 1\right)t\Big]. \tag{3.47}$$

Στις παραπάνω εκφράσεις, ϕ είναι η φασική γωνία του σολιτονίου, $\cos\phi$ και η, αντιπροσωπεύουν το πλάτος του σκοτεινού και του φωτεινού σολιτονίου αντίστοιχα, ενώ D και $x_0(t)$ είναι το αντίστροφο εύρος και το κέντρο του σολιτονίου, αντίστοιχα. Ακόμη, $k = D\tan\phi = \mathrm{const}$ και $\theta(t)$ είναι ο σταθερός κυματάριθμος και η φάση του φωτεινού σολιτονίου αντίστοιχα. Η φασική γωνία ϕ συνδέεται άμεσα με τη σκοτεινότητα του σολιτονίου, μέσω της σχέσης $|u_d|^2 = 1 - \cos^2\phi \mathrm{sech}\Big[D\Big(x - x_0(t)\Big)\Big]$. Το σκοτεινό σολιτόνιο, μπορεί να γίνει “γκρι” στο παραπάνω συμπύκνωμα --δηλ. να αποκτήσει ταχύτητα-- όταν $0 \neq \phi < \pi/2$, ενώ γίνεται στάσιμο (δηλαδή “μαύρο”) μόνο στην οριακή περίπτωση όπου $\phi = 0$. Σε αυτό το όριο, η λύση των εξισώσεων (3.46)-(3.47) συμπίπτει με αυτήν που δίνεται στις εξισώσεις (3.13)-(3.14) για τιμές των παραμέτρων $\mu_1 = \mu_d = 1$, $A_1 = 1$, $A_2 = \eta$, και $b = D$ (μαζί με την κανονικόποιηση των συντελεστών της μη γραμμικότητας που περιγράφεταο παραπάνω). Αφού εισάγουμε τις Εξ. (3.46)-(3.47) μέσα στις Εξ. (3.42)-(3.43), βρίσκουμε ότι οι παραπάνω σολιτονικές σταθερές πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες --παρόμοιες με εκείνες των Εξ. (3.15)-(3.18). Πιο συγκεκριμένα, για να ισχύει η Εξ. (3.42), πρέπει να ισχύει:

$$D^2 = \cos^2\phi - \tilde{g}_{12}\eta^2, \tag{3.48}$$

$$\dot{x}_0 = D\tan\phi, \tag{3.49}$$

ενώ αντίστοιχα για την Εξ. (3.12), θα πρέπει να ισχύει:

$$D^2 = \tilde{g}_{12}\cos^2\phi - \tilde{g}_{22}\eta^2, \tag{3.50}$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\left(D^2 - k^2\right)t + (1 - \tilde{g}_{12})\,t. \tag{3.51}$$

Το πλάτος του φωτεινού σολιτονίου η και το αντίστροφο εύρος D καθορίζονται από τις παραπάνω συνθήκες ως εξής:

$$\eta^2 = \frac{\tilde{g}_{12} - 1}{\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}}, \tag{3.52}$$

$$D^2 = \frac{\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2}{\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}}, \tag{3.53}$$

Ακόμα το πλάτος του φωτεινού σολιτονίου η, το χημικό δυναμικό μ_d και το αντίστροφο εύρος του διανυσματικού σολιτονίου D συνδέονται με τον αριθμό των ατόμων του φωτεινού σολιτονίου N_b μέσω της σχέσης:

$$N_b \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |u_b|^2 dx = \frac{2\sqrt{\mu_d}\eta^2}{D}. \tag{3.54}$$

Όπως αναφέραμε και στην Εισαγωγή 1, το σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο συχνά αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως *συμβιωτικό*, υποδηλώνοντας ότι το φωτεινό σολιτόνιο (που δεν υπάρχει μόνο του σε απωστικά αλληλεπιδρώντα συμπυκνώματα) μπορεί να σχηματιστεί *μόνο* μέσω των μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων του με το σκοτεινό σολιτόνιο. Διαισθητικά, μπορεί κανείς να πει ότι το σκοτεινό σολιτόνιο στο ένα συστατικό δημιουργεί ένα φαινομενικό δυναμικό για το άλλο συστατικό και το δυναμικό αυτό υποστηρίζει μια εντοπισμένη (δέσμια) κατάσταση, το φωτεινό σολιτόνιο.

Επίδραση των διαταραχών R_b και R_d

Θα μελετήσουμε τώρα την επίδραση των διαταραχών $R_{b,d}$ σε αυτές τις λύσεις, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση ότι το σολιτόνιο έχει τη μορφή ενός σημειακού σωματιδίου. Λαμβάνωντας υπ'όψιν μία τέτοια εικόνα, θα εξάγουμε μία εξίσωση κίνησης που περιγράφει την κίνηση του κέντρου του σολιτονίου. Θεωρούμε, λοιπόν την Χαμιλτονιανή (συνολική ενέργεια) του αδιατάρακτου συστήματος των Εξ. (3.42)-(3.43), δηλαδή όταν $R_d = R_b = 0$:

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} dx,$$

$$\mathcal{E} = |\partial_x u_d|^2 + |\partial_x u_b|^2 + \left(|u_d|^2 - 1\right)^2 + \tilde{g}_{22}|u_b|^4 - 2\tilde{\mu}|u_b|^2 + 2\tilde{g}_{12}|u_b|^2|u_d|^2. \tag{3.55}$$

Η ενέργεια αυτή για τη λύση του σολιτονίου των Εξ. (3.46)-(3.47), δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$E = \frac{4}{3}D^3 + \frac{1}{6}\chi D^2\left(2\tilde{g}_{12} + 3\tan^2\phi + 1\right) + \frac{1}{6}\chi^2 D\left(\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2\right) + \chi\left(\tilde{g}_{12} - \tilde{\mu}\right), \tag{3.56}$$

όπου $\chi = N_b/\sqrt{\mu_d}$. Στην αδιαβατική προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε, υποθέτουμε ότι παρουσία των διαταραχών (3.44)-(3.45) οι παράμετροι του σολιτονίου γίνονται αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χρόνου t, και ότι το σολιτόνιο διατηρεί τη μορφή του κατά την δυναμική του εξέλιξη. Έτσι υποθέτουμε ότι οι παράμετροι γίνονται $\phi \to \phi(t)$, $D \to D(t)$ και οι αντίστοιχες συνθήκες συμβιβαστότητας (3.48)-(3.49) γίνονται τώρα:

$$D^2(t) = \cos^2\phi(t) - \frac{1}{2}\tilde{g}_{12}\chi D(t), \tag{3.57}$$

$$\dot{x}_0(t) = D(t)\tan\phi(t), \tag{3.58}$$

όπου και χρησιμοποιήσαμε την Εξ. (3.54). Η χρονική εξέλιξη των τριών ελεύθερων παραμέτρων $\phi(t)$, $D(t)$ και $x_0(t)$ μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη εξέλιξη της ενέργειας του σολιτονίου. Πιο συγκεκριμένα, παραγωγίζοντας την Εξ. (3.56) ως προς το χρόνο, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{V'(x)}{\mu_d^2}\Big[2\sin\phi\cos^3\phi - \frac{2}{3}\tilde{g}_{12}\chi D\sin\phi\cos\phi \\ &- \chi D\tan\phi\left(1 - \tilde{g}_{12}\left(1 - \frac{\cos^2\phi}{3}\right)\right)\Big].\end{aligned} \tag{3.59}$$

Αντίστοιχα χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.57)-(3.58) και τις μιγαδικείς συζυγείς τους, μπορούμε να εξάγουμε την παρακάτω σχέση που περιγράφει την μεταβολή της ενέργειας λόγω της παρουσίας των διαταρχών:

$$\frac{dE}{dt} = -2\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(R_d^*\partial_t u_d + R_b^*\partial_t u_b\right)dx\right\}. \tag{3.60}$$

όπου ο αστερίσκος δηλώνει μιγαδικό συζυγή. Έτσι έχουμε υποδείξει δύο διαφορετικούς μηχανισμούς που οδηγούν στην μεταβολή της ενέργειας:

(i) μεταβάλλεται όταν οι παράμετροι του σολιτονίου γίνουν χρονικά εξαρτώμενες παράμετροι, και

(ii) μεταβάλλεται λόγω της παρουσίας των διαταραχών R_b και R_d.

Ταλαντώσεις στο παραβολικό δυναμικό

Εξισώνοντας τις σχέσεις (3.59)-(3.60) μπορούμε να πάρουμε τις κατάλληλες εξισώσεις που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη των παραμέτρων του σολιτονίου:

$$\begin{aligned}&4D^2\dot{D} + \frac{1}{3}\chi D\dot{D}\left(2\tilde{g}_{12} + 3\tan^2\phi + 1\right) + \chi D^2\tan\phi\sec^2\phi\dot{\phi} + \frac{1}{6}\chi^2\dot{D}\left(\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2\right) \\ &= \frac{V'(x)}{\mu_d^2}\Big[2\sin\phi\cos^3\phi - \frac{2}{3}\tilde{g}_{12}\chi D\sin\phi\cos\phi - \chi D\tan\phi\left(1 - \tilde{g}_{12}\left(1 - \frac{\cos^2\phi}{3}\right)\right)\Big].\end{aligned} \tag{3.61}$$

Η παραπάνω εξίσωση μαζί με τις συνθήκες (3.57)-(3.58), αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων για τις τρεις σχετικές παραμέτρους ϕ, D και x_0. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε σολιτόνια που κινούνται στο κέντρο της παγίδας και είναι σχεδόν "μαύρα", δηλαδή όταν ισχύει $x_0 \approx 0$ και $\phi \approx 1$ αντίστοιχα και τα οποία αποτελούν ένα σημείο ισορροπίας (fixed-point) του παραπάνου συστήματος το οποίο χαρακτηρίζεται από:

$$x_0 = 0, \quad \phi_0 = 0, \quad D_0 = \frac{\chi}{4}\tilde{g}_{12}\left(\sqrt{1+\frac{16}{\chi^2\tilde{g}_{12}^2}} - 1\right). \tag{3.62}$$

Θεωρώντας μικρές διαταραχές γύρω από το σημείο ισορροπίας, γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις (3.61) και (3.57)-(3.58), χρησιμοποιώντας τις τιμές: $x_0 = X_0$, $\phi = \phi_1$, και $D = D_0 + D_1$, όπου οι X_0, ϕ_1, και D_1 είναι μικρές παράμετροι. Από τις εξισώσεις που προκύπτουν για τα X_0, ϕ_1 and D_1 και μετά από κατάλληλο συνδυασμό μεταξύ τους, καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση για το κέντρο του του σολιτονίου X_0:

$$\ddot{X}_0 = -\frac{R}{W}V'(X_0), \tag{3.63}$$

όπου

$$R = D_0\left(2 - \tilde{g}_{12}\chi D_0 + \chi D_0\left(\tilde{g}_{12} - 1\right)\right), \tag{3.64}$$
$$W = 8D_0^2\tilde{D}_0 - \chi D_0^2 + \frac{2}{3}\tilde{D}_0 D_0\chi\left(2\tilde{g}_{12}+1\right) + \frac{1}{3}\chi^2\tilde{D}_0\left(\tilde{g}_{22}^2 - \tilde{g}_{12}^2\right), \tag{3.65}$$

και $\tilde{D}_0 = \frac{1}{2D_0 + \frac{\chi}{2}\tilde{g}_{12}}$. Στην περίπτωση που βρισκόμαστε στο όριο του Manakov όπου $\tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{22} = 1$, η Εξ. (3.63) συμπίπτει με τα αποτελέσματα για την κίνηση του κέντρου του σολιτονίου που αναφέρεται στην [165]:

$$\ddot{X}_0 = -\frac{1}{2}V'(X_0) + \frac{N_b}{8\sqrt{\mu + \left(\frac{N_b}{4}\right)^2}}V'(X_0). \tag{3.66}$$

Η παραπάνω εξισώση αποτελεί μία Νευτώνεια εξίσωση κίνησης για ένα κλασσικό σωματίδιο υπό την επίδραση ενός δυναμικού. Στη περίπτωση ενός αρμονικού δυναμικού $V(x) = (1/2)\Omega^2x^2$, η Εξ. 3.66 γίνεται η εξίσωση κίνησης του κλασσικού γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή,

$$\ddot{X}_0 + \omega_{osc}^2 X_0 = 0, \tag{3.67}$$

με συχνότητα ταλάντωσης που δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_{osc}^2 = \Omega^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\chi}{\chi_0}\right). \tag{3.68}$$

όπου $\chi = N_b/\sqrt{\mu_d}\,\chi_0 = 8\sqrt{1+(\chi/4)^2}$. Στο όριο $\chi \to 0$, δηλαδή όταν ο αριθμός των ατόμων του φωτεινού σολιτονίου $N_b \to 0$, η Εξ. 3.66 αναπαράγει την εξίσωση ταλάντωσης ενός σκοτεινού σολιτονίου σε BEC ενός συστατικού, δηλ. $\omega_{osc} = \Omega/\sqrt{2}$, ενώ προφανώς η συχνότητα αυτή μεταβάλλεται καθώς αυξάνεται το N_b. Συγκεκριμένα, η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται συγκρινόμενη με την χαρακτηριστική τιμή $\Omega/\sqrt{2}$, οπότε το ζεύγος σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου εκτελεί πιο αργές ταλαντώσεις όσο ο αριθμός των ατόμων στο φωτεινό σολιτόνιο αυξάνεται. Στην γενική περίπτωση, όπου $g_{ij} \neq 1$, η Εξ. (3.63) υποδεικνύει ότι η παραβολική παγίδα οδηγεί σε μία γραμμική δύναμη επαναφοράς, μόνο που αυτή η περίπτωση είναι πιο σύνθετη και εξαρτάται ρητά από τις τιμές των $\tilde{g}_{ij}$.

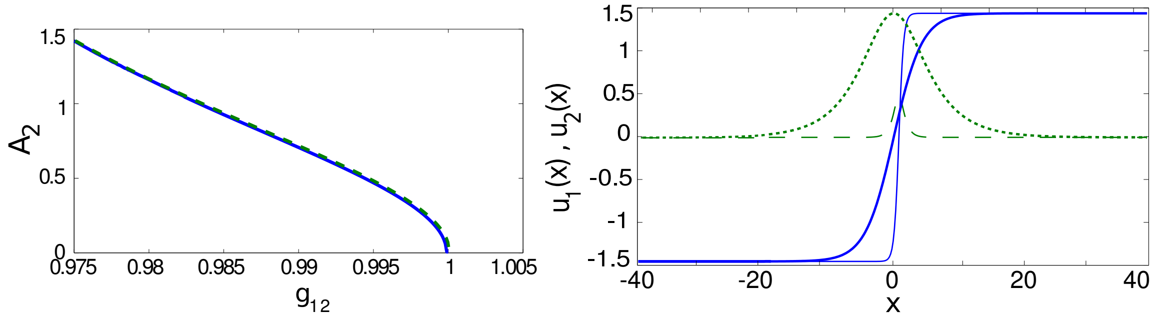
3.1.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Ζεύγη Φωτεινών-Σκοτεινών σολιτονίων και οι γενικευμένες περιοδικές τους λύσεις στην ομογενή περίπτωση

Στην αρχή του κεφαλαίου, προσδιορίσθηκαν οι αναλυτικές λύσεις DB σολιτονίων καθώς και οι γενικευμένες περιοδικές λύσεις αυτών. Σημειώνουμε ότι οι στατικές λύσεις που αντιστοιχούν σε λύσεις με μηδενική ταχύτητα, μπορούν να βρεθούν αναλυτικά λύνοντας τις αντίστοιχες στάσιμες εξισώσεις (3.11) και (3.12). Όπως και στο Κεφάλαιο 2 και συγκεκριμένα στο Υποκεφάλαιο 2.2.3, θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Newton-Raphson για την εύρεση ριζών. Ως αρχική συνθήκη, εισάγουμε μία “υπόθεση” που υπολογίζουμε ότι βρίσκεται κοντά στην πραγματική λύση; έτσι σε όλες τις περιπτώσεις ως αρχική συνθήκη εισάγουμε την λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος.

Στην περίπτωση του ζεύγους σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου χρησιμοποιούμε τη λύση από τις Εξ. (3.13)-(3.14) πολλαπλασισμένη με το υπόβαθρο TF; για την περίπτωση sn-cn λύσεων, αυτή των Εξ. (3.23)-(3.24), ενώ τέλος για την περίπτωση sn-dn λύσεων την μορφή των Εξ. (3.23)-(3.32). Η σύγκλιση του αλγορίθμου οδηγεί στην εύρεση της ακριβούς λύσης (με αριθμητική ακρίβεια σφάλματος 10^{-7}). Στόχος είναι να δείξουμε την συμφωνία μεταξύ των αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων για ένα μεγάλο εύρος τιμών των συντελεστών τους; ένω είναι χρήσιμο επίσης να δείξουμε ποιο είναι το όριο των παραμετρικώ τιμών που παύουν οι παραπάνω λύσεις να αποτελούν λύση του συστηματός μας.

Αρχικά παρουσιάζουμε στο Σχ. 3.1, την περίπτωση ενός ζεύγους φωτεινού-σκοτεινού σολιτονίου και δείχνουμε τη μέγιστη τιμή της πυκνότητας του φωτεινού συστατικού, δηλαδή τη παράμετρο A_2 για διαφορετικές τιμές των διατομικών αλληλεπιδράσεων. Πιο συγκεκριμένα, καθορίζουμε τις τιμές των εξής παραμέτρων: $g_{11} = 1$ (αυτό σημαίνει ότι $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$) και $g_{22} = 0.95$ σύμφωνα με αυτές που είναι σχετικές για το ^{87}Rb; επιπρόσθετα ορίζουμε αρχικά τον συντελεστή g_{12} έτσι ώστε οι δύο καταστάσεις του μείγματος να είναι μη αναμίξιμες μεταξύ τους και έτσι παίρνει την τιμή $g_{12} = 0.975$. 'Ετσι η ταυτοποίηση του πλάτους του φωτεινού



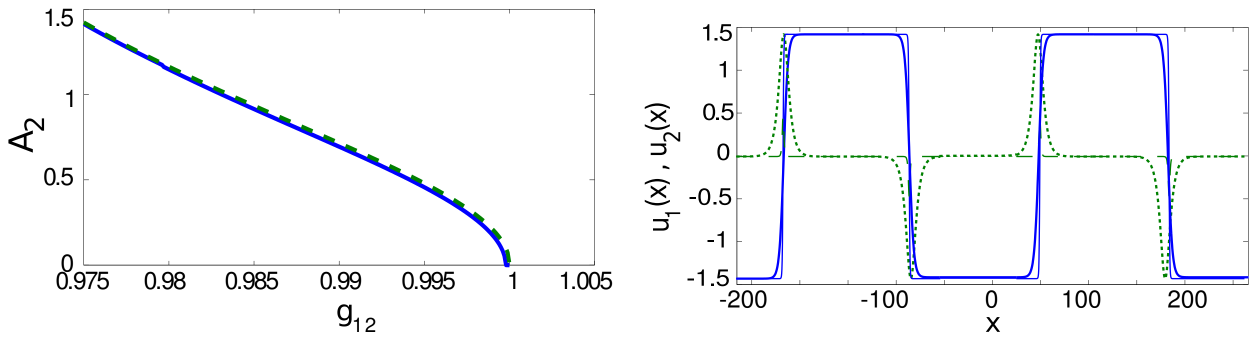
Σχήμα 3.1: Η αριστερή εικόνα παρουσιάζει το πλάτος A_2 του φωτεινού σολιτονίου ως συνάρτηση του διατομικού συντελεστή αλληλεπίδρασης g_{12}; ο τελευταίος έχει αρχική τιμή την $g_{12} = 0.975$ και πλησιάζει το όριο όπου $g_{12} \to g_{11}$. Η διακεκομμένη (πράσινη) γραμμή παρουσιάζει το αναλυτικό αποτέλεσμα της Εξ. (3.20) ενώ η συνεχής (μπλέ) γραμμή τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα.Παραμετρικές τιμές: $g_{11} = 1$ και $g_{22} = 0.95$. Η δεξιά εικόνα απεικονίζει τα αριθμητικά αποτελέσματα (τα οποία βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με τα αναλυτικά) των λύσεων του σκοτεινού-φωτεινού ζεύγους σολιτονίων; οι πιο φαρδιές γραμμές αναφέρονται στη τιμή $g_{12} = 0.975$ όπου η συνεχής (μπλέ) υποδεικνύει τη σκοτεινή και η διακεκομμένη (πράσινη) τη φωτεινή λύση, ενώ οι πιο λεπτές γραμμές αναφέρονται στη τιμή $g_{12} = 0.995$ (χρησιμοποιώντας την ίδια σημειογραφία για τη λύση του σκοτεινού και φωτεινού σολιτονίου).

σολιτόνιου λαμβάνει χώρα για τιμές του συντελεστή διατομικών αλληλεπιδράσεων στο διάστημα $g_{12} \in [0.975, 1]$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στην αριστερή εικόνα του Σχ. 3.1, όπου με τη συνεχή γραμμή υποδεικνύονται τα αριθμητικά αποτελέσματα, ενώ με την διακεκομμένη τα αντίστοιχα αναλυτικά από την Εξ. (3.20). Στην δεξιά εικόνα του Σχ. 3.1 παρουσιάζεται η μεταβολή της λύσης στο σήμειο όπου το πλάτος του δεύτερου συστατικού τείνει να μηδενιστεί; το συγκεκριμένο όριο διακρινεται όταν $g_{12} = g_{11}$, όταν $g_{11} > g_{22}$ και το σκοτεινό σολιτόνιο βρίσκεται στο συστατικό με το μεγαλύτερο μήκος σκέδασης. Για αυξανόμενη τιμή του συντελεστή g_{12} η οποία πλησιάζει την τιμή g_{11}, το εύρος του σκοτεινού σολιτονίου μειώνεται, και όπως φαίνεται αντίστοιχη μείωση παρατηρείται και για το εύρος του "παγιδευμένου", στη δέσμια κατάσταση, φωτεινού σολιτονίου (ανάλογα με το $\sqrt{g_{11} - g_{12}}$ σύμφωνα με την Εξ. (3.20)) και τείνει στη τιμή 0 για το σχετικό όριο.

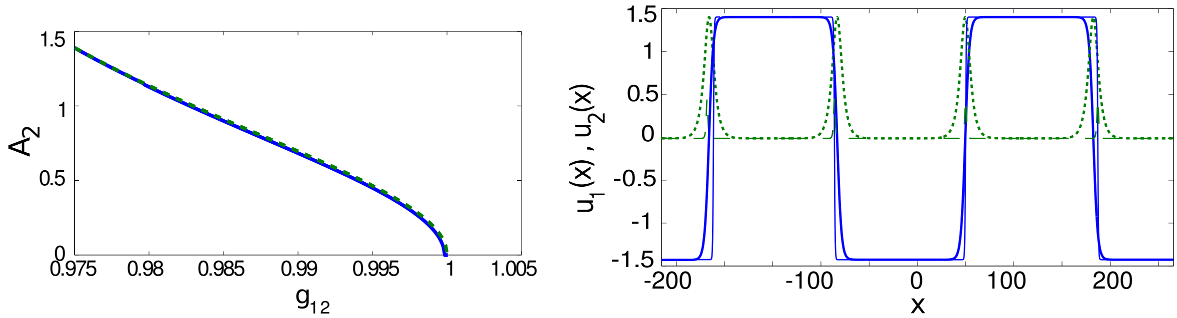
Παρόμοια αποτελέσματα αλλά για την περίπτωση περιοδικών λύσεων υποδυκνείονται στα Σχ. 3.2-3.3. Το πρώτο σχήμα παρουσιάζει τις λύσεις $sn - cn$ όπου το φωτεινό πλέγμα καθορίζει εκτός φάσης περιοδικές λύσεις στα δύο συστατικά του μείγματος, ενώ το δεύτερο σχήμα αφορά $sn - dn$ λύσεις με τις περιοδικές λύσεις να βρίσκονται σε φάση.

Σκοτεινό-Φωτεινό σολιτόνιο παρουσία παραβολικού δυναμικού

Αφού μελετήσαμε αριθμητικά την ύπαρξη στατικών λύσεων για μεγάλο εύρος των παραμέτρων, θα προχωρήσουμε στην μελέτη της ευστάθειας τους μέσω της ανάλυσης BdG. Θα συγκρίνουμε με αυτό το τρόπο, το φάσμα των λύσεων με τη συχνότητα που προβλέπεται από τη Εξ. (3.63).



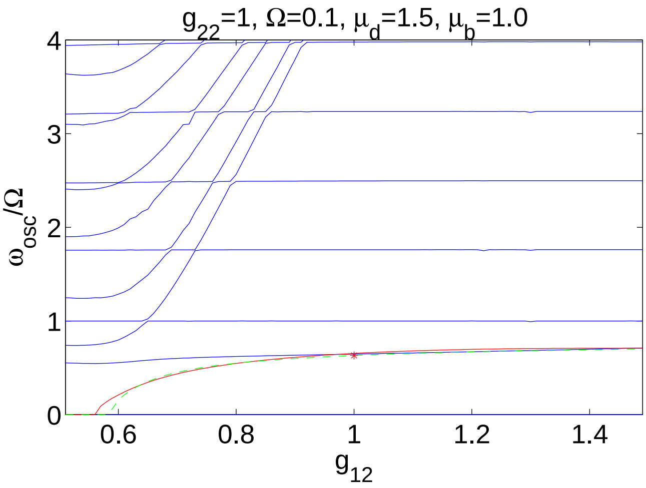
Σχήμα 3.2: Η ίδια φαινομενολογία όπως στη περίπτωση του σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου που φαίνεται στο Σχ. 3.1 αλλά για την περίπτωση λύσεων sn-cn.



Σχήμα 3.3: Η ίδια φαινομενολογία όπως στη περίπτωση του σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου που φαίνεται στο Σχ. 3.1 αλλά για την περίπτωση λύσεων sn-dn.

Η παραπάνω ανάλυση (βλ. σχετική συζήτηση και στο Κεφάλαιο 2), μελετά μικρού πλάτους διαταραχές προστιθόμενες σε μία στατική λύση. Οι ιδιοτιμές των αντίστοιχων διαταραχών λαμβάνονται αριθμητικά και χαρακτηρίζουν την φασματική ευστάθεια της αντίστοιχης στατικής λύσης. Οι τρόποι ταλάντωσης με καθαρά φανταστική ιδιοτιμή, αντιστοιχούν σε δυναμική ταλάντωσης της αντίστοιχης διαταραχής και αυτοί ονομάζονται ευσταθείς τρόποι. Από την άλλη πλευρά αν η ιδιοτιμή έχει πεπερασμένο πραγματικό μέρος, τότε ο συγκεκριμένος τρόπος είναι ασταθής, αφού θα οδηγήσει σε εκθετικά αυξανόμενη διαταραχή. Παρουσία της παραβολικής παγίδας είναι γνωστό ότι το φάσμα αποτελείται από διακριτές ιδιοτιμές. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τρόποι με αρνητική ενέργεια, οι οποίοι ονομάζονται ανώμαλοι τρόποι. Οι ανώμαλοι τρόποι σχετίζονται άμεσα με την σωματιδιακή εικόνα των σολιτονίων, και περιγράφουν την κίνηση του κέντρου μάζας τους (ή την σχετική κίνηση των σολιτονίων σε δέσμιες καταστάσεις πολλών σολιτονίων).

Όπως έχει διατυπωθεί από προηγούμενη εργασία ([140]) για την περίπτωση όπου $g_{ij} = 1$), παρουσιάζονται ανώμαλοι τρόποι ταλάντωσης (με αρνητική ενέργεια) με συχνότητα που αντιστοιχεί σε αύτην που αντιστοιχεί στη κίνηση του σολιτονίου μέσα στο αρμονικό δυναμικό. Όπως φαίνεται από το Σχ. 3.4, η συμφωνία μεταξύ των αριθμητικών και των αναλυτικών τιμών για τη συχνότητα έρχεται σε πολύ καλή συμφωνία για το διάστημα τιμών $g_{12} \in [0, 2]$. Ωστόσο, για μικρότερες τιμές της παραμέτρου, παρατηρούμε μία σταδιακή ασυμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων, δηλαδή για τιμές $g_{12} < 0.8$.



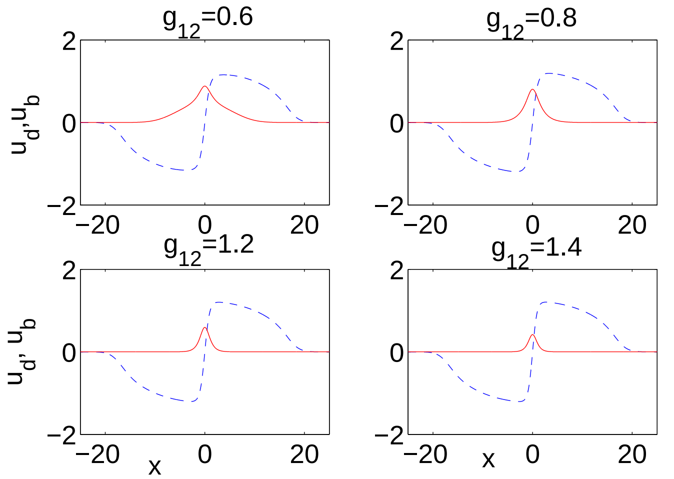
Σχήμα 3.4: Η εικόνα δείχνει την εξάρτηση των διάφορων τρόπων ταλάντωσης μέσω της ανάλυσης BdG, με τις κόκκινες συνεχείς γραμμές, σαν συνάρτηση του συντελεστή g_{12}. Οι πράσινες διακεκομμένες γραμμές υποδεικνύουν τα αντίστοιχα αναλυτικά αποτελέσματα, που εξήχθησαν μέσω της Χαμιλτονιανής αδιαβατικής θεωρίας διαταραχών, από την Εξ. (3.63); ενώ με το κόκκινο αστέρι παρουσιάζεται η θεωρητική τιμή από την [165] για τιμές των συντελεστών $g_{11} = g_{12} = g_{22} = 1$. Παραμετρικές τιμές: $g_{22} = 1$, $\Omega = 0.1$, $\mu_d = 1.5$, $\mu_b = 1.0$, και $dx = 0.001$. Η θεωρητική τιμή για τον ανώμαλο τρόπο ταλάντωσης προσεγγίζεται πολύ καλά για τη περιοχή τιμών $[0.8, 2]$ του συντελεστή g_{12}, ενώ δεν αποτελεί καλή προσέγγιση όταν ο συντελεστής g_{12} παίρνει ακόμα μικρότερες τιμές.

Σε μία προσπάθεια να διερευνηθεί η προέλευση αυτής της απόκλισης, απεικονίζουμε στο Σχ. 3.5 την μορφή των δύο συστατικών του μείγματος για διαφορετικές τιμές του g_{12} και συγκεκριμένα καθώς αυτό μειώνεται. Από τα αντίστοιχα γραφήματα διαπιστώνουμε οτί ενώ αριθμητικά μπορούμε να προβούμε στην ακριβή λύση του συστήματος στην περίπτωση των μη αναμίξιμων συστατικών του μείγματος, κάτι τέτοιο χρησιμοποιώντας πάντα την ίδια αρχική συνθήκη δεν ισχύει όταν τα συστατικά είναι αναμίξιμα. Τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα των στατικών λύσεων για τιμές $g_{12} = 0.6, 0.8, 1.2, 1.4$ απεικονίζονται στο Σχ. 3.5. Πιο συγκεκριμένα, στην αναμίξιμη περίπτωση, το συστατικό που φέρει το σκοτεινό σολιτόνιο αλληλεπιδρά γρήγορα με το συστατικό που έχει ως λύση το φωτεινό σολιτόνιο και προκαλεί την άμεση διεύρυνση του (αυτό γίνεται ιδιαίτερο αισθητό στην πάνω αριστερή εικόνα του Σχ. 3.5 όταν $g_{12} = 0.6$). Αυτό εξηγεί και την ασυμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν προηγουμένως και αφορούσαν την συχνότητα ταλάντωσης του DB σολιτονίου.

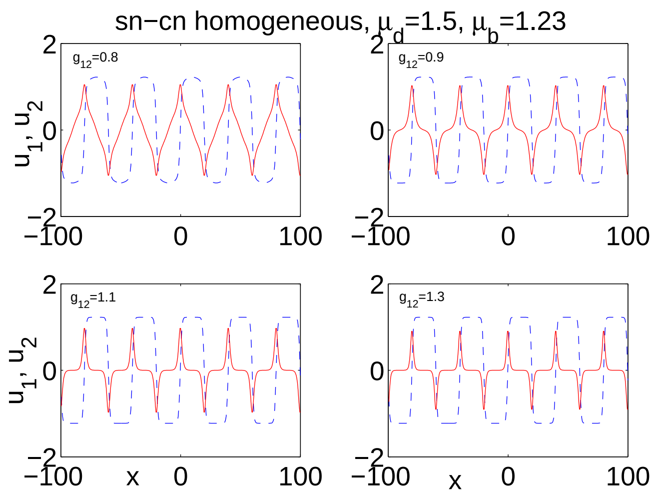
Περαιτέρω αριθμητική διερεύνηση

Θα προχωρήσουμε σε μία πιο εκτενή διερεύνηση των DB σολιτονίων και των γενικευμένων περιοδικών τους λύσεων παρουσία και απουσία του αρμονικού δυναμικού παγίδευσης για όρια των συντελεστών τους που δεν έχουν καταγραφεί από τις αναλυτικές εκτιμήσεις.

Στο Σχ. 3.6, κρατάμε σταθέρες τις τιμές για τα χημικά δυναμικά ως εξής $\mu_d = 1.5$ και $\mu_b = 1.23$ και μεταβάλλουμε τον συντελεστή g_{12} συγκεκριμένα για τις τιμές 0.8 (πάνω και αριστερή εικόνα); 0.9 (πάνω και δεξιά εικόνα); 1.1 (κάτω και αριστερή εικόνα) και 1.3 (κάτω και

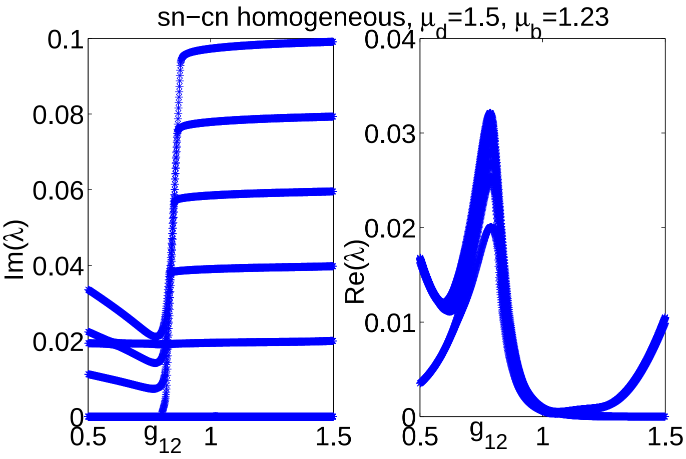


Σχήμα 3.5: Οι εικόνες δείχνουν την απεικόνιση της μορφής των δύο συστατικών του μείγματος για διαφορετικές τιμές του συντελεστή g_{12}. Οι παραμετρικές τιμές είναι οι ίδιες όπως στο Σχ. 3.4.



Σχήμα 3.6: Το σχήμα απεικονίζει τις στατικές περιοδικές λύσεις τύπου sn-cn για $g_{12} = 0.8, 0.9, 1.1, 1.3$ στις εικόνες πάνω αριστερά, πάνω δεξιά, κάτω αριστερά και κάτω δεξιά αντίστοιχα. Τα χημικά δυναμικά λαμβάνουν τιμές $\mu_d = 1.5$ και $\mu_b = 1.23$.

δεξιά εικόνα). Μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε ότι ακόμα και στη περιοχή τιμών του g_{12} που βρίσκεται έξω από το όριο για το οποίο υπολογίσαμε αναλυτικά ότι υπάρχουν ακριβείς λύσεις, τέτοιες περιοδικές λύσεις τύπου sn-cn, μπορούν να εξαχθούν αριθμητικά. Στην μη αναμίξιμη περιοχή, οι λύσεις αποτελούν ζεύγη DB σολιτονίων. Η μη αναμιξιμότητα οδηγεί το συστατικό αυτό να έχει πυκνότητα που πλησιάζει κοντά στη τιμή 0 λόγω της ισχυρής αμοιβαίας άπωσης με τη πεπερασμένη πυκνότητα (σε αυτές τις ενδιάμεσες περιοχές) του άλλου συστατικού που φέρει το σκοτεινό σολιτόνιο. Ωστόσο, όσο οι τιμές των συντελεστών πλησιάζουν στο σημείο όπου τα δύο μείγματα θα είναι μεταξύ τους αναμίξιμα, το συστατικό του φωτεινού σολιτονίου διευρύνεται υπολογίσιμα και τείνει να έχει μια μορφή πιο τριγωνομετρική παρά υπερβολικής τέμνουσας.



Σχήμα 3.7: Η εικόνα δείχνει το φάσμα των sn-cn περιοδικών λύσεων σαν συνάρτηση του συντελεστή g_{12} για $\mu_d = 1.5$ και $\mu_b = 1.23$.

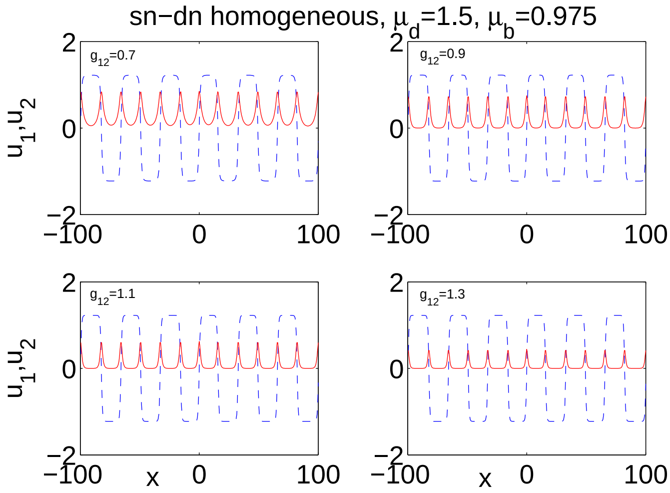
Στη συνέχεια, εξετάζουμε την ευστάθεια των λύσεων με τη μέθοδο BdG και βρίσκουμε το αντίστοιχο φάσμα τους. Τα συμπεράσματα υποδεικνύονται στο Σχ. 3.7.

Τα παραπάνω αποτελέσματα έχουν αξία και ως προς την φυσική τους ερμηνεία. Παρατηρώντας τα φανταστικά μέρη των ιδιοτιμών τους φαίνεται ότι υπάρχει μεγάλη μεταβολή στις τιμές τους καθώς το αναμίξιμο όριο πλησιάζει. Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχει ένα διάστημα τιμών του g_{12} στην περιοχή κοντά στο όριο αναμιξιμότητας και ιδιαίτερα πιο κοντά στην μη αναμίξιμη περιοχή (δηλαδή για $1 < g_{12} < 1.2$), όπου οι αντίστοιχες περιοδικές λύσεις είναι *λιγότερο μη ευσταθείς*. Πρέπει να υπενθυμίσουμε στο σημείο αυτό ότι για το Χαμιλτονιανό σύστημα που μελετούμε, αστάθεια (μετά τη γραμμικοποίηση) προκύπτει όταν για την συγκεκριμένη ιδιοτιμή ισχύει Re $(\lambda) \neq 0$.

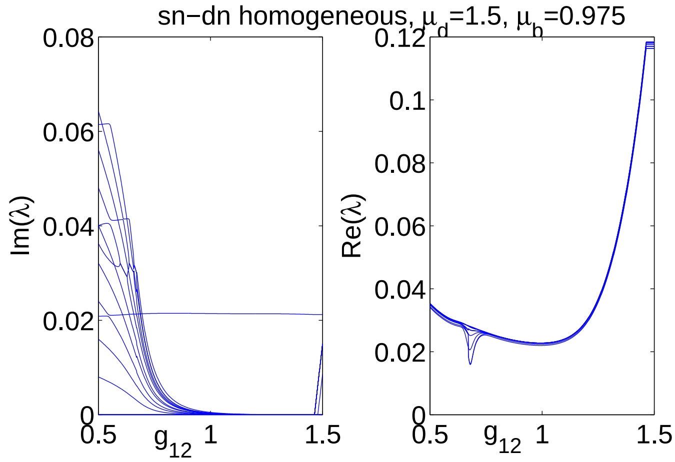
Έτσι με κατάλληλη διαχείριση των σχετικών διατομικών αλληλεπιδράσεων μπορούμε να προβλέψουμε ευσταθείς λύσεις για μεγάλα χρονικά διαστήματα κοντά στην μη αναμίξιμη περιοχή.

Παρόμοια αποτελέσματα, αλλά αυτή τη φορά απουσία της παγίδας, (δηλ. στην περίπτωση ομογενούς συμπυκνώματος) παρουσιάζονατι για τις περιοδικές λύσεις που βρίσκονται σε φάση μεταξύ τους (sn-dn περιοδικές λύσεις) στο Σχ. 3.8. Αυτές οι λύσεις φαίνεται να υπάρχουν και για τιμές πέραν αυτών που έδειξε η θεωρία. Έτσι λοιπόν κρατάμε και πάλι σταθερές τιμές από το χημικά δυναμικά $\mu_d = 1.5$ και $\mu_b = 0.975$ και μεταβάλλουμε το g_{12}. Η αλλαγή των λύσεων είναι και πάλι ευδιάκριτη κοντά στο όριο που τα συμπυκνώματα θεωρούνται αναμίξιμα/μη αναμίξιμα. Η ευστάθεια και πάλι μελετάται μέσω της ανάλυσης BdG. Όπως φαίνεται στο Σχ. 3.9, για μία ακόμα φορά εμφανίζεται ένα μικρό αύξησης (που μεταφράζεται σε μεγαλύτερο χρόνο ζωής των σχετικών κυματομορφών) στην αναμίξιμη περιοχή (και πολύ κοντά στο όριο που διαχωρίζει τις δύο περιοχές). Σε παραμετρικές περιοχές μακριά από αυτό το όριο οι λύσεις γίνονται ισχυρά ασταθείς και επομένως είναι λιγότερο πιθανό να παρατηρηθούν .

Τέλος μελετάμε, την περίπτωση περιοδικών λύσεων παρουσία δυναμικού, ως μία επέκταση της μελέτης τόσο των ζευγών DB παγιδευμένων λύσεων όσο και των περιοδικών sn-cn



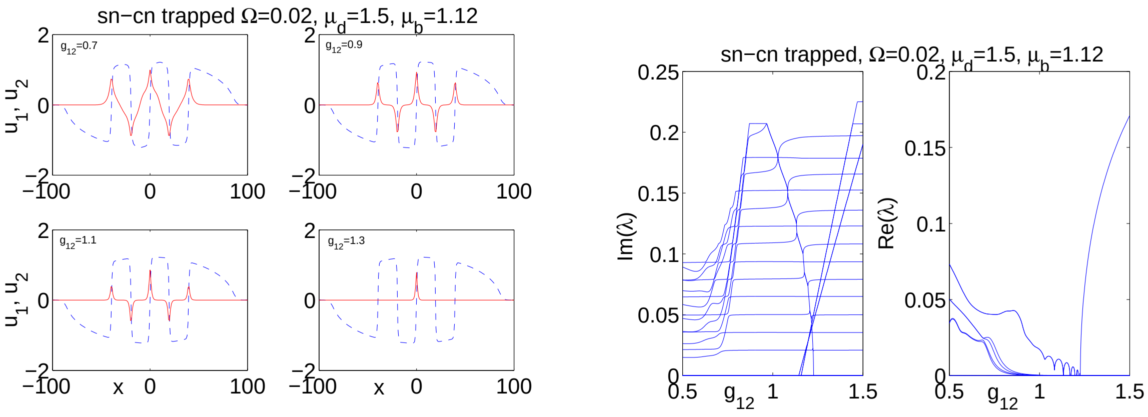
Σχήμα 3.8: Οι στατικές περιοδικές sn-dn λύσεις για $g_{12} = 0.7, 0.9, 1.1, 1.3$ όπως φαίνονται στις πάνω αριστερή, πάνω δεξιά, κάτω αριστερή και κάτω δεξιά εικόνες αντίστοιχα. Οι τιμές των χημικών δυναμικών είναι $\mu_d = 1.5$ και $\mu_b = 0.975$. Για $g_{12} < 0.7$ όταν είναι αρκούντως μικρό, οι dn λύσεις δεν ακουμπούν πλέον τον x- άξονα άλλα βρίσκονται πάνω από αυτόν.



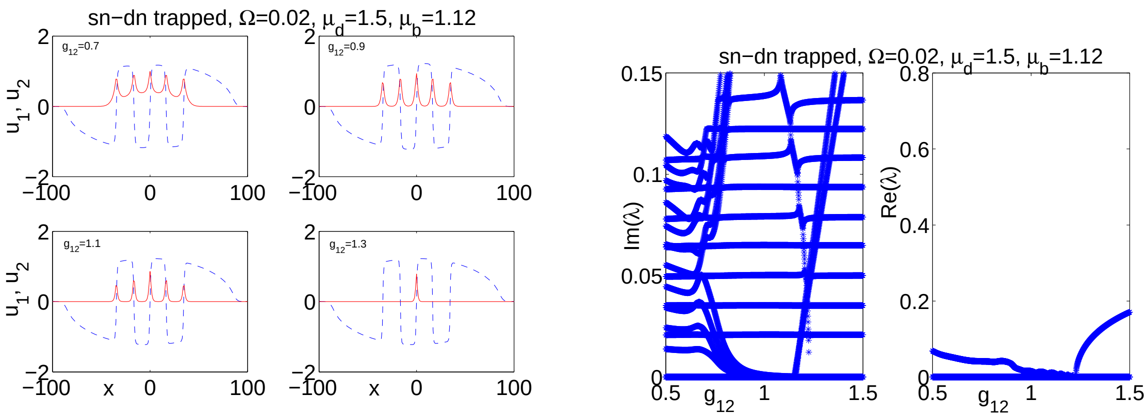
Σχήμα 3.9: Το φάσμα των περιοδικών sn-dn λύσεων για $\mu_d = 1.5$ και $\mu_b = 0.975$, ως συνάρτηση του g_{12}. Η συγκεκριμένη κυματομορφή είναι γενικά ασταθής.

και sn-dn λύσεων σε ομογενή συμπυκνώματα. Τα αντίστοιχα αρριθμητικά αποτελέσματα για τους δύο τύπους περιοδικών λύσεων φαίνονται, αντίστοιχα, στα Σχ. 3.10 και 3.11. Στο Σχ.3.10, μπορούμε να παρατηρήσουμε την ευστάθεια των sn-cn λύσεων παρουσία της παγίδας

Τα αποτελέσματα από την ανάλυση BdG, δείχνουν και πάλι ότι ακόμα και με την ύπαρξη παγίδας ο ρυθμός ανάπτυξης της αστάθειας είναι μικρότερος κοντά στο όριο όπου τα δύο συμπυκνώματα περνάνε από την μη αναμίξιμη στην αναμίξιμη περιοχή ενώ μεγαλώνει όταν αποκρυνόμαστε από αυτήν.



Σχήμα 3.10: Η αριστερή εικόνα δείχνει τις στατικές λύσεις των παγιδευμένων sn-cn περιοδικών λύσεων για $g_{12} = 0.7, 0.9, 1.1, 1.3$ στις πάνω αριστερά, πάνω δεξιά, κάτω αριστερά και κάτω δεξιά εικόνες αντίστοιχα. Η συχνότητα παγίδευσης είναι $\Omega = 0.02$, ενώ τα χημικά δυναμικά είναι $\mu_d = 1.5$ και $\mu_b = 1.12$. Όταν g_{12} είναι 1.2, είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι ο συνδυασμός της παγίδας στο σύστημα στην περιοχή όπου τα συμπυκνώματα είναι μη αναμίξιμα επιτρέπει μόνο στη κεντρική μέγιστη τιμή της φωτεινής πειοδικής λύσης να υπάρχει, ενώ οι υπόλοιπες εξαφανίζονται. Στη δεξιά εικόνα, φαίνεται το γραμμικοποιημένο φάσμα (που παρουσιάζει τα φανταστικά και πραγματικά μέρη) ως συνάρτηση της παραμέτρου g_{12}.



Σχήμα 3.11: Η αριστερή εικόνα δείχνει τις στατικές λύσεις των παγιδευμένων sn-dn περιοδικών λύσεων για $g_{12} = 0.7, 0.9, 1.1, 1.3$ στις πάνω αριστερά, πάνω δεξιά, κάτω αριστερά και κάτω δεξιά εικόνες αντίστοιχα. Η συχνότητα παγίδευσης είναι $\Omega = 0.02$, ενώ τα χημικά δυναμικά είναι $\mu_d = 1.5$ και $\mu_b = 1.12$. Στη δεξιά εικόνα φαίνεται το γραμμικοποιημένο φάσμα (που παρουσιάζει τα φανταστικά και πραγματικά μέρη) ως συνάρτηση της παραμέτρου g_{12}.

3.2 "Γένεση" Σολιτονίων σε Μη Αναμίξιμα Μείγματα Συμπυκνωμάτων

Πολλά πειράματα έχουν αποδείξει την δημιουργία σολιτονικών δομών που προκύπτουν από τη σύγκρουση των διαφορετικών συστατικών που αποτελούν ένα μείγμα BEC ([138--140] καθώς και [141,147]). Μέχρι στιγμής όμως δεν έχει πραγματοποιηθεί αναλυτική περιγραφή των δομών αυτών. Γι'αυτό το λόγο, θα ασχοληθούμε με το παρών πρόβλημα και θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τους μηχανισμούς γένεσης αυτών των δομών, μέσα από αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους.

Για το σκοπό αυτό η μελέτη μας επικεντρώνεται, σε ένα μείγμα δύο συμπυκνωμάτων αποτελούμενα από διαφορετικές καταστάσεις του ^{87}Rb, οι οποίες περιγράφονται από τις μακροσκοπικές κυματικές συναρτήσεις $\Psi_j(\mathbf{r},t)$ $(j=1,2)$. Η δυναμική του μείγματος τότε περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα [13, 14]:

$$i\hbar\partial_t\Psi_1 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_1(\mathbf{r}) - \mu_1 + \sum_{k=1}^{2} g_{12}|\Psi_2|^2\right)\Psi_1, \tag{3.69}$$

$$i\hbar\partial_t\Psi_2 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_2(\mathbf{r}) - \mu_2 + \sum_{k=1}^{2} g_{21}|\Psi_1|^2\right)\Psi_2, \tag{3.70}$$

όπου m είναι η ατομική μάζα, μ_j είναι τα χημικά δυναμικά, $V_j(\mathbf{r})$ τα δυναμικά παγίδευσης και $g_{jl} = 4\pi\hbar^2 a_{jk}/m$ είναι οι σταθερές σύζευξης που ορίζονται από τα μήκη σκέδασης- (s-wave scattering length), a_{jl}. Πρέπει να σημειωθεί ότι, για τις καταστάσεις $|1,-1\rangle$ και $|2,-2\rangle$, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στα πειράματα [166], ή για τις καταστάσεις $|1,-1\rangle$ και $|2,-2\rangle$ που μελετώνται στα πειράματα [138--140], όλα τα μήκη σκέδασης παίρνουν προσεγγιστικά την ίδια (θετική) τιμή. Έτσι παρακάτω υποθέτουμε ότι, $a_{11} = a_{22} \neq a_{12}$, ως εκ τούτου το πρόσημο της παραμέτρου $\Delta \equiv (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/a_{11}^2$, το οποίο καθορίζει πότε τα δύο συμπυκνώματα θα είναι αναμίξιμα ($\Delta > 0$) ή μη αναμίξιμα ($\Delta < 0$) [167], εξαρτάται μόνο από το λόγο $\beta \equiv a_{12}/a_{11}$: εάν $\beta > 1$ ($\beta < 1$), τότε τα δύο υπερρευστά είναι μη αναμίξιμα (αναμίξιμα).

Αδιάστατες εξισώσεις κίνησης για τετραγωνική παγίδα

Θεωρούμε την περίπτωση όπου τα δύο συμπυκνώματα περιορίζονται από ισχυρά ανισοτροπικά (οιωνεί-1D) δυναμικά, τα οποία έχουν την μορφή ορθωγωνίων κουτιών με μήκη $L_{x_j} \gg L_{y_j} = L_{z_j} \equiv L_\perp$, όπου το εγκάρσιο μήκος της παγίδας έχει τιμή της τάξης του μήκους αποκατάστασης ξ_j. Σε μία τόσο ισχυρά ανισοτροπική παγίδα, μπορούμε να αποπλέξουμε την εγκάρσια από τη διαμήκη δομή του συμπυκνώματος, δηλαδή τις $\{u(x,t), \mathrm{v}(x,t)\}$ και $\Phi_j(y,z)$ (βλ. τις αναφορές [92, 93, 137]):

$$\Psi_1(\mathbf{r},t) = \Phi_1(y,z)u(x,t)\exp(-iE_1t/\hbar), \tag{3.71}$$

$$\Psi_2(\mathbf{r},t) = \Phi_2(y,z)\mathrm{v}(x,t)\exp(-iE_2t/\hbar), \tag{3.72}$$

Οι διαμήκεις κυματοσυναρτήσεις $\Phi_j(y,z)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2\Phi_1(y,z) - V_1(r)\Phi_1(y,z) + E_1\Phi_1(y,z) = 0 \tag{3.73}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2\Phi_2(y,z) - V_2(r)\Phi_2(y,z) + E_2\Phi_2(y,z) = 0, \tag{3.74}$$

όπου $\nabla_r^2 \equiv \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Οι εξισώσεις (3.73) και (3.74) είναι γνωστό πρόβλημα ιδιοτιμών όπου στην καβαντομηχανική περιγράφει το $2D$ πρόβλημα ενός σωματιδίου παγιδευμένο σε κουτί, η λύση του οποίου στην θεμελιώδη κατάσταση είναι:

$$\Phi_j(y,z) = (\sqrt{2}/L_\perp)\sin(\pi y/L_\perp)\sin(\pi z/L_\perp) \tag{3.75}$$

Αντικαθιστώντας τις λύσεις (3.71) και (3.72) στις Εξισώσεις (1.2), πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν με $\Phi_1^*(r)$ και $\Phi_2^*(r)$ αντίστοιχα και ολοκληρώνοντας στην εγκάρσια διατομή των συμπυκνωμάτων, προκύπτουν τελικά οι ακόλουθες μονοδιάστατες εξισώσεις για τις διαμήκεις κυματοσυναρτήσεις $u(x,t)$ και $\mathrm{v}(x,t)$ (βλ. επίσης τις αναφορές [168]):

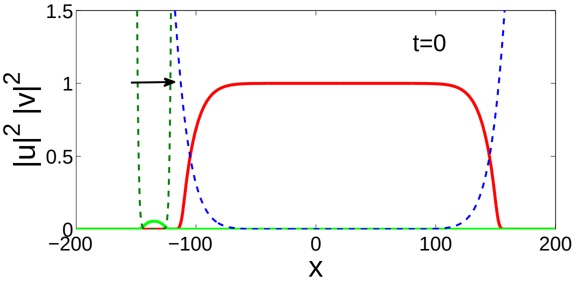
$$\begin{aligned} iu_t &= -u_{xx} + (|u|^2 + \beta|\mathrm{v}|^2 - \mu_1)u + V_1(x)u, && (3.76)\\ i\mathrm{v}_t &= -\mathrm{v}_{xx} + (\beta|u|^2 + |\mathrm{v}|^2 - \mu_2)\mathrm{v} + V_2(x)\mathrm{v}, && (3.77) \end{aligned}$$

όπου οι δείκτες αναφέρονται στις μερικές παραγώγους. Σε αυτές τις εξισώσεις, μετρούμε την χωρική μεταβλητή x σε μονάδες του μήκους αποκατάστασης $\xi_1 \equiv \hbar/\sqrt{2mn_1\tilde{g}_{11}}$, το χρόνο t σε μονάδες του χαρακτηριστικού χρόνου $\sqrt{2}\xi_1/c_s$ (όπου $c_s \equiv \sqrt{\tilde{g}_{11}n_1/m}$ είναι η ταχύτητα του ήχου του πρώτου συμπυκνώματος), τις πυκνότητες $|u|^2$, $|\mathrm{v}|^2$ σε μονάδες της πυκνότητας n_1, καιτην ενέργεια σε μονάδες της χαρακτηριστικής ενέργειας $\tilde{g}_{11}n_1$ του πρώτου συμπυκνώματος. Τέλος, να σημειωθεί ότι οι φαινομενικά μονοδιάστατες (1D) σταθερές σύζευξης δίνονται από τη σχέση $\tilde{g}_{ij} = (9/4L_\perp^2)g_{ij}$ (όπου οι g_{ij} αντιστοιχούν σε αυτές του $3D$ προβλήματος).

Περιγραφή “πειράματος”

Στο συγκεκριμένο πείραμα μελετάται η σύγκρουση δύο ατομικών συμπυκνωμάτων Bose-Einstein με αναλογία αριθμού ατόμων $\sim 1:100$, τα οποία είναι μη αναμίξιμα μεταξύ τους. Μελετούμε δύο διαφορετικά σενάρια, όταν το “μικρό” (v) συμπύκνωμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα, ελεύθερο ή όντας παγιδευμένο, στο “μεγάλο” (u) συμπύκνωμα.

Είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε τιμές στις παραμέτρους ανάλογες με αυτές που έχουν χρησιμοποιηθεί στα πειράματα. Κατ'αρχήν, καθορίζουμε το μήκος σκέδασης και την πυκνότητα του πρώτου συμπυκνώματος ως εξής: $a_{11} = 5.77$ nm και $n_1 = 10^8\mathrm{m}^{-1}$, τα οποία καταλήγουν στην τιμή του μήκους αποκατάστασης, $\xi_1 = 0.25\ \mu$m; έπειτα καθορίζουμε το $\beta = 1.1$, το οποίο καθορίζει την μη αναμιξιμότητα των συμπυκνωμάτων (έχουμε ελέγξει και άλλες τιμές όπου $\beta > 1$ και έχουμε καταλήξει σε παρόμοια αποτελέσματα με αυτά που θα παρουσιάσουμε παρακάτω). Υποθέτουμε ότι το “πρώτο” συμπύκνωμα (u) είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το δεύτερο (v), με την έννοια ότι η αντιστοιχη αναλογία του αριθμού ατόμων είναι $N_1/N_2 \approx 100$; ανάλογα, τα χημικά δυναμικά καθορίζονται ως $\mu_1 = 1$ και $\mu_2 = 0.06$. Όσ'ον αφορά τα μεγέθη των δυναμικών παγίδευσης, αυτά υποθέτουμε ότι είναι $L_{x_1} = 57.6\ \mu$m, $L_{x_2} = 5\ \mu$m, και $L_\perp = 0.8\ \mu$m, τα οποία αντιστοιχούν σε $L_{x_1} = 244$, $L_{x_2} = 21$ και $L_\perp = 3$ σε αδιάστατες



Σχήμα 3.12: Η πυκνότητα (συνεχείς γραμμές) των δύο μη αναμίξιμων υπερρευστών, τα οποία βρίσκονται παγιδευμένα στα τετραγωνικά δυναμικά $V_1(x)$ [δεξιά (μπλέ) διακεκομμένη γραμμή] και $V_2(x,t)$ [αριστερή (πράσινη) διακεκομμένη γραμμή] για χρόνο $t = 0$. Η δεξιά (κόκκινη) συνεχής γραμμή υποδεικνύει το u- (v-) συμπύκνωμα ενώ η αριστερή συνεχής (πράσινη) γραμμή υποδεικνύει το v-συμπύκνωμα. Το βέλος υποδηλώνει την κατεύθυνση της κίνησης του v-συμπυκνώματος όταν $t > 0$.

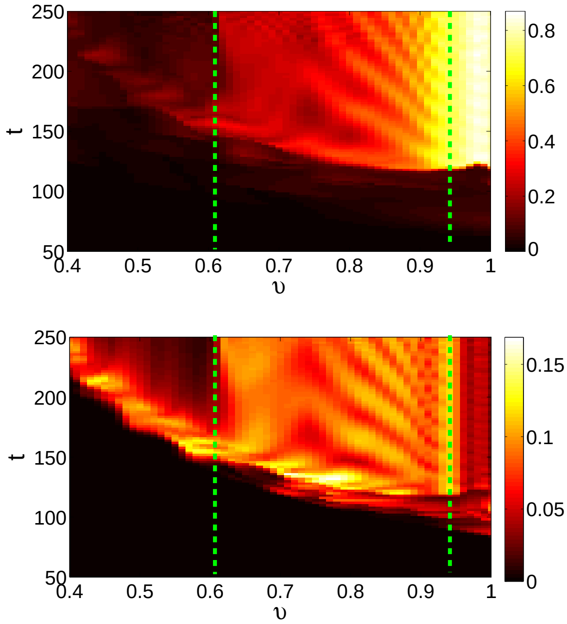
μονάδες; εξαίρεση αποτελεί το Σχ. 3.18, όπου χρησιμοποιήσαμε $L_{x_1} = 123$ μm (ή 490 σε αδιάστατη μορφή) για το μήκος του u-συμπυκνώματος. Έχουμε ελέγξει ότι όσο η αναλογία του αριθμού των ατόμων, των χημικών δυναμικών και του μήκους των δυναμικών παγίδευσης είναι τέτοιος ώστε $N_1/N_2 \sim \mu_1/\mu_2 \sim 100$ και $L_{x_1} : L_{x_2} : L_\perp \sim 100 : 10 : 1$, τα αποτελέσματα είναι ποιοτικά παρόμοια.

Για τις αριθμητικές προσομοιώσεις, έχουμε προσεγγίσει ανάλογα τα τετραγωνικά δυναμικά παγίδευσης με V_j με Γκαουσσιανές συναρτήσεις πολύ μεγάλου αντίστροφου εύρους (super-Gaussians):

$$V_j = V_0 \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{x + x_j}{w_j} \right)^{12} \right) \right], \tag{3.78}$$

όπου V_0 είναι το (κοινό) πλάτος της παγίδας και για τα δύο συμπυκνώματα, ενώ τα x_j και w_j υποδεικνύουν τις θέσεις και τα πλάτη των δυναμικών, αντίστοιχα. Καθορίζουμε αυτές τις τιμές ως εξής: $V_0 = 10$, $x_1 = -20$, $w_1 = 160$, και $w_2 = 20$; όσ'ον αφορά την θέση της παγίδας που δρα στο v-συμπύκνωμα, θεωρείται ότι βρίσκεται αρχικά (για $t = 0$) τοποθετημένη στη θέση $x_2(0) = 135$ και κινείται με σταθερή ταχύτητα: $x_2 = 135 - vt$. 'Ετσι το “μικρό” συμπύκνωμα κινείται προς τα δεξιά, και συγκρούεται με το “μεγάλο” συμπύκνωμα; το v μετράται σε μονάδες $\tilde{c}_s = c_s/\sqrt{2}$ (αναφέρουμε ότι c_s είναι η ταχύτητα του ήχου του u-συμπυκνώματος). Στη μη αναμίξιμη περίπτωση που μελετούμε, η ροή του ενός συστατικού μέσα στο άλλο με ταχύτητα v είναι μία δυναμικά ασταθής διαδικασία, όπως περιγράφεται και στις εργασίες [138, 141].

Η αρχική διατύπωση του προβλήματος, η οποία επιτεύχθηκε μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης μιγαδικού χρόνου, φαίνεται στο Σχ. 3.12, όπου τα δύο συμπυκνώματα u- και v- [τα οποία διαφαίνονται με την δεξιά (κόκκινη) συνεχή και αριστερή συνεχή (πράσινη) γραμμή, αντίστοιχα] είναι αρχικά διαχωρισμένα το ένα από το άλλο. Τότε για χρόνο $t > 0$ το v-συστατικό τίθεται σε κίνηση με κατεύθυνση προς το u-συστατικό. Η δυναμική εξέλιξη του συστήματος επιτυγχάνεται μεσω αριθμητικής ολοκλήρωσης των Εξ. (3.76) και (3.77) σε πραγματικό χρόνο εφαρμόζοντας τη μεθόδο split-step Fourier. Είναι πολύ σημαντικό να γίνουν μερικά σχόλια σχετικά με την πειραματική υλοποίηση της παραπάνω διάταξης. Τα δύο συμπυκνώματα μπορούν



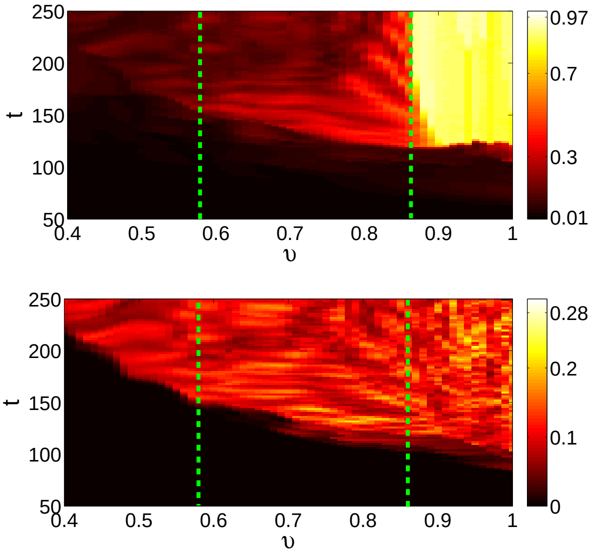
Σχήμα 3.13: Χρονική εξέλιξη του μεγίστου βυθίσματος (1-$|u|^2$) στο u-συμπύκνωμα (πάνω εικόνα), όπως επίσης και της μέγιστης πυκνότητας $|\mathrm{v}|^2$, του v-συμπυκνώματος (κάτω εικόνα), συναρτήσει της ταχύτητας της κινούμενης παγίδας. Διακρίνουμε τρείς διαφορετικές περιοχές ταχυτήτων οι οποίες διαχωρίζονται από τις κάθετες (πράσινες) διακεκομμένες γραμμές: α) $0 < \upsilon < 0.61$, όπου δεν σχηματίζεται καμία εντοπισμένη διέγερση, β) $0.61 < \upsilon < 0.95$, όπου προκύπτει ένα σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο το οποίο κινείται κατά μήκος του "μεγάλου" συμπυκνώματος, και γ) $\upsilon > 0.95$, όπου σκοτεινά σολιτόνια σχηματίζονται στο u-συμπύκνωμα. Στην τελευταία περίπτωση, το v-συστατικό γρήγορα διασπείρεται.

να δημιουργηθούν πειραματικά όπως αναφέρεται στην εργασία [166] (ή ακόμα νωρίτερα στην Αναφ. [73]), χρησιμοποιώντας ένα time-averaged orbiting δυναμικό (TOP) [169]. Σε αυτή τη περίπτωση, το TOP, το οποίο προκαλείται από το περιστρεφόμενο μαγνητικό πεδίο, επιτρέπει μία μετατόπιση στο ελάχιστο της παγίδας σε σχέση με το άλλο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός, (ότι οι δύο διαφορετικές καταστάσεις της υπέρλεπτης υφής του ίδιου είδους ατόμων, αισθάνονται την επίδραση από δύο διαφορετικά πεδία, τα οποία εξαρτώνται από την κλίση-πεδίου συχνότητας περιστροφής [73]). Τότε οι δύο χωρικά διαχωρισμένες καταστάσεις σπιν, μπορούν να τεθούν σε σχετική κίνηση μεταξύ τους χρησιμοποιώντας τεχνικές παρόμοιες με αυτές που παρουσιάζονται στην εργασίες [138--141, 147]. Στα παραπάνω πειράματα, η ροή μεταξύ των δύο καταστάσεων της υπέρλεπτης υφής του ^{87}Rb, προκλήθηκε από ένα εξωτερικά εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο κλίσης, το οποίο ενεργεί κατά μήκος του μεγάλου άξονα της παγίδας. Αυτό προκάλεσε τη δράση ίσων αλλά αντίθετων σε κατεύθυνση δυνάμεων που δρουν επάνω στα συστατικά (αντιρροή), λόγω της μετατόπισης Zeeman.

Θεωρούμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις:

Α) όταν η παγίδα V_2, δρα επάνω στο "μικρό" συμπύκνωμα και σταματάει να υπάρχει αφού το πρώτο έχει συγκρουσθεί με το δεύτερο,

Β) η παγίδα V_2 δρα στο v-συμπύκνωμα και μετά τη συγκρουσή του με το "μεγάλο" συμπύκνωμα.



Σχήμα 3.14: Όμοια με το Σχ. 3.13, αλλά για την περίπτωση όπου το v-συμπύκνωμα διαδίδεται υπό την επίδραση της παγίδας στο u-συμπύκνωμα. Σε αυτή τη περίπτωση παρατηρούνται όπως και πριν, τρία διαφορετικά όρια για την ταχύτητα της παγίδας: α) $0 < \upsilon < 0.58$ όπου δεν παρατηρούνται εντοπισμένες διεγέρσεις. β) $0.58 < \upsilon < 0.87$, όπου ασταθή ζεύγη σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων προκύπτουν, και γ) $\upsilon > 0.87$, όπου παρατηρείται η δημιουργία πολλαπλών μαύρων σολιτονίων στο u-συστατικό.

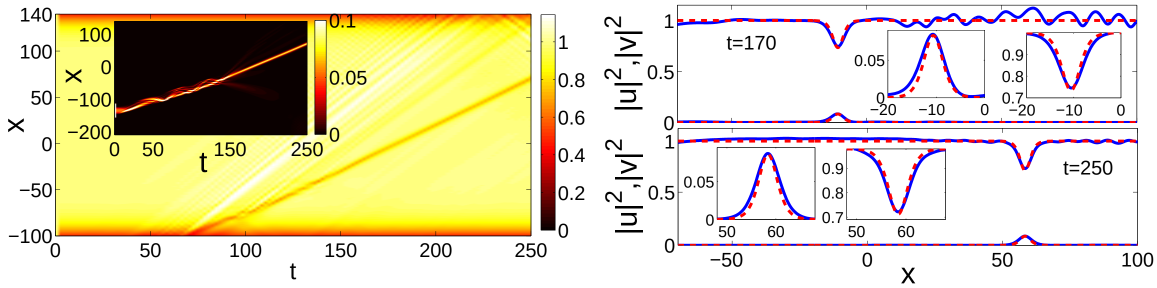
Και στις δύο περιπτώσεις, παρατηρούμε την ύπαρξη τριών περιοχών ταχυτήτων της παγίδας, όπου σε κάθε μία παρατηρούνται διαφορετικές εντοπισμένες μη γραμμικές δομές. Οι παραπάνω περιοχές ταυτοποιήθηκαν υπολογίζοντας την τιμή του μεγίστου βυθίσματος (1-$|u|^2$) στο u-συμπύκνωμα (για κάθε χρονική στιγμή) όπως επίσης και τη μέγιστη τιμή της πυκνότητας του v-συμπυκνώματος, όπως φαίνεται και στα σχήματα 3.13 και 3.14 που αναφέρονται στις περιπτώσεις Α και Β αντίστοιχα.

Πιο συγκεκριμένα, για μικρές ταχύτητες της παγίδας V_2, δηλαδή για $0 < \upsilon < 0.61$, αναφερόμενοι στην Α περίπτωση, και για $0 < \upsilon < 0.58$, αναφερόμενοι στην Β περίπτωση, δεν παρατηρείται κανένας σχηματισμός εντοπισμένης σολιταρικής δομής. Υπάρχουν, ωστόσο αρκετά μικρού πλάτους βυθίσματα τα οποία σχηματίζονται στο u-συμπύκνωμα, και τα οποία κινούνται με ταχύτητα που πλησιάζει την ταχύτητα του ήχου του "μεγάλου" συμπυκνώματος. Γενικά, για τέτοιες μικρές ταχύτητες, όταν το v-συμπύκνωμα συγκρούεται με το u-συμπύκνωμα, μεγάλη εκπομπή ακτινοβολίας παρατηρείται.

3.2.1 "Γένεση" 1 σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου

Το "μικρό" συμπύκνωμα διαδίδεται ελεύθερο στο "μεγάλο" συμπύκνωμα.

Στη περίπτωση που το "μικρό" (v) συμπύκνωμα διαδίδεται ελεύθερο στο "μεγάλο" (u) συμπύκνωμα υπάρχει ένα διάστημα ταχυτήτων, $0.61 < \upsilon < 0.95$ [βλ. την περιοχή μεταξύ των διακεκομμένων (πράσινων) γραμμών του Σχ. 3.13], του v-συστατικού στο οποίο η σύγκρουση

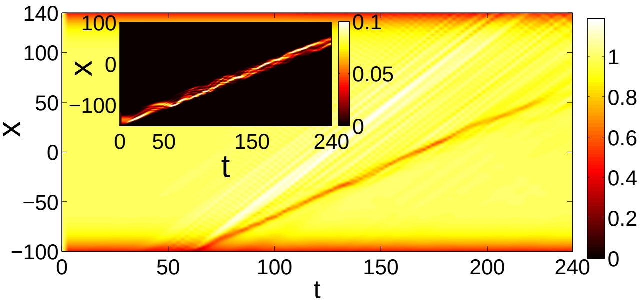


Σχήμα 3.15: Στην αριστερή εικόνα, φαίνεται η εξέλιξη της πυκνότητας του u-συστατικού (η εσωτερική εικόνα δείχνει την εξέλιξη του v-συστατικού) όταν η ταχύτητα της παγίδας είναι $\upsilon = 0.7$. Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα φωτεινο-σκοτεινό σολιτόνιο που ικανοποιεί το ολοκληρώσιμο σύστημα Mel'nikov, και το οποίο κινείται με ταχύτητα $\upsilon_{\text{sol}} = 0.96$. Οι εικόνες στα δεξιά, δείχνουν στιγμιότυπα της πυκνότητας του μαύρου σολιτονίου στο u-συμπύκνωμα (πάνω γραμμή) και του φωτεινού σολιτονίου στο v-συμπύκνωμα (κάτω γραμμή), για χρόνους $t = 170$ και $t = 250$, αντίστοιχα. Οι εικόνες που βρίσκονται ως ένθετα στα παραπάνω σχήματα είναι κοντινά πλάνα των δύο συμπυκνωμάτων που αναφέρονται στο σκοτεινό (δεξιά) και στο φωτεινό (αριστερά) σολιτόνιο. Οι συνεχείς (μπλέ) και οι διακεκομμένες (κόκκινες) γραμμές παρουσιάζουν τα αριθμητικά και αναλυτικά αποτελέσματα αντίστοιχα, η συμφωνία των οποίων είναι εξαιρετική.

έχει ως αποτέλεσμα την αυτοοργάνωση του "μικρού" (v) συμπυκνώματος σε ένα φωτεινό σολιτόνιο, που με τη σειρά του επάγει τη γένεση ενός σκοτεινού σολιτονίου στο "μεγάλο" συμπύκνωμα το οποίο διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα όπως το v-συστατικό. Τα δύο συμπυκνώματα δημιουργούν τελικά μία αρκετά εύρωστη δομή που διαδίδεται χωρίς να αλλοιώνεται. Ένα παράδειγμα αυτής της δυναμικό εξέλιξης, φαίνεται στο Σχ. 3.15 για $\upsilon = 0.7$, το οποίο δείχνει με ακρίβεια την εξής συμπεριφορά: μετά από μία σχετική μικρή περίοδο ($t \simeq 100$) την οποία χρειάζεται το v-συστατικό για να φτάσει το επίπεδο τμήμα του u-συστατικού, ένα μικρού πλάτους ζεύγος σκοτεινό-φωτεινό σολιτονίο σχηματίζεται. Σε αυτό το σημείο, πρέπει να σημειωθεί ότι η ισχυρή εκπομπή ηχητικών κυμάτων --η οποία παρατηρείται κυρίως στο στο u-συστατικό -- οφείλεται αποκλειστικά λόγω της σύγκρουσης του v-συστατικού με το u-συστατικό-- οφείλεται αποκλειστικά στη διαδικασία σύγκρουσης: τα ηχητικά κύματα αποσπώνται από το ζεύγος σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου αμέσως μετά την παραγωγή του, και στη συνέχεια το σολιτόνιο διαδίδεται αμετάβλητο στο u-συμπύκνωμα.

Το "μικρό" συμπύκνωμα διαδίδεται παγιδευμένο στο "μεγάλο" συμπύκνωμα.

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση κατά την οποία η παγίδα V_2 συνεχίζει να υφίσταται και μετά την σύγκρουση του v-συμπυκνώματος με το u-συμπύκνωμα, δηλαδή το "μικρό" συμπύκνωμα διαδίδεται συνεχώς παγιδευμένο μέσα στο "μεγάλο" συμπύκνωμα. Αναφερόμενοι σε ταχύτητες παγίδας $0.58 < \upsilon < 0.87$ [βλεπε την οριοθετημένη περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στις διακεκομμένες (πράσινες) γραμμές του Σχ. 3.14], βρίσκουμε ότι τα σκοτεινά-φωτεινά σολιτόνια τύπου Mel'nikov σχηματίζονται και σε αυτή τη περίπτωση (όπως και στην προηγούμενη περίπτωση όπου το v-συμπύκνωμα διαδιδόταν ελεύθερο στο u-συμπύκνωμα χωρίς δηλαδή την παρουσία της παγίδας V_2), αλλά τελικά διασπείρονται.

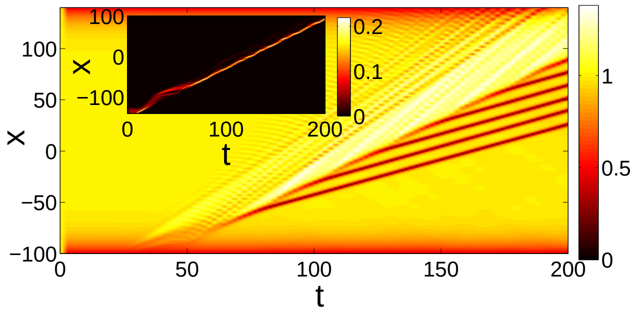


Σχήμα 3.16: Το ίδιο όπως στην αριστερή εικόνα του Σχ. 3.15, αλλά για ταχύτητα παγίδας $\upsilon = 0.8$. Στην περίπτωση αυτή, ένα σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο της μορφής Mel'nikov σχηματίζεται, αλλά διασπείρεται λόγω του ότι η ταχύτητα του σολιτονίου είναι μεγαλύτερη από αυτή της παγίδας (βλ. κείμενο).

Ένα τυπικό παράδειγμα αυτής της συμπεριφοράς φαίνεται στο Σχ. 3.16, για $\upsilon = 0.8$. Όπως παρατηρείται στο ένθετο του σχήματος, αφού το v-συμπύκνωμα συγκρουστεί με το "μεγάλο" συμπύκνωμα, χωρίζεται σε μικρότερα κομμάτια, ακολουθώντας την δυναμική της παγίδας. Το κομμάτι με την μεγαλύτερη πυκνότητα συνενώνεται με το σκοτεινό σολιτόνιο του u-συμπυκνώματος, και η δομή που προκύπτει μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα Mel'nikov σολιτόνιο: για τις παραμέτρους που χρησιμοποιούνται στο Σχ. 3.16, τα πλάτη του σκοτεινού και του φωτεινού σολιτονίου που βρέθηκαν αριθμητικά είναι $\varepsilon\delta \approx 0.26$ και $(\varepsilon b)^2 \approx 0.08$, που αντιστοιχούν σε ταχύτητα του σολιτονίου [η οποία βρίσκεται μέσω της Εξ. (3.94)] $\upsilon_{\rm sol} \approx 1.1$. Αυτή η τιμή έρχεται σε καλή συμφωνία με την ταχύτητα που βρίσκεται αριθμητικά για τα συγκεκριμένα σολιτονικά πλάτη, και η οποία είναι ≈ 1, γεγονός που υποδεικνύει ότι η δομή αυτή είναι πράγματι κοντά στην προσέγγιση ενός Mel'nikov σολιτονίου. Ωστόσο, στην περίπτωση του Σχ.. 3.16, το v-συστατικό διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon = 0.8$, ενώ το σολιτόνιο διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα. Ως εκ τούτου, το συζευγμένο σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο συγκρούεται αναπόφευκτα με --και ανακλάται από-- τα όρια της παγίδας. Αυτό οδηγεί σε σύνθετη κίνηση του σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου, το οποίο δεν μπορεί να διατηρηθεί για μεγάλα χρονικά διαστήματα και τελικά διασπάται (για $t \sim 200$). Στην πραγματικότητα, είναι η ίδια η παγίδα η οποία είναι επιζήμια για την ύπαρξη του Mel'nikov σολιτονίου. Ενώ η δομή που σχηματίζεται αποκτά την δική της ταχύτητα κατά τον σχηματισμό, η παγίδα έχει τη δική της χαρακτηριστική ταχύτητα και φράσσει με αυτό το τρόπο, τη κίνηση του σολιτονίου όταν αυτές οι δύο ταχύτητες συμπέσουν. Δε μπορούμε να περιμένουμε το σολιτόνιο να παραμένει ευσταθές λόγω της αναπόφευκτης σύγκρουσης είτε με το "μπροστινό" είτε με το "πίσω" όριο της παγίδας. Αυτή είναι η θεμελιώδης διαφορά, για την ενδιάμεση περιοχή ταχυτήτων, μεταξύ των περιπτώσεων που το v-συμπύκνωμα διαδίδεται ελεύθερο ή όντας παγιδευμένο στην V_2.

Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων για σκοτεινά-φωτεινά σολιτόνια

Για να αποκτήσουμε μία καλύτερη κατανόηση στο σχηματισμό των ζευγών σολιτονίων, θα εφαρμόσουμε μία ασυμπτωτική μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων στις Εξ. (3.76) και (3.77).



Σχήμα 3.17: Η πάνω εικόνα είναι ίδια με το Σχ. 3.15, αλλά για ταχύτητα παγίδας $\upsilon = 1.2$. Σε αυτή τη περίπτωση, η υπερρευστότητα του u-συμπυκνώματος καταρρέει, και πολλαπλά σκοτεινά σολιτόνια σχηματίζονται.

Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπ΄όψιν μόνο την επίπεδη περιοχή του u-συμπυκνώματος (όπου και παρατηρείται ο σχηματισμός του σολιτονίου), αγνοούμε τα δυναμικά παγίδευσης $V_{1,2}$ στις εξισώσεις (3.76)-(3.77) (υπενθυμίζουμε ότι το δυναμικό V_2 σταματάει να δρα στο v-συμπύκνωμα στην περιοχή όπου $V_1 = 0$ και το u-συμπύκνωμα είναι πρακτικά επίπεδο), και υποθέτουμε ότι το χημικό δυναμικό μ_2 είναι μικρό. Έτσι εισάγουμε μία μικρή παράμετρο ε η οποία δείχνει το πόσο "μικρό" είναι το χημικό δυναμικό του v-συμπυκνώματος, και αντικαθιστούμε $\mu_2 \to \varepsilon\mu_2$ στις Εξ. (3.76)-(3.77). Ο στόχος μας είναι να ανάγουμε το αρχικό σύστημα των εξισώσεων Gross-Pittaevskii (3.76)-(3.77) σε ένα απλούστερο, το λεγόμενο ολοκληρώσιμο σύστημα Mel'nikov [170], το οποίο παρέχει ακριβείς αναλυτικές λύσεις διανυσματικών σολιτονίων που παρατηρούνται στο Σχ. 3.15.

Η αναλυτική προσέγγιση ξεκινάει εισάγωντας την αρχική υπόθεση,

$$u = \sqrt{\rho}\exp(i\varphi), \quad \mathrm{v} = q\exp(i\theta), \tag{3.79}$$

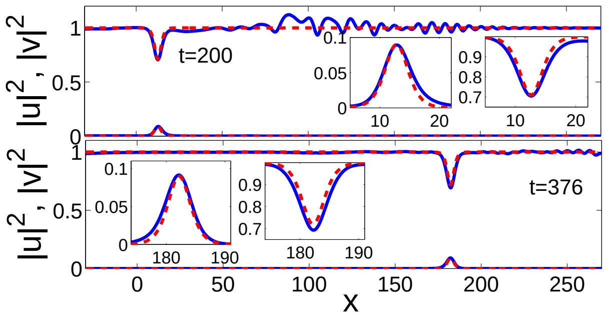
$$\theta = \sqrt{\frac{\mu_1}{2}}x - \left[\mu_1\left(\frac{1}{2}+\beta\right)+\varepsilon\Omega\right]t, \tag{3.80}$$

όπου οι πραγματικές συναρτήσεις $\rho(x,t)$ και $\varphi(x,t)$ υποδεικνύουν το πλάτος και τη φάση του u-συμπυκνώματος. Επιπλέον τα $q(x,t)$ και $\theta(x,t)$ αντιστοιχούν στο (μιγαδικό) πλάτος και φάση του v-συμπυκνώματος, με την παράμετρο Ω η οποία είναι πραγματικός αριθμός να καθορίζει την συχνότητα του v-συμπυκνώματος. Όπως θα δούμε παρακάτω, η παράμετρος Ω σχετίζεται και με το πλάτος του σκοτεινού σολιτονίου στο u-συμπύκνωμα.

Εισάγοντας τις Εξ. (3.79)-(3.80) μέσα στις Εξ. (3.76)-(3.77), παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων για τα πεδία ρ, φ and q:

$$\varphi_t + \rho + \beta|q|^2 - \mu_1 + \varphi_x^2 - \rho^{-1/2}(\rho^{1/2})_{xx} = 0, \tag{3.81}$$

$$\frac{1}{2}\rho_t + (\rho\varphi_x)_x = 0, \tag{3.82}$$



Σχήμα 3.18: Το ίδιο σχήμα όπως οι δεξιές εικόνες του Σχ. 3.15, αλλά για πολύ μεγαλύτερο μέγεθος παγίδας V_1, δηλαδή για $L_{x_1} = 123$ μm (ή $L_{x_1} = 490$ σε αδιάστατη μορφή). Σε αυτή τη περίπτωση, όπως φαίνεται από τα στιγμιότυπα για χρόνους $t = 200$ (πάνω εικόνα) και $t = 376$ (κάτω εικόνα), ο χρόνος εξέλιξης για τα σολιτόνια που περιγράφονται αναλυτικά από το συστημα Mel'nikov είναι σημαντικά πολύ μεγαλύτερος.

$$\begin{aligned} i\left(q_t + \sqrt{2\mu_1}q_x\right) + q_{xx} &- [|q|^2 - \beta(\mu_1 - \rho)]q \\ &+ \varepsilon(\mu_2 + \Omega)q = 0. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Εν συνεχεία, ορίζουμε τις αργά μεταβαλλόμενες μεταβλητές:

$$T = \varepsilon^{3/2}t, \quad X = \varepsilon^{1/2}(x - c_s t), \tag{3.84}$$

όπου c_s είναι μία άγνωστη ταχύτητα η οποία θα καθοριστεί κατά τη διάρκεια της αναλυτικής περιγραφής του προβλήματος, με συνεπή τρόπο. Επιπρόσθετα, εκφράζουμε τα άγνωστα πεδία ρ, φ και q ως ασυμπτωτικές σειρές με σεβασμό ως προς το ε:

$$\rho = \mu_1 + \varepsilon\rho_1(X,T) + \varepsilon^2\rho_2(X,T) + \ldots, \tag{3.85}$$

$$\varphi = \varepsilon^{1/2}\varphi_1(X,T) + \varepsilon^{3/2}\varphi_2(X,T) + \ldots, \tag{3.86}$$

$$q = \varepsilon q_1(X,T) + \varepsilon^2 q_2(X,T) + \ldots \tag{3.87}$$

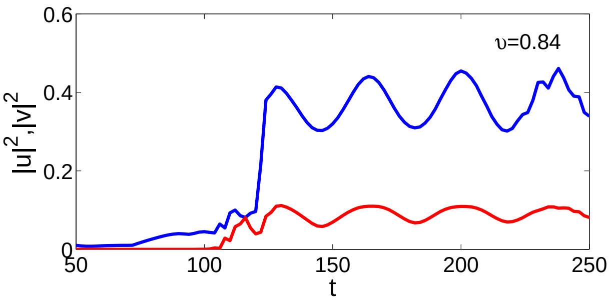
Αντικάθιστούμε τις σειρές (3.85)-(3.86) μέσα στις Εξ. (3.81)-(3.82), παίρνουμε τους πρώτους όρους της προσέγγισης, δηλαδή της τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon)$ και $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$, και από τις συνθήκες συμβιβαστότητας που πρέπει να ισχύουν οδηγούμαστε στα εξής συμπεράσματα. Αρχικά προσδιορίζουμε την άγνωστη ταχύτητα $c_s \equiv \sqrt{2}\tilde{c}_s$, η οποία αποδεικνύεται ότι είναι η ταχύτητα του ήχου του u-συμπυκνώματος:

$$c_s = \pm\sqrt{2\mu_1}, \tag{3.88}$$

και αντλούμε μία εξίσωση η οποία συνδέει την άγνωστη φάση φ_1 με το πλάτος ρ_1:

$$\varphi_X = c_s^{-1}\rho_1. \tag{3.89}$$

Κατ'όπιν προχωρούμε στις επόμενες τάξεις, δηλ. $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ και $\mathcal{O}(\varepsilon^{5/2})$, η προϋπόθεση για την συμβιβαστότητα των αντίστοιχων εξισώσεων που προκύπτουν από τις Εξ. (3.81)-(3.82) οδηγεί



Σχήμα 3.19: Η εξέλιξη της πυκνότητας της μεγαλύτερης τιμής της "οπής" του u-συμπυκνώματος [υποδεικνύεται από την επάνω (μπλέ) γραμμή] και της μεγαλύτερης πυκνότητας του v-συμπυκνώματος [υποδεικνύεται από την κάτω (κόκκινη) γραμμή], όταν η ταχύτητα της παγίδας του v-συστατικού ειναι $\upsilon = 0.84$.

στην ακόλουθη μη γραμμική εξίσωση:

$$2\rho_{1T} + \frac{6}{c_s}\rho_1\rho_{1X} - \frac{c_s}{2}\rho_{1XXX} + c_s\beta(|q_1|^2)_X = 0. \tag{3.90}$$

Παίρνοντας τους όρους τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, η Εξ. (3.83) ανάγεται στην ακόλουθη:

$$q_{1XX} - \beta\rho_1 q_1 + (\mu_2 + \Omega)q_1 = 0. \tag{3.91}$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3.90)-(3.91) είναι ουσιαστικά μία εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV) με μία αυτοσυνεπή πηγή, η οποία ικανοποιείται από μία στατική εξίσωση Schrödinger, και αποτελεί το σύστημα Mel'nikov [170], το οποίο είναι *πλήρως ολοκληρώσιμο* και έχει ακριβείς σολιτονικές λύσεις της μορφής:

$$\rho_1 = -\frac{2\delta}{\beta}\text{sech}^2\eta, \tag{3.92}$$

$$q_1 = b\exp(-i\omega_0 T)\,\text{sech}\eta, \tag{3.93}$$

όπου $\eta = \sqrt{\delta}(X + VT)$, V είναι η ταχύτητα του σολιτονίου, και ω_0 μία αυθαίρετη σταθερά. Επιπλέον, οι παράμετροι $\delta \equiv \mu_2 + \Omega$ και b (που καθορίζουν τα πλάτη ρ_1 και q_1, αντίστοιχα), είναι άμεσα σχετιζόμενες με την ταχύτητα του σολιτονίου μέσω της εξίσωσης:

$$b^2 = \frac{4\delta}{\beta^2 c_s}(V - \delta c_s). \tag{3.94}$$

Όπως πολύ καθαρά φαίνεται, η ταχύτητα του σολιτονίου Mel'nikov οριοθετείται από κάτω, δηλ., $V \geq V_{\text{cr}} \equiv \delta c_s$, το οποίο προκύπτει από την συνθήκη ότι το b^2 είναι πραγματική ποσότητα.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούμε να γράψουμε μία προσεγγιστική [η οποία ισχύει μέχρι τάξη $\mathcal{O}(\varepsilon)$] σολιτονική λύση των Εξ. (3.76)-(3.77). Η λύση αυτή είναι ένα διανυσματικό σολιτόνιο, το οποίο αποτελείται από ένα σκοτεινό σολιτόνιο στο u-συστατικό του μείγματος, συζευγμένο με ένα φωτεινό σολιτόνιο στο v-συστατικό. Ως προς τις αρχικές μεταβλητές x και t, αυτό εκφράζεται ως εξής:

$$u(x,t) \approx \left(\mu_1 - \frac{\varepsilon\delta}{\beta}\text{sech}^2\eta\right)\exp\left(i\sqrt{\varepsilon\delta}c_s^{-1}\tanh\eta\right), \tag{3.95}$$

$$\text{v}(x,t) \approx \varepsilon b\,\text{sech}\eta\exp(i\theta), \tag{3.96}$$

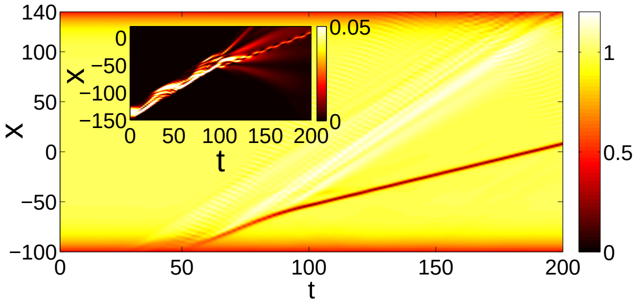
όπου $\eta \equiv \sqrt{\varepsilon\delta}(x - \upsilon_{\rm sol}t)$, και $\upsilon_{\rm sol} \equiv c_s - \varepsilon V$ είναι η ταχύτητα του σολιτονίου. Σημειώνεται ότι η λυση χαρακτηρίζεται από τις εξής δύο ανεξάρτητες παραμέτρους $\varepsilon\delta$ και εb, οι οποίες προσδιορίζουν τα πλάτη του σκοτεινού και του φωτεινού σολιτονίου, αντίστοιχα. Αυτές οι παράμετροι καθορίζουν επίσης, την ταχύτητα του σολιτονίου, μέσω της Εξ. (3.94).

Το αναλυτικό αυτό αποτέλεσμα συγκρίνεται με τα αριθμητικά αποτελέσματα στις εικόνές που παρουσιάζονται δεξιά στο Σχ. 3.15: αρχικά μπορούμε να καθορίσουμε αριθμητικά το πλάτος του σολιτονίου και να βρούμε την ταχύτητα του μέσω της Εξ. (3.94), κατ'όπιν μπορούμε να προσδιορίσουμε αναλυτικά την πυκνότητα του σολιτονίου κάθε χρονική στιγμή [διακεκομμένες (κόκκινες) γραμμές] και να τη συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα που βρέθηκαν, έπειτα από την αριθμητική ολοκλήρωση των Εξ. (3.76)-(3.77) [συνεχείς (μπλέ) γραμμές]-- πάνω και κάτω γραμμές που αντιστοιχούν στο u- και v-συμπύκνωμα.

Με αυτό το τρόπο, βρίσκουμε ότι τα πλάτη του σκοτεινού και του φωτεινού σολιτονίου είναι $\varepsilon\delta = 0.27$ και $(\varepsilon b)^2 = 0.08$, αντίστοιχα, και η ταχύτητα που βρέθηκε αριθμητικά είναι 0.88. Η τελευταία τιμή βρίσκεται σε εξαιρετική συμφωνία με την αναλυτική εκτίμηση, η οποία είναι $\upsilon_{\rm sol} = 0.89$. Η συμφωνία αυτή φαίνεται και στο Σχ. 3.15, όπου τα αναλυτικά αποτελέσματα [διακεκομμένες (κόκκινες) γραμμές], συγκρίνονται με τα αποτελέσματα από τις αριθμητικές προσομοιώσεις [συνεχείς (μπλέ) γραμμές], βλ. τα στιγμιότυπα που αντιστοιχούν στους χρόνους $t = 170$ (μεσαία εικόνα) και $t = 250$ (κάτω εικόνα). Μία παρόμοια πολύ καλή συμφωνία παρατηρείται στο Σχ. 3.18, αλλά για πολύ μεγάλυτερο χρόνο διάδοσης του σολιτονίου (αυτό συμβαίνει όταν έχουμε παγίδα V_1 μεγαλύτερου μεγέθους, πιο συγκεκριμένα στο παράδειγμα που παρουσιάζουμε έχουμε χρησιμοποιήσει $L_{x_1} = 123$ μm, ή αλλιώς $L_{x_1} = 490$ σε αδιάστατη μορφή). Πολύ σημαντικό να σημειωθεί επίσης είναι το γεγονός ότι το σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο παραμένει ευσταθές κατά την διαδοσή του ακόμα και μετά την ανακλασή του με τα όρια της παγίδας και την αλληλεπίδραση του με τα ηχητικά κύματα που αναφέραμε προηγουμένως.

3.2.2 "Γένεση" 1 σκοτεινού σολιτονίου

Όπως αναφέραμε και παραπάνω το Σχ. 3.13 απεικονίζει την περίπτωση όπου το "μικρό" συμπύκνωμα διαδίδεται ελεύθερο στο "μεγάλο" συμπύκνωμα. Παρατηρώντας το συγκεκριμένο σχήμα, βλέπουμε ότι, κοντά στο δεξιό όριο των ενδιάμεσων ταχυτήτων όπου έχουμε την γένεση του ζεύγους σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου, δηλ. για $0.8 \lesssim \upsilon < 0.95$, τα σολιτόνια υποβάλλονται σε μία μεταβατική συμπεριφορά: οι μεγαλύτερες τιμές της πυκνότητας τους εκτελούν ταλαντώσεις, όπως φαίνεται στι Σχ. 3.19 για $\upsilon = 0.84$. Προφανώς, αυτού του είδους η συμπεριφορά δεν μπορεί να εξηγηθεί μέσω του μοντέλου Mel'nikov. Μετά από αυτή τη μεταβατική



Σχήμα 3.20: Το ίδιο όπως στην πάνω εικόνα του Σχ. 3.15, αλλά για ταχύτητα παγίδας ίση με $\upsilon = 1$. Σε αυτή τη περίπτωση, παρ'όλο που το v-συστατικό γρήγορα διασπείρεται (και το σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο δεν μπορεί να σχηματιστεί), δημιουργείται ένα "εύρωστο" σκοτεινό σολιτόνιο στο u-συμπύκνωμα.

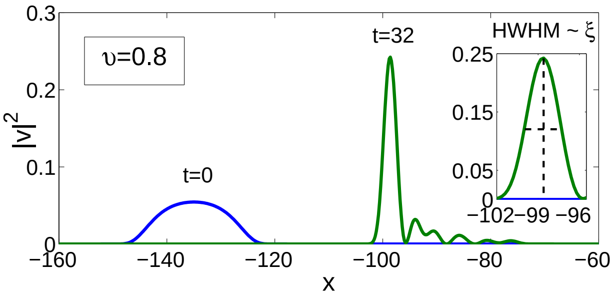
περίοδο, και όταν η ταχύτητα της παγίδας είναι πολύ μεγάλη, $\upsilon > 0.95$, το v-συμπύκνωμα δεν παραμένει εντοπισμένο και γρήγορα διασπείρεται; η συμπεριφορά αυτή μπορεί επίσης να παρατηρηθεί στο Σχ. 3.13. 'Ετσι, σε αυτή τη περίπτωση, το σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο τύπου Mel'nikov δεν σχηματίζεται. Ωστόσο, αμέσως μετά τη σύγκρουση στο u-συμπύκνωμα, το v-συμπύκνωμα σχηματίζει ένα σκοτεινό σολιτόνιο, το οποίο διαδίδεται χωρίς να αλλοιώνεται η μορφή του καθ'όλη την έκταση του "μεγάλου" συμπυκνώματος. Ένα τυπικό παράδειγμα αυτής της συμπεριφοράς, όταν η ταχύτητα της παγίδας είναι $\upsilon = 1$ φαίνεται στο Σχ. 3.20.

3.2.3 "Γένεση" τραίνου σκοτεινών σολιτονίων

Από την εξέλιξη των πειραμάτων, έχουν παρατηρηθεί εκτός της γένεσης σολιτονικών δομών που περιγράψαμε αναλυτικά παραπάνω και φαινόμενα κατάρρευσης της υπερρευστότητας του συμπυκνώματος [67,68]). Στο πλαίσιο που ήδη μελετάμε, θα δώσουμε την αναλυτική προσέγγιση των ταχυτήτων που κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί σε μία πειραματική διάταξη, δίνοντας έτσι μία ολοκληρωμένη περιγραφή των φαινομένων τόσο από πειραματικής όσο και από αναλυτικής και αριθμητικής σκοπιάς.

Προηγουμένως λοιπόν, είδαμε την περίπτωση δημιουργίας ενός σκοτεινού σολιτονίου, για μεγάλες τιμές ταχυτήτων της παγίδας, στην περίπτωση όπου το v-συστατικό διαδίδεται στο u-χωρίς την παρουσία παγίδας. Στην αντίθετη περίπτωση, όπου δηλαδή αυτό διαδίδεται παγιδευμένο στο "μεγάλο" συστατικό παρατηρούμε μία διαφορετική συμπεριφορά.

Όταν η ταχύτητα της παγίδας ξεπεράσει την τιμή $\upsilon = 0.87$, παρατηρούμε το σχηματισμό μίας μεγάλης "οπής" η οποία διαδίδεται κατά μήκος του u-συμπυκνώματος, ενώ στο v-συμπύκνωμα δημιουργείται μία κορυφή η οποία εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από μία σχετικά μεγάλη τιμή. Όπως δείχνουμε και παρακάτω, αυτή ειναι μία κρίσιμη τιμή πάνω από την οποία πολλαπλά σκοτεινά σολιτόνια σχηματίζονται στο u-συμπύκνωμα, υποδεικνύοντας με το τρόπο αυτό την κατάρρευση της υπερρευστότητας. Όπως φαίνεται στην πάνω εικόνα του Σχ. 3.14, μία περιοχή σχεδόν μηδενικής πυκνότητας προκύπτει στο u-συμπύκνωμα. Σε αυτή τη περίπτωση,



Σχήμα 3.21: Το σχήμα δείχνει την πυκνότητα του v-συμπυκνώματος όταν η ταχύτητα της παγίδας έχει τιμή $\upsilon = 0.8$, σε δύο στιγμιότυπα: για $t = 0$ [αριστερή (μπλέ) γραμμή] και για $t = 32$ [δεξιά (πράσινη) γραμμή], όταν το πλάτος του παίρνει την μεγαλύτερη τιμή. Η ένθετη εικόνα δείχνει την πυκνότητα της κορυφής του v-συμπυκνώματος για χρόνο $t = 32$; η τιμή του μισού-εύρους στο μισό-πλάτος (HWHM) ισούται με 1.3, είναι δηλαδή στην ίδια τάξη με το μήκος-αποκατάστασης (healing length) ξ.

παρατηρείται η εκπομπή πολλών σκοτεινών σολιτονίων στο "μεγάλο" συμπύκνωμα. Ένα τυπικό παράδειγμα όταν η ταχύτητα της παγίδας είναι ίση με $\upsilon = 1.2$ φαίνεται στο Σχ. 3.17: αμέσως μετά το v-συμπύκνωμα εισχωρήσει στο επίπεδο τμήμα του u-συμπυκνώματος, σκοτεινά σολιτόνια εκπέμπονται συνεχώς. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η κατάρρευση της υπερρευστότητας του u-συστατικού, η οποία προκαλείται από την υπερηχητική ταχύτητα του v-συστατικού: στην πραγματικότητα όπως δείχνεται στην ένθετη εικόνα του Σχ. 3.17, στα πρώτα στάδια της εξέλιξης του, το v-συμπύκνωμα, στη πραγματικότητα γίνεται ένα έντονα εντοπισμένο "εμπόδιο", το οποίο κινείται με ταχύτητα που υπερβαίνει την κρίσιμη ταχύτητα (η οποία είναι, κατά προσέγγιση, η ταχύτητα του ήχου του u-συμπυκνώματος). Κατά συνέπεια, η δυναμική που παρατηρείται ακολουθεί προηγούμενες μελέτες τόσο θεωρητικού περιεχομένου [171, 172] όσο και πειραμάτων που έχουν γίνει [173] και αφορούν την κατάρρευση της υπερρευστότητας σε οινεί μονοδιάστατα BECs. Σε όλες αυτές τις εργασίες, φανερώνεται ότι η παραπάνω κατάσταση συνοδεύεται πάντα με συνεχής εκπομπή σκοτεινών σολιτονίων. Ο μηχανισμός της κατάρρευσης, αρχικά αποσαφηνίστηκε στην πρωτότυπη εργασία του Hakim [171]. Ειδικότερα, μέχρι να προσεγγίσει το κρίσιμο σημείο, το κινούμενο εμπόδιο, (το οποίο στη περίπτωση που μελετούμε, είναι το v-συστατικό) μπορεί να δημιουργήσει ένα ζευγάρι από εντοπισμένες καταστάσεις οι οποίες διαδίδονται μαζί. Μετά το κρίσιμο σημείο, οι εντοπισμένες δομές λόγω αστάθειες δεν μπορούν να υφίστανται σαν ενιαία δομή. Το "μεγάλο" συμπύκνωμα παράγει ένα σκοτεινό σολιτόνιο. Αφού το τελευταίο ταξιδέψει αρκετά, ένα δεύτερο επάγεται και συντελεί έτσι στη γένηση ενός τραίνου σκοτεινών σολιτονίων.

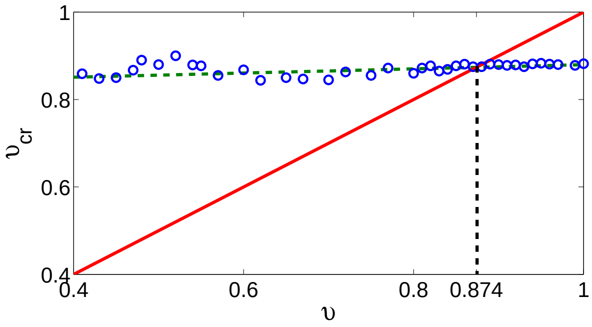
Έχει σημασία να δικαιολογήσουμε ποσοτικά τα παραπάνω επιχειρήματα, κατά την εκτίμηση της κρίσιμης ταχύτητας που απαιτείται για την διάσπαση του υπερρευστότητας. Αυτό μπορεί να γίνει ως ακολούθως. Πρώτον, παρατηρούμε, στο παράδειγμα που απεικονίζεται στο Σχ. 3.21 για $\upsilon = 0.8$, ότι το v-συστατικό έχει αρχικά [για $t = 0$ βλ. αριστερή (μπλέ) γραμμή] την μορφή ενός διευρυμένου κυματοπακέτου (η οποία διαμορφώνεται από το σχήμα της παγίδας που ενεργεί πάνω σε αυτό); ωστόσο, αφού εισέλθει μέσα στο u-συστατικό, χωρίζεται σε μικρότερης πυκνότητας δομές [το οποίο φαίνεται από την δεξιά (μπλέ) γραμμή για $t = 32$].

Η μεγαλύτερη από αυτές τις δομές έχει πλάτος περίπου τέσσερις φορές μεγαλύτερο από το αρχικό, και γίνεται έντονα εντοπισμένη, αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή που του μισούεύρους του στο μισό-πλάτος (HWHM) έχει την ίδια τάξη μεγέθους με το μήκος αποκατάστασης (healing length) ξ (το οποίο ισούται με 1 στον αδιάστατο συμβολισμό που χρησιμοποιούμε). Βασιζόμενοι σε αυτήν την παρατήρηση, είναι δυνατόν να εξετάσουμε το v-συστατικό ως μία δέλτα-συνάρτηση έντασης v_*. Για να μπορέσουμε να το υπολογίσουμε, προσομοιώσαμε κατάλληλα το v-συστατικό με μία κανονικοποιημένη Γκαουσσιανή συνάρτηση με πλάτος ίσο με το πλάτος που έχει το συμπύκνωμα για χρόνο $t \sim 32$ (όταν δηλαδή το v-συμπύκνωμα αποκτά τη μέγιστη τιμή πυκνότητας). Τότε, χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική έκφραση για την κρίσιμη ταχύτητα που έχει διατυπωθεί στην αναφορά [171], και η οποία είναι η εξής:

$$\mathrm{v}_* = 4(1 - \upsilon_{\mathrm{cr}}^2/2)\frac{[\sqrt{1+4\upsilon_{\mathrm{cr}}^2} - (1+\upsilon_{\mathrm{cr}}^2)]^{1/2}}{2\upsilon_{\mathrm{cr}}^2 - 1 + \sqrt{1+4\upsilon_{\mathrm{cr}}^2}}. \tag{3.97}$$

Στο Σχ. 3.22, δείχνουμε την τιμή της κρίσιμης ταχύτητας υ_{cr}, η οποία υπολογίζεται όπως αναφέραμε παραπάνω, και είναι ανάλογη με τη ταχύτητα που έχει η παγίδα υ. Εφαρμόζωντας μία κατάλληλη γραμμή που εξομοιώνει τις τιμές υ_{cr}, βρίσκουμε ότι $\upsilon_{\mathrm{cr}} \approx 0.048\upsilon + 0.832$. 'Ετσι, βρίσκουμε ότι υπάρχει μία μικρή εξάρτηση της από το μέγιστο πλάτος της έντασης του κινούμενου εμποδίου, το οποίο παραλληλίζεται από το v-συστατικό, με αρχική ταχύτητα αυτή που έχει η παγίδα. Συγκρίνοντας την παραπάνω γραμμή που παρουσιάζει την κρίσιμη τιμή της ταχύτητας με τη διαγώνιο (στο θετικό τέταρτο) του επιπέδου υ_{cr} έναντι υ, μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για το ποιά τιμή της ταχύτητας της παγίδας μπορεί να είναι πάνω από την κρίσιμη. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται φανερό από το Σχ. 3.22 ότι γιά τιμές $\upsilon > 0.874$, η παγίδα υπερβαίνει την κρίσιμη ταχύτητα υ_{cr}, ως εκ τούτου η υπερρευστότητα τότε αναμένεται να καταρρεύσει. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα που έγιναν, προκειμένου να βρεθεί η ταχύτητα της παγίδας για την οποία παρατηρείται το φαινόμενο της κατάρρευσης της υπερρευστότητας και η εκπομπή μαύρων σολιτονίων, έρχεται σε πλήρη συμφωνία με την αναλυτική προσέγγιση. Πιο συγκεκριμένα, είχαμε βρεί ότι αυτή πρέπει να είναι $\upsilon = 0.87$ [βλ. τις δεξιά διακεκομμένες (πράσινες) γραμμές που βρίσκονται στο Σχ. 3.14], και στην ουσία ταυτίζεται με την θεωρητική προσέγγιση που βασίζεται στην Εξ. (3.97).

Η εκπομπή του “τραίνου” των σκοτεινών σολιτονίων συμβαίνει μόνο στην περίπτωση που η παγίδα του “μικρού” συμπυκνώματος συνεχίζει να υφίσταται και μετά τη σύγκρουση του ανωτέρω στο “μεγάλο” συμπύκνωμα. Στην αντίθετη περίπτωση και για μεγάλες ταχύτητες --βλ. το τρίτο όριο ταχυτήτων που παρουσιάζεται στο Σχ. 3.13 -- το “μικρό” συμπύκνωμα δεν παραμένει εντοπισμένο και γρήγορα διασπείρεται.



Σχήμα 3.22: Η κρίσιμη ταχύτητα, $\upsilon_{\rm cr}$, ως εξάρτηση της ταχύτητας της παγίδας, υ. Πρώτα υπολογίζουμε την τιμή της $\upsilon_{\rm cr}$ [που υποδεικνύεται με τους (μπλέ) κύκλους] για διαφορετικές τιμές των ταχυτήτων της παγίδας, και μετά τις προσεγγίζουμε με μία ευθεία γραμμή [οριζόντια διακεκομμένη (πράσινη) γραμμή]. Κατάρρευση της υπερρευστότητας αναμένεται όταν η ταχύτητα της παγίδας γίνεται μεγαλύτερη από την κρίσιμη ταχύτητα, δηλ. όταν η συνεχής γραμμή, διασταυρωθεί με την διαγώνιο κόκκινη γραμμή στη τιμή $\upsilon \approx 0.874$, όπως υποδεικνύει η κάθετη (μαύρη) γραμμή.

3.3 Σολιτόνια σε μείγματα γραμμικά συζευγμένων BEC δύο συστατικών

Αφού βρήκαμε τις αναλυτικές εκφράσεις για τις λύσεις σολιτονίων που δημιουργούνται σε μείγματα συμπυκνωμάτων έπειτα από τη μεταξύ τους σύγκρουση, και περιγράψαμε με επιτυχία τη δυναμική τους θα επεκτείνουμε τη μελέτη μας σε αυτή τη κατεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε μείγματα συμπυκνωμάτων με χρονικά μεταβαλλόμενες παραμέτρους και γραμμική σύζευξη. Η παρούσα μελέτη μπορεί να θεωρηθεί ως προέκταση του Υποκεφαλαίου 3.2, αφού τώρα θα επιχειρήσουμε να βρούμε τη γενεση σολιτονικών δομών όχι λόγω της μεταξύ τους σύγκρουσης αλλά λόγω της αμοιβαίας αλληλεπίδρασης τους μέσω της γραμμικής σύζευξης αλλά και και μέσω της χρονικής μεταβολής των διατομικών αλληλεπιδράσεων κάτι που κάνει τα μείγματα εύκολα διαχειρίσιμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παρούσα μελέτη θα επεκταθεί και σε μη αυτόνομα μείγματα τριών συστατικών.

Στόχος μας είναι:

i) να ερευνήσουμε τις δομές που προκύπτουν έπειτα από κατάλληλη ρύθμιση των παραμέτρων, δηλαδή της μη γραμμικότητας και του εξωτερικού δυναμικού και να βρούμε τις αναλυτικές τους εκφράσεις, και

ii) να εξάγουμε συμπεράσματα για τη δυναμική τους μέσω κατάλληλης διαχείρισης των μη αυτόνομων συστημάτων που την περιγράφουν.

Μέσω της θεωρίας μέσου πεδίου, η δυναμική των δύο συστατικών του μείγματος περιγράφεται, από ένα σύστημα δύο συζευγμένων εξισώσεων GP στις τρεις-διαστάσεις ($3D$) ([174]) όπως αυτό φαίνεται στην Εξ. (1.2). Στη περίπτωση ισχύρά ανισοτροπικών δυναμικών παγίδευσης, αυτές οι εξισώσεις μπορούν να αναχθούν σε ένα σύστημα μονοδιάστατων εξισώσεων ($1D$)

([93]), το οποίο έχει την ακόλουθη αδιάστατη μορφή:

$$i\psi_{j,t} = -\frac{1}{2}\psi_{j,xx} + \sum_{l=1}^{2} g_{jl}(t)|\psi_l|^2\psi_j + \sum_{l=1}^{2} \sigma_l\psi_l + V_j(x,t)\psi_j, \quad j = 1, 2. \tag{3.98}$$

Στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων, ψ_j αποτελούν τις μακροσκοπικές κυματοσυναρτήσεις των δύο συστατικών, ενώ ο χρόνος t και η χωρική παράμετρος x, μετρώνται αντίστοιχα σε μονάδες της αντίστροφης εγκάρσιας συχνότητας $\omega_\perp^{-1}$ και του εγκάρσιου μήκους του αρμονικού ταλαντωτή $a_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$ (m υποδηλώνει την ατομική μάζα). Στην Εξ. (1.2) οι μη γραμμικοί συντελεστές g_{jl} είναι ανάλογοι των μηκών σκέδασης a_{jl}, δηλαδή $\left(g_{jl}(t) = \frac{2a_{jl}(t)}{a_B}\right.$, ενώ a_B είναι η ακτίνα του Bohr$\left.\right)$. Επιπλέον το $V_j(x,t)$ είναι το εξωτερικό δυναμικό παγίδευσης, και οι γραμμικοί συντελεστές σύζευξης σ_l αντιπροσωπεύουν τη γραμμική σύζευξη Rabi και είναι υπεύθυνοι για την μεταφορά ατόμων από το ένα συστατικό του μείγματος ψ_1 στο άλλο συστατικό ψ_2 και το αντίστροφο. Στη περίπτωση που μελατάμε, υποθέτουμε ότι τα δύο διαφορετικά συστατικά αποτελούνται από άτομα που βρίσκονται σε δύο διαφορετικές καταστάσεις της υπέρλεπτης υφής του ίδιου είδους ατόμων. Τα χρονικά-εξαρτώμενα εξωτερικά δυναμικά V_j αποτελούν παραβολικά δυναμικά, είναι ίσα μεταξύ τους $(, V_1 = V_2 = V)$ και ορίζονται ως $V(x,t) = (1/2)\Omega^2(t)x^2$. Η κανονικοποιημένη συχνότητα του δυναμικού παγίδευσης δίνεται από τη σχέση $\Omega^2(t) = \omega_x^2(t)/\omega_\perp^2$, όπου $\omega_x(t)$ είναι η χρονικά διαμορφωμένη συχνότητα στον άξονα -x. Τέλος, οι μακροσκοπικές κυματοσυναρτήσεις ψ_j κανονικοποιούνται έτσι ώστε $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_j|^2 dx = N_j, j = 1{,}2$ όπου N_j είναι ο αριθμός των ατόμων στο j^{th} συμπύκνωμα.

Ολοκληρώσιμο σύστημα μη αυτόνομων εξισώσεων

Θα δείξουμε ότι το παραπάνω μη αυτόνομο σύστημα εξισώσεων GP (3.98) μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ολοκλήρωσιμο σύστημα από δύο συζευγμένες εξισώσεις Schrödinger (CNLS). Αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι εφικτοί κυρίως λόγω των χρονικά εξαρτώμενων διατομικών αλληλεπιδράσεων και του χρονικά μεταβαλλόμενου εξωτερικού δυναμικού; απουσία της χρονικής εξάρτησης τέτοιου είδους μετασχηματισμοί δεν είναι εφικτοί. Βασιζόμενοι σε πειραματικά αποτελέσματα μειγμάτων αποτελούμενα από συστατικά του ίδιου αερίου ^{87}Rb [138--140], μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα μήκη σκέδασης είναι ίσα με τη μονάδα. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ίσες διατομικές αλληλεπιδράσεις, δηλαδή $g_{jl} = \rho(t)$ στην Εξ. (3.98). Οι γραμμικοί συντελεστές σύζευξης σ_l έχουν επιλεχθεί έτσι ώστε $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, όπου $\sigma > 0$. Εφαρμόζωντας τα παραπάνω στην Εξ. (3.98) προκύπτει ότι ([78, 80]):

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sigma t) & -i\sin(\sigma t) \\ -i\sin(\sigma t) & \cos(\sigma t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \tag{3.99}$$

και καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα μη αυτόνομων εξισώσεων χωρίς τη γραμμική σύζευξη Rabi:

$$i\phi_{j,t} = -\frac{1}{2}\phi_{j,xx} + \left(\rho(t)\sum_{l=1}^{2}|\phi_l|^2 + V(x,t)\right)\phi_j, \quad j = 1,2. \tag{3.100}$$

'Ετσι, εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς (3.99) στην Εξ. (3.98), ο γραμμικός συντελεστής σύζευξης μπορεί να απορροφηθεί. Κατόπιν εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό

$$\phi_j(x,t) = \xi_1\sqrt{2\rho(t)}\, e^{i\tilde{\theta}}q_j(X,T), \quad j = 1,2, \tag{3.101}$$

όπου

$$\tilde{\theta} = -\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(\ln\rho)\right]x^2 + 2\xi_2\xi_1^2\left(\rho x - \xi_2\xi_1^2\int\rho^2 dt\right), \tag{3.102}$$

$$X = \sqrt{2}\,\xi_1\left[\rho x - 2\xi_2\xi_1^2\int\rho^2 dt\right], \tag{3.103}$$

$$T = \xi_1^2\int\rho^2 dt, \tag{3.104}$$

με ξ_1 και ξ_2 να αποτελούν αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, η Εξ. (3.100) μπορεί να μετασχηματιστεί στο ακόλουθο σύστημα ολοκληρώσιμων αφεστιάζουσων CNLS εξισώσεων [175]:

$$iq_{j,T} + q_{j,XX} - 2\sum_{l=1}^{2}|q_l|^2 q_j = 0, \quad j = 1,2, \tag{3.105}$$

με τη συνθήκη

$$\frac{d\Lambda}{dt} - \Lambda^2 - \Omega^2(t) = 0, \tag{3.106}$$

όπου $\Lambda = (\rho_t/\rho)$.

3.3.1 Ακριβής λύση ενός φωτεινού-σκοτεινού σοολιτονίου

Η λύση του σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου για την Εξ. (3.105) μπορεί να βρεθεί μέσω της μεθόδου Hirota [176] και βρίσκεται να έχει τη μορφή [175, 177]:

$$q_1(X,T) = \sqrt{|c_1|^2 cos^2\varphi_1 - k_{1R}^2}\,\text{sech}[k_{1R}(X - 2k_{1I}T) + R/2]\, e^{i(\eta_{1I}+\theta)}, \tag{3.107}$$

$$q_2(X,T) = -c_1\, e^{i(\zeta_1+\varphi_1)}\,(\text{cos}\varphi_1\,\text{tanh}[k_{1R}(X - 2k_{1I}T) + R/2] + i\,\text{sin}\varphi_1), \tag{3.108}$$

όπου $\varphi_1 = \tan^{-1}(\frac{k_{1I}-b_1}{k_{1R}})$, ζ_1 = -$(b_1^2+2|c_1|^2)T+b_1X$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_{1R}^{(1)}+i\alpha_{1I}^{(1)}$, $\theta = \tan^{-1}(\frac{\alpha_{1I}}{\alpha_{1R}})$, $\eta_1 = k_1X + i(k_1^2 - 2|c_1|^2)T$ και $e^R = -\frac{1}{(k_1+k_1^*)^2}\left(1-\frac{|c_1|^2}{|k_1-ib_1|^2}\right)^{-1}$. Το φωτεινό σολιτόνιο χαρακτηρίζεται από τρείς μιγαδικές παραμέτρους k_1, α_1, και c_1, και μία πραγματική παράμετρο, b_1. Να σημειωθεί ότι η παράμετρος α_1 δεν επηρεάζει το πλάτος του σολιτονίου. Το σκοτεινό σολιτόνιο επηρεάζει το φωτεινό μέσω των παραμέτρων c_1 και b_1. Επίσης, η ύπαρξη της λύσης απαιτεί $|c_1|^2 > |k_1 - ib_1|^2$. Ως αποτέλεσμα αυτής της συνθήκης, είναι φανερό ότι δεν γίνεται να υπάρχει το σκοτεινό ή φωτεινό σολιτόνιο χωρίς την ταυτόχρονη ύπαρξη και του άλλου; γι'αυτό το λόγο αναφέρονται και ως συμβιωτικά.

Η δυναμική των μη αυτόνομων διανυσματικών σολιτονικών λύσεων της Εξ. (1.2) η οποία χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη της μη γραμμικής σύζευξης και της χρονικής εξάρτησης της μη γραμμικότητας και του παραβολικού δυναμικού μπορεί να περιγραφεί καλύτερα μετασχηματίζοντας την ψ_j μέσω των Εξισώσεων (3.101) και (3.99). Έτσι οι λύσεις (3.108) μέσω των Εξ.(3.101) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}
&\phi_1(x,t) = \xi_1\sqrt{2\rho(|c_1|^2\cos^2\varphi_1 - k_{1R}^2)}\; e^{i(\bar{\eta}_{1I}+\theta+\tilde{\theta})} \times \\
&\text{sech}\left(k_{1R}(\sqrt{2}\,\xi_1(\rho x - 2\xi_2\xi_1^2\int\rho^2dt) - 2k_{1I}\xi_1^2\int\rho^2dt) + R/2\right), \qquad (3.109)\\
&\phi_2(x,t) = -c_1\xi_1\sqrt{2\rho}\; e^{i(\bar{\zeta}_1+\varphi_1+\tilde{\theta})} \;\times \\
&\left(\cos\varphi_1\ \tanh[k_{1R}(\sqrt{2}\,\xi_1(\rho x - 2\xi_2\xi_1^2\int\rho^2dt)\right.\\
&\left.-2k_{1I}\xi_1^2\int\rho^2dt) + R/2] + i\ \sin\varphi_1\right), \qquad (3.110)
\end{aligned}$$

όπου $\bar{\eta}_{1I} = k_{1I}\sqrt{2}\xi_1(\rho - 2\xi_2\xi_1^2\int\rho^2dt) - (k_{1R}^2 - k_{1I}^2 - 2|c_1|^2)\xi_1^2\int\rho^2dt$ και
$\bar{\zeta}_1 = -(b_1^2+2|c_1|^2)\xi_1^2\int\rho^2dt + b_1\sqrt{2}\,\xi_1(\rho x - 2\xi_2\xi_1^2\int\rho^2dt)$.

Τότε η ακριβής λύση του σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου δίνεται από $\psi_1 = \cos(\sigma t)\phi_1 - i\ \sin(\sigma t)\phi_2$ και $\psi_2 = \cos(\sigma t)\phi_2 - i\ \sin(\sigma t)\phi_1$, όπου ϕ_1 και ϕ_2 δίνονται από την Εξ. (3.110).

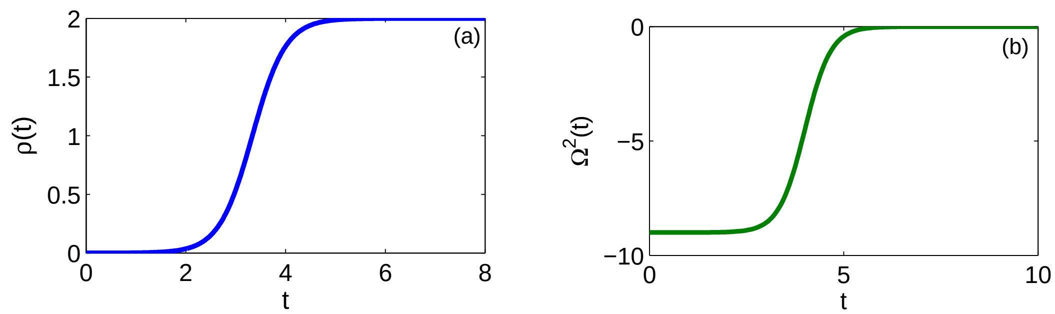
Το παραπάνω ζεύγος σολιτονίων φαίνεται να φέρει ομοιότητες με το σκοτεινό-σκοτεινό σολιτόνιο [141, 147], όπου το σκοτεινό και φωτεινό σολιτόνιο συνυπάρχουν στο ίδιο συστατικό και έχουν σταθερή ασυμπτωτική τιμή καθώς $|x| \to \infty$; ωστόσο, η μορφή του εξαρτάται από την γραμμική σύζευξη Rabi καθώς επίσης από τις χρονικά εξαρτώμενες διατομικές αλληλεπιδράσεις και το χρονικά μεταβαλλόμενο παραβολικό δυναμικό. Αξιζεί να σημειωθεί εδώ ότι λόγω της ύπαρξης της γραμμικής σύζευξης Rabi θα υπάρχει μία περιοδική εναλλαγή των συστατικών του μείγματος η οποία συνοδεύεται με αντίστοιχη ταλάντωση του υπόβαθρου και όπως ήδη αναφέραμε για το ολοκληρώσιμο μη αυτόνομο σύστημα των εξισώσεων GP [βλέπε Εξ. (3.108)] η εξάρτηση του φωτεινού από το σκοτεινό σολιτόνιο αποτελεί και κριτήριο για την ύπαρξη του διανυσματικού σολιτονίου. Έτσι, θεωρείται αδύνατον το ένα από τα δύο συστατικά στοιχεία που αποτελούν την παραπάνω λύση να εξαφανιστεί. Αυτό ισχύει ακόμα και για την περίπτωση όπου υπάρχει γραμμική Rabi σύζευξη στο σύστημά μας (3.99). Για να διευκρινήσουμε περαιτέρω την δυναμική των "συμβιωτικών" λύσεων θα μελετήσουμε κάποια διαφορετικά παραδείγματα.

Βηματικά διαμορφωμένη μη γραμμικότητα

Έχει διαπιστωθεί ότι η απότομη αλλαγή της τιμής της μη γραμμικότητας εξάγει ενδιαφέροντα αποτελέσματα στην δυναμική των συμπυκνωμάτων Bose-Einstein ([38, 178]). Γι'αυτό θα μελετήσουμε αρχικά την βηματική ασυνέχεια της μη γραμμικότητας, αλλά αυτή τη φορά ως προς το χρόνο, η οποία γι'αυτό το λόγο παίρνει τη μορφή:

$$\rho(t) = 1 + \tanh(\omega t + \delta), \tag{3.111}$$

όπου το αντίστοιχο μήκος σκέδασης είναι $a_s(t) = \frac{1}{2}a_B[1 + \tanh(\omega t + \delta)]$; και η παράμετρος ω^{-1} υποδεικνύει τη χαρακτηριστική χρονική κλίμακα όπου γίνεται η μετάβαση, ενώ δ είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Η μορφή του παρουσιάζεται στην αριστερή εικόνα του Σχ. 3.23(a), ενώ το



Σχήμα 3.23: Η αριστερή εικόνα (a) δείχνει τον συντελεστή μη γραμμικότητας ρ(t) σαν συνάρτηση του χρόνου στην περίπτωση της βηματικής ασυνέχειας, ενώ η δεξιά εικόνα (b) την αντίστοιχη μορφή της έντασης του παραβολικού δυναμικού.

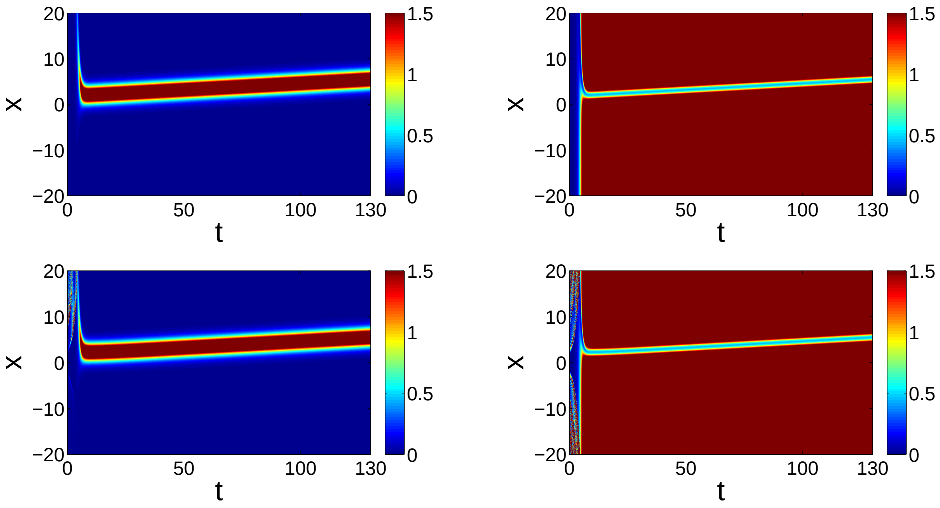
αντίστοιχο παραβολικό δυναμικό φαίνεται στην δεξιά εικόνα του ίδιου σχήματος. Το αντίστοιχο μήκος σκέδασης, σε αυτή τη περίπτωση είναι το ακόλουθο [179]:

$$\frac{a_s(t)}{a_{bg}} = \left(1 + \frac{\Delta}{B_0 - B(t)}\right), \tag{3.112}$$

όπου a_{bg} είναι η τιμή του μήκους σκέδασης μακριά από το σημείο συντονισμού Feshbach, $B(t)$ είναι το χρονικά εξαρτώμενο μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται, B_0 είναι η τιμή συντονισμού του μαγνητικού πεδίου, και Δ είναι το εύρος συντονισμού παρουσία του μαγνητικού πεδίου. Η αντίστοιχη ένταση της χρονικά μεταβαλλόμενης μαγνητικής παγίδας καθορίζεται από την Εξ. (3.106):

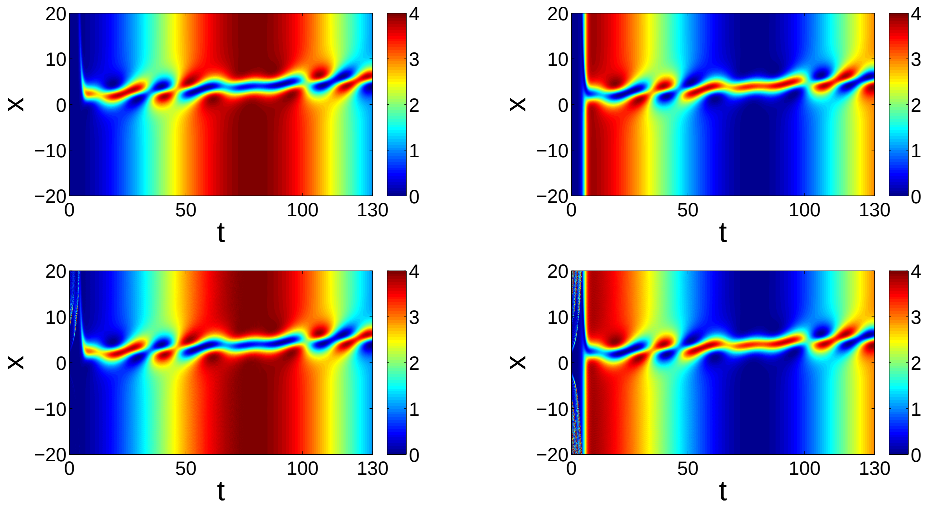
$$\Omega^2(t) = -\omega^2 \left(\frac{4}{1 + e^{2(\omega t + \delta)}} \right). \tag{3.113}$$

Τα Σχ.3.24 και 3.25, δείχνουν την εξέλιξη των διανυσματικών σολιτονίων παρουσία και απουσία της γραμμικής σύζευξης Rabi αντίστοιχα; τα αναλυτικά αποτελέσματα φαίνονται στις πάνω εικόνες ενώ στις κάτω εικόνες, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία εξήχθησαν έπειτα από αριθμητική ολοκλήρωση των Εξ. (3.98).



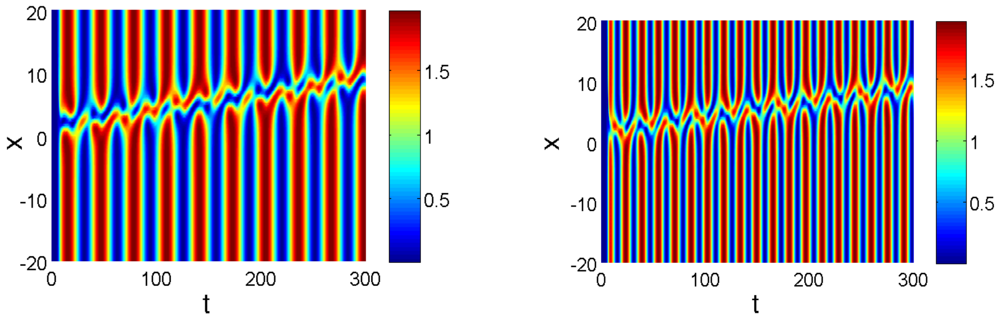
Σχήμα 3.24: Χωροχρονική εξέλιξη της λύσης του διανυσματικού σολιτονίου της Εξ. (3.98) στη περίπτωση βηματικής ασυνέχειας της μη γραμμικότητας στο χρόνο και απουσία γραμμικής σύζευξης. Οι πάνω εικόνες παρουσιάζουν τα αναλυτικά αποτελέσματα (πάνω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και δεξιά πάνω εικόνα: ψ_2 συστατικό του διανυσματικού σολιτονίου), ενώ οι κάτω εικόνες δείχνουν τα αριθμητικά αποτελέσματα (κάτω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και δεξιά κάτω εικόνα: ψ_2 συστατικό του διανυσματικού σολιτονίου). Παραμετρικές τιμές: $k_1 = 0.5 + 0.02i$, $b_1 = 0.2$, $c_1 = 2$, $\xi_1 = 0.5$, $\xi_2 = 0$, $\alpha_1^{(1)} = 0.5$, $\delta = -4$ και $\omega = 0.7$.

Συγκρίνοντας τα αναλυτικά με τα αριθμητικά αποτελέσματα, φαίνεται ότι υπάρχει πολύ καλή συμφωνία μεταξύ τους. Βρήκαμε επίσης ότι απουσία της σύζευξης Rabi, δεν παρατηρούμε ταλαντώσεις μεταξύ των σολιτονίων και του υποβάθρου. Ωστόσο, το σχήμα, το πλάτος και η ταχύτητα των σολιτονίων διαμορφώνονται λόγω της χρονικά εξαρτημένης μη γραμμικότητας και του εξωτερικού δυναμικού. Με την παρουσία της σύζευξης Rabi, ξεκινάει μεταφορά ατόμων από το ένα συμπύκνωμα στο άλλο, η οποία οδηγεί σε περιοδικές ταλαντώσεις, όπως παρουσιάζεται στο Σχ 3.25. Για μικρές τιμές του συντελεστή της γραμμικής σύζευξης, δηλ. του σ, το υπόβαθρο αρχίζει να εκτελεί μικρές ταλαντώσεις (βλ. Σχ.3.25), ενώ για μεγαλύτερες τιμές του σ, οι ταλαντώσεις γίνονται πιο γρήγορες. Για να δείξουμε το παραπάνω φαινόμενο, παρουσιάζουμε τα Σχ. 3.26, όπου φαίνεται η χωροχρονική εξέλιξη του $|\psi_1|^2$ για $\sigma = 0.1$ και $\sigma = 0.2$. Παρόμοια αποτελέσματα παίρνουμε και για το δεύτερο σύμπυκνωμα (ψ_2). Οι ταλαντώσεις του υπόβαθρου προκύπτουν από την ανταλλαγή των ατόμων μεταξύ του σολιτονίου και του υπόβαθρου.



Σχήμα 3.25: Χωροχρονική εξέλιξη της λύσης του διανυσματικού σολιτονίου της Εξ. (3.98) στη περίπτωση βηματικής ασυνέχειας της μη γραμμικότητας στο χρόνο και παρουσία γραμμικής σύζευξης. Οι πάνω εικόνες παρουσιάζουν τα αναλυτικά αποτελέσματα (πάνω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και δεξιά πάνω εικόνα: ψ_2 συστατικό του διανυσματικού σολιτονίου), ενώ οι κάτω εικόνες δείχνουν τα αριθμητικά αποτελέσματα (κάτω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και δεξιά κάτω εικόνα: ψ_2 συστατικό του διανυσματικού σολιτονίου). Παραμετρικές τιμές: $k_1 = 0.5 + 0.02i$, b_1 = 0.2, c_1=2, ξ_1 = 0.5, ξ_2 = 0, $\alpha_1^{(1)}$ = 0.5, δ = -4, ω = 0.7, και σ = 0.02.

Άλλη σημαντική παρατήρηση που απεικονίζεται στα Σχήματα 3.25 και 3.26 είναι ότι για μεγαλύτερες τιμές της γραμμικής σύζευξης το μεγαλύτερο μέρος του σκοτεινού σολιτονίου εμφανίζεται στο πρώτο συμπύκνωμα (ψ_1), το οποίο μαζί με τη φωτεινό σολιτόνιο οδηγούνται σε περιοδικά (“beating”) φαινόμενα. Παρόμοια αποτελέσματα λαμβάνουν χώρα στο δεύτερο συμπύκνωμα (ψ_2). Έτσι, σε ένα δεδομένο σύστημα μπορούμε να συνυπάρχουν ταλαντώσεις διανυσματικών ζευγών σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου.



Σχήμα 3.26: Χωροχρονική εξέλιξη του διανυσματικού σολιτονίου με βηματική αλλαγή της μη γραμμικότητας στο χρόνο, και για γραμμική σύζευξη $\sigma = 0.1$ (αριστερή εικόνα), και $\sigma = 0.2$ (δεξιά εικόνα). Οι υπόλοιπες παράμετροι ορίζονται ως: $k_1 = 0.5 + 0.02i$, $b_1 = 0.2$, $\xi_1 = 0.5$, $\xi_2 = 0$, $\alpha_1^{(1)} = 0.5$, $\delta = -4$, και $\omega = 0.7$.

Μία πιο λεπτομερής διερεύνηση του Σχ.3.25 στην περιοχή $t = 0$ εώς 2, δείχνει ότι δεν υπάρχουν σολιτονικές λύσεις. Αυτό συμβαίνει λόγω της φύσης της μη γραμμικότητας $\rho(t)$, η οποία έχει μηδενική τιμή σε αυτούς τους χρόνους και έτσι δεν υποστηρίζονται στο σύστημα τέτοιες λύσεις. 'Ετσι, ακόμα και εάν η γραμμική σύζευξη Rabi, οδηγεί σε μεταφορά ατόμων μεταξύ των δύο συστατικών του μείγματος, η φύση των σολιτονικών λύσεων καθορίζεται κατά κύριο λόγω από τις τιμές της μη γραμμικότητας στο σύστημα.

Περιοδικά διαμορφωμένη μη γραμμικότητα

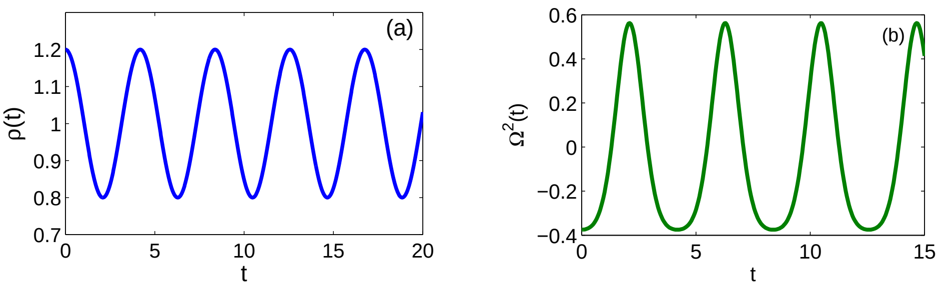
Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε ένα διαφορετικό φυσικό πλαίσιο, όπου η μη γραμμικότητα εξαρτάται περιοδικά από το χρόνο και έχει την εξής μορφή:

$$\rho(t) = 1 + \varepsilon\cos(\omega t + \delta), \tag{3.114}$$

όπου ε είναι μία αυθαίρετη πραγματική σταθερά, ω είναι η χαρακτηριστική συχνότητα, και δ είναι μία πραγματική σταθερά. Σε αυτή την περίπτωση, η μορφή του ατομικού μήκους σκέδασης είναι $a_s(t) = \frac{1}{2}a_B[1 + \varepsilon\cos(\omega t + \delta)]$. Στο Σχ.3.27, παρουσιάζεται η μορφή της χρονικά εξαρτημένης μη γραμμικότητας. Η χρονική εξάρτηση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $B(t)$ που απαιτείται για την επίτευξη της ανωτέρω μορφής της μη γραμμικότητας μπορεί να προσδιορισθεί από τον τύπο (3.112). Η αντίστοιχη ένταση της εξωτερικού δυναμικού, ώστε να ικανοποιείται η Εξ. (3.106), έχει την μορφή:

$$\Omega^2(t) = \omega^2\varepsilon\left(\frac{-3\varepsilon - 2\cos(\omega t + \delta) + \varepsilon\cos[2(\omega t + \delta)]}{2[1 + \varepsilon\cos(\omega t + \delta)]^2}\right). \tag{3.115}$$

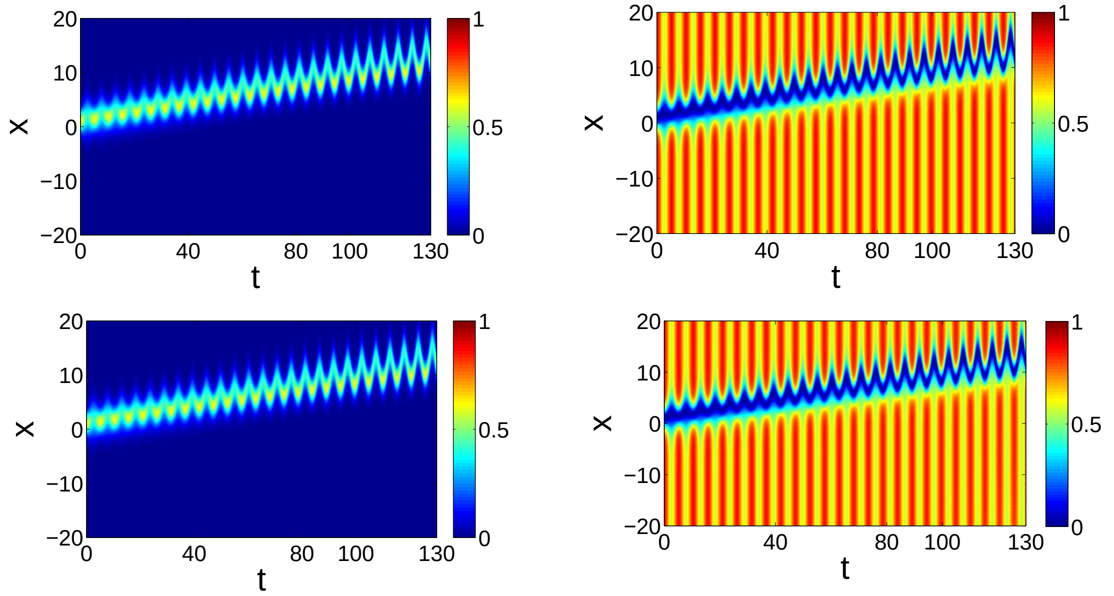
Πρέπει να σημειωθεί ότι το πρόσημο του εξωτερικού δυναμικού είναι αναστρέψιμο, υποστηρίζοντας με αυτό το τρόπο τον ίδιο τύπο διανυσματικών σολιτονίων τόσο για αρνητικές όσο και για θετικές τιμές; βλέπε Σχ. 3.27(b).



Σχήμα 3.27: (a) Περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενη μη γραμμικότητα ρ(t), (b) η αντίστοιχη ένταση του εξωτερικού αρμονικού δυναμικού παγίδευσης.

Όπως προκύπτει από την περιοδική φύση της μη γραμμικότητας, και τη χρονική εξάρτηση του εξωτερικού δυναμικού, τα δύο συστατικά του μείγματος εκτελούν περιοδικές ταλαντώσεις ακόμα και κατά την απουσία γραμμικής σύζευξης όπως φαίνεται στο Σχ. 3.28. Τα αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν από ολοκλήρωση της Εξ. (3.98) φαίνονται στην κάτω εικόνα του Σχ. 3.28.

Στη συνέχεια, εισάγουμε την γραμμική σύζευξη Rabi μεταξύ των δύο συστατικών του μείγματος; όπως αναμέναμε αρχίζει η μεταφορά ατόμων μεταξύ τους, όπως επίσης και μέταξύ

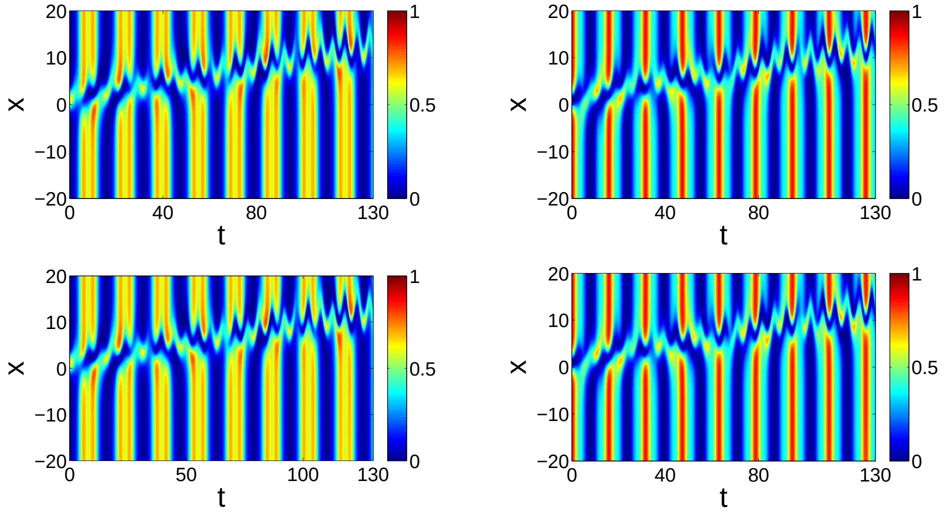


Σχήμα 3.28: Χωροχρονική εξέλιξη της λύσης των Εξ. (3.98) για περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενη μη γραμμικότητα, απουσία γραμμικής σύζευξης. Οι πάνω εικόνες παρουσιάζουν τις αναλυτικές μορφές (πάνω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και πάνω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό) και οι κάτω εικόνες τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα (κάτω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και κάτω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό) Οι υπόλοιπες τιμές των παραμέτρων είναι οι εξής: $k_1 = 0.5 + 0.1i$, $b_1 = 0.2$, $\alpha_1^{(1)} = 1.5$, $c_1 = 1$, $\xi_1 = 0.6$, $\xi_2 = 0$, $\omega = 1.2$ και $\delta = 0$.

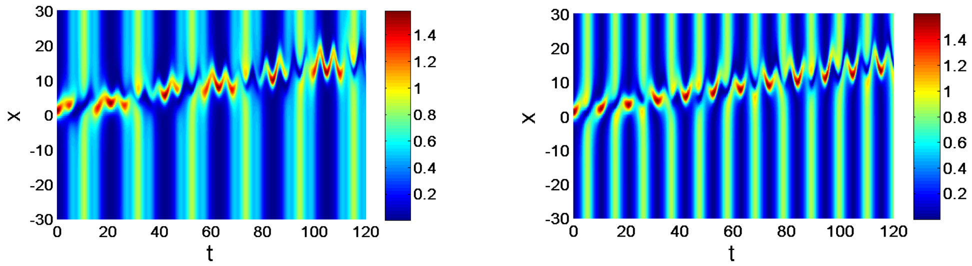
του σολιτονίου και του υποβάθρου. Αυτή η μεταφορά, είναι υπεύθυνη για την ταλάντωση της πυκνότητας των συστατικών και διαμορφώνεται λόγω της περιοδικής φύσης της μη γραμμικότητας και της έντασης του εξωτερικού δυναμικού, δηλ. των $\rho(t)$ και $\Omega^2(t)$. Αυτό το φαινόμενο φαίνεται ξεκάθαρα στο Σχ. 3.29, όπου οι επάνω εικόνες αναφέρονται στις αναλυτικά αποτελέσματα, ενώ οι κάτω στις αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, έτσι και σε αυτή τη περίπτωση, και οι δύο λύσεις του διανυσματικού σολιτονίου συνυπάρχουν στο ίδιο συστατικό λόγω της γραμμικής σύζευξης. Η αριστερή εικόνα του Σχ. 3.30 παρουσιάζει τη διάδοση του διανυσματικού σολιτονίου για μία μικρή τιμή τη παραμέτρου (σ =0.1). Φαίνεται ότι το σολιτόνιο εκτελεί μόνο περιοδικές ταλαντώσεις αλλά το υπόβαθρο δεν ταλαντώνεται. Η δεξιά εικόνα του Σχ. 3.30, παρουσιάζει τη περίπτωση για μία μεγαλύτερη τιμή της μη γραμμικής σύζευξης δηλαδή $\sigma = 0.2$. Σε αυτή τη περίπτωση το υπόβαθρο εκτελεί γρήγορες ταλαντώσεις και σημαντικές εναλλαγές του σκοτεινού και φωτεινού σολιτονίου συμβαίνουν οδηγώντας τελικά στην συνύπαρξη τους στο ίδιο συστατικό.

Από τα παραπάνω δύο παραδείγματα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στο μη αυτόνομο σύστημα εξισώσεων (3.98) η δυναμική εξέλιξη του διανυσματικού σολιτονίου καθορίζεται κυρίως από την χρονική εξάρτηση του $\rho(t)$ και του $\Omega^2(t)$ ενώ η εναλλαγή του των δύο συστατικών του μείγματος εξαρτάται ολοκληρωτικά από τη τιμή της γράμμική σύζευξη.



Σχήμα 3.29: Χωροχρονική εξέλιξη της λύσης των Εξ. (3.98) για περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενη μη γραμμικότητα, παρουσία γραμμικής σύζευξης. Οι πάνω εικόνες παρουσιάζουν τις αναλυτικές μορφές (πάνω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και πάνω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό) και οι κάτω εικόνες τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα (κάτω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και κάτω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό) Οι υπόλοιπες τιμές των παραμέτρων είναι οι εξής: $k_1 = 0.5 + 0.1i$, $b_1 = 0.2$, $\alpha_1^{(1)} = 1.5$, $c_1 = 1$, $\xi_1 = 0.6$, $\xi_2 = 0$, $\omega = 1.2$, $\delta = 0$ και $\sigma = 0.2$.



Σχήμα 3.30: Εξέλιξη της πυκνότητας του σολιτονίου στο ψ_1- συστατικό στη περίπτωση περιοδικά μεταβαλλόμενης μη γραμμικότητας στο χρόνο όταν $\sigma = 0.1$ (αριστερή εικόνα) και $\sigma = 0.2$ (δεξιά εικόνα). Υπόλοιπες παραμετρικές τιμές: $k_1 = 0.5 + 0.1i$, $b_1 = 0.2$, $\alpha_1^{(1)} = 1.5$, $c_1 = 1.5$, $\xi_1 = 0.6$, $\xi_2 = 0$, $\omega = 1.2$ και $\delta = 0$.

3.3.2 Ακριβής λύση δύο DB σολιτονίων

Η αναλυτική έκφραση δύο διανυσματικών σολιτονικών λύσεων στο ολοκληρώσιμο σύστημα (3.105) είναι η εξής:

$$
\begin{aligned}
q_1(X,T) &= \frac{1}{D}\left(\alpha_1^{(1)} e^{\eta_1} + \alpha_2^{(1)} e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\delta_{11}} + e^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_1+\delta_{21}}\right), \quad (3.116)\\
q_2(X,T) &= \frac{c_1 e^{i\zeta_1}}{D}\left[1 + e^{\eta_1+\eta_1^*+Q_{11}} + e^{\eta_1+\eta_2^*+Q_{12}} + e^{\eta_2+\eta_1^*+Q_{21}}\right.\\
&\quad \left. + e^{\eta_2+\eta_2^*+Q_{22}} + e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*+Q_3}\right], \quad (3.117)
\end{aligned}
$$

όπου

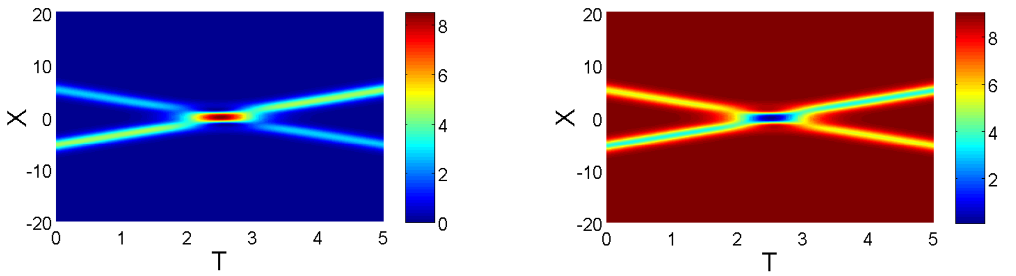
$$
D = 1 + e^{\eta_1+\eta_1^*+R_1} + e^{\eta_1+\eta_2^*+\delta_0} + e^{\eta_2+\eta_1^*+\delta_0^*} + e^{\eta_2+\eta_2^*+R_2} + e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*+R_3}. \quad (3.118)
$$

Οι παράμετροι της παραπάνω εξίσωσης προσδιορίζονται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
e^{R_1} &= \mu_{11},\ e^{R_2} = \mu_{22},\ e^{\delta_0} = \mu_{12},\ e^{\delta_0^*} = \mu_{21},\ \zeta_1 = -(b_1^2+\lambda)T + b_1 X, \\
\eta_j &= k_j X + i(k_j^2 - \lambda)T,\ \lambda = 2|c_1|^2, e^{Q_{ij}} = -\left(\frac{k_i - ib_1}{k_j^* + ib_1}\right)\mu_{ij}, \\
e^{Q_3} &= -\left(\frac{(k_1 - ib_1)(k_2 - ib_1)}{(k_1^* + ib_1)(k_2^* + ib_1)}\right) e^{R_3}, \\
e^{R_3} &= |k_1 - k_2|^2 \mu_{11}\mu_{12}\mu_{21}\mu_{22}(\chi_{12}\chi_{21} - \chi_{11}\chi_{22}), \\
\mu_{il} &= \frac{1}{(k_i + k_l^*)\chi_{il}}, \\
e^{\delta_{11}} &= (k_2 - k_1)\mu_{11}\mu_{21}(\alpha_2^{(1)}\chi_{21} - \alpha_1^{(1)}\chi_{11}), \\
e^{\delta_{21}} &= (k_2 - k_1)\mu_{12}\mu_{22}(\alpha_2^{(1)}\chi_{22} - \alpha_1^{(1)}\chi_{12}), \\
\chi_{il} &= -\left[\frac{(k_i + k_l^*)}{(\alpha_i^{(1)}\alpha_l^{(1)*})}\left(1 - \frac{|c_1|^2}{(k_i - ib_1)(k_l^* + ib_1)}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{3.119}
$$

όπου $\quad i, l, j = 1, 2.$

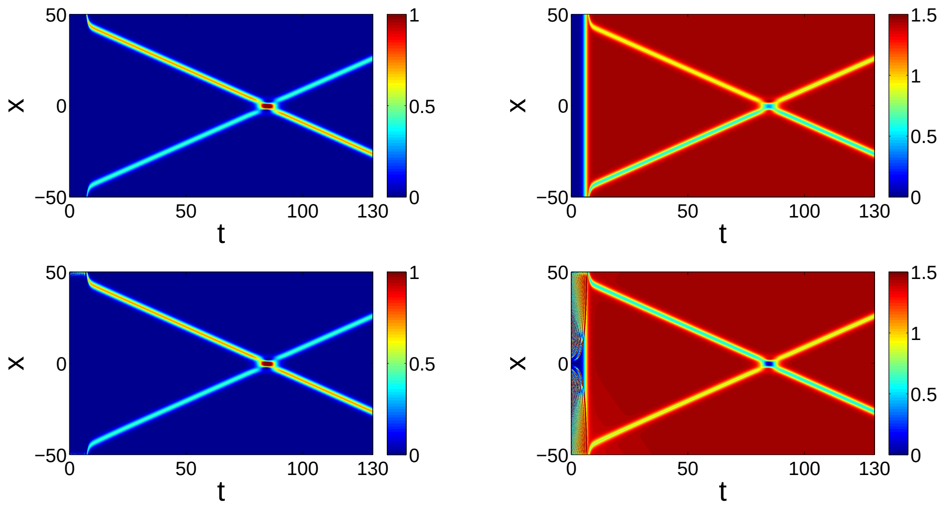
Η διαδικασία σύγκρουσης μεταξύ των δύο ζευγών σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων φαίνεται στο Σχ.3.31. Παρατηρούμε ότι τα σολιτόνια υφίστανται ελαστική σύγκρουση, κατά την οποία το πλάτος και η ταχύτητα του φωτεινού και του σκοτεινού συστατικού διατηρούνται μετά τη σύγκρουση, ενώ υπάρχει και μία μετατόπιση στη φάση. Η δυναμική συμπεριφορά των μη αυτόνομων διανυσματικών λύσεων μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς (3.101) και (3.99). Η δυναμική των δύο ζευγών φωτεινών-σκοτεινών σολιτονίων θα περιγραφεί στη συνέχεια, για τις δύο περιπτώσεις της χρονικής μεταβολής της μη γραμμικότητας ρ; δηλαδη στις περιπτώσεις της βηματικής ασυνέχειας και της περιοδικής εναλλαγής του.



Σχήμα 3.31: Σύγκρουση δύο σολιτονίων του συστήματος (3.105) [βλ. Εξ. (3.117)]. Οι παράμετροι του σολιτονίου παίρνουν τις τιμές $k_1 = -1 + i$, $k_2 = 1 - i$, $c_1 = 3$, $b_1 = 0.2$, και $\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} = 0.02$.

Σύγκρουση σολιτονίων παρουσία βηματικά διαμορφωμένης μη γραμμικότητας

Στο Σχ. 3.32 φαίνεται η σύγκρουση δύο διανυσματικών σολιτονικών λύσεων σε μείγμα δύο συστατικών που περιγράφεται από το μη αυτόνομο σύστημα δύο εξισώσεων GP (3.98) όπου η μη γραμμικότητα στο χρόνο έχει τη μορφή βηματικής συνάρτησης (η μορφή της δίνεται από την Εξ. (3.111) απουσία γραμμικής σύζευξης. Η ένταση της μαγνητικής παγίδας δίνεται από την Εξ. (3.113). Φαίνεται ότι τα δύο σολιτόνια έρχονται σε επαφή μετά πό χρόνο $t = 80$, συγκρούωνται μεταξύ τους και διαχωρίζονται για μεγαλύτερους χρόνους.

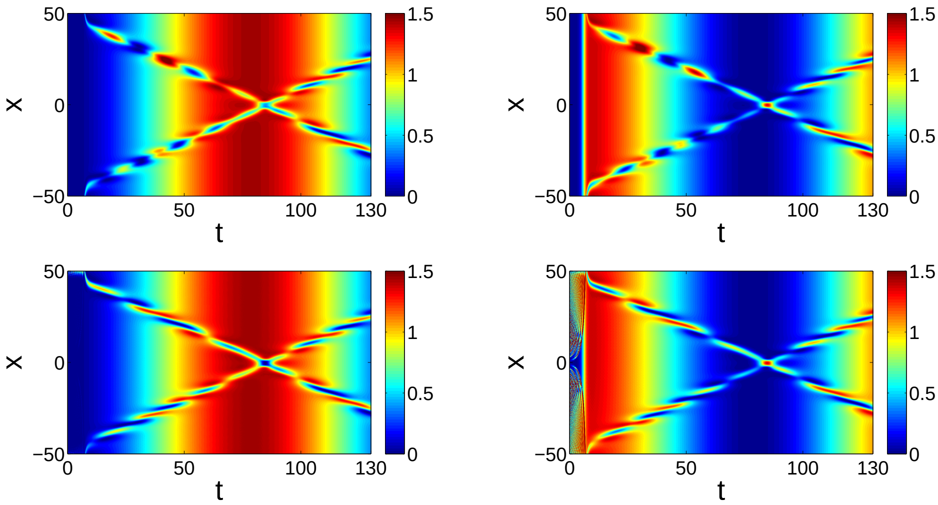


Σχήμα 3.32: Αλληλεπίδραση δύο διανυσματικών σολιτονικών λύσεων του μη αυτόνομου συστήματος όταν η μη γραμμικότητα έχει τη μορφή βηματικής συνάρτησης στο χρόνο απουσία γραμμικής σύζευξης. Οι πάνω εικόνες δείχνουν τις αναλυτικές μορφές τους (πάνω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και πάνω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό), ενώ οι κάτω εικόνες τα αριθμητικά αποτελέσματα (κάτω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και κάτω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό). Παραμετρικές τιμές: $k_1 = -1+i$, $k_2 = 1-i$, $c_1 = 3$, $b_1 = 0.2$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} = 0.03$, $\delta = -4.5$, $\xi_1 = 0.2$, $\xi_2 = 0$ και $\omega = 0.75$.

Στη συνέχεια, συμπεριλαμβάνουμε τη γραμμική σύζευξη στο μοντέλο και σχεδιάζουμε τις αντίστοιχες λύσεις του μη αυτόνομου συστήματος όπως φαίνεται στο Σχ.3.33. Παρατηρούμε από τα σχήματα 3.32 και 3.33 ότι η σύγκρουση των σολιτονίων απουσία και παρουσία γραμμικής σύζευξης έχει την ίδια δυναμική εξέλιξη. Ενώ, στην περίτωση παρουσίας αυτού του όρου, υπάρχει και μία επιπρόσθετη ανταλλαγή ατόμων μεταξύ των δύο συστατικών του συμπυκνώματος.

Σύγκρουση σολιτονίων παρουσία περιοδικά διαμορφωμένης μη γραμμικότητας

Μελετούμε την ίδια δυναμική μεταξύ των σολιτονίων για περιοδικά διαμορφωμένη μη γραμμικότητα όπως φαίνεται στα σχήματα 3.34 και 3.35 ; η ένταση της μαγνητικής παγίδας δίνεται από την Εξ. (3.115).

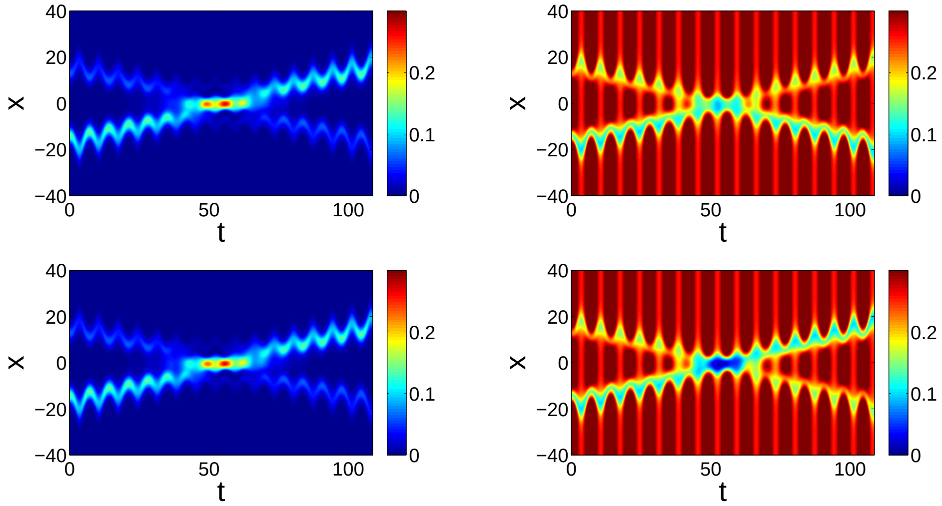


Σχήμα 3.33: Αλληλεπίδραση δύο διανυσματικών σολιτονικών λύσεων του μη αυτόνομου συστήματος όταν η μη γραμμικότητα έχει τη μορφή βηματικής συνάρτησης στο χρόνο, παρουσία γραμμικής σύζευξης. Οι πάνω εικόνες δείχνουν τις αναλυτικές μορφές τους (πάνω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και πάνω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό), ενώ οι κάτω εικόνες τα αριθμητικά αποτελέσματα (κάτω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και κάτω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό). Παραμετρικές τιμές: $k_1 = -1+i$, $k_2 = 1-i$, $c_1 = 3$, $b_1 = 0.2$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} = 0.03$, $\delta = -4.5$, $\xi_1 = 0.2$, $\xi_2 = 0$, $\omega = 0.75$ και $\sigma = 0.02$.

Ο ρόλος της χρονικά εξαρτημένης μη γραμμικότητας είναι να εισάγει στο σύστημα μία περιοδική διαχείριση πριν, μετά αλλά και κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης των σολιτονίων. Εν τω μεταξύ η γραμμική σύζευξη οδηγεί το σύστημα σε μία περιοδική μεταφορά ατόμων μεταξύ των συστατικών του μείγματος. 'Ετσι, όπως και στη βηματική μορφή της μη γραμμικότητας, γίνεται εφικτό στο ίδιο συστατικό να συνυπάρχουν οι λύσεις τόσο του φωτεινού όσο και του σκοτεινού σολιτονίου. Επίσης παρατηρούμε ότι τα σολιτόνια υπόκεινται σε ελαστικές συγκρούσεις τόσο στην απουσία όσο και στην παρουσία γραμμικής σύζευξης. Αυτό το παράδειγμα αποτελεί απόδειξη ότι η γραμμική σύζευξη δεν επηρεάζει την ελαστική φύση των αλληλεπιδράσεων των δύο συστατικών του μείγματος.

3.4 Σολιτόνια σε μείγματα γραμμικά συζευγμένων BEC τριών συστατικών

Χρησιμοποιώντας την ίδια ανάλυση, όπως στα μείγματα δύο συστατικών, θα προχωρήσουμε στην ανάλυση και εύρεση λύσεων σε μείγματα αποτελούμενα από τρία διαφορετικά συστατικά. Η δυναμική τους στη 1D, με ίσες χρονικά εξαρτημένες διατομικές αλληλεπιδράσεις (δηλαδή $g_{jl} = \rho(t)$, *j,l*=1,2,3), και παρουσία χρονικά μεταβαλλόμενου αρμονικού δυναμικού $V_j(x,t)(\equiv V)$, περιγράφεται από το ακόλουθο μη αυτόνομο σύστημα τριών συζευγμένων εξισώσεων GP (βλέπε, π.χ., [93]):



Σχήμα 3.34: Αλληλεπίδραση δύο διανυσματικών σολιτονικών λύσεων του μη αυτόνομου συστήματος όταν η μη γραμμικότητα έχει τη μορφή περιοδικής συνάρτησης στο χρόνο, απουσία γραμμικής σύζευξης. Οι πάνω εικόνες δείχνουν τις αναλυτικές μορφές τους (πάνω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και πάνω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό), ενώ οι κάτω εικόνες τα αριθμητικά αποτελέσματα (κάτω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και κάτω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό). Παραμετρικές τιμές: $k_1 = -1 + i$, $k_2 = 1 - i$, $b_1 = 0.2$, $c_1 = 2$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} = 0.02$, $\delta = 0$, $\xi_1 = 0.2$, $\xi_2 = 0$, και $\omega = 0.9$.

$$i\psi_{j,t} = -\frac{1}{2}\psi_{j,xx} + \rho(t)\sum_{l=1}^{3}|\psi_l|^2\psi_j + \sum_{l=1,(l\neq j)}^{3}\sigma_l\psi_l + V(x,t)\psi_j, \quad j = 1,2,3, \tag{3.120}$$

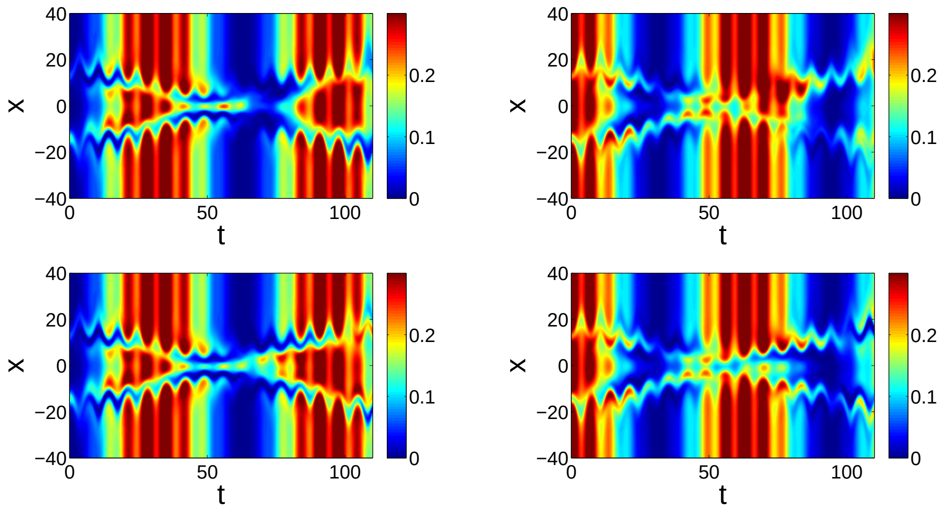
όπου $\psi_j(x,t)$ είναι οι κυματοσυναρτήσεις των συστατικών. Όπως προηγουμένως, οι συντελεστές σ_l αναφέρονται στην (γραμμική) σύζευξη Rabi και θεωρούνται ότι είναι ίσες (δηλαδή $\sigma_l \equiv \sigma$, l=1,2,3); επιπρόσθετα, η ένταση της μη γραμμικής σύζευξης περιγράφεται από τον όρο $\rho(t)$.

Ολοκληρώσιμο σύστημα

Όπως προηγουμένως, πρώτα θα αφαιρέσουμε τον όρο της γραμμικής σύζευξης, εφαρμόζοντας στην Εξ. (3.120) τον ακόλουθο μετασχηματισμό [78, 80]:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (2e^{i\sigma(t)} + e^{-2i\sigma(t)}) & (e^{-2i\sigma(t)} - e^{i\sigma(t)}) & (e^{-2i\sigma(t)} - e^{i\sigma(t)}) \\ (e^{-2i\sigma(t)} - e^{i\sigma(t)}) & (2e^{i\sigma(t)} + e^{-2i\sigma(t)}) & (e^{-2i\sigma(t)} - e^{i\sigma(t)}) \\ (e^{-2i\sigma(t)} - e^{i\sigma(t)}) & (e^{-2i\sigma(t)} - e^{i\sigma(t)}) & (2e^{i\sigma(t)} + e^{-2i\sigma(t)}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}. \tag{3.121}$$

Προκύπτει λοιπόν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:



Σχήμα 3.35: Αλληλεπίδραση δύο διανυσματικών σολιτονικών λύσεων του μη αυτόνομου συστήματος όταν η μη γραμμικότητα έχει τη μορφή περιοδικής συνάρτησης στο χρόνο, παρουσία γραμμικής σύζευξης. Οι πάνω εικόνες δείχνουν τις αναλυτικές μορφές τους (πάνω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και πάνω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό), ενώ οι κάτω εικόνες τα αριθμητικά αποτελέσματα (κάτω αριστερή εικόνα: ψ_1 συστατικό, και κάτω δεξιά εικόνα: ψ_2 συστατικό). Παραμετρικές τιμές: $k_1 = -1 + i$, $k_2 = 1 - i$, $b_1 = 0.2$, $c_1 = 2$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} = 0.02$, $\delta = 0$, $\xi_1 = 0.2$, $\xi_2 = 0$, $\omega = 0.9$ και $\sigma = 0.05$.

$$i\phi_{j,t} = -\frac{1}{2}\phi_{j,xx} + \left[\rho(t)\sum_{l=1}^{3}|\phi_l|^2 + V(x,t)\right]\phi_j, \quad j = 1,2,3. \tag{3.122}$$

Επιτρέπωντας στο *j* να παίρνει τιμές από 1 μέχρι 3 στην Εξ. (3.101), και εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό που προκύπτει στην ψ_j, *j*=1,2,3, το παραπάνω σύστημα εξισώσεων παίρνει τη μορφή:

$$iq_{j,T} + q_{j,XX} - 2\sum_{l=1}^{3}|q_l|^2 q_j = 0, \quad j = 1,2,3. \tag{3.123}$$

Σε αυτή τη περίπτωση πρέπει επίσης να ικανοποιείται η συνθήκη (3.106). Το παραπάνω σύστημα, Εξ. (3.123), αποτελεί ένα ολοκληρώσιμο σύστημα (αποτελεί το Manakov σύστημα για μείγμα τριών συστατικών) και οι λύσεις του μπορούν να εξαχθούν με πολλές μεθόδους, δηλ. με τη μέθοδο αντίστροφης σκέδασης, με τη μέθοδο Hirota κ.α.

3.4.1 Ακριβής λύση ενός φωτεινού-φωτεινού-σκοτεινού σολιτονίου

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη μέθοδο Hirota [**?**, 176], βρίσκουμε τις παρακάτω λύσεις των Εξ. (3.123), που αντιστοιχούν στην μορφή ενός φωτεινού-φωτεινού-σκοτεινού σολιτονίου:

$$q_j(X,T) = A_j\sqrt{|c_1|^2 cos^2\varphi_1 - k_{1R}^2}\,\text{sech}[k_{1R}(X-2k_{1I}T)+R/2]e^{i\eta_{1I}},\quad j=1,2, \quad (3.124)$$

$$q_3(X,T) = -c_1 e^{i(\zeta_1+\varphi_1)}\,(\text{cos}\varphi_1\text{tanh}[k_{1R}(X-2k_{1I}T)+R/2]+i\text{sin}\varphi_1), \quad (3.125)$$

όπου

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{k_{1I}-b_1}{k_{1R}}\right),\ A_j = \left(\frac{\alpha_1^{(j)}}{\sqrt{|\alpha_1^{(1)}|^2+|\alpha_1^{(2)}|^2}}\right),\quad j=1,2, \quad (3.126)$$

$$e^R = -\frac{\sum_{j=1}^{2}(\alpha_1^{(j)}\alpha_1^{(j)*})}{(k_1+k_1^*)^2}\left(1-\frac{|c_1|^2}{|k_1-ib_1|^2}\right)^{-1}. \quad (3.127)$$

Παρατηρείται ότι, στην παραπάνω έκφραση του διανυσματικού σολιτονίου, το φωτεινό κομμάτι της λύσης παρουσιάζεται στα συστατικά q_1 και q_2, ενώ το σκοτεινό στο συστατικό q_3. Η σολιτονική λύση (3.125) χαρακτηρίζεται από τρείς μιγαδικές παραμέτρους c_1, $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1^{(2)}$, και μία πραγματική παράμετρο b_1 ενώ μεταξύ τους πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη $|c_1|^2 > |k_1 - ib_1|^2$. Και σε αυτήν την περίπτωση, θεωρούμε δύο διαφορετικές μορφές της μη γραμμικότητας η οποία εξαρτάται από το χρόνο είτε με βηματικό είτε με περιοδικό τρόπο.

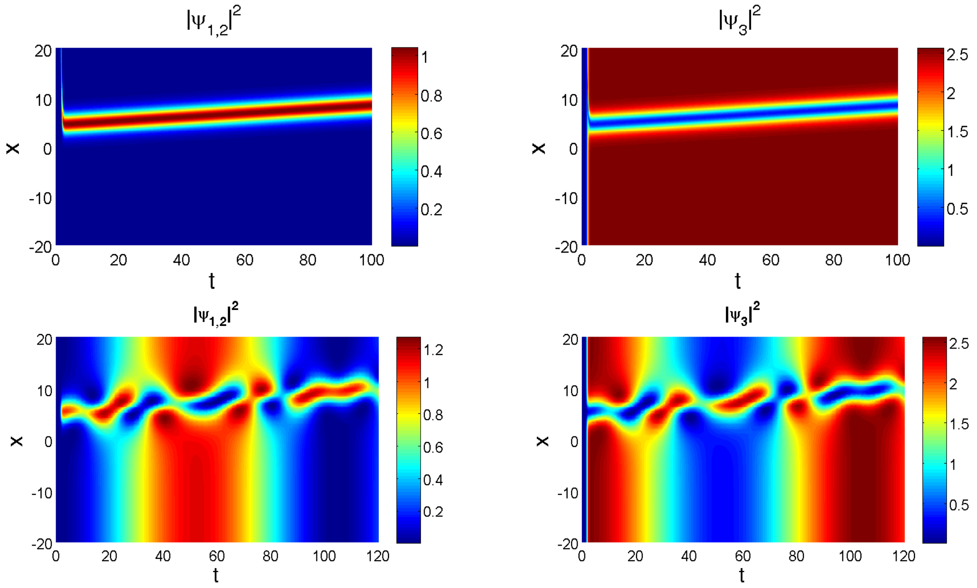
Βηματικά διαμορφωμένη μη γραμμικότητα

Το Σχ. 3.36 δείχνει το διανυσματικό σολιτόνιο του μη αυτόνομου συστήματος αποτελούμενου από τρείς εξισώσεις GP, Εξ. (3.120) με βηματική χρονική μεταβολή του μήκους σκέδασης. Σε αυτή τη περίπτωση, το σχήμα του σολιτονίου επηρεάζεται σημαντικά από την αύξηση της τιμής ω σε σύγκριση με το μη αυτόνομο σύστημα δύο εξισώσεων.

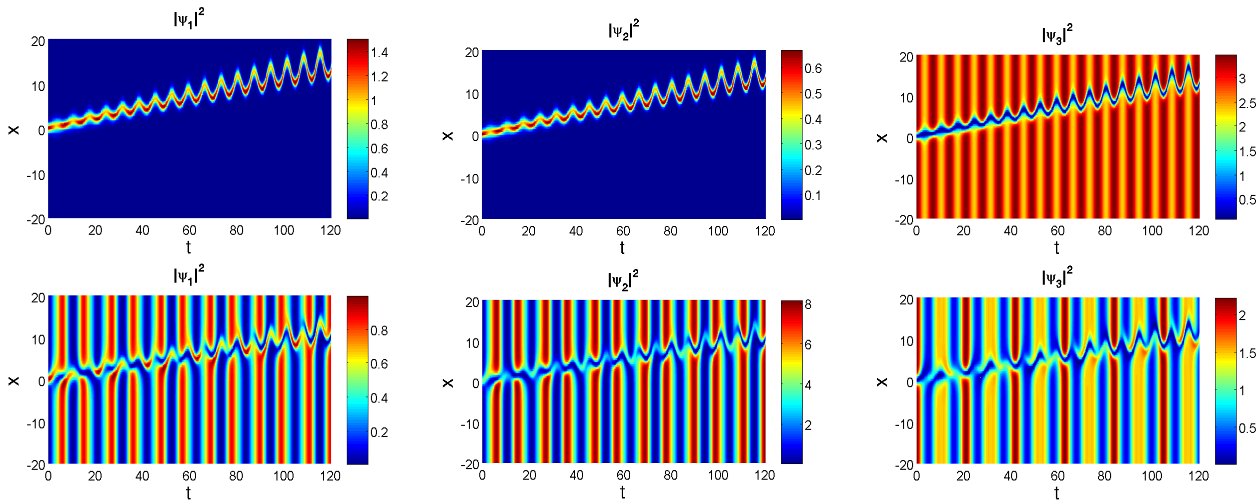
Επίσης, παρατηρούμε ότι συγκριτικά με τη περίπτωση του μείγματος δύο συστατικών οι ταλαντώσεις του υποβάθρου είναι πιο γρήγορες, για την ίδια τιμή της γραμμικής σύζευξης σ. Αυτό φαίνεται από τη σύγκριση των κάτω εικόνων από το Σχ. 3.36 και το Σχ. 3.25. Έτσι, προκύπτει ότι η αύξηση του αριθμού των ατόμων οδηγεί σε πιο γρήγορη μεταφορά ατόμων μεταξύ των συστατικών του μείγματος.

Περιοδικά διαμορφωμένη μη γραμμικότητα

Η δυναμική εξέλιξη της σολιτονικής λύσης του μη αυτόνομου συστήματος με χρονική εξάρτηση της μη γραμμικότητας σε μορφή περιοδικής συνάρτησης (που έχει τη μορφή συνάρτησης Mathieu, βλ. Εξ. (3.114)) φαίνεται στο Σχ. 3.37. Περιοδική μεταφορά των ατόμων μεταξύ των συστατικών παρατηρείται όπως και στην προηγούμενη περίπτωση λόγω της σύζευξης Rabi.



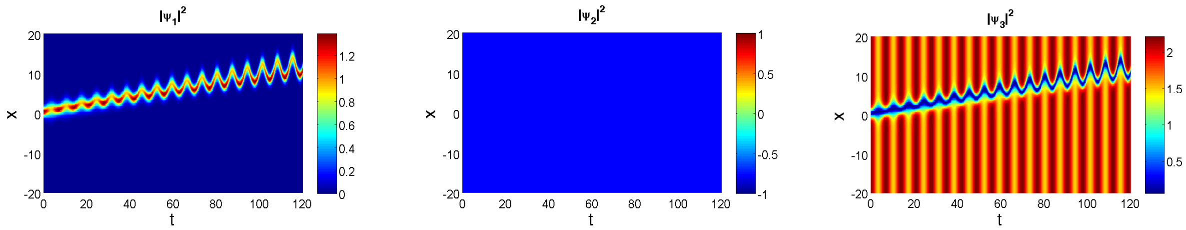
Σχήμα 3.36: Σολιτονική λύση για το μη αυτόνομο σύστημα αποτελούμενο από τρεις εξισώσεις GP της Εξ. (3.120) για τη περίπτωση βηματικής αλλαγής της μη γραμμικότητας. Οι πάνω και κάτω εικόνες δείχνουν το σολιτόνιο απουσία και παρουσία της γραμμικής σύζευξης αντίστοιχα. Οι παράμετροι παίρνουν τις τιμές: $k_1 = 0.5 + 0.02i$, $b_1 = 0.2$, $\alpha_1^{(1)} = 0.2$, $\alpha_1^{(2)} = 0.2$, $c_1 = 2$, $\delta = -5$, $\xi_1 = 0.4$, $\xi_2 = 0$, $\omega = 2.5$, και $\sigma = 0.02$.



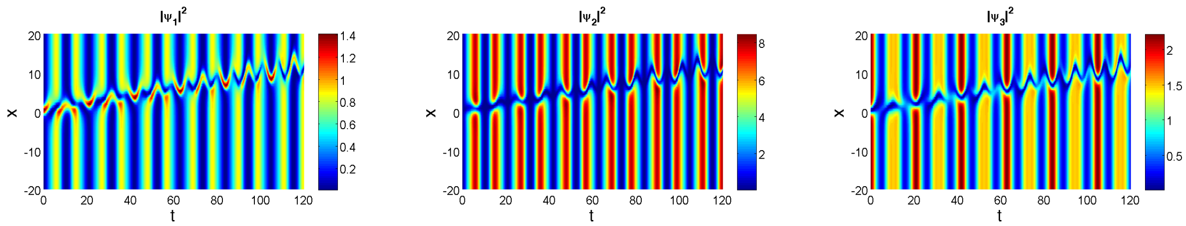
Σχήμα 3.37: Η λύση του μη αυτόνομου συστήματος τριων συζευγμένων GP εξισώσεων της Εξ. (3.32) για περιοδικά μεταβαλλόμενη μη γραμμικότητα απουσία γραμμικής σύζευξης (πάνω εικόνες: ψ_1, ψ_2, και ψ_3 συστατικά). Οι παράμετροι παίρνουν τις ακόλουθες τιμές: $k_1 = 0.7 + 0.1i$, $b_1 = 0.2$, $\alpha_1^{(1)} = 1.5$, $\alpha_1^{(2)} = 1$, $c_1 = 1$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\omega = 0.9$, $\delta = 0$ και $\sigma = 0.2$.

Τα παραπάνω δύο παραδείγματα δείχνουν ότι ο ρόλος της σύζευξης Rabi σε μείγμα BEC τριών συστατικών είναι παρόμοιος στην περίπτωση μείγματος αποτελούμενου από δύο συστατικά; εκτός από μία αύξηση του ρυθμού των ταλαντώσεων λόγω του επιπρόσθετου συστατικού. Στη συνέχεια όμως θα να δώσουμε έμφαση σε μία συγκεκριμένη δυναμική ιδιότητα του συστήματος τριών εξισώσεων, παρουσία γραμμικής σύζευξης η οποία δεν είναι εφικτή για συστήματα δύο εξισώσεων. Έτσι λοιπόν στην προηγούμενη περίπτωση δείξαμε ότι δεν γίνεται να μηδενιστεί η πυκνότητα κάποιου από τα σολιτόνια που απαρτίζουν τη διανυσματική λύση είτε απουσία είτε παρουσία της σύζευξης Rabi. Σε αντίθεση, στην περίπτωση τριών συστατικών, είναι εφικτό κάποιο από τα δύο φωτεινά σολιτόνια της λύσης να μηδενιστεί πριν την εμφάνιση του όρου που αφορά τη μη γραμμική σύζευξη. Το τρίτο συστατικό εισάγει στο σύστημα μία ακόμα ανεξάρτητη παράμετρο στο μη αυτόνομο σύστημα των GP εξισώσεων (3.120), η οποία επιτρέπει την παραπάνω ενέργεια. Ο ρόλος της γραμμικής σύζευξης είναι να μπορούν και τα τρία συστατικά να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Έτσι με τη παρουσία αυτού του όρου, μπορεί αριθμός ατόμων να μεταφερθεί στο συστατικό του οποίου προηγουμένως είχε μηδενιστεί η πυκνότητα.

Ως συμπέρασμα εξάγεται ότι στα μείγματα τριών συστατικών μπορεί να μεταφερθεί αριθμός ατόμων στο συστατικό το οποίο εμφάνιζε μηδενικό αριθμό ατόμων πριν τη γραμμική σύζευξη. Αυτό φαίνεται στα σχήματα 3.38 και 3.39, στα οποία το ένα συστατικό είναι απών όπως φαίνεται από το Σχ. 3.38, αλλά μετά την εμφάνιση της γραμμικής σύζευξης ένα μεγάλο τμήμα φαίνεται ότι απαρτίζει το συγκεκριμένο συστατικό, όπως φαίνεται και στο Σχ. 3.39.



Σχήμα 3.38: Λύση σολιτονίου σε μέιγμα τριών συστατικών με περιοδικά μεταβαλλόμενη μη γραμμικότητα στο χρόνο και απουσία σύζευξης Rabi. Οι τιμές των παραμέτρων είναι οι εξής: $k_1 = 0.5 + 0.01i$, $b_1 = 0.2$, $\alpha_1^{(1)} = 1$, $\alpha_1^{(2)} = 0$, $\xi_1 = 1$, $c_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, και $\omega = 0.8$.



Σχήμα 3.39: Λύση σολιτονίου σε μέιγμα τριών συστατικών με περιοδικά μεταβαλλόμενη μη γραμμικότητα στο χρόνο και παρουσία σύζευξης Rabi. Οι τιμές των παραμέτρων είναι οι εξής: $k_1 = 0.5 + 0.01i$, $b_1 = 0.2$, $\alpha_1^{(1)} = 1$, $\alpha_1^{(2)} = 0$, $c_1 = 1$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\omega = 0.8$, και $\sigma = 0.02$.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα-Προοπτικές

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα που προσφέρεται από τη φυσική των BECs, είναι ότι σε αυτά μπορεί να διαμορφωθεί πειραματικά η μη γραμμικότητα καθώς και το εξωτερικό δυναμικό τόσο χωρικά όσο και χρονικά, κάνοντας τα εύκολα διαχειρίσιμα, κάτι που καθιστά δυνατή ακόμα και τη ``γένεση'' διαφορετικών τύπων υλικών κυμάτων. Γι'αυτό το λόγο έχουν προσελκύσει το πειραματικό και θεωρητικό ενδιαφέρον όχι μόνο στην κοινότητα της ατομικής και μοριακής φυσικής, αλλά και πολλών άλλων περιοχών της φυσικής, όπως η μη Γραμμική Οπτική.

Η παρούσα διατριβή συνεισφέρει στη θεωρητική κατανόηση της δυναμικής των μη γραμμικών διεγέρσεων ενός BEC ενός συστατικού που παρουσιάζει χωρική ή χρονική ανομοιογένεια, αλλά και ενός BEC αποτελούμενου από δύο και τρία συστατικά. Η διατριβή συνεισφέρει στη βαθύτερη κατανόηση των συστημάτων αυτών, απαντώντας σε μια σειρά από ερωτήματα / θέματα που δεν είχαν αντιμετωπιστεί προηγουμένως στη σχετική βιβλιογραφία. Έτσι προσφέρει μια ολοκληρωμένη θεωρητική περιγραφή των σολιτονίων που μπορούν να υποστηριχθούν στα προαναφερθέντα συστήματα. Ιδιαίτερα, η διατριβή:

- *προβλέπει και υποδεικνύει μηχανισμούς γένεσης σολιτονικών δομών σε BEC ενός ή περισσοτέρων συστατικών*

  Πιο συγκεκριμένα, στη περίπτωση BEC ενός συστατικού δείχτηκε ότι η πρόσπτωση ενός Γκαουσσιανού κυματοπακέτου σε περιοχή του χώρου όπου οι διατομικές αλληλεπιδράσεις είναι ελκτικές (με το εξωτερικό δυναμικό να παραμένει σταθερό) αποτελεί μια αποδοτική διαδικασία παραγωγής υλικών κυμάτων σολιτονίων: βρίσκεται ότι το μεταδιδόμενο υλικό κύμα αυτοοργανώνεται σε ένα τραίνο φωτεινών σολιτονίων, με χαρακτηριστικά (λ.χ. αριθμό και μέγεθος σολιτονίων) που είναι ελέγξιμα από την αρχική μορφή του κυματοπακέτου και τις παραμέτρους της διάταξης.

  Στη περίπτωση μειγμάτων BEC όπου μελετήθηκε η σύγκρουση δύο ατομικών συμπυκνωμάτων Bose-Einstein με πολύ διαφορετικούς αριθμούς ατόμων προβλέφθηκαν τα εξής διαφορετικά φαινόμενα. Για ένα διάστημα ταχυτήτων του μικρού συμπυκνώματος η σύγκρουση έχει ως αποτέλεσμα την αυτοοργάνωση του μικρού συμπυκνώματος σε ένα φωτεινό σολιτόνιο, που με τη σειρά του «επάγει» τη γένεση ενός σκοτεινού σολιτονίου στο μεγάλο συμπύκνωμα δημιουργώντας έτσι τη γένεση διανυσματικών ζευγων DB σολιτονίων. Ενώ για περιπτώσεις όπου το μικρό συμπύκνωμα διαδίδεται στο μεγάλο συμπύκνωμα με οιωνεί-υπερηχητική ταχύτητα, παρατηρείται η κατάρρευση της υπερρευστότητας του μεγάλου συμπυκνώματος, που διαπιστώνεται με τη γένεση μη γραμμικών διεγέρσεων στη μορφή σκοτεινών σολιτονίων.

Τέλος σε μείγματα γραμμικά συζευγμένων BEC δύο και τριών συστατικών, όπου το παραβολικό δυναμικό και οι διατομικές αλληλεπιδράσεις είναι κατάλληλα χρονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη παρατηρήθηκε η γένεση διαφόρων συνδυασμών διανυσματικών σολιτονίων.

- *περιγράφει αναλυτικά τη δυναμική και τις αλληλεπιδράσεις υλικών κυμάτων σολιτονίων μέσω αναλυτικών τεχνικών, όπως και την ευστάθεια τους, μέσω αριθμητικών τεχνικών με επίλυση των εξισώσεων Bogoliubov-de Gennes*

  Πιο συγκεκριμένα μελετάται συστηματικά η σκέδαση σολιτονίων σε βηματικές ασυνέχειες στο δυναμικό ή/και στο μήκος σκέδασης (που καθορίζει το μέγεθος των διατομικών αλληλεπιδράσεων. Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αναπτύσσεται μια αδιαβατική θεωρία διαταραχών, η οποία χειρίζεται το σολιτόνιο ως κλασσικό νευτώνειο σωματίδιο: έτσι, αποδεικνύεται ότι η δυναμική του κέντρου του σολιτονίου διέπεται από μια εξίσωση κίνησης, ανάλογη με αυτή ενός σωματιδίου παρουσία ενός φαινομενικού δυναμικού που παίρνει είτε την μορφή υπερβολικής εφαπτομένης, είτε πιο σύνθετες μορφές, οι οποίες παρουσιάζουν τοπικά ακρότατα - δηλ. ένα υπερβολικό και ένα ελλειπτικό σημείο ισορροπίας στο αντίστοιχο δυναμικό σύστημα. Βρίσκεται ότι το σολιτόνιο μπορεί να παγιδευτεί για πεπερασμένο και πειραματικά παρατηρήσιμο χρόνο στο υπερβολικό σημείο.

  Η εν λόγω αναλυτική προσέγγιση συγκρίνεται, εν συνεχεία, με συστηματικές αριθμητικές προσομοιώσεις στο πλαίσιο της εξίσωσης GP. Βρίσκεται ότι η σωματιδιακή περιγραφή περιγράφει με πολύ καλή ακρίβεια τις απαιτούμενες συνθήκες ώστε το σολιτόνιο να παρουσιάζει ανάκλαση, μετάδοση ή οιονεί-παγίδευση στη γραμμική ή/και μη γραμμική ασυνέχεια, τουλάχιστον για μικρές τέτοιες ασυνέχειες. Για μεγαλύτερες ασυνέχειες, το σκεδαζόμενο σολιτόνιο εκπέμπει ακτινοβολία στη μορφή «ηχητικών» κυμάτων που υπολογίζεται αριθμητικά, ενώ η δυναμική της σκέδασης χαρακτηρίζεται από μερική ανάκλαση/μετάδοση στην ασυνέχεια.

  Βρίσκεται επίσης ότι μερική ανάκλαση παρατηρείται και στην περίπτωση όπου το μήκος σκέδασης αλλάζει επιπρόσθετα και πρόσημο. Σε αυτό το πλαίσιο, μελετήθηκε η πρόσπτωση ενός φωτεινού σολιτονίου από περιοχή του χώρου με ελκτικές διατομικές αλληλεπιδράσεις σε περιοχή του χώρου όπου οι διατομικές αλληλεπιδράσεις είναι απωστικές (όπου υποστηρίζονται μόνο λύσεις σκοτεινών σολιτονίων). Η περιγραφή της κίνησης του σολιτονίου πραγματοποιήθηκε τόσο για αρχικά μικρό πλάτος (γραμμικό όριο) όσο και για μεγάλο πλάτος, χρησιμοποιώντας τη θεωρία διαταραχών για τα σολιτόνια. Με την εφαρμογή των αναλυτικών τεχνικών, βρέθηκε η ταχύτητα που χρειάζεται το υλικό κύμα για την ολική ανάκλαση του, και στα δύο όρια του μικρού και του μεγάλου πλάτους.

Για την αναλυτικά περιγραφή των διανυσματικών DB σολλιτονίων που προβλέφθηκαν μετά τη σύγκρουση δύο ατομικών συμπυκνωμάτων Bose-Einstein με πολύ διαφορετικούς αριθμούς ατόμων, αναπτύσσεται μια θεωρία διαταραχών πολλαπλών κλιμάκων, μέσω της οποίας το αρχικό σύστημα των δύο εξισώσεων GP ανάγεται στο ολοκληρώσιμο σύστημα Mel'nikov. Από το τελευταίο εξάγονται αναλυτικά οι λύσεις σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου, του οποίου η δυναμική βρίσκεται σε πολύ καλή συμφωνία με αριθμητικά αποτελέσματα.

Περαιτέρω μέθοδοι διαταραχών αναπτύχθηκαν για την αναλυτική περιγραφή των λύσεων σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων σε μείγματα αποτελούμενα όχι μόνο από δύο αλλά και περισσότερα συμπυκνώματα. Έτσι το αρχικό μη αυτόνομο συστήμα εξισώσεων GP με κατάλληλο μετασχηματισμό των συντεταγμένων και των κυματοσυναρτήσεων, ανάγεται στο ολοκληρώσιμο σύστημα Manakov, μέσω του οποίου εξάγονται ακριβείς αναλυτικές λύσεις.

- *προτείνει τρόπους διαχείρισης της δυναμικής τους και των ιδιοτήτων σκέδασής τους μέσω κατάλληλης - χωρικής ή χρονικής - διαμόρφωσης των φυσικών παραμέτρων (μήκος σκέδασης, συχνότητα του παραβολικού εξωτερικού δυναμικού, σύζευξη Rabi, κοκ)*

  Προτείνεται μια μέθοδος για τον έλεγχο των σολιτονίων σε μείγματα γραμμικά συζευγμένων BEC δύο και τριών συστατικών, που βασίζεται στη χρήση χρονικά-μεταβαλλόμενων μαγνητικών πεδίων. Αυτά, καθιστούν το παραβολικό δυναμικό, τις διατομικές αλληλεπιδράσεις και τη γραμμική σύζευξη (Rabi) που υπεισέρχονται στις εξισώσεις GP κατάλληλα χρονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη.

  Στο εν λόγω πρόβλημα, δίνεται έμφαση στη μελέτη των αλληλεπιδράσεων μεταξύ διαφορετικών σολιτονίων, τόσο στην περίπτωση δύο όσο και στην περίπτωση τριών συζευγμένων συμπυκνωμάτων. Ένα σημαντικό εύρημα στην τελευταία περίπτωση είναι η δυνατότητα μετατροπής ενός σολιτονίου από φωτεινό σε σκοτεινό, στο ίδιο συμπύκνωμα, και αντίστροφα (δηλαδή η μετατροπή από σκοτεινό σε φωτεινό). Το φαινόμενο αυτό μπορεί να βρεί εφαρμογές στο σχεδιασμό στοιχείων για επεξεργασία πληροφορίας, αφού κατάλληλη χωρική/χρονική μεταβολή των χαρακτηριστικών του συμπυκνώματος (τιμές των μηκών σκέδασης, συχνοτήτων παγίδευσης, και γραμμικής σύζευξης) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εφαρμογές μεταγωγής (switching).

- *επεκτείνει την αδιαβατική θεωρία διαταραχών για τη περιγραφή της δυναμικής ενός αλλά και πολλαπλών σολιτονίων με αυθαίρετες τιμές των μηκών σκέδασης, γεγονός που συνεισφέρει στην αποδοτική σύνδεση της θεωρίας με πειραματικές παρατηρήσεις*

Μελετήθηκαν οι στατικές λύσεις ενός και πολλαπλών ζευγών σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων – με τις τελευταίες να αποτελούν «πλέγματα» φωτεινών-σκοτεινών σολιτονίων – σε μείγματα δύο συμπυκνωμάτων Bose-Einstein, με γενικά διαφορετικούς συντελεστές διατομικών αλληλεπιδράσεων. Σημειώνεται ότι ενώ στην πράξη αυτοί οι συντελεστές είναι διαφορετικοί (όπως, λ.χ., στο μείγμα διαφορετικών καταστάσεων σπιν του BEC ^{87}Rb που χρησιμοποιείται εκτενώς σε πειράματα), συνήθως χρησιμοποιείται η προσέγγιση ότι είναι ίσοι. Έτσι, το θεωρούμενο πρόβλημα είναι σημαντικό, αφού συνδέεται άμεσα με πειραματικά δεδομένα, όπου έχουν παρατηρηθεί ένα αλλά και πολλαπλά σολιτόνια στο πείραμα. Η ανάλυση δείχνει ότι, για συγκεκριμένο εύρος τιμών των συντελεστών που προσδιορίζουν τις ανωτέρω αλληλεπιδράσεις, οι προαναφερθείσες λύσεις υπάρχουν και μπορούν να βρεθούν σε κλειστή αναλυτική μορφή, ενώ αριθμητικές προσομοιώσεις επιβεβαιώνουν την ύπαρξη και την ευστάθειά τους για ακόμα μεγαλύτερο εύρος τιμών των συντελεστών των διατομικών αλληλεπιδράσεων.

Η έρευνα αυτή είναι σημαντική τόσο από θεωρητικής πλευράς όσο και από την πλευρά των εφαρμογών. Από τη θεωρητική σκοπιά, τα BEC και οι μη γραμμικές διεγέρσεις τους (όπως τα υλικά κύματα σολιτονίων) αποτελούν ένα πρότυπο σύστημα για τη μελέτη συμφώνων (coherent) κβαντικών καταστάσεων σε μακροσκοπικές κλίμακες. Από την άλλη πλευρά, τα BEC και τα υλικά κύματα σολιτονίων μπορούν να βρουν εφαρμογές στη σχεδίαση και υλοποίηση στοιχείων για όργανα μέτρησης υψηλής ακριβείας (όπως, λ.χ., συμβολομέτρων), καθώς και στοιχείων για εφαρμογές κβαντικής πληροφορικής.

Επιπλέον, η διατριβή -- πέραν της συνεισφοράς της στη φυσική των BEC -- συνεισφέρει γενικότερα στη θεωρία των σολιτονίων σε συζευγμένα συστήματα, που απαντώνται και σε άλλους κλάδους της φυσικής, όπως στη Μη Γραμμική Οπτική. Στην περιοχή αυτή, η μαθηματική μοντελοποίηση της δυναμικής οπτικών δεσμών σε διηλεκτρικά υλικά και σε συστοιχίες διηλεκτρικών κυματοδηγών που παρουσιάζουν διαφορετικούς δείκτες διάθλασης οδηγεί σε εξισώσεις διάδοσης των οπτικών δεσμών ανάλογες με τις εξισώσεις Gross-Pitaevskii που αναλύθηκαν στην παρούσα διατριβή. Έτσι, τα αποτελέσματα της διατριβής παρουσιάζουν και ένα διεπιστημονικό χαρακτήρα.

Η μεθοδολογία και τα αποτελέσματά μας θέτουν μια σειρά από ενδιαφέρουσες ερωτήσεις για μελλοντικές μελέτες. Αρχικά, στα συμπυκνώματα απότελλούμενα από ένα συστατικό μία προοπτική είναι να μελετηθεί η συμπεριφορά υλικών κυμάτων σε περιβάλλοντα όπου η μη γραμμικότητα ή/και το δυναμικό μεταβάλλονται χρονικά. Τέτοια μοντέλα θα είχαν χρησιμότητα στη περιγραφή θεμελιωδών φαινομένων της φυσικής όπως είναι η ακτινοβολία Hawking και η κατάρρευση της υπερρευστότητας. Επίσης η επέκταση της ανάλυσης μας σε μοντέλα μεγάλυτερης διαστατικότητας για συμπυκνώματα ενός αλλά και περισσότερων συστατικών θα αποτελούσε επίσης μια πρόκληση; πρώτον γιατί θα μπορούσαν να μελετηθούν φαινόμενα τα οποία δεν παρατηρούνται στη μία διάσταση καθώς και να πραγματοποιηθεί ανάλογη μελέτη που αφορά στροβιλούς.

Βιβλιογραφία

[1] S. N. Bose, Z.Physik **26**, 178 (1924).

[2] A. Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. **1**, 3 (1925).

[3] S. Chu, Rev. Mod. Phys. **70**, 685 (1998).

[4] C. N. Cohen-Tannoudji, Rev. Mod. Phys. **70**, 707 (1998).

[5] W. D. Phillips, Rev. Mod. Phys. **70**, 721 (1998).

[6] M. H. J. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).

[7] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).

[8] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).

[9] T. Lahaye, T. Koch, B. Fröhlich, M. Fattori, J. Metz, A. Griesmaier, S. Giovanazzi, and T. Pfau, Nature **448**, 672 (2007).

[10] Q. Beaufils, R. Chicireanu, T. Zanon, B. Laburthe-Tolra, E. Maréchal, L. Vernac, J.-C. Keller, and O. Gorceix, Phys. Rev. A **77**, 061601(R) (2008).

[11] M. Lu, N. Q. Burdick, S. H. Youn, and B. L. Lev, Phys. Rev. Lett. **107**, 190401 (2011).

[12] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein, and T. Pfau, Rep. Prog. Phys. **72**, 126401 (2009).

[13] C. J. Pethick, and H. Smith, *Bose-Einstein condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).

[14] L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press, Oxford (2003).

[15] L. P. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **40**, 646 (1961) [Sov. Phys. JETP, **13**, 451 (1961)]; E. P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).

[16] C. Sulem, P. L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation* (Springer, Berlin Heidelberg New York, 1999).

[17] Yu. S. Kivshar, G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (Academic, New York, 2003).

[18] J. Weiner, *Cold and Ultracold Collisions in Quantum Microscopic and Meso- scopic Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).

[19] S. Inouye M. R. Andrews, J. Stenger, H. J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle, Nature **392**, 151 (1998).

[20] J. Stenger, S. Inouye, M.R. Andrews, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **82**, 2422 (1999).

[21] J.L. Roberts, N.R. Claussen, J.P. Burke, Jr., C.H. Greene, E.A. Cornell, C.E. Wieman , Phys. Rev. Lett. **81**, 5109 (1998).

[22] S.L. Cornish, N.R. Claussen, J.L. Roberts, E.A. Cornell, C.E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **85**, 1795 (2000).

[23] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).

[24] T. Bergeman, M. G. Moore, M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **91**, 163201 (2003).

[25] M. Theis, G. Thalhammer, K. Winkler, M. Hellwig, G. Ruff, R. Grimm, J. H. Denschlag, Phys. Rev. Lett. **93**, 123001 (2004).

[26] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, R. G. Hulet, Nature **417** 150 (2002).

[27] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, C. Salomon, Science, **296** 1290 (2002).

[28] S. L. Cornish, S. T. Thompson, C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **96**, 170401 (2006).

[29] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, R. G. Hulet, New J. Phys. **5**, 73 (2003).

[30] J. Herbig, T. Kraemer, M. Mark, T. Weber, C. Chin, H. C. Nagerl, R. Grimm, Science **301**, 1510 (2003).

[31] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, D. S. Jin, Nature **424**, 47 (2003).

[32] M. Greiner, C. A. Regal, D. S. Jin, Nature **426**, 537 (2003).

[33] K. Henderson, C. Ryu, C. MacCormick, and M. G. Boshier, New J. Phys. **11**, 043030 (2009).

[34] N. R. Cooper, Phys. Rev. Lett. **106**, 175301 (2011).

[35] R. Yamazaki, S. Taie, S. Sugawa, and Y. Takahashi, Phys. Rev. Lett. **105**, 050405 (2010).

[36] G. Theocharis, P. Schmelcher, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Rev. A **72**, 033614 (2005).

[37] G. Theocharis, P. Schmelcher, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Rev. A **74**, 053614 (2006).

[38] F. Kh. Abdullaev and M. Salerno, J. Phys. B **36**, 2851 (2003).

[39] M. I. Rodas-Verde, H. Michinel, and V. M. Pérez-García, Phys. Rev. Lett. **95**, 153903 (2005).

[40] H. Sakaguchi and B. A. Malomed, Phys. Rev. E **72**, 046610 (2005).

[41] P. Niarchou, G. Theocharis, P. G. Kevrekidis, P. Schmelcher, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Rev. A **76**, 023615 (2007).

[42] J. Garnier and F. Kh. Abdullaev, Phys. Rev. A **74**, 013604 (2006).

[43] C. Wang, P. G. Kevrekidis, T. P. Horikis, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Lett. A **374**, 3863 (2010).

[44] F. Pinsker, N. G. Berloff, and V. M. Pérez-García, Phys. Rev. A **87**, 053624 (2013).

[45] A. Balaz, R. Paun, A. I. Nicolin, S. Balasubramanian, and R. Ramaswamy, Phys. Rev. A **89**, 023609 (2014).

[46] M. Centurion, M. A. Porter, P. G. Kevrekidis, and D. Psaltis, Phys. Rev. Lett. **97**, 033903 (2006).

[47] M. Centurion, M. A. Porter, Y. Pu, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and D. Psaltis, Phys. Rev. Lett. **97**, 234101 (2006).

[48] E. A. Cornell, C. E. Wieman, Rev. Mod. Phys. **74**, 875 (2002).

[49] W. Ketterle, Rev. Mod. Phys. **74**, 1131 (2002).

[50] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).

[51] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H. J. Miesner, J. Stenger, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **80**, 2027 (1998).

[52] J. Weiner, V.S. Bagnato, S. Zilio, P. S. Julienne, Rev. Mod. Phys. **71**, 1 (1999).

[53] R. Grimm, M. Weidemüller, Y. B. Ovchinnikov, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42**, 95 (2000).

[54] M. D. Barrett, J. A. Sauer, M. S. Chapman, Phys. Rev. Lett. **87**, 010404 (2001).

[55] P. S. Jessen, C. Gerz, P. D. Lett, W. D. Phillips, S. L. Rolston, R. J. C. Spreeuw, C. I. Westbrook, Phys. Rev. Lett. **69**, 49 (1992).

[56] P. Verkerk, B. Lounis, C. Salomon, C. Cohen-Tanoudji, J. Y. Courtois, G. Grynberg, Phys. Rev. Lett. **68**, 3861 (1992).

[57] B. P. Anderson, T. I. Gustavson, M. I. Kasevich, Phys. Rev. A **53**, R3727 (1996).

[58] O. Morsch, M. K. Oberthaler, Rev. Mod. Phys. **78**, 179 (2006).

[59] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. -J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, Science **275**, 637 (1999).

[60] M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani, M. K. Oberthaler, Phys. Rev. Lett. **95**, 010402 (2005).

[61] B. P. Anderson, M. A. Kasevich, Science **282**, 1686 (1998).

[62] W. Hänsel, P. Hommelhoff, T. W. Hänsch, J. Reichel, Nature (London) **413**, 501 (2001).

[63] H. Ott, J. Fortagh, G. Schlotterbeck, A. Grossmann, C. Zimmermann, Phys. Rev. Lett. **87**, 230401 (2001).

[64] R. Folman, J. Schmiedmayer, Nature **413**, 466 (2001).

[65] R. Folman, P. Krueger, J. Schmiedmayer, J. Denschlag, C. Henkel, Adv. Atom. Mol. Opt. Phys. **48**, 263 (2002).

[66] P. Engels, C. Atherton, and M. A. Hoefer, Phys. Rev. Lett. **98**, 095301 (2007).

[67] H. Abe, T. Ueda, M. Morikawa, Y. Saitoh, R. Nomura, and Y. Okuda, Phys. Rev. E **76**, 046305 (2007).

[68] T. Ueda, H. Abe, Y. Saitoh, R. Nomura, and Y. Okuda, J. Low Temp. Phys. **148**, 553 (2007).

[69] B. B. Baizakov, G. Filatrella, B. A. Malomed, and M. Salerno, Phys. Rev. E **71**, 036619 (2005).

[70] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H. -J. Miesner, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, Nature **396**, 345 (1998).

[71] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H. -J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **80**, 2027 (1998).

[72] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **78**, 586 (1997).

[73] D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **81**, 1539 (1998).

[74] G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **89**, 190404 (2002).

[75] G. D. Telles, A. R. L. Caires, V.S. Bagnato, L. G. Marcassa, Phys. Rev. Lett. **92**, 133203 (2004).

[76] S. B. Papp, C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **97**, 180404 (2006).

[77] R. J. Ballagh, K. Burnett, T. F. Scott, Phys. Rev. Lett. **78**, 1607 (1997).

[78] B. Deconinck, P. G. Kevrekidis, H. E. Nistazakis, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Rev. A **70**, 063605 (2004).

[79] I. M. Merhasin, B. A. Malomed, and R. Driben, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **38**, 877 (2005).

[80] H. E. Nistazakis, Z. Rapti, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis, P. Sodano, and A. Trombettoni, Phys. Rev. A **78**, 023635 (2008).

[81] J. Scott. Russel, *Report of 14th Meeting of the British Association for Advancement of Science*, York, September, pp. 311 (1844).

[82] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, Science **296**, 1290 (2002).

[83] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Slyapnikov, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).

[84] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, C. W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, and W. D. Phillips, Science **287**, 97 (2000).

[85] K. Bongs, S. Burger, S. Dettmer, D. Hellweg, J. Arlt, W. Ertmer, and K. Sengstock, C. R. Acad. Sci. Paris **2**, 671 (2001).

[86] C. Becker, S. Stellmer, P. Soltan-Panahi, S. Dörscher, M. Baumert, E. -M. Richter, J. Kronjäger, K. Bongs, and K. Sengstock, Nature Phys. **4** 496 (2008).

[87] S. Stellmer, C. Becker, P. Soltan-Panahi, E. -M. Richter, S. Dörscher, M. Baumert, J. Kronjäger, K. Bongs, and K. Sengstock, Phys. Rev. Lett. **101**, 120406 (2008).

[88] Z. Dutton, M. Budde, C. Slowe, and L. V. Hau, Science **293**, 663 (2001).

[89] N. J. Ginsberg, J. Brand, and L. V. Hau, Phys. Rev. Lett. **94**, 040403 (2005).

[90] J. J. Chang, P. Engels, and M. A. Hoefer, Phys. Rev. Lett. **101**, 170404 (2008).

[91] B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. A. Regal, D. L. Feder, L. A. Collins, C. W. Clark, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **86**, 2926 (2001).

[92] P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González (eds.), *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates: Theory and Experiment* Springer-Verlag, Heidelberg (2008).

[93] R. Carretero-González, D. J. Frantzeskakis, and P. G. Kevrekidis, Nonlinearity **21**, R139 (2008).

[94] J. Anglin, Nature Phys. **4**, 437 (2008).

[95] A. Negretti, and C. Henkel, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, 385 (2004).

[96] A. Negretti, C. Henkel, and K. Molmer, Phys. Rev. A **78**, 023630 (2008).

[97] G. -B. Jo, J. -H Choi, C. A. Christensen, T. A. Pasquini, Y. -R. Lee, W. Ketterle, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **98**, 180401 (2007).

[98] R. G. Scott, T. E. Judd, and T. M. Fromhold, Phys. Rev. Lett. **100**, 100402 (2008).

[99] Y. Shin, M. Saba, T. A. Pasquini, W. Ketterle, D. E. Pritchard, and A. E. Leanhardt, Phys. Rev. Lett. **92**, 050405 (2004).

[100] T. Schumm, S. Hofferberth, L. M. Andersson, S. Wildermuth, S. Groth, I. Bar-Joseph, J. Schmiedmayer, and P. Krüger, Nature Physics **1**, 57 (2005).

[101] Y. -J. Wang, D. Z. Anderson, V. M. Bright, E. A. Cornell, Q. Diot, T. Kishimoto, M. Prentiss, R. A. Saravanan, S. R. Segal, and S. Wu, Phys. Rev. Lett. **94**, 090405 (2005).

[102] M. Fattori, C. Dérrico, G. Roati, M. Zaccanti, M. Jona-Lasinio, M. Modugno, M. Inguscio, and G. Modugno, Phys. Rev. Lett. **100**, 080405 (2008).

[103] F. Baumgärtner, R. J. Sewell, S. Eriksson, I. Llorente-Garcia, Jos Dingjan, J. P. Cotter, and E. A. Hinds, Phys. Rev. Lett. **105**, 243003 (2010).

[104] M. I. Rodas-Verde, H. Michinel, V. M. Pérez-Garcia, Phys. Rev. A **74**, 013619 (2006).

[105] A. V. Carpentier, H. Michinel, M. I. Rodas-Verde, and V. M. Pérez-Garcia, Phys. Rev. A **74**, 013619 (2006).

[106] P. Y. P. Chen, and B. A. Malomed, J. Phys. B **38**, 4221 (2005).

[107] D. Poletti, T. J. Alexander, E. A. Ostrovskaya, B. Li, and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. Lett. **101**, 150403 (2008).

[108] V. Ahufinger, A. Mebrahtu, R. Corbalán, and A. Sanpera, New J. Phys. **9**, 4 (2007).

[109] S. L. Rolston and W. D. Phillips, Nature **416**, 219 (2002).

[110] Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (Academic Press, New York, 2003).

[111] G. Theocharis, P. Schmelcher, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Rev. A **72**, 033614 (2005).

[112] S. Middelkamp, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis and P. Schmelcher, Phys. Lett. A **373**, 262–268 (2009).

[113] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, Science **296**, 1290 (2002).

[114] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, New J. Phys. **5**, 73 (2003).

[115] A. L. Marchant, T. P. Billam, T. P. Wiles, M. M. H. Yu, S. A. Gardiner, and L. Cornish, Nature Communications **4**, 1865 (2013).

[116] F. Kh. Abdullaev, J. G. Caputo, R. A. Kraenkel, and B. A. Malomed, Phys. Rev. A **67**, 013605 (2003).

[117] H. Saito and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **90**, 040403 (2003).

[118] P. G. Kevrekidis, G. Theocharis, D. J. Frantzeskakis, and B. A. Malomed, Phys. Rev. Lett. **90**, 230401 (2003).

[119] D. E. Pelinovsky, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Rev. Lett. **91**, 240201 (2003).

[120] D. E. Pelinovsky, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and V. Zharnitsky, Phys. Rev. E **70**, 047604 (2004).

[121] Z. X. Liang, Z. D. Zhang, and W. M. Liu, Phys. Rev. Lett. **94**, 050402 (2005).

[122] M. Matuszewski, E. Infeld, B. A. Malomed, and M. Trippenbach, Phys. Rev. Lett. **95**, 050403 (2005).

[123] Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, Rev. Mod. Phys. **83**, 247 (2011).

[124] M. I. Rodas-Verde, H. Michinel, and V. M. Pérez-García, Phys. Rev. Lett. **95**, 153903 (2005).

[125] A. V. Carpentier, H. Michinel, M. I. Rodas-Verde, and V. M. Pérez-García, Phys. Rev. A **74**, 013619 (2006).

[126] G. Theocharis, P. Schmelcher, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Rev. A **74**, 053614 (2006).

[127] C. Wang, K.J.H. Law, P. G. Kevrekidis, and M. A. Porter, Phys. Rev. A **87**, 023621 (2013).

[128] H. Sakaguchi and B. A. Malomed, Phys. Rev. A **81**, 013624 (2010);

[129] S. Holmes, M. A. Porter, P. Krüger, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. A **88**, 033627 (2013).

[130] K. Hizanidis, Y. Kominis, and N. K. Efremidis, Opt. Express **16**, 18296 (2008).

[131] R. Marangell, C.K.R.T. Jones, and H. Susanto, Nonlinearity **23**, 2059 (2010).

[132] R. Marangell, H. Susanto, and C.K.R.T. Jones, J. Diff. Eq. **253**, 1191 (2012).

[133] T. Mithun, K. Porsezian, and B. Dey, Phys. Rev. E **88**, 012904 (2013).

[134] F. Pinsker, N. G. Berloff, and V. M. Pérez-García, Phys. Rev. A **87**, 053624 (2013).

[135] A. Balaz, R. Paun, A. I. Nicolin, S. Balasubramanian, and R. Ramaswamy, Phys. Rev. A **89**, 023609 (2014).

[136] F. Kh. Abdullaev, A. Gammal, A. M. Kamchatnov, and L. Tomio, Int. J. Mod. Phys. B **19**, 3415 (2005).

[137] D. J. Frantzeskakis, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 213001 (2010).

[138] C. Hamner, J. J. Chang, P. Engels, M. A. Hoefer, Phys. Rev. Lett. **106**, 065302 (2011).

[139] S. Middelkamp, J. J. Chang, C. Hamner, R. Carretero-González, P. G. Kevrekidis, V. Achilleos, D. J. Frantzeskakis, P. Schmelcher, and P. Engels,Phys. Lett. A **375**, 642 (2011).

[140] D. Yan, J. J. Chang, C. Hamner, P. G. Kevrekidis, P. Engels, V. Achilleos, D. J. Frantzeskakis, R. Carretero-González, and P. Schmelcher, Phys. Rev. A **84**, 053630 (2011).

[141] M. A. Hoefer, J. J. Chang, C. Hamner, and P. Engels, Phys. Rev. A **84**, 041605(R) (2011).

[142] Th. Busch, and J. R. Anglin, Phys. Rev. Lett. **87**, 010401 (2001).

[143] J. Ieda, T. Miyakawa, and M. Wadati, Phys. Rev. Lett. **93**, 194102 (2004).

[144] J. Ieda, T. Miyakawa, and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn. **73**, 2996 (2004).

[145] L. Li, Z. Li, B. A. Malomed, D. Mihalache, and W. M. Liu, Phys. Rev. A **72**, 033611 (2005).

[146] H. E. Nistazakis, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, and R. Carretero-González, Phys. Rev. A **77**, 033612 (2008).

[147] D. Yan, J. J. Chang, C. Hamner, M. Hoefer, P. G. Kevrekidis, P. Engels, V. Achilleos, D. J. Frantzeskakis, and J. Cuevas, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **45**, 115301 (2012).

[148] Y. O. Dudin, L. Li, F. Bariani, and A. Kuzmich, Nature physics **8**, 790 (2012).

[149] L. D. Carr, C. W. Clark, and W. P. Reinhardt, Phys. Rev. A **62**, 063610 (2000).

[150] Yu. S. Kivshar and X. Yang, Phys. Rev. E **49**, 1657 (1994).

[151] M. J. Ablowitz, S. D. Nixon, T. P. Horikis, and D. J. Frantzeskakis, Proc. R. Soc. A **2133**, 2597 (2011).

[152] Y. Nogami and F. M. Toyama, Phys. Lett. A **184**, 245-250 (1994).

[153] C. T. Kelley, *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*, SIAM, Philadelphia (2003).

[154] D. E. Pelinovsky and P. G. Kevrekidis, ZAMP **59**, 559 (2008).

[155] A. S. Rodrigues, P. G. Kevrekidis, M. A. Porter, D. J. Frantzeskakis, P. Schmelcher, and A. R. Bishop, Phys. Rev. A **78**, 013611 (2008).

[156] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 1994).

[157] D. J. Frantzeskakis, G. Theocharis, F. K. Diakonos, P. Schmelcher, and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. A **66**, 053608 (2002).

[158] V. V. Konotop, V. M. Pérez-García, Y.-F. Tang, and L. Vázquez, Phys. Lett. A **236**, 314 (1997).

[159] N. Bilas and N. Pavloff, Phys. Rev. A **72**, 033618 (2005).

[160] N. G. Parker, N. P. Proukakis, M. Leadbeater, and C. S. Adams, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **36**, 2891 (2003).

[161] N. G. Parker, N. P. Proukakis, C. F. Barenghi, and C. S. Adams, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, S175 (2004).

[162] M. J. Ablowitz, B. Prinari, and A. D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*, Cambridge University Press (Cambridge, 2004).

[163] V. Achilleos, P. G. Kevrekidis, V. M. Rothos, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Rev. A **84**, 053626 (2011).

[164] V. Achilleos, D. Yan, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, New J. Phys. **14**, 055006 (2012).

[165] Th. Busch and J. R. Anglin, Phys. Rev. Lett. **87**, 010401 (2001).

[166] K. M. Mertes, J. W. Merrill, R. Carretero-González, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis, and D. S. Hall, Phys. Rev. Lett. **99**, 190402 (2007).

[167] V. P. Mineev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67**, 263 (1974) [Sov. Phys. JETP **40**, 132 (1974)].

[168] L. D. Carr, C. W. Clark, and W. P. Reinhardt, Phys. Rev. A **62**, 063610 (2000).

[169] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **74**, 3352 (1995).

[170] V. K. Mel'nikov, Lett. Math. Phys. **7**, 129 (1983); Phys. Let. A **118**, 22 (1986); *ibid.* **128**, 9 (1988); *ibid.* **133**, 493 (1988).

[171] V. Hakim, Phys. Rev. E **55**, 2835 (1997).

[172] N. Pavloff, Phys. Rev. A **66**, 013610 (2002); A. Radouani, Phys. Rev. A **70**, 013602 (2004); G. Theocharis, P. G. Kevrekidis, H. E. Nistazakis, D. J. Frantzeskakis, A. R. Bishop, Phys. Lett. A, **337**, 441 (2005); R. Carretero-González, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, B. A. Malomed, S. Nandi, A. R. Bishop, Math. Comput. Simul. **74**, 361 (2007); H. Susanto, P. G. Kevrekidis, R. Carretero-González, B. A. Malomed, D. J. Frantzeskakis, and A. R. Bishop, Phys. Rev. A **75**, 055601 (2007); Yu. G. Gladush, L. A. Smirnov, and A. M. Kamchatnov, J. Phys. B **41**, 165301 (2008); Yu. G. Gladush, A. M. Kamchatnov, Z. Shi, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and B. A. Malomed, Phys. Rev. A **79**, 033623 (2009); L. Y. Kravchenko and D. V. Fil, J. Low Temp. Phys. **155**, 219 (2009); A. S. Rodrigues, P. G. Kevrekidis, R. Carretero-González, D. J. Frantzeskakis, P. Schmelcher, T. J. Alexander, and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. A **79**, 043603 (2009).

[173] P. Engels and C. Atherton, Phys. Rev. Lett. **99**, 160405 (2007).

[174] J. Williams, R. Walser, J. Cooper, E. A. Cornell, and M. Holland, Phys. Rev. A **61**, 033612 (2000).

[175] M. Vijayajayanthi, T. Kanna, M. Lakshmanan, *Proceedings of Recent Developments in Nonlinear Dynamics* Narosa Publication, New Delhi (2009), P. 125.

[176] R. Hirota, J. Math. Phys **14**, 805 (1973).

[177] A. P. Sheppard, and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. E **55**, 4773 (1997).

[178] Ju-Kui Xue, J Phys B: At. Mol. Opt. Phys. **38**, 3841 (2005).

[179] V. N. Serkin, A. Hasegawa, and T. L. Belyaeva, Phys. Rev. Lett. **98**, 074102 (2007); Phys. Rev. A **81**, 023610 (2012).

[180] M. Vijayajayanthi, T. Kanna, M. Lakshmanan, Eur. Phys. J. Special Topics **173**, 57 (2009).

[181] T. Kanna, M. Lakshmanan, Phys. Rev. Lett. **86** 5043 (2001); Phys. Rev. E **67**, 046617 (2003).

[182] T. Kanna, M. Lakshmanan, P. Tchofo Dinda, and N. Akhmediev, Phys. Rev. E **73**, 026604 (2006).