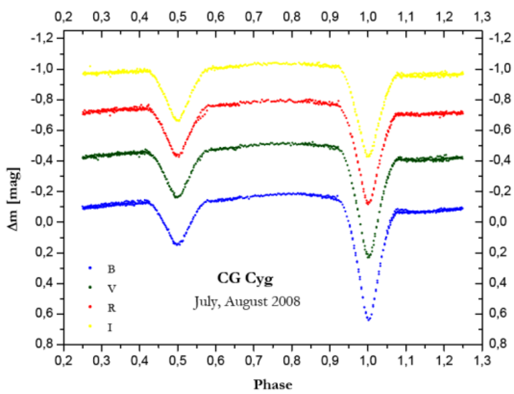
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

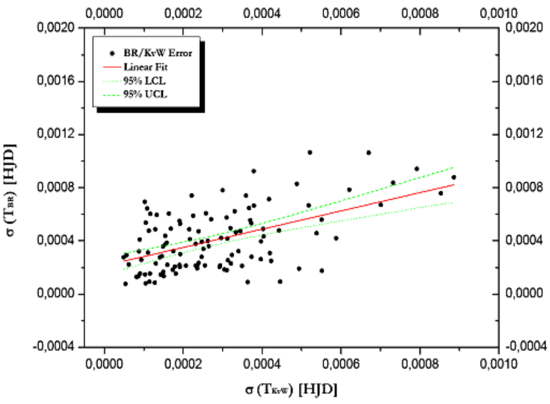
ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

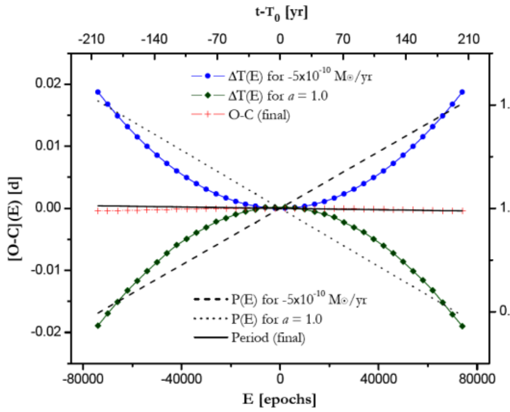
Νικόλαου Μ. Νανούρη

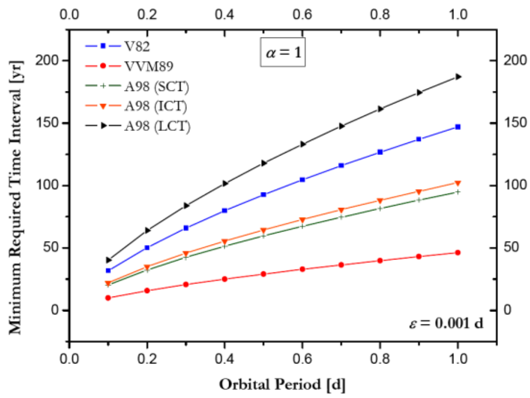
ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ
ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΜΕ ΤΙΤΛΟ:

Μελέτη των Μακροχρόνιων Παρατηρούμενων Μεταβολών της Τροχιακής Περιόδου στα Διπλά Εκλειπτικά Αστρικά Συστήματα









ΑΘΗΝΑ 2011

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Νικόλαου Μ. Ναυούρη

(Α.Μ. 2006502)

Μελέτη των Μακροχρόνιων Παρατηρούμενων Μεταβολών της Τροχιακής Περιόδου στα Διπλά Εκλειπτικά Αστρικά Συστήματα

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Φυσικής
του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

Εγκρίθηκε από την Επταμελή Εξεταστική Επιτροπή την **30η Ιουνίου 2011**.

Η εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής πραγματοποιήθηκε με τη χορήγηση υποτροφίας από το **Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών** (01/01/2007-30/06/2010, ειδίκευση Αστροφυσικής).

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή (Ορίστηκε από τη Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης του Τμήματος Φυσικής στη συνεδρίαση της 04/12/2006):

1. κ. **Ευγενία Αντωνοπούλου**, Επίκουρη Καθηγήτρια Ε.Κ.Π.Α. (Επιβλέπουσα)
2. κ. **Παναγιώτης Νιάρχος**, Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.
3. κ. **Ελένη Λιβανίου-Ροβίθη**, Επίκουρη Καθηγήτρια Ε.Κ.Π.Α.
   κ. **Μαίρη Κοντιζά**, Επίκουρη Καθηγήτρια Ε.Κ.Π.Α.

Μετά τη συνταξιοδότηση της κ. Λιβανίου-Ροβίθη (Δεκέμβριος 2010), η Επίκουρη Καθηγήτρια κ. **Μαίρη Κοντιζά** ορίστηκε ως τρίτο μέλος της Συμβουλευτικής Επιτροπής (συνεδρίαση της Γενικής Συνέλευσης Ειδικής Σύνθεσης του Τμήματος Φυσικής στις 08/02/2011).

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή (Ορίστηκε από τη Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης του Τμήματος Φυσικής στη συνεδρίαση της 20/06/2011):

1. κ. **Ευγενία Αντωνοπούλου**, Επίκουρη Καθηγήτρια Ε.Κ.Π.Α. (Επιβλέπουσα)
2. κ. **Παναγιώτης Νιάρχος**, Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.
3. κ. **Μαίρη Κοντιζά**, Επίκουρη Καθηγήτρια Ε.Κ.Π.Α.
4. κ. **Κανάρης Τσίγκανος**, Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.
5. κ. **Τηλέμαχος Καλβουρίδης**, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
6. κ. **Δέσποινα Χατζηδημητρίου**, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Ε.Κ.Π.Α.
7. κ. **Μάνος Δανέζης**, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Στη μητέρα μου Αθανασία

και

στην αδελφή μου Κατερίνα

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση μιας διδακτορικής διατριβής δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί με επιτυχία χωρίς την πρακτική και ηθική συμβολή ορισμένων ανθρώπων. Θέλω λοιπόν από το βήμα αυτό να ευχαριστήσω από καρδιάς ***την οικογένειά μου*** για την ηθική και οικονομική της υποστήριξη, την υπομονή και την ανεκτικότητά της καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου και όχι αποκλειστικά κατά την εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής. Η συμπαράστασή της στην επιθυμία μου να ακολουθήσω σπουδές στη Φυσική ήταν αμέριστη, από τις μέρες των εισαγωγικών εξετάσεων μέχρι και στην πιο πρόσφατη επιλογή μου να εξειδικεύσω τις γνώσεις μου στον ιδιαίτερα αβέβαιο χώρο της Αστροφυσικής.

Θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην Επίκουρη Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών ***κα Ευγενία Αντωνοπούλου*** η οποία στάθηκε δίπλα μου από τις προπτυχιακές ακόμα σπουδές μέχρι και την περάτωση της παρούσας διδακτορικής διατριβής ως κύρια επιβλέπουσά μου. Πέρα από τις γνώσεις που μου μετέδωσε, είχα την τύχη να γαλουχηθώ με αξίες σημαντικές που αφορούν τον ερευνητικό τρόπο σκέψης, το συναδελφικό χαρακτήρα, το πνεύμα συνεργασίας, την ευγένεια και την εντιμότητα που πρέπει διακατέχουν ένα νέο επιστήμονα. Την ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά την ανάληψη ενός ιδιαίτερα ενδιαφέροντος θέματος διατριβής το οποίο εκ των προτέρων γνωρίζαμε ότι εμπεριείχε δυσκολίες και κινδύνους που καθιστούσαν την περάτωσή του αρκετά επισφαλή. Την ευχαριστώ γιατί με ενθάρρυνε σε κάθε περίοδο αμφισβήτησης, γιατί πίστεψε σε εμένα.

Η συνεισφορά των δύο υπόλοιπων μελών της συμβουλευτικής μου επιτροπής ήταν πολυδιάστατη και η ενθάρρυνσή τους προς την επιτυχή ολοκλήρωση της διατριβής ήταν εξίσου σημαντική. Θέλω να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στην Επίκουρη Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών ***κα Ελένη Λιβανίου-Ροβίθη*** της οποίας η συμβολή στην αποσαφήνιση βασικών εννοιών που αφορούν το ερευνητικό αντικείμενο της διατριβής ήταν ουσιαστική και η συνεισφορά της στην πρόοδο των απαιτούμενων δημοσιεύσεων καθοριστική. Οι θετικές της προτροπές και οι πολύωρες συζητήσεις μας αποδείχθηκαν ιδιαίτερα εποικοδομητικές και καθόρισαν σε σημαντικό βαθμό το συνολικό τρόπο σκέψης μου.

Ομοίως, οφείλω να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών και διευθυντή του οικείου τομέα ***κ. Παναγιώτη Νιάρχο*** ο οποίος με την ιδιότητα του διευθυντή του Γεροσταθοπούλειου Πανεπιστημιακού Αστεροσκοπείου μου διέθεσε παρατηρησιακό χρόνο για τις ανάγκες της διδακτορικής διατριβής, καθώς και για τις πολύτιμες υποδείξεις οι οποίες λήφθηκαν υπόψη στη διαμόρφωση του τελικού κειμένου της διατριβής. Τον ευχαριστώ επίσης για την ευκαιρία που μου έδωσε να συμμετέχω στις βραδιές κοινού και ξενάγησης σχολείων στο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο αλλά και για τη διευθέτηση των διαδικασιών εκείνων που απαιτούνταν ώστε η παρουσίαση (και εξέταση) της διατριβής να πραγματοποιηθεί έγκαιρα και πριν την έναρξη της στρατιωτικής μου θητείας.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω την Επίκουρη Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών ***κα Μαίρη Κοντιζά*** η οποία αποδέχθηκε άμεσα να αντικαταστήσει την κα Ε. Λιβανίου-Ροβίθη ως μέλος της συμβουλευτικής επιτροπής λόγω της συνταξιοδότησής της λίγους μήνες πριν την ολοκλήρωση της διατριβής.

Ομοίως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής μου επιτροπής η οποία αποτελούνταν από τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών και προέδρου του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών ***κ. Κανάρη Τσίγκανο***, τον Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου ***κ. Τηλέμαχο Καλβουρίδη***, την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών ***κα Δέσποινα Χατζηδημητρίου***, καθώς και τον Επίκουρο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών ***κ. Μάνο Δανέζη***. Τα καλοπροαίρετα σχόλιά τους με τιμούν ιδιαίτερα και πολλές από τις υποδείξεις τους υϊοθετήθηκαν στην τελική βελτιωμένη έκδοση του κειμένου.

Θα ήταν μεγάλη μου παράλειψη να μην ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Ιονίων Νήσων ***κ. Τάσο Καλημέρη***. Καθόλη την πορεία των μεταπτυχιακών μου σπουδών εμπνεύστηκα από εκείνον πολλές ιδέες οι οποίες υλοποιήθηκαν τόσο στη μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία όσο και στην παρούσα διατριβή. Ένιωσα οικεία με το αυστηρό ερευνητικό του ύφος το οποίο, κατά την εκτίμησή μου, είναι απαιτούμενο σε ένα ιδιαίτερα ανταγωνιστικό περιβάλλον. Τον ευχαριστώ γιατί υπήρξε αμερόληπτος κριτής της ερευνητικής μου προσπάθειας, για τις δημιουργικές μας συζητήσεις ακόμα και όταν αυτές οδηγούσαν σε αντιπαραθέσεις και διαφωνίες. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την οικογένειά του για την ευχάριστη φιλοξενία μου όποτε βρέθηκα στη Ζάκυνθο.

Κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών είχα την ευκαιρία να ενασχοληθώ αρκετά εμπεριστατωμένα με το αντικείμενο της στατιστικής ανάλυσης και επεξεργασίας δεδομένων, ένα πεδίο μελέτης το οποίο εκτίμησα ιδιαίτερα εξαιτίας των πρακτικών δυνατοτήτων που προσφέρει και του μεγάλου εύρους εφαρμογών. Θα ήθελα λοιπόν να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου ***κ. Δημήτρη Φουσκάκη*** ο οποίος με καθοδήγησε και με βοήθησε να εξειδικευτώ στο χώρο της Μπεϋζιανής και Υπολογιστικής Στατιστικής, καθώς και τον Επίκουρο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών ***κ. Φώτη Διάκονο*** στον οποίο οφείλω την πρώτη μου επαφή με την ανάλυση χρονοσειρών.

Είχα τη χαρά και την τύχη να εργαστώ με φίλους και συναδέλφους οι οποίοι ήταν πάντοτε πρόθυμοι να βοηθήσουν σε όποιο πρόβλημα συναντούσα, ακόμα και αν τα άμεσα ερευνητικά μας ενδιαφέροντα δεν ήταν κοινά. Ειδικότερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον ***κ. Γιάννη Κοντογιάννη*** με τον οποίο μοιραστήκαμε για πολλά χρόνια το ίδιο γραφείο αλλά και αμέτρητες ώρες παρατήρησης στο Αστεροσκοπείο του Κρυονερίου Κορινθίας. Θέλω να ευχαριστήσω τον ***κ. Αλέξη Λιάκο*** για την καθοδήγησή του στο χειρισμό του τηλεσκοπίου που στεγάζει το Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο, τον ***Δρ. Σωτήρη Τσαντίλα*** για τις πολύτιμες συμβουλές του, τον ***Δρ. Τίτο Ματσάκο*** για τη σημαντική του συμβολή σε θέματα προγραμματισμού και αριθμητικής ανάλυσης, καθώς και τον ***κ. Γιάννη Γιαννικάκη*** για την ανάπτυξη και παραχώρηση κώδικα επεξεργασίας παρατηρήσεων. Με τους πιο πάνω συναδέλφους ανταλλάξαμε όχι μόνο αυστηρά επιστημονικές απόψεις, μοιραστήκαμε τους κοινούς μας προβληματισμούς και τις κοινές μας ανησυχίες σε πολλά θέματα.

Οφείλω να ευχαριστήσω και να εκφράσω τη βαθιά μου εκτίμηση προς το πρόσωπο του ***Dr. Tamás Borkovits***, αστρονόμου του Αστεροσκοπείου Baja της Ουγγαρίας και κριτή του άρθρου όπου δημοσιεύτηκαν τα κύρια αποτελέσματα της παρούσας διατριβής (περιοδικό A&A). Μέσα από την προσωπική επικοινωνία που αναπτύξαμε, συνέβαλε στη βελτίωση της προτεινόμενης μεθοδολογίας και με παρακίνησε για συνέχιση του ερευνητικού έργου. Τα ιδιαίτερα ενθαρρυντικά του λόγια λειτούργησαν ως επιβράβευση της πολύχρονης προσπάθειάς μου.

Μεγάλο μέρος των παρατηρησιακών αναγκών της παρούσας διατριβής υποστηρίχθηκε και πραγματοποιήθηκε στον Αστρονομικό Σταθμό Κρυονερίου Κορινθίας. Ευχαριστώ τον Διευθυντή Ερευνών και υπεύθυνο του Αστρονομικού Σταθμού Κρυονερίου ***Δρ. Αναστάσιο Δαπέργολα*** για τη διάθεση του απαιτούμενου χρόνου παρατηρήσεων, καθώς και όλο το προσωπικό που εργάζεται σε αυτόν. Θα ήθελα όμως να ξεχωρίσω τον ***κ. Γιώργο Δήμου***, χωρίς τη βοήθεια του οποίου η εξοικείωσή μου σχετικά με το χειρισμό του τηλεσκοπίου και του εξοπλισμού που αυτό διαθέτει δε θα ήταν ποτέ δυνατή.

Μου δίνεται εδώ η ευκαιρία να σημειώσω ότι η σημασία ενός ενεργού αστεροσκοπείου, όπως εκείνου του Κρυονερίου, ως υποδομή για την άσκηση μεταπτυχιακών φοιτητών αλλά και η συμβολή του στις τρέχουσες εξελίξεις σχετικά την ανακάλυψη πλανητών γήϊνων διαστάσεων εκτός του ηλιακού συστήματος μπορεί να είναι καθοριστική τα επόμενα χρόνια. Ένα αστεροσκοπείο με αξιόλογο και ανταγωνιστικό εξοπλισμό, εύκολα προσβάσιμο και με διαπιστευμένη τη μεγάλη συχνότητα νυχτών που επιτρέπουν ποιοτικές αστρονομικές παρατηρήσεις λόγω των ευνοϊκών τοπικών κλιματολογικών και καιρικών συνθηκών. Η ανάγκη να παραμείνει το συγκεκριμένο αστεροσκοπείο όχι μόνο λειτουργικό αλλά και να ληφθεί η κατάλληλη μέριμνα προς την αναβάθμισή του κρίνεται επιτακτική ώστε να διατηρήσει την Ελλάδα αυτόνομη και αξιόπιστη στην εκπαίδευση των νέων αστρονόμων αλλά και να την καταστήσει ανταγωνιστική στο διεθνές προσκήνιο των ερευνητικών εξελίξεων.

Εκφράζω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στο ***Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ.)*** το οποίο μου παρείχε τριετή υποτροφία για την εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής και η οποία επεκτάθηκε για ακόμα έξι μήνες. Η οικονομική του ενίσχυση υπήρξε πολύτιμη κατά το διάστημα που κατείχα την ιδιότητα του υποψήφιου διδάκτορα.

Πρέπει όμως να ευχαριστήσω και το ίδιο το ***Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών*** αφενός για την υλικοτεχνική υποδομή που μου παρείχε, αφετέρου γιατί μέσω του Ειδικού Λογαριασμού Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε., κωδικός 70/4/9702) κάλυψε μέρος των εξόδων μου για την παρακολούθηση του σχολείου Αστροστατιστικής στο Ινστιτούτο Max Planck της Χαϊδελβέργης (10-14/8/2009), του σχολείου Αστροπληροφορικής στο Πανεπιστήμιο του Βελιγραδίου (29/6-1/7/2010), όπως επίσης και στο διεθνές συνέδριο μελέτης διπλών αστρικών συστημάτων που έλαβε χώρα στο Πανεπιστήμιο Masaryk του Brno της Τσεχίας (8-12/6/2009).

Τελειώνοντας, θέλω να ευχαριστήσω όλα τα μέλη Δ.Ε.Π., τους μεταπτυχιακούς φοιτητές και τους συναδέλφους υποψήφιους διδάκτορες του Τμήματος Φυσικής του

Πανεπιστημίου Αθηνών και ειδικότερα του Τομέα Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής οι οποίοι είχαν πάντοτε την πόρτα του γραφείου τους ανοικτή προς κάθε συζήτηση. Να εκφράσω όμως και τις ευχαριστίες μου στους προπτυχιακούς φοιτητές με τους οποίους είχα τη χαρά να συναναστραφώ ως επιβλέποντας σε διάφορα εργαστήρια. Μέσα από τις ανησυχίες και τις απορίες τους με βοήθησαν να αποκτήσω μια πιο ολοκληρωμένη και σφαιρική εικόνα για την επιστήμη της Φυσικής και τη διδασκαλία της.

Χάρη σε όσους συνέβαλαν όλα αυτά τα χρόνια, απέκτησα περισσότερες γνώσεις και εμπειρίες, απέκτησα μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση και ένιωσα πιο ασφαλής στις αβέβαιες περιπλανήσεις μου στον έναστρο ουρανό. Χωρίς αυτούς η ακαδημαϊκή μου διαδρομή θα ήταν λιγότερο όμορφη και σίγουρα φτωχότερη. Τους ευχαριστώ γιατί με βοήθησαν ώστε να διατηρώ τα όνειρά μου ζωντανά.

Νικόλαος Μ. Νανούρης

Σεπτέμβριος 2011

Περίληψη

Χωρίς αμφιβολία, τα διπλά συστήματα αστέρων αποτελούν ένα από τα καλύτερα αστροφυσικά εργαστήρια εφαρμογής και αξιολόγησης θεωρητικών μοντέλων σχετικών με την αστρική δομή και εξέλιξη. Το γεγονός αυτό, αφενός μεν οφείλεται στις γνώσεις που διαθέτουμε για το πρόβλημα των δύο σωμάτων από την Κλασική (και όχι μόνο) Μηχανική, αφετέρου δε στη δυνατότητα που τα συστήματα αυτά μας προσφέρουν για ακριβείς φωτομετρικές και φασματοσκοπικές μετρήσεις. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω πλεονεκτημάτων, η μελέτη των διπλών αστρικών συστημάτων μας εξασφαλίζει τη δυνατότητα ιδιαίτερα αξιόπιστων μεθόδων προσδιορισμού των φυσικών παραμέτρων των μελών τους.

Η προσφορά των διπλών αστέρων όμως δε σταματά εκεί. Σε έναν πολύ μεγάλο αριθμό από αυτά, τα τροχιακά τους χαρακτηριστικά οδηγούν στην άμεση αλληλεπίδραση των μελών τους, γεγονός το οποίο έχει ως συνέπεια τη δράση πλήθους φυσικών μηχανισμών, οδηγώντας στη μεταβολή της τροχιακής τους περιόδου. Η μελέτη των μεταβολών αυτών μπορεί να μας δώσει ανεκτίμητες πληροφορίες για τη φύση των διαδικασιών που λαμβάνουν χώρα στους αστέρες με έναν τρόπο άμεσο και αξιόπιστο.

Το ερευνητικό αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής αφορά τη θεωρητική μελέτη μακροχρόνιων μεταβολών της τροχιακής περιόδου σε διπλά εκλειπτικά αστρικά συστήματα. Η μελέτη αυτή έχει ως σκοπό την ανάπτυξη της μεθοδολογίας εκείνης μέσω της οποίας θα καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός του ελάχιστου απαιτούμενου χρονικού εύρους παρατηρήσεων ώστε οι επιπτώσεις της δράσης του εκάστοτε εξεταζόμενου μηχανισμού να είναι μετρήσιμες μέσω της ανάλυσης των αντίστοιχων διαγραμμάτων O-C. Η παρατηρησιακή υποστήριξη της διατριβής στηρίζεται στον προσδιορισμό χρόνων ελαχίστων που έχουν προκύψει μετά από την παρατήρηση διπλών συστημάτων σε μακροχρόνια κλίμακα η οποία αγγίζει ή και ξεπερνά τα 100 χρόνια. Επιβάλλοντας ένα μοντέλο σταθερής περιόδου (γραμμική εφημερίδα) στους διαθέσιμους χρόνους ελαχίστων, η μελέτη των μεταβολών της περιόδου γίνεται με βάση τη χρονική διαμόρφωση των παραγόμενων υπολοίπων. Η ανάλυση των διαγραμμάτων O-C, όπως έχει ιστορικά επικρατήσει ο όρος, έχει αποδειχθεί αξιόπιστο μέσο εξαγωγής συμπερασμάτων σχετικά με το χρονικό ρυθμό μεταβολής της περιόδου ενώ, συμπληρωματικά, χρησιμοποιείται ως μέσο επιβεβαίωσης της παρουσίας συγκεκριμένων φυσικών μηχανισμών που προκαλούν τις μεταβολές της περιόδου.

Η μεθοδολογία που παρουσιάζεται είναι πρωτότυπη και είχε *δύο βασικούς στόχους*. Ο πρώτος είναι ο προσδιορισμός των απαιτούμενων συνθηκών (π.χ. στάθμη θορύβου, χρονικό παράθυρο, ένταση φυσικών μηχανισμών) ώστε μια συγκεκριμένη φυσική διαδικασία να καθίσταται ανιχνεύσιμη μέσω της ανάλυσης των διαγραμμάτων O-C. Ο δεύτερος στόχος αφορά την αξιολόγηση του βαθμού αξιοπιστίας ορισμένων παραδοχών που μέχρι σήμερα υϊοθετούνταν σε πληθώρα

αναλύσεων διαγραμμάτων O-C και εύκολα μπορεί να βρει κανείς στην υπάρχουσα βιβλιογραφία (π.χ. η παραβολική τάση ως δείκτης παρουσίας ενός μακροχρόνιου μηχανισμού).

Η προτεινόμενη μεθοδολογία οδήγησε σε χρήσιμες και απλές μαθηματικές σχέσεις εκτίμησης φυσικών παραμέτρων των εμπλεκόμενων μηχανισμών με βάση την πληροφορία η οποία έχει προκύψει από την ανάλυση των διαγραμμάτων O-C. Επιπλέον, πραγματοποιηθήκαν ορισμένες παρατηρησιακές και στατιστικές μελέτες με σκοπό τον προσδιορισμό της ακρίβειας του χρόνου ελαχίστου και τους παράγοντες που μπορούν να επιδράσουν και να οδηγήσουν σε ενδεχόμενα λανθασμένη εκτίμησή του.

Η διδακτορική διατριβή χωρίζεται σε δύο βασικές ενότητες. Η πρώτη από αυτές αφορά την παρουσίαση των παρατηρησιακών μελετών, καθώς και της στατιστικής επεξεργασίας που ακολουθήθηκε ώστε να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με τη θεωρητική μεθοδολογία που αργότερα προτείνεται ως αντικείμενο της δεύτερης πλέον ενότητας. Η διάρθρωση της παρούσας διατριβής στηρίζεται σε έξι συνολικά κεφάλαια και πέντε συμπληρωματικά παραρτήματα.

Το *πρώτο κεφάλαιο* περιλαμβάνει μια σύντομη περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών των διπλών αστρικών συστημάτων και του τρόπου ταξινόμησής τους βάσει διαφόρων κριτηρίων. Παρουσιάζεται επίσης αναλυτικά το μοντέλο Roche που έχει αποδειχθεί τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες ως το πιο επιτυχημένο για την περιγραφή της γεωμετρίας των διπλών συστημάτων αλλά και του βαθμού αλληλεπίδρασής των μελών τους. Επιπροσθέτως, παρουσιάζονται οι βασικές φωτομετρικές και φασματοσκοπικές τεχνικές με τις οποίες προκύπτουν και επιλύονται οι καμπύλες φωτός και ακτινικών ταχυτήτων ώστε να προσδιοριστούν οι τροχιακές παράμετροι των διπλών αστρικών συστημάτων αλλά και οι φυσικές παράμετροι των μελών τους. Στο τέλος του κεφαλαίου παρατίθεται ακόμα μια ενότητα που αφορά την εξέλιξη των διπλών συστημάτων με βασικό κριτήριο τη μάζα του πρωτεύοντος αστέρα.

Το *δεύτερο κεφάλαιο* πραγματεύεται τις μεθόδους που έχουν μέχρι σήμερα αναπτυχθεί για τον προσδιορισμό του χρόνου ενός ελαχίστου, καθώς τα αποτελέσματα αναμένεται να διαφέρουν ανάλογα με τη μορφή του εκάστοτε ελαχίστου. Μετά την παρουσίαση των κυριότερων από αυτές, παρατίθεται μια σύνοψη των μελετών που έχουν δημοσιευθεί με σκοπό τη σύγκρισή τους κάτω από διαφορετικές συνθήκες. Οι πηγές θορύβου που ενδέχεται να προσβάλουν μια χρονοσειρά φωτομετρικών παρατηρήσεων, αλλοιώνουν τον πραγματικό χρόνο ελαχίστου ο οποίος προσδιορίζεται με τις καθιερωμένες μεθόδους και διαμορφώνουν το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα. Ο βαθμός επίδρασης κάθε παράγοντα εξετάζεται ενδελεχώς τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά. Πιο συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο έχει προστεθεί μια νέα στατιστική μελέτη 114 χρόνων ελαχίστου η οποία αφορά δύο συγκεκριμένα διπλά εκλειπτικά αστρικά συστήματα (CG Cyg και RT And) και αποσκοπεί στην αξιολόγηση του βαθμού αξιοπιστίας του σφάλματος που προβλέπει η παραδοσιακή μέθοδος των Kwee & van Woerden στην περίπτωση ασύμμετρων ελαχίστων (Kwee K. & van Woerden H. 1956, BAN, 12, 327), ενώ ελέγχεται αν το σφάλμα αυτό είναι ικανό να καλύψει διαφοροποιήσεις του χρόνου μεταξύ ελαχίστων σε διαφορετικά φίλτρα. Κάτω από την ίδια προσέγγιση, πραγματοποιείται μια ανάλογη προσπάθεια μέσω της παραβολικής και κυβικής παλινδρόμησης με αντίστοιχο έλεγχο στα σφάλματα που προκύπτουν από τις εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων (Breinhorst R., Pfeiderer J., Reinhardt M. & Karimie M. T. 1973, A&A, 22, 239).

Τέλος, παρουσιάζεται και εφαρμόζεται μια ακόμα μέθοδος που στηρίζεται και πάλι στην πιο πάνω παλινδρόμηση ενισχυμένη όμως με την υπολογιστική τεχνική της επαναλαμβανόμενης δειγματοληψίας με επανάθεση (bootstrap resampling). Η νέα αυτή μέθοδος αποτελεί τη δική μας πρόταση για τον προσδιορισμό του χρόνου ελαχίστων, αποσκοπώντας στην εξάλειψη φαινομένων ετεροσκεδαστικότητας και αποκλίσεων από την Κανονική κατανομή που συνοδεύουν συνήθως παρατηρήσεις μικρού πλήθους. Μετά την αναλυτική της περιγραφή, αλλά και της παρουσίασης των πλεονεκτημάτων που εμφανίζει έναντι των παραδοσιακών τεχνικών, η εφαρμογή της πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός πλήρως αυτοματοποιημένου προγράμματος που αναπτύχθηκε ειδικά για το σκοπό αυτό και περιγράφεται σε ειδικό παράρτημα στο τέλος της διατριβής.

Το *τρίτο κεφάλαιο* καταπιάνεται με την κατασκευή, τις ιδιότητες των διαγραμμάτων O-C, καθώς και τον τρόπο συσχέτισης των διαγραμμάτων αυτών με εκείνα της χρονικής μεταβολής της τροχιακής περιόδου ενός διπλού εκλειπτικού συστήματος. Έμφαση δίνεται στην παρουσία θορύβου η οποία μπορεί να προέλθει είτε από αστοχία της μεθόδου προσδιορισμού του χρόνου των ελαχίστων (παρατηρησιακός θόρυβος) είτε από την παρουσία αστρικών κηλίδων (φωτομετρικός θόρυβος). Στη συνέχεια δίνονται οι βασικοί ορισμοί των μεγεθών που χρησιμοποιούνται κατά την περιγραφή μιας χρονοσειράς, παρουσιάζονται τα βασικά υποδείγματα μελέτης χρονοσειρών, καθώς και των τεχνικών αξιολόγησης και επιλογής τους. Τέλος, περιγράφονται αναλυτικά οι δύο κύριες μέθοδοι ανάλυσης ενός διαγράμματος O-C που αντιμετωπίζουν το διάγραμμα αυτό ως μια τυπική χρονοσειρά και πιο συγκεκριμένα της πολυωνυμικής παλινδρόμησης (Kalimeris A., Rovithis-Livaniou H. & Rovithis P. 1994, A&A, 282, 775) και της στοχαστικής προσέγγισης (Koen C. 1996, MNRAS, 283, 471).

Το *τέταρτο κεφάλαιο* αφορά την παρουσίαση των θεμελιωδών φυσικών μηχανισμών που αναμένονται στα διπλά αστρικά συστήματα. Αναπτύσσεται μια αναλυτική παρουσίαση των μακροχρόνιων εκείνων μηχανισμών οι οποίοι θα μπορούσαν να διαμορφώσουν ένα διάγραμμα O-C κάτω από κατάλληλες συνθήκες. Οι φυσικές διαδικασίες που μελετώνται περιλαμβάνουν την απώλεια και μεταφορά μάζας μεταξύ των μελών ενός συστήματος, την παλιρροϊκή τους αλληλεπίδραση, τη μαγνητική πέδηση, καθώς και τη βαρυτική ακτινοβολία. Όσον αφορά τον μηχανισμό απώλειας μάζας, εξετάζεται αναλυτικά ο αστρικός άνεμος θερμικής προέλευσης είτε σε ακίνητο αστέρα είτε κάτω από την παρουσία μαγνητικού πεδίου και περιστροφής, παραθέτοντας τον προβλεπόμενο ρυθμό απώλειας μάζας για κάθε περίπτωση. Ιδιαίτερο βάρος δίνεται κατά την παραμετροποίηση του μηχανισμού απώλειας στροφορμής μέσω της μαγνητικής πέδησης με την αξιολόγηση τριών διαφορετικών μοντέλων εκ των οποίων τα δύο έχουν προκύψει από παρατηρήσεις αστέρων σε νεαρά ανοικτά σμήνη (Vilhu O. 1982, A&A, 109, 17 και van’t Veer F. & Maceroni C.

1989, A&A, 220, 128) ενώ το τρίτο συνδυάζει αποτελέσματα που προβλέπουν κατάλληλα θεωρητικά μοντέλα εμπλέκοντας τον παράγοντα της διαφορικής περιστροφής και του φαινομένου σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος (Allain S. 1998, A&A, 333, 629).

Αναλυτικά επίσης περιγράφεται η διαμόρφωση της τροχιακής περιόδου ενός διπλού συστήματος αστέρων κάτω από τη δράση των πιο πάνω μηχανισμών, στην περίπτωση δηλαδή που ένας αστέρας διαθέτει συνοδό. Η απώλεια μάζας μέσω αστρικού ανέμου, η μεταφορά μάζας μέσω του σημείου L1, η απώλεια στροφορμής εξαιτίας της μαγνητικής πέδησης, της βαρυτικής ακτινοβολίας αλλά και της απώλειας μάζας μέσω του σημείου L2 αποτελούν μηχανισμοί που αναπτύχθηκαν λεπτομερώς. Επίσης εξετάστηκε η παλιρροϊκή αλληλεπίδραση μέσω του μηχανισμού της τυρβώδους διάχυσης (Zahn J.-P. 1977, A&A, 57, 383) και μέσω του μηχανισμού κυκλοφορίας Ekman (Tassoul J.-L. & Tassoul M. 1992, ApJ, 395, 259). Στο τέλος του κεφαλαίου παρατίθενται και σχολιάζονται οι γενικευμένες εξισώσεις στροφορμής που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν υπό την παρουσία των πιο πάνω μηχανισμών.

Το *πέμπτο κεφάλαιο* συγκεντρώνει το κύριο μέρος της ερευνητικής μελέτης της διατριβής με την πλήρη ανάπτυξη της προτεινόμενης μεθοδολογίας. Κάθε βήμα της νέας προσέγγισης αξιολογείται και υποστηρίζεται αναλυτικά, ενώ εξετάζεται η ευαισθησία της κάτω από διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Η γενικότερη εφαρμογή της αφορά όλους τους μακροχρόνιους μηχανισμούς που παρουσιάστηκαν στο τέταρτο κεφάλαιο. Προσδιορίζονται αναλυτικές εκφράσεις της τροχιακής περιόδου και των συναρτήσεων εκείνων που οφείλουν να διαμορφώνουν το αντίστοιχο διάγραμμα O-C (συνθετικά διαγράμματα) κάτω από την επίδραση του εκάστοτε μηχανισμού. Κάτω από την επιλογή συγκεκριμένης στάθμης θορύβου, εκτιμώνται τα κρίσιμα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα μετά τα οποία ο κάθε μηχανισμός (ξεχωριστά) καθίσταται ανιχνεύσιμος. Παράγονται επίσης απλές μαθηματικές σχέσεις μέσα από τις οποίες κρίσιμες παράμετροι του εκάστοτε μηχανισμού μπορούν να εκτιμηθούν, ενώ εξετάζονται συνθήκες αντιστάθμισης μεταξύ δύο ή και περισσότερων μηχανισμών οι οποίες τελικά οδηγούν στο χρονικό αμετάβλητο της περιόδου.

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι σε συστήματα με μέλη ηλιακού τύπου και τυπική στάθμη θορύβου των 0.01 d, ο ρυθμός απώλειας μάζας μπορεί να ανιχνευθεί μέσα σε 33 μόλις χρόνια εφόσον ο αντίστοιχος ρυθμός είναι τουλάχιστον ίσος με 10^{-8} $M_{\odot}$/yr, ενώ όταν πρόκειται για μεταφορά μάζας μεταξύ των μελών ενός συστήματος με λόγο μαζών 0.75, το αντίστοιχο χρονικό διάστημα ανέρχεται στα 86 χρόνια. Όμοια μεθοδολογία στην περίπτωση της μαγνητικής πέδησης οδηγεί σε χρονικά διαστήματα τα οποία κυμαίνονται από 70 μέχρι μερικές εκατοντάδες χρόνια όταν πρόκειται για συστήματα μέσης και βραχείας περιόδου αντίστοιχα. Αντίθετα, η βαρυτική ακτινοβολία είναι ο μόνος μηχανισμός που αδυνατεί να διαμορφώσει διαγράμματα O-C συστημάτων ηλιακού τύπου, καθώς απαιτεί παρατηρησιακά δεδομένα σε χρονικό βάθος της τάξης των 3000 ετών. Η απώλεια μάζας και στροφορμής μέσω του σημείου L2 από την άλλη, αποδεικνύεται ένας μηχανισμός περισσότερο αποτελεσματικός και, ως εκ τούτου, πιο εύκολα ανιχνεύσιμος. Αν και η παρουσία του συγκεκριμένου μηχανισμού αναμένεται σπάνια, είναι χαρακτηριστικό ότι ρυθμοί απώλειας μάζας της τάξης των 10^{-8} $M_{\odot}$/yr απαιτούν δύο μόλις δεκαετίες παρατηρήσεων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται επίσης εφαρμογή της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο σε επτά αποχωρισμένα διπλά συστήματα (UV Leo, ER Vul, YY Gem, CV Boo, DU Leo, HS Hya και WZ Oph). Πρόκειται για συστήματα με μέλη μεταγενέστερων φασματικών τύπων τα οποία διαθέτουν διαγράμματα O-C με μεγάλο πλήθος δεδομένων και χρονικής έκτασης πολλών δεκαετιών ώστε να διασφαλιστεί η αξιόπιστη ανάλυσή τους. Στα δύο πρώτα (UV Leo, ER Vul) παρατηρείται αύξηση της τροχιακής περιόδου η οποία εξηγείται άμεσα στα πλαίσια της απώλειας μάζας. Τα πέντε επόμενα (YY Gem, CV Boo, DU Leo, HS Hya, WZ Oph) δεν παρουσιάζουν καμία ένδειξη μεταβολής της περιόδου τους, κάτι το οποίο εξηγείται με επιτυχία κάτω από τη συνδυασμένη δράση της απώλειας μάζας και της μαγνητικής πέδησης.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με τη συγγραφή του *έκτου κεφαλαίου* στο οποίο πραγματοποιείται μια σύντομη αναδρομή σε κάθε ένα από τα προηγούμενα κεφάλαια ξεχωριστά ώστε να αναδειχθεί με λεπτομέρεια η συμβολή της εκάστοτε μελέτης που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια εκπόνησης του παρόντος ερευνητικού έργου. Παρατίθεται ένας σύντομος απολογισμός και σχολιασμός των αποτελεσμάτων, παρουσιάζονται συνοπτικά τα τελικά συμπεράσματα, καθώς και τα επιχειρήματα υποστήριξης πρωτοτυπίας της διατριβής, ενώ προτείνονται ορισμένες προτάσεις μελλοντικής έρευνας για τη συνέχιση του παρόντος θέματος.

Συμπληρωματικά, έχουν προστεθεί πέντε παραρτήματα τα οποία θεωρήσαμε ότι είναι απαραίτητα ώστε να περιοριστεί το ενδεχόμενο αδιευκρίνιστων σημείων στην πορεία της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Στο *πρώτο παράρτημα* λοιπόν παρατίθεται μια λεπτομερής περιγραφή του κώδικα `BootMin`, γραμμένο σε γλώσσα `R` (v.2.6.1), ο οποίος αποτελεί υλοποίηση της μεθόδου προσδιορισμού του χρόνου ενός ελαχίστου η οποία προτάθηκε και παρουσιάστηκε στην πέμπτη ενότητα του δεύτερου κεφαλαίου. Στο *δεύτερο παράρτημα* προσδιορίζεται με αναλυτικό τρόπο το σφάλμα διακριτοποίησης που προέρχεται κατά τη μετάβαση από το διακριτό καθεστώς περιγραφής των διαγραμμάτων O-C στο αντίστοιχο συνεχές. Το σφάλμα αυτό είναι μικρό αλλά αναπόφευκτο, καθώς η πληροφορία η οποία λαμβάνεται μέσω της ανάλυσης των διαγραμμάτων O-C δεν καλύπτει τις μεταβολές που υπεισέρχονται μεταξύ των ελαχίστων.

Στο *τρίτο παράρτημα* προσδιορίζεται ο συντελεστής του τεταρτοβάθμιου όρου του πολυωνύμου MacLaurin το οποίο περιγράφει στη γενική του μορφή ένα διάγραμμα O-C κάτω από γνωστούς μηχανισμούς που μεταβάλλουν την τροχιακή περίοδο, ενώ το *τέταρτο παράρτημα* είναι επικεντρωμένο στον αναλυτικό προσδιορισμό ορισμένων συνθετικών συναρτήσεων που περιγράφουν τα διαγράμματα O-C σε κλειστή μορφή εφόσον κάτι τέτοιο είναι βέβαια εφικτό. Τόσο το τρίτο όσο και το τέταρτο παράρτημα εντάχθηκαν στην παρούσα διατριβή για λόγους πληρότητας. Τέλος, οι υποψήφιοι μηχανισμοί και ο τρόπος με τον οποίο διαμορφώνουν ένα διάγραμμα O-C σε βραχυχρόνιες κλίμακες αποτελούν αντικείμενο του *πέμπτου παραρτήματος*. Αν και δεν αφορούν άμεσα τους στόχους της διατριβής, οι μηχανισμοί αυτοί δεν θα μπορούσαν να εκλείπουν από το παρόν πόνημα, έστω και με τη μορφή μιας πολύ σύντομης παρουσίασης.

Summary

Without a doubt, binary stars offer the opportunity of setting and evaluating models dealing with stellar structure and evolution through a variety of methods that enlighten new observational information. Taking advantage of the well-studied two-body problem and the huge potential of precise photometric and spectroscopic measurements, the accurate determination of important physical parameters is made available. Besides, the way that various physical processes act in binary systems can be disentangled by interpreting their orbital period changes. Especially in the case of eclipsing binary systems, this may happen by monitoring their eclipse timing variations, i.e. through the precise determination of times of light minima occurring when one star passes in front of its companion. More precisely, imposing a model of constant period (i.e. a linear ephemeris), the expected time of any minimum can be calculated and compared with its respective observed time, provided that the latter is known. The analysis of the inferred residuals, or equivalently the analysis of their *O-C* diagrams as historically this term has prevailed, enables the accurate estimation of the pace at which the period changes, allowing in this way the assessment of any mechanism proposed to act in the system.

In this context, during the last decades *O-C* diagrams analysis attained a progressively important role since they enabled the description of the recent orbital period history of binary systems. This orbital history is available in form of the orbital period function $P(E)$, where E is the integer orbital cycle (i.e. the temporal variable). Hence, for most of the eclipsing binaries, $P(E)$ function is a carrier of dynamic information, as opposed to static information provided by the light-curve analysis. In consequence, the $P(E)$ function can be used in order to gain information about the most important parameters of the physical mechanisms underlying the observed orbital variations. However, the parametric description of the entangled mechanisms and the knowledge of the way that each of them modulates the *O-C* differences is required in order this task to be successful.

In the aforementioned framework, the present doctoral thesis aims towards the way that specific physical mechanisms -acting individually or combined- modulate the *O-C* differences and, consequently, fix the morphology of the *O-C* diagrams. The *first goal* this study aims to achieve is the derivation of analytical expressions (to be referred as *synthetic O-C diagrams*) describing the variations of the *O-C* differences under the action of individual physical processes. Each of these synthetic *O-C* diagrams actually represents a pure signal that finally becomes observable after its embedment in a white noise background (mainly caused by errors in times of minimum light detection and in solar-type activity). Since the time windows spanned the *O-C* diagrams are limited, we specify in a second step, the minimum time interval (i.e. number of orbital cycles) over which a pure *O-C* signal could be observable. To realize this task, we have developed the appropriate methodology via which the

minimum required time span (with observations) becomes known in order each examined mechanism to be measurable by means of *O-C* diagrams analysis. The way that these intervals are modulated by crucial factors such as the noise level, the orbital period and the intensity of the examined mechanisms, is also investigated.

The *second goal* concerns the extent at which very common presumptions, adopted so far in literature, are reliable (e.g. the parabolic trend as a signature of long-term mechanisms). The proposed approach has also led to useful and simple mathematical relations through which important physical parameters, regarding the involved mechanisms, are rendered known by means of *O-C* diagrams analysis. Finally, the modulation of *O-C* diagrams under the combined action of properly parameterized physical mechanisms is examined in the aforementioned way. The conditions, under which the examined processes with opposite direction counterbalance each other, are also presented. Especially in the case of detached binaries, we stress our efforts to elucidate whether or not the impact of wind-driven magnetic braking in period variations is measurable with certainty since it has been a subject of debate for long time. It is revealed that this is not only feasible but also capable of compensating the effects of mass loss, locking the orbital period invariable in time.

The observational support of this thesis is based on times of minima which are provided from long-time observed binaries and cover temporal windows of the order of a century. New times of minima were also obtained from the Kryonerion Astronomical Station (1.2m, National Observatory of Athens, Korinth, Greece, 78 nights) and the Gerostahopoulion Observatory (0.4m, National and Kapodistrian University of Athens, Athens, Greece, 50 nights) as part of an observational program properly organized for the needs of the present Ph.D. thesis. A thorough statistical study was also performed in order to elucidate the credibility that the methods of minimum time determination offer under certain conditions and the factors that affect their precision, leading even to erroneous results.

The thesis is divided into six chapters and five appendices. The *first chapter* comprises a brief description of the basic properties of binary systems and the criteria under which these can be classified. The Roche model is presented in detail since the last four decades it has been proven to be the most successful in describing the binary geometry and the extent at which the two components interact each other. Besides, the fundamental photometric and spectroscopic techniques with which we are able to solve light and radial velocities curves, so that we determine the orbital parameters of a binary and the absolute parameters of their members, is also included. The chapter ends with a section dedicated to the evolution of binary systems regarding the mass of the primary star.

The *second chapter* deals with the determination of times of minimum, the respective methods developed so far and how the results are expected to differ depending on the minimum profile. After the presentation of the most commonly used methods, a short review on comparative studies found in literature is given, analyzing the sources of noise that may contaminate a photometric time-series leading to misdetermination of the real time of minimum. The degree at which each factor affects the procedure is thoroughly examined both theoretically and practically. In particular, a new statistical study based on 114 times of minima is presented that concerns two short-period eclipsing binaries (CG Cyg and RT And). The analysis is performed by means of the one-way ANOVA and aims to the evaluation of the efficiency that traditional methods, such as the Kwee & van Woerden (1956, BAN, 12, 327) and polynomial regression (Breinhorst R., Pfeiderer J., Reinhardt M. & Karimie M. T. 1973, A&A, 22, 239), present when they are implemented in minima with asymmetric profile among different filters.

Finally, a new method for times of minima determination is introduced. It is an extension of the polynomial regression which is supported by the computational technique of bootstrap resampling and, as a consequence, it is not based on least-squares estimators anymore. This method constitutes our proposal for the determination of a time of minimum, improving the accuracy when phenomena such as heteroscedasticity and divergence from the Normal distribution appear, usually accompanying samples of small size. After the presentation of its advantages against the traditional techniques, it is implemented in a large number of minima through a fully automated code which is designed and provided in Appendix I.

The *third chapter* copes with the construction and the properties of *O-C* diagrams and the way through which they connect with the respective period diagrams as well. Emphasis is given in the presence of noise which may emanates either from time of minimum light misdeterminations (usually caused by asymmetric minimum profiles and low-quality observations) or from heterogeneities in the radiation field of the stellar surfaces (usually caused by solar-type magnetic activity). The basic quantities that define a typical time-series and the most useful methods with which we model and forecast the current and the future values, respectively, are then given. The criteria under which we evaluate the competitive models and we eventually choose the optimum one are also presented. The polynomial regression of A. Kalimeris, H. Rovithis-Livaniou & P. Rovithis (1994, A&A, 282, 775) and the stochastic approach of C. Koen (1996, MNRAS, 283, 471) are finally outlined as the two most widely used methods for *O-C* diagrams analysis.

The *fourth chapter* concerns the presentation of the fundamental physical mechanisms expected to act in binary systems. After a short description of those mechanisms that lead to short-term observed period variations, an analytical presentation of the physical processes that cause secular period changes and shape *O-C* diagrams in long-term time-scales then follows. The physical processes, examined in this thesis, include wind-driven mass loss and RLOF transfer, tidal interaction between the two components, magnetic braking and gravitational radiation. As far as the mass loss mechanism is regarded, thermal stellar wind released either by a non-rotating star or by a rotating one under the presence of magnetic field, is thoroughly examined. The pace at which mass is escaped from the system for each case is given as well. We focus on the angular momentum loss parameterization via magnetic braking adopting three different models. These models are properly modified taking into consideration internal angular momentum transport and recent observational constraints, emerged by the study of many young clusters to date, in order to provide useful information about the angular momentum evolution of single stars (Vilhu O.

1982, A&A, 109, 17, van't Veer F. & Maceroni C. 1989, A&A, 220, 128 and Allain P. 1998, A&A, 333, 629).

The way the orbital period of a binary system is finally modulated under the regime where all the previous mechanisms act (individually or combined) is explored at the end of this chapter. Wind driven mass loss, RLOF mass transfer/loss through the L1 and the L2 point respectively, angular momentum loss due to magnetic braking and gravitational radiation are some mechanisms that were developed in detail. The tidal friction via the mechanism of turbulent diffusion (Zahn J.-P. 1977, A&A, 57, 383) and via Ekman circulation (Tassoul J.-L. & Tassoul M. 1992, ApJ, 395, 259) is presented as well. The most powerful generalized angular momentum equations are finally presented with further instructions on how they are simplified for each case.

The credibility of *O-C* diagrams analysis is investigated in the *fifth chapter* when long-term processes are examined in binary systems. The morphology of both period and *O-C* diagrams is thoroughly explored when each of the mechanisms, presented in the previous chapter, drives the orbital evolution of late-type mainly binaries. Conditions that determine which process dominates are specified. Our objective is the determination of the minimum time intervals within which observations are expected to span in order a physical mechanism to be detectable by means of *O-C* diagrams analysis. Computations for various values accounting for the noise level and the orbital period are performed in order to ascertain the sensitivity of the inferred intervals on these factors. Generalized angular momentum relations, governing the orbital evolution of a binary system, are set and solved analytically in order to determine in a closed form the period and the function expected to represent the respective *O-C* variations. Semi-empirical relations adapting mass loss and magnetic braking processes for single cool stars are adopted and properly modified in order to be consistent with the latest observational constraints. A standard Newton-Raphson numerical procedure is then employed to estimate the minimum temporal range over which a specific mechanism is rendered measurable.

It is revealed that mass loss/exchange rates comparable or greater than 10^{-9} $M_{\odot}$/yr, are measurable under typical noise levels of the *O-C* diagrams when data spanning over a century. Magnetic braking was proven to be very sensitive on the orbital period and on the braking law adopted for inference. It is expected to be detectable in current *O-C* diagrams of very short-period binaries only, otherwise it needs at least two centuries of observations so that its effects being safely confirmed. Both wind driven mass loss and magnetic braking processes are able to drive the orbital evolution of short-period detached binaries ($P_{orb} \leq 1$ d) in amounts traced in human timescales. On the other hand, gravitational radiation turns out to be too weak to cause measurable period variations. There are also special conditions under which their strength is equalized, locking the orbital period invariable in time. Several short-period RS CVn-type binaries (i.e. YY Gem, CV Boo, DU Leo, HS Hya and WZ Oph), where this regime is expected to prevail, are also examined.

The thesis is completed with the *sixth chapter* in which a short summary of the final conclusions is developed. The results are discussed and some simple thoughts for a future work are proposed.

Additionally, five annexes have been added for complementary reasons. More particularly, the *first appendix* presents the code `BootMin` in detail. We remind that `BootMin` was written in `R` (v. 2.6.1) and was developed as a useful tool for the direct implementation of the computational method proposed in the second chapter concerning the determination of a time of minimum. The *second appendix* deals with the strict mathematical procedure that leads to the exact determination of the discretization error arising by the transition from the discrete description scheme of the *O-C* diagrams to the continuous counterpart. In the *third appendix*, the coefficient of the fourth order term that a MacLaurin polynomial contains to represent the morphology of an *O-C* diagram in its general form is determined in an analytical way. The *fourth appendix* focuses on the mathematical process by means of which analytical expressions of the period function and the synthetic function that represents an *O-C* diagram can be derived. Finally, the *fifth appendix* outlines the way that short-term physical mechanisms can modulate *O-C* diagrams. Although these processes do not directly related to principal objectives of the present thesis, they could not be absent from this dissertation, even in the form of a very brief review.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες…..i
Περίληψη…..v
Summary…...x
Περιεχόμενα…..xv

Πρόλογος...1

<u>Κεφάλαιο Ι. Διπλά Συστήματα Αστέρων</u>

1. ***Βασικές Κατηγορίες***..4
1.1 Ταξινόμηση με βάση τον Τρόπο Παρατήρησης.......................................4
1.2 Ταξινόμηση με βάση τη Μορφή της Καμπύλης Φωτός...........................5
1.3 Ταξινόμηση με βάση τη Γεωμετρία Roche......…......................................7
1.3.1 Μοντέλο Roche..7
1.3.2 Ταξινόμηση Στενών Διπλών Συστημάτων...9
1.4 Μικτές Ταξινομήσεις (κατά GCVS)..12

2. ***Περιγραφή Φυσικών Χαρακτηριστικών***..13
2.1 Χρωμοσφαιρικά Δραστήρια Διπλά Συστήματα......................................13
2.2 Κατακλυσμικοί Μεταβλητοί Αστέρες...15
2.3 Συμβιωτικοί Μεταβλητοί Αστέρες..16
2.4 Συμπαγή Διπλά Συστήματα Εκπομπής Ακτίνων Χ...............................18

3. ***Προσδιορισμός Φυσικών Παραμέτρων***..20
3.1 Φαινόμενα Εγγύτητας...20
3.2 Φωτομετρικές Παράμετροι..22
3.3 Προγράμματα Φωτομετρικής Ανάλυσης...27
3.4 Φασματοσκοπικές Παράμετροι...33
3.4.1 Καμπύλες Ακτινικών Ταχυτήτων...33
3.4.2 Η Τεχνική της Διασταυρωμένης Συσχέτισης...35
3.4.3 Πηγές Συστηματικών Σφαλμάτων..37
3.5 Απόλυτες και Τροχιακές Παράμετροι...38
3.5.1 Σύστημα Εκλειπτικά και Φασματοσκοπικά Διπλό με Διπλές Γραμμές (SB2).....39
3.5.2 Σύστημα Εκλειπτικά και Φασματοσκοπικά Διπλό με Μονές Γραμμές (SB1)......40
3.5.3 Σύστημα Μη Εκλειπτικά αλλά Φασματοσκοπικά Διπλό με Μονές Γραμμές......41
3.5.4 Προσδιορισμός Περιόδου από τις Ακτινικές Ταχύτητες.....................................42

4. ***Εξέλιξη Διπλών Αστρικών Συστημάτων***...47
4.1 Συμπεριφορά του Δότη Αστέρα...47
4.2 Συμπεριφορά του Δέκτη Αστέρα...48
4.3 Τελικές Εξελικτικές Καταστάσεις...49
4.3.1 Πρωτεύοντας Αστέρας Μάζας Μικρότερης των 8 $M_{\odot}$...49
4.3.2 Πρωτεύοντας Αστέρας Μάζας 8 ή 9 $M_{\odot}$...50
4.3.3 Πρωτεύοντας Αστέρας Μάζας 10 $M_{\odot}$...50
4.3.4 Πρωτεύοντας Αστέρας Μάζας Μεγαλύτερης των 10 $M_{\odot}$...50

Κεφάλαιο ΙΙ. Προσδιορισμός και Ακρίβεια Χρόνου Ελαχίστου

1. ***Χρόνος Ελαχίστων***...52
1.1 Καθορισμός και Ταξινόμηση...53
1.2 Μέθοδοι Προσδιορισμού...54

2. ***Αναλυτική Περιγραφή Βασικών Μεθόδων***...58
2.1 Η Μέθοδος Kwee & van Woerden...58
2.2 Η Μέθοδος των Breinhorst et al. (Παλινδρόμησης)...59

3. ***Αβεβαιότητα και Διασπορά Παρατηρήσεων***...63
3.1 Πηγές Θορύβου...63
3.1.1 Πλήθος Σημείων...63
3.1.2 Βαθμός Ασυμμετρίας...64
3.1.3 Διάστημα Φάσεων...65
3.1.4 Κλίμακα Φωτομετρικών Δεδομένων...67
3.2 Επίδραση Εξοπλισμού και Επεξεργασίας Παρατηρήσεων...67

4. ***Τεχνικές Επαναλαμβανόμενης Δειγματοληψίας***...71
4.1 Αναδειγματοληψία Επανάθεσης (Bootstrap Resampling)...71
4.2 Αναδειγματοληψία Αποκοπής (Jackknife Resampling)...74
4.3 Μεροληψία...75
4.4 Διαστήματα Εμπιστοσύνης...76
4.5 Εφαρμογή στην Πολυωνυμική Παλινδρόμηση...79
4.6 Σύγκριση και Αξιολόγηση των Τεχνικών Αναδειγματοληψίας...80

5. ***Νέοι Χρόνοι Ελαχίστων***...82
5.1 Διεξαγωγή Παρατηρήσεων...83
5.2 Επεξεργασία Παρατηρήσεων...86
5.3 Μια Νέα Μέθοδος Προσδιορισμού Χρόνων Ελαχίστων...87
5.4 Μακροχρόνια Μελέτη των Συστημάτων RT And και CG yg...89
5.5 Ο Κώδικας `BootMin`...98

6. ***Στατιστική Αξιολόγηση Μεθόδων Προσδιορισμού***..105
6.1 Διερεύνηση Αξιοπιστίας Μεθόδου KvW..105
6.2 Διερεύνηση Αξιοπιστίας της Νέας Μεθόδου...110
6.3 Διαφοροποίηση Χρόνου Ελαχίστων σε Πολλά Φίλτρα....................................112
6.4 Συμπεράσματα...123

Κεφάλαιο III. Διαγράμματα O-C

1. ***Κατασκευή και Ιδιότητες***..126
1.1 Εξίσωση Εφημερίδας...126
1.2 Συσχέτιση Διαγραμμάτων O-C και Μεταβολών Περιόδου...............................128
1.3 Ιδιότητες των Διαγραμμάτων O-C...130

2. ***Θόρυβος στα Διαγράμματα O-C***..133
2.1 Πηγές Θορύβου...133
2.2 Επίδραση Παρατηρησιακού Θορύβου...134
2.3 Απεικόνιση Αστρικών Φωτοσφαιρών..138
2.4 Επίδραση Φωτομετρικού Θορύβου...141

3. ***Ανάλυση Χρονοσειρών***..144
3.1 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί...144
3.2 Αυτοσυνδιακύμανση και Αυτοσυσχέτιση..145
3.3 Σύγχρονες Μέθοδοι Ανάλυσης Χρονοσειρών...149
3.4 Κριτήρια Επιλογής Υποδειγμάτων...152
3.5 Μέτρα Αξιολόγησης Καλής Προσαρμογής...154
3.6 Μέτρα Αξιολόγησης Περιγραφής...155

4. ***Μέθοδοι Ανάλυσης Χρονοσειρών O-C***...157
4.1 Η Προσέγγιση των Kalimeris et al. (Παλινδρόμησης).....................................157
4.2 Η (Στοχαστική) Προσέγγιση των Koen & Lombard..159

Κεφάλαιο IV. Μηχανισμοί Μεταβολής της Στροφορμής των Αστέρων

1. ***Δομή των Αστέρων***...162
1.1 Αστέρες Μεταγενέστερων Φασματικών Τύπων..163
1.2 Αστέρες Προγενέστερων Φασματικών Τύπων...164

2. ***Απώλεια Μάζας μέσω Αστρικού Ανέμου***..165
2.1 Αστρικός Άνεμος Θερμικής Προέλευσης..165
2.2 Αστρικός Άνεμος Μη Θερμικής Προέλευσης..170

2.2.1 Άνεμος Οδηγούμενος από Γραμμές....171
2.2.2 Άνεμος Οδηγούμενος από Σκόνη....172
2.2.3 Άνεμος Οδηγούμενος από Μαγνητοακουστικά Κύματα....173
2.3 Ισόθερμος Άνεμος χωρίς Μαγνητικό Πεδίο και Περιστροφή....174
2.4 Ισόθερμος Άνεμος με Μαγνητικό Πεδίο και Περιστροφή....177
2.4.1 Θεμελιώδεις Εξισώσεις και Διατηρήσιμες Ποσότητες....177
2.4.2 Προβλεπόμενος Ρυθμός Απώλειας Μάζας....183
2.5 Παραμετροποίηση Απώλειας Μάζας....185
2.5.1 Ρυθμός Απώλειας Μάζας σε Ψυχρούς Νάνους Αστέρες....185
2.5.2 Ρυθμός Απώλειας Μάζας σε Ψυχρούς Εξελιγμένους Αστέρες....188

3. ***Απώλεια Στροφορμής μέσω Αστρικού Ανέμου***....190
3.1 Παραμετροποίηση Μαγνητικής Πέδησης....190
3.2 Νόμοι Πέδησης και Συμβατότητα....194
3.3 Παρατηρησιακά Δεδομένα και Βαθμονόμηση....197
3.3.1 Προσαρμοργή Μοντέλων χωρίς Διαφορική Περιστροφή....198
3.3.2 Προσαρμοργή Μοντέλων με Διαφορική Περιστροφή....200

4. ***Μεταβολή Στροφορμής σε Διπλά Συστήματα Αστέρων***....212
4.1 Απώλεια Μάζας μέσω Αστρικού Ανέμου....212
4.2 Μεταφορά Μάζας και Στροφορμής μέσω του Σημείου L1....215
4.3 Απώλεια Στροφορμής μέσω Μαγνητικής Πέδησης....215
4.4 Απώλεια Στροφορμής μέσω Βαρυτικής Ακτινοβολίας....218
4.5 Απώλεια Μάζας και Στροφορμής μέσω του Σημείου L2....219
4.6 Μεταφορά Στροφορμής μέσω Παλιρροϊκής Τριβής....224
4.6.1 Μηχανισμοί Υποστήριξης Υδροστατικών Παλιρροιών....227
4.6.1.1 Μηχανισμός Ιξώδους Διάχυσης....227
4.6.1.2 Μηχανισμός Ακτινοβολιακής Διάχυσης....229
4.6.1.3 Μηχανισμός Τυρβώδους Διάχυσης....230
4.6.1.4 Μηχανισμός Κυκλοφορίας Ekman....231
4.6.2 Μηχανισμοί Υποστήριξης Δυναμικών Παλιρροιών....233
4.6.2.1 Μηχανισμός Ακτινοβολιακής Διάχυσης....233
4.6.2.2 Μηχανισμός Ανάπτυξης Συντονισμών (Παλιρροϊκών-Βαρυτικών Κυμάτων)...234
4.6.3 Παρατηρησιακά Δεδομένα....236
4.6.4 Διαμόρφωση Τροχιακής Περιόδου....239
4.7 Γενικευμένες Εξισώσεις Στροφορμής....241

Κεφάλαιο V. Συνθετικά Διαγράμματα O-C

1. ***Θεμελιώδεις Εξισώσεις του Προβλήματος***....245

2. ***Προτεινόμενη Μαθηματική Προσέγγιση***....249

2.1 Ανιχνευτική Απόδοση Διαγραμμάτων O-C..250
2.2 Πολυωνυμική Περιγραφή Συνθετικών Διαγραμμάτων....................................252
2.3 Ευαισθησία Μεθόδου στις Αρχικές Συνθήκες..256

3. ***Μελέτη Φυσικών Μηχανισμών***..257
3.1 Απώλεια Μάζας μέσω Αστρικού Ανέμου..258
3.2 Μεταφορά Μάζας και Στροφορμής μέσω του Σημείου L1...............................265
3.3 Απώλεια Στροφορμής μέσω Μαγνητικής Πέδησης..268
3.4 Απώλεια Στροφορμής μέσω Βαρυτικής Ακτινοβολίας.....................................278
3.5 Απώλεια Μάζας και Στροφορμής μέσω του Σημείου L2..................................282

4. ***Συνδυασμένη Δράση Φυσικών Μηχανισμών***...286
4.1 Απώλεια Μάζας και Στροφορμής μέσω Αστρικού Ανέμου..............................286
4.2 Μεταφορά-Απώλεια Μάζας και Στροφορμής μέσω L1 και L2.........................290
4.3 Συνδυασμένη Δράση Όλων των Εξεταζόμενων Μηχανισμών..........................295
4.4 Εφαρμογή σε Πραγματικά Διπλά Συστήματα Αστέρων...................................297

Κεφάλαιο VI. Συμπεράσματα και Μελλοντική Έρευνα

1. ***Συμπεράσματα και Συνεισφορά της Διατριβής***..310

2. ***Ανοικτά Θέματα και Μελλοντική Έρευνα***..317

Παράρτημα I. *Ο Κώδικας* `BootMin`..321
Παράρτημα II. *Σφάλμα Διακριτοποίησης*...331
Παράρτημα III. *Συντελεστής Τεταρτοβάθμιου Όρου Συνθετικών Συναρτήσεων*.......335
Παράρτημα IV. *Αναλυτικός Προσδιορισμός Συνθετικών Συναρτήσεων*...................337
Παράρτημα V. *Βραχυχρόνιοι Μηχανισμοί και Διαμόρφωση Διαγραμμάτων O-C*.....342

Βιβλιογραφία...350

Πρόλογος

Τα διπλά συστήματα αστέρων αποτελούν ένα ιδιαίτερα γοητευτικό αντικείμενο μελέτης της Αστροφυσικής το οποίο είναι πάνοτε ανοικτό προς έρευνα εξαιτίας της πληθώρας των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα σε αυτά. Η ακρίβεια που προσφέρουν οι παρατηρήσεις των συστημάτων αυτών είναι αξιοσημείωτη και οι πληροφορίες που λαμβάνονται ανεκτίμητες. Ειδικότερα για τα διπλά εκλειπτικά συστήματα, η τροχιακή περίοδος αποτελεί χωρίς αμφιβολία μια από τις παραμέτρους η οποία καθίσταται εύκολα γνωστή, ενώ οι μεταβολές της μπορούν να αποτυπωθούν παρακολουθώντας τις αποκλίσεις από τις αναμενόμενες χρονικές στιγμές κατά τις οποίες λαμβάνουν χώρα οι εκλείψεις.

Η άμεση και δυναμική εικόνα της τροχιακής εξέλιξης αλλά και των μηχανισμών που την υποκινούν έχει προσελκύσει πολλούς ερευνητές στο χώρο της ανάλυσης των διαγραμμάτων O-C. Παράλληλα όμως έχει αφήσει σημεία τα οποία δεν έχουν πλήρως διευκρινιστεί και χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης. Τα τελευταία μάλιστα χρόνια, η ανάλυση των διαγραμμάτων O-C έχει ενταχθεί στο πεδίο αναζήτησης πλανητών εκτός του ηλιακού συστήματος, γεγονός που καθιστά τη διαλεύκανση όλων των ενδεχόμενων σκοτεινών σημείων επιτακτική.

Πολλά από τα αδιευκρίνιστα σημεία λειτούργησαν ως κίνητρο για την εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής η οποία έρχεται να καλύψει σημαντικά κενά στον τρόπο με τον οποίο παραδοσιακά χειριζόμαστε ένα διάγραμμα O-C. Το *πρώτο* από αυτά αφορά την αποτελεσματικότητα των διαγραμμάτων O-C ως μέσο ανίχνευσης ενός μακροχρόνιου μηχανισμού. Με άλλα λόγια, το ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί αφορά τα χρονικά όρια μέσα στα οποία η διαμόρφωση των διαφορών O-C μπορεί να γίνει μετρήσιμη για μια συγκεκριμένη στάθμη θορύβου αλλά και τις κρίσιμες εκείνες παραμέτρους που ευνοούν ή δυσχαιρένουν το βαθμό αποδοτικότητας. Ως παράδειγμα αναφέρουμε τους μηχανισμούς απώλειας στροφορμής μέσω της μαγνητικής πέδησης και της βαρυτικής ακτινοβολίας για τους οποίους δεν υπάρχουν αναφορές στη βιβλιογραφία που να εξακριβώνουν με σαφήνεια το ενδεχόμενο διαμόρφωσης ενός διαγράμματος O-C προερχόμενης από τη δράση των μηχανισμών αυτών.

Το *δεύτερο* ασαφές σημείο το οποίο αξίζει ιδιαίτερης προσοχής αφορά την παραδοσιακή παραβολική αναπαράσταση όλων των μακροχρόνιων μεταβολών που παρατηρούνται σε ένα διάγραμμα O-C. Ποτέ μέχρι τώρα δεν είχε διευκρινιστεί εάν η παραβολική διαμόρφωση έχει μοναδικό χαρακτήρα και αν τελικά προκύπτει ως αποτέλεσμα τοπικής ισχύος μιας γενικότερης και περισσότερο πολύπλοκης μορφολογίας. Μια από τις καινοτομίες της παρούσας διδακτορικής διατριβής αφορά τον αναλυτικό προσδιορισμό συναρτήσεων που περιγράφουν σε κλειστή μορφή ένα διάγραμμα O-C εξαιτίας της παρουσίας ενός ή συνδυασμού φυσικών μηχανισμών, καθώς και την αξιολόγηση της επάρκειας που η επαγόμενη παραβολική αναπαράσταση επιφέρει.

Το *τρίτο* και τελευταίο παράδοξο σημείο αφορά ένα σημαντικό αριθμό διπλών εκλειπτικών αστρικών συστημάτων με χρωμοσφαιρικά δραστήρια μέλη τα οποία χαρακτηρίζονται από διαγράμματα O-C που δεν παρουσιάζουν καμία μεταβολή, τουλάχιστον μέσα στα όρια που ο θόρυβος επιτρέπει ενδεχόμενες μεταβολές να γίνονται αντιληπτές. Η ομάδα αυτή αποτελεί εξαίρεση μέσα στο πλήθος των βραχυπερίοδων εκείνων συστημάτων των οποίων τα μέλη είναι αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων με παρόμοια φυσικά χαρακτηριστικα και τα οποία διαθέτουν διαγράμματα O-C με αξιοπρόσεκτη μορφολογία. Το γεγονός αυτό οδήγησε στην παραμέληση ανάπτυξης λεπτομερών αναλύσεων σχετικά με τις αιτίες που μπορούν να επιφέρουν το χρονικό αμετάβλητο της τροχιακής περιόδου, σιωπηρά υποθέτοντας την απουσία φυσικών μηχανισμών. Προς την κατεύθυνση αυτή, εξετάσαμε τις συνέπειες που αναμένεται να έχει η δράση θεμελιωδών μηχανισμών που αφορούν την εξέλιξη διπλών συστημάτων μέσω της ανάπτυξης O-C διαφορών και αποδείξαμε ότι, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, πολλοί από τους εξεταζόμενους μηχανισμούς είναι ανταγωνιστικοί και ικανοί να εξουδετερωθούν μεταξύ τους.

Η εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής, αν και αποδείχθηκε αρκετά επίπονη, πραγματοποιήθηκε με πολύ μεράκι και έντονο προσωπικό ενδιαφέρον προς το αντικείμενο στο οποίο επικεντρώνεται. Κατά τη διάρκεια των τεσσάρων τουλάχιστον ετών που απαιτήθηκαν ώστε να ολοκληρωθεί το ερευνητικό έργο, μας δόθηκε η ευκαιρία να μελετήσουμε σε βάθος σημαντικά θέματα που αφορούν την ανάπτυξη μηχανισμών σχετικών με την αστρική δομή και εξέλιξη, καθώς και τις συνέπειες που έχουν οι μηχανισμοί αυτοί στην τροχιακή εξέλιξη ενός διπλού συστήματος αστέρων. Μας δόθηκε επίσης η ευκαιρία να ασκηθούμε στο γοητευτικό χώρο της αστρονομικής παρατήρησης και να εμβαθύνουμε στο συναρπαστικό χώρο της στατιστικής ανάλυσης και επεξεργασίας δεδομένων.

Είχαμε τη δυνατότητα να συζητήσουμε με ανθρώπους οι οποίοι έχουν μεγάλη εμπειρία στο αντικείμενο, να φωτιστούμε και να οραματιστούμε από τις σκέψεις τους αλλά και να μεταδώσουμε γνώση σε ανθρώπους που είναι νεότεροι στο χώρο. Να υϊοθετήσουμε έννοιες τις οποίες ενδεχομένως δεν θα αποδεχόμασταν προτού αναλάβουμε την ευθύνη περάτωσης της διατριβής, να υποστηρίξουμε με σθένος και έγκυρη επιχειρηματολογία την επιστημονική μας άποψη, να παραδεχθούμε λάθη και να τα διορθώσουμε. Είχαμε τη δυνατότητα να καλλιεργήσουμε τη φυσική μας διαίσθηση και να ενισχύσουμε το μαθηματικό μας υπόβαθρο.

Μας δόθηκε η ευκαιρία να αναρωτηθούμε, να αμφισβητήσουμε, να αναζητήσουμε αλλά κυρίως να εμπνευστούμε, να μοιραστούμε και να ανταλλάξουμε ιδέες. Να τις θέσουμε σε εφαρμογή γνωρίζοντας ότι το τελικό αποτέλεσμα ενδεχομένως να μην μας ανταμείψει.

Αν και η επιτυχία μιας διδακτορικής διατριβής κρίνεται αυστηρά μέσα στα εκπαιδευτικά πλαίσια και τους στόχους που θέτει ένα πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών αλλά και από το βαθμό αποδοχής του έργου που επιτελέστηκε από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα, το παρόν πόνημα εστίασε εξίσου στον τρόπο παρουσίασης των πρόσφατων εξελίξεων σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία όσο και των νέων ευρημάτων στα οποία οδήγησε. Θα αποτελούσε μεγάλη ικανοποίηση προς τον υποφαινόμενο εάν η διατριβή αυτή χρησιμοποιηθεί ως οδηγός για αναγνώστες οι οποίοι δε νιώθουν ιδιαίτερα οικείοι με τις έννοιες που απαιτεί η μελέτη των διπλών αστρικών συστημάτων. Με τη σκέψη αυτή, ευχόμαστε το τελικό αποτέλεσμα να ανταποκρίνεται στους σκοπούς που τέθηκαν και να δώσει το έναυσμα στους νεότερους για ακόμα περισσότερες παριπλανήσεις στον έναστρο ουρανό.

Νικόλαος Μ. Νανούρης

Σεπτέμβριος 2011

Κεφάλαιο Ι

ΔΙΠΛΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΣΤΕΡΩΝ

Οι μεταβλητοί αστέρες αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα αστροφυσικά εργαστήρια, καθώς πλήθος φαινομένων, τα οποία σχετίζονται με την αστρική δομή και εξέλιξη, λαμβάνουν χώρα με αποτελέσματα τα οποία είναι άμεσα παρατηρήσιμα. Τις περισσότερες φορές, τα φαινόμενα αυτά επιφέρουν μεταβολές στη (φαινόμενη) λαμπρότητα[1] των αστέρων οι οποίες γίνονται ολοένα και ευκολότερα αντιληπτές με τη συνεχή ανάπτυξη της ευαισθησίας που παρουσιάζουν οι σύγχρονοι ανιχνευτές.

Τα αίτια της μεταβλητότητας ενός αστέρα μπορεί να είναι ενδογενή, οπότε και οι αντίστοιχοι αστέρες ονομάζονται *γνήσιοι μεταβλητοί (intrinsic variables)*, αλλά και καθαρά γεωμετρικά όταν ο μεταβλητός αστέρας στην πραγματικότητα αποτελεί σύστημα δύο ή και περισσοτέρων αστέρων, οπότε και οι αντίστοιχοι μεταβλητοί ονομάζονται *γεωμετρικά μεταβλητοί (geometrical variables)*. Η τελευταία κατηγορία περιλαμβάνει τους διπλούς εκλειπτικούς αστέρες οι οποίοι μεταβάλλουν τη λαμπρότητά τους εξαιτίας των εκλείψεων που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάβαση του ενός μέλους μπροστά από το συνοδό του και το αντίστροφο. Το είδος αυτό θα μας απασχολήσει σχεδόν αποκλειστικά στην πορεία της παρούσας διατριβής.

1. Βασικές Κατηγορίες

Η μελέτη των διπλών αστρικών συστημάτων μας δίνει τη μοναδική δυνατότητα άμεσου προσδιορισμού των φυσικών παραμέτρων των μελών τους, όπως της θερμοκρασίας, της φωτεινότητας, της ακτίνας και της μάζας τους. Παράλληλα, οι αλληλεπιδράσεις των μελών τους ενισχύουν πολλές φορές φυσικούς μηχανισμούς οι οποίοι λαμβάνουν χώρα σε αυτά με αποτέλεσμα να μας δίνουν χρήσιμες πληροφορίες (π.χ. για τη δομή του εσωτερικού τους, των επιφανειακών τους σχηματισμών κ.α.) τις οποίες δύσκολα μπορούμε να εξάγουμε από τη μελέτη των απλών αστέρων.

1.1. Ταξινόμηση με βάση τον Τρόπο Παρατήρησης

Τα διπλά συστήματα αστέρων μπορούν να ταξινομηθούν σε κατηγορίες με κριτήριο τον τρόπο παρατήρησής τους. Στην περίπτωση αυτή διακρίνουμε αρχικά τα *οπτικά διπλά συστήματα (visual binaries)* στα οποία τα μέλη τους μπορούν να αναγνωριστούν το καθένα ξεχωριστά καθώς είτε οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι πολύ μεγάλες είτε βρίσκονται σχετικά κοντά μας. Τα *αστρομετρικά διπλά συστήματα (astrometric binaries)* αναγνωρίζονται με βάση μακροχρόνιες μεταβολές της θέσης

---

[1] Ο όρος λαμπρότητα, εφεξής, θα αντιστοιχεί στη φαινόμενη λαμπρότητα.

τους στην ουράνια σφαίρα ως αποτέλεσμα της κλειστής τροχιάς η οποία διαγράφεται από το κέντρο μάζας των συστημάτων αυτών. Στα *φασματοσκοπικά διπλά συστήματα (spectroscopic binaries)* παρατηρούνται μετατοπίσεις των φασματικών γραμμών των μελών εξαιτίας των ακτινικών τους ταχυτήτων, ενώ, τέλος, οι μεταβολές της λαμπρότητας είναι εκείνες που καθορίζουν τη μεταβλητότητα των *φωτομετρικά ή εκλειπτικά διπλών συστημάτων (Eclipsing Binaries, EBs ή E κατά GCVS)* και οι οποίες γίνονται αντιληπτές με τη βοήθεια φωτομετρικών παρατηρήσεων.

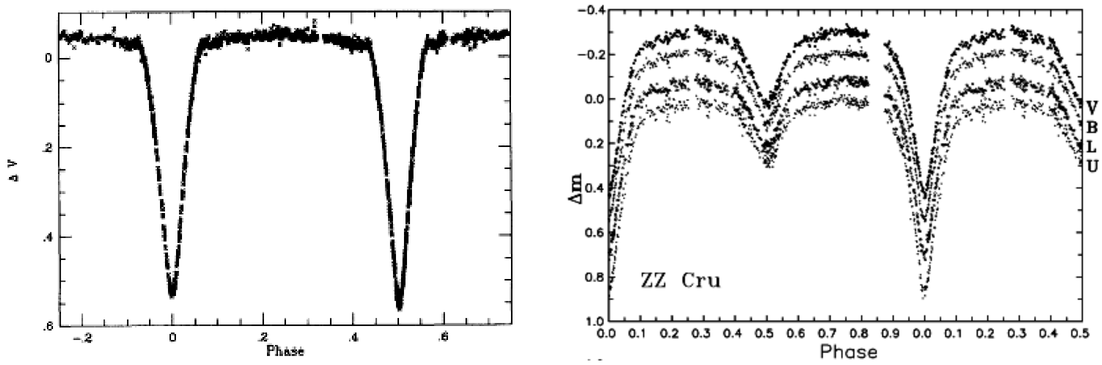
1.2. Ταξινόμηση με βάση τη Μορφή της Καμπύλης Φωτός

Κύριος σκοπός της αστρονομικής φωτομετρίας στη μελέτη των διπλών εκλειπτικών συστημάτων αποτελεί η κατασκευή μιας καμπύλης η οποία καταγράφει τη μεταβολή της φαινόμενης λαμπρότητας σε συνάρτηση με το χρόνο και ονομάζεται ***καμπύλη φωτός (light curve)***. Το κυριότερο χαρακτηριστικό της καμπύλης αυτής στη συγκεκριμένη κατηγορία μεταβλητών αστέρων αποτελούν δύο έντονες συνήθως μειώσεις της λαμπρότητας και οι οποίες οφείλονται στις εκλείψεις που υφίστανται τα δύο μέλη μεταξύ τους, εφόσον βέβαια η γεωμετρία του συστήματος σε σχέση με τον παρατηρητή το επιτρέπει. Το ***ελάχιστο (minimum)*** το οποίο αντιστοιχεί στη διάβαση του ψυχρότερου μέλους μπροστά από το θερμότερο καλείται ***πρωτεύον (primary)*** ενώ ***δευτερεύον (secondary)*** καλείται το ελάχιστο το οποίο λαμβάνει χώρα με την ακριβώς αντίστροφη διάβαση.

Φαινόμενα, όπως εκείνα της ανάκλασης, της αμαύρωσης χείλους, της αμαύρωσης λόγω βαρύτητας, καθώς και διάφορα άλλα τα οποία σχετίζονται είτε με μεταφορά και απώλεια μάζας είτε με ενδογενή μεταβλητότητα ενός τουλάχιστον μέλους του συστήματος επιδρούν στην τελική διαμόρφωση της καμπύλης φωτός και θα μας απασχολήσουν μέχρι ενός βαθμού στο αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου.

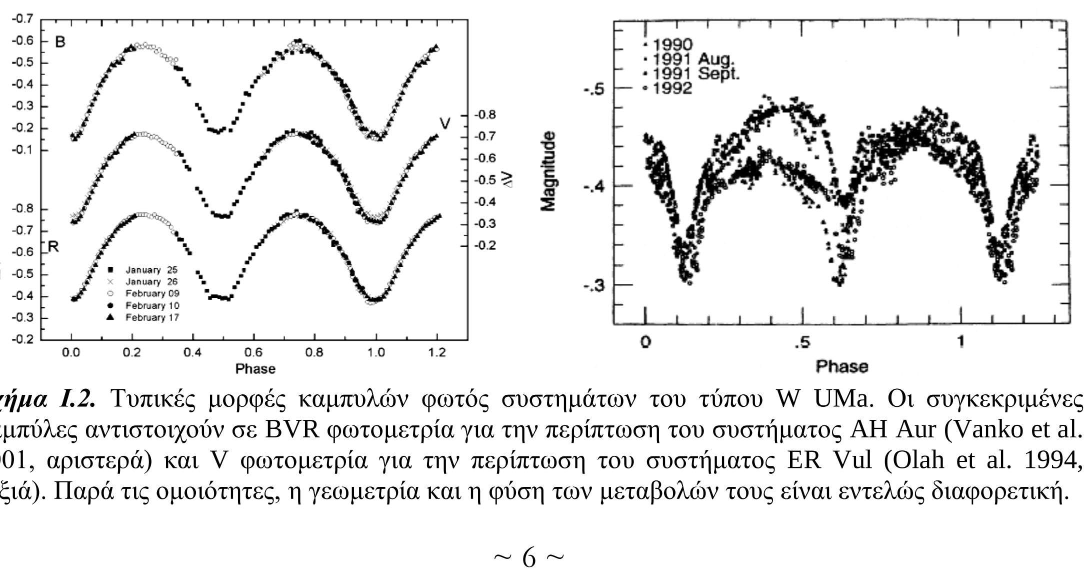
Η μορφή της καμπύλης φωτός είναι ικανή να αποτελέσει ένα βασικό κριτήριο ταξινόμησης των διπλών εκλειπτικών αστέρων. Συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από καμπύλες φωτός με σταθερή λαμπρότητα μεταξύ των δύο ελαχίστων καλούνται διπλά συστήματα ***τύπου Algol ή β Per (EA group)***. Στατιστικές μελέτες έχουν δείξει ότι η πλειοψηφία τους χαρακτηρίζεται από περιόδους μεταξύ 2.5 και 3.0 ημερών ενώ τα βάθη των ελαχίστων στο ορατό πλησιάζουν συνήθως την τιμή των 1.28 mag και 0.06 mag για το πρωτεύον και το δευτερεύον, αντίστοιχα (Petit 1987). Ασθενείς μεταβολές της λαμπρότητας στην περιοχή των μεγίστων είναι δυνατόν να παρουσιαστούν εξαιτίας του φαινομένου της ανάκλασης ή λόγω της ελαφρά ελλειψοειδούς μορφής των μελών (Σχήμα Ι.1).

Στις περιοχές μεταξύ των εκλείψεων, είναι δυνατόν να υπάρξουν παραμορφώσεις οι οποίες συνήθως οφείλονται στις έντονες παλιρροϊκές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μελών ορισμένων συστημάτων. Συστήματα με συνεχή μεταβολή της λαμπρότητας στις περιοχές αυτές καλούνται ***τύπου β Lyr (EB group)*** και χαρακτηρίζονται συνήθως από δευτερεύοντα ελάχιστα λιγότερο βαθιά από τα πρωτεύοντα (Σχήμα Ι.1). Αναλυτικότερα, έχει βρεθεί ότι ένα μεγάλο ποσοστό τους χαρακτηρίζεται από περιόδους μεταξύ 0.8 και 1.0 ημέρας, ενώ τα βάθη των ελαχίστων στο ορατό πλησιάζουν συνήθως την τιμή των 1.00 mag και 0.50 mag για το πρωτεύον και το δευτερεύον, αντίστοιχα (Petit 1987). Τα μέλη των συστημάτων αυτών, όπως και εκείνων του τύπου Algol, είναι συνήθως αστέρες προγενέστερων φασματικών τύπων. Σε αντίθεση επίσης με τα τελευταία, τα συστήματα τύπου β Lyr περιλαμβάνουν κατά κανόνα εξελιγμένους αστέρες.



Σχήμα I.1. Τυπικές μορφές καμπυλών φωτός συστημάτων του τύπου Algol (αριστερά) και του τύπου β Lyr (δεξιά). Οι συγκεκριμένες καμπύλες αντιστοιχούν σε V φωτομετρία για την περίπτωση του συστήματος PV Cas (Barembaum & Etzel 1995) και UBV για την περίπτωση του συστήματος ZZ Cru (Horak et al. 1999), αντίστοιχα.

Συστήματα, τέλος, τα οποία παρουσιάζουν συνεχή μεταβολή της λαμπρότητας κατά τη διάρκεια ολόκληρου του κύκλου μεταβολής καλούνται διπλά συστήματα ***τύπου W UMa (EW group)*** και τα οποία χαρακτηρίζονται σχεδόν πάντοτε από ισοβαθή ελάχιστα (Σχήμα I.2). Συγκεκριμένα, η συντριπτική τους πλειοψηφία χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερα βραχείες περιόδους μεταξύ μόλις 0.3 και 0.4 ημερών, ενώ τα βάθη των ελαχίστων στο ορατό πλησιάζουν συνήθως την τιμή των 0.75 mag και 0.66 mag για το πρωτεύον και το δευτερεύον, αντίστοιχα (Petit 1987). Σε αντίθεση με τις προηγούμενες κατηγορίες, το σύνολο των μελών τους είναι αστέρες μεταγενέστερου φασματικού τύπου και ανήκουν εξελικτικά στην κύρια ακολουθία (*ομάδα W*). Ένας μικρότερος αριθμός συστημάτων της κατηγορίας αυτής περιλαμβάνει θερμότερους αστέρες, φασματικού τύπου A και F, με περιόδους που μπορεί να φτάσουν μέχρι και τις 0.8 μέρες περίπου (*ομάδα A*).



Σχήμα I.2. Τυπικές μορφές καμπυλών φωτός συστημάτων του τύπου W UMa. Οι συγκεκριμένες καμπύλες αντιστοιχούν σε BVR φωτομετρία για την περίπτωση του συστήματος AH Aur (Vanko et al. 2001, αριστερά) και V φωτομετρία για την περίπτωση του συστήματος ER Vul (Olah et al. 1994, δεξιά). Παρά τις ομοιότητες, η γεωμετρία και η φύση των μεταβολών τους είναι εντελώς διαφορετική.

1.3. Ταξινόμηση με βάση τη Γεωμετρία Roche

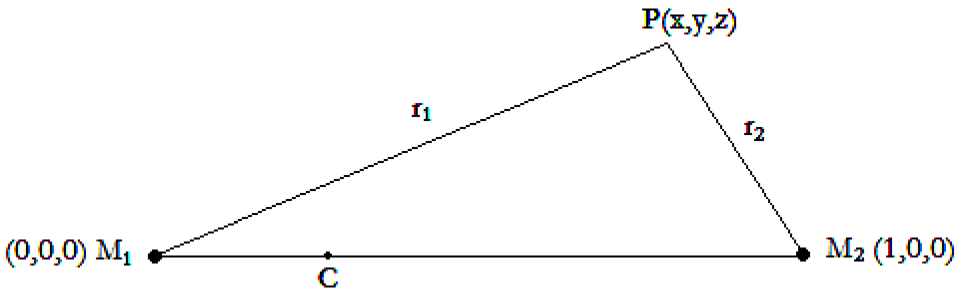
Όπως είναι αναμενόμενο, όταν ένα διπλό σύστημα διαθέτει μεγάλη τροχιακή ακτίνα και μέλη με μεγάλη μεταξύ τους διαφορά μαζών, το σχήμα των τελευταίων θα διαφέρει κατά πολύ από το σφαιρικό. Τα βραχυπερίοδα αυτά συστήματα καλούνται συχνά ως ***στενά (close binaries)*** και αποτελούν σπουδαίο αντικείμενο έρευνας όχι μόνο λόγω της ισχυρής παλιρροϊκής αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών, η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη έντονων φυσικών μηχανισμών, αλλά και εξαιτίας της κοινής διαπίστωσης ότι τα στενά συστήματα αποτελούν εξελικτικό στάδιο όλων των διπλών συστημάτων με αρχικές περιόδους από μερικές μέχρι και 100 περίπου μέρες.

1.3.1. Μοντέλο Roche

Η δυναμική των στενών διπλών συστημάτων περιγράφεται με ένα σχετικά απλό μοντέλο το οποίο προτάθηκε από τον Roche το 1849 και εφαρμόστηκε με επιτυχία από τον Kopal το 1955 με σκοπό τον προσδιορισμό του σχήματος των παραμορφωμένων μελών κάτω από την ισχυρή τους παλιρροϊκή αλληλεπίδραση. Το μοντέλο αυτό βασίζεται ουσιαστικά στο *περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων* κατά το οποίο το τρίτο σώμα θεωρείται να έχει αμελητέα μάζα και κινείται κάτω από την επίδραση του δυναμικού που παράγεται από το σύστημα του στενού αστρικού ζεύγους (π.χ. Hilditch 2001). Θεωρούμε επίσης ότι τα δύο μέλη του ζεύγους εκτελούν κυκλικές τροχιές γύρω από το κοινό τους κέντρο μάζας και πως η ιδιοπεριστροφή τους είναι σύγχρονη με την τροχιακή. Ως τρίτο σώμα επιλέγεται συνήθως ένα μόριο της ατμόσφαιρας ενός από τα δύο μέλη του συστήματος (δοκιμαστικό σωματίδιο) και του οποίου η κίνηση αποδεικνύεται ότι περιορίζεται σε ορισμένες περιοχές, τα όρια των οποίων καθορίζουν οι *επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας (zero velocity syrfaces)* του τρίτου σώματος. Οι επιφάνειες αυτές αντιστοιχούν στις *κοινές ισοδυναμικές επιφάνειες (equipotential surfaces)* του συστήματος των δύο σωμάτων και είναι εκείνες που διαμορφώνουν το τελικό σχήμα των μελών. Τα σημεία στα οποία το σώμα αυτό ισορροπεί αποτελούν τα σημεία τομής των ισοδυναμικών επιφανειών ονομάζονται *σημεία Lagrange (Lagrangian points)* και είναι κρίσιμα όσον αφορά τις αλληλεπιδράσεις των μελών.

Αποσκοπώντας σε απλοποίηση των αλγεβρικών πράξεων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η απόσταση των δύο σωμάτων μάζας M_1 και M_2 είναι μοναδιαία και να μεταθέσουμε το κέντρο μάζας του συστήματος σε εκείνο το σώμα με τη μεγαλύτερη μάζα, έστω μάζας M_1, χωρίς απώλεια της γενικότητας (Σχήμα Ι.3). Έτσι, το καρτεσιανό σύστημα που χρησιμοποιείται θα έχει ως αρχή των αξόνων (0,0,0) τη θέση του σώματος M_1 και ως φυσικό επόμενο, το σώμα M_2 θα βρίσκεται πάντοτε στη θέση (1,0,0). Στην περίπτωση αυτή, το δυναμικό Ω που παράγεται από το σύστημα σε ένα τυχαίο σημείο $P(x,y,z)$, απόστασης $r_1 = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ και $r_2 = [(x-1)^2+y^2+z^2]^{1/2}$ από τα δύο σώματα M_1 και M_2 αντίστοιχα, προκύπτει από το άθροισμα του φυγόκεντρου δυναμικού με εκείνο των δύο σωμάτων. Εάν η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα (όπως επίσης και των δύο σωμάτων εξαιτίας της υπόθεσης σύγχρονης περιστροφής) είναι ίση με Ω_{kep}, το συνολικό δυναμικό Ω θα δίνεται τελικά από την ακόλουθη σχέση:

$$\Omega = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{\Omega_{kep}^2}{2}\left[\left(x - \frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 + y^2\right]. \qquad (1.1)$$



Σχήμα Ι.3. Σύστημα δύο σωμάτων με μάζες M_1 και M_2 γύρω από το κοινό τους κέντρο μάζας C και τα οποία απέχουν μοναδιαία απόσταση. Η απόστασή τους από ένα τυχαίο σημείο $P(x,y,z)$ είναι r_1 και r_2 αντίστοιχα, ενώ το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται έχει ως αρχή των αξόνων το σημείο που αντιστοιχεί στο σώμα μάζας M_1 (αναπαραγωγή γραφικού από Hiditch 2001).

Η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα Ω_{kep} μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια του τρίτου νόμου του Kepler έχοντας υποθέσει μοναδιαία τροχιακή ακτίνα $A_{orb} \equiv 1$, δηλαδή $\Omega_{kep}{}^2 = G(M_1+M_2)/A_{orb}{}^3 = G(M_1+M_2)$. Εφόσον λοιπόν έχουμε σταθεροποιήσει την τροχιακή ακτίνα, είμαστε πλέον σε θέση να παρατηρήσουμε ότι το δυναμικό Ω εξαρτάται μόνο από το λόγο μαζών $q = M_2/M_1$ καθώς, εάν διαιρέσουμε τα μέλη της σχέσης (1.1) με την ποσότητα $G(M_1+M_2)$, οδηγούμαστε στην ακόλουθη *κανονικοποιημένη μορφή* του, Ω_n:

$$\Omega_n = \frac{-2\Omega}{G(M_1 + M_2)} = \frac{2}{(1+q)r_1} + \frac{2q}{(1+q)r_2} + \left(x - \frac{q}{1+q}\right)^2 + y^2. \qquad (1.2)$$

Η τελευταία εσωτερική ισοδυναμική επιφάνεια (inner Lagrangian surface), Ω^{inner} ή Ω^{L1}, περικλείει τους δύο αστέρες διαγράφοντας δύο λοβούς, γνωστούς ως ***λοβούς Roche (Roche lobes)***, και οι οποίοι έχουν ως κοινό σημείο επαφής το πρώτο σημείο Lagrange L1 (Σχήμα Ι.6). Ποιοτικά, ο λοβός Roche εκφράζει το μέγιστο δυνατό όγκο που ένας αστέρας μπορεί να καταλάβει ως μέλος ενός διπλού συστήματος ώστε να διατηρεί κάτω από το βαρυτικό του έλεγχο τα δομικά του συστατικά. Το μέγεθος ενός λοβού εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την απόσταση των μελών του συστήματος A_{orb} και κατά δεύτερο από το λόγο μαζών του q, όπως άλλωστε φαίνεται και από τη σχέση (1.2). Εφόσον ο λόγος μαζών είναι ίσος με τη μονάδα, οι δύο λοβοί θα έχουν το ίδιο ακριβώς μέγεθος, ενώ όσο αυτός μειώνεται και απομακρύνεται από τη μονάδα, το μέγεθος του λοβού που αντιστοιχεί στον αστέρα με τη μεγαλύτερη μάζα θα αυξάνεται και εκείνο του συνοδού του θα μειώνεται. Στην περίπτωση πλήρωσης του λοβού από τον αστέρα, η συνεπαγόμενη διαφυγή μάζας προς το συνοδό του πραγματοποιείται μέσω του πρώτου σημείου Lagrange L1. Ο λόγος της προτίμησης προς το σημείο αυτό είναι καθαρά ενεργειακός, καθώς σε οποιοδήποτε άλλο σημείο θα έπρεπε να δαπανηθεί περισσότερη ενέργεια ώστε το υλικό να διαφύγει.

Ένας εμπειρικός αλλά ιδιαίτερας επιτυχής μαθηματικός τύπος μέσα από τον οποίο μπορούμε να εκτιμούμε την ακτίνα του λοβού Roche τόσο για τον πρωτεύοντα αστέρα, R_{L1}, όσο και για τον δευτερεύοντα, R_{L2}, ως συνάρτηση της τροχιακής ακτίνας και του λόγου μαζών ενός διπλού αστρικού συστήματος με σχετικό σφάλμα το οποίο δεν ξεπερνά το 1% της πραγματικής ακτίνας έχει προταθεί από τον Eggleton (1983). Στην πραγματικότητα, πρόκειται για την *ενεργό ακτίνα* ενός λοβού Roche, δηλαδή για την υποθετική ακτίνα που αντιστοιχεί στο λοβό εάν αυτός ήταν σφαιρικός και κατείχε τον ίδιο όγκο με τον πραγματικό:

- $$R_{L1} = \frac{0.49q^{-2/3}}{0.6q^{-2/3} + \ln(1+q^{-1/3})} A_{orb}. \tag{1.3}$$

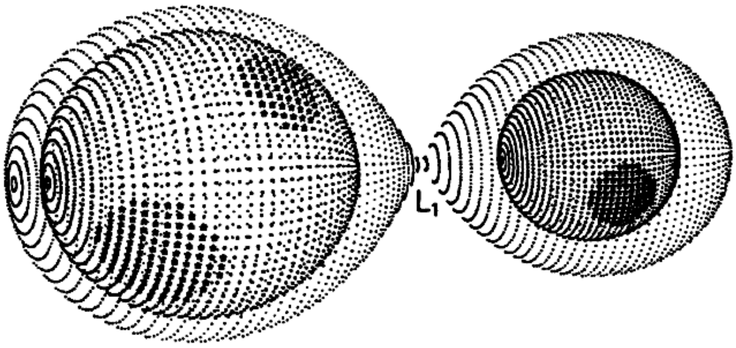
- $$R_{L2} = \frac{0.49q^{2/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1+q^{1/3})} A_{orb}. \tag{1.4}$$

Η εξώτατη κρίσιμη κοινή ισοδυναμική επιφάνεια (outer Lagrangian surface), Ω^{outer} ή Ω^{L2}, η οποία καθορίζει τα μέγιστα επιτρεπτά όρια της κίνησης του τρίτου σώματος, περιλαμβάνει το δεύτερο σημείο Lagrange L2 μέσω του οποίου είναι δυνατό να λάβουν χώρα απώλειες μάζας από το σύστημα με την ελάχιστη απαιτούμενη ενέργεια (Σχήμα Ι.6). Το σημείο αυτό βρίσκεται στη νοητή επέκταση της ευθείας που ενώνει τα δύο μέλη του συστήματος προς την πλευρά του δευτερεύοντος πάντοτε αστέρα. Ένα ακόμα κανάλι διαφυγής υλικού από το σύστημα, περισσότερο δαπανηρό όμως αυτή τη φορά, αποτελεί το τρίτο σημείο Lagrange L3 το οποίο βρίσκεται και πάλι στη νοητή επέκταση της ευθείας που ενώνει τα δύο μέλη του συστήματος προς την πλευρά του πρωτεύοντος τώρα αστέρα. Τέλος, αποδεικνύεται η παρουσία δύο ακόμα αντιδιαμετρικών σημείων Lagrange, L4 και L5, τα οποία βρίσκονται σε νοητή ευθεία κάθετη σε εκείνη που ενώνει τα δύο μέλη σε θέσεις τέτοιες ώστε να σχηματίζουν ισοσκελή τρίγωνα με τα κέντρα των δύο αστέρων.

1.3.2. Ταξινόμηση Στενών Διπλών Συστημάτων

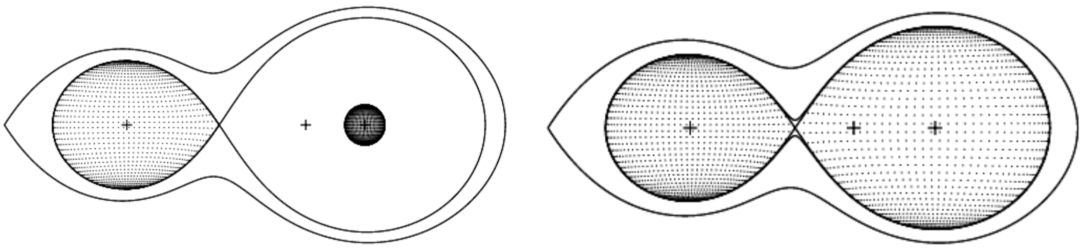
Με βάση τη δυναμική Roche, τα διπλά συστήματα είναι ικανά να ταξινομηθούν σε τέσσερις βασικές κατηγορίες. Στην περίπτωση κατά την οποία κανένα από τα μέλη δεν έχει γεμίσει το λοβό του (Σχήμα Ι.4), το σύστημα καλείται ***αποχωρισμένο (detached, D)*** ενώ, όταν η ακτίνα κάποιου από αυτά αγγίξει μια κρίσιμη τιμή κοντά στην ακτίνα του λοβού του (μέλος επαφής), ξεκινά διαφυγή μάζας προς το συνοδό του (αποχωρισμένο μέλος) και το σύστημα καλείται πλέον ***ημιαποχωρισμένο (semidetached, SD)***. Στην πρώτη περίπτωση, ο λόγος της ακτίνας των αστέρων R_i (i = 1,2) ως προς την τροχιακή A_{orb} είναι ιδιαίτερα μικρός και περίπου ίσος με $R_i/A_{orb} \approx$ 0.1 ή και ακόμα μικρότερος, ενώ στη δεύτερη βρίσκεται συνήθως μεταξύ των τιμών 0.2 και 0.3. Τέλος, συστήματα με τα μέλη τους να γεμίζουν οριακά τους λοβούς τους

(Σχήμα Ι.5), ονομάζονται συστήματα ***επαφής (contact ή double-contact, K)*** ενώ, όταν κάτι τέτοιο έχει επιτευχθεί με τη δημιουργία κοινού πλέον περιβλήματος (Σχήμα Ι.6), έχουμε την περίπτωση συστημάτων ***υπερεπαφής (over-contact, K*** *– δεν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος συμβολισμός που να τα διαφοροποιεί από τα συστήματα επαφής)*.



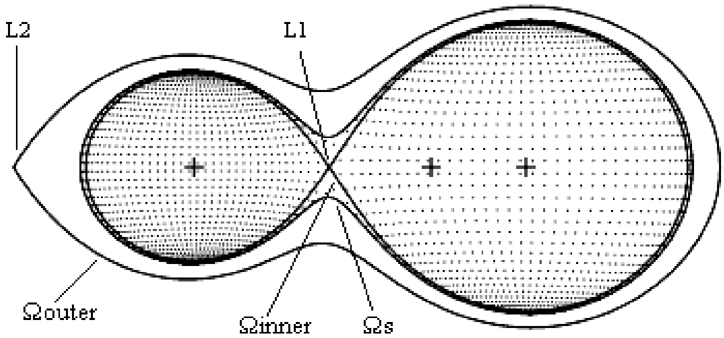
Σχήμα Ι.4. Τρισδιάστατη αναπαράσταση των μελών ενός υποθετικού αποχωρισμένου (και μάλιστα χρωμοσφαιρικά δραστήριου) διπλού συστήματος. Εύκολα διακρίνεται ότι οι ακτίνες τους είναι αρκετά μικρότερες σε σχέση με εκείνες των αντίστοιχων λοβών Roche (Djurasevic 1997).

Στην τελευταία ειδικά περίπτωση, το υλικό που ωθείται πάνω από τους λοβούς Roche μπορεί να ανακατανεμηθεί ελεύθερα με συνέπεια να διαμορφώνεται μια ενιαία εξωτερική επιφάνεια δυναμικού Ω^S. Η επιφάνεια όμως αυτή οριοθετείται πάντοτε από εκείνης της Ω^{L2} καθώς σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε ολική απώλεια του πλεονάζοντος υλικού από το σύστημα.



Σχήμα Ι.5. Διδιάστατη αναπαράσταση ενός ημιαποχωρισμένου διπλού συστήματος αστέρων (αριστερά) και ενός συστήματος επαφής (δεξιά). Η απεικόνιση έχει πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια του προγράμματος σύνθεσης καμπύλης φωτός Binary Maker 3.0 από παρατηρησιακά δεδομένα των συστημάτων AD Her και BX And αντίστοιχα (Bradstreet et al. 2004).

Με εξαίρεση την περίπτωση των συστημάτων επαφής και υπερεπαφής, τα οποία στη συντριπτική τους πλειοψηφία παρουσιάζουν καμπύλες φωτός τύπου W UMa, δεν υπάρχει σαφής αντιστοιχία της ταξινόμησης με βάση τη γεωμετρία Roche με εκείνη που βασίζεται στη μορφή της καμπύλης φωτός. Με λίγα λόγια, τα αποχωρισμένα και τα ημιαποχωρισμένα συστήματα είναι εξίσου πιθανό να χαρακτηρίζονται από καμπύλες φωτός τύπου Algol όσο και από καμπύλες φωτός τύπου β Lyr. Στατιστικά όμως, τα μέλη ενός αποχωρισμένου συστήματος αναμένεται να είναι λιγότερο παραμορφωμένα σε σχέση με εκείνα ενός ημιαποχωρισμένου συστήματος, καθώς τότε θα βρίσκονται πιο κοντά το ένα με το άλλο. Έτσι, ο χαρακτηρισμός Algol συστημάτων αναμένεται συχνότερος όταν εκείνα είναι αποχωρισμένα και, αντίστροφα, η ταξινόμηση συστημάτων ως β Lyr θα είναι πιο συνήθης όταν πρόκειται για ημιαποχωρισμένα συστήματα.



Σχήμα Ι.6. Διδιάστατη αναπαράσταση του συστήματος υπερεπαφής AE Phe με τη βοήθεια του προγράμματος σύνθεσης καμπύλης φωτός Binary Maker 3.0 (Bradstreet et al. 2004).

Ο βαθμός επαφής των μελών ενός διπλού συστήματος συνδέεται άμεσα με το βαθμό πληρότητας των λοβών Roche που αντιστοιχούν σε αυτά και καθορίζεται ουσιαστικά από τη θέση της κοινής εξωτερική επιφάνειας δυναμικού Ω^S σε σχέση με εκείνες των δυναμικών Ω^{L1} και Ω^{L2}. Ένα μέτρο λοιπόν του βαθμού επαφής ονομάζεται *συντελεστής ή παράμετρος πληρότητας (fill-out factor ή parameter) f* και σύμφωνα με τα παραπάνω ορίζεται ως εξής:

$$f = \frac{\Omega^{L1} - \Omega^{S}}{\Omega^{L1} - \Omega^{L2}} \quad \text{με} \quad \Omega^{L2} \le \Omega^{S} \le \Omega^{L1} \quad \text{και} \quad 0 \le f \le 1. \tag{1.5}$$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι ο συντελεστής πληρότητας λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του στην περίπτωση των συστημάτων επαφής ($\Omega^S = \Omega^{L1}$) και τη μέγιστη στην περίπτωση των συστημάτων υπερεπαφής με τη μέγιστη δυνατή πληρότητα ($\Omega^S = \Omega^{L2}$). Δυστυχώς, ο παραπάνω δείκτης δεν μπορεί να περιγράψει τις ιδιότητες των αποχωρισμένων και ημιαποχωρισμένων συστημάτων καθώς στις αντίστοιχες περιπτώσεις θα λάμβανε αρνητικές τιμές.

Παρά το γεγονός αυτό, ο βαθμός πληρότητας του κάθε λοβού ενός συστήματος μπορεί να εκφραστεί με έναν ανάλογο συντελεστή πληρότητας ο οποίος ορίζεται ως το πηλίκο του κανονικοποιημένου δυναμικού της τελευταίας επιφάνειας Lagrange Ω^{L1} προς το δυναμικό επιφανείας του αντίστοιχου μέλους $\Omega^{S,i}$ ή αλλιώς:

$$f_{d,i} = \frac{\Omega^{L1}}{\Omega^{S,i}} \quad \text{με} \quad f \ge 0\,, \ \text{όπου} \ \ i = 1{,}2 \ \ \text{για το κάθε μέλος αντίστοιχα.} \tag{1.6}$$

Με τη βοήθεια του συντελεστή πληρότητας λοβών μπορούμε εύκολα να ταξινομήσουμε όλα τα διπλά συστήματα με βάση τη γεωμετρία Roche. Συγκεκριμένα, η περίπτωση των αποχωρισμένων συστημάτων αντιστοιχεί σε $f_{d,i} < 1$ με $i = 1{,}2$ ενώ η περίπτωση των ημιαποχωρισμένων αντιστοιχεί σε $f_{d,1} < 1$ για το αποχωρισμένο μέλος και $f_{d,2} = 1$ για το μέλος επαφής. Όπως είναι επίσης προφανές, τα συστήματα επαφής και υπερεπαφής χαρακτηρίζονται από συντελεστές πληρότητας λοβών $f_{d,i}$ = 1 και $f_{d,i}$ > 1 με i = 1,2 αντίστοιχα.

1.4. Μικτές Ταξινομήσεις (κατά GCVS)

Η ανάγκη περιγραφής ολοένα και περισσότερων χαρακτηριστικών ενός διπλού συστήματος αστέρων έχει οδηγήσει μέχρι σήμερα στη δημιουργία ορισμένων πρόσθετων κατηγοριών οι οποίες όμως υπάγονται πάντοτε στις προηγούμενες τέσσερις βασικές. Συγκεκριμένα, ο γενικός κατάλογος μεταβλητών αστέρων (GCVS, Kholopov et al. 1992) έχει υϊοθετήσει μερικές ακόμα χρήσιμες υποκατηγορίες, τις σημαντικότερες από τις οποίες αναφέρουμε παρακάτω:

- ***DM:*** Περιλαμβάνει αποχωρισμένα συστήματα και τα δύο μέλη των οποίων ανήκουν στην κύρια ακολουθία.

- ***DS:*** Περιλαμβάνει αποχωρισμένα συστήματα εκ των οποίων το ένα μέλος είναι πάντοτε υπογίγαντας αστέρας.

- ***AR:*** Περιλαμβάνει αποχωρισμένα συστήματα και τα δύο μέλη των οποίων είναι υπογίγαντες αστέρες. Η ονομασία έχει βασιστεί στο πρότυπο σύστημα της κατηγορίας αυτής, AR Lac.

- ***GS:*** Περιλαμβάνει συστήματα εκ των οποίων το ένα μέλος (ή και τα δύο) είναι γίγαντας ή υπογίγαντας αστέρας ενώ το άλλο μπορεί να είναι ένας αστέρας της κύριας ακολουθίας.

- ***DW:*** Πρόκειται για συστήματα τα οποία παρουσιάζουν φυσικές ιδιότητες όμοιες με εκείνες των συστημάτων τύπου W UMa με τη διαφορά όμως ότι τα μέλη τους δε βρίσκονται σε επαφή.

- ***KW:*** Πρόκειται για συστήματα επαφής, τα μέλη των οποίων είναι αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων. Ο πρωτεύοντας αστέρας βρίσκεται πάντοτε στην κύρια ακολουθία, ενώ ο δευτερεύοντας κάτω και αριστερά αυτής. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά συναντώνται τις περισσότερες φορές στα συστήματα τύπου W UMa.

- ***KE:*** Πρόκειται για συστήματα επαφής, τα μέλη των οποίων όμως είναι αστέρες προγενέστερων φασματικών τύπων, σε αντίθεση με το σύνολο των αντίστοιχων συστημάτων τύπου W UMa τα μέλη των οποίων είναι ηλιακού τύπου.

- Ανάλογα με ορισμένα ιδιόμορφα φυσικά χαρακτηριστικά των μελών, διακρίνουμε ακόμα τα χρωμοσφαιρικά δραστήρια διπλά συστήματα (***RS***, ονομασία βασισμένη στο πρότυπο σύστημα της κατηγορίας αυτής, RS CVn), τα συστήματα που περιλαμβάνουν έναν αστέρα τύπου Wolf-Rayet (***WR***) ή ένα λευκό νάνο (***WD***), καθώς και τα συστήματα των οποίων τα μέλη καλύπτονται από νέφη περιαστρικής ύλης (***PN***).

Είναι αυτονόητο ότι η πλήρης περιγραφή των ιδιοτήτων ενός διπλού συστήματος αστέρων απαιτεί το συνδυασμό όλων των παραπάνω συμβολισμών, αξιοποιώντας έτσι τις πληροφορίες που διαθέτουμε από όλους τους τρόπους ταξινόμησης. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι το σύστημα TX Her ταξινομείται ως EA/DM, το σύστημα W UMa ως EW/KW ενώ το σύστημα RT And ως EA/DW/RS. Στην περίπτωση τέλος που κάποιος τρόπος ταξινόμησης είναι αμφίβολος, σημειώνεται η ένδειξη ‘‘**:**’’ δίπλα στον αντίστοιχο συμβολισμό.

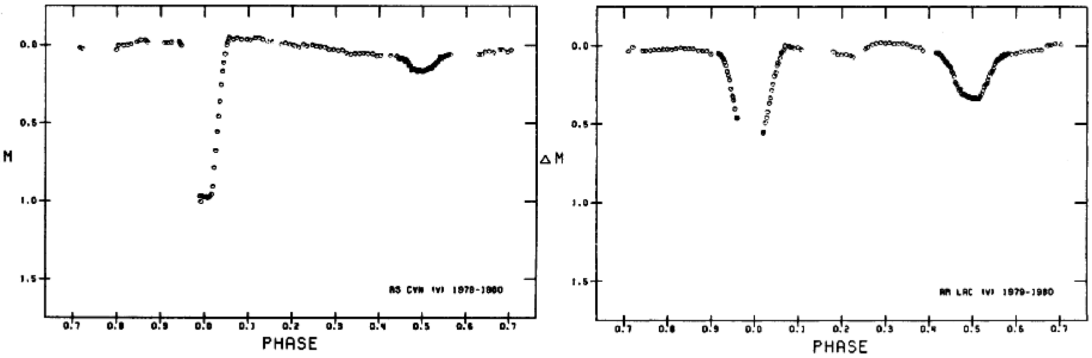
2. Περιγραφή Φυσικών Χαρακτηριστικών

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν συνοπτικά ορισμένες κατηγορίες διπλών αστρικών συστημάτων με ιδιότυπα μέλη και οι οποίες θεωρούνται ιδιαίτερα σημαντικές, καθώς μας προσφέρουν τη μοναδική ίσως δυνατότητα να μελετήσουμε τα αξιοσημείωτα φυσικά χαρακτηριστικά των μελών τους. Πρόκειται για συστήματα που περιλαμβάνουν ένα τουλάχιστον μέλος το οποίο παρουσιάζει έντονη χρωμοσφαιρική δραστηριότητα και για συστήματα τα οποία διαθέτουν ένα συνήθως συμπαγές μέλος. Αν και η πλειοψηφία τους είναι αποχωρισμένα συστήματα, η μορφή της καμπύλης φωτός τους μπορεί να παρουσιάζει τόσο αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά ώστε να μη μπορεί να υπαχθεί στην ταξινόμηση της ενότητας 1.2.

2.1. Χρωμοσφαιρικά Δραστήρια Διπλά Συστήματα

Τα ***χρωμοσφαιρικά δραστήρια διπλά συστήματα (Chromosperically Active Binary Stars, CABS)*** περιλαμβάνουν συστήματα στα οποία το ένα τουλάχιστον μέλος τους παρουσιάζει ηλιακού τύπου δραστηριότητα αλλά πολύ πιο μεγάλης έντασης. Κοινό χαρακτηριστικό τους είναι πάντοτε οι μεταγενέστεροι φασματικοί τους τύποι οι οποίοι επιτρέπουν την ύπαρξη εκτεταμένων ζωνών μεταφοράς και συνεπώς ευνοούν τη δημιουργία τοπικών περιοχών δράσης, οι οποίες συνοδεύονται από ηλιακού τύπου (ενισχυμένα) φαινόμενα, όπως τον σχηματισμό κηλίδων και την αιφνίδια εμφάνιση εκλάμψεων (Strassmeier et al. 1988, 1993). Είναι προφανές ότι το πλήθος, η ένταση και η έκταση των φαινομένων αυτών μεταβάλλονται αισθητά με το χρόνο με αποτέλεσμα οι αντίστοιχες καμπύλες φωτός να διαφέρουν και αυτές με το χρόνο. Δύο από τους χαρακτηριστικότερους εκπροσώπους τους αποτελούν οι αστέρες τύπου RS CVn και BY Dra τα βασικά χαρακτηριστικά των οποίων παρουσιάζονται παρακάτω.

Οι ***αστέρες τύπου RS Canum Venaticorum (RS CVn)*** αποτελούν αποχωρισμένα διπλά συστήματα ψυχρών αστέρων, οι οποίοι συνήθως είτε βρίσκονται στην κύρια ακολουθία (κυρίως τα βραχυπερίοδα μέλη τους) είτε έχουν ελαφρώς εξελιχθεί στην περιοχή των υπογιγάντων. Το συγκεκριμένο είδος παρουσιάζει έντονη εκπομπή στις γραμμές h και k του απλά ιονισμένου ασβεστίου και μαγνησίου, ένδειξη έντονης χρωμοσφαρικής δραστηριότητας, καθώς και έντονη εκπομπή στις μαλακές ακτίνες X όπως και ραδιοεκπομπή, ενδείξεις έντονης στεμματικής δραστηριότητας. Οι παραμορφώσεις εκτός εκλείψεων στις καμπύλες φωτός τους εμφανίζονται με τη μορφή ελαχίστων μικρού εύρους (Σχήμα Ι.7), γνωστά ως *κύματα παραμόρφωσης (distortion waves)* και μετατοπίζονται συνήθως περιοδικά με τη μορφή *κυμάτων μετανάστευσης ή ολίσθησης (migration waves)*. Η περιοδική αυτή μετατόπισή τους συνδέεται συχνά με κύκλους αστρικής δραστηριότητας, όμοιους με τον ενδεκαετή ηλιακό.



Σχήμα Ι.7. Η παραμορφωμένη καμπύλη φωτός των χρωμοσφαρικά δραστήριων διπλών συστημάτων RS CVn (αριστερά) και AR Lac (δεξιά) κατά την περίοδο 1979-1980 (Caton 1986).

Η φύση των παρατηρούμενων μεταβολών οφείλεται κατά κύριο λόγο σε φαινόμενα που σχετίζονται με το ισχυρό μαγνητικό τους πεδίο, καθώς τα συστήματα αυτά είναι αρκετά εξελιγμένα οπότε παρατηρούνται βαθιές ζώνες μεταφοράς οι οποίες σε συνδυασμό με την ταχεία περιστροφή των αστέρων (τα συστήματα είναι συνήθως συγχρονισμένα) προκαλούν την εμφάνιση ενεργών περιοχών, όπως *ψυχρών φωτοσφαιρικών κηλίδων (cool spots)* και *λαμπρών χρωμοσφαιρικών εκτάσεων (plages)* οι οποίες υπερκαλύπτουν τις φωτοσφαιρικές κηλίδες στη χρωμόσφαιρα και τη μεταβατική περιοχή. Οι κηλίδες μάλιστα, μπορεί να καλύπτουν μια έκταση, κυκλικού συνήθως σχήματος, από 5 έως 40% του προβαλλόμενου αστρικού δίσκου, χωρίς βέβαια να γνωρίζουμε αν οι γιγαντιαίες αυτές ψυχρές επιφάνειες προέρχονται από μια και μοναδική κηλίδα ή από πολυάριθμες ομάδες μικρότερων κηλίδων, ενώ οι τυπικές θερμοκρασίες που παρουσιάζουν έχουν τιμή περίπου ίση με (3400 ± 200) K, δηλαδή περίπου (1100 ± 100) K χαμηλότερες από την περιβάλλουσα φωτόσφαιρα (Wilson 1994).

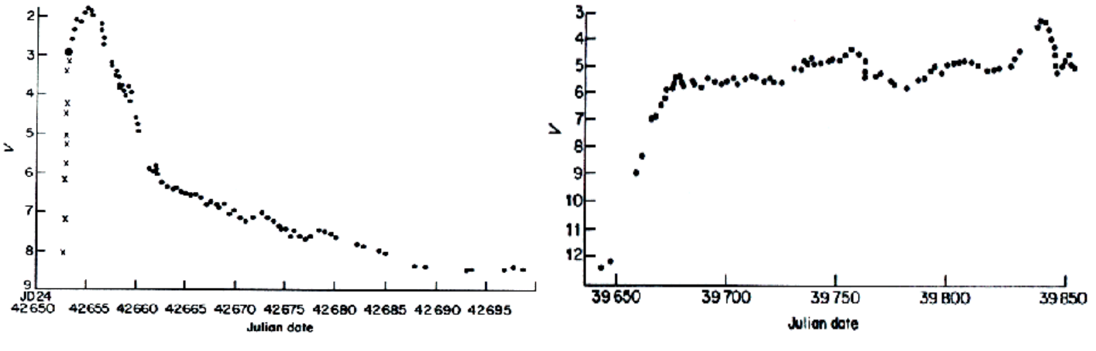
Πρέπει πάντως να τονίσουμε ότι οι αστέρες τύπου RS CVn δεν αποτελούν τον καλύτερο πάντοτε οδηγό μελέτης ηλιακών φαινομένων στους ψυχρούς αστέρες καθώς αποτελούν διπλά συστήματα στα οποία σίγουρα οι παλιρροϊκές αλληλεπιδράσεις ενισχύουν σε μεγάλο βαθμό τα παραπάνω φαινόμενα. Αντίθετα, οι αστέρες τύπου BY Dra φαίνεται να αποτελούν αξιόπιστο εργαστήριο σε ό,τι αφορά τα ηλιακά τοπικά φαινόμενα καθώς προέρχονται αποκλειστικά από ενδογενείς παράγοντες. Οι ***αστέρες τύπου BY Draconis (BY Dra)*** περιλαμβάνουν συνήθως νάνους αστέρες, φασματικών τύπων K και M, οι οποίοι χαρακτηρίζονται από μεταβολές της λαμπρότητάς τους με εξαιρετικά μικρό εύρος και με περίοδο ίση με την περίοδο περιστροφής του αστέρα. Οι μεταβολές αυτές οφείλονται σε ένα συνδυασμό ψυχρών κηλίδων αλλά και λαμπρών κέντρων δράσης προερχόμενων από περιοχές θερμού πλάσματος. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι αστέρες του τύπου αυτού απαντώνται τόσο ως διπλά συστήματα όσο και ως απομονωμένοι.

2.2. Κατακλυσμικοί Μεταβλητοί Αστέρες

Το τυπικό μοντέλο ενός ***κατακλυσμικού μεταβλητού (Cataclysmic Variable, CV)*** περιλαμβάνει ένα ιδιαίτερα βραχυπερίοδο σύστημα, αποτελούμενο από έναν ερυθρό νάνο και έναν εκφυλισμένο λευκό νάνο. Πιστεύεται ότι ο ερυθρός νάνος έχει συμπληρώσει το λοβό Roche του, γεγονός το οποίο επιτρέπει τη μεταφορά μάζας προς τον εκφυλισμένο συνοδό του και την προσαύξηση υδρογόνου στην επιφάνειά του, σχηματίζοντας έτσι ένα περίβλημα με τη μορφή δίσκου. Με την επίτευξη μιας κρίσιμης τιμής της πίεσης στη βάση του περιβλήματος αυτού, ενεργοποιείται η καύση του υδρογόνου εκρηκτικά με αποτέλεσμα την απότομη απομάκρυνση υλικού με τη μορφή διαστελλόμενου κελύφους.

Η τροχιακή περίοδος των συστημάτων αυτών διαρκεί μόλις μερικές ώρες ενώ η ακτίνα του λοβού Roche που αντιστοιχεί στον μη εκφυλισμένο δότη είναι της τάξης μόλις της 1 $R_{\odot}$. Στην περίπτωση που ο λευκός νάνος διαθέτει ισχυρό μαγνητικό πεδίο (της τάξης των 10^{12} G) και η περιστροφή του έχει συγχρονιστεί με την τροχιακή, η ροή του εισερχόμενου υλικού οδηγείται στους πόλους και το σύστημα καλείται πλέον ***πολικό (polar)***. Σε αντίθετη περίπτωση, το σύστημα καλείται ***ενδιάμεσος πολικός (intermediate polar)*** με τον λευκό νάνο να ιδιοπεριστρέφεται αρκετά ταχύτερα σε σχέση με την τροχιακή του περιφορά. Κατά το γεγονός έξαρσης, προερχόμενο από την καύση του υδρογόνου, το περίβλημα του νάνου διαστέλλεται μέχρι και τις 10 $R_{\odot}$ με αποτέλεσμα τη διαφυγή υλικού και τη δημιουργία ενός *κοινού περιβλήματος (Common Envelope, CE)* που καλύπτει ολοκληρωτικά το σύστημα. Η διάρκεια μάλιστα του φαινομένου αυτού διαρκεί μόλις μερικές μέρες ή εβδομάδες.

Το γεγονός της απότομης αύξησης της λαμπρότητας του συστήματος, η οποία μπορεί να ανέλθει ακόμα και στα 20 μεγέθη (!) σε λίγες μόνο μέρες, σηματοδοτεί την εμφάνιση ενός κλασικού καινοφανούς. Η χρονική διάρκεια της μετέπειτα μείωσης της λαμπρότητας του συστήματος καθορίζει το διαχωρισμό τους σε δύο βασικές κατηγορίες (Σχήμα Ι.8). Εφόσον το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο το σύστημα επανέρχεται στην αρχική του λαμπρότητα είναι της τάξης των εβδομάδων, έχουμε την περίπτωση των *ταχέων καινοφανών (fast novae)*, ενώ όταν είναι της τάξης των μηνών, έχουμε την περίπτωση των *βραδέων καινοφανών (slow novae)*.



Σχήμα Ι.8. Η καμπύλη φωτός ενός ταχέος (V1500 Cyg, 1975) και ενός βραδέος καινοφανούς (HR Del, 1967). Στην πρώτη περίπτωση (αριστερά) φαίνεται καθαρά η ταχεία πτώση της λαμπρότητας μέσα σε λίγες μόνο μέρες μετά το μέγιστο, ενώ στη δεύτερη (δεξιά) παρατηρούμε τη διατήρηση της λαμπρότητας περί του μεγίστου για αρκετούς μήνες (Petit 1987).

Ο εντοπισμός καινοφανών οι οποίοι χαρακτηρίζονταν από περιστασιακές εξάρσεις αύξησης της λαμπρότητας μεταξύ 2 και 7 μεγεθών, μεγάλων χρονικών μεταξύ τους διαστημάτων, οδήγησε τον Allen (1980) στην αναγνώριση μιας ολιγομελούς ομάδας καινοφανών, γνωστοί ως *πολύ αργοί καινοφανείς (very slow novae)*. Ιδιομορφία των αστέρων αυτών αποτελούσε ο απαιτούμενος χρόνος για την επαναφορά τους στην αρχική τους λαμπρότητα και ο οποίος κυμαινόταν μεταξύ 20 και 200 ετών. Σήμερα, όλα τα μέλη της τελευταίας κατηγορίας ταυτίζονται με τους συμβιωτικούς αστέρες οι οποίοι περιγράφονται στην αμέσως επόμενη υποενότητα.

Οφείλουμε τέλος να σημειώσουμε την ύπαρξη διπλών συστημάτων τα οποία χαρακτηρίζονται από ιδιότητες όμοιες με εκείνες των κατακλυσμικών και στα οποία η μεταφορά ύλης, πλούσιας σε υδρογόνο, προς τον εκφυλισμένο νάνο πραγματοποιείται με ρυθμό τέτοιο ώστε στην επιφάνεια του τελευταίου να λαμβάνει χώρα σταθερή πυρηνική καύση του υδρογόνου χωρίς αύξηση της ακτίνας του (π.χ. Μπιτζαράκη 2003).

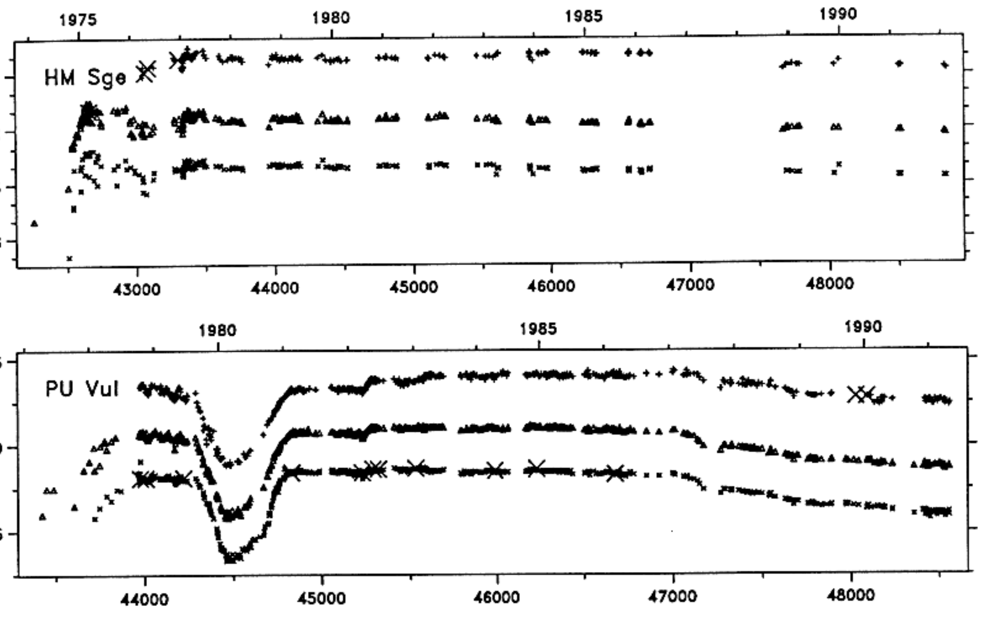
Τα συστήματα αυτά είναι παρατηρησιακά γνωστά ως ***υπερ-μαλακές πηγές ακτίνων X (Super Soft X-ray Sources, SSSs)*** και δεν πρέπει να συγχέονται με τη φύση των συμπαγών συστημάτων εκπομπής ακτίνων X τα οποία θα περιγραφούν αργότερα. Χαρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι η σχετικά μεγάλη μάζα του δότη αστέρα (μεταξύ 1.2 και 3.0 M_{Θ}) ο οποίος οφείλει να έχει μεγαλύτερη μάζα από το λευκό νάνο ώστε η μεταφορά μάζας να γίνεται σε θερμική κλίμακα χρόνου. Πιστεύεται ότι η προσαυξάνουσα ύλη από το δότη αστέρα στα παραπάνω συστήματα οδηγεί το λευκό νάνο σε αύξηση της μάζας του πέρα από το όριο των 1.4 M_{Θ}, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι θα καταρρεύσει προς το σχηματισμό ενός αστέρα νετρονίων.

2.3. Συμβιωτικοί Μεταβλητοί Αστέρες

Οι ***συμβιωτικοί αστέρες (Symbiotic Stars, SySs)*** αποτελούν μια από τις πιο ανομοιογενείς κατηγορίες μεταβλητών αστέρων όσον αφορά τα κοινά χαρακτηριστικά που τους συνδέουν. Στο φάσμα τους διακρίνονται τρεις τουλάχιστον βασικές περιοχές εκ των οποίων η *πρώτη* σχετίζεται πάντοτε με την εκπομπή ψυχρού υλικού πιθανώς από την επιφάνεια ενός εξελιγμένου ερυθρού γίγαντα ή υπεργίγαντα φασματικού τύπου K ή M ο οποίος πολλές φορές ταυτίζεται με ένα μακροπερίοδο παλλόμενο μεταβλητό αστέρα τύπου Mira και αντιστοιχεί σε θερμοκρασία μερικών χιλιάδων βαθμών. Η *δεύτερη* περιοχή χαρακτηρίζεται από έντονες γραμμές υψηλού ιονισμού που δημιουργούνται κάτω από ιδιαίτερα πυκνές και θερμές συνθήκες της τάξης των 17000 K και αποδίδονται σε περιαστρικό ιονισμένο υλικό το οποίο καλύπτει και τα δύο μέλη του συστήματος. Η *τρίτη* περιοχή χαρακτηρίζεται από επίσης έντονες γραμμές εκπομπής παραγόμενες από ένα ιδιαίτερα θερμό σώμα, μικρών σχετικά διαστάσεων, ενεργούς θερμοκρασίας της τάξης των 100000 K και το οποίο είτε ταυτίζεται με έναν εκφυλισμένο λευκό νάνο, είτε με ένα μη εκφυλισμένο νάνο αστέρα της κύριας ακολουθίας γύρω από τον οποίο έχει σχηματιστεί δίσκος προσαύξησης, είτε τέλος με έναν αστέρα νετρονίων, ομοίως περιβαλλόμενο από δίσκο προσαύξησης (π.χ. Iben & Tutukov 1996).

Η τροχιακή περίοδος των γνωστών συμβιωτικών συστημάτων βρίσκεται σε μια περιοχή μεταξύ ενός και τριών ετών, αλλά θεωρητικές μελέτες υποστηρίζουν την άποψη ενδεχόμενης ύπαρξης συστημάτων με περιόδους μεγαλύτερες των 1000 ημερών και οι οποίες μπορούν να φτάσουν ακόμα και τις 10000 ημέρες. Σημειώνουμε επίσης ότι η επαναληπτικότητα των εξάρσεων στα συστήματα που έχουν παρατηρηθεί κατά τη διάρκεια του περασμένου αιώνα ξεπερνά τα 20 χρόνια ενώ η αύξηση της λαμπρότητάς τους είναι τουλάχιστον ίση με τρία μεγέθη. Η συχνότητα εμφάνισης ενός φαινομένου έξαρσης στο Γαλαξία μας από τα συστήματα αυτά έχει εκτιμηθεί με διάφορες μεθόδους μεταξύ 0.4 και 3.0 γεγονότων το χρόνο με επικρατέστερη τιμή το 1 γεγονός/yr (π.χ. Κοντογιάννης & Νανούρης 2006).

Στην περίπτωση ενός συμβιωτικού συστήματος, η ταχύτητα του φαινομένου της έξαρσης είναι κατά πολύ μικρότερη σε σχέση με εκείνη των κατακλυσμικών μεταβλητών. Το διάστημα κατά το οποίο ο αστέρας οδηγείται προς τη μέγιστη λαμπρότητά του, είναι πλέον της τάξης μερικών μηνών ενώ η επιστροφή στην αρχική του λαμπρότητα διαρκεί μερικές δεκάδες χρόνια (Σχήμα Ι.9). Η φαινομενικά μικρότερη αύξηση της λαμπρότητας σε σχέση με εκείνη των κατακλυσμικών μεταβλητών οφείλεται στο ότι κατά την περίοδο ηρεμίας η λαμπρότητα που υπερισχύει είναι εκείνη που προέρχεται από τον γίγαντα ή υπεργίγαντα που φέρουν πάντοτε ως μέλη και όχι από τη λαμπρότητα του δίσκου προσαύξησης που συνήθως συμβαίνει στην περίπτωση των κατακλυσμικών.



Σχήμα Ι.9. Η καμπύλη φωτός των συμβιωτικών συστημάτων HM Sge (πάνω) και PU Vul (κάτω) τα οποία αποτελούν τους χαρακτηριστικούς εκπροσώπους τους όσον αφορά την εξελικτική πορεία που ακολουθούν προς το σχηματισμό κοινού περιβλήματος (Murset & Nussbaumer 1994). Στην πρώτη περίπτωση η φάση έξαρσης οδηγεί απευθείας στη δημιουργία κοινού νεφελώματος σε αντίθεση με τη δεύτερη κατά την οποία η φάση έξαρσης μπορεί να διαρκέσει πολλές δεκάδες χρόνια.

Σημειώνουμε επίσης ότι ο κύριος μηχανισμός παραγωγής της έντονης ακτινοβολίας στους συμβιωτικούς αστέρες, αποτελεί η καύση του υδρογόνου που προσαυξάνεται στην επιφάνεια του εκφυλισμένου συνοδού αλλά και η βαρυτική ενέργεια που απελευθερώνεται από το δίσκο προσαύξησης κατά τη συνεχή διόγκωσή του στην περίπτωση που ο συνοδός ταυτίζεται με ένα μη εκφυλισμένο νάνο. Παρά τις διαφορές αυτές μεταξύ κατακλυσμικών και συμβιωτικών συστημάτων, η φύση των γεγονότων έξαρσης και στις δύο κατηγορίες συστημάτων φαίνεται να είναι κοινή.

Σε αντίθεση με τα συνήθη χαρακτηριστικά που παρουσιάζουν οι συμβιωτικοί αστέρες, διακρίνεται μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα κατηγορία η οποία χαρακτηρίζεται από γεγονότα εξάρσεων όμοια με εκείνα των καινοφανών αστέρων. Οι ***συμβιωτικοί καινοφανείς (Symbiotic Novae, SyNe)***, όπως συνήθως αποκαλούνται, αποτελούνται από ένα εξελιγμένο μέλος όμοιο με εκείνο των προηγούμενων κατηγοριών και από έναν εκφυλισμένο νάνο με μάζα και ρυθμούς προσαύξησης υλικού όμοιους με εκείνους που παρατηρούνται στους κατακλυσμικούς μεταβλητούς αστέρες.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ενώ στην περίπτωση των κατακλυσμικών μεταβλητών αστέρων η ακτίνα του λοβού Roche που αντιστοιχεί στο νάνο είναι της τάξης μόλις της 1 $R_{\odot}$, στην περίπτωση των συμβιωτικών καινοφανών η ακτίνα αυτή ξεπερνά πολλές φορές τις 100 $R_{\odot}$ με αποτέλεσμα, ακόμα και κατά τη φάση της έξαρσης, ο λοβός να μη συμπληρώνεται και τελικά το υλικό που διαστέλλεται να μη διαφεύγει. Το γεγονός αυτό έχει οδηγήσει στην άποψη ότι τις επόμενες δεκαετίες το υδρογόνο συνεχίζει να καίγεται στο εσωτερικό ενός νεογέννητου πλέον γίγαντα, κάτω από μια ημισταθή κατάσταση, ο οποίος όμως θα καταρρεύσει και πάλι προς ένα θερμό εκφυλισμένο νάνο, καθώς η τροφοδοσία υλικού από το πρωτεύον μέλος δεν διακόπτεται (π.χ. Iben & Tutukov 1996).

2.4. Συμπαγή Διπλά Συστήματα Εκπομπής Ακτίνων Χ

Τα ***συμπαγή (διπλά) συστήματα εκπομπής ακτίνων Χ (compact X-rays binaries)*** αποτελούνται από έναν συμβατικό αστέρα ο οποίος στην πλειοψηφία των περιπτώσεων έχει συμπληρώσει το λοβό Roche του και από έναν αστέρα νετρονίων (ενδεχομένως και μια μελανή οπή) ο οποίος τροφοδοτείται συνεχώς με υλικό από το συνοδό του (π.χ. Μπιτζαράκη 2003).

Γύρω από το συμπαγή αστέρα η περιοχή είναι ισχυρά μαγνητισμένη και συνεπώς η ύλη δεν μπορεί να διαπεράσει τις δυναμικές γραμμές. Ο μόνος λοιπόν τρόπος για να φτάσει στην επιφάνειά του συμπαγούς συνοδού είναι κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών που οδηγούν στους πόλους. Η ύλη συσσωρεύτεται αρχικά σε ένα δίσκο προσαύξησης και από εκεί μεταφέρεται στους πόλους, οπότε και θερμαίνεται σε πολύ μεγάλες θερμοκρασίες με αποτέλεσμα την εκπομπή εκπομπής ακτίνων Χ.

Ο μηχανισμός αυτός σε συνδυασμό με την περιστροφή του αστέρα νετρονίων καθιστούν την ακτινοβολία παλμική για παρατηρητές που δε μετέχουν στην περιστροφή. Για τους παραπάνω λόγους, τα συμπαγή συστήματα εκπομπής ακτίνων Χ καλούνται συχνά και ως ***pulsars εκπομπής ακτίνων Χ (X-ray pulsars)***. Τα συστήματα αυτά, ανάλογα με τη μάζα του δότη αστέρα (μεγάλης ή μικρής μάζας) χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες ενώ υπάρχει και μια ακόμα ταξινόμηση ανάλογα με τη σταθερότητα (persistent sources) ή την παροδικότητα (transient sources) της εκπομπής ακτίνων Χ εξαιτίας ορισμένων ασταθειών που αναπτύσσονται στο δίσκο προσαύξησης.

Τα ***διπλά συστήματα εκπομπής ακτίνων Χ μεγάλης μάζας (High Mass X-ray Binaries, HMXBs)*** διαθέτουν δότη είτε έναν αστέρα της κύριας ακολουθίας, φασματικού τύπου O ή B (συνήθως εκπομπής), ο οποίος δεν έχει γεμίσει το λοβό Roche του, είτε έναν υπεργίγαντα αστέρα προγενέστερου φασματικού τύπου ο οποίος όμως τώρα γεμίζει το λοβό του. Στην πρώτη περίπτωση, ο δότης αστέρας βρίσκεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον αστέρα νετρονίων με τροχιακή περίοδο μεγαλύτερη των 20 ημερών, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η τροχιακή περίοδος βρίσκεται μικρότερη των 10 ημερών. Επίσης, στην πρώτη περίπτωση τα συστήματα αποτελούν παροδικές πηγές ακτίνων Χ σε αντίθεση με τη δεύτερη στην οποία τα συστήματα είναι σταθερές πηγές και μάλιστα κατά πολύ μικρότερες σε αριθμό σε σχέση με τις προηγούμενες.

Στα συστήματα εκπομπής ακτίνων Χ μεγάλης μάζας, ο δότης αστέρας διαθέτει πάντοτε μάζα μεγαλύτερη των 10 $M_{\odot}$, ενώ ο αστέρας νετρονίων χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερα ισχυρό μαγνητικό πεδίο (μεγαλύτερο των 10^{11} G). Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι οι πηγές ακτίνων Χ μεγάλης μάζας είναι νεαρά αστρικά αντικείμενα, βρίσκονται κοντά στο γαλαξιακό επίπεδο καθώς και ότι η εκπομπή ακτινοβολίας του συμπαγούς μέλους στις ακτίνες Χ είναι πάντοτε μικρότερη εκείνης στα οπτικά μήκη κύματος.

Τα ***διπλά συστήματα εκπομπής ακτίνων Χ μικρής μάζας (Low Mass X-ray Binaries, LMXBs)*** διαθέτουν δότη έναν αστέρα της κύριας ακολουθίας μεταγενέστερου φασματικού τύπου K ή M (χωρίς να αποκλείεται και η περίπτωση ενός λευκού νάνου). Η μεταφορά μάζας γίνεται μέσω της υπερχείλισης του λοβού Roche η οποία μπορεί να προκληθεί από διαστολή της ακτίνας του δότη κατά την πυρηνική τους εξέλιξη, από απώλεια της τροχιακής στροφορμής μέσω μαγνητικής πέδησης εξαιτίας της παρουσίας του ψυχρού δότη ή από το συνδυασμό τους.

Το σημαντικότερο ίσως χαρακτηριστικό τους είναι η *παρουσία έντονων εκλάμψεων (X-ray bursts)*. Το φαινόμενο αυτό αποδίδεται στον εκρηκτικό σχηματισμό πυρήνων σιδήρου και τελικά νετρονίων σε πολύ μεγάλες πυκνότητες κατά τη συσσώρευση του υλικού στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων. Το υλικό αυτό είναι πλούσιο σε υδρογόνο και ήλιο και τροφοδοτείται από το δότη αστέρα. Η μεγάλη πίεση που ασκείται από το βάρος της ύλης αυτής είναι εκείνη που οδηγεί στη σύντηξη των παραπάνω στοιχείων σε νετρόνια. Ας σημειωθεί ακόμα ότι η κύρια πηγή φωτός στις πηγές ακτίνων Χ μικρής μάζας δεν είναι ο συνοδός αστέρας αλλά το αέριο μέσα στο δίσκο προσαύξησης το οποίο θερμαίνεται από τις ακτίνες Χ.

Στα συστήματα εκπομπής ακτίνων Χ μικρής μάζας, ο δότης αστέρας διαθέτει πάντοτε μάζα μικρότερη των 2 $M_{\odot}$, ενώ ο αστέρας νετρονίων χαρακτηρίζεται από ασθενέστερο μαγνητικό πεδίο σε σχέση με τα συστήματα εκπομπής ακτίνων Χ μεγάλης μάζας (μικρότερο των 10^{12} G). Το γεγονός αυτό επιτρέπει την παρατήρηση των εξάρσεων σε αντίθεση με το ισχυρό μαγνητικό πεδίο των συστημάτων εκπομπής ακτίνων Χ μεγάλης μάζας το οποίο καταπνίγει τις εκρήξεις.

Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι οι πηγές ακτίνων Χ μικρής μάζας είναι αστρικά αντικείμενα σχετικά παλαιά, είναι συγκεντρωμένες στο γαλαξιακό κέντρο, καθώς και ότι η ακτινοβολία του συμπαγούς μέλους στις ακτίνες Χ είναι πάντοτε κατά πολύ μεγαλύτερη εκείνης που αντιστοιχεί στα οπτικά μήκη κύματος.

3. Προσδιορισμός Φυσικών Παραμέτρων

Η σημαντικότερη προσφορά των διπλών συστημάτων στην Αστροφυσική αποτελεί αναμφισβήτητα η δυνατότητα άμεσου προσδιορισμού των φυσικών παραμέτρων των μελών τους, γεγονός το οποίο μας δίνει την ευκαιρία να ελέγξουμε τα θεωρητικά μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί σχετικά με την αστρική δομή και εξέλιξη. Η παραπάνω διαδικασία απαιτεί συνήθως τον προσδιορισμό των φωτομετρικών και φασματοσκοπικών τους παραμέτρων, στην περίπτωση τουλάχιστον που τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους το επιτρέπουν.

3.1 Φαινόμενα Εγγύτητας

Το πρώτο βήμα προσδιορισμού των φωτομετρικών παραμέτρων ενός συστήματος σχετίζεται με την απομάκρυνση των επιδράσεων που φέρει μια καμπύλη φωτός από ***φαινόμενα εγγύτητας (proximity effects)*** τα οποία οφείλονται κυρίως σε ατμοσφαιρικές και επιφανειακές διαταρραχές των μελών όταν αυτά πλησιάζουν αρκετά μεταξύ τους και γίνονται ιδιαίτερα αντιληπτές κατά τη φάση των εκλείψεων. Οι βασικότερες ιδιότητες και η φύση των επιδράσεων αυτών θα παρουσιαστούν συνοπτικά στην παρούσα ενότητα (π.χ. Kallrath & Milone 1999).

Το ***φαινόμενο της ανάκλασης (reflection effect)*** παράγεται σε συστήματα των οποίων τα μέλη έχουν σημαντική διαφορά θερμοκρασίας και οφείλεται στη θέρμανση που προκαλεί ο θερμότερος αστέρας στην πλευρά του ψυχρότερου που βρίσκεται απεναντί του. Το γενικότερο αποτέλεσμα έχει να κάνει με μια αύξηση της λαμπρότητας του συστήματος κυρίως στην περιοχή που λαμβάνει χώρα το δευτερεύον ελάχιστο καθώς η ενεργός θερμοκρασία του ψυχρότερου μέλους, T_c, παρουσιάζεται τώρα αυξημένη και ίση με την καλούμενη ως *τροποποιημένη ενεργό θερμοκρασία (modified effective temperature)* T_c', σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$T_c' = \left(1 + \frac{A_c F_h}{F_c}\right)^{1/4} T_c \quad \text{με} \quad \frac{A_c F_h}{F_c} \geq 0\,, \tag{1.7}$$

όπου F_h η ολοκληρωμένη βολομετρική ροή ακτινοβολίας του αστέρα που προκαλεί το φαινόμενο και ταυτίζεται με το θερμότερο μέλος, F_c η τοπική βολομετρική ροή ακτινοβολίας του ψυχρότερου μέλους, ανεπηρέαστη ακόμα από το φαινόμενο, και A_c η *βολομετρική λευκαύγεια (bolometric albedo)* του ψυχρότερου αστέρα η οποία εκφράζει το ποσοστό της ροής του θερμότερου που ανακλάται στο συνοδό του.

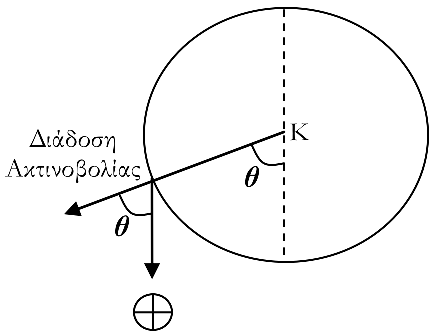
Το ***φαινόμενο αμαύρωσης χείλους (limb darkening effect)*** αποτελεί συνέπεια της ανομοιόμορφης κατανομής της λαμπρότητας στην επιφάνεια ενός άστρου και πιο συγκεκριμένα της βαθμιαίας μείωσης της λαμπρότητας από το κέντρο προς το χείλος του. Τα αίτια του παραπάνω φαινομένου είναι καθαρά γεωμετρικά καθώς η ακτινοβολία που δεχόμαστε από τις εξώτατες και επομένως ψυχρότερες περιοχές του αστέρα θα είναι προφανώς μειωμένη σε σχέση με εκείνη που δεχόμαστε από τις κεντρικές θερμότερες φωτοσφαιρικές περιοχές.

Η κατανομή της επιφανειακής λαμπρότητας I εξαιτίας του παραπάνω φαινομένου ως προς την πολική γωνία θ, η οποία ορίζεται μεταξύ της διεύθυνσης διάδοσης ακτινοβολίας και της διεύθυνσης παρατήρησης (Σχήμα Ι.10), περιγράφεται με τη βοήθεια του *ενεργού συντελεστή αμαύρωσης χείλους (effective limb darkening factor)*, $D(\mu)$, ο οποίος ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$I = D(\mu) I_0 \quad \text{με} \quad 0 \leq D(\mu) \leq 1 \quad \text{και} \quad \mu = \cos\theta, \tag{1.8}$$

όπου I_0 η επιφανειακή λαμπρότητα στο κέντρο του αστρικού δίσκου. Η συσχέτιση του παραπάνω συντελεστή με την ποσότητα μ θεωρείται κατά προσέγγιση γραμμική, με συντελεστή αναλογίας τον καλούμενο *συντελεστή αμαύρωσης χείλους (limb darkening coefficient)* x_λ, με λ το μήκος κύματος στο οποίο γίνεται η παρατήρηση. Τα τελευταία χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί μη γραμμικές και συνεπώς περισσότερο ρεαλιστικές προσεγγίσεις, όπως πολυωνυμικές και λογαριθμικές, εισάγοντας έναν ακόμα, μη γραμμικό, συντελεστή αμαύρωσης χείλους, y_λ. Η επικρατέστερη ακολουθεί το *νόμο της τετραγωνικής ρίζας* (Diaz-Cordoves & Gimenez 1992), σύμφωνα με την οποία ισχύει:

$$D(\mu) = 1 - x_\lambda (1-\mu) - y_\lambda (1-\sqrt{\mu}). \tag{1.9}$$



Σχήμα Ι.10. Απεικόνιση του φαινομένου αμαύρωσης χείλους. Η γωνία θ που σχηματίζεται μεταξύ της διεύθυνσης διάδοσης ακτινοβολίας και της διεύθυνσης παρατήρησης είναι εκείνη που καθορίζει την κατανομή της επιφανειακής λαμπρότητας, όπως αυτή καταγράφεται από τον παρατηρητή.

Ερχόμενοι τώρα στο ***φαινόμενο της βαρυτικής αμαύρωσης (gravity darkening effect)***, οφείλουμε να επισημάνουμε ότι η παρουσία του γίνεται εμφανής μόνο στις περιπτώσεις αστέρων με έντονα παραμορφωμένο σχήμα και επομένως στα μέλη στενών μόνο διπλών συστημάτων. Το παραπάνω φαινόμενο είναι αποτέλεσμα της μη ομοιόμορφης κατανομής της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην αστρική επιφάνεια, καθώς το σχήμα του αστέρα δεν είναι απόλυτα σφαιρικό.

Συγκεκριμένα, η τοπική επιφανειακή ροή της ακτινοβολίας, F_ℓ, εξαρτάται τόσο από την τοπική ενεργό θερμοκρασία, T_ℓ, όσο και από την τοπική επιφανειακή επιτάχυνση της βαρύτητας, g_ℓ (π.χ. Kippenhahn & Weigert 1994). Θεωρώντας σε πρώτη προσέγγιση τη θερμοκρασία σταθερή, αποδεικνύεται ότι η τοπική βολομετρική ροή της ακτινοβολίας συνδέεται με την τοπική επιτάχυνση της βαρύτητας σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$F_\ell = F_p\left(\frac{g_\ell}{g_p}\right)^\beta \quad \text{ή αλλιώς} \quad F_\ell \propto g_\ell^{\ \beta}, \tag{1.10}$$

όπου F_p και g_p τα αντίστοιχα μεγέθη στους πόλους του αστέρα και β ο *εκθέτης βαρυτικής αμαύρωσης (gravity darkening exponent)*. Η παράμετρος αυτή λαμβάνει την τιμή 1.00 για αστέρες με περίβλημα ακτινοβολίας (von Zeipel 1924a, 1924b, 1924c) και την τιμή 0.32 για αστέρες με περίβλημα μεταφοράς (Lucy 1967). Ας σημειωθεί βέβαια ότι τα τελευταία χρόνια, κατάλληλοι αριθμητικοί υπολογισμοί έδειξαν ότι ο εκθέτης βαρυτικής αμαύρωσης μπορεί να λάβει οποιαδήποτε από τις ενδιάμεσες τιμές ανάλογα με την κατανομή μάζας του εσωτερικού του (Claret 1998).

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των παραγόντων που αλλοιώνουν την πραγματική μορφή μιας καμπύλης φωτός, οφείλουμε να προσθέσουμε ότι η ύπαρξη επιφανειακών σχηματισμών και γενικότερα οποιοδήποτε μορφή αστρικής δραστηριότητας σε κάποιο από τα μέλη του συστήματος, είναι ικανή να επιφέρει παραμορφώσεις οι οποίες γίνονται συνήθως αντιληπτές είτε με τη διαφορά λαμπρότητας στην περιοχή των μεγίστων (φαινόμενο O'Connell) είτε με την παρουσία κυμάτων παραμόρφωσης (distortion waves) και μετανάστευσης (migration waves). Τα παραπάνω χαρακτηριστικά εμφανίζονται κατά κανόνα σε συστήματα των οποίων τα μέλη είναι αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων και αποδίδονται στην ύπαρξη ψυχρών και εκτεταμένων κηλίδων στις επιφάνειες τους. Σήμερα έχουν αναπτυχθεί εξειδικευμένα προγράμματα φωτομετρικής ανάλυσης τα οποία απομονώνουν και απομακρύνουν τις επιδράσεις που οφείλονται στους παραπάνω επιφανειακούς σχηματισμούς (π.χ. `ILOT`, Budding & Zeilik 1987).

3.2. Φωτομετρικές Παράμετροι

Οι ***φωτομετρικές παράμετροι (photometric parameters ή elements)*** ενός διπλού εκλειπτικού συστήματος προσδιορίζονται άμεσα από την καμπύλη φωτός του. Το απόλυτο βάθος των ελαχίστων σε σχέση με τη στάθμη φωτός της καμπύλης (εννοώντας με τον όρο αυτό τη λαμπρότητα του συστήματος μεταξύ των εκλείψεων) αλλά και τα σχετικά βάθη του πρωτεύοντος ως προς το δευτερεύον, είναι ίσως οι καθοριστικότερες παράμετροι που λαμβάνονται από την καμπύλη φωτός και οι οποίες οδηγούν στον προσδιορισμό της γεωμετρίας του συστήματος. Σήμερα, έχει αναπτυχθεί ένα μεγάλο πλήθος προγραμμάτων αριθμητικής επίλυσης καμπυλών φωτός τα οποία επιτυγχάνουν τον προσδιορισμό των παραπάνω στοιχείων με αξιοσημείωτη ακρίβεια.

Η ανάλυση της διορθωμένης πλέον καμπύλης φωτός μας παρέχει πληροφορίες για τις γεωμετρικές παραμέτρους του συστήματος αλλά και των μελών του. Η σημαντικότερη από αυτές είναι η *κλίση του επιπέδου τροχιάς του συστήματος* *(inclination) i*, παράμετρος θεμελιώδης για τον προσδιορισμό των απολύτων στοιχείων των μελών και ειδικότερα των μαζών τους. Η γνώση του βάθους των δύο ελαχίστων επιτρέπει τον προσδιορισμό της *σχετικής τους λαμπρότητας* αλλά και των *σχετικών τους ακτίνων ως προς την τροχιακή (orbital radius)*, δηλαδή ως προς τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς του συστήματος (semi-major axis), A_{orb}. Όπως θα δούμε, η απόσταση αυτή προσδιορίζεται συνήθως φασματοσκοπικά, αλλά ορισμένες φορές και με τη βοήθεια της αστρομετρίας, όταν το σύστημα τυχαίνει να είναι αστρομετρικά ή οπτικά διπλό.

Η ταυτόχρονη παρατήρηση ενός διπλού εκλειπτικού συστήματος σε διάφορα μήκη κύματος αποτελεί χωρίς αμφιβολία το είδος της φωτομετρικής μελέτης με τις περισσότερες δυνατότητες. Η ***φωτομετρία σε πολλά φίλτρα (multifilter photometry)***, όπως συνήθως καλείται, αποσκοπεί στη μελέτη της συμπεριφοράς ενός αστέρα σε διάφορες φασματικές περιοχές αλλά και στον προσεγγιστικό προσδιορισμό της *ενεργού του θερμοκρασίας* T_{eff} και του *απόλυτου μεγέθους* του M_λ στο αντίστοιχο μήκος κύματος λ.

Η συνεισφορά της φωτομετρίας πολλών φίλτρων είναι πολύ σημαντική στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει τρόπος να έχουμε ακριβείς φασματοσκοπικές παρατηρήσεις. Απαραίτητη προϋπόθεση για τον προσδιορισμό των παραπάνω φυσικών παραμέτρων αποτελεί ο προσδιορισμός των *δεικτών χρώματος (color indices), C.I.*, ανάλογα με τα φίλτρα που έχουν χρησιμοποιηθεί στη φωτομετρία. Με τη βοήθεια πρότυπων αστέρων (standard stars), υπολογίζονται τα *διορθωμένα φαινόμενα μεγέθη*, m_λ, και συνεπώς οι δείκτες χρώματος των παρατηρούμενων αστέρων έξω από την ατμόσφαιρα, $(C.I.)_0$ (προσδιορίζοντας το συντελεστή εξασθένησης πρώτης τάξης), ενώ με κατάλληλες εκτιμήσεις προσδιορίζεται η *υπεροχή χρώματος (color excess)*, $E_{C.I.}$, ώστε να αφαιρεθεί η επίδραση της μεσοαστρικής ύλης μέσω της *μεσοαστρικής χρώσης (interstellar attenuation)*, A_λ.

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται η παρακάτω εμπειρική, αλλά ιδιαίτερα χρήσιμη, σχέση με τη βοήθεια της οποίας έχουμε μια προσεγγιστική εκτίμηση της ενεργού θερμοκρασίας του συστήματος:

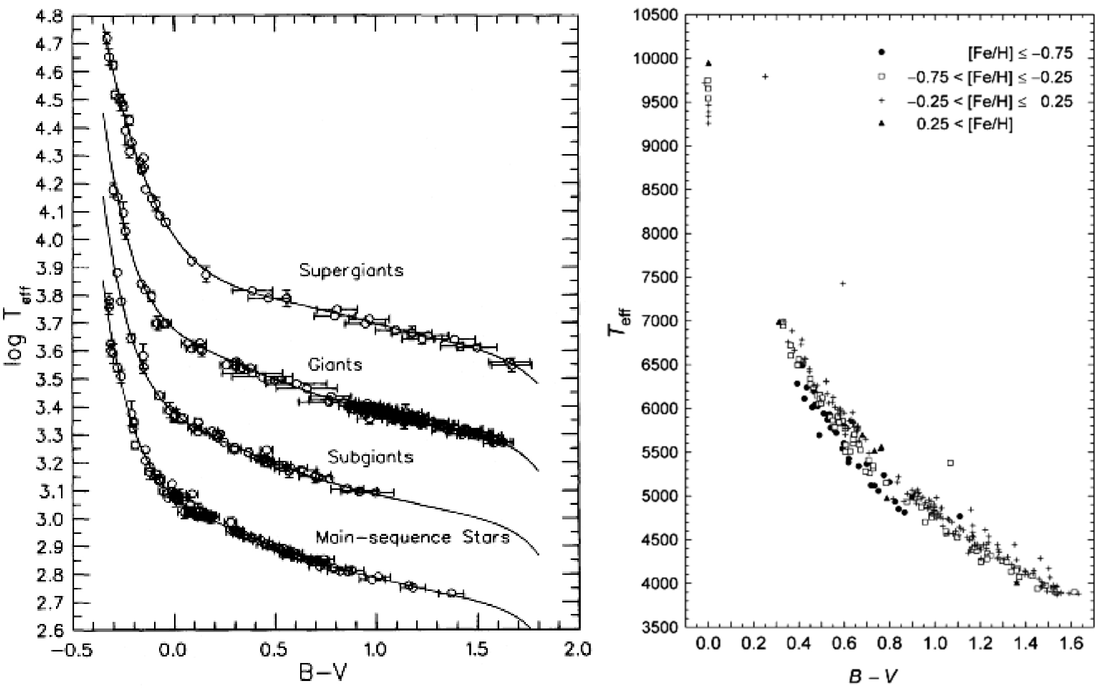
$$T_{eff} = \frac{7200}{C.I + 0.64} + C_0, \qquad (1.11)$$

με την T_{eff} σε K και τη C_0 σταθερά η οποία έχει τέτοια πάντοτε τιμή ώστε αν εφαρμοστεί η παραπάνω σχέση για αστέρες φασματικού τύπου A0V, η ενεργός θερμοκρασία να λαμβάνει την τιμή 9900 K. Δυστυχώς, η σχέση αυτή δίνει σχετικά καλά αποτελέσματα μόνο για άστρα φασματικών τύπων F και G, ενώ σε ακραίους φασματικούς τύπους αποκλίνει αρκετά από τις πραγματικές τιμές. Ας σημειωθεί ότι ο προσδιορισμός των δεικτών χρώματος ενός εκλειπτικά διπλού συτήματος επικεντρώνεται συνήθως στα ελάχιστα της καμπύλης φωτός ώστε οι εκτιμήσεις της ενεργού θερμοκρασίας (αλλά και των απολύτων μεγεθών) να αντιστοιχούν σε κάθε μέλος ξεχωριστά. Δυστυχώς όμως, η προσέγγιση αυτή είναι αξιόπιστη μόνο εφόσον οι εκλείψεις είναι ολικές, διαφορετικά προτιμάται η γνώση του δείκτη χρώματος στα μέγιστα, υποθέτοντας ότι εκφράζει σε ικανοποιητικό βαθμό τη θερμοκρασία του πρωτεύοντα αστέρα.

Σήμερα, διαθέτουμε ένα σημαντικό πλέον πλήθος αστέρων με παραμέτρους οι οποίες έχουν προσδιοριστεί με πολύ μεγάλη ακρίβεια, κυρίως από δείγματα αποχωρισμένων διπλών συστημάτων. Με βάση τα δεδομένα αυτά έχουν πραγματοποιηθεί αρκετά εκτενείς μελέτες οι οποίες έχουν δείξει ότι ο (διορθωμένος) δείκτης χρώματος $(B\text{-}V)_0$ αποτελεί έναν ιδιαίτερα αξιόπιστο δείκτη θερμοκρασίας. Είναι μάλιστα πλέον αποδεδειγμένο ότι ο δείκτης αυτός παρουσιάζει (ασθενή) εξάρτηση τόσο από την τάξη φωτεινότητας όσο και από τη μεταλλικότητα της χημικής σύστασης του αστέρα (Sekiguchi & Fukugita 2000, Σχήμα I.11). Ο βαθμός εξάρτησης δε φαίνεται να διαφοροποιείται έντονα για τις τάξεις των νάνων, υπογιγάντων και γιγάντων αστέρων κάτι το οποίο όμως δε συμβαίνει με τους υπεργίγαντες (Flower 1996). Τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται σχέσεις όχι τόσο απλές όσο η τελευταία αλλά σχέσεις περισσότερο σύνθετες της μορφής:

$$T_{eff} = T_{eff}\{(B-V),[Fe/H],\log g\}, \tag{1.12}$$

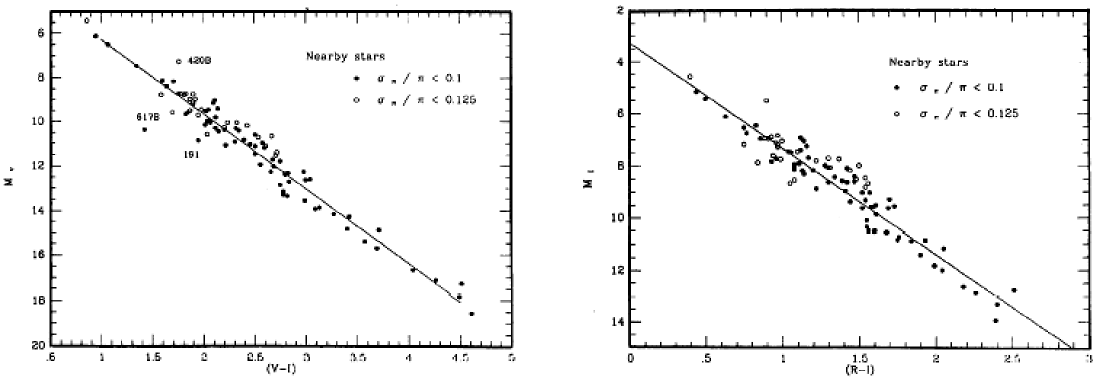
όπου g η επιφανειακή επιτάχυνση της βαρύτητας του αστέρα και $[Fe/H]$ η περιεκτικότητα της ατμόσφαιράς του σε μέταλλα. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω διαπιστώσεις έχουν σημαντικές επιπτώσεις στη βολομετρική διόρθωση των απολύτων μεγεθών. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, οι διορθώσεις αυτές έχουν διαφοροποιηθεί κυρίως στις περιπτώσεις των υπεργιγάντων αστέρων σε σχέση με τις υπόλοιπες τάξεις φωτεινότητας για τις οποίες η διόρθωση δεν διαφέρει σημαντικά.



Σχήμα I.11. Εξάρτηση του δείκτη χρώματος (*B-V*) από την ενεργό θερμοκρασία για διάφορες τάξεις φωτεινότητας (Flower 1996, αριστερά) και για διάφορα ποσοστά μεταλλικότητας (Sekigughi & Fukugita 2000, δεξιά).

Η περίπτωση φωτομετρικού προσδιορισμού των απόλυτων μεγεθών ενός συστήματος παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς έχει βρεθεί ότι τα απόλυτα μεγέθη στα φίλτρα V και I συνδέονται ισχυρά με τους (διορθωμένους) δείκτες χρώματος $(V\text{-}I)_0$ και $(R\text{-}I)_0$ αντίστοιχα (Σχήμα Ι.12). Ειδικότερα για τους αστέρες της κύριας ακολουθίας, η συσχέτιση παρουσιάζεται (εντυπωσιακά) γραμμική και σήμερα χρησιμοποιούνται τέσσερις βασικές σχέσεις (Reid 1991) καλύπτοντας όλο το φάσμα των νάνων αστέρων, καθώς και μια πέμπτη (η τρίτη κατά σειρά από τις ακόλουθες), εξειδικευμένη για αστέρες φασματικών τύπων K και M (Reid & Majewski 1993):

- $M_V = 2.89(\pm 0.20) + 3.37(\pm 0.07)\cdot(V\text{-}I)$ όταν $M_V \geq 6.0$ ή αλλιώς $(V\text{-}I) \geq 0.93$. (1.13)
- $M_V = 1.95 + 4.35\cdot(V\text{-}I)$ όταν $M_V < 6.0$ ή αλλιώς $(V\text{-}I) < 0.93$. (1.14)
- $M_V = 1.10 + 5.33\cdot(V\text{-}I)$ όταν $3.76 < M_V < 6.0$ ή αλλιώς $0.50 < (V\text{-}I) < 0.93$. (1.15)
- $M_I = 3.25(\pm 0.21) + 4.07(\pm 0.14)\cdot(R\text{-}I)$ όταν $M_I \geq 5.0$ ή αλλιώς $(R\text{-}I) \geq 0.43$. (1.16)
- $M_I = 1.26 + 8.69\cdot(R\text{-}I)$ όταν $M_I < 5.0$ ή αλλιώς $(R\text{-}I) < 0.43$. (1.17)



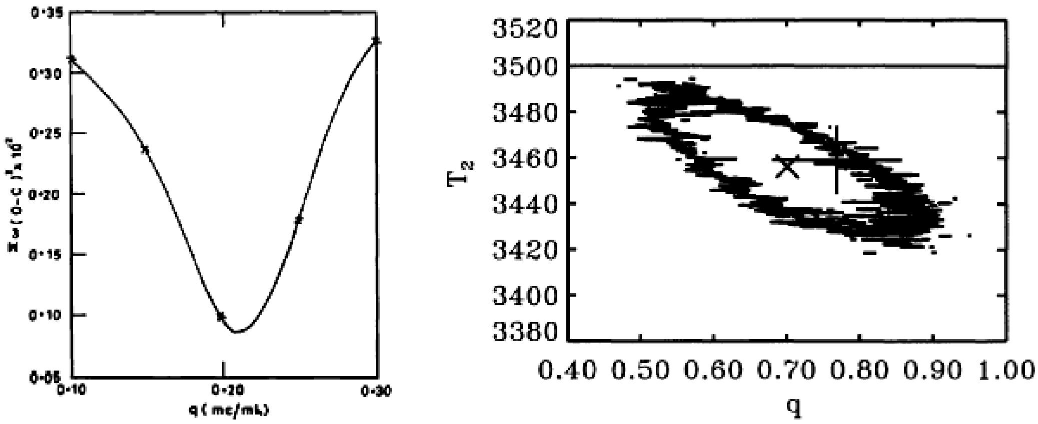
Σχήμα Ι.12. Γραφική απεικόνιση της ισχυρής γραμμικής συσχέτισης που εμφανίζεται στους αστέρες κύριας ακολουθίας μεταξύ των απόλυτων μεγεθών M_V (αριστερά) και M_I (δεξιά) και των δεικτών χρώματος $(V\text{-}I)$ και $(R\text{-}I)$ αντίστοιχα (Reid 1991).

Στην παρουσίαση των προηγούμενων σχέσεων αλλά και της αμέσως επόμενης, για πρακτικούς λόγους, έχουμε παραλείψει τον μηδενικό δείκτη από τους διορθωμένους δείκτες χρώματος. Γνωρίζοντας πλέον με αρκετά καλή ακρίβεια τα φαινόμενα και απόλυτα μεγέθη ενός συστήματος, είμαστε ικανοί να προσδιορίσουμε, έστω και προσεγγιστικά, την απόστασή του r (σε pc) από την ακόλουθη γνωστή σχέση:

$$m_\lambda - M_\lambda = 5\log r - 5 + A_\lambda \text{ με } A_\lambda = R \cdot E_{C.I.} \text{ και } R \cong 3.2 \text{ όταν } C.I. \equiv (B-V). \quad (1.18)$$

Ας σημειωθεί ακόμα ότι είναι δυνατός, κάτω από πολύ ειδικές μόνο προϋποθέσεις (π.χ. απαίτηση της γνώσης μιας τουλάχιστον φυσικής παραμέτρου, όπως η θερμοκρασία, ενός από τα δύο μέλη του συστήματος), ο υπολογισμός του *λόγου μαζών (mass ratio)* του συστήματος q φωτομετρικά, διαδικασία η οποία λαμβάνει χώρα όταν ο τελευταίος αφήνεται ως ελεύθερη παράμετρος κατά την επίλυση της καμπύλης φωτός με την προϋπόθεση βέβαια ότι οι υπόλοιπες εμπλεκόμενες παράμετροι είναι γνωστές με καλή μάλιστα ακρίβεια. Το γεγονός αυτό συμβαίνει πολύ σπάνια και για το λόγο αυτό ακολουθείται συνήθως η τακτική πολλαπλής δοκιμασίας με διαφορετικές αρχικές παραμέτρους (αφήνοντας συνήθως σταθερή μονάχα τη θερμοκρασία του πρωτεύοντος αστέρα) και επιλογής της λύσης εκείνης για την οποία η παρατηρούμενη καμπύλη φωτός διαφέρει λιγότερο από τη συνθετική.

Η τακτική αυτή ακολουθεί ουσιαστικά τη *στατιστική δοκιμασία* χ^2 *(*χ^2 *fit test)* κατά την οποία επιλέγεται ο (φωτομετρικά προσδιορισμένος) λόγος μαζών που αντιστοιχεί στη λύση με τη λιγότερη απόκλιση της παρατηρούμενης από τη συνθετική (θεωρητική) καμπύλη φωτός (Σχήμα Ι.13). Φυσικά, η διαδικασία αυτή χαρακτηρίζεται από μειωμένη αξιοπιστία και αποτελεί λύση ανάγκης στις περιπτώσεις που ο λόγος μαζών δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί με κάποια εναλλακτική ασφαλέστερη μέθοδο (π.χ. φασματοσκοπικά ή αστρομετρικά). Ένα πρόσθετο μειονέκτημα της παραπάνω μεθόδου αποτελεί και το αδικαιολόγητα μικρό σφάλμα που συνοδεύει το λόγο μαζών και το οποίο σε καμία περίπτωση δεν αντιπροσωπεύει την πραγματικότητα καθώς ο τελευταίος προσδιορίζεται στην περίπτωση αυτή με βάση τα λιγοστά μόνο δεδομένα που διαθέτουμε για τα μέλη του συστήματος. Μια τεχνική που βελτιώνει την αξιοπιστία της και εξασφαλίζει ένα περισσότερο αντικειμενικό σφάλμα καλείται *αναδειγματοληψία επανάθεσης (bootstrap resampling)* και στηρίζεται στην κατάλληλη προσομοίωση συνθετικών καμπυλών φωτός και την εκτίμηση του επαγόμενου κάθε φορά λόγου μαζών (π.χ. Maceroni & Rucinski 1997). Στην τεχνική αυτή θα επανέλθουμε αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο οπότε και θα τη χρησιμοποιήσουμε σε μια εντελώς διαφορετική εφαρμογή.



Σχήμα Ι.13. Φωτομετρικός προσδιορισμός του λόγου μαζών του συστήματος EU Hya με επιλογή της λύσης εκείνης που αντιστοιχεί στο μικρότερο άθροισμα υπολοίπων (Rao et al. 1996, αριστερά). Στην περίπτωση του συστήματος BW3 V38 (Maceroni & Rucinski 1997, δεξιά), η τεχνική της αναδειγματοληψίας με επανάθεση βελτίωσε την αξιοπιστία προσδιορισμού του λόγου μαζών (μεγάλος σταυρός, q = 0.77 ± 0.09) εξασφαλίζοντας ένα περισσότερο αντικειμενικό σφάλμα (μικρός σταυρός, q = 0.70 ± 0.18).

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται ορισμένα από τα πιο σημαντικά προγράμματα φωτομετρικής ανάλυσης είτε αυτά χρησιμοποιούνται μέχρι και σήμερα είτε όχι, έχοντας όμως ιστορική αξία. Η επιλογή τους βασίστηκε κυρίως στο βαθμό αποδοχής τους από την επιστημονική κοινότητα αλλά και στη συχνότητα χρήσης τους σε εργασίες που αναφέρονται στα συστήματα τα οποία θα αποτελέσουν το κύριο αντικείμενο μελέτης της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

3.3. Προγράμματα Φωτομετρικής Ανάλυσης

Η βασική μεθοδολογία ενός προγράμματος φωτομετρικής ανάλυσης ξεκινά πάντοτε από την κατασκευή μιας συνθετικής καμπύλης φωτός η οποία μπορεί και περιγράφει κατά το δυνατόν καλύτερα την πραγματική. Ο μετέπειτα προσδιορισμός των φωτομετρικών παραμέτρων εξαρτάται κυρίως από το φυσικό μοντέλο πάνω στο οποίο έχει στηριχθεί το πρόγραμμα αλλά και από τη μαθηματική μοντελοποίηση που έχει χρησιμοποιηθεί (π.χ. Kallrath & Milone 1999). Οι αριθμητικές τεχνικές που έχουν εφαρμοστεί τα τελευταία χρόνια στα προγράμματα αυτά έχουν αποτελέσει καθοριστικό παράγοντα στην εντυπωσιακή εξέλιξή τους.

Η έννοια της φωτομετρικής ανάλυσης παρουσιάστηκε για πρώτη ουσιαστικά φορά το 1912 με τη δημιουργία μιας απλής σχετικά μεθόδου εμπνευσμένη από τους Russell και Shapley (Russell 1912a, 1912b, Russell & Shapley 1912a, 1912b). Η αναλυτική περιγραφή της τεχνικής αυτής δόθηκε από τους Russell και Merrill το 1952 και σήμερα είναι γνωστή ως ***μέθοδος των Russell και Merrill (R-M method)***. Οι αρχές του αντίστοιχου μοντέλου έχουν τη βάση τους σε σφαιρικά κυρίως αστέρια με τη βοήθεια απλουστευμένων προσεγγίσεων στα φαινόμενα αμαύρωσης και ανάκλασης, ενώ η περιγραφή των φαινομένων της ακτινοβολίας αρκείται σε μια κατανομή Planck.

Στην περίπτωση παραμορφωμένων αστέρων, η μέθοδος στηρίζεται πλέον στη γεωμετρία των τριαξονικών ελλειψοειδών (traxial ellipsoids), χρησιμοποιούνται νέες διορθωμένες τιμές σχετικά με τα φαινόμενα αμαύρωσης και ανάκλασης (κυρίως με τη βοήθεια ημιεμπειρικών σχέσεων), τα φαινόμενα ακτινοβολίας περιγράφονται πλέον από τους νόμους της γκρίζας ατμόσφαιρας, ενώ ακολουθείται μια επιπλέον διαδικασία η οποία καλείται *ανόρθωση (rectification)*. Σύμφωνα με την τελευταία, πραγματοποιείται ανάλυση Fourier στις περιοχές της καμπύλης φωτός εκτός εκλείψεων, εντοπίζονται περιοδικές αλλά και περισσότερο ακανόνιστες παραμορφώσεις (οφειλόμενες σε φαινόμενα παραμόρφωσης του σχήματος των μελών, στο φαινόμενο O'Connell, στο φαινόμενο ανάκλασης, αλλά και σε παράγοντες των οποίων η φύση είναι άγνωστη) οι οποίες τελικά απομακρύνονται, καθιστώντας την καμπύλη φωτός πλήρως συμμετρική.

Η μέθοδος των Russell και Merrill, παρά την απλότητά της, αποτέλεσε το κύριο μέσο φωτομετρικών αναλύσεων για όλη τη διάρκεια του περασμένου αιώνα. Το γεγονός αυτό οφείλεται χωρίς αμφιβολία στην απλότητά της αλλά και στην εύκολη εφαρμογή της χωρίς τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, τουλάχιστον μέχρι το 1970 οπότε και κατασκευάστηκαν οι πρώτοι κώδικες από τον Linnell και αργότερα απο τους Proctor και Linnell το 1972, βασισμένοι στην παραπάνω μέθοδο. Η μέθοδος των Russell και Merrill έχει πλέον παραμεληθεί και σήμερα δε χρησιμοποιείται από την επιστημονική κοινότητα. Θεωρείται όμως ιστορική, καθώς ήταν η πρώτη που έδωσε μια αυστηρή και αξιόπιστη μεθοδολογία αξιοποίησης των καμπυλών φωτός, καθώς και γιατί πάνω σε πολλές από τις αρχές της έχουν στηριχθεί, όπως θα δούμε παρακάτω, νεότερα μοντέλα φωτομετρικών αναλύσεων.

Τα τελευταία 30 χρόνια, η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών έδωσε τρομακτική ώθηση στην κατασκευή προγραμμάτων φωτομετρικής ανάλυσης τα οποία πλέον προσδιορίζουν τις φωτομετρικές παραμέτρους με εντυπωσιακή ακρίβεια. Το ***μοντέλο των Nelson, Davis και Etzel (NDE model)*** παρουσιάστηκε το 1972 (Nelson & Davis 1972), ενώ ο αντίστοιχος κώδικας υλοποιήθηκε το 1981 από τους Etzel και Popper (Etzel 1981), πρόγραμμα που είναι γνωστό ως ***EBOP (Eclipsing Binary Orbit Program)***. Το μειονέκτημα του μοντέλου αυτού αποτελεί το γεγονός της περιορισμένης εφαρμογής του μονάχα σε συστήματα πολύ καλά διαχωρισμένα (well-detached binaries) καθώς θεωρεί τα μέλη του συστήματος απόλυτα σφαιρικά και συνεπώς μπορεί να επεξεργαστεί καμπύλες φωτός ελάχιστα παραμορφωμένες. Ας σημειωθεί ακόμη ότι στις εμπλεκόμενες παραμέτρους δεν περιλαμβάνεται η ενεργός θερμοκρασία των αστέρων αλλά η επιφανειακή τους λαμπρότητα, χαρακτηριστικό το οποίο είναι άμεσα συνδεδεμένο με τη μέθοδο των Russell και Merrill, πολλές από τις αρχές της οποίας ακολουθεί άλλωστε το μοντέλο NDE (Σχήμα Ι.14).

	u	v	b	y
i	86°68 ± 7	86°56 ± 6	86°60 ± 5	86°65 ± 6
$e\sin\omega$	0.1398 ± 16	0.1469 ± 10	0.1493 ± 9	0.1484 ± 10
$e\cos\omega$	0.00974 ± 13	0.00979 ± 8	0.00971 ± 7	0.00980 ± 8
r_A	0.2007 ± 3	0.2024 ± 2	0.2022 ± 2	0.2024 ± 2
k	0.729 ± 2	0.724 ± 2	0.728 ± 1	0.725 ± 1
r_B	0.1463	0.1465	0.1472	0.1467
x_A	0.40	0.45	0.40	0.35
x_B	0.50	0.55	0.50	0.45
y_A	0.74	0.65	0.59	0.53
y_B	0.97	0.83	0.74	0.66
J_B/J_A	0.373 ± 1	0.559 ± 1	0.591 ± 1	0.608 ± 1
L_B/L_A	0.192	0.282	0.302	0.308
σ (mag)	0.0048	0.0036	0.0035	0.0038

Σχήμα Ι.14. Τυπική κάρτα με τα αποτελέσματα της φωτομετρικής επίλυσης ενός διπλού εκλειπτικού συστήματος (GG Lup) με τη βοήθεια του προγράμματος EBOP (Andersen et al. 1993).

Όμως, η παραπάνω μέθοδος χαρακτηρίζεται από δύο πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα. Το πρώτο σχετίζεται με τις αριθμητικές τεχνικές που χρησιμοποιεί και πιο συγκεκριμένα με μια ημιαναλυτική διαδικασία ολοκλήρωσης η οποία επιφέρει σχετικά σφάλματα της τάξης μόλις του 10^{-4} και θεωρείται ακριβέστερη ακόμα και από τις αριθμητικές επιλύσεις που πραγματοποιούν τα σύγχρονα προγράμματα. Το δεύτερο αποτελεί ο μικρός υπολογιστικός χρόνος που απαιτεί η επίλυση της καμπύλης φωτός, γεγονός βέβαια που είναι συνέπεια των απλουστευμένων παραδοχών του μοντέλου NDE. Για τους παραπάνω λόγους, η χρήση του προγράμματος EBOP δεν έχει ακόμα εγκαταλειφθεί. Αντιθέτως, σε περιπτώσεις σφαιρικών μελών, η επιλογή του είναι ίσως η πιο αξιόπιστη.

Επέκταση των δύο προηγούμενων προσεγγίσεων αποτελεί το ***μοντέλο του Wood***, το οποίο παρουσιάστηκε το 1971, ενώ ο αντίστοιχος κώδικας αναπτύχθηκε το 1972 από τον ίδιο και ονομάστηκε **WINK**. Το μοντέλο αυτό επιδέχεται πλέον παραμορφωμένες καμπύλες φωτός, καθώς θεωρεί τα δύο μέλη του συστήματος τριαξονικά ελλειψοειδή, χρησιμοποιεί αριθμητικές τεχνικές ολοκλήρωσης οι οποίες περιορίζουν τα αντίστοιχα σφάλματα σε ικανοποιητικό βαθμό (λίγο μεγαλύτερα αλλά της ίδιας τάξης μεγέθους με εκείνα του EBOP), ενώ η μεθοδολογία του είναι όμοια σε πολλά σημεία με εκείνη της μεθόδου των Russell και Merrill (Σχήμα Ι.15). Όπως είναι αναμενόμενο, η γεωμετρία των τριαξονικών ελλειψοειδών στις μέρες μας θεωρείται ξεπερασμένη αφού αποτελεί μια προσέγγιση και μόνο του πραγματικού σχήματος των μελών. Για το λόγο αυτό, το μοντέλο του Wood έχει πάψει πλέον να χρησιμοποιείται.

	u	v	b	y
i	86°.82 ± 9	86°.76 ± 6	86°.83 ± 5	86°.86 ± 5
$e\sin\omega$	0.1354 ± 20	0.1503 ± 11	0.1528 ± 10	0.1518 ± 10
$e\cos\omega$	0.00975 ± 14	0.00979 ± 8	0.00971 ± 7	0.00980 ± 7
r_A [a]	0.1966 ± 3	0.1981 ± 2	0.1979 ± 2	0.1980 ± 2
k [a]	0.737 ± 2	0.729 ± 1	0.732 ± 1	0.730 ± 1
r_B [a]	0.1448	0.1444	0.1449	0.1445
x_A	0.40	0.45	0.40	0.35
x_B	0.50	0.55	0.50	0.45
T_A (K	15000	15000	15000	15000
T_B (K)	11228 ±11	11056 ±11	11042 ±12	11018 ±14
J_B/J_A [b]	0.372	0.553	0.585	0.601
L_B/L_A	0.203	0.294	0.313	0.320
σ (mag)	0.0051	0.0034	0.0032	0.0036

[a] the expansion terms (not included) are ~0.0020 (star A) and ~0.0007 (star B)
[b] mean surface flux ratio

Σχήμα Ι.15. Τυπική κάρτα με τα αποτελέσματα της φωτομετρικής επίλυσης ενός διπλού εκλειπτικού συστήματος (GG Lup) με τη βοήθεια του προγράμματος WINK (Andersen et al. 1993). Τα αποτελέσματα μπορούν να συγκριθούν με εκείνα του προγούμενου σχήματος (χρήση προγράμματος EBOP), καθώς η μελέτη έχει βασιστεί στην ίδια καμπύλη φωτός.

Μια προσέγγιση αρκετά διαφορετική από όσες μέχρι τώρα έχουν αναφερθεί αποτελεί η ***μέθοδος του Kopal*** η οποία παρουσιάστηκε απο τον τελευταίο το 1959 (π.χ. Νιάρχος 2003). Το πρόβλημα της ανάλυσης των καμπυλών φωτός μεταφέρεται από το χώρο του χρόνου στο χώρο των συχνοτήτων με τη βοήθεια κατάλληλων μετασχηματισμών Fourier και Hankel (frequency domain method). Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι η απώλεια φωτός λόγω εκλείψεων μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των άρτιων δυνάμεων του ημιτόνου της γωνίας φάσης με αποτέλεσμα οι μεταβολές της λαμπρότητας σε οποιαδήποτε άλλη περιοχή να μπορούν να εντοπιστούν εύκολα.

Η μέθοδος του Kopal αποφεύγεται σήμερα να χρησιμοποιείται, καθώς δεν έχει πλήρως εξακριβωθεί εάν πράγματι υπερέχει των υπολοίπων και ειδικότερα εάν πράγματι η τεχνική που εισάγει αξίζει να πραγματοποιηθεί με σκοπό περισσότερο αξιόπιστα αποτελέσματα. Επίσης, θεωρείται αμφίβολη η ικανότητα των συντελεστών Fourier να περιγράψουν όλες τις πληροφορίες που φέρει μια καμπύλη φωτός. Η μέθοδος μειονεκτεί ακόμα στο γεγονός της παραδοχής ότι τα μέλη του συστήματος είναι σχεδόν σφαιρικά, έστω και κάτω από την παρουσία διορθώσεων εξαιτίας ενδεχόμενων παραμορφώσεων των μελών, ενώ εμφανίζεται σχετικά απλή στις περιπτώσεις ολικών μόνο εκλείψεων.

Ερχόμενοι τώρα σε πιο ρεαλιστικές επιλύσεις καμπυλών φωτών με παραδοχές και τεχνικές που βρίσκονται πολύ κοντά στην πραγματικότητα, η καλύτερη ίσως προσέγγιση που διακρίνεται εύκολα για την αξιοπιστία και την ακρίβειά της αποτελεί η ***προσέγγιση των Wilson και Devinney (W-D model & program)*** η οποία παρουσιάστηκε από τους ίδιους το 1971 (Wilson & Devinney 1971) μαζί με την ανάπτυξη του πρώτου λογισμικού που την υλοποιεί. Η παραπάνω προσέγγιση βασίζεται στη γεωμετρία Roche, χρησιμοποιεί αρκετά πιο πολύπλοκα μοντέλα αστρικών ατμοσφαιρών (π.χ. εκείνα των Carbon-Gingerich και Kurucz), ενώ υποστηρίζει ελλειπτικές και ασύγχρονες τροχιές (τουλάχιστον μετά το 1982).

Το αντίστοιχο λογισμικό χωρίζεται σε δύο κυρίως προγράμματα, εκείνο της *σύνθεσης (LC)* και εκείνο της *διαφορικής επίλυσης (DC)*. Το τελευταίο αποτελεί τη σημαντική καινοτομία των Wilson και Devinney στο χώρο των αναλύσεων καθώς εκείνο που επιχειρείται είναι η επίτευξη της κατασκευής της καλύτερης δυνατής θεωρητικής καμπύλης φωτός σε σχέση με την παρατηρούμενη, θέτοντας κατάλληλες αρχικές τιμές στις παραμέτρους που ζητούνται, μέχρι την τελική σύγκλιση της διαδικασίας και με βάση τη διαδικασία των ελαχίστων τετραγώνων.

Το πρόγραμμα W-D διαθέτει οκτώ βασικές λειτουργίες επίλυσης (modes) οι οποίες επιλέγονται με βάση τη δυναμική Roche που αναμένεται να παρουσιάζει το σύστημα που πρόκειται να μελετηθεί και συνεπώς ανάλογα με τις παραμέτρους οι οποίες κρατούνται ελεύθερες (π.χ. Μανιμάνης 2002). Σημαντικό προτέρημα του προγράμματος αποτελεί ο υπολογισμός τεσσάρων ακτίνων των μελών (προφανώς δεν θεωρούνται σφαιρικοί), οι δύο εκ των οποίων βρίσκονται στο επίπεδο της τροχιάς (r^{point}, r^{back}), ενώ οι άλλες δύο σε επίπεδο κάθετο σε αυτό της τροχιάς (r^{pole}, r^{side}). Ως μέση συνήθως ακτίνα επιλέγεται εκείνη η οποία προκύπτει από τον όγκο σφαίρας που έχει τον ίδιο όγκο με τον κάθε αστέρα, όγκος όμως που έχει υπολογιστεί αριθμητικά από το πρόγραμμα. Το πρόγραμμα W-D κυκλοφόρησε σε νέες βελτιωμένες εκδόσεις, όπως αυτές του 1979, 1990, 1992, 1996, 1998 και 2003, συνοδευόμενο πλέον από τις παραμέτρους έως και έξι κυκλικών κηλίδων, με σκοπό τον προσδιορισμό ορισμένων από τα βασικά τους χαρακτηριστικά (Σχήμα Ι.16).

Το πρόγραμμα W-D θεωρείται στις μέρες μας το κορυφαίο πρόγραμμα φωτομετρικής ανάλυσης και το πιο διαδεδομένο στη χρήση του από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα (μέχρι την περίοδο συγγραφής της διατριβής οι αναφορές σε αυτό ξεπερνούσαν τις 1100!). Τη στιγμή που διάφορα προγράμματα παραμελήθηκαν λίγα μόλις χρόνια μετά την εμφάνισή τους, εκείνο συνεχίζει να αναβαθμίζεται αδιάκοπα κυρίως με νέες αριθμητικές τεχνικές βελτιστοποίησης (υπό τη μορφή ρουτινών) και οι οποίες οδηγούν σε έμμεσες παραλλαγές του. Τρεις από τις διασημότερες αναφέρονται στην ενσωμάτωση του *αλγόριθμου Simplex* (Kallrath & Linnell 1987), του *αλγόριθμου των Levenberg-Marquardt* (Djurasevic 1992) και της *Monte Carlo προσομοίωσης* (Zola et al. 1997) οι οποίες έχουν τύχει ευρείας εφαρμογής τα τελευταία χρόνια.

System	RT And	RT And	RT And	RT And	RT And
Year	1995	1995	1997	1997	1998
$q(M_2/M_1)$	0.730	0.730	0.730	0.730	0.730
$i(°)$	81	81	81.6	81.6	80
Filter	**B**	**V**	**B**	**V**	**U**
Component	hot/cool	hot/cool	hot/cool	hot/cool	hot/cool
T_{ph}	6000/4806	6000/4768	6100/4900	6100/4900	6000/4800
Albedo	0.5/0.5	0.5/0.5	0.5/0.5	0.5/0.5	0.5/0.5
g	0.32/0.32	0.32/0.32	0.32/0.32	0.32/0.32	0.32/0.32
x	0.720/0.867	0.569/0.714	0.720/0.867	0.569/0.714	0.746/0.996
Ω	4.320/3.891	4.307/3.905	4.320/3.891	4.307/3.905	4.340/3.910
r_{pole}	0.277/0.262	0.278/0.262	0.277/0.262	0.278/0.262	0.275/0.260
r_{point}	0.292/0.284	0.293/0.283	0.292/0.284	0.293/0.283	0.290/0.281
r_{side}	0.282/0.268	0.283/0.268	0.282/0.268	0.283/0.268	0.280/0.266
r_{back}	0.288/0.278	0.290/0.278	0.288/0.278	0.290/0.278	0.286/0.276
$\lambda_{spot\#1}(°)$	350/—	350/—	67/—	67/—	310/—
$\lambda_{spot\#2}(°)$	230/—	230/—	137/—	137/—	60/—
$\lambda_{spot\#3}(°)$	130/—	130/—	318/—	318/—	160/—
$\beta_{spot\#1}(°)$	40/—	40/—	15/—	15/—	50/—
$\beta_{spot\#2}(°)$	40/—	40/—	27/—	27/—	60/—
$\beta_{spot\#3}(°)$	130/—	130/—	149/—	149/—	130/—
$r_{spot\#1}(°)$	15	15	15	15	30
$r_{spot\#2}(°)$	25	25	24	24	25
$r_{spot\#3}(°)$	15	15	15	15	40
$f(T)_{spot\#1}$	0.85	0.85	0.85	0.85	0.88
$f(T)_{spot\#2}$	0.90	0.90	0.85	0.85	0.88
$f(T)_{spot\#3}$	0.85	0.85	0.93	0.93	0.90
$T_{spot\#1}$	5100	5100	5185	5185	5280
$T_{spot\#2}$	5400	5400	5185	5185	5280
$T_{spot\#3}$	5100	5100	5673	5673	5400
$\Sigma W(O-C)^2$	0.033	0.046	0.047	0.086	0.630

Σχήμα Ι.16. Τυπική κάρτα με τα αποτελέσματα της φωτομετρικής επίλυσης ενός διπλού εκλειπτικού συστήματος (RT And) με τη βοήθεια του προγράμματος W−D (Ekmekci et al. 2002). Στη συγκεκριμένη μελέτη το σύστημα έχει παρατηρηθεί σε τρία φίλτρα (U, B, V), σε τέσσερις διαφορετικές χρονικές περιόδους (1995, 1997, 1998) ενώ, για την επίλυση της καμπύλης φωτός, έχουν τοποθετηθεί τρεις συνολικά κηλίδες.

Η τελευταία και πιο πλήρης μορφή του προγράμματος W−D δημοσιεύθηκε το 2005 (Prša & Zwitter 2005b) και αποτελεί πλέον μέρος ενός σύγχρονου λογισμικού πακέτου το οποίο καλείται ***PHOEBE (PHysics Of Eclipsing BinariEs)***. Πρόκειται για μια πλατφόρμα ιδιαίτερα φιλική προς το χρήστη η οποία αύξησε ακόμα περισσότερο τη δημοφιλία του προγράμματος W−D σε όσους εργάζονται στον τομέα επίλυσης φωτομετρικών καμπυλών, οδηγώντας στην παρουσία τουλάχιστον 350 ακόμα αναφορών στη σχετική εργασία των Wilson και Devinney (1971) μέσα σε μια μόλις πενταετία. Η μεγάλη απήχηση του νέου αυτού λογισμικού οφείλεται όμως και σε μερικές ακόμα βελτιώσεις που αφορούν αφενός τη φυσική των διπλών εκλειπτικών συστημάτων και αφετέρου την προσπάθεια ενσωμάτωσης πρόσφατων τεχνικών στοχαστικής βελτιστοποίησης.

Σύμφωνα με τους Prša και Zwitter (2005a), η μεσοαστρική χρώση (ερύθρωση) έχει σημαντική επιρροή κατά τη φωτομετρική ανάλυση, καθώς επιδρά με διαφορετικό τρόπο στα δύο μέλη του συστήματος, γεγονός το οποίο οδηγεί σε σημαντικές παραμορφώσεις της εξεταζόμενης καμπύλης φωτός ιδιαίτερα στην περιοχή των ελαχίστων. Τυπικές μεταβολές εξαιτίας της ανομοιόμορφης ερύθρωσης αγγίζουν τα 0.01 mag, ενώ σε ακραίες περιπτώσεις μεγάλης διαφοράς στο φασματικό τύπο των δύο μελών μπορεί να οδηγήσει ακόμα και στην τιμή των 0.2 mag (!). Κατασκευάζοντας συνθετικές φωτομετρικές καμπύλες οι οποίες προέκυψαν με τη βοήθεια θεωρητικών μοντέλων αστρικών ατμοσφαιρών, κατάλληλα τροποποιημένων κάτω από την υϊοθέτηση νόμων χρώσης ως συνάρτηση του μήκους κύματος, οι Prša και Zwitter (2005a) έδειξαν ότι ο βαθμός επίδρασης του φαινομένου αυτού μπορεί με ασφάλεια να εκτιμηθεί συγκρίνοντας τους δείκτες χρώματος του συστήματος σε διάφορες τροχιακές φάσεις, εφόσον βέβαια οι διαθέσιμες καμπύλες φωτός έχουν ληφθεί σε πολλά φίλτρα. Η μέθοδος αυτή έχει ήδη ενσωματωθεί στο πρόγραμμα PHOEBE.

Όσον αφορά τις τεχνικές στοχαστικής βελτιστοποίησης, οι εμπνευστές του PHOEBE εκτιμούν ότι σύντομα θα καταφέρουν να θέσουν σε ισχύ τη μέθοδο της *προσομοιούμενης ανόπτησης (simulated annealing)*. Η μέθοδος αυτή αναζητά και εντοπίζει με μεγάλη επιτυχία το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης κόστους που τίθεται κατά τη φωτομετρική επίλυση, όπως θα μπορούσε να είναι π.χ. το μέσο ολοκληρωμένο τυπικό σφάλμα κατά τη διαδικασία προσαρμογής των συνθετικών καμπυλών με την πραγματική. Το γεγονός αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις που συνήθεις αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης συγκλίνουν σε κάποιο τοπικό ελάχιστο. Το μοναδικό μειονέκτημα της τεχνικής αυτής είναι το βαρύ υπολογιστικό κόστος το οποίο όμως αντιμετωπίζεται σήμερα σε σημαντικό βαθμό με την ύπαρξη πολλαπλών επεξεγαστικών μονάδων (παράλληλος προγραμματισμός).

Μια ενδιαφέρουσα ακόμα προσέγγιση αποτελεί εκείνη του Hill ο οποίος παρουσίασε το 1979 ένα πρόγραμμα το οποίο συνδύαζε τη γεωμετρία Roche μαζί με ορισμένες από τις αρχές του μοντέλου του Wood. Το πρόγραμμα ονομάστηκε **LIGHT** ενώ μετεξέλιξή του, το 1993, αποτέλεσε το **LIGHT2** στο οποίο ενσωματώθηκαν ορισμένες τεχνικές από το WUMA3 (υπήρξαν και νεότερες εκδόσεις με τις ονομασίες WUMA5 και WUMA6) το οποίο είχε αναπτυχθεί από τον Rucinski και συνδύαζε στοιχεία φασματοσκοπίας, όπως μετρήσεις του προφίλ φασματικών γραμμών (Hill & Rucinski 1993). Το πρόγραμμα LIGHT2 επιτυγχάνει διαφορική επίλυση της καμπύλης φωτός, ενώ είναι ικανό να επιδέχεται επιλύσεις με την τοποθέτηση κηλίδων ελλειπτικού σχήματος, επίτευγμα οπωσδήποτε αξιοσημείωτο. Η χρήση του σήμερα δεν έχει διακοπεί, έχει όμως περιοριστεί σε σημαντικό βαθμό.

Μια νέα σχετικά μέθοδος φωτομετρικής ανάλυσης καμπυλών φωτός παρουσιάστηκε το 1987 από τους ***Budding και Zeilik***. Η μέθοδος στηρίζεται στον εντοπισμό των διαφορών μεταξύ των παρατηρήσεων και συνθετικών καμπυλών φωτός οι οποίες αποδίδονται στην κίνηση επιφανειακών σχηματισμών στα μέλη του συστήματος. Γίνεται εύκολα δηλαδή αντιληπτό ότι η συγκεκριμένη μέθοδος βρίσκει εφαρμογή σε συστήματα χρωμοσφαιρικά δραστήρια, όπως εκείνα του τύπου RS CVn, στα οποία γίνεται προσπάθεια αναπαραγωγής των κυμάτων παραμόρφωσης με την υπόθεση μίας ή δύο κυκλικών κηλίδων στην επιφάνεια των μελών του συστήματος (Budding & Zeilik 1987). Ο αντίστοιχος κώδικας, ο οποίος ονομάζεται ***ILOT*** ***(Information Limit Optimization Technique)***, βασίζεται σε μια διαδικασία η οποία ''καθαρίζει'' την καμπύλη από την επίδραση των κηλίδων και στη συνέχεια επιτρέπει τον καθορισμό των φωτομετρικών παραμέτρων από τη νέα καμπύλη (cleaned parameters). Φαίνεται λοιπόν να είναι περισσότερο αξιόπιστη στον προσδιορισμό και των απόλυτων παραμέτρων των σχετικών συστημάτων. Δυστυχώς, το πρόβλημα της μοναδικότητας της θέσης, των διαστάσεων και της θερμοκρασίας των κηλίδων δεν αντιμετωπίζεται πλήρως.

Τέλος, αναφέρουμε την ύπαρξη ορισμένων ιδιαίτερα χρήσιμων προγραμμάτων σύνθεσης καμπυλών φωτός που αποσκοπούν στην κατασκευή θεωρητικών καμπυλών φωτός μεταβάλλοντας βασικές παραμέτρους των μελών και του συστήματος γενικότερα. Η σημασία τους έγκειται στην άμεση απεικόνιση της καμπύλης φωτός και την αξιολόγησή της σε σχέση με την παρατηρούμενη, αλλά και στην κατάλληλη επιλογή των αρχικών παραμέτρων που απαιτούν στη συνέχεια τα προγράμματα επίλυσης. Μερικά από τα διασημότερα είναι εκείνα των Binnendijk-Nagy (Nagy 1975, Binnendijk 1977), Linnell (1984), Mochnacki-Doughty (1972a, 1972b) και Mochnacki-Collier-Hendry (Hendry & Mochnacki 1992) ενώ, το πλέον διαδεδομένο σήμερα στη χρήση του, είναι εκείνο του Bradstreet, `Binary Maker` (Bradstreet 1993 – v. 2.0 -, Bradstreet & Steelman 2002 – v. 3.0 -).

3.4. Φασματοσκοπικές Παράμετροι

Σε ένα διπλό σύστημα, οι δύο αστέρες κινούνται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας με αποτέλεσμα, εφόσον η κλίση του συστήματος το επιτρέπει, την ίδια χρονική στιγμή το ένα από τα μέλη του να απομακρύνεται από τον παρατηρητή και το άλλο να τον πλησιάζει. Το βέβαιο είναι ότι τα δύο αστέρια θα έχουν πάντοτε αντίρροπες ταχύτητες καθώς απομακρύνονται μεταξύ τους. Εφόσον το σύστημα είναι φασματοσκοπικά διπλό, οι κινήσεις αυτές μπορούν να γίνουν αντιληπτές, μέσω του *φαινομένου Doppler*, δηλαδή με την αντίστοιχη μετατόπιση μιας συγκεκριμένης φασματικής γραμμής του ενός αστέρα προς μεγαλύτερα μήκη κύματος και του άλλου αστέρα προς μικρότερα μήκη κύματος, γεγονός το οποίο εκφράζει απομάκρυνση και προσέγγιση του αστέρα από και προς τον παρατηρητή αντίστοιχα. Η συγκεκριμένη περίπτωση αντιστοιχεί σε φασματοσκοπικά διπλά συστήματα με *διπλές γραμμές (double lined binaries, SB2)* στα οποία η λαμπρότητα των μελών είναι συγκρίσιμη. Αντίθετα, στα διπλά συστήματα με *μονές γραμμές (single lined binaries, SB1)*, η λαμπρότητα του ενός είναι κατά πολύ μεγαλύτερη του συνοδού του, γεγονός που έχει ως συνέπεια οι φασματικές γραμμές του τελευταίου να μην είναι ανιχνεύσιμες.

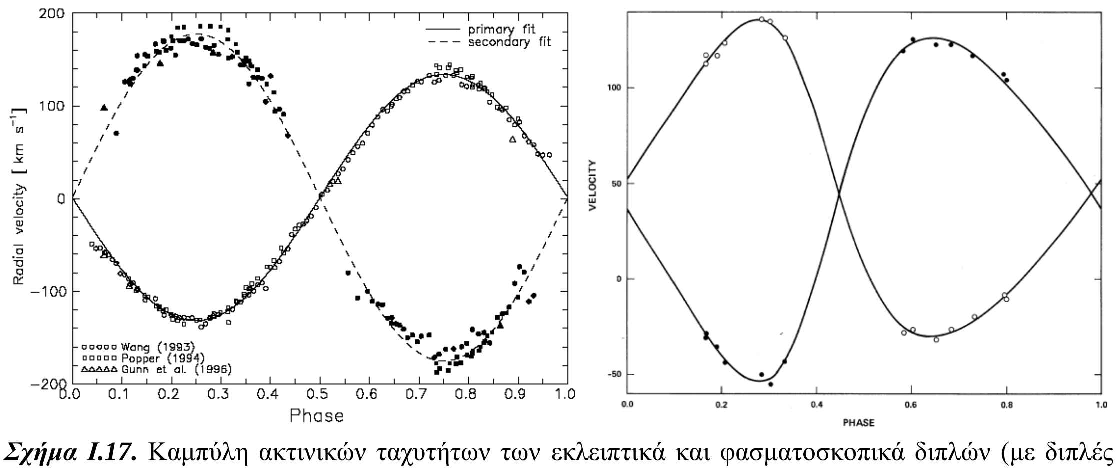
3.4.1. Καμπύλες Ακτινικών Ταχυτήτων

Με τη βοήθεια του φαινομένου Doppler καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός των ακτινικών ταχυτήτων τουλάχιστον ενός μέλους του συστήματος, έστω *V*, από την πιο κάτω ισότητα, η οποία μας δίνει τη μετατόπιση Doppler $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ μιας τυχαίας φασματικής γραμμής λ σε σχέση με την αντίστοιχη εργαστηριακή, μήκους κύματος λ_0:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \left[\frac{1+(V/c)}{1-(V/c)}\right]^{1/2} - 1 \cong \frac{V}{c} \quad \text{όταν } V << c, \tag{1.19}$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Επομένως, για κάθε γραμμή που μας ενδιαφέρει, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μετατόπιση που υφίσταται με τη βοήθεια μιας αντίστοιχης γραμμής μεσοαστρικής απορρόφησης η οποία προφανώς δεν παρουσιάζει μετατόπιση, καθώς ο μεσοαστρικός χώρος θεωρείται ακίνητος.

Με τον προσδιορισμό της μετατόπισης Doppler των συγκεκριμένων φασματικών γραμμών που μελετάμε, είναι εύκολος ο υπολογισμός των αντίστοιχων ακτινικών ταχυτήτων σε όλες τις τροχιακές φάσεις. Τοποθετώντας τις ταχύτητες αυτές σε ένα διάγραμμα συναρτήσει της φάσης του κύκλου μεταβολής του συστήματος, κατασκευάζουμε την ***καμπύλη ακτινικών ταχυτήτων (radial velocity curve)*** η οποία μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τη μορφή της τροχιάς των δύο μελών καθώς και σημαντικές παραμέτρους σχετικά με τα φυσικά τους χαρακτηριστικά (Σχήμα Ι.17). Οι πιο χρήσιμες τιμές που λαμβάνονται απο την καμπύλη ταχυτήτων είναι εκείνες που αντιστοιχούν στα μέγιστα, τα πλάτη των οποίων ταυτίζονται με τις ακτινικές ταχύτητες των δύο μελών στις εκτός ελαχίστων περιοχές της φωτομετρικής καμπύλης φωτός, εφόσον βέβαια το σύστημα τυχαίνει να είναι εκλειπτικό. Οι ταχύτητες αυτές συμβολίζονται με K_1 και K_2 για το πρωτεύον και δευτερεύον μέλος του συστήματος αντίστοιχα και καλούνται *πλάτη των ακτινικών ταχυτήτων (radial velocity amplitudes).*



Σχήμα Ι.17. Καμπύλη ακτινικών ταχυτήτων των εκλειπτικά και φασματοσκοπικά διπλών (με διπλές γραμμές) συστημάτων RT And (αριστερά) και AI Hya (δεξιά). Η ημιτονοειδής μορφή του πρώτου αποκαλύπτει την κυκλική τροχιά που διαγράφουν τα μέλη του (Pribulla et al. 2000), ενώ η ελαφρώς παραμορφωμένη καμπύλη του δεύτερου οφείλεται στην ελλειπτική τροχιά των μελών του, εκκεντρότητας ίσης με 0.23 περίπου (Popper 1988).

Οι δύο παραπάνω τιμές των ακτινικών ταχυτήτων των μελών ενός διπλού εκλειπτικού συστήματος και γενικότερα όσες άλλες μπορούν και προσδιορίζονται άμεσα από την καμπύλη ταχυτήτων του, ονομάζονται ***φασματοσκοπικές παράμετροι (spectroscopic parameters ή elements)***. Όπως θα δούμε αργότερα, τα πλάτη των ακτινικών ταχυτήτων είναι απαραίτητα για τον ακριβή προσδιορισμό του λόγου μαζών του συστήματος. Σημειώνουμε ακόμα ότι λεπτομερής φασματοσκοπική μελέτη μπορεί να οδηγήσει αφενός μεν στον προσδιορισμό του φασματικού τύπου των μελών του συστήματος και συνεπώς σε πρώτη προσέγγιση της θερμοκρασίας του, αφετέρου δε στον προσδιορισμό της ταχύτητας ιδιοπεριστροφής τους μελετώντας τη διεύρυνση Doppler σε συγκεκριμένες φάσεις της τροχιακής περιστροφής. Μια σημαντική ακόμα πληροφορία που προσφέρεται άμεσα αποτελεί το γεγονός ότι ημιτονοειδής μορφή της καμπύλης ταχυτήτων εκφράζει ότι η τροχιά των μελών είναι κυκλική, φαινόμενο αρκετά σύνηθες στα στενά διπλά συστήματα εξαιτίας της μικρής τους περιόδου.

Οι παραδοσιακές τεχνικές προσδιορισμού ακτινικών ταχυτήτων από αστρικά φάσματα τα οποία έχουν προέλθει από φωτογραφικές πλάκες περιλαμβάνουν ένα μικροσκόπιο ή ένα μέσο προβολής σε μεγάλη επιφάνεια ώστε να διευκολύνεται η καταγραφή της θέσης των φασματικών γραμμών. Η σχετική θέση τους τότε συγκρίνεται με ένα πρότυπο φάσμα αναφοράς (template spectrum) το οποίο μπορεί να έχει προκύψει είτε από παρατηρήσεις ενός πρότυπου αστέρα με τον ίδιο εξοπλισμό είτε από μια λυχνία ενός χημικού στοιχείου που μπορεί να παράγει αρκετές γραμμές, όπως π.χ. η λυχνία σιδήρου. Δυστυχώς, η παρουσία μεσοαστρικών γραμμών απορρόφησης η οποία οδηγεί στα πιο αξιόπιστα αποτελέσματα δεν είναι πάντοτε αναμενόμενη, καθώς ο αστέρας θα πρέπει να βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση. Στη συνέχεια, η μετατόπιση Doppler μετράται σε όσες γραμμές είναι παρατηρήσιμη και τελικά η ακτινική ταχύτητα υπολογίζεται ως ο μέσος όρος όλων των επιμέρους συνιστωσών. Σύμφωνα με την προσέγγιση που μόλις περιγράφηκε, η ακρίβεια θέσης δεν μπορούσε να ξεπεράσει το 1 μm ακόμα και στην περίπτωση οξείων γραμμών χωρίς ίχνη ανάμειξης με γειτονικές, καθιστώντας τη μέθοδο ιδιαίτερα ανεπαρκή (π.χ. Hilditch 2001).

3.4.2. Η Τεχνική της Διασταυρωμένης Συσχέτισης

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν πιο πάνω, η παραδοσιακή προσέγγιση προσδιορισμού ακτινικών ταχυτήτων διαχειρίζεται την κάθε φασματική γραμμή ανεξάρτητα από τη συμπεριφορά των υπολοίπων. Μια εναλλακτική, πιο σύγχρονη και πολύ πιο ακριβής μέθοδος, η οποία κυριαρχεί ακόμα και στις μέρες μας, καλείται ***τεχνική της διασταυρωμένης συσχέτισης (cross-correlation technique)*** και προσεγγίζει το πρόβλημα από κοινού, δηλαδή για όλες τις γραμμές ταυτόχρονα (π.χ. Hilditch 2001). Πρώτη η Simkin (1974) ήταν εκείνη η οποία επικαλέστηκε και χρησιμοποίησε τη συγκεκριμένη τεχνική σε ψηφιακά φασματοσκοπικά δεδομένα. Ο πυρήνας της τεχνικής σχετίζεται με τη *συνάρτηση διασταυρωμένης συσχέτισης (Cross-Correlation Function, CCF)* $c(x)$ η οποία εκφράζει το βαθμό συσχέτισης μεταξύ δύο συναρτήσεων, έστω s και t, ως συνάρτηση της μεταβλητής x, αποκαλούμενης συχνά και ως *υστέρηση (lag)*. Σε αυστηρά μαθηματικά, η πιο πάνω συνάρτηση περιγράφει τη συνέλιξη (convolution) των συναρτήσεων s και t σε ένα εύρος τιμών της μεταβλητής x, δηλαδή:

$$c(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(n)t(n-x)dn\,. \tag{1.20}$$

Η ορθή εφαρμογή της τεχνικής αυτής στην αστρονομική φασματοσκοπία απαιτεί αρχικά την καταγραφή φασμάτων στα οποία η μετατόπιση Doppler οφείλει να είναι κοινή για όλες τις εξεταζόμενες γραμμές. Αν παρατηρήσουμε τη σχέση (1.19), κάτι τέτοιο δε συμβαίνει σε ένα συμβατικό φάσμα, καθώς η μετάθεση των γραμμών $\Delta\lambda$ είναι σε κάθε περίπτωση ανάλογη του μήκους κύματος της πρότυπης γραμμής λ_0. Λογαριθμίζοντας όμως τη σχέση (1.19) μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η επαγόμενη μετάθεση είναι πλέον ανεξάρτητη της εκάστοτε τιμής λ_0 και συνεπώς παραμένει η ίδια ανεξάρτητα από την εξεταζόμενη γραμμή:

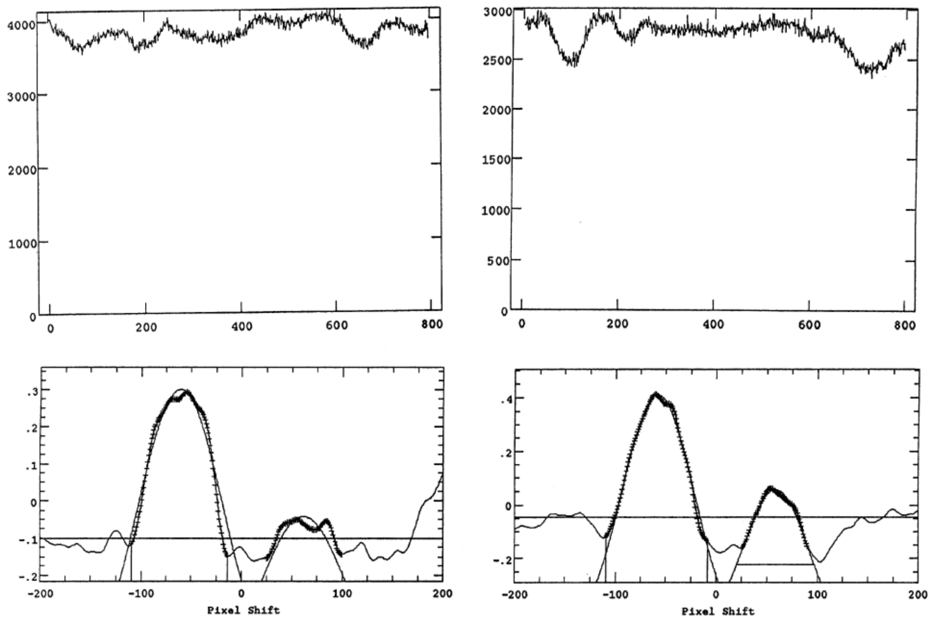
$$\ln\lambda - \ln\lambda_0 = \ln\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+(V/c)}{1-(V/c)}\right] \cong \ln\left[1+(V/c)\right] \text{ όταν } V << c\,. \tag{1.21}$$

Εκείνο λοιπόν το οποίο προηγείται της συγκεκριμένης μεθόδου είναι η αναγωγή των φασμάτων στη λογαριθμική πλέον κλίμακα ώστε η κάθε μετατόπιση να εκφράζει άμεσα ακτινική ταχύτητα. Η συνάρτηση τώρα $s(n)$ εκφράζει την ένταση ακτινοβολίας σε n ισομερώς διαμερισμένα διαστήματα του αστρικού φάσματος τα οποία ουσιαστικά ταυτίζονται με n εικονοστοιχεία ενός σύγχρονου CCD ανιχνευτή, συνολικού πλήθους N. Η συνάρτηση $t(n)$ δεν εκφράζει πλέον την αντίστοιχη ένταση ακτινοβολίας ενός τυπικού φάσματος αναφοράς, παρά ένα ισοδύναμο πρότυπο φάσμα (γνωστών) ακτινικών ταχυτήτων το οποίο και πάλι μπορεί να έχει προκύψει από παρατηρήσεις ενός πρότυπου αστέρα με τον ίδιο εξοπλισμό ή, αρκετά συχνότερα, να είναι αποτέλεσμα θεωρητικών μοντέλων. Το μοναδικό μειονέκτημα της μεθόδου αποτελεί η ευαισθησία που παρουσιάζει η συνάρτηση s σε σχέση με την αφαίρεση του υποβάθρου (συνεχούς φάσματος), καθώς η ένταση κάθε γραμμής εκτιμάται πάντα σε σχέση με το τοπικό συνεχές. Η κατάσταση απαιτεί ακόμα μεγαλύτερη προσοχή σε αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων οπότε και το συνεχές είναι δυσδιάκριτο εξαιτίας του μεγάλου πλήθους μεταλλικών γραμμών.

Στην πράξη, η συνάρτηση διασταυρωμένης συσχέτισης προτιμάται φραγμένη στο διάστημα [0,1]. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται εύκολα εφόσον την κανονικοποιήσουμε ως προς την αβεβαιότητα που συνοδεύει τόσο το αστρικό φάσμα όσο και το φάσμα αναφοράς ή ισοδύναμα το μέσο τετραγωνικό τους σφάλμα σ_s και σ_t αντίστοιχα:

$$\boxed{c(x) = \frac{1}{N\sigma_s\sigma_t}\sum_{n=1}^{N} s(n)t(n-x)} \text{ με } \sigma_s^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} s^2(n)}{N} \text{ και } \sigma_t^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} t^2(n)}{N}\,. \tag{1.22}$$

Σκοπός της τεχνικής είναι ο προσδιορισμός της τιμής x για την οποία η συνάρτηση διασταυρωμένης συσχέτισης μεγιστοποιείται, κάτι το οποίο εκφράζει τη μέγιστη δυνατή ταύτιση του αστρικού φάσματος με το φάσμα αναφοράς. Η μεταβλητή x τίθεται ίση με την ποσότητα ln[1+(V/c)] και συνεπώς εκφράζει τη μετατόπιση Doppler των φασματικών γραμμών στη λογαριθμική κλίμακα, $\ln\lambda$ - $\ln\lambda_0$. Στην περίπτωση μάλιστα ενός φασματοσκοπικά διπλού συστήματος με διπλές γραμμές, η συνάρτηση $c(x)$ αναμένεται να έχει δύο κορυφές και ο βαθμός ικανότητας απόδοσης του κάθε μεγίστου στο σωστό μέλος εξαρτάται κυρίως από τη φασματική ανάλυση, το βαθμό διεύρυνσης των γραμμών λόγω ιδιοπεριστροφής, από τις σχετικές (τροχιακές) ταχύτητες των δύο μελών, καθώς και από την εύστοχη επιλογή των πρότυπων φασμάτων (Σχήμα Ι.18).



Σχήμα Ι.18. Φάσματα του διπλού συστήματος RT And τα οποία έχουν ληφθεί με διαφορετικό άνοιγμα διαφράγματος φασματογράφου (πάνω). Η αντίστοιχη συνάρτηση διασταυρωμένης συσχέτισης (κάτω) παρουσιάζει μια μεγάλη κορυφή για τον πρωτεύοντα αστέρα και μια δεύτερη για το δευτερεύοντα όταν η αναπαράστασή τους πραγματοποίηθηκε με τη βοήθεια προφίλ Gauss (Popper 1994).

Ας σημειωθεί, τέλος, ότι ο σημαντικότερος παράγοντας που φαίνεται να καθορίζει την επιτυχή εφαρμογή της μεθόδου αποτελεί το είδος των προφίλ που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση της συνάρτησης διασταυρωμένης συσχέτισης. Τις περισσότερες φορές φαίνεται πως ένα απλό *προφίλ Gauss* είναι αρκετό, ενώ στις περιπτώσεις που η ταχύτητα ιδιοπεριστροφής των αστέρων είναι μικρή (μικρότερη από 50 km/sec περίπου), προτιμάται *προφίλ Lorentz* του οποίου η κατανομή διατηρεί την οξύτητά της αλλά παρουσιάζει πιο εκτεταμένες ουρές. Αντίθετα, σε περιπτώσεις γρήγορης ιδιοπεριστροφής, η οποία και επιφέρει ιδιαίτερα διευρυμένες γραμμές, προτιμώνται *συνθετικά προφίλ* τα οποία παράγονται από πολύπλοκα θεωρητικά μοντέλα (Hill 1989, Hill et al. 1989a, Hill et al. 1989b).

3.4.3. Πηγές Συστηματικών Σφαλμάτων

Αν και η θεωρητική κατανομή της έντασης μιας γραμμής που σχηματίζεται από ένα σφαιρικό περιστρεφόμενο αστέρα είναι με ακρίβεια γνωστή, δεν αρκεί στην πράξη, καθώς διάφορα άλλα φαινόμενα συνεπιδρούν και προκαλούν ***παραμορφώσεις*** γνωστές ως ***μη Κεπλεριανές (non-Keplerian distortions)*** των οποίων το αποτέλεσμα είναι η διαμόρφωση ενός μη συμμετρικού προφίλ. Μερικές από αυτές δημιουργούνται εξαιτίας ορισμένων φωτοσφαιρικών μηχανισμών, όπως π.χ. η τύρβη σε περιβλήματα μεταφοράς, όπως επίσης και λόγω της ανομοιόμορφης κατανομής της επιφανειακής λαμπρότητας που παρατηρείται συνήθως σε ψυχρούς αστέρες. Οι περισσότερες όμως παρουσιάζονται σε διπλά κυρίως αστρικά συστήματα και συνδέονται με φαινόμενα τα οποία προκαλούνται σε κάθε μέλος εξαιτίας της επιρροής του συνοδού τους σε συγκεκριμένες τροχιακές φάσεις, όπως π.χ. στις περιοχές των εκλείψεων. Στον τομέα αυτό, άξια αναφοράς είναι η επινόηση της *συνάρτησης διεύρυνσης (broadening function)* η οποία περιγράφει με επιτυχία την κατανομή έντασης μιας γραμμής ενός μέλους, διευρυμένης λόγω της ιδιοπεριστροφής του, ως συνάρτηση της ακτινικής του ταχύτητας σε διάφορες τροχιακές φάσεις (Rucinski 1992, Lu & Rucinski 1993, Rucinski et al. 1993).

Η αξιόπιστη ανάλυση μιας καμπύλης ταχυτήτων στα στενά διπλά συστήματα προϋποθέτει πως είναι απομακρυσμένη από τα φαινόμενα εγγύτητας τα οποία είναι σε θέση να αλλοιώσουν τα χαρακτηριστικά της. Ειδικότερα, τα φαινόμενα της ανάκλασης και της βαρυτικής αμαύρωσης διαφοροποιούν την πραγματική ένταση των φασματικών γραμμών σε συγκεκριμένες τροχιακές φάσεις, κάτι το οποίο σημαίνει ότι οι συντελεστές τους θα πρέπει να είναι εκ των προτέρων γνωστοί ώστε η επιρροή τους να αντισταθμίζεται. Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί με ταυτόχρονη επίλυση τόσο της φωτομετρικής καμπύλης φωτός όσο και της καμπύλης ταχυτήτων ενός συστήματος, λειτουργία που υποστηρίζεται π.χ. από τα λογισμικά πακέτα `LIGHT2` και `PHOEBE`.

Επίσης, δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι οι φασματοσκοπικές αναλύσεις πάντοτε θα υποφέρουν από το πρόβλημα της ανάμειξης γραμμών, ανεξάρτητα από τις νέες μεθόδους που κατά καιρούς εισέρχονται στο αντίστοιχο ερευνητικό χώρο. Αν και ο μόνος ουσιαστικός τρόπος αντιμετώπισης του φαινομένου αυτού είναι η συνεχής αύξηση της φασματικής διακριτικής ικανότητας, έχουν γίνει ορισμένες προσπάθειες στον εντοπισμό γραμμών στις οποίες αξίζει να δίνεται μεγαλύτερο βάρος κατά την ανάλυση. Εκτιμάται λοιπόν ότι όσες μελέτες στήριξαν τον προσδιορισμό των μαζών ενός συστήματος αποκλειστικά και μόνο στις γραμμές ηλίου και υδρογόνου οδηγήθηκαν σε υποεκτίμησή τους κατά περίπου 10% και 40% αντίστοιχα (Andersen et al. 1980). Αντίθετα, οι γραμμές μετάλλων, όποτε αυτές είναι παρούσες, δε φαίνεται να επηρεάζονται σημαντικά κατά την ανάμειξή τους με άλλες γραμμές και κατά συνέπεια προσφέρονται για ιδιαίτερα αξιόπιστες αναλύσεις (Hilditch 1973).

3.5. Απόλυτες και Τροχιακές Παράμετροι

Τα βασικά μακροσκοπικά χαρακτηριστικά των μελών ενός διπλού συστήματος μαζί με την απόστασή του αποτελούν τις καλούμενες ως ***απόλυτες (ή φυσικές) παραμέτρους (absolute parameters ή elements)*** του συστήματος. Στις παραμέτρους αυτές συγκαταλλέγονται η ενεργός θερμοκρασία των μελών, η μάζα, η ακτίνα και η φωτεινότητά τους. Τα χαρακτηριστικά της (απόλυτης) τροχιάς που διαγράφουν τα μέλη του συστήματος μαζί με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά της τροχιάς του συστήματος καλούνται ***τροχιακές παραμέτροι (orbital parameters ή elements)*** και η γνώση τους είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό των απόλυτων στοιχείων. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στις παραμέτρους αυτές περιλαμβάνονται οι μεγάλοι ημιάξονες όλων των εμπλεκόμενων τροχιών, καθώς και η εκκεντρότητα του συστήματος.

Η μελέτη των διπλών συστημάτων έδωσε μεγάλη ώθηση στον προσδιορισμό των βασικών αυτών παραμέτρων καθώς, όπως άλλωστε θα δούμε και στη συνέχεια, ο υπολογισμός τους είναι άμεσος και ασφαλής. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια από τις σημαντικότερες συμβολές της μελέτης των διπλών συστημάτων στην Αστροφυσική.

Η κίνηση των μελών ενός διπλού συστήματος περιγράφεται από το πρόβλημα των δύο σωμάτων της Κλασικής Μηχανικής και συνεπώς οι νόμοι που το διέπουν είναι απόλυτα γνωστοί. Η τροχιακή περίοδος ενός συστήματος, *P*, προσδιορίζεται εύκολα και με πολύ μεγάλη ακρίβεια από μια σειρά φωτομετρικών παρατηρήσεων, ενώ από την ανάλυση της καμπύλης φωτός του εξάγεται πάντοτε η κλίση του, *i*. Η περαιτέρω ανάλυση του προβλήματος απαιτεί τη γνώση ορισμένων φασματοσκοπικών παραμέτρων και συνεπώς οφείλουμε να ξέρουμε αν το σύστημα είναι φασματοσκοπικά διπλό και εφόσον είναι, εάν διαθέτει μονές ή διπλές γραμμές (π.χ. Kallrath & Milone 1999, Hilditch 2001). Φυσικά, η πρώτη από τις παραπάνω περιπτώσεις περιορίζει τον αριθμό των φυσικών παραμέτρων που πρόκειται να προσδιοριστούν.

3.5.1. Σύστημα Εκλειπτικά και Φασματοσκοπικά (SB2) Διπλό

Η συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί τον ασφαλέστερο τρόπο υπολογισμού όλων των παραμέτρων ενός διπλού συστήματος. Με τη βοήθεια της καμπύλης ακτινικών ταχυτήτων είναι δυνατό να υπολογιστούν τα πλάτη των (ακτινικών) ταχυτήτων K_1 και K_2, για το λαμπρότερο και το αμυδρότερο μέλος αντίστοιχα, και από τα τελευταία οι μεγάλοι ημιάξονες των απολύτων τροχιών τους:

$$A_{1,2} = \frac{P}{2\pi \sin i} K_{1,2} \sqrt{1-e^2} \,, \tag{1.23}$$

όπου e η εκκεντρότητα της τροχιάς του συστήματος, παράμετρος η οποία προσδιορίζεται είτε φασματοσκοπικά είτε με τη βοήθεια (σε ορισμένες βέβαια μόνο περιπτώσεις) των διαγραμμάτων O-C, κάνοντας πάντοτε χρήση βασικών νόμων της Ουράνιας Μηχανικής. Το άθροισμα των ημιαξόνων αυτών μας δίνει προφανώς την τροχιακή ακτίνα του συστήματος. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη σχέση:

$$A_{orb} = A_1 + A_2 = \frac{P}{2\pi \sin i}(K_1 + K_2)\sqrt{1-e^2} \,. \tag{1.24}$$

Υπενθυμίζουμε ότι σε πολύ ειδικές περιπτώσεις είναι δυνατός ο προσδιορισμός της τροχιακής ακτίνας ενός συστήματος με τη βοήθεια της αστρομετρίας. Δυστυχώς, η περίπτωση αυτή είναι σαφώς δυσκολότερη καθώς αστρομετρικά ή οπτικά διπλά συστήματα στα οποία μπορεί να εφαρμοστεί η αντίστοιχη μέθοδος δεν παρουσιάζουν συνήθως εκλείψεις εξαιτίας της μεγάλης τροχιακής τους περιόδου. Ένα πρόσθετο ακόμα μειονέκτημα αποτελεί το γεγονός ότι τα παραπάνω συστήματα πρέπει να βρίσκονται σε σχετικά μικρή απόσταση από τη Γη ώστε τα δύο μέλη τους να είναι αστρομετρικά ή οπτικά παρατηρήσιμα.

Έχοντας πλέον γνωστή την ακτίνα της απόλυτης τροχιάς του συστήματος αλλά και την περίοδό του φωτομετρικά, εφαρμόζοντας τον *τρίτο νόμο του Kepler*, είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε τη συνολική μάζα του συστήματος ως εξής:

$$M = M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{A_{orb}^3}{P^2}, \tag{1.25}$$

όπου G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και M_1, M_2 οι μάζες του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος μέλους αντίστοιχα. Η δεύτερη απαιτούμενη σχέση για τον προσδιορισμό των δύο μαζών πηγάζει από τη γνώση του λόγου μαζών q_{sp} ο οποίος λαμβάνεται ίσος με το λόγο των πλατών των ακτινικών ταχυτήτων του πρωτεύοντος προς το δευτερεύον μέλος:

$$q_{sp} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{K_1}{K_2}, \tag{1.26}$$

καθώς, θεωρώντας το κέντρο μάζας του συστήματος ακίνητο, ισχύει $M_1 A_1 = M_2 A_2$. Τελικά, από το σύστημα των σχέσεων (1.25) και (1.26), οι μάζες των δύο μελών προσδιορίζονται ως ακολούθως:

$$\boxed{M_1 = \frac{1}{1+q_{sp}} M} \quad (1.27) \quad \text{και} \quad \boxed{M_2 = \frac{q_{sp}}{1+q_{sp}} M}. \quad (1.28)$$

3.5.2. Σύστημα Εκλειπτικά και Φασματοσκοπικά (SB1) Διπλό

Υπάρχουν, όπως είδαμε, περιπτώσεις φασματοσκοπικά διπλών συστημάτων στα οποία το ένα μέλος είναι κατά πολύ λαμπρότερο από το άλλο με αποτέλεσμα να παρατηρούνται οι φασματικές γραμμές μόνο του πρώτου. Παρά το γεγονός αυτό, είμαστε ακόμα σε θέση να υπολογίσουμε τις απόλυτες παραμέτρους των μελών του συστήματος, εφόσον όμως το σύστημα είναι εκλειπτικά διπλό.

Πιο συγκεκριμένα, από την καμπύλη ταχυτήτων του λαμπρού μέλους είναι εύκολο να προσδιοριστεί το πλάτος των ακτινικών ταχυτήτων του K_1 και από εκεί μια ποσότητα η οποία καλείται ***συνάρτηση μάζας (mass function) ως προς τον δευτερεύοντα αστέρα***. Η ποσότητα αυτή εκφράζει ένα μέτρο των ορίων της τιμής της μάζας που μπορεί να λάβει το αμυδρότερο μέλος και αποδεικνύεται εύκολα ότι εξαρτάται από άμεσα παρατηρήσιμα μεγέθη:

$$f(M_2, i) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{M^2} = \frac{P}{2\pi G} K_1^3 (1-e^2)^{3/2}. \quad (1.29)$$

Στις περιπτώσεις διπλών εκλειπτικών συστημάτων τα οποία παρουσιάζουν ολικές εκλείψεις, η μορφή της καμπύλης φωτός παρέχει την δυνατότητα ασφαλούς διάκρισης των επιδράσεων που έχουν σε αυτή μεταβολές της τιμής του λόγου μαζών και της κλίσης. Επομένως, μετά από διάφορες δοκιμές μπορούμε να προσδιορίσουμε φωτομετρικά εκείνο το ζεύγος (q_{ph},i) το οποίο οδηγεί στο μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα κατά τη διαδικασία της προσαρμογής του αντίστοιχου θεωρητικού μοντέλου με την διαθέσιμη καμπύλη φωτός (εφόσον βέβαια οι διαθέσιμες παράμετροι είναι αρκετές ώστε ο κώδικας να συγκλίνει). Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.26) και (1.29), υπολογίζουμε τότε τις μάζες των δύο μελών του συστήματος ως εξής:

$$\boxed{M_1 = \frac{(1+q_{ph})^2}{q_{ph}^3} \cdot \frac{1}{\sin^3 i} f(M_2, i)} \quad (1.30) \quad \text{και} \quad \boxed{M_2 = \frac{(1+q_{ph}^{-1})^2}{\sin^3 i} f(M_2, i)}. \quad (1.31)$$

3.5.3. Σύστημα Μη Εκλειπτικό αλλά Φασματοσκοπικά (SB1) Διπλό

Η περίπτωση ενός συστήματος φασματοσκοπικά διπλού με μονές γραμμές χωρίς όμως να είναι φωτομετρικά διπλό (περίπτωση όχι σπάνια) μας απομακρύνει από κάθε δυνατότητα προσδιορισμού των απολύτων στοιχείων των μελών του. Ακόμα όμως και τότε είναι δυνατό να υπολογίσουμε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να λάβει η συνολική μάζα των μελών, κάνοντας ορισμένες απλές υποθέσεις. Αθροίζοντας τις σχέσεις (1.30) και (1.31) μπορούμε να εκτιμήσουμε τη συνολική μάζα τους συναρτήσει του λόγου μαζών ως εξής:

$$M = \frac{(1+q^{-1})^3}{\sin^3 i} f(M_2, i). \quad (1.32)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η μικρότερη τιμή που μπορεί να λάβει το άθροισμα των δύο μαζών, όσον αφορά την κλίση του συστήματος, αντιστοιχεί στην περίπτωση που έχουμε $i = 90^{\circ}$. Εάν μάλιστα με κάποιο τρόπο γνωρίζουμε ότι $q > 1$, ελαχιστοποίηση της σχέσης (1.32) απαιτεί το $q \to \infty$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας σε αυτή τις προηγούμενες τιμές, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$M_1 + M_2 \geq f(M_2, i) \;\; \text{ή αλλιώς} \;\; M_2 \geq f(M_2, i), \quad (1.33)$$

κάνοντας απλά χρήση της σχέσης (1.26).

Εάν τώρα με κάποιο τρόπο γνωρίζουμε ότι $q \leq 1$, το κατώτερο όριο του αθροίσματος των μαζών αντιστοιχεί στην περίπτωση που έχουμε $q = 1$ και επομένως τώρα η σχέση (1.32) θα δίνει:

$$M_1 + M_2 \geq 8 f(M_2, i). \tag{1.34}$$

3.5.4. Προσδιορισμός Περιόδου από τις Ακτινικές Ταχύτητες

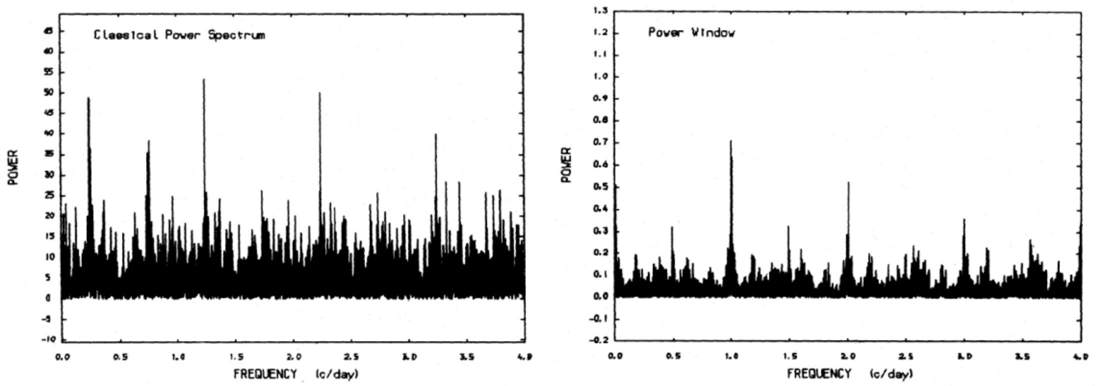
Η γνώση της τροχιακής περιόδου ενός διπλού συστήματος, όπως άλλωστε διαπιστώσαμε πιο πάνω, παίζει καθοριστικό ρόλο στον προσδιορισμό των μαζών των δύο μελών. Δεν είναι όμως λίγες οι περιπτώσεις που η κλίση ενός ενός φασματοσκοπικά διπλού συστήματος δεν επιτρέπει τη δημιουργία εκλείψεων και τελικά η περίοδός του δεν μπορεί να προσδιοριστεί φωτομετρικά. Ακόμα και κάτω από αυτές τις συνθήκες, η περίοδος μπορεί να εκτιμηθεί με τη βοήθεια της καμπύλης ακτινικών ταχυτήτων. Πιο συγκεκριμένα, έχουν προταθεί δύο βασικές προσεγγίσεις οι οποίες δεν περιορίζονται σε αστρονομικές αυστηρά εφαρμογές αλλά σε όλες όσες αφορούν την ανάλυση περιοδικών σημάτων.

Η πρώτη από αυτές λαμβάνει χώρα στο ***χώρο των φάσεων (time domain)***, δηλαδή επικεντρώνει στη μελέτη του σήματος ως προς το χρόνο με την επιλογή πιθανών τιμών της περιόδου σε ένα συγκεκριμένο διάστημα και τη μετέπειτα απεικόνιση των δεδομένων ως προς τις φάσεις που προκύπτουν με βάση τις περιόδους αυτές. Η περίοδος που τελικά προτείνεται αντιστοιχεί στη βέλτιστη εκείνη τιμή που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του μέσου ολοκληρωμένου τυπικού σφάλματος. Η προσέγγιση αυτή είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική κατά την ανάλυση σημάτων με έντονες και αιφνίδιες μεταβολές, όπως για παράδειγμα εκείνες που παρατηρούνται στις καμπύλες φωτός ορισμένων κατηγοριών μεταβλητών αστέρων (π.χ. κατακλυσμικοί και συμβιωτικοί μεταβλητοί). Αντίθετα, η δεύτερη προσέγγιση λαμβάνει χώρα στο ***χώρο των συχνοτήτων (frequency domain)***, δηλαδή σε ένα διάγραμμα στο οποίο απεικονίζεται η ισχύς των συχνοτήτων (οπότε και των υποψήφιων ισοδύναμων περιόδων) με βάση την προσαρμογή ενός θεωρητικού μοντέλου περιγραφής περιοδικών μεταβολών, όπως π.χ. οι μετασχητισμοί Fourier, γνωστό ως *φάσμα ισχύος ή περιοδόγραμμα (power spectrum ή periodogram)*. Η προσέγγιση αυτή ακολουθείται κατά την ανάλυση σημάτων με ήπιες μεταβολές, όπως συνήθως είναι και οι καμπύλες ακτινικών ταχυτήτων.

Το κύριο μειονέκτημα που παρουσιάζεται κατά την εφαρμογή της δεύτερης προσέγγισης είναι η παρουσία αρκετών συχνοτήτων, μερικές από τις οποίες δεν έχουν φυσική προέλευση. Το πρόβλημα ξεκινά από τη μορφή των δεδομένων τα οποία δεν είναι ισομερώς κατανεμημένα στο χρόνο αφενός γιατί οι νυχτερινές παρατηρήσεις διακόπτονται από τη μέρα και αφετέρου γιατί πολλές από αυτές μπορεί να μη θεωρηθούν αξιόπιστες και να πρέπει να απομακρυνθούν από την ανάλυση (π.χ. κορεσμένες εικόνες, προβληματική οδήγηση τηλεσκοπίου, αιφνίδια νέφωση). Μια πρώτη διόρθωση που μπορούμε να κάνουμε είναι η αναζήτηση περιόδων μέσα σε ένα προεπιλεγμένο διάστημα το οποίο ορίζεται μεταξύ του (διπλάσιου) χρονικού βήματος των παρατηρήσεων (αντιστοιχεί στη *συχνότητα Nyquist*) και του συνολικού χρονικού παράθυρου μέσα στο οποίο πραγματοποιήθηκαν.

Ακόμα και αν το πιο πάνω φίλτρο βελτιώνει σημαντικά την αξιοπιστία της μεθόδου, το πρόβλημα του θορύβου παραμένει (είτε αυτός σχετίζεται με την παρουσία αρμονικών συχνοτήτων είτε έχει στατιστική προέλευση). Το περιοδόγραμμα ενός σήματος το οποίο έχει προσβληθεί από ανεπιθύμητους παράγοντες εμφανίζει τις πραγματικές συχνότητες εξασθενημένες και βυθισμένες μέσα σε ένα πυκνό πλήθος κορυφών ελαφρώς μικρότερης ισχύος. Στην περίπτωση αυτή, κατασκευάζουμε ένα δεύτερο περιοδόγραμμα το οποίο έχει προκύψει από την ανάλυση των αρχικών μας δεδομένων, κατάλληλα όμως τροποποιημένων, ώστε να ακολουθούν την Τυπική Κανονική κατανομή N(0,1). Η ανάλυση των *δεδομένων παράθυρου (data window)*, όπως συχνά αποκαλούνται τα κανονικοποιημένα δεδομένα, αποκαλύπτει λεπτομέρειες σχετικά με το βαθμό αξιοπιστίας της δειγματοληψίας και όχι με τα εγγενή χαρακτηριστικά του σήματος και αποσκοπεί στον εντοπισμό περιοδικοτήτων μέσα στο περιοδόγραμμα του σήματος. Εφόσον υπάρχουν, επιβεβαιώνουν την παρουσία αρμονικών συχνοτήτων ως προς την κύρια, δηλαδή ως προς εκείνη με τη μεγαλύτερη ισχύ που βρέθηκε στο πρώτο περιοδόγραμμα (Σχήμα Ι.19).

Μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί κυρίως στον τρόπο προσδιορισμού της μάζας των μελών ενός διπλού συστήματος, καθώς η συγκεκριμένη παράμετρος είναι ίσως η σημαντικότερη όσον αφορά τη γενικότερη συμπεριφορά του αλλά και τη μετέπειτα εξέλιξή του. Ο προσδιορισμός των ακτίνων των μελών του εξαρτάται άμεσα από τη γεωμετρική προσέγγιση που ακολουθείται και επομένως από το μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική του συστήματος. Τονίζουμε πάντως ότι σε κάθε περίπτωση απαιτείται το σύστημα να είναι εκλειπτικά διπλό και να διαθέτουμε την πλήρη καμπύλη φωτός του.



Σχήμα Ι.19. Περιοδόγραμμα του αστέρα HR1165 που έχει προκύψει από ανάλυση των ακτινικών ταχυτήτων (αριστερά). Είναι εμφανής η παρουσία τεσσάρων κυρίαρχων συχνοτήτων, ξεκινώντας από εκείνη των 0.24184 c/d με βήμα 1 c/d περίπου. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται στο περιοδόγραμμα των δεδομένων παράθυρου (δεξιά), διασφαλίζοντας την αυθεντικότητα της πρώτης συχνότητας ως πραγματική (Jarad et al. 1989).

Δεν πρέπει επίσης να ξεχνάμε ότι τα τελικά αποτελέσματα θα διαφέρουν ανάλογα και με τις τεχνικές που ακολουθεί ο κώδικας για την αντίστοιχη φωτομετρική ανάλυση. Θυμίζουμε χαρακτηριστικά ότι το μοντέλο NDE (1972) θεωρεί τους αστέρες απόλυτα σφαιρικούς, το μοντέλο του Wood (1971) τριαξονικά ελλειψοειδή, ενώ εκείνο των Wilson και Devinney (1971), βασισμένο στη γεωμετρία Roche, υπολογίζει τέσσερις συνολικά ακτίνες (δύο στο επίπεδο της τροχιάς και δύο στο κάθετο επί της τροχιάς) καθώς θεωρεί τους αστέρες ασύμμετρα παραμορφωμένους (r^{back}, r^{point}, r^{pole} και r^{side}).

Σχετικά τώρα με τη θερμοκρασία, έχουμε ήδη παρουσιάσει την πορεία που ακολουθείται όταν ο προσδιορισμός της γίνεται φωτομετρικά. Φυσικά, η γνώση των φασματικών τύπων τους μας οδηγεί εξίσου σε μια πρώτη εκτίμησή της. Με δεδομένη πλέον τη γνώση της, συνήθως εκτιμούμε άμεσα και την αντίστοιχη βολομετρική διόρθωση *B.C. (Bolometric Correction)* και τελικά το βολομετρικό μέγεθός τους M_{bol} από την ακόλουθη σχέση:

$$M_{bol} = M_V + B.C. \tag{1.35}$$

Το βολομετρικό μέγεθος μπορεί επίσης να υπολογιστεί με περισσότερο έμμεσο τρόπο, χρησιμοποιώντας το *νόμο των Stefan-Boltzmann*, συγκριτικά με την (ενεργό) θερμοκρασία, τη φωτεινότητα και την ακτίνα του Ήλιου, οι τιμές όμως των οποίων είναι προσδιορισμένες με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Ακολουθώντας τα παραπάνω, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στην παρακάτω σχέση:

$$M_{bol} = M_{bol,\odot} - 5\log\left(\frac{R}{R_\odot}\right) - 10\log\left(\frac{T}{T_\odot}\right) \quad \text{με} \quad M_{bol,\Theta} = 4.75 \text{ mag}, \; T_\Theta = 5780 \text{ K} \tag{1.36}$$

$$\text{ή αλλιώς} \quad M_{bol} = 42.31 - 5\log\left(\frac{R}{R_\odot}\right) - 10\log T\,. \tag{1.37}$$

Με γνωστό το βολομετρικό μέγεθος, ο *τύπος του Pogson* αρκεί πλέον για να υπολογίσουμε τη φωτεινότητα των μελών του συστήματος σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$L = 10^{-0.4(M_{bol} - M_{bol,\odot})} L_\odot \quad \text{με} \quad L_\Theta = 3.90\times10^{26} \text{ W}. \tag{1.38}$$

Η επιφανειακή επιτάχυνση της βαρύτητας των μελών είναι η τελευταία απαιτούμενη παράμετρος για να έχουμε τελικά την πλήρη γνώση όλων των βασικών χαρακτηριστικών τους. Η συγκεκριμένη παράμετρος είναι εξέχουσας σημασίας καθώς μας πληροφορεί για την τάξη φωτεινότητας και συνεπώς για την εξελικτική κατάσταση των αστέρων. Ο υπολογισμός της μάλιστα είναι ιδιαίτερα απλός αφού στηρίζεται στο γενικό της ορισμό:

$$g = G\frac{M}{R^2} = \frac{M}{M_\odot}\cdot\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-2} g_\odot \quad \text{με} \quad g_\Theta = 2.74\times10^4 \text{ cm/sec}^2. \tag{1.39}$$

ή αλλιώς $\log g = \log g_{\odot} + \log\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) - 2\log\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)$ με $\log g_{\odot} = 4.438$ cm/sec^2. (1.40)

Η απόσταση του συστήματος μετράται είτε με τη διαφορά του (διορθωμένου) φαινόμενου από το απόλυτο μέγεθος είτε με τις κλασικές φασματοσκοπικές μεθόδους και την τεχνική της παράλλαξης για κοντινά στον Ήλιο συστήματα. Προσθέτουμε ακόμα ότι φασματοσκοπικά δεδομένα υψηλής ανάλυσης μας δίνουν τη δυνατότητα προσδιορισμού της (ισημερινής) ταχύτητας ιδιοπεριστροφής των δύο μελών η οποία γίνεται αντιληπτή εξαιτίας της πλάτυνσης των γραμμών λόγω του φαινομένου Doppler. Η περίοδος περιστροφής των μελών συνηθίζεται βέβαια να λαμβάνεται ίση με την τροχιακή περίοδο, δεχόμενοι ότι έχει επέλθει συγχρονισμός, υπόθεση επιτυχής σε στενά κυρίως διπλά αστρικά συστήματα.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα ενότητα, οφείλουμε να παραθέσουμε μια σειρά ιδιαίτερα χρήσιμων σχέσεων οι οποίες συνδέουν τη θερμοκρασία ενός αστέρα με ορισμένες από τις υπόλοιπες παραμέτρους, όταν όμως εκείνος βρίσκεται στην κύρια ακολουθία. Οι σχέσεις αυτές έχουν προκύψει από τη γνώση των αντίστοιχων παραμέτρων σε δείγματα διπλών συστημάτων και χρησιμεύουν σε περιπτώσεις που οι πληροφορίες μας για τα χαρακτηριστικά ενός αστέρα είναι περιορισμένες.

Η ιδέα της συσχέτισης των βασικών παραμέτρων ενός αστέρα είναι εδώ και πολλά χρόνια γνωστή. Ήδη από το 1926, οι Russell και Vogt είχαν αποδείξει με αυστηρό τρόπο ότι η φωτεινότητα και η ακτίνα ενός αστέρα σταθερής χημικής σύστασης εξαρτώνται μόνο από τη μάζα του, ιδιότητα γνωστή ως ***θεώρημα των Russell-Vogt*** (Vogt 1926). Η επίδραση βέβαια της χημικής σύστασης είναι καθοριστική και για το λόγο αυτό η αναζήτηση σχέσεων της μορφής *M-T*, *M-L* και *M-R* περιορίζεται συνήθως στην περιοχή της κύριας ακολουθίας στην οποία οι αστέρες παραμένουν κατά το μεγαλύτερο διάστημα της εξελικτικής τους πορείας.

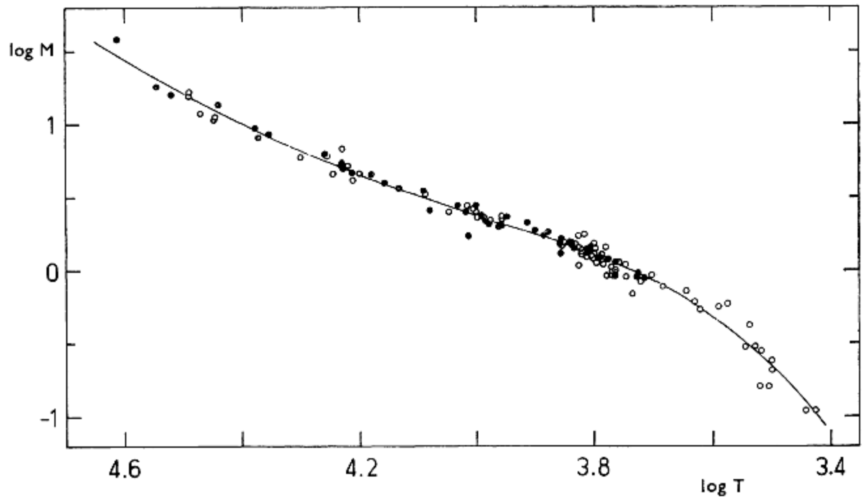
Με ορισμένες απλές παραδοχές (διάδοση ακτινοβολίας στο εσωτερικό του αστέρα μόνο με ακτινοβολία, αδιαφάνεια από νόμο Kramer και πίεση από νόμο τελείων αερίων) είναι δυνατόν να καταλήξουμε θεωρητικά σε ημιεμπειρικές σχέσεις φωτεινότητας-μάζας. Σύμφωνα με την παραπάνω μεθοδολογία καταλήγουμε σε μια σχέση της μορφής (π.χ. Βάρβογλης & Σειραδάκης 1994):

$$L \propto \frac{M^{11/2}\mu^{15/2}}{\sqrt{R}}, \qquad (1.41)$$

όπου μ, το μέσο μοριακό βάρος της χημικής σύστασης του αστέρα, ενώ *M*, *R* η μάζα και η ακτίνα του, αντίστοιχα. Η παραπάνω σχέση, γνωστή ως ***σχέση του Eddington***, δείχνει ότι η φωτεινότητα ενός νάνου αστέρα μεταγενέστερου φασματικού τύπου εξαρτάται ισχυρά από τη μάζα του και από τη χημική του σύσταση. Με τη βοήθεια μερικών ακόμα εμπειρικών σχέσεων ακτίνας-μάζας, μπορούμε να καταλήξουμε στις επόμενες δύο ενδιαφέρουσες σχέσεις:

- $L \propto M^5$ για αστέρες κύριας ακολουθίας μικρής μάζας ($R \propto M$). (1.42)

- $L \propto M^3$ για αστέρες κύριας ακολουθίας μεγάλης μάζας ($R \propto M^5$). (1.43)
- $L \propto M$ για αστέρες κύριας ακολουθίας πολύ μεγάλης μάζας ($R \propto M^9$). (1.44)



Σχήμα Ι.20. Συσχέτιση της μάζας και της θερμοκρασίας για αστέρες που ανήκουν στην κύρια ακολουθία. Τα δεδομένα έχουν ληφθεί από δείγματα αποχωρισμένων κυρίως διπλών συστημάτων (σημεία μαύρου χρώματος) αλλά και από δείγματα ημιαποχωρισμένων συστημάτων και συστημάτων επαφής (σημεία λευκού χρώματος). Η μορφή της συσχέτισης περιγράφεται ικανοποιητικά από ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού (Harmanec 1988).

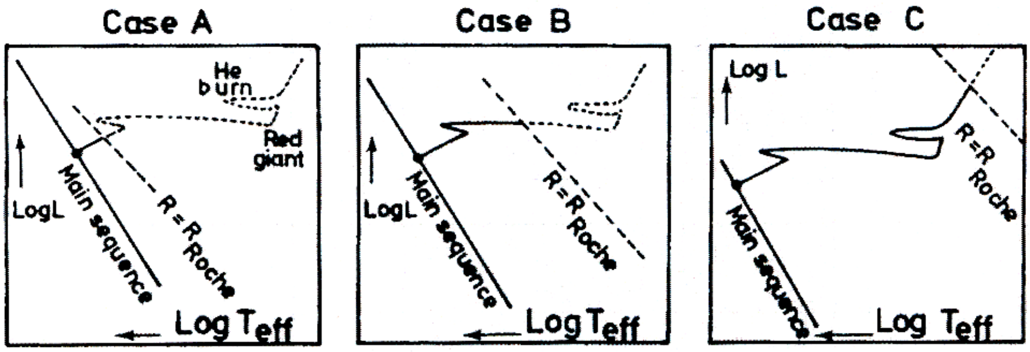
Στην πράξη, οι προηγούμενες σχέσεις έχουν πολύ μικρή ισχύ και μάλιστα αποκλίνουν έντονα τις περισσότερες φορές από την πραγματικότητα. Αν και απλοϊκές, αποτελούν παρόλα αυτά τις πρώτες εκτιμήσεις του τρόπου συσχέτισης των θεμελιωδών αστροφυσικών παραμέτρων ενός αστέρα. Σήμερα, ο προσδιορισμός τους σε διπλά συστήματα με εφαρμογή των μεθόδων που περιγράφηκαν στην παρούσα ενότητα έχει οδηγήσει στην κατασκευή περισσότερο πολύπλοκων σχέσεων (Σχήμα Ι.20). Η πιο συνήθης περιγραφή για αστέρες της κύριας ακολουθίας βασίζεται σε πολυώνυμα τετάρτου βαθμού τα οποία συνδέουν τη μάζα, την ακτίνα και το απόλυτο βολομετρικό μέγεθος ως συνάρτηση της (ενεργού) θερμοκτασίας (Harmanec 1988):

- $$\log\left(\frac{M}{M_\odot}\right) = \{[(-1.744951X + 30.31681)X - 196.2387]X + 562.6774\}X - 604.0760. \quad (1.45)$$
- $$\log\left(\frac{R}{R_\odot}\right) = \{[(-0.8656627X + 16.22018)X - 112.2303]X + 341.6602\}X - 387.0969. \quad (1.46)$$
- $$M_{bol} = \{[(4.328314X - 81.10091)X + 561.1516]X - 1718.301\}X + 1977.795, \quad (1.47)$$

όπου $X = \log T$ και $3.43 \leq \log g \leq 4.62$. Ελέγχοντας με τις παραπάνω σχέσεις τα χαρακτηριστικά του Ήλιου, τοποθετούμε τη θερμοκρασία των 5780 K και τελικά προσδιορίζουμε τη μάζα, την ακτίνα και το βολομετρικό του μέγεθος ίσα με 1.11 $M_\odot$, 1.21 $R_{\odot}$ και 4.28 mag, αντίστοιχα. Η σημαντική απόκλιση της ευρεθείσας ηλιακής ακτίνας από την πραγματική οφείλεται στο ότι η χρησιμοποιούμενη σχέση παρουσιάζει έντονη διασπορά και η προσέγγιση που επιχειρείται δεν μπορεί να θεωρηθεί επιτυχής. Τα υπόλοιπα αποτελέσματα δεν διαφέρουν σημαντικά από την πραγματικότητα στο βαθμό τουλάχιστον που οι παραπάνω προσεγγίσεις είναι δυνατόν να θεωρηθούν αξιόπιστες.

4. Εξέλιξη Διπλών Αστρικών Συστημάτων

Η εξέλιξη ενός μεμονωμένου αστέρα διαφέρει σημαντικά από την εξέλιξη του ως μέλος ενός συστήματος αστέρων. Το γεγονός αυτό σχετίζεται με την άμεση επίδραση που επιφέρει στον αστέρα αυτό ο συνοδός του (π.χ. Λασκαρίδης 2001). Κατά την πυρηνική εξέλιξη του μέλους με τη μεγαλύτερη μάζα, ο λοβός Roche του είναι δυνατόν να συμπληρωθεί κάτω από κατάλληλο συνδυασμό του λόγου μαζών και της τροχιακής περιόδου του συστήματος. Η υπερχείλιση του λοβού Roche οδηγεί στη συνέχεια σε μεταφορά υλικού προς το συνοδό του και αποτελεί μια διαδικασία η οποία λαμβάνει χώρα είτε στα τελευταία στάδια της παραμονής του πρωτεύοντα στην κύρια ακολουθία (περίπτωση A) είτε όταν ο τελευταίος έχει ήδη εισέλθει στον ασυμπτωτικό κλάδο της περιοχής των γιγάντων κατά τον τερματισμό της καύσης του υδρογόνου ή του ηλίου στον πυρήνα του (περιπτώσεις B και C αντίστοιχα, Kippenhahn & Weigert 1994). Η πρώτη περίπτωση είναι η σπανιότερη και αναμένεται εφόσον η αρχική τροχιακή περίοδος είναι της τάξης μόλις λίγων ημερών. Αντίθετα οι επόμενες δύο είναι συχνότερες και απαιτούν αρχική περίοδο τουλάχιστον 100 ημερών (Σχήμα Ι.21).



Σχήμα Ι.21. Οι τρεις βασικοί τρόποι ανταλλαγής μάζας μεταξύ των μελών ενός διπλού συστήματος. Η κατηγοριοποίηση έχει βασιστεί στην εξελικτική κατάσταση στην οποία βρίσκεται ο δότης αστέρας (Kippenhahn & Weigert 1994).

4.1. Συμπεριφορά του Δότη Αστέρα

Κατά τη διάρκεια μεταφοράς μάζας, η ισορροπία του δότη αστέρα διαταρράσσεται και συνεπώς προσπαθεί και πάλι να την επαναφέρει. Η διαδικασία αυτή λαμβάνει αρχικά χώρα σε ***δυναμική*** χρονική κλίμακα (απαιτούμενο χρονικό διάστημα για την αποκατάσταση της υδροστατικής του ισορροπίας) και στη συνέχεια σε ***θερμική*** (απαιτούμενο χρονικό διάστημα για την αποκατάσταση της θερμικής του ισορροπίας). Ιδιαίτερα ισχυροί ρυθμοί μεταφοράς μάζας, της τάξης των 10^{-5} με 10^{-4} $M_{\odot}$/yr, πραγματοποιούνται σε δυναμική χρονική κλίμακα (π.χ. Hilditch 2001) και το είδος της μεταβολής της ακτίνας εξαρτάται από το είδος του περιβλήματος που φέρει ο δότης αστέρας. Μικρότεροι ρυθμοί μεταφοράς μάζας, της τάξης των 10^{-7} με 10^{-6} $M_{\odot}$/yr, αναμένονται σε θερμική χρονική κλίμακα (π.χ. Hilditch 2001) με το είδος της μεταβολής της ακτίνας να εξαρτάται τώρα από το στάδιο της καύσης του υδογόνου στον πυρήνα.

Σχετικά με την αποκατάσταση της *υδροστατικής ισορροπίας*, η αντίστοιχη χρονική κλίμακα είναι της τάξης των ωρών μέχρι και ημερών. Η εξαιρετικά σύντομη διάρκεια της παραπάνω διαδικασίας επιφέρει ορισμένες επιπτώσεις στην ακτίνα του αστέρα. Αναλυτικότερα, η ακτίνα του δότη αστέρα μετά την απώλεια μάζας αναμένεται μικρότερη εφόσον εκείνος φέρει περίβλημα ακτινοβολίας, ενώ η ακτίνα αναμένεται μεγαλύτερη όταν ο αστέρας φέρει περίβλημα μεταφοράς.

Το τελευταίο γεγονός οφείλεται στο ότι η εσωτερική θερμότητα του αστέρα διατηρείται (το θερμικό περιεχόμενο σε ένα διάστημα μερικών ωρών δεν προλαβαίνει να μεταβληθεί) και η μεταφορά μάζας θεωρείται κατά προσέγγιση αδιαβατική. Στην περίπτωση αυτή, μείωση της μάζας ενός αστέρα έχει ως αποτέλεσμα αύξηση της ακτίνας του. Το φαινόμενο αυτό συναντάται στην κορυφή του κλάδου των γιγάντων οι οποίοι είναι γνωστό ότι διαθέτουν βαθιά κελύφη μεταφοράς. Σε αντίθεση μάλιστα με τους αστέρες ακτινοβόλου περιβλήματος, η αύξηση της ακτίνας του δότη αστέρα είναι πάντοτε μεγαλύτερη από εκείνη του αντίστοιχου λοβού Roche στην περιοχή απομάκρυνσης από τον κλάδο των γιγάντων.

Ερχόμενοι τώρα στη διαδικασία αποκατάστασης της *θερμικής ισορροπίας* του δότη αστέρα, η αντίστοιχη χρονική κλίμακα υπολογίζεται κατά πολύ μεγαλύτερη της δυναμικής και πιο συγκεκριμένα της τάξης των εκατομμυρίων ετών. Τα μοντέλα δείχνουν πως η ακτίνα αστέρων που βρίσκονται στην κύρια ακολουθία, αλλά δεν βρίσκονται ακόμα σε πολύ προχωρημένο στάδιο της καύσης του υδρογόνου στον πυρήνα, θα μειωθεί μετά την αποκατάσταση της θερμικής ισορροπίας. Αντίθετα, αστέρες που βρίσκονται σε προχωρημένες φάσεις καύσης του υδρογόνου, αυξάνουν την ακτίνα τους μετά την απώλεια μάζας.

Όταν η θερμική ισορροπία αποκατασταθεί, ο δότης αστέρας εξελίσσεται σε ***πυρηνική*** πλέον κλίμακα (εξέλιξη αστέρα ως μεμονωμένου), δηλαδή της τάξης των δισεκατομμυρίων ετών. Η εξέλιξη αυτή επιφέρει βαθμιαία αύξηση της ακτίνας του, γεγονός το οποίο οδηγεί σε νέα αλλά αργή, αυτή τη φορά, μεταφορά μάζας με ρυθμούς της τάξης των 10^{-11} με 10^{-8} $M_{\odot}$/yr (π.χ. Hilditch 2001). Η μεταφορά αυτή είναι πλέον ευσταθής, καθώς ο λοβός Roche διαστέλλεται και προσαρμόζεται συνεχώς στην αργή αύξηση της ακτίνας του αστέρα.

4.2. Συμπεριφορά του Δέκτη Αστέρα

Ο δέκτης αστέρας, μετά την έναρξη της μεταφοράς μάζας από το δότη, τροφοδοτείται αδιάκοπα με υλικό πλούσιο σε υδρογόνο. Εφόσον η μεταφοράς μάζας πραγματοποιείται σε χρονική κλίμακα μικρότερη από τη θερμική χρονική κλίμακα του συνοδού αστέρα, ο τελευταίος έχει την ικανότητα να αποκαθιστά τη θερμική του ισορροπία και συνεπώς η προσφερόμενη μάζα συσσωρεύεται στην περιφέρειά του με τη μορφή δίσκου (δίσκου προσαύξησης). Σε αντίθετη περίπτωση, η ύλη που συσσωρεύεται, θερμαίνεται και διαστέλλεται με αποτέλεσμα ο συνοδός αστέρας να γεμίζει το λοβό Roche του (π.χ. Μπιτζαράκη 2003).

Η τελευταία περίπτωση είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, καθώς υλικό διαφεύγει πλέον από το συνοδό αστέρα, σχηματίζοντας ένα *κοινό περίβλημα* το οποίο καλύπτει ολοκληρωτικά το σύστημα. Η εκδίωξη του υλικού από το συνοδό αστέρα φαίνεται να πραγματοποιείται σχετικά ομαλά με εξαίρεση βέβαια την περίπτωση που ο συνοδός ταυτίζεται με έναν εκφυλισμένο συμπαγή αστέρα, η έναρξη της φάσης του κοινού περιβλήματος του οποίου προκαλείται εξαιτίας της καύσης του υδρογόνου σε εξωτερικό φλοιό (π.χ. κατακλυσμικοί μεταβλητοί και συμβιωτικά συστήματα).

Συνοπτικά αναφέρουμε ότι ο σχηματισμός του κοινού περιβλήματος εξαρτάται από διάφορους παράγοντες με κυριότερους το λόγο μαζών του συστήματος, την εξελικτική κατάσταση του δότη αστέρα σε σχέση με εκείνη του δέκτη, καθώς και από το βάθος του περιβλήματος μεταφοράς του δότη αστέρα. Οι αιτίες που οδηγούν το συνοδό αστέρα στην υπερχείλιση του λοβού του και στο συνεπακόλουθο σχηματισμό του κοινού περιβλήματος σχετίζονται είτε με την ίδια τη χημική του εξέλιξη είτε με τα γενικότερα φαινόμενα που οδηγούν σε απώλειες στροφορμής από το σύστημα και επιφέρουν σμίκρυνση της τροχιάς του συστήματος.

4.3. Τελικές Εξελικτικές Καταστάσεις

Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο αυτό, είναι σημαντικό να αναφέρουμε λίγα λόγια σχετικά με την εξελικτική πορεία που ακολουθούν τελικά τα διπλά συστήματα αστέρων. Η εξέλιξή τους είναι αρκετά πολύπλοκη και, όπως έχει ήδη ειπωθεί, εξαρτάται κυρίως από το λόγο μαζών και την τροχιακή περίοδο του συστήματος. Ορισμένα βασικά συμπεράσματα με βάση τη μάζα του πρωτεύοντος μέλους παρουσιάζονται στις επόμενες τρεις υποενότητες.

4.3.1. Πρωτεύοντας Αστέρας Μάζας Μικρότερης των 8 $M_{\odot}$

Σε διπλά συστήματα με πρωτεύοντα αστέρα μάζας μικρότερης των 8 $M_{\odot}$, το τελικό υπόλειμμα που παράγεται από τον τελευταίο είναι πάντοτε ένας *λευκός νάνος άνθρακα-οξυγόνου*. Σύμφωνα με το κλασικό εξελικτικό σενάριο, το σύστημα είναι υποψήφιο να σχηματίσει μια υπερ-μαλακή πηγή ακτίνων Χ καθώς η εξέλιξη του δευτερεύοντα στο αρχικό σύστημα επιβάλει τη μεταφορά μάζας προς τον εκφυλισμένο πλέον συνοδό του. Η ασταθής εκρηκτική καύση του υδρογόνου στην επιφάνεια του λευκού νάνου οδηγεί σε συστήματα με εκρήξεις τύπου καινοφανούς και σε λίγες μόνο περιπτώσεις ενδέχεται η μάζα του να αυξηθεί τόσο, ώστε να καταρρεύσει τελικά προς έναν αστέρα νετρονίων, προκαλώντας μια έκρηξη υπερκαινοφανούς τύπου Ia (όταν η τροφοδοσία του εκφυλισμένου νάνου με υλικό πραγματοποιείται με σχετικά μικρούς ρυθμούς).

4.3.2. Πρωτεύοντας Αστέρας Μάζας 8 ή 9 $M_\odot$

Σε διπλά συστήματα με πρωτεύοντα αστέρα μάζας 8 ή 9 $M_\odot$, το τελικό υπόλειμμα που παράγεται από τον τελευταίο είναι πάντοτε ένας *λευκός νάνος οξυγόνου-νέου-μαγνησίου*. Σύμφωνα με τα υπάρχοντα εξελικτικά σενάρια, το σύστημα είναι και πάλι υποψήφιο να σχηματίσει μια υπερ-μαλακή πηγή ακτίνων Χ η οποία, αυτή τη φορά, είναι περισσότερο πιθανό να οδηγηθεί στο σχηματισμό ενός αστέρα νετρονίων, δεχόμενοι τουλάχιστον ότι μετά τη φάση του κοινού περιβλήματος, ο πρωτεύοντας υπερχειλίζει για δεύτερη φορά το λοβό Roche του κατά την καύση του ηλίου σε φλοιό γύρω απο τον πυρήνα και μεταφέρει νέο υλικό προς το συνοδό του (Bitzaraki et al. 2004). Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, έχουμε είτε το σχηματισμό συστήματος με εκρήξεις τύπου καινοφανούς είτε ενός συστηματος υπερ-μαλακής πηγής ακτίνων Χ το οποίο δεν είναι υποψήφιο για υπερκαινοφανή τύπου Ia (όταν η τροφοδοσία του εκφυλισμένου νάνου με υλικό πραγματοποιείται με μεγάλους ρυθμούς, η υπερβολικά μεγάλη πίεση ακτινοβολίας διεγείρει έναν πυκνό άνεμο από το λευκό νάνο που εκδιώκει ένα μεγάλο ποσοστό της προσαυξάνουσας μάζας).

4.3.3. Πρωτεύοντας Αστέρας Μάζας 10 $M_\odot$

Σε διπλά συστήματα με πρωτεύοντα αστέρα μάζας 10 $M_\odot$, το τελικό υπόλειμμα που παράγεται από τον τελευταίο μπορεί να είναι είτε ένας *λευκός νάνος οξυγόνου-νέου-μαγνησίου* είτε ένας *αστέρας νετρονίων*. Δεχόμενοι λοιπόν και πάλι το σενάριο της νέας υπερχείλισης του λοβού μετά τη φάση του κοινού περιβλήματος, φαίνεται ότι ο πρωτεύοντας αστέρας πιθανώς εξελίσσεται προς έκρηξη υπερκαινοφανούς τύπου II του αστέρα ηλίου με υπόλειμμα έναν αστέρα νετρονίων (Bitzaraki et al. 2004). Παράγεται επομένως μια πηγή ακτίνων Χ (μικρής ή μεσαίας μάζας) αφού βεβαίως τα μέλη του συστήματος περάσουν (και επιβιώσουν) απο μια δεύτερη φάση κοινού περιβλήματος κατά την οποία ο δευτερεύοντας του αρχικού συστήματος γεμίζει το λοβό Roche του και τροφοδοτεί με υλικό το εκφυλισμένο υπόλειμμα του πρωτεύοντα. Επομένως, ο σχηματισμός της συμπαγούς πηγής ακτίνων Χ πραγματοποιείται τώρα χωρίς το σενάριο κατάρρευσης ενός λευκού νάνου από προσαύξηση ύλης σε μια υπερ-μαλακή πηγή ακτίνων Χ, σε αντίθεση με το κλασικό, σύμφωνα με το οποίο προβλέπεται ο σχηματισμός μιας συμπαγούς πηγής ακτίνων Χ διαμέσου του καναλιού σχηματισμού και εξέλιξης μιας υπερ-μαλακής πηγής ακτίνων Χ.

4.3.4. Πρωτεύοντας Αστέρας Μάζας Μεγαλύτερης των 10 $M_\odot$

Σε διπλά συστήματα με πρωτεύοντα αστέρα μάζας μεγαλύτερης των 10 $M_\odot$, το τελικό υπόλειμμα που παράγεται από τον τελευταίο μπορεί να είναι είτε ένας *λευκός* *νάνος οξυγόνου-νέου-μαγνησίου* είτε ένας *αστέρας νετρονίων*, ενώ σε ορισμένες σπάνιες περιπτώσεις, μπορεί να είναι μια *μελανή οπή*. Φαίνεται λοιπόν ότι σε *συστήματα μικρής περιόδου* και εφόσον ο πρωτεύοντας διαθέτει μάζα μέχρι τις 12 M_{Θ}, το υπόλειμμά του, που ταυτίζεται με έναν αστέρα ηλίου, μπορεί και διαστέλλεται κατά τη διάρκεια της καύσης του ηλίου σε φλοιό γύρω από τον πυρήνα. Το γεγονός αυτό οδηγεί τον πρωτεύοντα στην υπερχείλιση του λοβού Roche του και το σύστημα σε μια δεύτερη φάση κοινού περιβλήματος. Το τελικό κατάλοιπο σε μια τέτοια περίπτωση είναι ένας λευκός νάνος οξυγόνου-νέου-μαγνησίου. Αστέρες με μεγαλύτερη μάζα από τις 12 M_{Θ}, αναμένεται να οδηγηθούν σε έκρηξη υπερκαινοφανούς αστέρα ηλίου και φυσικά στη δημιουργία ενός αστέρα νετρονίων. Ας σημειωθεί όμως ότι η μάζα του αστέρα δε θα πρέπει να ξεπερνά τις 15 M_{Θ}, καθώς μετά την τιμή αυτή, υπολογίζεται ότι το σύστημα δε θα παραμείνει διπλό μετά την έκρηξη.

Ερχόμενοι τώρα σε *συστήματα μεγάλης σχετικά περιόδου*, παρατηρούμε ότι η εξέλιξη του πρωτεύοντα αστέρα προσεγγίζει καλύτερα την εξέλιξή του ως μεμονωμένο άστρο. Έτσι λοιπόν, υπολογίζεται ότι ο αστέρας σχηματίζει έναν αστέρα νετρονίων με έκρηξη υπερκαινοφανούς πριν τη φάση του κοινού περιβλήματος. Η τροχιακή περίοδος δηλαδή του συστήματος σε συνάρτηση με τη μεγάλη μάζα του αστέρα καθιστούν την εξέλιξή του εκρηκτική πριν την έναρξη μεταφοράς μάζας προς το συνοδό του. Στις περιπτώσεις αυτές και εφόσον η μάζα του πρωτεύοντα ξεπερνά τις 25 M_{Θ}, δεν αποκλείεται η κατάληξη του τελευταίου να είναι μια μελανή οπή, με την προϋπόθεση βέβαια να τηρούνται ορισμένες συνθήκες σχετικά με τις τροχιακές και τις απόλυτες παραμέτρους του συστήματος.

‘‘If we can provide a convincing picture of all the evolutionary paths that binary stars can take to arrive at all the diverse types of systems that we observe, then we will have made a major contribution to the fields of Astronomy and Astrophysics.’’

Hilditch R.
‘‘An Introduction to Close Binary Stars’’
University of Cambridge Press, New York, U.S.A., 2001

Κεφάλαιο ΙΙ

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΧΡΟΝΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ

Ο τρόπος προσδιορισμού και η ακρίβεια ενός χρόνου ελαχίστου αποτελεί σημαντικό ερευνητικό αντικείμενο των τελευταίων δεκαετιών καθώς η διακύμανσή τους έχει άμεσο αντίκτυπο στο επίπεδο του θορύβου μιας O-C χρονοσειράς. Ο ρόλος τους είναι συνεπώς καθοριστικός όσον αφορά τη διαμόρφωση ευκρινούς σήματος στα αντίστοιχα O-C διαγράμματα πάνω στα οποία βασίζεται η μελέτη των μακροχρόνιων μεταβολών της τροχιακής περιόδου ενός συστήματος. Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει μερικά ενδιαφέροντα στοιχεία σχετικά με τις μεθόδους προσδιορισμού τους, τις αιτίες που επιφέρουν θόρυβο στις παρατηρήσεις καθώς και ορισμένους νέους χρόνους ελαχίστων δύο εκ των συστημάτων τα οποία πρόκειται να αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης της διδακτορικής διατριβής. Επιπλέον, εισάγεται μια νέα τροποποιημένη έκδοση μιας εκ των σημαντικότερων μεθόδων προσδιορισμού χρόνου ελαχίστων η οποία τίθεται σε εφαρμογή και συγκρίνεται με τις δύο κυριότερες παραδοσιακές μεθόδους. Ο αριθμός των νέων χρόνων ελαχίστων κρίθηκε επαρκής ώστε να πραγματοποιηθεί μια ολοκληρωμένη στατιστική ανάλυση που αφορά τη σύγκριση των κυριότερων μεθόδων προσδιορισμού χρόνου ελαχίστων κάτω από διαφορετικές συνθήκες, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζονται και σχολιάζονται.

1. Χρόνος Ελαχίστων

Είδαμε πως η φωτομετρική μελέτη των διπλών εκλειπτικών αστέρων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη καθώς μπορούν να προσδιοριστούν σημαντικές παράμετροι σχετικά με τις διαστάσεις των μελών τους καθώς και διάφορα στοιχεία σχετικά με τη γεωμετρία των συστημάτων αυτών. Ειδικότερα, η αστρονομική φωτομετρία πολλών φίλτρων, μπορεί να προσφέρει πλήθος πληροφοριών σχετικά με τα φυσικά πλέον χαρακτηριστικά των μελών.

Ο φωτομετρικός προσδιορισμός της χρονικής στιγμής κατά την οποία έλαβε χώρα ένα ελάχιστο αποτελεί τον ασφαλέστερο τρόπο για το σκοπό αυτό. Η σημασία άλλωστε της ακρίβειας προσδιορισμού του χρόνου των ελαχίστων είναι εξέχουσας σημασίας στη μελέτη των διπλών αστρικών συστημάτων. Θυμίζουμε ότι οι χρόνοι αυτοί, πέραν της συμμετοχής τους στην κατασκευή των διαγραμμάτων O-C, είναι απαραίτητοι στον καθορισμό της τροχιακής περιόδου ενός συστήματος, διαδικασία η οποία λαμβάνει χώρα για μερικές δεκάδες τροχιακούς κύκλους ώστε να επιτευχθεί ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων που επιθυμούμε. Η ακρίβεια στον προσδιορισμό της τροχιακής περιόδου θα απασχολήσει ορισμένες από τις ενότητες που ακολουθούν.

1.1. Καθορισμός και Ταξινόμηση

Με μια πρώτη προσέγγιση, ο χρόνος ενός ελαχίστου θα μπορούσε να ταυτιστεί με το σημείο εκείνο της καμπύλης φωτός το οποίο αντιστοιχεί στην ελάχιστη λαμπρότητα από την ομάδα των δεδομένων τα οποία διαθέτουμε. Ένα εγχείρημα σαν αυτό αποδεικνύεται λανθασμένο καθώς για να ισχύει θα πρέπει η μορφή του ελαχίστου να είναι συνεχής, πλήρως συμμετρική γύρω από την ελάχιστη τιμή (και η οποία εδώ ταυτίζεται με τον πραγματικό χρόνο του ελαχίστου) και μάλιστα απομακρυσμένη από οποιοδήποτε είδος θορύβου το οποίο σχετίζεται άμεσα με τη διασπορά των παρατηρήσεων και σε γενικές γραμμές θεωρείται τυχαίος.

Εύκολα γίνεται κατανοητό ότι οι παραπάνω προϋποθέσεις δεν είναι δυνατόν να διασφαλιστούν σχεδόν ποτέ. Άλλωστε, η παραπάνω προσέγγιση εκτιμά το χρόνο του ελαχίστου κάνοντας χρήση των λιγοστών σημείων που βρίσκονται μόνο στο βάθος του ελαχίστου, αγνοώντας έτσι τη διαμόρφωσή του στην ευρύτερη περιοχή του. Οι λόγοι αυτοί μας οδηγούν σε μια προσεκτικότερη αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος με διάφορες μεθόδους οι οποίες έχουν αναπτυχθεί ειδικά για το σκοπό αυτό.

Μια από τις κυριότερες αιτίες διαφοροποίησης της τακτικής που ακολουθούν οι μέθοδοι προσδιορισμού του χρόνου των ελαχίστων έχει να κάνει με τη μορφή και το σχήμα τους. Συγκεκριμένα, διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες με βάση το παραπάνω κριτήριο:

- Τα ***συμμετρικά ελάχιστα (symmetric minima)*** τα οποία χαρακτηρίζονται από συμμετρική απεικόνιση του καθοδικού και ανοδικού τους τμήματος ως προς έναν κατακόρυφο άξονα κατοπτρισμού που διέρχεται από το σημείο εκείνο το οποίο αντιστοιχεί στον πραγματικό χρόνο του ελαχίστου. Οποιαδήποτε παραμόρφωση της συμμετρίας αυτής προσδίδει ιδιότητες ενός ***μη συμμετρικού ελαχίστου (asymmetric minimum)***.

- Τα ***ελάχιστα οφειλόμενα σε ολική έκλειψη (total eclipse)*** χαρακτηρίζονται από μια περιοχή σταθερής λαμπρότητας (plateau) στο κατώτατο τμήμα τους η οποία οφείλεται καθαρά σε γεωμετρικούς λόγους. Συγκεκριμένα, όταν ο φαινόμενος δίσκος του μέλους το οποίο προκαλεί την έκλειψη καλύπτει πλήρως το φαινόμενο δίσκο του συνοδού του, το φαινόμενο καλείται ***επιπρόσθηση (occultation) ή απόκρυψη*** ενώ, στην αντίθετη περίπτωση, το φαινόμενο καλείται ***διάβαση (transit)***. Ειδικά μάλιστα στην περίπτωση της διάβασης, η κατώτατη περιοχή του ελαχίστου δεν παρουσιάζεται απόλυτα επίπεδη εξαιτίας του φαινομένου της αμαύρωσης χείλους. Διαφορετικά, έχουμε την περίπτωση ***ελαχίστου οφειλόμενο σε μερική έκλειψη (partial eclipse)***, καθώς η εναλλαγή του καθοδικού προς τον ανοδικό κλάδο πραγματοποιείται αρκετά απότομα.

Επιπροσθέτως, απαιτείται η αποσαφήνιση της πραγματικής έννοιας του χρόνου των ελαχίστων. Ανάλογα με το φαινόμενο το οποίο αντιπροσωπεύει ένα ελάχιστο αλλά και με βάση τον τρόπο με τον οποίο επιθυμούμε να το ορίσουμε, διακρίνουμε τρεις βασικές κατηγορίες (Duerbeck 1975a):

- Ο ***φωτομετρικός χρόνος ελαχίστου (photometric minimum time)*** ορίζεται ως η χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της μετρούμενης λαμπρότητας. Η τιμή αυτή δε συμπίπτει πάντα με την πραγματικά μικρότερη τιμή της λαμπρότητας του ελαχίστου καθώς τα σημεία μιας καμπύλης φωτός χαρακτηρίζονται από ένα βαθμό διασποράς. Μια ακόμα παράμετρος από την οποία εξαρτάται ο φωτομετρικός χρόνος ελαχίστου είναι η χρονική ανάλυση των παρατηρήσεων.

- Ο ***γεωμετρικός χρόνος ελαχίστου ή χρόνος ελαχίστου της συνόδου (geometric minimum time ή conjunction minimum time)*** ορίζεται ως η χρονική στιγμή κατά την οποία ο παρατηρητής και τα κέντρα των δύο μελών του συστήματος ευθυγραμμίζονται. Ο χρόνος αυτός ουσιαστικά αποτελεί τον πραγματικό χρόνο διάβασης ή απόκρυψης και ταυτίζεται με το φωτομετρικό χρόνο ελαχίστου μόνο κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις (π.χ. έλλειψη διασποράς παρατηρήσεων, απόλυτα ομοιογενής εκπομπή ακτινοβολίας από την επιφάνεια των μελών).

- Ο ***κινηματικός χρόνος ελαχίστου (kinematic minimum time)*** ορίζεται ως η χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο μέλη του συστήματος κινούνται κάθετα στην οπτική ακτίνα και συνεπώς αποκτούν μηδενικές ακτινικές ταχύτητες. Ο χρόνος αυτός προσδιορίζεται φασματοσκοπικά και επομένως με τη βοήθεια της καμπύλης ταχυτήτων του συστήματος, ενώ θεωρείται πάντοτε μικρότερης ακρίβειας από τον αντίστοιχο φωτομετρικό.

Πριν την εκκίνηση της διαδικασίας προσδιορισμού του χρόνου ενός ελαχίστου ενός διπλού συστήματος αστέρων θα πρέπει να έχει αποφασιστεί ποιό είδος χρόνου ελαχίστου επιθυμείται να εξαχθεί. Η μορφή του προφίλ του ελαχίστου αλλά και η ποιότητα των παρατηρήσεών μας αποτελούν επίσης σημαντικούς παράγοντες του τρόπου και της επιλογής της μεθόδου με την οποία πρόκειται να προσδιοριστεί.

1.2. Μέθοδοι Προσδιορισμού

Κατά καιρούς, η ανάγκη αντιμετώπισης ελαχίστων ιδιάζουσας μορφής αλλά κυρίως η απαίτηση προσδιορισμού του χρόνου των ελαχίστων με την καλύτερη δυνατή ακρίβεια, οδήγησε στην επινόηση πολυάριθμων μεθόδων οι οποίες προσεγγίζουν το πρόβλημα από διαφορετική φυσική σκοπιά. Σήμερα, έχουν καθιερωθεί έξι μέθοδοι από τις οποίες μόνο οι δύο τείνουν να εδραιωθούν ως οι πλέον συχνότερα εφαρμόσιμες, καλύπτοντας όλα σχεδόν τα είδη των (φωτομετρικών) ελαχίστων (π.χ. Νανούρης 2005).

Η πρώτη από αυτές καλείται ***μέθοδος των διχοτομημένων χορδών του Pogson (Pogson's cutting curve method)*** και της οποίας η περιγραφή δόθηκε από τον Schiller το 1923. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε συμμετρικά ελάχιστα, διαγράφοντας μια ομαλή καμπύλη η οποία διέρχεται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο από όλα τα σημεία και στη συνέχεια φέροντας οριζόντιες γραμμές που ενώνουν σημεία με το ίδιο μέγεθος στον ανερχόμενο και κατερχόμενο κλάδο της καμπύλης. Ο μέσος όρος των μέσων σημείων κάθε οριζόντιας γραμμής λαμβάνεται ως ο χρόνος του ελαχίστου ενώ η τυπική απόκλιση των σημείων αυτών ως το σφάλμα που συνοδεύει το χρόνο που υπολογίσαμε.

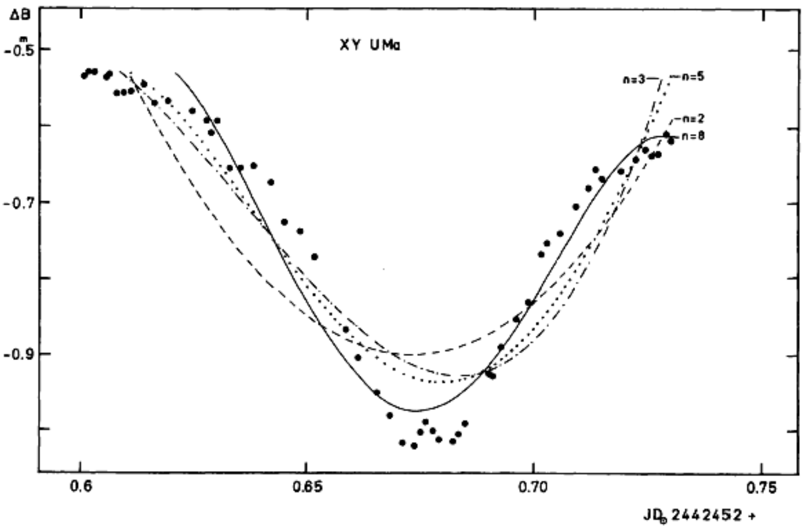
Η δεύτερη μέθοδος ονομάζεται ***μέθοδος του διαφανούς χαρτιού (tracing paper method)*** και προτάθηκε από τον Szafraniec το 1948. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, διαγράφουμε μια κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται κατά τις εκτιμήσεις μας από το χρόνο του ελαχίστου. Την ευθεία αυτή μαζί με τον οριζόντιο άξονα και τα παρατηρησιακά μας δεδομένα απεικονίζουμε σε ένα διαφανές χαρτί το οποίο στη συνέχεια αντιστρέφουμε και επιχειρούμε την καλύτερη δυνατή προσαρμογή των δεδομένων μας με νέα εκτίμηση του χρόνου του ελαχίστου. Ο χρόνος του ελαχίστου τότε προσδιορίζεται από το μέσο των δύο κατακόρυφων ευθειών, ενώ ως εκτίμηση του σφάλματος λαμβάνεται μια τιμή κατά την οποία ο χρόνος του ελαχίστου αποκλίνει μετά από σειρά δοκιμών με σκοπό την καλύτερη δυνατή ταύτιση των δύο καμπυλών.

Η επόμενη χρονολογικά μέθοδος είναι γνωστή ως ***μέθοδος Kwee & van Woerden (KvW method)*** και δημοσιεύθηκε από τους ίδιους τους εμπνευστές της το 1956. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε συμμετρικά ελάχιστα (χωρίς να αποκλείονται τα υπόλοιπα είδη) και αποσκοπεί στον καλύτερο δυνατό αριθμητικό εντοπισμό του άξονα συμμετρίας της καμπύλης του ελαχίστου. Η στρατηγική της στηρίζεται σε μια παλαιότερη μέθοδο, γνωστή ως *μέθοδος του κατοπτρισμού (mirror image method)*, η οποία επινοήθηκε από τον Hertzsprung το 1911, αναδιαμορφώθηκε το 1928 από τον ίδιο ώστε να περιλαμβάνει τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και αργότερα βελτιώθηκε από διάφορους άλλους ερευνητές (Oosterhoff 1929, Hertzsprung 1941, de Kort 1941) μέχρι τελικά να γενικευτεί από τους Kwee και van Woerden το 1956 (Kwee & van Woerden 1956).

Η μέθοδος KvW κατασκευάζει αρχικά μια νέα καμπύλη η οποία ορίζεται από ισαπέχοντα χρονικά διαστήματα και της οποίας τα σημεία προέρχονται από τα πρωταρχικά παρατηρησιακά με τη βοήθεια γραμμικής παρεμβολής μεταξύ όλων των σημείων, ανά διαδοχικά ζεύγη. Οι παράμετροι των παρεμβαλλόμενων αυτών ευθειών προσδιορίζονται από το κάθε ζεύγος σημείων που πρόκειται να ενωθεί. Στη συνέχεια, επιλέγεται ένα κατάλληλο σημείο ως χρόνος ελαχίστου και το οποίο ορίζει πλέον έναν άξονα συμμετρίας περί του οποίου υπολογίζονται οι διαφορές της λαμπρότητας των κατοπτρικών σημείων.

Το σημείο για το οποίο τελικά το άθροισμα των τετραγώνων των παραπάνω διαφορών είναι το μικρότερο, τοποθετείται μαζί με τα δύο γειτονικά του κατά το ήμισυ όμως του χρονικού διαστήματος που χρησιμοποιήθηκε, ώστε να γίνει δυνατή η προσέγγισή τους από μια παραβολή. Ο χρόνος που αντιστοιχεί στο ελάχιστο της παραβολής αποτελεί το ζητούμενο χρόνο του ελαχίστου, ενώ το σφάλμα που το συνοδεύει υπολογίζεται αναλυτικά μετά από αρκετά πολύπλοκους υπολογισμούς με βάση το μέσο σφάλμα που προκύπτει από τη δευτέρου βαθμού πολυωνυμική παρεμβολή.

Οι δύο επόμενες μέθοδοι έχουν προταθεί από τους Breinhorst, Pfleiderer, Reinhardt και Karimie το 1973 και οι οποίες δεν αποτελούν τίποτε άλλο από την εφαρμογή της *πολυωνυμικής παλινδρόμησης (polynomial regression)* και πιο συγκεκριμένα της ελαχιστοτετραγωνικής παρεμβολής με τη βοήθεια πολυωνύμων δευτέρου και τρίτου βαθμού στην περίπτωση συμμετρικών και μη συμμετρικών ελαχίστων αντίστοιχα (Breinhorst et al. 1973). Οι δύο παραπάνω μέθοδοι είναι επίσης γνωστές ως ***μέθοδος της παραβολής* (parabolic ή quadratic fit method)** και ως ***μέθοδος της κυβικής παρεμβολής* (cubic fit method)** αντίστοιχα. Ο χρόνος του ελαχίστου υπολογίζεται ως το σημείο που αντιστοιχεί στο ακρότατο των παραπάνω πολυωνύμων και το σφάλμα του με βάση τη διακύμανση των συντελεστών του πολυωνύμου που προκύπτει από την ελαχιστοτετραγωνική παρεμβολή (Σχήμα ΙΙ.1). Ας σημειωθεί ότι η περιγραφή των ελαχίστων με τη βοήθεια πολυωνύμων, και μάλιστα τουλάχιστον πέμπτου βαθμού, είχε ήδη προταθεί από τον Schonfeld το 1869.

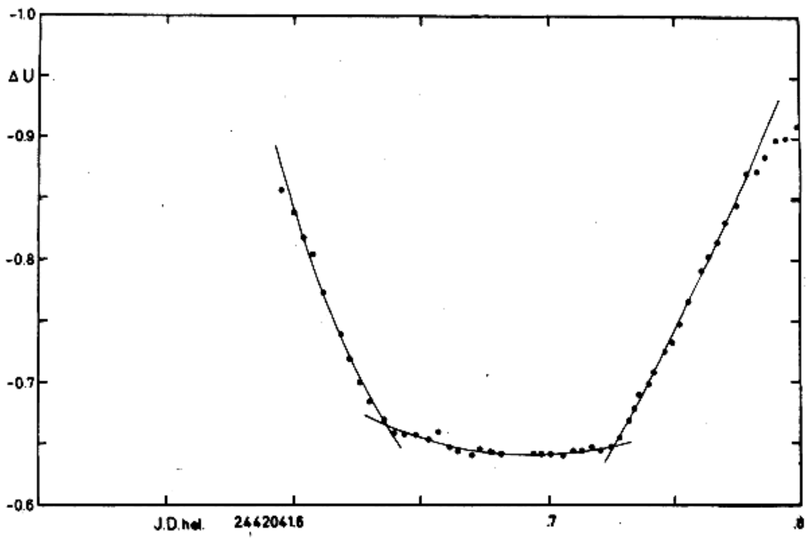


Σχήμα ΙΙ.1. Περιγραφή του ελαχίστου του αποχωρισμένου συστήματος XY UMa με τη βοήθεια πολυωνύμων διαφόρων βαθμών (n = 2,3,5,8). Η μορφή του συγκεκριμένου ελαχίστου χαρακτηρίζεται από έντονες και εμφανείς ασυμμετρίες (Geyer 1977).

Η τελευταία μέθοδος επινοήθηκε από τον Duerbeck το 1975, είναι γνωστή ως ***μέθοδος της συνόδου* (conjunction method)** και βρίσκει εφαρμογή αποκλειστικά και μόνο στις περιπτώσεις ελαχίστων οφειλόμενων σε ολικές εκλείψεις (Σχήμα ΙΙ.2). Στην περίπτωση αυτή, προσεγγίζουμε τον καθοδικό και ανοδικό κλάδο του ελαχίστου αλλά και τα σημεία που αποτελούν το τμήμα που λαμβάνει χώρα η ολική έκλειψη με τη βοήθεια τριών τμηματικών πολυωνύμων δευτέρου ή τρίτου βαθμού (Duerbeck 1975a). Ο χρόνος του γεωμετρικού, στην προκειμένη περίπτωση, ελαχίστου ταυτίζεται με το ήμισυ του αθροίσματος των χρονικών στιγμών κατά τις οποίες ενώνονται τα τρία τμηματικά πολυώνυμα και καλείται *χρόνος συνόδου (conjunction time)*. Το σφάλμα κατά τον προσδιορισμό του χρόνου του ελαχίστου με τη μέθοδο αυτή προκύπτει από τα σφάλματα που αναπτύσσονται κατά τον υπολογισμό των δύο χρόνων τομής των τριών πολυωνύμων.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι μια ενδιαφέρουσα ακόμα μέθοδος έχει προταθεί από τον Winkler το 1967 η οποία μάλιστα οδήγησε σε ικανοποιητικά αποτελέσματα και συνοδεύτηκε από μια αρκετά αξιοσημείωτη μαθηματική προεργασία (Winkler 1967). Δυστυχώς όμως, η μέθοδος αυτή θεωρήθηκε αμφίβολη καθώς η μεθοδολογία της ερχόταν σε αντίθεση με τις αρχές της μεθόδου του Hertzsprung, πάνω στην οποία άλλωστε βασίζεται η μέθοδος KvW, και τελικά απορρίφθηκε (Kwee 1967).

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή, οφείλουμε να κάνουμε ορισμένες επισημάνσεις. Αρχικά, σημειώνουμε ότι οι δύο πρώτες μέθοδοι είναι *γραφικές*, ενώ οι τέσσερις υπόλοιπες *αριθμητικές*, γεγονός το οποίο τους δίνει σαφές πλεονέκτημα ως προς την υλοποίησή τους από ηλεκτρονικό υπολογιστή. Αν και στην πραγματικότητα όλες οι μέθοδοι μπορούν πλέον να αναπτυχθούν σε κατάλληλο προγραμματιστικό περιβάλλον, οι δύο πρώτες μέθοδοι δεν σχεδιάστηκαν για το σκοπό αυτό. Στόχος τους ήταν ένας απλός και σύντομος τρόπος εκτίμησης του χρόνου ελαχίστων χωρίς ιδιαίτερη έμφαση στο σφάλμα που προκύπτει κατά την εφαρμογή τους. Κάτι τέτοιο όμως δε σημαίνει ότι μειώνεται η αξιοπιστία τους. Αντιθέτως, πέρα από την πολύ απλή και εύκολη εφαρμογή τους, οι γραφικές μέθοδοι υπερτερούν των αριθμητικών σε περιπτώσεις χαμηλής ποιότητας παρατηρησιακών δεδομένων.



Σχήμα ΙΙ.2. Εφαρμογή της μεθόδου της συνόδου στο πρωτεύον ελάχιστο του συστήματος επαφής VV Ori. Το ελάχιστο αντιστοιχεί σε ολική έκλειψη και η διαδικασία που ακολουθείται βασίζεται στην περιγραφή των τριών κλάδων του με πολυώνυμα δευτέρου και τρίτου βαθμού (Duerbeck 1975a).

Πρέπει επίσης να προσθέσουμε ότι οι τέσσερις πρώτες μέθοδοι, όπως άλλωστε έχει ήδη ειπωθεί, δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα στην περίπτωση συμμετρικών ελαχίστων. Αντίθετα, οι δύο τελευταίες υπερτερούν στις περιπτώσεις μη συμμετρικών ελαχίστων. Ειδικότερα, η μέθοδος της κυβικής παρεμβολής φαίνεται να συμπεριφέρεται πολύ θετικά σε μη συμμετρικά ελάχιστα οφειλόμενα σε μερικές εκλείψεις τη στιγμή που η μέθοδος της συνόδου φαίνεται ίσως η μόνη αξιόπιστη σε μη συμμετρικά ελάχιστα οφειλόμενα σε ολικές εκλείψεις.

Όσον αφορά τα συμμετρικά ελάχιστα, η μέθοδος KvW φαίνεται να δίνει πάντοτε καλύτερα αποτελέσματα από τη μέθοδο της παραβολής, έστω και οριακά. Η εφαρμογή ελαχιστοτετραγωνικών προσεγγίσεων γενικότερα θα πρέπει να αποφεύγεται καθώς η μορφή των ελαχίστων δύσκολα προσεγγίζεται από πολυώνυμα.

Κάτι τέτοιο έχει ως αποτέλεσμα την προσαρμογή τους σε λιγοστά μόνο σημεία της κατώτατης περιοχής του ελαχίστου, αγνοώντας με τον τρόπο αυτό τα υπόλοιπα σημεία που το πλαισιώνουν. Παρά το γεγονός αυτό, η αντιμετώπιση σημαντικού βαθμού ασυμμετρίας ενός ελαχίστου κατά τον προσδιορισμό του αντίστοιχου χρόνου μπορεί να συντελεστεί με ασφάλεια μόνο μέσω της κυβικής παρεμβολής.

Σε γενικές γραμμές, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι ***δεν υπάρχει οικουμενική μέθοδος προσδιορισμού του χρόνου των ελαχίστων***. Οι τέσσερις πρώτες μέθοδοι δίνουν συγκρίσιμα αποτελέσματα κατά την εφαρμογή τους σε συμμετρικά ελάχιστα, με μια μικρή υπεροχή εκείνης των KvW, ενώ οι δύο τελευταίες αποκλίνουν έντονα από τους πραγματικούς χρόνους των ελαχίστων. Οι δύο αυτές όμως μέθοδοι εφαρμόζονται με μεγάλη επιτυχία σε περιπτώσεις μη συμμετρικών ελαχίστων. Αξιόλογο πεδίο έρευνας αφορά τα σφάλματα που προκύπτουν από την εκάστοτε μέθοδο, η εγκυρότητα των οποίων δεν έχει πλήρως διαλευκανθεί. Η παρούσα διατριβή αποβλέπει στην αποσαφήνιση του βαθμού αξιοπιστίας που τους αναλογεί.

2. Αναλυτική Περιγραφή Βασικών Μεθόδων

Η μέθοδος Kwee & van Woerden (1956) έχει καθιερωθεί από την πλειοψηφία των αστροφυσικών ως η πιο ακριβής και κατάλληλη μέθοδος όσον αφορά τα συμμετρικά ελάχιστα καθώς είναι απλή και εύκολα υλοποιήσιμη από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή μέσω ενός απλού σχετικά προγράμματος. Η ευρεία εφαρμογή της εδώ και μισό περίπου αιώνα έχει καταδείξει την αξιοπιστία και την εγκυρότητά της σε πολύ μεγάλο βαθμό, παρά το ότι η γραμμική παρεμβολή μεταξύ των παρατηρήσεων στην οποία βασίζεται, φαινομενικά μειώνει την αποτελεσματικότητά της.

Από την άλλη, η παραπάνω μέθοδος παρουσιάζει, όπως ειπώθηκε προηγουμένως, ορισμένα προβλήματα κατά την εφαρμογή της σε μη συμμετρικά ελάχιστα, γεγονός το οποίο οδήγησε στην ανάγκη εύρεσης μιας εναλλακτικής και κυρίως πιο αντικειμενικής μεθόδου. Η μέθοδος των Breinhorst et al. (1973), αν και όχι συχνά χρησιμοποιούμενη, είναι η μοναδική αξιόπιστη μέχρι σήμερα μέθοδος ειδικά για τις προβληματικές αυτές περιπτώσεις.

2.1. Η Μέθοδος Kwee & van Woerden

Όπως η εφαρμογή οποιασδήποτε μεθόδου προσδιορισμού του χρόνου ενός ελαχίστου απαιτεί την κατάλληλη επιλογή του διαστήματος των φάσεων το οποίο επιθυμούμε να επεξεργαστούμε, έτσι και στη συγκεκριμένη περίπτωση, θεωρούμε ότι αυτό αποτελείται από N συνολικά παρατηρήσεις. Σχηματίζουμε στη συνέχεια $2n+1$ μεγέθη τα οποία είναι ισαπέχοντα κατά ένα χρονικό διάστημα Δt και το οποίο εύκολα μπορεί να προσδιοριστεί από το αρχικό σύνολο των παρατηρήσεων που έχει επιλεγεί να χρησιμοποιηθεί με τη βοήθεια γραμμικής παρεμβολής μεταξύ όλων των διαδοχικών σημείων (n είναι ο αριθμός των σημείων που αντιστοιχεί σε κάθε κλάδο, καθοδικό και ανοδικό). Ουσιαστικά, παράγεται ένα νέο σύνολο σημείων, ισάριθμο με το πρωταρχικό, το οποίο και πρόκειται να υποστεί την περαιτέρω επεξεργασία.

Επιλέγεται στη συνέχεια ένας δοκιμαστικός αρχικός χρόνος ελαχίστου, έστω T_1, ο οποίος σχεδόν πάντοτε ταυτίζεται με το χρόνο που αντιστοιχεί στο σημείο με τη μικρότερη λαμπρότητα. Το σημείο αυτό ορίζει έναν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας ως προς τον οποίο υπολογίζονται τα κατοπτρικά σημεία m_{-k} του καθοδικού κλάδου στον απέναντι ανοδικό m_{+k} με $k = 1,2,...,n$. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι διαφορές των μεγεθών $\Delta m_k = m_{+k} - m_{-k}$ ως προς τον συγκεκριμένο χρόνο T_1 και τελικά το άθροισμα των τετραγώνων τους $S(T_1)$, δηλαδή:

$$S(T_1) = \sum_{k=1}^{n} (\Delta m_k)^2 \, . \tag{2.1}$$

Μετατοπίζοντας αμέσως μετά τον άξονα συμμετρίας κατά ένα χρονικό διάστημα $\Delta t/2$ δεξιά και αριστερά από τον αρχικό χρόνο T_1, ακολουθούμε την ίδια ακριβώς διαδικασία με την προηγούμενη, υπολογίζοντας δηλαδή αντίστοιχα τα αθροίσματα $S(T_1 - \Delta t/2)$ και $S(T_1 + \Delta t/2)$. Εφόσον ο αρχικός χρόνος έχει επιλεγεί σωστά, το άθροισμα $S(T_1)$ θα πρέπει να είναι μικρότερο από τα άλλα δύο. Εάν όμως κάτι τέτοιο δε συμβαίνει, η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται για τους χρόνους $T_1 \pm \Delta t$.

Η διαδικασία ολοκληρώνεται με την τοποθέτηση των αθροισμάτων $S(T_1)$, $S(T_1 - \Delta t/2)$ και $S(T_1 + \Delta t/2)$ σε μια παραβολή, η οποία θα έχει την εξής μορφή:

$$S(T) = aT^2 + bT + c \;\; \text{με} \;\; a,\; b \;\; \text{και} \;\; c \in \mathcal{R}. \tag{2.2}$$

Το ακρότατο της παραβολής αυτής, από το οποίο θα προσδιοριστεί ο ζητούμενος χρόνος, δίνεται την ακόλουθη σχέση:

$$S(T_{KvW}) = c - \frac{b^2}{4a} \;\; (2.3) \;\; \text{με} \;\; \boxed{T_{KvW} = -\frac{b}{2a}} \;\; (2.4) \;\; \text{και} \;\; \boxed{\sigma^2_{KvW} = \frac{4ac - b^2}{4a^2(Z-1)}}, \;\; (2.5)$$

όπου Z ο μέγιστος αριθμός των ζευγών μεγέθους ως προς τον άξονα συμμετρίας που χρησιμοποιήθηκε, για τον οποίο ισχύει $Z = N/4$ με εξαίρεση βέβαια την περίπτωση που οι παρατηρήσεις ήταν ήδη χρονικά ισαπέχουσες, οπότε και θα ίσχυε $Z = N/2$. Η τελευταία περίπτωση εμφανίζεται σπάνια και για το λόγο αυτό η γραμμική παρεμβολή είναι σχεδόν πάντοτε αναπόφευκτη.

2.2. Η Μέθοδος Breinhorst et al. (Μέθοδος Παλινδρόμησης)

Θεωρώντας ότι το τμήμα της καμπύλης φωτός που αντιστοιχεί στα ελάχιστα είναι ικανό να περιγραφεί ικανοποιητικά από ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού, η συγκεκριμένη μέθοδος επιτρέπει τον προσδιορισμό των συντελεστών του με τη βοήθεια της προσέγγισης των ελαχίστων τετραγώνων ώστε στη συνέχεια να γίνει δυνατός ο υπολογισμός των ακροτάτων του. Δεχόμενοι λοιπόν ότι το διάστημα των φάσεων το οποίο επιθυμούμε να επεξεργαστούμε αποτελείται από N παρατηρήσεις, η συνάρτηση η οποία θα τις περιγράφει θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$m = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 . \tag{2.6}$$

Το διάστημα φάσεων θα πρέπει να επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε η κυρτότητα της καμπύλης φωτός να μη μεταβάλλεται μέσα σε αυτό. Με την προϋπόθεση αυτή, εύκολα βρίσκεται ότι τα ακρότατα του πολυωνύμου αντιστοιχούν στις παρακάτω χρονικές στιγμές:

$$\boxed{T_C = t_{1,2} = \frac{-a_2(1 \mp W)}{3a_3}} \quad (2.7) \quad \text{με} \quad W^2 = 1 - \frac{3a_1 a_3}{a_2^2} . \quad (2.8)$$

Το πρόσημο το οποίο αντιστοιχεί στον πραγματικό χρόνο του ελαχίστου εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο έχουν δοθεί τα δεδομένα προς επεξεργασία. Στην περίπτωση που αυτά έχουν δοθεί με τη μορφή εντάσεων (ροής ακτινοβολίας), ο χρόνος ελαχίστου αντιστοιχεί στο θετικό πρόσημο (μέγιστο), ενώ όταν έχουν δοθεί με τη μορφή μεγεθών, ο χρόνος ελαχίστου αντιστοιχεί στο αρνητικό πρόσημο (ελάχιστο).

Ας σημειωθεί ακόμα πως ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων τα οποία κρατούνται στους υπολογισμούς αποτελεί κρίσιμη παράμετρο κατά την εφαρμογή των πολυωνυμικών παρεμβολών. Ειδικότερα η εκτίμηση του σφάλματος που συνοδεύει τη θέση του χρόνου ενός ελαχίστου, ως συνέπεια του τυπικού σφάλματος των πολυωνυμικών συντελεστών, είναι μια ιδιαίτερα ευαίσθητη διαδικασία και απαιτεί προσεκτικούς χειρισμούς.

Θυμίζουμε ότι, ως εκτιμήτριες των ελαχίστων τετραγώνων, οι συντελεστές του τριτοβάθμιου πολυωνύμου a_j με j = 0,...,3 προσδιορίζονται από ένα σύστημα τεσσάρων γραμμικών εξισώσεων ως προς τις παρατηρήσεις m_n με n = 1,...,N γνωστές ως *κανονικές εξισώσεις (normal equations)* και οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω:

$$\sum_{j=0}^{3} s_{k+j} a_j \equiv s_k a_0 + s_{k+1} a_1 + s_{k+2} a_2 + s_{k+3} a_3 = \upsilon_k \quad \text{με} \quad k = 0,...,3 , \tag{2.9}$$

όπου $\upsilon_k = \sum_{n=0}^{N} m_n t_n^k$ με $k = 0,...,3$ και $s_k = \sum_{n=0}^{N} t_n^k$ με $k = 0,...,6$.

Από τις παραπάνω σχέσεις, παρατηρούμε ότι, εφόσον οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι γραμμικά εξαρτημένοι από τις παρατηρήσεις με τις τελευταίες να ακολουθούν την Κανονική κατανομή, είναι φυσικό επακόλουθο οι συντελεστές να ακολουθούν την ίδια κατανομή. Κάτι τέτοιο βέβαια δε συμβαίνει και στην περίπτωση του χρόνου του ελαχίστου, αν και σε πρώτη προσέγγιση μια ανάλογη υπόθεση δεν είναι απόλυτα εσφαλμένη. Εάν M_n είναι οι τιμές των μεγεθών που προκύπτουν μετά την πολυωνυμική παρεμβολή, το σφάλμα του χρόνου των ελαχίστων θα προσδιορίζεται τότε με τη βοήθεια του *νόμου της διάδοσης σφάλματος* ως εξής:

$$\boxed{\sigma^2(T_C) = \sigma_m^2 \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{j=0}^{3} \frac{\partial T_C}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial a_j}{\partial m_n} \right)^2}, \tag{2.10}$$

όταν $\dfrac{\partial T_C}{\partial a_k} = \mp \dfrac{k T_C^{k-1}}{2a_2 W}$ (2.11) και $\sigma_m^2 = \dfrac{\sum_{n=1}^{N}(m_n - M_n)^2}{N-4}$. (2.12)

Όσον αφορά το πρόσημο της σχέσης που δίνει τις μερικές παραγώγους του χρόνου του ελαχίστου ως προς τους πολυωνυμικούς συντελεστές, η επιλογή του βασίζεται και πάλι στον τρόπο που έχουν δοθεί τα δεδομένα με το αρνητικό πρόσημο να αντιστοιχεί στην περίπτωση που αυτά έχουν δοθεί με τη μορφή μεγεθών και το θετικό να αντιστοιχεί στην περίπτωση που αυτά έχουν δοθεί με τη μορφή εντάσεων.

Η ποσότητα $\sigma_m^{\ 2}$ αποτελεί τη διασπορά την οποία προβλέπει η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων κατά την κυβική παρεμβολή, όταν σε όλες τις παρατηρήσεις έχει αποδοθεί το ίδιο βάρος. Η διασπορά αυτή είναι ιδιαίτερης σημασίας, καθώς περιγράφει σε ικανοποιητικό βαθμό τόσο το επίπεδο του παρατηρησιακού θορύβου όσο και την αδυναμία προσαρμογής του τριτοβάθμιου πολυωνύμου στην πραγματική μορφή του ελαχίστου.

Ας σημειωθεί ακόμα ότι οι ποσότητες που περιέχουν τις μερικές παραγώγους των πολυωνυμικών συντελεστών a_j ως προς τις παρατηρήσεις m_n,

$$Q_{jk} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial a_j}{\partial m_n} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial m_n} \right) \quad \text{με} \quad j,k = 0,...,3 \tag{2.13}$$

και οι οποίες εμφανίζονται στο σφάλμα που προβλέπει η συγκεκριμένη μέθοδος για το χρόνο των ελαχίστων, προσδιορίζονται εύκολα χρησιμοποιώντας τις κανονικές εξισώσεις που παρουσιάστηκαν προηγουμένως.

Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί λογισμικά πακέτα στατιστικών εφαρμογών τα οποία προσδιορίζουν πολύ εύκολα τους συντελεστές ενός πολυωνύμου παλινδρόμησης a_j μαζί με το τυπικό τους σφάλμα δa_j, ως εκτιμήτριες της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Επομένως, μπορούμε να αποφύγουμε ένα μεγάλο μέρος της πιο πάνω αρκετά πολύπλοκης διαδικασίας διάδοσης σφάλματος που απαιτεί η σχέση (2.10) και στη θέση της να υπολογίσουμε την ακόλουθη ανάλογη ποσότητα:

$$\boxed{\sigma^2(T_C) = \sum_{j=0}^{3} \left(\frac{\partial T_C}{\partial a_j} \delta a_j \right)^2}, \tag{2.14}$$

όπου οι μερικές παράγωγοι $\partial T_C / \partial a_j$ δίνονται και πάλι από τη σχέση (2.11).

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν πιο πάνω, ο ακριβής προσδιορισμός του σφάλματος του χρόνου ενός ελαχίστου με τη μέθοδο της πολυωνυμικής παλινδρόμησης απαιτεί ειδικούς χειρισμούς. Αρχικά, ο χρόνος ελαχίστου προσδιορίζεται με βάση τη σχέση (2.7) και στη συνέχεια μετατοπίζονται οι χρονικές θέσεις όλων των σημείων που χρησιμοποιήθηκαν κατά το χρόνο αυτό. Σκοπός της τεχνικής αυτής είναι η απόδοση της μηδενικής τιμής (zero-point) στον υπολογιζόμενο χρόνο ελαχίστου, $T_C \equiv 0$, έτσι ώστε $W \equiv 1$, όπως η σχέση (2.8) προβλέπει. Το πλεονέκτημα που επιτυγχάνουμε με τον τρόπο αυτό είναι ο μηδενισμός όλων των όρων του αθροίσματος των σχέσεων (2.10) και (2.14) με μοναδική εξαίρεση εκείνη του δεύτερου όρου (k = 1 ή j = 1 αντίστοιχα). Έπειτα, η διαδικασία επαναλαμβάνεται, και με βάση τις νέες εκτιμήτριες των πολυωνυμικών συντελεστών όπως και των τυπικών τους σφαλμάτων, προσδιορίζεται τελικά το σφάλμα του χρόνου ελαχίστου ως εξής:

$$\boxed{\sigma(T_C) = \sigma_m \frac{\sqrt{Q_{11}}}{2a_2} = \frac{\sigma(a_1)}{2a_2}}. \tag{2.15}$$

Ακόμα και αν οι χρονικές θέσεις των σημείων που χρησιμοποιούνται δεν μετατοπιστούν κατά το χρόνο ελαχίστου που προβλέπει η σχέση (2.7), θα πρέπει να επιλεχθεί ένας κατάλληλος χρόνος με την ιδιότητα του μηδενικού σημείου. Συνήθως, η επιλογή αυτή ταυτίζεται με ένα οποιοδήποτε σημείο ανάμεσα σε εκείνα που υπεισέρχονται στην αριθμητική διαδικασία και προφανώς διαμορφώνουν το προφίλ του εξεταζόμενου ελαχίστου. Σε κάθε πάντως περίπτωση, η έκβαση της συνολικής προσέγγισης κρίνεται επαρκής εφόσον ικανοποιείται το ακόλουθο διαγνωστικό κριτήριο:

$$\frac{\sigma(a_2)}{a_2} = \sigma_m \cdot \frac{\sqrt{Q_{22}}}{a_2} << 1. \tag{2.16}$$

Ένα μέτρο της ασυμμετρίας που παρουσιάζει η μορφή του ελαχίστου το οποίο μελετάται αποτελεί ο λόγος ρ του συντελεστή του τριτοβάθμιου όρου του πολυωνύμου (το οποίο παρεμβάλλεται στις παρατηρήσεις) προς το σφάλμα που τον συνοδεύει (δίνεται η απόλυτη τιμή του ώστε να είναι πάντοτε θετικός). Εφόσον η ποσότητα αυτή είναι αρκετά μικρή και συγκεκριμένα μικρότερη περίπου της τιμής 0.3, δηλαδή:

$$\rho = \frac{|a_3|}{\sigma(a_3)} < 0.3, \tag{2.17}$$

το ελάχιστο τότε θεωρείται αρκετά συμμετρικό ώστε η μέθοδος της παραβολής να μπορεί με ασφάλεια να εφαρμοστεί. Η διαδικασία που ακολουθείται τότε είναι παρόμοια με τη διαδικασία που παρουσιάστηκε μέχρι τώρα με τη διαφορά ότι το πολυώνυμο το οποίο πλέον παρεμβάλλεται είναι δευτέρου βαθμού.

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή οφείλουμε να τονίσουμε πως υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο αδυνατεί να περιγράψει ικανοποιητικά τη μορφή ορισμένων ελαχίστων, όπως για παράδειγμα όταν αυτό οφείλεται σε ολική έκλειψη και συνεπώς παρατηρείται ένα επίπεδο τμήμα σταθερής λαμπρότητας. Το προβλεπόμενο από τη συγκεκριμένη μέθοδο τότε σφάλμα δεν είναι ικανό να καλύψει την απόκλιση του υπολογιζόμενου χρόνου του ελαχίστου από τον πραγματικό σε οποιοδήποτε επίπεδο εμπιστοσύνης.

3. Αβεβαιότητα και Διασπορά Παρατηρήσεων

Ένα σημαντικό πλήθος φυσικών αλλά και τεχνικών παραγόντων περιορίζουν την ακρίβεια προσδιορισμού του χρόνου ενός ελαχίστου. Στην πραγματικότητα, το σφάλμα αυτό έγκειται όχι μόνο στον προσδιοριμό του φωτομετρικού χρόνου ενός ελαχίστου, αλλά στην αδυναμία εντοπισμού του γεωμετρικού χρόνου ή αλλιώς του χρόνου συνόδου, ειδικά όταν αυτός αντιστοιχεί σε ολική έκλειψη.

Δυστυχώς, όταν η αβεβαιότητα πηγάζει από ενδογενή αίτια των μελών ενός συστήματος, όπως η ανομοιογενής κατανομή της λαμπρότητάς τους, η απόκλιση του πραγματικού από τον υπολογιζόμενο χρόνο ελαχίστου είναι πολύ δύσκολο να περιοριστεί. Χωρίς όμως αμφιβολία, η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου και κυρίως ο προσεκτικός τρόπος εφαρμογής της στα διαθέσιμα δεδομένα, ειδικά όταν αυτά έχουν ληφθεί με τη βοήθεια ενός αξιόπιστου και σύγχρονου ανιχνευτή ακτινοβολίας, αποτελούν τα ασφαλέστερα κριτήρια έγκυρου προσδιορισμού του χρόνου ενός ελαχίστου.

3.1. Πηγές Θορύβου

Στην προηγούμενη ενότητα δόθηκε έμφαση στα κριτήρια επιλογής της μεθόδου προσδιορισμού του χρόνου ενός ελαχίστου ανάλογα με το είδος του ελαχίστου που πρόκειται να μελετηθεί. Πράγματι, η διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων ***ανάλογα με τη μέθοδο που έχει επιλεγεί αλλά και με τον τρόπο που έχει εφαρμοστεί***, επιφέρει αβεβαιότητα η οποία δεν καλύπτεται πολλές φορές από τον υπολογισμό του σφάλματος που προβλέπει η εκάστοτε μέθοδος.

3.1.1. Πλήθος Σημείων

Χαρακτηριστικά παραδείγματα της αβεβαιότητας αυτής αποτελούν ορισμένες δοκιμασίες στις οποίες υποβλήθηκε η μέθοδος KvW από τον Jurkevich το 1964 και από τον Breinhorst και τους συνεργάτες του το 1973. Εκείνο το οποίο επιχειρήθηκε και στις δύο περιπτώσεις ήταν η μεταβλητή επιλογή του αριθμού των σημείων (ζευγών) που απαιτούνται για τη γραμμική παρεμβολή σε μια συγκεκριμένη πάντοτε ομάδα παρατηρήσεων (Breinhorst et al. 1973). Η εφαρμογή της μεθόδου KvW έδωσε χρόνους ελαχίστων οι οποίοι απόκλιναν μεταξύ τους μέσα στο διάστημα του σφάλματος που προβλέπει η μέθοδος ($\leq \pm 1\sigma$), ενώ ο υπολογισμός των νέων κάθε φορά σφαλμάτων δεν έδωσε αποκλίσεις μεγαλύτερες από το διπλάσιο της αντίστοιχης τιμής που συνόδευε τον αρχικό χρόνο ελαχίστου.

3.1.2. Βαθμός Ασυμμετρίας

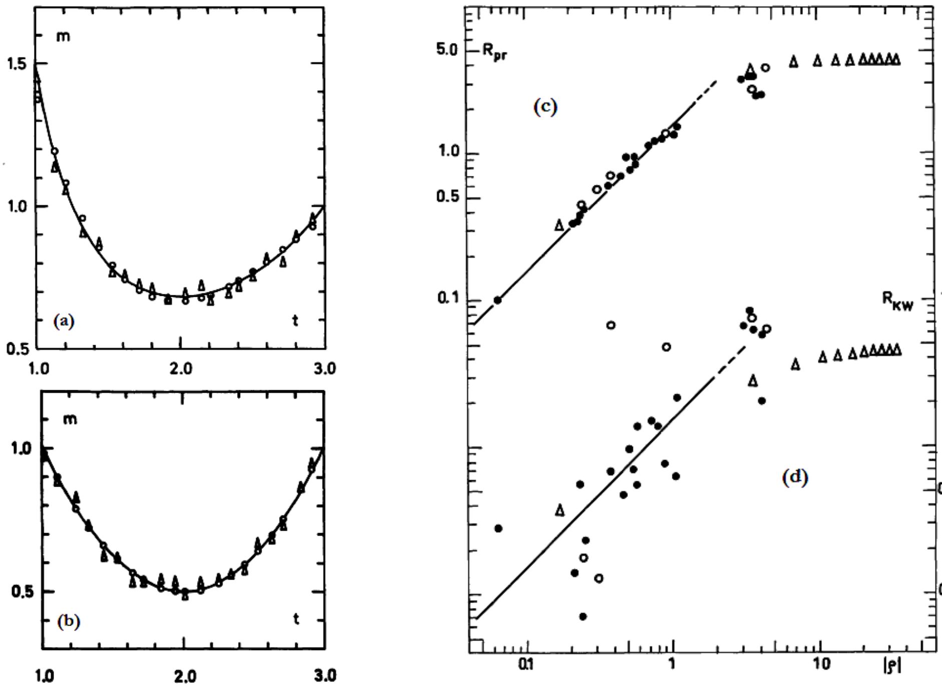
Σε περιπτώσεις μη συμμετρικών ελαχίστων, η μέθοδος KvW αναμένεται να αποκλίνει από την πραγματική τιμή του χρόνου του ελαχίστου, με μεγαλύτερο όμως σφάλμα, καθώς τώρα αυτό θα εμπεριέχει πέραν των διακυμάνσεων της λαμπρότητας και την επίδραση των όρων της ασυμμετρίας. Οι Kwee και van Woerden είχαν μάλιστα επισημάνει ότι μια μορφή ασυμμετρίας προκαλεί μετατόπιση της θέσης του ελαχίστου (Kwee & van Woerden 1956). Οι Breinhorst et al. (1973), μελετώντας θεωρητικά την επίδραση ενός όρου ασυμμετρίας στην αποτελεσματικότητα της μεθόδου KvW, έδειξαν ότι η τελευταία αστοχεί κατά μια ποσότητα η οποία είναι ανάλογη του δείκτη ασυμμετρίας ρ. Πιο συγκεκριμένα, εάν T_0 είναι ο πραγματικός χρόνος ελαχίστου και T_{KvW} ο χρόνος που προβλέπει η μέθοδος KvW με σ_{KvW} το αντίστοιχο σφάλμα του, αποδεικνύεται πως το σχετικό σφάλμα R_{KvW} που προκύπτει κατά την εφαρμογή της μεθόδου KvW σε αυτές τις περιπτώσεις εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$R_{KvW} = \frac{|T_0 - T_{KvW}|}{\sigma_{KvW}} \propto \frac{\rho}{\sqrt{c_1\rho^2 + c_2}}, \tag{2.18}$$

όπου c_1 και c_2 θετικές σταθερές οι οποίες εξαρτώνται από το βαθμό προσαρμογής της μεθόδου KvW στις διαθέσιμες παρατηρήσεις. Σε ελάχιστα σχεδόν συμμετρικά, το γινόμενο $c_1 \cdot \rho^2$ γίνεται πολύ μικρό και τελικά η σταθερά c_2 είναι εκείνη που επικρατεί στο άθροισμα του παρονομαστή. Το σχετικό τότε σφάλμα της μεθόδου προβλέπεται ανάλογο του δείκτη ασυμμετρίας ρ, δηλαδή $R_{KvW} \propto \rho$. Αντίθετα, σε ελάχιστα με μεγάλο βαθμό ασυμμετρίας, το γινόμενο $c_1 \cdot \rho^2$ είναι εκείνο που πλέον κυριαρχεί με αποτέλεσμα το σχετικό σφάλμα της μεθόδου να σταθεροποιείται γύρω από συγκεκριμένη τιμή, δηλαδή $R_{KvW} \propto const.$

Εφαρμογή της μεθόδου KvW σε μη συμμετρικά ελάχιστα τα οποία προέκυψαν από συνθετικά κυρίως δεδομένα κάτω από την επίδραση θορύβου και την παρουσία παρατηρήσεων που δεν ισαπείχαν χρονικά μεταξύ τους (Σχήμα ΙΙ.3a,b) έδειξε ότι οι υπολογιζόμενοι χρόνοι κυμαίνονταν αυτή τη φορά μέσα σε ένα διάστημα μεγαλύτερο από την τριπλάσια τιμή του σφάλματος που προβλέπει η μέθοδος ($\geq \pm 3\sigma$). Παρόλα αυτά, τα συνήθη πλαίσια ασυμμετρίας που παρατηρούνται στην πλειοψηφία των διπλών εκλειπτικών συστημάτων, καθιστούν το διάστημα εμπιστοσύνης $\pm 3\sigma$ αρκετά ασφαλές (Σχήμα ΙΙ.3c,d).

Ένας τρόπος περιορισμού της αστοχίας της μεθόδου KvW κατά την εφαρμογή της σε μη συμμετρικά ελάχιστα απαιτεί τη χρήση του ίδιου διαστήματος φάσης για έναν αστέρα κάθε φορά που πρόκειται να προσδιοριστούν χρόνοι των ελαχίστων του. Ας σημειωθεί ακόμα ότι το σφάλμα που προβλέπει η συγκεκριμένη μέθοδος, κατά την εφαρμογή της σε πλήρως συμμετρικά ελάχιστα τα οποία έχουν εξαχθεί από φωτομετρικά δεδομένα πολλών φίλτρων, βρίσκεται περίπου ίσο με τη διαφορά των χρόνων του ελαχίστου για διαφορετικό φίλτρο (Mallama 1982).



Σχήμα ΙΙ.3. Μη συμμετρικά (a) και συμμετρικά (b) ελάχιστα τα οποία προέκυψαν από συνθετικά δεδομένα κάτω από την επίδραση θορύβου και την παρουσία παρατηρήσεων που δεν ισαπείχαν χρονικά μεταξύ τους (Breinhorst et al. 1973). Εφαρμογή της μεθόδου Kwee & van Woerden έδειξε ότι αύξηση του βαθμού ασυμμετρίας οδηγεί σε αστοχία της μεθόδου τόσο στη θεωρία (c) όσο και στην πράξη (d).

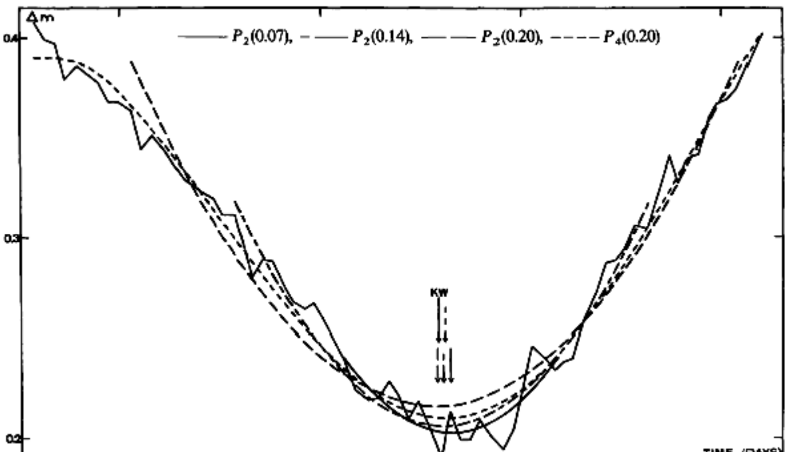
Είναι λοιπόν σαφές πως μόνο η ταυτόχρονη εφαρμογή τόσο της μεθόδου KvW και της κυβικής παρεμβολής μπορούν να μας δώσουν μια αντικειμενική εικόνα της επίδρασης του βαθμού ασυμμετρίας στον προσδιορισμό του πραγματικού χρόνου ελαχίστου αλλά και της αβεβαιότητας που το περιβάλλει (Breinhorst et al. 1973). Ως βέλτιστη εκτίμηση σφάλματος προτείνεται η μέγιστη τιμή σφάλματος μεταξύ εκείνων που προβλέπουν οι δύο μέθοδοι, σ_{KvW} και $\sigma(T_C)$ αντίστοιχα, αλλά και της απόλυτης απόκλισης των δύο προβλεπόμενων χρόνων, $|T_{KvW} - T_C|$. Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου παρουσιάζεται μια λεπτομερής στατιστική μελέτη κατά την οποία μαζί με την επίδραση του βαθμού ασυμμετρίας διερευνάται η επίδραση του πλήθους παρατηρήσεων αλλά και της στάθμης θορύβου στην ακρίβεια της μεθόδου KvW.

3.1.3. Διάστημα Φάσεων

Ένας ακόμα παράγοντας αβεβαιότητας αποτελεί το διάστημα φάσεων το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του χρόνου ενός ελαχίστου που, όπως θα δούμε πιο κάτω, μπορεί άμεσα να καθορίσει την επίδραση του βαθμού ασυμμετρίας στην ακρίβεια του υπολογιζόμενου χρόνου. Είναι φυσικό πως η χρήση μεγαλύτερων τμημάτων του ελαχίστου επιφέρει περισσότερο θόρυβο καθώς κάθε νέο σημείο συνοδεύεται από μια διακύμανση και η οποία θεωρούμε ότι ακολουθεί συνήθως την Κανονική κατανομή. Χαμηλή ποιότητα παρατηρήσεων θα σήμαινε και μεγαλύτερη διασπορά των σημείων. Άλλωστε, η προσαρμογή κάθε μεθόδου γίνεται ολοένα και πιο προβληματική με τη χρήση περισσότερων δεδομένων.

Λεπτομερείς έρευνες προς την κατεύθυνση αυτή έχουν πραγματοποιηθεί από τον van't Veer (1973) ο οποίος εξέτασε το επίπεδο της διασποράς που προκύπτει κατά τον προσδιορισμό των χρόνων των ελαχίστων με τη χρήση δεδομένων σε διαφορετικά διαστήματα φάσεων (Σχήμα ΙΙ.4). Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας τη μέθοδο της παραβολής με δεδομένα από διάφορα διαστήματα φάσεων γύρω από ένα μη συμμετρικό ελάχιστο, έδειξε ότι η περιοχή που καλύπτει το ***0.1 της φάσης*** γύρω από αυτό (i) παραμένει *πάντοτε συμμετρική*, (ii) αποτελεί τη *λιγότερο διαταραγμένη* σε σχέση με τη μετατόπιση που έχει υποστεί η θέση του ελαχίστου λόγω της ασυμμετρίας καθώς και ότι (iii) ο χρόνος που προκύπτει από την προσέγγιση αυτή συμπίπτει *πιο κοντά στο γεωμετρικό χρόνο* του ελαχίστου (van't Veer 1973).

Ο αριθμός των παρατηρήσεων που χρησιμοποιείται με τον τρόπο αυτό είναι σαφώς μικρότερος από εκείνον που απαιτείται με το συμβατικό τρόπο. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια το σφάλμα του χρόνου του ελαχίστου να αναμένεται μεγαλύτερο. Φυσικά, κάτι τέτοιο ισχύει μόνο στην ειδική περίπτωση που η ποιότητα των παρατηρήσεων είναι κοινή για το σύνολο της καμπύλης φωτός, κάτι το οποίο μόνο κατά προσέγγιση είναι σωστό καθώς η περιοχή των ελαχίστων χαρακτηρίζεται σχεδόν πάντοτε από μικρότερη διασπορά από εκείνη των περιοχών του μεγίστου. Εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι παρά τις παραπάνω διαπιστώσεις, ο van't Veer (1973) έδειξε ότι στην εγγύτατη περιοχή του ελαχίστου, τα αποτελέσματα είναι ακριβώς αντίθετα από τα αναμενόμενα και συνεπώς κατέληξε στο συμπέρασμα ότι *η ευστάθεια της καμπύλης φωτός στο διάστημα αυτό είναι μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες περιοχές μεταξύ μεγίστων και ελαχίστων.*



Σχήμα ΙΙ.4. Περιγραφή του ελαχίστου του συστήματος επαφής VW Cep με τη βοήθεια πολυωνύμων δευτέρου και τετάρτου βαθμού και με χρήση διαφόρων διαστημάτων της φάσης. Με κατάλληλα βέλη σημειώνονται οι χρόνοι του ελαχίστου που προβλέπουν οι αντίστοιχες μέθοδοι όπως και εκείνη των Kwee & van Woerden (van't Veer 1973).

Σχετικά με το θέμα αυτό, ενδιαφέρουσα είναι η διαπίστωση που έκανε ο Duerbeck (1975b) μελετώντας το διάγραμμα O-C του διπλού συστήματος 44i Boo, αποτελούμενο από σημεία τα οποία αντιστοιχούσαν σε χρόνους ελαχίστων μόνο από φωτοηλεκτρικές παρατηρήσεις. Παρατήρησε λοιπόν ότι το τυπικό σφάλμα των σημείων αυτών υπερδιπλασιάστηκε απότομα μετά το έτος 1964 (Duerbeck 1975b). Η πιθανότερη αιτία για κάτι τέτοιο αποδόθηκε στο γεγονός ότι μετά το έτος αυτό, οι παρατηρητές χρησιμοποιούσαν μεγάλα τμήματα της καμπύλης φωτός κατά τον προσδιορισμό των χρόνων των ελαχίστων σε αντίθεση με τα προηγούμενα χρόνια κατά τα οποία οι παρατηρήσεις συλλέγονταν σε μια περιορισμένη μόνο περιοχή γύρω από το ελάχιστο.

3.1.4. Κλίμακα Φωτομετρικών Δεδομένων

Μια ακόμα ενδιαφέρουσα διαπίστωση σχετικά με την ακρίβεια του προσδιορισμού των χρόνων των ελαχίστων έχει γίνει από τους Kviz και Wong (1987). Σύμφωνα με αυτούς, έγινε σαφές ότι ο αντίστοιχος υπολογισμός θα πρέπει να πραγματοποιείται όταν οι παρατηρήσεις ***δεν έχουν ακόμα αναχθεί στη λογαριθμική κλίμακα*** με τη μορφή μεγεθών αλλά όσο βρίσκονται ακόμα στη γραμμική κλίμακα με τη μορφή της ροής ακτινοβολίας (Kviz & Wong 1987). Η διαφοροποίηση στα τελικά αποτελέσματα γίνεται αισθητή μόνο στις περιπτώσεις ελαχίστων βαθύτερων των 0.5 mag, καθώς είναι αμελητέα σε περιπτώσεις ρηχών ελαχίστων. Ας σημειωθεί ότι ήδη από το 1893 ο Seeliger είχε επισημάνει την ύπαρξη συστηματικού σφάλματος κατά τον προσδιορισμό των χρόνων των ελαχίστων στη λογαριθμική κλίμακα των μεγεθών.

3.2. Επίδραση Εξοπλισμού και Επεξεργασίας Παρατηρήσεων

Επιπρόσθετη πηγή θορύβου κατά τον προσδιορισμό των χρόνων των ελαχίστων θα μπορούσε να αποτελεί η ***επίδραση των οργάνων παρατήρησης*** (τηλεσκόπιο και ανιχνευτής). Στην πραγματικότητα, το σφάλμα αυτό υφίσταται, αλλά είναι αμελητέο στην περίπτωση που ο χρησιμοποιούμενος ανιχνευτής είναι είτε ένα φωτοηλεκτρικό φωτόμετρο είτε μια CCD κάμερα. Η επίδραση φαίνεται να είναι σημαντική όμως στην περίπτωση ελαχίστων οπτικά αλλά και φωτογραφικά προσδιορισμένων. Αναλυτικότερα, διακρίνουμε τρεις βασικούς τρόπους προσδιορισμού των χρόνων των ελαχίστων, ανάλογα με το είδος του ανιχνευτή ακτινοβολίας μέσω του οποίου πραγματοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις:

- Χρόνοι των ελαχίστων ***φωτοηλεκτρικά προσδιορισμένοι***. Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται πέρα από παρατηρήσεις με τη βοήθεια *φωτοηλεκτρικών φωτομέτρων (Pe)*, παρατηρήσεις που έχουν γίνει με τη βοήθεια μιας *CCD (Charge Coupled Device) κάμερας (CCD)*. Ο συγκεκριμένος τρόπος θεωρείται σήμερα ο πλέον αξιόπιστος, ενώ κατά την ανάλυση των διαγραμμάτων O-C αποδίδεται σε αυτά το μέγιστο βάρος (ανεξάρτητα από το αν χρησιμοποιήθηκε φωτόμετρο ή κάμερα).
- Χρόνοι των ελαχίστων ***φωτογραφικά προσδιορισμένοι***. Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται παρατηρήσεις που έγιναν είτε με τη βοήθεια μιας *σειράς φωτογραφικών πλακών (Pg)* είτε με τη χρήση *μιας πλάκας επισκόπησης ή*

περιπολίας (P). Οι πλάκες επισκόπησης (patrol plates) είχαν ως σκοπό την επισκόπηση ευρέων πεδίων του ουρανού με στόχο την ανίχνευση μεταβολών λαμπρότητας διαφόρων αστρικών αντικειμένων.

- Χρόνοι των ελαχίστων ***οπτικά προσδιορισμένοι***. Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει οφθαλμοσκοπικές παρατηρήσεις από έμπειρους ή ακόμα και εκπαιδευμένους για το σκοπό αυτό παρατηρητές (συνήθως ερασιτέχνες αστρονόμους) οι οποίοι χρησιμοποιούν ουσιαστικά το ανθρώπινο μάτι ως ανιχνευτή και εκτιμούν προσεγγιστικά τη χρονική στιγμή κατά την οποία αντιλαμβάνονται το ελάχιστο της λαμπρότητας ενός μεταβλητού αστέρα (*V*).

- Χρόνοι των ελαχίστων ***προσδιορισμένοι με διάφορες άλλες μεθόδους παρατήρησης***, αμφισβητούμενης αξιοπιστίας, όπως οι *φασματοσκοπικές (Sp)* οι οποίες έχουν ουσιαστικά να κάνουν με τον κινηματικό χρόνο ελαχίστου και εκείνες που πραγματοποιούνται με τη βοήθεια *οπτικών φωτομέτρων πόλωσης (Pv)*.

Στην περίπτωση της φωτογραφικής φωτομετρίας, το σφάλμα της φωτογραφικής πλάκας ως ανιχνευτή θεωρείται σε γενικές γραμμές μικρό. Δυστυχώς, εκείνο που μειώνει την αξιοπιστία της είναι η διαδικασία αναγωγής των παρατηρήσεων σε λαμπρότητα (συσχέτιση αμαύρωσης ή ακτίνας ειδώλου και φαινόμενου μεγέθους), όπως και οι μεγάλοι χρόνοι έκθεσης οι οποίοι συνήθως απαιτούνται και καθιστούν τη φωτομετρία σχετικά αργή. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω μειονεκτημάτων, το βάρος που αποδίδεται στους χρόνους ελαχίστων, προσδιορισμένους με τον παραπάνω τρόπο, σε σχέση με τους αντίστοιχους φωτοηλεκτρικούς, εξαρτάται άμεσα από την ποιότητα των εκάστοτε παρατηρήσεων, αν και συνήθως βρίσκεται 5 με 10 φορές μικρότερο.

Η περίπτωση των *φωτογραφικών πλακών επισκόπησης* είναι περισσότερο πολύπλοκη και κατά πολύ λιγότερο αξιόπιστη. Οι πλάκες αυτές συνήθως χρησίμευαν για την ανίχνευση υπερκαινοφανών αστέρων και συνοδεύονταν σχεδόν πάντοτε από μεγάλους χρόνους έκθεσης με αποτέλεσμα οι πληροφορίες που προσφέρουν σχετικά με τον προσδιορισμό του χρόνου ενός ελαχίστου να είναι σχετικά ανασφαλείς. Μια εμπειρική, αλλά ιδιαίτερα χρήσιμη σχέση εκτίμησης του σφάλματος ενός χρόνου ελαχίστου με τη διαδικασία αυτή, δίνεται παρακάτω (Hall & Kreiner 1980):

$$\varepsilon_{patrol} = \frac{d}{2} + \left(\frac{0.3^{mag}}{\Delta m_{pg}} \cdot \frac{D-d}{2} \right), \tag{2.19}$$

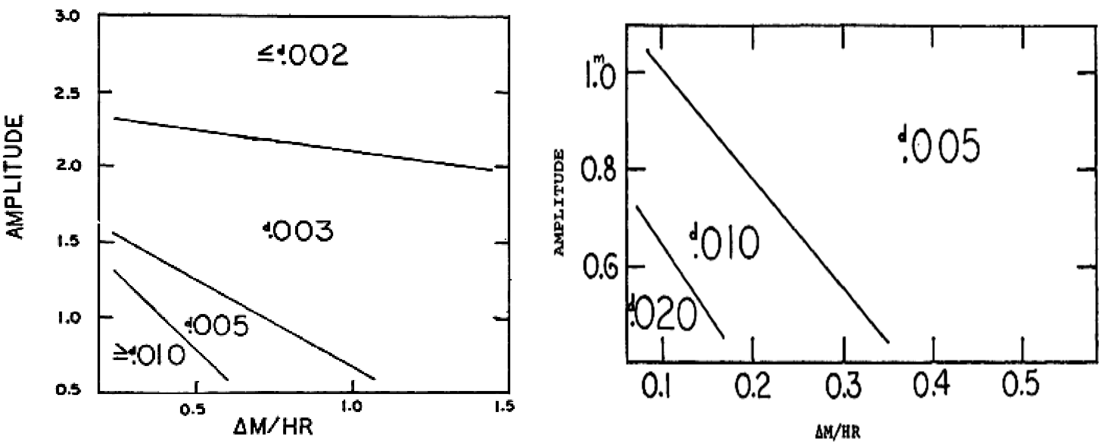
όπου d η διάρκεια της ολικής έκλειψης εφόσον υφίσταται (χρονική διάρκεια μεταξύ δεύτερης και τρίτης επαφής σε ποσοστό της τροχιακής περιόδου), D η συνολική διάρκεια του ελαχίστου (χρονική διάρκεια μεταξύ πρώτης και τέταρτης επαφής σε ποσοστό της τροχιακής περιόδου) και Δm_{pg} το φωτογραφικό βάθος του ελαχίστου. Εύκολα γίνεται κατανοητό ότι το βάρος που αποδίδεται στους χρόνους ελαχίστων προσδιορισμένους με τον τρόπο αυτό είναι μικρότερο ακόμα και από εκείνο των οπτικά προσδιορισμένων, ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες των οποίων θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Λεπτομερείς μελέτες του Mallama (1974a, 1974b) αλλά και του Duerbeck (1975a, 1975b), έδειξαν ότι οι *οπτικές παρατηρήσεις* οδηγούν συνήθως σε μια συστηματική μετατόπιση του χρόνου των ελαχίστων (με ψυχοφυσικά πιθανώς αίτια) σε σχέση με τον πραγματικό, ενώ οι διακυμάνσεις τους βρέθηκαν να είναι 36 περίπου φορές μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες φωτοηλεκτρικές και συνεπώς το βάρος που πρακτικά τους αποδίδεται σε σχέση με τις τελευταίες είναι συνήθως 6 φορές μικρότερο (Duerbeck 1975a). Δυστυχώς, η αντικειμενικότητα των οπτικών παρατηρήσεων είναι πολλές φορές αμφίβολη, καθώς οι αστρονόμοι έχουν συνήθως γνώση μιας παλαιότερης εφημερίδας του συστήματος με άμεση συνέπεια τα αποτελέσματα να είναι προκατειλημμένα.

Βρέθηκε επίσης ότι συστήματα με ρηχά ελάχιστα, αλλά και με αργή σχετικά μεταβολή της λαμπρότητάς τους κατά τη διάρκεια των ελαχίστων, παρουσίαζαν μικρότερη ακρίβεια όταν οι παρατηρήσεις ήταν οπτικές και όχι με τη χρήση οργάνων (Mallama 1974a, 1974b). Το γεγονός αυτό, όπως είναι αναμενόμενο, έχει σημαντικότερες επιπτώσεις στα συστήματα τύπου β Lyr και W UMa, το βάθος των ελαχίστων των οποίων κατά κανόνα εμφανίζεται μικρότερο σε σχέση με εκείνων των συστημάτων τύπου Algol (Σχήμα ΙΙ.5). Μια εμπειρική, αλλά ιδιαίτερα χρήσιμη σχέση εκτίμησης του σφάλματος ενός χρόνου ελαχίστου μέσω οφθαλμοσκοπικών παρατηρήσεων, δίνεται παρακάτω (Hall & Kreiner 1980):

$$\varepsilon_{visual} = \frac{0.1^{mag}}{\Delta m_v} \cdot \frac{D-d}{\sqrt{n}}, \qquad (2.20)$$

όπου Δm_v το οπτικό βάθος του ελαχίστου και n ο αριθμός των παρατηρήσεων που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του χρόνου του ελαχίστου.



Σχήμα ΙΙ.5. Εκτιμήσεις του σφάλματος στο χρόνο ενός ελαχίστου όταν αυτές έχουν προσδιοριστεί οφθαλμοσκοπικά. Οι σχετικές τιμές εμφανίζονται μεγαλύτερες στην περίπτωση των συστημάτων τύπου β Lyr και W UMa (δεξιά) συγκριτικά με εκείνες των συστημάτων τύπου Algol (αριστερά). Όπως ήταν αναμενόμενο, το σφάλμα περιορίζεται με την αύξηση του βάθους του ελαχίστου όπως και με την αύξηση του ρυθμού μεταβολής της λαμπρότητας κατά τη διάρκεια της έκλειψης (Mallama 1974a, 1974b).

Μέχρι τώρα συναντήσαμε τις βασικότερες πηγές θορύβου οι οποίες προέρχονται κατά τη λήψη και την επεξεργασία των παρατηρήσεων που οδηγούν τελικά στον προσδιορισμό εκείνου του χρόνου ελαχίστου που προσεγγίζει περισσότερο τον πραγματικό, δηλαδή τον γεωμετρικό. Με λίγα λόγια, εξετάσαμε πηγές θορύβου των οποίων ο χαρακτήρας είναι ***στατιστικός***. Παραπέμπουμε μάλιστα στο τρίτο κεφάλαιο για μια εκτενή μελέτη η οποία εξετάζει το βαθμό επίδρασης αρκετών από τους πιο πάνω παράγοντες στη διαμόρφωση της στάθμης θορύβου των διαγραμμάτων O-C.

Δυστυχώς όμως, η ακανόνιστη πολλές φορές μορφή που χαρακτηρίζει το προφίλ ενός ελαχίστου οφείλεται κατά κανόνα στην ανισότροπη εκπομπή φωτός από την επιφάνεια των μελών του εξεταζόμενου συστήματος. Το συνολικό αποτέλεσμα, το οποίο αναφέρεται συχνά ως ***φωτομετρικός*** θόρυβος, παρουσιάζεται είτε με τη διαφορά ύψους των μεγίστων της καμπύλης φωτός, χαρακτηριστικό γνωστό ως *φαινόμενο O'Connell (O'Connell effect)*, είτε με τη μη συμμετρική διαμόρφωση ανοδικού και καθοδικού κλάδου των ελαχίστων, γεγονός το οποίο έχει άλλωστε οδηγήσει στην επινόηση ποικίλων μεθόδων προσδιορισμού του χρόνου των ελαχίστων (Geyer 1977).

Ας σημειωθεί ότι ο φωτομετρικός θόρυβος δεν πρέπει να συγχέεται με τον παρατηρησιακό θόρυβο ο οποίος περιλαμβάνει τις διακυμάνσεις που προέρχονται από τη γήϊνη ατμόσφαιρα κατά τη διάρκεια των παρατηρήσεων και οι οποίες θεωρούνται αμελητέες όσον αφορά τις επιδράσεις τους στον προσδιορισμό του χρόνου ενός ελαχίστου, τουλάχιστον συγκριτικά με όλες τις προηγούμενες.

Στο σημείο αυτό, δεν πρέπει να παραλείψουμε το πιθανό ενδεχόμενο μετατόπισης της θέσης του ελαχίστου εξαιτίας της παρουσίας αστρικών κηλίδων, οι επιπτώσεις του οποίου υπάγονται στο γενικότερο φωτομετρικό θόρυβο. Η ύπαρξη τέτοιων κηλίδων είναι αναμενόμενη σε όλους τους αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων και για το λόγο αυτό δεν πρέπει να αγνοείται. Μάλιστα, σε ακραίες περιπτώσεις ιδιαίτερα εκτεταμένων, σκοτεινών και ψυχρών κηλίδων και μάλιστα κινούμενων (μεταβαλλόμενη θέση, θερμοκρασία και έκταση) και όχι στατικών, η χρονική μετατόπιση του ελαχίστου ενδέχεται να είναι τουλάχιστον συγκρίσιμη με όλες τις πηγές θορύβου και αβεβαιότητας που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Λεπτομερείς πληροφορίες σχετικά με την επίδραση των κηλίδων στο επίπεδο του θορύβου ενός διαγράμματος O-C θα δοθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή, οφείλουμε να παρουσιάσουμε και μια σειρά από *τυχαία γεγονότα* τα οποία πολλές φορές οδηγούν σε λανθασμένη εκτίμηση του χρόνου των ελαχίστων, συνήθως εξαιτίας ορισμένων παραλείψεων (Hall & Kreiner 1980, Sterken 2000). Τα συχνότερα εμφανιζόμενα τυχαία γεγονότα είναι τα εξής:

- Χρόνοι ελαχίστων προερχόμενοι από μια μέση καμπύλη φωτός (mean light curve) που περιλαμβάνει παρατηρήσεις μακροπερίοδων κυρίως συστημάτων (κινούμενοι μέσοι των πραγματικών δηλαδή δεδομένων) δεν αντιστοιχούν πάντοτε στον μέσο υποτιθέμενο τροχιακό κύκλο.

- Ανακρίβειες προερχόμενες από το σύστημα καταγραφής του χρόνου, το οποίο συνήθως είναι ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής, όπως επίσης και από παραλείψεις αναγωγής των μετρήσεων από τον τοπικό χρόνο (local time) στον παγκόσμιο (Universal Time, U.T.), από τη γνήσια (proper) Ιουλιανή ημερομηνία στην τροποποιημένη (modified) αλλά και από λανθασμένη επιλογή της ατράκτου της περιοχής από όπου πραγματοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις.

- Παράλειψη αναγωγής του προσδιοριστέου χρόνου σε ηλιοκεντρικές Ιουλιανές μέρες, κατά βάση η συνηθέστερη. Δεν αποκλείεται επίσης η περίπτωση εφαρμογής της *ηλιοκεντρικής διόρθωσης (heliocentric correction)* με το αντίθετο πρόσημο, σφάλμα το οποίο επιφέρει ακόμα πιο δυσμενή αποτελέσματα.
- Τυπογραφικά λάθη.

Οι προαναφερθείσες παραλείψεις είναι απρόβλεπτες και εάν γίνουν αντιληπτές οδηγούν συνήθως σε απόρριψη των προσδιοριστέων χρόνων. Τις περισσότερες μάλιστα φορές οι δημοσιευμένες αβεβαιότητες που συνοδεύουν το χρόνο των ελαχίστων δε συνυπολογίζουν τις παραπάνω αστοχίες, με αποτέλεσμα να οδηγούν σε εσφαλμένα συμπεράσματα.

4. Τεχνικές Επαναλαμβανόμενης Δειγματοληψίας

Οι ***τεχνικές αναδειγματοληψίας (resampling techniques)*** αποτελούν έναν πολύ ουσιαστικό, πρακτικό και κυρίως αξιόπιστο τομέα της Υπολογιστικής Στατιστικής. Πρόκειται για μεθόδους προσομοίωσης Monte Carlo που αποσκοπούν στην κατασκευή μεγάλου πλήθους δειγμάτων με βάση ένα και μόνο δείγμα προερχόμενο από τον πληθυσμό. Οι δύο βασικότερες τεχνικές από αυτές καλούνται ***αναδειγματοληψία επανάθεσης (bootstrap)*** και ***αναδειγματοληψία αποκοπής (jackknife)***, ενώ όλες οι υπόλοιπες αποτελούν απλές παραλλαγές τους. Η ισχύς τους είναι εμφανής σε περιπτώσεις που το μέγεθος του αρχικού μας δείγματος είναι μικρό αλλά και σε περιπτώσεις που η κατανομή του πληθυσμού είναι περίπλοκη και δεν παραπέμπει σε κάποια από τις ευρέως γνωστές.

4.1. Αναδειγματοληψία Επανάθεσης (Bootstrap)

Η τεχνική αναδειγματοληψίας επανάθεσης, τεχνική η οποία θα μας απασχολήσει περισσότερο, επινοήθηκε το 1979 από τον Efron ως μια υπολογιστική μέθοδος εκτίμησης τυπικών αποκλίσεων (Efron 1979). Πυρήνας της τεχνικής αυτής αποτελεί η *αρχή της απλής τυχαίας δειγματοληψίας* κατά την οποία η επιλογή των μονάδων ενός δείγματος γίνεται έτσι ώστε κάθε στατιστική μονάδα του πληθυσμού που μελετούμε να έχει την ίδια πιθανότητα συμπερίληψης στο δείγμα (π.χ. Efron & Tibshirani 1998). Εάν λοιπόν το μέγεθος του εξεταζόμενου δείγματος είναι ίσο με n, η πιο πάνω αρχή ικανοποιείται εφόσον η πιθανότητα συμπερίληψης κάθε δεδομένου που περιέχεται σε αυτό είναι ίση με $1/n$. Από εδώ και στο εξής θα καλούμε ως *εμπειρική* τη διακριτή εκείνη κατανομή F_{emp} που ακολουθούν οι παρατηρήσεις $\boldsymbol{x}$ =

$\{x_i,\ i = 1,...,n\}$ που επιλέχθηκαν με τυχαία δειγματοληψία από τον πληθυσμό, υποθέτοντας ότι η κατανομή που αντιστοιχεί σε αυτόν, έστω F, είναι άγνωστη.

Τα βήματα της τεχνικής που πρόκειται να περιγραφεί αφορούν την *απαραμετρική* μορφή της η οποία παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Η *παραμετρική* έκδοση της τεχνικής είναι ταυτόσημη με τις παραδοσιακές Monte Carlo μεθόδους προσομοίωσης κατανομών γνωστής συναρτησιακής μορφής, όπως π.χ. εκείνων της αντιστροφής και της απόρριψης, οι οποίες δε θα μας απασχολήσουν στην πορεία της διατριβής.

Θεωρώντας λοιπόν ότι η μόνη διαθέσιμη πληροφορία που έχουμε κατά τη μελέτη των ιδιοτήτων ενός πληθυσμού αποτελεί ένα και μόνο δείγμα παρατηρήσεων $\boldsymbol{x}$, δεν υπάρχει κάνενας περιορισμός στην εκτέλεση τυχαίας δειγματοληψίας από αυτό με σκοπό την κατασκευή νέων προσομοιωμένων δειγμάτων με μέγεθος ίσο με το αρχικό, n, και συνολικού πλήθους B. Μετά τη σύνθεση του πρώτου προσομοιωμένου δείγματος, $\boldsymbol{x_1}^* = \{x_{1i}^*,\ i = 1,...,n\}$, οι επιλεγμένες παρατηρήσεις δεν απομακρύνονται από το αρχικό δείγμα αλλά επανατοποθετούνται σε αυτό ώστε να συνεχιστεί η διαδικασία μέχρι τη σύνθεση ενός επαρκούς αριθμού προσομοιωμένων δειγμάτων $\{\boldsymbol{x_j}^*,\ j = 1,...,B\}$. Στην ουσία, η τεχνική αναδειγματοληψίας επανάθεσης είναι πλήρως συμβατή με τις κλασικές στατιστικές μεθόδους όταν στη θέση της πραγματικής κατανομής F επιδιώκεται η διερεύνηση της εμπειρικής κατανομής F_{emp}.

Μετά την κατασκευή των B συνολικά προσομοιωμένων δειγμάτων, οποιαδήποτε στατιστική ποσότητα θ_F (περιγραφικό μέτρο) που μας ενδιαφέρει μπορεί να υπολογιστεί ως ο μέσος θ_B^* των αντίστοιχων εκτιμητριών θ_j^* που προκύπτουν για κάθε επιμέρους δείγμα. Στην πράξη, η εμπειρική κατανομή απεικονίζεται και εξετάζεται μέσα από ένα ιστόγραμμα το οποίο προκύπτει από τους B προσομοιωμένους μέσους και στη συνέχεια ο χρήστης είναι εκείνος ο οποίος επιλέγει το περιγραφικό μέτρο που τον ενδιαφέρει για να μελετήσει την εξεταζόμενη παράμετρο του πληθυσμού. Στην απλούστερη περίπτωση υπολογισμού του τυπικού σφάλματος μιας οποιασδήποτε παραμέτρου θ_F, η εκτιμήτρια bootstrap se_B^* θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$se_B^* = \left[\frac{\sum_{j=1}^{B} \left(\theta_j^* - \theta_B^*\right)^2}{B-1} \right]^{1/2} \quad (2.21), \text{ όπου } \theta_B^* = \frac{\sum_{j=1}^{B} \theta_j^*}{B}. \quad (2.22)$$

Η τεχνική αναδειγματοληψίας επανάθεσης επιτρέπει τη σύνθεση προσομοιωμένων δειγμάτων στα οποία μια παρατήρηση από το αρχικό δείγμα μπορεί να συμμετέχει τουλάχιστον μια φορά. Εξαιτίας της αρχής στην οποία άλλωστε στηρίζεται, η τεχνική δεν αποκλείει μάλιστα το ενδεχόμενο παρουσίας δειγμάτων με μια και μόνο παρατήρηση η οποία προφανώς θα εμφανίζεται n φορές, όσες δηλαδή το πλήθος του αρχικού δείγματος. Στην πραγματικότητα, η πιθανότητα να συμβεί κάτι τέτοιο είναι εξαιρετικά μικρή, καθώς αποδεικνύεται ότι ο μέγιστος δυνατός συνολικός αριθμός προσομοιωμένων δειγμάτων B_{max} που μπορούν να παραχθούν κατά την αναδειγματοληψία δίνεται από την πιο κάτω σχέση:

$$B_{\max} = \binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}. \tag{2.23}$$

Ο αριθμός που προβλέπεται από τη σχέση (2.23) είναι εντυπωσιακά μεγάλος ακόμα και όταν το μέγεθος του αρχικού δείγματος είναι μικρό. Ακόμα και σε ένα δείγμα 8 μόνο παρατηρήσεων, αριθμός που μόλις και βρίσκεται στα επιτρεπτά όρια εφαρμογής της τεχνικής όπως θα δούμε και αργότερα, το B_{max} είναι ίσο με 6435. Επομένως, η πιθανότητα κατασκευής ενός δείγματος το οποίο περιλαμβάνει την ίδια ακριβώς παρατήρηση 8 φορές θα είναι ίση με n/B_{max} = 8/6435 = 0.124 %, δηλαδή αμελητέα.

Ο απαιτούμενος αριθμός των προσομοιωμένων δειγμάτων *B* ώστε η τεχνική να είναι αποδοτική αποτελεί μια κρίσιμη παράμετρο η οποία εξαρτάται άμεσα από τη μορφή της κατανομής του πληθυσμού αλλά και την πολυπλοκότητα του περιγραφικού μέτρου που επιχειρείται να εξαχθεί από αυτή. Ο μέγιστος δυνατός περιορισμός της μεροληψίας επιτυγχάνεται με την παραγωγή ενός θεωρητικά άπειρου πλήθους συνθετικών δειγμάτων. Επειδή όμως κάτι τέτοιο όχι μόνο στην πράξη δεν είναι εφικτό αλλά και υπολογιστικά δαπανηρό (ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνει γραμμικά με το *B*), η αξιολόγηση κάθε υπολογιστικής διαδικασίας απαιτεί τη μελέτη του *συντελεστή μεταβλητότητας (coefficient of variation) CV* κατά την ακολουθία κατασκευής των προσομοιωμένων δειγμάτων. Πρόκειται για το λόγο της τυπικής απόκλισης του εξεταζόμενου περιγραφικού μέτρου ενός δείγματος προς τον μέσο του (σχετικό τυπικό σφάλμα) και ουσιαστικά αποτελεί μέτρο της τυπικής απόκλισης απαλλαγμένης από τη μέση τιμή. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση μελέτης της bootstrap εκτιμήτριας του τυπικού σφάλματος, ο συντελεστής μεταβλητότητας $CV(se_B^*)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$CV(se_B^*) = \left\{ CV(se_\infty^*)^2 + \frac{\Delta_B^* + 2}{4B} \right\}, \tag{2.24}$$

όπου $CV(se_\infty^*)$ ο θεωρητικός συντελεστής μεταβλητότητας (ή αριθμητικά υπολογιζόμενος μετά από έναν εξαιρετικά μεγάλο αριθμό συνθετικών δειγμάτων) και Δ ένα μέτρο του ρυθμού απόσβεσης της κατανομής των προσομοιωμένων δειγμάτων του οποίου ο μέσος Δ_B^* που προκύπτει από τα *B* δείγματα χρησιμοποιείται εδώ. Πρακτικά, η παράμετρος Δ εκφράζει τον όγκο στατιστικής μάζας που περιέχεται στην ουρά μιας κατανομής και λαμβάνει τιμές από -2, σε περιπτώσεις μηδενικής σχεδόν ουραίας μάζας, μέχρι και 10 περίπου όταν η μάζα αυτή καταλαμβάνει σημαντικό ποσοστό της κατανομής (π.χ. $\Delta = 0$ για την Κανονική κατανομή). Η χρήση του συντελεστή μεταβλητότητας ως διαγνωστικό δείκτη για την αποτελεσματικότητας της αναδειγματοληψίας επανάθεσης έδειξε πως η εκτίμηση του bootstrap τυπικού σφάλματος είναι αποδεκτή όταν το *B* είναι μεγαλύτερο από το 50 και ασφαλής όταν το B αγγίζει το 200. Η ανάγκη παραγωγής περισσοτέρων από 200 προσομοιωμένα δείγματα είναι σχετικά σπάνια, καθώς κρίνεται αναγκαία κατά την εκτίμηση ιδιαίτερα απαιτητικών στατιστικών μέτρων (π.χ. διαστήματα εμπιστοσύνης).

4.2. Αναδειγματοληψία Αποκοπής (Jackknife)

Η τεχνική αναδειγματοληψίας αποκοπής προηγήθηκε χρονικά εκείνης της αναδειγματοληψίας επανάθεσης και ουσιαστικά ήταν η πρώτη ιστορικά τεχνική επαναλαμβανόμενης δειγματοληψίας. Επινοήθηκε το 1949 από τον Quenouille ως μια υπολογιστική μέθοδος εκτίμησης της μεροληψίας (Quenouille 1949). Αποτελεί μια απλούστερη εκδοχή της αναδειγματοληψίας επανάθεσης και συνεπώς είναι λιγότερο ακριβής (π.χ. Efron & Tibshirani 1998).

Η αναδειγματοληψία αποκοπής στοχεύει και πάλι στην κατασκευή νέων προσομοιωμένων δειγμάτων, χωρίς αυτή τη φορά να εφαρμόζεται η αρχή της απλής δειγματοληψίας. Κάθε νέο συνθετικό δείγμα προκύπτει ως υποσύνολο του αρχικού $\boldsymbol{x} = \{x_i,\ i = 1,...,n\}$ αποκόπτοντας κάθε φορά μια παρατήρηση, γεγονός που το καθιστά κατά μια στατιστική μονάδα μικρότερο σε μέγεθος (leave-one-out jackknife). Με τον τρόπο αυτό παράγονται n συνολικά συνθετικά δείγματα $\{\boldsymbol{x_j}^*,\ j = 1,...,n\}$ ή ισοδύναμα $\{\boldsymbol{x_{(i)}}^*,\ i = 1,...,n\}$, εφόσον έχουμε συμβολίσει με ‘‘(i)’’ τη θέση της παρατήρησης που απομακρύνεται από το αρχικό δείγμα, δηλαδή $\boldsymbol{x_{(i)}}^* = (x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$. Οποιαδήποτε πλέον στατιστική ποσότητα θ_F (περιγραφικό μέτρο) που μας ενδιαφέρει μπορεί να υπολογιστεί ως ο μέσος θ_J^* των αντίστοιχων εκτιμητριών $\theta_{(i)}^*$ που προκύπτουν για κάθε επιμέρους δείγμα, όπως ακριβώς άλλωστε προβλέπεται και στην αναδειγματοληψία επανάθεσης. Στην απλούστερη περίπτωση υπολογισμού του τυπικού σφάλματος μιας οποιασδήποτε παραμέτρου θ_F, αποδεικνύεται πως η εκτιμήτρια jackknife se_J^* θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση (ο αστερίσκος ‘‘*’’ υποδηλώνει οποιαδήποτε εκτιμήτρια εξάγεται μέσα από τα προσομοιωμένα δείγματα):

$$se_J^* = \left[\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\theta_{(i)}^* - \theta_J^*\right)^2\right]^{1/2}, \quad (2.25) \quad \text{όπου} \quad \theta_J^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\theta_{(i)}^*}{n}. \quad (2.26)$$

Η προσέγγιση που ακολουθεί η αναδειγματοληψία αποκοπής προβλέπει συνθετικά δείγματα κατά πολύ λιγότερα σε σχέση με εκείνα της αναδειγματοληψίας επανάθεσης, γεγονός που την καθιστά περισσότερο ευάλωτη σε μεροληπτικούς παράγοντες κατά την εκτίμηση ιδιαίτερα απαιτητικών περιγραφικών μέτρων. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται σε μερικό βαθμό με την παραγωγή συνθετικών δειγμάτων τα οποία προκύπτουν από το αρχικό αποκόπτοντας κάθε φορά όχι μια πλέον παρατήρηση αλλά d και συνεπώς έχουν μέγεθος ίσο με n-d (delete-d jackknife). Είναι προφανές ότι ο αριθμός d θα πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε το πλήθος των παρατηρήσεων του αρχικού δείγματος n να είναι ακέραιο πολλαπλάσιό του, $n = r \cdot d$, διαφορετικά θα οδηγηθούμε σε συνθετικά δείγματα ανόμοιου μεγέθους.

Εφόσον η τεχνική μειονεκτεί από περιορισμένο πλήθος προσομοιωμένων δειγμάτων, ο αριθμός τους J που επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί κατά τους υπολογισμούς συμπίπτει σχεδόν πάντοτε με τον μέγιστο δυνατό J_{max} που προβλέπει η δειγματοληψία της μορφής αυτής, δηλαδή:

$$J = J_{\max} = \binom{n}{d} = \frac{n!}{d!(n-d)!}. \qquad (2.27)$$

Στην περίπτωση αυτή, η εκτιμήτρια jackknife se_J* που προκύπτει για τον υπολογισμό του τυπικού σφάλματος μιας οποιασδήποτε παραμέτρου θ_F γενικεύεται και οι σχέσεις (2.25) και (2.26) πλέον τροποποιούνται λαμβάνοντας την ακόλουθη μορφή:

$$se_J^* = \left[\frac{r}{J} \sum_{j=1}^{J} \left(\theta_j^* - \theta_J^* \right)^2 \right]^{1/2}, \ (2.28) \ \text{όπου} \ \theta_J^* = \frac{\sum_{j=1}^{J} \theta_j^*}{J}. \ (2.29)$$

Έχει αποδειχθεί τόσο θεωρητικά όσο και αριθμητικά πως το απαιτούμενο πλήθος παρατηρήσεων d που πρέπει να απομακρύνεται από το αρχικό δείγμα ώστε η αναδειγματοληψία αποκοπής να παρέχει συνεπείς εκτιμήτριες, θα πρέπει να είναι τουλάχιστον μεγαλύτερο από την τιμή $n^{1/2}$. Στην ειδική περίπτωση που το αρχικό μας δείγμα τυχαίνει να διαθέτει εκτενή αριθμό παρατηρήσεων, σύμφωνα με τη σχέση (2.27), το μέγιστο πλήθος των επιτρεπτών προσομοιωμένων δειγμάτων J_{max} γίνεται πολύ μεγάλο και δεν είναι πλέον απαραίτητο στο σύνολό του. Μπορούμε τότε να επιλέγουμε τυχαία ένα μερικό μόνο υποσύνολο των δυνατών συνθετικών δειγμάτων, διαδικασία όμοια δηλαδή με εκείνη που ακολουθεί η αναδειγματοληψία επανάθεσης. Η βασική τους όμως διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι επανάθεση πλέον κατά τη δειγματοληψία δεν πραγματοποιείται (αναδειγματοληψία χωρίς επανάθεση).

4.3. Μεροληψία

Η εξαγωγή οποιασδήποτε πληροφορίας από ένα δείγμα του πληθυσμού μπορεί πολλές φορές να μην είναι αξιόπιστη εφόσον το περιγραφικό μέτρο που έχει επιλεγεί για να περιγράψει τις ιδιότητες του πληθυσμού δεν είναι αμερόληπτο. Ο μέσος των τετραγωνικών αποκλίσεων ενός δείγματος για παράδειγμα δεν αποτελεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς σ^2 που αντιστοιχεί στον πληθυσμό. Αντίθετα, εάν το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων δεν διαιρεθεί με το μέγεθος του δείγματος n αλλά με την ποσότητα n-1 (εάν δηλαδή χρησιμοποιήσουμε τη δειγματική διασπορά s^2), εξασφαλίζουμε αμεροληψία. Θα καλούμε λοιπόν ως ***μεροληψία (bias)*** τη διαφορά που προκύπτει μεταξύ μιας στατιστικής παραμέτρου του πληθυσμού θ_F και της δειγματικής της εκτιμήτριας θ_{Femp}. Στην πραγματικότητα, όλες οι εκτιμήτριες χαρακτηρίζονται από ένα βαθμό μεροληψίας, έστω και αν αυτός είναι αμελητέος, και συνεπώς η ρίζα του πραγματικού μέσου τετραγωνικού σφάλματος $RMSE(\theta_{Femp})$ που θα περιγράφει την αβεβαιότητά τους θα είναι συνάρτηση τόσο του τυπικού τους σφάλματος $se(\theta_{Femp})$ όσο και της μεροληψίας που φέρουν $bias(\theta_{Femp})$, δηλαδή:

$$RMSE(\theta_{F_{emp}}) = \sqrt{se(\theta_{F_{emp}})^2 + bias(\theta_{F_{emp}})^2} \, . \tag{2.30}$$

Τόσο η αναδειγματοληψία επανάθεσης όσο και η αναδειγματοληψία αποκοπής υποστηρίζουν την εκτίμηση της μεροληψίας ενός περιγραφικού μέτρου όσο βέβαια αυτή αναφέρεται στην εμπειρική κατανομή. Στην πρώτη περίπτωση, η bootstrap εκτμήτρια της μεροληψίας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$bias_B^*(\theta_{F_{emp}}) = \theta_B^* - \theta_{F_{emp}} \, , \tag{2.31}$$

όπου θ_B* ο μέσος της εξεταζόμενης στατιστικής παραμέτρου που προκύπτει από όλα τα προσομοιωμένα δείγματα και ο οποίος δίνεται από τη σχέση (2.22). Στη δεύτερη περίπτωση, η jackknife εκτιμήτρια της μεροληψίας που αντιστοιχεί στην απλούστερη εκδοχή της τεχνικής (leave-one-out jackknife) αποδεικνύεται ότι προσδιορίζεται και πάλι μέσα από τη σχέση (2.31), πολλαπλασιασμένη όμως με έναν παράγοντα n-1:

$$bias_J^*(\theta_{F_{emp}}) = (n-1)(\theta_J^* - \theta_{F_{emp}}) \, , \tag{2.32}$$

όπου θ_J* ο μέσος της εξεταζόμενης στατιστικής παραμέτρου που προκύπτει από όλα τα προσομοιωμένα δείγματα και ο οποίος δίνεται από τη σχέση (2.26).

Δυστυχώς, αν και η εκτίμηση της μεροληψίας αποτέλεσε έναν από τους ουσιώδεις στόχους των τεχνικών αναδειγματοληψίας, καμία από αυτές δεν έχει αποδειχθεί ασφαλής. Δοκιμασίες στις οποίες υποβλήθηκε τόσο η bootstrap όσο και η jackknife εκτιμήτρια μεροληψίας, σε αντίθεση με εκείνη του τυπικού σφάλματος, έδειξαν ότι η εκτιμήτρια είναι ασταθής (παρουσιάζει δηλαδή έντονη μεταβλητότητα) ακόμα και μετά από την προσομοίωση μεγάλου αριθμού συνθετικών δειγμάτων. Η χρήση της θα πρέπει λοιπόν να αποφεύγεται ως μέσο διόρθωσης της δειγματικής εκτιμήτριας αλλά να υϊοθετείται μόνο ως μέτρο καταλληλότητας της τελευταίας.

4.4. Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Στην κλασική Παραμετρική Στατιστική, το διάστημα εμπιστοσύνης μιας οποιασδήποτε παραμέτρου θ_F που αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο $100 \cdot \alpha$-οστό ποσοστημόριο (ή αλλιώς σε στάθμη σημαντικότητας α) προσδιορίζεται με βάση το εύρος τιμών που ορίζεται μεταξύ του α-ποσοστιαίου σημείου, έστω $\theta_{Femp}{}^{(\alpha)}$, και του (1-$\alpha$)-ποσοστιαίου σημείου, $\theta_{Femp}{}^{(1-\alpha)}$, της δειγματικής κατανομής F_{emp}. Ισοδύναμα, τα ποσοστιαία αυτά σημεία μπορούν να εκφραστούν ως πολλαπλάσια του τυπικού σφάλματος με βάση τα αντίστοιχα $z^{(\alpha)}$ και $z^{(1-\alpha)}$ σημεία που προκύπτουν για την Τυπική Κανονική κατανομή Ν(0,1). Το διάστημα εμπιστοσύνης μπορεί τότε να οριστεί ως μια περιοχή η οποία κυμαίνεται γύρω από τη δειγματική εκτιμήτρια θ_{Femp} ως ακολούθως:

$$[\theta_{F_{emp}}^{(a)}, \theta_{F_{emp}}^{(1-a)}] \equiv [\theta_{F_{emp}} - z^{(1-a)} \cdot se(\theta_{F_{emp}}), \theta_{F_{emp}} - z^{(a)} \cdot se(\theta_{F_{emp}})]. \qquad (2.33)$$

Η πιο πάνω περιοχή που καλύπτει η παράμετρος θ_F καλείται ***τυπικό διάστημα εμπιστοσύνης με επίπεδο εμπιστοσύνης (confidence level)*** ή αλλιώς ***πιθανότητα κάλυψης (coverage probability) 100·(1-2α)%***, καθώς η πιθανότητα εντοπισμού της παραμέτρου πληθυσμού μέσα στο διάστημα αυτό είναι ίση με 1-2*α*. Στην ειδική περίπτωση που η κατανομή είναι συμμετρική, το διάστημα αυτό ορίζεται από τα σημεία $\theta_{Femp} \pm z^{(1-a)} \cdot se(\theta_{Femp})$. Αν και ένα πολύ μεγάλο πλήθος φυσικών (στοχαστικών) φαινομένων περιγράφεται ικανοποιητικά με τη βοήθεια της Κανονικής κατανομής (όπως άλλωστε προβλέπεται από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα), δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις στις οποίες σημαντικό μέρος της στατιστικής μάζας συγκεντρώνεται στην ουραία περιοχή της κατανομής ενός πληθυσμού. Η κατανομή Student είναι τότε εκείνη που προτιμάται συνήθως για να περιγράψει τη φυσική διαδικασία με το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης να ορίζεται από τα σημεία $\theta_{Femp} \pm t_{n-1}^{(1-a)} \cdot se(\theta_{Femp})$.

Η χρήση των απαραμετρικών τεχνικών αναδειγματοληψίας μας επιτρέπει την καλύτερη δυνατή προσέγγιση της εμπειρικής κατανομής με τη βοήθεια ενός ιστογράμματος που έχει προκύψει από τις εκτιμήτριες της εξεταζόμενης παραμέτρου για κάθε προσομοιωμένο δείγμα. Στη συνέχεια, κατασκευάζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής G_{Femp} από τα προσομοιωμένα δεδομένα, μπορούμε να εκτιμήσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης που αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε στάθμη σημαντικότητας *α* ως εξής:

$$[\theta^{*(a)}, \theta^{*(1-a)}] = [G_{F_{emp}}^{-1}(a), G_{F_{emp}}^{-1}(1-a)]. \qquad (2.34)$$

Στην πράξη, η μόνη από τις δύο τεχνικές αναδειγματοληψίας που χρησιμοποιείται είναι εκείνη της επανάθεσης καθώς τα διαστήματα εμπιστοσύνης απαιτούν εξαιρετικά ακριβή προσομοίωση της εμπειρικής κατανομής, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται με την κατασκευή ενός πολύ μεγάλου αριθμού συνθετικών δειγμάτων (περισσότερα από B = 1000 σε αρκετές περιπτώσεις). Αριθμητικά, ο προσδιορισμός είναι ***σημειακός (pointwise)*** και κατά συνέπεια οι προσομοιωμένες εκτιμήτριες τοποθετούνται κατά αύξουσα σειρά με το *α*-ποσοστιαίο σημείο $\theta_B{*}^{(\alpha)}$ να λαμβάνεται ως η τιμή που αντιστοιχεί στον αύξοντα αριθμό $B \cdot \alpha$ και το (1-*α*)-ποσοστιαίο σημείο $\theta_B{*}^{(1-\alpha)}$ να λαμβάνεται ως η τιμή που καταλαμβάνει τη θέση $B \cdot (1-\alpha)$, δηλαδή:

$$[\theta^{*(a)}, \theta^{*(1-a)}] \cong [\theta_B^{*(a)}, \theta_B^{*(1-a)}]. \qquad (2.35)$$

Ο προσδιορισμός ενός διαστήματος εμπιστοσύνης επιπέδου 1-2*α* με τους δύο πιο πάνω τρόπους είναι αρκετά αξιόπιστος καθώς δεν επιβάλλεται κάποια παραμετρική συνάρτηση κατανομής η οποία θα οδηγούσε στην απώλεια πληροφορίας. Παρά το γεγονός αυτό, η εφαρμογή τους αδυνατεί να προβλέψει και να διορθώσει αστοχίες προερχόμενες από τα ενδογενή γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δειγματικής κατανομής (π.χ. ασυμμετρία και κύρτωση). Τόσο το διάστημα εμπιστοσύνης (2.33) όσο και εκείνα των (2.34) και (2.35) προϋποθέτουν συμμετρική εμπειρική κατανομή και να παρουσιάζει σε ορισμένο βαθμό ομοιότητες με την Κανονική.

Η ***μέθοδος διόρθωσης μεροληψίας και επιτάχυνσης (Bias-Correction and acceleration - BCa - method)*** προβλέπει και αφαιρεί την επίδραση των δύο πιο πάνω παραγόντων, οδηγώντας στην κατασκευή ακριβέστερων διαστημάτων εμπιστοσύνης. Εφόσον επιθυμούμε στάθμη σημαντικότητας α, η μέθοδος προσδιορίζει δύο νέα ποσοστημόρια α_1 και α_2 των οποίων τα σημεία ορίζουν τα άκρα του διορθωμένου πλέον διαστήματος εμπιστοσύνης, δηλαδή:

$$[\theta^{*(a_1)}, \theta^{*(a_2)}], \tag{2.36}$$

όπου $a_1 = \Phi\left(z_0^* + \dfrac{z_0^* + z^{(a)}}{1 - a^*(z_0^* + z^{(a)})} \right)$ (2.37), $a_2 = \Phi\left(z_0^* + \dfrac{z_0^* + z^{(1-a)}}{1 - a^*(z_0^* + z^{(1-a)})} \right)$. (2.38)

Η ποσότητα z_0* προβλέπει και διορθώνει αποκλίσεις από την Κανονική κατανομή, υπολογίζοντας το ποσοστό των εκτιμητριών θ_j* που προκύπτουν από τα B προσομοιωμένα δείγματα και είναι μικρότερα από την αντίστοιχη δειγματική εκτιμήτρια θ_F. Πρόκειται για ένα *μέγεθος διόρθωσης μεροληψίας*, καθώς εκφράζει τη τη διάμεσο της μεροληψίας των εκτιμητριών θ_j*, και το οποίο τελικά προκύπτει από την αντίστροφη Τυπική Κανονική κατανομή που αντιστοιχεί στο πιο πάνω ποσοστό, δηλαδή:

$$z_0^* = \Phi^{-1}\left(\frac{\underset{j=1,B}{\#}\{\theta_j^* < \theta_{F_{emp}}\}}{B} \right). \tag{2.39}$$

Ο βαθμός ασυμμετρίας της εμπειρικής κατανομής μπορεί να εκτιμηθεί και στη συνέχεια να διορθωθεί μέσω της ποσότητας α* η οποία καλείται *επιτάχυνση* και εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το τυπικό σφάλμα της εκτιμήτριας μιας παραμέτρου σε σχέση με την πραγματική της τιμή. Επειδή η τεχνική αναδειγματοληψίας αποκοπής διαχειρίζεται συνθετικά δείγματα τα οποία αποκλίνουν από το αρχικό σε μικρότερο βαθμό από εκείνα που παράγει η αναδειγματοληψία επανάθεσης, είναι και εκείνη που τελικά προτιμάται για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης χρησιμοποιώντας μάλιστα την πιο κάτω απλή σχέση (Efron 1987):

$$a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\theta_{(i)}^* - \theta_J^* \right)^3}{6 \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\theta_{(i)}^* - \theta_J^* \right)^2 \right]^{3/2}}. \tag{2.40}$$

Η μέθοδος διόρθωσης μεροληψίας και επιτάχυνσης αποτελεί σήμερα μια από τις πληρέστερες τεχνικές ανακατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης, καθώς παρουσιάζει δύο πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες. Το πρώτο από αυτά σχετίζεται με τη *συνέπεια της τεχνικής κάτω από οποιοδήποτε μετασχηματισμό της εξεταζόμενης παραμέτρου (transformation respecting)*, έστω $\varphi = m(\theta)$. Συνέπεια της μορφής αυτής σημαίνει ότι το διάστημα εμπιστοσύνης της μετασχηματισμένης παραμέτρου φ μπορεί και προκύπτει άμεσα από εκείνο της αρχικής παραμέτρου θ κάτω από τον ίδιο μετασχηματισμό, δηλαδή $[\varphi^{*(\alpha_1)}, \varphi^{*(\alpha_2)}] = [m(\theta^{*(\alpha_1)}), m(\theta^{*(\alpha_2)})]$. Το δεύτερο αφορά το βαθμό εμπιστοσύνης που παρέχει καθώς, όπως αποδεικνύεται, *η ακρίβειά της είναι δεύτερης τάξης*. Η ιδιότητα αυτή εκφράζει πως η προβλεπόμενη από τη μέθοδο πιθανότητα κάλυψης πλησιάζει την πραγματική με ρυθμό $1/n^{1/2}$, δηλαδή με αρκετά μεγάλη ταχύτητα. Αντίθετα, τα σημειακά διαστήματα εμπιστοσύνης (2.35), αν και συνεπή σε μετασχηματισμούς, αποδεικνύονται πρώτης τάξης ακριβή, καθώς ο ρυθμός προσέγγισης είναι πλέον $1/n$ και συνεπώς βραδύτερος. Ας σημειωθεί ακόμα ότι τα τυπικά διαστήματα εμπιστοσύνης (2.33) αποδεικνύονται όχι μόνο πρώτης τάξης ακριβή αλλά και ασυνεπή σε μετασχηματισμούς.

4.5. Εφαρμογή στην Πολυωνυμική Παλινδρόμηση

Η ***πολυωνυμική παλινδρόμηση (polynomial regression)*** αποτελεί μια από τις πιο συνήθεις στατιστικές μεθόδους καθώς, ακόμα και σε περιπτώσεις περιγραφής πολύπλοκων προβλημάτων, η εφαρμογή της είναι ιδιαίτερα απλή και ο τρόπος προσαρμογής της στα δεδομένα ευέλικτος ώστε τελικά να καλύπτει μεγάλο εύρος φαινομένων. Αποτελεί μέρος της πολυδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης, καθώς κάθε πολυωνυμικός όρος μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια επιμέρους γραμμική συνιστώσα του διανύσματος των *επεξηγηματικών μεταβλητών* $\{X_j,\ j = 1,...,u\}$, των μεταβλητών δηλαδή εκείνων που διαμορφώνουν την *εξαρτημένη μεταβλητή* Y μέσω των *συντελεστών* $\{\alpha_j,\ j = 1,...,u\}$.

Στην πράξη, εκείνο το οποίο διαθέτουμε κατά την εφαρμογή ενός πολυωνυμικού μοντέλου παλινδρόμησης είναι ένα σύνολο παρατηρήσεων $\boldsymbol{y} = \{y_i,\ i = 1,...,n\}$ μαζί με τις τιμές των αντίστοιχων επεξηγηματικών μεταβλητών οι οποίες συνθέτουν τον πίνακα σχεδιασμού $\boldsymbol{X} = \{x_i^{\ j},\ i = 1,...,n \text{ και } j = 1,...,u\}$. Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός των συντελεστών $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j,\ j = 1,...,u\}$ και οι οποίοι αποτελούν το συνδετικό μηχανισμό μεταξύ εξαρτημένης και επεξηγηματικών μεταβλητών, δηλαδή:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{e}, \qquad (2.41)$$

όπου $\boldsymbol{e} = \{e_i,\ i = 1,...,n\}$ τα *υπόλοιπα* μεταξύ των παρατηρήσεων και των προβλεπόμενων από το μοντέλο τιμών. Ως εκ τούτου, οι συντελεστές είναι εκείνοι που ορίζουν το εκάστοτε μοντέλο και συνεπώς ο βέλτιστος προσδιορισμός τους κάτω από κάποιο κριτήριο ελαχιστοποίησης κόστους αποτελεί το κύριο αντικείμενο κάθε στατιστικής προσέγγισης. Οι πλέον διαδεδομένες εκτιμήτριες είναι εκείνες των *ελαχίστων τετραγώνων* καθώς η συνάρτηση που επιλέγεται προς ελαχιστοποίηση είναι εκείνη του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (ή ισοδύναμα των τετραγωνικών υπολοίπων):

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{LS} = (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{y}. \tag{2.42}$$

Οι εξισώσεις που οδηγούν στις εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων (2.42) είναι οι κανονικές εξισώσεις τις οποίες συναντήσαμε νωρίτερα με τη μορφή της σχέσης (2.9) ειδικά για την περίπτωση της κυβικής παλινδρόμησης.

Η κατανομή των υπολοίπων τα οποία προκύπτουν από τη σχέση (2.41) χρησιμοποιώντας τις εκτιμήτριες (2.42) είναι και εκείνη που αντιστοιχεί στην κατανομή της εξαρτημένης μεταβλητής, έστω F, εφόσον το μοντέλο παλινδρόμησης έχει επιλεγεί ορθά. Υποθέτοντας ότι το δείγμα των υπολοίπων έχει προκύψει με πλήρως τυχαίο τρόπο από τον πληθυσμό, οι ιδιότητες της δειγματικής τους κατανομής μπορούν και πάλι να διερευνηθούν μέσω της εμπειρικής κατανομής F_{emp} και συνεπώς με εφαρμογή της αναδειγματοληψίας επανάθεσης. Στην περίπτωση λοιπόν ενός μοντέλου παλινδρόμησης υπολογίζουμε αρχικά τα υπόλοιπα $\boldsymbol{e}_{LS}$ και στη συνέχεια προχωρούμε στην προσομοίωση νέων συνθετικών υπολοίπων $\boldsymbol{e}^*$ ώστε να τα κατασκευάσουμε τελικά προσομοιωμένα δείγματα συνθετικών παρατηρήσεων $\boldsymbol{y}^*$, ίδιου μεγέθους με το αρχικό, n:

$$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{a}}_{LS} + \boldsymbol{e}^*. \tag{2.43}$$

Τα συνθετικά δεδομένα υπόκεινται σε νέα πολυωνυμική παλινδρόμηση από την οποία εξάγονται B προσομοιωμένες εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων $\boldsymbol{\alpha}^*$ με το ιστόγραμμα των οποίων μπορούμε και πάλι να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με τις ιδιότητές τους, όπως π.χ. το τυπικό τους σφάλμα.

Ένας άλλος τρόπος εφαρμογής της τεχνικής αναδειγματοληψίας σε μοντέλα παλινδρόμησης είναι η κατασκευή προσομοιωμένων δειγμάτων αποτελούμενα από συνθετικά ζεύγη (x_i^*,y_i^*) και όχι συνθετικών υπολοίπων. Τα αποτελέσματα που προβλέπουν οι δύο αυτές εκδοχές της τεχνικής μπορούν να διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους καθώς η αναδειγματοληψία υπολοίπων προϋποθέτει πως τα τελευταία ακολουθούν την κατανομή του πληθυσμού F που ακολουθούν και οι παρατηρήσεις ενώ η αναδειγματοληψία ζευγών είναι λιγότερο ευαίσθητη στην υπόθεση αυτή. Η αναδειγματοληψία ζευγών όμως μπορεί να μειονεκτεί ακόμα περισσότερο, καθώς συνεπάγεται μεταβολή του πίνακα σχεδιασμού σε κάθε παλινδρόμηση και κατά συνέπεια οδηγεί σε εκτιμήσεις τυπικών σφαλμάτων που δεν εκφράζουν πλήρως τις πραγματικές παρατηρήσεις.

4.6. Σύγκριση και Αξιολόγηση των Τεχνικών Αναδειγματοληψίας

Η προσφορά των τεχνικών αναδειγματοληψίας στην ακριβέστερη εκτίμηση σημαντικών παραμέτρων ενός πληθυσμού είναι αναμφισβήτητη. Αν και σε γενικές γραμμές δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε σαφή μειονεκτήματα κάποιας από τις δύο τεχνικές έναντι της άλλης, είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε τα κοινά τους πλεονεκτήματα έναντι των παραδοσιακών τεχνικών και να εξηγήσουμε τους λόγους που σε ορισμένες περιπτώσεις ενδεχομένως να αποκλίνουν.

- Τόσο η τεχνική αναδειγματοληψίας επανάθεσης όσο και εκείνη της αποκοπής είναι ιδιαίτερα ευέλικτες σε περιπτώσεις που η εκτίμηση ενός περιγραφικού μέτρου απαιτεί πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις ή ακόμα και σε περιπτώσεις που η θεωρητική τους προσέγγισή είναι αδύνατη. Η δυναμική περιοχή των εφαρμογών τους αφορά δείγματα μικρού μεγέθους (από n = 10 έως 30) καθώς ένα πολύ μικρό πλήθος παρατηρήσεων αδυνατεί πάντοτε να παρέχει επαρκείς πληροφορίες για τον πληθυσμό ενώ, από την άλλη, μεγάλο πλήθος δεδομένων εξασφαλίζει πάντοτε την παρουσία της Κανονικής κατανομής.

- Ειδικά στην περίπτωση της τεχνικής αναδειγματοληψίας επανάθεσης, η μη παραμετρική της εκδοχή οδηγεί σε εκτιμήτριες μεγάλης ακρίβειας, καθώς δεν απαιτεί κανενός είδους υποθέσεις σχετικά με την κατανομή του πληθυσμού. Ακόμα και η παραμετρική της όμως εκδοχή είναι ακριβέστερη από τις σχέσεις που προτείνει η παραδοσιακή μεθοδολογία. Ακόμα και αν η μορφή της κατανομής του πληθυσμού είναι μερικώς γνωστή, η παραμετρική έκδοση της τεχνικής χρησιμεύει για την αξιολόγηση της αντίστοιχης απαραμετρικής.

- Η εκτίμηση της μεροληψίας μέσω των δύο τεχνικών αποδεικνύεται ανεπαρκής καθώς παρατηρείται σημαντική μεταβλητότητα κάτω από διαφορετικό πλήθος προσομοιωμένων δειγμάτων. Αιτία της προβληματικής αυτής συμπεριφοράς είναι η τυχαία δειγματοληψία που συνοδεύει την κατασκευή των συνθετικών δειγμάτων και η οποία οδηγεί σε επιπρόσθετες μεροληπτικές εκτιμήσεις. Παρά το γεγονός αυτό, η εκτιμήτρια μεροληψίας μπορεί να αποτελεί οδηγό αξιολόγησης της εκάστοτε δειγματικής εκτιμήτριας θ_{Femp}. Σε όσες δηλαδή περιπτώσεις η μεροληψία $bias^*(\theta_{Femp})$ εκτιμάται μεγαλύτερη από το τυπικό σφάλμα της δειγματικής εκτιμήτριας $se^*(\theta_{Femp})$, η τελευταία κρίνεται ως ακατάλληλη για την περιγραφή της εξεταζόμενης παραμέτρου θ. Διαφορετικά, η δειγματική εκτιμήτρια κρίνεται επαρκής με αβεβαιότητα η οποία εκφράζεται από το τυπικό της σφάλμα.

- Τα διαστήματα εμπιστοσύνης που παράγονται από την τεχνική αναδειγματοληψίας επανάθεσης, και ειδικότερα τα *BCa*, θεωρούνται εξαιρετικά ακριβή. Η διόρθωση παραγόντων που σχετίζονται με την ασυμμετρία και το βαθμό απόκλισης από την κανονικότητα καθιστά τα διαστήματα εμπιστοσύνης της μορφής αυτής ιδιαίτερα αξιόπιστα.

- Η εφαρμογή των τεχνικών αναδειγματοληψίας στα μοντέλα παλινδρόμησης επιφέρει τα ίδια οφέλη με εκείνα που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα για τη μελέτη της κατανομής ενός πληθυσμού από ένα τυχαίο του δείγμα. Επομένως, οι τεχνικές αναδειγματοληψίας είναι πολύτιμες όταν η κατανομή των υπολοίπων παρουσιάζει φαινόμενα ετεροσκεδαστικότητας και έλλειψης κανονικότητας. Χωρίς αυτό να είναι πάντοτε απαραίτητο, παρατηρείται μια τάση εκτίμησης μεγαλύτερων τυπικών σφαλμάτων όταν η τεχνική εφαρμόζεται για την αναδειγματοληψία ζευγών σε σχέση με την αναδειγματοληψία υπολοίπων. Το αποτέλεσμα αυτό είναι απόρροια της ευαισθησίας που παρουσιάζει η αναδειγματοληψία υπολοίπων από την επιλογή του μοντέλου. Εφόσον όμως η επιλογή αυτή είναι ορθή, η τεχνική αναδειγματοληψίας υπολοίπων αναδεικνύεται η ακριβέστερη.

- Η μοναδική αιτία που μπορεί να οδηγήσει σε άκρως μεροληπτικά αποτελέσματα αφορά την ανεξαρτησία των δεδομένων. Η παρουσία ισχυρών αυτοσυσχετίσεων μεταξύ των παρατηρήσεων καθιστά την εφαρμογή των τεχνικών αναδειγματοληψίας απαγορευτική. Το φαινόμενο αυτό είναι αναπόφευκτο στην περίπτωση μοντέλων παλινδρόμησης χρονοσειρών. Παρά το γεγονός αυτό, η τεχνική αναδειγματοληψίας υπολοίπων εξαλείφει τον πιο πάνω κίνδυνο, καθώς η δόκιμη και προσεκτική επιλογή μοντέλου οδηγεί σε ασυσχέτιστα υπόλοιπα.

Η τεχνική αναδειγματοληψίας αποκοπής μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια προσέγγιση της αναδειγματοληψίας επανάθεσης. Οι εκτιμήτριες που προβλέπει η πρώτη τεχνική για οποιοδήποτε περιγραφικό μέτρο σε σχέση με εκείνες που προβλέπει η δεύτερη απαιτούν ένα παράγοντα διόρθωσης ο οποίος είναι πάντοτε μεγαλύτερος της μονάδας. Στην περίπτωση της μεροληψίας για παράδειγμα, οι σχέσεις (2.31) και (2.32) μας υποδεικνύουν ότι ο παράγοντας αυτός είναι ίσος n-1.

Η κύρια αιτία βρίσκεται στη δομή των jackknife συνθετικών δειγμάτων η οποία βρίσκεται πολύ πιο κοντά σε εκείνη του αρχικού δείγματος σε σχέση με τη δομή των bootstrap συνθετικών δειγμάτων. Μια ακόμα αιτία αποτελεί το πλήθος των προσομοιωμένων δειγμάτων. Η πρώτη τεχνική κατασκευάζει μικρότερο πάντοτε αριθμό από τη δεύτερη με αποτέλεσμα να μην διερευνάται επαρκώς η πολυπλοκότητα της εκάστοτε παραμέτρου. Στην πραγματικότητα, σημαντική διαφοροποίηση των bootstrap και jackknife εκτιμητριών προβλέπεται σε περιπτώσεις μη γραμμικών στατιστικών περιγραφικών μέτρων, δηλαδή μέτρων που εξαρτώνται μη γραμμικά από τις παρατηρήσεις, όπως π.χ. στην περίπτωση της διασποράς. Παρά το γεγονός αυτό, η έκδοση της τεχνική αναδειγματοληψίας αποκοπής d στοιχείων από το δείγμα καθιστά τις δύο τεχνικές ισοδύναμες.

Στη βιβλιογραφία η εφαρμογή της τεχνικής αναδειγματοληψίας επανάθεσης φαίνεται να επικρατεί σε σχέση με εκείνη της αποκοπής. Σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν πιο πάνω, κάτι τέτοιο είναι λογικό καθώς το μόνο κόστος που ενδεχομένως παρουσιάζει η πρώτη έναντι της δεύτερης αφορά τον υπολογιστικό χρόνο. Η ισχύς των σημερινών όμως ηλεκτρονικών υπολογιστών είναι τόσο μεγάλη ώστε να καθιστά την κατασκευή αρκετών χιλιάδων συνθετικών δειγμάτων υπόθεση μερικών μόνο δευτερολέπτων.

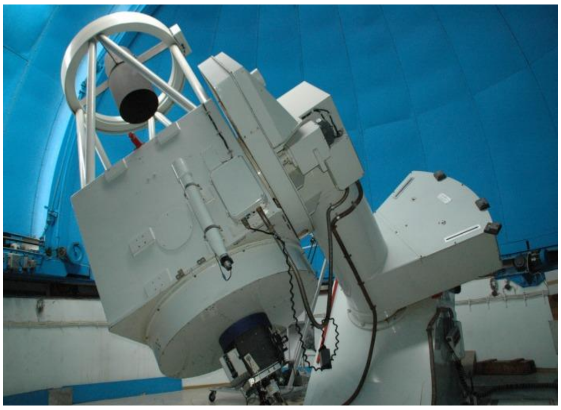
5. Νέοι Χρόνοι Ελαχίστων

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε 114 νέους χρόνους ελαχίστων που προήλθαν από δικές μας παρατηρήσεις και αφορούν δύο από τα συστήματα τα οποία πρόκειται να μελετηθούν στην παρούσα διδακτορική διατριβή. Πρόκειται για τα διπλά αστρικά συστήματα RT And και CG Cyg των οποίων τα διαγράμματα O-C θα εμπλουτιστούν με νεότερα δεδομένα ώστε να εξεταστεί η τρέχουσα μεταβολή της τροχιακής τους περιόδου. Παράλληλα, δίνονται ορισμένες πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο διεξαγωγής των παρατηρήσεων, της επεξεργασίας των εικόνων που ακολούθησε καθώς και σχετικά με τη μέθοδο προσδιορισμού των χρόνων των ελαχίστων που επιλέχθηκε. Με βάση την τεχνική αναδειγματοληψίας επανάθεσης θα εισαχθεί μια ακόμα μέθοδος προσδιορισμού η οποία θα δοκιμαστεί και θα εφαρμοστεί στις φωτομετρικές μας παρατηρήσεις.

5.1. Διεξαγωγή Παρατηρήσεων

Οι παρατηρήσεις των δύο επιλεγμένων συστημάτων έγιναν σε δύο αστεροσκοπεία. Το πρώτο από αυτά, ο ***Αστρονομικός Σταθμός Κρυονερίου Κορινθίας*** υπάγεται στο Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών και είναι εγκατεστημένο στο όρος Κυλλήνη, ύψους 1000 περίπου μέτρων (Σχήμα II.6). Ο αστρονομικός σταθμός ιδρύθηκε το 1972 ενώ η λειτουργία του ξεκίνησε το 1975 με την εγκατάσταση ενός κατοπτρικού τηλεσκοπίου τύπου Cassegrain της εταιρίας Grubb Parsons Co., Newcastle.

Το οπτικό σύστημα του τηλεσκοπίου αποτελείται από ένα παραβολοϊδές πρωτεύον κάτοπτρο, διαμέτρου 1.22 μέτρων και εστιακού λόγου f/3, και από ένα υπερβολοϊδές δευτερεύον, διαμέτρου 30.6 εκατοστών (Σχήμα II.6). Το υλικό των κατόπτρων είναι zerodur και η επιφάνεια τους έχει επίστρωση αλουμινίου. Ο εστιακός λόγος του τηλεσκοπίου είναι f/13, το οπτικό του πεδίο είναι διαμέτρου περίπου 40 arcmin και η κλίμακα εικόνας είναι 12.5"/mm. Το σύστημα οδήγησής του έχει ως βάση ένα τροποποιημένο ισημερινό στήριγμα ενώ η ακρίβεια στόχευσης αγγίζει το 1 arcmin.



Σχήμα II.6. Το κτίριο του Αστρονομικού Σταθμού Κρυονερίου Κορινθίας (αριστερά) στο οποίο έχει εγκατασταθεί το κατοπτρικό τηλεσκόπιο των 1.22 m τύπου Cassegrain, εξοπλισμένο με την κάμερα CH250 της εταιρείας Photometrics (δεξιά).

Μέχρι το 1998 το κύριο επιστημονικό όργανο παρατηρήσεων του τηλεσκοπίου ήταν ένα φωτοηλεκτρικό φωτόμετρο το οποίο διέθεται ένα φωτοπολλαπλασιαστή τύπου EMI 9789B με φωτοκάθοδο 13 στοιχείων VBCsSb των 10 mm και τροχό 8 φίλτρων. Από τη χρονιά εκείνη, το τηλεσκόπιο εφοδιάστηκε με μια ψηφιακή CCD κάμερα (μοντέλο CH250, series 200), 516×516 εικονοστοιχείων (pixels), της εταιρίας Photometrics.

Ο χρόνος αποφόρτισης (read-out/downloading time) της κάμερας (απλή ενίσχυση, GAIN 1) αγγίζει τα 9.6 sec για τη λειτουργία συγχώνευσης (binning) 1×1 (full camera) και μειώνεται στα 4.5 sec στη λειτουργία 2×2 (binned camera). Η ψύξη του οργάνου είναι θερμοηλεκτρική και βασίζεται σε ένα σύστημα Peltier τριών σταδίων με υδρόψυκτη υποστήριξη το οποίο διατηρεί τελικά την κάμερα στους -40°C ανεξάρτητα από τη θερμοκρασία περιβάλλοντος.

Δυστυχώς, ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα μιας CCD κάμερας αποτελεί η μείωση του οπτικού πεδίου του τηλεσκοπίου (Field Of View, FOV) στο οποίο είναι τοποθετημένη. Στην περίπτωσή μας, το πεδίο περιορίζεται μόλις στα 2.5'×2.5' κάτι το οποίο σημαίνει ότι η διακριτική ικανότητα του κάθε εικονοστοιχείου, διαστάσεων 24μm×24μm, αντιστοιχεί στα 0.30 arcsec. Η κάμερα διαθέτει επίσης περιστρεφόμενο σύστημα πέντε φίλτρων (U, B, V, R και I) τύπου Bessell, ο έλεγχος των οποίων πραγματοποιείται με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η κβαντική απόδοση του ανιχνευτή (Quantum Efficiency, QE) στα όρια οπτικού παράθυρου κυμαίνεται από 41% στα 400 nm (ιώδες, φίλτρο U) μέχρι 64% στην περιοχή των 650 nm (κόκκινο, φίλτρο R).

Από το 2009 μέχρι και σήμερα, η κάμερα της εταιρείας Photometrics αντικαταστάθηκε από μια νεότερη, το μοντέλο AP47p της εταιρείας Apogee, 1024×1024 εικονοστοιχείων και θερμοηλεκτρικού συστήματος ψύξης Peltier ενός σταδίου που επιφέρει μείωση της θερμοκρασίας μέχρι και 50°C κάτω από τη θερμοκρασία περιβάλλοντος. Χωρίς τη λειτουργία συγχώνευσης και με το υπάρχον καλωδιακό δίκτυο, η συγκεκριμένη κάμερα παρουσιάζει χρόνο αποφόρτισης που πλησιάζει τα 20 sec. Η διακριτική ικανότητα του κάθε εικονοστοιχείου, διαστάσεων 13μm×13μm, στο πεδίο των 2.5'×2.5' αντιστοιχεί στα 0.15 arcsec. Η κβαντική απόδοση του ανιχνευτή στα όρια οπτικού παράθυρου κυμαίνεται από 49% στα 400 nm μέχρι 91% στην περιοχή των 650 nm. Ας σημειώσουμε ακόμα ότι ο έλεγχος της κάμερας, όπως επίσης και της περιστροφής των φίλτρων, πραγματοποιείται πλέον με το λογισμικό πακέτο MaxIm (Maximum Image) v.4 το οποίο έχει διευκολύνει σημαντικά τη διαδικασία παρατήρησης.

Η αίθουσα ελέγχου του αστεροσκοπείου είναι εξοπλισμένη με δύο ηλεκτρονικούς υπολογιστές εκ των οποίων ο ένας ελέγχει τη λειτουργία της κάμερας μέσω του προγράμματος PMIS και την περιστροφή των φίλτρων, ενώ ο δεύτερος χρησιμοποιείται για την επεξεργασία και ανάλυση των εικόνων που ελήφθησαν με την κάμερα. Οι υπολογιστές είναι συγχρονισμένοι μεταξύ τους και συνδέονται σε τοπικό δίκτυο, ενώ ο κύριος υπολογιστής είναι εφοδιασμένος με κατάλληλα προγράμματα αυτοματοποίησης της παρατήρησης (scripts) καθώς και με σύστημα χρόνου το οποίο συντονίζεται από δορυφόρους (GPS σε κάρτα PCI).

Το ***Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο*** ήταν το δεύτερο παρατηρητήριο που χρησιμοποιήθηκε για την καταγραφή φωτομετρικών δεδομένων. Το αστεροσκοπείο αποτελεί θεμελιώδες μέρος της εργαστηριακής και ερευνητικής υποδομής του τμήματος Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου

Αθηνών και είναι εγκατεστημένο στην οροφή του οικείου τμήματος με συνολικό υψόμετρο το οποίο δεν ξεπερνά τα 300 μέτρα (Σχήμα ΙΙ.7). Η ίδρυσή του, το 1998, συμπίπτει με την εγκατάσταση ενός κατοπτρικού τηλεσκοπίου τύπου Cassegrain, μοντέλο CCT-16 της εταιρίας DFM Engineering Inc., U.S.A., ενώ η λειτουργία του ξεκίνησε επίσημα το 2000.

Το οπτικό σύστημα του τηλεσκοπίου περιλαμβάνει ένα παραβολοϊδές πρωτεύον κάτοπτρο, διαμέτρου 0.40 μέτρων και εστιακού λόγου f/3, και ένα υπερβολοϊδές δευτερεύον, κατασκευασμένα από υλικό pyrex, επαλουμινωμένα και επιστρωμένα με μονοξείδιο του πυριτίου για προστασία. Ο εστιακός λόγος του τηλεσκοπίου είναι f/8, ενώ εύκολα μειώνεται σε έναν ισοδύναμο f/5.1 με την παρεμβολή ενός κατάλληλου φακού γνωστού και ως *μειωτή εστιακής απόστασης (Focal Reducer, FR)*. Η στήριξη του τηλεσκοπίου είναι ισημερινή διχαλωτού τύπου και η ακρίβεια στόχευσης ξεπερνά το 1 arcsec (Σχήμα ΙΙ.7).

Σχήμα ΙΙ.7. Το κτίριο του Γεροσταθοπούλειου Πανεπιστημιακού Αστεροσκοπείου (αριστερά) στο οποίο έχει εγκατασταθεί το κατοπτρικό τηλεσκόπιο των 0.40 m τύπου Cassegrain, εξοπλισμένο με την κάμερα ST-10XMEI της εταιρείας SBIG (δεξιά).

Στο δυναμικό του αστεροσκοπείου περιλαμβάνονται τρεις συνολικά CCD κάμερες της εταιρείας SBIG. Το 1999 αγοράστηκε το μοντέλο ST-8XMEI, παράλληλης σύνδεσης, οπότε και χρησιμοποιήθηκε ως ο κύριος ανιχνευτής του αστεροσκοπείου μέχρι το 2006, για να αντικατασταθεί το επόμενο έτος από την ST-8XME η οποία υποστήριζε USB πλέον σύνδεση και αυτόματη οδήγηση (autoguiding). Το οπτικό πεδίο που επιτυγχανόταν με τις δύο πιο πάνω κάμερες ήταν 15'×10' και 24'×16' όταν γινόταν χρήση του μειωτή εστιακής απόστασης (FR). Η διάταξη του chip (ψηφίδας) του ανιχνευτή είχε μέγεθος 1530×1020 εικονοστοιχείων, γεγονός το οποίο οδηγούσε σε διακριτική ικανότητα για κάθε εικονοστοιχείο, διαστάσεων 9μm×9μm, ίση με 0.6 και 0.9 arcsec αντίστοιχα. Η κβαντική απόδοση του ανιχνευτή στα όρια του οπτικού παράθυρου κυμαινόταν από 45% στα 400 nm μέχρι 76% στην περιοχή των 650 nm και ο χρόνος αποφόρτισης, χωρίς τη λειτουργία συγχώνευσης, ήταν ίσος με 3.7 sec όταν γινόταν χρήση της USB σύνδεσης.

Από το 2009 μέχρι και σήμερα, το τηλεσκόπιο έχει εφοδιαστεί με την κάμερα ST-10XMEI, διάταξης 2184 × 1472 εικονοστοιχείων, το μέγεθος της οποίας έχει αυξήσει ελαφρώς το οπτικό πεδίο στα 16'×11' και στα 25'×17' με χρήση του μειωτή εστιακής απόστασης (FR). Επομένως, η επαγόμενη διακριτική ικανότητα του κάθε εικονοστοιχείου, διαστάσεων 7μm×7μm, είναι πλέον ίση με 0.4 και 0.7 arcsec αντίστοιχα. Η κβαντική απόδοση του ανιχνευτή στα όρια οπτικού παράθυρου αυξήθηκε σημαντικά και κυμαίνεται πλέον από 60% στα 400 nm μέχρι 86% στην περιοχή των 650 nm, ενώ ο χρόνος αποφόρτισης, χωρίς τη λειτουργία συγχώνευσης, επιβαρύνθηκε με 5 sec ακόμα εξαιτίας της σημαντικά βελτιωμένης ψηφιακής ανάλυσης. Ας σημειωθεί ότι το κοινό σύστημα ψύξης για όλες τις κάμερες του αστεροσκοπείου είναι θερμοηλεκτρικό Peltier ενός σταδίου που επιφέρει μείωση της θερμοκρασίας μέχρι και 35°C κάτω από τη θερμοκρασία περιβάλλοντος.

Η αίθουσα ελέγχου του αστεροσκοπείου είναι εξοπλισμένη με τρεις ηλεκτρονικούς υπολογιστές εκ των οποίων ο ένας ελέγχει τη λειτουργία του τηλεσκοπίου και του θόλου με κατάλληλο λογισμικό πλήρως αυτοματοποιημένης παρατήρησης, ο δεύτερος ελέγχει τη λειτουργία της κάμερας και της περιστροφής των φίλτρων μέσω του λογισμικού πακέτου `MaxIm` v.5, ενώ ο τρίτος χρησιμοποιείται για την επεξεργασία και ανάλυση των εικόνων που ελήφθησαν με την κάμερα. Αξίζει τέλος να προσθέσουμε πως ο υπολογιστής ελέγχου της κάμερας είναι εφοδιασμένος με σύστημα χρόνου το οποίο συντονίζεται μέσω διαδικτύου, καθώς και με το πρόγραμμα `THE SKY 6`, το οποίο διαθέτει χάρτες του ουρανού και βιβλιοθήκες αστρονομικών αντικειμένων, επιτρέπει τη γρήγορη στόχευση του τηλεσκοπίου και την επίβλεψη της θέσης του σε πραγματικό χρόνο.

5.2. Επεξεργασία Παρατηρήσεων

Το κύριο μέρος της επεξεργασίας των παρατηρήσεων πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του φωτομετρικού λογισμικού επεξεργασίας εικόνας `Muniwin` v.1.1.23 (Hroch 1998) σε περιβάλλον *Windows*. Το λογισμικό αυτό έχει στηριχθεί στις ρουτίνες ταυτόχρονης φωτομετρίας που χρησιμοποιεί το `DAOPHOT` για όλους τους αστέρες που εντοπίζονται στο πεδίο, είναι ευνοϊκό για την ανακάλυψη νέων μεταβλητών αστέρων, επιτρέπει τον προσδιορισμό του βέλτιστου διαφράγματος και είναι ιδιαίτερα φιλικό προς το χρήστη (http://c-munipack.sourceforge.net).

Η ραδιομετρική διόρθωση των εικόνων προηγήθηκε της φωτομετρικής ανάλυσης μέσω των αντίστοιχων λειτουργιών τις οποίες υποστηρίζει το `Muniwin`. Εξαίρεση αποτέλεσαν οι εικόνες που καταγράφηκαν στο αστεροσκοπείο του Κρυονερίου μέσω της κάμερας `CH250`, καθώς η κάρτα πληροφοριών (header) που τις συνόδευε δεν ήταν συμβατή με το φωτομετρικό πρόγραμμα. Στην περίπτωση αυτή, η διόρθωση πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια ενός κατάλληλου, πλήρως αυτοματοποιημένου, προγράμματος που αναπτύχθηκε από τον Γιάννη Γιαννικάκη και βελτιώθηκε αργότερα από τον Γιάννη Κοντογιάννη, υποψήφιους διδάκτορες του Πανεπιστημίου Αθηνών, σε γλώσσα `IDL` για το σκοπό αυτό.

Η ραδιομετρική διόρθωση των ψηφιακών εικόνων περιλαμβάνει την αφαίρεση της επίδρασης του προϋπάρχοντος φορτίου της κάμερας (συνιστώσα bias), την αφαίρεση της επίδρασης του θερμικού φορτίου (συνιστώσα dark) καθώς και τη διαίρεση με τις εικόνες που αποτυπώνουν την απόκριση και την ευαισθησία του κάθε εικονοστοιχείου (συνιστώσα flat field) εξαιτίας των ατελειών του οπτικού συστήματος. Το πρόγραμμα που συντάχθηκε εντοπίζει και απομακρύνει αυτόματα τις κορεσμένες εικόνες, ανάγει όλες τις απαιτούμενες διορθωτικές εικόνες στο χρόνο έκθεσης των παρατηρήσεών μας και τελικά παραθέτει τις διορθωμένες εικόνες ταξινομημένες σε φακέλους ανά φίλτρο, ενημερώνοντας το χρήστη σχετικά με τις λειτουργίες που πραγματοποιήθηκαν.

Εφόσον η συνιστώσα bias κάθε αστρονομικής εικόνας επιδρά κατά ισοδύναμο τρόπο στη συνιστώσα dark, η συνήθης τακτική που ακολουθείται είναι η λήψη μερικών εικόνων dark, ίδιου χρόνου έκθεσης με τις αρχικές, ώστε να γίνει άμεση η απομάκρυνσή τους. Η προσέγγιση αυτή υϊοθετήθηκε σε όλες τις παρατηρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο Γεροσταθοπούλειο αστεροσκοπείο. Η τακτική αυτή όμως προϋποθέτει πως ο χρόνος έκθεσης παραμένει σταθερός σε όλη τη διάρκεια της νυχτερινής παρατήρησης, υπόθεση η οποία δεν μπορεί να εξασφαλιστεί εύκολα σε προβληματικές περιπτώσεις ελαττωματικής οδήγησης και ενός εξαιρετικά μικρού αριθμού αστέρων σύγκρισης που συναντά κανείς σε περιορισμένα οπτικά πεδία. Σε όσες λοιπόν παρατηρήσεις πραγματοποιήθηκαν στο αστεροσκοπείο του Κρυονερίου, ακολουθήσαμε ειδική διαδικασία διόρθωσης των αρχικών παρατηρήσεων η οποία περιελάμβανε 5-10 εικόνες bias και 5-10 εικόνες dark των 5-10 min με κλειστό φυσικά το φωτοφράκτη της κάμερας ώστε το φωτοευαίσθητο chip της να μη δέχεται ακτινοβολία. Στη συνέχεια, αφαιρούσαμε την επίδρασή της συνιστώσας bias από τις εικόνες dark ώστε να ανάγουμε τις τελευταίες στο χρόνο έκθεσης των παρατηρήσεων με τη βοήθεια του προγράμματος που περιγράφηκε παραπάνω. Η αναγωγή αυτή γίνεται γνωρίζοντας ότι η συσχέτιση των counts που καταγράφει το όργανο είναι ισχυρά γραμμική με το χρόνο έκθεσης ο οποίος απαιτήθηκε για τη συγκεκριμένη εικόνα. Η μέση τους τιμή ήταν εκείνη η οποία τελικά αφαιρούνταν από τις αρχικές.

Όσον αφορά τις εικόνες flat field, λίγα λεπτά μετά τη δύση του Ήλιου σκοπεύαμε το τηλεσκόπιο στο ζενίθ (ή τουλάχιστον οπωσδήποτε 60^o πάνω από το φυσικό ορίζοντα), το ακινητοποιούσαμε και λαμβάναμε 5-10 εικόνες διάρκειας 2-3 sec για κάθε φίλτρο μόλις η καταγραφόμενη λαμπρότητα βρισκόταν στα 2/3 της δυναμικής περιοχής της κάμερας (πάνω από 20000 counts για την κάμερα CH250 του αστεροσκοπείου του Κρυονερίου και 40000 counts για όλες τις υπόλοιπες). Η επιλογή της περιοχής σκόπευσης βασίζεται στην ομοιογένεια και την έντονη λαμπρότητα του ουρανού ώστε να γίνουν με ακρίβεια αντιληπτές οι ατέλειες του οπτικού συστήματος (κάτοπτρα, κάμερα και φίλτρα). Η διάμεσος των καταγραφόμενων τιμών από τα εικονοστοιχεία για κάθε ομάδα εικόνων είναι εκείνη με την οποία διαιρούνταν τελικά οι εικόνες των αρχικών μας παρατηρήσεων.

5.3. Μια Νέα Μέθοδος Προσδιορισμού Χρόνων Ελαχίστων

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκαν οι δύο βασικότερες τεχνικές αναδειγματοληψίας που χρησιμοποιεί η Υπολογιστική Στατιστική ως οι ακριβέστερες μέθοδοι εκτίμησης τυπικών σφαλμάτων. Υϊοθετούμε στη συνέχεια την τεχνική αναδειγματοληψίας επανάθεσης με σκοπό τον προσδιορισμό του χρόνου ενός ελαχίστου ως μια τροποποιημένη έκδοση της μεθόδου της πολυωνυμικής παλινδρόμησης των Breinhorst et al. (1973). Η μέθοδος που παρουσιάζουμε απαρτίζεται από τρία διαδοχικά στάδια και δεν αποτελεί τίποτα περισσότερο από την εφαρμογή της αναδειγματοληψίας επανάθεσης στην περίπτωση της παραβολικής και της κυβικής παλινδρόμησης με σκοπό τον ακριβέστερο προσδιορισμό της θέσης των ακροτάτων τους.

Το ***πρώτο στάδιο*** εφαρμογής της νέας μεθόδου αποτελεί η εφαρμογή της παραδοσιακής κυβικής ελαχιστοτετραγωνικής παλινδρόμησης αποσκοπώντας στον υπολογισμό των αντίστοιχων εκτιμητριών των πολυωνυμικών συντελεστών όπως επίσης και των τυπικών τους σφαλμάτων. Στηριζόμενοι στα αποτελέσματα των Breinhorst et al. (1973), η κρίσιμη παράμετρος που προσδιορίζεται αρχικά είναι ο παράγοντας ασυμμετρίας ρ, μέγεθος το οποίο προσδιορίζεται μέσω της σχέσης (2.17).

Το ***δεύτερο στάδιο*** που ακολουθεί η μέθοδος αφορά τον προσδιορισμό του χρόνου του εξεταζόμενου ελαχίστου, δηλαδή της χρονικής θέσης που παρατηρείται το εκάστοτε ακρότατο. Εφόσον η ποσότητα ρ έχει υπολογιστεί μεγαλύτερη της τιμής 0.3, η μορφή του ελαχίστου κρίνεται μη συμμετρική και συνεπώς η κυβική παλινδρόμηση επιλέγεται για την περαιτέρω ανάλυση. Με την προϋπόθεση πως οι παρατηρήσεις $\boldsymbol{m} = \{m_i,\ i = 1,...,n\}$ έχουν δοθεί με τη μορφή μεγεθών, η χρονική θέση του ελαχίστου θα δίνεται μέσω της σχέσης (2.7) και (2.8), δηλαδή:

$$\boxed{T_C = \frac{-a_2(1-W)}{3a_3}} \quad \text{με} \quad W^2 = 1 - \frac{3a_1a_3}{a_2^2}.$$

Στην περίπτωση που η ποσότητα ρ έχει υπολογιστεί μικρότερη της τιμής 0.3, η μορφή του ελαχίστου κρίνεται επαρκώς συμμετρική ώστε η παραβολική παλινδρόμηση με ασφάλεια να εφαρμοστεί για την περαιτέρω επεξεργασία. Η χρονική τότε θέση του ελαχίστου προσδιορίζεται μέσω της πιο κάτω σχέσης:

$$\boxed{T_Q = -\frac{a_1}{2a_2}}. \tag{2.44}$$

Το ***τρίτο στάδιο*** της προτεινόμενης μεθόδου συμπίπτει με την εφαρμογή της αναδειγματοληψίας υπολοίπων, όπως ακριβώς περιγράφεται στην υποενότητα 4.5. Ας σημειωθεί πως η εναλλακτική τεχνική αναδειγματοληψίας ζευγών είναι απαγορευτική για την παρούσα κατάσταση καθώς οι παρατηρήσεις που επεξεργαζόμαστε προέρχονται από τις περιόδους εκλείψεων φωτομετρικών καμπυλών φωτός διπλών αστρικών συστημάτων, τυπικών δηλαδή χρονοσειρών. Αφού λοιπόν προσδιοριστούν τα υπόλοιπα $\boldsymbol{e} = \{e_i,\ i = 1,...,n\}$ με βάση τη σχέση (2.41) και κάνοντας χρήση των ελαχιστοτετραγωνικών εκτιμητριών (2.42), κατασκευάζουμε νέα συνθετικά $\boldsymbol{e^*}$ τα οποία μέσω της σχέσης (2.43) οδηγούν στη συνέχεια σε νέα δείγματα προσομοιωμένων παρατηρήσεων $\boldsymbol{m^*}$:

$$\boldsymbol{m}^* = \boldsymbol{ta} + \boldsymbol{e}^*, \tag{2.45}$$

όπου $\boldsymbol{t} = \{t_i^{\,j},\ i = 1,...,n$ και $j = 0,...,3(2)\}$ ο πίνακας σχεδιασμού και $\boldsymbol{a} = \{a_j,\ j = 1,...,3(2)\}$ το διάνυσμα των ελαχιστοτετραγωνικών πολυωνυμικών συντελεστών. Έπειτα, η πολυωνυμική παλινδρόμηση επαναλαμβάνεται για κάθε συνθετικό δείγμα ζευγών (t_i, m_i^*) και από εκεί λαμβάνονται όλες οι B εκτιμήτριες των πολυωνυμικών συντελεστών $\boldsymbol{a^*}$ ώστε να προσδιοριστούν οι αντίστοιχοι B χρόνοι ελαχίστου $\boldsymbol{T^*} = \{T_k^*,\ k = 1,...,B\}$. Ο προβλεπόμενος χρόνος ελαχίστου T_{BR} από τη μέθοδο που μόλις παρουσιάστηκε αντιστοιχεί στον μέσο T_B^* των χρόνων T_k^* ενώ το τυπικό του σφάλμα $\sigma(T_{BR})$ αντιστοιχεί στην τυπική τους απόκλιση $sd(T_B^*)$, δηλαδή:

$$\boxed{T_{BR} = \frac{\sum_{k=1}^{B} T_k^*}{B}} \quad (2.46) \quad \text{και} \quad \boxed{\sigma(T_{BR}) = \left[\frac{\sum_{k=1}^{B}\left(T_k^* - T_{BR}\right)^2}{B-1}\right]^{1/2}}. \quad (2.47)$$

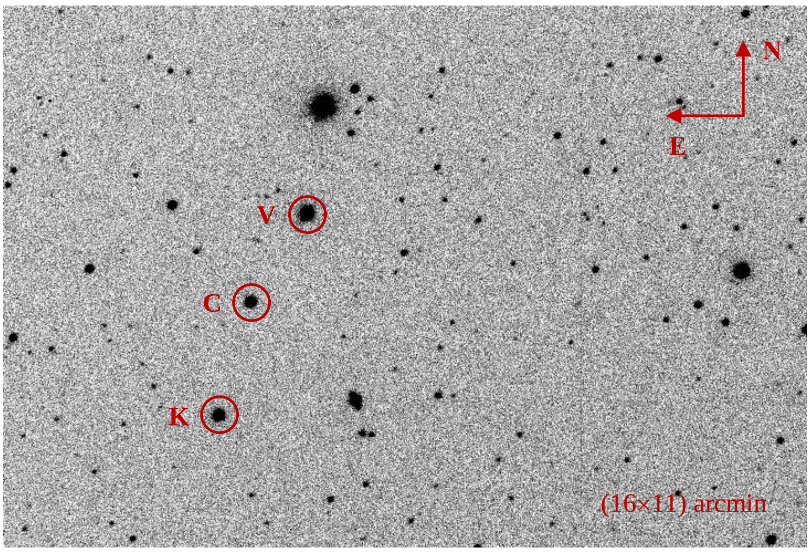
Εκτιμούμε πως η παρουσία της νέας αυτής τεχνικής μέσα στο δυναμικό των ποικίλων μεθόδων προσδιορισμού του χρόνου ελαχίστων μπορεί να είναι πολύτιμη για δύο θεμελιώδεις λόγους. Ο *πρώτος* αφορά το πλήθος των παρατηρήσεων που τίθενται προς επεξεργασία κατά τον προσδιορισμό της θέσης ενός ελαχίστου και ο οποίος βρίσκεται κατά κανόνα στη δυναμική περιοχή εφαρμογής των τεχνικών αναδειγματοληψίας ($n \in [10,30]$). Ο *δεύτερος* αφορά τη μορφή της κατανομής που περιγράφει το χρόνο ενός ελαχίστου. Όπως αναλυτικά τεκμηριώθηκε στην υποενότητα 2.2, αν και οι πολυωνυμικοί συντελεστές αναμένεται να ακολουθούν την Κανονική κατανομή, κάτι τέτοιο δε συμβαίνει στην περίπτωση του χρόνου ελαχίστων. Η μέθοδος που μόλις περιγράφηκε, ως απαραμετρική τεχνική, δεν υπόκειται σε περιορισμούς κανονικότητας και ομοσκεδαστικότητας και συνεπώς είναι κατά πολύ ακριβέστερη.

5.4. Μακροχρόνια Μελέτη των Συστημάτων RT And και CG Cyg

Οι αστέρες τους οποίους αποφασίσαμε να παρατηρήσουμε για τον προσδιορισμό νέων ελαχίστων αποτελούν συστήματα των οποίων οι μεταβολές της τροχιακής τους περιόδου πρόκειται να μελετηθούν στο τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής. Έτσι, μας δόθηκε η ευκαιρία να προσθέσουμε μερικά ακόμα σημεία στα αντίστοιχα διαγράμματα O-C, τα πλέον πρόσφατα σε σχέση με όλα εκείνα τα οποία έχουν ήδη δημοσιευτεί, αλλά και να εφαρμόσουμε μερικές από τις μεθόδους προσδιορισμού του χρόνου των ελαχίστων συμπεριλαμβανομένης και εκείνης που περιγράφηκε στην προηγούμενη υποενότητα.

Τα συστήματα RT And (F9V+K2V) και CG Cyg (K0V+ K5V), φωτομετρικά, είναι τύπου Algol και ανήκουν στην ομάδα των βραχυπερίοδων χρωμοσφαιρικά δραστήριων αστέρων του τύπου RS CVn. Η παρουσία ψυχρών κηλίδων στη φωτόσφαιρα των μελών τους οδηγεί σε καμπύλες φωτός οι οποίες χαρακτηρίζονται από συνεχείς μεταβολές των μεγίστων τους αλλά και σε παραμορφωμένα ελάχιστα, καθώς η έκταση των κηλίδων αλλά και η μικρότερη θερμοκρασία τους σε σχέση με την μέση φωτοσφαιρική αποτελούν παράγοντες οι οποίοι μπορούν και διαταράσσουν τη συμμετρία μεταξύ ανοδικού και καθοδικού κλάδου (π.χ. Popper & Ulrich 1977, Budding & Zeilik 1987). Η παρουσία τους γίνεται πιο εμφανής στα δευτερεύοντα κατά κύριο λόγο ελάχιστα, καθώς τα πρωτεύοντα μέλη είναι και εκείνα που παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη δραστηριότητα. Η συνεχής παρακολούθηση της φωτομετρικής συμπεριφοράς των δύο συστημάτων ξεκίνησε τον Αύγουστο του 2005 και ολοκληρώθηκε τον ίδιο μήνα του 2010 σε όλα τα διαθέσιμα φίλτρα (U, B, V, R, I) και κάτω από ιδιαίτερα ικανοποιητικές ατμοσφαιρικές συνθήκες οι οποίες τελικά οδήγησαν σε μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων εξαιρετικά καλής ποιότητας.

Ως αστέρας σύγκρισης για το πρώτο από τα δύο συστήματα, RT And, χρησιμοποιήθηκε ο αστέρας HD 236062 του οποίου η σταθερότητα επιβεβαιώθηκε κατά τη διάρκεια του προγράμματος διατηρώντας τον αστέρα HD 236063 ως αστέρα ελέγχου (Σχήμα ΙΙ.8). Το σύστημα αυτό παρουσιάζει ένα συμμετρικό πρωτεύον ελάχιστο σε αντίθεση με το δευτερεύον του οποίου η μορφή έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές λόγω της σημαντικής επιρροής του στις φωτομετρικές επιλύσεις. Τόσο το βάθος του όσο και ο βαθμός παραμόρφωσης φαίνεται να διαφοροποιείται ανάλογα με το φίλτρο στο οποίο παρατηρείται (π.χ. Arevalo et al. 1995, Pribulla et al. 2000, Kjurkchieva et al. 2001). Ειδικότερα στα μεγαλύτερα μήκη κύματος (φίλτρα V, R, I) το ελάχιστο είναι βαθύτερο και παρουσιάζει τμήμα σταθερής λαμπρότητας, παραπέμποντας έτσι σε ολική έκλειψη. Στα μικρότερα μήκη κύματος (φίλτρα U, B), αντίθετα, η έκλειψη εμφανίζεται μερική και σε σημαντικό βαθμό ασύμμετρη. Οι παρατηρούμενες ματαβολές της λαμπρότητας εξηγούνται ικανοποιητικά από δύο εκτενείς κηλίδες τοποθετημένες αντιδιαμετρικά στη φωτόσφαιρα του πρωτεύοντα αστέρα και κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα δύο μέλη του συστήματος. Η θερμοκρασία τους υπολογίζεται κατά 1170 K περίπου μικρότερη της μέσης φωτοσφαιρικής του πρωτεύοντα αστέρα, ενώ η έκτασή τους πιστεύεται ότι καταλαμβάνει το 6.4% της συνολικής του επιφάνειας (Kjurkchieva et al. 2001).



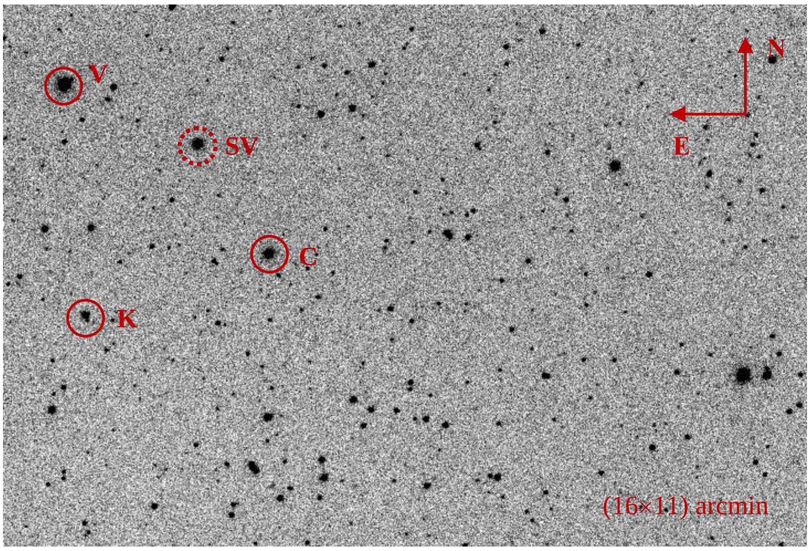
Σχήμα ΙΙ.8. Το οπτικό πεδίο του συστήματος RT And (V) όπως παρατηρήθηκε από το Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο τη χρονική περίοδο 2007-2010 χωρίς τη χρήση μειωτή εστιακής απόστασης (FR). Διακρίνεται ο αστέρας σύγκρισης HD 236062 (C) και ο αστέρας ελέγχου HD 236063 (K).

Συνολικά κατασκευάστηκαν πέντε πλήρεις καμπύλες φωτός οι οποίες επιβεβαιώνουν τις πιο πάνω διαπιστώσεις (Σχήματα ΙΙ.10, ΙΙ.11), ενώ συλλέχθηκαν 55 συνολικά ελάχιστα εκ των οποίων τα 22 ήταν πρωτεύοντα και τα υπόλοιπα 33 δευτερεύοντα. Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα χαρακτηριστικά, τον τρόπο παρατήρησης του συστήματος RT And όπως και ορισμένες λεπτομέρειες που αφορούν τους χρόνους ελαχίστων παρατίθενται ακολούθως:

Διπλό Σύστημα Αστέρων RT And				
Ουρανογραφικές Συντεταγμένες	$\alpha = 23^h11^m10^s$		$\delta = +53^o01'33''$	
Φαινόμενο Μέγεθος	*B = 9.52 mag*		*V = 9.03 mag*	
Εφημερίδα	***2452500.3510 + 0.62892863 · E (HJD)***[1]			
Αστέρας Σύγκρισης	*HD 236062*			
	$\alpha = 23^h11^m18^s$	$\delta = +52^o59'59''$	*V = 10.12 mag*	
Αστέρας Ελέγχου	*HD 236063*			
	$\alpha = 23^h11^m23^s$	$\delta = +52^o57'57''$	*V = 9.78 mag*	
Χρόνοι Ελαχίστων				
Πρωτεύον Ελάχιστο	*Συμμετρικό*			
Χρόνοι Πρωτεύοντος Ελαχίστου	*11 (Α.Σ.Κ.)*[2]		*11 (Γ.Π.Α.)*[3]	
Δευτερεύον Ελάχιστο	*Μη Συμμετρικό*			
Χρόνοι Δευτερεύοντος Ελαχίστου	*9 (Α.Σ.Κ.)*[2]		*24 (Γ.Π.Α.)*[3]	
Κατανομή Χρόνων Ελαχίστων σε Φίλτρα				
U	**B**	**V**	**R**	**I**
5	13	16	12	9

Ερχόμενοι τώρα στο δεύτερο σύστημα, CG Cyg, ως αστέρας σύγκρισης χρησιμοποιήθηκε ο αστέρας GSC 2696-2207, ο οποίος αποδείχθηκε φωτομετρικά σταθερός επιλέγοντας ως κύριο αστέρα ελέγχου τον GSC 2696-2383 και κατά διαστήματα τον GSC 2696-2815 (Σχήμα ΙΙ.9). Το σύστημα αυτό παρουσιάζει ένα απόλυτα συμμετρικό πρωτεύον ελάχιστο και ένα αρκετά παραμορφωμένο δευτερεύον το οποίο σε καμία περίπτωση δεν χαρακτηρίζεται από τις ιδιομορφίες που παρατηρούνται στο αντίστοιχο ελάχιστο του συστήματος RT And (π.χ. Kjurkchieva et al. 2003). Αντίθετα, εκείνο που έχει απασχολήσει κατα περιόδους την ερευνητική κοινότητα είναι η σχετικά ακανόνιστη μεταβολή της λαμπρότητάς του στην περιοχή των μεγίστων και η οποία, όπως εκτιμάται, αποδίδεται τόσο σε ενδογενή φαινόμενα σχετιζόμενα με τη φωτοσφαιρική και χρωμοσφαιρική δραστηριότητα των δύο μελών (Afsar et al. 2004) όσο και στην πιθανή μεταβλητότητα του αστέρα GSC 2696-2622, καθώς ο τελευταίος έχει πολλές φορές επιλεχθεί ως αστέρας σύγκρισης του CG Cyg (π.χ. Yu 1923, Dapergolas et al. 1988).

Όσον αφορά το πρώτο από τα δύο σενάρια, οι παρατηρούμενες ματαβολές της λαμπρότητας εξηγούνται ικανοποιητικά από δύο εκτενείς κηλίδες τοποθετημένες στο φωτοσφαιρικό ημισφαίριο του πρωτεύοντα αστέρα που δεν αντικρύζει τον ψυχρότερο συνοδό του. Η θερμοκρασία τους υπολογίζεται κατά 940 K περίπου μικρότερη της μέσης φωτοσφαιρικής του πρωτεύοντα αστέρα, ενώ η έκτασή τους πιστεύεται ότι καταλαμβάνει το 6.4% της συνολικής του επιφάνειας (Kjurkchieva et al. 2003). Αντίθετα, το δεύτερο σενάριο, αν και υπαρκτό, απαιτεί μεταβολές λαμπρότητας που να ξεπερνούν τα 0.1 mag και οι οποίες δεν έχουν μέχρι τώρα παρατηρηθεί (Heckert & Zeilik 1991).



Σχήμα ΙΙ.9. Το οπτικό πεδίο του συστήματος CG Cyg (V) όπως παρατηρήθηκε από το Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο τη χρονική περίοδο 2008-2010 χωρίς τη χρήση μειωτή εστιακής απόστασης (FR). Διακρίνεται ο αστέρας σύγκρισης GSC 2696-2207 (C), ο αστέρας ελέγχου GSC 2696-2383 (K), καθώς και ο αστέρας GSC 2696-2696 (SV) ο οποίος πιθανολογείται μεταβλητός.

Πέντε πλήρεις καμπύλες φωτός κατασκευάστηκαν και το σύστημα CG Cyg με τη συλλογή 59 ελαχίστων εκ των οποίων τα 37 ήταν πρωτεύοντα και τα 22 δευτερεύοντα. Οι παρατηρήσεις μας, απαλλαγμένες από τον κίνδυνο πιθανής μεταβλητότητας του αστέρα GSC 2696-2622, επιβεβαιώνουν σε μεγάλο βαθμό τις εποχικές διακυμάνσεις λαμπρότητας που συντελούνται στην περιοχή των μεγίστων (Σχήματα ΙΙ.12, ΙΙ.13). Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα χαρακτηριστικά, τον τρόπο παρατήρησης του συστήματος CG Cyg όπως και ορισμένες λεπτομέρειες που αφορούν τους χρόνους ελαχίστων παρατίθενται ακολούθως:

Διπλό Σύστημα Αστέρων CG Cyg			
Ουρανογραφικές Συντεταγμένες	$\alpha = 20^h58^m13^s$	$\delta = +35^o10'30''$	
Φαινόμενο Μέγεθος	*B = 10.94 mag*	*V = 9.73 mag*	
Εφημερίδα	***2452500.5158 + 0.6311453 · E (HJD)*** [(1)]		
Αστέρας Σύγκρισης	*GSC 2696-2207*		
	$\alpha = 20^h57^m55^s$	$\delta = +35^o07'15''$	*V = 10.53 mag*
Αστέρας Ελέγχου	*GSC 2696-2383*		
	$\alpha = 20^h58^m12^s$	$\delta = +35^o06'13''$	*V = 11.70 mag*
Χρόνοι Ελαχίστων			
Πρωτεύον Ελάχιστο	*Συμμετρικό*		

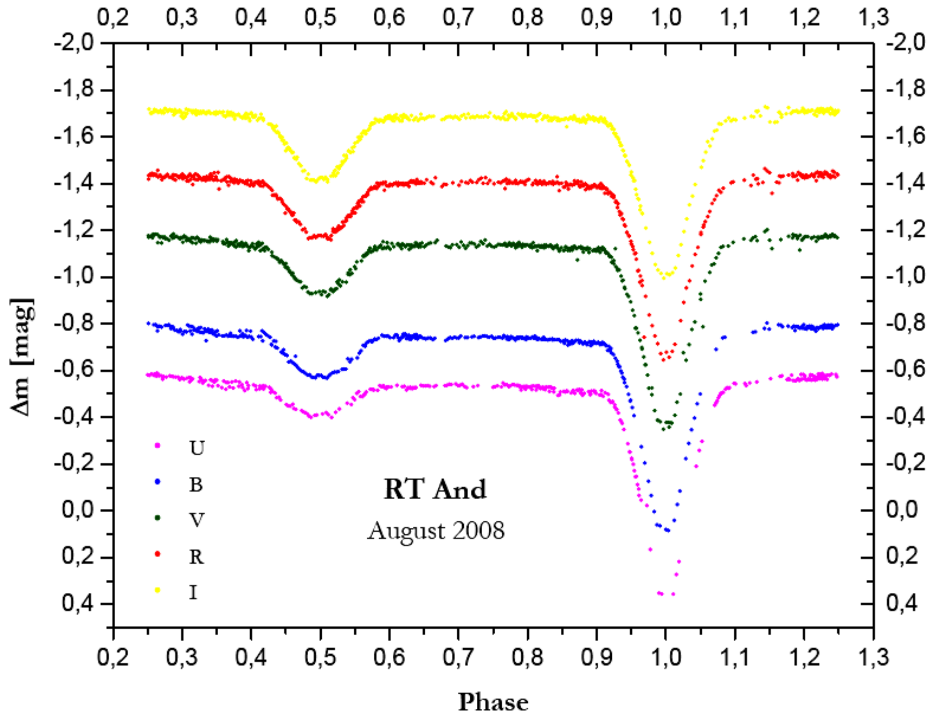
Χρόνοι Πρωτεύοντος Ελαχίστου		*4 (Α.Σ.Κ.)*[2]		*33 (Γ.Π.Α.)*[3]
Δευτερεύον Ελάχιστο		*Μη Συμμετρικό*		
Χρόνοι Δευτερεύοντος Ελαχίστου		*1 (Α.Σ.Κ.)*[2]		*21 (Γ.Π.Α.)*[3]
Κατανομή Χρόνων Ελαχίστων σε Φίλτρα				
U	**B**	**V**	**R**	**I**
0	15	13	16	15

[1] Επιλεγμένη από τους Kreiner et al. 2001 (Kreiner 2004).
[2] Αστρονομικός Σταθμός Κρυονερίου (Α.Σ.Κ.).
[3] Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο (Γ.Π.Α.).

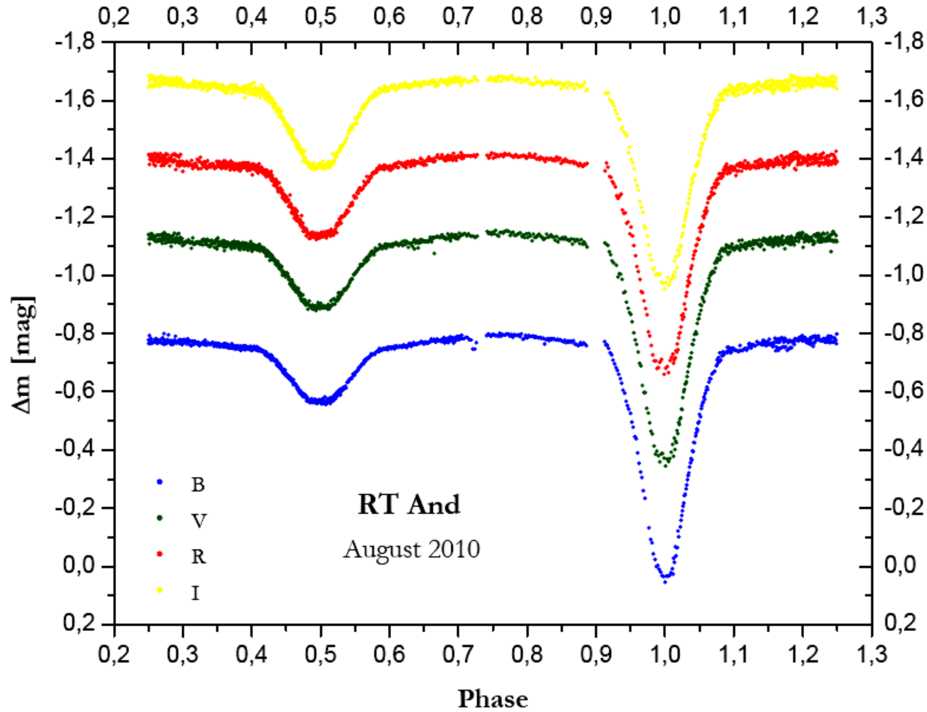
Ο αστέρας GSC 2696-2622 (α = 20^{h}58^{m}02^s, δ = +35^{o}09΄19΄΄) ως υποψήφιος μεταβλητός (NSV 25409), παρατηρήθηκε εντατικά για τρία χρόνια, καλύπτοντας μια χρονική περίοδο που ξεκίνησε τον Ιούλιο του 2008 και ολοκληρώθηκε τον Αύγουστο του 2010. Η φωτομετρική του συμπεριφορά αξίζει ιδιαίτερης προσοχής καθώς, εάν χρησιμοποιηθεί ως αστέρας σύγκρισης του συστήματος CG Cyg, μπορεί να οδηγήσει όχι μόνο σε λανθασμένες εκτιμήσεις σχετικά με τα φωτομετρικά στοιχεία του τελευταίου αλλά και σε ανακριβή προσδιορισμό του χρόνου ελαχίστων. Οι επιπτώσεις που μπορεί να επιφέρουν οι υποθετικές ενδογενείς μεταβολές της λαμπρότητας αφορούν κυρίως τη θέση και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των κηλίδων που φέρουν τα μέλη του συστήματος, καθώς και τη μακροχρόνια φωτομετρική του συμπεριφορά η οποία λειτουργεί πολλές φορές ως διαγνωστικό μέσο μεταβολών του μαγνητικού πεδίου των μελών.

Εφόσον ο αστέρας GSC 2696-2622 βρίσκεται μέσα στο οπτικό πεδίο του συστήματος CG Cyg, τόσο ο αστέρας σύγκρισης όσο και ο αστέρας ελέγχου ήταν κοινοί, δηλαδή ο GSC 2696-2207 και ο GSC 2696-2383 αντίστοιχα (Σχήμα ΙΙ.9). Πρόκειται για έναν σχετικά λαμπρό αστέρα (B = 10.77 mag, V = 10.39 mag) με δείκτη χρώματος (B-V) = 0.38 mag, ο οποίος αντιστοιχεί σε ενεργό θερμοκρασία 6820 K περίπου (Flower 1996). Ο αστέρας παρατηρήθηκε στα φίλτρα B, V, R, I με χρόνους έκθεσης 80, 35, 35 και 25 sec αντίστοιχα στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, ενώ σε ειδικές και μόνο περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά το φίλτρο B. Με τον τρόπο αυτό ο χρόνος ολοκλήρωσης μεταξύ των παρατηρήσεων περιορίστηκε από 180 sec σε μόλις 80 sec με αποτέλεσμα σημαντική βελτίωση της χρονικής τους ανάλυσης. Το μέσο φωτομετρικό σφάλμα για κάθε νύχτα παρατηρήσεων άγγιζε τα 0.003 mag στα φίλτρα B, V και τα 0.004 mag για τα φίλτρα R, I και κρίνεται αρκετά ικανοποιητικό, καθώς διακυμάνσεις μικρότερες από τις πιο πάνω τιμές θεωρούνται αμελητέες για τους στόχους της φωτομετρικής μας μελέτης.

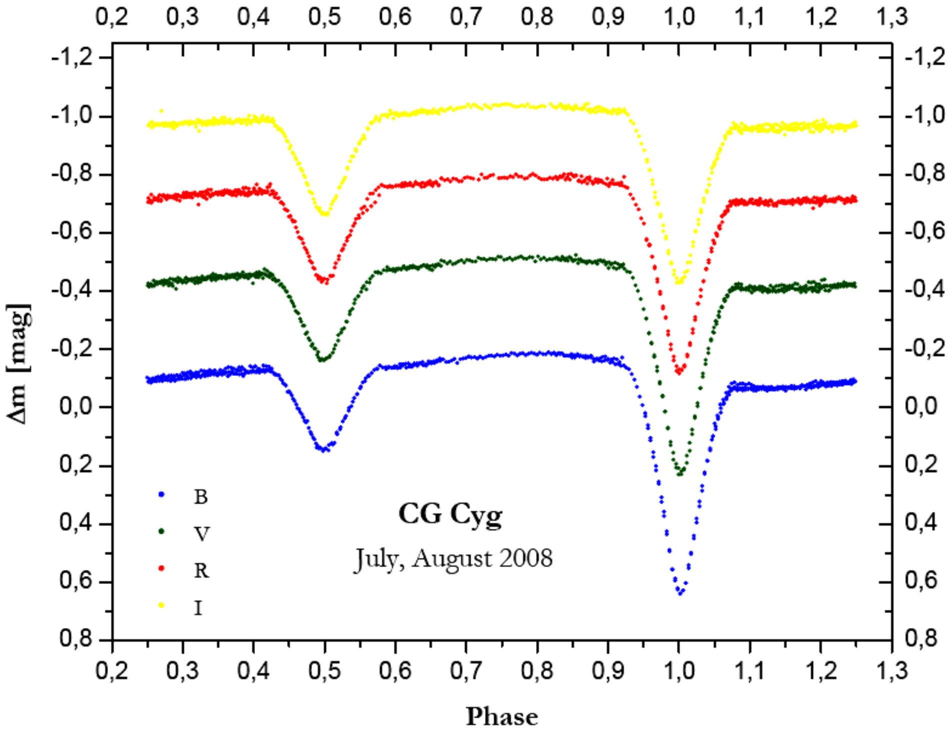
Πρέπει αρχικά να επισημάνουμε ότι το εύρος μεταβολής της λαμπρότητας του αστέρα GSC 2696-2622 αποδείχθηκε μεταβλητό για κάθε φίλτρο (Σχήμα ΙΙ.14). Στα μικρότερα μήκη κύματος (φίλτρα B, V) παρατηρήθηκαν μεταβολές μεταξύ 0.04 και 0.08 mag ενώ στα μεγαλύτερα μήκη κύματος (φίλτρα R, I) οι μεταβολές δεν ξεπέρασαν τα 0.05 mag. Με μια πρώτη ματιά, ο αστέρας φαίνεται ημιπεριοδικός και για το λόγο αυτό διερευνήθηκε η παρουσία περιοδικοτήτων με τη βοήθεια ανάλυσης Fourier σε παρατηρήσεις που αφορούσαν μόνο το φίλτρο B λόγω της μεγαλύτερης ακρίβειας και ευκρίνειας του σήματος (Σχήμα ΙΙ.15).



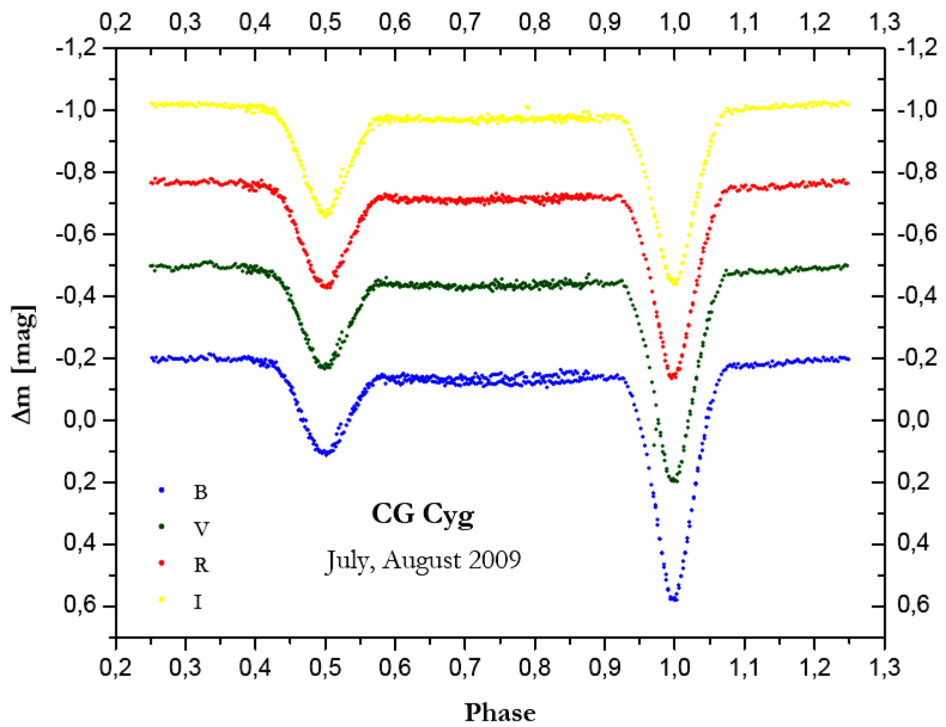
Σχήμα ΙΙ.10. Πλήρεις καμπύλες φωτός του συστήματος RT And σε πέντε φωτομετρικά φίλτρα (U, B, V, R, I) από παρατηρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στον Αστρονομικό Σταθμό Κρυονερίου Κορινθίας κατά τη χρονική περίοδο 21-24 Αυγούστου 2008. Τα μέγιστα παρουσιάζονται σχεδόν επίπεδα και με άνισα μεταξύ τους πλάτη. Το ιδιάζον δευτερεύον ελάχιστο εμφανίζεται ως ρηχό και έντονα ασύμμετρο στα φίλτρα U, B ενώ στα φίλτρα V, R, I παρατηρείται συμμετρικό με σχεδόν επίπεδο τμήμα που παραπέμπει σε ολική έκλειψη.



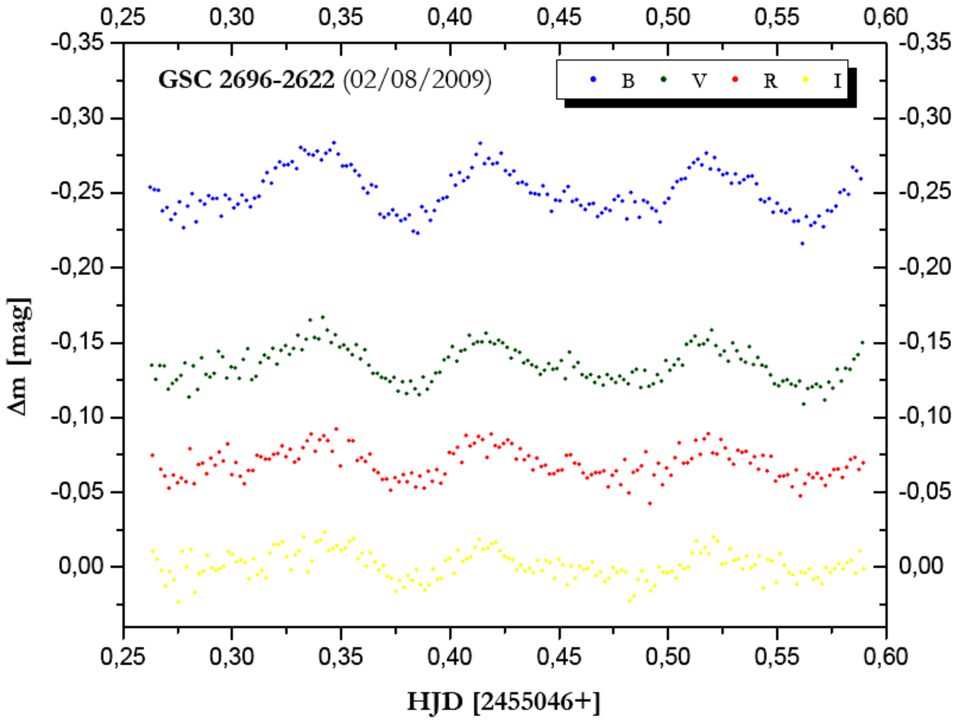
Σχήμα ΙΙ.11. Πλήρεις καμπύλες φωτός του συστήματος RT And σε τέσσερα φωτομετρικά φίλτρα (B, V, R, I) από παρατηρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο κατά τη χρονική περίοδο 7-13 Αυγούστου 2010. Τα μέγιστα παρουσιάζονται πλέον ισοϋψή με έντονο καμπυλόμορφο σχήμα, ενώ τα ιδιόμορφα χαρακτηριστικά του δευτερεύοντος ελαχίστου διατηρούνται.



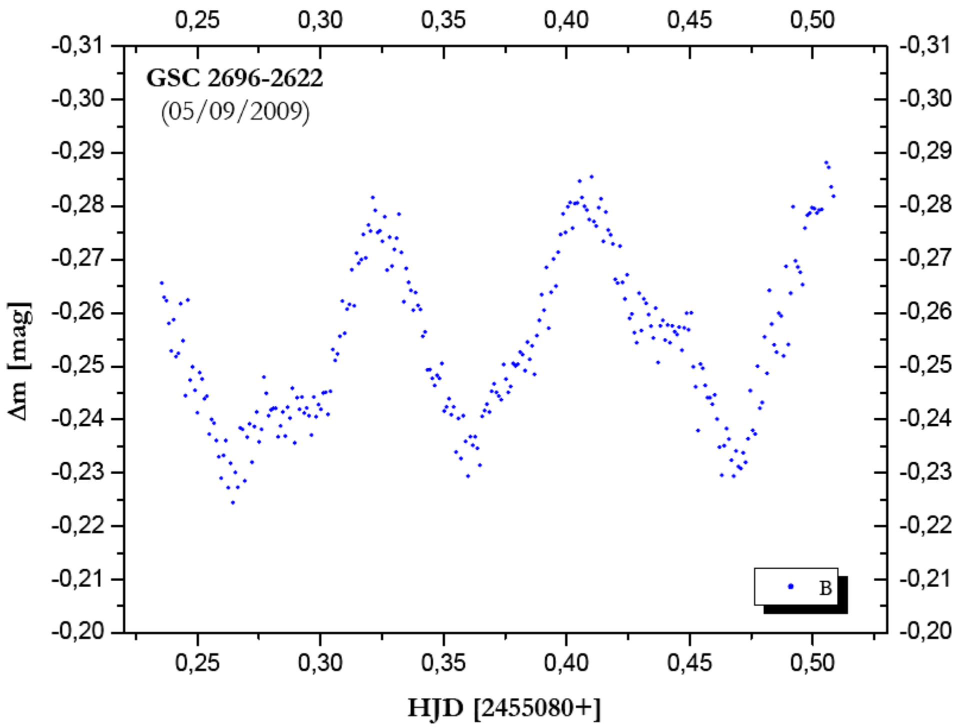
Σχήμα ΙΙ.12. Πλήρεις καμπύλες φωτός του συστήματος CG Cyg σε τέσσερα φωτομετρικά φίλτρα (B, V, R, I) από παρατηρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο κατά τη χρονική περίοδο 23-29 Ιουλίου και 3 Αυγούστου 2008. Τα μέγιστα χαρακτηρίζονται από έντονα καμπυλόμορφο σχήμα και με άνισα μεταξύ τους πλάτη. Τα ελάχιστα παρουσιάζονται ισοβαθή σε όλα τα φίλτρα με το δευτερεύον να εμφανίζει μικρή ασυμμετρία.



Σχήμα ΙΙ.13. Πλήρεις καμπύλες φωτός του συστήματος CG Cyg σε τέσσερα φωτομετρικά φίλτρα (B, V, R, I) από παρατηρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο κατά τη χρονική περίοδο 31 Ιουλίου, 1 και 2 Αυγούστου 2009. Τα μέγιστα χαρακτηρίζονται σχεδόν επίπεδα και με πλάτη τα οποία διαφέρουν πλέον κατα πολύ λιγότερο μεταξύ τους. Οι ιδιότητες των ελαχίστων διατηρούνται.

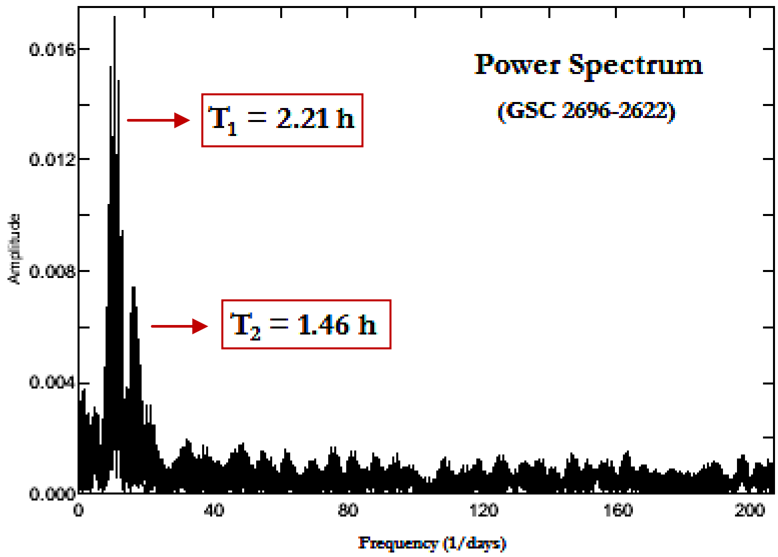


Σχήμα ΙΙ.14. Καμπύλες φωτός του αστέρα GSC 2696-2622 σε τέσσερα φωτομετρικά φίλτρα (B, V, R, I) από παρατηρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο στις 2 Αυγούστου 2009. Οι μεταβολές της λαμπρότητας στο Β φίλτρο ξεπερνούν τα 0.06 mag απομακρύνοντας κάθε αμφιβολία σχετικά με τη μεταβλητότητά του. Το εύρος μεταβολής φθίνει προς τα μεγαλύτερα μήκη κύματος αγγίζοντας τα 0.04 mag στο φίλτρο Ι.



Σχήμα ΙΙ.15. Καμπύλη φωτός του αστέρα GSC 2696-2622 στο φίλτρο Β από παρατηρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο στις 5 Σεπτεμβρίου 2009. Η αυξημένη χρονική ανάλυση (χρόνος έκθεσης ίσος με 80 sec) και η βελτιωμένη φωτομετρική ακρίβεια (μέσο φωτομετρικό σφάλμα ίσο με 0.00346 mag) επιβεβαιώνει το εύρος μεταβολής στα 0.065 mag περίπου και ορισμένες λεπτομερέστερες δομές στη χρονοσειρά. Σημαντικές διαφοροποιήσεις σε σχέση με την καμπύλη φωτός του Αυγούστου δεν παρατηρούνται.

Το πρόγραμμα `Period04` (v.1.0) ήταν εκείνο που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση των παρατηρήσεων λόγω της εξαιρετικής του ακρίβειας σε δεδομένα που δεν ισαπέχουν χρονικά, της μεγάλης του απήχησης στην αστροσεισμολογία, καθώς και λόγω της ευκολίας χειρισμού από το χρήστη (Lenz & Breger 2005). Επίσης, περιορίσαμε τη μελέτη στις παρατηρήσεις αποκλειστικά της περιόδου Ιουλίου και Αυγούστου 2008 ώστε να μην παρουσιάζονται μεγάλα χρονικά κενά τα οποία απορροφούν σημαντικό μέρος της ισχύος των πραγματικών περιοδικοτήτων. Η ανάλυση οδήγησε σε ένα φάσμα ισχύος όπου δύο ήταν οι κυρίαρχες συχότητες. Η πρώτη από αυτές βρέθηκε ίση με f_1 = (10.8581 ± 0.0009) d^{-1} και αντιστοιχεί σε περίοδο T_1 = (2.21033 ± 0.00019) h, ενώ η δεύτερη ίση με f_2 = (16.4439 ± 0.0024) d^{-1} και αντιστοιχεί σε περίοδο T_2 = (1.45951 ± 0.00021) h (Nanouris & Antonopoulou 2010). Αν και ανιχνεύονται μερικές ακόμα συχνότητες, σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε να τις αποδεχθούμε γιατί είτε βρίσκονται πολύ κοντά στο επίπεδο θορύβου είτε δεν έχουν φυσικό νόημα (Σχήμα ΙΙ.16). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η τρίτη σε ισχύ συχνότητα f_3 = (2.610 ± 0.004) d^{-1} η οποία αντιστοιχεί σε περίοδο T_3 = (9.195 ± 0.014) h, στο χρονικό δηλαδή παράθυρο της νυχτερινής παρατήρησης.



Σχήμα ΙΙ.16. Φάσμα ισχύος που προέκυψε από την ανάλυση Fourier παρατηρήσεων του αστέρα GSC 2696-2622 στο φίλτρο B για την περίοδο Ιουλίου και Αυγούστου 2008. Με βέλη έχουν απεικονιστεί οι δύο κυρίαρχες συχνότητες που αντιστοιχούν στις περιόδους T_1 = (2.21033 ± 0.00019) h και T_2 = (1.45951 ± 0.00021) h.

Συμπερασματικά, μπορούμε με βεβαιότητα να πούμε πως ο αστέρας GSC 2696-2622 είναι μεταβλητός με το μέγιστο πλάτος να παρατηρείται στο φίλτρο B. Η μόνη πηγή που μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία σχετικά με το ενδεχόμενο μεταβλητότητας του GSC 2696-2622 προέρχεται από τους Heckert και Zeilik (1991) οι οποίοι παρατήρησαν τον αστέρα στο φίλτρο V για 1.5 h περίπου. Παρά το μικρό χρονικό εύρος παρατηρήσεων, εκτιμούν πως ο αστέρας είναι τελικά μεταβλητός με πλάτη της τάξης των 0.04 mag, χωρίς όμως να είναι ικανά να εξηγήσουν τις διακυμάνσεις εκτός ελαχίστων που κατά καιρούς παρατηρήθηκαν στο σύστημα CG

Cyg (π.χ. Beckert et al. 1989, Beckert et al. 1991, Dapergolas et al. 1989, Dapergolas et al. 1991). Οι Heckert και Zeilik (1991) κατέληξαν συνεπώς στο συμπέρασμα της ενδογενούς μεταβλητότητας των μελών του συστήματος CG Cyg.

Οι προσωπικές μας εκτιμήσεις, χωρίς να απορρίπτουν ολοκληρωτικά το πιο πάνω σενάριο, υποστηρίζουν την απουσία ταχέων μεταβολών στο σύστημα CG Cyg καθώς σε καμία καμπύλη φωτός του πενταετούς προγράμματος δεν εμφανίστηκαν. Αντίθετα, οι διακυμάνσεις του αστέρα GSC 2696-2622 στα φίλτρα B, V ξεπερνούν τα 0.05 mag και είναι ικανές να ερμηνεύσουν όλες τις αλλοιώσεις που καταγράφηκαν στις καμπύλες φωτός παλαιότερων μελετών. Σχετικά τώρα με τη φυσική του προέλευση, πιστεύουμε πως το είδος των μεταβολών που εκδηλώνει ο GSC 2696-2622 παραπέμπει σε δ Scuti παλλόμενους μεταβλητούς (ενδεχομένως και κατακλυσμικούς αστέρες). Δυστυχώς, χωρίς διαθέσιμη φασματοσκοπική μελέτη δεν μπορούμε με ασφάλεια να υποστηρίξουμε την άποψη αυτή.

5.5. Ο Κώδικας `BootMin`

Ο κώδικας `BootMin` αποτελεί υλοποίηση της μεθόδου προσδιορισμού του χρόνου ενός ελαχίστου η οποία παρουσιάστηκε στην υποενότητα 5.3. Έχει αναπτυχθεί στη γλώσσα `R` (v.2.6.1) η οποία παρέχει ισχυρές δυνατότητες σε προβλήματα Στατιστικής και εύκολα μπορεί κανείς να εγκαταστήσει από το διαδίκτυο (http://www.r-project.org/). Η συγκεκριμένη γλώσσα υποστηρίζει την ενσωμάτωση πρόσθετων πακέτων τα οποία αφορούν εξειδικευμένες αριθμητικές τεχνικές στη στατιστική μοντελοποίηση, προτέρημα το οποίο συμβάλλει καθοριστικά στην οργανωμένη ανάπτυξη ενός κώδικα με πολύπλοκη δομή. Ο κώδικας `BootMin` είναι ***πλήρως αυτοματοποιημένος*** και *δεν απαιτεί από τον χρήστη καμία οικειότητα με τη συγκεκριμένη γλώσσα προγραμματισμού*. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα Ι της παρούσας διατριβής όπου περιγράφονται αναλυτικά οι λειτουργίες του κώδικα, καθώς και αρκετές λεπτομέρειες που αφορούν τον τρόπο χειρισμού του.

Σε γενικές γραμμές, ο κώδικας ακολουθεί πιστά τα τρία στάδια της μεθόδου με την προσθήκη μιας εμβόλιμης ρουτίνας η οποία περιλαμβάνει τους απαραίτητους εκείνους χειρισμούς ώστε η ακρίβεια των σφαλμάτων που αντιστοιχούν στις εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων να είναι η μέγιστη δυνατή. Σύμφωνα λοιπόν με όσα ειπώθηκαν στην υποενότητα 2.2, μετά την ολοκλήρωση του δεύτερου βήματος και συνεπώς της προσδιορισμού της θέσης του εξεταζόμενου ελαχίστου, ο κώδικας αναλαμβάνει τη μετάθεση της χρονικής θέσης όλων των διαθέσιμων παρατηρήσεων κατά την τιμή του χρόνου ελαχίστου που προσδιορίστηκε με βάση τις σχέσεις (2.7) και (2.44) για την περίπτωση ενός μη συμμετρικού και ενός συμμετρικού ελαχίστου αντίστοιχα. Στη συνέχεια, η ελαχιστοτετραγωνική διαδικασία προσαρμογής των πολυωνύμων επαναλαμβάνεται στα τροποποιημένα πλέον δεδομένα. Η κίνηση αυτή εξασφαλίζει το απαραίτητο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που απαιτούνται ώστε η διαδικασία να είναι ακριβής. Η εκτιμήτρια του σφάλματος της θέσης του εκάστοτε ελαχίστου θα δίνεται τότε από τη σχέση (2.15) είτε αυτή αντιστοιχεί σε ακρότατο παραβολής είτε σε ακρότατο κυβικού πολυωνύμου:

$$\boxed{\sigma(T_C) = \sigma(T_Q) = \frac{\sigma(a_1)}{2a_2}}.$$

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, ο κώδικας είναι απόλυτα αυτοματοποιημένος και συνεπώς δεν απαιτεί από το χρήστη να παρεμβαίνει και να εκτελεί τις απαραίτητες εκείνες τροποποιήσεις ώστε να προσαρμόζεται στις ανάγκες και τις ιδιομορφίες του εκάστοτε ελαχίστου. Η ***είσοδος*** περιλαμβάνει λοιπόν αποκλειστικά τη δήλωση του αρχείου στο οποίο έχουν αποθηκευθεί οι παρατηρήσεις και ζητείται στην πρώτη γραμμή του κώδικα. Ο αριθμός των συνθετικών δειγμάτων `nrep` που αναλαμβάνει να προσομοιώσει η αναδειγματοληψία επανάθεσης αποτελεί επίσης μέρος των επιλογών του χρήστη με προκαθορισμένη τιμή τις 1000 υλοποιήσεις. Το αρχείο θα πρέπει να περιέχει δύο στήλες εκ των οποίων η πρώτη αναφέρεται στους χρόνους των παρατηρήσεων σε ηλιοκεντρικές Ιουλιανές ημέρες και η δεύτερη οφείλει να περιέχει τα αντίστοιχα φαινόμενα μεγέθη. Η ονομασία του αρχείου θα πρέπει επίσης να συνοδεύεται με την κατάληξη που εκφράζει τη μορφή του (συνήθως *.dat* ή *.txt*).

Η ***έξοδος*** περιλαμβάνει τόσο αριθμητικά όσο και γραφικά αποτελέσματα που προέρχονται από την ανάλυση των συνθετικών δειγμάτων τα οποία η τεχνική αναδειγματοληψίας επανάθεσης παράγει. Παράλληλα, προσδιορίζονται τα αντίστοιχα μεγέθη που προβλέπει η παραδοσιακή ελαχιστοτετραγωνική παλινδρόμηση. Ο χρόνος υλοποίησης εξαρτάται άμεσα από το πλήθος των δεδομένων, το ζητούμενο πλήθος προσομοιωμένων δειγμάτων καθώς και από τις τεχνικές προδιαγραφές του εκάστοτε ηλεκτρονικού υπολογιστή που αναλαμβάνει να περατώσει τη διαδικασία. Σε γενικές πάντως γραμμές, τυπικές περιπτώσεις επεξεργασίας 1000 συνθετικών δειγμάτων σπάνια ξεπερνούν τα 30 sec. Αναλυτικότερα, ο κώδικας τυπώνει τις ακόλουθες ποσότητες:

- `rho`: η παράμετρος ασυμμετρίας ρ.
- `bootmin`: ο χρόνος ελαχίστου που προβλέπει η νέα μέθοδος T_{BR}.
- `se_bootmin`: το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα του χρόνου ελαχίστου $\sigma(T_{BR})$.
- `lsmin`: ο χρόνος ελαχίστου που προβλέπει η παραδοσιακή μέθοδος T_C ή T_Q.
- `se_lsmin`: το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα του χρόνου ελαχίστου $\sigma(T_C)$ ή $\sigma(T_Q)$.
- `bootRMSE`: η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος *RMSE* της νέας μεθόδου.
- `se_bootRMSE`: το τυπικό σφάλμα της ρίζας του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.
- `lsRMSE`: η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος της παραδοσιακής μεθόδου.
- `bootR2`: ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 προσαρμογής της νέας μεθόδου.
- `se_bootR2`: το τυπικό σφάλμα του συντελεστή προσδιορισμού της νέας μεθόδου.
- `lsR2`: ο συντελεστής προσδιορισμού προσαρμογής της παραδοσιακής μεθόδου.
- `mcerror`: το σφάλμα που προκύπτει από τη Monte Carlo διαδικασία.

Το σφάλμα Monte Carlo αφορά τη διαδικασία της τυχαίας δειγματοληψίας και καθορίζει τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια της τεχνικής. Στην πραγματικότητα, το σφάλμα αυτό εκτιμάται ως η τυπική απόκλιση των εκτιμητριών της εξεταζόμενης παραμέτρου που προκύπτουν από ένα σχετικά μεγάλο αριθμό εφαρμογών της τεχνικής στην ίδια ομάδα δεδομένων. Με τον τρόπο αυτό αποκαλύπτεται ο βαθμός αδυναμίας που συνοδεύει τον τρόπο δειγματοληψίας και τις επιπτώσεις που τελικά έχει κατά τον προσδιορισμό των ζητούμενων εκτιμητριών. Η εκτίμηση του σφάλματος Monte Carlo αποτελεί διαδικασία ιδιαίτερα χρονοβόρα, καθώς μια επίπονη υπολογιστική τεχνική επαναλαμβάνεται αρκετές φορές. Στην περίπτωση του κώδικα `BootMin` δόθηκε έμφαση στην αποσυμφόρηση της διαδικασίας αυτής ώστε να μην επιβαρυνθεί ακόμα περισσότερο ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος. Το μητρώο στο οποίο βρίσκονται αποθηκευμένες οι εκτιμήτριες του χρόνου ελαχίστου των επιμέρους συνθετικών δειγμάτων $\{T_k^*,\ k = 1,...,B\}$ διασπάται σε μητρώα μικρότερων διαστάσεων. Σε κάθε επιμέρους μητρώο προσδιορίζεται ο μέσος και τελικά η εκτίμηση του σφάλματος Monte Carlo προκύπτει από την τυπική τους απόκλιση. Πρακτικά, η διαδικασία αυτή είναι ισοδύναμη με την πολλαπλή εφαρμογή της μεθόδου τόσες φορές όσες και το πλήθος των επιμέρους μητρώων.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα συνοδεύονται, όπως ήδη αναφέρθηκε, και από μια ομάδα οκτώ συνολικά διαγραμμάτων τα οποία τυπώνονται σε δύο ξεχωρσιτές κάρτες των τεσσάρων διαγραμμάτων. Η πρώτη κάρτα αφορά τη στατιστική μελέτη των αρχικών δεδομένων με την εφαρμογή ορισμένων διαγνωστικών εργαλείων παραβίασης των υποθέσεων της ομοσκεδαστικότητας και κανονικότητας, ενώ η δεύτερη αφορά κυρίως τη στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή της αναδειγματοληψίας υπολοίπων. Περισσότερες λεπτομέρειες παρατίθενται ακολούθως:

- Η *πρώτη κάρτα γραφημάτων* περιλαμβάνει την ταυτόχρονη απεικόνιση του εξεταζόμενου ελαχίστου και του πολυωνύμου παλινδρόμησης που έχει προέλθει από τις ελαχιστοτετραγωνικές εκτιμήτριες (a), το διάγραμμα που απεικονίζει τα υπόλοιπα μεταξύ παρατηρούμενων και προβλεπόμενων από το μοντέλο παλινδρόμησης τιμών $\{e_i,\ i = 1,...,n\}$ ως εποπτικό διαγνωστικό μέσο ετεροσκεδαστικότητας (b), το ιστόγραμμα συχνοτήτων των υπολοίπων το οποίο οφείλει να προσεγγίζει την κατανομή της εξαρτημένης μεταβλητής, δηλαδή του χρόνου ελαχίστου (c), καθώς και το διάγραμμα συσχέτισης υπολογιζόμενων και θεωρητικών ποσοστιαίων σημείων που αντιστοιχούν στην Κανονική κατανομή (d) ως εποπτικό διαγνωστικό μέσο απόκλισης από την κανονικότητα (Σχήμα ΙΙ.17).

- Η *δεύτερη κάρτα γραφημάτων* περιλαμβάνει την ταυτόχρονη απεικόνιση του εξεταζόμενου ελαχίστου και των πολυωνύμων παλινδρόμησης που έχουν προέλθει από τις ελαχιστοτετραγωνικές εκτιμήτριες των προσομοιωμένων δειγμάτων (a), το ιστόγραμμα συχνοτήτων του χρόνου ελαχίστου, όπως προκύπτει από τις εκτιμήτριες των επιμέρους συνθετικών δειγμάτων $\{T_k^*,\ k = 1,...,B\}$, το οποίο περιγράφει στην ουσία την κατανομή του (δειγματικού) μέσου χρόνου ελαχίστου (b), το ιστόγραμμα συχνοτήτων της ρίζας του μέσου τετραγωνικού σφάλματος *RMSE* που προκύπτει κατά τη διαδικασία της πολυωνυμικής παλινδρόμησης σε κάθε προσομοιωμένο δείγμα (c), καθώς και το ιστόγραμμα συχνοτήτων του συντελεστή προσδιορισμού R^2 (d) που προκύπτει εξαιτίας της ίδιας διαδικασίας προσομοίωσης (Σχήμα ΙΙ.18).

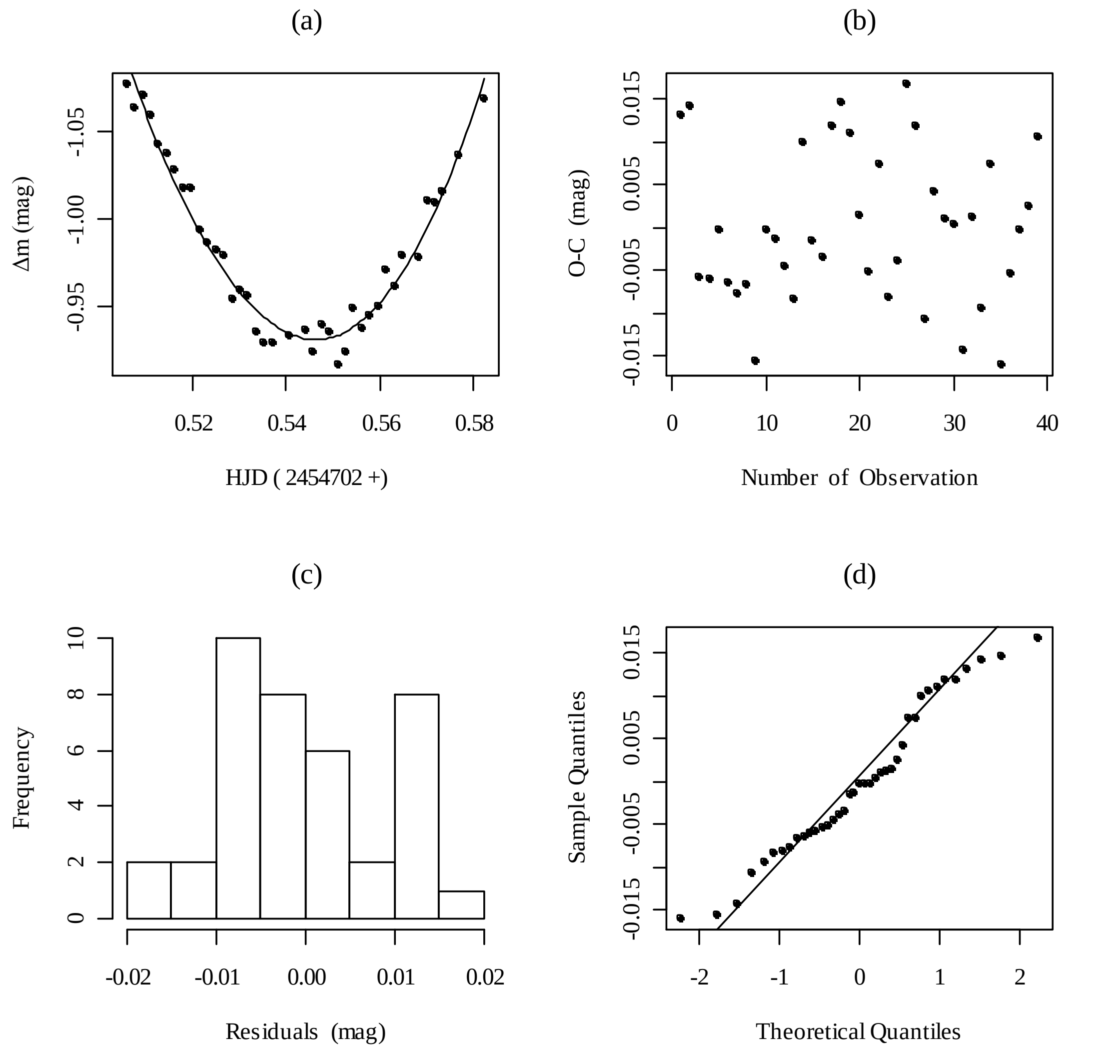
Παραθέτουμε στη συνέχεια τους χρόνους των 114 ελαχίστων όπως αυτοί προσδιορίστηκαν με βάση τη νέα μέθοδο που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 5.3 και η οποία ενσωματώνει την αναδειγματοληψία υπολοίπων στη μέθοδο της ελαχιστοτετραγωνικής παλινδρόμησης. Ο προσδιορισμός τους πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του κώδικα `BootMin`, οι δυνατότητες του οποίου περιγράφηκαν στην υποενότητα 5.5. Στην περίπτωση που ο αναγνώστης δεν είναι εξοικειωμένος με τα μέτρα αξιολόγησης που τυπώνει ο κώδικας (π.χ. *RMSE* και R^2), τον παραπέμπουμε στην υποενότητα 3.5 του επόμενου κεφαλαίου όπου περιγράφονται αναλυτικά. Σημειώνουμε επίσης ότι η εφαρμογή της τεχνικής έγινε κάτω από τις οδηγίες των van't Veer (1973) και Breinhorst et al. (1973) ώστε να απομονώσουμε την περιοχή του εξεταζόμενου ελαχίστου που παρουσιάζει τη μέγιστη δυνατή συμμετρία. Χρησιμοποιήθηκαν συνεπώς παρατηρήσεις οι οποίες βρίσκονταν αυστηρά μέσα στην περιοχή του ± 0.05 της φάσης περιμετρικά του ελαχίστου με την επιπρόσθετη προϋπόθεση ότι η κυρτότητα του ελαχίστου μέσα στην περιοχή αυτή να διατηρείται:

Διπλό Σύστημα Αστέρων RT And								
Αστρονομικός Σταθμός Κρυονερίου Κορινθίας								
Νύχτα	***Φίλτρο***	***Τύπος***	***N*** [(1)]	***ρ***	***MPE*** [(2)] ***[mag]***	T_{BR} ***[HJD]***	$\sigma(T_{BR})$ ***[HJD]***	***MCE*** [(3)] ***[HJD]***
23/08/05	B	S	97	0.44	0.00122	2453606.321348	0.000693	0.0000670
16/08/06	U	P	17	2.54	0.00186	2453964.496300	0.000279	0.0000212
16/08/06	B	P	25	2.35	0.00157	2453964.496480	0.000249	0.0000099
16/08/06	V	P	26	4.89	0.00180	2453964.495668	0.000262	0.0000188
08/11/06	U	S	31	0.70	0.00134	2454048.456251	0.000666	0.0000409
08/11/06	B	S	41	0.27	0.00137	2454048.456942	0.000321	0.0000121
08/11/06	V	S	39	1.46	0.00162	2454048.458765	0.000924	0.0000333
09/11/06	U	P	12	0.13	0.00121	2454049.403074	0.000133	0.0000103
09/11/06	B	P	18	2.67	0.00129	2454049.403531	0.000204	0.0000142
09/11/06	V	P	26	1.75	0.00145	2454049.403260	0.000182	0.0000152
22/08/08	U	P	13	1.78	0.00126	2454701.602998	0.001064	0.0000660
22/08/08	B	P	14	0.64	0.00125	2454701.600881	0.000422	0.0000210
22/08/08	V	P	19	0.28	0.00165	2454701.600310	0.000472	0.0000239
22/08/08	R	P	21	0.75	0.00166	2454701.601210	0.000740	0.0000380
22/08/08	I	P	20	1.34	0.00240	2454701.601237	0.000476	0.0000278
23/08/08	U	S	27	2.08	0.00143	2454702.542523	0.000878	0.0000962
23/08/08	B	S	45	1.95	0.00149	2454702.545902	0.000664	0.0000300
23/08/08	V	S	39	1.41	0.00212	2454702.546237	0.000712	0.0000522
23/08/08	R	S	48	1.06	0.00221	2454702.545471	0.000740	0.0000417
23/08/08	I	S	43	0.74	0.00294	2454702.544237	0.000780	0.0000802
Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο								
26/07/07	V	P	74	0.13	0.00292	2454308.520649	0.000075	0.0000049
18/08/07	B	S	152	0.82	0.00284	2454331.476539	0.000491	0.0000522
20/08/07	V	S	122	0.45	0.00357	2454333.363075	0.000320	0.0000230
20/08/07	R	S	125	0.87	0.00506	2454333.362904	0.000357	0.0000296
29/08/07	V	P	55	0.58	0.00413	2454342.482773	0.000222	0.0000212
29/08/07	R	P	54	1.26	0.00474	2454342.482413	0.000257	0.0000090
30/08/07	V	S	46	0.77	0.00392	2454343.423970	0.001062	0.0000832
30/08/07	R	S	48	0.27	0.00440	2454343.425866	0.000417	0.0000345
30/08/07	I	S	50	0.47	0.00482	2454343.425496	0.000622	0.0000356
07/09/07	V	S	107	1.51	0.00303	2454351.601890	0.000472	0.0000393
07/09/07	R	S	105	1.57	0.00374	2454351.602759	0.000487	0.0000580
28/09/09	B	P	30	0.12	0.00355	2455103.485671	0.000092	0.0000078
28/09/09	V	P	37	0.09	0.00483	2455103.485760	0.000080	0.0000055
28/09/09	R	P	36	0.95	0.00489	2455103.486073	0.000312	0.0000122

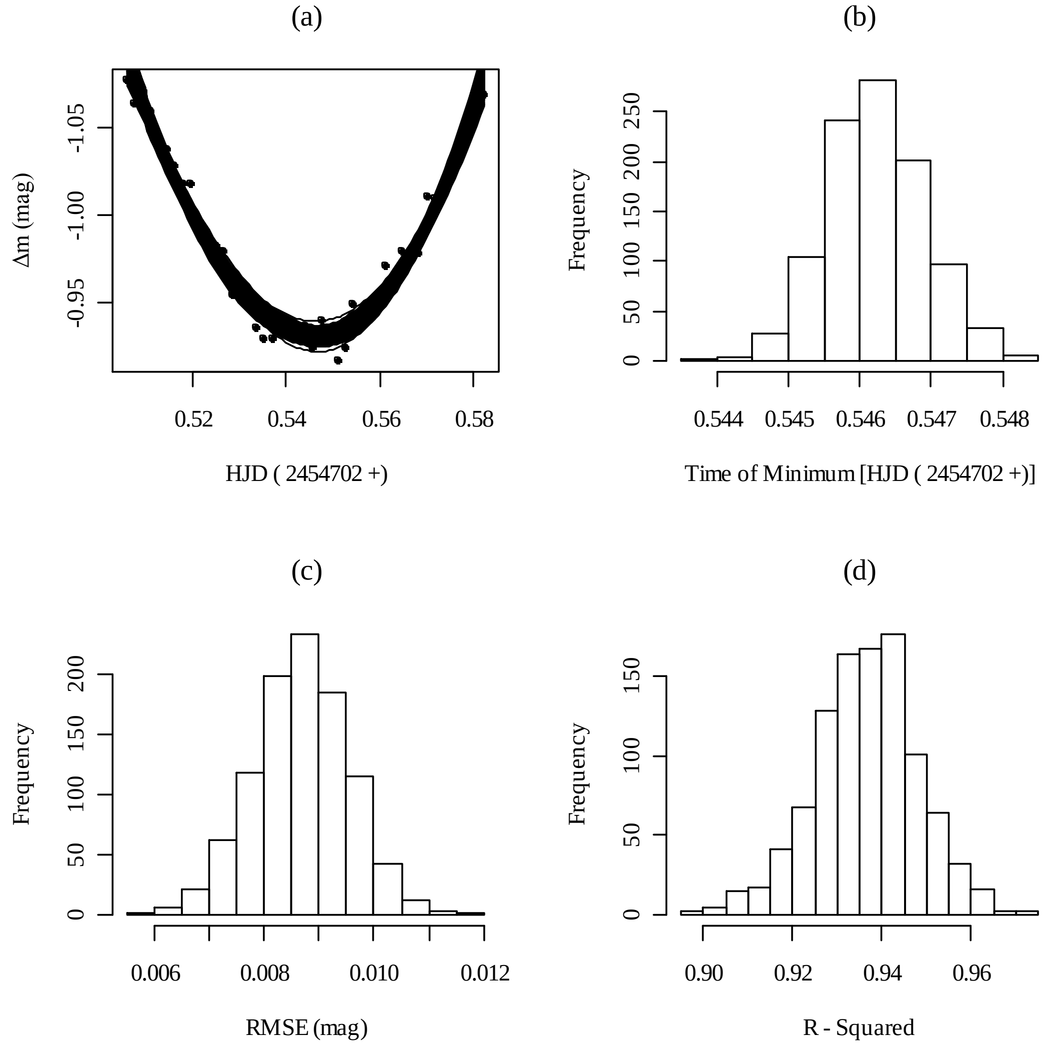
28/09/09	I	P	33	0.24	0.00410	2455103.485981	0.000130	0.0000120
29/09/09	B	S	72	1.13	0.00407	2455104.429435	0.000376	0.0000102
29/09/09	V	S	76	0.84	0.00597	2455104.429736	0.000532	0.0000224
29/09/09	R	S	77	0.62	0.00694	2455104.429717	0.000192	0.0000073
29/09/09	I	S	81	0.12	0.00699	2455104.429563	0.000146	0.0000051
07/08/10	B	S	34	0.76	0.00238	2455416.377821	0.000378	0.0000127
07/08/10	V	S	35	2.51	0.00398	2455416.376692	0.000496	0.0000129
07/08/10	R	S	35	1.90	0.00430	2455416.377251	0.000576	0.0000306
07/08/10	I	S	34	0.46	0.00517	2455416.378089	0.000410	0.0000214
10/08/10	B	S	28	0.50	0.00324	2455419.521859	0.000829	0.0000516
10/08/10	V	S	28	0.04	0.00470	2455419.521967	0.000419	0.0000348
10/08/10	R	S	28	1.20	0.00515	2455419.520969	0.000941	0.0000507
10/08/10	I	S	32	0.31	0.00553	2455419.521889	0.000837	0.0000539
12/08/10	B	S	48	1.18	0.00312	2455421.410566	0.000386	0.0000192
12/08/10	V	S	47	0.99	0.00460	2455421.410046	0.000322	0.0000147
12/08/10	R	S	47	0.54	0.00502	2455421.409319	0.000562	0.0000483
12/08/10	I	S	48	0.40	0.00545	2455421.409880	0.000437	0.0000356
13/08/10	B	P	20	2.99	0.00347	2455422.353633	0.000254	0.0000073
13/08/10	V	P	25	0.56	0.00564	2455422.352547	0.000432	0.0000401
13/08/10	R	P	25	1.00	0.00626	2455422.352281	0.000559	0.0000637
13/08/10	I	P	28	0.24	0.00653	2455422.352864	0.000175	0.0000170
Διπλό Σύστημα Αστέρων CG Cyg								
Αστρονομικός Σταθμός Κρυονερίου Κορινθίας								
Νύχτα	***Φίλτρο***	***Τύπος***	***$N^{(1)}$***	***ρ***	***$MPE^{(2)}$ [mag]***	***T_{BR} [HJD]***	***$\sigma(T_{BR})$ [HJD]***	***$MCE^{(3)}$ [HJD]***
23/08/05	R	S	48	0.22	0.00320	2453606.597600	0.000277	0.0000165
02/08/07	R	P	33	1.97	0.00491	2454316.321188	0.000153	0.0000101
02/08/07	I	P	37	0.91	0.00610	2454316.320791	0.000293	0.0000248
03/08/07	R	P	35	0.67	0.00378	2454317.583238	0.000153	0.0000127
03/08/07	I	P	29	0.45	0.00505	2454317.583398	0.000207	0.0000166
Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο								
26/07/08	B	S	16	0.71	0.00269	2454674.496162	0.000537	0.0000500
26/07/08	V	S	15	0.04	0.00280	2454674.495671	0.000214	0.0000215
26/07/08	R	S	17	0.54	0.00328	2454674.495256	0.000528	0.0000288
26/07/08	I	S	17	1.13	0.00342	2454674.495180	0.000595	0.0000423
29/07/08	B	P	17	0.09	0.00265	2454677.337534	0.000216	0.0000189
29/07/08	V	P	18	0.34	0.00308	2454677.337531	0.000602	0.0000066
29/07/08	R	P	18	0.39	0.00378	2454677.336965	0.000606	0.0000606
29/07/08	I	P	19	0.60	0.00428	2454677.337338	0.000643	0.0000329
03/08/08	B	P	17	0.15	0.00278	2454682.386711	0.000213	0.0000092
03/08/08	V	P	16	0.05	0.00329	2454682.386522	0.000203	0.0000140
03/08/08	R	P	16	0.39	0.00405	2454682.386225	0.000604	0.0000282
03/08/08	I	P	17	0.03	0.00397	2454682.386066	0.000229	0.0000123
31/07/09	B	S	16	0.90	0.00498	2455044.348310	0.000291	0.0000151
31/07/09	V	S	20	2.29	0.00382	2455044.346761	0.000465	0.0000257
31/07/09	R	S	17	0.93	0.00406	2455044.346984	0.000555	0.0000534
31/07/09	I	S	20	0.08	0.00380	2455044.347109	0.000230	0.0000134
01/08/09	B	P	18	0.23	0.00380	2455045.292878	0.000132	0.0000055
01/08/09	V	P	16	2.22	0.00316	2455045.293337	0.000486	0.0000098
01/08/09	R	P	15	0.59	0.00348	2455045.292601	0.000392	0.0000173
01/08/09	I	P	15	0.88	0.00357	2455045.292728	0.000234	0.0000095
01/08/09	B	S	16	2.29	0.00380	2455045.608507	0.000457	0.0000104
01/08/09	V	S	17	2.53	0.00316	2455045.608400	0.000361	0.0000150
01/08/09	R	S	16	0.55	0.00348	2455045.608635	0.000670	0.0000631
01/08/09	I	S	14	1.52	0.00357	2455045.610175	0.000757	0.0000537
02/08/09	B	P	16	2.27	0.00340	2455046.554331	0.000219	0.0000189
02/08/09	V	P	15	0.11	0.00302	2455046.554803	0.000093	0.0000065
02/08/09	R	P	15	1.11	0.00305	2455046.554549	0.000339	0.0000140
02/08/09	I	P	15	1.44	0.00325	2455046.554818	0.000215	0.0000150
04/09/09	B	P	39	0.04	0.00596	2455079.374954	0.000085	0.0000058
05/09/09	B	S	27	0.07	0.00364	2455080.322949	0.000190	0.0000216
12/07/10	B	P	14	1.37	0.00386	2455390.529732	0.000412	0.0000311
12/07/10	V	P	16	0.20	0.00314	2455390.529099	0.000213	0.0000164
12/07/10	R	P	17	1.05	0.00368	2455390.529673	0.000550	0.0000481

12/07/10	I	P	15	0.24	0.00386	2455390.529083	0.000166	0.0000053
26/07/10	B	P	11	0.07	0.00416	2455404.414927	0.000090	0.0000070
26/07/10	V	P	11	0.74	0.00349	2455404.414713	0.000183	0.0000052
26/07/10	R	P	12	0.84	0.00338	2455404.414824	0.000211	0.0000178
26/07/10	I	P	12	1.18	0.00392	2455404.414450	0.000278	0.0000178
27/07/10	B	S	17	1.91	0.00317	2455405.362964	0.000396	0.0000498
27/07/10	V	S	16	1.93	0.00319	2455405.362899	0.000478	0.0000396
27/07/10	R	S	18	1.45	0.00299	2455405.361188	0.000276	0.0000209
27/07/10	I	S	17	0.16	0.00351	2455405.361209	0.000179	0.0000071
29/07/10	B	P	13	1.61	0.00314	2455407.570464	0.000308	0.0000171
29/07/10	V	P	12	1.43	0.00318	2455407.570449	0.000217	0.0000220
29/07/10	R	P	13	0.71	0.00293	2455407.570655	0.000300	0.0000108
29/07/10	I	P	13	0.08	0.00358	2455407.570464	0.000154	0.0000045
11/08/10	B	S	25	1.90	0.00543	2455420.509535	0.000490	0.0000184
11/08/10	V	S	22	0.53	0.00674	2455420.509174	0.000784	0.0000735
11/08/10	R	S	24	1.28	0.00829	2455420.510556	0.000646	0.0000383
11/08/10	I	S	22	0.74	0.00834	2455420.508880	0.000589	0.0000383
14/08/10	B	P	14	1.51	0.00429	2455423.348893	0.000146	0.0000191
14/08/10	V	P	19	0.90	0.00610	2455423.348902	0.000284	0.0000239
14/08/10	R	P	14	0.67	0.00738	2455423.348639	0.000398	0.0000261
14/08/10	I	P	8	1.10	0.00767	2455423.349743	0.000518	0.0000403

(1) Πλήθος Σημείων.
(2) Μέσο Φωτομετρικό Σφάλμα (Mean Photometric Error).
(3) Σφάλμα Monte Carlo (Monte Carlo Error).



Σχήμα ΙΙ.17. Δευτερεύον ελάχιστο του συστήματος RT And όπως αυτό παρατηρήθηκε στις 23/08/08 στο φίλτρο V από τον Αστρονομικό Σταθμό Κρυονερίου (a). Το διάγραμμα των υπολοίπων που προκύπτει από την παραδοσιακή πολυωνυμική παλινδρόμηση εμφανίζει ίχνη ετεροσκεδαστικότητας (b), ενώ η κατανομή τους παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις από την Κανονική (c, d).



Σχήμα ΙΙ.18. Εφαρμογή της τεχνικής αναδειγματοληψίας υπολοίπων πολυωνυμικής παλινδρόμησης στην περίπτωση του ελαχίστου που παρατηρήθηκε στις 23/8/2008 με την παραγωγή 1000 bootstrap συνθετικών δειγμάτων (a), το ιστόγραμμα συχνοτήτων που προκύπτει για τη χρονική θέση του ελαχίστου (b). Παρουσιάζεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων της ρίζας του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (c) και το ιστόγραμμα συχνοτήτων του συντελεστή προσδιορισμού (d) όπως προκύπτουν κατά τη διαδικασία της παλινδρόμησης για κάθε επιμέρους συνθετικό δείγμα. Υλοποίηση της τεχνικής πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του κώδικα `BootMin`.

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή, αξίζει να επικυρώσουμε την αναγκαιότητα ύπαρξης της νέας μεθόδου σε ελάχιστα των οποίων τα φυσικά χαρακτηριστικά αδυνατούν να εξασφαλίσουν τις απαραίτητες εκείνες συνθήκες ορθής εφαρμογής της παραδοσιακής ελαχιστοτετραγωνικής παλινδρόμησης. Η υϊοθέτηση της παραδοσιακής μεθόδου σε τυπικές περιπτώσεις ενός ασύμμετρου ελαχίστου, εμβυθισμένο σε ένα έντονα θορυβώδες περιβάλλον, οδηγούν σχεδόν πάντοτε σε παραβίαση των υποθέσων ομοσκεδαστικότητας και κανονικότητας (π.χ. Σχήμα ΙΙ.17). Συνεπώς, η επιλογή της τεχνικής αναδειγματοληψίας επανάθεσης υπολοίπων δεν υπερτερεί απλά έναντι των συμβατικών μεθόδων, αλλά κρίνεται και απαραίτητη ειδικά στις περιπτώσεις εκείνες όπου συνδυασμός δυσμενών παραγόντων τις καθιστούν ανεπαρκείς.

6. Στατιστική Αξιολόγηση Μεθόδων Προσδιορισμού

Ολοκληρώνοντας το δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής, αξίζει να αξιολογήσουμε και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά την εφαρμογή της τεχνικής αναδειγματοληψίας επανάθεσης στον προσδιορισμό του χρόνου των 114 ελαχίστων που παρουσιάστηκαν στην προγούμενη ενότητα σε σχέση με τα αποτελέσματα που προβλέπουν οι δύο βασικότερες και πιο διαδεδομένες μέθοδοι των Kwee & van Woerden (1956) και Breinhorst et al. (1973). Το δείγμα των 114 ελαχίστων κρίθηκε επαρκές ώστε να ελεγχθεί στατιστικά ο βαθμός αποτελεσματικότητας της νέας μεθόδου κάτω από διαφορετικούς επιβαρυντικούς παράγοντες. Η στατιστική μελέτη αρχικά επικεντρώνεται στη συμπεριφορά της μεθόδου KvW σε περιπτώσεις ελαχίστων των οποίων τα φυσικά χαρακτηριστικά δεν ικανοποιούν συνθήκες δόκιμης εφαρμογής της με σκοπό τη διερεύνηση και τον εντοπισμό των παραγόντων εκείνων που επιδρούν περισσότερο. Στη συνέχεια, προχωρούμε σε μια εντελώς πρωτότυπη μελέτη αξιολόγησης των σφαλμάτων που προβλέπει η κάθεμία από τις τρεις πιο πάνω μεθόδους στη φωτομετρία πολλών φίλτρων ώστε να εξεταστεί το ενδεχόμενο στατιστικά σημαντικής διαφοροποίησης των χρόνων ενός και μόνο ελαχίστου το οποίο έχει προέλθει από παρατηρήσεις σε διάφορα φίλτρα.

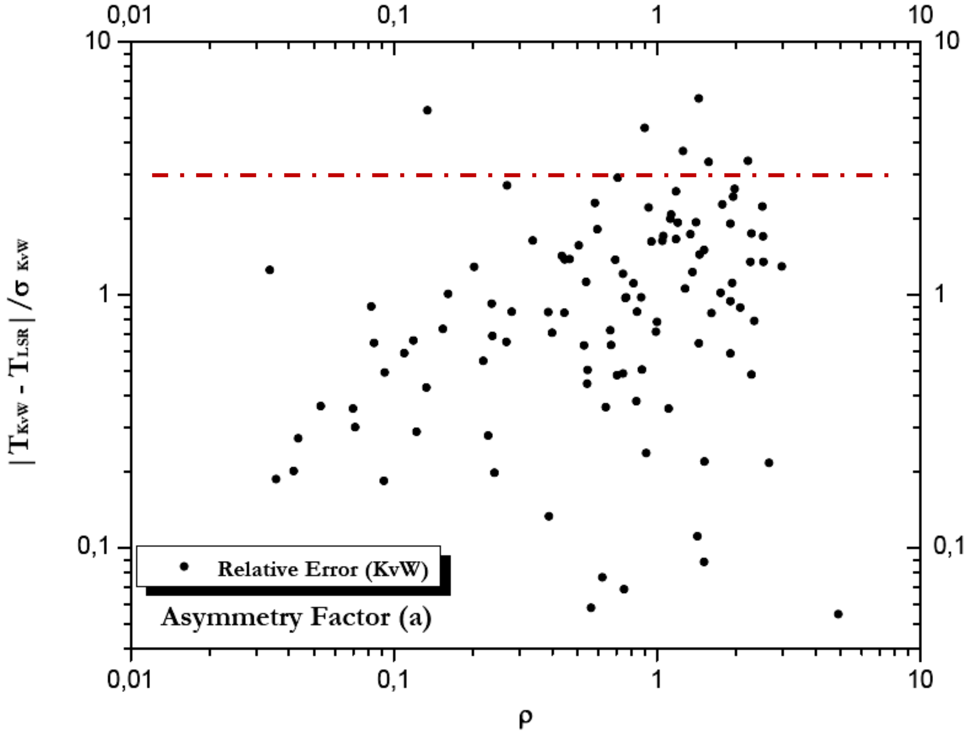
6.1. Διερεύνηση Αξιοπιστίας της Μεθόδου KvW

Σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν στη δεύτερη και τρίτη ενότητα του κεφαλαίου αυτού, η μέθοδος KvW μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία αποκλειστικά σε συμμετρικά ελάχιστα. Οι Breinhorst et al. (1973) διερεύνησαν τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά την απόκλιση που αναμένεται να παρουσιάζουν οι προβλεπόμενοι από τη μέθοδο αυτή χρόνοι μη συμμετρικών ελαχίστων έχοντας ως χρόνους αναφοράς τις τιμές εκείνες που εκτιμά η μέθοδος της κυβικής παλινδρόμησης (Σχήμα II.3). Οι πιο πάνω ερευνητές οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα της ισχυρής αλλοίωσης των αποτελεσμάτων κατά την εφαρμογή της μεθόδου KvW σε ελάχιστα με βαθμό ασυμμετρίας μεγαλύτερο της τιμής ρ = 0.3 η οποία μπορεί μάλιστα να αγγίξει ή ακόμα και να ξεπεράσει το τριπλάσιο του σφάλματος $\sigma(T_{KvW})$ που προβλέπει η μέθοδος. Στη συνέχεια, εκείνο το οποίο αρχικά επιχειρούμε είναι μια παρόμοια μελέτη με εκείνη των Breinhorst et al. (1973), ώστε να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματά τους σε ένα πολύ μεγαλύτερο δείγμα ελαχίστων.

Η προσέγγιση που ακολουθούμε είναι όμοια με εκείνη των Breinhorst et al. (1973) και προβλέπει αρχικά τον προσδιορισμό των χρόνων των 114 ελαχίστων με τις δύο μεθόδους, τον υπολογισμό της απόλυτης διαφοράς τους και τελικά τον υπολογισμό του σχετικού σφάλματος της μεθόδου $R_{KvW}^{Asym.}$ (Σχήμα II.19). Επισημαίνουμε ότι ως T_{LSR} θα συμβολίζεται ο χρόνος της ελαχιστοτετραγωνικής παλινδρόμησης (Least-Squares Regression, LSR) και ο οποίος θα ταυτίζεται με τον πραγματικό, ως απαλλαγμένος από την επιρροή της ασυμμετρίας, ενώ ως T_{KvW} θα συμβολίζεται ο αντίστοιχος χρόνος που εκτιμάται μέσω της μεθόδου KvW με σφάλμα $\sigma(T_{KvW})$:

$$R_{KvW}^{Asym.} = \frac{|T_{KvW} - T_{LSR}|}{\sigma_{KvW}}. \tag{2.48}$$

Ο χρόνος T_{LSR} που προβλέπει η μέθοδος της παλινδρόμησης των Breinhorst et al. (1973) υπολογίστηκε με τη βοήθεια του κώδικα `BootMin`. Όπως έχει ήδη περιγραφεί στην υποενότητα 5.5, η παραδοσιακή αυτή μέθοδος έχει ενσωματωθεί στον κώδικα ως απαραίτητο στάδιο της νέας μεθόδου. Ο χρόνος T_{KvW} που προβλέπει η μέθοδος των Kwee & van Woerden (1956) υπολογίστηκε με το πρόγραμμα `AVE` v.2.51 το οποίο είναι ευρέως αποδεκτό από την επιστημονική κοινότητα, είναι εξαιρετικά φιλικό προς το χρήστη και βρίσκεται ελεύθερο στο διαδίκτυο (Barberá R., http://www.astrogea.org/soft/ave/aveint.htm).



Σχήμα ΙΙ.19. Το σχετικό σφάλμα $R_{KvW}^{Asym.}$ που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου KvW σε σχέση με τα αποτελέσματα που προβλέπει η κλασική ελαχιστοτετραγωνική παλινδρόμηση LSR ως συνάρτηση του βαθμού ασυμμετρίας ρ. Η τάση μεγάλου σχετικού σφάλματος ως αποτέλεσμα της ασυμμετρίας είναι όμοια με εκείνη των Breinhorst et al. (1973) με την απόκλιση όμως μιας ομάδας ασύμμετρων ελαχίστων προς μικρές σχετικά αποκλίσεις. Η κλίμακα είναι λογαριθμική και η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή εκφράζει την απόκλιση η οποία βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή $\pm 3\sigma$.

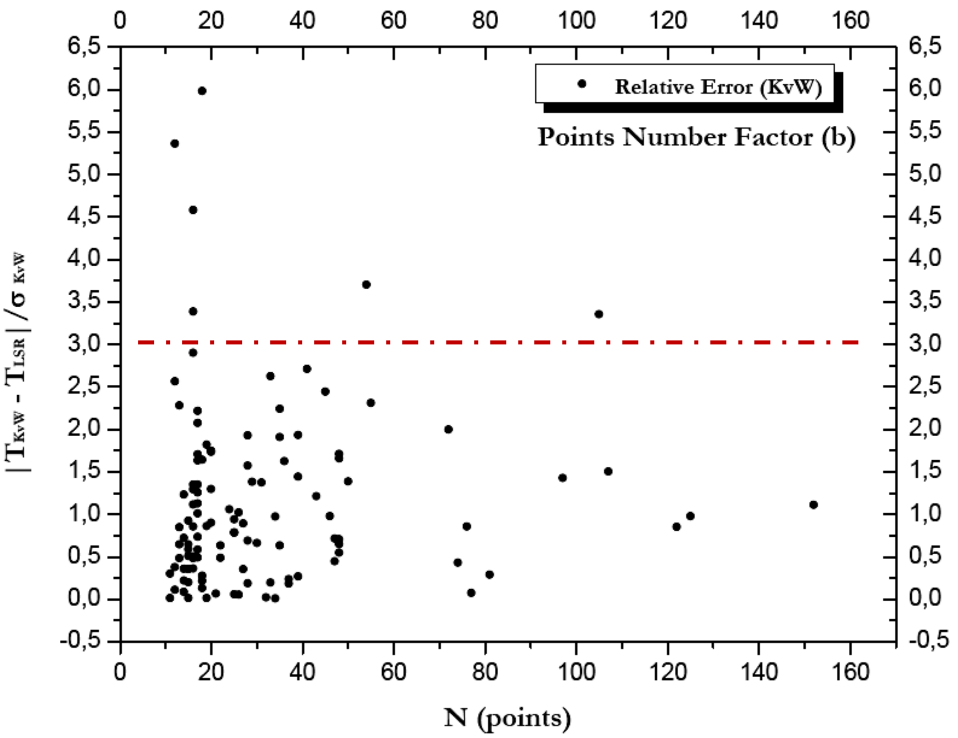
Το δείγμα των 114 ελαχίστων αξιοποιήθηκε επιπλέον ώστε να εξεταστεί η επιρροή δύο ακόμα παραγόντων στην αξιοπιστία της μεθόδου KvW που δεν είναι άλλες από το πλήθος σημείων *N* που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του χρόνου ελαχίστου καθώς και το μέσο φωτομετρικό σφάλμα *MPE* (Mean Photometric Error) που επικρατούσε κατά τη διάρκεια της νύχτας παρατήρησης. Η σημασία των δύο αυτών παραγόντων είχε κριθεί από τους Breinhorst et al. (1973) ως δυνητικά επιβαρυντική, χωρίς όμως να μελετηθεί λεπτομερώς ο βαθμός επίδρασης στα διαθέσιμα δεδομένα τους.

Στην παρούσα μελέτη, το σχετικό σφάλμα της μεθόδου KvW απεικονίζεται τόσο ως συνάρτηση του πρώτου παράγοντα (Σχήμα II.20) όσο και του δεύτερου (Σχήμα II.21) με σκοπό την εποπτική αναζήτηση κάποιας σαφούς μεταξύ τους συσχέτισης. Επιπλέον, κρίνεται ιδιαίτερα χρήσιμη η αναζήτηση και ο εντοπισμός ενός πιθανού παράγοντα ο οποίος προκαλεί μεγάλες σχετικές αποκλίσεις και, ιδιαίτερα, μεγαλύτερες από εκείνη που αντιστοιχούν στο 99.9% της συνολικής στατιστικής μαζας της Κανονικής κατανομής, δηλαδή αποκλίσεις μεγαλύτερες από το 3σ της μεθόδου KvW. Παρακάτω, συνοψίζουμε και παραθέτουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη σύντομη αυτή μελέτη:

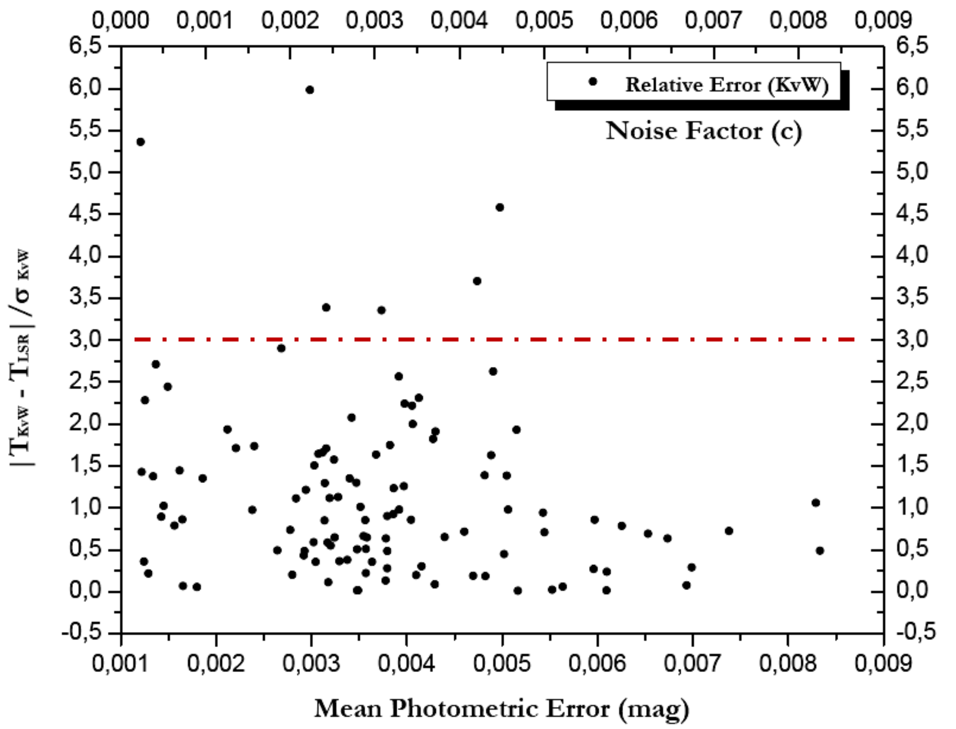
- ***Επίδραση βαθμού ασυμμετρίας (a)***: Σε γενικές γραμμές, η μορφή συσχέτισης μεταξύ της σχετικής απόκλισης και του βαθμού ασυμμετρίας είναι αύξουσα και όπως προβλέπεται από τη θεωρητική προσέγγιση των Breinhorst et al. (1973). Σε λογαριθμική κλίμακα, η εξάρτηση παρουσιάζεται σχεδόν γραμμική μέχρι την τιμή 3.0 περίπου, οπότε και τείνει να γίνει παράλληλη στον οριζόντιο άξονα και συνεπώς να σταθεροποιηθεί (Σχήμα II.19). Παρά το γεγονός αυτό, παρατηρείται μια ομάδα σημείων η οποία παρουσιάζει μικρές αποκλίσεις αν και προέρχεται από ελάχιστα υψηλού βαθμού ασυμμετρίας. Κάτι τέτοιο δεν πρέπει να μας εκπλήσσει, καθώς η θεωρητική σχέση εξάρτησης σχετικών αποκλίσεων και ασυμμετρίας απαιτεί ιδανικά ελάχιστα τα οποία περιλαμβάνουν αυστηρά ισαπέχουσες παρατηρήσεις με μηδενικό θόρυβο. Απώλεια των συνθηκών αυτών οδηγεί στην παρουσία σημείων απομακρυσμένων από τη θεωρητική καμπύλη, όπως ακριβώς επιβεβαιώνεται και στη μελέτη των Breinhorst et al. (1973).

- ***Επίδραση πλήθους σημείων (b)***: Συσχέτιση μεταξύ σχετικής απόκλισης και πλήθους σημείων δεν παρατηρείται. Αντιθέτως, μια μέση σχετική απόκλιση κοντά στην τιμή 1.0 φαίνεται να είναι στάσιμη και πλήρως ανεξάρτητη από την επιλογή του αριθμού σημείων που πρόκειται να τεθούν προς επεξεργασία (Σχήμα II.20). Εκείνο όμως που δίνει ιδιαίτερο χαρακτήρα στη μελέτη αυτή είναι η συσσώρευση της πλειοψηφίας των σημείων που παρουσιάζουν αποκλίσεις μεγαλύτερες από 3σ στην αριστερή περιοχή του διαγράμματος, δηλαδή σε πλήθη σημείων μικρότερα από 20. Το πλήθος σημείων δε φαίνεται συνεπώς να επιδρά στην ακρίβεια της μεθόδου KvW, αρκεί να είναι μεγαλύτερο από έναν κρίσιμο ελάχιστο αριθμό.

- ***Επίδραση παρατηρησιακού θορύβου (c)***: Διαφαίνεται μια σαφής συσχέτιση μεταξύ σχετικού σφάλματος και παρατηρησιακού θορύβου. Οι σχετικές αποκλίσεις τείνουν να περιορίζονται με την αύξηση της στάθμης θορύβου ισορροπώντας τελικά κοντά στην τιμή 0.5 μετά τα 0.005 mag (Σχήμα II.21). Το γεγονός αυτό αποκαλύπτει την ευαισθησία της μεθόδου KvW στον παρατηρησιακό θόρυβο και την ορθή της απόκριση όταν η διασπορά των παρατηρήσεων αυξάνεται. Σε παρατηρήσεις χαμηλής λοιπόν ποιότητας, το σφάλμα της μεθόδου είναι τέτοιο ώστε να υπερκαλύπτει τις αποκλίσεις από τον πραγματικό χρόνο ελαχίστου οδηγώντας τελικά σε σχετικές αποκλίσεις μικρότερες της μονάδας ακόμα και σε περιπτώσεις ελαχίστων μεγάλου βαθμού ασυμμετρίας.

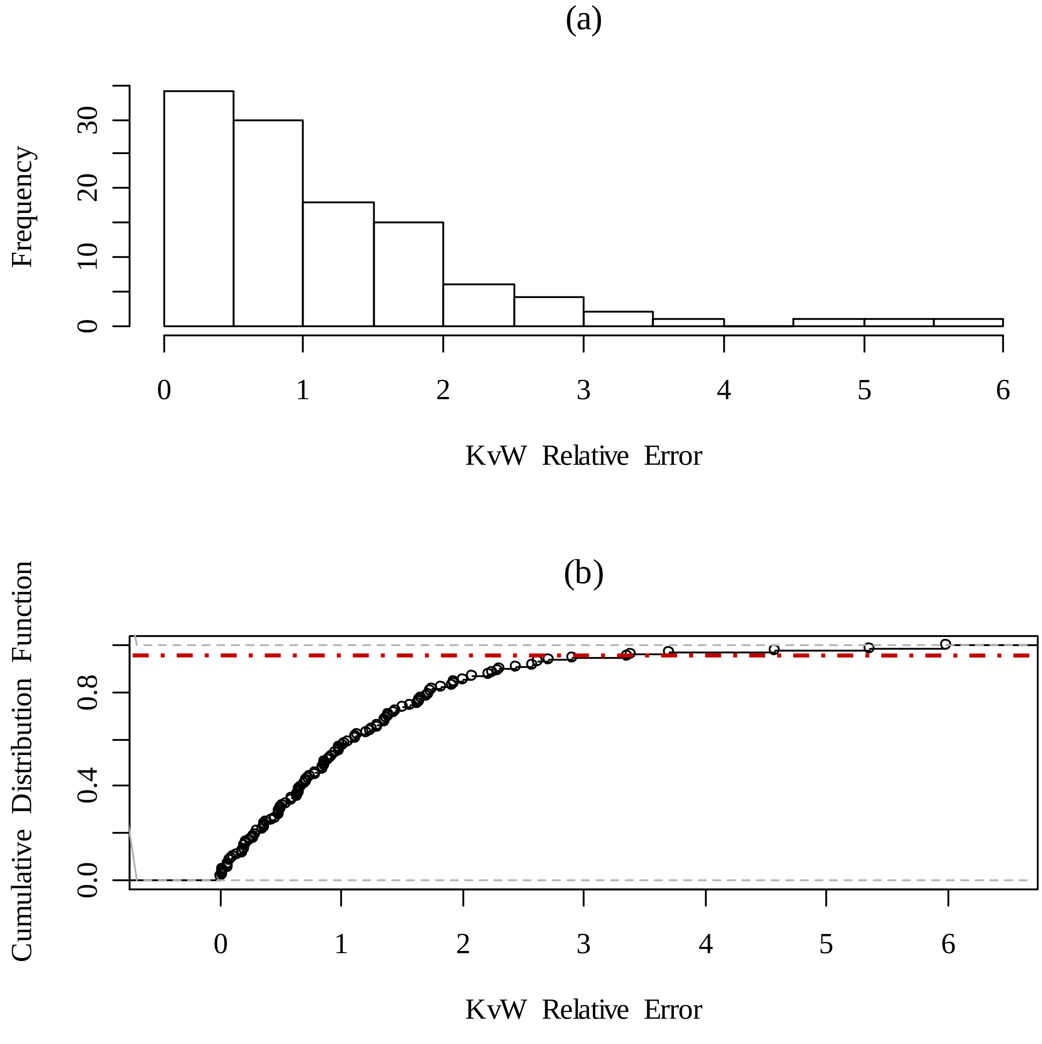


Σχήμα ΙΙ.20. Το σχετικό σφάλμα $R_{KvW}^{Asym.}$ που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου KvW σε σχέση με τα αποτελέσματα που προβλέπει η κλασική ελαχιστοτετραγωνική παλινδρόμηση LSR ως συνάρτηση του πλήθους σημείων N που χρησιμοποιήθηκε. Παρατηρείται μια τάση σταθεροποίησης των αποκλίσεων στην περιοχή ± 1σ η οποία παραμένει αμετάβλητη με το πλήθος σημείων, ενώ οι αποκλίσεις που υπερβαίνουν την περιοχή ± 3σ φαίνεται να συγκεντρώνονται σε πλήθη μικρότερα των 20 σημείων.



Σχήμα ΙΙ.21. Το σχετικό σφάλμα $R_{KvW}^{Asym.}$ που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου KvW σε σχέση με τα αποτελέσματα που προβλέπει η κλασική ελαχιστοτετραγωνική παλινδρόμηση LSR ως συνάρτηση του μέσου φωτομετρικού σφάλματος *MPE*. Διακρίνεται σαφής τάση περιορισμού των σχετικών αποκλίσεων με την αύξηση του θορύβου η οποία μεγιστοποιείται μετά τα 0.005 mag.

Σύμφωνα με τη Στατιστική, η κατανομή την οποία ακολουθούν τα σχετικά σφάλματα αναμένεται να είναι η *Περικομμένη Τυπική Κανονική κατανομή (Truncated Standard Normal distribution)* η οποία αφορά τυχαίες μεταβλητές με πεδίο ορισμού το [0,+∞), δηλαδή $R_{KvW}^{Asym.} \sim N(0,1)^{+}$ (Σχήμα ΙΙ.22). Επιλέγοντας λοιπόν πιθανότητα κάλυψης ίση με 95%, διαπιστώνουμε ότι σε περιπτώσεις ασύμμετρων ελαχίστων ***η απόκλιση μεταξύ του χρόνου ελαχίστων που προβλέπει η μέθοδος KvW από τον πραγματικό βρίσκεται μέσα στην περιοχή ± 3.1σ***$\boldsymbol{\pm 3.1\sigma_{KvW}}$, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι η πραγματική κατανομή περιέχει ελαφρώς περισσότερη στατιστική μάζα από εκείνη που προβλέπεται θεωρητικά.



Σχήμα ΙΙ.22. Ιστόγραμμα των σχετικών σφαλμάτων $R_{KvW}^{Asym.}$ που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου KvW σε σχέση με τα αποτελέσματα που προβλέπει η κλασική ελαχιστοτετραγωνική παλινδρόμηση LSR (a). Αν και οι σχετικές αποκλίσεις αγγίζουν την τιμή 6.0, η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής μας υποδεικνύει ότι μόνο 5% από αυτές είναι μεγαλύτερες από την τιμή 3.1 (b).

Επαναλαμβάνοντας τη στατιστική μελέτη με την απομάκρυνση χρόνων ελαχίστων πλήθους παρατηρήσεων μικρότερο από 20, ο πραγματικός χρόνος ελαχίστου για την ίδια στάθμη σημαντικότητας (α = 0.025) βρέθηκε πλέον μέσα στην περιοχή που οριοθετείται γύρω από το $\boldsymbol{\pm 2.6\sigma_{KvW}}$ του εκτιμώμενου από τη μέθοδο KvW χρόνου.

6.2. Διερεύνηση Αξιοπιστίας της Νέας Μεθόδου

Στην υποενότητα αυτή θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στη σύγκριση των απολύτων σφαλμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή των τριών μεθόδων προσδιορισμού χρόνου ελαχίστων που παρουσιάσαμε στις πιο πάνω παραγράφους, έχοντας συμπεριλάβει και εκείνη της αναδειγματοληψίας επανάθεσης. Η μελέτη πραγματοποιείται στο σύνολο των 114 χρόνων ελαχίστου που συλλέξαμε από τα συστήματα RT And και CG Cyg διατηρώντας προφανώς το ίδιο ακριβώς δείγμα παρατηρήσεων σε κάθε ελάχιστο που εξετάστηκε από τις τρεις μεθόδους.

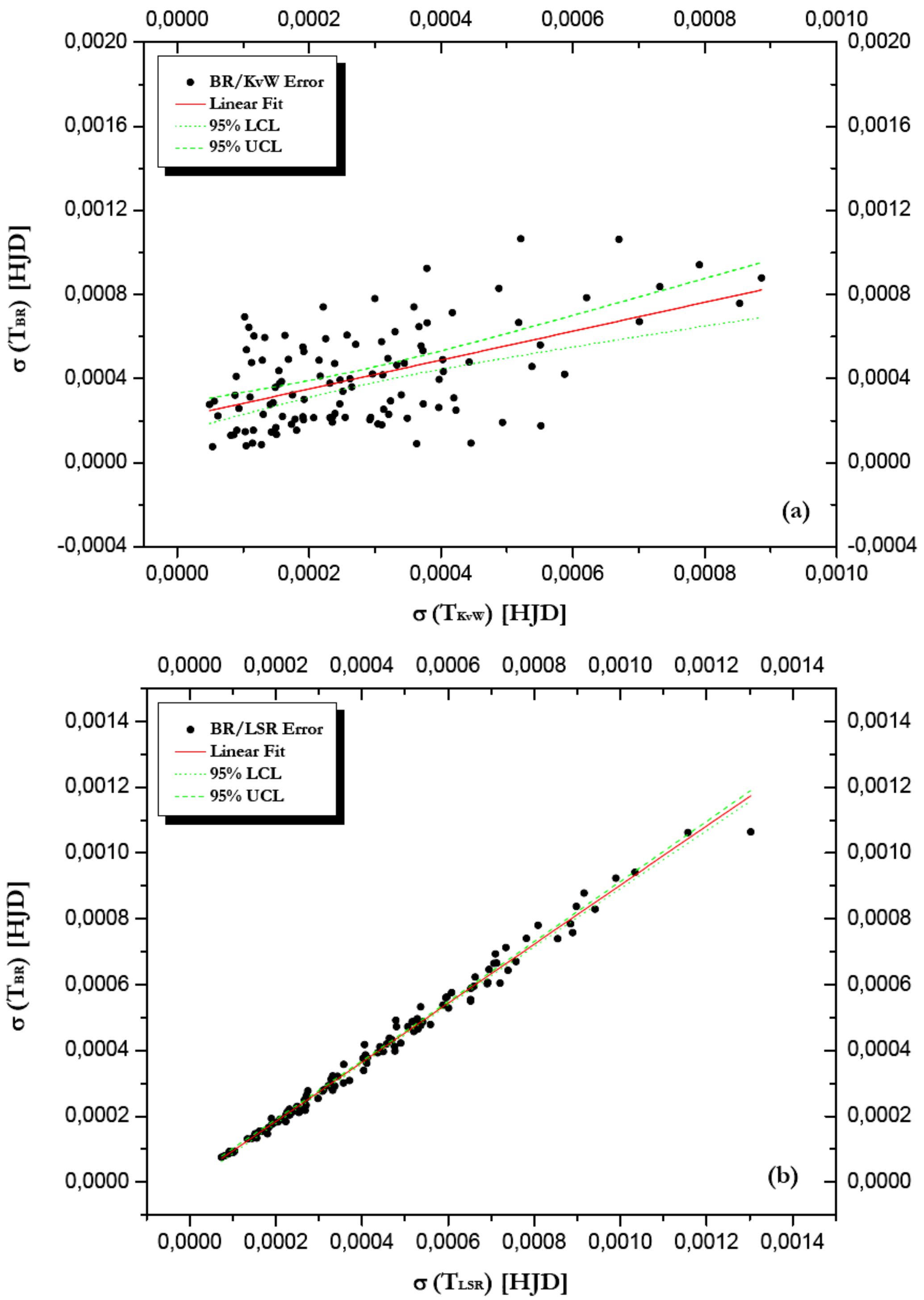
Μέσα στα πλαίσια δοκιμασίας και αξιολόγησης της νέας μεθόδου προσδιορισμού χρόνων ελαχίστου, αναζητήθηκε η ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ των σφαλμάτων που προβλέπει η νέα μέθοδος αναδειγματοληψίας επανάθεσης υπολοίπων $\sigma(T_{BR})$ και εκείνων που προβλέπει η μέθοδος KvW, $\sigma(T_{KvW})$, αλλά και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, $\sigma(T_{LSR})$. Η απεικόνιση των σφαλμάτων των τριών μεθόδων υποδεικνύει σαφή γραμμική συσχέτιση μεταξύ τους και η οποία περιγράφεται από τις δύο ακόλουθες αντίστοιχα εμπειρικές σχέσεις (στάθμη σημαντικότητας α = 0.025):

- $\sigma(T_{BR})[HJD] = 0.00021(\pm 0.00003) + 0.69(\pm 0.10)\sigma(T_{KvW})$. (2.49)

- $\sigma(T_{BR})[HJD] = 0.000004(\pm 0.000005) + 0.899(\pm 0.009)\sigma(T_{LSR})$. (2.50)

Η σχέση (2.49) εκφράζει μια σχετικά ιδιόρυθμη εξάρτηση μεταξύ του σφάλματος της μεθόδου αναδειγματοληψίας επανάθεσης (Bootstrap Regression, BR) σε σχέση με εκείνο της μεθόδου KvW (Σχήμα ΙΙ.23a), καθώς προβλέπεται πως το σφάλμα της πρώτης μεθόδου είναι μεγαλύτερο από εκείνο της δεύτερης μέχρι μια κρίσιμη τιμή του σφάλματος KvW η οποία προσδιορίζεται στην περίπτωσή μας ίση με (0.00068 ± 0.00024) HJD. Μετά τη χαρακτηριστική αυτή τιμή, το σφάλμα της μεθόδου KvW θα είναι μεγαλύτερο από εκείνο της αναδειγματοληψίας επανάθεσης. Πιστεύουμε ότι το γεγονός αυτό εκφράζει για μια ακόμα φορά την ευαισθησία της μεθόδου KvW στην αύξηση του παρατηρησιακού θορύβου και η οποία οδηγεί σε σφάλματα τα οποία υπερκαλύπτουν ενδεχόμενες αποκλίσεις από τον πραγματικό χρόνο ελαχίστου.

Αντίθετα, η σχέση (2.50) αποκαλύπτει το ιδιότυπο χαρακτηριστικό της τεχνικής αναδειγματοληψίας επανάθεσης να προβλέπει πάντοτε μικρότερο σφάλμα από εκείνο της παραδοσιακής ελαχιστοτετραγωνικής πολυωνυμικής παλινδρόμησης LSR (Σχήμα ΙΙ.23b). Το γεγονός αυτό μας υποδεικνύει πως η υπόθεση της κανονικότητας, όπως προαπαιτεί η εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, οδηγεί στην προσθήκη περίσσειας στατιστικής μάζας για την ίδια στάθμη σημαντικότητας. Κάτι τέτοιο σημαίνει πως ο χρόνος ελαχίστου ακολουθεί προσεγγιστικά και μόνο την Κανονική κατανομή, η επιβολή της οποίας οδηγεί προφανώς σε (ελαφρώς) μεροληπτικά αποτελέσματα. Πιστεύουμε ότι η διαπίστωση αυτή δίνει ένα ακόμα κίνητρο υϊοθέτησης της νέας μεθόδου στον προσδιορισμό των χρόνων ελαχίστου διπλών εκλειπτικών συστημάτων, καθώς επιβεβαιώνει τις δυνατότητες βελτίωσης στην ακρίβεια που παρουσιάζει έναντι των καθιερωμένων μέχρι σήμερα τεχνικών.



Σχήμα ΙΙ.23. Συσχέτιση των σφαλμάτων που προκύπτουν κατά τον προσδιορισμό του χρόνου ελαχίστων μεταξύ της νέας μεθόδου πολυωνυμικής παλινδρόμησης BR και της μεθόδου KvW (a), καθώς και της παραδοσιακής ελαχιστοτετραγωνικής παλινδρόμησης LSR (b). Με κόκκινο χρώμα περιγράφεται η ελαχιστοτετραγωνική γραμμική, όπως διαφαίνεται, συσχέτισή τους ενώ με πράσινο χρώμα απεικονίζονται οι ευθείες που αντιστοιχούν σε στάθμη σημαντικότητας ίσης με α = 0.025.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος αναδειγματοληψίας επανάθεσης προβλέπει σφάλματα οριακά μικρότερα από εκείνα της παραδοσιακής ελαχιστοτετραγωνικής παλινδρόμησης και μεγαλύτερα από εκείνα της μεθόδου KvW με την προϋπόθεση ο παρατηρησιακός θόρυβος να διατηρείται χαμηλός. Οι χρόνοι ελαχίστου μεταξύ των δύο μεθόδων παλινδρόμησης προκύπτουν ακριβώς όμοιοι μέσα στο σφάλμα της Monte Carlo διαδικασίας και συνεπώς οι διαφοροποίησεις που παρουσιάζονται με τους χρόνους ελαχίστου της μεθόδου KvW εμπίπτουν στους παράγοντες που μελετήθηκαν στην υποενότητα 6.1. Πιστεύουμε ότι η νέα μέθοδος εκτιμά σφάλματα τα οποία αποτελούν τους πλέον αμερόληπτους εκφραστές της αβεβαιότητας που συνοδεύει το χρόνο ενός ελαχίστου, καθώς προκύπτουν πάντοτε με βάση τα ενδογενή χαρακτηριστικά του εκάστοτε ελαχίστου χωρίς να στηρίζονται σε υποθέσεις οι οποίες δεν ευσταθούν σε πολλές περιπτώσεις.

6.3. Διαφοροποίηση Χρόνου Ελαχίστων σε Πολλά Φίλτρα

Στην προτελευταία υποενότητα του κεφαλαίου αυτού θα εστιάσουμε στη μελέτη της συμπεριφοράς που παρουσιάζουν οι τρεις μέθοδοι όταν οι χρόνοι εξάγονται από ελάχιστα που έχουν παρατηρηθεί σε διαφορετικά φωτομετρικά φίλτρα. Η σχετική απόκλιση των χρόνου ενός ελαχίστου που έχει παρατηρηθεί σε δύο διαφορετικά μήκη κύματος με την ίδια όμως μέθοδο θα χρησιμοποιηθεί ως ένα αμερόληπτο μέτρο αξιολόγησης του βαθμού της χρονικής διαφοροποίησης, καθώς αποκαλύπτεται με τον τρόπο αυτό η απαιτούμενη έκταση των τυπικών σφαλμάτων κάθε μεθόδου ώστε οι εκτιμώμενοι χρόνοι να είναι ίσοι. Τα βήματα της διαδικασίας αυτής είναι όμοια με εκείνα που ακολουθήσαμε στην υποενότητα 6.1 κατά την αξιολόγηση της μεθόδου KvW. Η μόνη τους διαφοροποίηση έγκειται στην παρουσία σφάλματος τόσο στο χρόνο ελαχίστου που έχει παρατηρηθεί στο φίλτρο αναφοράς όσο και του αντίστοιχου χρόνου στο φίλτρο που επιθυμούμε να μελετήσουμε.

Η μελέτη μας στηρίχθηκε και πάλι στο δείγμα των 114 χρόνων ελαχίστου που προήλθαν από παρατηρήσεις των συστημάτων RT And και CG Cyg. Το φίλτρο V χρησιμοποιήθηκε ως φίλτρο αναφοράς, καθώς αποτελεί τη βάση των περισσότερων φωτομετρικών συστημάτων, ενώ ως μέθοδος προσδιορισμού της απόλυτης διαφοράς των χρόνων ελαχίστου μεταξύ των δύο φίλτρων, T_V και T_f αντίστοιχα, η παραδοσιακή μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων LSR. Η μέθοδος αυτή δεν επηρεάζεται από όρους ασυμμετρίας καθώς, στην περίπτωση που η αντίστοιχη παράμετρος ρ βρεθεί μεγαλύτερη της τιμής 0.3, η κυβική πολυωνυμική παλινδρόμηση είναι η τεχνική που τελικά εφαρμόζεται. Με τον τρόπο αυτό, ο αριθμός των χρόνων ελαχίστου που εξετάστηκε περιορίστηκε στα 76, καθώς οι χρόνοι που προήλθαν από παρατηρήσεις στο φίλτρο V αφαιρέθηκαν από τους χρόνους των υπόλοιπων φίλτρων.

Εάν λοιπόν σ_V είναι το σφάλμα που προκύπτει από την εκάστοτε μέθοδο για το χρόνο ενός ελαχίστου T_V στο φίλτρο V και σ_f το αντίστοιχο σφάλμα που προκύπτει από την ίδια μέθοδο σε ένα εκ των υπολοίπων φίλτρο T_f με $f \in \{U, B, R, I\}$, το συνολικό σφάλμα της διαφοράς τους θα είναι ίσο με $(\sigma_V^2 + \sigma_f^2)^{1/2}$ και η σχετική τους τελικά απόκλιση θα δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

- $R_{KvW} = \dfrac{|T_V - T_f|}{\sigma_{KvW,total}} = \dfrac{|T_V - T_f|}{\sqrt{\sigma_{V,KvW}^2 + \sigma_{f,KvW}^2}}$ για την περίπτωση της μεθόδου KvW. (2.51)

- $R_{LSR} = \dfrac{|T_V - T_f|}{\sigma_{LSR,total}} = \dfrac{|T_V - T_f|}{\sqrt{\sigma^2_{V,LSR} + \sigma^2_{f,LSR}}}$ για την περίπτωση της μεθόδου LSR. (2.52)

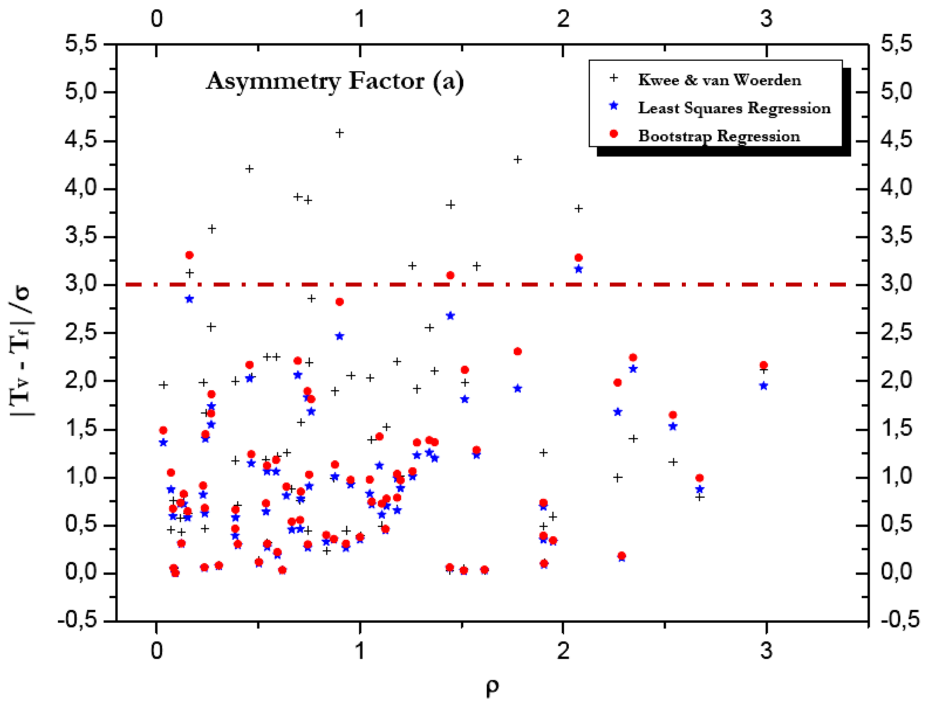
- $R_{BR} = \dfrac{|T_V - T_f|}{\sigma_{BR,total}} = \dfrac{|T_V - T_f|}{\sqrt{\sigma^2_{V,BR} + \sigma^2_{f,BR}}}$ για την περίπτωση της νέας μεθόδου BR. (2.53)

Όπως ακριβώς πράξαμε στην υποενότητα 6.1, απεικονίζουμε και πάλι το σχετικό σφάλμα της εκάστοτε μεθόδου KvW, LSR και BR ως συνάρτηση τριών παραγόντων και πιο συγκεκριμένα του βαθμού ασυμμετρίας *ρ* (Σχήμα II.24), του πλήθους παρατηρήσεων *N* (Σχήμα II.25) και του μέσου φωτομετρικού σφάλματος *MPE* (Σχήμα II.26) με σκοπό την εποπτική αναζήτηση κάποιας σαφούς μεταξύ τους συσχέτισης αλλά και την αναζήτηση ορισμένων από τους πιο πάνω παράγοντες που ενδεχομένως προκαλούν μεγάλες σχετικές αποκλίσεις. Παρακάτω, συνοψίζουμε και παραθέτουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη σύντομη αυτή μελέτη:

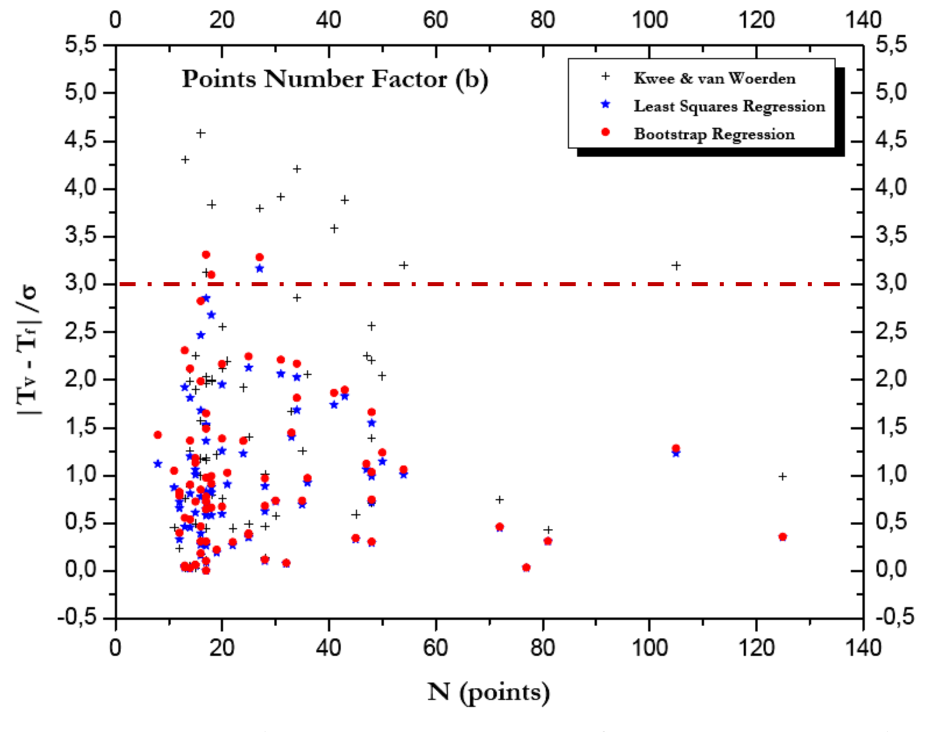
- ***Επίδραση βαθμού ασυμμετρίας (a)***: Δεν παρατηρείται καμία σαφής συσχέτιση μεταξύ της σχετικής απόκλισης χρόνων ελαχίστου σε διαφορετικά φίλτρα και του βαθμού ασυμμετρίας ανεξάρτητα από την επιλογή της μεθόδου προσδιορισμού (Σχήμα II.24). Αντιθέτως, παρατηρείται μια στάσιμη συμπεριφορά των σχετικών αποκλίσεων γύρω από την τιμή 1.5 στην περίπτωση των δύο μεθόδων παλινδρόμησης η οποία αυξάνεται στην τιμή 2.0 όταν η μέθοδος KvW είναι εκείνη που επιλέγεται για τον προσδιορισμό των χρόνων.

- ***Επίδραση πλήθους σημείων (b)***: Διαφαίνεται μια σαφής τάση περιορισμού των σχετικών αποκλίσεων με την αύξηση του πλήθους σημείων ανεξάρτητα μάλιστα από τη μέθοδο προσδιορισμού (Σχήμα II.25). Η μείωση αυτή γίνεται έντονα εμφανής ειδικότερα για τη μέθοδο KvW, ενώ μετά τα 60 περίπου σημεία όλες οι μέθοδοι φαίνεται να προβλέπουν σχετικές αποκλίσεις μικρότερες από 1.0. Εξαιρετικό επίσης ενδιαφέρον παρουσιάζει η ταύτιση των αποκλίσεων των δύο μεθόδων παλινδρόμησης σε μεγάλα πλήθη παρατηρήσεων, χαρακτηριστικό απόλυτα σύμφωνο με τη θεωρία η οποία καθιστά επαρκή την παραδοσιακή Στατιστική σε δείγματα μεγάλου μεγέθους.

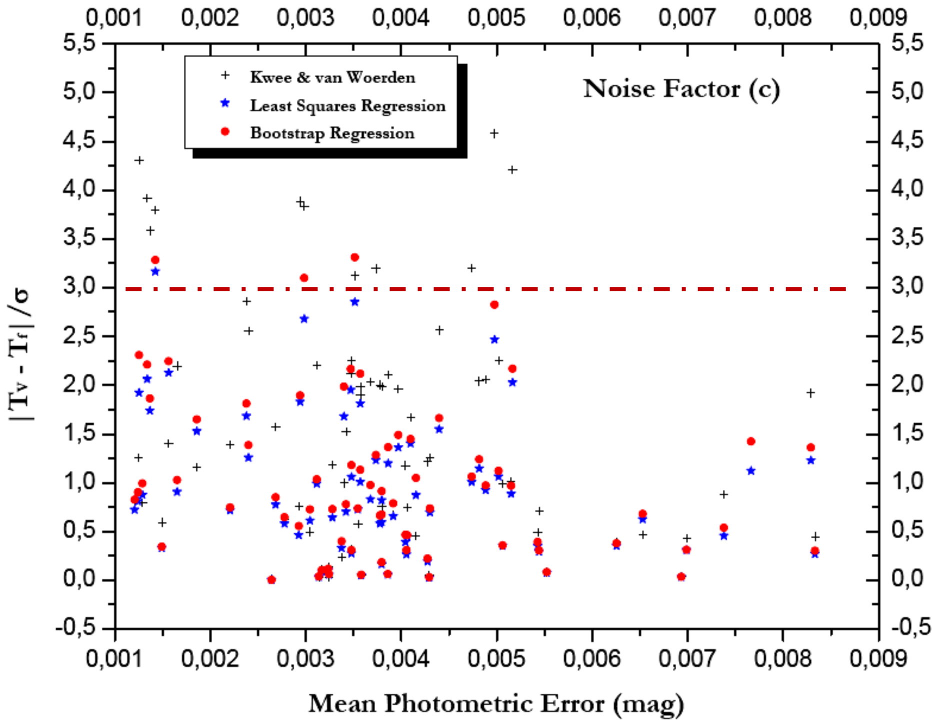
- ***Επίδραση παρατηρησιακού θορύβου (c)***: Διαφαίνεται μια εξίσου σαφής τάση περιορισμού των σχετικών αποκλίσεων με την αύξηση του παρατηρησιακού θορύβου ανεξάρτητα και πάλι από τη μέθοδο (Σχήμα II.26). Οι σχετικές αποκλίσεις τείνουν μάλιστα να ισορροπήσουν σε τιμές πολύ κοντά στην τιμή 1.0 μετά τα 0.005 mag ακόμα και για τη μέθοδο KvW η οποία προβλέπει μικρότερα σφάλματα από εκείνα των μεθόδων παλινδρόμησης. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει μία ακόμα φορά την ιδιότυπη συμπεριφορά που παρουσιάζει η μέθοδος KvW με τη ραγδαία αύξηση του σφάλματος όταν η ποιότητα των φωτομετρικών παρατηρήσεων είναι εξαιρετικά χαμηλή αλλά και τη γενικότερη ευαισθησία όλων των μεθόδων κάτω από την έντονη παρουσία παρατηρησιακού θορύβου.



Σχήμα ΙΙ.24. Η σχετική απόκλιση που προκύπτει από τη διαφοροποίηση χρόνων ελαχίστου σε διαφορετικό φίλτρο ως συνάρτηση του βαθμού ασυμμετρίας ρ με παράλληλη εφαρμογή και των τριών μεθόδων (σταυρός, αστερίσκος και κύκλος για τη μέθοδο KvW, LSR και BR αντίστοιχα). Σαφής συσχέτιση μεταξύ των δύο μεγεθών δεν διακρίνεται. Η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή εκφράζει την απόκλιση η οποία βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή ± 3σ πάνω από την οποία συγκεντρώνονται αποκλίσεις που προέρχονται κυρίως από τη μέθοδο KvW.



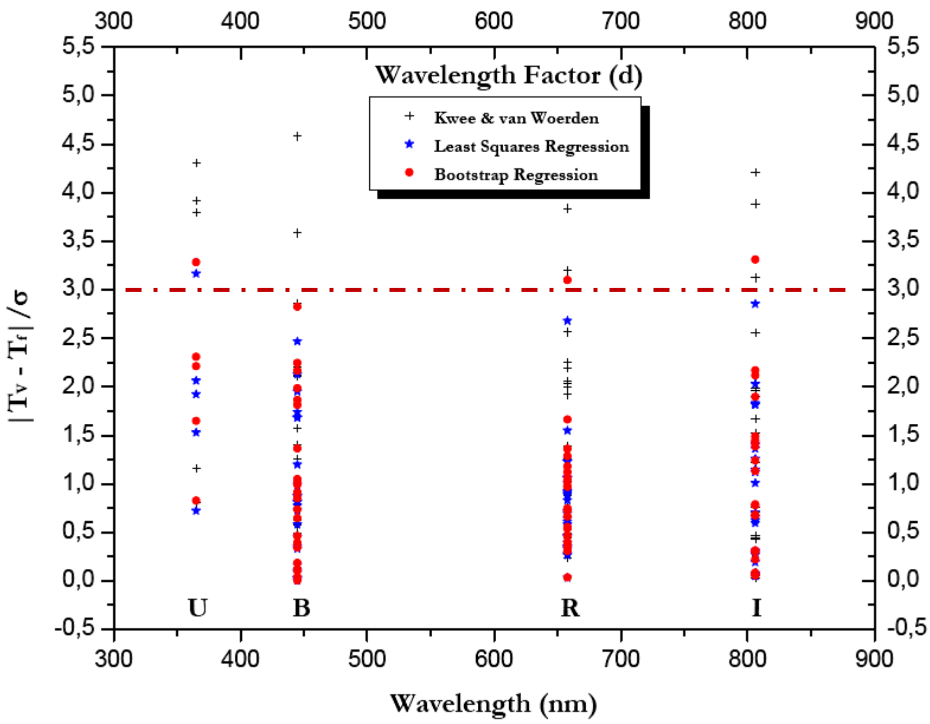
Σχήμα ΙΙ.25. Η σχετική απόκλιση που προκύπτει από τη διαφοροποίηση χρόνων ελαχίστου σε διαφορετικό φίλτρο ως συνάρτηση του πλήθους παρατηρήσεων N με παράλληλη εφαρμογή και των τριών μεθόδων. Διαφαίνεται μια σαφής τάση περιορισμού της σχετικής απόκλισης με την αύξηση του πλήθους παρατηρήσεων η οποία είναι εμφανέστερη στην περίπτωση της μεθόδου KvW. Σε πλήθη παρατηρήσεων μικρότερων από 20 διακρίνεται επίσης μια τάση συγκέντρωσης των αποκλίσεων που προέρχονται από τις δύο μεθόδους παλινδρόμησης εκατέρωθεν της κρίσιμης ζώνης των ± 3σ.



Σχήμα ΙΙ.26. Η σχετική απόκλιση που προκύπτει από τη διαφοροποίηση χρόνων ελαχίστου σε διαφορετικό φίλτρο ως συνάρτηση του παρατηρησιακού θορύβου *MPE* με παράλληλη εφαρμογή και των τριών μεθόδων. Διαφαίνεται μια σαφής τάση περιορισμού της σχετικής απόκλισης με την αύξηση του φωτομετρικού σφάλματος η οποία γίνεται ιδιαίτερα εμφανής μετά τα 0.005 mag ανεξάρτητα από την επιλογή της μεθόδο.

Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι η αξιολόγηση της μεθόδου KvW πραγματοποιήθηκε μέσω του λόγου της διαφοράς χρόνων ελαχίστου που προέκυψαν σύμφωνα με τη μέθοδο LSR προς το συνολικό σφάλμα που προκύπτει για τους αντίστοιχους χρόνους της μεθόδου KvW. Το γεγονός αυτό σημαίνει πως ο λόγος R_{KvW} εκφράζει τη μικρότερη δυνατή σχετική απόκλιση μεταξύ χρόνων σε διαφορετικό φίλτρο καθώς δεν λαμβάνονται υπόψη οι εγγενείς αδυναμίες της μεθόδου KvW έναντι του πραγματικού χρόνου. Δυστυχώς, ο διαχωρισμός των επιδράσεων αυτών μέσα στο σύνολο των σχετικών αποκλίσεων είναι αδύνατος και συνεπώς ο λόγος R_{KvW} αναλαμβάνει το ρόλο κατώτατου ορίου.

Ολοκληρώνοντας τη μελέτη αυτή, προχωράμε στη διερεύνηση ενός ακόμα παράγοντα ο οποίος θα μπορούσε να είναι ύποπτος σχετικά με το βαθμό διαφοροποίησης χρόνων ελαχίστου σε διαφορετικά φίλτρα και δεν πρόκειται παρά για την ***επιλογή του ίδιου του φίλτρου***. Ομαδοποιούμε λοιπόν τις σχετικές αποκλίσεις για όλες τις μεθόδους με βάση το φίλτρο στο οποίο αντιστοιχούν οι παρατηρήσεις από τις οποίες προέκυψαν οι χρόνοι (θέτοντας ως φίλτρο αναφοράς το φίλτρο V) και στη συνέχεια τις απεινονίζουμε ώστε να έχουμε την πρώτη εποπτική εικόνα (Σχήμα ΙΙ.27). Είναι τουλάχιστον εμφανές ότι μέσα από το διάγραμμα αυτό είναι εξαιρετικά δυσδιάκριτη οποιαδήποτε πληροφορία σχετικά με μια ενδεχόμενη ιδιάζουσα συμπεριφορά ενός εκ των τεσσάρων φίλτρων U, B, R και I. Ως εκ τούτου, αποφασίστηκε η διεξαγωγή μιας λεπτομερέστερης στατιστικής προσέγγισης η οποία περιλαμβάνει την εφαρμογή ορισμένων δοκιμασιών πολλαπλών συγκρίσεων και οι οποίες αποτελούν μέρος της μονοπαραγοντικής ανάλυσης διασποράς.



Σχήμα ΙΙ.27. Η σχετική απόκλιση που προκύπτει από τη διαφοροποίηση χρόνων ελαχίστου σε διαφορετικό φίλτρο ως συνάρτηση του μήκους κύματος το οποίο επιτρέπεται να διέλθει μέσω των εξεταζόμενων φωτομετρικών φίλτρων. Σαφής συσχέτιση μεταξύ των δύο μεγεθών δεν διακρίνεται.

Η ***ανάλυση διασποράς ενός παράγοντα (one-way ANOVA)*** αναλύει προβλήματα στα οποία εξετάζουμε την υπόθεση πως μια ποσοτική εξαρτημένη μεταβλητή επηρεάζεται από έναν και μόνο παράγοντα ο οποίος παίζει το ρόλο μιας ποιοτικής επεξηγηματικής μεταβλητής (Fisher 1920). Επομένως, η διαφορά μεταξύ ανάλυσης διασποράς και παλινδρόμησης έγκειται στο χαρακτήρα των επεξηγηματικών μεταβλητών των οποίων η μορφή είναι ποιοτική στην πρώτη περίπτωση και ποσοτική στη δεύτερη. Ο παράγοντας μπορεί να λαμβάνει ένα πεπερασμένο k πλήθος τιμών οι οποίες καλούνται *στάθμες ή ομάδες (levels ή groups)* και περιλαμβάνουν με τη σειρά τους n_i με $i = 1,2,...,k$ παρατηρήσεις από τις n συνολικά που συλλέχθηκαν κατά τον στατιστικό σχεδιασμό (π.χ. Κουκουβίνος 2005). Εφόσον η ανάλυση διασποράς αποφανθεί στατιστική σημαντικότητα μεταξύ των σταθμών, προχωράμε στις μεθόδους πολλαπλών συγκρίσεων ώστε να εξακριβώσουμε ποιές από αυτές διαφέρουν και ποιές όχι.

Εάν μ_i είναι ο μέσος που προκύπτει από τις n_i παρατηρήσεις της i-οστής στάθμης και $\mu_{i'}$ ο μέσος που προκύπτει από τις $n_{i'}$ παρατηρήσεις μιας οποιαδήποτε άλλης i'-οστής ($i' \neq i$) στάθμης, οι μέθοδοι των πολλαπλών συγκρίσεων αποσκοπούν στην απόφανση αποδοχής ή απόρριψης της υπόθεσης $\mu_i - \mu_{i'} = 0$ κάτω από μια συγκεκριμένη στάθμη σημαντικότητα α. Ο έλεγχος της υπόθεσης αυτής πραγματοποιείται με τον προσδιορισμό κατάλληλων διαστημάτων εμπιστοσύνης στάθμης σημαντικότητας α τα οποία παράγονται κάτω από διαφορετικά κριτήρια.

Το πλήθος των κριτηρίων που οδηγούν στην αντίστοιχη μέθοδο είναι μεγάλο και συνεπώς μόνο ένα μικρό μέρος τους θα απασχολήσει την παρούσα διατριβή, τέσσερα σε αριθμό. Η πρώτη και απλούστερη λοιπόν εκδοχή εκ των μεθόδων πολλαπλών συγκρίσεων καλείται ***κριτήριο ελάχιστης σημαντικής διαφοράς του Fisher (Least Significant Difference, L.S.D.)*** και στηρίζεται στα ποσοστιαία σημεία της κατανομής Student (*t* κατανομή) $t_{n-k,1-a/2}$ (Fisher 1935). Εξέλιξη του κριτηρίου αυτού αποτελεί η ***μέθοδος του Tukey (Honestly Significant Difference, H.S.D.)*** η οποία εισάγει το *τυποποιημένο εύρος (studentized range)* με τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής $q_{k,n-k,a}$ που ακολουθεί (*q* κατανομή) να είναι εκείνα που διαμορφώνουν το αντίστοιχο βελτιωμένο διάστημα εμπιστοσύνης (Tukey 1953). Η τελευταία μέθοδος πολλαπλών συγκρίσεων που αναφέρουμε στηρίζεται στα ποσοστιαία σημεία της κατανομής Fisher (*F* κατανομή) $F_{k-1,n-k,a}$ και είναι γνωστή ως ***μέθοδος του Scheffé*** (Scheffé 1953). Σε κάθε περίπτωση, ακολουθείται η ισοδύναμη διαδικασία κατασκευής των διαστημάτων εμπιστοσύνης που αντιστοιχούν στις διαφορές των μέσων μεταξύ των *k* σταθμών και εκείνο που εξετάζεται πλέον είναι το ενδεχόμενο συμπερίληψης του μηδενός στα πιο πάνω διαστήματα, δηλαδή:

- $(\mu_i - \mu_{i'}) \pm t_{n-k,1-a/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}}$ για το κριτήριο του Fisher. (2.54)

- $(\mu_i - \mu_{i'}) \pm q_{k,n-k,1-a} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}}$ για τη μέθοδο του Tukey. (2.55)

- $(\mu_i - \mu_{i'}) \pm \sqrt{(k-1)F_{k-1,n-k,a}} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}}$ για τη μέθοδο του Scheffé. (2.56)

Στις σχέσεις (2.54), (2.55) και (2.56) παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά των διαστημάτων εμπιστοσύνης προέρχεται από το συντελεστή του τυπικού σφάλματος $s \cdot (1/n_i + 1/n_{i'})^{1/2}$ που συνοδεύει τη διαφορά των μέσων με το υπόριζο να εκφράζει ένα είδος αρμονικού μέσου του πλήθους παρατηρήσεων δύο σταθμών και την ποσότητα s^2 να εκφράζει την εκτιμήτρια της διασποράς που προκύπτει από όλες τις παρατηρήσεις $\boldsymbol{y} = \{y_{ij},\ i = 1,...,k$ και $j = 1,...,n_i\}$ ή αλλιώς τη διασπορά που αντιστοιχεί σε σφάλματα ανάμεσα στις *k* ομάδες (pooled estimate), δηλαδή:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \mu_i\right)^2}{n-k}}\,. \tag{2.57}$$

Η ισχύς της μεθόδου Tukey έναντι εκείνης του Fisher ανακύπτει από τη βελτιωμένη απόδοση της κατανομής που ακολουθούν οι παρατηρήσεις. Στη θέση του *t* στατιστικού εισέρχεται το στατιστικό *q* το οποίο εκφράζει το λόγο της διαφοράς μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής του συνολικού δείγματος προς την αντίστοιχη τυπική απόκλιση *s* έτσι ώστε να μην παραβλέπονται πληροφορίες που διαμορφώνουν το συνολικό εύρος της κατανομής. Η πιθανότητα να οδηγηθούμε σε μια ή περισσότερες λανθασμένες εκτιμήσεις σύγκρισης ζευγών είναι ακριβώς ίση με τη στάθμη σημαντικότητας *α* όταν η πιθανότητα αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη κατά την εφαρμογή της πρώτης μεθόδου, καθώς η μέθοδος του Fisher θυμίζει περισσότερο μια σειρά ανεξάρτητων μεταξύ τους συγκρίσεων. Από την άλλη, η μέθοδος του Scheffé έχει αποδειχθεί καλύτερη από τις δύο προηγούμενες σε περιπτώσεις που το πλήθος παρατηρήσεων σε κάθε ομάδα δεν παραμένει ίδιο, ενώ έχει το πλεονέκτημα της ταυτόχρονης κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης με στάθμη σημαντικότητας *α* όχι μόνο στις κατά ζέυγη συγκρίσεις μεταξύ των μέσων των εξεταζόμενων ομάδων, αλλά και σε οποιοδήποτε γραμμικό τους συνδυασμό.

Η ***μέθοδος του Bonferroni*** φαίνεται να αποτελεί την πιο αντικειμενική ενδεχομένως λύση στις πολλαπλές συγκρίσεις μεταξύ ομάδων οι οποίες δεν έχουν το ίδιο πλήθος παρατηρήσεων, καθώς εισάγει μια κρίσιμη διόρθωση στον τρόπο εφαρμογής όλων των προηγούμενων μεθόδων. Η παρουσία k σταθμών ισοδυναμεί με τη σύγκριση $g = k(k\text{-}1)/2$ μέσων που προέρχονται από τα ζεύγη των k ομάδων. Εφόσον επιθυμούμε να διατηρήσουμε από κοινού τη στάθμη σημαντικότητας α για το σύνολο των g ελέγχων υποθέσεων ισότητας των μέσων, υποβιβάζουμε αναλογικά τη στάθμη σημαντικότητας σε α/g για κάθε επιμέρους σύγκριση. Η προσέγγιση αυτή δεν είναι αυθαίρετη καθώς υποστηρίζεται από τη θεωρία πιθανοτήτων και πιο συγκεκριμένα από την ανισότητα του Boole. Η μέθοδος προτιμάται σε περιπτώσεις που ο αριθμός των g συνδυασμών δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλος. Σε γενικές γραμμές, παρουσιάζει την τάση να δίνει μεγαλύτερα διαστήματα εμπιστοσύνης από τις μεθόδους των Fisher και Tukey και συγκρίσιμα με εκείνη του Scheffé (Tukey 1977).

Ερχόμενοι στο πρόβλημα που έχουμε να μελετήσουμε, η ανάλυση διασποράς εφαρμόζεται στη σχετική απόκλιση μεταξύ χρόνων ελαχίστου που έχουν προκύψει από παρατηρήσεις στα φίλτρα U, B, R και I σε σχέση με τους αντίστοιχους χρόνους στο φίλτρο V. Η μέθοδος εφαρμόζεται με σκοπό την εξακρίβωση του βαθμού επίδρασης της επιλογής ενός φίλτρου στον προσδιορισμό του χρόνου ελαχίστου και εκείνο που τελικά αναζητούμε είναι η ενδεχόμενη στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση των σχετικών αποκλίσεων μεταξύ των τεσσάρων πιο πάνω φίλτρων.

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν, το πλήθος σταθμών είναι $k = 4$ με αντίστοιχο πλήθος παρατηρήσεων $n_1 = 5$ (φίλτρο U), $n_2 = 24$ (φίλτρο B), $n_3 = 25$ (φίλτρο R), $n_4 = 22$ (φίλτρο I), συνολικού δηλαδή αριθμού σχετικών αποκλίσεων $n = 76$. Ο παρακάτω πίνακας περιλαμβάνει τα αποτελέσματα των πρώτων απαιτούμενων στατιστικών ελέγχων. Η στατιστική σημαντικότητα αποτυπώνεται με βάση την p-τιμή (p-value), τη στάθμη δηλαδή σημαντικότητας κάτω από την οποία η εκάστοτε υπόθεση γίνεται αποδεκτή. Εφόσον η διεθνώς καθιερωμένη πιθανότητα κάλυψης είναι 95%, p-τιμές μικρότερες από 0.05 υποδηλώνουν αποδοχή της εξεταζόμενης υπόθεσης (αστερίσκος ‘‘*’’) η οποία είτε αφορά έλεγχο διαφοροποίησης των μέσων μεταξύ των k ομάδων είτε έλεγχο ομογένειας των διασπορών τους (έλεγχος ομοσκεδαστικότητας):

Στατιστική Σημαντικότητα (p - τιμή)			
Στατιστικός Έλεγχος	***Μέθοδος KvW***	***Μέθοδος LSR***	***Μέθοδος BR***
Ανάλυση Διασποράς	0.0731	0.0176*	0.0223*
Έλεγχος Kruskal-Wallis	0.1460	0.0932	0.0798
Έλεγχος Cochran	0.0881	0.2869	0.6894

Η ανάλυση διαποράς αποφαίνεται στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των σχετικών αποκλίσεων που υπολογίζονται σε διαφορετικό φίλτρο στην περίπτωση των μεθόδων LSR και BR σε αντίθεση με τη μέθοδο KvW η οποία, έστω και οριακά, δεν οδηγεί σε στατιστικά σημαντικές διαφορές. Η ορθή όμως εφαρμογή της ανάλυσης διασποράς προαπαιτεί την ικανοποίηση των υποθέσεων κανονικότητας και ομοσκεδαστικότητας οι οποίες βρίσκονται υπό αμφισβήτηση εξαιτίας του μικρού σχετικά πλήθους παρατηρήσεων σε κάθε επιμέρους ομάδα. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει μάλιστα να δοθεί στην περίπτωση του φίλτρου U για το οποίο διαθέτουμε μόλις πέντε χρόνους ελαχίστου και κάθε συμπερασματολογία είναι ριψοκινδυνευμένη.

Κάτω από τις συνθήκες αυτές, εφαρμόσαμε τον έλεγχο Kruskal-Wallis (1952) ο οποίος είναι αξιόπιστος όταν η συνθήκη κανονικότητας παραβιάζεται, καθώς η σύγκριση των ομάδων στηρίζεται στις διαμέσους τους και όχι στους μέσους τους. Ο έλεγχος αυτός έδειξε ότι δεν παρατηρείται ανομοιογένεια μεταξύ των ομάδων πολύ κοντά όμως στην επιθυμητή στάθμη σημαντικότητας. Επίσης, ο έλεγχος ομοιογένειας διασποράς στηρίχθηκε στη μέθοδο του Cochran (1941) η οποία προτιμάται σε περιπτώσεις που υπάρχει υποψία ότι μια εκ των διασπορών δεν ακολουθεί τις υπόλοιπες. Ο έλεγχος αυτός δεν αποφάνθηκε την παρουσία ετεροσκεδαστικότητας αν και στην περίπτωση της μεθόδου KvW το συμπέρασμα αυτό ήταν εξαιρετικά οριακό.

Αποσκοπώντας στην αποσαφήνιση της ιδιαίτερα αυτής πεπλεγμένης κατάστασης, προχωρήσαμε στην εφαρμογή των πολλαπλών συγκρίσεων και ειδικότερα της μεθόδου Bonferroni μεταξύ των μέσων που αντιστοιχούν στις τέσσερις εξεταζόμενες ομάδες (Σχήμα ΙΙ.28). Η συγκεκριμένη μέθοδος επιλέχθηκε λόγω των σημαντικών προτερημάτων που παρουσιάζει κατά τη σύγκριση ομάδων ανόμοιου πλήθους παρατηρήσεων, τα αποτελέσματα της οποίας παρατίθενται στους παρακάτω τρεις πίνακες:

95% Bonferroni Διαστήματα Εμπιστοσύνης για τη μέθοδο KvW

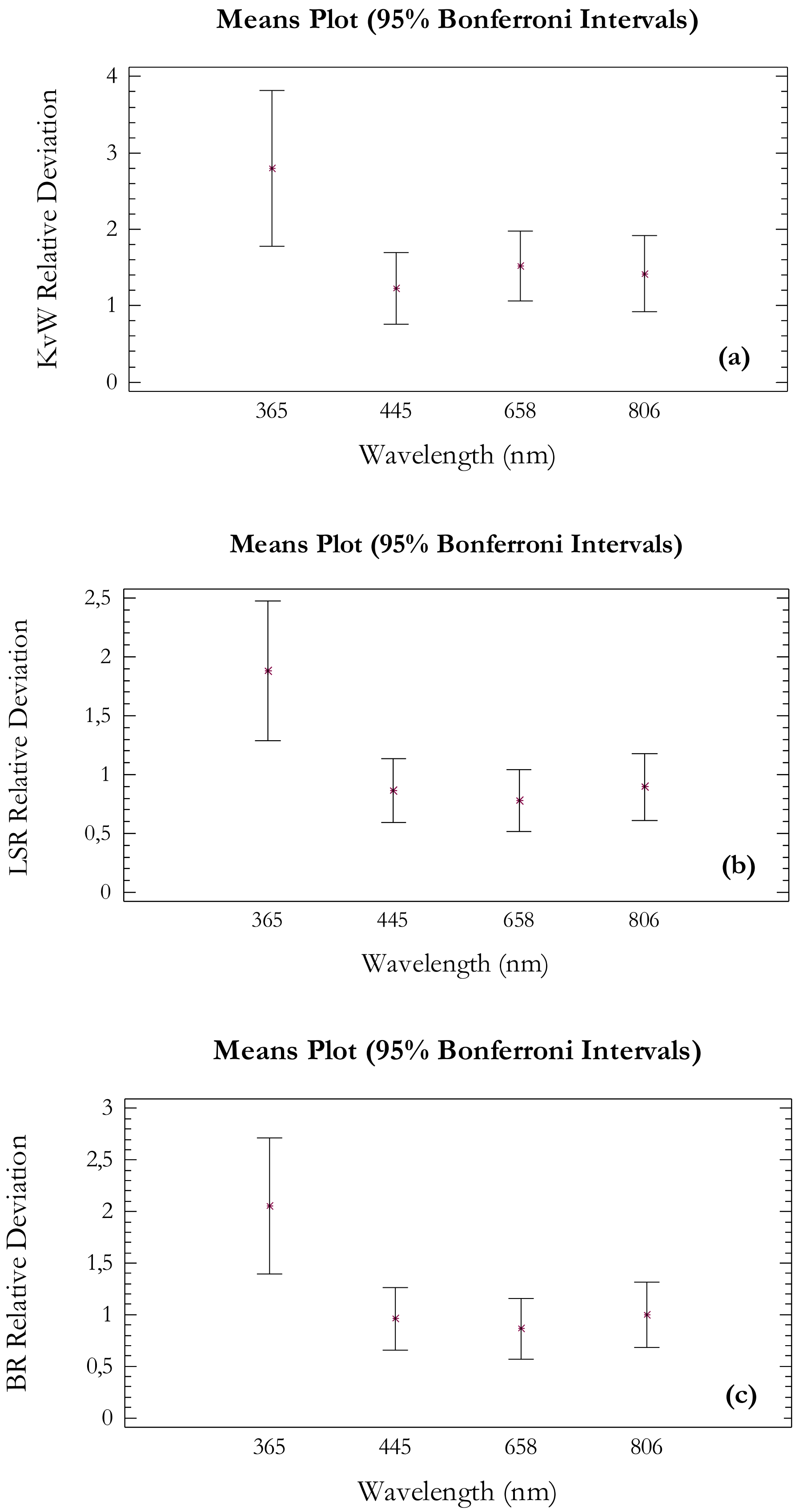
Φίλτρο	*Πλήθος*	*Μέσοι, μ_i*	*Τ. Απόκλιση, s_i*	*2.5% Π. Σημείο*	*97.5% Π. Σημείο*
U	5	2.79577	0.532840	1.773130*	3.81841
B	24	1.22782	0.243207	0.761054	1.69459*
R	25	1.52362	0.238293	1.066280	1.98096
I	21	1.41764	0.259999	0.918645	1.91664

95% Bonferroni Διαστήματα Εμπιστοσύνης για τη μέθοδο LSR

Φίλτρο	*Πλήθος*	*Μέσοι, μ_i*	*Τ. Απόκλιση, s_i*	*2.5% Π. Σημείο*	*97.5% Π. Σημείο*
U	5	1.879550	0.309688	1.285430*	2.47368
B	24	0.867367	0.141352	0.596188	1.13855*
R	25	0.779887	0.138497	0.514187	1.04559*
I	22	0.894213	0.147638	0.610976	1.17745*

95% Bonferroni Διαστήματα Εμπιστοσύνης για τη μέθοδο BR

Φίλτρο	*Πλήθος*	*Μέσοι, μ_i*	*Τ. Απόκλιση, s_i*	*2.5% Π. Σημείο*	*97.5% Π. Σημείο*
U	5	2.054960	0.344259	1.394510*	2.71540
B	24	0.960248	0.157132	0.658797	1.26170*
R	25	0.865806	0.153957	0.570444	1.16117*
I	22	0.996506	0.164119	0.681650	1.31136*



Σχήμα ΙΙ.28. Διαγράμματα στα οποία απεικονίζονται τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης που προβλέπει η μέθοδος Bonferroni κατά τη σύγκριση των μέσων σχετικών αποκλίσεων για τα τέσσερα φίλτρα. Σε αντίθεση με τις σχετικές αποκλίσεις που προέκυψαν με χρήση της μεθόδου KvW (a), το φίλτρο U διαφοροποιείται από τις υπόλοιπες ομάδες στην περίπτωση των μεθόδων LSR (b) και BR (c).

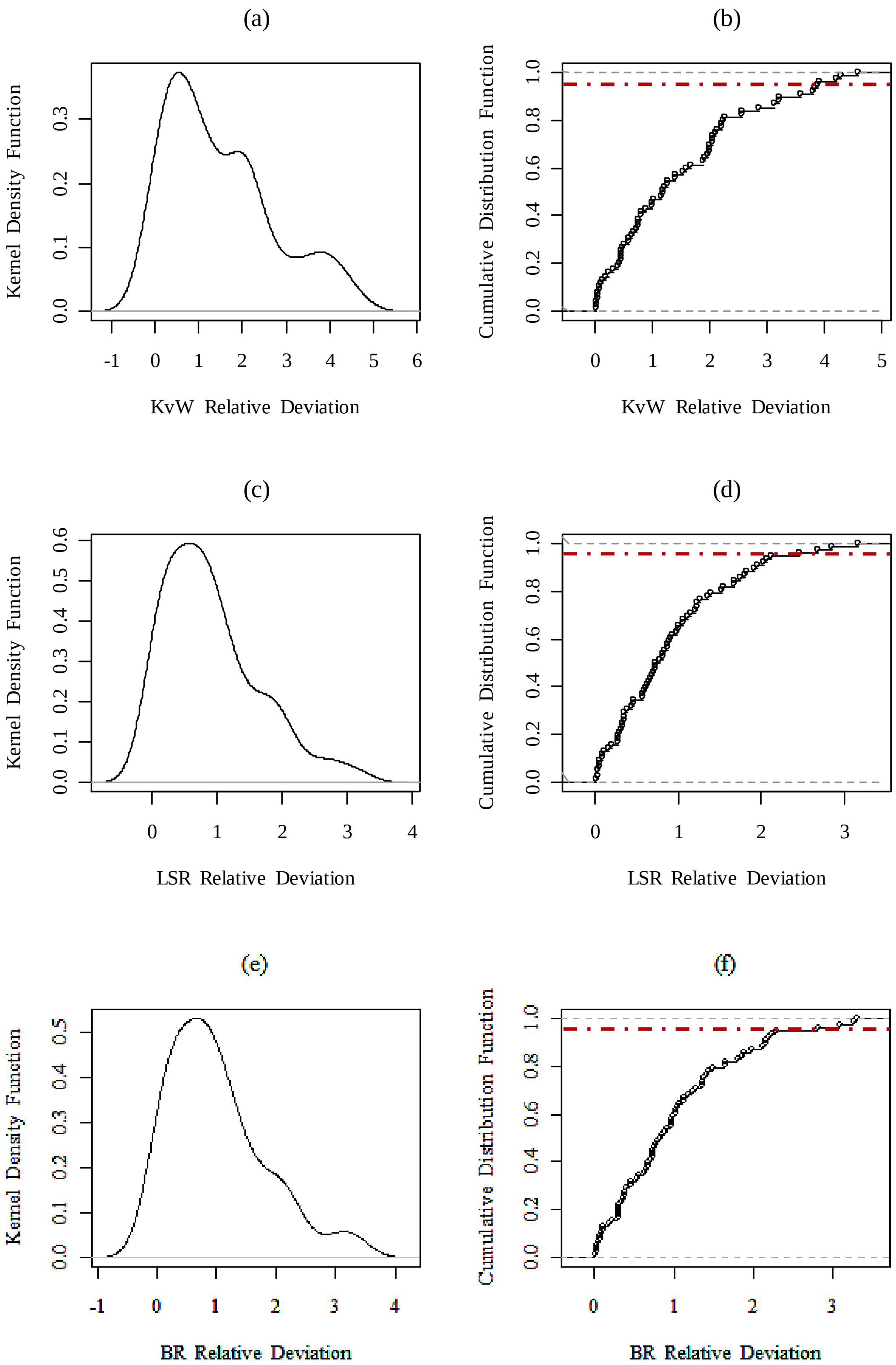
Στους πιο πάνω πίνακες περιλαμβάνεται η τυπική απόκλιση s_i που προκύπτει από τις παρατηρήσεις $\boldsymbol{y} = \{y_{ij},\ i = 1,...,k$ και $j = 1,...,n_i\}$ κάθε επιμέρους i στάθμης μεγέθους n_i και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$s_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \mu_i\right)^2}{n_i(n-k)}}\,. \tag{2.58}$$

Εκείνο το οποίο αξίζει να σχολιαστεί είναι η στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση των σχετικών αποκλίσεων μεταξύ χρόνων ελαχίστου στο φίλτρο U και χρόνων ελαχίστου στα τρία υπόλοιπα φίλτρα B, R και I. Η διαπίστωση αυτή αφορά τις σχετικές αποκλίσεις που έχουν προσδιοριστεί με βάση τις δύο μεθόδους παλινδρόμησης LSR και BR (Σχήμα II.28b,c), ενώ ισχύει μερικώς για τη μέθοδο KvW η οποία οδηγεί στο ίδιο συμπέρασμα μόνο μεταξύ χρόνων ελαχίστου στα φίλτρα U και B (Σχήμα II.28a). Παρά το γεγονός αυτό, η οριακή ικανοποίηση των υποθέσεων κανονικότητας και ομοσκεδαστικότητας αλλά και το εξαιρετικά μικρό πλήθος των πέντε μόλις παρατηρήσεων που αντιστοιχούν στο φίλτρο U δε μας επιτρέπουν μια οριστική απόφανση σχετικά με την αντικειμενικότητα των παρατηρούμενων διαφοροποιήσεων. Από την άλλη, οι σχετικές αποκλίσεις μεταξύ των υπολοίπων φίλτρων B, R και I βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους και κατανέμονται σε μια πολύ στενή περιοχή γύρω από την τιμή 1.0 σε αντίθεση με τις αποκλίσεις του φίλτρου U οι οποίες αγγίζουν ή και ξεπερνούν την τιμή 2.0.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα μελέτη, οφείλουμε να σημειώσουμε ότι το 95% της συνολικής στατιστικής μάζας που περιγράφεται από την κατανομή των σχετικών αποκλίσεων για τις δύο μεθόδους παλινδρόμησης R_{LSR} και R_{BR} που προέκυψε από την επεξεργασία των 114 χρόνων ελαχίστου (76 συνολικά διαφορές θέτοντας ως φίλτρο αναφοράς το φίλτρο V) περιλαμβάνει τιμές οι οποίες δεν ξεπερνούν το 2.3 και 2.6 αντίστοιχα (Σχήμα II.29d,f). Αντίθετα, η ίδια ποσοστιαία μάζα υπερβαίνει την τιμή 3.0, αγγίζοντας μάλιστα την τιμή 3.9, όταν οι σχετικές αποκλίσεις αφορούν τη μέθοδο KvW, R_{KvW} (Σχήμα II.29b). Επιλέγοντας λοιπόν ως στάθμη σημαντικότητας την τιμή $\alpha = 0.025$, διαπιστώνουμε ότι σε περιπτώσεις ασύμμετρων ελαχίστων ***η απόκλιση μεταξύ του χρόνου ελαχίστων που προβλέπει η παραδοσιακή ελαχιστοτετραγωνική παλινδρόμηση LSR σε δύο διαφορετικά φίλτρα βρίσκεται μέσα στην περιοχή ± 2.3σ του (συνολικού) σφάλματος που προβλέπει η ίδια η μέθοδος, σ_{LSR}, στην περιοχή ± 2.6σ του σφάλματος που προβλέπει η μέθοδος BR, σ_{BR}, και στην περιοχή ± 3.9σ του σφάλματος που προβλέπει η μέθοδος KvW, σ_{KvW}.***

Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η μορφή της κατανομής που ακολουθούν οι σχετικές αποκλίσεις κάθε μεθόδου. Σε όλες τις περιπτώσεις αποφύγαμε τη χρήση ενός απλού ιστογράμματος συχνοτήτων και προχωρήσαμε σε μια λεπτομερέστερη περιγραφή με τη βοήθεια *συνελίξεων Κανονικών κατανομών (Kernels)* η οποία αποκάλυψε την παρουσία τριών κορυφών με τις δύο πρώτες να βρίσκονται πάντοτε κοντά στην τιμή 1.0 και 2.0 ενώ την τρίτη κοντά στην τιμή 3.0 ή 4.0 για τις μεθόδους παλινδρόμησης LSR, BR (Σχήμα II.29c,e) και την KvW (Σχήμα II.29b) αντίστοιχα.



Σχήμα ΙΙ.29. Συνέλιξη Κανονικών κατανομών για την περιγραφή της κατανομής των σχετικών αποκλίσεων R_{KvW} (a), R_{LSR}, (c) και R_{BR} (e) που προκύπτουν μεταξύ χρόνων ελαχίστου σε διαφορετικά φίλτρα (χρήση εύρους κλάσης bw = 0.4, 0.25 και 0.3 αντίστοιχα). Η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής μας υποδεικνύει ότι μόνο 5% από τις αποκλίσεις αυτές είναι μεγαλύτερες από την τιμή 2.3 και 2.6 για την περίπτωση της μεθόδου LSR (d) και BR (f) αντίστοιχα. Αντίθετα, στην περίπτωση της μεθόδου KvW το ίδιο ποσοστό καλύπτει μόνο αποκλίσεις μεγαλύτερες από την τιμή 3.9 (b).

Σημειώνουμε εδώ ότι το σύνολο των στατιστικών ελέγχων και η ανάλυση διασποράς πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του εμπορικού προγράμματος STATGRAPHICS Plus (v.5.0) το οποίο είναι ευρύτατα διαδεδομένο τόσο σε επιχειρησιακούς σχεδιασμούς όσο και σε επιστημονικούς με έμφαση τις βιοστατιστικές κυρίως εφαρμογές. Η γλώσσα προγραμματισμού R (v.2.6.1) ήταν εκείνη που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή της μίξης Κανονικών κατανομών κάτω από κατάλληλες βιβλιοθήκες που παρέχονται στο χρήστη.

6.4. Συμπεράσματα

Στην τελευταία και ιδιαίτερα συνοπτική υποενότητα του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα των στατιστικών μελετών που πραγματοποιήθηκαν μέχρι τώρα ώστε να αποσαφηνιστούν οι παράγοντες που επιδρούν στην ακρίβεια προσδιορισμού του χρόνου ελαχίστων αλλά και εκείνων που οδηγούν σε σημαντικές διαφοροποιήσεις μεταξύ χρόνων ενός ελαχίστου που παρατηρήθηκε σε διαφορετικά φίλτρα. Με τον τρόπο αυτό γίνεται μια προσπάθεια παροχής συγκεκριμένων οδηγιών τις οποίες ένας παρατηρητής μπορεί να ακολουθεί ώστε να οδηγείται σε αξιόπιστα πάντοτε αποτελέσματα:

- Οι θεμελιώδεις αρχές απομόνωσης της λιγότερο παραμορφωμένης περιοχής ενός ελαχίστου από πιθανούς όρους ασυμμετρίας πρέπει να τηρούνται με αυστηρότητα. Πιο αναλυτικά, οι παρατηρήσεις που πρόκειται να αξιοποιηθούν με σκοπό τον προσδιορισμό του χρόνου ενός ελαχίστου πρέπει να βρίσκονται μέσα στην περιοχή που οριοθετείται γύρω από το ± 0.05 της τροχιακής φάσης περιμετρικά της θέσης του ελαχίστου (van't Veer 1973) με την κυρτότητα (φορά των κοίλων δηλαδή) να διατηρείται (Breinhorst et al. 1973).

- Η μέθοδος KvW προβλέπει ισοδύναμα αποτελέσματα με εκείνα της παραβολικής παλινδρόμησης σε περιπτώσεις ελαχίστων με μικρή παράμετρο ασυμμετρίας ρ (μικρότερη από 0.3). Εφόσον ο παρατηρητής (ή ο αναλυτής) δεν μεριμνήσει σχετικά με τον παράγοντα ασυμμετρίας και καταφύγει στη μέθοδο KvW με άγνοια των συνεπειών που μπορεί να επιφέρει, θα πρέπει να εμπιστευθεί το διάστημα που παράγεται γύρω από το ± 3.0σ του σφάλματος που προβλέπει η ίδια η μέθοδος, σ_{KvW}.

- Η μέθοδος παλινδρόμησης LSR θα πρέπει να προτιμάται σε σχέση με τη μέθοδο KvW. Εκτός από την εξουδετέρωση λανθασμένων μετατοπίσεων εξαιτίας της παρουσίας ενδεχόμενης ασυμμετρίας, η μέθοδος LSR προβλέπει χρόνους ελαχίστου οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε μια περιοχή γύρω από το ± 2.3σ του συνολικού σφάλματος της ίδιας της μεθόδου σ_{LSR} σε σχέση με τους αντίστοιχους χρόνους που έχουν προκύψει από παρατηρήσεις σε διαφορετικό φίλτρο.

- Η μέθοδος παλινδρόμησης BR θα πρέπει να προτιμάται τόσο σε σχέση με τη μέθοδο KvW όσο και με τη μέθοδο LSR. Η νέα αυτή μέθοδος έχει τα προτερήματα της LSR με τη διαφορά ότι μπορεί και διορθώνει πιθανές αποκλίσεις που προέρχονται από έλλειψη των αρχών κανονικότητας και ομοσκεδαστικότητας. Η μέθοδος BR προβλέπει χρόνους ελαχίστου οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε μια περιοχή γύρω από το $\pm$ 2.6σ του συνολικού σφάλματος της ίδιας της μεθόδου σ_{BR} ανεξάρτητα από τη μορφή του ελαχίστου, την επιλογή του φίλτρου, το πλήθος και την ποιότητα των παρατηρήσεων. Η δυναμική της είναι πιο εμφανής σε περιπτώσεις που το πλήθος των παρατηρήσεων είναι μικρό και το είδος της κατανομής που ακολουθεί ο χρόνος ελαχίστου αρκετά σύνθετο.

- Το πλήθος των παρατηρήσεων που επιλέγονται προς επεξεργασία φαίνεται να αποτελεί σημαντικό παράγοντα στην ακρίβεια του χρόνου ελαχίστων. Ασφαλής προσδιορισμός χρόνου ελαχίστων απαιτεί πλήθη τουλάχιστον μεγαλύτερα από 20, 10 δηλαδή τουλάχιστον στον ανοδικό και καθοδικό κλάδο του ελαχίστου.

- Ο παρατηρησιακός θόρυβος αποδείχθηκε εξαιρετικά κρίσιμη παράμετρος, η σημαντικότερη μετά το βαθμό ασυμμετρίας. Η ραγδαία αύξηση του σφάλματος όλων των μεθόδων σε περιπτώσεις δεδομένων χαμηλής ποιότητας οδηγεί σε υπερκάλυψη οποιασδήποτε μορφής χρονικών αποκλίσεων.

- Διαφοροποίηση της συμπεριφοράς μεταξύ χρόνων ελαχίστου σε διαφορετικό φίλτρο δεν παρατηρείται. Αν και το φίλτρο U απαιτεί τουλάχιστον τη διπλάσια τιμή του σφάλματος της εκάστοτε μεθόδου για να καλύψει διαφορές με χρόνους ελαχίστων από τα υπόλοιπα φίλτρα, η στατιστική σημαντικότητα των κριτηρίων αποδοχής είναι οριακή.

Οριστικά συμπεράσματα σχετικά με την αξιολόγηση των μεθόδων προσδιορισμού του χρόνου ελαχίστων μπορούν να εξαχθούν μόνο εφόσον το δείγμα περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό διπλών εκλειπτικών συστημάτων ώστε να διερευνηθούν ελάχιστα με διαφορετικά εγγενή χαρακτηριστικά αλλά και ο τρόπος με τον οποίο οι εξεταζόμενοι παράγοντες διαφοροποιούν ενδεχομένως το βαθμό επίδρασής τους στην ακρίβεια προσδιορισμού του χρόνου ελαχίστων σε συστήματα με διαφορετική μεταξύ τους τροχιακή περίοδο. Παρά το γεγονός αυτό, το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα διατριβή θεωρήθηκε εξίσου επαρκές καθώς τα δύο συστήματα που διερευνήθηκαν, RT And και CG Cyg, περιλαμβάνουν ελάχιστα τα οποία συγκεντρώνουν μεγάλη ποικιλία ιδιομορφιών όταν η τροχιακή περίοδος παραμένει όμως σταθερή και περίπου ίση με 0.63 d.

Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι τα πρωτεύοντα ελάχιστα των δύο συστημάτων είναι συμμετρικά, τα δευτερεύοντα ασύμμετρα και μάλιστα σε διαφορετικό βαθμό (π.χ. στα φίλτρα U, B και V το δευτερεύον ελάχιστο του συστήματος RT And αποδίδεται σε ολική έκλειψη ενώ στα υπόλοιπα φίλτρα σε μερική). Υπήρξε σημαντικός αριθμός χρόνων ελαχίστων οι οποίοι προέκυψαν από παρατηρήσεις ποικίλου πλήθους και ποιότητας σε όλα τα διαθέσιμα φίλτρα (της ορατής περιοχής) με μόνη δυστυχώς εξαίρεση το φίλτρο U.

Πρέπει τέλος να επισημανθεί ότι ο κύριος όγκος της στατιστικής μάζας των αποκλίσεων μεταξύ χρόνων ελαχίστου διαφορετικού φίλτρου καλύπτεται από το σφάλμα (1σ) της εκάστοτε μεθόδου (Σχήμα ΙΙ.29). Η δεύτερη κορυφή που βρίσκεται κοντά στο διπλάσιο του σφάλματος (2σ) φαίνεται να δικαιολογείται μέσα στα πλαίσια έντονων ασυμμετριών και παρατηρήσεων στο φίλτρο U, ενώ η τρίτη και μικρότερη κορυφή που παρατηρείται στην ουρά της κατανομής (3σ - 4σ) μπορεί να εξηγηθεί από την παρουσία χρόνων ελαχίστου μικρού πλήθους παρατηρήσεων. Οι διαπιστώσεις αυτές μπορεί να έχουν σοβαρές επιπτώσεις στη στάθμη θορύβου των διαγραμμάτων O-C τα οποία θα μελετηθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Ολοκληρώνοντας, πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι όλες μας οι εκτιμήσεις σχετικά με την αβεβαιότητα που συνοδεύει τον προσδιορισμό του χρόνου ελαχίστων αφορούν αποκλειστικά φωτομετρικές παρατηρήσεις με ανιχνευτή μια CCD κάμερα. Ως εκ τούτου, η ποιότητα της φωτομετρικής επεξεργασίας ήταν η καλύτερη δυνατή συγκριτικά με τις φωτογραφικές ή οφθαλμοσκοπικές παρατηρήσεις οι οποίες υϊοθετούνταν αρκετά συχνά στο παρελθόν και συνεπώς πρόσθετοι επιβαρυντικοί παράγοντες προερχόμενοι από τον παρατηρησιακό εξοπλισμό δεν εξετάστηκαν.

‘‘From several O-C studies we found that a slight change in the weight-assigning scheme may significantly change the quantitative conclusions: this scheme of weights is, in fact, a hidden parameter that somehow infuences the solution.’’

Sterken C.
‘‘The O-C Diagram: Basic Procedures’’
2005, ASPC, 335, 3S

Κεφάλαιο III

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Ο-C

Τα διαγράμματα O-C αποτελούν ένα μέσο εξέχουσας σημασίας σχετικά με την ανίχνευση μεταβολών της περιόδου ενός περιοδικού μεταβλητού αστέρα. Όσον αφορά τα διπλά εκλειπτικά συστήματα, η κατασκευή των διαγραμμάτων αυτών αποτελεί ίσως τον μοναδικό τρόπο διάγνωσης των μεταβολών της τροχιακής τους περιόδου, γεγονός το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα αναγνώρισης και μελέτης των φυσικών μηχανισμών που οδήγησαν στις παραπάνω μεταβολές. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η ανάλυση των διαγραμμάτων O-C μας προσφέρει άμεσα μια δυναμική εικόνα ενός διπλού εκλειπτικού συστήματος, κάτι το οποίο κανένα άλλο μέχρι τώρα μέσο δεν έχει καταφέρει.

1. Κατασκευή και Ιδιότητες

Η κατασκευή των διαγραμμάτων O-C απαιτεί τη γνώση πλήθους καταγεγραμένων χρόνων ελαχίστων (τουλάχιστον για τα διπλά εκλειπτικά συστήματα) τα οποία συλλέγονται είτε από εργασίες στις οποίες προσδιορίζονται και δημοσιεύονται χρόνοι ελαχίστων είτε από εργασίες στις οποίες αναλύονται ολοκληρωμένες καμπύλες φωτός και συνήθως υπολογίζονται οι αντίστοιχοι χρόνοι των δύο ελαχίστων. Τα τελευταία χρόνια έχουν μάλιστα δημιουργηθεί βάσεις δεδομένων οι οποίες περιλαμβάνουν χρόνους ελαχίστων από διεθνείς ενώσεις παρατηρητών, όπως εκείνες της *A.A.V.S.O.* (*American Association of Variable Stars Observers*) και *B.B.S.A.G.* (*Group of Eclipsing Binary Observers of the Swiss Astronomical Society*), μεγάλο μέρος των οποίων οφείλεται σε έμπειρους ερασιτέχνες αστρονόμους. Πρόσφατα, ιδιαίτερα σημαντική θεωρείται η συμβολή των Paschke και Brat (2006) οι οποίοι κατασκεύασαν μια βάση δεδομένων, γνωστή ως ‘‘*O-C gateway*’’ από την οποία παρέχεται η δωρεάν πρόσβαση στους δημοσιευμένους χρόνους ελαχίστων και μεγίστων ενός πολύ μεγάλου πλήθους μεταβλητών αστέρων συνοδευόμενων με τις παραπομπές των αυθεντικών πηγών τους (http://astro.sci.muni.cz/variables/ocgate). Φυσικά, όπως θα δούμε αναλυτικότερα στη συνέχεια, η αναγωγή των παρατηρήσεων σε διαφορές O-C πραγματοποιείται με τη βοήθεια μιας γραμμικής εφημερίδας.

1.1. Εξίσωση Εφημερίδας

Στην περίπτωση ενός περιοδικού μεταβλητού αστέρα και συνεπώς στους διπλούς εκλειπτικούς αστέρες, κατά τη διάρκεια μιας νυχτερινής παρατήρησης, πέρα από κάποιες ειδικές περιπτώσεις ιδιαίτερα βραχυπερίοδων μεταβλητών αστέρων, είναι σχεδόν απίθανο να συμπληρωθεί μια πλήρης καμπύλη φωτός, δηλαδή ένας πλήρης κύκλος μεταβολής. Ως εκ τούτου, απαιτείται η μετατροπή του χρόνου παρατήρησης σε φάση του κύκλου μεταβολής, έτσι ώστε να έχουμε πλήρη εποπτεία του τελευταίου σε οποιοδήποτε σημείο του. Συγκεκριμένα, εάν P είναι η φωτομετρική περίοδος του συστήματος και T_0 ένας χρόνος πρωτεύοντος ελαχίστου (συνήθως ένας από εκείνους που χρησιμοποιήθηκαν ώστε να προσδιοριστεί η παραπάνω περίοδος), είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε την ***εξίσωση εφημερίδας (ephemeris)*** του, η οποία έχει την παρακάτω μορφή:

$$Min_E = T_0 + PE\,, \tag{3.1}$$

όπου Min_E η χρονική στιγμή που θα λάβει χώρα το ελάχιστο για οποιοδήποτε κύκλο E (ακέραιο μέρος), του οποίου το δεκαδικό μέρος εκφράζει τη φάση φ του κύκλου μεταβολής ($0 \le \varphi \le 1$). Στη θέση του χρόνου ελαχίστου μπορεί να βρίσκεται ο χρόνος ενός μεγίστου Max_E εφόσον η εφημερίδα αναφέρεται σε παλλόμενους κυρίως μεταβλητούς αστέρες (το ενδιαφέρον είναι μάλιστα εντονότερο στην περίπτωση μη συμμετρικά παλλόμενων μεταβλητών, όπως οι αστέρες τύπου δ Scuti και β CMa, καθώς και οι νάνοι κηφείδες).

Με τη βοήθεια της εξίσωσης εφημερίδας μπορούμε να κατασκευάσουμε το *διάγραμμα φάσης (phase diagram)* ενός περιοδικού μεταβλητού αστέρα το οποίο απεικονίζει τη μεταβολή της λαμπρότητάς του σε έναν και μόνο κύκλο μεταβολής και αντιστοιχεί σε μια πλήρη καμπύλη φωτός, με τη διαφορά όμως ότι στον οριζόντιο άξονα σημειώνεται η φάση αντί του χρόνου παρατήρησης. Η παραπάνω εφημερίδα είναι γραμμική καθώς θεωρούμε την περίοδο μεταβολής της λαμπρότητας του συστήματος σταθερή. Σε αντίθετη περίπτωση, κατασκευάζονται μη γραμμικές εφημερίδες και οι οποίες μαθηματικά εκφράζονται μέσω ενός πολυωνύμου ως προς ανώτερες δυνάμεις του E. Το γεγονός αυτό απαιτεί τη γνώση του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλεται η περίοδος, κάτι το οποίο δεν είναι εύκολα (συνήθως) προσδιορίσιμο.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η κατασκευή μιας γραμμικής εφημερίδας είναι θεμελιώδης όσον αφορά ένα διπλό εκλειπτικό σύστημα (σε αυτά άλλωστε επικεντρώνεται η παρούσα διατριβή) καθώς με τη βοήθειά της μπορούμε να προβλέπουμε κάθε χρονική στιγμή τη φάση περιφοράς στην οποία βρίσκεται το σύστημα και ακόμα πιο σημαντικά, τους χρόνους ελαχίστων. Κάτι τέτοιο βέβαια έχει νόημα όσο η τροχιακή περίοδος παραμένει σταθερή, γεγονός το οποίο ισχύει για μερικές συνήθως εκατοντάδες τροχιακούς κύκλους. Επομένως, η αναμενόμενη τιμή ενός χρόνου ελαχίστου C_E για έναν τυχαίο τροχιακό κύκλο E, προσδιορίζεται από μια *γραμμική εφημερίδα* ως προς μια σταθερή τροχιακή περίοδο αναφοράς P_e η οποία καλείται *περίοδος εφημερίδας*:

$$C_E = T_0 + P_e E\,, \tag{3.2}$$

όπου T_0 ο χρόνος ενός προηγούμενου καταγεγραμένου πρωτεύοντος ελαχίστου (το οποίο αντιστοιχεί στον τροχιακό κύκλο $E = 0$). Ο αναμενόμενος χρόνος C_E καλείται

υπολογιζόμενος χρόνος ελαχίστου (Calculated time of minimum) και, όπως θα δούμε στη συνέχεια, διαφέρει σχεδόν πάντοτε από τον αντίστοιχο ***παρατηρούμενο χρόνο ελαχίστου (Observed time of minimum)*** O_E για τον ίδιο κύκλο E.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι εξισώσεις εφημερίδας δίνονται σε Ιουλιανές ημέρες (Julian Days, JD), δηλαδή σε ημέρες που πέρασαν από τη μεσημβρία της πρώτης Ιανουαρίου του 4713 π.Χ., ή έχουν αναχθεί σε ηλιοκεντρικές Ιουλιανές ημέρες (Heliocentric Julian Days, HJD) ώστε να χρησιμοποιούμε τον Ήλιο και όχι τη Γη ως το κεντρικό σύστημα αναφοράς στην παρατήρηση ενός ουράνιου σώματος. Η περίοδος εφημερίδας αντίστοιχα εκφράζεται σε μέσες ηλιακές ημέρες (days).

1.2. Συσχέτιση Διαγραμμάτων O-C και Μεταβολών Περιόδου

Δεχόμενοι μια γραμμική εφημερίδα με βάση την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το χρόνο του πρωτεύοντος ελαχίστου για οποιοδήποτε τροχιακό κύκλο, είμαστε πλέον σε θέση να προσδιορίσουμε τις διαφορές των παραπάνω χρόνων από τις αντίστοιχες παρατηρούμενες. Η γραφική απεικόνιση των διαφορών O-C ως προς τους τροχιακούς κύκλους E αποτελεί ουσιαστικά το ***διάγραμμα O-C (Observed minus Calculated diagram)***. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η μορφή του διαγράμματος O-C εξαρτάται αφενός μεν από τους φυσικούς μηχανισμούς που λαμβάνουν χώρα σε ένα σύστημα αστέρων, αφετέρου δε από την επιλογή της γραμμικής εφημερίδας και συνεπώς από την περίοδο αναφοράς της.

Εύκολα λοιπόν γίνεται κατανοητό πως το παραπάνω διάγραμμα μας πληροφορεί έμμεσα σχετικά με τις μεταβολές της τροχιακής περιόδου, οι οποίες οφείλονται είτε σε δυναμικής προέλευσης φαινόμενα (πραγματικές και φαινόμενες μεταβολές) είτε σε φωτομετρικής προέλευσης φαινόμενα (πλασματικές μεταβολές). Τα τελευταία συνοδεύουν σχεδόν πάντοτε τις πραγματικές μεταβολές και δυστυχώς δεν μπορούν να απομακρυνθούν. Εκείνο το οποίο μόνο μπορεί να εκτιμηθεί είναι ο θόρυβος που επιφέρουν στο διάγραμμα. Η εύρεση του κατάλληλου μετασχηματισμού, ο οποίος καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η τροχιακή περίοδος για κάθε κύκλο E, $P(E)$, σύμφωνα με τη διαμόρφωση του διαγράμματος $[O\text{-}C](E)$ έχει πραγματοποιηθεί από τους Kalimeris, Rovithis-Livaniou και Rovithis (1994a) και η απόδειξή του παρατίθεται παρακάτω (Kalimeris et al. 1994a):

Με τη βοήθεια μιας γραμμικής εφημερίδας, περιόδου αναφοράς P_e, ο υπολογιζόμενος χρόνος του πρωτεύοντος ελαχίστου για έναν τυχαίο τροχιακό κύκλο E αλλά και για τον προηγούμενο από αυτόν, E-1, θα δίνεται προφανώς από τις αντίστοιχες ακόλουθες σχέσεις:

$$C(E) = T_0 + P_e E \quad (3.3) \quad \text{και} \quad C(E-1) = T_0 + P_e(E-1). \quad (3.4)$$

Είναι τώρα προφανές ότι η πραγματική περίοδος του συστήματος θα είναι ίση με τη διαφορά των παρατηρούμενων χρόνων των πρωτευόντων ελαχίστων για τους δύο παραπάνω τυχαίους τροχιακούς κύκλους. Περιγράφοντας τη χρονοσειρά $[O\text{-}C](E)$ με μια κατάλληλη συνάρτηση $\Delta T(E)$ για το διάστημα των παρατηρήσεων που διαθέτουμε [E_{min}, E_{max}], είμαστε πλέον σε θέση να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση που εκφράζει την περίοδο ανά τροχιακό κύκλο ως εξής:

$$P(E) = O(E) - O(E-1) = [C(E) + \Delta T(E)] - [C(E-1) + \Delta T(E-1)] \Leftrightarrow$$

$$P(E) = [T_0 + P_e E + \Delta T(E)] - [T_0 + P_e E - P_e + \Delta T(E-1)] \Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(E) = P_e + \Delta T(E) - \Delta T(E-1)}. \quad (3.5)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της τροχιακής περιόδου ανά τροχιακό κύκλο, dP/dE, προσδιορίζεται εξίσου εύκολα, σύμφωνα με την ακόλουθη διαδικασία:

$$\dot{P}(E) = P(E) - P(E-1) \Leftrightarrow$$

$$\dot{P}(E) = [P_e + \Delta T(E) - \Delta T(E-1)] - [P_e + \Delta T(E-1) - \Delta T(E-2)] \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\dot{P}(E) = \Delta T(E) - 2\Delta T(E-1) + \Delta T(E-2)}. \quad (3.6)$$

Παρατηρούμε ότι ***ο νόμος που συσχετίζει την τροχιακή περίοδο ενός εκλειπτικού συστήματος με τις αντίστοιχες διαφορές O-C είναι διαφορικός***. Η συνάρτηση (3.5) που εκφράζει την περίοδο του συστήματος ταυτίζεται με το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $\Delta T(E)$ μέσω των προς τα πίσω διαφορών της. Αν και στην πραγματικότητα η μεταβολή της είναι συνεχής, αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιούμε διαφοροεξισώσεις, καθώς η μοναδική ασφαλής πληροφορία που διαθέτουμε κατά τη διάρκεια ενός τροχιακού κύκλου αναφέρεται στη χρονική στιγμή που λαμβάνουν χώρα τα ελάχιστα. Μεταξύ δηλαδή των ελαχίστων δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο η περίοδος μεταβάλλεται. Στο πέμπτο κεφάλαιο, η διαδικασία αντιστρέφεται και επεκτείνεται σε προσδιορισμό των συναρτήσεων $\Delta T(E)$ κάτω από συνεχείς μεταβολές της περιόδου $P(E)$. Η μετάβαση από το διακριτό καθεστώς περιγραφής των διαγραμμάτων O-C στο αντίστοιχο συνεχές οδηγεί στην παρουσία ενός σφάλματος το οποίο εκτιμάται αναλυτικά για κάθε κύκλο E (Παράρτημα ΙΙ). Η τελευταία διαπίστωση οδηγεί άμεσα στα ακόλουθα πολύ σημαντικά συμπεράσματα:

- Η συνάρτηση η οποία περιγράφει τις διαφορές O-C οφείλει να είναι *παραγωγίσιμη και συνεπώς συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της*. Το γεγονός αυτό αποτελεί τη μοναδική δέσμευση σχετικά με τη συνάρτηση $\Delta T(E)$ η οποία κατά τα άλλα μπορεί να επιλεγεί ελεύθερα, ανάλογα με τον τρόπο περιγραφής της χρονοσειράς που επιθυμείται να εφαρμοστεί. Οι δύο παραπάνω θεμελιώδεις εκφράσεις είναι άλλωστε γενικές και δεν επιβάλλουν περαιτέρω περιορισμούς στη μορφή της συγκεκριμένης συνάρτησης.

- Ανοδικά ή καθοδικά τμήματα του διαγράμματος O-C δεν πρέπει να συγχέονται με αύξηση ή μείωση αντίστοιχα της τροχιακής περιόδου. *Η μονοτονία της τροχιακής* *περιόδου καθορίζεται από την καμπυλότητα της συνάρτησης των O-C διαφορών και συνεπώς η θέση των ακροτάτων της πρώτης αντιστοιχεί σε εκείνη των σημείων καμπής της δεύτερης*. Πιο συγκεκριμένα, *θετικές μεταβολές της κλίσης (κυρτές) ενός διαγράμματος O-C συνδέονται με αύξηση της τροχιακής περιόδου, ενώ αρνητικές μεταβολές (κοίλες) με μείωση της περιόδου*. Δεν πρέπει λοιπόν να προκαλεί εντύπωση το γεγονός ύπαρξης γνήσια μονότονων συναρτήσεων $\Delta T(E)$ οι οποίες αντιστοιχούν τελικά σε μια πολύπλοκα χρονομεταβαλλόμενη συνάρτηση $P(E)$.

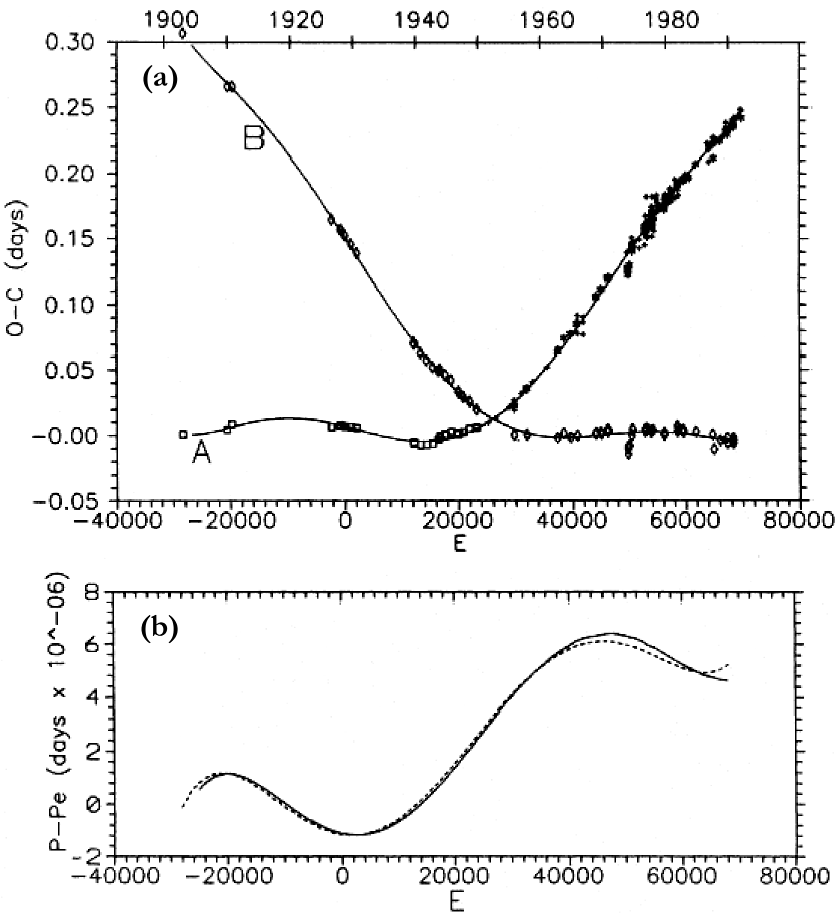
- Η συνάρτηση η οποία περιγράφει τη μεταβολή της τροχιακής περιόδου εξαρτάται γραμμικά από την περίοδο εφημερίδας που έχει επιλεγεί. Το γεγονός αυτό σημαίνει πως *η διαμόρφωση του διαγράμματος που απεικονίζει τη μεταβολή της περιόδου σε σχέση με τον τροχιακό κύκλο θα είναι ίδια για οποιαδήποτε εφημερίδα*. Η μόνη διαφοροποίηση έγκειται σε μια μετατόπιση της περιόδου κατά μια σταθερή ποσότητα στον κατακόρυφο άξονα.

- *Η διαφορά της περιόδου εφημερίδας από τη συνάρτηση μεταβολής της περιόδου,* $P(E)\text{-}P_e$, *(τροποποιημένη συνάρτηση μεταβολής της περιόδου) είναι ανεξάρτητη από τη χρησιμοποιούμενη εφημερίδα*, ιδιότητα που της προσδίδει ιδιαίτερη αξία (Σχήμα III.1). Η παραπάνω ιδιότητα φυσικά ισχύει στα πλαίσια των αβεβαιοτήτων που εισάγει ο συνολικός θόρυβος ενός διαγράμματος O-C. Προτείνεται μάλιστα η αναζήτηση ενδεχόμενων περιοδικοτήτων, μέσω φασματικής ανάλυσης, να πραγματοποιείται στη χρονοσειρά που προκύπτει από τις παραπάνω διαφορές (Kalimeris et al. 1994b).

Οι παραπάνω επισημάνσεις αξίζουν ιδιαίτερης προσοχής καθώς μέχρι και τα τελευταία χρόνια οι περισσότερες από αυτές είτε δεν ήταν ακόμα γνωστές είτε παραβλέπονταν. Άμεση συνέπεια των παραπάνω ήταν η εξαγωγή λανθασμένων συμπερασμάτων σχετικά με τις μεταβολές της τροχιακής περιόδου με βάση τη διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C. Το πιο συνηθισμένο μάλιστα λάθος ήταν εκείνο της ταύτισης της θέσης των ακροτάτων των διαγραμμάτων O-C με εκείνη των ακροτάτων της μεταβολής της τροχιακής περιόδου. Σε γενικές γραμμές, το βάρος το οποίο δινόταν στα διαγράμματα O-C ως διαγνωστικό μέσο των διαφόρων μηχανισμών ήταν πάντοτε μικρό καθώς, λανθασμένα, κυριαρχούσε η άποψη πως οι παρατηρούμενες διαμορφώσεις ήταν σε μεγάλο βαθμό αποτέλεσμα των σφαλμάτων κατά τον προσδιορισμό των χρόνων των ελαχίστων αλλά και της ύπαρξης αστρικών κηλίδων.

1.3. Ιδιότητες των Διαγραμμάτων O-C

Οι βασικές ιδιότητες των διαγραμμάτων O-C προκύπτουν από τις επιπτώσεις που προκαλεί μια μετατόπιση του χρόνου ενός ελαχίστου κατά την ποσότητα ΔT, η οποία έλαβε χώρα σε έναν τυχαίο τροχιακό κύκλο E_0, στην τελική διαμόρφωση των διαφορών O-C, αλλά και της κλίσης του ομώνυμου διαγράμματος για τους επόμενους τροχιακούς κύκλους E.



Σχήμα ΙΙΙ.1. Το διάγραμμα O-C του συστήματος υπερεπαφής AB And βασισμένο σε δύο διαφορετικές γραμμικές, A και B, εφημερίδες (a). Η περιγραφή της αντίστοιχης χρονοσειράς έχει πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια κατάλληλων ορθογώνιων πολυωνύμων (Kalimeris et al. 1994b). Είναι εμφανές ότι η τροποποιημένη συνάρτηση μεταβολής της περιόδου $P(E)$-P_e είναι μοναδική και ανεξάρτητη από τη χρησιμοποιούμενη εφημερίδα (b).

Αποδεικνύεται λοιπόν (αναδρομικά) ότι σε κάθε διπλό εκλειπτικό σύστημα αστέρων, η εμφάνιση κατά τον κύκλο E_0 μιας πραγματικής ή φαινόμενης μεταβολής της τροχιακής περιόδου ΔP, συνεπάγεται την ανάπτυξη μιας διαφοράς O-C ίσης με $\Delta T = \Delta P$. Η διαφορά αυτή διαδίδεται γραμμικά αυξανόμενη σε όλους τους επόμενους τροχιακούς κύκλους, δίνοντας στο διάγραμμα O-C τη μορφή ευθείας με κλίση ΔT, σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση (Καλημέρης 2002):

$$(O-C)_E = (E-E_0)\Delta T = (E-E_0)\Delta P \quad \text{με} \quad E \geq E_0 . \tag{3.7}$$

Γενικεύοντας την παραπάνω απλουστευμένη περίπτωση, θεωρούμε ότι μια ανάλογη μετατόπιση του χρόνου των ελαχίστων μπορεί να λάβει χώρα σε οποιοδήποτε από τους κύκλους μεταγενέστερους του E_0, προκαλούμενη από μεταβολές της περιόδου (πραγματικές ή φαινόμενες) ίσες με $\Delta P_1, \Delta P_2, ..., \Delta P_N$ για τον πρώτο μέχρι το N-οστό κύκλο αντίστοιχα μετά τον E_0. Η διαμόρφωση της διαφοράς O-C για τον τυχαίο κύκλο E θα περιγράφεται τότε από την ακόλουθη διαδικασία:

$$(O-C)_E = (E-E_0)\Delta P_1 + (E-1-E_0)\Delta P_2 + (E-2-E_0)\Delta P_3 \cdots + 2\Delta P_{N-1} + \Delta P_N \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(O-C)_E = \sum_{k=0}^{N=E-E_0-1}\{(E-E_0-k)\varDelta P_{k+1}\}} \quad \text{με} \quad E \geq E_0 . \tag{3.8}$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει τη γενική διαπίστωση πως η διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C εξαρτάται από το άθροισμα των επιμέρους μεταβολών $\{\varDelta P_k,\ k = 0,...,E\text{-}E_0\text{-}1\}$ της τροχιακής περιόδου που έχουν συμβεί σε όλους τους προηγούμενους του *E* κύκλους (Kalimeris et al. 1994a). Επικεντρώνοντας τώρα στην περίπτωση κατά την οποία οι μεταβολές της περιόδου πραγματοποιούνται με σταθερό και συνεχή τρόπο, είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι ισχύει:

$$\dot{P} = \Delta P = const. \ \text{για κάθε τροχιακό κύκλο } E. \tag{3.9}$$

Η διαμόρφωση του διαγράμματος O-C στην περίπτωση αυτή μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι είναι *παραβολικής μορφής* καθώς, εφαρμόζοντας τη σχέση (3.8) και εκείνη του αθροίσματος διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου, ισχύουν τα εξής (Καλημέρης 2002):

$$(O-C)_E = \sum_{k=0}^{N=E-E_0-1}\{(E-E_0-k)\varDelta P_{k+1}\} = \varDelta P \cdot \sum_{k=0}^{N=E-E_0-1}(E-E_0-k) = \frac{E(E+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$(O-C)_E = \frac{\dot{P}}{2}E^2 + \frac{\dot{P}}{2}E . \tag{3.10}$$

Η τελευταία, εξίσου πολύ μεγάλης σημασίας, ιδιότητα των διαγραμμάτων O-C αποτελεί ***η μη γραμμική διαμόρφωση της κλίσης τους***. Υποθέτοντας λοιπόν ότι η γωνία κλίσης του διαγράμματος σε έναν τυχαίο τροχιακό κύκλο E_1 είναι ίση με φ_1 και ότι κατά τη διάρκεια του επόμενου κύκλου E_2, γωνίας κλίσης ίσης με φ_2, η τροχιακή περίοδος μεταβάλλεται κατά $\varDelta P$, τότε η στροφή $\varDelta\varphi = \varphi_2\text{-}\varphi_1$ που λαμβάνει χώρα στο διάγραμμα εξαρτάται όχι μόνο από την ποσότητα $\varDelta P$ αλλά και από την αρχική γωνία $\varphi_1 \equiv \varphi$. Πιο αναλυτικά, ακολουθούμε την πιο κάτω διαδικασία (Kalimeris et al. 2002):

$$\varDelta P = \varDelta T_2 - \varDelta T_1 = [(O-C)_2 - (O-C)_1] - [(O-C)_1 - (O-C)_0] \Leftrightarrow$$

$$\varDelta P = (E_2 - E_1)\tan\varphi_2 - (E_1 - E_0)\tan\varphi_1 = \tan\varphi_2 - \tan\varphi_1 \Leftrightarrow$$

$$\varDelta P = \tan(\varphi_1 + \varDelta\varphi) - \tan\varphi_1 = \frac{\tan\varphi_1 + \tan\varDelta\varphi}{1 - \tan\varphi_1 \tan\varDelta\varphi} - \tan\varphi_1 \Leftrightarrow$$

$$\tan\varDelta\varphi = \frac{\varDelta P}{\tan^2\varphi + \varDelta P \cdot \tan\varphi + 1} . \tag{3.11}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μας πληροφορεί πως οι μεταβολές της τροχιακής περιόδου σε ένα διπλό εκλειπτικό σύστημα γίνονται ευκολότερα αντιληπτές σε οριζόντιους κλάδους του διαγράμματος O-C παρά σε κλάδους μεγάλης κλίσης καθώς οι στροφές που οφείλονται στις παραπάνω μεταβολές εξαρτώνται ισχυρά και κατά μη γραμμικό τρόπο από την τοπική κλίση του διαγράμματος tanφ.

2. Θόρυβος στα Διαγράμματα O-C

Η σαφής παρουσία θορύβου στα διαγράμματα O-C αποτελεί ένα από τα σοβαρότερα προβλήματα που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία ανάλυσής τους. Το γεγονός αυτό μάλιστα αποτέλεσε έναν από τους βασικότερους αποτρεπτικούς παράγοντες ευρείας χρήσης τους, καθώς κυριαρχούσε η άποψη πως το επίπεδο του θορύβου καθιστούσε πάντοτε τα αντίστοιχα διαγράμματα αναξιόπιστα. Σήμερα έχουν επινοηθεί διάφορες μέθοδοι μείωσης του θορύβου οι οποίες όμως απαιτούν πάντοτε μεγάλο αριθμό δεδομένων (π.χ. πάνω από 10000 σημεία), χαρακτηριστικό το οποίο τα διαγράμματα O-C δεν διαθέτουν σχεδόν ποτέ. Σημαντικό μειονέκτημα των τελευταίων μεθόδων αποτελεί η δυσκολία αναγνώρισης του βαθμού καταστροφής της δυναμικής της χρονοσειράς, επίπτωση δυστυχώς αναπόφευκτη κατά την εφαρμογή τους.

2.1. Πηγές Θορύβου

Οι συνήθεις καταστάσεις που μπορούμε να συναντήσουμε σε οποιοδήποτε είδος χρονοσειράς αναφέρονται στις περιπτώσεις που γνωρίζουμε το σύστημα που δίνει τη χρονοσειρά, σε εκείνες που ένα μεγάλο μέρος τους είναι γνωστό χωρίς θόρυβο, καθώς και σε εκείνες για τις οποίες δεν γνωρίζουμε τίποτε για τη δυναμική του συστήματος (π.χ. Συριόπουλος & Λεοντίτσης 2000, Abarbanel et al. 1993).

Οι χρονοσειρές O-C ανήκουν είτε στην πρώτη κατηγορία (π.χ. αποδεδειγμένη παρουσία τρίτου σώματος με γνωστές παραμέτρους) είτε στην τελευταία που αποτελεί και τη συχνότερη. Σε αντίθεση με τις δύο πρώτες περιπτώσεις στις οποίες η μείωση του θορύβου μπορεί να επιτευχθεί σε πολύ μεγάλο βαθμό, στην τελευταία ο ερευνητής βαδίζει ‘‘τυφλά’’ και θα πρέπει να επιλέξει ανάμεσα σε ένα πλήθος μεθόδων οι οποίες οφείλουν να μην είναι ευαίσθητες στις παραμέτρους που θα θέσει.

Ο θόρυβος που εμφανίζεται στις χρονοσειρές χωρίζεται σε τέσσερις κατηγορίες. Οι δύο πρώτες σχετίζονται με τις ενδεχόμενες επιδράσεις του στις μελλοντικές τιμές της χρονοσειράς και οι δύο επόμενες με κριτήριο τον τρόπο με τον οποίο επιδρούν στις υπάρχουσες τιμές της χρονοσειράς (π.χ. Συριόπουλος & Λεοντίτσης 2000, Kostelich & Schreiber 1993, Kantz & Schreiber 1997):

- ***Παρατηρησιακός Θόρυβος (Observational ή Measurement Noise)***: Το είδος αυτό προέρχεται από σφάλματα τα οποία υπεισέρχονται κατά την πραγματοποίηση των παρατηρήσεων. Στην περίπτωση των O-C χρονοσειρών, τα σφάλματα αυτά σχετίζονται, όπως είδαμε, με την ακρίβεια προσδιορισμού των χρόνων των ελαχίστων, με την επίδραση των οργάνων παρατήρησης, ακόμα και με τα πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία που χρησιμοποιούνται. Το χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου είδους θορύβου είναι ότι, αφού επιδράσει στη χρονοσειρά, δεν έχει επιπτώσεις στο μέλλον, καθώς η φύση του είναι αμιγώς στατιστική.

- ***Δυναμικός Θόρυβος (Dynamical Noise)***: Το είδος αυτό έχει την ιδιότητα ενσωμάτωσής του στη δυναμική του συστήματος και συνεπώς αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των τιμών της χρονοσειράς και της μετέπειτα εξέλιξης του συστήματος. Στην περίπτωση των O-C χρονοσειρών, ένα μεγάλο μέρος του θορύβου αυτού (αν όχι ολοκληρωτικά) ταυτίζεται με το φωτομετρικό θόρυβο του οποίου η φύση σχετίζεται με επιφανειακά κυρίως χαρακτηριστικά των δύο μελών. Η αναγνώριση και η μείωση του δυναμικού θορύβου αποτελεί γενικά αντικείμενο το οποίο βρίσκεται ερευνητικά ακόμα σε εξέλιξη.

- ***Προσθετικός Θόρυβος (Additive Noise)***: Στην περίπτωση αυτή, οι τυχαίες (εσφαλμένες) παρατηρήσεις προστίθενται στη χρονοσειρά. Το είδος αυτό είναι το συνηθέστερο, χωρίς οι χρονοσειρές O-C να αποτελούν εξαίρεση.

- ***Πολλαπλασιαστικός Θόρυβος (Multiplicative Noise)***: Στην περίπτωση αυτή, οι τυχαίες (εσφαλμένες) παρατηρήσεις πολλαπλασιάζονται στις τιμές της χρονοσειράς.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάστηκε εκτενώς ο βαθμός αβεβαιότητας που συνοδεύει τον προσδιορισμό του χρόνου των ελαχίστων είτε εξαιτίας της μεθόδου που εφαρμόζεται είτε εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο πραγματοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις. Στο κεφάλαιο αυτό, μεταξύ άλλων, εξετάζεται η επίδραση των πιο πάνω παραγόντων στο επίπεδο θορύβου ενός διαγράμματος O-C, καθώς και η εκτίμηση του φωτομετρικού θορύβου. Σε αντίθεση με τον στατιστικό χαρακτήρα του παρατηρησιακού θορύβου, η φύση του φωτομετρικού είναι δυναμική και κατά συνέπεια η εκτίμησή του αρκετά πιο περίπλοκη. Σε κάθε περίπτωση, στόχος είναι ο προσδιορισμός μέγιστων φραγμάτων ώστε να σχηματίσουμε μια γενική εικόνα σχετικά με τον τρόπο διαμόρφωσης της στάθμης θορύβου που παρατηρείται στα διαγράμματα O-C εξαιτίας των πιο πάνω παραγόντων.

2.2. Επίδραση Παρατηρησιακού Θορύβου

Ο παρατηρησιακός θόρυβος συγκεντρώνει όλους εκείνους τους παράγοντες που επιδρούν κατά τη διεξαγωγή των παρατηρήσεων, την επεξεργασία τους αλλά και την αστοχία των μεθόδων που επιλέχθηκαν για την ανάλυσή τους. Στηριζόμενοι στους χρόνους ελαχίστου του δείγματος που μελετήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο αλλά και στη γενικότερη εμπειρία μας όσον αφορά τις φωτοηλεκτρικές και CCD τουλάχιστον παρατηρήσεις, το σφάλμα που εισάγεται για όλους τους πιο πάνω λόγους είναι συνήθως της τάξης των 0.0005 d ή και μικρότερο (περίπου στα 30 sec), ενώ όπως είδαμε στην περίπτωση παρατηρήσεων με φωτογραφικές πλάκες βρίσκεται 5 με 10 φορές μεγαλύτερο (περίπου στα 5 min ή και μικρότερο). Η τιμή του σφάλματος που συνοδεύει το χρόνο των ελαχίστων φαίνεται να είναι η σημαντικότερη ίσως παράμετρος θορύβου στα διαγράμματα O-C, καθώς συνδέεται άμεσα με τη μορφή του παρατηρούμενου χρόνου των ελαχίστων.

Όσον αφορά την περίοδο της χρησιμοποιούμενης εφημερίδας, η ακρίβεια στον καθορισμό της αναμένεται εξαιρετικά μικρή σε σχέση με όλους τους προηγούμενους παράγοντες. Ένας σχετικά μικρός αριθμός χρόνων ελαχίστων για μερικές δεκάδες ή εκατοντάδες τροχιακούς κύκλους, όχι υποχρεωτικά διαδοχικούς και σε μεγάλα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα, είναι ικανός να εξασφαλίσει ακρίβεια της τάξης των 10^{-6} sec (μέχρι και 10 δηλαδή δεκαδικά ψηφία!). Δεχόμενοι ότι το σφάλμα των χρόνων όλων των ελαχίστων τα οποία εμπλέκονται στον προσδιορισμό της περιόδου είναι ίδιο και ίσο με δO, N ο μέσος αριθμός των τροχιακών κύκλων που έλαβαν χώρα μεταξύ δύο παρατηρούμενων ελαχίστων και n ο αριθμός των κενών χρονικών διαστημάτων μεταξύ των παρατηρούμενων n+1 ελαχίστων, το προβλεπόμενο σφάλμα της περιόδου προσδιορίζεται από την παρακάτω σχέση (π.χ. Batten 1973, Kviz & Wong 1987):

$$\delta P = \frac{\delta O}{N} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} \,. \tag{3.12}$$

Φυσικά, η εκτίμηση της ακρίβειας της τροχιακής περιόδου θα πρέπει να πραγματοποιείται με ιδιαίτερη προσοχή και χωρίς υπερβολές. Ο προσδιορισμός της περιόδου απαιτεί την παρατήρηση ενός συστήματος για αρκετούς τροχιακούς κύκλους, χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο δύσκολα κάποιος μπορεί να επικαλεστεί ότι η περίοδος δεν έχει μεταβληθεί κατά μερικά έστω μsec.

Αναγνωρίζοντας πάντως ότι η επίδραση του βαθμού ακρίβειας της τελευταίας στο επίπεδο του θορύβου ενός διαγράμματος O-C είναι πράγματι μηδαμινή, με τη βοήθεια του τύπου διάδοσης σφαλμάτων μπορούμε πλέον εύκολα να εκτιμήσουμε ότι το σφάλμα των διαφορών O-C, οφειλόμενο αποκλειστικά στις ανακρίβειες που υπεισέρχονται κατά τον προσδιορισμό του χρόνου των παρατηρούμενων ελαχίστων O_E, θα είναι τελικά ίσο με:

$$\delta(O-C)_E \cong \sqrt{(\delta T_0)^2 + (\delta O_E)^2} \,, \tag{3.13}$$

όπου T_0 ο χρόνος ελαχίστου αναφοράς της χρησιμοποιούμενης γραμμικής εφημερίδας. Εφόσον μάλιστα το σφάλμα του χρόνου αυτού είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με εκείνο όλων των παρατηρούμενων χρόνων ελαχίστων, μέσω της σχέσης (3.13), εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$\delta(O-C)_E \cong \sqrt{2} \cdot \delta O_E \,. \tag{3.14}$$

Στην περίπτωση που τόσο ο χρόνος ελαχίστου αναφοράς T_0 όσο και ο παρατηρούμενος χρόνος ελαχίστου O_E που αντιστοιχεί σε έναν τυχαίο κύκλο E έχουν προσδιοριστεί με τη *μέθοδο της παραδοσιακής ελαχιστοτετραγωνικής παλινδρόμησης LSR* των Breinhorst et al. (1973), η επίδραση της ασυμμετρίας στην ακρίβεια του χρόνου ελαχίστου εξαλείφεται και έτσι απλά υϊοθετούμε τα συμπεράσματα της μελέτης που πραγματοποιήθηκε στην έκτη ενότητα του προηγούμενου κεφαλαίου σύμφωνα με την οποία ο παρατηρησιακός θόρυβος $\delta(O\text{-}C)_{obs.}$ διαμορφώνεται γύρω από το $\pm\ 2.3\sigma_{LSR}$ των χρόνων που προβλέπει η μέθοδος, ανεξάρτητα από τη μορφή του ελαχίστου, την επιλογή του φίλτρου, το πλήθος και την ποιότητα των παρατηρήσεων. Λαμβάνοντας ακόμα υπόψη ότι οι τιμές του σφάλματος δO_E που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο αυτή δεν ξεπέρασαν τις 0.0015 d (Σχήμα II.23b), μια πρώτη εκτίμηση του άνω φράγματος του παρατηρησιακού θορύβου μπορεί εύκολα να πραγματοποιηθεί μέσω της σχέσης (3.14):

$$\delta(O-C)_{obs.} \leq 2.3\sigma_{LSR} \cong 2.3\sqrt{2}\cdot\delta O_E \ \text{ ή ισοδύναμα } \boxed{\delta(O-C)_{obs.} \leq 0.005\ d}. \quad (3.15)$$

Ερχόμενοι τώρα στην πλέον περίπλοκη περίπτωση που ο χρόνος ελαχίστου αναφοράς $T_{0,f\text{-}1}^{KvW}$ έχει προσδιοριστεί, έστω στο φίλτρο f-1, με τη *μέθοδο KvW* και ο παρατηρούμενος χρόνος ελαχίστου $O_{E,f\text{-}2}^{LSR}$ με τη *μέθοδο της παραδοσιακής ελαχιστοτετραγωνικής παλινδρόμησης LSR* σε ένα οποιοδήποτε άλλο φίλτρο f-2 (ή το αντίστροφο), η επίδραση της ασυμμετρίας στην ακρίβεια του χρόνου ελαχίστου παραμένει και έτσι παραπέμπουμε και πάλι στα συμπεράσματα της στατιστικής μελέτης του προηγούμενου κεφαλαίου σύμφωνα με την οποία ο παράγοντας αυτός οδηγεί σε αποκλίσεις μεταξύ του χρόνου ελαχίστων που προβλέπει η μέθοδος KvW από τον πραγματικό (για το ίδιο φίλτρο) μέσα στην περιοχή $\pm\ 3.1\sigma_{KvW}$. Εάν τώρα υποθέσουμε ότι προσδιορίζουμε το χρόνο ελαχίστου αναφοράς με τη βοήθεια της μεθόδου LSR, έστω $T_{0,f\text{-}1}^{LSR}$, τότε η εκτίμηση του άνω φράγματος του παρατηρησιακού θορύβου $\delta(O\text{-}C)_{obs.}$ στην περίπτωση αυτή απαιτεί μια ελαφρώς πιο σύνθετη προσέγγιση:

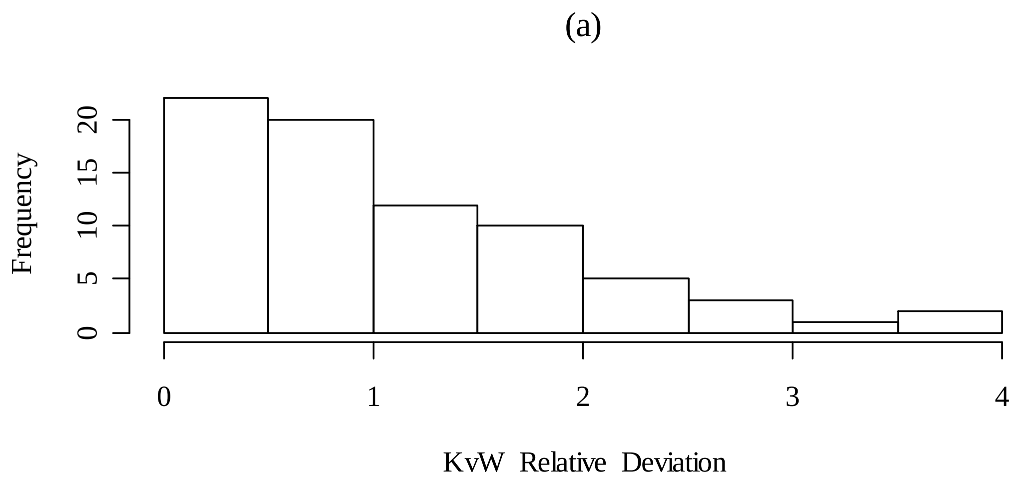
$$\delta(O-C)_{obs.} = \left|T_{0,f-1}^{KvW} - O_{E,f-2}^{LSR}\right| = \left|(T_{0,f-1}^{KvW} - T_{0,f-1}^{LSR}) + (T_{0,f-1}^{LSR} - O_{E,f-2}^{LSR})\right| \leq$$

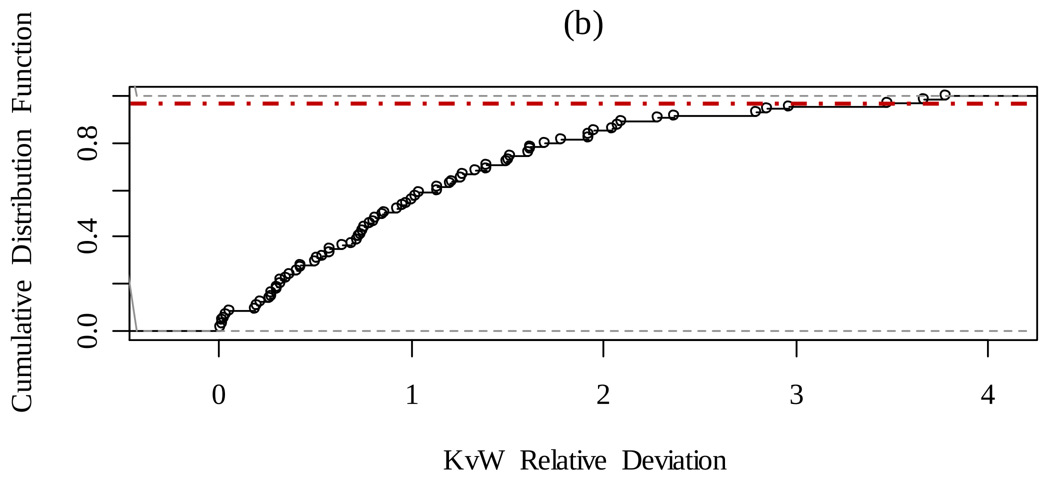
$$\left|T_{0,f-1}^{KvW} - T_{0,f-1}^{LSR}\right| + \left|O_{E,f-2}^{LSR} - T_{0,f-1}^{LSR}\right| \leq 3.1\sigma_{KvW} + 2.3\sigma_{LSR} \cong 3.1\delta T_0 + 2.3\sqrt{2}\cdot\delta O_E.$$

$$\text{ή ισοδύναμα } \boxed{\delta(O-C)_{obs.} \leq 0.008\ d}. \quad (3.16)$$

Η ανισότητα (3.16) προέκυψε λαμβάνοντας ακόμα υπόψη ότι οι τιμές των σφαλμάτων που προβλέπει η μέθοδος KvW, $\sigma_{KvW} = \delta T_0$, δεν ξεπέρασαν τις 0.001 d στη μελέτη του προηγούμενου κεφαλαίου (Σχήμα II.23a), ενώ οι αντίστοιχες τιμές δO_E που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο LSR δεν ξεπέρασαν τις 0.0015 d (Σχήμα II.23b). Παρατηρούμε ότι η στάθμη θορύβου μπορεί να αυξηθεί σημαντικά κάτω από τη συνδυασμένη επίδραση διαφορετικών μεθόδων προσδιορισμού χρόνου ελαχίστων, το βαθμό ασυμμετρίας και την επιλογή του φίλτρου. Το ενδεχόμενο αυτό παραμένει όμως σπάνιο, καθώς η μέθοδος LSR δεν υϊοθετείται συχνά στη βιβλιογραφία.

Αντίθετα, η μέθοδος KvW είναι εκείνη που έχει σχεδόν αποκλειστικά περιορίσει το ενδιαφέρον των παρατηρητών και έχει πλέον καθιερωθεί ως η μόνη μέθοδος προσδιορισμού χρόνων ελαχίστων ανεξάρτητα από το βαθμό ασυμμετρίας που μπορεί να παρουσιάζουν. Οι αναφορές στους Kwee & van Woerden (1956) την περίοδο συγγραφής της διατριβής ξεπερνούσαν άλλωστε τις 750! Ως εκ τούτου, προχωρήσαμε σε μια αντίστοιχη στατιστική μελέτη με εκείνη του προηγούμενου κεφαλαίου κατά την οποία εξετάστηκε η σχετική απόκλιση μεταξύ των 114 χρόνων ελαχίστου σε διαφορετικά φίλτρα αποκλειστικά με τη βοήθεια της μεθόδου KvW. Σε αντίθεση δηλαδή με την υποενότητα 6.3 του δεύτερου κεφαλαίου, στην οποία οι χρονικές αποκλίσεις αναφέρονταν στη μέθοδο LSR, τόσο οι χρόνοι όσο και τα σφάλματά τους προσδιορίστηκαν εδώ με τη μέθοδο KvW (Σχήμα III.2).





Σχήμα III.2. Ιστόγραμμα των σχετικών αποκλίσεων που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου KvW μεταξύ χρόνων ελαχίστου σε διαφορετικά φίλτρα (a). Αν και οι σχετικές αποκλίσεις αγγίζουν την τιμή 4.0, η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής μας υποδεικνύει ότι μόνο 5% από αυτές είναι μεγαλύτερες από την τιμή 2.9 (b).

Θέτοντας και πάλι στάθμη σημαντικότητας την τιμή $\alpha = 0.025$ που ισοδυναμεί με πιθανότητα κάλυψης 95%, παρατηρούμε ότι οι σχετικές αποκλίσεις δεν υπερβαίνουν την τιμή 2.9, κάτι το οποίο σημαίνει ότι *η απόκλιση μεταξύ του χρόνου ελαχίστων που προβλέπει η μέθοδος KvW σε δύο διαφορετικά φίλτρα βρίσκεται μέσα στην περιοχή ± 2.9*σ_{KvW}. Λαμβάνοντας και πάλι υπόψιν ότι οι τιμές του σφάλματος δO_E που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο αυτή δεν ξεπέρασαν τις 0.001 d, το άνω φράγμα του παρατηρησιακού θορύβου $\delta(O\text{-}C)_{obs.}$ κάτω από τις συνθήκες αυτές μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής:

$$\delta(O-C)_{obs.} \leq 2.9\sigma_{KvW} \cong 2.9\sqrt{2}\cdot\delta O_E \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \boxed{\delta(O-C)_{obs.} \leq 0.004\ d}. \quad (3.17)$$

Ας σημειωθεί ότι το φράγμα της σχέσης (3.17) είναι το μικρότερο από όσα μέχρι τώρα εκτιμήθηκαν αν και το φυσικό περιεχόμενό της είναι περιορισμένο. Το επίπεδο θορύβου που εξάγεται με τον τρόπο αυτό εκφράζει αποκλειστικά αποκλίσεις της μεθόδου KvW που προκαλούνται κάτω από την επίδραση του φίλτρου και των συνθηκών παρατήρησης και σε καμία περίπτωση δεν εκφράζει θόρυβο τον οποίο επιφέρουν αποκλίσεις από τον πραγματικό χρόνο. Παρά το γεγονός αυτό, η ανώτατη στάθμη θορύβου των 0.004 d αναμένεται να παρατηρείται στην πλειοψηφία των διαγραμμάτων O-C φωτοηλεκτρικών παρατηρήσεων, καθώς η μέθοδος KvW είναι η πλέον διαδεδομένη στο χώρο των διπλών εκλειπτικών συστημάτων.

Τέλος, οφείλουμε να προσθέσουμε ότι μια πρόσθετη πηγή παρατηρησιακού θορύβου, με τη ευρύτερη έννοιά του, αποτελούν *τα σχετικά μεγάλα χρονικά διαστήματα που παρουσιάζονται συχνά στα διαγράμματα O-C χωρίς παρατηρήσεις*. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η χρονική περίοδος του δεύτερου παγκοσμίου πολέμου είναι πάντοτε κενή στη συντριπτική πλειοψηφία των διαγραμμάτων (1939-1943). Στις περιπτώσεις αυτές, δυστυχώς δεν υπάρχει καμία ασφαλής τεχνική αντιμετώπισης και αυτό που συμβαίνει συνήθως είναι η αύξηση του τυπικού σφάλματος της εκτίμησης (για το μοντέλο που έχει επιλεγεί να περιγράψει την εκάστοτε χρονοσειρά) γύρω από τη συγκεκριμένη περιοχή του διαγράμματος.

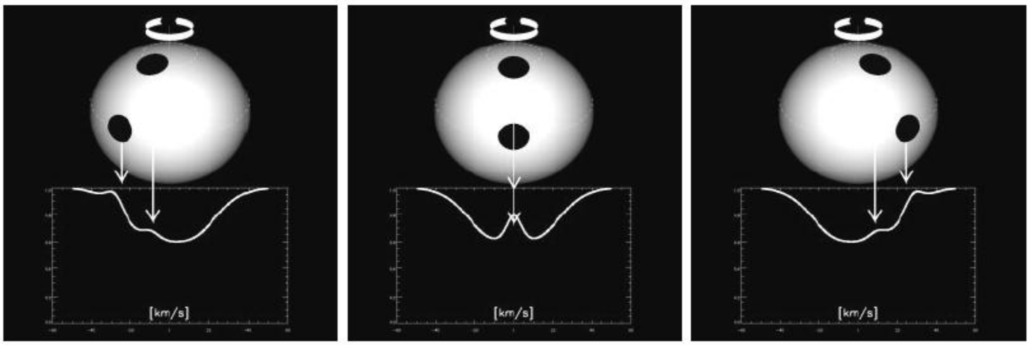
2.3. Απεικόνιση Αστρικών Φωτοσφαιρών

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, η γνώση μας σχετικά με την ύπαρξη κηλίδων στη φωτόσφαιρα ισχυρά περιστρεφόμενων ψυχρών αστέρων έχει εμπλουτιστεί από τις εντυπωσιακές εφαρμογές σύγχρονων τεχνικών απεικόνισης, όπως η ***τεχνική Doppler απεικόνισης (Doppler Imaging, DI)*** και η τεχνική ***χαρτογράφησης εκλείψεων (Eclipse Mapping, EM)***. Καθοριστική συμβολή στη δυνατότητα αξιοποίησης των παραπάνω τεχνικών αποτέλεσε η συνοδευτική εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων εξομάλυνσης, όπως εκείνη της μέγιστης εντροπίας (π.χ. Νανούρης 2005).

Η τεχνική DI στηρίζεται σε φασματοσκοπικά δεδομένα πολύ υψηλής ανάλυσης στα οποία το φαινόμενο της πλάτυνσης λόγω περιστροφής οφείλει να κυριαρχεί σε σχέση με τα υπόλοιπα. Η ύπαρξη μιας κηλίδας σε μια συγκεκριμένη περιοχή της αστρικής φωτόσφαιρας, προκαλεί τη δημιουργία ενός *εξογκώματος (bump)* κατά μήκος του προφίλ των φασματικών γραμμών και μάλιστα όσο ο αστέρας περιστρέφεται, το εξόγκωμα αυτό δεν παραμένει στάσιμο αλλά μετακινείται από την κυανή πτέρυγα της γραμμής προς την ερυθρή (Vogt & Penrod 1983, Vogt et al. 1987).

Εκμεταλλευόμενοι λοιπόν το παραπάνω γεγονός και λαμβάνοντας φάσματα του αστέρα σε διαφορετικές φάσεις της περιστροφής του, καθίσταται δυνατός ο προσδιορισμός των αστρογραφικών συντεταγμένων των κηλίδων. Συγκεκριμένα, η φάση κατά την οποία το εξόγκωμα παρουσιάζεται ακριβώς στο κέντρο της φασματικής γραμμής που μελετάμε αντιστοιχεί στο αστρογραφικό μήκος της κηλίδας που το προκαλεί. Το αστρογραφικό πλάτος της κηλίδας προσδιορίζεται από τη γενικότερη συμπεριφορά της κίνησής της κατά μήκος της γραμμής. Κηλίδες χαμηλών σχετικά πλατών επηρεάζουν το προφίλ κατά το ήμισυ της περιστροφής του αστέρα και μάλιστα η κίνησή τους καλύπτει όλο το εύρος της γραμμής, από τα άκρα της κυανής πτέρυγας μέχρι και τα άκρα της ερυθρής. Αντίθετα, κηλίδες μεγάλων πλατών επηρεάζουν το προφίλ κατά ένα αρκετά μεγαλύτερο ποσοστό της περιστροφής του αστέρα, αλλά η παραμονή τους στη γραμμή, με τη μορφή του εξογκώματος, διαρκεί σαφώς λιγότερο και εμφανίζεται μονάχα κοντά στην περιοχή του κέντρου της γραμμής (Rice 1996, Σχήμα ΙΙΙ.3).

Η απόδοση της τεχνικής DI δε φαίνεται να είναι ευαίσθητη σε ελλιπείς πληροφορίες σχετικά με τη γεωμετρία του αστέρα και τη θερμοκρασία των κηλίδων που φέρει. Όμοια συμπεριφορά παρουσιάζεται ακόμα και στην περίπτωση ατελών δεδομένων, αλλά και σε συνθήκες αρκετά χαμηλού λόγου σήματος προς θόρυβο, προβλήματα άλλωστε στα οποία η μέθοδος της μέγιστης εντροπίας και γενικότερα οι όμοιες με αυτή μέθοδοι εξομάλυνσης συνέβαλαν καθοριστικά τα τελευταία χρόνια. (Vogt et al. 1987).



Σχήμα ΙΙΙ.3. Η παρουσία του μικρού εξογκώματος σε μια γραμμή απορρόφησης ενός περιστρεφόμενου αστέρα εξαιτίας της ύπαρξης μιας κηλίδας και η συμπεριφορά της μετακίνησής του σε σχέση με το αστρογραφικό της πλάτος (Rice 2002).

Μια γενικευμένη έκδοση της τεχνικής DI αποτελεί η ***τεχνική Zeeman Doppler χαρτογράφησης (Zeeman Doppler Imaging, ZDI)*** η οποία περιλαμβάνει ανάλυση φασμάτων πολύ υψηλής ανάλυσης με σκοπό την ταυτόχρονη απεικόνιση της κατανομής του μαγνητικού πεδίου στον αστρικό δίσκο μαζί με τη θερμοκρασία ή την αφθονία των χημικών στοιχείων ανάλογα με το είδος του αστέρα που μελετάται. Απαίτηση της τεχνικής αποτελεί η πολωσιμετρία με σκοπό τον προσδιορισμό της έντασης και του προσανατολισμού του μαγνητικού πεδίου σε οποιοδήποτε τμήμα της φωτόσφαιρας του αστέρα (Rice 2002).

Η τεχνική EM βασίζεται αποκλειστικά και μόνο σε φωτομετρικές παρατηρήσεις πολύ υψηλής ακρίβειας. Πρωταρχικός σκοπός της στην περίπτωση της απεικόνισης αστρικών φωτοσφαιρών ήταν η υποστήριξη της τεχνικής DI σε ορισμένα από τα συνήθη προβλήματα που παρουσίαζε. Συγκεκριμένα, οι πληροφορίες που περιέχονται κατά τη διάρκεια των εκλείψεων μπορούν να βοηθήσουν στην αντιμετώπιση του προβλήματος της δημιουργίας κατοπτρικών σχηματισμών τους οποίους ο σχετικός κώδικας της τεχνικής DI προσδίδει και στα δύο ημισφαίρια στην περίπτωση μεγάλων κλίσεων, αδυνατώντας να αναγνωρίσει το ημισφαίριο το οποίο προβάλλεται περισσότερο στον παρατηρητή (Vincent et al. 1993).

Παρά την πολύ σημαντική υποστήριξη της τεχνικής EM στην αντίστοιχή της DI, το ενδεχόμενο αυτόνομης εφαρμογής της σχετικά με την απεικόνιση θερμοκρασιακών ανομοιογενειών στις αστρικές φωτόσφαιρες μελών διπλών συστημάτων εξετάστηκε σχετικά πρόσφατα (Collier-Cameron 1997). Σε αντίθεση με τις συμβατικές προσομοιώσεις κατανομής κηλίδων στους ψυχρούς αστέρες μέσω των κοινών προγραμμάτων φωτομετρικής ανάλυσης, η τεχνική EM μπορεί να προσφέρει πολύ περισσότερες λεπτομέρειες. Παρά το γεγονός ότι η ακριβής θέση των κηλίδων δεν μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως μόνο με τη βοήθεια φωτομετρικών δεδομένων, η συγκεκριμένη τεχνική εκμεταλλεύεται τις παραμορφώσεις που δημιουργούνται στο προφίλ του πρωτεύοντος ελαχίστου, τη στιγμή δηλαδή που το ψυχρότερο μέλος παρεμβάλλεται μπροστά από το θερμότερο, εξαιτίας των ψυχρών κηλίδων που φέρει το τελευταίο και τις απεικονίζει κάνοντας χρήση και πάλι μιας κατάλληλης μεθόδου εξομάλυνσης.

Η ικανότητα απόδοσης λεπτομερειών των επιφανειακών σχηματισμών εξαρτάται άμεσα από τη χρονική ανάλυση και την ακρίβεια των φωτομετρικών παρατηρήσεων, το ποσοστό κάλυψης του κύκλου περιφοράς, καθώς και από το βάθος του πρωτεύοντος ελαχίστου. Σημαντικό μειονέκτημα της τεχνικής αποτελεί η απαίτηση της πλήρους γνώσης των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του διπλού συστήματος. Έχει επίσης διαπιστωθεί ότι η ικανότητα απόδοσης κηλίδων στις περιοχές οι οποίες δεν υπόκεινται σε έκλειψη είναι πάντοτε περιορισμένη ανεξάρτητα από την ποιότητα των παρατηρήσεων στα τμήματα της καμπύλης φωτός πέραν του πρωτεύοντος ελαχίστου. Αντίθετα, η ύπαρξη κηλίδων στην περιοχή που υπόκειται την έκλειψη αποδίδεται σε ικανοποιητικό βαθμό (Collier-Cameron 1997).

Τα γενικότερα συμπεράσματα στα οποία έχει μέχρι σήμερα οδηγήσει η εφαρμογή των τεχνικών χαρτογράφησης σε χρωμοσφαιρικά δραστήρια διπλά συστήματα, επιβεβαιώνουν την παρουσία τουλάχιστον δύο εκτεταμένων ψυχρών κηλίδων στη φωτόσφαιρα κάθε μέλους. Εκείνο το οποίο δεν έχει γίνει απόλυτα σαφές είναι η ταχύτητα μεταβολής της θέσης και των φυσικών τους χαρακτηριστικών.

Στην περίπτωση του συστήματος XY UMa για παράδειγμα, η κατανομή των κηλίδων κατά τη διάρκεια τεσσάρων ετών στη φωτόσφαιρα του πρωτεύοντος μέλους βρέθηκε να παρουσιάζει βραχυχρόνιες και συνεχείς μεταβολές της τάξης των μερικών ημερών έως και μερικών εβδομάδων (Lister et al. 2001). Από την άλλη, στην περίπτωση του συστήματος ER Vul, ανιχνεύθηκαν σχηματισμοί οι οποίοι παρουσίασαν αξιοσημείωτη σταθερότητα (με αμελητέες μόνο μεταβολές) κατά τη διάρκεια δύο ετών παρατηρήσεων. Εντοπίστηκαν επίσης περιοχές οι οποίες είτε εξαφανίστηκαν τελείως είτε αντικαταστήθηκαν από άλλες κηλίδες διαφορετικών πλέον φυσικών χαρακτηριστικών (Sokoloff & Piskunov 2002).

2.4. Επίδραση Φωτομετρικού Θορύβου

Δυστυχώς, λεπτομερείς μελέτες σχετικά με την επίδραση των αστρικών κηλίδων στα διαγράμματα O-C έχουν πραγματοποιηθεί μονάχα σε συστήματα επαφής και υπερεπαφής των οποίων άλλωστε τα μέλη αποτελούν στην πλειοψηφία τους αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων. Η κατηγορία αυτή φαίνεται να υποστηρίζει θεωρητικά (αλλά και παρατηρησιακά) την παρουσία ψυχρών και σκοτεινών σχηματισμών (κηλίδων) στη φωτόσφαιρά τους. Χωρίς όμως αμφιβολία, μπορούμε να εκτιμήσουμε, κατά προσέγγιση, αντίστοιχες επιδράσεις σε οποιοδήποτε είδος διπλών συστημάτων.

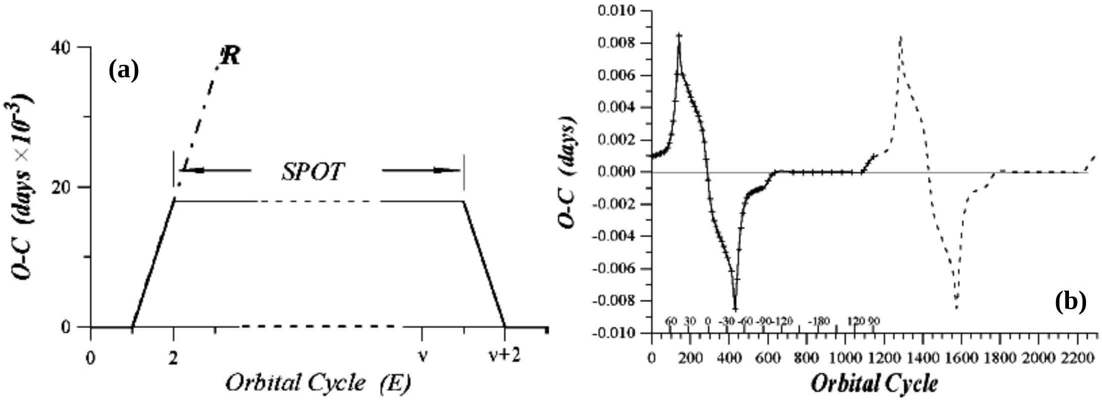
Η παρουσία των κηλίδων στη φωτόσφαιρα των μελών ενός συστήματος επιφέρει την παραμόρφωση του προφίλ των φωτομετρικών ελαχίστων, προκαλώντας ασυμμετρίες και μεταβολές στη θέση και το βάθος τους. Το γεγονός αυτό έχει άμεση συνέπεια στον προσδιορισμό του πραγματικού (γεωμετρικού) χρόνου των ελαχίστων καθώς αναμένονται φαινόμενες μετατοπίσεις. Όσον αφορά την επίδραση των στατικών κηλίδων στα διαγράμματα O-C, έχει αποδειχθεί ότι επιφέρουν μια σταθερή μετατόπιση της στάθμης του διαγράμματος για το χρονικό διάστημα που παραμένουν στη φωτόσφαιρα των μελών ενός συστήματος (Kalimeris et al. 2002, Ogloza 1997). Επομένως, οι μεταβολές που παρουσιάζονται στο αντίστοιχο διάγραμμα O-C δεν επηρεάζουν την κλίση του, γεγονός το οποίο σημαίνει πως μετά την εμφάνιση μιας στατικής κηλίδας δεν παρουσιάζεται καμία νέα διαφορά O-C προερχόμενη από την ύπαρξη της συγκεκριμένης κηλίδας (Σχήμα III.4a).

Γνωρίζουμε βέβαια, σύμφωνα με τα ηλιακά πάντοτε μοντέλα, πως κηλίδες οι οποίες διατηρούν τη θέση τους για μεγάλα χρονικά διαστήματα δεν υφίστανται στην πραγματικότητα καθώς παρασύρονται από τη διαφορική περιστροφή των αστέρων και κινούνται (ολισθαίνουν) κατα μήκος των αστρικών μεσημβρινών. Θεωρώντας λοιπόν μια κυκλικού σχήματος κηλίδα μεγάλων διαστάσεων (γωνιακής ακτίνας 20^{o} και 20% ψυχρότερης από την υπόλοιπη φωτόσφαιρα), τοποθετημένη στο πρωτεύον μέλος ενός τυπικού συστήματος υπερεπαφής και χρησιμοποιώντας ημιεμπειρικούς νόμους διαφορικής περιστροφής, οι Kalimeris, Rovithis-Livaniou & Rovithis (2002) έδειξαν ότι *η μέγιστη διαφορά O-C η οποία μπορεί να διαμορφωθεί εξαιτίας της επίδρασής της στον προσδιορισμό των χρόνων των ελαχίστων αγγίζει την τιμή των 0.01 ημερών*. Η συγκεκριμένη μάλιστα τιμή λαμβάνεται όταν η κηλίδα βρίσκεται στο αστρικό μήκος των 45^{o}, ενώ στο υπόλοιπο χρονικό διάστημα μικραίνει και τελικά μηδενίζεται μόλις πλέον η κηλίδα περάσει στο ημισφαίριο το οποίο δε φαίνεται από τον παρατηρητή (Σχήμα III.4b). Ανάλογα μάλιστα με το χρόνο ζωής της, η κηλίδα μπορεί να επιζήσει για αρκετές εκατοντάδες τροχιακούς κύκλους.

Όσον αφορά την περίπτωση κατά την οποία τα μέλη του συστήματος διαθέτουν πλήθος κηλίδων, τυχαία κατανεμημένων στις επιφάνειές τους, αναμένεται να έχουμε εξουδετέρωση των επιδράσεών τους στα αντίστοιχα διαγράμματα O-C και συνεπώς η συνολική τους επίδραση να είναι (ενδεχομένως κατά πολύ) μικρότερη των 0.01 d, δηλαδή:

$$\boxed{\delta(O-C)_{phot} \leq 0.01\ d}. \tag{3.18}$$

Σχετικά τώρα με τα αποχωρισμένα συστήματα, αντίστοιχες μελέτες δεν έχουν πραγματοποιηθεί οπότε και οποιαδήποτε προσπάθεια γενίκευσης των παραπάνω διαπιστώσεων θα ήταν σίγουρα παρακινδυνευμένη. Εκείνο όμως το οποίο μπορούμε να επισημάνουμε είναι ότι σύμφωνα με τα αποτελέσματα εφαρμογής των τεχνικών DI και EM σε χρωμοσφαιρικά δραστήρια συστήματα, ο αριθμός των κηλίδων που προσμετρώνται στη φωτόσφαιρα κάθε μέλους είναι τέτοιος ώστε να μας αφήνει σοβαρές υποψίες ότι η συνολική τους επίδραση οφείλει να είναι περιορισμένη.

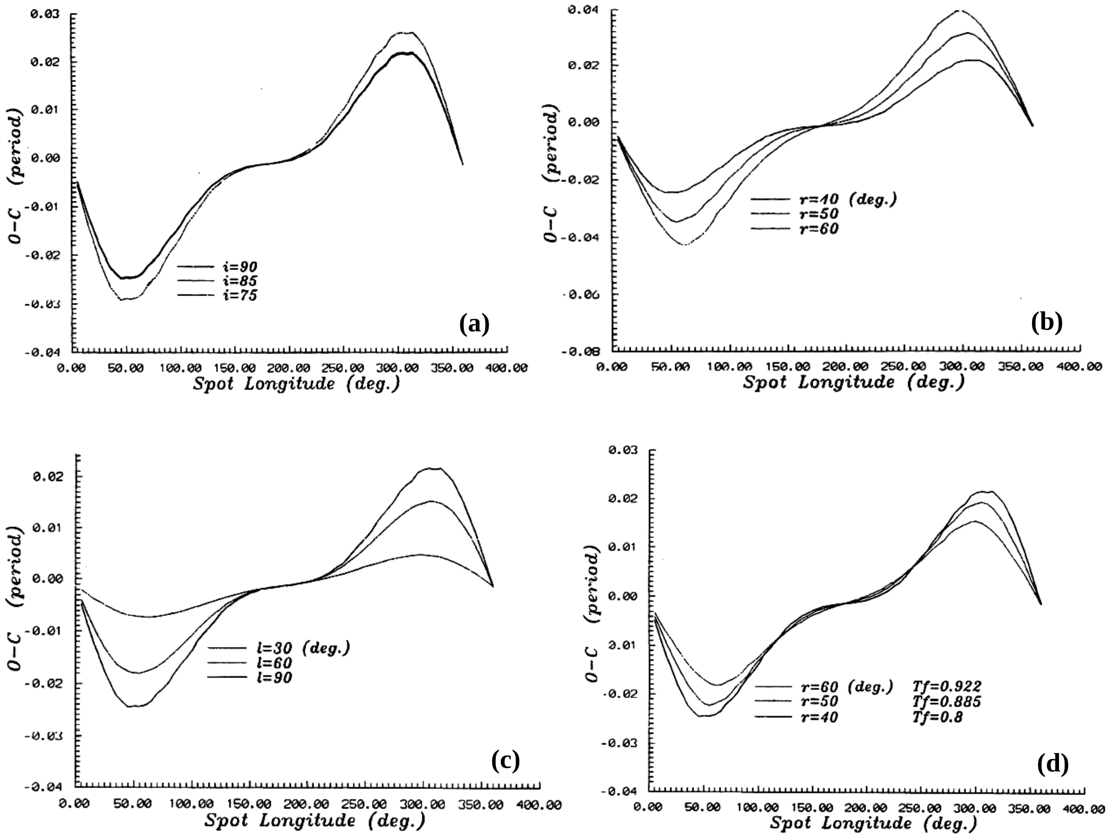


Σχήμα III.4. Η επίδραση της παρουσίας μιας στατικής κηλίδας στα διαγράμματα O-C (a). Το αποτέλεσμα είναι μια σταθερή μετατόπιση της στάθμης του διαγράμματος για το χρονικό διάστημα που παραμένουν στη φωτόσφαιρα των μελών ενός συστήματος. Η διαμόρφωση των διαγραμμάτων είναι διαφορετική στην περίπτωση κινούμενων κηλίδων (b) οι οποίες επιφέρουν τη μέγιστη επίδραση στο αστρογραφικό μήκος των 45^o (Kalimeris et al. 2002).

Η σημαντική διαφορά τους όμως σε σχέση με τα συστήματα επαφής έγκειται στο ότι η γενικότερη διαμόρφωση των διαγραμμάτων O-C αποχωρισμένων συστημάτων δε φαίνεται να είναι τόσο εκτενής όσο εκείνη των πρώτων. Επομένως, ο παράγοντας του φωτομετρικού θορύβου κατά την ανάλυση των διαγραμμάτων αυτών σε συστήματα τα οποία περιλαμβάνουν αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων θα πρέπει να λαμβάνεται πολύ σοβαρά υπόψη, καθώς μπορεί να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με εκείνη του δυναμικού σήματος της αντίστοιχης χρονοσειράς.

Σημειώνουμε ακόμα ότι λιγότερο αναλυτικές μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί σχετικά με την επίδραση (στατικών) κηλίδων ακόμα μεγαλύτερων διαστάσεων (γωνιακής ακτίνας 40^o και 20% ψυχρότερη από την υπόλοιπη φωτόσφαιρα) οι οποίες κατέληξαν σε παρόμοια αποτελέσματα με τα προαναφερθέντα (Ogloza 1997). Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε ότι *ο φωτομετρικός θόρυβος που εισάγεται με τον τρόπο αυτό αποτελεί το (2-4)% της τροχιακής περιόδου των συστημάτων υπερεπαφής*. Συνεπώς, ένα τυπικό μέλος της κατηγορίας αυτής με περίοδο ίση με 0.35 d, αναμένεται να παρουσιάζει φωτομετρικό θόρυβο περίπου ίσο με 0.01 d, αποτέλεσμα το οποίο βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με τα προηγούμενα.

Μελετήθηκε ακόμα η διαμόρφωση του θορύβου αυτού από την κλίση του συστήματος, από τις διαστάσεις των κηλίδων, από τη θέση των εκάστοτε κηλίδων και από τον παράγοντα θερμοκρασίας (Σχήμα ΙΙΙ.5). Όπως ήταν αναμενόμενο, το επίπεδο του θορύβου βρέθηκε να επιβαρύνεται με την αύξηση του μεγέθους των κηλίδων και του αστρογραφικού τους πλάτους, καθώς και με τη μείωση του παράγοντα θερμοκρασίας και της κλίσης του συστήματος.



Σχήμα ΙΙΙ.5. Η επίδραση της παρουσίας μιας στατικής κηλίδας στα διαγράμματα O-C ως συνάρτηση της κλίσης του συστήματος (a), ως συνάρτηση της ακτίνας της κηλίδας (b), ως συνάρτηση του πλάτους της (c) και ως συνάρτηση του παράγοντα θερμοκρασίας (d). Η επίδραση των παραπάνω παραμέτρων έχει μελετηθεί για διάφορα αστρογραφικά μήκη της κηλίδας (Ogloza 1997).

Τέλος, πρόσφατες μελέτες οι οποίες έχουν αναζητήσει την ενδεχόμενη επίδραση του βάθους των κηλίδων στην αστρική φωτόσφαιρα, όσον αφορά τη μετάθεση των χρόνων των ελαχίστων, βρέθηκε ότι η τελευταία είναι ασήμαντη (μικρότερη από 5 sec) και σε καμία περίπτωση δεν προκαλεί αξιοσημείωτη διασπορά των O-C διαγραμμάτων (Watson & Dhillon 2004). Το φαινόμενο αυτό συναντάται στον Ήλιο με βάθη τα οποία κυμαίνονται μεταξύ 600 και 2500 km και καλείται *διείσδυση Wilson (Wilson depression).*

Το φαινόμενο της γενικότερης διασποράς των διαφορών O-C προκαλούμενη από την παρουσία κηλίδων έχει τελευταία αντιμετωπιστεί ως καθαρά στοχαστική διαδικασία, παραγόμενη με τη βοήθεια της *μεθόδου του τυχαίου βηματισμού (random walk).* Με τον τρόπο αυτό η περίοδος αντιμετωπίζεται ως μια μεταβλητή η οποία διαμορφώνεται τόσο από μια μακροχρόνια και βραδεία τάση μεταβολής όσο και από έναν στοχαστικό παράγοντα ο οποίος μπορεί να δρα με τυχαίο τρόπο από κύκλο σε κύκλο (Koen 1996, 2006). Τα φυσικά αίτια της στοχαστικότητας δεν εξετάζονται. Εκείνο όμως που έχει διαπιστωθεί με βεβαιότητα είναι η ικανότητα του παράγοντα αυτού να οδηγεί σε συστηματικές και μάλιστα ημιπεριοδικές μεταβολές κατά την ανέλιξη της περιόδου οι οποίες θα μπορούσαν να υποκαταστήσουν τις παραδοσιακές βραχυχρόνιες αρμονικές συνιστώσες που πολλές φορές παρατηρούνται σε διαγράμματα O-C και αποδίδονται είτε στην παρουσία τρίτου σώματος είτε στην παρουσία κύκλων μαγνητικής δραστηριότητας (Lombard & Koen 1993, Koen 1996). Στο συγκεκριμένο θέμα θα επιστρέψουμε στην (τελευταία) υποενότητα 4.2 του κεφαλαίου αυτού αλλά και στο πέμπτο κεφάλαιο κάτω από μια πλήρως αιτιοκρατική προσέγγιση.

3. Ανάλυση Χρονοσειρών

Σκοπός της παρούσας ενότητας αποτελεί μια συνοπτική παρουσίαση των σύγχρονων μεθόδων ανάλυσης χρονοσειρών. Κάτι τέτοιο θεωρήθηκε απαραίτητο καθώς τα διαγράμματα O-C περιγράφουν ουσιαστικά τη χρονική μεταβολή της θέσης των ελαχίστων και συνεπώς μπορούν να αντιμετωπιστούν ως τυπικές χρονοσειρές. Τα τελευταία μάλιστα χρόνια, η πρόοδος η οποία έχει επιτευχθεί είναι πραγματικά εντυπωσιακή. Κίνητρο βέβαια των νέων μεθόδων υπήρξε η ανάγκη πρόβλεψης της διαμόρφωσης χρηματοοικονομικών κυρίως μεγεθών (π.χ. χρηματιστηριακοί δείκτες) αλλά και της εξέλιξης φαινομένων σχετικών με τη βιολογία και την ιατρική (π.χ. διαγνωστικοί έλεγχοι εγκεφαλογραφημάτων και καρδιογραφημάτων). Η ευρεία εφαρμογή των μεθόδων αυτών έχει σήμερα επιτρέψει τη βραχυχρόνια πρόβλεψη της εξέλιξης συστημάτων (π.χ. τεχνητά νευρωνικά δίκτυα), η δυναμική μάλιστα των οποίων είναι είτε πολύπλοκη είτε (τις περισσότερες φορές) εντελώς άγνωστη.

3.1. Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Με τον όρο ***χρονολογική σειρά ή χρονοσειρά (time series)*** εννοούμε μια σειρά συνεχών δεδομένων με κύρια χαρακτηριστικά την καθορισμένη διάταξη των παρατηρήσεων (ή γενικότερα μετρήσεων) διαχρονικά και τη μεταξύ τους καθορισμένη εξάρτηση (π.χ. Θαλασσινός 1991). Οι παρατηρήσεις μπορεί να αντιστοιχούν σε προκαθορισμένα και ίσα (ή σχεδόν ίσα) χρονικά διαστήματα (π.χ. ο γενικός δείκτης ενός χρηματιστηρίου κατά το κλείσιμο της ημέρας) ορίζοντας έτσι μια ***διακριτή χρονοσειρά (discrete time series)***, σε αντίθεση με τις ***συνεχείς χρονοσειρές (continuous time series)*** οι οποίες περιγράφουν την εξέλιξη ενός μεγέθους σε οποιοδήποτε σημείο του χρόνου (π.χ. η θερμοκρασία ενός τόπου). Αξίζει να επισημάνουμε πάντως ότι η ανάλυση συνεχών χρονοσειρών είναι σπάνια και εκείνο το οποίο συνήθως ακολουθείται είναι ο σχηματισμός μιας διακριτής χρονοσειράς, λαμβάνοντας από την αντίστοιχη συνεχή παρατηρήσεις σε ισαπέχοντα χρονικά διαστήματα.

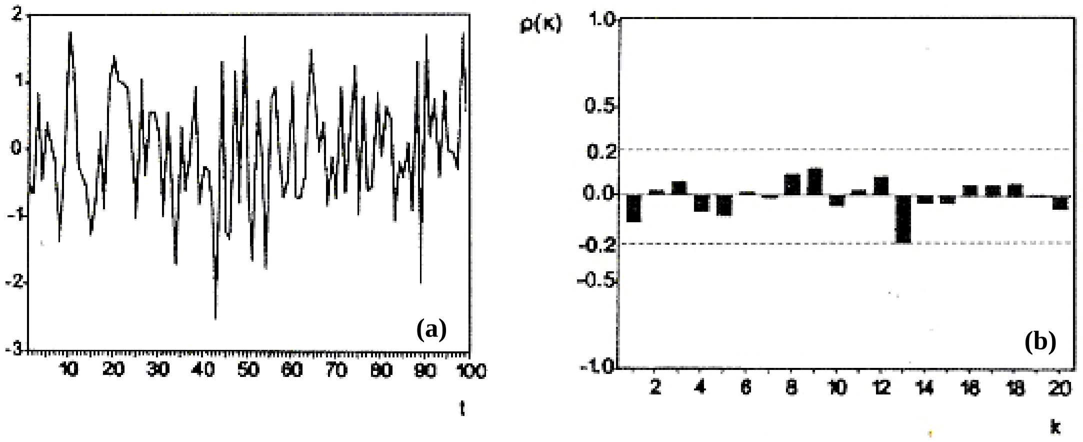
Η σύγχρονη αντιμετώπιση μιας χρονοσειράς στηρίζεται στην πραγματικότητα σε έναν σχετικά πρόσφατο κλάδο των μαθηματικών και φυσικών επιστημών, ο οποίος καλείται ***στοχαστική δυναμική (stochastic dynamics)*** και αποτελεί βασικό εργαλείο της Στατιστικής κυρίως Φυσικής. Η περιγραφή στοχαστικών δυναμικών φαινομένων πραγματοποείται με τη βοήθεια τυχαίων μεταβλητών που εξαρτώνται από μια πραγματική μεταβλητή t και η οποία ταυτίζεται με το χρόνο (π.χ. Sveshnikov 1968). Μια τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ με την παραπάνω ιδιότητα καλείται ***τυχαία συνάρτηση (random function)*** της πραγματικής μεταβλητής t και συμβολίζεται ως $\boldsymbol{X_t}$ για κάθε $t \in \Re$. Στην περίπτωση που η μεταβλητή t μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα διάστημα, πεπερασμένο ή άπειρο, η αντίστοιχη τυχαία συνάρτηση ονομάζεται ***στοχαστική διαδικασία ή ανέλιξη (stochastic process)***, ενώ όταν λαμβάνει μονάχα διακριτές τιμές, η αντίστοιχη τυχαία συνάρτηση ονομάζεται ***τυχαία ακολουθία (random sequence)***. Οι δύο παραπάνω κατηγορίες συμπίπτουν ουσιαστικά με τις συνεχείς και διακριτές αντίστοιχα χρονοσειρές. Τονίζουμε βέβαια ότι η έννοια και ο όρος της στοχαστικής διαδικασίας έχει επικρατήσει να χρησιμοποιείται ανεξάρτητα από τη διακριτή ή τη συνεχή συμπεριφορά της πραγματικής μεταβλητής t.

Η παραπάνω θεώρηση οδηγεί άμεσα στο γεγονός ότι, καθώς οι τυχαίες μεταβλητές μεταβάλλονται μέσα στο χρόνο, οι κατανομές πιθανότητας και συνεπώς οι μέσες τιμές αλλά και οι διακυμάνσεις δεν θα είναι σταθερές. Η χρονοσειρά της οποίας οι τυχαίες μεταβλητές $\boldsymbol{X_t} = \{X_t, t = 1,...,N\}$ έχουν τον ίδιο μέσο και την ίδια διακύμανση καλείται ***στάσιμη (stationary)***. Η έννοια της στασιμότητας, όπως θα δούμε αργότερα, είναι καθοριστική στην ανάλυση χρονολογικών σειρών καθώς απλοποιεί σε μεγάλο βαθμό την ανάλυσή της (π.χ. Δημελή 2003). Στην πράξη βέβαια, πολύ δύσκολα βρίσκουμε στάσιμες χρονοσειρές τόσο στη φύση όσο και στον τομέα των οικονομικών. Εκείνο λοιπόν που επιχειρείται σχεδόν πάντοτε είναι η χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών οι οποίοι μετατρέπουν την εξεταζόμενη χρονοσειρά σε στάσιμη.

Η απλούστερη δυνατή μορφή μιας χρονοσειράς αποτελεί εκείνη της οποίας το σχήμα δεν έχει καμία σαφή διαμόρφωση, γεγονός το οποίο στην ουσία υποδηλώνει ότι η χρονοσειρά δεν διέπεται από καμία δυναμική (Σχήμα ΙΙΙ.6). Η χρονοσειρά αυτή καλείται ***λευκός θόρυβος (white noise)*** και χαρακτηρίζεται από σταθερό μέσο (συνήθως μηδενικό) και σταθερή διακύμανση, ενώ οι τιμές της δεν συσχετίζονται μεταξύ τους (π.χ. Δημελή 2003). Τα δύο πρώτα χαρακτηριστικά διέπουν εξίσου μια στάσιμη χρονοσειρά και συνεπώς η διαφοροποίηση του λευκού θορύβου από εκείνη των στάσιμων διαδικασιών έγκειται στη μηδενική εξάρτηση μεταξύ των τιμών του. Οι στοχαστικές διαδικασίες που παρουσιάζουν τις παραπάνω ιδιότητες είναι τυχαίες και επομένως δεν επιτρέπουν τη δυνατότητα πρόβλεψης (π.χ. οι αριθμοί της κλήρωσης του lotto).

3.2. Αυτοσυνδιακύμανση και Αυτοσυσχέτιση

Δεχόμενοι τώρα ότι οι τιμές $\boldsymbol{x_t} = \{x_t, t = 1,...,N\}$ αποτελούν υλοποιήσεις των τυχαίων μεταβλητών $\boldsymbol{X_t} = \{X_t, t = 1,...,N\}$ τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, αναμένουμε οι μεταβλητές αυτές να χαρακτηρίζονται από ένα βαθμό εξάρτησης μεταξύ τους. Κάτι τέτοιο καθιστά την ανάλυση της αντίστοιχης χρονοσειράς πολύπλοκη, από την άλλη όμως το γεγονός αυτό είναι η αιτία που καθιστά δυνατή την πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών της $\{x_t,\ t = N+1, N+2, ...\}$, εφόσον βέβαια καταφέρουμε να ταυτοποιήσουμε τη μορφή της εξάρτησης και στη συνέχεια να τη χρησιμοποιήσουμε για πρόβλεψη. Η πρόβλεψη βέβαια του τρόπου εξέλιξης μια O-C χρονοσειράς δεν μπορεί να θεωρηθεί απαραίτητη κατά τη μελέτη της. Αποτελεί όμως το κυριότερο ίσως μέρος κατά τη μελέτη χρονοσειρών που αφορούν τις διεθνείς κεφαλαιαγορές, τη λήψη των τελικών αποφάσεων στον τομέα της διοίκησης επιχειρήσεων και στην περίπτωσή μας τη μελλοντική εξέλιξη της τροχιακής περιόδου ενός διπλού συστήματος αστέρων (Σχήμα III.7).



Σχήμα III.6. Τυπική διαμόρφωση μιας χρονοσειράς η οποία ταυτίζεται με λευκό θόρυβο, καθώς δεν χαρακτηρίζεται από καμία σαφή δυναμική (a). Το αντίστοιχο διάγραμμα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (b) επιβεβαιώνει τη σχετική διαπίστωση, καθώς η τελευταία είναι μηδενική για όλες τις χρονικές υστερήσεις (Δημελή 2003).

Η μαθηματική περιγραφή μιας χρονοσειράς στηρίζεται σε δύο θεμελιώδη μεγέθη που προέρχονται από τη Στατιστική (π.χ. Δημελή 2003). Η ***αυτοσυνδιακύμανση (autocovariance)*** μετρά τη συνδιακύμανση μεταξύ των παρατηρήσεων μιας χρονοσειράς που βρίσκονται σε κάποια χρονική μεταξύ τους απόσταση. Η αυτοσυνδιακύμανση γ_k, μεταξύ δύο παρατηρήσεων που απέχουν *k* χρονικές περιόδους ή αλλιώς παρουσιάζουν *χρονική υστέρηση (lag) k*, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\gamma_k = Cov(x_t, x_{t+k}) = \langle x_t - \langle \boldsymbol{x_t} \rangle\rangle \cdot \langle x_{t+k} - \langle \boldsymbol{x_{t+k}} \rangle\rangle. \qquad (3.19)$$

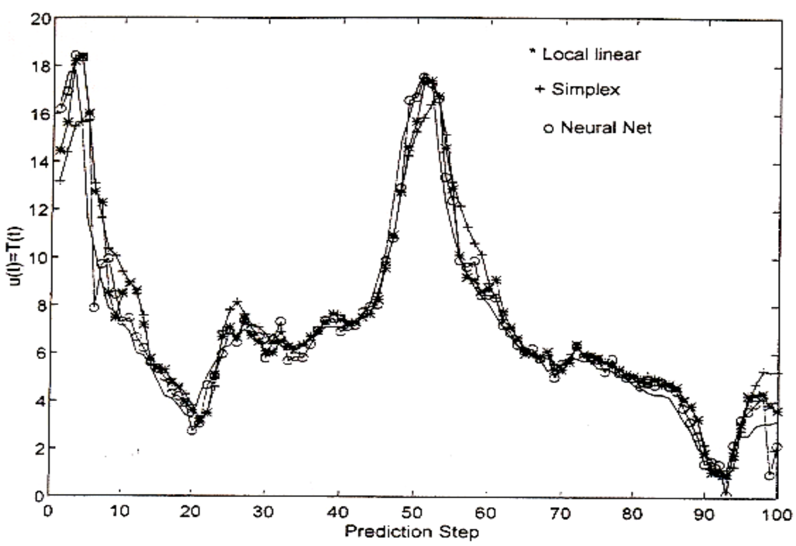
Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, είναι προφανές ότι η αυτοσυνδιακύμανση μηδενικής υστέρησης (δηλαδή εκείνη που αντιστοιχεί σε *k* = *0*) ταυτίζεται ουσιαστικά με τη διακύμανση της εξεταζόμενης τιμής της χρονοσειράς x_t και συνεπώς δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\gamma_0 = Cov(x_t, x_t) = \langle x_t - \langle \boldsymbol{x_t} \rangle\rangle \cdot \langle x_t - \langle \boldsymbol{x_t} \rangle\rangle = \langle x_t - \langle \boldsymbol{x_t} \rangle\rangle^2 = \sigma_{x_t}^2. \qquad (3.20)$$

Το σημαντικότερο και πιο χρήσιμο σταστιστικό μέγεθος σχετικά με τη μελέτη των χρονοσειρών και το βαθμό εξάρτησης των τιμών τους καλείται ***συντελεστής αυτοσυσχέτισης (autocorrelation coefficient)*** ο οποίος εκφράζει το (γραμμικό) συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των τιμών που συνθέτουν τη χρονοσειρά. Στην περίπτωση δύο διαδοχικών παρατηρήσεων x_t και x_{t+k} που απέχουν μεταξύ τους k χρονικές περιόδους ο συντελέστής αυτοσυσχέτισης (με υστέρηση k) δίνεται τότε από την ακόλουθη σχέση:

$$\rho_k = \frac{Cov(x_t, x_{t+k})}{\sqrt{Var(x_t)}\sqrt{Var(x_{t+k})}}, \tag{3.21}$$

όπου $Cov(x_t,x_{t+k})$ η αυτοσυνδιακύμανση μεταξύ των δύο συγκεκριμένων παρατηρήσεων και $Var(x_t)$, $Var(x_{t+k})$ η διακύμανση της πρώτης και της δεύτερης από αυτές κατά σειρά.



Σχήμα III.7. Χαοτική χρονοσειρά η οποία απεικονίζει την ωριαία θερμοκρασία όπως αυτή καταγράφεται στο Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουν χρησιμοποιηθεί τρεις μέθοδοι πρόβλεψης, η μια εκ των οποίων έχει πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια ενός τεχνητού νευρωνικού δικτύου. Η ταύτιση των προβλεπόμενων τιμών (διακριτά σημεία) με τις πραγματικές (συνεχής γραμμή) είναι εντυπωσιακή (Παπαϊωάννου 2000).

Εξειδικέυοντας τώρα τα παραπάνω στατιστικά μεγέθη σε μια *στάσιμη χρονοσειρά*, στηριζόμενοι στο γεγονός ότι ο μέσος όλων των τιμών που την ορίζουν είναι ο ίδιος, εύκολα οδηγούμαστε στις παρακάτω απλοποιήσεις:

- $\gamma_k = Cov(x_t, x_{t+k}) = \langle x_t - \langle \mathbf{x} \rangle \rangle \cdot \langle x_{t+k} - \langle \mathbf{x} \rangle \rangle$ για την αυτοσυνδιακύμανση. (3.22)

- $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{Cov(x_t, x_{t+k})}{Var(x_t)}$ για το συντελεστή αυτοσυσχέτισης. (3.23)

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω σχέσεις αναφέρονται στις θεωρητικές τιμές των αυτοσυνδιακυμάνσεων και των συντελεστών αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας $\boldsymbol{X_t}$. Στην πράξη όμως χρησιμοποιούμε ένα πεπερασμένο δείγμα N παρατηρήσεων $\boldsymbol{x_t}$ = $\{x_t$, t = 1,..,$N\}$ από το οποίο λαμβάνουμε εκτιμήσεις των πραγματικών τιμών των αυτοσυνδιακυμάνσεων και αυτοσυσχετίσεων που αντιστοιχούν στον πληθυσμό. Στην περίπτωση αυτή, η αυτοσυνδιακύμανση γ_k μεταξύ των διαδοχικών παρατηρήσεων χρονικής υστέρησης k και ο αντίστοιχος συντελεστής αυτοσυσχέτισης ρ_k, προσδιορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

- $\gamma_k = \dfrac{1}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N-k} \left[(x_t - \langle \boldsymbol{x} \rangle)(x_{t+k} - \langle \boldsymbol{x} \rangle) \right]$ για την αυτοσυνδιακύμανση. (3.24)

- $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0} = \dfrac{\sum_{t=1}^{N-k} \left[(x_t - \langle \boldsymbol{x} \rangle)(x_{t+k} - \langle \boldsymbol{x} \rangle) \right]}{\sum_{t=1}^{N} (x_t - \langle \boldsymbol{x} \rangle)^2}$ για το συντελεστή αυτοσυσχέτισης, (3.25)

όπου $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ και γ_0 είναι ο μέσος και η διακύμανση της στάσιμης χρονοσειράς αντίστοιχα. Η πιο πάνω εκτίμηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης αποτελεί το ***δειγματικό συντελεστή αυτοσυσχέτισης (sample autocorrelation coefficient)*** ο οποίος ταυτίζεται με τον αληθινό μόνο στην περίπτωση που ο αριθμός των παρατηρήσεων της εξεταζόμενης χρονοσειράς είναι μεγάλος.

Η συνάρτηση ρ_k για τις διάφορες τιμές του k (χρονικές υστερήσεις) καλείται ***συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function, ACF)***, ενώ η διαγραμματική απεικόνιση των τιμών της ονομάζεται ***διάγραμμα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (correlogram)***. Αν και το πεδίο τιμών της συνάρτησης αυτής είναι το [-1,1], οι τιμές που μας απασχολούν είναι μόνο εκείνες που αντιστοιχούν σε παρατηρήσεις οι οποίες χαρακτηρίζονται από υψηλή μεταξύ τους συσχέτιση, δηλαδή σε όσες το ρ_k βρίσκεται πολύ κοντά στη μονάδα κατά απόλυτη τιμή. Σε αντίθετη περίπτωση οι τιμές της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης πλησιάζουν το μηδέν για όλες ανεξάρτητα τις χρονικές υστερήσεις (Σχήμα III.6).

Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι πέραν της απλής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης υπάρχει και μια άλλη συνάρτηση ιδιαίτερα σημαντική στη μελέτη των χαρακτηριστικών μιας χρονοσειράς που καλείται ***συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης (partial autocorrelation function, PACF)***. Η συνάρτηση αυτή απεικονίζει τις τιμές ενός αντίστοιχου συντελεστή αυτοσυσχέτισης για τις διάφορες χρονικές υστερήσεις k ο οποίος καλείται ***συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης (partial autocorrelation coefficient)*** και εκφράζει το (γραμμικό) συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των παρατηρήσεων μιας χρονοσειράς που απέχουν k χρονικές περιόδους, έστω x_t και x_k, όταν όμως έχουν ληφθεί υπόψη και αφαιρεθεί οι συσχετίσεις όλων των ενδιάμεσων τιμών, δηλαδή μεταξύ των τιμών x_{t+1} και x_{t+k-1}. Η αναλυτικότερη περιγραφή του αποφεύγεται στην παρούσα διδακτορική διατριβή, καθώς δε θα μας απασχολήσει σε μεγάλο βαθμό στη συνέχεια.

Αναφέρουμε τέλος ότι η μορφή των δύο παραπάνω συναρτήσεων είναι καθοριστική για την καθοδήγησή μας στον προσδιορισμό της μορφής της στοχαστικής διαδικασίας που δημιούργησε τη δεδομένη χρονοσειρά και κατά συνέπεια στην επιλογή του κατάλληλου υποδείγματος που πρόκειται να την περιγράψει. Ειδικότερα για την (απλή) συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, επισημαίνουμε τη βοήθεια που μας προσφέρει στο να διαπιστώσουμε αν μια χρονοσειρά είναι στάσιμη ή όχι. Συγκεκριμένα, οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης για μια στάσιμη χρονοσειρά φθίνουν σχετικά γρήγορα προς το μηδέν καθώς ο αριθμός των υστερήσεων k μεγαλώνει, κάτι το οποίο δε συμβαίνει στις μη στάσιμες σειρές (π.χ. Δημελή 2003).

3.3. Σύγχρονες Μέθοδοι Ανάλυσης Χρονοσειρών

Η συνήθης κλασική αντιμετώπιση μιας χρονοσειράς απαιτεί την απόδοσή της από ένα σύνολο ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών συναρτήσεων διαφορετικής συχνότητας, διαδικασία γνωστή ως *αρμονική ανάλυση* (*Fourier analysis)*. Η διαγραμματική παρουσίαση της διαδικασίας αυτής πραγματοποιείται με ένα περιοδόγραμμα ή αλλιώς φάσμα ισχύος και αποσκοπεί στον εντοπισμό εποχικών (περιοδικών) μεταβολών. Ανάλογες μελέτες σήμερα γίνονται μέσω της *κυματιδιακής ανάλυσης (wavelet analysis)*, ανάλυση η οποία είναι κατά πολύ πιο λεπτομερής και ακριβής σε σχέση με εκείνη της Fourier καθώς έχει την ικανότητα να μεταβάλλει το εύρος του χρονικού παράθυρου αναζήτησης, της χρονικής δηλαδή ανάλυσης, ανάλογα με τη συχνότητα που ανιχνεύεται, ιδιότητα η οποία επιτρέπει τον ακριβή προσδιορισμό εξαιρετικά υψίσυχνων συνιστωσών.

Όσον αφορά τώρα τις μακροχρόνιες τάσεις που εμπεριέχει μια χρονοσειρά, η περιγραφή τους πραγματοποιείται με τη βοήθεια *πολυωνυμικών* συνήθως *υποδειγμάτων παλινδρόμησης*. Η παλινδρόμηση αυτή γίνεται με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και κατάλληλων ορθογώνιων πολυωνύμων (π.χ. Lagrange, Hermite, Chebyshev κ.α.) ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της εξεταζόμενης χρονοσειράς.

Τα τελευταία χρόνια έχουν κάνει την εμφάνισή τους υποδείγματα στα οποία η εξαρτημένη μεταβλητή x_t δεν παλινδρομείται ανάμεσα σε ανεξάρτητες μεταβλητές, όπως δηλαδή στις προηγούμενες περιπτώσεις, αλλά στις προηγούμενες τιμές της. Η σημαντική επιτυχία των υποδειγμάτων αυτών είναι αναμφίβολα η αποκάλυψη θεμελιωδών ιδιοτήτων μιας χρονοσειράς οι οποίες αξιοποιούνται στη συνέχεια για την πρόβλεψη της μετέπειτα εξέλιξής της. Το γεγονός αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στο ότι η χρονοσειρά δεν επιβάλλεται να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη (εξωγενή) συνάρτηση (π.χ. ένα πολυώνυμο), αλλά η περιγραφή της στηρίζεται μονάχα στο παρελθόν της (ενδογενή χαρακτηριστικά) και στον τρόπο διαμόρφωσής της μέχρι τη στιγμή που αναλύεται (π.χ. Θαλασσινός 1991, Δημελή 2003). Το μοντέλο που ακολουθεί τις παραπάνω ιδιότητες καλείται ***αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα (Autoregressive model, AR) τάξεως p, AR(p)***.

Η συμπεριφορά της εξαρτημένης μεταβλητής x_t σε ένα αυτοπαλίνδρομο σχήμα βαθμού p θεωρείται ότι περιγράφεται από ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταβλητών $\{x_{t-i}, i = 1,...,p\}$, ορισμένων δηλαδή εκ των προηγούμενων τιμών της χρονοσειράς, καθώς και από έναν τυχαίο όρο σφάλματος ε_t που έχει τις ιδιότητες λευκού θορύβου. Η επίδραση της εξαρτημένης μεταβλητής των προηγούμενων περιόδων στην τρέχουσα μεταβλητή περιγράφεται με τη βοήθεια των αυτοπαλινδρομικών συντελεστών $\boldsymbol{a} = \{a_i, i = 0,...,p\}$ σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + ... + a_p x_{t-p} + \varepsilon_t \text{ ή } (1 - a_1 L - a_2 L^2 - ... - a_p L^p) x_t = \varepsilon_t$$

$$\text{ή ακόμα } \boxed{A(L) x_t = \varepsilon_t} \text{ στη γενικευμένη της μορφή,} \qquad (3.26)$$

όπου L^n με $n \in \mathbf{N}$, ο ***ανάδρομος τελεστής υστέρησης (lag operator)*** ο οποίος διευκολύνει κατά πολύ τη διεξαγωγή των αλγεβρικών πράξεων και μετατοπίζει χρονικά προς τα πίσω τη μεταβλητή επάνω στην οποία δρα, δηλαδή:

$$L^n x_t = x_{t-n},\ n \in \mathbf{N}. \qquad (3.27)$$

Το σχήμα που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να μην είναι στάσιμο. Έχει όμως αποδειχθεί ότι ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα *AR*(*p*) είναι στάσιμο με μέσο μηδέν, εφόσον οι ρίζες του παρακάτω χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι όλες μεγαλύτερες της μονάδας σε απόλυτη τιμή ή ισοδύναμα, εφόσον βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου:

$$1 - a_1 x - ... - a_p x^p = 0. \qquad (3.28)$$

Επίσης, αποδεικνύεται εύκολα ότι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης ενός υποδείγματος *AR*(*p*) μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των αυτοπαλινδρομικών συντελεστών. Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές ως ***εξισώσεις των Yule-Walker*** και προκύπτουν από το ακόλουθο σύστημα το οποίο καθορίζει τελικά και τις παραμέτρους του υποδείγματος:

$$\rho_k = a_1 \rho_{k-1} + a_2 \rho_{k-2} + ... + a_p \rho_{k-p} \text{ με } k = 1,..., p. \qquad (3.29)$$

Ένα διαφορετικό είδος υποδειγμάτων στα οποία όμως η εξαρτημένη μεταβλητή σε κάθε χρονική στιγμή συνεχίζει να εξαρτάται άμεσα από τις τιμές τις οποίες έλαβε σε προηγούμενες χρονικές περιόδους, καλείται ***υπόδειγμα κινητού μέσου (Moving Average model, MA) τάξεως q, MA(q)***. Στο υπόδειγμα αυτό υποθέτουμε ότι η τρέχουσα τιμή x_t της χρονοσειράς δημιουργείται ως ένας σταθμικός μέσος των τυχαίων σφαλμάτων των προηγούμενων περιόδων $\{x_{t-i}, i = 1,...,q\}$. Η επίδραση του προηγούμενου σφάλματος στη μεταβλητή περιγράφεται με τη βοήθεια των συντελεστών κινητού μέσου $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_i , i = 0,...,q\}$ σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$x_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q} \text{ ή } x_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - ... - \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

$$\text{ή ακόμα } \boxed{x_t = \Theta(L) \varepsilon_t} \text{ στη γενικευμένη της μορφή,} \qquad (3.30)$$

όπου L^n ο ανάδρομος τελεστής υστέρησης και ε_t διαδικασία λευκού θορύβου. Ας σημειωθεί ακόμα ότι οποιοδήποτε σχήμα κινητού μέσου είναι πάντοτε στάσιμο, ενώ αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για το γενικό υπόδειγμα $MA(q)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{q-k}\left(\theta_i\theta_{i+k} - \theta_k\right)}{1+\sum_{i=1}^{q}\theta_i^2}, & k = 1,...,q \\ 0 & , k > q \end{cases} . \tag{3.31}$$

Σημαντικό κριτήριο σχετικά με το χαρακτηρισμό ενός σχήματος ως αυτοπαλίνδρομου ή κινητού μέσου αποτελεί η διαμόρφωση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης (ACF) και μερικής αυτοσυσχέτισης (PACF). Στην πρώτη περίπτωση, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μειώνεται βαθμιαία και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μηδενίζεται μετά τη χρονική υστέρηση p, ενώ στη δεύτερη περίπτωση, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του υποδείγματος μηδενίζεται μετά τη χρονική υστέρηση q και η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης είναι τώρα εκείνη η οποία φθίνει προοδευτικά.

Δεν είναι λίγες οι φορές κατά τις οποίες μια χρονοσειρά παρουσιάζει ιδιότητες που δεν προβλέπονται αποκλειστικά από ένα AR ή ένα MA υπόδειγμα και συνεπώς κανένα απο τα τελευταία δεν είναι ικανό να την περιγράψει ικανοποιητικά. Στην περίπτωση αυτή επικαλούμαστε τη χρήση ***μικτών αυτοπαλίνδρομων υποδειγμάτων κινητού μέσου (Autoregressive Moving Average models, ARMA), ARMA(p,q)***. Η γενική μορφή ενός τέτοιου σχήματος ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$x_t = \delta + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + ... + a_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

ή αλλιώς $\boxed{A(L)x_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t}$ στη γενικευμένη της μορφή. (3.32)

Είναι προφανές ότι οι ιδιότητες των ARMA υποδειγμάτων είναι ένας συγκερασμός των ιδιοτήτων των AR και MA υποδειγμάτων. Έτσι, ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα κινητού μέσου θα είναι στάσιμο εφόσον οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης που προκύπτει από το πολυώνυμο $A(L)$ βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Όσον αφορά τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης, αναμένονται αρκετά σύνθετες καθώς είναι λύσεις εξισώσεων διαφορών υψηλής τάξης. Παρόλα αυτά, μετά τις q χρονικές περιόδους η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης συμπεριφέρεται όπως εκείνη μιας AR διαδικασίας, ενώ η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης συμπεριφέρεται όπως εκείνη μιας MA διαδικασίας μετά από p χρονικές υστερήσεις.

Πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι η εφαρμογή των παραπάνω υποδειγμάτων βασίζεται στην υπόθεση ότι οι εξεταζόμενες χρονοσειρές είναι στάσιμες. Φυσικά κάτι τέτοιο δύσκολα συνήθως συμβαίνει και συνεπώς καταφεύγουμε σε κατάλληλους μετασχηματισμούς ώστε να εξασφαλίσουμε τη στασιμότητα της χρονοσειράς που μελετάμε. Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι τις περισσότερες φορές απλοί και πιο συγκεκριμένα κατάλληλες διαφορές των τιμών της χρονοσειράς ανάλογα με την τάση που παρουσιάζει (π.χ. οι πρώτες διαφορές αφαιρούν τη γραμμική τάση, οι δεύτερες διαφορές τη δευτεροβάθμια τάση κ.ο.κ.).

Βασισμένοι στις πιο πάνω σκέψεις, οι Box και Jenkins (1976) εισήγαγαν την έννοια του ***αυτοπαλίνδομου ολοκληρωμένου υποδείγματος κινητών μέσων Autoregressive Integrated Moving Average, ARIMA), ARIMA(p,d,q)***, το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη γενικευμένη σχέση:

$$\boxed{A(L)(1-L)^d x_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t}, \tag{3.33}$$

όπου d, ο αριθμός των διαφορών που πρέπει να πάρουμε σε ένα ολοκληρωμένο υπόδειγμα προκειμένου να γίνει στάσιμο. Η περαιτέρω μελέτη της τροποποιημένης πλέον χρονοσειράς πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός κατάλληλου σχήματος ARMA. Όπως έχει προταθεί μάλιστα από τους εμπνευστές του παραπάνω υποδείγματος, η συνολική διαδικασία κατασκευής του απαιτεί τρία βασικά στάδια (ταυτοποίηση, εκτίμηση και διαγνωστικό έλεγχο) των οποίων η αναλυτική περιγραφή ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας διατριβής.

3.4. Κριτήρια Επιλογής Υποδειγμάτων

Η επιλογή του κατάλληλου υποδείγματος σχετίζεται άμεσα με τον προσδιορισμό της βέλτιστης τάξης του (ή αλλιώς του βέλτιστου αριθμού χρονικών υστερήσεων) αλλά και με τον απαιτούμενο αριθμό των παραμέτρων που το χαρακτηρίζει. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι η τελική επιλογή καθορίζεται από τον κατάλληλο συνδυασμό μείωσης των υπολοίπων και ελαχιστοποίησης της τάξης και των παραμέτρων του υποδείγματος *(αρχή της οικονομίας των υποδειγμάτων)*.

Σήμερα, έχουν αναπτυχθεί πολυάριθμα κριτήρια προς την κατεύθυνση αυτή (π.χ. κριτήρια LR, FPE, CAT, BIC, AIC, BEC, SBC, Hannan-Quinn κ.α.) από τα οποία τρία έχουν κυρίως επικρατήσει (π.χ. Συριόπουλος 2004). Όλα τα παραπάνω κριτήρια προτείνουν πάντοτε τον υπολογισμό μιας ποσότητας η οποία εξαρτάται από διάφορες παραμέτρους του υποδείγματος. Η τελική επιλογή του υποδείγματος, που προφανώς αντιστοιχεί στη βέλτιστη, γίνεται τις περισσότερες φορές *με βάση τη μικρότερη τιμή των στατιστικών που έχει εισάγει για το σκοπό αυτό το κάθε κριτήριο*.

Το πρώτο λοιπόν από τα τρία πιο διαδεδομένα κριτήρια ονομάζεται ***έλεγχος του λόγου πιθανοφανειών (Likelihood Ratio test, LR)*** και σκοπεύει στον έλεγχο για την εισαγωγή ή όχι πρόσθετων υστερήσεων σε μια διαδικασία υποβάλλοντάς την πρώτα σε ορισμένες δοκιμασίες. Η εφαρμογή του παραπάνω κριτηρίου περιορίζεται σε απλοϊκά κυρίως υποδείγματα $AR(p)$. Εξετάζοντας την περίπτωση ενός ακόμα υποδείγματος $AR(k)$ με $p < k$, υπολογίζουμε τη διακύμανση των υπολοίπων σ_p^2 και σ_k^2 για τα δύο υποδείγματα αντίστοιχα και στη συνέχεια προσδιορίζουμε μια ποσότητα η οποία καλείται ***λόγος πιθανοφάνειας (Likelihood Ratio, LR)*** και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$LR = N \cdot \log\left(\frac{\sigma_p^2}{\sigma_k^2}\right), \tag{3.34}$$

όπου N ο αριθμός των παρατηρήσεων που διαθέτει η εξεταζόμενη χρονοσειρά. Επιλέγοντας στη συνέχεια ένα επίπεδο σημαντικότητας α, συγκρίνουμε την τιμή LR με εκείνη που λαμβάνει η κατανομή $\chi_{v,\alpha}{}^2$ για ένα βαθμό ελευθερίας (v = 1) και απορρίπτουμε τελικά το αρχικό υπόδειγμα της τάξης p εφόσον ισχύει $LR > \chi_{1,\alpha}{}^2$.

Το παραπάνω κριτήριο θεωρείται αρκετά αξιόπιστο και βασίζεται στον κλασικό στατιστικό έλεγχο υποθέσεων, αλλά έχουν δημιουργηθεί αμφιβολίες σχετικά με την πρακτική του αξία. Μια διαφοροποίηση του ελέγχου LR αποτελεί το ***κριτήριο πληροφορίας του Akaike (Akaike Information Criterion, AIC)*** στο οποίο η ιδέα του λόγου πιθανοφάνειας επεκτείνεται έτσι ώστε να εκτιμάται ο αριθμός των απαιτούμενων παραμέτρων μιας διαδικασίας $ARMA(p,q)$. Ο έλεγχος στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση της παρακάτω ποσότητας:

$$AIC(p,q) = N \cdot \log \sigma_{p,q}^2 + 2(p+q), \tag{3.35}$$

όπου $\sigma_{p,q}{}^2$ η διακύμανση των υπολοίπων για το εξεταζόμενο ARMA υπόδειγμα. Στην παραπάνω ποσότητα, ο πρώτος όρος εκφράζει το αποτέλεσμα που παίρνουμε λόγω της καταλληλότητας του υποδείγματος, ενώ ο δεύτερος εισάγεται με σκοπό την αποφυγή της υπερπαραμετροποίησης του υποδείγματος.

Το κριτήριο AIC μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για την ανίχνευση του αριθμού των υστερήσεων p ενός υποδείγματος $AR(p)$. Στην περίπτωση αυτή και θεωρώντας ότι η διαδικασία ακολουθεί την Κανονική κατανομή, η ποσότητα που προτείνεται από το κριτήριο του Akaike απλοποιείται ως εξής:

$$AIC(p) = \log \sigma_p^2 + \frac{2p}{N}, \tag{3.36}$$

όπου $\sigma_p{}^2$ η διακύμανση των υπολοίπων για το εξεταζόμενο AR υπόδειγμα. Έχει αποδειχθεί ότι το κριτήριο του Akaike (1973), έστω και ασυμπτωτικά, υπερεκτιμά την τάξη του υποδείγματος. Μια βελτιωμένη μορφή του παραπάνω κριτηρίου, βασισμένο στην κατά Bayes προσέγγιση, προτάθηκε από τον Schwartz (1978) και καλείται ***κριτήριο του Schwartz κατά Bayes (Schwartz Bayesian Criterion, SBC)***. Το κριτήριο αυτό, ομοίως, αποσκοπεί στον έλεγχο της τάξης ενός υποδείγματος $ARMA(p,q)$ με βάση την ελαχιστοποίηση της ακόλουθης στατιστικής ποσότητας:

$$SBC(p,q) = N \cdot \log \sigma_{p,q}^2 + (p+q) \cdot \log N. \tag{3.38}$$

Όπως παρατηρούμε στα δύο τελευταία κριτήρια, η προσθήκη μιας ακόμα παραμέτρου στο εξεταζόμενο υπόδειγμα μειώνει τη διακύμανση των υπολοίπων αλλά αυξάνει τελικά την τιμή της ποσότητας που προτείνεται, καθώς η εξάρτηση αυτής από τον αριθμό των συνολικών αριθμών υστερήσεων είναι ισχυρότερη από εκείνη της διακύμανσης. Έτσι, αν η προστιθέμενη παράμετρος δεν έχει ερμηνευτική ικανότητα, τότε οι τιμές των δύο κριτηρίων AIC και SBC μεγαλώνει και συνεπώς η επιλογή των υποδειγμάτων πραγματοποιείται με βάση τη μικρότερη τιμή των κριτηρίων.

Στο σημείο αυτό οφείλουμε να επισημάνουμε πως η εφαρμογή των τριών παραπάνω κριτηρίων πραγματοποιείται *πάντοτε συλλογικά (το ένα συμπληρωματικά στο άλλο)*. Πιο συγκεκριμένα, εκτιμούμε αρχικά εναλλακτικές μορφές ενός υποδείγματος με διαφορετικές τάξεις παραμέτρων μέσω της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας (π.χ. ενός ARIMA) και στη συνέχεια επιλέγουμε το πιο ικανοποιητικό με βάση τα κριτήρια των Akaike και Schwartz. Από τα δύο τελευταία μάλιστα, εκείνο το οποίο έστω και οριακά φαίνεται καλύτερο είναι το SBC καθώς επιβάλλει πάντα μεγαλύτερη ‘‘ποινή’’ από το AIC στον αριθμό των εκτιμούμενων παραμέτρων. Με άλλα λόγια, το οριακό κόστος προσθήκης μιας νέας παραμέτρου είναι μεγαλύτερο στο SBC από ότι στο AIC και για το λόγο αυτό το SBC οδηγεί πάντοτε στην επιλογή ενός υποδείγματος του οποίου ο αριθμός των παραμέτρων δεν είναι σε καμία περίπτωση μεγαλύτερος από εκείνον που επιλέχθηκε με το κριτήριο AIC.

3.5. Μέτρα Αξιολόγησης Καλής Προσαρμογής

Το πλέον σύνηθες μέτρο αξιολόγησης καλής προσαρμογής ενός υποδείγματος στις παρατηρήσεις ενός εξεταζόμενου δείγματος αφορά την τυπική απόκλιση των υπολοίπων και ισοδυναμεί με τη ***ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Root Mean Square Error, RMSE)*** που προβλέπεται κατά την προσαρμογή. Εάν $\{f(x_i),\ i = 1,...,N\}$ είναι οι θεωρητικές τιμές που προβλέπει το εξεταζόμενο μοντέλο το οποίο περιγράφει τα διαθέσιμα δεδομένα $\boldsymbol{y} = \{y_i,\ i = 1,...,N\}$, το υπόδειγμα με τη βέλτιστη προσαρμογή στις διαθέσιμες παρατηρήσεις αντιστοιχεί σε εκείνο με τη μικρότερη τιμή του *RMSE*, της ακόλουθης δηλαδή ποσότητας:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}[w_i(f(x_i) - y_i)]^2}{N-(m+1)}} \text{ με } i = 1,...,N, \qquad (3.37)$$

όπου m το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών τις οποίες το μοντέλο περιλαμβάνει (π.χ. ο βαθμός του πολυωνύμου στην περίπτωση της πολυωνυμικής παλινδρόμησης) και w_i μια ποσότητα βάρους η οποία αποδίδεται σε κάθε παρατηρούμενη τιμή ανάλογα με το βαθμό αξιοπιστίας που παρουσιάζει. Με τη βοήθεια της σχέσης (3.37) είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τα όρια μέσα στα οποία η εκάστοτε θεωρητική εκτίμηση $f(x_i)$ του εξεταζόμενου μοντέλου μπορεί να κυμαίνεται, $\pm\, t_{v,a} \cdot RMSE$, όπου $t_{v,a}$ η τιμή την οποία προβλέπει η κατανομή Student για το ένα συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας a και $v = N\text{-}(m+1)$ βαθμούς ελευθερίας.

Παρά το ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσαρμογής θεωρείται ένα αξιόπιστο και κλασικό μέτρο αξιολόγησης καλής προσαρμογής, εξίσου συχνά υϊοθετείται ο ***συντελεστής προσδιορισμού ή παλινδρόμησης R^2 (Coefficient Of Determination,***

COD) ο οποίος αποτελεί αδιάστατο μέγεθος και εκφράζει έτσι πολύ πιο αντικειμενικά το βαθμό επιτυχίας του προσαρμοζόμενου υποδείγματος:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - \langle \boldsymbol{y} \rangle)^2}{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \langle \boldsymbol{y} \rangle)^2}. \tag{3.38}$$

Ο συντελεστής προσδιορισμού εκφράζει την ισχύ αλληλεξάρτησης μεταξύ των παρατηρούμενων και των προβλεπόμενων από το εξεταζόμενο υπόδειγμα τιμών και ουσιαστικά προσδιορίζει το ποσοστό των παρατηρήσεων το οποίο μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από την παλινδρόμηση (π.χ. Τραχανάς & Τσεβάς 1998). Η ποσότητα R^2 λαμβάνει τιμές στο διάστημα [0,1] και είναι καθαρός αριθμός. Η τελευταία αυτή ιδιότητα είναι ίσως το σημαντικότερο πλεονέκτημα που παρουσιάζει σε σχέση με το μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσαρμογής, καθώς μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί για συγκρίσεις.

Στα ίδια πλαίσια αξιολόγησης της περιγραφής βρίσκεται και ο ***συντελεστής συσχέτισης R (coefficient of correlation)*** που ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα του συντελεστή προσδιορισμού. Ο συντελεστής συσχέτισης δεν διαφέρει ποιοτικά από το συντελεστή προσδιορισμού καθώς και οι δύο παράμετροι εκφράζουν από κοινού την ποιότητα προσαρμογής. Περιγράφεται όμως ο βαθμός επιτυχίας της παλινδρόμησης κάτω από το γενικότερο πρίσμα της συσχέτισης δύο (ή και περισσότερων) μεταβλητών, ειδική περίπτωση της οποίας αποτελεί η έννοια της αυτοσυσχέτισης που παρουσιάστηκε αναλυτικά σε προηγούμενη ενότητα. Ο συντελεστής αυτός λαμβάνει τιμές στο διάστημα [-1,1], είναι καθαρός αριθμός και μας πληροφορεί σχετικά με μια ενδεχόμενη ικανοποιητική περιγραφή των παρατηρούμενων μετρήσεων από ένα υπόδειγμα όταν εκείνος ξεπερνά την τιμή του 0.8 κατά απόλυτη τιμή (πολύ ισχυρή συσχέτιση, π.χ. Τραχανάς & Τσεβάς 1998).

3.6. Μέτρα Αξιολόγησης Περιγραφής

Το τελικό στάδιο πριν την ολοκλήρωση της κατασκευής και εφαρμογής ενός οποιουδήποτε υποδείγματος σε μια χρονοσειρά αποτελεί η αξιολόγηση της περιγραφής με το συγκεριμένο υπόδειγμα. Η αξιολόγηση αυτή στηρίζεται στον *έλεγχο ανεξαρτησίας των υπολοίπων*. Εάν η χρονοσειρά που περιγράφεται από τα υπόλοιπα είναι τυχαία, δηλαδή αποτελεί διαδικασία λευκού θορύβου, το χρησιμοποιούμενο μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί απόλυτα επιτυχές καθώς ήταν σε θέση να ταυτοποιήσει και τελικά να απομακρύνει οποιαδήποτε δυναμική βρισκόταν στα δεδομένα. Επομένως, όλες οι προσπάθειες προσανατολίζονται στην επινόηση αξιόπιστων στατιστικών ελέγχων οι οποίοι μας διασφαλίζουν την ύπαρξη ή όχι της ανεξαρτησίας.

Σήμερα, έχουν αναπτυχθεί πολυάριθμες τεχνικές προς την κατεύθυνση αυτή (π.χ. έλεγχοι Kendall-Stuart, Box-Pierce, Ljung-Box, αλλαγής σημείου, ροών, RVN κ.α.). Στην παρούσα διδακτορική διατριβή θα παρουσιαστούν οι τρεις πρώτες από τις παραπάνω τεχνικές καθώς είναι σχετικά απλές και αξιόπιστες παρά την απλότητά τους. Οι έλεγχοι αυτοί αποτελούν μάλιστα διαφορετικές προσεγγίσεις της γενικότερης μεθοδολογίας του Portmanteau, σύμφωνα με την οποία, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης πρέπει να είναι μηδενική για όλες τις χρονικές υστερήσεις ώστε τελικά τα υπόλοιπα να θεωρηθούν ανεξάρτητα (π.χ. Συριόπουλος 2004).

Ο ***έλεγχος των Kendall-Stuart*** (1961) αποτελεί ουσιαστικά την εφαρμογή του κλασικού στατιστικού ελέγχου t (t-test) με σκοπό να εξεταστεί εάν οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης μιας χρονοσειράς είναι *ένας προς ένας ίσος με το μηδέν*. Οι Kendall και Stuart (1961) εισήγαγαν για το σκοπό αυτό έναν εμπειρικό τύπο για το τυπικό σφάλμα του συντελεστή $\rho(k)$ ο οποίος έχει την παρακάτω μορφή:

$$se[\rho(k)] = \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{3.39}$$

όπου N ο αριθμός των παρατηρήσεων της εξεταζόμενης χρονοσειράς. Επιλέγοντας πιθανότητα κάλυψης ίση με 95% και δεχόμενοι ότι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης ακολουθούν ικανοποιητικά την κατανομή Student, η υπόθεση να είναι όλοι τους μηδενικοί γίνεται δεκτή εφόσον η τιμή του καθενός βρίσκεται μέσα στο διάστημα $\pm 1.96 \cdot se[\rho(\kappa)]$.

Τα πιο πάνω όρια καθορίζονται πάνω στο διάγραμμα των αυτοσυσχετίσεων έτσι ώστε να είναι εύκολος ο προσδιορισμός των τιμών που δεν διαφέρουν στατιστικά από το μηδέν. Οφείλουμε εδώ να σημειώσουμε πως ο έλεγχος του στατιστικού t ισχύει μόνο εφόσον ο αριθμός των παρατηρήσεων της χρονοσειράς είναι πολύ μεγάλος καθώς και ότι, όπως έχει αποδειχθεί, η χρήση του παραπάνω εμπειρικού τυπικού σφάλματος οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα όταν αφορά αυτοσυσχετίσεις μικρής υστέρησης.

Εξαιτίας των προβλημάτων που παρουσιάζει ο στατιστικός έλεγχος των μεμονωμένων συντελεστών αυτοσυσχέτισης, όπως προβλέπεται σύμφωνα με την προσέγγιση των Kendall και Stuart, μερικά χρόνια αργότερα προτάθηκε ο έλεγχος ενός αριθμού αυτοσυσχετίσεων *από κοινού*. Έτσι λοιπόν, ο ***έλεγχος των Box-Pierce*** (1970) αλλά και εκείνος των ***Ljung-Box*** (1978) ο οποίος αποτελεί απλά μια παραλλαγή του προηγούμενου, προτείνουν τον υπολογισμό των δύο παρακάτω ποσοτήτων:

- $Q^{BP}(k) = N \cdot \sum_{i=1}^{k} \rho^2(i)$ για τη στατιστική των Box και Pierce. (3.40)

- $Q^{LB}(k) = N(N+2) \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho^2(i)}{N-i}$ για τη στατιστική των Ljung και Box. (3.41)

Επιλέγοντας στη συνέχεια ένα επίπεδο σημαντικότητας α, συγκρίνουμε τις παραπάνω ποσότητες με την τιμή που προβλέπεται από την κατανομή $\chi_{\nu,\alpha}^2$ για k βαθμούς ελευθερίας ($\nu = k$) και απορρίπτουμε τελικά την υπόθεση για γραμμική ανεξαρτησία εφόσον ισχύει $Q^{BP} > \chi_{k,\alpha}{}^2$ και $Q^{LB} > \chi_{k,\alpha}{}^2$ αντίστοιχα. Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι οι δύο παραπάνω έλεγχοι εξετάζουν την ύπαρξη συσχετίσεων και εξαρτώνται από τις υποθέσεις της στασιμότητας και της Κανονικής κατανομής. Εάν μια τουλάχιστον από τις υποθέσεις αυτές δεν ικανοποιείται, τότε η ισχύς των ελέγχων αυτών δεν είναι σημαντική.

4. Μέθοδοι Ανάλυσης Χρονοσειρών O-C

Μετά τα μέσα του περασμένου αιώνα, οπότε και υπήρξε η δυνατότητα ανάλυσης διαγραμμάτων O-C για πρώτη φορά με έναν ικανό αριθμό χρόνων ελαχίστων ώστε να γίνουν ασφαλείς εκτιμήσεις, επικράτησαν ορισμένα μοντέλα τα οποία αποσκοπούσαν στη διάκριση και ταξινόμηση των μεταβολών που παρατηρούνταν (διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, παραβολικά τόξα, ημιτονοειδείς και ανώμαλες μεταβολές). Τα μοντέλα αυτά συνθέτουν την καλούμενη ως ***κλασική μέθοδο*** αντιμετώπισης των διαγραμμάτων η οποία μέχρι και πρόσφατα είχε παγιωθεί ως η μόνη δυνατή προσέγγιση μελέτης.

Καίρια θέση της κλασικής προσέγγισης αποτελούσε η ύπαρξη αιφνίδιων μεταβολών της τροχιακής περιόδου και οι οποίες αντιστοιχούσαν στα σημεία τομής διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων στα διαγράμματα O-C. Κατά τη διάρκεια των τροχιακών κύκλων, τα οποία κάλυπταν τα ευθύγραμμα τμήματα, η περίοδος θεωρούνταν σταθερή. Η παραβολική διαμόρφωση των διαγραμμάτων αντιστοιχούσε σε μεταβολή της περιόδου με σταθερό ρυθμό και δεν ήταν λίγες οι φορές κατά τις οποίες χρησιμοποιούνταν διαδοχικά παραβολικά τόξα με σκοπό να περιγράψουν περισσότερο πολύπλοκες διαμορφώσεις.

Η μαθηματική, αλλά κυρίως η φυσική αστοχία της κλασικής μεθόδου όσον αφορά την ύπαρξη μηχανισμών ικανών να υποστηρίξουν τις χρησιμοποιούμενες τεχνικές, οδήγησε τα τελευταία χρόνια στην επινόηση μεθόδων οι οποίες προέβλεπαν *συνεχή μεταβολή της τροχιακής περιόδου*. Η επιτυχία των σύγχρονων πλέον μεθόδων κατά την προσαρμογή τους στα παρατηρησιακά δεδομένα αλλά και η συμβατότητα των αποτελεσμάτων με τις φυσικές διεργασίες έχουν οδηγήσει στη μερική (αν όχι ολική) παραμέληση της κλασικής προσέγγισης από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα.

4.1. Η Προσέγγιση των Kalimeris et al. (Παλινδρόμησης)

Η προσέγγιση των Kalimeris et al. (1994a, 1994b) ήταν η πρώτη η οποία πρότεινε την περιγραφή της εξέλιξης των διαφορών O-C κατά συνεχή τρόπο και κατά συνέπεια τη μεταβολή της τροχιακής περιόδου κατά τον ίδιο τρόπο. Η περιγραφή των αντίστοιχων χρονοσειρών πραγματοποιείται με τη βοήθεια πολυωνύμων παρεμβολής σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, χωρίς να υφίστανται φυσικοί περιορισμοί σχετικά με το βαθμό του επιλεγόμενου πολυωνύμου. Δεχόμαστε λοιπόν αρχικά ότι η εξεταζόμενη χρονοσειρά $[O\text{-}C](E)$ περιγράφεται ικανοποιητικά για το διάστημα των παρατηρήσεων που διαθέτουμε $[E_{min},E_{max}]$ από ένα ορθογώνιο πολυώνυμο (π.χ. Legendre, Hermite ή Chebyshev) $\Delta T(E)$ της ακόλουθης μορφής:

$$\Delta T(E) = c' \cdot \sum_{i=0}^{n} c_i E_N^i \,, \tag{3.42}$$

όπου $\{c_i,\ i = 0,...,n\}$ οι συντελεστές του πολυωνύμου, c' μια ελεύθερα επιλεγόμενη σταθερά τέτοια ώστε να ισχύει $(E_{max} - E_{min})/c' < 1$ και $E_N = E/c$ ο κανονικοποιημένος τροχιακός κύκλος. Οι μετατροπές αυτές πραγματοποιούνται με σκοπό η μεταβλητή ως προς την οποία ορίζεται το πολυώνυμο να βρίσκεται στο διάστημα [-1,1], ιδιότητα η οποία χαρακτηρίζει τα ορθογώνια πολυώνυμα. Στη συνέχεια, ο προσδιορισμός της της συνάρτησης περιόδου αλλά και ο ρυθμός μεταβολής της για κάθε τροχιακό κύκλο E πραγματοποιείται με τη βοήθεια των δύο πιο κάτω σχέσεων οι οποίοι προκύπτουν με εφαρμογή των δύο θεμελιωδών διαφορικών νόμων (3.5) και (3.6) που διέπουν τα διαγράμματα O-C:

- $$P(E) = \frac{1}{c'} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[(i+1) c_i E_N^i \right]. \tag{3.43}$$

- $$\dot{P}(E) = \frac{1}{c'} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \left[(i+1) c_i E_N^i \right] - \sum_{i=0}^{n-1} \left[(i+1) c_{i+1} \left(\frac{E-1}{c'} \right)^i \right] \right\}. \tag{3.44}$$

Κάνοντας χρήση των δύο παραπάνω συναρτήσεων, μπορούμε εύκολα να εφαρμόσουμε τη συγκεκριμένη προσέγγιση στην περίπτωση που η διαμόρφωση μιας χρονοσειράς O-C παρουσιάζεται γραμμική ή παραβολική (π.χ. Kalimeris et al. 1994a, Rovithis-Livaniou et al. 1998):

- Εάν $\Delta T(E) = c_0 + c_1 E_N$, τότε $P(E) = c_1 \equiv const.$ (3.45)

- Εάν $\Delta T(E) = c_0 + c_1 E_N + c_2 E_N^2$, τότε $P(E) = c_1 + 2 c_2 E_N$. (3.46)

Η επιλογή του βαθμού του πολυωνύμου n στηρίζεται στον έλεγχο των υπολοίπων και πιο συγκεκριμένα στη ρίζα του μέσου τετραγωνικού τους σφάλματος *RMSE* έτσι ώστε η τελευταία να είναι πάντοτε ίση ή και μικρότερη της στάθμης του θορύβου του διαγράμματος O-C. Δυστυχώς όμως, είναι γνωστό πως η αύξηση του βαθμού ενός πολυωνύμου παρεμβολής n οδηγεί πάντοτε στη δημιουργία ταλαντώσεων στα άκρα του διαστήματος μέσα στο οποίο επιχειρούμε να περιγράψουμε τη συνάρτηση $\Delta T(E)$, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει πάντοτε μια μέγιστη τιμή του βαθμού του πολυωνύμου μετά την οποία η προσαρμογή αποτυγχάνει (εμπειρικά περίπου $n = 7$). Σε μεγάλο βαθμό, το παραπάνω πρόβλημα οφείλεται στον ομοιόμορφο διαμερισμό του γραφήματος κατά την παρεμβολή του πολυωνύμου και επομένως η αντιμετώπισή του βασίζεται στην επιλογή κατάλληλων σημείων παρεμβολής, περισσότερο πυκνών στα άκρα (σημεία Chebyshev). Παρά το γεγονός όμως αυτό, αποδεικνύεται ότι *για οποιαδήποτε επιλογή των σημείων παρεμβολής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση για την οποία η παρεμβολή αποτυγχάνει* (π.χ. Ακρίβης & Δουγαλής 2002).

Η κλασική προσέγγιση η οποία πραγματοποιείται λοιπόν στις περιπτώσεις αυτές είναι η τμηματική περιγραφή του διαγράμματος O-C με τη βοήθεια *τμηματικών κυβικών πολυωνύμων (cubic splines)*. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει κάτι τέτοιο είναι ότι η πολυωνυμική παρεμβολή για μικρό n παρουσιάζει τοπικά πολύ καλές προσεγγιστικές ιδιότητες, ενώ ο βαθμός $n = 3$ επιλέγεται με σκοπό τη μικρότερη δυνατή παραμόρφωση της περιοχής που περιγράφεται με το τμηματικό πολυώνυμο (ο βαθμός αυτός προσδίδει στο πολυώνυμο τη μικρότερη δυνατή ασυμμετρία).

Σημειώνουμε βέβαια ότι οι τμηματικές συναρτήσεις $\{\Delta T_j(E), j = 1,...,j,j+1,...,k\}$ θα πρέπει να συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να μην εμφανίζονται ασυνέχειες. Η ανάγκη αυτή οδηγεί στην απαίτηση η συνάρτηση της τροχιακής περιόδου αλλά και του ρυθμού μεταβολής της να είναι ομαλές για κάθε τροχιακό κύκλο, περιλαμβανομένων και των συνόρων των τμηματικών πολυωνύμων, διαφορετικά η περιγραφή θα ερχόταν σε σύγκρουση με τους φυσικούς μηχανισμούς των διπλών συστημάτων. Επομένως, οι παρακάτω συνθήκες θα πρέπει να ικανοποιούνται για οποιοδήποτε από τα τμηματικά πολυώνυμα $\Delta T_j(E)$ που χρησιμοποιούνται:

$$\frac{d\Delta T_j(E)}{dE} = \frac{d\Delta T_{j+1}(E)}{dE} \text{ και } \frac{d^2\Delta T_j(E)}{dE^2} = \frac{d^2\Delta T_{j+1}(E)}{dE^2} \text{ για κάθε } j = 1,2,...,k \quad (3.47)$$

Αξίζει τέλος να σημειώσουμε την ύπαρξη μιας ακόμα, ιδιαίτερα αξιόλογης, προσέγγισης στην ανάλυση των διαγραμμάτων O-C η οποία αντιμετωπίζει τις μεταβολές της τροχιακής περιόδου ως συνεχείς. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε από τους Jetsu, Pagano, Moss, Rodono, Lanza και Tuominen (1997) και διαθέτει αρκετά κοινά χαρακτηριστικά με εκείνη των Kalimeris et al. (1994a). Συγκεκριμένα, γίνεται ελαχιστοτετραγωνική χρήση κατάλληλων πολυωνύμων, ιδιαίτερα υψηλού βαθμού, αφού όμως προηγηθεί η μεταφορά των προβλήματος από το χώρο του χρόνου στο χώρο των φάσεων και των συχνοτήτων. Πολλά από τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουν οι Jetsu et al. (1997) είναι όμοια με εκείνα των Kalimeris et al. (1994a) με χαρακτηριστικότερο εκείνο της ανεξαρτησίας της διαμόρφωσης της τροχιακής περιόδου από την εκάστοτε γραμμική εφημερίδα.

4.2. Η (Στοχαστική) Προσέγγιση των Koen & Lombard

Μια τελείως διαφορετική προσέγγιση για την περιγραφή των διαγραμμάτων O-C έχουν ακολουθήσει οι Koen και Lombard σε μια σειρά από δημοσιευμένες εργασίες στις οποίες οι αντίστοιχες χρονοσειρές αντιμετωπίζονται αυστηρά ως στοχαστικές διαδικασίες (1993-2006). Δυστυχώς, ενώ η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι αρκετά πρωτότυπη και έχει οδηγήσει σε πολλά χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με τη φύση και τις ιδιότητες των διαγραμμάτων O-C, η εφαρμογή της απαιτεί ένα ιδιαίτερα προχωρημένο επίπεδο της σύγχρονης Στατιστικής με αποτέλεσμα να απευθύνεται σε αρκετά περιορισμένο ερευνητικό κοινό.

Στην κύρια εργασία του, τη σχετική με την παρουσίαση των βασικών αρχών της νέας μεθόδου, της αξιολόγησής της και της πραγματοποίησης ορισμένων εφαρμογών, ο Koen (1996) εκφράζει αρχικά το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο παρατηρούμενων χρόνων των ελαχίστων y_j ως συνάρτηση της μέσης τροχιακής περιόδου P_j η οποία αντιστοιχεί στο j χρονικό διάστημα σύμφωνα με την ακόλουθη μορφή:

$$y_j = T_j - T_{j-1} = n_j P_j + \sum_{i=N_{j-1}+1}^{N_j} \varepsilon_i + e_j + e_{j-1} \text{ με } N_j = \sum_{k=1}^{j} n_k \text{ και } j = 1,..., J . \quad (3.48)$$

Στην πιο πάνω σχέση, T_j και T_{j-1} είναι οι παρατηρούμενοι χρόνοι των ελαχίστων μεταξύ των οποίων ορίζεται το χρονικό διάστημα y_j, n_j είναι ο αριθμός των τροχιακών κύκλων που έλαβαν χώρα μέσα στο διάστημα αυτό και N_j είναι ο συνολικός αριθμός των τροχιακών κύκλων μέχρι και εκείνο το διάστημα. Φυσικά, η στοχαστική ανέλιξη που εκφράζει την χρονοσειρά (3.48) απαιτεί την εισαγωγή μιας αβεβαιότητας σχετικά με την πραγματική τιμή των χρόνων ελαχίστου και της περιόδου η οποία εκφράζεται με τη βοήθεια των ποσοτήτων e_j και ε_i με $i = N_{j-1}+1,...,N_j$ αντίστοιχα για οποιοδήποτε j χρονικό διάστημα.

Χρησιμοποιώντας τώρα την παραπάνω σχέση, μπορούμε να εκτιμήσουμε οποιοδήποτε παρατηρούμενο χρόνο ελαχίστου ως αποτέλεσμα όλων των προηγούμενων χρονικών διαστημάτων $\{y_i, i = 1,...,j-1\}$ τα οποία είχαν ως εναρκτήριο παρατηρούμενο χρόνο τον T_* ως εξής:

$$O_j = T_j = T_* + \sum_{i=1}^{j} y_i = T_* + \sum_{i=1}^{j} n_i P_i + e_j \text{ με } T_* = T_0 - e_0 \text{ και } j = 1,..., J , \quad (3.49)$$

όπου T_0, ο αληθής εναρκτήριος χρόνος ελαχίστου (απομονωμένος από οποιοδήποτε παρατηρησιακό σφάλμα). Ο αντίστοιχος υπολογιζόμενος χρόνος ελαχίστου για την τιμή j των χρόνων των ελαχίστων που διαθέτουμε μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της ακόλουθης γραμμικής εφημερίδας, περιόδου αναφοράς P_0:

$$C_j = T_* + N_j P_0 . \quad (3.50)$$

Έτσι, έχοντας στη διάθεσή μας τον παρατηρούμενο αλλά και τον υπολογιζόμενο χρόνο ελαχίστου για όλα τα J χρονικά διαστήματα τα οποία ορίζονται από τους διαθέσιμους χρόνους ελαχίστων, είμαστε πλέον σε θέση να περιγράψουμε την εξεταζόμενη O-C χρονοσειρά μέσω των διαφορών που προκύπτουν από τις σχέσεις (3.49) και (3.50):

$$\boxed{(O-C)_j = \left[\sum_{i=1}^{j} n_i P_i - N_j P_0 \right] + \sum_{i=1}^{N_j} \varepsilon_i + e_j .} \quad (3.51)$$

Στην περίπτωση που η τροχιακή περίοδος ενός συστήματος P_j διατηρείται σταθερή και ίση με την εναρκτήρια περίοδο αναφοράς P_0 για οποιοδήποτε j χρονικό διάστημα, ο όρος που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες της σχέσης (3.51) μηδενίζεται και τελικά η χρονοσειρά περιγράφεται από το παρακάτω υπόδειγμα:

$$(O-C)_j = \sum_{i=1}^{N_j} \varepsilon_i + e_j \, . \tag{3.52}$$

Η σχέση (3.52) είναι εξαιρετικά σημαντική καθώς διαφαίνεται πως ακόμα και στην περίπτωση σταθερής περιόδου, το διάγραμμα O-C αναμένεται να χαρακτηρίζεται από μικρές, ακανόνιστες, τυχαίες μεταβολές e_j ως αποτέλεσμα των σφαλμάτων που συνοδεύουν τις τιμές των παρατηρούμενων χρόνων των ελαχίστων. Εκφραστής των τυχαίων αυτών μεταβολών αποτελεί ο παρατηρησιακός θόρυβος του οποίου τα μέγιστα φράγματα ανάλογα με τη μέθοδο προσδιορισμού των χρόνων ελαχίστου εκτιμήθηκαν μέσα από τις σχέσεις (3.15), (3.16) και (3.17) για φωτοηλεκτρικές και CCD παρατηρήσεις. Εκείνο όμως που προκαλεί ακόμα περισσότερο ενδιαφέρον αφορά τα σφάλματα ε_i που συνοδεύουν την περίοδο. Η αθροιστική τους συσσώρευση μετά από κάθε τροχιακό κύκλο N_j οδηγεί στην *παρουσία ισχυρού συστηματικού και όχι τυχαίου θορύβου* ο οποίος τελικά προσβάλλει τα διαγράμματα O-C με την παραγωγή γραμμικών τάσεων. Στο πέμπτο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι ο θόρυβος αυτός μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια και να απομακρυνθεί από τις εξεταζόμενες χρονοσειρές.

Ο Koen (1996) εκτιμά ότι μπορεί να επιλεγεί ένα οποιοδήποτε υπόδειγμα περιγραφής της μεταβολής της τροχιακής περιόδου ως συνάρτηση των τροχιακών κύκλων που αντιστοιχούν στους J+1 διαθέσιμους χρόνους ελαχίστων (π.χ. πολυωνυμικές ή τριγωνομετρικές συναρτήσεις) του οποίου οι παράμετροι μπορούν να προσδιοριστούν με τη βοήθεια μιας γενικευμένης δοκιμασίας μέγιστης πιθανοφάνειας. Προτείνεται μάλιστα μια μέθοδος προσδιορισμού της μεταβολής της τροχιακής περιόδου με τη βοήθεια της διαδικασίας του τυχαίου βηματισμού και με τη χρήση κατάλληλων κριτηρίων, όπως εκείνων τα οποία παρουσιάστηκαν κατά την περιγραφή των αυτοπαλίνδρομων υποδειγμάτων, ώστε να ελέγχεται κάθε φορά κατά πόσο αληθείς (ενδογενείς) μπορεί να είναι οι παρατηρούμενες μεταβολές ή να οφείλονται καθαρά σε τυχαία γεγονότα.

‘‘Most people are not natural-born statisticians. Left to our own devices, we are not very good at picking out patterns from a sea of noisy data. To put it another way, we are all too good at picking out non-existent patterns that happen to suit our purposes. Statistical theory attacks the problem from both ends. It provides optimal methods for finding a real signal in a noisy background, and also provides strict checks against the overinterpretation of random patterns.’’

Efron B., Tibshirani R.
‘‘An Introduction to the Bootstrap’’
CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, U.S.A, 1998

Κεφάλαιο IV

ΦΥΣΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ ΤΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν οι κυριότεροι μηχανισμοί που επιδρούν στους αστέρες κατά την πορεία τους προς την κύρια ακολουθία αλλά και κατά το διάστημα παραμονής τους σε αυτή. Εκείνο το οποίο μας απασχολεί είναι ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η στροφορμή τους αλλά και η χρονική κλίμακα μέσα στην οποία λαμβάνουν χώρα οι μεταβολές αυτές. Σε πολλές περιπτώσεις, η παρουσίαση των φυσικών διαδικασιών θα είναι απλά και μόνο ποιοτική, καθώς η αναλυτική τους περιγραφή στα στενά πλαίσια μια διδακτορικής διατριβής είναι σχεδόν αδύνατη. Σε όσες όμως περιπτώσεις κρίνεται απαραίτητο, θα διατηρηθεί τόσο η μαθηματική αυστηρότητα όσο και η μετέπειτα φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Σε κάθε πάντως περίπτωση, θα γίνει προσπάθεια παρουσίασης πρόσφατων παρατηρησιακών εξελίξεων σε αναλογία τέτοια ώστε να μπορούν να υποστηρίξουν τα θεωρητικά αποτελέσματα αλλά και να χρησιμοποιηθούν ως μέσο βαθμονόμησης κατάλληλα παραμετροποιημένων εμπειρικών και ημιεμπειρικών σχέσεων.

Είναι προφανές ότι μεγαλύτερο βάρος θα δοθεί στους αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων οι οποίοι αποτελούν και αντικείμενο μελέτης της παρούσας διατριβής. Ο βασικός λόγος της επιλογής αυτής έγκειται στο ότι μέχρι σήμερα οι ψυχροί αστέρες αποτελούν μια ομάδα αστέρων που έχει μελετηθεί ιδιαίτερα εκτεταμένα, γεγονός στο οποίο έχει συμβάλει αφενός η ανάπτυξη της Ηλιακής Φυσικής, αφετέρου το μεγάλο πλήθος δορυφορικών παρατηρήσεων αστέρων ηλιακού τύπου. Μετά από μια απαιτούμενη σύντομη ανασκόπηση των βασικών ιδιοτήτων του εσωτερικού των αστέρων, εστιάζουμε στην απώλεια μάζας μέσω αστρικού ανέμου και τις συνέπειες που ο μηχανισμός αυτός μπορεί να έχει κάτω από την παρουσία μαγνητικού πεδίου και ισχυρής ιδιοπεριστροφής σε μεμονωμένους αστέρες. Στη συνέχεια, επικεντρωνόμαστε στους μηχανισμούς απώλειας στροφορμής που παρατηρούνται στα διπλά συστήματα και τελικά στη μεταφορά στροφορμής εξαιτίας των παλιρροϊκών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μελών τους. Σε κάθε περίπτωση, σκοπός μας είναι η υϊοθέτηση των μηχανισμών μεταβολής στροφορμής ώστε να διερευνηθούν αργότερα οι μεταβολές της τροχιακής περιόδου τις οποίες επιφέρουν στα διπλά συστήματα αστέρων.

1. Δομή των Αστέρων

Κατά την περιγραφή του τρόπου δράσης ορισμένων φυσικών μηχανισμών είτε στους απομονωμένους αστέρες είτε όταν εκείνοι αποτελούν μέλη διπλών συστημάτων, είναι απαραίτητη η γνώση των θεμελιωδών παραμέτρων των μελών τους σχετικά με τη δομή και την εξελικτική τους κατάσταση (π.χ. Kippenhahn & Weigert 1994, Δεληγιάννης 2000). Ένα από τα πιο κρίσιμα χαρακτηριστικά του κάθε μέλους σχετίζεται με τον τρόπο διάδοσης της ενέργειας στην εξωτερική ζώνη του εσωτερικού του (δηλαδή στη ζώνη εκείνη που συνορεύει με τη φωτόσφαιρα) και η οποία συνήθως καλείται ***περίβλημα (envelope)***, καθώς εκείνη είναι που συμβάλλει κατά κύριο λόγο στη δημιουργία του δυναμό παραγωγής μαγνητικών πεδίων και συνεπώς καθορίζει το είδος των αστρικών ανέμων, αλλά και εκείνη που επηρεάζεται πιο άμεσα κατά την αλληλεπίδραση του αστέρα με το συνοδό του στην περίπτωση των διπλών συστημάτων.

Στη συνέχεια, δίνεται μια περιγραφή ορισμένων βασικών ιδιοτήτων των αστέρων ανάλογα με το είδος του περιβλήματος που φέρουν, διάκριση η οποία ουσιαστικά στηρίζεται σε μια κρίσιμη τιμή της ενεργού θερμοκρασίας τους (T_e ~ 7200 K) και η οποία αντιστοιχεί στο φασματικό τύπο F0. Επομένως, ο διαχωρισμός αυτός ισοδυναμεί τελικά με τη διάκριση των αστέρων σε ψυχρούς και θερμούς ή αλλιώς σε αστέρες μεταγενέστερων και προγενέστερων φασματικών τύπων αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι κριτήρια που αφορούν, με τον τρόπο αυτό, τη μάζα των αστέρων μπορούν να προκύψουν μόνο εφόσον γνωρίζουμε την ακριβή εξελικτική του κατάσταση.

1.1. Αστέρες Μεταγενέστερων Φασματικών Τύπων

Σε γενικές γραμμές, η δομή των αστέρων μεταγενέστερων φασματικών τύπων δεν διαφέρει σημαντικά από εκείνες που προβλέπει το ηλιακό πρότυπο. Η επίλυση των εξισώσεων δομής του εσωτερικού των αστέρων, με την προϋπόθεση όμως αυτοί να έχουν εγκατασταθεί στην κύρια ακολουθία, μας οδηγεί στα εξής τέσσερα πολύ βασικά συμπεράσματα:

- Αστέρες με μάζα $M \leq 1.5\ M_{\Theta}$ περίπου, οι οποίοι ουσιαστικά ταυτίζονται με τους αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων καθώς βρίσκονται στην κατώτερη περιοχή του διαγράμματος H-R, χαρακτηρίζονται από θερμοκρασίες στον πυρήνα τους χαμηλότερες από 1.8×10^7 K περίπου.

- Στις θερμοκρασίες αυτές η μετατροπή του υδρογόνου σε ήλιο στον πυρήνα πραγματοποιείται κυρίως μέσω του κύκλου πρωτονίου-πρωτονίου (p-p chain).

- Ο ρυθμός παραγωγής ενέργειας με το μηχανισμό αυτό δεν επηρεάζεται πολύ από τη θερμοκρασία και επομένως είναι περίπου ο ίδιος σε σχετικά μεγάλες περιοχές του πυρήνα, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα τη διάδοση της ενέργειας στον πυρήνα μέσω ακτινοβολίας. Συνεπώς, στους αστέρες της κατηγορίας αυτής κάνουμε λόγο για την ύπαρξη ***πυρήνα ακτινοβολίας (radiative core)***.

- Εξαιτίας της χαμηλής ενεργού θερμοκρασίας των αστέρων αυτών, η πυκνότητα οπότε και η αδιαφάνεια των εξωτερικών τους στρωμάτων είναι σχετικά υψηλή. Το γεγονός αυτό εμποδίζει τη διάδοση της ενέργειας με ακτινοβολία και επομένως η ενέργεια διαδίδεται στα στρώματα αυτά με μεταφορά. Συνεπώς, στους αστέρες της κατηγορίας αυτής κάνουμε λόγο για την ύπαρξη ***περιβλήματος μεταφοράς (convective envelope)***.

Σημειώνουμε ότι τα σημερινά θεωρητικά μοντέλα δείχνουν ότι το εύρος της ζώνης μεταφοράς γίνεται μεγαλύτερο όσο ψυχρότερος είναι ο αστέρας. Έτσι, αστέρες με μάζες που ανήκουν στην περιοχή $\boldsymbol{0.08\ M_\Theta < M < 0.25\ M_\Theta}$ διαθέτουν εσωτερικό στο οποίο η διάδοση της ενέργειας γίνεται αποκλειστικά και μόνο με μεταφορά. Η ειδική αυτή κατηγορία περιλαμβάνει σχεδόν όλους τους αστέρες φασματικού τύπου Μ οι οποίοι καταλαμβάνουν ουσιαστικά τις κατώτατες θέσεις του διαγράμματος H-R και καλούνται συχνά ως ***ερυθροί νάνοι (red dwarfs)***.

1.2. Αστέρες Προγενέστερων Φασματικών Τύπων

Σχετικά τώρα με την επίλυση των εξισώσεων δομής του εσωτερικού των αστέρων προγενέστερων φασματικών τύπων, με την προϋπόθεση όμως αυτοί να έχουν εγκατασταθεί στην κύρια ακολουθία, σύμφωνα με το επικρατέστερο μοντέλο, οδηγούμαστε στα παρακάτω τέσσερα πολύ βασικά συμπεράσματα, αντίστοιχα με εκείνα των αστέρων μεταγενέστερων φασματικών τύπων:

- Αστέρες με μάζα $\boldsymbol{M > 1.5\ M_\Theta}$ περίπου, οι οποίοι ουσιαστικά ταυτίζονται με τους αστέρες προγενέστερων φασματικών τύπων καθώς βρίσκονται στην ανώτερη περιοχή του διαγράμματος H-R, χαρακτηρίζονται από θερμοκρασίες στον πυρήνα τους μεγαλύτερες από 1.8×10^7 K περίπου.

- Στις θερμοκρασίες αυτές η μετατροπή του υδρογόνου σε ήλιο στον πυρήνα πραγματοποιείται κυρίως μέσω του κύκλου άνθρακα-αζώτου-οξυγόνου (CNO cycle).

- Ο ρυθμός παραγωγής ενέργειας με το μηχανισμό αυτό είναι εξαιρετικά ευαίσθητος σε σχέση με τη θερμοκρασία που επικρατεί στον πυρήνα. Αξίζει να αναφέρουμε ότι, ενώ στον κύκλο πρωτονίου-πρωτονίου έχουμε έναν παράγοντα εξάρτησης από τη θερμοκρασία ίσο με T^4, στον κύκλο CNO έχουμε έναν παράγοντα της μορφής T^{16}! Επομένως, ο ρυθμός παραγωγής ενέργειας στον πυρήνα μεταβάλλεται σημαντικά καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο του άστρου, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα τη διάδοση της ενέργειας στον πυρήνα μέσω μεταφοράς, αφού η θερμοβαθμίδα μέσα σε αυτόν δεν ικανοποιεί πλέον το κριτήριο του Schwarzschild. Συνεπώς, στους αστέρες της κατηγορίας αυτής κάνουμε λόγο για την ύπαρξη ***πυρήνα μεταφοράς (convective core)***.

- Εξαιτίας της υψηλής ενεργού θερμοκρασίας των αστέρων αυτών, η πυκνότητα οπότε και η αδιαφάνεια των εξωτερικών τους στρωμάτων είναι σχετικά χαμηλή με αποτέλεσμα να ευνοείται η διάδοση της ενέργειας με ακτινοβολία. Συνεπώς, στους αστέρες της κατηγορίας αυτής και ιδιαίτερα στην περίπτωση αστέρων φασματικών τύπων O και B κάνουμε λόγο για την ύπαρξη ***περιβλήματος ακτινοβολίας (radiative envelope)***.

2. Απώλεια Μάζας μέσω Αστρικού Ανέμου

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε ορισμένους μηχανισμούς απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου οι οποίοι εκτιμάται ότι μπορούν να αναπτυχθούν σε αστέρες όλων των φασματικών τύπων και εξελικτικών καταστάσεων. Αρχικά, θα περιγραφεί αναλυτικά ο μηχανισμός απώλειας μάζας θερμικής προέλευσης και στη συνέχεια θα εξεταστούν ποιοτικά συνήθεις περιπτώσεις ανέμων μη θερμικής προέλευσης. Στόχος της κάθε επιμέρους υποενότητας είναι ο προσδιορισμός του ρυθμού απώλειας μάζας, καθώς η θεωρητική του εκτίμηση θα φανεί χρήσιμη στις εφαρμογές του πέμπτου κεφαλαίου (π.χ. Lamers & Cassinelli 1999).

2.1. Αστρικός Άνεμος Θερμικής Προέλευσης

Ο ***θερμικός άνεμος (thermal wind)*** προκαλείται από την πίεση θερμού αερίου και συνεπώς εύκολα αναπτύσσεται στα κατώτερα στρώματα του στέμματος αστέρων ηλιακού τύπου εξαιτίας των εξαιρετικά υψηλών θερμοκρασιών που επικρατούν (~ 10^6 K). Παράλληλα, αποτελεί και τη βάση της ευρύτερης μοντελοποίησης ενός αστρικού ανέμου, καθώς εύκολα επεκτείνεται σε μηχανισμούς που συναντώνται σε αστέρες προγενέστερων φασματικών τύπων ή προχωρημένων εξελικτικών καταστάσεων. Αργότερα, θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση ανέμων σταθερής θερμοκρασίας και τον τρόπο με τον οποίο το είδος του ανέμου αυτού συμπεριφέρεται κάτω από την παρουσία μαγνητικού πεδίου και ισχυρής ιδιοπεριστροφής.

Στην υποενότητα αυτή θα εστιάσουμε στη γενική μορφή ενός ***χρονικά στάσιμου (stationary)*** θερμικού ανέμου, δηλαδή ενός ανέμου του οποίου τα χαρακτηριστικά παραμένουν αμετάβλητα στο χρόνο αλλά μεταβάλλονται καθώς απομακρυνόμαστε ακτινικά από τον αστέρα. Η περιγραφή των ιδιοτήτων ενός ανέμου στηρίζεται στις εξισώσεις κίνησης (εδώ έχουμε μόνο την ακτινική) και στην εξίσωση ενέργειας τις οποίες θα αναπτύξουμε λεπτομερώς. Αρχικά όμως οφείλουμε να υπενθυμίσουμε ορισμένα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη της Θερμοδυναμικής που πρόκειται να συναντήσουμε, καθώς και να παραθέσουμε ορισμένες βασικές σχέσεις που προκύπτουν από τους νόμους της.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι το αέριο που πρόκειται να διαφύγει μέσω ενός αστρικού ανέμου χαρακτηρίζεται από πίεση p, θερμοκρασία T και πυκνότητα ρ, ενώ η χημική του σύσταση έχει μέσο ατομικό βάρος μ. Εάν $\Re$ είναι η παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων, η σχέση που συνδέει τα πιο πάνω θερμοδυναμικά μεγέθη θα είναι η αντίστοιχη *καταστατική εξίσωση*:

$$p = \frac{\rho \Re T}{\mu}. \tag{4.1}$$

Εάν υποθέσουμε τώρα ότι σε μια ποσότητα ιδανικού αερίου προστεθεί θερμότητα Q, τότε το αέριο παράγει έργο W με τελικό αποτέλεσμα τη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας u. Εάν dQ είναι η ποσότητα θερμότητας που προστέθηκε ανα μονάδα μάζας και η αντίστοιχη παραγωγή έργου ίση με $p\mathrm{d}\rho^{-1}$, η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου ανα μονάδα μάζας, du, θα δίνεται σύμφωνα με τον *πρώτο θερμοδυναμικό νόμο* ως εξής:

$$du = dQ - pd(1/\rho)\,. \tag{4.2}$$

Σύμφωνα με την κινητική θεωρία των ιδανικών αερίων, η εσωτερική ενέργεια των αερίων είναι συνάρτηση αποκλειστικά της θερμοκρασίας ως αποτέλεσμα της κινητικής τους κατάστασης. Μεταβολές λοιπόν της εσωτερικής ενέργειας αποδίδονται σε μεταβολές της θερμοκρασίες σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$du = \frac{1}{\mu}C_v dT \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$du = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\Re}{\gamma-1}dT = \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{\Re}{\mu}dT = \frac{1}{\gamma-1}da^2 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{da^2}{dr}, \tag{4.3}$$

όπου $\gamma = C_p/C_v$ ο λόγος των γραμμομοριακών ειδικών θερμοτήτων του αερίου C_p και C_v υπό σταθερή πίεση και όγκο αντίστοιχα οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση C_p-C_v = $\Re$, ενώ a η ισόθερμη ταχύτητα του ήχου για την οποία ισχύει $a^2 = \Re T/\mu = p/\rho$.

Εάν τώρα η ποσότητα q = dQ/dr εκφράζει την ακτινική βαθμίδα παροχής θερμότητας στο αέριο ανα μονάδα μάζας, σύμφωνα με τη σχέση (4.2), η ακτινική μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου θα δίνεται ως ακολούθως:

$$\frac{du}{dr} = q - p\frac{d(1/\rho)}{dr}\,. \tag{4.4}$$

Τελικά, η εξίσωση των σχέσεων (4.3) και (4.4) μας επιτρέπει τον προσδιορισμό της ακτινικής μεταβολής της ισόθερμης ταχύτητας του ήχου, δηλαδή:

$$\frac{da^2}{dr} = (\gamma-1)q - (\gamma-1)p\frac{d(1/\rho)}{dr}\,. \tag{4.5}$$

Εξετάζοντας χρονοαμετάβλητους μόνο αστρικούς ανέμους με σταθερή απώλεια μάζας dM/dt, είναι λογικό να υποθέτουμε ότι η ποσότητα του αέριου υλικού θα είναι σταθερή για κάθε τυχαία σφαίρα ακτίνας r μέσα από την οποία διέρχεται κατά την απομάκρυνσή του από τον αστέρα με ταχύτητα $\upsilon(r)$. Η συνθήκη αυτή καλείται ***εξίσωση συνέχειας*** και εκφράζει τη *διατήρηση της μάζας*, δηλαδή:

$$\dot{M}_w = 4\pi r^2 \rho(r)\upsilon(r)\,. \tag{4.6}$$

Όπως ειπώθηκε νωρίτερα, η μελέτη μας περιορίζεται σε χρονοαμετάβλητους ή ισοδύναμα χρονικά στάσιμους ανέμους. Στην ειδική αυτή περίπτωση, η χρονική μεταβολή της ταχύτητας θεωρείται μηδενική και τελικά η επιτάχυνση του αερίου θα προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{d\upsilon(r,t)}{dt} = \frac{\partial\upsilon(r,t)}{\partial t} + \frac{\partial\upsilon(r,t)}{\partial r}\cdot\frac{dr(t)}{dt} = \upsilon(r)\frac{d\upsilon}{dr}\,. \tag{4.7}$$

Η εξίσωση κίνησης του αστρικού ανέμου θα διέπεται από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής ο οποίος θα καλείται ***εξίσωση ορμής***. Η εξίσωση αυτή μας αποκαλύπτει εάν η βαθμίδα πίεσης του θερμικού ανέμου είναι ικανή να υπερνικήσει τη δύναμη της βαρύτητας ώστε το αέριο τελικά να διαφύγει προς το μεσοαστρικό χώρο. Με σκοπό τη γενίκευση της μελέτης μας, θα υποθέσουμε ότι ο άνεμος υποβοηθάται από μία ακόμα ακτινική δύναμη $f = f(r)$ η οποία θα εισάγεται στις εξισώσεις με τη μορφή δύναμης ανα μονάδα όγκου ώστε η ποσότητα f/ρ να εκφράζει δύναμη ανα μονάδα μάζας:

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dr} = f - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr} - \frac{GM}{r^2}\,. \tag{4.8}$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης ορμής (4.8) εκφράζει τη δύναμη η οποία πηγάζει από την πίεση του αερίου. Η δύναμη αυτή μπορεί να αναλυθεί ακόμα περισσότερο ώστε τελικά να εκφραστεί μέσω της αντίστοιχης ακτινικής μεταβολής της ταχύτητας την οποία προκαλεί, δηλαδή:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr} = \frac{d(p/\rho)}{dr} - p\frac{d(1/\rho)}{dr} = \frac{da^2}{dr} - p\frac{d(1/\rho)}{dr} \overset{(4.5)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr} = (\gamma-1)q - (\gamma-1)p\frac{d(1/\rho)}{dr} - p\frac{d(1/\rho)}{dr} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr} = (\gamma-1)q - \gamma p\frac{d(1/\rho)}{dr} = (\gamma-1)q + \frac{\gamma p}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{dr}\,. \tag{4.9}$$

Η απαίτηση σταθερού ρυθμού απώλειας μάζας, ο οποίος δίνεται από την εξίσωση συνέχειας (4.6), μπορεί να συνεισφέρει στην περαιτέρω ανάπτυξη του δεύτερου όρου του δεξιού μέλους της εξίσωσης (4.9) και να μας οδηγήσει στην ακόλουθη ιδιαίτερα χρήσιμη σχέση:

$$\frac{d[4\pi r^2\rho(r)\upsilon(r)]}{dr}=0\Rightarrow\frac{2}{r}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dr}+\frac{1}{\upsilon}\cdot\frac{d\upsilon}{dr}=0\Rightarrow$$

$$\frac{\gamma p}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{dr}=-\frac{2\gamma a^2}{r}-\frac{\gamma a^2}{\upsilon}\cdot\frac{d\upsilon}{dr}. \tag{4.10}$$

Τελικά, η εξίσωση ορμής (4.8) με τη βοήθεια της σχέσης (4.9) γράφεται:

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dr}=f-\left\{(\gamma-1)q+\frac{\gamma p}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right\}-\frac{GM}{r^2}\overset{(4.10)}{\Rightarrow}$$

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dr}=f-\left\{(\gamma-1)q-\frac{2\gamma a^2}{r}-\frac{\gamma a^2}{\upsilon}\cdot\frac{d\upsilon}{dr}\right\}-\frac{GM}{r^2}\Rightarrow$$

$$\left\{\upsilon-\frac{c_s^2}{\upsilon}\right\}\frac{d\upsilon}{dr}=f-(\gamma-1)q+\frac{2c_s^2}{r}-\frac{GM}{r^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\upsilon}\cdot\frac{d\upsilon}{dr}=\frac{\frac{2c_s^2}{r}-\frac{GM}{r^2}+f-(\gamma-1)q}{\upsilon^2-c_s^2}}, \tag{4.11}$$

όπου c_s η αδιαβατική ταχύτητα του ήχου για την οποία ισχύει $c_s^2 = \gamma a^2$.

Η πιο πάνω εξίσωση ορμής αποτελεί τη γενικότερη έκφραση εξίσωσης κίνησης σφαιρικά συμμετρικού ανέμου μη περιστρεφόμενου αστέρα. Προτάθηκε από τον Parker (1958, 1960, 1965, 1966) και οδήγησε στη θεωρητική πρόβλεψη του ηλιακού ανέμου εφόσον ικανοποιούνται ορισμένες συνθήκες τις οποίες η ίδια η εξίσωση αποκαλύπτει. Πιο συγκεκριμένα, διαφαίνεται η παρουσία ενός κρίσιμου σημείου το οποίο αφορά τόσο την απόσταση από τον αστέρα όσο και την ταχύτητα με την οποία ο άνεμος διαθέτει στο σημείο αυτό ώστε τελικά να μπορέσει να διαφύγει προς το μεσοαστρικό χώρο. Εφόσον κάτι τέτοιο απαιτεί τη διατήρηση του θετικού προσήμου της ακτινικής μεταβολής της ταχύτητας σε κάθε απόσταση, είτε ο αριθμητής είτε ο παρονομαστής της εξίσωσης (4.11) δεν μπορεί να μηδενιστούν ανεξάρτητα, καθώς η μεταβολή της ταχύτητας είτε θα μηδενιστεί είτε θα απειριστεί αντίστοιχα. Η μόνη δυνατή επιλογή που έχουμε στην περίπτωση αυτή είναι ο ταυτόχρονος μηδενισμός τους ώστε η επαγόμενη απροσδιόριστη μορφή να οδηγεί σε πεπερασμένη λύση την οποία από εδώ και στο εξής θα ονομάζουμε ***κρίσιμη λύση*** $(r_c,\upsilon(r_c)) = (r_c,c_s)$.

Μια ακόμα ενδιαφέρουσα διαπίστωση που πηγάζει από την εξίσωση (4.11) σχετίζεται με την ενέργεια η οποία προσφέρεται στον άνεμο μέσω της ποσότητας $q > 0$ και η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη μιας δύναμης $(\gamma\text{-}1)q$, αντίθετα προς την κίνησή του. Η δύναμη αυτή παράγεται εξαιτίας της μείωσης που προκαλείται στη θερμοβαθμίδα κατά την προσφορά ενέργειας, οδηγώντας κατά συνέπεια σε μείωση της βαροβαθμίδας η οποία τελικά αντιτίθεται στη δύναμη f.

Πρέπει τέλος να τονίσουμε ότι η κρίσιμη ταχύτητα $\upsilon(r_c)$ την οποία ο άνεμος πρέπει να αποκτήσει στην κρίσιμη απόσταση r_c ταυτίζεται με την αδιαβατική ταχύτητα του ήχου c_s. Το γεγονός αυτό δεν εκφράζει μια γενική διαπίστωση αλλά αφορά την ειδική περίπτωση που τόσο η δύναμη όσο και η προσφερόμενη ενέργεια αποτελούν ποσότητες κεντρικές, δηλαδή ισχύει $f = f(r)$ και $q = q(r)$. Η κρίσιμη ταχύτητα μπορεί να μην ταυτίζεται με την ηχητική σε περιπτώσεις μη θερμικού ανέμου όπου οι πιο πάνω ποσότητες εξαρτώνται τόσο από την απόσταση r όσο και από τη βαθμίδα της ταχύτητας $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}r$. Χαρακτηριστικές μορφές μη θερμικού ανέμου οι οποίες μετατοπίζουν το κρίσιμο σημείο από το ηχητικό θα συναντήσουμε και θα περιγράψουμε ποιοτικά στην αμέσως επόμενη υποενότητα.

Προχωρώντας τώρα στην κατασκευή και την ερμηνεία της ***εξίσωσης ενέργειας***, γράφουμε αρχικά τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο (4.4) ως προς την προσφερόμενη θερμότητα q με τη βοήθεια της σχέσης (4.3) ως εξής:

$$q = \frac{du}{dr} + p\frac{d(1/\rho)}{dr} = \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{d(p/\rho)}{dr} + p\frac{d(1/\rho)}{dr}. \tag{4.12}$$

Στη συνέχεια, η εξίσωση ορμής (4.8) γράφεται ως προς τη δύναμη f αφού πρώτα αναλυθεί ο όρος που εκφράζει τη δύναμη η οποία πηγάζει από την πίεση του αερίου:

$$f = \upsilon\frac{d\upsilon}{dr} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr} + \frac{GM}{r^2} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dr} + \frac{d(p/\rho)}{dr} - p\frac{d(1/\rho)}{dr} + \frac{GM}{r^2}. \tag{4.13}$$

Προσθέτοντας τώρα τις εξισώσεις (4.12) και (4.13), θα έχουμε:

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dr} + \frac{d(p/\rho)}{dr} - p\frac{d(1/\rho)}{dr} + \frac{GM}{r^2} + \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{d(p/\rho)}{dr} + p\frac{d(1/\rho)}{dr} = f + q \Rightarrow$$

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dr} - \frac{GM}{r^2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{d(p/\rho)}{dr} = f + q \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{\upsilon^2}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{\Re T}{\mu}\right\} = \frac{de(r)}{dr} = f + q \Rightarrow$$

$$\boxed{e(r) = \frac{\upsilon^2}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{\Re T}{\mu} = e(r_0) + \int_{r_0}^{r} f(r)dr + \int_{r_0}^{r} q(r)dr}. \tag{4.14}$$

Η πιο πάνω εξίσωση καλείται ***εξίσωση Bernoulli*** και μας πληροφορεί πως η συνολική ενέργεια ανα μονάδα μάζας του αστρικού ανέμου $e(r)$ προκύπτει από το άθροισμα της κινητικής του ενέργειας, της δυναμικής βαρυτικής του ενέργειας, καθώς και της ενθαλπίας του. Θυμίζουμε ότι η ενθαλπία ενός αερίου εκφράζει το σύνολο της εσωτερικής του ενέργεια μαζί με το έργο που απαιτείται για την προσαρμογή του στο ευρύτερο περιβάλλον (του έργου δηλαδή που παράγεται μέσω της αδιαβατικής του εκτόνωσης). Σύμφωνα με την εξίσωση (4.14), η συνολική ενέργεια του ανέμου σε οποιαδήποτε απόσταση από τον αστέρα r ισούται με τη συνολική του ενέργεια $e(r_0)$ στη βάση παραγωγής του r_0 μαζί με την ενέργεια που του προσφέρεται στη διαδρομή $[r_0,r]$.

Πιο συγκεκριμένα, η ενέργεια αυτή μπορεί είτε να προσφερθεί με τη μορφή θερμότητας $Q(r)$ είτε με τη μορφή έργου $W(r)$, παραγόμενο από την επιβολή της πρόσθετης δύναμης $f = f(r)$. Συνεπώς, η εξίσωση ενέργειας (4.14) μπορεί να γραφεί στην ακόμα πιο σαφή ποιοτικά ακόλουθη μορφή της:

$$e(r) = e(r_0) + W(r) + Q(r), \text{ όπου } W(r) = \int_{r_0}^{r} f(r)dr \text{ και } Q(r) = \int_{r_0}^{r} q(r)dr\,.$$

Σύμφωνα με την εξίσωση ορμής (4.11), η διαφυγή του ανέμου απαιτεί τη συνεχή αύξηση της ακτινικής του ταχύτητας, γεγονός το οποίο οδηγεί στην απαίτηση του ηχητικού σημείου ως κρίσιμη λύση της. Ο άνεμος δηλαδή *ξεκινά την πορεία του υποηχητικά και διαφεύγει υπερηχητικά* στις περιπτώσεις τουλάχιστον που η ταχύτητα διαφυγής στο κρίσιμο σημείο $\upsilon_{esc}(r_c)$ είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη ταχύτητα $\upsilon(r_c) = c_s$. Σύμφωνα τώρα με την εξίσωση ενέργειας (4.14), η ενέργεια του ανέμου στη βάση παραγωγής του r_0 είναι *αρνητική*, καθώς σε μικρές αποστάσεις από τον αστέρα υπερισχύει η βαρυτική δυναμική ενέργεια, ενώ σε μεγάλες αποστάσεις για τις οποίες ισχύει $\upsilon(r) >> \upsilon_{esc}(r) >> c_s$, κυριαρχεί η κινητική ενέργεια και συνεπώς η ενέργεια του ανέμου γίνεται πλέον *θετική*.

Σύμφωνα με τα πιο πάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο αστρικός άνεμος απαιτεί την προσφορά ενέργειας ώστε αφενός να είναι σε θέση να ανυψωθεί, να υπερισχύσει του δέσμιου βαρυτικού δυναμικού και τελικά να διαφύγει αλλά και για να αποτρέψει την ψύξη που πρόκειται να λάβει χώρα κατά την αδιαβατική του εκτόνωση. Η εναπομείνουσα ενέργεια θα μετατραπεί τελικά σε κινητική ενέργεια. Στην υποηχητική λοιπόν περιοχή η προσφερόμενη ενέργεια και ορμή (μέσω της πρόσθετης δύναμης) είναι εκείνες που καθορίζουν τόσο την ταχύτητα όσο και την απώλεια μάζας που προκαλεί ο άνεμος. Αντίστοιχα φαινόμενα στην υπερηχητική περιοχή δεν μπορούν να μεταβάλλουν την απώλεια μάζας παρά μόνο να αυξήσουν την ταχύτητά του.

2.2. Αστρικός Άνεμος Μη Θερμικής Προέλευσης

Στην προηγούμενη υποενότητα περιγράψαμε τις ιδιότητες που προβλέπονται για έναν άνεμο θερμικής προέλευσης με την παράλληλη παρουσία μιας επιπρόσθετης εξωτερικής δύναμης f. Στην υποενότητα αυτή θα σταθούμε σε ορισμένες χαρακτηριστικές περιπτώσεις που ο μηχανισμός απώλειας μάζας οφείλεται σχεδόν αποκλειστικά στη δύναμη αυτή και όχι στην πίεση του αερίου. Όπως είναι φυσικό, οι περιπτώσεις αυτές βρίσκουν εφαρμογή είτε σε θερμούς νάνους αστέρες είτε σε εξελιγμένους αστέρες, καθώς η πίεση του θερμού στεμματικού αερίου φαίνεται αρκετή για να περιγράψει την ηλιακή παρατηρούμενη απώλεια μάζας αλλά και όλων των νάνων αστέρων μεταγενέστερων φασματικών τύπων.

2.2.1. Άνεμος Οδηγούμενος από Γραμμές

Η *πρώτη περίπτωση* που θα εξετάσουμε αφορά την ***πίεση ακτινοβολίας εξαιτίας απορρόφησης και σκέδασης φωτονίων από άτομα και ιόντα αερίου*** η οποία κυριαρχεί σε αστέρες προγενέστερων φασματικών τύπων ανεξάρτητα από την εξελικτική τους κατάσταση. Οι αστέρες αυτοί εκπέμπουν κυρίως στο υπεριώδες εξαιτίας της μεγάλης ενεργού τους θερμοκρασίας, εκπομπή η οποία μπορεί πολύ γρήγορα να απορροφηθεί ή να σκεδαστεί στα κατώτερα στρώματα των ατμοσφαιρών τους εξαιτίας της παρουσίας ιονισμένων χημικών στοιχείων τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμές απορρόφησης σε αυτά τα μήκη κύματος. Επομένως, η φωτοσφαιρική ακτινοβολία των θερμών αστέρων δε θα έφτανε εύκολα στα απώτερα στρώματα της ατμόσφαιράς τους ώστε να δημιουργήσει τις συνθήκες παραγωγής ανέμου εάν κάποιος άλλος μηχανισμός δεν ενεργούσε.

Πράγματι, η προηγούμενη περιγραφή στηρίχθηκε στην υπόθεση ότι οι εξώτατες ατμοσφαιρικές ζώνες των αστέρων αυτών είναι στατικές. Στην πραγματικότητα όμως κινούνται ακτινικά και απομακρύνονται από τον αστέρα εξαιτίας του μικρού βαρυτικού κυρίως δυναμικού σε μεγάλες αποστάσεις. Το γεγονός αυτό έχει σαν συνέπεια τη μετατόπιση του συνεχούς της ακτινοβολίας που παράγεται στη φωτόσφαιρα σε μεγαλύτερα μήκη κύματος λόγω του φαινομένου Doppler, καθώς η φωτόσφαιρα φαίνεται να απομακρύνεται για έναν παρατηρητή που κινείται με το σύστημα της εξώτατης ατμόσφαιρας. Έτσι, τα άτομα και τα ιόντα της περιοχής αυτής απορροφούν φωτόνια του συνεχούς που προέρχονται από τη φωτόσφαιρα και τελικά η επιτάχυνση της ακτινοβολίας εξαιτίας των φασματικών γραμμών απορρόφησης των εξώτατων περιοχών των θερμών αστέρων είναι η κύρια αιτία παραγωγής αστρικών ανέμων. Οι άνεμοι της κατηγορίας αυτής καλούνται συχνά και ως ***άνεμοι οδηγούμενοι από γραμμές (line driven winds)*** για τους πιο πάνω λόγους.

Η μαθηματική τους περιγραφή στηρίζεται και πάλι στην εξίσωση ορμής (4.11) στην οποία μπορούμε εύκολα να αγνοήσουμε τους όρους που σχετίζονται με τον θερμικό άνεμο και να επικεντρώσουμε στη δύναμη f. Εφαρμόζοντας ένα απλό μοντέλο, μπορούμε να εκφράσουμε την επιτάχυνση ακτινοβολίας μέσα από την εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας, δηλαδή ίση με $\rho^{-1}\mathrm{d}p_{rad}/\mathrm{d}r = k\Phi(r)/c = kc^{-1}\Phi(R)R^2/r^2 \sim r^{-2}$, όπου $\Phi(r)$ και $\Phi(R)$ η ροή ακτινοβολίας σε τυχαία απόσταση r και σε απόσταση ίση με την ακτίνα του αστέρα R αντίστοιχα, c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και k ο μέσος συντελεστής αδιαφάνειας κατά τη διαδρομή διάδοσης. Το απλό αυτό μοντέλο όμως προϋποθέτει ότι η αδιαφάνεια είναι ανεξάρτητη από την απόσταση r, η δύναμη f εμφανίζεται να είναι κεντρική και συνεπώς το ηχητικό σημείο παραμένει ως το κρίσιμο σημείο. Ρεαλιστικοί συντελεστές αδιαφάνειας αποδεικνύονται ισχυρά εξαρτώμενοι από την ακτινική μεταβολή της ταχύτητας $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}r$ με αποτέλεσμα την παρουσία ισχυρά μη γραμμικών όρων της μορφής $[\rho^{-1}\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}r]^{\lambda}$ με $\lambda \approx 0.6$ στην εξίσωση ορμής οι οποίοι τελικά διαμορφώνουν σε σημαντικό βαθμό την κρίσιμη λύση.

2.2.2. Άνεμος Οδηγούμενος από Σκόνη

Η *δεύτερη περίπτωση* που θα εξετάσουμε αφορά την ***πίεση ακτινοβολίας εξαιτίας απορρόφησης φωτονίων από κόκκους σκόνης*** η οποία κυριαρχεί σε αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων οι οποίοι όμως βρίσκονται σε προχωρημένα εξελικτικά στάδια και κυρίως στον ασυμπτωτικό κλάδο των ερυθρών γιγάντων (Asymptotic Giant Branch, AGB). Οι κόκκοι σκόνης είναι ικανοί να απορροφούν ακτινοβολία σε ένα μεγάλος εύρος μηκών κύματος και για το λόγο αυτό καλούνται πολλές φορές ως ***άνεμοι οδηγούμενοι από το συνεχές (continuum driven winds)*** ή απλούστερα ***άνεμοι οδηγούμενοι από σκόνη (dust driven winds)***. Όπως γίνεται φανερό, η πίεση ακτινοβολίας αποτελεί την κύρια αιτία παραγωγής ανέμου σε όλα τους αστέρες με μεγάλες τάξεις φωτεινότητας. Ενώ όμως η απώλεια μάζας είναι της ίδιας τάξης μεγέθους (~ -10^{-5} M_{Θ}/yr), η διαφορά μεταξύ των ανέμων οδηγούμενων από γραμμές σε σχέση με εκείνους που οδηγούνται από σκόνη αφορά την ταχύτητά τους.

Στην πρώτη περίπτωση, οι ταχύτητες που παρατηρούνται ξεπερνούν τα 1000 km/s όταν στη δεύτερη περίπτωση οι ταχύτητες δεν είναι μεγαλύτερες από 30 km/s. Μέρος της παρατηρούμενης διαφοράς αποδίδεται στις ταχύτητες διαφυγής των αντίστοιχων αστέρων, καθώς οι ψυχροί γίγαντες αστέρες διαθέτουν μικρές ταχύτητες διαφυγής στα όρια της φωτόσφαιράς τους, ενώ οι θερμοί αστέρες αρκετά μεγαλύτερες. Πρακτικά, το αποτέλεσμα είναι πολύ μικρότερες μετατοπίσεις Doppler στην περίπτωση των ανέμων σκόνης, κάτι το οποίο σημαίνει ότι το φαινόμενο αυτό δε συμβάλλει σημαντικά στους μηχανισμούς δημιουργίας των ανέμων της κατηγορίας αυτής.

Αστέρες που βρίσκονται στην ασυμπτωτική περιοχή των ερυθρών γιγάντων χαρακτηρίζονται από ιδιαίτερα χαμηλές ενεργές θερμοκρασίες οι οποίες κυμαίνονται από 2000 μέχρι 3000 K περίπου. Αυτό σημαίνει ότι στις εξώτατες περιοχές της ατμόσφαιράς τους η θερμοκρασία μπορεί να φτάσει και σε τιμές μικρότερες των 1500 K, θερμοκρασία η οποία συμπίπτει με τη θερμοκρασία συμπύκνωσης των αερίων συστατικών της. Η χημική σύνθεση της ατμόσφαιρας των αστέρων της κατηγορίας αυτής περιλαμβάνει τόσο άνθρακα όσο και οξυγόνο, στοιχεία τα οποία στην αέρια φάση τους ενώνονται, σχηματίζοντας μόρια CO. Εφόσον οξυγόνο περισσέψει της πιο πάνω αντίδρασης, πυριτικές ενώσεις του μαγνησίου (Mg_2SiO_4 και $MgSiO_3$) επικρατούν ως κόκκοι κατά τη στερεοποίησή τους. Στην αντίθετη περίπτωση, απομένει άμορφος άνθρακας.

Η θερμοκρασία συμπύκνωσης εκτιμάται με βάση την ισορροπία μεταξύ ακτινοβολιακής θέρμανσης από τον αστέρα και της ψύξης του κόκκου μέσα από τη θερμική του εκπομπή και εξαρτάται από την αδιαφάνεια του κόκκου, την απόσταση από τον αστέρα, καθώς και από την ενεργό θερμοκρασία του τελευταίου. Η μέση ακτίνα των κόκκων κυμαίνεται μεταξύ 0.05 και 0.1 μm περίπου ενώ η απόσταση στην οποία λαμβάνει χώρα η συμπύκνωση εκτιμάται μεταξύ 1.1 και 2.6 φορές την ακτίνα του αστέρα. Ας σημειωθεί ότι η μαθηματική περιγραφή της επίδρασης της πίεσης ακτινοβολίας στους κόκκους οδηγεί σε απλά μοντέλα κεντρικών δυνάμεων της μορφής $f(r) \sim r^{-2}$, όπως εκείνα που παρουσιάστηκαν στην περίπτωση των ανέμων οδηγούμενων από γραμμές με τον συντελεστή αδιαφάνειας να είναι ανεξάρτητος της απόστασης. Η διαπίστωση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως το κρίσιμο σημείο ταυτίζεται με το ηχητικό, ενώ η κρίσιμη απόσταση εκτιμάται πάντοτε ελαφρώς μικρότερη της ακτίνας συμπύκνωσης.

Η απώλεια μάζας εξαρτάται από το βαθμό αλληλεπίδρασης αερίου και σκόνης στην περιοχή της ακτίνας συμπύκνωσης και εκτιμάται μεταξύ -10^{-7} και -10^{-5} $M_{\odot}$/yr. Κρίσιμη παράμετρος της αποτελεσματικότητας του μηχανισμού αυτού αποτελεί η πυκνότητα της αστρικής ατμόσφαιρας στην περιοχή αυτή η οποία όμως πιστεύεται ότι είναι τόσο μικρή ώστε οι κρούσεις μεταξύ των δομικών συστατικών του αερίου με τους κόκκους σκόνης να μην μπορούν να υποστηρίξουν ικανοποιητικά τις παρατηρούμενες απώλειες μάζας. Η πίεση ακτινοβολίας φαίνεται λοιπόν ανεπαρκής να ενεργεί μεμονωμένα στους εξελιγμένους αστέρες εκτός εάν ένας δεύτερος μηχανισμός μπορεί και λειτουργεί συνοδευτικά ώστε να αυξάνει την πυκνότητα του αερίου. Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι κύματα κρούσης οφειλόμενα σε αναπάλσεις του εσωτερικού των αστέρων της κατηγορίας αυτής, φαινόμενο ιδιαίτερα συχνό λόγω της μεταβατικής εξελικτικής τους κατάστασης, είναι ο υπαίτιος ζητούμενος μηχανισμός, γεγονός το οποίο άλλωστε επιβεβαιώνεται από την άμεση σχέση ρυθμού απώλειας μάζας και περιόδου ανάπαλσης (π.χ. στους μακροπερίοδους μεταβλητούς αστέρες τύπου Mira).

2.2.3. Άνεμος Οδηγούμενος από Μαγνητοακουστικά Κύματα

Οι θεμελιώδεις μηχανισμοί της πίεσης του θερμού αερίου και της πίεσης ακτινοβολίας αποδεικνύονται ανεπαρκείς να εξηγήσουν ορισμένες ιδιότητες των ανέμων που παρατηρούνται σε αρκετές κατηγορίες αστέρων. Δευτερογενείς όμως φυσικές διαδικασίες που μπορούν να αναπτυχθούν σε αστέρες με εκτεταμένα περιβλήματα μεταφοράς είναι ικανές να παίξουν κρίσιμο ρόλο σχετικά με την παραγωγή κυμάτων τα οποία με τη σειρά τους προσφέρουν μια πρόσθετη πίεση στην αστρική ατμόσφαιρα. Η πίεση αυτή εξαρτάται κυρίως από το πλάτος των κυμάτων και από την πυκνότητα της ζώνης παραγωγής τους.

Η διαμόρφωση της εξίσωσης ορμής κάτω από την κοινή παρουσία των θεμελιωδών μηχανισμών με τους κυματικούς (υβριδικά μοντέλα) οδηγεί σε πολλαπλά μηδενικά σημεία (τοπικά ελάχιστα της παράγουσας του αριθμητή) εκ των οποίων το κρίσιμο είναι εκείνο το οποίο αντιστοιχεί στο απόλυτο (βαθύτερο) ελάχιστο. Σε περίπτωση που τα ελάχιστα βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, η εξίσωση ορμής μπορεί να μεταπηδά μεταξύ των αντίστοιχων λύσεων οδηγώντας σε ασταθείς ανέμους.

Στην περίπτωση των ***ανέμων οδηγούμενων από ηχητικά κύματα (sound wave driven winds)***, η πρόσθετη πίεση προέρχεται από την ακουστική φωτεινότητα που εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια διαδίδεται σφαιρικά με ταχύτητα ίση με την αντίστοιχη ομαδική. Αποδεικνύεται ότι η συνεισφορά τους στην απώλεια μάζας είναι αμελητέα όταν το αρχικό πλάτος των ταλαντώσεων είναι μικρό και συνεπώς μεγάλα μόνο πλάτη θα μπορούσαν να λειτουργήσουν επικουρικά ώστε να εξηγηθούν οι μεγάλες παρατηρούμενες απώλειες μάζας στα ψυχρά άστρα μεγάλης φωτεινότητας (π.χ. αστέρες της AGB περιοχής). Ένα πρόβλημα όμως που αναδύεται είναι η αδυναμία επιτάχυνσης του ανέμου μετά το κρίσιμο σημείο ώστε να αποκτήσει την απαιτούμενη ταχύτητα διαφυγής, καθώς εκτιμάται ότι η ενέργεια των παραγόμενων ταλαντώσεων θα έχει διαχυθεί στα κατώτερα στρώματα. Ο μηχανισμός πίεσης ακτινοβολίας στη σκόνη των εξωτερικών ατμοσφαιρικών στρωμάτων φαίνεται να είναι εκείνος που αναλαμβάνει στη συνέχεια τον έλεγχο και τη διαφυγή του ανέμου.

Στην περίπτωση των ***ανέμων οδηγούμενων από κύματα Alfvén (Alfvén wave driven winds)***, η πρόσθετη πίεση είναι η μαγνητική και εξαρτάται ισχυρά από τις συνθήκες και την τοπολογία του μαγνητικού πεδίου στη βάση παραγωγής του ανέμου. Όπως ακριβώς και στα ακουστικά κύματα, η διάχυση της ενέργειας και της ορμής τους στην αστρική ατμόσφαιρα είναι εκείνη που ανυψώνει και τελικά επιταχύνει τον άνεμο. Σε αντίθεση όμως με τους ανέμους οδηγούμενους από ηχητικά κύματα, τα κύματα Alfvén είναι εγκάρσια, απαιτούν την παρουσία μαγνητικού πεδίου και θεωρούνται σε μεγάλο βαθμό ασυμπίεστα. Η διάδοση των κυμάτων Alfvén όμως δεν απαιτεί περιστροφή του αστέρα και κατά συνέπεια μπορούμε εύκολα να υποθέσουμε ότι η δομή των σωλήνων μαγνητικής ροής είναι απόλυτα ακτινική.

Οι τρεις σημαντικότερες ιδιότητες των ανέμων οδηγούμενων από κύματα Alfvén αποτελούν η πολύ υψηλή ταχύτητά τους, η σημαντική τους συνεισφορά στην απώλεια μάζας και η μηδαμινή τους εξάρτηση από την παρουσία θερμού αερίου. Τα χαρακτηριστικά αυτά τοποθετούν την κατηγορία αυτή ως τρίτη σε σπουδαιότητα μετά από εκείνες των θερμικών ανέμων και της πίεσης ακτινοβολίας, καθώς μπορεί να υποστηρίξει σχεδόν όλες τις ομάδες αστέρων στους οποίους οι δύο πιο πάνω μηχανισμοί αδυνατούν να αναπτυχθούν.

Στην περίπτωση του Ήλιου, τα κύματα Alfvén φαίνεται να εξηγούν σε ιδιαίτερα ικανοποιητικό βαθμό τη γρήγορη συνιστώσα του η οποία προέρχεται από τις στεμματικές οπές, καθώς η θερμοκρασία τους είναι αρκετά μικρότερη από τη μέση στεμματική και δεν μπορεί εύκολα να αποδοθεί στον θερμικό άνεμο. Στην περίπτωση των ερυθρών γιγάντων, τα κύματα Alfvén αποδεικνύονται χρήσιμα όσον αφορά τις μεγάλες απώλειες μάζας, αδυνατούν όμως να υποστηρίξουν τις μικρές παρατηρούμενες ταχύτητές τους. Φαίνεται όμως ότι το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί κάτω από κατάλληλες συνθήκες απόσβεσης ή ανάκλασής τους. Τα τελευταία χρόνια, τέλος, έχουν αναπτυχθεί υβριδικά μοντέλα τα οποία προβλέπουν την παρουσία τους ακόμα και σε πολύ θερμούς αστέρες, όπως π.χ. της κατηγορίας Wolf-Rayet. Η παραγωγή του μαγνητικού πεδίου των αστέρων αυτών είναι όμως τελείως διαφορετική από εκείνη του ηλιακού προτύπου με αποτέλεσμα να μην είναι πλήρως γνωστός ο μηχανισμός δράσης των κυμάτων Alfvén.

2.3. Ισόθερμος Άνεμος χωρίς Μαγνητικό Πεδίο και Περιστροφή

Στην ενότητα αυτή επανερχόμαστε στον θερμικό άνεμο με την πρόσθετη όμως υπόθεση της σταθερής θερμοκρασίας σε όλη του την έκταση και φυσικά χωρίς την παρουσία μαγνητικού πεδίου και περιστροφής. Από εδώ και στο εξής λοιπόν, θα υποθέτουμε ***ισόθερμο άνεμο (isothermal wind)*** ο οποίος προκαλείται αποκλειστικά από την πίεση του αερίου και συνεπώς η πορεία που ακολουθήσαμε στην ενότητα 2.1 θα είναι αποδεκτή κάτω από τη συνθήκη $f = 0$, αλλά και κάτω από την προϋπόθεση της αμετάβλητης (ισόθερμης) ταχύτητας του ήχου a για την οποία θυμίζουμε και πάλι ότι ισχύει $a^2 = RT/\mu = p/\rho$ (δηλαδή $da^2/dr = 0$). Με βάση τα πιο πάνω, ο όρος της εξίσωσης ορμής (4.8) που εκφράζει τη βαθμίδα πίεσης, $\rho^{-1}dp/dr$, θα είναι ίσος με την ποσότητα $(p/\rho^2)d\rho/dr$, καθώς ο όρος $d(p/\rho)/dr = da^2/dr$ είναι πλέον μηδενικός. Έτσι, η εξίσωση ορμής (4.8) με τη βοήθεια και πάλι της εξίσωσης συνέχειας (4.6) και της επαγόμενης από αυτή εξίσωσης (4.10) - απλοποιώντας τον αδιαβατικό λόγο γ - γράφεται ως ακολούθως:

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dr} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr} - \frac{GM}{r^2} = -\frac{p}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{dr} - \frac{GM}{r^2} \overset{(4.10)}{=} \frac{2a^2}{r} + \frac{a^2}{\upsilon}\cdot\frac{d\upsilon}{dr} - \frac{GM}{r^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\upsilon}\cdot\frac{d\upsilon}{dr} = \frac{\frac{2a^2}{r} - \frac{GM}{r^2}}{\upsilon^2 - a^2}}. \tag{4.15}$$

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν στην ενότητα 2.1 κατά την περιγραφή της γενικής μορφής ανέμου θερμικής προέλευσης, η εξίσωση ορμής (4.15), όπως άλλωστε και η εξίσωση (4.11), χαρακτηρίζονται από ένα κρίσιμο σημείο το οποίο ταυτίζεται με το ηχητικό, $(r_c,\upsilon(r_c)) = (r_c,a)$. Σε αντίθεση με την εξίσωση (4.11), η θέση του κρίσιμου σημείου είναι γνωστή, καλείται *απόσταση Parker*, r_p, και προκύπτει από τον μηδενισμό του αριθμητή, δηλαδή:

$$r_c = r_p = \frac{GM}{2a^2} \quad \text{με} \quad \upsilon(r_c) = a\,. \tag{4.16}$$

Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η εύρεση της ταχύτητας διαφυγής στην κρίσιμη απόσταση, $\upsilon_{esc}(r_c)$, καθώς μας υποδεικνύει στην πράξη ότι ο αστρικός άνεμος είναι σε θέση να διαφύγει του αστρικού βαρυτικού πεδίου μόνο εφόσον διαπεράσει το κρίσιμο σημείο, δηλαδή όταν $\upsilon_{esc}(r_c) > \upsilon(r_c) = a$. Ισοδύναμα, ο άνεμος διαφεύγει μόνο εφόσον ξεκινήσει υποηχητικός στη βάση παραγωγής του και καταλήξει υπερηχητικός σε μεγάλες αποστάσεις από τον αστέρα:

$$\upsilon_{esc}^2(r_c) = \frac{2GM}{r_c} = 4a^2 = 4\upsilon^2(r_c)\,. \tag{4.17}$$

Η εξίσωση ορμής (4.15) αποτελεί μια πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών η οποία με βάση τις συνοριακές συνθήκες $(r_c,\upsilon(r_c)) = (r_c,a)$ και τη βοήθεια της σχέσης (4.16) οδηγεί εύκολα στην ακόλουθη λύση:

$$\upsilon \exp\left(-\frac{\upsilon^2}{2a^2}\right) = a\left(\frac{r_c}{r}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r_c}{r} + \frac{3}{2}\right). \tag{4.18}$$

Με βάση τη σχέση (4.18) καθίσταται δυνατή η εκτίμηση της αρχικής ταχύτητας $\upsilon(r_0) = \upsilon_0$ η οποία αναπτύσσεται από τον άνεμο στη βάση παραγωγής του r_0 υποθέτοντας εκ των προτέρων ότι είναι κατα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου, δηλαδή $\upsilon_0 << a$. Η θέση αυτή ταυτίζεται συνήθως με την ακτίνα της φωτόσφαιρας ή λίγο ψηλότερα, δηλαδή στα κατώτερα στρώματα της χρωμόσφαιρας:

$$\upsilon_0 \approx a\left(\frac{r_c}{r_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r_c}{r_0} + \frac{3}{2}\right) = a\left(\frac{\upsilon_{esc}(r_0)}{2a}\right)^4 \exp\left(-\frac{\upsilon_{esc}^2(r_0)}{2a^2} + \frac{3}{2}\right). \tag{4.19}$$

Ο ρυθμός απώλειας μάζας μπορεί πλέον εύκολα να καθοριστεί με τη βοήθεια της εξίσωσης συνέχειας (4.6) στη βάση παραγωγής του αστρικού ανέμου, $(r_0,\upsilon(r_0)) = (r_0,\upsilon_0)$, πυκνότητας έστω ίσης με ρ_0:

$$\boxed{\dot{M}_w^{ISR} = -4\pi r_0^2 \rho_0 a\left(\frac{\upsilon_{esc}(r_0)}{2a}\right)^4 \exp\left(-\frac{\upsilon_{esc}^2(r_0)}{2a^2} + \frac{3}{2}\right)}. \tag{4.20}$$

Από εδώ και στο εξής, το απλοποιημένο μοντέλο το οποίο υϊοθετήθηκε για την εκτίμηση του ρυθμού απώλειας μάζας (4.20) θα καλείται μοντέλο του ***ισόθερμου αργού περιστροφέα (Isothermal Slow Rotator, ISR)***, καθώς βρίσκει εφαρμογή σε όλους τους αργά περιστρεφόμενους νάνους αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων αμελητέου μαγνητικού πεδίου. Εκείνο που χαρακτηρίζει τους αστέρες αυτούς είναι η παρουσία θερμού στέμματος το οποίο παράγει την απαιτούμενη πίεση ώστε να ωθεί τον άνεμο σε ταχύτητες διαφυγής. Στην περίπτωση του ηλιακού ανέμου, η θερμοκρασία και η πυκνότητα του στέμματος εκτιμώνται ίσες με 10^6 K και 10^{-14} gr/cm^3 αντίστοιχα με το ρυθμό απώλειας μάζας να προβλέπεται ίσος με -1.6×10^{-14} M_Θ/yr. Παρά τις πιο πάνω απλουστεύσεις, το μοντέλο του ισόθερμου αργού περιστροφέα δίνει εξαιρετικά αποτελέσματα, καθώς η μέση παρατηρούμενη απώλεια μάζας βρίσκεται ίση με -2×10^{-14} M_Θ/yr.

Ας σημειωθεί ότι πιο ακριβή μοντέλα ανέμου αποκλειστικά θερμικής προέλευσης λαμβάνουν υπόψιν τους τη μεταφορά θερμότητας μεταξύ των διαφόρων στεμματικών στρωμάτων μέσω αγωγής. Οι πολύ υψηλές θερμοκρασίες οδηγούν σε ιδιαίτερα αυξημένους ρυθμούς κρούσεων μεταξύ των ατόμων και των ιόντων του στεμματικού αερίου καθιστώντας έτσι την αγωγή ιδιαίτερα αποτελεσματικό μηχανισμό μεταφοράς ενέργειας. Πιο συγκεκριμένα, η θερμότητα μεταβιβάζεται από τις κατώτερες και παράλληλα θερμότερες στεμματικές περιοχές προς τις εξώτατες και συγχρόνως ψυχρότερες περιοχές του. Ο λόγος έγκειται στη συνεχή ψύξη του στέμματος κατά τη διάχυσή του προς το μεσοαστρικό χώρο. Παρά τη σημαντική ανακατανομή ενέργειας ενός πιο ρεαλιστικού θερμικού ανέμου, ο ακριβέστερος ρυθμός απώλειας μάζας προβλέπεται της ίδιας τάξης μεγέθους με εκείνο του ισόθερμου ανέμου και συνεπώς οι διαφορές τους δε θεωρούνται ουσιώδεις.

2.4. Ισόθερμος Άνεμος με Μαγνητικό Πεδίο και Περιστροφή

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τις επιπτώσεις που μπορεί να έχει η παρουσία μαγνητικού πεδίου και ισχυρής περιστροφής στις ιδιότητες ανέμων θερμικής και μόνο προέλευσης. Στην ουσία, μελετάμε την ειδική περίπτωση ενός ***ισόθερμου ταχέος μαγνητικού περιστροφέα (Isothermal Fast Magnetic Rotator, IFMR)*** όπως περιγράφεται από τους Lamers & Cassinelli (1999) και η οποία αναπτύχθηκε από τους Hartmann & MacGregor (1982) ως μια απλούστερη μορφή του πολυτροπικού ανέμου των Weber & Davis (1967). Η ενότητα αυτή είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για την ανάπτυξη της παρούσας διδακτορικής διατριβής από τη στιγμή που ψυχροί αστέρες είναι μέλη των βραχυπερίοδων διπλών συστημάτων που πρόκειται να μελετηθούν στο πέμπτο κεφάλαιο. Σκοπός μας είναι πάλι η κατασκευή της εξίσωσης κίνησης του ανέμου και η θεωρητική εκτίμηση του ρυθμού απώλειας μάζας.

2.4.1. Θεμελιώδεις Εξισώσεις και Διατηρήσιμες Ποσότητες

Η περιγραφή πραγματοποιείται στο σφαιροπολικό σύστημα συντεταγμένων (r,θ,φ) υποθέτοντας μεσημβρινή (συμμετρία άνω και κάτω του ισημερινού επιπέδου) και περιστροφική συμμετρία. Το πρώτο είδος συμμετρίας προβλέπει απουσία της μεσημβρινής συνιστώσας, ενώ το δεύτερο επιβάλλει ακτινική μόνο εξάρτηση των συνιστωσών τόσο της ταχύτητας, V_r και V_φ, όσο και του μαγνητικού πεδίου, B_r και B_φ αντίστοιχα. Επομένως, η ταχύτητα **v** και το μαγνητικό πεδίο **B** θα χαρακτηρίζονται από μεταβολές στην ακτινική, $\hat{\mathbf{e}}_r$, και την αζιμουθιακή, $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, μόνο διεύθυνση, δηλαδή:

$$\mathbf{v} = V_r(r)\hat{\mathbf{e}}_r + V_\varphi(r)\hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = B_r(r)\hat{\mathbf{e}}_r + B_\varphi(r)\hat{\mathbf{e}}_\varphi . \tag{4.21}$$

Ένας ακίνητος αστέρας χωρίς μαγνητικό πεδίο δεν απαιτεί μια ιδιαίτερα ιδιότυπη περιγραφή, καθώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο άνεμος απομακρύνεται ακτινικά σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό. Στην περίπτωση όμως που ο αστέρας ιδιοπεριστρέφεται και παράλληλα διαθέτει μαγνητικό πεδίο, ο άνεμος (αποτελούμενος κυρίως από ιόντα) ακολουθεί τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές του πεδίου οι οποίες παραμένουν ακτινικές μόνο κοντά στον αστέρα. Όσο απομακρυνόμαστε από αυτόν, η περιστροφή του προκαλεί στρέβλωση στις γραμμές οδηγώντας σε μια ελικοειδή μορφή κίνησης του ανέμου (έλικες του Αρχιμήδη). Το πλάσμα διατηρείται εγκλωβισμένο και παρασύρεται από τις μαγνητικές γραμμές καθώς χαρακτηρίζεται από πολύ μεγάλη ηλεκτρική αγωγιμότητα η οποία με τη σειρά της επιφέρει την παγίδευση ή αλλιώς το *πάγωμα (frozen-in)* του μαγνητικού πεδίου αποτρέποντας έτσι τη διάχυσή του και επιβάλλοντας τη φορά και διεύθυνση που ακολουθεί ο άνεμος.

Εάν **J** είναι η πυκνότητα ρεύματος που αναπτύσσσεται, σ_c ο συντελεστής ηλεκτρικής αγωγιμότητας του ανέμου, **E** η ένταση του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό, ο χρονοανεξάρτητος ***νόμος του Ohm*** οδηγεί τότε στην ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{J} = \sigma_c \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{4.22}$$

Η σχέση (4.22) προκύπτει ως άμεση συνέπεια της πολύ μεγάλης αγωγιμότητας του ανέμου η οποία εδώ θεωρείται άπειρη. Ο μοναδικός τρόπος ώστε να διατηρήσουμε την πυκνότητα ρεύματος πεπερασμένη αποτελεί τότε ο μηδενισμός του αθροίσματος που βρίσκεται στην παρένθεση του δεξιού μέλους και ο οποίος οδηγεί τελικά στην πιο πάνω συνθήκη. Εφαρμόζοντας τώρα το ***νόμο του Faraday***, υποθέτοντας και πάλι ανεξαρτησία από το χρόνο, οδηγούμαστε στην πιο κάτω ιδιαίτερα χρήσιμη σχέση:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \overset{(4.22)}{\Rightarrow} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \tag{4.23}$$

Υϊοθετώντας το σφαιροπολικό σύστημα συντεταγμένων, όπως άλλωστε ήδη έχει ειπωθεί, αναλύοντας τους στροβιλισμούς της σχέσης (4.23) και απομονώνοντας την αζιμουθιακή μόνο συνιστώσα, έχουμε:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ r \left(V_r B_\varphi - V_\varphi B_r \right) \right\} = 0 \Rightarrow r \left(V_r B_\varphi - V_\varphi B_r \right) = const. = -r_0^2 \Omega B_{r,0}, \tag{4.24}$$

όπου $B_{r,0}$ η ακτινική ένταση του μαγνητικού πεδίου στη βάση παραγωγής του ανέμου r_0, η οποία ταυτίζεται τις περισσότερες φορές με τη φωτοσφαρική ακτίνα.

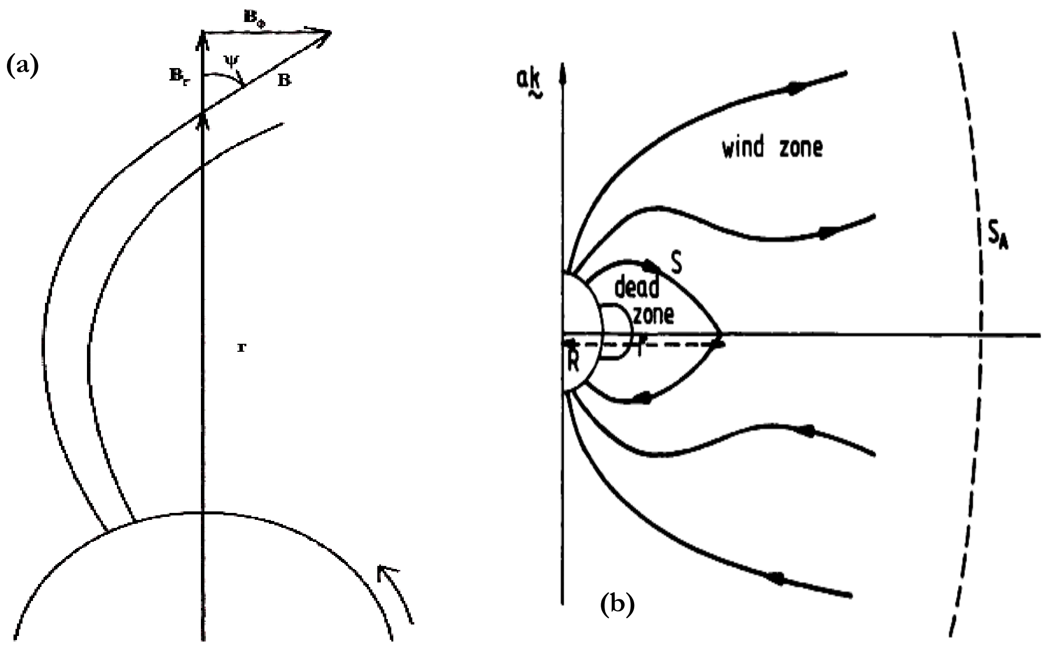
Η σταθερά της σχέσης (4.24) προέκυψε στηριζόμενοι στο γεγονός ότι κοντά στον αστέρα η ακτινική ταχύτητα είναι κατά πολύ μικρότερη της αντίστοιχης αζιμουθιακής (η οποία μάλιστα προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την ταχύτητα στερεού σώματος), $V_{r,0} << V_{\varphi,0} = r_0 \Omega$, ενώ η ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου κατά πολύ μεγαλύτερη της αντίστοιχης αζιμουθιακής, $B_{r,0} >> B_{\varphi,0}$, καθώς το πεδίο θεωρείται αρχικά ακτινικό. Η σχέση (4.24) μπορεί να αναλυθεί ακόμα περισσότερο με χρήση του ***νόμου του Gauss*** ο οποίος καθιστά τη *μαγνητική ροή, Φ_B, ως διατηρήσιμη ποσότητα*, δηλαδή:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \Phi_B = r^2 B_r = const. = r_0^2 B_{r,0}. \tag{4.25}$$

Η σχέση (4.24) με τη βοήθεια της σχέσης (4.25) οδηγεί τελικά σε μια από τις πολυτιμότερες μαθηματικές εκφράσεις συσχέτισης της ακτινικής και αζιμουθιακής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου, γνωστή και ως *συνέπεια του νόμου Faraday*:

$$\boxed{\frac{B_\varphi}{B_r} = \frac{V_\varphi - r\Omega}{V_r}}. \tag{4.26}$$

Ο λόγος της αζιμουθιακής προς την ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου που η σχέση (4.26) περιγράφει, εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας ψ η οποία σχηματίζεται μεταξύ της διεύθυνσης του πεδίου **B** και της ακτινικής του συνιστώσας B_r (Σχήμα IV.1a). Η σχέση (4.26) μας αποκαλύπτει λοιπόν ότι όσο βρισκόμαστε κοντά στον αστέρα και η αζιμουθιακή ταχύτητα προσεγγίζεται από εκείνη του στερεού σώματος, η γωνία ψ είναι σχεδόν μηδενική, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο είναι ακτινικό. Όσο απομακρυνόμαστε από τον αστέρα, η ιδιότητα αυτή παύει πλέον να ισχύει ($V_\varphi << r\Omega$) με αποτέλεσμα την ανάπτυξη ισχυρής αρνητικής μαγνητικής αζιμουθιακής συνιστώσας η οποία τελικά οδηγεί στην ελικοειδή διαμόρφωση των δυναμικών γραμμών.



Σχήμα IV.1. Αποτύπωση των μαγνητικών δυναμικών γραμμών ενός περιστρεφόμενου αστέρα (a, Lamers & Cassinelli 1999) και ο τρόπος με τον οποίο οι γραμμές διαμορφώνονται στη νεκρή ζώνη και τη ζώνη ανέμου (b, Mestel 1990).

Λίγο πριν την κατασκευή της εξίσωσης κίνησης ισόθερμου ανέμου που παράγεται σε έναν περιστρεφόμενο αστέρα με μαγνητικό πεδίο, οφείλουμε να μελετήσουμε τη δύναμη Lorentz η οποία συνεισφέρει δραστικά στην τελική διαμόρφωση της ροής του ανέμου. Η προσέγγιση θα γίνει με τη βοήθεια του ***νόμου Ampère*** ώστε η διαδικασία να αναχθεί και πάλι στην ανάλυση του μαγνητικού πεδίου:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} 4\pi \mathbf{J} \Rightarrow \frac{1}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{B_\varphi}{r} \cdot \frac{d}{dr}(rB_\varphi)\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{B_r}{r} \cdot \frac{d}{dr}(rB_\varphi)\right]\hat{\mathbf{e}}_\varphi . \qquad (4.27)$$

Η σχέση (4.27) υποδεικνύει ότι η δύναμη Lorentz διαθέτει συνιστώσα τόσο στην ακτινική όσο και στην αζιμουθιακή διεύθυνση. Η πρώτη συμβάλλει στην επιτάχυνση του ανέμου μαζί με τη θερμική πίεση του αερίου, ενώ η δεύτερη προκαλεί μια ροπή η οποία θα αποδειχθεί αργότερα ικανή να επιβραδύνει την περιστροφή του αστέρα.

Θυμίζουμε τέλος ότι η ***εξίσωση συνέχειας*** επιβάλλει τη *ροή μάζας ανα στερεά γωνία, Φ_M, στον ισημερινό ως μια ακόμα διατηρήσιμη ποσότητα* και η οποία θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στην πορεία μας προς τον θεωρητικό προσδιορισμό του ρυθμού απώλειας μάζας:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \Phi_M = \rho V_r r^2 = const. = \rho_0 V_{r,0} r_0^2 . \qquad (4.28)$$

Η διανυσματική ***εξίσωση ορμής*** του ανέμου κάτω από τη δράση μαγνητικού πεδίου και τις συνέπειες που προκαλεί η περιστροφή του αστέρα, έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{\rho c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0 . \qquad (4.29)$$

Αναλύοντας τον πρώτο όρο με τη βοήθεια κατάλληλων ταυτοτήτων, η πιο πάνω εξίσωση ορμής οδηγεί τελικά σε δύο εξισώσεις κίνησης, την ακτινική και την αζιμουθιακή. Παραλείποντας τη λεπτομερή ανάπτυξη των μαθηματικών πράξεων για λόγους συντομίας, θα έχουμε τελικά:

- $$V_r \frac{dV_r}{dr} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dr} + \frac{GM}{r^2} - \frac{V_\varphi^2}{r} + \frac{B_\varphi}{4\pi\rho r} \cdot \frac{d}{dr}(rB_\varphi) = 0 . \qquad (4.30)$$

- $$\rho V_r \frac{d}{dr}(rV_\varphi) = \frac{B_r}{4\pi} \cdot \frac{d}{dr}(rB_\varphi) . \qquad (4.31)$$

Η ακτινική εξίσωση κίνησης (4.30) περιλαμβάνει πέντε όρους. Οι τρεις πρώτοι από αυτούς παρουσιάζονται στην αντίστοιχη εξίσωση ορμής (4.8) ενός μη περιστρεφόμενου αστέρα χωρίς μαγνητικό πεδίο, περιλαμβάνοντας τη βαθμίδα πίεσης του αερίου (εφόσον πρόκειται για ισόθερμο άνεμο, μπορούμε να θέσουμε $p = \rho a^2$) και τη βαρυτική δύναμη. Ο τέταρτος όρος εκφράζει την πρόσθετη φυγόκεντρη επιτάχυνση, οφειλόμενη στην περιστροφή, ενώ ο πέμπτος την ακτινική επιτάχυνση που προκαλεί η δύναμη Lorentz (4.27) μέσω του περιστρεφόμενου μαγνητικού πεδίου. Η αζιμουθιακή εξίσωση κίνησης (4.31) υποδηλώνει ότι η ροπή (ανα μονάδα όγκου) που αναπτύσσεται εξαιτίας της αντίστοιχης συνιστώσας της δύναμης Lorentz (4.27) προκαλεί ισόποση μεταβολή της στροφορμής (ανα μονάδα όγκου) του αστέρα, ιδιότητα η οποία αποτελεί τον κινητήριο μηχανισμό της μαγνητικής πέδησης που θα εξετάσουμε στην αμέσως επόμενη ενότητα.

Οι δύο εξισώσεις κίνησης συνδέονται άμεσα με δύο θεμελιώδεις διατηρήσιμες ποσότητες. Με τη βοήθεια των επαγόμενων εξισώσεων διατήρησης, μπορούμε να διαχωρίσουμε τους μηχανισμούς που τις διαμορφώνουν αλλά και το βαθμό συνεισφοράς τους. Αποφεύγοντας και πάλι τη λεπτομερή μαθηματική περιγραφή, η ακτινική εξίσωση κίνησης (4.30) σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (4.31) και (4.26) καθιστά τελικά την *ενέργεια ανα μονάδα μάζας, ε, ως διατηρήσιμη ποσότητα*, δηλαδή:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(V_r^2 + V_\varphi^2) + a^2 \ln \rho - \frac{GM}{r} - \frac{r\Omega B_r B_\varphi}{4\pi\rho V_r} = const. \tag{4.32}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης (4.32) εκφράζει την κινητική ενέργεια του ανέμου, ο δεύτερος όρος εκφράζει τη θερμική του ενέργεια (ενθαλπία), ο τρίτος όρος τη βαρυτική δυναμική του ενέργεια και ο τέταρτος τη μαγνητική ενέργεια (ανα μονάδα μάζας). Είναι προφανές ότι οι τρεις πρώτοι όροι αφορούν την ενέργεια που διαθέτει το αέριο, ε_{gas}, ενέργεια αρνητική κοντά στον αστέρα και θετική σε μεγάλες αποστάσεις. Ο τελευταίος όρος αφορά το μαγνητικό πεδίο του αστέρα, ε_{mag}, και εκφράζει θετική μόνο ενέργεια, καθώς η αζιμουθιακή συνιστώσα του, B_φ, είναι πάντοτε αρνητική λόγω της σχέσης (4.26).

Ομοίως, η αζιμουθιακή εξίσωση κίνησης (4.31) σε συνδυασμό με τη διατήρηση της ροής μάζας (4.28) και της μαγνητικής ροής (4.25) καθιστά τελικά τη *στροφορμή ανα μονάδα μάζας, j, ως διατηρήσιμη ποσότητα*, δηλαδή:

$$j = rV_\varphi - \frac{rB_r B_\varphi}{4\pi\rho V_r} = const. \tag{4.33}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης (4.33) εκφράζει τη στροφορμή (ανα μονάδα μάζας) του αερίου, έστω j_{gas}, ενώ ο δεύτερος, έστω j_{mag}, τη στροφορμή που φέρουν οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές μέσω της στρέβλωσης που υπόκεινται. Με τη βοήθεια της σχέσης (4.33) και της συνέπειας του νόμου Faraday (4.26), η αζιμουθιακή συνιστώσα της ταχύτητας μπορεί να γραφεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\boxed{V_\varphi = r\Omega \frac{\dfrac{V_r^2 j}{r^2 \Omega} - \dfrac{B_r^2}{4\pi\rho}}{V_r^2 - \dfrac{B_r^2}{4\pi\rho}}}. \tag{4.34}$$

Παρατηρούμε ότι η πιο πάνω σχέση χαρακτηρίζεται από ένα ανώμαλο σημείο στο οποίο ο παρονομαστής μηδενίζεται και αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή της ακτινικής ταχύτητας, $V_r = A_r = B_r/(4\pi\rho)^{1/2}$. Η ταχύτητα αυτή δεν είναι όμως τυχαία, καθώς αποτελεί την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας Alfvén, $V_r(r_A) = A_r(r_A) = V_A$, η οποία αποκτάται σε απόσταση r_A τέτοια ώστε η κινητική πίεση του αερίου να εξισωθεί με τη μαγνητική, δηλαδή:

$$\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 = \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad |\mathbf{v}(r_A)| = |\mathbf{A}| = \frac{|\mathbf{B}|}{\sqrt{4\pi\rho}}, \tag{4.35}$$

όπου $|\mathbf{A}| = (A_r^2+A_\varphi^2)^{1/2}$ και $|\mathbf{B}| = (B_r^2+B_\varphi^2)^{1/2}$ το μέτρο της ταχύτητας Alfvén και της έντασης του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα. Η απόσταση αυτή μπορεί να προσδιοριστεί κατά τον ταυτόχρονο μηδενισμό του αριθμητή, συνθήκη η οποία επιβάλλεται έτσι ώστε η αζιμουθιακή ταχύτητα να παραμένει και πάλι πεπερασμένη:

$$j = r_A^2 \Omega \,. \tag{4.36}$$

Η σχέση (4.36) μας αποκαλύπτει ότι η στροφορμή (ανα μονάδα μάζας) του αστρικού ανέμου συμπεριφέρεται σαν την αντίστοιχη στροφορμή ενός αστέρα ο οποίος περιστρέφεται σαν στερεό σώμα με ακτίνα ίση με την ακτίνα Alfvén, r_A (Σχήμα IV.1b). Η διαπίστωση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το υλικό το οποίο ανυψώνεται από την αστρική φωτόσφαιρα με τη μορφή αστρικού ανέμου *συμπεριστρέφεται μέχρι την ακτίνα Alfvén*, απόσταση στην οποία οφείλει να υπερνικήσει τη μαγνητική πίεση ώστε τελικά να διαφύγει προς το μεσοαστρικό χώρο (η ακτίνα αυτή εκτιμάται για τον Ήλιο στις 12 $R_\odot$ περίπου). Το κέλυφος που παράγεται μεταξύ της φωτοσφαιρικής ακτίνας και της ακτίνας Alfvén καλείται ***νεκρή ζώνη (dead zone)***, καθώς το υλικό είναι παγιδευμένο μέσα σε αυτή, ενώ η περιοχή μετά την ακτίνα Alfvén στην οποία ο άνεμος καταφέρνει τελικά να εκτονωθεί καλείται ***ζώνη ανέμου (wind zone)***.

Αποφεύγοντας μια σειρά μακροσκελών μαθηματικών πράξεων, μπορούμε να δείξουμε ότι η στροφορμή που φέρει ο άνεμος, και απομακρύνεται τελικά από τον αστέρα μέσω της απώλειας μάζας, είναι κατά πολύ μικρότερη από εκείνη η οποία απομακρύνεται μέσω της στρέβλωσης του μαγνητικού πεδίου. Απομονώνοντας τη στροφορμή του αερίου που αντιστοιχεί στον πρώτο όρο της σχέσης (4.33) και αναπτύσσοντας την αζιμουθιακή ταχύτητα (4.34) με τη βοήθεια της σχέσης (4.36) και την επαλήθευση των εξισώσεων διατήρησης της ροής μάζας (4.28) και της μαγνητικής ροής (4.25) στην ακτίνα Alfvén, r_A, οδηγούμαστε στις ακόλουθες δύο σχέσεις:

$$j_{gas} = r_A^2 \Omega \left(1 - \frac{V_A}{V_\infty}\right) \quad \text{και} \quad j_{mag} = j - j_{gas} = r_A^2 \Omega \frac{V_A}{V_\infty} \,, \tag{4.37}$$

όπου V_∞ η τερματική ταχύτητα του ανέμου που εκφράζει την ακτινική του συνιστώσα σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από τον αστέρα, θεωρητικά όταν $r \rightarrow \infty$. Τόσο οι θεωρητικές εκτιμήσεις όσο και τα παρατηρησιακά δεδομένα οδηγούν σε μια αναλογία V_A/V_∞ η οποία ξεκινά από την τιμή 2/3 και αγγίζει σχεδόν τη μονάδα. Το γεγονός αυτό μας υποδεικνύει ότι *η απώλεια στροφορμής από έναν περιστρεφόμενο αστέρα με μαγνητικό πεδίο πραγματοποιείται* ***σχεδόν αποκλειστικά*** *μέσω της ροπής που αναπτύσσεται από την αζιμουθιακή συνιστώσα της δύναμης Lorentz* ως συνέπεια της στρέβλωσης των μαγνητικών γραμμών. Το φαινόμενο αυτό οδηγεί στην επιβράδυνση της γωνιακής του ταχύτητας, μηχανισμό τον οποίο θα καλούμε ***μαγνητική πέδηση (magnetic braking)***, ο οποίος προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Schatzman (1962).

2.4.2. Προβλεπόμενος Ρυθμός Απώλειας Μάζας

Ολοκληρώνοντας την ενότητα, μας απομένει να εκτιμήσουμε την ταχύτητα του ανέμου στη βάση παραγωγής του ώστε στη συνέχεια να προσδιορίσουμε το ζητούμενο ρυθμό απώλειας μάζας. Συνδυάζοντας κατάλληλα τις σχέσεις (4.26), (4.34), (4.25) και (4.28), μπορούμε να οδηγήσουμε την ακτινική εξίσωση κίνησης (4.30) στην τελική της μορφή, σε εκείνη δηλαδή που περιγράφει το μοντέλο του ισόθερμου ταχέος μαγνητικού περιστροφέα:

$$\boxed{\frac{r}{V_r}\cdot\frac{dV_r}{dr}=\frac{(V_r^2-A_r^2)\left(2a^2+V_\varphi^2-\dfrac{GM}{r}\right)+2V_rV_\varphi A_rA_\varphi}{(V_r^2-A_r^2)(V_r^2-a^2)-V_r^2A_\varphi^2}}. \tag{4.38}$$

Η πιο πάνω ακτινική εξίσωση κίνησης (4.38) χαρακτηρίζεται από τρία κρίσιμα σημεία και όχι μόνο από ένα, όπως συναντήσαμε στην αντίστοιχη περίπτωση του ισόθερμου αργού περιστροφέα (4.15). Είναι προφανές ότι η ταχύτητα Alfvén στη θέση r_A, $A_r(r_A) = V_A$, αποτελεί μια από τις λύσεις αυτές. Σύμφωνα με το μοντέλο των Weber & Davis (1967), οι υπόλοιπες δύο ταυτίζονται με την *αργή και γρήγορη μαγνητοηχητική ταχύτητα*, $V_{r,s}$ και $V_{r,f}$ αντίστοιχα, των οποίων τις θέσεις r_s και r_f μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν από το μηδενισμό του αριθμητή της (4.38).

Η λύση με το μεγαλύτερο όμως ενδιαφέρον αφορά την αργή μαγνητοηχητική ταχύτητα η οποία αποκτάται πιο κοντά στον αστέρα και μάλιστα μέσα στη νεκρή ζώνη. Υποθέτοντας λοιπόν ότι η ακτινική ταχύτητα του αστρικού ανέμου είναι κατά πολύ μικρότερη από την ταχύτητα Alfvén, $V_r << A_r$, και ότι η αζιμουθιακή ταχύτητα προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό εκείνη του στερεού σώματος, $V_\varphi = r\Omega$, οδηγούμαστε με τη βοήθεια των σχέσεων (4.26) και (4.35) στην ακόλουθη απλούστευση:

$$V_rA_\varphi=(V_\varphi-r\Omega)A_r\approx 0\,. \tag{4.39}$$

Με βάση τη συνθήκη (4.39), μπορούμε τότε να αγνοήσουμε τον δεύτερο όρο τόσο του αριθμητή όσο και του παρονομαστή της ακτινικής εξίσωσης (4.38). Συνεπώς, η αργή μαγνητοηχητική ταχύτητα στην περίπτωση του ισόθερμου ταχέος μαγνητικού περιστροφέα ταυτίζεται με την ισόθερμη ταχύτητα του ήχου, $V_{r,s} = V_r(r_s)$, η οποία δεν αποκτάται πλέον στην απόσταση Parker (4.16), r_p, αλλά σε απόσταση τέτοια που ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

$$2a^2-\frac{GM}{r_s}+r_s^2\Omega^2=0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad Z_s^3+\frac{1}{\omega^2 Z_p}Z_s-\frac{1}{\omega^2}=0\,, \tag{4.40}$$

όπου $Z_s = r_s/r_0$ η αδιάστατη σχετική απόσταση που αποκτάται η αργή μαγνητοηχητική ταχύτητα ως προς τη θέση βάσης παραγωγής του ανέμου r_0, $Z_p = r_p/r_0$ η αντίστοιχη σχετική απόσταση Parker και $\omega = \Omega/\Omega_{max}$ η σχετική γωνιακή ταχύτητα του αστέρα ως προς τη μέγιστη φυγόκεντρη, $\Omega_{max} = (GM/r_0^3)^{1/2}$. Ας σημειωθεί ότι η πιο πάνω κυβική εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο σε περιπτώσεις που η φυγόκεντρος και η μαγνητική δύναμη κυριαρχούν της αντίστοιχης θερμικής. Η ταχύτητα του ήχου, a, θεωρείται τότε πολύ μικρή, η σχετική απόσταση Z_p πολύ μεγάλη και τελικά η εξίσωση $Z_s^3\omega^2 = 1$ κρίνεται ικανοποιητική.

Η αρχική ταχύτητα $V_{r,0}$ με την οποία ο αστρικός άνεμος ανυψώνεται από τη βάση παραγωγής του, r_0, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της διατήρησης ενέργειας (4.32) και στροφορμής ανα μονάδα μάζας (4.33). Συνδυασμός των εξισώσεων αυτών οδηγεί στην ακόλουθη και ιδιαίτερα εύχρηστη σχέση:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(V_r^2 + V_\varphi^2) + a^2 \ln\rho - \frac{GM}{r} - r\Omega V_\varphi + j\Omega = const. \tag{4.41}$$

Επαλήθευση της σχέσης (4.41) στη θέση $r = r_s$ για την οποία θεωρούμε ότι ισχύει $V_\varphi = r_s\Omega$ και, όπως αποδείξαμε, ότι $V_r(r_s) = a$, καθώς και επαλήθευση στη βάση παραγωγής, r_0, μας δίνει τη δυνατότητα προσδιορισμού μιας αρκετά ακριβούς σχέσης μέσα από την οποία είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε την αρχική ταχύτητα $V_{r,0}$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{V_{r,0}}{a}\right)^2 - \ln\left(\frac{V_{r,0}}{aZ_s^2}\right) = \frac{1}{2} + 2Z_p\left[\left(1 - \frac{1}{Z_s}\right) - \frac{1}{2}\omega^2(Z_s^2 - 1)\right]. \tag{4.42}$$

Υποθέτοντας επιπροσθέτως ότι η αρχική ακτινική ταχύτητα στη βάση παραγωγής είναι πολύ μικρότερη της αντίστοιχης ηχητικής, $V_{r,0} << a$, η σχέση (4.42) οδηγεί τελικά στον αναλυτικό προσδιορισμό της $V_{r,0}$ μέσω ακόλουθης σχέσης:

$$V_{r,0} = aZ_s^2 \exp\left\{-\frac{1}{2} - 2Z_p\left(1 - \frac{1}{Z_s}\right) + Z_p\omega^2(Z_s^2 - 1)\right\}. \tag{4.43}$$

Ο ρυθμός απώλειας μάζας στον ισημερινό του ισόθερμου ταχέος μαγνητικού περιστροφέα μπορεί πλέον εύκολα να καθοριστεί με τη βοήθεια της εξίσωσης συνέχειας (4.28) στη βάση παραγωγής του αστρικού ανέμου, $(r_0, V_{r,0})$, πυκνότητας έστω ίσης με ρ_0:

$$\boxed{\dot{M}_{w,Eq.}^{IFMR} = -4\pi a Z_s^2 r_0^2 \rho_0 e^{-1/2} \exp\left\{-\frac{GM}{a^2 r_0}\left(1 - \frac{1}{Z_s}\right)\right\} \exp\left\{\omega^2 \frac{GM}{2a^2 r_0}(Z_s^2 - 1)\right\}}. \tag{4.44}$$

Εφόσον επιθυμούμε να προσδιορίσουμε το συνολικό ρυθμό σφαιρικής απώλειας μάζας, η σχέση (4.44) επιδέχεται ένα διορθωτικό συντελεστή ο οποίος εκτιμάται μεταξύ 0.1 και 0.5. Ο πρώτος εκθετικός όρος της σχέσης (4.44) εκφράζει την απώλεια μάζας που αντιστοιχεί στον ισόθερμο αργό περιστροφέα, ενώ ο δεύτερος εκφράζει τη συνεισφορά του φυγόκεντρου δυναμικού. Ο παράγοντας αυτός αυξάνεται εκθετικά με το ω^2, γεγονός που τον καθιστά εξαιρετικά ισχυρό όταν η γωνιακή ταχύτητα του αστέρα πλησιάζει τη μέγιστη δυνατή Ω_{max}.

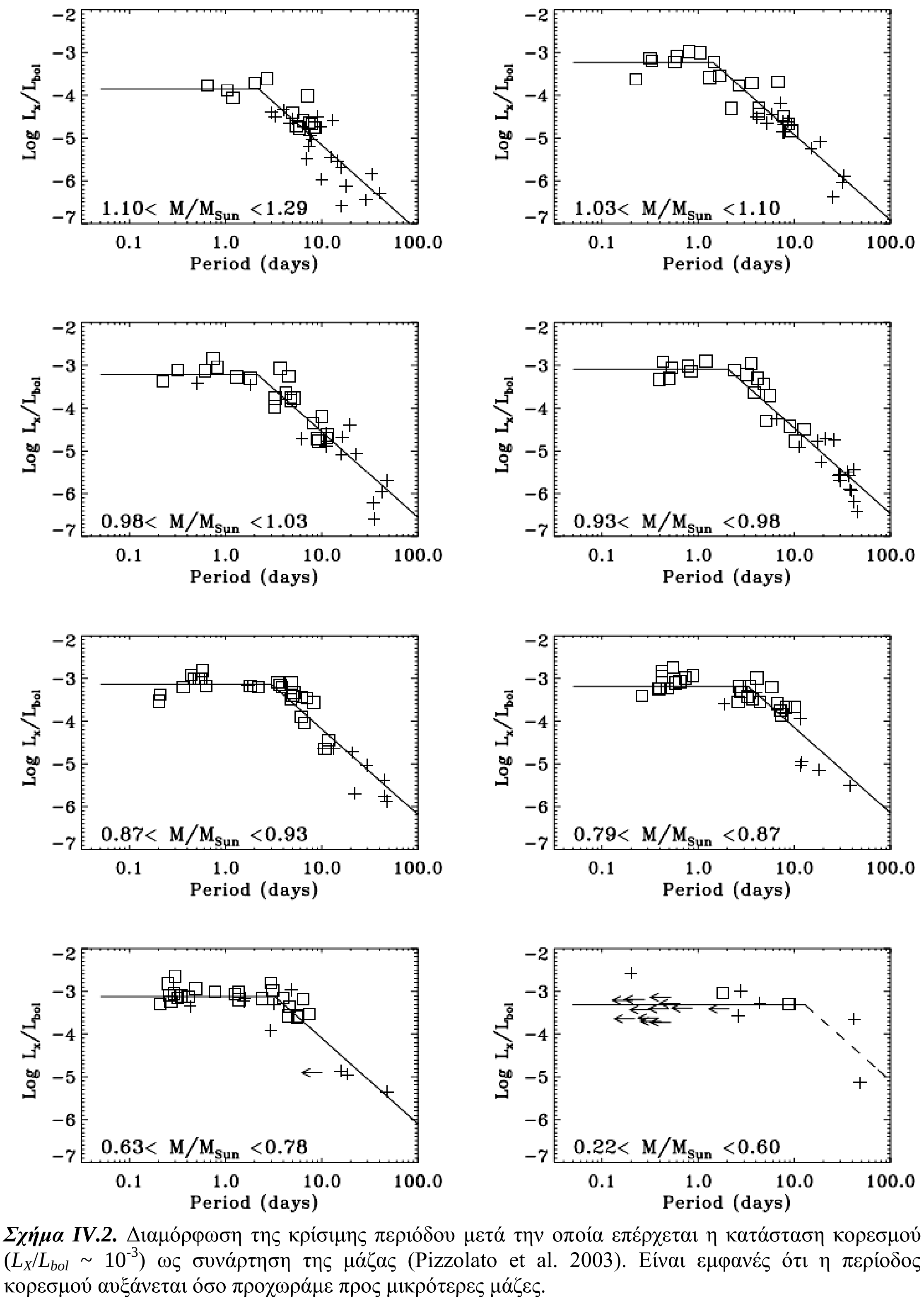
Μεγάλο επίσης ενδιαφέρον παρουσιάζει η απουσία του μαγνητικού πεδίου από τη σχέση (4.44), καθώς αποτελεί ποσότητα από την οποία θα έπρεπε να εξαρτάται άμεσα ο ρυθμός απώλειας μάζας. Κάτι τέτοιο εύκολα όμως εξηγείται, καθώς όσο η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι μεγάλη, το υποηχητικό υλικό βρίσκεται δεσμευμένο στη νεκρή ζώνη και συμπεριστρέφεται μαζί με τον αστέρα σαν στερεό σώμα. Ενδεχόμενη λοιπόν αύξηση της έντασης του πεδίου δεν μπορεί να προκαλέσει περαιτέρω ενίσχυση του ρυθμού απώλειας μάζας εξαιτίας του κορεσμού που έχει επέλθει. Κάτω από τις συνθήκες αυτές, η σχέση (4.44) προβλέπει δύο περίπου τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη απώλεια μάζας από εκείνη του ισόθερμου αργού περιστροφέα (4.20), γεγονός που καθιστά την παρουσία μαγνητικού πεδίου και περιστροφής παράγοντες ιδιαίτερα κρίσιμους κατά την ανάπτυξη του αστρικού ανέμου.

2.5. Παραμετροποίηση Απώλειας Μάζας

Η παραμετροποίηση οποιουδήποτε φυσικού μηχανισμού με βάση απλές υποθέσεις και παρατηρησιακά δεδομένα αποτελεί μια ιδιαίτερα ευαίσθητη διαδικασία, καθώς καθιστά την εκτίμηση κρίσιμων φυσικών ποσοτήτων αρκετά εύχρηστη. Στην περίπτωση της απώλειας μάζας, οι σχέσεις (4.20) και (4.44) αν και έχουν προκύψει αμιγώς θεωρητικά, απαιτούν τη γνώση ορισμένων παραμέτρων τις οποίες σπάνια γνωρίζουμε με βεβαιότητα, όπως π.χ. τις συνθήκες που επικρατούν στη βάση παραγωγής του αστρικού ανέμου. Από την άλλη, μια σειρά από φαινόμενα τα οποία ενδεχομένως να παίζουν σημαντικό ρόλο στην τελική διαμόρφωση της απώλεια μάζας, όπως π.χ. τα ακουστικά κύματα και τα κύματα Alfvén που αναπτύσσονται στη ζώνη μεταφοράς των αστέρων μεταγενέστερων φασματικών τύπων, δεν έχουν συνεκτιμηθεί κατά την εξαγωγή των σχέσεων (4.20) και (4.44). Η κατασκευή εμπειρικών και ημιεμπειρικών τύπων κρίνεται λοιπόν όχι μόνο χρήσιμη αλλά και αναγκαία.

2.5.1. Ρυθμός Απώλειας Μάζας σε Ψυχρούς Νάνους Αστέρες

Στους ψυχρούς νάνους αστέρες, ο κύριος όγκος της ακτινοβολίας στις ακτίνες X παράγεται στο στέμμα εξαιτίας της πολύ υψηλής του θερμοκρασίας. Είναι λοιπόν προφανές ότι συσχέτιση μεταξύ της αντίστοιχης φωτεινότητας, L_X, και του ρυθμού (θερμικής) απώλειας μάζας είναι λογική και αναμενόμενη. Σύμφωνα όμως με τα πιο πάνω, η παρουσία έντονης περιστροφής οφείλει επίσης να συμβάλλει στην ενίσχυση της απώλειας μάζας, αφενός λόγω του φυγόκεντρου δυναμικού, αφετέρου λόγω της αύξησης της μαγνητικής και στεμματικής δραστηριότητας η οποία με τη σειρά της οδηγεί στην ενίσχυση της ακτινικής συνιστώσας της δύναμης Lorentz (4.27). Στην ειδική μάλιστα περίπτωση κατά την οποία ο αστέρας περιστρέφεται με πολύ υψηλή γωνιακή ταχύτητα, η συσχέτιση αυτή παύει να υφίσταται λόγω του κορεσμού που επέρχεται, όπως άλλωστε προβλέπει η σχέση (4.44).



Σχήμα IV.2. Διαμόρφωση της κρίσιμης περιόδου μετά την οποία επέρχεται η κατάσταση κορεσμού (L_X/L_{bol} ~ 10^{-3}) ως συνάρτηση της μάζας (Pizzolato et al. 2003). Είναι εμφανές ότι η περίοδος κορεσμού αυξάνεται όσο προχωράμε προς μικρότερες μάζες.

Από τα μέσα της δεκαετίας του 1970 μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 1980, η αποστολή διάσημων δορυφορικών παρατηρητηρίων, όπως π.χ. το παρατηρητήριο υψηλών ενεργειών `Einstein` και ο δορυφόρος *EXOSAT*, έδωσαν μεγάλη ώθηση στη μελέτη αστέρων μεταγενέστερων φασματικών τύπων στην περιοχή των ακτίνων X. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι ο λόγος της φωτεινότητας στις ακτίνες X των αστέρων της κατηγορίας αυτής (φασματικών δηλαδή τύπων από G μέχρι και M) προς την αντίστοιχη βολομετρική, $\ell = L_X/L_{bol}$, φτάνει πράγματι μια μέγιστη τιμή, ίση περίπου με 10^{-3}, χωρίς να είναι ακόμα και σήμερα γνωστό εάν η ιδιότητα αυτή οφείλεται σε κάποια ιδιότυπη συμπεριφορά του μαγνητικού δυναμό ή στην αδυναμία παραγωγής νέων ενεργών κέντρων δράσης στην αστρική φωτόσφαιρα μετά από κάποια συγκεκριμένη τιμή της περιόδου περιστροφής (π.χ. Vilhu 1984, Vilhu & Walter 1987, Fleming et al. 1993, Jardine & Unruh 1999). Αργότερα, οι Pizzolato et al. (2003) επιβεβαίωσαν αλλά και εκτίμησαν την κρίσιμη τιμή της περιόδου ως συνάρτηση της μάζας μέσα από ένα πολύ μεγάλο δείγμα 259 αστέρων ηλιακού τύπου (με περιόδους από 0.2 μέχρι και 50 d) οι οποίοι παρατηρήθηκαν από το διαστημικό παρατηρητήριο *ROSAT* (Σχήμα IV.2).

Αναλυτικότερα, οι Pizzolato et al. (2003) έδειξαν ότι ο λόγος της στεμματικής φωτεινότητας προς την αντίστοιχη βολομετρική, $\ell = L_X/L_{bol}$, νάνων αστέρων με μάζα μεταξύ 0.22 και 1.29 $M_\odot$ εξαρτάται ισχυρά από την περίοδο περιστροφής, P. Πιο συγκεκριμένα, ο πιο πάνω λόγος βρέθηκε να αυξάνεται κατά δύο περίπου τάξεις μεγέθους όταν η περίοδος μειώνεται από 50 σε 4 μέρες. Η συναρτησιακή συσχέτιση μεταξύ λόγου φωτεινότητας και περιόδου φαίνεται να περιγράφεται ικανοποιητικά από ένα νόμο δύναμης της μορφής $L_X/L_{bol} \propto P^{-2}$ στην περιοχή πριν τον κορεσμό. Η κρίσιμη περίοδος κορεσμού βρέθηκε επίσης να αυξάνεται με τη μείωση της μάζας. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι σχεδόν όλοι οι αστέρες του δείγματος με μάζα μεταξύ 0.22 και 0.60 $M_\odot$ βρίσκονταν στην κατάσταση κορεσμού όταν στο ίδιο καθεστώς εντοπίστηκε ένας πολύ μικρός μόνο αριθμός αστέρων με μάζα μεταξύ 1.10 και 1.29 $M_\odot$. Παρατηρήθηκε τέλος ότι, ανεξάρτητα από τη μάζα τους, οι αστέρες με τις μικρότερες περιόδους είχαν την τάση να μειώσουν τη στεμματική τους φωτεινότητα σε σχέση με την αντίστοιχη τιμή κορεσμού, ένα φαινόμενο δηλαδή υπερκορεσμού το οποίο μέχρι και σήμερα δεν έχει πλήρως διερευνηθεί.

Οι Lednicka & Stepien (2008), στηριζόμενοι σε απλές υποθέσεις διαφυγής θερμικού ανέμου κατασκεύασαν μια απλή ημιεμπειρική σχέση που συνδέει το ρυθμό απώλειας μάζας από έναν ψυχρό αστέρα με τις θεμελιώδεις φυσικές του παραμέτρους και το λόγο της στεμματικής προς τη βολομετρική φωτεινότητα έτσι ώστε έμμεσα να υπάρχει εξάρτηση από την περίοδο περιστροφής. Σύμφωνα λοιπόν με την εξίσωση ενέργειας ανέμου θερμικής προέλευσης ενός αργά περιστρεφόμενου αστέρα (4.14), είδαμε ότι ο άνεμος ξεκινά με (αρνητική) ενέργεια σχεδόν ίση με τη βαρυτική δυναμική στη βάση παραγωγής του, $E(r_0)$, και καταλήγει να διαθέτει (θετική) κινητική ενέργεια σε μεγάλες αποστάσεις από τον αστέρα, E_∞. Η απαιτούμενη διαφορά της ενέργειας που απαιτείται για την ανύψωσή του, ΔE, μπορεί τότε να γραφεί ως κλάσμα της συνολικής φωτεινής ενέργειας του αστέρα, όσο ακριβώς εκπέμπεται στις ακτίνες X, δηλαδή:

$$\Delta E = E_\infty - E(r_0) = E_\infty - E(R) \approx \frac{1}{2} M_w \upsilon_\infty^2 - \left(-\frac{G M_w M}{R} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} M_w \upsilon_\infty^2 + \frac{1}{2} M_w \upsilon(R)_{esc}^2 \approx M_w \upsilon(R)_{esc}^2 = \frac{2 G M_w M}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \approx \ell L_{bol} = -\frac{2G\dot{M}_w M}{R} \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{M}_w = -1.5\times10^{-8}\left(\ell\frac{L}{L_\odot}\right)\left(\frac{R}{R_\odot}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1}}. \qquad (4.45)$$

Η σχέση (4.45), η οποία εκτιμά το ρυθμό απώλειας μάζας σε M_Θ/yr, προέκυψε με την υπόθεση ότι ο άνεμος, συνολικής μάζας M_w, ανυψώνεται από τη βάση παραγωγής, έστω σε απόσταση ίση με τη φωτοσφαιρική ακτίνα του αστέρα R, με ταχύτητα ίση με την απαιτούμενη ταχύτητα διαφυγής, $\upsilon(R)_{esc}$. Έγινε επίσης χρήση της παραδοχής ότι η τερματική ταχύτητα του ανέμου είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την ταχύτητα διαφυγής και συνεπώς οι κινητικές ενέργειες στις αντίστοιχες θέσεις θεωρήθηκαν περίπου ίσες.

Οι Lednicka & Stepien (2008) εκτιμούν το λόγο φωτεινότητας για την περίπτωση του Ήλιου ίσο με ℓ_Θ = 1.3×10^{-6} με δεδομένο ρυθμό απώλειας μάζας -2×10^{-14} M_Θ/yr. Σύμφωνα με τους Pizzolato et al. (2003), η κρίσιμη περίοδος κορεσμού σε αστέρες 1 M_Θ προσδιορίζεται ίση με P_{sat} = (2.2 ± 1.6) d και ο αντίστοιχος λόγος φωτεινότητας ίσος με log(ℓ_{sat}) = (-3.2 ± 0.3). Στην περίπτωση λοιπόν αστέρων ηλιακού τύπου οι οποίοι βρίσκονται σε καθεστώς κορεσμού, η σχέση (4.45) προβλέπει ρυθμό απώλειας μάζας ίσο με -9.5×10^{-12} M_Θ/yr ο οποίος βρίσκεται μέσα στην ίδια τάξη μεγέθους με τις τιμές που προβλέπει η θεωρητική σχέση (4.44).

Ας αναφέρουμε επίσης ότι υψηλοί ρυθμοί απώλειας μάζας της τάξης των -10^{-11} M_Θ/yr έχουν μετρηθεί σε αρκετούς ταχέως περιστρεφόμενους νάνους αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων με ποικίλους τρόπους. Φωτομετρικές μελέτες στο υπέρυθρο και τα ραδιοκύματα έδειξαν ότι η απώλεια μάζας μπορεί να αγγίξει τιμές μεταξύ -10^{-10} και -10^{-12} M_Θ/yr (Mullan et al. 1992, van der Oord & Doyle 1997), ενώ φασματοσκοπικές μελέτες στηριζόμενες στην αλληλεπίδραση ανέμου και μεσοαστρικού υλικού εκτιμούν απώλειες μάζας της τάξης των -10^{-12} M_Θ/yr (Wood et al. 2002, 2005). Τέλος, πρόσφατες μελέτες οι οποίες συγκρίνουν την αρχική κατανομή μάζας σε νεαρά ανοικτά αστρικά σμήνη σε σχέση με την παρατηρούμενη σημερινή κατανομή, έχουν θέσει ως ανώτατο όριο την τιμή των -6×10^{-11} M_Θ/yr (Lednicka & Stepien 2008).

2.5.2. Ρυθμός Απώλειας Μάζας σε Ψυχρούς Εξελιγμένους Αστέρες

Εξελιγμένοι ψυχροί αστέρες, όπως γίγαντες και υπεργίγαντες με φασματικούς τύπους μεταξύ G και M, χαρακτηρίζονται όπως είδαμε από ιδιαίτερα υψηλούς ρυθμούς απώλειας μάζας. Ο κύριος μηχανισμός που οδηγεί στην παραγωγή αστρικών ανεμων αστέρων της κατηγορίας αυτής αφορά την πίεση ακτινοβολίας σε κόκκους σκόνης οι οποίοι έχουν σχηματίσει κελύφη στις εξώτατες περιοχές της ατμόσφαιρας λόγω της πολύ χαμηλής θερμοκρασίας που επικρατεί σε μεγάλες αποστάσεις. Δευτερογενείς μηχανισμοί, οι οποίοι όμως κρίνονται αναγκαίοι ώστε να υποστηρίξουν τη μεγάλη παρατηρούμενη απώλεια μάζας, αφορούν την ανάπτυξη ακουστικών κυμάτων και κυμάτων Alfvén στα εκτεταμένα περιβλήματα μεταφοράς που διαθέτουν οι αστέρες της κατηγορίας αυτής λόγω της προχωρημένης εξελικτικής τους κατάστασης.

Ο Reimers (1975, 1977), συλλέγοντας ένα μικρό (διαθέσιμο) δείγμα έξι διπλών αστρικών συστημάτων στα οποία το πρωτεύον μέλος ήταν νάνος αστέρας προγενέστερου φασματικού τύπου και ο συνοδός του ένας ψυχρός εξελιγμένος γίγαντας ή υπεργίγαντας, κατάφερε να προσδιορίσει το ρυθμό απώλεια μάζας του δευτερεύοντος μέσα από τις γραμμές απορρόφησης που προκαλούσε ο άνεμος κατά την παρεμβολή του μποστά από το θερμό πρωτεύον μέλος. Συσχετίζοντας τις φυσικές παραμέτρους των εξελιγμένων αστέρων με τους παρατηρούμενους ρυθμούς απώλειας μάζας, ο Reimers (1975, 1977) πρότεινε την ακόλουθη αμιγώς εμπειρική σχέση:

$$\dot{M}_w = -4\times10^{-13}\eta_R\left(\frac{L}{L_\odot}\right)\left(\frac{R}{R_\odot}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1}. \tag{4.46}$$

Στη σχέση (4.46), η οποία εκτιμά το ρυθμό απώλειας μάζας σε M_Θ/yr, έχει προστεθεί ένας κατάλληλος διορθωτικός συντελεστής, η_R, ώστε να μπορεί να είναι συμβατή με διαφορετικούς φασματικού τύπους και τάξεις φωτεινότητας. Πιο συγκεκριμένα, ο συντελεστής ανήκει στο διάστημα [1/3,3] με $\eta_R = 1$ να τίθεται για την περίπτωση των ερυθρών υπεργιγάντων. Παρά τη μεγάλη απήχηση της σχέσης (4.46) από την αστρονομική κοινότητα, σαφής επιστημονική υποστήριξη για το εύρος εφαρμογών της δεν υπάρχει, ενώ η επιλογή των τιμών που αφορούν το συντελεστή η_R δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Μάλιστα, η μορφή της είναι πανομοιότυπη με εκείνη των Lednicka & Stepien (2008), γεγονός που υποδεικνύει ότι η διαφυγή του ανέμου έχει θερμική προέλευση και όχι την πίεση ακτινοβολίας. Οι Schroder & Cuntz (2005) πρότειναν μια τροποποιημένη μορφή της σχέσης του Reimers (1975, 1977) η οποία προκύπτει με βάση συγκεκριμένα επιστημονικά επιχειρήματα και φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στις παρατηρήσεις:

$$\boxed{\dot{M}_w = -\eta_{SC}\left(\frac{L}{L_\odot}\right)\left(\frac{R}{R_\odot}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{T_{eff}}{4000}\right)^{7/2}\left(1+\frac{g_\odot}{4300g}\right)}. \tag{4.47}$$

Η σχέση (4.47), η οποία εκτιμά το ρυθμό απώλειας μάζας και πάλι σε M_Θ/yr, διαθέτει δύο πρόσθετους παράγοντες σε σχέση με την παραδοσιακή μορφή του Reimers. Ο πρώτος αφορά την ενεργό θερμοκρασία του αστέρα, γεγονός που την καθιστά ιδιαίτερα εύχρηστη, καθώς δεν απαιτείται η αναζήτηση του κατάλληλου εκείνου συντελεστή η_R ώστε να είναι επιτυχής. Ο τρόπος εισαγωγής του όρου αυτού προέκυψε μέσω της υπόθεσης ότι η διαφυγή του ανέμου υποστηρίζεται από μηχανισμούς τυρβώδους ροής και τη διάδοση μαγνητοακουστικών κυμάτων Alfvén στη χρωμόσφαιρα των εξελιγμένων αστέρων. Ο δεύτερος παράγοντας αφορά την επιτάχυνση της βαρύτητας η οποία αφενός εκφράζει την εξελικτική κατάσταση, αφετέρου το βαθμό έκτασης της αστρικής χρωμόσφαιρας η οποία με τη σειρά της καθορίζει το ποσό ενέργειας που απαιτείται ώστε ο άνεμος να υπερνικήσει τη βαρυτική δυναμική του ενέργεια και να διαφύγει. Τέλος, ο συντελεστής η_{SC} αποτελεί μια σταθερά βαθμονόμησης και έχει προσδιοριστεί ίση με $(8\pm1)\times10^{-14}$ μέσα από παρατηρήσεις ερυθρών γιγάντων τα οποία είναι μέλη σφαιρωτών σμηνών. Ας σημειωθεί ότι καμία από τις σχέσεις (4.46) και (4.47) δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε παλλόμενους εξελιγμένους αστέρες, καθώς η περίοδος ανάπαλσης αποτελεί την κρίσιμη εκείνη παράμετρο που καθορίζει σχεδόν αποκλειστικά το ρυθμό απώλειας μάζας των ιδιότυπων αυτών αστέρων (Vassiliadis & Wood 1993).

3. Απώλεια Στροφορμής μέσω Αστρικού Ανέμου

Στην ενότητα αυτή αποσκοπούμε σε μια αναλυτική αλλά και εύκολα κατανοητή παρουσίαση του κύριου μηχανισμού μέσω της οποίας οι αστέρες ηλιακού τύπου χάνουν στροφορμή, δηλαδή μέσω της μαγνητικής πέδησης. Αν και ο μηχανισμός αυτός εισάγεται για πρώτη φορά στην ενότητα 2.4, η λεπτομερής παραμετροποίησή του αποφεύγεται. Ο λόγος έγκειται στην άγνοια την οποία ακόμα και σήμερα έχουμε γύρω από τον τρόπο με τον οποίο το μαγνητικό δυναμό συμπεριφέρεται κάτω από μεγάλες γωνιακές ταχύτητες αλλά και τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώνεται η τοπολογία του μαγνητικού πεδίου κάτω από διαφορετικές συνθήκες. Έμφαση λοιπόν δίνεται στη θεωρητική προσέγγιση και αντιμετώπιση των πιο πάνω δυσκολιών οι οποίες οδηγούν τελικά σε μια πρώτη εκτίμηση της ακτίνας Alfvén. Η παράμετρος αυτή είναι άλλωστε και η πλέον καθοριστική στην τελική διαμόρφωση του ρυθμού απώλειας στροφορμής.

Στις τελευταίες υποενότητες παρουσιάζονται ορισμένα σημαντικά αποτελέσματα τα οποία έχουν προκύψει από το συνυπολογισμό της διαφορικής περιστροφής πυρήνα-περιβλήματος, φαινόμενο το οποίο φαίνεται να επιδρά σημαντικά στις τελικές μας εκτιμήσεις σχετικά με το βαθμό ισχύος της μαγνητικής πέδησης. Τέλος, με βάση πρόσφατα παρατηρησιακά δεδομένα τα οποία έχουν προέλθει από τη στατιστική μελέτη των ισημερινών ταχυτήτων περιστροφής που έχουν προσδιοριστεί σε μεγάλο αριθμό αστέρων μεταγενέστερων φασματικών τύπων τα οποία είναι μέλη νεαρών ανοικτών σμηνών, πραγματοποιείται βαθμονόμηση των επαγόμενων μαθηματικών εκφράσεων τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στις εφαρμογές του πέμπτου κεφαλαίου.

3.1. Παραμετροποίηση Μαγνητικής Πέδησης

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήθηκε ο ισόθερμος άνεμος ενός αστέρα ο οποίος περιστρέφεται και διαθέτει μαγνητικό πεδίο. Είδαμε ότι η περιστροφή ως μεμονωμένος παράγοντας δεν επιφέρει σημαντικές επιπτώσεις στο ρυθμό απώλειας μάζας. Η συνδυασμένη παρουσία της όμως με ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο είναι εκείνη που τελικά διαμορφώνει σε σημαντικό βαθμό όχι μόνο την απώλεια μάζας αλλά και την απώλεια στροφορμής η οποία πλέον συντελείται μέσω της μαγνητικής πέδησης. Με τη βοήθεια των σχέσεων (4.33) και (4.37) αποδείξαμε ότι η αζιμουθιακή συνιστώσα της δύναμης Lorentz αποτελεί το κυρίαρχο αίτιο μέσω της οποίας ένας αστέρας χάνει στροφορμή εξαιτίας της ισχυρής ροπής η οποία αναπτύσσεται σε απόσταση ίση με την ακτίνα Alfvén οπότε και η στρέβλωση των μαγνητικών γραμμών γίνεται πιο έντονη. Σύμφωνα λοιπόν με τους Weber & Davis (1967), ο προσδιορισμός του χρονικού ρυθμού απώλειας στροφορμής, dJ/dt, στηρίζεται στη μεταβολή της στροφορμής που λαμβάνει χώρα σε ένα σφαιρικό κέλυφος το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω και στην περίπτωσή μας έχει ακτίνα ίση με r_A, δηλαδή:

$$\dot{J} = -\frac{2}{3}\dot{M}_w r_A^2 \Omega . \tag{4.48}$$

Στην πραγματικότητα, η πιο πάνω σχέση (4.48) έχει προκύψει με την υπόθεση της ακτινικής μορφής των μαγνητικών δυναμικών γραμμών ώστε το υλικό να παγιδεύεται σφαιρικά και ομογενώς στη νεκρή ζώνη. Η υπόθεση αυτή είναι σε μεγάλο βαθμό αποδεκτή όταν ο αστέρας περιστρέφεται σχετικά αργά, ενώ έχει μερική μόνο ισχύ σε πολύ μεγάλες γωνιακές ταχύτητες. Στην τελευταία περίπτωση, η δομή του μαγνητικού πεδίου γίνεται πολύπλοκη και πλησιάζει τη διπολική μορφή. Ο Kawaler (1988) έδειξε ότι ο ρυθμός απώλειας στροφορμής μπορεί να εκτιμάται με την ακόλουθη πιο ευέλικτη μαθηματική έκφραση στη θέση της σχέσης (4.48):

$$\dot{J} = -\frac{2}{3}\dot{M}_w R^2 \Omega \left(\frac{r_A}{R}\right)^n , \tag{4.49}$$

όπου n μια παράμετρος η οποία εκφράζει την εκάστοτε τοπολογία του μαγνητικού πεδίου. Στην περίπτωση του ακτινικού πεδίου θέτουμε $n = 2$, ενώ στην περίπτωση του διπολικού πεδίου το $n = 3/7$. Στη γενική περίπτωση ενός ταχέως περιστρεφόμενου αστέρα, ο Mestel (1984) εκτιμά ότι το n βρίσκεται στο διάστημα (0,1), κάτι το οποίο σημαίνει ότι ο βαθμός εξάρτησης της απώλειας στροφορμής από την έκταση της νεκρής ζώνης ελαχιστοποιείται. Σε καταστάσεις που δεν έχουμε ασφαλή και πλήρη εικόνα της τοπολογίας του μαγνητικού πεδίου, ο Kawaler (1988) προτείνει την υϊοθέτηση της τιμής $n = 3/2$ η οποία πλησιάζει περισσότερο την ακτινική μορφή και αντιστοιχεί συνεπώς στην αποδοχή μιας μέσης γεωμετρίας.

Η περιστροφή όμως διαμορφώνει δραστικά όχι μόνο την τοπολογία του μαγνητικού πεδίου αλλά και την έντασή του. Σύμφωνα με τη θεωρία του μαγνητικού δυναμό, η ένταση του πεδίου αναμένεται μεγαλύτερη όσο αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα (η εξάρτηση είναι μάλιστα γραμμική) αλλά και όσο βαθύτερο είναι το περίβλημα μεταφοράς. Οι Mestel & Spruit (1987) μελέτησαν τις συνέπειες που έχει ο τρόπος εξάρτησης της έντασης του πεδίου (με βάση τους φωτοσφαιρικούς πόλους), B, από τη γωνιακή ταχύτητα στον τρόπο συσχέτισης της απώλειας στροφορμής ως προς την ακτίνα Alfvén, σύμφωνα με τον ακόλουθο νόμο δύναμης:

$$B \propto \Omega^m , \tag{4.50}$$

όπου m μια παράμετρος η οποία εκφράζει το βαθμό εξάρτησης του μαγνητικού πεδίου από την περιστροφή. Εφόσον υϊοθετήσουμε το κλασικό (γραμμικό) μαγνητικό δυναμό, παραδοχή αποδεκτή για μικρές σχετικά γωνιακές ταχύτητες, μπορούμε να θέσουμε $m = 1$. Ένα μη γραμμικό δυναμό προβλέπει ότι, μετά από κάποια κρίσιμη τιμή της γωνιακής ταχύτητας, Ω_{sat}, περαιτέρω αύξηση της τελευταίας δεν προκαλεί πλέον μεταβολές στην ένταση του πεδίου, γεγονός το οποίο υποδηλώνει εκθέτη με τιμή πολύ κοντά στην $m = 0$.

Οι Mestel & Spruit (1987) οδηγούνται σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με τη μορφή συσχέτισης πυκνότητας, ρ, και έντασης μαγνητικού πεδίου, B, ανάλογα με το εύρος των τιμών που μπορεί να λάβει το m. Πιο συγκεκριμένα, οι συλλογισμοί τους στηρίζονται στη μελέτη των Pallavicini et al. (1981) η οποία έδειξε ότι η φωτεινότητα αστέρων μεταγενέστερων φασματικών τύπων στις ακτίνες X είναι ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής τους ταχύτητας, $L_X \propto \Omega^2$. Τα αποτελέσματα αυτά είναι πλήρως συμβατά με εκείνα των Pizzolato et al. (2003) σύμφωνα με τους οποίους φαίνεται να επικρατεί ένας νόμος δύναμης της μορφής $L_X/L_{bol} \propto P^{-2}$. Από την άλλη, γνωρίζοντας ότι οι μεταβολές της στεμματικής φωτεινότητας καθορίζονται κυρίως από μεταβολές της πυκνότητας, αναμένεται μια σχέση της μορφής $L_X \propto \rho^2$ υποθέτοντας εκπομπή μέσω οπτικά αραιού υλικού, όπως είναι δηλαδή το στεμματικό. Μπορούμε εύκολα λοιπόν να συμπεράνουμε ότι $\rho \propto \Omega \propto B^{1/m}$ με m κοντά στη μονάδα.

Στο μοντέλο των Mestel & Spruit (1987), η ζώνη η οποία σχηματίζεται με βάση την ακτίνα Alfvén δεν ταυτίζεται με τη νεκρή ζώνη. Αντίθετα, σύμφωνα με μια πιο ρεαλιστική εικόνα που ακολουθεί το μοντέλο αυτό, ορίζεται με σαφή τρόπο η διάκριση μεταξύ της ζώνης Alfvén και της νεκρής ζώνης. Η τελευταία αποτελεί την περιοχή εκείνη η οποία διαθέτει παγιδευμένο υλικό που συμπεριστρέφεται με τον αστέρα ως στερεό σώμα (κυμαίνεται μεταξύ 2-5 R_{Θ}) και χαρακτηρίζεται από μαγνητικό πεδίο κλειστής διπολικής γεωμετρίας. Η ζώνη Alfvén, εκτός από τη νεκρή ζώνη, περιλαμβάνει μέρος της ζώνης ανέμου (μπορεί να κυμανθεί μεταξύ 10-40 R_{Θ}) η οποία πλέον χαρακτηρίζεται από ανοικτό, και σε πολύ καλή προσέγγιση, ακτινικό πεδίο (Σχήμα IV.1b).

Αριθμητικοί υπολογισμοί των Mestel & Spruit (1987), είτε υποθέτοντας ότι $\rho \propto \Omega$ είτε ότι η πυκνότητα είναι ανεξάρτητη της γωνιακής ταχύτητας, έδειξαν ότι αύξηση της τελευταίας επιφέρει αύξηση της ακτίνας συμπεριστροφής, όπως άλλωστε αναμενόταν, καθώς ισχυρότερο μαγνητικό πεδίο εγκλωβίζει περισσότερο αέριο. Πλησιάζοντας όμως μια κρίσιμη τιμή, περίπου ίση με 15 Ω_{Θ}, η φυγόκεντρος δύναμη τελικά επικρατεί με αποτέλεσμα τη σταδιακή συρρίκνωση της νεκρής ζώνης. Αντίθετα, έξω πλέον από τη νεκρή ζώνη, η απώλεια μάζας φαίνεται να ενισχύεται σε τέτοιο βαθμό από την ενισχυμένη περιστροφή, όπως εύκολα υποδηλώνεται μέσω της σχέσης (4.44), ώστε να αντισταθμίζει τη μείωση της ακτίνας συμπεριστροφής και τελικά να οδηγεί σε συνεχή αύξηση της ακτίνας Alfvén.

Μοντέλα όπως εκείνα τα οποία συναντήσαμε μέχρι τώρα (π.χ. Weber & Davis 1967, Mestel 1968, Okamoto 1974, Hartmann & MacGregor 1982, Mestel 1984, Mestel & Spruit 1987), αν και ιδιαίτερα επιτυχή, περιέχουν φυσικές ποσότητες για τις οποίες μόνο υποθέσεις μπορούμε να κάνουμε, γεγονός που τα καθιστά απαγορευτικά όταν πρόκειται να χρησιμοποιηθούν σε απλές πρακτικές εφαρμογές. Κρίθηκε λοιπόν απαραίτητη η κατασκευή εύχρηστων και άμεσα εφαρμόσιμων νόμων οι οποίοι συνδέουν το ρυθμό απώλειας στροφορμής με παραμέτρους εύκολα προσδιορίσιμες, αφήνοντας ένα μικρό και μόνο αριθμό από αυτές ελεύθερες. Σκοπός των προσεγγίσεων αυτών είναι η ανάπτυξη ημιεμπειρικών μεθόδων στηριζόμενες, αφενός στα συμπεράσματα των θεωρητικών μοντέλων, αφετέρου σε παρατηρησιακά δεδομένα (π.χ. Verbunt & Zwaan 1981, Vilhu 1982, Rappaport et al. 1983, Kawaler 1988, van’t Veer & Maceroni 1989; 1992, Vilhu 1992; 1994, Stepien 1995, Ivanova & Taam 2003). Τα δεδομένα αυτά είτε σχετίζονται με στατιστικές μελέτες αστέρων μέλη ανοικτών σμηνών (προσδιορίζοντας την ταχύτητα περιστροφής) και αστέρων μέλη διπλών συστημάτων (παρακολουθώντας την τροχιακή εξέλιξη), είτε μεμονωμένα σε αστέρες πεδίου (παρατηρώντας τη δραστηριότητα στις ακτίνες X).

Ο Kawaler (1988), προσπαθώντας να κατασκευάσει ένα σχετικά απλό και ευέλικτο σχήμα παραμετροποίησης του ρυθμού απώλειας στροφορμής με βάση θεμελιώδεις φυσικές παραμέτρους, ακολούθησε τους πιο πάνω ημιεμπειρικούς χειρισμούς και οδηγήθηκε σε μια ιδιαίτερα εύχρηστη σχέση την οποία θα υϊοθετήσουμε πλήρως στην παρούσα διδακτορική διατριβή. Εάν λοιπόν θεωρήσουμε ότι B_0 και B_A είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου στη φωτοσφαιρική βάση και την ακτίνα Alfvén αντίστοιχα, η διατήρηση της μαγνητικής ροής (4.25) θα μας δώσει:

$$\left(\frac{r_A}{R}\right)^2 = \frac{B_0}{B_A} \overset{(4.35)}{=} \frac{B_0}{V_A(4\pi\rho)^{1/2}} \overset{(4.6)}{=} \frac{B_0 V_A^{1/2} r_A}{V_A \dot{M}_w^{1/2}} \Leftrightarrow \frac{r_A}{R} = B_0 R\left(\dot{M}_w V_A\right)^{-1/2}. \quad (4.51)$$

Ο Kawaler (1988), γνωρίζοντας ότι η γνώση της ταχύτητας Alfvén, V_A, είναι πολύ δύσκολο να προσδιοριστεί με ακρίβεια, την εξέφρασε ως ποσοστό της ταχύτητας διαφυγής που αντιστοιχεί στην ακτίνα αυτή:

$$V_A = K_V \sqrt{\frac{2GM}{r_A}}, \quad (4.52)$$

όπου K_V σταθερά η οποία σε πρώτη προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ίση με τη μονάδα, καθώς ο άνεμος οφείλει να αποκτήσει ταχύτητα τουλάχιστον ίση με την ταχύτητα διαφυγής ώστε να είναι τελικά ικανός να διαφύγει. Σχετικά τώρα με την ένταση του μαγνητικού πεδίου, ο Kawaler (1988) ακολουθεί την τακτική των Mestel & Spruit (1987), δηλαδή τον νόμο δύναμης (4.50). Παράλληλα, στηριζόμενος στα πρόσφατα για την εποχή παρατηρησιακά δεδομένα των Linsky & Saar (1987), βελτίωσε τη σχέση (4.50) εισάγοντας έναν ακόμα όρο ο οποίος σχετίζεται με το φασματικό τύπο των εξεταζόμενων αστέρων:

$$B_0 = K_B \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-2} \Omega^m, \quad (4.53)$$

όπου K_B σταθερά η οποία εύκολα μπορεί να βαθμονομηθεί από ηλιακά δεδομένα. Ο πρόσθετος όρος αφορά την επιρροή της έκτασης του περιβλήματος μεταφοράς στην ισχύ του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου. Κινούμενοι προς μεταγενέστερους φασματικούς τύπους, το κέλυφος βαθαίνει ενισχύοντας το μηχανισμό του δυναμό και κατά συνέπεια την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Τελικά, συνδυασμός των σχέσεων (4.49), (4.51), (4.52) και (4.53), οδηγεί στην ακόλουθη μαθηματική έκφραση του ρυθμού απώλειας στροφορμής:

$$\boxed{\dot{J} = -K_{kaw}\Omega^{1+\frac{4mn}{3}}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{2-n}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-\frac{n}{3}}\left(\frac{\dot{M}_w}{\dot{M}_{w,\odot}}\right)^{1-\frac{2n}{3}}}, \qquad (4.54)$$

όπου K_{kaw} σταθερά η οποία περικλείει ουσιαστικά όλη την άγνοια μας σχετικά με τις ιδιότητες του αστρικού ανέμου και τη φύση του μαγνητικού πεδίου των ψυχρών αστέρων και η οποία δεν μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια των πιο πάνω χειρισμών. Είναι λοιπόν προφανές ότι ο μόνος τρόπος προσδιορισμού της σταθεράς K_{kaw} είναι μέσω κατάλληλης βαθμονόμησης από παρατηρησιακά δεδομένα. Σαν μια πρώτη εκτίμηση, μπορούμε να υϊοθετήσουμε ηλιακές παραμέτρους και πιο συγκεκριμένα την τιμή των 2 G ως μια μέση τιμή της έντασης του πολοειδούς (ολικού) μαγνητικού πεδίου, την τιμή n = 3/2 σχετικά με τη γεωμετρία του, την τιμή m = 1 όσον αφορά το γραμμικό δυναμό, καθώς και την τιμή $K_V \equiv 1$ ως την ελάχιστη δυνατή σχετικά με την ταχύτητα Alfvén. Με βάση τις πιο πάνω παραδοχές, η σταθερά K_{kaw} εκτιμάται ίση με 1.11×10^{47} gr·cm^{2}sec περίπου.

3.2. Νόμοι Πέδησης και Συμβατότητα

Στους μονούς αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων, η μαγνητική πέδηση οδηγεί στην απώλεια στροφορμής με άμεση συνέπεια τη μείωση της γωνιακής τους ταχύτητας. Είναι φυσικό λοιπόν τόσο η σχέση (4.48) όσο και η (4.54) να οδηγούν σε νόμους πέδησης τους οποίους θα αποδείξουμε και θα ερμηνεύσουμε ακολούθως. Αρχικά, θεωρώντας σε πρώτη προσέγγιση ότι θεμελιώδεις φυσικές παράμετροι ενός αστέρα παραμένουν αμετάβλητες στις χρονικές κλίμακες των παρατηρησιακών μας δεδομένων, μπορούμε να αποδώσουμε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του αποκλειστικά στη μεταβολή της γωνιακής του ταχύτητας, δηλαδή:

$$\dot{J} = I_{conv}\dot{\Omega} = (kR)^2 M\dot{\Omega}, \qquad (4.55)$$

όπου I_{conv} η ροπή αδράνειας (ως προς τον άξονα περιστροφής) του περιβλήματος μεταφοράς το οποίο διαμορφώνει κατά κύριο λόγο τη συνολική ροπή αδράνειας του αστέρα και k η αδιάστατη ακτίνα αδράνειας για την οποία δεχόμαστε ότι ισχύει $k^2 \approx$ 0.1 σε νάνους αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων (Rucinski 1988, Claret 1995, Claret & Gimenez 1995). Η ποσότητα αυτή προκύπτει λεπτομερώς από μοντέλα αστρικής δομής και καθορίζει ουσιαστικά την κατανομή της μάζας στο εσωτερικό των αστέρων, διορθώνοντας πιθανές αποκλίσεις από τη σφαιρική συμμετρία και ενδεχόμενες ανομοιογένειες της πυκνότητας.

Σύμφωνα με το απλούστερο μοντέλο των Weber & Davis (1967), η απώλεια στροφορμής εξαιτίας του μηχανισμού της μαγνητικής πέδησης δίνεται από τη σχέση (4.48) η οποία μπορεί όμως να αναλυθεί περαιτέρω με τη βοήθεια της διατήρησης της μαγνητικής ροής και της ροής μάζας μεταξύ της φωτοσφαιρικής βάσης και της ακτίνας Alfvén:

$$-\dot{J} = \frac{2}{3}\dot{M}_w r_A^2 \Omega \overset{(4.6)}{=} \frac{2}{3}\cdot\frac{r_A^2}{V_A}\Omega\left(4\pi\rho V_A^2 r_A^2\right) \overset{(4.35)}{=} \frac{2}{3}\cdot\frac{r_A^4 B_A^2}{V_A}\Omega \overset{(4.25)}{=} \frac{2}{3}\cdot\frac{R^4 B_0^2}{V_A}\Omega \propto \frac{2}{3}\cdot\frac{R^4}{V_A}\Omega^3$$

$$\text{ή ισοδύναμα } -\dot{\Omega} \propto \Omega^3. \tag{4.56}$$

Στο τελευταίο βήμα της πιο πάνω μαθηματικής πορείας, υποθέσαμε ότι το μαγνητικό δυναμό είναι γραμμικό, δηλαδή έγινε χρήση του νόμου δύναμης (4.50) με m = 1. Η ισχύς της σχέσης (4.56) αναμένεται συνεπώς περιορισμένη, καθώς οι παραδοχές που έχουν γίνει αφορούν αργά κυρίως περιστρεφόμενους αστέρες. Παρά το γεγονός αυτό, η σχέση (4.56) είναι ουσιώδους σημασίας από τη στιγμή που αποτελεί τον πρώτο νόμο πέδησης προβλεπόμενο από ένα θεωρητικό μοντέλο αλλά και παρατηρησιακά επιβεβαιωμένο.

Πιο συγκεκριμένα, μελετώντας ένα μεγάλο δείγμα αστέρων ηλιακού τύπου τα οποία είναι μέλη των Πλειάδων (~ 100 Myr) και Υάδων (~ 600 Myr), ο Skumanich (1972) σύγκρινε την αφθονία τους σε λίθιο, τη λαμπρότητά τους μέσω της γραμμής εκπομπής του ιονισμένου ασβεστίου και τη γραμμική ταχύτητα περιστροφής τους, v (η εφαπτομενική δηλαδή ταχύτητα στον ισημερινό V_φ), με τις αντίστοιχες ποσότητες που παρατηρούνται σήμερα στον Ήλιο και οδηγήθηκε στον ακόλουθο νόμο εξέλιξης:

$$v(t) = c_{sk} t^{-1/2}, \tag{4.57}$$

όπου c_{sk} η σταθερά του Skumanich η οποία προσδιορίζεται με κατάλληλη βαθμονόμηση και θα μας απασχολήσει στην αμέσως επόμενη υποενότητα. Μια απλή παραγώγιση του νόμου (4.57) ως προς το χρόνο, εύκολα οδηγεί στη σχέση dv/dt = -($1/2c_{sk}^2$)v^3 ή ισοδύναμα στη σχέση dΩ/dt = - ($R^2/2c_{sk}^2$)$\Omega^3 \propto \Omega^3$, εφόσον ισχύει $v = \Omega R$. Επομένως, *ο νόμος του Skumanich (1972) είναι πλήρως συμβατός με το μοντέλο των Weber & Davis (1967)* μέσω της επάγομενης συνέπειας (4.56). Η περιορισμένη του όμως ισχύς έδωσε κίνητρο στην περαιτέρω διερεύνηση γενικευμένων νόμων πέδησης της ακόλουθης μορφής:

$$-\dot{\Omega} = C_{br}\Omega^a, \tag{4.58}$$

όπου C_{br} > 0 σταθερά η οποία, όπως θα δούμε στη συνέχεια, εξαρτάται από τις θεμελιώδεις φυσικές παραμέτρους του αστέρα, το ρυθμό απώλειας μάζας, καθώς και από τη δομή και τη γεωμετρία του (πολοειδούς) μαγνητικού πεδίου. Στην πραγματικότητα, η σταθερά C_{br} δεν είναι ανεξάρτητη από τον εκθέτη a, ο οποίος εκφράζει το βαθμό συσχέτισης μεταξύ της πέδησης και της γωνιακής ταχύτητας του αστέρα, και συνεπώς η βαθμονομησή της είναι αποδεκτή κάτω από συγκεκριμένες τιμές του a. Έμμεσα λοιπόν ο κυριότερος ενδεχομένως παράγοντας που καθορίζει τόσο το συντελεστή C_{br} όσο και τον εκθέτη a είναι η γωνιακή ταχύτητα.

Η θεωρητική προσέγγιση των Mestel & Spruit (1987) προβλέπει ότι ο εκθέτης λαμβάνει την τιμή a = 2.6 ανεξάρτητα από την ταχύτητα περιστροφής του αστέρα, υποθέτοντας όμως ότι η πυκνότητα του αστρικού ανέμου είναι ανάλογη της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Στην περίπτωση που τα δύο πιο πάνω φυσικά μεγέθη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, ο εκθέτης προσεγγίζει την τιμή a = 1.9 για μικρές σχετικά ταχύτητες (1-10 Ω_Θ) και φθίνει ισχυρά μέχρι την τιμή a = -2.5 όσο η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται (10-80 Ω_Θ). Το ενδεχόμενο παρουσίας μικρότερων τιμών από την a = 3 φαίνεται επίσης να υποστηρίζεται τόσο από πρόσφατα θεωρητικά μοντέλα όσο και από παρατηρησιακά δεδομένα με πιθανότερη την a = 2 για μεσοταχείς περιστροφείς (π.χ. Charbonneau 1992, Keppens et al. 1995, Mayor & Mermilliod 1991) και την τιμή a = 1 να είναι πλέον ευρέως αποδεκτή για ιδιαίτερα γρήγορους περιστροφείς, καθιερώνοντας καθεστώς κορεσμού (π.χ. Vilhu & Moss 1986, Mestel & Spruit 1987, Vilhu & Walter 1987, Taam & Spruit 1989, Stepien 1991, Pizzolato et al. 2003).

Πιο συγκεκριμένα, οι Mestel & Spruit (1987) αναφέρουν ότι το φαινόμενο αυτό θα μπορούσε να προκληθεί από την υπερβολική εναπόθεση υλικού στη νεκρή ζώνη, ενώ οι Taam & Spruit (1989) εξαιτίας της πολύπλοκης δομής του μαγνητικού πεδίου κάτω από υψηλές ταχύτητες. Θυμίζουμε εδώ ότι το φαινόμενο του κορεσμού έχει παρατηρηθεί από τους Pizzolato et al. (2003) ως μια τιμή σταθεροποίησης της φωτεινότητας των αστέρων ηλιακού τύπου στις ακτίνες X όταν η περίοδος περιστροφής πλησίαζε τις 2-3 d. Εξαιρετικό επίσης ενδιαφέρον παρουσιάζουν στατιστικές μελέτες οι οποίες προβλέπουν το βέλτιστο νόμο δύναμης, εξετάζοντας την τροχιακή εξέλιξη διπλών αστρικών συστημάτων με βάση τις σημερινές παρατηρούμενες ιδιότητες των βραχυπερίοδων ομάδων τους. Όλες οι μελέτες αυτές έχουν δείξει ότι ο εκθέτης a πρέπει να βρίσκεται πολύ κοντά στο καθεστώς κορεσμού, όπως π.χ. a = 1.6 (Vilhu 1992), a = 1.3 (Ivanova & Taam 2003), a = 1.2 (Rucinski 1983) και a = 0.5 (van't Veer & Maceroni 1988). Σε κάθε περίπτωση ***ο νόμος πέδησης αναμένεται εξαιρετικά ασθενής****, υποδηλώνοντας την αποδυνάμωση της μαγνητικής πέδησης με την αύξηση της γωνιακής ταχύτητας*.

Στη γενικότερη μορφή του, ο νόμος απώλειας στροφορμής (4.54) είναι πλήρως συμβατός με το νόμο πέδησης (4.58), δίνοντας έτσι φυσική σημασία τόσο στο συντελεστή C_{br} όσο και στον εκθέτη a. Η άμεση σύνδεσή τους παρέχει επίσης τη δυνατότητα προσδιορισμού τους, στηριζόμενοι σε παρατηρησιακά δεδομένα και κατάλληλες παραδοχές. Υϊοθετώντας λοιπόν τη σύσταση των Kawaler (1988) και Allain (1998) περί αποδοχής της τιμής n = 3/2 ως αντιπροσωπευτικής για μια μέση γεωμετρία σχετικά με την τοπολογία του μαγνητικού πεδίου και συνδυάζοντας τη σχέση (4.55), ο νόμος (4.54) απλουστεύεται τελικά σημαντικά, καθώς δεν εξαρτάται πλέον από το ρυθμό απώλειας μάζας:

$$\boxed{\dot{\Omega} = -\frac{K_{kaw}}{I_{conv}}\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-\frac{1}{2}}\Omega^{1+2m}}. \tag{4.59}$$

Εξισώνοντας τους νόμους (4.58) και (4.59), οδηγούμαστε στις δύο ακόλουθες σχέσεις ισοδυναμίας οι οποίες μας εξασφαλίζουν την εκτίμηση των ελεύθερων παραμέτρων:

$$C_{br} \equiv \frac{K_{kaw}}{I_{conv}}\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad a \equiv 1+2m. \tag{4.60}$$

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες πραγματοποιήθηκε αλματώδης πρόοδος σχετικά με την ανάπτυξη αριθμητικών μοντέλων τα οποία λαμβάνουν πλέον υπόψη τους τη διαφορική περιστροφή του περιβλήματος μεταφοράς σε σχέση με εκείνη του πυρήνα ακτινοβολίας αστέρων ηλιακού τύπου (π.χ. Krishnamurthi et al. 1997, Allain 1998, Irwin & Bouvier 2009). Το φαινόμενο αυτό περιπλέκει ακόμα περισσότερο την κατάσταση, καθώς η στροφορμή δεν διαχέεται μόνο προς το τον μεσοαστρικό χώρο αλλά μεταφέρεται μεταξύ των δύο πιο πάνω ζωνών του εσωτερικού των ψυχρών αστέρων. Αν και στο θέμα αυτό θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στην αμέσως επόμενη υποενότητα, σημειώνουμε ότι η μεταφορά στροφορμής επιδρά καθοριστικά στην επιλογή και τη βαθμονόμηση των νόμων πέδησης όταν αυτή πραγματοποιείται σε χρονικές κλίμακες εκατοντάδων Myr, οδηγώντας έτσι στην ανάγκη υϊοθέτησης τριών τουλάχιστον τιμών του εκθέτη a (δηλαδή a = 3, 2 και 1) με εναλλαγή η οποία λαμβάνει χώρα κάτω από κατάλληλα κριτήρια (π.χ. Barnes & Sofia 1996, Allain 1998). Ειδικότερα μάλιστα κατά τη μετάβαση στο καθεστώς κορεσμού, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι το κριτήριο είναι ισχυρά εξαρτώμενο από τη μάζα (π.χ. Pinsonneault et al. 1989, Barnes & Sofia 1996, Krishnamurthi et al. 1997, Allain 1998).

3.3. Παρατηρησιακά Δεδομένα και Βαθμονόμηση

Η υϊοθέτηση της κατάλληλης εκείνης προσέγγισης η οποία θα μπορεί να είναι όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστική, δηλαδή να εκτιμά τιμές σε καλή συμφωνία με εκείνες που προβλέπονται από τα πολύπλοκα θεωρητικά μοντέλα και συνάμα ευέλικτη όσον αφορά την τροποποίηση των παραμέτρων ανάλογα με τις εκάστοτε συνθήκες, αποτελεί όχι μόνο αναγκαιότητα για την επιτυχή παραμετροποίηση του μηχανισμού της μαγνητικής πέδησης αλλά και μια πρόκληση για το παρόν διδακτορικό. Όπως είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα, μια από τις πιο επιτυχείς επιλογές αφορά ημιεμπειρικές σχέσεις οι οποίες μπορούν και συνδυάζουν με ιδιαίτερα αποδοτικό τρόπο στοιχεία της θεωρίας με παρατηρησιακά αποτελέσματα τα οποία έχουν προκύψει από μακροχρόνιες μελέτες σε αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων που αποτελούν μέλη νεαρών ανοικτών σμηνών.

3.3.1. Προσαρμογή Μοντέλων χωρίς Διαφορική Περιστροφή

Η μελέτη της παρούσας διδακτορικής διατριβής έχει επικεντρωθεί στους αστέρες ηλιακού τύπου, καθώς ο μηχανισμός της μαγνητικής πέδησης δεν έχει διερευνηθεί αρκετά στους αστέρες προγενέστερων φασματικών τύπων. Ο λόγος έγκειται αφενός στη διαφορετική φύση του μηχανισμού παραγωγής των μαγνητικών πεδίων στους θερμούς αστέρες από εκείνη των ψυχρών, καθώς διαθέτουν περίβλημα ακτινοβολίας το οποίο δεν μπορεί να συντηρήσει το μαγνητικό πεδίο με τον παραδοσιακό τρόπο των ρευμάτων μεταφοράς. Αφετέρου, έγκειται στο περιορισμένο χρονικό διάστημα ζωής των αστέρων αυτών τα οποία είναι μαζικά και συνεπώς η συγκριτική μελέτη της στροφορμής τους σε διάφορες χρονικές περιόδους μπορεί να είναι παραπλανητική. Εξαιτίας της πολύ μεγάλης μάζας τους, οι θερμοί αστέρες χαρακτηρίζονται από μεγάλη στροφορμή με αποτέλεσμα η σχετική της απώλεια να είναι πάντοτε μικρή. Παρά το γεγονός αυτό, εκτιμάται θεωρητικά ότι αστέρες τύπου Wolf-Rayet πρέπει να διαθέτουν ισχυρά μαγνητικά πεδία ώστε, επικουρικά, να συνεισφέρουν μαζί με την πίεση ακτινοβολίας στις μεγάλες παρατηρούμενες τιμές της απώλειας μάζας.

Σε αντίθεση λοιπόν με τους θερμούς αστέρες οι οποίοι παρατηρούνται σήμερα να διαθέτουν ισημερινές ταχύτητες της τάξης των 100 km/s, οι αστέρες με φασματικούς τύπους μεταγενέστερους του F0 χαρακτηρίζονται από κατά πολύ μικρότερες ταχύτητες της τάξης των 2 km/s. Στηριζόμενος σε παρατηρησιακά δεδομένα του Kraft (1967), ο Skumanich (1972) παρατήρησε τη μεγάλη πτώση της μέσης μετρούμενης ταχύτητας αστέρων της κατηγορίας αυτής, από 20 σε 5 km/s περίπου, μέσα σε ένα διάστημα των 500 Myr το οποίο χωρίζει ηλικιακά τα σμήνη των Πλειάδων (~ 100 Myr) και Υάδων (~ 600 Myr). Το γεγονός αυτό επιβεβαιώθηκε αργότερα από άλλες παρατηρησιακές μελέτες, διευρύνοντας το χρονικό ορίζοντα με την εισαγωγή του νεαρότερου αστρικού σμηνους *a* Per (~ 50 Myr) στο οποίο η μέση μετρούμενη ταχύτητα αγγίζει τα 200 km/s (π.χ. Smith 1979, Soderblom 1982, Soderblom 1983, Stauffer 1987, Stauffer & Hartmann 1987), οδηγώντας πλέον στο συμπέρασμα της ιδιαίτερα έντονης απώλειας στροφορμής των πρωτοαστέρων κατά τα μέσα τουλάχιστον στάδια της διαδρομής Hayashi.

Αποσκοπώντας σε ένα απλό μοντέλο για την εκτίμηση του ρυθμού απώλειας στροφορμής εξαιτίας του μηχανισμού της μαγνητικής πέδησης, ο Vilhu (1982) προτείνει την κατάλληλη βαθμονόμηση του νόμου Skumanich (4.57) με τη βοήθεια της μέσης παρατηρούμενης ισημερινής ταχύτητας αστέρων ηλιακού τύπου τα οποία είναι μέλη ανοικτών σμηνών γνωστής ηλικίας. Η απώλεια στροφορμής, dJ/dt, εκτιμάται συγκριτικά με τον μέσο τρέχοντα ρυθμό απώλειας που παρατηρείται σε ένα σμήνος και πιο συγκεκριμένα με εκείνο των Πλειάδων, $(dJ/dt)_{Pl}$. Οι απαιτούμενες εμπλεκόμενες παράμετροι είναι η περίοδος περιστροφής του αστέρα, P, και ο εκθέτης a στον οποίο υψώνεται η τελευταία. Η πρώτη παράμετρος δηλώνεται ως κλάσμα των 3 d, καθώς η τιμή αυτή αντιστοιχεί στη μέση παρατηρούμενη ισημερινή ταχύτητα των 20 km/sec, ενώ η δεύτερη έχει τεθεί εμπειρικά ώστε να διατηρείται η συμβατότητα του νόμου με αστέρες οι οποίοι περιστρέφονται με περιόδους μικρότερες των 3 d:

$$\dot{J} = \dot{J}_{Pl}\left(\frac{P}{3}\right)^{-a}. \tag{4.61}$$

Ο μέσος ρυθμός απώλειας στροφορμής των αστέρων μεταγενέστερων φασματικών τύπου στο σμήνος των Πλειάδων, $(\mathrm{d}J/\mathrm{d}t)_{\mathrm{Pl}}$, μπορεί να υπολογιστεί εύκολα κάνοντας χρήση της σχέσης (4.55) για ηλιακές παραμέτρους, δηλαδή $(\mathrm{d}J/\mathrm{d}t)_{\mathrm{Pl}} = I_{conv,\Theta}(\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t)_{\mathrm{Pl}} = k_{\Theta}^2 M_{\Theta} R_{\Theta}(\mathrm{d}v/\mathrm{dt})_{\mathrm{Pl}}$ με $(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)_{\mathrm{Pl}} = -(1/2c_{sk}^2)v_{\mathrm{Pl}}^3$, σύμφωνα με το νόμο του Skumanich (4.57), οδηγώντας τελικά στην ακόλουθη σχέση (Nanouris et al. 2011):

$$\dot{J}_{Pl} = -\frac{k_{\odot}^2 M_{\odot} R_{\odot} v_{Pl}^3}{2c_{sk}^2}, \tag{4.62}$$

όπου $c_{sk} = v_{\mathrm{Pl}} \cdot t_{\mathrm{Pl}}^{-1/2}$ η σταθερά του Skumanich η οποία μπορεί πλέον να προσδιοριστεί με βάση την ηλικία του σμήνους των Πλειάδων, t_{Pl}, και τη μέση παρατηρούμενη ταχύτητα των αστέρων ηλιακού τύπου, v_{Pl}, τα οποία είναι μέλη του. Είναι προφανές ότι η σχέση (4.62) μας προσφέρει τη δυνατότητα άμεσης βαθμονόμησης του νόμου (4.61) ανάλογα με τις τρέχουσες παρατηρησιακές εξελίξεις και έχει ισχύ για οποιοδήποτε ανοικτό σμήνος διαθέτουμε αξιόπιστες πληροφορίες.

Ο Vilhu (1982), στηριζόμενος στα πρόσφατα ευρήματα της εποχής του (Skumanich 1972, Smith 1979, Soderblom 1982) σχετικά με την ηλικία των Πλειάδων (~ 70 Myr), έθεσε την προσεγγιστική τιμή των t_{Pl} = 50 Myr η οποία οδηγεί σε ρυθμό απώλειας στροφορμής ίσο με $(\mathrm{d}J/\mathrm{d}t)_{\mathrm{Pl}} = -2\times10^{41}$ $\mathrm{gr \cdot cm^2 sec^{-1} yr^{-1}}$ περίπου. Μια δεκαετία αργότερα, νεότερες μελέτες των Basri et al. (1996), οι οποίοι διερεύνησαν την αφθονία σε λίθιο ορισμένων αμυδρών αστέρων μελών των Πλειάδων, κατέληξαν σε μια αρκετά μεγαλύτερη ηλικία της τάξης των 115 Myr. Αναβαθμονόμηση του νόμου (4.61), θέτοντας τη μέση ηλικία της τάξης των t_{Pl} = 100 Myr η οποία υϊοθετείται ευρέως πλέον από την επιστημονική κοινότητα (π.χ. Soderblom et al. 1993, Queloz et al. 1998), οδηγεί στον υποδιπλασιασμό του αρχικά εκτιμώμενου ρυθμού απώλειας στροφορμής, δηλαδή στην τιμή $(\mathrm{d}J/\mathrm{d}t)_{\mathrm{Pl}} = -10^{41}$ $\mathrm{gr \cdot cm^2 sec^{-1} yr^{-1}}$. Την τιμή αυτή θα αποδεχθούμε σε όλη την υπόλοιπη πορεία της παρούσας διατριβής.

Ο προτεινόμενος από τον Vilhu (1982) νόμος απώλειας στροφορμής είναι πλήρως συμβατός με το νόμο πέδησης (4.58). Αντικαθιστώντας την ποσότητα $\mathrm{d}J/\mathrm{d}t$ από τη σχέση (4.55), την ποσότητα $(\mathrm{d}J/\mathrm{d}t)_{\mathrm{Pl}}$ από τη σχέση (4.62) και θέτοντας την περίοδο ίση με το λόγο $P = 2\pi/\Omega$, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την ισοδύναμη μορφή του συντελεστή C_{br} ως εξής (Nanouris et al. 2011):

$$C_{br} = \frac{v_{Pl}^3}{2R_{\odot}c_{sk}^2}\left(\frac{259200}{2\pi}\right)^a \quad \text{σε sec}^{a-2}. \tag{4.63}$$

Εκμεταλλευόμενοι νεότερες παρατηρησιακές και στατιστικές μελέτες, οι van't Veer & Maceroni (1989) επικεντρώθηκαν στα αποτελέσματα ερευνών σχετικά με νεαρά ανοικτά σμήνη αστέρων τα οποία είχαν συγκρίσιμες ηλικίες ώστε να περιοριστεί η χρονική περίοδος της δράσης ενός συγκεκριμένου νόμου πέδησης. Πιο συγκεκριμένα, προτείνουν τον προσδιορισμό των συντελεστών C_{br} άμεσα από τη σχέση (4.58), κάτω από την παραδοχή ότι η μέση ισημερινή ταχύτητα περιστροφής των αστέρων ηλιακού τύπου τα οποία είναι μέλη του γηραιότερου από τα δύο σμήνη προκύπτει ως αποτέλεσμα της μαγνητικής πέδησης των αντίστοιχων αστέρων μελών του νεότερου σμήνους. Υποθέτοντας λοιπόν ότι Ω_1 και Ω_2 είναι η μέση γωνιακή ταχύτητα των εξεταζόμενων αστέρων στο νεότερο και γηραιότερο σμήνος με αντίστοιχες ηλικίες t_1 και t_2, μια απλή ολοκλήρωση του νόμου (4.58) οδηγεί στην ακόλουθη σχέση (Nanouris et al. 2011):

$$C_{br} = \frac{\Omega_2^{1-a} - \Omega_1^{1-a}}{(a-1)(t_2 - t_1)}. \tag{4.64}$$

Με τα δεδομένα της εποχής τους, οι van't Veer & Maceroni (1989) επιχειρούν να συγκρίνουν το καθεστώς ισημερινών ταχυτήτων που παρατηρείται στα σμήνη *α* Per και Πλειάδων. Σύμφωνα με τον Stauffer (1987), η μέση ταχύτητα των αστέρων ηλιακού τύπου στο πρώτο από τα δύο πιο πάνω σμήνη (~ 50 Myr) εκτιμάται στα 200 km/sec και μειώνεται στα 10 km/sec περίπου για το δεύτερο (~ 70 Myr) μέσα σε ένα χρονικό διάστημα των 20 Myr. Υϊοθετώντας τη σύγχρονη αντίληψη των 100 Myr ως ηλικία των Πλειάδων, η διαφορά αυτή αυξάνεται στα 50 Myr, τη στιγμή μάλιστα που για λόγους απλούστευσης οι van't Veer & Maceroni (1989) τοποθέτησαν προσεγγιστικά την τιμή των 10 Myr με αποτέλεσμα την πρόβλεψη μεγαλύτερων συγκριτικά σταθερών βαθμονόμησης και συνεπώς ισχυρότερων νόμων πέδησης.

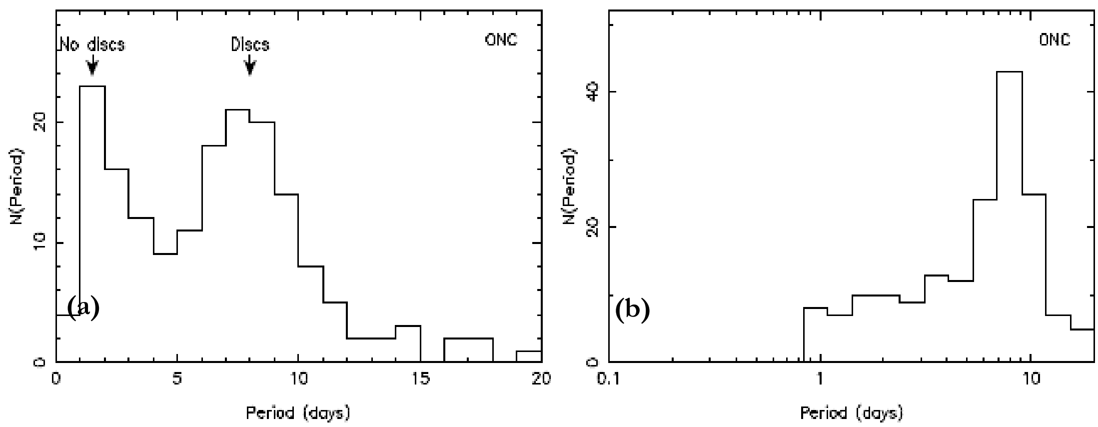
3.3.2. Προσαρμογή Μοντέλων με Διαφορική Περιστροφή

Ο τρόπος βαθμονόμησης των πιο πάνω μοντέλων στηρίζεται στη σιωπηρή υπόθεση της περιστροφής των αστέρων ως άκαμπτα στερεά σώματα, κάτι το οποίο δεν μπορεί να τεθεί αυστηρά ως γεγονός. Αντιθέτως, υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις για την παρουσία διαφορικής περιστροφής στο εσωτερικό τους η οποία φαίνεται να λαμβάνει χώρα από τα πρώτα στάδια της δημιουργίας του πυρήνα ακτινοβολίας μέχρι την είσοδό τους στην κύρια ακολουθία. Στην περίπτωση του Ήλιου για παράδειγμα, τα ηλιοσεισμολογικά δεδομένα που διαθέτουμε υποστηρίζουν την απουσία διαφορικής περιστροφής μέχρι τουλάχιστον το βάθος των 0.2 $R_\odot$ το οποίο περιλαμβάνει ένα μικρό τμήμα της εξωτερικής ζώνης του πυρήνα (π.χ. Libbrecht 1988, Rhodes et al. 1990, Tomczyk et al. 1995). Το φαινόμενο αυτό καλείται συχνά ***αποσύζευξη πυρήνα-περιβλήματος (core-envelope decoupling)*** και μπορεί να οδηγήσει στη μεταφορά στροφορμής μεταξύ των δύο περιοχών με σημαντικές συνέπειες στην τελική βαθμονόμηση των νόμων πέδησης.

Η εικόνα που έχουμε σχηματίσει από τις λεπτομερείς παρατηρήσεις των ανοικτών αστρικών σμηνών παρουσιάζει μια ομάδα ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων ηλιακού τύπου η οποία δεν ακολουθεί το νόμο του Skumanich (1972) και έχει οδηγήσει στον αναπροσδιορισμό των αρχικών μας υποθέσεων. Πιο συγκεκριμένα, η ομάδα αυτή είναι ιδιαίτερα εμφανής στις ηλικίες των 30-50 Myr, διατηρείται αποκλειστικά στους πολύ μεταγενέστερους φασματικούς τύπους K, M και απουσιάζει στους τύπους F, G οδηγούμενοι στις ηλικίες των 70-100 Myr, ενώ στα 500-700 Myr η παρουσία τους είναι οριακά ορατή στους αστέρες τύπου M και μόνο (π.χ. Stauffer & Hartmann 1987, Soderblom et al. 1993). Η πιθανότερη ερμηνεία των ευρημάτων αυτών αφορά την αποσύζευξη πυρήνα-περιβλήματος η οποία αναμένεται στους φασματικούς τύπους F, G, καθώς αστέρες K, M χαρακτηρίζονται από εσωτερικό πλήρους μεταφοράς. Εφόσον το φαινόμενο αυτό είναι υπαρκτό, η μαγνητική πέδηση θα επιδρά τότε στο περίβλημα μεταφοράς με τον πυρήνα ακτινοβολίας να μην αντιλαμβάνεται άμεσα τις συνέπειες της πέδησης και να συνεχίζει να περιστρέφεται με την ίδια περίπου ταχύτητα. Μεταφορά στροφορμής θα λαμβάνει τότε χώρα η οποία θα προέρχεται από τον πυρήνα προς το εξωτερικό περίβλημα *με άμεσο επακόλουθο την δυνητικά ηπιότερη απώλεια στροφορμής* όσο ένα μέρος αυτής θα αναπληρώνεται από το εσωτερικό.

Πρόκληση των σημερινών θεωρητικών μοντέλων τα οποία μελετούν την εξέλιξη της στροφορμής είναι *η ερμηνεία της κατανομής ταχυτήτων δύο κορυφών που παρατηρείται στα νεαρά αστρικά σμήνη* και χωρίζει τους αστέρες σε ***αργούς*** και ***ταχείς περιστροφείς***. Τα μοντέλα αυτά αποδέχονται τρεις κύριους παράγοντες να διαμορφώνουν τη στροφορμή ενός αστέρα κατά την πορεία του προς την κύρια ακολουθία. Ο πρώτος από αυτούς αφορά την περίοδο κατά την οποία ο αστέρας είναι συζευγμένος με ένα δίσκο προσαύξησης υλικού (disk locking), φάση η οποία σχετίζεται άμεσα με την κατανομή αρχικών ταχυτήτων των πρωτοαστέρων τύπου T Tauri. Ο δεύτερος παράγοντας αφορά τους νόμους πέδησης οι οποίοι καθορίζουν το ρυθμό απώλεια στροφορμής από τη στιγμή που ο μηχανισμός της μαγνητικής πέδησης αρχίσει να ενεργεί και, τέλος, ο τρίτος παράγοντας σχετίζεται με την αποδοχή ή όχι της υπόθεσης διαφορικής περιστροφής μεταξύ πυρήνα και περιβλήματος, τουλάχιστον σε ορισμένες φάσεις της ζωής του.

Η φάση της περιστροφής κάτω από την επίδραση δίσκου προσαύξησης κατά τα πρώτα χρόνια της ζωής ενός αστέρα αποτελεί αντικείμενο μελέτης, καθώς οι συνθήκες που το προκαλούν αλλά και οι συνέπειες τις οποίες επιφέρει δεν έχουν πλήρως ακόμα εξακριβωθεί (π.χ. Koenigl 1991). Παρατηρησιακές μελέτες που αφορούν κυρίως το νεφέλωμα του Ωρίωνα (~ 1 Myr) έχουν δείξει ότι οι T Tauri πρωτοαστέρες διακρίνονται σε δύο ομάδες όσον αφορά την ταχύτητα περιστροφής τους (Σχήμα IV.3). Οι ***κλασικοί (classical) T Tauri πρωτοαστέρες*** χαρακτηρίζονται από σημαντική εκπομπή στο υπέρυθρο, στοιχείο ένδειξης παρουσίας δίσκου προσαύξησης, με περιόδους μεγαλύτερες των 4 d και διάμεσο η οποία εκτιμάται στις 8.3 d περίπου. Αντίθετα, οι ***T Tauri πρωτοαστέρες ασθενών γραμμών (weak-lined ή naked)*** χαρακτηρίζονται από γραμμές στο οπτικό με πολύ μικρότερη ένταση σε σχέση με εκείνη των κλασικών T Tauri, αμελητέα εκπομπή στο υπέρυθρο, ενώ διαθέτουν περιόδους εύρους μεταξύ 2 και 16 d διαμέσου στις 2.6 d περίπου (Edwards et al. 1993). Ας σημειωθεί ότι οι δύο πιο πάνω ομάδες φαίνεται να μην είναι πλήρως ανεξάρτητες μεταξύ τους με τη δεύτερη να αποτελεί μετεξέλιξη της πρώτης όταν ο πρωτοαστέρας έχει αποδεσμευτεί πλέον από το δίσκο προσαύξησης.



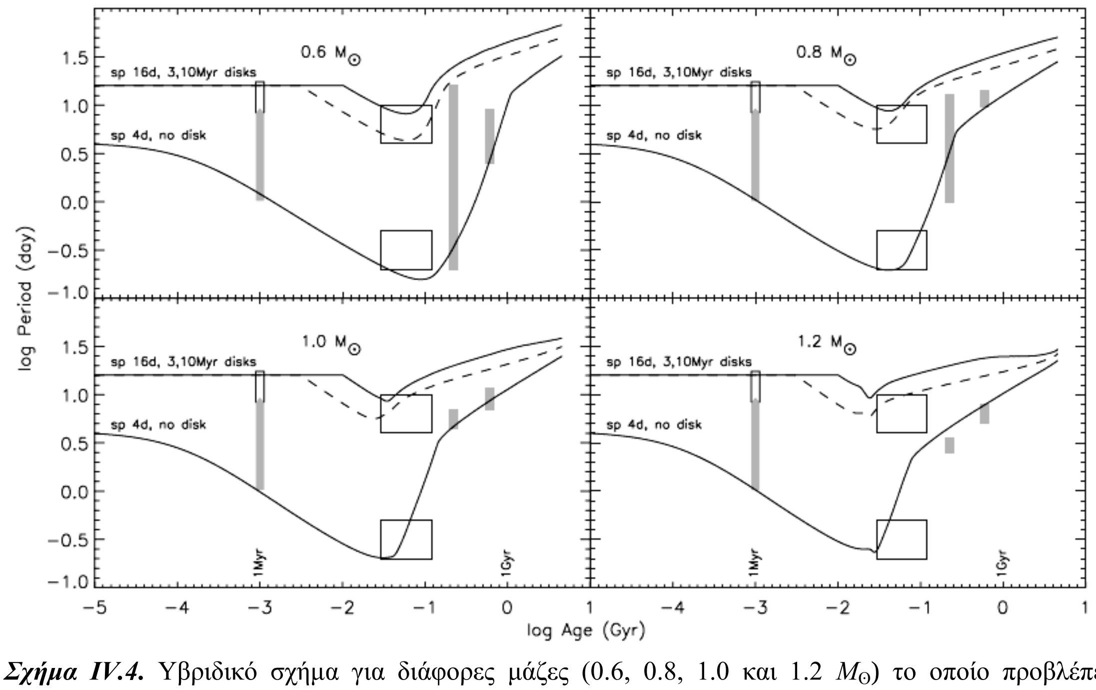
Σχήμα IV.3. Η κατανομή της περιόδου περιστροφής η οποία παρατηρείται στους πρωτοαστέρες τύπου T Tauri του νεφελώματος του Ωρίωνα σε γραμμική (a) και λογαριθμική κλίμακα (b). Πρωτοαστέρες με περίοδο κοντά στις 2.6 d δεν διαθέτουν δίσκο προσαύξησης σε αντίθεση με εκείνους που έχουν περίοδο κοντά στις 8.3 d (Irwin & Bouvier 2009).

Η διάρκεια της σύζευξης του αστέρα με τον δίσκο προσαύξησης παίζει καθοριστικό ρόλο στην πρόβλεψη της κοινής παρουσίας της αργά και ταχέως περιστρεφόμενης ομάδας αστέρων των νεαρών σμηνών. Υποθέτοντας ότι κατά τη διαδρομή Hayashi η στροφορμή διατηρείται, η συστολή στην οποία υπόκειται ο πρωτοαστέρας οδηγεί στην αύξηση της ταχύτητας περιστροφής με ιδιαίτερα γρήγορο ρυθμό. Είναι λοιπόν προφανές ότι οι βραδέως περιστρεφόμενοι αστέρες ευνοούνται από μεγάλους χρόνους σύζευξης δίσκου και πρωτοαστέρα, ενώ η ομάδα των ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων προβλέπεται ευκολότερα όσο νωρίτερα πραγματοποιηθεί η αποδέσμευσή τους.

Το γεγονός αυτό μπορεί να εξηγηθεί καλύτερα υπενθυμίζοντας ότι η παρουσία του δίσκου επιβάλλει τη στροφορμής της η οποία δεν μπορεί να μεταβληθεί εύκολα εξαιτίας της μεγάλης μάζας αλλά κυρίως της ακτίνας που φέρει ο δίσκος. Ακόμα όμως και αν υποθέσουμε ότι ο πρωτοαστέρας είναι ικανός να αυξήσει την ταχύτητά του στη φάση συστολής με την παρουσία περιαστρικού δίσκου, μηχανισμοί απώλειας στροφορμής μέσω πίδακα φαίνεται ότι είναι τόσο ισχυροί ώστε να μπορούν να την εξισορροπούν. Επομένως, για το διάστημα σύζευξης δίσκου και αστέρα, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς σημαντική απόκλιση από την πραγματικότητα ότι η ταχύτητα του πρωτοαστέρα παραμένει σταθερή.

Λεπτομερείς εκτιμήσεις του χρόνου ζωής των πρωτοαστρικών δίσκων με βάση τα διαθέσιμα παρατηρησιακά δεδομένα των νεαρών ανοικτών αστρικών σμηνών πραγματοποιήθηκαν από τους Krishnamurthi et al. (1997) οι οποίοι χρησιμοποίησαν μοντέλα εξέλιξης με ή χωρίς την υπόθεση διαφορικής περιστροφής μεταξύ πυρήνα και περιβλήματος και αρχική περίοδο ίση με 10 d. Ειδικά για την πρώτη περίπτωση, η ομάδα των ταχέως περιστρεφόμενων μελών φαίνεται να εξηγείται ικανοποιητικά κάτω από την παρουσία δίσκων ζωής 1-3 Myr όταν χρόνοι της τάξης των 20-30 Myr φαίνεται να απαιτούνται για τη δεύτερη περίπτωση. Η ομάδα των βραδέως περιστρεφόμενων μελών, όπως άλλωστε εξηγήθηκε και πιο πάνω, ευνοείται από αρκετά μεγαλύτερους χρόνους ζωής της τάξης των 3-10 Myr για την πρώτη περίπτωση και τουλάχιστον 10 Myr για τη δεύτερη αντίστοιχα.

Εκτενείς μελέτες πραγματοποιήθηκαν αργότερα και από τους Barnes et al. (2001) οι οποίοι, σε αντίθεση με τους Krishnamurthi et al. (1997), διερεύνησαν τρεις ανεξάρτητες αρχικές περιόδους των 4, 8.5 και 16 d. Η επίδραση της κατανομής αρχικών ταχυτήτων φάνηκε ικανή να ερμηνεύσει σε σημαντικό βαθμό την παρουσία τόσο των βραδέως όσο και των ταχέως περιστρεφόμενων μελών ανοικτών αστρικών σμηνών. Ιδιαίτερα, μοντέλα τα οποία λάμβαναν υπόψη την παρουσία διαφορικής περιστροφής στο εσωτερικό του αστέρα, όχι όμως την ύπαρξη δίσκου προσαύξησης, αποδείχθηκαν επαρκή για την πρόβλεψη της ταχείας ομάδας αλλά όχι για την αντίστοιχη βραδεία, όσο τουλάχιστον χρησιμοποιήθηκαν μεγάλες αρχικές περίοδοι. Αντίθετα, η ομάδα αυτή ερμηνεύτηκε με ιδιαίτερα ικανοποιητικό τρόπο κάτω από την παρουσία δίσκου με χρόνο ζωής της τάξης των 3-10 Myr, τιμή η οποία αυξήθηκε στα 10-20 Myr για την περίπτωση περιστροφής στερεού σώματος. Οι Barnes et al. (2001) προτείνουν ένα υβριδικό σχήμα κατά το οποίο οι ταχείς περιστροφείς προκύπτουν από πρωτοαστέρες T Tauri περιόδου 4 d χωρίς την παρουσία δίσκου (ή χρόνου ζωής της τάξης μόλις των 1-3 Myr), ενώ οι αντίστοιχοι αργοί πρέρχονται από πρωτοαστέρες περιόδου 16 d με δίσκους ζωής των 3-10 Myr (Σχήμα IV.4). Επισημαίνουν μάλιστα πως η ανάγκη διαφορικής περιστροφής στα πρώτα στάδια της πορείας προς την κύρια ακολουθία σε συνδυασμό με την αποκατάσταση της περιστροφής στερεού σώματος στα τελευταία στάδια οδηγούν σε μια χρονική κλίμακα σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος της τάξης των εκατοντάδων Myr.



Σχήμα IV.4. Υβριδικό σχήμα για διάφορες μάζες (0.6, 0.8, 1.0 και 1.2 $M_{\odot}$) το οποίο προβλέπει διαφορική περιστροφή μεταξύ πυρήνα και περιβλήματος και απαιτεί αρχική περίοδο 4 d και 16 d για την ερμηνεία της ομάδας των ταχέως και βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων αντίστοιχα (Barnes et al. 2001).

Η κατάλληλη μορφή του νόμου πέδησης και ο βαθμός σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος είναι δύο παράγοντες απόλυτα αλληλένδετοι. Εφόσον υποθέτουμε μοντέλα με κοινό μηχανισμό απώλειας στροφορμής, η σταθερά βαθμονόμησης θα λαμβάνει διαφορετικές τιμές ανάλογα με την περίπτωση. Οι Krishnamurthi et al. (1997) και η Allain (1998) εξέτασαν διεξοδικά την επίδραση της διαφορικής περιστροφής στο εσωτερικό κατά την εξέλιξη ενός αστέρα και κατέληξαν σε σημαντικά συμπεράσματα σχετικά με τη χρονική κλίμακα μέσα στην οποία αναμένεται να ενεργεί η εσωτερική μεταφορά στροφορμής, το εύρος τιμών που αντιστοιχεί στην εκάστοτε σταθερά βαθμονόμησης, καθώς και τα κριτήρια κάτω από τα οποία οι παράμετροι του νόμου πέδησης μπορούν να διαφοροποιούνται.

Πιο συγκεκριμένα, η Allain (1998) επιλέγει να χρησιμοποιήσει ένα νόμο πέδησης της μορφής (4.59) σε τρεις διαφορετικές εκδοχές με τις παραμέτρους C_{br} και a να προσδιορίζονται μέσα από τη σχέση (4.60) θέτοντας δύο κρίσιμες τιμές στη γωνιακή ταχύτητα, Ω_{crit} και Ω_{sat}. Η πρώτη από αυτές εκτιμάται ως συνάρτηση των σταθερών βαθμονόμησης και σηματοδοτεί τη μετάβαση από τον κλασικό νόμο Skumanich (a = 3) σε έναν ασθενέστερο όπου ο εκθέτης υποβιβάζεται κατά μια μονάδα (a = 2). Ο νόμος αυτός φέρει συνήθως το όνομα των Mayor-Mermilliod εξαιτίας των παρατηρησιακών αποτελεσμάτων που δημοσίευσαν και υποστήριζουν την ισχύ του (Mayor & Mermilliod 1991). Αντίστοιχα, η δεύτερη κρίσιμη ταχύτητα αφορά τη μετάβαση στο καθεστώς κορεσμού που συζητήθηκε στις προγούμενες ενότητες και, συνεπώς, την υϊοθέτηση ενός ιδιαίτερα ασθενούς γραμμικού νόμου (a = 1). Η σταθερά K_{kaw} που εμφανίζεται στο γενικό νόμο απώλειας στροφορμής (4.54) και (4.59), τότε τροποποιείται και λαμβάνει τη μορφή K_{sk}, K_{mm} και K_{sat} για τις αντίστοιχες τρεις κατά σειρά εκδοχές:

- $C_{br} \equiv \frac{K_{sk}}{I_{conv}}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-\frac{1}{2}}$ όταν $a = 3$ και $\Omega < \Omega_{crit} = K_{mm}/K_{sk}$. (4.65)

- $C_{br} \equiv \frac{K_{mm}}{I_{conv}}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-\frac{1}{2}}$ όταν $a = 2$ και $\Omega_{crit} \le \Omega < \Omega_{sat}$. (4.66)

- $C_{br} \equiv \frac{K_{sat}}{I_{conv}}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-\frac{1}{2}}$ όταν $a = 1$, $\Omega \ge \Omega_{sat}$ και $K_{sat} = K_{mm}\Omega_{sat}$. (4.67)

Οι Krishnamurthi et al. (1997), θεωρώντας ότι ο νόμος των Mayor-Mermilliod θα μπορούσε να παραβλευθεί, επικεντρώθηκαν στη μελέτη του βαθμού επιρροής της γωνιακής ταχύτητας κορεσμού στα μοντέλα εξέλιξης που προβλέπουν την κατανομή ταχυτήτων των νεαρών αστρικών σμηνών. Ειδικότερα, η στατιστική περιγραφή της ομάδας των ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων κρίθηκε ως ένα ικανό εργαλείο περιορισμού του εύρους τιμών της Ω_{sat}, καθώς η διασπορά των ταχυτήτων της ομάδας αυτής είναι ιδιαίτερα διευρυμένη και μπορεί να αποδοθεί στην κατάλληλη ή όχι επιλογή της Ω_{sat}. Η ευαισθησία της ομάδας αυτής σε σχέση με την αποδοχή ή την απόρριψη της διαφορικής περιστροφής αποδείχθηκε μάλιστα πολύ μικρή, καθώς στο χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε να παραχθεί η παρατηρούμενη κατανομή επικρατεί η συστολή Hayashi κατά την οποία ο πυρήνας ακτινοβολίας αναπτύσσεται σταδιακά.

Θέτοντας μικρές τιμές της Ω_{sat}, ο ασθενής νόμος πέδησης (4.67) ενεργοποιείται άμεσα με αποτέλεσμα η απώλεια στροφορμής να είναι σχεδόν αμελητέα και τελικά η διάρκεια της παρουσίας των ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων να διαρκεί τόσο πολύ ώστε η κύρια ακολουθία να προσεγγίζεται με ιδιαίτερα μεγάλες ταχύτητες. Αντίθετα, υψηλές τιμές της Ω_{sat} οδηγούν σε αποδυνάμωση του νόμου (4.67) και συνεπώς στην υπερεκτίμηση της απώλειας στροφορμής μέσω του νόμου Skumanich (4.65). Οι Krishnamurthi et al. (1997), κάνοντας χρήση παλαιότερων εκτιμήσεων της $\Omega_{sat} \approx 45$-$75\ \Omega_{\Theta}$ (Jianke & Collier-Cameron 1993), έδειξαν ότι η ζωή των ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων έχει σύντομη διάρκεια και εξαφανίζεται αρκετά πριν την κύρια ακολουθία, γεγονός το οποίο απορρίπτει τις αρχικές αυτές υποθέσεις. Υϊοθετώντας λοιπόν τρεις μικρότερες τιμές των $5\ \Omega_{\Theta}$, $10\ \Omega_{\Theta}$ και $20\ \Omega_{\Theta}$ για τη μετάβαση στο καθεστώς κορεσμού, αποφαίνονται στην αποτελεσματικότερη προσαρμογή των διαθέσιμων δεδομένων, ειδικότερα όταν οι πιο πάνω τιμές εναλλάσονται ως συνάρτηση της μάζας, δηλαδή όταν ισχύει $\Omega_{sat} = \Omega_{sat}(M)$. Η επισήμανση αυτή γίνεται μάλιστα ακόμα πιο αναγκαία κάτω από τη διαπίστωση των ισχυρότερων ρυθμών πέδησης αστέρων μεγαλύτερης μάζας (Σχήμα IV.5a,b).

Η χρονική εξέλιξη και συμπεριφορά της ομάδας των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων αποτελεί, από την άλλη, ένα πολύ καλό εργαστήριο μελέτης της επιρροής που μπορεί να έχει το φαινόμενο της διαφορικής περιστροφής. Όπως ήδη εξηγήθηκε προηγουμένως, αστέρες χαρακτηριζόμενοι από χαλαρή σύζευξη μεταξύ πυρήνα και περιβλήματος ανατροφοδοτούν μέρος της χαμένης στροφορμής από τον πυρήνα με αποτέλεσμα την πρόβλεψη υψηλότερων ταχυτήτων κοντά στην κύρια ακολουθία σε σχέση με εκείνες που προβλέπουν τα μοντέλα περιστροφής στερεού σώματος. Όσον αφορά τα παρατηρησιακά δεδομένα, η προσαρμογή ευνοεί τη διαφορική περιστροφή, υποδηλώνοντας έτσι σημαντική απώλεια στροφορμής από τα πρώτα στάδια της διαδρομής Hayashi αλλά και την παρουσία μεγαλύτερων σταθερών βαθμονόμησης, K_{kaw}, ως αντιστάθμιση, εφόσον βέβαια ο νόμος πέδησης παραμένει ο ίδιος.

Η διάρκεια ζωής των πρωτοαστρικών δίσκων φαίνεται επίσης να ευνοεί το φαινόμενο της διαφορικής περιστροφής, καθώς στην αντίθετη περίπτωση προβλέπονται χρόνοι της τάξης των 20-30 Myr οι οποίοι θεωρούνται σχεδόν εξωπραγματικοί. Αγνοώντας πλήρως το φαινόμενο της μαγνητικής πέδησης, οι Krishnamurthi et al. (1997) έδειξαν μάλιστα ότι οι παρατηρούμενες κατανομές ταχυτήτων μπορούν να παραχθούν μόνο εφόσον ένας πρωτοαστέρας T Tauri αποδεσμευθεί από το δίσκο ήδη από τη γέννησή του, υπόθεση επίσης μη αποδεκτή. Κατέληξαν λοιπόν στο συμπέρασμα της αναγκαιότητας διαφορικής περιστροφής με απαραίτητη χρονική κλίμακα σύζευξης τουλάχιστον της τάξης των 70-100 Myr και σίγουρα μικρότερη της ηλικίας του Ήλιου.

Ας σημειωθεί, τέλος, ότι η αβεβαιότητα η οποία πηγάζει είτε από στοχαστικές μεταβολές είτε από τα κριτήρια επιλογής κατά τη δειγματοληψία θεωρείται αμελητέα λόγω του επαρκούς πλήθους των εξεταζόμενων αστέρων (~ 100 για κάθε σμήνος). Η ενδεχόμενη όμως παρουσία σημαντικής κλίσης μεταξύ της οπτικής ακτίνας, 90^{o}-i, και του επιπέδου περιστροφής των αστέρων θα μπορούσε να αποβεί μεροληπτική ως προς τον προσδιορισμό των ταχυτήτων, καθώς το μέγεθος το οποίο τότε μετράται είναι το $\upsilon \sin i$, ποσότητα δηλαδή μικρότερη από την πραγματική ισημερινή ταχύτητα, υ, οδηγώντας έτσι σε υπερεκτίμηση του χρόνου ζωής των πρωτοαστρικών δίσκων. Οι Krishnamurthi et al. (1997), μετά από αρκετά εκτενή στατιστική μελέτη, έδειξαν ότι η πιθανότητα μέτρησης μικρού $\upsilon \sin i$, όταν η πραγματική ταχύτητα υ είναι μεγάλη, είναι μικρότερη από 13% και συνεπώς η επίδραση του παράγοντα της κλίσης δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να θεωρηθεί υπεύθυνη για αποκλίσεις τόσο μεγάλες στις κατανομές ταχυτήτων ώστε να οδηγούν τις μελέτες του μηχανισμού της μαγνητικής πέδησης σε παραπλανητικά συμπεράσματα.

Η χρονική κλίμακα σύζευξης πυρήνα-ακτινοβολίας φαίνεται να παίζει καθοριστικό ρόλο στην εξελικτική πορεία της στροφορμής των αστέρων. Αστέρες οι οποίοι χαρακτηρίζονται από μεγάλο βαθμό σύζευξης, προσομοιάζουν τη συμπεριφορά της περιστροφής στερεού σώματος, γεγονός το οποίο επηρεάζει τη μορφή του νόμου πέδησης. Ο μηχανισμός αυτός καλείται πλέον να επιβραδύνει ένα σώμα συμπαγές και ομοιόμορφο στο σύνολό του, δηλαδή ένα σώμα μεγαλύτερης ροπής αδράνειας σε σχέση με εκείνη του περιβλήματος μεταφοράς το οποίο υπόκειται σχεδόν αποκλειστικά στις συνέπειες της μαγνητικής πέδησης σε περιπτώσεις που ο βαθμός σύζευξης είναι πλέον μικρός. Συμβολίζοντας με τ_c τη χαρακτηριστική χρονική κλίμακα σύζευξης, δηλαδή το χρονικό εκείνο διάστημα κατά τη διάρκεια του οποίου στροφορμή μεταφέρεται από τον πυρήνα προς το εξωτερικό περίβλημα, οι MacGregor & Brenner (1991) αλλά και οι Keppens et al. (1995) έδειξαν ότι η τιμή τ_c = 10 Myr μαζί με μια μέση γωνιακή ταχύτητα κορεσμού της τάξης των 20 $\Omega_\odot$ περίπου είναι από κοινού ικανές να εξηγήσουν την παρατηρούμενη κατανομή ταχυτήτων των νεαρών αστρικών σμηνών αλλά και τον ταχύ ρυθμό πέδησης που τους οδηγεί τελικά στην κύρια ακολουθία.

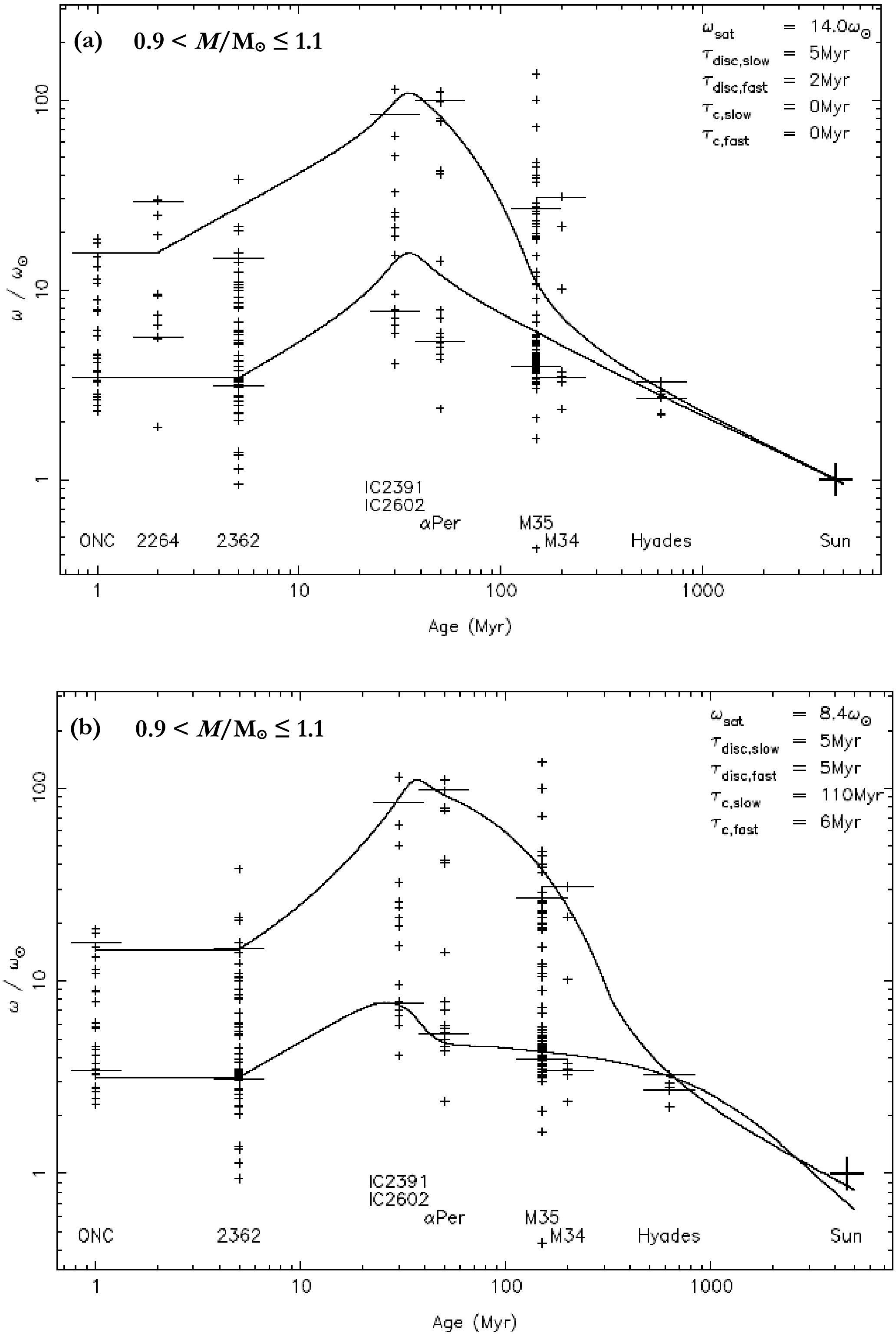
Η Allain (1998) διεξήγαγε μια ιδιαίτερα λεπτομερή μελέτη σχετικά με τον χαρακτηριστικό χρόνο σύζευξης, τ_c, καθώς και με τον ακριβή προσδιορισμό των σταθερών βαθμονόμησης, K_{kaw}, οι οποίες διαμορφώνονται σε μεγάλο βαθμό από τον πιο πάνω χρόνο. Χρησιμοποιώντας κώδικες εξέλιξης των Forestini (1994) και Bouvier et al. (1997), οι οποίοι λαμβάνουν υπόψιν τους την εσωτερική μεταφορά στροφορμής, την αρχική περίοδο των 8 d ως το μέγιστο της αντίστοιχης κατανομής που παρουσιάζουν οι κλασικοί πρωτοαστέρες T Tauri και την παραμετροποίηση της μαγνητικής πέδησης (4.59) με συντελεστές όπως αυτοί περιγράφονται από τις σχέσεις (4.65), (4.66) και (4.67), εξέτασε την επίδραση που θα είχε ένας σταθερός ***σύντομος*** *(Short Coupling Time, **SCT**),* ***ενδιάμεσος*** *(Intermediate Coupling Time, **ICT**) ή* ***μακρύς*** *(Long Coupling Time, **LCT**)* ***χρόνος σύζευξης*** με αντίστοιχες χαρακτηριστικές τιμές των 1, 20 και 500 Myr στην αστρική εξέλιξη. Η Allain (1998) διερεύνησε το πιο πάνω μοντέλο σε αστέρες με μάζα 1.0, 0.8, 0.6 και 0.5 $M_\odot$, αφήνοντας ως ελεύθερες παραμέτρους τις σταθερές K_{sk}, K_{mm} και Ω_{sat} τις οποίες βαθμονομούσε με βάση την περίπτωση της 1.0 $M_\odot$ λόγω των αξιόπιστων δεδομένων που διαθέτουμε σήμερα για τον Ήλιο. Στη συνέχεια, με βάση τα παρατηρησιακά δεδομένα για όλη την αστρική εξέλιξη και τις ίδιες σταθερές βαθμονόμησης, προσδιοριζόταν η κατάλληλη εκείνη τιμή Ω_{sat} ώστε να έχουμε τη βέλτιστη προσαρμογή για τις υπόλοιπες ομάδες μαζών.

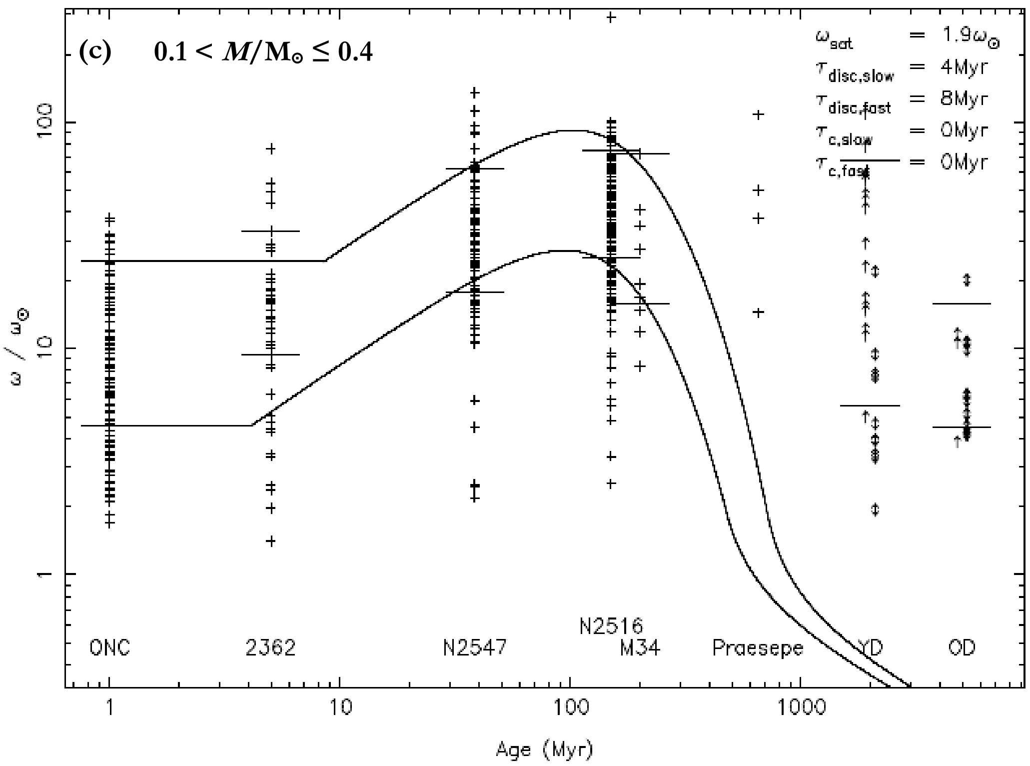
Πιο συγκεκριμένα, η Allain (1998) έδειξε ότι τα μοντέλα με τον σύντομο χρόνο σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος φαίνονται ικανά να εξηγήσουν την παρουσία της ομάδας των ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων, προβλέποντας πολλές φορές μάλιστα ταχύτητες υψηλότερες από τις παρατηρούμενες. Το γεγονός αυτό οδηγεί στην απαίτηση μεγάλων ταχυτήτων κορεσμού ώστε η δράση του νόμου Skumanich (4.65) να είναι χρονικά εκτεταμένη και συνεπώς περισσότερο αποτελεσματική κατά την επιβραδυνόμενη πορεία προς την κύρια ακολουθία (Σχήμα IV.5a). Οι σταθερές βαθμονόμησης εκτιμήθηκαν ίσες με K_{sk} = 2.25×10^{47} gr·cm^{2}sec και K_{mm} = 4.20×10^{42} gr·cm^{2}, ενώ η τιμή Ω_{sat} = 35 Ω_{Θ} βρέθηκε συνεπής με τα διαθέσιμα δεδομένα με βάση το ηλιακό μοντέλο και οι τιμές Ω_{sat} = 15, 10 και 2.6 Ω_{Θ} προτείνονται για τα μοντέλα των 0.8, 0.6 και 0.5 M_{Θ} αντίστοιχα. Η δυσκολία που προκύπτει στηριζόμενοι στην παραδοχή περιστροφής στερεού σώματος αφορά την παρουσία της ομάδας των αργά περιστρεφόμενων αστέρων, καθώς απαιτούνται ιδιαίτερα μακράς διάρκειας χρόνοι ζωής πρωτοαστρικών δίσκων.

Ειδικά η περίπτωση του μοντέλου των 0.5 M_{Θ} παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον, καθώς γνωρίζουμε ότι το εσωτερικό του είναι πλήρους μεταφοράς και συνεπώς η περιστροφή του οφείλει να προσεγγίζεται από εκείνη του στερεού σώματος. Παρόλα αυτά, η προσαρμογή του στα διαθέσιμα παρατηρησιακά δεδομένα αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποτυχής, καθώς ο μηχανισμός της πέδησης οδηγεί τους αστέρες μικρής μάζας σε χαμηλές ταχύτητες τη στιγμή που εκείνες τείνουν να διατηρηθούν στα ίδια περίπου επίπεδα (Σχήμα IV.5c). Ο λόγος της αποτυχίας έγκειται στην απουσία πυρήνας ακτινοβολίας ο προαπαιτείται ώστε να αναπτυχθούν ρεύματα μεταφοράς στο περίβλημα τα οποία οδηγούν τελικά στην παραγωγή ενός ενεργού μηχανισμού πέδησης.

Η κατάσταση αυτή γίνεται ακόμα πιο δύσκολη κάτω από την παραδοχή ενός ενδιάμεσου χρόνου σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος, καθώς η αποτελεσματικότητα των νόμων πέδησης ολοένα και μειώνεται από τη στιγμή που ο ταχύτερα περιστρεφόμενος πυρήνας λειτουργεί ως δεξαμενή στροφορμής για το επιβραδυνόμενο περίβλημα (Σχήμα IV.5b). Από την άλλη, το ηλιακό μοντέλο του συγκεκριμένου βαθμού σύζευξης φαίνεται ιδιαίτερα ικανοποιητικό όσον αφορά την πρόβλεψη περιστροφής στερεού σώματος στη σημερινή ηλικία του Ήλιου. Οι σταθερές βαθμονόμησης εκτιμήθηκαν ίσες με K_{sk} = 2.70×10^{47} gr·cm^{2}sec και K_{mm} = 4.20×10^{42} gr·cm^{2}, δηλαδή πολύ κοντά με εκείνες του σύντομου χρόνου σύζευξης, ενώ η τιμή Ω_{sat} = 30 Ω_{Θ} βρέθηκε συνεπής με τα διαθέσιμα δεδομένα με βάση το ηλιακό μοντέλο και οι τιμές Ω_{sat} = 15, 10 και 2.7 Ω_{Θ} προτείνονται για τα μοντέλα των 0.8, 0.6 και 0.5 M_{Θ} αντίστοιχα.

Πλήρως αντεστραμμένη είναι η εικόνα που παράγεται μέσω της υπόθεσης ενός μακρύ χρόνου σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος, καθώς αμέσως μετά τη συστολή του πρωτοαστέρα, αποκλειστικά το περίβλημα είναι εκείνο που υπόκειται στο μηχανισμό της μαγνητικής πέδησης με αποτέλεσμα την εύκολη επιβράδυνσή του και την αντίστοιχη πρόβλεψη των βραδέως περιστρεφόμενων μελών των νεαρών ανοικτών σμηνών χωρίς την ανάγκη μεγάλων χρόνων ζωής δίσκων προσαύξησης. Από την άλλη, οι γρήγοροι περιστροφείς και ειδικά εκείνοι που παρατηρούνται κοντά στην κύρια ακολουθία, δύσκολα είναι συμβατοί με τις προβλέψεις του μοντέλου αυτού, ενώ αδυνατεί την ίδια στιγμή να περιγράψει το σημερινό ηλιακό καθεστώς περιστροφής στερεού σώματος. Οι σταθερές βαθμονόμησης εκτιμήθηκαν ίσες με K_{sk} = 1.50×10^{48} gr·cm^{2}sec και K_{mm} = 6.30×10^{42} gr·cm^2, ενώ η τιμή Ω_{sat} = 6 Ω_Θ βρέθηκε συνεπής με τα διαθέσιμα δεδομένα με βάση το ηλιακό μοντέλο και οι τιμές Ω_{sat} = 5, 4 και 1.2 Ω_Θ προτείνονται για τα μοντέλα των 0.8, 0.6 και 0.5 M_Θ αντίστοιχα.





Σχήμα IV.5. Εξέλιξη της κατανομής ταχυτήτων (τα ποσοστιαία σημεία 20% και 90% έχουν προσημειωθεί με παύλες) από την ηλικία του νεφελώματος του Ωρίωνα (~ 1 Myr) μέχρι και τη σημερινή ηλικία του Ήλιου (~ 4.56 Gyr) κάτω από διαφοροποιημένους χρόνους ζωής περιαστρικού δίσκου και χρόνους σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος. Στους αστέρες με εύρος μαζών $0.9 < M/M_{\odot} \leq 1.1$, η περιστροφή στερεού σώματος ευνοεί την παρουσία των ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων (a), ενώ η διαφορική περιστροφή ευνοεί την ομάδα των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων (b). Ο μηχανισμός της μαγνητικής πέδησης αποδεικνύεται εξασθενημένος στο εύρος μαζών $0.1 < M/M_{\odot} \leq 0.4$ εξαιτίας του εσωτερικού πλήρους μεταφοράς (Irwin & Bouvier 2009).

Η Allain (1998), σε πλήρη συμφωνία με τις παλαιότερες μελέτες που έχουμε παρουσιάσει, προτείνει χρόνους σύζευξης τουλάχιστον της τάξης των 100 Myr, αλλά και όχι πολύ μεγαλύτερους από αυτούς ώστε να υπάρχει στη συνέχεια ικανός χρόνος επίτευξης της περιστροφής στερεού σώματος που παρατηρείται σήμερα στον Ήλιο. Η βασική της διαπίστωσή της αφορά ένα υβριδικό μοντέλο με την απόδοση της παρουσίας των ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων σε μοντέλα σύντομων χρόνων σύζευξης και εκείνης των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων σε μοντέλα εκτενών χρόνων σύζευξης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι πολλά από τα προβλήματα αυτά φαίνεται να αντιμετωπίζονται σε ιδιαίτερα ικανοποιητικό βαθμό κάτω από την παραδοχή ότι οι κλασικοί πρωτοαστέρες τύπου T Tauri είναι εκείνοι που φέρουν τον περιαστρικό δίσκο για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα με αρχική περίοδο κοντά στις 8 d σε αντίθεση με την αντίστοιχη κατηγορία των ασθενών γραμμών με μικρότερες περιόδους της τάξης των 3 d (π.χ. Irwin & Bouvier 2009). Κατά συνέπεια, οι κλασικοί T Tauri πρωτοαστέρες φαίνεται να υποστηρίζουν την ομάδα των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων ως προγεννήτορές τους, ενώ οι T Tauri πρωτοαστέρες ασθενών γραμμών να οδηγούν ευκολότερα στην παρουσία της ομάδας των ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων (Σχήμα IV.5a,b,c).

Όσον αφορά τις σταθερές βαθμονόμησης, K_{kaw}, η προσέγγιση της Allain (1998) μπορεί σε κάθε περίπτωση να θεωρηθεί σήμερα ως μια από τις πιο αξιόπιστες μεθόδου προσδιορισμού τους. Η πλούσια συλλογή πρόσφατων παρατηρησιακών δεδομένων, καθώς και η λεπτομερής περιγραφή τόσο της επίδρασης των πρωτοαστρικών δίσκων, της προσεκτικής επιλογής του κατάλληλου νόμου πέδησης κάτω από αυστηρά αριθμητικά κριτήρια όσο και της διάκρισης των μοντέλων με βάση το βαθμό σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος καθιστούν τις επαγόμενες τιμές των σταθερών βαθμονόμησης αναφορά για όλες τις υπόλοιπες υπάρχουσες παρόμοιες μελέτες. Ένα όμως μειονέκτημα της τεχνικής που ακολούθησε η Allain (1998) αποτελεί ο περιορισμένος αριθμός τιμών που μπορεί να λάβει ο εκθέτης a και συνεπώς η αντίστοιχη σταθερά βαθμονόμησης $K_{kaw}(a)$. Οι Nanouris et al. (2011) προτείνουν τη διεύρυνση των προβλεπόμενων τιμών με βάση τη σχέση (4.60) για αστέρες ηλιακού τύπου με την προϋπόθεση ότι οι συντελεστές C_{br} είναι εκ των προτέρων γνωστοί, δηλαδή:

$$K_{kaw}(a) = I_{conv,\odot} C_{br}(a) = k_{\odot}^2 M_{\odot} R_{\odot}^2 C_{br}(a)\,. \tag{4.68}$$

Από τη στιγμή που η σταθερά K_{kaw} εξαρτάται από τις ιδιότητες του αστρικού ανέμου αλλά κυρίως τη δομή και τη γεωμετρία του μαγνητικού πεδίου, η επιλογή του ηλιακού μοντέλου πραγματοποιείται για λόγους ευκολίας και κυρίως λόγω της πληθώρας αξιόπιστων παρατηρησιακών δεδομένων που διαθέτουμε για τους αστέρες ηλιακού τύπου. Υϊοθετώντας τώρα την προσέγγιση που ακολούθησαν οι Vilhu (1982, εφεξής V82) και van't Veer & Maceroni (1989, εφεξής VVM89), οι συντελεστές C_{br} προσδιορίζονται με βάση τις σχέσεις (4.63) και (4.64) αντίστοιχα. Θέτοντας λοιπόν τις ηλιακές παραμέτρους 1 $M_{\Theta} = 1.99\times10^{33}$ gr, 1 $R_{\Theta} = 6.96\times10^{10}$ cm και $k_{\Theta}^2 = 0.1$, η σταθερά βαθμονόμησης $K_{kaw} = K_{kaw}(a)$ μπορεί να εκτιμηθεί για οποιαδήποτε τιμή του εκθέτη a και να συγκριθεί με τις προβλεπόμενες από την Allain (1998, εφεξής A98) συγκεκριμένες υποπεριπτώσεις ως ακολούθως:

- $K_{kaw} = \dfrac{k_{\odot}^2 M_{\odot} R_{\odot} v_{Pl}}{2t_{Pl}} \left(\dfrac{259200}{2\pi} \right)^a$ για την προσέγγιση του V82. (4.69)

- $K_{kaw} = \dfrac{k_{\odot}^2 M_{\odot} R_{\odot}^{1+a} \left(v_2^{1-a} - v_1^{1-a} \right)}{(a-1)(t_2 - t_1)}$ για την προσέγγιση των VVM89. (4.70)

Όπως παρουσιάστηκε αναλυτικά στην προηγούμενη υποενότητα 3.3.1, η μελέτη του V82 εστιάζει στο καθεστώς ισημερινών ταχυτήτων που παρατηρείται στο ανοικτό σμήνος των Πλειάδων, επιλέγοντας τη μέση ταχύτητα των v_{Pl} = 20 km/sec. Αντίθετα, οι VVM89 επικεντρώνονται στη μεταβολή της κατανομής ισημερινών ταχυτήτων κατά τη μετάβαση από το σμήνος a Per σε εκείνο των Πλειάδων, επιλέγοντας αντίστοιχα μέσες ταχύτητες v_1 = 200 km/sec και v_2 = 10 km/sec. Θέτοντας ως ηλικία του νεαρότερου σμήνους a Per ίση με t_1 = 50 Myr και υϊοθετώντας ως ηλικία του γηραιότερου σμήνους των Πλειάδων την ευρέως αποδεκτή σήμερα ηλικία των $t_2 = t_{Pl} = 100$ Myr, οδηγούμαστε σε πλήθος τιμών που λαμβάνει μονοσήμαντα η σταθερά $K_{kaw}(a)$ και αντιστοιχεί στο διάστημα [1,3] του εκθέτη a. Ειδικά για το μοντέλο των VVM89, σημειώνουμε ότι η σταθερά βαθμονόμησης αδυνατεί να υπολογιστεί μέσω της σχέσης (4.70) στη θέση $a = 1$ λόγω της ιδιότυπης φύσης του. Ως εκ τούτου, άρση της απροσδιοριστίας πραγματοποιείται με τη βοήθεια του κανόνα de l'Hospital ο οποίος οδηγεί στην ποσότητα $[(k_\odot R_\odot)^2 M_\odot/(t_2\text{-}t_1)]\ln(v_1/v_2)$, τιμή την οποία και υϊοθετούμε τελικά.

Πίνακας Π.4.1. Η σταθερά βαθμονόμησης K_{kaw} σε gr·cm^{2}sec^{a-2} όπως προβλέπεται από τα μοντέλα των V82, VVM89 και A98 (Nanouris et al. 2011).

a	**V82**	**VVM89**	**A98 (SCT)**	**A98 (ICT)**	**A98 (LCT)**
3.0	3.09×10^{47}	1.48×10^{48}	2.25×10^{47}	2.70×10^{47}	1.50×10^{48}
2.9	1.07×10^{47}	5.09×10^{47}	-	-	-
2.8	3.68×10^{46}	1.76×10^{47}	-	-	-
2.7	1.27×10^{46}	6.10×10^{46}	-	-	-
2.6	4.40×10^{45}	2.12×10^{46}	-	-	-
2.5	1.52×10^{45}	7.39×10^{45}	-	-	-
2.4	5.25×10^{44}	2.59×10^{45}	-	-	-
2.3	1.81×10^{44}	9.09×10^{44}	-	-	-
2.2	6.26×10^{43}	3.21×10^{44}	-	-	-
2.1	2.16×10^{43}	1.14×10^{44}	-	-	-
2.0	7.48×10^{42}	4.04×10^{43}	4.20×10^{42}	4.20×10^{42}	6.30×10^{42}
1.9	2.58×10^{42}	1.44×10^{43}	-	-	-
1.8	8.92×10^{41}	5.19×10^{42}	-	-	-
1.7	3.08×10^{41}	1.88×10^{42}	-	-	-
1.6	1.07×10^{41}	6.83×10^{41}	-	-	-
1.5	3.68×10^{40}	2.50×10^{41}	-	-	-
1.4	1.27×10^{40}	9.23×10^{40}	-	-	-
1.3	4.39×10^{39}	3.42×10^{40}	-	-	-
1.2	1.52×10^{39}	1.28×10^{40}	-	-	-
1.1	5.24×10^{38}	4.82×10^{39}	-	-	-
1.0	1.81×10^{38}	1.83×10^{39}	4.37×10^{38}	3.74×10^{38}	1.12×10^{38}

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τους υπολογισμούς συγκρίνονται με εκείνα που προβλέπονται από τη μεθοδολογία της A98 και παρουσιάζονται στον πίνακα Π.4.1. Όπως βλέπουμε, οι τιμές δεν διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους με εξαίρεση το μοντέλο των VVM89 το οποίο φαίνεται να υπερεκτιμά τη σταθερά K_{kaw} σχεδόν σε όλο το φάσμα το οποίο καλύπτει ο εκθέτης a. Ακόμα και στην περίπτωση όμως αυτή, οι αποκλίσεις δεν ξεπερνούν τη μία τάξη μεγέθους ή βρίσκονται οριακά γύρω από αυτή. Από την άλλη, η προσέγγιση του V82 φαίνεται η πλέον επιτυχής σε σχέση με τις τιμές που προβλέπονται από την A98 και συνεπώς αποδεικνύεται η πιο αποτελεσματική όταν επιθυμείται να χρησιμοποιηθούν τιμές της σταθεράς K_{kaw} με την παράμετρο a να βρίσκεται μεταξύ των τιμών 1, 2 και 3. Στην προσέγγιση της A98 είναι επίσης εμφανές ότι η αύξηση του χρόνου σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος επιφέρει αύξηση της σταθεράς K_{kaw} ώστε να μπορεί να εξισορροπιστεί η αναπλήρωση στροφορμής από το εσωτερικό. Το φαινόμενο αυτό περιορίζεται πλησιάζοντας το καθεστώς κορεσμού, καθώς η απώλεια στροφορμής μέσω της μαγνητικής πέδησης έχει πλέον αποδυναμωθεί.

4. Μεταβολή Στροφορμής σε Διπλά Συστήματα Αστέρων

Μεταβαίνοντας από τους μεμονωμένους αστέρες στα διπλά συστήματα αστέρων, η κατάσταση στο καθεστώς ταχυτήτων αλλάζει ολοκληρωτικά, καθώς η τροχιακή στροφορμή αναλαμβάνει κυρίαρχο ρόλο στη δυναμική εξέλιξη τόσο του ίδιου του συστήματος όσο και των δύο μελών ξεχωριστά. Η στροφορμή έχει πλέον την ικανότητα να ανταλλάσσεται μεταξύ των δύο μελών, J_i με $i = 1,2$ για το πρωτεύον και δευτερεύον μέλος αντίστοιχα, αλλά και να αναπληρώνεται από την αντίστοιχη τροχιακή, J_{orb}, σε περιπτώσεις όπου διάφοροι φυσικοί μηχανισμοί οδηγούν στην απώλειά της. Η παρούσα ενότητα επικεντρώνεται σε ορισμένους θεμελιώδεις μηχανισμούς οι οποίοι συναντώνται στα στενά, και συνεπώς ισχυρά αλληλεπιδρώντα, διπλά συστήματα με σκοπό τη μελέτη της τροχιακής εξέλιξης ώστε στο επόμενο κεφάλαιο να εξεταστεί η διαμόρφωση των αντίστοιχων διαγραμμάτων O-C.

Αρχικά, θα αποδείξουμε με έναν ιδιαίτερα απλό και ομαλό τρόπο τη βασική χρονική διαφορική εξίσωση που διέπει την τροχιακή περίοδο του εκάστοτε διπλού συστήματος ξεκινώντας από την αντίστοιχη εξίσωση στροφορμής. Θα μας απασχολήσει πρώτα η απώλεια μάζας μέσω αστρικού ανέμου από τα δύο μέλη ενός συστήματος, ενώ στη συνέχεια θα καταπιαστούμε με φαινόμενα μεταφοράς μάζας από το πρώτο κρίσιμο σημείο Lagrange L1. Η απώλεια στροφορμής μέσω της μαγνητικής πέδησης, μέσω της βαρυτικής ακτινοβολίας, αλλά και μέσω της διαφυγής μάζας που μπορεί να λάβει χώρα στο δεύτερο σημείο Lagrange L2 αποτελεί το θέμα των τριών επόμενων υποενοτήτων, ενώ το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των τριών πιο διαδεδομένων μοντέλων που αφορούν την παλιρροϊκή αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών και τον τρόπο που αυτή διαμορφώνει τις τροχιακές μεταβολές. Η τροχιακή εξέλιξη ενός συστήματος κάτω από τη συνδυασμένη επίδραση πολλών από τους πιο πάνω μηχανισμούς αποτελεί το περιεχόμενο της τελευταίας υποενότητας στο οποίο παρουσιάζονται οι δύο πιο διάσημες γενικευμένες εξισώσεις στροφορμής διπλών αστρικών συστημάτων.

4.1. Απώλεια Μάζας μέσω Αστρικού Ανέμου

Η απώλεια μάζας αποτελεί τον πλέον συνήθη φυσικό μηχανισμό μεταβολών της τροχιακής περιόδου στα διπλά αστρικά συστήματα καθώς, όπως αναλυτικά είδαμε άλλωστε στην τρίτη ενότητα, όλοι οι αστέρες διαθέτουν αστρικό άνεμο ανεξάρτητα από το φασματικό τους τύπο και την εξελικτική τους κατάσταση. Ο άνεμος σε ένα διπλό σύστημα αναμένεται όμως ακόμα πιο ενισχυμένος σε σχέση με τους μεμονωμένους αστέρες για δύο κυρίως λόγους (Eggleton 1992).

Ο *πρώτος* λόγος αφορά την επίδραση της φυγόκεντρης δύναμης η οποία αποδεικνύεται ιδιαίτερα ισχυρή. Όπως θα δούμε αναλυτικά στην τελευταία υποενότητα του παρόντος κεφαλαίου, συστήματα τα οποία είναι βραχυπερίοδα, και παράλληλα αποτελούν βασικό αντικείμενο μελέτης της παρούσας διδακτορικής διατριβής, χαρακτηρίζονται ως συγχρονισμένα, δηλαδή τα μέλη τους έχουν αποκτήσει την ίδια γωνιακή ταχύτητα, Ω_i, και ίση με την αντίστοιχη τροχιακή, Ω_{kep}. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ισχυρή παρουσία των παλιρροϊκών αλληλεπιδράσεων οι οποίες τείνουν να κυκλοποιήσουν το σύστημα, δηλαδή να επιβάλλουν τροχιά μηδενικής εκκεντρότητας. Η ισημερινή ταχύτητα των μελών, ως άμεσο επακόλουθο του φαινομένου αυτού, αυξάνει δραστικά συνεισφέροντας έτσι σημαντικά στο ρυθμό απώλειας μάζας μέσω του φυγόκεντρου όρου που εμφανίζεται στη σχέση (4.44) των Lamers & Cassinelli (1999) ή ισοδύναμα μέσω του συντελεστή ℓ τον οποίο συναντήσαμε στην παραμετρική σχέση (4.45) των Lednicka & Stepien (2008).

Ο *δεύτερος* λόγος αφορά την άμεση παλιρροϊκή επίδραση που δέχεται κάθε μέλος από τον συνοδό του και εκφράζεται έμμεσα μέσω του δυναμικού Roche (1.2). Πλησιάζοντας προς την ακτίνα Roche, $R_{L,i}$, το ομώνυμο δυναμικό ελλαττώνεται με αποτέλεσμα ο κάθε αστέρας να είναι πιο επιρρεπής στην απώλεια μάζας. Οι Tout & Eggleton (1988) πρότειναν έναν ιδιαίτερα αποδοτικό ημιεμπειρικό μαθηματικό τύπο ο οποίος εκτιμά την απώλεια μάζας ενός αστέρα, $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_{w,i}$, στηριζόμενοι αφενός στον αντίστοιχο ρυθμό με τον οποίο θα έπρεπε να χάνει μάζα ως μεμονωμένο αστέρι, $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_{w,i}^{single}$, αλλά και στην επιρροή του συνοδού που εκφράζεται μέσω ενός πρόσθετου παλιρροϊκού όρου και πιο συγκεκριμένα μέσω του λόγου της αντίστοιχης αστρικής ακτίνας, R_i, και της (ενεργού) ακτίνας του λοβού Roche, $R_{L,i}$:

$$\boxed{\dot{M}_{w,i} = \dot{M}_{w,i}^{\,single}\left\{1+10^4\left(\frac{R_i}{R_{L,i}}\right)^6\right\}}. \tag{4.71}$$

Θυμίζουμε από το πρώτο κεφάλαιο ότι οι εμπειρικοί μαθηματικοί τύποι (1.3) και (1.4) μέσα από τους οποίους μπορούμε να εκτιμούμε την (ενεργό) ακτίνα του λοβού Roche τόσο για τον πρωτεύοντα αστέρα, $R_{L,1}$, όσο και για τον δευτερεύοντα, $R_{L,2}$, ως συνάρτηση της τροχιακής ακτίνας, A_{orb}, και του λόγου μαζών, q, ενός διπλού αστρικού συστήματος με σχετικό σφάλμα το οποίο δεν ξεπερνά το 1% της πραγματικής ακτίνας έχουν προταθεί από τον Eggleton (1983).

Στη σχέση (4.71), ο ρυθμός απώλειας μάζας για τους μεμονωμένους αστέρες μπορεί να αντικατασταθεί είτε από τη σχέση (4.44), όπως προκύπτει από το αναλυτικό μοντέλο ενός περιστρεφόμενου αστέρα με μαγνητικό πεδίο των Lamers & Cassinelli (1999), είτε από κατάλληλα παραμετροποιημένες σχέσεις, όπως η (4.45) των Lednicka & Stepien (2008) για ψυχρούς νάνους αστέρες και οι σχέσεις (4.46) και (4.47) των Reimers (1975, 1977) και Schroder & Cuntz (2005) για εξελιγμένους αστέρες αντίστοιχα. Είναι επίσης προφανές ότι η σχέση (4.71) διατηρεί την ισχύ της για θερμούς αστέρες. Η παρούσα όμως διατριβή είναι επικεντρωμένη στους αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τυπών και για το λόγο αυτό δεν έχει δοθεί έμφαση στη συγκεκριμένη κατηγορία.

Ερχόμενοι τώρα στην εξίσωση στροφορμής ενός συστήματος, τροχιακής περιόδου P και μαζών M_1, M_2 για το πρωτεύον και δευτερεύον μέλος αντίστοιχα, και εστιάζοντας στην ειδική αλλά αρκετά κοινότυπη περίπτωση που τα δύο μέλη είναι συγχρονισμένα με την ήδη κυκλοποιημένη τροχιά, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την τροχιακή στροφορμή, J_{orb}, από τον ορισμό της με βάση την ανηγμένη μάζα του συστήματος, $M_{red} = M_1M_2/(M_1+M_2)$, και την τροχιακή ακτίνα, A_{orb}, η οποία δίνεται άμεσα από τον τρίτο νόμο του Kepler (1.25). Ο συνδυασμός των δύο σχέσεων οδηγεί σε μια πολύτιμη μαθηματική έκφραση για την παρούσα διατριβή, η οποία συνδέει μονοσήμαντα την τροχιακή στροφορμή με την περίοδο του συστήματος, δηλαδή:

$$J_{orb} = M_{red} A_{orb}^2 \Omega_{kep} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \left[\frac{GP^2 (M_1 + M_2)}{(4\pi)^2} \right]^{2/3} \cdot \frac{2\pi}{P}$$

ή ισοδύναμα $$\boxed{J_{orb} = \frac{M_1 M_2 G^{2/3}}{(2\pi)^{1/3} (M_1 + M_2)^{1/3}} P^{1/3}}. \qquad (4.72)$$

Θεωρώντας ότι η τροχιακή στροφορμή (4.72) είναι σχεδόν πάντοτε κατά πολύ μεγαλύτερη της αντίστοιχης ιδιοστροφορμής των δύο μελών εξαιτίας της μεγάλης τροχιακής ακτίνας σε σχέση με εκείνη των δύο αστέρων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η συνολική στροφορμή του συστήματος, J, καθορίζεται αποκλειστικά από την αντίστοιχη τροχιακή, δηλαδή $J = J_1 + J_2 + J_{orb} \approx J_{orb}$. Υποθέτοντας επιπροσθέτως ότι το σύστημα χάνει μάζα σφαιρικά και ισότροπα με τον επιμέρους ρυθμό $(dM/dt)_i < 0$ να αντιστοιχεί στο κάθε $i = 1,2$ μέλος χωρίς να μας απασχολεί σε πρώτη φάση η κατάληξη του υλικού που διαφεύγει, μπορούμε εύκολα να υϊοθετήσουμε την παραδοχή της αμελητέας απώλειας στροφορμής, ιδιότητα την οποία αποκαλύπτει η διερεύνηση που πραγματοποιήθηκε στην υποενότητα 2.4.1 και μας εξασφαλίζει αριθμητικά η σχέση (4.37), δηλαδή:

$$\dot{J}_{orb} = 0 \Rightarrow \frac{G^{2/3}}{(2\pi)^{1/3}} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{1/3}} P^{1/3} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\left[M_2 (M_1 + M_2)^{-1/3} P^{1/3} - \frac{1}{3} M_1 M_2 (M_1 + M_2)^{-4/3} P^{1/3} \right] \dot{M}_1 +$$

$$\left[M_1 (M_1 + M_2)^{-1/3} P^{1/3} - \frac{1}{3} M_1 M_2 (M_1 + M_2)^{-4/3} P^{1/3} \right] \dot{M}_2 +$$

$$\frac{1}{3} M_1 M_2 (M_1 + M_2)^{-1/3} P^{-2/3} \dot{P} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[3M_2 - \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right] \dot{M}_1 + \left[3M_1 - \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right] \dot{M}_2 + M_1 M_2 \frac{\dot{P}}{P} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{3q+2}{M_1+M_2}\dot{M}_1 - \frac{3q^{-1}+2}{M_1+M_2}\dot{M}_2 . \qquad (4.73)$$

Εστιάζοντας τώρα στο μηχανισμό της μη συντηρητικής απώλειας μάζας, η μεταβολή της μάζας του *i* μέλους που εμφανίζεται στη σχέση (4.73) θα ταυτίζεται πλέον με την απώλεια μάζας η οποία λαμβάνει χώρα αποκλειστικά μέσω αστρικών ανέμων, $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_i \equiv (\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_{w,i} < 0$, δηλαδή:

$$\boxed{\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{3q+2}{M_1+M_2}\dot{M}_{w,1} - \frac{3q^{-1}+2}{M_1+M_2}\dot{M}_{w,2}} . \qquad (4.74)$$

Η τροχιακή περίοδος, όπως εύκολα φαίνεται από τη σχέση (4.74), αποδεικνύεται αύξουσα συνάρτηση του χρόνου ανεξάρτητα από το μέλος το οποίο χάνει μάζα. Η διαπίστωση αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική, καθώς αποχωρισμένα συστήματα θα έπρεπε να χαρακτηρίζονται από τροχιακή εξέλιξη με αυξανόμενη και μόνο περίοδο, κάτι το οποίο δεν παρατηρείται όμως πάντοτε στην πράξη.

4.2. Μεταφορά Μάζας και Στροφορμής μέσω του Σημείου L1

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση συστημάτων με συντηρητική μεταφορά μάζας, δηλαδή συστήματα στα οποία λαμβάνει χώρα ανταλλαγή μάζας μεταξύ των μελών μέσω του σημείου L1. Αν και ο μηχανισμός αυτός δεν προκαλεί απώλεια μάζας, οδηγεί στη μεταβολή της κατανομής της συνολικής μάζας με αποτέλεσμα την αύξηση ή τη μείωση της τροχιακής περιόδου, πάντοτε κάτω από τη διατήρηση της συνολικής στροφορμής. Στην ιδανική λοιπόν περίπτωση που ροή υλικού, ρυθμού έστω ίσου με $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_2 > 0$, μεταβιβαστεί από το πρωτεύον μέλος προς το δευτερεύον χωρίς καμία περαιτέρω διάχυση προς τον μεσοαστρικό χώρο, δηλαδή $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_1 \equiv -(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_2$, τότε η σχέση (4.73) μετασχηματίζεται στην ακόλουθη απλούστερη μορφή:

$$\boxed{\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3(q-1)}{M_2}\dot{M}_2} . \qquad (4.75)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (4.75), όταν ο λόγος μαζών είναι μικρότερος από τη μονάδα, και συνεπώς το μέλος με τη μικρότερη μάζα είναι και εκείνο το οποίο δέχεται το υλικό από το συνοδό του, η τροχιακή περίοδος θα μειώνεται με το χρόνο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή ο δότης αστέρας είναι το μέλος με τη μικρότερη μάζα, η περίοδος καθίσταται αύξουσα.

4.3. Απώλεια Στροφορμής μέσω Μαγνητικής Πέδησης

Στους μονούς αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων, η μαγνητική πέδηση οδηγεί στην απώλεια στροφορμής με άμεση συνέπεια τη μείωση της γωνιακής τους ταχύτητας. Στην περίπτωση όμως που ένας ψυχρός αστέρας αποτελεί μέλος ενός διπλού συστήματος, η κατάσταση αντιστρέφεται πλήρως, καθώς η τροχιακή στροφορμή αναλαμβάνει να αναπληρώσει την ποσότητα ιδιοστροφορμής που συνεχώς χάνεται. Εφόσον οι ακτίνες των μελών είναι αρκετά μικρότερες από την τροχιακή, κάτι το οποίο είναι κανόνας σε όλα τα συστήματα με εξαίρεση εκείνα των οποίων τα μέλη βρίσκονται σε επαφή, η τροχιακή στροφορμή είναι κατά πολύ μεγαλύτερη των επιμέρους ιδιοστροφορμών με συνέπεια την άμεση μεταβίβασή της στους δύο αστέρες. Στη βιβλιογραφία μάλιστα, δεν είναι καθόλου σπάνια η χρήση του όρου *δεξαμενή (reservoir ή deposit)* η οποία αναδεικνύει το μεγάλο δυναμικό των αποθεμάτων της τροχιακής στροφορμής. Σύμφωνα τώρα με τη θεμελιώδη σχέση (4.72), η τροχιακή στροφορμή είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς την τροχιακή περίοδο, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι όσο η τροχιακή στροφορμή μεταφέρεται προς τα δύο μέλη και συνεπώς ελαττώνεται, η περίοδος σταδιακά θα μειώνεται.

Δυστυχώς, η αναλυτική περιγραφή του μηχανισμού της μαγνητικής πέδησης είναι αρκετά πολύπλοκη, γεγονός το οποίο δυσχεραίνει σε πολύ μεγάλο βαθμό τη μελέτη της τροχιακής περιόδου. Από τη στιγμή που δεν έχουμε άμεσες παρατηρήσεις του μηχανισμού αυτού στα διπλά συστήματα αστέρων, μπορούμε να εφαρμόσουμε την εμπειρία που έχουμε αποκτήσει από τα αντίστοιχα παρατηρησιακά δεδομένα μεμονωμένων αστέρων, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στην υποενότητα 3.3, αποδεχόμενοι δηλαδή το καθεστώς ταχυτήτων που επικρατεί στα νεαρά αστρικά σμήνη διαφορετικής ηλικίας ως στιγμιότυπα της πορείας τους προς την κύρια ακολουθία.

Υϊοθετούμε λοιπόν τη μεθοδολογία του Kawaler (1988) η οποία είναι συνεπής με το νόμο δύναμης (4.58), εκτιμώντας τους συντελεστές $C_{br,i}$ για κάθε i μέλος μέσα από τη σχέση (4.60) και επιλέγοντας ως σταθερές βαθμονόμησης, K_{kaw}, τιμές μέσα από τον πίνακα Π.4.1 ανάλογα με το μοντέλο πέδησης που επιθυμούμε να εφαρμόσουμε. Η εξίσωση στροφορμής τότε του διπλού συστήματος θα περιλαμβάνει όρους απώλειας στροφορμής όπως αυτοί προβλέπονται από τη σχέση (4.55), οι οποίοι απλοποιούνται όμως σημαντικά κάτω από την υπόθεση του συγχρονισμού, δηλαδή κάτω από τη συνθήκη $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_{kep} = 2\pi/P$. Υποθέτοντας επιπλέον ότι εκτός της τροχιακής περιόδου καμία άλλη φυσική ποσότητα δεν είναι μεταβλητή, εύκολα οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση που διέπει τη χρονική της εξέλιξη. Όπως ήδη εξηγήθηκε πιο πάνω, η τροχιακή περίοδος προβλέπεται φθίνουσα εξαιτίας της απώλειας στροφορμής από το σύστημα:

$$\dot{J}_{orb} = \dot{J} \Rightarrow \frac{G^{2/3}}{(2\pi)^{1/3}} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{M_1 M_2}{(M_1+M_2)^{1/3}} P^{1/3}\right] = \dot{J}_{br} \Rightarrow$$

$$\frac{G^{2/3}}{(2\pi)^{1/3}} \cdot \frac{1}{3} M_1 M_2 (M_1+M_2)^{-1/3} P^{-2/3}\dot{P} = -\sum_{i=1}^{2}\left(k_i^2 M_i R_i^2 C_{br,i} \Omega_i^a\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\dot{P}}{P^{(2/3)-a}} = -\frac{3(2\pi)^{a+(1/3)}(M_1+M_2)^{1/3}\sum_{i=1}^{2}\left(C_{br,i}k_i^2 M_i R_i^2\right)}{M_1 M_2 G^{2/3}}}. \tag{4.76}$$

Η συνεχής μείωση της τροχιακής περιόδου κάτω από την επίδραση του μηχανισμού της μαγνητικής πέδησης, οδήγησε γρήγορα πολλούς ερευνητές να αποδώσουν στο συγκεκριμένο μηχανισμό εξελικτικά σενάρια στα διπλά αστρικά συστήματα. Πρώτος ο Huang (1966) εξέφρασε την άποψη ότι ένα αποχωρισμένο σύστημα αποτελούμενο από μέλη μεταγενέστερων φασματικών τύπων θα μπορούσε να οδηγήσει στη δημιουργία ενός συστήματος επαφής. Το σενάριο αυτό τέθηκε αρχικά σε εφαρμογή από τον V82 και αργότερα από τους Bradstreet & Guinan (1988) οι οποίοι στηρίχθηκαν σε μοντέλα πέδησης της μορφής (4.58) και προσπάθησαν να εκτιμήσουν τον εκθέτη a σε πρώτη προσέγγιση. Ο V82 εκτιμά ότι χρονικά διαστήματα τουλάχιστον της τάξης των 5×10^8 yr φαίνεται να απαιτούνται ώστε ένα αποχωρισμένο σύστημα να μπορεί να εξελιχθεί σε σύστημα επαφής, καθώς μεγάλος αριθμός από τα τελευταία έχει βρεθεί σε σμήνη της ηλικίας αυτής ή ακόμα και μιας τάξης γηραιότερα. Η υπόθεση αυτή φαίνεται επίσης να υποστηρίζεται και από το γεγονός της απουσίας αποχωρισμένων συστημάτων περιόδου 2-3 d ως μέλη των νεαρών ανοικτών αστρικών σμηνών (Stepien 1995). Οι VVM89, ακολουθώντας μια αμιγώς στατιστική μέθοδο, επιβεβαιώνουν μια ηλικία της ίδιας τάξης μεγέθους και πιο συγκεκριμένα ίσης περίπου με 7.5×10^8 yr την οποία χρειάζεται ένα αποχωρισμένο σύστημα περιόδου 3.5 d ώστε να οδηγηθεί σε ένα σύστημα επαφής με περίοδο 0.25 d.

Σύμφωνα με τις πιο πάνω μεθόδους και τα αποτελέσματα που συνεπάγονται, η τιμή του εκθέτη a = 3, όπως προβλέπεται από το νόμο του Skumanich (1972), γρήγορα αποδείχθηκε ανεπαρκής να ερμηνεύσει το πιο πάνω εξελικτικό σενάριο μέσω της μαγνητικής πέδησης, υποδηλώνοντας έτσι την ανάγκη για ασθενέστερους νόμους πέδησης. Το γεγονός αυτό υποδεικνύεται άλλωστε με αρκετά σαφή τρόπο από τις κινηματικές ηλικίες των συστημάτων επαφής (~ $8\text{-}10\times10^9$ yr) οι οποίες αποδεικνύονται πολύ μεγάλες εάν ένας χαλαρός νόμος πέδησης δεν τα είχε αποτρέψει από την πλήρη συγχώνευση τους (Bradstreet & Guinan 1988). Ο V82 έδειξε ότι μια τιμή κοντά στο καθεστώς κορεσμού και πιο συγκεκριμένα κοντά στην $a \approx 1.5$ φαίνεται ικανοποιητική ώστε να υποστηρίξει χρονικά τη μετεξέλιξη διπλών συστημάτων της κατηγορίας των βραχυπερίοδων συστημάτων του τύπου RS CVn σε συστήματα της κατηγορίας W UMa, ενώ οι van’t Veer & Maceroni (1988) προτείνουν μια τιμή υπερκορεσμού κοντά στην $a \approx 0.5$ με βάση την αρχική και τελική κατανομή περιόδου βραχυπερίοδων συστημάτων πεδίου αφού πρώτα εκτίμησαν και αφαίρεσαν τη μεροληψία που θα μπορούσε να τις συνοδεύει εξαιτίας διαφόρων παραγόντων επιλεκτικότητας.

Τέλος, ας σημειωθεί ότι το ακραίο σενάριο της συγχώνευσης των μελών ενός συστήματος επαφής σε έναν και μοναδικό αστέρα, κάτω από την επίδραση της μαγνητικής πέδησης, θεωρείται εφικτό. Προτεινόμενες αστρικές ομάδες που θα μπορούσαν να αποτελούν το τελικό στάδιο ενός συστήματος επαφής αφορούν εξαιρετικά ταχείς περιστρεφόμενους μεμονωμένους αστέρες, όπως εκείνους της κατηγορίας FK Com μεταγενέστερων φασματικών τύπων (Webbink 1976, Bopp & Rucinski 1981), αλλά και ορισμένους κυανούς ταχείς ιδιότυπους αστέρες (blue stragglers) προγενέστερων φασματικών τύπων (Mateo et al. 1990, Eggen & Iben 1989).

4.4. Απώλεια Στροφορμής μέσω Βαρυτικής Ακτινοβολίας

Ο μηχανισμός της ***βαρυτικής ακτινοβολίας (gravitational radiation)***, όπως άλλωστε συμβαίνει και με τη μαγνητική πέδηση, οδηγεί στην απώλεια στροφορμής από το σύστημα και κατά συνέπεια σε μείωση της τροχιακής του περιόδου. Αν και στην παρούσα διατριβή δεν σκοπεύουμε να εμβαθύνουμε στη φύση του μηχανισμού, δηλαδή του τρόπου μέσω του οποίου η συγκεκριμένη ακτινοβολία παράγεται και διαδίδεται, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε τις επιπτώσεις που θα έχει στην τροχιακή εξέλιξη ενός συστήματος. Εάν με c εκφράζεται η ταχύτητα του φωτός στο κενό και G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας, τότε ο ρυθμός με τον οποίο ένα σύστημα χάνει στροφορμή κάτω από την επίδραση του συγκεκριμένου μηχανισμού είναι γνωστός από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και δίνεται από την ακόλουθη σχέση (Landau & Lifshitz 1951):

$$\dot{J}_{gr} = -\frac{32G^{7/3}}{5c^5}(2\pi)^{7/3}\frac{(M_1M_2)^2}{(M_1+M_2)^{2/3}P^{7/3}}, \tag{4.77}$$

Υϊοθετώντας όλες τις παραδοχές που έχουμε μέχρι τώρα θέσει κατά τη μελέτη οποιουδήποτε φυσικού μηχανισμού, καταστρώνουμε την εξίσωση στροφορμής του διπλού συστήματος αντικαθιστώντας την τροχιακή στροφορμή από τη σχέση (4.72), η οποία με τη σειρά της προσπαθεί πλέον να αναπληρώσει τις αντίστοιχες απώλειες όπως αυτές προβλέπονται από τη σχέση (4.77). Με τον τρόπο αυτό, οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση που διέπει τη χρονική εξέλιξη της τροχιακής περιόδου η οποία, όπως ήδη εξηγήθηκε, προβλέπεται και πάλι φθίνουσα:

$$\dot{J}_{orb} = \dot{J} \Rightarrow \frac{G^{2/3}}{(2\pi)^{1/3}}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{M_1M_2}{(M_1+M_2)^{1/3}}P^{1/3}\right] = \dot{J}_{gr} \Rightarrow$$

$$\frac{G^{2/3}}{(2\pi)^{1/3}}\cdot\frac{1}{3}M_1M_2(M_1+M_2)^{-1/3}P^{-2/3}\dot{P} = -\frac{32G^{7/3}}{5c^5}(2\pi)^{7/3}\frac{(M_1M_2)^2}{(M_1+M_2)^{2/3}}P^{-7/3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\dot{P}}{P^{-5/3}} = -\frac{96(2\pi)^{8/3}G^{5/3}M_1M_2}{5c^5(M_1+M_2)^{1/3}}}. \tag{4.78}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (4.78), η βαρυτική ακτινοβολία προβλέπεται να συνεισφέρει στην απώλεια σημαντικού ποσοστού της τροχιακής στροφορμής διπλών αστρικών συστημάτων τα οποία χαρακτηρίζονται από μεγάλη μάζα και μικρή περίοδο. Ο τρίτος όμως νόμος του Kepler περιορίζει το εύρος εφαρμογών που θα μπορούσε ο μηχανισμός αυτός να είναι κυρίαρχος, καθώς η αύξηση της μάζας και της τροχιακής περιόδου οδηγεί στη φυσική επαφή των μελών και ουσιαστικά ορίζει ένα απαγορευτικό ανώτατο όριο. Ως εκ τούτου, συστήματα με εκφυλισμένα συμπαγή μέλη, όπως οι λευκοί νάνοι και οι αστέρες νετρονίων, αλλά και τα συμβατικά συστήματα επαφής απαρτίζουν τις δύο κυριότερες εκείνες υποψήφιες κατηγορίες που η βαρυτική ακτινοβολία θα μπορούσε να οδηγήσει ακόμα και στη συγχώνευση, όπως ακριβώς προβλέπεται στην περίπτωση της μαγνητικής πέδησης (Webbink 1976).

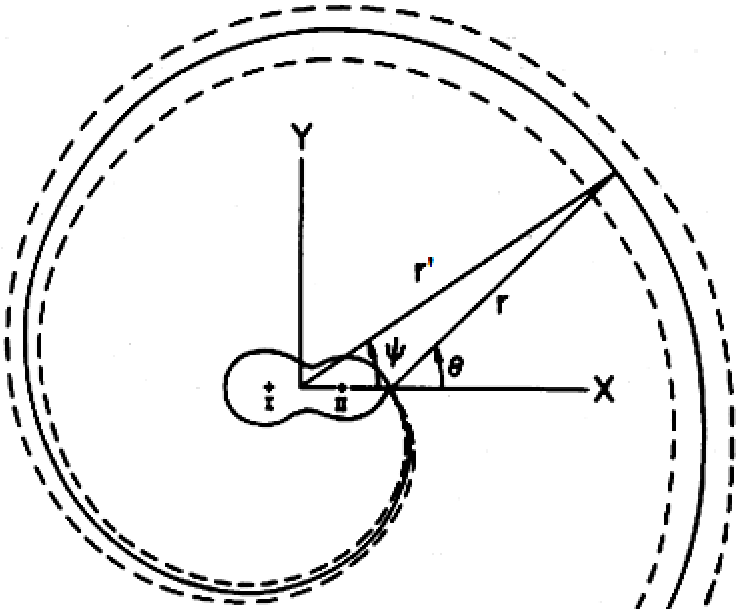
4.5. Απώλεια Μάζας και Στροφορμής μέσω του Σημείου L2

Η εξώτατη κρίσιμη κοινή ισοδυναμική επιφάνεια, όπως ήδη εξηγήθηκε στο πρώτο κεφάλαιο κατά την παρουσίαση του μοντέλου Roche, καθορίζει τα μέγιστα επιτρεπτά όρια μέσα στα οποία μπορεί να ευσταθεί ένα διπλό σύστημα αστέρων και περιλαμβάνει το δεύτερο σημείο Lagrange L2 μέσω του οποίου είναι δυνατόν να λάβουν χώρα απώλειες μάζας από το σύστημα, ρυθμού έστω ίσου με $(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)_{\mathrm{L2}} < 0$, με την ελάχιστη απαιτούμενη ενέργεια. Το σημείο αυτό βρίσκεται στη νοητή επέκταση της ευθείας που ενώνει τα δύο μέλη του συστήματος προς την πλευρά του δευτερεύοντος πάντοτε αστέρα, ενώ η απόστασή του από το κέντρο μάζας, $d_{L2} = x_{L2} \cdot A_{orb}$, μπορεί να προσδιοριστεί κατά την εύρεση των σημείων ισορροπίας $(x_{L2},0,0)$ μέσα από τη γεωμετρία Roche (π.χ. Shu et al. 1979):

$$x_{L2} - \frac{\mu}{(x_{L2} - 1 + \mu)^2} - \frac{1-\mu}{(x_{L2} + \mu)^2} = 0, \text{ όπου } \mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2}. \tag{4.79}$$

Στο ημιαναλυτικό ρευστοδυναμικό μοντέλο των Shu et al. (1979), η ροή του ανέμου που καταλήγει στο σημείο L2 οδηγείται εύκολα σε υπερηχητικές ταχύτητες σε μια περιοχή που βρίσκεται πολύ κοντά σε αυτό. Κάτι τέτοιο είναι εύκολα κατανοητό, καθώς στο σημείο L2 η βαρυτική δύναμη που προέρχεται από τους δύο αστέρες και συγκρατεί τον άνεμο εξισορροπείται από τη φυγόκεντρο δύναμη, υποθέτοντας σύγχρονη βέβαια περιστροφή, όπως ακριβώς προβλέπεται από το μοντέλο Roche. Ως εκ τούτου, η πίεση του αερίου δε βρίσκει καμία αντίσταση και παρασύρει τον άνεμο σε διαφυγή προς τον μεσοαστρικό χώρο. Οι Shu et al. (1979) κατάφεραν και προσδιόρισαν την κινηματική του συμπεριφορά μέσα από την πολική γωνία θ, η οποία ορίζεται μεταξύ του μεγάλου τροχιακού ημιάξονα και της πολικής ακτίνας r με κέντρο το σημείο L2 (Σχήμα IV.6).

Η αδιάστατη ειδική στροφορμή (ειδική στροφορμή ανα μονάδα ειδικής τροχιακής στροφορμής δηλαδή) του ανέμου εκτιμήθηκε ως συνάρτηση του λόγου μαζών q τόσο στο σημείο L2, j_i, όπου διαμορφώνει την αρχική του συμπεριφορά, όσο και σε μεγάλες αποστάσεις από το σύστημα, j_f, οπότε και αποκτά ασυμπτωτικά τα τερματικά του κινηματικά χαρακτηριστικά. Η τερματική γωνία διαφυγής, θ_f, προσδιορίστηκε μάλιστα με ακρίβεια και βρέθηκε πολύ κοντά στις -45$^{\mathrm{o}}$ ανεξάρτητα από το λόγο μαζών του συστήματος. Η αντίστοιχη απόσταση r_f', η οποία έχει αρχή το κέντρο μάζας του συστήματος, βρέθηκε πεπερασμένη μόνο όταν ο λόγος μαζών είναι σχεδόν μηδενικός ή πλησιάζει τη μονάδα. Στην πρώτη περίπτωση, η ροπή που αναπτύσσεται στο σημείο L2 είναι πολύ μικρή, καθώς η μάζα του δευτερεύοντος είναι αμελητέα και συνεπώς ο πρωτεύοντας συμπεριφέρεται ως μεμονωμένος αστέρας, ενώ στη δεύτερη περίπτωση τα δύο μέλη έχουν σχεδόν την ίδια μάζα με αποτέλεσμα να δεσμεύουν το υλικό πολύ κοντά στο σημείο L2, περιορίζοντας έτσι τη δυνατότητα να απομακρυνθεί προς τον μεσοαστρικό χώρο.



Σχήμα IV.6. Κινηματική περιγραφή της ροής του ανέμου που διαφεύγει μέσω του σημείου ισορροπίας L2 με τη βοήθεια των πολικών συντεταγμένων (r,θ) και (r',ψ) όταν το κέντρο μάζας και το σημείο διαφυγής L2 χρησιμοποιούνται αντίστοιχα ως κέντρο των αξόνων. Η αρχική συμπεριστροφή του υλικού μαζί με το σύστημα οδηγεί στο σχηματισμό σπειροειδούς περιβλήματος (Shu et al. 1979).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η διαπίστωση πως το αέριο υλικό μπορεί να συμπεριστρέφεται με το σύστημα μέχρι την απόσταση ακόμα και των $3 \cdot A_{orb}$ περίπου για μεγάλους λόγους μαζών, δημιουργώντας έτσι ένα κοινό περίβλημα, ενώ καθώς απομακρύνεται από τη θέση αυτή, σχηματίζει σπειροειδές σχήμα με διαστάσεις οι οποίες οριοθετούνται από την τερματική απόσταση r_f'. Οι Shu et al. (1979) επισημαίνουν μάλιστα ότι, κάτω από κατάλληλες τιμές του ιξώδους, ο δακτυλιοειδής σχηματισμός θα μπορούσε να οδηγήσει στη δημιουργία μικρών δορυφόρων, όπως έχουν πράγματι παρατηρηθεί σε πολλές περιπτώσεις συστημάτων επαφής, ορίζοντας έτσι ένα σύστημα τριών σωμάτων.

Στον πίνακα Π.4.2 απεικονίζονται όλες οι πιο πάνω κρίσιμες ποσότητες του μοντέλου των Shu et al. (1979) θέτοντας ως μονάδα απόστασης την τροχιακή ακτίνα, A_{orb}, και ως μονάδα της ειδικής στροφορμής την αντίστοιχη τροχιακή, $\Omega_{kep} \cdot A_{orb}^2$, με την τροχιακή ακτίνα να υπολογίζεται μέσω του τρίτου νόμου του Kepler (1.25). Στην παρούσα διατριβή, υϊοθετούμε τις τιμές της αδιάστατης τερματικής ειδικής στροφορμής, j_f, ως εκείνες που καθορίζουν την απώλειας στροφορμής από το σύστημα σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\dot{J}_{L2} = j_f \Omega_{kep} A_{orb}^2 \dot{m}_{L2} = G^{2/3} (2\pi)^{-1/3} (M_1 + M_2)^{2/3} j_f \dot{m}_{L2} P^{1/3}. \qquad (4.80)$$

Αποσκοπώντας σε μια πιο λεπτομερή εκτίμηση της (αδιάστατης) τερματικής ειδικής στροφορμής του ανέμου που δραπετεύει από το σύστημα μέσω του σημείου

L2 για οποιαδήποτε τιμή του λόγου μαζών, q, προχωράμε στον προσδιορισμό της κατάλληλης εκείνης συνάρτησης η οποία προσαρμόζεται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο στα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα Π.4.2. Εξαιτίας της πολύπλοκης μορφής που αποδεικνύεται να συνδέει τις δύο πιο πάνω ποσότητες, αποφασίστηκε πρώτα να διερευνηθεί η αντίστοιχη συσχέτιση σε λογαριθμική κλίμακα και η οποία βρέθηκε παραβολική σε ιδιαίτερα ικανοποιητικό βαθμό (ο συντελεστής προσδιορισμού υπολογίστηκε ίσος με 0.988, Σχήμα IV.7). Η αναγωγή στη συμβατική γραμμική κλίμακα οδήγησε τελικά στην ακόλουθη εμπειρική σχέση (Nanouris et al. 2012a):

$$j_f = e^{c_0} q^{c_1 + c_2 \ln q}, \tag{4.81}$$

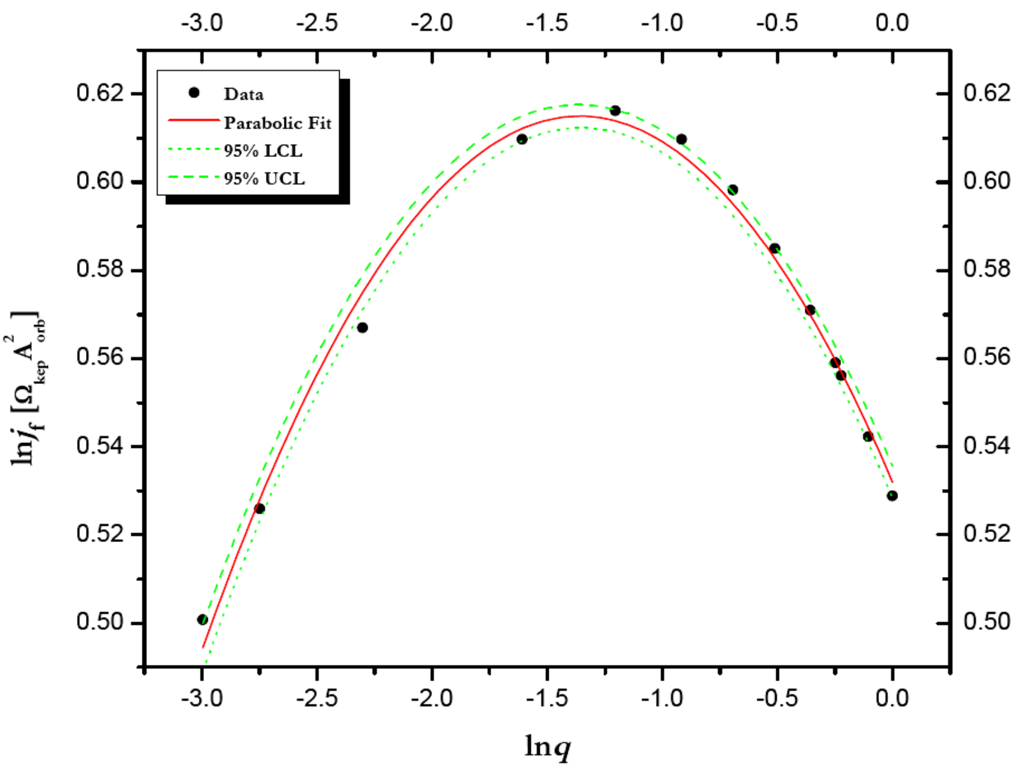
όπου c_0 = 0.53193 ± 0.00223, c_1 = -0.12228 ± 0.00455 και c_2 = -0.04499 ± 0.00151 οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των συντελεστών του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου παλινδρόμησης που χρησιμοποιήθηκε στη λογαριθμική κλίμακα. Το σχετικό σφάλμα της ειδικής στροφορμής του ανέμου που αναπτύσσεται εξαιτίας της αβεβαιότητας που συνοδεύει τους πιο πάνω συντελεστές, μπορεί εύκολα να εκτιμηθεί με τη βοήθεια της διάδοσης σφάλματος ως ακολούθως:

$$\frac{\delta j_f}{j_f} = \sqrt{(\delta c_0)^2 + (\ln q \delta c_1)^2 + [(\ln q)^2 \delta c_2]^2}\,. \tag{4.82}$$

Το σχετικό σφάλμα (4.82) εκτιμάται να λαμβάνει τιμές της τάξης του 1% με μια μικρή αύξηση όσο βρισκόμαστε κοντά σε μικρούς λόγους μαζών (~ 1.5%) και σημαντική μείωση προχωρώντας σε μεγαλύτερους λόγους μαζών (~ 0.3%). Επομένως, η σχέση (4.81) αποδεικνύεται ένα εξαιρετικά αποτελεσματικό αριθμητικό εργαλείο προσδιορισμού της τερματικής ειδικής στροφορμής του ανέμου που διαφεύγει από το σύστημα μέσω του σημείου L2 ως συνάρτηση του λόγου μαζών, ιδιαίτερα μάλιστα χρήσιμο κατά την εφαρμογή της σχέσης (4.80) στη μελέτη της τροχιακής εξέλιξης οδηγούμενη από τον συγκεκριμένο μηχανισμό.

Πίνακας Π.4.2. Η απόσταση του σημείου L2 από το κέντρο μάζας, καθώς και η ειδική στροφορμή του ανέμου στις συντεταγμένες που αποκτά την τερματική του κινηματική συμπεριφορά ως συνάρτηση του λόγου μαζών (Shu et al. 1979).

q	d_{L2} [A_{orb}]	j_i [$\Omega_{kep} \cdot A_{orb}^2$]	j_f [$\Omega_{kep} \cdot A_{orb}^2$]	θ_f [deg]	r_f' [A_{orb}]
0.001	1.000	1.145	1.180	-28.37	1.82
0.1	1.256	1.578	1.763	-36.76	∞
0.2	1.271	1.616	1.840	-39.53	∞
0.3	1.268	1.609	1.852	-41.63	∞
0.4	1.260	1.587	1.840	-43.38	∞
0.5	1.249	1.560	1.819	-44.90	∞
0.6	1.238	1.533	1.795	-46.25	∞
0.7	1.227	1.506	1.770	-47.46	∞
0.8	1.217	1.481	1.744	-48.56	498
0.9	1.207	1.458	1.720	-49.57	57.3
1.0	1.198	1.436	1.697	-50.50	30.7



Σχήμα IV.7. Συσχέτιση του λόγου μαζών και της (αδιάστατης) τερματικής ειδικής στροφορμής του ανέμου ο οποίος διαφεύγει μέσω του σημείου L2 από ένα διπλό σύστημα αστέρων σύμφωνα με το μοντέλο των Shu et al. (1979). Η παραβολική πολυωνυμική παλινδρόμηση αποδεικνύεται εξαιρετικά επιτυχής οδηγώντας σε σχετικό σφάλμα μόλις της τάξης του 1% (Nanouris et al. 2012a).

Αναλυτικότερα, επανερχόμενοι στην εξίσωση στροφορμής που διέπει το σύστημα και διατηρώντας την υπόθεση της αμελητέας ιδιοστροφορμής των μελών σε σχέση με την αντίστοιχη τροχιακή (4.72), οδηγούμαστε σε μια πιο σύνθετη κατάσταση κατά την οποία αφενός χάνεται μάζα από το σύστημα με τον επιμέρους ρυθμό $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_i < 0$ να αντιστοιχεί στο κάθε $i = 1{,}2$ μέλος, αφετέρου χάνεται στροφορμή η οποία δίνεται από τη σχέση (4.80) και δε μπορεί πλέον να αγνοηθεί, όπως πράξαμε στην περίπτωση της σφαιρικής και ισότροπης απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου. Ως εκ τούτου, απαιτείται η περιγραφή της συνδυασμένης απώλειας μάζας και στροφορμής, δηλαδή:

$$\dot{J}_{orb} = \dot{J} \Rightarrow \frac{G^{2/3}}{(2\pi)^{1/3}} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{M_1 M_2}{(M_1+M_2)^{1/3}} P^{1/3}\right] = \dot{J}_{L2} \Rightarrow$$

$$\left[M_2(M_1+M_2)^{-1/3}P^{1/3} - \frac{1}{3}M_1M_2(M_1+M_2)^{-4/3}P^{1/3}\right]\dot{M}_1 +$$
$$\left[M_1(M_1+M_2)^{-1/3}P^{1/3} - \frac{1}{3}M_1M_2(M_1+M_2)^{-4/3}P^{1/3}\right]\dot{M}_2 +$$
$$\frac{1}{3}M_1M_2(M_1+M_2)^{-1/3}P^{-2/3}\dot{P} = (M_1+M_2)^{2/3} j_f \dot{m}_{L2} P^{1/3} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{3}{M_1} - \frac{1}{M_1+M_2}\right]\dot{M}_1 + \left[\frac{3}{M_2} - \frac{1}{M_1+M_2}\right]\dot{M}_2 + \frac{\dot{P}}{P} = \frac{3(M_1+M_2)}{M_1M_2} j_f \dot{m}_{L2} \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{3q+2}{M_1+M_2}\dot{M}_1 - \frac{3q^{-1}+2}{M_1+M_2}\dot{M}_2 + \frac{3(1+q)}{M_2} j_f \dot{m}_{L2}. \tag{4.83}$$

Η απώλεια μάζας η οποία λαμβάνει χώρα μέσω του σημείου L2, ρυθμού έστω ίσου με $(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)_{L2} < 0$, μπορεί να εκληφθεί ως συνέχεια της διαδικασίας μεταφοράς μάζας μεταξύ των δύο μελών μέσω του σημείου L1. Η υπόθεση αυτή είναι λογική εάν αναλογιστούμε ότι ένα ποσοστό του ρυθμού απώλειας μάζας που προέρχεται από τον δότη αστέρα δεν καταλήγει στον δέκτη και τελικά διαφεύγει ολοκληρωτικά από το σύστημα μέσω του σημείου L2. Στη σχέση (4.83) μπορούμε λοιπόν να θέσουμε ως $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_1 \equiv (\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)_{L2}$ ή $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_2 \equiv (\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)_{L2}$, εφόσον δότης είναι ο πρωτεύοντας ή ο δευτερεύοντας αστέρας αντίστοιχα, αγνοώντας για λόγους απλότητας το ποσό που προσλαμβάνει ο δέκτης, δηλαδή:

- $\boxed{\frac{\dot{P}}{P} = -\left[\frac{3q+2}{M_1+M_2} - \frac{3(1+q)}{M_2} j_f\right]\dot{m}_{L2}}$ όταν δότης είναι το πρωτεύον μέλος. (4.84)

- $\boxed{\frac{\dot{P}}{P} = -\left[\frac{3q^{-1}+2}{M_1+M_2} - \frac{3(1+q)}{M_2} j_f\right]\dot{m}_{L2}}$ όταν δότης είναι το δευτερεύον μέλος. (4.85)

Οι δύο πιο πάνω σχέσεις περιγράφουν την τροχιακή εξέλιξη ενός διπλού συστήματος κάτω από την απώλεια μάζας και στροφορμής η οποία λαμβάνει χώρα από το σημείο L2. Σύμφωνα όμως με όσα ειπώθηκαν στις υποενότητες 4.1 και 4.3, η απώλεια μάζας οδηγεί πάντοτε σε αύξηση της τροχιακής περιόδου όταν η απώλεια στροφορμής οδηγεί, αντιστρόφως, στη μείωσή της. Εξαιρετικό λοιπόν ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση προσήμου των σχέσεων (4.84) και (4.85) η οποία τελικά αποκαλύπτει ότι η παράσταση που βρίσκεται μεταξύ των παρενθέσεων είναι πάντοτε αρνητική εξαιτίας των τιμών που λαμβάνει η (αδιάστατη) ειδική στροφορμή και είναι πάντοτε μεγαλύτερες της μονάδας. Επομένως, η απώλεια στροφορμής είναι εκείνη που επικρατεί τελικά, οδηγώντας πάντοτε σε μείωση της περιόδου.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι ο συγκεκριμένος μηχανισμός δε φαίνεται να έχει μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, καθώς τα δύο μέλη του συστήματος οφείλουν πρώτα να έχουν καλύψει την εξώτατη κρίσιμη κοινή ισοδυναμική επιφάνεια, απαίτηση η οποία όμως τον καθιστά σχετικά σπάνιο από τη στιγμή που το φαινόμενο αυτό μπορεί να εκδηλωθεί στα συστήματα υπερεπαφής και μόνο. Τα τελευταία όμως χρόνια έχουν διατυπωθεί προβληματισμοί σχετικά με τις επιπτώσεις που θα μπορούσε να έχει ένα τροποποιημένο μοντέλο Roche κάτω από την παρουσία ισχυρής πίεσης ακτινοβολίας. Η διαμόρφωση των κοινών ισοδυναμικών επιφανειών διαφέρει τότε σημαντικά σε σχέση με εκείνη που προβλέπεται από το συμβατικό μοντέλο Roche, αφήνοντας ανοικτό το ενδεχόμενο απώλειας μάζας από το σημείο L2 ακόμα και σε αποχωρισμένα συστήματα (Drechsel et al. 1995, Tsantilas et al. 2006, Tsantilas & Rovithis-Livaniou 2010). Ως εκ τούτου, ο συγκεκριμένος μηχανισμός αξίζει περαιτέρω διερεύνησης η οποία παρέχεται στην παρούσα διατριβή.

4.6. Μεταφορά Στροφορμής μέσω Παλιρροϊκής Τριβής

Η παρούσα υποενότητα είναι θεμελιώδης όσον αφορά το αντικείμενο στο οποίο επικεντρώνεται η διδακτορική διάτριβή, καθώς η παλιρροϊκή δράση αποτελεί φυσικό μηχανισμό ο οποίος εμφανίζεται σε όλα τα διπλά συστήματα αστέρων ανεξάρτητα από το είδος και την τροχιακή τους περίοδο και επομένως καθίσταται κρίσιμη στην εξέλιξή τους. Οι παλίρροιες θεωρούνταν σε γενικές γραμμές ένα φαινόμενο γνωστό μέχρι που τα τελευταία χρόνια παρουσιάστηκαν μια σειρά από παρατηρησιακά δεδομένα τα οποία έδειξαν ότι η κλασική θεώρηση δεν ήταν πλέον αρκετή για να τα εξηγήσει, γεγονός το οποίο έχει φέρει και πάλι στο προσκήνιο την αναζήτηση νέων διαδικασιών, ικανών να καταστήσουν το συγκεκριμένο μηχανισμό ιδιαίτερα δραστικό.

Ερχόμενοι τώρα σε μια αναλυτική και προσεκτική παρουσίαση του τρόπου δράσης του συγκεκριμένου μηχανισμού, θα πρέπει να θυμίσουμε πως στην περίπτωση του κλασικού προβλήματος των δύο σωμάτων, οι δύο εμπλεκόμενες μάζες θεωρούνται σφαιρικές, ομογενείς και απόλυτα στερεές έτσι ώστε να μην επιδέχονται καμία παραμόρφωση. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο προφανές συμπέρασμα ότι το σύστημα είναι βαρυτικά δεσμευμένο και με κανένα τρόπο δε χάνεται στροφορμή από αυτό. Οι δύο λοιπόν σφαίρες θα ιδιοπεριστρέφονται αιώνια με την ίδια ακριβώς τροχιακή περίοδο και συνεπώς η τελευταία θα παραμένει επίσης αμετάβλητη.

Στην πραγματικότητα βέβαια, οι δύο αστέρες δε χαρακτηρίζονται από καμία από τις παραπάνω ιδιότητες. Όπως γνωρίζουμε, το εξωτερικό – τουλάχιστον – περίβλημα του αστέρα μπορεί εύκολα να παραμορφωθεί εξαιτίας της βαρυτικής αλληλεπίδρασης με το συνοδό του και μάλιστα, σε πρώτη ματιά, η παραμόρφωση αυτή αναμένεται συμμετρική ως προς την ευθεία που ενώνει τα δύο σώματα. Κάτι τέτοιο όμως θα συνέβαινε στην ιδανική περίπτωση που το παραμορφωμένο τμήμα δεν αλληλεπιδρούσε με το εξωτερικό περίβλημα του αστερα. Στην πραγματικότητα δηλαδή, αναπτύσσεται τριβή η οποία προκαλεί διάχυση της κινητικής ενέργειας του αερίου των παραμορφωμένων τμημάτων σε θερμότητα, με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός *εξογκώματος (tidal bulge)* το οποίο δε βρίσκεται τοποθετημένο απέναντι από το συνοδό αστέρα αλλά σημαντικά μετατοπισμένο κατά μια ***φάση υστέρησης (phase lag)***. Κατανοούμε λοιπόν πως η έννοια της παλίρροιας συνδέεται άμεσα με τη ροπή που αναπτύσσεται εξαιτίας του συγκεκριμένου εξογκώματος, οδηγώντας στη μείωση της ιδιοστροφορμής του μέλους που δέχεται τη ροπή αυτή και, κατά σειρά, στην αύξηση της τροχιακής από τη στιγμή που η συνολική στροφορμή διατηρείται.

Ένα κρίσιμο συμπέρασμα από την παραπάνω περιγραφή είναι ότι η φύση της παλιρροϊκής αλληλεπίδρασης σχετίζεται άμεσα με την τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ του παραμορφωμένου τμήματος του αστέρα (εξογκώματος) και της περιβάλλουσας επιφάνειας του αστρικού περιβλήματος, φαινόμενο το οποίο καλείται συχνά ως ***παλιρροϊκή τριβή (tidal friction)***. Έτσι, η διερεύνηση του φαινομένου των παλιρροιών απαιτεί τη γνώση των φυσικών διαδικασιών που προκαλούν την τριβή και πώς το άστρο αποκρίνεται σε αυτή, έχοντας έτσι οδηγήσει στη διάκριση δύο βασικών ειδών παλιρροϊκής δράσης, υδροστατικής και δυναμικής φύσης αντίστοιχα.

- ***Υδροστατικές Παλίρροιες (Equilibrium Tides):*** Πρόκειται για το μηχανισμό παλιρροϊκής δράσης που σχετίζεται με τον τρόπο απόκρισης της συνολικής δομής του αστέρα που υπόκειται στο παλιρροϊκό δυναμικό του συνοδού του και την επαναφορά της υδροστατικής του ισορροπίας. Ο όρος αυτός φαίνεται να κυριαρχεί στην περίπτωση αστέρων που φέρουν περίβλημα μεταφοράς.

- ***Δυναμικές Παλίρροιες (Dynamical Tides):*** Πρόκειται για το μηχανισμό παλιρροϊκής δράσης που σχετίζεται με τη δυναμική απόκριση του αστέρα και συνεπώς με τις ελαστικές του ιδιότητες και την ενδεχόμενη ανάπτυξη συντονισμών μεταξύ των παλινδρομικών κινήσεων που προκαλούνται από τις ίδιες τις παλίρροιες και από τα κύματα που αναπτύσσονται στο εσωτερικό του. Ο όρος αυτός φαίνεται να επικρατεί σχεδόν αποκλειστικά, σε αντίθεση με τον προηγούμενο, στην περίπτωση αστέρων που φέρουν περίβλημα ακτινοβολίας.

Η κλασική προσέγγιση του προβλήματος, κάνοντας χρήση των σφαιρικών πολικών συντεταγμένων (r,θ,φ) με κέντρο τον αστέρα που δέχεται την παλιρροϊκή παραμόρφωση, είναι η ανάπτυξη του *παλιρροϊκού δυναμικού (tidal potential)* σε σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις από τις οποίες ο κάθε όρος αναπτύσσεται επίσης σε μια σειρά Fourier ως προς τη μέση (τροχιακή) ανωμαλία (Zahn 1977). Το συνολικό *διαταρακτικό ή παρελκτικό δυναμικό (perturbing potential)* που προκαλείται από το συνοδό αστέρα τελικά αποδεικνύεται πως λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$V_{pert}(r,\theta,\varphi) = U_n^{lm}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n^m(\cos\theta)\exp(\sigma_{lm}t - m\varphi), \tag{4.86}$$

όπου R η ακτίνα του αστέρα που δέχεται το διαταρακτικό δυναμικό, $U_n^{l,m}$ τα πλάτη των όρων του παλιρροϊκού δυναμικού τάξης n (l, m είναι παράμετροι που σχετίζονται με το μη ακτινικό του τμήμα), P_n^m οι συναρτήσεις Legendre και $\sigma_{l,m}$ μια ποσότητα η οποία καλείται ***παλιρροϊκή συχνότητα (tidal frequency)*** και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_{lm} = l\Omega_{kep} - m\Omega_1, \tag{4.87}$$

όπου Ω_{kep} η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και Ω_1 η γωνιακή ταχύτητα του πρωτεύοντος αστέρα που θα θεωρούμε ότι είναι εκείνος που δέχεται το παλιρροϊκό δυναμικό. Με τη βοήθεια ορισμένων και πάλι προσεγγίσεων και δεχόμενοι ότι οι παλιρροϊκές ταλαντώσεις είναι πάντοτε γραμμικές, αποδεικνύεται ότι το εξωτερικό βαρυτικό δυναμικό που παράγεται από τον αστέρα που υπόκειται στις παλίρροιες έχει την ακόλουθη μορφή:

$$V_{grav}(r,\theta,\varphi) = \Phi_n^{l,m}\left(\frac{r}{R}\right)^{-n-1} P_n^m(\cos\theta)\exp(\sigma_{l,m}t - m\varphi), \tag{4.88}$$

όπου $\Phi_n^{l,m}$ τα πλάτη των όρων του εξωτερικού δυναμικού και τα οποία στη γενική περίπτωση είναι μιγαδικοί αριθμοί. Ένας κρίσιμος συντελεστής ο οποίος απλοποιεί τη μαθηματική περιγραφή του φαινομένου και περιλαμβάνει τόσο τη συνεισφορά της υδροστατικής όσο και της δυναμικής παλίρροιας συμβολίζεται με $\varepsilon_n^{l,m}$ και δίνεται από την εξής σχέση:

$$\varepsilon_n^{l,m} = \mathrm{Im}\left(\frac{\Phi_n^{l,m}}{U_n^{l,m}}\right) = 2k_n \sin\xi(s_{l,m}) + E_n s_{l,m}^{8/3} p_n(s_{l,m}), \qquad (4.89)$$

όπου k_n οι σταθερές (n τάξης) της περιστροφής της γραμμής των αψίδων, ξ η φασική μετατόπιση της υδροστατικής παλίρροιας, $s_{l,m}$ η αδιάστατη μορφή της παλιρροϊκής συχνότητας, E_n σταθερές οι οποίες εξαρτώνται κυρίως από τη δομή της εξωτερικής ζώνης ακτινοβολίας και έχουν όμοιες ιδιότητες με τις σταθερές k_n (είναι όμως περισσότερο ευαίσθητες σε μεταβολές της δομής του εσωτερικού των αστέρων) ώστε η συνάρτηση p_n να είναι πάντοτε θετική και να τείνει στη μονάδα για πολύ μικρές παλιρροϊκές συχνότητες. Ας σημειωθεί πως ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης εκφράζει τη συνεισφορά της υδροστατικής παλίρροιας και ο δεύτερος τη συνεισφορά της αντίστοιχης δυναμικής.

Η δυναμική εξέλιξη ενός διπλού συστήματος εξαιτίας της παλιρροϊκής αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών του ουσιαστικά καθορίζεται από την επίλυση ενός συστήματος τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων και το οποίο περιλαμβάνει τη χρονική μεταβολή του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς A_{orb}, της εκκεντρότητάς της e, καθώς και της στροφορμής των δύο μελών $J_1=I_1\Omega_1$, $J_2=I_2\Omega_2$. Στην προκειμένη, μας ενδιαφέρει η μεταβολή μονάχα του πρωτεύοντος, καθώς υποθέτουμε για λόγους απλότητας ότι μόνο εκείνο δέχεται την παλιρροϊκή επίδραση του δευτερεύοντος. Στις απλουστευμένες αυτές περιπτώσεις, στο δευτερεύον μέλος προσδίδονται ιδιότητες στερεού σώματος, μη παραμορφώσιμου δηλαδή περιβλήματος. Οι τρεις θεμελιώδεις λοιπόν εξισώσεις παρατίθενται, κατά σειρά, ακολούθως (Zahn 1977):

- $$\frac{dA_{orb}}{dt} = -\frac{3}{\Omega_{kep}}\cdot\frac{M_1+M_2}{M_1}\cdot\frac{GM_2}{R_1^2}\left(\frac{R_1}{A_{orb}}\right)^7 \times \left[\varepsilon_2^{2,2} + e^2\left(\frac{3}{4}\varepsilon_2^{1,0} + \frac{1}{8}\varepsilon_2^{1,2} - 5\varepsilon_2^{2,2} + \frac{147}{8}\varepsilon_2^{3,2}\right) + O(e^4)\right]. \qquad (4.90)$$

- $$\frac{de}{dt} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{e}{\Omega_{kep}}\cdot\frac{M_1+M_2}{M_1}\cdot\frac{GM_2}{R_1^3}\left(\frac{R_1}{A_{orb}}\right)^8 \times \left[\frac{3}{2}\varepsilon_2^{1,0} - \frac{1}{4}\varepsilon_2^{1,2} - \varepsilon_2^{2,2} + \frac{49}{4}\varepsilon_2^{3,2} + O(e^2)\right]. \qquad (4.91)$$

- $$\frac{d}{dt}(I_1\Omega_1) = \frac{3}{2}\cdot\frac{GM_2^2}{R_1}\left(\frac{R_1}{A_{orb}}\right)^6\left[\varepsilon_2^{2,2} + e^2\left(\frac{1}{4}\varepsilon_2^{1,2} - 5\varepsilon_2^{2,2} + \frac{49}{4}\varepsilon_2^{3,2}\right) + O(e^4)\right], \qquad (4.92)$$

όπου M_1, R_1, I_1, Ω_1 είναι η μάζα, η ακτίνα, η ροπή αδράνειας και η γωνιακή ταχύτητα του πρωτεύοντος αστέρα αντίστοιχα, M_2 η μάζα του δευτερεύοντος και G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τα σχετικά αναπτύγματα κρατήθηκαν μόνο οι όροι δεύτερης τάξης (n = 2), ενώ πρέπει επίσης να τονιστεί ότι το παραπάνω σύστημα μπορεί να επιλυθεί μόνο αριθμητικά.

4.6.1. Μηχανισμοί Υποστήριξης Υδροστατικών Παλιρροιών

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα τελευταία χρόνια έχει γίνει μια σημαντική προσπάθεια εύρεσης των κατάλληλων εκείνων μηχανισμών οι οποίοι μπορούν να οδηγήσουν στο φαινόμενο της παλιρροϊκής τριβής. Όσον αφορά τις *υδροστατικές παλίρροιες*, έχουν προταθεί τέσσερις βασικές διαδικασίες από τις οποίες, όπως θα φανεί, μόνο μία είναι ικανή να εξηγήσει τα υπάρχοντα παρατηρησιακά δεδομένα και προφανώς είναι η επικρατέστερη να λαμβάνει χώρα στους αστέρες με *περίβλημα μεταφοράς* (Zahn 1977, 1978, 1989). Επίσης, θα δούμε ότι από τις τέσσερις προτεινόμενες διαδικασίες υπάρχει και μία ακόμα η οποία φαίνεται αρκετά δραστική αλλά αμφισβητείται έντονα η εγκυρότητά της. Αναλυτικότερα, εισάγοντας μια ποσότητα t_F, η οποία καλείται ***χρόνος τριβής (friction time)***, διερευνάται κατά πόσο το χρονικό διάστημα που προβλέπεται από την εκάστοτε φυσική διαδικασία είναι ικανοποιητικά μικρό ώστε η διαδικασία αυτή να θεωρηθεί αποτελεσματική.

4.6.1.1. Μηχανισμός Ιξώδους Διάχυσης

Ο μηχανισμός της ***ιξώδους διάχυσης*** (***viscous dissipation***) θεωρεί υπαίτιο το *κινηματικό ιξώδες (kinematical viscosity)*, v, του ρευστού που υφίσταται στο αστρικό περίβλημα μεταφοράς για την ανάπτυξη της παλιρροϊκής τριβής. Κάνοντας χρήση της έννοιας του χρόνου τριβής, το σύστημα των εξισώσεων που διέπουν την παλιρροϊκή εξέλιξη λαμβάνει την παρακάτω ισοδύναμη μορφή (Zahn 1989):

- $$\frac{1}{A_{orb}}\cdot\frac{dA_{orb}}{dt} = -\frac{12}{t_F}q(1+q)\left(\frac{R_1}{a}\right)^8\left\{\lambda^{2,2}\left(1-\frac{\Omega_1}{\Omega_{kep}}\right)+ e^2\left[\frac{3}{8}\lambda^{1,0}+\frac{1}{16}\lambda^{1,2}\left(1-2\frac{\Omega_1}{\Omega_{kep}}\right)-5\lambda^{2,2}\left(1-\frac{\Omega_1}{\Omega_{kep}}\right)+\frac{147}{16}\lambda^{3,2}\left(3-2\frac{\Omega_1}{\Omega_{kep}}\right)\right]\right\}. \quad (4.93)$$

- $$\frac{1}{e}\cdot\frac{de}{dt} = -\frac{3}{t_F}q(1+q)\left(\frac{R_1}{A_{orb}}\right)^8\times \left[\frac{3}{4}\lambda^{1,0}-\frac{1}{8}\lambda^{1,2}\left(1-2\frac{\Omega_1}{\Omega_{kep}}\right)-\lambda^{2,2}\left(1-\frac{\Omega_1}{\omega}\right)+\frac{49}{8}\lambda^{3,2}\left(3-2\frac{\Omega_1}{\Omega_{kep}}\right)\right]. \quad (4.94)$$

- $$\frac{d}{dt}(I_1\Omega_1) = \frac{6}{t_F}q^2M_1R_1^2\left(\frac{R_1}{A_{orb}}\right)^6\left\{\lambda^{2,2}(\Omega_{kep}-\Omega_1)+\right.$$

$$e^2\left[\frac{1}{8}\lambda^{1,2}(\Omega_{kep}-2\Omega_1)-5\lambda^{2,2}(\Omega_{kep}-\Omega_1)+\frac{49}{8}\lambda^{3,2}(3\Omega_{kep}-2\Omega_1)\right]\Bigg\}, \quad (4.95)$$

όπου q ο λόγος μαζών του συστήματος και $\lambda^{l,m}$ κατάλληλοι συντελεστές οι οποίοι συνδέονται άμεσα με την ***παλιρροϊκή περίοδο (tidal period)***, $\Pi^{l,m}$, από μια σχέση της ακόλουθης μορφής:

$$\lambda^{l,m}=\lambda_2\Pi^{l,m}=\lambda_2\frac{2\pi}{\left|l\Omega_{kep}-m\Omega_1\right|} \quad \text{με} \quad \lambda_2\cong 0.019\alpha^{4/3}\sqrt{\frac{320}{320+\eta^2}}, \quad (4.96)$$

όπου $\eta = 2t_F/\Pi^{1,1} = 2t_F/\Pi$ και α η παράμετρος μίξης. Στην περίπτωση που ο αστέρας διαθέτει εσωτερικό πλήρους μεταφοράς ή τουλάχιστον διαθέτει ένα αρκετά βαθύ περίβλημα μεταφοράς, όλοι οι συντελεστές $\lambda^{l,m}$ γίνονται ίσοι με τη σταθερά (δευτέρας τάξεως) της περιστροφής της γραμμής των αψίδων k_2. Τότε, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της παλιρροϊκής εξέλιξης (4.93)-(4.95) απλοποιείται ως εξής:

- $$\frac{1}{A_{orb}}\cdot\frac{dA_{orb}}{dt}=-12\frac{k_2}{t_F}q(1+q)\left(\frac{R_1}{A_{orb}}\right)^8\left[\left(1-\frac{\Omega_1}{\Omega_{kep}}\right)+e^2\left(23-\frac{27}{2}\cdot\frac{\Omega_1}{\Omega_{kep}}\right)+O(e^4)\right]. \quad (4.97)$$

- $$\frac{1}{e}\cdot\frac{de}{dt}=-3\frac{k_2}{t_F}q(1+q)\left(\frac{R_1}{A_{orb}}\right)^8\left[\left(18-11\frac{\Omega_1}{\Omega_{kep}}\right)+O(e^2)\right]. \quad (4.98)$$

- $$\frac{d}{dt}(I_1\Omega_1)=6\frac{k_2}{t_F}q^2M_1R_1^2\left(\frac{R_1}{A_{orb}}\right)^6\left[(\Omega_{kep}-\Omega_1)+e^2\left(\frac{27}{2}\Omega_{kep}-\frac{15}{2}\Omega_1\right)+O(e^4)\right]. \quad (4.99)$$

Είδαμε, κατά τη γενική περιγραφή του φαινομένου της παλιρροϊκής δράσης, ότι ο σχηματισμός ενός παραμορφωμένου τμήματος (εξογκώματος) στον αστέρα που δέχεται το διαταρακτικό δυναμικό οδηγεί στην ανάπτυξη μιας ροπής η οποία τελικά τείνει να συγχρονίσει τα μέλη με την τροχιά και να καταστήσει κυκλική την τελευταία. Οι δύο αντίστοιχες θεμελιώδεις λοιπόν χρονικές κλίμακες που χαρακτηρίζουν την παλιρροϊκή εξέλιξη ενός διπλού συστήματος αστέρων καλούνται ***χρόνος συγχρονισμού (synchronization time)***, $t_{sync,i}$, και ***χρόνος κυκλοποίησης (circularization time)***, $t_{circ,i}$, για το κάθε i = 1,2 μέλος και προσδιορίζονται από τις δύο ακόλουθες σχέσεις:

- $$\frac{1}{t_{sync,i}}=-\frac{1}{(\Omega_i-\Omega_{kep})}\cdot\frac{d\Omega_i}{dt}=6\frac{k_{2,\iota}}{t_{F,i}}q^2\frac{M_iR_i^2}{I_i}\left(\frac{R_i}{A_{orb}}\right)^6. \quad (4.100)$$

- $$\frac{1}{t_{circ,i}}=-\frac{1}{e_i}\cdot\frac{de_i}{dt}=21\frac{k_{2,\iota}}{t_{F,i}}q(1+q)\left(\frac{R_i}{A_{orb}}\right)^8, \text{ δεχόμενοι ότι } \Omega_i=\Omega_{kep}. \quad (4.101)$$

Εύκολα μπορεί κανείς να δει μέσα από τη σχέση (4.98) πως μια κυκλική τροχιά είναι ευσταθής, δηλαδή ισχύει κάθε χρονική στιγμή de/dt < 0, εάν και μόνο αν ο λόγος της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής κάθε μέλους προς την αντίστοιχη τροχιακή ικανοποιεί την ανισότητα Ω_i/ω < 18/11. Ας σημειωθεί βέβαια ότι όλες οι παραπάνω υποθέσεις μειονεκτούν πάντοτε από το γεγονός της ελλιπούς μας γνώσης σχετικά με τον τρόπο διάδοσης της ενέργειας με μεταφορά, καθώς μέχρι σήμερα καμία θεωρία δεν θεωρείται απόλυτα ικανοποιητική. Επίσης, πρέπει να τονιστεί ότι η έννοια του συγχρονισμού αναφέρεται στο εξωτερικό περίβλημα του κάθε μέλους και όχι στο σύνολό του, καθώς πιστεύεται ότι το φαινόμενο της διαφορικής περιστροφής επιτρέπει την ιδιοπεριστροφή του πυρήνα ακτινοβολίας σε σημαντικά μεγαλύτερες ταχύτητες.

Συμπληρώνουμε ακόμα ότι η έννοια του χρόνου κυκλοποίησης αναφέρεται, όπως είδαμε, και στα δύο μέλη του συστήματος, εκφράζοντας με τον τρόπο αυτό τη ξεχωριστή συνεισφορά τους στην κυκλοποίηση της τροχιάς. Μια χρονική κλίμακα η οποία εκφράζει πιο αντικειμενικά το χρόνο κυκλοποίησης της τροχιάς, t_{circ}, λαμβάνοντας υπόψη της τους αντίστοιχους χρόνους $t_{circ,1}$ και $t_{circ,2}$ για το πρωτεύον και δευτερεύον μέλος, δίνεται από την παρακάτω σχέση (Claret & Cunha 1997):

$$\frac{1}{t_{circ}} = \frac{1}{t_{circ,1}} + \frac{1}{t_{circ,2}}. \tag{4.102}$$

Ερχόμενοι τώρα στον εξεταζόμενο μηχανισμό της ιξώδους διάχυσης, σύμφωνα με την αντίστοιχη θεωρία, προβλέπεται πως ο χρόνος τριβής θα είναι ίσος με την ακόλουθη ποσότητα:

$$t_F = t_V = \frac{R_i^2}{\nu}. \tag{4.103}$$

Ο χρόνος τριβής, ο οποίος υπολογίζεται μέσω της σχέσης (4.103) για τον μηχανισμό της ιξώδους διάχυσης, δεν αναμένεται μικρότερος από 10^{12} με 10^{13} yr περίπου. Επομένως, η εκτιμώμενη χρονική κλίμακα δράσης της παλιρροϊκής τριβής στην περίπτωσή μας είναι ουσιαστικά αμελητέα και συνεπώς ο αντίστοιχος μηχανισμός απορριπτέος.

4.6.1.2. Μηχανισμός Ακτινοβολιακής Διάχυσης

Ο μηχανισμός της ***ακτινοβολιακής διάχυσης*** (***radiative dissipation ή damping***) θεωρεί υπαίτιο το ιξώδες των ζωνών ακινοβολίας στην κίνηση των παλιρροιών το οποίο προκαλεί με τον τρόπο αυτό διάχυση της θερμικής ενέργειας με ακτινοβολία. Ο προβλεπόμενος χρόνος τριβής, σύμφωνα με το μηχανισμο αυτό, είναι δέκα περίπου φορές μεγαλύτερος του χρόνου των Kelvin-Helmholtz, t_{KH}, δηλαδή του χαρακτηριστικού εκείνου χρόνου που απαιτείται ώστε η βαρυτική δυναμική ενέργεια να μετατραπεί σε φωτεινή:

$$t_F \cong 10 t_{KH} = 10 \frac{G M_i^2}{R_i L_i}, \tag{4.104}$$

όπου L_i η φωτεινότητα του κάθε μέλους. Ο χρόνος αυτός, σύμφωνα με τη σχέση (4.104), είναι της τάξης των 10^8 yr και, αν και σημαντικά μικρότερος από τον προηγούμενο, θεωρείται μη ικανοποιητικός ώστε ο αντίστοιχος μηχανισμός να καθίσταται αποτελεσματικός τουλάχιστον για την περίπτωση των υδροστατικών παλιρροιών, καθώς στην περίπτωση των δυναμικών παλιρροιών θα φανεί πως είναι ιδιαίτερα αποδοτικός.

4.6.1.3. Μηχανισμός Τυρβώδους Διάχυσης

Ο μηχανισμός της ***τυρβώδους διάχυσης*** (***turbulent dissipation***) θεωρεί ως υπαίτιο το *τυρβώδες ιξώδες (turbulent ή eddy viscosity)* κατά τη ροή του ρευστού κάθε παλιρροϊκού κύματος για την ανάπτυξη της παλιρροϊκής τριβής. Όπως είναι φυσικό, η διαδικασία αυτή μπορεί να λαμβάνει χώρα μόνο σε αστέρες που διαθέτουν εκτεταμένα κελύφη μεταφοράς. Ο προβλεπόμενος χρόνος τριβής, σύμφωνα με το μηχανισμο αυτό, και θεωρώντας ότι η μεταφορά της ενέργειας πραγματοποιείται αποκλειστικά με μεταφορά, εκτιμάται ως ακολούθως:

$$t_F \cong t_{EV} = \left(\frac{M_i R_i^2}{L_i} \right)^{1/3}. \tag{4.105}$$

Ο χρόνος τριβής ενός τυπικού αστέρα του οποίου η ζώνη μεταφοράς καταλαμβάνει σημαντικό ποσοστό της ακτίνας του, όπως ο Ήλιος, βρίσκεται της τάξης του 1 yr. Είναι λοιπόν σαφές πως ο μηχανισμός της τυρβώδους διάχυσης είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικός και μπορεί να θεωρηθεί ένας από τους πιθανότερους υποψήφιους για την ανάπτυξη της παλιρροϊκής τριβής. Ο αντίστοιχος χρόνος συγχρονισμού και κυκλοποίησης που προβλέπεται για τον παραπάνω χρόνο τριβής, δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

- $$t_{sync,i} = \frac{1}{6 q^2 k_{2,i}} \left(\frac{M_i R_i^2}{L_i} \right)^{1/3} \frac{I_i}{M_i R_i^2} \left(\frac{A_{orb}}{R_i} \right)^6. \tag{4.106}$$

- $$t_{circ,i} = \frac{1}{84 q (1+q)} \left(\frac{M_i R_i^2}{L_i} \right)^{1/3} \left(\frac{A_{orb}}{R_i} \right)^8, \text{ δεχόμενοι ότι } \Omega_i = \Omega_{kep}. \tag{4.107}$$

Ο παραπάνω μηχανισμός μπορεί πρακτικά να εφαρμοστεί και σε αστέρες προγενέστερων φασματικών τύπων οι οποίοι διαθέτουν περίβλημα ακτινοβολίας και πυρήνα μεταφοράς. Οι κινήσεις μεταφοράς είναι όμως τότε τόσο περιορισμένες ώστε, κατά τη διάρκεια μιας παλιρροϊκής περιόδου, η απόσταση που διανύουν τα μόρια του ρευστού είναι μικρότερη από την ελεύθερη διαδρομή που προβλέπει η θεωρία μήκους ανάμειξης (mixing length theory). Έχει μάλιστα βρεθεί ότι ο χρόνος τριβής για τις περιπτώσεις αυτές ακολουθεί κατά προσέγγιση την παρακάτω σχέση (Zahn 1966):

$$t_F \cong t_{EV} = \left(\frac{M_i R_i^2}{L_i}\right)^{1/3}\left(\frac{R_i}{R_{C,i}}\right)^7, \tag{4.108}$$

όπου $R_{C,i}$ η ακτίνα του πυρήνα για το κάθε μέλος του διπλού συστήματος. Οι χρόνοι συγχρονισμού και κυκλοποίησης που προκύπτουν για τον παραπάνω χρόνο τριβής υπολογίζονται τότε ιδιαίτερα μεγάλοι και μάλιστα σε πολλές περιπτώσεις φαίνεται να ξεπερνούν το χρόνο πυρηνικής εξέλιξης των αστέρων. Συνεπώς, ο μηχανισμός αυτός αναμένεται αποτελεσματικός μονάχα σε αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων. Τέλος, σχετικά με την πιθανότητα ανάπτυξης τυρβώδους διάχυσης από την ίδια την παλίρροια, εκτιμάται πως κάτι τέτοιο δε θα μπορούσε να συμβαίνει καθώς η επιφάνεια πάνω στην οποία το παραμορφωμένο τμήμα του άστρου αναπτύσσεται, ταλαντώνεται περιοδικά και σε καμία περίπτωση δεν προκαλείται τυρβώδης αστάθεια, όσον τουλάχιστον θεωρούμε τις ταλαντώσεις αυτές γραμμικές.

4.6.1.4. Μηχανισμός Κυκλοφορίας Ekman

Ο τέταρτος και τελευταίος μηχανισμός σχετικός με τις υδροστατικές παλίρροιες εμπλέκει ορισμένες φυσικές διαδικασίες που συναντώνται στη Φυσική των ρευστών και οι οποίες εφαρμόζονται σε ένα λεπτό στρώμα του εξωτερικού περιβλήματος των άστρων κατά την παλιρροϊκή επίδραση από ένα συνοδό αστέρα, γνωστό ως *οριακό στρώμα του Ekman (Ekman-type boundary layer)*. Ο μηχανισμός αυτός, ο οποίος συχνά καλείται και ως ***ρευστοδυναμικός (hydrodynamical)***, μπορεί να υφίσταται τόσο σε αστέρες με περίβλημα μεταφοράς όσο και σε αστέρες με περίβλημα ακτινοβολίας.

Οι αρχές του μηχανισμού στηρίζονται στην υπόθεση πως κάθε σωματίδιο του ρευστού το οποίο βρίσκεται στα εξωτερικά στρώματα ενός αστέρα και δεν έχει ακόμα συγχρονιστεί με την τροχιά, είναι υποχρεωμένο να εκτελεί κινήσεις μη κυκλικές οι οποίες επιφέρουν συνεχείς μεταβολές στην επιτάχυνσή του κατά μήκος της τροχιάς του. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι ο αστέρας που δέχεται το παλιρροϊκό δυναμικό επιμηκύνεται κατά μήκος του άξονα που συνδέει τα κέντρα μάζας των μελών του συστήματος και συνεπώς τα σωματίδια εκτελούν κατά μήκος της ισημερινής ζώνης ελλειπτικές τροχιές. Αντίστοιχα γήϊνα φαινόμενα μεγάλης κλίμακας που οδηγούν στην κυκλοφορία Ekman πηγάζουν από την αλληλεπίδραση των ανέμων με τα επιφανειακά ωκεάνια ρεύματα. Το αποτέλεσμα είναι η σπειροειδής κίνηση των θαλάσσιων κυμάτων δεξιόστροφης φοράς στο βόρειο ημισφαίριο και αριστερόστροφης στο νότιο με ένταση η οποία εξασθενεί με το το βάθος.

Αποδεικνύεται τότε πως προκαλείται μια μεγάλης κλίμακας κυκλοφορία κατά μήκος των αστρικών μεσημβρινών η οποία τελικά απομακρύνει υλικό υψηλής στροφορμής και το αντικαθιστά από υλικό μικρότερης στροφορμής σε ένα λεπτό στρώμα της ισημερινής ζώνης. Έτσι, ο αστέρας επιβραδύνεται και τα παλιρροϊκά κύματα είναι τότε ικανά να συγχρονίσουν την περιστροφή του συγκεκριμένου αστέρα με εκείνη της τροχιάς σε χρονική κλίμακα μικρότερη από αυτή που προβλέπεται με βάση την κλασική τριβή (Tassoul & Tassoul 1992a, 1992b). Οι χρόνοι συγχρονισμού και κυκλοποίησης που προβλέπονται για τον ρευστοδυναμικό μηχανισμό δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις (Tassoul & Tassoul 1992a, 1997):

- $$t_{sync,i} = 5.35 \times 10^{2-\frac{N}{4}+\sigma} \frac{1+q}{q} \left(\frac{L_i}{L_\odot}\right)^{-1/4} \left(\frac{M_i}{M_\odot}\right)^{5/4} \left(\frac{R_i}{R_\odot}\right)^{-3} P^{11/4} \text{ σε yr.} \quad (4.109)$$

- $$t_{circ,i} = 9.4 \times 10^{3-\frac{N}{4}+\sigma} \frac{(1+q)^{2/3}}{k_i^2} \left(\frac{L_i}{L_\odot}\right)^{-1/4} \left(\frac{M_i}{M_\odot}\right)^{23/12} \left(\frac{R_i}{R_\odot}\right)^{-5} P^{49/12} \text{ σε yr.} \quad (4.110)$$

όπου M_i, R_i, και L_i είναι η μάζα, η ακτίνα και η φωτεινότητα και του κάθε μέλους σε ηλιακές μονάδες, k_i η αντίστοιχη αδιάστατη ακτίνα αδράνειας, ενώ q και P είναι ο λόγος μαζών και η τροχιακή περίοδος του συστήματος με την τελευταία να δίνεται σε d. Στις παραπάνω σχέσεις, η σταθερά σ έχει εισαχθεί ώστε να αντισταθμίζει πιθανές αποκλίσεις από τα παρατηρησιακά δεδομένα και με τον τρόπο αυτό έχει εκτιμηθεί ίση με $\sigma \approx 1.6$, τουλάχιστον για το διάστημα που οι αστέρες βρίσκονται στην κύρια ακολουθία (Claret et al. 1995). Η σταθερά N είναι σχετικά αυθαίρετη και σχετίζεται με το λόγο του μακροσκοπικού προς το μικροσκοπικό ιξώδες. Έχει όμως βρεθεί ότι, ανάλογα με το περίβλημα που φέρει κάθε αστέρας, μπορεί να λάβει τις εξής τιμές:

- $N = 10$ για την περίπτωση αστέρων που φέρουν περίβλημα μεταφοράς.

- $N = 0$ για την περίπτωση αστέρων που φέρουν περίβλημα ακτινοβολίας.

Στο σημείο αυτό, είναι ουσιώδες να προσθέσουμε πως ο ρευστοδυναμικός μηχανισμός είναι αμφισβητούμενος και έχει μάλιστα επικριθεί από ορισμένους ερευνητές (Rieutord & Zahn 1997). Ακόμα και στην περίπτωση που υφίσταται, η συνεισφορά του στην παλιρροϊκή πέδηση ενδέχεται να είναι αμελητέα, καθώς η μαθηματική περιγραφή των Tassoul και Tassoul (1992a, 1992b) έχει κατακριθεί πως περιέχει σημαντικά λάθη και στερείται επίσης φυσικής υπόστασης σε ορισμένα της σημεία. Εφαρμογή μάλιστα της παραπάνω θεωρίας σε διάφορα πλανητικού τύπου συστήματα, όπως εκείνου του Δία και της Ιούς, έδειξε πως ο μηχανισμός αυτός αποτυγχάνει ολοκληρωτικά. Μετά τη διαμάχη αυτή, οι Tassoul & Tassoul (1997) κατέστησαν σαφές πως ο μηχανισμός που πρότειναν έχει ισχύ αυστηρά μέσα στα πλαίσια της γραμμικοποίησης των εξισώσεων που χρησιμοποίησαν, γεγονός το οποίο σημαίνει πως η απομάκρυνση από το συγχρονισμό δεν πρέπει να είναι μεγάλη, ενώ η εφαρμογή του μπορεί να γίνει σε συστήματα με λόγους μαζών κοντά στη μονάδα. Είναι προφανές πως οι παραδοχές αυτές δεν ισχύουν στο σύστημα Δία-Ιούς, καθώς ο λόγος μαζών του είναι μόλις της τάξης του 10^{-5}.

4.6.2. Μηχανισμοί Υποστήριξης Δυναμικών Παλιρροιών

Ερχόμενοι τώρα στην περίπτωση των *δυναμικών παλιρροιών* και οι οποίες εκτιμάται ότι κυριαρχούν στα διπλά συστήματα αστέρων με *περιβλήματα ακτινοβολίας*, φαίνεται πως η κατάσταση είναι αρκετά πιο πολύπλοκη, καθώς δεν έχει ακόμα προταθεί ένας επαρκής φυσικός μηχανισμός ώστε να εξηγήσει τα υπάρχοντα παρατηρησιακά δεδομένα. Καθοριστική θεωρείται πάντως η συμβολή των κυμάτων βαρύτητας (g-modes) τα οποία αναπτύσσονται μονάχα στις περιοχές του αστέρα που η ενέργεια διαδίδεται με ακτινοβολία και ενισχύουν την παλιρροϊκή τριβή είτε αυξάνοντας το ιξώδες του εξωτερικού περιβλήματος είτε προκαλώντας συντονισμούς με τα παλιρροϊκά κύματα. Οι μηχανισμοί που έχουν προταθεί είναι δύο αλλά έμφαση θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερα στον τελευταίο κατά σειρά καθώς, αν και στα πρωταρχικά στάδια εφαρμογής του, προβλέπεται αποτελεσματικός ακόμα και στους αστέρες που φέρουν περίβλημα μεταφοράς.

4.6.2.1. Μηχανισμός Ακτινοβολιακής Διάχυσης

Ο μηχανισμός αυτός παρουσιάστηκε ήδη συνοπτικά κατά την περιγραφή των υδροστατικών παλιρροιών στις οποίες αποδείχθηκε αναποτελεσματικός για τους αστέρες με περίβλημα μεταφοράς. Εκείνο όμως το οποίο φαίνεται να παίζει καθοριστικό ρόλο κατά την εφαρμογή του στους αστέρες με περίβλημα ακτινοβολίας, είναι οι φυσικές συνθήκες που επικρατούν στα εξωτερικά στρώματα του περιβλήματος τα οποία ψύχονται με ρυθμούς συγκρίσιμους με τις παλιρροϊκές περιόδους, γεγονός το οποίο επιτρέπει το μηχανισμό ενός είδους *ακτινοβολιακής διάχυσης*. Τα βαρυτικά κύματα τα οποία παράγονται στο εσωτερικό ενός αστέρα του τύπου αυτού και προκαλούνται ή ενισχύονται από τις παλίρροιες δεν ανακλώνται λοιπόν πλήρως στην εξωτερική περιοχή του περιβλήματος αλλά κατά ένα σημαντικό ποσοστό διαχέονται και συνεπώς μεταφέρουν μηχανική ενέργεια από το αδιαβατικό εσωτερικό προς την επιφάνεια, αναγκάζοντας μάλιστα τον αστέρα να ταλαντώνεται στο σύνολό του με ένα αρκετά μεγάλο εύρος συχνοτήτων (Zahn 1975, 1977).

Ο παραπάνω μηχανισμός οδηγεί στην επιβράδυνση της ιδιοπεριστροφής του αστέρα με άμεσο αποτέλεσμα τη μείωση της στροφορμής των μελών και τη μεταφορά της προς την αντίστοιχη τροχιακή ώστε τελικά η συνολική στροφορμή του συστήματος να διατηρείται. Το παλιρροϊκά παραμορφωμένο τμήμα του αστέρα (εξόγκωμα) που δημιουργείται στις περιπτώσεις αυτές είναι σαφώς πιο μικρό από εκείνο το οποίο αναπτύσσεται στους ψυχρότερους αστέρες, ενώ ο προσανατολισμός του εξαρτάται άμεσα από την παλιρροϊκή συχνότητα. Αγνοώντας την επίδραση της υδροστατικής παλίρροιας, η οποία θεωρείται αμελητέα, ο προβλεπόμενος χρόνος συγχρονισμού και κυκλοποίησης με βάση το συγκεκριμένο μηχανισμό δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις (Zahn 1977):

- $$t_{sync,i} = \frac{1}{52^{5/3} E_2 q^2 (1+q)^{5/6}} \left(\frac{R_i^3}{GM_i} \right)^{1/2} \frac{I_i}{M_i R_i^2} \left(\frac{A_{orb}}{R_i} \right)^{17/2} . \qquad (4.111)$$

- $$t_{circ,i} = \frac{2}{21E_2 q(1+q)^{11/6}} \left(\frac{R_i^3}{GM_i}\right)^{1/2} \left(\frac{A_{orb}}{R_i}\right)^{21/2}, \text{ δεχόμενοι ότι } \Omega_i = \Omega_{kep}. \qquad (4.112)$$

Εύκολα μπορεί κανείς να δει πως η εκκεντρότητα της τροχιάς ενός διπλού συστήματος, σύμφωνα με τον παραπάνω μηχανισμό, θα μειώνεται με το χρόνο στην περίπτωση που ο λόγος της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής κάθε μέλους προς την αντίστοιχη τροχιακή ικανοποιεί την ανισότητα $\Omega_i/\Omega_{kep} > 2.007$. Φυσικά, οι τιμές των χρόνων συγχρονισμού και κυκλοποίησης που προκύπτουν είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες από εκείνες που προβλέπονται στους αστέρες με περίβλημα μεταφοράς, καθιστώντας έτσι την παλιρροϊκή αλληλεπίδραση ισχυρή μόνο στις τελευταίες περιπτώσεις.

4.6.2.2. Μηχανισμός Ανάπτυξης Συντονισμών (Παλιρροϊκών και Βαρυτικών Κυμάτων)

Ο μηχανισμός αυτός προβλέπει την ***παρουσία καταστάσεων συντονισμού μεταξύ των βαρυτικών και παλιρροϊκών κυμάτων (g-modes - tidal flow resonances)*** και έχει μελετηθεί αρκετά πρόσφατα αλλά μόνο για την περίπτωση που το πρωτεύον μέλος ενός συστήματος είναι αστέρας ηλιακής μάζας. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι ορισμένα απαιτούμενα φυσικά χαρακτηριστικά σχετικά με τη δομή του είναι γνωστά με καλή ακρίβεια μόνο στην περίπτωση του Ήλιου, αλλά και γιατί οι υπολογισμοί που εμπλέκονται είναι ιδιαίτερα πολύπλοκοι και συνεπώς δεν μπορούν εύκολα να καλύψουν μεγάλο φάσμα συστημάτων.

Όπως γνωρίζουμε από τα τρέχοντα θεωρητικά μοντέλα της δομής του εσωτερικού των αστέρων αλλά και από ηλιοσεισμολογικά δεδομένα, η ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων (g-modes) προϋποθέτει την ισχύ του κριτηρίου του Schwarzschild και συνεπώς τα κύματα αυτά δεν μπορούν να υφίστανται στη ζώνη μεταφοράς των ψυχρών αστέρων. Έτσι, η ανάπτυξη των βαρυτικών κυμάτων καθίσταται δυνατή μόνο στην ευρύτερη περιοχή του πυρήνα, μέσα στην οποία η ενέργεια διαδίδεται με ακτινοβολία, καθώς συναντώντας τις ανώτερες περιοχές του περιβλήματος μεταφοράς αποδυναμώνονται εξαιτίας των δινορευμάτων μεταφοράς.

Αν και τα βαρυτικά κύματα αναμένονται ενισχυμένα εξαιτίας της παλιρροϊκής επίδρασης του συνοδού αστέρα, έχει διαπιστωθεί ότι, όταν τα τελευταία χαρακτηρίζονται από συχνότητες σημαντικά διαφοροποιημένες από εκείνες των παλιρροϊκών κυμάτων, η συνεισφορά τους στην παλιρροϊκή τριβή είναι αμελητέα (Terquem et al. 1998). Στις περιπτώσεις αυτές, πράγματι ο μηχανισμός της τυρβώδους διάχυσης (Zahn 1977) φαίνεται να είναι ο κυρίαρχος όταν η ακτινοβολιακή διάχυση είναι εκείνη που επικρατεί κατά τη φάση των συντονισμών. Ακόμα και μετά από μια λεπτομερή διερεύνηση του συγκεκριμένου ζητήματος, τα θεωρητικά με τα παρατηρησιακά δεδομένα δε συμπίπτουν πλήρως, αλλά αντιθέτως, έχει βρεθεί πως για να συμβεί κάτι τέτοιο απαιτείται τυρβώδες ιξώδες 50 φορές περίπου μεγαλύτερο από εκείνο που προβλέπεται από την κλασική θεωρία μήκους ανάμειξης. Μια ιδιαίτερα ικανοποιητική περιγραφή του ιξώδους αυτού, v_t, δίνεται από την ακόλουθη σχέση (Xiong et al. 1997):

$$v_t = \frac{c_1}{t_c} \cdot \frac{\Lambda^2}{1 + c_2 \left(\frac{m t_c}{P} \right)^s} \quad \text{με} \quad t_c = \frac{1}{\sqrt{|N_g^2|}}, \tag{4.113}$$

όπου t_c η χρονική κλίμακα μεταφοράς, Λ το μήκος ανάμειξης, P η τροχιακή περίοδος του συστήματος και s, c_1, c_2 σταθερές με $s = \{0,1,2\}$ (συνήθως επιλέγεται η δεύτερη τιμή), $c_1 \cong 1$ και $c_2 = \{0,1,(2\pi)^s\}$. Η ποσότητα N_g αντιστοιχεί στη συχνότητα των Brunt-Vaisala, χαρακτηριστική για τα βαρυτικά κύματα, καθώς καθορίζει το άνω όριο των τιμών των συχνοτήτων που μπορούν να έχουν τα κύματα του είδους αυτού σε μια συγκεκριμένη περιοχή του αστέρα.

Η ροπή Γ που αναπτύσσεται στο σύστημα εξαιτίας του παλιρροϊκά παραμορφωμένου τμήματος του αστέρα που δέχεται το διαταρακτικό δυναμικό, βρέθηκε μετά από αριθμητικούς υπολογισμούς να είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του συστήματος Ω_{kep}. Μια προσεγγιστική σχέση η οποία προσδιορίζει το χρόνο κυκλοποίησης ενός συστήματος με αστέρες ηλιακού τύπου έχει δοθεί από τους Terquem et al. (1998):

$$t_{circ} = \frac{M_{red} \Omega_{kep} A_{orb}^2}{6\Gamma \left(1 + \frac{M_2}{M_\odot} \right)} \quad \text{με} \quad \Gamma \propto \Omega_{kep}^4 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \Gamma \propto P^{-4}, \tag{4.114}$$

όπου M_{red}, A_{orb} και P είναι η ανηγμένη μάζα, η τροχιακή ακτίνα και η τροχιακή περίοδος του συστήματος, ενώ M_2 είναι η μάζα του (δευτερεύοντος) μέλους που προκαλεί τη διαταραχή. Με βάση τα υπάρχοντα παρατηρησιακά δεδομένα, ο χρόνος κυκλοποίησης για ένα σύστημα με περίοδο 12.4 d είναι της τάξης των 4×10^9 yr και συνεπώς, για να είναι συμβατός με τη θεωρία, η πιο πάνω σχέση (4.114) λαμβάνει την ακόλουθη ημιεμπειρική μορφή, εφόσον θέτουμε την τροχιακή περίοδο σε d:

$$t_{circ} = 4.605 \times 10^{-5} \left(1 + \frac{M_2}{M_\odot} \right)^{2/3} \left(\frac{M_2}{M_\odot} \right)^{-1} P^{13/3} \quad \text{σε Gyr.} \tag{4.115}$$

Οι Terquem et al. (1998) εκτιμώντας ότι οι αποκλίσεις μεταξύ θεωρητικών και παρατηρησιακών τιμών οφείλονται σε υποεκτίμηση της αποτελεσματικότητας του μηχανισμού της τυρβώδους διάχυσης, πρότειναν δύο ενδιαφέροντες τρόπους με τους οποίους το τυρβώδες ιξώδες θα μπορούσε να είναι κατά πολύ ισχυρότερο. Η πρώτη τους εκτίμηση ήταν η ενδεχόμενη παρουσία του φαινομένου της *μεταπήδησης μεταφοράς (convective overshooting)* σύμφωνα με το οποίο, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, η ζώνη μεταφοράς μπορεί να υπερπηδήσει σε μεγαλύτερα βάθη από αυτά που προβλέπονται (το φαινόμενο συναντάται στους πυρήνες μεταφοράς αστέρων ηλίου). Δυστυχώς όμως, τα βάθη που απαιτούνται στην περιοχή του πυρήνα ώστε να εξουδετερωθούν οι παραπάνω αποκλίσεις είναι μεγάλα και μάλλον μη ρεαλιστικά.

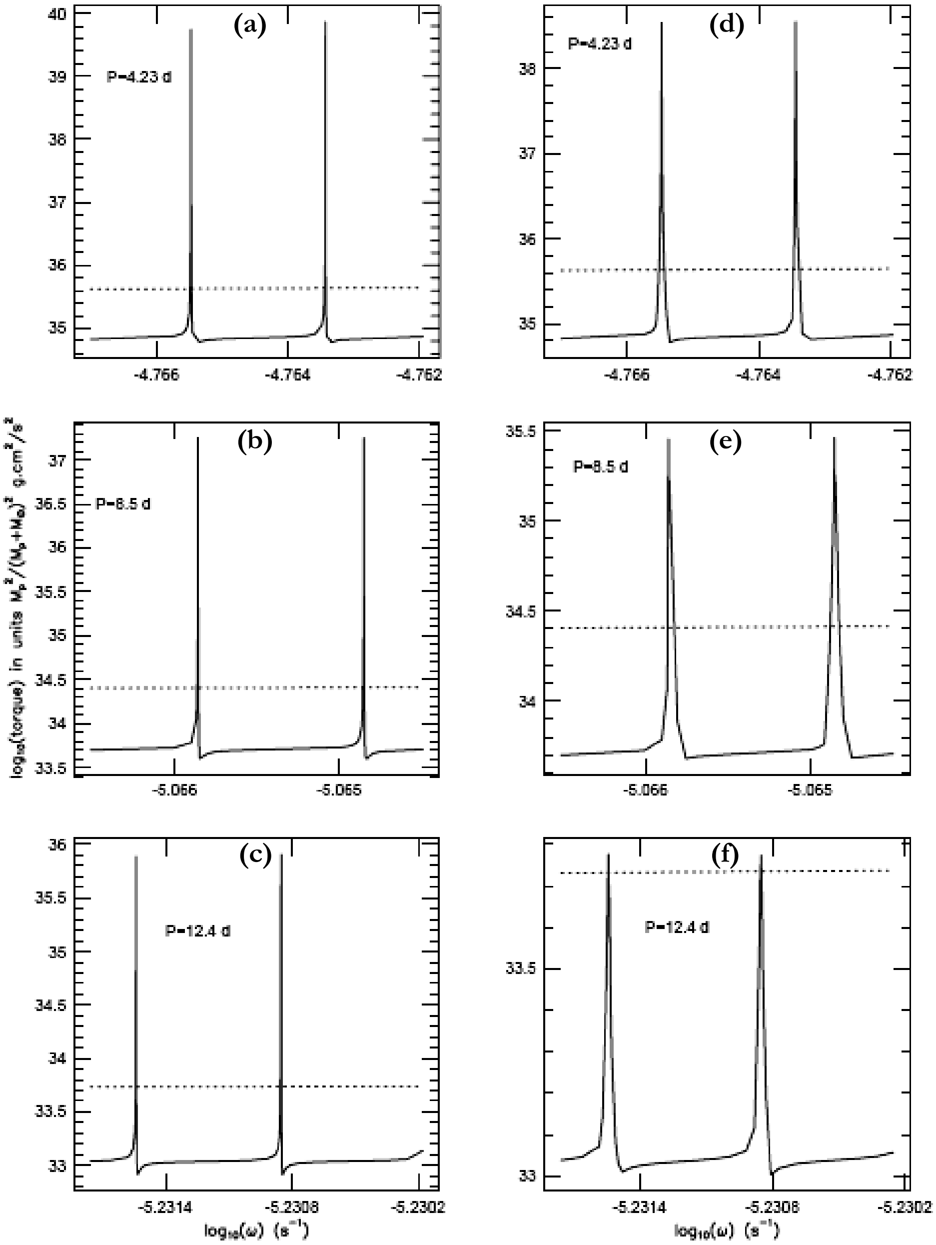
Μια πιο ρεαλιστική πρόταση φαίνεται να είναι εκείνη της αύξησης της συχνότητας Brunt-Vaisala των βαρυτικών κυμάτων και συνεπώς του τυρβώδους ιξώδους, όπως άλλωστε εύκολα φαίνεται από τη σχέση (4.113) που περιγράφει το ιξώδες αυτό. Οι τιμές της συχνότητας αυτής αναμένονται μεγαλύτερες με την ιδιοπεριστροφή του αστέρα, φαινόμενο το οποίο δεν είχε ληφθεί στους υπολογισμούς των Terquem et al. (1998), καθώς η εργασία τους είχε εφαρμογή σε μη περιστρεφόμενους αστέρες ηλιακής μάζας.

Όσον αφορά τέλος τις καταστάσεις συντονισμού, αν και η συνεισφορά τους στην παλιρροϊκή τριβή αναμένεται αρκετά υψηλή, εκτιμάται πως η πιθανότητα για να βρεθεί το σύστημα σε αυτές είναι μόλις της τάξης του 1-2% χωρίς όμως οι συγκεκριμένοι συγγραφείς να αποκλείουν το ενδεχόμενο κατάλληλων περιστάσεων οι οποίες θα είναι ικανές να παρατείνουν τη φάση των συντονισμών για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Πιο συγκεκριμένα, εκτιμάται πως η παλιρροϊκή ροπή κατά τη διάρκεια των συντονισμών θα είναι τουλάχιστον 10^3 με 10^4 φορές μεγαλύτερη εκείνης που προβλέπεται από το μηχανισμό του τυρβώδους ιξώδους για βραχυπερίοδα συστήματα (Σχήμα IV.8). Έχει μάλιστα βρεθεί πως η ισχύς των συντονισμών είναι ανεξάρτητη από τις τιμές που λαμβάνει το τυρβώδες ιξώδες όταν η τροχιακή περίοδος είναι μεγαλύτερη των 8 d περίπου. Αντίθετα, όταν η τροχιακή περίοδος είναι της τάξης των 4 d, η ισχύς των συντονισμών υποτετραπλασιάζεται. Το πλάτος μάλιστα των συντονισμών φαίνεται να μειώνεται κάθως η τιμή του ιξώδους μεγαλώνει.

Πρόσφατα, οι Savonije & Witte (2002), συνυπολογίζοντας την παράμετρο της περιστροφής σε συστήματα που το πρωτεύον μέλος είναι και πάλι ένας αστέρας ηλιακής περίπου μάζας, κατέληξαν στο σημαντικό συμπέρασμα πως ο παράγοντας αυτός όχι μόνο ενισχύει την παλιρροϊκή ροπή κατά αρκετές τάξεις μεγέθους, αλλά εντόπισαν κατάλληλες τιμές για τις οποίες οι συντονισμοί θα μπορούσαν να έχουν μεγάλη διάρκεια κατά την παλιρροϊκή εξέλιξη ενός συστήματος. Οι συντονισμοί αυτοί φαίνεται να παράγονται εξαιτίας της παρουσίας κυμάτων αδράνειας (i-modes) τα οποία αναπτύσσονται στο περίβλημα μεταφοράς των αστέρων ηλιακού τύπου και υφίστανται εφόσον οι αστέρες ιδιοπεριστρέφονται. Η ισχύς των κυμάτων αυτών βρέθηκε μάλιστα να αυξάνει με την αύξηση της ταχύτητας ιδιοπεριστροφής ενώ βρέθηκε να μειώνεται με την αύξηση του τυρβώδους ιξώδους.

4.6.3. Παρατηρησιακά Δεδομένα

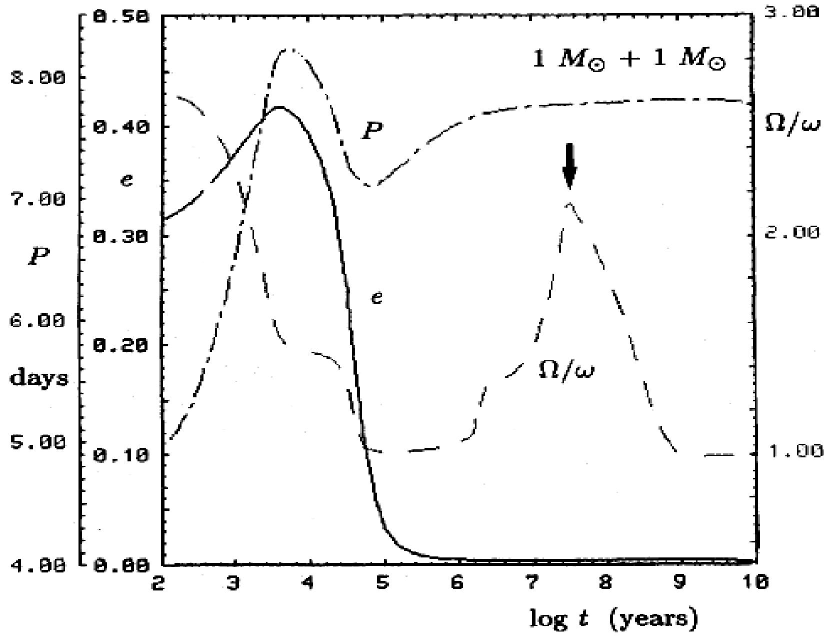
Οι παρατηρησιακές αποδείξεις πολλών από τις διαπιστώσεις που έως τώρα έχουν αναφερθεί στην παρούσα ενότητα στηρίζονται σε ορισμένες έμμεσες αλλά αξιόπιστες στατιστικές μεθόδους. Πιο συγκεκριμένα, προβλέπονται ορισμένες θεωρητικές τροχιακές περίοδοι κάτω από τις τιμές των οποίων οι τροχιές αναμένονται κυκλικές, γνωστές ως ***περίοδοι αποκοπής (cutoff periods)***. Οι τιμές αυτές, οι οποίες διαχωρίζουν τις τροχιές που χαρακτηρίζονται από μια σημαντική εκκεντρότητα από εκείνες με μηδενική εκκεντρότητα, έχουν προσδιοριστεί από στατιστικές μελέτες διπλών αστρικών συστημάτων σε ανοιχτά σμήνη αστέρων αλλά και από αντίστοιχες μελέτες γνωστών φασματοσκοπικά διπλών αστέρων με διπλές γραμμές σε μια περιοχή που κυμαίνεται *γύρω από τις 8 d* περίπου (Koch & Hrivnak 1981).



Σχήμα IV.8. Διαγράμματα τα οποία απεικονίζουν την παλιρροϊκή ροπή για διάφορες τιμές της τροχιακής περιόδου. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στις δυναμικές παλίρροιες, ενώ η διακεκομμένη στις υδροστατικές. Παρατηρούμε μια σημαντική αύξηση της ροπής (κατά 3 με 5 τάξεις μεγέθους) κατά τη φάση του συντονισμού μεταξύ των παλιροϊκών κυμάτων και των κυμάτων βαρύτητας είτε δεχόμενοι μονάχα το μηχανισμό της τυρβώδους διάχυσης (a,b,c) είτε λαμβάνοντας υπόψη και την ακτινοβολιακή διάχυση (d,e,f). Οι υπολογισμοί αντιστοιχούν σε σύστημα μη περιστρεφόμενων αστέρων ηλιακού τύπου (Terquem et al. 1998).

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία της παλιρροϊκής τριβής με βάση το μηχανισμό της τυρβώδους διάχυσης σε συστήματα των οποίων τα μέλη φέρουν περιβλήματα μεταφοράς, πράγματι οι αντίστοιχες θεωρητικές τιμές για τις κρίσιμες αυτές τροχιακές περιόδους προβλέπεται να κυμαίνονται *από 7.2 έως 8.5 d* περίπου (Zahn & Bouchet 1989). Μια σημαντική διαπίστωση στην οποία κατέληξαν οι πιο πάνω ερευνητές είναι πως τα συστήματα μεταγενέστερων φασματικά αστέρων έχουν κυκλοποιήσει τις τροχιές τους πριν τα μέλη τους φτάσουν στην κύρια ακολουθία. Πιο συγκεκριμένα, οι Zahn & Bouchet (1989) έδειξαν πως η πορεία τους κατά τη διαδρομή Hayashi είναι αρκετή για να μειώσει την τιμή της εκκεντρότητάς τους από e = 0.3 μέχρι την τιμή e = 0.005, οπότε και πρακτικά η τροχιά μπορεί να θεωρηθεί κυκλική. Το συμπέρασμα αυτό αποδίδεται κυρίως στο γεγονός πως οι πρωτοαστέρες που θα καταλήξουν στην κύρια ακολουθία με μεταγενέστερους φασματικά τύπους διαθέτουν από τα πρώϊμα στάδιά τους ιδιαίτερα βαθιά κελύφη μεταφοράς, καθιστώντας το μηχανισμό του τυρβώδους ιξώδους εξαιρετικά ενεργό.

Ας σημειωθεί μάλιστα πως διάφοροι αριθμητικοί υπολογισμοί οδήγησαν τους Zahn & Bouchet (1989) στο εξίσου σημαντικό συμπέρασμα της ανεξαρτησίας των κρίσιμων περιόδων από την ηλικία των αστέρων καθώς, όπως έδειξαν, τα εξεταζόμενα συστήματα δεν χαρακτηρίζονται από σημαντική διαφορά της τροχιακής τους περιόδου είτε θεωρηθεί πως η τροχιά έχει κυκλοποιηθεί κατά την είσοδό τους στην κύρια ακολουθία είτε κατά την απομάκρυνσή τους από αυτή. Το αποτέλεσμα βέβαια αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις διαπιστώσεις των Mathieu et al. (1992), σύμφωνα με τους οποίους, η τιμή των κρίσιμων περιόδων αυξάνεται με την ηλικία των άστρων και συνεπώς η διαδικασία κυκλοποίησης τους συνεχίζεται και κατά τη διάρκεια παραμονής τους στην κύρια ακολουθία.



Σχήμα IV.9. Διάγραμμα το οποίο απεικονίζει την εξέλιξη της τροχιακής περιόδου, της εκκεντρότητας και του λόγου της γωνιακής ταχύτητας του κάθε μέλους προς την αντίστοιχη τροχιακή ενός συστήματος αστέρων ηλιακής μάζας ως συνάρτηση του χρόνου. Είναι εύκολα εμφανές, πως ο λόγος αυτός είναι τουλάχιστον ίσος με δύο κατά την είσοδο των αστέρων στην κύρια ακολουθία η οποία συμβολίζεται με το μεγάλο βέλος (Zahn & Bouchet 1989).

Επίσης, αποδείχθηκε ότι κατά την είσοδό τους στην κύρια ακολουθία, η γωνιακή ταχύτητα ιδιοπεριστροφής των μελών αναμένεται διπλάσια της τροχιακής (Σχήμα IV.9). Ένα χρονικό διάστημα των 10^9 yr είναι στη συνέχεια αρκετό για να συγχρονίσει και πάλι τα μέλη με την τροχιά. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι, καθώς η τροχιακή αλλά και πυρηνική εξέλιξη των μελών επιβάλλει τη συνεχή σμίκρυνση της τροχιάς και την ελάττωση του εύρους της ζώνης μεταφοράς τους, η παλιρροϊκή τριβή χάνει την ισχύ της και επιτρέπει τον αποσυγχρονισμό των δύο αστέρων (Zahn & Bouchet 1989).

Σε αντίθεση με τις παραπάνω μελέτες, οι Claret & Cunha (1997) έδειξαν ότι η θεωρία του Zahn (1966, 1975, 1977, 1978, 1989) σχετικά με την τυρβώδη διάχυση θεωρείται επαρκής για να περιγράψει συστήματα των οποίων οι τροχιές δεν έχουν ακόμα κυκλοποιηθεί. Αντίθετα, η ηλικία και οι κρίσιμες περίοδοι κατωφλίου είναι περισσότερο συμβατές με το ρευστοδυναμικό μηχανισμό των Tassoul & Tassoul (1992a, 1992b) για συστήματα των οποίων οι τροχιές έχουν πλέον μετατραπεί σε κυκλικές, καθώς οι προβλεπόμενοι χρόνοι κυκλοποίησης είναι σαφώς μικρότεροι εκείνων της θεωρίας του Zahn (1966, 1975, 1977, 1978, 1989). Παρά το γεγονός αυτό, οι Claret & Cunha (1997) σημειώνουν πως ο μηχανισμός της τυρβώδους διάχυσης θα μπορούσε να θεωρηθεί επιτυχής εφόσον ήταν κατά 100-200 φορές ισχυρότερος από εκείνον που προβλέπεται από την υπάρχουσα θεωρία.

Ας σημειωθεί βέβαια πως όλες οι παραπάνω διαπιστώσεις δεν έχουν λάβει υπόψη τους την επίδραση μαγνητικής δραστηριότητας και συνεπώς της μαγνητικής πέδησης που παρατηρείται στους αστέρες αυτούς, μηχανισμός ο οποίος μπορεί να διαφοροποιήσει κατά πολύ τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Αντίστοιχες κρίσιμες τιμές της τροχιακής περιόδου για συστήματα τα οποία αποτελούνται από μέλη με περιβλήματα ακτινοβολίας έχουν προσδιοριστεί σε *μικρότερες των 2 d* περίπου, ώστε η παλιρροϊκή πέδηση να είναι ικανή να κυκλοποιήσει την τροχιά (Giuricin et al. 1984).

4.6.4. Διαμόρφωση Τροχιακής Περιόδου

Η τροχιακή εξέλιξη ενός διπλού συστήματος αστέρων κάτω από την παλιρροϊκή και μόνο αλληλεπίδραση διέπεται από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (4.90)-(4.92) το οποίο περιγράφει τη μεταβολή της τροχιακής ακτίνας, της εκκεντρότητας και της ιδιοστροφορμής του πρωτεύοντος αστέρα. Είναι προφανές ότι το σύστημα αυτό μπορεί εύκολα να επεκταθεί και στην περίπτωση που το δευτερεύον μέλος είναι παραμορφώσιμο κάτω από την επίδραση του πρωτεύοντος και συνεπώς συμβάλλει στη διαμόρφωση των πιο πάνω τροχιακών παραμέτρων με μια εξίσωση όμοια της (4.92). Επικεντρώνοντας τότε στον επικρατέστερο μέχρι σήμερα μηχανισμό της τυρβώδους διάχυσης και υποθέτοντας για λόγους απλότητας ψυχρούς αστέρες με εσωτερικό πλήρους μεταφοράς, η συνολική περιγραφή του φαινομένου ανάγεται στο σύστημα (4.97)-(4.99) με το χρόνο συγχρονισμού να δίνεται από τη σχέση (4.106).

Από τη στιγμή που το διπλό αστρικό σύστημα είναι μονωμένο από εξωτερικές ροπές, η συνολική στροφορμή διατηρείται. Ως εκ τούτου, η παρουσία των παλιρροϊκών ροπών οδηγεί σε μείωση της ιδιοστροφορμής των μελών η οποία όμως δε χάνεται πλέον από το σύστημα, όπως είδαμε στην περίπτωση της μαγνητικής πέδησης, της βαρυτικής ακτινοβολίας και της απώλειας μάζας μέσω του σημείου L2, αλλά μεταφέρεται στην αντίστοιχη τροχιακή. Εφόσον η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα είναι μικρότερη από εκείνη των δύο επιμέρους μελών, άμεσο αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι η αύξηση της τροχιακής περιόδου, όπως άλλωστε μας υποδεικνύει η σχέση (4.72), και η συνεπαγόμενη διάνοιξη της τροχιάς.

Επανερχόμενοι λοιπόν στην εξίσωση στροφορμής που διέπει το σύστημα, $J = J_1 + J_2 + J_{\rm orb}$, η ιδιοστροφορμή των μελών δεν είναι δυνατόν πλέον να παραβλεφθεί, ενώ η διατήρηση της συνολικής στροφορμής του συστήματος επιβάλλει το J χρονικά αμετάβλητο. Η υπόθεση όμως της κυκλικής τροχιάς μπορεί ακόμα να διατηρηθεί όσο περιοριζόμαστε στη μελέτη βραχυπερίοδων συστημάτων τα οποία αποτελούν το κύριο αντικείμενο της παρούσας διατριβής. Ως εκ τούτου, η διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη της τροχιακής περιόδου κάτω από την παλιρροϊκή αλληλεπίδραση των δύο της μελών στηρίζεται στο μοντέλο περιγραφής της μεταβολής της γωνιακής τους ταχύτητας και το οποίο εκφράζεται μέσα από τη σχέση (4.100), δηλαδή:

$$\dot{J}_{orb} + \dot{J}_1 + \dot{J}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{G^{2/3}}{(2\pi)^{1/3}} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{M_1 M_2}{(M_1+M_2)^{1/3}} P^{1/3}\right] = -\sum_{i=1}^{2}\left(k_i^2 M_i R_i^2 \dot{\Omega}_i\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{G^{2/3}}{(2\pi)^{1/3}} \cdot \frac{M_1 M_2}{(M_1+M_2)^{1/3}} \cdot \frac{\dot{P}}{P^{2/3}} = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{k_i^2 M_i R_i^2}{t_{sync,i}}\left(\Omega_i - \Omega_{kep}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\dot{P}}{P^{-10/3}} = \frac{18(2\pi)^{16/3} M_2}{G^{8/3} M_1^3 (M_1+M_2)^{5/3}} \sum_{i=1}^{2}\left[\left(M_i^2 R_i^{22} L_i\right)^{1/3} k_{2,i}\left(\frac{1}{P_i} - \frac{1}{P}\right)\right]}. \quad (4.116)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (4.116), η κατεύθυνση μεταβολής της τροχιακής περιόδου εξαρτάται άμεσα από την αντίστοιχη τρέχουσα ιδιοπερίοδο, P_i, των δύο μελών. Στην ιδεατή περίπτωση που το δευτερεύον μέλος δεν έχει παραμορφώσιμο σχήμα, δηλαδή συμπεριφέρεται ως μια συμπαγής άκαμπτη σφαίρα, η τροχιακή περίοδος P θα αυξάνεται εφόσον είναι μεγαλύτερη από την ιδιοπερίοδο του πρωτεύοντος αστέρα, P_1, διαφορετικά θα μειώνεται. Στην πιο σύνθετη περίπτωση κατά την οποία τόσο το πρωτεύον όσο και το δευτερεύον μέλος έχουν εύπλαστα εξωτερικά περιβλήματα, η συνθήκη αυτή γενικεύεται και λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$P > \frac{\sum_{i=1}^{2}\left[k_{2,i}\left(M_i^2 R_i^{22} L_i\right)^{1/3}\right]}{k_{2,1}\left(M_1^2 R_1^{22} L_1\right)^{1/3}\frac{1}{P_1} + k_{2,2}\left(M_2^2 R_2^{22} L_2\right)^{1/3}\frac{1}{P_2}}. \quad (4.117)$$

Αξίζει, τέλος, να σημειωθεί ότι η μελέτη της παλιρροϊκής αλληλεπίδρασης που αναπτύσσεται μεταξύ δύο ουρανίων (και όχι μόνο) σωμάτων είναι θεμελιώδης στο χώρο της Αστροφυσικής, καθώς πλήθος φαινομένων τα οποία συναντώνται ακόμα και στην καθημερινή μας ζωή είναι άμεσα συνδεδεμένα με τις παλίρροιες. Ανάμεσα σε αυτά, το σύστημα Γης-Σελήνης φαίνεται να προκαλεί το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, καθώς οι συνέπειες της αλληλεπίδρασής τους είναι άμεσα ορατές. Η επίδραση των παλιρροιών στη στάθμη του νερού των θαλασσών είναι συνήθης σε πολλά μέρη της Γης αλλά η ένταση του φαινομένου διαφέρει από τόπο σε τόπο καθώς εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη διαμόρφωση του βυθού και τα τοπικά μορφολογικά χαρακτηριστικά των θαλάσσιων κόλπων. Εφόσον λοιπόν οι συνθήκες το επιτρέπουν, παρατηρείται περιοδική αύξηση της στάθμης του θαλάσσιου νερού (φαινόμενο γνωστό ως *πλημμυρίδα*) η οποία ακολουθείται από μείωση της στάθμης (φαινόμενο γνωστό ως *άμπωτη*) αλλά και περιοδική μεταβολή της κατεύθυνσης των θαλασσίων ρευμάτων.

Φαινόμενο το οποίο επίσης σχετίζεται με την παλιρροϊκή αλληλεπίδραση Γης-Σελήνης είναι η διατήρηση της ορατής πλευράς της Σελήνης από τη Γη ανεξάρτητα από την εποχή και τον τόπο παρατήρησης. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στη μακροχρόνια δράση των παλιρροιών, οι οποίες τείνουν να συγχρονίσουν την ιδιοπεριστροφή των μελών ενός συστήματος με την τροχιακή περιστροφή (ή αλλιώς περιφορά). Το αποτέλεσμα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι η εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της Σελήνης με εκείνη της περιφοράς της γύρω από τη Γη. Παρόλα αυτά, το ανάγλυφο του πυθμένα των ωκεανών και η ιδιαίτερη γεωμορφία ορισμένων περιοχών οδηγούν στο συνεχή αποσυγχρονισμό εξαιτίας της παλιρροϊκής τριβής. Άμεσο αποτέλεσμα του φαινομένου αυτού είναι η μείωση της ιδιοστροφορμής της Γης και συνεπώς η αύξηση της περιόδου περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη με μέση τιμή 0.023 msec/yr και μέση αύξηση της αντίστοιχης τροχιακής ακτίνας κατά 1.17 cm/yr.

4.7. Γενικευμένες Εξισώσεις Στροφορμής

Όπως είδαμε μέχρι τώρα, βασικό τμήμα της περιγραφής ενός προτεινόμενου φυσικού μηχανισμού στα διπλά συστήματα αστέρων είναι οι επιπτώσεις που επιφέρει στην τροχιά μέσω της μεταβολής της στροφορμής της και κατά επέκταση, της περιόδου της. Οι μεταβολές αυτές είναι άλλωστε εκείνες που θα ανιχνευθούν στα αντίστοιχα διαγράμματα O-C, μετά την ανάλυση των οποίων, μπορούν να εξαχθούν οι απαραίτητες πληροφορίες για τον προσδιορισμό των βασικών παραμέτρων των εκάστοτε μηχανισμών.

Εξαιρετικό λοιπόν ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατασκευή γενικευμένων εξισώσεων, οι οποίες συνδέουν τις μεταβολές της τροχιακής περιόδου με εκείνες της στροφορμής του συστήματος, όπως αυτές προβλέπονται από τη συνδυασμένη δράση πλήθους φυσικών μηχανισμών, μέρος των οποίων εξετάστηκε διεξοδικά αλλά μεμονωμένα στις προηγούμενες υποενότητες. Ενδεχομένως η πρώτη χαρακτηριστική γενικευμένη εξίσωση του είδους αυτού αποτελεί εκείνη του Kruszewski (1964) η οποία αποσκοπούσε στην περιγραφή του φαινομένου της μεταφοράς μάζας μεταξύ των μελών ενός συστήματος μέσω του σημείου L1 και η οποία, αρκετά χρόνια αργότερα, συμπεριέλαβε την ταυτόχρονη απώλεια μάζας από το σύστημα μέσω αστρικών ανέμων από τους Tout & Hall (1991). Πιο συγκεκριμένα, οι Tout & Hall

(1991) μελετούν την περίπτωση όπου ένα και μοναδικό μέλος του συστήματος εκλύει μάζα, ρυθμού έστω ίσου με $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_1 < 0$, της οποίας ένα ποσοστό, έστω $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_2 > 0$, προσαυξάνεται στο συνοδό αστέρα, ενώ το υπόλοιπο ποσοστό, $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t) = (\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_1 + (\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_2 < 0$, εγκαταλείπει το σύστημα. Εισάγοντας έναν γενικό όρο ενδεχόμενης απώλειας στροφορμής από το σύστημα, $\mathrm{d}J/\mathrm{d}t < 0$, η προτεινόμενη γενικευμένη εξίσωση έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{3q+2}{M_1+M_2}\dot{M} + \frac{3(M_2-M_1)}{M_1 M_2}\dot{M}_2 + 3\frac{\dot{J}}{J_{orb}}. \qquad (4.118)$$

Σε αντίθεση με τους Kruszewski (1964) και Tout & Hall (1991) οι οποίοι κατασκεύασαν εξισώσεις στροφορμής που αντιστοιχούν σε κυκλικές και μόνο τροχιές, ο Hilditch (2001) πρόσθεσε όρους μεταβολής της εκκεντρότητας, $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$, και του μεγάλου τροχιακού ημιάξονα, γενικεύοντας έτσι τις πιο πάνω εξισώσεις σε συστήματα ελλειπτικής τροχιάς. Πρόσφατα, οι Kalimeris & Rovithis-Livaniou (2006) πρότειναν μια ακόμα πιο γενικευμένη μορφή της εξίσωσης στροφορμής που συνδέει τόσο τις μεταβολές της στροφορμής ενός συστήματος όσο και των απόλυτων παραμέτρων της δομής του εσωτερικού των δύο του μελών με τις μεταβολές των τροχιακών παραμέτρων. Η εξίσωση αυτή περιγράφει από κοινού όλους τους πιθανούς φυσικούς μηχανισμούς που μπορούν να παρατηρηθούν στα διπλά συστήματα αστέρων (π.χ. παλιρροϊκές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μελών, ανταλλαγή και απώλεια μάζας με οποιοδήποτε τρόπο, μηχανισμοί απώλειας στροφορμής) χωρίς να απαιτεί μηδενική εκκεντρότητα και έχει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\dot{J}}{J_{orb}} = \frac{1-q}{M_2}(\dot{M}_{w,2} + \dot{M}_2) + \frac{3q+2}{3(M_1+M_2)}(\dot{M}_w + \dot{m}_{L2}) - \frac{e}{1-e^2}\dot{e} + \frac{\dot{\Omega}_{kep}}{\Omega_{kep}} + \frac{4}{3}\frac{\dot{P}}{P} + \sum_{i=1}^{2}\frac{J_i}{J_{orb}}\left(5\frac{\dot{R}_i}{R_i} + \frac{\dot{\Omega}_i}{\Omega_i} + \frac{\dot{I}_{N,i}}{I_{N,i}}\right). \qquad (4.119)$$

Σε αντίθεση με την εξίσωση (4.118) των Tout & Hall (1991) αλλά και εκείνης που προτείνεται από τον Hilditch (2001), η σχέση (4.119) των Kalimeris & Rovithis-Livaniou (2006) προβλέπει απώλεια μάζας μέσω της παρουσίας αστρικών ανέμων τόσο από το πρωτεύον όσο και από το δευτερεύον μέλος με συνολικό ρυθμό $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_{\mathrm{w}} = (\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_{\mathrm{w},1} + (\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_{\mathrm{w},2} < 0$ αλλά και απώλειας μάζας η οποία λαμβάνει χώρα μέσω του δεύτερου σημείου Lagrange L2 με ρυθμό $(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)_{\mathrm{L2}} < 0$. Πρόσθετες μεταβολές τόσο των απολύτων παραμέτρων που αντιστοιχεί στο κάθε $i = 1{,}2$ μέλος, όπως η ακτίνα, R_i, και η κανονικοποιημένη ροπή αδράνειας, $I_{N,i}$, όσο και των τροχιακών παραμέτρων, όπως η εκκεντρότητα, e, η τροχιακή αλλά και οι αντίστοιχες επιμέρους γωνιακές ταχύτητες, Ω_{kep} και Ω_i, έχουν συνυπολογιστεί ώστε να συμπεριλάβουν κάθε δυνατή φυσική διαδικασία η οποία οδηγεί σε μεταβολή της τροχιακής περιόδου.

‘‘If mass and angular momentum are conservative, the mass transfer from the secondary to the primary components should cause the orbital period to increase. The secular period decreases of the two sample stars are regarded as a strong challenge to the conservative mass transfer theory in semidetached systems and suggest that they may undergo secular mass and angular momentum loss during their evolutions.’’

Qian Shengbang
‘‘Possible Mass and Angular Momentum Loss in Algol-Type Binaries.
V. RT Persei and TX Ursae Majoris’’
2001, AJ, 122, 2686

Κεφάλαιο V

ΣΥΝΘΕΤΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ O-C

Το παρόν κεφάλαιο αποσκοπεί στην παρουσίαση μιας νέας και απόλυτα πρωτότυπης προσέγγισης η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά την ανάλυση των διαγραμμάτων O-C με σκοπό την εκτενέστερη αξιοποίησή τους σε σχέση τουλάχιστον με τις υπάρχουσες παραδοσιακές μεθόδους. Η προσέγγιση αυτή δεν αποτελεί μια έμπνευση η οποία σκοπεύει στην απόρριψη ή την υποστήριξη κάποιας από τις τρέχουσες τεχνικές, αλλά στην προεργασία η οποία απαιτείται πριν την εφαρμογή της εκάστοτε μεθόδου, καθώς και στην επεξεργασία των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν μετά από αυτή.

Παράλληλα, το θεωρητικό μέρος της προτεινόμενης προσέγγισης οδηγεί στην ερμηνεία ορισμένων παραδοχών που μέχρι τώρα στηριζόντουσαν κυρίως στην εμπειρία που είχε αποκτηθεί από τις παρατηρούμενες διαμορφώσεις των διαγραμμάτων O-C. Ειδικότερα, αναπτύχθηκε μια τεχνική προσδιορισμού του ελάχιστου απαιτούμενου τροχιακού κύκλου ώστε ένας φυσικός μηχανισμός να καθίσταται παρατηρήσιμος μέσω ενός διαγράμματος O-C. Εξετάζονται επίσης οι συνθήκες κάτω από τις οποίες οι μακροχρόνιες παρατηρούμενες διαμορφώσεις των διαγραμμάτων O-C μπορούν πράγματι να περιγραφούν από την παραβολική τάση. Όπως θα δούμε αναλυτικότερα πιο κάτω, η προσέγγιση που εισάγεται οδηγεί επίσης και στην κατασκευή ορισμένων ιδιαίτερα ευέλικτων και χρήσιμων μαθηματικών σχέσεων οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα, ανάλογα με τις ανάγκες και τα δεδομένα του εκάστοτε προβλήματος.

Πιο αναλυτικά, το κεφάλαιο χωρίζεται σε τέσσερις κύριες ενότητες. Η πρώτη από αυτές εξετάζει τις θεμελιώδεις εξισώσεις που κυβερνούν το φυσικό σύστημα αλλά και εκείνες που απαιτούνται για τη μελέτη του μέσω των διαθέσιμων παρατηρησιακών δεδομένων. Η δεύτερη ενότητα αφορά την αναλυτική περιγραφή της προτεινόμενης προσέγγισης, ενώ η τρίτη καταπιάνεται με τους φυσικούς μηχανισμούς που πρόκειται να μας απασχολήσουν στην παρούσα διατριβή. Θα πραγματοποιηθεί μια ανεξάρτητη μελέτη για κάθε μηχανισμό ξεχωριστά η οποία αποσκοπεί στην εκτίμηση του απαιτούμενου χρονικού ορίζοντα ώστε ο εκάστοτε μηχανισμός να είναι ανιχνεύσιμος στα διαγράμματα O-C.

Τέλος, στην τέταρτη ενότητα, εξετάζεται η περίπτωση της από κοινού παρουσίας περισσότερων του ενός μηχανισμού. Εφαρμόζουμε την προσέγγιση που έχουμε εισάγει στη δεύτερη ενότητα και οδηγούμαστε σε μερικές απλές σχέσεις οι οποίες εκτιμούν το ρυθμό απώλειας μάζας από ένα σύστημα λόγω αστρικών ανέμων. Η αξία τους αλλά και η αποτετελεσματικότητά τους θα διαφανεί στην τελευταία υποενότητα, οπότε και θα εφαρμοστούν σε πραγματικά προβλήματα. Από τα υποψήφια εξεταζόμενα συστήματα δεν εξαιρούνται τα συστήματα επαφής και υπερεπαφής αλλά η επιλογή τους απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, καθώς σε αυτά αναμένονται μηχανισμοί εξαιρετικά πολύπλοκοι και οι οποίοι δεν έχουν πλήρως διερευνηθεί ακόμα. Τα συστήματα αυτά θα μπορούσαν να αποτελέσουν το κύριο αντικείμενο μιας άλλης διδακτορικής διατριβής.

1. Θεμελιώδεις Εξισώσεις του Προβλήματος

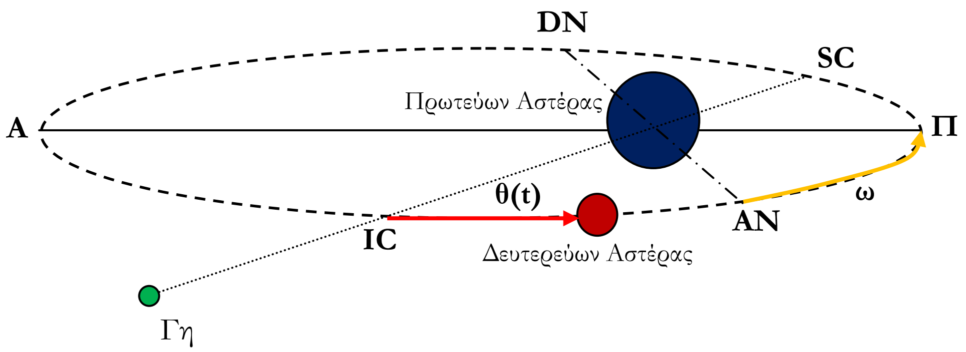
Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε μια γραμμική εφημερίδα της μορφής (3.2), δηλαδή $C(E) = T_0 + P_eE$. Όπως έχει αναλυτικά περιγραφεί στο τέταρτο κεφάλαιο, με τη βοήθεια της εφημερίδας (3.2) μπορούμε να προβλέπουμε το χρόνο ενός ελαχίστου $C(E)$ που θα λάβει χώρα κατά τον τυχαίο τροχιακό κύκλο E θεωρώντας ως σημείο έναρξης έναν αρχικό χρόνο ελαχίστου T_0, καθώς και ότι η περίοδος είναι σταθερή και ίση με την περίοδο αναφοράς P_e. Εφόσον τώρα έχουμε κατασκευάσει το διάγραμμα O-C του εξεταζόμενου συστήματος με βάση τις διαφορές των διαθέσιμων παρατηρούμενων χρόνων ελαχίστου, $O(E)$, και των υπολογιζόμενων από την πιο πάνω εφημερίδα, $C(E)$, μπορούμε να περιγράψουμε την επαγόμενη καμπύλη με μια κατάλληλα επιλεγμένη συνάρτηση (π.χ. με αρμονικές συναρτήσεις όταν πρόκειται για βραχυχρόνιες μεταβολές ή με ένα πολυώνυμο παρεμβολής όταν πρόκειται για τις μακροχρόνιες τάσεις). Εάν συμβολίσουμε τη συνάρτηση αυτή $\Delta T(E)$, τότε η περίοδος $P(E)$, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε κύκλο E, θα δίνεται από τη σχέση (3.5) με την ακόλουθη μορφή (Kopal 1978, Kalimeris et al. 1994a, Hilditch 2001):

$$P(E) = P_e + \Delta T(E) - \Delta T(E-1).$$

Θυμίζουμε ότι η σχέση (3.5) έχει ισχύ εφόσον ο κύκλος E αντιμετωπίζεται ως διακριτή ποσότητα, δηλαδή ως ακέραιος αριθμός, για τους λόγους που ήδη παρουσιάστηκαν στο τρίτο κεφάλαιο. Μπορούμε όμως εύκολα να αποδώσουμε στον τροχιακό κύκλο μια συνεχή ποσότητα, δηλαδή να τον αντιμετωπίσουμε ως πραγματικό αριθμό, επιθυμώντας να εκφράσουμε τη συνεχή μεταβολή της τροχιακής περιόδου ακόμα και μεταξύ των ελαχίστων. Στην περίπτωση αυτή, οφείλουμε να εισάγουμε μια νέα μεταβλητή, έστω $\tilde{E}$, η οποία θα συνδέεται άμεσα με το αληθές τροχιακό μήκος που διαγράφει το δευτερεύον μέλος ως προς ένα σημείο αναφοράς (π.χ. Gimenez & Garcia-Pelayo 1983, Borkovits et al. 2003).

Σύμφωνα με την Ουράνια Μηχανική, η σχετική ελλειπτική τροχιά του δευτερεύοντος αστέρα ως προς τον πρωτεύοντα (τον οποίο έχουμε τοποθετήσει ακλόνητο σε μια από τις δύο εστίες της έλλειψης) χαρακτηρίζεται από μια θέση ελάχιστης και μέγιστης μεταξύ τους απόστασης η οποία καλείται *περιάστρο (periapsis)* και *απάστρο (apoapsis)* αντίστοιχα (Σχήμα V.1). Η ευθεία ΑΠ, η οποία συνδέει τα δύο πιο πάνω σημεία ορίζει τη *γραμμή των αψίδων (apsidal line)*, ενώ η γωνία που διαγράφεται μεταξύ της επιβατικής ακτίνας του δευτερεύοντος και του περιάστρου ονομάζεται *αληθής ανωμαλία (true anomaly)*, $v(t)$. Δυστυχώς, η αληθής ανωμαλία, αν και ουσιώδους σημασίας φυσική ποσότητα, προσδιορίζεται πολύ δύσκολα, καθώς οι παρατηρήσεις μας πραγματοποιούνται πάντοτε στην οπτική ευθεία η οποία συνδέει τον παρατηρητή και το σύστημα των δύο σωμάτων. Εφόσον όμως η κλίση του τροχιακού επιπέδου το επιτρέπει σε σχέση με την οπτική ευθεία, εκείνο το οποίο εύκολα μπορούμε να διακρίνουμε είναι η χρονική στιγμή των εκλείψεων, δηλαδή το γεγονός κατά το οποίο είτε ο δευτερεύων αστέρας βρίσκεται πίσω από τον πρωτεύοντα, γνωστό ως *ανωτέρα σύνοδος (superior conjuction)*, είτε το ακριβώς αντιδιαμετρικό του, γνωστό και ως *κατωτέρα σύνοδος (inferior conjuction)*. Διαφορετικά, το σύστημα των δύο αστέρων παρατηρείται ως προς ένα επίπεδο το οποίο σχηματίζει γωνία 90^{o}-i με το τροχιακό και το τέμνει σε δύο σημεία γνωστά ως *ανοδικός (ascending)* και *καθοδικός (descending) σύνδεσμος (node)* με τον πρώτο να βρίσκεται πιο κοντά στο περιάστρο.

Ως *αληθές μήκος (true longitude)*, $\theta(t)$, ορίζουμε λοιπόν το τόξο που διαγράφεται από το δευτερεύον μέλος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t ξεκινώντας από το σημείο κατωτέρας συνόδου, ενώ η γωνία ω η οποία σχηματίζεται μεταξύ του ανοδικού συνδέσμου και του περιάστρου καλείται *μήκος περιάστρου (periapsis argument)*. Το μήκος περιάστρου δεν είναι πάντοτε σταθερό, καθώς η παλιρροϊκή αλληλεπίδραση των μελών, η παρουσία τρίτου σώματος στο σύστημα αλλά και διάφορα σχετικιστικά φαινόμενα μπορούν να οδηγήσουν στη μετάθεση της γραμμής των αψίδων (Παράρτημα V). Στην προκειμένη, θα αγνοήσουμε την ενδεχόμενη μεταβλητότητα της γωνίας αυτής και θα εισάγουμε μια νέα μεταβλητή $\tilde{E}$ ως το κλάσμα του αληθούς μήκους, $\theta(t)$, το οποίο έχει διαγραφεί μέχρι τον τυχαίο τροχιακό κύκλο E σε σχέση με την αντίστοιχη γωνία που διαγράφεται από μια πλήρη Κεπλεριανή τροχιά, δηλαδή $\tilde{E} = (2E\pi + \theta(t))/2\pi = E + \varphi(t)$, όπου $\varphi(t)$ η τροχιακή φάση που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο κύκλο E σε χρόνο t (Σχήμα V.1). Από μια άλλη οπτική σκοπιά, η νέα μεταβλητή $\tilde{E}$ αναπαριστά τον τροχιακό κύκλο με πραγματικές τιμές και όχι με αυστηρά ακέραιες όπως πράττει η μεταβλητή E. Η μεταβλητή $\tilde{E}$ αποτελεί λοιπόν γενίκευση της E και συμπίπτει με την τελευταία κάθε φορά που το φαινόμενο μήκος μηδενίζεται, δηλαδή ισχύει $\tilde{E} \equiv E$ όταν $\theta(t) = 0$ (Nanouris et al. 2011).



Σχήμα V.1. Η σχετική τροχιά του δευτερεύοντος αστέρα. Η οπτική ευθεία που συνδέει παρατηρητή και σύστημα ορίζει τα σημεία ανωτέρας (SC) και κατωτέρας συνόδου (IC) και η κάθετη σε αυτή γραμμή ορίζει τον ανοδικό (AN) και καθοδικό σύνδεσμο (DN). Διακρίνεται το (τροχιακό) μήκος περιάστρου, ω, και το αληθές μήκος, $\theta(t)$, του δευτερεύοντος αστέρα ως προς το σημείο IC.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο υπολογιζόμενος χρόνος $C(\tilde{E})$, ο οποίος συνήθως προσδιορίζεται μέσω μιας γραμμικής εφημερίδας, αποτελεί πλέον μέσο πρόβλεψης οποιασδήποτε τροχιακής φάσης που αντιστοιχεί στον εκάστοτε κύκλο E με τη χρονική θέση των πρωτευόντων ελαχίστων να εκτιμάται στις περιπτώσεις που η μεταβλητή $\tilde{E}$ λαμβάνει ακέραιες τιμές και συνεπώς συμπίπτει με την E (δηλαδή όταν $\tilde{E} \equiv E$):

$$C(\tilde{E}) = T_0 + P_e \tilde{E} \, . \tag{5.1}$$

Ο αντίστοιχος παρατηρούμενος, και συνεπώς αληθής, χρόνος που αντιστοιχεί στην αντίστοιχη τροχιακή φάση για τον συγκεκριμένο κύκλο E, $O(\tilde{E}) \equiv t(\tilde{E})$, μπορεί εύκολα τότε να προσδιορίζεται για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής $\tilde{E}$, εφόσον η πραγματική (ή αλλιώς *ανωμαλιστική*) περίοδος, $P(\tilde{E})$, είναι γνωστή:

$$t(\tilde{E}) = T_0 + \int_0^{\tilde{E}} P(\tilde{E}) d\tilde{E} \, . \tag{5.2}$$

Η ισοδύναμη διαφορική μορφή της πιο πάνω σχέσης (5.2) οδηγεί στον κρίσιμο εκείνο μετασχηματισμό μέσω του οποίου καθίσταται δυνατή η μετάβαση μεταξύ του φυσικού χρόνου, t, και του συνεχούς τροχιακού κύκλου, $\tilde{E}$, δηλαδή:

$$\frac{dt}{d\tilde{E}} = P \, . \tag{5.3}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις σχέσεις (5.1) και (5.2) στην εξίσωση $\Delta T(\tilde{E}) = O(\tilde{E}) - C(\tilde{E})$ και στη συνέχεια παραγωγίζοντας ως προς $\tilde{E}$, οδηγούμαστε στην ακόλουθη συνεχή μορφή της περιόδου $P(\tilde{E})$, δηλαδή:

$$\Delta T(\tilde{E}) = O(\tilde{E}) - C(\tilde{E}) = \int_0^{\tilde{E}} P(\tilde{E}) d\tilde{E} - P_e \tilde{E} \Rightarrow$$

$$\boxed{P(\tilde{E}) = P_e + \frac{d(\Delta T(\tilde{E}))}{d\tilde{E}}} \, . \tag{5.4}$$

Η πιο πάνω σχέση αλλά και εκείνη που προκύπτει από την παραγώγισή της, $dP(\tilde{E})/d\tilde{E} = d^2[\Delta T(\tilde{E})]/d\tilde{E}^2$, αναδεικνύει εύκολα τον τρόπο συσχέτισης μεταξύ ενός διαγράμματος $[O\text{-}C](\tilde{E}) = \Delta T(\tilde{E})$ και του αντίστοιχου της περιόδου $P = P(\tilde{E})$. Είναι εμφανές πως η καμπυλότητα του πρώτου είναι εκείνη που καθορίζει τη μονοτονία του δεύτερου και κατά συνέπεια, τα σημεία καμπής ενός διαγράμματος O-C (σημεία αντιστροφής κοίλων) είναι εκείνα που αντιστοιχούν στα ακρότατα της περιόδου (σημεία αντιστροφής μονοτονίας).

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε το φυσικό μηχανισμό που είναι υπαίτιος για τις παρατηρούμενες τροχιακές μεταβολές, δηλαδή το μηχανισμό που διαμορφώνει το διάγραμμα της τροχιακής περιόδου, είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε τις τιμές των φυσικών παραμέτρων που εμπλέκονται σε αυτόν. Κάτι τέτοιο μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια μιας κατάλληλης εξίσωσης στροφορμής του συστήματος και πιο συγκεκριμένα μέσω των γενικευμένων εξισώσεων (4.118) και (4.119) που παρουσιάστηκαν στο τέταρτο κεφάλαιο και έχουν προταθεί από τους Tout & Hall (1991, εφεξής TH91) και Kalimeris & Rovithis-Livaniou (2006, εφεξής KRL06) αντίστοιχα. Οι δύο αυτές εξισώσεις κρίνονται ιδιαίτερα εύχρηστες, καθώς μπορούν να τροποποιηθούν κάτω από τις συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος, δηλαδή κάτω από τους μηχανισμούς που δρούν στο εκάστοτε διπλό σύστημα αστέρων:

- $$\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{3q+2}{M_1+M_2}(\dot{M}_{w,1}+\dot{m}_{L2}) + \frac{3\dot{M}_2(M_2-M_1)}{M_1 M_2} + 3\frac{\dot{J}}{J_{orb}}. \qquad (5.5)$$

- $$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3(q-1)}{M_2}(\dot{M}_{w,2}+\dot{M}_2) - \frac{3q+2}{M_1+M_2}\left(\dot{M}_w+\dot{m}_{L2}\right) - 3\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{J_i}{J_{orb}}\cdot\frac{\dot{\Omega}_i}{\Omega_i}\right) + 3\frac{\dot{J}}{J_{orb}}. \qquad (5.6)$$

Οι πιο πάνω εξισώσεις (5.5) και (5.6) έχουν κατάλληλα τροποποιηθεί σε σχέση με τις αντίστοιχες αρχικές εξισώσεις στροφορμής (4.118) και (4.119) ώστε να είναι συμβατές με δύο θεμελιώδεις παραδοχές τις οποίες η παρούσα διδακτορική διατριβή υϊοθετεί σε όλη την περαιτέρω πορεία της. Η *πρώτη* από αυτές αφορά το αμετάβλητο των απόλυτων φυσικών παραμέτρων των δύο μελών του συστήματος (δηλαδή $\mathrm{d}R_i/\mathrm{d}t = \mathrm{d}I_{N,i}/\mathrm{d}t = 0$). Η παραδοχή αυτή είναι η πλέον δόκιμη, καθώς το χρονικό παράθυρο μέσα στο οποίο ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε την εξέλιξη της τροχιακής περιόδου είναι μόλις της τάξης των εκατοντάδων ετών, καθιστώντας τη μάζα και την ακτίνα των μελών σταθερές. Η *δεύτερη* από αυτές αφορά την παλιρροϊκή αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών ενός διπλού συτήματος και η οποία θα θεωρείται τόσο ισχυρή ώστε να έχει ήδη οδηγήσει στην κυκλοποίηση της τροχιακής περιστροφής αλλά και σε συγχρονισμό με εκείνη των επιμέρους μελών, $\Omega_{kep} = \Omega_1 = \Omega_2$. Έχοντας λοιπόν αγνοήσει όρους εκκεντρότητας (δηλαδή $e = \mathrm{d}e/\mathrm{d}t = 0$), η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα Ω_{kep} θα είναι τότε ίση με την ποσότητα $2\pi/P$, παραδοχή η οποία θα υποστηρίζεται σε όλη τη μαθηματική πορεία της διατριβής εξαιτίας των βραχυπερίοδων εξεταζόμενων συστημάτων στα οποία επικεντρωνόμαστε.

Ας σημειωθεί ακόμα, ότι η παρούσα διατριβή εστιάζει κυρίως σε συστήματα τα οποία διαθέτουν *μέλη μεταγενέστερων φασματικών τύπων* και εξελικτικά ανήκουν στην *κύρια ακολουθία*. Ο λόγος των περιορισμών αυτών έγινε με βάση το γεγονός της επαρκούς γνώσης που έχει συσσωρευθεί τα τελευταία χρόνια όσον αφορά τους ψυχρούς αστέρες και φυσικά τον Ήλιο. Διάφορες παράμετροι σχετικές με τη δομή των αστέρων προγενέστερων φασματικών τύπων, όπως επίσης και των εξελιγμένων αστέρων όλων των φασματικών τύπων, δε φαίνεται να είναι ακόμα ιδιαίτερα αξιόπιστοι, γεγονός το οποίο θα μπορούσε να οδηγήσει σε σημαντικές αποκλίσεις κατά την προσέγγιση που πρόκειται να ακολουθήσουμε. Επιπροσθέτως, η άγνοιά μας σχετικά με τον τρόπο ανάπτυξης μαγνητικών πεδίων στο εσωτερικών των θερμών αστέρων επιφέρει σημαντική αβεβαιότητα στον τρόπο απώλειας στροφορμής και κατά συνέπεια στον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται ένα διπλό σύστημα με μέλη της μορφής αυτής.

2. Προτεινόμενη Μαθηματική Προσέγγιση

Η προσέγγιση που πρόκειται να ακολουθήσουμε μπορεί να θεωρηθεί ως η αντίστροφη πορεία των μεθόδων που παραδοσιακά χρησιμοποιούνται. Σύμφωνα με τις κλασικές προσεγγίσεις, μετά την κατασκευή ενός διαγράμματος O-C επιλέγουμε μια κατάλληλη συνάρτηση $\Delta T(E)$ η οποία περιγράφει την αντίστοιχη καμπύλη, κάτω από τα κριτήρια που εμείς επιθυμούμε, και με τη βοήθεια της σχέσης (3.5) οδηγούμαστε πλέον στο διάγραμμα περιόδου, $P = P(E)$. Από τη στιγμή εκείνη, ο συνδυασμός των πληροφοριών που έχουμε για το εξεταζόμενο σύστημα, καθώς και η εμπειρία του ερευνητή, είναι τα κύρια εργαλεία τα οποία μας οδηγούν σε συμπεράσματα σχετικά με τους μηχανισμούς που κρύβονται πίσω από τις παρατηρούμενες μεταβολές. Εδώ, θα θεωρήσουμε αρχικά ως δεδομένες κάποιες φυσικές διαδικασίες και θα εξετάσουμε τη μορφή που θα έπρεπε να χαρακτηρίζει το αντίστοιχο διάγραμμα O-C (Nanouris et al. 2011, 2012a). Αναλυτικότερα, η προτεινόμενη προσέγγιση περιλαμβάνει τέσσερα βήματα:

- Κατασκευή της εξίσωσης στροφορμής (5.5) ή (5.6) κάτω από την παρουσία συγκεκριμένων φυσικών μηχανισμών. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής μας προσφέρει τη συνάρτηση περιόδου ως προς τον φυσικό χρόνο, $P(t)$.

- Αναγωγή του φυσικού χρόνου στο συνεχή τροχιακό κύκλο μέσω ενός κατάλληλου μετασχηματισμού της μορφής $t = t(\tilde{E})$ ο οποίο παρέχεται με τη βοήθεια της σχέσης (5.3). Η διαδικασία αυτή δεν είναι πάντοτε μια απλή υπόθεση, καθώς η εξίσωση (5.3) αποτελεί μια διαφορική εξίσωση η οποία δεν είναι πάντοτε επιλύσιμη.

- Μετασχηματισμός της συνάρτησης $P(t)$ ως προς τον συνεχή τροχιακό κύκλο, $P(\tilde{E})$. Η διαδικασία αυτή είναι τυπική, καθώς ο μετασχηματισμός που προκύπτει από το δεύτερο βήμα εισάγεται στη συνάρτηση $P(t)$ και αντικαθιστά τη μεταβλητή t από την $\tilde{E}$.

- Μετάβαση στη συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ η οποία οφείλει να διαμορφώνει το αντίστοιχο διάγραμμα O-C. Η εύρεση της συνάρτησης αυτής στηρίζεται στη σχέση (5.4), έχοντας πλέον γνωστή τη συνάρτηση $P(\tilde{E})$ από το τρίτο βήμα. Ο όρος ***συνθετικός*** θα χρησιμοποιείται τόσο για τον χαρακτηρισμό της επαγόμενης συνάρτησης $\Delta T(\tilde{E})$, όσο και για το θεωρητικό διάγραμμα O-C που προκύπτει από την τελευταία.

Το πρώτο, το δεύτερο και το τέταρτο βήμα της πιο πάνω διαδικασίας απαιτεί την επίλυση δύο συνήθων πρωτοτάξιων διαφορικών εξισώσεων. Πρόκειται δηλαδή για εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών και συνεπώς για εξισώσεις που απαιτούν μια απλή ολοκλήρωση. Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση είναι οι $[\tilde{E},t,\Delta T(\tilde{E}),P(\tilde{E})]$ = $[0,T_0,0,P_e]$. Η πρώτη από τις τρεις συνθήκες μας ενημερώνει πως στο μηδενικό κύκλο, $\tilde{E}$ = 0, ο χρόνος ταυτίζεται με το χρόνο ελαχίστου αναφοράς, $t(0) = T_0$, κάτι το οποίο προκύπτει άμεσα από την εφημερίδα (5.1) σε συνδυασμό με τη δεύτερη συνθήκη η οποία προβλέπει πως, κατά το μηδενικό κύκλο, ο υπολογιζόμενος από την εφημερίδα χρόνος ελαχίστου, $C(0)$, είναι ίσος με τον αντίστοιχο παρατηρούμενο, $O(0)$. Η τρίτη συνθήκη υποστηρίζει πως η αντίστοιχη περίοδος ισούται με την περίοδο αναφοράς της εφημερίδας που χρησιμοποιείται, $P(0) = P_e$. Είναι προφανές ότι οι δύο τελευταίες συνθήκες είναι σχετικά αυθαίρετες και αποτελούν προσωπική επιλογή του υποφαινόμενου, καθώς το κέρδος της απλούστευσης που παρατηρείται κατά τη διεξαγωγή των μαθηματικών πράξεων είναι πολύτιμο. Στην υποενότητα 2.3, θα δούμε ότι οι απλές αυτές παραδοχές δεν οδηγούν σε απώλεια της γενικότητας.

2.1. Ανιχνευτική Απόδοση Διαγραμμάτων O-C

Είναι γνωστό ότι τα διαγράμματα O-C χαρακτηρίζονται σε πολλές περιπτώσεις από σημαντική διασπορά εξαιτίας της μικρής ακρίβειας των χρόνων ελαχίστου όταν ο προσδιορισμός τους στηρίζεται κυρίως σε οφθαλμοσκοπικές παρατηρήσεις ή φωτογραφικές πλάκες επισκόπησης, αλλά και λόγω αστοχίας των μεθόδων προσδιορισμού (παρατηρησιακός θόρυβος). Θυμίζουμε όμως ότι η αβεβαιότητα των δεδομένων είναι εξίσου πιθανό να πηγάζει από καθαρά φυσικούς παράγοντες, όπως π.χ. από την κίνηση σκοτεινών κηλίδων στη φωτόσφαιρα των μελών του συστήματος ή λαμπρών σχηματισμών (plages), εμφανιζόμενων συνήθως στη χρωμόσφαιρά τους (φωτομετρικός θόρυβος). Ως αποτέλεσμα των πιο πάνω φυσικών αιτιών, τα διαγράμματα O-C συνοδεύονται από την παρουσία θορύβου ο οποίος στην παρούσα διατριβή θα θεωρείται πάντοτε λευκός και συνεπώς αποδεσμευμένος από κάθε είδους αυτοσυσχέτιση. Τα συνθετικά λοιπόν διαγράμματα τα οποία παράγονται μέσα από τον προσδιορισμό της συνάρτησης $\Delta T(\tilde{E})$, θα είναι εμβυθισμένα σε ένα υπόβαθρο τυχαίου θορύβου (καμίας δηλαδή δυναμικής), ο οποίος αναμένεται πάντοτε να ακολουθεί την Κανονική κατανομή $N(0,\sigma_\varepsilon^2)$.

Εάν λοιπόν υποθέσουμε ότι, για τους πιο πάνω λόγους, αναπτύσσεται θόρυβος στάθμης ίσης με ε, ο στατιστικός προσδιορισμός της οποίας εκφράζεται μέσω της ρίζας του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, σ_ε, το δυναμικό σήμα που παράγεται εξαιτίας της παρουσίας ενός φυσικού μηχανισμού θα μπορεί να είναι ανιχνεύσιμο μόλις αναδυθεί μέσα τη στάθμη ε. Ως εκ τούτου, η εξίσωση της οποίας η λύση θα μας δίνει τον αντίστοιχο κρίσιμο τροχιακό κύκλο, $\tilde{E}_{min}$, θα είναι η ακόλουθη:

$$\Delta T(\tilde{E}) = \varepsilon\,. \tag{5.7}$$

Η σωστή εκτίμηση της στάθμης θορύβου αποτελεί ένα θέμα που απαιτεί μεγάλη προσοχή κατά τους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν. Η υπάρχουσα εμπειρία σε σχέση με το σφάλμα που παράγεται κατά τον προσδιορισμό του χρόνου ενός συμμετρικού ελαχίστου με τις παραδοσιακές μεθόδους των Kwee & van Woerden

(1956) ή της πολυωνυμικής προσαρμογής, όπως έχει προταθεί από τους Breinhorst et al. (1973), μας οδηγεί στην υϊοθέτηση μιας τυπικής τιμής ίσης με ε = 0.001 d. Στην πραγματικότητα όμως, η τιμή αυτή δεν αποτελεί παρά τη μικρότερη δυνατή, καθώς απαντάται σε φωτοηλεκτρικές και CCD κυρίως παρατηρήσεις. Σύμφωνα μάλιστα με αποτελέσματα τα οποία παρουσιάστηκαν στο τρίτο κεφάλαιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής, η στάθμη αυτή μπορεί να ανέλθει στην τιμή των 0.004 d και 0.008 d, εφόσον ληφθούν υπόψη παράγοντες όπως είναι το φίλτρο παρατήρησης ή ενδεχόμενες ασυμμετρίες στη μορφή του ελαχίστου, αντίστοιχα, σε συνδυασμό πάντοτε με μια άστοχη επιλογή της μεθόδου προσδιορισμού. Στην περίπτωση μάλιστα που έχει χρησιμοποιηθεί φωτογραφική φωτομετρία, η τιμή αυτή μπορεί να αυξηθεί μέχρι και δέκα φορές, ενώ δεν είναι υπερβολικό να αναφέρουμε ότι ο συντελεστής μπορεί να γίνει ακόμα και τριάντα φορές μεγαλύτερος όταν πρόκειται για οφθαλμοσκοπικές παρατηρήσεις ή φωτομετρία φωτογραφικών πλακών επισκόπησης, ειδικότερα μάλιστα όταν αφορούν συστήματα με ρηχά ελάχιστα (π.χ. Mallama 1974a; 1974b, Duerbeck 1975a, Hall & Kreiner 1980).

Οι πιο πάνω εκτιμήσεις αφορούν βέβαια το στατιστικό χαρακτήρα της αβεβαιότητας που συνοδεύει κάθε χρόνο ελαχίστου. Ο φωτομετρικός θόρυβος όμως που προσβάλλει ένα διάγραμμα O-C είναι αναπόφευκτος, ειδικά μάλιστα όταν πρόκειται για συστήματα με μέλη μεταγενέστερων φασματικών τύπων, όπως είναι δηλαδή και η κύρια ομάδα συστημάτων τα οποία εξετάζει η παρούσα διατριβή. Δυστυχώς, η έκταση του βαθμού ανομοιογένειας των αστρικών φωτόσφαιρων (όπως επίσης και των ατμοσφαιρών τους), ο χρόνος ζωής των διαφόρων σχηματισμών αλλά και η περιοδικότητα της εμφάνισής τους δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Επομένως, εκείνο το οποίο μπορούμε με ασφάλεια μόνο να κάνουμε είναι να εκτιμήσουμε τη μέγιστη στάθμη θορύβου που μπορεί να προκληθεί εξαιτίας του φωτομετρικού θορύβου και με βάση την τιμή αυτή να προχωρήσουμε στους λεπτομερείς υπολογισμούς μας. Όπως όμως έχει ήδη ειπωθεί στο τρίτο κεφάλαιο και παρά τον αστάθμητο χαρακτήρα των σχετικών φαινομένων, οι κινούμενες σκοτεινές κηλίδες μπορούν να προκαλέσουν απόκλιση από τον πραγματικό χρόνο ελαχίστου μέχρι και ε = 0.01 d, όπως τουλάχιστον έχει εκτιμηθεί για τα συστήματα επαφής (Ogloza 1997, Kalimeris et al. 2002).

Σύμφωνα λοιπόν με όλες τις πιο πάνω διαπιστώσεις, στη συγκεκριμένη διδακτορική διατριβή θα γίνει χρήση τριών βασικών σταθμών θορύβου. Η πρώτη από αυτές θα είναι ίση με την τιμή 0.001 d και πρόκειται να τεθεί ως το κατώτερο στατιστικά αποδεκτό όριο, ενώ η δεύτερη, και παράλληλα θεωρούμενη ως η μέγιστη δυνατή η οποία μπορεί να προσβάλει τα δεδομένα μας, θα τεθεί ίση με την τιμή 0.03 d. Με τον τρόπο αυτό, σε ένα διάγραμμα O-C θα θεωρούμε την καταγραφή μιας χρονοσειράς με πλάτος μικρότερο των 0.001 d ως μια μη ανιχνεύσιμη μορφή θορύβου, ενώ όσες χρονοσειρές διαθέτουν πλάτος μεγαλύτερο των 0.03 d θα αποδίδονται σε φυσικά και μόνο αίτια. Ως τυπική όμως στάθμη θορύβου και η οποία φαίνεται να προσβάλλει το διάγραμμα O-C της πλειοψηφίας των συστημάτων του δείγματος που πρόκειται να μελετήσουμε θα είναι εκείνη των 0.01 d. Η τιμή αυτή θα αποτελεί τη στάθμη αναφοράς σε όλα τα πιο κάτω παραδείγματα, καθώς και σε όλες τις δοκιμασίες ελέγχου και αξιολόγησης της εκάστοτε φυσικής διαδικασίας.

2.2. Πολυωνυμική Περιγραφή Συνθετικών Διαγραμμάτων

Η πολυωνυμική περιγραφή ενός διαγράμματος O-C φαίνεται εξαρχής περιττή, καθώς ο προσδιορισμός της συνθετικής συνάρτησης σε κλειστή μορφή είναι αρκετός ώστε να μελετήσουμε τη μορφολογία ενός διαγράμματος O-C κάτω από την παρουσία ενός η περισσοτέρων μηχανισμών. Η γνώση της συνθετικής συνάρτησης σε αναλυτική μορφή είναι επίσης επαρκής για την εκτίμηση του κρίσιμου εκείνου τροχιακού κύκλου μετά τον οποίο ο εκάστοτε μηχανισμός μπορεί να γίνει αντιληπτός σε σχέση με το υπόβαθρο. Η περιγραφή όμως ενός συνθετικού διαγράμματος O-C με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου Taylor, το οποίο έχει προφανώς προκύψει από τη συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ στο τέταρτο βήμα της μεθόδου, κρίνεται πολύτιμη έως και αναγκαία για τους εξής τρεις σημαντικούς λόγους (Nanouris et al. 2012b):

1. Επιτυγχάνεται η ***δυνατότητα αξιολόγησης του βαθμού αξιοπιστίας της περιγραφής ενός μακροχρόνιου μηχανισμού μέσω ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού***, τακτική ιδιαίτερα συνήθης σε πληθώρα αναλύσεων (π.χ. Hall & Kreiner 1980, Qian 2000, Zasche et al. 2009, Liakos et al. 2011). Στη συγκεκριμένη διατριβή θα επεκτείνουμε ακόμα πιο πολύ την παραδοχή αυτή και θα εξετάσουμε μέχρι ποιό κρίσιμο χρονικό διάστημα ένα κυβικό πολυώνυμο επαρκεί για την επιτυχή αναπαράσταση του αντίστοιχου μηχανισμού. Η διατύπωση αυτή είναι ισοδύναμη με τον προσδιορισμό των κρίσιμων εκείνων τροχιακών κύκλων οι οποίοι λειτουργούν ως κατώφλι ώστε η επίδραση ανώτερων πολυωνυμικών όρων να γίνεται σημαντική στη διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C.

Υποθέτοντας πλέον ότι έχουμε προσδιορίσει την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης $\Delta T(\tilde{E})$, είμαστε σε θέση να την προσεγγίσουμε από ένα πολυώνυμο Taylor, κρατώντας όσους όρους εμείς επιθυμούμε. Το σημείο γύρω από το οποίο η συνθετική συνάρτηση επιλέγεται να αναπτυχθεί είναι εκείνο που αντιστοιχεί στις αρχικές μας συνθήκες και συνεπώς ο κύκλος $\tilde{E}$ = 0 (πολυώνυμο MacLaurin). Η επιλογή αυτή είναι τυπική, καθώς στη θέση αυτή υποθέτουμε ότι είναι γνωστή τόσο η συνθετική συνάρτηση $\Delta T(0)$, όσο και η περίοδος $P(0)$. Πρακτικά, θα δούμε στη συνέχεια ότι τέσσερις μόνο όροι επαρκούν ώστε να περιγράψουν τη συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό. Ο βαθμός προσέγγισης καθορίζεται ουσιαστικά από την έκταση του χρονικού διαστήματος μέσα στο οποίο καλείται το πολυώνυμο MacLaurin να εκφράσει τη συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$. Ένας τρόπος αξιολόγησης του βαθμού προσέγγισης που επιτυγχάνεται κατά την ανάπτυξη του n-οστού όρου μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια των υπολοίπων κατά Taylor, $Rem_n(\tilde{E})$, δηλαδή:

$$\Delta T(\tilde{E}) = \sum_{i=0}^{n} c_i \tilde{E}^i + Rem_n(\tilde{E}), \text{ όπου } c_i = \frac{1}{i!} \cdot \left. \frac{d^{(i)}\left(\Delta T(\tilde{E})\right)}{d\tilde{E}^{(i)}} \right|_{\tilde{E}=0}. \qquad (5.8)$$

Σε γενικές γραμμές, προτείνονται δύο εκτιμητές των υπολοίπων κατά Taylor και οι οποίοι στηρίζονται, όπως είναι φυσικό, στη μορφή που έχει ο αμέσως επόμενος

(n+1)-οστός όρος του πολυωνύμου. Ο πρώτος από τους εκτιμητές αυτούς αφορά τη μορφή Lagrange, ενώ ο δεύτερος τη μορφή Cauchy:

- $Rem_n(\widetilde{E}) \cong \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left. \frac{d^{(n+1)}\left(\Delta T(\widetilde{E})\right)}{d\widetilde{E}^{(n+1)}} \right|_{\widetilde{E}=\theta} \widetilde{E}^{n+1}$ για τη μορφή Lagrange. (5.9)

- $Rem_n(\widetilde{E}) \cong \frac{1}{n!} \cdot \left. \frac{d^{(n+1)}\left(\Delta T(\widetilde{E})\right)}{d\widetilde{E}^{(n+1)}} \right|_{\widetilde{E}=\theta} \widetilde{E}\left(\widetilde{E}-\theta\right)^n$ για τη μορφή Cauchy. (5.10)

Η ποσότητα θ αποτελεί μια ελεύθερη παράμετρο με $\theta \in (0,\tilde{E}]$ και η οποία, όπως θα δούμε στη συνέχεια, δε φαίνεται να παίζει σημαντικό ρόλο στους υπολογισμούς μας. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι δύο πιο πάνω μορφές δεν διαφέρουν παρά μόνο κατά τον όρο που περιέχει το παραγοντικό όσο η παράμετρος θ βρίσκεται κοντά στο μηδέν. Στην περίπτωση αυτή, ο εκτιμητής Lagrange προβλέπει υπόλοιπα συγκρίσιμα με εκείνα του εκτιμητή Cauchy, ενώ στη διεθνή βιβλιογραφία ο πρώτος είναι εκείνος που φέρει τη μεγαλύτερη αποδοχή. Οι δύο πιο πάνω λόγοι μας οδήγησαν στην απόφαση να υϊοθετήσουμε τον εκτιμητή Lagrange στην πορεία της προσέγγισης που προτείνουμε. Αν και ακόμα ίσως δεν έχει διαφανεί η χρησιμότητα των υπολοίπων κατά τη μεθοδολογία που ακολουθείται, καθιστούμε σαφές ότι η αξία τους είναι κομβική κατά την ανάλυση της ανιχνευτικής ευαισθησίας των διαγραμμάτων O-C που θα εξεταστεί αναλυτικά στην τρίτη ενότητα.

2. Οι διαφορικές εξισώσεις που οδηγούν στον προσδιορισμό των συναρτήσεων $P(\tilde{E})$ και $\Delta T(\tilde{E})$ δεν είναι πάντοτε εύκολα επιλύσιμες. Δεν είναι καθόλου σπάνια η ***περίπτωση αδυναμίας εύρεσης των δύο πιο πάνω συναρτήσεων σε κλειστή μορφή***, γεγονός το οποίο θα μπορούσε να είναι απαγορευτικό στην ανάλυση που επιχειρούμε να πραγματοποιήσουμε. Σε μια ανάλογη λοιπόν περίπτωση, είναι προτιμότερο να εκφράσουμε εκ των προτέρων τη ζητούμενη συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ μέσω ενός πολυωνύμου MacLaurin (5.8) και να εστιάσουμε πλέον στον τρόπο προσδιορισμού των συντελεστών του, c_i.

Επειδή η εξίσωση στροφορμής του συστήματος είναι εκείνη που σε πρώτη φάση μας προσφέρει τη σχέση του ρυθμού μεταβολής της περιόδου με την ίδια την περίοδο, dP/dt = $f(P)$, σκοπός μας είναι να συνδέσουμε τους συντελεστές c_i με τη συνάρτηση $f(P)$ ή τις παραγώγους της. Αξιοποιώντας λοιπόν τη σχέση (5.4) με βάση το πολυώνυμο (5.8), οδηγούμαστε στην ακόλουθη μορφή για τη συνάρτηση $P(\tilde{E})$:

$$P(\widetilde{E}) = P_e + \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)c_{i+1}\widetilde{E}^i \, . \tag{5.11}$$

Διεξάγοντας μια σειρά από παραγωγίσεις, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τη γενική μορφή που θα έχει η ν-οστή παράγωγος της συνάρτησης $P(\tilde{E})$, δηλαδή:

$$\frac{d^{(v)}P(\tilde{E})}{d\tilde{E}^{(v)}} = \sum_{i=0}^{(n-1)-v} (i+1)\cdots(i+1+v)c_{i+1+v}\tilde{E}^{i} \,. \tag{5.12}$$

Επαληθεύοντας την πιο πάνω παράγωγο (5.12) στο σημείο $\tilde{E} = 0$, οδηγούμαστε στην ακόλουθη και ιδιαίτερα χρήσιμη σχέση:

$$\left.\frac{d^{(v)}P(\tilde{E})}{d\tilde{E}^{(v)}}\right|_{\tilde{E}=0} = (1+v)!c_{1+v} \,. \tag{5.13}$$

Εκείνο το οποίο απομένει είναι η αναγωγή της συνάρτησης περιόδου ως προς τον συνεχή τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$, $P(\tilde{E})$, στη συνάρτηση περιόδου ως προς το χρόνο t, $P(t)$, ώστε να προκύψει η ζητούμενη σχέση μεταξύ των συντελεστών και της συνάρτησης $f(P)$. Δυστυχώς όμως, η διαδικασία αυτή κάθε άλλο παρά τετριμμένη είναι και συνεπώς απαιτείται ειδική μεταχείριση για κάθε συντελεστή ξεχωριστά. Αρχικά, θα προσδιορίσουμε το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, c_2 ($v = 1$), ξεκινώντας με τον κανόνα αλυσίδας για τη συνάρτηση περιόδου $P(t)$ και αξιοποίωντας τη σχέση (5.3), αφού πρώτα την παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο t:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{d\tilde{E}} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad f(P) = \frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{d\tilde{E}} \,. \tag{5.14}$$

Επαληθεύοντας τη σχέση (5.14) στο σημείο $\tilde{E} = 0$, θα έχουμε:

$$\left.f(P)\right|_{\tilde{E}=0} = \frac{1}{P(0)}\cdot\left.\frac{dP}{d\tilde{E}}\right|_{\tilde{E}=0} \overset{(5.13)}{\Leftrightarrow} \boxed{c_2 = \frac{P_e f(P_e)}{2}} \,. \tag{5.15}$$

Συνεχίζουμε τώρα με σκοπό τον προσδιορισμό του συντελεστή του τριτοβάθμιου όρου, c_3 ($v = 2$), παραγωγίζοντας αρχικά τη σχέση (5.14) ως προς τον τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$:

$$\frac{df(P)}{d\tilde{E}} = \frac{df(P)}{dP}\cdot\frac{dP}{d\tilde{E}} = -\frac{1}{P^2}\left(\frac{dP}{d\tilde{E}}\right)^2 + \frac{1}{P}\cdot\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2} \,. \tag{5.16}$$

Επαληθεύοντας τη σχέση (5.16) στο σημείο $\tilde{E} = 0$, θα έχουμε:

$$\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{\tilde{E}=0}\left.\frac{dP}{d\tilde{E}}\right|_{\tilde{E}=0} = -\frac{1}{P(0)^2}\left(\left.\frac{dP}{d\tilde{E}}\right|_{\tilde{E}=0}\right)^2 + \frac{1}{P(0)}\cdot\left.\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2}\right|_{\tilde{E}=0} \overset{(5.13)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{\tilde{E}=0} 2c_2 = -\frac{4c_2^2}{P_e^2} + \frac{6c_3}{P_e} \overset{(5.15)}{\Leftrightarrow} \left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{\tilde{E}=0} P_e f(P_e) = -f^2(P_e) + \frac{6c_3}{P_e} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{c_3 = \frac{P_e f(P_e)}{6}\left[P_e \frac{df(P)}{dP}\bigg|_{P=P_e} + f(P_e)\right]}. \tag{5.17}$$

Είναι προφανές πως εάν κάποιος το κρίνει σκόπιμο, είναι σε θέση να προσδιορίσει το συντελεστή οποιουδήποτε όρου με βαθμό μεγαλύτερο του τρίτου, ακολουθώντας την πορεία που μόλις αναπτύχθηκε. Παραπέμπουμε στο Παράρτημα ΙΙΙ στο οποίο υπολογίζεται, για λόγους πληρότητας, ο συντελεστής του τεταρτοβάθμιου όρου.

3. Οι συντελεστές του πολυωνύμου παρεμβολής, όπως εισάχθηκε από τους Kalimeris et al. (1994a) για την καλύτερη δυνατή περιγραφή των διαγραμμάτων O-C, ***μπορούν πλέον να αποκτήσουν φυσικό νόημα***. Βέβαια, για να γίνει ακόμα πιο εμφανής η συσχέτιση αυτή, θα πρέπει να συμμετέχουν αρκετοί μηχανισμοί, συνδυασμός τόσο των μακροκροχρόνιων όσο και των βραχυχρόνιων. Όπως εύκολα άλλωστε φαίνεται από τις σχέσεις (5.15) και (5.17), οι συντελεστές προσδιορίζονται με βάση τη συνάρτηση $f(P)$, όπως αυτή προκύπτει από τις εξισώσεις στροφορμής (5.5) και (5.6). Εφόσον τώρα οι πολυωνυμικοί συντελεστές έχουν ήδη εκτιμηθεί μέσω της πολυωνυμικής παλινδρόμησης κατά την ανάλυση ενός διαγράμματος O-C, η επίλυση του συστήματος εξισώσεων όπως οι (5.15) και (5.17) μπορεί να οδηγήσει στον προσδιορισμό πολύτιμων φυσικών παραμέτρων του προβλήματος.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι στην παρούσα διατριβή, οι πολυωνυμικοί συντελεστές ***αναφέρονται σε μακροχρόνιες και μόνο φυσικές διαδικασίες*** που συναντάμε σε διπλά συστήματα αστέρων, όπως η απώλεια/μεταφοράς μάζας, η μαγνητική πέδηση, η βαρυτική ακτινοβολία, καθώς και οι παλιρροϊκές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μελών τους. Στην περίπτωση αυτή, οι βραχυχρόνιοι, συνήθως περιοδικοί, όροι θα αντιμετωπίζονται ως ανεπιθύμητος θόρυβος ο οποίος έχει προσβάλλει τα δεδομένα μας. Θα ήταν μάλιστα ιδιαίτερα δόκιμη η εφαρμογή της αρμονικής (Fourier analysis) ή ακόμα και της κυματιδιακής ανάλυσης (Wavelet analysis) στην περίπτωση ιδιαίτερα πολύπλοκων σημάτων ώστε να εντοπιστεί ο υψίσυχνος θόρυβος και να απομακρυνθεί. Σε γενικές γραμμές, θα πρέπει να δίνεται μεγάλη προσοχή κατά την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή και σημαντικό βάρος στην αξιοποίηση κάθε διαθέσιμου στατιστικού εργαλείου.

Η ύπαρξη βραχυχρόνιων όρων συνήθως αποδίδεται είτε στην παρουσία τρίτου σώματος το οποίο αλληλεπιδρά βαρυτικά με το διπλό σύστημα είτε στην παρουσία κύκλων μαγνητικής δραστηριότητας όμοιας της ηλιακής, εφόσον βέβαια το αστρικό ζεύγος περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα μέλος μεταγενέστερου φασματικού τύπου (παραπέμπουμε στο Παράρτημα V για μια συνοπτική παρουσίαση του τρόπου με τον οποίο οι βραχυχρόνιοι μηχανισμοί διαμορφώνουν τα διαγράμματα O-C). Δυστυχώς, δεν μπορούμε να αποκλείσουμε την περίπτωση κατά την οποία ένας πιθανός συνοδός του διπλού συστήματος έχει τόσο μεγάλη περίοδο ώστε τελικά εκείνο το οποίο παρατηρείται σαν μακροχρόνια τάση να αποτελεί τελικά ένα μικρό και μόνο τμήμα της αναμενόμενης περιοδικής διαμόρφωσης του διαγράμματος O-C.

Από τη στιγμή που δεν υπάρχει κάποια εναλλακτική μέθοδος επιβεβαίωσης της δυναμικής του παρουσίας (δηλαδή μια μέθοδος άμεσα παρατηρησιακή όπως π.χ. φωτομετρική, φασματοσκοπική ή αστρομετρική), ***η ερμηνεία των διαγραμμάτων O-C δεν μπορεί να είναι και μοναδική***. Εκείνο όμως το οποίο είμαστε σε θέση να πραγματοποιήσουμε είναι μια λεπτομερή μελέτη ώστε να διαπιστώσουμε εάν οι υποψήφιοι μηχανισμοί μπορούν πράγματι να είναι ανιχνεύσιμοι σε ένα διάγραμμα O-C συγκεκριμένων προδιαγραφών, δηλαδή συγκεκριμένου χρονικού ορίζοντα διαθέσιμων παρατηρήσεων και δεδομένης στάθμης θορύβου. Μέρος της παρούσας προτεινόμενης προσέγγισης αποτελεί η ανάπτυξη της κατάλληλης εκείνης μεθοδολογίας ώστε να επιτευχθεί η απαιτούμενη εκείνη μελέτη η οποία θα προηγείται της εφαρμογή της εκάστοτε μεθόδου ανάλυσης. Η μεθοδολογία αυτή θα εφαρμοστεί αναλυτικά στην τρίτη ενότητα κατά τη μελέτη διάφορων μηχανισμών.

2.3. Ευαισθησία Μεθόδου στις Αρχικές Συνθήκες

Στην παρουσίαση των τεσσάρων βημάτων της μεθόδου, η οποία έλαβε χώρα στη δεύτερη ενότητα, υϊοθετήθηκαν οι αρχικές συνθήκες $[\tilde{E},t,\Delta T(\tilde{E}),P(\tilde{E})] = [0,T_0,0,P_e]$. Είναι προφανές πως, κατά το μηδενικό κύκλο, ούτε ο παρατηρούμενος χρόνος ελαχίστου $O(0)$ οφείλει να είναι ίσος με τον υπολογιζόμενο $C(0) = T_0$, ούτε και η περίοδος $P(0)$ θα πρέπει υποχρεωτικά να συμπίπτει με εκείνη της εφημερίδας P_e. Αν και θα φανεί πως η υπόθεση αυτή δεν επηρεάζει σε καμία περίπτωση τα αποτελέσματά μας, πρέπει να σημειώσουμε ότι ο υπολογισμός της περιόδου (εφημερίδας), P_e, βασίζεται συχνά σε μια ομάδα χρόνων ελαχίστων οι οποίοι προσδιορίστηκαν μέσα σε ένα ιδιαίτερα περιορισμένο χρονικό διάστημα ώστε να διασφαλιστεί πως η περίοδος δε θα έχει προλάβει να μεταβληθεί. Ένας από τους χρόνους ελαχίστων της ομάδας αυτής επιλέγεται τότε να χρησιμοποιηθεί ως ο εναρκτήριος χρόνος αναφοράς, T_0. Έτσι, οι πιο πάνω παραδοχές, αν και λανθασμένες στο γενικότερο πλαίσιο ανάπτυξης της προτεινόμενης προσέγγισης, είναι στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων αποδεκτές.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι αναπτύσσουμε μια τυχαία συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ σε μια σειρά Taylor, γύρω από τον αρχικό μας κύκλο $\tilde{E} = 0$, υποθέτοντας πάντοτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη σε κάθε συνεχή τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$:

$$\Delta T(\tilde{E}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \tilde{E}^i \ , \ \text{όπου} \ \ c_i = \frac{1}{i!} \cdot \left. \frac{d^{(i)}\left(\Delta T(\tilde{E})\right)}{d\tilde{E}^{(i)}} \right|_{\tilde{E}=0} . \tag{5.18}$$

Οι δύο πρώτοι όροι της πιο πάνω δυναμοσειράς θα έχουν την ακόλουθη μορφή:

- $c_0 = \Delta T(0) = O(0) - C(0)$ ή ισοδύναμα $\boxed{O(0) = c_0 + T_0}$. (5.19)

- $c_1 = \left. \dfrac{d(\Delta T(\tilde{E}))}{d\tilde{E}} \right|_{\tilde{E}=0} = P(0) - P_e$ ή ισοδύναμα $\boxed{P(0) = c_1 + P_e}$. (5.20)

Σημειώνοντας πως η σχέση (5.20) προέκυψε με τη βοήθεια της σχέσης (5.4), οφείλουμε να επισημάνουμε ορισμένες σύντομες αλλά θεμελιώδεις διαπιστώσεις που πηγάζουν από τις πιο πάνω σχέσεις:

- Ο μηδενικός και πρωτοβάθμιος όρος του αναπτύγματος Maclaurin (5.18) με συντελεστές c_0 και c_1 αντίστοιχα, θα εκλείπουν ανεξάρτητα από τον εξεταζόμενο μηχανισμό, κάτω από τις συνθήκες $[\tilde{E}, \Delta T(\tilde{E}), P(\tilde{E})] = [0,0,P_e]$. Θα δούμε ότι κάτι τέτοιο επιβεβαιώνεται και πρακτικά κατά την ανάπτυξη της τρίτης ενότητας.

- Εάν κατά τον εναρκτήριο τροχιακό κύκλο επιλεγεί αυθαίτερα ως παρατηρούμενος χρόνος ελαχίστου μια τιμή διάφορη του αντίστοιχου υπολογιζόμενου, $O(0) \neq T_0$, η μοναδική συνέπεια που θα επιφέρει σε ένα διάγραμμα O-C είναι μια μετατόπιση στον κατακόρυφο άξονα κατά την ποσότητα $c_0 = O(0) - T_0$. Εφόσον δηλαδή η ποσότητα T_0 επιλεγεί μικρότερη του πραγματικού χρόνου ελαχίστου, το διάγραμμα θα ανυψωθεί κατά c_0, ενώ όταν επιλεγεί μεγαλύτερη, το διάγραμμα θα υποβιβαστεί κατά την ανάλογη ποσότητα.

- Εάν κατά τον εναρκτήριο τροχιακό κύκλο επιλεγεί αυθαίτερα ως πραγματική περίοδος μια τιμή διάφορη εκείνη της εφημερίδας, $P(0) \neq P_e$, η μοναδική συνέπεια που θα επιφέρει σε ένα διάγραμμα O-C είναι η ανάπτυξη μιας (γραμμικής) κλίσης ίσης με την ποσότητα $c_1 = P(0) - P_e$. Εφόσον δηλαδή η ποσότητα P_e επιλεγεί μικρότερη της πραγματικής περιόδου, το διάγραμμα θα αποκτήσει θετική κλίση ίση με c_1, ενώ όταν επιλεγεί μεγαλύτερη, το διάγραμμα θα αποκτήσει αρνητική κλίση κατά την ανάλογη ποσότητα. Μας δίνεται έτσι η ευκαιρία να σημειώσουμε ακόμα μια φορά πως γραμμική διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C δεν εκφράζει μεταβολή της περιόδου αλλά αστοχία (ανακρίβεια) της εφημερίδας που χρησιμοποιήθηκε (π.χ. Kalimeris et al. 1994a, Sterken 2005, Hilditch 2001).

- Εφόσον οι συντελεστές c_0 και c_1 έχουν εκτιμηθεί μέσω της ελαχιστοτετραγωνικής πολυωνυμικής παλινδρόμησης, ο προσδιορισμός του πραγματικού χρόνου ελαχίστου $O(0)$ και της πραγματικής περιόδου $P(0)$ κατά τον αρχικό κύκλο $\tilde{E} = 0$ καθίσταται πάντοτε δυνατός με απλή εφαρμογή των σχέσεων (5.19) και (5.20).

- Εκείνο το οποίο αναδύεται από την πιο πάνω ανάλυση είναι ότι ***η παρουσία του σταθερού και του γραμμικού όρου εξαρτάται από την επιλογή της εφημερίδας***, ενώ οι υπόλοιποι ανώτεροι όροι εξαρτώνται από τη δυναμική των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα στο εκάστοτε σύστημα. Η τελευταία διαπίστωση στηρίζεται στη σχέση (5.13) η οποία μας αποκαλύπτει ότι συντελεστές πολυωνυμικών όρων με βαθμό μεγαλύτερου του πρώτου δεν εξαρτώνται από τις παραμέτρους της εφημερίδας, T_0 και P_e.

3. Μελέτη Φυσικών Μηχανισμών

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε πέντε συνολικά φυσικούς μηχανισμούς ακολουθώντας τα τέσσερα βήματα που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

Σκοπός της ανάλυσης είναι η αναζήτηση των συναρτήσεων $\Delta T(\tilde{E})$ που αναμένεται να διαμορφώνουν το αντίστοιχο διάγραμμα O-C, καθώς και ο προσδιορισμός των ελάχιστων χρονικών διαστημάτων με διαθέσιμες παρατηρήσεις ώστε ο εκάστοτε μηχανισμός να είναι ανιχνεύσιμος. Παραπέμπουμε στο Παράρτημα IV, όποτε αυτό κρίνεται σημαντικό, για μια διεξοδικότερη παρουσίαση επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων οι οποίες οδηγούν στις ζητούμενες συνθετικές συναρτήσεις.

Αρχικά, θα ασχοληθούμε με την απώλεια μάζας μέσω αστρικών ανέμων, καθώς υπάρχει σημαντική εμπειρία στους αναμενόμενους ρυθμούς τόσο από διάφορα ημιεμπειρικά μοντέλα όσο και από τις ήδη υπάρχουσες αναλύσεις διαγραμμάτων O-C. Έτσι, θα μπορεί να γίνει μια εκτίμηση του βαθμού αξιοπιστίας της προτεινόμενης προσέγγισης και μια ποιοτική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων στα οποία οδηγεί (Nanouris et al. 2011). Στο ίδιο ακριβώς πλαίσιο με την απώλεια μάζας, θα εξεταστεί η μεταφορά μάζας μεταξύ δύο μελών διαφορετικής μάζας μέσω του σημείου L1 (Nanouris et al. 2012a). Στη συνέχεια, θα μελετηθεί η επίδραση της μαγνητικής πέδησης στην τροχιακή εξέλιξη ενός συστήματος με βάση ορισμένους εμπειρικούς νόμους που έχουν προκύψει από παρατηρησιακά κυρίως δεδομένα σε μονούς αστέρες και οι οποίοι είναι μέλη ανοικτών σμηνών (Nanouris et al. 2011), ενώ η απώλεια στροφορμής οφειλόμενη στη βαρυτική ακτινοβολία αλλά και στην απώλειας μάζας μέσω του σημείου L2 θα τεθεί επίσης υπο την εφαρμογή της νέας προσέγγισης (Nanouris et al. 2012a). Ας σημειωθεί ότι η προσπάθεια αξιοποίησης των διαγραμμάτων O-C στη διερεύνηση της συμπεριφοράς των τριών τελευταίων μηχανισμών είναι πρωτότυπη, καθώς δεν έχει υπάρξει ποτέ στο παρελθόν ανάλογο εγχείρημα.

3.1. Απώλεια Μάζας μέσω Αστρικού Ανέμου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξηγήσαμε με σαφήνεια τους λόγους που ένας αστέρας υπόκειται σε απώλεια μάζας αλλά και τους τρόπους με τους οποίους οι αντίστοιχοι ρυθμοί εντείνονται όταν ο αστέρας αποτελεί μέλος ενός διπλού αστρικού ζεύγους. Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε πως υψηλοί ρυθμοί απώλειας και μεταφορά μάζας της τάξης των -10^{-4} M_Θ/yr και -10^{-6} M_Θ/yr αναμένονται σε δυναμική και θερμική χρονική κλίμακα αντίστοιχα. Επομένως, μπορούμε με ασφάλεια να υποθέσουμε ότι ο ρυθμός απώλειας μάζας από ένα διπλό σύστημα αστέρων είτε αυτός προκαλείται από το ένα μέλος, $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_{\mathrm{w},1} < 0$, είτε και από τα δύο μέλη, $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_{\mathrm{w}} = (\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_{\mathrm{w},1} + (\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_{\mathrm{w},2} < 0$, είναι σταθερός αλλά και μικρός σε τέτοιο βαθμό ώστε να μη μεταβάλλει τις απόλυτες παραμέτρους στο διάστημα των διαθέσιμων χρόνων ελαχίστων, δηλαδή της τάξης λίγων εκατοντάδων ετών.

Η παραδοχή αυτή γίνεται ακόμα πιο εύκολα αποδεκτή εάν λάβουμε υπόψη μας τη σπανιότητα του φαινομένου απώλειας μάζας δυναμικής κλίμακας. Σύμφωνα με τα θεωρητικά μοντέλα, το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο μπορεί να λάβει χώρα ένα τέτοιο γεγονός είναι της τάξης των 10^4 yr (π.χ. Hilditch 2001) τη στιγμή που η τυπική διάρκεια ζωής ενός διπλού συστήματος αστέρων είναι 10^9 yr. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι η πιθανότητα εντοπισμού ενός συστήματος που θα βρίσκεται στη συγκεκριμένη εξελικτική φάση είναι μόλις της τάξης του 1/100000. Θεωρώντας λοιπόν την απώλεια μάζας θερμικής κλίμακας ως πιο πιθανό μηχανισμό, τα εξεταζόμενα συστήματα θα έχουν χάσει μόλις 10^{-3} M_{Θ} ακόμα και μετά από 10^3 yr στην πιο ακραία περίπτωση, ποσότητα η οποία κρίνεται αμελητέα κατά τους υπολογισμούς μας.

Επιπλέον, θυμίζουμε ότι η απώλεια μάζας λαμβάνει χώρα πλήρως ισότροπα από τα μέλη του συστήματος με την παραδοχή της αμελητέας απώλειας στροφορμής, ιδιότητα την οποία αποκαλύπτει η διερεύνηση που πραγματοποιήθηκε στην υποενότητα 2.4.1 του τέταρτου κεφαλαίου και μας εξασφαλίζει αριθμητικά η σχέση (4.37). Τελικά, αγνοώντας την ιδιοπεριστροφή των μελών, την κατάληξη της μάζας η οποία εκλύεται από το σύστημα και οποιοδήποτε μηχανισμό απώλειας στροφορμής, τόσο η γενικευμένη σχέση στροφορμής της μορφής (5.5) των TH91 όσο και της μορφής (5.6) των KRL06 αντίστοιχα, οδηγούν στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{P} = wP, \tag{5.21}$$

Η εξίσωση (5.21) προκύπτει αφού πρώτα έχουμε εισάγει την παράμετρο w η οποία, σύμφωνα με τις πιο πάνω προϋποθέσεις, θα θεωρείται σταθερή:

- $w = -\dfrac{3q+2}{M_1+M_2}\dot{M}_{w,1} > 0$ στην περίπτωση των TH91. (5.22)

- $w = -\dfrac{3q+2}{M_1+M_2}\dot{M}_{w,1} - \dfrac{3q^{-1}+2}{M_1+M_2}\dot{M}_{w,2} > 0$ στην περίπτωση των KRL06. (5.23)

Η επίλυση της εξίσωσης (5.21) πραγματοποιείται με τη χρήση των αρχικών συνθηκών $[t,P(t)] = [T_0,P_e]$ και οδηγεί σε μια συνάρτηση περιόδου της πιο κάτω μορφής:

$$P(t) = P_e e^{w(t-T_0)}. \tag{5.24}$$

Η συνάρτηση (5.24) εισάγεται πλέον στην εξίσωση (5.3) η οποία επιλύεται με αρχικές συνθήκες $[\tilde{E},t] = [T_0,0]$ και οδηγεί στον ακόλουθο μετασχηματισμό $t = t(\tilde{E})$:

$$t - T_0 = -\frac{1}{w}\ln(1 - wP_e\tilde{E}). \tag{5.25}$$

Τελικά, ο μετασχηματισμός (5.25) υϊοθετείται ώστε να απαλειψεί τη χρονική μεταβλητή t από τη συνάρτηση περιόδου $P(t)$ και να την αντικαταστήσει από τον συνεχή τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$, οδηγώντας δηλαδή στη συνάρτηση $P(\tilde{E})$:

$$P(\tilde{E}) = \frac{P_e}{1 - wP_e\tilde{E}}. \tag{5.26}$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η συνάρτηση περιόδου είναι ***αύξουσα*** για κάθε κύκλο $\tilde{E}$, επιβεβαιώνοντας ότι η απώλεια μάζας οδηγεί σε αύξηση πάντοτε της τροχιακής περιόδου. Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση (5.26) στη σχέση (5.4) και επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει κάτω από τις αρχικές συνθήκες $[\tilde{E}, \Delta T(\tilde{E})] = [0,0]$, προσδιορίζουμε πλέον αναλυτικά τη συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ η οποία διαμορφώνει το αντίστοιχο διάγραμμα O-C:

$$\boxed{\Delta T(\tilde{E}) = -\frac{1}{w}\ln(1 - wP_e\tilde{E}) - P_e\tilde{E}}. \tag{5.27}$$

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση (5.27) είναι ***κυρτή*** για κάθε κύκλο $\tilde{E}$, κάτι το οποίο είναι πλήρως συμβατό με την αύξουσα μονοτονία της συνάρτησης περιόδου (5.26), σύμφωνα με όσα σχολιάστηκαν κατά την απόδειξη της σχέσης (5.4).

Προχωράμε τώρα στην αναζήτηση του κρίσιμου εκείνου τροχιακού κύκλου, $\tilde{E}_{min}$, μετά τον οποίο το δυναμικό σήμα που διαμορφώνεται σε ένα διάγραμμα O-C, εξαιτίας του μηχανισμού της απώλειας μάζας, μπορεί να είναι ανιχνεύσιμο. Εάν λοιπόν υποθέσουμε ότι αναπτύσσεται θόρυβος στάθμης ίσης με ε, ο ζητούμενος κύκλος θα προσδιοριστεί επιλύοντας την εξίσωση (5.7), αντικαθιστώντας πρώτα τη συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ από τη σχέση (5.27), δηλαδή:

$$-\frac{1}{w}\ln(1 - wP_e\tilde{E}) - P_e\tilde{E} = \varepsilon\,. \tag{5.28}$$

Η πιο πάνω εξίσωση είναι ισχυρά μη γραμμική και συνεπώς η αναλυτική της λύση καθίσταται αδύνατη. Η επίλυσή της πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια της αριθμητικής μεθόδου Newton-Raphson (π.χ. Ακρίβης & Δουγαλής 2002) η οποία παρέχεται από το πρόγραμμα `MATLAB 7.0.4` κάτω από τη χρήση κατάλληλων εντολών. Η αναγωγή του κρίσιμου τροχιακού κύκλου, $\tilde{E}_{min}$, πραγματοποιείται στη συνέχεια με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (5.25) στο αντίστοιχο ελάχιστο χρονικό διάστημα, $t(\tilde{E}_{min})\text{-}T_0$. Ως αντιπροσωπευτικό σύστημα του δείγματος των διπλών εκλειπτικών αστέρων που πρόκειται να μελετήσουμε θα αποτελεί ένα τυπικό μέλος της βραχυπερίοδης ομάδας των αστέρων τύπου RS CVn, δηλαδή ένα σύστημα περιόδου ίσης με 1 d και με μέλη αστέρες ηλιακών παραμέτρων ($M_1 = M_2 = M_\odot$, $R_1 = R_2 = R_\odot$ και $k_1^2 = k_2^2 = 0.1$). Τα αποτελέσματά μας για το υποθετικό αυτό σύστημα παρουσιάζονται στον Πίνακα Π.5.1 ο οποίος έχει προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης (5.28) υϊοθετώντας στάθμη θορύβου ίσης με $\varepsilon = 0.01$ d, έχοντας πρώτα υπολογίσει την παράμετρο w από τις σχέσεις (5.22) και (5.23) για διάφορους ρυθμούς απώλειας μάζας.

Αντίθετα, στα Σχήματα V.2a και V.2b έχουν απεικονιστεί τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα κάτω από την παρουσία τριών διαφορετικών σταθμών θορύβου ($\varepsilon = 0.001$ d, $\varepsilon = 0.01$ d και $\varepsilon = 0.03$ d). Η διαφορά των δύο σχημάτων έγκειται στη χρήση της παραμέτρου w η οποία προέκυψε από την εξίσωση στροφορμής των TH91 και KRL06, αντίστοιχα. Η πρώτη προσέγγιση αφορά το ρυθμό απώλειας μάζας με την υπόθεση ότι το ένα μόνο από τα μέλη του συστήματος είναι υπαίτιο για το μηχανισμό αυτό, τη στιγμή που η δεύτερη προσέγγιση εκτιμά τη συνολική απώλεια μάζας από το σύστημα, χωρίς κανένα επιπλέον περιορισμό. Επομένως, οι εκτιμήσεις μας σχετικά με την προσέγγιση των TH91 θα μπορούσαν να είναι επιτυχείς σε συστήματα με μέλη διαφορετικής εξελικτικής κατάστασης, όπως π.χ. σε ένα τυπικό σύστημα τύπου RS CVn το οποίο διαθέτει ένα ζεύγος νάνου και υπογίγαντα (Popper & Ulrich 1977). Αντίθετα, η προσέγγιση των KRL06 θα ήταν χρήσιμη σε συστήματα με μέλη συγκρίσιμων ρυθμών απώλειας μάζας και συνεπώς της ίδιας εξελικτικής κατάστασης, όπως π.χ. σε ένα τυπικό μέλος της βραχυπερίοδης ομάδας συστημάτων τύπου RS CVn το οποίο διαθέτει ένα ζεύγος νάνων αστέρων (Budding & Zeilik 1987).

Π.5.1. Ελάχιστα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα ανίχνευσης του μηχανισμού απώλειας μάζας.

TH91		**KRL06**	
$\dot{M}_{w,1}$ **[M_Θ/yr]**	***t-T₀* [yr]**	$\dot{M}_{w,i}$ **[M_Θ/yr]**	***t-T₀* [yr]**
-1.00×10^{-12}	4.68×10^{3}	-1.00×10^{-12}	3.31×10^{3}
-1.00×10^{-11}	1.48×10^{3}	-1.00×10^{-11}	1.05×10^{3}
-1.00×10^{-10}	4.68×10^{2}	-1.00×10^{-10}	3.31×10^{2}
-1.00×10^{-9}	1.48×10^{2}	-1.00×10^{-9}	$\mathbf{1.05\times10^{2}}$
-1.00×10^{-8}	$\mathbf{4.68\times10^{1}}$	-1.00×10^{-8}	$\mathbf{3.31\times10^{1}}$
-1.00×10^{-7}	$\mathbf{1.48\times10^{1}}$	-1.00×10^{-7}	$\mathbf{1.05\times10^{1}}$
-1.00×10^{-6}	$\mathbf{4.68\times10^{0}}$	-1.00×10^{-6}	$\mathbf{3.31\times10^{0}}$
-1.00×10^{-5}	$\mathbf{1.48\times10^{0}}$	-1.00×10^{-5}	$\mathbf{1.05\times10^{0}}$
-1.00×10^{-4}	$\mathbf{4.68\times10^{-1}}$	-1.00×10^{-4}	$\mathbf{3.31\times10^{-1}}$

Είναι σημαντικό επίσης να συμπληρώσουμε πως δεν πραγματοποιήθηκε καμία περαιτέρω μελέτη ώστε να εκτιμηθεί το απαιτούμενο χρονικό βάθος με διαθέσιμους χρόνους ελαχίστου σε σχέση με την περίοδο (αναφοράς) του συστήματος. Ο λόγος έγκειται στην ***ανεξαρτησία μεταξύ ελάχιστου χρονικού παράθυρου και τροχιακής περιόδου*** την οποία η σχέση (5.27) μας εξασφαλίζει, ιδιότητα την οποία πολύ δύσκολα θα προβλέπαμε διαισθητικά. Το γεγονός αυτό πηγάζει από τη μορφή εξάρτησης της συνθετικής συνάρτησης από την περίοδο αναφοράς η οποία συμμετέχει αποκλειστικά με το γινόμενο $P_e\tilde{E}$, όρος ο οποίος αυτούσιος εμφανίζεται στον μετασχηματισμό (5.25). Η ιδιαίτερα αξιόλογη αυτή διαπίστωση μας παρέχει το πλεονέκτημα ανίχνευσης του μηχανισμού απώλειας μάζας ακόμα και σε συστήματα με μεγάλη τροχιακή περίοδο, καθώς ο μόνος κρίσιμος παράγοντας φαίνεται να είναι ο ρυθμός με τον οποίο ο αστρικός άνεμος απομακρύνει υλικό από το σύστημα.

Στη συνέχεια, αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ με ένα πολυώνυμο Taylor γύρω από τον κύκλο $\tilde{E} = 0$, κρατώντας τους τρεις μη μηδενικούς μόνο πρώτους όρους:

$$\Delta T(\tilde{E}) = \frac{wP_e^2}{2}\tilde{E}^2 + \frac{w^2P_e^3}{3}\tilde{E}^3 + \frac{w^3P_e^4}{4}\tilde{E}^4 + O(\tilde{E}^5). \tag{5.29}$$

Το πολυώνυμο (5.29) αποκαλύπτει ότι η συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ περιγράφεται στη γενική της μορφή από ένα πολυώνυμο με βαθμό ανώτερου του δεύτερου και όχι αυστηρά από μια δευτεροβάθμια συνάρτηση. Εκείνο το οποίο πρέπει να εξεταστεί πλέον είναι η συνεισφορά των όρων μεγαλύτερου βαθμού όταν ο χρονικός ορίζοντας διευρύνεται. Η μελέτη αυτή θα πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια των υπολοίπων Lagrange (5.9) ώστε να εκτιμηθούν τα ελάχιστα χρονικά όρια μετά τα οποία οι όροι υψηλότερου βαθμού μπορούν να γίνουν ανιχνεύσιμοι σε ένα διάγραμμα O-C:

$$Rem_n(\tilde{E}) = \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{w^n P_e^{n+1}}{(1-wP_e\theta)^{n+1}} \tilde{E}^{n+1}. \tag{5.30}$$

Στη σχέση (5.30), ο παρονομαστής βρίσκεται πολύ κοντά στη μονάδα και συνεπώς μπορεί εύκολα να αγνοηθεί από τη συνέχεια της ανάλυσης. Αυτό συμβαίνει καθώς η ποσότητα w είναι τόσο μικρή ώστε να διατηρεί το γινόμενο $wP_e\theta$ πολύ κοντά στο μηδέν ακόμα και για εκατομμύρια τροχιακούς κύκλους, εφόσον το θ λαμβάνει τιμές της ίδιας τάξης μεγέθους με το $\tilde{E}$. Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι το υπόλοιπο Lagrange που αντιστοιχεί στο n-οστό όρο του αναπτύγματος (5.8) ταυτίζεται πλήρως με τον αμέσως επόμενο πολυωνυμικό (n+1)-όρο, δηλαδή:

$$Rem_n(\tilde{E}) \cong \frac{w^n P_e^{n+1}}{n+1} \tilde{E}^{n+1}. \tag{5.31}$$

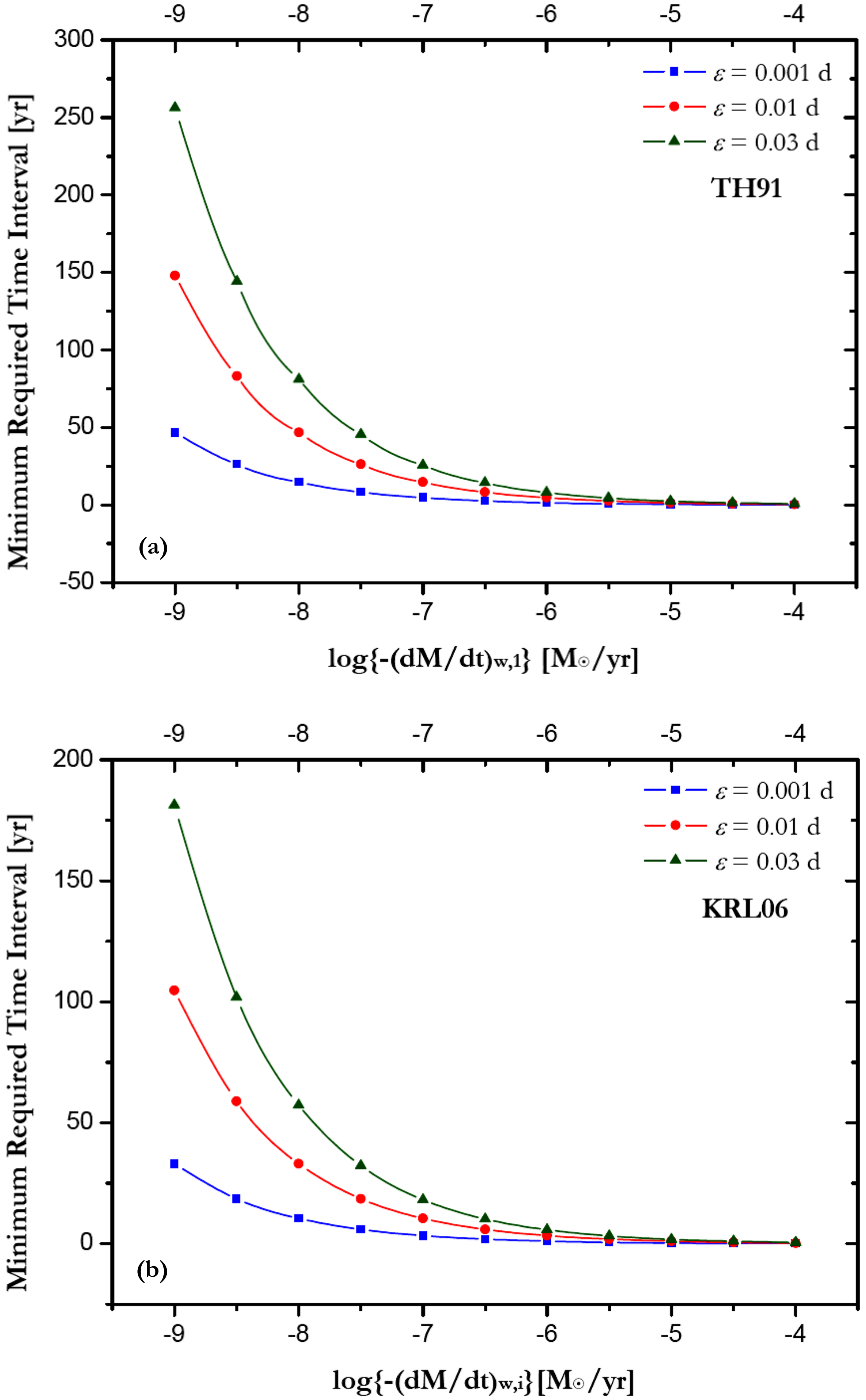
Εάν λοιπόν υποθέσουμε ότι η συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ αναπαρίσταται μέσω ενός πολυωνύμου Taylor, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι *ο πολυωνυμικός όρος βαθμού n+1 θα γίνει αντιληπτός μόλις το υπόλοιπο του αμέσως προηγούμενου n-οστού όρου* $Rem_n(\tilde{E})$ *υπερβεί την τιμή ε*. Ισοδύναμα, ***ένα πολυώνυμο βαθμού n είναι αρκετό για να περιγράψει τον εκάστοτε φυσικό μηχανισμό εφόσον το υπόλοιπό του,*** $\boldsymbol{Rem_n(\tilde{E})}$***, διατηρείται μικρότερο της τιμής ε***. Με βάση την απλή αυτή σκέψη είμαστε πλέον σε θέση να προσδιορίσουμε τον κρίσιμο τροχιακό κύκλο ώστε ο εκάστοτε όρος να καθίσταται μετρήσιμος:

$$\tilde{E}_{\min,n+1} \cong \left[\frac{(n+1)\varepsilon}{w^n P_e^{n+1}}\right]^{\frac{1}{n+1}}. \tag{5.32}$$

Ισοδύναμα, το αντίστοιχο απαιτούμενο χρονικό διάστημα μπορεί να υπολογιστεί εισάγοντας τον κρίσιμο τροχιακό κύκλο, $\tilde{E}_{min}$, ο οποίος προσδιορίζεται μέσω της σχέσης (5.32), στον μετασχηματισμό (5.25), δηλαδή:

$$\boxed{[t-T_0]_{\min,n+1} \cong -\frac{1}{w}\ln\left\{1-\left[w(n+1)\varepsilon\right]^{\frac{1}{n+1}}\right\}.} \tag{5.33}$$

Η σχέση (5.33) αποκαλύπτει ότι το ελάχιστο χρονικό διάστημα το οποίο είναι αναγκαίο ώστε ο εκάστοτε πολυωνυμικός όρος να καθίσταται διαχωρίσιμος από τον θόρυβο δεν εξαρτάται από την περίοδο αναφοράς, σε πλήρη συμφωνία με όσα διαπιστώθηκαν κατά τον σχολιασμό της συνθετικής συνάρτησης (5.27).



Σχήμα V.2. Ελάχιστα χρονικά διαστήματα τα οποία απαιτούνται ώστε ο μηχανισμός της απώλειας μάζας να καθίσταται ανιχνεύσιμος σε ένα διάγραμμα O-C για τρεις διαφορετικές στάθμες θορύβου και διάφορες τιμές ρυθμού απώλειας μάζας ακολουθώντας την προσέγγιση των TH91 (a) και εκείνη των KRL06 (b).

Με μια προσεκτική ματιά στα Σχήματα V.2a και V.2b παρατηρούμε ότι στα σημερινά διαγράμματα O-C, τα οποία διαθέτουν δεδομένα που οριακά ξεπερνούν τα 100 yr, ο μηχανισμός απώλειας μάζας μέσω αστρικών ανέμων μπορεί εύκολα να αποδοθεί σε ρυθμούς ίσους ή μεγαλύτερους των -10^{-10} M_{Θ}/yr εφόσον η στάθμη θορύβου είναι της τάξης των 0.001 d ή σε τουλάχιστον ίσους με -10^{-9} M_{Θ}/yr όταν η στάθμη θορύβου ανέρχεται στις 0.01 d και 0.03 d. Στον Πίνακα Π.5.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν με τη βοήθεια της σχέσης (5.33) ώστε να ελεγχθεί η επάρκεια του παραβολικού (n = 2) και κυβικού (n = 3) όρου στην περίπτωση ενός συστήματος 1+1 M_{Θ} και περιόδου ίσης με 1 d, του δοκιμαστικού μας δηλαδή συστήματος και τυπικού μέλους της βραχυπερίοδης ομάδας των αστέρων τύπου RS CVn. Υϊοθετώντας στάθμη θορύβου ίση με ε = 0.01 d, έχοντας πρώτα υπολογίσει την παράμετρο w από τις σχέσεις (5.22) και (5.23) για διάφορους ρυθμούς απώλειας μάζας, αποκαλύπτεται πως η συνεισφορά του κυβικού όρου στην τελική διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C θα μπορούσε να είναι σημαντική εφόσον ο ρυθμός απώλειας μάζας ξεπερνούσε τις -10^{-5} M_{Θ}/yr, ενώ η συμμετοχή του τεταρτοβάθμιου όρου αποδεικνύεται μη αμελητέα σε εξαιρετικά μόνο ενισχυμένους ανέμους με ρυθμούς της τάξης των -10^{-4} M_{Θ}/yr. Ισοδύναμα, διαπιστώνουμε ότι η παραβολική διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C εξαιτίας της απώλειας μάζας μπορεί να είναι αποδεκτή όσο ο αντίστοιχος ρυθμός είναι μικρότερος των -10^{-5} M_{Θ}/yr.

Π.5.2. Μέγιστα χρονικά διαστήματα επάρκειας παραβολικής και κυβικής αναπαράστασης.

TH91			KRL06		
$\dot{M}_{w,1}$ [M_{Θ}/yr]	2^{ος} *όρος* [yr]	3^{ος} *όρος* [yr]	$\dot{M}_{w,i}$ [M_{Θ}/yr]	2^{ος} *όρος* [yr]	3^{ος} *όρος* [yr]
-1.00×10^{-12}	2.36×10^{6}	5.15×10^{7}	-1.00×10^{-12}	1.49×10^{6}	3.06×10^{7}
-1.00×10^{-11}	5.08×10^{5}	9.15×10^{6}	-1.00×10^{-11}	3.20×10^{5}	5.44×10^{6}
-1.00×10^{-10}	1.10×10^{5}	1.63×10^{6}	-1.00×10^{-10}	6.90×10^{4}	9.68×10^{5}
-1.00×10^{-9}	2.36×10^{4}	2.90×10^{5}	-1.00×10^{-9}	1.49×10^{4}	1.72×10^{5}
-1.00×10^{-8}	5.08×10^{3}	5.15×10^{4}	-1.00×10^{-8}	3.20×10^{3}	3.06×10^{4}
-1.00×10^{-7}	1.10×10^{3}	9.16×10^{3}	-1.00×10^{-7}	6.90×10^{2}	5.45×10^{3}
-1.00×10^{-6}	2.36×10^{2}	1.63×10^{3}	-1.00×10^{-6}	1.49×10^{2}	9.70×10^{2}
-1.00×10^{-5}	$\mathbf{5.09\times10^{1}}$	2.90×10^{2}	-1.00×10^{-5}	$\mathbf{3.21\times10^{1}}$	1.73×10^{2}
-1.00×10^{-4}	$\mathbf{1.10\times10^{1}}$	$\mathbf{5.18\times10^{1}}$	-1.00×10^{-4}	$\mathbf{6.91\times10^{0}}$	$\mathbf{3.08\times10^{1}}$

Τέλος, αξίζει να επισημάνουμε ότι μεταξύ των προσεγγίσεων των TH91 και KRL06 παρατηρείται πράγματι μια μικρή διαφορά στον ελάχιστο απαιτούμενο χρόνο παρατηρήσεων με τη δεύτερη προσέγγιση να προβλέπει ελαφρώς μικρότερα χρονικά διαστήματα από την πρώτη. Κάτι τέτοιο δεν είναι πλασματικό, καθώς ισχύει $w_{\mathrm{KRL06}} > w_{\mathrm{TH91}}$, ιδιότητα η οποία οδηγεί στην ανισότητα $[t-T_0]_{\mathrm{min,KRL06}} < [t-T_0]_{\mathrm{min,TH91}}$. Αν και στην πράξη οι διαφορές δεν είναι σημαντικές, οφείλουμε να εμπιστευόμαστε περισσότερο τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την προσέγγιση των KRL06 καθώς, αφενός αποδίδει τη συνολική απώλεια μάζα συνεκτιμώντας τη συνεισφορά και των δύο μελών του συστήματος, αφετέρου αποτελεί την πλέον αξιόπιστη προσέγγιση για την ομάδα συστημάτων που εξετάζουμε από τη στιγμή που χαρακτηρίζονται από μέλη με ανταγωνιστικούς ρυθμούς απώλειας μάζας.

3.2. Μεταφορά Μάζας και Στροφορμής μέσω του Σημείου L1

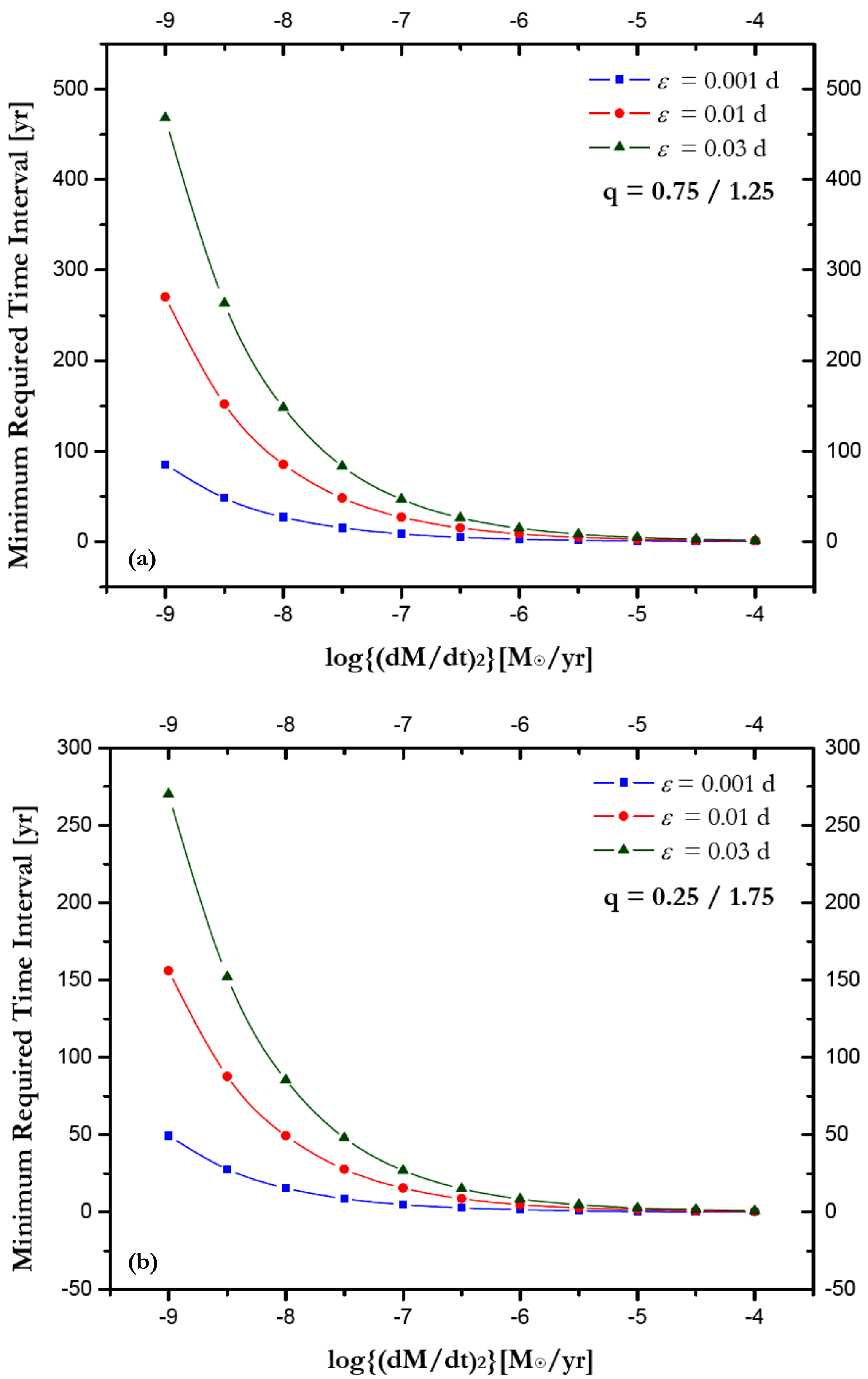
Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση συστημάτων με συντηρητική μεταφορά μάζας, δηλαδή συστήματα στα οποία λαμβάνει χώρα ανταλλαγή μάζας μεταξύ των μελών μέσω του σημείου L1. Αν και ο μηχανισμός αυτός δεν προκαλεί απώλεια μάζας, οδηγεί στη μεταβολή της κατανομής της συνολικής μάζας με αποτέλεσμα την αύξηση ή τη μείωση της τροχιακής περιόδου, πάντοτε κάτω από τη διατήρηση της συνολικής στροφορμής. Με βάση τις συνθήκες που ήδη παρουσιάστηκαν στην αρχή της τρίτης ενότητας, αλλά και με την προϋπόθεση μιας σταθερής και πολύ μικρής ροής υλικού μεταξύ των μελών, $(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)_2 > 0$, έτσι ώστε να μπορούμε να θεωρούμε τις απόλυτες παραμέτρους τους αμετάβλητες, οποιαδήποτε από τις δύο γενικευμένες σχέσεις στροφορμής που έχουμε υϊοθετήσει οδηγεί και πάλι στην απλή εξίσωση (5.21). Εκείνο το οποίο μόνο διαφοροποιείται αφορά την παράμετρο w η οποία έχει πλέον ανατικατασταθεί από την ακόλουθη ποσότητα:

$$w_{L1} = -\frac{3(1-q)}{M_2}\dot{M}_2 . \tag{5.34}$$

Η μαθηματική διαδικασία που οφείλουμε να ακολουθήσουμε με σκοπό την εύρεση των συναρτήσεων περιόδου και εκείνης που περιγράφει τις μεταβολές O-C είναι εντελώς όμοια με την αντίστοιχη πορεία που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 3.1. Επομένως, οι συναρτήσεις (5.24) και (5.26) εκφράζουν την περίοδο ως προς το χρόνο, $P(t)$, και τον τροχιακό κύκλο, $P(\tilde{E})$, αντίστοιχα, ενώ η συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ περιγράφεται από τη σχέση (5.27).

Μια σημαντική επισήμανση σχετικά με την παράμετρο w_{L1} μέσω της έκφρασης (5.34) αφορά το πρόσημό της. Έτσι, παρατηρούμε πως, όταν ο λόγος μαζών είναι μικρότερος από τη μονάδα και συνεπώς το μέλος με τη μικρότερη μάζα είναι και εκείνο το οποίο δέχεται το υλικό από το συνοδό του, η ποσότητα w_{L1} είναι αρνητική με άμεσο αποτέλεσμα τη μείωση της τροχιακής περιόδου (η συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ θα είναι προφανώς ***κοίλη*** για κάθε κύκλο $\tilde{E}$). Στην αντίθετη περίπτωση, ή ισοδύναμα όταν ο δότης αστέρας είναι το μέλος με τη μικρότερη μάζα, η ποσότητα w_{L1} είναι πλέον θετική και τελικά η περίοδος καθίσταται αύξουσα (η συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ θα είναι προφανώς ***κυρτή*** για κάθε κύκλο $\tilde{E}$).

Είναι προφανές ότι το ανάπτυγμα MacLaurin της συνάρτησης (5.27) θα είναι εκείνο το οποίο δίνεται από τη σχέση (5.29) και τελικά ο προσδιορισμός των απαιτούμενων χρονικών διαστημάτων ώστε η μεταφορά μάζας να είναι μετρήσιμη στα διαγράμματα O-C μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της σχέσης (5.28). Σχετικά με τον προσδιορισμό του ελάχιστου απαιτούμενου χρονικού παραθύρου στο οποίο θα πρέπει να υπάρχουν διαθέσιμες παρατηρήσεις, οφείλουμε και πάλι να υπογραμμίσουμε την απουσία της τροχιακής περιόδου από τη σχέση (5.33), κάτι το οποίο σημαίνει ότι οι μόνοι παράγοντες που επιδρούν σε αυτόν είναι ο ρυθμός μεταφοράς μάζας και η στάθμη θορύβου. Ας σημειωθεί ότι τα διαστήματα αυτά θα είναι όμοια είτε ισχύει $q < 1$ είτε $q > 1$, όσο η διαφορά $|1-q|$ διατηρείται σταθερή.



Σχήμα V.3. Ελάχιστα χρονικά διαστήματα τα οποία απαιτούνται ώστε ο μηχανισμός της μεταφοράς μάζας να καθίσταται ανιχνεύσιμος σε ένα διάγραμμα O-C για τρεις διαφορετικές στάθμες θορύβου και διάφορες τιμές ρυθμού μεταφοράς μάζας για συστήματα με λόγο μαζών q = 0.75 (a) και q = 0.25 (b).

Θεωρώντας τώρα ένα τυπικό ημιαποχωρισμένο σύστημα με περίοδο 1 d και δευτερεύοντα αστέρα ηλιακού τύπου ($M_2 = M_\odot$, $R_2 = R_\odot$ και $k_2^2 = 0.1$), έχουμε εκτιμήσει τα χρονικά διαστήματα που απαιτούνται ώστε η μεταφορά μάζας να καθίσταται ανιχνεύσιμη στο σύστημα αυτό, καθώς και τα μέγιστα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία η παραβολική και η κυβική αναπαράσταση μέσω του αναπτύγματος (5.29) αναμένεται επαρκής. Οι υπολογισμοί που πραγματοποιήθηκαν, επιλύοντας την εξίσωση (5.28) και υϊοθετώντας τη σχέση (5.33) αντίστοιχα, προέκυψαν θέτοντας ως στάθμη θορύβου την τιμή $\varepsilon = 0.01$ d. Τα αποτελέσματά μας παρουσιάζονται στους Πίνακες Π.5.3 και Π.5.4 αφού πρώτα προσδιορίσαμε την παράμετρο w_{L1} από τη σχέση (5.34) με λόγο μαζών $q = 0.75$ (ισοδύναμα και για $q = 1.25$) και $q = 0.25$ (ισοδύναμα και για $q = 1.75$) για διάφορους ρυθμούς μεταφοράς μάζας αντίστοιχα. Επίσης, όπως ακριβώς πράξαμε και στην περίπτωση του μηχανισμού απώλειας μάζας, εξετάσαμε την ευαισθησία των διαγραμμάτων O-C κάτω από τρεις διαφορετικές στάθμες θορύβους με αποτελέσματα τα οποία απεικονίζονται στα Σχήματα V.3a και V.3b.

Π.5.3. Ελάχιστα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα σε συστήματα με $q = 0.75$ και $q = 0.25$.

q = 0.75		**q = 0.25**	
$\dot{M}_2$ [$M_\odot$/yr]	**t-T_0 [yr]**	**$\dot{M}_2$ [$M_\odot$/yr]**	**t-T_0 [yr]**
1.00×10^{-12}	8.55×10^{3}	1.00×10^{-12}	4.93×10^{3}
1.00×10^{-11}	2.70×10^{3}	1.00×10^{-11}	1.56×10^{3}
1.00×10^{-10}	8.54×10^{2}	1.00×10^{-10}	4.93×10^{2}
1.00×10^{-9}	2.70×10^{2}	1.00×10^{-9}	1.56×10^{2}
1.00×10^{-8}	**8.55×10^{1}**	1.00×10^{-8}	**4.93×10^{1}**
1.00×10^{-7}	**2.70×10^{1}**	1.00×10^{-7}	**1.56×10^{1}**
1.00×10^{-6}	**8.55×10^{0}**	1.00×10^{-6}	**4.93×10^{0}**
1.00×10^{-5}	**2.70×10^{0}**	1.00×10^{-5}	**1.56×10^{0}**
1.00×10^{-4}	**8.55×10^{-1}**	1.00×10^{-4}	**4.93×10^{-1}**

Π.5.4. Μέγιστα χρονικά διαστήματα επάρκειας παραβολικής και κυβικής αναπαράστασης.

q = 0.75			**q = 0.25**		
$\dot{M}_2$ [$M_\odot$/yr]	**$2^{ος}$ *όρος* [yr]**	**$3^{ος}$ *όρος* [yr]**	**$\dot{M}_2$ [$M_\odot$/yr]**	**$2^{ος}$ *όρος* [yr]**	**$3^{ος}$ *όρος* [yr]**
1.00×10^{-12}	5.27×10^{6}	1.27×10^{8}	1.00×10^{-12}	2.53×10^{6}	5.57×10^{7}
1.00×10^{-11}	1.14×10^{6}	2.26×10^{7}	1.00×10^{-11}	5.45×10^{5}	9.90×10^{6}
1.00×10^{-10}	2.44×10^{5}	4.02×10^{6}	1.00×10^{-10}	1.18×10^{5}	1.76×10^{6}
1.00×10^{-9}	5.27×10^{4}	7.14×10^{5}	1.00×10^{-9}	2.53×10^{4}	3.13×10^{5}
1.00×10^{-8}	1.14×10^{4}	1.27×10^{5}	1.00×10^{-8}	5.45×10^{3}	5.57×10^{4}
1.00×10^{-7}	2.44×10^{3}	2.26×10^{4}	1.00×10^{-7}	1.18×10^{3}	9.91×10^{3}
1.00×10^{-6}	5.27×10^{2}	4.02×10^{3}	1.00×10^{-6}	2.53×10^{2}	1.76×10^{3}
1.00×10^{-5}	**1.14×10^{2}**	7.16×10^{2}	1.00×10^{-5}	**5.46×10^{1}**	3.14×10^{2}
1.00×10^{-4}	**2.45×10^{1}**	**1.28×10^{2}**	1.00×10^{-4}	**1.18×10^{1}**	**5.60×10^{1}**

Αναφορικά με τους Πίνακες Π.5.3 και Π.5.4, οφείλουμε να σημειώσουμε ότι δεν παρατηρούνται σημαντικές αποκλίσεις μεταξύ των αναμενόμενων χρόνων όταν αυτοί υπολογίζονται για συστήματα με μεγάλες διαφορές λόγου μαζών. Επομένως, ο κρίσιμος παράγοντας που καθορίζει την ευαισθησία των διαγραμμάτων O-C κάτω από την παρουσία του μηχανισμού μεταφοράς μάζας φαίνεται να είναι και πάλι ο ρυθμός με τον οποίο αυτή μεταβιβάζεται μεταξύ των μελών. Έτσι λοιπόν, τιμές τουλάχιστον μεγαλύτερες από 10^{-9} M_{Θ}/yr οδηγούν σε αρκετά ασφαλή εκτίμηση του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου με βάση τα δεδομένα ενός τυπικού διαγράμματος O-C που εκτείνονται σε βάθος λίγων εκατοντάδων ετών. Αντίθετα, όταν ο ρυθμός μεταφοράς μάζας είναι της τάξης του 10^{-5} M_{Θ}/yr, η παρουσία του κυβικού όρου γίνεται σημαντική και συνεπώς η παραβολική διαμόρφωση αλλοιώνεται. Η συνεισφορά του τεταρτοβάθμιου όρου στην τελική διαμόρφωση του διαγράμματος, τέλος, δεν μπορεί να αποκλειστεί σε ρυθμούς μεγαλύτερους των 10^{-4} M_{Θ}/yr.

Σχετικά τώρα με το βαθμό επίδρασης του θορύβου κατά την ανάλυση ενός διαγράμματος O-C, αξίζει να επισημάνουμε ότι η μείωση της αντίστοιχης στάθμης στις 0.001 d οδηγεί σε βελτίωση της ανιχνευτικής απόδοσης μέχρι και δύο τάξεις μεγέθους όσον αφορά το ρυθμό μεταφοράς μάζας (δηλαδή τιμές της τάξης των 10^{-11} M_{Θ}/yr φαίνονται μετρήσιμες), ενώ η αύξηση της στάθμης στις 0.03 d οδηγεί σε περιορισμό της ευαισθησίας κατά μια περίπου τάξη μεγέθους (δηλαδή απαιτούνται ρυθμοί της τάξης των 10^{-8} M_{Θ}/yr ώστε να είναι μετρήσιμες). Οι τιμές αυτές, όπως προέκυψαν ακολουθώντας την προσέγγιση που εισάγαμε στο παρόν κεφάλαιο, είτε όταν πρόκειται για απώλεια είτε για μεταφορά μάζας, είναι πλήρως συμβατές με τα αποτελέσματα αναλύσεων διαγραμμάτων O-C ενός πολύ μεγάλου πλήθους συστημάτων που μπορεί να βρει κανεί στη βιβλιογραφία και οι οποίες εκτιμούν ρυθμούς μεταξύ -10^{-9} και -10^{-7} M_{Θ}/yr (π.χ. Hall & Kreiner 1980, Hilditch 2001). Το γεγονός αυτό αξιολογείται ιδιαίτερα θετικό, καθώς εκφράζει σε σημαντικό βαθμό την ευστοχία της προτεινόμενης προσέγγισης.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, διαφαίνεται μια σαφής ομοιότητα μεταξύ των μηχανισμών απώλειας και μεταφοράς μάζας όσον αφορά τα ελάχιστα χρονικά διαστήματα τα οποία απαιτούνται ώστε οι διαδικασίες αυτές να καθίστανται ικανές να διαμορφώνουν τα διαγράμματα O-C όταν η ένταση των φαινομένων είναι η ίδια. Η διαπίστωση αυτή είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, καθώς καθίσταται σαφής η ανταγωνιστικότητα των δύο διαδικασιών, εφόσον τουλάχιστον λαμβάνουν ταυτόχρονα χώρα σε ένα διπλό σύστημα αστέρων. *Σε καμία λοιπόν περίπτωση δε θα πρέπει να αγνοείται η επίδραση πιθανής απώλειας μάζας στη διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C, ακόμα και αν η γεωμετρία Roche παραπέμπει σε μεταφορά μάζας.* Αντίθετα, ο συγκεκριμένος μηχανισμός θα πρέπει να αξιολογείται κατάλληλα και, όποτε αυτό κρίνεται απαραίτητο, θα πρέπει να συνεκτιμάται κατά την ανάλυση των διαγραμμάτων.

3.3. Απώλεια Στροφορμής μέσω Μαγνητικής Πέδησης

Όπως αναλυτικά παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μαγνητική πέδηση οδηγεί στην απώλεια στροφορμής η οποία έχει σαν άμεση συνέπεια τη μείωση της γωνιακής ταχύτητας στους μονούς αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων και ως έμμεση συνέπεια τη μείωση της τροχιακής περιόδου σε συστήματα τα οποία διαθέτουν αστέρες της κατηγορίας αυτής. Η αναλυτική περιγραφή του μηχανισμού της μαγνητικής πέδησης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη, γεγονός το οποίο δυσχεραίνει σε πολύ μεγάλο βαθμό τη μελέτη της τροχιακής περιόδου. Υϊοθετούμε λοιπόν την παραμετροποίηση που ακολουθεί ο Kawaler (1988) η οποία είναι συνεπής με το νόμο δύναμης (4.58), εκτιμώντας τους συντελεστές $C_{br,i}$ για κάθε i μέλος μέσα από τη σχέση (4.60) και επιλέγοντας ως σταθερές βαθμονόμησης, K_{kaw}, τιμές μέσα από τον Πίνακα Π.4.1 ανάλογα με το μοντέλο πέδησης που επιθυμούμε να εφαρμόσουμε. Θα υποθέτουμε επίσης ότι ο νόμος πέδησης διατηρείται με αμετάβλητες τις παραμέτρους a και K_{kaw} σε όλη τη διάρκεια μελέτης του συστήματος μέσω των διαθέσιμων χρόνων ελαχίστων, της τάξης δηλαδή μερικών μόλις εκατοντάδων ετών. Αγνοώντας την ιδιοπεριστροφή των μελών, καθώς και οποιαδήποτε μορφή απώλειας ή μεταφοράς μάζας, τόσο η γενικευμένη σχέση στροφορμής της μορφής (5.5) των TH91 όσο και της μορφής (5.6) των KRL06 αντίστοιχα, οδηγούν στη διαφορική εξίσωση (4.76) την οποία συναντήσαμε και αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο:

$$\dot{P} = -bP^{\frac{2}{3}-a}. \tag{5.35}$$

Η εξίσωση (5.35) προκύπτει αφού πρώτα έχουμε εισάγει την παράμετρο b η οποία, σύμφωνα με τις πιο πάνω προϋποθέσεις, θα θεωρείται σταθερή:

$$b = \frac{3(2\pi)^{a+\frac{1}{3}}(M_1+M_2)^{\frac{1}{3}}\sum_{i=1}^{2}\left(C_{br,i}k_i^2 M_i R_i^2\right)}{M_1 M_2 G^{\frac{2}{3}}} > 0. \tag{5.36}$$

Η επίλυση της εξίσωσης (5.35) πραγματοποιείται με τη χρήση των αρχικών συνθηκών $[t,P(t)] = [T_0,P_e]$ και οδηγεί σε μια συνάρτηση περιόδου της πιο κάτω μορφής:

$$P(t) = \left[P_e^{a+\frac{1}{3}} - b\left(a+\frac{1}{3}\right)(t-T_0)\right]^{\frac{1}{a+\frac{1}{3}}}. \tag{5.37}$$

Στη συνέχεια, η συνάρτηση (5.37) εισάγεται στην εξίσωση (5.3) η οποία επιλύεται με αρχικές συνθήκες $[\tilde{E},t] = [T_0,0]$ και οδηγεί στον ακόλουθο μετασχηματισμό $t = t(\tilde{E})$:

$$t - T_0 = \frac{1}{b\left(a+\frac{1}{3}\right)}\left\{P_e^{a+\frac{1}{3}} - \left[P_e^{a-\frac{2}{3}} - b\left(a-\frac{2}{3}\right)\tilde{E}\right]^{\frac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{2}{3}}}\right\}. \tag{5.38}$$

Τελικά, ο μετασχηματισμός (5.38) υϊοθετείται ώστε να απαλείψει τη χρονική μεταβλητή t από τη συνάρτηση περιόδου $P(t)$ και να την αντικαταστήσει από τον συνεχή τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$, οδηγώντας δηλαδή στη συνάρτηση $P(\tilde{E})$:

$$P(\tilde{E}) = \left[P_e^{a-\frac{2}{3}} - b\left(a - \frac{2}{3}\right)\tilde{E} \right]^{\frac{1}{a-\frac{2}{3}}} . \tag{5.39}$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η συνάρτηση περιόδου είναι ***φθίνουσα*** για κάθε κύκλο $\tilde{E}$, επιβεβαιώνοντας ότι η μαγνητική πέδηση οδηγεί σε μείωση πάντοτε της τροχιακής περιόδου. Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση (5.39) στη σχέση (5.4) και επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει κάτω από τις αρχικές συνθήκες $[\tilde{E}, \Delta T(\tilde{E})] = [0,0]$, προσδιορίζουμε πλέον αναλυτικά τη συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ η οποία διαμορφώνει το αντίστοιχο διάγραμμα O-C:

$$\boxed{\Delta T(\tilde{E}) = \frac{1}{b\left(a + \frac{1}{3}\right)} \left\{ P_e^{a+\frac{1}{3}} - \left[P_e^{a-\frac{2}{3}} - b\left(a - \frac{2}{3}\right)\tilde{E} \right]^{\frac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{2}{3}}} \right\} - P_e \tilde{E}} . \tag{5.40}$$

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση (5.40) είναι ***κοίλη*** για κάθε κύκλο $\tilde{E}$, κάτι το οποίο είναι πλήρως συμβατό με τη φθίνουσα μονοτονία της συνάρτηση περιόδου (5.39), σύμφωνα με όσα σχολιάστηκαν κατά την απόδειξη της σχέσης (5.4).

Προχωράμε τώρα στην αναζήτηση του κρίσιμου εκείνου τροχιακού κύκλου, $\tilde{E}_{min}$, μετά τον οποίο το δυναμικό σήμα που διαμορφώνεται σε ένα διάγραμμα O-C εξαιτίας του μηχανισμού της μαγνητικής πέδησης μπορεί να είναι ανιχνεύσιμο. Εάν λοιπόν υποθέσουμε ότι αναπτύσσεται θόρυβος στάθμης ίσης με ε, ο ζητούμενος κύκλος θα προσδιοριστεί επιλύοντας την εξίσωση (5.7), αντικαθιστώντας πρώτα τη συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ από τη σχέση (5.40), δηλαδή:

$$\frac{1}{b\left(a + \frac{1}{3}\right)} \left\{ P_e^{a+\frac{1}{3}} - \left[P_e^{a-\frac{2}{3}} - b\left(a - \frac{2}{3}\right)\tilde{E} \right]^{\frac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{2}{3}}} \right\} - P_e \tilde{E} = \varepsilon . \tag{5.41}$$

Η πιο πάνω εξίσωση είναι εξίσου ισχυρά μη γραμμική με την περίπτωση της απώλειας μάζας και συνεπώς η αναλυτική της λύση καθίσταται αδύνατη. Η επίλυσή της πραγματοποιήθηκε και πάλι με τη βοήθεια της αριθμητικής μεθόδου Newton-Raphson, ενώ η αναγωγή του κρίσιμου τροχιακού κύκλου, $\tilde{E}_{min}$, στο αντίστοιχο ελάχιστο χρονικό διάστημα, $t(\tilde{E}_{min})$-T_0, έλαβε χώρα στη συνέχεια με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (5.38). Ένα τυπικό μέλος της βραχυπερίοδης ομάδας των αστέρων τύπου RS CVn, δηλαδή ένα σύστημα περιόδου ίσης με 1 d και με μέλη αστέρες ηλιακών παραμέτρων ($M_1 = M_2 = M_\odot$, $R_1 = R_2 = R_\odot$ και $k_1^2 = k_2^2 = 0.1$) επιλέχθηκε και πάλι ώστε να εφαρμοστεί η σχετική διερεύνηση. Τα αποτελέσματά μας για το υποθετικό αυτό σύστημα παρουσιάζονται στον Πίνακα Π.5.5 ο οποίος έχει προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης (5.41), υϊοθετώντας στάθμη θορύβου ίση με ε = 0.01

d, έχοντας πρώτα υπολογίσει την παράμετρο *b* από τη σχέση (5.36) για διάφορες τιμές του *a*. Οι συντελεστές $C_{br,i}$ έχουν εκτιμηθεί μέσα από τη σχέση (4.60), επιλέγοντας τις σταθερές βαθμονόμησης K_{kaw} μέσα από τον Πίνακα Π.4.1, εφόσον ένα από τα μοντέλα των V82, VVM89 και A98 αποφασίζεται να υϊοθετηθεί προς εφαρμογή.

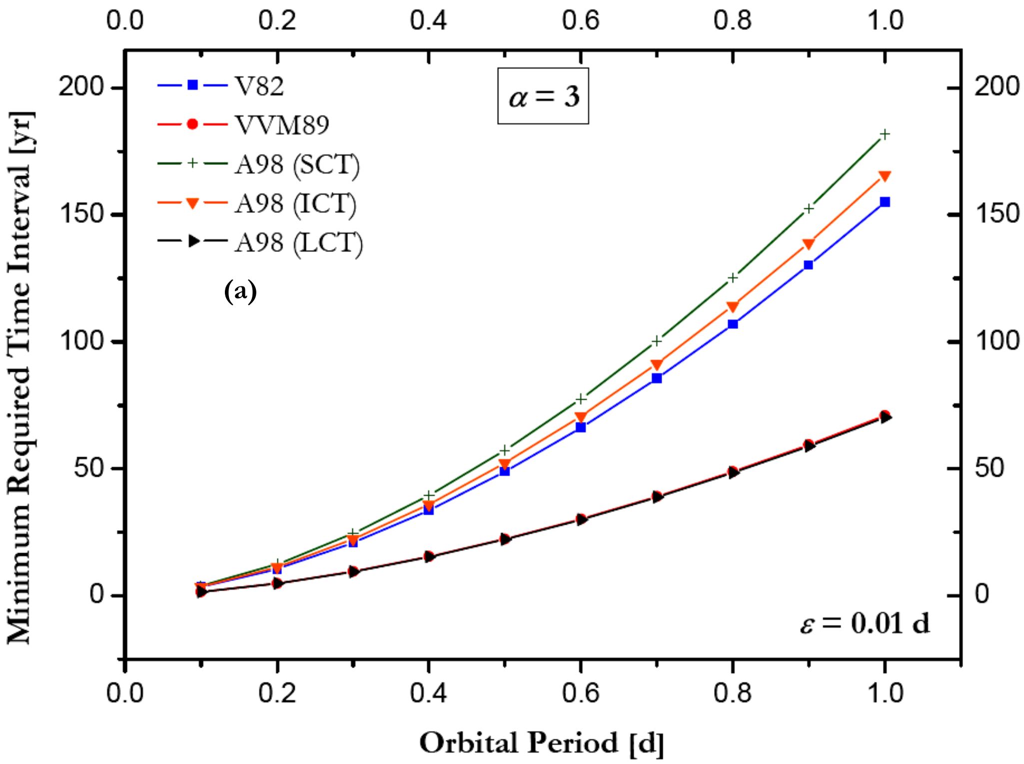
Π.5.5. Ελάχιστα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα ανίχνευσης του μηχανισμού μαγνητικής πέδησης.

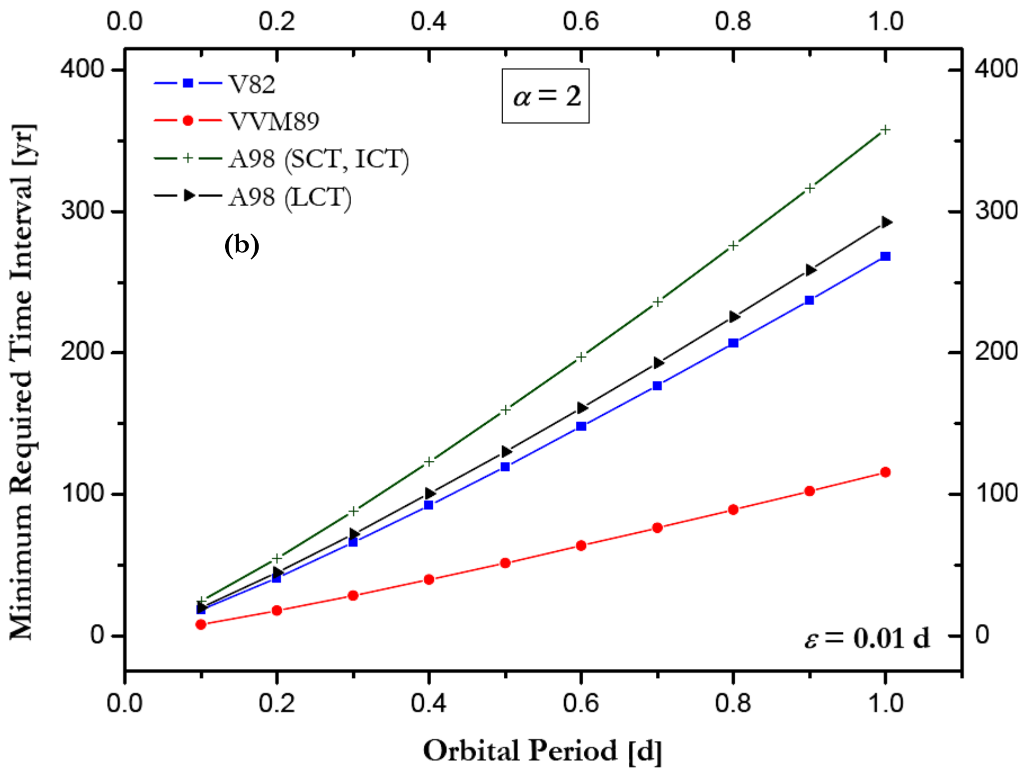
	t-T_0 [yr]				
a	**V82**	**VVM89**	**A98 (SCT)**	**A98 (ICT)**	**A98 (LCT)**
3.0	$1.55{\times}10^2$	$\mathbf{7.09{\times}10^1}$	$1.82{\times}10^2$	$1.66{\times}10^2$	$7.02{\times}10^1$
2.7	$1.83{\times}10^2$	$\mathbf{8.35{\times}10^1}$	-	-	-
2.5	$2.04{\times}10^2$	$\mathbf{9.25{\times}10^1}$	-	-	-
2.3	$2.28{\times}10^2$	$\mathbf{1.02{\times}10^2}$	-	-	-
2.0	$2.69{\times}10^2$	$\mathbf{1.16{\times}10^2}$	$3.58{\times}10^2$	$3.58{\times}10^2$	$2.92{\times}10^2$
1.7	$3.17{\times}10^2$	$\mathbf{1.28{\times}10^2}$	-	-	-
1.5	$3.53{\times}10^2$	$1.36{\times}10^2$	-	-	-
1.3	$3.94{\times}10^2$	$1.41{\times}10^2$	-	-	-
1.0	$4.65{\times}10^2$	$1.46{\times}10^2$	$3.00{\times}10^2$	$3.24{\times}10^2$	$5.92{\times}10^2$

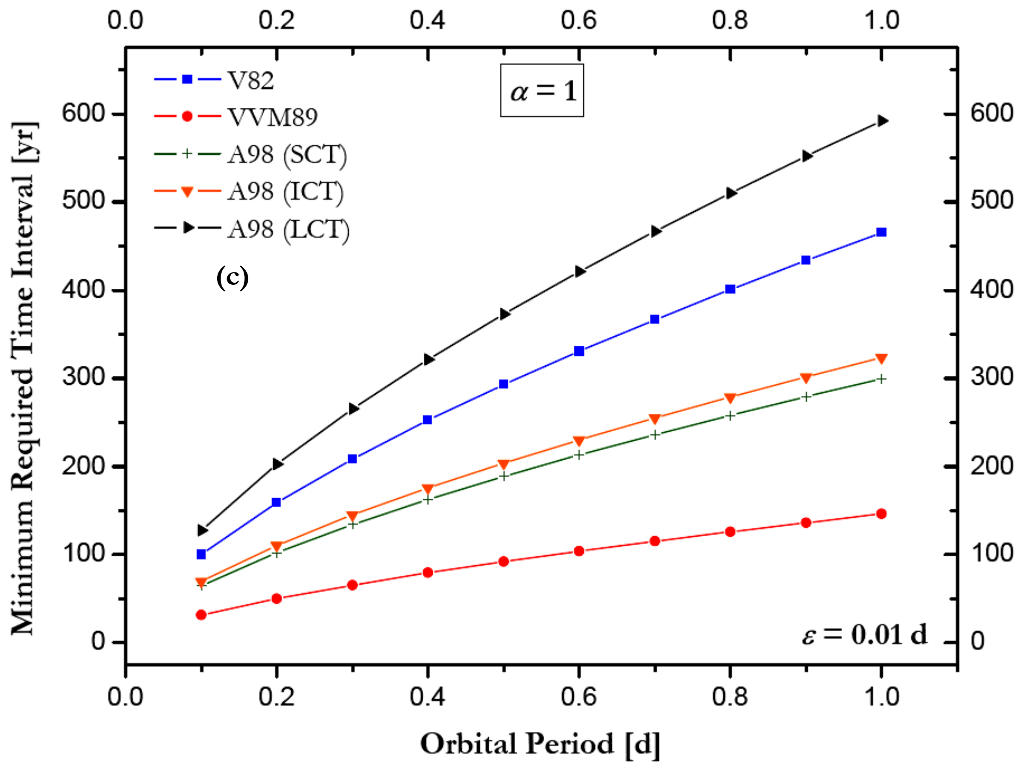
Σε αντίθεση με την περίπτωση της απώλειας μάζας, τα ελάχιστα χρονικά διαστήματα που απαιτούνται ώστε η μαγνητική πέδηση να διαμορφώνει ένα διάγραμμα O-C κάτω από την παρουσία θορύβου αποδεικνύονται ισχυρά εξαρτώμενα από την περίοδο, κάτι το οποίο εύκολα διαφαίνεται από τη σχέση (5.40). Ως εκ τούτου, προχωρήσαμε σε περαιτέρω διερεύνηση ώστε να εκτιμηθεί το απαιτούμενο χρονικό βάθος με διαθέσιμους χρόνους ελαχίστου σε σχέση με την περίοδο (αναφοράς) του συστήματος, αφήνοντας ελεύθερη την παράμετρο *a*. Μελετήθηκαν όλοι εκείνοι οι νόμοι πέδησης οι οποίοι παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο καφάλαιο και αφορούν τα μοντέλα των V82, VVM89 και A98 με το εύρος της περιόδου να κυμαίνεται μεταξύ 0.1 d και 1.0 d. Ειδικά για την περίπτωση του μοντέλου A98, ελέγθηκε η συμπεριφορά ενός διαγράμματος O-C κάτω από όλες τις προβλεπόμενες μορφές δομής του εσωτερικού ενός αστέρα ηλιακού τύπου που αντιστοιχούν στον σύντομο (SCT), ενδιάμεσο (IST) και βραδύ (LCT) χρόνο σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος. Όπως ήδη αναφέρθηκε, η διερεύνηση πραγματοποιήθηκε κάτω από την παραδοχή του αμετάβλητου των παραμέτρων *a* και K_{kaw}, κάτι το οποίο είναι εύλογα αποδεκτό για το στενό χρονικό εύρος παρατηρήσεων που χαρακτηρίζει τη συντριπτική πλειοψηφία των διπλών εκλειπτικών συτημάτων.

Τα αποτελέσματά μας αφορούν στάθμη θορύβου ίση με ε = 0.01 d και απεικονίζονται στα Σχήματα V.4a, V.4b και V.4c τα οποία αντιστοιχούν στις τιμές *a* = 3, 2 και 1 αντίστοιχα, υϊοθετώντας το γενικό νόμο πέδησης (4.58) και επιλέγοντας ως σταθερές βαθμονόμησης τις τιμές που προκύπτουν από τη σχέση (4.60) για όλα τα εξεταζόμενα μοντέλα. Από τα σχήματα αυτά, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι, ***κινούμενοι σε μικρότερες περιόδους, τα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα μειώνονται***, καθιστώντας με ασφάλεια ανιχνεύσιμο το μηχανισμό της μανγητικής πέδησης σε βραχυπερίοδα συστήματα με περίοδο μικρότερη των 0.5 d, όπως τα συστήματα επαφής και οι κατακλυσμικοί μεταβλητοί, ανεξάρτητα από το μοντέλο που υϊοθετούμε. Είναι προφανές ότι όσο ο εκθέτης a φθίνει, η ένταση του μηχανισμού περιορίζεται σημαντικά και τελικά τα ίχνη του δεν είναι πλέον ανιχνεύσιμα πλησιάζοντας το καθεστώς κορεσμού (a = 1). Τουλάχιστον 200 yr καταγραφής χρόνων ελαχίστων φαίνεται ότι είναι τότε αναγκαία ώστε το σήμα που παράγεται μέσω του μηχανισμού αυτού να ξεπερνά τη στάθμη θορύβου των 0.01 d. Στην πράξη λοιπόν, η μαγνητική πέδηση αποδεικύεται εξαιρετικά δύσκολα μετρήσιμη μέσω της ανάλυσης ενός διαγράμματος O-C, καθώς τα βραχυπερίοδα συστήματα βρίσκονται πολύ κοντά στο καθεστώς κορεσμού, εάν τουλάχιστον υϊοθετήσουμε ως τυπική τιμή εκείνη των 0.8 d περίπου που αντιστοιχεί στην κρίσιμη γωνιακή ταχύτητα των Ω_{sat} = 30 Ω_{Θ} την οποία προβλέπει το μοντέλο A98.

Παρά το γεγονός όμως αυτό, το μοντέλο των VVM89 αποτελεί εξαίρεση και προβλέπει χρονικό παράθυρο το οποίο δεν ξεπερνά κατά πολύ τα 100 yr, ανεξάρτητα από τις τιμές που λαμβάνει ο εκθέτης a. Θυμίζουμε ότι το μοντέλο των VVM89 είναι εκείνο που εκτιμά τις μεγαλύτερες τιμές για τη σταθερά βαθμονόμησης K_{kaw} εξαιτίας των υποθέσεων στις οποίες έχει στηριχθεί. Περιορίζοντας ακόμα περισσότερο τη στάθμη θορύβου στην κατώτερη δυνατή τιμή των ε = 0.001 d, η κατάσταση αντιστρέφεται πλήρως και τα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα δεν ξεπερνούν τα 200 yr σε καμία πλέον περίπτωση (Σχήμα V.5). Η διαπίστωση αυτή αφήνει *ανοιχτό το ενδεχόμενο* παρουσίας της μαγνητικής πέδησης στα διαγράμματα O-C διπλών εκλειπτικών συστημάτων τα οποία διαθέτουν μακροχρόνιες παρατηρήσεις υψηλής ακρίβειας, κυρίως δηλαδή φωτογραφικές και φωτοηλεκτρικές. Βραχυπερίοδα συστήματα με τα χαρακτηριστικά αυτά μπορεί κανείς να εντοπίσει σε αρκετά μεγάλο μάλιστα αριθμό στους καταλόγους και τις βάσεις δεδομένων που αναφέρθηκαν στο τρίτο κεφάλαιο, καθώς πολλά από αυτά είναι λαμπρά και παρατηρούνται σε ιδιαίτερα τακτική χρονική συχνότητα πριν από το 1900.







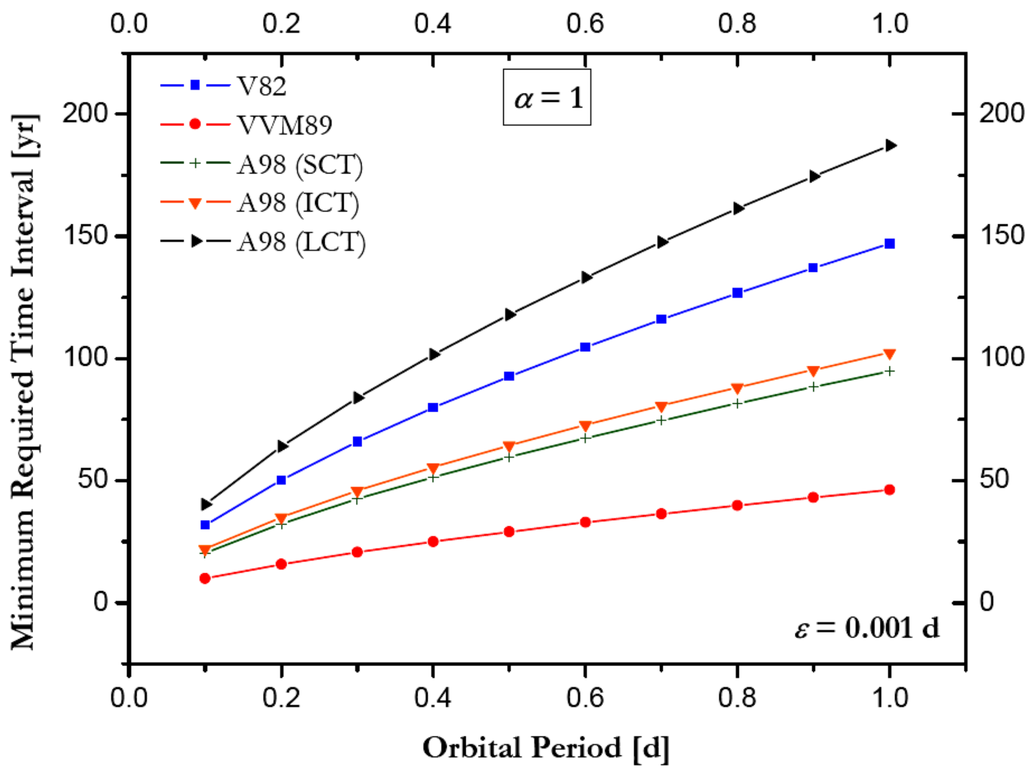
Σχήμα V.4. Ελάχιστα χρονικά διαστήματα τα οποία απαιτούνται ώστε ο μηχανισμός της μαγνητικής πέδησης να καθίσταται ανιχνεύσιμος σε ένα διάγραμμα O-C, στάθμης θορύβου ίσης με $\varepsilon = 0.01$ d, ως συνάρτηση της τροχιακής περιόδου. Εξετάζονται τα μοντέλα των V82, VVM89 και A98 επιλέγοντας τον εκθέτη του νόμου πέδησης να λαμβάνει την τιμή $a = 3$ (a), $a = 2$ (b) και $a = 1$ (c).

Αναζητώντας στη συνέχεια τη χρονική εμβέλεια που η παραβολική ή ακόμα και η κυβική αναπαράσταση είναι ικανές να περιγράψουν τη διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C προερχόμενη από το μηχανισμό της μαγνητικής πέδησης, αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ με ένα πολυώνυμο Taylor γύρω από τον κύκλο $\tilde{E}$ = 0, κρατώντας και πάλι ενδεικτικά τους τρεις μη μηδενικούς μόνο πρώτους όρους:

$$\Delta T(\tilde{E}) = -\frac{1}{2!} b P_e^{\frac{5}{3}-a} \tilde{E}^2 + \frac{1}{3!} b^2 \left(\frac{5}{3}-a\right) P_e^{\frac{7}{3}-2a} \tilde{E}^3 - \frac{1}{4!} b^3 \left(\frac{5}{3}-a\right)\left(\frac{7}{3}-2a\right) P_e^{\frac{9}{3}-3a} \tilde{E}^4 + O(\tilde{E}^5) \,. \quad (5.42)$$

Το πολυώνυμο (5.42) αποκαλύπτει ότι η συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$, όπως ακριβώς και στην περίπτωση του μηχανισμού της απώλειας μάζας, περιγράφεται στη γενική της μορφή από ένα πολυώνυμο με βαθμό ανώτερο του δεύτερου και όχι αυστηρά από μια δευτεροβάθμια συνάρτηση. Εξετάζεται πλέον η συνεισφορά των όρων μεγαλύτερου βαθμού όταν ο χρονικός ορίζοντας διευρύνεται, μελέτη η οποία πραγματοποιείται με τη βοήθεια των υπολοίπων Lagrange (5.9) ώστε να εκτιμηθούν τα ελάχιστα χρονικά όρια μετά τα οποία οι όροι υψηλότερου βαθμού μπορούν να γίνουν ανιχνεύσιμοι σε ένα διάγραμμα O-C:

$$\mathrm{Rem}_n(\tilde{E}) = \frac{(-b)^n}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n-1}\left[1-n\left(a-\frac{2}{3}\right)\right] \cdot \left[P_e^{a-\frac{2}{3}} - \left(a-\frac{2}{3}\right) b\theta\right]^{\frac{1-n\left(a-\frac{2}{3}\right)}{a-\frac{2}{3}}} \tilde{E}^{n+1} \,. \quad (5.43)$$



Σχήμα V.5. Ελάχιστα χρονικά διαστήματα τα οποία απαιτούνται ώστε ο μηχανισμός της μαγνητικής πέδησης να καθίσταται ανιχνεύσιμος σε ένα διάγραμμα O-C, στάθμης θορύβου ίσης με ε = 0.001 d, ως συνάρτηση της τροχιακής περιόδου. Εξετάζονται τα μοντέλα των V82, VVM89 και A98 επιλέγοντας τον εκθέτη του νόμου πέδησης να λαμβάνει αποκλειστικά την τιμή a = 1.

Στη σχέση (5.43), ο δεύτερος όρος της παράστασης η οποία βρίσκεται μέσα στη δεύτερη παρένθεση μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος και συνεπώς μπορεί εύκολα να αγνοηθεί από τη συνέχεια της ανάλυσης. Αυτό συμβαίνει καθώς η ποσότητα b είναι τόσο μικρή ώστε να διατηρεί το γινόμενο $b\theta$ πολύ κοντά στο μηδέν ακόμα και για εκατομμύρια τροχιακούς κύκλους, εφόσον το θ λαμβάνει τιμές της ίδιας τάξης μεγέθους με το $\tilde{E}$. Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι το υπόλοιπο Lagrange που αντιστοιχεί στο n-οστό όρο του αναπτύγματος (5.8) ταυτίζεται πλήρως με τον αμέσως επόμενο πολυωνυμικό (n+1)-όρο, δηλαδή:

$$Rem_n(\tilde{E}) \cong \frac{(-b)^n}{(n+1)!} P_e^{1-n\left(a-\frac{2}{3}\right)} \prod_{i=0}^{n-1}\left[1-n\left(a-\frac{2}{3}\right)\right]\tilde{E}^{n+1}. \tag{5.44}$$

Σύμφωνα με όσα αναλυτικά αναφέρθηκαν στην περίπτωση του μηχανισμού της απώλειας μάζας, θα υποθέτουμε ότι ο πολυωνυμικός όρος βαθμού n+1 του αναπτύγματος Taylor καθίσταται ανιχνεύσιμος μόλις το υπόλοιπο του αμέσως προηγούμενου n-οστού όρου, $\mathrm{Rem}_n(\tilde{E})$, υπερβεί τη στάθμη θορύβου ε. Ο κρίσιμος τότε τροχιακός κύκλος, ώστε ο εκάστοτε όρος να καθίσταται μετρήσιμος, θα προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$E_{\min,n+1} \cong \left[\frac{(n+1)!\varepsilon}{(-b)^n P_e^{1-n\left(a-\frac{2}{3}\right)} \prod_{i=0}^{n-1}\left[1-n\left(a-\frac{2}{3}\right)\right]}\right]^{\frac{1}{n+1}}. \tag{5.45}$$

Ισοδύναμα, το αντίστοιχο απαιτούμενο χρονικό διάστημα μπορεί να υπολογιστεί εισάγοντας τον κρίσιμο τροχιακό κύκλο, $\tilde{E}_{min}$, ο οποίος προσδιορίζεται μέσω της σχέσης (5.45), στον μετασχηματισμό (5.38), δηλαδή:

$$\boxed{[t-T_0]_{\min,n+1} = \frac{1}{b\left(a+\frac{1}{3}\right)}\left\{P_e^{a+\frac{1}{3}} - \left[P_e^{a-\frac{2}{3}} - b\left(a-\frac{2}{3}\right)\tilde{E}_{\min,n+1}\right]^{\frac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{2}{3}}}\right\}}. \tag{5.46}$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (5.45) και (5.46) αποκαλύπτει ότι το ελάχιστο χρονικό διάστημα το οποίο είναι αναγκαίο ώστε ο εκάστοτε πολυωνυμικός όρος να καθίσταται διαχωρίσιμος από το θόρυβο εξαρτάται ισχυρά από την περίοδο αναφοράς, σε πλήρη συμφωνία με όσα διαπιστώθηκαν κατά τον σχολιασμό της συνθετικής συνάρτησης (5.40). Στον Πίνακα Π.5.6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν με τη βοήθεια της σχέσης (5.46) ώστε να ελεγχθεί η επάρκεια του παραβολικού (n = 2) όρου στην περίπτωση ενός συστήματος 1+1 $M_{\odot}$ και περιόδου ίσης με 1 d, του δοκιμαστικού μας δηλαδή συστήματος και τυπικού μέλους της βραχυπερίοδης ομάδας των αστέρων τύπου RS CVn. Η αναζήτηση της μέγιστης χρονικής επάρκειας που αφορά την κυβική αναπαράσταση κρίθηκε περιττή καθώς ο μηχανισμός της μαγνητικής πέδησης αποδείχθηκε ασθενής σε τέτοιο βαθμό ώστε η συνεισφορά όρων με βαθμό μεγαλύτερο του δεύτερου να θεωρείται εκ των προτέρων αμελητέα. Υϊοθετώντας στάθμη θορύβου ίση με ε = 0.01 d, έχοντας πρώτα υπολογίσει την παράμετρο b από τη σχέση (5.36) για διάφορες τιμές του εκθέτη a, αποκαλύπτεται πως η συνεισφορά του κυβικού όρου στην τελική διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C είναι αμελητέα, καθώς η παραβολική αναπαράσταση φαίνεται να επαρκεί για τουλάχιστον μερικές δεκάδες χιλιάδες χρόνια ακόμα και στην πιο αισιόδοξη περίπτωση που ο εκθέτης λαμβάνει την τιμή a = 3.

Π.5.6. Μέγιστα χρονικά διαστήματα επάρκειας παραβολικής αναπαράστασης.

	t-T_0 [yr]				
a	**V82**	**VVM89**	**A98 (SCT)**	**A98 (ICT)**	**A98 (LCT)**
3.0	2.87×10^4	1.01×10^4	3.55×10^4	3.14×10^4	1.00×10^4
2.7	3.90×10^4	1.37×10^4	-	-	-
2.5	4.85×10^4	1.69×10^4	-	-	-
2.3	6.15×10^4	2.10×10^4	-	-	-
2.0	9.50×10^4	3.08×10^4	1.39×10^5	1.39×10^5	1.06×10^5
1.7	2.55×10^5	7.63×10^4	-	-	-
1.5	1.72×10^5	4.80×10^4	-	-	-
1.3	1.54×10^5	3.90×10^4	-	-	-
1.0	1.57×10^5	3.35×10^4	8.71×10^4	9.66×10^4	2.16×10^5

Όπως έχει ήδη σχολιαστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι τιμές που προκύπτουν σύμφωνα με τη μελέτη της A98 αποτελούν το σημείο αναφοράς για τα δύο υπόλοιπα μοντέλα των V82 και VVM89 που εξετάστηκαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή. Ο λόγος έγκειται στην ιδιαίτερα αξιόπιστη θεωρητική προσέγγιση που ακολούθησε η A98 κατά την οποία αξιολογήθηκαν αποτελέσματα τόσο σχετικά με την παρουσία πρωτοαστρικού δίσκου και το βαθμό επίδρασης του φαινομένου σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος, όσο και δεδομένα τα οποία έχουν προκύψει από τις πλέον πρόσφατες παρατηρησιακές μελέτες και αφορούν το καθεστώς ταχυτήτων πληθώρας ανοιχτών αστρικών σμηνών. Σε κάθε πάντως περίπτωση, το μοντέλο V82 αποδεικνύεται ως η βέλτιστη επιλογή όταν επιθυμείται να εξεταστούν τιμές που εκτείνονται σε όλο το εύρος τιμών που μπορεί να λάβει ο εκθέτης a, δηλαδή στο διάστημα [1,3]. Η συμπεριφορά του μηχανισμού πέδησης κάτω από το συγκεκριμένο μοντέλο φαίνεται να αποτελεί έναν μέσο εκφραστή των επιπτώσεων που έχουν από κοινού οι τρεις διαφορετικές εκφάνσεις του μοντέλου της A98, δηλαδή οι τρεις διαφορετικές μορφές σύζευξης πυρήνα-περιβλήματος.

Το μοντέλο των VVM89 αποτελεί εκφραστή της πλεόν αισιόδοξης πλευράς ως προς την ανιχνευσιμότητα του μηχανισμού της μαγνητικής πέδησης κάτω από την προσέγγιση που προτείναμε και ακολουθήσαμε στην παρούσα διατριβή. Οι σταθερές βαθμονόμησης K_{kaw} εκτιμώνται αρκετά μεγαλύτερες σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα μοντέλα και, ως εκ τούτου, τα προβλεπόμενα χρονικά διαστήματα που απαιτούνται ώστε η μαγνητική πέδηση να καθίσταται μετρήσιμη μειώνονται σε τέτοιο βαθμό ώστε παρατηρήσεις της τάξης των δεκάδων ετών να αποδεικνύονται σχεδόν πάντοτε επαρκείς. Αποσκοπώντας σε μια λογική εξήγηση των παρατηρούμενων αποκλίσεων, αρκεί να υπενθυμίσουμε ότι η μελέτη των VVM89 στηρίζεται σε δεδομένα που αφορούν την ισημερινή ταχύτητα περιστροφής αστέρων ηλιακού τύπου, μέλη του σμήνους *α* Per και των Πλειάδων, τα οποία διαφέρουν ηλικιακά κατά 50 Myr περίπου. Είναι λοιπόν προφανές ότι μια σημαντική μείωση των παρατηρούμενων ταχυτήτων κατά τη διάρκεια ενός ιδιαίτερα περιορισμένου χρονικού διαστήματος, όπως είναι εκείνο των 50 Myr, θα οδηγούσε στην υπερεκτίμηση των σταθερών βαθμονόμησης, ενδεχόμενο ιδιαίτερα πιθανό, καθώς οι VVM89 απόδωσαν την τιμή των 200 km/sec στο σμήνος *α* Per και την τιμή των 10 km/sec στο σμήνος των Πλειάδων.

Εκείνο το οποίο σήμερα όμως γνωρίζουμε σχετικά με το καθεστώς ταχυτήτων αφορά την κατανομή δύο κορυφών που παρατηρείται στα ανοιχτά σμήνη της ηλικίας αυτής και η οποία προβλέπει την τιμή των 10 km/sec αποκλειστικά και μόνο για τους βραδείς περιστροφείς, όταν η τιμή των 50 km/sec είναι εκείνη που εκτιμάται για τους ταχείς περιστροφείς για την περίπτωση του σμήνους των Πλειάδων (π.χ. Queloz et al. 1998). Οι VVM89, υϊοθετώντας την τιμή των 200 km/sec για το σμήνος *α* Per, σιωπηλά αναφέρονται στην ομάδα των ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων, ενώ η τιμή των 10 km/sec για το σμήνος των Πλειάδων αφορά την ομάδα των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων, κάτι το οποίο δεν καθίσταται όμως σαφές στη μελέτη τους και ουσιαστικά οδηγεί στις παραπλανητικές αποκλίσεις σε σχέση με το μοντέλο της A98.

Παρά το γεγονός αυτό, η προσέγγιση των VVM89 δε θα πρέπει να παραβλέπεται, καθώς επικεντρώνεται σε μια ιδιαίτερα στενή χρονικά περιοχή της εξέλιξης των αστέρων κατά την οποία με ασφάλεια μπορούμε να επιβάλλουμε νόμους πέδησης με σταθερές παραμέτρους. Αντίθετα, το μοντέλο V82 υποθέτει ότι ένας και μόνο νόμος πέδησης έχει ισχύ σε όλη τη διάρκεια της πορείας ενός αστέρα προς την κύρια ακολουθία, κάτι το οποίο περιορίζει την αξιοπιστία του. Οι επιτυχείς προβλέψεις του σε σχέση με το μοντέλο της A98 οφείλονται στην εύστοχη υϊοθέτηση της τιμής των 20 km/sec ως μέση ταχύτητα για το σμήνος των Πλειάδων, τιμή η οποία μπορεί εύκολα να προκύψει από κατάλληλη στάθμιση των 10 και 50 km/sec για τους βραδείς και ταχείς περιστροφείς αντίστοιχα.

Ας σημειωθεί, τέλος, ότι οι εκτιμήσεις που διαθέτουμε σχετικά με τις εμπλεκόμενες παραμέτρους για τον εκάστοτε νόμο πέδησης έχουν προκύψει αποκλειστικά από τη μελέτη μεμονωμένων αστέρων οι οποίοι δεν ανήκουν σε διπλά συστήματα. Μια ενδεχόμενη αποσύζευξη πυρήνα-περιβλήματος θα είχε σημαντικές συνέπειες στην τροχιακή εξέλιξη ενός στενού διπλού συστήματος αστέρων, καθώς ο συγχρονισμός που επέρχεται μέσω της παλιρροϊκής αλληλεπίδρασης των δύο μελών, επιβάλλεται τελικά στο περίβλημα και όχι στο σύνολο του αστέρα. Ο πυρήνας θα περιστρέφεται τότε με μικρότερη γωνιακή ταχύτητα από εκείνη του περιβλήματος με άμεσο αποτέλεσμα τη μεταφορά στροφορμής από το περίβλημα προς τον πυρήνα. Το γεγονός αυτό ενισχύει ακόμα περισσότερο την απώλεια στροφορμής, καθώς σημαντικό μέρος της στροφορμής δεν απομακρύνεται αποκλειστικά πλέον προς τον μεσοαστρικό χώρο αλλά διοχετεύεται προς το εσωτερικό του αστέρα.

3.4. Απώλεια Στροφορμής μέσω Βαρυτικής Ακτινοβολίας

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση συστημάτων των οποίων η τροχιακή εξέλιξη διαμορφώνεται κάτω από την επίδραση του μηχανισμού της βαρυτικής ακτινοβολίας η οποία, όπως άλλωστε συμβαίνει και με τη μαγνητική πέδηση, οδηγεί στην απώλεια στροφορμής από το σύστημα. Θυμίζουμε ότι ο ρυθμός απώλειας στροφορμής δίνεται από τη σχέση (4.77) και εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τη μάζα του συστήματος. Ο μηχανισμός αυτός αποδεικνύεται εξαιρετικά ασθενής λόγω της παρουσίας της πέμπτης δύναμης της ταχύτητας του φωτός, *c*, η οποία εμφανίζεται στον αντίστοιχο παρονομαστή και για το λόγο αυτό η διερεύνηση της ανιχνευσιμότητας των συνεπειών του μέσα από την ανάλυση ενός διαγράμματος O-C αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Αγνοώντας και πάλι την ιδιοπεριστροφή των μελών, καθώς και οποιαδήποτε μορφή απώλειας ή μεταφοράς μάζας και στροφορμής, τόσο η γενικευμένη σχέση στροφορμής της μορφής (5.5) των TH91 όσο και της μορφής (5.6) των KRL06 αντίστοιχα, οδηγούν στη διαφορική εξίσωση (4.78) την οποία συναντήσαμε και αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο:

$$\dot{P} = -gP^{-\frac{5}{3}}. \tag{5.47}$$

Η εξίσωση (5.47) προκύπτει αφού πρώτα έχουμε εισάγει την παράμετρο g η οποία, σύμφωνα με τις πιο πάνω προϋποθέσεις, θα θεωρείται σταθερή:

$$g = \frac{96(2\pi)^{8/3} G^{5/3} M_1 M_2}{5c^5 \left(M_1 + M_2\right)^{1/3}} > 0. \tag{5.48}$$

Η επίλυση της εξίσωσης (5.48) πραγματοποιείται με τη χρήση των αρχικών συνθηκών $[t,P(t)]$ = $[T_0,P_e]$ και οδηγεί σε μια συνάρτηση περιόδου της πιο κάτω μορφής:

$$P(t) = \left[P_e^{\frac{8}{3}} - \frac{8}{3} g(t - T_0) \right]^{\frac{3}{8}}. \tag{5.49}$$

Στη συνέχεια, η συνάρτηση (5.49) εισάγεται στην εξίσωση (5.3) η οποία επιλύεται με αρχικές συνθήκες $[\tilde{E},t]$ = $[T_0,0]$ και οδηγεί στον ακόλουθο μετασχηματισμό t = $t(\tilde{E})$:

$$t - T_0 = \frac{3}{8g} \left[P_e^{\frac{8}{3}} - \left(P_e^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{3} g\tilde{E} \right)^{\frac{8}{5}} \right]. \tag{5.50}$$

Τελικά, ο μετασχηματισμός (5.50) υϊοθετείται ώστε να απαλείψει τη χρονική μεταβλητή t από τη συνάρτηση περιόδου $P(t)$ και να την αντικαταστήσει από τον συνεχή τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$, οδηγώντας δηλαδή στη συνάρτηση $P(\tilde{E})$:

$$P(\tilde{E}) = \left(P_e^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{3} g\tilde{E} \right)^{\frac{3}{5}}. \tag{5.51}$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η συνάρτηση περιόδου είναι ***φθίνουσα*** για κάθε κύκλο $\tilde{E}$, επιβεβαιώνοντας ότι η βαρυτική ακτινοβολία οδηγεί σε μείωση πάντοτε της τροχιακής περιόδου. Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση (5.51) στη σχέση (5.4) και επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει κάτω από τις αρχικές συνθήκες $[\tilde{E}, \Delta T(\tilde{E})] = [0,0]$, προσδιορίζουμε πλέον αναλυτικά τη συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ η οποία διαμορφώνει το αντίστοιχο διάγραμμα O-C:

$$\boxed{\Delta T(\tilde{E}) = \frac{3}{8g} \left[P_e^{\frac{8}{3}} - \left(P_e^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{3} g\tilde{E} \right)^{\frac{8}{5}} \right] - P_e \tilde{E}}. \tag{5.52}$$

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση (5.52) είναι ***κοίλη*** για κάθε κύκλο $\tilde{E}$, κάτι το οποίο είναι πλήρως συμβατό με τη φθίνουσα μονοτονία της συνάρτηση περιόδου (5.51), σύμφωνα με όσα σχολιάστηκαν κατά την απόδειξη της σχέσης (5.4).

Προχωράμε τώρα στην αναζήτηση του κρίσιμου εκείνου τροχιακού κύκλου, $\tilde{E}_{min}$, μετά τον οποίο το δυναμικό σήμα που διαμορφώνεται σε ένα διάγραμμα O-C εξαιτίας του μηχανισμού της βαρυτικής ακτινοβολίας μπορεί να είναι ανιχνεύσιμο. Εάν λοιπόν υποθέσουμε ότι αναπτύσσεται θόρυβος στάθμης ίσης με ε, ο ζητούμενος κύκλος θα προσδιοριστεί επιλύοντας την εξίσωση (5.7), αντικαθιστώντας πρώτα τη συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ από τη σχέση (5.52), δηλαδή:

$$\frac{3}{8g} \left[P_e^{\frac{8}{3}} - \left(P_e^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{3} g\tilde{E} \right)^{\frac{8}{5}} \right] - P_e \tilde{E} = \varepsilon . \tag{5.53}$$

Η πιο πάνω εξίσωση είναι εξίσου ισχυρά μη γραμμική τόσο με την περίπτωση της απώλειας μάζας όσο και με εκίνη της μαγνητικής πέδησης και συνεπώς η αναλυτική της λύση καθίσταται αδύνατη. Η επίλυσή της πραγματοποιήθηκε και πάλι με τη βοήθεια της αριθμητικής μεθόδου Newton-Raphson, ενώ η αναγωγή του κρίσιμου τροχιακού κύκλου, $\tilde{E}_{min}$, στο αντίστοιχο ελάχιστο χρονικό διάστημα, $t(\tilde{E}_{min})$-T_0, έλαβε χώρα στη συνέχεια με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (5.50). Ένα τυπικό μέλος της βραχυπερίοδης ομάδας των αστέρων τύπου RS CVn, δηλαδή ένα σύστημα περιόδου ίσης με 1 d και με μέλη αστέρες ηλιακών παραμέτρων ($M_1 = M_2 = M_\Theta$, $R_1 = R_2 = R_\Theta$), επιλέχθηκε πρώτα ώστε να εφαρμοστεί η σχετική διερεύνηση, καθώς και δύο ακόμα αρκετά πιο μαζικά συστήματα (M_1 = M_2 = 5 M_Θ, R_1 = R_2 = 3 R_Θ και M_1 = M_2 = 8 M_Θ, R_1 = R_2 = 5 R_Θ), διατηρώντας την ίδια περίοδο. Τα αποτελέσματά μας για τα υποθετικά αυτά συστήματα παρουσιάζονται στον Πίνακα Π.5.7 ο οποίος έχει προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης (5.53) υϊοθετώντας στάθμες θορύβου ίσες με ε = 0.01 και 0.001 d, έχοντας πρώτα υπολογίσει την παράμετρο g από τη σχέση (5.48). Λόγοι πληρότητας μας οδήγησαν στην αναζήτηση των ενδεχόμενων επιπτώσεων που θα μπορούσε να έχει η δράση της βαρυτικής ακτινοβολίας σε τέσσερα υπαρκτά διπλά συστήματα τα οποία είτε χαρακτηρίζονται από πολύ μικρή περίοδο είτε από πολύ μεγάλη μάζα. Δυστυχώς, καμία από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις δεν αναμένεται να ανιχνευθεί στα πλαίσια της ανάλυσης των διαγραμμάτων O-C χρονικής έκτασης της τάξης των 100 yr ακόμα και αν η στάθμη θορύβου μειώθηκε στην ελάχιστη δυνατή.

Π.5.7. Ελάχιστα και μέγιστα χρονικά διαστήματα επάρκειας παραβολικής αναπαράστασης.

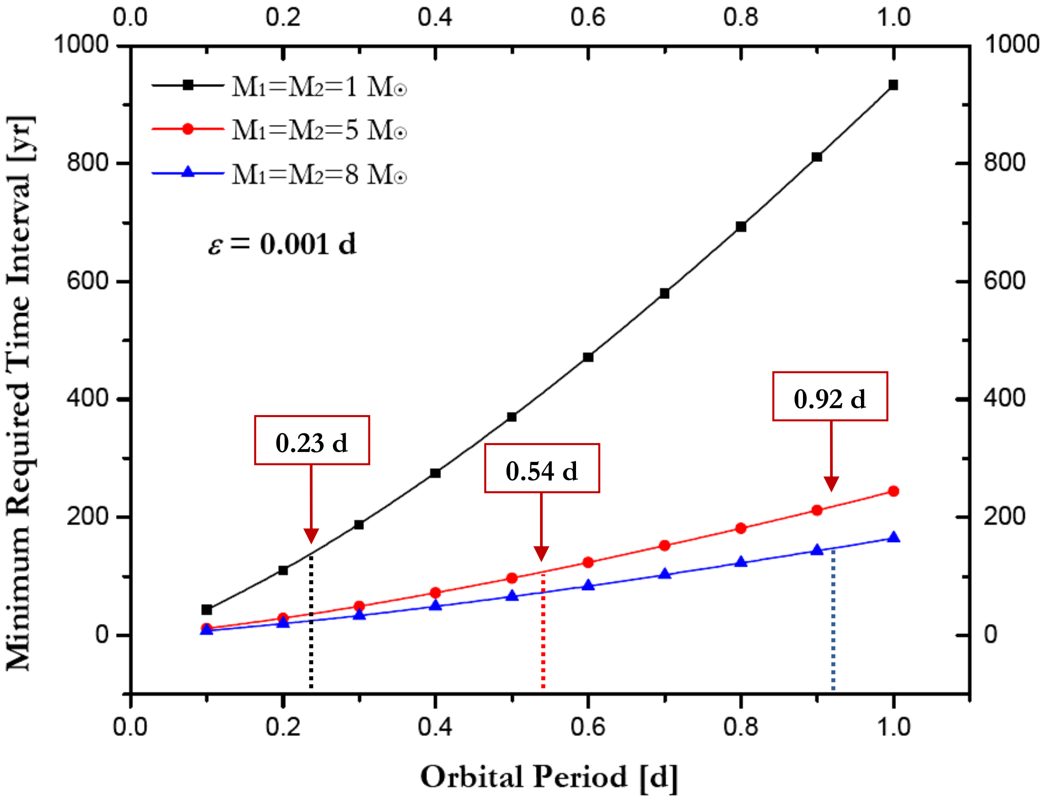
ε			**0.01 d**		**0.001 d**	
Σύστημα	M_1+M_2 [M_Θ]	P_e [d]	$(t-T_0)_{min}$ [yr]	$(t-T_0)_{max}$ [yr]	$(t-T_0)_{min}$ [yr]	$(t-T_0)_{max}$ [yr]
-	1.0+1.0	1.00	2.95×10^3	1.84×10^6	9.33×10^2	8.54×10^5
-	5.0+5.0	1.00	7.72×10^2	3.08×10^5	2.44×10^2	1.43×10^5
-	8.0+8.0	1.00	5.21×10^2	1.83×10^5	1.65×10^2	8.47×10^4
CC Com[(1)]	0.7+0.4	0.22	6.70×10^2	2.55×10^5	2.12×10^2	1.18×10^5
W UMa[(1)]	1.2+0.6	0.33	7.79×10^2	3.12×10^5	2.46×10^2	1.45×10^5
AH Cep[(2)]	16+13	1.77	6.84×10^2	2.62×10^5	2.16×10^2	1.22×10^5
WR 20a[(3)]	83+82	3.69	4.26×10^2	1.39×10^5	1.35×10^2	6.46×10^4

[(1)]Hilditch et al. (1988) [(2)]Burkholder et al. (1997) [(3)]Bonanos et al. (2004)

Η μαθηματική διαδικασία που ακολουθήσαμε με σκοπό την εύρεση της συνάρτησης περιόδου και εκείνης που περιγράφει τις μεταβολές O-C είναι εντελώς όμοια με την αντίστοιχη πορεία που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα, καθώς η βαρυτική ακτινοβολία συμπεριφέρεται ως ένας μηχανισμός πέδησης με εκθέτη a = 7/3 ≈ 2.33 και συντελεστή $b \equiv g$. Είναι λοιπόν προφανές ότι το ανάπτυγμα MacLaurin της συνάρτησης (5.52) θα είναι εκείνο το οποίο δίνεται από τη σχέση (5.42) και τελικά ο προσδιορισμός των απαιτούμενων χρονικών διαστημάτων ώστε ο εκάστοτε όρος του πολυωνύμου Taylor να είναι μετρήσιμος στα διαγράμματα O-C μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της σχέσης (5.46). Εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής με σκοπό τον προσδιορισμό των μέγιστων χρονικών διαστημάτων επάρκειας της παραβολικής και μόνο αναπαράστασης (n = 2) πραγματοποιήθηκε για όλα τα εξεταζόμενα συστήματα του Πίνακα Π.5.7. Όπως αναμενόταν, η συνεισφορά του κυβικού όρου στο ανάπτυγμα MacLaurin αποδεικνύεται αμελητέα και, ως εκ τούτου, η παραβολική αναπαράσταση κρίνεται ικανοποιητική για τουλάχιστον μερικές δεκάδες χιλιάδες χρόνια.

Όπως αποδείχθηκε στην προηγούμενη υποενότητα, τα ελάχιστα χρονικά διαστήματα που απαιτούνται ώστε η μαγνητική πέδηση να διαμορφώνει ένα διάγραμμα O-C κάτω από την παρουσία θορύβου αποδεικνύονται ισχυρά εξαρτώμενα από την περίοδο. Η βαρυτική ακτινοβολία ως εκ τούτου θα χαρακτηρίζεται από ανάλογη συμπεριφορά, κάτι το οποίο εύκολα διαφαίνεται από τη σχέση (5.52).

Προχωρήσαμε λοιπόν σε περαιτέρω διερεύνηση ώστε να εκτιμηθεί το απαιτούμενο χρονικό βάθος διαθέσιμων χρόνων ελαχίστου με το εύρος της περιόδου να κυμαίνεται μεταξύ 0.1 d και 1.0 d, αφήνοντας ως ελεύθερη παράμετρο τη μάζα του συστήματος. Τα αποτελέσματά μας αφορούν τα τρία υποθετικά συστήματα των 1+1 $M_{\odot}$, 5+5 $M_{\odot}$ και 8+8 $M_{\odot}$ με περίοδο 1 d και στάθμη θορύβου ίση με ε = 0.001 d. Τουλάχιστον 150 yr καταγραφής χρόνων ελαχίστου φαίνεται ότι είναι τότε αναγκαία ώστε το σήμα που παράγεται μέσω του μηχανισμού αυτού στο πιο μαζικό από τα εξεταζόμενα συστήματα να ξεπερνά τη στάθμη θορύβου των 0.001 d, δηλαδή κάτω από το πιο αισιόδοξο σενάριο.



Σχήμα V.6. Ελάχιστα χρονικά διαστήματα τα οποία απαιτούνται ώστε ο μηχανισμός της βαρυτικής ακτινοβολίας να καθίσταται ανιχνεύσιμος σε ένα διάγραμμα O-C, στάθμης θορύβου ίσης με ε = 0.001 d, ως συνάρτηση της τροχιακής περιόδου. Εξετάζονται συστήματα μάζας 1+1 $M_{\odot}$, 5+5 $M_{\odot}$ και 8+8 $M_{\odot}$, ενώ σημειώνεται η ελάχιστη δυνατή τιμή της τροχιακής περιόδου για κάθε σύστημα, τιμή δηλαδή η οποία αντιστοιχεί στην κρίσιμη εκείνη απόσταση που τα δύο μέλη εφάπτονται.

Ένα τυπικό βραχυπερίοδο σύστημα της κατηγορίας των RS CVn αστέρων απαιτεί 3000 yr και 1000 yr παρατηρήσεων περίπου ώστε οι επιπτώσεις της βαρυτικής ακτινοβολίας να είναι μετρήσιμες κατά την ανάλυση ενός διαγράμματος O-C με στάθμη θορύβου 0.01 και 0.001 d αντίστοιχα. Διατηρώντας τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος αυτού και μειώνοντας την περίοδο, τα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα περιορίζονται σημαντικά και, θεωρητικά πάντοτε, προσεγγίζουν τιμές μικρότερες των 100 yr. Στην πράξη όμως, το ενδεχόμενο αυτό είναι αδύνατο, καθώς υπάρχει πάντοτε μια κρίσιμη τιμή της περιόδου η οποία αντιστοιχεί στην οριακή εκείνη κατάσταση που οι δύο αστέρες εφάπτονται. Η απαγορευτική τιμή της περιόδου εκτιμήθηκε μέσα από τον τρίτο νόμο του Kepler (1.25), θέτοντας ως τροχιακή ακτίνα το άθροισμα της ακτίνας των δύο μελών του συστήματος, εφόσον οι δύο αστέρες ανήκουν στην κύρια ακολουθία. Πιο συγκεκριμένα, οι τιμές 0.23, 0.54 και 0.92 d προέκυψαν για το σύστημα των 1+1 M_{Θ}, 5+5 M_{Θ} και 8+8 M_{Θ} αντίστοιχα, καθιστώντας το ενδεχόμενο ανίχνευσης του συγκεκριμένου μηχανισμού σχεδόν απίθανο. Πρακτικά λοιπόν, η βαρυτική ακτινοβολία δεν αναμένεται να επιδρά στην τελική μορφή ενός διαγράμματος O-C της τάξης των 100 yr με μοναδική εξαίρεση την περίπτωση ιδιαίτερα βραχυπερίοδων συστημάτων συνολικής μάζας μεγαλύτερης των 2 M_{Θ}, χαρακτηριστικά δηλαδή που παραπέμπουν στους κατακλυσμικούς και μόνο μεταβλητούς. Η διαπίστωση αυτή έχει ισχύ όσο οι καταγεγραμμένοι χρόνοι ελαχίστων προέρχονται από εκλείψεις σε ορατά μήκη κύματος, διαφορετικά, τα συστήματα εκπομπής ακτίνων X αποτελούν εξαίρετους υποψήφιους των οποίων τα διαγράμματα O-C διαμορφώνονται εξαιτίας της βαρυτικής τους ακτινοβολίας.

3.5. Απώλεια Μάζας και Στροφορμής μέσω του Σημείου L2

Τελευταίος μηχανισμός που εξετάζεται στην παρούσα διδακτορική διατριβή είναι η απώλεια μάζας μέσω του σημείου L2. Θυμίζουμε ότι ο μηχανισμός δεν αναμένεται συχνός, καθώς η εξωτερική κοινή ισοδυναμική επιφάνεια που προκύπτει από τη δυναμική Roche ενός διπλού συστήματος αστέρων θα πρέπει να έχει υπερπληρωθεί από τους δύο αστέρες, φαινόμενο το οποίο συναντάται σε συστήματα υπερεπαφής και μόνο. Το αέριο υλικό διαφεύγει τότε από το σημείο L2, προκαλώντας όχι μόνο τυπική απώλεια μάζας αλλά και μια ροπή η οποία αντιστέκεται στην περιστροφή του συστήματος, οδηγώντας έτσι στην απώλεια στροφορμής.

Όπως ήδη εξηγήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα θεωρούμε ότι η απώλεια μάζας προκαλείται ως συνέπεια της μεταφοράς μάζας μέσω του σημείου L1, και πιο συγκεκριμένα ότι το ποσοστό του υλικού που δεν καταλήγει στον δέκτη αστέρα είναι τελικά και εκείνο το οποίο δραπετεύει μέσω του σημείου L2. Με βάση τις σύνθήκες που ήδη παρουσιάστηκαν στην αρχή της τρίτης ενότητας αλλά και με την προϋπόθεση σταθερής και πολύ μικρής ροής υλικού, $(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)_{L2} < 0$, έτσι ώστε να μπορούμε να θεωρούμε τις απόλυτες παραμέτρους των δύο μελών αμετάβλητες, οποιαδήποτε από τις δύο γενικευμένες σχέσεις στροφορμής που έχουμε υϊοθετήσει οδηγεί σε μια ελαφρώς τροποποιημένη μορφή της εξίσωσης (5.21), δηλαδή:

$$\dot{P} = -w_{L2} P . \tag{5.54}$$

Η πιο πάνω σχέση ταυτίζεται ουσιαστικά με την (4.84) η οποία περιγράφει τη μεταβολή της τροχιακής περιόδου στην περίπτωση που ο δότης αστέρας είναι εκείνος με τη μεγαλύτερη μάζα, ενώ συμπίπτει με τη σχέση (4.85) στην ακριβώς αντίθετη περίπτωση. Στην ουσία, ο μαθηματικός χειρισμός του συγκεκριμένου μηχανισμού είναι απόλυτα όμοιος με εκείνους της κοινής απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου και της μεταφοράς μάζας μέσω του σημείου L1 με τη μόνη διαφοροποίηση να αφορά το αντίθετο πρόσημο και την παράμετρο w να έχει πλέον αντικατασταθεί από την ποσότητα $-w_{L2}$ η οποία προσδιορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

- $w_{L2} = \left[\dfrac{3q+2}{M_1+M_2} - \dfrac{3(1+q)}{M_2} j_f \right] \dot{m}_{L2} > 0$ με δότη το πρωτεύον μέλος. (5.55)

- $w_{L2} = \left[\dfrac{3q^{-1}+2}{M_1+M_2} - \dfrac{3(1+q)}{M_2} j_f \right] \dot{m}_{L2} > 0$ με δότη το δευτερεύον μέλος. (5.56)

Επομένως, η μαθηματική πορεία που οφείλουμε να ακολουθήσουμε με σκοπό την εύρεση των συναρτήσεων περιόδου και εκείνης που περιγράφει τις μεταβολές O-C είναι εντελώς όμοια με εκείνη που παρουσιάστηκε στις υποενότητες 3.1 και 3.2, και ως εκ τούτου, οι συναρτήσεις (5.24) και (5.26) εκφράζουν την περίοδο ως προς το χρόνο, $P(t)$, και τον τροχιακό κύκλο, $P(\tilde{E})$, αντίστοιχα, ενώ η συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ περιγράφεται από τη σχέση (5.27) κάτω από τις κατάλληλες αντικαταστάσεις:

$$\boxed{\Delta T(\tilde{E}) = \frac{1}{w_{L2}} \ln(1 + w_{L2} P_e \tilde{E}) - P_e \tilde{E}}. \tag{5.57}$$

Σχετικά με τη συμπεριφορά των πιο πάνω συναρτήσεων, θυμίζουμε ότι η απώλεια μάζας οδηγεί σε αύξηση της περιόδου, ενώ η απώλεια στροφορμής, εξαιτίας της συνεπαγόμενης ροπής που αναπτύσσεται στο σημείο L2, οδηγεί πάντοτε στη μείωσή της. Ανάμεσα σε αυτές τις δύο αντίθετες τάσεις, εκείνη που τελικά επικρατεί αποδεικνύεται πως είναι η απώλεια στροφορμής, ανεξάρτητα από τις φυσικές παραμέτρους του εξεταζόμενου συστήματος. Ως εκ τούτου, οι συναρτήσεις περιόδου (5.24) και (5.26) θα είναι πάντοτε ***φθίνουσες***, καθώς η παράμετρος w αντικαθίσταται από την ποσότητα $-w_{L2}$, και η συνάρτηση (5.57) ***κοίλη*** για κάθε κύκλο $\tilde{E}$. Κατά πλήρη ομοιότητα με τον μηχανισμό απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου, ο κρίσιμος εκείνος τροχιακός κύκλος, $\tilde{E}_{min}$, μετά τον οποίο το δυναμικό σήμα που διαμορφώνεται σε ένα διάγραμμα O-C, στάθμης θορύβου ε, αναμένεται ανιχνεύσιμο προσδιορίζεται επιλύοντας την εξίσωση (5.7), αντικαθιστώντας πρώτα τη συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ από τη σχέση (5.57). Αντίστοιχα, το ανάπτυγμα MacLaurin της συνάρτησης (5.57) θα είναι εκείνο το οποίο δίνεται από τη σχέση (5.29), έχοντας πρώτα θέσει $w \equiv -w_{L2}$, και τελικά ο προσδιορισμός των απαιτούμενων χρονικών διαστημάτων ώστε ο εκάστοτε πολυωνυμικός όρος να είναι μετρήσιμος στα διαγράμματα O-C μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της σχέσης (5.33), επισημαίνοντας για μια ακόμα φορά την απουσία της τροχιακής περιόδου ως παράγοντα ανιχνευσιμότητας.

Θεωρώντας τώρα ένα υποθετικό σύστημα υπερεπαφής με περίοδο 1 d και αστέρες ηλιακού τύπου ($M_1 = M_2 = M_\Theta$, $R_1 = R_2 = R_\Theta$ και $k_1^2 = k_2^2 = 0.1$), έχουμε εκτιμήσει τα χρονικά διαστήματα που απαιτούνται ώστε η απώλεια μάζας μέσω του σημείου L2 να καθίσταται ανιχνεύσιμη, καθώς και τα μέγιστα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία η παραβολική και η κυβική αναπαράσταση μέσω του αναπτύγματος (5.29) αναμένεται είναι επαρκής. Οι υπολογισμοί που πραγματοποιήθηκαν, επιλύοντας την εξίσωση (5.28) και υϊοθετώντας τη σχέση (5.33) αντίστοιχα, προέκυψαν θέτοντας ως στάθμη θορύβου την τιμή ε = 0.01 d. Τα αποτελέσματά μας παρουσιάζονται στους Πίνακες Π.5.8 και Π.5.9 αφού πρώτα προσδιορίσαμε την παράμετρο w_{L2} από τη σχέση (5.54). Αποσκοπώντας σε μια ακόμα πιο λεπτομερή μελέτη του συγκεκριμένου μηχανισμού, εξετάστηκε ένα ακόμα υποθετικό συστήμα με λόγο μαζών q = 0.25 διατηρώντας την ίδια τιμή της περιόδου για διάφορους ρυθμούς απώλειας μάζας αντίστοιχα. Στην προκειμένη, θεωρήσαμε ένα σύστημα υπερεπαφής με δευτερεύοντα αστέρα ηλιακού τύπου ($M_2 = M_\Theta$, $R_2 = R_\Theta$ και $k_2^2 = 0.1$) και πρωτεύοντα τετραπλάσιας μάζας, δίνοντας την ιδιότητα του δότη είτε στον πρωτεύοντα είτε στον δευτερεύοντα κατά τον υπολογισμό της παραμέτρου w_{L2} μέσω των σχέσεων (5.55) και (5.56) αντίστοιχα. Επίσης, όπως ακριβώς πράξαμε και στην περίπτωση του μηχανισμού απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου αλλά και στην περίπτωση της μεταφοράς μάζας μέσω του σημείου L1, εξετάσαμε την ευαισθησία των διαγραμμάτων O-C για το σύστημα με μέλη ηλιακών παραμέτρων (q = 1) κάτω από τρεις διαφορετικές στάθμες θορύβους με αποτελέσματα τα οποία απεικονίζονται στο Σχήμα V.7.

Π.5.8. Ελάχιστα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα σε συστήματα με q = 1 και q = 0.25.

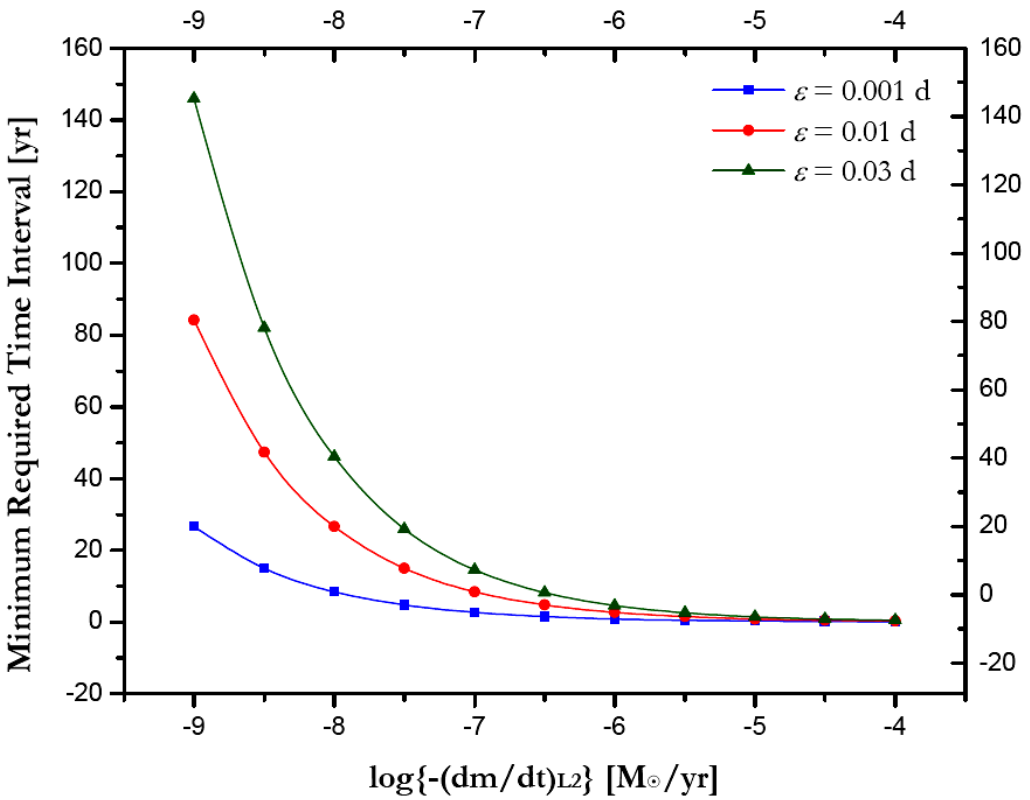
	t-T_0 [yr]		
$\dot{m}_{L2}$ [M_Θ/yr]	**q = 1**	**q = 0.25, M_1 δότης**	**q = 0.25, M_2 δότης**
-1.00×10^{-12}	2.66×10^{3}	2.93×10^{3}	3.64×10^{3}
-1.00×10^{-11}	8.43×10^{2}	9.26×10^{2}	1.15×10^{3}
-1.00×10^{-10}	2.66×10^{2}	2.93×10^{2}	3.64×10^{2}
-1.00×10^{-9}	**8.43×10^{1}**	**9.26×10^{1}**	**1.15×10^{2}**
-1.00×10^{-8}	**2.66×10^{1}**	**2.93×10^{1}**	**3.64×10^{1}**
-1.00×10^{-7}	**8.43×10^{0}**	**9.26×10^{0}**	**1.15×10^{1}**
-1.00×10^{-6}	**2.66×10^{0}**	**2.93×10^{0}**	**3.64×10^{0}**
-1.00×10^{-5}	**8.43×10^{-1}**	**9.26×10^{-1}**	**1.15×10^{0}**
-1.00×10^{-4}	**2.67×10^{-1}**	**2.93×10^{-1}**	**3.64×10^{-1}**

Π.5.9. Μέγιστα χρονικά διαστήματα επάρκειας παραβολικής και κυβικής αναπαράστασης.

q = 1			**q = 0.25, M_2 δότης**		
$\dot{m}_{L2}$ [M_Θ/yr]	***2ος όρος* [yr]**	***3ος όρος* [yr]**	**$\dot{m}_{L2}$ [M_Θ/yr]**	***2ος όρος* [yr]**	***3ος όρος* [yr]**
-1.00×10^{-12}	1.11×10^{6}	2.21×10^{7}	-1.00×10^{-12}	1.69×10^{6}	3.53×10^{7}
-1.00×10^{-11}	2.40×10^{5}	3.93×10^{6}	-1.00×10^{-11}	3.64×10^{5}	6.27×10^{6}
-1.00×10^{-10}	5.17×10^{4}	6.99×10^{5}	-1.00×10^{-10}	7.83×10^{4}	1.12×10^{6}
-1.00×10^{-9}	1.11×10^{4}	1.24×10^{5}	-1.00×10^{-9}	1.69×10^{4}	1.98×10^{5}
-1.00×10^{-8}	2.40×10^{3}	2.21×10^{4}	-1.00×10^{-8}	3.64×10^{3}	3.53×10^{4}
-1.00×10^{-7}	5.17×10^{2}	3.94×10^{3}	-1.00×10^{-7}	7.83×10^{2}	6.28×10^{3}
-1.00×10^{-6}	**1.11×10^{2}**	7.01×10^{2}	-1.00×10^{-6}	1.69×10^{2}	1.12×10^{3}
-1.00×10^{-5}	**2.40×10^{1}**	**1.25×10^{2}**	-1.00×10^{-5}	**3.64×10^{1}**	1.99×10^{2}
-1.00×10^{-4}	**5.18×10^{0}**	**2.23×10^{1}**	-1.00×10^{-4}	**7.84×10^{0}**	**3.55×10^{1}**

Αναφορικά με τους Πίνακες Π.5.8 και Π.5.9, οφείλουμε να σημειώσουμε ότι δεν παρατηρούνται σημαντικές αποκλίσεις μεταξύ των αναμενόμενων χρόνων όταν αυτοί υπολογίζονται για συστήματα με μεγάλες διαφορές λόγου μαζών, κάτι το οποίο ήδη επισημάνθηκε για τον μηχανισμό μεταφοράς μάζας μέσω του σημείου L1. Επομένως, ο κρίσιμος παράγοντας που καθορίζει την ευαισθησία των διαγραμμάτων O-C κάτω από την παρουσία του μηχανισμού απώλειας μάζας μέσω του σημείου L2 φαίνεται να είναι και πάλι ο ρυθμός με τον οποίο αυτή εγκαταλείπει το εκάστοτε σύστημα. Έτσι λοιπόν, τιμές τουλάχιστον μεγαλύτερες από -10^{-10} $M_{\odot}$/yr οδηγούν σε αρκετά ασφαλή εκτίμηση του δευτεροβάθμιου συντελεστή με βάση τα δεδομένα ενός τυπικού διαγράμματος O-C που εκτείνονται σε βάθος λίγων εκατοντάδων ετών. Αντίθετα, όταν ο ρυθμός απώλειας μάζας είναι της τάξης του -10^{-6} $M_{\odot}$/yr, η παρουσία του κυβικού όρου γίνεται σημαντική και συνεπώς η παραβολική διαμόρφωση αλλοιώνεται, ενώ η συνεισφορά του τεταρτοβάθμιου όρου στη διαμόρφωση του διαγράμματος αναμένεται μη αμελητέα σε ρυθμούς μεγαλύτερους των -10^{-5} $M_{\odot}$/yr.

Σχετικά τώρα με το βαθμό επίδρασης του θορύβου κατά την ανάλυση ενός διαγράμματος O-C, αξίζει να επισημάνουμε ότι η μείωση της αντίστοιχης στάθμης στις 0.001 d οδηγεί σε βελτίωση της ανιχνευτικής απόδοσης μέχρι και δύο τάξεις μεγέθους όσον αφορά το ρυθμό απώλειας μάζας (δηλαδή τιμές της τάξης των -10^{-11} $M_{\odot}$/yr φαίνονται μετρήσιμες), ενώ η αύξηση της στάθμης στις 0.03 d οδηγεί σε περιορισμό της ευαισθησίας κατά μια περίπου τάξη μεγέθους (δηλαδή απαιτούνται τιμές της τάξης των -10^{-8} $M_{\odot}$/yr ώστε να είναι μετρήσιμες). Όμοια συμπεράσματα εξάχθηκαν τόσο στην περίπτωση της απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου όσο και στην περίπτωση της μεταφοράς μάζας μέσω του σημείου L1.



Σχήμα V.7. Ελάχιστα χρονικά διαστήματα τα οποία απαιτούνται ώστε ο μηχανισμός της απώλειας μάζας μέσω του σημείου L2 να καθίσταται ανιχνεύσιμος σε ένα διάγραμμα O-C για τρεις διαφορετικές στάθμες θορύβου και διάφορες τιμές ρυθμού απώλειας μάζας.

Συγκρίνοντας τις πιο πάνω τιμές με τις εκείνες που εκτιμήθηκαν κάτω από το καθεστώς απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου, αξίζει να σημειώσουμε ότι η απώλεια μάζας αποδεικνύεται πιο αποτελεσματική όταν το υλικό διαφεύγει μέσω του σημείου L2 και όχι συμμετρικά από τα μέλη ενός συστήματος. Ο λόγος έκειται στην ισχυρή ροπή η οποία αναπτύσσεται εξαιτίας της μεγάλης σχετικά απόστασης μεταξύ του κέντρου μάζας και της θέσης του σημείου L2 στον μεγάλο ημιάξονα του συστήματος. Ως εκ τούτου, η ένταση του μηχανισμού ενισχύεται και τελικά τα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα ώστε οι επιπτώσεις της στη διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C να είναι ανιχνεύσιμες, περιορίζονται σημαντικά. Πιο συγκεκριμένα, *το ίδιο χρονικό παράθυρο παρατηρήσεων μπορεί να είναι αρκετό ώστε να ανιχνεύσει την απώλεια μάζας μέσω του σημείου L2 κατά μια τάξη μεγέθους μικρότερη σε ρυθμό σε σχέση με την κοινή και σφαιρικά συμμετρική απώλεια μάζας* η οποία λαμβάνει χώρα μέσω αστρικού ανέμου.

4. Συνδυασμένη Δράση Φυσικών Μηχανισμών

Η παρούσα ενότητα καταπιάνεται με τη μαθηματική εκείνη μεθοδολογία που απαιτείται ώστε να παραχθούν τόσο τα διαγράμματα περιόδου όσο και τα συνθετικά διαγράμματα που περιγράφουν τις αντίστοιχες μεταβολές O-C στη γενική περίπτωση κοινής παρουσίας ποικίλων φυσικών μηχανισμών. Στην προκειμένη, εστιάζουμε στην κοινή μακροχρόνια δράση των μηχανισμών που εξετάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες αλλά εύκολα η τεχνική που παρουσιάζεται μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε φυσική διαδικασία, ανεξάρτητα από τη χρονική κλίμακα μέσα στην οποία ενεργεί. Η δυσκολία του εγχειρήματος έγκειται στην πολυπλοκότητα των διαφορικών εξισώσεων οι οποίες αδυνατούν πολλές φορές να οδηγήσουν στον προσδιορισμό της συνάρτησης περιόδου και τελικά καθιστούν απαγορετική τη συνέχιση της μεθοδολογίας της οποίας κεντρικός στόχος είναι πάντοτε η παραγωγή των συνθετικών διαγραμμάτων O-C.

4.1. Απώλεια Μάζας και Στροφορμής μέσω Αστρικού Ανέμου

Ο πρώτος συνδυασμός φυσικών μηχανισμών με τον οποίο θα ασχοληθούμε αφορά την απώλεια μάζας μέσω αστρικού ανέμου η οποία πλέον θα συνοδεύεται από την απώλεια στροφορμής μέσω του μηχανισμού της μαγνητικής πέδησης. Ουσιαστικά, ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε τη μακροχρόνια επίδραση που έχει ο αστρικός άνεμος όταν παράγεται από τα μέλη ενός διπλού συστήματος αστέρων στην τροχιακή του εξέλιξη, γεγονός το οποίο παρέχει ιδιότητες ενός ρεαλιστικού μηχανισμού, καθώς οι δύο πιο πάνω φυσικές διαδικασίες δεν μπορούν ποτέ να εξεταστούν μεμονωμένα στην πράξη.

Αποδεχόμενοι λοιπόν συνθήκες κυκλοποίησης και συγχρονισμού, παραβλέποντας τη συνεισφορά της ιδιοστροφορμής των μελών του συστήματος και υποθέτοντας ότι οι φυσικές τους παράμετροι παραμένουν αμετάβλητες κατά τη διάρκεια μερικών εκατοντάδων ετών, έτσι ώστε οι συντελεστές w και b να θεωρούνται σταθεροί, τόσο η γενικευμένη εξίσωση στροφορμής (5.5) των TH91 όσο και η εξίσωση (5.6) των KRL06 οδηγεί σε μια πρωτοτάξια συνήθη διαφορική εξίσωση η οποία περιλαμβάνει τους αντίστοιχους όρους που συναντήσαμε στις σχέσεις (5.21) και (5.35):

$$\dot{P} = wP - bP^{\frac{2}{3}-a}. \tag{5.58}$$

Η πιο πάνω εξίσωση μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά με τη χρήση των αρχικών συνθηκών $[t,P(t)] = [T_0,P_e]$, στηριζόμενοι σε αρκετά πολύπλοκα ολοκληρώματα και υπολογισμούς (παραπέμπουμε στο Παράρτημα IV για τον ακριβή τρόπο επίλυσης της συγκεκριμένης εξίσωσης). Τελικά, οδηγούμαστε σε μια συνάρτηση περιόδου η οποία έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\boxed{P(t) = \left[\frac{b}{w} - \left(\frac{b}{w} - P_e^{a+\frac{1}{3}}\right) e^{w\left(a+\frac{1}{3}\right)(t-T_0)}\right]^{\frac{1}{a+\frac{1}{3}}}}. \tag{5.59}$$

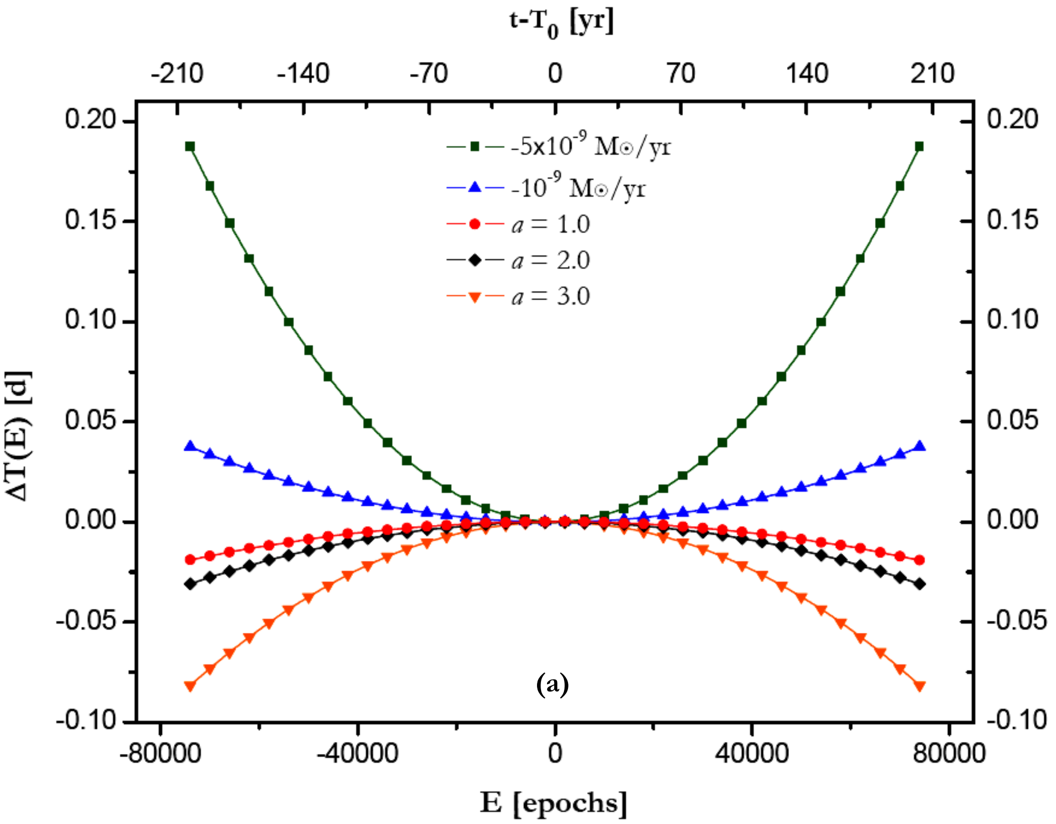
Η συνάρτηση (5.59) περιγράφει την τροχιακή εξέλιξη ενός ***αποχωρισμένου*** *διπλού συστήματος αστέρων* με μέλη τα οποία χαρακτηρίζονται από μεταγενέστερους φασματικούς τύπους. Η επίδραση της απώλειας μάζας συντελείται μέσω της παραμέτρου w, η οποία μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας χρήση των σχέσεων (5.22) και (5.23), υϊοθετώντας την προσέγγιση των TH91 και KRL06, ή ισοδύναμα, υποθέτοντας ότι ο ένας από τους δύο αστέρες εκλύει υλικό με πολύ μεγαλύτερο ρυθμό από το συνοδό του στην πρώτη περίπτωση, και αντίστοιχα στη δεύτερη περίπτωση, όταν οι δύο αστέρες συμμετέχουν από κοινού στο φαινόμενο της απώλειας μάζας με ανταγωνιστικούς ρυθμούς. Η επίδραση της μαγνητικής πέδησης συντελείται μέσω της παραμέτρου b η οποία μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας χρήση της σχέσης (5.36) και υϊοθετώντας το μοντέλο των V82, VVM89 ή A98 ανάλογα με την επιλογή της σταθεράς βαθμονόμησης K_{kaw}. Θυμίζουμε ότι η σταθερά αυτή έχει εκτιμηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο καλύπτοντας ολόκληρο το εύρος τιμών του εκθέτη a και τα αποτελέσματα που προέκυψαν παρατίθενται στον Πίνακα Π.4.1.

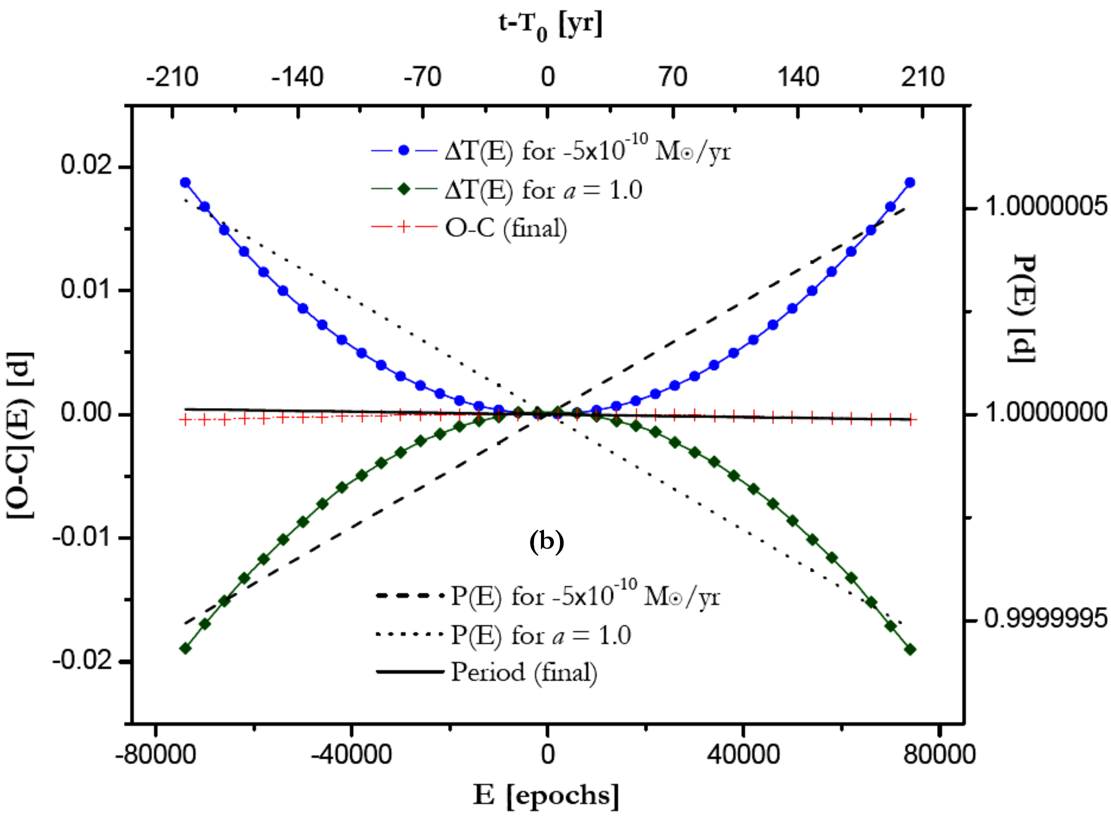
Η μονοτονία της συνάρτησης περιόδου (5.59) καθορίζεται με βάση τον μηχανισμό που τελικά επικρατεί. Μελετώντας προσεκτικά τη δομή και τη μορφή της, μπορούμε εύκολα να οδηγηθούμε στα τρία ακόλουθα σενάρια τα οποία συνοδεύονται από το αντίστοιχο αριθμητικό κριτήριο:

- Εάν $\frac{b}{w} < P_e^{a+\frac{1}{3}}$, τότε η περίοδος αναμένεται *αύξουσα*. (5.60)
- Εάν $\frac{b}{w} > P_e^{a+\frac{1}{3}}$, τότε η περίοδος αναμένεται *φθίνουσα*. (5.61)
- Εάν $\frac{b}{w} = P_e^{a+\frac{1}{3}}$, τότε η περίοδος αναμένεται *σταθερή*. (5.62)

Η σχέση (5.62) παρέχει την κρίσιμη εκείνη συνθήκη ώστε *οι συνέπειες της μαγνητικής πέδησης να* ***εξισορροπούν πλήρως*** *τις επιπτώσεις της απώλειας μάζας* στη μεταβολή της τροχιακής περιόδου με άμεσο αποτέλεσμα το χρονικό της αμετάβλητο. Ικανοποίηση της συνθήκης (5.62) μπορεί να πραγματοποιηθεί για πληθώρα τιμών, τις οποίες όταν οι παράμετροι *w* και *b* λαμβάνουν, οδηγούν στην εξουδετέρωση των δύο μηχανισμών. Ορισμένα παραδείγματα συνθετικών διαγραμμάτων O-C, τα οποία προέκυψαν από τις συναρτήσεις (5.27) και (5.40) για την περίπτωση ενός συστήματος 1+1 $M_{\odot}$ και περιόδου 1 d, υϊοθετώντας την προσέγγιση των KRL06 και VVM89 αντίστοιχα, παρατίθενται στο Σχήμα V.8a και εκφράζουν τις προβλεπόμενες μεταβολές για ένα χρονικό διάστημα της τάξης των 400 yr. Εύκολα διαφαίνεται ότι, εφόσον η απώλεια μάζας λαμβάνει χώρα από τα δύο μέλη με τον ίδιο ρυθμό και ίσο με -5×10^{-10} $M_{\odot}$/yr, ο συγκεκριμένος μηχανισμός αποδεικνύεται ισοδύναμος με εκείνον της μαγνητικής πέδησης κάτω από το καθεστώς κορεσμού, δηλαδή όταν a = 1.

Στην ειδική αυτή περίπτωση, τόσο το διάγραμμα της τροχιακής περιόδου όσο και το αντίστοιχο διάγραμμα O-C αναμένονται χωρίς την παρουσία καμίας σαφούς διαμόρφωσης, όπως ακριβώς απεικονίζεται στο Σχήμα V.8b. Ας σημειωθεί ότι ***η διαπίστωση αυτή είναι ιδιαίτερα κρίσιμης σημασίας***, καθώς δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις αποχωρισμένων συστημάτων τα οποία ανήκουν στη βραχυπερίοδη κατηγορία των RS CVn μεταβλητών και παρουσιάζουν την ιδιάζουσα αυτή συμπεριφορά (π.χ. YY Gem, BH Vir, UV Psc και CM Dra). Είναι σαφώς πιο λογικό να υποθέσουμε ότι δύο μηχανισμοί οι οποίοι οδηγούν την εξέλιξη της περιόδου με αντίθετη κατεύθυνση να δρουν ταυτόχρονα και τελικά να αλληλοεξουδετερώνονται, παρά να αποδεχθούμε την απουσία κάθε είδους φυσικής διαδικασίας σε συστήματα των οποίων τα μέλη χαρακτηρίζονται από έντονη χρωμοσφαιρική δραστηριότητα.





Σχήμα V.8. Συνθετικά διαγράμματα O-C (βήμα ≡ 4000 τροχιακοί κύκλοι) τα οποία προβλέπονται όταν ένα σύστημα 1+1 $M_{\odot}$ και περιόδου 1 d υπόκειται στους μηχανισμούς της απώλειας μάζας και της μαγνητικής πέδησης, υϊοθετώντας την προσέγγιση των KRL06 και VVM89 αντίστοιχα (a) και το αποτέλεσμα που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση της απώλειας μάζας με ρυθμό -5×10^{-10} $M_{\odot}$/yr και της μαγνητικής πέδησης με a = 1 (b).

Ας σημειωθεί ακόμα ότι η συνάρτηση (5.59) δεν μπορεί να ολοκληρωθεί αναλυτικά ώστε να δώσει στη συνέχεια το μετασχηματισμό $t = t(\tilde{E})$, όπως προβλέπεται μέσω της σχέσης (5.3), και ως εκ τούτου η συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ αδυνατεί να προσδιοριστεί σε κλειστή μορφή, όπως προβλέπεται μέσω της σχέσης (5.4). Αν και το πλαίσιο μέσω του οποίου μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τη δυσκολία αυτή με τη βοήθεια κατάλληλων πολυωνύμων θα περιγραφεί στην υποενότητα 4.3, επισημαίνουμε ότι ο αριθμητικός χειρισμός είναι πάντοτε εφικτός με τη βοήθεια του διακριτού μετασχηματισμού χρόνου-τροχιακού κύκλου ο οποίος προκύπτει μέσω των σχέσεων (5.3) και (5.4), δηλαδή $t\text{-}T_0 = P_e E + \Delta T(E)$. Αντικαθιστώντας στη συνέχεια την περίοδο από την εξίσου διακριτή σχέση (3.5), είμαστε πλέον σε θέση να πραγματοποιήσουμε κύκλο προς κύκλο υπολογισμούς σύμφωνα με την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$P_e + \Delta T(E) - \Delta T(E-1) = \left[\frac{b}{w} - \left(\frac{b}{w} - P_e^{a+\frac{1}{3}} \right) e^{w\left(a+\frac{1}{3}\right)(P_e E + \Delta T(E))} \right]^{\frac{1}{a+\frac{1}{3}}} \text{ με } \Delta T(0) = 0. \quad (5.63)$$

Αξίζει, τέλος, να επισημάνουμε ότι η συνάρτηση περιόδου (5.59) παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσον αφορά την εξελικτική πορεία ενός αποχωρισμένου διπλού συστήματος με ψυχρά μέλη. Εφόσον το χρονικό διάστημα το οποίο απαιτείται ώστε ο μηχανισμός της απώλειας μάζας να είναι ανιχνεύσιμος σε ένα διάγραμμα O-C δεν εξαρτάται από την τροχιακή περίοδο, ενώ στην περίπτωση της μαγνητικής πέδησης υπάρχει ισχυρή μεταξύ τους εξάρτηση, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα της κρισιμότητας της περιόδου ως παράγοντα κυριαρχίας ενός εκ των δύο μηχανισμών. Υποθέτοντας λοιπόν ότι ένα αποχωρισμένο σύστημα οδηγείται από το μηχανισμό της μαγνητικής πέδησης, και συνεπώς η περίοδός του μειώνεται, η απώλεια μάζας ολοένα και θα ενισχύεται εξαιτίας των υψηλών ισημερινών ταχυτήτων και, ως εκ τούτου, της έντονης παρουσίας της φυγόκεντρης δύναμης. Από την άλλη, η ένταση της μαγνητικής πέδησης αναμένεται να εξασθενίζει κινούμενοι σε μικρότερες περιόδους, καθώς το καθεστώς κορεσμού θα πλησιάζει, καθιστώντας τελικά την ένταση του μαγνητικού πεδίου ανεξάρτητη από τη γωνιακή ταχύτητα ιδιοπεριστροφής, μόλις πλέον το καθεστώς αυτό εδραιωθεί.

Σύμφωνα λοιπόν με το σενάριο που μόλις αναπτύχθηκε, προβλέπεται μια κρίσιμη τιμή της περιόδου κατά την οποία η απώλεια μάζας θα επικρατήσει ως μηχανισμός της τροχιακής εξέλιξης, οδηγώντας κατά συνέπεια σε αύξηση της περιόδου και τελικά αποτρέποντας την επικείμενη μετάβαση σε γεωμετρία ημιαποχωρισμένου συστήματος. Πρακτικά, η κρίσιμη αυτή περίοδος είναι συνεπής με τη συνθήκη (5.62) και εξασφαλίζει τη μετάβαση από το καθεστώς που η σχέση (5.61) επιβάλλει σε εκείνο το οποίο προβλέπεται από τη σχέση (5.60). Μάλιστα, ιδιαίτερα βραχυπερίοδα αποχωρισμένα συστήματα ($P_e \leq 0.8$ d), όπως το UV Leo και το ER Vul, φαίνεται να ανήκουν στην κατηγορία εκείνη όπου η απώλεια μάζας επικρατεί επί της μαγνητικής πέδησης, ενώ συστήματα με αρκετά μεγαλύτερη περίοδο ($0.8 < P_e \leq 7.0$ d), όπως τα YY Gem, BH Vir, DU Leo, HS Hya, WZ Oph και EW Ori, φαίνεται να ανήκουν στην κατηγορία όπου η μαγνητική πέδηση έχει αποκτήσει ισοδύναμη ισχύ με εκείνη της απώλειας μάζας. Στην πραγματικότητα, θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα επισφαλείς με το εξελικτικό σενάριο που περιγράφηκε, καθώς η συνεχής μείωση της περιόδου ενδεχομένως να έχει ήδη οδηγήσει στην υπερχείλιση ενός εκ των δύο λοβών Roche του συστήματος προτού η κρίσιμη τιμή της περιόδου επιτευχθεί.

4.2. Μεταφορά-Απώλεια Μάζας και Στροφορμής μέσω L1 και L2

Ο δεύτερος συνδυασμός φυσικών μηχανισμών με τον οποίο θα ασχοληθούμε αφορά την απώλεια και μεταφορά μάζας με όλους τους δυνατούς τρόπους. Επικεντρώνοντας σε ακόμα πιο βραχυπερίοδα συστήματα, ώστε το υλικό που δραπετεύει από τα δύο μέλη να έχει τη δυνατότητα διαφυγής μέσω των σημείων L1 και L2, θα υποθέσουμε ότι η μαγνητική πέδηση έχει πλέον αποδυναμωθεί σε τέτοιο βαθμό ώστε να μην επιδρά στη διαμόρφωση της τροχιακής εξέλιξης. Μοναδικό λοιπόν ενδεχόμενο απώλειας στροφορμής θα θεωρείται πλέον εκείνο το οποίο συνοδεύει την απώλεια μάζας μέσω του σημείου L2. Εκείνο όμως το οποίο συμπληρωματικά θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη αφορά την ιδιοστροφορμή των μελών του συστήματος την οποία μέχρι τώρα αμελούσαμε. Εξετάζοντας συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από ιδιαίτερα μικρές περιόδους, η τροχιακή ακτίνα γίνεται πλέον συγκρίσιμη με τις ακτίνες των δύο αστέρων, και κατά συνέπεια, η συνεισφορά της ιδιοστροφορμής τους στην τροχιακή εξέλιξη γίνεται αντιληπτή μέσω του πιο κάτω όρου ο οποίος εμφανίζεται στην εξίσωση στροφορμής (5.6) των KRL06:

$$3\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{J_i}{J_{orb}}\cdot\frac{\dot{\Omega}_i}{\Omega_i}\right)\overset{(4.55)}{=}\frac{3}{J_{orb}}\sum_{i=1}^{2}\left(k_i^2 M_i R_i^2\dot{\Omega}_i\right)\overset{(4.72)}{=}\frac{3(2\pi)^{1/3}(M_1+M_2)^{1/3}}{M_1 M_2 G^{2/3}P^{1/3}}\sum_{i=1}^{2}\left(k_i^2 M_i R_i^2\dot{\Omega}_i\right)\Leftrightarrow$$

$$3\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{J_i}{J_{orb}}\cdot\frac{\dot{\Omega}_i}{\Omega_i}\right)=-\frac{3(2\pi)^{4/3}(M_1+M_2)^{1/3}\sum_{i=1}^{2}\left(k_i^2 M_i R_i^2\right)}{M_1 M_2 G^{2/3}}\cdot\frac{\dot{P}}{P^{7/3}}\Leftrightarrow$$

$$3\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{J_i}{J_{orb}}\cdot\frac{\dot{\Omega}_i}{\Omega_i}\right)=-s\frac{\dot{P}}{P^{7/3}},\ \text{καθώς}\ \dot{\Omega}_i=\dot{\Omega}_{kep}=-2\pi\frac{\dot{P}}{P^2}. \qquad (5.64)$$

Αποδεχόμενοι λοιπόν συνθήκες κυκλοποίησης και συγχρονισμού και υποθέτοντας ότι οι φυσικές παράμετροι των δύο μελών του συστήματος παραμένουν αμετάβλητες κατά τη διάρκεια μερικών εκατοντάδων ετών, τόσο ο συντελεστής $w_T = w + w_{L1} - w_{L2}$ όσο και ο νεοεμφανιζόμενος συντελεστής s στη σχέση (5.64) θα θεωρούνται σταθεροί:

$$s=\frac{3(2\pi)^{4/3}(M_1+M_2)^{1/3}\sum_{i=1}^{2}\left(k_i^2 M_i R_i^2\right)}{M_1 M_2 G^{2/3}}>0. \qquad (5.65)$$

Στην περίπτωση αυτή, η γενικευμένη εξίσωση στροφορμής (5.6) των KRL06 οδηγεί σε μια πρωτοτάξια συνήθη διαφορική εξίσωση η οποία περιλαμβάνει τους αντίστοιχους όρους που συναντήσαμε στις σχέσεις (5.21), (5.54) σχετικά με την απώλεια και μεταφορά μάζας αλλά και στη σχέση (5.64) που αποδείχθηκε μόλις προηγουμένως και αφορά την επίδραση της ιδιοστροφορμής των δύο μελών:

$$\dot{P}=\frac{(w+w_{L1}-w_{L2})P}{1-sP^{-\frac{4}{3}}}=\frac{w_T P}{1-sP^{-\frac{4}{3}}}. \qquad (5.66)$$

Η επίλυση της εξίσωσης (5.66) πραγματοποιείται με τη χρήση των αρχικών συνθηκών $[t,P(t)] = [T_0,P_e]$ και οδηγεί σε μια (ημι)αναλυτική σχέση μεταξύ περιόδου και χρόνου, χωρίς όμως να προσδιορίζει τη συνάρτηση περιόδου σε κλειστή μορφή:

$$\boxed{\ln P(t)+\frac{3}{4}sP(t)^{-\frac{4}{3}}=\ln P_e+\frac{3}{4}sP_e^{-\frac{4}{3}}+w_T(t-T_0)}. \qquad (5.67)$$

Εξαιτίας της πιο πάνω ιδιαιτερότητας, τόσο η συνάρτηση περίοδου όσο και η συνθετική συνάρτηση που περιγράφει τις αντίστοιχες O-C μεταβολές δεν μπορούν να εκφραστούν ως προς τον τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$ σε κλειστή μορφή, ακολουθώντας τουλάχιστον τη μέχρι τώρα μεθοδολογία η οποία προϋποθέτει τον $t = t(\tilde{E})$ μετασχηματισμό. Αν και δεν υπάρχει πράγματι τρόπος να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$, μπορούμε να παρακάμψουμε την επίλυση της εξίσωσης (5.3) μέσω του κανόνα της αλυσίδας και να δώσουμε τελικά μια (ημι)αναλυτική σχέση μεταξύ περιόδου και τροχιακού κύκλου, χωρίς όμως και πάλι να ορίζεται μια σαφής και σε κλειστή μορφή συνάρτηση περιόδου:

$$\frac{dt}{d\tilde{E}} = P \Leftrightarrow \frac{dt}{dP}\cdot\frac{dP}{d\tilde{E}} = P \overset{(5.67)}{\Rightarrow} \frac{1}{w_T}\left(\frac{1}{P} - sP^{-\frac{7}{3}}\right)\frac{dP}{d\tilde{E}} = P \Rightarrow$$

$$\frac{3}{7}sP(\tilde{E})^{-\frac{7}{3}} - \frac{1}{P(\tilde{E})} = \frac{3}{7}sP_e^{-\frac{7}{3}} - \frac{1}{P_e} + w_T\tilde{E}\,. \tag{5.68}$$

Οι σχέσεις (5.67) και (5.68) περιγράφουν την τροχιακή εξέλιξη ενός ***ημιαποχωρισμένου*** *διπλού συστήματος αστέρων ή ακόμα και ενός συστήματος* ***επαφής*** με μέλη οποιουδήποτε φασματικού τύπου, κάτω όμως από την προϋπόθεση της αμελητέας συνεισφοράς προερχόμενης από τη μαγνητική πέδηση και τη βαρυτική ακτινοβολία. Η επίδραση της απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου συντελείται μέσω της παραμέτρου w και η οποία μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας χρήση των σχέσεων (5.22) και (5.23), υϊοθετώντας αντίστοιχα την προσέγγιση των TH91 και KRL06. Όμοια, η επίδραση της μεταφοράς μάζας μέσω του σημείου L1 και της απώλειας μάζας-στροφορμής μέσω του σημείου L2 συντελείται με την παρουσία των παραμέτρων w_{L1} και w_{L2} και οι οποίες μπορεί να εκτιμηθούν κάνοντας χρήση των σχέσεων (5.34) και (5.55)-(5.56) αντίστοιχα.

Όπως ακριβώς στην περίπτωση της απώλειας μάζας και στροφορμής μέσω αστρικού ανέμου, η μονοτονία της συνάρτησης περιόδου καθορίζεται με βάση τον μηχανισμό που τελικά επικρατεί. Από τη στιγμή που η περίοδος δεν εκφράζεται σε κλειστή μορφή, επικεντρώνουμε τη μελέτη στη σχέση (5.66) της οποίας το πρόσημο καθορίζει τη μακροχρόνια αυξητική ή φθίνουσα τάση. Εφόσον ο παρονομαστής δεν μπορεί να λάβει ποτέ αρνητικές τιμές, το πρόσημο της παραμέτρου $w_T = w + w_{\mathrm{L1}} - w_{\mathrm{L2}}$ είναι εκείνο που τελικά στην πράξη διαμορφώνει την εξελικτική πορεία της τροχιακής περιόδου, οδηγώντας στα τρία ακόλουθα σενάρια:

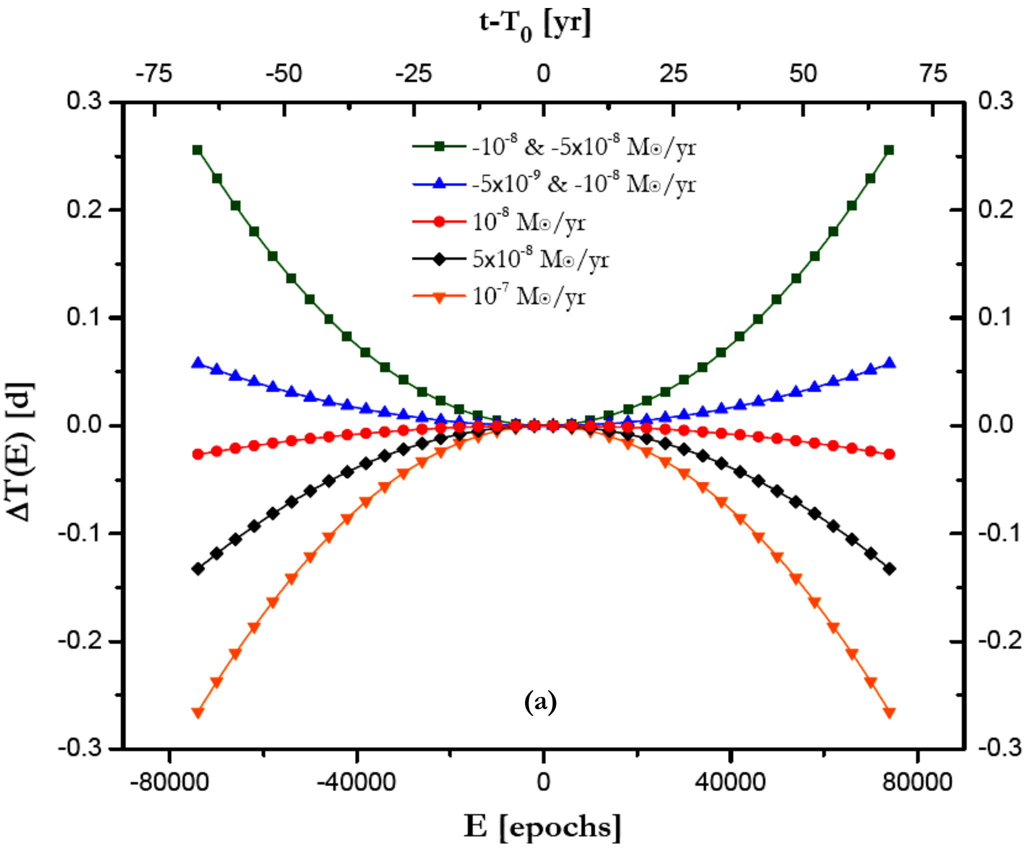
- Εάν $w > w_{L2} - w_{L1}$, τότε η περίοδος αναμένεται *αύξουσα*. (5.69)
- Εάν $w < w_{L2} - w_{L1}$, τότε η περίοδος αναμένεται *φθίνουσα*. (5.70)
- Εάν $w = w_{L2} - w_{L1}$, τότε η περίοδος αναμένεται *σταθερή*. (5.71)

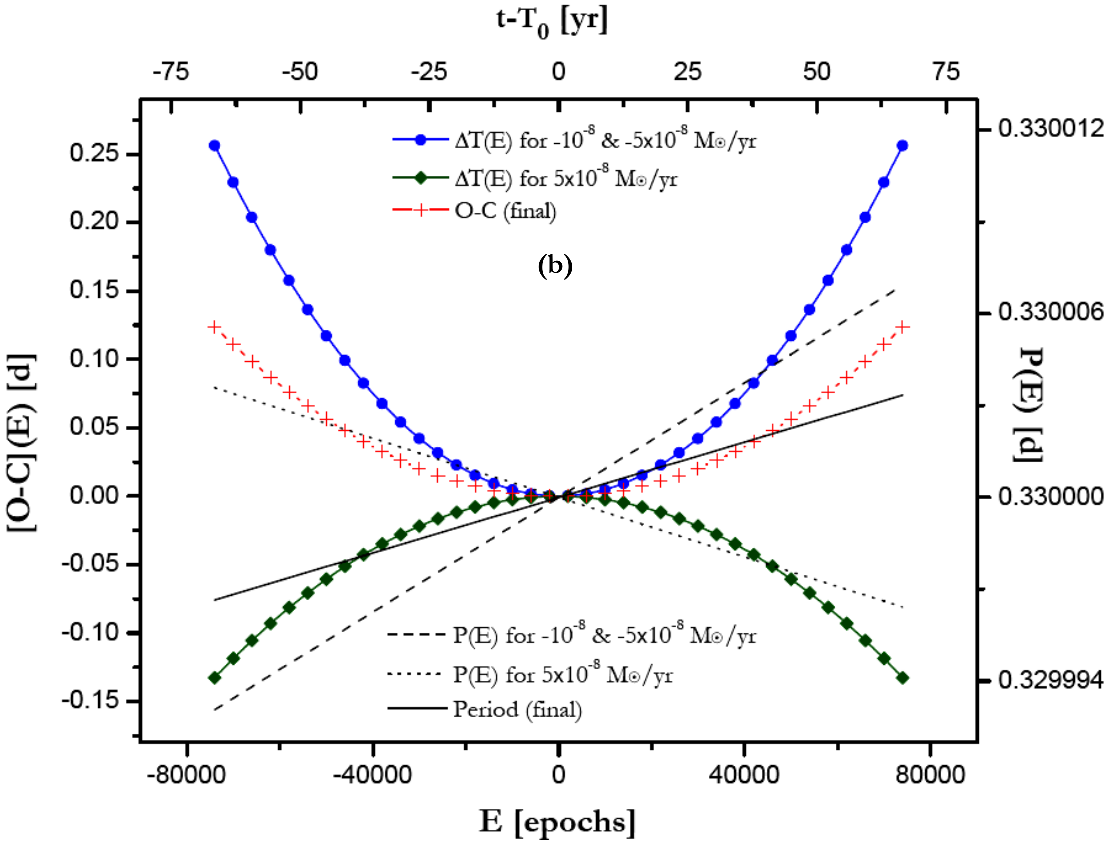
Η σχέση (5.71) παρέχει την κρίσιμη εκείνη συνθήκη ώστε *οι συνέπειες της απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου να* ***εξισορροπούν πλήρως*** *τις επιπτώσεις της μεταφοράς και απώλειας μάζας-στροφορμής μέσω των σημείων L1 και L2* στη μεταβολή της τροχιακής περιόδου με άμεσο αποτέλεσμα το χρονικό της αμετάβλητο.

Εφόσον η παράμετρος w_{L1} είναι θετική, πολύ δύσκολα η απώλεια μάζας μέσω του σημείου L2 (ή του L3) μπορεί να υπερνικήσει τις συνέπειες της απώλεια μάζας μέσω αστρικού ανέμου και της μεταφοράς μάζας μέσω του σημείου L1. Η συνεχής αύξηση της τροχιακής περιόδου στην περίπτωση αυτή είναι σχεδόν αναπόφευκτη. Εξαίρεση θα μπορούσε να αποτελεί το ενδεχόμενο της μεταφοράς μάζας σε χρονική κλίμακα μικρότερη από τη θερμική κλίμακα του δέκτη αστέρα έτσι ώστε ο τελευταίος να αδυνατεί να αποκαθιστά τη θερμική του ισορροπία και τελικά να απορρίπτει την προσφερόμενη μάζα, εκδιώκοντάς την προς το σημείο L2 (ή ακόμα και το L3).

Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το ενδεχόμενο μιας αρνητικής παραμέτρου w_{L1} που, ισοδύναμα, εκφράζει ότι το μέλος με τη μικρότερη μάζα είναι και εκείνο το οποίο δέχεται το υλικό από το συνοδό του. Η μεταφορά μάζας μέσω του σημείου L1 συντάσσεται τότε με την απώλεια μάζας μέσω του σημείου L2 και, εφόσον η έντασή τους είναι εξίσου ισχυρή με την απώλεια μάζας μέσω αστρικού ανέμου, η περίοδος διατηρείται τελικά σταθερή. Ικανοποίηση της συνθήκης (5.71) μπορεί να πραγματοποιηθεί για πλήθος τιμών, τις οποίες όταν οι παράμετροι w, w_{L1} και w_{L2} λαμβάνουν, οδηγούν στην αλληλοεξουδετέρωση των εμπλεκόμενων μηχανισμών.

Ορισμένα παραδείγματα συνθετικών διαγραμμάτων O-C, τα οποία προέκυψαν από τη συναρτήση (5.27) για την περίπτωση ενός συστήματος 1.2+0.6 M_{Θ} και περιόδου 0.33 d, ενός δηλαδή τυπικού συστήματος επαφής, παρατίθενται στο Σχήμα V.9a υϊοθετώντας την προσέγγιση των KRL06 και προβλέποντας τις O-C μεταβολές για ένα χρονικό διάστημα της τάξης των 150 yr. Σε κάθε περίπτωση, υποθέσαμε ότι το μέλος με τη μεγαλύτερη μάζα είναι και ο δότης αστέρας ώστε η μεταφορά μάζας να οδηγεί σε μείωση της περιόδου και συνεπώς σε κοίλες O-C μεταβολες.





Σχήμα V.9. Συνθετικά διαγράμματα O-C (βήμα ≡ 4000 τροχιακοί κύκλοι) τα οποία προβλέπονται όταν ένα σύστημα 1.2+0.6 M_{Θ} και περιόδου 0.33 d υπόκειται στους μηχανισμούς της απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου και της μεταφοράς μάζας από το πρωτεύον στο δευτερεύον μέλος (a) και το αποτέλεσμα που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση της απώλειας μάζας με ρυθμό -10^{-8} & -5×10^{-8} M_{Θ}/yr για το κάθε μέλος αντίστοιχα, καθώς και της μεταφοράς μάζας με ρυθμό 5×10^{-8} M_{Θ}/yr (b).

Εύκολα διαφαίνεται ότι, εφόσον η απώλεια μάζας λαμβάνει χώρα από τους δύο αστέρες με ρυθμό -10^{-8} και -5×10^{-8} M_{Θ}/yr για το πρωτεύον και δευτερεύον μέλος αντίστοιχα, ενδεχόμενη μεταφορά μάζας ρυθμού 5×10^{-8} M_{Θ}/yr μέσω του σημείου L1 αποδεικνύεται ασθενέστερη ως προς τη διαμόρφωση του διαγράμματος O-C, οδηγώντας σε μια κυρτή τελικά μορφή. Ως εκ τούτου, η περίοδος παραμένει αύξουσα ακόμα και αν ροή υλικού λαμβάνει χώρα από τον αστέρα με τη μεγαλύτερη μάζα προς τον συνοδό του, όπως ακριβώς απεικονίζεται στο Σχήμα V.9b, καθώς η συνθήκη (5.69) είναι πλέον εκείνη που ικανοποιείται. Η διαπίστωση αυτή είναι ***ιδιαίτερης σημασίας***, καθώς η αύξηση της περιόδου σε ημιαποχωρισμένα συστήματα εύκολα οδηγεί στο παραπλανητικό συμπέρασμα της μεταφοράς μάζας από το μέλος με τη μικρότερη μάζα προς εκείνο με τη μεγαλύτερη, ως μοναδικό ενδεχόμενο.

Αξίζει τέλος να επισημάνουμε ότι η σχέση περιόδου-χρόνου (5.67) παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον όσον αφορά την εξελικτική πορεία ενός ημιαποχωρισμένου διπλού συστήματος με ψυχρά μέλη, όπως ακριβώς και η σχέση (5.59) στην περίπτωση των αποχωρισμένων συστημάτων. Υποθέτοντας ότι η μαγνητική πέδηση οδηγεί ένα αποχωρισμένο σύστημα (με λόγο μαζών $q \neq 1$) στη συνεχή μείωση της τροχιακής περιόδου, κάποια κρίσιμη χρονική στιγμή, η υπερχείλιση ενός εκ των δύο λοβών Roche θα λάβει χώρα και, ως εκ τούτου, η ενισχυμένη απώλεια μάζας εξαιτίας της υψηλής ταχύτητας ιδιοπεριστροφής των μελών θα αρχίσει να περιορίζεται, καθώς ένα τμήμα της θα μεταφέρεται στο συνοδό μέσω του σημείου L1. Εφόσον το πρωτεύον μέλος είναι και εξελικτικά πιθανότερο να καλύψει πρώτο τον αντίστοιχο λοβό Roche, η ροή μάζας προς το δευτερεύον μέλος θα αρχίσει να αποδυναμώνει το ρυθμό απώλειας μάζας μέσω ανέμου και κατά συνέπεια την αυξητική τάση της περιόδου. Στην πράξη, το καθεστώς το οποίο προβλέπεται από τη συνθήκη (5.69) αποσύρεται και ισχύ αναλαμβάνει η σχέση (5.71) κατά την οποία η απώλεια μάζας έχει πλήρως εξισωθεί σε ένταση με τη μεταφορά μάζας. Ο τελευταίος από τους δύο πιο πάνω μηχανισμούς θα είναι και εκείνος που τελικά θα επικρατήσει, οδηγώντας πλέον στη συγχώνευση των δύο μελών κάτω από το καθεστώς της σχέσης (5.70). Η πορεία αυτή ενισχύεται ακόμα περισσότερο κάτω από τους μηχανισμούς της μαγνητικής πέδησης, της βαρυτικής ακτινοβολίας και της απώλειας μάζας μέσω του σημείου L2 οι οποίοι επιταχύνουν την φθίνουσα τάση της περιόδου και καθιστούν το σενάριο της συγχώνεσης αναπόφευκτο.

4.3. Συνδυασμένη Δράση Όλων των Εξεταζόμενων Μηχανισμών

Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον της παρούσας διατριβής επικεντρώνεται στη γενικότερη εκείνη περίπτωση κατά την οποία όλοι οι μηχανισμοί που εξετάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες συμμετέχουν στη διάμορφωση της τροχιακής εξέλιξης ενός διπλού συστήματος αστέρων. Επομένως, η εφαρμογή των γενικευμένων εξισώσεων στροφορμής (5.5) και (5.6) θα λάβει πλέον χώρα χωρίς κανέναν από τους μέχρι τώρα περιορισμούς, με εξαίρεση βέβαια την υπόθεση συγχρονισμού και κυκλοποίησης. Η παραδοχή αυτή είναι άλλωστε άμεσα αποδεκτή στα πλαίσια τόσο των θεωρητικών (Zahn & Bouchet 1989) όσο και παρατηρησιακών μελετών (Koch & Hrivnak 1981) που αφορούν την παλιρροϊκή αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών σε συστήματα με περίοδο κάτω των 8 d περίπου. Κάτω από τις προϋποθέσεις αυτές, η διαφορική εξίσωση που διέπει τη μεταβολή της περιόδου θα περιλαμβάνει όρους που συναντήσαμε στις εξισώσεις (5.21), (5.35), (5.47) και (5.54) οι οποίοι προέκυψαν κατά τη μεμονωμένη μελέτη όλων των πιο πάνω μηχανισμών, καθώς και την επίδραση της ιδιοστροφορμής των μελών μέσω της σχέσης (5.64):

$$\frac{\dot{P}}{P} = w + w_{L1} - w_{L2} - bP^{-(a+\frac{1}{3})} - gP^{-\frac{8}{3}} + sP^{-\frac{7}{3}}\dot{P} \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{P} = \frac{(w + w_{L1} - w_{L2})P - bP^{\frac{2}{3}-a} - gP^{-\frac{5}{3}}}{1 - sP^{-\frac{4}{3}}} = f(P)}. \qquad (5.72)$$

Η εξίσωση (5.72) δεν είναι επιλύσιμη αναλυτικά με εξαίρεση ειδικές μόνο περιπτώσεις τις οποίες ήδη συναντήσαμε κατά τη συνδυασμένη παρουσία απώλειας μάζας και στροφορμής μέσω αστρικού ανέμου, οδηγώντας στη σχέση (5.58), καθώς και κατά τη γενικευμένη απώλεια μάζας μέσω όλων των δυνατών τρόπων, χωρίς να αγνοούμε την επίδραση της ιδιοστροφορμής των δύο μελών, οδηγώντας στη σχέση

(5.66). Αποσκοπώντας σε μια πρακτική προσέγγιση η οποία δεν απαιτεί την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (5.72), ακολουθούμε τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 2.2, περιγράφοντας εκ των προτέρων τη συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ μέσω ενός πολυωνύμου Taylor της μορφής (5.8). Η περαιτέρω μαθηματική μεθοδολογία, κάνοντας χρήση των σχέσων (5.1), (5.3) και (5.4), οδήγησε στον προσδιορισμό των συντελεστών του παραβολικού και κυβικού όρου μέσω των σχέσεων (5.15) και (5.17) αντίστοιχα, κάτω από τις αρχικές συνθήκες $[\tilde{E},t,\Delta T(\tilde{E}),P(\tilde{E})] = [0,T_0,0,P_e]$. Γενικεύοντας ακόμα περισσότερο την πολυωνυμική περιγραφή, θα υποθέσουμε ότι η περίοδος κατά τον αρχικό κύκλο, $\tilde{E} = 0$, δεν ισούται πλέον με την περίοδο εφημερίδας, δηλαδή $P(0) \neq P_e$, παραδοχή η οποία προσδίδει στο συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου την ακόλουθη μορφή:

$$c_2 = \frac{P(0) f(P)\big|_{\tilde{E}=0}}{2} = \frac{P(0)}{2} \cdot \frac{w_T P(0) - bP(0)^{\frac{2}{3}-a} - gP(0)^{-\frac{5}{3}}}{1 - sP(0)^{-\frac{4}{3}}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{w + w_{L1} - w_{L2} = \frac{2c_2}{P(0)^2}\left[1 - sP(0)^{-\frac{4}{3}}\right] + bP(0)^{-\left(a+\frac{1}{3}\right)} + gP(0)^{-\frac{8}{3}}}. \qquad (5.73)$$

Η σχέση (5.73) αποδεικνύεται ένα μαθηματικό εργαλείο θεμελιώδους αξίας για την παρούσα διδακτορική διατριβή, καθώς συνδέει σημαντικές φυσικές παραμέτρους του συστήματος με τον παραβολικό συντελεστή, c_2, του πολυωνύμου περιγραφής των O-C μεταβολών. Η σχέση αυτή οδηγεί σε αποδεκτά συμπεράσματα ανεξάρτητα από τις τιμές και το πρόσημο του συντελεστή c_2, κάτω από διαφορετική απλά ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σχέση (5.73) όταν ο συντελεστής είναι μηδενικός, ή ισοδύναμα, όταν η διαμόρφωση του εκάστοτε διαγράμματος O-C είναι γραμμική. Στην ειδική αυτή περίπτωση, η σχέση (5.73) μας πληροφορεί ότι κατάλληλος συνδυασμός διάφορων μηχανισμών ενδέχεται να καθιστά την τροχιακή περίοδο αμετάβλητη, όπως π.χ. κάτω από την κοινή παρουσία της απώλειας μάζας και της μαγνητικής πέδησης που αναλυτικά περιγράψαμε στην υποενότητα 4.1 ή κάτω από τη συνδυασμένη δράση απώλειας και μεταφοράς μάζας με διάφορες μορφές που μελετήθηκε λεπτομερώς στην υποενότητα 4.2.

Μελετώντας στην τρίτη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου κάθε μηχανισμό ξεχωριστά, εξτάστηκε η επάρκεια της παραβολικής αναπαράστασης ενός διαγράμματος O-C και αποδείχθηκε ανεξαιρέτως ικανοποιητική, στο περιορισμένο τουλάχιστον χρονικό διάστημα των 100 yr καταγεγραμμένων χρόνων ελαχίστων. Μοναδικό ενδεχόμενο μη αμελητέας συμμετοχής του κυβικού όρου αφορά τους μηχανισμούς απώλειας και μεταφοράς μάζας, όταν όμως οι τελευταίοι λαμβάνουν χώρα κάτω από εξαιρετικά υψηλούς ρυθμούς, και πιο συγκεκριμένα όταν ξεπερνούν τις 10^{-6} M_{Θ}/yr. Αποκλειστικά και μόνο κάτω από τις προϋποθέσεις αυτές, ο συντελεστής του τριτοβάθμιου όρου, c_3, θα μπορούσε να ενεργήσει συνοδευτικά και να μας προσφέρει πολύτιμες πληροφορίες για τις αντίστοιχες φυσικές παραμέτρους:

$$c_3 = \frac{P(0) f(P)\big|_{\tilde{E}=0}}{6}\left[P(0)\frac{df(P)}{dP}\bigg|_{\tilde{E}=0} + f(P)\big|_{\tilde{E}=0}\right] \Leftrightarrow$$

$$c_3 = \frac{P(0) w_T P(0)}{6\left(1 - sP(0)^{-4/3}\right)}\left[\frac{P(0) w_T}{1 - sP(0)^{-4/3}} - \frac{w_T P(0)^2}{\left(1 - sP(0)^{-4/3}\right)^2}\cdot\frac{4}{3} sP(0)^{-7/3} + \frac{w_T P(0)}{1 - sP(0)^{-4/3}}\right] \Leftrightarrow$$

$$c_3 = \frac{w_T^2 P(0)^3}{3\left(1 - sP(0)^{-4/3}\right)^2} - \frac{w_T^2 P(0)^3 2sP(0)^{-7/3}}{9\left(1 - sP(0)^{-4/3}\right)^3} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{w + w_{L1} - w_{L2} = \left\{\left[\frac{P(0)^3}{3\left(1 - sP(0)^{-4/3}\right)^2} - \frac{2sP(0)^{2/3}}{9\left(1 - sP(0)^{-4/3}\right)^3}\right]^{-1} c_3\right\}^{\frac{1}{2}}.} \qquad (5.74)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, οι πολυωνυμικοί συντελεστές μπορούν να εκτιμηθούν και, τελικά, με κατάλληλο συνδυασμό των σχέσεων (5.73) και (5.74) να οδηγήσουν στον προσδιορισμό των ζητούμενων φυσικών παραμέτρων του προβλήματος. Ας σημειωθεί ότι η τιμή της περιόδου στον μηδενικό τροχιακό κύκλο, $P(0)$, μπορεί με ασφάλεια να εκτιμηθεί με τη βοήθεια της σχέσης (5.20), δηλαδή $P(0) = c_1 + P_e$, και στη συνέχεια να αντικατασταθεί στις δύο πιο πάνω σχέσεις. Δυστυχώς, η παρουσία υψηλών ρυθμών απώλειας και μεταφοράς μάζας στα διπλά συστήματα αστέρων αναμένεται εξαιρετικά σπάνια με άμεσο αποτέλεσμα την αδυναμία αξιοποίησης της σχέσης (5.74) και την επικέντρωσή μας στη σχέση (5.73) ως μοναδικό αξιόπιστο μέσο εξαγωγής πληροφορίας σχετικά με τις ζητούμενες άγνωστες παραμέτρους.

4.4. Εφαρμογή σε Πραγματικά Διπλά Συστήματα Αστέρων

Μετά από τη λεπτομερή θεωρητική μελέτη των μηχανισμών που αναμένεται να δρουν στα διπλά συστήματα αστέρων, εφαρμόζουμε την προτεινόμενη μεθοδολογία σε γνωστά συστήματα τα οποία δηλαδή διαθέτουν χρόνους ελαχίστου πολλών δεκαετιών και οι φυσικές παράμετροι των μελών είναι γνωστές με μεγαλη ακρίβεια. Σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες, μια ολοκληρωμένη μελέτη διπλών αστρικών συστημάτων μέσω της ανάλυσης των διαγραμμάτων O-C θα μπορούσε να περιλαμβάνει τρεις ομάδες, έτσι ώστε να γίνει οργανωμένη διαχείριση της μοντελοποίησης των φυσικών μηχανισμών, να εφαρμοστεί και να ελεγχθεί με δόκιμο τρόπο η μεθοδολογία που εισάγεται στην παρούσα διατριβή, καθώς και να αξιοποιηθεί με τον καλύτερο δυνατό τρόπο η πληροφορία που ένα διάγραμμα O-C φέρει.

Η *πρώτη* από τις ομάδες αυτές αφορά βραχυπερίοδα (αλλά και μέσης περιόδου) αποχωρισμένα συστήματα με μέλη μεταγενέστερων φασματικών τύπων στα οποία οι μοναδικοί μηχανισμοί που αναμένεται να επιδρούν στη διαμόρφωση των διαγραμμάτων O-C είναι η απώλεια μάζας μέσω αστρικών ανέμων και η μαγνητική πέδηση. Το δείγμα αυτό μας δίνει τη μοναδική δυνατότητα εκτίμησης του ρυθμού απώλειας μάζας από το σύστημα με μεγάλη ακρίβεια, καθώς αποτελεί τη μοναδική άγνωστη παράμετρο, εφόσον βέβαια εφαρμοστούν τα μοντέλα πέδησης που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι εκτιμώμενοι ρυθμοί απώλειας μάζας μπορούν στη συνέχεια να συγκριθούν με εκείνους που προβλέπονται από κατάλληλες ημιεμπειρικές σχέσεις οι οποίες επίσης έχουν δοθεί στο τέταρτο κεφάλαιο.

Η *δεύτερη* ομάδα συστημάτων που αξίζει να μελετηθεί αφορά βραχυπερίοδα ημιαποχωρισμένα συστήματα (αλλά και επαφής) των οποίων η γεωμετρία Roche να είναι με ακρίβεια γνωστή ώστε με ασφάλεια να γνωρίζουμε ποιό είναι το μέλος που έχει καλύψει τον ομώνυμο λοβό του. Με τον τρόπο αυτό θα μπορούμε να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματά μας όσον αφορά τον προσανατολισμό της μεταφοράς μάζας, ακόμα και αν η μορφή των αντίστοιχων διαγραμμάτων O-C, παραπλανητικά, υποδεικνύει αντίθετη φορά. Στην περίπτωση αυτή, τόσο η απώλεια μάζας όσο και η μαγνητική πέδηση θα περιγραφούν εκ των προτέρων από τα ήδη υπάρχοντα ημιεμπειρικά μοντέλα ώστε ο ρυθμός μεταφοράς μάζας να είναι η μόνη παράμετρος προς αναζήτηση.

Η *τρίτη*, τέλος, ομάδα διπλών αστρικών συστημάτων που αξίζει την προσοχή μας και την περαιτέρω διερεύνηση μέσω της νεοεισαχθείσας μεθοδολογίας, αφορά μια σπάνια κατηγορία ολιγάριθμων συστημάτων (υπερ)επαφής τα οποία διαθέτουν μέλη προγενέστερων φασματικών τύπων. Στα συστήματα αυτά αναμένονται ιδιαίτερα υψηλοί ρυθμοί απώλειας και μεταφοράς μάζας οι οποίοι οδηγούν και στην απομάκρυνση υλικού από το σύστημα μέσω του σημείου L2. Εφόσον η χρονική κλίμακα στην οποία λαμβάνει χώρα το φαινόμενο αυτό είναι δυναμική, ο ρυθμός απώλειας μάζας αναμένεται της τάξης ή ακόμα και μεγαλύτερος από -10^{-6} $M_{\odot}$/yr, γεγονός το οποίο ενισχύει το ενδεχόμενο παρουσίας του κυβικού όρου κατά την πολυωνυμική περιγραφή ενός διαγράμματος O-C σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν στην τρίτη ενότητα σχετικά με την επάρκεια της παραβολικής αναπαράστασης.

Εξαιτίας του αρκετά μεγάλου πλήθους ελεύθερων παραμέτρων, στην παρούσα ενότητα της διδακτορικής διατριβής επικεντρώνουμε τη μελέτη μας αποκλειστικά στην πρώτη ομάδα από εκείνες που προτάθηκαν, αφήνοντας τις υπόλοιπες δύο ως αντικείμενο μελλοντικής ερευνητικής μελέτης. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε αποχωρισμένα και μόνο διπλά εκλειπτικά συστήματα ώστε να αποκλείσουμε την ενδεχόμενη παρουσία πολυάριθμων μηχανισμών και να περιοριστούμε αποκλειστικά στην απώλεια μάζας και τη μαγνητική πέδηση μέσω αστρικού ανέμου.

Αποσκοπώντας στην απομάκρυνση του ενδεχομένου μιας άστοχης φωτομετρικής επίλυσης και συνεπώς στη λανθασμένη εκτίμηση της γεωμετρίας Roche ενός συστήματος, αναζητήσαμε συστήματα με λόγο μαζών πολύ κοντά στη μονάδα ώστε η μεταφορά μάζας να αποκλειστεί. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η κίνηση αυτή εξυπηρετεί τη μελέτη μας με δύο τρόπους. Κατά πρώτο και κύριο λόγο, παρατηρούμε ότι τόσο στην περίπτωση της εξίσωσης στροφορμής (5.5) των TH91 όσο και εκείνης των KRL06 (5.6), ο όρος που περιγράφει τη μεταφορά μάζας μέσω του σημείου L1 διαγράφεται ($M_1 \approx M_2$ ή ισοδύναμα $q \approx 1$), ακόμα και αν το φαινόμενο αυτό βρίσκεται σε εξέλιξη. Κατά δεύτερο λόγο, εύλογα μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο ρυθμός απώλειας μάζας, dM_w/dt, είναι ο ίδιος και για τα δύο μέλη του συστήματος, εφόσον τουλάχιστον ανήκουν στην κύρια ακολουθία. Επομένως, η μοναδική άγνωστη ποσότητα θα είναι ο ρυθμός αυτός με την προϋπόθεση ότι οι ημιεμπερικοί νόμοι που διέπουν τη μαγνητική πέδηση και έχουν υϊοθετηθεί στη συγκεκριμένη διατριβή είναι έγκυροι. Ως εκ τούτου, εφαρμόσαμε τη σχέση (5.73) για την περίπτωση ενός αποχωρισμένου συστήματος με $q \approx 1$, θέτοντας δηλαδή $w_{L1} = w_{L2} = 0$, αφήνοντας ελεύθερες τις παραμέτρους a και b της μαγνητικής πέδησης και άγνωστο το ρυθμό απώλειας μάζας (Nanouris et al. 2012b):

$$\boxed{\dot{M}_w \approx -\frac{2(M_1+M_2)}{3(q+q^{-1})+4}\cdot\left\{\frac{2c_2}{P_e^2}\left[1-sP_e^{-\frac{4}{3}}\right]+bP_e^{-\left(a+\frac{1}{3}\right)}+gP_e^{-\frac{8}{3}}\right\}}. \qquad (5.75)$$

Στηριζόμενοι στα κριτήρια που τέθηκαν προηγουμένως, αναζητήθηκαν συστήματα μέσα από τέσσερις επίσημους καταλόγους μεταβλητών αστέρων μέσα από μια διαδικασία των οποίων τα βήματα αφορούσαν κατά σειρά τη γεωμετρία Roche, την εξελικτική κατάσταση των μελών, την τροχιακή περίοδο, καθώς και το πλήθος των διαθέσιμων χρόνων ελαχίστων (Νανούρης 2006). Πιο συγκεκριμένα, υϊοθετήσαμε ως σημείο αναφοράς τον κατάλογο *GCVS* (*General Catalogue of Variable Stars, fourth edition, electronic version*, Kholopov et al. 1992), ώστε πληροφορίες από οποιαδήποτε άλλη πηγή να διασταυρώνονται πάντοτε με εκείνον, και επικεντρώσαμε τη μελέτη μας στον ‘‘*Άτλαντα των O-C Διαγραμμάτων*’’ (‘‘*An Atlas of O-C Diagrams of Eclipsing Binary Stars*’’, Kreiner et al. 2001) ώστε να έχουμε άμεση εικόνα του αριθμού των χρόνων ελαχίστων για κάθε υποψήφιο σύστημα, αλλά και του βάθους χρόνου που αυτά καλύπτουν. Εξατομικευμένη αναζήτηση δημοσιευμένων εργασιών στη διεθνή βιβλιογραφία για κάθε πλέον υποψήφιο σύστημα ακολούθησε στη συνέχεια τη γενικότερη διερεύνηση ώστε να εξακριβωθεί η ομοιότητα των φυσικών παραμέτρων των μελών, όπως απαιτήθηκε ως βασικό κριτήριο επιλογής.

Επτά συνολικά συστήματα κρίθηκαν τελικά άξια προς περαιτέρω ανάλυση (UV Leo, ER Vul, YY Gem, CV Boo, DU Leo, HS Hya και WZ Oph), τα φυσικά χαρακτηριστικά των οποίων παρουσιάζονται στον Πίνακα Π.5.10, ενώ τα αντίστοιχα διαγράμματα O-C απεικονίζονται στο Σχήμα V.10 κάνοντας χρήση εφημερίδων της μορφής (3.2) με παραμέτρους T_0 και P_e τις οποίες παραθέτουμε στον Πίνακα Π.5.11. Χρησιμοποιήθηκαν σχεδόν αποκλειστικά φωτοηλεκτρικοί και CCD χρόνοι ελαχίστων (pe) οι οποίοι συλλέχθηκαν από την ευρύτερη διεθνή βιβλιογραφία με σημείο αναφοράς την ηλεκτρονική βάση δημοσιευμένων χρόνων ελαχίστων ‘‘*O-C gateway*’’ (Paschke & Brat 2006), ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις προστέθηκαν και χρόνοι προερχόμενοι από φωτογραφική φωτομετρία ώστε να διευρυνθεί ο χρονικός ορίζοντας μελέτης των μεταβολών της τροχιακής περιόδου. Το σφάλμα που αποδόθηκε στους χρόνους που έχουν προσδιοριστεί μέσω μιας τυπικής φωτογραφικής φωτομετρίας (pg) ήταν τριπλάσιο (± 0.003 d) σε σχέση με τους αντίστοιχους φωτοηλεκτρικούς (± 0.001 d), ενώ το σφάλμα αυτό έγινε τριάντα φορές μεγαλύτερο (± 0.03 d) όταν η φωτομετρία στηριζόταν σε πλάκες επισκόπησης (ptr).

Π.5.10. Φυσικές παράμετροι των εξεταζόμενων διπλών εκλειπτικών συστημάτων.

Σύστημα	T_1 [K]	T_2 [K]	L_1 [L_Θ]	L_2 [L_Θ]	k_1^2	k_2^2	M_1 [M_Θ]	M_2 [M_Θ]	R_1 [R_Θ]	R_2 [R_Θ]
UV Leo(1)	6000	5970	1.444	1.323	0.065	0.065	0.976	0.931	1.115	1.078
ER Vul(2)	6000	5514	1.814	1.039	0.042	0.062	1.160	1.050	1.250	1.120
YY Gem(3)	3820	3820	0.073	0.073	0.127	0.127	0.599	0.599	0.619	0.619
CV Boo(4)	5760	5670	1.574	1.279	0.051	0.078	1.032	0.968	1.262	1.173
DU Leo(5)	6050	6050	1.510	1.510	0.065	0.065	0.935	0.935	1.175	1.175
HS Hya(6)	6500	6400	2.600	2.223	0.052	0.052	1.255	1.219	1.275	1.216
WZ Oph(7)	6165	6115	2.570	2.512	0.035	0.046	1.227	1.220	1.401	1.419

(1)Kjurkchieva & Marchev (2007) (2)Kjurkchieva et al. (2003) (3)Torres & Ribas (2002) (4)Torres et al. (2008) (5)Popper (1998) (6)Torres et al. (1997) (7)Clausen et al. (2008a)

Π.5.11. Γραμμικές εφημερίδες που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των διαγραμμάτων O-C.

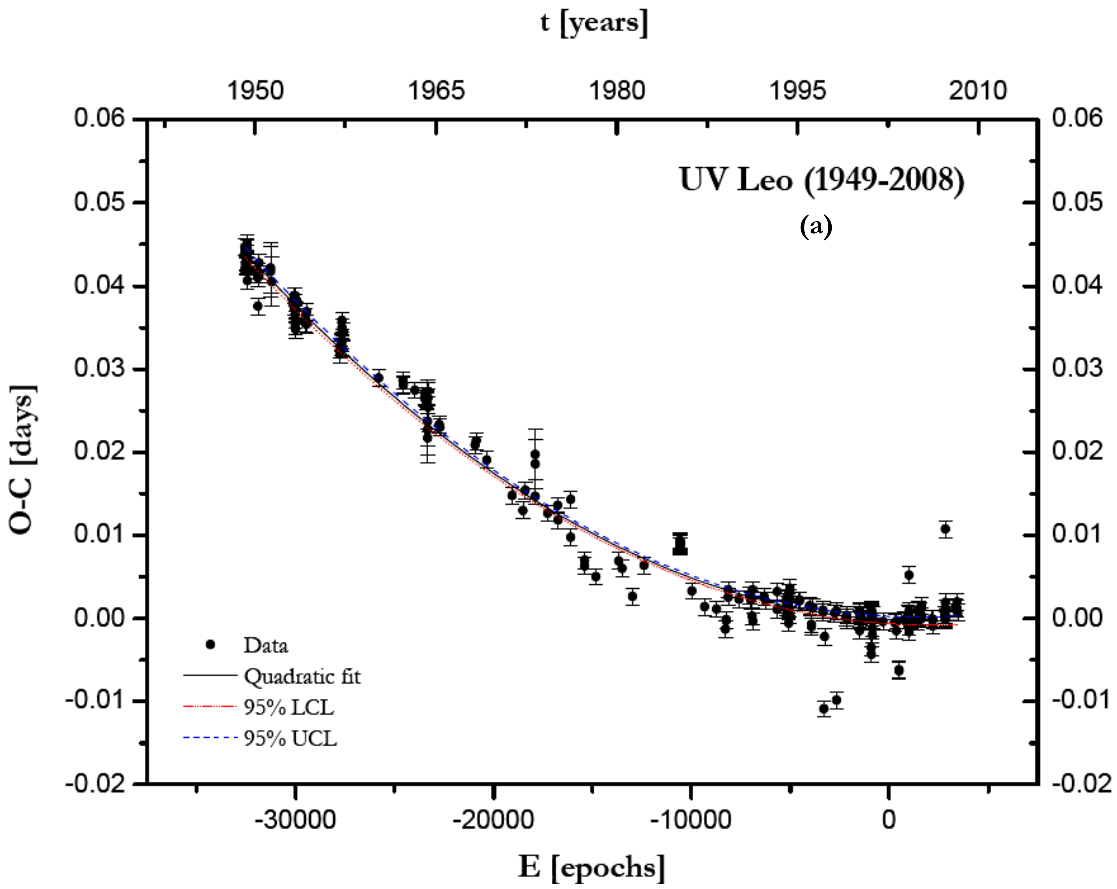
Σύστημα	T_0 [HJD]	P_e [d]	*Πηγή*
UV Leo	2452500.135900	0.60008685	Kreiner (2004)
ER Vul	2440182.262100	0.69809409	Ibanoglu et al. (1985)
YY Gem	2426228.453680	0.81428230	Binnendijk (1950)
CV Boo	2452321.845322	0.84699342	Torres et al. (2008)
DU Leo	2450860.668100	1.37418510	Clausen et al. (2001)
HS Hya	2441374.595400	1.56803500	Gyldenkerne et al. (1975)
WZ Oph	2450535.783310	4.18350681	Clausen et al. (2008b)

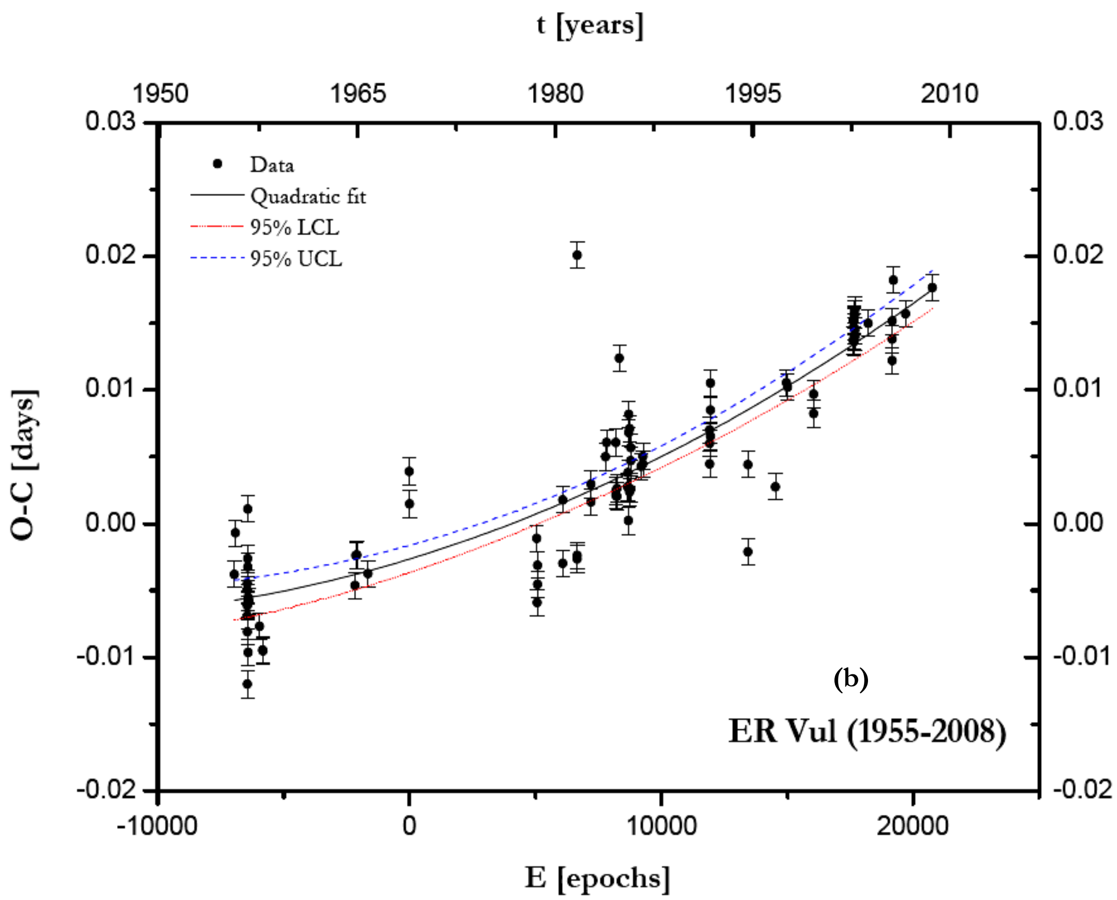
Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι στον Πίνακα Π.5.10 έχουν προστεθεί, εκτός από τις θεμελιώδεις φυσικές παραμέτρους (ενεργός θερμοκρασία, φωτεινότητα, μάζα και ακτίνα), το τετράγωνο της αδιάστατης ακτίνας αδράνειας των μελών για το κάθε εξεταζόμενο σύστημα. Σε αντίθεση με τις υπόλοιπες παραμέτρους, η αδιάστατη ακτίνα αδράνειας δεν προσδιορίζεται μέσα από την ταυτόχρονη φωτομετρική και φασματοσκοπική επίλυση της καμπύλης φωτός και της καμπύλης ακτινικών ταχυτήτων, αλλά εκτιμάται με βάση κατάλληλα θεωρητικά μοντέλα τα οποία αποσκοπούν στην περιγραφή της κατανομής του εσωτερικού των αστέρων. Στην προκειμένη, υϊοθετήθηκαν οι τιμές που προκύπτουν από το μοντέλο του Claret (1995) για αστέρες ηλιακής χημικής σύστασης ($X = 0.70$, $Y = 0.28$, $Z = 0.02$).

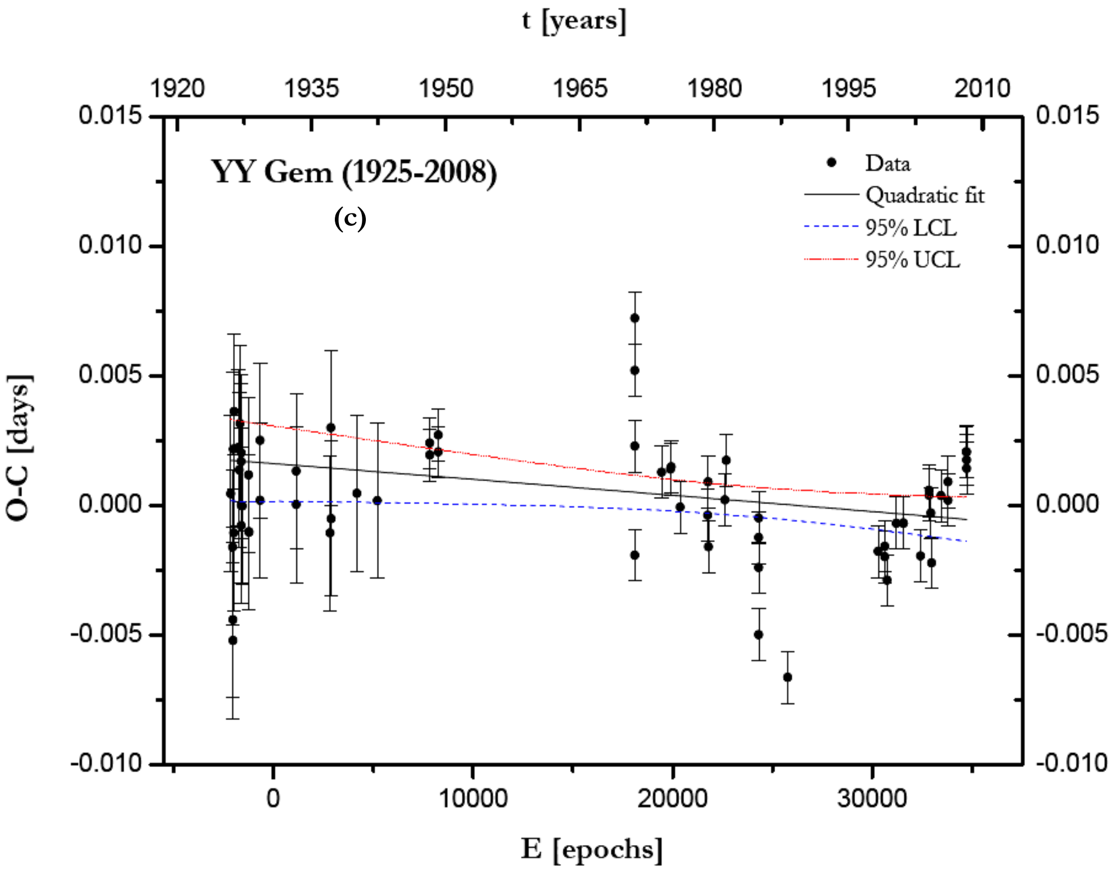
Οι συντελεστές c_1 και c_2 που προέκυψαν από την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού παρουσιάζονται στον Πίνακα Π.5.12 μαζί με τα τυπικά τους σφάλματα. Σε όσες περιπτώσεις το σφάλμα ξεπερνούσε την εκτιμώμενη τιμή του αντίστοιχου συντελεστή, θεωρήσαμε ότι ο συγκεκριμένος συντελεστής είναι μηδενικός (τιμές σε έντονο μαύρο τόνο).

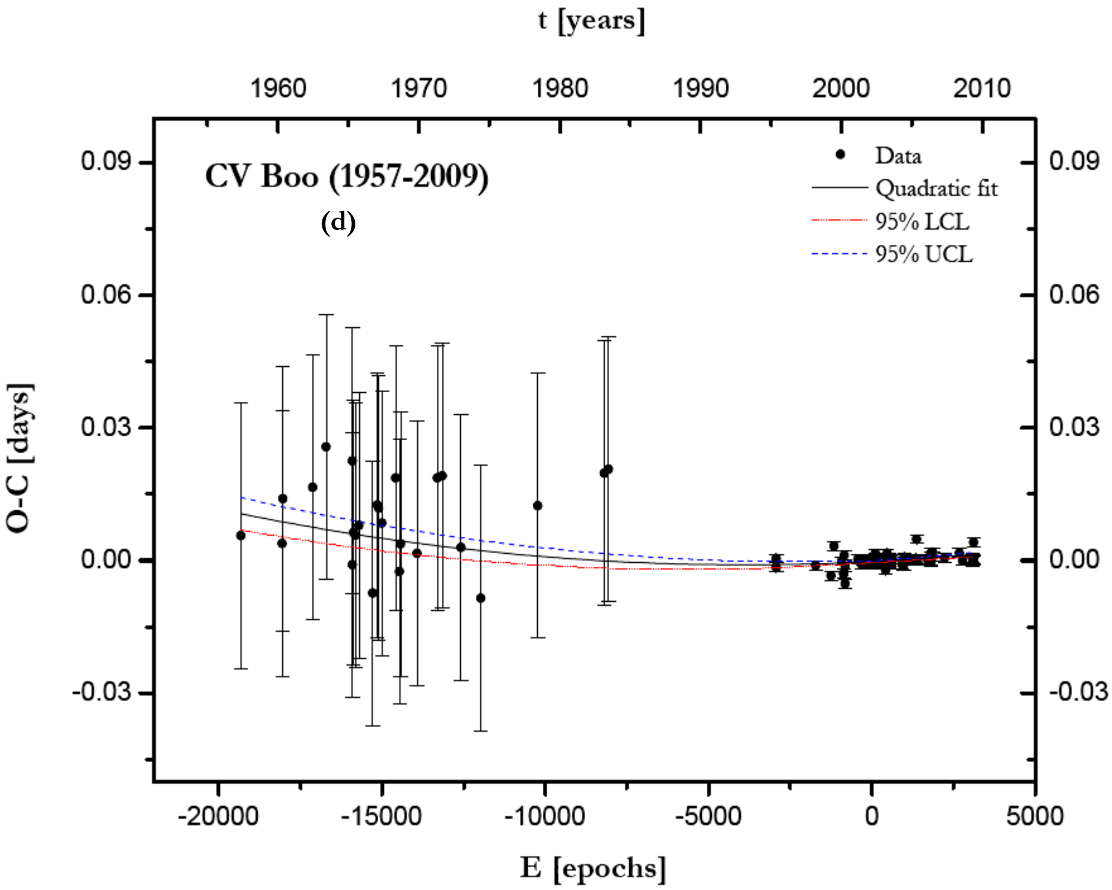
Π.5.12. Χρονικό εύρος διαθέσιμων παρατηρήσεων και συντελεστές πολυωνυμικής αναπαράστασης.

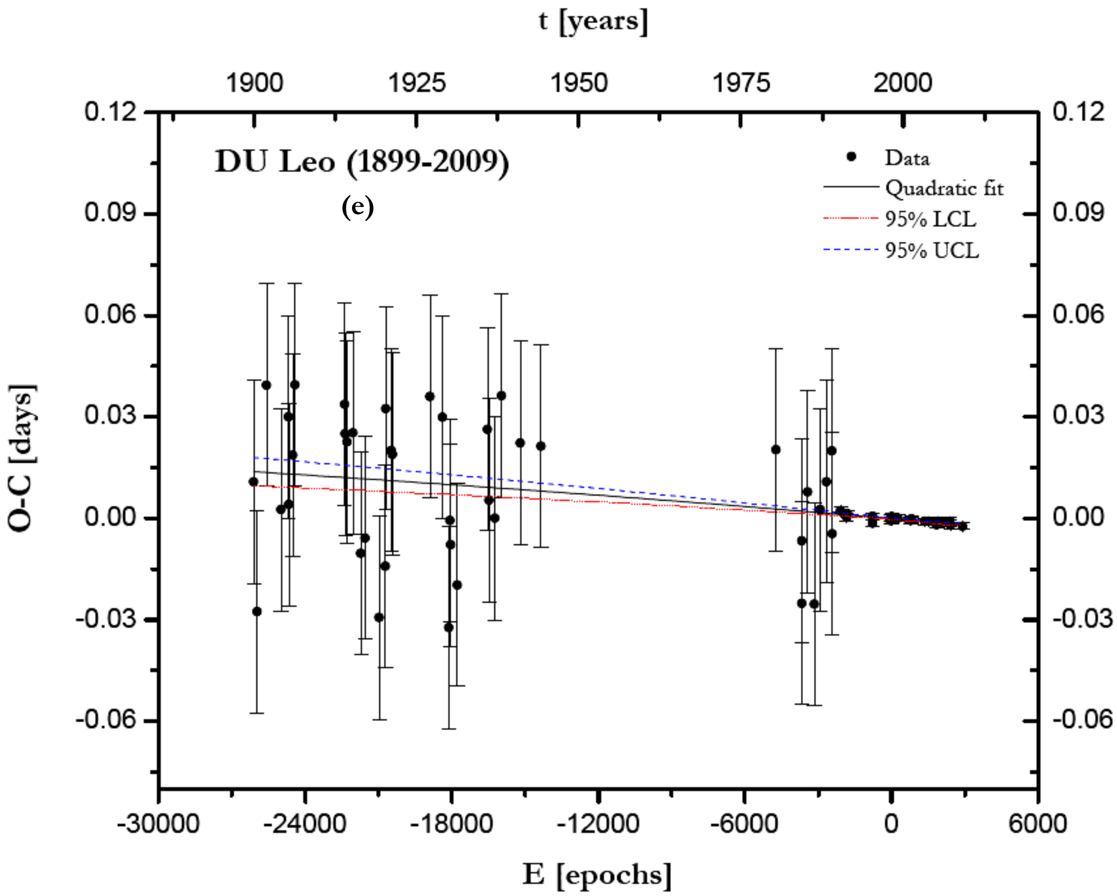
Σύστημα	*Χρονικό Παράθυρο*	*Χρόνοι Ελαχίστου (pe/pg/ptr)*			c_1 [10^{-7} d/E]	c_2 [10^{-11} d/E^2]
UV Leo	1949-2008	207	10	-	-1.28 ± 0.49	3.78 ± 0.16
ER Vul	1955-2008	89	-	-	5.75 ± 0.80	1.91 ± 0.58
YY Gem	1925-2008	41	27	-	**-0.60 ± 1.00**	**0.00 ± 0.26**
CV Boo	1957-2009	96	-	25	3.72 ± 0.94	4.83 ± 2.28
DU Leo	1899-2009	26	-	40	-6.11 ± 0.87	**-0.31 ± 0.82**
HS Hya	1922-2007	17	-	83	63.0 ± 6.1	**-2.95 ± 7.72**
WZ Oph	1899-2007	21	-	86	**-0.13 ± 6.80**	**-12.5 ± 13.4**


t [years]
1950
1965
1980
1995
2010
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
-0.01
-0.02
O-C [days]
UV Leo (1949-2008)
(a)
Data
Quadratic fit
95% LCL
95% UCL
-30000
-20000
-10000
0
E [epochs]

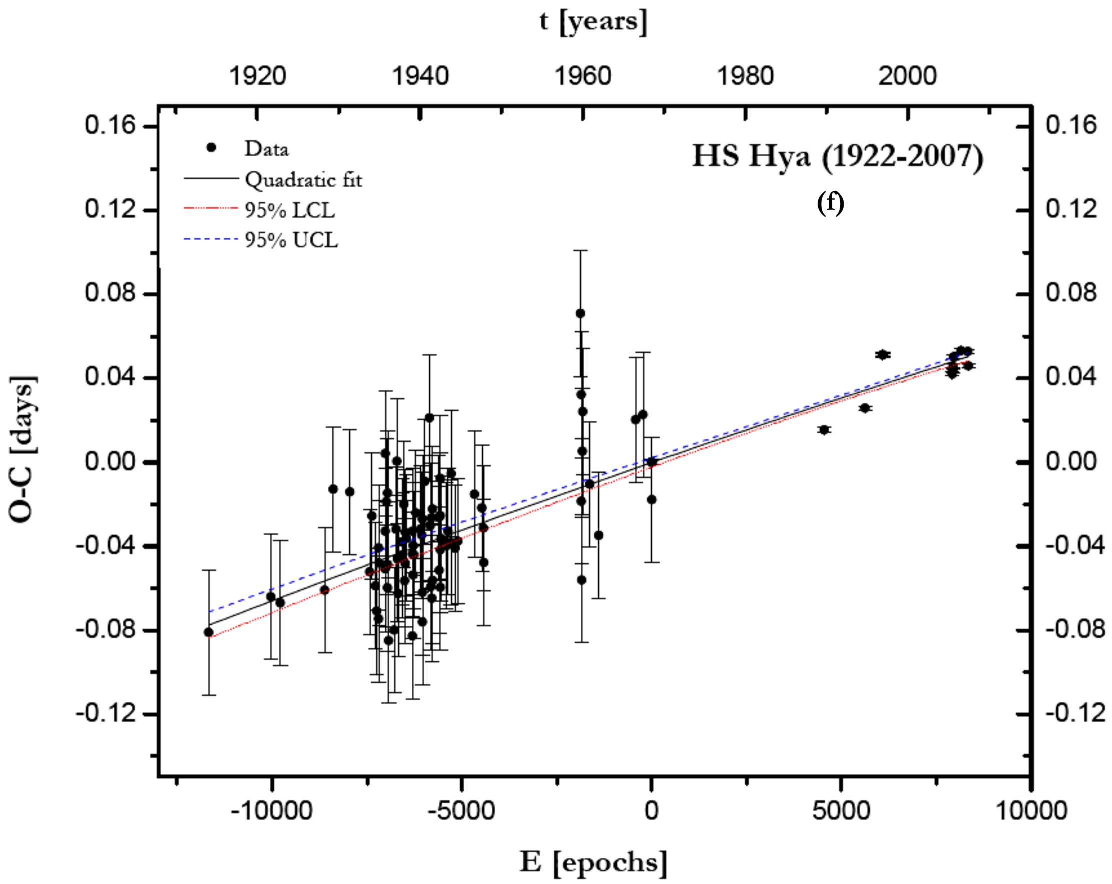

t [years]
1950
1965
1980
1995
2010
0.03
0.02
0.01
0.00
-0.01
-0.02
O-C [days]
Data
Quadratic fit
95% LCL
95% UCL
(b)
ER Vul (1955-2008)
-10000
0
10000
20000
E [epochs]


t [years]
1920
1935
1950
1965
1980
1995
2010
0.015
0.010
0.005
0.000
-0.005
-0.010
O-C [days]
YY Gem (1925-2008)
(c)
Data
Quadratic fit
95% LCL
95% UCL
0
10000
20000
30000
E [epochs]

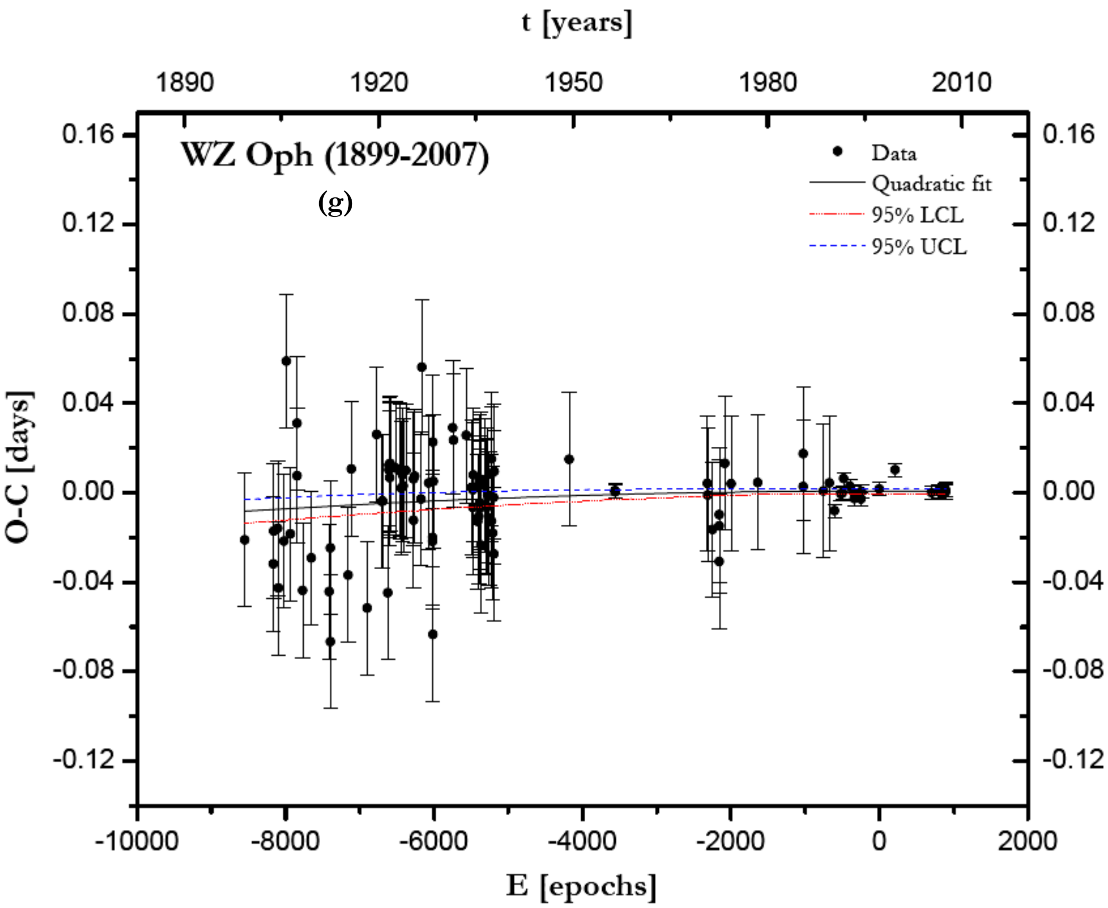

t [years]
1960
1970
1980
1990
2000
2010
0.09
0.06
0.03
0.00
-0.03
O-C [days]
CV Boo (1957-2009)
(d)
Data
Quadratic fit
95% LCL
95% UCL
-20000
-15000
-10000
-5000
0
5000
E [epochs]



t [years]
1900
1925
1950
1975
2000
0.12
0.09
0.06
0.03
0.00
-0.03
-0.06
DU Leo (1899-2009)
(e)
Data
Quadratic fit
95% LCL
95% UCL
O-C [days]
-30000
-24000
-18000
-12000
-6000
0
6000
E [epochs]



t [years]
1920
1940
1960
1980
2000
0.16
0.12
0.08
0.04
0.00
-0.04
-0.08
-0.12
Data
Quadratic fit
95% LCL
95% UCL
HS Hya (1922-2007)
(f)
O-C [days]
-10000
-5000
0
5000
10000
E [epochs]



Σχήμα V.10. Διαγράμματα O-C και η ελαχιστοτετραγωνική τους περιγραφή με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού (μαύρη συνεχής καμπύλη) για τα εξεταζόμενα συστήματα UV Leo (a), ER Vul (b), YY Gem (c), CV Boo (d), DU Leo (e), HS Hya (f) και WZ Oph (g). Στα διαγράμματα διακρίνονται και τα όρια (για επίπεδο εμπιστοσύνης ίσο με 95%) μέσα στα οποία το πολυώνυμο μπορεί να παλινδρομείται (κυανές και κόκκινες διακεκομμένες καμπύλες).

Οι εκτιμώμενοι ρυθμοί απώλειας μάζας προέκυψαν μέσω της σχέσης (5.75) για όλο το εύρος τιμών που μπορεί να λάβει ο εκθέτης *a* υϊοθετώντας το μοντέλο V82, καθώς είναι εκείνο που αποδείχθηκε το πλέον επιτυχές κατά τη θεωρητική μελέτη που πραγματοποιήθηκε στην υποενότητα 3.3.2 του τέταρτου κεφαλαίου όταν οι συντελεστές βαθμονόμησης K_{kaw} των μοντέλων V82 και VVM89 συγκρίθηκαν με τις τιμές αναφοράς της A98. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον Πίνακα Π.5.13 σημειώνοντας με έντονο μαύρο τόνο τις επικρατέστερες τιμές του ρυθμού απώλειας μάζας σύμφωνα με τα κριτήρια της A98 σχετικά με την εκτίμηση των συντελεστών C_{br}. Πιο συγκεκριμένα, η επιλογή του πιθανότερου ρυθμού απώλειας μάζας στηρίχθηκε στην τιμή της τροχιακής γωνιακής ταχύτητας Ω_{kep} σε σχέση με τις κρίσιμες τιμές Ω_{crit} και Ω_{sat} ώστε να εκτιμηθούν οι αντίστοιχοι συντελεστές C_{br} όπως εκείνοι προβλέπονται μέσα από τις σχέσεις (4.65), (4.66) και (4.67) μαζί με τις αντίστοιχες τιμές του εκθέτη *a*. Οι παράμετροι *b*, *g* και *s* εκτιμήθηκαν τελικά μέσα από τις σχέσεις (5.36), (5.48) και (5.65), αντίστοιχα.

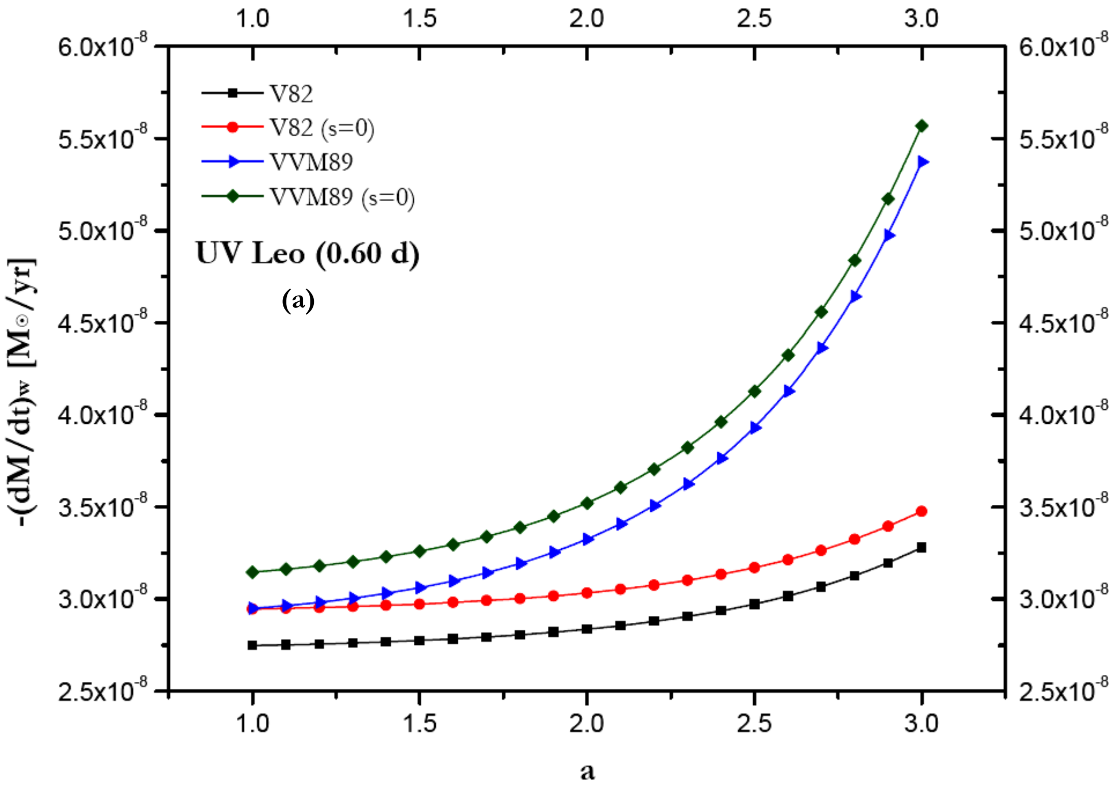
Οι ρυθμοί απώλειας μάζας που προβλέπονται υϊοθετώντας τόσο το μοντέλο V82 όσο και εκείνο των VVM89 απεικονίζονται στο Σχήμα V.11 για δύο από τα εξεταζόμενα συστήματα και πιο συγκεκριμένα για ένα βραχείας (UV Leo) και ένα μέσης περιόδου (DU Leo). Στο σχήμα αυτό συγκρίνονται επίσης οι τιμές που προκύπτουν από τα μοντέλα V82 και VVM89 παραλείποντας την επίδραση της ιδιοστροφορμής των μελών, θέτοντας δηλαδή $s = 0$ κατά τον υπολογισμό του ρυθμού απώλειας μάζας μέσα από τη σχέση (5.75). Εκείνο το οποίο παρατηρούμε είναι η αμελητέα συμμετοχή του όρου αυτού στο σύστημα DU Leo το οποίο διαθέτει αστέρες ηλιακού τύπου και έχει περίοδο 1.37 d, χαρακτηριστικά που προσδίδουν στο σύστημα μεγάλη τροχιακή ακτίνα σε σχέση με εκείνη των δύο μελών. Αντίθετα, στο σύστημα UV Leo η συνεισφορά των όρων ιδιοστροφορμής αποδεικνύεται σχετικά μικρή, σε καμία περίπτωση όμως αμελητέα, καθώς η μικρή περίοδος των 0.60 d οδηγεί σε τροχιακή ακτίνα συγκρίσιμη με εκείνη των δύο μελών.

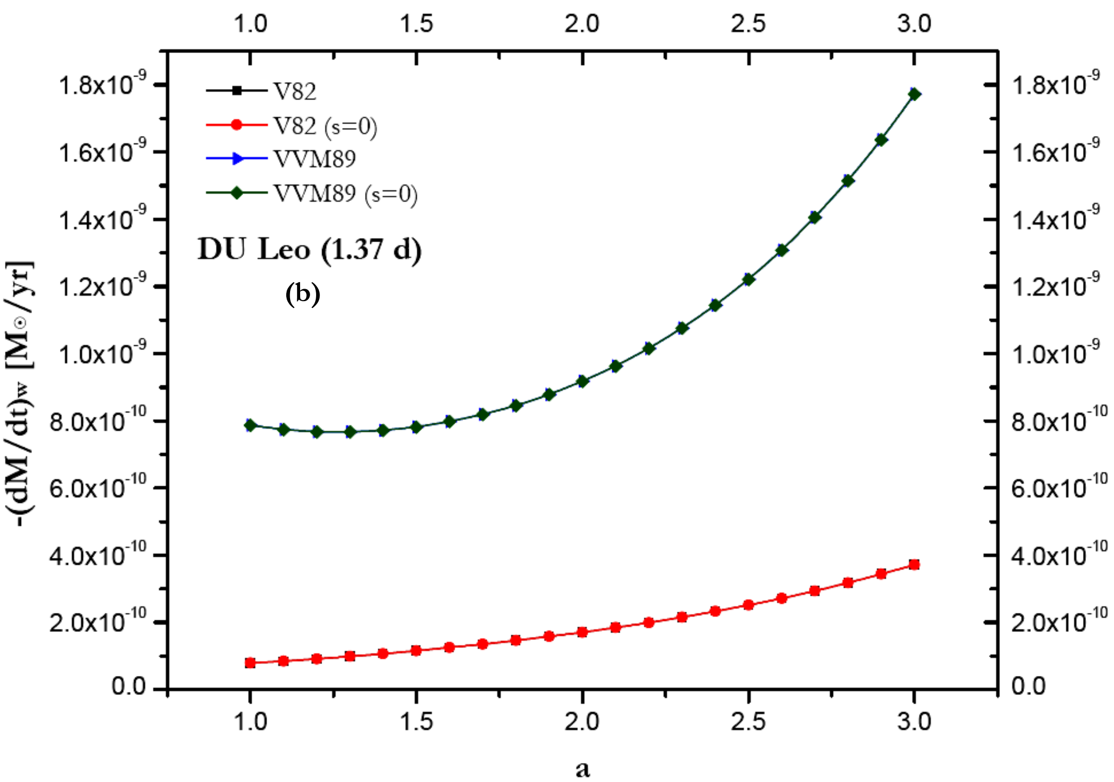
Π.5.13. Εκτιμώμενος ρυθμός απώλειας μάζας για διάφορες τιμές του εκθέτη *a*.

a	UV Leo	ER Vul	YY Gem	CV Boo	DU Leo	HS Hya	WZ Oph
3.0	-3.28×10^{-8}	-1.50×10^{-8}	-2.57×10^{-9}	-2.04×10^{-8}	-3.71×10^{-10}	-1.79×10^{-10}	$\mathbf{-7.34\times10^{-12}}$
2.7	-3.07×10^{-8}	-1.39×10^{-8}	-1.74×10^{-9}	-1.99×10^{-8}	-2.94×10^{-10}	-1.47×10^{-10}	-8.10×10^{-12}
2.5	-2.97×10^{-8}	-1.34×10^{-8}	-1.33×10^{-9}	-1.96×10^{-8}	-2.52×10^{-10}	-1.29×10^{-10}	-8.66×10^{-12}
2.3	-2.90×10^{-8}	-1.31×10^{-8}	-1.03×10^{-9}	-1.94×10^{-8}	-2.15×10^{-10}	-1.14×10^{-10}	-9.24×10^{-12}
2.0	-2.84×10^{-8}	-1.27×10^{-8}	-6.89×10^{-10}	$\mathbf{-1.92\times10^{-8}}$	$\mathbf{-1.71\times10^{-10}}$	$\mathbf{-9.39\times10^{-11}}$	-1.02×10^{-11}
1.7	-2.79×10^{-8}	-1.25×10^{-8}	-4.62×10^{-10}	-1.90×10^{-8}	-1.35×10^{-10}	-7.76×10^{-11}	-1.13×10^{-11}
1.5	-2.77×10^{-8}	-1.24×10^{-8}	-3.53×10^{-10}	-1.89×10^{-8}	-1.16×10^{-10}	-6.83×10^{-11}	-1.20×10^{-11}
1.3	-2.76×10^{-8}	-1.23×10^{-8}	-2.69×10^{-10}	-1.89×10^{-8}	-9.91×10^{-11}	-6.01×10^{-11}	-1.29×10^{-11}
1.0	$\mathbf{-2.75\times10^{-8}}$	$\mathbf{-1.22\times10^{-8}}$	$\mathbf{-1.78\times10^{-10}}$	-1.88×10^{-8}	-7.86×10^{-11}	-4.97×10^{-11}	-1.42×10^{-11}

Στον Πίνακα Π.5.14 παρατίθενται οι ρυθμοί απώλειας μάζας όπως αυτοί προσδιορίζονται σύμφωνα με το μοντέλο V82 για τις τιμές του εκθέτη *a* που προβλέπονται με βάση τις κρίσιμες τιμές της τροχιακής περιόδου της A98. Στην περίπτωση των τριών πρώτων βραχυπερίοδων συστημάτων UV Leo, ER Vul και YY Gem δίνεται η τιμή που αντιστοιχεί στον εκθέτη $a = 1$ ($\Omega_{kep} \geq \Omega_{sat}$), για τα συστήματα μέσης περιόδου CV Boo, DU Leo και HS Hya δίνεται η τιμή που αντιστοιχεί στον εκθέτη $a = 2$ ($\Omega_{crit} \leq \Omega_{kep} < \Omega_{sat}$) και για το μακροπερίοδο σύστημα WZ Oph η τιμή που προκύπτει θέτοντας $a = 3$ ($\Omega_{kep} < \Omega_{crit}$). Τα αποτελέσματα συγκρίνονται στη συνέχεια με εκείνα που προβλέπονται θεωρητικά από τη σχέση (4.71) των Tout & Eggleton (1988), υϊοθετώντας την προσέγγιση (4.45) των Lednicka & Stepien (2008) για το ρυθμό απώλειας μάζας ενός μεμονωμένου αστέρα.

Σχετικά με την τελευταία προσέγγιση, θυμίζουμε ότι ο λόγος της φωτεινότητας στις ακτίνες X προς την αντίστοιχη βολομετρική για το κάθε μέλος, $\ell_i = L_{X,i}/L_{bol,i}$, εξαρτάται ισχυρά από την περίοδο ιδιοπεριστροφής (η οποία εδώ ταυτίζεται με την τροχιακή), καθώς και από τη μάζα τους. Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν προέρχονται από τη μελέτη των Pizzolato et al. (2003) οι οποίοι έχουν προσδιορίσει τιμές του λόγου φωτεινοτήτων, γραμμικά εξαρτώμενων από την περίοδο μέχρι την κατάσταση κορεσμού, για συγκεκριμένα εύρη μαζών. Σχετικά, τέλος, με την προσέγγιση των Tout & Eggleton (1988), ο όρος ενίσχυσης του ανέμου ενός απλού μεμονωμένου αστέρα ως μέλος ενός διπλού συστήματος εξαρτάται ισχυρά από το βαθμό πληρότητας του αντίστοιχου λοβού Roche, η ακτίνα του οποίου $R_{L,i}$ εκτιμήθηκε με τη βοήθεια των σχέσεων (1.3) και (1.4) εφόσον το μέλος αντιστοιχεί στον πρωτεύοντα και δευτερεύοντα αστέρα αντίστοιχα.





Σχήμα V.11. Ρυθμός απώλειας μάζας όπως προβλέπεται σύμφωνα με τα μοντέλα V82 και VVM89 για τα συστήματα UV Leo (a) και DU Leo (b). Η συμμετοχή της ιδιοστροφορμής των δύο μελών αποδεικνύεται αρκετά σημαντική για την πρώτη περίπτωση και αμελητέα για τη δεύτερη.

Παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις μεταξύ των τιμών του ρυθμού απώλειας μάζας που εκτιμήθηκαν με βάση τα παρατηρησιακά δεδομένα των διαγραμμάτων O-C, κάνοντας χρήση της σχέσης (5.75), και εκείνων που προβλέπονται από το ημιεμπειρικό μοντέλο των Lednicka & Stepien (2008), τροποποιημένο κατά Tout & Eggleton (1988), δεν ξεπερνούν την τάξη μεγέθους, γεγονός ιδιαίτερα αισιόδοξο αν λάβει υπόψη κανείς το πλήθος των προσεγγίσεων που έχουν μέχρι τώρα τεθεί αλλά και της αβεβαιότητας που ακολουθεί κάθε ημιεμπειρικό μοντέλο μαγνητικής πέδησης. Ομοίως, μικρές αποκλίσεις παρατηρούνται από την εφαρμογή του ισόθερμου ταχέος μαγνητικού περιστροφέα που συναντήσαμε στο τέταρτο κεφάλαιο, ενός αμιγώς αναλυτικού μοντέλου που αναπτύχθηκε από τους Hartmann & MacGregor (1982) και τα αποτελέσματα του οποίου παρουσιάζονται στον Πίνακα Π.5.15.

Π.5.14. Εκτιμώμενος και θεωρητικός ρυθμός απώλειας μάζας κατά Lednicka & Stepien (2008, LS08).

Σύστημα	P_e **[d]**	$\log\ell_1$	$\log\ell_2$	$R_1/R_{L,1}$	$R_2/R_{L,2}$	$\dot{M}_w^{LS08}$ **[$M_\odot$/yr]**	$\dot{M}_w^{obs.}$ **[$M_\odot$/yr]**
UV Leo	**0.600**	-3.2	-3.2	0.783	0.773	-6.69×10^{-8}	-2.75×10^{-8}
ER Vul	**0.698**	-3.8	-3.2	0.746	0.700	-2.04×10^{-8}	-1.22×10^{-8}
YY Gem	**0.814**	-3.3	-3.3	0.418	0.418	-6.22×10^{-11}	-1.78×10^{-10}
CV Boo	**0.847**	-3.2	-3.2	0.690	0.661	-3.19×10^{-8}	-1.92×10^{-8}
DU Leo	**1.374**	-3.1	-3.1	0.483	0.483	-5.79×10^{-9}	-1.71×10^{-10}
HS Hya	**1.568**	-3.8	-3.8	0.434	0.420	-7.22×10^{-10}	-9.39×10^{-11}
WZ Oph	**4.184**	-4.6	-4.6	0.250	0.254	-7.90×10^{-12}	-7.34×10^{-12}

Ο ρυθμός απώλειας μάζας που προβλέπεται από τη σχέση (4.44) απαιτεί τη γνώση ορισμένων παραμέτρων οι οποίες αφορούν το αστρικό στέμμα για το κάθε μέλος των διπλών συστημάτων που εξετάζουμε, καθώς και ορισμένες κρίσιμες αποστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, παρατίθεται αρχικά η σχετική γωνιακή ταχύτητα του κάθε μέλους $\omega_i = \Omega_{kep}/\Omega_{max,i}$ ως προς τη μέγιστη φυγόκεντρη $\Omega_{max,i} = (GM_i/r_{0,i}^3)^{1/2}$ με $r_{0,i}$ τη θέση βάσης παραγωγής του ανέμου η οποία για λόγους απλότητας θα ταυτίζεται εφεξής με την αντίστοιχη ακτίνα του αστέρα R_i. Η αντίστοιχη σχετική απόσταση Parker για κάθε μέλος $Z_{p,i} = r_{p,i}/r_{0,i}$ ακολουθεί στη συνέχεια με την απόσταση Parker να υπολογίζεται μέσω της σχέσης (4.16), ενώ η αδιάστατη σχετική απόσταση που αποκτάται η αργή μαγνητοηχητική ταχύτητα $Z_{s,i} = r_{s,i}/r_{0,i}$ προσδιορίζεται από την επίλυση της κυβικής εξίσωσης (4.40). Εάν $A \equiv 1$, $B \equiv 0$, $C = 1/(\omega^2 Z_p)$ και $D = -1/\omega^2$ είναι οι συντελεστές του κυβικού πολυωνύμου, σύμφωνα με τη θεωρία, η διακρίνουσα θα είναι πάντοτε αρνητική ($\Delta = -4C^3-27D^2 = -4/(\omega^6 Z_p^3)-27/\omega^4 < 0$) και η εξίσωση θα έχει τελικά την ακόλουθη (μοναδική) πραγματική ρίζα:

$$Z_s = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[27D+\sqrt{27\left(27D^2+4C^3\right)}\right]}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[27D-\sqrt{27\left(27D^2+4C^3\right)}\right]}. \quad (5.76)$$

Από τη στιγμή που τα μέλη όλων των εξεταζόμενων συστημάτων είναι ηλιακού τύπου, οι περαιτέρω υπολογισμοί που περιλαμβάνει η εκτίμηση του ρυθμού απώλειας μάζας μέσω της σχέσης (4.44) πραγματοποιήθηκαν με βάση τις τυπικές ηλιακές παραμέτρους. Αναλυτικότερα, υποθέσαμε ότι το στέμμα διαθέτει σύσταση μέσου μοριακού βάρους $\mu_{cor,\odot} = 0.602$ gr/mol και θερμοκρασία $T_{cor,\odot} = 1\times10^6$ K, έτσι ώστε η ισόθερμη ταχύτητα του ήχου στην περιοχή αυτή να υπολογίζεται τελικά περίπου ίση με $a = (RT_{cor,\Theta}/\mu_{cor,\Theta})^{1/2} = 1.18\times10^{7}$ cm/sec όταν $R = 8.32\times10^{7}$ erg/mol·K είναι η παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων. Ενδεχομένως η παράμετρος με τη μεγαλύτερη αβεβαιότητα κατά τους σχετικούς υπολογισμούς αποτελεί η πυκνότητα της ζώνης εκείνης στην οποία ο άνεμος παράγεται και τελικά διαφεύγει από το ηλιακό βαρυτικό πεδίο. Μέσα σε μόλις λίγες χιλιάδες χιλιόμετρα η πυκνότητα μειώνεται από την τιμή των 10^{-12} gr/cm^3, η οποία επικρατεί στη χρωμόσφαιρα, σε εκείνη των 10^{-16} gr/cm^3, η οποία εκτιμάται για το κατώτερο στέμμα (π.χ. Δεληγιάννης & Σταθοπούλου 2001). Στην παρούσα διατριβή, υϊοθετήθηκε η τιμή των $\rho_{cor,\Theta} = 10^{-13}$ gr/cm^3 ως αντιπροσωπευτική των συνθηκών που επικρατούν στη μεταβατική ζώνη μεταξύ χρωμόσφαιρας και στέμματος οπότε και της περιοχής εκείνης όπου ο άνεμος φαίνεται σε πρώτη φάση να ανυψώνεται. Θα πρέπει όμως να λαμβάνεται υπόψη ότι οι επαγόμενες τιμές μπορεί να διαφέρουν σε σχέση με τις πραγματικές από μια μέχρι και τρεις τάξεις μεγέθους, καθώς η πτώση της πυκνότητας στην περιοχή παραγωγής του ηλιακού ανέμου συντελείται κατά τέσσερις ολόκληρες τάξεις μεγέθους.

Π.5.15. Θεωρητικός ρυθμός απώλειας μάζας για τον ισόθερμο ταχύ μαγνητικό περιστροφέα.

Σύστημα	ω_1	ω_2	$Z_{p,1}$	$Z_{p,2}$	$Z_{s,1}$	$Z_{s,2}$	$\dot{M}_w^{IFMR}$ **[M$_\Theta$/yr]**
UV Leo	0.230	0.224	6.043	6.251	2.275	2.323	-2.49×10^{-8}
ER Vul	0.215	0.192	6.407	7.151	2.384	2.587	-1.03×10^{-8}
YY Gem	0.090	0.090	6.682	6.682	3.783	3.783	-1.36×10^{-11}
CV Boo	0.191	0.177	5.646	6.074	2.486	2.630	-1.15×10^{-8}
DU Leo	0.111	0.111	5.494	5.494	3.224	3.224	-7.32×10^{-10}
HS Hya	0.095	0.090	6.796	7.125	3.698	3.851	-5.29×10^{-11}
WZ Oph	0.042	0.042	6.047	5.970	4.856	4.791	-6.54×10^{-12}

Ας σημειωθεί, τέλος, ότι οι τιμές του ρυθμού απώλειας μάζας, όπως εκείνες προβλέπονται με βάση την προσέγγιση του ισόθερμου ταχέος μαγνητικού περιστροφέα των Hartmann & MacGregor (1982), έχουν προσαρμοστεί κατάλληλα ώστε να εκτιμάται ο συνολικός ρυθμός σφαιρικής απώλειας μάζας και όχι εκείνος που αναμένεται υποθέτοντας διαφυγή από τον ισημερινό. Η αντιστάθμιση της αντίστοιχης υπερεκτίμησης πραγματοποιείται με την προσθήκη ενός διορθωτικού συντελεστή ο οποίος κυμαίνεται μεταξύ 0.1 και 0.5, επιλέγοντας τελικά την τιμή 0.3 ως ενδεικτικής. Στον Πίνακα Π.5.15 παρατίθενται τελικά οι τιμές που προβλέπονται από το θεωρητικό μοντέλο των Hartmann & MacGregor (1982), τροποποιημένο όμως και πάλι κατά Tout & Eggleton (1988), ώστε να λαμβάνονται υπόψη οι παλιρροϊκές επιδράσεις του εκάστοτε συνοδού στηριζόμενοι στην πληρότητα κάλυψης των λοβών Roche με βάση τις τιμές του Πίνακα Π.5.14.

Διαπιστώνοντας για μια ακόμα φορά ότι οι αποκλίσεις από τις τιμές που εκτιμήθηκαν με βάση τα παρατηρησιακά δεδομένα των διαγραμμάτων O-C δεν ξεπερνούν την τάξη μεγέθους, επιβεβαιώνεται ότι η κοινή παρουσία της απώλειας μάζας και στροφορμής μέσω αστρικού ανέμου στα βραχυπερίοδα συστήματα τα οποία διαθέτουν μέλη μεταγενέστερων φασματικών τύπων αποδεικνύεται όχι μόνο εφικτή αλλά και ιδιαίτερα αποτελεσματική ως μηχανισμός υποστήριξης των παρατηρούμενων μεταβολών της τροχιακής περιόδου, ακόμα και όταν τα αντίστοιχα διαγράμματα O-C δεν παρουσιάζουν κανενός είδους διαμόρφωση. Η διαπίστωση αυτή είναι σημαντική όχι μόνο επειδή ένας συγκεκριμένος μηχανισμός προτείνεται για την εξήγηση της παράδοξης απουσίας τροχιακών μεταβολών σε χρωμοσφαιρικά δραστήρια διπλά συστήματα αστέρων αλλά και γιατί δύο μοντέλα εκτίμησης του ρυθμού απώλειας μάζας αστέρων μεταγενέστερων φασματικών τύπων αποδείχθηκαν ικανοποιητικά και συνεπώς ιδιαίτερα χρήσιμα σε περιπτώσεις που επιθυμούμε να έχουμε μια ασφαλή εικόνα του ρυθμού με τον οποίο ένα ψυχρός νάνος αστέρας χάνει μάζα στηριζόμενοι αποκλειστικά στις θεμελιώδεις φυσικές του παραμέτρους. Η ημιεμπερική προσέγγιση των Lednicka & Stepien (2008) και η αμιγώς θεωρητική των Hartmann & MacGregor (1982), τροποποιημένες πάντοτε κατά Tout & Eggleton (1988), μπορούν λοιπόν να αξιοποιηθούν με ασφάλεια κατά την εκτίμηση του ρυθμού απώλειας μάζας μέσω αστρικών ανέμων σε μέλη ημιαποχωρισμένων συστημάτων ή επαφής ώστε διάφορες άλλες παράμετροι, όπως ο ρυθμός μεταφοράς ή απώλειας μάζας μέσω των σημείων L1 και L2 αντίστοιχα, να αφήνονται ελεύθερες προς υπολογισμό.

‘‘…the quadratic dependence of the times of minima on epoch implies a strictly linear increase of the orbital period with time. This, however, is not true… These relations show that the period change is linear in epoch but not in time… In this sense, the simple quadratic ephemeris seems to be locally (i.e. over ‘‘only’’ a couple of hundreds of years) a very good representation of the period variations of real interacting systems.’’

Harmanec P., Scholz G.
‘‘Orbital Elements of β Lyrae after the First 100 Years of Investigation’’
1993, A&A, 279, 131H

Κεφάλαιο VI

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Η παρούσα ερευνητική μελέτη εστίασε στη διερεύνηση του βαθμού αξιοπιστίας των διαγραμμάτων O-C ως διαγνωστικά μέσα της δράσης μακροχρόνιων φυσικών μηχανισμών κάτω από συγκεκριμένες δοκιμασίες που αφορούσαν την τροχιακή περίοδο, το θόρυβο, καθώς και την ένταση των αναζητούμενων μηχανισμών. Σημαντική προσπάθεια προς την κατεύθυνση αυτή καταβλήθηκε με σκοπό να εξακριβωθεί η έκταση της επίδρασης που μπορεί να έχει η ανακρίβεια ενός χρόνου ελαχίστου στην ανάλυση των διαγραμμάτων O-C κάτω από την παρουσία διαφόρων ανεπιθύμητων παραγόντων. Τα πορίσματα που προέκυψαν χρησιμοποιήθηκαν στη συνέχεια ώστε οι συνθετικές συναρτήσεις που περιγράφουν τα διαγράμματα O-C, όπως αυτές διαμορφώνονται κάτω από συγκεκριμένες φυσικές διαδικασίες, να καθίστανται τελικά ανιχνεύσιμες.

Στο τελευταίο και ιδιαίτερα συνοπτικό έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν κατά την εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Περιλαμβάνονται τόσο τα αποτελέσματα που προήλθαν από τη στατιστική μελέτη του δείγματος των χρόνων ελαχίστων σχετικά με την ακρίβεια της μεθόδου προσδιορισμού και των παραγόντων που επιδρούν σε αυτή, όσο και τα αποτελέσματα που αφορούν την αποτελεσματικότητα των διαγραμμάτων O-C ως διαγνωστικά εργαλεία ανίχνευσης φυσικών μηχανισμών μέσω των επιπτώσεων που προκαλούν οι μεταβολές της τροχιακής περιόδου. Επιπροσθέτως, παρατίθενται ορισμένες προτάσεις σχετικά με ορισμένα πεδία έρευνας τα οποία είναι πλέον ανοικτά μετά από τα ευρήματα της παρούσας μελέτης και αξίζουν να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

1. Συμπεράσματα και Συνεισφορά της Διατριβής

Η συνεισφορά της παρούσας διδακτορικής διατριβής δεν αφορά αποκλειστικά και μόνο το ερευνητικό σκέλος σχετικά με την αξία των διαγραμμάτων O-C ως μέσα ανίχνευσης και διερεύνησης μακροχρόνιων φυσικών μηχανισμών, αλλά και το αμιγώς βιβλιογραφικό σκέλος. Η διατριβή παρουσιάζει αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο η στροφορμή ενός αστέρα μεταβάλλεται στη διάρκεια της ζωής του είτε ως μεμονωμένος είτε ως μέλος ενός διπλού συστήματος, αλλά και την πρόοδο η οποία έχει επέλθει τα τελευταία χρόνια όσον αφορά την ανάλυση των διαγραμμάτων O-C τόσο ως εργαλεία απεικόνισης των μεταβολών της τροχιακής περιόδου με εξειδικευμένες ιδιότητες όσο και ως τυπικές χρονοσειρές.

Μετά από μια εισαγωγική παρουσίαση της κατηγοριοποίησης των διπλών αστρικών συστημάτων, των φυσικών τους ιδιοτήτων αλλά και των τεχνικών που ακολουθούμε ώστε να προσδιορίσουμε τις απόλυτες παραμέτρους των μελών τους στο πρώτο κεφάλαιο, τα επόμενα δύο επικεντρώνουν στον προσδιορισμό του χρόνου ενός ελαχίστου και της κατασκευής των διαγραμμάτων O-C, αναπτύσσοντας παράλληλα όλους τους πιθανούς παράγοντες οι οποίοι είναι ικανοί να προσθέσουν θόρυβο (βαθμός ασυμμετρίας, βάθος και σχετική διάρκεια -ως προς την τροχιακή περίοδο- ελαχίστου, πλήθος παρατηρήσεων, παρατηρησιακός θόρυβος, φωτομετρικό φίλτρο, εξοπλισμός). Ειδικά στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζονται και συγκρίνονται μεταξύ τους οι κύριες μέθοδοι προσδιορισμού των χρόνων ελαχίστων ώστε να διαφανούν τα προτερήματα και τα μειονεκτήματά τους, αλλά και να εξακριβωθεί ποιά μέθοδος θα πρέπει να προτιμάται ανάλογα με τη μορφή του εκάστοτε ελαχίστου. Περιγράφοντας δύο σχετικά πρόσφατες τεχνικές αναδειγματοληψίας (επανάθεσης και αποκοπής) που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην Υπολογιστική Στατιστική, εισάγαμε μια νέα ακόμα μέθοδο προσδιορισμού χρόνων ελαχίστων η οποία αξιολογείται και συγκρίνεται με τις παραδοσιακές.

Η κύρια καινοτομία όμως της παρούσας διατριβής στον τομέα αυτό αφορά την εκτενή ανάπτυξη του τρόπου με τον οποίο οι διάφοροι ανεπιθύμητοι παράγοντες προσβάλλουν την ορθή εφαρμογή της εκάστοτε μεθόδου με αποτέλεσμα μια πιθανή αστοχία της. Πιο συγκεκριμένα, ανατρέξαμε στη βιβλιογραφία και αξιοποιήσαμε μελέτες οι οποίες υποδεικνύουν τους πιθανούς ανεπιθύμητους παράγοντες και στη συνέχεια αναζητήσαμε τις κατάλληλες εκείνες στατιστικές μέθοδοι ώστε να εξετάσουμε το βαθμό επιρροής στον προσδιορισμό του χρόνου ενός ελαχίστου. Εφαρμόζοντας τις πιο αξιόπιστες μεθόδους σε ένα επαρκές δείγμα χρόνων ελαχίστων με διαφορετικές ιδιότητες το οποίο συλλέχθηκε για τις ανάγκες της παρούσας διατριβής, οδηγηθήκαμε στο ακόλουθο πόρισμα:

- ***Ο βαθμός ασυμμετρίας της μορφής ενός ελαχίστου, το πλήθος παρατηρήσεων και ο παρατηρησιακός θόρυβος αποτελούν τους τρεις σημαντικότερους παράγοντες που επιδρούν στην ακρίβεια προσδιορισμού των χρόνων ελαχίστων όταν οι τελευταίοι έχουν προκύψει από φωτοηλεκτρικές ή CCD παρατηρήσεις σε συστήματα με την ίδια τροχιακή περίοδο.***

Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόστηκε η μέθοδος των Kwee & van Woerden (KvW, 1956) και εκείνη της πολυωνυμικής παλινδρόμησης των Breinhorst et al. (LSR, 1973), ενώ αναπτύχθηκε όπως ήδη αναφέρθηκε και μια νέα, τρίτη, μέθοδος η οποία αποτελεί παραλλαγή της δεύτερης και στηρίζεται στην αναδειγματοληψία επανάθεσης (BR). Η χρήση της ενδείκνυται σε περιπτώσεις ελαχίστων μικρού πλήθους δεδομένων με φωτομετρικό σφάλμα το οποίο διαφοροποιείται μεταξύ των παρατηρήσεων. Επιβεβαιώσαμε ότι η μέθοδος KvW προβλέπει ισοδύναμα αποτελέσματα με εκείνα της παραβολικής παλινδρόμησης LSR σε περιπτώσεις ελαχίστων με μικρή παράμετρο ασυμμετρίας ρ (μικρότερη από την τιμή 0.3) ενώ, δείξαμε ότι εφόσον ο παρατηρητής δεν μεριμνήσει σχετικά με τον παράγοντα ασυμμετρίας και καταφύγει στη μέθοδο KvW με άγνοια των συνεπειών που μπορεί να επιφέρει, θα πρέπει να εμπιστευθεί το διάστημα που παράγεται γύρω από το ± 3.1σ του σφάλματος που προβλέπει η ίδια η μέθοδος σ_{KvW}.

Όσον αφορά το πλήθος των παρατηρήσεων που επιλέγονται προς επεξεργασία, φαίνεται ότι αποτελεί σημαντικό παράγοντα στην ακρίβεια του χρόνου ελαχίστων, όχι όμως κρίσιμο, εφόσον ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή. Ασφαλής προσδιορισμός ενός χρόνου ελαχίστου απαιτεί παρατηρήσεις πλήθους τουλάχιστον μεγαλύτερου από 20, 10 δηλαδή τουλάχιστον στον ανοδικό και καθοδικό κλάδο του ελαχίστου. Ειδικά για τη μέθοδο KvW, ο πραγματικός χρόνος βρέθηκε μέσα στην περιοχή που οριοθετείται γύρω από το ± 2.6σ_{KvW} εφόσον τηρείται ο πιο πάνω περιορισμός.

Ο παρατηρησιακός θόρυβος αποδείχθηκε μια εξαιρετικά κρίσιμη παράμετρος, η σημαντικότερη μετά το βαθμό ασυμμετρίας. Η ραγδαία αύξηση του τυπικού σφάλματος όλων των μεθόδων σε περιπτώσεις δεδομένων χαμηλής ποιότητας οδηγεί σε υπερκάλυψη οποιασδήποτε μορφής χρονικών αποκλίσεων από τον πραγματικό χρόνο ελαχίστου. Κατά τη σύγκριση μάλιστα της μεθόδου KvW με εκείνη της αναδειγματοληψίας επανάθεσης BR, το τυπικό σφάλμα της πρώτης βρέθηκε να είναι μεγαλύτερο της δεύτερης μετά από μια χαρακτηριστική τιμή. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει την ευαισθησία της μεθόδου KvW στην αύξηση του παρατηρησιακού θορύβου, οδηγώντας στην εκτίμηση τυπικών σφαλμάτων σ_{KvW} τα οποία ξεπερνούν ενδεχόμενες αποκλίσεις από τους αντίστοιχους πραγματικούς χρόνους.

Μια ακόμα καινοτομία της παρούσας διδακτορικής διατριβής αποτέλεσε η διερεύνηση της επιλογής φωτομετρικού φίλτρου ως πιθανό παράγοντα διαμόρφωσης της ακρίβειας του χρόνου ελαχίστου. Εξετάστηκε και πάλι η ενδεχόμενη επιρροή του βαθμού ασυμμετρίας, του πλήθους παρατηρήσεων και του παρατηρησιακού θορύβου στις διαφορές χρόνων του ίδιου ελαχίστου σε διαφορετικά φίλτρα και εφαρμόστηκε η ανάλυση διασποράς ενός παράγοντα ώστε να διαπιστωθεί εάν πράγματι διαφορετικά φωτομετρικά φίλτρα οδηγούν σε χρόνους με διαφορές οι οποίες δεν καλύπτονται από το προβλεπόμενο σφάλμα των τριών εξεταζόμενων μεθόδων:

- ***Η επιλογή του φωτομετρικού φίλτρου μπορεί να αποτελέσει παράγοντα αλλοίωσης της ακρίβειας του χρόνου ελαχίστων ανάλογα με τη μέθοδο προσδιορισμού που επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί. Η διαφοροποίηση του χρόνου ελαχίστων σε διαφορετικό φίλτρο αποδεικνύεται όμως μη στατιστικά σημαντική.***

Η σύγκριση των τριών μεθόδων προσδιορισμού του χρόνου ελαχίστων (Kwee & van Woerden -KvW-, πολυωνυμικής παλινδρόμησης -LSR- και παλινδρόμησης με αναδειγματοληψία επανάθεσης -BR-) οδήγησε στην επιβεβαίωση της αδυναμίας της πρώτης κατά την εφαρμογή της σε ελάχιστα με ασύμμετρο σχήμα. Διαφοροποιήσεις του χρόνου ενός ελαχίστου σε διαφορετικά φίλτρα οδηγούν σε πρόσθετες και σημαντικές αποκλίσεις της μεθόδου KvW οι οποίες δεν καλύπτονται από το προβλεπόμενο σφάλμα (± 4.0σ_{KvW}). Αντίθετα, η μέθοδος παλινδρόμησης LSR θα πρέπει να προτιμάται σε σχέση με τη μέθοδο KvW. Εκτός από την εξουδετέρωση λανθασμένων μετατοπίσεων εξαιτίας της παρουσίας ενδεχόμενης ασυμμετρίας, η μέθοδος LSR προβλέπει χρόνους ελαχίστου οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε μια περιοχή γύρω από το ± 2.3σ του συνολικού τυπικού σφάλματος της ίδιας της μεθόδου σ_{LSR} σε σχέση με τους αντίστοιχους χρόνους που έχουν προκύψει από παρατηρήσεις σε διαφορετικό φίλτρο.

Αντίστοιχα, η μέθοδος παλινδρόμησης BR θα πρέπει να προτιμάται τόσο σε σχέση με τη μέθοδο KvW όσο και με τη μέθοδο LSR. Η νέα αυτή μέθοδος έχει τα προτερήματα της LSR με τη διαφορά ότι μπορεί και διορθώνει πιθανές αποκλίσεις που προέρχονται από έλλειψη των αρχών κανονικότητας και ομοσκεδαστικότητας. Η μέθοδος BR προβλέπει χρόνους ελαχίστου οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε μια περιοχή γύρω από το ± 2.6σ του συνολικού τυπικού σφάλματος της ίδιας της μεθόδου σ_{BR} ανεξάρτητα από τη μορφή του ελαχίστου, την επιλογή του φίλτρου, το πλήθος και την ποιότητα των παρατηρήσεων. Η δυναμική της είναι πιο εμφανής σε περιπτώσεις που το πλήθος των παρατηρήσεων είναι μικρό και το είδος της κατανομής που ακολουθεί ο χρόνος ελαχίστου αρκετά σύνθετο.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται με αναλυτικό τρόπο η κατασκευή των διαγραμμάτων O-C, καθώς και των ιδιοτήτων που τα χαρακτηρίζουν. Βάρος δίνεται στον τρόπο με τον οποίο τα διαγράμματα O-C αποδίδουν τις μεταβολές της τροχιακής περιόδου αλλά και στα είδη θορύβου που μπορούν να αναπτυχθούν σε αυτά με στόχο να εκτιμηθούν μέγιστα φράγματα των επικείμενων αποκλίσεων. Στο σημείο αυτό, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα παλαιότερων μελετών σχετικών με την επίδραση της παρουσίας αστρικών κηλίδων στη διαμόρφωση των διαγραμμάτων O-C (φωτομετρικός θόρυβος -δυναμικής φύσης-), ενώ για πρώτη φορά εξετάζεται η επιρροή που μπορεί να έχει ο λανθασμένος προσδιορισμένος ενός χρόνου ελαχίστου εξαιτίας των ανεπιθύμητων παραγόντων που μελετήθηκαν και παρουσιάστηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο (παρατηρησιακός θόρυβος -στατιστικής φύσης-). Αναλυτικότερα, βρέθηκε ότι:

- ***Ο στατιστικός θόρυβος που προκαλείται ως συνέπεια της αστοχίας των μεθόδων προσδιορισμού του χρόνου ελαχίστων στα διαγράμματα O-C μπορεί να αγγίξει τις 0.005 d για τις μεθόδους παλινδρόμησης, ενώ η μέθοδος KvW μπορεί να οδηγήσει σε στάθμη θορύβου της τάξης των 0.008 d καθότι είναι επιρρεπής τόσο στο βαθμό ασυμμετρίας του ελαχίστου όσο και στην επιλογή του φωτομετρικού φίλτρου.***

Το τρίτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των μεθόδων που χρησιμοποιούνται πλέον ευρέως για την ανάλυση και την πρόβλεψη (γραμμικών) χρονοσειρών, καθώς τα διαγράμματα O-C δεν παύουν να αποτελούν τυπικές μορφές χρονοσειρών. Έχουν προστεθεί επίσης μια σειρά από τεχνικές και μέτρα αξιολόγησης της περιγραφής και του βαθμού προσαρμογής των εκάστοτε υποδειγμάτων που υϊοθετούνται. Ας σημειωθεί μάλιστα ότι οι τεχνικές αναδειγματοληψίας (επανάθεσης και αποκοπής) που παρουσιάστηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο δεν αποτελούν εξαίρεση ως μέθοδοι υποστήριξης κατά την εφαρμογή ενός οποιουδήποτε υποδείγματος περιγραφής μιας χρονοσειράς O-C. Εξειδικευμένες μέθοδοι οι οποίες αφορούν αποκλειστικά την ανάλυση των διαγραμμάτων O-C αντιμετωπίζοντας τις αντίστοιχες χρονοσειρές είτε από τη σκοπιά της πολυωνυμικής παλινδρόμησης (Kalimeris et al.

1994a) είτε από τη σκοπιά των στοχαστικών ανελίξεων (Koen 1996) εξετάζονται διεξοδικά σε ειδική ενότητα.

Οι κυριότερες φυσικές διαδικασίες μέσω των οποίων η στροφορμή των αστέρων μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της ζωής τους και οι επαγόμενες συνέπειες που αφορούν την ιδιοπεριστροφή τους αλλά κυρίως την τροχιακή στροφορμή και περίοδο όταν οι αστέρες αποτελούν μέλη διπλών αστρικών συστημάτων αποτελεί αντικείμενο μελέτης των επόμενων δύο κεφαλαίων. Ειδικότερα στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται με λεπτομερή τρόπο το μοντέλο ανέμου θερμικής προέλευσης σε μη περιστρεφόμενους αστέρες και χωρίς την παρουσία μαγνητικού πεδίου όπως αυτό προτάθηκε από τον Parker (1958, 1960, 1965, 1966). Το μοντέλο αυτό επεκτείνεται στη συνέχεια με βάση την προσέγγιση των Weber & Davis (1967) και Hartmann & MacGregor (1982) προσθέτοντας περιστροφή και μαγνητικό πεδίο. Σκοπός των σχετικών ενοτήτων αποτέλεσε η ανάγκη παρουσίασης με τέτοιο τρόπο ώστε να αναδειχθεί η Φυσική των αντίστοιχων μηχανισμών, να οδηγήσει στην εκτίμηση των θεωρητικών ρυθμών απώλειας μάζας από τους ψυχρούς αστέρες, καθώς και να αναδυθεί με σαφήνεια η έννοια της μαγνητικής πέδησης ως (φυσικό και μαθηματικό) αποτέλεσμα των συνεπειών της παρουσίας του μαγνητικού πεδίου σε έναν θερμικά προερχόμενο άνεμο και όχι μόνο ποιοτικά, όπως συναντάται συχνά σε πολλές παρατηρησιακές μελέτες.

Προς την κατεύθυνση αυτή κινήθηκαν και οι επόμενες ενότητες όπου έμφαση δόθηκε στα παρατηρησιακά δεδομένα σύμφωνα με τις πλέον πρόσφατες εξελίξεις στο χώρο των τεχνικών προσδιορισμού του ρυθμού απώλειας μάζας από αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων αλλά και στο χώρο εκτίμησης της κατανομής των ισημερινών ταχυτήτων περιστροφής ψυχρών αστέρων σε νεαρά αστρικά σμήνη. Οι περιορισμοί από τα νέα δεδομένα ενσωματώθηκαν στις κατάλληλα παραμετροποιημένες ημιεμπειρικές σχέσεις που αφορούν το ρυθμό απώλειας μάζας και στροφορμής μέσω της μαγνητικής πέδησης ώστε στη συνέχεια να είναι σε θέση να εφαρμοστούν στην πράξη. Με ανάλογο τρόπο παρουσιάστηκε και εξερευνήθηκε η μεταφορά μάζας μέσω του σημείου L1, η απώλεια μάζας και στροφορμής από το σημείο L2, η απώλεια στροφορμής μέσω της βαρυτικής ακτινοβολίας, ενώ οι σύγχρονες εξελίξεις σχετικά με τους μηχανισμούς παλιρροϊκής τριβής και απόκρισης στην ανάκτηση της υδροστατικής ισορροπίας περιγράφηκαν με λεπτομέρεια. Η διαμόρφωση της τροχιακής περιόδου οδηγούμενη από τους πιο πάνω μηχανισμούς είτε μεμονωμένα είτε συνδυασμένα εξετάστηκε στη συνέχεια στηριζόμενοι στον τρίτο νόμο του Kepler.

Το κύριο ερευνητικό μέρος της παρούσας διατριβής αναπτύσσεται στο πέμπτο κεφάλαιο. Μια νέα μέθοδος κατασκευής συνθετικών διαγραμμάτων εισάγεται η οποία επικεντρώνεται σε μακροχρόνιους κυρίως μηχανσιμούς αλλά στην πράξη μπορεί εύκολα να επεκταθεί σε μηχανισμούς οποιασδήποτε χρονικής κλίμακας. Ξεκινώντας από την κατασκευή της εξίσωσης στροφορμής που διέπει το σύστημα των δύο αστέρων, οδηγούμαστε στις αναλυτικές μαθηματικές εκφράσεις που περιγράφουν την τροχιακή περίοδο και μέσα από κατάλληλους μετασχηματισμούς είμαστε σε θέση να προσδιορίζουμε την αναλυτική μορφή των συναρτήσεων που περιγράφουν τις O-C διαφορές:

- ***Προσδιορίστηκε αναλυτικά η συνάρτηση που περιγράφει την τροχιακή περίοδο και τις O-C διαφορές για πέντε διαφορετικούς φυσικούς μηχανισμούς απώλειας και μεταφοράς μάζας και στροφορμής. Οι αναλυτικές εκφράσεις έδωσαν τη δυνατότητα να εξεταστεί η μορφολογία των αντίστοιχων διαγραμμάτων και να αναδειχθούν οι ιδιότητές τους χωρίς επιπλέον περιορισμούς.***

Η γνώση των αναλυτικών συναρτησιακών εκφράσεων για τα συνθετικά διαγράμματα O-C μας προσφέρει τη δυνατότητα εκτίμησης του απαιτούμενου χρονικού παράθυρου μέσα στο οποίο ένας μηχανισμός μπορεί να γίνει ανιχνεύσιμος μέσα από τις μεταβολές των διαφορών O-C που προκαλεί. Εξετάστηκε η επίδραση της τροχιακής περιόδου και διαφόρων παραμέτρων που συνοδεύουν τον εκάστοτε μηχανισμό ώστε να διερευνηθεί ο βαθμός ανιχνευσιμότητας κάτω από επιλεγμένη στάθμη θορύβου:

- ***Τα ελάχιστα χρονικά διαστήματα που απαιτούνται ώστε οι μηχανισμοί απώλειας και μεταφοράς μάζας να καθίσταται ανιχνεύσιμοι μέσω της ανάλυσης των διαγραμμάτων O-C είναι ανεξάρτητα της τροχιακής περίοδου. Αντίθετα τα χρονικά αυτά διαστήματα εξαρτώνται ισχυρά από την περίοδο όταν η ανάλυση αφορά τη μαγνητική πέδηση και τη βαρυτική ακτινοβολία.***

Επικεντρώνοντας στο μηχανισμό της μαγνητικής πέδησης αποδείχθηκε ότι, κινούμενοι σε μικρότερες περιόδους, τα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα μειώνονται, καθιστώντας με ασφάλεια ανιχνεύσιμο το συγκεκριμένο μηχανισμό σε βραχυπερίοδα συστήματα με περίοδο μικρότερη των 0.5 d, όπως τα συστήματα επαφής και οι κατακλυσμικοί μεταβλητοί, όταν η στάθμη θορύβου είναι της τάξης των 0.01 d. Περιορίζοντας τη στάθμη θορύβου κατά δέκα φορές, τα απαιτούμενα χρονικά διαστήματα δεν ξεπερνούν τα 200 yr ανεξάρτητα από το μοντέλο που υϊοθετείται για να περιγράψει το μηχανισμό απώλειας στροφορμής. Αντίθετα, η βαρυτική ακτινοβολία δεν αναμένεται να επιδρά στην τελική μορφή ενός διαγράμματος O-C της τάξης των 100 yr με μοναδική εξαίρεση την περίπτωση ιδιαίτερα βραχυπερίοδων συστημάτων συνολικής μάζας μεγαλύτερης των 2 $M_{\odot}$, χαρακτηριστικά δηλαδή που παραπέμπουν στους κατακλυσμικούς και μόνο μεταβλητούς.

Επιπλέον, η αναλυτική έκφραση των συνθετικών συναρτήσεων που περιγράφουν τις O-C διαφορές για τον εκάστοτε μηχανισμό καθιστά δυνατή την εκτίμηση των χρονικών ορίων μέσα στα οποία η παραβολική αναπαράσταση αναμένεται ικανοποιητική. Οι αναλυτικές συναρτήσεις αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές Taylor και στη συνέχεια τα μέγιστα χρονικά διαστήματα προσδιορίζονται κάνοντας χρήση των υπολοίπων Lagrange που αντιστοιχούν στον αμέσως επόμενο πολυωνυμικό όρο, δηλαδή τον κυβικό:

- ***Η παραβολική αναπαράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τις μεταβολές των O-C διαγραμμάτων αποδεικνύεται επαρκής με εξαίρεση ακραία φαινόμενα απώλειας και μεταφοράς μάζας (δυναμικής χρονικής κλίμακας).***

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι σε συστήματα με μέλη ηλιακού τύπου και τυπική στάθμη θορύβου των 0.01 d, η παραβολική αναπαράσταση αποδεικνύεται ικανή να περιγράψει ένα διάγραμμα O-C που προκύπτει εξαιτίας της απώλειας μάζας ρυθμού ίσου με 10^{-8} $M_{\odot}$/yr για τουλάχιστον 3000 yr, ενώ όταν πρόκειται για μεταφορά μάζας μεταξύ των μελών ενός συστήματος με λόγο μαζών 0.75, το αντίστοιχο χρονικό διάστημα αυξάνεται δραματικά και ξεπερνά τα 11000 yr. Όμοια μεθοδολογία στην περίπτωση της μαγνητικής πέδησης οδηγεί σε χρονικά διαστήματα τα οποία είναι της τάξης των δεκάδων χιλιάδων ετών, ενώ στην περίπτωση της βαρυτικής ακτινοβολίας τα μέγιστα χρονικά διαστήματα επάρκειας αυξάνονται κατά τουλάχιστον δύο τάξεις μεγέθους. Αντίθετα, απώλεια και μεταφορά μάζας η οποία λαμβάνει χώρα με ρυθμό μεγαλύτερο των 10^{-6} $M_{\odot}$/yr απαιτεί τη συμμετοχή του κυβικού όρου ακόμα και από μερικές δεκάδες χρόνια.

Η πολυωνυμική αναπαράσταση κατά Taylor λειτούργησε όμως και ως μέσο διατήρησης του αναλυτικού χαρακτήρα των συναρτήσεων που περιγράφουν τα συνθετικά διαγράμματα O-C όταν η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που εμπλέκονται στην προτεινόμενη μεθοδολογία δεν είναι δυνατή. Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται όταν υποθέσουμε ότι όλοι οι εξεταζόμενοι μηχανισμοί δρουν ταυτόχρονα σε ένα διπλό αστρικό σύστημα. Στηριζόμενοι στα ευρήματα ικανοποιητικής επάρκειας της παραβολικής αναπαράστασης, προσδιορίσαμε τον γενικευμένο πλέον συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου και εξάγαμε πολύτιμα συμπεράσματα κατά την θεωρητική του διερεύνηση:

- ***Η συνδυασμένη δράση των εξεταζόμενων φυσικών διεργασιών αποδεικνύεται όχι μόνο εφικτή αλλά και ιδιαίτερα αποτελεσματική ως μηχανισμός υποστήριξης των παρατηρούμενων μεταβολών της τροχιακής περιόδου, ακόμα και όταν τα αντίστοιχα διαγράμματα O-C δεν παρουσιάζουν κανενός είδους διαμόρφωση. Ειδικότερα η απώλεια μάζας μέσω αστρικών ανέμων, η μαγνητική πέδηση και η μεταφορά μάζας μέσω του σημείου L1 αποδεικνύονται μηχανισμοί ανταγωνιστικοί οδηγώντας σε παραπλανητικά πολλές φορές διαγράμματα O-C, απαιτώντας ιδιαίτερη προσοχή κατά τη συμπερασματολογία.***

Η μεθοδολογία που εισάγεται στην παρούσα διδακτορική διατριβή εφαρμόστηκε σε διπλά εκλειπτικά συστήματα των οποίων τα διαγράμματα O-C δεν εμφανίζουν καμία μεταβολή, παραπέμποντας σε τροχιακή περίοδο η οποία δεν μεταβάλλεται στο χρόνο (π.χ. YY Gem, CV Boo, DU Leo, HS Hya και WZ Oph). Το γεγονός αυτό οδήγησε στη σκέψη ότι μηχανισμοί που προκαλούν μεταβολή της τροχιακής περιόδου με αντίθετη κατεύθυνση και δρουν από κοινού σε ένα διπλό σύστημα μπορούν να αλληλοεξουδετερώνονται οδηγώντας τελικά στην πλασματική κατάσταση κατά την οποία η περίοδος παρουσιάζεται σταθερή. Τα αποτελέσματα της προσέγγισης που ακολουθήσαμε κάτω από την παραδοχή αυτή (και αφορούν το ρυθμό απώλειας μάζας) αποδείχθηκαν ιδιαίτερα ικανοποιητικά, καθώς σε καμία περίπτωση δεν αποκλίνουν περισσότερο από μια τάξη μεγέθους από εκείνα που προβλέπονται θεωρητικά, σύμφωνα με δύο μάλιστα αξιόπιστα μοντέλα εκτίμησης του ρυθμού απώλειας μάζας αστέρων μεταγενέστερων φασματικών τύπων.

2. Ανοικτά Θέματα και Μελλοντική Έρευνα

Πιστεύουμε ότι τα ευρήματα της παρούσας διδακτορικής διατριβής ήρθαν να καλύψουν σημαντικά κενά στο χώρο της ανάλυσης διαγραμμάτων O-C των διπλών εκλειπτικών αστρικών συστημάτων. Υπάρχουν όμως μερικές ακόμα μελέτες οι οποίες απαιτούνται ώστε να συμπληρωθεί το παρόν ερευνητικό έργο και ορισμένες προτάσεις ώστε να δώσουν συνέχεια για περαιτέρω διερεύνηση. Θα εστιάσουμε σε δύο τομείς οι οποίοι συνδέονται άμεσα με τη βελτίωση των δυνατοτήτων που μπορεί να μας προσφέρει η ανάλυση των διαγραμμάτων O-C αλλά και τις τρέχουσες εξελίξεις σχετικά με την ανακάλυψη πλανητών εκτός του ηλιακού συστήματος.

Πρόκειται αφενός για την ανάγκη αμεσότερης εμπλοκής της Στατιστικής επικεντρώνοντας στις μη παραμετρικές μεθόδους και την υϊοθέτηση νεότερων υπολογιστικών τεχνικών μέσα από τις οποίες υλοποιούνται οι αντίστοιχες εφαρμογές, αφετέρου στην επέκταση της μεθοδολογίας που προτάθηκε μέσα από την παρούσα διατριβή σε μηχανισμούς μεταξύ πλανητών και του μητρικού αστέρα.

- ***Απαιτείται μια ευρύτερη μελέτη αξιολόγησης της επίδρασης που προκαλούν οι παράγοντες αλλοίωσης της ακρίβειας του χρόνου ελαχίστου σε συστήματα με διαφορετική τροχιακή περίοδο και βάθος ελαχίστων. Η μελέτη στη συνέχεια θα πρέπει να επεκταθεί στο βαθμό επιβάρυνσης των εκτιμώμενων αποκλίσεων σε σχέση με την επιλογή του ανιχνευτή ώστε να προσδιοριστούν τελικά αντικειμενικά στατιστικά βάρη τα οποία θα μπορούν να υϊοθετούνται κατά τη μαθηματική περιγραφή ενός διαγράμματος O-C.***

Τα αποτελέσματα της μελέτης που πραγματοποιήθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο αφορούσε αποκλειστικά χρόνους ελαχίστων που προέκυψαν από CCD παρατηρήσεις σε δύο διπλά συστήματα αστέρων με την ίδια σχεδόν τροχιακή περίοδο και όμοια φωτομετρικά χαρακτηριστικά. Στην πράξη, η συνοχή των ιδιοτήτων αυτών μας ευνόησε ως προς την αμεροληψία της αξιολόγησης των τριών παραγόντων που εξετάστηκαν. Γνωρίζουμε όμως για παράδειγμα ότι το βάθος ενός ελαχίστου επιδρά σε σημαντικό βαθμό κατά τον προσδιορισμό του χρόνου που αυτό λαμβάνει χώρα, ειδικότερα όταν η καταγραφή του στηρίζεται σε οφθαλμοσκοπικές παρατηρήσεις (Mallama 1974a, 1974b), διαπίστωση την οποία δεν μπορούμε να αγνοούμε. Από την άλλη, ακούγεται παράλογο να αποδίδουμε στατιστικά βάρη αποκλειστικά και μόνο με γνώμονα τον ανιχνευτή του παρατηρησιακού εξοπλισμού μας, προσέγγιση η οποία όμως ακολουθείται σε όλες σχεδόν τις δημοσιευμένες εργασίες που έχουν ως αντικείμενό τους την ανάλυση των διαγραμμάτων O-C. Η διερεύνηση της από κοινού επιρροής όλων των ενοχοποιητικών παραγόντων στην ακρίβεια προσδιορισμού των χρόνων ελαχίστων κρίνεται λοιπόν επιτακτική.

- ***Η μονομερής χρήση παραδοσιακών ελέγχων υποθέσεων της Κλασικής Στατιστικής ως εργαλεία σύγκρισης μοντέλων κατά την ανάλυση των διαγραμμάτων O-C δεν οδηγεί πάντοτε στην επιλογή του βέλτιστου μοντέλου.***

Η αξιολόγηση, σύγκριση και επιλογή ενός μοντέλου (ή μεταβλητών) απασχολεί όλους τους κλάδους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και είναι πάντοτε ανοικτό προς έρευνα και συζήτηση. Ένα μοντέλο θεωρείται βέλτιστο εφόσον κυριαρχεί ως προς τα κριτήρια που έχουν τεθεί να ικανοποιεί. Η συνήθης προσέγγιση που ακολουθείται κατά την ανάλυση των διαγραμμάτων O-C τείνει να αφορά αποκλειστικά κριτήρια απόδοσης τα οποία συγκρίνονται κάτω από κατάλληλους ελέγχους σημαντικότητας (όπως π.χ. με βάση το κριτήριο χ^2), παραμελώντας επίμονα τον παράγοντα της πολυπλοκότητας των υποψήφιων μοντέλων αλλά και την έλλειψη παρατηρήσεων για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Σε πολλές περιπτώσεις για παράδειγμα η προσθήκη ενός ακόμα υποθετικού σώματος (πέραν του τρίτου) στο σύστημα των δύο αστέρων είναι αναμενόμενο να οδηγεί σε μικρότερα τετραγωνικά σφάλματα με διαφορές οι οποίες όμως είναι κατά πλειοψηφία ασήμαντες. Συνεπώς, θα πρέπει να δοθεί έμφαση στην υϊοθέτηση μέτρων επιλογής υποδειγμάτων όπως είναι π.χ. τα μέτρα πληροφορίας Akaike (AIC) και Schwartz κατά Bayes (BIC) αλλά και μέτρα αξιολόγησης περιγραφής με βάση τα υπόλοιπα της προσαρμογής όπως π.χ. εκείνα των Kendall-Stuart, Box-Pierce και Ljung-Box τα οποία έχουν ήδη παρουσιαστεί στο τρίτο κεφάλαιο.

Η ανάλυση των διαγραμμάτων O-C θα πρέπει να είναι επίσης ανοικτή σε μεθόδους που δεν προέρχονται υποχρεωτικά από την Κλασική Στατιστική με κύρια εναλλακτική επιλογή την εντυπωσιακά αναπτυσσόμενη τις τελευταίες δύο δεκαετίες Μπεϋζιανή Στατιστική. Το κύριο χαρακτηριστικό της Μπεϋζιανής μεθοδολογίας έναντι της παραδοσιακής στατιστικής προσέγγισης είναι η χρήση μέτρων πιθανότητας ως μέσο ποσοτικοποίησης της αβεβαιότητας των εμπλεκόμενων παραμέτρων. Η δειγματική κατανομή ως μέσο συμπερασματολογίας αντικαθίσταται από την ύστερη κατανομή και ο κλασικός έλεχος υποθέσεων δίνει τη θέση του στον παράγοντα Μπέϋες ως μέσο σύγκρισης και επιλογής μοντέλων. Η επινόηση τεχνικών Monte Carlo με τη χρήση Μαρκοβιανών αλυσίδων (MCMC) αποτελεί αναπόσπαστο πλέον μέρος των εφαρμογών της Μπεϋζιανής Στατιστικής εξαιτίας της πολυπλοκότητας της απαιτούμενης μαθηματικής προσέγγισης, γεγονός το οποίο όμως δεν πρέπει να αποτελεί αποτρεπτικό παράγοντα, καθώς η αποτελεσματικότητα των μεθόδων αυτών αποδεικνύεται πιο αντικειμενική και επιτυχής έναντι των παραδοσιακών (π.χ. Gelman et al. 2004, Dellaportas et al. 2002, Φουσκάκης 2007, Νανούρης 2010). Προς την κατεύθυνση αυτή η συμβολή της Μηχανικής Μάθησης θα μπορούσε να ανοίξει νέους ορίζοντες με την εφαρμογή αλγορίθμων εξόρυξης πληροφορίας ώστε να εντοπιστούν κανόνες οι οποίοι είναι δύσκολα ανιχνεύσιμοι στον τεράστιο πλέον όγκο δεδομένων που διαθέτουμε όπως για παράδειγμα με τη χρήση Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων (ANN) και Μηχανών Διανυσμάτων Υποστήριξης (SVM) ως ταξινομητές.

Η σημασία αναζήτησης αλλά και ανάπτυξης ακόμα πιο εξελιγμένων στατιστικών τεχνικών στην Παρατηρησιακή Αστροφυσική έχει αναδειχθεί τα τελευταία χρόνια εξαιτίας της προσπάθειας ανακάλυψης πλανητών εκτός του ηλιακού συστήματος. Η συμπερασματολογία στην ανάλυση δεδομένων που αφορούν ειδικότερα την έρευνα για πλανήτες γηϊνων διαστάσεων είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη. Το επιχείρημα αυτό γίνεται ακόμα πιο δύσκολο όταν οι μελέτες αναζητούν πλανήτες στην κατοικήσιμη ζώνη, δηλαδή σε απόσταση κατάλληλη από τον μητρικό αστέρα ώστε να διαθέτουν νερό στην υγρή φυσική κατάσταση. Η ανάλυση των διαγραμμάτων O-C έχει γίνει πλέον αποδεκτή ως μέθοδος υποστήριξης των κυρίαρχων φωτομετρικών και φασματοσκοπικών τεχνικών, καθώς σε αστρικά συστήματα με τουλάχιστον δύο πλανήτες και κατάλληλο λόγο τροχιακών περιόδων αναμένεται να αναπτύσσονται συντονισμοί οι οποίοι γίνονται αντιληπτοί μέσω των O-C διαφορών (π.χ. Agol et al. 2005, Borkovits et al. 2011).

- ***Η ανάλυση διαγραμμάτων O-C σύμφωνα με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παρούσα διατριβή θα πρέπει να εφαρμοστεί τόσο σε ημιαποχωρισμένα συστήματα όσο και σε συστήματα επαφής με μέλη ποικίλων φυσικών χαρακτηριστικών.***

Στην τελευταία ενότητα του πέμπτου κεφαλαίου πραγματοποιήθηκε ανάλυση διαγραμμάτων O-C διπλών εκλειπτικών συστημάτων τα οποία είναι αποχωρισμένα και μάλιστα διαθέτουν μέλη όμοιων φυσικών χαρακτηριστικών. Η επιλογή αυτή κρίθηκε απαραίτητη, καθώς μας δόθηκε η δυνατότητα ακριβούς εκτίμησης του ρυθμού απώλειας μάζας εξαιτίας της ανάπτυξης αστρικών ανέμων και τη σύγκριση των τιμών αυτών με τις προβλέψεις κατάλληλων ημιεμπειρικών μοντέλων. Εκείνο το οποίο απομένει να γίνει είναι η εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας σε δύο ακόμα ομάδες συστημάτων και ειδικότερα σε ημιαποχωρισμένα συστήματα με μέλη μεταγενέστερων φασματικών τύπων, καθώς και σε συστήματα επαφής με μέλη προγενέστερων φασματικών τύπων.

Όσον αφορά την πρώτη ομάδα συστημάτων, θα εξεταστεί ο προσανατολισμός της μεταφοράς μάζας ακόμα και αν η μορφή των αντίστοιχων διαγραμμάτων υποδεικνύει την αντίθετη φορά σύμφωνα με τις συνθήκες που προσδιορίστηκαν στην τέταρτη ενότητα του ίδιου κεφαλαίου. Η δεύτερη ομάδα αξίζει λεπτομερούς διερεύνησης ώστε να εκτιμηθεί ο ρυθμός απώλειας μάζας με τη βοήθεια τεχνικών μη γραμμικής παλινδρόμησης των αναλυτικών εκφράσεων που προσδιορίστηκαν στην τρίτη ενότητα του πέμπτου κεφαλαίου και να συγκριθεί με τον αντίστοιχο ρυθμό που προβλέπεται μέσω της παραδοσιακής παραβολικής αναπαράστασης, υπενθυμίζοντας ότι η επάρκεια της τελευταίας στα συστήματα της κατηγορίας αυτής κρίνεται αμφίβολη.

Επιπλέον, αξίζει περαιτέρω διερεύνησης το ενδεχόμενο απώλειας μάζας όχι μόνο μέσω του σημείου L2 αλλά και μέσω του L3, ώστε να αποσαφηνιστεί κατά πόσο μπορεί να υποστηρίξει την αποτελεσματική απώλεια στροφορμής ημιαποχωρισμένων κυρίως συστημάτων τα οποία χαρακτηρίζονται από μεταφορά μάζας, μέσω του σημείου L1, από το μέλος με τη μικρότερη μάζα προς εκείνο με τη μεγαλύτερη.

- ***Η μέθοδος κατασκευής και συνθετικών διαγραμμάτων O-C που αναπτύχθηκε στην παρούσα διατριβή θα πρέπει να εφαρμοστεί στην περίπτωση μη συγχρονισμένων παλιρροϊκά αλληλεπιδρώντων αστέρων ώστε να εξεταστεί η ευαισθησία των διαγραμμάτων O-C ως διαγνωστικό μέσο ανίχνευσης του συγκεκριμένου μηχανισμού.***

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται ο τρόπος δράσης των μηχανισμών υποστήριξης τόσο των υδροστατικών όσο και των δυναμικών παλιρροιών. Ειδικά για την πρώτη περίπτωση ο μηχανισμός της τυρβώδους διάχυσης (Zahn 1977, 1978) και εκείνος της κυκλοφορίας Ekman (Tassoul & Tassoul 1992a, 1992b) αξίζουν ιδιαίτερης προσοχής, καθώς φαίνεται να οδηγούν σε χαρακτηριστούς χρόνους (τριβής) της τάξης του ενός έτους και συνεπώς οι επακόλουθες διαφορές O-C αναμένονται ανιχνεύσιμες. Περαιτέρω διερεύνησης αξίζει όμως και ο μηχανισμός ανάπτυξης συντονισμών μεταξύ παλιρροϊκών και βαρυτικών κυμάτων όπου οι προβλεπόμενοι χρόνοι συγχρονισμού μειώνονται εντυπωσιακά (π.χ. Terquem et al. 1998, Savonije & Witte 2002). Ειδικά για την τελευταία περίπτωση, δεν μπορούμε να αποκλείσουμε μεταβολές της τροχιακής περιόδου που να γίνονται αντιληπτές μέσω της ανάλυσης των διαγραμμάτων O-C ακόμα και αν ο συνοδός έχει αρκετά μικρότερη μάζα, πλανητικής ενδεχομένως τάξης μεγέθους. Με τον τρόπο αυτό, η μελέτη του συγκεκριμένου μηχανισμού θα μπορούσε να αποκτήσει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον ακολουθώντας τις σύγχρονες εξελίξεις σχετικά με την αναζήτηση πλανητών εκτός του ηλιακού συστήματος.

*‘‘**For the near future, the Transit Timing Variations (TTV) technique may be the most promising method of detecting earth-mass planets around main-sequence stars besides the Sun.**’’*

Agol E., Steffen J., Sari R., Clarkson W.
‘‘On Detecting Terrestrial Planets with Timing of Giant Planet Transits’’
2005, MNRAS, 359, 567A

Παράρτημα I

Ο ΚΩΔΙΚΑΣ BootMin

Το παρόν πρώτο παράρτημα αποσκοπεί σε μια διεξοδικότερη περιγραφή του κώδικα `BootMin` ο οποίος αποτελεί υλοποίηση της μεθόδου προσδιορισμού του χρόνου ενός ελαχίστου η οποία παρουσιάστηκε στην υποενότητα 5.3 του δευτέρου κεφαλαίου και χρησιμοποιήθηκε στην υποενότητα 5.5 του ίδιου κεφαλαίου σε πλήθος ελαχίστων που αφορούσαν τα διπλά αστρικά συστήματα RT And και CG Cyg. Πρόκειται ουσιαστικά για τη μέθοδο της πολυωνυμικής παλινδρόμησης των Breinhorst et al. (1973) η οποία πλέον υποστηρίζεται από την υπολογιστική τεχνική της αναδειγματοληψίας επανάθεσης (bootstrap resampling) στα υπόλοιπα της προσαρμογής. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο κώδικας έχει αναπτυχθεί στη γλώσσα `R` (v.2.6.1) και είναι έτσι σχεδιασμένος ώστε να μην απαιτεί από το χρήστη οικειότητα με τη συγκεκριμένη γλώσσα προγραμματισμού.

Η περιγραφή που θα ακολουθήσει αναφέρεται στα δεδομένα ενός υποθετικού ελαχίστου τα οποία έχουν καταχωρηθεί στο αρχείο `080823II_v.txt`, αποτελούμενο από δύο στήλες. Η πρώτη από αυτές αναφέρεται στο φαινόμενο μέγεθος Δm (mag) του συστήματος κατά τη φάση του ελαχίστου και η δεύτερη στο χρόνο καταγραφής των τιμών αυτών σε HJD.

```
# Reading data & cubic regression fitting

# Το πρόγραμμα διαβάζει το αρχείο και καταχωρεί τα δεδομένα με την ί-
# δια διάταξη σε έναν πίνακα με όνομα rawdata.

rawdata<-matrix(scan("080823II_v.txt"),ncol=2,byrow=T)

# Η συνάρτηση int υπολογίζει το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθ -
# μού n.

int<-function(n)
{
if (round(n)>n)
int<-round(n)-1 else
int<-round(n)
int
}

# Ο αριθμός υλοποιήσεων nrep της αναδειγματοληψίας επανάθεσης (ή ισο-
# δύναμα το πλήθος των παραγόμενων συνθετικών δειγμάτων) δηλώνεται α-
# πό το χρήστη.

nrep<-1000
```

 # Ο πίνακας *data* διάστασης dim(*rawdata*)x2 κρατά το δεκαδικό μέρος των
 # αρχικών δεδομένων φαινόμενου μεγέθους στους ίδιους χρόνους που κα -
 # ταγράφηκαν.

```
data<-matrix(ncol=2,nrow=dim(rawdata)[1])
for (i in 1:dim(rawdata)[1])
{
i<i+1
data[i,1]<-rawdata[i,1]-int(rawdata[i,1])
data[i,2]<-rawdata[i,2]
}
```

 # Πραγματοποιείται κυβική πολυωνυμική παλινδρόμηση μέσω της οποίας υ-
 # πολογίζεται η παράμετρος ασυμμετρίας ρ.

```
cubreg<-lm(data[,2]~data[,1]+I(data[,1]^2)+I(data[,1]^3))
summary(cubreg)
rho<-abs(coef(summary(cubreg))[4,1])/coef(summary(cubreg))[4,2]
```

 # Ελέγχεται το κριτήριο αποδοχής ενός μη συμμετρικού προφίλ ελαχίστου
 # και εφόσον ικανοποιείται, η προσαρμογή ενός κυβικού πολυωνύμου ελα
 # χίστων τετραγώνων υϊοθετείται.

```
if (rho>0.3)

{

print("The minimum profile was found asymmetric")

# Plots & diagnostics
```

 # Σχεδιασμός πλαισίου το οποίο θα υποδεχθεί 2x2 γραφήματα.

```
par(mfrow=c(2,2))
```

 # Απεικόνιση της μορφής του ελαχίστου και της ταυτόχρονης προσαρμογής
 # του βέλτιστου κυβικού πολυωνύμου.

```
plot(data[,1],data[,2],ylim=c(max(data[,2]),min(data[,2])),col=1,lwd=
1,pch=19,cex=0.8,xlab=paste("HJD (",int(rawdata[1,1]),"+)"),ylab="Δm
(mag)",main="(a)",font.lab=6,font.main=6,font.axis=6)

x<-seq(data[dim(data)[1],1],data[1,1],length=100)
lines(x,cubreg$coef[1]+cubreg$coef[2]*x+cubreg$coef[3]*x^2+cubreg$coe
f[4]*x^3,col=1,lty=1,lwd=1)
```

 # Απεικόνιση των υπολοίπων που προκύπτουν από την προσαρμογή.

```
plot(cubreg$res,xlab="Number  of  Observation",ylab="O-C
(mag)",main="(b)",pch=19,font.lab=6,font.main=6,cex=0.8,font.axis=6)
```

 # Απεικόνιση της κατανομής των υπολοίπων της προσαρμογής μέσω της κα-
 # τασκευής του αντίστοιχου ιστογράμματος συχνοτήτων.

```
hist(cubreg$res,xlab="Residuals
(mag)",main="(c)",font.lab=6,font.main=6,font.axis=6)

# Διάγραμμα συσχέτισης υπολογιζόμενων και θεωρητικών ποσοστιαίων ση -
# μείων που αντιστοιχούν στην Κανονική κατανομή.

qqnorm(cubreg$res,pch=19,cex=0.8,main="(d)",font.lab=6,font.main=6,fo
nt.axis=6);qqline(cubreg$res,col=1)

# Bootstrapping rsd to estimate minimum position, coefs, rms & cod

# Πίνακας υπολοίπων διάστασης dim(rawdata) που προκύπτουν από την κυ-
# βική πολυωνυμική προσαρμογή.

residues<-cubreg$res

# Η συνάρτηση rsd επιστρέφει τις τιμές των υπολοίπων της κυβικής πο -
# λυωνυμικής προσαρμογής, απαραίτητη για την εφαρμογή της αναδειγμα -
# τοληψίας επανάθεσης.

rsd<-function(x,residues)
{
rsd<-residues[x]
rsd
}

# Αναδειγματοληψία επανάθεσης των υπολοίπων η οποία παράγει nrep συν-
# θετικά δείγματα πλήθους dim(rawdata). Παράγεται έτσι ο πίνακας new-
# data διάστασης [nrep x dim(rawdata)] ο οποίος περιέχει nrep συνθε -
# τικά δείγματα που αφορούν το φαινόμενο μέγεθος του ελαχίστου.

bootrsd<-bootstrap(1:dim(data)[1],nrep,rsd,residues)$thetastar
newdata<-
bootrsd+(cubreg$coef[1]+cubreg$coef[2]*data[,1]+cubreg$coef[3]*(data[
,1]^2)+cubreg$coef[4]*(data[,1]^3))

# Υπολογισμός των εκτιμητριών ελαχίστων τετραγώνων που προκύπτουν για
# τους συντελεστές (c0,c1,c2,c3) της κυβικής πολυωνυμικής παλινδρόμη-
# σης, όπως επίσης και των στατιστικών μέτρων αξιολόγησης της περιγ -
# ραφής R^2 και RMSE για τα επιμέρους nrep συνθετικά δείγματα. Τα απο-
# τελέσματα καταχωρούνται σε ισάριθμους πίνακες διάστασης nrep.

newc0<-matrix(ncol=1)
newc1<-matrix(ncol=1)
newc2<-matrix(ncol=1)
newc3<-matrix(ncol=1)
bootR2<-matrix(ncol=1)
bootRMSE<-matrix(ncol=1)
bootmin<-matrix(ncol=1)
for(i in 1:nrep)
{
newc0[i]<-
lm(newdata[,i]~data[,1]+I(data[,1]^2)+I(data[,1]^3))$coef[1]
```

```
newc1[i]<-
lm(newdata[,i]~data[,1]+I(data[,1]^2)+I(data[,1]^3))$coef[2]
newc2[i]<-
lm(newdata[,i]~data[,1]+I(data[,1]^2)+I(data[,1]^3))$coef[3]
newc3[i]<-
lm(newdata[,i]~data[,1]+I(data[,1]^2)+I(data[,1]^3))$coef[4]
bootRMSE[i]<-
summary(lm(newdata[,i]~data[,1]+I(data[,1]^2)+I(data[,1]^3)))$sigma
bootR2[i]<-cor(data[,2],newdata[,i])^2
bootmin[i]<-(-newc2[i]-sqrt((newc2[i])^2-
3*newc1[i]*newc3[i]))/(3*newc3[i])
}
```

 # Υπολογισμός των bootstrap εκτιμητριών που αντιστοιχούν στο χρόνο ε-
 # λαχίστου bootmin, καθώς και του τυπικού του σφάλματος, αλλά και της
 # αντίστοιχης εκτιμήτριας ελαχίστων τετραγώνων lsmin.

```
mean(bootmin)
sd(bootmin)
lsmin<-(-cubreg$coef[3]-sqrt((cubreg$coef[3])^2-
3*cubreg$coef[2]*cubreg$coef[4]))/(3*cubreg$coef[4])
```

 # Παραγωγή πίνακα *datred* διάστασης dim(*rawdata*)x2 προερχόμενο από τον
 # αρχικό πίνακα *data* όταν αφαιρούμε από τις χρονικές θέσεις των φαι -
 # νόμενων μεγεθών (που συνθέτουν το ελάχιστο) την εκτιμήτρια lsmin.

```
datred<-matrix(nrow=dim(data)[1],ncol=2)
for(i in 1:dim(data)[1])
{
datred[i,1]<-data[i,1]-lsmin
datred[i,2]<-data[i,2]
datred
}
```

 # Υπολογισμός της εκτιμήτριας ελαχίστων τετραγώνων semin που αφορά το
 # τυπικό σφάλμα της θέσης του ελαχίστου lsmin μετά από τη νέα κυβική
 # πολυωνυμική πρασαρμογή στα τροποποιημένα δεδομένα. Η τεχνική που α-
 # κολουθείται έχει προταθεί από τους Breinhorst et al. (1973), καθώς
 # η τυπική εφαρμογή της διάδοσης σφάλματος οδηγεί σε αποτελέσματα που
 # δεν είναι ασφαλή.

```
cubred<-lm(datred[,2]~datred[,1]+I(datred[,1]^2)+I(datred[,1]^3))
w<-sqrt(1-(3*cubred$coef[2]*cubred$coef[4])/(cubred$coef[3]^2))
semin<-abs(coef(summary(cubred))[2,2]/(2*cubred$coef[3]*w))
```

 # Υπολογισμός των bootstrap εκτιμητριών για τα μέτρα αξιολόγησης πε -
 # ριγραφής R^2 και RMSE, καθώς και των τυπικών τους σφαλμάτων. Υπολο -
 # γίζονται επίσης οι αντίστοιχες εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων.

```
mean(bootRMSE)
sd(bootRMSE)
lsRMSE<-summary(cubreg)$sigma
mean(bootR2)
```

```
sd(bootR2)
lsR2<-summary(cubreg)$r.squared

# Bootstrap output plots

# Σχεδιασμός πλαισίου το οποίο θα υποδεχθεί 2x2 γραφήματα.

par(mfrow=c(2,2))

# Απεικόνιση της μορφής του ελαχίστου και της ταυτόχρονης προσαρμογής
# των nrep βέλτιστων κυβικών πολυωνύμων.

plot(data[,1],data[,2],ylim=c(max(data[,2]),min(data[,2])),col=1,lwd=
1,pch=19,xlab=paste("HJD (",int(rawdata[1,1]),"+)"),ylab="Δm
(mag)",main="(a)",cex=0.8,font.lab=6,font.main=6,font.axis=6)
for(i in 1:nrep)
{
x<-seq(data[dim(data)[1],1],data[1,1],length=100)
lines(x,newc0[i]+newc1[i]*x+newc2[i]*x^2+newc3[i]*x^3,col=1,lty=1,lwd
=1)
}

# Απεικόνιση της κατανομής των nrep χρόνων ελαχίστου, όπως αυτά προέ-
# κυψαν από τη bootstrap τεχνική, μέσω της κατασκευής του αντίστοιχου
# ιστογράμματος συχνοτήτων.

hist(bootmin,xlab=paste("Time of Minimum [HJD
(",int(rawdata[1,1]),"+)]"),main="(b)",font.lab=6,font.main=6,font.ax
is=6)

# Απεικόνιση της κατανομής των nrep τιμών RMSE, όπως εκείνες προέκυ -
# ψαν από τη bootstrap δειγματοληψία, μέσω της κατασκευής του αντίσ -
# τοιχου ιστογράμματος συχνοτήτων.

hist(bootRMSE,xlab="RMSE
(mag)",main="(c)",font.lab=6,font.main=6,font.axis=6)

# Απεικόνιση της κατανομής των nrep τιμών R², όπως αυτές προέκυψαν α-
# πό τη bootstrap τεχνική, μέσω της κατασκευής του αντίστοιχου ιστο -
# γράμματος συχνοτήτων.

hist(bootR2,xlab="R -
Squared",main="(d)",font.lab=6,font.main=6,font.axis=6)

# Εφόσον τώρα το κριτήριο αποδοχής ενός μη συμμετρικού προφίλ ελαχί -
# στου δεν ικανοποιείται, η προσαρμογή ενός παραβολικού (δευτέρου δη-
# λαδή βαθμού) πολυωνύμου ελαχίστων τετραγώνων πλέον υϊοθετείται.

} else

{

print("The minimum profile was found symmetric")
```

```
# Quadratic regression fitting

# Πραγματοποιείται παραβολική πολυωνυμική παλινδρόμηση.

quadreg<-lm(data[,2]~data[,1]+I(data[,1]^2))
summary(quadreg)

# Plots & diagnostics

# Σχεδιασμός πλαισίου το οποίο θα υποδεχθεί 2x2 γραφήματα.

par(mfrow=c(2,2))

# Απεικόνιση της μορφής του ελαχίστου και της ταυτόχρονης προσαρμογής
# του βέλτιστου παραβολικού πολυωνύμου.

plot(data[,1],data[,2],ylim=c(max(data[,2]),min(data[,2])),col=1,lwd=
1,pch=19,cex=0.8,xlab=paste("HJD (",int(rawdata[1,1]),"+)"),ylab="Δm
(mag)",main="(a)",font.lab=6,font.main=6,font.axis=6)

x<-seq(data[dim(data)[1],1],data[1,1],length=100)
lines(x,quadreg$coef[1]+quadreg$coef[2]*x+quadreg$coef[3]*x^2,col=1,l
ty=1,lwd=1)

# Απεικόνιση των υπολοίπων που προκύπτουν από την προσαρμογή.

plot(quadreg$res,xlab="Number  of  Observation",ylab="O-C
(mag)",main="(b)",pch=19,font.lab=6,font.main=6,cex=0.8,font.axis=6)

# Απεικόνιση της κατανομής των υπολοίπων της προσαρμογής μέσω της κα-
# τασκευής του αντίστοιχου ιστογράμματος συχνοτήτων.

hist(quadreg$res,xlab="Residuals
(mag)",main="(c)",font.lab=6,font.main=6,font.axis=6)

# Διάγραμμα συσχέτισης υπολογιζόμενων και θεωρητικών ποσοστιαίων ση -
# μείων που αντιστοιχούν στην Κανονική κατανομή.

qqnorm(quadreg$res,pch=19,cex=0.8,main="(d)",font.lab=6,font.main=6,f
ont.axis=6);qqline(quadreg$res,col=1)

# Bootstrapping rsd to estimate minimum position, coefs, rms & cod

# Πίνακας υπολοίπων διάστασης dim(rawdata) που προκύπτουν από την πα-
# ραβολική πολυωνυμική προσαρμογή.

residues<-quadreg$res

# Η συνάρτηση rsd επιστρέφει τις τιμές των υπολοίπων της παραβολικής
# πολυωνυμικής προσαρμογής, απαραίτητη για την εφαρμογή της αναδειγ -
# ματοληψίας επανάθεσης.

rsd<-function(x,residues)
```

```
{
rsd<-residues[x]
rsd
}

# Αναδειγματοληψία επανάθεσης των υπολοίπων η οποία παράγει nrep συν-
# θετικά δείγματα πλήθους dim(rawdata). Παράγεται έτσι ο πίνακας new-
# data διάστασης [nrep x dim(rawdata)] ο οποίος περιέχει nrep συνθε -
# τικά δείγματα που αφορούν το φαινόμενο μέγεθος του ελαχίστου.

bootrsd<-bootstrap(1:dim(data)[1],nrep,rsd,residues)$thetastar
newdata<-
bootrsd+(quadreg$coef[1]+quadreg$coef[2]*data[,1]+quadreg$coef[3]*(da
ta[,1]^2))

# Υπολογισμός των εκτιμητριών ελαχίστων τετραγώνων που προκύπτουν για
# τους συντελεστές (c0,c1,c2) της παραβολικής πολυωνυμικής παλινδρό -
# μησης, όπως επίσης και των στατιστικών μέτρων αξιολόγησης της περι-
# γραφής R^2 και RMSE για τα επιμέρους nrep συνθετικά δείγματα. Τα α -
# ποτελέσματα καταχωρούνται σε ισάριθμους πίνακες διάστασης nrep.

newc0<-matrix(ncol=1)
newc1<-matrix(ncol=1)
newc2<-matrix(ncol=1)
bootRMSE<-matrix(ncol=1)
bootR2<-matrix(ncol=1)
bootmin<-matrix(ncol=1)
for(i in 1:nrep)
{
newc0[i]<-lm(newdata[,i]~data[,1]+I(data[,1]^2))$coef[1]
newc1[i]<-lm(newdata[,i]~data[,1]+I(data[,1]^2))$coef[2]
newc2[i]<-lm(newdata[,i]~data[,1]+I(data[,1]^2))$coef[3]
bootRMSE[i]<-summary(lm(newdata[,i]~data[,1]+I(data[,1]^2)))$sigma
bootR2[i]<-cor(data[,2],newdata[,i])^2
bootmin[i]<--newc1[i]/(2*newc2[i])
}

# Υπολογισμός των bootstrap εκτιμητριών που αντιστοιχούν στο χρόνο ε-
# λαχίστου bootmin, καθώς και του τυπικού του σφάλματος, αλλά και της
# αντίστοιχης εκτιμήτριας ελαχίστων τετραγώνων lsmin.

mean(bootmin)
sd(bootmin)
lsmin<--quadreg$coef[2]/(2*quadreg$coef[3])

# Παραγωγή πίνακα datred διάστασης dim(rawdata)x2 προερχόμενο από τον
# αρχικό πίνακα data όταν αφαιρούμε από τις χρονικές θέσεις των φαι -
# νόμενων μεγεθών (που συνθέτουν το ελάχιστο) την εκτιμήτρια lsmin.

datred<-matrix(nrow=dim(data)[1],ncol=2)
for(i in 1:dim(data)[1])
{
datred[i,1]<-data[i,1]-lsmin
```

```
datred[i,2]<-data[i,2]
datred
}

# Υπολογισμός της εκτιμήτριας ελαχίστων τετραγώνων semin που αφορά το
# τυπικό σφάλμα της θέσης του ελαχίστου lsmin μετά από τη νέα παραβο-
# λική πολυωνυμική πρασαρμογή στα τροποποιημένα δεδομένα (Breinhorst
# et al. 1973).

quadred<-lm(datred[,2]~datred[,1]+I(datred[,1]^2))
semin<-abs(coef(summary(quadred))[2,2]/(2*quadred$coef[3]))

# Υπολογισμός των bootstrap εκτιμητριών για τα μέτρα αξιολόγησης πε -
# ριγραφής R2 και RMSE, καθώς και των τυπικών τους σφαλμάτων. Υπολο -
# γίζονται επίσης οι αντίστοιχες εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων.

mean(bootRMSE)
sd(bootRMSE)
lsRMSE<-summary(quadreg)$sigma
mean(bootR2)
sd(bootR2)
lsR2<-summary(quadreg)$r.squared

# Bootstrap output plots

# Σχεδιασμός πλαισίου το οποίο θα υποδεχθεί 2x2 γραφήματα.

par(mfrow=c(2,2))

# Απεικόνιση της μορφής του ελαχίστου και της ταυτόχρονης προσαρμογής
# των nrep βέλτιστων παραβολικών πολυωνύμων.

plot(data[,1],data[,2],ylim=c(max(data[,2]),min(data[,2])),col=1,lwd=
1,pch=19,xlab=paste("HJD (",int(rawdata[1,1]),"+)"),ylab="Δm
(mag)",main="(a)",cex=0.8,font.lab=6,font.main=6,font.axis=6)

for(i in 1:nrep)
{
x<-seq(data[dim(data)[1],1],data[1,1],length=100)
lines(x,newc0[i]+newc1[i]*x+newc2[i]*x^2,col=1,lty=1,lwd=1)
}

# Απεικόνιση της κατανομής των nrep χρόνων ελαχίστου, όπως αυτά προέ-
# κυψαν από τη bootstrap τεχνική, μέσω της κατασκευής του αντίστοιχου
# ιστογράμματος συχνοτήτων.

hist(bootmin,xlab=paste("Time of Minimum HJD
[(",int(rawdata[1,1]),"+)]"),main="(b)",font.lab=6,font.main=6,font.a
xis=6)

# Απεικόνιση της κατανομής των nrep τιμών RMSE, όπως εκείνες προέκυ -
# ψαν από τη bootstrap δειγματοληψία, μέσω της κατασκευής του αντίσ -
# τοιχου ιστογράμματος συχνοτήτων.
```

```
hist(bootRMSE,xlab="RMSE
(mag)",main="(c)",font.lab=6,font.main=6,font.axis=6)

# Απεικόνιση της κατανομής των nrep τιμών R2, όπως αυτές προέκυψαν α-
# πό τη bootstrap τεχνική, μέσω της κατασκευής του αντίστοιχου ιστο -
# γράμματος συχνοτήτων.

hist(bootR2,xlab="R -
Squared",main="(d)",font.lab=6,font.main=6,font.axis=6)

}

# Estimating Monte Carlo error

# Ταχεία εκτίμηση του σφάλματος της Monte Carlo διαδικασίας καταμερί-
# ζοντας τον πίνακα bootmin διάστασης nrep, ο οποίος περιέχει τις εκ-
# τιμήτριες του χρόνου ελαχίστου που προκύπτουν για τα nrep συνθετικά
# δείγματα, σε πέντε υποπίνακες επιμέρους διάστασης nrep/5.

bootmin1<-matrix(ncol=1)
bootmin2<-matrix(ncol=1)
bootmin3<-matrix(ncol=1)
bootmin4<-matrix(ncol=1)
bootmin5<-matrix(ncol=1)

for(i in 1:int(nrep/5))
{bootmin1[i]<-bootmin[i]}
j<-0
for(i in int(nrep/5):int(2*nrep/5))
{j<-j+1
bootmin2[j]<-bootmin[i]}
j<-0
for(i in int(2*nrep/5):int(3*nrep/5))
{j<-j+1
bootmin3[j]<-bootmin[i]}
j<-0
for(i in int(3*nrep/5):int(4*nrep/5))
{j<-j+1
bootmin4[j]<-bootmin[i]}
j<-0
for(i in int(4*nrep/5):nrep)
{j<-j+1
bootmin5[j]<-bootmin[i]}

# Το σφάλμα mcboot της Monte Carlo διαδικασίας εκτιμάται από την τυ -
# πική απόκλιση των (πέντε) μέσων του χρόνου ελαχίστου που προκύπτει
# από τα πέντε επιμέρους δείγματα.

mcboot<-
sd(c(mean(bootmin1),mean(bootmin2),mean(bootmin3),mean(bootmin4),mean
(bootmin5)))

# Final results
```

```
# Εποπτική παρουσίαση των προτεινόμενων bootstrap εκτιμητριών για το
# χρόνο ελαχίστου bootmin, των μέτρων αξιολόγησης RMSE και R^2, καθώς
# και των τυπικών τους σφαλμάτων. Ομοίως, παρατίθενται οι εκτιμήτριες
# ελαχίστων τετραγώνων (οι οποίες δεν προβλέπουν προφανώς σφάλμα των
# μέτρων RMSE και R^2), καθώς και το σφάλμα της Monte Carlo τεχνικής.

rho
mean(bootmin)
sd(bootmin)
lsmin
semin
mean(bootRMSE)
sd(bootRMSE)
lsRMSE
mean(bootR2)
sd(bootR2)
lsR2
mcboot
```

Παράρτημα II

ΣΦΑΛΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Σκοπός του παρόντος παραρτήματος είναι ο αναλυτικός προσδιορισμός του ***σφάλματος διακριτοποίησης (discretization error)*** που συνοδεύει το ρυθμό μεταβολής της εκάστοτε συνθετικής συνάρτησης $\Delta T(\tilde{E})$ σε κάθε τροχιακό κύκλο E κατά τη μετάβαση από το διακριτό καθεστώς περιγραφής των διαγραμμάτων O-C στο αντίστοιχο συνεχές. Ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία κατασκευής ενός συνθετικού διαγράμματος O-C, μέσα από την εξίσωση στροφορμής που διέπει το σύστημα, μας δίνεται η δυνατότητα προσδιορισμού τόσο της συνάρτησης εκείνης που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της τροχιακής περιόδου όσο και της αντίστοιχης συνάρτησης η οποία στηρίζεται στο συνεχή τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$ με βάση τον μετασχηματισμό (5.3). Το ζήτημα λοιπόν που ανακύπτει αφορά την απόκλιση που αναπτύσσεται κατά τον προσδιορισμό της συνάρτησης περιόδου μέσα από τη διακριτή της μορφή (3.5), ή ισοδύναμα μέσω της ανάλυσης ενός διαγράμματος O-C, σε σχέση με την αντίστοιχη συνεχή (5.4) η οποία προβλέπεται θεωρητικά κάτω από τη δράση συγκεκριμένων φυσικών μηχανισμών.

Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε αποτελεί αντικείμενο της Αριθμητικής Ανάλυσης, καθώς η παρουσία του σφάλματος διακριτοποίησης πηγάζει από τον περιορισμό στις τιμές που λαμβάνει ο ακέραιος τροχιακός κύκλος E σε σχέση με τον αντίστοιχο συνεχή $\tilde{E}$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η $\Delta T(\tilde{E})$ έχει επιλεχθεί ως η συνάρτηση εκείνη η οποία περιγράφει ικανοποιητικά τις διαφορές O-C που έχουν προκύψει μεταξύ των παρατηρούμενων και των υπολογιζόμενων από μια γραμμική εφημερίδα χρόνων ελαχίστων. Εφόσον η πιο πάνω συνάρτηση είναι ομαλή ή ισοδύναμα χωρίς την παρουσία ασυνεχειών σε οποιαδήποτε από τις παραγώγους της (απείρως δηλαδή παραγωγίσιμη), στη γενική της μορφή, μπορεί πάντοτε να αναπαρασταθεί από ένα πολυώνυμο βαθμού m της ακόλουθης μορφής:

$$\Delta T(\tilde{E}) = \sum_{n=0}^{m} c_n \tilde{E}^n \ , \tag{A2.1}$$

όπου c_n πραγματικοί συντελεστές. Η πιο πάνω συνθετική συνάρτηση θα έχει ισοδύναμη ισχύ κατά έναν τροχιακό κύκλο λιγότερο, καθώς η μορφή του πολυωνύμου (A2.1) διατηρείται ανεξάρτητα από την εξαρτημένη μεταβλητή ως προς την οποία ορίζεται, δηλαδή:

$$\Delta T(\tilde{E}-1) = \sum_{n=0}^{m} c_n (\tilde{E}-1)^n \ . \tag{A2.2}$$

Παραγωγίζοντας τώρα τη συνάρτηση (Α2.1) ως προς τον συνεχή τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$, οδηγούμαστε στο πιο κάτω πολυώνυμο βαθμού κατά έναν μικρότερο από το αρχικό:

$$\frac{d\Delta T(\tilde{E})}{d\tilde{E}} = \sum_{n=0}^{m} n c_n \tilde{E}^{n-1} \,. \tag{A2.3}$$

Αφαιρώντας το πολυώνυμο (Α2.2) από εκείνο που αρχικά ορίστηκε μέσω της σχέσης (Α2.1) και εφαρμόζοντας το διωνυμικό ανάπτυγμα του Νεύτωνα, μετά από κάποιες απλές αλγεβρικές πράξεις, οδηγούμαστε σε μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα σχέση:

$$\Delta T(\tilde{E}) - \Delta T(\tilde{E}-1) = \sum_{n=0}^{m} c_n \tilde{E}^n - \sum_{n=0}^{m} c_n (\tilde{E}-1)^n = \sum_{n=0}^{m} c_n \left\{ \tilde{E}^n - (\tilde{E}-1)^n \right\} =$$

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \left\{ \tilde{E}^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tilde{E}^k (-1)^{n-k} \right\} =$$

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \left\{ \tilde{E}^n - \binom{n}{n} \tilde{E}^n (-1)^{n-n} - \binom{n}{n-1} \tilde{E}^{n-1} (-1)^{n-n+1} - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \tilde{E}^k (-1)^{n-k} \right\} =$$

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \left\{ \tilde{E}^n - \tilde{E}^n + n\tilde{E}^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \tilde{E}^k (-1)^{n-k} \right\} = \sum_{n=0}^{m} c_n \left\{ n\tilde{E}^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \tilde{E}^k (-1)^{n-k} \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta T(\tilde{E}) - \Delta T(\tilde{E}-1) = \sum_{n=0}^{m} n c_n \tilde{E}^{n-1} - \sum_{n=0}^{m} c_n \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \tilde{E}^k (-1)^{n-k} \right\}. \tag{A2.4}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (Α2.3), ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της πιο πάνω ισότητας ταυτίζεται με την παράγωγο της συνάρτησης $\Delta T(\tilde{E})$, όπως εκείνη έχει οριστεί μέσω του πολυωνύμου (Α2.1). Ο δεύτερος όρος του ίδιου μέλους αποκαλύπτει το σφάλμα που αναπτύσσεται εξαιτίας των προς τα πίσω διαφορών ως προσέγγιση της παραγώγου συνάρτησης $\mathrm{d}\Delta T(\tilde{E})/\mathrm{d}\tilde{E}$, δηλαδή:

$$\Delta T(\tilde{E}) - \Delta T(\tilde{E}-1) = \frac{d\Delta T(\tilde{E})}{d\tilde{E}} - \sum_{n=0}^{m} c_n \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \tilde{E}^k (-1)^{n-k} \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta T(\tilde{E}) - \Delta T(\tilde{E}-1) = \frac{d\Delta T(\tilde{E})}{d\tilde{E}} + O(\tilde{E}^{m-2}) \,. \tag{A2.5}$$

Το απόλυτο σφάλμα που προκύπτει μέσω της προσέγγισης αυτής αποτελεί ένα πολυώνυμο με βαθμό m-2, δηλαδή με βαθμό μικρότερο κατά δύο σε σχέση με το αρχικό πολυώνυμο $\Delta T(\tilde{E})$ που περιγράφει το εκάστοτε O-C διάγραμμα. Το αντίστοιχο σχετικό σφάλμα ως προς την πραγματική μεταβολή της συνάρτησης $\Delta T(\tilde{E})$ μπορεί ομοίως να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή ως ακολούθως:

$$\left|\frac{O(\tilde{E}^{m-2})}{\Delta T(\tilde{E})-\Delta T(\tilde{E}-1)}\right| = \left|\frac{-\sum_{n=0}^{m} c_n \left\{\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\tilde{E}^{k}(-1)^{n-k}\right\}}{\sum_{n=0}^{m} c_n \left\{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\tilde{E}^{k}(-1)^{n-k}\right\}}\right| =$$

$$\left|\frac{\sum_{n=0}^{m}\left\{E^{n-2}\left[-c_n\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}E^{k-(n-2)}(-1)^{n-k}\right]\right\}}{\sum_{n=0}^{m}\left\{E^{n-1}\left[c_n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E^{k-(n-1)}(-1)^{n-k}\right]\right\}}\right| =$$

$$\left|\frac{\tilde{E}^{m-2}\sum_{n=0}^{m}\left\{\tilde{E}^{n-2-(m-2)}\left[-c_n\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\tilde{E}^{k-(n-2)}(-1)^{n-k}\right]\right\}}{\tilde{E}^{m-1}\sum_{n=0}^{m}\left\{\tilde{E}^{n-1-(m-1)}\left[c_n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\tilde{E}^{k-(n-1)}(-1)^{n-k}\right]\right\}}\right| =$$

$$\frac{1}{\tilde{E}}\cdot\left|\frac{\sum_{n=0}^{m}\left\{\tilde{E}^{n-m}\left[-c_n\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\tilde{E}^{k-(n-2)}(-1)^{n-k}\right]\right\}}{\sum_{n=0}^{m}\left\{\tilde{E}^{n-m}\left[c_n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\tilde{E}^{k-(n-1)}(-1)^{n-k}\right]\right\}}\right| \Rightarrow$$

$$\boxed{\left|\frac{O(\tilde{E}^{m-2})}{\Delta T(\tilde{E})-\Delta T(\tilde{E}-1)}\right| \approx \frac{1}{\tilde{E}}\cdot\frac{m-1}{2}}, \qquad \text{(A2.6)}$$

διατηρώντας τους μεγιστοβάθμιους μόνο όρους τόσο στον αριθμητή όσο και στον παρονομαστή του πιο πάνω κλάσματος.

Η σχέση (A2.6) μας υποδεικνύει ότι το σχετικό σφάλμα που παράγεται κατά τη μετάβαση από το διακριτό στο συνεχές καθεστώς μελέτης ενός διαγράμματος O-C μειώνεται με την ποσότητα $\tilde{E}^{-1}$. Το σφάλμα που αναπτύσσεται υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ είναι γνωστή για κάθε $\tilde{E}$, και συνεπώς ακόμα και σε τροχιακές φάσεις που δεν ταυτίζονται με το σημείο της κατωτέρας συνόδου ($\tilde{E} \neq E$), αποδεικνύεται εξαιρετικά μικρό. Πιο συγκεκριμένα, η ακρίβεια που επιτυγχάνεται μετά από μόλις 100 τροχιακούς κύκλους είναι καλύτερη από 1% και 3% όταν το πολυώνυμο που επιλέγεται να περιγράψει τις εκάστοτε O-C διαφορές είναι δευτέρου (m = 2) και έκτου βαθμού (m = 6) αντίστοιχα. Το σφάλμα αυτό φθίνει στο 0.1% όταν ο αριθμός των κύκλων αγγίζει τους 1000 και πλησιάζει πλέον το μηδέν όταν το πλήθος των τροχιακών κύκλων τείνει στο άπειρο.

Παράρτημα ΙΙΙ

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΕΤΑΡΤΟΒΑΘΜΙΟΥ ΟΡΟΥ ΣΥΝΘΕΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στο πέμπτο κεφάλαιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής η συνθετική συνάρτηση που περιγράφει ένα διάγραμμα O-C αναπαρίσταται από ένα πολυώνυμο MacLaurin της μορφής (5.8). Η κίνηση αυτή αποσκοπεί αφενός στη διατήρηση της συνθετικής συνάρτησης σε κλειστή μορφή όταν οι σχετικές διαφορικές εξισώσεις δεν επιλύονται αναλυτικά, αφετέρου στον προσδιορισμό των ορίων μέσα στα οποία η παραβολική αναπαράσταση αναμένεται ικανοποιητική.

Μετά τον προσδιορισμό των τριών πρώτων συντελεστών του πολυωνύμου, η οποία παρουσιάστηκε στην υποενότητα 2.2 του πέμπτου κεφαλαίου, στο παρόν παράρτημα κρίθηκε σκόπιμη η παρουσίαση της διαδικασίας προσδιορισμού του συντελεστή c_4 (ν = 3) του τεταρτοβάθμιου όρου για λόγους πληρότητας ώστε η μεθοδολογία να επεκταθεί σε συντελεστές πολυωνυμικών όρων ανώτερου βαθμού και τελικά να αξιοποιηθεί στο μέλλον κατά την εφαρμογή της είτε σε βραχυχρόνιους φυσικούς μηχανισμούς, οι οποίοι διαμορφώνουν τα διαγράμματα O-C σε δομές αρκετά πιο πολύπλοκες σε σχέση με εκείνες των μακροχρόνιων μηχανισμών, είτε στη συνδυασμένη τους παρουσία. Ειδικά στην τελευταία περίπτωση, η πολυωνυμική προσαρμογή στις διαθέσιμες παρατηρήσεις ενός διαγράμματος O-C αποκτά πλέον φυσική κυρίως και όχι μόνο μαθηματική υπόσταση.

Ακολουθώντας όμοια λοιπόν πορεία με εκείνη που υϊοθετήθηκε για τους τρεις πρώτους συντελεστές, παραγωγίζουμε αρχικά τη σχέση (5.16) ως προς τον συνεχή τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$ και χρησιμοποιούμε τον κανόνα αλυσίδας ώστε να συνδέσουμε τη συνάρτηση $f(P)$ = dP/dt και ορισμένες από τις παραγώγους της με το ζητούμενο συντελεστή c_4:

$$\frac{d}{d\tilde{E}}\left(\frac{df}{dP}\cdot\frac{dP}{d\tilde{E}}\right)=\frac{2}{P^3}\left(\frac{dP}{d\tilde{E}}\right)^3-\frac{1}{P^2}\cdot\frac{d}{d\tilde{E}}\left[\left(\frac{dP}{d\tilde{E}}\right)^2\right]-\frac{1}{P^2}\cdot\frac{dP}{d\tilde{E}}\cdot\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2}+\frac{1}{P}\cdot\frac{d^3P}{d\tilde{E}^3}\Rightarrow$$

$$\left[\frac{d}{d\tilde{E}}\left(\frac{df}{dP}\right)\right]\frac{dP}{d\tilde{E}}+\frac{df}{dP}\cdot\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2}=$$

$$\frac{2}{P^3}\left(\frac{dP}{d\tilde{E}}\right)^3-\frac{1}{P^2}\cdot\left(\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2}\cdot\frac{dP}{d\tilde{E}}+\frac{dP}{d\tilde{E}}\cdot\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2}\right)-\frac{1}{P^2}\cdot\frac{dP}{d\tilde{E}}\cdot\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2}+\frac{1}{P}\cdot\frac{d^3P}{d\tilde{E}^3}\Rightarrow$$

$$\left[\frac{d}{dP}\left(\frac{df}{dP}\right)\frac{dP}{d\tilde{E}}\right]\frac{dP}{d\tilde{E}}+\frac{df}{dP}\cdot\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2}=\frac{2}{P^3}\left(\frac{dP}{d\tilde{E}}\right)^3-\frac{3}{P^2}\cdot\frac{dP}{d\tilde{E}}\cdot\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2}+\frac{1}{P}\cdot\frac{d^3P}{d\tilde{E}^3}\Rightarrow$$

$$\frac{d^2 f(P)}{dP^2}\left(\frac{dP}{d\tilde{E}}\right)^2 + \frac{df(P)}{dP}\cdot\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2} = \frac{2}{P^3}\left(\frac{dP}{d\tilde{E}}\right)^3 - \frac{3}{P^2}\cdot\frac{dP}{d\tilde{E}}\cdot\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2} + \frac{1}{P}\cdot\frac{d^3P}{d\tilde{E}^3}. \quad \text{(A3.1)}$$

Επαληθεύοντας τη σχέση (A3.1) στο σημείο $\tilde{E} = 0$, θα έχουμε:

$$\left.\frac{d^2 f(P)}{dP^2}\right|_{\tilde{E}=0}\left(\left.\frac{dP}{d\tilde{E}}\right|_{\tilde{E}=0}\right)^2 + \left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{\tilde{E}=0}\left.\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2}\right|_{\tilde{E}=0} =$$

$$\frac{2}{P(0)^3}\left(\left.\frac{dP}{d\tilde{E}}\right|_{\tilde{E}=0}\right)^3 - \frac{3}{P(0)^2}\cdot\left.\frac{dP}{d\tilde{E}}\right|_{\tilde{E}=0}\cdot\left.\frac{d^2P}{d\tilde{E}^2}\right|_{\tilde{E}=0} + \frac{1}{P(0)}\cdot\left.\frac{d^3P}{d\tilde{E}^3}\right|_{\tilde{E}=0} \overset{(5.13)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\frac{d^2 f(P)}{dP^2}\right|_{\tilde{E}=0} 4c_2^2 + 6c_3\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{\tilde{E}=0} = \frac{16c_2^3}{P_e^3} - \frac{3}{P_e^2}2c_2 6c_3 + \frac{24c_4}{P_e} \overset{(5.15),(5.17)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\frac{d^2 f(P)}{dP^2}\right|_{\tilde{E}=0} P_e^2 f^2(P_e) + P_e f(P_e)\left(P_e\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{\tilde{E}=0} + f(P_e)\right)\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{\tilde{E}=0} =$$

$$2f^3(P_e) - 3f^2(P_e)\left(P_e\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{\tilde{E}=0} + f(P_e)\right) + \frac{24c_4}{P_e} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{c_4 = \frac{P_e f(P_e)}{24}\left[P_e^2 f(P_e)\left.\frac{d^2 f(P)}{dP^2}\right|_{P=P_e} + \left(P_e\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=P_e}\right)^2 + 4P_e f(P_e)\left.\frac{df}{dP}\right|_{P=P_e} + f^2(P_e)\right]}. \quad \text{(A3.2)}$$

Η προσαρμογή ενός πολυωνύμου με σκοπό να περιγράψει τη διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C με τον βέλτιστο τρόπο κάτω από κατάλληλα στατιστικά κριτήρια οδηγεί στην αριθμητική εκτίμηση των συντελεστών του. Υποθέτοντας ότι η εκ των προτέρων γνώση σχετικά με την παρουσία συγκεκριμένων φυσικών μηχανισμών περιγράφεται ικανοποιητικά μέσα από τη συνάρτηση $f(P) = \mathrm{d}P/\mathrm{d}t$, δηλαδή μέσα από το ρυθμό μεταβολής της τροχιακής περιόδου όπως εκείνη έχει προκύψει από την εξίσωση στροφορμής που διέπει το σύστημα, οι πολυωνυμικοί συντελεστές αποκτούν φυσική αξία, προσφέροντας πολύτιμες πληροφορίες για τις εκάστοτε εμπλεκόμενες φυσικές παραμέτρους. Ο προσδιορισμός συντελεστών όρων υψηλού βαθμού ανάγεται τότε σε ένα ανεκτίμητο εργαλείο αξιοποίησης της πληροφορίας η οποία αναδύεται μέσα από ένα διάγραμμα O-C.

Παράρτημα IV

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η γνώση της συνθετικής εκείνης συνάρτησης που περιγράφει ένα διάγραμμα O-C κάτω από την παρουσία ενός συγκεκριμένου ή συνδυασμού φυσικών μηχανισμών αποδείχθηκε όχι μόνο χρήσιμη αλλά και κρίσιμη κατά τη μελέτη των μεταβολών της τροχιακής περιόδου ενός διπλού εκλειπτικού συστήματος αστέρων. Η προβλεπόμενη μορφολογία ενός διαγράμματος O-C με κάθε λεπτομέρεια προσφέρει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τα ακρότατα τόσο της περιόδου όσο και του εκάστοτε διαγράμματος O-C, επιτρέπει την αξιολόγηση ενός διαγράμματος O-C ως εργαλείο ανίχνευσης μιας φυσικής διαδικασίας, αλλά και τον προσδιορισμό των χρονικών εκείνων ορίων μέσα στα οποία η παραβολική αναπαράσταση αναμένεται επαρκής.

Το παρόν παράρτημα παρουσιάζει τη μαθηματική πορεία προσδιορισμού των συνθετικών συναρτήσεων $\Delta T(\tilde{E})$ που παράγονται από τη μεθοδολογία η οποία προτάθηκε στη δεύτερη ενότητα του πέμπτου κεφαλαίου όταν η τροχιακή περίοδος διαμορφώνεται κάτω από την επίδραση απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου αλλά και μέσω της μαγνητικής πέδησης. Οι διαφορικές εξισώσεις που επιλύονται είναι συνήθεις και πρώτης πάντοτε τάξης (χωριζομένων μεταβλητών) με αρχικές συνθήκες τις $[\tilde{E},t,\Delta T(\tilde{E}),P(\tilde{E})] = [0,T_0,0,P_e]$, παραπέμποντας στο πέμπτο κεφάλαιο για την τεκμηριωμένη αιτιολόγηση του τρόπου επιλογής και ερμηνείας τους. Θυμίζουμε ότι η πορεία ξεκινά από την εξίσωση στροφορμής (5.5) ή (5.6) που διέπει το σύστημα ώστε να υπολογιστεί η συνάρτηση περιόδου.

Ειδικότερα, στην περίπτωση της ***ισότροπης απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου***, αγνοώντας την ιδιοπεριστροφή των μελών, την κατάληξη της μάζας η οποία εκλύεται από το σύστημα και οποιοδήποτε μηχανισμό απώλειας στροφορμής, η εξίσωση που προκύπτει είναι η (5.21):

$$\frac{dP}{dt} = wP \Rightarrow \int_{P_e}^{P}\frac{dP}{P} = w\int_{T_0}^{t}dt \Rightarrow \ln P - \ln P_e = w(t-T_0) \Leftrightarrow \ln\frac{P}{P_e} = w(t-T_0) \Leftrightarrow$$

$$P(t) = P_e e^{w(t-T_0)}, \qquad \text{(A4.1)}$$

όπου w σταθερά η οποία εκτιμάται από τη σχέση (5.22) ή (5.23) με βάση την προσέγγιση των TH91 ή KRL06 αντίστοιχα.

Το επόμενο βήμα αφορά τον προσδιορισμό της συνάρτησης $t = t(\tilde{E})$ που συνδέει τον τροχιακό κύκλο $\tilde{E}$ με τον φυσικό χρόνο t μέσω του μετασχηματισμού (5.3). Στην προκειμένη περίπτωση, η περίοδος αντικαθίσταται από τη σχέση (A4.1), δηλαδή:

$$P = \frac{dt}{d\tilde{E}} \Leftrightarrow P_e e^{w(t-T_0)} = \frac{dt}{d\tilde{E}} \Rightarrow \int_{T_0}^{t} \frac{dt}{e^{w(t-T_0)}} = P_e \int_0^{\tilde{E}} d\tilde{E} \Rightarrow e^{-w(t-T_0)} - 1 = -wP_e \tilde{E} \Leftrightarrow$$

$$t(\tilde{E}) - T_0 = -\frac{1}{w}\ln(1 - wP_e\tilde{E}). \qquad \text{(A4.2)}$$

Η εκάστοτε συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ κατασκευάζεται τελικά με βάση τις διαφορές O-C που εκφράζει και συνεπώς με βάση τον ίδιο της τον ορισμό. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο μετασχηματισμός (A4.2) είναι εκείνος που υϊοθετείται προς χρήση:

$$O(\tilde{E}) - C(\tilde{E}) = \Delta T(\tilde{E}) \Leftrightarrow t(\tilde{E}) - T_0 - P_e\tilde{E} = \Delta T(\tilde{E}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta T(\tilde{E}) = -\frac{1}{w}\ln(1 - wP_e\tilde{E}) - P_e\tilde{E}}. \qquad \text{(A4.3)}$$

Ερχόμενοι πλέον στην περίπτωση της ***μαγνητικής πέδησης***, αγνοώντας την ιδιοπεριστροφή των μελών, καθώς και οποιαδήποτε μορφή απώλειας ή μεταφοράς μάζας, η εξίσωση στροφορμής του συστήματος οδηγεί στη διαφορική εξίσωση (5.35):

$$\frac{dP}{dt} = -bP^{\frac{2}{3}-a} \Rightarrow \int_{P_e}^{P} \frac{dP}{P^{\frac{2}{3}-a}} = -b\int_{T_0}^{t} dt \Rightarrow P^{a+\frac{1}{3}} - P_e^{a+\frac{1}{3}} = -b\left(a + \frac{1}{3}\right)(t - T_0) \Leftrightarrow$$

$$P(t) = \left[P_e^{a+\frac{1}{3}} - b\left(a + \frac{1}{3}\right)(t - T_0)\right]^{\frac{1}{a+\frac{1}{3}}}, \qquad \text{(A4.4)}$$

όπου b σταθερά η οποία εκτιμάται από τη σχέση (5.36), ρυθμίζεται ανάλογα με το μοντέλο πέδησης που επιθυμείται να υϊοθετηθεί σύμφωνα με τη σχέση (4.60) και βαθμονομείται κατάλληλα επιλέγοντας τιμές που αντιστοιχούν στη σταθερά K_{kaw} μέσα από τον πίνακα Π.4.1.

Με βάση το μετασχηματισμό (5.3) και τη συνάρτηση περιόδου (A4.4) είμαστε πλεόν σε θέση να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση $t = t(\tilde{E})$ που συνδέει τον τροχιακό κύκλο με το φυσικό χρόνο:

$$P = \frac{dt}{d\tilde{E}} \Leftrightarrow \left[P_e^{a+\frac{1}{3}} - b\left(a + \frac{1}{3}\right)(t - T_0)\right]^{\frac{1}{a+\frac{1}{3}}} = \frac{dt}{d\tilde{E}} \Rightarrow$$

$$\int_{T_0}^{t} \left[P_e^{a+\frac{1}{3}} - b\left(a + \frac{1}{3}\right)(t - T_0)\right]^{\frac{1}{-a-\frac{1}{3}}} dt = \int_0^{\tilde{E}} d\tilde{E} \Rightarrow$$

$$\left[P_e^{a+\frac{1}{3}} - b\left(a+\frac{1}{3}\right)(t-T_0)\right]^{\frac{a-\frac{2}{3}}{a+\frac{1}{3}}} - P_e^{a-\frac{2}{3}} = -b\left(a-\frac{2}{3}\right)\tilde{E} \Leftrightarrow$$

$$P_e^{a+\frac{1}{3}} - b\left(a+\frac{1}{3}\right)(t-T_0) = \left[P_e^{a-\frac{2}{3}} - b\left(a-\frac{2}{3}\right)\tilde{E}\right]^{\frac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow$$

$$t(\tilde{E}) - T_0 = \frac{1}{b\left(a+\frac{1}{3}\right)}\left\{P_e^{a+\frac{1}{3}} - \left[P_e^{a-\frac{2}{3}} - b\left(a-\frac{2}{3}\right)\tilde{E}\right]^{\frac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{2}{3}}}\right\}. \qquad \text{(A4.5)}$$

Σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν και εφαρμόστηκαν στην περίπτωση της απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου, η συνθετική συνάρτηση $\Delta T(\tilde{E})$ που προβλέπεται για την περίπτωση της μαγνητικής πέδησης προκύπτει με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (A4.5) ως ακολούθως:

$$\Delta T(\tilde{E}) = t(\tilde{E}) - T_0 - P_e\tilde{E} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta T(\tilde{E}) = \frac{1}{b\left(a+\frac{1}{3}\right)}\left\{P_e^{a+\frac{1}{3}} - \left[P_e^{a-\frac{2}{3}} - b\left(a-\frac{2}{3}\right)\tilde{E}\right]^{\frac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{2}{3}}}\right\} - P_e\tilde{E}.} \qquad \text{(A4.6)}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, το φαινόμενο της απώλειας μάζας μέσω αστρικού ανέμου δεν προκαλεί αποκλειστικά απώλεια μάζας ή αποκλειστικά απώλεια στροφορμής μέσω της μαγνητικής πέδησης, καθώς η μεμονωμένη δράση των δύο πιο πάνω μηχανισμών παρουσιάζει θεωρητικό και μόνο ενδιαφέρον. Η πραγματική λοιπόν εικόνα έκφρασης του φαινομένου απαιτεί την ***ταυτόχρονη δράση*** τους και συνεπώς την παράλληλη παρουσία τους στην εξίσωση στροφορμής ενός διπλού συστήματος αστέρων, οδηγώντας τελικά στη διαφορική εξίσωση (5.58):

$$\frac{dP}{dt} = wP - bP^{\frac{2}{3}-a} \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} = -bP\left(P^{-a-\frac{1}{3}} - \frac{w}{b}\right) \Rightarrow \int_{P_e}^{P}\frac{dP}{-bP\left(P^{-a-\frac{1}{3}} - \frac{w}{b}\right)} = \int_{T_0}^{t}dt \Rightarrow$$

$$\int_{P_e}^{P}\frac{dP}{P\left(P^{-a-\frac{1}{3}} - \frac{w}{b}\right)} = -b(t-T_0). \qquad \text{(A4.7)}$$

Το πιο πάνω ορισμένο ολοκλήρωμα, το οποίο απαιτείται για τον προσδιορισμό της συνάρτησης περιόδου κάτω από την κοινή παρουσία των δύο εξεταζόμενων μηχανισμών, αν και δύσκολα επιλύσιμο, διατηρεί ακόμα την αναλυτική του έκφραση στηριζόμενοι στην ακόλουθη αόριστη γενικευμένη του μορφή (π.χ. Spiegel & Liu 2002):

$$\int \frac{dx}{x(x^n - \lambda^n)} = \frac{1}{n\lambda^n} \ln\left(\frac{x^n - \lambda^n}{x^n}\right) + c, \tag{A4.8}$$

όπου λ, n, c σταθερές. Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στη σχέση (Α4.7) είναι πλήρως συμβατό με εκείνο της σχέσης (Α4.8) κάτω από κατάλληλους μετασχηματισμούς. Πιο συγκεκριμένα, εάν στη θέση της πραγματικής μεταβλητής x αποδώσουμε την τροχιακή περίοδο P, η ισοδυναμία των δύο ολοκληρωμάτων λαμβάνει χώρα κάτω από τις ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$$\int_{P_e}^{P} \frac{dP}{P\left(P^{-a-\frac{1}{3}} - \frac{w}{b}\right)} = \frac{1}{n\lambda^n}\left[\ln\left(\frac{P^n - \lambda^n}{P^n}\right) - \ln\left(\frac{P_e^n - \lambda^n}{P_e^n}\right)\right], \tag{A4.9}$$

θέτοντας όπου $n \equiv -a - 1/3$ και $\lambda^n \equiv w/b$. Έτσι, η σχέση (Α4.7) με τη βοήθεια της ισοδυναμίας (Α4.9) μας δίνει τη δυνατότητα ανάπτυξης της μεθοδολογίας η οποία αναπτύχθηκε αποσκοπώντας στην εύρεση της ζητούμενης συνάρτησης περιόδου:

$$\ln\frac{(P^n - \lambda^n)P_e^n}{(P_e^n - \lambda^n)P^n} = -nb\lambda^n(t - T_0) \Leftrightarrow \frac{(P^n - \lambda^n)P_e^n}{(P_e^n - \lambda^n)P^n} = e^{-nb\lambda^n(t-T_0)} \Leftrightarrow$$

$$P_e^n P^n - \lambda^n P_e^n = P_e^n P^n e^{-nb\lambda^n(t-T_0)} - \lambda^n P^n e^{-nb\lambda^n(t-T_0)} \Leftrightarrow$$

$$P^n\left\{P_e^n - (P_e^n - \lambda^n)e^{-nb\lambda^n(t-T_0)}\right\} = \lambda^n P_e^n \Leftrightarrow$$

$$P^n = \left\{\lambda^{-n} P_e^{-n}\left[P_e^n - (P_e^n - \lambda^n)e^{-nb\lambda^n(t-T_0)}\right]\right\}^{-1} \Rightarrow$$

$$P^n = \left\{\frac{b}{w} P_e^{-n}\left[P_e^n - \left(P_e^n - \frac{w}{b}\right)e^{w\left(a+\frac{1}{3}\right)(t-T_0)}\right]\right\}^{-1} \Leftrightarrow$$

$$P(t) = \left[\frac{b}{w} - \left(\frac{b}{w} - P_e^{a+\frac{1}{3}}\right)e^{w\left(a+\frac{1}{3}\right)(t-T_0)}\right]^{\frac{1}{a+\frac{1}{3}}}, \tag{A4.10}$$

εφαρμόζοντας τις αντικαταστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στη σχέση (Α4.9).

Η συνάρτηση περιόδου (Α4.10) είναι αδύνατο να ολοκληρωθεί αναλυτικά ώστε να οδηγήσει στο μετασχηματισμό $t = t(\tilde{E})$ μέσω της σχέσης (5.3), γεγονός το οποίο εμποδίζει τελικά τον προσδιορισμό της αντίστοιχης συνθετικής συνάρτησης $\Delta T(\tilde{E})$ σε κλειστή μορφή. Παραπέμπουμε στις υποενότητες 4.1 και 4.3 του πέμπτου κεφαλαίου για τις εναλλακτικές δυνατότητες που προβλέπονται ώστε η ζητούμενη συνθετική συνάρτηση να καθίσταται γνωστή είτε αριθμητικά είτε αναλυτικά - με τη βοήθεια κατάλληλων αναπτυγμάτων Taylor - αντίστοιχα.

Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι η πιο πάνω μελέτη καλύπτει τόσο τους μηχανισμούς της μεταφοράς και απώλειας μάζας-στροφορμής μέσω των σημείων L1 και L2 αντίστοιχα, αλλά και την απώλεια στροφορμής μέσω του μηχανισμού της βαρυτικής ακτινοβολίας. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις οι σχέσεις (Α4.1) και (Α4.3) εκφράζουν αντίστοιχα την τροχιακή περίοδο και τη συνθετική συνάρτηση που περιγράφει το αντίστοιχο διάγραμμα O-C όταν η παράμετρος w αντικατασταθεί από τις w_{L1} και w_{L2} κάνοντας χρήση των σχέσεων (5.34) και (5.55)-(5.56) για την κάθε διαδικασία ξεχωριστά. Στη δεύτερη περίπτωση οι σχέσεις (Α4.4) και (Α4.6) εκφράζουν αντίστοιχα την τροχιακή περίοδο και τη συνθετική συνάρτηση που περιγράφει το αντίστοιχο διάγραμμα O-C όταν η παράμετρος b αντικατασταθεί από την g κάνοντας χρήση της σχέσης (5.48) και στη θέση του εκθέτη a τοποθετήσουμε την τιμή 7/3, καθώς στην υποενότητα 3.4 του πέμπτου κεφαλαίου δείξαμε ότι η βαρυτική ακτινοβολία συμπεριφέρεται ως ένας μηχανισμός πέδησης. Είναι, τέλος, προφανές ότι η σχέση (Α4.10) εκφράζει την τροχιακή περίοδο ενός συστήματος κάτω από την παρουσία αρκετών συνδυασμών από τους μηχανισμούς που εξετάστηκαν αντικαθιστώντας κατάλληλα τις παραμέτρους w και b από τις w_{L1}, w_{L2} και g αντίστοιχα.

Παράρτημα V

ΒΡΑΧΥΧΡΟΝΙΟΙ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ O-C

Στο τελευταίο παράρτημα θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση των κύριων βραχυχρόνιων μηχανισμών που λαμβάνουν χώρα σε ένα διπλό σύστημα αστέρων, καθώς και των αναμενόμενων διαφορών O-C που παράγουν οι παραπάνω μηχανισμοί. Σε αντίθεση με τους μακροχρόνιους μηχανισμούς που εξετάστηκαν στο τέταρτο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής και οι οποίοι οδηγούν σε μεταβολές της στροφορμής της τροχιάς ανάλογα με τον τρόπο που η τελευταία αποκρίνεται στις αντίστοιχες μεταβολές της στροφορμής των μελών του συστήματος, οι τροχιακές μεταβολές που προκαλούνται από τους αντίστοιχους βραχυχρόνιους, αν και δυναμικής προέλευσης, *δεν είναι πάντοτε πραγματικές αλλά φαινόμενες*.

Η παρουσία των βραχυχρόνιων μηχανισμών παίζει δευτερεύοντα ρόλο στο αντικείμενο μελέτης της διδακτορικής διατριβής και συνεπώς η συνοπτική παρουσίαση που ακολουθεί δε συνοδεύεται από πολλούς μαθηματικούς τύπους, καθώς η προσέγγιση που επιχειρούμε να κάνουμε είναι κυρίως ποιοτική και πραγματοποιείται για λόγους πληρότητας. Στην πράξη οι μηχανισμοί που θα μας απασχολήσουν αφορούν τη μετάπτωση της γραμμής των αψίδων εξαιτίας της παλιρροϊκής αλληλεπίδρασης των μελών, της ύπαρξης τρίτου σώματος, αλλά και λόγω σχετικιστικών φαινομένων. Η παρουσία ενός τρίτου μέλους στο σύστημα προκαλεί ταυτόχρονα το φαινόμενο χρόνου-φωτός το οποίο εξίσου θα παρουσιαστεί στις ακόλουθες ενότητες. Οι μεταβολές της τροχιακής περιόδου εξαιτίας κύκλων μαγνητικής δραστηριότητας ψυχρών μελών που ενδέχεται να περιλαμβάνει το σύστημα παρουσιάζει, τέλος, το μεγαλύτερο ενδιαφέρον απόδοσης εξαιρετικά βραχυχρόνιων μεταβολών τόσο στην τροχιακή περίοδο όσο και στα αντίστοιχα διαγράμματα O-C.

I. Περιστροφή της Γραμμής των Αψίδων

Θεωρώντας ένα διπλό σύστημα αστέρων το οποίο χαρακτηρίζεται από μια ορισμένη εκκεντρότητα $e \neq 0$ και κλίση $i \neq 0$ ως προς το επίπεδο του ουρανού, αποδεικνύεται ότι τα ελάχιστα της φαινόμενης λαμπρότητας δε θα παρατηρούνται στις φάσεις 0.0 και 0.5 για το πρωτεύον και το δευτερεύον ελάχιστο φαινόμενης λαμπρότητας αντίστοιχα, όπως είναι αναμενόμενο, αλλά χρονικά μετατοπισμένα κατά μια σταθερή ποσότητα η οποία εξαρτάται από τα δύο παραπάνω χαρακτηριστικά, καθώς και από το μήκος του περιάστρου ω. Πιο συγκεκριμένα, η θέση των δύο φωτομετρικών ελαχίστων, έστω O_I για το πρωτεύον και O_{II} για το δευτερεύον, δε θα διαφέρει ακριβώς κατά το ήμισυ της τροχιακής (ανωμαλιστικής) περιόδου $P/2$, αλλά κατά μια ποσότητα μικρότερη ή μεγαλύτερη της οποίας το πρόσημο εξαρτάται αποκλειστικά από το μήκος περιάστρου (π.χ. Martynov 1973, Καλημέρης 2002):

$$O_{II} - O_I = \frac{P}{2} + \frac{P}{\pi} e \left(1 + \frac{1}{\sin^2 i} \right) \cos\omega . \qquad \text{(A5.1)}$$

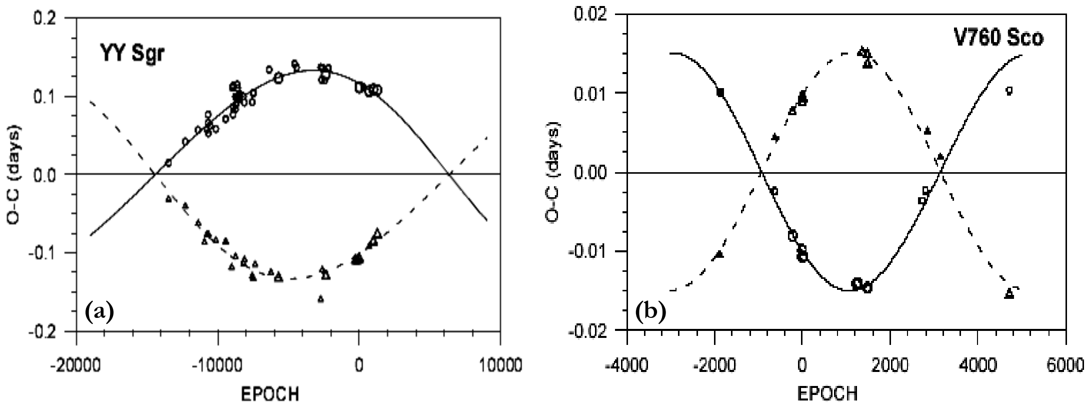
Οι τροχιακές όμως παράμετροι e, i και ω στην πραγματικότητα δεν είναι σταθερές, καθώς μεταβάλλονται είτε εξαιτίας της παλιρροϊκής αλληλεπίδρασης των μελών του συστήματος, είτε λόγω της ύπαρξης τρίτου σώματος, είτε, τέλος, λόγω σχετικιστικών φαινομένων. Οι προηγούμενοι φυσικοί μηχανισμοί επηρεάζουν κατά κύριο λόγο το μήκος του περιάστρου και συνεπώς μετατοπίζουν τις αψίδες της τροχιάς, φαινόμενο το οποίο καλείται ***περιστροφή της γραμμής των αψίδων του συστήματος (apsidal motion)***. Υποθέτοντας ότι η μεταβολή του μήκους ω είναι αργή (της οποίας το ρυθμό θα θεωρούμε σταθερό και ίσο με $d\omega/dE$) σε σχέση με την τροχιακή περίοδο, η χρονική διαφορά που προβλέπεται μέσα από τη σχέση (A5.1) δε θα παραμένει αμετάβλητη αλλά, αντιθέτως, θα είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου, γεγονός το οποίο οδηγεί στην προσέγγιση ή απομάκρυνση των δύο ελαχίστων με περίοδο περιφοράς U η οποία δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$U = \frac{2\pi}{\dot{\omega}} P . \qquad \text{(A5.2)}$$

Όσον αφορά τη διαμόρφωση του διαγράμματος O-C ενός συστήματος με τροχιά της οποίας η γραμμή των αψίδων περιστρέφεται, οφείλουμε να επισημάνουμε ότι η αναμενόμενη καμπύλη θα είναι εξίσου περιοδική και μάλιστα συνημιτονοειδούς μορφής τόσο για τις διαφορές $(O\text{-}C)_I$ που αντιστοιχούν στο πρωτεύον ελάχιστο, όσο και για τις διαφορές $(O\text{-}C)_{II}$ που αντιστοιχούν στο δευτερεύον (Σχήμα AV.1). Οι καμπύλες αυτές θα είναι συμμετρικές ως προς την οριζόντια στάθμη του διαγράμματος O-C, γεγονός που οφείλεται στο αντίθετο πρόσημο του πλάτους των αντίστοιχων αρμονικών συναρτήσεων (π.χ. Martynov 1973, Καλημέρης 2002):

$$(O - C)_I = -\frac{P}{2\pi} e \left(1 + \frac{1}{\sin^2 i} \right) \cos\omega \quad \text{και} \quad (O - C)_{II} = \frac{P}{2\pi} e \left(1 + \frac{1}{\sin^2 i} \right) \cos\omega . \qquad \text{(A5.3)}$$

Ας σημειωθεί βέβαια πως *σε όλες τις περιπτώσεις περιστροφής της γραμμής των αψίδων,* ***η τροχιακή περίοδος δεν μεταβάλλεται****, καθώς το μόνο που αλλάζει είναι ο προσανατολισμός της ελλειπτικής τροχιάς και όχι ο ημιάξονάς της* (π.χ. Καλημέρης 2002). Παρά το γεγονός αυτό, διαφορές O-C παράγονται εξαιτίας της χρονικής μετάθεσης της θέσης των ελαχίστων φαινόμενης λαμπρότητας από τη στιγμή που το μήκος ω μεταβάλλεται. Δεχόμενοι ότι ο ρυθμός μεταβολής του είναι μικρός, είμαστε τότε σε θέση να τον εκτιμήσουμε ανάλογα με τη δυναμική του υπαίτιου μηχανισμού.



Σχήμα AV.1. Τυπική διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C εξαιτίας της περιστροφής της γραμμής των αψίδων που αφορά τα συστήματα YY Sgr (a) και V760 Sco (b). Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στα πρωτεύοντα ελάχιστα, ενώ η διακεκομμένη στα δευτερεύοντα (Wolf 2000).

Στην περίπτωση που ο υπαίτιος μηχανισμός είναι η *παλιρροϊκή αλληλεπίδραση των δύο μελών του συστήματος*, η γραμμή των αψίδων περιστρέφεται με την ίδια φορά της αντίστοιχης τροχιακής κίνησης. Εάν μάλιστα R_1, R_2 και Ω_1, Ω_2 είναι οι ακτίνες και οι γωνιακές ταχύτητες ιδιοπεριστροφής του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος αστέρα του συστήματος αντίστοιχα, A_{orb} και Ω_{kep} η τροχιακή ακτίνα και η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, q ο λόγος μαζών του συστήματος και $k_{2,i}$ οι σταθερές (δευτέρας τάξεως) της περιστροφής της γραμμής των αψίδων για το κάθε i μέλος (τις οποίες συναντήσαμε στην υποενότητα 4.6 του τέταρτου κεφαλαίου), αποδεικνύεται ότι η περίοδος περιφοράς U_1 εξαιτίας του πιο πάνω μηχανισμού θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση (Martynov 1973):

$$\frac{P}{U_1} = \frac{\dot{\omega}_1}{2\pi} \cong k_{2,1}\left[15q \cdot f_2(e) + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_{kep}}\right)^2 \frac{1+q}{(1-e^2)^2}\right]\left(\frac{R_1}{A_{orb}}\right)^5 +$$

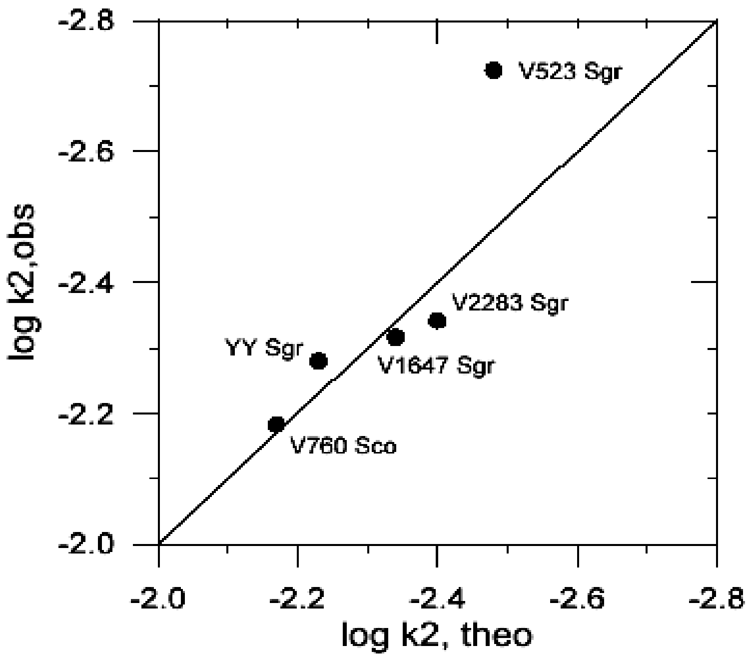
$$k_{2,2}\left[15\frac{f_2(e)}{q} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_{kep}}\right)^2 \frac{1+q^{-1}}{(1-e^2)^2}\right]\left(\frac{R_2}{A_{orb}}\right)^5, \quad \text{(A5.4)}$$

όπου $f_2(e) = (1-e^2)^{-5}(1+3e^2/3+e^4/8)$. Αξίζει ακόμα να προσθέσουμε ότι, στην περίπτωση που η γραμμή των αψίδων περιστρέφεται εξαιτίας της παλιρροϊκής αλληλεπίδρασης των μελών του συστήματος, είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε σημαντικές παραμέτρους που σχετίζονται με τη δομή των αστέρων και εξαρτώνται από την κατανομή της πυκνότητας του εσωτερικού τους, όπως η σταθερά k_2 της περιστροφής των αψίδων. Το γεγονός αυτό μας δίνει τη μοναδική δυνατότητα άμεσης σύγκρισης των τιμών που προκύπτουν από την ανάλυση των διαγραμμάτων O-C με εκείνες που προβλέπουν τα υπάρχοντα μοντέλα αστρικής δομής (Σχήμα AV.2).

Στην περίπτωση που ο υπαίτιος μηχανισμός είναι η *παρουσία ενός τρίτου σώματος* το οποίο διαθέτει μάζα M_3 και εκτελεί ελλειπτική τροχιά γύρω από το κέντρο μάζας του διπλού συστήματος με περίοδο P' και εκκεντρότητα e', αποδεικνύεται ότι η περίοδος περιφοράς U_2 θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση (Kopal 1938, 1959):

$$\frac{P'}{U_2} = \frac{\dot{\omega}_2}{2\pi} = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{M_3}{M_1 + M_2 + M_3} \cdot \frac{1}{(1-e'^2)^{3/2}} \times$$
$$\left(\frac{P'}{P}\right)\left[(1-Q)^2 - 5(1-Q^2)\sin(\omega - \Omega)\right], \quad \text{(A5.5)}$$

όπου M_1, M_2 η μάζα του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος αστέρα του συστήματος αντίστοιχα, Ω το μήκος των συνδέσμων (δηλαδή της τομής των επιπέδων τροχιάς του διπλού συστήματος και του τρίτου σώματος) και $Q = 2\sin(i/2)\cos\Omega$. Ας σημειωθεί εδώ ότι, αντίθετα με την περίπτωση της μετάθεσης του περιάστρου εξαιτίας της παλιρροϊκής αλληλεπίδρασης των δύο μελών ενός συστήματος, η κίνηση του περιάστρου μπορεί να εκτελεστεί ακόμα και ανάδρομα όταν η κλίση της τροχιάς του τρίτου σώματος ως προς την τροχιά του ζεύγους ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες (π.χ. Καλημέρης 2002).



Σχήμα AV.2. Σύγκριση των τιμών της σταθεράς δευτέρας τάξεως k_2 της περιστροφής των αψίδων των μελών πέντε διπλών αστρικών συστημάτων (που διαθέτουν αστέρες ίσης μάζας) που προκύπτουν από την ανάλυση των αντίστοιχων διαγραμμάτων O-C με εκείνες που προβλέπουν θεωρητικά μοντέλα αστρικής δομής. Όπως εύκολα φαίνεται από το διάγραμμα, οι θεωρητικές τιμές βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τις αντίστοιχες παρατηρούμενες (Wolf 2000).

Στην περίπτωση, τέλος, που η μετάθεση του περιάστρου προκαλείται από σχετικιστικά φαινόμενα, σε γενικές γραμμές η περίοδος που προβλέπεται θα είναι από μερικές δεκάδες μέχρι και χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από εκείνη που αποδίδεται στους δύο προηγούμενους μηχανισμούς, καθιστώντας τη σχετικιστική μετάθεση του περιάστρου αρκετά ασθενή. Πιο συγκεκριμένα, εάν G είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό, αποδεικνύεται ότι η περίοδος περιφοράς της γραμμής των αψίδων U_3 θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση (Misner et al. 1973):

$$\frac{P}{U_3}=\frac{\dot{\omega}_3}{2\pi}=\frac{G}{c^2}\cdot\frac{3M_1}{A_{orb}(1-e^2)}. \qquad \text{(A5.6)}$$

Στην πράξη, η ταυτόχρονη παρουσία των τριών μηχανισμών που εξετάστηκαν πιο πάνω είναι εφικτή και συνεπώς παρατηρούμενος ο ρυθμός μεταβολής (ανα τροχιακό κύκλο) του μήκους περιάστρου θα προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών μεταβολής που αντιστοιχούν στον κάθε μηχανισμό ξεχωριστά. Δεχόμενοι ότι ο ρυθμός αυτός είναι μικρός και σταθερός, καθώς και ότι το μήκος περιάστρου ω_0 κατά την αρχική χρονική στιγμή T_0 (που συνήθως ταυτίζεται με τον πρώτο διαθέσιμο καταγεγραμμένο χρόνο ελαχίστου) είναι γνωστό, το μήκος περιάστρου μπορεί τότε να υπολογίζεται για κάθε τροχιακό κύκλο E σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\omega=\omega_0+\dot{\omega}_T E, \qquad \text{(A5.7)}$$

όπου $\dot{\omega}_T=\dot{\omega}_1+\dot{\omega}_2+\dot{\omega}_3$ ο συνολικός ρυθμός μεταβολής του μήκους περιάστρου.

II. Φαινόμενο Χρόνου - Φωτός

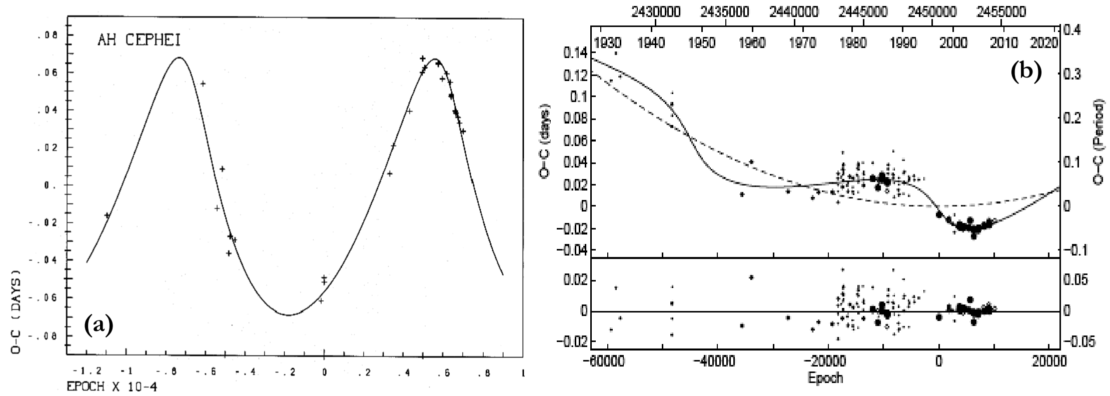
Η ύπαρξη ενός τρίτου σώματος γύρω από ένα διπλό αστρικό σύστημα δεν επιφέρει μόνο περιστροφή της γραμμής των αψίδων αλλά και περιοδική μεταβολή της απόστασης του κέντρου μάζας του διπλού συστήματος από τη Γη, φαινόμενο το οποίο καλείται ***φαινόμενο χρόνου-φωτός (Light-Time Effect, LITE)***. Έτσι, το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το φως για να φτάσει στον παρατηρητή υπόκειται σε μικρές μεταβολές, ανιχνεύσιμες όμως στο αντίστοιχο διάγραμμα O-C, καθώς το παραπάνω γεγονός μετατοπίζει χρονικά τη θέση των ελαχίστων με αρμονικό (περιοδικό) μάλιστα τρόπο (Σχήμα AV.3). Πιο συγκεκριμένα, εάν S είναι η απόσταση του κέντρου μάζας του διπλού συστήματος από τη Γη, αποδεικνύεται ότι η αντίστοιχη χρονική απόσταση S/c εξαιτίας της διαταρραχής που προκαλείται από την ύπαρξη ενός τρίτου σώματος δίνεται από την πιο κάτω σχέση (Martynov 1973):

$$\begin{aligned}\frac{S}{c}=\frac{\upsilon_{ob}}{c}+\frac{a'\sin i'}{c}\cdot\Bigg[&-\frac{3}{2}e'\sin\omega'+\left(1-\frac{1}{2}e'^2\right)\sin\left(2\pi\frac{P}{P'}E+N_0'+\omega'\right)-\\&\frac{1}{8}e'^2\sin\left(2\pi\frac{P}{P'}E+N_0'-\omega'\right)+\frac{1}{2}e'^2\sin\left(4\pi\frac{P}{P'}E+2N_0'+\omega'\right)+\\&\frac{3}{8}e'^2\sin\left(6\pi\frac{P}{P'}E+3N_0'+\omega'\right)\Bigg],\end{aligned} \qquad \text{(A5.8)}$$

όπου υ_{ob} η συνιστώσα της ταχύτητας του τριπλού συστήματος στη διεύθυνση της ευθείας παρατήρησης, a' το μήκος του ημιάξονα της τροχιάς του τρίτου σώματος, i' η κλίση της τροχιάς του, e' η εκκεντρότητά της, ω' το μήκος του περιάστρου της, P' η τροχιακή περίοδος του τρίτου σώματος γύρω από το κέντρο μάζας του διπλού συστήματος και $N_0' = 2\pi T_0/P' + c'$ με c' σταθερά που επιλέγεται έτσι ώστε η τιμή της μέσης ανωμαλίας κατά την αρχική χρονική στιγμή T_0 να είναι ίση με την παρατηρούμενη (ή αυθαίρετα επιλεγμένη) τιμή M_0'. Μέσα από τη σχέση (A5.8) αποδεικνύεται ότι η εξίσωση διαφορών O-C σαν συνάρτηση του τροχιακού κύκλου E θα έχει την ακόλουθη μορφή (Martynov 1973):

$$(O-C)_E = \frac{\upsilon_{ob}}{c}PE + \frac{a'\sin i'}{c}\left(1-\frac{1}{2}e'^2\right)\sin\left(2\pi\frac{P}{P'}E + N_0' + \omega'\right) +$$
$$\frac{1}{8}e'^2\frac{a'\sin i'}{c}\sin\left(2\pi\frac{P}{P'}E + N_0' - \omega'\right) + \frac{1}{2}e'^2\frac{a'\sin i'}{c}\sin\left(4\pi\frac{P}{P'}E + 2N_0' + \omega'\right) +$$
$$\frac{3}{8}e'^2\frac{a'\sin i'}{c}\sin\left(6\pi\frac{P}{P'}E + 3N_0' + \omega'\right). \quad \text{(A5.9)}$$

Ο πρώτος όρος της σχέσης (A5.9) οφείλεται στη γαλαξιακή κίνηση του συστήματος, ενώ οι υπόλοιποι είναι αρμονικές συναρτήσεις της βασικής γωνίας $2\pi PE/P'$ και των πολλαπλασίων της. Η διαπίστωση αυτή υποδηλώνει ότι το περιοδικό σήμα που χαρακτηρίζει το διάγραμμα O-C ενός διπλού συστήματος αστέρων το οποίο συνοδεύεται από τρίτο σώμα θα έχει ημιτονοειδή μορφή, πλάτους περίπου ίσου με $a'\sin i'(1-e'^2/2)/c$, επί της οποίας, εκτός από τη βασική συχνότητα P/P', θα συνυπάρχουν και οι αρμονικές $2P/P'$, $4P/P'$ κ.ο.κ. (Καλημέρης 2002).



Σχήμα AV.3. Τυπική διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C εξαιτίας της παρουσίας ενός τρίτου σώματος στο σύστημα, επιβεβαιωμένη μάλιστα με τη μορφή τρίτου φωτός κατά την ανάλυση της καμπύλης φωτός. Στην περίπτωση του συστήματος AH Cep (a), το περιοδικό σήμα είναι απόλυτα αρμονικό, παραπέμποντας σε κυκλική τροχιά (Drechsel et al. 1989), σε αντίθεση με την περίπτωση του συστήματος FZ Ori (b), όπου το σήμα (αφού πρώτα έχει απομακρυνθεί η μακροχρόνια παραβολική συνιστώσα) παραπέμπει σε τροχιά μη μηδενικής εκκεντρότητας (Zasche et al. 2008).

III. Μαγνητική Δραστηριότητα και Ανακατανομή Στροφορμής

Η συχνή εμφάνιση του φαινομένου χρόνου-φωτός στα διπλά συστήματα αστέρων έχει οδηγήσει στην άποψη, πως η παρουσία ενός τρίτου σώματος δεν μπορεί να αποτελεί το μοναδικό αίτιο στο οποίο αποδίδεται η συγκεκριμένη διαμόρφωση, αλλά στη δράση φυσικών μηχανισμών που σχετίζονται πιθανώς με ενδογενείς διαδικασίες των μελών κάθε συστήματος. Ένας ιδιαίτερα ενδιαφέρων φυσικός μηχανισμός, ο οποίος προτάθηκε σχετικά πρόσφατα προς την κατεύθυνση αυτή, είναι εκείνος της ***ανακατανομής της στροφορμής του εσωτερικού των αστέρων εξαιτίας των κύκλων μαγνητικής δραστηριότητας*** που χαρακτηρίζει συστήματα με μέλη μεταγενέστερων φασματικών τύπων (Applegate 1992).

Πιο συγκεκριμένα, ο Applegate (1992) παρατήρησε αρχικά ότι η συντριπτική πλειοψηφία των συστημάτων, τα οποία χαρακτηρίζονται από συνεχείς αυξομειώσεις της τροχιακής τους περιόδου σε διάστημα των δεκάδων ετών, διαθέτουν πάντοτε ένα μέλος το οποίο φέρει περίβλημα μεταφοράς. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι οι μεταβολές αυτές θα μπορούσαν να αποδοθούν, με κάποιο τρόπο, σε μεταβολές του μαγνητικού πεδίου του αστέρα αυτού. Όπως λοιπόν προτείνεται, καθώς το ψυχρό μέλος (ή και τα δύο μέλη) διανύει τον κύκλο της μαγνητικής του δραστηριότητας (όπως ο αντίστοιχος ενδεκαετής ηλιακός), η κατανομή της στροφορμής στο εσωτερικό του μεταβάλλεται εξαιτίας της ανάπτυξης μιας ροπής μαγνητικής προέλευσης, γεγονός που έχει σαν συνέπεια την παραμόρφωση του σχήματός του. Στην πράξη, το καθεστώς της περιστροφής του αστέρας με τη μορφή στερεού σώματος αντικαθίσταται από ένα αρκετά πιο πολύπλοκο μοντέλο διαφορικής περιστροφής το οποίο περιλαμβάνει μεταφορά στροφορμής μεταξύ του περιβλήματος μεταφοράς και του βαθύτερου εσωτερικού του αστέρα.

Εάν ΔJ είναι η ποσότητα στροφορμής που ανακατανέμεται στο εσωτερικό του αστέρα, η μεταβολή της (τετραπολικής) ροπής αδράνειας, έστω κατά ΔQ, του περιβλήματος μεταφοράς του μέλους που υπόκειται στη διεργασία αυτή είναι κατά κύριο λόγο υπαίτια των μεταβολών της τροχιακής περιόδου, έστω κατά ΔP, οι οποίες τελικά γίνονται αντιληπτές μέσω των διαφορών O-C. Εάν M, R είναι η μάζα και η ακτίνα του ενεργού μέλους αντίστοιχα, η συσχέτιση των δύο πιο πάνω μεταβολών πραγματοποιείται τότε, δεχόμενοι ότι η τροχιακή στροφορμή δεν μεταβάλλεται, καθώς το σύστημα δε χάνει ούτε κερδίζει στροφορμή από τη διαδικασία που μόλις περιγράφηκε (Applegate & Patterson 1987):

$$\frac{\Delta P}{P} = -9\left(\frac{R}{A_{orb}}\right)^2 \frac{\Delta Q}{MR^2}. \tag{A5.10}$$

Η τετραπολική ροπή του περιβλήματος μεταφοράς, το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω, μπορεί εύκολα να εκτιμηθεί υποθέτοντας ότι το περίβλημα περιγράφεται στις εξισώσεις του προβλήματος μέσω ενός σφαιρικού φλοιού, μάζας M_s και ακτίνας R, δεχόμενοι ότι η συνθήκη $M_s << M$ ισχύει:

$$Q = \frac{1}{9} M_s R^2 \left(\frac{\Omega^2 R^3}{GM}\right). \tag{A5.11}$$

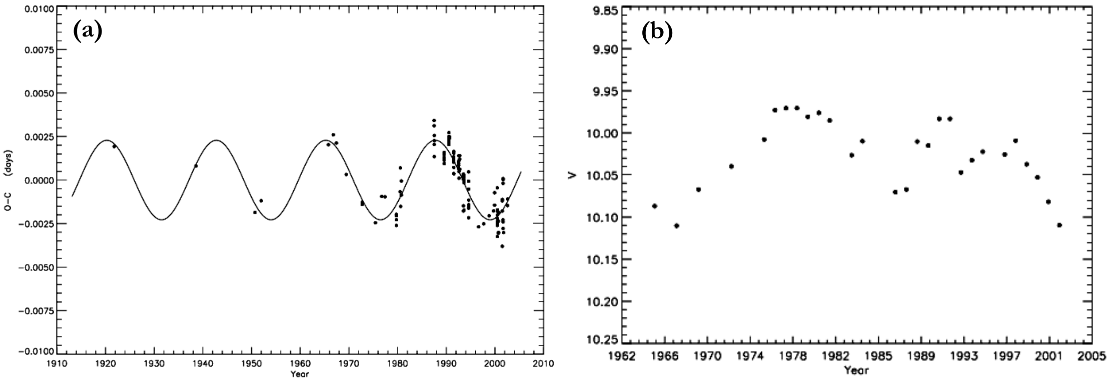
Η μεταβολή της στροφορμής ΔJ που προκαλεί τη μεταβολή ΔP μπορεί τελικά να υπολογιστεί μέσω των σχέσεων (A5.10) και (A5.11), προβλέποντας ότι η τροχιακή περίοδος μειώνεται όσο περισσότερο ο αστέρας παραμορφώνεται (Applegate 1992):

$$\Delta J = -\frac{GM^2}{R}\left(\frac{A_{orb}}{R}\right)^2 \frac{\Delta P}{6\pi}. \qquad \text{(A5.12)}$$

Οι μεταβολές της τροχιακής περιόδου, όπως είναι φυσικό, αναμένονται περιοδικές, καθώς ακολουθούν τους κύκλους μαγνητικής δραστηριότητας των εκάστοτε ενεργών μελών, και συνεπώς η διαμόρφωση των αντίστοιχων O-C διαγραμμάτων αναμένεται εξίσου ημιτονοειδής. Ο Applegate (1992) προτείνει ότι, από την περίοδο και το πλάτος της παρατηρούμενης κυματομορφής, έστω P_{mod} και $(O\text{-}C)_{mod}$ αντίστοιχα, έχουμε τη δυνατότητα προσδιορισμού της έντασης του μαγνητικού πεδίου B του αστέρα που προκαλεί το μηχανισμό που περιγράφηκε ως ακολούθως:

$$B \approx \left[10\frac{GM^2}{R^4}\left(\frac{A_{orb}}{R}\right)^2 \frac{\Delta P}{P_{mod}}\right]^{1/2}, \text{ όπου } \Delta P = 2\pi(O-C)_{mod}\frac{P}{P_{mod}}. \qquad \text{(A5.13)}$$

Από τα υπάρχοντα παρατηρησιακά δεδομένα, το μέσο μαγνητικό πεδίο των αστέρων αυτών υπολογίζεται, μέσω της παραπάνω διαδικασίας, της τάξης των μερικών χιλιάδων Gauss, όπως πράγματι προβλέπεται για αστέρες χρωμοσφαιρικά δραστήριους. Ας σημειωθεί ακόμα, πως ο μηχανισμός αυτός προβλέπει επίσης μεταβολές της φωτεινότητας του ψυχρού μέλους με περίοδο ακρίβως ίση με εκείνη της O-C κυματομορφής, P_{mod}, με άμεση συνέπεια μεταβολές της θερμοκρασίας του (Σχήμα AV.4). Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο, καθώς κατά τη φάση του κύκλου μαγνητικής δραστηριότητας όπου στροφορμή μεταφέρεται από το περίβλημα μεταφοράς προς το εσωτερικό του αστέρα, ισοδύναμη ενέργεια καταναλώνεται ώστε να συντηρήσει το μηχανισμό της διαφορικής περιστροφής. Η φωτεινότητα κατά τη φάση αυτή θα μειώνεται, σε αντίθεση με την αντίστροφη κατάσταση κατά την οποία η περιστροφή του αστέρα προσεγγίζει εκείνη του στερεού σώματος, οπότε και η ενέργεια επιστρέφεται με τη μορφή θερμότητας και ακτινοβολίας.



Σχήμα AV.4. Τυπική διαμόρφωση ενός διαγράμματος O-C η οποία οφείλεται στο μηχανισμό ανακατανομής στροφορμής εξαιτίας των κύκλων μαγνητικής δραστηριότητας που χαρακτηρίζει το πρωτεύον μέλος του χρωμοσφαιρικά δραστήριου συστήματος CG Cyg, αφού πρώτα έχουν απομακρυνθεί συνιστώσες που αποδίδονται σε άλλους μηχανισμούς (a). Ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαμόρφωση της φαινόμενης λαμπρότητας του συστήματος (b), καθώς θυμίζει σε μεγάλο βαθμό εκείνη του διαγράμματος O-C και παρουσιάζει την ίδια περίοδο των 22.5 yr περίπου (Afsar et al. 2004).

Βιβλιογραφία

<u>*Ελληνική Βιβλιογραφία*</u>

1. **Ακρίβης Γ., Δουγαλής Β.**, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση,* Π.Ε.Κ., Ηράκλειο, 2002.
2. **Αντωνοπούλου Ε., Δεληγιάννης Ι., Μαστιχιάδης Α.**, *Αστροφυσική Ι,* Σημειώσεις του Μαθήματος σύμφωνα με τις Παραδόσεις των Διδασκόντων, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2000.
3. **Αντωνοπούλου Ε., Κοντιζά Μ., Μαστιχιάδης Α.**, *Αστροφυσική ΙΙ*, Σημειώσεις του Μαθήματος σύμφωνα με τις Παραδόσεις των Διδασκόντων, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2001.
4. **Βάρβογλης Χ., Σειραδάκης Ι.**, *Εισαγωγή στη Σύγχρονη Αστρονομία*, Εκδόσεις Γαρταγάνη, Θεσσαλονίκη, 1994.
5. **Δεληγιάννης Ι., Σταθοπούλου Μ.**, *Εισαγωγή στην Ηλιακή Φυσική*, Σημειώσεις του Μαθήματος σύμφωνα με τις Παραδόσεις των Διδασκόντων, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2001.
6. **Δημελή Σ.**, *Σύγχρονες Μέθοδοι Ανάλυσης Χρονολογικών Σειρών*, Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα, 2003.
7. **Θαλασσινός Λ.**, *Ανάλυση Χρονολογικών Σειρών. Μεθοδολογία Box-Jenkins,* Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς, 1991.
8. **Καλημέρης Α.**, *Μελέτη των Διπλών Συστημάτων του Τύπου W Ursae Majoris (Συστημάτων Επαφής) μέσω των Μεταβολών της Τροχιακής τους Περιόδου,* Διδακτορική Διατριβή, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2002.
9. **Κοντογιάννης Ι., Νανούρης Ν.**, *Στατιστική Μελέτη Υψηλής Ανάλυσης Προφίλ Φασματικών Γραμμών Εκπομπής Συμβιωτικών Αστέρων*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2006.
10. **Κουκουβίνος Χ.**, *Γραμμικά Μοντέλα και Σχεδιασμοί*, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2005.
11. **Λασκαρίδης Π.**, *Δομή και Εξέλιξη των Αστέρων*, Βασικές Σημειώσεις για τους Μεταπτυχιακούς Φοιτητές, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2001.
12. **Μανιμάνης Β.**, *Φωτομετρική Μελέτη των Σχεδόν σε Επαφή Διπλών Αστρικών Συστημάτων*, Διδακτορική Διατριβή, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2002.
13. **Μπιτζαράκη Ο.**, *Εξέλιξη Διπλών Αστέρων: Δημιουργία και Εξέλιξη Υπερ-Μαλακών Πηγών Ακτίνων Χ και Πηγών Ακτίνων Χ Μικρής ή Μεσαίας Μάζας,* Διδακτορική Διατριβή, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2003.
14. **Νανούρης Ν.**, *Απεικόνιση Αστρικών Επιφανειών με τη Βοήθεια των Τεχνικών Doppler Imaging και Eclipse Mapping*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2005.
15. **Νανούρης Ν.**, *Προσδιορισμός του Χρόνου των Ελαχίστων στις Καμπύλες Φωτός των Μεταβλητών Αστέρων*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2005.

16. **Νανούρης Ν.**, *Αναζήτηση της Παλιρροϊκής Εξέλιξης στα Διπλά Συστήματα Αστέρων με τη Βοήθεια των Διαγραμμάτων O-C*, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2006.
17. **Νανούρης Ν.**, *Μπεϋζιανή Επιλογή Μεταβλητών στα Γενικευμένα Γραμμικά Μοντέλα και Εφαρμογή του Αυτόματου Δειγματολήπτη Αντιστρέψιμου Άλματος*, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2010.
18. **Νιάρχος Π.**, *Εισαγωγή στην Αστρονομική Φωτομετρία*, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2003.
19. **Παπαϊωάννου Γ.**, *Χαοτικές Χρονοσειρές. Θεωρία και Πράξη*, Leader Books, Αθήνα, 2000.
20. **Spiegel M., Liu J.**, *Μαθηματικό Εγχειρίδιο Τύπων και Πινάκων*, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2002.
21. **Συριόπουλος Κ.**, *Ανάλυση και Έλεγχοι Μονομεταβλητών Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών*, Τυπωθήτω, Αθήνα 2004.
22. **Συριόπουλος Κ., Λεοντίτσης Α.**, *Χάος. Ανάλυση και Πρόβλεψη Χρονοσειρών*, Εκδόσεις Ανικούλα, Θεσσαλονίκη, 2000.
23. **Τραχανάς Δ., Τσεβάς Χ.**, *Περιγραφική Στατιστική*, Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα, 1998.
24. **Φουσκάκης Δ.**, *Μπεϋζιανή Στατιστική και MCMC*, Σημειώσεις του Δεύτερου Μέρους του Μαθήματος σύμφωνα με τις Παραδόσεις του Διδάσκοντα, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.

<u>Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία</u>:

1. **Abarbanel H., Brown R., Sidorowich J., Tsimring L.**, *The Analysis of Observed Chaotic Data in Physical Systems*, 1993, RvMP, 65, 1331.
2. **Afsar M., Heckert P., Ibanoglu C.**, *Long-Term Luminosity Variations and Period Changes in CG Cygni*, 2004, A&A, 420, 595.
3. **Agol E., Steffen J., Sari R., Clarkson W.**, *On Detecting Terrestrial Planets with Timing of Giant Planet Transits*, 2005, MNRAS, 359, 567.
4. **Akaike H.**, *Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle*, Proc. Conf. of 2nd International Symposium on Information Theory (edited by Petrov B. & Csaki F.), Budapest, Hungary, 1973, p. 267.
5. **Allain S.**, *Modelling the Angular Momentum Evolution of Low-Mass Stars with Core-Envelope Decoupling*, 1998, A&A, 333, 629.
6. **Allen D.**, *On the Late Type Components of Slow Novae and Symbiotic Stars*, 1980, MNRAS, 192, 521.
7. **Andersen J., Clausen J., Gimenez A.**, *Absolute Dimensions of Eclipsing Binaries. Part Twenty. Gg Lupi. Young Metal Deficient B Stars*, 1993, A&A, 277, 439.
8. **Andersen J., Clausen J., Nordstrom B.**, *Determination of Absolute Dimensions of Main Sequence Binaries*, 1980, IAUS, 88, 81.
9. **Applegate J.**, *A Mechanism for Orbital Period Modulation in Close Binaries*, 1992, ApJ, 385, 621.

10. **Applegate J., Patterson J.**, *Magnetic Activity, Tides and Orbital Period Changes in Close Binaries*, 1987, ApJ, 322, 99.
11. **Arevalo M., Lazaro C., Claret A.**, *Infrared Light Curves and Absolute Parameters of the Active Binary RT Andromedae*, 1995, AJ, 110, 1376.
12. **Barembaum M., Etzel P.**, *A Photometric Analysis of the Apsidal Motion Binary System PV Cassiopeiae*, 1995, AJ, 109, 2680.
13. **Barnes S., Sofia S.**, *On the Origin of the Ultrafast Rotators in Young Star Clusters*, 1996, ApJ, 462, 746.
14. **Barnes S., Sofia S., Pinsonneault M.**, *Disk Locking and the Presence of Slow Rotators among Solar-Type Stars in Young Star Clusters*, 2001, ApJ, 548, 1071.
15. **Basri G., Marcy G., Graham J.**, *Lithium in Brown Dwarf Candidates: The Mass and Age of the Faintest Pleiades Stars*, 1996, ApJ, 458, 600.
16. **Batten A.**, *Binary and Multiple Systems of Stars*, Pergamon Press, Toronto, Canada, 1973.
17. **Beckert D., Cox D., Gordon S., Ledlow M., Zeilik M.**, *1989 BVR Photometry of CG Cygni*, 1989, IBVS, 3398.
18. **Beckert D., Gordon S., Jaderlund E., Mann, E., Zeilik M.**, *CG Cygni Redux: More 1989 BVR Data*, 1991, IBVS, 3556.
19. **Binnendijk L.**, *Photovisual Light-Curve of the Minima of Castor C (YY Geminorum)*, 1950, BAN, 11, 203.
20. **Binnendijk L.**, *Synthetic Light Curves for Contact Binaries*, 1977, VA, 21, 359.
21. **Bitzaraki O., Rovithis-Livaniou H., Tout C., van den Heuvel E.**, *Luminous Supersoft X-ray Sources*, 2004, A&A, 416, 263.
22. **Bonanos A., Stanek K., Udalski A., Wyrzykowski L., Żebruń K., Kubiak M., Szymański M., Szewczyk O., Pietrzyński G., Soszyński I.**, *WR 20a Is an Eclipsing Binary: Accurate Determination of Parameters for an Extremely Massive Wolf-Rayet System*, 2004, ApJ, 611, 33.
23. **Bopp B., Rucinski S.**, *The Rapidly Rotating Giants of the FK-Comae Type*, 1981, IAUS, 93, 177.
24. **Borkovits T., Csizmadia S., Forgács-Dajka E., Hegedüs T.**, *Transit Timing Variations in Eccentric Hierarchical Triple Exoplanetary Systems. I. Perturbations on the Time Scale of the Orbital Period of the Perturber*, 2011, A&A, 528, 53.
25. **Borkovits T., Érdi B., Forgács-Dajka E., Kovács T.**, *On the Detectability of Long Period Perturbations in Close Hierarchical Triple Stellar Systems*, 2003, A&A, 398, 1091.
26. **Bouvier J., Forestini M., Allain S.**, *The Angular Momentum Evolution of Low-Mass Stars*, 1997, A&A, 326, 1023.
27. **Box G., Jenkins G.**, *Time Series Analysis. Forecasting and Control*, Holden Day, San Francisco, U.S.A., 1976.
28. **Box G., Pierce D.**, *Distribution of Residual Autocorrelations in ARMA Time Series Models*, 1970, Journal of the American Statistical Association, 65, 1509.

29. **Bradstreet D.**, *Binary Maker 2.0. An Interactive Graphical Tool for Preliminary Light Curve Analysis*. In: Light Curve Modeling of Eclipsing Binary Stars (edited by Milone E.), Springer, New York, U.S.A., 1993, p. 151.
30. **Bradstreet D., Guinan E.**, *Stellar Mergers from Low Mass Binaries*, 1988, BAAS, 20, 736.
31. **Bradstreet D., Steelman D.**, *Binary Maker 3.0. An Interactive Graphics Based Light Curve Synthesis Program Written in Java*, 2002, AAS, 201, 7502.
32. **Bradstreet D., Steelman D., Sanders S., Hargis J.**, *The Eclipsing Binary On-Line Atlas (EBOLA)*, 2004, AAS, 204, 501.
33. **Breinhorst R., Pfleiderer J., Reinhardt M., Karimie M.**, *On the Determination of Minimum Times of Light Curves*, 1973, A&A, 22, 239.
34. **Budding E., Zeilik M.**, *An Analysis of the Light Curves of Short Period RS Canum Venaticorum Stars: Starspots and Fundamental Properties*, 1987, ApJ, 319, 827.
35. **Burkholder V., Massey P., Morrell N.**, *The ''Mass Discrepancy'' for Massive Stars: Tests of Models Using Spectroscopic Binaries*, 1997, ApJ, 490, 328.
36. **Caton D.**, *A Light Curve Distortion. Wave Analysis of Eight RS Canum Venaticorum Systems*, 1986, AJ, 91, 132.
37. **Charbonneau P.**, *Modeling Stellar Angular Momentum Evolution*, Proc. Conf. of the 7th Cambridge Workshop on Cool Stars, Stellar Systems and the Sun (edited by Giampapa M. & Bookbinder J.), Tucson, Arizona, U.S.A., p. 416.
38. **Claret A.**, *Stellar Models for a Wide Range of Initial Chemical Compositions until Helium Burning. I. From X=0.60 to X=0.80 for Z=0.02*, 1995, A&AS, 109, 441.
39. **Claret A.**, *Very Low Mass Stars: Non-Linearity of the Limb-Darkening Laws*, 1998, A&A, 335, 647.
40. **Claret A., Gimenez A.**, *Stellar Models for a Wide Range of Initial Chemical Compositions until Helium Burning. II. From X=0.63 to X=0.80 for Z=0.01*, 1995, A&AS, 114, 549.
41. **Claret A., Gimenez A., Cunha N.**, *Circularization and Synchronization Times in the Main Sequence of Detached Eclipsing Binaries. I. Using the Formalism by Tassoul*, 1995, A&A, 299, 724.
42. **Claret A., Cunha N.**, *Circularization and Synchronization Times in Main-Sequence of Detached Eclipsing Binaries. II. Using the Formalisms by Zahn*, 1997, A&A, 318, 187.
43. **Clausen J., Helt B., Olsen E.**, *Absolute Dimensions of Solar-Type Eclipsing Binaries. I. uvby Light Curves for HS Aqr, KX Aqr, AL Ari, V963 Cen, MR Del, NY Hya, DU Leo, UW LMi and V358 Pup*, 2001, A&A, 374, 980.
44. **Clausen J., Torres G., Bruntt H., Andersen J., Nordström B., Stefanik R., Latham D., Southworth J.**, *Absolute Dimensions of Eclipsing Binaries. XXVI. Setting a New Standard: Masses, Radii and Abundances for the F-Type Systems AD Bootis, VZ Hydrae and WZ Ophiuchi*, 2008a, A&A, 487, 1095.
45. **Clausen J., Vaz L.-P., García J., Giménez A., Helt B., Olsen E., Andersen J.**, *Four-Colour Photometry of Eclipsing Binaries. XLI. uvby Light Curves for AD*

Bootis, HW Canis Majoris, SW Canis Majoris, VZ Hydrae and WZ Ophiuchi, 2008b, A&A, 487, 1081.
46. **Cochran W.**, *The Distribution of the Largest of a Set of Estimated Variances as a Fraction of their Total*, 1941, Annals of Eugenics, 11, 47.
47. **Collier-Cameron A.**, *Eclipse Mapping of Late Type Close Binary Stars*, 1997, MNRAS, 267, 556.
48. **Dapergolas A., Kontizas E., Kontizas M.**, *1988 BV Photometric Observations of CG Cyg*, 1988, IBVS, 3249.
49. **Dapergolas A., Kontizas E., Kontizas M.**, *1987 BV Photoelectric Observations of CG Cyg*, 1989, IBVS, 3322.
50. **Dapergolas A., Kontizas E., Kontizas M.**, *1990 BV Photoelectric Observations of CG Cyg*, 1991, IBVS, 3609.
51. **De Kort J.**, *Estimates of Fifteen Variable Stars in Vela and Puppis*, 1941, BAN, 9, 245.
52. **Dellaportas P., Forster J., Ntzoufras I.**, *On Bayesian Model and Variable Selection Using MCMC*, 2002, Statistics and Computing, 12, 27.
53. **Diaz-Cordoves J., Gimenez A.**, *A New Nonlinear Approximation to the Limb-Darkening of Hot Stars*, 1992, A&A, 259, 227.
54. **Djurasevic G.**, *An Analysis of Active Close Binaries (CB) Based on Photometric Measurements. III. The Inverse-Problem Method: An Interpretation of CB Light Curves*, 1992, Ap&SS, 197, 17.
55. **Djurasevic G.**, *An Analysis of the Light Curves of the Variable Star OO Aql*, 1997, IAPPP, 67, 41.
56. **Drechsel H., Haas S., Lorenz R., Gayler S.**, *Radiation Pressure Effects in Early-Type Close Binaries and Implications for the Solution of Eclipse Light Curves*, 1995, A&A, 294, 723.
57. **Drechsel H., Lorenz R., Mayer P.**, *Solution of Light Curves with Third Light Contribution. The Eclipsing Binaries LY Aurigae and AH Cephei Reconsidered*, 1989, A&A, 221, 49.
58. **Duerbeck H.**, *Some Aspects Concerning the Determination of Minimum Times in Eclipsing Binary Systems*, 1975a, AcA, 25, 361.
59. **Duerbeck H.**, *A Critical Remark about the Determination of Minimum Times*, 1975b, IBVS, 1023.
60. **Edwards S., Strom S., Hartigan P., Strom K., Hillenbrand L., Herbst W., Attridge J., Merrill K., Probst R., Gatley I.**, *Angular Momentum Regulation in Low-Mass Young Stars Surrounded by Accretion Disks*, 1993, AJ, 106, 372.
61. **Efron B.**, *Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife*, 1979, Annals of Statistics, 7, 1.
62. **Efron B.**, *Better Bootstrap Confidence Intervals*, 1987, Journal of the American Statistical Association, 82, 171.
63. **Efron B., Tibshirani R.**, *An Introduction to the Bootstrap*, CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, U.S.A., 1998.

64. **Eggen O., Iben I. Jr.**, *Starbursts, Blue Stragglers and Binary Stars in Local Superclusters and Groups. II. The Old Disk and Halo Populations*, 1989, AJ, 97, 431.
65. **Eggleton P.**, *Approximations to the Radii of Roche Lobes*, 1983, ApJ, 268, 368.
66. **Eggleton P.**, *Aspects of Mass Loss and Angular Momentum Loss in Binaries Containing Cool Components*, 1992, IAUS, 151, 167.
67. **Ekmekci F., Ozeren F., Ak H.**, *Chromospherically Active Binary Systems RT And and ER Vul: 1995 – 1998. Observations and Spot Distributions*, 2002, AN, 323, 31.
68. **Etzel P.**, *A Simple Synthesis Method for Solving the Elements of Well-Detached Eclipsing Systems*, Proc. Conf. on Photometric and Spectroscopic Binary Systems (edited by Carling E. & Kopal Z.), Maretea, Italy, 1981, p. 111.
69. **Fisher R.**, *Accuracy of Observation. A Mathematical Examination of the Methods of Determining by the Mean Error and by the Mean Square Error*, 1920, MNRAS, 80, 758.
70. **Fisher R.**, *The Design of Experiments, seventh edition*, Oliver & Boyd, London, U.K., 1935.
71. **Fleming T., Giampapa M., Schmitt J., Bookbinder J.**, *Stellar Coronae at the End of the Main Sequence. A ROSAT Survey of the Late M Dwarfs*, 1993, ApJ, 410, 387.
72. **Flower P.**, *Transformations from Theoretical Hertzsprung-Russell Diagrams to Color-Magnitude Diagrams: Effective Temperatures, B-V Colors and Bolometric Corrections*, 1996, ApJ, 469, 355.
73. **Forestini M.**, *Low-Mass Stars: Pre-Main Sequence Evolution and Nucleosynthesis*, 1994, A&A, 285, 473.
74. **Gelman A., Carlin J., Stern H., Rubin D.**, *Bayesian Data Analysis*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, U.S.A., 2004.
75. **Geyer E.**, *Remarks on Erratic Period Fluctuations of Detached Close Binaries and the Constancy of the Orbital Period of XY UMa*, 1977, Ap&SS, 48, 137.
76. **Gimenez A., Garcia-Pelayo J.**, *A New Method for the Analysis of Apsidal Motions in Eclipsing Binaries*, 1983, Ap&SS, 92, 203.
77. **Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M.**, *Orbital Circularization in Early-Type Detached Close Binaries*, 1984, A&A, 134, 365.
78. **Gyldenkerne K., Jorgensen H., Carstensen E.**, *Four-Colour Photometry of Eclipsing Binaries. I. HS Hya, Light Curves, Photometric Elements and Determination of Helium Content*, 1975, A&A, 42, 303.
79. **Hall D., Kreiner J.**, *Period Changes and Mass Loss Rates in 34 RS CVn Binaries*, 1980, AcA, 30, 387.
80. **Harmanec P.**, *Stellar Masses and Radii Based on Modern Binary Data*, 1988, BAICz, 39, 329.
81. **Hartmann L., MacGregor K.**, *Protostellar Mass and Angular Momentum Loss*, 1982, ApJ, 259, 180.
82. **Heckert P., Zeilik M.**, *1991 V Photometry of CG Cyg and a Possible New Variable*, 1991, IBVS, 3688.

83. **Hendry P., Mochnacki S.**, *The GDDSYN Light Curve Synthesis Method*, 1992, ApJ, 388, 603.
84. **Hertzsprung E.**, *Photographische Beobachtung Eines Hauptminimums von 68 u Herculis*, 1911, AN, 189, 255.
85. **Hertzsprung E.**, *On the Character of the Variation of SX Aurigae*, 1928, BAN, 4, 178.
86. **Hertzsprung E.**, *Photographic Estimates of 25 Southern Variable Stars*, 1941, BAN, 9, 203.
87. **Hilditch R.**, *The Binary System 57 Cygni. Apsidal Motion and Effects of Spectral Line Blending*, 1973, MNRAS, 164, 101.
88. **Hilditch R.**, *An Introduction to Close Binary Stars*, University of Cambridge Press, New York, U.S.A., 2001.
89. **Hilditch R., King D., McFarlane T.**, *The Evolutionary State of Contact and Near-Contact Binary Stars*, 1988, MNRAS, 231, 341.
90. **Hill G.**, *Description of an Eclipsing Binary Light Curve Computer Code with Application to Y Sextus and the W Ursae Code of Rucinski*, 1979, PDAO, 15, 297.
91. **Hill G.**, *Studies of Late-type Binaries. II. The Physical Parameters of VW Cephei*, 1989, A&A, 218, 141.
92. **Hill G., Fisher W., Holmgren D.**, *Studies of Late-type Binaries. I. The Physical Parameters of 44 IOTA Bootis ABC*, 1989a, A&A, 211, 81.
93. **Hill G., Fisher W., Holmgren D.**, *Studies of Late-type Binaries. III. A Spectroscopic Study of V566 Ophiuchi*, 1989b, A&A, 218, 152.
94. **Hill G., Rucinski S.**, *LIGHT2: A Light Curve Modeling Program*. In: Light Curve Modeling of Eclipsing Binary Stars (edited by Milone E.), Springer, New York, U.S.A., 1993, p. 135.
95. **Horak T., Grygar J., van Houten C., Chochol D., Pribulla T.**, *Photometric Elements of the Eclipsing Binaries ZZ Cru, RU Gru and DT Lup from Multicolour Light Curves*, 1999, CoSka, 29, 127.
96. **Hroch F.**, *Computer Programs for CCD Photometry*, Proc. Conf. on Variable Star Research (edited by Dusek J. & Zejda M.), Brno, Czech Republic, 1998, p. 30.
97. **Huang S.-S.**, *A Theory of the Origin and Evolution of Contact Binaries*, 1966, AnAp, 29, 331.
98. **Ibanoglu C., Akan M., Evren S., Tunca Z.**, *Photoelectric Observations of ER Vulpeculae*, 1985, IBVS, 2782.
99. **Iben I. Jr., Tutukov A.**, *On the Evolution of Symbiotic Stars and Other Binaries with Accreting Degenerate Dwarfs*, 1996, ApJS, 105, 145.
100. **Irwin J., Bouvier J.**, *The Rotational Evolution of Low-Mass Stars*, 2009, IAUS, 258, 363.
101. **Ivanova N., Taam R.**, *Magnetic Braking Revisited*, 2003, ApJ, 599, 516.
102. **Jarad M., Hilditch R., Skillen I.**, *A Radial-Velocity Study of 18 Emission-Line B Stars*, 1989, MNRAS, 238, 1085.

103. **Jardine M., Unruh Y.**, *Coronal Emission and Dynamo Saturation*, 1999, A&A, 346, 883.
104. **Jetsu L., Pagano I., Moss D., Rodono M., Lanza A., Tuominen I.**, *Period Changes of AR Lacertae between 1900 and 1989*, 1997, A&A, 326, 698.
105. **Jianke L., Collier-Cameron A.**, *Rotational Evolution of Solar-Type Stars with Core-Envelope Decoupling*, 1993, MNRAS, 261, 766.
106. **Jurkevich I.**, *Machine Reduction. Computation and Analysis of Light Curves of Eclipsing Binary Systems*. In: Technical Information Series Report R 64 SD 8, Space Sciences Laboratory, General Electric Co., Valley Forge STC, Pa., U.S.A., 1964 (PhDT).
107. **Kalimeris A., Rovithis-Livaniou H.**, *On* $\dot{J}-\dot{P}$ *- Type Relations for Close Binaries*, 2006, Ap&SS, 304, 113.
108. **Kalimeris A., Rovithis-Livaniou H., Rovithis P.**, *On the Orbital Period Changes in Contact Binaries*, 1994a, A&A, 282, 775.
109. **Kalimeris A., Rovithis-Livaniou H., Rovithis P., Oprescu G., Dumitrescu A., Suran M.**, *An Orbital Period Study of the Contact System AB Andromedae*, 1994b, A&A, 291, 765.
110. **Kalimeris A., Rovithis-Livaniou H., Rovithis P.**, *Starspots and Photometric Noise on Observed minus Calculated (O-C) Diagrams*, 2002, A&A, 387, 969.
111. **Kallrath J., Linnell A.**, *A New Method to Optimize Parameters in Solutions of Eclipsing Binary Light Curves*, 1987, ApJ, 313, 346.
112. **Kallrath J., Milone E.**, *Eclipsing Binary Stars. Modeling and Analysis*, Springer-Verlag, New York, U.S.A., 1999.
113. **Kantz H., Schreiber T.**, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1997.
114. **Kawaler S.**, *Angular Momentum Loss in Low-Mass Stars*, 1988, ApJ, 333, 236.
115. **Kendall M., Stuart M.**, *The Advanced Theory of Statistics*, Griffin, London, U.K., 1961.
116. **Keppens R., MacGregor K., Charbonneau P.**, *On the Evolution of Rotational Velocity Distributions for Solar-Type Stars*, 1995, A&A, 294, 469.
117. **Kholopov P., Samus N., Durlevich O., Kazarovets E., Kireeva N., Tsvetkova T.**, *General Catalogue of Variable Stars, fourth edition (GCVS, vol. IV, electronic version, 1985-1988)*, 1992, BICDS, 40, 15.
118. **Kippenhahn R., Weigert A.**, *Stellar Structure and Evolution*, Springer, Heidelberg, Germany, 1994.
119. **Kjurkchieva D., Marchev D.**, *Spectroscopic and Photometric Observations of the Eclipsing Star UV Leo*, 2007, MNRAS, 381, 663.
120. **Kjurkchieva D., Marchev, D., Ogloza W.**, *Spectroscopic and Photometric Observations of the Short-Period RS CVn Star RT And*, 2001, A&A, 378, 102.
121. **Kjurkchieva D., Marchev D., Ogloza W.**, *Spectroscopic and Photometric Observations of the Short-Period RS CVn-Type Star CG Cyg*, 2003, A&A, 400, 623.

122. **Kjurkchieva D., Marchev D., Zola S.**, *Spectroscopic and Photometric Observations of the Short-Period RS CVn-Type Star ER Vulpeculae*, 2003, A&A, 404, 611.
123. **Koch R., Hrivnak B.**, *On Zahn's Theory of Tidal Friction for Cool, Main-Sequence Close Binaries*, 1981, AJ, 86, 438.
124. **Koen C.**, *The Analysis of Indexed Astronomical Time Series. IV. Modelling Period Changes in Sparsely Observed Variables*, 1996, MNRAS, 283, 471.
125. **Koen C.**, *The Analysis of Indexed Astronomical Time Series. X. Significance Testing of O-C data*, 2006, MNRAS, 365, 489.
126. **Koenigl A.**, *Disk Accretion onto Magnetic T Tauri Stars*, 1991, ApJ, 370, 39.
127. **Kopal Z.**, *On the Motion of the Apsidal Line in Close Binary Systems*, 1938, MNRAS, 98, 448.
128. **Kopal Z.**, *The Classification of Close Binary Systems*, 1955, AnAp, 18, 379.
129. **Kopal Z.**, *Close Binary Systems*, Chapman & Hall, London, U.K., 1959.
130. **Kopal Z.**, *Dynamics of Close Binary Systems*, Reidel, Dordrecht, Holland, 1978.
131. **Kostelich E., Schreiber T.**, *Noise Reduction in Chaotic Time Series Data: A Survey of Common Methods*, 1993, PhRvE, 48, 1752.
132. **Kraft R.**, *Studies of Stellar Rotation. V. The Dependence of Rotation on Age among Solar-Type Stars*, 1967, ApJ, 150, 551.
133. **Kreiner J.**, *Up-to-Date Linear Elements of Eclipsing Binaries*, 2004, AcA, 54, 207.
134. **Kreiner J., Kim C.-H., Nha I.-S.**, *An Atlas of O-C Diagrams of Eclipsing Binary Stars*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Cracow, Poland, 2001.
135. **Krishnamurthi A., Pinsonneault M., Barnes S., Sofia S.**, *Theoretical Models of the Angular Momentum Evolution of Solar-Type Stars*, 1997, ApJ, 480, 303.
136. **Kruskal W., Wallis A.**, *Use of Ranks in One-Criterion Variance Analysis*, 1952, Journal of the American Statistical Association, 47, 583.
137. **Kruszewski A.**, *Exchange of Matter in Close Binary Systems III. Changes in Period Caused by Exchange of Matter*, 1964, AcA, 14, 241.
138. **Kviz Z., Wong A.**, *The Accuracy of Timing the Minima of Eclipsing Variables*, 1987, PASAu, 7, 117.
139. **Kwee K., van Woerden H.**, *A Method for Computing Accurately the Epoch of Minimum of an Eclipsing Variable*, 1956, BAN, 12, 327.
140. **Kwee K.**, *Some Remarks in Connection with L. Winkler's Article on the Determination of Epochs of Minimun*, 1967, AJ, 72, 1380.
141. **Lamers H., Cassinelli J.**, *Introduction to Stellar Winds*, University of Cambridge Press, Cambridge, U.K., 1999.
142. **Landau L., Lifshitz E.**, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley Press, Cambridge, U.K., 1951.
143. **Lednicka A., Stępień K.**, *The Empirical Upper Limit for Mass Loss of Cool Main Sequence Stars*, 2008, AN, 329, 359.
144. **Lenz P., Breger M.**, *Period04 User Guide*, 2005, CoAst, 146, 53.

145. **Liakos A., Zasche P., Niarchos P.**, *A Comprehensive Study of Six Algol Type Binaries*, 2011, NewA, 16, 530.
146. **Libbrecht K.**, *Solar p-Mode Phenomenology*, 1988, ApJ, 334, 510.
147. **Linnell A.**, *Computer Calculation of Eclipse Functions*, 1970, VA, 12, 37.
148. **Linnell A.**, *A Light Synthesis Program for Binary Stars. I*, 1984, ApJS, 54, 17.
149. **Linsky J., Saar S.**, *Measurements of Stellar Magnetic Fields: Empirical Constraints on Stellar Dynamo and Rotational Evolution Theories*, Proc. Conf. of the 5th Cambridge Workshop on Cool Stars, Stellar Systems and the Sun (edited by Linsky J. & Stencel R.), Boulder, Colorado, U.S.A., 1987, p. 44.
150. **Lister T., Collier-Cameron A., Hilditch R.**, *Starspot Distributions on XY UMa during 1997 – 2000 from Eclipse Mapping*, 2001, MNRAS, 326, 1489.
151. **Ljung G., Box G.**, *On a Measure of the Lack of Fit in Time Series Models*, 1978, Biometrika, 65, 297.
152. **Lombard F., Koen C.**, *The Analysis of Indexed Astronomical Time Series. II. The O-C Technique Reconsidered*, 1993, MNRAS, 263, 309.
153. **Lu W.-X., Rucinski S.**, *Spectral-Line Broadening Functions of W UMa-Type Binaries. II. AH Vir*, 1993, AJ, 106, 361.
154. **Lucy L.**, *Gravity-Darkening for Stars with Convective Envelopes*, 1967, ZA, 65, 89.
155. **Maceroni C., Rucinski S.**, *The Shortest Period M Dwarf Eclipsing System BW3 V38*, 1997, PASP, 109, 782.
156. **MacGregor K., Brenner M.**, *Rotational Evolution of Solar-Type Stars. I. Main-Sequence Evolution*, 1991, ApJ, 376, 204.
157. **Mallama A.**, *The Accuracy of Visually Determined Times of Primary Minima of Algol-Type Variables*, 1974a, JAVSO, 3, 11.
158. **Mallama A.**, *The Accuracy of Visually Determined Times of Primary Minima of Lyrae-Type and W Ursae Majoris-Type Variables*, 1974b, JAVSO, 3, 49.
159. **Mallama A.**, *A Fortran Subroutine for Determining Times of Minimum Light*, 1982, IAPPP, 7, 14.
160. **Martynov D.**, *Elliptic Orbits. Motion of the Line of Apsides. The Influence of a Third Body on the Epochs of Minima*. In: Eclipsing Variable Stars (edited by Tsesevich V.), John Wiley & Sons, New York, U.S.A., 1973, p. 270.
161. **Mateo M., Harris H., Nemec J., Olszewski E.**, *Blue Stragglers as Remnants of Stellar Mergers. The Discovery of Short-Period Eclipsing Binaries in the Globular Cluster NGC 5466*, 1990, AJ, 100, 469.
162. **Mathieu R., Latham D., Mazeh T., Duquennoy A., Mayor M., Mermilliod J.-C.**, *The Distribution of Cutoff Periods with Age. An Observational Constraint on Tidal Circularization Theory*, Proc. Conf. on Binaries as Tracers of Stellar Formation (edited by Duquennoy A. & Mayor M.), Bettmeralp, Switzerland, 1992, p. 278.
163. **Mayor M., Mermilliod J.-C.**, *Rotational Velocities of Stars in Open Clusters. The Time-Dependence Revisited*, Proc. Conf. on Angular Momentum Evolution of Young Stars (edited by Catalano S. & Stauffer J.), Noto, Sicily, Italy, 1991, p. 143.

164. **Mestel L.**, *Magnetic Braking by a Stellar Wind. I*, 1968, MNRAS, 138, 359.
165. **Mestel L.**, *Angular Momentum Loss During Pre-Main Sequence Contraction*, Proc. Conf. of the 3rd Cambridge Workshop on Cool Stars, Stellar Systems, and the Sun (edited by Baliunas S. & Hartmann L.), Cambridge, Massachusetts, U.S.A., 1984, p. 49.
166. **Mestel L.**, *Magnetic Braking*, 1990, IAUS, 142, 67.
167. **Mestel L., Spruit H.**, *On Magnetic Braking of Late Type Stars*, 1987, MNRAS, 226, 57.
168. **Misner C., Thorne K., Wheeler J.**, *Gravitation*, Freemann, San Francisco, U.S.A., 1973.
169. **Mochnacki S., Doughty N.**, *A Model for the Totally Eclipsing W UMa System AW UMa*, 1972a, MNRAS, 156, 51.
170. **Mochnacki S., Doughty N.**, *Models for Five W UMa Systems*, 1972b, MNRAS, 156, 243.
171. **Mullan D., Doyle J., Redman R., Mathioudakis M.**, *Limits on Detectability of Mass Loss from Cool Dwarfs*, 1992, ApJ, 397, 225.
172. **Murset U., Nussbaumer H.**, *Temperatures and Luminosities of Symbiotic Novae*, 1994, A&A, 282, 586.
173. **Nagy T.**, *The Binary System V566 Oph Revisited*, 1975, BAAS, 7, 533.
174. **Nanouris N., Antonopoulou E.**, *Photometric Monitoring of GSC 2696-2622 Variability,* Proc. Conf. of the 9th International Conference of the Hellenic Astronomical Society (edited by Tsinganos K., Hatzidimitriou D. & Matsakos T.), Athens, Greece, 2010, p. 212.
175. **Nanouris N., Antonopoulou E., Rovithis-Livaniou H., Kalimeris A.**, *Efficiency of O-C Diagrams as Diagnostic Tools for Long-Term Period Variations. III. Sufficiency of the Parabolic Representation and Applications*, 2012b, A&A (to be submitted).
176. **Nanouris N., Kalimeris A., Antonopoulou E., Rovithis-Livaniou H.**, *Efficiency of O-C Diagrams as Diagnostic Tools for Long-Term Period Variations. I. Wind-Driven Mass Loss and Magnetic Braking*, 2011, A&A, 535, A126.
177. **Nanouris N., Kalimeris A., Rovithis-Livaniou H., Antonopoulou E.**, *Efficiency of O-C Diagrams as Diagnostic Tools for Long-Term Period Variations. II. RLOF Mass Loss / Exchange and Gravitational Radiation*, 2012a, A&A (to be submitted).
178. **Nelson B., Davis W.**, *Eclipsing Binary Solutions by Sequential Optimization of the Parameters*, 1972, ApJ, 174, 617.
179. **Ogloza W.**, *Spot Influence on O-C Diagrams*, 1997, IAPPP, 67, 51.
180. **Okamoto I.**, *Magnetic Braking by a Stellar Wind. IV. The Effect of Different Poloidal Field Structures*, 1974, MNRAS, 166, 683.
181. **Olah K., Budding E., Kim H., Etzel P.**, *The Active Close Binary System ER Vulpeculae*, 1994, A&A, 291, 110.
182. **Oosterhoff P.**, *Epochs of Minimum of AB Andromedae*, 1929, BAN, 5, 39.

183. **Pallavicini R., Golub L., Rosner R., Vaiana G., Ayres T., Linsky J.**, *Relations among Stellar X-ray Emission Observed from Einstein, Stellar Rotation and Bolometric Luminosity*, 1981, ApJ, 248, 279.
184. **Parker E.**, *Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields*, 1958, ApJ, 128, 664.
185. **Parker E.**, *The Hydrodynamic Theory of Solar Corpuscular Radiation and Stellar Winds*, 1960, ApJ, 132, 821.
186. **Parker E.**, *Dynamical Theory of the Solar Wind*, 1965, SSRv, 4, 666.
187. **Parker E.**, *Dynamical Properties of Stellar Coronas and Stellar Winds. V. Stability and Wave Propagation*, 1966, ApJ, 143, 32.
188. **Paschke A., Brat L.**, *O-C Gateway, a Collection of Minima Timings*, 2006, OEJV, 23, 13.
189. **Petit M.**, *Variable Stars*, John Wiley & Sons, Chichester, U.K., 1987.
190. **Pinsonneault M., Kawaler S., Sofia S., Demarque P.**, *Evolutionary Models of the Rotating Sun*, 1989, ApJ, 338, 424.
191. **Pizzolato N., Maggio A., Micela G., Sciortino S., Ventura P.**, *The Stellar Activity-Rotation Relationship Revisited: Dependence of Saturated and Non-Saturated X-ray Emission Regimes on Stellar Mass for Late-Type Dwarfs*, 2003, A&A, 397, 147.
192. **Popper D.**, *VZ Canum Venaticorum and AI Hydrae. Detached F-type Binaries with Variable Components*, 1988, AJ, 95, 190.
193. **Popper D.**, *Orbits of Detached Main-Sequence Eclipsing Binaries of Types Late F to K. I. RT Andromedae and CG Cygni*, 1994, AJ, 108, 1091.
194. **Popper D.**, *Orbits of Detached Main-Sequence Eclipsing Binaries of Types Late F to K. III. AD Bootis and DU Leonis*, 1998, AJ, 115, 338.
195. **Popper D., Ulrich R.**, *The Evolutionary Status of RS Canum Venaticorum Binaries*, 1977, ApJ, 212, 131.
196. **Pribulla T., Chochol D., Milano L., Errico L., Vittone A., Barone F., Parimucha S.**, *Active Eclipsing Binary RT Andromedae Revisited*, 2000, A&A, 362, 169.
197. **Proctor D., Linnell A.**, *Computer Solution of Eclipsing Binary Light Curves by the Method of Differential Corrections*, 1972, ApJS, 24, 449.
198. **Prša A., Zwitter T.**, *Influence of Interstellar and Atmospheric Extinction on Light Curves of Eclipsing Binaries*, 2005a, Ap&SS, 296, 315.
199. **Prša A., Zwitter T.**, *A Computational Guide to Physics of Eclipsing Binaries. I. Demonstrations and Perspectives*, 2005b, ApJ, 628, 426.
200. **Qian S.**, *Long-Time Behavior of Orbital Periods of Some Algol-Type Eclipsing Binaries*, 2000, A&AS, 146, 377.
201. **Queloz D., Allain S., Mermilliod J.-C., Bouvier J., Mayor M.**, *The Rotational Velocity of Low-Mass Stars in the Pleiades Cluster*, 1998, A&A, 335, 183.
202. **Quenouille M.**, *Approximate Tests of Correlation in Time Series*, 1949, Journal of the Royal Statistical Society B, 11, 18.
203. **Rao P. Vivekananda, Sarma M., Abhyankar K.**, *Is the Eclipsing Binary EU Hydrae a Semi-Detached System?*, 1996, PASP, 108, 967.

204. **Rappaport S., Verbunt F., Joss P.**, *A New Technique for Calculations of Binary Stellar Evolution with Application to Magnetic Braking*, 1983, ApJ, 275, 713.
205. **Reid N.**, *Unresolved Binaries and the Stellar Luminosity Function*, 1991, AJ, 102, 1428.
206. **Reid N., Majewski S.**, *Star Counts Redivivus. I. A New Look at the Galaxy at Faint Magnitudes*, 1993, ApJ, 409, 635.
207. **Reimers D.**, *Circumstellar Absorption Lines and Mass Loss from Red Giants*, 1975, Memoires de la Societé Royale des Sciences de Liege, 8, 369.
208. **Reimers D.**, *On the Absolute Scale of Mass-Loss in Red Giants. I. Circumstellar Absorption Lines in the Spectrum of the Visual Companion of Alpha-1 Her*, 1977, A&A, 61, 217.
209. **Rhodes E. Jr., Cacciani A., Korzennik S., Tomczyk S., Ulrich R., Woodard M.**, *Depth and Latitude Dependence of the Solar Internal Angular Velocity*, 1990, ApJ, 351, 687.
210. **Rice J.**, *Doppler Imaging of Stellar Surfaces*, 1996, IAUS, 176, 19.
211. **Rice J.**, *Doppler Imaging of Stellar Surfaces. Techniques and Issues*, 2002, AN, 323, 220.
212. **Rieutord M., Zahn J.-P.**, *Ekman Pumping and Tidal Dissipation in Close Binaries: A Refutation of Tassoul's Mechanism*, 1997, ApJ, 474, 760.
213. **Roche E.**, *La Figure d' une Masse Fluide, Soumisse a l' Attraction d' un Point Eloigne*, 1849, Memoires de l' Academie des Sciences de Montpellier, 1, 243.
214. **Rovithis-Livaniou H., Kalimeris A., Rovithis P.**, *Eclipsing Binaries and the Study of their Periods*, Proc. Conf. of the 20th Stellar Conference of the Czech and Slovak Astronomical Institutes (edited by Dusek J.), Brno, Czech Republic, 1998, p. 180.
215. **Rucinski S.**, *The Rate of the Angular-Momentum Loss due to Magnetic Breaking as Derived from Binary Statistics*, 1983, The Observatory, 103, 280.
216. **Rucinski S.**, *Rotational Properties of Composite Polytrope Models*, 1988, AJ, 95, 1895.
217. **Rucinski S.**, *Spectral-line Broadening Functions of W UMa-Type Binaries. I. AW UMa*, 1992, AJ, 104, 1968.
218. **Rucinski S., Lu W.-X., Shi J.**, *Spectral-line Broadening Functions of W UMa-Type Binaries. III. W UMa*, 1993, AJ, 106, 1174.
219. **Russell H.**, *On the Determination of the Orbital Elements of Eclipsing Variable Stars. I*, 1912a, ApJ, 35, 315.
220. **Russell H.**, *On the Determination of the Orbital Elements of Eclipsing Variable Stars. II*, 1912b, ApJ, 36, 54.
221. **Russell H., Merrill J.**, *The Determination of the Elements of Eclipsing Binaries*, Contributions from the Princeton University Observatory, Observatory, Princeton, U.S.A., 1952.
222. **Russell H., Shapley H.**, *On Darkening at the Limb in Eclipsing Variables. I*, 1912a, ApJ, 36, 239.
223. **Russell H., Shapley H.**, *On Darkening at the Limb in Eclipsing Variables. II*, 1912b, ApJ, 36, 385.

224. **Savonije G., Witte M.**, *Tidal Interaction of a Rotating 1 $M_\odot$ Star with a Binary Companion*, 2002, A&A, 386, 211.
225. **Schatzman E.**, *A Theory of the Role of Magnetic Activity during Star Formation*, 1962, AnAp, 25, 18.
226. **Scheffé H.**, *A Method for Judging All Contrasts in the Analysis of Variance*, 1953, Biometrika, 40, 87.
227. **Schiller K.**, *Einfuhrung in das Studium der Ueranderlichen Sterne*, J. Barth-Verlag, Leipzig, Germany, 1923.
228. **Schonfeld E.**, *Resultate aus Untersuchungen über den Lichtwechsel von beta Lyrae und delta Cephei*, 1869, AN, 75, 1.
229. **Schröder K.-P., Cuntz M.**, *A New Version of Reimers Law of Mass Loss Based on a Physical Approach*, 2005, ApJ, 630, 73.
230. **Schwartz G.**, *Estimating the Dimension of a Model*, 1978, Annals of Statistics, 6, 461.
231. **Seeliger H.**, *Bemerkung über das Arithmetische Mittel*, 1893, AN, 132, 209.
232. **Sekiguchi M., Fukugita M.**, *A Study of the B-V Color-Temperature Relation*, 2000, AJ, 120, 1072.
233. **Shu F., Anderson L., Lubow S.**, *On the Structure of Contact Binaries. III. Mass and Energy Flow*, 1979, ApJ, 229, 223.
234. **Simkin S.**, *Measurements of Velocity Dispersions and Doppler Shifts from Digitized Optical Spectra*, 1974, A&A, 31, 129.
235. **Skumanich A.**, *Time Scales for Ca II Emission Decay, Rotational Braking and Lithium Depletion*, 1972, ApJ, 171, 565.
236. **Smith M.**, *Rotational Studies of Lower Main-Sequence Stars*, 1979, PASP, 91, 737.
237. **Soderblom D.**, *Rotational Studies of Late-Type Stars. I. Rotational Velocities of Solar-Type Stars*, 1982, ApJ, 263, 239.
238. **Soderblom D.**, *Rotational Studies of Late-Type Stars. II. Ages of Solar-Type Stars and the Rotational History of the Sun*, 1983, ApJS, 53, 1.
239. **Soderblom D., Stauffer J., MacGregor K., Jones B.**, *The Evolution of Angular Momentum among Zero-Age Main-Sequence Solar-Type Stars*, 1993, ApJ, 409, 624.
240. **Sokoloff D., Piskunov N.**, *Swing Excitation and Magnetic Activity in Close Binary Systems*, 2002, MNRAS, 334, 925.
241. **Stauffer J.**, *Rotational Velocity Evolution on and Prior to the Main Sequence*, Proc. Conf. of the 5th Cambridge Workshop on Cool Stars, Stellar Systems and the Sun (edited by Linsky J. & Stencel R.), Boulder, Colorado, U.S.A., 1987, p. 182.
242. **Stauffer J., Hartmann L.**, *The Distribution of Rotational Velocities for Low-Mass Stars in the Pleiades*, 1987, ApJ, 318, 337.
243. **Sterken C.**, *The O-C Diagram*, Proc. Conf. on Variable Stars as Essential Astrophysical Tools (edited by Ibanoglu C.), Cesme, Turkey, 2000, p. 529.
244. **Stępień K.**, *Surface Magnetic Fields, Activity and Angular Momentum Loss of Cool Dwarfs*, 1991, AcA, 41, 1.

245. **Stępień K.**, *Loss of Angular Momentum of Cool Close Binaries and Formation of Contact Systems*, 1995, MNRAS, 274, 1019.
246. **Strassmeier K., Hall D., Zeilik M., Nelson E., Eker Z., Fekel F.**, *A Catalog of Chromospherically Active Binary Stars*, 1988, A&AS, 72, 291.
247. **Strassmeier K., Hall D., Fekel F., Scheck M.**, *A Catalog of Chromospherically Active Binary Stars, second edition*, 1993, A&AS, 100, 173.
248. **Sveshnikov A.**, *Problems in Probability Theory, Mathematical Statistics and Theory of Random Functions*, Dover, New York, U.S.A., 1968.
249. **Szafraniec R.**, *(?)*, 1948, AcA Series C, 4, 81.
250. **Taam R., Spruit H.**, *The Disrupted Magnetic Braking Hypothesis and the Period Gap of Cataclysmic Variables*, 1989, ApJ, 345, 972.
251. **Tassoul J.-L., Tassoul M.**, *A Comparative Study of Synchronization and Circularization in Close Binaries*, 1992a, ApJ, 395, 259.
252. **Tassoul J.-L., Tassoul M.**, *On the Efficiency of Ekman Pumping for Synchronization in Close Binaries*, 1992b, ApJ, 395, 604.
253. **Tassoul J.-L., Tassoul M.**, *On Synchronization in Detached Close Binaries: Reply to Rieutord and Zahn*, 1997, ApJ, 481, 363.
254. **Terquem C., Papaloizou J., Nelson R., Lin D.**, *On the Tidal Interaction of a Solar-Type Star with an Orbiting Companion: Excitation of g-Mode Oscillation and Orbital Evolution*, 1998, ApJ, 502, 788.
255. **Tomczyk S., Schou J., Thompson M.**, *Measurement of the Rotation Rate in the Deep Solar Interior*, 1995, ApJ, 448, 57.
256. **Torres G., Ribas I.**, *Absolute Dimensions of the M-Type Eclipsing Binary YY Geminorum (Castor C): A Challenge to Evolutionary Models in the Lower Main Sequence*, 2002, ApJ, 567, 1140.
257. **Torres G., Stefanik R., Andersen J., Nordstrom B., Latham D., Clausen J.**, *The Absolute Dimensions of Eclipsing Binaries. XXII. The Unevolved F-Type System HS Hydrae*, 1997, AJ, 114, 2764.
258. **Torres G., Vaz L.-P., Lacy C.**, *Absolute Properties of the Spotted Eclipsing Binary Star CV Bootis*, 2008, AJ, 136, 2158.
259. **Tout C., Eggleton P.**, *Tidal Enhancement by a Binary Companion of Stellar Winds from Cool Giants*, 1988, MNRAS, 231, 823.
260. **Tout C., Hall D.**, *Wind Driven Mass Transfer in Interacting Binary Systems*, 1991, MNRAS, 253, 9.
261. **Tsantilas S., Rovithis-Livaniou H.**, *Inverse Semi-Detached Binaries: A New Type of Binary System?*, Proc. Conf. of the 9th International Conference of the Hellenic Astronomical Society (edited by Tsinganos K., Hatzidimitriou D. & Matsakos T.), Athens, Greece, 2010, p. 192.
262. **Tsantilas S., Rovithis-Livaniou H., Djurasevic G.**, *Radiation Pressure and Surface Gravity of Close Binaries: First Results from Observational Data Analysis*, 2006, Ap&SS, 304, 117.
263. **Tukey J.**, *The problem of Multiple Comparisons*, Unpublished Manuscript, 1953. In: The Collected Works of John W. Tukey VIII. Multiple Comparisons: 1948–1983 (edited by Braun H.), Chapman & Hall, New York, U.S.A., 1994, p. 1.

264. **Tukey J.**, *Some Thoughts on Clinical Trials, Especially Problems of Multiplicity*, 1977, Science, 198, 679.
265. **Van den Oord G., Doyle J.**, *Constraints on Mass Loss from dMe Stars: Theory and Observations*, 1997, A&A, 319, 578.
266. **Vanko M., Pribulla T., Chochol D., Parimucha S., Kim C., Lee J., Han J.**, *Photoelectric and CCD Photometry of Eclipsing Contact Binaries: UV Lyn, FU Dra and AH Aur*, 2001, CoSka, 31, 129.
267. **Van’t Veer F.**, *The Eclipsing Contact Binary VW Cephei*, 1973, A&A, 26, 357.
268. **Van't Veer F., Maceroni C.**, *The Angular Momentum Loss of Rapidly Rotating Late-Type Main Sequence Binaries*, 1988, A&A, 199, 183.
269. **Van't Veer F., Maceroni C.**, *The Angular Momentum Loss for Late-Type Stars*, 1989, A&A, 220, 128.
270. **Van’t Veer F., Maceroni C.**, *The Dynamical Evolution of G-Type Main Sequence Binaries*, Proc. Conf. on Binaries as Tracers of Stellar Formation (edited by Duquennoy A. & Mayor M.), Bettmeralp, Switzerland, 1992, p. 237.
271. **Vassiliadis E., Wood P.**, *Evolution of Low and Intermediate-Mass Stars to the End of the Asymptotic Giant Branch with Mass Loss*, 1993, ApJ, 413, 641.
272. **Verbunt F., Zwaan C.**, *Magnetic Braking in Low-Mass X-ray Binaries*, 1981, A&A, 100, 7.
273. **Vilhu O.**, *Detached to Contact Scenario for the Origin of W UMa Stars*, 1982, A&A, 109, 17.
274. **Vilhu O.**, *The Nature of Magnetic Activity in Lower Main Sequence Stars*, 1984, A&A, 133, 117.
275. **Vilhu O.**, *W-Ursae Binaries*, 1992, IAUS, 151, 61.
276. **Vilhu O.**, *Magnetic Activity versus Rotation and Age. Close Binaries and Braking*, 1994, Memorie della Società Astronomia Italiana, 65, 61.
277. **Vilhu O., Moss D.**, *Magnetic Braking in Cool Dwarfs*, 1986, AJ, 92, 1178.
278. **Vilhu O., Walter F.**, *Chromospheric-Coronal Activity at Saturated Levels*, 1987, ApJ, 321, 958.
279. **Vincent A., Piskunov N., Tuominen I.**, *Surface Imaging of Eclipsing Binary Stars. I. Techniques*, 1993, A&A, 278, 523.
280. **Vogt H.**, *Die Beziehung Zwischen den Massen und den Absoluten Leuchtkräften der Sterne (?)*, 1926, AN, 226, 301.
281. **Vogt S., Penrod G.**, *Doppler Imaging of Spotted Stars. Application to the RS Canum Venaticorum Star HR 1099*, 1983, PASP, 95, 565.
282. **Vogt S., Penrod G., Hatzes P.**, *Doppler Images of Rotating Stars Using Maximum Entropy Image Reconstruction*, 1987, ApJ, 321, 496.
283. **Von Zeipel H.**, *The Radiative Equilibrium of a Rotating System of Gaseous Masses*, 1924a, MNRAS, 84, 665.
284. **Von Zeipel H.**, *The Radiative Equilibrium of a Slightly Oblate Rotating Star*, 1924b, MNRAS, 84, 684.
285. **Von Zeipel H.**, *Radiative Equilibrium of a Double Star System with Nearly Spherical Components*, 1924c, MNRAS, 84, 702.

286. **Watson C., Dhillon V.**, *The Effect of Starspots on Eclipse Timings of Binary Stars*, 2004, MNRAS, 351, 110.
287. **Webbink R.**, *The Evolution of Low-Mass Close Binary Systems. I. The Evolutionary Fate of Contact Binaries*, 1976, ApJ, 209, 829.
288. **Weber E., Davis L. Jr.**, *The Angular Momentum of the Solar Wind*, 1967, ApJ, 148, 217.
289. **Winkler L.**, *A New Method for the Determination of the Epoch of Minimum of Binary Star Systems*, 1967, AJ, 72, 226.
290. **Wilson P.**, *Solar and Stellar Activity Cycles*, Cambridge Astrophysics Series 24, University of Cambridge Press, Cambridge, U.K., 1994.
291. **Wilson R., Devinney E.**, *Realization of Accurate Close Binary Light Curves: Application to MR Cygni*, 1971, ApJ, 166, 605.
292. **Wolf M.**, *Apsidal Motion in Southern Eccentric Eclipsing Binaries: YY Sgr, V523 Sgr, V1647 Sgr, V2283 Sgr and V760 Sco*, 2000, A&A, 356, 134.
293. **Wood D.**, *An Analytic Model of Eclipsing Binary Star Systems*, 1971, AJ, 76, 701.
294. **Wood D.**, *A Computer Program for Modeling Non-Spherical Eclipsing Binary Systems*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, U.S.A., 1972.
295. **Wood B., Müller H.-R., Zank G., Linsky J.**, *Measured Mass-Loss Rates of Solar-like Stars as a Function of Age and Activity*, 2002, ApJ, 574, 412.
296. **Wood B., Müller H.-R., Zank G., Linsky J., Redfield S.**, *New Mass-Loss Measurements from Astrospheric Lyα Absorption*, 2005, ApJ, 628, 143.
297. **Xiong D., Cheng Q., Deng L.**, *Nonlocal Time-Dependent Convection Theory*, 1997, ApJS, 108, 529.
298. **Yu C.-S.**, *Light Curve and Orbit of CG Cygni*, 1923, ApJ, 58, 75.
299. **Zahn J.-P.**, *Les Marées dans une Etoile Double Serrée (suite)*, 1966, AnAp, 29, 489.
300. **Zahn J.-P.**, *The Dynamical Tide in Close Binaries*, 1975, A&A, 41, 329.
301. **Zahn J.-P.**, *Tidal Friction in Close Binary Stars*, 1977, A&A, 57, 383.
302. **Zahn J.-P.**, *Erratum. Tidal Friction in Close Binary Stars*, 1978, A&A, 67, 162.
303. **Zahn J.-P.**, *Tidal Evolution of Close Binary Stars. I. Revisiting the Theory of the Equilibrium Tide*, 1989, A&A, 220, 112.
304. **Zahn J.-P., Bouchet L.**, *Tidal Evolution of Close Binary Stars. II. Orbital Circularization of Late Type Binaries*, 1989, A&A, 223, 112.
305. **Zasche P., Liakos A., Niarchos P., Wolf M., Manimanis V., Gazeas K.**, *Period Changes in Six Contact Binaries: WZ And, V803 Aql, DF Hya, PY Lyr, FZ Ori, and AH Tau*, 2009, NewA, 14, 121.
306. **Zola S., Kolonko M., Szczech, M.**, *Analysis of a Photoelectric Light Curve of the W UMa-Type Binary ST Ind*, 1997, A&A, 324, 1010.