

Περιστρεφόμενα Εκτεταμένα Αντικείμενα και Αντιστοιχία AdS/CFT



ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΛΙΝΑΡΔΟΠΟΥΛΟΣ

Τμήμα Φυσικής,

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

και

Ινστιτούτο Πυρηνικής και Σωματιδιακής Φυσικής

Εθνικό Κέντρο Έρευνας Φυσικών Επιστημών «Δημόκριτος»

Διδακτορική Διατριβή υποβληθείσα

στο

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ιούνιος 2015

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Εμμανουήλ Φλωράτος
Ομότ. Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α.

ΣΥΝΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Μίνως Αξενίδης
Διευθ. Ερευνών, Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. «Δημόκριτος»

ΜΕΛΟΣ ΤΡΙΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

Νικόλαος Τετράδης
Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α.

ΜΕΛΗ ΕΠΤΑΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

Γεώργιος Διαμάντης
Αναπλ. Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α.

Αθανάσιος Λαχανάς
Ομότ. Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α.

Ιωάννης Μπάκας
Καθηγητής, Ε.Μ.Π.

Κωνσταντίνος Σφέτσος
Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α.

*Αφιερώνεται
στους γονείς μου*

Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή βασίζεται σε ερευνητική δουλειά που έλαβε χώρα κατά τα έτη 2012–2015 στο Ινστιτούτο Πυρηνικής & Σωματιδιακής Φυσικής του Εθνικού Κέντρου Έρευνας Φυσικών Επιστημών «Δημόκριτος» και στον Τομέα Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων του Τμήματος Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Είχα την τύχη να έχω τους καθηγητές Εμμανουήλ Φλωράτο (κύριος επιβλέπων), Μίνω Αξενίδη (συνεπιβλέπων) και Νικόλαο Τετράδη στην τριμελή επιτροπή επίβλεψης του διδακτορικού μου. Θα ήθελα να τους ευχαριστήσω για τη θαυμάσια συνεργασία, τη βοήθεια και την καθοδήγησή τους.

Αισθάνομαι βαθύτατα ευγνώμων προς το δάσκαλό μου, Εμμανουήλ Φλωράτο, για όλα όσα μου έμαθε. Μου είναι εξαιρετικά δύσκολο να φανταστώ κάποιον καλύτερο και ευγενέστερο επιβλέποντα. Τον ευχαριστώ για τις συμβουλές του, τη γενναιοδωρία και την αγάπη του. Είμαι βαθύτατα υποχρεωμένος προς τον Μίνω Αξενίδη για όλη την υποστήριξη, την ενθάρρυνση, τη βοήθεια, τις συμβουλές και το χρόνο που μου αφιέρωσε. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Νικόλαο Τετράδη, που ήταν πάντοτε διαθέσιμος να με βοηθήσει και να με συμβουλέψει.

Θα ήθελα επίσης να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου και στα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς διδακτορικής επιτροπής, καθηγητές Γεώργιο Διαμάντη, Αθανάσιο Λαχανά, Ιωάννη Μπάχα και Κωνσταντίνο Σφέτσο. Κατά τη διάρκεια του διδακτορικού, η έρευνά μου στο Ε.ΚΕ.Φ.Ε. «Δημόκριτος» έτυχε οικονομικής υποστήριξης από τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (Γ.Γ.Ε.Τ.) και το Ευρωπαϊκό Ταμείο Περιφερειακής Ανάπτυξης (Ε.Τ.Π.Α.) MIS-448332-ΟΡΑΣΥ (ΕΣΠΑ 2007–13 ΔΡΑΣΗ, «ΚΡΗΠΙΣ»).

Ευχαριστώ θερμά τον Δρ. Γεώργιο Γεωργίου, ο οποίος υπήρξε ο στενότερος συνεργάτης μου και φίλος στη διάρκεια του διδακτορικού και συνέβαλε ιδιαίτερα στην ολοκλήρωσή του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Σταμάτιο Νίκολη για τις συναρπαστικές συζητήσεις μας και την ενθάρρυνσή του.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της οικογένειάς μου και ιδιαίτερα τους γονείς μου, στους οποίους και αφιερώνω αυτή τη διδακτορική διατριβή.

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή στηρίζεται στις εργασίες [1, 2, 3, 4]:

- G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of Giant Magnons*, [arXiv:1502.01630]. To appear in Proceedings of Science, PoS (CORFU2014) 154.
- E. Floratos, G. Linardopoulos, *Large-Spin and Large-Winding Expansions of Giant Magnons and Single Spikes*, Nucl.Phys. **B897** (2015) 229, [arXiv:1406.0796].
- E. Floratos, G. Georgiou, G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of GKP Strings*, JHEP **03** (2014) 018, [arXiv:1311.5800].
- M. Axenides, E. Floratos, G. Linardopoulos, *Stringy Membranes in AdS/CFT*, JHEP **08** (2013) 089, [arXiv:1306.0220],

καθώς επίσης και στις ακόλουθες ομιλίες:

- *Large-Spin Expansions of Giant Magnons*. Workshop on Quantum Fields and Strings. 14th Hellenic School and Workshops on Elementary Particle Physics & Gravity. Corfu Summer Institute, 17/09/2014, [<http://www.physics.ntua.gr/corfu2014/lectures.html>]
- *Dispersion Relation of GKP Strings*. Summer School on String Theory and Holography & Mathematica Summer School on Theoretical Physics, 6th Edition. Departamento de Física e Astronomia of Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP), 24/07/2014, [<http://msstp.org/?q=node/294>]
- *Stringy Membranes in AdS/CFT*. “Holography 2013: Gauge/Gravity Duality and Strongly Correlated Systems”. Pohang, S. Korea, June 13 – 22. APCTP, POSTECH, 15/06/2013, [<https://www.apctp.org/plan.php/holography2013/660>]
- *Rotating Strings and Membranes in AdS/CFT*. “Foundations of Quantum Mechanics and Relativistic Spacetime”. Annual workshop of Working Group 3, “Quantum Theory Meets Relativity”, of the COST Action MP1006, “Fundamental Problems in Quantum Physics”. National & Kapodistrian University of Athens, 26/09/2012, [<http://www.pwallden.gr/foundations.asp>].

Η έρευνα του συγγραφέως στο Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. «Δημόκριτος» υποστηρίχθηκε οικονομικά από τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (Γ.Γ.Ε.Τ.) και από το Ευρωπαϊκό Ταμείο Περιφερειακής Ανάπτυξης (Ε.Τ.Π.Α.) MIS-448332-ΟΡΑΣΥ (ΕΣΠΑ 2007–13, ΔΡΑΣΗ «ΚΡΗΠΙΣ»).



Περίληψη

Στην ισχυρότερη εκδοχή της, η εικασία AdS/CFT αναφέρει ότι η $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ super Yang-Mills (SYM) θεωρία είναι ίση με τη θεωρία υπερχορδών τύπου IIB, στο χώρο $\text{AdS}_5 \times S^5$. Είναι μακράν από τις σημαντικότερες εξισώσεις θεωρητικής φυσικής της εποχής μας, ένα είδος «αρμονικού ταλαντωτή» τόσο για την κβαντική θεωρία της βαρύτητας, όσο και για τις θεωρίες βαθμίδας. Ως εκ τούτου, είναι επιτακτική η ανάγκη να κατανοηθούν πλήρως τα όρια ισχύος της και να διερευνηθούν διεξοδικά όλες της οι συνέπειες. Πιο συγκεκριμένα, θα ήταν ευκαίριο να μπορούσαμε να λύσουμε τη θεωρία, ήτοι να υπολογίσουμε όλα της τα παρατηρήσιμα μεγέθη.

Ένα από τα σημαντικότερα παρατηρήσιμα μεγέθη της αντιστοιχίας AdS/CFT είναι το φάσμα της. Σύμφωνα με το «λεξικόν» της αντιστοιχίας AdS/CFT, το φάσμα της θεωρίας περιλαμβάνει τις ενέργειες των καταστάσεων χορδών αυτής, καθεμιά εκ των οποίων θα πρέπει να είναι ίση με τις διαστάσεις κλίμακας του δυϊκού τελεστή της χορδής στη θεωρία βαθμίδας. Το πλήρες φασματικό πρόβλημα της αντιστοιχίας AdS/CFT λύνεται από την ολοκληρωσιμότητα, υπό την έννοια ότι η ολοκληρωσιμότητα παρέχει το πλήρες σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων που καθορίζουν το φάσμα. Οι μέθοδοι της ολοκληρωσιμότητας περιορίζονται ωστόσο σημαντικά στο όριο των μεγάλων, ισχυρά συζευγμένων τελεστών, όπως π.χ. εκείνων που είναι δυϊκοί στις χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP), τα γιγάντια μαγνόνια και τις «απλές ακίδες».

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε κλασσικές χορδές και βράνες στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT. Ο στόχος μας είναι διττός: (1) να αναπτύξουμε μεθόδους για τον υπολογισμό του φάσματος της αντιστοιχίας $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$, στην περίπτωση μεγάλων, ισχυρά συζευγμένων τελεστών, χρησιμοποιώντας κλασσικές χορδές και (2) να κατανοήσουμε το ρόλο των κλασσικών μεμβρανών στην αντιστοιχία AdS/CFT, διερευνώντας τα χορδοειδή τους όρια.

Ως προς τον πρώτο στόχο, υπολογίζουμε τα κλασσικά φάσματα των μεγάλων χορδών GKP, των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων. Οι διατηρούμενη γραμμική ορμή και στροφορμή αυτών των διατάξεων χορδών, οι οποίες ζουν είτε εντός του AdS_3 ή στον $\mathbb{R} \times S^2$, είναι γνωστές σε παραμετρική μορφή συναρτήσει των γραμμικών και γωνιακών ταχυτήτων των χορδών. Απαλείφουμε τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα από τις εκφράσεις που δίνουν την ενέργεια των χορδών, προς όφελος των διατηρούμενων φορτίων της γραμμικής ορμής και στροφορμής των χορδών. Έτσι, βρίσκουμε όλους τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους όρους στις σχέσεις διασποράς των παραπάνω διατάξεων. Τα αποτελέσματά μας εκφράζονται σε κλειστές μορφές με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert.

Για το δεύτερο στόχο, εισάγουμε και μελετάμε τις «χορδοειδείς μεμβράνες», μια νέα κατηγορία μεμβρανών που ζουν στον $\text{AdS}_{4/7} \times S^{7/4}$ ή τον $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ και έχουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης, συνδέσμους και διατηρούμενα φορτία με χορδές που ζουν σε ένα κατάλληλο υποσύνολο του AdS_5 . Οι χορδοειδείς μεμβράνες δύνανται να κατασκευαστούν κάθε φορά που ο χωροχρόνος περιέχει μια συμπαγή υποπολλαπλότητα, ταυτοποιώντας μία από τις συμπαγείς συντεταγμένες της υποπολλαπλότητας με μία εκ των συντεταγμένων κοσμικού όγκου της μεμβράνης. Για τις χορδοειδείς μεμβράνες που αναπαράγουν την παλλόμενη και περιστρεφόμενη χορδή των GKP εντός του AdS, βρίσκουμε ότι το φάσμα των εγχάρσιων διαταραχών τους έχει τη δομή πολλαπλών ζωνών/χασμάτων που διέπονται από την εξίσωση Lamé. Αντίθετα, οι διεγέρσεις μιας χορδής αναπαρίστανται από μία δομή μονής ζώνης/χάσματος Lamé. Αυτά τα ευρήματα επιβεβαιώνουν την εικόνα που έχουμε για τις μεμβράνες ως συλλογικές διεγέρσεις των χορδοειδών τους συνιστωσών.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	5
1.1	Επισκόπηση	10
I	Εισαγωγή στην Αντιστοιχία AdS/CFT	11
2	Αντιστοιχία AdS/CFT	11
2.1	Περιγραφή Ανοικτής Χορδής	11
2.2	Περιγραφή Κλειστής Χορδής	12
2.3	$\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills	12
2.4	IIB Θεωρία Χορδών στον $AdS_5 \times S^5$	13
2.5	Ταίριασμα Παραμέτρων	15
2.6	Ο Τομέας BMN	16
2.7	Διαδικότητες Maldacena	17
2.8	Αντιστοιχία ABJM	17
2.9	Αντιστοιχία Πεδίου/Τελεστή	18
2.10	Τεστ της Αντιστοιχίας AdS_5/CFT_4	19
2.10.1	Συμμετρίες	20
2.10.2	Φάσματα	21
2.10.3	Συναρτήσεις Συσχέτισης	23
2.10.4	Ανωμαλίες, Moduli Spaces, κλπ.	24
II	Περιστρεφόμενες Χορδές στον $AdS_5 \times S^5$	25
3	Εισαγωγή	25
3.1	Κλασικές Μποζονικές Χορδές στον $AdS_5 \times S^5$	26
3.2	Αναγωγή Pohlmeyer	28
3.3	Αναγωγή Neumann-Rosochatius στον $\mathbb{R} \times S^5$	29
4	Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP)	32
4.1	Περιστρεφόμενες Χορδές GKP στον AdS_3	35
4.1.1	Μικρές Χορδές	38
4.1.2	Μεγάλες Χορδές	39
4.1.3	Διαδικότητα Μικρών-Μεγάλων Χορδών	40
4.2	Περιστρεφόμενες Χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$	41
4.2.1	Μικρές Διπλωμένες Χορδές	44
4.2.2	Μεγάλες Διπλωμένες Χορδές	45
4.2.3	Αργές Κυκλικές Χορδές	46
4.2.4	Ταχείες Κυκλικές Χορδές	47
4.2.5	Διαδικότητα Μικρών-Μεγάλων Χορδών	47
4.3	Παλλόμενες Χορδές GKP στον AdS_3	48
4.3.1	Ημικλασική Κβάντωση	49
5	Σχέσεις Διασποράς των Χορδών GKP	54
5.1	Περιστρεφόμενες Χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$	59
5.1.1	Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν	59
5.1.2	Ανώμαλες Διαστάσεις	61

5.1.3	Κυρίαρχοι Όροι	62
5.1.4	Επόμενοι Όροι	64
5.1.5	Μεθεπόμενοι Όροι	66
5.1.6	Ταχείες Κυκλικές Χορδές	68
5.2	Περιστρεφόμενες Χορδές GKP στον AdS_3	69
5.2.1	Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν	69
5.2.2	Ανώμαλες Διαστάσεις	71
5.2.3	Κυρίαρχοι Όροι	73
5.2.4	Επόμενοι Όροι	75
5.2.5	Μεθεπόμενοι Όροι	75
5.3	Αμοιβαιότητα	77
6	Γιγάντια Μαγνόνια και Απλές Ακίδες Απειρού Μεγέθους	80
6.1	Γιγάντιο Μαγνόνιο Hofman-Maldacena (HM)	83
6.2	Απλές Ακίδες Άπειρης Ορμής	85
6.3	Δέσμιες Καταστάσεις & Σκέδαση	87
6.3.1	Σκέδαση	87
6.3.2	Δέσμιες Καταστάσεις	90
7	Γιγάντια Μαγνόνια και Απλές Ακίδες Πεπερασμένου Μεγέθους	92
7.1	Γιγάντιο Μαγνόνιο: Στοιχειώδης Περιοχή	93
7.2	Γιγάντιο Μαγνόνιο: Διπλή Περιοχή	95
7.3	Απλή Ακίδα: Στοιχειώδης Περιοχή	96
7.4	Απλή Ακίδα: Διπλή Περιοχή	98
7.5	Συμμετρίες	100
8	Σχέσεις Διασποράς Γιγάντιων Μαγνωνίων και Απλών Ακίδων	101
8.1	Γιγάντιο Μαγνόνιο: Στοιχειώδης Περιοχή	107
8.1.1	Αντίστροφη Ορμή	108
8.1.2	Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν	108
8.1.3	Σχέση Διασποράς	110
8.2	Γιγάντιο Μαγνόνιο: Διπλή Περιοχή	112
8.3	Απλή Ακίδα: Στοιχειώδης Περιοχή	113
8.4	Απλή Ακίδα: Διπλή Περιοχή	113
9	Περίληψη Μέρους II	114
9.1	Χορδές GKP	114
9.2	Γιγάντια Μαγνόνια & Απλές Ακίδες	116
III	Στοιχεία p-Βρανών & M-Θεωρίας	119
10	Εισαγωγή στις Μεμβράνες	119
10.1	Μποζονικές Μεμβράνες	119
10.1.1	Δράση Dirac-Nambu-Goto	119
10.1.2	Δράση Polyakov	120
10.1.3	Καθορισμός Βαθμίδας	121
10.1.4	Μεμβράνες σε Επίπεδο Χωρόχρονο	122
10.2	Μποζονικές p-Βράνες	123
10.2.1	Αμφιδιαφορίσιμες Απεικονίσεις που Διατηρούν τον Όγκο	124
10.3	Υπερμεμβράνες	124

10.3.1	11-Διάστατη Υπερβαρύτητα	127
10.4	Θεωρία M(ητρών)	127
10.4.1	Κανονικοποιημένες Μεμβράνες με Μήτρες	127
10.4.2	Η Υπόθεση της Θεωρίας των Μητρών	129
10.4.3	Θεωρία Μητρών σε Καμπύλους Χωροχρόνους	130
IV	Περιστρεφόμενες Μεμβράνες	131
11	Εισαγωγή	131
12	Περιστρεφόμενες Μεμβράνες στον $AdS_7 \times S^4$	133
13	Περιστρεφόμενες Μεμβράνες ως Χορδές	134
13.1	Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $AdS_7 \times S^4$	134
13.2	Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $AdS_4 \times S^7$	139
13.3	Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$	139
14	Διαταραχές Μεμβρανών	140
14.1	Περιστρεφόμενες Χορδοειδείς Μεμβράνες	144
14.2	Παλλόμενες Χορδοειδείς Μεμβράνες	145
15	Περίληψη Μέρους IV	149
V	Παραρτήματα	153
A'	Χορδές σε Επίπεδο Χωρόχρονο	153
A'.1	Περιστρεφόμενη Χορδή	153
A'.2	Παλλόμενη Χορδή	154
B'	Δυαδικότητες Μικρών-Μεγάλων Χορδών	156
Γ'	Κώδικας Mathematica	157
Γ'.1	Χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$	157
Γ'.1.1	Μεγάλες Διπλωμένες Χορδές	157
Γ'.1.2	Γρήγορες Διπλωμένες Χορδές	158
Γ'.2	Χορδές GKP στον AdS_3	158
Γ'.3	Γιγάντια Μαγνόνια	160
Γ'.3.1	Γιγάντιο Μαγνόνιο: Στοιχειώδης Περιοχή	160
Γ'.3.2	Γιγάντιο Μαγνόνιο: Διπλή Περιοχή	161
Γ'.4	Απλές Ακίδες	163
Γ'.4.1	Απλή Ακίδα: Στοιχειώδης Περιοχή	163
Γ'.4.2	Απλή Ακίδα: Διπλή Περιοχή	165
Δ'	Συμβολικοί Υπολογισμοί	167
Δ'.1	Μεγάλες και Γρήγορες Χορδές GKP	167
Δ'.2	Γιγάντια Μαγνόνια & Απλές Ακίδες	169
E'	Ελλειπτικά Ολοκληρώματα και Συναρτήσεις Jacobi	173
Γ'	Συνάρτηση W του Lambert	176

Z' Πολυώνυμα Διαμέρισης	179
Z'.1 Πολυώνυμα Bell	179
Z'.2 Πολυώνυμα Δυναμικού	179
Z'.3 Λογαριθμικά Πολυώνυμα	179
H' Εξίσωση Lamé	180

1 Εισαγωγή

Ποια είναι η σπουδαιότερη εξίσωση που γράφτηκε ποτέ; Προφανώς το ερώτημα αυτό έχει πολλές απαντήσεις, όπως δείχνει και μια απλή έρευνα στο διαδίκτυο. Το Πυθαγόρειο θεώρημα, η εξίσωση του Euler, οι εξισώσεις Maxwell, οι εξισώσεις του Einstein, η εξίσωση Schrödinger, το θεώρημα Noether, η εξίσωση Callan-Symanzik και πολλές άλλες. Στις διαλέξεις του για τη δυαδικότητα βαρύτητας/βαθμίδας στο TASI του 2010, ο Joseph Polchinski [5] διάλεξε την εξίσωση του Maldacena

$$\text{AdS} = \text{CFT} \quad (1.1)$$

ως την αγαπημένη του εξίσωση όλων των εποχών. Ακόμη και αν αυτή του η επιλογή φαίνεται υπερβολικά ενθουσιώδης, ένα πράγμα είναι σίγουρο: η αρχική εργασία του Maldacena [6] έχει περισσότερες από 13.000 αναφορές,¹ ενώ σχεδόν 20.000 είναι οι συνολικές αναφορές για τα συνιδρυτικά άρθρα των Gubser, Klebanov, Polyakov [7], του Witten [8] και της πρώιμης ανασκόπησης [9]. Η εξίσωση του Maldacena (1.1), αξίζει μία θέση στο Πάνθεον των σπουδαιότερων εξισώσεων της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής.

Εξίσου εντυπωσιακές είναι και οι συνέπειες της (1.1). Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής είναι η ενοποίηση της κβαντικής μηχανικής και της βαρύτητας σε μία ενιαία θεωρία. Εν γένει, δεν υπάρχει κάποιος *a priori* λόγος για να περιμένουμε ότι μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας μπορεί να περιέχει μια θεωρία βαθμίδας με αναλλοιώτητα κλίμακας (σύμμορφη θεωρία πεδίου) στο σύνορο. Μέρος της ανεπανάληπτης επιτυχίας της δυαδικότητας AdS/CFT οφείλεται στο γεγονός ότι απετέλεσε το πρώτο συγκεκριμένο παράδειγμα μιας δυαδικότητας βαρύτητας/βαθμίδας και της ολογραφικής αρχής, αλλά και μια εξέχουσα περίπτωση δυαδικότητας ισχυρής/ασθενούς σύζευξης στις τέσσερις χωροχρονικές διαστάσεις.

Οι δυαδικότητες βαρύτητας/βαθμίδας μας παρέχουν ένα πολύ ξεχωριστό ενοποιητικό πλαίσιο όλων των θεμελιωδών δυνάμεων της φύσης, θεωρώντας τις θεωρίες βαθμίδας (όπως η ηλεκτροασθενής και η ισχυρή αλληλεπίδραση) ως το *alter ego* της βαρυτικής δύναμης. Με την ολογραφική αρχή, ο κόσμος μας αντιμετωπίζεται ως ένα ολόγραμμα που κωδικοποιεί όλη την πληροφορία ενός εσωτερικού χώρου ("bulk") που έχει περισσότερες διαστάσεις. Οι δυαδικότητες ασθενούς/ισχυρής σύζευξης ταυτοποιούν το όριο ασθενούς σύζευξης μιας θεωρίας (όπου ισχύει η θεωρία διαταραχών) με το όριο ισχυρής σύζευξης (ή μη διαταρακτική περιοχή) μιας άλλης θεωρίας και μας επιτρέπουν να κάνουμε υπολογισμούς σε μια περιοχή η οποία είναι απροσπέλαστη με τις παραδοσιακές μεθόδους. Η πιο δημοφιλής εκδοχή της αντιστοιχίας AdS/CFT,

$$\mathcal{N} = 4, \text{ su}(N_c) \text{ super Yang-Mills θεωρία} = \text{IIB θεωρία υπερχορδών στον } \text{AdS}_5 \times S^5 \quad (1.2)$$

υποθέτει την ισοδυναμία δύο δραστικά διαφορετικών φυσικών θεωριών. Η $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills θεωρία είναι η τελειότερη δυνατή θεωρία βαθμίδας στις τέσσερις χωροχρονικές διαστάσεις με το μέγιστο επιτρεπτό αριθμό υπερσυμμετριών και σύμμορφη συμμετρία, που πρακτικά σημαίνει ότι η θεωρία είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς κλίμακας και πεπερασμένη. Η θεωρία υπερχορδών τύπου IIB στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ είναι από την άλλη μεριά μια βαρυτική θεωρία που διατυπώνεται σε ένα σύνολο δέκα χωροχρονικών διαστάσεων, πέντε από τις οποίες έχουν συμπαγοποιηθεί επί μιας πενταδιάστατης σφαίρας, ενώ οι υπόλοιπες ζουν στον πενταδιάστατο χώρο *anti-de Sitter*.

Η εικασία του Maldacena φαίνεται να προτείνει τη μελέτη ενός ιδανικού κόσμου (της $\mathcal{N} = 4$ SYM) ως μέσο κατανόησης των ιδιοτήτων του πραγματικού (ήτοι της QCD, θεωρίας των ισχυρών αλληλεπιδράσεων). Ωστόσο αποδεικνύεται ότι η δυαδικότητα AdS/CFT είναι πολύ περισσότερο από ένα αφερέες υπόδειγμα εργασίας. Στην περιοχή των υψηλών θερμοκρασιών όπου η υπερσυμμετρία της $\mathcal{N} = 4$ SYM σπάει ρητά, η θεωρία μοιάζει όλο και περισσότερο με το απεγκλωβισμένο πλάσμα της QCD, χωρίς χειραλικό συμπύκνωμα και με αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς κλίμακας. Αυτή η μορφή παγκοσμιότητας

¹Ως το 2015.

αποτελεί τον πυρήνα των δυαδικοτήτων βαρύτητας/βαθμίδας που υποθέτουν ότι η ολογραφικά δυαδική θεωρία της QCD πρέπει να περιγράφεται από μια τροποποιημένη εκδοχή της εικασίας του Maldacena. Υπό αυτήν την έννοια, η δυαδικότητα AdS/CFT (1.2) μπορεί να θεωρείται ως ο «αρμονικός ταλαντωτής» της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής.

Όπως λοιπόν και για τον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή, επιβάλλεται να μελετήσουμε την αντιστοιχία AdS/CFT εξονυχιστικά. Πρώτα απ' όλα, μιας και η αντιστοιχία AdS/CFT βρίσκεται ακόμη στο επίπεδο της εικασίας που αψηφά κάθε λογική προσπάθεια απόδειξης, θα πρέπει να μάθουμε το εύρος της ισχύος της. Πολλές δοκιμές έχουν αναπτυχθεί όλα αυτά τα χρόνια που ελέγχουν το ταίριασμα μεταξύ των συμμετριών, των φασμάτων, των συναρτήσεων συσχέτισης, των ανωμαλιών, κλπ. των δύο εμπλεκόμενων θεωριών. Όλα μοιάζουν να επαληθεύουν την ορθότητα της θεωρίας, τουλάχιστον στο επίπεδο όριο όπου η τάξη της ομάδας βαθμίδας γίνεται πολύ μεγάλη ($N_c \rightarrow \infty$).

Δεύτερον, αν δεχθούμε την ορθότητά της, χρειάζεται να κατανοήσουμε πλήρως τις συνέπειες της αντιστοιχίας AdS/CFT. Με άλλα λόγια θα πρέπει να λύσουμε τη θεωρία. «Λύνουμε» μια θεωρία σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα παρατηρήσιμα μεγέθη της, π.χ. το φάσμα, τις συναρτήσεις συσχέτισης, τα πλάτη σκέδασης, τις αναμενόμενες τιμές των βρόχων Wilson. Ένα πανίσχυρο εργαλείο που έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια της επιλυσιμότητας της αντιστοιχίας AdS/CFT είναι αυτό της ολοκληρωσιμότητας. Σε γενικές γραμμές, μια θεωρία είναι ολοκληρώσιμη όποτε διαθέτει το μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό νόμων διατήρησης που μπορούν να ολοκληρωθούν και η θεωρία να επιλυθεί. Στην περίπτωση της δυαδικότητας AdS_5/CFT_4 , η ολοκληρωσιμότητα έχει αποδειχθεί στο κλασσικό επίπεδο από τους Bena, Polchinski και Roiban [10]. Παρότι καμία απόδειξη κβαντικής ολοκληρωσιμότητας δεν υπάρχει προς το παρόν, η αντιστοιχία AdS_5/CFT_4 (1.2) θεωρείται κβαντικά ολοκληρώσιμη στο επίπεδο όριο ($N_c \rightarrow \infty$), όπου η δυϊκή θεωρία χορδών γίνεται ελεύθερη ($g_s \rightarrow 0$).

Η ολοκληρωσιμότητα επιλύει πλήρως το φασματικό πρόβλημα της επίπεδης αντιστοιχίας AdS_5/CFT_4 , υπό την έννοια ότι παρέχει το πλήρες σύνολο των αλγεβρικών εξισώσεων που καθορίζει το φάσμα. Η ολοκληρωσιμότητα επίσης παρέχει και το σύνολο των εργαλείων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλυθεί το επίπεδο όριο της θεωρίας AdS_5/CFT_4 (υπό την πιο πάνω έννοια, ήτοι τον υπολογισμό όλων των παρατηρήσιμων μεγεθών της). Ωστόσο, η ολοκληρώσιμη προσέγγιση αντιμετωπίζει μια σειρά από περιορισμούς. Συγκεκριμένα, υπάρχουν κάποιες περιοχές της αντιστοιχίας AdS/CFT όπου η λύση του προαναφερθέντος συνόλου αλγεβρικών εξισώσεων γίνεται εξαιρετικά δυσχερής, είτε αναλυτικά είτε υπολογιστικά. Σε τέτοιες περιπτώσεις, πρέπει να καταφύγουμε σε πιο παραδοσιακές μεθόδους για να υπολογίσουμε τα επιθυμητά φάσματα. Αυτές οι μέθοδοι περιλαμβάνουν κλασσικές χορδές και, σε μερικές περιπτώσεις, βράνες.

Πριν προχωρήσουμε στη συζήτηση του ρόλου των κλασσικών χορδών και βρανών στην αντιστοιχία AdS/CFT, ας εξηγήσουμε σύντομα γιατί πιστεύουμε ότι ο αναλυτικός υπολογισμός του επίπεδου φάσματος της αντιστοιχίας AdS/CFT έχει ενδιαφέρον. Πρώτον, μας φαίνεται ότι η ευρύτητα της αντιστοιχίας AdS/CFT περιορίζεται σημαντικά αν δεν γνωρίζουμε την ακριβή αναλυτική μορφή του φάσματός της. Δεύτερον, θα θέλαμε να έχουμε στη διάθεσή μας εργαλεία που μας επιτρέπουν να επιβεβαιώσουμε το ταίριασμα των φασμάτων της AdS/CFT αναλυτικά. Τρίτον, θα θέλαμε να διερευνήσουμε τη δυνατότητα εύρεσης κλειστών εκφράσεων στο φάσμα της αντιστοιχίας AdS/CFT.

Το 2002, οι Gubser, Klebanov και Polyakov (GKP) [11] πρότειναν τη μελέτη κλασσικών χορδών που περιστρέφονται, στροβιλίζονται ή πάλλονται εντός του $AdS_5 \times S^5$ προκειμένου να υπολογίσουν τις τιμές των (ανώμαλων) διαστάσεων κλίμακας ορισμένων αναλλοίωτων σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστών μονού ίχνους της $\mathcal{N} = 4$ SYM, σε ισχυρή σύζευξη. Οι GKP παρατήρησαν ότι η ενέργεια μιας συγκεκριμένης κλειστής διπλωμένης χορδής που περιστρέφεται ως στερεό σώμα εντός του AdS_3 , συμπεριφέρεται όπως ο λογάριθμος του (μεγάλου) σπίν της, συμπεριφορά που θύμιζε τις λογαριθμικές παραβιάσεις της κλίμακας των τελεστών συστροφής (twist operators) της QCD. Έχοντας καταφέρει να αναπαράξουν αυτή τη συμπεριφορά για τις ανώμαλες διαστάσεις κλίμακας των βαθμωτών τελεστών (συστροφής) μονού

ίχνους της $\mathcal{N} = 4$ SYM, οι GKP υπέθεσαν ότι η κλειστή διπλωμένη χορδή που περιστρέφεται στερεά εντός του AdS_3 , είναι δυϊκή των τελεστών συστροφής 2 της $\mathcal{N} = 4$ SYM και παράχει τις ανώμαλες διαστάσεις τους σε ισχυρή σύζευξη.

Το παράδειγμα των GKP ανέδειξε τα οφέλη της μελέτης των κλασσικών χορδών στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT, όπως το γεγονός ότι επιτρέπει τον υπολογισμό του φάσματος της δυϊκής σύμμορφης θεωρίας πεδίου σε ισχυρή σύζευξη (περιοχή όπου η θεωρία διαταραχών τυπικά παύει να ισχύει). Οι κλασσικές χορδές χρησιμοποιούνται επίσης εκτενώς στον υπολογισμό συναρτήσεων συσχέτισης στην αντιστοιχία AdS/CFT, βρόχων Wilson και πλατών σκέδασης μεταξύ γκλουονίων. Επίσης οι ιδιότητες ολοκληρωσιμότητας των κλασσικών και κβαντικών χορδών στην επίπεδη αντιστοιχία AdS/CFT, αποτελούν βασικές ενδείξεις για την ολοκληρωσιμότητα ολόκληρης της θεωρίας. Ένα ενδιαφέρον σχετικό ερώτημα είναι κατά πόσον η μελέτη των κλασσικών μεμβρανών στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT μπορεί να είναι το ίδιο αποτελεσματική με τη μελέτη των κλασσικών χορδών.

Οι κλασσικές σχέσεις διασποράς των χορδών GKP μελετήθηκαν σοβαρά στις εργασίες [12, 3]. Όπως ήδη αναφέραμε, οι χορδές GKP είναι κλειστές χορδές που περιστρέφονται στροβιλίζονται ή πάλλονται εντός των υποπολλαπλοτήτων AdS_3 και $\mathbb{R} \times S^2$ του $\text{AdS}_5 \times S^5$ και είναι δυϊκές προς συγκεκριμένους σύνθετους τελεστές της $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills (SYM) θεωρίας. Οι σχέσεις διασποράς των χορδών GKP δίνουν τις ανώμαλες διαστάσεις των δυϊκών τους τελεστών στη σύμμορφη θεωρία πεδίου σε ισχυρή σύζευξη. Οι χορδές GKP ανήκουν στην κατηγορία των «μεγάλων» χορδών που «βλέπουν» την καμπυλότητα του χωροχρόνου στον οποίο ζουν, σε αντίθεση με τις «μικρές» χορδές που ζουν εντός ενός κατά προσέγγιση επίπεδου χωροχρόνου, η καμπυλότητα του οποίου επηρεάζει μόνο τους επόμενους όρους στις σχέσεις διασποράς τους. Εκτός τούτου, πολύ λίγα αποτελέσματα για τα φάσματα των μεγάλων χορδών έχουν βρεθεί με τη χρήση των μεθόδων της ολοκληρωσιμότητας.

Συνεπώς θα πρέπει να βασιστούμε σε πιο άμεσες μεθόδους προκειμένου να υπολογίσουμε τα ζητούμενα φάσματα. Γενικά, οι εκφράσεις των κλασσικών διατηρούμενων φορτίων της ενέργειας E και του σπίν S /στροφορμής J της χορδής είναι γνωστές σε παραμετρική μορφή συναρτήσεων της γωνιακής τους ταχύτητας ω . Οι συγγραφείς των εργασιών [12, 3] κατάφεραν να αντιστρέψουν τις σειρές που δίνουν τη διατηρούμενη στροφορμή των χορδών συναρτήσεων της γωνιακής τους ταχύτητας και να εκφράσουν την κλασσική ενέργεια των χορδών σαν μια συνάρτηση $E = E(S, J)$, χρησιμοποιώντας μόνο το διατηρούμενο σπίν/στροφορμή. Μόνο σε αυτή τη μορφή μπορούν οι προκύπτουσες σχέσεις διασποράς να φιλοξενήσουν κβαντικές διορθώσεις ή να συγκριθούν με τις αντίστοιχες εκφράσεις σε ασθενή σύζευξη, καμιά από τις οποίες δεν είναι γνωστή σε παραμετρική μορφή. Το αποτέλεσμα είναι ότι οι διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους στα φάσματα των δυϊκών τελεστών της σύμμορφης θεωρίας πεδίου σε ισχυρή σύζευξη μπορούν να εκφραστούν συναρτήσεων της συνάρτησης W του Lambert που ορίζεται ως εξής:

$$W(z) e^{W(z)} = z \quad (1.3)$$

και αποτελεί γενίκευση της λογαριθμικής συνάρτησης. Με τη συνάρτηση W του Lambert, υπολογίστηκαν όλοι οι κυρίαρχοι, επόμενοι και μεθεπόμενοι όροι στις κλασσικές σχέσεις διασποράς των «μεγάλων» περιστρεφόμενων χορδών των GKP εντός του AdS_3 και του $\mathbb{R} \times S^2$. Στην εργασία [13], η μέθοδος της συνάρτησης W εφαρμόστηκε στην περίπτωση της αντιστοιχίας $\text{AdS}_4/\text{CFT}_3$. Επιπλέον, οι διατηρούμενες ενέργειες και σπίν/στροφορμές των μεγάλων χορδών GKP βρέθηκαν να ικανοποιούν ένα αριθμό από δυαδικότητες μικρών-μεγάλων χορδών που συνδέουν τις τιμές των διατηρούμενων φορτίων τους στα όρια των «μικρών» και των «μεγάλων» χορδών. Αυτές οι σχέσεις είναι πολύ ενδιαφέρουσες, διότι οι κβαντικές τους γενικεύσεις θα επιτρέψουν τη χρησιμοποίηση των πλούσιων αποτελεσμάτων από την ολοκληρωσιμότητα για τις μικρές χορδές, στη περιοχή των μεγάλων χορδών.

Στην εργασία [2], η μέθοδος της συνάρτησης W αναβαθμίστηκε στην περίπτωση των γιγάντιων μαγνόνων (giant magnons) και των απλών ακίδων (single spikes). Τα γιγάντια μαγνόνια και οι απλές ακίδες είναι ανοικτές χορδές ενός σπίν που περιστρέφονται εντός του $\mathbb{R} \times S^2 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$ και είναι δυϊκές στους τελεστές ενός μαγνονίου και ενός σπινονίου (spinon) της κεντρικά επεκταμένης $\mathcal{N} = 4$ SYM. Τα

γιγάντια μαγνόνια έχουν κεντρικό ρόλο στην αντιστοιχία AdS/CFT, καθώς αποτελούν τις θεμελιώδεις δομικές μονάδες από τις οποίες αποτελείται κάθε κατάσταση στη θεωρία. Αυτές είναι ξανά «μεγάλες» χορδές, για τις οποίες είναι γνωστά πολύ λίγα αποτελέσματα από την ολοκληρωσιμότητα. Εκτός της διατηρούμενης ενέργειας E και της στροφορμής J , τα γιγάντια μαγνόνια και οι απλές ακίδες έχουν και μια τρίτη διατηρούμενη ποσότητα, τη γραμμική ορμή τους p . Επιπλέον, εξαρτώνται και από μια δεύτερη παράμετρο εκτός της γωνιακής τους ταχύτητας ω , ήτοι από τη γραμμική τους ταχύτητα v . Η απαλοιφή των παραμέτρων v και ω από την έκφραση της ενέργειας E , προς όφελος των διατηρούμενων ορμών J και p αποτελεί μια σημαντική τεχνική πρόκληση, καθώς τώρα πρέπει να λυθεί ένα πολύ πιο δύσκολο 3×3 σύστημα αντί ενός συστήματος 2×2 . Οι κυρίαρχοι, επόμενοι και μεθεπόμενοι όροι στις κλασσικές σχέσεις διασποράς τόσο των γιγάντιων μαγνονίων όσο και των απλών ακίδων υπολογίστηκαν στην εργασία [2].

Πέραν του γνωστού παραδείγματος της αντιστοιχίας AdS₅/CFT₄, όπου το εσωτερικό είναι 10-διάστατο και φιλοξενεί μια θεωρία χορδών τύπου IIB, είναι γνωστός και ένας αριθμός δυαδικοτήτων AdS/CFT που διατυπώνονται σε ένα 11-διάστατο εσωτερικό και φιλοξενούν μια θεωρία-M. Όπως ακριβώς η $D = 10$ είναι η κρίσιμη διάσταση του χωροχρόνου για τις χορδές, για τις μεμβράνες η αντίστοιχη διάσταση αυξάνεται σε $D = 11$. Αυτό συνεπάγεται ότι θα πρέπει ενδεχομένως να αντικαταστήσουμε τις χορδές με μεμβράνες, καθώς μεταβαίνουμε από τη μελέτη της 10-διάστατης θεωρίας χορδών στην 11-διάστατη θεωρία-M. Η πιο πάνω διαδικασία για τον υπολογισμό του φάσματος της δυϊκής σύμμορφης θεωρίας πεδίου με τη βοήθεια χορδών, θα πρέπει να μπορεί να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση των μεμβρανών. Συνεπώς αναμένουμε ότι η ενέργεια μιας μεμβράνης που ζει στο εσωτερικό ενός 11-διάστατου χωροχρόνου της αντιστοιχίας AdS/CFT, ισούται με τις διαστάσεις κλίμακας ενός κατάλληλου τελεστή της δυϊκής θεωρίας βαθμίδας.

Αποδεικνύεται ωστόσο, ότι οι βράνες είναι κάπως «ιδιόρρυθμα» αντικείμενα. Ο λόγος είναι ότι ταλαιπωρούνται γενικά από προβλήματα όπως αστάθειες, ανωμαλίες, μη επαναακανονικοποιησιμότητα, μη ολοκληρωσιμότητα, είναι δύσκολο να κβαντωθούν ή να αλληλεπιδράσουν και δεν έχουν θεωρία διαταραχών. Όλα αυτά δυσχεραίνουν σημαντικά τη μελέτη τους. Εντούτοις, φαίνεται να υπάρχουν και περιπτώσεις όπου πολλά από αυτά τα εμπόδια να μπορούν να ξεπεραστούν, όπως η θεωρία μητρών και η θεώρηση των βρανών εντός των χωροχρόνων AdS. Η τελευταία περίπτωση είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα από την άποψη της αντιστοιχίας AdS/CFT. Όπως ήδη αναφέραμε, ένα ενδιαφέρον ανοικτό πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός του ρόλου των κλασσικών μεμβρανών στην αντιστοιχία AdS/CFT καθώς επίσης και κατά πόσο η τεχνολογία που έχει αναπτυχθεί στην περίπτωση των κλασσικών χορδών, μπορεί να εφαρμοσθεί στην περίπτωση των βρανών.

Στην εργασία [4] προτάθηκε μια νέα κατηγορία μεμβρανών στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT, οι «χορδοειδείς μεμβράνες». Αυτές είναι μεμβράνες που ζουν εντός των χωροχρόνων AdS_{4/7} $\times$ S^{7/4} και AdS₄ $\times$ S⁷/ $\mathbb{Z}_k$ και έχουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης, συνδέσμους και διατηρούμενα φορτία με χορδές που ζουν σε ένα κατάλληλο υποσύνολο του AdS₅. Οι χορδοειδείς μεμβράνες μπορούν να κατασκευαστούν οποτεδήποτε ο χωρόχρονος περιέχει μία συμπαγή υποπολλαπλότητα, ταυτοποιώντας μία από τις συμπαγείς συντεταγμένες της υποπολλαπλότητας με μία από τις συντεταγμένες κοσμικού όγκου της μεμβράνης. Δύο ενδιαφέροντα παραδείγματα των χορδοειδών μεμβρανών είναι αυτά που αναπαράγουν την παλλόμενη και την περιστρεφόμενη χορδή των GKP εντός του AdS. Στη γραμμική προσέγγιση, το φάσμα των εγκάρσιων διαταραχών των χορδοειδών μεμβρανών που αναπαράγουν την περιστρεφόμενη και την παλλόμενη χορδή των GKP, έχει τη δομή πολλαπλών ζωνών/χασμάτων που διέπονται από την εξίσωση Lamé. Στον αντίποδα, οι διεγέρσεις μιας χορδής αναπαρίστανται από μία δομή μονής ζώνης/χάσματος Lamé. Τα παραπάνω ευρήματα, επιβεβαιώνουν την εικόνα που έχουμε για τις μεμβράνες ως συλλογικές διεγέρσεις κάποιων από τις χορδοειδείς τους συνιστώσες.

Οι χορδοειδείς μεμβράνες κληρονομούν όλα τα κλασσικά χαρακτηριστικά των χορδών που αναπαράγουν, όπως οι σχέσεις διασποράς τους και η κλασσική τους ολοκληρωσιμότητα. Με δεδομένο ότι η 11-διάστατη θεωρία-M στους χώρους AdS_{4/7} $\times$ S^{7/4} είναι δυϊκή στην τριδιάστατη $\mathcal{N} = 8$ υπερσύμμορφη

θεωρία πεδίου και την εξαδιάστατη $A_{N_c-1}(2,0)$ υπερσύμμορφη θεωρία πεδίου αντίστοιχα, οι δύο αυτές υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου αναμένονται να περιέχουν τελεστές που είναι δυϊκοί στις αντίστοιχες χορδοειδείς μεμβράνες. Οι διαστάσεις κλίμακας των τελεστών της δυϊκής υπερσύμμορφης θεωρίας πεδίου αναμένεται να είναι ίσες με τις ενέργειες των χορδοειδών μεμβρανών. Η εικόνα αυτή μοιάζει να επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι όλες οι πιο πάνω υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου και η $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία, περιέχουν κοινούς ολοκληρώσιμους τομείς.

1.1 Επισκόπηση

Η παρούσα διδακτορική διατριβή περιλαμβάνει τέσσερα μέρη. Το μέρος I αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή στην αντιστοιχία AdS/CFT. Στόχος μας είναι να δώσουμε μια σύντομη επισκόπηση της αντιστοιχίας αλλά και να εισάγουμε όλες τις έννοιες, την ορολογία και τους ορισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα.

Στο μέρος II ασχολούμαστε με κλασσικές χορδές που περιστρέφονται εντός του $\text{AdS}_5 \times S^5$. Σύμφωνα με την αντιστοιχία AdS/CFT, οι χορδές εντός του $\text{AdS}_5 \times S^5$ είναι δυϊκές προς ορισμένους αναλλοίωτους σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστές της $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills θεωρίας και παρέχουν τις (ανώμαλες) διαστάσεις κλίμακά τους σε ισχυρή σύζευξη. Σκοπός μας είναι να διερευνήσουμε το κλασσικό φάσμα αυτών των εκτεταμένων αντικειμένων και να εξαγάγουμε κλειστές εκφράσεις για τις σχέσεις διασποράς τους. Το μέρος II ουσιαστικά ακολουθεί τις εργασίες [2] και [3] και διαιρείται σε δύο κύρια μέρη. Το πρώτο μέρος πραγματεύεται τις αποκαλούμενες χορδές των Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP), ενώ στο δεύτερο μέρος μελετώνται τα γιγάντια μαγνόνια (giant magnons) και οι «απλές ακίδες» (single spikes).

Μέρος I	Μέρος II	Μέρος III	Μέρος IV
2. Αντιστοιχία AdS/CFT	3. Κλασσικές Χορδές στον $\text{AdS}_5 \times S^5$	10. Εισαγωγή στις Μembrάνες	11. Εισαγωγή
	4. Χορδές GKP		12. Μembrάνες στον $\text{AdS}_7 \times S_4$
	5. Σχέσεις Διασποράς των Χορδών GKP		13. «Χορδοειδείς» Μembrάνες
	6. Γιγάντια Μαγνόνια & Απλές Ακίδες		14. Διαταραχές
	7. Μαγνόνια & Ακίδες Πεπερασμένου Μεγέθους		15. Περίληψη
	8. Σχέσεις Διασποράς Μαγνονίων & Ακίδων		
	9. Περίληψη		

Στο μέρος III αλλάζουμε κλίμα και καταπιανόμαστε με τις p-βράνες και την θεωρία-M. Συζητάμε τις πιο δημοφιλείς δράσεις για τις p-βράνες και τα πιο γνωστά μοντέλα μητρών τους.

Στο μέρος IV μελετάμε ορισμένες κλασσικές μεμβράνες που περιστρέφονται εντός χωροχρόνων όπως ο $\text{AdS}_7 \times S^4$ ή ο $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ και συμπεριφέρονται ως χορδές. Ακολουθώντας την ορολογία της εργασίας [4], οι μεμβράνες αυτές αποκαλούνται «χορδοειδείς» και μπορεί ναδειχθεί ότι είναι κλασσικά ισοδύναμες με κλασσικές περιστρεφόμενες χορδές. Ωστόσο η ισοδυναμία αυτή δεν μπορεί να επεκταθεί και σε ανώτερες τάξεις στη θεωρία διαταραχών, όπως αποδεικνύουμε.

Μέρος I

Εισαγωγή στην Αντιστοιχία AdS/CFT

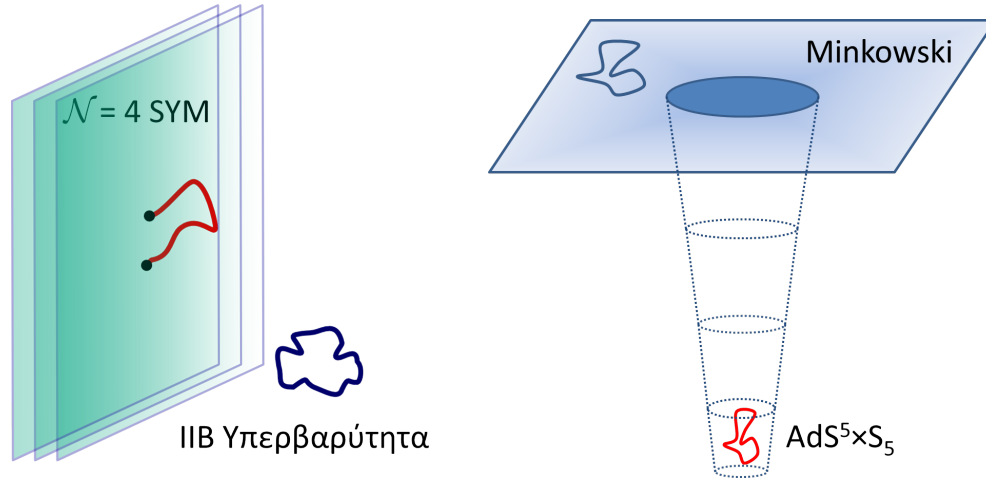
2 Αντιστοιχία AdS/CFT

Η αντιστοιχία AdS/CFT [6, 7, 8] είναι η πρώτη ρητή υλοποίηση της δυαδικότητας βαθμίδας/βαρύτητας και της ολογραφική αρχής, αλλά και το πρώτο συγκεκριμένο παράδειγμα μιας θεωρίας χορδών που ανάγεται σε θεωρία βαθμίδας στα μεγάλα N_c . Ως ασθενής/ισχυρή δυαδικότητα, είναι επίσης και ένα υποδειγματικό τετραδιάστατο ανάλογο της δυαδικότητας του Coleman.² Διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathcal{N} = 4, \text{ su}(N_c) \text{ super Yang-Mills θεωρία} = \text{IIB θεωρία υπερχορδών στον } \text{AdS}_5 \times S^5 \quad (2.1)$$

Ωραίες εισαγωγές και επισκοπήσεις της αντιστοιχίας AdS/CFT, από διαφορετικές οπτικές γωνίες και απόψεις, μπορούν να βρεθούν στα [9, 14, 15, 16, 17].

Θα παρουσιάσουμε τώρα ένα θεωρητικό επιχείρημα που δικαιολογεί την εικασία $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$. Θα λάβουμε το όριο χαμηλής ενέργειας δύο διαφορετικών εκδοχών ενός συστήματος που αποτελείται από N_c συμπίπτουσες D3-βράνες, που είναι γνωστές ως «περιγραφή ανοικτής χορδής» και «περιγραφή κλειστής χορδής». Από την πρώτη θα αναδυθεί η $\mathcal{N} = 4, \text{ su}(N_c)$ super Yang-Mills (SYM) θεωρία, ενώ από τη δεύτερη η IIB θεωρία χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$. Δεδομένου ότι και οι δύο θεωρίες περιγράφουν το ίδιο σύστημα από D3-βράνες, αναμένουμε να ταυτίζονται και η (2.1) να ισχύει.



2.1 Περιγραφή Ανοικτής Χορδής

Ας θεωρήσουμε τώρα N_c συμπίπτουσες D3-βράνες στην θεωρία χορδών τύπου IIB. Στην αποκαλούμενη περιγραφή ανοικτής χορδής, το σύστημα περιλαμβάνει ανοικτές χορδές με απολήξεις στις $(3+1)$ -διάστατες βράνες, κλειστές χορδές που διαδίδονται στον 10-διάστατο χωρόχρονο, καθώς και τις αλληλεπιδράσεις τους:

$$S = S_{\text{branes}} + S_{\text{bulk}} + S_{\text{interactions}}. \quad (2.2)$$

S_{branes} είναι η δράση της $\mathcal{N} = 4, \text{ su}(N_c)$ SYM θεωρίας στον επίπεδο χωρόχρονο των $3+1$ διαστάσεων, συμπεριλαμβανομένων και των διορθώσεων α' , ενώ S_{bulk} είναι η δράση της IIB υπερβαρύτητας σε 10 επίπεδες διαστάσεις, συν τις διορθώσεις α' . Όπως αποδεικνύεται, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των χορδών μπορεί να αγνοηθούν σε χαμηλές ενέργειες (δήλωση στην πραγματικότητα ισοδύναμη με το να πει κανείς

²Η εργασία του Maldacena φαίνεται επίσης ότι σπάει και το παγκόσμιο ρεκόρ αναφορών. Τη στιγμή που γράφονταν αυτή η διατριβή είχε ξεπεράσει κατά πολύ τις 13.000...

ότι η βαρύτητα είναι ελεύθερη στο IR), έτσι ώστε όλοι οι τρόποι ταλάντωσης των χορδών αποσυνδέονται ο ένας από τον άλλον και η δράση (2.2) ανάγεται στην περιγραφή χαμηλής ενέργειας μη αλληλεπιδρώντων ανοικτών και κλειστών χορδών:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Περιγραφή ανοικτής χορδής} \\ \text{Όριο μικρής ενέργειας} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{N} = 4, \mathfrak{su}(N_c) \text{ SYM} + \text{ελεύθερη IIB υπερβαρύτητα.} \quad (2.3)$$

2.2 Περιγραφή Κλειστής Χορδής

Στην περιγραφή κλειστής χορδής, οι N_c D3-βράνες θεωρούνται ως καθετήρες (probes) που τροφοδοτούν τα πεδία εντός του εσωτερικού:

$$ds^2 = H^{-1/2} (-dt^2 + d\mathbf{x}_3^2) + H^{1/2} (dz^2 + z^2 d\Omega_5^2), \quad H(z) \equiv 1 + \left(\frac{\ell}{z}\right)^4, \quad \ell^4 = 4\pi g_s N_c \ell_s^4. \quad (2.4)$$

Μακριά από ορίζοντα ($z \rightarrow \infty$), η μετρική (2.4) ανάγεται στο 10-διάστατο χωροχρόνο Minkowski. Πολύ κοντά στον ορίζοντα ($z \rightarrow 0$), η μετρική (2.4) ταυτίζεται με τη μετρική του $\text{AdS}_5 \times S^5$:

$$ds^2 = \frac{z^2}{\ell^2} (-dt^2 + d\mathbf{x}_3^2) + \frac{\ell^2}{z^2} (dz^2 + z^2 d\Omega_5^2) = \left\{ \frac{z^2}{\ell^2} (-dt^2 + d\mathbf{x}_3^2) + \frac{\ell^2}{z^2} dz^2 \right\} + \ell^2 d\Omega_5^2,$$

στις λεγόμενες οροσφαιρικές/Poincaré συντεταγμένες. Στο όριο χαμηλής ενέργειας, διαπιστώνουμε ότι οι διεγέρσεις που ζουν μακριά από τον ορίζοντα αποσυνδέονται από εκείνες που βρίσκονται στην περιοχή κοντά ορίζοντα και το σύστημα ανάγεται πάλι σε άθροισμα δύο ξεχωριστών συστημάτων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Περιγραφή κλειστής χορδής} \\ \text{Όριο μικρής ενέργειας} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{IIB θεωρία υπερχορδών στον } \text{AdS}_5 \times S^5 \\ + \\ \text{ελεύθερη IIB υπερβαρύτητα.} \end{array} \quad (2.5)$$

Οι (2.3) και (2.5) είναι δύο περιγραφές του ίδιου του συστήματος των N_c συμπιπτουσών D3-βρανών και ως εκ τούτου οι δράσεις τους θα πρέπει να συμπίπτουν. Εφόσον η ελεύθερη IIB υπερβαρύτητα αποτελεί κοινό συστατικό και των δύο ισοδύναμων περιγραφών χαμηλής ενέργειας (2.3) και (2.5), τα υπόλοιπα συστατικά πρέπει να ταυτίζονται, δηλαδή

$$\mathcal{N} = 4, \mathfrak{su}(N_c) \text{ SYM θεωρία} = \text{IIB θεωρία υπερχορδών στον } \text{AdS}_5 \times S^5.$$

Στα επόμενα θα εξετάσουμε εν συντομία τα δύο βασικά συστατικά στοιχεία της αντιστοιχίας AdS/CFT , ήτοι την $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία και την IIB θεωρία χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$.

2.3 $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM)

Η θεωρία $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills (SYM) σε $d = 4$ χωροχρονικές διαστάσεις ανακαλύφθηκε το 1977 από τους Brink, Schwarz και Scherk και τους Gliozzi, Scherk και Olive [18]. Είναι μια θεωρία που έχει το μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό από υπερσυμμετρίες στις $d = 4$ διαστάσεις. Η πιο σημαντική ιδιότητά της είναι ότι είναι χβαντικά σύμμορφα αναλλοίωτη.

Η δυνατότητα μηδενισμού της βήτα συνάρτησης στον ένα βρόχο για τις $\mathfrak{su}(N_c)$ υπερσυμμετρικές θεωρίες που περιέχουν τρεις πολλαπλές ύλης (όπως είναι και η $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία), διερευνήθηκε για πρώτη φορά το 1974 (πριν από την ανακάλυψη της $\mathcal{N} = 4$ SYM) από τους Ferrara και Zumino [19]. Για την $\mathcal{N} = 4$ SYM ο μηδενισμός της βήτα συνάρτησης έχει επιβεβαιωθεί μέχρι τους τέσσερις βρόχους στη θεωρία διαταραχών [20]. Η επέκταση σε όλους τους βρόχους απεδείχθη είτε από το μηδενισμό του αξονικού ρεύματος [21], είτε πηγαίνοντας στο σύστημα αναφοράς κώνου φωτός του υπερχώρου [22], είτε διατυπώνοντας την $\mathcal{N} = 4$ SYM ως προς τον $\mathcal{N} = 2$ υπερχώρο [23].

Από διαταρακτικά πεπερασμένη, η θεωρία $\mathcal{N} = 4$ SYM αναβαθμίσθηκε σε μη-διαταρακτικά πεπερασμένη στην εργασία [24]. Ως εκ τούτου, η θεωρία είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς κλίμακας. Για να αποδεχθεί η υπερσύμμορφη αναλλοιώτητα από την αναλλοίωτητα σε μετασχηματισμούς κλίμακας, είναι απαραίτητα μερικά ακόμα βήματα και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη εργασία [25] για μια πιο ολοκληρωμένη συζήτηση.

Υπάρχουν διάφορες ισοδύναμες διατυπώσεις της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Σε μία από αυτές, η Λαγκρανζιανή πυκνότητα μπορεί να ληφθεί από τη διαστατική αναγωγή (dimensional reduction) της $\mathcal{N} = 1$ SYM, από τις $d = 10$ στις $d = 4$ διαστάσεις:

$$\mathcal{L}_{\text{SYM}} = -\frac{2}{g_{YM}^2} \text{Tr} \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{D}_\mu \phi_i \mathcal{D}^\mu \phi_i - \frac{1}{4} [\phi_i, \phi_j]^2 + \bar{\psi}_a \not{D} \psi_a - \frac{i}{2} \sigma_i^{ab} \psi_a [\phi_i, \psi_b] - \frac{i}{2} \sigma_i^{ab} \bar{\psi}_a [\phi_i, \bar{\psi}_b] \right], \quad (2.6)$$

όπου οι ορισμοί των δεικτών και των πεδίων είναι οι ακόλουθοι (T^a είναι οι γεννήτορες της ομάδας $\mathfrak{su}(N_c)$, όλοι στην προσαρτημένη αναπαράσταση):

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv A_\mu^a T^a, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \\ \phi_i &\equiv \phi_i^a T^a, \quad \mathcal{D}_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab} \partial_\mu - i\epsilon^{abc} A_\mu^c, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad a, b, c = 1, 2, \dots, N_c^2 - 1 \\ \psi_{a,\alpha} &\equiv \psi_{a,\alpha}^a T^a, \quad \bar{\psi}_{a,\dot{\alpha}} \equiv \bar{\psi}_{a,\dot{\alpha}}^a T^a, \quad a, b = 1, 2, 3, 4, \quad \alpha, \dot{\alpha} = 1, 2 \\ \not{D} &\equiv \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu, \quad (\sigma^\mu, \sigma^i) \equiv \text{προβολές των 10d πινάκων Dirac στις 4d \& 6d αντίστοιχα.} \end{aligned}$$

Οι διαστάσεις κλίμακας των πεδίων που εμφανίζονται στη Λαγκρανζιανή της $\mathcal{N} = 4$ SYM είναι:

$$[F_{\mu\nu}] = 2, \quad [A_\mu] = [\mathcal{D}_\mu] = [\phi_i] = 1, \quad [\psi_a] = \frac{3}{2}. \quad (2.7)$$

Είναι σύνηθες να συνδυάζει κανείς τα έξι πραγματικά βαθμωτά πεδία ϕ_i σε τρία μιγαδικά βαθμωτά ως εξής:

$$\mathcal{X} \equiv \phi_1 + i\phi_2, \quad \mathcal{Y} \equiv \phi_3 + i\phi_4, \quad \mathcal{Z} \equiv \phi_5 + i\phi_6. \quad (2.8)$$

Ας ορίσουμε ακόμη και τις παραγώγους στον κώνο φωτός:

$$\mathcal{D}_+ \equiv \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_3, \quad \mathcal{D}_- \equiv \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2. \quad (2.9)$$

Για περισσότερες πληροφορίες, συνιστώνται οι εργασίες των Sohnius και Kovacs [26].

2.4 IIB Θεωρία Χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$

Η δράση της IIB θεωρίας υπερχορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1998 από τους Metsaev και Tseytlin [27]. Δίδεται από τη δράση της υπερχορδής Green-Schwarz στον $\text{AdS}_5 \times S^5$, η οποία είναι ένα μη γραμμικό σίγμα μοντέλο (NLSM) στο σύμπλοκο (coset) χώρο:

$$\frac{F}{G} = \frac{\mathfrak{psu}(2, 2|4)}{\mathfrak{so}(4, 1) \times \mathfrak{so}(5)} = \frac{\mathfrak{psu}(2, 2|4)}{\mathfrak{sp}(2, 2) \times \mathfrak{sp}(4)}. \quad (2.10)$$

Ας ξεκινήσουμε από την υπεράλγεβρα $\mathfrak{su}(2, 2|4)$, η οποία παράγεται από τους 8×8 πίνακες $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_1 & \mathbb{F}_1 \\ \hline \mathbb{F}_2 & \mathbb{B}_2 \end{array} \right). \quad (2.11)$$

Οι 4×4 πίνακες $\mathbb{B}_{1,2}$ και $\mathbb{F}_{1,2}$ είναι αντίστοιχα μποζονικοί και φερμιονικοί. Το υπερίχνος του πίνακα $\mathbb{M}$ μηδενίζεται:

$$\text{Str} \mathbb{M} \equiv \text{Tr} \mathbb{B}_1 - \text{Tr} \mathbb{B}_2 = 0. \quad (2.12)$$

Η $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ λαμβάνεται ως η άλγεβρα πηλίκο της $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ ως προς το μοναδιαίο στοιχείο. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες, η Λαγκρανζιανή της IIB θεωρίας υπερχορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$\mathcal{L}_{\text{string}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \left[\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \text{Str} \left(A_a^{(2)} A_b^{(2)} \right) + \kappa \epsilon^{ab} \text{Str} \left(A_a^{(1)} A_b^{(3)} \right) \right], \quad (2.13)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι ο κινητικός και ο δεύτερος είναι ένας όρος Wess-Zumino, που πολλαπλασιάζεται με τον πραγματικό αριθμό κ έτσι ώστε το $\mathcal{L}_{\text{string}}$ να είναι πραγματικό. Χωρίζουμε τα στοιχεία $\mathfrak{g}$ της υπερομάδας $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ σε ένα μποζονικό και ένα φερμιονικό μέρος ως ακολούθως:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_f \oplus \mathfrak{g}_b. \quad (2.14)$$

Τότε το A ορίζεται ως εξής:

$$A_a = \sum_{i=0}^3 A_a^{(i)} \equiv -\mathfrak{g}^{-1} \partial_a \mathfrak{g} = -\mathfrak{g}_b^{-1} \mathfrak{g}_f^{-1} (\partial_a \mathfrak{g}_f) \mathfrak{g}_b - \mathfrak{g}_b^{-1} \partial_a \mathfrak{g}_b. \quad (2.15)$$

Ο διαχωρισμός A στα επιμέρους $A^{(i)}$ καθίσταται δυνατός λόγω της λεγόμενης $\mathbb{Z}_4$ διαβάθμισης (grading) της $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$. Όπως αποδεικνύεται, μπορούμε να γράψουμε την (2.13) ως εξής:

$$\mathcal{L}_{\text{string}} = -\frac{1}{16\pi\alpha'} \text{Str} \left[\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} (\mathcal{B}_a + \mathcal{G} \mathcal{B}_a \mathcal{G}^{-1} + \partial_a \mathcal{G} \mathcal{G}^{-1}) (\mathcal{B}_b + \mathcal{G} \mathcal{B}_b \mathcal{G}^{-1} + \partial_b \mathcal{G} \mathcal{G}^{-1}) - \right. \quad (2.16)$$

$$\left. -2i\kappa \epsilon^{ab} \mathcal{F}_a \mathcal{G} \mathcal{F}_b^{st} \mathcal{G}^{-1} \right], \quad (2.17)$$

όπου $\mathcal{B}$ και $\mathcal{F}$ είναι αντίστοιχα ο άρτιος $(0, 2)$ και ο περιττός $(1, 3)$ φερμιονικός παράγοντας του $\mathfrak{g}_f^{-1} \partial_a \mathfrak{g}_f$. Το $\mathcal{G}$ δίδεται από

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} i\mathcal{G}_{\text{AdS}} & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_S \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g}_f^{-1} \partial_a \mathfrak{g}_f \equiv \mathcal{B}_a + \mathcal{F}_a \quad (2.18)$$

με

$$\mathcal{G}_{\text{AdS}} = \begin{pmatrix} 0 & -Y_{05} & Y_{12}^* & Y_{34}^* \\ Y_{05} & 0 & -Y_{34} & Y_{12} \\ -Y_{12}^* & Y_{34} & 0 & -Y_{05}^* \\ -Y_{34}^* & -Y_{12} & Y_{05}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_S = \begin{pmatrix} 0 & -X_{56} & -iX_{12}^* & -iX_{34}^* \\ X_{56} & 0 & iX_{34} & -iX_{12} \\ iX_{12}^* & -iX_{34} & 0 & -X_{56}^* \\ iX_{34}^* & iX_{12} & iX_{56}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

ενώ οι anti-de Sitter και οι σφαιρικές συντεταγμένες συνδυάζονται σε ζεύγη ως εξής

$$\begin{aligned} Y_{05} &= Y_0 + iY_5 & X_{12} &= X_1 + iX_2 \\ Y_{12} &= Y_1 + iY_2 & X_{34} &= X_3 + iX_4 \\ Y_{34} &= Y_3 + iY_4 & X_{56} &= X_5 + iX_6. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Το αποτέλεσμα είναι ότι το μποζονικό μέρος του (2.17) ($B = F = 0$) δίδεται από τη δράση Polyakov για τις χορδές:

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a \mathbf{X}^m \partial_b \mathbf{X}^n G_{mn}(\mathbf{X}), \quad (2.21)$$

όπου $\mathbf{X}_m$ και G_{mn} είναι οι συντεταγμένες του $\text{AdS}_5 \times S^5$ και ο μετρικός τανυστής αντίστοιχα. Το κ -καθορισμένο φερμιονικό μέρος είναι

$$S_F = -\frac{i}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \left(\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon^{ab} s_{\alpha\beta} \right) \bar{\theta}^\alpha \rho_a \mathcal{D}_b \theta^\beta + O(\theta^4), \quad (2.22)$$

όπου θ είναι σπίνορες Majorana-Weyl και

$$\begin{aligned}\rho_a &\equiv \Gamma_\mu e_m^\mu \partial_a \mathbf{X}^m, \quad G_{mn} = e_m^\mu e_n^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad a, b = 0, 1, \quad m, n = 0, 1, \dots, 9 \\ s_{\alpha\beta} &\equiv \text{diag}(1, -1), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, 9 \\ \mathcal{D}_m &\equiv \partial_m + \frac{1}{4} \omega_m^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{8 \cdot 5!} \Gamma^{m_1 \dots m_5} \Gamma_m F_{m_1 \dots m_5}, \quad \mathcal{D}_a \equiv \text{προβολή του } \mathcal{D}_m \\ \Gamma_\mu &= e_\mu^m \Gamma_m, \quad (10\text{d πίνακες Dirac}).\end{aligned}$$

e_m^μ είναι το zehnbein, $\eta_{\mu\nu}$ είναι η 10d μετρική Lorentz, $\omega_m^{\mu\nu}$ είναι η συνοχή Lorentz και $F_{m_1 \dots m_5}$ είναι η 5-μορφή του πεδίου Ramond-Ramond (RR). Περισσότερα μπορείτε να βρείτε στην ανασκόπηση [28].

2.5 Ταίριασμα Παραμέτρων

Όταν δύο θεωρίες είναι ίσες, οι θεμελιώδεις παράμετροί τους αναμένεται να είναι σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία. Λόγω της αντιστοιχίας AdS/CFT, αυτό πρέπει να συμβαίνει στην περίπτωση της θεωρίας $\mathcal{N} = 4, \mathfrak{su}(N_c)$ SYM και της IIB θεωρίας χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$. Η πρώτη εξαρτάται από δύο βασικές παραμέτρους, την τάξη (rank) της ομάδας βαθμίδας/αριθμό χρωμάτων και τη σταθερά σύζευξης του 't Hooft:

$$N_c, \quad \lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c. \quad (2.23)$$

Από την πλευρά της θεωρίας χορδών, οι βασικές παράμετροι είναι οι ακτίνες του AdS_5 και της 5-σφαίρας, το θεμελιώδες μήκος χορδής/κλίση Regge και η 10-διάστατη σταθερά Newton/μήκος Planck:

$$\ell = R, \quad \ell_s^2 = \alpha', \quad G_{10} = \ell_p^8 = \ell_s^8 g_s^2. \quad (2.24)$$

Η αντιστοιχία AdS/CFT συνδέει τις θεμελιώδεις παραμέτρους των δύο θεωριών ως εξής:

Ταίριασμα παραμέτρων AdS/CFT: $\left(\frac{\ell_p}{\ell}\right)^4 = \frac{1}{4\pi N_c}, \quad \left(\frac{\ell_s}{\ell}\right)^4 = \frac{1}{\lambda}.$

(2.25)

Έχουμε επίσης, για τις σταθερές σύζευξης:

$$g_{\text{YM}}^2 = 4\pi g_s. \quad (2.26)$$

Υπάρχουν δύο ενδιαφέροντα όρια που συνήθως συναντά κάποιος όταν ασχολείται με την αντιστοιχία AdS/CFT. Το πρώτο είναι το όριο ισχυρής σύζευξης στο οποίο, σύμφωνα με την (2.25), το θεμελιώδες μήκος της χορδής τείνει στο μηδέν και οι χορδές είναι ουσιαστικά σημειακές:³

$$\lambda \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad \ell_s \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

Το δεύτερο ενδιαφέρον όριο είναι το όριο των μεγάλων N_c /επίπεδο/όριο 't Hooft, το οποίο, από την (2.25), αντιστοιχεί σε ελεύθερες χορδές:

$$N_c \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad g_s \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Συνδυάζοντας τα δύο όρια (2.28)–(2.29), οδηγούμαστε στη λεγόμενη προσέγγιση της κλασικής (υ-πέρ)βαρύτητας:

Προσέγγιση κλασικής υπερβαρύτητας: $(\lambda, N_c) \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad (\ell_s, g_s) \rightarrow 0,$

(2.30)

³Στο αντίθετο όριο $\lambda \rightarrow 0$ η θεωρία SYM είναι ελεύθερη, ενώ η τάση των χορδών τείνει στο μηδέν καθώς η ποσότητα,

$$\lambda \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{1}{2\pi\alpha'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi\ell^2} \rightarrow 0 \quad (2.27)$$

γίνεται πολύ μικρή [29].

με την οποία η θεωρία χορδών τύπου IIB ανάγεται στην κλασική IIB υπερβαρύτητα στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ που είναι δυϊκή της επίπεδης, ισχυρά συζευγμένης θεωρίας $\mathcal{N} = 4$ SYM.

2.6 Ο Τομέας BMN

Το να λύσει κανείς το πλήρες χβαντικό IIB σίγμα μοντέλο υπερχορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο και μέχρι στιγμής άλυτο πρόβλημα. Αντ'αυτού, το χβαντικό σίγμα μοντέλο των χορδών μπορεί να λυθεί στο υπόβαθρο του επιπέδου κύματος, στο οποίο η δράση των υπερχορδών απλοποιείται σημαντικά [30].

Οι χωρόχρονοι pp-κύματος είναι μια ειδική κατηγορία χωροχρόνων που αποτελούν ακριβείς λύσεις της υπερβαρύτητας ως προς α' [31]. Μία ειδική περίπτωση των pp-κυμάτων είναι τα επίπεδα κύματα, τα οποία αποτελούν τα υπόβαθρα ορισμένων μέγιστα υπερσυμμετρικών λύσεων της υπερβαρύτητας τύπου IIB. Επίπεδα κύματα μπορούν να ληφθούν ως όρια Penrose των χωροχρόνων $\text{AdS}_{p+2} \times S^{q+2}$ και των τροχιακών πολλαπλοτήτων (orbifolds) αυτών. Στο όριο Penrose, οι ακτίνες των AdS_{p+2} και της $(q+2)$ -σφαίρας (ℓ και R αντίστοιχα) τείνουν στο άπειρο, ενώ ο λόγος τους διατηρείται σταθερός:

$$\ell, R \rightarrow \infty \quad \& \quad \frac{\ell}{R} = \text{σταθερό}. \quad (2.31)$$

Ένα εντελώς ανάλογο όριο, το όριο Berenstein-Maldacena-Nastase (BMN) [32], μπορεί επίσης να ληφθεί από τη μεριά της θεωρίας βαθμίδας της αντιστοιχίας AdS/CFT , αν θεωρήσουμε κάθε τελεστή της $\mathcal{N} = 4$ SYM με διάσταση κλίμακας Δ και R-φορτίο J , έτσι ώστε:⁴

$$N_c, J \rightarrow \infty \quad \& \quad \frac{N_c}{J^2} = \text{σταθερό}, \quad \Delta - J = \text{σταθερό}. \quad (2.33)$$

Έτσι οδηγούμαστε στο λεγόμενο (BMN) τομέα της $\mathcal{N} = 4$ SYM ο οποίος είναι δυϊκός της IIB θεωρίας υπερχορδών επί επίπεδου κύματος. Η αντιστοίχιση μεταξύ αυτών των δύο οριακών περιπτώσεων της AdS/CFT είναι γνωστή ως δυαδικότητα επίπεδου κύματος/θεωρίας super Yang-Mills:

IIB θεωρία χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$	$\xleftrightarrow{\text{AdS}_5/\text{CFT}_4}$	$\mathcal{N} = 4, \mathfrak{su}(N_c)$ θεωρία SYM
$\downarrow$ Όριο Penrose		$\downarrow$ Όριο BMN
IIB θεωρία χορδών σε επίπεδο κύμα	$\xleftrightarrow{\text{επίπεδο κύμα/SYM}}$	BMN τομέας της $\mathcal{N} = 4$ SYM

Η δυαδικότητα επίπεδου κύματος/θεωρίας super Yang-Mills έχει μελετηθεί εκτενώς (βλέπε [33]).

Για μελλοντικούς σκοπούς, θα ήταν χρήσιμο να ορίσουμε και ένα πολύ παρόμοιο όριο από την πλευρά της θεωρίας χορδών της αντιστοιχίας AdS/CFT , που είναι γνωστό ως το όριο Frolov-Tseytlin (FT) [34]:

$$\lambda, J \rightarrow \infty \quad \& \quad \lambda' = \frac{\lambda}{J^2} \ll 1, \quad (2.34)$$

όπου J είναι η στροφορμή μιας κατάστασης της IIB θεωρίας χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$.

⁴Η διάσταση κλίμακας Δ ενός τελεστή $\mathcal{O}(x)$ καθορίζει τη συμπεριφορά του κάτω από τις διαστολές (dilations):

$$x' = \alpha x \quad \rightarrow \quad \mathcal{O}(\alpha x) = \alpha^{-\Delta} \mathcal{O}(x). \quad (2.32)$$

2.7 Δυαδικότητες Maldacena

Τα επιχειρήματα των §2.1 και §2.2 μπορούν να επαναληφθούν και για άλλα συστήματα από βράνες, πέραν του συστήματος D3. Τα όρια χαμηλής ενέργειας οδηγούν σε διαχωρισμούς ανάλογους των (2.3)–(2.5) και συνεπάγονται ένα πλήθος από δυαδικότητες μεταξύ θεωριών στις 10 ή τις 11 διαστάσεις, εντός χωροχρόνων που περιέχουν μια συνιστώσα anti-de Sitter επί μία συμπαγή πολλαπλότητα (ή γινόμενα αυτών) και σε (υπέρ)σύμμορφες θεωρίες πεδίου σε επίπεδους χωροχρόνους με μια διάσταση λιγότερο. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Θ. Βαρύτητας	Χωρόχρονος	#Διαστ.	Σύστημα	Θ. Βαθμίδας	#Διαστ.
IIB Θεωρία Χορδών	$\text{AdS}_5 \times S^5$	5 + 5	D3	$\mathcal{N} = 4 \text{ SYM}$	3 + 1
IIB Θεωρία Χορδών	$\text{AdS}_3 \times S^3 \times M^4$	3 + 3	D1 + D5	$\mathcal{N} = (4, 4) \text{ SCFT}$	1 + 1
IIB Θεωρία Χορδών	$\text{AdS}_2 \times S^2 \times M^6$	2 + 2 + 6	D3	Σύμμορφη KM	0 + 1
M-Θεωρία	$\text{AdS}_7 \times S^4$	7 + 4	M5	$A_{N_c-1}(2, 0) \text{ SCFT}$	5 + 1
M-Θεωρία	$\text{AdS}_4 \times S^7$	4 + 7	M2	$\mathcal{N} = 8 \text{ SCFT}$	2 + 1
M-Θεωρία	$\text{AdS}_3 \times S^2 \times M^6$	3 + 2 + 6	M5	$\mathcal{N} = (0, 4) \text{ SCFT}$	1 + 1

Για την πολλαπλότητα M , $M^4 = K3$ ή T^4 και $M^6 = T^6$, $T^2 \times K3$ ή CY_3 . Σε όλες τις περιπτώσεις που περιέχουν p-σφαίρα ($p = 3, 4, 5, 7$), υπάρχουν πάντα N_c μονάδες ροής RR p-μορφής στην S^p :

$$\int_{S^p} F_p = N_c, \quad p = 3, 4, 5, 7. \quad (2.35)$$

Πολύ κοντά στον ορίζοντα λαμβάνονται διάφορες τιμές για τους λόγους $\mathfrak{k} \equiv \ell/R$ της ακτίνας του AdS δια της ακτίνας της αντίστοιχης σφαίρας. Αυτοί συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα, για κάθε μια από τις δυαδικότητες Maldacena:

	$\text{AdS}_5 \times S^5$	$\text{AdS}_3 \times S^3 \times M^4$	$\text{AdS}_2 \times S^2 \times M^6$	$\text{AdS}_7 \times S^4$	$\text{AdS}_4 \times S^7$	$\text{AdS}_3 \times S^2 \times M^6$
$\mathfrak{k} =$	1	1	1	2	1/2	2

2.8 Αντιστοιχία ABJM

Πιο πρόσφατα, κατασκευάστηκε μια ακόμη ομάδα δυαδικοτήτων μεταξύ 10-διάστατων ή 11-διάστατων θεωριών στο χωρόχρονο AdS_4 επί μια συμπαγή πολλαπλότητα και μιας υπερσύμμορφης 3-διάστατης θεωρίας πεδίου.⁵

$$\left\{ \mathcal{N} = 6, U(N_1)_k \times U(N_2)_{-k} \text{ super C-S θεωρία} \right\} \xrightarrow{N_{1,2} \rightarrow \infty} \left\{ \text{M-θεωρία σε } \text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k \right\} \quad (2.36)$$

Για $N_1 \neq N_2$, η (2.36) δίνει την αντιστοιχία Aharony-Bergman-Jafferis (ABJ), ενώ για $N_1 = N_2 = N_c$,

⁵Στη σχέση (2.36), η συντομογραφία super CS αποτελεί σύντμηση του super Chern-Simons.

δίνει τη δυαδικότητα Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena (ABJM) [35]. Για $k = 1$ λαμβάνουμε τη δυαδικότητα Maldacena με την M-θεωρία στον $\text{AdS}_4 \times S^7$ που είναι δυϊκή της $\mathcal{N} = 8$ SCFT. Στην περίπτωση της ομάδας βαθμίδας $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, η αριστερή πλευρά της (2.36) γίνεται η $\mathcal{N} = 8$ Bagger-Lambert-Gustavsson (BLG) θεωρία [36]. Με διπλή διαστατική αναγωγή της ABJM, οδηγούμαστε στην ακόλουθη δυαδικότητα:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{N} = 6, \ U(N_c)_k \times U(N_c)_{-k} \text{ super C-S θεωρία} &\longleftrightarrow \text{IIA θεωρία χορδών σε } \text{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3 \\ k^5 \gg N_c \rightarrow \infty \ \&\ \lambda \equiv 2\pi^2 N_c/k = \text{σταθ.} \end{aligned}} \quad (2.37)$$

Όσο για τις ροές των παραπάνω δυαδικοτήτων, υπάρχουν N_2 μονάδες ροής RR 4-μορφής στον AdS_4 για την (2.36), ενώ η (2.37) έχει N_c μονάδες ροής RR 4-μορφής στον AdS_4 και k μονάδες ροής RR 2-μορφής στον $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$.

2.9 Αντιστοιχία Πεδίου/Τελεστή

Λέγεται συχνά ότι οι σύμμορφες θεωρίες πεδίου δεν έχουν ασυμπτωτικές καταστάσεις/σωματίδια (κατά συνέπεια, δεν διαθέτουν το συνηθισμένο πίνακα σχέδασης) και είναι οι τελεστές που πρέπει να αναλάβουν αυτό το ρόλο.⁶ Ο ρόλος των τελεστών στην AdS/CFT καθορίζεται με βάση την αντιστοιχία πεδίου/τελεστή. Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη παραμόρφωση της σύμμορφης θεωρίας πεδίου:

$$S' = S + \int d^d x \phi(x) \mathcal{O}(x), \quad (2.38)$$

όπου $\mathcal{O}(x)$ είναι ένας τοπικός τελεστής, αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς βαθμίδας και $\phi(x)$ είναι η πηγή του. Σύμφωνα με την αντιστοιχία πεδίου/τελεστή, σε κάθε τοπικό και αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστή $\mathcal{O}(x)$ της (παραμορφωμένης) συνοριακής θεωρίας, αντιστοιχεί ένα δυϊκό πεδίο του εσωτερικού $\Phi(x, y)$ τέτοιο ώστε η τιμή του Φ στο όριο ($y \rightarrow 0$ στο σύμμορφο σύστημα αναφοράς) να αποτελεί πηγή του $\mathcal{O}(x)$:

$$\phi(x) = \Phi \Big|_{\partial \text{AdS}}(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \Phi(x, y). \quad (2.39)$$

Δεν υπάρχει κάποιος γενικός αλγόριθμος που να αντιστοιχίζει αυθαίρετους τελεστές του συνόρου στα δυϊκά τους πεδία στο εσωτερικό ή το αντίστροφο. Ως εκ τούτου, ένας σχετικά μικρός αριθμός παρόμοιων (heuristic) ταυτοποιήσεων είναι γνωστός.

Ως ένα ενδεικτικό παράδειγμα της αντιστοιχίας πεδίου/τελεστή, ας θεωρήσουμε ένα ελεύθερο βαθμωτό πεδίο εντός του AdS_{p+2} :

$$S_\phi = -\frac{1}{2} \int d^{p+2} x \sqrt{-g} (\partial_m \Phi \partial^m \Phi + m^2 \Phi^2) \quad \& \quad ds^2 = \frac{\ell^2}{y^2} (-dt^2 + d\mathbf{x}_p^2 + dy^2). \quad (2.40)$$

Αν λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης του εν λόγω πεδίου, θα διαπιστώσουμε ότι η συμπεριφορά του κοντά στο σύνορο του AdS ($y \rightarrow 0$) είναι η ακόλουθη:

$$\Phi(x, y) = \underbrace{A(x) y^{\Delta_-}}_{\text{μη κανονικοποιήσιμος όρος}} + \underbrace{B(x) y^{\Delta_+}}_{\text{κανονικοποιήσιμος όρος}}, \quad y \rightarrow 0, \quad (2.41)$$

όπου

$$\Delta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(d \pm \sqrt{d^2 + 4m^2 \ell^2} \right), \quad d = p + 1. \quad (2.42)$$

⁶Ο αντίστοιχος πίνακας σχέδασης φέρει το όνομα πίνακας σχέδασης «κοσμικού φύλλου» ("worldsheet"). Μπορεί να οριστεί επίσης και ένας «χωροχρονικός» πίνακας σχέδασης, με βάση τα πλάτη σχέδασης n-γκλουονίων. Ανατρέξτε στο [37] για περισσότερα.

⁷Ας σημειωθεί ότι για πραγματικές τιμές της $\Delta_{\pm}$, αρνητικά τετράγωνα μάζας επιτρέπονται σε κάποιο βαθμό ($4m^2 \ell^2 \geq -d^2$), συνθήκη που είναι γνωστή ως φράγμα Breitenlohner-Freedman (BF).

Για $m^2 > 0$ η συμπεριφορά του (2.41) στο σύνορο κυριαρχείται από τον πρώτο όρο, ο οποίος απειρίζεται για $y \rightarrow 0$. Επομένως

$$\phi(x) = A(x) \quad (2.43)$$

και ο μη κανονικοποιήσιμος όρος $A(x)$ καθορίζει τη συνοριακή Λαγκρανζιανή μέσω της (2.38). Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το Δ_+ ισούται με την διάσταση κλίμακας Δ του δυϊκού (βαθμωτού) τελεστή $\mathcal{O}(x)$ του πεδίου Φ , η οποία ορίζεται ως εξής:

$$x' = \alpha x \quad \rightarrow \quad \mathcal{O}(\alpha x) = \alpha^{-\Delta} \mathcal{O}(x). \quad (2.44)$$

Τώρα, εφόσον το πεδίο $\Phi(x, y)$ είναι βαθμωτό, είναι αναλλοίωτο κάτω από τις διαστολές

$$\Phi(\alpha x, \alpha y) = \Phi(x, y) \quad \Rightarrow \quad A(\alpha x) = \alpha^{-\Delta_-} A(x) \quad \& \quad B(\alpha x) = \alpha^{-\Delta_+} B(x). \quad (2.45)$$

Επομένως οι (2.38)–(2.42) συνεπάγονται

$$\Delta_- = d - \Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta_+ = d - \Delta_- = \Delta. \quad (2.46)$$

Όπως αποδεικνύεται, ο κανονικοποιήσιμος όρος $B(x)$ μπορεί να τεθεί σε 1-1 αντιστοιχία με καταστάσεις στο χώρο Hilbert της συνοριακής θεωρίας. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι ο $B(x)$ σχετίζεται με την αναμενόμενη τιμή του συνοριακού τελεστή $\langle \mathcal{O}(x) \rangle$. Συνοψίζοντας,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Κανονικοποιήσιμοι τρόποι εσωτερικού} \longleftrightarrow \text{Καταστάσεις στο σύνορο} \\ \text{Μη κανονικοποιήσιμοι τρόποι εσωτερικού} \longleftrightarrow \text{Λαγκρανζιανή στο σύνορο.} \end{array} \right\}$$

Η προηγούμενη ανάλυση μπορεί να επαναληφθεί και για τους τελεστές μιας θεωρίας βαθμίδας με οποιοδήποτε σπίν. Ο πίνακας που ακολουθεί είναι από την αναφορά [9]:

Πεδίο	Σπίν	Διαστάσεις Κλίμακας
Βαθμωτό	0	$\frac{1}{2} \left[d \pm \sqrt{d^2 + 4m^2 \ell^2} \right]$
Σπινორιακό	1/2, 3/2	$\frac{1}{2} (d + 2 m \ell)$
Ανυσματικό	1	$\frac{1}{2} \left[d \pm \sqrt{(d-2)^2 + 4m^2 \ell^2} \right]$
Άμαζο Σπίν-2	2	d
q-μορφή	-	$\frac{1}{2} \left[d \pm \sqrt{(d-2q)^2 + 4m^2 \ell^2} \right].$

2.10 Τεστ της Αντιστοιχίας $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$

Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κομμάτι με μια συνοπτική συζήτηση των κυριότερων τεστ της αντιστοιχίας AdS/CFT . Αν και θα επικεντρωθούμε στην αντιστοιχία $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$, όλα τα τεστ που θα συζητηθούν μπορεί να γενικευθούν κατάλληλα σε οποιαδήποτε από τις δυαδικότητες βαθμίδας/βαρύτητας.

Η αντιστοιχία $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ (2.1) συνεπάγεται ότι η συνάρτηση επιμερισμού της θεωρίας χορδών τύπου IIB στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ και η συνάρτηση επιμερισμού της $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N)$ super Yang-Mills (SYM) θεωρίας είναι μεταξύ τους ίσες:

$$\mathcal{Z}_{\text{string}} \left[\Phi \Big|_{\partial \text{AdS}} (x) \right] = \mathcal{Z}_{\text{CFT}} [\phi(x)], \quad (2.47)$$

όπου ϕ είναι οι πηγές όλων των αναλλοίωτων σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστών της $\mathcal{N} = 4$ SYM και Φ είναι τα δυϊκά τους πεδία στο εσωτερικό (bulk). Η πρόταση (2.47) αποτελεί γενίκευση της αντιστοιχίας πεδίου/τελεστή (2.39), σύμφωνα με την οποία όχι μόνο οι τελεστές στο σύνορο αλλά κάθε παρατηρήσιμο μέγεθος στο σύνορο (φάσματα, συναρτήσεις συσχετισμού, πλάτη σκέδασης, βρόχοι Wilson, κλπ.) διαθέτει ένα δυϊκό και ίσο παρατηρήσιμο μέγεθος στο εσωτερικό. Το επόμενο επίπεδο γενίκευσης είναι η ύπαρξη μιας 1-1 απεικόνισης μεταξύ των ιδιοτήτων της θεωρίας υπερχορδών τύπου IIB στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ και εκείνων της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Αυτή η απεικόνιση είναι κοινώς γνωστή ως «ΛΕΞΙΚΟ» της αντιστοιχίας AdS/CFT. Η αποκρυπτογράφηση και ολοκλήρωση του λεξικού της αντιστοιχίας AdS/CFT αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα της θεωρητικής φυσικής.

Αυτή τη στιγμή, το επίσημο status της αντιστοιχίας AdS/CFT είναι «εικασία». Δεν είναι γνωστό αν υπάρχει κάποιο αυστηρό μαθηματικό επιχείρημα με το οποίο να μπορούμε αξιόπιστα να αποδείξουμε ή να διαψεύσουμε την αντιστοιχία, ούτε έχει επινοηθεί κάποιος θεωρητικός αλγόριθμος οποιουδήποτε είδους ο οποίος, αν ακολουθηθεί πιστά, να μπορεί να οδηγήσει σε μια αποδεκτή απόδειξη ή διάψευσή της. Αξίζει να σημειωθεί ότι, το πρόβλημα της αυστηρής απόδειξης της αντιστοιχίας AdS/CFT κάνει την εμφάνισή του στη λίστα που κατάρτισε πρόσφατα ο A. Strominger στα πλαίσια του συνεδρίου «Χορδές 2014», με όλες τις «βαθιές και ενδιαφέρουσες» ερωτήσεις στη θεωρία χορδών, που μπορούν να απαντηθούν μέσα στα επόμενα 5-10 χρόνια.⁸ Μέχρι σήμερα είναι γνωστές τρεις βασικές διατυπώσεις της αντιστοιχίας $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$:

- Ασθενής διατύπωση της AdS/CFT: η αντιστοιχία ισχύει μόνο για $N_c, \lambda \rightarrow \infty$.
- Μέτρια διατύπωση της AdS/CFT: η αντιστοιχία ισχύει μόνο για $N_c \rightarrow \infty$.
- Ισχυρή διατύπωση της AdS/CFT: η αντιστοιχία ισχύει για κάθε N_c, λ .

Ωστόσο, το τοπίο δεν είναι 100% σαφές με καμία από αυτές. Με βάση αποτελέσματα από την ολοκληρωσιμότητα της αντιστοιχίας $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$, υπάρχουν ενδείξεις ότι η αντιστοιχία είναι έγκυρη στις δύο ασθενέστερες εκδοχές της, αλλά, με την παρούσα μορφή της, όχι και στην ισχυρή διατύπωση. Π.χ. στο όριο μηδενικής τάσης $\lambda \rightarrow 0$, η εικόνα είναι πέραν από σαφής [29]. Προς το παρόν, η κύρια στρατηγική για την απόδειξη ή την ανταπόδειξη της αντιστοιχίας AdS/CFT, συνίσταται στον υπολογισμό όλων των παρατηρήσιμων μεγεθών των δύο θεωριών, όσο το δυνατόν ακριβέστερα, προκειμένου να διαπιστωθεί η μεταξύ τους συμφωνία ή η διαφωνία. Παράλληλα, σημαντική προσπάθεια αφιερώνεται στην ολοκλήρωση του «λεξικού» της AdS/CFT. Ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για τον υπολογισμό και την αναγνώριση των παρατηρήσιμων μεγεθών της αντιστοιχίας AdS/CFT (του οποίου η παρουσίαση παραλείπεται για λόγους οικονομίας) είναι η ολοκληρωσιμότητα.

Πέραν από τον υπολογισμό/σύγκριση και το ταίριασμα των παρατηρήσιμων, υπάρχουν και διάφορα άλλα τεστ που επιτρέπουν να συγκρίνουμε τις δύο θεωρίες της AdS/CFT, ήτοι τη θεωρία χορδών τύπου IIB στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ και την $\mathcal{N} = 4, \text{su}(N)$ SYM. Σε ό,τι ακολουθεί θα παρουσιάσουμε συνοπτικά μερικά από αυτά τα τεστ. Ωστόσο, η έμφασή μας θα επικεντρωθεί στην αντιστοίχιση των φασμάτων, δεδομένου ότι αυτή είναι άμεσα συνδεδεμένη με το πεδίο εφαρμογής και το περιεχόμενο της παρούσας διατριβής.

2.10.1 Συμμετρίες

Οι υπερχορδές τύπου IIB ορίζονται στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ και έτσι μοιράζονται τις συμμετρίες του, δηλαδή την καθολική μποζονική ισομετρία $\mathfrak{so}(4, 2) \times \mathfrak{so}(6)$, που μπορεί να επεκταθεί στην υπερομάδα $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$.

⁸Βλέπε <http://physics.princeton.edu/strings2014/slides/Strominger.pdf>, σελίδα 13. Η υπόδειξη που προτείνεται από τον H. Κυρίτση είναι να μελετήσει κανείς τις συμμετρίες του γενικευμένου συναρτησιακού Schwinger και στη συνέχεια να προσπαθήσει το απεικονίσει στην θεωρία πεδίου των χορδών...

Όπως έχουμε πει, η $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM θεωρία είναι σύμμορφα αναλλοίωτη και ως εκ τούτου έχει την 4-διάστατη σύμμορφη ομάδα $\mathfrak{so}(4, 2)$ ως συμμετρία. Η Λαγκρανζιανή (2.6) έχει επίσης εμφανή $\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$ R-συμμετρία που σχετίζεται με την συμπαγοποίηση από τις $d = 10$ στις $d = 4$ διαστάσεις, και με την οποία τα έξι βαθμωτά πεδία ϕ_i μετασχηματίζονται ως ανύσματα. Και πάλι, η συμμετρία $\mathfrak{so}(4, 2) \times \mathfrak{so}(6)$ επεκτείνεται στη super AdS_5 ομάδα $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$. Συνολικά υπάρχουν $15 + 15$ μποζονικοί γεννήτορες (15 σύμμορφοι και 15 R-συμμετρίες) και $16 + 16$ φερμιονικοί γεννήτορες (16 Poincaré και 16 υπερσύμμορφοι) στην $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$:

Μποζονικοί Γεννήτορες	Φερμιονικοί Γεννήτορες	
$D, P_\mu, K_\mu, L_{\mu\nu}$	$Q_\alpha^a, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^a$	$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad a = 1, 2, 3, 4$
T^a	$S_\alpha^a, \bar{S}_{\dot{\alpha}}^a$	$\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2, \quad a = 1, 2, \dots, 15$

Για μελλοντική χρήση ας γράψουμε τις διαστάσεις κλίμακας των παραπάνω γεννητόρων:

$$[D] = [L_{\mu\nu}] = [T^a] = 0, \quad [P_\mu] = 1, \quad [K_\mu] = -1, \quad [Q] = \frac{1}{2}, \quad [S] = -\frac{1}{2}. \quad (2.48)$$

Εκτός από τις παραπάνω συμμετρίες, και οι δύο θεωρίες μοιράζονται μια μη-διαταραχτική $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{Z})$ συμμετρία ή S-δυναμικότητα. Η θεωρία χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ είναι επίσης αναλλοίωτη κάτω από μια ορισμένη T-δυναμικότητα [38]. Η μελέτη των πλατών σχέδασης στην επίπεδη $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία αποκάλυψε την ύπαρξη της δυϊκής υπερσύμμορφης συμμετρίας (dual superconformal symmetry), μία κρυφή συμμετρία που αντιστοιχεί στη συμμετρία των βρόχων Wilson της $\mathcal{N} = 4$ SYM και ενσωματώνει την T-δυναμικότητα εντός της θεωρίας. Η δυϊκή και η απλή υπερσύμμορφη συμμετρία συνδυάζονται στη λεγόμενη Yangian συμμετρία, η οποία γενικεύει την $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ και είναι μια συμμετρία που συνήθως παρουσιάζεται από ολοκληρώσιμα συστήματα.

2.10.2 Φάσματα

Ίσως η πιο σημαντική πρόβλεψη της αντιστοιχίας AdS/CFT είναι η ισότητα μεταξύ των φασμάτων της $\mathcal{N} = 4$ SYM και της θεωρίας χορδών τύπου IIB στον $\text{AdS}_5 \times S^5$. Όπως έχουμε ήδη πει, ο ρόλος των σωματιδίων στις σύμμορφες θεωρίες πεδίου αναλαμβάνεται από τελεστές, το φάσμα των οποίων αποτελείται από τις (ενδεχομένως ανώμαλες) διαστάσεις κλίμακάς τους. Από την άλλη πλευρά έχουμε καταστάσεις χορδών και τις ενέργειες που τους αντιστοιχούν. Το αίτημα των φασμάτων των δύο θεωριών περιλαμβάνει γενικά τα ακόλουθα βήματα:

1. Υπολογισμός των διαστάσεων κλίμακας Δ όλων των τελεστών της $\mathcal{N} = 4$ SYM.
2. Υπολογισμός των ενεργειών E των καταστάσεων της IIB θεωρίας υπερχορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$.
3. Αντιστοίχιση των τελεστών της $\mathcal{N} = 4$ SYM στις καταστάσεις της IIB θεωρίας στον $\text{AdS}_5 \times S^5$.
4. Σύγκριση των διαστάσεων των τελεστών Δ με τις ενέργειες των δυϊκών τους χορδών E .

Τα βήματα 1 και 2 είναι λιγότερο περίπλοκα στο επίπεδο όριο ($N_c \rightarrow \infty$), στο οποίο η θεωρία χορδών IIB περιέχει μόνο ελεύθερες καταστάσεις κλειστών χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$. Ένας άλλος περιορισμός είναι ότι, εκτός από σχετικά λίγες περιπτώσεις, δεν υπάρχει κάποια γενική μέθοδος με την οποία να μπορεί να διεκπεραιώσει κανείς την αντιστοίχιση κατάστασης/τελεστή στο βήμα 3. Αυτό οφείλεται κυρίως σε δύο λόγους: (α) είναι δύσκολο να χβαντιστεί το σίγμα μοντέλο των χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ και (β) το φάσμα των αναλλοίωτων υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστών είναι μάλλον δύσκολο να υπολογιστεί.

Η πρόοδος στο βήμα 4 περιορίζεται δραστικά από την ασθενή/ισχυρή φύση της σταθεράς σύζευξης της AdS/CFT. Για μικρές σταθερές σύζευξης 't Hooft ($\lambda \rightarrow 0$), η $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία είναι ασθενώς συζευγμένη και το φάσμα της μπορεί να υπολογιστεί διαταραχτικά. Ωστόσο, η διαταραχτική περιοχή της IIB θεωρίας χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ καλύπτει μόνο τις μεγάλες τιμές της σύζευξης 't Hooft ($\lambda \rightarrow \infty$), όπου η δυϊκή θεωρία βαθμίδας είναι ισχυρά συζευγμένη και μακριά από τη διαταραχτική της περιοχή. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να συγκρίνουμε άμεσα τις διαστάσεις κλίμακας των τελεστών με τις ενέργειες των δυϊκών τους καταστάσεων χορδών, εκτός και αν βρεθεί κάποιος αξιόπιστος τρόπος επέκτασης των αποτελεσμάτων μας από ασθενή σε ισχυρή σύζευξη και αντίστροφα.

Ας προσπαθήσουμε πρώτα να περιγράψουμε το φασματικό πρόβλημα από την πλευρά της θεωρίας βαθμίδας. Θα θεωρήσουμε μόνο τοπικούς, αναλλοίωτους σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστές, τα συστατικά πεδία των οποίων εξαρτώνται από ένα μόνο σημείο στο χωροχρόνο. Όλοι οι εν λόγω τελεστές μπορούν να χωριστούν σε τελεστές μονού και πολλαπλού ίχνους, που είναι δυϊκοί σε μονοσωματιδιακές και πολυσωματιδιακές καταστάσεις αντίστοιχα. Μόνο η πρώτη περίπτωση θα μας απασχολήσει εδώ. Για να ταξινομήσουμε όλους τους τοπικούς, αναλλοίωτους σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστές μονού ίχνους της $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM, είναι χρήσιμο να εισάγουμε τις έννοιες των υπερσύμμορφων πρωτογενών (primary) τελεστών και των απογόνων τους.

Οι σύμμορφοι πρωτογενείς τελεστές εξουδετερώνονται από τους σύμμορφους γεννήτορες K_μ , ενώ οι υπερσύμμορφοι πρωτογενείς τελεστές εξουδετερώνονται από τους υπερσύμμορφους γεννήτορες S_α^a και έχουν τη χαμηλότερη διάσταση σε μια δεδομένη υπερσύμμορφη πολλαπλέτα των μοναδιακών αναπαραστάσεων της $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$. Οι απόγονοι των υπερσύμμορφων τελεστών λαμβάνονται με τη δράση των γεννητόρων Poincaré σε άλλο τελεστή της ίδιας πολλαπλέτας. Οι χειραλικοί υπερσύμμορφοι πρωτογενείς τελεστές (γνωστοί και ως τελεστές BPS) εξουδετερώνονται από τουλάχιστον ένα από τα υπερφορτία Poincaré και κατατάσσονται στις μικρές (short) αναπαραστάσεις της άλγεβρας. Αυτό σημαίνει ότι οι τελεστές BPS (και οι απόγονοί τους) παραμένουν ακανονικοποίητοι, ήτοι οι διαστάσεις κλίμακάς τους προστατεύονται από κβαντικές διορθώσεις. Ανάλογα με τον αριθμό των φορτίων Q που τους εξουδετερώνει, οι χειραλικοί πρωτογενείς τελεστές αποκαλούνται 1/2 BPS, 1/4 BPS ή 1/8 BPS. Αυτοί εξουδετερώνονται από το ήμισυ, το 1/4 ή το 1/8 των υπερφορτίων Poincaré αντίστοιχα. Ένα πολύ χρήσιμο συμπέρασμα είναι ότι χειραλικοί πρωτογενείς τελεστές αποτελούνται αποκλειστικά από βαθμωτά πεδία της $\mathcal{N} = 4$ SYM:⁹

$$\mathcal{O}^{j_1 j_2 \dots j_n} = \text{Tr} \left[\phi^{(j_1} \phi^{j_2} \dots \phi^{j_n)} \right]. \quad (2.49)$$

Όλες οι μοναδιακές αναπαραστάσεις των $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ έχουν ταξινομηθεί από τους Dobrev και Petkova σύμφωνα με τους κβαντικούς αριθμούς της παρακάτω μπεζονικής υποομάδας του $\mathfrak{so}(4, 2) \times \mathfrak{so}(6)$:

$$\overbrace{\mathfrak{so}(4, 2)}^{\Delta} \times \overbrace{\mathfrak{so}(6)}^{s_\pm} = \overbrace{\mathfrak{so}(1, 1) \times \mathfrak{so}(1, 3)}^{\Delta} \times \overbrace{\mathfrak{su}(4)}^{[r_1, r_2, r_3]}, \quad (2.50)$$

όπου $[r_1, r_2, r_3]$ είναι οι δείκτες Dynkin της αναπαράστασης $\mathfrak{su}(4)$. Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές σειρές αναπαραστάσεων, τρεις εκ των οποίων είναι BPS (δηλαδή περιέχουν έναν χειραλικό πρωτογενή τελεστή) και μία δεν είναι BPS (δεν περιέχει κανένα χειραλικό τελεστή). Όλοι οι τοπικοί, αναλλοίωτοι σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστές μονού ίχνους της $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM θεωρίας ταξινομούνται σύμφωνα με το σχήμα Dobrev-Petkova (2.50).

Στην πλευρά της θεωρίας χορδών ισχύει μια παρόμοια ταξινόμηση. Οι καταστάσεις χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ χαρακτηρίζονται από έξι διατηρούμενα φορτία: την ενέργειά τους E , τα σπίν τους $S_{1,2}$ στον AdS και τα σπίν τους $J_{1,2,3}$ στην S^5 . Αυτά τα φορτία αντιστοιχούν στις κυκλικές συντεταγμένες (3.6) της μπεζονικής δράσης για τη χορδή στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ και είναι σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία με την ταξινόμηση

⁹Στην (2.49), οι παρενθέσεις $()$ δηλώνουν συμμετροποίηση ως προς τους δείκτες $j_1, j_2, \dots, j_n$.

των τελεστών (2.50) της $\mathcal{N} = 4$ SYM:

$$\begin{array}{c} \text{AdS}_5 \sim \mathfrak{so}(4, 2) \\ \hline \mathfrak{so}(1, 1) \times \mathfrak{so}(1, 3) \\ E \quad S_1, S_2 \end{array} \times \begin{array}{c} S^5 \sim \mathfrak{so}(6) \\ \hline \mathfrak{su}(4) \\ J_1, J_2, J_3 \end{array} \quad (2.51)$$

Στο όριο της κλασικής υπερβαρύτητας ($N_c, \lambda \rightarrow \infty$) το φάσμα των 1/2 BPS τελεστών της $\mathcal{N} = 4$ SYM ταυτίζεται πλήρως με εκείνο της IIB υπερβαρύτητας, συμπαγοποιημένης στον $\text{AdS}_5 \times S^5$. Έτσι, οι τελεστές BPS είναι δυϊκοί στις ελεύθερες σημειακές χορδές ($g_s, \ell_s \rightarrow 0$). Για λεπτομέρειες και περαιτέρω αναφορές ο αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες [9, 15].

Τα φάσματα έχουν επίσης βρεθεί να συμφωνούν και στο όριο BMN (2.33). Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, το σίγμα μοντέλο της χορδής λύνεται πλήρως στα υπόβαθρα των επίπεδων κυμάτων και οι ενέργειες των καταστάσεων ελεύθερων χορδών που υπολογίζονται είναι σε πλήρη συμφωνία με τις διαστάσεις των δυϊκών τους τελεστών από τη θεωρία βαθμίδας. Οι τελεστές BMN είναι «σχεδόν» προστατευμένοι—και ως εκ τούτου «σχεδόν» BPS—και οι δυϊκές τους καταστάσεις ελεύθερων χορδών είναι «σχεδόν» σημειακές. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το θέμα αυτό, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην αρχική εργασία [32] και τις ανασκοπήσεις [33] της δυαδικότητας επιπέδου κύματος/SYM.

Πέρα από τους τελεστές BPS και BMN, είναι η ολοκληρωσιμότητα που έρχεται στο προσκήνιο, και παρέχει τα εργαλεία για την πλήρη λύση του φασματικού προβλήματος. Ακόμη και μια τέτοια πανίσχυρη τεχνική όπως η ολοκληρωσιμότητα έχει τις ελλείψεις της και δεδομένα από άλλες μεθόδους εξακολουθούν να είναι αναγκαία. Για παράδειγμα, σε κάποιες περιπτώσεις οι εξισώσεις που προέρχονται από την ολοκληρωσιμότητα είναι τρομερά δυσεπίλυτες. Επιπλέον, η αντιστοιχία κατάστασης/τελεστή γίνεται κάπως ασαφής στα πλαίσια της ολοκληρωσιμότητας. Τέλος, λίγες μόνο μέθοδοι είναι μέχρι στιγμής σε θέση να παράσχουν κλειστές φόρμουλες για τα υπολογιζόμενα φάσματα. Στο μέρος II της παρούσας διατριβής θα περιγράψουμε την κατάσταση που επικρατεί σε ακριβώς αυτές τις περιοχές και θα προτείνουμε μια πιθανή μέθοδο προκειμένου να επιτευχθεί πρόοδος.

2.10.3 Συναρτήσεις Συσχέτισης

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων συσχέτισης στην αντιστοιχία AdS/CFT κάνει ουσιαστικά χρήση του γεγονότος ότι η σύμμορφη συμμετρία καθορίζει πλήρως τις συναρτήσεις συσχέτισης 2 και 3 σημείων. Για παράδειγμα, η συνάρτηση συσχέτισης των δύο βαθμωτών (μονού ίχνος) πρωτογενών τελεστών $\mathcal{O}_{(i,j)}(x)$, με διαστάσεις κλίμακας Δ_i και Δ_j δίνεται από [39]:

$$\langle \mathcal{O}_i(x_i) \mathcal{O}_j(x_j) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{x_{ij}^{2\Delta_i}}. \quad (2.52)$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση 3 σημείων είναι:

$$\langle \mathcal{O}_i(x_i) \mathcal{O}_j(x_j) \mathcal{O}_k(x_k) \rangle = \frac{C_{ijk}}{|x_{ij}|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k} |x_{jk}|^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_i} |x_{ki}|^{\Delta_k+\Delta_i-\Delta_j}}, \quad (2.53)$$

όπου C_{ijk} είναι οι σταθερές δομής και Δ_k είναι η διάσταση κλίμακας των $\mathcal{O}_k(x)$. Στο επίπεδο όριο ($N_c \rightarrow \infty$), οι σταθερές C_{ijk} γενικά δέχονται το ακόλουθο ανάπτυγμα ασθενούς σύζευξης:

$$C_{ijk} = c_{ijk}^{(0)} + \lambda \cdot c_{ijk}^{(1)} + \lambda^2 \cdot c_{ijk}^{(2)} + \dots, \quad (2.54)$$

Οι συναρτήσεις συσχέτισης περισσότερων σημείων μπορούν να υπολογιστούν από εκείνες των 2 και 3 σημείων χρησιμοποιώντας το λεγόμενο ανάπτυγμα γινομένου τελεστών (OPE). Το πρόβλημα του υπολογισμού των συναρτήσεων συσχέτισης στην αντιστοιχία AdS/CFT ανάγεται ως εκ τούτου στον υπολογισμό των συντελεστών OPE στη μορφή (2.54), είτε σε ασθενή ($\lambda \rightarrow 0$) είτε σε ισχυρή σύζευξη ($\lambda \rightarrow \infty$).

Ενώ για ασθενή σύζευξη μπορεί κανείς να προχωρήσει διαταρακτικά, με τον υπολογισμό των αντίστοιχων διαγραμμάτων Feynman, ο υπολογισμός των συναρτήσεων συσχέτισης για ισχυρή σύζευξη γίνεται με τη χρήση της θεωρίας χορδών με βάση την (2.47). Συμβολίζοντας με W το συναρτησιακό των συν-δεδεμένων συναρτήσεων Green της θεωρίας βαθμίδας και με S_{string} τη δράση της IIB θεωρίας χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$, έχουμε:

$$e^{-S_{\text{string}}[\Phi(x,y=0)]} = \mathcal{Z}_{\text{string}}[\Phi(x, y=0)] = \mathcal{Z}_{\text{CFT}}[\phi(x)] = e^{-W[\phi(x)]}, \quad (2.55)$$

όπου το όριο του AdS βρίσκεται στο $y=0$. Το επόμενο βήμα περιλαμβάνει την επανακανονικοποίηση της ευκλειδοποιημένης δράσης $S_{\text{string}}^{(\text{ren})}$ στο εσωτερικό και τη λύση των εξισώσεων κίνησης που λαμβάνονται από την ελαχιστοποίησή της. Επιβάλλοντας τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στο $y=0$ και εισάγοντας τη λύση στην επανακανονικοποιημένη δράση, λαμβάνουμε:

$$W[\phi(x)] \approx S_{\text{string}}^{(\text{ren})}[\Phi_C^{(E)}(x, 0)] = S_{\text{sugra}}^{(\text{ren})}[\Phi_C^{(E)}(x, 0)] + O(\alpha'), \quad (2.56)$$

όπου S_{string} είναι η δράση της IIB υπερβαρύτητας στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ μαζί με τις διορθώσεις ως προς α' . Έτσι, στην προσέγγιση της κλασικής υπερβαρύτητας (2.30),

$$W[\phi(x)] \approx S_{\text{sugra}}^{(\text{ren})}[\Phi_C^{(E)}(x, 0)]. \quad (2.57)$$

Η συνάρτηση συσχέτισης n -σημείων μεταξύ των συνοριακών τελεστών $\mathcal{O}(x)$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = \frac{\delta S_{\text{string}}^{(\text{ren})}[\Phi_C^{(E)}]}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2) \dots \delta \phi(x_n)} \Big|_{\phi=0}. \quad (2.58)$$

Η αντιστοίχιση των συναρτήσεων συσχέτισης όπως υπολογίζονται και από τις δύο πλευρές της αντιστοιχίας AdS/CFT έχει επιτευχθεί σε πολλές περιπτώσεις, π.χ. για τις συσχετίσεις μεταξύ τελεστών BPS. Αλλά επειδή αυτό σε μεγάλο βαθμό αποτελεί αντικείμενο έντονου τρέχοντος ενδιαφέροντος, θα αναβάλουμε την οποιαδήποτε περαιτέρω συζήτηση και θα παραπέμφουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στην υπάρχουσα βιβλιογραφία.

2.10.4 Ανωμαλίες, Moduli Spaces, κλπ.

Ένα άλλο τεστ της αντιστοιχίας $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ είναι το ταίριασμα των ανωμαλιών¹⁰ οι οποίες προκύπτουν όταν η $\mathcal{N}=4$ SYM συζευχθεί με εξωτερικά βαρυτικά πεδία ή με πεδία βαθμίδας. Αν παραμορφώσουμε την θεωρία βαθμίδας με ένα καθολικό ρεύμα $\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$, θα προκύψει μια (αξονική) ανωμαλία τύπου Adler-Bell-Jackiw, ενώ τα ρεύματα $\mathfrak{so}(4, 2)$ οδηγούν σε μια Weyl/σύμμορφη ανωμαλία. Αμφότερες οι ανωμαλίες μπορούν να αναπαραχθούν και στις δύο πλευρές της δυαδικότητας, σε πρώτη τάξη ως προς $1/N_c$, προσφέροντας έτσι μια πολύτιμη επιβεβαίωση της αντιστοιχίας.

Υπάρχουν πολύ περισσότερα τεστ συμβατότητας μεταξύ των δύο θεωριών, π.χ. η αντιστοίχιση του moduli space της $\mathcal{N}=4$ SYM, ήτοι του $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{6(N_c-1)}/\mathcal{S}_{N_c}$ ¹¹ με εκείνο της θεωρίας χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$, η σύγκριση της συμπεριφοράς και των δύο θεωριών υπό παραμορφώσεις, υπό πεπερασμένη θερμοκρασία, κλπ. Για περισσότερα, ένα ωραίο σημείο εκκίνησης είναι η επισκόπηση [9].

¹⁰Ανωμαλία είναι η παραβίαση μιας κλασικής συμμετρίας στο κβαντικό επίπεδο.

¹¹ $\mathcal{S}_{N_c}$ είναι η ομάδα μετάθεσης N_c στοιχείων.

Μέρος II

Περιστρεφόμενες Χορδές στον $AdS_5 \times S^5$

3 Εισαγωγή

Όπως εξηγήσαμε στην εισαγωγή, η αντιστοιχία AdS/CFT (2.1) συνεπάγεται ότι τα φάσματα της $\mathcal{N} = 4$, $su(N_c)$ SYM θεωρίας και της IIB θεωρίας χορδών στον $AdS_5 \times S^5$ θα πρέπει να ταιριάζουν, τουλάχιστον σε ό,τι αφορά στην επίπεδη προσέγγιση/όριο ελεύθερης χορδής. Πράγματι, τα δύο φάσματα έχουν βρεθεί να συμφωνούν τόσο στο BPS όσο και στο όριο BMN, παρέχοντας ουσιαστική υποστήριξη στην αντιστοιχία AdS/CFT. Πέρα από τα όρια BPS και BMN, η επίπεδη ολοκληρωσιμότητα (θερμοδυναμικό BA, Y-σύστημα, κβαντική φασματική καμπύλη) λύνει πλήρως το φασματικό πρόβλημα της AdS/CFT, παρέχοντας το ακριβές σύστημα εξισώσεων που το καθορίζουν.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν πολύ ισχυρά επιχειρήματα υπέρ της επίπεδης αντιστοιχίας AdS/CFT. Τα φάσματα της $\mathcal{N} = 4$ SYM και της IIB θεωρίας χορδών στον $AdS_5 \times S^5$ περιγράφονται από το ίδιο το σύστημα συναρτησιακών εξισώσεων, που σημαίνει ότι θα πρέπει να συμπίπτουν. Ωστόσο, όταν πρόκειται για τον πρακτικό υπολογισμό του κοινού φάσματος, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η διαδικασία αποδεικνύεται ότι είναι μάλλον τεχνικά πολύπλοκη. Πέρα από αυτό, θα θέλαμε επίσης να έχουμε στη διάθεσή μας και εργαλεία για τον υπολογισμό των φασμάτων μη ολοκληρώσιμων μοντέλων, αλλά και στις περιπτώσεις όπου είναι γνωστό ότι η ολοκληρωσιμότητα σπάει (π.χ. QCD, μη-επίπεδη $\mathcal{N} = 4$ SYM, p-βράνες).

Δεύτερον, θα θέλαμε να αντιμετωπίσουμε μερικά από τα παραδοσιακά προβλήματα της AdS/CFT, όπως π.χ. ποιο είναι το λεξικό της AdS/CFT. Από την αντιστοιχία κατάστασης/τελεστή γνωρίζουμε ότι σε κάθε τελεστή της θεωρίας βαθμίδας αντιστοιχεί μια δυϊκή IIB κατάσταση χορδών. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, υπάρχουν δύο βασικά εμπόδια που αντιμετωπίζουμε κατά την αντιστοίχιση κατάστασης/τελεστή, η δυσκολία κβάντωσης των χορδών στον $AdS_5 \times S^5$ και οι τεχνικές δυσκολίες στον υπολογισμό του φάσματος της θεωρίας SYM. Ως εκ τούτου, δεν υπάρχει συστηματική διαδικασία η οποία να απεικονίζει ένα τελεστή της θεωρίας βαθμίδας σε κάθε κατάσταση χορδών, και η ταυτοποίηση κατάστασης/τελεστή προχωρά μέχρι στιγμής μόνο ευρηματικά.

Αυτό σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την επιλογή μας και να υπολογίσουμε τα φάσματα, προκειμένου να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι μια ορισμένη κατάσταση χορδών είναι δυϊκή σε ένα τελεστή της θεωρίας βαθμίδας. Το πλεονέκτημα είναι ότι έτσι τεστάρουμε ταυτόχρονα και την αντιστοιχία AdS/CFT αναλυτικά. Όπως θα γίνει φανερό και σε ό,τι ακολουθεί, τα φάσματα πρέπει να έχουν την κατάλληλη μορφή για να μπορούν πραγματικά να χρησιμοποιηθούν. Οι ενέργειες των χορδών και οι διαστάσεις των τελεστών πρέπει να εκφράζονται συναρτήσει των διατηρούμενων φορτίων και των αντίστοιχων κβαντικών αριθμών. Μόνο με αυτόν τον τρόπο μπορούν οι ενέργειες των κλασικών χορδών, που είναι έγκυρες σε ισχυρή σύζευξη λ , να φιλοξενηθούν κβαντικές διορθώσεις (δηλαδή διορθώσεις α' ή διορθώσεις καμπυλότητας) και να συγκριθούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα σε ασθενή σύζευξη.

Τέλος, με την προσέγγιση αυτή, φέρνουμε πιο κοντά τη δυνατότητα ύπαρξης κλειστών τύπων για τις ενέργειες των χορδών και τις διαστάσεις των δυϊκών τους τελεστών σε ισχυρή σύζευξη. Ενώ προς το παρόν αυτό φαίνεται ιδιαίτερα φιλόδοξο (ακόμα και στο κλασικό επίπεδο), με αρκετή εφευρετικότητα θα μπορούσε να γίνει πολύ πιο προσιτό. Δεν είναι καθόλου προφανές ότι θα είμαστε πάντα σε θέση να μετατρέψουμε χαοτικές εκφράσεις με ασυσχέτιστους τυχαίους συντελεστές που έχουν μία εντελώς απρόβλεπτη και ακανόνιστη μορφή, σε ένα διατεταγμένο και δομημένο σύνολο. Ακόμη και σε αυτές τις ευτυχείς συγκυρίες όπου ένα τέτοιο ενδεχόμενο επιτρέπεται από το ίδιο το πρόβλημα, δεν είναι καθόλου προφανές ότι είναι επίσης και εφικτό, με τα υπολογιστικά και αναλυτικά εργαλεία που έχουμε στη διάθεσή μας.

Στην §2.10.2, παραθέσαμε 4 βήματα που επιτρέπουν την αντιστοίχιση μεταξύ των φασμάτων των δύο θεωριών. Όπως μόλις υποστηρίξαμε, πολύ πριν θελήσουμε να συγκρίνουμε τα φάσματα της AdS/CFT, πρέπει να αναπτύξουμε τεχνικές που μας επιτρέπουν να τα υπολογίσουμε αναλυτικά (και σε κατάλληλη μορφή!). Ο σκοπός του μέρους II της παρούσας διατριβής είναι λοιπόν διττός:

1. Να υπολογίσουμε τις διαστάσεις της $\mathcal{N} = 4$ SYM σε ισχυρή σύζευξη χρησιμοποιώντας χορδές.
2. Αν είναι δυνατόν, να βρούμε κλειστές φόρμουλες για το δυϊκό φάσμα των χορδών.

3.1 Κλασικές Μποζονικές Χορδές στον $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$

Καθ'ότι παρακάτω πρόκειται να ασχοληθούμε εκτενώς με τις κλασικές χορδές, θα ήταν χρήσιμο να διατυπώσουμε άμεσα τις συμβάσεις που θα ακολουθήσουμε κατά τη μελέτη τους. Ας θεωρήσουμε την κίνηση μιας κλειστής κλασικής και αφόρτιστης μποζονικής χορδής εντός του $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$:

$$\begin{aligned} Y_{05} &= Y_0 + iY_5 = \ell \cosh \rho e^{it} & X_{12} &= X_1 + iX_2 = R \cos \bar{\theta}_1 e^{i\bar{\phi}_1} \\ Y_{12} &= Y_1 + iY_2 = \ell \sinh \rho \cos \theta e^{i\phi_1} & \& & X_{34} &= X_3 + iX_4 = R \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_2 e^{i\bar{\phi}_2} \\ Y_{34} &= Y_3 + iY_4 = \ell \sinh \rho \sin \theta e^{i\phi_2} & & & X_{56} &= X_5 + iX_6 = R \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_2 e^{i\bar{\phi}_3}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου Y^μ και X^i είναι οι συντεταγμένες εμφάπτισης (embedding) του $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ και $\rho \geq 0$, $t \in [0, 2\pi)$, $\bar{\theta}_1 \in [0, \pi]$ και $\theta, \phi_1, \phi_2, \bar{\theta}_2, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3 \in [0, 2\pi)$. Το αντίστοιχο γραμμικό στοιχείο δίδεται από:¹²

$$\begin{aligned} ds^2 &= \ell^2 \left[-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho \left(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi_1^2 + \sin^2 \theta d\phi_2^2 \right) \right] + \\ &\quad + R^2 \left[d\bar{\theta}_1^2 + \cos^2 \bar{\theta}_1 d\bar{\phi}_1^2 + \sin^2 \bar{\theta}_1 \left(d\bar{\theta}_2^2 + \cos^2 \bar{\theta}_2 d\bar{\phi}_2^2 + \sin^2 \bar{\theta}_2 d\bar{\phi}_3^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Η δράση Polyakov στη σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) είναι:¹³

$$\begin{aligned} S_P &= -\frac{T}{2} \int \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \left[G_{mn}^{AdS}(y) \partial_a y^m \partial_b y^n + G_{mn}^S(x) \partial_a x^m \partial_b x^n \right] d\tau d\sigma = \\ &= \frac{T}{2} \int \left[G_{mn}^{AdS}(y) (\dot{y}^m \dot{y}^n - y'^m y'^n) + G_{mn}^S(x) (\dot{x}^m \dot{x}^n - x'^m x'^n) \right] d\tau d\sigma, \end{aligned} \quad (3.3)$$

όπου $y^m \equiv (t, \rho, \theta, \phi_1, \phi_2)$ και $x^m \equiv (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3)$. Οι σύνδεσμοι Virasoro είναι:

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} \left[G_{mn}^{AdS}(y) (\dot{y}^m \dot{y}^n + y'^m y'^n) + G_{mn}^S(x) (\dot{x}^m \dot{x}^n + x'^m x'^n) \right] = 0 \quad (3.4)$$

$$T_{01} = T_{10} = G_{mn}^{AdS}(y) \dot{y}^m y'^n + G_{mn}^S(x) \dot{x}^m x'^n = 0. \quad (3.5)$$

Οι κυκλικές συντεταγμένες της δράσης $t, \phi_1, \phi_2, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3$, γεννούν τα ακόλουθα διατηρούμενα φορτία:

$$E = \left| \frac{\partial L}{\partial t} \right| = T \ell^2 \int_0^{2\pi} dt \cosh^2 \rho d\sigma \quad J_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = T R^2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_1 \cos^2 \bar{\theta}_1 d\sigma$$

¹²Όπως είδαμε, $R = \ell$ στον $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$. Ωστόσο, ας κρατήσουμε τη συζήτησή μας εντελώς γενική προς το παρόν.

¹³ T είναι η τάση της χορδής, $T \equiv T_1 = 1/2\pi\alpha'$.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = T\ell^2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_1 \sinh^2 \rho \cos^2 \theta d\sigma & J_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = TR^2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_2 \sin^2 \bar{\theta}_1 \cos^2 \bar{\theta}_2 d\sigma \\
S_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = T\ell^2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_2 \sinh^2 \rho \sin^2 \theta d\sigma & J_3 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_3} = TR^2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_3 \sin^2 \bar{\theta}_1 \sin^2 \bar{\theta}_2 d\sigma,
\end{aligned} \quad (3.6)$$

που είναι φορτία εντός κελύφους (on-shell), σε πλήρη συμφωνία με την καθολική ισομετρία $\mathfrak{so}(4, 2) \times \mathfrak{so}(6)$ του $\text{AdS}_5 \times S^5$. Ας καταστρώσουμε επίσης και το φορμαλισμό για τη μπεζονική χορδή στο σύστημα των συντεταγμένων εμβάπτισης.¹⁴

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dY^\mu dY^\nu + \delta_{ij} dX^i dX^j = -dY_0^2 + \sum_{i=1}^{p+1} dY_i^2 - dY_{p+2}^2 + \sum_{i=1}^{q+1} dX_i^2 \quad (3.7)$$

$$-\eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu = Y_0^2 - \sum_{i=1}^{p+1} Y_i^2 + Y_{p+2}^2 = \ell^2 \quad \& \quad \delta_{ij} X^i X^j = \sum_{i=1}^{q+1} dX_i^2 = R^2, \quad (3.8)$$

όπου $\eta_{\mu\nu} = (-, +, \dots, +, -)$ και $\delta_{ij} = (+, +, \dots, +, +)$. Η δράση Polyakov για τη χορδή στη σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) δίδεται από:

$$S_P = \frac{T}{2} \int \left[\eta_{\mu\nu} (\dot{Y}^\mu \dot{Y}^\nu - \dot{Y}^\mu \dot{Y}^\nu) + (\dot{X}^i \dot{X}^i - \dot{X}^i \dot{X}^i) + \right. \quad (3.9)$$

$$\left. + \Lambda (\eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu + \ell^2) + \tilde{\Lambda} (X^i X^i - R^2) \right] d\tau d\sigma. \quad (3.10)$$

Οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι (Virasoro και Lagrange) στο σύστημα των συντεταγμένων εμβάπτισης είναι:

Εξισώσεις Κίνησης	Σύνδεσμοι Virasoro	Σύνδεσμοι Lagrange
$\ddot{Y}^\mu - (Y^\mu)'' = \Lambda Y^\mu,$	$\eta_{\mu\nu} (\dot{Y}^\mu \dot{Y}^\nu + \dot{Y}^\mu \dot{Y}^\nu) + \dot{X}^i \dot{X}^i + \dot{X}^i \dot{X}^i = 0,$	$\eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu = -\ell^2$
$\ddot{X}^i - (X^i)'' = \tilde{\Lambda} X^i,$	$\eta_{\mu\nu} \dot{Y}^\mu \dot{Y}^\nu + \dot{X}^i \dot{X}^i = 0,$	$X^i X^i = R^2.$

$$\quad (3.11)$$

$$\quad (3.12)$$

Το σύστημα (3.10) έχει τους ακόλουθους 15 + 15 νόμους διατήρησης,

$$S^{\mu\nu} = T \int (Y^\mu \dot{Y}^\nu - Y^\nu \dot{Y}^\mu) d\sigma, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (3.13)$$

¹⁴Οι ακόλουθες συμβάσεις για τους δείκτες έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα και θα εφαρμοστούν και σε ό,τι ακολουθεί. Για ένα p -διάστατο εκτεταμένο αντικείμενο (p -βράνη) σε $D = d + 1$ χωροχρονικές διαστάσεις οι συντεταγμένες της βράνης $\sigma_a = \{\tau, \sigma, \delta, \dots\}$ συμβολίζονται με μικρούς λατινικούς δείκτες της σειράς $(a, b, c, \dots)$. Η σειρά $(m, n, r, s, \dots)$ δηλώνει χωροχρονικές συντεταγμένες (που λαμβάνουν τις τιμές $0, 1, 2, \dots, d$). Η σειρά των ελληνικών γραμμάτων $(\mu, \nu, \dots)$ γενικά θα χρησιμοποιηθεί σε περίπτωση μετρικών με υπογραφή Minkowski, ενώ τα χωρικά μέρη και οι Ευκλείδειες μετρικές, π.χ. το χωρικό μέρος του χωροχρόνου (που λαμβάνει τιμές $1, 2, \dots, d$), το χωρικό μέρος του κοσμικού φύλλου/όγκου $(\sigma, \delta, \dots)$, τα βαθμωτά πεδία ϕ , κλπ. γενικώς θα χρησιμοποιούν τους δείκτες της σειράς $(i, j, k, \dots)$. Συντεταγμένες με μικρά ελληνικά γράμματα της σειράς $(\alpha, \beta, \dots)$, με τελεία ή χωρίς) συνήθως δηλώνουν τις συντεταγμένες σπινόρων Weyl, ενώ γράμματα Fraktur $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots)$ ονοματίζουν τους γεννήτορες κάποιας ομάδας Lie. Όσον αφορά τις μονάδες, χρησιμοποιείται $c = 1$.

$$J^{ij} = T \int \left(X^i \dot{X}^j - X^j \dot{X}^i \right) d\sigma, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (3.14)$$

που είναι συμβατοί με την καθολική συμμετρία $\mathfrak{so}(4, 2) \times \mathfrak{so}(6)$ του $\text{AdS}_5 \times S^5$ και τη δράση (3.10).

Ένας πολύ βολικός εναλλακτικός τρόπος για να εκφράσουμε τη δράση (3.10), τις εξισώσεις κίνησης και τους συνδέσμους (3.11)–(3.12), είναι μέσω των συντεταγμένων κώνου φωτός του κοσμικού φύλλου $\xi_{\pm}$ που ορίζονται ως εξής:

$$\xi_{\pm} = \frac{1}{2} (\tau \pm \sigma) \quad \partial_{\pm} = \partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma} \quad (3.15)$$

$$\tau = \xi_+ + \xi_- \quad \longrightarrow \quad \partial_{\tau} = \frac{1}{2} (\partial_+ + \partial_-) \quad (3.16)$$

$$\sigma = \xi_+ - \xi_- \quad \partial_{\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_+ - \partial_-). \quad (3.17)$$

Η δράση είναι

$$S_P = \frac{T}{2} \int \left[\eta_{\mu\nu} \partial_+ Y^{\mu} \partial_- Y^{\nu} + \partial_+ X^i \partial_- X^i + \Lambda (\eta_{\mu\nu} Y^{\mu} Y^{\nu} + \ell^2) + \tilde{\Lambda} (X^i X^i - R^2) \right] d\tau d\sigma, \quad (3.18)$$

ενώ οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι Virasoro/Lagrange (3.11)–(3.12) γράφονται ως:

Εξισώσεις Κίνησης	Σύνδεσμοι Virasoro	Σύνδεσμοι Lagrange	
$\partial_+ \partial_- Y^{\mu} = \Lambda Y^{\mu},$	$\eta_{\mu\nu} \partial_+ Y^{\mu} \partial_+ Y^{\nu} + \partial_+ X^i \partial_+ X^i = 0,$	$\eta_{\mu\nu} Y^{\mu} Y^{\nu} = -\ell^2$	(3.19)
$\partial_+ \partial_- X^i = \tilde{\Lambda} X^i,$	$\eta_{\mu\nu} \partial_- Y^{\mu} \partial_- Y^{\nu} + \partial_- X^i \partial_- X^i = 0,$	$X^i X^i = R^2.$	(3.20)

Ο φορμαλισμός που αναπτύξαμε χρησιμεύει πολύ στην απόδειξη κάποιων σημαντικών αναγωγών του κλασσικού σίγμα μοντέλου της χορδής.

3.2 Αναγωγή Pohlmeyer

Σύμφωνα με την αναγωγή Pohlmeyer [40], το κλασικό σίγμα μοντέλο της χορδής στον $\mathbb{R} \times S^2$ μπορεί να αναχθεί στην κλασική sine-Gordon (sG) εξίσωση¹⁵ και το σίγμα μοντέλο της χορδής στον $\mathbb{R} \times S^3$ είναι κλασικά ισοδύναμο με την εξίσωση complex sine-Gordon (CsG). Παρόμοιες αναγωγές [42, 43] έχουν πραγματοποιηθεί για τα σίγμα μοντέλα των χορδών στους χώρους $\text{AdS}_{2/3/4}$, τα οποία μπορούν να αναχθούν στη Liouville, sinh-Gordon και B₂-Toda εξίσωση αντίστοιχα. Οι αναγωγές αυτές συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

<u>σ-Μοντέλο</u>	<u>Αναγωγή Pohlmeyer</u>	<u>εξίσωση</u>
$\mathbb{R} \times S^2$	sine-Gordon (sG)	$\partial_+ \partial_- \phi + \frac{\ell^2}{R^2} \sin \phi = 0$
$\mathbb{R} \times S^3$	Complex sine-Gordon (CsG)	$\partial_+ \partial_- \psi + \frac{\psi^*}{\ell^2 R^2} \frac{\partial_+ \psi \partial_- \psi}{\ell^2 - \psi ^2} + \frac{\psi}{R^2} (\ell^2 - \psi ^2) = 0$

¹⁵Ο Mikhailov έδειξε ότι τα δύο μοντέλα δεν είναι ισοδύναμα στο κβαντικό επίπεδο [41].

AdS ₂	Liouville	$\partial_+ \partial_- a - e^a = 0$
AdS ₃	sinh-Gordon	$\partial'_+ \partial'_- \hat{a} - 2 \sinh \hat{a} = 0$
AdS ₄	B ₂ -Toda	$\partial'_+ \partial'_- \hat{a} - e^{\hat{a}} - e^{-\hat{a}} \cos b = 0$ $\partial'_+ \partial'_- b - e^{-\hat{a}} \sin b = 0$

Τα πεδία Pohlmeyer ϕ , ψ , a και $\hat{a}$ ορίζονται ως εξής:¹⁶

$$\partial_+ X^i \partial_- X^i \equiv \ell^2 \cos \phi, \quad \psi \equiv \ell \sin \frac{\phi}{2} e^{i\chi/2} \cos \phi \quad (3.21)$$

$$K_i \partial_{\pm}^2 X_i = \pm \ell^2 \partial_{\pm} \chi \tan \frac{\phi}{2} \sin \phi, \quad K_i \equiv e_{ijkl} X_j \partial_+ X_k \partial_- X_l \quad (3.22)$$

$$\eta_{\mu\nu} \partial_+ Y^\mu \partial_- Y^\nu \equiv e^a, \quad \hat{a} \equiv a - \frac{1}{2} \ln(-u \cdot v / \ell^2), \quad (3.23)$$

όπου $u = u(\xi_+)$, $v = v(\xi_-)$. Οι τονισμένες συντεταγμένες $\xi'_\pm$ δίδονται από

$$\xi'_+ \equiv \xi_+ \sqrt{\frac{-u(\xi_+)}{\ell}} \quad \& \quad \xi'_- \equiv \xi_- \sqrt{\frac{v(\xi_-)}{\ell}}. \quad (3.24)$$

Όπως έδειξε ο Μπάκας το 1993 [44], η complex sine-Gordon (CsG) εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως ένα gauged Wess-Zumino-Witten μοντέλο (gWZW) στο σύμπλοκο χώρο $\mathfrak{su}(2)/\mathfrak{u}(1)$. Όπως είδαμε, η εξίσωση CsG δίνει την αναγωγή Pohlmeyer των κλασικών χορδών στον $\mathbb{R} \times S^3$. Κάποιος θα μπορούσε εύλογα να ρωτήσει κατά πόσο γίνεται να αξιοποιηθεί το γεγονός ότι η IIB υπερχορδή στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ παραμετροποιείται με βάση το υπερσύμπλοκο (2.10), προκειμένου να γραφτεί ένα gWZW μοντέλο γι' αυτό σε κάποιο κατάλληλο σύμπλοκο χώρο. Το τελευταίο θα αντιστοιχούσε στην αναγωγή Pohlmeyer του κλασικού IIB μοντέλου της υπερχορδής στον $\text{AdS}_5 \times S^5$. Πράγματι, η αναγωγή Pohlmeyer για την IIB υπερχορδή στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ έχει γίνει σύμφωνα με τα όσα μόλις περιγράψαμε στις εργασίες [45, 46]. Το gWZW μοντέλο ορίζεται επί του συμπλόκου

$$\frac{G}{H} = \frac{\mathfrak{so}(4,1) \times \mathfrak{so}(5)}{\mathfrak{su}(2)^4} \quad (3.25)$$

και παραμορφώνεται από ένα ολοκληρώσιμο δυναμικό και φερμιονικούς όρους.

3.3 Αναγωγή Neumann-Rosochatius στον $\mathbb{R} \times S^5$

Υπάρχει μία μεγάλη κατηγορία από κλασικές περιστρεφόμενες χορδές στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ που μπορούν να αναχθούν σε ορισμένα μονοδιάστατα ολοκληρώσιμα συστήματα που περιγράφουν ένα σωματίδιο που ταλαντώνεται επί μιας σφαίρας: το σύστημα Neumann [47, 48]. Μια ειδική περίπτωση του συστήματος Neumann δίνεται από όλες τις χορδές που περιστρέφονται σαν στερεά σώματα στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ και καλείται σύστημα Neumann-Rosochatius (NR). Το σύστημα NR είναι φυσικά ξανά ολοκληρώσιμο και περιγράφει ένα σωματίδιο επί μιας σφαίρας και εντός του δυναμικού $r^2 + r^{-2}$.

Στα επόμενα πρόκειται να παρουσιάσουμε μία γενίκευση των ansätze των Neumann και Neumann-Rosochatius (βλέπε [49]), που θα μας επιτρέψει να εξάγουμε δύο μη στερεά περιστρεφόμενες λύσεις

¹⁶Ο ορισμός του b μπορεί να βρεθεί στις αναφορές [42].

χορδών στον $\mathbb{R} \times S^2$, το (απείρου μεγέθους) γιγάντιο μαγνόνιο και την απλή ακίδα (single spike). Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο ansatz στον $\mathbb{R} \times S^5$:

$$\left\{ t = \kappa\tau, \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0 \right\} \times \left\{ Z_i = z_i(\xi) e^{i\omega_i\tau} \right\}, \quad \xi = \alpha\sigma + \beta\tau \ \& \ z_i(\xi + 2\pi\alpha) = z_i(\xi), \quad (3.26)$$

όπου $Z_i = \{X_{12}, X_{34}, X_{56}\}$, $i = 1, 2, 3$ είναι οι συντεταγμένες εμβάπτισης της 5-διάστατης σφαίρας (3.1) και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Το (3.26) είναι το γενικευμένο ansatz του Neumann. Η σύμμορφη δράση της χορδής (3.10) γράφεται:

$$S_P = \frac{T}{2} \int \left[-\ell^2 \kappa^2 + \left(\dot{Z}^i \dot{\bar{Z}}^i - \dot{Z}^i \dot{\bar{Z}}^i \right) + \tilde{\Lambda} (Z^i \bar{Z}^i - R^2) \right] d\tau d\sigma. \quad (3.27)$$

Το ansatz (3.26) οδηγεί στις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης και συνδέσμους Lagrange:

$$(\alpha^2 - \beta^2) z_i'' - 2i\beta\omega_i z_i' + \omega_i^2 z_i + \tilde{\Lambda} z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 |z_i|^2 = R^2, \quad (3.28)$$

όπου όλες οι παράγωγοι του z λαμβάνονται ως προς τη μεταβλητή ξ . Οι σύνδεσμοι Virasoro δίδονται από

$$\sum_{i=1}^3 2\beta |z_i'|^2 + i\omega_i (z_i \bar{z}_i' - \bar{z}_i z_i') = 0 \quad (3.29)$$

$$\sum_{i=1}^3 (\alpha^2 + \beta^2) |z_i'|^2 + \omega_i^2 |z_i|^2 + i\beta\omega_i (z_i \bar{z}_i' - \bar{z}_i z_i') = \ell^2 \kappa^2. \quad (3.30)$$

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συνδέσμους, η Λαγκρανζιανή και η Χαμιλτονιανή του συστήματος Neumann γράφονται:

$$\mathcal{L} = -\ell^2 \kappa^2 + \sum_{i=1}^3 (\beta^2 - \alpha^2) |z_i'|^2 + i\beta\omega_i (z_i \bar{z}_i' - \bar{z}_i z_i') + \omega_i^2 |z_i|^2 + \tilde{\Lambda} (|z_i|^2 - R^2) \quad (3.31)$$

$$\mathcal{H} = -\ell^2 \kappa^2 + \sum_{i=1}^3 \left[(\alpha^2 - \beta^2) |z_i'|^2 + \omega_i^2 |z_i|^2 \right] = 0. \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

Στο ansatz των Neumann-Rosochatius, το z_i έχει την εξής μορφή:

$$z_i(\xi) = r_i(\xi) e^{i\mu_i(\xi)}. \quad (3.34)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.34), οι εξισώσεις κίνησης (3.28) γράφονται ως:

$$(\alpha^2 - \beta^2) (r_i'' - r_i \mu_i'^2) + 2\beta\omega_i r_i \mu_i' + \omega_i^2 r_i + \tilde{\Lambda} r_i = 0 \quad \& \quad \mu_i' = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{C_i}{r_i^2} + \beta\omega_i \right], \quad (3.35)$$

όπου C_i είναι πραγματικές σταθερές ολοκλήρωσης. Οι σύνδεσμοι (Lagrange και Virasoro) του συστήματος γράφονται ως:

$$\sum_{i=1}^3 2\beta (r_i'^2 + r_i^2 \mu_i'^2) + 2\omega_i r_i^2 \mu_i' = 0 \quad \& \quad \sum_{i=1}^3 r_i^2 = R^2 \quad (3.36)$$

$$\sum_{i=1}^3 (\alpha^2 + \beta^2) (r_i'^2 + r_i^2 \mu_i'^2) + \omega_i^2 r_i^2 + 2\beta \omega_i r_i^2 \mu_i' = \ell^2 \kappa^2. \quad (3.37)$$

Η NR Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή δίδονται από:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \left\{ (\beta^2 - \alpha^2) \left[r_i'^2 + \left(\mu_i' + \frac{\beta \omega_i}{\beta^2 - \alpha^2} \right)^2 r_i^2 \right] - \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \omega_i^2 r_i^2 \right\} + \tilde{\Lambda} \left[\sum_{i=1}^3 r_i^2 - R^2 \right] - \ell^2 \kappa^2 \quad (3.38)$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^3 \left\{ (\alpha^2 - \beta^2) (r_i'^2 + r_i^2 \mu_i'^2) + R^2 \omega_i^2 \right\} - \ell^2 \kappa^2 = 0. \quad (3.39)$$

Οι εξισώσεις (3.35)–(3.39) μπορούν να απλοποιηθούν περαιτέρω χρησιμοποιώντας την τιμή του μ_i' στην (3.35):

$$(\alpha^2 - \beta^2) r_i'' - \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{C_i^2}{r_i^3} + \left[\frac{\alpha^2 \omega_i^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \tilde{\Lambda} \right] r_i = 0 \quad \& \quad \sum_{i=1}^3 r_i^2 = R^2. \quad (3.40)$$

Οι σύνδεσμοι Virasoro είναι:

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ (\alpha^2 - \beta^2) r_i'^2 + \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{C_i^2}{r_i^2} + \alpha^2 \omega_i^2 r_i^2 + 2\beta C_i \omega_i \right] \right\} = \ell^2 \kappa^2 \quad \& \quad \ell^2 \beta \kappa^2 + \sum_{i=1}^3 C_i \omega_i = 0. \quad (3.41)$$

Η Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή πυκνότητα του συστήματος με τις εξισώσεις κίνησης (3.40) είναι:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \left\{ (\beta^2 - \alpha^2) r_i'^2 - \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} \frac{C_i^2}{r_i^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \omega_i^2 r_i^2 \right\} + \tilde{\Lambda} \left[\sum_{i=1}^3 r_i^2 - R^2 \right] - \ell^2 \kappa^2 \quad (3.42)$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^3 \left\{ (\alpha^2 - \beta^2) r_i'^2 + \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{C_i^2}{r_i^2} + \alpha^2 \omega_i^2 r_i^2 + 2\beta C_i \omega_i \right] \right\} - \ell^2 \kappa^2 = 0. \quad (3.43)$$

4 Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP)

Το 2002 οι Gubser, Klebanov και Polyakov (GKP) [11], πρότειναν τη μελέτη κλειστών μποζονικών και αφόρτιστων χορδών που περιστρέφονται ή πάλλονται εντός του $\text{AdS}_5 \times S^5$, προκειμένου να υπολογιστούν οι (ανώμαλες) διαστάσεις κλίμακας των δυϊκών τους τελεστών στη θεωρία SYM σε ισχυρή σύζευξη, περιοχή που είναι απρόσιτη στη θεωρία διαταραχών από την πλευρά της θεωρίας βαθμίδας. Η εργασία των Gubser, Klebanov και Polyakov περιέχει τρία ansätze χορδών για τα οποία η σχέση ενέργειας-στροφορμής¹⁷ υπολογίζεται:

I. μία κλειστή χορδή που περιστρέφεται στερεά εντός του $\text{AdS}_3 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$.

II. μία κλειστή χορδή που περιστρέφεται στερεά γύρω από τον πόλο της S^2 στον $\mathbb{R} \times S^2 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$.

III. μία κλειστή χορδή που πάλλεται εντός του $\text{AdS}_3 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$.

Κάθε μία από αυτές τις χορδές είναι δυϊκή σε ένα τοπικό, αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστή μονού ίχνους της $\mathcal{N} = 4$ SYM, οι (ανώμαλες) διαστάσεις κλίμακας του οποίου σε ισχυρή σύζευξη είναι ίσες με την ενέργεια της κλειστής κατάστασης χορδής.

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε τις τρεις βασικές περιπτώσεις των GKP (I, II, III). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, όλες οι χορδές GKP είναι μποζονικές και αφόρτιστες, και έτσι ο φορμαλισμός που αναπτύχθηκε στην §3.1 θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμος. Όπως θα εξηγηθεί με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω, οι μεγάλες χορδές GKP ανήκουν σε μια ομάδα περιπτώσεων όπου οι ολοκληρώσιμες μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί μέχρι στιγμής δεν είναι πολύ αποτελεσματικές. Αυτό σημαίνει ότι πιο παραδοσιακές μέθοδοι (δηλαδή τετραγωνισμοί), θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να υπολογιστούν τα φάσματα σε αυτήν την περίπτωση. Στην §5 θα δούμε πώς η προβλεπτική ικανότητα των συνηθισμένων φασματικών μεθόδων μπορεί να ενισχυθεί σημαντικά συστηματοποιώντας τον υπολογισμό των κλασικών ενεργειών των χορδών. Στην §8 οι μέθοδοι αυτές θα εφαρμοσθούν σε ένα ακόμη κλασσικό σύστημα χορδών, το γιγάντιο μαγνόνιο (giant magnon).

Η περίπτωση (I) των GKP, που περιγράφει μια περιστρεφόμενη διπλωμένη χορδή στον AdS_3 , είναι ίσως η πιο δημοφιλής και έχει αναλυθεί διεξοδικά από την πρώτη στιγμή που εμφανίστηκε. Η παρατήρηση-κλειδί των GKP ήταν ότι η ενέργεια μείον τη στροφορμή μιας μεγάλης διπλωμένης χορδής που περιστρέφεται εντός του AdS_3 , συμπεριφέρεται σαν το λογάριθμο της στροφορμής:

$$E - S = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \ln \frac{S}{\sqrt{\lambda}}, \quad S, \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Αυτή η συμπεριφορά είναι οικεία από τη μελέτη των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών Wilson με συστροφή (twist) 2 στην διαταραχτική QCD. Πράγματι, οι GKP προχώρησαν στην αναπαράγωγή αυτής της λογαριθμικής συμπεριφοράς υπολογίζοντας ουσιαστικά τις ανώμαλες διαστάσεις των ακόλουθων τελεστών υψηλού σπίν και συστροφής-2 στην $\mathcal{N} = 4$ SYM:¹⁸

$$\mathcal{O}_S = \text{Tr} [\mathcal{Z} \mathcal{D}_+^S \mathcal{Z}] + \dots, \quad S \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

όπου οι τελείες στην (4.2) συμβολίζουν όλες τις πιθανές κατανομές της παραγώγου του κώνου φωτός $\mathcal{D}_+$ μεταξύ των δύο πεδίων $\mathcal{Z}$, ενώ κάθε όρος του αθροίσματος πολλαπλασιάζεται με ένα κατάλληλο

¹⁷Γνωστή και ως «σχέση διασποράς». Εναλλακτικά, ο όρος «ανώμαλη διάσταση» θα χρησιμοποιείται σε αυτή την διατριβή, δεδομένου ότι η ενέργεια μείον τη στροφορμή της χορδής είναι ίση με τις ανώμαλες διαστάσεις του δυϊκού τελεστή της θεωρίας βαθμίδας.

¹⁸Τελεστές με συστροφή J , $\text{Tr} [\mathcal{D}_+^{S_1} \mathcal{Z} \mathcal{D}_+^{S_2} \mathcal{Z} \dots \mathcal{D}_+^{S_J} \mathcal{Z}]$, με $S_1 + S_2 + \dots + S_J = S$ ανήκουν στον κλειστό, μη-συμπαγή $\mathfrak{sl}(2)$ τομέα της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Ο τομέας $\mathfrak{sl}(2)$ είναι δυϊκός στις χορδές που περιστρέφονται στον $\text{AdS}_3 \times S^1$ και ο τελεστής διαστολής του δίνεται από τη Χαμιλτονιανή της σιδηρομαγνητικής $\text{XXX}_{-1/2}$ αλυσίδας σπίν Heisenberg.

συντελεστή. Στην πραγματικότητα ο υπολογισμός είναι σχεδόν ταυτόσημος με εκείνον της QCD. Ωστόσο, το διαταρακτικό αποτέλεσμα συμπεριφέρεται ως λ αντί για $\sqrt{\lambda}$ στην (4.1). Οι GKP υπέθεσαν ότι η διαφορά αυτή θα μπορούσε να καλυφθεί από τις κβαντικές διορθώσεις που λαμβάνει το αποτέλεσμα της θεωρίας βαθμίδας. Θα έχουμε περισσότερα να πούμε για τις ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών συστροφής-2 της QCD, της $\mathcal{N} = 4$ SYM και της περιστρεφόμενης χορδής στον AdS_3 , στην §5.

Η περίπτωση (II) των GKP που περιγράφει μια διπλωμένη περιστρεφόμενη χορδή στον $\mathbb{R} \times S^2$, έχει επίσης μελετηθεί πολύ διεξοδικά. Στην αρχική τους πραγματεία [11], οι Gubser, Klebanov και Polyakov εξήγαγαν την ακόλουθη εξίσωση για τις ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας σε ισχυρή σύζευξη, που είναι δυϊκοί στην κλειστή διπλωμένη χορδή (II) του $\mathbb{R} \times S^2$:

$$E - J = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}, \quad J = \infty, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Όλες οι κλειστές διπλωμένες χορδές με μία στροφορμή, που περιστρέφονται στον $\mathbb{R} \times S^2$, μπορούν να αναλυθούν σε πιο στοιχειώδεις διεγέρσεις της θεωρίας χορδών, που είναι γνωστές ως γιγάντια μαγνόνια (giant magnons). Αυτά είναι ανοικτές χορδές ενός σπίν, που περιστρέφονται στον $S^2 \subset S^5$ και ταυτοποιήθηκαν το 2006 από τους Hofman και Maldacena [50] ως οι δυϊκές διεγέρσεις των μαγνωνίων της $\mathcal{N} = 4$ SYM, από την πλευρά της θεωρίας χορδών. Η σχέση ενέργειας-σπίν ενός γιγάντιου μαγνωνίου με γωνιακή έκταση $\Delta\varphi$ είναι:

$$E - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right|, \quad J = \infty, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.4)$$

όπου $\Delta\varphi = p$ είναι η ορμή του δυϊκού του μαγνωνίου. Υπερθέτοντας δύο γιγάντια μαγνόνια μέγιστης γωνιακής έκτασης $\Delta\varphi = \pi$ και στροφορμής $J/2$, λαμβάνουμε την εξίσωση των GKP (4.3). Η χορδή GKP (II) είναι επομένως δυϊκή στους τελεστές της $\mathcal{N} = 4$ SYM με δύο μαγνόνια:

$$\mathcal{O}_J = \text{Tr} [\mathcal{Z}^J \mathcal{X}^2] + \dots, \quad J \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Περισσότερα για το γιγάντιο μαγνόνιο και τη σχέση του με τη χορδή GKP (II) θα ειπωθούν στις §6–§7, όπου τα γιγάντια μαγνόνια θα μελετηθούν λεπτομερέστερα.

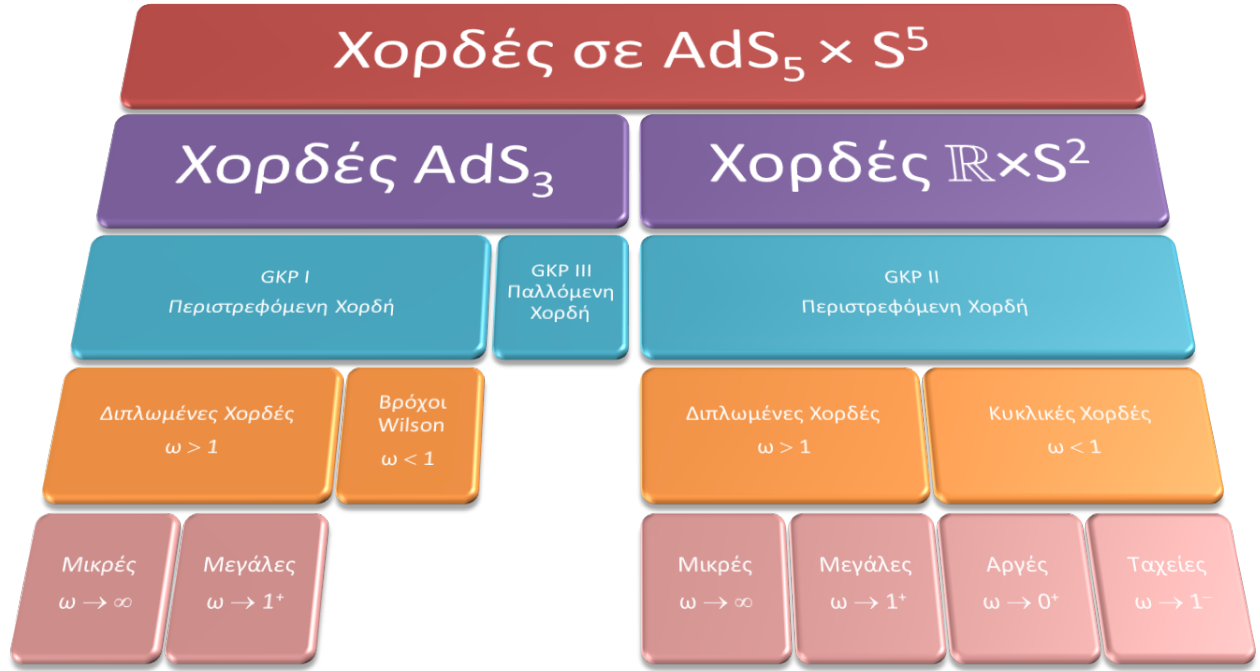
Οι δύο περιστρεφόμενες χορδές GKP (I - II) υπαχούν δυαδικότητες μικρών-μεγάλων χορδών που συνδέουν τις κλασικές τιμές των διατηρούμενων ενεργειών και σπίν τους στην περιοχή των μικρών χορδών με τις τιμές των φορτίων αυτών στην περιοχή των μεγάλων χορδών. Αυτές οι δυαδικότητες είναι πολύ ενδιαφέρουσες, διότι ίσως να υπάρχει η δυνατότητα αναβάθμισής τους στο κβαντικό επίπεδο. Μια τέτοια προοπτική θα προσέφερε τη δυνατότητα χρήσης των ενεργειών των μικρών χορδών, για τις οποίες είναι διαθέσιμα καταπληκτικά αποτελέσματα από την ολοκληρωσιμότητα (συνάρτηση κλίσης Basso, κβαντική φασματική καμπύλη, κλπ.), για να υπολογιστούν οι ενέργειες των μεγάλων χορδών, για τις οποίες οι υπάρχουσες μέθοδοι δεν είναι εξίσου προφητικές όπως έχουμε πει.

Η περίπτωση (III) των GKP αποτελείται από μία χορδή που πάλλεται εντός του AdS_3 . Η μελέτη παλλόμενων χορδών στον χωροχρόνο anti-de Sitter ξεκίνησε πριν από πολύ καιρό από τους de Vega, Larsen και Sánchez [51] στο πλαίσιο της κοσμολογίας χορδών. Οι Gubser-Klebanov-Polyakov [11] προσέγγισαν την ενέργεια των μικρών παλλόμενων χορδών στον AdS_3 με τον ακόλουθο τύπο:

$$E \sim \sqrt{\sqrt{\lambda} \cdot n} \quad (4.6)$$

όπου n είναι το επίπεδο διεγέρση της χορδής. Ωστόσο, δεν ήταν αρχικά σαφές πώς να επεκτείνει κανείς αυτόν τον τύπο για μεγάλες τιμές της ενέργειας E και του επιπέδου n , αλλά ούτε και σε ποιους τελεστές της θεωρίας βαθμίδας ήταν δυϊκή η παλλόμενη χορδή των GKP. Και οι δύο αυτές ερωτήσεις απαντήθηκαν από τον Minahan στην εργασία [52]. Οι τελεστές της $\mathcal{N} = 4$ SYM που είναι δυϊκοί στις παλλόμενες χορδές GKP είναι

$$\mathcal{O}_n = \text{Tr} [\mathcal{Z} \mathcal{D}_+^n \mathcal{D}_-^n \mathcal{Z}] + \dots, \quad (4.7)$$



Σχήμα 1: Οι χορδές GKP.

όπου και πάλι οι τελείες συμβολίζουν όλες τις πιθανές μεταθέσεις των παραγώγων του κώνου φωτός $D_{\pm}$ ανάμεσα στα δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία και κάθε όρος στο άθροισμα πολλαπλασιάζεται με έναν κατάλληλο συντελεστή. Η ακριβής μορφή των τελεστών $\mathcal{O}_n$ θα δοθεί στην §4.3.1, όπου η παλλόμενη χορδή GKP θα κβαντιστεί αλά WKB και θα εξαχθεί μια ημικλασική σχέση διασποράς που θα ισχύει για όλες τις τιμές του επιπέδου της χορδής n . Η διόρθωση ενός βρόχου για την ενέργεια της παλλόμενης χορδής υπολογίστηκε στην [53].

Αυτή η ενότητα οργανώνεται ως εξής. Στην §4.1 πρόκειται να παρουσιαστεί η περιστρεφόμενη χορδή GKP στον AdS_3 (περίπτωση I). Ανάλογα με το αν η γωνιακή ταχύτητα ω της χορδής είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη μονάδα, η χορδή είτε διπλώνει στα άκρα της και περιστρέφεται σαν στερεό σώμα στον AdS_3 ($\omega > 1$) ή αγγίζει το σύνορο του AdS ($\omega < 1$). Στην πρώτη περίπτωση ($\omega > 1$) υπάρχουν δύο ενδιαφέρουσες οριακές περιπτώσεις, αυτή της «μικρής» χορδής με $\omega \rightarrow \infty$ και εκείνη της «μεγάλης» χορδής για την οποία $\omega \rightarrow 1^+$. Οι αναλυτικές εκφράσεις για τα διατηρούμενα φορτία (δηλαδή την ενέργεια E και το σπίν S) των μικρών και μεγάλων διπλωμένων χορδών GKP δίδονται στις §4.1.1 ανδ §4.1.2. Η δυαδικότητα μικρών-μεγάλων χορδών για τη χορδή GKP (I) θα εξαχθεί στην §4.1.3. Οι χορδές GKP που αγγίζουν το σύνορο του AdS (βρόχοι Wilson) θα παραλειφθούν.

Η περιστρεφόμενη χορδή στον $\mathbb{R} \times S^2$ (περίπτωση II) παρουσιάζεται στην §4.2. Και πάλι υπάρχουν δύο κύριες περιοχές ανάλογα με την τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω , οι διπλωμένες χορδές ($\omega > 1$), είτε μικρές ($\omega \rightarrow \infty$) είτε μεγάλες ($\omega \rightarrow 1^+$), και οι κυκλικές χορδές ($\omega < 1$), οι οποίες εκτείνονται κατά μήκος ενός μεγάλου κύκλου της δισδιάστατης σφαίρας και είναι είτε «αργές» ($\omega \rightarrow 0^+$) είτε «γρήγορες» ($\omega \rightarrow 1^-$). Οι ενότητες §4.2.1–§4.2.2 ασχολούνται με τα διατηρούμενα φορτία (ενέργεια E και σπίν J) της πρώτης περιοχής, και στις §4.2.3–§4.2.4 παρουσιάζεται η δεύτερη περίπτωση. Οι δυαδικότητες μεταξύ

μικρών-μεγάλων και γρήγορων-αργών χορδών αποδεικνύονται στην §4.2.5.

Αυτή η ενότητα ολοκληρώνεται με την παρουσίαση της παλλόμενης χορδής των GKP (περίπτωση III), στην §4.3. Η ημικλασική κβάντωση αυτής της χορδής λαμβάνει χώρα στην §4.3.1.

4.1 Περιστρεφόμενες Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov στον AdS_3

Το ansatz για την κλειστή διπλωμένη χορδή των GKP (I) που περιστρέφεται στον $AdS_3 \subset AdS_5 \times S^5$ είναι:

$$\left\{ t = \kappa\tau, \rho = \rho(\sigma), \theta = \kappa\omega\tau, \phi_1 = \phi_2 = 0 \right\} \times \left\{ \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 = \bar{\phi}_3 = 0 \right\}. \quad (4.8)$$

Σε συντεταγμένες εμβάπτισης η λύση δίνεται από

$$\begin{aligned} Y_0 &= \ell \cosh \rho(\sigma) \cos \kappa\tau, & Y_2 &= Y_4 = 0, & X_1 &= R = \ell \\ Y_1 &= \ell \sinh \rho(\sigma) \cos \kappa\omega\tau & & & X_2 &= X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0 \\ Y_3 &= \ell \sinh \rho(\sigma) \sin \kappa\omega\tau & & & & \\ Y_5 &= \ell \cosh \rho(\sigma) \sin \kappa\tau. & & & & \end{aligned} \quad (4.9)$$

Η δράση Polyakov στη σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) είναι:

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'} \int \left(-\dot{t}^2 \cosh^2 \rho - \rho'^2 + \dot{\theta}^2 \sinh^2 \rho \right) d\tau d\sigma = \quad (4.10)$$

$$= \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'} \int \left(-\kappa^2 \cosh^2 \rho - \rho'^2 + \kappa^2 \omega^2 \sinh^2 \rho \right) d\tau d\sigma, \quad (4.11)$$

Οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι Virasoro (3.4) γράφονται:

$$\rho'' + \kappa^2 (\omega^2 - 1) \sinh \rho \cosh \rho = 0 \quad (4.12)$$

$$\rho'^2 - \kappa^2 (\cosh^2 \rho - \omega^2 \sinh^2 \rho) = 0. \quad (4.13)$$

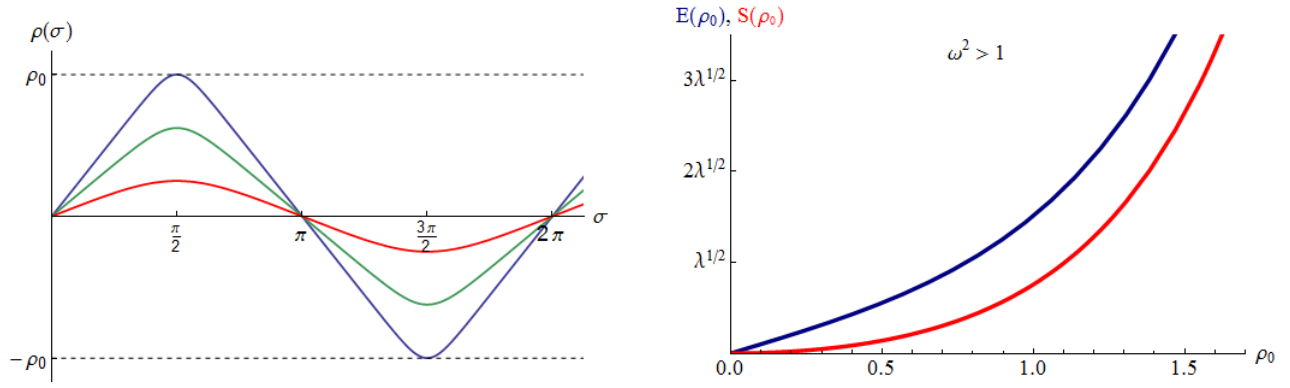
Σύνδεσμοι και εξισώσεις είναι ουσιαστικά ισοδύναμες με την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\rho} &= \frac{1}{\kappa \sqrt{\cosh^2 \rho - \omega^2 \sinh^2 \rho}} = \frac{1}{\kappa \sqrt{1 - (\omega^2 - 1) \sinh^2 \rho}} = \\ &= \frac{1}{\kappa \sqrt{(\omega^2 - 1)(q - \sinh^2 \rho)}}, \quad q \equiv \frac{1}{\omega^2 - 1}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ανάλογα με την τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω , λαμβάνουμε δύο βασικές περιπτώσεις:

(i). $\omega^2 > 1$: Κλειστή περιστρεφόμενη χορδή που διπλώνει στα σημεία $d\sigma/d\rho \Big|_{\rho_0} = \infty$ και

$$0 \leq \sinh^2 \rho \leq \sinh^2 \rho_0 = \frac{1}{\omega^2 - 1} = q < \infty.$$



Σχήμα 2: $\rho = \rho(\sigma)$ και ενέργεια/στροφορμή της κλειστής διπλωμένης χορδής GKP εντός του AdS_3 (4.8), για $\omega > 1$.

α. «Μικρές» Χορδές: $\omega \rightarrow \infty$, $\rho_0 \sim 1/\omega$.

β. «Μεγάλες» Χορδές: $\omega = 1 + 2\eta \rightarrow 1^+$, $\rho_0 \sim \ln 1/\eta \rightarrow \infty$.

(ii). $\omega^2 < 1$: Δύο αντίθετα προσανατολισμένοι, περιστρεφόμενοι βρόχοι Wilson¹⁹ με

$$0 \leq \sinh^2 \rho \leq \sinh^2 \rho_0 = \infty.$$

Τα διατηρούμενα φορτία που αντιστοιχούν στις δύο κυκλικές συντεταγμένες τ και θ δίδονται από τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$E = \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right| = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \kappa \cosh^2 \rho d\sigma = 4 \cdot \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{\rho_0} \frac{\cosh^2 \rho d\rho}{\sqrt{1 - (\omega^2 - 1) \sinh^2 \rho}} \quad (4.15)$$

$$S = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \kappa \omega \sinh^2 \rho d\sigma = 4 \cdot \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{\rho_0} \frac{\omega \sinh^2 \rho d\rho}{\sqrt{1 - (\omega^2 - 1) \sinh^2 \rho}}, \quad (4.16)$$

Η χορδή έχει τέσσερα κομμάτια που εκτείνονται μεταξύ του $\rho = 0$ και του $\rho = \rho_0$. Γι'αυτό το λόγο όλα τα ολοκληρώματα ως προς ρ έχουν πολλαπλασιαστεί επί 4. Θα πρέπει ακόμα να υπολογίσουμε και το μήκος της χορδής

$$\sigma \cdot \kappa = \int_0^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{1 - (\omega^2 - 1) \sinh^2 \rho}}, \quad (4.17)$$

όπου ο παράγοντας κ είναι τέτοιος ώστε $\sigma(\rho_0) = \pi/2$. Προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα θέτουμε $\omega \tanh \rho = \sin \varphi$. Εν συντομία, τα αποτελέσματα είναι:

$$\sigma = \frac{1}{\kappa \omega} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \varphi\right)^{1/2}} = \frac{1}{\kappa \omega} \cdot \mathbb{F}\left(\varphi \left| \frac{1}{\omega^2} \right.\right) \Rightarrow \rho(\sigma) = \text{arctanh} \left[\frac{1}{\omega} \text{sn} \left(\kappa \omega \sigma \left| \frac{1}{\omega^2} \right. \right) \right], \quad (4.18)$$

¹⁹Οι βρόχοι Wilson ακολουθούν στο σύνορο του χώρου anti-de Sitter για $\rho = \infty$.

όπου

$$\kappa = \frac{2}{\pi\omega} \mathbb{F}\left(\varphi_0 \left| \frac{1}{\omega^2} \right.\right) \quad \& \quad \omega \cdot \tanh \rho_0 = \sin \varphi_0$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \varphi\right)^{3/2}} = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega} \cdot \mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{\omega^2}, \varphi_0 \left| \frac{1}{\omega^2} \right.\right) = \\ &= \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'} \left(\frac{\omega}{\omega^2 - 1} \cdot \mathbb{E}\left(\varphi_0 \left| \frac{1}{\omega^2} \right.\right) - \frac{1}{2\omega(\omega^2 - 1)} \frac{\sin 2\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \varphi_0}} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega^2} \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\left(1 - \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \varphi\right)^{3/2}} = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'} \left[\mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{\omega^2}, \varphi_0 \left| \frac{1}{\omega^2} \right.\right) - \mathbb{E}\left(\varphi_0 \left| \frac{1}{\omega^2} \right.\right) \right] = \\ &= \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} \cdot \mathbb{E}\left(\varphi_0 \left| \frac{1}{\omega^2} \right.\right) - \mathbb{F}\left(\varphi_0 \left| \frac{1}{\omega^2} \right.\right) - \frac{1}{2(\omega^2 - 1)} \frac{\sin 2\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \varphi_0}} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Οι ορισμοί των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων πρώτου, δεύτερου και τρίτου είδους, $\mathbb{F}(\varphi|m)$, $\mathbb{E}(\varphi|m)$, $\mathbf{\Pi}(n, \varphi|m)$, καθώς επίσης και εκείνοι της ελλειπτικής συνάρτησης του Jacobi $sn(u|m)$ δίδονται στο παράρτημα **E'**.

$\omega^2 > 1$: Κλειστή διπλωμένη χορδή (AdS₃).

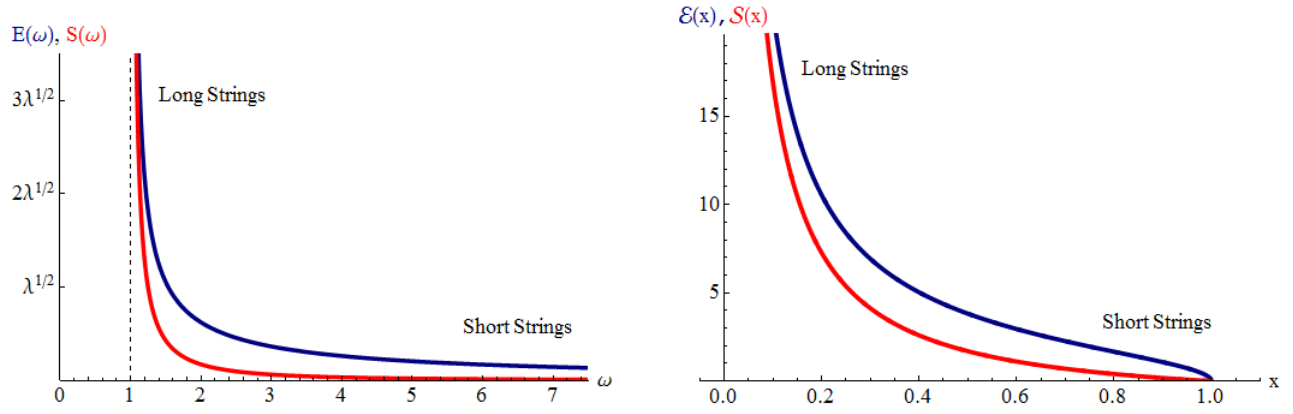
Στην περίπτωση (i) της κλειστής διπλωμένης χορδής με $\omega^2 > 1$, είναι $\varphi_0 = \pi/2$, έτσι ώστε τα ολοκληρώματα (4.15)–(4.17) απλοποιούνται και μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των πλήρων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων:

$$\rho(\sigma) = \operatorname{arctanh} \left[\frac{1}{\omega} sn \left(\kappa \omega \sigma \left| \frac{1}{\omega^2} \right. \right) \right], \quad \kappa = \frac{2}{\pi\omega} \cdot \mathbb{K} \left(\frac{1}{\omega^2} \right), \quad \omega = \coth \rho_0 \quad (4.21)$$

$$E(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \frac{\omega}{\omega^2 - 1} \cdot \mathbb{E} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) \Rightarrow \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\sqrt{1-x}}{x} \cdot \mathbb{E}(1-x) \quad (4.22)$$

$$S(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} \cdot \mathbb{E} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) - \mathbb{K} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) \right] \Rightarrow \mathcal{S} \equiv \frac{\pi S}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{x} \mathbb{E}(1-x) - 2\mathbb{K}(1-x) \quad (4.23)$$

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{S} = 2 \left[\frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \cdot \mathbb{E}(1-x) + \mathbb{K}(1-x) \right], \quad (4.24)$$



Σχήμα 3: Ενέργεια/σπίν της κλειστής διπλωμένης χορδής των GKP στον AdS_3 (4.8), συναρτήσει των $\omega > 1$ και $x > 0$.

όπου $x \equiv 1 - 1/\omega^2$ είναι η συμπληρωματική παράμετρος του $1/\omega^2$. Στα διαγράμματα 2-3 έχουμε σχεδιάσει το $\rho(\sigma)$ για διάφορες τιμές της γωνιακής ταχύτητας $\omega > 1$, όπως επίσης την ενέργεια και το σπίν της χορδής συναρτήσει των ρ_0 , ω και του x . Το σχήμα 4 απεικονίζει το διάγραμμα της ενέργειας της χορδής συναρτήσει της στροφορμής του, ήτοι $E = E(S)$.

4.1.1 Μικρές Χορδές στον AdS_3 : $\omega \rightarrow \infty$, $S \ll \sqrt{\lambda}$

Προκειμένου να λάβουμε το όριο των μικρών χορδών, οι εκφράσεις (4.22)–(4.23) πρέπει να αναπτυχθούν για $\omega \rightarrow \infty$ χρησιμοποιώντας τους τύπους του παραρτήματος Ε':

$$E = \sqrt{\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{2n+1}{\omega^{2n+1}} = \sqrt{\lambda} \cdot \left[\frac{1}{\omega} + \frac{3}{4\omega^3} + \frac{45}{64\omega^5} + \frac{175}{256\omega^7} + O\left(\frac{1}{\omega^9}\right) \right] \quad (4.25)$$

$$S = \sqrt{\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{2n}{\omega^{2n}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cdot \left[\frac{1}{\omega^2} + \frac{9}{8\omega^4} + \frac{75}{64\omega^6} + \frac{1225}{1024\omega^8} + O\left(\frac{1}{\omega^{10}}\right) \right]. \quad (4.26)$$

Για να ληφθεί η σειρά (4.25) χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα

$$(2n+1) \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^2 = 0. \quad (4.27)$$

Με το πρόγραμμα Mathematica μπορούμε ακόμη να υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση για το σπίν $x = x(S)$ καθώς επίσης και την ενέργεια $\mathcal{E} = \mathcal{E}(S)$ συναρτήσει του σπίν S :

$$x = 1 - \frac{2S}{\pi} + \frac{9S^2}{2\pi^2} - \frac{87S^3}{8\pi^3} + \frac{1.765S^4}{64\pi^4} - \frac{37.071S^5}{512\pi^5} + \frac{199.815S^6}{1024\pi^6} - \frac{4.397.017S^7}{8192\pi^7} + \dots \quad (4.28)$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{2} \cdot \left[\pi^{1/2} S^{1/2} + \frac{3S^{3/2}}{8\pi^{1/2}} - \frac{21S^{5/2}}{128\pi^{3/2}} + \frac{187S^{7/2}}{1024\pi^{5/2}} - \frac{9.261S^{9/2}}{32.768\pi^{7/2}} + \frac{136.245S^{11/2}}{262.144\pi^{9/2}} - \dots \right]. \quad (4.29)$$

Η εξάρτηση της (4.29) από τη σταθερά σύζευξης 't Hooft λ μπορεί να καταστεί εμφανής ως εξής:

$$E = \left(2\sqrt{\lambda}S\right)^{1/2} \cdot \left[1 + \frac{3S}{8\sqrt{\lambda}} - \frac{21S^2}{128\lambda} + \frac{187S^3}{1024\lambda^{3/2}} - \frac{9261S^4}{32768\lambda^2} + \frac{136245S^5}{262144\lambda^{5/2}} - O\left(\frac{S^6}{\lambda^3}\right)\right]. \quad (4.30)$$

Κβαντικές διορθώσεις για τη μικρή χορδή του AdS_3 έχουν υπολογιστεί σε 1 βρόχο, στην εργασία [54]:

$$E_{qc} = \left(2\sqrt{\lambda}S\right)^{1/2} \cdot \left[\left(a_{00} + \frac{a_{01}}{\sqrt{\lambda}} + \dots\right) + \left(a_{10} + \frac{a_{11}}{\sqrt{\lambda}} + \dots\right) \frac{S}{\sqrt{\lambda}} + \left(a_{20} + \frac{a_{21}}{\sqrt{\lambda}} + \dots\right) \frac{S^2}{\lambda} + \dots\right],$$

οι λίγιοι πρώτοι συντελεστές είναι,

$$a_{00} = 1, \quad a_{01} = 3 - 4\ln 2, \quad a_{10} = \frac{3}{8}, \quad a_{11} = -\frac{1219}{576} + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\zeta(3).$$

Πιο πρόσφατα αποτελέσματα έχουν βρεθεί από τον Basso [55] καθώς επίσης και από το σύστημα $P\mu$. Δυστυχώς ο χώρος εδώ δεν επαρκεί για να επεκταθούμε σε αυτά τα αποτελέσματα.

4.1.2 Μεγάλες Χορδές στον AdS_3 : $\omega \rightarrow 1^+$, $S \gg \sqrt{\lambda}$

Ας συνοψίσουμε καταρχήν τα αποτελέσματα των [12] που αφορούν στην αντιδιαμετρικά αντίθετη περιοχή $\omega \rightarrow 1^+$ ($S \gg \lambda$):

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\omega} \cdot \left\{ \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+3/2)}{n!(n+1)!} \left[2\psi(n+1) - 2\psi(n+1/2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln(1 - 1/\omega^2) - \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \right] \cdot (1 - 1/\omega^2)^n \right\} = \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\omega} \cdot \left\{ \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} - \frac{1}{4} [\ln(1 - 1/\omega^2) - 4\ln 2 + 1] - \frac{3}{32} (1 - 1/\omega^2) \left[\ln(1 - 1/\omega^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4\ln 2 + \frac{13}{6} \right] - \frac{15}{256} (1 - 1/\omega^2)^2 \left[\ln(1 - 1/\omega^2) - 4\ln 2 + \frac{12}{5} \right] + \dots \right\} \quad (4.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \left\{ \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Gamma(n+1/2))^2}{n!(n+1)!} \left[2\psi(n+1) - 2\psi(n+1/2) - \ln(1 - 1/\omega^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{n+1} \right] \cdot (1 - 1/\omega^2)^n \right\} = \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \left\{ \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} + \frac{1}{4} [\ln(1 - 1/\omega^2) - 4\ln 2 - 1] + \frac{1}{32} (1 - 1/\omega^2) \left[\ln(1 - 1/\omega^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4\ln 2 + \frac{3}{2} \right] + \frac{3}{256} (1 - 1/\omega^2)^2 \left[\ln(1 - 1/\omega^2) - 4\ln 2 + 2 \right] + \dots \right\}. \quad (4.32) \end{aligned}$$

Οι δύο σειρές μπορούν επίσης να εκφραστούν μέσω της συμπληρωματικής παραμέτρου $x \equiv 1 - 1/\omega^2 \rightarrow 0^+$:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{1-x} \cdot \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (d_n \ln x + h_n) \right\} =$$

$$= \frac{2}{x} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} + \sum_{k=0}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} (d_{n-k} \ln x + h_{n-k}) \right\} \quad (4.33)$$

$$\mathcal{S} \equiv \frac{\pi S}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{x} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (c_n \ln x + b_n). \quad (4.34)$$

Οι συντελεστές των σειρών (4.33) και (4.34) δίδονται από:²⁰

$$\begin{aligned} d_n &= -\frac{1}{4} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \\ h_n &= -d_n \cdot \left[4 \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1} \right) + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+1} \right] \\ c_n &= \frac{1}{4} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = -\frac{d_n}{2n+1} \\ b_n &= -c_n \cdot \left[4 \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1} \right) + \frac{1}{n+1} \right], \end{aligned} \quad (4.35)$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$. Αναλυτικά, οι μερικοί πρώτοι εξ'αυτών των συντελεστών είναι:

$$\begin{aligned} d_0 &= -\frac{1}{4}, & d_1 &= -\frac{3}{32}, & d_2 &= -\frac{15}{256} \\ h_0 &= \ln 2 - \frac{1}{4}, & h_1 &= \frac{3}{8} \ln 2 - \frac{13}{64}, & h_2 &= \frac{15}{64} \ln 2 - \frac{9}{64} \\ c_0 &= \frac{1}{4}, & c_1 &= \frac{1}{32}, & c_2 &= \frac{3}{256} \\ b_0 &= -\ln 2 - \frac{1}{4}, & b_1 &= -\frac{1}{8} \ln 2 + \frac{3}{64}, & b_2 &= -\frac{3}{64} \ln 2 + \frac{3}{128}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.1.3 Διαδικότητα Μικρών-Μεγάλων Χορδών

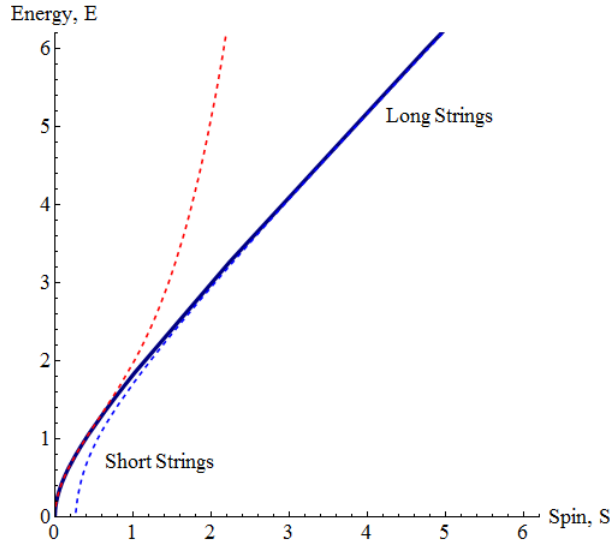
Ακολουθώντας τους Γεωργίου και Σαββίδη [12], θα εξαγάγουμε τώρα έναν τύπο που συνδέει τη διατηρούμενη ενέργεια και το σπίν των «μικρών» χορδών ($\omega \rightarrow \infty$) με την ενέργεια και το σπίν των «μεγάλων» χορδών ($\omega \rightarrow 1^+$). Ας θεωρήσουμε τη σχέση Legendre για τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δεύτερου είδους (βλέπε π.χ. [56, 57]):

$$\mathbb{E}(k)\mathbb{K}(k') + \mathbb{K}(k)\mathbb{E}(k') - \mathbb{K}(k)\mathbb{K}(k') = \frac{\pi}{2}, \quad (4.37)$$

όπου τα ορίσματα $k = 1/\omega^2$ και $k' = x = 1/\omega'^2$ ικανοποιούν τη σχέση $k + k' = 1$. Λύνουμε τις (4.22)–(4.23) ως προς $\mathbb{E}(k)$ και $\mathbb{K}(k)$ και αντικαθιστούμε τις τιμές τους στην (4.37). Λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση μεταξύ κλασικών μικρών και μεγάλων διπλωμένων χορδών που περιστρέφονται εντός του AdS_3 :

$$\frac{1}{\omega} E S' + \frac{1}{\omega'} E' S - S S' = \frac{2\lambda}{\pi}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.38)$$

²⁰Για το διπλό παραγοντικό τίθεται $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$, $(-3)!! = -1$.



Σχήμα 4: Η ενέργεια συναρτήσει του σπίν της κλειστής διπλωμένης χορδής (4.8) του AdS_3 , για $\omega^2 > 1$. Η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή είναι το διάγραμμα των 4 πρώτων όρων στην προσέγγιση της «μικρής» χορδής (4.30), ενώ η μπλε διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην προσέγγιση της «μεγάλης» χορδής (που καθορίζεται από τους συντελεστές (5.104)–(5.105)).

Υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής της (4.38) συναρτήσει των ανώμαλων διαστάσεων $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{S}$:

$$\frac{1}{\omega} \gamma S' + \frac{1}{\omega'} \gamma' S + \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} - 1 \right) S S' = 2\pi, \quad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{S} \equiv \frac{\pi S}{\sqrt{\lambda}}. \quad (4.39)$$

Δεν είναι γνωστό αν δυαδικότητες μικρών-μεγάλων χορδών παρόμοιες με τις (4.38)–(4.39) μπορούν να διατυπωθούν και στο κβαντικό επίπεδο. Μια κλασική δυαδικότητα μικρών-μεγάλων χορδών θα διατυπωθεί επίσης πιο κάτω και για την περίπτωση (II) των GKP. Ακόμη περισσότερες δυαδικότητες μικρών-μεγάλων χορδών μπορούν να βρεθούν στο παράρτημα B'.

4.2 Περιστρεφόμενες Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov στον $\mathbb{R} \times S^2$

Η κλειστή διπλωμένη χορδή GKP (II) έχει το κέντρο της στον πόλο της S^2 και περιστρέφεται γύρω της:

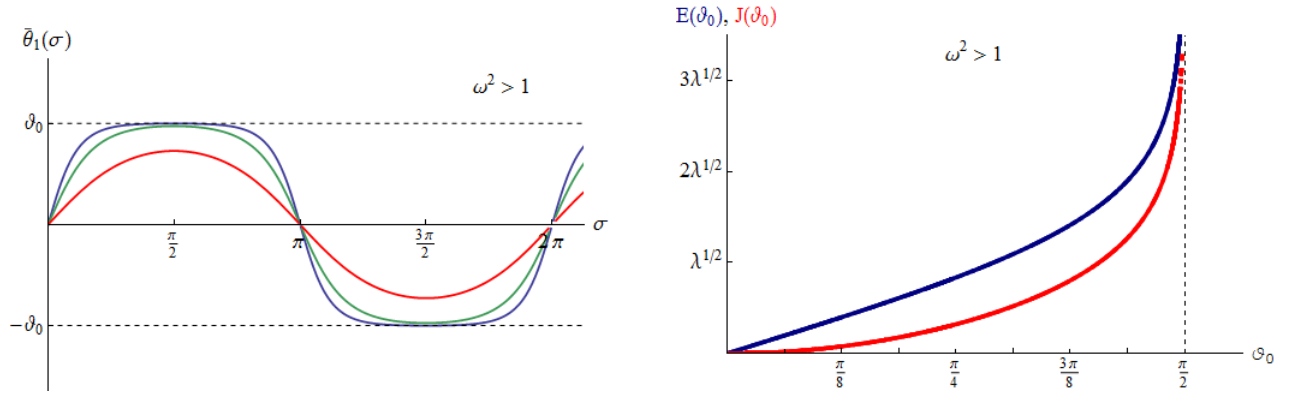
$$\left\{ t = \kappa\tau, \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0 \right\} \times \left\{ \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(\sigma), \bar{\theta}_2 = \kappa\omega\tau, \bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 = \bar{\phi}_3 = 0 \right\}. \quad (4.40)$$

Σε συνεταγμένες εμβάπτισης το ansatz γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \ell \cos \kappa\tau, & Y_5 &= \ell \sin \kappa\tau, & X_1 &= \ell \cos \bar{\theta}_1(\sigma), & X_2 &= X_4 = X_6 = 0 \\ Y_1 &= Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0 & & & X_3 &= \ell \sin \bar{\theta}_1(\sigma) \cos \kappa\omega\tau \\ & & & & X_5 &= \ell \sin \bar{\theta}_1(\sigma) \sin \kappa\omega\tau. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Στη σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) η χορδή έχει την ακόλουθη δράση Polyakov:

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'} \int \left(-\dot{t}^2 + \dot{\bar{\theta}}_2^2 \sin^2 \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_1'^2 \right) d\tau d\sigma = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'} \int \left(-\kappa^2 + \kappa^2 \omega^2 \sin^2 \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_1'^2 \right) d\tau d\sigma. \quad (4.42)$$



Σχήμα 5: $\bar{\theta} = \theta_1(\sigma)$ και ενέργεια/σπίν της κλειστής διπλωμένης χορδής GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$ (4.40), για $\omega^2 > 1$.

Η δράση αυτή συνεπάγεται τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης και συνδέσμους Virasoro (3.4):

$$\bar{\theta}_1'' + \kappa^2 \omega^2 \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_1 = 0 \quad (4.43)$$

$$\bar{\theta}_1'^2 - \kappa^2 (1 - \omega^2 \sin^2 \bar{\theta}_1) = 0, \quad (4.44)$$

που είναι ισοδύναμοι με:

$$\frac{d\sigma}{d\bar{\theta}_1} = \frac{1}{\kappa \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 \bar{\theta}_1}}. \quad (4.45)$$

Ανάλογα με την τιμή του $\omega \neq 1$, λαμβάνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις:

(i). $\omega^2 > 1$: Κλειστή διπλωμένη χορδή που περιστρέφεται στερεά γύρω από τον πόλο της S^2 ,

$$\bar{\theta}_1 \in [0, \arcsin 1/\omega = \vartheta_0].$$

α. «Μικρές» Χορδές: $\omega \rightarrow \infty$, $\vartheta_0 \sim 1/\omega$.

β. «Μεγάλες» Χορδές: $\omega = 1 + 2\eta \rightarrow 1^+$, $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$.

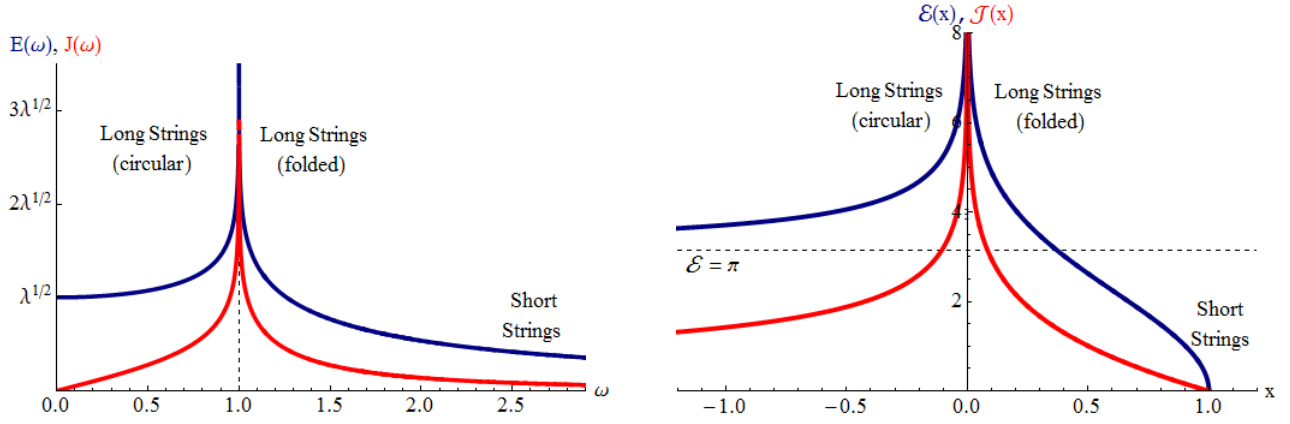
(ii). $\omega^2 < 1$: Κυκλική χορδή κατά μήκος ενός πολικού μέγιστου κύκλου της S^2 , που περιστρέφεται στερεά γύρω από τους πόλους,²¹

$$\bar{\theta}_1 \in [0, \pi/2 = \vartheta_0].$$

Τα ολοκληρώματα για το μήκος της χορδής και τα διατηρούμενα φορτία δίνονται από:

$$\sigma(\bar{\theta}_1) = \int_0^{\bar{\theta}_1} \frac{d\bar{\theta}_1}{\kappa \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 \bar{\theta}_1}} = \frac{1}{\kappa} \cdot \mathbb{F}(\bar{\theta}_1 | \omega^2) \quad (4.46)$$

²¹Σε αυτή την περίπτωση η χορδή δεν διπλώνει για ϑ_0 ($d\sigma/d\bar{\theta}_1|_{\vartheta_0} \neq \infty$). Τα τέσσερα κομμάτια της ενώνονται και σχηματίζουν ένα μέγιστο κύκλο.



Σχήμα 6: Ενέργεια/σπίν της κλειστής διπλωμένης/κυκλικής χορδής στον $\mathbb{R} \times S^2$ (4.40), συναρτήσει του ω και του x .

$$E = \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right| = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \kappa d\sigma = \frac{\kappa \ell^2}{\alpha'} = 4 \cdot \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\bar{\theta}_1}{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 \bar{\theta}_1}} = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'} \cdot \mathbb{F}(\vartheta_0|\omega^2) \quad (4.47)$$

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \kappa \omega \sin^2 \bar{\theta}_1 d\sigma = 4 \cdot \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{\vartheta_0} \frac{\omega \sin^2 \bar{\theta}_1 d\bar{\theta}_1}{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 \bar{\theta}_1}} = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega} (\mathbb{F}(\vartheta_0|\omega^2) - \mathbb{E}(\vartheta_0|\omega^2)). \quad (4.48)$$

Τα ολοκληρώματα αυτά αποκλίνουν για $\omega = 1$. Θέτοντας $\sigma(\vartheta_0) = \pi/2$ λαμβάνουμε:

$$\bar{\theta}_1(\sigma) = am \left[\kappa \sigma \middle| \omega^2 \right] \quad , \quad \kappa = \frac{2}{\pi} \cdot \mathbb{F}(\vartheta_0|\omega^2). \quad (4.49)$$

Από τις (4.47)–(4.49) λαμβάνονται τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$\omega^2 < 1$: Κυκλική χορδή ($\mathbb{R} \times S^2$).

$$\bar{\theta}_1(\sigma) = am \left[\kappa \sigma \middle| \omega^2 \right] \quad , \quad \kappa = \frac{2}{\pi} \cdot \mathbb{K}(\omega^2) \quad (4.50)$$

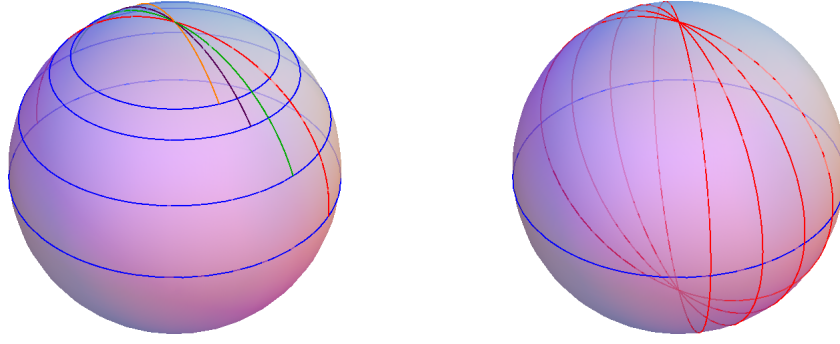
$$E(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \mathbb{K}(\omega^2) \Rightarrow \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}} = 2 \mathbb{K}(1 - \tilde{x}) \quad (4.51)$$

$$J(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\omega} \cdot [\mathbb{K}(\omega^2) - \mathbb{E}(\omega^2)] \Rightarrow \mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \tilde{x}}} \cdot [\mathbb{K}(1 - \tilde{x}) - \mathbb{E}(1 - \tilde{x})]. \quad (4.52)$$

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J} = \frac{2}{\sqrt{1 - \tilde{x}}} \left[(\sqrt{1 - \tilde{x}} - 1) \mathbb{K}(1 - \tilde{x}) + \mathbb{E}(1 - \tilde{x}) \right], \quad (4.53)$$

$\omega^2 \geq 1$: Κλειστή διπλωμένη χορδή ($\mathbb{R} \times S^2$).

$$\bar{\theta}_1(\sigma) = am \left[\kappa \sigma \middle| \omega^2 \right], \quad \kappa = \frac{2}{\pi\omega} \cdot \mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \quad \omega = \csc \vartheta_0 \quad (4.54)$$



Σχήμα 7: Γραφήματα των χορδών GKP (II) επί του $\mathbb{R} \times S^2$. Αριστερά έχουν σχεδιαστεί διάφορα στιγμιότυπα της κλειστής διπλωμένης χορδής επί της σφαίρας για τέσσερις διαφορετικές τιμές της γωνιακής ταχύτητας $\omega > 1$ (καθένα με διαφορετικό χρώμα). Αυτή η χορδή περιστρέφεται ως στερεό σώμα γύρω από το σταθερό πολικό του σημείο. Στα δεξιά, έχουμε σχεδιάσει τέσσερα στιγμιότυπα της κυκλικής χορδής ($\omega < 1$), που περιστρέφεται στερεά γύρω από τον πολικό άξονα.

$$E(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\omega} \cdot \mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \Rightarrow \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{1-x} \cdot \mathbb{K}(1-x) \quad (4.55)$$

$$J(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \left[\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right] \Rightarrow \mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}} = 2[\mathbb{K}(1-x) - \mathbb{E}(1-x)] \quad (4.56)$$

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J} = 2[(\sqrt{1-x} - 1) \cdot \mathbb{K}(1-x) + \mathbb{E}(1-x)], \quad (4.57)$$

όπου $x \equiv 1 - 1/\omega^2$ και $\tilde{x} \equiv 1 - \omega^2$ είναι οι συμπληρωματικές παράμετροι των $1/\omega^2$ και ω^2 αντίστοιχα. Στα σχήματα 5-6 έχει σχεδιαστεί το διάγραμμα $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(\sigma)$ για διάφορες τιμές του $\omega > 1$, ενώ η ενέργεια/σπίν της χορδής στον $\mathbb{R} \times S^2$ έχει σχεδιαστεί συναρτήσει των μεταβλητών θ_0 , ω και x . Στο σχήμα 7 έχουν σχεδιαστεί τόσο η διπλωμένη χορδή (αριστερά) όσο και η κυκλική χορδή (δεξιά) των GKP επί της διδιάστατης σφαίρας.

Για $\omega > 1$, υπάρχουν δύο ενδιαφέρουσες περιοχές όπου θα θέλαμε να υπολογίσουμε τη σχέση $E = E(J)$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma(J)$, το όριο των μικρών χορδών $\omega \rightarrow \infty$ και το όριο των μεγάλων χορδών $\omega \rightarrow 1^+$.

4.2.1 Μικρές Διπλωμένες Χορδές στον $\mathbb{R} \times S^2$: $\omega \rightarrow \infty$, $J \ll \sqrt{\lambda}$

Τα αναπτύγματα της ενέργειας και του σπίν για τις μικρές χορδές του $\mathbb{R} \times S^2$ ($\omega \rightarrow \infty$) συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας ω δίδονται από (βλέπε και παράρτημα E):

$$E = \sqrt{\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{1}{\omega^{2n+1}} = \sqrt{\lambda} \cdot \left[\frac{1}{\omega} + \frac{1}{4\omega^3} + \frac{9}{64\omega^5} + \frac{25}{256\omega^7} + O\left(\frac{1}{\omega^9}\right) \right] \quad (4.58)$$

$$J = \sqrt{\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{2n}{2n-1} \frac{1}{\omega^{2n}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cdot \left[\frac{1}{\omega^2} + \frac{3}{8\omega^4} + \frac{15}{64\omega^6} + O\left(\frac{1}{\omega^8}\right) \right]. \quad (4.59)$$

Μπορούμε να αντιστρέψουμε τις σειρές (4.59) χρησιμοποιώντας την Mathematica και εν συνεχεία να εισαγάγουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{J})$ που υπολογίσαμε, στην έκφραση για την ενέργεια

(4.58). Έτσι λαμβάνουμε τη σχέση $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{J})$:

$$x = 1 - \frac{2\mathcal{J}}{\pi} + \frac{3\mathcal{J}^2}{2\pi^2} - \frac{3\mathcal{J}^3}{8\pi^3} - \frac{5\mathcal{J}^4}{64\pi^4} + \frac{9\mathcal{J}^5}{512\pi^5} + \frac{21\mathcal{J}^6}{1024\pi^6} + \frac{35\mathcal{J}^7}{8192\pi^7} - \frac{459\mathcal{J}^8}{131.072\pi^8} - \dots \quad (4.60)$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{2} \cdot \left[\pi^{1/2} \mathcal{J}^{1/2} + \frac{\mathcal{J}^{3/2}}{8\pi^{1/2}} + \frac{3\mathcal{J}^{5/2}}{128\pi^{3/2}} + \frac{\mathcal{J}^{7/2}}{1024\pi^{5/2}} - \frac{61\mathcal{J}^{9/2}}{32.768\pi^{7/2}} - \frac{201\mathcal{J}^{11/2}}{262.144\pi^{9/2}} + \dots \right]. \quad (4.61)$$

Οι συντελεστές της μικρής κλειστής διπλωμένης χορδής (4.58) εντός του $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ διαφέρουν από τους αντίστοιχους της χορδής (4.25) εντός του AdS_3 κατά ένα παράγοντα $(2n+1)$, $n = 0, 1, \dots$. Επιπλέον, οι συντελεστές της στροφορμής J στη σχέση (4.59) διαφέρουν από εκείνους για το σπίν S στην (4.26) κατά τον παράγοντα $1/(2n-1)$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η (4.22) και η (4.23) μπορούν να ληφθούν από τις (4.55), (4.56) με παραγωγή/ολοκλήρωση. Η σχέση (4.61) μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής:

$$E = \left(2\sqrt{\lambda}J\right)^{1/2} \cdot \left[1 + \frac{J}{8\sqrt{\lambda}} + \frac{3J^2}{128\lambda} + \frac{J^3}{1024\lambda^{3/2}} - \frac{61J^4}{32768\lambda^2} - \frac{201J^5}{262144\lambda^{5/2}} + O\left(\frac{J^6}{\lambda^3}\right)\right]. \quad (4.62)$$

4.2.2 Μεγάλες Διπλωμένες Χορδές στον $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$: $\omega \rightarrow 1^+$, $J \gg \sqrt{\lambda}$

Η ενέργεια και το σπίν των μεγάλων χορδών επί του $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ ($\omega \rightarrow 1^+$) γράφονται ως εξής (χρησιμοποιώντας τους τύπους του παραρτήματος E'):

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2\omega} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \right)^2 [2\psi(n+1) - 2\psi(n+1/2) - \ln(1-1/\omega^2)] \cdot (1-1/\omega^2)^n = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\omega} \cdot \left\{ [4\ln 2 - \ln(1-1/\omega^2)] + \frac{1}{4}(1-1/\omega^2) [4\ln 2 - 2 - \ln(1-1/\omega^2)] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \left\{ 4\ln 2 - 2 - \ln(1-1/\omega^2) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+3/2)}{((n+1)!)^2} [2\psi(n+1) - \right. \\ &\quad \left. - 2\psi(n+1/2) - \ln(1-1/\omega^2) + \frac{2n}{(n+1)(2n+1)}] \cdot (1-1/\omega^2)^{n+1} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \left\{ [4\ln 2 - 2 - \ln(1-1/\omega^2)] - \frac{1}{4}(1-1/\omega^2) [4\ln 2 - \ln(1-1/\omega^2)] + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Χρησιμοποιώντας τη συμπληρωματική παράμετρο $x \equiv 1 - 1/\omega^2 \rightarrow 0^+$ μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω σειρές ως εξής:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{1-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n (d_n \ln x + h_n) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} (d_{n-k} \ln x + h_{n-k}) \quad (4.65)$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (c_n \ln x + b_n). \quad (4.66)$$

Οι συντελεστές των (4.65) και (4.66) δίδονται από:

$$\begin{aligned}
d_n &= -\frac{1}{2} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \\
h_n &= -d_n \cdot \left[4 \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1} \right) \right] \\
c_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n-1} = -\frac{d_n}{2n-1} \\
b_n &= -c_n \cdot \left[4 \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1} \right) + \frac{2}{2n-1} \right], \tag{4.67}
\end{aligned}$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$. Οι μερικοί πρώτοι εξ'αυτών είναι:

$$\begin{aligned}
d_0 &= -\frac{1}{2}, & d_1 &= -\frac{1}{8}, & d_2 &= -\frac{9}{128} \\
h_0 &= 2 \ln 2, & h_1 &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}, & h_2 &= \frac{9}{32} \ln 2 - \frac{21}{128} \\
c_0 &= -\frac{1}{2}, & c_1 &= \frac{1}{8}, & c_2 &= \frac{3}{128} \\
b_0 &= 2 \ln 2 - 1, & b_1 &= -\frac{1}{2} \ln 2, & b_2 &= -\frac{3}{32} \ln 2 + \frac{5}{128}. \tag{4.68}
\end{aligned}$$

4.2.3 Αργές Κυκλικές Χορδές στον $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$: $\omega \rightarrow 0^+$, $J \ll \lambda$

Παρά το γεγονός ότι οι χορδές GKP επί της σφαίρας για τις οποίες $\omega < 1$ (κυκλικές χορδές) είναι ασταθείς,²² μοιάζουν πολύ με τις χορδές GKP για τις οποίες $\omega > 1$ (διπλωμένες χορδές) που μελετήθηκαν στις §4.2.1–§4.2.2. Σε αυτή την υποενότητα και την επόμενη, θα υπολογίσουμε τις εκφράσεις $E = E(J)$ για τις αργές (μικρά J) και γρήγορες (μεγάλα J) κυκλικές χορδές στον $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$. Στην περίπτωση των αργών κυκλικών χορδών ($\omega \rightarrow 0^+$) τα αναπτύγματα της ενέργειας (4.51) και του σπίν (4.52) συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας ω , δίδονται από:

$$E = \sqrt{\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \omega^{2n} = \sqrt{\lambda} \cdot \left[1 + \frac{\omega^2}{4} + \frac{9\omega^4}{64} + \frac{25\omega^6}{256} + \frac{1225\omega^8}{16384} + O(\omega^{10}) \right] \tag{4.69}$$

$$J = \sqrt{\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{2n}{2n-1} \cdot \omega^{2n-1} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cdot \left[\omega + \frac{3\omega^3}{8} + \frac{15\omega^5}{64} + \frac{175\omega^7}{1024} + O(\omega^9) \right]. \tag{4.70}$$

²²Όπως το έθεσαν οι GKP, οι χορδές στον $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ με $\omega < 1$ είναι ασταθείς ως προς την τάση τους να «ξεφύγουν προς τις πλευρές» της $\mathbb{S}^2$. Στην ενότητα για τα γιγάντια μαγνόνια θα δούμε ότι οι χορδές GKP επί της σφαίρας σχηματίζονται από δύο γιγάντια μαγνόνια (που έχουν μέγιστη ορμή) τα οποία είναι ευσταθή στην «στοιχειώδη» τους περιοχή και ασταθή στην «διπλή» τους περιοχή. Οι κυκλικές χορδές GKP είναι ασταθείς διότι αποτελούνται από δύο γιγάντια μαγνόνια της «διπλής» περιοχής.

Αντιστρέφοντας τη σειρά (4.70) και εισάγοντας την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $\tilde{x} \equiv 1 - \omega^2 = \tilde{x}(\mathcal{J})$ στην έκφραση της ενέργειας (4.69), οδηγούμαστε στη σχέση $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{J})$:

$$\tilde{x} = 1 - \frac{4\mathcal{J}^2}{\pi^2} + \frac{12\mathcal{J}^4}{\pi^4} - \frac{33\mathcal{J}^6}{\pi^6} + \frac{175\mathcal{J}^8}{2\pi^8} - \frac{1821\mathcal{J}^{10}}{8\pi^{10}} + \frac{4683\mathcal{J}^{12}}{8\pi^{12}} - \dots \quad (4.71)$$

$$\mathcal{E} = \pi + \frac{\mathcal{J}^2}{\pi} - \frac{3\mathcal{J}^4}{4\pi^3} + \frac{\mathcal{J}^6}{\pi^5} - \frac{103\mathcal{J}^8}{64\pi^7} + \frac{183\mathcal{J}^{10}}{64\pi^9} - \frac{1383\mathcal{J}^{12}}{256\pi^{11}} + \frac{2725\mathcal{J}^{14}}{256\pi^{13}} - \dots \quad (4.72)$$

Η τελευταία μπορεί επίσης να γραφτεί ως εξής:

$$E = \sqrt{\lambda} \cdot \left[1 + \frac{J^2}{\lambda} - \frac{3J^4}{4\lambda^2} + \frac{J^6}{\lambda^3} - \frac{103J^8}{64\lambda^4} + \frac{183J^{10}}{64\lambda^5} - \frac{1383J^{12}}{256\lambda^6} + \frac{2725J^{14}}{256\lambda^7} - O\left(\frac{J^{16}}{\lambda^8}\right) \right]. \quad (4.73)$$

4.2.4 Ταχείες Κυκλικές Χορδές στον $\mathbb{R} \times S^2$: $\omega \rightarrow 1^-$, $J \gg \lambda$

Η περίπτωση $\omega \rightarrow 1^-$ των ταχέων κυκλικών χορδών επί της σφαίρας αντιμετωπίζεται παρόμοια με την περίπτωση $\omega \rightarrow 1^+$:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}^n (d_n \ln \tilde{x} + h_n) \quad (4.74)$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{1-\tilde{x}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}^n (c_n \ln \tilde{x} + b_n) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}^n \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (c_{n-k} \ln \tilde{x} + b_{n-k}), \quad (4.75)$$

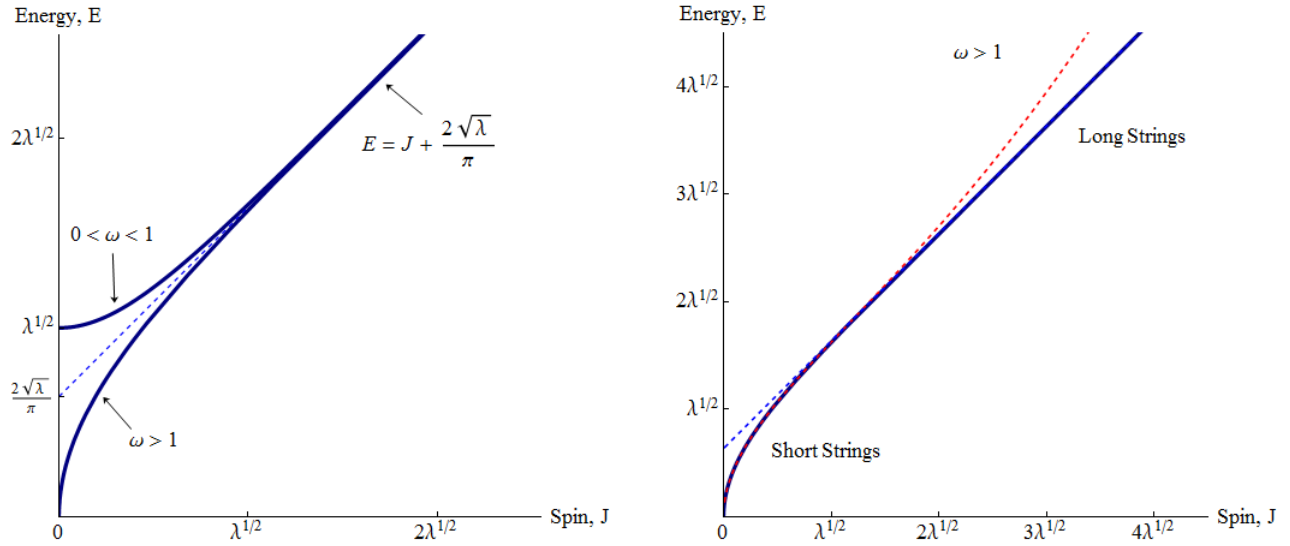
όπου η συμπληρωματική παράμετρος είναι $\tilde{x} \equiv 1 - \omega^2 \rightarrow 0^-$, ενώ οι ορισμοί των συντελεστών b_n , c_n , d_n , h_n είναι όπως εκείνων στις σχέσεις (4.67)–(4.68).

4.2.5 Δυαδικότητα Μικρών-Μεγάλων Χορδών

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μπορούμε να διατυπώσουμε μια δυαδικότητα μικρών-μεγάλων χορδών (ή ακριβέστερα δυαδικότητα αργών/ταχέων χορδών) και στην περίπτωση των χορδών στον $\mathbb{R} \times S^2$. Αν λύσουμε τις εξισώσεις (4.55)–(4.56) ως προς $\mathbb{E}(k)$ και $\mathbb{K}(k)$ και εισάγουμε τις λύσεις στη σχέση Legendre (4.37), οδηγούμαστε στην ακόλουθη δυαδικότητα μεταξύ κλασικών μικρών και μεγάλων διπλωμένων χορδών στον $\mathbb{R} \times S^2$:

$$\omega \omega' E E' - \omega E J' - \omega' E' J = \frac{2\lambda}{\pi}, \quad \omega > 1, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.76)$$

όπου τα ορίσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων είναι $k = 1/\omega^2$ και $k' = x = 1/\omega'^2$ αντίστοιχα και ικανοποιούν τη σχέση $k + k' = 1$. Με δεδομένο ότι μεγάλες τιμές του $\omega' \rightarrow \infty$ («μικρές/αργές» χορδές) αντιστοιχούν σε τιμές του $\omega \rightarrow 1^+$ κοντά στη μονάδα («μεγάλες/ταχείες» χορδές), η σχέση (4.76) δίδει μια απεικόνιση μεταξύ των αντίστοιχων ενεργειών και σπίν. Η σχέση (4.76) είναι εντελώς ανάλογη της δυαδικότητας μικρών-μεγάλων χορδών (4.38) που βρέθηκε στην περίπτωση των κλειστών διπλωμένων χορδών που περιστρέφονται εντός του AdS_3 [12]. Είναι μια κλασική δυαδικότητα μεταξύ χορδών που περιστρέφονται στον $\mathbb{R} \times S^2$ και, για μια ακόμη φορά, θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθεί το κατά πόσον θα μπορούσε να γενικευθεί στο κβαντικό επίπεδο. Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε την



Σχήμα 8: Ενέργεια συναρτήσει της στροφορμής για τη διπλωμένη κλειστή/κυκλική χορδή (4.40) στον $\mathbb{R} \times S^2$. Στο δεξιό διάγραμμα ($\omega > 1$), η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύει τους 4 πρώτους όρους της προσέγγισης «μικρής» χορδής (4.62) ενώ η μπλε διακεκομμένη γραμμή περιλαμβάνει τους δύο πρώτους όρους της προσέγγισης «μεγάλης» χορδής (Δ.3).

(4.76) συναρτήσει της ποσότητας $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J}$. Μια εντελώς ανάλογη σχέση μπορεί να διατυπωθεί για ταχείες και αργές κυκλικές χορδές, χρησιμοποιώντας τις (4.51)–(4.52). Το αποτέλεσμα είναι:

$$EE' - \omega' EJ' - \omega E'J = \frac{2\lambda}{\pi}, \quad \omega < 1, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.77)$$

όπου $\tilde{k} = \omega^2$, $\tilde{k}' = \tilde{x} = \omega'^2$ και $\tilde{k} + \tilde{k}' = 1$. Περισσότερα για τις δυαδικότητες μικρών-μεγάλων χορδών μπορούν να βρεθούν στο παράρτημα B'.

4.3 Παλλόμενες Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov στον AdS_3

Η σύντομη περιήγησή μας στις μποζονικές χορδές των GKP θα ολοκληρωθεί με την παρουσίαση της περίπτωσης (III). Αυτή αποτελείται από μία κλειστή διπλωμένη χορδή που πάλλεται εντός του AdS_3 μέρους του $AdS_5 \times S^5$ και δίδεται από το ακόλουθο ansatz:

$$\left\{ t = t(\tau), \rho = \rho(\tau), \theta = 0, \phi_1 = w\sigma, \phi_2 = 0 \right\} \times \left\{ \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 = \bar{\phi}_3 = 0 \right\}. \quad (4.78)$$

Στον χώρο εμβάπτισης, το παραπάνω ansatz εκφράζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \ell \cosh \rho(\tau) \cos t(\tau), & Y_3 &= Y_4 = 0, & X_1 &= R = \ell \\ Y_1 &= \ell \sinh \rho(\tau) \cos w\sigma & & & X_2 &= X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0 \\ Y_2 &= \ell \sinh \rho(\tau) \sin w\sigma & & & & \\ Y_5 &= \ell \cosh \rho(\tau) \sin t(\tau). & & & & \end{aligned} \quad (4.79)$$

Η δράση Polyakov για τη χορδή (στη σύμμορφη βαθμίδα $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή,

αν επιπλέον υπολογίσουμε και το ολοκλήρωμα ως προς την μεταβλητή σ ($\sigma \in [0, 2\pi)$):²³

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'} \int (-\dot{t}^2 \cosh^2 \rho + \dot{\rho}^2 - \phi_1'^2 \sinh^2 \rho) d\tau d\sigma = \quad (4.80)$$

$$= \frac{\ell^2}{2\alpha'} \int (-\dot{t}^2 \cosh^2 \rho + \dot{\rho}^2 - w^2 \sinh^2 \rho) d\tau. \quad (4.81)$$

Οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι Virasoro γράφονται:

$$\ddot{t} \cosh^2 \rho + 2 \dot{t} \dot{\rho} \cosh \rho \sinh \rho = 0 \quad (4.82)$$

$$\ddot{\rho} + \sinh \rho \cosh \rho (\dot{t}^2 + w^2) = 0 \quad (4.83)$$

$$\dot{\rho}^2 - \dot{t}^2 \cosh^2 \rho + w^2 \sinh^2 \rho = 0. \quad (4.84)$$

Λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{\cosh \rho}{w \sqrt{e^2 - \sinh^2 \rho \cosh^2 \rho}}, \quad e = \frac{\dot{t}}{w} \cdot \cosh^2 \rho(\tau) \equiv \sinh \rho_0 \cosh \rho_0 = \text{σταθ.}, \quad (4.85)$$

από τις οποίες συμπεραίνουμε ότι $\rho < \rho_0$. Η διατηρούμενη ενέργεια και το μήκος της χορδής δίδονται από:

$$E = \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right| = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \dot{t} \cosh^2 \rho d\sigma = \frac{\ell^2}{\alpha'} \cdot \dot{t} \cosh^2 \rho = \frac{w e \ell^2}{\alpha'} = w \sqrt{\lambda} e \quad (4.86)$$

$$\tau(\rho) = \int_0^\rho \frac{\cosh \rho d\rho}{w \sqrt{e^2 - \cosh^2 \rho \sinh^2 \rho}} = \int_0^{\sinh \rho} \frac{dx}{w \sqrt{e^2 - x^2 - x^4}}. \quad (4.87)$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα του μήκους λαμβάνουμε το $\tau(\rho)$ και αντιστρέφοντας αυτήν, το $\rho(\tau)$:

$$\tau(\rho) = \frac{\mathbb{F} \left[\arcsin \left(\frac{\sinh \rho}{\sinh \rho_0} \right) \middle| -\tanh^2 \rho_0 \right]}{w \cosh \rho_0} \Leftrightarrow \quad (4.88)$$

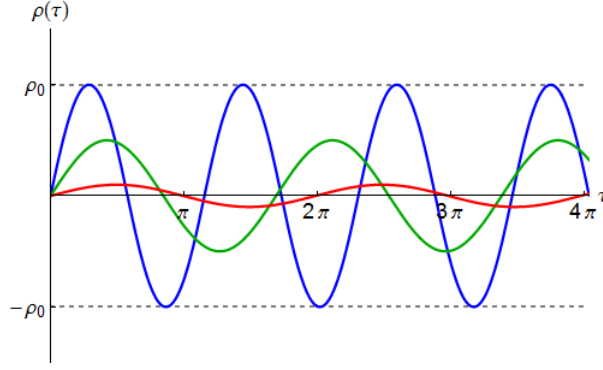
$$\rho(\tau) = \left| \operatorname{arcsinh} \left[\sinh \rho_0 \cdot \operatorname{sn} \left(w\tau \cosh \rho_0 \middle| -\tanh^2 \rho_0 \right) \right] \right|. \quad (4.89)$$

Αυτή αποτελεί μια ταλαντούμενη, χρονικά περιοδική λύση που έχουμε σχεδιάσει για διάφορα ρ_0 στο σχήμα 9.

4.3.1 Ημικλασική Κβάντωση

Ακολουθώντας τους [51, 52], πρόκειται τώρα να κβαντώσουμε ημικλασικά την παλλόμενη χορδή των GKP εντός του AdS_3 . Προκειμένου να διευκολυνθεί η όλη διαδικασία, ας μετασχηματίσουμε το σύστημα

²³ Λόγω του ότι η σύμμορφη βαθμίδα $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$, είναι ασύμβατη με τη βαθμίδα στατικού χρόνου $t = \tau$ (η εξίσωση κίνησης (4.82) ως προς τη μεταβλητή t δεν ικανοποιείται), είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε $t = t(\tau)$.



Σχήμα 9: $\rho = \rho(\tau)$ για την παλλόμενη χορδή GKP στον AdS_3 , που δίδεται από την (4.78).

των καθολικών συντεταγμένων με το μετασχηματισμό $\tanh \rho = \sin \xi$, όπου $\xi \in [0, \pi/2]$. Η δράση Polyakov (4.81) γίνεται:

$$S_P = \frac{\ell^2}{2\alpha'} \int (-\dot{t}^2 \cosh^2 \rho + \dot{\rho}^2 - w^2 \sinh^2 \rho) d\tau = \frac{\ell^2}{2\alpha'} \int \sec^2 \xi (-\dot{t}^2 + \dot{\xi}^2 - w^2 \sin^2 \xi) d\tau. \quad (4.90)$$

Η Χαμιλτονιανή πυκνότητα είναι ίση προς το μηδέν, σύμφωνα με το σύνδεσμο (4.84):

$$\mathcal{H} = \pi_t \dot{t} + \pi_\xi \dot{\xi} - \mathcal{L} = \frac{\ell^2}{2\alpha'} (-\dot{t}^2 \cosh^2 \rho + \dot{\rho}^2 + w^2 \sinh^2 \rho) = \frac{\ell^2}{2\alpha'} \sec^2 \xi (-\dot{t}^2 + \dot{\xi}^2 + w^2 \sin^2 \xi) = 0.$$

Συναρτήσει των κανονικών μεταβλητών,

$$\pi_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -\frac{\ell^2}{\alpha'} \dot{t} \sec^2 \xi \quad \& \quad \pi_\xi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\ell^2}{\alpha'} \dot{\xi} \sec^2 \xi, \quad (4.91)$$

Η Χαμιλτονιανή πυκνότητα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

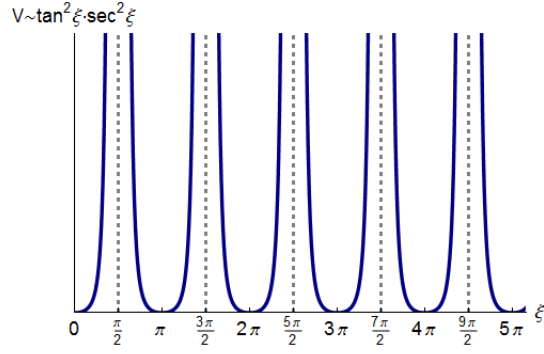
$$\mathcal{H} = \frac{\alpha'}{2\ell^2} \cos^2 \xi (-\pi_t^2 + \pi_\xi^2) + \frac{w^2 \ell^2}{2\alpha'} \tan^2 \xi = 0 \quad (4.92)$$

ή ισοδύναμα,

$$H^2 = \pi_t^2 = \pi_\xi^2 + \left(\frac{w \ell^2}{\alpha'} \right)^2 \tan^2 \xi \sec^2 \xi = \pi_\xi^2 + w^2 \lambda \tan^2 \xi \sec^2 \xi. \quad (4.93)$$

Η (4.93) δίδει τη Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου Klein-Gordon εντός του περιοδικού δυναμικού (που έχουμε σχεδιάσει στο σχήμα 10) $V = w^2 \lambda \tan^2 \xi \sec^2 \xi$. Αυτό το δυναμικό είναι τυπικά συσχετισμένο με την εμφάνιση δομής ενεργειακών ζωνών (band structure), ωστόσο εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με την κλασική του περιοχή. Ας αρχίσουμε με την πρώτη κβάντωση της (4.93) ($\pi_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu$) ως ακολούθως:

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \Psi(t, \xi) = -\hbar^2 \partial_\xi^2 \Psi(t, \xi) + w^2 \lambda \tan^2 \xi \sec^2 \xi \cdot \Psi(t, \xi) \Rightarrow$$



Σχήμα 10: Διάγραμμα του ενεργού δυναμικού $V = w^2 \lambda \tan^2 \xi \sec^2 \xi$.

$$\Rightarrow -\hbar^2 \psi''(\xi) = (E^2 - w^2 \lambda \tan^2 \xi \sec^2 \xi) \cdot \psi(\xi), \quad \Psi(t, \xi) = e^{-iEt/\hbar} \cdot \psi(\xi). \quad (4.94)$$

Οι επιτρεπόμενες ενέργειες και κυματοσυναρτήσεις μπορούν να βρεθούν προσεγγιστικά με τη μέθοδο WKB (βλέπε π.χ. [58]) για $\psi(0) = \pm 1$:

$$\int_0^{\xi_0} \sqrt{E_n^2 - w^2 \lambda \tan^2 \xi \sec^2 \xi} \cdot d\xi = \hbar \left(n + \frac{1}{4} \right) \pi + O(\hbar^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.95)$$

$$\psi_n(\xi) = (-1)^n \left[1 - \frac{w^2 \lambda}{E_n^2} \tan^2 \xi \sec^2 \xi \right]^{-\frac{1}{4}} \cdot \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_0^\xi \sqrt{E_n^2 - w^2 \lambda \tan^2 \xi' \sec^2 \xi'} \cdot d\xi' \right), \quad (4.96)$$

στην προσέγγιση της φυσικής οπτικής. Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί και το αποτέλεσμα είναι:

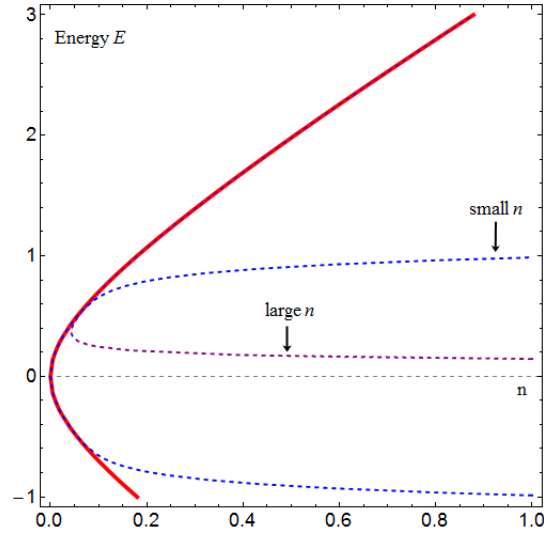
$$\begin{aligned} w\sqrt{\lambda} \cosh \rho_0 \cdot \left\{ \sinh^2 \rho_0 \Pi(-\sinh^2 \rho_0; -\tanh^2 \rho_0) + \mathbb{K}(-\tanh^2 \rho_0) + \mathbb{E}(-\tanh^2 \rho_0) \right\} = \\ = \hbar \left(n + \frac{1}{4} \right) \pi + O(\hbar^2), \end{aligned} \quad (4.97)$$

όπου, από τον ορισμό (4.85) του $e = \sinh \rho_0 \cosh \rho_0$, το μοναδικό κλασικό σημείο ανάκλασης (turning point) $\tanh \rho_0 = \sin \xi_0$ ικανοποιεί

$$\sinh \rho_0 = \left[\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4e^2} \right) \right]^{1/2} \quad \& \quad \cosh \rho_0 = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4e^2} \right) \right]^{1/2}, \quad e \equiv \frac{E\alpha'}{w\ell^2} = \frac{E}{w\sqrt{\lambda}}. \quad (4.98)$$

Εάν αναπτύξουμε γύρω από την τιμή $E = \infty$, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα του [52]:

$$\begin{aligned} \hbar \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi + O(\hbar^2) = \pi E - \frac{2(2\pi)^{3/2}}{\Gamma(\frac{1}{4})^2} \cdot w^{1/2} \lambda^{1/4} E^{1/2} + \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{12(2\pi)^{1/2}} \cdot w^{3/2} \lambda^{3/4} E^{-1/2} - \\ - \frac{3\pi^{3/2}}{20\sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{4})^2} \cdot w^{5/2} \lambda^{5/4} E^{-3/2} + O\left(w^{7/2} \lambda^{7/4} E^{-5/2}\right). \end{aligned} \quad (4.99)$$



Σχήμα 11: Διάγραμμα της ενέργειας E συναρτήσει του ενεργειακού επιπέδου n της παλλόμενης χορδής του AdS_3 σύμφωνα με την (4.97). Η μπλε διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην προσέγγιση των «μικρών» n (4.100) και η μώβ διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην προσέγγιση (4.102), για «μεγάλες» τιμές του n .

Μπορούμε να αντιστρέψουμε την (4.99) για μεγάλες τιμές του n , και να λάβουμε την ακόλουθη διπλή σειρά του n και του λ .²⁴

$$E = 2n + \frac{8\sqrt{w\pi}}{\Gamma(\frac{1}{4})^2} \cdot \lambda^{1/4} n^{1/2} + \left[\frac{1}{2} + \frac{16w\pi}{\Gamma(\frac{1}{4})^4} \cdot \lambda^{1/2} \right] + \left[\frac{\sqrt{w\pi}}{\Gamma(\frac{1}{4})^2} \cdot \lambda^{1/4} + \left(\frac{16\pi^{3/2}}{\Gamma(\frac{1}{4})^6} - \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{24\pi^{3/2}} \right) w^{3/4} \lambda^{3/4} \right] \cdot n^{-1/2} + O(n^{-3/2}). \quad (4.100)$$

Μπορούμε ακόμη να αναπτύξουμε γύρω από την τιμή $E = 0$:

$$\hbar \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi + O(\hbar^2) = \frac{E^2}{4w\lambda^{1/2}} - \frac{5E^4}{32w^3\lambda^{3/2}} + \frac{63E^6}{256w^5\lambda^{5/2}} - \frac{2145E^8}{4096w^7\lambda^{7/2}} + O(w^{-9}\lambda^{-9/2}E^{10}) \quad (4.101)$$

Αντιστρέφοντας για μικρά n λαμβάνουμε ($\hbar \rightarrow 1$):

$$E = 2(\sqrt{\lambda}w)^{1/2} \left(n + \frac{1}{4} \right)^{1/2} + \frac{5(n + \frac{1}{4})^{3/2}}{2(\sqrt{\lambda}w)^{1/2}} - \frac{77(n + \frac{1}{4})^{5/2}}{16(\sqrt{\lambda}w)^{3/2}} + \frac{1365(n + \frac{1}{4})^{7/2}}{64(\sqrt{\lambda}w)^{5/2}} + O(w^{-7/2}\lambda^{-7/4}n^{9/2}), \quad (4.102)$$

²⁴Θέτουμε $\hbar = 1$.

η οποία προφανώς συμφωνεί με την σχέση (4.6) των GKP. Η συμπεριφορά $\sim \lambda^{1/4} n^{1/2}$ είναι χαρακτηριστική του ορίου των μικρών σπίν στο οποίο ο χωρόχρονος είναι κατά προσέγγιση επίπεδος. Προς σύγκριση, βλέπε και τα υπόλοιπα όρια μικρού σπίν (4.30)–(4.62) καθώς επίσης και τις ενέργειες των χορδών σε επίπεδο χωροχρόνο του παραρτήματος A'.

Σύμφωνα με την εργασία [52], οι τελεστές που αντιστοιχούν στις παραπάνω καταστάσεις χορδών έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} \sum_{\text{perms}} \text{Tr} \left[\mathcal{Z} \mathcal{D}_+^{n_1^+} \mathcal{D}_-^{n_1^-} \dots \mathcal{D}_+^{n_k^+} \mathcal{D}_-^{n_k^-} \mathcal{Z} \right] \cdot \exp \left(i\varphi \left(n_1^\pm, \dots, n_k^\pm \right) \right) \quad (4.103)$$

και η φάση δίδεται από

$$\varphi \left(n_1^\pm, \dots, n_k^\pm \right) = -\frac{2\pi w}{n} \sum_{i \leq j}^k n_i^+ n_j^- \quad \& \quad \sum_{i=1}^k n_i^\pm = 2n. \quad (4.104)$$

5 Σχέσεις Διασποράς των Χορδών GKP

Αφού παρουσιάσαμε τα βασικά στοιχεία των χορδών GKP, είμαστε τώρα σε θέση να μελετήσουμε την κλασική σχέση ενέργειας-σπίν (γνωστή και ως σχέση διασποράς ή ανώμαλες διαστάσεις) των δύο στερεά περιστρεφόμενων περιπτώσεων I (4.8) και II (4.40), για τα μεγάλες τιμές του σπίν. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, οι μεγάλες περιστρεφόμενες χορδές ανήκουν σε μια εξαιρετική κατηγορία συστημάτων όπου οι μέθοδοι που προέρχονται από την ολοκληρωσιμότητα δεν οδηγούν σε τόσο εντυπωσιακά αποτελέσματα όσο η ασθενής σύζευξη ή οι μικρές χορδές και τελεστές. Ως εκ τούτου, και μέχρι να γίνει γνωστό πώς ακριβώς η ολοκληρωσιμότητα λειτουργεί στις περιπτώσεις των μεγάλων τελεστών και χορδών, πιο παραδοσιακές μέθοδοι (όπως τετραγωνισμοί/ολοκληρώσεις) πρέπει να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα φάσματα. Μια τέτοια μέθοδος προτάθηκε στην εργασία [3], η οποία συνέχισε την πρώτη προσπάθεια των Γεωργίου και Σαββίδη [12].

Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι ο υπολογισμός της κλασικής σχέσης διασποράς των χορδών GKP (I) και (II) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των [3]. Από τη στιγμή που θα εργαστούμε αποκλειστικά και μόνο στην πλευρά της θεωρίας χορδών της επίπεδης αντιστοιχίας AdS/CFT, τα αποτελέσματά μας θα είναι έγκυρα για μεγάλες τιμές της σταθερά σύζευξης 't Hooft $\lambda \rightarrow \infty$ και για $N_c = \infty$. Σε αυτό το όριο, όλες οι διορθώσεις $1/N_c$ αγνοούνται. Επιπλέον, θα ασχοληθούμε μόνο με κλασσικές χορδές GKP, δηλαδή δεν πρόκειται να εξετάσουμε τις κβαντικές διορθώσεις (α' διορθώσεις) που αυτές οι χορδές γενικά λαμβάνουν. Τυπικά αυτό σημαίνει επίσης ότι $\lambda = \infty$.

Όπως προείπαμε, πρόκειται να μας απασχολήσουν αποκλειστικά οι μεγάλες χορδές, δηλαδή εκείνες οι χορδές που έχουν μεγάλες (αλλά όχι άπειρες) τιμές διατηρούμενων φορτίων, $\mathcal{E}, \mathcal{J}, \mathcal{S} \rightarrow \infty$. Αυτή είναι μία από τις λίγες εναπομένουσες περιπτώσεις όπου η ολοκληρωσιμότητα δεν μπορεί ακόμη να προσφέρει μεγάλη βοήθεια. Τα αποτελέσματα για τα φάσματα των χορδών που θα λάβουμε με τη χρήση της μεθόδου του [3] δεν έχουν ληφθεί από οποιαδήποτε άλλη μέθοδο (ολοκληρωσιμότητας), π.χ. τις διορθώσεις Lüscher, την αλγεβρική καμπύλη, το θερμοδυναμικό Bethe ansatz (TBA), το Y-σύστημα ή την κβαντική φασματική καμπύλη (QSC). Θεωρούμε επίσης αναγκαίο να τονίσουμε ότι αυτά τα αποτελέσματα είναι ημιαναλυτικά και συνεπώς είναι αδύνατο να εξαχθούν με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Υπάρχουν πολλοί και διάφοροι λόγοι για τους οποίους μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε τη σχέση διασποράς των μεγάλων, στερεά περιστρεφόμενων χορδών GKP. Κατ'αρχήν, παρότι η ολοκληρωσιμότητα μας υποδεικνύει ότι τα επίπεδα φάσματα της θεωρίας $\mathcal{N} = 4$ SYM και της IIB θεωρίας χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ πρέπει να ταυτίζονται διότι περιγράφονται από το ίδιο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, θέλουμε να ελέγξουμε ρητά ότι όντως τα φάσματα ταιριάζουν σε όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Δεύτερον, θέλουμε να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε στην πράξη τα φάσματα προκειμένου να απαντήσουμε κάποιες παραδοσιακές ερωτήσεις της αντιστοιχίας AdS/CFT, αλλά και επειδή θα θέλαμε να βελτιωθεί ο τρόπος που η ολοκληρωσιμότητα λειτουργεί σε ορισμένα όρια και, ενδεχομένως, ακόμη και να πάμε πιο πέρα από την ολοκληρωσιμότητα. Τρίτον, θα θέλαμε να διερευνήσουμε τη δυνατότητα να περιγράψουμε τις χορδές και το φάσμα της θεωρίας βαθμίδας με τη βοήθεια κλειστών τύπων που, στην ιδεατή περίπτωση, θα ίσχυαν για όλες τις τιμές της σταθεράς σύζευξης 't Hooft λ .

Οι μεγάλες χορδές GKP που περιστρέφονται εντός του AdS_3 (περίπτωση I) και εντός του $\mathbb{R} \times S^2$ (περίπτωση II) είναι αντίστοιχα δυϊκές στους ακόλουθους (μεγάλους) τελεστές της $\mathcal{N} = 4$ SYM:

$$\mathcal{O}_S = \text{Tr} \left[D_+^m \mathcal{Z} D_+^{S-m} \mathcal{Z} \right] + \dots \quad \& \quad \mathcal{O}_J = \text{Tr} \left[\mathcal{X} \mathcal{Z}^m \mathcal{X} \mathcal{Z}^{J-m} \right] + \dots, \quad S, J \rightarrow \infty, \quad (5.1)$$

όπου $N_c, \lambda = \infty$ και οι τελείες συμβολίζουν τις μεταθέσεις των πεδίων εντός του ίχνους, πολλαπλασιασμένες επί τον κατάλληλο συντελεστή. Οι τελεστές συστροφής 2 ($\mathcal{O}_S$) και εκείνοι με 2 μαγνόνια ($\mathcal{O}_J$) ανήκουν αντίστοιχα στους τομείς $\mathfrak{sl}(2)$ και $\mathfrak{su}(2)$ της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Στον ένα βρόχο, ο τελεστής διαστολής των δύο αυτών τομέων συμπίπτει με τη Χαμιλτονιανή της σιδερομαγνητικής αλυσίδας σπίν $\text{XXX}_{\pm 1/2}$ του Heisenberg. Κανείς εκ των τελεστών (5.1) δεν είναι BPS και κατά συνέπεια οι αντίστοιχες διαστάσεις κλίμακας περιέχουν ένα ανώμαλο μέρος.

Αναφέραμε ήδη τις διορθώσεις "wrapping" που εμφανίζονται από την πλευρά της θεωρίας βαθμίδας της αντιστοιχίας AdS/CFT, όταν η τάξη του βρόχου ξεπεράσει το μήκος του τελεστή της SYM. Η αύξηση του αριθμού των βρόχων θεωρητικά μας φέρνει πιο κοντά στην ισχυρή σύζευξη όπου η περιγραφή μέσω χορδών καθίσταται έγκυρη. Η δένδροειδής (tree-level) προσέγγιση από την πλευρά της θεωρίας των χορδών (κλασσικές χορδές) αντιστοιχεί σε ∞ βρόχους της θεωρίας βαθμίδας και, εφόσον ο τελεστής της SYM δεν έχει άπειρο μήκος (ή «μέγεθος»), η σχέση διασποράς του αναμένεται να λάβει διορθώσεις wrapping.²⁵ Αντίθετα, αυξάνοντας τον αριθμό των βρόχων από την πλευρά της θεωρίας χορδών προσθέτοντας $\alpha' \sim \sqrt{\lambda}$ (χβαντικές) διορθώσεις στο κλασσικό αποτέλεσμα, πηγαίνουμε προς τη μεριά της $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Ας ξεκινήσουμε από τους τελεστές με συστροφή 2 και την περίπτωση GKP (I) της χορδής εντός του AdS₃. Από την άποψη της QCD, οι τελεστές συστροφής (twist operators) με υψηλό σπίν S διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη βαθιά ανελαστική σκέδαση (DIS), όπου ανώμαλες διαστάσεις κλίμακας τους, είναι υπεύθυνες για την (λογαριθμική) παραβίαση της διαβάθμισης (scaling) Bjorken. Οι ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών με συστροφή 2 έχουν υπολογιστεί στην διαταραχτική QCD²⁶ σε ένα βρόχο [60], δύο βρόχους [61] και τρεις βρόχους [62]. Τα αποτελέσματα της QCD μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των αντίστοιχων ανώμαλων διαστάσεων στις διαταραχτικές θεωρίες $\mathcal{N} = 1, 2, 4$ SYM. Στο όριο ασθενούς σύζευξης 't Hooft λ , οι ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών συστροφής 2 της $\mathcal{N} = 4$ SYM, $\text{Tr}[\mathcal{Z} \mathcal{D}_+^S \mathcal{Z}]$ με υψηλό σπίν S , έχουν υπολογιστεί σε ένα βρόχο [63], δύο βρόχους [64] και, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της υπερβατικότητας (transcendentality), σε τρεις βρόχους [65]. Καταλήγουμε στην ακόλουθη λογαριθμική συμπεριφορά που είναι επίσης γνωστή ως διαβάθμιση Sudakov:

$$\gamma(S, g) = \Delta - (S + 2) = f(g) \ln S + \dots, \quad g = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \rightarrow 0, \quad (5.2)$$

όπου $f(g)$ είναι η "cusp" ανώμαλη διάσταση ή η παγκόσμια συνάρτηση κλίμακας (universal scaling function) της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση Beisert-Eden-Staudacher (BES) σε ασθενή [66, 37] και ισχυρή σύζευξη [67, 68]. Το αποτέλεσμα της ισχυρής σύζευξης συμφωνεί με τον αναλυτικό υπολογισμό 2 βρόχων από τη μεριά της θεωρίας των χορδών [34, 69, 70].

Η γενική μορφή του αναπτύγματος των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών συστροφής 2, $\mathcal{O}_S$ της θεωρίας $\mathcal{N} = 4$ SYM για μεγάλα σπίν είναι η ίδια σε ασθενή και ισχυρή σύζευξη [71]:

$$E - S = f \ln(S/\sqrt{\lambda}) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{(nn)} \frac{\ln^n(S/\sqrt{\lambda})}{S^n} + \sum_{n=2}^{\infty} f_{(nn-1)} \frac{\ln^{n-1}(S/\sqrt{\lambda})}{S^n} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{S^n}, \quad (5.3)$$

αλλά με διαφορετικά σετ συντελεστών $f_{(nk)}(\sqrt{\lambda})$ σε κάθε περίπτωση:

$$f_{(nk)} = \sum_m \tilde{f}_{nkm} \lambda^m, \quad (\text{ασθενής σύζευξη}) \quad \& \quad f_{(nk)} = \sum_m \frac{f_{nkm}}{(\sqrt{\lambda})^m}, \quad (\text{ισχυρή σύζευξη}). \quad (5.4)$$

Διάφορες άλλες μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων (5.2) των τελεστών (4.2) με συστροφή 2, στην διαταραχτική $\mathcal{N} = 4$ SYM. Με αναλυτική επίλυση της

²⁵Οι διορθώσεις "wrapping" είναι γνωστές ως διορθώσεις «πεπερασμένου μεγέθους», επειδή εμφανίζονται για πρώτη φορά στην κρίσιμη τάξη βρόχου L , όπου L είναι το μέγεθος του συστήματος και μηδενίζονται για άπειρο μέγεθος συστήματος, $L = \infty$. Από την πλευρά της θεωρίας βαθμίδας, το μέγεθος του συστήματος είναι ίσο με το μήκος της αλυσίδας σπίν, που συνήθως προσδιορίζεται από τη γυμνή της διάσταση κλίμακας Δ_0 , τα σπίν S και J και τον αριθμό των μαγνωνίων M . Από την πλευρά της θεωρίας χορδών, το μέγεθος του συστήματος καθορίζεται από την περιφέρεια $2\pi r$ του κυλινδρικού κοσμικού φύλλου, $(\tau, \sigma) \in (-\infty, +\infty) \times [-r, +r]$. Μπορεί να αποδειχθεί (βλέπε π.χ. την εξίσωση (6.20)) ότι υπάρχει μια παραμετροποίηση της περιοδικής χωρικής συντεταγμένης του κοσμικού φύλλου $\sigma(-r) = \sigma(+r)$, έτσι ώστε η διατηρούμενη ενέργεια της χορδής $\mathcal{E} \propto r$. Ως εκ τούτου, κάθε φορά που η ενέργεια $\mathcal{E}$ είναι (μη) πεπερασμένη, το ίδιο ισχύει και για την περιφέρεια του κοσμικού φύλλου $2\pi r$. Δεδομένου ότι σχεδόν πάντα η ενέργεια της χορδής $\mathcal{E}$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση των διατηρούμενων φορτίων S και J , αυτά μπορεί επίσης να θεωρηθούν ως ένα μέτρο του μεγέθους του συστήματος, το οποίο θα είναι άπειρο, όταν το ένα από αυτά απειρίζεται και πεπερασμένο, όταν και τα δύο είναι πεπερασμένα.

²⁶Για περαιτέρω παραπομπές, μαζί με μια συνοπτική ιστορική ανασκόπηση, βλέπε [59].

εξίσωσης Baxter, έχουν ληφθεί αποτελέσματα σε τρεις [72] και τέσσερις βρόχους [73]. Με υπολογισμό των διορθώσεων wrapping σε περισσότερους από τρεις βρόχους, οι ανώμαλες διαστάσεις σε τέσσερις και πέντε βρόχους έχουν υπολογιστεί στις εργασίες [74, 75].

Σε ισχυρή σύζευξη λ , όλα τα $f_{(nk)}$ μπορούν θεωρητικά να ληφθούν από το θερμοδυναμικό Bethe ansatz (TBA) [76]. Στις εργασίες [71, 77], οι συντελεστές $f_0, f_1, f_{(11)}$, της σχέσης (5.3) υπολογίστηκαν σε ένα βρόχο, χρησιμοποιώντας διαταρακτική θεωρία χορδών. Είναι σχετικά εύκολο να υπολογίσουμε τους μερικούς πρώτους κλασικούς συντελεστές της (5.3) σε ισχυρή σύζευξη με ένα πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών, π.χ. τη Mathematica (βλέπε παράρτημα Δ.1). Ωστόσο, οι υπολογιστικές μέθοδοι περιορίζονται γενικά από την διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ. Κανείς δεν έχει καταφέρει ποτέ να υπολογίσει όλους τους συντελεστές (5.3) αναλυτικά. Στο [12] οι Γεωργίου και Σαββίδης κατάφεραν να υπολογίσουν όλους τους κυρίαρχους (leading, $f_{(nn)}$) και επόμενους (subleading, $f_{(nn-1)}$) όρους σε ισχυρή σύζευξη, εισάγοντας μια επαναληπτική μέθοδο η οποία μπορεί δυνητικά να τους υπολογίσει όλους. Στην [3] όλοι οι κλασσικοί μεθεπόμενοι συντελεστές (next-to-subleading, $f_{(nn-2)}$) υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση W του Lambert για την αναπαράσταση των ανώμαλων διαστάσεων (5.3). Στην §5.2, πρόκειται να επανέλθουμε στην εξαγωγή της σχέσης αυτής, δίνοντας περισσότερες λεπτομέρειες και ενδιαμέσα αποτελέσματα.

Ας συνοψίσουμε τώρα όλα τα κλασικά αποτελέσματα. Εκφράζουμε την (5.3) στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{S} = \rho_c \ln \mathcal{S} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \rho_{(nk)} \frac{\ln^k \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} = \rho_c \ln \mathcal{S} + \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{(nn)} \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \rho_{(nn-1)} \frac{\ln^{n-1} \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} + \\ + \sum_{n=3}^{\infty} \rho_{(nn-2)} \frac{\ln^{n-2} \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} + \dots + \frac{\rho_1}{\mathcal{S}} + \frac{\rho_2}{\mathcal{S}^2} + \frac{\rho_3}{\mathcal{S}^3} + \dots, \quad \mathcal{S}, \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.5)$$

όπου $\mathcal{E} = \pi E / \sqrt{\lambda}$, $\mathcal{S} = \pi S / \sqrt{\lambda}$. Βρίσκουμε του ακόλουθους συντελεστές:

$$\rho_c = 1 \quad , \quad \rho_0 = 3 \ln 2 - 1 \quad , \quad \rho_1 = \frac{1}{2} (3 \ln 2 - 1) \quad , \quad \rho_2 = -\frac{9 \ln^2 2}{8} + \frac{27 \ln 2}{16} - \frac{5}{16}. \quad (5.6)$$

Βρίσκουμε επίσης,

$$\rho_{(mm)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^m} \frac{1}{m}, \quad (5.7)$$

$$\rho_{(m+1,m)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+1}} \left[H_m + \frac{m}{4} + 1 - 3 \ln 2 \right] \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \rho_{(m+2,m)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+3}} \cdot (m+1) \cdot \left\{ H_{m+1}^2 - H_{m+1}^{(2)} + \frac{1}{2} (m - 12 \ln 2 + 5) \cdot H_{m+1} + \frac{m(m-1)}{24} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} (m+5) \ln 2 + 9 \ln^2 2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Όπως ήδη αναφέραμε, οι σειρές $\rho_{(mm)}$ και $\rho_{(m+1,m)}$ εξήχθησαν για πρώτη φορά στην εργασία [12]. Οι μεθεπόμενοι συντελεστές $\rho_{(m+2,m)}$ υπολογίστηκαν στην εργασία [3].

Οι τελεστές 2 μαγνονίων είναι δυϊκοί στη χορδή που περιστρέφεται εντός του $\mathbb{R} \times S^2$, ήτοι στην περίπτωση GKP (II). Οι χορδές GKP επί της δισδιάστατης σφαίρας σχετίζονται άμεσα με τα γιγάντια μαγνόνια τα οποία είναι ανοικτές χορδές με ένα σπίν που περιστρέφονται στον $\mathbb{R} \times S^2$. Τα γιγάντια μαγνόνια είναι οι δυϊκές χορδές των μαγνονίων, που ανήκουν στον $\mathfrak{su}(2)$ τομέα της $\mathcal{N} = 4$ θεωρίας SYM. Η χορδή GKP επί της σφαίρας σχηματίζεται από την υπέρθεση δύο γιγάντιων μαγνονίων με μέγιστη γωνιακή έκταση $\Delta\varphi = \pi$ και στροφορμή $J/2$ το καθένα. Ως εκ τούτου, οι χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$ είναι δυϊκές στους τελεστές 2 μαγνονίων με μέγιστη ορμή $p = \pi$.

Οι ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών 2 μαγνονίων $\mathcal{O}_J$ δίδονται από το ασυμπτωτικό Bethe ansatz μέχρι τους $J + 1$ βρόχους:

$$\Delta - J = 2\sqrt{1 + \frac{\lambda}{\pi^2}}. \quad (5.10)$$

Μπορούμε να βρούμε τα όρια ασθενούς και ισχυρής σύζευξης ως ακολούθως:

$$\Delta - J = 2 + \frac{\lambda}{\pi^2} - \frac{\lambda^2}{4\pi^4} + \frac{\lambda^3}{8\pi^6} - \dots, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (\text{ασθενής σύζευξη}) \quad (5.11)$$

$$\Delta - J = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} + 0 + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\pi^3}{4\lambda^{3/2}} + \dots, \quad J, \lambda \rightarrow \infty \quad (\text{ισχυρή σύζευξη}). \quad (5.12)$$

Κάθε όρος στο δεξιό μέλος των εξισώσεων (5.11)–(5.12) αντιστοιχεί στις κβαντικές διορθώσεις (διορθώσεις α' ή διορθώσεις καμπυλότητας) της αντίστοιχης τάξης βρόχου. Παρατηρούμε ότι οι γυμνές διαστάσεις σε ασθενή σύζευξη $\Delta_0 = J + 2$ διορθώνονται κατά τις δυνάμεις του λ , ενώ σε ισχυρή σύζευξη το αποτέλεσμα των GKP (4.3) διορθώνεται κατά τις δυνάμεις του $1/\sqrt{\lambda}$.

Από την άλλη μεριά, οι διορθώσεις wrapping, πρωτοεμφανίζονται στην εξίσωση (5.11) στους $J + 2$ βρόχους. Εκτός από την περίπτωση που το μέγεθος του συστήματος είναι άπειρο ($J = \infty$, περίπτωση στην οποία δεν υπάρχουν διορθώσεις wrapping) οι διορθώσεις wrapping είναι παρούσες στο ανάπτυγμα της ισχυρής σύζευξης (5.12) ακόμη και στην δενδροειδή προσέγγιση (η οποία αντιστοιχεί σε ∞ τάξη βρόχου από τη μεριά της θεωρίας βαθμίδας). Οι κλασσικές και οι κβαντικές διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους που λαμβάνει η σχέση διασποράς των GKP (4.3) σε ισχυρή σύζευξη και μεγάλη αλλά πεπερασμένη στροφορμή J , έχουν τη μορφή εκθετικά μειούμενων όρων. Το κλασσικό μέρος αυτών των διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους έχει την ακόλουθη δομή:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{\mathcal{A}}_{nm} \mathcal{J}^{n-m-1} e^{-n(\mathcal{J}+2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda, \mathcal{J} \rightarrow \infty, \quad (5.13)$$

όπου $\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$ και $\mathcal{J} \equiv \pi J/\sqrt{\lambda}$. Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές όλων των αρνητικών δυνάμεων του $\mathcal{J}$ στην (5.13) είναι μηδέν (π.χ. $\mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{12} = \dots = 0$). Πολλοί κλασσικοί όροι μπορούν να ληφθούν από απευθείας υπολογισμό με τη Mathematica (βλέπε παράρτημα Δ.1). Όπως θα δείξουμε παρακάτω στην §5.1, οι ανώμαλες διαστάσεις (5.13) μπορούν να γραφτούν με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert $W(\pm 4\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}-2})$ ως εξής:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 - \frac{1}{\mathcal{J}} (2W + W^2) - \frac{1}{2\mathcal{J}^2} (W^2 + W^3) - \frac{1}{16\mathcal{J}^3} \frac{W^3 (11W^2 + 26W + 16)}{1 + W} + \dots \quad (5.14)$$

όπου η συνάρτηση W του Lambert ορίζεται από την ακόλουθη σχέση (περισσότερα στο παράρτημα Γ):

$$W(z) e^{W(z)} = z \Leftrightarrow W(z e^z) = z. \quad (5.15)$$

Το θετικό πρόσημο του ορίσματος της συνάρτησης W του Lambert στην εξίσωση (5.14) αντιστοιχεί στην περίπτωση της κλειστής και διπλωμένης χορδής ($\omega > 1$), ενώ το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί στην περίπτωση της κυκλικής χορδής ($\omega < 1$). Αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση W του Lambert, τότε ο δεύτερος, τρίτος και τέταρτος όρος της (5.14) δίνουν αντίστοιχα τους κυρίαρχους ($\tilde{\mathcal{A}}_{n0}$), επόμενους ($\tilde{\mathcal{A}}_{n1}$) και μεθεπόμενους ($\tilde{\mathcal{A}}_{n2}$) όρους της (5.13):

- κυρίαρχοι όροι: $-\frac{1}{\mathcal{J}} (2W + W^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{A}}_{n0} \mathcal{J}^{n-1} e^{-n(\mathcal{J}+2)}$
- επόμενοι όροι: $-\frac{1}{2\mathcal{J}^2} (W^2 + W^3) = \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{\mathcal{A}}_{n1} \mathcal{J}^{n-2} e^{-n(\mathcal{J}+2)}$
- μεθεπόμενοι όροι: $-\frac{1}{16\mathcal{J}^3} \frac{W^3 (11W^2 + 26W + 16)}{1+W} = \sum_{n=3}^{\infty} \tilde{\mathcal{A}}_{n2} \mathcal{J}^{n-3} e^{-n(\mathcal{J}+2)}.$

Ακριβείς εκφράσεις για αυτές τις σειρές μπορούν να δοθούν, βλέπε τις εξισώσεις (5.45), (5.58) και (5.63). Μπορούμε επίσης να ισχυριστούμε ότι όλοι οι όροι της (5.13) (N^k -επόμενοι όροι) μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert.

Προτού προχωρήσουμε στον αναλυτικό υπολογισμό των σχέσεων ενέργειας-σπίν (5.5) και (5.14), ας σχηματίσουμε στα γρήγορα πως αυτές εξάγονται. Στη περίπτωση της εξίσωσης (5.14) της μεγάλης διπλωμένης χορδής εντός του $\mathbb{R} \times S^2$ ($\omega > 1$), το σημείο εκκίνησης είναι το 2×2 σύστημα εξισώσεων (4.65)–(4.66):

$$\mathcal{E} = d(x) \ln x + h(x) \quad (5.16)$$

$$\mathcal{J} = c(x) \ln x + b(x), \quad (5.17)$$

όπου $x \equiv 1 - 1/\omega^2$ είναι η συμπληρωματική παράμετρος της γωνιακής ταχύτητας ω και $d(x)$, $h(x)$, $c(x)$, $b(x)$ είναι οι δυναμοσειρές που κάνουν την εμφάνισή τους στις σχέσεις (4.65)–(4.66), με συντελεστές d_n , h_n , c_n και b_n αντίστοιχα, που δίδονται από την (4.67). Αυτό που κάνουμε είναι ότι χρησιμοποιούμε τη φόρμουλα αντιστροφής των Lagrange-Bürmann προκειμένου να αντιστρέψουμε την εξίσωση (5.17) ως προς την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{J})$ και μετά εισάγουμε την τελευταία στην σχέση (5.16) που δίνει τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J} = \gamma(\mathcal{J})$ συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert. Οδηγούμαστε έτσι στην εξίσωση (5.14) για τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους συντελεστές στη σχέση διασποράς των μεγάλων διπλωμένων χορδών του χώρου $\mathbb{R} \times S^2$. Η διαδικασία είναι τεχνικά περίπλοκη, γι'αυτό το λόγο αφιερώνουμε τις επόμενες πέντε ενότητες §5.1.1–§5.1.5 στην ανάπτυξή της.

Έχοντας αναπτύξει τον απαιτούμενο φορμαλισμό, είναι σχετικά απλό να τον ξαναεφαρμόσουμε. Στην §5.1.6 ο παραπάνω αλγόριθμος επαναλαμβάνεται για ταχείες κυκλικές χορδές στον $\mathbb{R} \times S^2$ ($\omega < 1$), χρησιμοποιώντας τις σειρές (4.74)–(4.75) στο σύστημα (5.16)–(5.17). Στην §5.2, οι μεγάλες διπλωμένες χορδές εντός του AdS_3 ($\omega > 1$) μελετώνται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.33)–(4.34) και τους συντελεστές (4.35) προκειμένου να λύσουμε το σύστημα (5.16)–(5.17). Η αναπαράσταση της συνάρτησης W για τη σχέση διασποράς των μεγάλων χορδών GKP στον AdS_3 μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των συντελεστών (5.6)–(5.9) της εξίσωσης (5.5).

Οι εκφράσεις (5.5)–(5.14) δεν δίνουν μόνο τις ενέργειες των κλασικών χορδών με αξιοσημείωτη ακρίβεια, αλλά παρέχουν και κλειστές και οργανωμένες εκφράσεις για το φάσμα αυτών. Η αναδιοργάνωση αυτή ρίχνει φως στη δομή των αναπτυγμάτων μεγάλου σπίν των ανώμαλων διαστάσεων των χορδών GKP και των δυϊκών τους τελεστών και δύναται να επηρεάσει σημαντικά τον τρόπο που αντιμετωπίζουμε τα αντίστοιχα αναπτύγματα σε ασθενή σύζευξη, μικρό σπίν, όπως επίσης και τις κβαντικές τους διορθώσεις. Οι μέθοδοι που βασίζονται στην ολοκληρωσιμότητα μπορούν επίσης να επωφεληθούν από περισσότερο αναγνωρίσιμες δομές στα φάσματα των χορδών.

5.1 Περιστρεφόμενες Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov στον $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$

5.1.1 Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν

Ας δούμε τώρα πως αντιστρέφεται η σειρά της στροφορμής J στην εξίσωση (4.66) ως προς τη μεταβλητή $x = x(J)$. Ας λύσουμε πρώτα την (4.66) ως προς $\ln x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (c_n \ln x + b_n) &\Rightarrow \ln x = \frac{\mathcal{J}/2 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln x = \left[\frac{\mathcal{J}/2 - b_0}{c_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{c_0} x^n \right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{c_0} x^k \right)^n. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Εν συνεχεία, πολλαπλασιάζουμε τις σειρές και εκθετοποιούμε την εξίσωση που προκύπτει:

$$\begin{aligned} x = x_0 \cdot \exp \left\{ - \left[c_1 \frac{\mathcal{J}}{2} + b_1 c_0 - b_0 c_1 \right] \frac{x}{c_0^2} + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{\mathcal{J}}{2} - b_0 \right) \frac{\mathbf{P}_n^{(-1)}}{n!} - b_0 - \sum_{k=0}^{n-2} b_{n-k-1} \frac{\mathbf{P}_{k+1}^{(-1)}}{(k+1)!} \right] \frac{x^n}{c_0} \right\}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

όπου η

$$x_0 \equiv \exp \left[\frac{\mathcal{J}/2 - b_0}{c_0} \right] = 16 e^{-\mathcal{J}-2} \quad (5.20)$$

λύνει την (5.18) σε κατώτερη τάξη ως προς x και τα πολυώνυμα $\mathbf{P}_n^{(r)}$ είναι γνωστά ως πολυώνυμα δυναμικού (βλέπε παράρτημα Z'2). Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x = x_0 \cdot \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right] = x_0 \cdot \exp (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \quad (5.21)$$

ως προς το x (έχοντας υπολογίσει τα a_n από την (5.19)). Ένας πιθανός τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να προσπαθήσουμε να αντιστρέψουμε τη σειρά (5.19) ως προς το x χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange [57, 78]. Όπως αποδεικνύεται, η προς αντιστροφή συνάρτηση έχει μια πολύ εύχρηστη μορφή που απλοποιεί σημαντικά το υπολογισμό του αντιστρόφου της. Το γεγονός αυτό ανακαλύφθηκε από τους J.-L. Lagrange και H. H. Bürrmann [79] και η ακόλουθη φόρμουλα (που εφαρμόζουμε εδώ στην περίπτωση της εκθετικής συνάρτησης) είναι γνωστή ως φόρμουλα αντιστροφής των Lagrange και Bürrmann:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \cdot \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} n a_m z^m \right] \right\}_{z=0}. \quad (5.22)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη n -οστή παράγωγο του εκθετικού μιας δυναμοσειράς, χρησιμοποιούμε

την ακόλουθη φόρμουλα για το εκθετικό:

$$\exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} n a_m z^m \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{B}_k (n \cdot a_1, 2n \cdot a_2, \dots, k! n \cdot a_k) z^k, \quad (5.23)$$

όπου $\mathbf{B}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι τα πλήρη (εκθετικά) πολυώνυμα Bell (complete exponential Bell polynomials), που ορίζονται στο παράρτημα [Z.1](#). Βρίσκουμε,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} n a_m z^m \right] \right\}_{z=0} &= \mathbf{B}_{n-1} (n \cdot a_1, 2n \cdot a_2, \dots, (n-1)! n \cdot a_{n-1}) = \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k-1}}{k!} \hat{\mathbf{B}}_{n-1,k} (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k, j_i=0}^{n-1} n^k \binom{n-1}{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_{n-1}^{j_{n-1}}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

όπου $\hat{\mathbf{B}}_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τα συνήθη μερικά πολυώνυμα Bell (ordinary partial Bell polynomials) (βλέπε παράρτημα [Z.1](#)) και

$$j_1 + j_2 + \dots + j_{n-1} = k \quad \& \quad j_1 + 2j_2 + \dots + (n-1)j_{n-1} = n-1. \quad (5.25)$$

Η παράμετρος x γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k-1}}{k!} \hat{\mathbf{B}}_{n-1,k} (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k, j_i=0}^{n-1} \frac{n^k}{n!} \binom{n-1}{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_{n-1}^{j_{n-1}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η εξίσωση (5.19) συνεπάγεται ότι οι συντελεστές a_i εξαρτώνται γραμμικά από το $\mathcal{J}$, με συνέπεια η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{J})$ να λαμβάνει αναγκαστικά την ακόλουθη μορφή:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk} J^k, \quad (5.27)$$

όπου οι συντελεστές a_{nk} δεν εξαρτώνται από το J . Για να δείξουμε ότι η εξίσωση (5.27) ισχύει, θεωρούμε τους εξής δύο συνδέσμους για τις τιμές του j :

$$\left. \begin{aligned} j_1 + j_2 + \dots + j_{n-1} &= k \\ j_1 + 2j_2 + \dots + (n-1)j_{n-1} &= n-1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k + j_2 + \dots + (n-2)j_{n-1} = n-1, \quad (5.28)$$

ήτοι η μέγιστη δύναμη του J στην (5.27) είναι $n-1$. Ένα δεύτερο συμπέρασμα που βγαίνει από αυτούς τους δύο συνδέσμους είναι ότι όλες οι κυρίαρχες συνεισφορές του $\mathcal{J}$ στο x καθορίζονται από τους κυρίαρχους

ως προς το $\mathcal{J}$ όρους του a_1 , όλες οι επόμενες ως προς $\mathcal{J}$ συνεισφορές στο x ελέγχονται από το a_1 και τους κυρίαρχους ως προς $\mathcal{J}$ όρους του a_2 , κλπ., ήτοι όλοι οι συντελεστές του $x(\mathcal{J})$ μέχρι το $x_0^n \mathcal{J}^{n-m}$ καθορίζονται από τα $a_1, \dots, a_{m-1}$ και τον κυρίαρχο όρο του a_m . Αυτό γίνεται καλύτερα αντιληπτό αν παρατηρήσουμε στην $k + j_2 + \dots + (n-2)j_{n-1} = n-1$, ότι όταν κάποια j_m στην (5.26) είναι $j_m \neq 0$ (ελάχιστη τιμή 1), το $k = j_m + \dots + j_{n-1}$ είναι το πολύ $n-1 - (m-1) = n-m$. Αυτό το συμπέρασμα σχετικά με τον αριθμό των όρων που καθορίζουν πλήρως το $x(\mathcal{J})$ συμφωνεί με αυτά που περιμένουμε βάσει της εξίσωσης (5.21).

5.1.2 Ανώμαλες Διαστάσεις

Έχοντας τη συνάρτηση $x(\mathcal{J})$ στη διάθεσή μας, μπορούμε να εκφράσουμε τις ανώμαλες διαστάσεις κλίμακας $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J}$ της κλειστής διπλωμένης χορδής εντός του $\mathbb{R} \times S^2$ σαν συνάρτηση του $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (f_n \ln x + g_n) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n + f_n \ln \frac{x}{x_0} \right], \quad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}}, \quad (5.29)$$

όπου,

$$f_n \equiv -c_n - \sum_{k=0}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \cdot d_{n-k}, \quad g_n \equiv -b_n - \sum_{k=0}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \cdot h_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

Οι λίγοι πρώτοι από τους συντελεστές f_n και g_n είναι:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, & f_1 &= 0, & f_2 &= \frac{1}{32}, & f_3 &= \frac{3}{128} \\ g_0 &= 1, & g_1 &= -\frac{1}{4}, & g_2 &= -\frac{1}{8} \ln 2 - \frac{5}{64}, & g_3 &= -\frac{3}{32} \ln 2 - \frac{7}{256}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Οι συντελεστές A_n ορίζονται ως εξής:

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + 2f_n \left(2 \ln 2 - \frac{\mathcal{J}}{2} - 1 \right) \quad (5.32)$$

και τα λίγα πρώτα A είναι:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{4}, \quad A_2 = -\frac{1}{64} (2\mathcal{J} + 9), \quad A_3 = -\frac{1}{256} (6\mathcal{J} + 19). \quad (5.33)$$

Για μεγάλα σπίν $\mathcal{J}$, μπορούμε να αντιστρέψουμε τις σειρές (5.18)–(5.19) ως προς το $x = x(\mathcal{J})$ χρησιμοποιώντας τη **Mathematica**. Ακολούθως η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x(\mathcal{J})$ μπορεί να εισαχθεί εντός της εξίσωσης (5.29) και να δώσει τη σχέση ενέργειας-σπίν για τη χορδή (II) των GKP, ή ισοδύναμα τις ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών $\text{Tr} [\mathcal{X} Z^m \mathcal{X} Z^{J-m}]$ της $\mathcal{N} = 4$ θεωρίας SYM σαν συνάρτηση του (μεγάλου) R-φορτίου $\mathcal{J}$. Τα αποτελέσματα ενός τέτοιου υπολογισμού για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{J})$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma(\mathcal{J})$ μπορούν να βρεθούν στις εξισώσεις (Δ'.2)–(Δ'.3) του παραρτήματος Δ'. Και οι δύο σειρές περιέχουν τα ακόλουθα είδη όρων:

$$\text{Κυρίαρχοι όροι (L): } \mathcal{J}^{n-1} (e^{-\mathcal{J}-2})^n$$

Επόμενοι όροι (NL): $\mathcal{J}^{n-2} (e^{-\mathcal{J}-2})^n$

Μεθεπόμενοι όροι: $\mathcal{J}^{n-3} (e^{-\mathcal{J}-2})^n$

$\vdots$

(5.34)

Με βάση το γεγονός ότι οι σειρές (4.65), (4.66) και (5.29) έχουν κατά βάση την ίδια δομή, μπορούμε να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση. Για να βρούμε το $\mathcal{E} - \mathcal{J}$ μέχρι μία δοθείσα επόμενη τάξη, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x(\mathcal{J})$, που πρέπει να εισάγουμε εντός της (5.29) για να βρούμε την ενέργεια $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{J})$, μέχρι την ίδια τάξη. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.21) και (5.27) λαμβάνουμε:

$$\ln \frac{x}{x_0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (5.35)$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk} \mathcal{J}^k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}^{n-1} x_0^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tilde{a}_{nk}}{\mathcal{J}^k} = \frac{1}{\mathcal{J}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}^n x_0^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tilde{a}_{nk}}{\mathcal{J}^k}, \quad (5.36)$$

όπου $a_{nm} = \tilde{a}_{n(n-k-1)}$ είναι σταθερές και τα a_n είναι γραμμικές συναρτήσεις του $\mathcal{J}$. Η τελευταία εξίσωση προκύπτει από την (5.27) αφού αναδιοργανώσουμε τους όρους της. Η σχέση ενέργειας-σπίν (5.29) γράφεται τότε ως εξής:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (f_n \ln x + g_n) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n + f_n \ln \frac{x}{x_0} \right] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n + \sum_{k=1}^{\infty} f_n a_k x^k \right]. \quad (5.37)$$

Όλοι οι κυρίαρχοι όροι του x^n είναι τάξης $1/\mathcal{J}^n$ (παρατηρώντας τη μορφή του αναπτύγματος (5.36) για το x , το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο από την εξίσωση (Δ'.2) γραμμένη με συμβολικό τρόπο) και πολλαπλασιάζουν είτε το A_n , είτε το $f_{n-k} \cdot a_k$ στην έκφραση (5.37) για το $\mathcal{E} - \mathcal{J}$, που είναι αμφοτέρα γραμμικά στο $\mathcal{J}$. Άρα ο r -οστός επόμενος όρος του $\mathcal{E} - \mathcal{J}$ (που είναι τάξης $1/\mathcal{J}^r$) δε λαμβάνει συνεισφορές από τους όρους του x^{r+2} (για τους οποίους $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{r+2} \sim \mathcal{J}^{r+1}$). Συνεπώς, προκειμένου να λάβουμε ακριβώς τις πρώτες r επόμενες τάξεις του $\mathcal{E} - \mathcal{J}$ ($r = 1$ κυρίαρχη, $r = 2$ επόμενη, κλπ.), όχι περισσότερες από τις πρώτες $r+1$ δυνάμεις του x θα πρέπει να διατηρηθούν στην (5.37). Επιπλέον, η τελευταία δύναμη του x που θα πρέπει να κρατηθεί στην (5.37) (ήτοι η x^{r+1}) δεν μπορεί να πολλαπλασιάζεται με όρους που είναι ανεξάρτητοι του $\mathcal{J}$.

Μπορούμε να καταλάβουμε γιατί χρειαζόμαστε ακριβώς n επόμενους όρους στο ανάπτυγμα του x προκειμένου να υπολογίσουμε το $\mathcal{E} - \mathcal{J}$ μέχρι τη n -στή επόμενη τάξη. Κρατώντας λιγότερες δυνάμεις εντός του x , από το $x \cdot A_1 = -x/4$ θα λείπουν κάποιοι από τους επόμενους όρους του. Όροι βαθύτερα στο x από τον $1/\mathcal{J}^n$ δε συνεισφέρουν, καθότι δεν υπάρχουν δυνάμεις του $\mathcal{J}$ στη έκφραση για το $\mathcal{E} - \mathcal{J}$ που μπορούν δυνητικά να το ανεβάσουν μέχρι την απαιτούμενη τάξη. Πιστεύουμε ότι όλες αυτές οι παρατηρήσεις θα γίνουν περισσότερο σαφείς παρακάτω.

5.1.3 Κυρίαρχοι Όροι

Ας δούμε τώρα πως τα όσα είπαμε παραπάνω μπορούν να εφαρμοστούν για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων σε κυρίαρχη τάξη ως προς $\mathcal{J}$. Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές της ακόλουθης σειράς:

$$E - J \Big|_{(L)} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{n0} \mathcal{J}^{n-1} (e^{-\mathcal{J}-2})^n. \quad (5.38)$$

Όπως ήδη εξηγήσαμε, χρειαζόμαστε μόνο τους κυρίαρχους όρους του x , ήτοι τους όρους της ακόλουθης σειράς:

$$x_{(L)} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathcal{J}^{n-1} (e^{-\mathcal{J}^{-2}})^n. \quad (5.39)$$

Ο κυρίαρχος όρος του x καθορίζεται, αν στο δεξιό μέλος της (5.18) κρατήσουμε όλους τους όρους που πολλαπλασιάζουν το $x^0 = 1$ και μόνο τους κυρίαρχους ως προς $\mathcal{J}$ όρους που πολλαπλασιάζουν το $x^1 = x$. Η (5.18) τότε γράφεται ως εξής:

$$\ln x_{(L)} = \frac{\mathcal{J}/2 - b_0}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} \frac{\mathcal{J}}{2} \cdot x_{(L)} \Rightarrow x_0 = x_{(L)} \exp \left[\frac{c_1}{c_0^2} \frac{\mathcal{J}}{2} \cdot x_{(L)} \right] = x_{(L)} e^{\mathcal{J} \cdot x_{(L)}/4}, \quad (5.40)$$

όπου $x_0 = 16 e^{-\mathcal{J}^{-2}}$. Αυτή είναι η εξίσωση (5.21) για τους κυρίαρχους όρους του x . Μπορούμε να την λύσουμε είτε με την μέθοδο αντιστροφής που περιγράψαμε στην προηγούμενη υποενότητα, ή μπορούμε να υπολογίσουμε την ακόλουθη tetration:

$$x_{(L)} = x_0 e^{-x_0 \mathcal{J}/4 \cdot e^{-x_0 \mathcal{J}/4 \cdot \dots}} = x_0 \cdot {}^{\infty} \left(e^{-x_0 \mathcal{J}/4} \right). \quad (5.41)$$

Υπάρχει μια χρήσιμη φόρμουλα για το άπειρο εκθετικό που εμφανίζεται στην (5.41) και περιέχει τη συνάρτηση W του Lambert (για τον ορισμό και τις ιδιότητες της συνάρτησης W , ο αναγνώστης παραπέμπεται στο παράρτημα **Γ'**)

$${}^{\infty}(e^z) = \frac{W(-z)}{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} z^{n-1}, \quad (5.42)$$

στον κύριο κλάδο της W_0 .²⁷ Επομένως βρίσκουμε

$$x_{(L)} = \frac{4}{\mathcal{J}} W(4 \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}^{-2}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathcal{J}^{n-1} (e^{-\mathcal{J}^{-2}})^n, \quad (5.43)$$

όπου ορίσαμε:

$$\alpha_n \equiv (-1)^{n+1} 2^{2n+2} \cdot \frac{n^{n-1}}{n!}. \quad (5.44)$$

Για να λάβουμε τη σχέση ενέργειας-ορμής σε κυρίαρχη τάξη ως προς $\mathcal{J}$, θα πρέπει να εισαγάγουμε τη φόρμουλα (5.43) για το $x_{(L)}$ εντός της (5.29) και να κρατήσουμε μόνο τους κυρίαρχους όρους. Το

²⁷Πρέπει να επιλέξουμε τον κύριο κλάδο W_0 έτσι ώστε το x να έχει τη σωστή συμπεριφορά, $x \rightarrow 0^+$ καθώς το $\mathcal{J} \rightarrow +\infty$. Αντίθετα, στον κλάδο W_{-1} , το $x \rightarrow -4$. Περισσότερα μπορούν να βρεθούν στο παράρτημα **Γ'**.

αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{aligned}
E - J \Big|_{(L)} &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ 1 + g_1 x_{(L)} - f_2 \mathcal{J} x_{(\ell)}^2 \right\} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ 1 - \frac{x_{(L)}}{4} - \frac{\mathcal{J} x_{(L)}^2}{32} \right\} = \\
&= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2\mathcal{J}} \left[2 \cdot W(4\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}-2}) + W^2(4\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}-2}) \right] \right\} = \\
&= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left[4\alpha_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \alpha_{n-k} \right] \cdot \mathcal{J}^{n-1} (e^{-\mathcal{J}-2})^n \right\}. \tag{5.45}
\end{aligned}$$

Αυτοί είναι όλοι οι κυρίαρχοι όροι $\tilde{\mathcal{A}}_{n0}$ του (5.13).

5.1.4 Επόμενοι Όροι

Για να υπολογίσουμε όλους τους επόμενους συντελεστές των ανώμαλων διαστάσεων

$$E - J \Big|_{(NL)} = \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{\mathcal{A}}_{n1} \mathcal{J}^{n-2} (e^{-\mathcal{J}-2})^n, \tag{5.46}$$

χρησιμοποιούμε τους κυρίαρχους και τους επόμενους όρους του x στην (5.26):

$$x_{(NL)} = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \mathcal{J}^{n-2} (e^{-\mathcal{J}-2})^n. \tag{5.47}$$

Αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε όλους τους όρους που πολλαπλασιάζουν το $x^{0,1}$ στο δεξί μέρος της (5.18), και μόνο τους κυρίαρχους στο $\mathcal{J}$ όρους που πολλαπλασιάζουν το x^2 . Σε επόμενη (NL) τάξη, η εξίσωση (5.18) γράφεται επομένως ως εξής:

$$\begin{aligned}
\ln x_{(L+NL+\dots)} &= \frac{\mathcal{J}/2 - b_0}{c_0} - \frac{\mathcal{J}c_1/2 + b_1c_0 - b_0c_1}{c_0^2} \cdot x_{(L+NL+\dots)} + \frac{c_1^2 - c_0c_2}{c_0^3} \frac{\mathcal{J}}{2} \cdot x_{(L+NL+\dots)}^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow x_{(L+NL+\dots)} &= x_0 \cdot \exp \left[-\frac{\mathcal{J}+2}{4} \cdot x_{(L+NL+\dots)} - \frac{7\mathcal{J}}{64} \cdot x_{(L+NL+\dots)}^2 \right]. \tag{5.48}
\end{aligned}$$

Για να επιλύσουμε αυτή την εξίσωση θα πρέπει πρώτα να την αντιστρέψουμε με τον τύπο Lagrange-Bürmann. Γράφοντας,

$$x_0 = x_{(L+NL+\dots)} \cdot \exp \left[\frac{\mathcal{J}+2}{4} \cdot x_{(L+NL+\dots)} + \frac{7\mathcal{J}}{64} \cdot x_{(L+NL+\dots)}^2 \right], \tag{5.49}$$

βρίσκουμε τον αντίστροφο όπως στην εξίσωση (5.26). Αναλυτικά

$$x_{(L+NL+\dots)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \exp \left[-\frac{\mathcal{J}+2}{4} \cdot nx - \frac{7\mathcal{J}}{64} \cdot nx^2 \right] \right\} \Big|_{x=0} \cdot \frac{x_0^n}{n!}. \tag{5.50}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned}
 \exp(\alpha x + \beta x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \exp(\alpha z + \beta z^2) \right\} \Big|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x + \beta x^2)^n}{n!} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{\substack{k, j_1=0 \\ n=k+j_1 \\ 0 \leq j_1 \leq k}}^n \frac{(k+j_1)!}{(k-j_1)! j_1!} \alpha^{k-j_1} \beta^{j_1} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \exp(\alpha z + \beta z^2) \right\} \Big|_{z=0} = \sum_{\substack{k, j_1=0 \\ n=k+j_1 \\ 0 \leq j_1 \leq k}}^n \frac{(k+j_1)!}{(k-j_1)! j_1!} \alpha^{k-j_1} \beta^{j_1}, \quad (5.51)
 \end{aligned}$$

βρίσκουμε:

$$x_{(L+NL+\dots)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \sum_{\substack{k, j_1=0 \\ n-1=k+j_1 \\ 0 \leq j_1 \leq k}}^{n-1} (-1)^k n^k \frac{(n-1)!}{(k-j_1)! j_1!} \cdot \left(\frac{\mathcal{J}+2}{4} \right)^{k-j_1} \left(\frac{7\mathcal{J}}{64} \right)^{j_1}. \quad (5.52)$$

Το επόμενο βήμα είναι να διαλέξουμε και να κρατήσουμε μόνο τους κυρίαρχους (L) και τους επόμενους (NL) όρους. Ας ξεκινήσουμε αναπτύσσοντας το διώνυμο σε δυνάμεις του $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\mathcal{J}+2}{4} \right)^{k-j_1} \cdot \left(\frac{7\mathcal{J}}{64} \right)^{j_1} &= \left(\frac{1}{2} \right)^{k-j_1} \left(\frac{7\mathcal{J}}{64} \right)^{j_1} \cdot \sum_{m=0}^{k-j_1} \binom{k-j_1}{m} \left(\frac{\mathcal{J}}{2} \right)^m = \\
 &= \frac{7^{j_1}}{2^{k+4j_1}} \cdot \sum_{m=0}^{k-j_1} \binom{k-j_1}{m} \left(\frac{\mathcal{J}}{2} \right)^{m+j_1} = \frac{7^{j_1}}{2^{k+4j_1}} \cdot \left(\left(\frac{\mathcal{J}}{2} \right)^{j_1} + \dots + (k-j_1) \left(\frac{\mathcal{J}}{2} \right)^{k-1} + \left(\frac{\mathcal{J}}{2} \right)^k \right).
 \end{aligned}$$

Οι κυρίαρχοι όροι $\mathcal{J}^{n-1} x_0^n$ αντιστοιχούν στα $k = n-1$, $m = j_1 = 0$ και γεννούν την κυρίαρχη δυναμοσειρά (5.43)–(5.44) της προηγούμενης ενότητας. Οι επόμενοι όροι $\mathcal{J}^{n-2} x_0^n$ αντιστοιχούν στο άθροισμα των όρων για τους οποίους είτε $k = n-1$, $j_1 = 0$ και $m = 1$ ή $k = n-2$, $j_1 = 1$ και $m = 0$. Βρίσκουμε:

$$x_{(NL)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \cdot \left\{ (-1)^{n-1} n^{n-1} \frac{(n-1)}{2^{2n-3}} + (-1)^{n-2} n^{n-2} \frac{7(n-1)(n-2)}{2^{2n}} \right\} \cdot \mathcal{J}^{n-2}. \quad (5.53)$$

Οι κυρίαρχοι και οι επόμενοι όροι του x δίδονται από:

$$x_{(L+NL)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \mathcal{J}^{n-1} + \beta_n \mathcal{J}^{n-2}) \cdot (e^{-\mathcal{J}-2})^n \quad (5.54)$$

όπου τα α_n ορίζονται στη σχέση (5.44) και

$$\beta_n \equiv (-1)^{n+1} 2^{2n} \cdot \frac{n^{n-2}}{n!} \cdot (n-1)(n+14). \quad (5.55)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τις σειρές (5.54) με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert, χρησιμοποιώντας τις φόρμουλες (Γ'.8)–(Γ'.13) του παραρτήματος Γ':

$$x_{(L+NL)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \mathcal{J}^{n-1} + \beta_n \mathcal{J}^{n-2}) \cdot (e^{-\mathcal{J}-2})^n = \frac{4}{\mathcal{J}} W - \frac{1}{\mathcal{J}^2} \frac{W^2 (7W + 8)}{1 + W}, \quad (5.56)$$

όπου το όρισμα της συνάρτησης W είναι $4\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}-2}$. Για να βρούμε τους κυρίαρχους και επόμενους συντελεστές της σχέσης διασποράς, πρέπει να εισάγουμε την (5.56) στην (5.29) και να κρατήσουμε μόνο όρους σε κυρίαρχη και επόμενη τάξη:

$$\begin{aligned} E - J \Big|_{(L+NL)} &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ 1 + A_1 (x_{(L)} + x_{(NL)}) - f_2 \mathcal{J} x_{(L)}^2 - 2f_2 \mathcal{J} x_{(L)} \cdot x_{(NL)} + \right. \\ &\quad \left. + (g_2 + 2(2\ln 2 - 1)f_2) x_{(L)}^2 - \left(\frac{c_1 f_2}{2c_0^2} + f_3 \right) \mathcal{J} x_{(L)}^3 \right\} = \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ 1 - \frac{x_{(L)}}{4} - \frac{x_{(NL)}}{4} - \frac{\mathcal{J}}{32} x_{(L)}^2 - \frac{\mathcal{J}}{16} x_{(L)} \cdot x_{(NL)} - \frac{9}{64} x_{(L)}^2 - \frac{\mathcal{J}}{32} x_{(L)}^3 \right\}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Από την τελευταία έκφραση μπορούμε να διαβάσουμε τους επόμενους συντελεστές (οι κυρίαρχοι συντελεστές δόθηκαν στη σχέση (5.45)):

$$\begin{aligned} E - J \Big|_{(NL)} &= -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ \frac{x_{(NL)}}{4} + \frac{\mathcal{J}}{16} x_{(L)} \cdot x_{(NL)} + \frac{9}{64} x_{(L)}^2 + \frac{\mathcal{J}}{32} x_{(L)}^3 \right\} = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \frac{1}{4\mathcal{J}^2} (W^2 + W^3) \Rightarrow \\ \Rightarrow E - J \Big|_{(NL)} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{32\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 16\beta_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left[9\alpha_{n-k} + 8\beta_{n-k} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{k,m=1}^{n-2} \alpha_k \alpha_m \alpha_{n-k-m} \right\} \cdot \mathcal{J}^{n-2} (e^{-\mathcal{J}-2})^n. \end{aligned} \quad (5.58)$$

5.1.5 Μεθεπόμενοι Όροι

Παρομοίως, μπορούμε να συνεχίσουμε υπολογίζοντας όρους ανώτερης τάξης στο ανάπτυγμα μεγάλων χορδών του $E - J$. Η εξίσωση (5.26) δίνει,

$$x_{(L+NL+NNL+\dots)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \cdot \sum_{k,j=0}^{n-1} \frac{(-1)^k n^k (n-1)!}{(k-j_1-j_2)! j_1! j_2!} \left(\frac{\mathcal{J}+2}{4} \right)^{k-j_1-j_2} \left(\frac{7\mathcal{J}+9}{64} \right)^{j_1} \left(\frac{15\mathcal{J}}{256} \right)^{j_2}, \quad (5.59)$$

με $n-1 = k + j_1 + 2j_2$ και $0 \leq j_1 + j_2 \leq k$. Τώρα, χρειαζόμαστε μόνο τους κυρίαρχους (L), επόμενους (NL) και μεθεπόμενους (NNL) όρους, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να γράψουμε την προκύπτουσα δυναμοσειρά με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert, κάνοντας χρήση και των

ταυτοτήτων (Γ'.8)–(Γ'.13) του παραρτήματος Γ'. Βρίσκουμε:

$$x_{(\text{L}+\text{NL}+\text{NNL})} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \mathcal{J}^{n-1} + \beta_n \mathcal{J}^{n-2} + \gamma_n \mathcal{J}^{n-3}) \cdot (e^{-\mathcal{J}-2})^n \quad (5.60)$$

όπου τα γ_n ορίζονται ως (τα α_n και β_n ορίζονται στις σχέσεις (5.44)–(5.55)):

$$\gamma_n \equiv (-1)^{n+1} 2^{3n-6} \cdot \frac{n^{n-3}}{n!} \cdot (n-1)(n-2)(n^2 + 41n + 228). \quad (5.61)$$

Η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{J})$ (μέχρι NNL τάξη) δίνεται τότε από

$$x_{(\text{L}+\text{NL}+\text{NNL})} = \frac{4}{\mathcal{J}} W - \frac{1}{\mathcal{J}^2} \frac{W^2(7W+8)}{1+W} + \frac{1}{8\mathcal{J}^3} \frac{W^3(76W^3+269W^2+312W+120)}{(1+W)^3}, \quad (5.62)$$

όπου τα ορίσματα των W συναρτήσεων είναι $W(4\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}-2})$. Εισάγουμε την (5.62) στην (5.29), κρατώντας μόνο μέχρι μεθεπόμενους όρους. Τότε οι μεθεπόμενοι (NNL) συντελεστές του $E - J$ είναι:

$$\begin{aligned} E - J \Big|_{\text{NNL}} &= -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ \frac{x_{(\text{NNL})}}{4} + \frac{9}{32} x_{(\text{L})} \cdot x_{(\text{NL})} + \frac{\mathcal{J}}{32} x_{(\text{NL})}^2 + \frac{\mathcal{J}}{16} x_{(\text{L})} \cdot x_{(\text{NNL})} + \frac{23}{256} x_{(\text{L})}^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\mathcal{J}}{32} x_{(\text{L})}^2 \cdot x_{(\text{NL})} + \frac{111\mathcal{J}}{4096} x_{(\text{L})}^4 \right\} = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \frac{1}{32\mathcal{J}^3} \frac{W^3(11W^2+26W+16)}{1+W} \Rightarrow \\ \Rightarrow E - J \Big|_{\text{NNL}} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{128\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 64\gamma_n + 8 \sum_{k=1}^{n-1} \left[9\alpha_k \beta_{n-k} + 2\beta_k \beta_{n-k} + 4\alpha_k \gamma_{n-k} \right] + \sum_{k,m=1}^{n-2} \alpha_k \alpha_m \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[23\alpha_{n-k-m} + 48\beta_{n-k-m} \right] + \frac{111}{8} \sum_{k,m,s=1}^{n-3} \alpha_k \alpha_m \alpha_s \alpha_{n-k-m-s} \right\} \cdot \mathcal{J}^{n-3} (e^{-\mathcal{J}-2})^n. \quad (5.63) \end{aligned}$$

Τα τελικά αποτελέσματά μας για τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους όρους της αντίστροφης συνάρτησης σπίν και των ανώμαλων διαστάσεων των μεγάλων τελεστών $\text{Tr}[\mathcal{X}\mathcal{Z}^m\mathcal{X}\mathcal{Z}^{J-m}]$ της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας με δύο μαγνόνια, σε ισχυρή σύζευξη 't Hooft είναι:

$$x = \frac{4W}{\mathcal{J}} - \frac{1}{\mathcal{J}^2} \frac{W^2(7W+8)}{1+W} + \frac{1}{8\mathcal{J}^3} \frac{W^3(76W^3+269W^2+312W+120)}{(1+W)^3} + \dots \quad (5.64)$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 - \frac{1}{\mathcal{J}} (2W + W^2) - \frac{1}{2\mathcal{J}^2} (W^2 + W^3) - \frac{1}{16\mathcal{J}^3} \frac{W^3(11W^2+26W+16)}{1+W} + \dots, \quad (5.65)$$

όπου $\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$ και $\mathcal{J} \equiv \pi J/\sqrt{\lambda}$. Αν οι σειρές (5.64) και (5.65) αναπτυχθούν γύρω από το $\mathcal{J} \rightarrow \infty$ χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor (Γ'.3), βρίσκουμε ότι συμφωνούν πλήρως με τις σειρές που βρίσκουμε με τη βοήθεια της Mathematica (Δ'.2)–(Δ'.3). Τυπικά δεν υπάρχει τίποτα που να μας εμποδίζει

να πάμε ολοένα και βαθύτερα στο ανάπτυγμα (5.13) και να υπολογίσουμε όλους τους όρους του κλασικού αναπτύγματος της μεγάλης χορδής. Φαίνεται λοιπόν ότι οι συναρτήσεις W του Lambert θα συνεχίσουν να εμφανίζονται σε όλες τις επόμενες τάξεις του x , καθορίζοντας έτσι και όλες τις τάξεις του $\mathcal{E} - \mathcal{J}$. Αυτό φαίνεται καθώς η εξίσωση (5.26) θα περιέχει γενικά έναν όρο της μορφής $n^n/n!$ που πολλαπλασιάζει κάποιο πολυώνυμο Laurent του n που προέρχεται από τον πολυωνυμικό (multinomial) συντελεστή και το ανάπτυγμα των a_i σε δυνάμεις του $\mathcal{J}$. Οι εξισώσεις (Γ'.8)–(Γ'.13) του παραρτήματος Γ' μπορεί ακολούθως να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να εκφραστούν οι προκύπτουσες δυναμοσειρές ως προς τη συνάρτηση W του Lambert.

Μπορούμε να συγκρίνουμε, αν θέλουμε, τις εξισώσεις (5.64) και (5.65) για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν και τις ανώμαλες διαστάσεις των μεγάλων χορδών (ήτοι $E \gg \sqrt{\lambda}$) με τις αντίστοιχες εκφράσεις για τις μικρές χορδές (4.60)–(4.61), δηλαδή εκείνες τις χορδές για τις οποίες $J \ll \sqrt{\lambda}$. Βλέπε επίσης και το σχήμα 27 στο παράρτημα Δ'.1 για τα διαγράμματα των (5.64) και (5.65).

5.1.6 Ταχείες Κυκλικές Χορδές στον S^2 : $\omega \rightarrow 1^-$, $J \gg \lambda$

Οι ταχείες κυκλικές χορδές επί της σφαίρας (για τις οποίες $\omega \rightarrow 1^-$) μπορούν να μελετηθούν κατά τρόπο παρόμοιο με τις μεγάλες διπλωμένες χορδές (για τις οποίες $\omega \rightarrow 1^+$). Ας εξάγουμε γρήγορα τις αντίστοιχες εκφράσεις και γι'αυτή την περίπτωση. Σημείο εκκίνησής μας είναι η σειρά των ανώμαλων διαστάσεων:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}^n (f_n \ln \tilde{x} + g_n) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}^n \left[A_n + f_n \ln \frac{\tilde{x}}{x_0} \right], \quad (5.66)$$

$$f_n \equiv d_n - \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot c_{n-k}, \quad g_n \equiv h_n - \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot b_{n-k} \quad (5.67)$$

όπου η συμπληρωματική παράμετρος είναι $\tilde{x} \equiv 1 - \omega^2 \rightarrow 0^-$ και οι συντελεστές d_n , h_n , c_n , b_n ορίζονται από τις (4.67)–(4.68). Τα A_n δίδονται από

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + f_n (4 \ln 2 - \mathcal{J} - 2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.68)$$

και το x_0 έχει ορισθεί στην εξίσωση (5.20). Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\tilde{x} = -\frac{4W}{\mathcal{J}} - \frac{1}{\mathcal{J}^2} \frac{W^2(9W+8)}{1+W} - \frac{1}{8\mathcal{J}^3} \frac{W^3(140W^3+397W^2+376W+120)}{(1+W)^3} + \dots \quad (5.69)$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 - \frac{1}{\mathcal{J}} (2W + W^2) - \frac{1}{2\mathcal{J}^2} (W^2 + W^3) - \frac{1}{16\mathcal{J}^3} \frac{W^3(11W^2+26W+16)}{1+W} + \dots, \quad (5.70)$$

όπου το όρισμα της συνάρτησης W είναι $W(-4\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}-2})$. Αναπτύσσοντας τις σειρές (5.69)–(5.70) γύρω από το $\mathcal{J} \rightarrow \infty$ με τη βοήθεια της σειράς (Γ'.3) του παραρτήματος Γ', βρίσκουμε ότι είναι σε πλήρη συμφωνία με τα αντίστοιχα αναπτύγματα μεγάλου σπίν (Δ'.4)–(Δ'.5) που ελήφθησαν με τη Mathematica. Παρότι οι αντίστροφες συναρτήσεις σπίν $x(\mathcal{J})$ και $\tilde{x}(\mathcal{J})$ είναι εντελώς διαφορετικές για τις μεγάλες διπλωμένες χορδές και τις ταχείες κυκλικές χορδές εντός του $\mathbb{R} \times S^2$ (βλέπε και τις (5.64), (5.69)), οι αντίστοιχες εκφράσεις για τις ανώμαλες διαστάσεις, συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert συμπίπτουν (βλέπε (5.65), (5.70)). Επειδή τα ορίσματα των συναρτήσεων W έχουν αντίθετα πρόσημα στις δύο αυτές περιπτώσεις, οι φόρμουλες για τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma(\mathcal{J})$ θα έχουν μια περιοδική διαφορά προσήμου (βλέπε (Δ'.3), (Δ'.5)). Αυτή η αντιστροφή του προσήμου φαίνεται να σχετίζεται με τη

μετάβαση από την περίπτωση των ευσταθών μεγάλων διπλωμένων χορδών στις ασταθείς ταχείες κυκλικές χορδές.²⁸

5.2 Περιστρεφόμενες Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov στον AdS_3

5.2.1 Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν

Στην παρούσα υποενότητα θα υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν της κλειστής διπλωμένης χορδής των GKP εντός του AdS_3 . Για μία ακόμη φορά θα πρέπει πρώτα να αντιστρέψουμε τη σειρά (4.34) ως προς το $x = x(\mathcal{S})$. Λύνοντας την (4.34) ως προς $\ln x$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{2}{x} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (c_n \ln x + b_n) \Rightarrow \ln x = \frac{-1/x + \mathcal{S}/2 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln x = \left[-\frac{1}{c_0 x} + \frac{\mathcal{S}/2 - b_0}{c_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{c_0} x^n \right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{c_0} x^k \right)^n. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Η σχέση (5.71) είναι ισοδύναμη με μία εξίσωση της ακόλουθης μορφής (βλέπε την εξίσωση (5.21)):

$$x = x_0 \cdot \exp \left[\frac{a_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right] = x_0 \cdot \exp \left(\frac{a_0}{x} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \right), \quad (5.72)$$

όπου τα a_n εξαρτώνται γραμμικά από το $\mathcal{S}$ ($a_0 = -c_0^{-1} = -4$) και το x_0 ορίζεται ως εξής:

$$x_0 \equiv \exp \left[\frac{\mathcal{S}/2 - b_0}{c_0} + \frac{c_1}{c_0^2} \right] = 16 e^{2\mathcal{S}+3/2}. \quad (5.73)$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να παρατηρήσουμε το εξής. Παρότι η εξίσωση (5.72) για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν μιας κλειστής διπλωμένης χορδής που περιστρέφεται εντός του AdS_3 μοιάζει πολύ με την αντίστροφη συνάρτηση σπίν (5.21) των κλειστών (διπλωμένων ή κυκλικών) χορδών εντός του $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, εντούτοις έχει και δύο πολύ σημαντικές διαφορές: περιέχει τον όρο $1/x$ και το x_0 είναι αύξουσα συνάρτηση του σπίν $\mathcal{S}$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να επιλύσουμε την εξίσωση (5.72) χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της ενότητας (5.1.1), αλλά θα πρέπει να εφαρμόσουμε μια ελαφρώς διαφορετική μέθοδο. Ας θεωρήσουμε το x^* που ορίζεται ως

$$x^* = x_0 \cdot e^{a_0/x^*} \Rightarrow x^* = \frac{a_0}{W(a_0/x_0)} = x_0 \cdot e^{W(a_0/x_0)} \quad (5.74)$$

και $W(z)$ είναι η συνάρτηση W του Lambert (βλέπε παράρτημα Γ'). Ουσιαστικά το x^* αποτελεί λύση της εξίσωσης (5.72) σε πρώτη τάξη.²⁹ Θέτοντας

$$x = x^* \cdot e^u \quad (5.75)$$

²⁸Ο συγγραφέας εκφράζει τις ευχαριστίες του προς τον καθηγητή Ι. Μπάκα για την παρατήρηση αυτή.

²⁹Με δεδομένο ότι μας ενδιαφέρει η λύση της εξίσωσης (5.71) στην περιοχή $\mathcal{S} \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0^+$ και $a_0 < 0$, $x_0 \rightarrow +\infty$, είμαστε υποχρεωμένοι να επιλέξουμε τον W_{-1} κλάδο της συνάρτησης Lambert. Βλέπε επίσης και το σχόλιο κάτω από την εξίσωση (5.97).

με $u \rightarrow 0$ και εισάγοντάς το στην (5.72), λαμβάνουμε με τη βοήθεια της (5.74):

$$u - \frac{a_0}{x^*} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u^k}{k!} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^*)^n e^{nu} = 0. \quad (5.76)$$

Μπορούμε να αντιστρέψουμε τη σειρά (5.76) ως προς το u χρησιμοποιώντας τη γνωστή μέθοδο αντιστροφής σειρών. Αναπτύσσοντας το εκθετικό στην (5.76), λαμβάνουμε

$$\left(1 + \frac{a_0}{x^*} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x^*)^k\right) u - \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{a_0}{x^*} + \sum_{k=1}^{\infty} k^n a_k (x^*)^k\right] \frac{u^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^*)^n. \quad (5.77)$$

Η αντίστροφη σειρά είναι μια δυναμοσειρά του x^*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (x^*) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m (x^*)^m \right)^n, \quad (5.78)$$

όπου το $C_n (x^*)$ ικανοποιεί (για την αντιστροφή σειρών, βλέπε [57])

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \left(1 + \frac{a_0}{x^*} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x^*)^k\right) &= 1 \\ C_2 \cdot \left(1 + \frac{a_0}{x^*} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x^*)^k\right)^3 &= \frac{a_0}{x^*} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k (x^*)^k \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.79)$$

Πρακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστροφη σειρά χρησιμοποιώντας τη Mathematica. Βρίσκουμε:

$$u = \frac{a_1}{a_0} (x^*)^2 + \left[\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \right] (x^*)^3 + \left[\frac{a_3}{a_0^3} + \frac{3a_1^2 - 2a_2}{2a_0^2} + \frac{a_3}{a_0} \right] (x^*)^4 + \dots \quad (5.80)$$

Το x στην εξίσωση (5.75) δίδεται από τη σχέση

$$x = x^* + \frac{a_1}{a_0} (x^*)^3 + \left[\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \right] (x^*)^4 + \left[\frac{a_3}{a_0} + \frac{2a_1^2 - a_2}{a_0^2} + \frac{a_1}{a_0^3} \right] (x^*)^5 + \dots \quad (5.81)$$

ενώ το $1/x$ δίδεται από

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^*} - \frac{a_1}{a_0} x^* - \left[\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} \right] (x^*)^2 - \left[\frac{a_3}{a_0} + \frac{a_1^2 - a_2}{a_0^2} + \frac{a_1}{a_0^3} \right] (x^*)^3 + \dots \quad (5.82)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές a_n αναπτύσσοντας την (5.71). Εν συνεχεία τους αντικαθιστούμε στις (5.81)–(5.82) και λαμβάνουμε τις ακόλουθες σειρές ως προς x και $1/x$:

$$x = x^* + \left(\frac{\mathcal{S}}{16} + \frac{3}{64}\right) (x^*)^3 + \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{23}{1024}\right) (x^*)^4 + \left(\frac{\mathcal{S}^2}{128} + \frac{55\mathcal{S}}{2048} + \frac{349}{24.576}\right) (x^*)^5 + \dots \quad (5.83)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^*} - \left(\frac{\mathcal{S}}{16} + \frac{3}{64}\right) x^* - \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{23}{1024}\right) (x^*)^2 - \left(\frac{\mathcal{S}^2}{256} + \frac{43\mathcal{S}}{2048} + \frac{295}{24.576}\right) (x^*)^3 + \dots \quad (5.84)$$

5.2.2 Ανώμαλες Διαστάσεις

Οι σειρές των ανώμαλων διαστάσεων $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S}$ της κλειστής διπλωμένης χορδής εντός του AdS_3 δίδεται συναρτήσεως του $x = x(\mathcal{S})$ από την ακόλουθη έκφραση:

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (f_n \ln x + g_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n + f_n \ln \frac{x}{x_0} \right], \quad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{S} \equiv \frac{\pi S}{\sqrt{\lambda}}, \quad (5.85)$$

όπου,

$$x_0 \equiv \exp \left[\frac{\mathcal{S}/2 - b_0}{c_0} + \frac{c_1}{c_0^2} \right] = 16 e^{2\mathcal{S}+3/2} \quad (5.86)$$

και επίσης ορίζουμε

$$\begin{aligned} f_n &\equiv -c_n - \sum_{k=0}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \cdot d_{n-k} \\ g_n &\equiv -b_n - \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} - \sum_{k=0}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \cdot h_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.87)$$

Οι μερικοί πρώτοι συντελεστές f_n και g_n είναι:

$$\begin{aligned} f_0 &= -\frac{1}{2}, & f_1 &= 0, & f_2 &= \frac{1}{128}, & f_3 &= \frac{1}{128} \\ g_0 &= 2 \ln 2 - \frac{1}{2}, & g_1 &= -\frac{1}{4}, & g_2 &= -\frac{1}{32} \ln 2 - \frac{3}{32}, & g_3 &= -\frac{1}{32} \ln 2 - \frac{37}{768}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Οι συντελεστές A_n δίδονται από:

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + f_n \left(4 \ln 2 + 2\mathcal{S} + \frac{3}{2} \right) \quad (5.89)$$

οι τρεις πρώτοι από αυτούς είναι:

$$A_0 = -\mathcal{S} - \frac{5}{4}, \quad A_1 = -\frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{256} (4\mathcal{S} - 21), \quad A_3 = \frac{1}{192} (3\mathcal{S} - 7). \quad (5.90)$$

Θα ήταν επίσης χρήσιμο να γράψουμε τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S}$ συναρτήσει του x^* . Ας εισάγουμε πρώτα την (5.72) εντός της (5.85):

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = \frac{2a_0 f_0}{x} + 2A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left[A_n + a_0 f_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} f_{n-k-1} a_{k+1} \right]. \quad (5.91)$$

Εισάγοντας τις σειρές (5.83) και (5.84) εντός της (5.91), οδηγούμαστε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{S} = & \frac{4}{x^*} - \left(2\mathcal{S} + \frac{5}{2} \right) - \frac{9x^*}{16} - \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{35}{128} \right) (x^*)^2 - \left(\frac{5\mathcal{S}}{128} + \frac{2213}{12.288} \right) (x^*)^3 - \\ & - \left(\frac{\mathcal{S}^2}{512} + \frac{361\mathcal{S}}{8192} + \frac{6665}{49.152} \right) (x^*)^4 - \left(\frac{19\mathcal{S}^2}{4096} + \frac{1579\mathcal{S}}{32.768} + \frac{433.501}{3.932.160} \right) (x^*)^5 + \dots \end{aligned} \quad (5.92)$$

Για μεγάλα σπίν $\mathcal{S}$, η σειρά (5.71) μπορεί να αντιστραφεί και το $x = x(\mathcal{S})$ μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της Mathematica. Η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x(\mathcal{S})$ μπορεί να εισαχθεί στην εξίσωση (5.85) και να δώσει τη σχέση ενέργειας-σπίν για την περίπτωση (I) της χορδής GKP και τις ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών $\text{Tr} [\mathcal{Z} \mathcal{D}_+^{\mathcal{S}} \mathcal{Z}]$ της $\mathcal{N} = 4$ SYM, σαν συνάρτηση του (μεγάλου) R-φορτίου $\mathcal{S}$. Τα αποτελέσματα αυτού του υπολογισμού για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{S})$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma(\mathcal{S})$, μπορούν να βρεθούν στις εξισώσεις (Δ'.6)–(Δ'.7) του παραρτήματος Δ'. Αμφότερες οι σειρές περιέχουν γενικά τα εξής είδη όρων ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \text{Κυρίαρχοι όροι (L): } & \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} \\ \text{Επόμενοι όροι (NL): } & \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+1}} \\ \text{Μεθεπόμενοι όροι: } & \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+2}} \\ & \vdots \end{aligned} \quad (5.93)$$

Όπως θα αποδειχθεί, το ανάπτυγμα της αντίστροφης συνάρτησης σπίν $x = x(\mathcal{S})$ δεν μπορεί να περιέχει κανέναν από τους κυρίαρχους όρους $\ln^n \mathcal{S} / \mathcal{S}^n$ ενώ το ανάπτυγμα των ανώμαλων διαστάσεων $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S}$ τους περιέχει όλους. Το ανάπτυγμα μεγάλων σπίν της σχέσης ενέργειας-σπίν λαμβάνει τότε την εξής μορφή (5.5):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{S} = & \rho_c \ln \mathcal{S} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \rho_{(nk)} \frac{\ln^k \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} = \rho_c \ln \mathcal{S} + \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{(nn)} \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \rho_{(nn-1)} \frac{\ln^{n-1} \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} + \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} \rho_{(nn-2)} \frac{\ln^{n-2} \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} + \dots + \frac{\rho_1}{\mathcal{S}} + \frac{\rho_2}{\mathcal{S}^2} + \frac{\rho_3}{\mathcal{S}^3} + \dots \end{aligned} \quad (5.94)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η παρουσία του ασυνήθιστου «υπέρ-κυρίαρχου» όρου $f \ln \mathcal{S}$. Γράφουμε:

$$E - S = f \ln (S/\sqrt{\lambda}) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f_{(nk)} \frac{\ln^k (S/\sqrt{\lambda})}{S^n} = f \ln (S/\sqrt{\lambda}) + f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_{(nn)} \frac{\ln^n (S/\sqrt{\lambda})}{S^n} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} f_{(nn-1)} \frac{\ln^{n-1} (S/\sqrt{\lambda})}{S^n} + \sum_{n=3}^{\infty} f_{(nn-2)} \frac{\ln^{n-2} (S/\sqrt{\lambda})}{S^n} + \dots + \frac{f_1}{S} + \frac{f_2}{S^2} + \frac{f_3}{S^3} + \dots \quad (5.95)$$

όπου

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{\pi f}{\sqrt{\lambda}}, \quad \rho_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} (f_0 - f \ln \pi), \quad \rho_1 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 (f_1 - f_{11} \ln \pi) \\ \rho_2 &= \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \right)^3 (f_2 - f_{21} \ln \pi + f_{22} \ln^2 \pi) \\ \rho_3 &= \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \right)^4 (f_3 - f_{31} \ln \pi + f_{32} \ln^2 \pi - f_{33} \ln^3 \pi) \\ \rho_{(nn)} &= \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \right)^{n+1} \cdot f_{(nn)}, \quad \rho_{(nn-1)} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \right)^{n+1} (f_{(nn-1)} - n f_{(nn)} \ln \pi) \\ \rho_{(nn-2)} &= \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \right)^{n+1} \left(f_{(nn-2)} - (n-1) f_{(nn-1)} \ln \pi + \frac{n(n-1)}{2} f_{(nn)} \ln^2 \pi \right). \end{aligned} \quad (5.96)$$

5.2.3 Κυρίαρχοι Όροι

Για να υπολογίσουμε τους κυρίαρχους ως προς $\mathcal{S}$ όρους της σειράς (5.85), πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη φόρμουλα (5.74):

$$x^* = x_0 \cdot e^{W_{-1}(a_0/x_0)} = \frac{a_0}{W_{-1}(a_0/x_0)} = \frac{-4}{W_{-1}[-\frac{1}{4}e^{-2\mathcal{S}-3/2}]}, \quad (5.97)$$

όπου επιλέξαμε τον W_{-1} κλάδο της συνάρτησης Lambert διότι θα πρέπει $x^* \rightarrow 0^+$, καθώς $\mathcal{S} \rightarrow +\infty$ και $W_{-1} \rightarrow -\infty$ (αντίθετα $W_0 \rightarrow 0^-$ για $\mathcal{S} \rightarrow +\infty$, οδηγώντας το x^* σε απειρισμό καθώς το $x^* \rightarrow +\infty$. Βλέπε σχήμα 31). Σε πρώτη τάξη, η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{S})$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor (Γ'.4) στον κλάδο W_{-1} . Για το $1/x^*$ παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^*} &= -\frac{1}{4} \left\{ \ln \left| \frac{a_0}{x_0} \right| - \ln \ln \left| \frac{a_0}{x_0} \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m!} \begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix} \frac{(\ln \ln |a_0/x_0|)^m}{(\ln |a_0/x_0|)^{n+m}} \right\} = \\ &= \frac{\mathcal{S}}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \ln \left[2\mathcal{S} + 2 \ln 2 + \frac{3}{2} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4 m!} \begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix} \frac{(\ln [2\mathcal{S} + 2 \ln 2 + 3/2])^m}{(2\mathcal{S} + 2 \ln 2 + 3/2)^{n+m}} = \\ &= \frac{\mathcal{S}}{2} + \frac{\ln \mathcal{S}}{4} + \frac{3}{4} \ln 2 + \frac{3}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n} \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^n - \sum_{n,q=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^m}{2^{n+m+2} m!} \begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} -n-m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \frac{\ln^p \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+m}} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^k \right)^{m-p} \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^q, \end{aligned} \quad (5.98)$$

όπου οι αριθμοί Stirling πρώτου είδους $\begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix}$ ορίζονται από την εξίσωση (Γ'.5) του παραρτήματος Γ', και για μεγάλο $\mathcal{S}$ χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη ταυτότητα:

$$\ln \left[2\mathcal{S} + 2\ln 2 + \frac{3}{2} \right] = \ln \mathcal{S} + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^n. \quad (5.99)$$

Για να υπολογίσουμε το x^* , ως αναπτύξουμε το αντίστροφό του από τη σχέση (5.98). Το αποτέλεσμα είναι,

$$\begin{aligned} x^* = \frac{2}{\mathcal{S}} & \cdot \left\{ 1 + \frac{\ln \mathcal{S}}{2\mathcal{S}} + (2\ln 2 + 1) \frac{3}{4\mathcal{S}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \frac{(\ln 2 + 3/4)^n}{\mathcal{S}^{n+1}} - \sum_{n,q=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^m}{2^{n+m+1} m!} \right. \\ & \cdot \left[\begin{matrix} n+m \\ n+1 \end{matrix} \right] \begin{pmatrix} -n-m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \frac{\ln^p \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+m+1}} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^k \right)^{m-p} \\ & \cdot \left. \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^q \right\}^{-1} \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned} x^* = \frac{2}{\mathcal{S}} & - \left[\ln \mathcal{S} + \left(3\ln 2 + \frac{3}{2} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{S}^2} + \left[\frac{\ln^2 \mathcal{S}}{2} + (1 + 3\ln 2) \ln \mathcal{S} + \left(\frac{9\ln^2 2}{2} + 3\ln 2 + \frac{3}{8} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{S}^3} - \\ & - \left[\frac{\ln^3 \mathcal{S}}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{9\ln 2}{4} \right) \ln^2 \mathcal{S} + \left(\frac{27\ln^2 2}{4} + 3\ln 2 + \frac{1}{16} \right) \ln \mathcal{S} + \left(\frac{27\ln^3 2}{4} + \frac{9\ln^2 2}{2} + \frac{3\ln 2}{16} - \right. \right. \\ & - \left. \left. \frac{3}{16} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{S}^4} + \left[\frac{\ln^4 \mathcal{S}}{8} + \left(\frac{3\ln 2}{2} + \frac{5}{24} \right) \ln^3 \mathcal{S} + \left(\frac{27\ln^2 2}{4} + \frac{15\ln 2}{8} - \frac{3}{16} \right) \ln^2 \mathcal{S} + \left(\frac{27\ln^3 2}{2} + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{45\ln^2 2}{8} - \frac{9\ln 2}{8} - \frac{13}{32} \right) \ln \mathcal{S} + \left(\frac{81\ln^4 2}{8} + \frac{45\ln^3 2}{8} - \frac{27\ln^2 2}{16} - \frac{39\ln 2}{32} - \frac{15}{128} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{S}^5} + \dots \end{aligned} \quad (5.101)$$

Τώρα παρατηρούμε ότι η σειρά (5.98) για το $1/x^*$ περιέχει όλων των ειδών τους μικρούς όρους (ήτοι όρους οι οποίοι $\rightarrow 0$ καθώς $\mathcal{S} \rightarrow \infty$): κυρίαρχους όρους $\ln^n \mathcal{S}/\mathcal{S}^n$, επόμενους όρους $\ln^n \mathcal{S}/\mathcal{S}^{n+1}$, μειθεπόμενους όρους $\ln^n \mathcal{S}/\mathcal{S}^{n+2}$, κλπ. μέχρι $1/\mathcal{S}^n$ όρους, με $n = 1, 2, 3 \dots$. Αντίθετα, οι σειρές (5.100)–(5.101) για το x^* δεν περιέχουν κανέναν εκ των κυρίαρχων όρων. Παρομοίως το $(x^*)^2$ δεν θα περιέχει κανέναν κυρίαρχο και επόμενο όρο, το $(x^*)^3$ κανέναν κυρίαρχο, επόμενο και μειθεπόμενο όρο, κ.ο.κ. Για να υπολογίσουμε το $E - S$ σε πρώτη τάξη ως προς $\mathcal{S}$, χρειαζόμαστε μόνο τους δύο πρώτους όρους των (5.92), δηλαδή

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} \Big|_{L+\dots} = \frac{4}{x^*} - \left(2\mathcal{S} + \frac{5}{2} \right), \quad (5.102)$$

καθώς οι υπόλοιποι όροι των (5.92) συνεισφέρουν από την NL τάξη και πέρα. Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{S} \Big|_{L+\dots} = & \ln \mathcal{S} + (3\ln 2 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^n - \sum_{n,q=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^m}{2^{n+m}} \\ & \cdot \frac{1}{m!} \left[\begin{matrix} n+m \\ n+1 \end{matrix} \right] \begin{pmatrix} -n-m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \frac{\ln^p \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+m}} \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^q \left[\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right. \end{aligned}$$

$$\cdot \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^k \Big]^{m-p}. \quad (5.103)$$

Για $p = m$ και $n = q = 0$ μπορούμε να διαβάσουμε όλους τους συντελεστές των κυρίαρχων όρων:

$$\rho_{(mm)} = -\frac{(-1)^m}{2^m m!} \cdot \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -m \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^m} \frac{1}{m}. \quad (5.104)$$

Όπως έχουμε ήδη πεί, τα αποτελεσματα μας συμφωνούν με αυτά του [12] (χρησιμοποιούμε $\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} = (m-1)!$). Επίσης,

$$\rho_c = 1 \quad \& \quad \rho_0 = 3 \ln 2 - 1. \quad (5.105)$$

5.2.4 Επόμενοι Όροι

Για την εύρεση των επόμενων όρων απαιτούνται οι ακόλουθοι όροι της (5.92),

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} \Big|_{\text{L+NL+...}} = \frac{4}{x^*} - \left(2\mathcal{S} + \frac{5}{2} \right) - \frac{9x^*}{16} - \frac{\mathcal{S}}{32} (x^*)^2. \quad (5.106)$$

Κρατώντας όλους τους όρους των εξισώσεων (5.98)–(5.101) που συνεισφέρουν σε επόμενη τάξη, παίρνουμε

$$\rho_{(m+1,m)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+1}} \left[H_m + \frac{m}{4} + 1 - 3 \ln 2 \right], \quad (5.107)$$

η οποία συμφωνεί με τα αποτελέσματα του [12] (εδώ χρησιμοποιήσαμε $\begin{bmatrix} m+1 \\ 2 \end{bmatrix} = m! H_m$). Μπορούμε ακόμη να επιβεβαιώσουμε την τιμή του συντελεστή ρ_1 στην εξίσωση (5.94):

$$\rho_1 = \frac{1}{2} (3 \ln 2 - 1). \quad (5.108)$$

5.2.5 Μεθεπόμενοι Όροι

Σε μεθεπόμενη (NNL) τάξη, οι όροι που συνεισφέρουν στις (5.92) είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{S} \Big|_{\text{L+NL+NNL+...}} &= \frac{4}{x^*} - \left(2\mathcal{S} + \frac{5}{2} \right) - \frac{9x^*}{16} - \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{35}{128} \right) (x^*)^2 - \frac{5\mathcal{S}}{128} (x^*)^3 - \\ &\quad - \frac{\mathcal{S}^2}{512} (x^*)^4 + \dots \end{aligned} \quad (5.109)$$

Μπορούμε να βρούμε όλους τους μεθεπόμενους όρους (με τη βοήθεια της ιδιότητας (Γ'.6) των αριθμών

Stirling):

$$\rho_{(m+2,m)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+3}} \cdot (m+1) \cdot \left\{ H_{m+1}^2 - H_{m+1}^{(2)} + \frac{1}{2} (m - 12 \ln 2 + 5) \cdot H_{m+1} + \frac{m(m-1)}{24} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} (m+5) \ln 2 + 9 \ln^2 2 \right\}. \quad (5.110)$$

Ο συντελεστής ρ_2 των (5.94) είναι:

$$\rho_2 = -\frac{9 \ln^2 2}{8} + \frac{27 \ln 2}{16} - \frac{5}{16}. \quad (5.111)$$

Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με εκείνα των [71, 80] για τους λίγους πρώτους όρους των σειρών (5.95). Περισσότερα στο παράρτημα Δ' και τη φόρμουλα (Δ'.7).

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο γράφοντας τις εκφράσεις με τη συνάρτηση W για την αντίστροφη συνάρτηση του σπίν $x = x(\mathcal{J})$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma(\mathcal{J})$. Αντικαθιστώντας το x^* από την (5.97) στις εξισώσεις (5.83) και (5.92) παίρνουμε:

$$x = -\frac{4}{W_{-1}} - \frac{4\mathcal{S}+3}{(W_{-1})^3} + \left[8\mathcal{S} + \frac{23}{4}\right] \frac{1}{(W_{-1})^4} - \left[8\mathcal{S}^2 + \frac{55}{2}\mathcal{S} + \frac{349}{24}\right] \frac{1}{(W_{-1})^5} + \left[38\mathcal{S}^2 + \right. \\ \left. + \frac{711\mathcal{S}}{8} + \frac{3745}{96}\right] \frac{1}{(W_{-1})^6} - \left[20\mathcal{S}^3 + 176\mathcal{S}^2 + \frac{4765\mathcal{S}}{16} + \frac{26.659}{240}\right] \frac{1}{(W_{-1})^7} + \\ \left. + \left[\frac{466\mathcal{S}^3}{3} + \frac{6077\mathcal{S}^2}{8} + \frac{48.955\mathcal{S}}{48} + \frac{2.543.083}{7680}\right] \frac{1}{(W_{-1})^8} - \dots, \quad (5.112)$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = -W_{-1} - \left(2\mathcal{S} + \frac{5}{2}\right) + \frac{9}{4W_{-1}} - \left[\frac{\mathcal{S}}{2} + \frac{35}{8}\right] \frac{1}{(W_{-1})^2} + \left[\frac{5\mathcal{S}}{2} + \frac{2213}{192}\right] \frac{1}{(W_{-1})^3} - \\ - \left[\frac{\mathcal{S}^2}{2} + \frac{361\mathcal{S}}{32} + \frac{6665}{192}\right] \frac{1}{(W_{-1})^4} + \left[\frac{19\mathcal{S}^2}{4} + \frac{1579\mathcal{S}}{32} + \frac{433.501}{3840}\right] \frac{1}{(W_{-1})^5} - \\ - \left[\frac{5\mathcal{S}^3}{6} + \frac{259\mathcal{S}^2}{8} + \frac{81.799\mathcal{S}}{384} + \frac{2.963.887}{7680}\right] \frac{1}{(W_{-1})^6} + \left[\frac{34\mathcal{S}^3}{3} + \frac{3069\mathcal{S}^2}{16} + \right. \\ \left. + \frac{175.481\mathcal{S}}{192} + \frac{2.350.780.111}{1.720.320}\right] \frac{1}{(W_{-1})^7} - \dots, \quad (5.113)$$

όπου $\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{S} \equiv \pi S/\sqrt{\lambda}$ και το όρισμα της συνάρτησης W είναι $W_{-1} (-e^{-2\mathcal{S}-3/2}/4)$. Για μια ακόμη φορά οι όροι και των δύο σειρών (5.112) και (5.113) είναι σε φθίνουσα σειρά ως προς τη σημαντικότητα τους, π.χ. σύμφωνα με την (5.102), οι δύο πρώτοι όροι της (5.113) είναι οι κυρίαρχοι συντελεστές, η (5.106) συνεπάγεται ότι οι τέσσερις πρώτοι όροι περιέχουν όλους τους επόμενους συντελεστές, κλπ. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι οι εξισώσεις (5.112)–(5.113) είναι σωστές, αναπτύσσοντάς τις πρώτα γύρω από το $\mathcal{S} \rightarrow +\infty$ με τη βοήθεια του αναπτύγματος (Δ'.4) της συνάρτησης W στον W_{-1} κλάδο της, και μετά συγκρίνοντάς τις με τις σειρές (Δ'.6)–(Δ'.7) που υπολογίζονται με τη βοήθεια της Mathematica.

5.3 Αμοιβαιότητα

Το γεγονός ότι οι τελεστές συστροφής (επίσης γνωστοί και ως ημιπαρτονικοί τελεστές)³⁰ μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με τις αναπαραστάσεις της συγγραμμικής (collinear) υποομάδας $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{so}(4, 2)$, οι οποίες μπορούν να επισημανθούν από το σύμμορφο σπίν s

$$s \equiv \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} (S + \Delta) = \mathcal{S} + \frac{1}{2} \gamma(\mathcal{S}), \quad (5.114)$$

όπου

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{S}, \quad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{S} \equiv \frac{\pi S}{\sqrt{\lambda}}, \quad (5.115)$$

σημαίνει ότι οι ανώμαλες διαστάσεις $\gamma(\mathcal{S})$ πρέπει να είναι συνάρτηση του σύμμορφου σπίν s :

$$\gamma(\mathcal{S}) = P(s) = P\left(\mathcal{S} + \frac{1}{2} \gamma(\mathcal{S})\right). \quad (5.116)$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε,

$$P(\mathcal{S}) = \gamma\left(\mathcal{S} - \frac{1}{2} P(\mathcal{S})\right). \quad (5.117)$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να αντιστραφεί χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα των Lagrange και Bürmann (5.22), ως ακολούθως [81]:

$$P(\mathcal{S}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{2} \partial_{\mathcal{S}}\right)^{k-1} \gamma^k(\mathcal{S}). \quad (5.118)$$

Η ιδιότητα της αμοιβαιότητας ή αναλλοιώτητος ομοτιμίας (parity) των ανώμαλων διαστάσεων $\gamma(\mathcal{S})$ εκφράζεται από τη συνθήκη όπως για μεγάλες τιμές του σπίν $\mathcal{S}$, η αντίστροφη ανώμαλη διάσταση $P(\mathcal{S})$ να περιέχει μόνο άρτιες αρνητικές δυνάμεις του τετραγωνικού τελεστή Casimir της συγγραμμικής ομάδας, $C^2 = s_0(s_0 - 1)$:³¹

$$P(\mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \ln C}{C^{2k}}. \quad (5.119)$$

Υπολογίζοντας την $P(\mathcal{S})$ αφού αντικαταστήσουμε τη φόρμουλα (Δ.7) στην (5.118), βρίσκουμε ότι η $P(\mathcal{S})$ είναι «απλή» ως προς το ότι δεν περιέχει κυρίαρχους λογαρίθμους του $\mathcal{S}$ (σε αντίθεση με το $\gamma(\mathcal{S})$ στην (Δ.7)) και επιπλέον έχει την ιδιότητα της αμοιβαιότητας [71, 77, 80] διότι περιέχει μόνο άρτιες αρνητικές δυνάμεις του $\mathcal{S}$ και είναι επομένως συμμετρική ως προς το $C = \mathcal{S} \rightarrow -\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{S}) = \ln \mathcal{S} + \left[3 \ln 2 - 1\right] + \left[\frac{\ln \mathcal{S}}{16} + \left(\frac{3 \ln 2}{16} + \frac{1}{16}\right)\right] \frac{1}{\mathcal{S}^2} - \left[\frac{\ln^2 \mathcal{S}}{128} + \left(\frac{3 \ln 2}{64} + \frac{7}{1024}\right) \ln \mathcal{S} + \right. \\ \left. + \left(\frac{9 \ln^2 2}{128} + \frac{21 \ln 2}{1024} + \frac{5}{2048}\right)\right] \frac{1}{\mathcal{S}^4} + O\left(\frac{1}{\mathcal{S}^6}\right). \end{aligned} \quad (5.120)$$

Αν επαναλάβουμε την ανάλυσή μας εισάγοντας τη φόρμουλα (5.94) στην (5.118) και απαιτώντας όπως όλοι οι κυρίαρχοι συντελεστές, καθώς επίσης και όλοι εκείνοι που πολλαπλασιάζουν τις περιττές αρνητικές δυνάμεις του $1/\mathcal{S}$ να μηδενίζονται, λαμβάνουμε ένα σύστημα εξισώσεων μεταξύ των συντελεστών

³⁰Ητοι τελεστές που αποτελούνται από βαθμωτά, gauginos η διανυσματικά πεδία και τις παραγώγους κώνου φωτός αυτών.

³¹Γράφουμε $s_0 \equiv \pi(S + \Delta_0)/2\sqrt{\lambda}$ για το γυμνό σύμμορφο σπίν.

ρ . Λύνοντας αυτό το σύστημα εξισώσεων, οδηγούμαστε στο ακόλουθο σετ εξισώσεων οι οποίες είναι γνωστές ως σχέσεις MVV:³²

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \rho_c \rho_0, \quad \rho_{11} = \frac{\rho_c^2}{2}, \quad \rho_{22} = -\frac{\rho_c^3}{8}, \quad \rho_{33} = \frac{\rho_c^4}{24}, \quad \rho_{44} = -\frac{\rho_c^5}{64}, \quad \rho_{55} = \frac{\rho_c^6}{160} \quad (5.121)$$

$$\rho_{32} + \rho_c \rho_{21} = \frac{\rho_c^4}{16} - \frac{1}{8} \rho_c^3 \rho_0, \quad \rho_c \rho_2 + \rho_{21} (\rho_0 - \rho_c) + \rho_{31} = -\frac{\rho_c^4}{8} + \frac{3}{8} \rho_c^3 \rho_0 - \frac{1}{4} \rho_c^2 \rho_0^2 \quad (5.122)$$

$$\rho_2 \left(\rho_0 - \frac{\rho_c}{2} \right) - \frac{1}{2} \rho_0 \rho_{21} + \rho_3 = -\frac{1}{8} \rho_c^3 \rho_0 + \frac{1}{4} \rho_c^2 \rho_0^2 - \frac{1}{12} \rho_c \rho_0^3 \quad (5.123)$$

$$\rho_c^3 \rho_2 + \rho_{21} \left(3\rho_c^2 \rho_0 - \frac{37\rho_c^3}{12} \right) - 2\rho_c \rho_{42} + 2\rho_{43} (\rho_c - \rho_0) - \rho_{53} = \frac{95}{96} \rho_c^5 \rho_0 - \frac{5}{8} \rho_c^4 \rho_0^2 - \frac{67\rho_c^6}{192} \quad (5.124)$$

$\vdots$

Μπορούμε ακόμη να τεστάρουμε και την ιδέα της *κληρονομικότητας* (inheritance), ήτοι να επιβεβαιώσουμε κατά πόσον οι χαμηλές τάξεις της διαταρακτικής θεωρίας μπορούν να επηρεάσουν ή ακόμη και να ελέγξουν τις υψηλότερες τάξεις στη θεωρία διαταραχών των χορδών. Η ιδέα της κληρονομικότητας εμφανίστηκε αρχικά στα πλαίσια της QCD (για μία ανασκόπηση βλέπε [84]), όπου παρατηρήθηκε ότι οι χαμηλότερες τάξεις στη θεωρία διαταραχών δύνανται να μεταδώσουν τη δομή τους στις υψηλότερες τάξεις. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι οι κβαντικές διορθώσεις που υπολογίστηκαν στο [71] επαληθεύουν τις δύο πρώτες από τις παραπάνω σχέσεις MVV μέχρι τον ένα βρόχο. Για τις υπόλοιπες σχέσεις MVV, η κληρονομικότητα αναμένεται (και έχει πράγματι αποδειχθεί) να σπάει. Αυτό συμβαίνει λόγω του φαινομένου του wrapping που αρχίζει να εγκαθιδρύεται στην κρίσιμη τάξη βρόχου και παραμένει σε ισχυρή σύζευξη. Τα φαινόμενα wrapping είναι υπεύθυνα για το σπάσιμο τόσο της «αμοιβαιότητας» όσο και της «απλότητας» στα αναπτύγματα μεγάλου σπίν των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών συστροφής 2 της $\mathcal{N} = 4$ SYM σε ισχυρή σύζευξη [80].

Για τις χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$, υπάρχει ένας μετασχηματισμός που επιτρέπει να εκφράσουμε την αντίστοιχη σχέση διασποράς σε μορφή που θυμίζει τη σχέση διασποράς της κλειστής διπλωμένης χορδής GKP στον AdS_3 και επιτρέπει τη σύγκριση μεταξύ τους. Ο μετασχηματισμός

$$\mathcal{S} \equiv \frac{1}{16} e^{\mathcal{J}+2} \Leftrightarrow \mathcal{J} = \ln \mathcal{S} + 4 \ln 2 - 2, \quad (5.125)$$

οδηγεί στο ακόλουθο σετ όρων στη σχέση ενέργειας-σπίν των κλειστών διπλωμένων χορδών εντός του $\mathbb{R} \times S^2$:

$$\begin{aligned} \text{Κυρίαρχοι όροι (L): } & \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+1}} \\ \text{Επόμενοι όροι (NL): } & \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+2}} \\ \text{Μεθεπόμενοι όροι: } & \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+3}} \\ & \vdots \end{aligned} \quad (5.126)$$

³²Η αμοιβαιότητα των Gribov-Lipaton [82] συνεπάγεται ορισμένες σχέσεις μεταξύ των συντελεστών των αναπτυγμάτων μεγάλου σπίν των ανώμαλων διαστάσεων, οι οποίες είναι γνωστές ως σχέσεις των Moch-Vermaseren-Vogt (MVV) [62]. Για περισσότερες πληροφορίες επί της έννοιας της αμοιβαιότητας στα πλαίσια της QCD βλέπε [81, 83, 84]. Για τους άλλους τελεστές συστροφής της $\mathcal{N} = 4$ SYM, βλέπε [85]. Για την αμοιβαιότητα στα πλαίσια της $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons (ABJM) θεωρίας, βλέπε [86].

Σε αντιδιαστολή με την περίπτωση του AdS, όλοι οι όροι $\ln^n \mathcal{S}/\mathcal{S}^n$ είναι απόντες από το ανάπτυγμα μεγάλου σπίν των ανώμαλων διαστάσεων:

$$\begin{aligned} \gamma = & 2 - \frac{1}{2\mathcal{S}} + \left[\frac{\ln \mathcal{S}}{16} + \left(\frac{\ln 2}{4} - \frac{5}{32} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{S}^2} - \left[\frac{\ln^2 \mathcal{S}}{64} + \left(\frac{\ln 2}{8} - \frac{9}{128} \right) \ln \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{9 \ln 2}{32} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{32} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{S}^3} + \left[\frac{\ln^3 \mathcal{S}}{192} + \left(\frac{\ln 2}{16} - \frac{17}{512} \right) \ln^2 \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{17 \ln 2}{64} + \frac{163}{2048} \right) \ln \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^3 2}{3} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{17 \ln^2 2}{32} + \frac{163 \ln 2}{512} - \frac{1735}{24.576} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{S}^4} - O\left(\frac{1}{\mathcal{S}^5}\right). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Έχοντας εκφράσει τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J}$ ως προς τη μεταβλητή $\mathcal{S} = e^{\mathcal{J}+2}/16$, είναι πολύ δελεαστικό να θέσουμε και να απαντήσουμε ερωτήσεις οι οποίες ανακύπτουν στην περίπτωση των τελεστών συστροφής. Αν υπολογίσουμε την $P(\mathcal{S})$ αντικαθιστώντας τη σχέση (5.127) στην (5.118), βρίσκουμε ότι η $P(\mathcal{S})$ είναι απλή ως προς το ότι περιέχει μόνο επόμενους λογαρίθμους του $\mathcal{S}$ (όχι όμως και απλούστερο από το $\gamma(\mathcal{S})$, καθότι η (5.127) δεν περιέχει κυρίαρχους λογάριθμους), και δεν είναι αναλλοίωτο ως προς της αμοιβαιότητα/ομοτιμία, αφού τόσο οι άρτιες όσο και οι περιττές αρνητικές δυνάμεις του $\mathcal{S}$ συνεισφέρουν (συνεπώς δεν υπάρχει συμμετρία ως προς το $C = \mathcal{S} \rightarrow -\mathcal{S}$):

$$\begin{aligned} P(\mathcal{S}) = & 2 - \frac{1}{2\mathcal{S}} + \left[\frac{\ln \mathcal{S}}{16} + \left(\frac{\ln 2}{4} - \frac{21}{32} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{S}^2} - \left[\frac{\ln^2 \mathcal{S}}{64} + \left(\frac{\ln 2}{8} - \frac{25}{128} \right) \ln \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{25 \ln 2}{32} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{27}{32} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{S}^3} + \left[\frac{\ln^3 \mathcal{S}}{192} + \left(\frac{\ln 2}{16} - \frac{41}{512} \right) \ln^2 \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{41 \ln 2}{64} + \frac{947}{2048} \right) \ln \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^3 2}{3} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{41 \ln^2 2}{32} + \frac{947 \ln 2}{512} - \frac{13.255}{24.576} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{S}^4} + O\left(\frac{1}{\mathcal{S}^5}\right). \end{aligned} \quad (5.128)$$

6 Γιγάντια Μαγνόνια και Απλές Ακίδες Απείρου Μεγέθους

Η έννοια του μαγνονίου προκύπτει στον $\mathfrak{su}(2)$ τομέα της επίπεδης $\mathcal{N} = 4$ SYM, θεωρώντας όλους τους αναλλοίωτους υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστές μονού ίχνους του τομέα και το φάσμα των διαστάσεων κλίμακας αυτών. Το Bethe ansatz χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των διαστάσεων κλίμακας όλων των τελεστών σε ένα βρόχο της θεωρίας διαταραχών ως προς α' . Με το ασυμπτωτικό Bethe ansatz (ABA) των Beisert, Dippel και Staudacher (BDS), η πρόβλεψη των ενεργειών των μαγνονίων σε όλους τους βρόχους κατέστη εφικτή για τους τελεστές απείρου μεγέθους. Για τις καταστάσεις με $M = 1$ μαγνόνια

$$\mathcal{O}_M = \sum_{m=1}^{J+1} e^{imp} |Z^{m-1} \chi Z^{J-m+1}\rangle, \quad p \in \mathbb{R} \quad (6.1)$$

$$(6.2)$$

και για άπειρο μέγεθος ($J = \infty$),³³ το ασυμπτωτικό Bethe ansatz δίνει:

$$\Delta - J = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\pi^2} \sin^2 \frac{p}{2}}, \quad J = \infty, \text{ για κάθε } \lambda. \quad (6.3)$$

Η σχέση (6.3) αποτελεί μια μη διαταραχτική πρόβλεψη για το φάσμα ενός μαγνονίου σε άπειρο μέγεθος η οποία ισχύει για όλες τις τάξεις βρόχων, σε ασθενή και ισχυρή σύζευξη. Τα όρια ασθενούς και ισχυρής σύζευξης είναι:

$$\Delta - J = 1 + \frac{\lambda}{2\pi^2} \sin^2 \frac{p}{2} - \frac{\lambda^2}{8\pi^4} \sin^4 \frac{p}{2} + \frac{\lambda^3}{16\pi^6} \sin^6 \frac{p}{2} - \dots, \quad \lambda \rightarrow 0 \text{ (ασθενής σύζευξη)} \quad (6.4)$$

$$\Delta - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \sin \frac{p}{2} + 0 + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \csc \frac{p}{2} - \frac{\pi^3}{8\lambda^{3/2}} \csc^3 \frac{p}{2} + \dots, \quad \lambda \rightarrow \infty \text{ (ισχυρή σύζευξη)}. \quad (6.5)$$

Στην πραγματικότητα, οι τελεστές με ένα μαγνόνιο (6.1) δεν αποτελούν φυσικές καταστάσεις της $\mathcal{N} = 4$ SYM αφού η κυκλικότητα του ίχνους συνεπάγεται ότι η ολική τους ορμή p θα πρέπει να είναι μηδέν. Όπως έδειξε ο Beisert στο [87], προκειμένου να φιλοξενήσουμε καταστάσεις μη μηδενικής ορμής $p \neq 0$ (όπως η (6.1)) στην $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία, η αντίστοιχη άλγεβρα συμμετρίας $\mathfrak{su}(2|2) \oplus \mathfrak{su}(2|2) \subset \mathfrak{psu}(2, 2|4)$ θα πρέπει να επεκταθεί με δύο κεντρικά φορτία. Για να λάβουμε καλά ορισμένες καταστάσεις της θεωρίας βαθμίδας, είτε η ορμή κάθε μαγνονίου θα πρέπει να μηδενίζεται, είτε θα πρέπει να σχηματίσουμε τελεστές με δύο ή περισσότερα μαγνόνια και μηδενική συνολική ορμή.

Οι καταστάσεις της θεωρίας χορδών που είναι δυϊκές στα μαγνόνια της $\mathcal{N} = 4$ SYM με άπειρο μέγεθος ($J = \infty$) είναι τα «γιγάντια μαγνόνια» (GMs), που βρέθηκαν το 2006 από τους Hofman και Maldacena (HM) [50]. Τα γιγάντια μαγνόνια είναι ανοικτές χορδές ενός σπίν που περιστρέφονται ως στερεά σώματα εντός του $\mathbb{R} \times S^2 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$. Αποτελούν τις στοιχειώδεις διεγέρσεις της θεωρίας χορδών τύπου IIB στον $\text{AdS}_5 \times S^5$, κάτι σαν τις θεμελιώδεις δομικές μονάδες όλων των κλειστών καταστάσεων χορδών και πολύ-σολιτονικών λύσεων της θεωρίας. Παρά το γεγονός ότι η τόσο η διατηρούμενη ενέργεια όσο και το σπίν των γιγάντιων μαγνονίων απείρου μεγέθους αποκλίνουν ($E, J = \infty$), η διαφορά τους παραμένει πεπερασμένη ούτως ώστε η σχέση ενέργειας-ορμής ενός γιγάντιου μαγνονίου με ορμή/γωνιακή έκταση

³³Η ακόλουθη σύμβαση θα εφαρμοστεί από εδώ και στο εξής: $E, J, p = \infty/v, \omega = 1$ θα δηλώνει άπειρο μέγεθος (που λαμβάνουμε υπολογίζοντας το όριο $\lim_{J,p \rightarrow \infty/v, \omega \rightarrow 1}$), ενώ $E, J, p \rightarrow \infty/v, \omega \rightarrow 1$ θα δηλώνει μεγάλο αλλά ωστόσο πεπερασμένο μέγεθος (ήτοι προτού ληφθεί το όριο $\lim_{J,p \rightarrow \infty/v, \omega \rightarrow 1}$).

$p = \Delta\varphi$ να είναι:

$$E - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right|, \quad J = \infty, \lambda \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

Καθότι οι ανοικτές χορδές απουσιάζουν από το φάσμα των θεωριών χορδών τύπου IIB, αντιμετωπίζουμε κι εδώ το ίδιο πρόβλημα που είχαμε με τα μαγνόνια της θεωρίας βαθμίδας των οποίων η ορμή δεν μηδενιζόταν. Όπως και με τα μαγνόνια, προκειμένου να φιλοξενήσουμε τα γιγάντια μαγνόνια στη θεωρία χορδών, η άλγεβρα συμμετρίας του αντίστοιχου σίγμα μοντέλου (2.13) θα πρέπει να επεκταθεί με δύο επιπλέον κεντρικά φορτία. Φυσικές καταστάσεις χορδών μπορούν μόνο να κατασκευαστούν από δύο ή περισσότερα γιγάντια μαγνόνια μηδενικής συνολικής ορμής.

Η χορδή (II) των GKP εντός του $\mathbb{R} \times S^2$ που μελετήσαμε εκτενώς στις §4.2–§5.1 αποτελεί μια τέτοια κλειστή κατάσταση μηδενικής συνολικής ορμής. GKP χορδές απείρου μεγέθους στον $\mathbb{R} \times S^2$ μπορούν να σχηματιστούν με την υπέρθεση δύο γιγάντιων μαγνόνιων HM που έχουν μέγιστη γωνιακή έκταση $\Delta\varphi = \pi$ και στροφορμή ίση προς $J/2$ το καθένα. Είναι δυϊκές προς τους τελεστές 2 μαγνόνιων $\text{Tr} [\mathcal{Z}^J \mathcal{X}^2]$ και η σχέση διασποράς τους σε άπειρο μέγεθος είναι:

$$E - J = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}, \quad J = \infty, \lambda \rightarrow \infty. \quad (6.7)$$

Μια δεύτερη κλάση λύσεων στον $\mathbb{R} \times S^2$ είναι εκείνη των απλών ακίδων (single spikes, SSs), χορδές ενός σπίν με μία ακίδα (spike), που περιστρέφονται επί της δισδιάστατης σφαίρας όπως ακριβώς τα γιγάντια μαγνόνια [88, 89]. Σε τεχνικό επίπεδο, οι απλές ακίδες είναι πολύ στενά συνδεδεμένες με τα γιγάντια μαγνόνια. Στη σύμμορφη βαθμίδα, το ansatz για τις απλές ακίδες προκύπτει από το γιγάντιο μαγνόνιο των HM ανταλλάσσοντας τις δύο συντεταγμένες κοσμικού φύλλου στη δισδιάστατη σφαίρα, ήτοι $\tau \leftrightarrow \sigma$ και παράλληλα αφήνοντας τη χρονική χωροχρονική συντεταγμένη αναλλοίωτη και ίση με $t = \tau$. Η εργασία [90] ισχυρίζεται ότι ο μετασχηματισμός $\tau \leftrightarrow \sigma$ μας πηγαίνει από τις χορδές μεγάλου μεγέθους στον $\mathbb{R} \times S^2$ στις χορδές μεγάλης περιέλιξης (winding) και από τον ολομορφικό τομέα της $\mathcal{N} = 4$ SYM στον μη ολομορφικό της τομέα.

Τα διατηρούμενα φορτία της ορμής και της στροφορμής για τις απλές ακίδες απείρου μεγέθους αποκλίνουν ως $E, p = \infty$, ενώ η διαφορά τους παραμένει πεπερασμένη. Η σχέση διασποράς τους είναι:

$$E - T\Delta\varphi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \arcsin \left(\frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad p = \infty, \lambda \rightarrow \infty, \quad (6.8)$$

όπου $\Delta\varphi = p$ είναι η ορμή/γωνιακή έκταση της απλής ακίδας. Η σχέση διασποράς του γιγάντιου μαγνόνιου (6.6) μπορεί να εξαχθεί από την (6.8) κάνοντας τον μετασχηματισμό $\pi E/\sqrt{\lambda} - \Delta\varphi/2 \mapsto p/2$ και $J \mapsto E - J$.

Δεν θα έχουμε πολλά να πούμε για τους τελεστές που είναι δυϊκοί στις απλές ακίδες. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις εργασίες [91, 92, 90, 93] για περισσότερες πληροφορίες. Όπως είδαμε, τα γιγάντια μαγνόνια είναι δυϊκά στις καταστάσεις ενός μαγνόνιου του $\mathfrak{su}(2)$ τομέα της $\mathcal{N} = 4$ SYM, που είναι οι στοιχειώδεις διεγέρσεις πάνω από τη σιδηρομαγνητική βασική κατάσταση $\text{Tr} \mathcal{Z}^J$ της $\text{XXX}_{1/2}$ αλυσίδας σπίν του Heisenberg. Όπως πρόκειται να δούμε με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω, οι δυϊκές καταστάσεις της θεωρίας χορδών για τους BPS τελεστές $\text{Tr} \mathcal{Z}^J$, είναι σημειακές χορδές που περιστρέφονται γύρω από τον ισημερινό της δισδιάστατης σφαίρας στον $\mathbb{R} \times S^2$ με άπειρη στροφορμή J . Ανάλογη είναι και η διατύπωση στην περίπτωση των απλών ακίδων: οι απλές ακίδες στον $\mathbb{R} \times S^2$ είναι στοιχειώδεις διεγέρσεις πάνω από την αντισιδηρομαγνητική βασική κατάσταση $\text{Tr} \mathcal{S}^{L/2}$ μιας $\mathfrak{so}(6)$ αλυσίδας σπίν της $\mathcal{N} = 4$ SYM, όπου $\mathcal{S}$ είναι οι τελεστές $\mathcal{S} \sim \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} + \mathcal{Y}\bar{\mathcal{Y}} + \mathcal{Z}\bar{\mathcal{Z}}$ της $\mathcal{N} = 4$ SYM και $L \equiv J + M$. Το αντισιδηρομαγνητικό κενό είναι με τη σειρά του δυϊκό προς μία χορδή που θα ονομάσουμε «στεφάνη» ("hoop"), χορδή που ηρεμεί τυλιγμένη γύρω από τον ισημερινό της S^2 . Ο μετασχηματισμός $\tau \leftrightarrow \sigma$ μπορεί ξανά να χρησιμοποιηθεί για να μεταβούμε από τη μία λύση στην άλλη.

Σε αντίθεση με τη σιδηρομαγνητική βασική κατάσταση $\text{Tr} Z^J$, που έχει τον ελάχιστο αριθμό μαγνόνων και καταλαμβάνει τον «πυθμένα» του φάσματος της $\mathcal{N} = 4$ SYM, οι τελεστές $\text{Tr} S^{L/2}$ καταλαμβάνουν την κορυφή του φάσματος καθώς ο αριθμός μαγνόνων τους είναι συγκρίσιμος με το μήκος του τελεστή. Οι χορδές που είναι δυϊκές στην (αντι-)σιδηρομαγνητική βασική κατάσταση (τη στεφάνη και τη σημειακή χορδή αντίστοιχα) αναμένεται να είναι ασταθείς. Οι ασταθείς απλές ακίδες και οι στεφάνες μπορούν να σταθεροποιηθούν με πολλούς τρόπους, π.χ. προσθέτοντας επιπλέον στροφορμές [94].

Η αστάθεια/ευστάθεια των γιγάντιων μαγνόνων (ευσταθή) και των απλών ακίδων (ασταθείς) μπορεί ακόμη να συναχθεί και από την ευσταθή/ασταθή συμπεριφορά της προβολής Pohlmeyer αυτών. Όπως είδαμε στην §3.2, κάθε χορδή στον $\mathbb{R} \times S^2$ μπορεί να απεικονισθεί σε μια λύση της εξίσωσης sine-Gordon. Αποδεικνύεται ότι τα γιγάντια μαγνόνια HM είναι δυϊκά προς το ευσταθές σολιτόνιο της εξίσωσης sine-Gordon, ενώ οι απλές ακίδες άπειρης ορμής είναι δυϊκές προς μια ασταθή λύση της εξίσωσης sG.

Η εικόνα Pohlmeyer των γιγάντιων μαγνόνων και των απλών ακίδων μπορεί ακόμη να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό των πινάκων σχέδασής τους. Χάρη στην παραγοντοποίηση του τομέα $\mathfrak{su}(2)$, μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας μόνο τη σκέδαση μεταξύ δύο σωματιδίων. Για τα γιγάντια μαγνόνια ο S-πίνακας που υπολογίζεται από την αναγωγή Pohlmeyer συμπίπτει με το όριο ισχυρή σύζευξης του μαγνονικού S-πίνακα. Αυτό αποτελεί μία ακόμη απόδειξη ότι τα μαγνόνια και τα γιγάντια μαγνόνια είναι δυϊκά κάτω από την αντιστοιχία AdS/CFT [50]. Η σκέδαση των απλών ακίδων με άπειρη ορμή μελετήθηκε στις εργασίες [95] και η αντίστοιχη μετατόπιση φάσης βρέθηκε ίση (ως προς τους μη λογαριθμικούς όρους) με εκείνη των μαγνόνων και των γιγάντιων μαγνόνων. Ο Okamura [93] ερμήνευσε αυτό το αποτέλεσμα θεωρώντας τη σκέδαση μεταξύ απλών ακίδων ως παραγοντοποιημένη σκέδαση μεταξύ απείρου το πλήθος γιγάντιων μαγνόνων. Στη εργασία [2] δείχθηκε πως αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει μέσω της αναγωγής Pohlmeyer.

Ας καταστρώσουμε τώρα το φορμαλισμό που θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε τα γιγάντια μαγνόνια και τις απλές ακίδες. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο γενικό ansatz μιας χορδής στον $\mathbb{R} \times S^2 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$:

$$\left\{ t = t(\tau, \sigma), \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0 \right\} \times \left\{ \bar{\theta}_1 = \theta(\tau, \sigma), \bar{\phi}_1 = \phi(\tau, \sigma), \bar{\theta}_2 = \bar{\phi}_2 = \bar{\phi}_3 = 0 \right\}, \quad (6.9)$$

και την αλλαγή μεταβλητής

$$z(\tau, \sigma) = R \sin \theta(\tau, \sigma), \quad (6.10)$$

έτσι ώστε $z \in [-R, R]$ και $\phi \in [0, 2\pi)$. Οι συντεταγμένες εμβάπτισης (3.1) της χορδής γράφονται:

$$Y_{05} = Y_0 + i Y_5 = R e^{i t(\tau, \sigma)} \quad \& \quad X_{12} = X_1 + i X_2 = \sqrt{R^2 - z^2(\tau, \sigma)} \cdot e^{i \phi(\tau, \sigma)} \quad (6.11)$$

$$Y_{12} = Y_{34} = 0 \quad X_{34} = X_3 = z(\tau, \sigma), \quad X_4 = X_{56} = 0. \quad (6.12)$$

Η σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) της δράσης Polyakov για τη χορδή δίνεται από

$$S_P = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \int d\tau d\sigma \left\{ -(\dot{t}^2 - t'^2) + \frac{\dot{z}^2 - z'^2}{R^2 - z^2} + \frac{1}{R^2} (R^2 - z^2) (\dot{\phi}^2 - \phi'^2) \right\}. \quad (6.13)$$

Στη στατική βαθμίδα $t = \tau$, λαμβάνεται το ακόλουθο σετ από συνδέσμους Virasoro (3.11)–(3.12):

$$\dot{X}^i \dot{X}^i + \dot{X}^i X'^i = \frac{R^2}{R^2 - z^2} (\dot{z}^2 + z'^2) + (R^2 - z^2) (\dot{\phi}^2 + \phi'^2) = R^2 \quad (6.14)$$

$$\dot{X}^i \dot{X}^i = \frac{R^2 \dot{z} \dot{z}'}{R^2 - z^2} + (R^2 - z^2) \dot{\phi} \dot{\phi}' = 0. \quad (6.15)$$

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε στην §3.2, το κλασικό σίγμα μοντέλο για τις χορδές στον $\mathbb{R} \times S^2$ μπορεί να απεικονιστεί στην εξίσωση sine-Gordon μέσω της αναγωγής Pohlmeyer. Αν ορίσουμε το πεδίο ψ ως

$$\dot{X}^i \dot{X}^i - \dot{X}^i \dot{X}^i = \frac{R^2}{R^2 - z^2} (\dot{z}^2 - \dot{z}'^2) + (R^2 - z^2) (\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}'^2) = R^2 \cos 2\psi, \quad (6.16)$$

τότε το ψ θα πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση sine-Gordon (sG):

$$\ddot{\psi} - \psi'' + \frac{1}{2} \sin 2\psi = 0. \quad (6.17)$$

Επιβάλλουμε επίσης και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες στην κίνηση της χορδής εντός του $\mathbb{R} \times S^2$:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \varphi(r, \tau) - \varphi(-r, \tau), \quad \Delta z = z(r, \tau) - z(-r, \tau) = 0, \quad (6.18)$$

όπου p είναι η διατηρούμενη στροφορμή και $\pm r$ είναι τα άκρα της ανοιχτής χορδής επί του κοσμικού φύλλου, ήτοι $\sigma \in [-r, r]$. Τα διατηρούμενα φορτία της χορδής δίδονται από:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi' d\sigma \quad (6.19)$$

$$E = \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right| = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-r}^{+r} \dot{t} d\sigma = \frac{r \sqrt{\lambda}}{\pi} \quad (6.20)$$

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2} \int_{-r}^{+r} (R^2 - z^2) \dot{\phi} d\sigma. \quad (6.21)$$

Η παρούσα ενότητα οργανώνεται ως εξής. Στην §6.1 παρουσιάζουμε τα απείρου μεγέθους γιγάντια μαγνόνια των Hofman και Maldacena. Στην §6.2 παρουσιάζεται η απλή ακίδα με άπειρο μέγεθος/ορμή (εντός του $\mathbb{R} \times S^2$). Στην §6.3 μελετάμε τη σκέδαση και τις δέσμιες καταστάσεις των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων απείρου μεγέθους.

6.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο Hofman-Maldacena (HM)

Το γιγάντιο μαγνόνιο των Hofman και Maldacena (με άπειρο μέγεθος) λαμβάνεται αν θέσουμε

$$\bar{\theta}_1 = \theta(\sigma - v\tau) \quad \& \quad \bar{\phi}_1 = \tau + \varphi(\sigma - v\tau) \quad (6.22)$$

στο ansatz (6.9), οπότε βρίσκουμε (στη στατική βαθμίδα $t = \tau$):

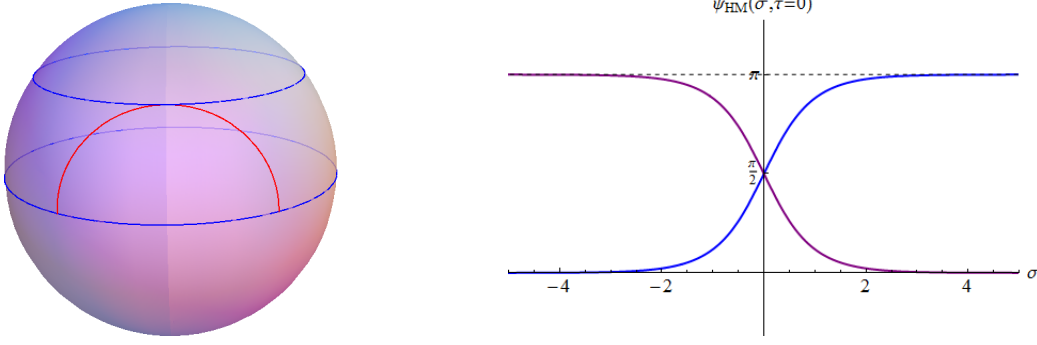
$$\left\{ t = \tau, \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0 \right\} \times \left\{ \bar{\theta}_1 = \theta(\sigma - v\tau), \bar{\phi}_1 = \tau + \varphi(\sigma - v\tau), \bar{\theta}_2 = \bar{\phi}_2 = \bar{\phi}_3 = 0 \right\}, \quad (6.23)$$

όπου v είναι η ταχύτητα του γιγάντιου μαγνονίου. Εισάγοντας,

$$z = z(\sigma - v\tau) \quad \& \quad \phi = \tau + \varphi(\sigma - v\tau) \quad (6.24)$$

στους συνδέσμους Virasoro (6.14)–(6.15), παίρνουμε:

$$\varphi' = \frac{v}{1 - v^2} \cdot \frac{z^2}{R^2 - z^2}, \quad v \neq 1 \quad (6.25)$$



Σχήμα 12: Ένα γιγάντιο μαγνόνιο Hofman-Maldacena με $v = 0.8$ (αριστερά) και η αναγωγή Pohlmeyer (6.31) αυτού (δεξιά).

$$z'^2 = \frac{z^2 (\zeta_v^2 - z^2)}{R^2 (1 - v^2)^2}, \quad \zeta_v^2 \equiv R^2 (1 - v^2). \quad (6.26)$$

Οι εξισώσεις (6.25)–(6.26) έχουν την ακόλουθη λύση:

$$z(\tau, \sigma) = R \sin \theta(\tau, \sigma) = \frac{R}{\gamma} \operatorname{sech} \left[\gamma (\sigma - v\tau) \right], \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (6.27)$$

$$\phi(\tau, \sigma) = \tau + \arctan \left[\frac{1}{\gamma v} \tanh \gamma (\sigma - v\tau) \right]. \quad (6.28)$$

Το διάγραμμα ενός γιγάντιου μαγνόνιου HM (6.27)–(6.28) με $v = 0.8$ μπορεί να βρεθεί στα δεξιά του σχήματος 12. Οι δύο άκρες του γιγάντιου μαγνόνιου ακουμπούν στον ισημερινό και κινούνται με την ταχύτητα του φωτός, ενώ η χορδή περιστρέφεται στερεά επί της δισδιάστατης σφαίρας.

Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, τόσο η διατηρούμενη ενέργεια όσο και η στροφορμή (6.20)–(6.21) του γιγάντιου μαγνόνιου αποκλίνουν, ενώ η διαφορά τους παραμένει σταθερή:

$$\left. \begin{aligned} p &= 2 \arcsin \sqrt{1 - v^2} \Rightarrow v = \cos p/2 \\ \mathcal{E} &\equiv \pi E / \sqrt{\lambda} = \sqrt{1 - v^2} \cdot \mathbb{K}(1) = \infty \\ \mathcal{J} &\equiv \pi J / \sqrt{\lambda} = \sqrt{1 - v^2} \cdot [\mathbb{K}(1) - 1] = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{E} - \mathcal{J} = \sqrt{1 - v^2} = \sin \frac{p}{2}. \quad (6.29)$$

Το γεγονός ότι στο δένδροειδές επίπεδο η σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων απείρου μεγέθους (6.29) είναι η ίδια με το όριο ισχυρής σύζευξης (6.5) της αντίστοιχης σχέσης διασποράς των τελεστών ενός μαγνόνιου (6.1) της $\mathcal{N} = 4$ SYM, συνεπάγεται ότι τα μαγνόνια και τα γιγάντια μαγνόνια θα πρέπει να αποτελούν δυϊκές καταστάσεις της AdS/CFT. Πιο κάτω θα παρουσιάσουμε περισσότερα στοιχεία για αυτή την δυαδικότητα, υπολογίζοντας τον S-πίνακα των γιγάντιων μαγνονίων και δείχνοντας ότι αυτός συμπίπτει με το όριο ισχυρής σύζευξης του S-πίνακα των μαγνονίων. Για να το κάνουμε αυτό, θα πρέπει να γνωρίζουμε την αναγωγή Pohlmeyer των γιγάντιων μαγνονίων.

Για να προσδιορίσουμε τη λύση της εξίσωσης sine-Gordon που αντιστοιχεί στην αναγωγή Pohlmeyer του γιγάντιου μαγνόνιου των HM (6.27)–(6.28), εισάγουμε το ansatz (6.23) και τους δύο συνδέσμους Virasoro (6.25)–(6.26) στην εξίσωση (6.16). Βρίσκουμε τότε

$$\sin^2 \psi = \frac{z^2}{\zeta_v^2} = \frac{z^2}{R^2 (1 - v^2)}, \quad (6.30)$$

η οποία έχει την ακόλουθη λύση:

$$\psi(\tau, \sigma) = 2 \arctan e^{\pm \gamma(\sigma - v\tau)} = \arcsin \operatorname{sech}[\gamma(\sigma - v\tau)] \quad (6.31)$$

και αντιστοιχεί στη λύση σολιτονίου/αντισολιτονίου της εξίσωσης sG (βλέπε π.χ. [96]). Το διάγραμμα της (6.31) μπορεί να βρεθεί στα δεξιά του σχήματος 12. Στην ιδιάζουσα περίπτωση $v = 1$, οι δύο σύνδεσμοι (6.25)–(6.26) γράφονται

$$z = 0 \quad \& \quad \varphi'(1 - \varphi') = 0, \quad (6.32)$$

οδηγώντας στις ακόλουθες δύο λύσεις:

$$z = 0 \quad \& \quad \phi = \tau + c \quad \text{ή} \quad \phi = \sigma + c. \quad (6.33)$$

Η πρώτη αντιπροσωπεύει μία σημειακή χορδή που περιστρέφεται στον ισημερινό της δισδιάστατης σφαίρας και είναι δυϊκή στον BPS τελεστή $\operatorname{Tr} \mathcal{Z}^J$ του τομέα $\mathfrak{su}(2)$ της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Η δεύτερη είναι η «στεφάνη», μία στάσιμη χορδή που είναι τυλιγμένη γύρω από τον ισημερινό της δισδιάστατης σφαίρας και είναι δυϊκή στους τελεστές $\operatorname{Tr} \mathbb{S}^{L/2}$ της $\mathcal{N} = 4$ SYM, όπου $\mathbb{S}$ είναι οι τελεστές $\mathbb{S} \sim \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} + \mathcal{Y}\bar{\mathcal{Y}} + \mathcal{Z}\bar{\mathcal{Z}}$. Είναι σχετικά απλό να υπολογίσουμε τα διατηρούμενα φορτία και τη σχέση διασποράς τόσο της σημειακής χορδής όσο και της χορδής hoop («στεφάνη»):

$$\mathcal{E} = \mathcal{J}, p = 0 \quad (\text{Σημειακή Χορδή}) \quad \& \quad \mathcal{E} = \frac{p}{2}, \mathcal{J} = 0 \quad (\text{Στεφάνη}). \quad (6.34)$$

Οι αντίστοιχες αναγωγές Pohlmeyer είναι επίσης απλό να ληφθούν από τις σχέσεις (6.16)–(6.33) και δίνουν, $\psi = 0$ για τη σημειακή χορδή και $\psi = \pi/2$ για τη στεφάνη.

6.2 Απλές Ακίδες Άπειρης Ορμής

Για άπειρη ορμή/περιέλιξη, οι απλές ακίδες (single spikes) λαμβάνονται θέτοντας

$$\bar{\theta}_1 = \theta(\sigma - \omega\tau) \quad \& \quad \bar{\phi}_1 = \omega\tau + \varphi(\sigma - \omega\tau) \quad (6.35)$$

στην (6.9), η οποία οδηγεί (στατική βαθμίδα, $t = \tau$):

$$\left\{ t = \tau, \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0 \right\} \times \left\{ \bar{\theta}_1 = \theta(\sigma - \omega\tau), \bar{\phi}_1 = \omega\tau + \varphi(\sigma - \omega\tau), \bar{\theta}_2 = \bar{\phi}_2 = \bar{\phi}_3 = 0 \right\} \quad (6.36)$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της απλής ακίδας. Αν θέσουμε

$$z = z(\sigma - \omega\tau) \quad \& \quad \phi = \omega\tau + \varphi(\sigma - \omega\tau) \quad (6.37)$$

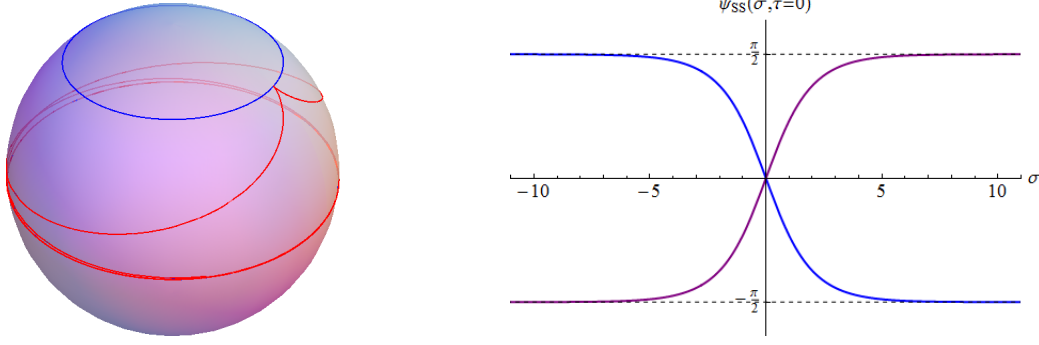
στις εξισώσεις των συνδέσμων (6.14)–(6.15), λαμβάνουμε:

$$\varphi' = \frac{\omega^2}{1 - \omega^2} \cdot \frac{z^2 - \zeta_\omega^2}{R^2 - z^2}, \quad \omega \neq 1 \quad (6.38)$$

$$z'^2 = \frac{\omega^2}{R^2(1 - \omega^2)^2} \cdot z^2(\zeta_\omega^2 - z^2), \quad \zeta_\omega^2 \equiv R^2 \left[1 - \frac{1}{\omega^2} \right]. \quad (6.39)$$

Για $\omega = 1$, παίρνουμε τις εξισώσεις (6.32)–(6.33) για τη σημειακή χορδή ή τη στεφάνη. Για $\omega \neq 1$, οι εξισώσεις (6.38)–(6.39) έχουν την ακόλουθη λύση:

$$z(\tau, \sigma) = R \sin \theta(\tau, \sigma) = R \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} \cdot \operatorname{sech} \left(\frac{\sigma - \omega\tau}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \right) \quad (6.40)$$



Σχήμα 13: Απλή ακίδα απείρου μεγέθους με $\omega = 1.6$ (αριστερά) και η εικόνα Pohlmeyer (6.44) αυτής (δεξιά).

$$\phi(\tau, \sigma) = \sigma - \arctan \left[\sqrt{\omega^2 - 1} \tanh \left(\frac{\sigma - \omega\tau}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \right) \right]. \quad (6.41)$$

Το διάγραμμα μιας απλής ακίδας με άπειρη ορμή (6.40)–(6.41) και $\omega = 1.6$ έχει σχεδιαστεί στα αριστερά του σχήματος 13. Η απλή ακίδα έχει τυλιχθεί γύρω από τον ισημερινό της δισδιάστατης σφαίρας και περιστρέφεται στερεά γύρω της.

Η διατηρούμενη ορμή και ενέργεια (6.19)–(6.20) των απλών ακίδων άπειρης ορμής αποκλίνουν ενώ η διαφορά τους παραμένει πεπερασμένη ($\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{J} \equiv \pi J/\sqrt{\lambda}$):

$$\left. \begin{aligned} p &= 2 \left[\sqrt{\omega^2 - 1} \cdot \mathbb{K}(1) - \arcsin \sqrt{1 - 1/\omega^2} \right] = \infty \\ \mathcal{E} &= \sqrt{\omega^2 - 1} \cdot \mathbb{K}(1) = \infty \\ \mathcal{J} &= \sqrt{1 - 1/\omega^2} \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{E} - \frac{p}{2} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} = \arcsin \mathcal{J}. \quad (6.42)$$

Για να μελετήσουμε τη σκέδαση μεταξύ απλών ακίδων θα πρέπει να γνωρίζουμε την αναγωγή Pohlmeyer αυτών. Αν εισαγάγουμε το ansatz (6.36) και τους συνδέσμους Virasoro (6.38)–(6.39) στην (6.16), βρίσκουμε

$$\sin^2 \psi = 1 - \frac{z^2}{\zeta_\omega^2}. \quad (6.43)$$

Επομένως η αναγωγή Pohlmeyer για την απλή ακίδα είναι:

$$\psi(\tau, \sigma) = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan e^{\pm(\sigma - \omega\tau)/\sqrt{\omega^2 - 1}} = \arcsin \tanh \left[\frac{\sigma - \omega\tau}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \right] \quad (6.44)$$

και αντιστοιχεί σε μια ασταθή λύση της εξίσωσης sine-Gordon. Το διάγραμμα της (6.44) για μία απλή ακίδα απείρου μεγέθους με $\omega = 1.6$, μπορεί να βρεθεί στα δεξιά του σχήματος 13.

Όπως αναφέραμε ήδη στη εισαγωγή αυτής της ενότητας, υπάρχει ένας μετασχηματισμός που επιτρέπει να μεταβούμε από τα γιγάντια μαγνόνια απείρου μεγέθους στις αντίστοιχες απλές ακίδες. Η συμμετρία $\tau \leftrightarrow \sigma$ («δισδιάστατη δυαδικότητα») [90],

$$\tau \leftrightarrow \sigma, \quad v \leftrightarrow \frac{1}{\omega}, \quad \psi \leftrightarrow \left[\frac{\pi}{2} - \psi \right] \quad \Leftrightarrow \quad \text{Γιγάντια Μαγνόνια} \leftrightarrow \text{Απλές Ακίδες}. \quad (6.45)$$

μετασχηματίζει τις λύσεις των γιγάντιων μαγνωνίων (6.27)–(6.28) και την αναγωγή Pohlmeyer αυτών (6.31) σε εκείνες των απλών ακίδων, (6.40)–(6.41) και (6.44). Ο μετασχηματισμός $\tau \leftrightarrow \sigma$ μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να μεταβούμε από τη σημειακή χορδή στη στεφάνη (6.33). Όπως πρόκειται να δούμε παρακάτω, η δισδιάστατη δυαδικότητα (6.45) ισχύει και για τα γιγάντια μαγνόνια και για τις απλές ακίδες πεπερασμένου μεγέθους.

Προκειμένου να μεταβούμε από τη σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνωνίων σε εκείνη των απλών ακίδων, θα πρέπει να εφαρμόσουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\mathcal{E} - \frac{p}{2} \mapsto \frac{p}{2} \quad \& \quad \mathcal{J} \mapsto \mathcal{E} - \mathcal{J} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Απλές Ακίδες} \mapsto \text{Γιγάντια Μαγνόνια}. \quad (6.46)$$

Ο μετασχηματισμός (6.46) απεικονίζει τη σχέση ενέργειας-ορμής (6.42) στην (6.29). Η σχέση (6.46) ισχύει επίσης και για τις σχέσεις διασποράς της σημειακής χορδής και της στεφάνης (6.34).

6.3 Δέσμιες Καταστάσεις & Σκέδαση

6.3.1 Σκέδαση

Οι εικόνες sine-Gordon των γιγάντιων μαγνωνίων (απείρου μεγέθους) και των απλών ακίδων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε τους S-πίνακες τους και να μελετήσουμε τις δέσμιες καταστάσεις τους. Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας τη σκέδαση μεταξύ γιγάντιων μαγνωνίων.

Ακολουθώντας τους Hofman και Maldacena [50], μπορούμε να μελετήσουμε τις αναγωγές Pohlmeyer των γιγάντιων μαγνωνίων οι οποίες συμπίπτουν με τις λύσεις σολιτονίου/αντισολιτονίου της εξίσωσης sine-Gordon (6.31). Είναι κάπως περισσότερο βολικό να θεωρήσουμε τη λύση σολιτονίου-αντισολιτονίου, παρότι το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί από οποιαδήποτε εκ των υπολειπόμενων λύσεων σκέδασης 2 σολιτονίων της sG, ήτοι τη λύση σολιτονίου-αντισολιτονίου και τη λύση αντισολιτονίου-αντισολιτονίου. Η λύση σολιτονίου-αντισολιτονίου της εξίσωσης sG (6.17) είναι (βλέπε π.χ. [96]):

$$\tan \frac{\psi_{s-a}}{2} = \frac{\sinh(v\gamma\tau)}{v \cosh \gamma\sigma} = \frac{1}{v} \cdot \frac{e^{v\gamma\tau} - e^{-v\gamma\tau}}{e^{\gamma\sigma} + e^{-\gamma\sigma}}. \quad (6.47)$$

Η λύση (6.47) περιγράφει δύο σολιτόνια που βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $\sigma = \pm\infty$ όταν $\tau = -\infty$, μετά αρχίζουν να πλησιάζουν το ένα το άλλο, αλληλεπιδρούν και καταλήγουν στην αντίθετη πλευρά $\sigma = \mp\infty$, όταν $\tau = +\infty$. Η αναγωγή Pohlmeyer ψ_{s-a} , όπως επίσης και η αντίστοιχη πυκνότητα ενέργειας $dE_{s-a}/d\sigma$ για τη σκέδαση δύο γιγάντιων μαγνωνίων με $v = 0.5$, έχουν σχεδιαστεί στα αριστερά διαγράμματα των σχημάτων 14–15 αντίστοιχα.

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε τη χρονική καθυστέρηση δύο σολιτονίων στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας τους καθώς σχεδιάζονται. Συγκρίνοντας τις τιμές της (6.47) στα $\sigma = \pm\infty$, $\tau = \pm\infty$, βρίσκουμε

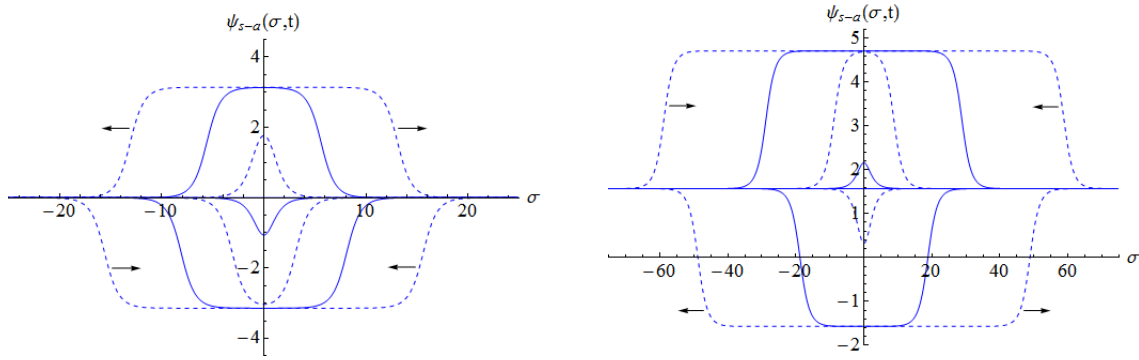
$$\Delta T_{\text{cm}} = \frac{2\sqrt{1-v^2}}{v} \cdot \ln v, \quad (6.48)$$

όπου $0 \leq v \leq 1$ είναι η ταχύτητα του σολιτονίου στο σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας. Η εξίσωση (6.48) μπορεί να μετασχηματισθεί στο σύστημα αναφοράς όπου τα δύο σολιτόνια έχουν αυθαίρετες ταχύτητες v_1 και v_2 . Το αποτέλεσμα είναι:

$$\Delta T_{12} = \frac{2}{v_1 \gamma_1} \cdot \ln v = \tan \frac{p_1}{2} \cdot \ln \left[\frac{1 - \cos \frac{p_1 - p_2}{2}}{1 - \cos \frac{p_1 + p_2}{2}} \right], \quad \begin{aligned} v_i &= \tan \hat{\theta}_i = \cos p_i/2 \\ \gamma_i &= \cosh \hat{\theta}_i = \csc p_i/2 \end{aligned}, \quad (6.49)$$

όπου $\hat{\theta}_i$ είναι η ωχύτητα (rapidity) του σολιτονίου $i = 1, 2$ και $v = \tanh(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2/2)$. Η μέθοδος για τον υπολογισμό της μετατόπισης φάσης στην κβαντική θεωρία πεδίου γίνεται σύμφωνα με την εργασία [97] των Jackiw και Woo:

$$\Delta T_{12} = \frac{\partial \delta_{12}}{\partial \epsilon_1}, \quad (6.50)$$



Σχήμα 14: Λύση sine-Gordon για τη σκέδαση σολιτονίου-αντισολιτονίου που αντιστοιχεί σε δύο γιγάντια μαγνόνια με $v = 0.5$ (αριστερά) και δύο απλές ακίδες με $\omega = 2$ (δεξιά).

όπου $\epsilon_1 = \sin p/2$ είναι η ενέργεια ενός εκ των σολιτονίων. Εισάγοντας την (6.49) στην (6.50), βρίσκουμε:

$$\delta_{12} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ \left(\cos \frac{p_2}{2} - \cos \frac{p_1}{2} \right) \ln \left[\frac{1 - \cos \frac{p_1 - p_2}{2}}{1 - \cos \frac{p_1 + p_2}{2}} \right] - p_1 \sin \frac{p_1}{2} \right\}. \quad (6.51)$$

Ο τελευταίος όρος της (6.51) εξαρτάται από τη βαθμίδα του κοσμικού φύλλου που έχουμε επιλέξει και τον ορισμό της χωρικής συντεταγμένης σ . Αν επιλέγαμε μια βαθμίδα για την οποία $dJ/d\sigma = \text{σταθ.}$, αντί μίας για την οποία $dE/d\sigma = \text{σταθ.}$, θα μπορούσαμε να φροντίσουμε ώστε ο τελευταίος όρος της (6.51) να απαλειφθεί και η μετατόπιση φάσης να γίνει, για $\sin p_{1,2}/2 > 0$:

$$\delta_{12} = \delta(p_1, p_2) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left(\cos \frac{p_1}{2} - \cos \frac{p_2}{2} \right) \ln \left[\frac{\sin^2 \frac{p_1 - p_2}{4}}{\sin^2 \frac{p_1 + p_2}{4}} \right]. \quad (6.52)$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι η μετατόπιση φάσης (6.52) ισούται με την αντίστοιχη διαφορά της dressing φάσης δύο μαγνονίων σε ισχυρή σύζευξη,

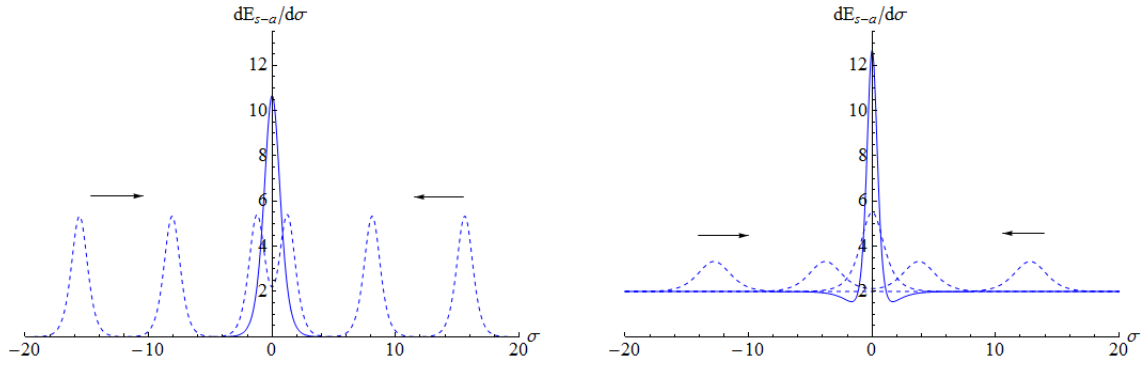
$$\sigma_{12(\text{AFS})}^2 = e^{i\delta_{12}} \quad (6.53)$$

που είναι γνωστή και ως φάση AFS. Δεν έχουμε το χρόνο για να παρουσιάσουμε την απόδειξη της εξίσωσης (6.52) από τη φάση των AFS εδώ, έτσι παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στην εργασία [98] για τις λεπτομέρειες.

Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε τη μετατόπιση φάσης του γιγάντιου μαγνονίου (6.51)–(6.52) είναι χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη λύση του σίγμα μοντέλου των χορδών επί του $\mathbb{R} \times S^2$ που περιγράφει τη σκέδαση μεταξύ δύο γιγάντιων μαγνονίων. Αυτό διεκπεραιώθηκε στην εργασία [99], όπου η λύση για τη σκέδαση δύο γιγάντιων μαγνονίων κατασκευάστηκε με βάση την αποκαλούμενη μέθοδο «ένδυσης» ("dressing"), η οποία ξεκινά από τη σημειακή χορδή (6.33) στον $\mathbb{R} \times S^2$ και διαδοχικά κατασκευάζει όλο και πιο περίπλοκες χορδές εντός του $\mathbb{R} \times S^2$. Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κανείς να «ντύσει» τη στεφάνη (6.33) και να βρει τη λύση για τη σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων, από την οποία η μετατόπιση φάσης της απλής ακίδας μπορεί να υπολογιστεί. Αυτό έγινε στην εργασία [95] και το αποτέλεσμα είναι:

$$\delta(q_1, q_2) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ \left(\cos \frac{q_1}{2} - \cos \frac{q_2}{2} \right) \ln \left[\frac{\sin^2 \frac{q_1 - q_2}{4}}{\sin^2 \frac{q_1 + q_2}{4}} \right] - q_1 \sin \frac{q_1}{2} \right\}, \quad (6.54)$$

όπου το q ορίζεται ως $\mathcal{J} = (1 - 1/\omega^2)^{1/2} \equiv \sin q/2$, ενώ το ω και το $\mathcal{J}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα και η διατηρούμενη στροφορμή της ακίδας αντίστοιχα. Για $p \leftrightarrow q$, η (6.54) εμφανώς συμφωνεί με τη



Σχήμα 15: Πυκνότητα ενέργειας της σκέδασης σολιτονίου-αντισολιτονίου που αντιστοιχεί σε δύο γιγάντια μαγνόνια με $v = 0.5$ (αριστερά) και δύο απλές ακίδες με $\omega = 2$ (δεξιά).

μετατόπιση φάσης του γιγάντιου μαγνόνιου (6.52) που υπολογίσαμε πιο πάνω, μέχρι τον μη λογαριθμικό όρο $q \sin q/2$ που έχει αντίθετο πρόσημο. Μια ποιοτική εξήγηση για τη σύμπτωση των λογαριθμικών όρων των (6.51)–(6.54), δόθηκε από τον Okamura στην εργασία [93], όπου η σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων ειδώθηκε ως παραγοντοποιημένη σκέδαση μεταξύ απείρου πλήθους γιγάντιων μαγνόνιων.

Μια απλούστερη εξαγωγή της μετατόπισης φάσης της απλής ακίδας δόθηκε στην εργασία [2] χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\tau \leftrightarrow \sigma$ (6.45).³⁴ Σε γενικές γραμμές ο μετασχηματισμός $\tau \leftrightarrow \sigma$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετασχηματίσουμε τις λύσεις της εξίσωσης sG που αντιστοιχούν στα γιγάντια μαγνόνια, στις λύσεις της εξίσωσης sG που αντιστοιχούν στις απλές ακίδες. Εν συνεχεία, η μετατόπιση φάσης των απλών ακίδων μπορεί να υπολογισθεί από την εικόνα Pohlmeyer της λύσης για τη σκέδαση των απλών ακίδων αλλά Hofman-Maldacena. Να σημειωθεί ότι τόσο οι λογαριθμικοί όσο και οι μη λογαριθμικοί όροι της φόρμουλας για τη μετατόπιση φάσης [2] συμφωνούν με τη μετατόπιση φάσης (6.51) για το γιγάντιο μαγνόνιο.

Ας δούμε τώρα πως δουλεύει η συνταγή της εργασίας [2]. Αυτή τη φορά μας συμφέρει να αρχίσουμε από τη λύση για τη σκέδαση σολιτονίου-σολιτονίου της εξίσωσης sG:

$$\tan \frac{\psi_{s-s}}{2} = \frac{v \sinh \gamma \sigma}{\cosh v \gamma \tau}. \quad (6.55)$$

Αυτή η λύση της εξίσωσης sG έχει τοπολογικό φορτίο³⁵ $Q = +2$ και προκύπτει από την αναγωγή Pohlmeyer δύο γιγάντιων μαγνόνιων που σχεδάζονται στο σύστημα του κέντρου μάζας τους. Όταν μετασχηματισθεί κατά $\tau \leftrightarrow \sigma$ σύμφωνα με την (6.45), η μετασχηματισμένη λύση

$$\tan \frac{\psi_{s-a}}{2} = \frac{\omega \cosh \sigma / \sqrt{\omega^2 - 1} - \sinh \omega \tau / \sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega \cosh \sigma / \sqrt{\omega^2 - 1} + \sinh \omega \tau / \sqrt{\omega^2 - 1}}, \quad (6.56)$$

ικανοποιεί την εξίσωση sine-Gordon (6.17) και έχει τοπολογικό φορτίο ίσο προς $Q = 0$, που σημαίνει ότι αντιστοιχεί στη σκέδαση μεταξύ δύο λύσεων που φέρουν αντίθετα τοπολογικά φορτία. Η εξίσωση (6.56) αποτελεί την αναγωγή Pohlmeyer μιας λύσης της θεωρίας χορδών που περιγράφει τη σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων στο σύστημα του κέντρου μάζας τους. Στο δεξιό μέρος των σχημάτων 14–15, έχουμε σχεδιάσει την κυματοσυνάρτηση της εξίσωσης sG (6.56) καθώς επίσης και την πυκνότητα ενέργειας αυτής που αντιστοιχεί στη σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων με $\omega = 2$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις της εξίσωσης sG που περιγράφουν τη σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων με τα ίδια τοπολογικά φορτία (και συνολικό φορτίο $Q = \pm 2$).

³⁴Οι συγγραφείς του [2] ακολούθησαν την υπόδειξη που υπάρχει στην υποσημείωση 2 της αναφοράς [95].

³⁵Το τοπολογικό φορτίο Q μιας λύσης της sG ορίζεται ως $Q = 1/\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_\sigma \psi d\sigma$.

Έχοντας βρει την αναγωγή Pohlmeyer για τη σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων (6.56), μπορούμε να υπολογίσουμε και τη αντίστοιχη μετατόπιση φάσης τους αλλά Hofman και Maldacena. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με εκείνο που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις λύσεις για τις οποίες $Q = \pm 2$. Σε ένα σύστημα αναφοράς όπου οι ταχύτητες των δύο λύσεων είναι $v_1 = 1/\omega_1$ και $v_2 = 1/\omega_2$, η καθυστέρηση φάσης βρίσκει να είναι:

$$\Delta T_{12} = \frac{1}{\gamma_1} \ln v = \sin \frac{q_1}{2} \cdot \ln \left[\frac{1 - \cos \frac{q_1 - q_2}{2}}{1 - \cos \frac{q_1 + q_2}{2}} \right], \quad v = \tanh \left[\frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2}{2} \right], \quad (6.57)$$

όπου $\cosh \hat{\theta}_i \equiv \gamma_i = (1 - v_i^2)^{-1/2} = \csc q_i/2$ για $i = 1, 2$. Η μετατόπιση φάσης για $\sin q_i/2 > 0$ ανακτάται χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα,

$$\Delta T_{12} = \frac{\partial \delta_{12}}{\partial \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_i \equiv \mathcal{E}_i - \frac{p_i}{2} = \arcsin \mathcal{J}_i = \frac{q_i}{2}, \quad i = 1, 2. \quad (6.58)$$

Βρίσκουμε:

$$\delta(q_1, q_2) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ \left(\cos \frac{q_2}{2} - \cos \frac{q_1}{2} \right) \ln \left[\frac{\sin^2 \frac{q_1 - q_2}{4}}{\sin^2 \frac{q_1 + q_2}{4}} \right] - q_1 \sin \frac{q_1}{2} \right\}. \quad (6.59)$$

6.3.2 Δέσμιες Καταστάσεις

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με δύο παραδείγματα του μετασχηματισμού $\sigma \leftrightarrow \tau$ για τις δέσμιες καταστάσεις των απλών ακίδων. Είναι προφανές ότι κάθε λύση της εξίσωσης sG με N σολιτόνια μπορεί να μετασχηματισθεί κατά $\sigma \leftrightarrow \tau$ και να γεννήσει νέες λύσεις με απλές ακίδες. Ένα παράδειγμα αποτελεί η λύση breather ($Q = 0$),

$$\tan \frac{\psi_b}{2} = \frac{\sin a \gamma_a \tau}{a \cosh \gamma_a \sigma}, \quad \gamma_a \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \quad (6.60)$$

η οποία παίρνει την ακόλουθη μορφή κάτω από το μετασχηματισμό $\tau \leftrightarrow \sigma$:

$$\tan \frac{\psi_b}{2} = \frac{\cosh \omega \gamma_\omega \tau - \omega \sin \gamma_\omega \sigma}{\cosh \omega \gamma_\omega \tau + \omega \sin \gamma_\omega \sigma}. \quad (6.61)$$

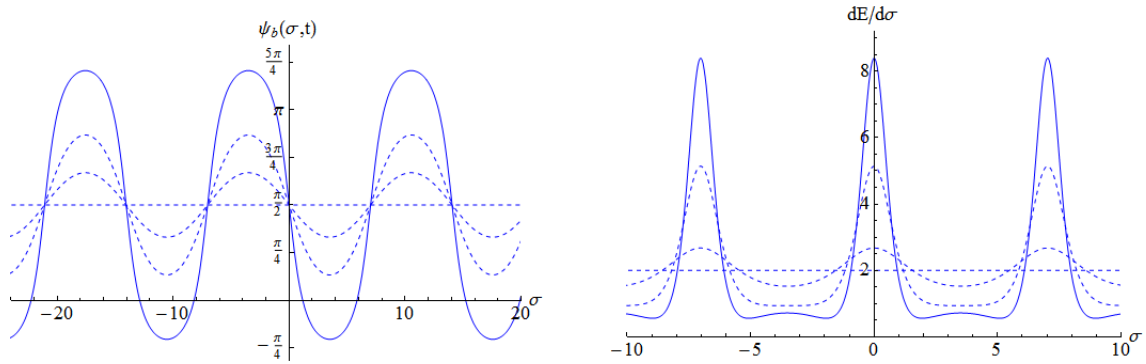
Η (6.61) ικανοποιεί την εξίσωση sine-Gordon (6.17). Για $\omega = 2$ η κυματοσυνάρτησή της έχει σχεδιαστεί στο δεξιό διάγραμμα του σχήματος 16 ενώ το αριστερό διάγραμμα του ίδιου σχήματος απεικονίζει τη γραφική παράσταση της πυκνότητας ενέργειας. Αρχικά η λύση είναι σταθερή και ίση προς $\psi = \pi/2$, μετά το πλάτος της και η ενέργειά της αρχίζουν να αυξάνονται μεταξύ των χρονικών στιγμών $\tau = -\tau_0$ και $\tau = 0$ μέχρι να πάρουν τη μορφή των κυματιστών περιοδικών γραμμών του σχήματος 16, με ακρότατα στις θέσεις $\sigma = k\pi/2\gamma_\omega$. Εν συνεχεία και οι δύο κυματοσυναρτήσεις αρχίζουν να ξαναφθίνουν και λαμβάνουν τη σταθερή αρχική τιμή τους $\psi = \pi/2$, όταν $\tau = \tau_0$.

Μια ακόμη σταθερή λύση της sG με 3 σολιτόνια είναι η λεγόμενη λύση "wobble" που περιέχει ένα breather και ένα σολιτόνιο (ή αντισολιτόνιο) [100, 101]:

$$\tan \frac{\psi_w}{2} = \frac{\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \sin a\tau + \frac{e^\sigma}{2} \left(e^{-\sqrt{1-a^2}\sigma} + r_a^2 e^{\sqrt{1-a^2}\sigma} \right)}{\cosh \left(\sqrt{1-a^2}\sigma \right) + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} r_a e^\sigma \sin a\tau}, \quad r_a \equiv \frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{1 + \sqrt{1-a^2}}. \quad (6.62)$$

Με το μετασχηματισμό $\tau \leftrightarrow \sigma$ η (6.62) γράφεται:

$$\tan \frac{\psi_w}{2} = \frac{\sqrt{\omega^2 - 1} (r_\omega e^\tau - 1) \sin \frac{\sigma}{\omega} + \frac{1}{2} \left[(1 - e^\tau) e^{-\frac{\sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega} \cdot \tau} + (1 - r_\omega^2 e^\tau) e^{\frac{\sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega} \cdot \tau} \right]}{\sqrt{\omega^2 - 1} (r_\omega e^\tau + 1) \sin \frac{\sigma}{\omega} + \frac{1}{2} \left[(1 + e^\tau) e^{-\frac{\sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega} \cdot \tau} + (1 + r_\omega^2 e^\tau) e^{\frac{\sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega} \cdot \tau} \right]}, \quad (6.63)$$



Σχήμα 16: Κυματοσυνάρτηση sine-Gordon (αριστερά) και πυκνότητα ενέργειας (δεξιά) για τη λύση breather των απλών ακίδων (6.61), με $\omega = 2$.

όπου

$$r_\omega \equiv \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}}. \quad (6.64)$$

Η λύση (6.63) εμφανίζει και αυτή τις χαρακτηριστικές «εκλάμψεις» των breather (6.61).

7 Μαγνόνια και Απλές Ακίδες Πεπερασμένου Μεγέθους

Οι γενικεύσεις των γιγάντιων μαγνόνιων και των απλών ακίδων (single spikes) σε πεπερασμένο μέγεθος λαμβάνονται αν εισάγουμε,

$$\theta = \theta(\sigma - v\omega\tau), \quad \varphi \equiv \phi - \omega\tau = \varphi(\sigma - v\omega\tau) \quad (7.1)$$

στο ansatz (6.9), έτσι ώστε στη στατική βαθμίδα $t = \tau$, η (6.9) να γράφεται:

$$\left\{ t = \tau, \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0 \right\} \times \left\{ \bar{\theta}_1 = \theta(\sigma - v\omega\tau), \bar{\phi}_1 = \omega\tau + \varphi(\sigma - v\omega\tau), \bar{\theta}_2 = \bar{\phi}_2 = \bar{\phi}_3 = 0 \right\} \quad (7.2)$$

Τα γιγάντια μαγνόνια και οι απλές ακίδες πεπερασμένου μεγέθους είναι ανοικτές χορδές εντός του $\mathbb{R} \times S^2$ που περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα ω και ταυτόχρονα μετατοπίζονται με φασική ταχύτητα $v_p = v \cdot \omega$. Αν θέσουμε,

$$z = z(\sigma - v\omega\tau), \quad \varphi \equiv \phi - \omega\tau = \varphi(\sigma - v\omega\tau) \quad (7.3)$$

στις εξισώσεις των συνδέσμων (6.14)–(6.15) και την αναγωγή Pohlmeyer (6.16), λαμβάνουμε:

$$\varphi' = \frac{v\omega^2}{1 - v^2\omega^2} \cdot \frac{z^2 - \zeta_\omega^2}{R^2 - z^2}, \quad \zeta_\omega^2 \equiv R^2 \left[1 - \frac{1}{\omega^2} \right], \quad v \cdot \omega \neq 1 \quad (7.4)$$

$$z'^2 = \frac{\omega^2}{R^2(1 - v^2\omega^2)^2} \cdot (z^2 - \zeta_\omega^2)(\zeta_v^2 - z^2), \quad \zeta_v^2 \equiv R^2(1 - v^2) \quad (7.5)$$

$$\sin^2 \psi = \frac{z^2 - \zeta_\omega^2}{\zeta_v^2 - \zeta_\omega^2} \quad (\text{Αναγωγή Pohlmeyer}). \quad (7.6)$$

Για $v \cdot \omega = 1$ οδηγούμαστε στην τετριμμένη λύση $z = \zeta_v = \zeta_\omega$. Αυτή η λύση είναι δυνατή μόνο εφόσον $z = 0$ και $v = \omega = 1$, που είναι απλά η σημειακή χορδή και η δυϊκή της υπό τον μετασχηματισμό $\sigma \leftrightarrow \tau$ στεφάνη (6.33). Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (7.4) και (7.5), λαμβάνουμε:

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{R^2 - z^2}{Rv\omega} \sqrt{\frac{\zeta_v^2 - z^2}{z^2 - \zeta_\omega^2}}. \quad (7.7)$$

Είναι σχετικά απλό να εξαγάγουμε τα όρια απείρου μεγέθους των γιγάντιων μαγνόνιων και των απλών ακίδων από το ansatz πεπερασμένου μεγέθους (7.2) και τις εξισώσεις (7.4)–(7.6). Το γιγάντιο μαγνόνιο των Hofman-Maldacena (απείρου μεγέθους) (6.25)–(6.26) και η αναγωγή Pohlmeyer αυτού (6.30) λαμβάνονται για $\omega = 1$ και για $|v| \leq 1$, ενώ για $v = 1$ και $\omega \geq 1$ λαμβάνουμε τις απλές ακίδες απείρου μεγέθους (ή άπειρης ορμής) (6.38)–(6.39) και την αναγωγή Pohlmeyer αυτών (6.43).

Ανάλογα με τις σχετικές τιμές της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας της ανοικτής χορδής v και ω , βρίσκουμε τέσσερις περιοχές λύσεως των συνδέσμων (7.4)–(7.5) και της αναγωγής Pohlmeyer (7.6):

1. Γιγάντιο μαγνόνιο, στοιχειώδης περιοχή: $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$.
2. Γιγάντιο μαγνόνιο, διπλή περιοχή: $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$.
3. Απλή ακίδα, στοιχειώδης περιοχή: $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$.
4. Απλή ακίδα, διπλή περιοχή: $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$.

	$\omega \leq 1$	$\omega \geq 1$	
$v\omega \leq 1$	GM Διπλή (7.2)	GM Στοιχειώδης (7.1)	–
$v\omega \geq 1$	–	SS Στοιχειώδης (7.3)	SS Διπλή (7.4)
	$v \leq 1$		$v \geq 1$

Πίνακας 1: Στοιχειώδεις και διπλές περιοχές των γιγάντιων μαγνόνιων (GM) και των απλών ακίδων (SS).

Βλέπε επίσης και τον πίνακα 1. Η επιλογή των ονομασιών «στοιχειώδης» και «διπλή» πρόκειται να δικαιολογηθεί παρακάτω, όπου καθεμιά από τις προηγούμενες περιοχές θα μελετηθεί λεπτομερώς. Στην επόμενη §8, θα μελετήσουμε τις κλασικές σχέσεις διασποράς αυτών των λύσεων.

7.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο: Στοιχειώδης Περιοχή, $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$

Σε αυτή την περίπτωση η ανοικτή χορδή είναι ένα τόξο στον $\mathbb{R} \times S^2$ (γιγάντιο μαγνόνιο) που εκτείνεται μεταξύ των παραλλήλων ζ_ω και ζ_v :

$$0 \leq \zeta_\omega^2 = z_{\min}^2 \leq z^2 \leq z_{\max}^2 = \zeta_v^2 \leq R^2. \quad (7.8)$$

Η διατηρούμενη ορμή/γωνιακή έκταση των γιγάντιων μαγνόνιων πεπερασμένου μεγέθους στη στοιχειώδη περιοχή είναι:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi' d\sigma = \frac{2}{\sqrt{1-v^2}} \left[\frac{1}{v\omega} \mathbf{\Pi} \left(\left[1 - \frac{1}{v^2} \right] \eta; \eta \right) - v\omega \mathbb{K}(\eta) \right], \quad (7.9)$$

όπου

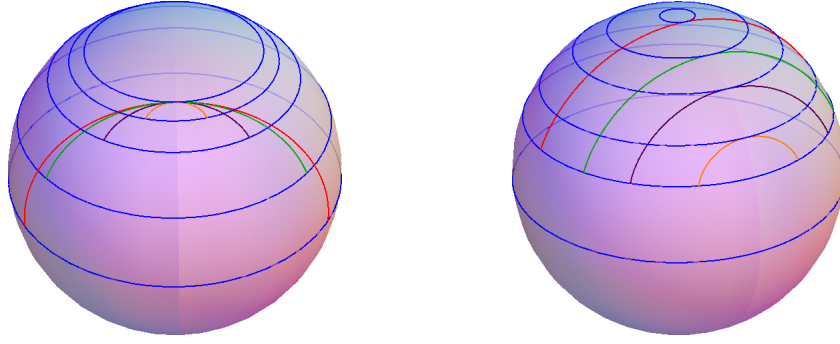
$$\eta \equiv 1 - \frac{z_{\min}^2}{z_{\max}^2} = \frac{1 - v^2\omega^2}{\omega^2(1 - v^2)} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{\eta + v^2(1 - \eta)}}. \quad (7.10)$$

Τα διατηρούμενα φορτία της ενέργειας και της στροφορμής βρίσκονται να είναι:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-r}^{+r} \dot{t} d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\omega} \cdot \frac{1 - v^2\omega^2}{\sqrt{1 - v^2}} \mathbb{K}(\eta), \quad r = \frac{1 - v^2\omega^2}{\omega\sqrt{1 - v^2}} \mathbb{K}(\eta) \quad (7.11)$$

$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2} \int_{-r}^{+r} (R^2 - z^2) \dot{\phi} d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \sqrt{1 - v^2} \left(\mathbb{K}(\eta) - \mathbb{E}(\eta) \right). \quad (7.12)$$

Όπως εξηγήσαμε, το απείρου μεγέθους (Hofman-Maldacena) γιγάντιο μαγνόνιο αναχτάται στο όριο $\omega = 1$ όπου $J = \infty$. Προκειμένου να λάβουμε την εκδοχή πεπερασμένου μεγέθους της κλειστής διπλωμένης χορδής GKP εντός του $\mathbb{R} \times S^2$ που μελετήσαμε στην §4.2, πρέπει να υπερθέσουμε δύο στοιχειώδη γιγάντια μαγνόνια με ταχύτητες $v = 0$, μέγιστη ορμή $p = \pi$ και στροφορμή $J/2$. Οι σύνδεσμοι Virasoro (7.4)–(7.5) των γιγάντιων μαγνόνιων στη στοιχειώδη περιοχή, έχουν τις ακόλουθες λύσεις:



Σχήμα 17: Διαγράμματα γιγάντιων μαγνόνιων πεπερασμένου μεγέθους με $\omega > 1$ (στοιχειώδης περιοχή), για $v = \text{σταθ.}$ (αριστερά) και $\omega = \text{σταθ.}$ (δεξιά).

$$z(\tau, \sigma) = R\sqrt{1-v^2} \cdot \text{dn} \left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\omega\eta\sqrt{1-v^2}}, \eta \right), \quad n \cdot r \leq \sigma - v\omega\tau \leq (n+1) \cdot r \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-v^2}} \left\{ \frac{1}{v\omega} \Pi \left(\left[1 - \frac{1}{v^2} \right] \eta, \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_{\max}^2}} \right] \middle| \eta \right) - \right. \\ & \left. - v\omega \mathbb{F} \left(\arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_{\max}^2}} \right], \eta \right) \right\} + \left[\frac{n+1}{2} \right] \cdot p, \quad z_{\min} \leq z \leq z_{\max}, \quad (7.14) \end{aligned}$$

όπου $[y]$ είναι η ακέραια τιμή του y . Στο σχήμα 17 έχουμε ζωγραφίσει διάφορα στιγμιότυπα των στοιχειωδών γιγάντιων μαγνόνιων, σχεδιάζοντας την (7.14) επί μιας σφαίρας για διάφορες τιμές των ταχυτήτων v και ω , και για τις τιμές $-r \leq \sigma \leq r$, $\tau = 0$. Με την Mathematica μπορούμε επίσης να αποδώσουμε κίνηση στο στοιχειώδες γιγάντιο μαγνόνιο και να επαληθεύσουμε ότι εκτελεί μια «σκληροειδή περιστροφή» επί της δισδιάστατης σφαίρας, όπως ακριβώς περιγράφουν οι Arutyunov, Frolov και Zamaklar στην εργασία τους [102]. Το στοιχειώδες γιγάντιο μαγνόνιο αντιστοιχεί σε μια ελικοειδή χορδή τύπου (i) με ένα σπίν, σύμφωνα με την ορολογία των Okamura και Suzuki [103].

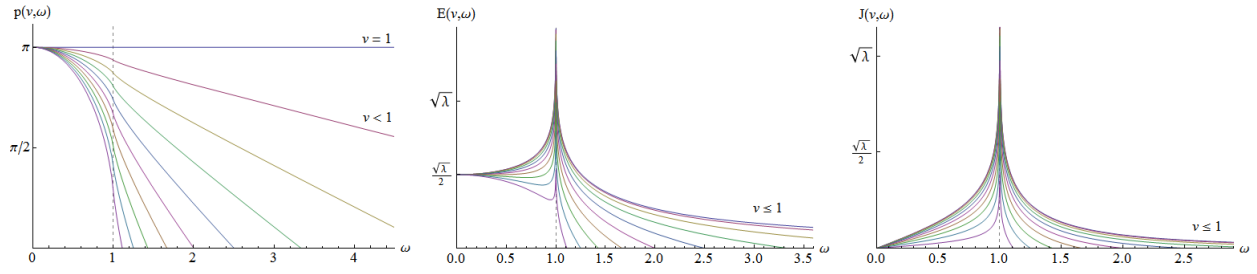
Λύνοντας την εξίσωση (7.6), λαμβάνουμε την ακόλουθη αναγωγή Pohlmeyer των γιγάντιων μαγνόνιων πεπερασμένου μεγέθους στη στοιχειώδη περιοχή:

$$\psi(\tau, \sigma) = \frac{\pi}{2} + \text{am} \left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\omega\eta\sqrt{1-v^2}}, \eta \right). \quad (7.15)$$

Αυτή η λύση περιγράφει μια ημιπεριοδική σειρά από σολιτόνια της εξίσωσης sine-Gordon που είναι γνωστή ως αλυσίδα/συρμός σολιτονίων (βλέπε επίσης και [104]). Η περίοδος της αλυσίδας/συρμού των σολιτονίων δίδεται από

$$\psi(\tau, \sigma) = \psi(\sigma + L, \tau) + n\pi, \quad L = 2\sqrt{\eta(1-v^2\omega^2)} \cdot \mathbb{K}(\eta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.16)$$

Λόγω του ότι κάθε περίοδος από τον συρμό των σολιτονίων περιέχει ακριβώς ένα σολιτόνιο, η παραμετρική περιοχή $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$ αποκαλέστηκε «στοιχειώδης» από τους Klose και McLoughlin στην εργασία [104]. Η δισδιάστατη απεικόνιση της (7.15) για $v = 0.1$ και $\omega = 1.01$, ως προς τις μεταβλητές του κοσμικού φύλλου σ και τ μπορεί να βρεθεί στο δεξιό διάγραμμα του σχήματος 22. Η ευστάθεια της λύσης της εξίσωσης sine-Gordon (7.15) έχει επίσης μελετηθεί στην εργασία [105], σύμφωνα με την οποία η (7.15) αντιστοιχεί σε ένα γραμμικά ευσταθές περιστροφικό κύμα που κινείται με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός (ήτοι $v \cdot \omega < 1$).



Σχήμα 18: Ορμή, ενέργεια, σπίν των γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους, ως προς τη γωνιακή ταχύτητα ω .

7.2 Γιγάντιο Μαγνόνιο: Διπλή Περιοχή, $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$

Σε αυτή την περίπτωση η ανοικτή χορδή είναι ένα τόξο επί της δισδιάστατης σφαίρας που ακουμπά στον ισημερινό και εκτείνεται μέχρι τον παράλληλο ζ_v :

$$\zeta_\omega^2 = -z_{\min}^2 \leq 0 \leq z^2 \leq z_{\max}^2 = \zeta_v^2 \leq R^2. \quad (7.17)$$

Στη διπλή περιοχή, η διατηρούμενη ενέργεια/γωνιακή έκταση του γιγάντιου μαγνονίου πεπερασμένου μεγέθους βρίσκεται ίση με

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi' d\sigma = \frac{2\omega}{\sqrt{1-v^2\omega^2}} \left[\frac{1}{v\omega} \Pi\left(1 - \frac{1}{v^2}; \frac{1}{\eta}\right) - v\omega \mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) \right], \quad (7.18)$$

όπου

$$\eta \equiv 1 + \frac{z_{\min}^2}{z_{\max}^2} = \frac{1 - v^2\omega^2}{\omega^2(1 - v^2)} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{\eta + v^2(1 - \eta)}}. \quad (7.19)$$

Η διατηρούμενη ενέργεια και η στροφορμή του γιγάντιου μαγνονίου στη διπλή περιοχή δίδονται από:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-r}^{+r} i d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \sqrt{1 - v^2\omega^2} \mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad r = \sqrt{1 - v^2\omega^2} \mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) \quad (7.20)$$

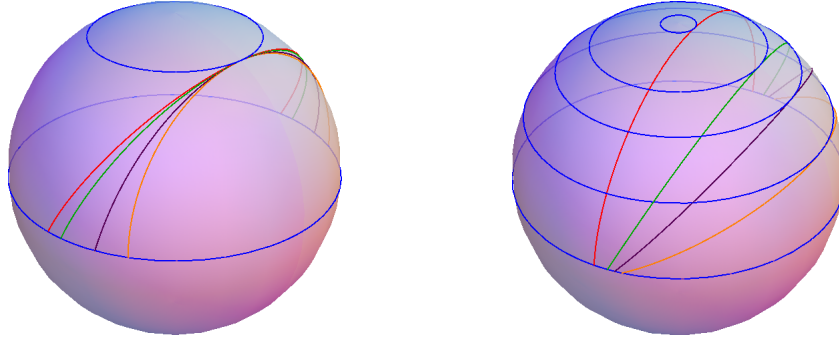
$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2} \int_{-r}^{+r} (R^2 - z^2) \dot{\phi} d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2\omega^2}}{\omega} \left[\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{\eta}\right) \right]. \quad (7.21)$$

Στη διπλή περιοχή, οι σύνδεσμοι Virasoro (7.4)–(7.5) έχουν την ακόλουθη λύση:

$$z(\tau, \sigma) = R\sqrt{1 - v^2} \cdot \operatorname{cn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{1 - v^2\omega^2}}, \frac{1}{\eta}\right), \quad 2n \cdot r \leq \sigma - v\omega\tau \leq 2(n+1) \cdot r \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \frac{(-1)^n \omega}{\sqrt{1 - v^2\omega^2}} & \left\{ \frac{1}{v\omega} \Pi\left(1 - \frac{1}{v^2}, \arccos\left[\frac{z}{z_{\max}}\right] \middle| \frac{1}{\eta}\right) - \right. \\ & \left. - v\omega \mathbb{F}\left(\arccos\left[\frac{z}{z_{\max}}\right], \frac{1}{\eta}\right) \right\} + 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \cdot p, \quad -z_{\max} \leq z \leq z_{\max}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Το γιγάντιο μαγνόνιο των HM (6.27)–(6.28) μπορεί να ανακτηθεί από τις σχέσεις (7.22)–(7.23) στο



Σχήμα 19: Διαγράμματα των γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους με $\omega < 1$ (διπλή περιοχή), για $v = \text{σταθ.}$ (αριστερά) και $\omega = \text{σταθ.}$ (δεξιά).

όριο $\omega = 1$. Η κυκλική χορδή των GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$ που μελετήσαμε στην §4.2, σχηματίζεται από δύο διπλά γιγάντια μαγνόνια με ταχύτητες $v = 0$, μέγιστη ορμή $p = \pi$ και στροφορμή $J/2$. Τα σχήματα των γιγάντιων μαγνονίων στη διπλή περιοχή για διάφορες τιμές των ταχυτήτων τους v και ω , μπορούν να βρεθούν στο σχήμα 19. Η κίνηση των γιγάντιων μαγνονίων στη διπλή περιοχή είναι ένας συνδυασμός περιστροφής και μετατόπισης: το GM είναι αρχικά εφραπτόμενο στον παράλληλο $z = z_{\max}$ του βορείου ημισφαιρίου, μετά αρχίζει σταδιακά να κινείται προς τον παράλληλο $z = -z_{\max}$ του νοτίου ημισφαιρίου, πριν αρχίσει να κινείται και πάλι προς την αρχική του θέση. Στη συνέχεια η κίνηση επαναλαμβάνεται. Τα γιγάντια μαγνόνια στη διπλή περιοχή έχουν επίσης ταξινομηθεί από τους Okamura και Suzuki [103] ως ελικοειδείς χορδές τύπου (ii) με ένα σπίν. Το σχήμα 18 περιέχει τα διαγράμματα της ορμής, της ενέργειας και του σπίν, τόσο στη στοιχειώδη περιοχή ($\omega \geq 1$) όσο και στη διπλή περιοχή ($\omega \leq 1$) των γιγάντιων μαγνονίων συναρτήσει των γωνιακών τους ταχυτήτων ω και για διάφορες τιμές των γραμμικών τους ταχυτήτων v .

Η αναγωγή Pohlmeyer (7.6) για τη χορδή (7.22)–(7.23) εντός του $\mathbb{R} \times S^2$, είναι μια περιοδική σειρά από σολιτόνια και αντισολιτόνια της εξίσωσης sine-Gordon που είναι γνωστή ως αλυσίδα/συρμός σολιτονίου-αντισολιτονίου:

$$\psi(\tau, \sigma) = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{\eta}} \operatorname{sn} \left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{1 - v^2\omega^2}}, \frac{1}{\eta} \right) \right]. \quad (7.24)$$

Η σχέση (7.24) είναι σχεδιασμένη στο δεύτερο γράφημα του σχήματος 22 για $v = 0.4$ και $\omega = 0.3$. Η ημιπερίοδος του συρμού των σολιτονίων-αντισολιτονίων είναι

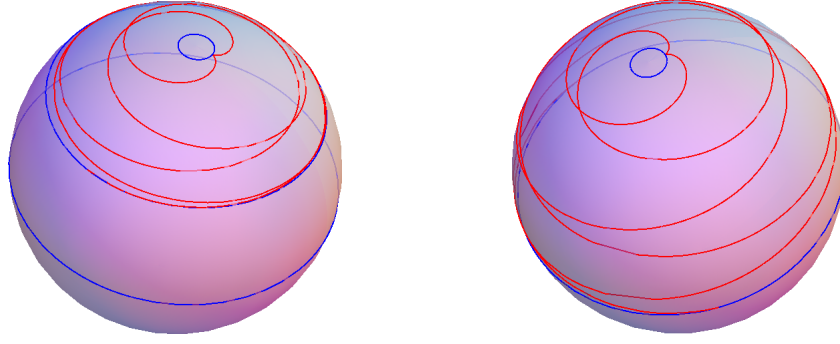
$$\psi(\tau, \sigma) = -\psi(\sigma + L, \tau) + n\pi, \quad L = 2\sqrt{1 - v^2\omega^2} \cdot \mathbb{K} \left(\frac{1}{\eta} \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.25)$$

Κάθε περίοδος L της αλυσίδας των σολιτονίων-αντισολιτονίων περιέχει ακριβώς δύο σολιτόνια (ένα σολιτόνιο και ένα αντισολιτόνιο), και γι'αυτό το λόγο η παραμετρική περιοχή $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$ αποκαλείται «διπλή» περιοχή από τους Klose και McLoughlin στην [104], σύμβαση την οποία ακολουθούμε κι εμείς εδώ. Σύμφωνα με την εργασία [105], η λύση sG (7.24) αποτελεί ένα φασματικά ασταθές κύμα λίκνισης με ταχύτητα μικρότερη από εκείνη του φωτός ($v \cdot \omega < 1$).

7.3 Απλή Ακίδα: Στοιχειώδης Περιοχή, $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$

Σε αυτή την περίπτωση η χορδή εκτείνεται μεταξύ των παραλλήλων ζ_v και ζ_ω , αλλά είναι πολλαπλά τυλιγμένη γύρω από τη δισδιάστατη σφαίρα και έχει μία ακίδα (spike) αντί να είναι τοξοειδής:

$$0 \leq \zeta_v^2 = z_{\min}^2 \leq z^2 \leq z_{\max}^2 = \zeta_\omega^2 \leq R^2. \quad (7.26)$$



Σχήμα 20: Διαγράμματα απλών ακίδων πεπερασμένου μεγέθους ($v \cdot \omega > 1$) στη στοιχειώδη (αριστερά) και τη διπλή περιοχή (δεξιά).

Η διατηρούμενη ορμή της απλής ακίδας πεπερασμένου μεγέθους στην στοιχειώδη της περιοχή βρίσκεται ότι είναι:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi' d\sigma = \frac{2v\omega}{\sqrt{1-1/\omega^2}} \left[\mathbb{K}(\eta) - \Pi(1-v^2\omega^2; \eta) \right], \quad (7.27)$$

όπου

$$\eta \equiv 1 - \frac{z_{\min}^2}{z_{\max}^2} = \frac{v^2\omega^2 - 1}{\omega^2 - 1} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1-\eta}{v^2-\eta}}. \quad (7.28)$$

Τα διατηρούμενα φορτία της ενέργειας και της στροφορμής των απλών ακίδων στη στοιχειώδη τους περιοχή είναι:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-r}^{+r} \dot{t} d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \frac{v^2\omega^2 - 1}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \mathbb{K}(\eta), \quad r = \frac{v^2\omega^2 - 1}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \mathbb{K}(\eta) \quad (7.29)$$

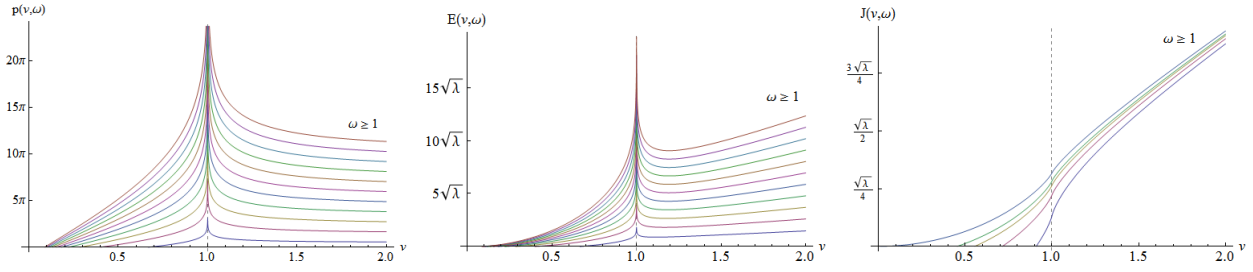
$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2} \int_{-r}^{+r} (R^2 - z^2) \dot{\phi} d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} \left[\mathbb{E}(\eta) - \frac{1-v^2}{1-1/\omega^2} \mathbb{K}(\eta) \right]. \quad (7.30)$$

Οι εξισώσεις των συνδέσμων (7.4)–(7.5) δέχονται τις ακόλουθες λύσεις:

$$z(\tau, \sigma) = R\sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} \cdot \operatorname{dn} \left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\eta\sqrt{\omega^2 - 1}}, \eta \right) \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & \frac{(-1)^n v\omega}{\sqrt{1-1/\omega^2}} \left\{ \mathbb{F} \left(\arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_{\max}^2}} \right], \eta \right) - \right. \\ & \left. - \Pi \left(1 - v^2\omega^2, \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_{\max}^2}} \right] \middle| \eta \right) \right\} + \left[\frac{n+1}{2} \right] \cdot p, \quad z_{\min} \leq z \leq z_{\max}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Αν σχεδιάσουμε το γράφημα της εξίσωσης (7.32) πάνω σε μια σφαίρα με τη **Mathematica**, λαμβάνουμε



Σχήμα 21: Ορμή, ενέργεια, σπίν των απλών ακίδων πεπερασμένου μεγέθους συναρτήσει της γραμμικής τους ταχύτητας v .

τα σχέδια των απλών ακίδων στη στοιχειώδη τους περιοχή—π.χ. εκείνο στα αριστερά του σχήματος 20. Η κίνηση των απλών ακίδων στη στοιχειώδη περιοχή θυμίζει πολύ την κίνηση των γιγάντιων μαγνονίων στη στοιχειώδη περιοχή, την οποία περιγράψαμε στην §7.1. Όπως ήδη αναφέραμε, για $v = 1$ η παρούσα λύση πεπερασμένης ορμής προσεγγίζει την απλή ακίδα απείρου μεγέθους που μελετήσαμε στην §6.2.

Η αναγωγή Pohlmeier της λύσης (7.31)–(7.32) δίδεται από την ακόλουθη κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(\tau, \sigma) = \text{am} \left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\eta\sqrt{\omega^2 - 1}}, \eta \right). \quad (7.33)$$

Για μία ακόμη φορά, η (7.33) αντιπροσωπεύει μία αλυσίδα/συρμό από σολιτόνια, σε αναλογία με την αλυσίδα/συρμό από σολιτόνια (7.15) που αντιστοιχεί στην αναγωγή Pohlmeier των γιγάντιων μαγνονίων. Η αλυσίδα περιέχει ακριβώς ένα σολιτόνιο ανά περίοδο, και γι'αυτό αποκαλούμε αυτή την παραμετρική περιοχή «στοιχειώδη». Η (7.33) έχει σχεδιαστεί για $v = 0.9$ και $\omega = 2$ στο σχήμα 22. Η περίοδος της αλυσίδας των σολιτονίων (7.33) είναι

$$\psi(\tau, \sigma) = \psi(\sigma + L, \tau) + n\pi, \quad L = 2\sqrt{\eta(v^2\omega^2 - 1)} \cdot \mathbb{K}(\eta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.34)$$

Σύμφωνα με την εργασία [105], η αναγωγή (7.33) αντιστοιχεί σε ένα φασματικά ασταθές περιστροφικό κύμα ταχύτητας μεγαλύτερης του φωτός ($v \cdot \omega > 1$).

7.4 Απλή Ακίδα: Διπλή Περιοχή, $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$

Για $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$, η λύση (7.2) περιγράφει μία ακιδωτή ανοιχτή χορδή πολλαπλώς τυλιγμένη γύρω από τη δισδιάστατη σφαίρα, εκτεινόμενη μεταξύ του ισημερινού και του παραλλήλου ζ_ω :

$$\zeta_v^2 = -z_{\min}^2 \leq 0 \leq z^2 \leq z_{\max}^2 = \zeta_\omega^2 \leq R^2. \quad (7.35)$$

Η διατηρούμενη ορμή της απλής ακίδας στη διπλή της περιοχή είναι:

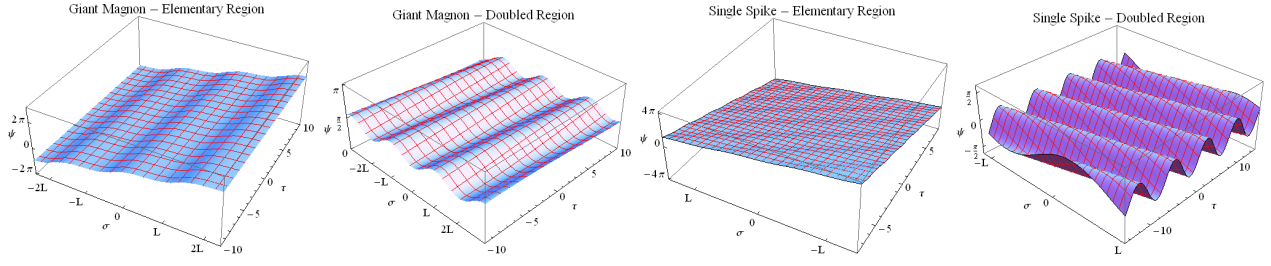
$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi' d\sigma = \frac{2v\omega^2}{\sqrt{v^2\omega^2 - 1}} \left[\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) - \Pi\left(1 - \omega^2; \frac{1}{\eta}\right) \right], \quad (7.36)$$

όπου

$$\eta \equiv 1 + \frac{z_{\min}^2}{z_{\max}^2} = \frac{v^2\omega^2 - 1}{\omega^2 - 1} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1 - \eta}{v^2 - \eta}}. \quad (7.37)$$

Η διατηρούμενη ενέργεια και η στροφορμή στη διπλή περιοχή των απλών ακίδων είναι:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-r}^{+r} i d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \sqrt{v^2\omega^2 - 1} \mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad r = \sqrt{v^2\omega^2 - 1} \mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) \quad (7.38)$$



Σχήμα 22: Αναγωγές Pohlmeier των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων. Η αναγωγή Pohlmeier των στοιχειωδών γιγάντιων μαγνονίων (7.15) (πρώτο γράφημα) έχει σχεδιαστεί για $v = 0.1$ και $\omega = 1.01$. Η κυματοσυνάρτηση (7.24) των διπλών γιγάντιων μαγνονίων (δεύτερο γράφημα) έχει σχεδιαστεί για $v = 0.4$ και $\omega = 0.3$. Η αναγωγή Pohlmeier για τις στοιχειώδεις απλές ακίδες (7.33) (τρίτο γράφημα) έχει $v = 0.9$ και $\omega = 2$. Η κυματοσυνάρτηση sG των «διπλών» απλών ακίδων (7.42) (τέταρτο γράφημα) έχει $v = 1.4$ και $\omega = 3$.

$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2} \int_{-r}^{+r} (R^2 - z^2) \phi d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{v^2\omega^2 - 1}}{\omega} \mathbb{E}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad (7.39)$$

Σε αυτή την περίπτωση, οι σύνδεσμοι Virasoro (7.4)–(7.5) λύνονται από τις σχέσεις:

$$z(\tau, \sigma) = R\sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} \cdot \text{cn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{v^2\omega^2 - 1}}, \frac{1}{\eta}\right) \quad (7.40)$$

$$\varphi(z) = \frac{(-1)^n v\omega^2}{\sqrt{v^2\omega^2 - 1}} \left\{ \mathbb{F}\left(\arccos\left[\frac{z}{z_{\max}}\right], \frac{1}{\eta}\right) - \Pi\left(1 - \omega^2, \arccos\left[\frac{z}{z_{\max}}\right] \middle| \frac{1}{\eta}\right) \right\} + 2\left[\frac{n+1}{2}\right] \cdot p, \quad -z_{\max} \leq z \leq z_{\max}. \quad (7.41)$$

Βλέπε το δεξιό γράφημα του σχήματος 20 για ένα σχέδιο της απλής ακίδας στη διπλή της περιοχή. Η χορδή αρχίζει να ξετυλίγεται από το βόρειο πόλο και να τυλίγεται σταδιακά γύρω από το νότιο πόλο. Στη συνέχεια η κίνηση αντιστρέφεται και επαναλαμβάνεται. Για $v = 1$ η λύση πεπερασμένης ορμής (7.40)–(7.41) πλησιάζει την απλή ακίδα άπειρης ορμής (6.40)–(6.41) που μελετήθηκε στην §6.2. Τα διαγράμματα της ορμής, ενέργειας και σπίν τόσο στη στοιχειώδη ($v \leq 1$) όσο και στη διπλή περιοχή ($v \geq 1$) των απλών ακίδων ως συναρτήσεις της γραμμικής τους ταχύτητας v και για διάφορες τιμές της γωνιακής τους ταχύτητας ω , μπορούν να βρεθούν στο σχήμα 21.

Η αναγωγή Pohlmeier είναι ξανά μία αλυσίδα/συρμός από σολιτόνια-αντισολιτόνια, παρόμοια με την αλυσίδα από σολιτόνια-αντισολιτόνια των γιγάντιων μαγνονίων στην διπλή τους περιοχή (7.24):

$$\psi(\tau, \sigma) = \arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}} \text{sn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{v^2\omega^2 - 1}}, \frac{1}{\eta}\right)\right]. \quad (7.42)$$

Κάθε περίοδος της αλυσίδας (7.42) περιέχει ακριβώς δύο σολιτόνια, και γι'αυτό η παραμετρική περιοχή $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$ αποκαλείται «διπλή», σε συμφωνία με ό,τι ειπώθηκε προηγουμένως. Η ημιπεριοδική λύση της εξίσωσης sG (7.42) έχει σχεδιαστεί για $v = 1.4$ και $\omega = 3$, στο σχήμα 22. Η ημιπερίοδος της αλυσίδας σολιτονίων-αντισολιτονίων είναι:

$$\psi(\tau, \sigma) = -\psi(\sigma + L, \tau) + n\pi, \quad L = 2\sqrt{v^2\omega^2 - 1} \cdot \mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.43)$$

Η (7.42) αντιστοιχεί σε ένα (φασματικά) ασταθές κύμα λίκνισης με ταχύτητα μεγαλύτερη εκείνη του φωτός ($v \cdot \omega > 1$) [105].

7.5 Συμμετρίες

Πριν κλείσουμε αυτή την ενότητα και περάσουμε στον υπολογισμό των σχέσεων διασποράς των γιγάντιων μαγνόνιων και των απλών ακίδων, ας πούμε και λίγα λόγια για τις διάφορες συμμετρίες. Η συμμετρία $\tau \leftrightarrow \sigma$ ή «δισδιάστατη δυαδικότητα» (6.45) που χρησιμοποιήθηκε για το μετασχηματισμό μεταξύ γιγάντιων μαγνόνιων και απλών ακίδων απείρου μεγέθους, εφαρμόζεται επίσης και σε πεπερασμένο μέγεθος:

$$\tau \leftrightarrow \sigma, v \leftrightarrow \frac{1}{\omega}, \psi \leftrightarrow \left[\frac{\pi}{2} - \psi \right] \Leftrightarrow \text{Γιγάντια Μαγνόνια} \leftrightarrow \text{Απλές Ακίδες}. \quad (7.44)$$

Η (7.44) απεικονίζει τα γιγάντια μαγνόνια της στοιχειώδους περιοχής στις απλές ακίδες της στοιχειώδους περιοχής και τα γιγάντια μαγνόνια της διπλής περιοχής στις απλές ακίδες της διπλής περιοχής. Η δισδιάστατη δυαδικότητα (7.44) δρα στα ansätze (εξαιρουμένης της χρονικής συντεταγμένης $t = \tau$, που δεν επηρεάζεται), τις παραμετρικές περιοχές των ταχυτήτων v και ω , τις λύσεις (z και ϕ) και τις αναγωγές Pohlmeier ψ των γιγάντιων μαγνόνιων και των απλών ακίδων. Τα διατηρούμενα φορτία p, J, E δεν μετασχηματίζονται σωστά υπό τον μετασχηματισμό $\tau \leftrightarrow \sigma$.

Υπάρχει και ένας δεύτερος μετασχηματισμός μεταξύ των διαφόρων παραμετρικών περιοχών των γιγάντιων μαγνόνιων και των απλών ακίδων (που συνοψίζονται στον πίνακα 1) και είναι άξιος λόγου. Η αντικατάσταση $\eta \leftrightarrow -\eta$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να συσχετίσουμε τις στοιχειώδεις περιοχές των γιγάντιων μαγνόνιων και των απλών ακίδων, μετασχηματίζοντας τη λύση και την αναγωγή Pohlmeier z, φ, ψ των στοιχειωδών GMs και SSs και αντιστρέφοντας τα πρόσημα των αντίστοιχων διατηρούμενων φορτίων τους p, J, E .

Οι στοιχειώδεις περιοχές των γιγάντιων μαγνόνιων και των απλών ακίδων μπορούν επίσης να συσχετιστούν με τις αντίστοιχες διπλές περιοχές με το μετασχηματισμό $\eta \leftrightarrow 1/\eta$. Ξανά, ενώ οι λύσεις z, φ, ψ απεικονίζονται από τη στοιχειώδη στη διπλή περιοχή των γιγάντιων μαγνόνιων, τα αντίστοιχα διατηρούμενα φορτία p, J, E δε μετασχηματίζονται σωστά κάτω από αυτόν το μετασχηματισμό. Από την άλλη μεριά, δεν είναι γνωστό πως να συσχετίσουμε τις διπλές περιοχές των γιγάντιων μαγνόνιων και των απλών ακίδων με ανάλογο μετασχηματισμό. Κανείς εκ των μετασχηματισμών που συζητήσαμε παραπάνω, δε φαίνεται να επηρεάζει τις σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνόνιων και των απλών ακίδων τις οποίες θα συζητήσουμε στα επόμενα.

8 Σχέσεις Διασποράς Μαγνονίων και Απλών Ακίδων

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις κλασικές σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων πεπερασμένου μεγέθους, τόσο στη στοιχειώδη όσο και τη διπλή περιοχή τους. Τα γιγάντια μαγνόνια είναι δυϊκά ως προς τη αντιστοιχία AdS/CFT, προς τους τελεστές ενός μαγνονίου που εμφανίζονται στον τομέα $\mathfrak{su}(2)$ της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Είναι ανοικτές μποζονικές χορδές ενός σπίν που περιστρέφονται εντός του $\mathbb{R} \times S^2 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$, και η κλασική ενέργειά τους είναι ίση με τις διαστάσεις κλίμακας των τελεστών ενός μαγνονίου της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας σε ισχυρή σύζευξη. Ο S-πίνακας των γιγάντιων μαγνονίων (όπως υπολογίζεται από την αναγωγή Pohlmeyer) συμφωνεί με τον S-πίνακα των μαγνονίων σε ισχυρή σύζευξη (που δίνεται από τη φάση των AFS), και μας επιτρέπει να τα θεωρούμε ως δυϊκά, στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT.

Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, τα μαγνόνια και τα γιγάντια μαγνόνια δεν μπορεί να αποτελούν μέρος του φάσματος της AdS/CFT. Τα πρώτα έχουν μη μηδενική ορμή παραβιάζοντας τη συνθήκη κυκλικότητας του ίχνους και τα δεύτερα είναι ανοικτές χορδές που δεν μπορούν να ανήκουν σε μια θεωρία χορδών τύπου IIB. Ωστόσο τα (γιγάντια) μαγνόνια είναι ένα απαραίτητο εργαλείο για τη μελέτη του φάσματος της AdS/CFT, διότι αποτελούν τις θεμελιώδεις δομικές μονάδες, εκ των οποίων όλες οι καταστάσεις της θεωρίας μπορούν να κατασκευαστούν. Αυτό είναι σε πλήρη αναλογία με την εξίσωση sine-Gordon για την οποία είναι γνωστό ότι όλες οι λύσεις της μπορούν να κατασκευαστούν από ένα μικρό μόνο αριθμό θεμελιωδών διεγέρσεων. Μάλιστα, τα σολιτόνια της εξίσωσης sine-Gordon είναι δυϊκά ως προς την αναγωγή Pohlmeyer, με τα γιγάντια μαγνόνια.

Ο λόγος που είμαστε αναγκασμένοι να μελετήσουμε τη σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων, είναι ότι η αντίστοιχη σχέση από τη μεριά της θεωρίας βαθμίδας είναι έγκυρη μόνο ασυμπτωτικά. Πράγματι, το ασυμπτωτικό Bethe ansatz (ABA) παύει να ισχύει όταν η τάξη βρόχου γίνεται ίση με το μήκος του τελεστή που μελετάμε. Για συστήματα απείρου μεγέθους το ABA παραμένει σε ισχύ για άπειρους βρόχους, δηλαδή σε όλη τη διαδρομή μέχρι την ισχυρή σύζευξη όπου αναλαμβάνει δράση η περιγραφή της θεωρίας χορδών. Όπως θα δούμε παρακάτω, όλα τα δεδομένα που έχουμε από την πλευρά της θεωρίας των χορδών συμφωνούν με το ABA σε άπειρο μέγεθος. Πέρα από την κρίσιμη τάξη βρόχου σε πεπερασμένο μέγεθος, πρέπει να υπολογίσουμε διορθώσεις wrapping για τις ανώμαλες διαστάσεις του μαγνονίου από την ασθενώς συζευγμένη πλευρά της θεωρίας βαθμίδας, και κλασικές ή κβαντικές διορθώσεις (ήτοι διορθώσεις α' ή διορθώσεις καμπυλότητας) από την πλευρά της θεωρίας χορδών, όπου η σταθερά σύζευξης της θεωρίας βαθμίδας είναι ισχυρή.

Η διόρθωση του φάσματος και από τις δύο πλευρές της αντιστοιχίας AdS/CFT μας μετακινεί προς την αντίθετη πλευρά, δηλαδή καθώς συμπεριλαμβάνουμε διορθώσεις θεωρίας βαθμίδας στις διαστάσεις κλίμακας ενός τελεστή πλησιάζουμε το αποτέλεσμα της θεωρίας χορδών και προσθέτοντας διορθώσεις α' (ή διορθώσεις βρόχου) στις ενέργειες των χορδών πλησιάζουμε το αποτέλεσμα της θεωρίας βαθμίδας. Με άλλα λόγια η δένδροειδής προσέγγιση της θεωρίας βαθμίδας είναι ισοδύναμη με άπειρους βρόχους από τη μεριά της θεωρίας χορδών, και η δένδροειδής προσέγγιση της θεωρίας χορδών αντιστοιχεί σε άπειρους βρόχους της θεωρίας βαθμίδας. Οι δύο περιγραφές οφείλουν να συναντιούνται κάπου στο μέσο του φάσματος της αντιστοιχίας AdS/CFT.

Με βάση τα όσα είπαμε παραπάνω, για τους τελεστές που έχουν μεγάλο αλλά όχι άπειρο μέγεθος $J \rightarrow \infty$, το ABA θα αρχίσει να λαμβάνει διορθώσεις wrapping μετά από τη μεγάλη αλλά πεπερασμένη κρίσιμη τάξη βρόχου $L \sim J \rightarrow \infty$. Τότε όμως η σύζευξη θα είναι σχεδόν ισχυρή και η περιγραφή της θεωρίας χορδών θα βρίσκεται λίγο πάνω από τη δένδροειδή προσέγγιση ή το κλασσικό επίπεδο. Αυτή ακριβώς είναι η περιοχή που μας ενδιαφέρει σε πεπερασμένο μέγεθος. Θα πρέπει να είναι ήδη σαφές ότι, με δεδομένο ότι η θεωρία των χορδών είναι λίγο πάνω από το δένδροειδές επίπεδο και η θεωρία βαθμίδας για τα καλά πάνω από την κρίσιμη τάξη βρόχου, οι διορθώσεις wrapping θα είναι γενικά παρούσες στο φάσμα της θεωρίας χορδών, ακόμα και στο κλασσικό επίπεδο. Αυτές οι κλασικές και κβαντικές διορθώσεις του ABA (6.3) είναι γνωστές ως διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους και, όπως θα δούμε, έχουν τη μορφή

εκθετικά φθινόντων όρων.

Στην παρούσα διατριβή, οι απλές ακίδες θεωρούνται ως μια αναλυτική συνέχιση των γιγάντιων μαγνόνων. Οι απλές ακίδες είναι χορδές ενός σπίν εντός του $\mathbb{R} \times S^2$, που έχουν τυλιχθεί πολλές φορές γύρω από τη δισδιάστατη σφαίρα και έχουν μια ακίδα στο κέντρο τους. Όπως είδαμε στην ενότητα (7.5), οι απλές ακίδες μπορούν απλά να ληφθούν από τα γιγάντια μαγνόνια με ένα μετασχηματισμό $\sigma \leftrightarrow \tau$ και την απεικόνιση $\eta \leftrightarrow -\eta$. Οι σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνόνων και των απλών ακίδων μπορούν επίσης να συσχετισθούν με την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής. Σε γενικές γραμμές, θα πρέπει να αναμνεται ότι αυτά που είπαμε παραπάνω για τα γιγάντια μαγνόνια, να είναι επίσης εφαρμόσιμα και για τις απλές ακίδες.

Πριν ξεκινήσουμε την έρευνά μας για τις σχέσεις διασποράς του γιγάντιου μαγνόνιου/απλής ακίδας, ας επαναλάβουμε εν συντομία τα επιχειρήματά μας σχετικά με το γιατί πιστεύουμε ότι ο αναλυτικός υπολογισμός του επίπεδου φάσματος της AdS/CFT έχει ενδιαφέρον. Πρώτα απ'όλα, μας φαίνεται ότι το πεδίο εφαρμογής της αντιστοιχίας AdS/CFT περιορίζεται σημαντικά, αν δεν ξέρουμε πώς να υπολογίσουμε όλο το φάσμα της. Δεύτερον, στις περισσότερες περιπτώσεις όπου μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά το φάσμα της AdS/CFT, επαληθεύουμε επίσης ταυτόχρονα πλήρως και αδιαμφισβήτητα, το ταίριασμά του και από τις δύο πλευρές της αντιστοιχίας. Ταίριασμα των φασμάτων σημαίνει ότι μπορούμε επίσης να ολοκληρώσουμε το λεξικό της AdS/CFT απεικονίζοντας κάθε τελεστή της επίπεδης $\mathcal{N} = 4$ SYM, στη δυϊκή του κατάσταση ελεύθερης χορδής στον $AdS_5 \times S^5$. Τρίτον, με το πλήρες αναλυτικό φάσμα της AdS/CFT στη διάθεσή μας, αποκτά πολύ ενδιαφέρον η αναζήτηση κλειστών φορμουλών, τόσο σε ασθενή όσο και σε ισχυρή σύζευξη.

Όπως και στην περίπτωση των χορδών GKP, η μέθοδος για τον υπολογισμό του φάσματος της AdS/CFT στην περίπτωση των γιγάντιων μαγνόνων και των απλών ακίδων, δεν εξαρτάται από την ολοκληρωσιμότητα. Εκτός αυτού, έχουμε επικεντρωθεί σε μια περιοχή όπου οι μέθοδοι που βασίζονται στην ολοκληρωσιμότητα (π.χ. το θερμοδυναμικό Bethe ansatz (TBA), το Y-σύστημα ή η χβαντική φασματική καμπύλη) δεν έχουν ακόμη καταφέρει να παράγουν ιδιαίτερα θεαματικά αποτελέσματα. Όλοι οι υπολογισμοί της εργασίας [2] που πρόκειται αναπτύξουμε παρακάτω δεν έχουν ληφθεί στο παρελθόν με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο, ούτε δύνανται να προκύψουν με τη βοήθεια ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Το να αναπτύξουμε μια φασματική μέθοδο που δε λαμβάνει υπόψη την ιδιότητα της ολοκληρωσιμότητας έχει το πιθανό μειονέκτημα ότι είναι ίσως λίγο πιο περίπλοκη από ό,τι χρειάζεται, δεδομένου ότι αγνοεί μια πολύ σημαντική απλουστευτική υπόθεση (δηλαδή ότι το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο), αλλά έχει επίσης και το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοσθεί κάθε φορά που η ολοκληρωσιμότητα γίνεται πολύ δυσχερής για να είναι χρήσιμη, ή ακόμη ακόμη απουσιάζει (π.χ. στη μη επίπεδη AdS/CFT, την QCD, ή τις p-βράνες). Ως εκ τούτου, μας προσφέρεται η ευκαιρία να υπολογίσουμε τα φάσματα σε κάποια γενικότερα πλαίσια. Θα δούμε επίσης ότι μπορούμε να κάνουμε μεγάλη πρόοδο ως προς την εξεύρεση κλειστών φορμουλών στο φάσμα της AdS/CFT.

Ας θεωρήσουμε για μία ακόμη φορά τις καταστάσεις της $\mathcal{N} = 4$ SYM με $M = 1$ μαγνόνια:

$$\mathcal{O}_M = \sum_{m=1}^{J+1} e^{imp} |Z^{m-1} \mathcal{X} Z^{J-m+1}\rangle, \quad p \in \mathbb{R}, \quad \lambda, J \rightarrow \infty. \quad (8.1)$$

Η γενική μορφή της σχέσης διασποράς για καταστάσεις μαγνόνων πεπερασμένου μεγέθους (8.1) σε ισχυρή σύζευξη, ή ισοδύναμα για γιγάντια μαγνόνια πεπερασμένου μεγέθους είναι:

$$\epsilon(p) = \epsilon_\infty + \underbrace{\sqrt{\lambda} \delta\epsilon_{cl} + \delta\epsilon_{1-loop} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \delta\epsilon_{2-loop} + \dots}_{\text{διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους}}, \quad J, \lambda \rightarrow \infty, \quad (8.2)$$

όπου $\epsilon(p) \equiv E - J$ και ϵ_∞ είναι η σχέση των BDS (6.3) για 1 μαγνόνιο σε όλες τις τάξεις βρόχων:

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \epsilon(p) = \epsilon_\infty \equiv \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\pi^2} \sin^2 \frac{p}{2}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \sin \frac{p}{2} + 0 + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \csc \frac{p}{2} - \frac{\pi^3}{8\lambda^{3/2}} \csc^3 \frac{p}{2} + \dots, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (8.3)$$

Σε πεπερασμένο μέγεθος, η ϵ_∞ δέχεται κλασσικές και κβαντικές διορθώσεις $\delta\epsilon_{\text{cl}}$ και $\delta\epsilon_{n\text{-loop}}$. Γενικεύοντας το ansatz (6.23) των Hofman-Maldacena σε πεπερασμένο μέγεθος, οι Arutyunov, Frolov και Zamaklar (AFZ) [102] εξήγαγαν τους λίγους πρώτους όρους του κλασσικού αναπτύγματος σε πεπερασμένο μέγεθος $\delta\epsilon_{\text{cl}}$:

$$\delta\epsilon_{\text{cl}} = -\frac{4}{\pi} \sin \frac{p}{2} \left\{ \sin^2 \frac{p}{2} e^{-\mathcal{L}} + \left[8\mathcal{J}^2 \cos^2 \frac{p}{2} + 4 \sin \frac{p}{2} (3 \cos p + 2) \mathcal{J} + \sin^2 \frac{p}{2} (6 \cos p + 7) \right] e^{-2\mathcal{L}} + \dots \right\}, \quad \mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{L} \equiv 2\mathcal{J} \csc \frac{p}{2} + 2. \quad (8.4)$$

Έχει επίσης αποδειχθεί από τους Astolfi, Forini, Grignani και Semenoff στην [106] ότι το φάσμα των γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους στην ομοιόμορφη βαθμίδα του κώνου φωτός (uniform light-cone gauge) είναι εντελώς ανεξάρτητο από τον παράγοντα βαθμίδας. Πολλοί περισσότεροι όροι της (8.4) μπορούν να υπολογιστούν με τη **Mathematica**—βλέπε τα παραρτήματα **Γ'.3–Δ'.2**. Η γενική μορφή των κλασσικών διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους $\delta\epsilon_{\text{cl}}$ είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_{\text{cl}} &= \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n-2} \mathcal{A}_{nm}(p) \mathcal{J}^{2n-m-2} e^{-2n(\mathcal{J} \csc \frac{p}{2} + 1)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{J}^{-m-2} \left\{ \sum_{n=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}^{\infty} \mathcal{A}_{nm}(p) \mathcal{J}^{2n} e^{-2n(\mathcal{J} \csc \frac{p}{2} + 1)} \right\}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

όπου όλοι οι συντελεστές των αρνητικών δυνάμεων του $\mathcal{J}$ είναι μηδέν (π.χ. $\mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{12} = \dots = 0$, κλπ.). Η φόρμουλα των AFZ (8.4) περιέχει τους όρους $\mathcal{A}_{10}, \mathcal{A}_{20}, \mathcal{A}_{21}, \mathcal{A}_{22}$ της (8.5). Οι Klose και McLoughlin [104] βρήκαν τους όρους $\mathcal{A}_{10}$ – $\mathcal{A}_{60}$:

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_{\text{cl}} &= -\frac{4}{\pi} \sin^3 \frac{p}{2} e^{-\mathcal{L}} \left[1 + 2\mathcal{L}^2 \cos^2 \frac{p}{2} e^{-\mathcal{L}} + 8\mathcal{L}^4 \cos^4 \frac{p}{2} e^{-2\mathcal{L}} + \frac{128}{3} \mathcal{L}^6 \cos^6 \frac{p}{2} e^{-3\mathcal{L}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{800}{3} \mathcal{L}^8 \cos^8 \frac{p}{2} e^{-4\mathcal{L}} + \frac{9216}{5} \mathcal{L}^{10} \cos^{10} \frac{p}{2} e^{-5\mathcal{L}} + \dots \right], \end{aligned} \quad (8.6)$$

Ο κυρίαρχος όρος $\mathcal{A}_{10}$ των (8.4)–(8.5) έχει βρεθεί επίσης με τη μέθοδο της αλγεβρικής καμπύλης στην [107] και από τη φόρμουλα των Lüscher-Klassen-Melzer (LKM) [108] σε ισχυρή σύζευξη, στις εργασίες [109, 110, 111].

Στην [2] υπολογίστηκαν όλοι οι συντελεστές $\mathcal{A}_{n0}, \mathcal{A}_{n1}, \mathcal{A}_{n2}$ της (8.5). Στις §8.1–§8.4 πρόκειται να επανέλθουμε σε αυτή την εργασία. Αλλά πρώτα ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματα. Σε πρώτη τάξη, το κλασσικό κομμάτι $\delta\epsilon_{\text{cl}}$ της σχέσης διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και οι ανώμαλες διαστάσεις κλίμακας των τελεστών (8.1) σε ισχυρή σύζευξη, τόσο στη στοιχειώδη όσο και τη διπλή περιοχή, μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
\delta\epsilon_{\text{cl}} = & \frac{1}{4\pi\mathcal{J}^2} \tan^2 \frac{p}{2} \sin^3 \frac{p}{2} \left[W + \frac{W^2}{2} \right] - \frac{1}{16\pi\mathcal{J}^3} \tan^4 \frac{p}{2} \sin^2 \frac{p}{2} \left[(3 \cos p + 2) W^2 + \frac{1}{6} (5 \cos p + 11) W^3 \right] \\
& - \frac{1}{512\pi\mathcal{J}^4} \tan^6 \frac{p}{2} \sin \frac{p}{2} \left\{ (7 \cos p - 3)^2 \frac{W^2}{1+W} - \frac{1}{2} (25 \cos 2p - 188 \cos p - 13) W^2 - \frac{1}{2} (47 \cos 2p \right. \\
& \left. + 196 \cos p - 19) W^3 - \frac{1}{3} (13 \cos 2p + 90 \cos p + 137) W^4 \right\} + \dots, \tag{8.7}
\end{aligned}$$

όπου το όρισμα της συνάρτησης W του Lambert είναι $W (\pm 16\mathcal{J}^2 \cot^2(p/2) e^{-\mathcal{L}})$, στον κύριο κλάδο και επίσης $\mathcal{L} \equiv 2\mathcal{J} \csc p/2 + 2$. Το πρόσημο μείον εντός του ορίσματος της συνάρτησης W αναφέρεται στη στοιχειώδη περιοχή των γιγάντιων μαγνονίων ($0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$) και το πρόσημο συν αναφέρεται στη διπλή τους περιοχή ($0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$). Οι κυρίαρχοι, επόμενοι και μεθεπόμενοι συντελεστές της (8.5) ($\mathcal{A}_{n0}$, $\mathcal{A}_{n1}$, $\mathcal{A}_{n2}$) μπορούν να βρεθούν αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση W του Lambert στη σχέση (8.7) γύρω από το $\mathcal{J} \rightarrow \infty$, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor (Γ'.3). Το αποτέλεσμα είναι:

- κυρίαρχοι όροι: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{n0}(p) \mathcal{J}^{2n-2} e^{-n\mathcal{L}} = \frac{1}{4\mathcal{J}^2} \tan^2 \frac{p}{2} \sin^3 \frac{p}{2} \left[W + \frac{W^2}{2} \right],$
- επόμενοι όροι: $\sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_{n1}(p) \mathcal{J}^{2n-3} e^{-n\mathcal{L}} = -\frac{1}{16\mathcal{J}^3} \tan^4 \frac{p}{2} \sin^2 \frac{p}{2} \left[(3 \cos p + 2) W^2 + \frac{1}{6} (5 \cos p + 11) W^3 \right],$
- μεθεπόμενοι όροι: $\sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_{n2}(p) \mathcal{J}^{2n-4} e^{-n\mathcal{L}} = -\frac{1}{512\mathcal{J}^4} \tan^6 \frac{p}{2} \sin \frac{p}{2} \left\{ (7 \cos p - 3)^2 \frac{W^2}{1+W} - \frac{1}{2} (25 \cos 2p - 188 \cos p - 13) W^2 - \frac{1}{2} (47 \cos 2p + 196 \cos p - 19) W^3 - \frac{1}{3} (13 \cos 2p + 90 \cos p + 137) W^4 \right\},$

Οι συντελεστές $\mathcal{A}_{n0}$, $\mathcal{A}_{n1}$, $\mathcal{A}_{n2}$ συμφωνούν πλήρως με τα αποτελέσματα των AFZ (8.4), τη φόρμουλα των Klose-McLoughlin (8.6), όπως επίσης και τις σχέσεις (Δ'.12)–(Δ'.13) που υπολογίστηκαν με τη Mathematica.

Με βάση τα όσα είπαμε ως τώρα είναι εμφανές ότι η φόρμουλα ABA των BDS (8.3) δύναται να επιβεβαιωθεί σε ισχυρή σύζευξη από την κλασική (δενδροειδή) φόρμουλα των Hofman και Maldacena (6.6). Διαταράσσοντας το IIB μοντέλο χορδών στον $\mathbb{R} \times S^2$, έχειδειχθεί στην [112] ότι η διόρθωση ενός βρόχου για άπειρο όγκο συστήματος μηδενίζεται:

$$\delta\epsilon_{1\text{-loop}} = 0, \quad J = 0, \quad \lambda \rightarrow \infty, \tag{8.8}$$

η οποία επίσης συμφωνεί με τη φόρμουλα των BDS (8.3) στη τάξη του ενός βρόχου. Σε πεπερασμένο όγκο ο υπολογισμός των διορθώσεων α' επιτυγχάνεται είτε με τη μέθοδο της αλγεβρικής καμπύλης [111] είτε υπολογίζοντας τους όρους F και μ του Lüscher [110]. Η γενική μορφή της κβαντικής διόρθωσης σε ένα βρόχο και πεπερασμένο όγκο είναι:

$$\delta\epsilon_{1\text{-loop}} = a_{1,0} e^{-2D} + \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} a_{n,m} e^{-2nD-m\mathcal{L}}, \quad D \equiv \mathcal{J} + \sin \frac{p}{2}. \tag{8.9}$$

Ο υπολογισμός των όρων $a_{n,0}$ και $a_{1,m}$ της (8.9) προχωρά σύμφωνα με τις οδηγίες που μπορεί να βρει

κανείς στις εργασίες [111, 113]. Ο κυρίαρχος όρος $a_{1,0}$ δίνεται από:

$$a_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{8 \sin^2 p/4}{(\sin p/2 - 1)} \left[1 - \frac{7 + 4 \sin p - 4 \cos p + \sin p/2}{16 (\sin p/2 - 1)} \cdot \frac{1}{D} + O\left(\frac{1}{D^2}\right) \right]. \quad (8.10)$$

Ο κυρίαρχος όρος σε πεπερασμένο μέγεθος στη σχέση διασποράς των απλών ακίδων υπολογίστηκε στην εργασία [114]:

$$E - T\Delta\varphi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\frac{q}{2} + 4 \sin^2 \frac{q}{2} \tan \frac{q}{2} \cdot e^{-(q+\Delta\varphi) \cdot \cot \frac{q}{2}} \right], \quad q \equiv 2 \arcsin \left(\frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad \Delta\phi, \lambda \rightarrow \infty. \quad (8.11)$$

Στο παράρτημα Δ'.2 πολλοί περισσότεροι όροι της (8.11) υπολογίστηκαν με τη Mathematica. Ο κώδικας μπορεί να βρεθεί στο παράρτημα Γ'.3. Η δομή των κλασικών διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους στη σχέση διασποράς των απλών ακίδων σε πεπερασμένο όγκο είναι πολύ παρόμοια με εκείνη των γιγάντιων μαγνονίων (8.5), ωστόσο τα $\Delta\phi = p$ και $\mathcal{J}$ έχουν ανταλλάξει ρόλους:

$$\mathcal{E} - \frac{p}{2} \Big|_{\text{clas}} = \frac{q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n-2} \hat{\mathcal{A}}_{nm}(q) p^{2n-m-2} e^{-n(q+p) \cot \frac{q}{2}}, \quad (8.12)$$

όπου ξανά όλες οι αρνητικές δυνάμεις της ορμής p απουσιάζουν από την (8.12) (π.χ. $\hat{\mathcal{A}}_{11} = \hat{\mathcal{A}}_{12} = \dots = 0$, κλπ.). Όλοι οι συντελεστές $\hat{\mathcal{A}}_{n0}, \hat{\mathcal{A}}_{n1}, \hat{\mathcal{A}}_{n2}$ στη (8.12) υπολογίστηκαν στην εργασία [2]. Θα ασχοληθούμε με την εργασία [2] στις §8.1–§8.4 πιο κάτω. Προς το παρόν ας διατυπώσουμε απλά τα αποτελέσματα για τις απλές ακίδες. Οι κυρίαρχοι, επόμενοι και μεθεπόμενοι συντελεστές ($\hat{\mathcal{A}}_{n0}, \hat{\mathcal{A}}_{n1}, \hat{\mathcal{A}}_{n2}$) της (8.12), στο κλασσικό τμήμα της σχέσης διασποράς των στοιχειωδών απλών ακίδων ($0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$) μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert ως ακολούθως:

- κυρίαρχοι όροι: $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n0}(q) p^{2n-2} e^{-n\mathcal{R}} = -\frac{1}{p^2} \sin^4 \frac{q}{2} \tan \frac{q}{2} \left[W + \frac{W^2}{2} \right].$
- επόμενοι όροι: $\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n1}(q) p^{2n-3} e^{-n\mathcal{R}} = \frac{1}{p^3} \sin^6 \frac{q}{2} \left\{ \left[\left(\sec^2 \frac{q}{2} + 2q \csc q - \frac{1}{2} \right) \right] W^2 + \left[5 + 3 \sec^2 \frac{q}{2} \right] \frac{W^3}{6} \right\}.$
- μεθεπόμενοι όροι: $\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n2}(q) p^{2n-4} e^{-n\mathcal{R}} = \frac{1}{64p^4} \sin^4 \frac{q}{2} \tan^3 \frac{q}{2} \left\{ 2 \left(5 + 7 \cos q - 8q \cot \frac{q}{2} \right)^2 \frac{W^2}{1+W} - \left(96 \cdot q^2 \cot^2 \frac{q}{2} - 52q \csc^4 \frac{q}{2} \sin^3 q + 45 \cos 2q + 148 \cos q + 79 \right) W^2 - \left(16q (11 + 5 \cos q) \cot \frac{q}{2} - 37 \cos 2q - 172 \cos q - 79 \right) W^3 - (11 \cos 2q + 64 \cos q + 85) W^4 \right\},$

όπου το όρισμα της συνάρτησης Lambert ισούται με $W(4p^2 \csc^2(q/2) e^{-\mathcal{R}})$, στον κύριο κλάδο W_0 , $\mathcal{R} \equiv (p+q) \cot q/2$ και $\sin q/2 \equiv \mathcal{J}$. Στη διπλή περιοχή των απλών ακίδων ($0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$) το όρισμα της συνάρτησης Lambert γράφεται $W(-4p^2 \csc^2(q/2) e^{-\mathcal{R}})$, και οι αντίστοιχοι συντελεστές των κυρίαρχων και επόμενων σειρών $\hat{\mathcal{A}}_{n0}, \hat{\mathcal{A}}_{n1}$ είναι οι ίδιοι με εκείνους στη στοιχειώδη περιοχή. Η μεθεπόμενη σειρά $\hat{\mathcal{A}}_{n2}$ στη διπλή περιοχή δίνεται από:

- μεθεπόμενοι όροι: $\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n2}(q) p^{2n-4} e^{-n\mathcal{R}} = \frac{1}{64p^4} \sin^4 \frac{q}{2} \tan^3 \frac{q}{2} \left\{ 2 \left(5 + 7 \cos q - 8q \cot \frac{q}{2} \right)^2 \frac{W^2}{1+W} - \left(96 \cdot \right. \right.$

$$\cdot q^2 \cot^2 \frac{q}{2} - 52q \csc^4 \frac{q}{2} \sin^3 q + 45 \cos 2q + 276 \cos q - 256 \csc^2 \frac{q}{2} + 463) W^2 - (16q(11 + 5 \cos q) \cot \frac{q}{2} - 37 \cos 2q - 172 \cos q - 79) W^3 - (11 \cos 2q + 64 \cos q + 85) W^4 \Big\}.$$

Οι όροι με κόκκινο χρώμα απουσιάζουν από την αντίστοιχη φόρμουλα στη στοιχειώδη περιοχή. Οι συντελεστές $\hat{A}_{n0}$, $\hat{A}_{n1}$, $\hat{A}_{n2}$ μπορούν να υπολογιστούν από το ανάπτυγμα Taylor (Δ'.3) της συνάρτησης W του Lambert. Είναι σε πλήρη συμφωνία με τη φόρμουλα των Ahn-Bozhilov (8.11) και τα αποτελέσματα (Δ'.14)–(Δ'.15) του παραρτήματος Δ'.2 που υπολογίστηκαν με τη Mathematica.

Ας δούμε ακόμη και τη μέθοδο με τη οποία εξάγονται οι κλασσικοί συντελεστές στη στοιχειώδη και τη διπλή περιοχή των γιγάντιων μαγνόνιων. Σε αντίθεση με τις χορδές GKP όπου ξεκινούσαμε από το 2×2 σύστημα εξισώσεων (5.16)–(5.17), στη περίπτωση των γιγάντιων μαγνόνιων/απλών ακίδων ξεκινάμε με ένα 3×3 σύστημα:

$$\mathcal{E} = d(a, x) \ln x + h(a, x) \quad (8.13)$$

$$\mathcal{J} = c(a, x) \ln x + b(a, x) \quad (8.14)$$

$$p = f(a, x) \ln x + g(a, x), \quad (8.15)$$

όπου για τα στοιχειώδη γιγάντια μαγνόνια ισχύει $x = 1 - \eta$, ο ορισμός του η δίνεται στην εξίσωση (7.10) και $v \equiv \cos a$. Με $d(a, x)$, $h(a, x)$, $c(a, x)$, $b(a, x)$, $f(a, x)$, $g(a, x)$ συμβολίζονται οι συντελεστές των σειρών (7.11), (7.12) και (7.9), εκπεφρασμένοι συναρτήσεων των μεταβλητών x και a . Το σύστημα (8.13)–(8.15) μπορεί να λυθεί ως εξής. Πρώτα απαλείφουμε το λογάριθμο από τις εξισώσεις (8.14)–(8.15), παίρνοντας μια εξίσωση $p = p(\mathcal{J}, a, x)$ της γραμμικής ορμής συναρτήσεως της διατηρούμενης στροφορμής $\mathcal{J}$ και των παραμέτρων a και x . Έπειτα το $p(\mathcal{J}, a, x)$ αναπτύσσεται σε διπλή σειρά ως προς τις μεταβλητές a και x και αντιστρέφεται ως προς το $a = a(x, p, \mathcal{J})$. Το $a(x, p, \mathcal{J})$ εισάγεται στις εξισώσεις (8.13)–(8.14), οδηγώντας σε ένα σύστημα όπως το (5.16)–(5.17):

$$\mathcal{E} = d(x, p, \mathcal{J}) \ln x + h(x, p, \mathcal{J}) \quad (8.16)$$

$$\mathcal{J} = c(x, p, \mathcal{J}) \ln x + b(x, p, \mathcal{J}). \quad (8.17)$$

Η μέθοδος της §5 μπορεί τώρα να εφαρμοσθεί προκειμένου να απαλειφθεί η μεταβλητή x από το σύστημα (8.16)–(8.17) και να ληφθεί η σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνόνιων $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J} = \gamma(p, \mathcal{J})$ ως προς τις ορμές p και $\mathcal{J}$.

Ο αλγόριθμος είναι ακριβώς ο ίδιος για τα γιγάντια μαγνόνια στη διπλή περιοχή, εκτός του ότι τα $\tilde{x} = 1 - 1/\eta$ και η ορίζονται μέσω της εξίσωσης (7.19), ενώ τα $d(a, \tilde{x})$, $h(a, \tilde{x})$, $c(a, \tilde{x})$, $b(a, \tilde{x})$, $f(a, \tilde{x})$, $g(a, \tilde{x})$ προκύπτουν από τις σειρές (7.20), (7.21) και (7.18).

Για την περίπτωση των απλών ακίδων με μεγάλη ορμή, θέτουμε $a \equiv \arccos 1/\omega$ και απαλείφουμε το λογάριθμο από τις εξισώσεις (8.14)–(8.15). Έτσι οδηγούμαστε σε μια έκφραση $\mathcal{J} = \mathcal{J}(a, x, p)$ για τη στροφορμή η οποία στη συνέχεια αντιστρέφεται ως προς το $a = a(x, p, \mathcal{J})$ και εισάγεται στις εξισώσεις (8.13), (8.15). Το 2×2 σύστημα που προκύπτει

$$\mathcal{E} = d(x, p, \mathcal{J}) \ln x + h(x, p, \mathcal{J}) \quad (8.18)$$

$$p = f(x, p, \mathcal{J}) \ln x + g(x, p, \mathcal{J}), \quad (8.19)$$

μπορεί να λυθεί όπως το αντίστοιχο σύστημα για τις χορδές GKP (5.16)–(5.17) στην §5. Για τις απλές ακίδες στη στοιχειώδη περιοχή, ισχύει $x = 1 - \eta$, όπου το η ορίζεται στην εξίσωση (7.28) και $1/\omega \equiv \cos a$. Οι συντελεστές $d(a, x)$, $h(a, x)$, $c(a, x)$, $b(a, x)$, $f(a, x)$, $g(a, x)$ ορίζονται από τις σειρές (7.29), (7.30) και (7.27). Οι απλές ακίδες στη διπλή περιοχή έχουν $\tilde{x} = 1 - 1/\eta$ και το η ορίζεται στη εξίσωση (7.37).

Ο συντελεστές $d(a, \tilde{x})$, $h(a, \tilde{x})$, $c(a, \tilde{x})$, $b(a, \tilde{x})$, $f(a, \tilde{x})$, $g(a, \tilde{x})$ ορίζονται από τις σειρές (7.38), (7.39) και (7.36).

Αυτή ενότητα έχει οργανωθεί ως εξής. Στην §8.1 πρόκειται να εφαρμόσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο στην περίπτωση των στοιχειωδών γιγάντιων μαγνόνιων ($0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$) και στην §8.2 θα εφαρμοσθεί στα διπλά γιγάντια μαγνόνια ($0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$). Στις §8.3–§8.4, θα ασχοληθούμε με τις στοιχειώδεις ($0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$) και τις «διπλές» ($0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$) απλές ακίδες αντίστοιχα.

8.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο, Στοιχειώδης Περιοχή: $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$

Ας ξεκινήσουμε με τα στοιχειώδη γιγάντια μαγνόνια για τα οποία,

$$0 \leq |v| \leq 1/\omega \leq 1. \quad (8.20)$$

Όπως έχουμε ήδη πει, τα γιγάντια μαγνόνια στη στοιχειώδη περιοχή είναι τοξοειδείς ανοικτές χορδές στον $\mathbb{R} \times S^2$ που εκτείνονται μεταξύ των παραλλήλων ζ_ω και ζ_v :

$$0 \leq R^2 \left[1 - \frac{1}{\omega^2} \right] \equiv \zeta_\omega = z_{\min}^2 \leq z^2 \leq z_{\max}^2 = \zeta_v \equiv R^2 (1 - v^2) \leq R^2. \quad (8.21)$$

αν ορίσουμε τη μεταβλητή x ως

$$x \equiv 1 - \eta = \frac{z_{\min}^2}{z_{\max}^2} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 (1 - v^2)}, \quad (8.22)$$

λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{\sqrt{1 - x (1 - v^2)}} (1 - x) \cdot \mathbb{K} (1 - x) \quad (8.23)$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{1 - v^2} (\mathbb{K} (1 - x) - \mathbb{E} (1 - x)) \quad (8.24)$$

$$\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J} = \sqrt{1 - v^2} \left\{ \mathbb{E} (1 - x) - \left(1 - \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x (1 - v^2)}} \right) \mathbb{K} (1 - x) \right\} \quad (8.25)$$

$$p = \frac{1}{v} \frac{1}{\sqrt{1 - x (1 - v^2)} \cdot \mathbb{K} (x)} \left\{ \pi v \sqrt{1 - x (1 - v^2)} \cdot \mathbb{F} \left(\arcsin \sqrt{1 - v^2}, x \right) + 2 (1 - x) \sqrt{1 - v^2} \cdot \left[\mathbb{K} (x) - \mathbf{\Pi} \left(\frac{x v^2}{1 - x (1 - v^2)}; x \right) \right] \cdot \mathbb{K} (1 - x) \right\}, \quad (8.26)$$

όπου η (8.26) προκύπτει από την ορμή των γιγάντιων μαγνόνιων (7.9) και τη σχέση (E.14) των πλήρων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων του τρίτου είδους. Ας δούμε τώρα πως ο αλγόριθμος που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε τη σχέση διασποράς των στοιχειωδών γιγάντιων μαγνόνιων $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p, \mathcal{J})$, για μεγάλη αλλά πεπερασμένη στροφορμή $J \rightarrow \infty$ και $x \rightarrow 0^+$.

8.1.1 Αντίστροφη Ορμή

Πρώτα θα πρέπει να εκφράσουμε την ταχύτητα v των γιγάντιων μαγνονίων συναρτήσει των ορμών p και $\mathcal{J}$. Οι σχέσεις (8.23)–(8.26) έχουν μια λογαριθμική ιδιομορφία στη θέση $x \rightarrow 0^+$ την οποία κληρονομούν από τις ακόλουθες δύο ελλειπτικές συναρτήσεις:

$$\mathbb{K}(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (d_n \ln x + h_n) \quad (8.27)$$

$$\mathbb{K}(1-x) - \mathbb{E}(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (c_n \ln x + b_n). \quad (8.28)$$

Οι συντελεστές των σειρών (8.27) και (8.28) είναι οι ακόλουθοι:

$$d_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2, \quad h_n = -4 d_n \cdot (\ln 2 + H_n - H_{2n})$$

$$c_n = -\frac{d_n}{2n-1}, \quad b_n = -4 c_n \cdot \left[\ln 2 + H_n - H_{2n} + \frac{1}{2(2n-1)} \right], \quad (8.29)$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$. Αν απαλείψουμε τους λογάριθμους από τις εξισώσεις (8.24), (8.26), οδηγούμαστε στην

$$p = \frac{\pi \cdot \mathbb{F}(a, x)}{\mathbb{K}(x)} + \frac{2(1-x) \tan a}{\mathbb{K}(x) \sqrt{1-x \sin^2 a}} \cdot \left[\mathbb{K}(x) - \Pi \left(\frac{x \cos^2 a}{1-x \sin^2 a}; x \right) \right] \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} \cdot \left(\mathcal{J} \csc a - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \right\}, \quad (8.30)$$

όπου $v = \cos a$ ($\arccos 1/\omega \leq a \leq \pi/2$). Η εξίσωση (8.30) για το $p = p(\mathcal{J}, a, x)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε διπλή σειρά γύρω από το $x = 0$ και το $a = p/2$ και στη συνέχεια να αντιστραφεί ως προς τη μεταβλητή a με τη Mathematica. Βλέπε την εξίσωση (Δ'.10), στο παράρτημα Δ'.2. Κατόπιν μπορούμε να εισάγουμε το $a(x, p, \mathcal{J})$ στις εξισώσεις (8.24)–(8.25) και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση των χορδών GKP, προκειμένου να αντιστρέψουμε την εξίσωση (8.24) υπολογίζοντας την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(p, \mathcal{J})$. Αν αντικαταστήσουμε το $x(p, \mathcal{J})$ που βρήκαμε στη σχέση των ανώμαλων διαστάσεων (8.25), λαμβάνουμε τη σχέση διασποράς των στοιχειωδών γιγάντιων μαγνονίων συναρτήσει της συνάρτησης W .

8.1.2 Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν

Όπως είπαμε ήδη, η ταχύτητα $v = \cos a(x, p, \mathcal{J})$ που βρήκαμε στην προηγούμενη υποενότητα θα πρέπει να εισαχθεί στην εξίσωση (8.24) για το σπίν του γιγάντιου μαγνονίου και η προκύπτουσα σειρά για τη στροφορμή $\mathcal{J} = \mathcal{J}(x, p)$ θα πρέπει να αντιστραφεί ως προς την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(p, \mathcal{J})$. Αντικαθιστώντας το $x(p, \mathcal{J})$ στη σχέση των $\gamma = \gamma(x, p)$ που δίδεται στην εξίσωση (8.25), βρίσκουμε το $\gamma = \gamma(p, \mathcal{J})$. Ας λύσουμε όμως πρώτα την εξίσωση (8.24) ως προς το $\ln x$:

$$\mathcal{J} = \sin a(x, p, \mathcal{J}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n (c_n \ln x + b_n) \Rightarrow \ln x = \left[\frac{\mathcal{J} \csc a - b_0}{c_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{c_0} x^n \right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{c_0} x^k \right)^n. \quad (8.31)$$

Η (8.31) μπορεί να γραφτεί σαν μία σειρά της ακόλουθης μορφής (βλέπε (5.21)–(5.72)):

$$x = x_0 \cdot \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right] = x_0 \cdot \exp (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots), \quad (8.32)$$

όπου οι συντελεστές $a_n = a_n(p, \mathcal{J})$ μπορούν να υπολογιστούν από την (8.31). Ορίσαμε επίσης:

$$x_0 \equiv \exp \left[\frac{\mathcal{J} \csc \frac{p}{2} - b_0}{c_0} \right] = 16 e^{-2\mathcal{J} \csc \frac{p}{2} - 2} \quad (8.33)$$

που λύνει την (8.31) σε κατώτερη τάξη ως προς τη μεταβλητή x . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση των Lagrange-Bürmann (5.22) προκειμένου να αντιστρέψουμε τη σειρά (8.32). Βρίσκουμε:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k, j_i=0}^{n-1} \frac{n^k}{n!} \binom{n-1}{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_{n-1}^{j_{n-1}}, \quad (8.34)$$

όπου

$$j_1 + j_2 + \dots + j_{n-1} = k \quad \& \quad j_1 + 2j_2 + \dots + (n-1)j_{n-1} = n-1.$$

Αναπτύσσοντας την (8.31) μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα a_n έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$a_n = \sum_{m=0}^{n+1} a_{nm} \mathcal{J}^m, \quad (8.35)$$

όπου τα a_{nm} είναι γνωστές συναρτήσεις της ορμής/γωνιακής έκτασης p . Αν εισάγουμε τους συντελεστές (8.35) στη σχέση (8.34), χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\left. \begin{aligned} j_1 + j_2 + \dots + j_{n-1} &= k \\ j_1 + 2j_2 + \dots + (n-1)j_{n-1} &= n-1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k + j_2 + \dots + (n-2)j_{n-1} = n-1, \quad (8.36)$$

μπορούμε ακόμη να δείξουμε ότι η σειρά για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(p, \mathcal{J})$, έχει την ακόλουθη γενική μορφή:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{m=0}^{2n-2} \tilde{a}_{nm} \mathcal{J}^m, \quad (8.37)$$

όπου οι $\tilde{a}_{nm}$ εξαρτώνται από την ορμή p . Τα $\tilde{a}_{nm}$ υπολογίζονται συναρτήσει των a_{nm} στην εξίσωση (8.35), αντικαθιστώντας τα (8.35) στη σχέση (8.34). Το αποτέλεσμα θα πρέπει να συμπίπτει με την εξίσωση (Δ'.11), όπου το x υπολογίστηκε με τη Mathematica. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι κυρίαρχες ως προς $\mathcal{J}$ συνεισφορές στο x (ήτοι οι όροι $\tilde{a}_{n,2n-2}$) καθορίζονται από το a_{12} , οι επόμενες ως προς $\mathcal{J}$ συνεισφορές στο x (όροι $\tilde{a}_{n,2n-3}$) καθορίζονται από τα a_1 και a_{23} , κ.ο.κ. μέχρι τον όρο $\tilde{a}_{nn}$. Με άλλα λόγια, όλοι οι συντελεστές του $x(\mathcal{J})$ μέχρι τον $x_0^n \mathcal{J}^{2n-2-m}$ ($0 \leq m \leq n-2$) καθορίζονται από τα $a_1, \dots, a_m$ και το $a_{m+1, m+2}$. Οι επόμενοι όροι $\tilde{a}_{n0}, \dots, \tilde{a}_{n, n-1}$ (που πολλαπλασιάζουν το $x_0^n \mathcal{J}^m$ για $0 \leq m \leq n-1$) καθορίζονται από τους συντελεστές $a_1, \dots, a_{n-2}$ και τον $a_{n-1, m}$. Για να αποδείξουμε όλα αυτά, η σχέση (8.35) θα πρέπει να εισαχθεί στην εξίσωση (8.34). Βρίσκουμε τότε:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \cdot \left\{ n^{n-1} a_1^{n-1} + (n-1)(n-2)n^{n-2} a_1^{n-3} a_2 + (n-1)(n-2)(n-3)n^{n-3} \left[a_1^{n-4} a_3 + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (n-4) a_1^{n-5} a_2^2 \right] + \dots \}. \quad (8.38)$$

Για να υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν x , θα πρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_1, a_2, a_3 από την εξίσωση (8.31) και να τους αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (8.38). Εδώ θα κρατήσουμε μόνο τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους όρους και θα αγνοήσουμε όλες τις συνεισφορές ανώτερης τάξης. Εν συνεχεία θα πρέπει να εκφράσουμε τη σειρά που προκύπτει με τη συνάρτηση W του Lambert, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Γ'.8)–(Γ'.13) του παραρτήματος Γ'. Το τελικό αποτέλεσμα για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(p, \mathcal{J})$ είναι:

$$\begin{aligned} x = & -\frac{1}{\mathcal{J}^2} \tan^2 \frac{p}{2} \cdot W + \frac{1}{8\mathcal{J}^3} \tan^3 \frac{p}{2} \sec \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{7 \cos p - 3}{1+W} - (\cos p - 5) \right] \cdot W^2 - \frac{1}{64\mathcal{J}^4} \tan^4 \frac{p}{2} \sec^2 \frac{p}{2} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{2} (7 \cos p - 3)^2 \frac{W}{(1+W)^3} - \frac{1}{6} (241 \cos 2p - 924 \cos p + 731) \frac{W}{1+W} - \frac{1}{3} (335 \cos p - 463) \cdot \right. \\ & \left. \sin^2 \frac{p}{2} \cdot W - \frac{1}{12} (41 \cos 2p - 1284 \cos p + 667) W^2 - \frac{1}{3} (\cos 2p + 36 \cos p - 85) W^3 \right\} + \dots \end{aligned} \quad (8.39)$$

Τα ορίσματα των συναρτήσεων W του Lambert στην (8.39) είναι $W(-16\mathcal{J}^2 \cot^2(p/2) e^{-2\mathcal{J} \csc p/2-2})$ στον κύριο κλάδο W_0 . Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor για τη συνάρτηση W στον W_0 κλάδο (Γ'.3) για να αναπτύξουμε την εξίσωση (8.39) ως προς $\mathcal{J} \rightarrow \infty$, ανακτούμε τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους όρους της αντίστροφης συνάρτησης σπίν. Αυτοί συμφωνούν με την αντίστροφη συνάρτηση σπίν (Δ'.11) που βρέθηκε στο παράρτημα Δ'.2 με τη Mathematica. Ας ορίσουμε επίσης:

$$x_{(L)} = -\frac{1}{\mathcal{J}^2} \tan^2 \frac{p}{2} \cdot W \quad (8.40)$$

$$x_{(NL)} = \frac{1}{8\mathcal{J}^3} \tan^3 \frac{p}{2} \sec \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{7 \cos p - 3}{1+W} - (\cos p - 5) \right] \cdot W^2 \quad (8.41)$$

$$\begin{aligned} x_{(NNL)} = & -\frac{1}{64\mathcal{J}^4} \tan^4 \frac{p}{2} \sec^2 \frac{p}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{2} (7 \cos p - 3)^2 \frac{W}{(1+W)^3} - \frac{1}{6} (241 \cos 2p - 924 \cos p + 731) \frac{W}{1+W} - \right. \\ & - \frac{1}{3} (335 \cos p - 463) \sin^2 \frac{p}{2} \cdot W - \frac{1}{12} (41 \cos 2p - 1284 \cos p + 667) W^2 - \\ & \left. - \frac{1}{3} (\cos 2p + 36 \cos p - 85) W^3 \right\}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

8.1.3 Σχέση Διασποράς

Προκειμένου να υπολογίσουμε το κλασικό μέρος της σχέσης διασποράς των γιγάντιων μαγνόνιων πεπερασμένου μεγέθους, θα πρέπει να εισαγάγουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(p, \mathcal{J})$ της (8.39) που βρήκαμε στην προηγούμενη ενότητα, στη σχέση $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J}$ της εξίσωσης (8.25). Αναπτύσσουμε πρώτα την (8.25) γύρω από το $x \rightarrow 0^+$ χρησιμοποιώντας τις σειρές (8.27)–(8.28):

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (f_n \ln x + g_n), \quad (8.43)$$

όπου οι συντελεστές f_n και g_n είναι συναρτήσεις των x , p και $\mathcal{J}$. Ορίζονται ως εξής:

$$f_n \equiv \sin a \left[\frac{1-x}{\sqrt{1-x \sin^2 a}} d_n - c_n \right], \quad g_n \equiv \sin a \left[\frac{1-x}{\sqrt{1-x \sin^2 a}} h_n - b_n \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.44)$$

Στη συνέχεια εισάγουμε την υπολογισθείσα τιμή για το $\sin a(x, p, \mathcal{J})$ (όπως δίνεται από την εξίσωση (Δ'.10) στο παράρτημα Δ'.2) στην (8.44), και αντικαθιστούμε το $\ln x/x_0$ από το ίσο του στην εξίσωση (8.32). Η σχέση διασποράς (8.43) γράφεται τότε ως εξής:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (f_n \ln x + g_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n + f_n \ln \frac{x}{x_0} \right] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left[A_n + \sum_{k=1}^n f_{n-k} \cdot a_k \right], \quad (8.45)$$

όπου τώρα οι f_n και g_n είναι συναρτήσεις αποκλειστικά της ορμής p και του σπίν $\mathcal{J}$. Τα A_n είναι ίσα με

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + 2f_n \left(2 \ln 2 - \mathcal{J} \csc \frac{p}{2} - 1 \right). \quad (8.46)$$

Εν γένει τα A_n και τα f_n έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$A_n = \sum_{m=0}^n A_{nm} \mathcal{J}^m \quad \& \quad f_n = \sum_{m=0}^{n-1} f_{nm} \mathcal{J}^m, \quad (8.47)$$

όπου τα A_{nm} και τα f_{nm} είναι γνωστές συναρτήσεις της ορμής p . Μπορούμε τώρα να γράψουμε όλους τους όρους στο ανάπτυγμα (8.45) που συνεισφέρουν στις ανώμαλες διαστάσεις μέχρι την μεθεπόμενη (NNL) τάξη. Στην (8.45) κάνουμε τις αντικαταστάσεις (8.35), (8.47) και $x = x_{(L)} + x_{(NL)} + x_{(NNL)} + \dots$, παίρνοντας:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{J} = & A_0 + \left\{ A_1 x_{(L)} + (A_{22} + f_1 a_{12}) \mathcal{J}^2 x_{(L)}^2 \right\} + \left\{ A_1 x_{(NL)} + (A_{21} + f_1 a_{11}) \mathcal{J} x_{(L)}^2 + \right. \\ & + 2(A_{22} + f_1 a_{12}) \mathcal{J}^2 x_{(L)} x_{(NL)} + (A_{33} + f_1 a_{23} + f_{21} a_{12}) \mathcal{J}^3 x_{(L)}^3 \left. \right\} + \left\{ A_1 x_{(NNL)} + \right. \\ & + (A_{20} + f_1 a_{10}) x_{(L)}^2 + 2(A_{21} + f_1 a_{11}) \mathcal{J} x_{(L)} x_{(NL)} + (A_{22} + f_1 a_{12}) \mathcal{J}^2 (x_{(NL)}^2 + 2x_{(L)} x_{(NNL)}) + \\ & + (A_{32} + f_1 a_{22} + f_{21} a_{11} + f_{20} a_{12}) \mathcal{J}^2 x_{(L)}^3 + 3(A_{33} + f_1 a_{23} + f_{21} a_{12}) \mathcal{J}^3 x_{(L)}^2 x_{(NL)} + \\ & \left. + (A_{44} + f_1 a_{34} + f_{21} a_{23} + f_{32} a_{12}) \mathcal{J}^4 x_{(L)}^4 \right\},^{36} \end{aligned} \quad (8.48)$$

Εισάγοντας τις (8.40)–(8.42) σε αυτή τη σχέση και κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε την ακόλουθη NNLO σχέση ενέργειας-σπίν στη στοιχειώδη περιοχή των γιγάντιων μαγνόνιων:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{J} = & \sin \frac{p}{2} + \frac{1}{4\mathcal{J}^2} \tan^2 \frac{p}{2} \sin^3 \frac{p}{2} \left[W + \frac{W^2}{2} \right] - \frac{1}{16\mathcal{J}^3} \tan^4 \frac{p}{2} \sin^2 \frac{p}{2} \left[(3 \cos p + 2) W^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} (5 \cos p + 11) W^3 \right] - \frac{1}{512\mathcal{J}^4} \tan^6 \frac{p}{2} \sin \frac{p}{2} \left\{ (7 \cos p - 3)^2 \frac{W^2}{1+W} - \right. \end{aligned}$$

³⁶Επίσης χρησιμοποιούμε $A_1 = A_{10}$.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} (25 \cos 2p - 188 \cos p - 13) W^2 - \frac{1}{2} (47 \cos 2p + 196 \cos p - 19) W^3 - \\
& -\frac{1}{3} (13 \cos 2p + 90 \cos p + 137) W^4 \Big\} + \dots, \tag{8.49}
\end{aligned}$$

όπου τα ορίσματα των W-συναρτήσεων είναι $W(-16\mathcal{J}^2 \cot^2(p/2) e^{-2\mathcal{J} \csc p/2-2})$, ξανά στον κύριο κλάδο W_0 . Αν αναπτύξουμε την (8.49) γύρω από το $\mathcal{J} \rightarrow \infty$, ανακτούμε τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους όρους της σχέσης διασποράς του στοιχειώδους γιγάντιου μαγνονίου. Όλοι αυτοί συμφωνούν με το ανάπτυγμα μεγάλου σπίν (Δ'.12) των ανώμαλων διαστάσεων που υπολογίστηκε στο παράρτημα Δ'.2 με τη Mathematica. Τα αποτελέσματά μας συμφωνούν επίσης και με τις διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους του γιγάντιου μαγνονίου των Arutyunov, Frolov και Zamaklar (8.4), καθώς και αυτές των Klose και McLoughlin (8.6). Για $p = \pi$, η (8.49) γράφεται:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 1 - 4e^{-2\mathcal{J}-2} + 4(4\mathcal{J} - 1) e^{-4\mathcal{J}-4} - 128\mathcal{J}^2 e^{-6\mathcal{J}-6}. \tag{8.50}$$

Υπερθέτοντας δύο τέτοια γιγάντια μαγνόνια με στροφορμές ίσες προς $\mathcal{J}/2$, βρίσκουμε τους λίγους πρώτους όρους της σχέσης διασποράς των μεγάλων και διπλωμένων χορδών GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$, (Δ'.3).

8.2 Γιγάντιο Μαγνόνιο, Διπλή Περιοχή: $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$

Όπως είπαμε, μπορούμε να ακολουθήσουμε τον ακριβώς ίδιο αλγόριθμο της προηγούμενης ενότητας για να βρούμε το κλασικό μέρος της σχέσης διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων στη διπλή περιοχή τους. Η μόνη διαφορά είναι ότι χρησιμοποιείται η μεταβλητή $\tilde{x} = 1 - 1/\eta$ αντί της x , με το η να ορίζεται στην εξίσωση (7.19) και τα διατηρούμενα φορτία της χορδής να δίνονται από τις εξισώσεις (7.18), (7.20), (7.21). Βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} - \mathcal{J} = & \sin \frac{p}{2} + \frac{1}{4\mathcal{J}^2} \tan^2 \frac{p}{2} \sin^3 \frac{p}{2} \left[W + \frac{W^2}{2} \right] - \frac{1}{16\mathcal{J}^3} \tan^4 \frac{p}{2} \sin^2 \frac{p}{2} \left[(3 \cos p + 2) W^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{6} (5 \cos p + 11) W^3 \right] - \frac{1}{512\mathcal{J}^4} \tan^6 \frac{p}{2} \sin \frac{p}{2} \left\{ (7 \cos p - 3)^2 \frac{W^2}{1+W} - \right. \\
& - \frac{1}{2} (25 \cos 2p - 188 \cos p - 13) W^2 - \frac{1}{2} (47 \cos 2p + 196 \cos p - 19) W^3 - \\
& \left. - \frac{1}{3} (13 \cos 2p + 90 \cos p + 137) W^4 \right\} + \dots, \tag{8.51}
\end{aligned}$$

όπου το όρισμα της συνάρτησης W του Lambert $W(16\mathcal{J}^2 \cot^2(p/2) e^{-2\mathcal{J} \csc p/2-2})$ έχει το αντίθετο πρόσημο με πριν και είναι στον κύριο κλάδο W_0 . Παρατηρούμε ότι η W-εξάρτηση των (8.51) στην τάξη NNLO είναι η ίδια με την (8.49), παρά το γεγονός ότι η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $\tilde{x} = \tilde{x}(p, \mathcal{J})$ δεν δίνεται από την (8.39). Αν αναπτύξουμε την (8.51) για $\mathcal{J} \rightarrow \infty$ ανακτούμε το αποτέλεσμα της Mathematica (Δ'.13) μέχρι NNLO. Για $p = \pi$, η (8.51) γίνεται:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 1 + 4e^{-2\mathcal{J}-2} + 4(4\mathcal{J} - 1) e^{-4\mathcal{J}-4} + 128\mathcal{J}^2 e^{-6\mathcal{J}-6}. \tag{8.52}$$

Αν υπερθέσουμε δύο διπλά γιγάντια μαγνόνια (8.52) με στροφορμές ίσες προς $\mathcal{J}/2$, παίρνουμε τους δύο πρώτους όρους στη σχέση διασποράς των μεγάλων κυκλικών χορδών GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$ στην εξίσωση (Δ'.5).

8.3 Απλή Ακίδα, Στοιχειώδης Περιοχή: $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$

Για τις απλές ακίδες στη στοιχειώδη περιοχή, η διαδικασία για να βρούμε την κλασική σχέση διασποράς μέχρι την NNLO τάξη είναι κάπως διαφορετική. Πρέπει να θέσουμε $a \equiv \arccos 1/\omega$ και να απαλείψουμε το λογάριθμο από τις εξισώσεις (7.27) και (7.30). Επίσης $x = 1 - \eta$, όπου το η ορίζεται από τη σχέση (7.28). Η έκφραση $\mathcal{J} = \mathcal{J}(a, x, p)$ που βρίσκουμε αντιστρέφεται ως προς το $a = a(x, p, \mathcal{J})$, το οποίο εισάγεται στις εξισώσεις (7.27), (7.29). Η μεταβλητή x απαλείφεται μετά από το προκύπτον 2×2 σύστημα που περιέχει την ορμή $p = p(x, \mathcal{J})$ και την ενέργεια $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, \mathcal{J})$. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \frac{p}{2} = & \frac{q}{2} - \frac{1}{p^2} \sin^4 \frac{q}{2} \tan \frac{q}{2} \left[W + \frac{W^2}{2} \right] + \frac{1}{p^3} \sin^6 \frac{q}{2} \left\{ \left[\left(\sec^2 \frac{q}{2} + 2q \csc q - \frac{1}{2} \right) \right] W^2 + \left[5 + 3 \sec^2 \frac{q}{2} \right] \right. \\ & \cdot \frac{W^3}{6} \left. \right\} + \frac{1}{64 p^4} \sin^4 \frac{q}{2} \tan^3 \frac{q}{2} \left\{ 2 \left(5 + 7 \cos q - 8q \cot \frac{q}{2} \right)^2 \frac{W^2}{1+W} - \left(96q^2 \cot^2 \frac{q}{2} - 52q \csc^4 \frac{q}{2} \cdot \right. \right. \\ & \cdot \sin^3 q + 45 \cos 2q + 148 \cos q + 79 \Big) W^2 - \left(16q (11 + 5 \cos q) \cot \frac{q}{2} - 37 \cos 2q - 172 \cos q - \right. \\ & \left. \left. - 79 \right) W^3 - (11 \cos 2q + 64 \cos q + 85) W^4 \right\} + \dots \end{aligned} \quad (8.53)$$

Τα ορίσματα των συναρτήσεων W του Lambert είναι $W \left(\pm 4p^2 \csc^2 (q/2) e^{-(p+q) \cot \frac{q}{2}} \right)$ στον κύριο κλάδο W_0 . Έχουμε ορίσει επίσης $\mathcal{J} \equiv \sin q/2$. Το πρόσημο μείον στο όρισμα της συνάρτησης W αντιστοιχεί στη στοιχειώδη περιοχή των απλών ακίδων και το πρόσημο συν στη διπλή περιοχή.

8.4 Απλή Ακίδα, Διπλή Περιοχή: $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$

Για να βρούμε τη σχέση διασποράς στη διπλή περιοχή των απλών ακίδων θέτουμε $\tilde{x} = 1 - 1/\eta$, με το η να ορίζεται στην εξίσωση (7.37). Μετά ακολουθούμε τον ίδιο αλγόριθμο που ακολουθήσαμε στην περίπτωση των απλών ακίδων της στοιχειώδους περιοχής, για τα διατηρούμενα φορτία (7.36), (7.38), (7.39). Βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \frac{p}{2} = & \frac{q}{2} - \frac{1}{p^2} \sin^4 \frac{q}{2} \tan \frac{q}{2} \left[W + \frac{W^2}{2} \right] + \frac{1}{p^3} \sin^6 \frac{q}{2} \left\{ \left[\left(\sec^2 \frac{q}{2} + 2q \csc q - \frac{1}{2} \right) \right] W^2 + \left[5 + 3 \sec^2 \frac{q}{2} \right] \right. \\ & \cdot \frac{W^3}{6} \left. \right\} + \frac{1}{64 p^4} \sin^4 \frac{q}{2} \tan^3 \frac{q}{2} \left\{ 2 \left(5 + 7 \cos q - 8q \cot \frac{q}{2} \right)^2 \frac{W^2}{1+W} - \left(96q^2 \cot^2 \frac{q}{2} - 52q \csc^4 \frac{q}{2} \cdot \right. \right. \\ & \cdot \sin^3 q + 45 \cos 2q + \textcolor{red}{276 \cos q} - \textcolor{red}{256 \csc^2 \frac{q}{2}} + \textcolor{red}{463} \Big) W^2 - \left(16q (11 + 5 \cos q) \cot \frac{q}{2} - 37 \cos 2q - \right. \\ & \left. \left. - 172 \cos q - 79 \right) W^3 - (11 \cos 2q + 64 \cos q + 85) W^4 \right\} + \dots \end{aligned} \quad (8.54)$$

Σε αντίθεση με τη σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνωνίων που είχε την ίδια W -εξάρτηση στη στοιχειώδη και τη διπλή περιοχή, η σχέση διασποράς των απλών ακίδων στη στοιχειώδη περιοχή δεν είναι η ίδια με εκείνη στη διπλή περιοχή. Έχουμε σημειώσει τους όρους που διαφέρουν στις εξισώσεις (8.53)–(8.54) με κόκκινο χρώμα. Αμφότερες οι ανώμαλες διαστάσεις συγκλίνουν στη σχέση διασποράς

άπειρης ορμής (6.8) για $p = \infty$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι και οι δύο εκφράσεις (8.53)–(8.54) είναι σωστές, αν τις αναπτύξουμε για μεγάλη ορμή $p \rightarrow \infty$. Ανακτούμε έτσι όλους τους LO, NLO και NNLO όρους των σχέσεων (Δ'.14)–(Δ'.15) που βρέθηκαν με τη Mathematica. Η πρώτη διόρθωση πεπερασμένου μεγέθους της (8.53) συμφωνεί με τη σχέση των Ahn-Bozhilov (8.11).

9 Περίληψη Μέρους II

Στο μέρος II αυτής της διατριβής (§3–§8) μελετήσαμε ελεύθερες περιστρεφόμενες χορδές στον $\text{AdS}_5 \times S^5$. Λόγω της αντιστοιχίας AdS/CFT (2.1), οι καταστάσεις ελεύθερων χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ είναι δυϊκές με τοπικούς τελεστές της επίπεδης $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη δυαδικότητα προκειμένου να υπολογίσουμε το φάσμα της θεωρίας βαθμίδας σε ισχυρή σύζευξη, όπου οι χορδές είναι ουσιαστικά ασθενώς συζευγμένες ως προς α' . Συγκεκριμένα εστιάσαμε σε δύο θεμελιώδεις καταστάσεις χορδών, τις οποίες και μελετήσαμε λεπτομερώς τόσο σε άπειρο όσο και σε πεπερασμένο μέγεθος: τις χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) και τα γιγάντια μαγνόνια (GMs)/απλές ακίδες (SSs). Στόχος μας ήταν να υπολογίσουμε τις ανώμαλες διαστάσεις εκείνων των τελεστών της $\mathcal{N} = 4$ SYM που είναι δυϊκοί στις παραπάνω καταστάσεις, όπως επίσης και να διερευνήσουμε την πιθανότητα να τις εκφράσουμε σε κλειστές μορφές.

Παρότι οι πλήρεις κλασικές εκφράσεις για το καθένα από τα φορτία των δύο συστημάτων σε ισχυρή σύζευξη είναι γνωστές σε παραμετρική μορφή, σαν συναρτήσεις των ταχυτήτων v και ω των δυϊκών τους χορδών, οι ανώμαλες διαστάσεις πρέπει να εκφραστούν αποκλειστικά συναρτήσει των διατηρούμενων φορτίων. Μόνο με αυτό τον τρόπο μπορούν να φιλοξενήσουν χβαντικές διορθώσεις και να συγκριθούν με τις αντίστοιχες εκφράσεις σε ασθενή σύζευξη, καμιά από τις οποίες δεν είναι γνωστή σε παραμετρική μορφή.

9.1 Χορδές GKP

Οι χορδές των GKP παρουσιάστηκαν στην §4. Περιλαμβάνουν τις ακόλουθες περιπτώσεις στον AdS_3 και τον $\mathbb{R} \times S^2$:

- I. κλειστή χορδή που περιστρέφεται στον $\text{AdS}_3 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$.
- II. κλειστή χορδή που περιστρέφεται γύρω από τον πόλο του S^2 στον $\mathbb{R} \times S^2 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$.
- III. κλειστή χορδή που πάλλεται εντός του $\text{AdS}_3 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$.

Καθεμιά από αυτές τις χορδές μελετήθηκε λεπτομερώς. Οι χορδές GKP I και II μπορεί να είναι διπλωμένες ή όχι και μικρές/αργές ή μεγάλες/γρήγορες. Υπαχούν κλασικές δυαδικότητες μικρών-μεγάλων και αργών-γρήγορων χορδών, που συνδέουν τις τιμές των διατηρούμενων φορτίων τους στις αντίστοιχες περιοχές. Λύσεις με ενέργεια E και σπίν S ή J μπορούν να συσχετισθούν με λύσεις ενέργειας E' και σπίν S' ή J' , μέσω των εξισώσεων (4.38), (4.76)–(4.77). Δεν είναι αναγκαίο όλα τα φορτία να ανήκουν στην ίδια περίπτωση GKP (βλέπε παράρτημα B'). Όμως όλες οι δυαδικότητες μικρών-μεγάλων και αργών-ταχείων χορδών είναι αμιγώς κλασικές ($\lambda = \infty$). Θα ήταν βεβαίως ιδιαίτερα ενδιαφέρον, αν μπορούσαν να προαχθούν στο χβαντικό επίπεδο ή να βρεθούν τα ανάλογά τους σε ασθενή σύζευξη.

Η σχέση διασποράς των παλλόμενων χορδών εντός του AdS_3 (χορδές GKP III), βρέθηκε με τη μέθοδο WKB. Αυτές οι χορδές είναι δυϊκές στους ακόλουθους τελεστές της $\mathcal{N} = 4$ SYM:

$$\mathcal{O}_n = \text{Tr} [\mathcal{Z} \mathcal{D}_+^n \mathcal{D}_-^n \mathcal{Z}] + \dots, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (9.1)$$

όπου $\mathcal{Z}$ είναι ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο της $\mathcal{N} = 4$ SYM (2.8) και $\mathcal{D}_\pm$ είναι οι παράγωγοι κώνου φωτός (2.9).

Στη §5 υπολογίσαμε το κλασικό μέρος των διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους των αναπτυγμάτων μεγάλου σπίν των σχέσεων διασποράς των τελεστών συστροφής 2 και 2 μαγνηνίων της $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills θεωρίας σε ισχυρή σύζευξη:

$$\mathcal{O}_S = \text{Tr} \left[\mathcal{D}_+^m \mathcal{Z} \mathcal{D}_+^{S-m} \mathcal{Z} \right] + \dots \quad \& \quad \mathcal{O}_J = \text{Tr} \left[\mathcal{X} \mathcal{Z}^m \mathcal{X} \mathcal{Z}^{J-m} \right] + \dots, \quad \lambda, S, J \rightarrow \infty, \quad (9.2)$$

όπου $\mathcal{X}$ είναι ένα από τα υπόλοιπα δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία της $\mathcal{N} = 4$ SYM (2.8). Οι τελεστές συστροφής 2 και 2 μαγνηνίων είναι δυϊκοί σε ημικλασικές χορδές με ένα σπίν που περιστρέφονται εντός των AdS_3 και $\mathbb{R} \times S^2$ αντίστοιχα, και είναι γνωστές ως χορδές GKP I και II.

Ακολουθώντας την εργασία [3], χρησιμοποιήσαμε τη φόρμουλα αντιστροφής των Lagrange-Bürmann για να αντιστρέψουμε ορισμένες συναρτήσεις ελλειπτικών ολοκληρωμάτων που σχετίζονται με τις διατηρούμενες στροφορμές των μεγάλων χορδών GKP I και II. Στη συνέχεια εκφράσαμε τις αντίστοιχες σχέσεις διασποράς και τις ανώμαλες διαστάσεις των δυϊκών τους τελεστών στην $\mathcal{N} = 4$ SYM (9.2), συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert. Με αυτό τον τρόπο, όχι μόνο καταφέραμε να προβλέψουμε άπειρους και προηγούμενως άγνωστους όρους στις σχέσεις διασποράς των χορδών GKP, αλλά ανακαλύψαμε και συμπαγείς, σχεδόν κλειστές εκφράσεις για τα αντίστοιχα φάσματα.

Η αντιστροφή των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων και των ελλειπτικών συναρτήσεων του Jacobi ως προς την παράμετρο m , αποτελεί έναν ενεργό κλάδο έρευνας στα υπολογιστικά μαθηματικά.³⁷ Απ'ότι φαίνεται η παρουσία της λογαριθμικής ιδιομορφίας για $m = 1$ (βλέπε την αντίστοιχη σειρά Taylor των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων στο παράρτημα Ε') εμποδίζει κάθε πιθανή πρόοδο για τον υπολογισμό των αντίστοιχων αντιστροφών συναρτήσεων. Οι συγγραφείς της εργασίας [3] παρατήρησαν ότι η εξίσωση (5.21) μπορεί να αντιστραφεί με τη φόρμουλα των Lagrange-Bürmann και το αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί μέσω της συνάρτησης W του Lambert. Για τον AdS_3 η διαδικασία έπρεπε να τροποποιηθεί ελαφρώς λόγω του όρου $1/x$ στο δεξιό μέλος της (5.72). Αυτός ο $1/x$ όρος είναι εκείνος που μας οδηγεί στη χρησιμοποίηση του W_{-1} κλάδου της συνάρτησης W , αντί του W_0 κλάδου και σε λογαριθμικές αντί για εκθετικές διορθώσεις στις αντιστροφές συναρτήσεων σπίν και ανώμαλες διαστάσεις.

Θα ήταν πολύ ενδιαφέρον αν μπορούσαμε να γενικεύσουμε τις εκφράσεις με τη συνάρτηση W (5.64)–(5.65), (5.69)–(5.70) και (5.112)–(5.113) σε όλες τις επόμενες τάξεις, υπό τη μορφή μιας κλειστής έκφρασης, μιας αναδρομικής διαδικασίας ή ενός αλγορίθμου. Φαίνεται πάντως ότι οι συναρτήσεις W του Lambert θα συνεχίσουν να εμφανίζονται και σε όλες τις επόμενες τάξεις. Επιπλέον, θα μπορούσαμε να μελετήσουμε το φαινόμενο της αλλαγής κλάδου στην συνάρτηση W του Lambert. Η μετάβαση από τον κλάδο W_0 της συνάρτησης W στον κλάδο W_{-1} και αντίστροφα, σημαίνει ότι η αντιστροφή συνάρτησης σπίν x είτε απειρίζεται (ήτοι $x \rightarrow \pm\infty$) είτε επιδεικνύει μια συμπεριφορά που είναι εντελώς διαφορετική από την $x \rightarrow 0$. Στην περίπτωση των χορδών GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$, είδαμε ότι αν αντιστρέψουμε το πρόσημο στο όρισμα της συνάρτησης Lambert (βλέπε (5.65)–(5.70)) πηγαίνουμε από διπλωμένες και ευσταθείς ($\omega > 1$) σε κυκλικές και ασταθείς ($\omega < 1$) χορδές GKP και αντίστροφα. Πιθανόν η σχέση αυτή να μπορεί να γενικευθεί σε κάποια βαθύτερη συμμετρία. Με άλλα λόγια, ο φορμαλισμός με τη συνάρτηση W του Lambert θα μπορούσε να αποκαλύψει τις συμμετρίες (π.χ. τη συμμετρία $W_k(\bar{z}) = \overline{W}_{-k}(z)$) που είναι κρυμμένες στα αναπτύγματα μεγάλου σπίν των χορδών εντός του $\text{AdS}_5 \times S^5$.

Όλες οι εκφράσεις μας για τις μεγάλες/γρήγορες χορδές μπορούν εύκολα να επαληθευτούν με τη Mathematica. Βλέπε το παράρτημα Δ'. Για τις μικρές/αργές χορδές, τα ελλειπτικά ολοκληρώματα δεν έχουν λογαριθμική ιδιομορφία για $m < 1$ και οι εκφράσεις για $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{J})$ και $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{S})$ μπορούν να ληφθούν με τη Mathematica αντιστρέφοντας απλά τις αντίστοιχες σειρές. Δεν φαίνεται εντελώς ακατόρθωτο οι μικρές/αργές σειρές (4.30), (4.62), (4.73) να παραμετροποιούνται με τη συνάρτηση W . Θα ήταν ενδιαφέρον να έχουμε συμπαγείς εκφράσεις και για τις μικρές/αργές σειρές. Αυτό θα διευκόλυνε τη σύγκριση μεταξύ των σχέσεων διασποράς των μικρών/αργών χορδών σε καμπύλους χωροχρόνους και εκείνες των κλειστών χορδών που περιστρέφονται σε επίπεδο χωροχρόνο. Οι χορδές σε επίπεδο χωρο-

³⁷Βλέπε π.χ. [115].

χρόνο εξετάζονται σύντομα στο παράρτημα A'.

Θα άξιζε τον κόπο να διερευνηθεί κατά πόσο οι χβαντικές διορθώσεις σε πεπερασμένο μέγεθος και ισχυρή σύζευξη ή τα ανάλογα των ανώμαλων διαστάσεων των μεγάλων τελεστών συστροφής 2 και 2 μαγνόνων της $\mathcal{N} = 4$ SYM σε ασθενή σύζευξη, μπορούν επίσης να εκφραστούν μέσω της συνάρτησης W . Οι ανώμαλες διαστάσεις μεγάλων τελεστών συστροφής της QCD (που είναι υπεύθυνες για την παραβίαση της διαβάθμισης (scaling) στη βαθιά ανελαστική σκέδαση) μπορούν επίσης να επιδέχονται παραμέτρησης με τη συνάρτηση W σε ισχυρή σύζευξη. Ήδη, η τρέχουσα σταθερά σύζευξης της QCD σε 3 βρόχους είναι γνωστό ότι επιδέχεται παρόμοιας παραμέτρησης με τη συνάρτηση W (βλέπε παράρτημα A').

Μία ακόμη περίπτωση όπου ο φορμαλισμός με τη συνάρτηση W αναμένεται να εφαρμόζεται, είναι η λύση των εξισώσεων Einstein σε θερμικά υπόβαθρα και γεωμετρίες dilaton (βλέπε π.χ. [116]). Ο λόγος γι' αυτό δεν είναι προφανής αλλά σχετίζεται με όσα είναι γνωστά για την ολογραφική ομάδα επανακανονικοποίησης. Στα πλαίσια της ολογραφίας, οι εξισώσεις Einstein είναι οι εξισώσεις επανακανονικοποίησης ορισμένων χβαντικών θεωριών πεδίου που ζουν στο σύνορο του χωροχρόνου. Οι λύσεις των εξισώσεων επανακανονικοποίησης σε ένα και δύο βρόχους ωστόσο, έχει ήδη δείχθει ότι εκφράζονται με τη συνάρτηση W του Lambert (βλέπε παράρτημα A' και τις εκεί παραπομπές). Πράγματι, αποδεικνύεται αυστηρά ότι η λύση των εξισώσεων επανακανονικοποίησης μέχρι την κάθε τάξη βρόχου μπορεί να γραφεί με τη συνάρτηση W του Lambert. Το ότι αυτό είναι εφικτό φαίνεται και από την εξίσωση (5.72), η οποία δεν είναι τίποτε άλλο από την αντιπαράγωγο της γενικής εξίσωσης επανακανονικοποίησης $\beta(x) = \mu^2 dx/d\mu^2 = -x^2 \sum \beta_n x^n$. Στην εργασία [13], αντίστοιχες εκφράσεις με τη συνάρτηση W βρέθηκαν και για τη σχέση διασποράς χορδών που περιστρέφονται εντός του $\text{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3$.

9.2 Γιγάντια Μαγνόνια & Απλές Ακίδες

Τα γιγάντια μαγνόνια και οι απλές ακίδες απείρου και πεπερασμένου μεγέθους παρουσιάστηκαν στις §6–§7. Τα γιγάντια μαγνόνια είναι ανοικτές χορδές ενός σπίν στον $\mathbb{R} \times S^2$ που εκτελούν μια κυματοειδή περιστροφή γύρω από τη διδιάστατη σφαίρα. Οι απλές ακίδες είναι χορδές με ένα σπίν και μία ακίδα στον $\mathbb{R} \times S^2$ που είναι τυλιγμένες γύρω από τον ισημερινό της διδιάστατης σφαίρας και περιστρέφονται γύρω του. Ανάλογα με τις σχετικές τιμές των γωνιακών και γραμμικών τους ταχυτήτων, τα γιγάντια μαγνόνια και οι απλές ακίδες μπορούν να είναι είτε στοιχειώδεις είτε «διπλές». Μπορούμε να μελετήσουμε τη σκέδαση των κλασικών γιγάντιων μαγνόνων και των απλών ακίδων χρησιμοποιώντας τις εικόνες Pohlmeyer αυτών στην εξίσωση sine-Gordon. Τα γιγάντια μαγνόνια είναι δυϊκά στα (αντι)σολιτόνια της sG ενώ οι απλές ακίδες αντιστοιχούν σε ορισμένες ασταθείς λύσεις της sG. Υπάρχει ένας μετασχηματισμός, συγκεκριμένα ο μετασχηματισμός $\sigma \leftrightarrow \tau$, που μας επιτρέπει να μετασχηματίσουμε μεταξύ των γιγάντιων μαγνόνων και των απλών ακίδων, όπως επίσης και τις αναγωγές Pohlmeyer αυτών.

Ο πίνακας σκέδασης των γιγάντιων μαγνόνων απείρου μεγέθους που υπολογίζεται μέσω της αναγωγής Pohlmeyer, συμφωνεί με το όριο ισχυρής σύζευξης του S-πίνακα των μαγνόνων. Ο S-πίνακας των απλών ακίδων απείρου μεγέθους είναι ίσος με εκείνον για τα γιγάντια μαγνόνια, μέχρι μη λογαριθμικούς όρους. Είναι αρκετά δελεαστικό να ρωτήσουμε κατά πόσον η σκέδαση μεταξύ γιγάντιων μαγνόνων και απλών ακίδων είναι εφικτή στο όριο του απείρου μεγέθους.³⁸ Ωστόσο οι λύσεις της sG που αντιστοιχούν στην απλή ακίδα και το γιγάντιο μαγνόνιο μοιάζουν να ανήκουν σε διαφορετικούς τομείς της θεωρίας, που εμποδίζει την ύπαρξη λύσεων σκέδασης με γιγάντια μαγνόνια και απλές ακίδες ως ασυμπτωτικές καταστάσεις. Η μέθοδος «ένδυσης» ("dressing") επίσης αποτυγχάνει να δώσει τέτοιες λύσεις σκέδασης μεταξύ γιγάντιων μαγνόνων και απλών ακίδων, όπως και η γενίκευση των λύσεων της sG σε λύσεις της μιγαδικής εξίσωσης sine-Gordon. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε ακόμη να προσπαθήσουμε να γράψουμε λύσεις της εξίσωσης sG ή του σίγμα μοντέλου της χορδής, χρησιμοποιώντας την εικόνα των απλών ακίδων ως υπέρθεση άπειρου αριθμού γιγάντιων μαγνόνων.

³⁸Ένας διαφορετικός τρόπος για να δούμε το ίδιο πρόβλημα είναι να ρωτήσουμε αν η σκέδαση μεταξύ ενός σιδηρομαγνητικού και ενός αντισιδηρομαγνητικού μαγνόνιου είναι δυνατή. Αυτού του είδους τα πειράματα με μαγνόνια δε φαίνονται πια όσο απίθανα έμοιαζαν στο παρελθόν.

Στην §8 υπολογίσαμε το κλασικό μέρος των διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους στις σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων με μεγάλο σπίν και των απλών ακίδων με μεγάλη ορμή. Τα πρώτα είναι δυϊκά σε τελεστές ενός μαγνονίου της $\mathcal{N} = 4$ SYM:

$$\mathcal{O}_M = \sum_{m=1}^{J+1} e^{imp} |\mathcal{Z}^{m-1} \mathcal{X} \mathcal{Z}^{J-m+1}\rangle, \quad p \in \mathbb{R}, \quad \lambda, J \rightarrow \infty \quad (9.3)$$

σε ισχυρή σύζευξη. Οι απλές ακίδες είναι δυϊκές στους τελεστές spinon:

$$\mathcal{O}_S \sim |\mathbb{S}^{m-1} \mathcal{X} \mathbb{S}^{L/2-m}\rangle + \dots, \quad L \equiv J + M, \quad J \in \mathbb{R} \quad \lambda, p \rightarrow \infty \quad (9.4)$$

σε ισχυρή σύζευξη, με $\mathbb{S} \sim \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} + \mathcal{Y}\bar{\mathcal{Y}} + \mathcal{Z}\bar{\mathcal{Z}}$.

Βρήκαμε όλους τους κυρίαρχους $(\mathcal{A}_{n0}, \hat{\mathcal{A}}_{n0})$, επόμενους $(\mathcal{A}_{n1}, \hat{\mathcal{A}}_{n1})$ και μεθεπόμενους $(\mathcal{A}_{n2}, \hat{\mathcal{A}}_{n2})$ όρους των κλασικών διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους στις σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων (8.5) και των απλών ακίδων (8.12), τόσο στη στοιχειώδη τους όσο και τη διπλή τους περιοχή. Όπως και στην περίπτωση των χορδών GKP, οι αντίστοιχες σχέσεις διασποράς εκφράστηκαν με τη συνάρτηση W του Lambert. Δεν είναι γνωστό κατά πόσον ο ρόλος της συνάρτησης W σε ασθενή σύζευξη είναι παρόμοιος. Εφόσον τα παραπάνω αποτελέσματα για τις σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων δεν έχουν βρεθεί με κάποια άλλη μέθοδο, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επαλήθευση της σωστής συμπερίληψης των κλασικών διορθώσεων wrapping σε ισχυρή σύζευξη από τις διάφορες μεθόδους που βασίζονται στην ολοκληρωσιμότητα, όπως οι διορθώσεις Lüscher, το θερμοδυναμικό Bethe ansatz (TBA)/Y-σύστημα και η χβαντική φασματική καμπύλη (QSC). Επιπλέον, μιας και οι χβαντικές διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους στις σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων είναι μόνο γνωστές σε κατώτερη τάξη ως προς λ , τα κλασικά αποτελέσματα θα μπορούσαν να ρίξουν περισσότερο φως στη δομή του χβαντικού αναπτύγματος και γιατί όχι να προτείνουν νέες πιο αποτελεσματικές μεθόδους χβάντωσης του συστήματος.

Οι εξισώσεις (8.39)–(8.49) και (8.53)–(8.54) θα μπορούσαν να γενικευθούν σε όλες τις επόμενες τάξεις με τη βοήθεια μιας γενικής σχέσης, μιας αναδρομικής διαδικασίας ή ενός αλγορίθμου. Οι συναρτήσεις Lambert θα συνεχίσουν να εμφανίζονται σε όλες τις επόμενες τάξεις, σε πλήρη αναλογία με την περίπτωση των χορδών GKP. Οι χβαντικές διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους στη σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων θα μπορούσε επίσης να εκφραστεί συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert.

Οι εκφράσεις για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(p, \mathcal{J})$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma(p, \mathcal{J})$ τόσο των γιγάντιων μαγνονίων όσο και των απλών ακίδων μπορεί εύκολα να επαληθευθεί με τη Mathematica και τις σχέσεις του παραρτήματος Δ'.2. Όπως έχουμε ήδη πει, οι χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$ σχηματίζονται από την υπέρθεση δύο γιγάντιων μαγνονίων με μέγιστες ορμές $p = \pi$ και στροφορμές $J/2$. Με αυτές τις αντικαταστάσεις η σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων (Δ'.12) ανάγεται στη σχέση διασποράς της χορδής Π των GKP (Δ'.3). Εντούτοις οι δομές αυτών των δύο σχέσεων διασποράς είναι ολίγον τι διαφορετικές και οι όροι που είναι κυρίαρχοι, επόμενοι, κλπ. στη μία από αυτές, δεν είναι οι ίδιοι με τους όρους που είναι κυρίαρχοι, επόμενοι, κλπ. στη σχέση διασποράς της άλλης. Συνεπώς, δύο γιγάντια μαγνόνια με μέγιστη ορμή $p = \pi$ και σπίν $J/2$ δίνουν μόνο την (8.50) αντί των αντίστοιχων όρων της (Δ'.3).

Ας ολοκληρώσουμε αυτή την ενότητα προτείνοντας κάποιες πιθανές εφαρμογές της συνάρτησης W . Η μορφή των διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους των γιγάντιων μαγνονίων στα γ -παραμορφωμένα υποβάθρα³⁹ [117] θυμίζει πολύ τις διορθώσεις που εμφανίζονται στα μη παραμορφωμένα υπόβαθρα (8.4):

$$E - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \sin \frac{p}{2} \left\{ 1 - 4 \sin^2 \frac{p}{2} \cos \Xi e^{-2-2\pi J/\sqrt{\lambda} \sin \frac{p}{2}} + \dots \right\}, \quad \Xi \equiv \frac{2\pi (n_2 - \beta J)}{2^{3/2} \cos^3 p/4}, \quad (9.5)$$

³⁹Γνωστά επίσης και ως πραγματικά υπόβαθρα Lunin-Maldacena.

όπου $n_2 \in \mathbb{Z}$ είναι ο αριθμός περιέλιξης (winding) της χορδής και β είναι ο πραγματικός παράγοντας παραμόρφωσης που ικανοποιεί τη σχέση $|n_2 - \beta J| \leq 1/2$ [118]. Φαινόμενα πεπερασμένου μεγέθους είναι επίσης πολύ ενδιαφέροντα στις περιπτώσεις των δυονικών (dyonic) γιγάντιων μαγνωνίων [119] και των γιγάντιων μαγνωνίων της αντιστοιχίας $\text{AdS}_4/\text{CFT}_3$ (2.37) [120]. Παρόμοια σχόλια ισχύουν επίσης και για τη γενίκευση των απλών ακίδων στη θεωρία ABJM και τα γ -παραμορφωμένα υπόβαθρα, αλλά ακόμη και για το ανάλογο των γιγάντιων μαγνωνίων στο χώρο anti-de Sitter, ήτοι τις ακιδωτές χορδές του Kruczenski [121] (οι χορδές GKP στον AdS_3 μπορούν να θεωρηθούν ως χορδές Kruczenski με δύο ακίδες).

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων συσχέτισης σε ισχυρή σύζευξη θα μπορούσε επίσης να διεκπεραιωθεί με μεθόδους που στηρίζονται στη συνάρτηση W και που αναπτύχθηκαν στο μέρος II αυτής της διατριβής. Τέλος, όπως πρόκειται να δούμε στα επόμενα δύο μέρη, είναι συχνά δυνατόν εκτεταμένα αντικείμενα περισσότερων διαστάσεων, όπως οι p -βράνες και οι μεμβράνες, να μοιράζονται πολλά από τα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά των χορδών.⁴⁰ Είναι φυσιολογικό να περιμένουμε ότι ο φορμαλισμός με τη συνάρτηση W του Lambert θα μπορεί να εφαρμοσθεί και σε αυτές τις περιπτώσεις. Φαινόμενα πεπερασμένου μεγέθους για τις p -βράνες, π.χ. για τις M2-βράνες στον $\text{AdS}_4 \times S^7$ [124] θα μπορούσαν επίσης να μελετηθούν κατά τον ίδιο τρόπο.

⁴⁰Βλέπε π.χ. τις εργασίες [4, 122]. Σχέσεις διασποράς όπως αυτές των μαγνωνίων έχουν βρεθεί για μεμβράνες που περιστρέφονται στον $\text{AdS}_4 \times S^7$, στην εργασία [123].

Μέρος III

Στοιχεία p-Βρανών & M-Θεωρίας

10 Εισαγωγή στις Μεμβράνες

10.1 Μποζονικές Μεμβράνες

10.1.1 Δράση Dirac-Nambu-Goto

Η δράση Dirac-Nambu-Goto (DNG) [125, 126] για μια μποζονική M2-βράνη (μεμβράνη) στις $D = d + 1$ χωροχρονικές διαστάσεις είναι:

$$S_{DNG} = -T_2 \int d^3\sigma \sqrt{-h}, \quad T_2 \equiv \frac{1}{(2\pi)^2 \ell_p^3}, \quad (10.1)$$

όπου ℓ_p είναι το μήκος Planck του D-διάστατου χωροχρόνου και $\sigma_a = \{\tau, \sigma_1, \sigma_2\} = \{\tau, \sigma, \delta\}$ είναι οι συντεταγμένες της μεμβράνης/κοσμικού όγκου.⁴¹ Από την άλλη μεριά, $g_{mn}(X)$ είναι η χωροχρονική μετρική και h_{ab} είναι η επαγόμενη (induced/pull-back) μετρική στη μεμβράνη:

$$h_{ab} \equiv \partial_a X^m \partial_b X^n g_{mn}(X), \quad h \equiv \det h_{ab}, \quad (10.2)$$

όπου X_m είναι οι χωροχρονικές συντεταγμένες.

Εξισώσεις Κίνησης

Παραλλάσσοντας τη δράση ως προς τις χωροχρονικές συντεταγμένες X_m , λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης [127]:

$$\hat{\delta}_X S_{DNG} = 0 \stackrel{42}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{-h}} \partial_a \left(\sqrt{-h} h^{ab} \partial_b X^m \right) + h^{ab} \partial_a X^n \partial_b X^p \Gamma_{np}^m(X) = 0, \quad (10.3)$$

όπου $\Gamma_{np}^m(X)$ είναι τα σύμβολα Christoffel δευτέρου είδους για τη χωροχρονική μετρική $g_{mn}(X)$.

Συμμετρίες

Όπως ακριβώς στην περίπτωση των χορδών, η δράση (10.1) κληρονομεί όλες τις (καθολικές) συμμετρίες της χωροχρονικής μετρικής $g_{mn}(X)$ και επιπλέον διαθέτει και (τοπική) αναλλοιώτητα ως προς αναπαράμετρήσεις/αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις:

$$X^{m'}(\tau', \sigma'_1, \sigma'_2) = X^m(\tau, \sigma_1, \sigma_2) \longrightarrow \hat{\delta} X^m = \xi_a \partial^a X^m \quad (\text{απειροστός}), \quad (10.4)$$

όπου $\sigma'_a = \sigma_a + \xi_a(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ και ξ_a είναι απειροστά ανύσματα.

⁴¹Βλέπε την υποσημείωση 14 για μια περίληψη των συμβάσεων που χρησιμοποιούμε για τους δείκτες.

⁴²Στην παρούσα ενότητα, όλες οι παραλλαγές θα σημειώνονται ως $\hat{\delta}$ προκειμένου να αποφύγουμε τη σύγχυση με τις συντεταγμένες κοσμικού όγκου της μεμβράνης $\sigma_2 = \delta$.

10.1.2 Δράση Polyakov

Η δράση (Howe-Tucker-) Polyakov [128] για μια μποζονική M2-βράνη στις $D = d + 1$ χωροχρονικές διαστάσεις είναι:

$$S_P = -\frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \sqrt{-\gamma} \left(\gamma^{ab} h_{ab} - 1 \right), \quad (10.5)$$

με τις ίδιες συμβάσεις που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω. Η βοηθητική μετρική γ_{ab} είναι γνωστή ως η μετρική της μεμβράνης/κοσμικού όγκου.

Εξισώσεις Κίνησης

Παραλλάσσοντας το συναρτησιακό της δράσης ως προς τη μετρική της μεμβράνης γ_{ab} , λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$\hat{\delta}_\gamma S_P = 0 \Rightarrow \gamma_{ab} = h_{ab}. \quad (10.6)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση πίσω στη δράση (10.5), βλέπουμε ότι οι δράσεις DNG και Polyakov είναι ισοδύναμες εντός κελύφους (on-shell), έτσι ώστε αν παραλλάξουμε την (10.5) ως προς τις χωροχρονικές συντεταγμένες X^m , ανακτώνται οι εξισώσεις κίνησης (10.3).

Συμμετρίες

Για μια ακόμη φορά, η (10.5) κληρονομεί όλες τις (καθολικές) συμμετρίες της χωροχρονικής μετρικής $g_{mn}(X)$ και διαθέτει (τοπική) αναλλοιωτότητα ως προς αναπαραμετρήσεις/αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις:

$$X^{m'}(\tau', \sigma', \delta') = X^m(\tau, \sigma, \delta) \longrightarrow \hat{\delta} X^m = \xi_a \partial^a X^m \quad (\text{απειροστός}) \quad (10.7)$$

$$\gamma'_{ab}(\tau', \sigma', \delta') = \partial_a \sigma^c \partial_b \sigma^d \gamma_{cd}(\tau, \sigma, \delta) \longrightarrow \hat{\delta} \gamma_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a, \quad (10.8)$$

όπου πάλι $\sigma'_a = \sigma_a + \xi_a(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$, ξ_a είναι απειροστά ανύσματα και το ∇_a συμβολίζει τη συναλλοίωτη παράγωγο του κοσμικού όγκου.

Σε αντίθεση με τις χορδές, η δράση Polyakov για τις μεμβράνες δεν είναι πια αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Weyl, εξαιτίας του κοσμολογικού όρου στη δράση (10.5) που είναι ανάλογος του 1. Ο ταυυστής ενέργειας-ορμής είναι ίσος με το μηδέν και διατηρείται εντός κελύφους (on-shell):

$$T_{ab} \equiv \frac{-1}{T_2 \sqrt{-\gamma}} \frac{\hat{\delta} S_P}{\hat{\delta} \gamma^{ab}} = \frac{1}{2} \left[h_{ab} - \frac{1}{2} (h_c^c - 1) \gamma_{ab} \right] : \quad \nabla^a T_{ab} = 0. \quad (10.9)$$

Όρος Wess-Zumino

Σε γενικές γραμμές, οι μποζονικές M2-βράνες συζευγνύονται στις $D = d + 1$ διαστάσεις με τον εξής όρο ρόης Wess-Zumino (WZ) [129]:

$$S_{WZ} = -6 T_2 \int d^3\sigma \dot{X}^m \partial_\sigma X^n \partial_\delta X^p A_{mnp}(X), \quad (10.10)$$

όπου $p = 2$. Το αντισυμμετρικό πεδίο 3-μορφής $A_{mnp}(X)$ ορίζεται ως:

$$F_4 \equiv dA_3 \quad \Leftrightarrow \quad F_{mnpq} = 3\partial_{[m} A_{npq]}, \quad (10.11)$$

όπου F_4 είναι το πεδίο 4-μορφής. Οι εξισώσεις κίνησης της μεμβράνης τροποποιούνται ανάλογα ώστε να φιλοξενήσουν τον όρο (10.10).

10.1.3 Καθορισμός Βαθμίδας

Δεδομένης μιας δράσης που είναι αναλλοίωτη στις αναπαραμετρήσεις των 3 συντεταγμένων της μεμβράνης σ_a , ένα σύνολο 3 βαθμών ελευθερίας μπορεί να απαλειφθεί καθορίζοντας τη βαθμίδα με την κατάλληλη επιλογή των συντεταγμένων της μεμβράνης. Επειδή ο $\gamma_{ab} = h_{ab}$ είναι ένας 3×3 συμμετρικός πίνακας με 6 βαθμούς ελευθερίας, η διαδικασία καθορισμού της βαθμίδας αφήνει 3 βαθμούς ελευθερίας που συμπληρώνονται από 3 συνδέσμους [130, 131].

Μια ιδιαίτερα βολική επιλογή βαθμίδας είναι η ακόλουθη:

$$\gamma_{00} = h_{00} = -\frac{4}{\nu^2} \cdot \det h_{ij} = -\frac{2}{\nu^2} \{X^i, X^j\}^2 \quad \gamma_{0i} = h_{0i} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (10.12)$$

όπου ν είναι μία πραγματική σταθερά που διευκολύνει το πέρασμα στην περιγραφή με πίνακες/μήτρες που θα παρουσιαστεί αργότερα. Η δράση Polyakov (10.5) γράφεται:

$$S_P = \frac{\nu T_2}{4} \int d^3\sigma \left(g_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n - \frac{2}{\nu^2} g_{mn} g_{pq} \{X^m, X^p\} \{X^n, X^q\} \right). \quad (10.13)$$

Η αγκύλη Poisson $\{-, -\}$ ορίζεται ως εξής:

$$\{f, g\} \equiv \epsilon^{ij} \partial_i f \partial_j g = \partial_\sigma f \partial_\delta g - \partial_\delta f \partial_\sigma g. \quad (10.14)$$

Για τις συζυγείς ορμές $\pi^m = \nu T_2 \dot{X}^m / 2$, η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή είναι:

$$H = \frac{\nu T_2}{4} \int d^2\sigma \left(g_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n + \frac{2}{\nu^2} g_{mn} g_{pq} \{X^m, X^p\} \{X^n, X^q\} \right). \quad (10.15)$$

Παραλλαγή της (10.13) ως προς τις συντεταγμένες X^m δίδει τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{X}^m + \Gamma_{nr}^m \dot{X}^n \dot{X}^r - \frac{4}{\nu^2} \left\{ g_{pq} \Gamma_{nr}^m \{X^n, X^p\} \{X^r, X^q\} + g_{nr} \{ \{X^m, X^n\}, X^r \} - \right. \\ \left. - 2\Gamma_{nrp} \{X^m, X^r\} \{X^n, X^p\} \right\} = 0. \quad (10.16)$$

Οι σύνδεσμοι είναι:

$$\gamma_{00} = -\frac{4}{\nu^2} \cdot \det h_{ij} \Rightarrow g_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n + \frac{2}{\nu^2} g_{mn} g_{pq} \{X^m, X^p\} \{X^n, X^q\} = 0 \quad (10.17)$$

$$\gamma_{0i} = 0 \Rightarrow g_{mn} \dot{X}^m \partial_i X^n = \{g_{mn} \dot{X}^m, X^n\} = 0. \quad (10.18)$$

Παρά το γεγονός ότι η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε καθορίζει απόλυτα τη βαθμίδα, θα υπάρξουν φορές όπου κάποιες συντεταγμένες της μεμβράνης σ_a , δεν προσδιορίζονται κατά μοναδικό τρόπο. Αν ο χρόνος της μεμβράνης τ τυχαίνει να είναι μια τέτοια συντεταγμένη, μπορούμε να τον θέσουμε ίσο

με κάποια συνάρτηση των χωροχρονικών συντεταγμένων $\tau = \tau(X^m)$, χωρίς να επηρεάζεται η επιλογή της βαθμίδας ή να μειώνονται οι επιτρεπόμενοι βαθμοί ελευθερίας. Υπάρχουν δύο δημοφιλείς επιλογές βαθμίδας, ήτοι η στατική βαθμίδα $\tau = X^0$ και η βαθμίδα του κώνου φωτός $\tau \propto X^0 + X^i$ (όπου X^i είναι οποιαδήποτε από τις χωρικές χωροχρονικές συντεταγμένες).

Για να αποφασίσουμε λοιπόν αν κάποια βαθμίδα του κοσμικού όγκου είναι συμβατή με κάποια βαθμίδα χρόνου (η πιο γενικά κάποια συγκεκριμένη διάταξη μεμβράνης), θα πρέπει να τσεκάρουμε τις εξισώσεις κίνησης και τους συνδέσμους βαθμίδας για ασυνέπειες. Για παράδειγμα, η στατική βαθμίδα είναι καθαρά ασύμβατη με το ansatz (13.10) (και το (4.78) στην περίπτωση των χορδών), ενώ η βαθμίδα του κώνου φωτός είναι ασύμβατη με τα περισσότερα από τα ansätze που μελετώνται σε αυτή τη διατριβή.

10.1.4 Μεμβράνες σε Επίπεδο Χωρόχρονο

Σε επίπεδους χωροχρόνους $g_{mn} \mapsto \eta_{\mu\nu}$, η δράση Polyakov με καθορισμένη βαθμίδα (10.12)–(10.13) γίνεται:

$$S_P = \frac{\nu T_2}{4} \int d^3\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - \frac{2}{\nu^2} \{X^\mu, X^\nu\} \{X_\mu, X_\nu\} \right) \quad (10.19)$$

ενώ η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή είναι:

$$H = \frac{\nu T_2}{4} \int d^2\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{2}{\nu^2} \{X^\mu, X^\nu\} \{X_\mu, X_\nu\} \right). \quad (10.20)$$

Τα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται σε επίπεδους χωροχρόνους και έτσι οι εξισώσεις κίνησης (10.16) και οι σύνδεσμοι (10.17)–(10.18) γράφονται:

$$\ddot{X}^\mu - \frac{4}{\nu^2} \{ \{X^\mu, X^\nu\}, X_\nu \} = 0 \quad (10.21)$$

$$\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{2}{\nu^2} \{X^\mu, X^\nu\} \{X_\mu, X_\nu\} = 0 \quad \& \quad \dot{X}^\mu \partial_i X_\mu = \{ \dot{X}^\mu, X_\mu \} = 0. \quad (10.22)$$

Υπάρχει ένας κομψός τρόπος έκφρασης της επίπεδης Λαγκρανζιανής και των εξισώσεων κίνησης των μποζονικών μεμβρανών στις $D = d + 1$ διαστάσεις. Ορίζοντας τις χωροχρονικές συντεταγμένες κώνου φωτός $X^\pm$ ως:

$$X^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 \pm X^d) \quad (10.23)$$

και επιλέγοντας τη βαθμίδα κώνου φωτός

$$X^+ = \tau, \quad (10.24)$$

οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης και σύνδεσμοι βαθμίδας γράφονται:

$$\ddot{X}^- - \frac{4}{\nu^2} \{ \{X^-, X^j\}, X^j \} = 0 \quad \& \quad \ddot{X}^j - \frac{4}{\nu^2} \{ \{X^j, X^k\}, X^k \} = 0 \quad (10.25)$$

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2} \dot{X}^j \dot{X}^j + \frac{1}{\nu^2} \{X^j, X^k\} \{X^j, X^k\} \quad \& \quad \partial_i X^- = \dot{X}^j \partial_i X^j \Leftrightarrow \{ \dot{X}^j, X^j \} = 0, \quad (10.26)$$

όπου κατ'εξάφραση $i = 1, 2$ και $j, k = 1, 2, \dots, d-1$. Η Χαμιλτονιανή της μεμβράνης δίδεται από

$$H = \frac{\nu T_2}{4} \int d^2\sigma \left(\dot{X}^j \dot{X}^j + \frac{2}{\nu^2} \{X^j, X^k\} \{X^j X^k\} \right). \quad (10.27)$$

και η συνολική ορμή στην κατεύθυνση X^+ είναι

$$p^+ = \int_0^{2\pi} \pi^+ d^2\sigma = \int_0^{2\pi} \frac{\nu T_2}{2} \cdot \dot{X}^+ d^2\sigma = \frac{\nu}{2\ell_p^3}. \quad (10.28)$$

10.2 Μποζονικές p-Βράνες

Οι δράσεις Dirac-Nambu-Goto και Polyakov για τις M2-βράνες (μεμβράνες) που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούν να απευθείας να γενικευθούν στην περίπτωση εκτεταμένων μποζονικών αντικειμένων σε περισσότερες διαστάσεις, που είναι γνωστά ως Mp-βράνες. Η δράση DNG μιας μποζονικής Mp-βράνης που ζει στις $D = d + 1$ χωροχρονικές διαστάσεις ($d \geq p$) είναι [132, 133]:

$$S_{DNG} = -T_p \int d\tau d^p\sigma \sqrt{-h}, \quad (10.29)$$

όπου T_p είναι η τάση της Mp-βράνης και $\sigma_a = \{\tau, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ είναι οι συντεταγμένες κοσμικού όγκου της βράνης. Αν $g_{mn}(X)$ είναι η χωροχρονική μετρική και X_m οι αντίστοιχες συντεταγμένες, τότε η επαγόμενη μετρική στη βράνη h_{ab} θα δίδεται από:

$$h_{ab} \equiv \partial_a X^m \partial_b X^n g_{mn}(X), \quad h \equiv \det h_{ab} = \frac{1}{(p+1)!} \{X^{m_1}, X^{m_2}, \dots, X^{m_{p+1}}\}^2, \quad (10.30)$$

όπου η κλασσική αγκύλη Nambu $\{-, -, \dots, -\}$ ορίζεται ως:⁴³

$$\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \equiv \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \partial_{i_1} f_1 \partial_{i_2} f_2 \dots \partial_{i_n} f_n. \quad (10.31)$$

Η δράση Polyakov για μποζονικές Mp-βράνες είναι:

$$S_P = -\frac{T_p}{2} \int d\tau d^p\sigma \sqrt{-\gamma} \left[\gamma^{ab} h_{ab} - (p-1) \right], \quad (10.32)$$

όπου γ_{ab} είναι η (βοηθητική) μετρική κοσμικού όγκου της p-βράνης. Οι εξισώσεις κίνησης και οι συμμετρίες καθεμιάς από τις δράσεις της p-βράνης, είναι οι ίδιες με εκείνες που βρέθηκαν πιο πάνω για τις M2-βράνες, ήτοι (10.3)–(10.6) και τοπική αναλλοιωτότητα σε αναπαραμετρήσεις/αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις. Οι p-βράνες συζευγνύονται επίσης με έναν όρο ροής Wess-Zumino (WZ):

$$S_{WZ} = -\frac{T_p}{(p+1)!} \int d\tau d^p\sigma \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_{p+1}} \partial_{i_1} X^{m_1} \partial_{i_2} X^{m_2} \dots \partial_{i_{p+1}} X^{m_{p+1}} A_{m_1 m_2 \dots m_{p+1}}(X), \quad (10.33)$$

όπου ξανά,

$$F_{p+2} \equiv dA_{p+1} \Leftrightarrow F_{m_1 m_2 \dots m_{p+1}} = (p+1) \partial_{[m_1} A_{m_2 m_3 \dots m_{p+2}].} \quad (10.34)$$

⁴³Για περισσότερα, βλέπε [134] και τις εκεί αναφορές.

Η βαθμίδα μπορεί ξανά να καθοριστεί όπως πριν (10.12) χρησιμοποιώντας την αναλλοιώτητα της δράσης Polyakov (10.32) υπό αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις, με αποτέλεσμα να μετατρέψουμε τους αρχικούς $(p+1)(p+2)/2$ βαθμούς ελευθερίας που είναι παρόντες στη μετρική του κοσμικού όγκου $\gamma_{ab} = h_{ab}$, σε $p(p+1)/2$ βαθμούς ελευθερίας. Σε επίπεδο χωρόχρονο Minkowski, οι εξισώσεις κίνησης και σύνδεσμοι βαθμίδας της (αφόρτιστης) p-βράνης γίνονται:

$$\ddot{X}^\mu - \frac{4}{\nu^2 (p-1)!} \{ \{X^\mu, X^{\mu_1}, \dots, X^{\mu_{p-1}}\}, X_{\mu_1}, \dots, X_{\mu_{p-1}} \} = 0 \quad (10.35)$$

$$\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{4}{\nu^2 p!} \{X^{\mu_1}, \dots, X^{\mu_p}\}^2 = 0 \quad \& \quad \dot{X}^\mu \partial_i X_\mu = 0 \quad (10.36)$$

και η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή είναι:

$$H = \frac{\nu T_2}{4} \int d^2\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{4}{\nu^2 p!} \{X^{\mu_1}, \dots, X^{\mu_p}\}^2 \right). \quad (10.37)$$

10.2.1 Αμφιδιαφορίσιμες Απεικονίσεις που Διατηρούν τον Όγκο

Υπάρχει μια πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα της κλασσικής αγκύλης του Nambu που επιτρέπει αν ταυτοποιήσουμε την ομάδα των αμφιδιαφορίσιμων απεικονίσεων που διατηρούν την επιφάνεια με μια εναπομείνασα συμμετρία της p-βράνης, της οποίας έχουμε καθορίσει τη βαθμίδα. Χρησιμοποιήσαμε σιωπηρά την ιδιότητα αυτή κατά τον καθορισμό της βαθμίδας στις (10.12)–(10.30). Γενικά μιλώντας, η κλασσική αγκύλη Nambu υπακούει την ακόλουθη ταυτότητα:

$$\det(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu) = \frac{1}{p!} \{X^{\mu_1}, X^{\mu_2}, \dots, X^{\mu_p}\}^2 \quad (10.38)$$

έτσι ώστε ο χωρικός κοσμικός όγκος της Mp-βράνης να δίδεται από:

$$\int_\Sigma d^p\sigma \sqrt{\det(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu)} = \int_\Sigma d^p\sigma \sqrt{\frac{1}{p!} \cdot \{X^{\mu_1}, X^{\mu_2}, \dots, X^{\mu_p}\}^2}. \quad (10.39)$$

Παρατηρούμε ότι η Χαμιλτονιανή της επίπεδης μποζονικής Χαμιλτονιανής της p-βράνης (10.37) είναι αναλλοίωτη κάτω από χρονικά αναλλοίωτους μετασχηματισμούς που διατηρούν το χωρικό κοσμικό όγκο (10.39). Αυτοί είναι γνωστοί ως αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις που διατηρούν τον όγκο, SDiff(Σ). Η διατύπωση αυτή επιδέχεται κατάλληλων γενικεύσεων σε καμπύλους χωροχρόνους και σε υπερσυμμετρικές βράνες.

Οι M2-βράνες είναι αναλλοίωτες κάτω από αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις που διατηρούν την επιφάνεια. Οι SDiff(S^2) μπορούν να προσεγγιστούν από την ομάδα $\mathfrak{su}(N \rightarrow \infty)$, όπου N είναι η διάσταση του πίνακα της κανονικοποιημένης μεμβράνης. Αντίστοιχες προτάσεις μπορούν να διατυπωθούν και για μεμβράνες μεγαλύτερου γένους.

10.3 Υπερμεμβράνες

Οι γενικεύσεις των υπερχορδών σε υψηλότερες διαστάσεις (π.χ. υπέρ p-βράνες) ευνοούν το φορμαλισμό Green-Schwarz (GS), όπου η χωροχρονική υπερσυμμετρία είναι εμφανής και όχι η υπερσυμμετρία του κοσμικού όγκου. Είδαμε πίσω στην §2.4 ότι ο φορμαλισμός GS ήταν επίσης χρήσιμος στη διατύπωση της Λαγκρανζιανής της IIB θεωρίας χορδών εντός του $\text{AdS}_5 \times S^5$.

Σε αυτή τη σύντομη ενότητα πρόκειται να προσπελάσουμε σύντομα το φορμαλισμό GS της 11-διάστατης υπερμεμβράνης. Περισσότερα μπορούν να βρεθούν στο αυθεντικό άρθρο [135], καθώς επίσης και τις ανασκοπήσεις [136, 132]. Χωρίς να μπορούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες, η γενίκευση σε υψηλότερες διαστάσεις χωροχρόνου και κοσμικού όγκου είναι σχετικά απλή πλην όμως κάπως προβληματική.

Έστω ότι οι Z^M κωδικοποιούν τις μποζονικές/φερμιονικές συντεταγμένες του καμπύλου υπερχώρου (superspace):

$$Z^M = (X^m, \theta_\alpha), \quad M = (m, \alpha), \quad m = 0, \dots, 11, \quad \alpha = 1, \dots, 32 \quad (10.40)$$

και Π_a^A είναι το pull-back του αντίστοιχου supervielbein E_M^A :

$$\Pi_a^A = \partial_a Z^M E_M^A, \quad A = (\mu, \dot{\alpha}), \quad \mu = 0, \dots, 11, \quad \dot{\alpha} = 1, \dots, 32, \quad a = 0, 1, 2. \quad (10.41)$$

Τότε η δράση της 11-διάστατης υπερμεμβράνης δίδεται από

$$S = -T_2 \int d^3\sigma \left\{ \sqrt{-h} + \epsilon^{abc} \Pi_a^A \Pi_b^B \Pi_c^C B_{CBA} \right\}, \quad (10.42)$$

όπου το πεδίο 3-μορφής B_{CBA} συζευγνύεται με την 11-διάστατη υπερβαρύτητα, κατάλληλα διατυπωμένη στον υπερχώρο [137], και

$$h_{ab} \equiv \gamma^{ab} \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad h \equiv \det h_{ab}. \quad (10.43)$$

Εναλλακτικά, η δράση της υπερμεμβράνης μπορεί να εκφραστεί μέσω της βοηθητικής μετρικής γ_{ab} ως εξής:

$$S = -\frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \left\{ \sqrt{-\gamma} [\gamma^{ab} h_{ab} - 1] + 2\epsilon^{abc} \Pi_a^A \Pi_b^B \Pi_c^C B_{CBA} \right\}. \quad (10.44)$$

Οι δράσεις (10.42)–(10.44) είναι αναλλοίωτες κάτω από τις 3-διάστατες αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις/αναπαραμετρήσεις των συντεταγμένων του υπερχώρου Z^M , όπως επίσης και των τοπικών φερμιονικών κ -μετασχηματισμών. Σαν συνάρτηση των πεδίων του υποβάθρου E_M^A και B_{CBA} , οι δράσεις (10.42)–(10.44) είναι επίσης αναλλοίωτες κάτω από τους 11-διάστατους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Όπως στην περίπτωση των μποζονικών μεμβρανών, οι (10.42)–(10.44) μπορούν να παραλλαχθούν ως προς τις συντεταγμένες του υπερχώρου Z^M και τη μετρική του κοσμικού όγκου γ_{ab} , γεννώντας τα υπερσυμμετρικά ανάλογα των μποζονικών εξισώσεων κίνησης (10.3)–(10.6).

Για να βρούμε την υπερσυμμετρική δράση στον επίπεδο 11-διάστατο χωρόχρονο, πρέπει να θέσουμε:

$$E_m^\mu = \delta_m^\mu, \quad E_m^\alpha = 0 \quad (10.45)$$

$$E_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha, \quad E_\alpha^\mu = -i(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} \theta^\beta \quad (10.46)$$

$$B_{mn\alpha} = -\frac{i}{6} (\Gamma_{mn}\theta)_\alpha, \quad B_{m\alpha\beta} = -\frac{1}{6} (\Gamma_{mn}\theta)_{(\alpha} (\Gamma^n\theta)_{\beta)} \quad (10.47)$$

$$B_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{i}{6} (\Gamma_{\mu\nu}\theta)_{(\alpha} (\Gamma^\mu\theta)_\beta (\Gamma^\nu\theta)_{\gamma)}, \quad B_{mnr} = 0, \quad (10.48)$$

όπου θ_α είναι σπίνορες Majorana 32 όρων και $E_\alpha^\alpha = \delta_\alpha^\alpha$. Η δράση στον επίπεδο χωρόχρονο γράφεται,

$$S = -\frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \left\{ \sqrt{-\gamma} \left[\gamma^{ab} \Pi_a^\mu \Pi_{b\mu} - 1 \right] + \right. \\ \left. + i\epsilon^{abc} (\bar{\theta} \Gamma_{mn} \partial_a \theta) \left[\Pi_b^m \Pi_c^n + i \Pi_b^m (\bar{\theta} \Gamma^n \partial_c \theta) - \frac{1}{3} (\bar{\theta} \Gamma^m \partial_b \theta) (\bar{\theta} \Gamma^n \partial_c \theta) \right] \right\}, \quad (10.49)$$

όπου

$$\Pi_a^m = \partial_a X^m - i \bar{\theta} \Gamma^m \partial_a \theta. \quad (10.50)$$

Επιπλέον της τοπικής αναλλοιώτητας σε αναπαραμετρήσεις και μετασχηματισμούς κ , η (10.49) είναι αναλλοιώτη κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς Poincaré. Όπως πριν, μπορούμε να καθορίσουμε τη βαθμίδα όπως στην (10.12) και να βρούμε τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης και συνδέσμους κατά τον συνηθισμένο τρόπο. Η φερμιονική συμμετρία κ της υπερμεμβράνης καθορίζεται ως εξής:

$$\Gamma^+ \theta = 0, \quad (10.51)$$

όπου οι 11-διάστατοι (32×32) πίνακες γάμμα του κώνου φωτός ορίζονται ως:

$$\Gamma^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^0 + \Gamma^{10}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix} \quad (10.52)$$

$$\Gamma^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (-\Gamma^0 + \Gamma^{10}) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.53)$$

$$\Gamma^i \equiv \begin{pmatrix} \gamma_i & 0 \\ 0 & -\gamma_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 9, \quad (10.54)$$

όπου γ_i είναι 16×16 ευκλείδειοι πίνακες γάμμα ($\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}$). Αν επιπλέον καθορίσουμε και τη βαθμίδα του κώνου φωτός όπως στην (10.24), η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή της υπερμεμβράνης απλοποιείται σημαντικά. Το αποτέλεσμα είναι:

$$H = \frac{\nu T_2}{4} \int d^2\sigma \left[\dot{X}^j \dot{X}^j + \frac{2}{\nu^2} \{X^j, X^k\} \{X^j X^k\} - \frac{4}{\nu} \theta^T \gamma_i \{X^i, \theta\} \right], \quad (10.55)$$

όπου θ είναι σπίνορες Majorana με 16 όρους.

Στην §2.4 διατυπώσαμε τη δράση της IIB υπερχορδής στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ αλλά Metsaev και Tseytlin, ήτοι γράφοντάς την σαν ένα μη γραμμικό σίγμα μοντέλο (NLSM) στον υπερσύμπλοκο χώρο (2.10). Με τον πλήρη φορμαλισμό για την υπερμεμβράνη των GS στη διάθεσή μας, μπορούμε παρομοίως να προχωρήσουμε και να καταστρώσουμε τις Λαγκρανζιανές για τις υπερμεμβράνες στα καμπύλα 11-διάστατα υπόβανθρα της αντιστοιχίας AdS/CFT που αποτελούν κομμάτι ορισμένων ακριβών λύσεων της 11-διάστατης υπερβαρύτητας, ήτοι τους χώρους $\text{AdS}_{4,7} \times S^{7,4}$. Οι αντίστοιχοι υπερσύμπλοκοι χώροι είναι:

$$\frac{F_1}{G_1} = \frac{\mathfrak{osp}(8|4)}{\mathfrak{so}(3,1) \times \mathfrak{so}(7)} \quad \& \quad \frac{F_2}{G_2} = \frac{\mathfrak{osp}(6,2|4)}{\mathfrak{so}(6,1) \times \mathfrak{so}(4)}. \quad (10.56)$$

Περισσότερα για την υπερσυμμετρική δράση σε αυτά τα υπόβανθρα μπορεί να βρεθεί στις εργασίες [138].

10.3.1 11-Διάστατη Υπερβαρύτητα

Ας εξετάσουμε τώρα σύντομα τη θεωρία που συζευγνύεται στην 11-διάστατη υπερμεμβράνη, ήτοι την 11-διάστατη υπερβαρύτητα. Περισσότερα μπορούν να βρεθούν στο αυθεντικό άρθρο των Cremmer-Julia-Scherk (CJS) [139], όπως επίσης και σε αρκετά βιβλία, π.χ. [140].

Η Λαγκρανζιανή της 11-διάστατης υπερβαρύτητας (εν συντομία 1₁₁ sugra) αποτελείται από τρία πεδία, το γκραβιτόνιο/elfbein e_m^μ , το γκραβιτίνο Majorana ψ_m και το αντισυμμετρικό πεδίο 3-μορφής A_{mnp} (10.11):

$$\mathcal{L} = -\frac{e}{2\kappa_{11}^2} R - \frac{ie}{2} \bar{\psi}_m \Gamma^{mnr} D_n \psi_r - \frac{e}{48} F_{mnr s} F^{mnr s} + \frac{\sqrt{2} e \kappa_{11}}{384} \left(\bar{\psi}_m \Gamma^{mnr spq} \psi_n + 12 \bar{\psi}^r \Gamma^{pq} \psi^s \right) \left(F_{rspq} + \hat{F}_{rspq} \right) + \frac{\sqrt{2} \kappa_{11}}{144^2} \epsilon^{m_1 \dots m_{11}} F_{m_1 \dots m_4} F_{m_5 \dots m_8} A_{m_n \dots m_{11}}, \quad (10.57)$$

όπου ακολουθήσαμε τις συμβάσεις της εργασίας των CJS, σύμφωνα με την οποία $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, \dots, -)$,⁴⁴

$$K_{m\rho\sigma} \equiv \frac{i\kappa_{11}^2}{8} \left[-\bar{\psi}_p \Gamma_{m\rho\sigma}{}^{pq} \psi_q + (\bar{\psi}_m \Gamma_\sigma \psi_\rho - \bar{\psi}_m \Gamma_\rho \psi_\sigma + \bar{\psi}_\sigma \Gamma_m \psi_\rho) \right] \quad (10.58)$$

$$\omega_{m\rho\sigma} \equiv \omega_{m\rho\sigma}^0 + K_{m\rho\sigma} \quad \& \quad \hat{\omega}_{m\rho\sigma} \equiv \omega_{m\rho\sigma} + \frac{i\kappa_{11}^2}{8} \bar{\psi}_p \Gamma_{m\rho\sigma}{}^{pq} \psi_q \quad (10.59)$$

$$D_n \equiv \partial_n + \frac{1}{8} (\omega_{n\rho\sigma} + \hat{\omega}_{n\rho\sigma}) \Gamma^{\rho\sigma} \quad (10.60)$$

$$F_{mnr s} \equiv 4\partial_{[m} A_{nr s]} \quad \& \quad \hat{F}_{mnr s} \equiv F_{mnr s} - \frac{3\kappa_{11}}{\sqrt{2}} \psi_{[m} \Gamma_{nr} \psi_{s]}, \quad (10.61)$$

$\kappa_{11}^2 \equiv 8\pi G_{11}$, e είναι η ορίζουσα του elfbein $e \equiv \det e_m^\mu = \sqrt{-g}$ και $\omega_{m\rho\sigma}^0$ είναι η συνοχή Christoffel. Χρειάζεται προσοχή προκειμένου να διακρίνει κανείς τα σύμβολα Christoffel της §10.1 και τους 32×32 πίνακες γάμμα του Dirac στις $D = 11$ διαστάσεις που εμφανίζονται στην παρούσα ενότητα:

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \Gamma^m = e_\mu^m \Gamma^\mu. \quad (10.62)$$

Ας σημειωθεί επίσης ότι το σύμβολο $\{, \}$ είναι ο αντιμεταθέτης και όχι η αγκύλη Poisson (10.14) της §10.1. Το μποζονικό μέρος της δράσης (10.57) ευρίσκεται θέτοντας το πεδίο του γκραβιτίνου ψ_m ίσο με το μηδέν:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{e}{2\kappa_{11}^2} R - \frac{e}{48} F_{mnr s} F^{mnr s} + \frac{\sqrt{2} \kappa_{11}}{144^2} \epsilon^{m_1 \dots m_{11}} F_{m_1 \dots m_4} F_{m_5 \dots m_8} A_{m_n \dots m_{11}}. \quad (10.63)$$

10.4 Θεωρία M(ητρώων)

10.4.1 Κανονικοποιημένες Μεμβράνες με Μήτρες

Οι 2-διάστατες σφαιρικές επιφάνειες μπορούν να κανονικοποιηθούν με τη βοήθεια μιας πολύ έξυπνης μεθόδου που βρήκαν οι Goldstone και Hoppe το 1982 [130]. Ας θεωρήσουμε μια δισδιάστατη μοναδιαία

⁴⁴Με την εξαίρεση της παρούσας παραγράφου, η μετρική που χρησιμοποιούμε σε αυτή τη διατριβή είναι μια μετρική με «πλεόνασμα συν» ("mostly plus") όπως συνηθίζεται να λέγεται. Είμαστε παρά ταύτα κάπως ασυνεπείς με τις συμβάσεις μας σε αυτή την ενότητα, μιας και ο κυρίως σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε σύντομα την αυθεντική διατύπωση της 11-διάστατης υπερβαρύτητας, χωρίς να υπεισέλθουμε σε πολλές λεπτομέρειες.

σφαίρα,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (10.64)$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x_1 = \cos \varphi \sin \vartheta, \quad x_2 = \sin \varphi \sin \vartheta, \quad x_3 = \cos \vartheta. \quad (10.65)$$

Για τις μεταβλητές του κοσμικού όγκου $\sigma_1 = \varphi$, $\sigma_2 = \cos \vartheta$, οι αγκύλες Poisson των x_i ικανοποιούν,

$$\{x_i, x_j\} = e_{ijk} x_k, \quad (10.66)$$

σχέση που θυμίζει πολύ την άλγεβρα $\mathfrak{su}(2)$. Κάνουμε τις ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$$x_i \mapsto \frac{2}{N} \mathbf{J}_i, \quad \{, \} \mapsto -\frac{iN}{2} [,], \quad \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \dots \mapsto \frac{1}{N} \text{Tr} [\dots] \quad (10.67)$$

όπου οι $N \times N$ πίνακες $\mathbf{J}_i$ δίνουν μια αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(2)$ με σπίν ίσο προς $(N-1)/2$:

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = ie_{ijk} \mathbf{J}_k. \quad (10.68)$$

Οι κανόνες αντικατάστασης (10.67) υποδεικνύουν έναν τρόπο κανονικοποίησης των σφαιρικών μποζονικών μεμβρανών καθορισμένης βαθμίδας εντός επίπεδου υπόβαθρου, που περιγράφονται από το σύστημα (10.25)–(10.27). Οι χωρικές χωροχρονικές συντεταγμένες X^i αναβαθμίζονται σε $N \times N$ πίνακες $\mathbf{X}^i$, οι αγκύλες Poisson αντικαθίστανται από μεταθέτες και τα ολοκληρώματα από ίχνη ως εξής:

$$x_i \mapsto \mathbf{X}_i, \quad \{, \} \mapsto -\frac{iN}{2} [,], \quad \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \dots \mapsto \frac{1}{N} \text{Tr} [\dots]. \quad (10.69)$$

Με την (10.69), η Χαμιλτονιανή (10.27) γίνεται:

$$H = \frac{1}{2\pi\ell_p^3} \cdot \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^i \dot{\mathbf{X}}^i - \frac{1}{4} [\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j] [\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j] \right), \quad (10.70)$$

όπου το ν στην (10.27) έχει τεθεί ίσο με τη διάσταση του πίνακα N . Η κανονικοποιημένες (χωρικές) εξισώσεις κίνησης και σύνδεσμοι (10.25)–(10.26) γράφονται:

$$\ddot{\mathbf{X}}^i + \left[[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j], \mathbf{X}^k \right] = 0 \quad \& \quad \left[\dot{\mathbf{X}}^i, \mathbf{X}^j \right] = 0. \quad (10.71)$$

Για υπερσυμμετρία, οι κανόνες (10.69) μπορούν να εφαρμοσθούν στην υπερσυμμετρική Χαμιλτονιανή (10.55). Το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως Θεωρία Μητρών [141]:

$$H_0 = \frac{1}{2\pi\ell_p^3} \cdot \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^i \dot{\mathbf{X}}^i - \frac{1}{4} [\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j] [\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j] + \theta^T \gamma_i [\mathbf{X}^i, \theta] \right), \quad (10.72)$$

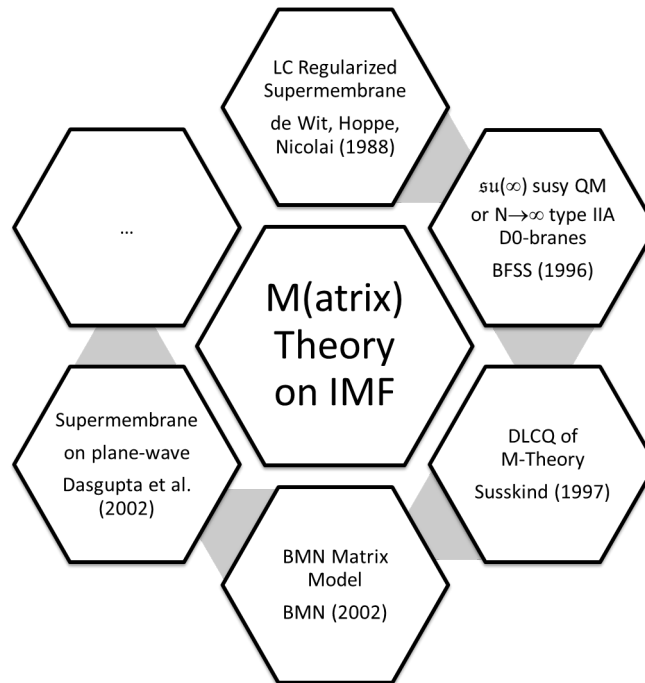
η οποία παρότι εξήχθη μόνο για σφαιρικές μεμβράνες,⁴⁵ μπορεί να γενικευθεί απευθείας σε υπερσυμμετρικές μεμβράνες αυθαίρετων τοπολογιών με τον κανόνα αντικατάστασης (10.69).

Είναι γνωστό ότι η θεωρία των κλασικών (μποζονικών και υπερσυμμετρικών) μεμβρανών υποφέρει

⁴⁵Η περίπτωση του δισδιάστατου τόρου μπορεί να μελετηθεί στα πρότυπα της δισδιάστατης σφαίρας. Περισσότερα μπορούν να βρεθούν στις εργασίες [142].

από ανθεράπευτες αστάθειες που εμποδίζουν κάθε λογική προσπάθεια κβάντωσης της θεωρίας. Η θεωρία των μητρών ωστόσο μοιάζει να θεραπεύει το πρόβλημα στην περίπτωση των μποζονικών μεμβρανών (10.70). Ο τρόπος σκέψης είναι ο εξής: οι επίπεδες διευθύνσεις («αιχμές») τελικά δεν ευνοούνται, διότι συντελούν στην εμφάνιση ενός μεγάλου ενεργού δυναμικού εγκλωβισμού το οποίο σταθεροποιεί το σύστημα.

Από τη άλλη μεριά, η υπερσυμμετρική θεωρία των μητρών (10.72) επαναφέρει τις αστάθειες υπό τη μορφή συνεχούς φάσματος για την υπερμεμβράνη [143]. Η φερμιονική συνεισφορά στην ενέργεια της μεμβράνης είναι η ακριβώς αντίθετη της μποζονικής με αποτέλεσμα το φάσμα της υπερμεμβράνης να μην είναι πια διακριτό (I) και να μην μπορεί ενδεχομένως να συσχετισθεί με σωματίδια. Όπως θα δούμε παρακάτω, η υπόθεση των BFSS [144] παρέχει μια πολύ ικανοποιητική εξήγηση για αυτό το γεγονός, που παύει να είναι πια προβληματικό.



10.4.2 Η Υπόθεση της Θεωρίας των Μητρών

Η υπόθεση της θεωρίας των μητρών (γνωστή επίσης και ως υπόθεση των BFSS) [144], ισχυροποίησε τη στενή σύνδεση μεταξύ της θεωρίας των κβαντικών υπερμεμβρανών και της M-θεωρίας που προτάθηκε από τον Townsend στη διάρκεια της επανάστασης της M-θεωρίας. Οι Banks, Fischler, Shenker και Susskind (BFSS) παρατήρησαν ότι η Χαμιλτονιανή για N το πλήθος D0-βρανών τύπου IIA, σε χαμηλές ενέργειες είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη της θεωρίας μητρών (10.72). Με δεδομένο ότι η IIA θεωρία χορδών προκύπτει από την συμπαγοποίηση της M-θεωρίας στην S^1 και αυτή με τη σειρά της είναι μη σχετικιστική στο σύστημα άπειρης ορμής (infinite-momentum frame—IMF), οι BFSS κατέληξαν στο εξής:

$$\left. \begin{array}{l} \#N \rightarrow \infty, \text{ (μη σχετικιστικές) D0-βράνες τύπου IIA} \\ \text{su}(\infty) \text{ susy QM (10.72)} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \text{M-θεωρία συμπαγοποιημένη} \\ \text{στο IMF.} \end{array} \quad (10.73)$$

Με την υπόθεση της θεωρίας μητρών, το πρόβλημα των συνεχών φασμάτων της υπερμεμβράνης επιλύεται, καθώς οι υπερμεμβράνες αντιμετωπίζονται όχι ως στοιχειώδη αντικείμενα αλλά ως σύνθετα αντικείμενα που αποτελούνται από γκραβιτόνια = D0-βράνες. Η ενέργεια ενός συστήματος που περιέχει δύο ή περισσότερα γκραβιτόνια μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή και η θεωρία των υπερμητρών με $N \geq 2$

περιέχει πολυσωματιδιακές καταστάσεις με συνεχή φάσματα.

Η εκδοχή της υπόθεσης της θεωρίας μητρών με πεπερασμένο N προτάθηκε το 1997 από τον Susskind [145]. Αντί της M-θεωρίας στο IMF, η θεωρία μητρών με πεπερασμένο N (10.72) είναι ισοδύναμη με έναν τομέα της M-θεωρίας όπου ο καθυστερημένος χρόνος x^- έχει ταυτοποιηθεί περιοδικά. Το τελευταίο είναι γενικά γνωστό ως διακριτή κβάντωση κώνου φωτός (discrete light-cone quantization—DLCQ):

$$\left. \begin{array}{l} \#N \text{ (χαμηλή ενέργεια) D0-βράνες τύπου IIA} \\ \text{su}(N) \text{ susy QM (10.72)} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \text{DLCQ τομέας της M-θεωρίας με} \\ \#N \text{ μονάδες συμπαγούς ορμής.} \end{array} \quad (10.74)$$

Συνοψίζοντας, η θεωρία μητρών είναι μια εγγενής θεωρία πολλών σωμάτων και παρέχει ένα μοντέλο δεύτερης κβάντωσης της M-θεωρίας στο επίπεδο 11-διάστατο χωρόχρονο. Οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις στην θεωρία μητρών προκύπτουν από τη συμπερίληψη κβαντικών φαινομένων.

10.4.3 Θεωρία Μητρών σε Καμπύλους Χωροχρόνους

Η Χαμιλτονιανή της θεωρίας μητρών (10.72) και η αντίστοιχες υποθέσεις (10.73)–(10.74) έχουν διατυπωθεί και ισχύουν μόνο σε επίπεδα 11-διάστατα υπόβανθρα. Είναι φυσικό να θέλουμε να καταστρώσουμε μοντέλα μητρών για την M-θεωρία σε καμπύλα 11-διάστατα υπόβανθρα και ιδιαίτερα σε υπόβανθρα επίπεδων κυμάτων και τους χωροχρόνους $\text{AdS}_{4,7} \times S^{7,4}$ που σχετίζονται ευθέως με ακριβείς λύσεις της 11-διάστατης υπερβαρύτητας.

Μία DLCQ περιγραφή της 6-διάστατης υπερσύμμορφης θεωρίας $A_{N-1}(2,0)$, η οποία όπως είδαμε στην §2.7 είναι ολογραφικά δυϊκή στην M-θεωρία στον $\text{AdS}_7 \times S^4$ προτάθηκε στις εργασίες [146]. Βασίζεται στην κβαντομηχανική επί ορισμένων κατάλληλα ορισμένων moduli χώρων instanton. Η θεωρία μητρών σε ασθενώς καμπυλωμένα υπόβανθρα μελετήθηκε από τους Taylor και Van Raamsdonk [147].

Το 2002, οι Berenstein, Maldacena και Nastase (BMN) [32] πρότειναν μία περιγραφή DLCQ της M-θεωρίας με ένα μοντέλο μητρών επί του ακόλουθου (ομογενούς) υπόβανθρου επίπεδου κύματος:

$$ds^2 = -2dudv - \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\mu^2}{9} x^i x^i - \sum_{j=4}^9 \frac{\mu^2}{36} x^j x^j \right] du^2 + \sum_{i=1}^9 dx^i dx^i. \quad (10.75)$$

Η DLCQ περιγραφή της M-θεωρίας επί του ομογενούς επίπεδου κύματος (10.75), δίδεται από την ακόλουθη Χαμιλτονιανή:

$$H = H_0 + \frac{1}{2} \cdot \text{Tr} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\mu^2}{9} \mathbf{X}_i^2 + \sum_{j=4}^9 \frac{\mu^2}{36} \mathbf{X}_j^2 - \frac{i\mu}{8} \theta^T \gamma_{123} \theta - \frac{2i\mu}{3} \epsilon^{ijk} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_j \mathbf{X}_k \right). \quad (10.76)$$

Για λόγους απλότητας, παραλείψαμε τον εξωτερικό παράγοντα που είναι ανάλογος του μήκους Planck. Οι συγγραφείς της εργασίας [148] έδειξαν ότι το μοντέλο μητρών των BMN (10.76), μπορεί να εξαχθεί είτε κανονικοποιώντας την υπερμεμβράνη στο υπόβανθρο επίπεδου κύματος (10.75), ή από τη δυναμική των D0-βρανών τύπου IIA.

Μέρος IV

Περιστρεφόμενες Μεμβράνες

11 Εισαγωγή

Έχοντας εισαγάγει τις υπερσυμμετρικές βράνες και παρουσιάσει τις κυριότερες ιδέες γι'αυτές, είμαστε έτοιμοι να εστιάσουμε στην αντιστοιχία AdS/CFT και να θέσουμε την ερώτηση κατά πόσο η μελέτη των βρανών ως αυτόνομων οντοτήτων μπορεί να φωτίσει κάποιες πτυχές της δυαδικότητας και να συνεισφέρει στην κατάρτιση του «λεξιικού» της αντιστοιχίας. Ωστόσο, πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι η διαδικασία της μετάβασης από τα σωματίδια και τις χορδές στις p-βράνες μπορεί πολλές φορές να είναι ιδιαίτερα δυσχερής. Αστάθειες, ανωμαλίες, μη επανακανονικοποιησιμότητα, μη ολοκληρωσιμότητα, αδύνατη κβάντωση, απουσία αλληλεπιδράσεων και θεωρίας διαταραχών, είναι κάποια από τα προβλήματα που πάντοτε ταλαιπωρούσαν τις Mp-βράνες. Όλα αυτά τα προβλήματα πιθανότατα παραμένουν και στην αντιστοιχία AdS/CFT. Συνεπώς, μια λογική στρατηγική θα συνιστούσε την επένδυση μόνο σε εκείνα τα χαρακτηριστικά των βρανών που έχουν μεγαλύτερες πιθανότητες να ταιριάζουν σε ένα αυτοσυνεπές πλαίσιο.

Σε αυτή τη βάση, επιλέξαμε να επικεντρωθούμε στη μελέτη των χορδοειδών ιδιοτήτων των κλασικών M2-βρανών που ζουν στους 11-διάστατους χωροχρόνους που σχετίζονται με την αντιστοιχία AdS/CFT. Οι M2-βράνες στα χαμπύλα 11-διάστατα υπόβαθρα όπως το $\text{AdS}_m \times S^n$ είναι σχετικά απρόσβλητες από τις συνήθειες «ασθενείες» των Mp-βρανών. Ακόμη και στο σενάριο της χειρότερης περίπτωσης όπου οι 11-διάστατες M2-βράνες στο χώρο anti-de Sitter αποδειχθούν προβληματικές, εμείς επιλέξαμε να επενδύσουμε στην ίσως πιο αξιόπιστη πτυχή τους, τη χορδοειδή συμπεριφορά τους. Η σκοπός του μέρους IV αυτής της διατριβής είναι επομένως διττός:

1. Κατανόηση του ρόλου των Mp-βρανών στην αντιστοιχία AdS/CFT.
2. Μελέτη της χορδοειδούς συμπεριφοράς των M2-βρανών στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT.

Στο μέρος II αυτής της διατριβής, μελετήσαμε εκτενώς τις τρεις βασικές διατάξεις των χορδών GKP και εξηγήσαμε λεπτομερώς όλες τους τις αρετές σε ό,τι αφορά στην αντιστοιχία AdS/CFT. Οι χορδές GKP μεταφέρουν σημαντική πληροφορία για τη διαβάθμιση των δυϊκών καταστάσεων της θεωρίας βαθμίδας σε ισχυρή σύζευξη, την οποία είναι αδύνατο να εξαγάγουμε με διαφορετικό (ήτοι διαταρακτικό) τρόπο. Στο παρόν μέρος, θα αποδείξουμε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των μεμβρανών εντός του χώρου anti-de Sitter, ήτοι ότι αυτές είναι ικανές να κωδικοποιήσουν όλη τη δυναμική των χορδών GKP. Στην πράξη όμως, οι μεμβράνες στον AdS είναι ικανές να αναπαράξουν όχι μόνο τις χορδές GKP εντός του χώρου anti-de Sitter, αλλά και κάθε κλασική διάταξη χορδής εντός του $\text{AdS}_5 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$.

Οι «χορδοειδείς μεμβράνες» είναι κυριολεκτικά διατάξεις μεμβρανών που προσομοιάζουν σε διατάξεις χορδών. Ορίζονται σε χωροχρόνους που διαθέτουν μια συμπαγή υποπολλαπλότητα, όπως είναι όλα τα υπόβαθρα που σχετίζονται με την αντιστοιχία AdS/CFT (και που απαριθμούνται στην §2.7). Η ουσιαστική τους ιδιότητα είναι ότι έχουν τυλιχθεί γύρω από μία εκ των συμπαγών διαστάσεων του υποβάθρου και αναπαράγουν τη δράση, τις εξισώσεις κίνησης και τα φορτία μιας χορδής που ζει στο μη συμπαγές μέρος του χωροχρόνου. Η κατασκευή αυτή έχει δύο ενδιαφέρουσες συνέπειες. Πρώτον, στο επίπεδο των κλασικών διαταραχών των χορδοειδών μεμβρανών στον $\text{AdS}_m \times S^n$, μοιάζει να υπάρχει ένα άπειρο πλήθος από αμιγώς μεμβρανοειδείς συνιστώσες, επιπλέον εκείνων που είναι αμιγώς χορδοειδείς. Δεύτερον, όπως ακριβώς το ταίριασμα παραμέτρων της $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ προσδίδει στις χορδές του εσωτερικού (bulk) του AdS μια ενεργή τάση χορδής που είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα της σταθεράς σύζευξης $\sqrt{\lambda}$ του 't Hooft, οι χορδοειδείς μεμβράνες προικίζονται παρομοίως με μια ενεργή τάση που ισούται με $\sqrt{\lambda'} = R\sqrt{\lambda}/g_s \ell_s$.⁴⁶

⁴⁶ R είναι η ακτίνα της συμπαγούς διάστασης, g_s είναι η σταθερά σύζευξης και ℓ_s είναι το θεμελιώδες μήκος της χορδής.

Μια οικογένεια χορδοειδών μεμβρανών με τις παραπάνω ιδιότητες μπορεί να ληφθεί εμβαπτίζοντας τη (σύμμορφη) δράση Polyakov για τη μποζονική χορδή εντός του AdS_5 , στη δράση Polyakov των μεμβρανών στον $\text{AdS}_7 \times S^4$. Μπορεί στη συνέχεια ναδειχθεί ότι η δράση, οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι Virasoro κάθε λύσης χορδών εντός του AdS_5 δύνανται να αναπαράχθουν από μια κατάλληλα κατασκευασμένη μεμβράνη του $\text{AdS}_7 \times S^4$. Παρομοίως, κάθε διάταξη χορδής εντός του $\text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_5$ μπορεί να αναπαράχθαι από μια χορδοειδή μεμβράνη του $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$. Σαν επεξήγηση των ιδιοτήτων των χορδοειδών μεμβρανών, μπορούμε να βρούμε ansätze μεμβρανών που αναπαράγουν τη δυναμική των δύο διατάξεων GKP στο χώρο anti-de Sitter, ήτοι την περιστρεφόμενη χορδή GKP (I) που μελετήσαμε στην §4.1 και την παλλόμενη χορδή GKP (III) που μελετήσαμε στην §4.3. Για να διερευνήσουμε περαιτέρω την πραγματική σχέση μεταξύ των χορδοειδών μεμβρανών και των λύσεων των χορδών που αναπαράγουν, μπορούμε να αναλύσουμε το φάσμα των διαταραχών γύρω από τις αντίστοιχες χορδοειδείς μεμβράνες. Για τις δύο χορδοειδείς μεμβράνες που αναπαράγουν τις χορδές των GKP, βρίσκουμε ότι ένα αποσυζευγμένο υποσύνολο διαταραχών που είναι κάθετο στη διεύθυνση της χορδοειδούς μεμβράνης επιδέχεται μίας δομής ζωνών/χασμάτων Lamé, η οποία χαρακτηρίζει κατά μοναδικό τρόπο τη μεμβρανοειδή φύση τους. Από την άλλη μεριά, οι διεγέρσεις της χορδής αναπαρίστανται από μία δομή μονής ζώνης/χάσματος. Αυτά τα ευρήματα επιβεβαιώνουν την εικόνα που έχουμε για τις μεμβράνες ως συλλογικές διεγέρσεις κάποιων χορδοειδών τους συνιστωσών.

Επομένως βλέπουμε ότι η μελέτη των κλασικών μεμβρανών αλλά GKP μπορεί να είναι χρήσιμη. Περισσότερα θα ειπωθούν στην ενότητα περίληψης §15, αλλά ας δώσουμε κι εδώ μια πρόγευση. Λόγω του τρόπου που τις κατασκευάζουμε, έχουμε όλους τους λόγους να περιμένουμε ότι οι χορδοειδείς μεμβράνες θα αντιστοιχούν σε κάποιους χορδοειδείς τελεστές των δυϊκών υπερσύμμορφων θεωριών πεδίου. Για παράδειγμα, η διάταξη (I) των GKP, που δίδεται από την (4.8), είναι δυϊκή στους τελεστές συστροφής 2 (4.2). Η χορδοειδής μεμβράνη που αναπαράγει τη χορδή (I) των GKP θα πρέπει να είναι επίσης δυϊκή σε τελεστές συστροφής 2 της υπερσύμμορφης θεωρίας πεδίου όπως οι (4.2). Η αντιστοιχία κατάστασης-τελεστή είναι επίσης πολύ πιθανό να εφαρμόζεται και σε αυτή την περίπτωση και οι ενέργειες των χορδοειδών μεμβρανών αναμένεται να ισούνται με τις διαστάσεις κλίμακας των χορδοειδών τελεστών της θεωρίας βαθμίδας. Χωρίς τις χορδοειδείς μεμβράνες δεν υπήρχε τρόπος να βρούμε τελεστές της SCFT που να είναι δυϊκοί σε καταστάσεις της M-θεωρίας, ιδίως σε θεωρίες όπως η 6-διάστατη $A_{N_c-1}(2,0)$ υπερσύμμορφη θεωρία πεδίου, για την οποία πολύ λίγα πράγματα είναι γνωστά. Το χορδοειδές όριο των μεμβρανών του AdS/CFT, μας διδάσκει ότι οι χορδοειδείς μεμβράνες απεικονίζονται σε τελεστές της θεωρίας βαθμίδας που είναι δυϊκοί στις χορδές που αναπαράγουν και ότι οι διαστάσεις κλίμακας των τελευταίων είναι ίσες με τις ενέργειες των χορδοειδών μεμβρανών.

Ένα δεύτερο δίδαγμα που παίρνουμε από τις χορδοειδείς μεμβράνες είναι ότι η M-θεωρία σε υπόβαθρο όπως το $\text{AdS}_{4,7} \times S^{7,4}$, διαθέτει πιθανότατα κάποιους κλασικά ολοκληρώσιμους «χορδοειδείς» τομείς, όπου όλη η τεχνολογία και οι μέθοδοι του ολοκληρώσιμου παραδείγματος της χορδής στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ μπορούν να εφαρμοσθούν. Ο λόγος γι' αυτό είναι απλός: οι χορδοειδείς μεμβράνες έχουν την ίδια δράση και εξισώσεις κίνησης με μποζονικές χορδές στον $\text{AdS}_5 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$, οι οποίες είναι γνωστό ότι είναι κλασικά ολοκληρώσιμες [149] (βλέπε επίσης και την §3.2). Επομένως και αυτές αναμένεται να είναι κλασικά ολοκληρώσιμες. Οι χορδοειδείς μεμβράνες φαίνεται ακόμη να επιβεβαιώνουν και μια υπόθεση που διατυπώθηκε πριν από καιρό [150], σύμφωνα με την οποία οι διάφορες δυαδικότητες AdS/CFT περιέχουν κοινούς ολοκληρώσιμους τομείς. Για όσον καιρό η υπόθεση αυτή αναμένει μian αυστηρή απόδειξη (ενδεχομένως μέσω ολοκληρωσιμότητας), οι χορδοειδείς μεμβράνες υποδεικνύουν ότι η «οικογένεια» των θεωριών με κοινούς ολοκληρώσιμους τομείς μπορεί στην πραγματικότητα να είναι μεγαλύτερη και να περιέχει, εκτός της ομάδας του AdS/CFT, και άλλες θεωρίες όπως η QCD και η θεωρία ABJM.

Το μέρος IV της διατριβής οργανώνεται ως εξής. Η §12 αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή στις κλασικές μποζονικές μεμβράνες στον $\text{AdS}_7 \times S^4$. Στην §13 παρουσιάζουμε τις χορδοειδείς μεμβράνες. Εξετάζουμε τα δύο κυριότερα ansätze χορδοειδών μεμβρανών στον $\text{AdS}_7 \times S^4$ που αναπαράγουν πλήρως τη δράση και τις εξισώσεις κίνησης των περιστρεφόμενων διατάξεων των GKP στον AdS: (I) την κλειστή & δι-

πλωμένη χορδή (4.8) των GKP στον AdS_3 και (III) την παλλόμενη χορδή (4.78) των GKP στον AdS_3 . Εν συνεχεία, αποδεικνύουμε (σύμφωνα με τις γενικές γραμμές της εργασίας [151]) ότι η εντός κελύφους (on-shell) δράση, οι εξισώσεις κίνησης και τα διατηρούμενα φορτία των μποζονικών χορδών που ζουν στον $\text{AdS}_5 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$, μπορούν να αναπαραχθούν από τα κατάλληλα ansätze μεμβρανών στον $\text{AdS}_7 \times S^4$. Ανάλογες προτάσεις διατυπώνονται και για τις μποζονικές χορδές στον $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$, στις §13.2–§13.3. Στην §14 εξετάζουμε τη σταθερότητα των δύο χορδοειδών μεμβρανών που αντιστοιχούν στις χορδές των GKP (I) και (III). Μία περίληψη των χορδοειδών μεμβρανών μπορεί να βρεθεί στην §15.

12 Περιστρεφόμενες Μεμβράνες στον $\text{AdS}_7 \times S^4$

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε σύντομα τις κλασσικές και αφόρτιστες (WZ όρος (10.10) απών) μποζονικές μεμβράνες στον $\text{AdS}_7 \times S^4$,⁴⁷

$$\begin{aligned} Y_{07} &= Y_0 + iY_7 = 2 \cosh \rho e^{it} & X_{12} &= X_1 + iX_2 = \cos \bar{\theta}_1 e^{i\bar{\phi}_1} \\ Y_{12} &= Y_1 + iY_2 = 2 \sinh \rho \cos \theta_1 e^{i\phi_1} & \& & X_{34} &= X_3 + iX_4 = \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_2 e^{i\bar{\phi}_2} \\ Y_{34} &= Y_3 + iY_4 = 2 \sinh \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2 e^{i\phi_2} & X_5 &= \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_2 \\ Y_{56} &= Y_5 + iY_6 = 2 \sinh \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 e^{i\phi_3}, \end{aligned} \quad (12.1)$$

όπου Y^μ και X^i είναι οι συντεταγμένες εμβάπτισης του $\text{AdS}_7 \times S^4$ και $\rho \geq 0$, $t \in [0, 2\pi)$,⁴⁸ $\theta_1, \bar{\theta}_1 \in [0, \pi]$, και $\theta_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \bar{\theta}_2, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2 \in [0, 2\pi)$. Το στοιχείο μήκους του $\text{AdS}_7 \times S^4$ δίδεται από:

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{mn}^{\text{AdS}}(y) dy^m dy^n + G_{mn}^S(x) dx^m dx^n = \\ &= 4 \left[-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho \left(d\theta_1^2 + \cos^2 \theta_1 d\phi_1^2 + \sin^2 \theta_1 (d\theta_2^2 + \cos^2 \theta_2 d\phi_2^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2 \theta_2 d\phi_3^2) \right) \right] + \left[d\bar{\theta}_1^2 + \cos^2 \bar{\theta}_1 d\bar{\phi}_1^2 + \sin^2 \bar{\theta}_1 (d\bar{\theta}_2^2 + \cos^2 \bar{\theta}_2 d\bar{\phi}_2^2) \right], \end{aligned} \quad (12.2)$$

όπου $y^m \equiv (t, \rho, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ και $x^m \equiv (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2)$. Με την επιλογή βαθμίδας (10.12), η δράση Polyakov (10.13) για τη μεμβράνη (για $\nu = 2$) στον $\text{AdS}_7 \times S^4$ (12.2) γίνεται:

$$\begin{aligned} S_P &= \frac{T_2}{2} \int \left[G_{mn}^{\text{AdS}}(y) \dot{y}^m \dot{y}^n + G_{mn}^S(x) \dot{x}^m \dot{x}^n - \frac{1}{2} G_{mn}^{\text{AdS}}(y) G_{pq}^{\text{AdS}}(y) \{y^m, y^p\} \{y^n, y^q\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} G_{mn}^S(x) G_{pq}^S(x) \{x^m, x^p\} \{x^n, x^q\} - G_{mn}^{\text{AdS}}(y) G_{pq}^S(x) \{y^m, x^p\} \{y^n, x^q\} \right] d\tau d\sigma d\delta. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Οι σύνδεσμοι (10.17)–(10.18) που προκύπτουν από τον καθορισμό της βαθμίδας (10.12) γίνονται ($i, j = 1, 2$, $\nu = 2$):

$$\gamma_{00} = -\det h_{ij} \Rightarrow G_{mn}^{\text{AdS}}(y) \dot{y}^m \dot{y}^n + G_{mn}^S(x) \dot{x}^m \dot{x}^n + \frac{1}{2} G_{mn}^{\text{AdS}}(y) G_{pq}^{\text{AdS}}(y) \{y^m, y^p\} \{y^n, y^q\} +$$

⁴⁷ Στον $\text{AdS}_7 \times S^4$ είναι $\mathfrak{k} = \ell/R = 2$, όπως είδαμε στην §2.7. Για $R = 1 \Leftrightarrow \ell = 2$. Το R και το ℓ μπορούν να επανέλθουν σε όλες τις σχέσεις του μέρους IV, θέτοντας $\delta \mapsto \delta/R$ και $\delta \in [0, 2\pi R)$.

⁴⁸ Προκειμένου να αποφύγουμε τη χρονική περιοδικότητα (μία τυπική ιδιότητα του χωροχρόνου anti-de Sitter) πρέπει να θεωρήσουμε τον universal covering χώρο του AdS , στον οποίο $t \in \mathbb{R}$.

$$+\frac{1}{2}G_{mn}^S(x)G_{pq}^S(x)\{x^m, x^p\}\{x^n, x^q\} + G_{mn}^{\text{AdS}}(y)G_{pq}^S(x)\{y^m, x^p\}\{y^n, x^q\} = 0 \quad (12.4)$$

$$\gamma_{0i} = G_{mn}^{\text{AdS}}(y)\dot{y}^m\partial_i y^n + G_{mn}^S(x)\dot{x}^m\partial_i x^n = 0 \Rightarrow \left\{G_{mn}^{\text{AdS}}(y)\dot{y}^m, y^n\right\} + \left\{G_{mn}^S(x)\dot{x}^m, x^n\right\} = 0. \quad (12.5)$$

Η δράση (12.3) και οι σύνδεσμοι (12.4)–(12.5) είναι αναλλοίωτοι υπό την καθολική ομάδα συμμετρίας του $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$, ήτοι την $\mathfrak{so}(6, 2) \times \mathfrak{so}(5)$. Τα ακόλουθα 28 + 10 φορτία Noether (σπίν και στροφορμές) διατηρούνται εντός κελύφους (on-shell):

$$S^{\mu\nu} = T_2 \int_0^{2\pi} \left(Y^\mu \dot{Y}^\nu - Y^\nu \dot{Y}^\mu \right) d\sigma d\delta, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, 7 \quad (12.6)$$

$$J^{ij} = T_2 \int_0^{2\pi} \left(X^i \dot{X}^j - X^j \dot{X}^i \right) d\sigma d\delta, \quad i, j = 1, 2, \dots, 5. \quad (12.7)$$

Ορισμένα εκ των φορτίων (12.6)–(12.7) αντιστοιχούν στις κυκλικές συντεταγμένες της δράσης (12.3), ήτοι $t, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$. Οι εκφράσεις για τα κυκλικά φορτία μπορούν να διαβαστούν απευθείας από την (12.3), χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο στοιχείο μήκους (12.2):

$$E = \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right| = 4 T_2 \int_0^{2\pi} \dot{t} \cosh^2 \rho d\sigma d\delta = S^{07} \quad (12.8)$$

$$S_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = 4 T_2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_1 \sinh^2 \rho \cos^2 \theta_1 d\sigma d\delta = S^{12} \quad (12.9)$$

$$S_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = 4 T_2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_2 \sinh^2 \rho \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 d\sigma d\delta = S^{34} \quad (12.10)$$

$$S_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_3} = 4 T_2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_3 \sinh^2 \rho \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\sigma d\delta = S^{56} \quad (12.11)$$

$$J_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\phi}}_1} = 4 T_2 \int_0^{2\pi} \dot{\bar{\phi}}_1 \cos^2 \bar{\theta}_1 d\sigma d\delta = J^{12} \quad (12.12)$$

$$J_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\phi}}_2} = 4 T_2 \int_0^{2\pi} \dot{\bar{\phi}}_2 \sin^2 \bar{\theta}_1 \cos^2 \bar{\theta}_2 d\sigma d\delta = J^{34}. \quad (12.13)$$

Στην (12.8)–(12.13), το L δηλώνει την Λαγκρανζιανή της μεμβράνης όπως αυτή προκύπτει από τη σχέση $S_P = \int L d\tau$.

13 Περιστρεφόμενες Μεμβράνες ως Χορδές

13.1 Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$

Ο σκοπός της παρούσας ενότητας είναι να διερευνήσουμε τη χορδοειδή συμπεριφορά των κλασσικών μεμβρανών εντός του $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$. Θα δείξουμε ότι η κλειστή διπλωμένη χορδή (I) των GKP που περιστρέφεται εντός του $\text{AdS}_3 \subset \text{AdS}_5 \times \text{S}^5$,⁴⁹ έχει την ίδια δράση και εξισώσεις κίνησης με ένα συγκεκριμένο σολιτόνιο

⁴⁹Η κλειστή διπλωμένη χορδή (I) των GKP εντός του AdS_3 [11], μελετήθηκε στην §4.1.

μεμβράνης που περιστρέφεται στον $\text{AdS}_3 \subset \text{AdS}_7 \times S^4$. Παρόμοιο αποτέλεσμα μπορεί ναδειχθεί ότι ισχύει και για την κλειστή παλλόμενη διπλωμένη χορδή (III) των GKP.⁵⁰ Στη συνέχεια τα δύο αποτελέσματα θα γενικευθούν σε όλα τα σολιτόνια χορδών που ζουν στον $\text{AdS}_5 \subset \text{AdS}_5 \times S^5$, για τα οποία θαδειχθεί ότι υπάρχει πάντοτε ένα σολιτόνιο μεμβράνης εντός του $\text{AdS}_7 \times S^4$ με την ίδια δράση και εξισώσεις κίνησης.

Ας θεωρήσουμε το επόμενο ansatz για μία μεμβράνη που περιστρέφεται στον $\text{AdS}_3 \times S^1 \subset \text{AdS}_7 \times S^4$:

$$\left\{ t = \kappa\tau, \rho = \rho(\sigma), \phi_1 = \kappa\omega\tau, \phi_2 = \phi_3 = \theta_1 = \theta_2 = 0 \right\} \times \left\{ \bar{\phi}_1 = \delta, \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\phi}_2 = 0 \right\}. \quad (13.1)$$

Στις συντεταγμένες εμβάπτισης ($R = 1, \ell = 2$), το ansatz (13.1) γράφεται:

$$\begin{aligned} Y_0 &= 2 \cosh \rho(\sigma) \cos \kappa\tau, & Y_3 &= Y_4 = Y_5 = Y_6 = 0, & X_1 &= \cos \delta \\ Y_1 &= 2 \sinh \rho(\sigma) \cos \kappa\omega\tau & X_2 &= \sin \delta \\ Y_2 &= 2 \sinh \rho(\sigma) \sin \kappa\omega\tau & X_3 &= X_4 = X_5 = 0 \\ Y_7 &= 2 \cosh \rho(\sigma) \sin \kappa\tau. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Η δράση του Polyakov (12.3) και η εξίσωση συνδέσμου (12.4) γίνονται:⁵¹

$$S_P = 2T_2 \int \left(-t^2 \cosh^2 \rho + \dot{\phi}_1^2 \sinh^2 \rho \cos^2 \theta_1 - \cos^2 \bar{\theta}_1 \rho'^2 \bar{\phi}_1'^2 \{ \sigma, \delta \}^2 \right) d\tau d\sigma d\delta = \quad (13.4)$$

$$= \frac{2T_1}{\ell_s g_s} \int \left(-\kappa^2 \cosh^2 \rho + \kappa^2 \omega^2 \sinh^2 \rho - \rho'^2 \right) d\tau d\sigma \quad (13.5)$$

$$\rho'^2 - \kappa^2 (\cosh^2 \rho - \omega^2 \sinh^2 \rho) = 0 \quad (\text{σύνδεσμος}). \quad (13.6)$$

Τώρα μπορούμε να συγκρίνουμε τη δράση (13.5) και τον αντίστοιχο σύνδεσμο βαθμίδας (13.6), με τη δράση εντός κελύφους (4.11) και το σύνδεσμο Virasoro (4.13) της χορδής GKP (I). Ταυτίζονται! Με την εξαίρεση του παράγοντα $\cos^2 \bar{\theta}_1 \bar{\phi}_1'^2$, η εκτός κελύφους δράση (13.4) είναι επίσης ταυτόσημη με την εκτός κελύφους δράση της χορδής (4.10). Για να αποδείξουμε την ισοδυναμία των συστημάτων (4.10)–(4.13) και (13.4)–(13.6), ας σημειωθεί ότι η δράση (13.4) έχει μόνο το ρ με μη μηδενική εξίσωση κίνησης:

$$\rho'' + \kappa^2 (\omega^2 - 1) \sinh \rho \cosh \rho = 0, \quad (13.7)$$

Η εξίσωση (13.7) είναι η ίδια με την αντίστοιχη εξίσωση της χορδής που δίνεται από τη σχέση (4.12). Ταυτόχρονα, όλα τα διατηρούμενα φορτία της δράσης της μεμβράνης (13.4) είναι ίδια με τα αντίστοιχα

⁵⁰Η κλειστή παλλόμενη διπλωμένη χορδή (III) των GKP εντός του AdS_3 [11], μελετήθηκε στην §4.3.

⁵¹Στις $D = 11$ χωροχρονικές διαστάσεις, μπορούμε να εκφράσουμε τη 10-διάστατη σταθερά σύζευξης της χορδής g_s συναρτήσει του μήκους Planck ℓ_{11} και του θεμελιώδους μήκους της χορδής ℓ_s , με διαστατική αναγωγή της 11-διάστατης υπερβαρύτητας στις $D = 10$ χωροχρονικές διαστάσεις:

$$g_s = \left(\frac{R_c}{\ell_{11}} \right)^{3/2}, \quad \ell_s^2 = \frac{\ell_{11}^3}{R_c} \quad \longrightarrow \quad g_s = \left(\frac{\ell_{11}}{\ell_s} \right)^3, \quad (13.3)$$

όπου R_c είναι η ακτίνα συμπαγοποίησης. Η 11-διάστατη τάση της μεμβράνης γίνεται $T_2 = [(2\pi)^2 g_s \ell_s^3]^{-1}$ [14].

φορτία ($\omega^2 > 1$) της χορδής (4.22)–(4.23):

$$E(\omega) = \frac{16 T_1}{g_s \ell_s} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - 1} \mathbb{E} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) \quad (13.8)$$

$$S(\omega) = \frac{16 T_1}{g_s \ell_s} \cdot \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} \mathbb{E} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) - \mathbb{K} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) \right) = S_1. \quad (13.9)$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η μεμβράνη (13.1) είναι δυναμικά ισοδύναμη με την κλειστή διπλωμένη χορδή (I) των GKP στον AdS_3 , που δίδεται από το ansatz (4.8).

Για την παλλόμενη χορδή (III) των GKP στον AdS_3 , μπορούμε να βρούμε μια δυναμικά ισοδύναμη μεμβράνη στον $\text{AdS}_7 \times S^4$. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο ansatz μιας παλλόμενης μεμβράνης στον $\text{AdS}_7 \times S^4$:

$$\left\{ t = t(\tau), \rho = \rho(\tau), \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \sigma, \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0 \right\} \times \left\{ \bar{\phi}_1 = \delta, \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\phi}_2 = 0 \right\}. \quad (13.10)$$

Σε συντεταγμένες εμβάπτισης, το ansatz (13.10) γράφεται:

$$\begin{aligned} Y_0 &= 2 \cosh \rho(\tau) \cos t(\tau), & Y_1 &= Y_2 = Y_4 = Y_6 = 0, & X_1 &= \cos \delta \\ Y_3 &= 2 \sinh \rho(\tau) \cos \sigma & & & X_2 &= \sin \delta \\ Y_5 &= 2 \sinh \rho(\tau) \sin \sigma & & & X_3 &= X_4 = X_5 = 0 \\ Y_7 &= 2 \cosh \rho(\tau) \sin t(\tau). \end{aligned} \quad (13.11)$$

Η εκτός και εντός κελύφους δράση Polyakov για τη διάταξη της παλλόμενης μεμβράνης (13.10), καθώς και η αντίστοιχη εξίσωση για το σύνδεσμο δίδονται από:

$$S_P = 2 T_2 \int \left(-\dot{t}^2 \cosh^2 \rho + \dot{\rho}^2 - \sinh^2 \rho \sin^2 \theta_1 \cos^2 \bar{\theta}_1 \theta_2'^2 \bar{\phi}_1'^2 \{ \sigma, \delta \}^2 \right) d\tau d\sigma d\delta = \quad (13.12)$$

$$= \frac{2 T_1}{\ell_s g_s} \int \left(-\dot{t}^2 \cosh^2 \rho + \dot{\rho}^2 - \sinh^2 \rho \right) d\tau d\sigma \quad (13.13)$$

$$\dot{\rho}^2 - \dot{t}^2 \cosh^2 \rho + \sinh^2 \rho = 0 \quad (\text{σύνδεσμος}). \quad (13.14)$$

Η εντός κελύφους δράση Polyakov (13.13) και ο σύνδεσμός της (13.14), είναι ταυτόσημες των αντίστοιχων χορδοειδών, που δίδονται από τις εξισώσεις (4.81)–(4.84) για $w = 1$. Συνεπώς η παλλόμενη μεμβράνη (13.10) είναι δυναμικά ισοδύναμη με την παλλόμενη χορδή GKP εντός του AdS_3 (4.78). Οι εξισώσεις κίνησης για το t και το ρ , (13.10) είναι επίσης οι ίδιες με τις αντίστοιχες εξισώσεις της χορδής (4.82)–(4.83) (με $w = 1$):

$$\ddot{t} \cosh^2 \rho + 2 \dot{t} \dot{\rho} \cosh \rho \sinh \rho = 0 \quad (13.15)$$

$$\ddot{\rho} + \sinh \rho \cosh \rho (\dot{t}^2 + 1) = 0. \quad (13.16)$$

Όπως υποσχεθήκαμε, μπορούμε να γενικεύσουμε τα δύο προηγούμενα παραδείγματα σε κάθε ⁵² σολιτόνιο χορδής που ζει στον $AdS_5 \subset AdS_5 \times S^5$ και δεν έχει δυναμικά μέρη στην S^5 . ⁵³ Άρα θέλουμε να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

■ **13.1.1.** Κάθε αμιγές κλασικό σολιτόνιο χορδής στον AdS_5 έχει ένα ισοδύναμο σολιτόνιο μεμβράνης στον $AdS_7 \times S^4$ (και όχι το αντίστροφο).

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε τη δράση Polyakov για τη μεμβράνη (12.3) και τις αντίστοιχες εξισώσεις συνδέσμων (12.4)–(12.5) στη βαθμίδα (10.12):

$$S_2 = \frac{T_2}{2} \int \left[G_{mn}^{AdS}(y) \dot{y}^m \dot{y}^n + G_{mn}^S(x) \dot{x}^m \dot{x}^n - \frac{1}{2} G_{mn}^{AdS}(y) G_{pq}^{AdS}(y) \{y^m, y^p\} \{y^n, y^q\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} G_{mn}^S(x) G_{pq}^S(x) \{x^m, x^p\} \{x^n, x^q\} - G_{mn}^{AdS}(y) G_{pq}^S(x) \{y^m, x^p\} \{y^n, x^q\} \right] d\tau d\sigma d\mathbf{d} \quad (13.17)$$

$$G_{mn}^{AdS}(y) \dot{y}^m \dot{y}^n + G_{mn}^S(x) \dot{x}^m \dot{x}^n + \frac{1}{2} G_{mn}^{AdS}(y) G_{pq}^{AdS}(y) \{y^m, y^p\} \{y^n, y^q\} + \\ + \frac{1}{2} G_{mn}^S(x) G_{pq}^S(x) \{x^m, x^p\} \{x^n, x^q\} + G_{mn}^{AdS}(y) G_{pq}^S(x) \{y^m, x^p\} \{y^n, x^q\} = 0 \quad (13.18)$$

$$G_{mn}^{AdS}(y) \dot{y}^m \partial_i y^n + G_{mn}^S(x) \dot{x}^m \partial_i x^n = \left\{ G_{mn}^{AdS}(y) \dot{y}^m, y^n \right\} + \left\{ G_{mn}^S(x) \dot{x}^m, x^n \right\} = 0, \quad (13.19)$$

όπου, όπως και προηγουμένως $y^m \equiv (t, \rho, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$, $x^m \equiv (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2)$ και $G_{mn}(y, x)$ είναι οι συντελεστές της (12.2). Έστω ότι το σ υποδηλώνει τις χωρικές συντεταγμένες κοσμικού φύλλου της χορδής:

$$y^m = y^m(\tau, \sigma) \quad \& \quad x^m = x^m(\tau, \delta), \quad (13.20)$$

τότε η παραπάνω δράση και σύνδεσμοι γράφονται:

$$S_2 = \frac{T_2}{2} \int \left[G_{mn}^{AdS}(y) \dot{y}^m \dot{y}^n + G_{mn}^S(x) \dot{x}^m \dot{x}^n - G_{mn}^{AdS}(y) G_{pq}^S(x) y'^m y'^n x'^p x'^q \right] d\tau d\sigma d\delta \quad (13.21)$$

$$G_{mn}^{AdS}(y) \dot{y}^m \dot{y}^n + G_{mn}^S(x) \dot{x}^m \dot{x}^n + G_{mn}^{AdS}(y) G_{pq}^S(x) y'^m y'^n x'^p x'^q = 0 \quad (13.22)$$

$$G_{mn}^{AdS}(y) \dot{y}^m y'^n = G_{mn}^S(x) \dot{x}^m x'^n = 0. \quad (13.23)$$

⁵² Αυτή η πρόταση δεν περιλαμβάνει όλα τα ansätze που είναι ασύμβατα με την επιλογή της σύμμορφης βαθμίδας ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) στη δράση Polyakov για τη χορδή (3.3). Μια ενδιαφέρουσα γενίκευση αυτής της πρότασης θα μπορούσε να περιέχει όλες τις διατάξεις χορδών Polyakov στον AdS_5 , ανεξάρτητα από την επιλογή βαθμίδας, ή ισοδύναμα όλα τα Nambu-Goto ansätze χορδών στον AdS_5 .

⁵³ Για λόγους ευκολίας, πρόκειται να βαφτίσουμε όλα τα $sl(2)$ σολιτόνια χορδών που δεν έχουν μέρη τους επί της S^5 , «αμιγή» ("pure").

Τώρα θέτουμε $x^3 = \bar{\phi}_1 = \delta$ για τη συντεταγμένη της 4-σφαίρας που αντιστοιχεί στο $G_{33}^S = \cos^2 \bar{\theta}_1$. Τότε,

$$S_2 = \frac{T_2}{2} \int \left[G_{mn}^{\text{AdS}}(y) (\dot{y}^m \dot{y}^n - \cos^2 \bar{\theta}_1 \bar{\phi}_1'^2 y'^m y'^n) + G_{mn \neq 3}^S(x) \dot{x}^m \dot{x}^n - \right. \\ \left. - G_{mn}^{\text{AdS}}(y) G_{pq \neq 3}^S(x) y'^m y'^n x'^p x'^q \right] d\tau d\sigma d\delta \quad (13.24)$$

$$G_{mn}^{\text{AdS}}(y) (\dot{y}^m \dot{y}^n + \cos^2 \bar{\theta}_1 y'^m y'^n) + G_{mn \neq 3}^S(x) \dot{x}^m \dot{x}^n + \\ + G_{mn}^{\text{AdS}}(y) G_{pq \neq 3}^S(x) y'^m y'^n x'^p x'^q = 0 \quad (13.25)$$

$$G_{mn}^{\text{AdS}}(y) \dot{y}^m y'^n = G_{mn \neq 3}^S(x) \dot{x}^m x'^n = 0. \quad (13.26)$$

Η πρόταση **13.1.1** προκύπτει θέτοντας $x^{m \neq 3} = 0$, $y^{m > 5} = 0$ και κάνοντας την ολοκλήρωση ως προς δ :

$$S_2 = \frac{T_2}{2} \int G_{mn \leq 5}^{\text{AdS}}(y^{p \leq 5}) (\dot{y}^m \dot{y}^n - \cos^2 \bar{\theta}_1 \bar{\phi}_1'^2 y'^m y'^n) d\tau d\sigma = \quad (13.27)$$

$$= \frac{T_1}{2g_s \ell_s} \int G_{mn \leq 5}^{\text{AdS}}(y^{p \leq 5}) (\dot{y}^m \dot{y}^n - y'^m y'^n) d\tau d\sigma = \frac{S_1}{g_s \ell_s} \quad (13.28)$$

$$G_{mn \leq 5}^{\text{AdS}}(y^{p \leq 5}) (\dot{y}^m \dot{y}^n + y'^m y'^n) = G_{mn \leq 5}^{\text{AdS}}(y^{p \leq 5}) \dot{y}^m y'^n = 0, \quad (13.29)$$

αλλά αυτή είναι απλά η δράση και οι σύνδεσμοι Virasoro μιας κλασσικής χορδής στον AdS_5 . Αυτό φαίνεται αν συγκρίνουμε τις εξισώσεις (13.28)–(13.29) με την αντίστοιχη δράση Polyakov της χορδής και τους συνδέσμους Virasoro στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ (στη σύμμορφη βαθμίδα, $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$), (3.3)–(3.5):

$$S_1 = \frac{T_1}{2} \int \left[G_{mn}^{\text{AdS}}(y) (\dot{y}^m \dot{y}^n - y'^m y'^n) + G_{mn}^S(x) (\dot{x}^m \dot{x}^n - x'^m x'^n) \right] d\tau d\sigma \quad (13.30)$$

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} \left[G_{mn}^{\text{AdS}}(y) (\dot{y}^m \dot{y}^n + y'^m y'^n) + G_{mn}^S(x) (\dot{x}^m \dot{x}^n + x'^m x'^n) \right] = 0 \quad (13.31)$$

$$T_{01} = T_{10} = G_{mn}^{\text{AdS}}(y) \dot{y}^m y'^n + G_{mn}^S(x) \dot{x}^m x'^n = 0. \quad (13.32)$$

Οι $\bar{\theta}_1$ και $\bar{\phi}_1$ εξισώσεις κίνησης της (13.27) ικανοποιούνται κατά τετριμμένο τρόπο και οι υπόλοιπες εξισώσεις κίνησης της (13.27) είναι οι ίδιες με τις εξισώσεις κίνησης που λαμβάνονται παραλλάσσοντας τη δράση (13.30) της χορδής. Συνεπώς τα δύο συστήματα είναι δυναμικά ισοδύναμα.

Σε ότι αφορά την αντίστροφη πρόταση της **13.1.1**, αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλές μη ισοδύναμες διατάξεις μεμβρανών στον $\text{AdS}_7 \times S^4$ με εξάρτηση από αμφότερα τα σ και δ , τις οποίες είναι αδύνατο να λάβουμε από τη δράση της κλασσικής μποζονικής χορδής στον $\text{AdS}_5 \times S^5$. $\square$

13.2 Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $\text{AdS}_4 \times S^7$

Η πρόταση 13.1.1 μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να εφαρμοστεί και στην περίπτωση του $\text{AdS}_4 \times S^7$. Υποθέτοντας ότι οι χωροχρονικές συντεταγμένες της χορδής εξαρτώνται από αμφότερες τις συντεταγμένες του κοσμικού φύλλου $\{\tau, \sigma\}$,

$$y^m = (t = t(\tau, \sigma), \rho = \rho(\tau, \sigma), \theta = \theta(\tau, \sigma), \phi_1 = \phi_1(\tau, \sigma), \phi_2 = \phi_2(\tau, \sigma)), \quad (13.33)$$

η πρόταση 13.1.1 μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε ένα υποσύνολο όλων των δυνατών διατάξεων των κλασικών χορδών στον AdS_5 , ήτοι τις χορδές στον $\text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_5$. Μόνο αυτές μπορούν να ληφθούν από μια μεμβράνη στον $\text{AdS}_4 \times S^7$. Για παράδειγμα αμφότερες οι χορδοειδείς μεμβράνες (13.1)–(13.10) που συναντήσαμε παραπάνω και αναπαράγουν τις χορδές GKP στον $\text{AdS}_3 \subset \text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_5$, είναι τέτοιες μεμβράνες μιας και ζουν στον $\text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_4 \times S^7$. Πιο γενικά,

■ **13.2.1.** Κάθε αμυγές κλασικό σολιτόνιο χορδής στον $\text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_5$ ⁵⁴ έχει ένα ισοδύναμο σολιτόνιο μεμβράνης στον $\text{AdS}_4 \times S^7$ (και όχι το αντίστροφο).

Αν δεν λάβουμε υπόψη μας τη συνθήκη για πλήρη εξάρτηση των χωροχρονικών συντεταγμένων της χορδής από τις δύο συντεταγμένες του κοσμικού φύλλου $\{\tau, \sigma\}$ όπως στην (13.33), θα πρέπει να είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε την πιο πάνω μέθοδο και να λάβουμε (i) χορδοειδείς μεμβράνες στον $\text{AdS}_{4/7} \times S^{7/4}$ που να είναι ισοδύναμες με μερικές ειδικές διατάξεις χορδών που ζουν εντός του $\text{AdS}_5 \times S^5$ και (ii) χορδοειδείς μεμβράνες στον $\text{AdS}_4 \times S^7$ που είναι ισοδύναμες με χορδές που ζουν στον AdS_5 .

13.3 Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$

Οι χορδοειδείς μεμβράνες έχουν επίσης νόημα και σε τροχιακούς χωροχρόνους όπως ο $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$. Για $k = 1$, ο χώρος αυτός δεν είναι τίποτε άλλο από τον $\text{AdS}_4 \times S^7$ χωροχρόνο που είδαμε πιο πάνω. Όπως συζητήθηκε στην §2.8, οι γεωμετρίες όπως αυτή του $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ παρέχουν τα βαρυτικά υπόβανθρα της αντιστοιχίας ABJM (2.37).

Στα πλαίσια της θεωρίας ABJM, έχει τεθεί η ερώτηση κατά πόσον η λογαριθμική συμπεριφορά είναι δυνατή για τις ανώμαλες διαστάσεις κάποιων καταστάσεων της θεωρίας. Όπως είδαμε πίσω στην §4, η λογαριθμική συμπεριφορά των ανώμαλων διαστάσεων είναι δυνατή για τους τελεστές συστροφής 2 της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας και τις δυϊκές τους κλειστές διπλωμένες GKP χορδές (I) στον AdS_3 . Με βάση τα όσα είπαμε, μπορούμε να απαντήσουμε την παραπάνω ερώτηση καταφατικά χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των χορδοειδών μεμβρανών. Ας θεωρήσουμε τη μετρική του $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ [152]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{mn}^{\text{AdS}}(y) dy^m dy^n + G_{mn}^{S/\mathbb{Z}}(x) dx^m dx^n = \\ &= \ell^2 (-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho \cdot d\Omega_2^2) + R^2 d\bar{\Omega}_{7/\mathbb{Z}_k}^2 \end{aligned} \quad (13.34)$$

$$d\bar{\Omega}_{7/\mathbb{Z}_k}^2 = \left(\frac{d\bar{y}}{k} + \tilde{A} \right)^2 + ds_{\mathbb{CP}^3}^2, \quad (13.35)$$

$$\tilde{A} \equiv \frac{1}{2} (\cos^2 \bar{\xi} - \sin^2 \bar{\xi}) d\bar{\psi} + \frac{1}{2} \cos^2 \bar{\xi} \cos \bar{\theta}_1 d\bar{\phi}_1 + \frac{1}{2} \sin^2 \bar{\xi} \cos \bar{\theta}_2 d\bar{\phi}_2$$

⁵⁴Γράφοντας $\text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_5$, εννοούμε ότι μία από τις δύο αξιμουθιακές γωνίες της τρισδιάστατης σφαίρας του AdS_5 έχει τεθεί ίση προς το μηδέν.

$$ds_{\mathbb{CP}^3}^2 = d\bar{\xi}^2 + \cos^2 \bar{\xi} \sin^2 \bar{\xi} \left(d\bar{\psi} + \frac{1}{2} \cos \bar{\theta}_1 d\bar{\phi}_1 - \frac{1}{2} \cos \bar{\theta}_2 d\bar{\phi}_2 \right)^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \bar{\xi} \left(d\bar{\theta}_1^2 + \sin^2 \bar{\theta}_1 d\bar{\phi}_1^2 \right) + \frac{1}{4} \sin^2 \bar{\xi} \left(d\bar{\theta}_2^2 + \sin^2 \bar{\theta}_2 d\bar{\phi}_2^2 \right). \quad (13.36)$$

Οι διατάξεις των μεμβρανών (13.1)–(13.10) μπορούν εύκολα να ληφθούν από τις (13.34)–(13.36). Στα ansätze (13.1)–(13.10), αρκεί $\bar{y} = k\delta$ (επίσης για το $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ είναι $\mathfrak{k} = \ell/R = 1/2$) και να θέσουμε τις υπόλοιπες έξι γωνίες της S^7 ίσες με μηδέν. Η λογαριθμική συμπεριφορά θα είναι τότε δυνατή για τις καταστάσεις της ABJM θεωρίας που είναι δυϊκές στα ισοδύναμα της χορδοειδούς μεμβράνης (13.1) στον $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$, που εμπερικλείει πλήρως τη δυναμική και τις ιδιότητες των κλειστών και διπλωμένων χορδών (I) των GKP. Πιο γενικά, μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση:

■ **13.3.1.** *Κάθε αμυγές κλασικό σολιτόνιο χορδής στον $\text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_5$ έχει ένα ισοδύναμο σολιτόνιο μεμβράνης στον $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ (και όχι το αντίστροφο).*

Προτάσεις όπως η 13.3.1 θα πρέπει να αναμένονται μιας και είναι γνωστό ότι η θεωρία χορδών τύπου ΙΙΑ στον $\text{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3$ μπορεί να ληφθεί από τη δράση της υπερμεμβράνης στον $\text{AdS}_4 \times S^7$ με διπλή διαστατική αναγωγή [153].

Έτσι ολοκληρώνουμε την παρουσίαση των χορδοειδών μεμβρανών στους χώρους anti-de Sitter. Στην επόμενη ενότητα πρόκειται να μελετήσουμε την ευστάθεια των δύο διατάξεων χορδοειδών μεμβρανών που εξετάσαμε παραπάνω, ήτοι τις (13.1)–(13.10).

14 Διαταραχές Μεμβρανών

Αντικείμενο της παρούσας ενότητας είναι η μελέτη της ευστάθειας των χορδοειδών μεμβρανών. Γενικά θα περιμέναμε οι χορδοειδείς μεμβράνες να είναι ασταθείς, λόγω της δ-συντεταγμένης τους που έχει τυλιχθεί γύρω από ένα μεγάλο κύκλο της $S^{4/7}$. Η δ συντεταγμένη είναι επιρρεπής στην κατάρρευση προς τους πόλους της αντίστοιχης υπερσφαίρας, η οποία οδηγεί το συνολικό σύστημα προς μια πιο ευσταθή κατάσταση με χαμηλότερη ενέργεια. Πράγματι, αυτό είναι ήδη γνωστό για κλασσικές μπουζονικές χορδές που έχουν τυλιχθεί γύρω από ένα μέγιστο κύκλο μιας δισδιάστατης σφαίρας και δεν έχουν καμία άλλη δυναμική [154]. Από την άλλη μεριά οι χορδοειδείς μεμβράνες μοιράζονται μια κοινή Λαγκρανζιανή, εξισώσεις κίνησης και συνδέσμους βαθμίδας με τις ισοδύναμες τους χορδές, έτσι ώστε να περιμένουμε ότι θα κληρονομούν πολλές από τις ευστάθειες/αστάθειές τους. Υποθέτοντας π.χ. ότι η διάταξη της χορδής που είναι δυϊκή στη χορδοειδή μεμβράνη είναι ασταθής, υπάρχουν πολλοί τρόποι για να τη σταθεροποιήσουμε, π.χ. να προσθέσουμε περισσότερες στροφορμές [154, 155], ευσταθείς συνιστώσες εντός του AdS [48, 156], παλλόμενα μέρη [157], τροχιακές προβολές [158] και όρους ροών [159]. Ακόμη και εκείνες οι χορδές όμως που είναι γνωστό ότι είναι ασταθείς, έχουν μελετηθεί εκτενώς και έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμες στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT [48, 154], καθώς οι αστάθειές τους αποδεικνύονται πολλές φορές ασήμαντες από την πλευρά της δυϊκής θεωρίας βαθμίδας [160]. Ένας δυνατός τρόπος να εξηγήσουμε αυτή την κατάσταση είναι αναφέροντας ότι οι ασταθείς λύσεις είναι συχνά εύκολα επεκτάσιμες σε ευσταθείς διατάξεις, διατηρώντας παράλληλα και τις «καλές» τους ιδιότητες από τη θεωρία βαθμίδας. Η θεωρία διαταραχών για τις χορδές και τις μεμβράνες σε χωροχρόνους anti-de Sitter δεν έχει ακόμη αναπτυχθεί ικανοποιητικά (ακόμη και στο αριθμητικό επίπεδο), κυρίως εξαιτίας της εγγενούς δυσκολίας της [161]. Αποτελέσματα για την ευστάθεια των χορδών και των μεμβρανών εντός του χώρου AdS , θα μας επέτρεπαν να εξάγουμε πολύ χρήσιμα συμπεράσματα για την ευστάθεια των διατάξεων των χορδοειδών μεμβρανών που μελετάμε.

Από την άλλη μεριά δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι οι χορδοειδείς μεμβράνες είναι μεμβράνες και όχι

χορδές. Αυτή η ιδιότητα μπορεί πολλές φορές να ενισχύσει την ευστάθεια του προκύπτοντος συστήματος. Παρότι μία απλή χορδοειδής μεμβράνη που έχει τυλιχθεί γύρω από τη δισδιάστατη σφαίρα έχει μηδενική επιφανειακή τάση και αναμένεται επομένως να είναι ευσταθής, μία παρόμοια τυλιγμένη χορδή γύρω από την δισδιάστατη σφαίρα δεν μπορεί να είναι ευσταθής όπως είδαμε πιο πάνω. Με δεδομένο ότι οι χορδοειδείς μεμβράνες φιλοδοξούν να αναπαράγουν τη συμπεριφορά των κλασικών χορδών του AdS_5 , είναι σημαντικό να μπορούμε να διατυπώσουμε συγκεκριμένες προτάσεις σε σχέση με τα πλεονεκτήματα/μειονεκτήματά τους στον τομέα της ευστάθειας. Εργασίες στις διαταραχές των μεμβρανών σε ποικίλα υπόβαθρα μπορούν να βρεθούν στις αναφορές [162].

Το κύριο αποτέλεσμα της παρούσας ενότητας θα είναι ότι οι διαταραχές των χορδοειδών μεμβρανών διέπονται από την εξίσωση Lamé. Ας δούμε σύντομα ποιες είναι οι κυριότερες εφαρμογές των εξισώσεων Lamé, προτού να καταπιαστούμε με τη ανάλυση της ευστάθειας των χορδοειδών μεμβρανών. Η εξίσωση Lamé ανακύπτει όταν διαχωρίζουμε τις μεταβλητές της εξίσωσης Laplace στο σύστημα των ελλειψοειδών συντεταγμένων [163]. Ανήκει στην κλάση των «ημιακριβώς επιλύσιμων» ("quasi-exactly solvable"—QES) συστημάτων [164], που αποκαλούνται έτσι γιατί οι λύσεις τους μπορούν να προσδιοριστούν με αλγεβρικές μεθόδους σε κάποιες περιπτώσεις [165, 166]. Επειδή οι ευστάθειες και αστάθειες των συστημάτων Lamé οργάνωνονται σε πολλαπλές ζώνες και χάσματα, το φάσμα των φυσικών τους εφαρμογών είναι ιδιαίτερα ευρύ. Ανάμεσα στις πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές τους είναι: (a) παρέχουν μια εναλλακτική δυνατότητα στο μοντέλο Kronig-Penney για τα ηλεκτρόνια μονοδιάστατων κρυστάλλων [167, 165]. (b) πιθανώς διέπουν την εκρηκτική παραγωγή σωματιδίων (προθέρμανση) λόγω παραμετρικού συντονισμού στο μετα-πληθωριστικό σύμπαν [168]. (c) εμφανίζονται στις διαταραχές των sphalerons για το μοντέλο ϕ^4 και το αβελιανό μοντέλο Higgs στις 1+1 διαστάσεις [169]. (d) είναι στενά συνδεδεμένες με τη φασματική καμπύλη των μονοπόλων BPS της $su(2)$ [170]. (e) εμφανίζονται συχνά στην υπερσυμμετρική χβαντομηχανική [171], κλπ. [172, 173]. Η εξίσωση Lamé εμφανίζεται επανειλημμένα σε όλες τις διαταραχτικές μελέτες των χορδών στους χωροχρόνους anti-de Sitter [53, 77, 157]. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι διαταραχές των χορδοειδών μεμβρανών οδηγούν σε πολύ πλουσιότερη δομή Lamé ζωνών/χασμάτων.

Θα εργαστούμε κατά κύριο λόγο στο σύστημα συντεταγμένων εμβάπτισης του $AdS_{p+2} \times S^q$ για το οποίο,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dY^\mu dY^\nu + \delta_{ij} dX^i dX^j = -dY_0^2 + \sum_{i=1}^{p+1} dY_i^2 - dY_{p+2}^2 + \sum_{i=1}^{q+1} dX_i^2 \quad (14.1)$$

$$-\eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu = Y_0^2 - \sum_{i=1}^{p+1} Y_i^2 + Y_{p+2}^2 = \ell^2 \quad , \quad \delta_{ij} X^i X^j = \sum_{i=1}^{q+1} X_i^2 = R^2, \quad (14.2)$$

όπου $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, \dots, +, -)$, $\delta_{ij} = (+, +, \dots, +)$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, p+2$ και $i, j = 1, 2, \dots, q+1$. Οι σύνδεσμοι (14.2) λαμβάνονται υπόψη με τη βοήθεια δύο πολλαπλασιαστών Lagrange, των Λ , $\tilde{\Lambda}$ στη δράση Polyakov για τη μεμβράνη (10.13), της οποίας η βαθμίδα έχει καθοριστεί σύμφωνα με την (10.12) (όπου $\nu = 2$):

$$S_P = \frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \left[\dot{Y}^\mu \dot{Y}_\mu + \dot{X}^i \dot{X}^i - \frac{1}{2} \{Y^\mu, Y^\nu\} \{Y_\mu, Y_\nu\} - \frac{1}{2} \{X^i, X^j\} \{X^i, X^j\} - \right. \\ \left. - \{Y^\mu, X^i\} \{Y_\mu, X^i\} + \Lambda (Y^\mu Y_\mu + \ell^2) + \tilde{\Lambda} (X^i X^i - R^2) \right]. \quad (14.3)$$

Αν παραλλάξουμε τη δράση (14.3), λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{Y}^\mu = \{ \{Y^\mu, Y^\nu\}, Y_\nu \} + \{ \{Y^\mu, X^i\}, X^i \} + \Lambda Y^\mu \quad (14.4)$$

$$\ddot{X}^i = \{\{X^i, X^j\}, X^j\} + \{\{X^i, Y^\mu\}, Y_\mu\} + \tilde{\Lambda} X^i. \quad (14.5)$$

Οι σύνδεσμοι Lagrange είναι:

$$Y^\mu Y_\mu = -\ell^2, \quad X^i X^i = R^2, \quad (14.6)$$

ενώ οι δύο σύνδεσμοι που προκύπτουν από τον καθορισμό της βαθμίδας (10.12) δίδονται από:

$$\dot{Y}^\mu \partial_\sigma Y_\mu + \dot{X}^i \partial_\sigma X^i = \dot{Y}^\mu \partial_\delta Y_\mu + \dot{X}^i \partial_\delta X^i = 0 \quad (14.7)$$

$$\dot{Y}^\mu \dot{Y}_\mu + \dot{X}^i \dot{X}^i + \frac{1}{2} \{Y^\mu, Y^\nu\} \{Y_\mu, Y_\nu\} + \frac{1}{2} \{X^i, X^j\} \{X^i, X^j\} + \{Y^\mu, X^i\} \{Y_\mu, X^i\} = 0. \quad (14.8)$$

Λόγω του συνδέσμου (14.8), η Χαμιλτονιανή της μεμβράνης είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν:

$$H = \frac{T_2}{2} \int d^2\sigma \left[\dot{Y}^\mu \dot{Y}_\mu + \dot{X}^i \dot{X}^i + \frac{1}{2} \{Y^\mu, Y^\nu\} \{Y_\mu, Y_\nu\} + \frac{1}{2} \{X^i, X^j\} \{X^i, X^j\} + \right. \\ \left. + \{Y^\mu, X^i\} \{Y_\mu, X^i\} - \Lambda (Y^\mu Y_\mu + \ell^2) - \tilde{\Lambda} (X^i X^i - R^2) \right] = 0. \quad (14.9)$$

Ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες διαταραχές:⁵⁵

$$Y^\mu = Y_0^\mu + \delta Y^\mu, \quad X^i = X_0^i + \delta X^i, \quad \Lambda = \Lambda_0 + \delta \Lambda, \quad \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_0 + \delta \tilde{\Lambda}, \quad (14.10)$$

όπου $\{Y_0, X_0, \Lambda_0, \tilde{\Lambda}_0\}$ είναι λύση των εξισώσεων κίνησης (14.4)–(14.5) και των συνδέσμων (14.6)–(14.8). Η δράση για τις διαταραχές δίδεται από:

$$\delta S_P = \frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \left[\delta \dot{Y}^\mu \delta \dot{Y}_\mu + \delta \dot{X}^i \delta \dot{X}^i - \{Y_0^\mu, Y_0^\nu\} \{\delta Y_\mu, \delta Y_\nu\} - \{Y_0^\mu, Y_0^\nu\} \{\delta Y_\mu, Y_{0\nu}\} - \right. \\ \left. - \{\delta Y^\mu, Y_0^\nu\} \{Y_{0\mu}, \delta Y_\nu\} - \{X_0^i, X_0^j\} \{\delta X^i, \delta X^j\} - \{X_0^i, X_0^j\} \{\delta X^i, X_0^j\} - \right. \\ \left. - \{\delta X^i, X_0^j\} \{X_0^i, \delta X^j\} - 2\{Y_0^\mu, X_0^i\} \{\delta Y_\mu, \delta X^i\} - \{\delta Y^\mu, X_0^i\} \{\delta Y_\mu, X_0^i\} - \right. \\ \left. - 2\{\delta Y^\mu, X_0^i\} \{Y_{0\mu}, \delta X^i\} - \{Y_0^\mu, \delta X^i\} \{Y_{0\mu}, \delta X^i\} + 2Y_0^\mu \delta Y_\mu \delta \Lambda + \right. \\ \left. + 2X_0^i \delta X^i \delta \tilde{\Lambda} \right]. \quad (14.11)$$

Σε χαμηλότερη τάξη, οι διαταραχές υπακούουν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\delta \ddot{Y}^\mu = \{\{Y_0^\mu, Y_0^\nu\}, \delta Y_\nu\} + \{\{\delta Y^\mu, Y_0^\nu\}, Y_{0\nu}\} + \{\{Y_0^\mu, \delta Y^\nu\}, Y_{0\nu}\} + \{\{Y_0^\mu, X_0^i\}, \delta X^i\} +$$

⁵⁵Ο αναγνώστης θα πρέπει να προσέξει τη διάκριση ανάμεσα στη συντεταγμένη του κοσμικού όγκου $\delta \equiv \sigma_2$ και των δ που εμφανίζονται στα δS_P , δX , δY , $\delta \Lambda$, $\delta \tilde{\Lambda}$ και συμβολίζουν τις διαταραχές των S_P , X , Y , Λ και $\tilde{\Lambda}$ αντίστοιχα.

$$+ \{ \{ \delta Y^\mu, X_0^i \}, X_0^i \} + \{ \{ Y_0^\mu, \delta X^i \}, X^i \} + \Lambda_0 \delta Y^\mu + Y_0^\mu \delta \Lambda \quad (14.12)$$

$$\begin{aligned} \delta \ddot{X}^i = & \{ \{ X_0^i, X_0^j \}, \delta X_j \} + \{ \{ \delta X^i, X_0^j \}, X_0^j \} + \{ \{ X_0^i, \delta X^j \}, X_0^j \} + \{ \{ X_0^i, Y_0^\mu \}, \delta Y_\mu \} + \\ & + \{ \{ \delta X^i, Y_0^\mu \}, Y_{0\mu} \} + \{ \{ X_0^i, \delta Y^\mu \}, Y_{0\mu} \} + \tilde{\Lambda}_0 \delta X^i + X_0^i \delta \tilde{\Lambda} \end{aligned} \quad (14.13)$$

και συνδέσµους:

$$\begin{aligned} Y_0^\mu \delta Y_\mu = X_0^i \delta X^i = 0 \quad , \quad \dot{Y}_0^\mu \partial_\sigma \delta Y_\mu + \delta \dot{Y}^\mu \partial_\sigma Y_{0\mu} + \dot{X}_0^i \partial_\sigma \delta X^i + \delta \dot{X}^i \partial_\sigma X_0^i = 0 \\ \dot{Y}_0^\mu \partial_\delta \delta Y_\mu + \delta \dot{Y}^\mu \partial_\delta Y_{0\mu} + \dot{X}_0^i \partial_\delta \delta X^i + \delta \dot{X}^i \partial_\delta X_0^i = 0 \end{aligned} \quad (14.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_0^\mu \delta \dot{Y}_\mu + \dot{X}_0^i \delta \dot{X}^i + \{ Y_0^\mu, Y_{0\nu} \} \{ \delta Y_\mu, Y_{0\nu} \} + \{ X_0^i, X_0^j \} \{ \delta X^i, X_0^j \} + \{ Y_0^\mu, X_0^i \} \{ \delta Y_\mu, X_0^i \} + \\ + \{ Y_0^\mu, X_0^i \} \{ Y_{0\mu}, \delta X^i \} = 0. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Οι χορδοειδείς μεμβράνες του $\text{AdS}_{p+2} \times \text{S}^q$ έχουν:

$$Y_0^\mu = Y_0^\mu(\tau, \sigma) \quad (14.16)$$

$$X_0^i = (\cos \delta, \sin \delta, 0, \dots, 0) \longrightarrow X_0^i X_0^i = 1 \quad (14.17)$$

$$X_0^{i'} = (-\sin \delta, \cos \delta, 0, \dots, 0) \longrightarrow X_0^{i'} X_0^{i'} = 1 \quad (14.18)$$

$$X_0^{i''} = -(\cos \delta, \sin \delta, 0, \dots, 0) = -X_0^i \longrightarrow X^{i''} X^{i''} = 1. \quad (14.19)$$

Εισάγοντας τις (14.16)–(14.19) στις εξισώσεις κίνησης και τους συνδέσµους των λύσεων (14.4)–(14.8) όπως επίσης και τις εξισώσεις κίνησης και συνδέσµους των διαταραχών (14.12)–(14.15), λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων (θέτοντας $R = 1$):

$$\ddot{Y}_0^\mu = Y_0^{\mu''} + \Lambda_0 Y_0^\mu \quad , \quad Y_0^{\mu'} Y_{0\mu}' = -\dot{Y}_0^\mu \dot{Y}_{0\mu} = \tilde{\Lambda}_0 = -\ell^2/2 \Lambda_0 \quad (14.20)$$

$$Y_0^\mu Y_{0\mu} = -\ell^2 \quad , \quad \dot{Y}_0^\mu Y_{0\mu}' = 0, \quad (14.21)$$

τις εξισώσεις διαταραχών,

$$\begin{aligned} \delta \ddot{Y}^\mu = & \partial_\sigma^2 \delta Y^\mu + \tilde{\Lambda}_0 \partial_\delta^2 \delta Y^\mu - \left(X_0^{i''} \partial_\sigma \delta X^i - X_0^{i'} \partial_{\sigma,\delta}^2 \delta X^i + Y_0^{\nu'} \partial_\delta^2 \delta Y_\nu \right) Y_0^{\mu'} + \\ & + 2 \left(X_0^{i'} \partial_\delta \delta X^i \right) Y_0^{\mu''} + \Lambda_0 \delta Y^\mu + Y_0^\mu \delta \Lambda \end{aligned} \quad (14.22)$$

$$\delta \ddot{X}^i = \partial_\sigma^2 \delta X^i + \tilde{\Lambda}_0 \partial_\delta^2 \delta X^i - \left(X_0^{j'} \partial_\sigma^2 \delta X^j + Y_0^{\mu''} \partial_\delta \delta Y_\mu - Y_0^{\mu'} \partial_{\sigma,\delta}^2 \delta Y_\mu \right) X_0^{i'} +$$

$$+2 \left(Y_0^{\mu'} \partial_\sigma \delta Y_\mu \right) X_0^{i''} + \tilde{\Lambda}_0 \delta X^i + X_0^i \delta \tilde{\Lambda} \quad (14.23)$$

και τους συνδέσμους:

$$Y_0^\mu \delta Y_\mu = X_0^i \delta X^i = 0, \quad \dot{Y}_0^\mu \partial_\sigma \delta Y_\mu + \delta \dot{Y}^\mu Y_{0\mu}' = \dot{Y}_0^\mu \partial_\delta \delta Y_\mu + \delta \dot{X}^i X_0^{i'} = 0 \quad (14.24)$$

$$\dot{Y}_0^\mu \delta \dot{Y}_\mu + Y_0^{\mu'} \partial_\sigma \delta Y_\mu + \tilde{\Lambda}_0 \left(X_0^{i'} \partial_\delta \delta X^i \right) = 0. \quad (14.25)$$

Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι, παρό το γεγονός ότι οι εξισώσεις κίνησης (14.20)–(14.21) δεν εξαρτώνται ρητά από τη συντεταγμένη του κοσμικού όγκου $\delta = \sigma_2$ (είναι εξισώσεις χορδών), οι εξισώσεις των διαταραχών (14.22)–(14.25) εξαρτώνται ρητά από τη συντεταγμένη του κοσμικού όγκου δ μέσω των συντεταγμένων $X^i(\delta)$ της S^4 και των παραγώγων τους. Με δεδομένο ότι δεν υπάρχει μετασχηματισμός συντεταγμένων που να εξαλείφει τη δ εξάρτηση από τις εξισώσεις των διαταραχών (14.22)–(14.25), συμπεραίνουμε ότι οι χορδοειδείς μεμβράνες είναι ισοδύναμες με χορδές μόνο στην κατώτερη τάξη.

Σε ό,τι ακολουθεί, μόνο οι διαταραχές κατά μήκος των διευθύνσεων που είναι κάθετες στη μεμβράνη θα μελετηθούν, ήτοι οι διαταραχές για τις οποίες $Y_0^\mu = X_0^i = 0$. Αυτές οι διαταραχές είναι ευκολότερο να μελετηθούν καθώς αποσυνζευγνύονται από εκείνες που γίνονται παράλληλα προς τη χορδοειδή μεμβράνη, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (14.22)–(14.25). Οι διαταραχτικές εξισώσεις γίνονται:

$$\delta \ddot{Y}^\mu = \partial_\sigma^2 \delta Y^\mu + \tilde{\Lambda}_0 \partial_\delta^2 \delta Y^\mu + \Lambda_0 \delta Y^\mu \quad (14.26)$$

$$\delta \ddot{X}^i = \partial_\sigma^2 \delta X^i + \tilde{\Lambda}_0 \partial_\delta^2 \delta X^i + \tilde{\Lambda}_0 \delta X^i. \quad (14.27)$$

14.1 Περιστρεφόμενες Χορδοειδείς Μεμβράνες

Για να μελετήσουμε τις εγκάρσιες διαταραχές των περιστρεφόμενων χορδοειδών μεμβρανών, θέτουμε:

$$\delta Y^\mu = \sum_{r,m} e^{ir\tau + im\delta} \tilde{y}_{r,m}^\mu(\sigma), \quad \delta X^i = \sum_{r,m} e^{ir\tau + im\delta} \tilde{x}_{r,m}^i(\sigma), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (14.28)$$

Αν εισάγουμε την (14.28) στην (14.26)–(14.27), οι αντίστοιχες εξισώσεις κατά μήκος των κάθετων διευθύνσεων $Y_0^\mu = X_0^i = 0$, λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή (για απλότητα, παραλείπουμε τις εξαρτήσεις των $\tilde{y}_{r,m}^\mu(\sigma)$ και $\tilde{x}_{r,m}^i(\sigma)$ από τα r, m και σ):

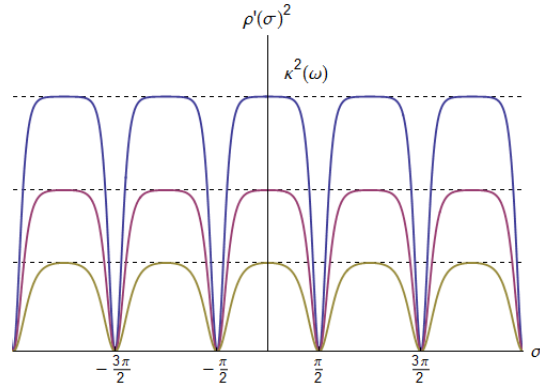
$$(\tilde{y}^\mu)'' + (r^2 - m^2 \tilde{\Lambda}_0 + \Lambda_0) \tilde{y}^\mu = 0 \quad (14.29)$$

$$(\tilde{x}^i)'' + (r^2 - m^2 \tilde{\Lambda}_0 + \tilde{\Lambda}_0) \tilde{x}^i = 0. \quad (14.30)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τις χορδοειδείς μεμβράνες (13.1) του $\text{AdS}_7 \times S^4$ για τις οποίες ($\ell = 2$),⁵⁶

$$Y_0^\mu = 2 (\cosh \rho(\sigma) \cos \kappa \tau, \sinh \rho(\sigma) \cos \kappa \omega \tau, \sinh \rho(\sigma) \sin \kappa \omega \tau, 0, 0, 0, \cosh \rho(\sigma) \sin \kappa \tau). \quad (14.31)$$

⁵⁶Είναι σχετικά απλό να επεκτείνουμε τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας στις χορδοειδείς μεμβράνες του $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}^k$. Βλέπε τον πίνακα 2.



Σχήμα 23: Διάγραμμα του δυναμικού Lamé (14.33) για τη χορδοειδή μεμβράνη (13.1)–(14.31).

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange Λ_0 και $\tilde{\Lambda}_0$, για τη χορδοειδή μεμβράνη (14.31) δίδονται από:

$$\Lambda_0 = -2\rho'^2 \quad \& \quad \tilde{\Lambda}_0 = 4\rho'^2, \quad (14.32)$$

όπου $\rho'(\sigma)^2$ είναι μια σ -περιοδική, άρτια συνάρτηση⁵⁷ (διαγράμματα αυτής για διάφορες τιμές του ω μπορούν να βρεθούν στο σχήμα 23) που δίδεται από:

$$\rho'^2 = \kappa^2 (\cosh^2 \rho - \omega^2 \sinh^2 \rho) = \kappa^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \left[\kappa \omega \left(\sigma + \frac{\pi}{2} \right) \middle| \frac{1}{\omega^2} \right] \quad (14.33)$$

$$\omega \cdot \kappa(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \mathbb{K} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) \quad , \quad \omega^2 > 1.$$

Οι διαταραχτικές εξισώσεις (14.29)–(14.30) κατά μήκος των κάθετων διευθύνσεων $Y^\mu = X^i = 0$, μπορεί ναδειχθεί ότι υπακούν την Ιακωβιανή (Jacobi) μορφή της εξίσωσης Lamé,

$$\frac{d^2 z}{du^2} + [h - \nu(\nu + 1)k^2 \operatorname{sn}^2(u|k^2)] z = 0, \quad (14.34)$$

με δεδομένο ότι θέτουμε:

$$z = \tilde{y}^\mu(\sigma), \quad u = \kappa \omega \left(\sigma + \frac{\pi}{2} \right), \quad h = \left(\frac{r}{\kappa \omega} \right)^2, \quad \nu(\nu + 1) = 2(2m^2 + 1), \quad k = \frac{1}{\omega}$$

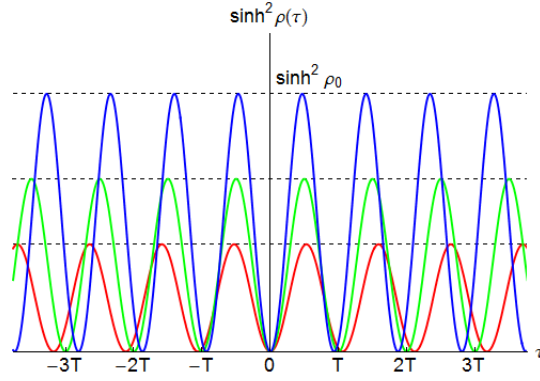
$$z = \tilde{x}^i(\sigma), \quad u = \kappa \omega \left(\sigma + \frac{\pi}{2} \right), \quad h = \left(\frac{r}{\kappa \omega} \right)^2, \quad \nu(\nu + 1) = 4(m^2 - 1), \quad k = \frac{1}{\omega}.$$

14.2 Παλλόμενες Χορδοειδείς Μεμβράνες

Για να μελετήσουμε τις εγκάρσιες διαταραχές των παλλόμενων χορδοειδών μεμβρανών, θέτουμε:

$$\delta Y^\mu = \sum_{m,n} e^{in\sigma + im\delta} \tilde{y}_{m,n}^\mu(\tau), \quad \delta X^i = \sum_{m,n} e^{in\sigma + im\delta} \tilde{x}_{m,n}^i(\tau), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (14.35)$$

⁵⁷Ας σημειωθεί ότι για μεγάλα ω , μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $\rho'^2 = \kappa^2 \cdot \operatorname{cd}^2 \left[\kappa \omega \sigma \middle| 1/\omega^2 \right] \sim \kappa^2 \cos^2 \sigma$.



Σχήμα 24: Διάγραμμα του δυναμικού Lamé (14.39) της χορδοειδούς μεμβράνης (13.10)–(14.38).

όποτε οι εξισώσεις για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις (14.26)–(14.27), λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή (όπου έχουμε ξανά παραλείψει τις εξαρτήσεις των $\tilde{y}_{n,m}^\mu(\tau)$ και $\tilde{x}_{n,m}^i(\tau)$ από τα n, m και τ):

$$\ddot{\tilde{y}}^\mu + \left(n^2 + m^2 \tilde{\Lambda}_0 - \Lambda_0\right) \tilde{y}^\mu = 0 \quad (14.36)$$

$$\ddot{\tilde{x}}^i + \left(n^2 + m^2 \tilde{\Lambda}_0 - \tilde{\Lambda}_0\right) \tilde{x}^i = 0. \quad (14.37)$$

Ας θεωρήσουμε την παλλόμενη διάταξη (13.10) του $\text{AdS}_7 \times S^4$ ($\ell = 2$):

$$Y_0^\mu = 2 \left(\cosh \rho(\tau) \cos t(\tau), 0, 0, \sinh \rho(\tau) \cos \sigma, 0, \sinh \rho(\tau) \sin \sigma, 0, \cosh \rho(\tau) \sin t(\tau) \right). \quad (14.38)$$

Αν επιλύσουμε τις εξισώσεις κίνησης (14.20)–(14.21), λαμβάνουμε το ακόλουθο δυναμικό Lamé:

$$\sinh^2 \rho(\tau) = \sinh^2 \rho_0 \cdot sn^2 \left[\tau \cdot \cosh \rho_0 \mid -\tanh^2 \rho_0 \right], \quad (14.39)$$

όπου το ρ_0 μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $4e^2 = \sinh^2 2\rho_0$ και το e έχει οριστεί στη σχέση (4.86). Το δυναμικό Lamé (14.39) έχει σχεδιαστεί για διάφορες τιμές του ρ_0 στο σχήμα 24. Οι πολλαπλασιαστές Lagrange Λ_0 και $\tilde{\Lambda}_0$ βρίσκονται να είναι:

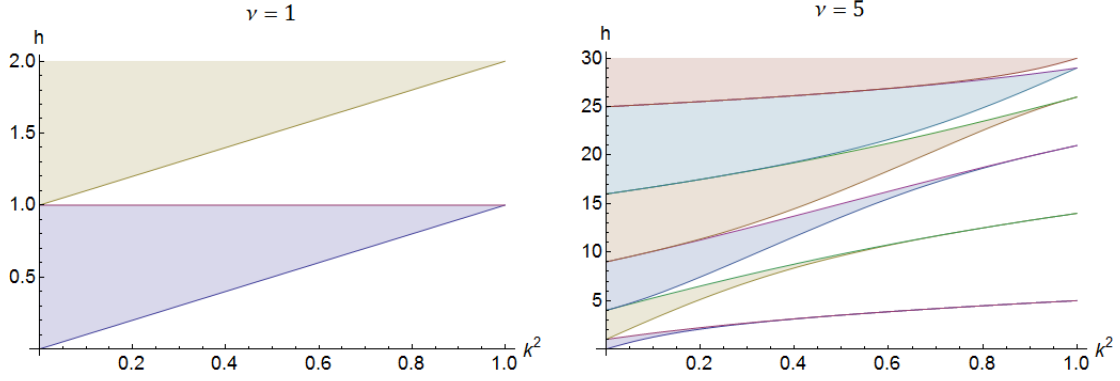
$$\Lambda_0 = -2 \sinh^2 \rho \quad \& \quad \tilde{\Lambda}_0 = 4 \sinh^2 \rho. \quad (14.40)$$

Οι διαταραχές κατά μήκος των κάθετων διευθύνσεων $Y^\mu = X^i = 0$ (14.36)–(14.37), υπακούν ξανά την εξίσωση Lamé (14.34). Για να μετατρέψουμε την τελευταία στη μορφή Jacobi, γράφουμε το δυναμικό (14.39) ως εξής:

$$\sinh^2 \rho(\tau) = \sinh^2 \rho_0 \cdot \left(1 - sn^2 \left[\tau \cdot \sqrt{\cosh 2\rho_0} + \mathbb{K} \left(\frac{\sinh^2 \rho_0}{\cosh 2\rho_0} \right) \mid \frac{\sinh^2 \rho_0}{\cosh 2\rho_0} \right] \right) \quad (14.41)$$

και αντικαθιστούμε $u = \tau \cdot \sqrt{\cosh 2\rho_0} + \mathbb{K}(k^2)$ και

$$z = \tilde{y}^\mu(\tau), \quad h = \frac{n^2}{\cosh 2\rho_0} + 2k^2(2m^2 + 1), \quad \nu(\nu + 1) = 4m^2 + 2, \quad k = \frac{\sinh \rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}}$$



Σχήμα 25: Ζώνες ευστάθειας (έγχρωμες) της εξίσωσης Lamé (14.34), για $\nu = 1$ (αριστερά) και $\nu = 5$ (δεξιά).

$$z = \tilde{x}^i(\tau), \quad h = \frac{n^2}{\cosh 2\rho_0} + 4k^2(m^2 - 1), \quad \nu(\nu + 1) = 4m^2 - 4, \quad k = \frac{\sinh \rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}},$$

στην εξίσωση (14.34).

Βρήκαμε λοιπόν ότι οι εγχάρσιες διαταραχές ($Y_0^\mu = X_0^i = 0$) των χορδοειδών μεμβρανών εντός του $\text{AdS}_7 \times S^4$ (13.1)–(13.10) διέπονται από την εξίσωση Lamé:

$$\frac{d^2 z}{du^2} + [h - \nu(\nu + 1)k^2 sn^2(u|k^2)] z = 0. \quad (14.42)$$

Όπως εξηγείται στο παράρτημα H', όταν $\nu(\nu + 1) \in \mathbb{R}$ και $0 < k < 1$, η εξίσωση Lamé (14.42) διαθέτει πάντα μια απειρία από πραγματικές ιδιοτιμές $a_\nu^s(k^2)$ και $b_\nu^s(k^2)$ που αντιστοιχούν στις περιοδικές ιδιοσυναρτήσεις της εξίσωσης.⁵⁸ Οι ιδιοτιμές της εξίσωσης Lamé μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις ομάδες, ανάλογα με την ομοτιμία (άρτια ή περιττή) και την περίοδο (ίση προς $2\mathbb{K}$ ή $4\mathbb{K}$) των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων. Για μια γενική ιδιοτιμή της εξίσωσης Lamé h (που δεν αντιστοιχεί απαραίτητα σε περιοδική ιδιοσυνάρτηση), η εξίσωση Lamé (14.42) είναι ευσταθής αν και μόνο αν όλες οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $z(u, h)$ είναι φραγμένες. Ειδάλλως η εξίσωση είναι ασταθής. Τα διαστήματα ευστάθειας καθορίζονται από τις ιδιοτιμές των περιοδικών λύσεων της εξίσωσης, οι οποίες έχουν την εξής διάταξη:

$$(a_\nu^0, a_\nu^1) \cup (b_\nu^1, b_\nu^2) \cup (a_\nu^2, a_\nu^3) \cup (b_\nu^3, b_\nu^4) \cup \dots \quad (14.43)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης Lamé είναι ευσταθείς εντός των παραπάνω διαστημάτων και ασταθείς έξω από αυτά. Οι συστολές μεταξύ των ιδιοτιμών υποδηλώνουν ότι η σχετική σειρά δύο διαδοχικών ιδιοτιμών δεν είναι γενικά γνωστή και μπορεί κάλλιστα να είναι η αντίθετη για διαφορετικές τιμές των $\nu \in \mathbb{R}$, $s = 0, 1, 2, \dots$ και $k \in (0, 1)$. Οι ιδιοτιμές Lamé έχουν μία ακόμη ενδιαφέρουσα ιδιότητα που είναι γνωστή ως «συνύπαρξη» ("coexistence"). Η ιδιότητα της συνύπαρξης συνεπάγεται ότι $\nu \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν η εξίσωση Lamé έχει ακριβώς $\nu + 1$ διαστήματα ευστάθειας (ζώνες) ανάμεσα σε ακριβώς $\nu + 1$ διαστήματα αστάθειας (χάσματα). Διαγράμματα των ζωνών (έγχρωμες) και χασμάτων (λευκά) της εξίσωσης Lamé για $\nu = 1$ και $\nu = 5$, μπορούν να βρεθούν στο σχήμα 25.

Συνοψίζοντας, η ευστάθεια των λύσεων της εξίσωσης Lamé οργανώνεται σε (ευσταθείς) ζώνες και (ασταθή) χάσματα. Οι παράμετροι της εξίσωσης Lamé (14.42), για το καθένα από τα ansätze (14.31)–(14.38) των χορδοειδών μεμβρανών, δίδονται στον πίνακα 2 (για τους ορισμούς των m , r και n , βλέπε

⁵⁸ Ας σημειωθεί επίσης ότι η εξίσωση Lamé (14.42) είναι συμμετρική κάτω από τους μετασχηματισμούς $\nu \leftrightarrow -\nu - 1$, που σημαίνει ότι επαρκεί η μελέτη του διαστήματος $\nu > -1/2$ και $\nu(\nu + 1) > -1/4$.

Ansatz	u	k	h	z	$\nu(\nu+1)$
(13.1) $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$	$\kappa\omega\left(\sigma + \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\omega}$	$\left(\frac{r}{\kappa\omega}\right)^2$	$\tilde{y}$	$4m^2 + 2$
				$\tilde{x}$	$4(m^2 - 1)$
(13.1) $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7$	$\kappa\omega\left(\sigma + \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\omega}$	$\left(\frac{r}{\kappa\omega}\right)^2$	$\tilde{y}$	$m^2/4 + 2$
				$\tilde{x}$	$\frac{1}{4}(m^2 - 1)$
(13.10) $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$	$\tau \cdot \sqrt{\cosh 2\rho_0} + \mathbb{K}(k^2)$	$\frac{\sinh \rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}}$	$\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0} + k^2(4m^2 + 2)$	$\tilde{y}$	$4m^2 + 2$
			$\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0} + 4k^2(m^2 - 1)$	$\tilde{x}$	$4(m^2 - 1)$
(13.10) $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7$	$\tau \cdot \sqrt{\cosh 2\rho_0} + \mathbb{K}(k^2)$	$\frac{\sinh \rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}}$	$\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0} + k^2(m^2/4 + 2)$	$\tilde{y}$	$m^2/4 + 2$
			$\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0} + \frac{k^2}{4}(m^2 - 1)$	$\tilde{x}$	$\frac{1}{4}(m^2 - 1)$

Πίνακας 2: Διαταρακτικές παράμετροι της εξίσωσης Lamé (14.42) για τις χορδοειδείς μεμβράνες (13.1)–(13.10) στον $\text{AdS}_{7/4} \times \text{S}^{4/7}$.

(14.28)–(14.35)). Είναι σχετικά εύκολο να επεκτείνουμε τα αποτελέσματά μας από τον $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$ στον $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7$ (όπου $\mathfrak{k} = \ell/R = 1/2$ και $\Lambda_0 = -8\tilde{\Lambda}_0$). Ο πίνακας 2 περιλαμβάνει και τις δύο περιπτώσεις. Τα δεδομένα για τις διαταραχές στον $\text{AdS}_{7/4}$, $\tilde{y} \equiv \{\tilde{y}_{r,m}^\mu(\sigma), \tilde{y}_{m,n}^\mu(\tau)\}$ καταλαμβάνουν την πρώτη σειρά της κάθε καταχώρησης, ενώ η δεύτερη σειρά περιέχει δεδομένα για τις διαταραχές επί της $\text{S}^{4/7}$, $\tilde{x} \equiv \{\tilde{x}_{r,m}^i(\sigma), \tilde{x}_{m,n}^i(\tau)\}$. Για δεδομένα ω, ρ_0 και $m \in \mathbb{Z}$ ($\kappa = \kappa(\omega) = 2/\pi\omega \cdot \mathbb{K}(1/\omega^2)$), οι επιτρεπόμενες τιμές των $r, n \in \mathbb{R}$ καθορίζονται από την επικάλυψη των ζωνών $\tilde{y}$ και $\tilde{x}$, το κατώτερο άκρο των οποίων ικανοποιεί:

$$h_{\min} \geq 0, \text{ στο ansatz (13.1) \& } h_{\min} \geq (4m^2 + 2) \frac{\sinh^2 \rho_0}{\cosh 2\rho_0}, \text{ στο ansatz (13.10) (AdS}_7 \times \text{S}^4)$$

$$h_{\min} \geq (m^2/4 + 2) \frac{\sinh^2 \rho_0}{\cosh 2\rho_0}, \text{ στο ansatz (13.10) (AdS}_4 \times \text{S}^7). \quad (14.44)$$

15 Περίληψη Μέρους IV

Το τελικό μέρος IV αυτής της διατριβής (§11–§14) αφιερώθηκε στη μελέτη των μεμβρανών στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT. Μετά από μερικά βασικά στοιχεία p-βρανών και M-θεωρίας, εισάγαμε την έννοια της «χορδοειδούς μεμβράνης» και μελετήσαμε μερικές απλές διατάξεις χορδοειδών μεμβρανών στον $\text{AdS}_7 \times S^4$ και τον $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$. Προκειμένου να μάθουμε για τις χορδοειδείς ιδιότητες των κλασικών αφόρτιστων μποζονικών μεμβρανών στους χωροχρόνους $\text{AdS}_m \times S^n$, θέσαμε την ερώτηση ποια είναι τα βασικά χαρακτηριστικά που μας επιτρέπουν να εμβαπτίσουμε το σίγμα μοντέλο των χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ στο σίγμα μοντέλο των μεμβρανών στον $\text{AdS}_{4/7} \times S^{7/4}$. Βρήκαμε ότι όλες οι διατάξεις χορδών εντός του AdS_5 (το μη συμπαγές μέρος του $\text{AdS}_5 \times S^5$) μπορεί να αναπαραχθεί από μεμβράνες που ζουν εντός του $\text{AdS}_7 \times S^4$. Επιπλέον, η συμπεριφορά κάθε διάταξης χορδών που ζει εντός του $\text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_5$ μπορεί να αναπαραχθεί από μια μεμβράνη του $\text{AdS}_4 \times S^7$.

Η κατασκευή των χορδοειδών μεμβρανών στον $\text{AdS}_m \times S^n$ είναι εξαιρετικά απλή. Δύο είναι τα βασικά χαρακτηριστικά που απαιτούνται προκειμένου να ορίσουμε τις χορδοειδείς μεμβράνες: ένα συμπαγές και ένα μη συμπαγές μέρος στο υπόβαντο. Οι δύο συντεταγμένες του κοσμικού όγκου της χορδοειδούς μεμβράνης μοιράζονται μεταξύ των δύο συνιστωσών πολλαπλοτήτων, έτσι ώστε η διάταξη να είναι ουσιαστικά μονοδιάστατη σε καθέναν από τους δύο χώρους. Παρότι η δράση Polyakov για τις μποζονικές μεμβράνες (12.3) (σε δεδομένη βαθμίδα) έχει εντελώς διαφορετική δομή από την αντίστοιχη δράση των χορδών (3.3), αποδείξαμε ότι η πρώτη μπορεί να αναχθεί στη δεύτερη όταν οι συντεταγμένες της μεμβράνης μοιραστούν μεταξύ των δύο χώρων του εξωτερικού γινομένου και η συντεταγμένη του συμπαγούς χώρου παραμένει στατική. Αυτός ο διαχωρισμός θυμίζει εν πολλοίς εκείνον των Duff, Howe, Inami και Stelle στην εργασία [151], παρότι τα δικά μας κίνητρα είναι κάπως εγγύτερα στις εργασίες [122, 174, 175]. Εκτός του ότι ασχολούμαστε μόνο με μποζονικές μεμβράνες στον $\text{AdS}_m \times S^n$, σε κανένα απολύτως σημείο δεν κάναμε διπλή διαστατική αναγωγή (DDR) αλλά [151]. Στόχος μας ήταν να αναπαράγουμε τη συμπεριφορά της χορδής GKP από την οπτική γωνία της μεμβράνης. Άλλες εργασίες με παρόμοιες θεωρήσεις είναι οι [176].

Η σταθερότητα των χορδοειδών μεμβρανών στη γραμμική προσέγγιση διερευνήθηκε στην §14. Ένα σημαντικό συμπέρασμα που προέκυψε από την ανάλυση της ευστάθειας, ήταν ότι οι ομοιότητες μεταξύ των χορδοειδών μεμβρανών και των χορδών δεν μπορούν να επεκταθούν πέραν της κατώτερης τάξης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι εξισώσεις για τις διαταραχές των χορδοειδών μεμβρανών εξαρτώνται από τη δεύτερη συντεταγμένη του κοσμικού όγκου δ , η οποία και δεν μπορεί να απαλειφθεί. Σε αυτό το πλαίσιο, βρήκαμε επίσης ότι η ευστάθεια των χορδοειδών μεμβρανών κατά μήκος των εγκάρσιων διευθύνσεων τους διέπεται από την εξίσωση Lamé. Κατά συνέπεια, οι χορδοειδείς μεμβράνες εμφανίζουν την τυπική δομή ευστάθειας/αστάθειας με ζώνες και χάσματα, που αποτελεί μια χαρακτηριστική ιδιότητα του φάσματος της εξίσωσης Lamé. Η τυπική δομή της μονής ζώνης/μονού χάσματος των κλασικών μποζονικών χορδών του AdS_3 [53, 77], αναχτάται από τις χορδοειδείς μεμβράνες ως μια ειδική οριακή περίπτωση (καταχώρηση με $m = 0$ στον πίνακα 2). Η δομή Lamé γεννά κάποια ενδιαφέροντα ζητήματα ερμηνείας τόσο για τις χορδές όσο και για τις μεμβράνες. Το πρώτο αφορά στο κατά πόσο η δομή των ζωνών/χασμάτων της εξίσωσης Lamé για τις χορδές στον AdS δέχεται την ερμηνεία της εκρηκτικής παραγωγής σωματιδίων, κατ'αναλογία με το φαινόμενο του παραμετρικού συντονισμού που συναντάμε στο μετα-πληθωριστικό σύμπαν. Δεύτερον, μπορούμε να ρωτήσουμε ποιο είναι το ολογραφικά δυϊκό φαινόμενο, όπως επίσης και ποια είναι η ερμηνεία της δομής των ζωνών/χασμάτων της εξίσωσης Lamé από την πλευρά της δυϊκής υπερσύμμορφης θεωρίας πεδίου.

Ολοκληρώνουμε το μέρος IV με συζήτηση των αποτελεσμάτων μας για τις χορδοειδείς μεμβράνες, σε σχέση με μερικές ενδιαφέρουσες περαιτέρω προοπτικές επί ποικίλων θεμάτων που προκύπτουν.

- *Διαστάσεις Κλίμακας Χορδοειδών Μεμβρανών.*

Η χορδοειδής μεμβράνη (13.1) ταυτίζεται ουσιαστικά με τη λύση «τύπου I» των Hartnoll και Nuñez

εντός του $\text{AdS}_4 \times S^7$ [174], εκπεφρασμένη ως προς τη σύμμορφη δράση Polyakov εντός του $\text{AdS}_7 \times S^4$ (βλέπε §13.2–§13.3 για τον $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$). Στην §4 είδαμε ότι η κλειστή διπλωμένη χορδή GKP (I) στον AdS_3 είναι δυϊκή στους τελεστές με συστροφή 2, $\text{Tr}[\mathcal{Z} \mathcal{D}_+^S \mathcal{Z}]$ του $\mathfrak{sl}(2)$ τομέα της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Συνεπώς, σε πλήρη συμφωνία με τους GKP [11] και τους Hartnoll–Nuñez [174], η χορδοειδής μεμβράνη (13.1) αναμένεται να είναι δυϊκή με τους παραπάνω τελεστές συστροφής 2, που δίνονται επίσης μέσω της (4.2). Το κλασσικό μέρος των αντίστοιχων ανώμαλων διαστάσεων κλίμακας θα δίνεται τότε από τη σχέση (4.30) για μικρές τιμές του σπίν S και από τις σχέσεις (5.5)–(5.95) για μεγάλα σπίν S :

$$E^2 = 2\sqrt{\lambda'} S + \dots \quad (\text{Μικρές Χορδοειδείς Μεμβράνες, } S \ll \sqrt{\lambda'}) \quad (15.1)$$

$$E - S = f(\lambda') \ln \frac{S}{\sqrt{\lambda'}} + \dots \quad (\text{Μεγάλες Χορδοειδείς Μεμβράνες, } S \gg \sqrt{\lambda'}) \quad (15.2)$$

όπου S είναι το φορτίο της χορδοειδούς μεμβράνης $S_1 = S^{12}$ στην (12.9) και η ενεργή σταθερά σύζευξης λ' ορίζεται ως $\sqrt{\lambda'} \equiv R\ell^2/g_s\ell_s^3$.

Η πλήρης κλασσική «μικρή» σειρά (15.1) εξήχθη στην §4.1.1, βλέπε τις εξισώσεις (4.29)–(4.30). Το κλασσικό μέρος της «μεγάλης» σειράς (15.2) διερευνήθηκε στην ενότητα §5.2, όπουδείχθηκε αναλυτικά πως υπολογίζονται οι όροι της σειράς μέσω της συνάρτησης W του Lambert. Στην §4.1.3 αποδείξαμε μια σχέση (η οποία προτάθηκε αρχικά στην εργασία [12]) που συνδέει τις κλασσικές «μικρές» με τις «μεγάλες» διαστάσεις κλίμακας (15.1)–(15.2). Στην §5.3 δείξαμε ότι οι όροι των μεγάλων σειρών (5.5)–(5.95) ικανοποιούν τις σχέσεις Moch–Vermaseren–Vogt (MVV) που προκύπτουν από την ιδιότητα της «αμοιβαιότητας» ("reciprocity") ή την αναλλοιώτητα ομοτιμίας. Η αμοιβαιότητα προτάθηκε αρχικά από τους Gribov και Lipatov [82] στα πλαίσια της βαθιάς ανελαστικής σκέδασης (DIS) και έχει επαληθευθεί για τους τελεστές συστροφής 2 μέχρι τους 3 βρόχους στη διαταρακτική QCD [81] και μέχρι τους τέσσερις βρόχους στην ασθενώς συζευγμένη $\mathcal{N} = 4$ SYM [80, 177]. Φυσιολογικά, όλες αυτές οι ιδιότητες αναμένεται να μπορούν να επεκταθούν και στις χορδοειδείς μεμβράνες.

Αντίθετα, αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω ιδιότητες δεν μπορούν να επεκταθούν στο χβαντικό επίπεδο. Η "cusp" ανώμαλη διάσταση $f(\lambda)$ δέχεται χβαντικές διορθώσεις τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε στη θεωρία υπερχορδών υπολογίζοντας τις διαταρακτικές ορίζουσες της εξίσωσης Lamé, σύμφωνα με την εργασία [77]. Ωστόσο, το διαταρακτικό σίγμα μοντέλο στον $\text{AdS}_{7/4} \times S^{4/7}$ είναι πολύ διαφορετικό από το αντίστοιχο μοντέλο των υπερχορδών. Αυτή η εικόνα επιβεβαιώθηκε στην §14 της παρούσας διατριβής, όπου οι εγκάρσιες διαταραχές των χορδοειδών μεμβρανών στον AdS_3 μελετήθηκαν και βρέθηκαν να έχουν μια πολύ πλουσιότερη δομή ζωνών/χασμάτων Lamé, σε σχέση με τις αντίστοιχες χορδές GKP. Συνεπώς αναμένουμε οι χβαντικές διορθώσεις των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών συστροφής 2 που είναι δυϊκοί στις χορδοειδείς μεμβράνες του $\text{AdS}_{7/4} \times S^{4/7}$, να είναι γενικά διαφορετικές από τις χβαντικές διορθώσεις που λαμβάνουν οι αντίστοιχες χορδές των GKP.

• Ολοκληρωσιμότητα.

Το κύριο αποτέλεσμα της §13 ήταν ότι όλες οι κλασσικές χορδές στον AdS_5 μπορούν να αναπαραχθούν από μια χορδοειδή μεμβράνη του $\text{AdS}_7 \times S^4$ και ότι όλες οι κλασσικές χορδές του AdS_4 μπορούν να αναπαραχθούν από μια χορδοειδή μεμβράνη του $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$. Όπως είδαμε στην §3.2 το κλασσικό σίγμα μοντέλο των χορδών στον $\text{AdS}_{2/3/4}$ είναι αντίστοιχα ισοδύναμο με τη Liouville, sinh-Gordon και B₂-Toda εξίσωση. Συνεπώς, οι χορδοειδείς μεμβράνες που αναπαράγουν τις κλασσικές χορδές στον $\text{AdS}_{2/3/4}$ αναμένεται να είναι κλασσικά ισοδύναμες με τα μοντέλα Liouville, sinh-Gordon και B₂-Toda αντίστοιχα.

Η ανάλυσή μας είχε επίσης σημαντικές συνέπειες και για τις δυϊκές θεωρίες βαθμίδας. Το γεγονός ότι δύο ή περισσότερες εντελώς διαφορετικές θεωρίες βαθμίδας περιέχουν διεγέρσεις με παρόμοια φάσματα συνεπάγεται ότι οι δυϊκές τους υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου (όσο διαφορετικές κι αν είναι, π.χ.

μπορεί να έχουν διαφορετικές διαστάσεις) οφείλουν να περιέχουν τομείς με παρόμοια υποκείμενη δομή. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη χορδή (I) των GKP που περιστρέφεται εντός του AdS_3 . Είδαμε στην §5 ότι η χορδή GKP (I) είναι δυϊκή στους τελεστές με συστροφή 2, ενώ η ενέργειά της, που είναι ίση με τις διαστάσεις κλίμακας των τελεστών αυτών, είναι ανάλογη του λογαρίθμου του σπίν της χορδής. Το γεγονός ότι μπορεί να βρεθεί μια χορδοειδής μεμβράνη κάποιας θεωρίας στο εσωτερικό (bulk) που είναι δυϊκή σε μια διαφορετική υπερσύμμορφη θεωρία πεδίου από εκείνη της αρχικής χορδής GKP, αλλά αμφότερες έχουν πάραυτα τις ίδιες σχέσεις διασποράς (5.5)–(15.2), σημαίνει ότι οι δύο υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου περιέχουν τους ίδιους τελεστές συστροφής 2, με τα ίδια φάσματα. Εν ολίγοις, δείξαμε ότι οι ακόλουθες δυαδικότητες βαρύτητας/βαθμίδας περιέχουν καταστάσεις/τελεστές με ανώμαλες διαστάσεις που συμπεριφέρονται ως $\Delta - S \sim \ln S$:

Θεωρία Βαθμίδας	δυϊκή Θεωρία Βαρύτητας
$\mathcal{N} = 4 \mathfrak{su}(N)$ super Y-M θεωρία	IIB θεωρία χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$
$\mathcal{N} = 8 \text{ SCFT} / A_{N-1}(2,0) \text{ SCFT}$	M-θεωρία στον $\text{AdS}_{4/7} \times S^{7/4}$
$\mathcal{N} = 6 U(N)_k \times U(N)_{-k}$ super C-S θεωρία	
$N \rightarrow \infty$	M-θεωρία στον $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$
$k^5 \gg N \rightarrow \infty, \lambda \equiv 2\pi^2 N/k = \text{σταθ.}$	IIA θεωρία χορδών στον $\text{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3$

Η μελέτη των χορδοειδών μεμβρανών φαίνεται να ενισχύει την ακόλουθη υπόθεση που έχει προταθεί από τον Bozhilov στην εργασία [150]. Οι υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου:

- (α) $\mathcal{N} = 4 \mathfrak{su}(N)$ SYM θεωρία (δυϊκή στην IIB θεωρία χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$)
- (β) $A_{N-1}(2,0) \text{ SCFT}$ (δυϊκή στην M-θεωρία στον $\text{AdS}_7 \times S^4$)
- (ς) $\mathcal{N} = 8 \text{ SCFT}$ (δυϊκή στην M-θεωρία στον $\text{AdS}_4 \times S^7$),

πιθανώς διαθέτουν κοινούς ολοκληρώσιμους τομείς. Οι χορδοειδείς μεμβράνες επιπλέον συνεπάγονται ότι η παραπάνω «οικογένεια» δύναται να περιέχει περισσότερα μέλη (π.χ. την QCD, $\mathcal{N} = 6$ quiver super Chern-Simons, $\mathcal{N} = 1$ SYM [174, 178], κλπ.). Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα είναι ότι οι $\mathcal{N} = 0, 1, 2, 4$ SYM θεωρίες έχουν κοινό καθολικό τελεστή διαστολής στον ένα βρόχο [179]. Ανάλογες θεωρήσεις εξετάζονται αυτή την περίοδο και από ομάδες που αναπτύσσουν τη μέθοδο της χβαντικής φασματικής καμπύλης (QSC), όπου μια «μυστηριώδης σχέση» μεταξύ των ολοκληρώσιμων δομών της ABJM και της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας έχει ήδη αναφερθεί [180]. Η Έλλη Πομόνη και η ομάδα της έχει επίσης πολύ ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις προς την ίδια κατεύθυνση [181].

• Πιθανές Γενικεύσεις.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή με κάποιες επιπλέον σχέψεις. Προσπαθήσαμε να σκεφτούμε κάποιο γενικό επιχείρημα που να αποδεικνύει ότι όλες οι οι θεωρίες (υπερ-) χορδών που μπορούν να διατυπωθούν στον AdS_5 όπως επίσης και τον αντίστοιχο τομέα της δυϊκής $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας, μπορούν αντίστοιχα να εμβαπτιστούν στη θεωρία (υπερ-) μεμβρανών εντός του $\text{AdS}_7 \times S^4$ και της δυϊκής της υπερσύμμορφης θεωρίας πεδίου. Οστόσο είναι γνωστό ότι η διπλή διαστατική αναγωγή (DDR) [151], είναι γενικά αδύνατη στην περίπτωση

$$\{\text{μεμβράνες}/\text{AdS}_{4/7} \times S^{7/4}\} \longrightarrow \{\text{χορδές}/\text{AdS}_5 \times S^5\},$$

συνεπώς σε καμιά περίπτωση δεν θα πρέπει να αναμένουμε ότι η θεωρία χορδών στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ μπορεί να εμβαπτιστεί στην M-θεωρία στον $\text{AdS}_{4/7} \times S^{7/4}$. Αυτό δεν σημαίνει ότι τα αποτελέσματα των Duff, Howe, Inami και Stelle [151] δεν μπορούν να εφαρμοσθούν στον $\text{AdS}_{4/7} \times S^{7/4}$. Υπάρχει περίπτωση να μπορούν να βρεθούν κατάλληλες, επιτρεπτές εμβαπτίσεις της πλήρους δράσης των Green-Schwarz στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ [27, 182] εντός της πλήρους δράσης της υπερμεμβράνης στον $\text{AdS}_{4/7} \times S^{7/4}$ [138]. Θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθεί ο βαθμός στον οποίο αυτό είναι εφικτό.

Τέλος, θα μπορούσαμε να επιχειρήσουμε να μελετήσουμε με πιο αυστηρό τρόπο τη συναρτησιακή διαφορά ανάμεσα στις δράσεις Polyakov των χορδών και των μεμβρανών $S_2 - S_1$, σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις. Από μαθηματική σκοπιά, φαίνεται ότι είναι εφικτό να αποδείξουμε ότι κάθε διάταξη μεμβράνης μπορεί να ληφθεί θεωρώντας εκτεταμένα αντικείμενα σε υψηλότερες διαστάσεις (π.χ. μια 3-βράνη ή μια 5-βράνη), τα οποία ζουν σε χωροχρόνο υψηλότερων διαστάσεων. Πιο γενικά, κάθε λύση p-βράνης που ζει στον AdS_m είναι θεωρητικά δυνατόν να ληφθεί από μια $(p+1)$ -βράνη που ζει στον $\text{AdS}_{m'} \times S^{m+n+1-m'}$ ή από μια $(p+q)$ -βράνη που ζει σε κάποιον χωρόχρονο υψηλότερης διάστασης.

Μέρος V

Παραρτήματα

A' Χορδές σε Επίπεδο Χωρόχρονο

Όταν οι χορδές είναι απειροστά μικρές, η καμπυλότητα του χωροχρόνου αναμένεται να έχει αμελητέα επίδραση στην κίνησή τους, η οποία ουσιαστικά λαμβάνει χώρα σε επίπεδο υπόβαθρο. Στην §4, οι χορδές GKP μελετήθηκαν με μεγάλη λεπτομέρεια. Σύμφωνα με όσα μόλις αναφέραμε, η αρνητική καμπυλότητα του χώρου anti-de Sitter και η θετική καμπυλότητα της σφαίρας θα έχουν μόνο δευτερεύουσα συνεισφορά στα όρια των μικρών χορδών GKP, οι οποίες ουσιαστικά «βλέπουν» ένα σχεδόν επίπεδο χωροχρόνο. Στο παράρτημα αυτό πρόκειται να μελετήσουμε τα ανάλογα των διατάξεων GKP σε επίπεδο χώρο:

$$ds^2 = \ell^2 \left[-dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 \left(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi_1^2 + \sin^2 \theta d\phi_2^2 \right) \right].^{59} \quad (A'.1)$$

Συγκεκριμένα πρόκειται να εξάγουμε τις σχέσεις διασποράς των περιστρεφόμενων και των παλλόμενων χορδών.

A'.1 Περιστρεφόμενη Χορδή

Ας θεωρήσουμε την περιστρεφόμενη διάταξη (4.8):

$$\left\{ t = \kappa\tau, \rho = \rho(\sigma), \theta = \kappa\omega\tau, \phi_1 = \phi_2 = 0 \right\}, \quad (A'.2)$$

εντός του 5-διάστατου επιπέδου υποβάθρου (A'.1). Το ansatz (4.40) μπορεί να ληφθεί από το (A'.2) για $\rho \rightarrow \bar{\theta}_1$. Στη σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) η δράση Polyakov δίδεται από:

$$S_P = \frac{T\ell^2}{2} \int \left(-\dot{t}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 - \rho'^2 \right) d\tau d\sigma = \frac{T\ell^2}{2} \int \left(-\kappa^2 + \kappa^2 \omega^2 \rho^2 - \rho'^2 \right) d\tau d\sigma. \quad (A'.3)$$

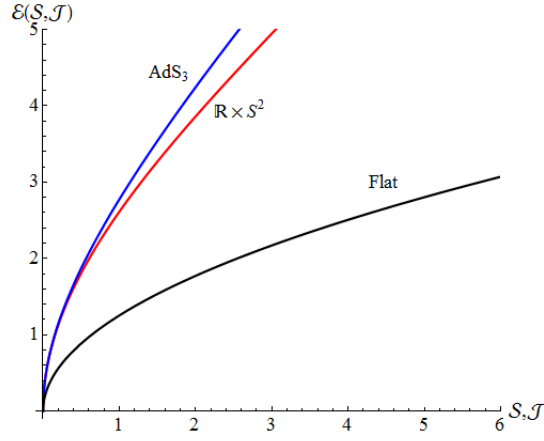
Ισοδύναμα μπορούμε να πάρουμε $\rho, \bar{\theta}_1 \rightarrow 0$ στις δράσεις (4.11)–(4.42). Το κ είναι ξανά ένας παράγοντας που επιτρέπει $\sigma(\rho_0) = \pi/2$:

$$\sigma(\rho_0) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{\rho_0} \frac{d\rho}{\kappa \sqrt{1 - \omega^2 \rho^2}} = \frac{\pi}{2\kappa\omega} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\omega} = \rho_0. \quad (A'.4)$$

Τα διατηρούμενα φορτία μπορούν να υπολογισθούν είτε απευθείας από τη δράση Polyakov (A'.3) ή ως όρια $\rho, \bar{\theta}_1 \rightarrow 0$ των φορτίων (4.15)–(4.16) και (4.47)–(4.48):

$$E = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \kappa \cosh^2 \rho d\sigma \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega} d\sigma = \frac{\ell^2}{\omega\alpha'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega} \quad (A'.5)$$

$$S = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \kappa \omega \sinh^2 \rho d\sigma \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\sigma = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'} \int_0^{\rho_0} \frac{4\omega\rho^2 d\rho}{\sqrt{1 - \omega^2 \rho^2}} = \frac{\ell^2}{2\alpha'\omega^2} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\omega^2}. \quad (A'.6)$$



Σχήμα 26: Σχέσεις $\mathcal{E} = \mathcal{E}(S, T)$ για περιστρεφόμενες χορδές εντός του AdS_3 , του $\mathbb{R} \times S^2$ και του επίπεδου χωροχρόνου.

Έτσι λαμβάνουμε την ενέργεια της χορδής σαν συνάρτηση του σπίν της:

$$E = \left(2\sqrt{\lambda} S\right)^{1/2}. \quad (\text{A'.7})$$

Ας σημειωθεί ότι η (A'.7) συμπίπτει με τον κυρίαρχο όρο των σειρών (4.30)–(4.62) για τις μικρές χορδές GKP εντός των AdS_3 και $\mathbb{R} \times S^2$. Οι επόμενοι όροι αυτών των σειρών οφείλονται στην καμπυλότητα του χωροχρόνου και ποσοτικοποιούν την απόκλιση της υπόβαθρου της χορδής από την επίπεδη μετρική (A'.1). Στο σχήμα 26 έχουμε σχεδιάσει σε κοινό διάγραμμα την ενέργεια σαν συνάρτηση του σπίν για κλειστές διπλωμένες χορδές που περιστρέφονται εντός του AdS_3 (4.22)–(4.23), $\mathbb{R} \times S^2$ (4.55)–(4.56) και του επίπεδου χωροχρόνου (A'.7).

Η συμπεριφορά (A'.7) για την κυρίαρχη συνεισφορά στην ενέργεια των μικρών διεγέρσεων εντός του χώρου anti-de Sitter μπορεί ακόμη να βρεθεί και από τις διαστάσεις κλίμακας (2.42) των βαθμωτών τελεστών που έχουν συζευχθεί με τις μαζικές καταστάσεις χορδών [7]. Σε ισχυρή σύζευξη $\lambda \rightarrow \infty$, η διάσταση κλίμακας ενός όποιου βαθμωτού πεδίου μάζας m στον AdS_{p+2} δίδεται από την (2.42):

$$\Delta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(p+1 \pm \sqrt{(p+1)^2 + (2m\ell)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(p+1 \pm \sqrt{(p+1)^2 + 16\sqrt{\lambda}n} \right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 2 \left(\sqrt{\lambda}n \right)^{1/2},$$

όπου $m^2 = 4n/\alpha'$ είναι το επίπεδο διεγερσης της χορδής και $S = 2n$. Η συμπεριφορά $E = 2 \left(\sqrt{\lambda}n \right)^{1/2}$ για την ενέργεια της χορδής ισχύει για μικρές τιμές του n .

A'.2 Παλλόμενη Χορδή

Η παλλόμενη διάταξη των GKP (4.78)

$$\left\{ t = t(\tau), \rho = \rho(\tau), \theta = 0, \phi_1 = w\sigma, \phi_2 = 0 \right\} \quad (\text{A'.8})$$

εντός του επίπεδου υπόβαθρου (A'.1), αναμένεται να αναπαράγει την κυρίαρχη συνεισφορά (4.102) στην

⁵⁹Ο παράγοντας $\ell^2 = \alpha'\sqrt{\lambda}$ μπροστά από την επίπεδη μετρική, έχει συμπεριληφθεί ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων στον επίπεδο χώρο και εκείνων του $\text{AdS}_5 \times S^5$.

ενέργεια της παλλόμενης χορδής GKP, στο όριο του μικρού επιπέδου διέγερσης n . Η αντίστοιχη δράση Polyakov (στη σύμμορφη βαθμίδα, $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) είναι:

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'} \int \left(-\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2 - \rho^2 \phi_1'^2 \right) d\tau d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \int \left(-\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2 - w^2 \rho^2 \right) d\tau. \quad (\text{A'.9})$$

Οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι Virasoro αντιστοιχούν σε αρμονική κίνηση:

$$\ddot{t} = 0 \Rightarrow t = \kappa \tau, \quad \ddot{\rho} + w^2 \rho = 0, \quad \dot{\rho}^2 - \kappa^2 + w^2 \rho^2 = 0. \quad (\text{A'.10})$$

Συμβολίζοντας με ρ_0 το κλασσικό σημείο επαναφοράς, λαμβάνουμε το μήκος της χορδής και τη διατηρούμενη ενέργεια:

$$E = \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right| = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{t} d\sigma = \kappa \sqrt{\lambda} \quad (\text{A'.11})$$

$$\tau(\rho) = \int_0^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{\kappa^2 - w^2 \rho^2}} = \frac{1}{w} \arcsin \frac{w\rho}{\kappa} \Leftrightarrow \rho(\tau) = \frac{\kappa}{w} \sin w\tau, \quad \rho_0 = \frac{\kappa}{w} = \frac{E}{w\sqrt{\lambda}} = e. \quad (\text{A'.12})$$

Το σύστημα μπορεί τώρα να κβαντιστεί, όπως έγινε στην §4.3.1. Η αντίστοιχη κυματική εξίσωση είναι:

$$-\hbar^2 \psi''(\rho) = (E^2 - w^2 \lambda \rho^2) \cdot \psi(\rho), \quad \Psi(t, \rho) = e^{-iEt/\hbar} \cdot \psi(\rho). \quad (\text{A'.13})$$

Πρόκειται για «μισό» αρμονικό ταλαντωτή. Επιβάλλοντας τη συνοριακή συνθήκη, $\psi(0) = \pm 1$, οι ιδιοενέργειές του είναι:

$$E = 2 \left(\hbar \sqrt{\lambda} w \right)^{1/2} \cdot \left(n + \frac{1}{4} \right)^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A'.14})$$

που συμπίπτει με την (4.102) σε κατώτερη τάξη. Ένας άλλος τρόπος για να καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα, μπορεί να βρεθεί στην εργασία [52] (σελ. 4-6).

B' Δυαδικότητες Μικρών-Μεγάλων Χορδών

Στο παράρτημα αυτό πρόκειται να διατυπώσουμε κάποιες επιπλέον δυαδικότητες μεταξύ μικρών και μεγάλων χορδών, για τις δύο περιστρεφόμενες διατάξεις των GKP (I–II) και να δώσουμε μερικές κλασσικές εκφράσεις που συνδέουν τα διατηρούμενα φορτία χορδών που στρέφονται εντός του AdS_3 , με τα φορτία χορδών που στρέφονται στον $\mathbb{R} \times \text{S}^2$. Ας ξεκινήσουμε με μερικούς ορισμούς:

Διπλωμένες Χορδές στον AdS_3

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &\equiv \frac{\pi E_1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\omega}{\omega^2 - 1} \mathbb{E} = \frac{2\sqrt{1-x}}{x} \mathbb{E} = \frac{2}{3} \sqrt{1-x} \left(\mathbb{R}_D(0, x, 1) + \mathbb{R}_D(0, 1, x) \right) \\ \mathcal{S}_1 &\equiv \frac{\pi S_1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \left[\frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} \mathbb{E} - \mathbb{K} \right] = 2 \left[\frac{1}{x} \mathbb{E} - \mathbb{K} \right] = \frac{2}{3} (1-x) \mathbb{R}_D(0, 1, x) \\ \gamma_1 &= 2 \left[\frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \mathbb{E} + \mathbb{K} \right] = 2 \left[\frac{\sqrt{1-x}-1}{3} \left(\mathbb{R}_D(0, x, 1) + \mathbb{R}_D(0, 1, x) \right) + \mathbb{R}_F(0, x, 1) \right]\end{aligned}$$

Διπλωμένες Χορδές στον $\mathbb{R} \times \text{S}^2$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &\equiv \frac{\pi E_2}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\omega} \mathbb{K} = 2\sqrt{1-x} \mathbb{K} = 2\sqrt{1-x} \mathbb{R}_F(0, x, 1) \\ \mathcal{J}_2 &\equiv \frac{\pi J_2}{\sqrt{\lambda}} = 2 (\mathbb{K} - \mathbb{E}) = \frac{2}{3} (1-x) \mathbb{R}_D(0, x, 1) \\ \gamma_2 &= 2 \left[(\sqrt{1-x}-1) \mathbb{K} + \mathbb{E} \right] = 2 (\sqrt{1-x}-1) \mathbb{R}_F(0, x, 1) + \frac{2x}{3} \left(\mathbb{R}_D(0, x, 1) + \mathbb{R}_D(0, 1, x) \right),\end{aligned}$$

όπου τα ορίσματα όλων των ελλειπτικών συναρτήσεων είναι $1/\omega^2 \equiv 1-x$. Βρίσκουμε:

$$\mathcal{E}_1 = -\omega \frac{d\mathcal{E}_2}{d\omega} \quad \& \quad \mathcal{S}_1 = -\omega \frac{d(\omega \mathcal{E}_2)}{d\omega} = -\frac{d(\omega \mathcal{J}_2)}{d\omega} \quad (\text{B'.1})$$

$$\omega \mathcal{E}_2 = \omega \mathcal{E}_1 - \mathcal{S}_1 = \mathcal{J}_2 + \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \mathcal{E}_1 = \omega^2 \mathcal{J}_2 + (\omega^2 - 1) \mathcal{S}_1 = 2 \mathbb{K} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) \quad (\text{B'.2})$$

$$\left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \mathcal{E}_1 = \left(1 - \frac{1}{\omega^2} \right) \mathcal{S}_1 + \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \mathcal{E}_2 = \omega \mathcal{E}_2 - \mathcal{J}_2 = (\omega^2 - 1) (\mathcal{S}_1 + \mathcal{J}_2) = 2 \mathbb{E} \left(\frac{1}{\omega^2} \right). \quad (\text{B'.3})$$

Εισάγοντας μερικές από αυτές τις σχέσεις στην ταυτότητα του Legendre (4.37), βρίσκουμε τις ακόλουθες επιπλέον σχέσεις μεταξύ μικρών και μεγάλων χορδών:

$$\frac{\omega'}{\omega} \mathcal{E}'_1 \mathcal{E}_2 + \frac{\omega}{\omega'} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}'_2 - \omega \omega' \mathcal{E}_2 \mathcal{E}'_2 = 2\pi \quad (\text{B'.4})$$

$$\frac{1}{\omega'} \mathcal{S}_1 \mathcal{E}'_2 + \frac{1}{\omega} \mathcal{S}'_1 \mathcal{E}_2 = 2\pi \quad \& \quad \frac{1}{\omega \omega'} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}'_1 - \mathcal{J}_2 \mathcal{J}'_2 = 2\pi \quad (\text{B'.5})$$

$$\mathcal{S}_1 \mathcal{J}'_2 + \mathcal{S}'_1 \mathcal{J}_2 + \mathcal{S}_1 \mathcal{S}'_1 = 2\pi. \quad (\text{B'.6})$$

Γ' Κώδικας Mathematica

Το παρόν παράρτημα περιέχει κώδικες γραμμένους σε Mathematica, οι οποίοι υπολογίζουν τις αντίστροφες συναρτήσεις σπίν x και τις ανώμαλες διαστάσεις γ των χορδών GKP (I–II), των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων (στις στοιχειώδεις ή τις διπλές τους περιοχές), συναρτήσει των διατηρούμενων σπίν/στροφορμής $\mathcal{J}$, $\mathcal{S}$ και γραμμικής ορμής p . Ο κώδικας μπορεί να αντιγραφεί, επικολληθεί και εκτελεστεί απευθείας με την Mathematica. Μερικά από τα αποτελέσματα που βρέθηκαν με τη βοήθεια αυτών των αλγορίθμων παρουσιάζονται στο επόμενο παράρτημα Δ' .

Γ'.1 Χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$

Γ'.1.1 Μεγάλες Διπλωμένες Χορδές ($\omega \rightarrow 1^+$)

Ας ξεκινήσουμε με τη μεγάλη και διπλωμένη ($\omega \rightarrow 1^+$) χορδή εντός του $\mathbb{R} \times S^2$. Η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{J})$ δίδεται από τη μεταβλητή $\mathbf{x}[\mathbf{m}, \mathbf{J}, \mathbf{v}]$, όπου $\mathbf{m}$ είναι ο αριθμός των όρων στη σειρά, η μεταβλητή $\mathbf{J}$ αντιστοιχεί στην στροφορμή $\mathcal{J} = \pi J / \sqrt{\lambda}$ και το $\mathbf{v}$ συμβολίζει το $e^{-\mathcal{J}-2}$. Οι ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J} = \gamma(\mathcal{J})$ δίδονται από την $\mathbf{gamma}[\mathbf{m}, \mathbf{J}, \mathbf{z}]$, όπου $\mathbf{m}$ και $\mathbf{J}$ είναι όπως πριν και $\mathbf{z}$ είναι η υπολογισθείσα τιμή του x , $\mathbf{x}[\mathbf{m}, \mathbf{J}, \mathbf{v}]$.

Οι τρεις τελευταίες γραμμές του κώδικα είναι ουσιαστικά εκείνες που υπολογίζουν το αποτέλεσμα. Ο αριθμός των $\mathbf{nn} = 10$ όρων στις $\mathbf{x}[\mathbf{nn}, \mathbf{J}, \mathbf{v}]$ και $\mathbf{gamma}[\mathbf{nn}, \mathbf{J}, \mathbf{z}]$ μπορεί να ρυθμιστεί από το χρήστη. Ο αναγνώστης μπορεί ελεύθερα να αλλάξει αυτή την τιμή, ανάλογα με το επιθυμητό μήκος του αποτελέσματος και τη διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για $\mathbf{nn} = 13$ όρους, ο υπολογισμός διήρκεσε περίπου 42s στο σύστημά μας. Οι εξισώσεις $(\Delta'.2)$ – $(\Delta'.3)$ του παραρτήματος Δ' , περιέχουν τους λίγους πρώτους όρους του αποτελέσματος.

```
d[n_] := -(1/2) ((2n-1)!!/(2n)!!)^2;
h[n_] := (-d[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]);
c[n_] := -(d[n]/(2*n-1));
b[n_] := (-c[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]+2/(2*n-1));
f[n_] := -c[n]-Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*d[n-k],{k,0,n}];
g[n_] := -b[n]-Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*h[n-k],{k,0,n}];
A[n_,J_] := g[n]+f[n]*(4*Log[2]-J-2);
y[m_,J_,x_] := Series[x*Exp[Sum[(b[n]/c[0])*x^n,{n,1,m}]-(((J/2)-b[0])/c[0]
-Sum[(b[n]/c[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(c[l]/c[0])*x^l,{l,1,m}]
^k,{k,1,m}]],{x,0,m}];
x[m_,J_,v_] := InverseSeries[(1/16)*y[m,J,x],v];
gamma[m_,J_,z_] := 2*Sum[z^p*(A[p,J]+f[p]*Log[z/(16*v)]),{p,0,m}];
nn = 10;
x[nn,J,v];
Normal[%]/.v->E^(-J-2)
Simplify[Collect[FullSimplify[gamma[nn,J,z]/.z->%%],{v,J}]]/.v->E^(-J-2)
```


Μπορούμε να αναγνωρίσουμε τους $d[n]$, $h[n]$, $c[n]$, $b[n]$ ως τους συντελεστές σειρών d_n , h_n , c_n , b_n που δίδονται στην (4.67). Οι $f[n]$, $g[n]$ και $A[n, J]$ είναι αντίστοιχα οι συντελεστές f_n , g_n , A_n των (5.30)–(5.32). Η σειρά $y[m, J, x]$ εξάγεται εκθετοποιώντας και αναδιατάσσοντας την εξίσωση (5.18).

Γ'.1.2 Γρήγορες Διπλωμένες Χορδές ($\omega \rightarrow 1^-$)

Με τις κατάλληλες τροποποιήσεις, ο προηγούμενος αλγόριθμος μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και στην περίπτωση των γρήγορων κυκλικών ($\omega \rightarrow 1^-$) χορδών στον $\mathbb{R} \times S^2$. Οι $d[n]$, $h[n]$, $c[n]$, $b[n]$ είναι και πάλι οι συντελεστές σειρών d_n , h_n , c_n , b_n της (4.67), ωστόσο οι συντελεστές που εμφανίζονται στη εξίσωση (4.75) είναι ελαφρώς διαφορετικοί και δίνονται πρακτικά από τους $cc[n]$ και $bb[n]$. Οι συντελεστές $ff[n]$, $gg[n]$ και $AA[n, J]$ αντιστοιχούν στους f_n , g_n και A_n , οι οποίοι δίνονται από τις εξισώσεις (5.67)–(5.68). Ο παρών αλγόριθμος (με $nn = 13$ όρους) πήρε περίπου 40s για να τρέξει στο σύστημά μας. Οι λίγοι πρώτοι όροι του αποτελέσματος δίδονται στις εξισώσεις ($\Delta'.4$)–($\Delta'.5$) του παραρτήματος Δ' .

```
d[n_] := (-1/2) * ((2*n-1)!! / (2*n)!!)^2;
h[n_] := (-d[n]) * (4*Log[2] + 2*Sum[1/k-2/(2*k-1), {k, 1, n}]);
c[n_] := -(d[n] / (2*n-1));
b[n_] := (-c[n]) * (4*Log[2] + 2*Sum[1/k-2/(2*k-1), {k, 1, n}] + 2/(2*n-1));
cc[n_] := Sum[((2*k-1)!! / (2*k)!!) * c[n-k], {k, 0, n}];
bb[n_] := Sum[((2*k-1)!! / (2*k)!!) * b[n-k], {k, 0, n}];
ff[n_] := d[n] - cc[n];
gg[n_] := h[n] - bb[n];
AA[n_, J_] := gg[n] + ff[n] * (4*Log[2] - J - 2);
y[m_, J_, x_] := Series[(x/16) * Exp[Sum[(bb[n] / cc[0]) * x^n, {n, 1, m}] - ((J - 2*bb[0]) /
(2*cc[0]) - Sum[(bb[n] / cc[0]) * x^n, {n, 1, m}]) * Sum[(-1)^k *
Sum[(cc[1] / cc[0]) * x^1, {1, 1, m}]^k, {k, 1, m}]]], {x, 0, m}];
x[m_, J_, v_] := InverseSeries[y[m, J, x], v];
gamma[m_, J_, z_] := 2*Sum[z^p * (AA[p, J] + ff[p] * Log[z / (16*v)]), {p, 0, m}];
nn = 13;
x[nn, J, v];
Normal[%] /. v -> E^(-J-2)
Simplify[Collect[FullSimplify[gamma[nn, J, z] /. z -> %], {v, J}]] /. v -> E^(-J-2)
```

Γ'.2 Χορδές GKP στον AdS_3

Η Mathematica μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για την αντιστροφή της εξίσωσης (5.71) που αναφέρεται στις μεγάλες, κλειστές και διπλωμένες χορδές ενός σπίν που στρέφονται εντός του AdS_3 , περίπτωση (I) των GKP. Με αυτό τον τρόπο, ακριβείς εκφράσεις για την αντιστροφή συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{S})$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S} = \gamma(\mathcal{S})$ μπορούν να βρεθούν, βλέπε τις εξισώσεις ($\Delta'.6$)–($\Delta'.7$) του παραρτήματος Δ' . Ωστόσο, λόγω της παρουσίας των λογαρίθμων στα αντίστοιχα αναπτύγματα, μια κάπως διαφορετική προσέγγιση από εκείνη για τις χορδές στον $\mathbb{R} \times S^5$ πρέπει να ακολουθηθεί. Κάνουμε

την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών στην εξίσωση (5.71):

$$x = \frac{2e^u}{\mathcal{S}}, \quad (\Gamma'.1)$$

έτσι ώστε η (5.71) να γίνει:

$$\ln \mathcal{S} = u + \ln 2 + \left[\frac{b_0}{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\mathcal{S}}{2c_0} \frac{(-u)^n}{n!} + \frac{2^n b_n}{c_0} \frac{e^{nu}}{\mathcal{S}^n} \right] \right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k c_k}{c_0} \frac{e^{ku}}{\mathcal{S}^k} \right)^n. \quad (\Gamma'.2)$$

Αν αντιστρέψουμε αυτή την εξίσωση ως προς u , η μεταβλητή $x = x(\mathcal{S})$ μπορεί να υπολογισθεί από την εξίσωση (Γ'.1). Μετά, μπορούμε να εισάγουμε την $x = x(\mathcal{S})$ στην εξίσωση (5.85) και να πάρουμε τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma(\mathcal{S})$. Ο κώδικας της Mathematica είναι:

```
d[n_] := (-1/4) * ((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2 * ((2*n+1)/(n+1));
h[n_] := (-d[n]) * (4*Log[2] + 2*Sum[1/k - 2/(2*k-1), {k, 1, n}] + 1/(n+1) - 2/(2*n+1));
c[n_] := -(d[n]/(2*n+1));
b[n_] := (-c[n]) * (4*Log[2] + 2*Sum[1/k - 2/(2*k-1), {k, 1, n}] + 1/(n+1));
f[n_] := -c[n] - Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*d[n-k], {k, 0, n}];
g[n_] := -b[n] - (2*n-1)!!/(2*n+2)!! - Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*h[n-k], {k, 0, n}];
A[n_, S_] := g[n] + f[n] * (((S/2) - b[0])/c[0] + c[1]/c[0]^2);
y[m_, S_, u_] := Series[u*Log[2] + (b[0]/c[0] + (1/c[0])*Sum[(S*(-u)^n)/(2*n!)] + (2^n*b[n]*Exp[n*u])/S^n, {n, 1, m}))/((1/c[0])*Sum[(2^k*c[k]*Exp[k*u])/S^k, {k, 0, m}]), {u, 0, m}];
x[m_, S_, v_] := Series[(2/S)*Exp[InverseSeries[y[m, S, u], v]], {S, Infinity, m}];
SpinSeries[x_, S_, m_] := Series[(-(1/x) + (S/2) - Sum[b[n]*x^n, {n, 0, m}])/Sum[c[n]*x^n, {n, 0, m}], {x, 0, m}];
a[n_, S_, m_] := Coefficient[SpinSeries[x, S, m], x^n];
gamma[m_, S_, z_] := 2*Series[-((4*f[0])/z) + A[0, S] + Sum[z^n*(A[n, S] - 4*f[n+1] + Sum[f[n-k-1]*a[k+1, S, m], {k, 0, n-1}]), {n, 1, m}], {z, 0, m}];
nn = 7;
x[nn, S, v];
Collect[Refine[Collect[%/.{v->Log[S]}, {S, Log[2]}], S>0], {S, Log[S]}]
Collect[Refine[Collect[Normal[gamma[nn, S, z]]/.{z->%}/. {v->Log[S]}, {S, Log[S], Log[2]}], S>0], {S, Log[S]}]
```

Στον παραπάνω αλγόριθμο, οι $d[n]$, $h[n]$, $c[n]$, $b[n]$ είναι οι συντελεστές σειρών d_n , h_n , c_n , b_n που δίδονται στην (4.35) και οι $f[n]$, $g[n]$, $A[n, S]$ είναι αντίστοιχα οι συντελεστές f_n , g_n , A_n των (5.87)–(5.89). Οι σειρές $y[m, S, u]$ και $x[m, S, v]$ παραμετροποιούν τις εξισώσεις (Γ'.1)–(Γ'.2) που είδαμε παραπάνω. Οι ανώμαλες διαστάσεις υπολογίζονται από την εξίσωση (5.91) και τη μεταβλητή $\gamma[m, S, z]$.

Για να υπολογίσουμε την τελευταία, χρειαζόμαστε τους συντελεστές a_n από την εξίσωση (5.72), τους οποίους γράφουμε ως $a[n, S, m]$ και βρίσκουμε από την εξίσωση (5.71) ή την `SpinSeries[x, S, m]` στην Mathematica. Το αποτέλεσμα παράγεται ξανά από τις τρεις τελευταίες γραμμές. Για $nn = 7$ όρους, το πρόγραμμα πήρε περίπου 30s για να τρέξει στο σύστημά μας.

Γ'.3 Γιγάντια Μαγνόνια

Γ'.3.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο, Στοιχειώδης Περιοχή: $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$

Ο κώδικας Mathematica για τα γιγάντια μαγνόνια στη στοιχειώδη περιοχή ($0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$) είναι:

```
d[n_] := (-1/2) * ((2*n-1)!! / (2*n)!!)^2
h[n_] := -4*d[n] * (Log[2] + HarmonicNumber[n] - HarmonicNumber[2*n])
c[n_] := -(d[n] / (2*n-1))
b[n_] := -4*c[n] * (Log[2] + HarmonicNumber[n] - HarmonicNumber[2*n] + 1 / (2*(2*n-1)))
momentum[m_, a_, x_] := Series[(Pi*EllipticF[a, x]) / EllipticK[x] + ((2*(1-x)*Tan[a]) /
    (EllipticK[x]*Sqrt[1-x*Sin[a]^2])) * (EllipticK[x] -
    EllipticPi[(x*Cos[a]^2) / (1-x*Sin[a]^2), y]) * (Sum[x^n*h[n], {n, 0, m}]
    + (Sum[x^n*d[n], {n, 0, m}] / Sum[x^n*c[n], {n, 0, m}]) * (J/Sin[a] -
    Sum[x^n*b[n], {n, 0, m}]))], {x, 0, m}] /. y -> x
velocity[m_, p_, x_] := Series[Sin[Normal[InverseSeries[Series[Normal[
    FullSimplify[momentum[m, a, x]]], {a, p/2, m}]] - p]] /. a -> 0], {x, 0, m}]
prefactor[m_, p_, x_] := Series[((1-x)*z) / Sqrt[1-x*z^2], {x, 0, m}] /. z -> velocity[m, p, x]
energy[m_, p_, x_] := prefactor[m, p, x] * Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x] + h[n]), {n, 0, m}], {x, 0, m}]
spin[m_, p_, x_] := velocity[m, p, x] * Series[Sum[x^n*(c[n]*Log[x] + b[n]), {n, 0, m}], {x, 0, m}]
adimension[m_, p_, x_] := energy[m, p, x] - spin[m, p, x]
A[n_, J_, p_] := gg[n] + 2*ff[n] * (2*Log[2] - J/Sin[p/2] - 1)
x1[m_, J_, x_] := Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n, {n, 1, m}] - ((J-bb[0])/cc[0] -
    Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n, {n, 1, m}]) * Sum[(-1)^k*Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,
    {l, 1, m}]^k, {k, 1, m}]]], {x, 0, m}]
x2[m_, J_, v_] := InverseSeries[x1[m, J, x], v]
\[Gamma][m_, p_, J_, v_] := Sum[z^n*(A[n, J, p] + ff[n]*Log[z/(16*v)]), {n, 0, m}] /. z -> x2[m, J, v]
nn = 3; Collect[spin[nn, p, x] /. {Log[x] -> y}, {x, y, J}];
Do[cc[n] = Collect[If[n == 0, Coefficient[%, x -> 0, y], Coefficient[%, x^n*y]], J], {n, 0, nn}];
Do[bb[n] = Collect[If[n == 0, % /. {x -> 0, y -> 0}, Coefficient[%, x^n] /. y -> 0], J], {n, 0, nn}];
Collect[adimension[nn, p, x] /. {Log[x] -> y}, {x, y, J}];
Do[ff[n] = Collect[If[n == 0, Coefficient[%, x -> 0, y], Coefficient[%, x^n*y]], J], {n, 0, nn}];
Do[gg[n] = Collect[If[n == 0, % /. {x -> 0, y -> 0}, Coefficient[%, x^n] /. y -> 0], J], {n, 0, nn}];
```

```
Collect[velocity[nn,p,x],{x,J}]
```

```
Collect[x2[nn,J,v],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
```

```
Collect[FullSimplify[\[Gamma][nn,p,J,v],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
```

Ας περιγράψουμε τι κάνει ο πιο πάνω κώδικας. Ο στόχος είναι να βρούμε τη σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνόνιων της στοιχειώδους περιοχής σαν συνάρτηση των διατηρούμενων φορτίων της χορδής p και $\mathcal{J}$. Αρχικά γνωρίζαμε την (8.25) σαν συνάρτηση της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας v και ω του γιγάντιου μαγνόνιου, οι οποίες εμφανίζονται στο σύστημά μας μέσω των σχετικών μεταβλητών $v = \cos a$ και x , που ορίζονται στην εξίσωση (8.22). Αυτές πρέπει να τις απαλείψουμε προς όφελος των φορτίων p και $\mathcal{J}$, που δίδονται στις εξισώσεις (8.24)–(8.26). Πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα. Πρώτα απαλείφουμε του λογαρίθμους από τις εξισώσεις (8.24)–(8.26). Η προκύπτουσα εξίσωση (8.30), που δίδεται από τη συνάρτηση `momentum[m, a, x]`, αναπτύσσεται σε διπλή σειρά στα a και x γύρω από το $a = p/2$ και το $x = 0$. Η μεταβλητή m συμβολίζει τον αριθμό όρων που κρατάμε στα αναπτύγματά μας. Οι σειρά `momentum[m, a, x]` στη συνέχεια αντιστρέφεται ως προς τη μεταβλητή a . Το αποτέλεσμα για το $\sin a$ κωδικοποιείται από τη συνάρτηση `velocity[m, p, x]`.

Το $\sin a$ που βρήκαμε εισάγεται στη συνέχεια στην έκφραση της στροφορμής $\mathcal{J}$ που δίδεται από την εξίσωση (8.31). Λαμβάνουμε τη συνάρτηση `spin[m, p, x]`, τη οποία αναπτύσσουμε ως προς x προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές `cc[n]` και `bb[n]`. Τώρα γνωρίζουμε το $\mathcal{J}$ σε μορφή παρόμοια της (5.18), την οποία μπορούμε να αντιστρέψουμε ως προς την αντίστροφη συνάρτηση σπίν `x2[m, J, v]` αλλά GKP.⁶⁰ Ως ένα ενδιάμεσο βήμα πρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση `x1[m, J, v]` που κωδικοποιεί τη δεύτερη γραμμή της (5.18).

Το τελικό βήμα είναι να εισάγουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν που βρήκαμε, στη σχέση για την ενέργεια μείον το σπίν (8.45), την οποία γράφουμε ως `\[Gamma][m, p, J, v]`. Για το τελευταίο αυτό βήμα χρειαζόμαστε τους συντελεστές f_n, g_n και A_n , (8.44)–(8.46) της σειράς (8.25). Η αντίστοιχη συνάρτηση είναι η `adimension[m, p, x]`, που ορίζεται από τις συναρτήσεις `prefactor[m, p, x]`, `energy[m, p, x]` και `spin[m, p, x]`. Στον παραπάνω κώδικα, οι συντελεστές f_n, g_n και A_n συμβολίζονται με `ff[n]`, `gg[n]` και `A[n]` αντίστοιχα. Για πληρότητα, ας αναφέρουμε επίσης ότι οι συντελεστές d_n, h_n, c_n, b_n στην (8.29), δίδονται από τις μεταβλητές της Mathematica, `d[n]`, `h[n]`, `c[n]` και `b[n]`.

Μερικά από τα αποτελέσματα που μπορούν να βρεθούν με τον κώδικά μας έχουν τοποθετηθεί στο παράρτημα Δ'.2. Το αποτέλεσμα περιέχει την αντίστροφη ορμή $\sin a = \sqrt{1 - v^2}$ σαν συνάρτηση της ορμής του μαγνόνιου p , του σπίν $\mathcal{J}$ και της αντίστροφης συνάρτησης σπίν x , την αντίστροφη συνάρτηση σπίν x συναρτήσει των διατηρούμενων φορτίων $\mathcal{J}$ και p και την σχέση διασποράς $\gamma = \gamma(p, \mathcal{J})$. Βλέπε τις εξισώσεις (Δ'.10)–(Δ'.12). Ο αριθμός όρων στο αποτέλεσμα `nn` μπορεί να ρυθμιστεί. Για παράδειγμα η `nn = 3`, χρειάστηκε περίπου 30s για να τρέξει στο σύστημά μας.

Γ'.3.2 Γιγάντιο Μαγνόνιο, Διπλή Περιοχή: $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$

Ο σκελετός του κώδικά για τα γιγάντια μαγνόνια πεπερασμένου μεγέθους στη διπλή περιοχή είναι ο ίδιος με εκείνον της στοιχειώδους περιοχής. Χρειάζεται να αλλάξουμε μόνο τις τιμές των συντελεστών των σειρών για τα διατηρούμενα φορτία `d[n]`, `h[n]`, `c[n]`, `b[n]`, τις εκφράσεις για τα διατηρούμενα φορτία, όπως επίσης και τις εξισώσεις που χρειάζεται να αντιστρέψουμε προκειμένου να απαλείψουμε τις μεταβλητές v και ω προς όφελος των p και $\mathcal{J}$.

⁶⁰Εδώ η μεταβλητή v δεν συμβολίζει την ταχύτητα του γιγάντιου μαγνόνιου, αλλά την ποσότητα $\exp(-\mathcal{L})$, όπου το $\mathcal{L}$ δίδεται από:

$$\mathcal{L} \equiv 2\mathcal{J} \csc \frac{p}{2} + 2.$$

Όπως και προηγουμένως, ο κώδικας υπολογίζει την αντίστροφη ορμή $\sin a = \sqrt{1 - v^2}$, την αντίστροφη συνάρτηση σπίν x και τη σχέση διασποράς $\gamma = \gamma(p, \mathcal{J})$. Για την τελευταία, βλέπε την εξίσωση (Δ'.13). Και πάλι, ο αριθμός όρων `nn` στο αποτέλεσμα μπορεί να ρυθμιστεί. Π.χ. για την προτεινόμενη τιμή του `nn = 3`, το σύστημά μας χρειάστηκε περίπου 30s για να τρέξει. Ο αντίστοιχος κώδικας Mathematica είναι:

```
d[n_] := (-1/2) * ((2*n-1)!! / (2*n)!!) ^ 2
h[n_] := -4*d[n] * (Log[2] + HarmonicNumber[n] - HarmonicNumber[2*n])
c[n_] := -(d[n] / (2*n-1))
b[n_] := -4*c[n] * (Log[2] + HarmonicNumber[n] - HarmonicNumber[2*n] + 1 / (2*(2*n-1)))
momentum[m_, a_, x_] := FullSimplify[Series[(Pi*EllipticF[ArcSin[Sin[a]/
Sqrt[1-x*Cos[a]^2]], x]) / EllipticK[x] + ((2*Tan[a]) /
Sqrt[1-x*Cos[a]^2]) * (1 - (1-x*Cos[a]^2) * (EllipticPi[x*Cos[a]^2, y] /
EllipticK[x])) * (Sum[x^n*h[n], {n, 0, m}] + (Sum[x^n*d[n], {n, 0, m}] /
Sum[x^n*c[n], {n, 0, m}]) * (Sqrt[1-x] * (J/Sin[a]) - Sum[x^n*b[n],
{n, 0, m}]))], {x, 0, m}] /. y -> x]
velocity[m_, p_, x_] := Series[Sin[Normal[InverseSeries[FullSimplify[Series[Normal[
momentum[m, a, x]], {a, p/2, m}], {p > 0, p < Pi} - p]] /. a -> 0], {x, 0, m}]
prefactor[m_, p_, x_] := Series[z/Sqrt[1-x*(1-z^2)], {x, 0, m}] /. z -> velocity[m, p, x]
energy[m_, p_, x_] := prefactor[m, p, x] * Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x] + h[n]), {n, 0, m}], {x, 0, m}]
spin[m_, p_, x_] := (velocity[m, p, x] / Sqrt[1-x]) * Series[Sum[x^n*(c[n]*Log[x] + b[n]), {n, 0, m}],
{x, 0, m}]
adimension[m_, p_, x_] := energy[m, p, x] - spin[m, p, x]
A[n_, J_, p_] := gg[n] + 2*ff[n] * (2*Log[2] - J/Sin[p/2] - 1)
x1[m_, J_, x_] := Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n, {n, 1, m}] - ((J-bb[0])/cc[0] -
Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n, {n, 1, m}]) * Sum[(-1)^k*Sum[(cc[1]/cc[0])*x^1,
{1, 1, m}]^k, {k, 1, m}]]], {x, 0, m}]
x2[m_, J_, v_] := InverseSeries[x1[m, J, x], v]
\[Gamma][m_, p_, J_, v_] := Sum[z^n*(A[n, J, p] + ff[n]*Log[z/(16*v)]), {n, 0, m}] /. z -> x2[m, J, v]
nn = 3; Collect[spin[nn, p, x] /. {Log[x] -> y}, {x, y, J}];
Do[cc[n] = Collect[If[n == 0, Coefficient[% /. x -> 0, y], Coefficient[%, x^n*y]], J], {n, 0, nn}];
Do[bb[n] = Collect[If[n == 0, % /. {x -> 0, y -> 0}, Coefficient[%, x^n] /. y -> 0], J], {n, 0, nn}];
Collect[adimension[nn, p, x] /. {Log[x] -> y}, {x, y, J}];
Do[ff[n] = Collect[If[n == 0, Coefficient[% /. x -> 0, y], Coefficient[%, x^n*y]], J], {n, 0, nn}];
Do[gg[n] = Collect[If[n == 0, % /. {x -> 0, y -> 0}, Coefficient[%, x^n] /. y -> 0], J], {n, 0, nn}];
```

```
Collect[velocity[nn,p,x],{x,J}]
Collect[x2[nn,J,v],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
Collect[FullSimplify\[Gamma][nn,p,J,v],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
```

Γ'.4 Απλές Ακίδες

Γ'.4.1 Απλή Ακίδα, Στοιχειώδης Περιοχή: $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$

Όπως ακριβώς και ο αλγόριθμος που ακολουθήσαμε προκειμένου να υπολογίσουμε τις αναλυτικές σχέσεις διασποράς των απλών ακίδων (8.53)–(8.54) ήταν κάπως διαφορετικός από εκείνους των γιγάντιων μαγνόνων (8.49)–(8.51), η συμβολική διαδικασία με τη Mathematica αναμένεται επίσης να είναι ελαφρώς διαφορετική.

Όπως και πριν, οι λογάριθμοι πρέπει να απαλειφθούν από τις εξισώσεις (7.30)–(7.27). Η εξίσωση που προκύπτει είναι η `spin[m, a, x, p]`, η οποία αναπτύσσεται σε διπλή σειρά στα `a` και `x` γύρω από τα $a = q/2$ και $x = 0$.⁶¹ Στη συνέχεια το `spin[m, a, x, p]` αντιστρέφεται για τη μεταβλητή a . Βρίσκουμε το $\sin a$ ως `\[Omega][m, p, x]`.

Το $\sin a$ εισάγεται μετά στη έκφραση για τη γραμμική ορμή p . Λαμβάνουμε την `momentum[m, p, x]` που αναπτύσσουμε ως προς `x` προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές `cc[n]` και `bb[n]`. Το αποτέλεσμα είναι το p στη μορφή της (5.18), την οποία αντιστρέφουμε ως προς `x2[m, J, v]` όπως στην περίπτωση των χορδών GKP.⁶² Η συνάρτηση `x1[m, J, v]` κωδικοποιεί τη δεύτερη γραμμή της (5.18).

Η αντίστροφη συνάρτηση σπίν `x2[m, J, v]` που έχουμε βρει, εισάγεται μετά στη σχέση που δίνει την ενέργεια μείον τη μισή από τη γραμμική ορμή της απλής ακίδας $\mathcal{E} - p/2$. Με τη Mathematica το τελευταίο γράφεται ως `\[Gamma][m, p, \[Theta], v]`. Πριν από αυτό το βήμα όμως, πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές f_n , g_n και A_n (`ff[n]`, `gg[n]` και `A[n]` στη Mathematica). Αυτοί είναι τα ανάλογα των συντελεστών (8.44)–(8.46) των γιγάντιων μαγνόνων για τις απλές ακίδες. Υπολογίζονται από τη συνάρτηση `adimension[m, p, x]` που ορίζεται ως προς τα `prefactor[m, p, x]`, `energy[m, p, x]` και `momentum[m, p, x]`.

Ο κώδικας που ακολουθεί υπολογίζει την αντίστροφη ορμή $\sin a = \sqrt{1 - 1/\omega^2}$, την αντίστροφη συνάρτηση σπίν x και τη σχέση διασποράς $\gamma = \gamma(p, \mathcal{J})$. Βλέπε την εξίσωση (Δ'.14) στο παράρτημα Δ'.2. Ο αριθμός όρων στο αποτέλεσμα είναι `nn`. Για παράδειγμα η εντολή `nn = 3`, πήρε περίπου 60s για να τρέξει στο σύστημά μας.

```
d[n_] := (-1/2) * ((2*n-1)!! / (2*n)!!)^2
h[n_] := -4*d[n] * (Log[2] + HarmonicNumber[n] - HarmonicNumber[2*n])
c[n_] := If[n==0, 0, -(d[n-1] / (2*n))]
b[n_] := If[n==0, 1, ((2*d[n-1]) / n) * (Log[2] + HarmonicNumber[n-1] - HarmonicNumber[2*n-2] +
1/(4*n))]
spin[m_, a_, x_, p_] := FullSimplify[Series[Sin[a] * (Sum[x^n * b[n], {n, 0, m}] + (Sum[x^n * c[n],
{n, 0, m}] / Sum[x^n * d[n], {n, 0, m}])) * ((p + Pi * (EllipticF[a, x] /
```

⁶¹Το q ορίζεται ως $\mathcal{J} \equiv \sin q/2$ και κωδικοποιείται στη Mathematica από τη μεταβλητή `\[Theta]` η οποία δίνει το $q/2$. Θέσαμε επίσης $1/\omega \equiv \cos a$.

⁶²Εδώ η μεταβλητή v αντιπροσωπεύει το $\exp(-\mathcal{R})$, όπου το $\mathcal{R}$ δίδεται από:

$$\mathcal{R} \equiv \sqrt{\frac{1}{\mathcal{J}^2} - 1} \cdot (p + 2 \arcsin \mathcal{J}) = (p + q) \cdot \cot \frac{q}{2}.$$

```

EllipticK[x]))/EllipticPi[(x*Cos[a]^2)/(1-x*Sin[a]^2),y])*
((EllipticK[x]*Sqrt[1-x*Sin[a]^2])/(2*(1-x)*Tan[a]))-Sum[x^n*
h[n],{n,0,m}]]),{x,0,m}]/.y->x]
\[Omega][m_,p_,x_]:=Series[Normal[Sin[InverseSeries[Series[Normal[FullSimplify[
spin[m,a,x,p]]],{a,\[Theta],m}]-Sin[\[Theta]]]]]/.{a->0},
{x,0,m}]
momentum[m_,p_,x_]:=Series[(-2/(z*Sqrt[1-x*z^2]*EllipticK[x]))*(Pi/2)*z*Sqrt[1-
x*z^2]*EllipticF[ArcSin[z],x]-(((1-x)*z^2)/Sqrt[1-z^2])*Normal
[Series[EllipticPi[(x*(1-z^2))/(1-x*z^2),y],{x,0,m}]/.y->x]*Sum
[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}]],{x,0,m}]/.z->\[Omega][m,p,x]
prefactor[m_,p_,x_]:=Series[z/Sqrt[1-z^2],{x,0,m}]/.z->\[Omega][m,p,x]
energy[m_,p_,x_]:=prefactor[m,p,x]*(1-x)*Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}],
{x,0,m}]
adimension[m_,p_,x_]:=energy[m,p,x]-(1/2)*momentum[m,p,x]
A[n_,\[Theta]_,p_]:=gg[n]+ff[n]*((-p)*Cot[\[Theta]]-2*\[Theta]*Cot[\[Theta]]+Log[16])
x1[m_,p_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((p-bb[0])/cc[0]-
Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(cc[1]/cc[0])*x^1,
{1,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}]
x2[m_,p_,v_]:=InverseSeries[x1[m,p,x],v]
\[Gamma][m_,p_,\[Theta]_,v_]:=Sum[z^n*(A[n,\[Theta],p]+ff[n]*Log[z/(16*v)]),
{n,0,m}]/.z->x2[m,p,v]
nn = 3;Refine[Collect[momentum[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],
{\[Theta]>0,\[Theta]<Pi/2}];
Do[cc[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[bb[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Refine[Collect[adimension[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],
{\[Theta]>0,\[Theta]<Pi/2}];
Do[ff[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[gg[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[\[Omega][nn,p,x],{x,p}]/.\[Theta]->q/2
Collect[x2[nn,p,v],{v,p},FullSimplify]/.{v->E^(-R),\[Theta]->q/2}
Collect[\[Gamma][nn,p,\[Theta],v],{v,p,\[Theta]},FullSimplify]/.{v->E^(-R),
\[Theta]->q/2}

```

Γ'.4.2 Απλή Ακίδα, Διπλή Περιοχή: $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$

Για τις απλές ακίδες της διπλής περιοχής, ο προηγούμενος αλγόριθμος παίρνει την εξής μορφή:

```

d[n_] := (-1/2) * ((2*n-1)!! / (2*n)!!)^2
h[n_] := -4*d[n] * (Log[2] + HarmonicNumber[n] - HarmonicNumber[2*n])
c[n_] := If[n==0, 0, ((2*n)/(2*n-1)) * d[n]]
b[n_] := If[n==0, 1, (-((4*n)/(2*n-1))) * d[n] * (2*Log[2] + 2*HarmonicNumber[n-1] - 2*
    HarmonicNumber[2*n-2] - 1/(2*n*(2*n-1)))]
\[Omega][m_, p_, x_] := Series[Normal[Sin[InverseSeries[Series[Normal[FullSimplify[
    spin[m, a, x, p]]], {a, \[Theta], m}] - Sin[\[Theta]]]]], {x, 0, m}]
spin[m_, a_, x_, p_] := FullSimplify[Series[(Sin[a]/Sqrt[1-x]) * (Sum[x^n * b[n],
    {n, 0, m}] + (Sum[x^n * c[n], {n, 0, m}] / Sum[x^n * d[n], {n, 0, m}]) *
    ((p + Pi * (EllipticF[a, x] / EllipticK[x])) / EllipticPi[x * Cos[a]^2, y])
    * (EllipticK[x] / (2*Sqrt[1-x * Cos[a]^2] * Tan[a])) - Sum[x^n * h[n],
    {n, 0, m}])], {x, 0, m}] /. y -> x]
momentum[m_, p_, x_] := Series[(2/EllipticK[x]) * (\[Omega][m, p, x] * (Sqrt[1-x * (1-
    \[Omega][m, p, x]^2)] / Sqrt[1-\[Omega][m, p, x]^2]) * Normal[
    Series[EllipticPi[x * (1-\[Omega][m, p, x]^2), y], {x, 0, m}] /. y -> x]
    * Sum[x^n * (d[n] * Log[x] + h[n]), {n, 0, m}] - (Pi/2) * EllipticF[ArcSin[
    \[Omega][m, p, x] / Sqrt[1-x * (1-\[Omega][m, p, x]^2)]], x]), {x, 0, m}]
prefactor[m_, p_, x_] := Series[\[Omega][m, p, x] / Sqrt[1-\[Omega][m, p, x]^2], {x, 0, m}]
energy[m_, p_, x_] := (prefactor[m, p, x] / Sqrt[1-x]) * Series[Sum[x^n * (d[n] * Log[x] + h[n]),
    {n, 0, m}], {x, 0, m}]
adimension[m_, p_, x_] := energy[m, p, x] - (1/2) * momentum[m, p, x]
A[n_, \[Theta]_, p_] := gg[n] + ff[n] * ((-p) * Cot[\[Theta]] - 2 * \[Theta] * Cot[\[Theta]] + Log[16])
x1[m_, p_, x_] := Series[(x/16) * Exp[Sum[(bb[n]/cc[0]) * x^n, {n, 1, m}] - ((p - bb[0])/cc[0] -
    Sum[(bb[n]/cc[0]) * x^n, {n, 1, m}]) * Sum[(-1)^k * Sum[(cc[1]/cc[0]) * x^1,
    {1, 1, m}]^k, {k, 1, m}]], {x, 0, m}];
x2[m_, p_, v_] := InverseSeries[x1[m, p, x], v]
\[Gamma][m_, p_, \[Theta]_, v_] := Sum[z^n * (A[n, \[Theta], p] + ff[n] * Log[z/(16*v)]),
    {n, 0, m}] /. z -> x2[m, p, v]
nn = 3; Refine[Collect[momentum[nn, p, x] /. {Log[x] -> y}, {x, y}, Simplify],
    {\[Theta] > 0, \[Theta] < Pi/2}];

```



```

Do[cc[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[bb[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}]
Refine[Collect[adimension[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],{\[Theta]>0,
\[Theta]<Pi/2}];
Do[ff[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[gg[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect\[Omega][nn,p,x],{x,p}]/.\[Theta]->q/2
Collect[x2[nn,p,v],{v,p},FullSimplify]/.{v->E^(-R),\[Theta]->q/2}
Collect\[Gamma][nn,p,\[Theta],v],{v,p,\[Theta]},FullSimplify]/.{v->E^(-R),
\[Theta]->q/2}

```

Δ' Συμβολικοί Υπολογισμοί

Αυτό το παράρτημα περιέχει κάποια από τα αποτελέσματα των συμβολικών υπολογισμών που έγιναν με τους κώδικες της **Mathematica** του προηγούμενου παραρτήματος **Γ'**. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επαλήθευση των εκφράσεων των σχέσεων διασποράς των χορδών με τις συναρτήσεις W του Lambert που εξήχθησαν στις §5 και §8.

Δ'.1 Μεγάλες και Γρήγορες Χορδές GKP

Ας ξεκινήσουμε με τις μεγάλες και γρήγορες χορδές GKP εντός του $\mathbb{R} \times S^2$ και του AdS_3 . Τα αποτελέσματα της **Mathematica** είναι:

- Διπλωμένη Χορδή στον $\mathbb{R} \times S^2$ ($\omega > 1$).⁶³

$$\begin{aligned} x = & 16 e^{-\mathcal{J}-2} - 64 (\mathcal{J} + 2) e^{-2\mathcal{J}-4} + 64 (6\mathcal{J}^2 + 17\mathcal{J} + 15) e^{-3\mathcal{J}-6} - \frac{256}{3} (32\mathcal{J}^3 + 108\mathcal{J}^2 + 153\mathcal{J} + 84) e^{-4\mathcal{J}-8} + \\ & + \frac{32}{3} (2000\mathcal{J}^4 + 7600\mathcal{J}^3 + 13.740\mathcal{J}^2 + 12.726\mathcal{J} + 4989) e^{-5\mathcal{J}-10} - \frac{512}{5} (1728\mathcal{J}^5 + 7200\mathcal{J}^4 + 15300\mathcal{J}^3 + \\ & + 18.615\mathcal{J}^2 + 12.740\mathcal{J} + 3855) e^{-6\mathcal{J}-12} + \dots \end{aligned} \quad (\Delta'.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{J} = & 2 - 8e^{-\mathcal{J}-2} + 8 (2\mathcal{J} - 1) e^{-2\mathcal{J}-4} - 32 (2\mathcal{J}^2 - \mathcal{J} + 2) e^{-3\mathcal{J}-6} + \frac{8}{3} (128\mathcal{J}^3 - 48\mathcal{J}^2 + 228\mathcal{J} - 63) e^{-4\mathcal{J}-8} - \\ & - \frac{16}{3} (400\mathcal{J}^4 - 80\mathcal{J}^3 + 972\mathcal{J}^2 - 330\mathcal{J} + 279) e^{-5\mathcal{J}-10} + \frac{64}{5} (1152\mathcal{J}^5 + 3480\mathcal{J}^3 - 1010\mathcal{J}^2 + 2080\mathcal{J} - \\ & - 405) e^{-6\mathcal{J}-12} - \dots \end{aligned} \quad (\Delta'.3)$$

- Κυκλική Χορδή στον $\mathbb{R} \times S^2$ ($\omega < 1$).

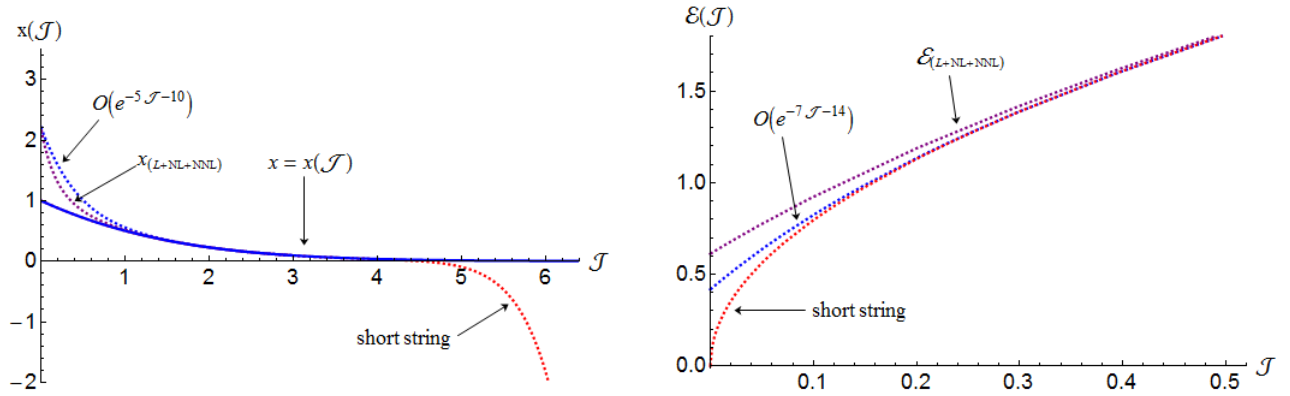
$$\begin{aligned} \tilde{x} = & 16 e^{-\mathcal{J}-2} + 64 (\mathcal{J} - 2) e^{-2\mathcal{J}-4} + 192 (2\mathcal{J}^2 - 5\mathcal{J} + 5) e^{-3\mathcal{J}-6} + \frac{256}{3} (32\mathcal{J}^3 - 84\mathcal{J}^2 + 129\mathcal{J} - 84) e^{-4\mathcal{J}-8} + \\ & + \frac{32}{3} (2000\mathcal{J}^4 - 5200\mathcal{J}^3 + 9900\mathcal{J}^2 - 10.316\mathcal{J} + 4989) e^{-5\mathcal{J}-10} + \frac{1536}{5} (576\mathcal{J}^5 - 1440\mathcal{J}^4 + 3180\mathcal{J}^3 - \\ & - 4115\mathcal{J}^2 + 3360\mathcal{J} - 1285) e^{-6\mathcal{J}-12} + \dots \end{aligned} \quad (\Delta'.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{J} = & 2 + 8e^{-\mathcal{J}-2} + 8 (2\mathcal{J} - 1) e^{-2\mathcal{J}-4} + 32 (2\mathcal{J}^2 - \mathcal{J} + 2) e^{-3\mathcal{J}-6} + \frac{8}{3} (128\mathcal{J}^3 - 48\mathcal{J}^2 + 228\mathcal{J} - 63) e^{-4\mathcal{J}-8} \\ & + \frac{16}{3} (400\mathcal{J}^4 - 80\mathcal{J}^3 + 972\mathcal{J}^2 - 330\mathcal{J} + 279) e^{-5\mathcal{J}-10} + \frac{64}{5} (1152\mathcal{J}^5 + 3480\mathcal{J}^3 - 1010\mathcal{J}^2 + 2080\mathcal{J} - \\ & - 405) e^{-6\mathcal{J}-12} + \dots \end{aligned} \quad (\Delta'.5)$$

⁶³Όπως σημειώσαμε ήδη στην §5.3, ο μετασχηματισμός

$$\mathcal{S} \equiv \frac{1}{16} e^{\mathcal{J}+2} \Leftrightarrow \mathcal{J} = \ln \mathcal{S} + 4 \ln 2 - 2 \quad (\Delta'.1)$$

κάνει τις αντίστροφες συναρτήσεις σπίν και τις ανώμαλες διαστάσεις των μεγάλων διπλωμένων χορδών εντός του $\mathbb{R} \times S^2$ (GKP II) και του AdS_3 (GKP I) να μοιάζουν και μας επιτρέπει να τις συγκρίνουμε. Βλέπε την εξίσωση (5.127).



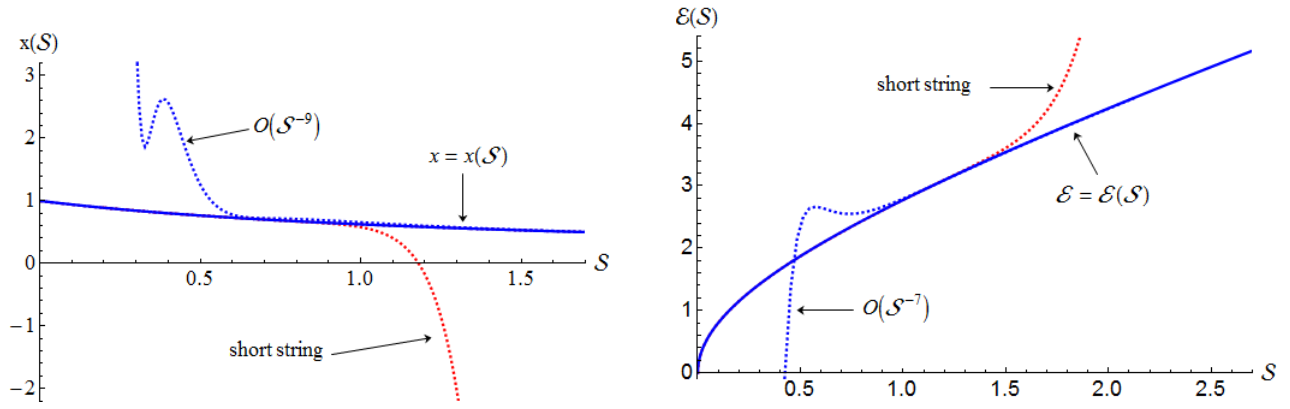
Σχήμα 27: Μικρές & μεγάλες προσεγγίσεις της διπλωμένης χορδής GKP στον $\mathbb{R} \times S^2$. Το αριστερό διάγραμμα περιέχει το παραμετρικό διάγραμμα της αντίστροφης συνάρτησης σπίν $x = x(J)$ σύμφωνα με την εξίσωση (4.56) (παχιά μπλε γραμμή), την προσέγγιση «μικρής» χορδής (4.60) (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή), την σχέση για τους όρους NNL (5.64) (μώβ διακεκομμένη γραμμή) και τους 5 πρώτους όρους της προσέγγισης «μεγάλης» χορδής (Δ'.2) (μπλε διακεκομμένη γραμμή). Το διάγραμμα στα δεξιά περιέχει την προσέγγιση «μικρής» χορδής για τις ανώμαλες διαστάσεις (4.61) (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή), τη σχέση για τους όρους NNL (5.65) (μώβ διακεκομμένη γραμμή) και τους πρώτους οκτώ όρους από την προσέγγιση «μεγάλης» χορδής (Δ'.3). Προς σύγκριση, το διάγραμμα της $\mathcal{E} = \mathcal{E}(J)$ μπορεί να βρεθεί στο σχήμα 8.

- Διπλωμένη Χορδή στον AdS_3 ($\omega > 1$).

$$x = \frac{2}{S} - \left[\ln S + \left(3 \ln 2 + 1 \right) \right] \frac{1}{S^2} + \left[\frac{\ln^2 S}{2} + \left(3 \ln 2 + \frac{1}{4} \right) \ln S + \left(\frac{9 \ln^2 2}{2} + \frac{3 \ln 2}{4} + \frac{3}{8} \right) \right] \frac{1}{S^3} - \left[\frac{\ln^3 S}{4} + \left(\frac{9 \ln 2}{4} - \frac{1}{4} \right) \ln^2 S + \left(\frac{27 \ln^2 2}{4} - \frac{3 \ln 2}{2} + \frac{3}{8} \right) \ln S + \left(\frac{27 \ln^3 2}{4} - \frac{9 \ln^2 2}{4} + \frac{9 \ln 2}{8} \right) \right] \frac{1}{S^4} + \dots \quad (\Delta'.6)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \ln S + \left[3 \ln 2 - 1 \right] + \left[\frac{\ln S}{2} + \left(\frac{3 \ln 2}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{1}{S} - \left[\frac{\ln^2 S}{8} + \left(\frac{3 \ln 2}{4} - \frac{9}{16} \right) \ln S + \left(\frac{9 \ln^2 2}{8} - \frac{27 \ln 2}{16} + \frac{5}{16} \right) \right] \frac{1}{S^2} + \\ & + \left[\frac{\ln^3 S}{24} + \left(\frac{3 \ln 2}{8} - \frac{3}{8} \right) \ln^2 S + \left(\frac{9 \ln^2 2}{8} - \frac{9 \ln 2}{4} + \frac{11}{16} \right) \ln S + \left(\frac{9 \ln^3 2}{8} - \frac{27 \ln^2 2}{8} + \frac{33 \ln 2}{16} - \frac{7}{24} \right) \right] \frac{1}{S^3} - \\ & - \left[\frac{\ln^4 S}{64} + \left(\frac{3 \ln 2}{16} - \frac{43}{192} \right) \ln^3 S + \left(\frac{27 \ln^2 2}{32} - \frac{129 \ln 2}{64} + \frac{51}{64} \right) \ln^2 S + \left(\frac{27 \ln^3 2}{16} - \frac{387 \ln^2 2}{64} + \frac{153 \ln 2}{32} - \frac{937}{1024} \right) \right. \\ & \cdot \ln S + \left. \left(\frac{81 \ln^4 2}{64} - \frac{387 \ln^3 2}{64} + \frac{459 \ln^2 2}{64} - \frac{2811 \ln 2}{1024} + \frac{1919}{6144} \right) \right] \frac{1}{S^4} + \dots \quad (\Delta'.7) \end{aligned}$$

Όλα αυτά τα αποτελέσματα συμφωνούν με τις σχέσεις της συνάρτησης W και τους αντίστοιχους συντελεστές που υπολογίσαμε. Οι (Δ'.2)–(Δ'.3) συμφωνούν με τις (5.64)–(5.65) και οι (Δ'.4)–(Δ'.5) συμφωνούν με τις (5.69)–(5.70). Οι σχέσεις (Δ'.6)–(Δ'.7) συμφωνούν με όλους τους συντελεστές (5.6)–(5.9) αλλά και τις εκφράσεις με τη συνάρτηση W , (5.112)–(5.113). Στα σχήματα 27–28 έχουμε σχεδιάσει όλα τα αποτελέσματα που βρήκαμε με τη **Mathematica** στο παρόν παράρτημα (Δ'.2)–(Δ'.7), τα αντίστοιχα παραμετρικά διαγράμματα, τις εκφράσεις με τη συνάρτηση W του Lambert της §5 και τις αντίστοιχες προσεγγίσεις μικρών χορδών της §4.



Σχήμα 28: Μικρές & μεγάλες προσεγγίσεις της διπλωμένη χορδής των GKP στον AdS_3 . Στα αριστερά έχουμε σχεδιάσει την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x(S)$ παραμετρικά σύμφωνα με την (4.23) (μπλε παχιά γραμμή), καθώς επίσης και τις μικρές (4.28) (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή) και μεγάλες προσεγγίσεις (Δ'.6) (μπλε διακεκομμένη γραμμή). Στην τελευταία έχουν χρησιμοποιηθεί πολλοί περισσότεροι όροι (μέχρι την τάξη S^{-9}) από τους περιέχονται στην εξίσωση (Δ'.6). Το διάγραμμα στα δεξιά αποτελεί την γραφική παράσταση των ανώμαλων διαστάσεων $\mathcal{E}(S)$, παραμετρικά με βάση την εξίσωση (4.22) (μπλε παχιά γραμμή), της «μικρής» προσέγγισης (4.29) (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή) και της «μεγάλης» προσέγγισης (Δ'.7) (μέχρι όρους S^{-7}). Μπορεί κανείς να συγκρίνει με το διάγραμμα του σχήματος 4.

Δ'.2 Γιγάντια Μαγνόνια & Απλές Ακίδες

Για τα γιγάντια μαγνόνια θέτουμε,

$$\mathcal{L} \equiv 2\mathcal{J} \csc \frac{p}{2} + 2 \quad (\Delta'.8)$$

και για τις απλές ακίδες θέτουμε,

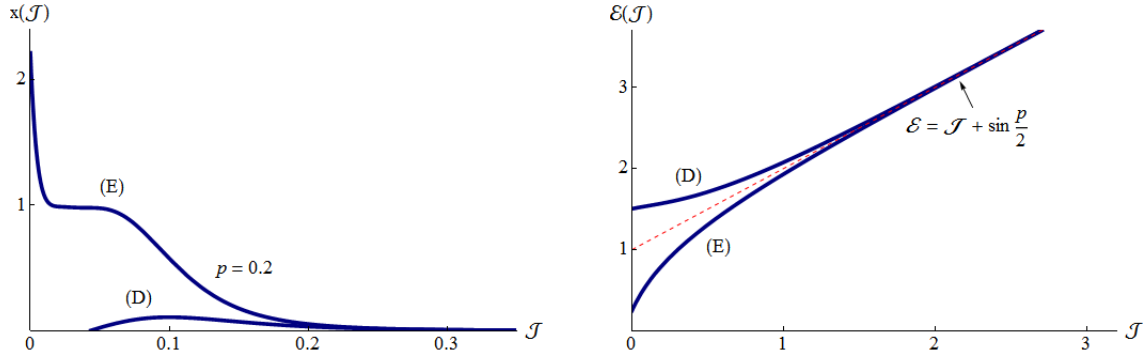
$$\mathcal{R} \equiv \sqrt{\frac{1}{\mathcal{J}^2} - 1} \cdot (p + 2 \arcsin \mathcal{J}) = (p + q) \cdot \cot \frac{q}{2}, \quad \mathcal{J} \equiv \sin \frac{q}{2}. \quad (\Delta'.9)$$

Βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα με τη βοήθεια της Mathematica:

- Γιγάντια Μαγνόνια Πεπερασμένου Μεγέθους: Στοιχειώδης Περιοχή, $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt{1-v^2} = \sin a = \sin \frac{p}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{p}{2} \left[2\mathcal{J} + 3 \sin \frac{p}{2} \right] x - \frac{3}{64} \cos^2 \frac{p}{2} \left[8\mathcal{J}^2 \sin \frac{p}{2} - 12\mathcal{J} \cos p - 5 \sin \frac{3p}{2} \right] x^2 - \frac{1}{3072} \cos^2 \frac{p}{2} \cdot \\ \cdot \left[\mathcal{J}^3 (512 \cos p - 256) + 216\mathcal{J}^2 \left(5 \sin \frac{3p}{2} + \sin \frac{p}{2} \right) - 12\mathcal{J} (73 \cos 2p + 66 \cos p + 11) - 259 \sin \frac{5p}{2} - \right. \\ \left. - 272 \sin \frac{3p}{2} + 11 \sin \frac{p}{2} \right] x^3 + \dots \end{aligned} \quad (\Delta'.10)$$

$$\begin{aligned} x = 16 e^{-\mathcal{L}} + \left[256\mathcal{J}^2 \cot^2 \frac{p}{2} + 64\mathcal{J} (3 \cos p + 1) \csc \frac{p}{2} - 128 \right] e^{-2\mathcal{L}} + \left[6144\mathcal{J}^4 \cot^4 \frac{p}{2} + 512\mathcal{J}^3 (19 \cos p + 1) \cot^2 \frac{p}{2} \cdot \right. \\ \cdot \csc \frac{p}{2} - 256\mathcal{J}^2 \left(2 \csc^2 \frac{p}{2} + 33 \cos p + 25 \right) + 64\mathcal{J} (6 \cos 2p - 51 \cos p - 23) \csc \frac{p}{2} + 960 \left. \right] e^{-3\mathcal{L}} + \left[\frac{524288}{3} \mathcal{J}^6 \cot^6 \frac{p}{2} + \right. \\ \left. + 32768\mathcal{J}^5 (13 \cos p - 1) \cot^4 \frac{p}{2} \csc \frac{p}{2} + \frac{8192}{3} \mathcal{J}^4 (68 \cos 2p - 27 \cos p + 1) \cot^2 \frac{p}{2} \csc^2 \frac{p}{2} + \frac{128}{3} \mathcal{J}^3 (819 \cos 3p - \right. \end{aligned}$$



Σχήμα 29: Αντίστροφη συνάρτηση σπίν και ενέργεια των γιγάντιων μαγνωνίων πεπερασμένου μεγέθους. Στα αριστερά έχουμε σχεδιάσει την x ($p = 0.2, \mathcal{J}$) και την $\tilde{x}$ ($p = 0.2, \mathcal{J}$) στη στοιχειώδη (Δ'.11) και τη διπλή περιοχή των γιγάντιων μαγνωνίων. Στα δεξιά έχουμε σχεδιάσει την $\mathcal{E}$ ($p = 3.0, \mathcal{J}$) στην στοιχειώδη (Δ'.12) και τη διπλή περιοχή (Δ'.13) των γιγάντιων μαγνωνίων. Οι καμπύλες της στοιχειώδους περιοχής συμβολίζονται με ένα (E) και οι καμπύλες της διπλής περιοχής με ένα (D). Οι προσεγγίσεις γίνονται όλο και πιο ακριβείς καθώς η στροφορμή $\mathcal{J}$ μεγαλώνει, προσεγγίζοντας το αποτέλεσμα απείρου μεγέθους των Hofman-Maldacena (6.6).

$$-786 \cos 2p - 3027 \cos p - 1934) \csc^3 \frac{p}{2} + 1024 \mathcal{J}^2 (11 \cos 3p - 44 \cos 2p - 18 \cos p + 1) \csc^2 \frac{p}{2} + \frac{64}{3} \mathcal{J} (70 \cos 3p - 319 \cos 2p + 1742 \cos p + 907) \csc \frac{p}{2} - 7168 \Big] e^{-4\mathcal{L}} + \dots \quad (\Delta'.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{J} = & \sin \frac{p}{2} - 4 \sin^3 \frac{p}{2} e^{-\mathcal{L}} - \left[8 \mathcal{J}^2 \csc \frac{p}{2} \sin^2 p - \mathcal{J} (12 \cos 2p - 8 \cos p - 4) + 4 (6 \cos p + 7) \sin^3 \frac{p}{2} \right] e^{-2\mathcal{L}} - \\ & - \left[32 \mathcal{J}^4 \csc^5 \frac{p}{2} \sin^4 p + \frac{32}{3} \mathcal{J}^3 (31 \cos 2p + 88 \cos p + 57) + 32 \mathcal{J}^2 \left(9 \sin \frac{5p}{2} + 11 \sin \frac{3p}{2} + 6 \sin \frac{p}{2} \right) - \right. \\ & - \mathcal{J} (96 \cos 3p + 44 \cos 2p - 112 \cos p - 28) + \frac{8}{3} (37 \cos 2p + 97 \cos p + 72) \sin^3 \frac{p}{2} \Big] e^{-3\mathcal{L}} - \\ & - \left[\frac{512}{3} \mathcal{J}^6 \csc^9 \frac{p}{2} \sin^6 p + 2048 \mathcal{J}^5 (19 \cos p + 5) \cos^2 \frac{p}{2} \cot^2 \frac{p}{2} + \frac{64}{3} \mathcal{J}^4 (1273 \cos 2p + 1824 \cos p + 1319) \cdot \right. \\ & \cdot \cos \frac{p}{2} \cot \frac{p}{2} + \frac{64}{3} \mathcal{J}^3 (441 \cos 3p + 1242 \cos 2p + 1983 \cos p + 1118) + 8 \mathcal{J}^2 \left(431 \sin \frac{7p}{2} + 734 \sin \frac{5p}{2} + \right. \\ & + 544 \sin \frac{3p}{2} + 273 \sin \frac{p}{2} \Big) - \frac{4}{3} \mathcal{J} (511 \cos 4p + 360 \cos 3p - 88 \cos 2p - 588 \cos p - 195) + 4 (118 \cos 3p + \\ & + 322 \cos 2p + 532 \cos p + 349) \sin^3 \frac{p}{2} \Big] e^{-4\mathcal{L}} - \dots \quad (\Delta'.12) \end{aligned}$$

- Γιγάντια Μαγνόνια Πεπερασμένου Μεγέθους: Διπλή Περιοχή, $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{J} = & \sin \frac{p}{2} + 4 \sin^3 \frac{p}{2} e^{-\mathcal{L}} - \left[8 \mathcal{J}^2 \csc \frac{p}{2} \sin^2 p - \mathcal{J} (12 \cos 2p - 8 \cos p - 4) + 4 (6 \cos p + 7) \sin^3 \frac{p}{2} \right] e^{-2\mathcal{L}} + \\ & + \left[32 \mathcal{J}^4 \csc^5 \frac{p}{2} \sin^4 p + \frac{32}{3} \mathcal{J}^3 (31 \cos 2p + 88 \cos p + 57) + 32 \mathcal{J}^2 \left(9 \sin \frac{5p}{2} + 11 \sin \frac{3p}{2} + 6 \sin \frac{p}{2} \right) - \right. \end{aligned}$$

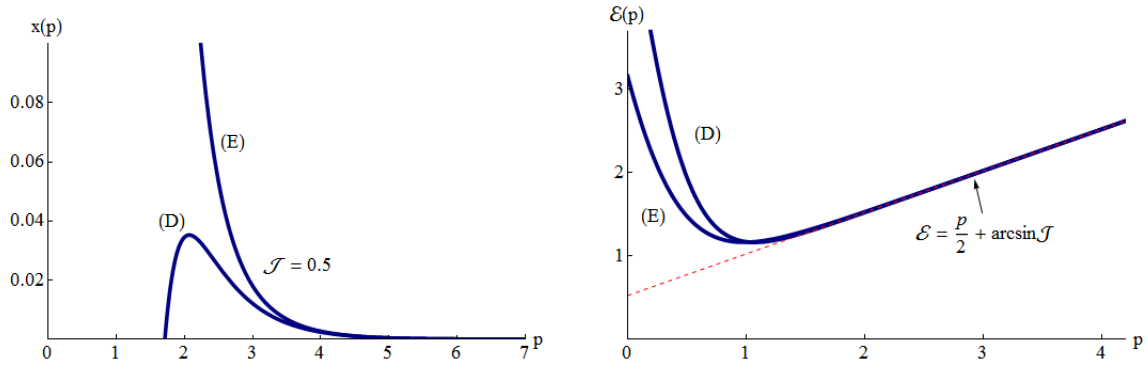
$$\begin{aligned}
& -\mathcal{J} (96 \cos 3p + 44 \cos 2p - 112 \cos p - 28) + \frac{8}{3} (37 \cos 2p + 97 \cos p + 72) \sin^3 \frac{p}{2} \Big] e^{-3\mathcal{L}} - \\
& - \left[\frac{512}{3} \mathcal{J}^6 \csc^9 \frac{p}{2} \sin^6 p + 2048 \mathcal{J}^5 (19 \cos p + 5) \cos^2 \frac{p}{2} \cot^2 \frac{p}{2} + \frac{64}{3} \mathcal{J}^4 (1273 \cos 2p + 1824 \cos p + 1319) \cdot \right. \\
& \cdot \cos \frac{p}{2} \cot \frac{p}{2} + \frac{64}{3} \mathcal{J}^3 (441 \cos 3p + 1242 \cos 2p + 1983 \cos p + 1118) + 8 \mathcal{J}^2 \left(431 \sin \frac{7p}{2} + 734 \sin \frac{5p}{2} + \right. \\
& + 544 \sin \frac{3p}{2} + 273 \sin \frac{p}{2} \Big) - \frac{4}{3} \mathcal{J} (511 \cos 4p + 360 \cos 3p - 88 \cos 2p - 588 \cos p - 195) + 4(118 \cos 3p + \\
& \left. + 322 \cos 2p + 532 \cos p + 349) \sin^3 \frac{p}{2} \right] e^{-4\mathcal{L}} + \dots
\end{aligned} \tag{\Delta'.13}$$

- Απλές Ακίδες Πεπερασμένου Μεγέθους: Στοιχειώδης Περιοχή, $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} - \frac{p}{2} = \frac{q}{2} + 4 \sin^2 \frac{q}{2} \tan \frac{q}{2} \cdot e^{-\mathcal{R}} + \left\{ 8p^2 \cos^2 \frac{q}{2} + 2p \cos \frac{q}{2} \left(8q \cos \frac{q}{2} - \sin \frac{3q}{2} + 7 \sin \frac{q}{2} \right) + 8q^2 \cos^2 \frac{q}{2} - 2q \sin q \left(\cos q - \right. \right. \\
\left. - 3 \right) + \sin^2 \frac{q}{2} \left(\cos 2q - 2 \cos q + 5 \right) \Big\} \sec^2 \frac{q}{2} \tan \frac{q}{2} \cdot e^{-2\mathcal{R}} + \left\{ 32p^4 \cos^4 \frac{q}{2} + \frac{8p^3}{3} \cos^3 \frac{q}{2} \left(48q \cos \frac{q}{2} - 11 \sin \frac{3q}{2} + \right. \right. \\
\left. + 25 \sin \frac{q}{2} \right) + p^2 \cos^2 \frac{q}{2} \left[192q^2 \cos^2 \frac{q}{2} - 8q \sin q (11 \cos q - 7) - 5 \cos 3q + 22 \cos 2q - 59 \cos q + 42 \right] + \\
\left. + \frac{1}{4} p \cos \frac{q}{2} \left[512q^3 \cos^3 \frac{q}{2} - 32q^2 \sin q \cos \frac{q}{2} (11 \cos q - 7) + 16q \sin q \sin \frac{q}{2} (5 \cos 2q - 12 \cos q + 15) - 8 \sin^3 \frac{q}{2} \cdot \right. \right. \\
\left. \cdot (\cos 3q - 5 \cos 2q + 15 \cos q - 27) \right] + 32q^4 \cos^4 \frac{q}{2} - \frac{8}{3} q^3 \cos^2 \frac{q}{2} \sin q (11 \cos q - 7) + q^2 \sin^2 q (5 \cos 2q - \\
- 12 \cos q + 15) - q \sin q \sin^2 \frac{q}{2} (\cos 3q - 5 \cos 2q + 15 \cos q - 27) + \frac{1}{6} \sin^4 \frac{q}{2} (\cos 4q + 2 \cos 3q + 16 \cos 2q - \\
\left. - 50 \cos q + 127) \right\} \csc \frac{q}{2} \sec^5 \frac{q}{2} \cdot e^{-3\mathcal{R}} + \dots
\end{aligned} \tag{\Delta'.14}$$

- Απλές Ακίδες Πεπερασμένου Μεγέθους: Διπλή Περιοχή, $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} - \frac{p}{2} = \frac{q}{2} - 4 \sin^2 \frac{q}{2} \tan \frac{q}{2} \cdot e^{-\mathcal{R}} + \left\{ 8p^2 \cos^2 \frac{q}{2} + 2p \cos \frac{q}{2} \left(8q \cos \frac{q}{2} - \sin \frac{3q}{2} + 7 \sin \frac{q}{2} \right) + 8q^2 \cos^2 \frac{q}{2} - 2q \sin q \left(\cos q - \right. \right. \\
\left. - 3 \right) + \sin^2 \frac{q}{2} \left(\cos 2q - 34 \cos q - 91 + 64 \csc^2 \frac{q}{2} \right) \Big\} \sec^2 \frac{q}{2} \tan \frac{q}{2} \cdot e^{-2\mathcal{R}} - \left\{ 32p^4 \cos^4 \frac{q}{2} + \frac{8p^3}{3} \cos^3 \frac{q}{2} \left(48q \cos \frac{q}{2} \right. \right. \\
\left. - 11 \sin \frac{3q}{2} + 25 \sin \frac{q}{2} \right) + p^2 \cos^2 \frac{q}{2} \left[192q^2 \cos^2 \frac{q}{2} - 8q \sin q (11 \cos q - 7) - 5 \cos 3q + 86 \cos 2q + 197 \cos q + \right. \\
\left. + 234 \right] + \frac{1}{4} p \cos \frac{q}{2} \left[512q^3 \cos^3 \frac{q}{2} - 32q^2 \sin q \cos \frac{q}{2} (11 \cos q - 7) + 16q \sin q \sin \frac{q}{2} \left(5 \cos 2q - 76 \cos q - 177 + \right. \right. \\
\left. + 128 \csc^2 \frac{q}{2} \right) - 8 \sin^3 \frac{q}{2} \cdot \left(\cos 3q - 69 \cos 2q - 433 \cos q - 795 + 384 \csc^2 \frac{q}{2} \right) \Big] + 32q^4 \cos^4 \frac{q}{2} - \frac{8}{3} q^3 \cos^2 \frac{q}{2} \sin q
\end{aligned}$$



Σχήμα 30: Αντίστροφη συνάρτηση σπίν και ενέργεια απλών ακίδων πεπερασμένου μεγέθους. Στα αριστερά έχουμε σχεδιάσει το $x(p, \mathcal{J} = 0.5)$ και το $\tilde{x}(p, \mathcal{J} = 0.5)$ στη στοιχειώδη και τη διπλή περιοχή των απλών ακίδων. Στα δεξιά έχουμε σχεδιάσει την $\mathcal{E}(p, \mathcal{J} = 0.5)$ στη στοιχειώδη (Δ'.14) και τη διπλή περιοχή (Δ'.15) των απλών ακίδων. Οι καμπύλες στη στοιχειώδη περιοχή συμβολίζονται με (E) και οι καμπύλες της διπλής περιοχής συμβολίζονται με (D). Οι προσεγγίσεις γίνονται περισσότερο ακριβείς καθώς η γραμμική ορμή p μεγαλώνει, προσεγγίζοντας την (6.8).

$$\begin{aligned} & \cdot (11 \cos q - 7) + q^2 \sin^2 q \left(5 \cos 2q - 76 \cos q - 177 + 128 \csc^2 \frac{q}{2} \right) - q \sin q \sin^2 \frac{q}{2} \left(\cos 3q - 69 \cos 2q - 433 \cos q \right. \\ & \left. - 795 + 384 \csc^2 \frac{q}{2} \right) + \frac{1}{6} \sin^4 \frac{q}{2} \left(\cos 4q - 190 \cos 3q - 1424 \cos 2q - 4466 \cos q - 3809 + 768 \csc^2 \frac{q}{2} \right) \Big\} \csc \frac{q}{2} \cdot \\ & \cdot \sec^5 \frac{q}{2} \cdot e^{-3\mathcal{R}} + \dots \end{aligned} \quad (\Delta'.15)$$

Όλα τα αποτελέσματά μας συμφωνούν με τις σχέσεις της συνάρτησης W του Lambert που βρέθηκαν στην §8. Για τα γιγάντια μαγνόνια, η (Δ'.11) και η (Δ'.12) συμφωνούν με την (8.39) και την (8.49). Η (Δ'.13) συμφωνεί με την (8.51). Ας σημειωθεί ότι η μόνη διαφορά μεταξύ των σχέσεων διασποράς των γιγάντιων μαγνόνιων στη στοιχειώδη και τη διπλή περιοχή (Δ'.12)–(Δ'.13), είναι το πρόσημο όλων των εκθετικών διορθώσεων σε περιττή δύναμη.

Για τα γιγάντια μαγνόνια οι σχέσεις διασποράς στη στοιχειώδη και τη διπλή περιοχή είναι κάπως διαφορετικές. Έχουμε σημειώσει τους όρους της (Δ'.15) που απουσιάζουν από την αντίστοιχη σχέση διασποράς της στοιχειώδους περιοχής (Δ'.14) με κόκκινο χρώμα. Για μια ακόμη φορά, τα αποτελέσματα της Mathematica (Δ'.15)–(Δ'.14) είναι σε πλήρη συμφωνία με τις αντίστοιχες εκφράσεις της συνάρτησης W του Lambert, (8.53)–(8.54). Στα σχήματα 29–30 έχουμε σχεδιάσει όλα τα αποτελέσματα που βρέθηκαν με τη Mathematica στο παρόν παράρτημα (Δ'.11)–(Δ'.15), για τα γιγάντια μαγνόνια και τις απλές ακίδες.

Ε' Ελλειπτικά Ολοκληρώματα και Συναρτήσεις Jacobi

Το παρόν παράρτημα περιέχει τους ορισμούς και μερικές βασικές ιδιότητες των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων και των Ιακωβιανών ελλειπτικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στο κείμενό μας. Οι συμβάσεις μας ακολουθούν κυρίως τους Abramowitz-Stegun [57].

Ιακωβιανές Ελλειπτικές Συναρτήσεις

$$u \equiv \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 - m \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad \varphi \equiv am(u|m), \quad \Delta(\varphi) \equiv (1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \equiv dn(u|m) \quad (\text{E'.1})$$

$$x = \sin \varphi \equiv sn(u|m), \quad \cos \varphi \equiv cn(u|m).$$

Ελλειπτικά Ολοκληρώματα Πρώτου Είδους

$$\mathbb{F}(\varphi|m) \equiv \int_0^\varphi (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta = \int_0^x [(1 - t^2)(1 - m t^2)]^{-1/2} dt = u \quad (\text{E'.2})$$

$$\mathbb{K}(m) \equiv \mathbb{F}\left(\frac{\pi}{2} \middle| m\right) = \frac{\pi}{2} \cdot {}_2\mathcal{F}_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right] \quad (\text{πλήρες}) \quad (\text{E'.3})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(m) &= \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 m^n = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 m + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 m^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 m^3 + \dots \right], \quad |m| < 1 \quad (\text{E'.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(m) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \right)^2 [2\psi(n+1) - 2\psi(n+1/2) - \ln(1-m)] (1-m)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \left[\psi(n+1) - \psi(n+1/2) - \frac{1}{2} \ln(1-m) \right] (1-m)^n, \quad |1-m| < 1, \quad (\text{E'.5}) \end{aligned}$$

όπου $\psi(z) \equiv \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ είναι η συνάρτηση δίγαμμα/ψ.

Ελλειπτικά Ολοκληρώματα Δεύτερου Είδους

$$\mathbb{E}(\varphi|m) \equiv \int_0^\varphi (1 - m \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta = \int_0^x (1 - t^2)^{-1/2} (1 - m t^2)^{1/2} dt \quad (\text{E'.6})$$

$$\mathbb{E}(m) \equiv \mathbb{E}\left(\frac{\pi}{2} \middle| m\right) = \frac{\pi}{2} \cdot {}_2\mathcal{F}_1\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right] \quad (\text{πλήρες}) \quad (\text{E'.7})$$

$$\mathbb{E}(m) = -\frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{m^n}{2n-1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{m^3}{5} + \dots \right], \quad |m| < 1 \quad (\text{E'.8})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(m) &= 1 - \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2) \Gamma(n+3/2)}{n! (n+1)!} \left[\ln(1-m) + \psi(n+1/2) + \psi(n+3/2) - \psi(n+1) - \right. \\ &\quad \left. - \psi(n+2) \right] (1-m)^{n+1} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1) [(2n-3)!!]^2}{(2n-2)!! (2n)!!} \left[\psi(n) - \psi(n-1/2) - \frac{1}{2n(2n-1)} - \frac{1}{2} \ln(1-m) \right] (1-m)^n, \\ &\quad |1-m| < 1. \quad \text{64} \end{aligned} \quad (\text{E'.9})$$

Θα μπορούσαμε επίσης να ορίσουμε και μία ελλειπτική συνάρτηση $\mathbb{D}$ ως εξής [183]:

$$\mathbb{D}(\varphi|m) \equiv \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1-m \sin^2 \theta}} = \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m t^2)}} = \frac{1}{m} \left[\mathbb{F}(\varphi|m) - \mathbb{E}(\varphi|m) \right] \quad (\text{E'.10})$$

$$\mathbb{D}(m) \equiv \mathbb{D}\left(\frac{\pi}{2} \middle| m\right) = \frac{1}{m} \left[\mathbb{K}(m) - \mathbb{E}(m) \right] \quad (\text{πλήρες}). \quad (\text{E'.11})$$

Ελλειπτικά Ολοκληρώματα Τρίτου Είδους

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}(n, \varphi|m) &\equiv \int_0^\varphi (1-n \sin^2 \theta)^{-1} (1-m \sin^2 \theta)^{-1/2} = \\ &= \int_0^x (1-n t^2)^{-1} [(1-t^2)(1-m t^2)]^{-1/2} dt \end{aligned} \quad (\text{E'.12})$$

$$\mathbf{\Pi}(n; m) \equiv \mathbf{\Pi}\left(n, \frac{\pi}{2} \middle| m\right) \quad (\text{πλήρες}). \quad (\text{E'.13})$$

Μια πολύ χρήσιμη προσθετική ιδιότητα για τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα τρίτου είδους, μας επιτρέπει να απομονώσουμε τις λογαριθμικές τους ιδιομορφίες [184]:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}(n; m) &= \frac{1}{(1-n) \mathbb{K}(m_1)} \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n(n-1)}{m-n}} \cdot \mathbb{F}\left(\arcsin \sqrt{\frac{n}{n-m}}, m_1\right) - \mathbb{K}(m) \cdot \left[(n-1) \mathbb{K}(m_1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - n \cdot \mathbf{\Pi}\left(\frac{1-m}{1-n}; m_1\right) \right] \right\}, \quad m + m_1 = 1, \quad 0 < -n < \infty. \end{aligned} \quad (\text{E'.14})$$

⁶⁴Επαναλαμβάνουμε εδώ μερικές χρήσιμες τιμές για το διπλό παραγοντικό: $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$, $(-3)!! = -1$.

Υπάρχει ένας πολύ κομψός τρόπος για να εκφράσουμε τις εκφράσεις του Legendre (E'.2)–(E'.10), με τη βοήθεια των αποκαλούμενων συμμετρικών μορφών του Carlson. Εν συντομία, το πλήρες σετ των ολοκληρωμάτων του Carlson ορίζεται ως εξής [183, 185]:

$$\mathbb{R}_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}} \quad (\text{E'.15})$$

$$\mathbb{R}_J(x, y, z, p) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(t+p) \sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}} \quad (\text{E'.16})$$

$$\mathbb{R}_C(x, y) = \mathbb{R}_F(x, y, y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(t+y) \sqrt{(t+x)}} \quad (\text{E'.17})$$

$$\mathbb{R}_D(x, y, z) = \mathbb{R}_J(x, y, z, z) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(t+z) \sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}}. \quad (\text{E'.18})$$

Οι συμμετρικές μορφές του Carlson χρωστούν πολλή από την χρησιμότητα και κομψότητά τους στο γεγονός ότι, σε αντίθεση με τις μορφές Legendre, είναι πλήρως συμμετρικές ως προς όλα ή κάποια από τα ορίσματά τους. Όπως αποδεικνύεται, όλα τα μη πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των μορφών του Carlson. Ο βαθύτερος λόγος γι' αυτό είναι το γεγονός ότι όλα τα ελλειπτικά ολοκληρώματα, προκύπτουν από μια πολυπαραγοντική υπεργεωμετρική συνάρτηση που ονομάζεται συνάρτηση $\mathcal{F}_D$ του Lauricella. Τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα ειδικότερα, δίδονται συναρτήσει των μορφών του Carlson ως ακολούθως:

$$\mathbb{K}(m) = \mathbb{R}_F(0, 1-m, 1) \quad (\text{E'.19})$$

$$\mathbb{E}(m) = \frac{1}{3} (1-m) \cdot \left[\mathbb{R}_D(0, 1-m, 1) + \mathbb{R}_D(0, 1, 1-m) \right] \quad (\text{E'.20})$$

$$\mathbb{K}(m) - \mathbb{E}(m) = m \mathbb{D}(m) = \frac{1}{3} m \cdot \mathbb{R}_D(0, 1-m, 1) \quad (\text{E'.21})$$

$$\mathbb{E}(m) - (1-m) \mathbb{K}(m) = \frac{1}{3} m (1-m) \cdot \mathbb{R}_D(0, 1, 1-m). \quad (\text{E'.22})$$

Γ' Συνάρτηση W του Lambert

Ένα από τα κύρια συμπεράσματα της δουλειάς μας στο μέρος II ήταν η παραμετροποίηση των σχέσεων διασποράς ορισμένων χορδών εντός του $\text{AdS}_5 \times S^5$ συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert. Η συνάρτηση W του Lambert ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$W(z) e^{W(z)} = z \Leftrightarrow W(z e^z) = z. \quad (\Gamma'.1)$$

Η συνάρτηση φέρει το όνομα του Johann Heinrich Lambert, αλλά ήταν ο Euler που πρωτοέγραψε το ανάπτυγμα σειράς της $-W(-z)$ η οποία είναι σήμερα γνωστή ως συνάρτηση δέντρου $T(z)$. Ο Euler ουσιαστικά γενίκευσε μια αλγεβρική εξίσωση που είχε μελετηθεί νωρίτερα από τον Lambert [186] και λυθεί σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, μία εκ των οποίων αποτελεί παραλλαγή της εξίσωσης $(\Gamma'.1)$ [187].⁶⁵ Σύμφωνα με την εργασία [188], το σύμβολο W προέκυψε από το συμβολισμό της συνάρτησης στο Maple (τα περισσότερα προγράμματα άλγεβρας υπολογιστών, συμπεριλαμβανομένου και του Maple, την αποκαλούν LambertW, ενώ στην Mathematica αποκαλείται ProductLog).⁶⁶

Η συνάρτηση W του Lambert κάνει αρκετά συχνά την εμφάνισή της, τόσο στα Μαθηματικά όσο και τη Φυσική. Οι εφαρμογές της μπορούν να βρεθούν σε πεδία όπως η συνδυαστική, αλγόριθμοι και γράφοι, αλγεβρικές και διαφορικές εξισώσεις, ανάλυση και fractals (βλέπε π.χ. [188, 191]) αλλά επίσης και τη στατιστική φυσική, ρευστομηχανική, οπτική, αστροφυσική, γενική σχετικότητα, πληθωριστική κοσμολογία, κλπ. (βλέπε [192]). Ως συγκεκριμένα παραδείγματα, θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε την ακριβή έκφραση του νόμου μετατόπισης του Wien συναρτήσει της W [193], τη λύση του διπλού πηγαδιού δυναμικού με δέλτα συναρτήσεις του Dirac [194] και εκείνο του προβλήματος των δύο σωμάτων στη βαρύτητα dilaton στις $(1+1)$ διαστάσεις [195], ή την αντιστροφή των συντεταγμένων Schwarzschild συναρτήσει των συντεταγμένων Kruskal-Szekeres [196, 197].

Πιο σχετική με τη δική μας οπτική γωνία είναι η ακριβής λύση των εξισώσεων της ομάδας επανακανονικοποίησης συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert [198]. Στην περίπτωση της QCD είναι γνωστό ότι η ακριβής σταθερά σύζευξης σε 3 βρόχους, μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της συνάρτησης W [199, 200].⁶⁷

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{-\pi/c}{1 - c_2/c^2 + W_{-1}(z)}, \quad (\Gamma'.2)$$

όπου c_2 είναι μια σταθερά ανεξάρτητη σχήματος επανακανονικοποίησης και

$$\beta_0 \equiv \frac{1}{4} \left(11 - \frac{2}{3} N_f \right), \quad c \equiv \frac{1}{4\beta_0} \left[102 - \frac{38}{3} N_f \right], \quad z \equiv -\frac{1}{c} \exp \left[-1 + \frac{c_2}{c^2} - \frac{\beta_0 t}{c} \right], \quad t \equiv \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right).$$

Η συνάρτηση $W(x)$ έχει δύο πραγματικούς κλάδους, τον $W_0(x)$ στο διάστημα $[-e^{-1}, \infty)$ και τον $W_{-1}(x)$ στο διάστημα $[-e^{-1}, 0]$ που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα 31.⁶⁸ Το σημείο διακλάδωσης είναι $(-e^{-1}, -1)$. Η σειρά Taylor στο $x=0$ σε καθένα από τους δύο κλάδους είναι [188]:

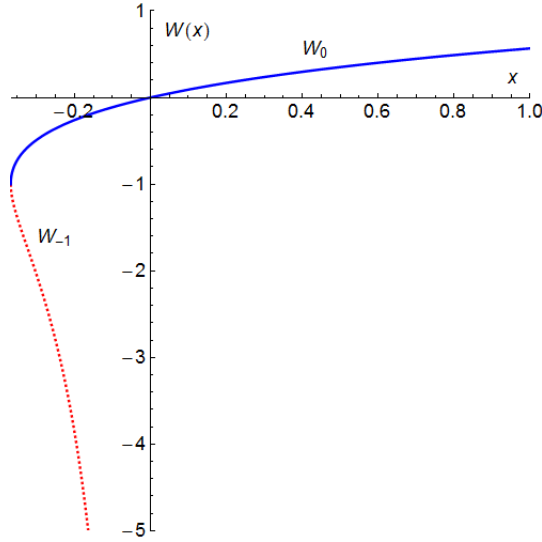
$$W_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{n-1}}{n!} \cdot x^n, \quad |x| \leq e^{-1} \quad (\Gamma'.3)$$

⁶⁵ Στην εργασία του το 1783, ο Euler αναφέρεται στον Lambert ως «τον ιδιοφυή μηχανικό Lambert». Για περισσότερα επί της πολύ ενδιαφέρουσας ιστορίας της συνάρτησης του Lambert, βλέπε το άρθρο [188].

⁶⁶ Περισσότερα στην ονοματολογία της συνάρτησης Lambert μπορούν να βρεθούν στο άρθρο [189]. Στενά συνδεδεμένοι ορισμοί είναι εκείνοι του $glog$ και της συνάρτησης ω του Wright [190].

⁶⁷ Για μια ανασκόπηση, βλέπε [201].

⁶⁸ Ο κλάδος της συνάρτησης W στη σχέση για την τρέχουσα σταθερά σύζευξης της QCD $(\Gamma'.2)$ εξαρτάται από τον αριθμό των γεύσεων N_f . Για $c > 0 \Leftrightarrow z < 0$ ο σχετικός κλάδος είναι W_{-1} , ενώ για $c < 0 \Leftrightarrow z > 0$ ο κλάδος είναι W_0 [200].



Σχήμα 31: Οι πραγματικοί κλάδοι της συνάρτησης W του Lambert (Γ'.1).

$$W_{-1}(x) = \ln|x| - \ln \ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m!} \begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix} (\ln|x|)^{-n-m} (\ln \ln|x|)^m, \quad (\Gamma'.4)$$

με τους (unsigned) αριθμούς Stirling πρώτου είδους $\begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix}$, να ορίζονται αναδρομικά ως [202]:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \quad \& \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad n, k \geq 1. \quad (\Gamma'.5)$$

Οι ακόλουθες ταυτότητες των unsigned αριθμών Stirling χρησιμοποιούνται συχνά:

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!, \quad \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)! H_{n-1}, \quad \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (n-1)! [H_{n-1}^2 - H_{n-1}^{(2)}]. \quad (\Gamma'.6)$$

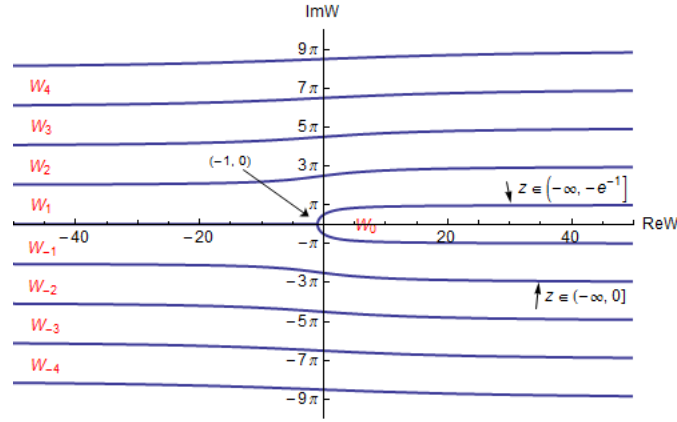
Η συνάρτηση W παρέχει μια χρήσιμη παραμέτροποίηση σε σειρά της tetration $x^{x^{\dots}}$:

$$x^{x^{\dots}} = {}^{\infty}(x^z) = \frac{W(-\ln x)}{-\ln x}. \quad (\Gamma'.7)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (Γ'.1) της συνάρτησης W του Lambert, οι παράγωγοι και αντιπαράγωγοι αυτής μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά. Μερικές χρήσιμες ταυτότητες της συνάρτησης W_0 είναι:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))} \quad (\Gamma'.8)$$

$$x W'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{n!} \cdot x^n = \frac{W(x)}{1+W(x)} \quad (\Gamma'.9)$$



Σχήμα 32: Διάγραμμα των κλάδων της συνάρτησης W του Lambert.

$$x (x W'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{n+1}}{n!} \cdot x^n = \frac{W(x)}{(1+W(x))^3} \quad (\Gamma'.10)$$

$$\int W(x) dx = x \left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)} \right) \quad (\Gamma'.11)$$

$$\int \frac{W(x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{n-2}}{n!} \cdot x^n = W(x) + \frac{W^2(x)}{2} \quad (\Gamma'.12)$$

$$\int \frac{1}{x} \int \frac{W(x)}{x} dx^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{n-3}}{n!} \cdot x^n = W(x) + \frac{3W^2(x)}{4} + \frac{W^3(x)}{6}. \quad (\Gamma'.13)$$

Η δομή των κλάδων της συνάρτησης W του Lambert θυμίζει πολύ εκείνη του λογάριθμου. Εκτός αυτού, η συνάρτηση W αποτελεί γενίκευση της λογαριθμικής συνάρτησης. Ωστόσο, αντί των γνωστών ευθειών που διαχωρίζουν τους γειτονικούς κλάδους του λογάριθμου, οι γειτονικοί κλάδοι της συνάρτησης Lambert διαχωρίζονται από μια οικογένεια καμπύλων που είναι γνωστές με το όνομα «τετραγωνίζουσα του Ιππία»:

$$\left\{ -\eta \cot \eta + i\eta, \quad -\pi < \eta < \pi \quad \text{ή} \quad 2k\pi < \pm\eta < (2k+1)\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \right\} \quad (\Gamma'.14)$$

Η **(Γ'.4)** δίνει τη ασυμπτωτική συμπεριφορά όλων των κλάδων γύρω από το $z = \infty$ και όλων των μη κύριων κλάδων γύρω από το $z = 0$. Άλλες αξιοσημείωτες ιδιότητες του διαγράμματος των κλάδων της συνάρτησης W , εκτός από τους δύο πραγματικούς κλάδους για τους οποίους μιλήσαμε ήδη, είναι το τριπλό σημείο διακλάδωσης στη θέση $W_{\{0,\pm 1\}}(-e^{-1}) = -1$ και οι τομές $(-\infty, -e^{-1}]$ της $W_{0,\pm 1}$ και $(-\infty, 0]$ της $W_{k \neq 0}$. Το διάγραμμα των κλάδων της συνάρτησης W έχει σχεδιαστεί στο σχήμα 32.

Z' Πολυώνυμα Διαμέρισης

Z'.1 Πολυώνυμα Bell

Τα πλήρη εκθετικά πολυώνυμα Bell $\mathbf{B}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ορίζονται από τη σχέση [202]:

$$\exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!}. \quad (\text{Z'.1})$$

Τα μερικά εκθετικά πολυώνυμα Bell $\mathbf{B}_{n,k} = \mathbf{B}_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1})$ ορίζονται ως ακολούθως:

$$\mathbf{B}_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \sum_j \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!} \right)^{j_1} \left(\frac{x_2}{2!} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!} \right)^{j_{n-k+1}}, \quad (\text{Z'.2})$$

όπου $j_1 + j_2 + \dots = k$ και $j_1 + 2j_2 + \dots = n$. Βρίσκουμε,

$$\mathbf{B}_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1, \quad \mathbf{B}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}). \quad (\text{Z'.3})$$

Ας σημειωθεί ότι οι unsigned αριθμοί Stirling πρώτου είδους δίδονται συναρτήσει των μερικών πολυωνύμων Bell ως $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \mathbf{B}_{n,k}(0!, 1!, \dots, (n-k)!)$. Τα συνήθη μερικά πολυώνυμα Bell ορίζονται ως:

$$\hat{\mathbf{B}}_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_j \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_n!} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_{n-k+1}}. \quad (\text{Z'.4})$$

Z'.2 Πολυώνυμα Δυναμικού

Τα πολυώνυμα δυναμικού $\mathbf{P}_n^{(r)}$ ορίζονται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!} \right]^r = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n^{(r)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!}. \quad (\text{Z'.5})$$

Z'.3 Λογαριθμικά Πολυώνυμα

Ο ορισμός των λογαριθμικών πολυωνύμων $\mathbf{L}_n^{(r)}$ είναι παρόμοιος:

$$\ln \left[\sum_{m=0}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{L}_n^{(r)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!}. \quad (\text{Z'.6})$$

Η' Εξίσωση Lamé

Είδαμε στην §14 ότι οι εξισώσεις για τις εγχάρσιες διαταραχές των χορδοειδών μεμβρανών (13.1)–(13.10) μπορούν να αναχθούν στην Ιακωβιανή μορφή της εξίσωσης Lamé (14.34):

$$\frac{d^2 z}{du^2} + [h - \nu(\nu + 1)k^2 sn^2(u|k^2)]z = 0, \quad (\text{H'.1})$$

όπου $\nu(\nu + 1) \in \mathbb{R}$ και $0 < k < 1$. Το δυναμικό της εξίσωσης Lamé (H'.1), $sn^2(u|k^2)$ είναι μια διπλά περιδική συνάρτηση με (πρωτογενείς) πραγματικές και φανταστικές περιόδους ίσες προς $2\mathbb{K}(k^2)$ και $2i\mathbb{K}'(k^2)$ αντίστοιχα. Το πραγματικό και φανταστικό μέρος τους έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα 33. Οι ιδιοσυναρτήσεις της εξίσωσης Lamé (γνωστές και ως συναρτήσεις Lamé) με πραγματικές περιόδους είναι οι ακόλουθες:

ιδιοσυνάρτηση $z(u)$	ιδιοτιμή h	ομοτιμία $z(u)$	ομοτιμία του $z(u - \mathbb{K})$	περίοδος $z(u)$
$Ec_\nu^{2n}(u, k^2)$	$a_\nu^{2n}(k^2)$	άρτια	άρτια	$2\mathbb{K}$
$Ec_\nu^{2n+1}(u, k^2)$	$a_\nu^{2n+1}(k^2)$	περιττή	άρτια	$4\mathbb{K}$
$Es_\nu^{2n+1}(u, k^2)$	$b_\nu^{2n+1}(k^2)$	άρτια	περιττή	$4\mathbb{K}$
$Es_\nu^{2n+2}(u, k^2)$	$b_\nu^{2n+2}(k^2)$	περιττή	περιττή	$2\mathbb{K}$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$. Οι ιδιοτιμές Lamé a_ν^n και b_ν^n έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες διάταξης [183, 203]:

$$\begin{aligned} a_\nu^0 &< a_\nu^1 < a_\nu^2 < a_\nu^3 \dots, & a_\nu^n &\rightarrow \infty \text{ καθώς } n \rightarrow \infty \\ b_\nu^1 &< b_\nu^2 < b_\nu^3 < b_\nu^4 \dots, & b_\nu^n &\rightarrow \infty \text{ καθώς } n \rightarrow \infty \\ a_\nu^0 &< b_\nu^1 < a_\nu^2 < b_\nu^3 \dots \\ a_\nu^1 &< b_\nu^2 < a_\nu^3 < b_\nu^4 \dots \end{aligned}$$

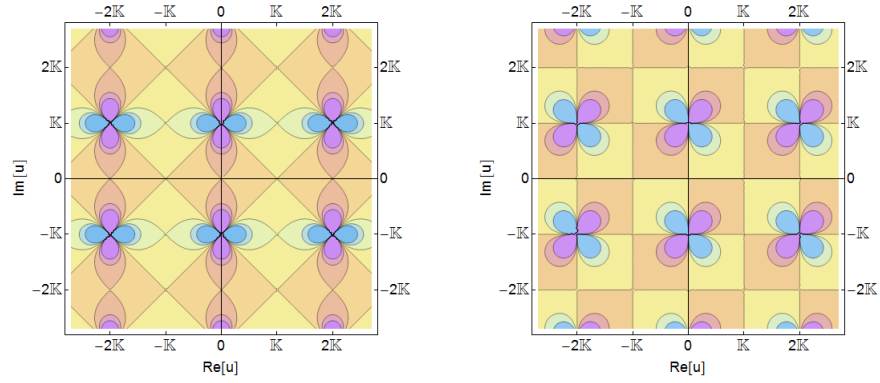
Τα διαστήματα σταθερότητας της εξίσωσης Lamé (H'.1) προκύπτουν από το *θεώρημα ταλάντωσης* [204]. Είναι τα εξής:

$$(a_\nu^0, a_\nu^1) \cup (b_\nu^1, b_\nu^2) \cup (a_\nu^2, a_\nu^3) \cup (b_\nu^3, b_\nu^4) \cup \dots, \quad (\text{H'.2})$$

όπου οι συστολές μεταξύ διαδοχικών ιδιοτιμών υποδηλώνουν ότι η σχετική διάταξη των δύο συστελλόμενων ιδιοτιμών δεν είναι γενικά γνωστή και μπορεί συνεπώς να αντιστραφεί, για δεδομένες τιμές των ν και k^2 .

Για $\nu \in \mathbb{R}$, η έκφραση $\nu(\nu + 1) \in \mathbb{R}$ είναι συμμετρική υπό την απεικόνιση $\nu \leftrightarrow -\nu - 1$, έτσι ώστε χωρίς βλάβη της γενικότητας, να μπορούμε να θεωρούμε $\nu \geq -1/2$ και $\nu(\nu + 1) \geq -1/4$. Αν επιπλέον $\nu \in \mathbb{N}$, τότε οι πρώτες $2\nu + 1$ από τις συναρτήσεις Lamé είναι πολυώνυμα (γνωστά ως πολυώνυμα Lamé), ενώ οι εναπομείνουσες υπερβατικές λύσεις της εξίσωσης Lamé *συνυπάρχουν*, δηλαδή:

$$a_\nu^n = b_\nu^n, \text{ για } n, \nu \in \mathbb{N} \text{ και } n \geq \nu + 1. \quad (\text{H'.3})$$



Σχήμα 33: Πραγματικό μέρος (αριστερά) και φανταστικό μέρος (δεξιά) του δυναμικού Lamé, $\text{sn}^2(u|1/2)$.

Η πιο πάνω εικόνα συνοψίζεται στο ακόλουθο θεώρημα [204]:

■ **Θεώρημα 1.** Η εξίσωση Lamé (H.1), εμφανίζει συνύπαρξη αν και μόνο αν $\nu \in \mathbb{Z}$. Έχει ακριβώς $\nu + 1$ αστάθειες αν $\nu \in \mathbb{N}$ και ακριβώς $|\nu|$ αστάθειες αν $\nu \in \mathbb{Z}^-$.

Τα διαστήματα ευστάθειας για $\nu \in \mathbb{N}$, δίδονται από [183]:

$$(a_\nu^0, b_\nu^1) \cup (a_\nu^1, b_\nu^2) \cup (a_\nu^2, b_\nu^3) \cup \dots \cup (a_\nu^{\nu-1}, b_\nu^\nu) \cup (a_\nu^\nu, +\infty) \quad , \quad \nu \in \mathbb{N}. \quad (\text{H'.4})$$

Τέλος, ας αναφέρουμε μερικά ακόμη πράγματα για τις συναρτήσεις Lamé που έχουν φανταστικές περιόδους. Παρατηρούμε πρώτα ότι η εξίσωση Lamé (H.1) έχει την ακόλουθη συμμετρία [173, 183, 203]:

$$\begin{aligned} u' &= i(u - \mathbb{K}(k^2) - i\mathbb{K}'(k^2)) \\ h' &= \nu(\nu + 1) - h \quad , \quad k'^2 = 1 - k^2, \end{aligned} \quad (\text{H'.5})$$

έτσι ώστε όταν η λύση της εξίσωσης Lamé $z(u)$ έχει πραγματική περίοδο ίση προς $2p\mathbb{K}$ (με $p = 1, 2$), τότε η συνάρτηση $z'(u') \equiv z(u)$ θα έχει φανταστική περίοδο ίση με $2ip\mathbb{K}$ και θα ικανοποιεί την ακόλουθη μετασχηματισμένη εξίσωση:

$$\frac{d^2 z}{du'^2} + [h' - \nu(\nu + 1)k'^2 \text{sn}^2(u'|k'^2)] z = 0. \quad (\text{H'.6})$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η δυαδικότητα (H.5) ανταλλάσσει τις ζώνες ευστάθειας με χάσματα αστάθειας στην (H.2) [173].

Βιβλιογραφία

- [1] G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of Giant Magnons*, [arXiv:1502.0163](#).
- [2] E. Floratos and G. Linardopoulos, *Large-Spin and Large-Winding Expansions of Giant Magnons and Single Spikes*, [arXiv:1406.0796](#).
- [3] E. Floratos, G. Georgiou, and G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of GKP Strings*, *JHEP* **03** (2014) 018, [[arXiv:1311.5800](#)].
- [4] M. Axenides, E. Floratos, and G. Linardopoulos, *Stringy Membranes in AdS/CFT*, *JHEP* **08** (2013) 089, [[arXiv:1306.0220](#)].
- [5] J. Polchinski, *Introduction to Gauge/Gravity Duality*, [arXiv:1010.6134](#).
- [6] J. M. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 231, [[hep-th/9711200](#)].
- [7] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, *Gauge Theory Correlators from non-Critical String Theory*, *Phys.Lett.* **B428** (1998) 105, [[hep-th/9802109](#)].
- [8] E. Witten, *Anti-de Sitter Space and Holography*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 253, [[hep-th/9802150](#)].
- [9] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, *Phys.Rep.* **323** (2000) 183, [[hep-th/9905111](#)].
- [10] I. Bena, J. Polchinski, and R. Roiban, *Hidden Symmetries of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring*, *Phys.Rev.* **D69** (2004) 046002, [[hep-th/0305116](#)].
- [11] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, *A Semi-Classical Limit of the Gauge/String Correspondence*, *Nucl.Phys.* **B636** (2002) 99, [[hep-th/0204051](#)].
- [12] G. Georgiou and G. Savvidy, *Large Spin Behavior of Anomalous Dimensions and Short-Long Strings Duality*, *J.Phys.* **A44** (2011) 305402, [[arXiv:1012.5580](#)].
- [13] H. Dimov, S. Mladenov, and R. Rashkov, *Large J Expansion in ABJM Theory Revisited*, *Eur.Phys.J.* **C74** (2014) 3042, [[arXiv:1402.3556](#)].
- [14] E. Kiritsis, *String Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2007.
- [15] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, *Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT Correspondence*, [hep-th/0201253](#).
- [16] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, and U. A. Wiedemann, *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions*, [arXiv:1101.0618](#).
- [17] P. Di Vecchia, *An Introduction to AdS/CFT Correspondence*, *Fortsch.Phys.* **48** (2000) 87, [[hep-th/9903007](#)].
- [18] L. Brink, J. H. Schwarz, and J. Scherk, *Supersymmetric Yang-Mills Theories*, *Nucl.Phys.* **B121** (1977) 77 • F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive, *Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model*, *Nucl.Phys.* **B122** (1977) 253.
- [19] S. Ferrara and B. Zumino, *Supergauge Invariant Yang-Mills Theories*, *Nucl.Phys.* **B79** (1974) 413.

- [20] V. N. Velizhanin, *Vanishing of the Four-Loop Charge Renormalization Function in $\mathcal{N} = 4$ SYM Theory*, *Phys.Lett.* **B696** (2011) 560, [[arXiv:1008.2198](#)].
- [21] M. F. Sohnius and P. C. West, *Conformal Invariance in $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, *Phys.Lett.* **B100** (1981) 245.
- [22] S. Mandelstam, *Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the $\mathcal{N} = 4$ Model*, *Nucl.Phys.* **B213** (1983) 149 • L. Brink, O. Lindgren, and B. E. W. Nilsson, *The Ultraviolet Finiteness of the $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills Theory*, *Phys.Lett.* **B123** (1983) 323.
- [23] P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. K. Townsend, *The Relaxed Hypermultiplet: An Unconstrained $\mathcal{N} = 2$ Superfield Theory*, *Nucl.Phys.* **B214** (1983) 519 • P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. C. West, *A Class of Finite Four-Dimensional Supersymmetric Field Theories*, *Phys.Lett.* **B124** (1983) 55 • P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. K. Townsend, *Miraculous Ultraviolet Cancellations in Supersymmetry Made Manifest*, *Nucl.Phys.* **B236** (1984) 125.
- [24] N. Seiberg, *Supersymmetry and Nonperturbative Beta Functions*, *Phys.Lett.* **B206** (1988) 75.
- [25] Y. Nakayama, *A Lecture Note on Scale Invariance vs Conformal Invariance*, [[arXiv:1302.0884](#)].
- [26] M. F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, *Phys.Rept.* **128** (1985) 39 • S. Kovacs, *$\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory and the AdS/SCFT Correspondence*, [[hep-th/9908171](#)].
- [27] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Type IIB Superstring Action in $AdS_5 \times S^5$ Background*, *Nucl.Phys.* **B533** (1998) 109, [[hep-th/9805028](#)].
- [28] G. Arutyunov and S. Frolov, *Foundations of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring. Part I*, *J.Phys.* **A42** (2009) 254003, [[arXiv:0901.4937](#)].
- [29] B. Sundborg, *Stringy Gravity, Interacting Tensionless Strings and Massless Higher Spins*, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **102** (2001) 113, [[hep-th/0103247](#)].
- [30] R. R. Metsaev, *Type IIB Green-Schwarz Superstring in Plane Wave Ramond-Ramond Background*, *Nucl.Phys.* **B625** (2002) 70, [[hep-th/0112044](#)].
- [31] G. T. Horowitz and A. R. Steif, *Spacetime Singularities in String Theory*, *Phys.Rev.Lett.* **64** (1990) 260.
- [32] D. Berenstein, J. Maldacena, and H. Nastase, *Strings in Flat Space and pp Waves from $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills*, *JHEP* **04** (2002) 013, [[hep-th/0202021](#)].
- [33] A. Pankiewicz, *Strings in Plane Wave Backgrounds*, *Fortsch.Phys.* **51** (2003) 1139, [[hep-th/0307027](#)] • J. C. Plefka, *Lectures on the Plane-Wave String/Gauge Theory Duality*, *Fortsch.Phys.* **52** (2004) 264, [[hep-th/0307101](#)] • D. Sadri and M. M. Sheikh-Jabbari, *The Plane-Wave/Super Yang-Mills Duality*, *Rev.Mod.Phys.* **76** (2004) 853, [[hep-th/0310119](#)] • R. Russo and A. Tanzini, *The Duality between IIB String Theory on pp-Wave and $\mathcal{N} = 4$ SYM: A Status Report*, *Class.Quant.Grav.* **21** (2004) S1265, [[hep-th/0401155](#)].
- [34] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Semiclassical Quantization of Rotating Superstring in $AdS_5 \times S^5$* , *JHEP* **06** (2002) 007, [[hep-th/0204226](#)].
- [35] O. Aharony, O. Bergman, and D. L. Jafferis, *Fractional M2-Branes*, *JHEP* **11** (2008) 043, [[arXiv:0807.4924](#)] • O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, and J. Maldacena, *$\mathcal{N} = 6$ Superconformal Chern-Simons-Matter Theories, M2-Branes and their Gravity Duals*, *JHEP* **10** (2008) 091, [[arXiv:0806.1218](#)].

- [36] J. Bagger and N. Lambert, *Modeling Multiple M2's*, *Phys.Rev.* **D75** (2007) 045020, [[hep-th/0611108](#)] • A. Gustavsson, *Algebraic Structures on Parallel M2-Branes*, *Nucl.Phys.* **B811** (2009) 66, [[arXiv:0709.1260](#)].
- [37] N. Beisert, B. Eden, and M. Staudacher, *Transcendentality and Crossing*, *J.Stat.Mech.* **0701** (2007) P01021, [[hep-th/0610251](#)].
- [38] N. Berkovits and J. Maldacena, *Fermionic T-Duality, Dual Superconformal Symmetry, and the Amplitude/Wilson Loop Connection*, *JHEP* **0809** (2008) **062**, [[arXiv:0807.3196](#)] • N. Beisert, R. Ricci, A. A. Tseytlin, and M. Wolf, *Dual Superconformal Symmetry from $AdS_5 \times S^5$ Superstring Integrability*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 126004, [[arXiv:0807.3228](#)].
- [39] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal field theory*. Springer, 1997.
- [40] K. Pohlmeyer, *Integrable Hamiltonian Systems and Interactions Through Quadratic Constraints*, *Commun.Math.Phys.* **46** (1976) 207.
- [41] A. Mikhailov, *A Nonlocal Poisson Bracket of the Sine-Gordon Model*, *J.Geom.Phys.* **61** (2011) 85, [[hep-th/0511069](#)].
- [42] B. M. Barbashov and V. V. Nesterenko, *Relativistic String Model in a Space-Time of a Constant Curvature*, *Commun.Math.Phys.* **78** (1981) 499 • H. J. de Vega and N. Sanchez, *Exact Integrability of Strings in D-Dimensional de Sitter Spacetime*, *Phys.Rev.* **D47** (1993) 3394.
- [43] A. L. Larsen and N. Sánchez, *Sinh-Gordon, Cosh-Gordon and Liouville Equations for Strings and Multi-Strings in Constant Curvature Spacetimes*, *Phys.Rev.* **D54** (1996) 2801, [[hep-th/9603049](#)].
- [44] I. Bakas, *Conservation Laws and Geometry of Perturbed Coset Models*, *Int.J.Mod.Phys.* **A9** (1994) 3443, [[hep-th/9310122](#)].
- [45] M. Grigoriev and A. A. Tseytlin, *Pohlmeyer Reduction of $AdS_5 \times S^5$ Superstring Sigma Model*, *Nucl.Phys.* **B800** (2008) 450, [[arXiv:0711.0155](#)].
- [46] A. Mikhailov and S. Schäfer-Nameki, *Sine-Gordon-like Action for the Superstring in $AdS_5 \times S^5$* , *JHEP* **05** (2008) 075, [[arXiv:0711.0195](#)].
- [47] G. Arutyunov, S. Frolov, J. Russo, and A. A. Tseytlin, *Spinning Strings in $AdS_5 \times S^5$ and Integrable Systems*, *Nucl.Phys.* **B671** (2003) 3, [[hep-th/0307191](#)].
- [48] G. Arutyunov, J. Russo, and A. A. Tseytlin, *Spinning Strings in $AdS_5 \times S^5$: New Integrable System Relations*, *Phys.Rev.* **D69** (2004) 086009, [[hep-th/0311004](#)].
- [49] M. Kruczenski, J. Russo, and A. A. Tseytlin, *Spiky Strings and Giant Magnons on S^5* , *JHEP* **10** (2006) 002, [[hep-th/0607044](#)].
- [50] D. M. Hofman and J. Maldacena, *Giant Magnons*, *J.Phys.* **A39** (2006) 13095, [[hep-th/0604135](#)].
- [51] H. J. de Vega, A. L. Larsen, and N. Sánchez, *Semi-Classical Quantization of Circular Strings in de Sitter and anti de Sitter Spacetimes*, *Phys.Rev.* **D51** (1995) 6917, [[hep-th/9410219](#)].
- [52] J. A. Minahan, *Circular Semiclassical String Solutions on $AdS_5 \times S^5$* , *Nucl.Phys.* **B648** (2003) 203, [[hep-th/0209047](#)].

- [53] M. Beccaria, G. V. Dunne, G. Macorini, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Exact Computation of One-Loop Correction to Energy of Pulsating Strings in $AdS_5 \times S^5$* , *J.Phys.* **A44** (2011) 015404, [[arXiv:1009.2318](#)].
- [54] A. Tirziu and A. A. Tseytlin, *Quantum Corrections to Energy of Short Spinning String in AdS_5* , *Phys.Rev.* **D78** (2008) 066002, [[arXiv:0806.4758](#)].
- [55] B. Basso, *An Exact Slope for AdS/CFT* , [[arXiv:1109.3154](#)].
- [56] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 2007.
- [57] M. Abramowitz and I. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1972.
- [58] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [59] M. Axenides, E. Floratos, and A. Kehagias, *Scaling Violations in Yang-Mills Theories and Strings in AdS_5* , *Nucl.Phys.* **B662** (2003) 170, [[hep-th/0210091](#)].
- [60] H. Georgi and H. D. Politzer, *Electroproduction Scaling in an Asymptotically Free Theory of Strong Interactions*, *Phys.Rev.* **D9** (1974) 416 • D. J. Gross and F. Wilczek, *Asymptotically free gauge theories. II*, *Phys.Rev.* **D9** (1974) 980.
- [61] E. G. Floratos, D. A. Ross, and C. T. Sachrajda, *Higher-Order Effects in Asymptotically Free Gauge Theories: The Anomalous Dimensions of Wilson Operators*, *Nucl.Phys.* **B129** (1977) 66, *Erratum-ibid.* **B139** (1978) 545 • E. G. Floratos, D. A. Ross, and C. T. Sachrajda, *Higher-Order Effects in Asymptotically Free Gauge Theories (II). Flavor Singlet Wilson Operators and Coefficient Functions*, *Nucl.Phys.* **B152** (1979) 493 • G. Curci, W. Furmanski, and R. Petronzio, *Evolution of Parton Densities Beyond Leading Order: The Nonsinglet Case*, *Nucl.Phys.* **B175** (1980) 27 • E. G. Floratos, C. Kounnas, and R. Lacaze, *Higher Order QCD Effects in Inclusive Annihilation and Deep Inelastic Scattering*, *Nucl.Phys.* **B192** (1981) 417.
- [62] S. Moch, J. A. M. Vermaseren, and A. Vogt, *The Three-Loop Splitting Functions in QCD: The Non-Singlet Case*, *Nucl.Phys.* **B688** (2004) 101, [[hep-ph/0403192](#)] • A. Vogt, S. Moch, and J. A. M. Vermaseren, *The Three-Loop Splitting Functions in QCD: The Singlet Case*, *Nucl.Phys.* **B691** (2004) 129, [[hep-ph/0404111](#)].
- [63] A. V. Kotikov and L. N. Lipatov, *DGLAP and BFKL Evolution Equations in the $N = 4$ Supersymmetric Gauge Theory*, [[hep-ph/0112346](#)].
- [64] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, and V. N. Velizhanin, *Anomalous dimensions of Wilson operators in $N=4$ SYM theory*, *Phys.Lett.* **B557** (2003) 114, [[hep-ph/0301021](#)].
- [65] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, and V. N. Velizhanin, *Three-Loop Universal Anomalous Dimension of the Wilson Operators in $\mathcal{N} = 4$ SUSY Yang-Mills Model*, *Phys.Lett.* **B595** (2004) 521, *Erratum-ibid.* **B632** (2006) 754 [[hep-th/0404092](#)].
- [66] B. Eden and M. Staudacher, *Integrability and Transcendentality*, *J.Stat.Mech.* **0611** (2006) P11014, [[hep-th/0603157](#)].
- [67] B. Basso, G. P. Korchemsky, and J. Kotański, *Cusp Anomalous Dimension in Maximally Supersymmetric Yang-Mills Theory at Strong Coupling*, *Phys.Rev.Lett.* **100** (2008) 091601, [[arXiv:0708.3933](#)].

- [68] I. Kostov, D. Serban, and D. Volin, *Functional BES Equation*, *JHEP* **08** (2008) 101, [[arXiv:0801.2542](#)].
- [69] R. Roiban, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Two-Loop World-Sheet Corrections in $AdS_5 \times S^5$ Superstring*, *JHEP* **07** (2007) 056, [[arXiv:0704.3638](#)].
- [70] R. Roiban and A. A. Tseytlin, *Strong-Coupling Expansion of Cusp Anomaly from Quantum Superstring*, *JHEP* **11** (2007) 016, [[arXiv:0709.0681](#)].
- [71] M. Beccaria, V. Forini, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Structure of Large Spin Expansion of Anomalous Dimensions at Strong Coupling*, *Nucl.Phys.* **B812** (2009) 144, [[arXiv:0809.5234](#)].
- [72] A. V. Kotikov, A. Rej, and S. Zieme, *Analytic Three-Loop Solutions for $\mathcal{N} = 4$ SYM Twist Operators*, *Nucl.Phys.* **B813** (2009) 460, [[arXiv:0810.0691](#)].
- [73] M. Beccaria, A. V. Belitsky, A. V. Kotikov, and S. Zieme, *Analytic Solution of the Multiloop Baxter Equation*, *Nucl.Phys.* **B827** (2010) 565, [[arXiv:0908.0520](#)].
- [74] Z. Bajnok, R. A. Janik, and T. Łukowski, *Four Loop Twist Two, BFKL, Wrapping and Strings*, *Nucl.Phys.* **B816** (2009) 376, [[arXiv:0811.4448](#)].
- [75] T. Łukowski, A. Rej, and V. N. Velizhanin, *Five-Loop Anomalous Dimension of Twist-Two Operators*, *Nucl.Phys.* **B831** (2010) 105, [[arXiv:0912.1624](#)].
- [76] D. Bombardelli, D. Fioravanti, and R. Tateo, *Thermodynamic Bethe Ansatz for Planar AdS/CFT : a Proposal*, *J.Phys.* **A42** (2009) 375401, [[arXiv:0902.3930](#)].
- [77] M. Beccaria, G. V. Dunne, V. Forini, M. Pawellek, and A. A. Tseytlin, *Exact Computation of One-Loop Correction to Energy of Spinning Folded String in $AdS_5 \times S^5$* , *J.Phys.* **A43** (2010) 165402, [[arXiv:1001.4018](#)].
- [78] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [79] J.-L. Lagrange, *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries*, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* **24** (1770) 251 •
H. H. Bürmann, *Essai de calcul fonctionnaire aux constantes ad libitum*, *Mem.Inst.Nat.Sci. Arts. Sci. Math. Phys.* **2** (1799) 13.
- [80] M. Beccaria, V. Forini, and G. Macorini, *Generalized Gribov-Lipatov Reciprocity and AdS/CFT* , *Adv.High Energy Phys.* **2010** (2010) 753248, [[arXiv:1002.2363](#)].
- [81] B. Basso and G. P. Korchemsky, *Anomalous Dimensions of High-Spin Operators Beyond the Leading Order*, *Nucl.Phys.* **B775** (2007) 1, [[hep-th/0612247](#)].
- [82] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, *e^+e^- Pair Annihilation and Deep Inelastic $e p$ Scattering in Perturbation Theory*, *Sov.J.Nucl.Phys.*, **15** (1972) 675, *Yad.Fiz.*, **15** (1972) 1218.
- [83] Y. L. Dokshitzer, G. Marchesini, and G. P. Salam, *Revisiting Parton Evolution and the Large- x Limit*, *Phys.Lett.* **B634** (2006) 504, [[hep-ph/0511302](#)].
- [84] Y. L. Dokshitzer and G. Marchesini, *$\mathcal{N} = 4$ SUSY Yang-Mills: Three Loops made Simple(r)*, *Phys.Lett.* **B646** (2007) 189, [[hep-th/0612248](#)].

- [85] M. Beccaria and V. Forini, *Reciprocity of Gauge Operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM*, *JHEP* **06** (2008) 077, [[arXiv:0803.3768](#)] • V. Forini and M. Beccaria, *QCD-Like Properties for Anomalous Dimensions in $\mathcal{N} = 4$ SYM*, *Theor.Math.Phys.* **159** (2009) 712, [[arXiv:0810.0101](#)] • M. Beccaria, Y. L. Dokshitzer, and G. Marchesini, *Twist 3 of the $\mathfrak{sl}(2)$ Sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM and Reciprocity Respecting Evolution*, *Phys.Lett.* **B652** (2007) 194, [[arXiv:0705.2639](#)].
- [86] M. Beccaria and G. Macorini, *QCD Properties of Twist Operators in the $\mathcal{N} = 6$ Chern-Simons Theory*, *JHEP* **06** (2009) 008, [[arXiv:0904.2463](#)].
- [87] N. Beisert, *The $\mathfrak{su}(2|2)$ Dynamic S-Matrix*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **12** (2008) 945, [[hep-th/0511082](#)].
- [88] R. Ishizeki and M. Kruczenski, *Single Spike Solutions for Strings on S^2 and S^3* , *Phys.Rev.* **D76** (2007) 126006, [[arXiv:0705.2429](#)].
- [89] A. Mosaffa and B. Safarzadeh, *Dual Spikes: New Spiky String Solutions*, *JHEP* **08** (2007) 017, [[arXiv:0705.3131](#)].
- [90] H. Hayashi, K. Okamura, R. Suzuki, and B. Vicedo, *Large Winding Sector of AdS/CFT*, *JHEP* **11** (2007) 033, [[arXiv:0709.4033](#)].
- [91] K. Zarembo, *Antiferromagnetic Operators in $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, *Phys.Lett.* **B634** (2006) 552, [[hep-th/0512079](#)].
- [92] R. Roiban, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Slow-String Limit and 'Antiferromagnetic' State in AdS/CFT*, *Phys.Rev.* **D73** (2006) 066003, [[hep-th/0601074](#)].
- [93] K. Okamura, *Giant Spinons*, *JHEP* **04** (2010) 033, [[arXiv:0911.1528](#)].
- [94] M. C. Abbott and I. V. Aniceto, *Vibrating Giant Spikes and the Large-Winding Sector*, *JHEP* **06** (2008) 088, [[arXiv:0803.4222](#)].
- [95] R. Ishizeki, M. Kruczenski, M. Spradlin, and A. Volovich, *Scattering of Single Spikes*, *JHEP* **02** (2008) 009, [[arXiv:0710.2300](#)].
- [96] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons. An Introduction To Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. Elsevier, 1987.
- [97] R. Jackiw and G. Woo, *Semiclassical Scattering of Quantized Nonlinear Waves*, *Phys.Rev.* **D12** (1975) 1643.
- [98] G. Arutyunov, S. Frolov, and M. Staudacher, *Bethe Ansatz for Quantum Strings*, *JHEP* **10** (2004) 016, [[hep-th/0406256](#)].
- [99] M. Spradlin and A. Volovich, *Dressing the Giant Magnon*, *JHEP* **10** (2006) 012, [[hep-th/0607009](#)].
- [100] G. Kälbermann, *The Sine-Gordon Wobble*, *J.Phys.* **A37** (2004) 11603, [[cond-mat/0408198](#)].
- [101] L. A. Ferreira, B. Piette, and W. J. Zakrzewski, *Wobbles and other Kink-Breather Solutions of the Sine-Gordon Model*, *Phys.Rev.* **E77** (2008) 036613, [[arXiv:0708.1088](#)].
- [102] G. Arutyunov, S. Frolov, and M. Zamaklar, *Finite-Size Effects from Giant Magnons*, *Nucl.Phys.* **B778** (2007) 1, [[hep-th/0606126](#)].
- [103] K. Okamura and R. Suzuki, *A Perspective on Classical Strings from Complex Sine-Gordon Solitons*, *Phys.Rev.* **D75** (2007) 046001, [[hep-th/0609026](#)].

- [104] T. Klose and T. McLoughlin, *Interacting Finite-Size Magnons*, *J.Phys.* **A41** (2008) 285401, [[arXiv:0803.2324](#)].
- [105] C. K. R. T. Jones, R. Marangell, P. D. Miller, and R. G. Plaza, *On the Stability Analysis of Periodic sine-Gordon Traveling Waves*, *Physica D Nonlinear Phenomena* **251** (2013) 63, [[arXiv:1210.0659](#)].
- [106] D. Astolfi, V. Forini, G. Grignani, and G. W. Semenoff, *Gauge Invariant Finite Size Spectrum of the Giant Magnon*, *Phys.Lett.* **B651** (2007) 329, [[hep-th/0702043](#)].
- [107] J. A. Minahan and O. Ohlsson Sax, *Finite Size Effects for Giant Magnons on Physical Strings*, *Nucl.Phys.* **B801** (2008) 97, [[arXiv:0801.2064](#)].
- [108] M. Lüscher, *Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 1. Stable Particle States*, *Commun.Math.Phys.* **104** (1986) 177 • T. R. Klassen and E. Melzer, *On the Relation Between Scattering Amplitudes and Finite-Size Mass Corrections in QFT*, *Nucl.Phys.* **B362** (1991) 329.
- [109] R. A. Janik and T. Łukowski, *Wrapping Interactions at Strong Coupling – the Giant Magnon*, *Phys.Rev.* **D76** (2007) 126008, [[arXiv:0708.2208](#)].
- [110] M. P. Heller, R. A. Janik, and T. Łukowski, *A New Derivation of Lüscher F-term and Fluctuations Around the Giant Magnon*, *JHEP* **06** (2008) 036, [[arXiv:0801.4463](#)].
- [111] N. Gromov, S. Schäfer-Nameki, and P. Vieira, *Quantum Wrapped Giant Magnon*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 026006, [[arXiv:0801.3671](#)].
- [112] G. Papathanasiou and M. Spradlin, *Semiclassical Quantization of the Giant Magnon*, *JHEP* **06** (2007) 032, [[arXiv:0704.2389](#)] • H.-Y. Chen, N. Dorey, and R. F. Lima Matos, *Quantum Scattering of Giant Magnons*, *JHEP* **09** (2007) 106, [[arXiv:0707.0668](#)].
- [113] N. Gromov, S. Schafer-Nameki, and P. Vieira, *Efficient Precision Quantization in AdS/CFT*, *JHEP* **12** (2008) 013, [[arXiv:0807.4752](#)].
- [114] C. Ahn and P. Bozhilov, *Finite-Size Effects for Single Spike*, *JHEP* **07** (2008) 105, [[arXiv:0806.1085](#)].
- [115] T. Fukushima, *Numerical Computation of Inverse Complete Elliptic Integrals of First and Second Kinds*, *J.Comput.Appl.Math.* **249** (2013) 37.
- [116] C. Csáki and M. Reece, *Toward a Systematic Holographic QCD: A Braneless Approach*, *JHEP* **05** (2007) 062, [[hep-ph/0608266](#)].
- [117] C.-S. Chu, G. Georgiou, and V. V. Khoze, *Magnons, Classical Strings and β -Deformations*, *JHEP* **11** (2006) 093, [[hep-th/0606220](#)] • N. P. Bobev and R. C. Rashkov, *Multispin Giant Magnons*, *Phys.Rev.* **D74** (2006) 046011, [[hep-th/0607018](#)].
- [118] D. V. Bykov and S. Frolov, *Giant Magnons in TsT-Transformed $AdS_5 \times S^5$* , *JHEP* **07** (2008) 071, [[arXiv:0805.1070](#)].
- [119] H.-Y. Chen, N. Dorey, and K. Okamura, *Dyonic Giant Magnons*, *JHEP* **09** (2006) 024, [[hep-th/0605155](#)] • Y. Hatsuda and R. Suzuki, *Finite-Size Effects for Dyonic Giant Magnons*, *Nucl.Phys.* **B800** (2008) 349, [[arXiv:0801.0747](#)].

- [120] D. Gaiotto, S. Giombi, and X. Yin, *Spin Chains in $\mathcal{N} = 6$ Superconformal Chern-Simons-Matter Theory*, *JHEP* **04** (2009) 066, [[arXiv:0806.4589](#)] • G. Grignani, T. Harmark, and M. Orselli, *The $SU(2) \times SU(2)$ Sector in the String Dual of $\mathcal{N} = 6$ Superconformal Chern-Simons Theory*, *Nucl.Phys.* **B810** (2009) 115, [[arXiv:0806.4959](#)].
- [121] M. Kruczenski, *Spiky Strings and Single Trace Operators in Gauge Theories*, *JHEP* **08** (2005) 014, [[hep-th/0410226](#)].
- [122] M. Axenides and E. Floratos, *Euler Top Dynamics of Nambu-Goto p -Branes*, *JHEP* **03** (2007) 093, [[hep-th/0608017](#)].
- [123] P. Bozhilov and R. Rashkov, *Magnon-like Dispersion Relation from M-Theory*, *Nucl.Phys.* **B768** (2007) 193–208, [[hep-th/0607116](#)].
- [124] C. Ahn and P. Bozhilov, *Finite-Size Effects of Membranes on $AdS_4 \times S_7$* , *JHEP* **08** (2008) 054, [[arXiv:0807.0566](#)].
- [125] P. A. M. Dirac, *An Extensible Model of the Electron*, *Proc.Roy.Soc.Lond.* **A268** (1962) 57.
- [126] P. A. Collins and R. W. Tucker, *Classical and Quantum Mechanics of Free Relativistic Membranes*, *Nucl.Phys.* **B112** (1976) 150.
- [127] J. Hoppe, *Curved Space (Matrix) Membranes*, *Gen.Rel.Grav.* **43** (2011) 2523, [[arXiv:0912.4717](#)].
- [128] P. S. Howe and R. W. Tucker, *A Locally Supersymmetric and Reparametrization Invariant Action for a Spinning Membrane*, *J.Phys.* **A10** (1977) L155.
- [129] M. J. Duff, R. R. Khuri, and J. X. Lu, *String Solitons*, *Phys.Rept.* **259** (1995) 213, [[hep-th/9412184](#)].
- [130] J. Hoppe, *Quantum Theory of a Massless Relativistic Surface and a Two-Dimensional Bound State Problem*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1982.
- [131] G. K. Savvidy, *The Light-Cone Gauge in the Theory of Relativistic Surfaces*, *Yerevan Physics Institute Preprint 982 (22) 87* (1987).
- [132] M. J. Duff, *Supermembranes*, [hep-th/9611203](#).
- [133] E. Bergshoeff, E. Sezgin, Y. Tani, and P. K. Townsend, *Super p -Branes as Gauge Theories of Volume Preserving Diffeomorphisms*, *Annals Phys.* **199** (1990) 340.
- [134] M. Axenides and E. Floratos, *Nambu-Lie 3-Algebras on Fuzzy 3-Manifolds*, *JHEP* **02** (2009) 039, [[arXiv:0809.3493](#)].
- [135] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, *Supermembranes and Eleven-Dimensional Supergravity*, *Phys.Lett.* **B189** (1987) 75.
- [136] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, *Properties of the Eleven-Dimensional Supermembrane Theory*, *Ann.Phys.* **185** (1988) 330.
- [137] E. Cremmer and S. Ferrara, *Formulation of Eleven-Dimensional Supergravity in Superspace*, *Phys.Lett.* **B91** (1980) 61 • L. Brink and P. S. Howe, *Eleven-Dimensional Supergravity on the Mass-Shell in Superspace*, *Phys.Lett.* **B91** (1980) 384.

- [138] G. Dall'Agata, D. Fabbri, C. Fraser, P. Fré, P. Termonia, and M. Trigiante, *The $Osp(8|4)$ singleton action from the supermembrane*, *Nucl.Phys.* **B542** (1999) 157, [[hep-th/9807115](#)] • B. de Wit, K. Peeters, J. Plefka, and A. Sevrin, *The M-Theory Two-Brane in $AdS_4 \times S^7$ and $AdS_7 \times S^4$* , *Phys.Lett.* **B443** (1998) 153, [[hep-th/9808052](#)] • P. Claus, *Super M-brane Actions in $AdS_4 \times S^7$ and $AdS_7 \times S^4$* , *Phys.Rev.* **D59** (1999) 066003, [[hep-th/9809045](#)] • P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *On Gauge-Fixed Superbrane Actions in AdS Superbackgrounds*, *Phys.Lett.* **B447** (1999) 251, [[hep-th/9809213](#)].
- [139] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, *Supergravity Theory in Eleven-Dimensions*, *Phys.Lett.* **B76** (1978) 409.
- [140] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology*. Cambridge University Press, 1987 • D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity*. Cambridge University Press, 2012.
- [141] B. de Wit, J. Hoppe, and H. Nicolai, *On the Quantum Mechanics of Supermembranes*, *Nucl.Phys.* **B305** (1988) 545.
- [142] D. B. Fairlie, P. Fletcher, and C. K. Zachos, *Trigonometric Structure Constants for New Infinite Algebras*, *Phys.Lett.* **B218** (1989) 203 • E. G. Floratos, *The Heisenberg-Weyl Group on the $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ Discretized Torus Membrane*, *Phys.Lett.* **B228** (1989) 335 • D. B. Fairlie and C. K. Zachos, *Infinite Dimensional Algebras, Sine Brackets and $SU(\text{Infinity})$* , *Phys.Lett.* **B224** (1989) 101.
- [143] B. de Wit, M. Lüscher, and H. Nicolai, *The Supermembrane is Unstable*, *Nucl.Phys.* **B320** (1989) 135.
- [144] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, and L. Susskind, *M Theory as a Matrix Model: A Conjecture*, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 5112, [[hep-th/9610043](#)].
- [145] L. Susskind, *Another Conjecture about M(atrix) Theory*, [[hep-th/9704080](#)] • N. Seiberg, *Why is the Matrix Model Correct?*, *Phys.Rev.Lett.* **79** (1997) 3577, [[hep-th/9710009](#)] • A. Sen, *D0-branes on T^n and Matrix Theory*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 51, [[hep-th/9709220](#)].
- [146] O. Aharony, M. Berkooz, S. Kachru, N. Seiberg, and E. Silverstein, *Matrix Description of Interacting Theories in Six Dimensions*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **1** (1998) 148, [[hep-th/9707079](#)] • O. Aharony, M. Berkooz, and N. Seiberg, *Light-Cone Description of (2,0) Superconformal Theories in Six Dimensions*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 119, [[hep-th/9712117](#)].
- [147] W. Taylor and M. Van Raamsdonk, *Multiple D0-Branes in Weakly Curved Backgrounds*, *Nucl.Phys.* **B558** (1999) 63, [[hep-th/9904095](#)].
- [148] K. Dasgupta, M. M. Sheikh-Jabbari, and M. Van Raamsdonk, *Matrix Perturbation Theory for M-Theory on a pp-Wave*, *JHEP* **05** (2002) 56, [[hep-th/0205185](#)].
- [149] G. Mandal, N. V. Suryanarayana, and S. R. Wadia, *Aspects of Semiclassical Strings in AdS_5* , *Phys.Lett.* **B543** (2002) 81, [[hep-th/0206103](#)].
- [150] P. Bozhilov, *Neumann and Neumann-Rosochatius Integrable Systems from Membranes on $AdS_4 \times S^7$* , *JHEP* **08** (2007) 073, [[arXiv:0704.3082](#)].
- [151] M. J. Duff, P. S. Howe, T. Inami, and K. S. Stelle, *Superstrings in $D = 10$ from Supermembranes in $D = 11$* , *Phys.Lett.* **B191** (1987) 70.

- [152] E. Bergshoeff, M. J. Duff, C. N. Pope, and E. Sezgin, *Supersymmetric Supermembrane Vacua and Singletons*, *Phys.Lett.* **B199** (1987) 69 • E. Bergshoeff, M. J. Duff, C. N. Pope, and E. Sezgin, *Compactifications of the Eleven-Dimensional Supermembrane*, *Phys.Lett.* **B224** (1989) 71.
- [153] G. Arutyunov and S. Frolov, *Superstrings on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ as a Coset Sigma-Model*, *JHEP* **09** (2008) 129, [[arXiv:0806.4940](#)] • J. Gomis, D. Sorokin, and L. Wulff, *The Complete $AdS_4 \times CP^3$ Superspace for the Type IIA Superstring and D-Branes*, *JHEP* **03** (2009) 015, [[arXiv:0811.1566](#)] • D. V. Uvarov, *$AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ Superstring in the Light-Cone Gauge*, *Nucl.Phys.* **B826** (2010) 294, [[arXiv:0906.4699](#)].
- [154] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Multi-Spin String Solutions in $AdS_5 \times S^5$* , *Nucl.Phys.* **B668** (2003) 77, [[hep-th/0304255](#)].
- [155] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Quantizing Three-Spin String Solution in $AdS_5 \times S^5$* , *JHEP* **07** (2003) 016, [[hep-th/0306130](#)].
- [156] A. Tirziu and A. A. Tseytlin, *Semiclassical Rigid Strings with Two Spins in AdS_5* , *Phys.Rev.* **D81** (2010) 026006, [[arXiv:0911.2417](#)].
- [157] A. Khan and A. L. Larsen, *Improved Stability for Pulsating Multi-Spin String Solitons*, *Int.J.Mod.Phys.* **A21** (2006) 133, [[hep-th/0502063](#)].
- [158] B. Stefański Jr., *Open Spinning Strings*, *JHEP* **03** (2004) 057, [[hep-th/0312091](#)].
- [159] J. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in AdS_3 and the $SL(2, \mathbb{R})$ WZW Model. Part 1: The Spectrum*, *J.Math.Phys.* **42** (2001) 2929, [[hep-th/0001053](#)] • C. Bachas, M. R. Douglas, and C. Schweigert, *Flux Stabilization of D-branes*, *JHEP* **05** (2000) 048, [[hep-th/0003037](#)].
- [160] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Rotating String Solutions: AdS/CFT Duality in Non-Supersymmetric Sectors*, *Phys.Lett.* **B570** (2003) 96, [[hep-th/0306143](#)] • N. Beisert, J. A. Minahan, M. Staudacher, and K. Zarembo, *Stringing Spins and Spinning Strings*, *JHEP* **09** (2003) 010, [[hep-th/0306139](#)].
- [161] S. Frolov, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Logarithmic Corrections to Higher Twist Scaling at Strong Coupling from AdS/CFT* , *Nucl.Phys.* **B766** (2007) 232, [[hep-th/0611269](#)].
- [162] C. O. Lousto, *The Energy Spectrum of the Membrane Effective Model for Quantum Black Holes*, *Phys.Lett.* **B352** (1995) 228 • A. L. Larsen and C. O. Lousto, *On the Stability of Spherical Membranes in Curved Spacetimes*, *Nucl.Phys.* **B472** (1996) 361, [[gr-qc/9602009](#)] • A. L. Larsen and C. O. Lousto, *Are Higher Order Membranes Stable in Black Hole Spacetimes?*, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 7936, [[gr-qc/9610051](#)] • T. Harmark and K. G. Savvidy, *Ramond-Ramond Field Radiation from Rotating Ellipsoidal Membranes*, *Nucl.Phys.* **B585** (2000) 567, [[hep-th/0002157](#)] • K. G. Savvidy and G. K. Savvidy, *Stability of the Rotating Ellipsoidal D0-Brane System*, *Phys.Lett.* **B501** (2001) 283, [[hep-th/0009029](#)] • M. Axenides, E. G. Floratos, and L. Perivolaropoulos, *Metastability of Spherical Membranes in Supermembrane and Matrix Theory*, *JHEP* **11** (2000) 020, [[hep-th/0007198](#)] • M. Axenides, E. G. Floratos, and L. Perivolaropoulos, *Quadrupole Instabilities of Relativistic Rotating Membranes*, *Phys.Rev.* **D64** (2001) 107901, [[hep-th/0105292](#)] • G. K. Savvidy, *D0-Branes with Non-Zero Angular Momentum*, [[hep-th/0108233](#)] • M. Axenides, E. G. Floratos, and L. Perivolaropoulos, *Rotating Toroidal Branes in Supermembrane and Matrix Theory*, *Phys.Rev.* **D66** (2002) 085006, [[hep-th/0206116](#)].

- [163] M. G. Lamé, *Memoire sur les surfaces isothermes dans les corps homogènes en équilibre de température*, *Journal de mathématiques pures et appliquées* **2** (1837) 147.
- [164] A. V. Turbiner, *Quasi-Exactly-Solvable Problems and $sl(2)$ Algebra*, *Commun.Math.Phys.* **118** (1988) 467 • A. G. Ushveridze, *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*. Taylor & Francis Group, New York, 1994.
- [165] Y. Alhassid, F. Gürsey, and F. Iachello, *Potential Scattering, Transfer Matrix, and Group Theory*, *Phys.Rev.Lett.* **50** (1983) 873.
- [166] H. Li and D. Kusnezov, *Group Theory Approach to Band Structure: Scarf and Lamé Hamiltonians*, *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 1283, [[cond-mat/9907202](#)] • H. Li, D. Kusnezov, and F. Iachello, *Group Theoretical Properties and Band Structure of the Lamé Hamiltonian*, *J.Phys.* **A33** (2000) 6413, [[solv-int/9912006](#)] • F. Finkel, A. González-López, and M. A. Rodríguez, *A New Algebraization of the Lamé Equation*, *J.Phys.* **A33** (2000) 1519, [[math-ph/9908002](#)] • R. S. Maier, *Lamé Polynomials, Hyperelliptic Reductions and Lamé Band Structure*, *Philos.Trans.Roy.Soc.London* **A366** (2008) 1115, [[math-ph/0309005](#)].
- [167] B. Sutherland, *Some Exact Results for One-Dimensional Models of Solids*, *Phys.Rev.* **A8** (1973) 2514.
- [168] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, *Reheating after Inflation*, *Phys.Rev.Lett.* **73** (1994) 3195, [[hep-th/9405187](#)] • D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, and J. F. J. Salgado, *Analytic and Numerical Study of Preheating Dynamics*, *Phys.Rev.* **D54** (1996) 7570, [[hep-ph/9608205](#)] • P. B. Greene, L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, *Structure of Resonance in Preheating after Inflation*, *Phys.Rev.* **D56** (1997) 6175, [[hep-ph/9705347](#)].
- [169] N. S. Manton and T. M. Samols, *Sphalerons on a Circle*, *Phys.Lett.* **B207** (1988) 179 • J.-Q. Liang, H. J. W. Müller-Kirsten, and D. H. Tchrakian, *Solitons, Bounces and Sphalerons on a Circle*, *Phys.Lett.* **B282** (1992) 105 • Y. Brihaye, S. Giller, P. Kosinski, and J. Kunz, *Sphalerons and Normal Modes in the $(1 + 1)$ -Dimensional Abelian Higgs Model on the Circle*, *Phys.Lett.* **B293** (1992) 383 • S. Braibant and Y. Brihaye, *Quasi-Exactly-Solvable System and Sphaleron Stability*, *J.Math.Phys.* **34** (1993) 2107.
- [170] R. S. Ward, *The Nahm Equations, Finite-Gap Potentials and Lamé Functions*, *J.Phys.* **A28** (1987) 2679 • P. M. Sutcliffe, *Symmetric Monopoles and Finite-Gap Lamé Potentials*, *J.Phys.* **A29** (1996) 5187.
- [171] G. Dunne and J. Feinberg, *Self-Isospectral Periodic Potentials and Supersymmetric Quantum Mechanics*, *Phys.Rev.* **D57** (1998) 1271, [[hep-th/9706012](#)] • G. Dunne and J. Mannix, *Supersymmetry Breaking with Periodic Potentials*, *Phys.Lett.* **B428** (1998) 115, [[hep-th/9710115](#)] • A. Khare and U. Sukhatme, *New Solvable and Quasi Exactly Solvable Periodic Potentials*, *J.Math.Phys.* **40** (1999) 5473, [[quant-ph/9906044](#)] • F. Correa and M. S. Plyushchay, *Peculiarities of the Hidden Nonlinear Supersymmetry of Pöschl-Teller System in the Light of Lamé Equation*, *J.Phys.* **A40** (2007) 14403, [[arXiv:0706.1114](#)].
- [172] E. G. Floratos and S. Nicolis, *An $SU(2)$ Analog of the Azbel-Hofstadter Hamiltonian*, *J.Phys.* **A31** (1998) 3961, [[hep-th/9508111](#)] • I. Bakas, A. Brandhuber, and K. Sfetsos, *Domain Walls of Gauged Supergravity, M-branes, and Algebraic Curves*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **3** (1999) 1657, [[hep-th/9912132](#)] • I. Bakas, A. Brandhuber, and K. Sfetsos, *Riemann Surfaces and Schrödinger Potentials of Gauged Supergravity*, [hep-th/0002092](#).
- [173] G. V. Dunne, *Perturbative–Nonperturbative Connection in Quantum Mechanics and Field Theory*, [hep-th/0207046](#) • G. V. Dunne and M. Shifman, *Duality and Self-Duality (Energy*

- Reflection Symmetry) of Quasi-Exactly Solvable Periodic Potentials*, *Ann.Phys.* **299** (2002) 143, [[hep-th/0204224](#)].
- [174] S. A. Hartnoll and C. Nuñez, *Rotating Membranes on G_2 Manifolds, Logarithmic Anomalous Dimensions and $N = 1$ Duality*, *JHEP* **02** (2003) 049, [[hep-th/0210218](#)].
- [175] J. Bruges, J. Rojo, and J. G. Russo, *Non-Perturbative States in Type II Superstring Theory from Classical Spinning Membranes*, *Nucl.Phys.* **B710** (2005) 117, [[hep-th/0408174](#)].
- [176] D. Kamani, *Strings in the pp-Wave Background from Membrane*, *Phys.Lett.* **B580** (2004) 257, [[hep-th/0301003](#)] • D. Kamani, *PP-Wave Strings from Membrane and from String in the Spacetime with two time Directions*, *Phys.Lett.* **B564** (2003) 123, [[hep-th/0304236](#)] • S. Gangopadhyay, *Strings in pp-Wave Background and Background B-field from Membrane and its Symplectic Quantization*, *Phys.Lett.* **B659** (2008) 399, [[arXiv:0711.0421](#)].
- [177] M. Beccaria and V. Forini, *Four Loop Reciprocity of Twist Two Operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM*, *JHEP* **03** (2009) 111, [[arXiv:0901.1256](#)].
- [178] B. S. Acharya, *On Realising $N = 1$ Super Yang-Mills in M-Theory*, [[hep-th/0011089](#)] • M. Atiyah, J. Maldacena, and C. Vafa, *An M-theory Flop as a Large N Duality*, *J.Math.Phys.* **42** (2001) 3209, [[hep-th/0011256](#)] • M. Atiyah and E. Witten, *M-Theory Dynamics on a Manifold of G_2 Holonomy*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **6** (2003) 1, [[hep-th/0107177](#)] • M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, and C. N. Pope, *Supersymmetric $M3$ -Branes and G_2 Manifolds*, *Nucl.Phys.* **B620** (2002) 3, [[hep-th/0106026](#)] • S. Gukov, *M-theory on Manifolds with Exceptional Holonomy*, *Fortschr.Phys.* **51** (2003) 719.
- [179] A. V. Belitsky, S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, and A. N. Manashov, *Dilatation Operator in (Super-) Yang-Mills Theories on the Light-Cone*, *Nucl.Phys.* **B708** (2005) 115, [[hep-th/0409120](#)].
- [180] N. Gromov and G. Sizov, *Exact Slope and Interpolating Functions in $\mathcal{N} = 6$ Supersymmetric Chern-Simons Theory*, *Phys.Rev.Lett.* **113** (2014), no. **12** 121601, [[arXiv:1403.1894](#)].
- [181] E. Pomoni, *Integrability in $\mathcal{N} = 2$ Superconformal Gauge Theories*, *Nucl.Phys.* **B893** (2015) 21, [[arXiv:1310.5709](#)].
- [182] R. Kallosh and J. Rahmfeld, *The GS String Action on $AdS_5 \times S^5$* , *Phys.Lett.* **B443** (1998) 143, [[hep-th/9808038](#)] • R. Kallosh, J. Rahmfeld, and A. Rajaraman, *Near Horizon Superspace*, *JHEP* **09** (1998) 002, [[hep-th/9805217](#)] • R. Kallosh and A. A. Tseytlin, *Simplifying Superstring Action on $AdS_5 \times S^5$* , *JHEP* **10** (1998) 016, [[hep-th/9808088](#)] • N. Drukker, D. J. Gross, and A. A. Tseytlin, *Green-Schwarz String in $AdS_5 \times S^5$: Semiclassical Partition Function*, *JHEP* **04** (2000) 021, [[hep-th/0001204](#)] • A. A. Tseytlin, *"Long" Quantum Superstrings in $AdS_5 \times S^5$* , [[hep-th/0008107](#)].
- [183] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, eds., *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [184] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag, 1971.
- [185] B. C. Carlson, *Numerical Computation of Real or Complex Elliptic Integrals, Numerical Algorithms* **10** (march, 1995) 13, [[math/9409](#)].
- [186] J. H. Lambert, *Observations variae in mathesin puram*, *Acta Helvetica, physico-mathematico-anatomico-botanico-medica* **3** (1758) 128.

- [187] L. Euler, *De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus*, *Acta Acad.Scient.Petropol.* **2** (1779, 1783) 29–51.
<http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E532.pdf>.
- [188] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth, *On the Lambert W Function*, *Adv.Comput.Math.* **5** (1996) 329.
- [189] B. Hayes, *Why W?*, *American Scientist* **93** (2005) 104.
- [190] D. Kalman, *A Generalized Logarithm for Exponential-Linear Equations*, *The College Mathematics Journal* (January, 2001) • R. M. Corless and D. J. Jeffrey, *Artificial Intelligence, Automated Reasoning, and Symbolic Computation*, ch. The Wright ω Function, p. 76. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2002.
- [191] I. N. Galidakis, *On an Application of Lambert's W Function to Infinite Exponentials*, *Complex Variables. Theory and Applications* **49** (2006) 759.
- [192] T. C. Scott and R. B. Mann, *General Relativity and Quantum Mechanics: Towards a Generalization of the Lambert W Function*, [math-ph/0607011](#) • D. Veberič, *Lambert W Function for Applications in Physics*, *Comput.Phys.Commun.* **183** (2012) 2622, [[arXiv:1209.0735](#)].
- [193] S. Valluri, D. Jeffrey, and R. Corless, *Some Applications of the Lambert W Function to Physics*, *Can.J.Phys.* **78** (2000) 823.
- [194] T. C. Scott, J. F. Babb, A. Dalgarno, and J. D. Morgan, *The Calculation of Exchange Forces: General Results and Specific Models*, *J.Chem.Phys.* **99** (1993) 2481.
- [195] R. B. Mann and T. Ohta, *Exact Solution for the Metric and the Motion of Two Bodies in (1+1)-Dimensional Gravity*, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 4723, [[gr-qc/9611008](#)].
- [196] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, New York, 1999.
- [197] G. Ellis and S. Hawking, *The Large Scale Structure of Spacetime*. Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
- [198] H. Sonoda, *Analytic Form of the Effective Potential in the Large N Limit of a Real Scalar Theory in Four Dimensions*, [arXiv:1302.6059](#) • H. Sonoda, *Solving Renormalization Group Equations with the Lambert W Function*, *Phys.Rev.* **D87** (2013) 085023, [[arXiv:1302.6069](#)].
- [199] N. N. Khuri and H. C. Ren, *Explicit Solutions for the Running Coupling Constant and the Separatrix of Quantum Field Theories*, *Ann.Phys.* **189** (1989) 142 • T. Appelquist, A. Ratnaweera, J. Terning, and L. C. R. Wijewardhana, *The Phase Structure of an SU(N) Gauge Theory with N_f Flavors*, *Phys.Rev.* **D58** (1998) 105017, [[hep-ph/9806472](#)] • B. A. Magradze, *The Gluon Propagator in Analytic Perturbation Theory*, in *10th International Seminar Quarks '98*, vol. **1**, p. 158, 1999. [hep-ph/9808247](#) • B. A. Magradze, *Analytic Approach to Perturbative QCD*, *Int.J.Mod.Phys.* **A15** (2000) 2715, [[hep-ph/9911456](#)].
- [200] E. Gardi, G. Grunberg, and M. Karliner, *Can the QCD Running Coupling Have a Causal Analyticity Structure?*, *JHEP* **07** (1998) 007, [[hep-ph/9806462](#)].
- [201] A. V. Nesterenko, *Analytic Invariant Charge in QCD*, *Int.J.Mod.Phys.* **A18** (2003) 5475, [[hep-ph/0308288](#)] • T. L. Curtright and C. K. Zachos, *Renormalization Group Functional Equations*, *Phys.Rev.* **D83** (2011) 065019, [[arXiv:1010.5174](#)].

- [202] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*. Reidel, 1974.
- [203] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*. Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [204] W. Magnus and S. Winkler, *Hill's Equation*. Dover, New York, 2004.