



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Τομέας Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΟΙ ΠΕΛΑΤΕΣ ΣΕ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΜΕ
ΟΜΑΔΙΚΕΣ ΑΝΑΧΩΡΗΣΕΙΣ ΠΕΛΑΤΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΟΛΓΑΣ ΜΠΟΥΝΤΑΛΗ

Αθήνα
2014

Στη Νεκταρία-Ιωάννα Κοντού...

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου και την εκτίμησή μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Αντώνη Οικονόμου για την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής. Ιδιαίτερα, τον ευχαριστώ για την αμέριστη κατανόηση, ενθάρρυνση και συμπαράσταση που μου έδειξε σε προσωπικό επίπεδο, ειδικά τις δύσκολες στιγμές που υπήρξαν μέσα στα τελευταία χρόνια των σπουδών μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, επίσης, τα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους. Επιπλέον, ευχαριστώ το Τμήμα Μαθηματικών και ιδιαίτερα τον Τομέα Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας για όλα τα εφόδια που μου προσέφεραν σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ευχαριστώ, επίσης, το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών για την οικονομική ενίσχυση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διατριβής.

Δεν θα μπορούσα να μην αναφερθώ στη στήριξη και τη συμπαράσταση της οικογένειάς μου, καθ' όλη τη διάρκεια όχι μόνο της εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής, αλλά και όλα τα προηγούμενα χρόνια. Τους ευχαριστώ για ό,τι έχουν κάνει για μένα όλα αυτά τα χρόνια. Η στήριξή τους ήταν καθοριστική για να ακολουθήσω το δρόμο που ήθελα.

Λένε ότι τα πιο απλά πράγματα είναι και τα πιο σημαντικά. Γι' αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τα ανίψια μου, Νεκταρία-Ιωάννα Κοντού και Βασίλη Κοντό, που αποτελέσαν τα σημαντικότερα πρόσωπα της ζωής μου όλα αυτά τα χρόνια. Ακόμη και στις πιο δύσκολες στιγμές, ακόμη και στις πιο δύσκολες επιλογές. Ήταν πάντα δίπλα μου και έδιναν τη λύση, χωρίς να το ξέρουν. Με το πιο αθώο και αυθόρμητο χαμόγελο, με μια λέξη, με μια αγκαλιά. Τα ευχαριστώ και τους εύχομαι μια λαμπρή πορεία στη ζωή τους.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τη Ντόρα και το Γιώργο, για την καθοριστική τους στήριξη και τις συμβουλές που μου έδωσαν όλα αυτά τα χρόνια. Τον Κώστα και την Αριστέα, καθώς επίσης και τη Μάχη, τόσο για την ψυχολογική υποστήριξή τους, όσο και για την ουσιαστική βοήθεια που μου προσέφεραν. Δε θα μπορούσα να παραλείψω

τη Χριστίνα, τον Ηλία, το Σπύρο, το Χρήστο και το Διονύση. Όλοι οι παραπάνω αποτέλεσαν τα ευχάριστά μου διαλείμματα μέσα στην καθημερινότητα. Τους ευχαριστώ εκ βάθους καρδιάς γιατί ήταν πάντα εκεί, με άκουσαν, με κατάλαβαν, με ενθάρρυναν. Μα, πάνω απ' όλα, τους ευχαριστώ γιατί πίστευαν σ' εμένα και μου το έδειχναν.

Κλείνοντας, θα ήθελα να αφιερώσω το παρακάτω ποίημα του Rudyard Kipling σε όλους όσους έχουν βρεθεί ή θα βρεθούν στη θέση μου. Δεν περιορίζω αυτή μου τη φράση στο πλαίσιο μιας διδακτορικής διατριβής. Το αφιερώνω σε κάθε άνθρωπο που, για κάποια περίοδο της ζωής του, δοκιμάζονται οι δυνάμεις του και οι αντοχές του σε όλα τα επίπεδα. Ευχαριστώ ιδιαίτερα, για μια ακόμη φορά, τον επιβλέποντά μου, κ. Αντώνη Οικονόμου, που μου το έδωσε να το διαβάσω στην πρώτη δύσκολη στιγμή που είχα να αντιμετωπίσω, λίγο πριν το ξεκίνημα της διδακτορικής μου διατριβής.

IF

by Rudyard Kipling (1865-1936)

If you can keep your head when all about you
 Are losing theirs and blaming it on you,
 If you can trust yourself when all men doubt you,
 But make allowance for their doubting too;
 If you can wait and not be tired by waiting,
 Or being lied about, don't deal in lies,
 Or being hated, don't give way to hating,
 And yet don't look too good, nor talk too wise:

— . —

If you can dream – and not make dreams your master;
 If you can think – and not make thoughts your aim;
 If you can meet with Triumph and Disaster
 And treat those two impostors just the same;
 If you can bear to hear the truth you've spoken
 Twisted by knaves to make a trap for fools,
 Or watch the things you gave your life to, broken,
 And stoop and build 'em up with worn-out tools:

— . —

If you can make one heap of all your winnings
 And risk it on one turn of pitch-and-toss,
 And lose, and start again at your beginnings
 And never breathe a word about your loss;
 If you can force your heart and nerve and sinew
 To serve your turn long after they are gone,
 And so hold on when there is nothing in you
 Except the Will which says to them: 'Hold on!'

— . —

If you can talk with crowds and keep your virtue,
Or walk with Kings – nor lose the common touch,
If neither foes nor loving friends can hurt you,
If all men count with you, but none too much;
If you can fill the unforgiving minute
With sixty seconds' worth of distance run,
Yours is the Earth and everything that's in it,
And – which is more – you'll be a Man, my son!

— • —

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	11
1.1	Ερευνητική περιοχή και κίνητρο	11
1.2	Παιγνιοθεωρητικό πλαίσιο	17
1.3	Η οικονομική ανάλυση της $M/M/1$ ουράς	21
1.4	Σκοπός και δομή της διατριβής	29
2	Η $M/M/1//cat$ ουρά με εμποδιζόμενες αφίξεις	33
2.1	Εισαγωγή	33
2.2	Περιγραφή του μοντέλου	36
2.3	Η παρατηρήσιμη περίπτωση	37
2.4	Η μη παρατηρήσιμη περίπτωση	43
2.5	Το πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης	48
2.6	Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή	55
2.7	Αριθμητικά πειράματα-Συμπεράσματα	59
3	Η $M/M/1//cat$ ουρά με επιτρεπόμενες αφίξεις	65
3.1	Εισαγωγή	65
3.2	Περιγραφή του μοντέλου	69
3.3	Η παρατηρήσιμη περίπτωση	70
3.4	Η μη παρατηρήσιμη περίπτωση	80
3.5	Το πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης	97
3.6	Αριθμητικά πειράματα-Συμπεράσματα	114

4 Η $M/M^K/1$ ουρά	123
4.1 Εισαγωγή	123
4.2 Περιγραφή του μοντέλου	126
4.3 Η παρατηρήσιμη περίπτωση	129
4.4 Η μη παρατηρήσιμη περίπτωση	137
Βιβλιογραφία	146

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ερευνητική περιοχή και κίνητρο

Ο σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών ορισμένων συστημάτων αναμονής με ομαδικές αναχωρήσεις. Η μελέτη αυτή εμπίπτει στην υποπεριοχή της Θεωρίας Ουρών Αναμονής που αναφέρεται συχνά ως οικονομική ή παιγνιοθεωρητική ανάλυση των συστημάτων αναμονής. Μιλώντας σε γενικά πλαίσια, στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται τρεις τύποι προβλημάτων που αναφέρονται σε ένα σύστημα αναμονής ή, με άλλα λόγια, τρεις διαφορετικές οπτικές γωνίες υπό τις οποίες μπορούμε να μελετήσουμε ένα σύστημα αναμονής. Στον πρώτο τύπο αναλύεται η συμπεριφορά ενός συστήματος αναμονής όταν δεν τίθενται ζητήματα αποφάσεων του διαχειριστή ή/και των πελατών, χρησιμοποιώντας εργαλεία από τη βασική Θεωρία Στοχαστικών Διαδικασιών. Τα παραπάνω είναι τα λεγόμενα προβλήματα αποτίμησης απόδοσης (performance evaluation problems). Στα προβλήματα στατικής βελτιστοποίησης (static control problems), από την άλλη μεριά, το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των βέλτιστων αποφάσεων του κατασκευαστή του συστήματος, ο οποίος καθορίζει τον τρόπο σχεδιασμού του συστήματος, χρησιμοποιώντας εργαλεία από τη Θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών και από την κλασική Θεωρία Βελτιστοποίησης (Μη-Γραμμικού Προγραμματισμού). Τέλος, στα προβλήματα δυναμικής βελτιστοποίησης (dynamic control problems) υπάρχει ο διαχειριστής του συστήματος, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να παρατηρεί το σύστημα σε λειτουργία και να το ελέγχει παρεμβαίνοντας με κάποιον

τρόπο (π.χ. με αποδοχή/απόρριψη αφίξεων, με προσαρμογή του ρυθμού εξυπηρέτησης ή του αριθμού των υπηρέτων κλπ). Το ζητούμενο σε αυτού του είδους τα προβλήματα είναι ο προσδιορισμός των βέλτιστων στρατηγικών διαχείρισης του συστήματος, ανάλογα με την κατάστασή του. Τα προβλήματα αυτά λύνονται χρησιμοποιώντας τεχνικές Στοχαστικών Διαδικασιών και Δυναμικού Προγραμματισμού. Ωστόσο, υπάρχει τα τελευταία χρόνια και μια τέταρτη οπτική μελέτης των συστημάτων αναμονής και σε αυτήν εμπίπτει και η θεώρηση της παρούσας διατριβής. Η οπτική αυτή βάζει τον πελάτη σε πρώτο πλάνο και, θέτοντάς τον σε ρόλο αποφασίζοντα, μελετάει το πως συμπεριφέρεται ο πελάτης αυτός, υποθέτοντας ότι συμπεριφέρεται στρατηγικά (δηλαδή προσπαθώντας να βελτιστοποιήσει την ωφέλειά του, γνωρίζοντας ότι το ίδιο κάνουν και οι υπόλοιποι πελάτες). Αυτού του τύπου οι μελέτες εμπίπτουν στο πλαίσιο της οικονομικής θεώρησης ενός συστήματος αναμονής και για την ανάλυσή τους χρειαζόμαστε ένα συνδυασμό εργαλείων από τη Θεωρία των Ουρών Αναμονής και τη Θεωρία Παιγνίων.

Η θεωρία Ουρών Αναμονής θεωρείται κλάδος της Επιχειρησιακής Έρευνας, διότι τα αποτελέσματά της χρησιμοποιούνται συχνά στη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων σχετικά με τις απαιτούμενες ενέργειες για τη βέλτιστη παροχή υπηρεσιών. Στην πράξη μπορούν να παρουσιαστούν ποικίλες εφαρμογές σε μεγάλο εύρος περιπτώσεων, όπως στο εμπόριο, στις επιχειρήσεις, στη βιομηχανία, στις τηλεπικοινωνίες, στον τομέα της υγείας και αλλού. Η πρώτη εργασία που σχετίζεται με τη Θεωρία Ουρών Αναμονής δημοσιεύτηκε από το Δανό μηχανικό Agner Krarup Erlang (Erlang (1909)), ο οποίος εργαζόταν για τον οργανισμό τηλεπικοινωνιών της Κοπεγχάγης. Μερικές δεκαετίες αργότερα, ο Kendall (1953) εισήγαγε τον $A/B/c$ συμβολισμό που χρησιμοποιούμε στις ουρές σήμερα, αν και σημειώνουμε ότι φράσεις όπως «ουρά αναμονής» ή «απλό σύστημα ουράς» αναφέρονται και σε παλιότερες δημοσιεύσεις. Το βιβλίο «Ουρές, Αποθέματα και Συντήρηση» (“Queues, Inventories and Maintenance”) του Morse (1958) είναι από τα πρώτα βιβλία στην περιοχή. Η έννοια της υπαναχώρησης (reneging) εισήχθη από τον Palm (1938), αλλά μελετήθηκε εκτενέστερα και πήρε την ονομασία της από τον Haight (1958). Ο Haight (1958) ήταν αυτός που επίσης εισήγαγε τις έννοιες της αποχώρησης (balking) και των παράλληλων ουρών. Οι White και Christie (1958) ήταν οι πρώτοι που μελέτησαν συστήματα με βλάβες του υπηρέτη. Άλλοι μεταγενέστεροι ερευνητές, όπως οι Miller (1960), Gaver (1962) και Avi-Itzhak και Naor (1964) ασχολήθηκαν με συστήματα με διακοπές (vacations) του υπηρέτη καθώς και με συστήματα

με προτεραιότητες. Ο Cohen (1957) φαίνεται να είναι ο πρώτος που μελέτησε ουρές με επαναπροσπάθειες (retrials). Η απόδειξη του ιδιαίτερα σημαντικού θεωρήματος του Little (που συνδέει το μέσο μήκος ουράς, το μέσο ρυθμό αφίξεων και το μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη) δημοσιεύτηκε από τον Little (1961). Ο Takacs (1962) έγραψε ένα από τα πρώτα σύστηματικά βιβλία που αφορούν τη Θεωρία Ουρών Αναμονής και εφάρμοσε συνδυαστικές μεθόδους με μεγάλη επιτυχία. Η χρήση ουρών για την αποτίμηση της απόδοσης ηλεκτρονικών υπολογιστών ξεκίνησε γύρω στο 1970. Ο Cox (1955) εισήγαγε τη μέθοδο «επιπρόσθετων μεταβλητών» (“Supplementary variables technique”) για την ανάλυση μη-Μαρκοβιανών ουρών. Ο Brill (1975) ανέπτυξε τη μέθοδο «καταμέτρησης διασχίσεων στάθμης» (“level crossing method”) για τον υπολογισμό διαφορών κατανομών πιθανότητας στη Θεωρία Ουρών. Ο Grassmann συνεισέφερε σε προβλήματα αριθμητικής ανάλυσης στο πλαίσιο των ουρών αναμονής (βλέπε π.χ. Grassmann (1977)). Οι Cooper και Murray (1969) και Cooper (1970) μελέτησαν εκτενώς συστήματα εξυπηρέτησης με μετακινούμενο υπηρέτη (polling models). Πιο συγκεκριμένα, εισήγαγαν κάποια μοντέλα με διακοπές και διατύπωσαν μια ειδική περίπτωση ενός σημαντικού θεωρήματος διάσπασης. Το τελευταίο βελτιώθηκε αργότερα και γενικεύθηκε από τους Fuhrmann και Cooper (1985). Ο Skinner (1967) ήταν ο πρώτος που θεώρησε το $M/G/1$ μοντέλο με διακοπές. Τέλος, ο Wolff (1982) απέδειξε αυστηρά την πολύ σημαντική ιδιότητα PASTA (“Poisson Arrivals See Time Averages”), η οποία είχε ήδη σημαντικές εφαρμογές και ήταν διαισθητικά αποδεκτή από τους ερευνητές (π.χ. βλ. Cooper (1981)).

Η Θεωρία Παιγνίων είναι επίσης μια εξαιρετικά σημαντική, ενεργή επιστημονική περιοχή, με πολλές εφαρμογές στις οικονομικές, κοινωνικές και θετικές επιστήμες. Πρώτα στοιχεία παιγνιοθεωρητικών ιδεών βρίσκουμε στον Cournot (1838). Οι μελέτες των Zermelo (1913), Borel (1921) και von Neumann (1928) ήταν θεμελιώδους σημασίας σε αυτόν τον τομέα. Ο Borel ήταν από τους πρώτους που μαθηματικοποίησαν την έννοια της στρατηγικής, στα πλαίσια ενός συμμετρικού παιχνιδιού δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος. Εισήγαγε την έννοια που σήμερα καλούμε καθαρή στρατηγική και αναζήτησε λύση του παιχνιδιού μέσα στην κλάση των μικτών στρατηγιών. Ο von Neumann (1928) απέδειξε την ύπαρξη λύσης κάθε πεπερασμένου παιχνιδιού δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος σε μικτές στρατηγικές. Επιπλέον, έδωσε μια μαθηματικοποίηση της γενικής περίπτωσης ενός πεπερασμένου παιχνιδιού n παικτών μηδενικού αθροίσματος.

Το πρώτο βιβλίο στη Θεωρία Παιγνίων γράφτηκε από τους von Neumann και Morgenstern (1944). Ο τίτλος του ήταν «Θεωρία Παιγνίων και Οικονομική Συμπεριφορά» (“Theory of Games and Economic Behaviour”) και εστιαζόταν κυρίως σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Οι von Neumann και Morgenstern ξεκίνησαν με μια λεπτομερή μοντελοποίηση οικονομικών προβλημάτων και ανέδειξαν το εξαιρετικά μεγάλο εύρος εφαρμογών της Θεωρίας Παιγνίων στην οικονομία. Μεταξύ των βασικών ιδεών που εμφανίζονται στο βιβλίο αυτό, αξίζει να αναφερθούμε ιδιαίτερα στη μοντελοποίηση της έννοιας της στρατηγικής ενός παιχνιδιού, στη θεωρία πεπερασμένων παιχνιδιών δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος, καθώς και στα πεπερασμένα παιχνίδια n παικτών μηδενικού αθροίσματος με μεταφερόμενη ωφέλεια. Ωστόσο, παρέμεναν πολλά ανοιχτά προβλήματα. Τα ανταγωνιστικά παιχνίδια (δηλαδή τα παιχνίδια χωρίς δυνατότητα συνεργασίας) αποτελούν μόνο ένα μέρος των προβλημάτων στρατηγικών αποφάσεων που μελετάει η Θεωρία Παιγνίων, καθώς υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες οι παίκτες μπορεί να έχουν την επιλογή της συνεργασίας και επομένως τίθεται το πρόβλημα της διανομής της συνολικής αμοιβής.

Λίγα χρόνια αργότερα, οι μελέτες των Nash (σε παιχνίδια χωρίς συνεργασία) και Shapley (σε παιχνίδια με συνεργασία) συνεισέφεραν σημαντικά αποτελέσματα στην περιοχή, εισάγοντας τις έννοιες του σημείου ισορροπίας Nash και της τιμής Shapley, οι οποίες είναι βασικές στη Θεωρία Παιγνίων. Ο Selten (1975) εισήγαγε την έννοια του τέλειου ως προς τα υποπαιχνίδια σημείου στρατηγικής ισορροπίας Nash (Nash subgame perfect equilibrium). Ο Harsanyi (1967) φαίνεται να είναι ο πρώτος που εργάστηκε σε παιχνίδια ελλιπούς πληροφόρησης. Αργότερα, ο Hurwicz (1972) εισήγαγε την έννοια της συμβατότητας των κινήτρων. Οι μελέτες των Gibbard (1973), Myerson (1979), Dasgupta (1979), Maskin (1979), Rosenthal (1981) και Holmstrom (1979) σε παιχνίδια με διάφορα επίπεδα πληροφόρησης βοήθησαν στην ανάπτυξη της Θεωρίας Παιγνίων και οδήγησαν στη λεγόμενη «Αρχή της Αποκάλυψης» (“Revelation Principle”), που εισήχθη από τον Myerson (1981).

Για περισσότερα από πενήντα χρόνια οι μελέτες στη θεωρία ουρών επικεντρώθηκαν στα προβλήματα αποτίμησης απόδοσης, με λίγες εξαιρέσεις. Ωστόσο, τις τελευταίες δεκαετίες, υπάρχει μια αναδυόμενη τάση να μελετηθούν συστήματα ουρών αναμονής από οικονομική άποψη. Πιο συγκεκριμένα, μετά τη μελέτη των μέτρων απόδοσης του συστήματος, το σύστημα εφοδιάζεται με μια ορισμένη δομή αμοιβής - κόστους που αν-

τικατοπνίξει την επιθυμία των πελατών για εξυπηρέτηση και, από την άλλη πλευρά, ποσοτικοποιεί την απροθυμία τους να περιμένουν. Οι πελάτες έχουν τη δυνατότητα να λαμβάνουν αποφάσεις για τις ενέργειές τους στο σύστημα (για παράδειγμα, μπορούν να αποφασίσουν εάν θα εισέλθουν σε αυτό ή θα αποχωρήσουν, αν θα περιμένουν ή θα εγκαταλείψουν, αν θα προσπαθήσουν ξανά ή όχι κλπ). Οι πελάτες επιδιώκουν να μεγιστοποιήσουν το όφελός τους, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι υπόλοιποι πελάτες έχουν τον ίδιο στόχο. Έτσι, η απόφαση κάθε πελάτη επηρεάζει τις αποφάσεις των άλλων πελατών και, ως εκ τούτου, η κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα παιχνίδι μεταξύ των πελατών. Σε αυτό το είδος των μελετών, το πρώτο πρόβλημα είναι η εύρεση των σημείων στρατηγικής ισορροπίας Nash για τους πελάτες (ή, υπό μία έννοια, ο υπολογισμός των ατομικά βέλτιστων στρατηγικών). Σε ένα δεύτερο επίπεδο, ο διαχειριστής έχει να επιλύσει το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης και της μεγιστοποίησης του δικού του κέρδους (δηλαδή της μεγιστοποίησης του καθαρού κοινωνικού οφέλους ανά χρονική μονάδα και του καθαρού οφέλους του ιδίου ανά χρονική μονάδα αντίστοιχα), λαμβάνοντας υπόψη τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών. Στην περίπτωση αυτή, η συμπεριφορά των πελατών αναλύεται χρησιμοποιώντας ένα παιγνιοθεωρητικό πλαίσιο και τα προβλήματα διαχείρισης λύνονται εφαρμόζοντας κλασικές τεχνικές βελτιστοποίησης. Επιπλέον, σε πολλά μοντέλα οι πελάτες κατά την άφιξή τους ενδέχεται να λάβουν πληροφορίες σχετικά με το σύστημα (για παράδειγμα, τον αριθμό των υπαρχόντων πελατών, την κατάσταση του υπηρέτη, κλπ). Κατά συνέπεια, η απόφαση των πελατών επηρεάζεται από το επίπεδο της πληροφόρησης που λαμβάνουν. Το ίδιο συμβαίνει και με την απόφαση του διαχειριστή. Το κέρδος του αλλάζει σύμφωνα με τη συμπεριφορά των πελατών. Ανάλογα με την περίπτωση, μπορεί να αποφασίσει αν είναι καλύτερα γι' αυτόν να αποκαλύψει ορισμένες πληροφορίες ή όχι. Πιο συγκεκριμένα, ένας πελάτης αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα, εάν η αναμενόμενη αμοιβή του είναι μεγαλύτερη από το αναμενόμενο κόστος αναμονής, λαμβάνοντας υπόψη την πληροφόρησή του για την κατάσταση του συστήματος και τη στρατηγική συμπεριφορά που επιδεικνύουν οι άλλοι πελάτες. Με άλλα λόγια ο πελάτης εισέρχεται αν η αναμενόμενη ωφέλεια του είναι μη αρνητική, δεδομένης της πληροφόρησης που έλαβε.

Η μελέτη των συστημάτων ουρών αναμονής από παιγνιοθεωρητική προοπτική ξεκίνησε από τον Naor (1969) που μελέτησε το $M/M/1$ μοντέλο με μια γραμμική δομή αμοιβής - κόστους. Ο Naor (1969) υπέθεσε ότι ένας αφικνούμενος πελάτης παρατηρεί

τον αριθμό των πελατών και στη συνέχεια παίρνει την απόφασή του είτε να εισέλθει στο σύστημα, είτε να αποχωρήσει (παρατηρήσιμη περίπτωση). Ο Naor (1969) προσδιόρισε τις στρατηγικές ισορροπίας, καθώς και τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές για το πρόβλημα αυτό. Η μελέτη του συμπληρώθηκε από τους Edelson και Hildebrand (1975), που θεώρησαν το ίδιο σύστημα αναμονής, αλλά υπό την υπόθεση ότι οι πελάτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους χωρίς να έχουν στη διάθεσή τους οποιαδήποτε πληροφορία για την κατάσταση του συστήματος.

Ο Leeman (1964) είδε τρεις στόχους που μπορούν να επιτευχθούν με την τιμολόγηση ενός συστήματος ουρών αναμονής. Ο πρώτος είναι το ότι μπορεί να βελτιωθεί η χρησιμοποίηση των υπάρχοντων πόρων εξυπηρέτησης με τη χρήση εναλλακτικών προτεραιοτήτων, κάτι που δεν μπορεί να επιτευχθεί πάντα με την πειθαρχία First-Come-First-Served (FCFS). Δεύτερον, μπορούν να αποκεντρωθούν οι αποφάσεις και, τέλος, μπορούν να καθοδηγηθούν μακροπρόθεσμες επενδυτικές αποφάσεις. Ο Leeman παρέβλεψε έναν τέταρτο και εξίσου σημαντικό λόγο, που αναδείχθηκε αργότερα από την πρωτοπόρα εργασία του Naor (1969), ο οποίος είναι η δυνατότητα ρύθμισης της ζήτησης, που δίχως τη διαδικασία της τιμολόγησης οδηγεί σε υπερβολική χρήση του συστήματος.

Από τότε, υπάρχει ένας αυξανόμενος αριθμός εργασιών που επικεντρώνονται στην οικονομική ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών ως προς το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης σε τροποποιήσεις/επεκτάσεις της $M/M/1$ ουράς. Αρχετοί συγγραφείς έχουν ερευνήσει αυτά τα προβλήματα σε συστήματα ουρών που ενσωματώνουν ποικίλα χαρακτηριστικά όπως προτεραιότητες, υπαναχωρήσεις, μεταβάσεις από ουρά σε ουρά, επαναπροσπάθειες κ.α., όπως για παράδειγμα οι Burnetas και Economou (2007) ($M/M/1$ ουρά με χρόνους εκκίνησης), Economou και Kanta (2008a, b, 2011) ($M/M/1$ ουρά με διαμερισματοποιημένο χώρο αναμονής, $M/M/1$ ουρά με αναξιόπιστο υπηρέτη, $M/M/1$ ουρά με σταθερό ρυθμό επαναπροσπάθειας), Guo και Zipkin (2007) ($M/M/1$ ουρά με διάφορα επίπεδα πληροφόρησης και μη-γραμμική δομή αμοιβής - κόστους), Hassin και Haviv (1997) ($M/M/1$ ουρά με προτεραιότητες), Hassin (2007) ($M/M/1$ ουρά με διάφορα επίπεδα πληροφόρησης και αβεβαιότητα στις παραμέτρους του συστήματος), Sun, Guo και Tian (2010) ($M/M/1$ ουρά με διακοπές και χρόνους επανεκκίνησης) και Zhang και Wang (2010) ($M/M/1$ ουρά με αναξιόπιστο υπηρέτη και καθυστέρηση επισκευών). Η οικονομική ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών ως προς το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης για τα μοντέλα με γενικούς χρόνους επισκευής

είναι πολύ πιο δύσκολη. Πράγματι, η μεθοδολογία και τα αποτελέσματα είναι σημαντικά πιο πολύπλοκα (βλ. π.χ. Kerner (2011)). Μοντέλα με πολλούς υπηρέτες, διακοπές κ.α. μπορούν να οδηγήσουν σε προβλήματα που είναι αρκετά δύσκολο να επιλυθούν σε κλειστή μορφή από μαθηματική άποψη και, κατά συνέπεια, καθίσταται πολύ δύσκολο να προσδιοριστούν οι στρατηγικές ισορροπίας καθώς και οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές. Επομένως, σε ορισμένες περιπτώσεις μόνο τα αριθμητικά αποτελέσματα μπορούν να αποσαφηνίσουν τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών. Οι μονογραφίες των Hassin και Haviv (2003) και Stidham (2009) συνοψίζουν τις κύριες προσεγγίσεις και πολλά αποτελέσματα στην ευρύτερη περιοχή της οικονομικής ανάλυσης των συστημάτων ουρών αναμονής.

1.2 Παιγνιοθεωρητικό πλαίσιο

Όπως έχουμε πει, η δυνατότητα των πελατών να παίρνουν αποφάσεις για το αν θα εισέλθουν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης ή θα αποχωρήσουν από αυτό, οδηγεί την ανάλυσή του στη μελέτη ενός παιχνιδιού μεταξύ των πελατών ή σε ορισμένες περιπτώσεις μεταξύ των πελατών και του διαχειριστή του συστήματος. Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τις βασικές παιγνιοθεωρητικές έννοιες που απαιτούνται για την περαιτέρω ανάλυσή μας.

Ένα παιχνίδι χωρίς συνεργασία ορίζεται ως εξής. Έστω $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο παικτών και έστω το A_i το σύνολο στρατηγικών που είναι διαθέσιμο για τον παίκτη $i \in N$. Μια καθαρή στρατηγική για τον παίκτη i είναι μια ενέργεια από το A_i . Μια μικτή στρατηγική αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση πιθανότητας που ορίζει έναν τυχαίο κανόνα για να επιλεγεί μια ενέργεια από το A_i . Ορίζουμε με S_i να είναι το σύνολο των (μικτών) στρατηγικών για τον παίκτη i .

Μια στρατηγική κατάσταση $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ αντιστοιχίζει μια στρατηγική $s_i \in S_i$ σε κάθε παίκτη $i \in N$. Κάθε παίκτης συνδέεται με μια συνάρτηση πληρωμής $F_i(s)$. Αυτή η συνάρτηση καθορίζει την πληρωμή του παίκτη i δεδομένου ότι η στρατηγική κατάσταση s υιοθετείται από τους παίκτες. Ορίζουμε με s_{-i} τη στρατηγική κατάσταση για το σύνολο των παικτών $N \setminus \{i\}$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $F_i(s) = F_i(s_i, s_{-i})$ είναι γραμμική ως προς s_i . Αυτό σημαίνει ότι αν η s_i είναι μια μίξη των στρατηγικών s_i^1 και s_i^2 με πιθανότητες α και $1 - \alpha$ αντίστοιχα, τότε $F_i(s_i, s_{-i}) = \alpha F_i(s_i^1, s_{-i}) +$

$(1 - \alpha) F_i(s_i^2, s_{-i})$ για κάθε s_{-i} .

Στα παιγνιοθεωρητικά μοντέλα ουρών αναμονής κατατάσσουμε τις ουρές σύμφωνα με το εάν το μήκος τους μπορεί να παρατηρηθεί πριν ένας πελάτης πάρει μια απόφαση ή όχι. Αναφερόμαστε σε αυτές τις περιπτώσεις ως παρατηρήσιμες και μη παρατηρήσιμες αντίστοιχα. Κάθε πελάτης αναμένει μια πληρωμή που εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος, από τη δική του απόφαση και από τις στρατηγικές που επιλέγονται από τους υπόλοιπους πελάτες - παίκτες. Επιπλέον, κατά τον υπολογισμό της μέσης ωφέλειας ενός τυχαία επιλεγμένου πελάτη που ακολουθεί τη στρατηγική s_{tagged} , δεδομένου ότι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική s_{others} , υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει φτάσει σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας (με βάση τις χρησιμοποιούμενες στρατηγικές s_{others}). Το ζητούμενο είναι η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών, όταν αποφασίζουν αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή θα αποχωρήσουν κατά την άφιξή τους. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια αμοιβή R μονάδων για κάθε ολοκλήρωση εξυπηρέτησης. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει επίσης ένα κόστος αναμονής C μονάδων ανά χρονική μονάδα που ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης παραμένει στο σύστημα (είτε στην ουρά ή στην εξυπηρέτηση). Η αμοιβή εξυπηρέτησης, όπως έχουμε ήδη αναφέρει ποσοτικοποιεί την επιθυμία του τυχαία επιλεγμένου πελάτη για εξυπηρέτηση, ενώ το κόστος αναμονής ποσοτικοποιεί την απροθυμία του να περιμένει. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο (δηλαδή ο στόχος τους είναι να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη τιμή της ωφέλειάς τους χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τη διακύμανσή της). Στο παραπάνω πλαίσιο μπορούμε να σκεφτούμε την κατάσταση ως ένα συμμετρικό παιχνίδι μεταξύ των πελατών, δεδομένου ότι όλοι οι πελάτες θεωρούνται όμοιοι και, επομένως, έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών και την ίδια συνάρτηση ωφέλειας. Συμβολίζουμε το σύνολο των κοινών στρατηγικών (σύνολο διαθέσιμων ενεργειών) με S και τη συνάρτηση ωφέλειας με F . Πιο αναλυτικά, έστω $F(s_{tagged}, s_{others})$ η πληρωμή ενός πελάτη που ακολουθεί τη στρατηγική s_{tagged} , όταν όλοι οι υπόλοιποι ακολουθούν τη στρατηγική s_{others} . Δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 1.1. (Βέλτιστη Απάντηση) Μια στρατηγική \tilde{s} καλείται βέλτιστη απάντηση σε μια στρατηγική s_{others} αν και μόνο αν $F(\tilde{s}, s_{others}) \geq F(s_{tagged}, s_{others})$ για κάθε $s_{tagged} \in S$.

Ορισμός 1.2. (Σημείο ισορροπίας Nash) Μια στρατηγική κατάσταση (s_*, s_*) καλεί-

ται (συμμετρικό) σημείο στρατηγικής ισορροπίας Nash, αν και μόνο αν $F(s_*, s_*) \geq F(s, s_*)$ για κάθε $s \in S$. Καταχρηστικά, θα λέμε ότι η s_* είναι στρατηγική ισορροπίας Nash.

Ορισμός 1.3. (Κυριαρχία) Μια στρατηγική s_1 λέγεται ότι κυριαρχεί ασθενώς επί της στρατηγικής s_2 αν $F(s_1, s) \geq F(s_2, s)$ για κάθε $s \in S$ και, επιπλέον, για τουλάχιστον ένα s η ανισότητα είναι αυστηρή. Μια στρατηγική s_* λέγεται ότι ασθενώς κυριαρχούσα, αν κυριαρχεί ασθενώς επί όλων των στρατηγικών του S .

Η διαισθητική ερμηνεία ενός σημείου στρατηγικής ισορροπίας Nash είναι ότι αποτελεί ευσταθές σημείο του παιχνιδιού, με την έννοια ότι εάν όλοι οι πελάτες συμφωνήσουν να το ακολουθήσουν, τότε κανείς δεν μπορεί να επωφεληθεί αλλάζοντάς το μονομερώς. Με άλλα λόγια, σε συνθήκες στατιστικής ισορροπίας, κανείς δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει από το σημείο στρατηγικής ισορροπίας. Σημειώνουμε ότι ο παραπάνω ορισμός δε σημαίνει ότι πάντα θα υπάρχει μια στρατηγική ισορροπίας, ούτε ότι είναι μοναδική, στην περίπτωση που υπάρχει. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η έννοια της (ασθενώς) κυριαρχούσας στρατηγικής είναι ισχυρότερη από την έννοια της στρατηγικής ισορροπίας Nash. Πράγματι, κάθε κυριαρχούσα στρατηγική είναι και στρατηγική ισορροπίας Nash, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο. Επίσης, ενώ οι στρατηγικές ισορροπίας Nash υπάρχουν στις περισσότερες περιπτώσεις, σπάνια υπάρχει μια κυριαρχούσα στρατηγική. Κυριαρχούσες στρατηγικές εμφανίζονται, συνήθως, σε παρατηρήσιμα μοντέλα.

Ορισμός 1.4. (Εξελικτικά Ευσταθής Στρατηγική - ΕΕΣ) Μια στρατηγική s_e λέγεται εξελικτικά ευσταθής στρατηγική (ΕΕΣ), αν ισχύουν ταυτόχρονα οι δύο παρακάτω συνθήκες

- Είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, δηλαδή $F(s_e, s_e) \geq F(s, s_e)$ για κάθε $s \in S$.
- Αν $F(s_e, s_e) = F(s_*, s_e)$ για κάποια στρατηγική s_* , τότε $F(s_e, s_*) > F(s_*, s_*)$.

Διαισθητικά, μια ΕΕΣ, s_e είναι καταρχήν μια στρατηγική ισορροπίας Nash, έτσι ώστε ένας πελάτης να μην έχει κίνητρο να αποκλίνει από αυτή. Ωστόσο, αν το πράξει και μετακινηθεί σε μια άλλη στρατηγική s_* , που είναι επίσης βέλτιστη απάντηση στην s_e , και

οι υπόλοιποι πελάτες τον ακολουθήσουν, τότε είναι καλύτερο για αυτόν να υιοθετήσει και πάλι την s_e . Σημειώνουμε ότι μια στρατηγική ισορροπίας δεν είναι πάντα ΕΕΣ, ενώ το αντίθετο συμβαίνει πάντα. Επιπλέον, υπάρχουν περιπτώσεις όπου υπάρχουν πολλαπλές στρατηγικές ισορροπίας, αλλά καμία από αυτές δεν είναι ΕΕΣ. Η έννοια της ΕΕΣ είναι ισχυρότερη από την απλή ισορροπία. Προφανώς, εάν η s_e είναι μια στρατηγική ισορροπίας και είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, τότε είναι απαραίτητα και ΕΕΣ.

Ορισμός 1.5. (ΑΤΠ/ΣΤΠ). *Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο των στρατηγικών S είναι γραμμικά διατεταγμένο, π. χ. $S = [0, 1]$ ή $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, και ότι για κάθε $y \in S$ υπάρχει μια μοναδική βέλτιστη απάντηση*

$$x(y) = \arg \max_x F(x, y), \quad (1.1)$$

όπου η $x(y)$ είναι μια κατά τμήματα συνεχής και μονότονη συνάρτηση. Στις περιπτώσεις όπου η $x(y)$ είναι μονότονα φθίνουσα συνάρτηση του y λέμε ότι η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών είναι του τύπου «Αντίθετα-με-Το-Πλήθος» (ΑΤΠ) ενώ στις περιπτώσεις εκείνες όπου η $x(y)$ είναι μονότονα αύξουσα είναι του τύπου «Σύμφωνα-με-Το-Πλήθος» (ΣΤΠ).

Σημειώνουμε ότι μια στρατηγική y είναι στρατηγική ισορροπίας Nash αν $x(y) = y$, με άλλα λόγια, όταν είναι ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης x . Είναι ενδιαφέρον να καθοριστεί εάν ένα μοντέλο είναι τύπου ΑΤΠ ή ΣΤΠ, δεδομένου ότι στην περίπτωση συμπεριφοράς ΑΤΠ υπάρχει το πολύ μία στρατηγική ισορροπίας ενώ στην περίπτωση συμπεριφοράς ΣΤΠ είναι δυνατή η ύπαρξη πολλών στρατηγικών ισορροπίας. Επιπλέον, η συμπεριφορά τύπου ΑΤΠ συνήθως συνδέεται με αυτό που ονομάζουμε αρνητικές επιδράσεις (negative externalities) που προκαλούνται από τους πελάτες, δηλαδή με το γεγονός ότι η απόφαση εισόδου του πελάτη επηρεάζει αρνητικά την αναμενόμενη ωφέλεια των άλλων πελατών, ενώ η συμπεριφορά ΣΤΠ είναι συνδεδεμένη με θετικές επιδράσεις (positive externalities).

Μια από τις πιο συνηθισμένες κατηγορίες στρατηγικών που εμφανίζονται σε μοντέλα ουρών, στο παραπάνω πλαίσιο ανάλυσης, είναι η κλάση των στρατηγικών κατωφλίου. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας υποθέσουμε ότι, κατά την άφιξή του, ο πελάτης

έχει να επιλέξει μεταξύ δύο ενεργειών, A_1 και A_2 , αφού παρατηρήσει μια ακέραια μη-αρνητική μεταβλητή, η οποία χαρακτηρίζει την κατάσταση του συστήματος. Π.χ. η κατάσταση μπορεί να είναι το μήκος της ουράς και οι ενέργειες να είναι η είσοδος στο σύστημα ή η αποχώρηση από αυτό. Τότε, έχουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 1.6. (Καθαρή στρατηγική κατωφλίου). Μια καθαρή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n υπαγορεύει μια από τις ενέργειες, έστω την A_1 , για κάθε κατάσταση στο $\{0, 1, \dots, n-1\}$ και την άλλη ενέργεια σε κάθε άλλη περίπτωση.

Ορισμός 1.7. (Μικτή στρατηγική κατωφλίου). Μια μικτή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι $x = n + p$, $n = 0, 1, 2, \dots$ και $p \in [0, 1]$, υπαγορεύει μια από τις ενέργειες, έστω την A_1 , για καθεμιά από τις καταστάσεις $\{0, 1, \dots, n-1\}$, επιλέγει τυχαία μεταξύ των ενεργειών A_1 και A_2 για την κατάσταση n , προσδίδοντας πιθανότητα p στην A_1 και πιθανότητα $1-p$ στην A_2 ενώ υπαγορεύει την ενέργεια A_2 για κάθε κατάσταση στο $\{n+1, n+2, \dots\}$.

Προφανώς για $p = 0$ η μικτή στρατηγική κατωφλίου x ανάγεται στην καθαρή στρατηγική κατωφλίου n .

1.3 Η οικονομική ανάλυση της M/M/1 ουράς

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το κεντρικό πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε στην παρούσα διατριβή είναι η οικονομική ανάλυση της συμπεριφοράς εισόδου-αποχώρησης των πελατών σε μερικά βασικά συστήματα ουρών. Η πρώτη διάσταση του προβλήματος είναι η ατομική βελτιστοποίηση. Πιο συγκεκριμένα, το όφελος ενός πελάτη αποτελείται από το κέρδος που σχετίζεται με την εξυπηρέτηση (η αμοιβή του R) από το οποίο αφαιρούνται άμεσες πληρωμές (δίδακα, αντίτιμο εισόδου, κτλ.) και άμεσα κόστη που σχετίζονται με την αναμονή του μέχρι να ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του (C μονάδες ανά μονάδα χρόνου που παραμένει στο σύστημα). Στο πρόβλημα της ατομικής βελτιστοποίησης, ο σκοπός των πελατών είναι να μεγιστοποιήσουν το αναμενόμενο προσωπικό όφελός τους. Μια δεύτερη κατεύθυνση προς την οποία μπορούμε να αναλύσουμε μια ουρά αναμονής είναι η κοινωνική βελτιστοποίηση. Υπό αυτή την οπτική, εννοούμε ότι η βελτιστοποίηση του συστήματος παραπέμπει στη μεγιστοποίηση του κοινωνικού οφέλους, το οποίο ορίζεται ως το αναμενόμενο καθαρό κέρδος όλων των μελών της

κοινωνίας, συμπεριλαμβανομένων τόσο των πελατών όσο και του διαχειριστή, ανά χρονική μονάδα. Με αυτή την προσέγγιση, μια αμοιβή που μεταφέρεται μεταξύ των μελών της κοινωνίας δεν έχει καμία επίδραση στο κοινωνικό όφελος και, κατά συνέπεια, καμία επίδραση στη βελτιστοποίηση του συστήματος. Έτσι, ο στόχος της κοινωνίας είναι να μεγιστοποιήσει το σύνολο των κερδών από τις εξυπηρετήσεις μείον τα κόστη αναμονής και λειτουργίας του συστήματος. Τέλος, θα ασχοληθούμε και με το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή. Στην περίπτωση αυτή, ο διαχειριστής γνωρίζει ότι οι πελάτες συμπεριφέρονται με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιούν το ατομικό τους όφελος. Έτσι, επιβάλλοντας ένα κατάλληλο αντίτιμο εισόδου, μπορεί να αναγκάσει τους πελάτες να υιοθετήσουν εκείνη τη συμπεριφορά που μεγιστοποιεί το δικό του κέρδος.

Σε ό,τι ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να αποσαφηνίσουμε τις παραπάνω ιδέες μέσω δύο βασικών παραδειγμάτων. Πρώτα, αναφερόμαστε σε μια πλήρως παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά εφοδιασμένη με μια γραμμική δομή αμοιβής - κόστους. Αυτό είναι το κλασικό μοντέλο του Naor (1969). Θα παρουσιάσουμε τα προβλήματα ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης.

Υποθέτουμε ότι οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Έστω $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ο ρυθμός συνωστισμού του συστήματος. Οι πελάτες λαμβάνουν μια αμοιβή R μονάδων για την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής τους, ενώ το κόστος για κάθε χρονική μονάδα που παραμένουν στο σύστημα (είτε στην αναμονή είτε στην εξυπηρέτηση) είναι C . Υπάρχει μόνο ένας υπηρέτης, ενώ η πειθαρχία της ουράς είναι FCFS. Κατά τη στιγμή της άφιξής τους επιτρέπεται στους πελάτες να παρατηρήσουν το πλήθος των ήδη παρόντων πελατών στο σύστημα (ή, ισοδύναμα, πληροφορούνται για τον ακριβή αριθμό πελατών στο σύστημα) και κατόπιν αποφασίζουν αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή όχι. Υποθέτουμε, επίσης, ότι $R \geq \frac{C}{\mu}$, διαφορετικά όλοι, ακόμα και εκείνοι που βρίσκουν το σύστημα κενό, θα αποχωρούσαν και το σύστημα θα παρέμενε συνεχώς κενό. Το σύνολο των δυνατών αποφάσεων κάθε πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση n είναι το $\{0, 1\}$ όπου το 0 συμβολίζει την απόφαση αποχώρησης και το 1 της εισόδου για τη δεδομένη κατάσταση. Έτσι, η στρατηγική ενός πελάτη αντιστοιχεί σε ένα απειροδιάστατο διάνυσμα, αποτελούμενο από μηδενικά και μονάδες. Παραδείγματος χάρη, η στρατηγική $(1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ σημαίνει ότι αν ο πελάτης βρει το σύστημα κενό ή με δύο πελάτες η

απόφαση του είναι να εισέλθει, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση αποχωρεί.

Η λύση του προβλήματος ατομικής βελτιστοποίησης σε αυτό το μοντέλο είναι άμεση. Πράγματι, ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης ο οποίος βρίσκει n πελάτες μπροστά του και αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα έχει αναμενόμενο κέρδος (ωφέλεια) $R - \frac{C(n+1)}{\mu}$ μονάδες. Κατά συνέπεια, αποφασίζει να εισέλθει αν αυτή η ποσότητα είναι μη αρνητική, δηλαδή αν $n + 1 \leq \frac{R\mu}{C}$, διαφορετικά αποχωρεί. Συνεπώς, η απόφασή του είναι να εισέλθει στο σύστημα εφόσον το πλήθος των πελατών που βρίσκει κατά την άφιξή του είναι $n \leq \lfloor \frac{R\mu}{C} \rfloor - 1$. Έστω τώρα $n_e = \lfloor \frac{R\mu}{C} \rfloor$. Τότε, η βέλτιστη στρατηγική είναι η $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, 0, 0)$ της οποίας το αρχικό τμήμα αποτελείται από n_e μονάδες και η οποία από εκεί και πέρα έχει μηδενικά. Αυτή η στρατηγική αντιστοιχεί στην καθαρή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n_e και είναι μια στρατηγική ισορροπίας. Στο πλαίσιο αυτής της στρατηγικής, με άλλα λόγια, ένας αφικνούμενος πελάτης εισέρχεται όσο παρατηρεί το πολύ $n_e - 1$ πελάτες. Όταν όλοι ακολουθούν αυτή την στρατηγική το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1/ n_e ουρά.

Το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης είναι πιο περίπλοκο. Ας υποθέσουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν την ίδια στρατηγική κατωφλίου n . Η στρατηγική τους, δηλαδή, είναι της μορφής $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ με n μονάδες στην αρχή και μηδενικά στη συνέχεια. Αυτό σημαίνει ότι αποφασίζουν να εισέλθουν στο σύστημα όσο το πλήθος των πελατών που παρατηρούν κατά την άφιξή τους είναι μικρότερο ή ίσο με $n - 1$. Με αυτήν την έννοια, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1/ n ουρά και έστω $(q_k, k \in \{0, 1, \dots, n\})$ η στάσιμη κατανομή της. Χρησιμοποιώντας αυτή την κατανομή, έχουμε ότι ο αναμενόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι $E[Q_n] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}$ και η πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να εισέλθει στο σύστημα είναι $1 - q_n = \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}$. Έτσι, το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα ισούται με $S_{soc}(n) = \lambda R(1 - q_n) - CE[Q_n]$, το οποίο παίρνει τη μορφή

$$S_{soc}(n) = \lambda R \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho^{n+1}} - C \left(\frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(n + 1) \rho^{n+1}}{1 - \rho^{n+1}} \right). \quad (1.2)$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε το σημείο n^* στο οποίο μεγιστοποιείται η παραπάνω συνάρτηση. Ο Naor (1969) πρότεινε μια διαδικασία για τον υπολογισμό του n^* η οποία βασίζεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση $S_{soc}(n)$ είναι μονοχόρυφη. Επιπλέον, έδειξε ότι $n^* \leq n_e$, το οποίο σημαίνει ότι η ατομική βελτιστοποίηση οδηγεί σε πιο συνωστισμένα

συστήματα απ' ό,τι είναι κοινωνικά επιθυμητό. Αυτό προκαλείται εξαιτίας των αρνητικών επιδράσεων που οι πελάτες επάγουν στις μετέπειτα αφίξεις, κάτι το οποίο αγνοούν κατά τη στιγμή λήψης της απόφασής τους (να εισέλθουν ή όχι στο σύστημα). Αυτή η σχέση μεταξύ των κατωφλίων που μεγιστοποιούν το ατομικό και το κοινωνικό κέρδος φαίνεται να ισχύει σε αρκετές περιπτώσεις, αλλά όχι πάντα. Όσον αφορά την τιμή του κοινωνικά βέλτιστου κατωφλίου n^* , δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε τύπο κλειστής μορφής για τον υπολογισμό της, αλλά μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει $n^* = \lfloor \nu^* \rfloor - 1$, όπου ν^* είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\frac{R\mu}{C} = \frac{\nu(1-\rho) - \rho(1-\rho^\nu)}{(1-\rho)^2}$ ως προς το ν . Για να παρακινήσει τους πελάτες να υιοθετήσουν το κοινωνικά βέλτιστο κατώφλι n^* αντί του n_e , ο Naor (1969) πρότεινε την επιβολή κατάλληλου αντιτίμου εισόδου (διοδίου). Σημειώνουμε ότι, όπως φαίνεται ακόμα και στην απλή περίπτωση της $M/M/1$ ουράς, υπάρχουν σημαντικές δυσκολίες στην εύρεση ακριβών τύπων για τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης του κοινωνικού οφέλους.

Τέλος, αναλύουμε το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή. Ο διαχειριστής ανακοινώνει στους πελάτες το αντίτιμο p και αυτοί βασίζονται στην απόφασή τους για το αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή όχι στο ύψος του αντιτίμου. Στην περίπτωση αυτή η αμοιβή τους είναι μειωμένη σε $R - p$. Έτσι, εφόσον υιοθετούν την ατομικά βέλτιστη στρατηγική τους, δεδομένου του p , το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια $M/M/1/n$ ουρά όπου $n = \lfloor \frac{(R-p)\mu}{C} \rfloor$. Ο υπηρέτης επιλέγει το επιθυμητό κατώφλι n και θέτει την υψηλότερη τιμή η οποία επάγει αυτό το κατώφλι, δηλαδή

$$p(n) = R - \frac{Cn}{\mu}. \quad (1.3)$$

Πράγματι, κάθε αντίτιμο εισόδου το οποίο επιβάλλει ο διαχειριστής επάγει μια συγκεκριμένη στρατηγική κατωφλίου για τους πελάτες. Αν ο διαχειριστής θέσει πολύ υψηλό αντίτιμο, τότε ελάχιστοι πελάτες θα εισέλθουν. Από την άλλη πλευρά, αν το αντίτιμο είναι πολύ χαμηλό τότε θα εισέλθουν στο σύστημα πολλοί πελάτες, αλλά θα εισπράττει πολύ λίγα από τον καθένα και το κέρδος του δε θα μεγιστοποιηθεί. Συνεπώς, πρέπει να θέσει ένα ενδιάμεσο, κατάλληλο, αντίτιμο εισόδου, που να κάνει τους πελάτες να συμπεριφέρονται κατά τρόπον ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος του. Όταν το p ορίζεται όπως δίνεται στη σχέση (1.3) και το κατώφλι n υιοθετείται από τους πελάτες, τότε το κέρδος του διαχειριστή ανά μονάδα χρόνου είναι $S_{prof}(n) = \lambda^* p(n)$, όπου

$\lambda^* = \lambda(1 - q_n) = \lambda \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho^{n+1}}$. Έτσι, το κέρδος του διαχειριστή δίνεται από τη σχέση

$$S_{prof}(n) = \lambda \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho^{n+1}} \left(R - \frac{Cn}{\mu} \right). \quad (1.4)$$

Βασισμένοι στη μοναδικότητα του μεγίστου της παραπάνω συνάρτησης, συνάγουμε ότι το αντίτιμο εισόδου που μεγιστοποιεί το κέρδος του διαχειριστή είναι $R - n_m \frac{C}{\mu}$, όπου $n_m = \lfloor \nu_m \rfloor$ και ν_m είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\frac{R\mu}{C} = \nu + \frac{(1 - \rho^{\nu-1})(1 - \rho^{\nu+1})}{\rho^{\nu-1}(1 - \rho)^2}$ ως προς το ν . Ο Naor (1969) επίσης έδειξε ότι $n_m \leq n^* \leq n_e$.

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο ότι κάτω από μια στρατηγική μεγιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή, λιγότεροι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα απ' ό,τι είναι κοινωνικά επιθυμητό. Εφόσον $n_m \leq n^*$, συμπεραίνουμε ότι το αντίτιμο εισόδου που επιβάλλεται για τη μεγιστοποίηση του κέρδους είναι μεγαλύτερο απ' ό,τι αυτό για το οποίο μεγιστοποιείται το κοινωνικό όφελος. Ο Knudsen (1972) γενίκευσε αυτό το αποτέλεσμα σε ουρές με περισσότερους υπηρέτες και μη-γραμμική συνάρτηση κόστους αναμονής. Ο Schroeter (1982) θεώρησε μια γενίκευση του μοντέλου του Naor υποθέτοντας ότι το κόστος για κάθε μονάδα χρόνου που ο πελάτης παραμένει στο σύστημα, C , έχει ομοιόμορφη κατανομή. Ο Larsen (1998) μελέτησε ένα μοντέλο στο οποίο οι πελάτες διαφέρουν ως προς την αποτίμηση της εξυπηρέτησής τους, δηλαδή υπέθεσε ότι η αμοιβή, R , που κάθε πελάτης λαμβάνει ολοκληρώνοντας την εξυπηρέτησή του είναι τυχαία μεταβλητή.

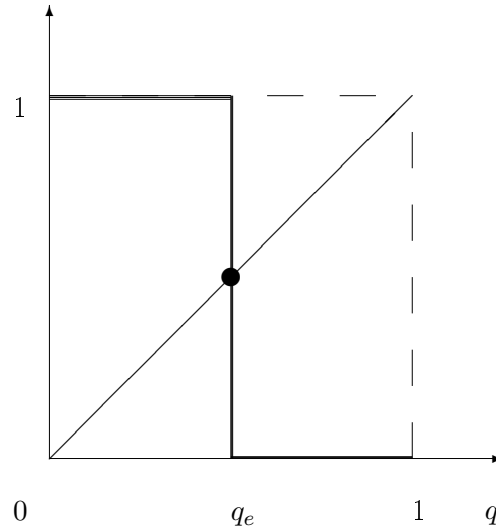
Συνεχίζουμε με τη δεύτερη περίπτωση πληροφόρησης. Αυτό είναι το μοντέλο που έχει μελετηθεί από τους Edelson και Hildebrand (1975). Η στοχαστική δυναμική και η δομή αμοιβής - κόστους του συστήματος είναι ίδιες με του μοντέλου του Naor (1969). Η μοναδική διαφορά είναι στο επίπεδο της πληροφόρησης το οποίο λαμβάνουν οι πελάτες κατά την άφιξή τους. Εδώ υποθέτουμε ότι οι πελάτες δεν πληροφορούνται την κατάσταση του συστήματος, δηλαδή δεν έχουν στη διάθεσή τους καμία πληροφορία, πλην των παραμέτρων του συστήματος. Η απόφαση που πρέπει να λάβουν είναι είτε να εισέλθουν στο σύστημα (1) είτε να αποχωρήσουν άμεσα (0). Έτσι το σύνολο των καθαρών στρατηγικών κάθε πελάτη είναι το $S = \{0, 1\}$. Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν την ίδια μικτή στρατηγική, q , δηλαδή εισέρχονται με πιθανότητα q και αποχωρούν με πιθανότητα $1 - q$. Υπό αυτή την στρατηγική το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1 ουρά, όπου η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό λq . Τότε,

ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα ακολουθεί την εκθετική κατανομή με ρυθμό $\mu - \lambda q$. Θεωρούμε έναν πελάτη ο οποίος φθάνει στο σύστημα. Αν αποφασίσει να εισέλθει στο σύστημα, το αναμενόμενο κέρδος του είναι $U(q) = R - \frac{C}{\mu - \lambda q}$. Τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Αν $R \leq \frac{C}{\mu}$, τότε ακόμα κι αν κανείς άλλος πελάτης δεν αποφασίσει να εισέλθει, το καθαρό κέρδος του τυχαία επιλεγμένου πελάτη είναι μη-θετικό ($U(q) \leq 0$, για κάθε $q \in [0, 1]$). Έτσι, η βέλτιστη απάντησή του είναι να αποχωρήσει. Συνεπώς, η αποχώρηση είναι κυριαρχούσα στρατηγική.
- Αν $\frac{C}{\mu} < R < \frac{C}{\mu - \lambda}$, τότε υπάρχει μια τιμή του $q \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $U(q) = 0$. Αυτή η τιμή είναι η $q_e = \frac{\mu}{\lambda} \left(1 - \frac{C}{R\mu}\right)$. Γι' αυτήν τη τιμή του q , ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης είναι αδιάφορος μεταξύ του να εισέλθει στο σύστημα ή όχι, αφού το κέρδος του είναι μηδενικό. Έτσι, οποιαδήποτε στρατηγική $q \in [0, 1]$ είναι βέλτιστη απάντηση στην q_e . Το μοναδικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας, δηλαδή η μοναδική στρατηγική που είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, είναι η q_e . Έτσι το q_e είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας αλλά δεν είναι κυριαρχούσα στρατηγική.
- Αν $R \geq \frac{C}{\mu - \lambda}$, τότε ακόμα κι αν όλοι οι πελάτες εισέλθουν στο σύστημα, το καθαρό κέρδος του τυχαία επιλεγμένου πελάτη είναι μη-αρνητικό ($U(q) \geq 0$, για κάθε $q \in [0, 1]$). Έτσι, η βέλτιστη απάντησή του είναι να εισέλθει. Συνεπώς η είσοδος είναι κυριαρχούσα στρατηγική.

Τα παραπάνω απεικονίζονται στο σχήμα 1.1. Σημειώνουμε ότι η $U(q)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς q . Υποθέτουμε ότι όλοι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν την ίδια στρατηγική q . Τότε, αν $q < q_e$, η βέλτιστη απάντηση του τυχαία επιλεγμένου πελάτη είναι να εισέλθει στο σύστημα ($q = 1$), αν $q > q_e$ η βέλτιστη απάντησή του είναι να αποχωρήσει ($q = 0$) και, τέλος, αν $q = q_e$ τότε οποιαδήποτε στρατηγική μεταξύ 0 και 1 είναι βέλτιστη απάντηση. Έτσι η βέλτιστη απάντηση του τυχαία επιλεγμένου πελάτη είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της στρατηγικής των υπολοίπων. Συνεπώς, καταλήγουμε στο ότι η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών είναι τύπου ΑΠΠ.

Συνεχίζουμε με το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Υποθέτουμε και πάλι ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν την ίδια μικτή στρα-



Σχήμα 1.1: Η βέλτιστη απάντηση έναντι της στρατηγικής q

τηγική q και το σύστημα λειτουργεί ως μια $M/M/1$ ουρά με ρυθμό άφιξης λq . Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα δίνεται από τη σχέση $E[Q] = \frac{\lambda q}{\mu - \lambda q}$. Τότε, το καθαρό κοινωνικό όφελος ανά μονάδα χρόνου είναι

$$S_{soc}(q) = \lambda q R - C E[Q] = \lambda q R - C \frac{\lambda q}{\mu - \lambda q}. \quad (1.5)$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την τιμή $q^* \in [0, 1]$ που μεγιστοποιεί την παραπάνω συνάρτηση. Οι Edelson και Hildebrand (1975) έδειξαν ότι υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

- Αν $R \leq \frac{C}{\mu}$, τότε $q^* = 0$. (Αυτή η περίπτωση συνήθως παραλείπεται, αφού το σύστημα κάτω από μια τέτοια στρατηγική παραμένει συνεχώς κενό).
- Αν $\frac{C}{\mu} < R < \frac{C}{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2$, τότε $q^* = \frac{\mu}{\lambda} \left(1 - \sqrt{\frac{C}{R\mu}}\right)$.

- Αν $R \geq \frac{C}{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2$, τότε $q^* = 1$.

Παρατηρούμε ότι, όμοια με την παρατηρήσιμη περίπτωση, ισχύει $q^* \leq q_e$. Η ατομική βελτιστοποίηση οδηγεί σε υπερβολική χρήση του συστήματος, περισσότερη απ' ό,τι είναι κοινωνικά επιθυμητό. Ο λόγος και πάλι είναι οι αρνητικές επιδράσεις που οι πελάτες επάγουν σε μελλοντικές αφίξεις.

Τέλος, σχετικά με το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή, θεωρούμε ότι αυτός επιβάλλει ένα αντίτιμο εισόδου p , το οποίο ανακοινώνεται στους πελάτες. Λαμβάνοντας υπόψη τους το αντίτιμο αυτό, οι πελάτες προσαρμόζουν την στρατηγική ισορροπίας τους, γνωρίζοντας ότι η καθαρή αμοιβή τους από την εξυπηρέτηση θα είναι τώρα $R - p$. Έτσι, η στρατηγική ισορροπίας που υιοθετούν σε αυτή την περίπτωση είναι $q = \frac{\mu}{\lambda} \left(1 - \frac{C}{(R-p)\mu}\right)$, αν η ποσότητα αυτή ανήκει στο $(0, 1)$. Το αντίτιμο το οποίο επάγει αυτή την στρατηγική ισορροπίας είναι $p = R - \frac{C}{\mu - \lambda q}$. Έτσι, το κέρδος του διαχειριστή ανά μονάδα χρόνου είναι

$$S_{prof}(q) = \lambda q \left(R - \frac{C}{\mu - \lambda q} \right). \quad (1.6)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.5) και (1.6), παρατηρούμε ότι $S_{prof}(q) = S_{soc}(q)$, δηλαδή οι συναρτήσεις αναμενόμενου κέρδους του διαχειριστή και αναμενόμενης συνολικής ωφέλειας της κοινωνίας ταυτίζονται. Πράγματι, αυτό συμβαίνει διότι όλοι οι πελάτες αντιμετωπίζουν την ίδια κατάσταση αφού δεν μπορούν να διαφοροποιηθούν μέσω της πληροφορίας και έτσι ο διαχειριστής μπορεί να επιβάλλει αντίτιμο εισόδου που δεν τους αφήνει θετικό πλεόνασμα.

Οι Edelson και Hildebrand (1975) επίσης συζήτησαν μια επέκταση του μοντέλου τους στο οποίο ο υπηρέτης επιβάλλει δύο διαφορετικά τέλη. Για ένα δεδομένο τέλος παρατήρησης ο πελάτης μπορεί να επιλέξει να παρατηρήσει το μήκος της ουράς και κατόπιν να διαλέξει αν θα αποχωρήσει ή θα πληρώσει ένα τέλος εισόδου για να μπει στην ουρά. Για ένα δεδομένο τέλος εισόδου, το τέλος παρατήρησης που μεγιστοποιεί το κέρδος του διαχειριστή συμπίπτει με την αναμενόμενη ωφέλεια του πελάτη από την παρατήρηση της ουράς. Έτσι και πάλι, όλο το πλεόνασμα του πελάτη πηγαίνει στο διαχειριστή και αυτός επιλέγει κοινωνικά βέλτιστα τέλη παρατήρησης και εισόδου. Ο Littlechild (1974) επέκτεινε το μοντέλο των Edelson και Hildebrand υποθέτοντας ότι οι πελάτες έχουν διαφορετική αποτίμηση της εξυπηρέτησης και οι Balachandran και

Schaefer (1979, 1980) υπέθεσαν όχι μόνο διαφορετικές αποτιμήσεις εξυπηρέτησης αλλά και διαφορετικά κόστη αναμονής.

1.4 Σκοπός και δομή της διατριβής

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η οικονομική ανάλυση συγκεκριμένων συστημάτων αναμονής, μελετώντας τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών απέναντι στο δίλημμα εισόδου-αποχώρησης καθώς και το σχετικό πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, επικεντρωθήκαμε σε συστήματα αναμονής που παρουσιάζουν ομαδικές αναχωρήσεις πελατών.

Στο πρώτο κομμάτι της διατριβής μελατάμε συστήματα αναμονής που υπόκεινται σε καταστροφές και, επομένως, η έννοια των ομαδικών αναχωρήσεων σε αυτήν την περίπτωση ανάγεται στη μαζική αναχώρηση πελατών εξαιτίας των καταστροφών. Σημειώνουμε ότι η έννοια των καταστροφών, παρότι εμφανίζεται σε πολυάριθμες εφαρμογές της Θεωρίας Ουρών, δεν είχε μελετηθεί έως τώρα σε προβλήματα οικονομικής ανάλυσης συστημάτων αναμονής. Διακρίνουμε δύο μοντέλα συστημάτων αναμονής που υπόκεινται σε καταστροφές και παραθέτουμε την ανάλυσή τους στα κεφάλαια 2 και 3. Οι λόγοι για αυτή τη χωριστή παρουσίαση είναι, αφενός, το γεγονός ότι χρήζουν διαφορετικής προσέγγισης και, αφετέρου, το γεγονός ότι τελικά η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών είναι σημαντικά διαφορετική.

Πιο αναλυτικά, στο κεφάλαιο 2 θεωρούμε το βασικό μοντέλο της $M/M/1$ ουράς, στην οποία συμβαίνουν καταστροφές σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson. Υποθέτουμε ότι μόλις συμβεί μια καταστροφή όλοι οι πελάτες αναγκάζονται να αποχωρήσουν από το σύστημα πρώιμα και δίχως να έχουν εξυπηρετηθεί (συμπεριλαμβανομένου ακόμη και του πελάτη που βρίσκεται σε διαδικασία της εξυπηρέτησης). Αυτήν ακριβώς τη χρονική στιγμή ξεκινά ένας χρόνος επισκευής. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι μέσα σε αυτόν το χρόνο επισκευής δεν επιτρέπεται η άφιξη νέων πελατών. Υποθέτουμε, επίσης, ότι ο πελάτης μπορεί ή όχι να πληροφορείται την κατάσταση του συστήματος τη στιγμή της άφιξής του. Μία επιπλέον καινοτομία του μοντέλου είναι ότι γενικεύεται η συνήθης γραμμική δομή αμοιβής - κόστους, θεωρώντας δύο διαφορετικούς τύπους αμοιβών: μία συνήθη αμοιβή για την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του πελάτη και μία δεύτερη ως αποζημίωση που μειώνει τη δυσαρέσκεια του πελάτη στην περίπτωση που αναγκα-

στεί να εγκαταλείψει το σύστημα εξαιτίας μιας καταστροφής. Μελετάμε τα προβλήματα της ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης, καθώς και της βελτιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή, κάτω και από τα δύο επίπεδα πληροφόρησης και παραθέτουμε τις ατομικά και κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές, καθώς επίσης και διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα προκειμένου να δώσουμε διαισθητικές ερμηνείες των αποτελεσμάτων.

Ακολούθως, στο κεφάλαιο 3, μελετάμε μια εναλλακτική εκδοχή του παραπάνω μοντέλου, αναιρώντας την υπόθεση ότι οι νέες αφίξεις δεν επιτρέπονται κατά τη διάρκεια του χρόνου επισκευής. Διατηρούμε την τροποποιημένη δομή αμοιβής - κόστους που περιγράψαμε παραπάνω και μελετάμε ξανά τη συμπεριφορά των πελατών (ατομική και κοινωνική βελτιστοποίηση) κάτω από τα δύο επίπεδα πληροφόρησης: την πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση (όπου οι πελάτες παρατηρούν κατά την άφιξή τους και τον αριθμό των παρόντων πελατών στο σύστημα και την κατάσταση του συστήματος) και την πλήρως μη-παρατηρήσιμη περίπτωση (όπου δεν παρατηρούν τίποτα από τα δύο). Η ανάλυση αυτού του μοντέλου είναι σημαντικά διαφορετική από αυτήν του κεφαλαίου 2, όχι μόνο όσον αφορά την υπολογιστική προσέγγιση, αλλά κυρίως στο γεγονός ότι οι πελάτες παρουσιάζουν διάφορες αλλαγές στη συμπεριφορά τους. Επιπλέον, δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στο χαρακτηρισμό της συμπεριφοράς των πελατών ως ΣΤΠ ή ΑΤΠ και στην επίδραση που έχουν οι καταστροφές πάνω σε αυτό. Παρατίθενται, τέλος, διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία διαφωτίζουν τις ιδιαιτερότητες της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε ένα τέτοιο πλαίσιο.

Στο κεφάλαιο 4 ασχολούμαστε με ένα σύστημα αναμονής στο οποίο οι πελάτες εξυπηρετούνται σε ομάδες συγκεκριμένου μεγέθους. Έτσι, η έννοια των ομαδικών αναχωρήσεων σε αυτήν την περίπτωση παραπέμπει στην εξυπηρέτηση και συνακόλουθα στην αναχώρηση των πελατών κατά ομάδες. Και πάλι το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών ως προς το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης. Σε αυτό το μοντέλο θεωρούμε ότι οι πελάτες μπορούν ή όχι να πληροφορηθούν, κατά την άφιξή τους, τον αριθμό των συμπληρωμένων προς εξυπηρέτηση ομάδων που υπάρχουν στο σύστημα και το μέγεθος της ασυμπλήρωτης ομάδας. Με άλλα λόγια, παρουσιάζουμε δύο επίπεδα πληροφόρησης και προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών χωριστά για κάθε περίπτωση, παρέχοντας κατάλληλα αλγοριθμικά σχήματα, όπου αυτό είναι απαραίτητο. Μελετάμε επίσης το πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης και στα δύο επίπεδα πληροφόρησης και δίνουμε διάφορες διαισθητικές ερμηνείες που αφορούν

τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών.

Κεφάλαιο 2

Η $M/M/1/cat$ ουρά με εμποδιζόμενες αφίξεις

2.1 Εισαγωγή

Οι ουρές αναμονής με απομακρύνσεις πελατών πριν εξυπηρετηθούν συναντώνται συχνά στην πράξη και έχουν διάφορες εφαρμογές. Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται στα συστήματα αναμονής με υπαναχωρήσεις, όπου οι πελάτες είναι ανυπόμονοι και μόλις λήξουν οι χρόνοι υπομονής τους εγκαταλείπουν το σύστημα. Μια άλλη περίπτωση εμφανίζεται στα συστήματα που υπόκεινται σε καταστροφές/βλάβες. Πράγματι, τέτοια γεγονότα καθιστούν συνήθως τον υπηρέτη ανενεργό και επιπλέον αναγκάζουν τους πελάτες να εγκαταλείψουν το σύστημα. Η κρίσιμη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο τύπων απομάκρυνσης πελατών σε ένα σύστημα αναμονής είναι ότι οι πελάτες αποφασίζουν εάν θα εγκαταλείψουν το σύστημα ή όχι σύμφωνα με την επιθυμία τους στην περίπτωση των υπαναχωρήσεων, ενώ αναγκάζονται να εγκαταλείψουν το σύστημα στην περίπτωση των καταστροφών.

Η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών στα συστήματα ουρών αναμονής με εγκαταλείψεις έχει μελετηθεί ελάχιστα στη βιβλιογραφία. Οι Hassin και Haviv (1995) προσδιόρισαν τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών σχετικά με την αποχώρηση (balking) και την υπαναχώρηση (reneging) στο βασικό μοντέλο της $M/M/1$ ουράς, όπου η αμοιβή ενός πελάτη καθίσταται μηδενική εάν ο χρόνος αναμονής του υπερβεί ένα ορισμένο

κατώφλι. Οι Mandelbaum και Shimkin (2000) εξέτασαν ένα αρκετά γενικό μοντέλο για τις εγκαταλείψεις από μια ουρά, λόγω υπερβολικής αναμονής, υποθέτοντας ότι οι πελάτες που βρίσκονται σε αναμονή ενεργούν στρατηγικά, αλλά χωρίς να μπορούν να παρατηρήσουν το μήκος της ουράς. Το πιο σημαντικό είναι ότι επιτρέπουν στους πελάτες να είναι ετερογενείς στις προτιμήσεις τους και την επακόλουθη συμπεριφορά τους. Άλλοι συγγραφείς έχουν επίσης εξετάσει τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σε συστήματα αναμονής με εγκαταλείψεις λόγω υπαναχωρήσεων. Οι Hassin και Haviv (2003), στο κεφάλαιο 5, συνοψίζουν τα κύρια αποτελέσματα για τέτοια μοντέλα. Εντούτοις, εξ' όσων γνωρίζουμε, δεν υπήρξαν έως τώρα μελέτες της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε συστήματα αναμονής με εγκαταλείψεις/ απομακρύνσεις των πελατών λόγω καταστροφικών γεγονότων. Ο στόχος του κεφαλαίου, επομένως, είναι να μελετηθεί η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών στα πλαίσια ενός απλού μοντέλου μιας ουράς αναμονής που υπόκειται σε καταστροφές.

Μοντέλα με διάφορες μορφές καταστροφών εμφανίζονται σε ποικίλες καταστάσεις στην πράξη. Παραδείγματος χάριν, σε γραμμές παραγωγής, η απροσδόκητη σοβαρή βλάβη μιας μηχανής μπορεί να αναγκάσει τις μονάδες προς επεξεργασία να εγκαταλείψουν το σύστημα (ειδικότερα εάν υπάρχουν προθεσμίες παράδοσης που δεν μπορούν να τηρηθούν). Στον τομέα των υπηρεσιών, μια ξαφνική ασθένεια/απρόβλεπτη αποχώρηση ενός εξειδικευμένου υπαλλήλου ή μια βλάβη ενός συγκεκριμένου εξοπλισμού μπορεί να υποχρεώσουν τους πελάτες που βρίσκονται στην αναμονή να εγκαταλείψουν το σύστημα. Αυτό ισχύει ακόμα και στον τομέα των υπηρεσιών υγείας, όπου η βλάβη ενός εξειδικευμένου εξοπλισμού (π.χ. ενός αξονικού ή μαγνητικού τομογράφου) μπορεί να αναγκάσει τους ασθενείς να ψάξουν έναν εναλλακτικό φορέα παροχής υπηρεσιών. Στον τομέα των μεταφορών, η ακύρωση ενός συγκεκριμένου δρομολογίου τρένου ή μιας πτήσης λόγω ειδικών καιρικών συνθηκών ή μια τεχνική βλάβη μπορεί να αναγκάσει τους επιβάτες να ψάξουν ένα εναλλακτικό μεταφορικό μέσο για να φτάσουν στον προορισμό τους. Επιπλέον, το ίδιο φαινόμενο εμφανίζεται και στις τηλεπικοινωνίες, όπου οι χαμένες κλήσεις λόγω βλαβών των δικτύων αντιστοιχούν σε «καταστροφές» που προκαλούν επίσης τη δυσαρέσκεια των πελατών. Στις περισσότερες από τις παραπάνω καταστάσεις, υπάρχει κάποια αποζημίωση για τους πελάτες υπό μορφή εκπτώσεων, δωρεάν δελτίων ή εισιτηρίων κλπ. Κατ' αυτόν τον τρόπο η δυσαρέσκεια των πελατών μετριάζεται. Έτσι, η οικονομική ανάλυση των συστημάτων εξυπηρέτησης/αναμονής με καταστροφές

και με αποζημιώσεις για τους πελάτες που αναγκάζονται να εγκαταλείψουν το σύστημα φαίνεται να έχει τόσο θεωρητικό όσο και πρακτικό ενδιαφέρον.

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε μια τέτοια περίπτωση στο πλαίσιο της απλής Μαρκοβιανής ουράς αναμονής με καταστροφές. Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών ως προς το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης σε μια ουρά αναμονής τύπου M/M/1 με ολικές καταστροφές - απομακρύνσεις πελατών που συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson. Μια καταστροφή καθιστά τον υπηρέτη ανενεργό (λόγω είτε μιας βλάβης είτε προληπτικού ελέγχου/συντήρησης) και ακριβώς εκείνη τη χρονική στιγμή αρχίζει κι ένας χρόνος επισκευής. Στο κεφάλαιο αυτό, υποθέτουμε ότι κατά τη διάρκεια του χρόνου επισκευής το σύστημα δε δέχεται νέες αφίξεις πελατών. Όταν ο χρόνος επισκευής ολοκληρωθεί, το σύστημα συμπεριφέρεται ξανά ως μια M/M/1 ουρά μέχρι την επόμενη καταστροφή κ.ο.κ.. Εφοδιάζουμε το σύστημα με μια γραμμική δομή αμοιβής - κόστους όπως αυτή των Naor (1969) και Edelson και Hildebrand (1975). Εντούτοις, κάνουμε μια τροποποίηση, θεωρώντας δύο διαφορετικούς τύπους αμοιβών: ο πρώτος είναι η συνήθης αμοιβή που λαμβάνουν οι πελάτες που αναχωρούν από το σύστημα μετά από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης, ενώ ο δεύτερος είναι μια αποζημίωση που λαμβάνουν εκείνοι που αναγκάζονται να εγκαταλείψουν το σύστημα λόγω μιας καταστροφής. Στην πραγματικότητα ο ρόλος αυτής της αποζημίωσης είναι να μετριαστεί η δυσαρέσκεια των πελατών. Μελετάμε δύο περιπτώσεις όσον αφορά το διαθέσιμο επίπεδο πληροφόρησης των πελατών πριν λάβουν τις αποφάσεις τους. Πιο συγκεκριμένα, τη στιγμή της άφιξής του, ένας πελάτης μπορεί ή όχι να πληροφορηθεί την κατάσταση του συστήματος (παρατηρήσιμη και μη παρατηρήσιμη περίπτωση αντίστοιχα). Σε κάθε περίπτωση, χαρακτηρίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας Nash των πελατών και ασχολούμαστε με το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης και της μεγιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή. Μελετάμε επίσης την επίδραση του επιπέδου πληροφόρησης στη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών, μέσω πολλών αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Το κεφάλαιο είναι δομημένο ως εξής. Στην παράγραφο 2.2 περιγράφεται η δυναμική του μοντέλου, η δομή αμοιβής - κόστους και το πλαίσιο λήψης των αποφάσεων. Στην παράγραφο 2.3 προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας κατωφλίου για την παρατηρήσιμη περίπτωση, στην οποία οι πελάτες ενημερώνονται για την κατάσταση του συστήματος πριν λάβουν τις αποφάσεις τους. Στην παράγραφο 2.4 μελετάμε τη μη

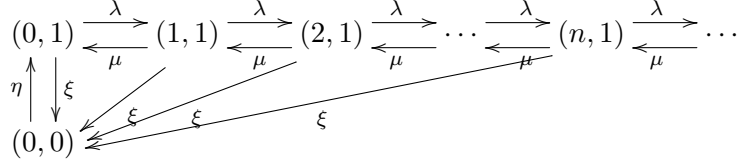
παρατηρήσιμη περίπτωση, και τις μικτές στρατηγικές ισορροπίας Nash για το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης. Ακολούθως, στην παράγραφο 2.5, μελετάμε το πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης κάτω από τα δύο επίπεδα πληροφόρησης. Στην παράγραφο 2.6 θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή, και στην παρατηρήσιμη και στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Τέλος, στην παράγραφο 2.7 παρουσιάζουμε αποτελέσματα από διάφορα αριθμητικά πειράματα που καταδεικνύουν την επίδραση του επιπέδου πληροφόρησης στη συμπεριφορά των πελατών και στα διάφορα μέτρα απόδοσης του συστήματος.

2.2 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε μια ουρά αναμονής με έναν υπηρέτη και άπειρο χώρο αναμονής, όπου οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των διαδοχικών πελατών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ρυθμό μ . Ο υπηρέτης εξυπηρετεί τους πελάτες έναν-έναν. Το σύστημα υπόκειται σε καταστροφές/βλάβες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό ξ . Όταν συμβαίνει μια καταστροφή όλοι οι πελάτες αναγκάζονται να εγκαταλείψουν το σύστημα πρόωρα, χωρίς να εξυπηρετηθούν. Εκείνη τη χρονική στιγμή ο υπηρέτης καθίσταται ανενεργός και ξεκινά μια διαδικασία επισκευής. Η διάρκεια ενός χρόνου επισκευής είναι εκθετικά κατανομημένη με ρυθμό η . Κατά τη διάρκεια ενός χρόνου επισκευής, δεν επιτρέπονται αφίξεις. Τέλος, υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων, οι χρόνοι εξυπηρέτησης, οι ενδιάμεσοι χρόνοι καταστροφών και οι χρόνοι επισκευής είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Παριστάνουμε την κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t με το ζεύγος $(Q(t), I(t))$, όπου η $Q(t)$ καταγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα και η $I(t)$ δείχνει την κατάσταση του υπηρέτη και, κατ' επέκταση, του συστήματος. Με 1 περιγράφουμε ένα σύστημα σε λειτουργία και με 0 ένα σύστημα υπό επισκευή. Σημειώνουμε ότι όποτε η $I(t)$ είναι μηδέν, η $Q(t)$ πρέπει να είναι και αυτή αναγκαστικά μηδέν. Είναι εύκολο να δούμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{(Q(t), I(t)) : t \geq 0\}$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{(n, 1), n \geq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης που παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1.

Ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά των πελατών, όταν έχουν την επιλογή να α-



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της $\{(Q(t), I(t))\}$.

ποφασίσουν κατά τη στιγμή της άφιξής τους εάν θα εισέλθουν στο σύστημα ή θα αποχωρήσουν άμεσα από αυτό. Διαμορφώνουμε αυτό το πλαίσιο απόφασης, υποθέτοντας ότι κάθε πελάτης λαμβάνει είτε μια αμοιβή R_s μονάδων για την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του είτε μια αποζημίωση R_f μονάδων σε περίπτωση που αναγκαστεί να εγκαταλείψει το σύστημα λόγω καταστροφής. Επιπλέον, ένας πελάτης χρεώνεται ένα κόστος C χρηματικών μονάδων ανά χρονική μονάδα που παραμένει στο σύστημα (είτε στην ουρά αναμονής είτε στο χώρο εξυπηρέτησης). Υποθέτουμε, ακόμα, ότι οι πελάτες είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο κι επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη καθαρή ωφέλειά τους. Τέλος, οι αποφάσεις τους υποτίθενται αμετάκλητες, δηλαδή δεν επιτρέπονται επαναπροσπάθειες εισόδου αποχωρησάντων πελατών, ούτε υπαναχωρήσεις εισελθόντων πελατών.

Στις επόμενες παραγράφους προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών για το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις όσον αφορά το επίπεδο πληροφόρησης που είναι διαθέσιμο στους πελάτες τις στιγμές άφιξής τους, προτού να λάβουν τις αποφάσεις τους: την παρατηρήσιμη περίπτωση (όπου οι πελάτες παρατηρούν την $Q(t)$) και τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση.

2.3 Η παρατηρήσιμη περίπτωση

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε το μοντέλο στην περίπτωση που οι πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη ενεργό παρατηρούν τον αριθμό πελατών στο σύστημα πριν αποφασίσουν εάν θα εισέλθουν ή όχι. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μια ατομικά βέλτιστη στρατηγική τύπου κατωφλίου, υπό την έννοια ότι αυτή η στρατηγική μεγιστοποιεί το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη, ανεξάρτητα από τις επιλογές των υπολοίπων πελατών. Υπολογίζουμε αρχικά το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που παρα-

τηρεί n πελάτες μπροστά του και αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα. Συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.1. Θεωρούμε το παρατηρήσιμο μοντέλο της M/M/1 ουράς με καταστροφές και εμποδιζόμενες αφίξεις. Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που παρατηρεί n πελάτες κατά την άφιξή του και αποφασίζει να εισέλθει δίνεται από τη σχέση

$$S_{obs}(n) = R_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right], \quad n \geq 0. \quad (2.1)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη που βρίσκει το σύστημα κατά την άφιξή του στην κατάσταση $(n, 1)$ και αποφασίζει να εισέλθει. Ο πελάτης αυτός μπορεί να αναχωρήσει είτε λόγω της ολοκλήρωσης της εξυπηρέτησής του, είτε λόγω μιας καταστροφής που θα τον αναγκάσει να το εγκαταλείψει πρόωρα. Για την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του, πρέπει να περιμένει το άθροισμα $n + 1$ ανεξάρτητων εκθετικά κατανομημένων χρόνων με παράμετρο μ (σημειώνουμε ότι λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης του πελάτη που εξυπηρετείται είναι ίδια με την κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης των υπολοίπων πελατών). Για την επόμενη καταστροφή, πρέπει να περιμένει έναν εκθετικά κατανομημένο χρόνο με παράμετρο ξ . Επομένως, ο χρόνος παραμονής ενός τέτοιου πελάτη στο σύστημα δίνεται ως $Z_n = \min(Y_n, X)$, όπου η Y_n ακολουθεί μία κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $(n + 1, \mu)$ και η X είναι μια εκθετικά κατανομημένη τυχαία μεταβλητή με ρυθμό ξ , ανεξάρτητη της Y_n . Επιπλέον, ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης θα εξυπηρετηθεί με πιθανότητα $\Pr[Y_n < X]$, ενώ θα αναγκαστεί να εγκαταλείψει το σύστημα λόγω μιας καταστροφής με τη συμπληρωματική πιθανότητα $\Pr[Y_n \geq X]$. Επομένως το αναμενόμενο καθαρό όφελός του θα είναι

$$S_{obs}(n) = R_s \Pr[Y_n < X] + R_f \Pr[Y_n \geq X] - CE[Z_n]. \quad (2.2)$$

Σημειώνουμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} \Pr[Y_n < X] &= \int_0^\infty \Pr[X > Y_n | Y_n = y] d\Pr[Y_n \leq y] \\ &= \int_0^\infty e^{-\xi y} \frac{\mu^{n+1}}{n!} y^n e^{-\mu y} dy \\ &= \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

και

$$\begin{aligned}
E[Z_n] &= \int_0^{\infty} \Pr[Z_n > z] dz \\
&= \int_0^{\infty} \Pr[X > z] \cdot \Pr[Y_n > z] dz \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\xi z} \int_z^{\infty} \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u} du dz \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u} \left(\int_0^u e^{-\xi z} dz \right) du \\
&= \frac{1}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right]. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.3) και (2.4) και αντικαθιστώντας αυτές στη σχέση (2.2) προκύπτει η σχέση (2.1). ■

Θεωρούμε τώρα έναν πελάτη που παρατηρεί κατά την άφιξή του την κατάσταση του συστήματος. Δεδομένου ότι οι αφίξεις δεν επιτρέπονται στη διάρκεια του χρόνου επισκευής, εάν ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης παρατηρήσει το σύστημα στην κατάσταση $(0, 0)$, δεν μπορεί να εισέλθει και έτσι δεν τίθεται θέμα απόφασης. Έτσι, θεωρούμε μόνο την περίπτωση όπου ένας πελάτης παρατηρεί το σύστημα σε μια κατάσταση $(n, 1)$. Ένας τέτοιος πελάτης προτιμά αυστηρά να εισέλθει εάν το αναμενόμενο καθαρό όφελός του είναι θετικό, είναι αδιάφορος μεταξύ του να εισέλθει και να αποχωρήσει εάν είναι μηδέν και προτιμά αυστηρά να αποχωρήσει εάν είναι αρνητικό. Στη συνέχεια, για την απλούστευση της παρουσίασης, υποθέτουμε ότι οι πελάτες, όταν είναι αδιάφοροι μεταξύ εισόδου και αποχώρησης, αποφασίζουν να εισέλθουν στο σύστημα. Σχετικά έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1. Στο παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M/1$ ουράς με καταστροφές και εμποδιζόμενες αφίξεις, υπάρχει μια μοναδική καθαρή στρατηγική ισορροπίας για τον τυχαία επιλεγμένο πελάτη. Διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση I: $R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$.

Τότε η μοναδική καθαρή στρατηγική ισορροπίας είναι να αποχωρεί πάντα.

Περίπτωση II: $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} \leq R_f < \frac{C}{\xi}$.

Τότε η μοναδική καθαρή στρατηγική ισορροπίας είναι η καθαρή στρατηγική κατωφλίου που υποδεικνύει στον τυχαία επιλεγμένο πελάτη «φθάνοντας σε χρόνο t και βρίσκοντας το σύστημα να λειτουργεί, παρατήρησε το μήκος ουράς $Q(t)$, εισέλθε εάν $Q(t) \leq n_e$ και αποχώρησε διαφορετικά», όπου το n_e δίνεται από τη σχέση

$$n_e = \left\lfloor \frac{\ln K}{\ln S} - 1 \right\rfloor, \quad (2.5)$$

με

$$K = \frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s - R_f + \frac{C}{\xi}}, \quad S = \frac{\mu}{\mu + \xi}, \quad (2.6)$$

όπου το $\lfloor x \rfloor$ δηλώνει το (κάτω) ακέραιο μέρος του x , δηλ. το μέγιστο ακέραιο αριθμό που είναι μικρότερος ή ίσος του x .

Περίπτωση III: $R_f \geq \frac{C}{\xi}$.

Τότε η μοναδική καθαρή στρατηγική ισορροπίας είναι να εισέρχεται πάντα.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη που παρατηρεί το σύστημα κατά την άφιξή του. Εάν βρει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$ και αποφασίσει να εισέλθει, τότε το αναμενόμενο καθαρό όφελός του δίνεται από τη σχέση (2.1). Ο πελάτης θα προτιμήσει να εισέλθει εάν $S_{obs}(n) \geq 0$, το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \cdot \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \geq \frac{C}{\xi} - R_f. \quad (2.7)$$

Εφόσον $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} > \frac{C}{\xi} - R_f$, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση A: $\frac{C}{\xi} - R_f > 0 \Leftrightarrow R_f < \frac{C}{\xi}$.

Μπορούμε να λύσουμε τη σχέση (2.7) ως προς n και να συμπεράνουμε ότι ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης είναι πρόθυμος να εισέλθει εφόσον παρατηρήσει το πολύ n_e πελάτες στο σύστημα, με το n_e να δίνεται από τη σχέση (2.5). Εντούτοις, εύκολα διαπιστώνουμε ότι το n_e που δίνεται από τη (2.5) γίνεται αρνητικό όταν $R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, είναι βέλτιστο για τον τυχαία επιλεγμένο πελάτη να αποχωρήσει και έτσι καταλήγουμε στην Περίπτωση I. Από την άλλη, όταν $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} \leq R_f < \frac{C}{\xi}$, το κατώφλι n_e που δίνεται από τη σχέση (2.5) είναι μη αρνητικό και έτσι καταλήγουμε στην περίπτωση II.

Περίπτωση Β: $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} > 0 \geq \frac{C}{\xi} - R_f \Leftrightarrow \frac{C}{\xi} \leq R_f < \frac{C}{\xi} + R_s$.

Σε αυτήν την περίπτωση η ανισότητα (2.7) είναι πάντα αληθής. Επομένως ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης είναι πάντα πρόθυμος να εισέλθει.

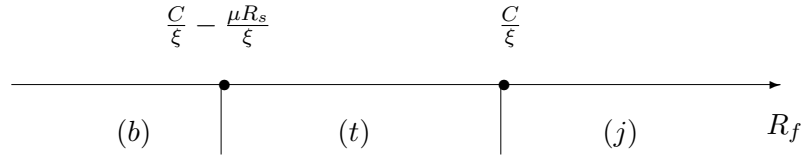
Περίπτωση Γ: $0 \geq R_s - R_f + \frac{C}{\xi} > \frac{C}{\xi} - R_f \Leftrightarrow R_f \geq \frac{C}{\xi} + R_s$.

Η επίλυση της ανισότητας (2.7) ως προς n δείχνει ότι ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης είναι πρόθυμος να εισέλθει εφόσον παρατηρήσει τουλάχιστον n_e πελάτες στο σύστημα με το n_e να δίνεται από τη σχέση (2.5). Ωστόσο, το n_e μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι γίνεται αρνητικό σε αυτή την περίπτωση και, έτσι, είναι πάντα προτιμητέο για τον τυχαία επιλεγμένο πελάτη να εισέλθει. Επομένως, οι περιπτώσεις Β και Γ οδηγούν στην περίπτωση ΙΙΙ του θεωρήματος. ■

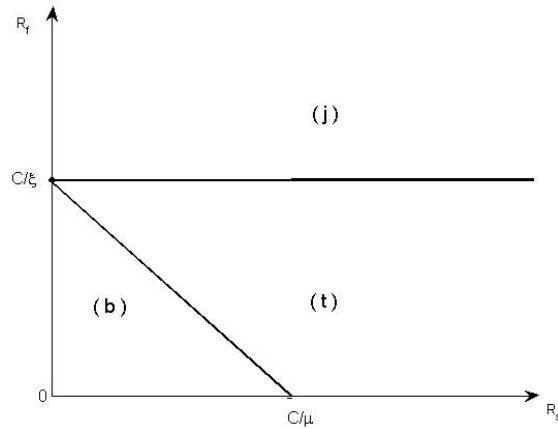
Παρατήρηση 2.1. Η επιχειρηματολογία του θεωρήματος 2.1 αποκαλύπτει ότι η βέλτιστη απόφαση ενός αφικνούμενου πελάτη (που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα), σχετικά με την είσοδό του ή όχι στο σύστημα είναι ανεξάρτητη από τις στρατηγικές των άλλων πελατών. Πράγματι, το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη δεν επηρεάζεται από τις στρατηγικές των μελλοντικών πελατών, λόγω της πειθαρχίας FCFS. Επιπλέον, δεδομένου ότι ο πελάτης παρατηρεί κατά την άφιξή του τον αριθμό των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα, το αναμενόμενο καθαρό όφελός του δεν επηρεάζεται ούτε από τη γνώση των στρατηγικών των προηγούμενων πελατών. Από αυτή την άποψη, η στρατηγική που ορίζεται σε κάθε περίπτωση του θεωρήματος 2.1 είναι ατομικά βέλτιστη, ανεξάρτητα από τις αποφάσεις των υπολοίπων πελατών. Με όρους της παιγνιοθεωρητικής ορολογίας που συνοψίσαμε στην εισαγωγή, μια τέτοια στρατηγική είναι κυριαρχούσα, δεδομένου ότι είναι η βέλτιστη απάντηση ενάντια σε οποιαδήποτε στρατηγική των υπολοίπων.

Παρατήρηση 2.2. Οι ατομικά βέλτιστες (κυριαρχούσες) στρατηγικές που περιγράφονται παραπάνω μπορούν να παρασταθούν εποπτικά μέσω του σχήματος 2.2, όπου με «b» (balk) σημειώνουμε την αποχώρηση ενός πελάτη, με «j» (join) την είσοδο και με «t» (threshold) μια στρατηγική κατωφλίου.

Ένας εναλλακτικός τρόπος παρουσίασης αυτών των αποτελεσμάτων είναι το διδιάστατο σχήμα 2.3 των (R_s, R_f) τιμών που δείχνει τις αντίστοιχες ατομικά βέλτιστες στρατηγικές. Γι' αυτό τον σκοπό έχουμε χρησιμοποιήσει τις ευθείες $R_f = \frac{C}{\xi}$ και $R_f = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$ (ως προς τις μεταβλητές R_f και R_s).



Σχήμα 2.2: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς R_f -Παρατηρήσιμη περίπτωση



Σχήμα 2.3: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς R_s και R_f - Παρατηρήσιμη περίπτωση

Από τα σχήματα 2.2 και 2.3, μπορούμε να συνάγουμε διάφορες ερμηνείες. Αρχικά, εάν οι τιμές των παραμέτρων του συστήματος είναι τέτοιες ώστε το ζεύγος (R_s, R_f) να βρίσκεται κάτω από την ευθεία $R_f = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$, τότε έχουμε ότι $\frac{\mu}{\mu+\xi} R_s + \frac{\xi}{\mu+\xi} R_f < \frac{C}{\mu+\xi}$. Το τελευταίο σημαίνει ότι η μέση αμοιβή ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα κενό και εισέρχεται είναι μικρότερη από το μέσο κόστος που θα πρέπει να πληρώσει μέχρι την επόμενη αναχώρηση και, από αυτή την άποψη, ο πελάτης δεν έχει πράγματι κανένα κίνητρο για να εισέλθει στο σύστημα και, συνεπώς, αποχωρεί. Όταν, όμως, το ζεύγος (R_s, R_f) βρίσκεται μεταξύ των δύο ευθειών, οι πελάτες έχουν κίνητρο να εισέλθουν. Ωστόσο, η αξία της αποζημίωσης, R_f , δεν είναι ακόμα αρκετά υψηλή (έναντι του μέσου κόστους αναμονής τους σε περίπτωση που αναγκαστούν να αποχωρήσουν από το σύστημα λόγω μιας καταστροφής). Επομένως, οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική τύπου κατωφλίου, που τους υποδεικνύει να εισέρχονται στο σύστημα όσο παρατηρούν μέχρι ένα συγκεκριμένο αριθμό πελατών μπροστά τους. Τέλος, εάν οι τιμές των παραμέτρων

του συστήματος είναι τέτοιες ώστε το ζεύγος (R_s, R_f) να είναι πάνω από την ευθεία $R_f = \frac{C}{\xi}$, οι πελάτες προτιμούν πάντα να εισέρχονται.

Παρατήρηση 2.3. Στην οριακή περίπτωση όπου $\xi \rightarrow 0$, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα L' Hospital, ότι το κατώφλι n_e τείνει στο κατώφλι που έχει δοθεί από το Naor (1969) για τη $M/M/1$ ουρά (χωρίς καταστροφές).

2.4 Η μη παρατηρήσιμη περίπτωση

Στρέφουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Σε αυτήν την περίπτωση, οι πελάτες γνωρίζουν τις τιμές των παραμέτρων λειτουργίας του συστήματος λ , μ , ξ και η και των οικονομικών παραμέτρων R_s , R_f και C , αλλά παρατηρούν μόνο την κατάσταση του υπηρέτη κατά την άφιξή τους και όχι τον αριθμό των πελατών στο σύστημα. Τώρα, η απόφαση ενός πελάτη πρέπει να λάβει υπόψη τις στρατηγικές των άλλων πελατών (δηλ. δεν υπάρχουν κυριαρχούσες στρατηγικές με την έννοια της παρατήρησης 2.1).

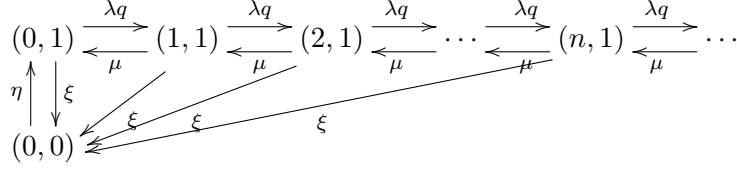
Στο παρόν μοντέλο, υπάρχουν μόνο δύο καθαρές στρατηγικές για τον πελάτη, η εισόδος και η αποχώρηση, ενώ μια μικτή στρατηγική χαρακτηρίζεται από την πιθανότητα εισόδου q ενός αφικνούμενου πελάτη που βρίσκει τον υπηρέτη ενεργό. Ο στόχος μας σε αυτή την παράγραφο είναι να προσδιορίσουμε τις μικτές στρατηγικές ισορροπίας Nash για το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης.

Έστω ότι οι πελάτες ακολουθούν μια μικτή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου q . Τότε, το σύστημα συμπεριφέρεται όπως το αρχικό, αλλά με ρυθμό αφίξεων λq αντί του λ . Το διάγραμμα των μεταβάσεων φαίνεται στο σχήμα 2.4. Έχουμε την ακόλουθη πρόταση 2.2.

Πρόταση 2.2. Θεωρούμε το μη παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M/1$ ουράς με καταστροφές και εμποδιζόμενες αφίξεις, στο οποίο οι πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη ενεργό εισέρχονται με πιθανότητα q . Οι στάσιμες πιθανότητες $p_{un}(k, i)$ του συστήματος δίνονται από τις σχέσεις

$$p_{un}(0, 0) = \frac{\xi}{\xi + \eta}, \quad (2.8)$$

$$p_{un}(k, 1) = \frac{\eta(1 - x_2(q))x_2(q)^k}{\xi + \eta}, \quad k \geq 0, \quad (2.9)$$



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της $\{(Q(t), I(t))\}$ δεδομένης μιας μικτής στρατηγικής εισόδου q .

όπου το $x_2(q)$ δίνεται από την

$$x_2(q) = \frac{(\lambda q + \mu + \xi) - \sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q \mu}}{2\mu}. \quad (2.10)$$

Επιπλέον, το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που εισέρχεται με πιθανότητα q' δεδομένου ότι το σύστημα είναι ενεργό, όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν μια στρατηγική q δίνεται από τη σχέση

$$S_{un}(q', q) = q' \left[\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \frac{\mu(1 - x_2(q))}{\mu + \xi - \mu x_2(q)} + R_f - \frac{C}{\xi} \right]. \quad (2.11)$$

Απόδειξη. Οι εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{(Q(t), I(t))\}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\eta p_{un}(0, 0) = \xi \sum_{k=0}^{\infty} p_{un}(k, 1), \quad (2.12)$$

$$(\lambda q + \xi) p_{un}(0, 1) = \mu p_{un}(1, 1) + \eta p_{un}(0, 0), \quad (2.13)$$

$$(\lambda q + \mu + \xi) p_{un}(k, 1) = \lambda q p_{un}(k-1, 1) + \mu p_{un}(k+1, 1), \quad k \geq 1. \quad (2.14)$$

Η εξίσωση (2.12) μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης $p_{un}(0, 0) + \sum_{k=0}^{\infty} p_{un}(k, 1) = 1$ οδηγούν αμέσως στη σχέση (2.8). Η εξίσωση (2.14) μπορεί να θεωρηθεί ως μια ομογενής γραμμική εξίσωση διαφορών δευτέρας τάξης με σταθερούς συντελεστές και χαρακτηριστική εξίσωση

$$(\lambda q + \mu + \xi) x = \lambda q + \mu x^2 \quad (2.15)$$

οι οποία έχει δύο ρίζες, $x_1(q)$ και $x_2(q)$, που δίνονται από τη σχέση

$$x_{1,2}(q) = \frac{(\lambda q + \mu + \xi) \pm \sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q \mu}}{2\mu}. \quad (2.16)$$

Από την κλασική θεωρία των ομογενών γραμμικών εξισώσεων διαφορών (π.χ. βλέπε Elaydi (1999), παράγραφο 2.3) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$p_{un}(k, 1) = c_1(q)x_1(q)^k + c_2(q)x_2(q)^k, \quad k \geq 0,$$

όπου οι $c_1(q)$ και $c_2(q)$ είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι $x_1(q) > 1$, και, ως εκ τούτου, το $c_1(q)$ θα είναι υποχρεωτικά ίσο με το μηδέν, εφόσον οι $p_{un}(k, 1)$, $k \geq 0$, είναι πιθανότητες και, συνεπώς, φραγμένες. Η σταθερά $c_2(q)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης και έτσι οδηγούμαστε στη σχέση (2.9).

Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν τη στρατηγική q μπορεί να υπολογιστεί δεσμεύοντας στην κατάσταση που παρατηρεί κατά την άφιξή του. Η πιθανότητα να υπάρχουν k πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξη ενός πελάτη, δεδομένου ότι βρίσκει τον υπηρέτη σε λειτουργία (οπότε και μπορεί να αποφασίσει για το αν θα εισέλθει ή όχι) ισούται με

$$p_{un}^{arr(\cdot, 1)}(k, 1) = \frac{p_{un}(k, 1)}{\sum_{i=0}^{\infty} p_{un}(i, 1)} = (1 - x_2(q))x_2(q)^k, \quad k \geq 0. \quad (2.17)$$

Ένας τέτοιος πελάτης λαμβάνει κατά μέσο όρο $S_{obs}(k)$ χρηματικές μονάδες, που δίνονται από τη σχέση (2.1). Επομένως, το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει, δεδομένου ότι έχει βρει κατά την άφιξή του τον υπηρέτη ενεργό και οι υπόλοιποι ακολουθούν τη στρατηγική q , δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} S_{un}(1, q) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{un}^{arr(\cdot, 1)}(k, 1) S_{obs}(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - x_2(q))x_2(q)^k \left\{ R_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \right] \right\} \\ &= \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \frac{\mu(1 - x_2(q))}{\mu + \xi - \mu x_2(q)} + R_f - \frac{C}{\xi}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Από τη γραμμικότητα της $S_{un}(q', q)$ έχουμε ότι $S_{un}(q', q) = (1 - q')S_{un}(0, q) + q'S_{un}(1, q)$ και, επομένως, συνάγουμε άμεσα τη σχέση (2.11). ■

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον προσδιορισμό των στρατηγικών ισορροπίας Nash στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.2. Στο μη παρατηρήσιμο μοντέλο της M/M/1 ουράς με καταστροφές και εμποδιζόμενες αφίξεις υπάρχει μια μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας Nash, με πιθανότητα εισόδου q_e που δίνεται από τη σχέση

$$q_e = \begin{cases} 0, & \text{αν } R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} \\ \frac{(C - \xi R_f + \xi R_s)(\mu R_s + \xi R_f - C)}{\lambda(C - \xi R_f)R_s}, & \text{αν } \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} < R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)}{\xi} \\ 1, & \text{αν } R_f \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)}{\xi}, \end{cases} \quad (2.19)$$

όπου $x_2 = x_2(1)$ (χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.10) για $q = 1$).

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη ενεργό εισέρχονται με πιθανότητα q και θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο αφικνούμενο πελάτη. Τότε, αυτός προτιμά να εισέλθει εάν $S_{un}(1, q) > 0$, είναι αδιάφορος μεταξύ του να εισέλθει και του να αποχωρήσει αν $S_{un}(1, q) = 0$ και προτιμά αυστηρά να αποχωρήσει αν $S_{un}(1, q) < 0$. Θεωρούμε την εξίσωση $S_{un}(1, q) = 0$, με το $S_{un}(1, q)$ να δίνεται από τη σχέση (2.18) και λύνουμε ως προς $x_2(q)$. Τότε, αυτή έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$x_{2e} = \frac{\mu R_s + \xi R_f - C}{\mu R_s} \quad (2.20)$$

και το αντίστοιχο μοναδικό q_e βρίσκεται από την (2.15) για $x = x_{2e}$ και την επίλυση αυτής της γραμμικής ως προς q εξίσωσης. Έτσι, προκύπτει

$$q_e = \frac{x_{2e}[\mu(1 - x_{2e}) + \xi]}{\lambda(1 - x_{2e})} = \frac{(C - \xi R_f + \xi R_s)(\mu R_s + \xi R_f - C)}{\lambda(C - \xi R_f)R_s}. \quad (2.21)$$

Σημειώνουμε, τώρα, ότι η συνάρτηση $x_2(q)$ είναι γνησίως αυξουσα για $q \in [0, 1]$ αφού

$$\frac{d}{dq} x_2(q) = \frac{\lambda}{2\mu} \left(1 - \frac{\lambda q + \xi - \mu}{\sqrt{(\lambda q + \xi - \mu)^2 + 4\xi\mu}} \right) > 0, \quad q \in [0, 1].$$

Έτσι, η πιθανότητα q_e , που δόθηκε στη σχέση (2.21), ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$ αν και μόνο αν η $x_2(q_e)$ ανήκει στο διάστημα $(0, x_2)$ ή, ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας την (2.20), αν και μόνο αν $R_f \in \left(\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}, \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)}{\xi} \right)$ και, έτσι, συνάγουμε το δεύτερο κλάδο της (2.19).

Επιπλέον, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $S_{un}(1, q)$ διατηρεί πρόσημο όταν $R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$ ή $R_f \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)}{\xi}$. Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.18), έχουμε ότι

$$S_{un}(1, 1) = R_s \frac{\mu(1-x_2)}{\mu + \xi - \mu x_2} + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \frac{\xi}{\mu + \xi - \mu x_2}. \quad (2.22)$$

Εξετάζοντας τώρα την πρώτη περίπτωση, όπου $R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$, συμπεραίνουμε ότι

$$S_{un}(1, 1) \leq -\frac{\mu R_s x_2}{\mu + \xi - \mu x_2} < 0 \quad (2.23)$$

και, επομένως, η $S_{un}(1, q)$ διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο προαναφερθέν διάστημα. Με άλλα λόγια, η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη είναι 0 σε αυτήν την περίπτωση. Κατά συνέπεια, η αποχώρηση είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας Nash (στην πραγματικότητα είναι κυριαρχούσα στρατηγική) και, έτσι, συνάγουμε τον πρώτο κλάδο της (2.19). Ομοίως, η (2.18) δίνει

$$S_{un}(1, 0) = R_s \frac{\mu}{\mu + \xi} + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \frac{\xi}{\mu + \xi}. \quad (2.24)$$

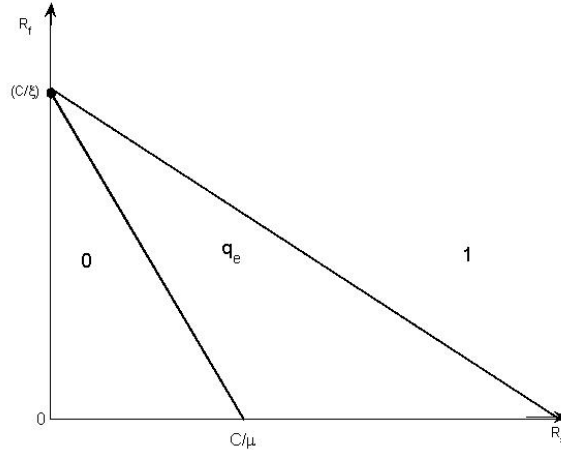
Εξετάζοντας τώρα τη δεύτερη από τις παραπάνω περιπτώσεις, όπου $R_f \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)}{\xi}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$S_{un}(1, 0) \geq \frac{\mu R_s x_2}{\mu + \xi} > 0 \quad (2.25)$$

και, κατά συνέπεια, η συνάρτηση $S_{un}(1, q)$ διατηρεί θετικό πρόσημο για $R_f > \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)}{\xi}$. Με άλλα λόγια, η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη είναι 1 σε αυτήν την περίπτωση, δηλαδή η είσοδος είναι μια κυριαρχούσα στρατηγική και πιο συγκεκριμένα είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας Nash. ■

Παρατήρηση 2.4. Οι στρατηγικές ισορροπίας Nash μπορούν εύκολα να παρασταθούν στο σχήμα 2.5 για τις διάφορες τιμές του ζεύγους (R_s, R_f) . Έχουμε χρησιμοποιήσει τις ευθείες $R_f = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$ και $R_f = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)}{\xi}$.

Παρατηρούμε ότι σχετικά με το θεώρημα 2.2, μπορούμε να δώσουμε πάλι ερμηνείες για τα σημεία που αλλάζει η μορφή της στρατηγικής ισορροπίας των πελατών. Οι ερμηνείες είναι αντίστοιχες με αυτές της παρατήρησης 2.2. Επιπλέον, στην οριακή



Σχήμα 2.5: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς R_s και R_f - Παρατηρήσιμη περίπτωση

περίπτωση όπου $\xi \rightarrow 0$, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η πιθανότητα ισορροπίας q_e τείνει στην πιθανότητα ισορροπίας που προκύπτει από τους Edelson και Hildebrand (1975) για τη M/M/1 ουρά.

2.5 Το πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης

Θα μελετήσουμε τώρα το πρόβλημα μεγιστοποίησης του αναμενόμενου καθαρού συνολικού οφέλους όλων των πελατών ανά χρονική μονάδα (αναμενόμενου καθαρού κοινωνικού οφέλους ανά χρονική μονάδα). Αυτό αναφέρεται και ως πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης. Θεωρούμε χωριστά την παρατηρήσιμη και τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε τις βέλτιστες τιμές των συναρτήσεων των αναμενόμενων καθαρών κοινωνικών ωφελειών (ανά χρονική μονάδα), $S_{obs}^{soc}(n)$ και $S_{un}^{soc}(q)$, και των αντίστοιχων τιμών, n_{soc} και q_{soc} αντίστοιχα. Πρώτα μελετάμε την παρατηρήσιμη περίπτωση και έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.3. Θεωρούμε το παρατηρήσιμο μοντέλο της M/M/1 ουράς με καταστροφές και εμποδιζόμενες αφίξεις. Το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα, δεδομένου ότι οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι

n (δηλαδή οι αφικνούμενοι πελάτες που παρατηρούν το πολύ n πελάτες σε ένα ενεργό σύστημα εισέρχονται, ενώ οι υπόλοιποι αποχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν) δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
S_{obs}^{soc}(n) = & \frac{\lambda(R_s - R_f)}{(\mu + \xi)^{n+1}} \left\{ \frac{\mu d_1(n) [(\mu + \xi)^{n+1} - (\mu x_1)^{n+1}]}{\mu + \xi - \mu x_1} \right. \\
& \left. + \frac{\mu d_2(n) [(\mu + \xi)^{n+1} - (\mu x_2)^{n+1}]}{\mu + \xi - \mu x_2} \right\} \\
& + \lambda R_f \left(\frac{\eta}{\xi + \eta} - d_1(n)x_1^{n+1} - d_2(n)x_2^{n+1} \right) \\
& - \frac{C\mu^2}{\xi^2} d_1(n)x_1(1-x_2)^2 [1 - (n+2)x_1^{n+1} + (n+1)x_1^{n+2}] \\
& - \frac{C\mu^2}{\xi^2} d_2(n)x_2(1-x_1)^2 [1 - (n+2)x_2^{n+1} + (n+1)x_2^{n+2}], \\
& n \geq 0, \quad (2.26)
\end{aligned}$$

όπου $x_1 = x_1(1)$ και $x_2 = x_2(1)$ (χρησιμοποιώντας την (2.16) για $q = 1$) και οι σταθερές $d_1(n)$, $d_2(n)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$d_1(n) = \frac{1}{(\lambda + \xi - \mu x_2)[(\mu + \xi)x_1 - \lambda]x_1^n - (\lambda + \xi - \mu x_1)[(\mu + \xi)x_2 - \lambda]x_2^n} \cdot \frac{-\eta\xi[(\mu + \xi)x_2 - \lambda]x_2^n}{\xi + \eta}, \quad (2.27)$$

$$d_2(n) = \frac{1}{(\lambda + \xi - \mu x_2)[(\mu + \xi)x_1 - \lambda]x_1^n - (\lambda + \xi - \mu x_1)[(\mu + \xi)x_2 - \lambda]x_2^n} \cdot \frac{\eta\xi[(\mu + \xi)x_1 - \lambda]x_1^n}{\xi + \eta}. \quad (2.28)$$

Απόδειξη. Η στάσιμη κατανομή του μοντέλου κάτω από μια στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n μπορεί να βρεθεί ακολουθώντας τη διαδικασία απόδειξης της πρότασης 2.2 (δηλαδή χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές). Πράγματι, οι εξισώσεις ισορροπίας του μοντέλου υπό τη στρατηγική κατωφλίου n είναι

$$\begin{aligned}
\eta p_{obs}(0,0) &= \xi \sum_{k=0}^{n+1} p_{obs}(k,1), \\
(\lambda + \mu + \xi) p_{obs}(k,1) &= \lambda p_{obs}(k-1,1) + \mu p_{obs}(k+1,1), \quad 1 \leq k \leq n, \\
(\lambda + \xi) p_{obs}(0,1) &= \mu p_{obs}(1,1) + \eta p_{obs}(0,0), \\
(\mu + \xi) p_{obs}(n+1,1) &= \lambda p_{obs}(n,1).
\end{aligned}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις, προκύπτει άμεσα ότι

$$p_{obs}(0,0) = \frac{\xi}{\xi + \eta}, \quad (2.29)$$

$$p_{obs}(k,1) = d_1(n)x_1^k + d_2(n)x_2^k, \quad 0 \leq k \leq n+1. \quad (2.30)$$

Οι σταθερές $d_1(n)$ και $d_2(n)$ μπορούν να υπολογιστούν μετά από μερικές πράξεις μέσω των δύο τελευταίων εξισώσεων και της εξίσωσης κανονικοποίησης και έτσι συνάγονται οι σχέσεις (2.27) και (2.28). Τώρα, το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα βρίσκεται από τη σχέση

$$S_{obs}^{soc}(n) = \lambda P_{obs}^{ser} R_s + \lambda P_{obs}^{cat} R_f - C E_{obs}[Q], \quad (2.31)$$

όπου τα P_{obs}^{ser} και P_{obs}^{cat} είναι τα ποσοστά των πελατών που τελικά αναχωρούν από το σύστημα λόγω εξυπηρέτησεων και καταστροφών αντίστοιχα και $E_{obs}[Q]$ είναι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα. Χρησιμοποιώντας τις (2.29), (2.30), (2.3) και την ιδιότητα PASTA, μπορούμε να υπολογίσουμε τα P_{obs}^{ser} , P_{obs}^{cat} και $E_{obs}[Q]$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
P_{obs}^{ser} &= \sum_{k=0}^n p_{obs}(k,1) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^n (d_1(n)x_1^k + d_2(n)x_2^k) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1}, \quad (2.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{obs}^{cat} &= \sum_{k=0}^n p_{obs}(k,1) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \right] \\
&= \sum_{k=0}^n (d_1(n)x_1^k + d_2(n)x_2^k) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \right], \quad (2.33)
\end{aligned}$$

$$E_{obs}[Q] = \sum_{k=0}^{n+1} k p_{obs}(k,1) = \sum_{k=0}^{n+1} k (d_1(n)x_1^k + d_2(n)x_2^k). \quad (2.34)$$

Υπολογίζοντας τα γεωμετρικά αθροίσματα στις (2.32) - (2.34) και αντικαθιστώντας στη σχέση (2.31) προκύπτει τελικά η σχέση (2.26). ■

Δυστυχώς, η περίπλοκη μορφή της (2.26) δεν επιτρέπει τον προσδιορισμό του μεγίστου της σε κλειστή αναλυτική μορφή. Εντούτοις, μπορεί να προσδιοριστεί αριθμητικά αρκετά εύκολα. Έτσι, καταφεύγουμε σε αριθμητικά πειράματα για να συνάγουμε μερικά ποιοτικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του μοντέλου. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αριθμητικά πειράματα παρουσιάζονται αναλυτικά στη παράγραφο 2.7. Ωστόσο, αξίζει να αναφέρουμε ότι οι ατομικά βέλτιστες (κυριαρχούσες) στρατηγικές που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 2.3 δεν εξαρτώνται από την τιμή του ρυθμού επισκευής η , καθώς οι πελάτες λαμβάνουν τις αποφάσεις μόνο όταν φθάνουν και παρατηρούν ένα ενεργό σύστημα. Αντίθετα, οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές εξαρτώνται από το η , όπως φαίνεται και από τη μορφή των (2.26), (2.27) και (2.28).

Επιστρέφουμε, τώρα, στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Εδώ, υποθέτουμε ότι ο διαχειριστής του συστήματος μπορεί να επιβάλει ένα αντίτιμο εισόδου, έστω p , τροποποιώντας τις αμοιβές των πελατών. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να αναγκάσει τους πελάτες να υιοθετήσουν μια ορισμένη πιθανότητα εισόδου ως στρατηγική. Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στον υπολογισμό της βέλτιστης πιθανότητας εισόδου, q_{soc} , η οποία μεγιστοποιεί το καθαρό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα. Για να προχωρήσουμε, χρειαζόμαστε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.4. *Θεωρούμε το μη παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M/1$ ουράς με καταστροφές και εμποδιζόμενες αφίξεις. Το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα, δεδομένου ότι οι πελάτες ακολουθούν μια μικτή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου q (δηλ. οι αφικνούμενοι πελάτες που βρίσκουν ένα ενεργό σύστημα εισέρχονται με πιθανότητα q , ενώ οι υπόλοιποι αποχωρούν χωρίς να έχουν εξυπηρετηθεί) δίνεται από τη σχέση*

$$S_{un}^{soc}(q) = \frac{\eta x_2(q)[\mu R_s(1 - x_2(q)) + \xi R_f - C]}{(\xi + \eta)(1 - x_2(q))}, \quad (2.35)$$

με το $x_2(q)$ να δίνεται από την (2.10).

Απόδειξη. Το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα δίνεται

από τη σχέση

$$S_{un}^{soc}(q) = \lambda P_{un}^{ser} R_s + \lambda P_{un}^{cat} R_f - C E_{un}[Q], \quad (2.36)$$

όπου τα P_{un}^{ser} και P_{un}^{cat} είναι τα ποσοστά των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα, αλλά αποχωρούν από αυτό λόγω ολοκλήρωσης εξυπηρέτησης και καταστροφής αντίστοιχα και $E_{un}[Q]$ είναι ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα. Χρησιμοποιώντας τις (2.8), (2.9) και (2.3), μπορούμε να εκφράσουμε τα P_{un}^{ser} , P_{un}^{cat} και $E_{un}[Q]$ ως

$$P_{un}^{ser} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{un}(k, 1) q \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta (1 - x_2(q)) x_2(q)^k}{\xi + \eta} q \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} P_{un}^{cat} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{un}(k, 1) q \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta (1 - x_2(q)) x_2(q)^k}{\xi + \eta} q \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$E_{un}[Q] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_{un}(k, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\eta (1 - x_2(q)) x_2(q)^k}{\xi + \eta}. \quad (2.39)$$

Υπολογίζοντας πάλι τα γεωμετρικά αθροίσματα που έχουν προκύψει στις (2.37) - (2.39) και αντικαθιστώντας στην (2.36), λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.21), προκύπτει τελικά η (2.35). ■

Αντίθετα από την παρατηρήσιμη περίπτωση, εδώ είναι δυνατό να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη πιθανότητα εισόδου q_{soc} σε κλειστή μορφή και μπορούμε επίσης να τη συγκρίνουμε με την αντίστοιχη πιθανότητα q_e . Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3. Στο μη παρατηρήσιμο μοντέλο της Μ/Μ/1 ουράς με καταστροφές και εμποδιζόμενες αφίξεις υπάρχει μια μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, με πιθανότητα εισόδου q_{soc} , που δίνεται από τη σχέση

$$q_{soc} = \begin{cases} 0, & \text{αν } R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} \\ \frac{\sqrt{D}(\mu R_s - \sqrt{D})(\xi R_s + \sqrt{D})}{\lambda D R_s}, & \text{αν } \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} < R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)^2}{\xi} \\ 1, & \text{αν } R_f \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)^2}{\xi}, \end{cases} \quad (2.40)$$

όπου

$$D = \mu R_s (C - \xi R_f) \quad (2.41)$$

και $x_2 = x_2(1)$ (χρησιμοποιώντας την (2.10) για $q = 1$). Επιπρόσθετα, η κοινωνικά βέλτιστη πιθανότητα εισόδου είναι πάντα μικρότερη από την αντίστοιχη πιθανότητα εισόδου της στρατηγικής ισορροπίας, δηλαδή

$$q_{soc} \leq q_e. \quad (2.42)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $S_{un}^{soc}(q)$ που δίνεται από τη σχέση (2.35) μπορεί να γραφεί ως η σύνθεση της $f(x)$ και της $x_2(q)$ (δηλαδή $S_{un}^{soc}(q) = f(x_2(q))$), με

$$f(x) = \frac{\eta x [\mu R_s (1 - x) + \xi R_f - C]}{(\xi + \eta)(1 - x)} \quad (2.43)$$

και το $x_2(q)$ όπως δίνεται στη (2.10). Σημειώνουμε επίσης ότι η συνάρτηση $x_2(q)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς το $q \in [0, 1]$ και παίρνει τιμές στο $[0, x_2]$.

Για να προχωρήσουμε, λύνουμε την εξίσωση

$$S_{un}^{soc'}(q) = f'(x_2(q))x_2'(q) = 0, \quad (2.44)$$

για $q \in [0, 1]$. Όμως, ισχύει ότι $x_2'(q) \neq 0$ για $q \in [0, 1]$ και, επομένως, η (2.44) ισοδυναμεί με $f'(x_2(q)) = 0$. Έτσι, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$, η οποία μετά από στοιχειώδεις αλγεβρικούς μετασχηματισμούς μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mu R_s x^2 - 2\mu R_s x + (\mu R_s + \xi R_f - C) = 0. \quad (2.45)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου στη σχέση (2.45) είναι μη θετική αν και μόνο αν $R_f \geq \frac{C}{\xi}$. Σε αυτή την περίπτωση, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $f(x)$ είναι αύξουσα και, συνεπώς, είναι αύξουσα και η $S_{un}^{soc}(q)$. Εν συντομία έχουμε:

- Περίπτωση I: $R_f \geq \frac{C}{\xi}$. Η κοινωνικά βέλτιστη πιθανότητα εισόδου είναι $q_{soc} = 1$.

Στην περίπτωση, τώρα, που $R_f < \frac{C}{\xi}$, η εξίσωση $f'(x) = 0$ (ή, ισοδύναμα, η (2.45)) έχει δύο διακεκριμένες ρίζες x_2^- και x_2^+ , οι οποίες δίνονται από τη σχέση

$$x_2^- = 1 - \frac{\sqrt{D}}{\mu R_s}, \quad x_2^+ = 1 + \frac{\sqrt{D}}{\mu R_s}, \quad (2.46)$$

με τη D όπως φαίνεται στην (2.41). Επομένως, το τριώνυμο της (2.45) είναι θετικό για $x < x_2^-$ ή $x > x_2^+$ και αρνητικό για $x_2^- < x < x_2^+$. Λόγω της ένα προς ένα αντιστοιχίας μεταξύ του $x_2(q)$ και του q και του γεγονότος ότι $x_2(q) \in [0, x_2]$ για $q \in [0, 1]$, έχουμε να εξετάσουμε διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με τη διάταξη των x_2^- , x_2^+ και 0 , x_2 . Ωστόσο, έχουμε ότι $x_2 < 1 < x_2^+$ και επομένως υπάρχουν μόνο 3 υποπεριπτώσεις.

- Περίπτωση II-a: $R_f < \frac{C}{\xi}$ και $x_2^- \leq 0$. Τότε, έχουμε κατ' ανάγκη ότι $x_2^- \leq 0 < x_2 < x_2^+$. Επομένως, η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $[0, x_2]$ και, συνεπώς, η $S_{un}^{soc}(q)$ είναι επίσης φθίνουσα στο $[0, 1]$. Έτσι, η κοινωνικά βέλτιστη πιθανότητα εισόδου είναι $q_{soc} = 0$.
- Περίπτωση II-b: $R_f < \frac{C}{\xi}$ και $0 < x_2^- < x_2$. Εδώ έχουμε ότι η $f'(x)$ είναι θετική στο διάστημα $(0, x_2^-)$ και αρνητική στο (x_2^-, x_2) και επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το μέγιστο της $S_{un}^{soc}(q)$ επιτυγχάνεται για εκείνο το q για το οποίο ισχύει $x_2(q) = x_2^-$. Η κοινωνικά βέλτιστη πιθανότητα εισόδου βρίσκεται αντικαθιστώντας το x_2^- όπου x στην (2.15) και λύνοντας ως προς q . Με αυτόν τον τρόπο, συμπεραίνουμε ότι

$$q_{soc} = \frac{x_2^- [\mu(1 - x_2^-) + \xi]}{\lambda(1 - x_2^-)} \quad (2.47)$$

και χρησιμοποιώντας, επιπλέον, τη σχέση (2.46) καταλήγουμε στο ότι

$$q_{soc} = \frac{\sqrt{D} (\mu R_s - \sqrt{D}) (\xi R_s + \sqrt{D})}{\lambda D R_s}. \quad (2.48)$$

- Περίπτωση II-c: $R_f < \frac{C}{\xi}$ και $x_2^- \geq x_2$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι η $f(x)$ είναι αύξουσα στο $[0, x_2]$ και, συνεπώς, η $S_{un}^{soc}(q)$ είναι αύξουσα στο $[0, 1]$. Η κοινωνικά βέλτιστη πιθανότητα εισόδου είναι $q_{soc} = 1$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.46) και λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη $R_f < \frac{C}{\xi}$ για τις περιπτώσεις II-a, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι οι συνθήκες $x_2^- \leq 0$, $0 < x_2^- < x_2$ και $x_2^- \geq x_2$ μπορούν αντίστοιχα να γραφούν ως $R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$, $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} < R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)^2}{\xi}$ και $R_f \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)^2}{\xi}$. Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις I-II συνάγουμε άμεσα την (2.40).

2.6. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΟΥ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΤΗΣ

Όσον αφορά τη διάταξη των q_{soc} και q_e , οι σχέσεις (2.19) και (2.40) δείχνουν ότι $q_e = q_{soc} = 0$ για $R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$, ενώ $q_e = q_{soc} = 1$ για $R_f \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)^2}{\xi}$. Επιπλέον, ισχύει $q_e = 1$ και $q_{soc} \in (0, 1)$ όταν $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)}{\xi} \leq R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)^2}{\xi}$. Κατά συνέπεια, απομένει να ελέγξουμε την ισχύ της ανισότητας $q_{soc} \leq q_e$, μόνο για την περίπτωση που $R_f \in (\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}, \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s(1-x_2)}{\xi})$, δηλαδή στο διάστημα όπου και τα δύο q_e και q_{soc} είναι γνήσια μεταξύ 0 και 1. Χρησιμοποιώντας τις (2.21) και (2.48), μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η ανισότητα $q_{soc} \leq q_e$ ισοδυναμεί με την $\mu^2 \xi R_s^3 + D\sqrt{D} \geq 0$ που προφανώς αληθεύει. Κατά συνέπεια, η ανισότητα ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση. ■

Σημειώνουμε ότι οι στρατηγικές ισορροπίες Nash που παρουσιάστηκαν στη παράγραφο 2.4 δεν εξαρτώνται από την τιμή του ρυθμού επισκευής η . Αυτό συμβαίνει επειδή οι πελάτες λαμβάνουν αποφάσεις μόνο όταν φθάνουν σε ένα ενεργό σύστημα. Επιπρόσθετα, ούτε οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές εξαρτώνται από το η στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση, κάτι που δεν ισχύει στην παρατηρήσιμη περίπτωση.

2.6 Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή

Συνεχίζοντας, θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή. Σε αυτή την περίπτωση, υποθέτουμε ότι ο διαχειριστής του συστήματος επιβάλλει ένα αντίτιμο εισόδου, έστω p , στους πελάτες, προσπαθώντας μ' αυτόν τον τρόπο να μεγιστοποιήσει το καθαρό όφελός του ανά χρονική μονάδα. Επιβάλλοντας αυτό το αντίτιμο, η αμοιβή κάθε πελάτη θα είναι μειωμένη κατά p μονάδες και, συνεπώς, η βέλτιστη απάντησή τους αλλάζει. Ο στόχος μας είναι να χαρακτηρίσουμε τις βέλτιστες στρατηγικές για το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης κάτω από τα δυο επίπεδα πληροφόρησης που έχουμε θεωρήσει. Αντιμετωπίζουμε χωριστά την παρατηρήσιμη και τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση.

Εξετάζοντας, αρχικά, την παρατηρήσιμη περίπτωση, θεωρούμε δύο υποπεριπτώσεις. Στην πρώτη υποπερίπτωση, υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης που εισέρχεται στο σύστημα πρέπει να καταβάλει το αντίτιμο εισόδου, ασχέτως με το αν θα κατορθώσει τελικά να εξυπηρετηθεί ή όχι. Σε αυτή την περίπτωση, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του

διαχειριστή ανά χρονική μονάδα δίνεται από τη σχέση

$$S_{obs}^{prof}(n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_{obs}(n, 1)p(n) = \lambda \left(\frac{\eta}{\xi + \eta} - d_1(n)x_1^{n+1} - d_2(n)x_2^{n+1} \right) p(n),$$

όπου τα x_1 και x_2 και οι σταθερές $d_1(n)$ και $d_2(n)$ είναι όπως δόθηκαν στην πρόταση 2.3 (βλέπε σχέσεις (2.16) για $q = 1$, (2.27) και (2.28)) και το $p(n)$ αντιπροσωπεύει το αντίτιμο εισόδου που ο διαχειριστής επιλέγει προκειμένου να αναγκαστούν οι πελάτες να υιοθετήσουν τη στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n . Οι ποσότητες αυτές μπορούν να υπολογιστούν εάν αντικαταστήσουμε τα R_s και R_f με τις μειωμένες αμοιβές $R_s - p$ και $R_f - p$ αντίστοιχα της (2.5). Επομένως, έχουμε ότι το $p(n)$ χαρακτηρίζεται μέσω της ρίζας της εξίσωσης

$$\ln \left(\frac{\frac{C}{\xi} - R_f + p}{R_s - p + \frac{C}{\xi} - R_f + p} \right) = \ln \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^n,$$

από την οποία τελικά προκύπτει

$$p(n) = \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^n + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right). \quad (2.49)$$

Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη την πρόταση 2.3, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ανά χρονική μονάδα του διαχειριστή μπορεί να εκφραστεί μέσω της συνάρτησης

$$\begin{aligned} S_{obs}^{prof}(n) &= \frac{\lambda\eta}{\xi + \eta} \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^n \\ &\quad + \frac{\lambda\eta}{\xi + \eta} \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \\ &\quad - \lambda \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \left[d_1(n)x_1 \left(\frac{\mu x_1}{\mu + \xi} \right)^n + d_2(n)x_2 \left(\frac{\mu x_2}{\mu + \xi} \right)^n \right] \\ &\quad - \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) (d_1(n)x_1^{n+1} + d_2(n)x_2^{n+1}). \end{aligned}$$

Στη δεύτερη υποπερίπτωση υποθέτουμε ότι το αντίτιμο εισόδου καταβάλλεται μόνο από εκείνους τους πελάτες που κατορθώνουν τελικά να εξυπηρετηθούν, ενώ επιστρέφεται σε εκείνους που αναγκάζονται να αποχωρήσουν από το σύστημα λόγω μιας καταστροφής. Επομένως, το αναμενόμενο κέρδος του διαχειριστή ανά χρονική μονάδα είναι

2.6. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΟΥ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΤΗΣ 57

ίσο με

$$S_{obs}^{prof}(n) = \lambda \left(\sum_{n=0}^n p_{obs}(n, 1) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^n \right) p(n) = \lambda \left(\sum_{n=0}^n d_1(n)x_1^n + d_2(n)x_2^n \right) p(n), \quad (2.50)$$

όπου τα x_1 και x_2 και οι σταθερές $d_1(n)$ και $d_2(n)$ δίνονται στην πρόταση 2.3 (βλέπε σχέσεις (2.16) για $q = 1$, (2.27) και (2.28)) και το $p(n)$ αντιπροσωπεύει το αντίτιμο εισόδου που επιλέγει ο διαχειριστής προκειμένου να αναγκαστούν οι πελάτες να υιοθετήσουν τη στρατηγική κατώφλιου με κατώφλι n . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, έχουμε ότι, σε αυτή την περίπτωση, το $p(n)$ χαρακτηρίζεται μέσω της ρίζας της εξίσωσης

$$\ln \left(\frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s - p + \frac{C}{\xi} - R_f} \right) = \ln \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^n,$$

από την οποία τελικά προκύπτει

$$p(n) = \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \left(\frac{\mu + \xi}{\mu} \right)^n. \quad (2.51)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.50) και (2.51), συνάγουμε το αναμενόμενο κέρδος του διαχειριστή ανά χρονική μονάδα και σε αυτή την υποπερίπτωση.

Δυστυχώς, οι ιδιαίτερα πολύπλοκες μορφές των $S_{obs}^{prof}(n)$ δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά σε καμία από τις δύο παραπάνω υποπεριπτώσεις (σημειώνουμε ότι η μεταβλητή n εμφανίζεται επίσης στις σταθερές $d_1(n)$ και $d_2(n)$) και, επομένως, το βέλτιστο κατώφλι κέρδους, n_{prof} δεν μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή.

Προχωράμε τώρα στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Υποθέτουμε πάλι ότι ο διαχειριστής του συστήματος επιβάλλει ένα αντίτιμο εισόδου, έστω p , προκειμένου να μεγιστοποιήσει το καθαρό όφελός του ανά χρονική μονάδα, μειώνοντας κατά p μονάδες την αμοιβή κάθε πελάτη. Συνεπώς, η πράξη αυτή επηρεάζει τις αποφάσεις των πελατών, αλλάζοντας την πιθανότητα εισόδου τους. Ο στόχος μας είναι να βρούμε τη βέλτιστη πιθανότητα εισόδου που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος του διαχειριστή ανά χρονική μονάδα. Διακρίνουμε πάλι δύο υποπεριπτώσεις.

Στην πρώτη υποπερίπτωση, υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης που εισέρχεται στο σύστημα πρέπει να καταβάλει το αντίτιμο εισόδου. Το αναμενόμενο κέρδος ανά χρονική

μονάδα του διαχειριστή όταν οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική q προκειμένου να απαντήσουν βέλτιστα στο αντίτιμο που έχει επιβάλει ο διαχειριστής δίνεται από τη σχέση

$$S_{un}^{prof}(q) = \lambda q p(q).$$

Για τον υπολογισμό του $p(q)$ θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη. Ένας τέτοιος πελάτης θα ακολουθεί τη στρατηγική ισορροπίας που δίνεται από την (2.19), αλλά με τις τιμές των R_s και R_f να είναι μειωμένες κατά p μονάδες. Λύνοντας για το $p(q)$ έχουμε ότι αυτό χαρακτηρίζεται μέσω των ριζών της εξίσωσης $a(q)p^2 + b(q)p + c(q)$, όπου

$$a(q) = \lambda q \xi,$$

$$b(q) = (\lambda q + \mu + \xi)(C - \xi R_f + \xi R_s),$$

$$c(q) = (C - \xi R_f + \xi R_s)(\xi R_f + \mu R_s - C) - \lambda q R_s (C - \xi R_f).$$

Δυστυχώς, και πάλι η ανάλυση δεν μπορεί να προχωρήσει στην εύρεση κλειστής μορφής για τη βέλτιστη πιθανότητα εισόδου, αφού η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης δεύτερου βαθμού δεν κρατά ένα συγκεκριμένο πρόσημο και, ως εκ τούτου, η μονοτονία της $S_{un}^{prof}(q)$ δεν είναι σαφής. Κατά συνέπεια, δεν έχουμε αποτελέσματα σε κλειστή μορφή.

Τέλος, στη δεύτερη υποπερίπτωση, όπου υποθέτουμε ότι μόνο οι πελάτες που κατορθώνουν τελικά να εξυπηρετηθούν καταβάλλουν το αντίτιμο, ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία, μειώνοντας, ωστόσο, μόνο την αμοιβή R_s σε $R_s - p$. Αυτό οδηγεί σε μια άλλη εξίσωση δεύτερου βαθμού, όπου οι συντελεστές τώρα είναι

$$a = \mu \xi,$$

$$b(q) = (\lambda q - \mu + \xi)(C - \xi R_f) - 2\mu \xi R_s,$$

$$c(q) = (C - \xi R_f + \xi R_s)(\xi R_f + \mu R_s - C).$$

Δυστυχώς, ούτε σε αυτήν την περίπτωση το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί σε κλειστή μορφή, λόγω των πολύπλοκων μορφών της διακρίνουσας του πολυωνύμου και της συνάρτησης κέρδους. Η συναγωγή συμπερασμάτων μέσω αριθμητικών πειραμάτων, ωστόσο, μπορεί να προχωρήσει και στα δύο επίπεδα πληροφόρησης.

2.7 Αριθμητικά πειράματα-Συμπεράσματα

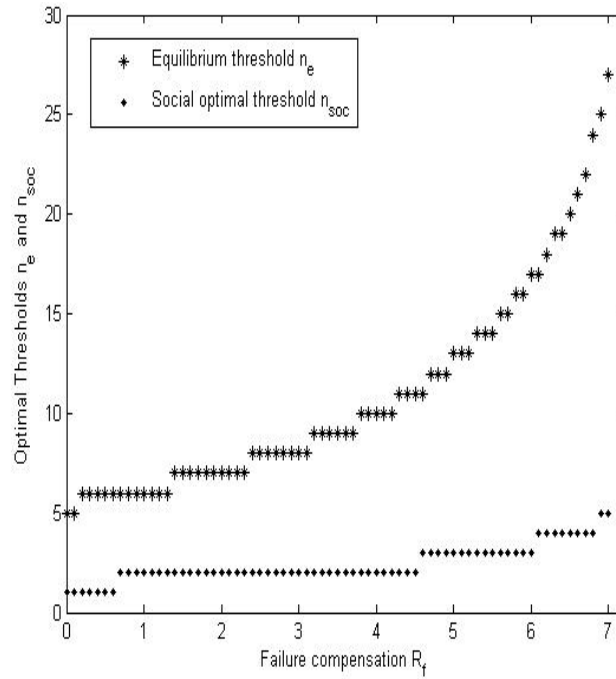
Στην παράγραφο αυτή εφαρμόζουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα του κεφαλαίου σε συγκεκριμένα αριθμητικά σενάρια και παρουσιάζουμε διάφορα συμπεράσματα που δείχνουν τη συμπεριφορά των πελατών σε συστήματα τέτοιου τύπου.

Στο σχήμα 2.6, θεωρούμε ένα μοντέλο με παραμέτρους λειτουργίας $(\lambda, \mu, \xi, \eta) = (7, 4, 0.4, 2)$ και παραμέτρους αμοιβής - κόστους $(R_s, C) = (7, 3)$ και παρουσιάζουμε τη γραφική παράσταση των ατομικά βέλτιστων και κοινωνικά βέλτιστων κατωφλίων για την παρατηρήσιμη περίπτωση ως συναρτήσεις της αποζημίωσης R_f . Παρατηρούμε ότι το n_e γίνεται άπειρο για μεγάλες τιμές του R_f , ενώ το n_{soc} σταθεροποιείται σε μια ορισμένη τιμή. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $n_{soc} \leq n_e$ για όλες τις τιμές του R_f . Αυτές οι παρατηρήσεις φαίνεται ότι ισχύουν γενικά, όπως έχει ελεγχθεί από έναν μεγάλο αριθμό παρόμοιων αριθμητικών πειραμάτων για άλλες τιμές των παραμέτρων.

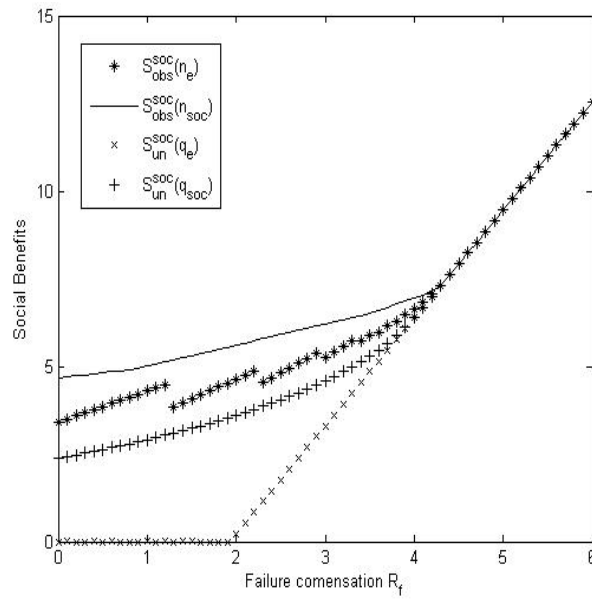
Η ανισότητα $n_{soc} \leq n_e$ που υποδεικνύουν τα αριθμητικά πειράματα, σε συνδυασμό με την ανισότητα $q_{soc} \leq q_e$ η οποία έχει αποδειχθεί αναλυτικά δείχνουν ότι έχουμε τη συνηθισμένη κατάσταση που εμφανίζεται και στις πρωτοποριακές εργασίες των Naor (1969) και Edelson και Hildebrand (1975): η ιδιοτελής ατομική βελτιστοποίηση οδηγεί σε μακρύτερες ουρές αναμονής απ' το κοινωνικά επιθυμητό (δηλ. σε κατάσταση στρατηγικής ισορροπίας οι πελάτες κάνουν υπερβολική χρήση του συστήματος). Αυτό οφείλεται στο ότι ένας πελάτης που αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα επάγει αρνητικές επιδράσεις (externalities) για τις μελλοντικές αφίξεις, τις οποίες όμως αγνοεί, συμπεριφερόμενος ιδιοτελώς.

Ένα άλλο ενδιαφέρον θέμα είναι η σύγκριση μεταξύ της παρατηρήσιμης και της μη παρατηρήσιμης περίπτωσης ενός δεδομένου μοντέλου, δηλαδή η επίδραση της πληροφορίας στη συμπεριφορά των πελατών. Η αξία της πληροφορίας έχει μελετηθεί σε διάφορες εργασίες, μεταξύ των οποίων είναι αυτές του Hassin (1986, 2007) και των Guo και Zipkin (2007). Στα πλαίσια του παρόντος μοντέλου, έχουμε θεωρήσει διάφορα αριθμητικά σενάρια και έχουμε συγκρίνει την αναμενόμενη καθαρή κοινωνική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα για την παρατηρήσιμη και τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση όταν οι πελάτες χρησιμοποιούν την ατομικά ή την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική τους. Πιο συγκεκριμένα, ενδιαφερόμαστε για τη σύγκριση των $S_{obs}^{soc}(n_e)$, $S_{obs}^{soc}(n_{soc})$, $S_{un}^{soc}(q_e)$ και $S_{un}^{soc}(q_{soc})$. Οι ανισότητες $S_{obs}^{soc}(n_e) \leq S_{obs}^{soc}(n_{soc})$ και $S_{un}^{soc}(q_e) \leq S_{un}^{soc}(q_{soc})$ προφανώς

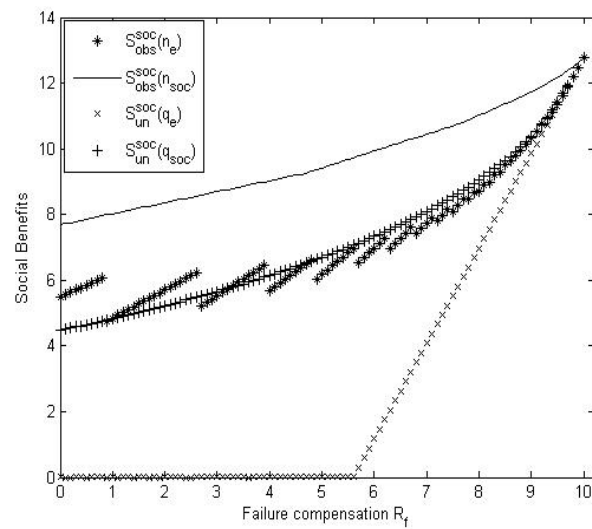
αληθεύουν, αλλά οι υπόλοιπες σχέσεις δεν είναι σαφείς. Παραδείγματος χάριν, θα ήταν ενδιαφέρον να γνωρίζουμε τη σχέση μεταξύ των $S_{un}^{soc}(q_{soc})$ και $S_{obs}^{soc}(n_e)$, η οποία αντιστοιχεί στη φυσική ερώτηση «τι είναι προτιμητέο για την κοινωνία: να έχει ανενημέρωτους αλτρουϊστές ή ενημερωμένους ιδιοτελείς αποφασίζοντας ;». Η ανάλυση ενός μεγάλου αριθμού αριθμητικών σεναρίων δείχνει ότι η πλέον σηνήθης διάταξη είναι η $S_{un}^{soc}(q_e) \leq S_{un}^{soc}(q_{soc}) \leq S_{obs}^{soc}(n_e) \leq S_{obs}^{soc}(n_{soc})$. Από αυτή την άποψη, φαίνεται ότι στην πλειονότητα των περιπτώσεων είναι καλύτερο για την κοινωνία οι πελάτες να είναι ενημερωμένοι και να δρουν ιδιοτελώς (δηλαδή σύμφωνα με τις στρατηγικές ισορροπίας τους) από το να είναι ανενημέρωτοι και αλτρουϊστές. Μια τέτοια χαρακτηριστική περίπτωση παρουσιάζεται στο σχήμα 2.7 για $(\lambda, \mu, \xi, \eta) = (7, 2, 0.7, 1)$ και $(R_s, C) = (7, 3)$, καθώς το R_f κινείται στο διάστημα $[0, 6]$. Ωστόσο, υπάρχουν μερικές ιδιαίζουσες περιπτώσεις όπου για χαμηλές τιμές της R_f έχουμε ότι $S_{un}^{soc}(q_{soc}) \leq S_{obs}^{soc}(n_e)$, ενώ για υψηλές τιμές της R_f συνάγουμε την αντίστροφη ανισότητα. Για τις ενδιάμεσες τιμές της R_f η κατάσταση είναι μικτή. Αυτές οι περιπτώσεις εμφανίζονται χαρακτηριστικά για χαμηλές τιμές του ξ . Ένα τέτοιο αριθμητικό σενάριο παρουσιάζεται στο σχήμα 2.8 για $(\lambda, \mu, \xi, \eta) = (7, 4, 0.3, 2)$ και $(R_s, C) = (4, 3)$, καθώς το R_f κινείται στο διάστημα $[0, 10]$. Σημειώνουμε ακόμα ότι όλες οι γραφικές παραστάσεις των $S_{obs}^{soc}(n_e)$, $S_{obs}^{soc}(n_{soc})$, $S_{un}^{soc}(q_e)$ και $S_{un}^{soc}(q_{soc})$ ως προς R_f ταυτίζονται για $R_f \geq \frac{C}{\xi}$. Πράγματι, για τις τιμές του R_f που υπερβαίνουν το μέσο κόστος αναμονής μέχρι την επόμενη καταστροφή, δηλαδή την ποσότητα $\frac{C}{\xi}$, είναι ταυτόχρονα ατομικά και κοινωνικά βέλτιστο το να εισέλθουν στο σύστημα, κάτω από οποιοδήποτε είδος πληροφόρησης.



Σχήμα 2.6: Ατομικά και κοινωνικά βέλτιστα κατώφλια εισόδου ως προς R_f για την παρατηρήσιμη περίπτωση με $(\lambda, \mu, \xi, \eta) = (7, 4, 0.4, 2)$ και $(R_s, C) = (7, 3)$.



Σχήμα 2.7: Κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα ως προς R_f για ένα μοντέλο με παραμέτρους $(\lambda, \mu, \xi, \eta) = (7, 2, 0.7, 1)$ και $(R_s, C) = (7, 3)$.



Σχήμα 2.8: Κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα ως προς R_f για ένα μοντέλο με παραμέτρους $(\lambda, \mu, \xi, \eta) = (7, 4, 0.3, 2)$ και $(R_s, C) = (4, 3)$.

Κεφάλαιο 3

Η $M/M/1/cat$ ουρά με επιτρεπόμενες αφίξεις

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, μένουμε στο πλαίσιο των συστημάτων αναμονής που υπόκεινται σε καταστροφές, αλλά μελετάμε την πιο ρεαλιστική περίπτωση, όπου κατά τις περιόδους επισκευής του υπηρέτη σταματάνε οι εξυπηρετήσεις, αλλά συνεχίζονται κανονικά οι αφίξεις. Ενδιαφερόμαστε και πάλι, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, για τον υπολογισμό ατομικά και κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών. Επιπλέον, εξετάζουμε το βασικό ζήτημα του κατά πόσον η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη είναι αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση της στρατηγικής που υιοθετείται από τους υπόλοιπους πελάτες. Με άλλα λόγια, αν οι πελάτες γίνονται πιο πρόθυμοι να υιοθετήσουν μια ορισμένη συμπεριφορά, πώς επηρεάζεται ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης; Είναι πιο συμφέρον γι' αυτόν να τους ακολουθήσει, δηλαδή να υιοθετήσει την ίδια απόφαση, ή όχι; Με τους όρους που χρησιμοποιήθηκαν στην εισαγωγή, το ερώτημα που τίθεται είναι εάν οι πελάτες υιοθετούν μια συμπεριφορά τύπου Σύμφωνα-με-Το-Πλήθος (ΣΤΠ) ή μια τύπου Αντίθετα-με-Το-Πλήθος (ΑΤΠ). Στα περισσότερα συστήματα αναμονής, η επικρατούσα συμπεριφορά είναι η ΑΤΠ. Πράγματι, διαισθητικά φαίνεται εύλογο ότι αν οι πελάτες γίνουν πιο πρόθυμοι να εισέλθουν στο δεδομένο σύστημα, τότε ο συνωστισμός θα αυξηθεί και επομένως ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης θα υποστεί πιθανότερα μακροχρόνιες

καθυστερήσεις και θα συσσωρεύσει μεγάλα κόστη αναμονής. Επομένως, ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης γίνεται λιγότερο πρόθυμος να εισέλθει στο σύστημα. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις συστημάτων αναμονής όπου προκύπτει μια συμπεριφορά ΣΤΠ. Το πρώτο τέτοιο παράδειγμα στα πλαίσια ενός συστήματος αναμονής φαίνεται να είναι το μοντέλο αγοράς προτεραιοτήτων (βλέπε το βιβλίο Hassin και Haviv, σελ.75 για την παρατηρήσιμη περίπτωση και σελ.83 για τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση καθώς και τις εργασίες των Adiri και Yechiali (1974) και των Hassin και Haviv (1997)). Η ΑΤΠ συμπεριφορά σχετίζεται συνήθως με τις αρνητικές επιδράσεις που προκαλούνται από τους πελάτες, δηλαδή με καταστάσεις στις οποίες η απόφαση εισόδου ενός πελάτη επηρεάζει αρνητικά το αναμενόμενο καθαρό κέρδος των υπολοίπων πελατών, ενώ η ΣΤΠ συμπεριφορά σχετίζεται με θετικές επιδράσεις. Εντούτοις, δεν ισχύει αυτό πάντα και γι' αυτό απαιτείται προσοχή. Παραδείγματος χάριν, το προαναφερθέν μοντέλο αγοράς προτεραιοτήτων επιδεικνύει συμπεριφορά ΣΤΠ, παρότι δεν εμφανίζονται σε αυτό θετικές επιδράσεις.

Στο παρόν κεφάλαιο, θεωρούμε το μοντέλο του κεφαλαίου 2, αίροντας, όμως, την υπόθεση ότι δεν επιτρέπονται αφίξεις στις περιόδους που απουσιάζει ο υπηρέτης. Θεωρούμε, δηλαδή, τη $M/M/1$ ουρά με καταστροφές, όπου οι πελάτες έχουν πάντα την επιλογή να εισέλθουν στο σύστημα (ακόμη και στην περίπτωση που βρίσκουν τον υπηρέτη ανενεργό). Η δομή αυτού του συστήματος είναι πιο πολύπλοκη αφού το μοντέλο είναι διδιάστατο και επιδεικνύει σημαντικά διαφορετική συμπεριφορά σε σύγκριση με το προηγούμενο μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα, η μελέτη μάς αποκαλύπτει τα ακόλουθα γεγονότα:

- Στο παρόν μοντέλο, μπορούν να προκύψουν και οι δύο τύποι στρατηγικής συμπεριφοράς, ΑΤΠ ή ΣΤΠ, ανάλογα με τη διαφορά της αποζημίωσης λόγω καταστροφής, R_f , και της αμοιβής εξυπηρέτησης, R_s . Πιο συγκεκριμένα, για χαμηλές τιμές του $R_f - R_s$, το μοντέλο παρουσιάζει μια συμπεριφορά ΑΤΠ, ενώ για υψηλές τιμές επιδεικνύει μια συμπεριφορά ΣΤΠ. Αυτή είναι μια ουδιώδης διαφορά σε σχέση με τα αποτελέσματα που έχουμε δει για το μοντέλο του κεφαλαίου 2, αφού σε εκείνο οι πελάτες παρουσιάζουν μόνο συμπεριφορά τύπου ΑΤΠ. Όμως, σε εκείνο το μοντέλο, λόγω της απαγόρευσης των αφίξεων κατά τη διάρκεια των περιόδων επισκευής, το σύστημα είναι λιγότερο συνωστισμένο και έχει αποδειχθεί ότι για

υψηλές τιμές του $R_f - R_s$, οι πελάτες προτιμούν να εισέρχονται ανεξάρτητα από τη στρατηγική των υπολοίπων. Κατά συνέπεια, στο προηγούμενο μοντέλο, γι' αυτήν την περιοχή των παραμέτρων, η στρατηγική εισόδου με πιθανότητα 1 είναι μια ασθενώς κυριαρχούσα στρατηγική και δεν υπάρχει καμία εκδήλωση συμπεριφοράς ΣΤΠ.

- Στο παρόν μοντέλο, στην παρατηρήσιμη περίπτωση, οι στρατηγικές ισορροπίας μπορούν να είναι τύπου κατωφλίου ή αντίστροφου κατωφλίου (βλέπε παράγραφο 3.3 για τους ακριβείς ορισμούς). Αυτό έρχεται πάλι σε αντίθεση με το προηγούμενο μοντέλο όπου οι στρατηγικές ισορροπίας είναι μόνο τύπου κατωφλίου.
- Στο παρόν μοντέλο, στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση, μπορεί να υπάρξουν πολλές στρατηγικές ισορροπίας για μερικές τιμές των παραμέτρων, ενώ στο προηγούμενο μοντέλο υπάρχει πάντα μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Επιπλέον, θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός των στρατηγικών ισορροπίας ποικίλει από μία μέχρι τρεις, ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου. Έτσι, αποδεικνύεται ένας πλήρης χαρακτηρισμός των στρατηγικών ισορροπίας και του αριθμού τους.
- Ο τύπος και ο αριθμός των στρατηγικών ισορροπίας και στην παρατηρήσιμη και στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση εξαρτάται από τις σχετικές τιμές των R_f και R_s . Είναι δυνατό να διαμερίσουμε το επίπεδο των (R_f, R_s) στις περιοχές που αντιστοιχούν στους διάφορους πιθανούς τύπους και αριθμούς των στρατηγικών ισορροπίας.

Η παρούσα μελέτη, από μία άποψη, ρίχνει περισσότερο βάρος στην ανάδειξη της συμπεριφοράς ΣΤΠ που εμφανίζεται σε αυτό το σύστημα υπό προϋποθέσεις. Όπως έχουμε παρατηρήσει παραπάνω, το φαινόμενο ΣΤΠ παρατηρήθηκε αρχικά στα πλαίσια της οικονομικής ανάλυσης στο μοντέλο αγοράς προτεραιοτήτων (βλέπε το βιβλίο των Hassin και Haviv, σελ.75, 83 και τις εργασίες των Adiri και Yechiali (1974) και Hassin και Haviv (1997)). Όσον αφορά το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης των πελατών, η συμπεριφορά ΣΤΠ εμφανίζεται συχνά σε περιπτώσεις (μη-Μαρκοβιανών) συστημάτων αναμονής με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης. Πράγματι, στα μη-Μαρκοβιανά μοντέλα, το φαινόμενο ΣΤΠ συνδέεται με ορισμένες οικογένειες κατανομών για τους χρόνους εξυπηρέτησης, όπως η οικογένεια των κατανομών με φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (Decreasing Failure

Rate-DFR) ή με αύξουσα μέση υπολειπόμενη ζωή (Increasing Mean Residual Lifetime-IMRL) (βλέπε αντίστοιχα Havin και Kerner (2007) και Kerner (2011)). Από την άλλη πλευρά, στρατηγικές συμπεριφορές πελατών τύπου ΣΤΠ εμφανίζονται σπάνια στη βιβλιογραφία των παιγνιοθεωρητικών μελετών Μαρκοβιανών συστημάτων αναμονής. Μια τέτοια περίπτωση που έχει μελετηθεί είναι η περίπτωση των μερικώς παρατηρήσιμων διαστάσεων συστημάτων (βλέπε π.χ. Burnetas και Economou (2007) και Economou και Kanta (2008β)), όταν μόνο ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι παρατηρήσιμος από τους αφικνούμενους πελάτες. Μια άλλη περίπτωση είναι τα συστήματα αναμονής με διακοπές (βλέπε π.χ. Guo και Hassin (2011)), όπου ο υπηρέτης απαιτεί ορισμένους πελάτες για να αρχίσει την εξυπηρέτησή του μετά από μια διακοπή. Πράγματι, είναι διαισθητικά σαφές ότι σε τέτοιες περιπτώσεις, οι αποφάσεις εισόδου ορισμένων πελατών προκαλούν θετικές επιδράσεις για κάποιους πελάτες. Ένα παρόμοιο μοντέλο εμφανίζεται στο παράδειγμα με τις υπηρεσίες μεταφοράς στο βιβλίο των Hassin και Havin, παράγραφος 1.5, όπου ένα μέσο αναχωρεί μόνο όταν έχουν καταληφθεί όλες οι θέσεις του. Από αυτή την άποψη, μια συμβολή της παρούσας διατριβής είναι να αποκαλυφθεί μια άλλη αιτία που επάγει στρατηγικές συμπεριφορές τύπου ΣΤΠ: η ύπαρξη πολλαπλών αμοιβών για την είσοδο σε ένα σύστημα. Πράγματι, η συνύπαρξη της συνηθισμένης αμοιβής εξυπηρέτησης, για εκείνους τους πελάτες που λαμβάνουν την εξυπηρέτηση, και μιας αποζημίωσης, για εκείνους τους πελάτες που αναγκάζονται να εγκαταλείψουν το σύστημα λόγω καταστροφής, είναι που προκαλεί το φαινόμενο ΣΤΠ για κάποιες τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Τέλος, σημειώνουμε ότι το μοντέλο του παρόντος κεφαλαίου θυμίζει επίσης συστήματα στα οποία ο διαχειριστής επεμβαίνει και αναγκάζει τους πελάτες να αποχωρήσουν, προσφέροντάς τους κάποια μορφή αποζημίωσης, όταν η συμφόρηση υπερβεί ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Αυτό συμβαίνει, παραδείγματος χάριν, στον τομέα των υπηρεσιών, όταν παρέχονται στους πελάτες δελτία προτεραιότητας για μια άλλη ημέρα, όταν αναμένεται ότι δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν κατά τη διάρκεια της ίδιας μέρας λόγω έκτακτου συμβάντος.

Το κεφάλαιο δομείται ως εξής. Στην παράγραφο 3.2 περιγράφουμε τη δυναμική του μοντέλου, τη δομή αμοιβής - κόστους και το πλαίσιο αποφάσεων. Στις παραγράφους 3.3 και 3.4 θεωρούμε αντίστοιχα την παρατηρήσιμη περίπτωση και τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση, και προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας. Στην παράγραφο 3.5 μελετάμε το πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης, και στην παρατηρήσιμη και στη μη

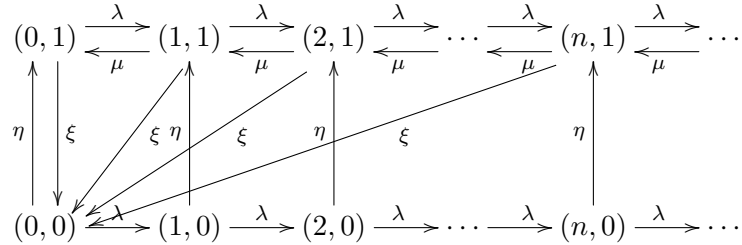
παρατηρήσιμη περίπτωση. Τέλος, στην παράγραφο 3.6 παρουσιάζουμε διάφορα αριθμητικά σενάρια που δείχνουν την επίδραση του επιπέδου πληροφόρησης στη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών.

3.2 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής με έναν υπηρέτη και άπειρο χώρο αναμονής, όπου οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των διαδοχικών πελατών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ρυθμό μ . Οι πελάτες εξυπηρετούνται μεμονωμένα σύμφωνα με την πειθαρχία ουράς First-Come-First-Served (FCFS). Το σύστημα υπόκειται σε καταστροφές που συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό ξ . Όταν συμβαίνει μια καταστροφή, όλοι οι πελάτες αναγκάζονται να εγκαταλείψουν το σύστημα πρόωρα (χωρίς να έχουν εξυπηρετηθεί), ο υπηρέτης καθίσταται ανενεργός και μια διαδικασία επισκευής ξεκινάει. Η διάρκεια ενός χρόνου επισκευής είναι εκθετική με ρυθμό η . Κατά τη διάρκεια ενός χρόνου επισκευής, νέοι πελάτες συνεχίζουν να φθάνουν στο σύστημα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι όλοι οι ενδιαμέσοι χρόνοι αφίξεων, οι χρόνοι εξυπηρέτησης, οι ενδιαμέσοι χρόνοι καταστροφής και οι χρόνοι επισκευής είναι ανεξάρτητοι.

Έστω ότι οι $Q(t)$ και $I(t)$ δηλώνουν αντίστοιχα τον αριθμό πελατών στο σύστημα και την κατάσταση του υπηρέτη τη χρονική στιγμή t , με το 1 να αντιστοιχεί σε ενεργό υπηρέτη και το 0 σε υπηρέτη υπό επισκευή. Τότε, η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t παριστάνεται με το ζεύγος $(Q(t), I(t))$. Η στοχαστική διαδικασία $\{(Q(t), I(t)) : t \geq 0\}$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{(n, i) : n \geq 0, i = 0, 1\}$. Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1.

Ενδιαφερόμαστε για τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών, όταν έχουν την επιλογή να αποφασίσουν αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή θα αποχωρήσουν από αυτό. Διαμορφώνουμε το πλαίσιο αυτής της απόφασης με την εισαγωγή μιας δομής αμοιβής - κόστους, υποθέτοντας ότι κάθε εισερχόμενος πελάτης λαμβάνει είτε μια αμοιβή R_s μονάδων με την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του, είτε μια αποζημίωση R_f μονάδων σε περίπτωση που αναγκαστεί να εγκαταλείψει το σύστημα λόγω μιας βλάβης

Σχήμα 3.1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της $\{(Q(t), I(t))\}$.

(καταστροφής). Η αποζημίωση R_f προσφέρεται στους πελάτες που δεν εξυπηρετούνται για να μετριάσει τη δυσαρέσκειά τους. Επιπλέον, ένας πελάτης υπόκειται σε κόστη αναμονής που συσσωρεύονται με ρυθμό C μονάδων ανά χρονική μονάδα που παραμένει στο σύστημα (είτε στην ουρά αναμονής είτε στην εξυπηρέτηση). Επίσης υποθέτουμε ότι οι πελάτες είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο, δηλαδή θέλουν να μεγιστοποιήσουν το καθαρό όφελός τους, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τη διασπορά του. Τέλος, οι αποφάσεις των πελατών υποτίθενται αμετάκλητες, με την έννοια ότι δεν επιτρέπονται υπαναχωρήσεις των εισελθόντων πελατών, ούτε επαναπροσπάθειες εισόδου των αποχωρησάντων πελατών.

Στις επόμενες παραγράφους, προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών για το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με την πληροφόρηση που παρέχεται στους πελάτες στις στιγμές άφιξής τους, προτού να ληφθούν οι αποφάσεις τους: την παρατηρήσιμη περίπτωση (όπου οι πελάτες παρατηρούν και τις δύο συνιστώσες, $Q(t)$ και $I(t)$) και τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση (όπου οι πελάτες δεν παρατηρούν καμία από τις δύο).

3.3 Η παρατηρήσιμη περίπτωση

Σε αυτή την παράγραφο, μελετάμε το μοντέλο κάτω από την υπόθεση ότι οι αφικνούμενοι πελάτες παρατηρούν την κατάσταση του συστήματος και, κατόπιν, αποφασίζουν αν θα εισέλθουν σε αυτό ή θα αποχωρήσουν. Θα δείξουμε ότι υπάρχει πάντα μια στρατηγική ισορροπίας, η οποία είναι επίσης κυριαρχούσα, υπό την έννοια ότι μεγιστοποιεί το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη, ανεξάρτητα με το τι κάνουν οι υπόλοιποι (με

άλλα λόγια, αυτή η στρατηγική είναι βέλτιστη απάντηση ενάντια σε όλες τις στρατηγικές που μπορούν να ακολουθήσουν οι υπόλοιποι πελάτες). Η στρατηγική χαρακτηρίζεται από ένα ζευγάρι κατωφλίων, ένα για κάθε κατάσταση του υπηρέτη.

Αρχίζουμε την ανάλυση με τον υπολογισμό του αναμενόμενου καθαρού οφέλους ενός πελάτη που παρατηρεί το σύστημα στην κατάσταση (n, i) και αποφασίζει να εισέλθει. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην πρόταση 3.1.

Πρόταση 3.1. Θεωρούμε το παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M/1$ ουράς με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις. Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση $(n, 0)$ και αποφασίζει να εισέλθει δίνεται από τη σχέση

$$S^{(obs)}(n, 0) = R_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right] - \frac{C}{\eta}, \quad n \geq 0. \quad (3.1)$$

Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$ και αποφασίζει να εισέλθει δίνεται από τη σχέση

$$S^{(obs)}(n, 1) = R_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right], \quad n \geq 0. \quad (3.2)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη που βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση $(n, 0)$. Ένας τέτοιος πελάτης, σε σύγκριση με έναν πελάτη που βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$, επιβαρύνεται με ένα πρόσθετο κόστος αναμονής για την ολοκλήρωση του χρόνου επισκευής, με μέση τιμή $\frac{C}{\eta}$. Έτσι,

$$S^{(obs)}(n, 0) = S^{(obs)}(n, 1) - \frac{C}{\eta}. \quad (3.3)$$

Για να προσδιορίσουμε τώρα το $S^{(obs)}(n, 1)$, θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη που βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$ κατά την άφιξή του και αποφασίζει να εισέλθει. Όπως και στο κεφάλαιο 2, έχουμε ότι αυτός ο πελάτης μπορεί να αποχωρήσει από το σύστημα είτε λόγω της ολοκλήρωσης της εξυπηρέτησής του, είτε λόγω μιας καταστροφής. Λόγω των υποθέσεων της ανεξαρτησίας και της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής, παρατηρούμε ότι για την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του, ο πελάτης πρέπει να περιμένει Y_n χρονικές μονάδες, όπου Y_n είναι το άθροισμα $n+1$ ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών με ρυθμό μ . Κατά συνέπεια, η Y_n ακολουθεί

την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $(n + 1, \mu)$. Από την άλλη, ο υπολειπόμενος χρόνος X μέχρι την επόμενη καταστροφή είναι ανεξάρτητος από την Y_n και ακολουθεί την εκθετική κατανομή με ρυθμό ξ . Έτσι, ο χρόνος παραμονής του πελάτη στο σύστημα δίνεται από την $Z_n = \min(Y_n, X)$. Ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης θα εξυπηρετηθεί με πιθανότητα $\Pr[Y_n < X]$, ενώ θα αποχωρήσει από το σύστημα λόγω καταστροφής με τη συμπληρωματική πιθανότητα $\Pr[Y_n \geq X]$. Ως εκ τούτου, το αναμενόμενο καθαρό όφελός του θα είναι

$$S^{(obs)}(n, 1) = R_s \Pr[Y_n < X] + R_f \Pr[Y_n \geq X] - CE[Z_n]. \quad (3.4)$$

Οι πιθανότητες και η μέση τιμή στη σχέση (3.4) μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\Pr[Y_n < X] = \int_0^\infty e^{-\xi y} \frac{\mu^{n+1}}{n!} y^n e^{-\mu y} dy = \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1}$$

και

$$E[Z_n] = \int_0^\infty e^{-\xi z} \int_z^\infty \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u} du dz = \frac{1}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right].$$

Έτσι, συνάγουμε άμεσα τις σχέσεις (3.1) και (3.2). ■

Θεωρούμε τώρα έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη, ο οποίος παρατηρεί την κατάσταση του συστήματος κατά την άφιξή του. Μελετάμε χωριστά δύο περιπτώσεις, σύμφωνα με το αν βρίσκει τον υπηρέτη ανενεργό ή όχι, και καταλήγουμε στα θεωρήματα 3.1 και 3.2 αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.1. *Θεωρούμε το παρατηρήσιμο μοντέλο της M/M/1 ουράς με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις. Τότε, υπάρχει μια μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Εάν ένας αφικνούμενος πελάτης βρει το σύστημα υπό επισκευή, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις σύμφωνα με την τιμή του R_s .*

Περίπτωση I: $R_s < \frac{c}{\eta}$.

Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχουν τρεις υποπεριπτώσεις, όσον αφορά την τιμή της αποζημίωσης, R_f .

Υποπερίπτωση a: $R_f \leq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει.

Υποπερίπτωση b: $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} < R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υποδεικνύει στον πελάτη τον «αντίστροφο κανόνα κατωφλίου» που ορίζει ότι «φθάνοντας σε χρόνο t και βρίσκοντας το σύστημα υπό επισκευή, παρατήρησε το $Q(t)$, εισέλθε αν $Q(t) \geq [n_e(0)]$ και αποχώρησε σε κάθε άλλη περίπτωση», όπου το $n_e(0)$ δίνεται από τη σχέση

$$n_e(0) = \frac{\ln K(0)}{\ln S} - 1, \quad (3.5)$$

με

$$K(0) = \frac{\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f}{R_s - R_f + \frac{C}{\xi}}, \quad S = \frac{\mu}{\mu + \xi} \quad (3.6)$$

και $[x]$ να δηλώνει το μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του x .

Υποπερίπτωση c: $R_f \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Περίπτωση II: $R_s > \frac{C}{\eta}$.

Σε αυτήν την περίπτωση, διακρίνουμε τρεις υποπεριπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της αποζημίωσης, R_f .

Υποπερίπτωση a: $R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει.

Υποπερίπτωση b: $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi} < R_f < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υποδεικνύει στον πελάτη τον κανόνα «κατωφλίου» που ορίζει «φθάνοντας σε χρόνο t και βρίσκοντας το σύστημα υπό επισκευή, παρατήρησε το $Q(t)$: εισέλθε αν $Q(t) \leq [n_e(0)]$ και αποχώρησε διαφορετικά», όπου τα $n_e(0)$, $K(0)$ και S δίνονται από τις σχέσεις (3.5)-(3.6) και το $[x]$ δηλώνει το μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x .

Υποπερίπτωση c: $R_f \geq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Περίπτωση III: $R_s = \frac{C}{\eta}$.

Σε αυτήν την περίπτωση, διακρίνουμε τρεις υποπεριπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της αποζημίωσης R_f .

Υποπερίπτωση a: $R_f < \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει.

Υποπερίπτωση b: $R_f = \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta}$.

Σε αυτήν την περίπτωση κάθε στρατηγική είναι στρατηγική ισορροπίας.

Υποπερίπτωση c: $R_f > \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη που παρατηρεί το σύστημα κατά την άφιξή του. Εάν βρει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 0)$ και αποφασίσει να εισέλθει, τότε το αναμενόμενο καθαρό όφελός του δίνεται από τη σχέση (3.1). Ο πελάτης προτιμά να εισέλθει αν $S^{(obs)}(n, 0) \geq 0$, που μπορεί να γραφεί εύκολα ως

$$\left(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f\right) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}\right)^{n+1} \geq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f. \quad (3.7)$$

Θεωρούμε, επίσης την εξίσωση

$$\left(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f\right) \frac{\mu}{\mu + \xi} = \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f. \quad (3.8)$$

Η διαφορά $R_s - \frac{C}{\eta}$ καθορίζει τη διάταξη του συντελεστή $R_s + \frac{C}{\xi} - R_f$ του αριστερού μέλους της (3.7), του συντελεστή $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$ του δεξιού της μέλους και της ρίζας $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu + \xi)}{\eta \xi}$ της εξίσωσης (3.8) ως προς R_f .

Στην περίπτωση I, έχουμε ότι

$$R_s + \frac{C}{\xi} < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu + \xi)}{\eta \xi}. \quad (3.9)$$

Διακρίνουμε τρεις υποπεριπτώσεις σχετικά με την τιμή του R_f :

$$(I-a) \quad R_f \leq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}.$$

$$(I-b) \quad \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} < R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}.$$

$$(I-c) \quad \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi} \leq R_f.$$

Στην υποπερίπτωση (I-a), ο όρος στο δεξί μέλος της (3.7) είναι θετικός. Επιπλέον, αν $R_f < R_s + \frac{C}{\xi}$, ο συντελεστής $R_s + \frac{C}{\xi} - R_f$ του αριστερού μέλους έχει θετικό πρόσημο, οπότε λύνουμε την ανίσωση $S^{(obs)}(n, 0) \geq 0$ ως προς n και συνάγουμε ότι ο πελάτης προτιμά να εισέλθει αν και μόνο αν $n \leq \lfloor n_e(0) \rfloor$ με τα $n_e(0)$, $K(0)$ και S να δίνονται από τις σχέσεις (3.5)-(3.6). Ωστόσο, παρατηρούμε ότι $n_e(0) < 0$ σε αυτήν την υποπερίπτωση και, επομένως, είναι βέλτιστο για τον τυχαία επιλεγμένο πελάτη να αποχωρήσει. Από την άλλη, αν $R_s + \frac{C}{\xi} < R_f \leq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$, ο συντελεστής στο αριστερό μέλος της (3.7) είναι μη θετικός, ενώ το δεξί μέλος της (3.7) είναι μη-αρνητικό. Σημειώνουμε επίσης ότι αυτοί οι δύο όροι δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα μηδέν. Επομένως, έχουμε ότι $S^{(obs)}(0, 0) < 0$ και είναι βέλτιστο για τον τυχαία επιλεγμένο πελάτη να αποχωρήσει. Συμπερασματικά, οι προηγούμενες περιπτώσεις μπορούν να ενοποιηθούν στην υποπερίπτωση (I-a) του θεωρήματος. Στην υποπερίπτωση (I-b), τόσο ο συντελεστής του αριστερού μέλους της (3.7) όσο και ο όρος στο δεξιό μέλος της είναι αρνητικοί. Έτσι, λύνουμε την ανίσωση $S^{(obs)}(n, 0) \geq 0$ ως προς n και συνάγουμε ότι ο πελάτης προτιμά να εισέλθει αν και μόνο αν $n \geq \lceil n_e(0) \rceil$ με τα $n_e(0)$, $K(0)$ και S να δίνονται από τις (3.5)-(3.6) αντίστοιχα. Επιπλέον, έχουμε ότι $n_e(0) > 0$, εφόσον $R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$. Έτσι, συνάγουμε την υποπερίπτωση (I-b) του θεωρήματος. Τέλος, στην υποπερίπτωση (I-c), τόσο ο συντελεστής στο αριστερό μέλος της (3.7) όσο και ο όρος στο δεξί μέλος είναι αρνητικοί, οπότε έχουμε την ίδια κατάσταση με την υποπερίπτωση (I-b). Ωστόσο, εδώ ισχύει ότι $n_e(0) \leq 0$, καθώς $R_f \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$. Έτσι, είναι προτιμότερο για τον πελάτη να εισέλθει και συνάγουμε την υποπερίπτωση (I-c) του θεωρήματος.

Στην περίπτωση II, έχουμε ότι

$$\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi} < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} < R_s + \frac{C}{\xi}. \quad (3.10)$$

Πάλι, διακρίνουμε τρεις υποπεριπτώσεις σχετικά με την τιμή του R_f :

$$(II-a) \quad R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}.$$

$$(II-b) \quad \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi} < R_f < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}.$$

$$(II-c) \quad \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} \leq R_f.$$

Στην υποπερίπτωση (II-a), και οι δύο όροι της (3.7) είναι θετικοί. Επομένως, λύνουμε την ανίσωση $S^{(obs)}(n, 0) \geq 0$ ως προς n και συνάγουμε ότι ο πελάτης προτιμά να εισέλθει αν και μόνο αν $n \leq \lfloor n_e(0) \rfloor$ με τα $n_e(0)$, $K(0)$ και S να δίνονται από τις (3.5)-(3.6). Ωστόσο, σε αυτήν την υποπερίπτωση ισχύει ότι $n_e(0) < 0$, αφού $R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$. Ως εκ τούτου, στην υποπερίπτωση (II-a), είναι βέλτιστο για τον τυχαία επιλεγμένο πελάτη να αποχωρήσει. Στην υποπερίπτωση (II-b), έχουμε την ίδια κατάσταση με την (II-a), με τη διαφορά ότι $n_e(0) > 0$. Στην υποπερίπτωση (II-c), το δεξί μέλος της (3.7) είναι μη θετικό. Όσον αφορά το πρόσημο του συντελεστή $R_s + \frac{C}{\xi} - R_f$ στο αριστερό μέλος, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} \leq R_f \leq R_s + \frac{C}{\xi}$, τότε ο συντελεστής είναι μη αρνητικός. Επιπλέον, οι δύο όροι δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα μηδέν. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε ότι $S^{(obs)}(n, 0) > 0$ και, άρα, είναι βέλτιστο για τον τυχαία επιλεγμένο πελάτη να εισέλθει. Από την άλλη, αν $R_f > R_s + \frac{C}{\xi}$, τότε και οι δύο όροι της (3.7) είναι αρνητικοί, οπότε και λύνουμε την ανίσωση $S^{(obs)}(n, 0) \geq 0$ ως προς n και συνάγουμε ότι ο πελάτης προτιμά να εισέλθει αν και μόνο αν $n \geq \lceil n_e(0) \rceil$, με τα $n_e(0)$, $K(0)$ και S να δίνονται από τις (3.5)-(3.6). Εντούτοις, έχουμε ότι $n_e(0) < 0$ σε αυτήν την περίπτωση, αφού $R_f > \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$. Επομένως, είναι πάλι βέλτιστο για τον τυχαία επιλεγμένο πελάτη να εισέλθει και οδηγούμαστε στην περίπτωση (II-c) του θεωρήματος.

Στην περίπτωση III, έχουμε ότι

$$\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi} = \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} = R_s + \frac{C}{\xi}. \quad (3.11)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, αν $R_f < \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta}$, η ανισότητα (3.7) δεν είναι αληθής. Ως εκ τούτου είναι βέλτιστο για τον τυχαία επιλεγμένο πελάτη να αποχωρήσει. Αντίθετα, αν $R_f > \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta}$, η ανισότητα (3.7) αληθεύει πάντα και είναι βέλτιστο για τον τυχαία επιλεγμένο πελάτη να εισέλθει. Τέλος, στην περίπτωση όπου $R_f = \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta}$, ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης είναι αδιάφορος μεταξύ της εισόδου και της αποχώρησης. ■

Παρατήρηση 3.1. Η ύπαρξη του αντίστροφου κανόνα κατωφλίου που αναφέρεται στο θεώρημα 3.1, υποπερίπτωση (I-b), για τη βέλτιστη απόφαση ενός πελάτη που βρίσκεται το

σύστημα υπό επισκευή μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: Θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη που βρίσκει το σύστημα ανενεργό κατά την άφιξή του. Αν εισέλθει, θα πρέπει να περιμένει πρώτα να ολοκληρωθεί ο χρόνος επισκευής, και ως εκ τούτου να χρεωθεί τουλάχιστον μέσο κόστος $\frac{C}{\eta}$ μονάδων. Επομένως, εάν η τιμή της αμοιβής εξυπηρέτησης, R_s , είναι μικρότερη από το $\frac{C}{\eta}$, ο πελάτης δεν επιθυμεί στην πραγματικότητα να εξυπηρετηθεί. Εντούτοις, μπορεί να ελπίζει στο να συμβεί μια καταστροφή, προκειμένου να πάρει την αποζημίωση βλάβης, αν είναι ικανοποιητικά μεγάλη. Τότε, είναι λογικό να προτιμά να έχει έναν επαρκή αριθμό πελατών μπροστά του. Αυτοί οι πελάτες υπό κάποια έννοια τον «προστατεύουν» από την εξυπηρέτηση, αφού όσο περισσότεροι είναι, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να αποχωρήσει από το σύστημα λόγω μιας καταστροφής και να λάβει, κατά συνέπεια, την επιθυμητή αποζημίωση βλάβης. Εντούτοις, αυτή η κατάσταση είναι αναγκαστικά παροδική. Πράγματι, αν οι πελάτες υιοθετήσουν μια τέτοια στρατηγική, τότε ο αριθμός των πελατών μπορεί να είναι μεγαλύτερος από το κατώφλι μόνο στην αρχική περίοδο της λειτουργίας του συστήματος, πριν από την πρώτη καταστροφή. Είναι εύκολο να δούμε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος απορροφάται στην κατάσταση $(0, 0)$ μετά την πρώτη καταστροφή.

Θεώρημα 3.2. Θεωρούμε το παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M/1$ ουράς με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις. Σε αυτό, υπάρχει μια μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Αν ένας αφικνούμενος πελάτης βρει τον υπηρέτη ενεργό, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις σύμφωνα με την τιμή του R_f .

Περίπτωση I: $R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει.

Περίπτωση II: $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} < R_f < \frac{C}{\xi}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υποδεικνύει τον κανόνα «κατωφλίου» που ορίζει στον πελάτη «φθάνοντας σε χρόνο t και βρίσκοντας τον υπηρέτη ενεργό, παρατήρησε το $Q(t)$: είσελθε αν $Q(t) \leq [n_e(1)]$ και αποχώρησε διαφορετικά», όπου το $n_e(1)$ δίνεται από τη σχέση

$$n_e(1) = \frac{\ln K(1)}{\ln S} - 1, \quad (3.12)$$

με

$$K(1) = \frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s - R_f + \frac{C}{\xi}}, \quad S = \frac{\mu}{\mu + \xi}. \quad (3.13)$$

Περίπτωση III: $R_f \geq \frac{C}{\xi}$.

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη που παρατηρεί το σύστημα κατά την άφιξή του. Αν βρει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$ και αποφασίσει να εισέλθει, τότε το αναμενόμενο καθαρό όφελός του δίνεται από την (3.2). Ο πελάτης θα προτιμήσει να εισέλθει αν $S^{(obs)}(n, 1) \geq 0$, το οποίο γράφεται εύκολα ως

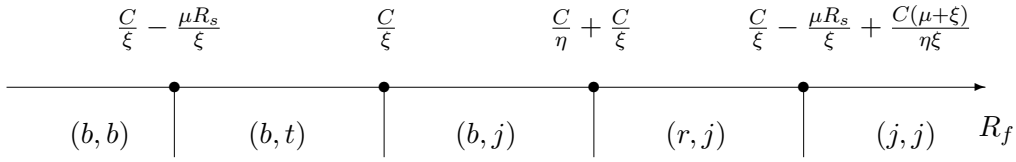
$$\left(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f\right) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}\right)^{n+1} \geq \frac{C}{\xi} - R_f. \quad (3.14)$$

Η ανάλυση τώρα συνεχίζει κατά τον ίδιο τρόπο με την απόδειξη του θεωρήματος 3.1. Έχουμε ότι ισχύει $R_s + \frac{C}{\xi} - R_f > \frac{C}{\xi} - R_f$, οπότε η ανάλυση ακολουθεί τα βήματα της περίπτωσης II του θεωρήματος 3.1. Πράγματι, τα αποτελέσματα μπορούν να συναχθούν θεωρώντας την περίπτωση II του θεωρήματος 3.1 και παίρνοντας $\eta \rightarrow \infty$. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα συμπίπτουν με τον κανόνα της στρατηγικής κατωφλίου που υιοθετείται από τους πελάτες του μοντέλου που περιγράφεται στην παράγραφο 2.3. ■

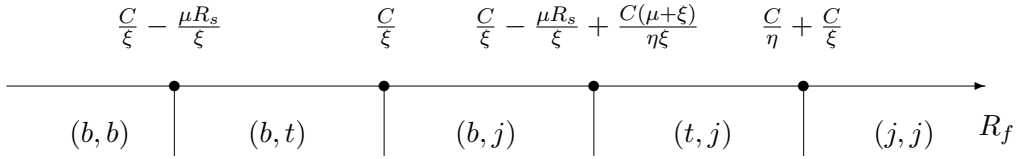
Παρατήρηση 3.2. Συνδυάζοντας τα θεωρήματα 3.1 και 3.2, συνάγουμε τον τύπο της στρατηγικής ισορροπίας (s_0, s_1) , για οποιοδήποτε ζεύγος (R_s, R_f) . Η πρώτη συνιστώσα s_0 αναφέρεται στον κανόνα για έναν πελάτη που βρίσκει τον υπηρέτη υπό επισκευή, ενώ η s_1 αναφέρεται στον κανόνα για έναν πελάτη που βρίσκει τον υπηρέτη ενεργό. Συμβολίζουμε την αποχώρηση με «b» (balk), την είσοδο με «j» (join), μια στρατηγική κατωφλίου με «t» (threshold) και μια αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου με «r» (reverse threshold). Στα σχήματα 3.2, 3.3 και 3.4 μπορούμε να δούμε τη συμπεριφορά του ζεύγους των στρατηγικών κατωφλίων καθώς το R_f μεταβάλλεται. Έχουμε παρουσιάσει και τις τρεις περιπτώσεις, αντίστοιχα, των θεωρημάτων 3.1 και 3.2.

Ένας εναλλακτικός τρόπος παρουσίασης των προηγούμενων αποτελεσμάτων παρουσιάζεται στο σχήμα 3.5. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται ένα γράφημα στο επίπεδο των

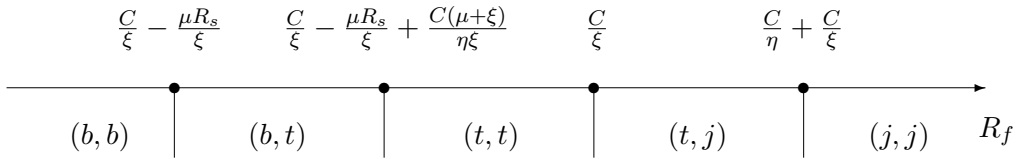
(R_s, R_f) για τις διάφορες περιπτώσεις των στρατηγικών που αναφέρονται στο ζευγάρι των κανόνων, όταν ο υπηρέτης βρίσκεται ενεργός ή όχι. Γι' αυτόν τον σκοπό έχουμε χρησιμοποιήσει τις ευθείες $R_f = \frac{C}{\xi}$, $R_f = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}$, $R_f = \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$ και $R_f = \frac{C}{\eta\xi} (\eta + \xi + \mu) - \frac{\mu R_s}{\xi}$.



Σχήμα 3.2: Τύποι στρατηγικών ισορροπίας ως προς R_f , Περίπτωση I: $R_s \leq \frac{C}{\eta}$

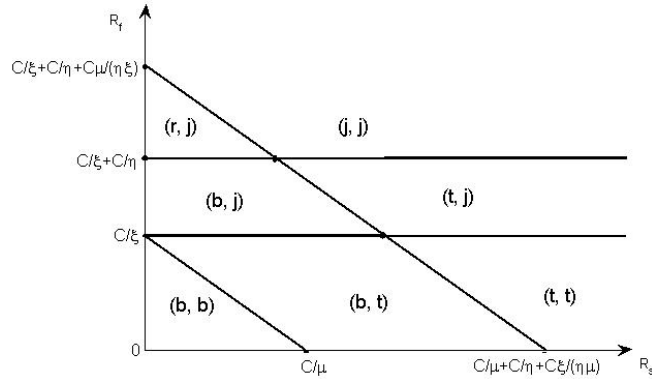


Σχήμα 3.3: Τύποι στρατηγικών ισορροπίας ως προς R_f , Περίπτωση II: $\frac{C}{\eta} < R_s < \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\mu}$



Σχήμα 3.4: Τύποι στρατηγικών ισορροπίας ως προς R_f , Περίπτωση III: $R_s \geq \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\mu}$

Παρατήρηση 3.3. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων 3.1 και 3.2 αποκαλύπτουν ότι η βέλτιστη στρατηγική ενός τυχαία επιλεγμένου πελάτη που φθάνει και βρίσκει n πελάτες στο σύστημα είναι ανεξάρτητη από τις στρατηγικές που υιοθετούνται από τους υπόλοιπους πελάτες. Πράγματι, το αναμενόμενο καθαρό όφελος του τυχαία επιλεγμένου πελάτη δεν επηρεάζεται από τις στρατηγικές των μελλοντικών πελατών, λόγω της πειθαρχίας FCFS.



Σχήμα 3.5: Στρατηγικές ισορροπίες ως προς R_s και R_f - Η παρατηρήσιμη περίπτωση

Από την άλλη, δεδομένου ότι ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης παρατηρεί τον αριθμό των πελατών στο σύστημα κατά την άφιξή του, το αναμενόμενο καθαρό όφελός του δεν επηρεάζεται από τη γνώση των στρατηγικών των προηγούμενων πελατών. Από αυτή την άποψη, η στρατηγική που ορίζεται στις διάφορες περιπτώσεις των θεωρημάτων 3.1 και 3.2 είναι ατομικά βέλτιστη, ανεξάρτητα από τις επιλογές των υπολοίπων πελατών. Κατά την παιγνιοθεωρητική ορολογία που είδαμε στην εισαγωγή, μια τέτοια στρατηγική είναι κυριαρχούσα υπό την έννοια ότι είναι βέλτιστη απάντηση εναντίον οποιασδήποτε στρατηγικής των υπολοίπων.

3.4 Η μη παρατηρήσιμη περίπτωση

Στρέφουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Σε αυτήν την περίπτωση, οι πελάτες γνωρίζουν τις τιμές των παραμέτρων λειτουργίας του συστήματος λ , μ , ξ και η και των οικονομικών παραμέτρων R_s , R_f και C , αλλά δεν παρατηρούν κατά την άφιξή τους την κατάσταση του συστήματος (ούτε την κατάσταση του υπηρέτη, ούτε τον αριθμό των πελατών στο σύστημα). Τότε, το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός τυχαία επιλεγμένου πελάτη επηρεάζεται από τις στρατηγικές των υπολοίπων πελατών και επομένως δεν υπάρχει κάποια κυριαρχούσα στρατηγική (αντιπαράβαλε με την παρατήρηση 3.3). Δεδομένου ότι όλοι οι πελάτες υποτίθενται όμοιοι, μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση αυτή ως συμμετρικό παιχνίδι μεταξύ τους (βλέπε π.χ. στο βιβλίο Hassin

και Haviv σελ.2-3).

Στο παρόν μοντέλο, υπάρχουν μόνο δύο καθαρές στρατηγικές για το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης των πελατών, η είσοδος και η αποχώρηση και, επομένως, μια μικτή στρατηγική χαρακτηρίζεται από την πιθανότητα εισόδου q ενός αφικνούμενου πελάτη. Ο στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας. Γι' αυτόν τον λόγο, θα μελετήσουμε αρχικά τη στάσιμη συμπεριφορά του συστήματος όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν μια μικτή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου q . Σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα συμπεριφέρεται όπως το αρχικό, αλλά με ρυθμό αφίξεων λq αντί για λ .

Πρόταση 3.2. Θεωρούμε το μη παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M/1$ ουρά με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις, όπου οι αφικνούμενοι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα με πιθανότητα q . Οι στάσιμες πιθανότητες του συστήματος, $p^{(un)}(n, i; q)$, δίνονται από τις σχέσεις

$$p^{(un)}(n, 0; q) = \frac{\eta\xi}{(\xi + \eta)(\lambda q + \eta)} \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \eta} \right)^n, \quad n \geq 0, \quad (3.15)$$

$$p^{(un)}(n, 1; q) = c_1(q) (x_2(q))^n + c_2(q) \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \eta} \right)^n, \quad n \geq 0, \quad (3.16)$$

όπου τα $x_2(q)$, $c_1(q)$ και $c_2(q)$ εκφράζονται μέσω των τύπων

$$x_2(q) = \frac{(\lambda q + \mu + \xi) - \sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q \mu}}{2\mu}, \quad (3.17)$$

$$c_1(q) = \frac{\eta^2 (1 - x_2(q)) [\mu - (\lambda q + \eta)]}{(\xi + \eta) [(\lambda q + \eta) (\xi - \eta) + \eta \mu]}, \quad (3.18)$$

$$c_2(q) = \frac{\eta^2 \xi}{(\xi + \eta) [(\lambda q + \eta) (\xi - \eta) + \eta \mu]}. \quad (3.19)$$

Οι πιθανότητες ενεργού και ανενεργού υπηρέτη δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$p^{(un)}(\cdot, 0; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(un)}(n, 0; q) = \frac{\xi}{\xi + \eta}, \quad (3.20)$$

$$p^{(un)}(\cdot, 1; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(un)}(n, 1; q) = \frac{\eta}{\xi + \eta}. \quad (3.21)$$

Τέλος, οι πιθανογεννήτριες

$$\Pi_0^{(un)}(z; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(un)}(n, 0; q) z^n, \quad \Pi_1^{(un)}(z; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(un)}(n, 1; q) z^n$$

δίνονται από τις σχέσεις

$$\Pi_0^{(un)}(z; q) = \frac{\eta\xi}{(\xi + \eta)(\lambda q + \eta - \lambda qz)} \quad (3.22)$$

$$\Pi_1^{(un)}(z; q) = \frac{\eta^2 \mu [1 - x_2(q)] [z - \rho(q)]}{\lambda q (\xi + \eta) [\lambda q - \mu x_2(q) + \eta] [z - \rho_2(q)] \left(\frac{\lambda q + \eta}{\lambda q} - z \right)}, \quad (3.23)$$

όπου

$$\rho(q) = \frac{\lambda q + \eta}{\mu x_2(q)}, \quad (3.24)$$

$$\rho_2(q) = \frac{1}{x_2(q)}. \quad (3.25)$$

Απόδειξη. Σε αυτήν την απόδειξη, θα παραλείψουμε προσωρινά το εκθέτη «un» από το συμβολισμό, όπως επίσης και την εξάρτηση από το q των στάσιμων πιθανοτήτων και των πιθανογεννητριών συναρτήσεων για λόγους συντομίας, δηλαδή θα δηλώνουμε τα $p^{(un)}(n, i; q)$ με $p(n, i)$ και τα $\Pi_i^{(un)}(z; q)$ με $\Pi_i(z)$. Οι εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{(Q(t), I(t))\}$ δίνονται ως εξής:

$$(\lambda q + \eta) p(0, 0) = \xi \sum_{i=0}^{\infty} p(n, 1) = \xi p(\cdot, 1), \quad (3.26)$$

$$(\lambda q + \xi) p(0, 1) = \mu p(1, 1) + \eta p(0, 0), \quad (3.27)$$

$$(\lambda q + \eta) p(n, 0) = \lambda q p(n - 1, 0), \quad n \geq 1, \quad (3.28)$$

$$(\lambda q + \mu + \xi) p(n, 1) = \lambda q p(n - 1, 1) + \mu p(n + 1, 1) + \eta p(n, 0), \quad n \geq 1. \quad (3.29)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.28) με z^n και αθροίζοντας για όλα τα n , συμπεριλαμβάνοντας επιπλέον και την (3.26), προκύπτει ότι

$$\Pi_0(z) = \frac{\xi p(\cdot, 1)}{\lambda q + \eta - \lambda qz}. \quad (3.30)$$

Θέτοντας $z = 1$ στην (3.30) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\Pi_0(1) = p(\cdot, 0)$, καταλήγουμε στο ότι

$$p(\cdot, 0) = \frac{\xi p(\cdot, 1)}{\eta}$$

και, εφόσον $p(\cdot, 0) + p(\cdot, 1) = 1$, συνάγουμε απευθείας τις (3.20) και (3.21). Αντικαθιστώντας την (3.21) στην (3.30) προκύπτει εύκολα η (3.22). Αντιστρέφοντας τώρα την πιθανογεννήτρια της (3.30) ή λύνοντας αναδρομικά την (3.28) προκύπτει η (3.15).

Πολλαπλασιάζοντας την (3.29) με z^n και αθροίζοντας για όλα τα n , συμπεριλαμβανομένης και της (3.27) προκύπτει η

$$[\lambda qz^2 - (\lambda q + \mu + \xi)z + \mu] \Pi_1(z) = \mu(1-z)p(0,1) - \eta z \Pi_0(z). \quad (3.31)$$

Ο συντελεστής της $\Pi_1(z)$ στην (3.31) είναι το τριώνυμο $\lambda qz^2 - (\lambda q + \mu + \xi)z + \mu$ ως προς z . Οι ρίζες του είναι οι $\rho_1(q) = \frac{\mu x_2(q)}{\lambda q}$ και $\rho_2(q) = \frac{1}{x_2(q)}$, με το $x_2(q)$ να δίνεται από την (3.17). Επιπλέον, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $\rho_1(q) \in (0, 1)$, ενώ $\rho_2(q) \in (1, \infty)$. Μπορούμε να θέσουμε $z = \rho_1(q)$ στην (3.31), εφόσον η $\Pi_1(z)$ συγκλίνει στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο ως πιθανογεννήτρια και $\rho_1(q) \in (0, 1)$. Έπειτα, λύνοντας ως προς $p(0, 1)$, συνάγουμε ότι

$$p(0, 1) = \frac{\eta^2 \xi x_2(q)}{(\xi + \eta) [\lambda q - \mu x_2(q)] [\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]}. \quad (3.32)$$

Σημειώνουμε ότι το $x_2(q)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\mu x_2(q)^2 - (\lambda q + \mu + \xi) x_2(q) + \lambda q = 0, \quad (3.33)$$

που εναλλακτικά γράφεται ως

$$\lambda q - \mu x_2(q) = \frac{\xi x_2(q)}{1 - x_2(q)}. \quad (3.34)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.32) και (3.34) έχουμε

$$p(0, 1) = \frac{\eta^2 [1 - x_2(q)]}{(\xi + \eta) [\lambda q + \eta - \mu x_2(q)]}. \quad (3.35)$$

Μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (3.35) και (3.22) στην (3.31) και να λύσουμε ως προς $\Pi_1(z)$. Μετά από μερικούς υπολογισμούς καταλήγουμε στην έκφραση

$$\Pi_1(z) = \frac{\eta^2 \mu [1 - x_2(q)] (1 - z) (\lambda q + \eta - \lambda qz) - \eta^2 \xi z [\lambda q + \eta - \mu x_2(q)]}{\lambda q (\xi + \eta) [\lambda q + \eta - \mu x_2(q)] \left(\frac{\lambda q + \eta}{\lambda q} - z \right) [\lambda qz^2 - (\lambda q + \mu + \xi)z + \mu]}. \quad (3.36)$$

Όπως μπορούμε να δούμε, ο παρανομαστής στην (3.36) είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού ως προς z , με πραγματικές ρίζες $\rho_1(q) \in (0, 1)$, $\rho_2(q) \in (1, \infty)$ και $\frac{\lambda q + \eta}{\lambda q} \in (1, \infty)$. Εφόσον η $\Pi_1(z)$ συγκλίνει στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο, έχουμε αναγκαστικά ότι η $\rho_1(q)$ θα είναι ρίζα του αριθμητή στην (3.36). Επομένως, ο

αριθμητής (που είναι πολυώνυμο δεύτερου βαθμού ως προς z) μπορεί να γραφεί ως $\eta^2 \lambda \mu q [1 - x_2(q)] [z - \rho(q)] [z - \rho_1(q)]$ και η (3.36) πλέον ανάγεται στην (3.23), όπου η $\rho(q)$ είναι η ρίζα του αριθμητή της (3.36), η οποία είναι διαφορετική από την $\rho_1(q)$. Θέτοντας $z = 1$ στην (3.23) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\Pi_1(1) = p(\cdot, 1) = \frac{\eta}{\xi + \eta}$, καθώς και την (3.34) προκύπτει άμεσα η σχέση (3.24).

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε απλά κλάσματα στην (3.23) και αναπτύσσοντας σε δυνάμεις του z συνάγουμε

$$\begin{aligned} \Pi_1(z) &= \frac{\eta^2 \mu [1 - x_2(q)]}{\lambda q (\xi + \eta) [\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]} \left(\frac{A_1(q)}{z - \rho_2(q)} + \frac{A_2(q)}{\frac{\lambda q + \eta}{\lambda q} - z} \right) \\ &= \frac{\eta^2 \mu [1 - x_2(q)]}{\lambda q (\xi + \eta) [\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]} \left[-\frac{A_1(q)}{\rho_2(q)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\rho_2(q)} \right)^n \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda q A_2(q)}{\lambda q + \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda q z}{\lambda q + \eta} \right)^n \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

όπου

$$A_1(q) = \frac{\rho_2(q) - \rho(q)}{\frac{\lambda q + \eta}{\lambda q} - \rho_2(q)} = \frac{\lambda q (\mu - \lambda q - \eta)}{\mu [(\lambda q + \eta)x_2(q) - \lambda q]}, \quad (3.38)$$

$$A_2(q) = \frac{\frac{\lambda q + \eta}{\lambda q} - \rho(q)}{\frac{\lambda q + \eta}{\lambda q} - \rho_2(q)} = \frac{(\lambda q + \eta) [\mu x_2(q) - \lambda q]}{\mu [(\lambda q + \eta)x_2(q) - \lambda q]}, \quad (3.39)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του z^n στο αριστερό και στο δεξί μέλος της (3.37), συνάγουμε ότι τα $p(n, 1)$ είναι της μορφής (3.16), με

$$c_1(q) = -\frac{A_1(q)}{\rho_2(q)} \cdot \frac{\eta^2 \mu [1 - x_2(q)]}{\lambda q (\xi + \eta) [\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]}, \quad (3.40)$$

$$c_2(q) = \frac{\lambda q A_2(q)}{\lambda q + \eta} \cdot \frac{\eta^2 \mu [1 - x_2(q)]}{\lambda q (\xi + \eta) [\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]}. \quad (3.41)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.38)-(3.39) στις (3.40)-(3.41) αντίστοιχα, και κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις, χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα και τη σχέση

$$[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta] [(\lambda q + \eta)x_2(q) - \lambda q] = -x_2(q) [(\lambda q + \eta) (\xi - \eta) + \eta \mu]$$

(η οποία μπορεί εύκολα να επαληθευτεί χρησιμοποιώντας την (3.33)), συνάγουμε τελικά τις (3.18)-(3.19). ■

Επιστρέφουμε τώρα στο αρχικό πρόβλημα. Αρχικά, υπολογίζουμε το καθαρό όφελος ενός πελάτη, ο οποίος αποφασίζει να εισέλθει, όταν οι υπόλοιποι πελάτες εισέρχονται με πιθανότητα q .

Πρόταση 3.3. *Θεωρούμε το μη παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M/1$ ουράς με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις. Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει, όταν οι υπόλοιποι πελάτες εισέρχονται με πιθανότητα q , δίνεται από τη σχέση*

$$S^{(un)}(q) = \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \frac{\eta \mu [\lambda q - \mu x_2(q) + \eta x_2(q)]}{(\xi + \eta) \lambda q [\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]} + R_f - \frac{C}{\xi} - \frac{C \xi}{\eta (\xi + \eta)}. \quad (3.42)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει όταν όλοι οι υπόλοιποι πελάτες εισέρχονται με πιθανότητα q . Εάν ένας τέτοιος πελάτης βρει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 0)$, τότε το καθαρό όφελός του δίνεται από τη σχέση (3.1). Αντίστοιχα, εάν βρει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$, το καθαρό όφελός του δίνεται από την (3.2). Συνεπώς, το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν τη στρατηγική q μπορεί να υπολογιστεί δεσμεύοντας στην κατάσταση που παρατηρεί κατά την άφιξή του. Λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα PASTA, έχουμε ότι η πιθανότητα ένας πελάτης να βρει το σύστημα στην κατάσταση (n, i) κατά την άφιξή του συμπίπτει με την αντίστοιχη

στάσιμη πιθανότητα $p^{(un)}(n, i; q)$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
S^{(un)}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ R_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right] - \frac{C}{\eta} \right\} p_{(n,0;q)}^{(un)} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ R_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right] \right\} p_{(n,1;q)}^{(un)} \\
&= \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} p^{(un)}(n, 0; q) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} p^{(un)}(n, 1; q) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right\} \\
&\quad + \left(R_f - \frac{C}{\eta} - \frac{C}{\xi} \right) \sum_{n=0}^{\infty} p^{(un)}(n, 0; q) + \left(R_f - \frac{C}{\xi} \right) \sum_{n=0}^{\infty} p^{(un)}(n, 1; q) \\
&= \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \frac{\mu}{\mu + \xi} \left\{ \Pi_0^{(un)} \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}; q \right) + \Pi_1^{(un)} \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}; q \right) \right\} \\
&\quad + R_f - \frac{C}{\xi} - \frac{C\xi}{\eta(\xi + \eta)}. \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Θέτοντας $z = \frac{\mu}{\mu + \xi}$ στην (3.31) προκύπτει

$$\Pi_1^{(un)} \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}; q \right) = \frac{\eta(\mu + \xi)}{\lambda q \xi} \Pi_0^{(un)} \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}; q \right) - \frac{\mu + \xi}{\lambda q} p^{(un)}(0, 1; q). \tag{3.44}$$

Συνδυάζοντας τώρα τη σχέση (3.43) και τη σχέση (3.44), και αντικαθιστώντας ακολουθώς τα $\Pi_0^{(un)} \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}; q \right)$ και $p^{(un)}(0, 1; q)$ από τις (3.22) και (3.35) αντίστοιχα, συνάγουμε τελικά την (3.42). ■

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον προσδιορισμό των στρατηγικών ισορροπίας για το δίλημμα εισόδου-απαχώρησης ενός πελάτη στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση.

Λήμμα 3.1. Ορίζουμε τα

$$\phi(q) = \frac{\eta(x_2(q) - 1)}{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta}, \quad q \in [0, 1], \tag{3.45}$$

$$g(q) = \frac{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta x_2(q)}{\lambda q [\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]} = \frac{1 + \phi(q)}{\lambda q}, \quad q \in (0, 1], \tag{3.46}$$

$$g(0) = \lim_{q \rightarrow 0^+} g(q) = \frac{\xi + \eta}{\eta(\mu + \xi)}, \tag{3.47}$$

όπου το $x_2(q)$ ορίζεται από την (3.17). Τότε η $\phi(q)$ είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη και η $g(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $q \in (0, 1)$.

Απόδειξη. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε, χρησιμοποιώντας την (3.34), ότι $\lambda q - \mu x_2(q) > 0$. Επιπλέον, έχουμε ότι $0 < x_2(q) < 1$, λόγω της (3.17), και, επομένως, συμπεραίνουμε ότι $\phi(q) < 0$, για $q \in (0, 1)$. Σημειώνουμε επίσης ότι, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.34), η $\phi(q)$ μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\phi(q) = \frac{-\eta [x_2(q) - 1]^2}{(\xi - \eta) x_2(q) + \eta}. \quad (3.48)$$

Έτσι, έχουμε ότι $\phi(q) = f(x_2(q))$, όπου

$$f(x) = \frac{-\eta (x - 1)^2}{(\xi - \eta) x + \eta} \quad (3.49)$$

και το $x_2(q)$ δίνεται από (3.17). Επομένως,

$$\phi'(q) = f'(x_2(q)) x_2'(q), \quad (3.50)$$

$$\phi''(q) = f''(x_2(q)) (x_2'(q))^2 + f'(x_2(q)) x_2''(q). \quad (3.51)$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (3.17) και (3.49) δυο φορές προκύπτει εύκολα ότι $x_2'(q) > 0$, $x_2''(q) < 0$, για $q \in (0, 1)$ και ότι $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, για $x \in (0, 1)$. Έτσι, οι σχέσεις (3.50) και (3.51) συνεπάγονται ότι $\phi'(q) > 0$ και $\phi''(q) < 0$, δηλαδή ότι η $\phi(q)$ είναι πράγματι γνησίως αύξουσα και κοίλη συνάρτηση.

Παραγωγίζοντας την (3.46) προκύπτει ότι $g'(q) = (q\phi'(q) - \phi(q) - 1)/(\lambda q^2)$. Έστω $w(q) = q\phi'(q) - \phi(q) - 1$ ο αριθμητής της $g'(q)$. Τότε, έχουμε ότι $w'(q) = q\phi''(q) < 0$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $w(q) < w(0) = 0$ και, συνεπώς, $g'(q) < 0$. Επομένως, αποδείξαμε ότι η $g(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $q \in (0, 1)$. ■

Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό των στρατηγικών ισοροπίας.

Πρόταση 3.4. Θεωρούμε το μη παρατηρήσιμο μοντέλο της M/M/1 ουράς με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις. Ορίζουμε

$$\theta = \frac{(\xi + \eta) \left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi + \eta)} - R_f \right)}{\eta\mu \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right)}, \quad (3.52)$$

$$b_e = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu + \xi)}{\eta(\xi + \eta)}, \quad (3.53)$$

$$j_e = \frac{C}{\xi} - \frac{\eta\mu g(1)R_s}{\xi + \eta - \eta\mu g(1)} + \frac{C\xi}{\eta[\xi + \eta - \eta\mu g(1)]}. \quad (3.54)$$

Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις σύμφωνα με την τιμή της διαφοράς $R_f - R_s$ των αμοιβών των πελατών.

Περίπτωση A: $R_f - R_s < \frac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση a: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_f \leq b_e$.

Υποπερίπτωση b: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_f \geq j_e$.

Υποπερίπτωση c: Μια μικτή στρατηγική ισορροπίας με πιθανότητα εισόδου q υπάρχει αν και μόνο αν $b_e < R_f < j_e$. Υπό αυτήν τη συνθήκη, υπάρχει μια μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας με πιθανότητα εισόδου q_e , με το q_e να είναι η μοναδική λύση της εξίσωση $g(q) = \theta$ στο $(0, 1)$.

Περίπτωση B: $R_f - R_s > \frac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση a: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_f \leq b_e$.

Υποπερίπτωση b: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_f \geq j_e$.

Υποπερίπτωση c: Μια μικτή στρατηγική ισορροπίας με πιθανότητα εισόδου q υπάρχει αν και μόνο αν $j_e < R_f < b_e$. Υπό αυτήν τη συνθήκη, υπάρχει μια μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας με πιθανότητα εισόδου q_e , με το q_e να είναι η μοναδική λύση της εξίσωση $g(q) = \theta$ στο $(0, 1)$.

Περίπτωση C: $R_f - R_s = \frac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση a: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_s \leq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ ή, ισοδύναμα, αν $R_f \leq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} + \frac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση b: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_s \geq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ ή, ισοδύναμα, αν $R_f \geq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} + \frac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση c: Μια μικτή στρατηγική ισορροπίας με πιθανότητα εισόδου q υπάρχει αν και μόνο αν $R_s = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ ή, ισοδύναμα, αν $R_f = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} + \frac{C}{\xi}$. Υπό αυτή τη συνθήκη, κάθε μικτή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου q αποτελεί στρατηγική ισορροπίας.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη κατά την άφιξή του και υποθέτουμε ότι όλοι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική με πιθανότητα εισόδου στο σύστημα $q \in [0, 1]$. Τότε, ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης προτιμά να εισέλθει αν και μόνο αν $S^{(un)}(q) > 0$, προτιμά να αποχωρήσει αν και μόνο αν $S^{(un)}(q) < 0$, και είναι αδιάφορος για το αν θα εισέλθει στο σύστημα ή θα αποχωρήσει από αυτό αν και μόνο αν $S^{(un)}(q) = 0$. Κατά συνέπεια, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει αποτελεί μια στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(un)}(0) \leq 0$. Ομοίως, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι μια στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(un)}(1) \geq 0$ και, τέλος, η μικτή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου q είναι μια στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(un)}(q) = 0$.

Υποθέτουμε, αρχικά, ότι $R_f \neq R_s + \frac{C}{\xi}$. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε το θ μέσω της (3.52) και η $S^{(un)}(q)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$S^{(un)}(q) = \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \frac{\eta\mu}{\xi + \eta} (g(q) - \theta), \quad (3.55)$$

με την $g(q)$ να δίνεται από τη σχέση (3.46).

Στην περίπτωση A, ο συντελεστής $R_s - R_f + \frac{C}{\xi}$ της (3.55) είναι θετικός, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι μια στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $g(0) \leq \theta$. Λύνοντας ως προς R_f , συνάγουμε την ισοδύναμη συνθήκη $R_f \leq b_e$, με το b_e να δίνεται από τη

σχέση (3.53) και συνάγουμε την υποπερίπτωση (A-a). Ομοίως, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι μια στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $g(1) \geq \theta$. Λύνοντας ως προς R_f , συνάγουμε την ισοδύναμη συνθήκη $R_f \geq j_e$, με το j_e να δίνεται από τη σχέση (3.54) και, έτσι, συνάγουμε και την υποπερίπτωση (A-b). Τέλος, η μικτή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου $q \in (0, 1)$ είναι μια στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $g(q) = \theta$. Λόγω της μονοτονίας της $g(q)$, που αποδείχθηκε στο λήμμα 3.1, έχουμε ότι η εξίσωση $g(q) = \theta$ έχει μια λύση στο $(0, 1)$ αν και μόνο αν $g(1) < \theta < g(0)$. Λύνοντας ως προς R_f , η συνθήκη αυτή γράφεται ισοδύναμα ως $b_e < R_f < j_e$. Επιπλέον, η μονοτονία της $g(q)$ στο $(0, 1)$ συνεπάγεται επίσης τη μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης $g(q) = \theta$ στο $(0, 1)$ και συνάγουμε, έτσι, και την υποπερίπτωση (A-c).

Στην περίπτωση B, η ανάλυση γίνεται με τον ίδιο τρόπο με την περίπτωση A. Η μόνη διαφορά είναι ότι ο συντελεστής $R_s - R_f + \frac{C}{\xi}$ στην (3.55) είναι αρνητικός κι έτσι πρέπει να αντιστρέψουμε τη φορά σε διάφορες ανισότητες.

Τέλος, στην περίπτωση C, όπου $R_f = R_s + \frac{C}{\xi}$, έχουμε ότι η (3.42) δίνει $S^{(un)}(q) = R_s - \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ και συνάγουμε εύκολα τις περιπτώσεις (C-a), (C-b) και (C-c). ■

Παρατήρηση 3.4. Η απόδειξη της πρότασης 3.4 αποκαλύπτει ότι η συνάρτηση $S^{(un)}(q)$ είναι φθίνουσα ως προς q στην περίπτωση A, αύξουσα ως προς q στην περίπτωση B και σταθερή στην περίπτωση C. Επομένως, στην περίπτωση A οι πελάτες υιοθετούν μια συμπεριφορά ΑΠΠ, ενώ στην περίπτωση B υιοθετούν μια συμπεριφορά ΣΤΠ. Η υπόθεση C είναι μια οριακή περίπτωση, στην οποία η στρατηγική των πελατών δεν επηρεάζει το καθαρό όφελος ενός τυχαία επιλεγμένου πελάτη.

Μπορούμε, τώρα, να προσδιορίσουμε όλες τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών σύμφωνα με τις διάφορες περιπτώσεις των παραμέτρων αμοιβών του μοντέλου.

Θεώρημα 3.3. Θεωρούμε το μη παρατηρήσιμο μοντέλο της M/M/1 ουράς με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις. Σχετικά με τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του R_s .

Περίπτωση I: $R_s < \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.

Υποπερίπτωση a: $R_f \leq j_e$.

Τότε υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει.

Υποπερίπτωση b: $j_e < R_f < b_e$.

Τότε, υπάρχουν τρεις στρατηγικές ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει και μια μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας με πιθανότητα εισόδου $q_e \in (0, 1)$. Η πιθανότητα q_e είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(q) = \theta$ στο $(0, 1)$.

Υποπερίπτωση c: $R_f \geq b_e$.

Τότε υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Περίπτωση II: $R_s > \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.

Υποπερίπτωση a: $R_f \leq b_e$.

Τότε υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει.

Υποπερίπτωση b: $b_e < R_f < j_e$.

Τότε, υπάρχει μια μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Είναι η μικτή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου $q_e \in (0, 1)$, όπου το q_e είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(q) = \theta$ στο $(0, 1)$.

Υποπερίπτωση c: $R_f \geq j_e$.

Τότε υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Περίπτωση III: $R_s = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.

Υποπερίπτωση a: $R_f < b_e = j_e$.

Τότε υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει.

Υποπερίπτωση b: $R_f = b_e = j_e$.

Σε αυτήν την περίπτωση κάθε στρατηγική με πιθανότητα εισόδου $q \in [0, 1]$ αποτελεί στρατηγική ισορροπίας.

Υποπερίπτωση c: $R_f > b_e = j_e$.

Τότε υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Απόδειξη. Μια προσεκτική ματιά στην πρόταση 3.4, δείχνει ότι ο αριθμός και η φύση των στρατηγικών ισορροπίας των πελατών εξαρτώνται από την τιμή του R_f σε σύγκριση με τις ποσότητες b_e , j_e και $R_s + \frac{C}{\xi}$. Ωστόσο, η διάταξη αυτών των ποσοτήτων καθορίζεται από τη διάταξη των R_s και $\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ και έτσι πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις I-III του θεωρήματος.

Στην περίπτωση I, έχουμε ότι $R_s + \frac{C}{\xi} < j_e < b_e$. Κατά συνέπεια, διακρίνουμε πέντε υποπεριπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του R_f .

$$(I-i) \quad R_f < R_s + \frac{C}{\xi}.$$

$$(I-ii) \quad R_f = R_s + \frac{C}{\xi}.$$

$$(I-iii) \quad R_s + \frac{C}{\xi} < R_f \leq j_e.$$

$$(I-iv) \quad j_e < R_f < b_e.$$

$$(I-v) \quad R_f \geq b_e.$$

Οι υποπεριπτώσεις (I-i), (I-ii) και (I-iii) αντιστοιχούν στις υποπεριπτώσεις (A-a), (C-a) και (B-a) της πρότασης 3.4 αντίστοιχα. Επομένως, σε αυτές τις τρεις περιπτώσεις, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας και συνάγουμε την υποπερίπτωση (I-a) του θεωρήματος. Η υποπερίπτωση (I-iv) αντιστοιχεί στις υποπεριπτώσεις (B-a), (B-b) και (B-c) της πρότασης 3.4, οδηγώντας σε δύο καθαρές και μια μικτή στρατηγική ισορροπίας, λαμβάνοντας έτσι την υποπερίπτωση (I-b) του θεωρήματος. Τέλος, η υποπερίπτωση (I-v) αντιστοιχεί στην υποπερίπτωση (B-b) της πρότασης 3.4 οπότε και συμπεραίνουμε ότι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας.

Αυτό μας δίνει την υποπερίπτωση (I-c) του θεωρήματος και ολοκληρώνουμε έτσι την περίπτωση I.

Στην περίπτωση II, έχουμε ότι $b_e < j_e < R_s + \frac{C}{\xi}$. Κατά συνέπεια, διακρίνουμε πάλι πέντε υποπεριπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του R_f .

$$(II-i) \quad R_f \leq b_e.$$

$$(II-ii) \quad b_e < R_f < j_e.$$

$$(II-iii) \quad j_e \leq R_f < R_s + \frac{C}{\xi}.$$

$$(II-iv) \quad R_f = R_s + \frac{C}{\xi}.$$

$$(II-v) \quad R_f > R_s + \frac{C}{\xi}.$$

Όμοια με την περίπτωση I, έχουμε ότι η υποπερίπτωση (II-i) αντιστοιχεί στην υποπερίπτωση (A-a) της πρότασης 3.4. Επομένως, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας και συνάγουμε την υποπερίπτωση (II-a) του θεωρήματος. Η υποπερίπτωση (II-ii) αντιστοιχεί στην υποπερίπτωση (A-c) της πρότασης 3.4 και έχουμε μια μοναδική γνήσια μικτή στρατηγική ισορροπίας. Αυτό δίνει την υποπερίπτωση (II-b) του θεωρήματος. Τέλος, οι υποπεριπτώσεις (II-iii), (II-iv) και (II-v) αντιστοιχούν στις υποπεριπτώσεις (A-b), (C-b) και (B-b) της πρότασης 3.4 αντίστοιχα και υποδεικνύουν την καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει ως τη μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Αυτές οι υποπεριπτώσεις ενοποιούνται στην υποπερίπτωση (II-c) του θεωρήματος.

Τέλος, στην περίπτωση III, έχουμε ότι $R_s + \frac{C}{\xi} = j_e = b_e = \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$. Έτσι, διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις υποπεριπτώσεις, ανάλογα πάλι με την τιμή του R_f .

$$(III-i) \quad R_f < \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.$$

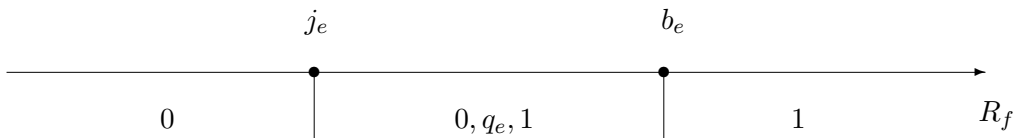
$$(III-ii) \quad R_f = \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.$$

$$(III-iii) \quad R_f > \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.$$

Οι περιπτώσεις (III-i), (III-ii) και (III-iii) αντιστοιχούν στις υποπεριπτώσεις (A-a), (C-c) και (B-b) της πρότασης 3.4 δίνοντας ακολούθως τις υποπεριπτώσεις (III-a), (III-b) και (III-c) του θεωρήματος. ■

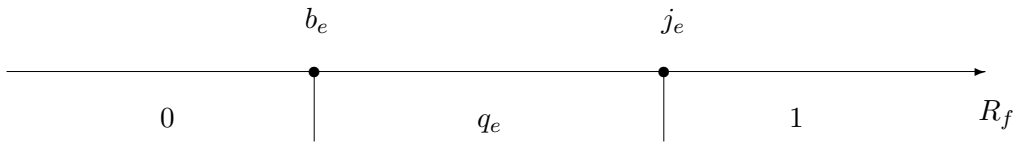
Παρατήρηση 3.5. Όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο θεώρημα, σε μια κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με το πρόσημο της διαφοράς $R_s - \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$. Σημειώνουμε ότι η ποσότητα $\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ είναι το μοναδιαίο κόστος αναμονής, C , που πολλαπλασιάζεται με το μέσο χρόνο επισκευής και με την πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να βρει το σύστημα υπό επισκευή. Με άλλα λόγια, ποσοτικοποιεί το μέσο ποσό «απώλειας» ενός πελάτη, λόγω αναμονής για την ολοκλήρωση της επισκευής.

Παρατήρηση 3.6. Η πρόταση 3.4 δίνει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε οι στρατηγικές που ορίζουν στον πελάτη να αποχωρήσει, να εισέλθει, καθώς και η μικτή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου q να είναι στρατηγικές ισορροπίας. Επιπλέον, δείχνει ότι εάν υπάρχει μια μικτή στρατηγική ισορροπίας, τότε αυτή είναι η μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας. Αυτό, φυσικά, δεν αποκλείει την περίπτωση η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει, ή η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει, ή και οι δυο, να είναι στρατηγικές ισορροπίας επίσης. Από την άλλη, το θεώρημα 3.3 δίνει τον αριθμό και τον τύπο των στρατηγικών ισορροπίας στις διάφορες περιπτώσεις που αντιστοιχούν στη διαμέριση του (R_s, R_f) επιπέδου σε διάφορες περιοχές. Οι στρατηγικές ισορροπίας στις διάφορες περιπτώσεις του θεωρήματος 3.3 παρουσιάζονται γραφικά στα σχήματα 3.6, 3.7 και 3.8, ή, εναλλακτικά, στο σχήμα 3.9, όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τις ευθείες $R_f = b_e(R_s)$ και $R_f = j_e(R_s)$.

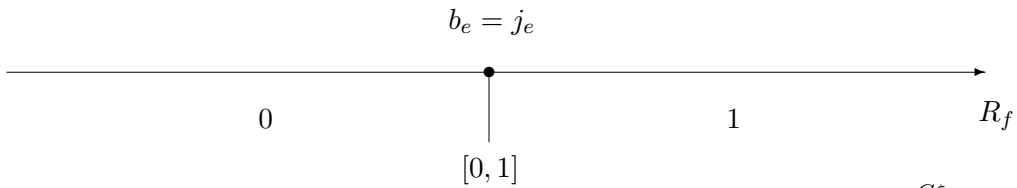


Σχήμα 3.6: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς R_f , Περίπτωση I: $R_s < \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$

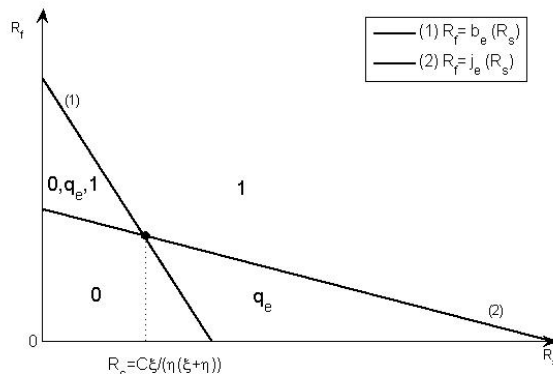
Παρατήρηση 3.7. Έναντι μιας στρατηγικής ισορροπίας s_e , μπορεί να υπάρχει μια βέλτιστη απάντηση $s'_e \neq s_e$ τέτοια ώστε η s'_e να είναι αυστηρώς καλύτερη απάντηση στον εαυτό της από την s_e . Σε αυτήν την περίπτωση, δεδομένου ότι οι πελάτες αρχίζουν με τη στρατηγική s_e , μπορούν όλοι να υιοθετήσουν τη στρατηγική s'_e και μετά δε θα επιστρέψουν ποτέ στην s_e . Από αυτή την άποψη, η s_e είναι ασταθής ή παροδική. Αν δεν



Σχήμα 3.7: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς R_f , Περίπτωση II: $R_s > \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$



Σχήμα 3.8: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς R_f , Περίπτωση III: $R_s = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$



Σχήμα 3.9: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς R_s και R_f - Η μη παρατηρήσιμη περίπτωση

υπάρχει καμία τέτοια s'_e τότε το s_e λέγεται, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην εισαγωγή, ότι είναι μια εξελικτικά ευσταθής στρατηγική (ΕΕΣ) (*evolutionarily stable strategy (ESS)*). Ειδικότερα, μια στρατηγική ισορροπίας η οποία είναι μοναδική βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της είναι ΕΕΣ. Οι ΕΕΣ στρατηγικές αποκλείουν τις ασταθείς στρατηγικές ισορροπίας και θεωρούνται μια χρήσιμη εκκλιση της έννοιας της ισορροπίας. Στο παρόν μοντέλο, έχουμε ότι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, κατά συνέπεια είναι ΕΕΣ, όταν $S^{(un)}(0) < 0$. Ομοίως, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της και, συνεπώς, είναι ΕΕΣ, όταν $S^{(un)}(1) > 0$. Για μια στρατηγική ισορροπίας q_e τέτοια ώστε $S^{(un)}(q_e) = 0$, έχουμε ότι οποιαδήποτε στρατηγική q'_e είναι βέλτιστη απάντηση. Η εξελικτική ευστάθεια της στρατηγικής q_e εξαρτάται, τότε, από τη μονοτονία της $S^{(un)}(q)$. Αν η $S^{(un)}(q)$ είναι αύξουσα, τότε η q_e δεν είναι ΕΕΣ, καθώς μια παρέκκλιση από την q_e για μερικούς πελάτες, κάνει έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη να τους ακολουθήσει στην ίδια κατεύθυνση. Αντίθετα, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η q_e είναι μια ΕΕΣ, αν η $S^{(un)}(q)$ είναι φθίνουσα. Μια προσεκτική ματιά στην απόδειξη του θεωρήματος 3.3, που λαμβάνει υπόψη τη μονοτονία της $S^{(un)}(q)$ στις διάφορες περιπτώσεις, δείχνει ότι στις υποπεριπτώσεις (I-a), (II-a) και (III-a), η καθαρή στρατηγική ισορροπίας που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι ΕΕΣ. Ομοίως, στις υποπεριπτώσεις (I-c), (II-c) και (III-c), η καθαρή στρατηγική ισορροπίας που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι ΕΕΣ. Όμως, η μικτή στρατηγική ισορροπίας q_e στην περίπτωση (I-b) δεν είναι ΕΕΣ, ενώ η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει και αυτή που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι ΕΕΣ. Από την άλλη, η μικτή στρατηγική ισορροπίας q_e στην περίπτωση που (II-b) είναι ΕΕΣ. Τέλος, οποιαδήποτε στρατηγική q στην περίπτωση (III-b) δεν είναι ΕΕΣ.

Παρατήρηση 3.8. Μια γνήσια μικτή στρατηγική ισορροπίας q_e , όποτε υπάρχει στις υποπεριπτώσεις (I-b) και (II-b) του θεωρήματος 3.3, χαρακτηρίζεται ως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(q) = \theta$ στο $(0, 1)$. Αν και αυτή η εξίσωση είναι πολύπλοκη, λόγω της παρουσίας και του q και του $x_2(q)$ στη $g(q)$, που δίνεται από τη σχέση (3.46), είναι δυνατό να δοθεί μια ακριβής «κλειστή» λύση για τον προσδιορισμό του q_e .

Πράγματι, με βάση τη σχέση (3.46), η εξίσωση $g(q) = \theta$ μπορεί να γραφεί ως

$\phi(q) = \theta\lambda q - 1$. Ωστόσο, λύνοντας την (3.33) ως προς q προκύπτει

$$q = \frac{x_2(q) [\mu + \xi - \mu x_2(q)]}{\lambda [1 - x_2(q)]}, \quad (3.56)$$

όπου $\phi(q) = f(x_2(q))$ με την $f(x)$ να δίνεται από τη σχέση (3.49). Ως εκ τούτου, η εξίσωση $\phi(q) = \theta\lambda q - 1$ μπορεί να γραφεί ως

$$f(x_2(q)) = \frac{\theta\lambda x_2(q) [\mu + \xi - \mu x_2(q)]}{\lambda [1 - x_2(q)]} - 1. \quad (3.57)$$

Κάνοντας μερικούς υπολογισμούς, έχουμε ότι η εξίσωση (3.57) παίρνει τη μορφή

$$-\eta (1 - x_2(q))^3 + [\theta\mu x_2(q)^2 - [(\mu + \xi)\theta + 1] x_2(q) + 1] [(\xi - \eta) x_2(q) + \eta] = 0, \quad (3.58)$$

που είναι μια πολυωνυμική εξίσωση τρίτου βαθμού ως προς $x_2(q)$. Τότε, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο σταθερός όρος της είναι 0, κι έτσι μπορούμε να την ανάγουμε στη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$ax_2(q)^2 + bx_2(q) + c = 0, \quad (3.59)$$

όπου

$$\begin{aligned} a &= \eta + \theta\mu(\xi - \eta), \\ b &= \eta\theta\mu - \xi - 2\eta - (\xi - \eta)(\mu + \xi)\theta, \\ c &= \xi + \eta - \eta(\mu + \xi)\theta. \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να λάβουμε τη λύση της $g(q) = \theta$ σε κλειστή μορφή, επιλύοντας πρώτα την (3.59) ως προς $x_2(q)$ και στη συνέχεια υπολογίζοντας το q μέσω της (3.56).

3.5 Το πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης

Μελετάμε τώρα το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του αναμενόμενου καθαρού συνολικού οφέλους των πελατών ανά χρονική μονάδα (πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης). Θεωρούμε χωριστά την παρατηρήσιμη και τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε τις βέλτιστες τιμές των συναρτήσεων του αναμενόμενου καθαρού κοινωνικού οφέλους (ανά χρονική μονάδα) $S_{obs}^{soc}(n)$ και $S_{un}^{soc}(q)$, και

των αντίστοιχων ορισμάτων, n_{soc} και q_{soc} αντίστοιχα. Μελετάμε πρώτα την παρατηρήσιμη περίπτωση και έχουμε την ακόλουθη πρόταση 3.5. Σημειώνουμε ότι, σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτουμε ότι $R_s \geq \frac{C}{\eta}$ προκειμένου να αποφευχθούν οι καταστάσεις παροδικού χαρακτήρα.

Πρόταση 3.5. Θεωρούμε το παρατηρήσιμο μοντέλο της M/M/1 ουράς με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις, όπου ισχύει η ανισότητα $R_s \geq \frac{C}{\eta}$. Το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό κέρδος ανά χρονική μονάδα, δεδομένου ότι οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου του τύπου $(n(0), n(1))$ (δηλαδή οι αφικνούμενοι πελάτες εισέρχονται εφόσον παρατηρούν το πολύ $n(0)$ πελάτες σε ένα σύστημα υπό επισκευή και το πολύ $n(1)$ πελάτες σε ένα ενεργό σύστημα) δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
S_{obs}^{soc}(n(0), n(1)) &= \lambda(R_s - R_f) \\
&\cdot \left\{ (c_5 + p_{obs}(0, 0)) \cdot \frac{\mu(\lambda + \eta)}{\lambda\xi + \eta\mu + \eta\xi} \cdot [1 - (x_3x_4)^{n(0)+1}] \right. \\
&\quad + x_5 \left(c_1 + (c_3 - c_1)x_6^{n(0)+1} - c_3x_6^{n(1)+1} \right) \\
&\quad \left. + x_7 \left(c_2 + (c_4 - c_2)x_8^{n(0)+1} - c_4x_4^{n(1)+1} \right) \right\} \\
&+ \lambda R_f \cdot \left\{ 1 - x_9x_3^{n(0)+1} - c_3x_1^{n(1)+1} - c_4x_2^{n(1)+1} \right\} \\
&- C \cdot \left\{ (c_5 + p_{obs}(0, 0)) \cdot x_3 \cdot \frac{1 - (n(0) + 1)x_3^{n(0)} + n(0)x_3^{n(0)+1}}{(1 - x_3)^2} \right. \\
&\quad + (n(0) + 1)x_9x_3^{n(0)+1} + c_1x_{10} + c_2x_{11} \\
&\quad + (c_1 - c_3) \cdot x_{10} \cdot [n(0)x_1^{n(0)+1} - (n(0) + 1)x_1^{n(0)}] \\
&\quad + (c_2 - c_4) \cdot x_{11} \cdot [n(0)x_2^{n(0)+1} - (n(0) + 1)x_2^{n(0)}] \\
&\quad + c_3 \cdot x_{10} \cdot [(n(1) + 1)x_1^{n(1)+2} - (n(1) + 2)x_1^{n(1)+1}] \\
&\quad \left. + c_4 \cdot x_{11} \cdot [(n(1) + 1)x_2^{n(1)+2} - (n(1) + 2)x_2^{n(1)+1}] \right\}, \\
&n(0) \geq 0, n(1) \geq 0. \tag{3.60}
\end{aligned}$$

όπου $x_1 = x_1(1)$ και $x_2 = x_2(1)$ (χρησιμοποιώντας την (2.16) για $q = 1$) και τα x_3 - x_{11} , c_5 και $p_{obs}(0, 0)$ να δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_3 = \frac{\lambda}{\lambda + \eta}, \quad x_4 = \frac{\mu}{\mu + \xi}, \tag{3.61}$$

$$x_5 = \frac{\mu}{\mu + \xi - \mu x_1}, \quad x_6 = \frac{\mu x_1}{\mu + \xi}, \quad (3.62)$$

$$x_7 = \frac{\mu}{\mu + \xi - \mu x_2}, \quad x_8 = \frac{\mu x_2}{\mu + \xi}, \quad (3.63)$$

$$x_9 = \frac{\xi}{\xi + \eta}, \quad (3.64)$$

$$x_{10} = \frac{x_1}{(1 - x_1)^2}, \quad x_{11} = \frac{x_2}{(1 - x_2)^2}, \quad (3.65)$$

$$p_{obs}(0, 0) = \frac{\eta \xi}{(\lambda + \eta)(\xi + \eta)}, \quad (3.66)$$

$$c_5 = \frac{\eta(\lambda + \eta)}{(\lambda + \eta)(\xi - \eta) + \eta \mu} p_{obs}(0, 0) = \frac{\eta^2 \xi}{(\xi + \eta)[(\lambda + \eta)(\xi - \eta) + \eta \mu]}. \quad (3.67)$$

Οι σταθερές c_1, c_2, c_3 και c_4 υπολογίζονται επιλύοντας το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων (3.68)-(3.71):

$$(\lambda + \xi - \mu x_1) \cdot c_1 + (\lambda + \xi - \mu x_2) \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 + 0 \cdot c_4 = \frac{\eta^2 \xi (\mu - \lambda - \eta)}{(\xi + \eta)[(\lambda + \eta)(\xi - \eta) + \eta \mu]}, \quad (3.68)$$

$$0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + [(\mu + \xi)x_1 - \lambda]x_1^{n(1)} \cdot c_3 + [(\mu + \xi)x_2 - \lambda]x_2^{n(1)} \cdot c_4 = 0, \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} & -x_1^{n(0)+1} \cdot c_1 - x_2^{n(0)+1} \cdot c_2 + x_1^{n(0)+1} \cdot c_3 + x_2^{n(0)+1} \cdot c_4 \\ & = \frac{\eta^2 \xi (\mu - \lambda - \eta)}{(\xi + \eta)[(\lambda + \eta)(\xi - \eta) + \eta \mu]} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \eta} \right)^{n(0)+1}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} & -x_1^{n(0)+2} \cdot c_1 - x_2^{n(0)+2} \cdot c_2 + x_1^{n(0)+2} \cdot c_3 + x_2^{n(0)+2} \cdot c_4 \\ & = \frac{\eta^2 \xi (\mu - \lambda - \eta)}{(\xi + \eta)[(\lambda + \eta)(\xi - \eta) + \eta \mu]} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \eta} \right)^{n(0)+2}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Απόδειξη. Η στάσιμη κατανομή του μοντέλου κάτω από μια στρατηγική κατώφλιου με κατώφλια $(n(0), n(1))$ μπορεί να βρεθεί πάλι χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές. Πράγματι, οι εξισώσεις

ισορροπίας του μοντέλου κάτω από την στρατηγική κατωφλίου $(n(0), n(1))$ είναι:

$$(\lambda + \eta) p_{obs}(0, 0) = \xi \sum_{n=0}^{n(1)+1} p_{obs}(n, 1), \quad (3.72)$$

$$(\lambda + \eta) p_{obs}(n, 0) = \lambda p_{obs}(n-1, 0), \quad 1 \leq n \leq n(0), \quad (3.73)$$

$$\eta p_{obs}(n(0) + 1, 0) = \lambda p_{obs}(n(0), 0), \quad (3.74)$$

$$(\lambda + \xi) p_{obs}(0, 1) = \mu p_{obs}(1, 1) + \eta p_{obs}(0, 0), \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu + \xi) p_{obs}(n, 1) &= \lambda p_{obs}(n-1, 1) + \mu p_{obs}(n+1, 1) + \eta p_{obs}(n, 0), \\ &1 \leq n \leq n(0) + 1, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu + \xi) p_{obs}(n, 1) &= \lambda p_{obs}(n-1, 1) + \mu p_{obs}(n+1, 1), \\ &n(0) + 2 \leq n \leq n(1), \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$(\mu + \xi) p_{obs}(n(1) + 1, 1) = \lambda p_{obs}(n(1), 1). \quad (3.78)$$

Από την εξίσωση (3.73), συμπεραίνουμε άμεσα ότι

$$p_{obs}(n, 0) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \eta} \right)^n p_{obs}(0, 0), \quad 0 \leq n \leq n(0). \quad (3.79)$$

Συνδυάζοντας τις (3.74) και (3.79) έχουμε

$$p_{obs}(n(0) + 1, 0) = \frac{\lambda + \eta}{\eta} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \eta} \right)^{n(0)+1} p_{obs}(0, 0). \quad (3.80)$$

Από τη σχέση (3.72) συνάγουμε άμεσα ότι

$$\sum_{n=0}^{n(1)+1} p_{obs}(n, 1) = \frac{\lambda + \eta}{\xi} p_{obs}(0, 0).$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία, μαζί με τις (3.79) και (3.80), στην εξίσωση κανονικοποίησης, μπορούμε να υπολογίσουμε, μετά από κάποιες απλές αλγεβρικές πράξεις, το $p_{obs}(0, 0)$. Πράγματι, τελικά προκύπτει η (3.66).

Τέλος, συνδυάζοντας τις (3.66), (3.79) και (3.80) καταλήγουμε στις

$$\begin{aligned} p_{obs}(n, 0) &= \frac{\eta \xi}{(\lambda + \eta)(\xi + \eta)} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \eta} \right)^n, \quad 0 \leq n \leq n(0), \quad (3.81) \\ p_{obs}(n(0) + 1, 0) &= \frac{\xi}{\xi + \eta} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \eta} \right)^{n(0)+1}. \end{aligned}$$

Επίσης, από την (3.76), και λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή της (3.81), συμπεραίνουμε

$$p_{obs}(n, 1) = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + c_5 \left(\frac{\lambda}{\lambda + \eta} \right)^n, \quad 0 \leq n \leq n(0) + 2, \quad (3.82)$$

όπου τα x_1 και x_2 είναι όπως διατυπώθηκαν στην πρόταση. Απομένει, λοιπόν να προσδιοριστούν οι σταθερές c_1 , c_2 και c_5 . Ομοίως, χρησιμοποιώντας την (3.77), συνάγουμε ότι

$$p_{obs}(n, 1) = c_3 x_1^n + c_4 x_2^n, \quad n(0) + 1 \leq n \leq n(1) + 1, \quad (3.83)$$

όπου οι σταθερές c_3 και c_4 πρέπει επίσης να προσδιοριστούν. Αντικαθιστώντας, την ποσότητα $c_5 \left(\frac{\lambda}{\lambda + \eta} \right)^n$ ως μια ειδική λύση στην (3.76), μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά c_5 , κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς. Πράγματι, καταλήγουμε στην (3.67). Αντικαθιστώντας την (3.67) στην (3.82) και λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (3.83), έχουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} p_{obs}(n, 1) &= c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \frac{\eta^2 \xi}{(\xi + \eta) [(\lambda + \eta)(\xi - \eta) + \eta \mu]} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \eta} \right)^n, \\ &0 \leq n \leq n(0) + 2, \\ p_{obs}(n, 1) &= c_3 x_1^n + c_4 x_2^n, \quad n(0) + 1 \leq n \leq n(1) + 1. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Έτσι, το μόνο πράγμα που απομένει είναι ο προσδιορισμός των σταθερών c_1 , c_2 , c_3 και c_4 , οι οποίες και προκύπτουν με την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 4 εξισώσεων. Η πρώτη εξίσωση προκύπτει από τις (3.75) και (3.84). Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από τις (3.78), και (3.84). Οι άλλες δύο εξισώσεις για τον προσδιορισμό των σταθερών προκύπτουν από τις (3.84) για $n = n_e(0) + 1$ και $n = n_e(0) + 2$. Κάνοντας κάποιες απλοποιήσεις, καταλήγουμε στις εξισώσεις (3.68)-(3.71).

Επιστρέφουμε τώρα στο πρόβλημα υπολογισμού του αναμενόμενου καθαρού κοινωνικού οφέλους ανά χρονική μονάδα που δίνεται από τη σχέση

$$S_{obs}^{soc}(n) = \lambda P_{obs}^{ser} R_s + \lambda P_{obs}^{cat} R_f - CE_{obs}[Q], \quad (3.85)$$

όπου τα P_{obs}^{ser} και P_{obs}^{cat} είναι τα ποσοστά των πελατών που αποχωρούν τελικά από το σύστημα λόγω εξυπηρετήσεων και καταστροφών αντίστοιχα και το $E_{obs}[Q]$ είναι ο μέσος

αριθμός των πελατών στο σύστημα. Έχουμε

$$P_{obs}^{ser} = \sum_{k=0}^{n(0)} p_{obs}(k, 0) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} + \sum_{k=0}^{n(1)} p_{obs}(k, 1) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1}, \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} P_{obs}^{cat} &= \sum_{k=0}^{n(0)} p_{obs}(k, 0) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \right] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n(1)} p_{obs}(k, 1) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \right], \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$E_{obs}[Q] = \sum_{k=0}^{n(0)+1} k p_{obs}(k, 0) + \sum_{k=0}^{n(1)+1} k p_{obs}(k, 1). \quad (3.88)$$

Υπολογίζοντας τα γεωμετρικά αθροίσματα στις (3.86) - (3.88) και αντικαθιστώντας στην (3.85), προκύπτει, μετά από μερικές πράξεις, η (3.60). ■

Δυστυχώς, η ιδιαίτερα πολύπλοκη μορφή της (3.60) δεν επιτρέπει τον προσδιορισμό του μεγίστου της σε κλειστή αναλυτική μορφή, αλλά μπορεί να αξιοποιηθεί για τον αριθμητικό υπολογισμό του.

Επιστρέφουμε τώρα στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Εδώ, υποθέτουμε πάλι ότι ο διαχειριστής του συστήματος μπορεί να επιβάλει ένα αντίτιμο εισόδου, έστω p , τροποποιώντας την αμοιβή των πελατών από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής τους σε $R_s - p$ μονάδες. Με αυτό τον τρόπο, μπορεί να αναγκάσει τους στρατηγικούς πελάτες να υιοθετήσουν μια συγκεκριμένη πιθανότητα εισόδου που βελτιστοποιεί το κοινωνικό όφελος ή το κέρδος το ανά χρονική μονάδα. Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στον υπολογισμό της βέλτιστης πιθανότητας εισόδου, q_{soc} , η οποία μεγιστοποιεί το καθαρό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα. Για να προχωρήσουμε, αρχικά παραθέτουμε τις ακόλουθες προτάσεις, για τον υπολογισμό του καθαρού κοινωνικού οφέλους ανά χρονική μονάδα και της παραγωγού του.

Πρόταση 3.6. Θεωρούμε το μη παρατηρήσιμο μοντέλο της Μ/Μ/1 ουράς με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις. Το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα, δεδομένου ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν μια μικτή στρατηγική με

πιθανότητα εισόδου q (δηλ. οι αφικνούμενοι πελάτες εισέρχονται με πιθανότητα q) δίνεται από τη σχέση

$$S_{un}^{soc}(q) = \begin{cases} \lambda q \cdot (R_s - R_f + \frac{C}{\xi}) \cdot \frac{\eta\mu}{\xi+\eta} (g(q) - \theta), & \text{αν } R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \neq 0 \\ \lambda q \cdot (R_s - \frac{C\xi}{\xi(\xi+\eta)}), & \text{αν } R_s - R_f + \frac{C}{\xi} = 0, \end{cases} \quad (3.89)$$

όπου η $g(q)$ και το θ εκφράζονται μέσω των σχέσεων (3.46) και (3.52).

Απόδειξη. Το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα μπορεί να εκφραστεί μέσω της σχέσης

$$S_{un}^{soc}(n) = \lambda P_{un}^{ser} R_s + \lambda P_{un}^{cat} R_f - C E_{un}[Q], \quad (3.90)$$

όπου τα P_{un}^{ser} και P_{un}^{cat} είναι τα ποσοστά των πελατών που αποχωρούν τελικά από το σύστημα λόγω εξυπηρέτησης και καταστροφών αντίστοιχα και το $E_{un}[Q]$ είναι ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα. Ανάλογα με τους υπολογισμούς που κάναμε στην παρατηρήσιμη περίπτωση για τη συνάρτηση του κοινωνικού οφέλους, μπορούμε να υπολογίσουμε τα P_{un}^{ser} , P_{un}^{cat} και το $E_{un}[Q]$ ως εξής:

$$P_{un}^{ser} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{un}(k, 0) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} p_{un}(k, 1) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1}, \quad (3.91)$$

$$P_{un}^{cat} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{un}(k, 0) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} p_{un}(k, 1) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{k+1} \right], \quad (3.92)$$

$$E_{un}[Q] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_{un}(k, 0) + \sum_{k=0}^{\infty} k p_{un}(k, 1). \quad (3.93)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.91), (3.92) και (3.93) στην (3.90), σύμφωνα και με το συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε στην πρόταση (3.2), έχουμε ότι

$$S_{un}^{soc}(q) = \lambda q (R_s - R_f) \frac{\mu}{\mu + \xi} \left\{ \Pi_0 \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right) + \Pi_1 \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right) \right\} + \lambda q R_f - C \left\{ \Pi'_0(1) + \Pi'_1(1) \right\}. \quad (3.94)$$

Από τη σχέση (3.44) εκφράζουμε το $\Pi_1\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)$ συναρτήσει του $\Pi_0\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)$. Επιπλέον, θέτοντας $z = \frac{\mu}{\mu+\xi}$ στον τύπο της $\Pi_0(z)$, όπως δίνεται στην (3.22), και συνδυάζοντας εν συνεχεία την έκφραση που προκύπτει με τη σχέση (3.44), καταλήγουμε στη σχέση

$$\Pi_0\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right) + \Pi_1\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right) = \frac{\eta(\mu+\xi)}{\xi+\eta} \cdot \frac{1}{\lambda q} \cdot \left[1 - \frac{\eta(1-x_2(q))}{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta}\right]. \quad (3.95)$$

Επίσης, παραγωγίζοντας την (3.31) και θέτοντας $z = 1$, προκύπτει

$$\Pi'_0(1) + \Pi'_1(1) = \frac{\xi+\eta}{\xi}\Pi'_0(1) + \frac{\eta}{\xi}\Pi_0(1) + \frac{\mu}{\xi}p(0,1) + \frac{\lambda q - \mu - \xi}{\xi}\Pi_1(1). \quad (3.96)$$

Σημειώνουμε ότι το $p(0,1)$ μπορεί να προκύψει άμεσα από τη σχέση (3.35) της παραγράφου 3.4. Επιπλέον, το $\Pi_0(1)$ μπορεί να υπολογιστεί θέτοντας $z = 1$ στην (3.22). Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς, συνάγουμε ότι $\Pi_0(1) = \frac{\xi}{\xi+\eta}$. Από την τελευταία, μπορούμε άμεσα να καταλήξουμε στην $\Pi_1(1) = \frac{\eta}{\xi+\eta}$. Τέλος, παραγωγίζοντας την (3.22) και θέτοντας $z = 1$, μετά από μερικούς άμεσους υπολογισμούς έχουμε ότι $\Pi'_0(1) = \frac{\lambda q \xi}{\eta(\xi+\eta)}$. Επομένως, αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στην σχέση (3.96), προκύπτει τελικά ότι

$$\Pi'_0(1) + \Pi'_1(1) = \frac{\lambda q}{\eta} + \frac{\eta(\lambda q - \mu)}{\xi(\xi+\eta)} + \frac{\eta^2 \mu (1 - x_2(q))}{\xi(\lambda q - \mu x_2(q) + \eta)(\xi+\eta)}. \quad (3.97)$$

Ακολούθως, αντικαθιστούμε τις (3.95) και (3.97) στην (3.94). Μετά από μερικούς υπολογισμούς, έχουμε

$$S_{un}^{soc}(q) = \frac{\eta\mu}{\xi+\eta} \cdot \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right) \cdot \frac{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta x_2(q)}{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta} + \lambda q \cdot \left(R_f - \frac{C}{\xi} - \frac{C\xi}{\xi(\xi+\eta)}\right).$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη τη μορφή της $g(q)$, όπως αυτή ορίστηκε στη σχέση (3.46), συνάγουμε τελικά τους δύο κλάδους της σχέσης (3.89). ■

Πρόταση 3.7. Η παράγωγος της συνάρτησης του αναμενόμενου καθαρού κοινωνικού οφέλους ανά χρονική μονάδα όταν ισχύει η συνθήκη $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \neq 0$ δίνεται από τη σχέση

$$(S_{un}^{soc}(q))' = \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right) \cdot \frac{\eta\mu}{\xi+\eta} \cdot (\phi'(q) - \lambda\theta), \quad (3.98)$$

όπου η $\phi(q)$ ορίζεται από την (3.45).

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας τη σχέση (3.89) προκύπτει άμεσα ότι

$$(S_{un}^{soc}(q))' = \lambda \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \cdot \frac{\eta\mu}{\xi + \eta} \cdot (g(q) + qg'(q) - \theta),$$

όπου η $g(q)$ έχει οριστεί στη σχέση (3.46). Ωστόσο, αν λάβουμε υπόψη τη σχέση των $\phi(q)$ και $g(q)$, όπως αυτή φαίνεται μέσα από τις σχέσεις (3.45) και (3.46), μπορούμε άμεσα να συνάγουμε ότι

$$g(q) + qg'(q) = \frac{\phi'(q)}{\lambda}.$$

Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων εξισώσεων ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Στη συνέχεια προχωράμε στον υπολογισμό της πιθανότητας q_{soc} που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα. Αρχικά, σημειώνουμε ότι οποιαδήποτε ρίζα της εξίσωσης $(S_{un}^{soc})'(q) = 0$ μπορεί να χαρακτηριστεί ισοδύναμα ως ρίζα της εξίσωσης $\phi'(q) = 0$. Σε αυτό το σημείο, υπενθυμίζουμε ότι η $\phi(q)$ είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη συνάρτηση του q . Επομένως, η $\phi'(q)$ είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και, κατά συνέπεια, η εξίσωση $(S_{un}^{soc})'(q) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα. Επιπλέον, έχουμε ότι

- αν $(S_{un}^{soc})'(q) > 0$ για κάθε q στο $[0, 1]$, τότε $q_{soc} = 1$.
- αν $(S_{un}^{soc})'(q) < 0$ για κάθε q στο $[0, 1]$, τότε $q_{soc} = 0$.
- αν $(S_{un}^{soc})'(q) = 0$ για κάθε q στο $[0, 1]$, τότε οποιοδήποτε q στο $[0, 1]$ είναι βέλτιστο, $q_{soc} = q$.
- αν η $(S_{un}^{soc})'(q)$ δε διατηρεί πρόσημο μέσα στο $[0, 1]$, τότε το μέγιστο της $S_{soc}^{un}(q)$ θα επιτυγχάνεται είτε στη μοναδική ρίζα της εξίσωσης $(S_{un}^{soc})'(q) = 0$, είτε σε ένα από τα δύο άκρα, $q = 0$ ή $q = 1$.

Επομένως, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.8. Θεωρούμε το μη παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M/1$ ουράς με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις και έναν τυχαία επιλεγμένο αφικνούμενο πελάτη. Έστω θ και b_e όπως ορίζονται στις (3.52) και (3.53) αντίστοιχα. Ορίζουμε επίσης

$$j_{soc} = \frac{C}{\xi} - \frac{\eta\mu (g(1) + g'(1)) R_s}{\xi + \eta - \eta\mu (g(1) + g'(1))} + \frac{C\xi}{\eta[\xi + \eta - \eta\mu (g(1) + g'(1))]} \quad (3.99)$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή της διαφοράς $R_f - R_s$ των δύο αμοιβών.

Περίπτωση A: $R_f - R_s < \frac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση a: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική αν και μόνο αν $R_f \leq b_e$.

Υποπερίπτωση b: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική αν και μόνο αν $R_f \geq j_{soc}$.

Υποπερίπτωση c: Μια γνήσια μικτή κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική υπάρχει αν και μόνο αν $b_e < R_f < j_{soc}$. Κάτω από αυτή τη συνθήκη, η στρατηγική αυτή υποδεικνύει στον πελάτη να εισέλθει με πιθανότητα q_{soc} , όπου το q_{soc} είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\phi'(q) = \lambda\theta$ στο $(0, 1)$.

Περίπτωση B: $R_f - R_s > \frac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση a: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, αν και μόνο αν $R_f \leq j_{soc}$ (υποπερίπτωση i) ή αν οι συνθήκες $j_{soc} < R_f < b_e$ και $R_f \leq j_e$ ισχύουν ταυτόχρονα (υποπερίπτωση ii).

Υποπερίπτωση b: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, αν και μόνο αν $R_f \geq b_e$ (υποπερίπτωση i) ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν οι συνθήκες $j_{soc} < R_f < b_e$ και $R_f \geq j_e$ ισχύουν ταυτόχρονα (υποπερίπτωση ii).

Περίπτωση C: $R_f - R_s = \frac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση a: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, αν και μόνο αν $R_s \leq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν $R_f \leq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} + \frac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση b: Η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, αν και μόνο αν $R_s \geq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν $R_f \geq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} + \frac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση c: Μια γνήσια μικτή στρατηγική ισορροπίας υπάρχει αν και μόνο αν $R_s = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν $R_f = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} + \frac{C}{\xi}$. Υπό αυτή τη συνθήκη, κάθε μικτή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου $q \in [0, 1]$ είναι κοινωνικά βέλτιστη.

Απόδειξη.

Αρχικά υποθέτουμε ότι $R_f \neq R_s + \frac{C}{\xi}$. Τότε, η $S_{un}^{soc}(q)$ μπορεί να γραφεί στην μορφή του πρώτου κλάδου της (3.89), με τη $g(q)$ να δίνεται από τη σχέση (3.46). Διακρίνουμε, τώρα, δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το πρόσημο της ποσότητας $R_s - R_f + \frac{C}{\xi}$.

Στην περίπτωση A, ο συντελεστής $R_s - R_f + \frac{C}{\xi}$ στη σχέση (3.98) είναι θετικός, κι έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, αν $\phi'(0) \leq \lambda\theta$, τότε $\phi'(q) \leq \lambda\theta$ για κάθε q στο $(0, 1)$, και, επομένως, θα ισχύει $(S_{un}^{soc}(q))' \leq 0$ για κάθε q στο $(0, 1)$. Επομένως, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική σε αυτήν την περίπτωση. Λύνοντας ως προς R_f , συνάγουμε την ισοδύναμη συνθήκη $R_f \leq b_e$, με το b_e να δίνεται από την (3.53) και συνάγουμε την υποπερίπτωση (A-a). Ομοίως, αν $\phi'(1) \geq \lambda\theta$, τότε $\phi'(q) \geq \lambda\theta$ για κάθε q στο $(0, 1)$, και, επομένως, θα ισχύει $(S_{un}^{soc}(q))' \geq 0$ για κάθε q στο $(0, 1)$. Σε αυτήν την περίπτωση, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική. Λύνοντας πάλι ως προς R_f , συνάγουμε την ισοδύναμη συνθήκη $R_f \geq j_{soc}$, με το j_{soc} να δίνεται από τη (3.99) και συνάγουμε την υποπερίπτωση (A-b). Τέλος, αν $\phi'(1) < \lambda\theta < \phi'(0)$, συμπεραίνουμε άμεσα ότι $(S_{un}^{soc}(q))' > 0$ για $q < q_{soc}$ και $(S_{un}^{soc}(q))' < 0$ για $q > q_{soc}$, όπου το q_{soc} είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $(S_{un}^{soc}(q))' = 0$ ή, ισοδύναμα, της εξίσωσης $\phi'(q) = \lambda\theta$. Επομένως, η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι η μικτή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου q_{soc} . Λύνοντας ως προς R_f , η παραπάνω συνθήκη γράφεται ισοδύναμα $b_e < R_f < j_{soc}$ και συνάγουμε, έτσι, και την υποπερίπτωση (A-c).

Στην περίπτωση B, η ανάλυση γίνεται όμοια με την περίπτωση A. Η μόνη διαφορά είναι ότι ο συντελεστής $R_s - R_f + \frac{C}{\xi}$ στον πρώτο κλάδο της (3.89) είναι αρνητικός κι έτσι πρέπει να αντιστρέψουμε τη φορά σε διάφορες ανισότητες για τις περιπτώσεις (B-a-i) και (B-b-i). Ωστόσο, σημειώνουμε ότι, αν $j_{soc} < R_f < b_e$, κάνοντας τις κατάλληλες αντιστροφές, έχουμε ότι $(S_{un}^{soc}(q))' < 0$ για $q < q_{soc}$ και $(S_{un}^{soc}(q))' > 0$ για $q > q_{soc}$, όπου το q_{soc} είναι πάλι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\phi'(q) = \lambda\theta$. Επομένως, η μοναδική

κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική επιτυγχάνεται είτε για $q = 0$ είτε για $q = 1$. Εντούτοις, μπορεί εύκολα να ελεγχθεί ότι $S_{un}^{soc}(1) = \lambda \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi} \right) \cdot \frac{\eta\mu}{\xi+\eta} (g(1) - \theta)$. Έτσι, αν $g(1) < \theta$ συμπεραίνουμε ότι $S_{un}^{soc}(1) > S_{un}^{soc}(0) = 0$, και, έτσι, η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει σε αυτήν την περίπτωση. Από την $g(1) < \theta$ συνάγουμε την ισοδύναμη συνθήκη $R_f > j_e$ και έχουμε έτσι ολοκληρώσει την περίπτωση (B-b-ii). Σύμφωνα με την ίδια διαδικασία, καταλήγουμε και στην υποπερίπτωση (B-a-ii).

Τέλος, στην περίπτωση C, όπου $R_f = R_s + \frac{C}{\xi}$, έχουμε ότι η (3.89) ανάγεται στη $S^{(un)}(q) = R_s - \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$, όπως φαίνεται στο δεύτερο κλάδο της και, επομένως, εύκολα συνάγουμε τις υποπεριπτώσεις (C-a), (C-b) και (C-c). ■

Μπορούμε, λοιπόν, τώρα να προσδιορίσουμε όλες τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές σύμφωνα με τις διάφορες περιπτώσεις των παραμέτρων λειτουργίας και της δομής αμοιβής - κόστους του μοντέλου.

Θεώρημα 3.4. Θεωρούμε το μη παρατηρήσιμο μοντέλο της M/M/1 ουράς με καταστροφές και επιτρεπόμενες αφίξεις και έναν τυχαία επιλεγμένο αφικνούμενο πελάτη. Σχετικά με το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της αμοιβής R_s .

Περίπτωση I: $R_s < \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.

Υποπερίπτωση a: $R_f < j_e$.

Τότε, η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει.

Υποπερίπτωση b: $R_f = j_e$.

Τότε, υπάρχουν δύο κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές: η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει και η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Υποπερίπτωση c: $R_f > j_e$.

Τότε, η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Περίπτωση II: $R_s > \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.

Υποπερίπτωση a: $R_f \leq b_e$.

Τότε, η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει.

Υποπερίπτωση b: $b_e < R_f < j_{soc}$.

Τότε, υπάρχει μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική και είναι η μικτή στρατηγική που ορίζει πιθανότητα εισόδου $q_{soc} \in (0, 1)$, όπου το q_{soc} είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\phi'(q) = \lambda\theta$ στο $(0, 1)$, ως προς q .

Υποπερίπτωση c: $R_f \geq j_e$.

Τότε, η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Περίπτωση III: $R_s = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.

Υποπερίπτωση a: $R_f < b_e = j_e = j_{soc}$.

Τότε, η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει.

Υποπερίπτωση b: $R_f = b_e = j_e = j_{soc}$.

Τότε κάθε στρατηγική με πιθανότητα εισόδου $q \in [0, 1]$ είναι κοινωνικά βέλτιστη.

Υποπερίπτωση c: $R_f > b_e = j_e = j_{soc}$.

Τότε, η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει.

Απόδειξη. Μια προσεκτική ματιά στις διάφορες περιπτώσεις της πρότασης 3.8, αποκαλύπτει ότι ο αριθμός και η φύση των στρατηγικών ισορροπίας των πελατών εξαρτώνται από την τιμή του R_f σε σύγκριση με τις ποσότητες b_e , j_e , j_{soc} και $R_s + \frac{C}{\xi}$. Ωστόσο, η διάταξη αυτών των ποσοτήτων καθορίζεται από τη διάταξη των R_s και $\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ και, έτσι, συνάγουμε τις περιπτώσεις I-III του θεωρήματος.

Στην περίπτωση I, έχουμε ότι $R_s + \frac{C}{\xi} < j_{soc} < j_e < b_e$. Έτσι, διακρίνουμε επτά υποπεριπτώσεις, σύμφωνα με την τιμή του R_f .

$$(I-i) \quad R_f < R_s + \frac{C}{\xi}.$$

$$(I-ii) \quad R_f = R_s + \frac{C}{\xi}.$$

$$(I-iii) \quad R_s + \frac{C}{\xi} < R_f < j_{soc}.$$

$$(I-iv) \quad j_{soc} \leq R_f < j_e.$$

$$(I-v) \quad R_f = j_e.$$

$$(I-vi) \quad j_e < R_f \leq b_e.$$

$$(I-vii) \quad R_f > b_e.$$

Οι υποπεριπτώσεις (I-i), (I-ii), (I-iii) και (I-iv) αντιστοιχούν στις υποπεριπτώσεις (A-a), (C-a), (B-a-i) και (B-a-ii) της πρότασης 3.8 αντίστοιχα. Επομένως, σε αυτές τις τρεις περιπτώσεις, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική και έτσι συνάγουμε την υποπερίπτωση (I-a) του θεωρήματος. Η υποπερίπτωση (I-v) αντιστοιχεί στις υποπεριπτώσεις (B-a-ii) και (B-b-ii) της πρότασης 3.8, καταδεικνύοντας τις δύο καθαρές στρατηγικές ως κοινωνικά βέλτιστες, και επομένως οδηγούμαστε στην περίπτωση (I-b) του θεωρήματος. Τέλος, οι υποπεριπτώσεις (I-vi) και (I-vii) αντιστοιχούν στις υποπεριπτώσεις (B-b-ii) και (B-b-i) της πρότασης 3.8, οπότε και συμπεραίνουμε ότι η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει είναι η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική. Αυτή δίνει την υποπερίπτωση (I-c) του θεωρήματος, οπότε και συνάγουμε την περίπτωση I.

Στην περίπτωση II, έχουμε ότι $b_e < j_e < j_{soc} < R_s + \frac{C}{\xi}$. Κατά συνέπεια, διακρίνουμε έξι υποπεριπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του R_f .

$$(II-i) \quad R_f \leq b_e.$$

$$(II-ii) \quad b_e < R_f < j_e.$$

$$(II-iii) \quad j_e \leq R_f < j_{soc}.$$

$$(II-iv) \quad j_{soc} \leq R_f < R_s + \frac{C}{\xi}.$$

$$(II-v) \quad R_f = R_s + \frac{C}{\xi}.$$

$$(II-vi) \quad R_f > R_s + \frac{C}{\xi}.$$

Ομοίως με την περίπτωση I, έχουμε ότι η υποπερίπτωση (II-i) αντιστοιχεί στην υποπερίπτωση (A-a) της πρότασης 3.8. Επομένως, η καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να αποχωρήσει είναι η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική και οδηγούμαστε στην περίπτωση (II-a) του θεωρήματος. Οι υποπεριπτώσεις (II-ii) και (II-iii) αντιστοιχούν στην περίπτωση (A-c) της πρότασης 3.8 οπότε και έχουμε μια μοναδική μικτή στρατηγική που είναι κοινωνικά βέλτιστη. Αυτό οδηγεί στην περίπτωση (II-b) του θεωρήματος. Τέλος, οι υποπεριπτώσεις (II-iv), (II-v) και (II-vi) αντιστοιχούν στις υποπεριπτώσεις (A-b), (C-b) και (B-b-ii) της πρότασης 3.8 αντίστοιχα και υποδεικνύουν την καθαρή στρατηγική που ορίζει στον πελάτη να εισέλθει ως τη μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική. Αυτές οι περιπτώσεις ομαδοποιούνται στην περίπτωση (II-c) του θεωρήματος.

Τέλος, στην περίπτωση III, έχουμε ότι $R_s + \frac{C}{\xi} = j_e = j_{soc} = b_e = \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$. Κατά συνέπεια, έχουμε τις ακόλουθες τρεις υποπεριπτώσεις, σχετικά με την τιμή του R_f .

$$(III-i) \quad R_f < \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.$$

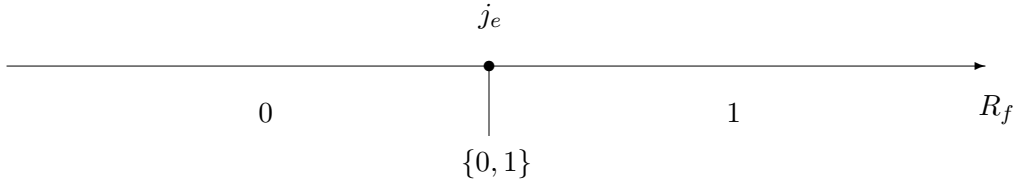
$$(III-ii) \quad R_f = \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.$$

$$(III-iii) \quad R_f > \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.$$

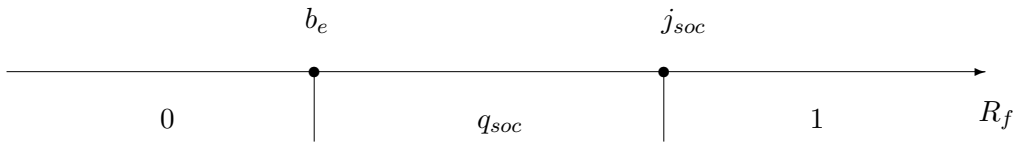
Οι περιπτώσεις (III-i), (III-ii) και (III-iii) αντιστοιχούν στις περιπτώσεις (A-a), (C-c) και (B-b-i) της πρότασης 3.8 και οδηγούν στις υποπεριπτώσεις (III-a), (III-b) και (III-c) του θεωρήματος. ■

Παρατήρηση 3.9. Οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές στις διάφορες περιπτώσεις του θεωρήματος 3.4 παριστάνονται γραφικά στα σχήματα 3.10, 3.11 και 3.12.

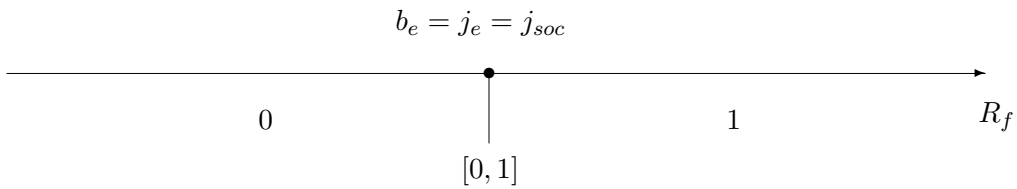
Παρατήρηση 3.10. Μια γνήσια μικτή κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, q_{soc} , όταν υπάρχει, στην περίπτωση (II-b) του θεωρήματος 3.4, χαρακτηρίζεται ως μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\phi'(q) = \lambda\theta$ στο $(0, 1)$. Παρότι αυτή η εξίσωση είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη, είναι δυνατό να βρεθεί μια απλούστερη έκφραση για το q_{soc} .



Σχήμα 3.10: Κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές ως προς R_f , Περίπτωση I: $R_s < \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$



Σχήμα 3.11: Κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές ως προς R_f , Περίπτωση II: $R_s > \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$



Σχήμα 3.12: Κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές ως προς R_f , Περίπτωση III: $R_s = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$

Πράγματι, με βάση την παρατήρηση 3.8, η εξίσωση $\phi(q) = \theta\lambda q - 1$ μπορεί να πάρει τη μορφή

$$-\eta(1 - x_2(q))^3 + [\theta\mu x_2(q)^2 - [(\mu + \xi)\theta + 1]x_2(q) + 1][(\xi - \eta)x_2(q) + \eta] = 0,$$

ή, ισοδύναμα, τη μορφή

$$ax_2(q)^3 + bx_2(q)^2 + cx_2(q) = 0,$$

όπου

$$\begin{aligned} a &= \eta + \theta\mu(\xi - \eta), \\ b &= \eta\theta\mu - \xi - 2\eta - (\xi - \eta)(\mu + \xi)\theta, \\ c &= \xi + \eta - \eta(\mu + \xi)\theta. \end{aligned}$$

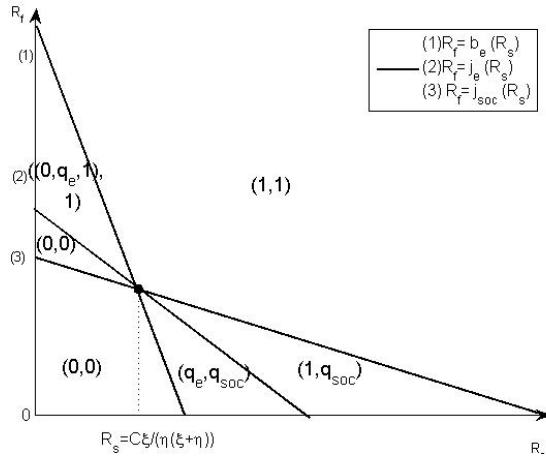
Έτσι, παραγωγίζοντας την τελευταία, έχουμε ότι η εξίσωση $\phi'(q) = \lambda\theta$ ανάγεται στην

$$3ax_2(q)^2 + 2bx_2(q) + c = 0, \quad (3.100)$$

και, από αυτή την άποψη, μπορούμε άμεσα να λάβουμε τη λύση της $g(q) = \theta$ λύνοντας πρώτα την (3.100) ως προς $x_2(q)$ και υπολογίζοντας στη συνέχεια το q μέσω της (3.56).

Παρατήρηση 3.11. Στο σχήμα 3.13, έχουμε συνδυάσει τα γραφήματα 3.10, 3.11 και 3.12 προκειμένου να συγκρίνουμε τις στρατηγικές ισορροπίας με τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές. Έχουμε χρησιμοποιήσει τις ευθείες $R_f = b_e(R_s)$, $R_f = j_e(R_s)$ και $R_f = j_{soc}(R_s)$. Η πρώτη συνιστώσα σε κάθε περιοχή αναφέρεται στην ατομικά βέλτιστη στρατηγική ενός πελάτη, ενώ η δεύτερη στην κοινωνικά βέλτιστη.

Όπως παρατηρούμε, η σύγκριση των q_e και q_{soc} είναι σαφής σε όλες τις περιπτώσεις, με εξαίρεση την περίπτωση όπου οι συνθήκες $R_s > \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ και $b_e < R_f < j_e$ ισχύουν ταυτόχρονα. Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή η q_e είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(q) = 0$, ενώ η q_{soc} είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h'(q) = 0$, όπου με $h(q)$ έχουμε συμβολίσει τη συνάρτηση $\phi(q) - \lambda\theta - 1$. Για να προχωρήσουμε, υπό αυτές τις δύο συνθήκες, μπορούμε να ελέγξουμε, μετά από ορισμένες αλγεβρικές πράξεις, ότι η $h(q)$ είναι αύξουσα για $q < q_{soc}$, ενώ είναι φθίνουσα για $q > q_{soc}$. Επιπλέον, είναι κοίλη συνάρτηση. Τέλος, ισχύει $h(0) > h(1)$. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω,



Σχήμα 3.13: Στρατηγικές ισορροπίες και κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές ως προς R_s και R_f - Η μη παρατηρήσιμη περίπτωση

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ανισότητα $q_{soc} < q_e$ ισχύει σε αυτήν την περίπτωση, το οποίο είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι εδώ ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης υιοθετεί στρατηγική συμπεριφορά τύπου ΑΠΠ. Επίσης σημειώνουμε ότι, για τον ίδιο λόγο, η ίδια ανισότητα ισχύει στην περίπτωση που οι συνθήκες $R_s > \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ και $j_e < R_f < j_{soc}$ ισχύουν ταυτόχρονα. Από την άλλη, στην περίπτωση που οι συνθήκες $R_s < \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ και $j_e < R_f < b_e$ ισχύουν ταυτόχρονα έχουμε την αντίστροφη ανισότητα, δεδομένου ότι αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί σε μια στρατηγική συμπεριφορά ΣΤΠ. Τέλος, στις υπόλοιπες περιπτώσεις, μπορούμε αμέσως να δούμε ότι η στρατηγική ισορροπίας και η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική συμπίπτουν.

3.6 Αριθμητικά πειράματα-Συμπεράσματα

Σε αυτήν την παράγραφο, συνάγουμε ορισμένα ποιοτικά συμπεράσματα και παρουσιάζουμε αριθμητικά πειράματα, βασισμένα στα αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης. Παρέχουμε επίσης διαισθητικές ερμηνείες για τα διάφορα αριθμητικά ευρήματα όσον αφορά τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών. Αρχικά επικεντρωνόμαστε στη συμπεριφορά των βέλτιστων κατωφλίων της παρατηρήσιμης περίπτωσης καθώς μεταβάλλ-

λονται οι διάφοροι παράμετροι του μοντέλου. Όπως έχουμε δει στην παράγραφο 3.3, η ανισότητα $n_e(0) \leq n_e(1)$ είναι πάντα αληθής, επιβεβαιώνοντας τη διαίσθησή μας ότι ένας πελάτης που βρίσκει το σύστημα υπό επισκευή είναι λιγότερο ανεκτικός (σε ό,τι αφορά τον αριθμό των πελατών που βρίσκει τη στιγμή της άφιξής του) σε σχέση με έναν πελάτη που βρίσκει το σύστημα σε λειτουργία. Επιπλέον, έχουμε ότι και τα δύο κατώφλια $n_e(0)$, $n_e(1)$ είναι ανεξάρτητα από το ρυθμό άφιξης λ . Σημειώνουμε, επίσης, ότι το κατώφλι $n_e(1)$ είναι ανεξάρτητο από το ρυθμό επισκευής η , σε αντίθεση με το κατώφλι $n_e(0)$ που φαίνεται να εμφανίζει αύξουσα και κοίλη συμπεριφορά ως προς την παράμετρο η , συγκλίνοντας στο κατώφλι $n_e(1)$ καθώς $\eta \rightarrow \infty$. Η αύξουσα συμπεριφορά του κατωφλίου $n_e(0)$ ως προς η είναι αναμενόμενη, εφόσον όσο αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου η , τόσο λιγότερο θα χρειαστεί να περιμένει ένας πελάτης που βρίσκει τον υπηρέτη ανενεργό. Ωστόσο, η επίδραση που έχει η αύξηση του η γίνεται ολοένα και λιγότερο σημαντική όσο το η έχει ήδη μια υψηλή τιμή και, επομένως, είναι επίσης αναμενόμενη η κοίλη συμπεριφορά του κατωφλίου $n_e(0)$ ως προς η . Οι εξισώσεις (3.5) και (3.6) ποσοτικοποιούν ακριβώς αυτή την αύξουσα και κοίλη συμπεριφορά, δείχνοντας ότι είναι λογαριθμικής μορφής. Είναι, επιπλέον, εύκολο να δούμε ότι και τα δύο κατώφλια είναι αύξουσες συναρτήσεις του ρυθμού εξυπηρέτησης μ και της αποζημίωσης R_f , ενώ είναι φθίνουσες συναρτήσεις του μοναδιαίου κόστους αναμονής C .

Όσον αφορά τη συμπεριφορά των κατωφλίων ως προς R_s παρατηρούμε μια λογαριθμική αύξηση καθώς αυτό μεγαλώνει. Αυτό αποτελεί μια σημαντική διαφορά σε σχέση με το μοντέλο του Naor (1969), όπου δεν υπάρχουν οι καταστροφές, στο οποίο τα κατώφλια εμφανίζουν γραμμική αύξηση ως προς R_s . Αυτή η διαφοροποίηση στη συμπεριφορά μεταξύ των δύο μοντέλων μπορεί να δικαιολογηθεί ως εξής: Στο μοντέλο του Naor οι πελάτες σίγουρα θα λάβουν τελικά την αμοιβή της εξυπηρέτησης R_s , αν φυσικά επιλέξουν να εισέλθουν στο σύστημα, σε αντίθεση με τους πελάτες στο παρόν μοντέλο, οι οποίοι θα λάβουν πιθανότατα την αποζημίωση R_f , αν επιλέξουν να εισέλθουν στο σύστημα όταν αυτό είναι συνωστισμένο. Έτσι, σε αντίθεση με το μοντέλο του Naor, η αύξηση της τιμής της παραμέτρου R_s γίνεται ολοένα και λιγότερο σημαντική. Πράγματι, για μεγάλες τιμές της αμοιβής εξυπηρέτησης, R_s , ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης ήδη ανέχεται να βρει έναν μεγάλο αριθμό πελατών μπροστά του κατά τη στιγμή άφιξής του. Ωστόσο, αν ο αριθμός των πελατών που θα βρει μπροστά του γίνει υπερβολικά μεγάλος, τότε είναι πιθανότερο να μη λάβει την αμοιβή R_s , αλλά την αμοιβή αποζημίωσης αντ'

αυτής, R_f . Με αυτή τη λογική, λοιπόν, ακόμη κι αν η τιμή της παραμέτρου R_s αυξηθεί σημαντικά περισσότερο, τα βέλτιστα κατώφλια δε θα παρουσιάσουν μια ανάλογη αύξηση. Αυτό το επιχείρημα αποκαλύπτει ότι η ύπαρξη των καταστροφικών γεγονότων μετριάξει τη σημασία της αμοιβής R_s , στην περίπτωση που το σύστημα είναι συνωστισμένο.

Τέλος, ας θεωρήσουμε τη συμπεριφορά των βέλτιστων κατωφλίων ως προς το ρυθμό με τον οποίο συμβαίνουν οι καταστροφές, ξ . Αυτή είναι αρκετά πιο περίπλοκη, οπότε δεν είναι και το ίδιο εύκολο να ερμηνευθεί διαισθητικά. Σε γενικές γραμμές, όσο αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου ξ , τόσο συχνότερα συμβαίνουν καταστροφές και, επομένως, η αύξηση του ξ ευνοεί τους πελάτες στο να πάρουν την απόφαση να εισέλθουν στο σύστημα για υψηλές τιμές της παραμέτρου R_f . Επιπλέον, μειώνει το κόστος αναμονής. Ωστόσο, προκειμένου να ολοκληρώσουμε τη συζήτηση περί της επίδρασης της τιμής του ξ στη συμπεριφορά των πελατών, πρέπει να εξετάσουμε χωριστά τις περιπτώσεις του να βρεθεί το σύστημα ενεργό ή μη. Πιο αναλυτικά, εάν ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης βρει το σύστημα υπό επισκευή, θα πρέπει σίγουρα να υποστεί ένα μέσο κόστος $\frac{C}{\eta}$ μονάδων. Για έναν τέτοιο πελάτη, υπάρχουν δύο περιπτώσεις: είτε η ύπαρξη των καταστροφών επάγει μια θετική επίδραση, για υψηλές τιμές της ποσότητας $R_f - \frac{C}{\eta}$, είτε μια αρνητική, για χαμηλές τιμές της $R_f - \frac{C}{\eta}$. Στην πρώτη περίπτωση, ο πελάτης είναι πρόθυμος να εισέλθει στο σύστημα με την ελπίδα ότι θα αναγκαστεί να το εγκαταλείψει λόγω μιας καταστροφής. Κατά συνέπεια, όσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός καταστροφής, ξ , τόσο πιο ανεκτικός γίνεται ο πελάτης, με αποτέλεσμα τα κατώφλια να παρουσιάζουν αυξουσα συμπεριφορά. Από την άλλη, για χαμηλές τιμές του $R_f - \frac{C}{\eta}$, το κατώφλι επιδεικνύει φθίνουσα συμπεριφορά. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση, οι πελάτες επιθυμούν να εξυπηρετηθούν, και, επομένως, όσο μεγαλύτερος ο ρυθμός καταστροφής ξ , τόσο λιγότερο ανεκτικοί γίνονται κατά τη συμφόρηση του συστήματος. Στο σχήμα 3.14 βλέπουμε ένα παράδειγμα αυξουσας συμπεριφοράς του $n_e(0)$ ως προς ξ , ενώ στο σχήμα 3.15 βλέπουμε ένα παράδειγμα φθίνουσας συμπεριφοράς.

Θεωρούμε, τώρα, έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη που βρίσκει το σύστημα σε λειτουργία. Τότε, μία αύξηση του ξ επάγει τη μείωση του μέσου κόστους αναμονής του πελάτη, τη μείωση της πιθανότητας να εξυπηρετηθεί ο πελάτης και την αύξηση της πιθανότητας να αναγκαστεί τελικά ο πελάτης να εγκαταλείψει το σύστημα λόγω καταστροφής. Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση, συνυπάρχουν δύο αντικρουόμενες επιδράσεις, οδηγώντας σε μια συμπεριφορά βέλτιστου κατωφλίου που είναι φθίνουσα για μικρές τι-

μές της παραμέτρου ξ και αύξουσα για μεγάλες. Πιο συγκεκριμένα, όταν το ξ είναι μικρό, οι καταστροφές εμφανίζονται πολύ σπάνια. Επομένως ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης δεν προσδοκά να λάβει την αποζημίωση καταστροφής, R_f , ακόμα κι αν είναι μεγάλη. Σε εκείνη την περίπτωση, είναι σχεδόν βέβαιος ότι θα εξυπηρετηθεί και ανέχεται μόνο ένα μικρό αριθμό πελατών μπροστά του. Εντούτοις, για τις ενδιάμεσες τιμές του ξ , η πιθανότητα να αναγκαστεί να αποχωρήσει από το σύστημα λόγω καταστροφής γίνεται σημαντική. Επομένως, οι πελάτες συνεχίζουν να είναι πρόθυμοι να εισέλθουν στο σύστημα, προσδοκώντας την αμοιβή εξυπηρέτησης, αλλά υιοθετούν μια στρατηγική κατωφλίου με φθίνουσα τάση. Σε αυτό το διάστημα τιμών του ξ , δεν είναι σαφής ποια είναι η επίδραση που υπερिशύχει. Τέλος, για μεγάλες τιμές του ξ , η τιμή του R_f είναι ο κρίσιμος παράγοντας, επειδή οι πελάτες είναι προθυμότεροι να εισέλθουν με την ελπίδα ότι θα λάβουν την αποζημίωση καταστροφής, R_f . Επομένως, σε εκείνο το διάστημα, το βέλτιστο κατώφλι αυξάνεται ως προς ξ . Μια ματιά στα σχήματα 3.14 και 3.15 δείχνει τη συμπεριφορά του βέλτιστου κατωφλίου $n_e(1)$ ως προς ξ . Τα σχήματα αυτά διαφωτίζουν τη διαφορετική συμπεριφορά της επίδρασης της αύξησης του ρυθμού καταστροφής, ξ , στους πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη ενεργό ή υπό επισκευή. Σημειώνουμε ότι, όταν $R_f - \frac{C}{\eta} > 0$, και τα δύο βέλτιστα κατώφλια αυξάνονται για υψηλές τιμές του ξ . Ωστόσο, όταν $R_f - \frac{C}{\eta} < 0$, το $n_e(0)$ μειώνεται ενώ το $n_e(1)$ αυξάνεται για υψηλές τιμές του ξ .

Στρέφουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στη συμπεριφορά των στρατηγικών ισορροπίας (πιθανοτήτων εισόδου) στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση καθώς μερικές παράμετροι του μοντέλου μεταβάλλονται. Ανακαλούμε ότι, σύμφωνα με την ανάλυση στην παράγραφο 3.4, παρατηρούμε συμπεριφορά ΑΤΠ για $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} > 0$ και συμπεριφορά ΣΤΠ αν $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} < 0$. Επομένως, οι παράμετροι λ , η και μ δεν επηρεάζουν τη συμπεριφορά ΑΤΠ ή ΣΤΠ των πελατών. Συνεπώς, είναι απλό να συνάγουμε την επίδραση της μεταβολής αυτών των παραμέτρων στις πιθανότητες εισόδου ισορροπίας. Πράγματι, μια αύξηση του λ συνεπάγεται τη αύξηση του μέσου χρόνου αναμονής ενός τυχαία επιλεγμένου πελάτη, κι έτσι οδηγεί σε χαμηλότερες πιθανότητες εισόδου. Από την άλλη, μια αύξηση του η μειώνει το μέσο χρόνο αναμονής ενός τυχαία επιλεγμένου πελάτη και, επομένως, επάγει υψηλότερες πιθανότητες εισόδου ισορροπίας. Ομοίως, είναι εύκολο να δούμε ότι η πιθανότητα εισόδου ισορροπίας είναι αύξουσα συνάρτηση του μ .

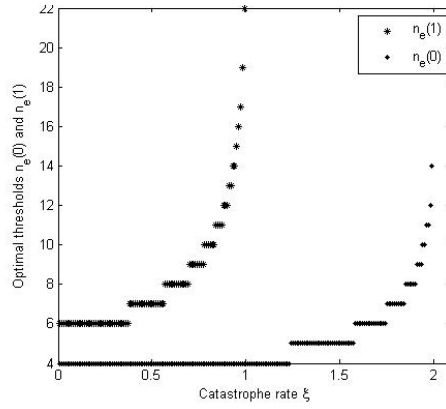
Όσον αφορά τώρα την παράμετρο ξ , φαίνεται δύσκολο να εξηγήσουμε την επίδραση που έχει η αύξησή της στις πιθανότητες εισόδου, χρησιμοποιώντας κάποιον ποιοτικό - διαισθητικό συλλογισμό. Από αυτήν την άποψη, τα αποτελέσματα της παραγράφου 3.4 φαίνονται ιδιαίτερα χρήσιμα. Πράγματι, μια αύξηση του ξ έχει μια σίγουρα θετική επίδραση, τη μείωση του μέσου κόστους αναμονής για τους πελάτες. Επάγει, επίσης, μείωση της δεσμευμένης πιθανότητας να εξυπηρετηθεί ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης, δεδομένου ότι παρατηρεί n πελάτες και αποφασίζει να εισέλθει, για οποιοδήποτε n (και μια αύξηση της συμπληρωματικής δεσμευμένης πιθανότητας να αναγκαστεί να εγκαταλείψει το σύστημα λόγω καταστροφής). Η φύση αυτής της επίπτωσης (θετικής ή αρνητικής) εξαρτάται από τις σχετικές τιμές των R_s , R_f και μ . Αν η αμοιβή εξυπηρέτησης είναι πιο επιθυμητή, τότε η επίπτωση είναι αρνητική, ενώ είναι θετική αν ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης προτιμά την αποζημίωση. Μια τρίτη επίδραση είναι ότι η αύξηση του ξ συνεπάγεται ότι ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης αναμένει να βρει κατά την άφιξη του λιγότερους πελάτες μπροστά του. Αυτή η επίδραση δεν υπάρχει στην παρατηρήσιμη περίπτωση, όπου ένας πελάτης παρατηρεί τον αριθμό των πελατών που περιμένουν και, συνεπώς, τον λαμβάνει υπόψη του προκειμένου να αποφασίσει αν θα εισέλθει ή όχι. Η φύση αυτής της επίδρασης εξαρτάται επίσης από το αν ένας πελάτης προτιμά την αμοιβή εξυπηρέτησης ή την αποζημίωση βλάβης. Πράγματι, η παρουσία πολλών πελατών «τον προστατεύει» από την εξυπηρέτηση και έτσι καθίσταται πιθανότερο να λάβει την αποζημίωση βλάβης.

Λαμβάνοντας υπόψη τις τρεις παραπάνω επιδράσεις, δεν είναι παράξενο ότι παρατηρούνται πολύ διαφορετικές περιπτώσεις για τη συμπεριφορά της πιθανότητας εισόδου ισορροπίας ως προς το ξ . Μερικά ενδιαφέροντα παραδείγματα παρουσιάζονται στα σχήματα 3.16 και 3.17, όπου το q_e σχεδιάζεται ως προς το ξ . Σημειώνουμε ότι, στο σχήμα 3.16 έχουμε πάντα μια μοναδική πιθανότητα εισόδου ισορροπίας, η οποία αρχικά αυξάνεται ως προς ξ και κατόπιν μειώνεται. Αυτό αντιστοιχεί σε συμπεριφορά ΑΤΠ. Ωστόσο, στο σχήμα 3.17, για χαμηλές τιμές του ξ , έχουμε μια μοναδική πιθανότητα εισόδου ισορροπίας, η οποία αρχικά είναι φθίνουσα ως προς ξ . Αυτό αντιστοιχεί πάλι σε συμπεριφορά ΑΤΠ. Έπειτα, όμως, όταν το ξ γίνεται υψηλότερο, έχουμε τρεις πιθανότητες εισόδου ισορροπίας, 0, 1 και μια πιθανότητα εισόδου που βρίσκεται αυστηρά μεταξύ του 0 και του 1 (και αντιστοιχεί σε μια γνήσια μικτή στρατηγική). Γενικά μπορούμε να πούμε ότι για χαμηλές τιμές του ξ η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών είναι ανά-

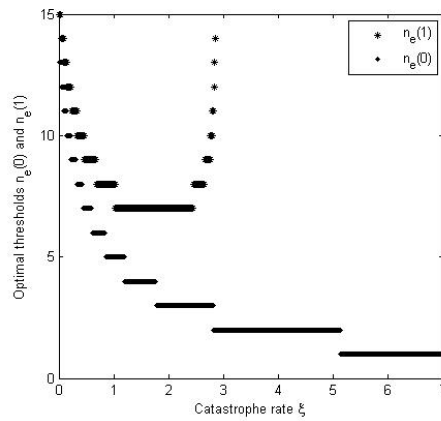
λογη με αυτή στο μοντέλο του Naor, αλλά για ενδιάμεσες τιμές του ξ η στρατηγική συμπεριφορά δεν μπορεί να προκύψει με διαισθητικό συλλογισμό, λόγω της συνύπαρξης αυτών των αντικρουόμενων επιδράσεων. Τότε, ο αριθμητικός υπολογισμός της πιθανότητας εισόδου που χρησιμοποιεί τα αναλυτικά αποτελέσματα είναι αναγκαίος για την κατανόηση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών. Τέλος, για υψηλές τιμές του ξ , η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών καθορίζεται από την τιμή της ποσότητας $R_f - \frac{C}{\eta}$. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση, ένας πελάτης θα βρει το σύστημα σχεδόν σίγουρα υπό επισκευή και όταν ολοκληρωθεί ο χρόνος επισκευής θα αποχωρήσει από το σύστημα σχεδόν αμέσως, χωρίς να εξυπηρετηθεί, λόγω μιας καταστροφής. Τότε το $\frac{C}{\eta}$ είναι σχεδόν ίσο με το αναμενόμενο κόστος του και η αμοιβή του σχεδόν σίγουρα θα δοθεί από το R_f . Επομένως, αν $R_f - \frac{C}{\eta} > 0$, η πιθανότητα ισορροπίας q_e είναι 1, διαφορετικά είναι 0.

Παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να συναχθούν, αν μελετήσουμε την πιθανότητα εισόδου ως προς την αμοιβή εξυπηρέτησης R_s , την αποζημίωση βλάβης R_f ή το αναμενόμενο κόστος ανά χρονική μονάδα C . Εδώ υπάρχουν, πάλι, θετικές και αρνητικές επιδράσεις, όσο οι αντίστοιχες παράμετροι αυξάνονται και η καθαρή επίδραση στη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών δεν μπορεί να συναχθεί με ακρίβεια σε διαισθητική βάση. Στα σχήματα 3.18 και 3.19 παρουσιάζουμε τη γραφική παράσταση των πιθανοτήτων εισόδου ως προς τα R_s και C για δύο αριθμητικά πειράματα. Όπως μπορούμε να δούμε, οι γραφικές παραστάσεις δείχνουν ότι ανάλογα με το εύρος των παραμέτρων μπορούν να εμφανιστούν διαφορετικού είδους καταστάσεις. Παραδείγματος χάριν, η εύλογη πεποίθηση ότι «η πιθανότητα εισόδου ισορροπίας αυξάνεται όσο αυξάνεται η αμοιβή εξυπηρέτησης» εδώ καταρρίπτεται.

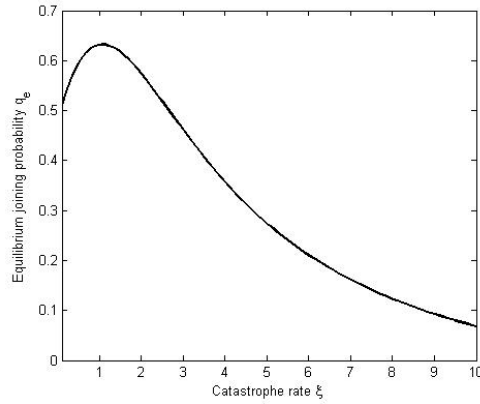
Υπάρχουν διάφορες κατευθύνσεις στις οποίες η παρούσα ανάλυση μπορεί να συνεχιστεί και να επεκταθεί. Η μελέτη της αξίας της πληροφόρησης και της τιμής της αναρχίας στα πλαίσια των συστημάτων αναμονής με καταστροφές και αποζημιώσεις βλάβης φαίνεται ενδιαφέρουσα. Η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών κάτω από μερική πληροφόρηση για την κατάσταση του συστήματος είναι μια επιπλέον κατεύθυνση, η οποία μπορεί να επεκτείνει τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής.



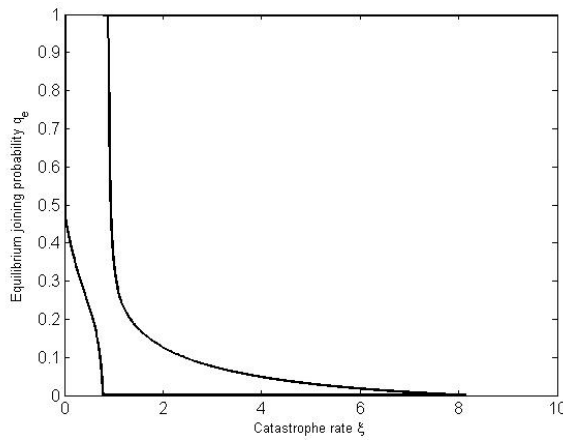
Σχήμα 3.14: Βέλτιστα κατώφλια εισόδου ως προς ξ για την παρατηρήσιμη περίπτωση με $(\mu, \eta) = (4, 2)$ και $(R_s, R_f, C) = (7, 4, 4)$.



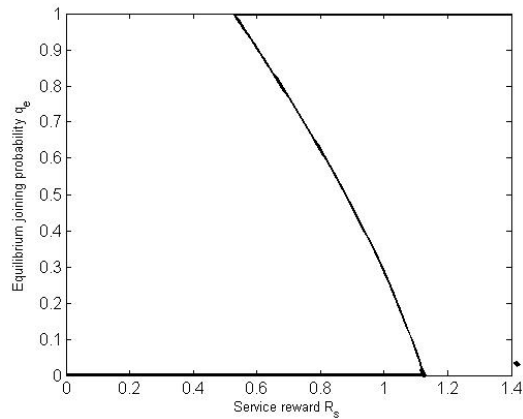
Σχήμα 3.15: Βέλτιστα κατώφλια εισόδου ως προς ξ για την παρατηρήσιμη περίπτωση με $(\mu, \eta) = (4, 2)$ και $(R_s, R_f, C) = (17, 1.4, 4)$.



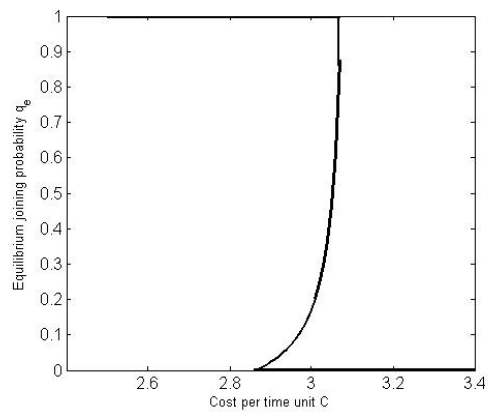
Σχήμα 3.16: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς ξ για τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση με $(\lambda, \mu, \eta) = (7, 4, 1)$ και $(R_s, R_f, C) = (7, 4, 4.7)$.



Σχήμα 3.17: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς ξ για τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση με $(\lambda, \mu, \eta) = (7, 4, 0.4)$ και $(R_s, R_f, C) = (7, 12, 4.2)$.



Σχήμα 3.18: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς R_s για τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση με $(\lambda, \mu, \xi, \eta) = (7, 4, 2, 2)$ και $(R_f, C) = (4, 5)$.



Σχήμα 3.19: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς C για τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση με $(\lambda, \mu, \xi, \eta) = (7, 0.6, 4, 0.8)$ και $(R_s, R_f) = (1, 4)$.

Κεφάλαιο 4

Η $M/M^K/1$ ουρά

4.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η μελέτη της συμπεριφοράς στρατηγικών πελατών σε συστήματα αναμονής, όταν αυτοί έρχονται αντιμέτωποι με διάφορα διλήμματα (π.χ. να εισέλθουν ή να αποχωρήσουν, να περιμένουν ή να υπαναχωρήσουν, να αγοράσουν εισιτήριο προτεραιότητας ή όχι κτλ.) έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών, καθώς συνεισφέρει στην πιο ακριβή παρουσίαση και ποσοτικοποίηση της λειτουργίας ενός συστήματος. Πράγματι, υπό αυτήν την οπτική γωνία, οι πελάτες θεωρούνται ενεργητικές οντότητες που λαμβάνουν αποφάσεις, σε αντίθεση με την κλασική θεώρηση ενός συστήματος αναμονής που τους αντιμετωπίζει ως παθητικές μονάδες που περιμένουν να εξυπηρετηθούν. Όπως έχουμε ήδη δει και στα προηγούμενα κεφάλαια της παρούσας διατριβής, τέτοιου είδους καταστάσεις αντιμετωπίζονται ως ένα παίγνιο μεταξύ των πελατών, που δρουν με σκοπό τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης ατομικής καθαρής ωφέλειάς τους.

Η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σχετικά με το δίλημμα εισόδου-αποχώρησης εισήχθη, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, από το Naor με την πρωτοποριακή μελέτη της $M/M/1$ ουράς, υποθέτοντας ένα παρατηρήσιμο σύστημα, και συμπληρώθηκε αργότερα με τις μελέτες των Edelson και Hildebrand με τη μελέτη του αντίστοιχου μη-παρατηρήσιμου συστήματος. Από τότε έχουν προκύψει διάφορες μελέτες σε παραλλαγές της $M/M/1$ ουράς (βλέπε κεφάλαιο 1). Είναι αξιοσημείωτο ότι οι περισσότερες

τέτοιου είδους μελέτες επικεντρώνονται σε απλές παραλλαγές της $M/M/1$ ουράς. Ωστόσο, παρότι η αποτίμηση της απόδοσης τέτοιων συστημάτων είναι συνήθως εύκολη, η παιγνιοθεωρητική τους ανάλυση είναι αρκετά πολύπλοκη. Πράγματι, η παιγνιοθεωρητική ανάλυση απαιτεί την αποτίμηση της απόδοσης ενός τέτοιου συστήματος κάτω από μια γενική στρατηγική των πελατών και συνήθως οδηγεί σε Μαρκοβιανά μοντέλα που είναι δύσκολο να επιλυθούν, ακόμη και για συστήματα τύπου $M/M/1$. Επιπλέον, ο υπολογισμός των στρατηγικών ισορροπίας Nash σπάνια είναι εφικτός σε κλειστή μορφή και συνήθως επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλων αλγοριθμικών σχημάτων.

Πρέπει επίσης να τονιστεί ότι τα προαναφερθείσες εργασίες αφορούν συστήματα αναμονής με μεμονωμένες εξυπηρετήσεις, παρά το γεγονός ότι συστήματα με ομαδικές εξυπηρετήσεις εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη. Για παράδειγμα, τα λεωφορεία/αεροπλάνα συγκεκριμένου προορισμού (shuttles) ενός αεροδρομίου φεύγουν μόνο όταν είναι συμπληρωμένα. Επιπλέον, σε εκθέσεις/μουσεία, οι επισκέπτες εξυπηρετούνται σε ομάδες και η ξενάγηση μπορεί να ξεκινήσει μόνο όταν συμπληρωθεί ένας επαρκής αριθμός επισκεπτών προκειμένου να σχηματιστεί μια ομάδα ξενάγησης. Ως εκ τούτου, η επέκταση της παιγνιοθεωρητικής προσέγγισης σε συστήματα με ομαδικές εξυπηρετήσεις φαίνεται να είναι αρκετά σημαντική. Με εξαίρεση λίγες μελέτες που μελετούν τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σε συστήματα με καταστροφές (βλέπε κεφάλαια 2, 3), σε συστήματα ολικών απομακρύνσεων (βλέπε Economou και Manou (2013)) και σε ένα σύστημα τύπου δικτύου, όπου οι πελάτες συγκροτούν ομάδες (clubs) (βλέπε Johari και Kumar, (2010)), φαίνεται ότι η στρατηγική συμπεριφορά πελατών σε συστήματα με κάποιου είδους ομαδικών αποχωρήσεων δεν έχει μελετηθεί επαρκώς. Πιο συγκεκριμένα, εξ' όσων γνωρίζουμε, δεν υπάρχουν παιγνιοθεωρητικές μελέτες για συστήματα με συνήθεις ομαδικές εξυπηρετήσεις. Ο σκοπός μας στο παρόν κεφάλαιο είναι να αρχίσουμε μια τέτοια μελέτη και, μάλιστα, να επικεντρωθούμε στην πιο απλή περίπτωση της $M/M/1$ ουράς με μεμονωμένες αφίξεις και ομαδικές εξυπηρετήσεις σταθερού μεγέθους K (γνωστής και ως $M/M^K/1$ ουράς).

Θα πρέπει να τονιστεί, εδώ, ότι υπάρχουν θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ συστημάτων με μεμονωμένες εξυπηρετήσεις τύπου $M/M/1$ και συστημάτων με ομαδικές εξυπηρετήσεις τύπου $M/M^K/1$, όσον αφορά τη στρατηγική συμπεριφορά πελατών. Πρώτα απ' όλα, στο παρατηρήσιμο μοντέλο, υπάρχουν ατομικά βέλτιστες (χυριαρχούσες) στρατηγικές για τους πελάτες των $M/M/1$ συστημάτων, σε αντίθεση με την περίπτωση των

$M/M^K/1$ συστημάτων, για τα οποία δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Πράγματι, η αναμενόμενη ωφέλεια για τους πελάτες ενός συστήματος τύπου $M/M/1$, αν αποφασίσουν να εισέλθουν, αφού παρατηρήσουν το μήκος ουράς, δεν εξαρτάται από τη στρατηγική των υπολοίπων πελατών. Αντιθέτως, για έναν τυχαία επιλεγμένο πελάτη ενός $M/M^K/1$ συστήματος, η στρατηγική συμπεριφορά των μελλοντικά αφικνούμενων πελατών έχει σημασία, καθώς η εξυπηρέτησή του μπορεί να αρχίσει μόνο αφού συμπληρωθεί η ομάδα του.

Κοιτώντας τώρα τη μη-παρατηρήσιμη περίπτωση, έχουμε ότι οι πελάτες επάγουν αρνητικές επιδράσεις στη $M/M/1$ ουρά, ενώ στην περίπτωση της $M/M^K/1$ ουράς έχουμε μια πιο περίπλοκη κατάσταση. Πράγματι, στην τελευταία, η αύξηση του ρυθμού αφίξεων ευνοεί τη συμπλήρωση της επί του παρόντος ασυμπλήρωτης ομάδας (θετική επίδραση), αλλά, από την άλλη μεριά, αυξάνει τον αναμενόμενο αριθμό συμπληρωμένων ομάδων που περιμένουν να εξυπηρετηθούν (αρνητική επίδραση). Μια παρόμοιου τύπου συμπεριφορά παρουσιάζεται στη μη-παρατηρήσιμη περίπτωση της $M/M/1$ ουράς υπό την N -στρατηγική ενεργοποίησης, που μελετήθηκε πρόσφατα από τους Guo και Hassin (2011).

Μια άλλη πλευρά της οικονομικής ανάλυσης της $M/M^K/1$ ουράς που είναι αισθητά διαφορετική από αυτή της $M/M/1$ ουράς είναι η ύπαρξη δύο επιπλέον περιπτώσεων, όσον αφορά το επίπεδο πληροφόρησης των αφικνούμενων πελατών. Πράγματι, εκτός από τα παρατηρήσιμα και τα μη-παρατηρήσιμα μοντέλα, υπάρχουν και δύο μερικώς παρατηρήσιμα μοντέλα, τα οποία αντιστοιχούν στις περιπτώσεις που ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης παρατηρεί μόνο τον αριθμό των συμπληρωμένων ομάδων που περιμένουν να εξυπηρετηθούν ή τον αριθμό των πελατών που υπάρχουν στη δικιά του (ασυμπλήρωτη) ομάδα. Ας σημειωθεί εδώ ότι, όσο περισσότερες συμπληρωμένες ομάδες περιμένουν να εξυπηρετηθούν, τόσο παρατείνεται ο χρόνος παραμονής του τυχαία επιλεγμένου πελάτη, οπότε σε αυτήν την περίπτωση οδηγούμαστε σε μια συμπεριφορά τύπου ΑΤΠ. Από την άλλη μεριά, όταν ο πελάτης πληροφορείται το πλήθος των πελατών στη δικιά του ασυμπλήρωτη ομάδα, είναι θετικότερος στον να εισέλθει, αν και οι άλλοι πελάτες γίνουν θετικότεροι και επομένως έχουμε μια συμπεριφορά τύπου ΣΤΠ. Είναι ακριβώς αυτή η μίξη των συμπεριφορών ΑΤΠ και ΣΤΠ που οδηγεί σε μια ιδιαίζουσα συμπεριφορά των πελατών που αξίζει να ποσοτικοποιηθεί και να διερευνηθεί.

Η βασική συνεισφορά αυτού του κεφαλαίου συνοψίζεται στα εξής σημεία:

1. Παρέχονται ακριβείς εκφράσεις και αλγοριθμικές διαδικασίες για τον υπολογισμό των στρατηγικών ισορροπίας των πελατών κάτω από δύο επίπεδα πληροφόρησης (παρατηρήσιμη και μη-παρατηρήσιμη περίπτωση). Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε την ύπαρξη, τη μοναδικότητα και τη δομή των στρατηγικών ισορροπίας σε κάθε επίπεδο πληροφόρησης.
2. Θεωρούμε το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης και ποσοτικοποιούμε την απόκλιση μεταξύ στρατηγικής συμπεριφοράς πελατών και της επιθυμητής κοινωνικά βέλτιστης συμπεριφοράς.

Το κεφάλαιο δομείται ως εξής. Στην παράγραφο 4.2 περιγράφουμε τη δυναμική του μοντέλου, τη δομή αμοιβής - κόστους και το πλαίσιο αποφάσεων. Στην παράγραφο 4.3, θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μια μοναδική καθαρή στρατηγική. Συνάγουμε τη δομή αυτής της στρατηγικής και παρέχουμε ένα αναδρομικό αλγοριθμικό σχήμα για τον υπολογισμό της. Ακολούθως, στην παράγραφο 4.4, θεωρούμε τη μη-παρατηρήσιμη περίπτωση και προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας σε σχεδόν-κλειστή μορφή, μέσω των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Επιπλέον, στις παραγράφους αυτές ασχολούμαστε και με τα αντίστοιχα προβλήματα κοινωνικής βελτιστοποίησης.

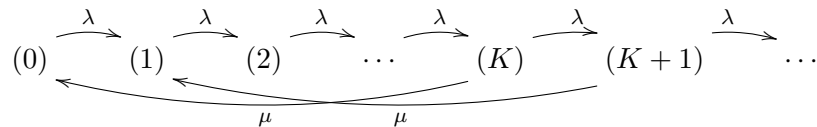
4.2 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε τη συνήθη Μαρκοβιανή ουρά με έναν υπηρέτη και απεριόριστο χώρο αναμονής, όπου οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ . Οι απαιτήσεις εξυπηρέτησης των διαδοχικών πελατών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ρυθμό εξυπηρέτησης μ . Ο υπηρέτης εξυπηρετεί τους πελάτες σε ομάδες σταθερού μεγέθους K . Επιπλέον, αν στο σύστημα υπάρχουν λιγότεροι από K πελάτες, ο υπηρέτης δεν παρέχει εξυπηρέτηση, αλλά περιμένει μέχρι τη συμπλήρωση K πελατών που θα συμπληρώσουν μια ομάδα, έτοιμη να μπει στη διαδικασία της εξυπηρέτησης. Επιπροσθέτως, οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρέτησεων θεωρούνται ανεξάρτητοι.

Μας ενδιαφέρει η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών, όταν έχουν την επιλογή να εισέλθουν στο σύστημα ή να αποχωρήσουν. Μοντελοποιούμε το πλαίσιο

αποφάσεων θεωρώντας μια γραμμική δομή αμοιβής - κόστους, υποθέτοντας πως κάθε πελάτης λαμβάνει μια αμοιβή R_s μονάδων για την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης, ενώ υφίσταται κόστος αναμονής C μονάδων για κάθε χρονική μονάδα που παραμένει στο σύστημα (είτε σε αναμονή, είτε εξυπηρετούμενος). Υποθέτουμε επίσης πως πρόκειται για πελάτες ουδέτερους προς τον κίνδυνο, δηλαδή για πελάτες που θέλουν να μεγιστοποιήσουν τη μέση τιμή του καθαρού οφέλους τους χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τη διασπορά του. Τέλος, οι αποφάσεις των πελατών θεωρούνται αμετάκλητες με την έννοια ότι δεν επιτρέπονται ούτε υπαναχωρήσεις εισελθόντων πελατών, ούτε επαναπροσπάθειες αποχωρησάντων πελατών.

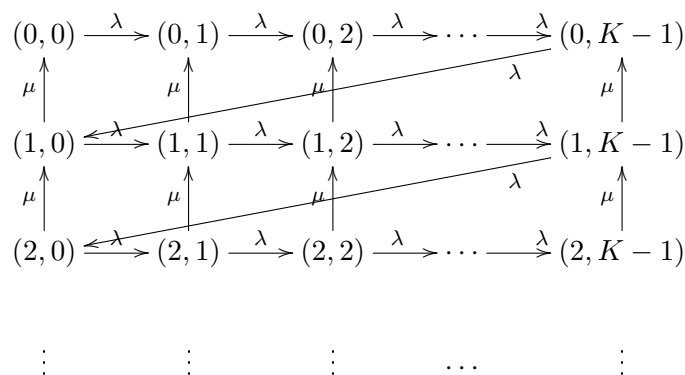
Όταν οι πελάτες δεν είναι στρατηγικοί, το σύστημα ανάγεται στη $M/M^K/1$ ουρά, που αποτελεί σύνηθες παράδειγμα στα περισσότερα βιβλία Ουρών Αναμονής (βλέπε για παράδειγμα Kleinrock (1975), παράγραφοι 4.4 και 4.6 ή εναλλακτικά Wolff (1989), παράγραφοι 5.10-5.12). Τότε, το σύστημα παριστάνεται με μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{Q(t) : t \geq 0\}$ που καταγράφει τον αριθμό των παρόντων πελατών για κάθε χρονική στιγμή t . Ο χώρος καταστάσεων της είναι το σύνολο των μη-αρνητικών ακεραίων \mathbb{N}_0 και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης φαίνεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της $\{Q(t)\}$.

Στο παρόν κεφάλαιο θεωρούμε δύο περιπτώσεις, αναλογα με το επίπεδο πληροφόρησης που λαμβάνουν οι πελάτες τη στιγμή άφιξής τους. Στην πλήρως μη-παρατηρήσιμη περίπτωση, όπου οι πελάτες δε λαμβάνουν καμμία πληροφορία για την κατάσταση του συστήματος, η περιγραφή του συστήματος μέσω της $\{Q(t)\}$ επαρκεί για τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών. Στην πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση, ωστόσο, φαίνεται ότι μια εναλλακτική Μαρκοβιανή περιγραφή του παραπάνω μοντέλου είναι πιο βολική, αυτή που παρέχει άμεσα ως πληροφορία τόσο τον αριθμό $M(t)$ των συμπληρωμένων ομάδων μεγέθους K την τυχαία χρονική στιγμή t , όσο και το μέγεθος $J(t)$ της ασυμπλήρωτης ομάδας την τυχαία χρονική στιγμή t . Σημειώνουμε ότι $M(t) =$

$[Q(t)/K]$ (με το $[x]$ να παριστάνει το (κάτω) ακέραιο μέρος του x) και $J(t) = Q(t) \bmod K$ (δηλαδή $Q(t) = KM(t) + J(t)$ με $0 \leq J(t) \leq K - 1$). Τότε, η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t παριστάνεται με το ζεύγος $\{(M(t), J(t)) : t \geq 0\}$. Η στοχαστική διαδικασία $(M(t), J(t)) : t \geq 0$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S_{M,J} = \{(m, j), m \geq 0, 0 \leq j \leq K - 1\}$ και το διάγραμμα με ρυθμών μετάβασης φαίνεται στο σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της αλυσίδας $\{(M(t), J(t))\}$.

Σε ό,τι ακολουθεί, μελετάμε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών αναφορικά με το δίλημμα εισόδου-αποχώρησής τους στο/από το σύστημα σε δύο περιπτώσεις, αναλογα με το επίπεδο πληροφόρησης που τους διατίθεται τη στιγμή άφιξής τους και πρώτου λάβουν τις αποφάσεις τους.

- Την (πλήρως) παρατηρήσιμη περίπτωση: Οι πελάτες παρατηρούν και τις δύο συνιστώσες $M(t)$ και $J(t)$ κατά τη στιγμή της άφιξής τους. Τότε, μια μικτή στρατηγική δίνεται από τον πίνακα $(q_{m,j} : m \geq 0, 0 \leq j \leq K - 1)$, όπου το $q_{m,j}$ είναι η πιθανότητα εισόδου ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(M(t), J(t)) = (m, j)$ τη στιγμή της άφιξής του (εξαιρώντας τον εαυτό του).
- Την (πλήρως) μη-παρατηρήσιμη περίπτωση: Οι πελάτες δεν παρατηρούν ούτε την $M(t)$ ούτε τη $J(t)$. Σε αυτήν την περίπτωση μια μικτή στρατηγική χαρακτηρίζεται από την πιθανότητα εισόδου q .

Σε ό,τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι $K > 1$. Πράγματι, για $K = 1$ το μοντέλο έχει μελετηθεί διεξοδικά στη βιβλιογραφία. Η παρατηρήσιμη περίπτωση αντιστοιχεί στην εκδοχή που μελέτησε ο Naor (1969), ενώ η μη-παρατηρήσιμη περίπτωση σε αυτή των Edelson και Hildebrand (1975). Ξεκινάμε τη μελέτη μας με την παρατηρήσιμη περίπτωση και προχωράμε, ακολούθως, στη μη-παρατηρήσιμη περίπτωση στις παραγράφους 4.3 και 4.4 αντίστοιχα.

4.3 Η παρατηρήσιμη περίπτωση

Όταν οι πελάτες έχουν ακριβή γνώση της κατάστασης του συστήματος κατά τη στιγμή της άφιξής τους, δηλαδή όταν ενημερώνονται τόσο για τον αριθμό των συμπληρωμένων ομάδων m όσο και για τον αριθμό j των πελατών στην ασυμπλήρωτη ομάδα, τότε είναι διαισθητικά καθαρό ότι το μοντέλο θα έχει μια συμπεριφορά τύπου ΑΤΠ ως προς το m , ενώ μια συμπεριφορά ΣΤΠ ως προς το j . Πράγματι, όσο περισσότερες συμπληρωμένες ομάδες παρατηρήσει ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης, τόσο αυξάνει και ο χρόνος παραμονής του, εφόσον η εξυπηρέτησή του θα ξεκινήσει μετά τη συμπλήρωση της εξυπηρέτησης όλων των συμπληρωμένων ομάδων. Από την άλλη μεριά, όσο πιο πολλούς πελάτες παρατηρήσει στην ασυμπλήρωτη ομάδα, τόσο μειώνεται ο χρόνος παραμονής του στο σύστημα, καθώς θα απαιτείται μικρότερος αριθμός επόμενων αφίξεων για να συμπληρωθεί η ομάδα του. Αυτές οι διαισθήσεις δείχνουν ότι οι στρατηγικές ισορροπίας στην παρατηρήσιμη περίπτωση θα είναι τύπου κατωφλίου ως προς m και αντίστροφου τύπου κατωφλίου ως προς j . Το ακόλουθο θεώρημα 4.1 δίνει τη δομή των στρατηγικών ισορροπίας στην παρατηρήσιμη περίπτωση. Για λόγους απλούστευσης υποθέτουμε ότι οι πελάτες, όταν είναι αδιάφοροι μεταξύ του να εισέλθουν στο σύστημα και του να αποχωρήσουν, επιλέγουν να εισέλθουν.

Θεώρημα 4.1. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση. Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπία $(q_{m,j}^e : m \geq 0, 0 \leq j \leq K-1)$ που έχει την εξής δομή*

$$q_{m,j}^e = \begin{cases} 1 & \text{αν } m \leq m_j^*, \\ 0 & \text{αν } m > m_j^*, \end{cases} \quad (4.1)$$

όπου

$$m_0^* \leq m_1^* \leq \dots \leq m_{K-1}^*. \quad (4.2)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(m, K-1)$. Ένας τέτοιος πελάτης, αν αποφασίσει να εισέλθει στο σύστημα, η ομάδα του συμπληρώνεται αμέσως και ο χρόνος παραμονής του ισούται με το άθροισμα $m+1$ εκθετικών χρόνων εξυπηρέτησης με παράμετρο μ . Ο πελάτης προτιμά να εισέλθει στο σύστημα αν και μόνο αν $\frac{R}{C} \geq \frac{m+1}{\mu}$, δηλαδή συμπεραίνουμε ότι

$$q_{m,K-1}^e = \begin{cases} 1 & \text{αν } m \leq m_{K-1}^*, \\ 0 & \text{αν } m > m_{K-1}^*, \end{cases} \quad (4.3)$$

όπου $m_{K-1}^* = \lfloor \frac{\mu R}{C} - 1 \rfloor$. Ας σημειωθεί εδώ ότι η απόφαση ενός πελάτη που βρίσκει $K-1$ πελάτες στην ασυμπλήρωτη ομάδα δεν επηρεάζεται από τις αποφάσεις των υπολοίπων πελατών. Υπό μια έννοια, συνεπώς, η απόφαση που περιγράφηκε παραπάνω αποτελεί «κυριαρχούσα» απόφαση, εφόσον είναι βέλτιστη απάντηση έναντι οποιαδήποτε άλλης στρατηγικής των υπολοίπων πελατών. Ως εκ τούτου, για οποιαδήποτε πιθανή στρατηγική ισορροπίας $(q_{m,j}^e : m \geq 0, 0 \leq j \leq K-1)$, έχουμε αναγκαστικά ότι οι πιθανότητες εισόδου $q_{m,K-1}^e$, $m \geq 0$ έχουν τη μορφή (4.4).

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν αφικνούμενο πελάτη ο οποίος βρίσκει το σύστημα σε μια κατάσταση $(m, K-2)$. Τότε, αν $q_{m,K-1}^e = 0$, θα έχουμε αναγκαστικά ότι $q_{m,K-2}^e = 0$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα «σύνδεσης» (coupling), βλέπουμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(m, K-2)$ είναι μεγαλύτερος από το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(m, K-1)$. Πράγματι, και οι δύο αυτοί πελάτες θα πρέπει να περιμένουν την εξυπηρέτηση των m συμπληρωμένων ομάδων προκειμένου να αρχίσουν να εξυπηρετούνται. Ωστόσο, ο πρώτος πελάτης μπορεί να υποστεί μια επιπλέον καθυστέρηση σε σχέση με τον δεύτερο, εφόσον η ομάδα του μπορεί να μην έχει ακόμη συμπληρωθεί στο τέλος αυτών των m χρόνων εξυπηρέτησης. Με αυτή τη λογική, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(m, K-2)$ και αποφασίζει να εισέλθει, $S^{(fo)}(m, K-2)$, είναι μια αύξουσα συνάρτηση του m που τείνει στο ∞ καθώς $m \rightarrow \infty$. Συνεπώς, υπάρχει μοναδικό m_{K-2}^* τέτοιο ώστε $S^{(fo)}(m_{K-2}^*, K-2) \leq \frac{R}{C} < S^{(fo)}(m_{K-2}^* + 1, K-2)$ και έχουμε ότι για οποιαδήποτε πιθανή στρατηγική ισορροπίας $(q_{m,j}^e : m \geq 0, 0 \leq j \leq K-1)$, οι

πιθανότητες εισόδου $q_{m,K-2}^e$, $m \geq 0$ παίρνουν τη μορφή

$$q_{m,K-2}^e = \begin{cases} 1 & \text{αν } m \leq m_{K-2}^*, \\ 0 & \text{αν } m > m_{K-2}^*, \end{cases} \quad (4.4)$$

Εφόσον $q_{m,K-2}^e = 0$, τότε $q_{m,K-1}^e = 0$, θα έχουμε αναγκαστικά ότι $m_{K-2}^* \leq m_{K-1}^*$.

Μπορούμε να συνεχίσουμε την ίδια επιχειρηματολογία για τους αφικνούμενους πελάτες που βρίσκουν $j = K - 2$ πελάτες στην ασυμπλήρωτη ομάδα και με αυτόν τον τρόπο συνάγουμε τις (4.1) και (4.2) για $j = K - 1, K - 2, \dots, 0$. Σημειώνουμε ότι η απόφαση ενός πελάτη που βρίσκει j πελάτες στην ασυμπλήρωτη ομάδα εξαρτάται μόνο από τους κανόνες εισόδου (στρατηγικές) των πελατών που βρίσκουν περισσότερους από j πελάτες, αλλά όχι από τους κανόνες εισόδου των υπολοίπων πελατών. Αυτό ακριβώς είναι και το γεγονός που βοηθά στην αναδρομική κατασκευή της μοναδικής στρατηγικής ισορροπίας για $j = K - 1, K - 2, \dots, 0$. ■

Για να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της μοναδικής στρατηγικής ισορροπίας ($q_{m,j}^e$: $m \geq 0, 0 \leq j \leq K - 1$) χρειάζεται να προσδιορίσουμε τα κατώφλια m_j^* , $0 \leq j \leq K - 1$. Θα πρέπει, λοιπόν, να υπολογίσουμε το δεσμευμένο μέσο χρόνο παραμονής των πελατών, δεδομένης της κατάστασης του συστήματος σε στιγμές αφίξεων. Όπως έχουμε δει από το θεώρημα 4.1, μια βασική ιδιότητα της στρατηγικής ισορροπίας ($q_{m,j}^e$) είναι ότι η συνθήκη $q_{m,j}^e = 1$ για μια κατάσταση (m, j) συνεπάγεται και ότι $q_{n,i}^e = 1$ για κάθε κατάσταση (n, i) με $n \leq m$ και $i \geq j$. Συνέπεια αυτής της ιδιότητας είναι το γεγονός ότι, αν ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης παρατηρήσει το σύστημα στην κατάσταση (m, j) και προτιμήσει να εισέλθει, τότε και ο μελλοντικός αφίξεις θα προτιμήσουν επίσης να εισέλθουν, τουλάχιστον μέχρι τη συμπλήρωση της ομάδας του τυχαία επιλεγμένου πελάτη. Αυτή η ιδιότητα κάνει ευκολότερο τον υπολογισμό του μέσου χρόνου παραμονής του. Πιο αναλυτικά, έχουμε το θεώρημα 4.2 το οποίο παρέχει έναν τρόπο υπολογισμού του μέσου χρόνου παραμονής του τυχαία επιλεγμένου πελάτη και χαρακτηρίζει τα κατώφλια m_j^* , $0 \leq j \leq K - 1$.

Θεώρημα 4.2. Θεωρούμε το παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M^K/1$ ουράς και έστω $S^{(f_0)}(m, j)$ ο δεσμευμένος μέσος χρόνος παραμονής ενός τυχαία επιλεγμένου πελάτη που παρατηρεί το σύστημα στην κατάσταση (m, j) και αποφασίζει να εισέλθει σε αυτό,

δεδομένου ότι οι επόμενες αφίξεις επίσης θα προτιμήσουν να εισέλθουν, τουλάχιστον μέχρι τη συμπλήρωση της ομάδας του. Τότε,

$$S^{(fo)}(m, j) = \frac{m+1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^m \sum_{i=0}^{K-j-1} (K-j-i-1) \binom{m+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^i, \quad m \geq 0, 0 \leq j \leq K-1, \quad (4.5)$$

(με τις παραδοχές ότι $\binom{m+i-1}{i} = 0$ για $m = 0$ και $i \geq 0$, $\binom{m+0-1}{0} = 0$ για $m \neq 0$, και $\binom{m+0-1}{0} = 1$ για $m = 0$). Επιπλέον, έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες για τη συνάρτηση $S^{(fo)}(m, j)$:

- (i) Η $S^{(fo)}(m, j)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του j για σταθερό $m \geq 0$.
- (ii) Η $S^{(fo)}(m, j)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του m για σταθερό j με $0 \leq j \leq K-1$.
- (iii) $\lim_{m \rightarrow \infty} S^{(fo)}(m, j) = \infty$, $0 \leq j \leq K-1$.

Τα κατώφλια m_j^* , $0 \leq j \leq K-1$, της μοναδικής στρατηγικής ισορροπίας ($q_{m,j}^e$) όπως δίνονται από την (4.1) υπολογίζονται αναδρομικά για $j = K-1, K-2, \dots, 0$ ως εξής:

$$m_{K-1}^* = \lfloor \frac{\mu R}{C} - 1 \rfloor, \quad (4.6)$$

$$m_j^* = \max \left\{ m : 0 \leq m \leq m_{j+1}^* \text{ και } S^{(fo)}(m, j) \leq \frac{R}{C} \right\}, \quad j = K-2, K-3, \dots, 0. \quad (4.7)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε αρχικά έναν πελάτη που παρατηρεί το σύστημα στην κατάσταση $(0, j)$ και αποφασίζει να εισέλθει σε αυτό. Ένας τέτοιος πελάτης θα χρειαστεί να περιμένει για ακριβώς $K-j-1$ μελλοντικές αφίξεις προκειμένου για τη συμπλήρωση της δικιάς του ομάδας (με μέσο χρόνο αναμονής $\frac{K-j-1}{\lambda}$). Έπειτα, η ομάδα του θα ξεκινήσει να εξυπηρετείται (μέσος χρόνος εξυπηρέτησης $\frac{1}{\mu}$) και, επομένως, ο συνολικός χρόνος παραμονής του στο σύστημα είναι ίσος με

$$S^{(fo)}(0, j) = \frac{K-j-1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}, \quad 0 \leq j \leq K-1. \quad (4.8)$$

Θεωρούμε τώρα έναν πελάτη που παρατηρεί το σύστημα στην κατάσταση $(m, K-1)$ και εισέρχεται σε αυτό. Ένας τέτοιος πελάτης είναι αυτός που θα συμπληρώσει την ομάδα του. Έτσι, ο μέσος συνολικός χρόνος παραμονής του ισούται ακριβώς με το χρόνο εξυπηρέτησης $m+1$ ανεξάρτητων χρόνων εξυπηρέτησης, δηλαδή με

$$S^{(fo)}(m, K-1) = \frac{m+1}{\mu}, \quad m \geq 0. \quad (4.9)$$

Θεωρούμε, τέλος, έναν πελάτη που παρατηρεί το σύστημα στην κατάσταση (m, j) , με $m \geq 1$ και $0 \leq j \leq K-2$, και αποφασίζει να εισέλθει σε αυτό. Ο χρόνος εξυπηρέτησής της ομάδας αυτού του πελάτη θα ξεκινήσει αμέσως μόλις ολοκληρωθούν οι χρόνοι εξυπηρέτησης των m παρόντων συμπληρωμένων ομάδων και η συμπλήρωση της δικής του ομάδας. Με άλλα λόγια έχουμε ότι

$$S^{(fo)}(m, j) = E[\max\{Y_m, Z_{K-j-1}\}] + \frac{m+1}{\mu}, \quad m \geq 1, 0 \leq j \leq K-2, \quad (4.10)$$

όπου οι Y_m και Z_{K-j-1} είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές Erlang- m και Erlang- $(K-j-1)$ με ρυθμούς μ και λ αντίστοιχα, που παριστάνουν το συνολικό χρόνο εξυπηρέτησης των παρόντων συμπληρωμένων ομάδων και το χρόνο συμπλήρωσης της τρέχουσας ασυμπλήρωτης ομάδας αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός τέτοιου πελάτη ισούται με το μέσο συνολικό χρόνο εξυπηρέτησης $m+1$ ομάδων ($\frac{m+1}{\mu}$ χρονικές μονάδες) συν μια μέση επιπλέον καθυστέρηση για να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση της δικής του ομάδας, στην περίπτωση που δεν υπάρχει επαρκής αριθμός νέων αφίξεων για τη συμπλήρωση της ομάδας μέχρι τη στιγμή της ολοκλήρωσης της Y_m . Δεσμεύοντας στον αριθμό των νέων αφίξεων $N(Y_m)$, μέσα στο συνολικό χρόνο εξυπηρέτησης Y_m , έχουμε ότι η μέση επιπλέον καθυστέρηση ισούται με

$$\begin{aligned} E[\max\{0, Z_{K-j-1} - Y_m\}] &= \sum_{i=0}^{\infty} Pr [N(Y_m) = i] E[\max\{0, Z_{K-j-1} - Y_m\} | N(Y_m) = i] \\ &= \sum_{i=0}^{K-j-1} Pr [N(Y_m) = i] \frac{K-j-i-1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $N(Y_m)$ είναι ο αριθμός των γεγονότων Poisson με ρυθμό λ μέσα

στον Erlang- m χρόνο Y_m με ρυθμό μ . Δεσμεύοντας στο χρόνο Y_m , συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} Pr [N(Y_m) = i] &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \frac{\mu^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\mu x} dx \\ &= \binom{m+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^i \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^m, i \geq 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Τώρα, από τις σχέσεις (4.10)-(4.12) συνάγουμε την (4.5) για $m \geq 1$ και $0 \leq j \leq K-2$. Ομοίως, οι (4.8) και (4.9) οδηγούν στην (4.5) για $m = 0$ και $j = K-1$ αντίστοιχα. Μια προσεκτική ματιά, επίσης, στην (4.10) επιβεβαιώνει την ισχύ των ιδιοτήτων (i)-(iii) του θεωρήματος για τη συνάρτηση $S^{(fo)}(m, j)$. Σημειώνουμε ότι η σχέση (4.10) αληθεύει επίσης για $m = 0$ και $j = K-1$, με την παραδοχή ότι $Y_m = 0$ για $m = 0$ και $Z_{K-j-1} = 0$ και $j = K-1$. Τέλος, οι εκφράσεις (4.6) και (4.7) είναι άμεσα αληθείς λόγω του θεωρήματος 4.1 και της σχέσης (4.5). ■

Παρατήρηση 4.1. Ένας εναλλακτικός τρόπος εύρεσης του δεσμευμένου μέσου χρόνου παραμονής ενός συγκεκριμένου πελάτη είναι ο εξής. Αν θεωρήσουμε έναν πελάτη ο οποίος παρατηρεί το σύστημα στην κατάσταση (m, j) και αποφασίσει να εισέλθει σε αυτό, δεδομένου πως κάθε επόμενη άφιξη θα αποφασίσει επίσης να εισέλθει, τότε ο χρόνος αναμονής του μέχρι την έναρξη εξυπηρέτησης της ομάδας του θα είναι το μέγιστο δύο τυχαίων μεταβλητών: η πρώτη τυχαία μεταβλητή Y_m αναφέρεται στο χρόνο μέχρι την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης όλων των m παρόντων συμπληρωμένων ομάδων και η δεύτερη Z_{K-j-1} στο χρόνο μέχρι τη συμπλήρωση της δικής του ασυμπλήρωτης ομάδας που ταυτίζεται με το χρόνο άφιξης επιπλέον $K-j-1$ πελατών. Σημειώνουμε πως αυτές οι δύο τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Έτσι, για $m = 1, 2, \dots$ και $j = 0, 1, 2, \dots, K-2$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} S_{(m,j)}^{ind} &= E[\max\{Y_m, Z_{K-j-1}\}] + \frac{1}{\mu} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \max(x, y) \frac{\mu^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\mu x} \frac{\lambda^{K-j-1}}{(K-j-2)!} y^{K-2-j} e^{-\lambda y} dy dx + \frac{1}{\mu} \\ &= \int_0^\infty \int_0^x x \frac{\mu^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\mu x} \frac{\lambda^{K-j-1}}{(K-j-2)!} y^{K-2-j} e^{-\lambda y} dy dx + \frac{1}{\mu} \\ &\quad + \int_0^\infty \int_x^\infty y \frac{\mu^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\mu x} \frac{\lambda^{K-j-1}}{(K-j-2)!} y^{K-2-j} e^{-\lambda y} dy dx + \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

που με αλλαγή της σειράς της ολοκλήρωσης δίνει

$$S_{(m,j)}^{ind} = \frac{\mu^m}{(m-1)!} \cdot \frac{\lambda^{K-j-1}}{(K-j-2)!} \int_0^\infty x^m e^{-\mu x} \int_0^x y^{K-2-j} e^{-\lambda y} dy dx \\ + \frac{\mu^m}{(m-1)!} \cdot \frac{\lambda^{K-j-1}}{(K-j-2)!} \int_0^\infty x^{m-1} e^{-\mu x} \int_x^\infty y^{K-1-j} e^{-\lambda y} dy dx + \frac{1}{\mu}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\int_x^\infty y^\alpha e^{-\lambda y} dy = \frac{\alpha!}{\lambda^{\alpha+1}} \sum_{i=0}^{\alpha} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!},$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$S_{(m,j)}^{ind} = \frac{\mu^m}{(m-1)!} \cdot \frac{\lambda^{K-j-1}}{(K-j-2)!} \int_0^\infty x^m e^{-\mu x} \frac{(K-j-2)!}{\lambda^{K-j-1}} \left(1 - \sum_{i=0}^{K-j-2} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \right) dx \\ + \frac{\mu^m}{(m-1)!} \cdot \frac{\lambda^{K-j-1}}{(K-j-2)!} \int_0^\infty x^{m-1} e^{-\mu x} \frac{(K-j-1)!}{\lambda^{K-j}} \sum_{i=0}^{K-j-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!} dx + \frac{1}{\mu} \\ = \frac{\mu^m}{(m-1)!} \left(\frac{m!}{\mu^{m+1}} - \sum_{i=0}^{K-j-2} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{(m+i)!}{(\lambda+\mu)^{m+i+1}} \right) \\ + \frac{\mu^m}{(m-1)!} \cdot \frac{K-j-1}{\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{K-j-1} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{(m+i-1)!}{(\lambda+\mu)^{m+i}} + \frac{1}{\mu} \\ = \frac{m+1}{\mu} - \sum_{i=0}^{K-j-2} \frac{(m+i)!}{i!(m-1)!} \cdot \frac{\mu^m \lambda^i}{(\lambda+\mu)^{m+i+1}} \\ + (K-j-1) \cdot \sum_{i=0}^{K-j-1} \frac{(m+i-1)!}{i!(m-1)!} \cdot \frac{\mu^m \lambda^{i-1}}{(\lambda+\mu)^{m+i}} \\ = \frac{m+1}{\mu} - \sum_{i=0}^{K-j-1} \frac{(m+i-1)!}{(i-1)!(m-1)!} \cdot \frac{\mu^m \lambda^{i-1}}{(\lambda+\mu)^{m+i}} \\ + (K-j-1) \cdot \sum_{i=0}^{K-j-1} \frac{(m+i-1)!}{i!(m-1)!} \cdot \frac{\mu^m \lambda^{i-1}}{(\lambda+\mu)^{m+i}} \\ = \frac{m+1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^m \sum_{i=0}^{K-j-1} (K-j-i) \binom{m+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^i,$$

οπότε, πράγματι, λάβουμε την (4.5). Οι περιπτώσεις $m = 0$ και $j = K - 1$ προκύπτουν όπως στην προηγούμενη απόδειξη.

Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S^{(fo)}(m, j)$ ως προς m , τα κατώφλια m_j^* , $j = K - 1, K - 2, \dots, 0$, μπορούν να προσδιοριστούν αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας μια διαδικασία διχοτόμησης. Πιο αναλυτικά, ας υποθέσουμε ότι το m_{j+1}^* έχει υπολογιστεί και θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε το m_j^* . Τότε, υπολογίζουμε τα $S^{(fo)}(0, j)$ και $S^{(fo)}(m_{j+1}^*, j)$. Αν $S^{(fo)}(0, j) > \frac{R}{C}$, τότε θέτουμε $m_j^* = 0$. Αν $S^{(fo)}(m_{j+1}^*, j) \leq \frac{R}{C}$, τότε θέτουμε $m_j^* = m_{j+1}^*$. Ειδικά, δηλαδή αν $S^{(fo)}(0, j) \leq \frac{R}{C} < S^{(fo)}(m_{j+1}^*, j)$, υπολογίζουμε το $S^{(fo)}(\lfloor \frac{m_{j+1}^*}{2} \rfloor, j)$ και το συγκρίνουμε με το $\frac{R}{C}$. Ανάλογα με το αν είναι ή όχι μεγαλύτερο από $\frac{R}{C}$, περιορίζουμε την αναζήτησή μας για το m_j^* στα διαστήματα $\{0, 1, \dots, \lfloor \frac{m_{j+1}^*}{2} \rfloor - 1\}$ ή $\{\lfloor \frac{m_{j+1}^*}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m_{j+1}^*}{2} \rfloor + 1, \dots, m_{j+1}^*\}$ αντίστοιχα.

Στην παραπάνω ανάλυση, υποθέσαμε για λόγους απλούστευσης, ότι οι πελάτες, όταν είναι αδιάφοροι μεταξύ του να εισέλθουν στο σύστημα και του να αποχωρήσουν, αποφασίζουν να εισέλθουν. Αν τώρα απαλείψουμε αυτήν την υπόθεση, τότε οι πελάτες μπορούν να τυχαίοποιούν τις αποφάσεις τους, όταν είναι αδιάφοροι μεταξύ της εισόδου και της αποχώρησης. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί επίσης να υπάρχουν και μικτές στρατηγικές ισορροπίας. Παρόλαυτά, αυτές θα έχουν σχεδόν την ίδια δομή με τις καθάρες στρατηγικές ισορροπίας, όπως αυτές περιγράφηκαν στα θεωρήματα 4.1 και 4.2, μόνο που θα τυχαίοποιούν σε μερικές καταστάσεις (m_j^*, j) . Ωστόσο, δε θα επεκταθούμε περαιτέρω σε αυτό το θέμα, καθώς η ανάλυση αφορά μόνο πολύ ειδικές - τεχνητές - περιπτώσεις των παραμέτρων του μοντέλου (για παράδειγμα, η πιθανότητα τυχαίοποίησης για m_{K-1}^* είναι δυνατή μόνο εάν η ποσότητα μR είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του C).

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι ο διαχειριστής επιθυμεί να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό όφελος ανά μονάδα χρόνου, επιβάλλοντας ένα κατάλληλο αντίτιμο/διόδιο εισόδου. Τότε, η αμοιβή εξυπηρέτησης, R , ή το κόστος αναμονής, C , θα μεταβληθεί σε R' και C' . Παρόλαυτά, η δομή της στρατηγικής ισορροπίας παραμένει ίδια με αυτήν που περιγράφηκε στο θεώρημα 4.1, αλλά με κάποια πιθανώς διαφορετικά κατώφλια $m_0^*, m_1^*, \dots, m_{K-1}^*$. Κάτω από μια τέτοια στρατηγική, η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{(M(t), J(t))\}$ θα απορροφηθεί στο σύνολο $S_{M,J}^{(fo)}(m_0^*) = \{(m, j) : 0 \leq m \leq m_0^*, 0 \leq j \leq K - 1\} \cup \{(m_0^* + 1, 0)\}$. Επομένως, μπορούμε να παραμετροποιήσουμε τη συνάρτηση του αναμενόμενου καθαρού κοινωνικού οφέλους χρησιμοποιώντας το m_0^* και να

καταλήξουμε στο ότι αυτή δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{B}^{(fo)}(m_0^*) = \lambda R(1 - \pi(m_0^* + 1, 0; m_0^*)) - C \sum_{(m,j) \in S_{M,J}^{(fo)}(m_0^*)} (mK + j)\pi(m, j; m_0^*), \quad (4.13)$$

όπου οι $(\pi(m, j; m_0^*) : (m, j) \in S_{M,J}^{(fo)}(m_0^*))$ είναι οι στάσιμες πιθανότητες της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{(M(t), J(t))\}$ δεδομένου ότι οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα όσο παρατηρούν το πολύ m_0^* συμπληρωμένες ομάδες κατά τη στιγμή της άφιξής τους. Αυτή η στάσιμη κατανομή, ωστόσο, δεν μπορεί να προσδιοριστεί σε κλειστή μορφή. Έτσι, η μεγιστοποίηση της $\mathcal{B}^{(fo)}(m_0^*)$ μπορεί να προχωρήσει μόνο αριθμητικά.

4.4 Η μη παρατηρήσιμη περίπτωση

Ξεκινάμε τη μελέτη της μη-παρατηρήσιμης περίπτωσης με την πρόταση 4.1 που αφορά το μέσο χρόνο παραμονής ενός τυχαία επιλεγμένου πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα όταν όλοι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν μια δεδομένη στρατηγική.

Πρόταση 4.1. Στο μη-παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M^K/1$ ουράς, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός τυχαία επιλεγμένου πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα, όταν οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική q , δίνεται από τη σχέση

$$S^{(fu)}(q) = \begin{cases} \infty & \text{αν } q = 0 \text{ ή } \frac{K\mu}{\lambda} \leq q \leq 1, \lambda \geq K\mu, \\ \frac{1}{\mu(1-(\beta(q))^K)} + \frac{K-1}{2\lambda q} & \text{αν } 0 < q \leq 1, \lambda < K\mu \text{ ή } 0 < q < \frac{K\mu}{\lambda}, \lambda \geq K\mu, \end{cases} \quad (4.14)$$

όπου $\beta(q)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\mu z^{K+1} - (\lambda q + \mu)z + \lambda q = 0, \quad (4.15)$$

στο $(0, 1)$ (που υπάρχει όταν ισχύει η συνθήκη $\lambda q < K\mu$).

Απόδειξη. Όταν κανείς πελάτης δεν αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα ($q = 0$), τότε ο τυχαία επιλεγμένος πελάτης θα βρει το σύστημα κενό. Έτσι, εφόσον $K > 1$, θα χρειαστεί να περιμένει επ' άπειρον, καθώς η ομάδα του δε θα συμπληρωθεί ποτέ. Αν $q > 0$, τότε το σύστημα συμπεριφέρεται όπως η συνήθης $M/M^K/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λq και ρυθμό εξυπηρέτησης μ . Τότε, είναι γνωστό (βλέπε για παράδειγμα

Kleinrock (1975), παράγραφοι 4.4 και 4.6) ότι η ουρά είναι ευσταθής αν και μόνο αν $\lambda q < K\mu$. Ως εκ τούτου, για $\lambda \geq K\mu$ και $\frac{K\mu}{\lambda} \leq q \leq 1$, έχουμε ότι το πλήθος των πελατών στο σύστημα απειρίζεται οριακά με πιθανότητα 1 και, επομένως, ο χρόνος παραμονής του τυχαία επιλεγμένου πελάτη είναι άπειρος. Οι δύο παραπάνω περιπτώσεις αντιστοιχούν στον πρώτο κλάδο της (4.14).

Στην περίπτωση που $0 < q \leq 1$, $\lambda < K\mu$ ή $0 < q < \frac{K\mu}{\lambda}$, $\lambda \geq K\mu$, το σύστημα είναι ευσταθές και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του στάσιμου αριθμού πελατών στο σύστημα, $Q^{(fu)}$, παίρνει τη μορφή

$$P_Q(z; q) = \frac{1 - z^K}{K(1 - z)} \cdot \frac{1 - \beta(q)}{1 - \beta(q)z}, \quad (4.16)$$

με τη $\beta(q)$ να είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (4.15) στο $(0,1)$ (βλέπε για παράδειγμα Kleinrock (1975), παράγραφος 4.4). Αυτό δείχνει ότι η $Q^{(fu)}$ είναι το άθροισμα μιας διακριτής ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής στο $\{0, 1, \dots, K-1\}$ και μιας γεωμετρικά κατανομημένης τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(1 - \beta(q))(\beta(q))^n$, $n \geq 0$. Επομένως, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$E[Q^{(fu)}] = \frac{K-1}{2} + \frac{\beta(q)}{1 - \beta(q)}. \quad (4.17)$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Little και την εξίσωση (4.15), συνάγουμε άμεσα το δεύτερο κλάδο της (4.14). ■

Παρατήρηση 4.2. Μια ισοδύναμη μορφή της (4.14) είναι η

$$S^{(fu)}(q) = \frac{K-1}{2\lambda q} + \frac{\left(\frac{1}{\beta(q)}\right)^K}{\mu \left(\left(\frac{1}{\beta(q)}\right)^K - 1 \right)}, \quad 0 < q \leq 1. \quad (4.18)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι $\lim_{q \rightarrow 0^+} S^{(fu)}(q) = +\infty$.

Λήμμα 4.1. Η $\frac{1}{\beta(q)}$ είναι φθίνουσα και κοίλη συνάρτηση του q .

Απόδειξη. Κάνοντας μερικούς υπολογισμούς, μπορούμε ισοδύναμα να δούμε ότι η $\frac{1}{\beta(q)}$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$$\lambda q z^K - \mu z^{K-1} - \mu z^{K-2} - \dots - \mu z - \mu = 0 \quad (4.19)$$

που κείται εκτός μοναδιαίου δίσκου. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} q \equiv q(z) &= \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{1 + z + \dots + z^{K-1}}{z^K} \\ &= \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{1 - z^K}{(1 - z)z^K} = \frac{\mu}{\lambda} g(z). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Με αυτή τη λογική, έχουμε ότι το πρόσημο της $q'(z)$ εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή της $g'(z)$, ο οποίος ισούται με

$$\begin{aligned} -Kz^{K-1}(1-z)z^K - (1-z^K)(Kz^{K-1} - (K+1)z^K) &= -z^{2K} + (K+1)z^K - Kz^{K-1} \\ &= (Kz + z - K - z^{K+1})z^{K-1} \\ &= \Phi(z) \cdot z^{K-1}, \end{aligned}$$

όπου $\Phi(z) = Kz + z - K - z^{K+1}$. Ωστόσο, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι η $\frac{1}{\beta(q)}$ είναι πάντα ένας πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 1. Πράγματι, αντικαθιστώντας $w = \frac{1}{z}$ στην (4.19), συμπεραίνουμε ότι η w είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$$\lambda q - \mu w - \mu w^2 - \dots - \mu w^{K-1} - \mu w^K = 0$$

που βρίσκεται εντός του μοναδιαίου δίσκου. Εφόσον $\lambda q < K$, μπορούμε άμεσα να δείξουμε ότι η τελευταία έχει μια πραγματική ρίζα στο $(0, 1)$, οπότε και η αρχική εξίσωση (4.19) έχει πράγματι μια πραγματική ρίζα στο $(1, +\infty)$. Ως εκ τούτου, ο όρος z^{K-1} διατηρεί θετικό πρόσημο. Από την άλλη μεριά, η παράγωγος της $\Phi(z)$ ισούται με

$$\Phi'(z) = (k+1) \cdot (1 - z^K),$$

και διατηρεί αρνητικό πρόσημο. Έτσι, η $\Phi(z)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς z και, αφού $\Phi(1) = 0$, έχουμε ότι $\Phi(z) < 0$ για κάθε $z > 1$. Εν κατακλείδι, ο αριθμητής της $g'(z)$ διατηρεί επίσης αρνητικό πρόσημο και, επομένως, η $q(z)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς z . Λόγω, τώρα, της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ $q(z)$ και $\frac{1}{\beta(q)}$, συμπεραίνουμε ότι η $\frac{1}{\beta(q)}$ είναι επίσης μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς q , οπότε και συνάγουμε τη μονοτονία που αναφέρεται στο λήμμα.

Χρησιμοποιώντας, τώρα, την (4.20), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{(1-z)z^K} - \frac{1}{1-z} \\ &= a(z) - b(z). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές τη συνάρτηση $b(z)$, έχουμε ότι

$$b''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}. \quad (4.22)$$

Από την άλλη, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $a(z)$, προκύπτει

$$a'(z) = -\frac{Kz^{K-1} - (K+1)z^K}{(1-z)^2 z^{2K}} = \frac{z - K(1-z)}{(1-z)^2 z^{K+1}}.$$

και ξαναπαραγωγίζοντας έχουμε

$$a''(z) = \frac{d(z)}{(1-z)^4 z^{2K+2}},$$

όπου η $d(z)$ ισούται με

$$\begin{aligned} d(z) &= (1-z)^2 z^{K+1}(K+1) - [(K+1)z - K] \cdot [-2(1-z)z^{K+1} + (1-z)^2 (K+1)z^K] \\ &= (K+1)(1-z)^2 z^{K+1} - [(K+1)z - K] \cdot (1-z) z^K [(K+1)(1-z) - 2z] \\ &= (1-z) z^K \{ (K+1)z - (K+1)z^2 - [(K+1)z - K] \cdot [K+1 - (K+3)z] \} \\ &= (1-z) z^K \{ K(K+1) + (-2K^2 - 4K)z + (K+1)(K+2)z^2 \} \\ &= (1-z) z^K \{ K(K+1) - 2K(K+2)z + (K+1)(K+2)z^2 \}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Συνδυάζοντας, τώρα, τις (4.21), (4.22) και (4.23), προκύπτει τελικά ότι

$$\begin{aligned} g''(z) &= \frac{(1-z) z^K \{ K(K+1) - 2K(K+2)z + (K+1)(K+2)z^2 \}}{(1-z)^4 z^{2K+2}} - \frac{2}{(1-z)^3} \\ &= \frac{K(K+1) - 2K(K+2)z + (K+1)(K+2)z^2}{(1-z)^3 z^{K+2}} - \frac{2}{(1-z)^3} \\ &= \frac{K(K+1) - 2K(K+2)z + (K+1)(K+2)z^2 - 2z^{K+2}}{(1-z)^3 z^{K+2}} \\ &= \frac{(K+1)[K - (K+2)z^2] - 2z[K(K+2) + z^{K+1}]}{(1-z)^3 z^{K+2}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Σημειώνουμε τώρα ότι, εφόσον $z > 1$, ο παρανομαστής στην (4.24) διατηρεί αρνητικό πρόσημο. Επιπλέον, η συνθήκη $z > 1$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $(K+2)z^2 > K$, που κάνει τον πρώτο όρο στον αριθμητή της (4.24) να διατηρεί αρνητικό πρόσημο. Ο

δεύτερος όρος στον αριθμητή της (4.24) διατηρεί θετικό πρόσημο και, ως εκ τούτου, η $g''(z)$ διατηρεί θετικό πρόσημο. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η $g(z)$ είναι κυρτή συνάρτηση του z . Λόγω πάλι της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ $q(z)$ και $\frac{1}{\beta(q)}$, που αναφέρθηκε νωρίτερα στην (4.20), συμπεραίνουμε, τελικά, ότι πράγματι η $\frac{1}{\beta(q)}$ είναι κοίλη συνάρτηση του q .

■

Στην ακόλουθη πρόταση μελετάμε την κυρτότητα της $S^{(fu)}(q)$.

Πρόταση 4.2. Η συνάρτηση $S^{(fu)}(q)$, όπως ορίστηκε στη σχέση (4.14), είναι αυστηρά κυρτή στο υποδιάστημα του $[0, 1]$ στο οποίο είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας τον εναλλακτικό τύπο του συνολικού μέσου χρόνου παραμονής, όπως αυτός δίνεται στη σχέση (4.18), συνάγουμε, μετά από μερικούς υπολογισμούς τη σχέση

$$(S^{(fu)}(q))' = -\frac{K-1}{2\lambda q^2} - \frac{K \left(\frac{1}{\beta(q)}\right)^{K-1} \left(\frac{1}{\beta(q)}\right)'}{\mu^2 \left(\left(\frac{1}{\beta(q)}\right)^K - 1\right)^2}. \quad (4.25)$$

Παραγωγίζοντας την (4.25) παίρνουμε ότι

$$(S^{(fu)}(q))'' = \frac{K-1}{\lambda q^3} - \frac{j(q)}{\mu^2 \left(\frac{1}{\beta(q)} - 1\right)^4} \quad (4.26)$$

όπου η $j(q)$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} j(q) &= K\mu(K-1)z_0^{K-2}(q) (z_0'(q))^2 (z_0^K(q) - 1)^2 + K\mu z_0^{K-1}(q) z_0''(q) (z_0^K(q) - 1)^2 \\ &\quad - 2K^2\mu z_0^{2K-2}(q) (z_0'(q))^2 (z_0^K(q) - 1) \\ &= K\mu z_0^{K-2}(q) (z_0'(q))^2 (z_0^K(q) - 1) \{(K-1)(z_0^K(q) - 1) - 2Kz_0^K(q)\} \\ &\quad + K\mu z_0^{K-1}(q) z_0''(q) (z_0^K(q) - 1)^2 \\ &= K\mu z_0^{K-2}(q) (z_0'(q))^2 (z_0^K(q) - 1) \{(K-1)z_0^K(q) - (K-1) - 2Kz_0^K(q)\} \\ &\quad + K\mu z_0^{K-1}(q) z_0''(q) (z_0^K(q) - 1)^2, \end{aligned} \quad (4.27)$$

όπου έχουμε συμβολίσει για λόγους συντομίας με $z_0(q)$ την ποσότητα $\frac{1}{\beta(q)}$. Μπορούμε

να απλοποιήσουμε περαιτέρω και έχουμε τελικά

$$\begin{aligned}
 j(q) &= K\mu z_0^{K-2}(q) (z_0'(q))^2 (z_0^K(q) - 1) \{-(K+1)z_0^K(q) - (K-1)\} \\
 &\quad + K\mu z_0^{K-1}(q) z_0''(q) (z_0^K(q) - 1)^2 \\
 &= K\mu z_0^{K-2}(q) (z_0^K(q) - 1) \\
 &\quad \cdot \left\{ (z_0'(q))^2 \cdot [-(K+1)z_0^K(q) - (K-1)] + \frac{1}{\beta(q)} z_0''(q) (z_0^K(q) - 1) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Λαμβάνοντας υπόψη το λήμμα 4.1, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $j(q) < 0$. Συνδυάζοντας, κατόπιν, τις (4.26) και (4.28), είναι άμεσο ότι η $(S^{(fu)}(q))''$ διατηρεί θετικό πρόσημο, δηλαδή η $(S^{(fu)}(q))$ είναι κυρτή συνάρτηση του q . ■

Μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε της στρατηγικές ισορροπίας των πελατών. Σημειώνουμε ότι η στρατηγική θ που υποδεικνύει στον πελάτη να αποχωρεί πάντα είναι στρατηγική ισορροπίας, λόγω του πρώτου κλάδου της (4.14). Πράγματι, όταν όλοι οι πελάτες αποχωρούν, ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης προτιμά επίσης να αποχωρήσει, γιατί σε διαφορετική περίπτωση θα περιμένει επ' άπειρον για τη συμπλήρωση της ομάδας του. Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο τη διαφορά με το μοντέλο όπου οι εξυπηρετήσεις γίνονται μεμονωμένα ($K = 1$), στο οποίο η στρατηγική αποχώρησης (0) δεν αποτελεί στη γενική περίπτωση στρατηγική ισορροπίας. Σχετικά, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα 4.3 που προσδιορίζει τον αριθμό και τη φύση των θετικών στρατηγικών ισορροπίας (δηλαδή των στρατηγικών ισορροπίας με θετική πιθανότητα εισόδου).

Θεώρημα 4.3. *Θεωρούμε το μη-παρατηρήσιμο μοντέλο της $M/M^K/1$ ουράς και έστω q_{\min} το μοναδικό σημείο το οποίο ελαχιστοποιεί ολικά το δεύτερο κλάδο της $S^{(fu)}(q)$ στην (4.14). Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:*

Περίπτωση I : $\frac{R}{C} < S^{(fu)}(q_{\min})$. Σε αυτή την περίπτωση, δεν υπάρχει θετική στρατηγική ισορροπίας.

Περίπτωση II : $\frac{R}{C} = S^{(fu)}(q_{\min})$.

IIa: $q_{\min} > 1$. Σε αυτή την περίπτωση, δεν υπάρχει θετική στρατηγική ισορροπίας.

IIb: $q_{\min} = 1$. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει μια μοναδική θετική στρατηγική ισορροπίας q^e : η στρατηγική $q^e = 1$.

IIc: $q_{\min} < 1$. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει μια μοναδική θετική στρατηγική ισορροπίας q^e : η στρατηγική $q^e = q_{\min}$.

Περίπτωση III: $\frac{R}{C} > S^{(fu)}(q_{\min})$.

Έστω $q_1 < q_2$ οι ρίζες της συνάρτησης $S^{(fu)}(q) = \frac{R}{C}$ (εδώ υπάρχουν δύο ρίζες, λόγω της ασυμμετρικής κυρτότητας της συνάρτησης $S^{(fu)}(q)$).

IIIa: $q_1 > 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, δεν υπάρχει θετική στρατηγική ισορροπίας.

IIIb: $q_1 = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει μια μοναδική θετική στρατηγική ισορροπίας: η στρατηγική $q^e = 1$.

IIIc: $q_1 < 1 < q_2$. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχουν δύο θετικές στρατηγικές ισορροπίας: οι στρατηγικές $q^e = q_1$ και $q^e = 1$.

IIId: $q_2 = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχουν δύο θετικές στρατηγικές ισορροπίας: οι στρατηγικές $q^e = q_1$ και $q^e = 1$.

IIIe: $q_2 < 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχουν δύο θετικές στρατηγικές ισορροπίας: οι στρατηγικές $q^e = q_1$ και $q^e = q_2$.

Απόδειξη. Η στρατηγική $q = 1$ που υποδεικνύει στον πελάτη την είσοδό του στο σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(fu)}(1) \leq \frac{R}{C}$. Έτσι, στην περίπτωση I, η στρατηγική $q = 1$ δεν είναι ποτέ σημείο ισορροπίας, ενώ στην περίπτωση II, η στρατηγική $q = 1$ αποτελεί σημείο ισορροπίας μόνο στην περίπτωση όπου $q_{\min} = 1$ (υποπερίπτωση IIb). Στην περίπτωση III, η στρατηγική $q = 1$ αποτελεί σημείο ισορροπίας αν και μόνο αν κείται μεταξύ των ριζών της $S^{(fu)}(q) = \frac{R}{C}$ (λόγω της κυρτότητας της συνάρτησης $S^{(fu)}(q)$), δηλαδή όταν $q_1 \leq 1 \leq q_2$ (υποπεριπτώσεις IIIb, IIIc, IIId).

Μια μικτή στρατηγική $q \in (0, 1)$ αποτελεί σημείο ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(fu)}(q) = \frac{R}{C}$. Στην περίπτωση I, η εξίσωση δεν έχει ρίζες και, επομένως, δεν υπάρχουν γνήσια μικτές στρατηγικές ισορροπίας. Στην περίπτωση II, η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $q = q_{\min}$. Αυτή θα είναι αποδεκτή ως γνήσια μικτό σημείο ισορροπίας αν $q_{\min} < 1$

(περίπτωση IIc). Στην περίπτωση III, η εξίσωση έχει δύο διακεκριμένες ρίζες q_1 και q_2 . Αυτές είναι αποδεκτές ως γνήσιες μικτές στρατηγικές ισορροπίας όταν $q_1 < 1$ και $q_2 < 1$ αντίστοιχα (περιπτώσεις IIIc, IIId, IIIe). ■

Στρέφουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στη θεώρηση του διαχειριστή του συστήματος. Σε αυτήν την περίπτωση, το πρόβλημα είναι η μεγιστοποίηση του αναμενόμενου καθαρού κοινωνικού όφελους ανά χρονική μονάδα, $\mathcal{B}^{(fu)}(q)$, ως προς τη στρατηγική q που θα έπρεπε να επιβληθεί στους πελάτες (π.χ. με τη μορφή κάποιου διοδίου/ αντιτίμου εισόδου). Με βάση την (4.14), συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(fu)}(q) &= \lambda q(R - CS^{(fu)}(q)) \\ &= \begin{cases} -\infty & \text{αν } \frac{K\mu}{\lambda} \leq q \leq 1, \lambda \geq K\mu, \\ 0 & \text{αν } q = 0, \\ \lambda qR - C \left(\frac{\lambda q}{\mu(1-(\beta(q))^K)} + \frac{K-1}{2} \right) & \text{αν } 0 < q \leq 1, \lambda < K\mu \\ & \text{ή } 0 < q < \frac{K\mu}{\lambda}, \lambda \geq K\mu. \end{cases} \quad (4.29) \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι για τον μη τετριμμένο τρίτο κλάδο της $\mathcal{B}^{(fu)}(q)$, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι η ποσότητα $\frac{d\mathcal{B}^{(fu)}(q)}{dq}$ είναι αρνητική και δεν εξαρτάται από το K . Ως εκ τούτου, η $\mathcal{B}^{(fu)}(q)$ είναι αυστηρά κοίλη γι' αυτό το εύρος των παραμέτρων του q και το ελάχιστό της, q_{\max} είναι μοναδικό. Μπορούμε, λοιπόν, να καταλήξουμε στο επόμενο θεώρημα, 4.4, που προσδιορίζει τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές.

Θεώρημα 4.4. *Θεωρούμε το μη-παρατηρήσιμο μοντέλο της Μ/Μ^K/1 ουράς. Ο αριθμός και η φύση των κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών εξαρτάται από τις τιμές των q_{\min} , που είναι το μοναδικό σημείο που ελαχιστοποιεί ολικά το δεύτερο κλάδο της (4.14), και το q_{\max} , που είναι το μοναδικό σημείο που ελαχιστοποιεί ολικά τον τρίτο κλάδο της (4.29).*

Περίπτωση I : $\frac{R}{C} < S^{(fu)}(q_{\min})$. Τότε, υπάρχει μια μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική q^{soc} : η στρατηγική με πιθανότητα εισόδου $q^{soc} = 0$.

Περίπτωση II : $\frac{R}{C} = S^{(fu)}(q_{\min})$.

IIa: $q_{\min} > 1$. Τότε, υπάρχει μια μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική q^{soc} : η στρατηγική με πιθανότητα εισόδου $q^{soc} = 0$.

IIb: $q_{\min} \leq 1$. Τότε, υπάρχουν δύο κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές: η στρατηγική με πιθανότητα εισόδου $q^{soc} = 0$ και η στρατηγική με πιθανότητα εισόδου $q^{soc} = q_{\min}$.

Περίπτωση III : $\frac{R}{C} > S^{(fu)}(q_{\min})$. Τότε υπάρχει μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική: η στρατηγική με πιθανότητα εισόδου $q^{soc} = \min(q_{\max}, 1)$.

Απόδειξη. Στις περιπτώσεις I και II, όπου $\frac{R}{C} \leq S^{(fu)}(q_{\min})$, έχουμε ότι $R - CS^{(fu)}(q) \leq 0$, για $q \in [0, 1]$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\mathcal{B}^{(fu)}(q) \leq 0$, για $q \in [0, 1]$. Εφόσον $\mathcal{B}^{(fu)}(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της $\mathcal{B}^{(fu)}(q)$ στο $[0, 1]$ είναι 0 και επιτυγχάνεται και στις δύο περιπτώσεις στο $q^{soc} = 0$. Στην περίπτωση I, το μέγιστο είναι μοναδικό, εν αντιθέση με την περίπτωση II, στην οποία το μέγιστο επιτυγχάνεται επίσης και για $q^{soc} = q_{\min}$, το οποίο είναι αποδεκτό μόνο στην περίπτωση που $q_{\min} \leq 1$.

Στην περίπτωση III, όπου $\frac{R}{C} > S^{(fu)}(q_{\min})$, έχουμε ότι $\mathcal{B}^{(fu)}(q_{\min}) = \lambda q_{\min}(R - CS^{(fu)}(q_{\min})) > 0$, δηλαδή το μέγιστο της $\mathcal{B}^{(fu)}(q)$ στο $[0, 1]$ επιτυγχάνεται σε κάποιο σημείο που αντιστοιχεί στον τρίτο κλάδο της (4.29). Λόγω, όμως, του γεγονότος ότι η συνάρτηση είναι αυστηρά κοίλη ως προς q , συμπεραίνουμε ότι το μέγιστο q_{\max} είναι μοναδικό και η $\mathcal{B}^{(fu)}(q)$ είναι γνησίως αύξουσα για $q \leq q_{\max}$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα για $q \geq q_{\max}$. Έτσι, το μέγιστο της $\mathcal{B}^{(fu)}(q)$ επιτυγχάνεται στο $q^{soc} = q_{\max}$, αν $q_{\max} \leq 1$, ειδικά άλλως επιτυγχάνεται στο $q^{soc} = 1$. ■

Ας ανακαλέσουμε ότι η στρατηγική $q^e = 0$ αποτελεί πάντα στρατηγική ισορροπίας. Σημειώνουμε, επιπλέον, ότι $\mathcal{B}^{(fu)'}(q) = \lambda(R - CS^{(fu)}(q)) - \lambda q CS^{(fu)'}(q)$. Συνεπώς, για την περίπτωση III του θεωρήματος 4.3, συνάγουμε ότι $\mathcal{B}^{(fu)'}(q_1) = -\lambda q_1 CS^{(fu)'}(q_1) > 0$, ενώ $\mathcal{B}^{(fu)'}(q_2) = -\lambda q_2 CS^{(fu)'}(q_2) < 0$. Καταλήγουμε, επομένως, στο ότι $q_1 < q_{\max} < q_2$. Ως εκ τούτου, μια σύγκριση των περιπτώσεων I-III για τα θεωρήματα 4.3 και 4.4 αποκαλύπτει τα ακόλουθα:

- Όταν $\frac{R}{C} \leq S^{(fu)}(q_{\min})$, οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές συμπίπτουν με τις στρατηγικές ισορροπίας (και μπορεί να είναι μία είτε δύο).
- Όταν $\frac{R}{C} > S^{(fu)}(q_{\min})$, η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι μοναδική, ενώ μπορεί να υπάρχουν από μία έως τρεις στρατηγικές ισορροπίας.

- Όταν $\frac{R}{C} > S^{(fu)}(q_{\min})$, η στρατηγική ισορροπίας $q^e = 0$ δεν είναι ποτέ κοινωνικά βέλτιστη.
- Όταν $\frac{R}{C} > S^{(fu)}(q_{\min})$, συμπεραίνουμε ότι $0 < q_1 < q_{\max} < q_2$ και μπορεί να προκύψουν διάφορες περιπτώσεις, λαμβάνοντας υπόψη τη θέση του αριθμού 1 σε σύγκριση με τα q_1, q_{\max}, q_2 . Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση δεν είναι ξεκάθαρο το αν είναι προτιμητέο από την πλευρά της κοινωνίας το να ενθαρρυνθούν ή να αποθαρρυνθούν οι πελάτες για να εισέλθουν.

Όπως έχουμε αναφέρει και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, αυτή η ιδιάζουσα στρατηγική συμπεριφορά των πελατών οφείλεται στη συνύπαρξη δύο αντίθετων επιδράσεων, οι οποίες συνδέονται με την αύξηση του ρυθμού αφίξεων. Όταν ο ρυθμός αφίξεων είναι χαμηλός, η επίδραση που υπερτερεί είναι η επιτάχυνση της συμπλήρωσης της ασυμπλήρωτης ομάδας και, συνεπώς, η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών είναι τύπου ΣΤΠ. Αντίθετα, όταν ο ρυθμός αφίξεων είναι υψηλός, η επίδραση που υπερτερεί είναι η αύξηση του συνωστισμού των συμπληρωμένων ομάδων, που οδηγεί σε μια συμπεριφορά τύπου ΑΤΠ.

Βιβλιογραφία

1. Adiri, I. and Yechiali, U. (1974) Optimal priority purchasing and pricing decisions in nonmonopoly and monopoly queues. *Operations Research* **22**, 1051-1066.
2. Avi-Itzhak, B. and Naor, P (1964) Multipurpose service stations in queueing problems. In *Kreweras, G. and Morlat, G. Proceedings 3rd International Conference Operations Research, Oslo, 1963, English Universities Press, London.*
3. Borel, E. (1921) La théorie du jeu et les équations intégrales a noyau symétrique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **173**, 1304-1308.
4. Brill, P. H. (1975) System Point Theory in Exponential Queues. *Ph. D. Dissertation* University of Toronto.
5. Burnetas, A. and Economou, A. (2007) Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times. *Queueing Systems* **56**, 213-228.
6. Cohen, J.W. (1957) Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls, *Philips Telecommunications Review* **18**, 49-100.
7. Cooper, R.B. (1970) Queues served in cyclic order: Waiting times. *The Bell System Technical Journal* **49**, 399-413.
8. Cooper, R.B. (1981) *Introduction to Queueing Theory*. Edward Arnold, London.

9. Cooper, R.B. and Murray, G. (1969) Queues served in cyclic order. *The Bell System Technical Journal* **48**, 675-689.
10. Cournot, A. (1838) *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. Bacon, New York, Macmillan.
11. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **51**, 433-441.
12. Dasgupta, P. (1979) *Economic Theory and Exhaustible Resources*. Cambridge University Press.
13. Dimitrakopoulos, Y. and Burnetas, A. Customer equilibrium and optimal strategies in an $M/M/1$ queue with dynamic service control. Preprint.
14. Economou, A., Gomez-Corral, A. and Kanta, S. (2011) Optimal balking strategies in single-server queues with general service and vacation times. *Performance Evaluation* **68**, 967-982.
15. Economou, A. and Kanta, S. (2008a) Optimal balking strategies and pricing for the single server Markovian queue with compartmented waiting space. *Queueing Systems* **59**, 237-269.
16. Economou, A. and Kanta, S. (2008b) Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs. *Operations Research Letters* **36**, 696-699.
17. Economou, A. and Kanta, S. (2011) Equilibrium customer strategies and social-profit maximization in the single-server constant retrial queue. *Naval Research Logistics* **58**, 107-122.
18. Economou, A. and Manou, A. (2013) Equilibrium balking strategies for a clearing queueing system in alternating environment, *Annals of Operations Research* **208**, 489-514.

19. Edelson, N.M. and Hildebrand, K. (1975) Congestion tolls for Poisson queueing processes. *Econometrica* **43**, 81-92.
20. Elaydi, S.N. (1999) *An Introduction to Difference Equations, 2nd Edition*. Springer, New York.
21. Erlang, A.K. (1909) Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. *P. O. Electrical Engineers' Journal* **10**, 189-197.
22. Fuhrmann, S.W. and Cooper, R.B. (1985) Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations. *Operations Research* **33**, 1117-1129.
23. Gaver, D.P.Jr. (1962) A waiting line with interrupted service, including priorities. *Journal of the Royal Statistical Society B* **24**, 73-90.
24. Gibbard, A. (1973) Manipulation of voting schemes: a general result. *Econometrica* **41**, 587-601.
25. Grassmann, W. (1977) Transient solutions in Markovian queues. An algorithm for finding them and determining their waiting-time distributions. *European Journal of Operational Research* **1**, 396-402.
26. Guo, P. and Hassin, R. (2011) Strategic behavior and social optimization in Markovian vacation queues. *Operations Research* **59**, 986-997.
27. Guo, P. and Hassin, R. (2011) Strategic behavior and social optimization in Markovian vacation queues: The case of heterogeneous customers. *European Journal of Operational Research* **222**, 278-286.
28. Guo, P., Sun, W. and Wang, Y. (2011) Equilibrium optimal strategies to join a queue with partial information on service times. *European Journal of Operational Research* **214**, 284-297.
29. Guo, P. and Zipkin, P. (2007) Analysis and comparison of queues with different levels of delay information. *Management Science* **53**, 962-970.

30. Guo, P. and Zipkin, P. (2009) The effect of the availability of waiting-time information on a balking queue. *European Journal of Operational Research* **198**, 199-209.
31. Haight, F. (1958) An investigation of queue stability with special reference to the traffic intensity. *Ph.D. dissertation, University of New Zealand*.
32. Harsanyi, J. (1967) Games with incomplete information played by Bayesian players, I-III. Part I. The Basic Model. *Management Science* **14**, 159-182.
33. Hassin, R. (1986) Consumer information in markets with random products quality: The case of queues and balking. *Econometrica* **54**, 1185-1195.
34. Hassin, R. (2007) Information and uncertainty in a queuing system. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **21**, 361-380.
35. Hassin, R. and Haviv, M. (1995) Equilibrium strategies for queues with impatient customers. *Operations Research Letters* **17**, 41-45.
36. Hassin, R. and Haviv, M. (1997) Equilibrium threshold strategies: the case of queues with priorities. *Operations Research* **45**, 966-973.
37. Hassin, R. and Haviv, M. (2003) *To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
38. Haviv, M. and Kerner, Y. (2007) On balking from an empty queue. *Queueing Systems* **55**, 239-249.
39. Holmstrom, B. (1979) Moral Hazard and Observability. *Bell Journal of Economics* **10**, 74-91.
40. Hurwicz, L. (1972) *On informationally decentralized systems*. In Radner and McGuire, eds. *Decision and Organisation, North-Holland, Amsterdam*, 239-249.
41. Jagannathan, K., Menache, I., Modiano, E. and Zussman, G. (2012) Non-cooperative spectrum access - the dedicated vs. free spectrum choice. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* **30**, 2251-2261.

42. Johari, R. and Kumar, S. (2010) The interaction of positive externalities and congestion effects. *Working paper, Graduate School of Business, Stanford University, Stanford, CA.*
43. Kendall, D. G. (1953) Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the embedded Markov chain. *Annals of Mathematical Statistics* **24**, 338-339.
44. Kerner, Y. (2011) Equilibrium joining probabilities for an $M/G/1$ queue. *Games and Economic Behavior* **71**, 521-526.
45. Kleinrock, L. (1975) *Queueing Systems. Volume I: Theory.* John Wiley and Sons, New York.
46. Knudsen, N. C. (1972) Individual and social optimization in a multiserver queue with a general cost-benefit structure. *Econometrica* **3**, 515-528.
47. Laffont, J. and Maskin, E. (1979) *A Differentiable Approach to Expected Utility-Maximizing Mechanisms.* Laffont editions, Amsterdam.
48. Larsen, C. (1998) Investigating sensitivity and the impact of information on pricing decisions in an $M/M/1/\infty$ queueing model. *International Journal of Production Economics* **56-57**, 365-377.
49. Leeman, W.A. (1964) The reduction of queues through the use of price. *Operations Research* **12**, 783-785.
50. Little, J.D.C. (1961) A proof for the queueing formula $L = \lambda W$. *Operations Research* **9**, 383-387.
51. Mandelbaum, A. and Shimkin, N. (2000) A model for rational abandonments from invisible queues. *Queueing Systems* **36**, 141-173.
52. Miller, R.G. (1960) Priority queues. *Annals of Mathematical Statistics* **31**, 86-103.

53. Morse, P. M. (1958) *Queues, Inventories and Maintenance: The Analysis of Operational Systems with Variable Demand and Supply*, Wiley.
54. Myerson, R. (1979) Incentive-compatibility and the bargaining problem. *Econometrica* **47**, 61-73.
55. Myerson, R. (1981) Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research* **6**, 58-73.
56. Naor, P. (1969) The regulation of queue size by levying tolls. *Econometrica* **37**, 15-24.
57. Nash, J. F. (1950). Equilibrium points in N-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **36**, 48-49.
58. Palm, C. (1938) Analysis of the Erlang traffic formulae for busy-signal arrangements. *Ericsson Technics* **6**, 39-58.
59. Rosenthal, R.W. (1981) Games of perfect information, predatory pricing and the chain-store paradox. *Journal of Economic Theory* **25**, 92-100.
60. Schroeter, R. (1982) The costs of concealing the customer queue. *Working paper. Department of Economics. Iowa State University.*
61. Selten, R. (1975) A reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory* **4**, 25-55.
62. Shapley, L. S. (1953) A value for n -person games. *Annals of Mathematical Studies* **28**, 307-317.
63. Skinner (1967) A priority queueing system with server-walking time. *Operations Research* **15**, 278-285.
64. Stidham, S. Jr. (2009) *Optimal Design of Queueing Systems*. CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton.

65. Sun, W., Guo, P. and Tian, N. (2010) Equilibrium threshold strategies in observable queueing systems with setup/closedown times. *Central European Journal of Operational Research* **18**, 241-268.
66. Takacs. (1962) *Introduction to the Theory of Queues* Oxford University Press, Oxford.
67. von Neumann, J. (1928) Zur theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen* **100**, 295-320.
68. von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.
69. White, H. and Christie, L.S. (1958) Queuing with preemptive priorities or with breakdown. *Operations Research* **6**, 79-95.
70. Wolff, R. W. (1982) Poisson arrivals see time averages. *Operations Research* **30**, 223-231.
71. Wolff, R. W. (1989) *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
72. Zermelo, E (1913) Uber eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels *Proceedings 5th International Congress of Mathematicians 2*, 501-504.
73. Zhang, F. and Wang, J. (2010) Equilibrium analysis of the observable queue with balking and delayed repairs. In *3rd International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization*, 125-129.