Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κώστας Σαπουντζής

Διδακτορική Διατριβή

Σχετικιστικοί και Μαγνητισμένοι Κοσμικοί Πίδακες

Επιβλέπων Καθηγητής: Νεκτάριος Βλαχάκης

Αθήνα 2014

Εισαγωγή

Κεντρικό θέμα της παρούσας διατριβής είναι οι σχετικιστικοί και μαγνητισμένοι πίδακες που απαντώνται σε αρκετά αστροφυσικά αντικείμενα. Γενικά μιλώντας, η μελέτη των πιδάκων αποτελεί από μόνη της ένα μεγάλο και πολύ ενδιαφέρον πεδίο. Μια σειρά από διαφορετικές προσεγγίσεις όπως η θεωρητική διερεύνηση και τα αναλυτικά/ημιαναλυτικά μοντέλα, οι αριθμητικές προσομοιώσεις και βεβαίως η ¨πειραματική' συνεισφορά των παρατηρήσεων συμπλέκονται στην προσπάθεια ερμηνείας του φαινομένου. Σε μια αδρή και κάπως ανακριβή κατάτμηση μπορούμε να πούμε πως οι αναλυτικές προσεγγίσεις αναφέρονται στην στάσιμη κατάσταση καθώς εκεί οι εξισώσεις είναι απλούστερες, ενώ οι αριθμητικές προσομοιώσεις στο πλήρες χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα όπου συν τοις άλλοις έχει το πλεονέκτημα του πλήρους υπερβολικού τύπου σε όλο το εύρος των ροϊκών ταχυτήτων.

Ο Τομέας Αστροφυσικής του ΕΚΠΑ έχει εστιάσει στην θεωρητική μελέτη των αστροφυσικών πλασμάτων καθορίζοντας έτσι και το πλαίσιο της παρούσας διατριβής. Ως κεντρικό αντικείμενο τέθηκε η στάσιμη κατάσταση στο σχετικιστικό και απείρως αγώγιμο πλάσμα. Το ευρύ αυτό πεδίο προσδιορίστηκε περαιτέρω σε εκροές που υφίστανται μια απότομη απώλεια εξωτερικής πίεσης και συνεχίζουν την ελεύθερα διάδοση τους, φαινόμενο της αραίωσης (rarefaction phenomenon). Η σημασία του φαινομένου αυτού έχει ήδη επισημανθεί σε αρκετά ερευνητικά πεδία, ενώ οι τεχνολογικές του εφαρμογές είναι επίσης σημαντικές. Το γνωστό ακροφύσιο του Laval και η σχετική διάταξη των Prandtl, Meyer (Prandtl-Meyer fan) βρίσκει εφαρμογή τόσο στους πυραύλους όσο και στην υπερηχητική αεροπορία. Συνεπώς, η αραίωση υπερηχητικών (υδροδυναμικές ροές) ή υπερ-γρήγορων μαγνητοακουστικών (μαγνητισμένες ροές) αποτελεί ήδη έναν πρακτικό μηχανισμό επιτάχυνσης με αποτέλεσμα να έχουν ήδη παραχθεί μια σειρά από λύσεις τόσο για το νευτώνεια-υδροδυναμικό όσο και για το σχετικιστικό-υδροδυναμικό όριο.

Στην παρούσα θέσει επεκτείνουμε την μελέτη της αραίωσης στην μαγνητισμένη υπερσχετικιστική περιοχή, μια απαραίτητη γενίκευση, όταν πρόκειται για εφαρμογές στις ακραίες συνθήκες που συνήθως επικρατούν στα αστροφυσικά φαινόμενα υψηλών ενεργειών. Καθώς το φαινόμενο παρουσιάζει τόσο αστροφυσικό όσο και θεωρητικό ενδιαφέρον η όλη διατριβή αναπτύχθηκε σε αυτή την διττή βάση. Από την μία πλευρά οι θεωρητικές προεκτάσεις αναφέρονται στην γενίκευση των υπαρχουσών επίπεδων λύσεων και η ισχυρή μέθοδος της ακτινικής αυτο-ομοιότητας χρησιμοποιήθηκε προκείμενου να εξαχθούν οι μαγνητισμένες και σχετικιστικές επίπεδες γενικεύσεις. Τα αποτελέσματα δίνουν μια κατατοπιστική εικόνα της φυσικής του φαινομένου και μας καθοδηγούν στις μεταγενέστερες πρακτικές εφαρμογές. Από την άλλη, η κυλινδρική συμμετρία δεν επιτρέπει την χρήση της αυτο-ομοιότητας οδηγώντας μας να αναπτύξουμε μια πιο ισχυρή μέθοδο που στηρίζεται στις χαρακτηριστικές καμπύλες των εξισώσεων. Αυτές οι δύο προσεγγίσεις δρουν συμπληρωματικά και αποτελούν τα δύο κεντρικά κεφάλαια της διατριβής (κεφ.4 & 5).

Ορισμένα συμπληρωματικά ζητήματα που μελετήθηκαν από τον συγγραφέας, όπως οι σχέσεις διασποράς στην $2-D$ γεωμετρία, η περιβάλλουσα επιφάνεια των ΜΥΔ διαταραχών, τα στάσιμα ωστικά κύματα μελετήθηκαν στο κεφ.3. Τα δύο πρώτα θέματα σχετίζονται

άμεσα με το φαινόμενο αραίωσης στις ροές που μελετάμε, ενώ το τελευταίο είναι πιο ανεξάρτητο και η ολοκλήρωση του στην συνολική εικόνα της αραίωσης μένει για το μέλλον. Το συγκεκριμένο κεφάλαιο συμπληρώνεται με μια πρώτη μερική ολοκλήρωση των στάσιμων εξισώσεων, η οποία είναι γνωστή στην ερευνητική κοινότητα αρκετό καιρό καθώς και με την παρουσίαση κάποιων βασικών μοντέλων που σχετίζονται με την επιτάχυνση των πιδάκων.

Τα κεντρικά αστροφυσικά φαινόμενα στα οποία τα αποτελέσματά μας βρίσκουν εφαρμογή είναι οι Εκλάμψεις Ακτίνων Γάμα (ΕΑΓ) και το Μοντέλο του Καταρρευστή. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στα παρατηρησιακά δεδομένα και τα θεωρητικά μοντέλα για την ακτινοβολία που σχετίζονται με την τους σχετικιστικούς πίδακες με την κύρια προσοχή να εστιάζεται στις ΕΑΓ, ενώ μικρότερη δόθηκε και στους Ενεργούς Γαλαξιακούς Πυρήνες. Η κεντρική στόχευση της εισαγωγής καθορίζεται από τους πίδακες και απέχει πολύ από μια πλήρη περιγραφή των παρατηρήσεων που αφορούν τα αντικειμένων. Το βιβλιογραφικό τμήμα της διατριβής ολοκληρώνεται στο επόμενο κεφάλαιο όπου εξάγονται οι σχετικιστικές ΜΥΔ από πρώτες αρχές, ενώ εξετάζονται και κάποια κεντρικά αστροφυσικά ζητήματα όπως η αγωγιμότητα του πλάσματος καθώς και τα κύματα που η πλήρης θεωρία επιτρέπει.

Η διατριβή αυτή κλείνει με μερικά παραρτήματα που σύμφωνα με τον γράφονται έχουν επίσης σημασία. Τα ειδικά θέματα της πόλωσης της λαμβανόμενης ακτινοβολία και ένα θεώρημα για τις διατηρούμενες ποσότητες συμπληρώνονται με τα μακροσκελή αποτελέσματα που για λόγους σαφήνειας εξαιρέθηκαν από το κύριο κείμενο.

Κ. Σαπουντζής

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σεπτέμβρης, 2014

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

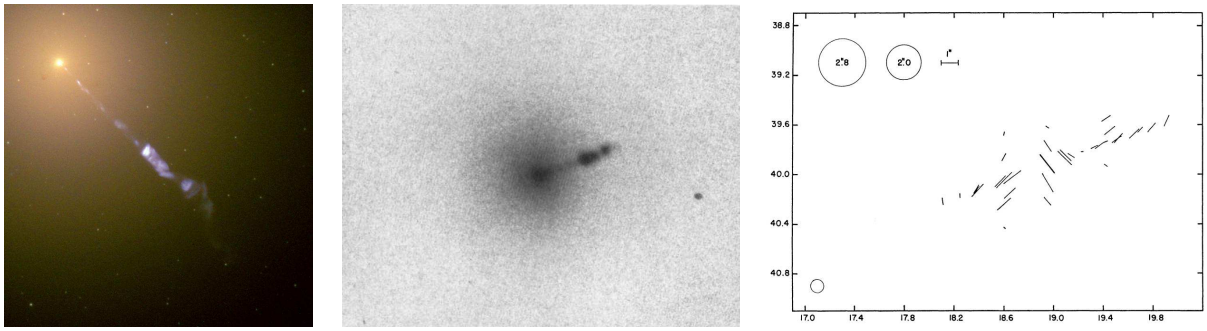
Μία ιδιαίτερη κλάση αντικειμένων

Το σύνολο των αστροφυσικών αντικειμένων που παρουσιάζουν εστιασμένες ροές είναι τέτοιο που μια πλήρης παρουσίασή τους θα απαιτούσε την συγγραφή ενός μονογράμματος αποκλειστικά αφιερωμένου σε αυτά. Από τους υπερ-σχετικιστικούς πίδακες που συναντώνται στους Ενεργούς Γαλαξιακούς Πυρήνες (AGN) και τις Εκλάμψεις Ακτίνων Γάμμα (GRB) μέχρι τους νευτώνειους πίδακες των Πρωταστέρων μεγάλοι τομείς της Φυσικής όπως μηχανική νευτώνεια ή σχετικιστική, ηλεκτροδυναμική, μηχανισμοί ακτινοβολίας κ.α. βρίσκουν εφαρμογή κατά την ερμηνεία του φαινομένου. Το πρώτο αυτό κεφάλαιο αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή συγκεκριμένων παρατηρησιακών και θεωρητικών στοιχείων που σχετίζονται με τους πίδακες των AGN και GRB. Είναι αναμενόμενο ότι αφού η κύρια εφαρμογή της θέσης μας αφορά το GRB Collapsar Model το κύριο βάρος θα δοθεί σε αυτήν την κλάση αντικειμένων.

1.1 Σχετικιστικοί Πίδακες - AGN - Ο M87 ως Πρότυπο

Η ανάπτυξη της Ραδιοαστρονομίας μετά τον Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο άνοιξε ένα νέο παράθυρο παρατήρησης στα ραδιοκύματα και αποκάλυψε νέες και συναρπαστικές κατηγορίες αστροφυσικών αντικειμένων, όπως οι πίδακες. Στην πραγματικότητα η πρώτη αναγνώριση πίδακα έγινε το 1918 από τον H. Curtis και αφορούσε οπτικές παρατηρήσεις στον M87 (Vir A, NGC 4486). Η περιγραφή του κατατοπιστική: «Μια περίεργη ακτίνα παρατηρείται στο κενό του νεφελώματος... προφανώς συνδεδεμένη με τον πυρήνα με μια λεπτή γραμμή ύλης. Η ακτίνα είναι φωτεινότερη στο εσωτερικό της», Observatory et al. (1918).

Πέρασε αρκετός καιρός, και ένας παγκόσμιος πόλεμος, μέχρι την επόμενη κεντρική παρατήρηση. Στις αρχές της δεκαετίας του 50 οι αστρονόμοι Walter Baade και Rudolph Minkowski, ξεκίνησαν μια συστηματική μελέτη για να αναγνωρίσουν αν ήταν δυνατόν στο οπτικό τις λίγες ισχυρές ραδιοπηγές που ήταν γνωστές ως τότε. Η μελέτη τους αυτή κατέληξε στην εντυπωσιακή επιβεβαίωση μια προηγούμενης υπόθεσης του Stanley and Slee (1950) σύμφωνα με την οποία η ραδιοπηγή γνωστή ως Virgo-A ήταν στην πραγματικότητα ο γαλαξίας M87 με το γνωστό οπτικό φάσμα. Στα μετέπειτα χρόνια ο Baade προχώρησε περαιτέρω στις παρατηρήσεις επιτυγχάνοντας την μέτρηση της πόλωσης της οπτικής ακτινοβολίας του γαλαξία, την οποία την εκτίμησε ως υψηλή $\sim 30\%$ Baade (1956). Επιπροσθέτως, λίγο αργότερα ο Hiltner Hiltner (1959) κατάφερε και παρήγαγε έναν πρώτο υποτυπώδες χάρτη πόλωσης ο οποία έδειχνε καθαρά πως η πολωμένη ακτινοβολία προερχόταν από τον πίδακα και όχι από κάποιο άλλο τμήμα του M87, σχ.1.1. Ο M87 αποτέλεσε κεντρικό πρότυπο για



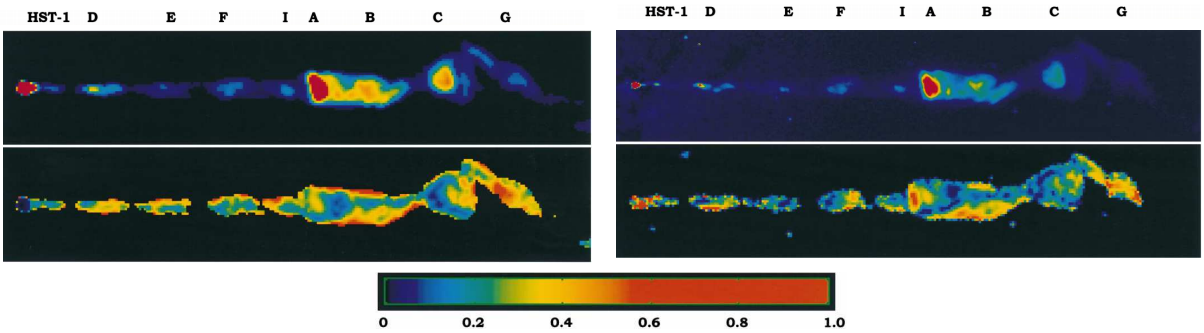
Σχήμα 1.1: Ο M87. **Αριστερά:** Τεχνική αναπαράσταση του γαλαξία από το ΗΣΤ στην οποία ο πίδακας εμφανίζεται καθαρά. Η εικόνα είναι παράγεται από τον συνδυασμό εκθέσεων στο υπεριώδες, μπλε, πράσινα και υπέρυθρο - εικόνα από Hubble (2000). **Κέντρο:** Η αυθεντική εικόνα των Bardee & Minkowski που απεικονίζει το κέντρο του M87. Η έκθεση είναι στο οπτικό ($\lambda < 4000$), ενώ η κλίμακα $1mm \rightarrow 0''.8$ - εικόνα από Baade and Minkowski (1954). **Δεξιά:** Ο πρώτος χάρτης πόλωσης που παρήγαγαν οι Hiltner (1959). Οι συντεταγμένες αναφέρονται στην σχετική θέση από το Άστρο-Οδηγό, ενώ ο πυρήνας του M87 απεικονίζεται ως ένας μικρός κύκλος στην κάτω αριστερή γωνία του σχήματος - σχήμα από Hiltner (1959).

την μελέτη των ραδιογαλαξιών λόγω της εγγύτητας του $(16.7 \pm 5)Mpc$ Bird et al. (2010). Παρόλα αυτά ο M87 δεν είναι η μοναδική ραδιοπηγή με οπτικό φάσμα. Κατά την ίδια δεκαετία παρατηρήθηκε ότι αντίστοιχα συμπεριφέρονται τόσο ο AGN του Cygnus-A όπου υπάρχει πίδακας όπως και τα υπολείμματα supernova των Cassiopeia-A και Puppis-A, όπου οι πίδακες απουσιάζουν.

Η ανάπτυξη των δικτύων ραδιοτηλεσκόπιων VLBI προσφέρει σήμερα μια εξαιρετική βάση για την παρατήρηση στο ράδιο των πιδάκων. Η υψηλή ανάλυση που μπορεί να φτάσει ακόμα και σε parsec κλίμακες επιτρέπει την μελέτη συγκεκριμένων τμημάτων στην δομή του πίδακα και καθιστά εφικτή την μελέτη της κίνησης των διακριτών λοβών του πίδακα. Σε συνδυασμό με τις οπτικές παρατηρήσεις, ανακαλύφθηκαν φαινόμενα όπως η υπέρφωτη κίνηση, χαρακτηριστική της σχετικιστικής κίνησης, ενώ επιτευχθεί κι η ακριβής μέτρηση της πόλωση τόσο στο οπτικό όσο και στο ράδιο τμήμα του φάσματος, σχ.1.2.

Η υπέρφωτη κίνηση Rees (1966) έχει εντοπιστεί τόσο στον M87 όσο και σε ένα πλήθος AGN, αριστερά στο σχ.1.3, ενώ δεξιά εμφανίζεται η εκτιμώμενη φαινόμενη ταχύτητα, v_{app}, για συγκεκριμένα σημεία των πρώτων λοβών. Δυστυχώς, η υπέρφωτη κίνηση από μόνη της δεν επιτρέπει τον προσδιορισμό του παράγοντα Lorentz της εκροής γ_j, αλλά παρέχει μια σχέση μεταξύ του γ_j και της γωνίας θ_{obs} που σχηματίζει ο πίδακας με την γωνία παρατήρησης ($v_{app} = v \sin\theta_{obs}/(1 - \beta\cos\theta_{obs}) \sim \beta\gamma$, η προσεγγιστική σχέση ισχύει για την μέγιστη παρατηρούμενη γωνία $\theta_{max} \sim 1/\gamma$, ενώ παρέχει και την μέγιστη δυνατή τιμή της φαινόμενης ταχύτητας). Γενικά, ή γωνία παρατήρησης θ_{obs} είναι πολύ δύσκολο να προσδιοριστεί. Αλλά μέσω των παραπάνω παρατηρήσεων που υποδεικνύουν τιμές μέχρι και $6c$ για το πλέον υπέρφωτο λοβό, κάποια όρια μπορούν να τεθούν τόσο για τον παράγοντα $\gamma \geq 6$ όσο και για την γωνία παρατήρησης $\theta_{obs} \leq 19°$.

Στο σχ.1.4 παρουσιάζονται μερικά ακόμα χαρακτηριστικά του M87. Σήμερα είναι διαθέσιμοι ένα πλήθος χαρτών πόλωσης για το κάθε μεμονωμένο λοβό, βλέπε για παράδειγμα αριστερά στο σχήμα, παρέχοντας μια άμεση ένδειξη για την ύπαρξη οργανωμένου και μεγάλης κλίμακας μαγνητικού πεδίου. Βέβαια, η ύπαρξη του πεδίου αυτή καθεαυτή δεν παρέχει πληροφορίες για την σημασία του στην δυναμική εξέλιξη της εκροής - η σημαντική συνιστώσα για την δυναμική εξέλιξη είναι η τοροειδής που συνεπάγεται την αντίστοιχη ροή poynting

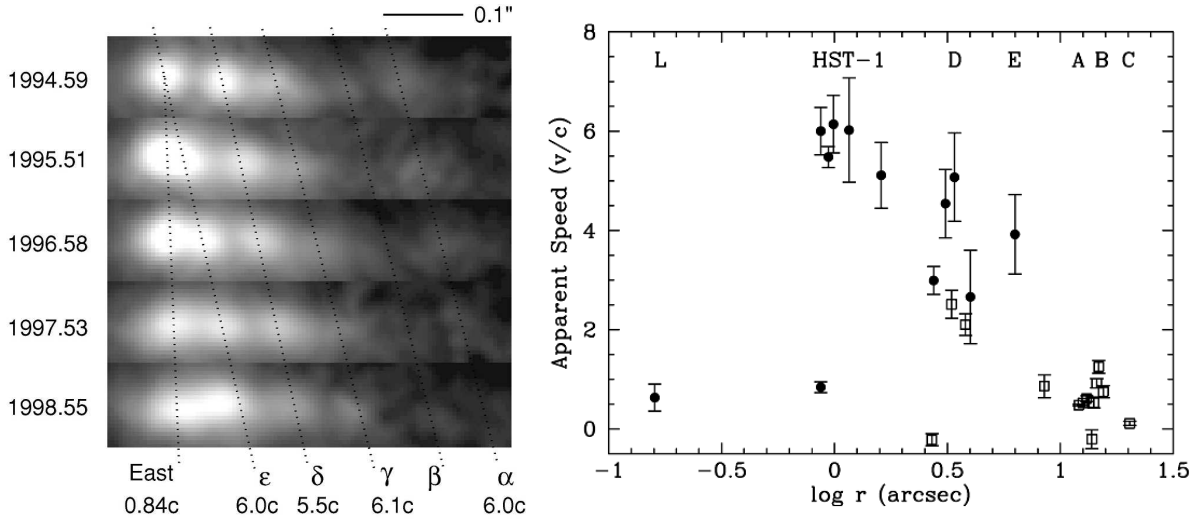


Σχήμα 1.2: Λεπτομερείς εκθέσεις του M87. **Πάνω:** Η εικόνα από το VLA1 στο ράδιο $14.5GHz$ **Αριστερά**, και το HST στο οπτικό $4587-6205$ **Δεξιά**. Στις εικόνες αυτές η χρωματική κλίμακα αντιστοιχεί στην συνολική ροή, ενώ διακρίνονται και οι μεμονωμένοι λοβοί, το όνομα του κάθε λοβού παρουσιάζεται στο πάνω μέρος του σχήματος. **Κάτω** Η πόλωση στις συγκεκριμένες συχνότητες. Η χρωματική κλίμακα στο κάτω μέρος και των δύο συχνοτήτων αντιστοιχεί στην πόλωση (κανονικοποιημένη στην μέγιστη τιμή της) - εικόνα από Perlman et al. (1999).

κι όχι η πολοειδής. Το ζήτημα παραμένει ανοικτό, ενώ θεωρητικά μοντέλα χτίζονται πάνω και στα δύο όρια της υδροδυναμικής ή μαγνητοϋδροδυναμικής εκροής, βλέπε για παράδειγμα Keppens et al. (2013) για έναν open source αριθμητικό κώδικα που χειρίζεται και τις δύο περιπτώσεις. Πέρα από τα παραπάνω μοντέλα κάποια επιπλέον θεωρητικά επιχειρήματα που δόθηκαν από Vlahakis (2004) στηρίζονται στις χωρικές κλίμακες επιτάχυνσης της εκροής στον NGC6251 ράδιο-γαλαξία και στον 3C 345 κβάζαρ συνηγορούν υπέρ της μαγνητοϋδροδυναμικής εκδοχής, ενώ υπάρχουν και μέθοδοι που στηρίζονται σε παρατηρήσεις και συγκεκριμένα θεωρητικά μοντέλα, πχ Beskin et al. (2011).

Ο κυρίαρχος μηχανισμός ακτινοβολίας στα ραδιοκύματα είναι η ακτινοβολία synchrotron με την γραμμικά πολωμένη εκπομπή της και την μετέπειτα στροφή Faraday να αποτυπώνεται στους χάρτες πόλωσης, βλέπε Παρ.Α΄ για μια παρουσίαση της πόλωσης και της στροφής Faraday. Τα ράδιο δεδομένα μόνα τους μπορούν να παρέχουν μια μόνο εκτίμηση για το μέγεθος του μαγνητικού πεδίου. Κάνοντας την υπόθεση της ελάχιστης ενέργειας για το σύστημα μαγνητικού πεδίου-σχετικιστικά σωματίδια η οποία οδηγεί στο διάσημο πόρισμα για περίπου ισοκατανομή της ενέργειας - αυτή η ιδέα προτάθηκε από Burbidge (1956) ακριβώς για τον M87 και οδηγεί σε εκτιμώμενο μαγνητικό πεδίο της τάξης των $\sim 100\mu G$. Ο υπολογισμός και η ισοκατανομή αυτή χρησιμοποιείται ευρέως σήμερα στους AGN παρόλο που η ισχύς του δεν είναι αποδεδειγμένη. Μια από τις εφαρμογές αυτές αποτελεί η ανάλυση του Ghisellini et al. (1993) που χρησιμοποίησε την συχνότητα της synchrotron φωτο-απορρόφησης στον πυρήνα όπως παρατηρείται από το VLBI για να εκτιμήσει τον παράγοντα ενίσχυσης Doppler. Η εκτίμηση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική μιας και γνωρίζοντας τον παράγοντα ενίσχυσης και την υπέρφωτη κίνηση είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τόσο τον παράγοντα Lorentz της εκροής όσο και την γωνία παρατήρησης. Παρόλο που στην δεκαετία του 90 η μέθοδος αυτής έδωσε κάποια αίσθηση για τα αναμενόμενα μεγέθη, σήμερα πιο σύγχρονες μέθοδοι Hovatta et al. (2009) (έχει και erratum) δίνουν πιο ακριβή αποτελέσματα - στα συγκεκριμένα άρθρα περιέχονται και ένας βοηθητικός πίνακας με τα σχετικά αποτελέσματα.

Το φάσμα, όμως, του M87 και των AGN δεν οφείλεται μόνο στην synchrotron ακτινοβολία του πίδακα και των λοβών. Υπό το πρίσμα του Ενοποιημένου Μοντέλου για τους AGN, Urry and Padovani (1995), στην συνολική εκπομπή συμμετέχουν τόσο οι υπόλοιπες εκπομπές όσο και άλλοι μηχανισμοί ακτινοβολίας. Σαν αποτέλεσμα μια σειρά από διατάξεις όπως Chandra-X για ακτίνες-X, Swift και Fermi για τις ακτίνες-γ και Cherenkov τηλε-



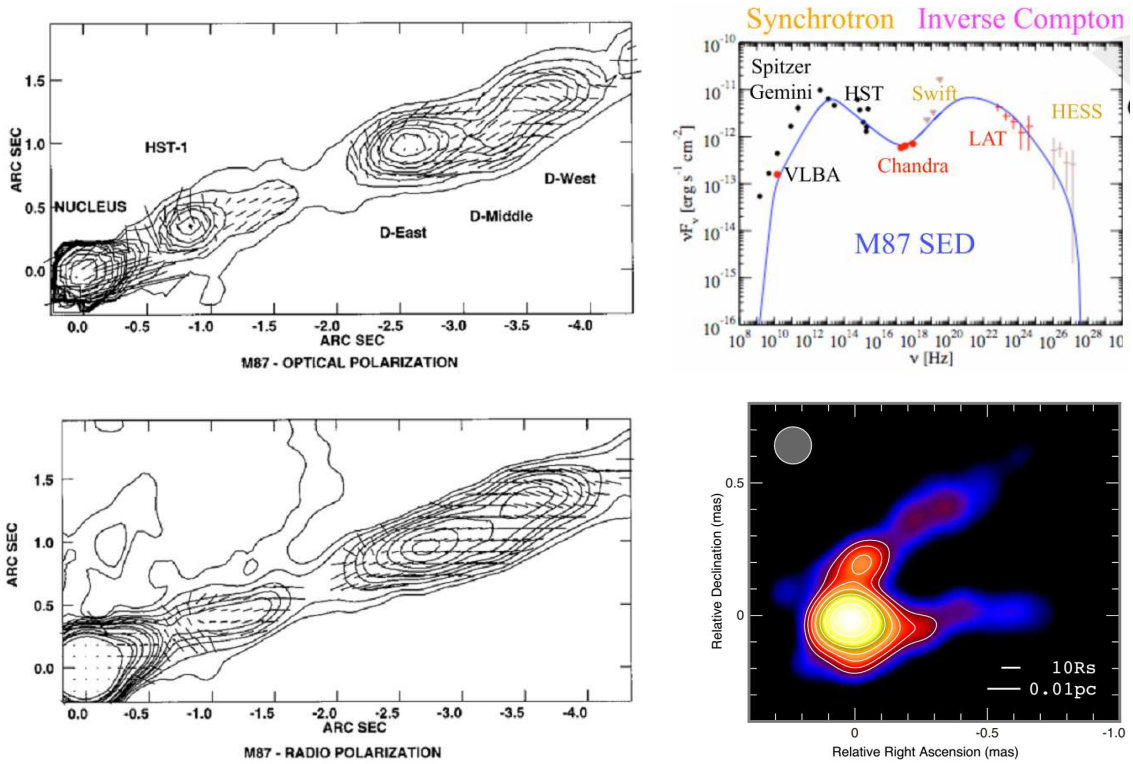
Σχήμα 1.3: Η υπέρφωτη κίνηση του M87. **Αριστερά:** Διαδοχικές εκθέσεις που δείχνουν την διάδοση του εκτεταμένου λοβού HST-1 στο διάστημα 1994-1998. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην διάδοση διάφορων τμημάτων του λοβού που ονομάζονται με τα γράμματα α, β, γ, δ, ϵ, ενώ αναφέρονται και οι υπολογισμένες φαινόμενες ταχύτητές τους. **Δεξιά:** Η φαινόμενη ταχύτητα συναρτήσει της γωνιακής απόστασης από τον πυρήνα r για το HST-1 και τους υπόλοιπους λοβούς. Οι κύκλοι αντιστοιχούν σε μελέτες μέσω της οπτικής έκθεσης του HST, ενώ τα τετράγωνα μέσω της ράδιο έκθεσης του VLA - αναφορές για τα δεδομένα και το σχήμα από Biretta et al. (1999).

σκόπια όπως το H.E.S.S. έχουν ήδη αναπτυχθεί και συμμετέχουν στην παρατήρηση, βλέπε σχ.1.4 για το φάσμα του M87. Ειδικά για τον Έτσι στις αρχές του 2000 το παρατηρητήριο Chandra-X κατάφερε να προσδιορίσει ακριβώς την περιοχή εκπομπής των ακτίνων-X και να την ταυτίσει με το πίδακα αποκλείοντας άλλες πιθανές περιοχές προέλευσης όπως ο δίσκος προσαύξησης, σχ.1.5.

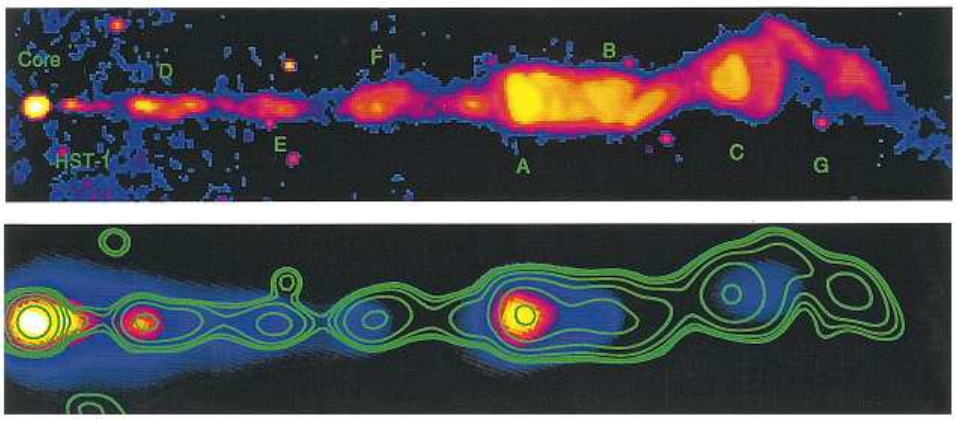
Η συζήτηση για τον μηχανισμό ακτινοβολίας για της ακτίνες-X δεν έχει ακόμα λήξει. Δύο μοντέλα προτείνονται: ι) Τα φωτόνια των ακτίνων-X προέρχονται από αντίστροφο σκεδασμό Compton (IC) του μικροκυματικού ή όποιας άλλης πηγής χαμηλο-ενεργητικών φωτονίων από πληθυσμό ηλεκτρονίων που επιταχύνεται στον πίδακα - σήμερα πιστεύουμε ότι αυτό το σενάριο απευθύνεται στους BL-Lac AGN, ιι) Οι ακτίνες-X είναι το αποτέλεσμα της ακτινοβολίας Synchrotron που παρατηρείται στο ράδιο μέσω της SSC διαδικασίας - αυτό μοντέλο σήμερα πιστεύουμε ότι βρίσκει εφαρμογή στου κβάζαρς*. Η εύρεση του φάσματος των AGN στο μεγαλύτερο μέρος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος είναι κεντρική καθώς επιτρέπει την επιβεβαίωση ή όχι των θεωρητικών μοντέλων που περιγράψαμε, βλέπε Zhang et al. (2010) για μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή και των δύο μοντέλων. Ειδικά, όμως, για τις ακτίνες-X η ακριβής μορφή τους είναι σημαντική καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του παράγοντα Lorentz των επιταχυνόμενων ηλεκτρονίων, ελέγχοντας επιπλέον η υπόθεση της ισοκατανομής της ενέργειας.

Ως σήμερα έχει ήδη μελετηθεί ένας μεγάλος αριθμός AGN. Βεβαίως, κατά την αναζήτηση για σχετικιστικούς πίδακες κανείς θα πρέπει να περιοριστεί στις BL Lac/Blazars και Quasars κατηγορίες καθώς αυτά είναι τα περιβάλλοντα όπου σύμφωνα με το ενοποιημένο

*Η κρατούσα άποψη για το φάσμα στις υψηλές ενέργειες του γαλαξία M87 είναι ότι οφείλεται στην IC/CMB ακτινοβολία, κάνοντας τον να μοιάζει με ένα BL Lac χαμηλής φωτεινότητας. Στην πραγματικότητα, όμως, ο M87 είναι ένας τεράστιος ελλειψοειδής γαλαξίας (NLRG).



Σχήμα 1.4: Ο πίδακας και ο πυρήνας του M87 στα διάφορα μήκη κύματος. **Αριστερά:** Οι χάρτες πόλωση στο ράδιο και το οπτικό για τους δύο πρώτους λοβούς. Η παρουσία ενός διατεταγμένου μαγνητικού πεδίου σε μεγάλες κλίμακες είναι εμφανής· εικόνα από Perlman et al. (1999). **Πάνω Δεξιά:** Το φάσμα σε ολόκληρο το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα καθώς και οι διάφορες διατάξεις που συμμετείχαν στην μέτρησή του Οι δύο κορυφές του synchrotron και IC μηχανισμού είναι εύκολα αναγνωρίσιμες - εικόνες από Perlman et al. (1999); Hardee (2010). **Κάτω Δεξιά:** Ο πυρήνας του γαλαξία σε πολύ υψηλή ανάλυση από το VLBA στα $43GHz$ - εικόνα από Kino et al. (2014).



Σχήμα 1.5: **Πάνω:** Παρατηρήσεις του M87 από το HST με χρήση του F814W φίλτρου και **Κάτω:** οι παρατηρήσεις από τον Chandra-X. Τα εμφανιζόμενα όρια (contours) αντιστοιχούν στις δομές που παρατηρούνται στο οπτικό και έχουν γίνει με την μέθοδο της προσαρμογής Gauss(Gaussian smoothed)· εικόνα από Marshall et al. (2002)

πρότυπο οι πίδακες παρατηρούνται. Σήμερα έχει συλλεχθεί ένα τεράστιος όγκος δεδομένων κυρίως από το πρόγραμμα MOJAVE, ο σκοπός το οποίου είναι να συγκεντρώνει τις παρατηρήσεις του VLBA (10 κεραίες διεσπαρμένες από το αρχιπέλαγος της Hawaii μέχρι τις Παρθένους Νήσους της Καραϊβικής παρέχουν την μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα ως σήμερα). Η διάταξη VLBA μετράει τόσο την ροή όσο και κατασκευάζει τους χάρτες πόλωσης για ένα μεγάλο πλήθος στόχων (> 100, από μέσα 90 μέχρι σήμερα, κυρίως κβάζαρ και 16% Blazars, βλέπε Lister et al. (2009) το πλήρες σύνολο). Τα δεδομένα στο ράδιο συνδυαζόμενα με αυτά του υπολοίπου φάσματος παρέχουν αρκετά φυσικά χαρακτηριστικά της εκροής. Εκτός από τους παράγοντες Lorentz ($\gamma \sim 5 -$ μερικές δεκάδες), οι χάρτες πόλωσης αποδεικνύουν την ύπαρξη οργανωμένου μαγνητικού πεδίου. Ο έμμεσος προσδιορισμός μέσω της ισοκατανομής και της προσαρμογής των θεωρητικών φασμάτων σήμερα δίνουν τυπικές τιμές του μαγνητικού πεδίου στο σημείο που παράγεται η σψνςηροτρον ακτινοβολία της τάξης των $\sim 100\mu G$.

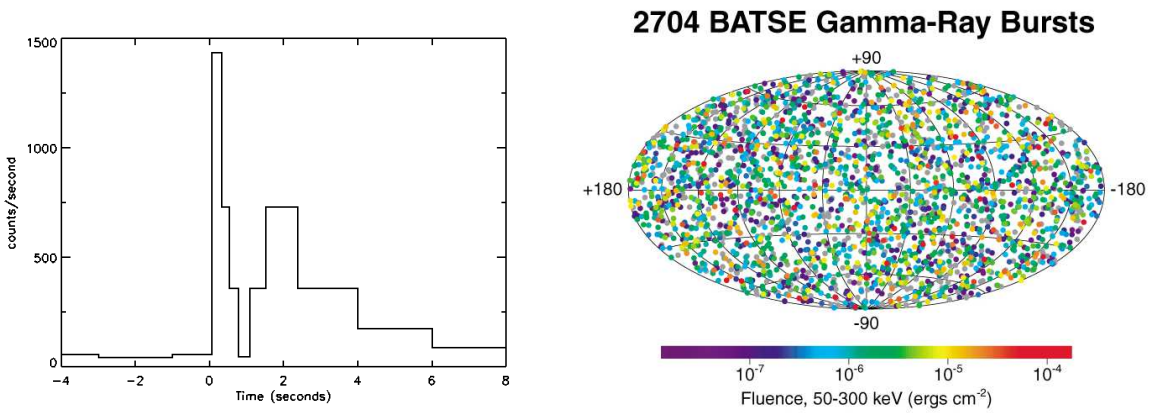
1.2 Οι εκλάμψεις Ακτίνων Γάμμα και το Collapsar μοντέλο

Έχει περάσει σχεδόν μισός αιώνας από την πρώτη ανακάλυψη των GRB Klebesadel et al. (1973), αριστερό σχ.1.6 και παρά την πρόοδο που έχει συντελεστεί στην κατανόηση αυτών των εξωτικών φαινομένων πολλά θέματα που αφορούν τους γεννήτορες και την φάση της κύριας έκρηξης (prompt emission) παραμένουν ακόμα ανοικτά. Η ταχύτατη ($(10^{-3}-10^{3})sec$) και σε υψηλές ενέργειες (gamma-ray) εμφάνιση των εκλάμψεων αυτών θέτουν γενικά πολλές δυσκολίες στην παρατηρησιακή διερεύνηση του φαινομένου. Είναι χαρακτηριστικό ότι για πολλά χρόνια μετά την πρώτη ανακάλυψη τους ακόμα και η ένδο ή έξω γαλαξιακή προέλευση των εκλάμψεων παρέμενε απροσδιόριστη. Για τον λόγο αυτό μια σειρά από διαστημικά παρατηρητήρια COMPTON, Beppo-Sax (και οι δύο αποστολές έχουν λήξει), SWIFT και FERMI (εν ενεργεία αποστολές), με κύριο αντικείμενο ακριβώς την μελέτη των εκλάμψεων αυτών, αναπτύχθηκαν. Παρά την χαμηλή του διακριτική ικανότητα το παρατηρητήριο BATSE/COMPTON μέσω της ομογενούς κατανομής τους στον ουράνιο θόλο ήταν το πρώτο που έδωσε μια ισχυρή ένδειξη για την εξωγαλαξιακή προέλευση των GRB, σχ.1.6[†].

Με τον εντοπισμό της κλίμακας αποστάσεων των εκλάμψεων έγινε αντιληπτό ότι τα ποσά ενέργειας που εκπέμπονται είναι τεράστια και αντιστοιχούν $(10^{51} - 10^{53})erg$, αν υποτεθεί ισοτροπική εκπομπή ή συγκρίσιμα με την ισοδύναμη ενέργεια μιας ηλιακής μάζας. Η υψηλή ροή ενέργειας και η μεταβλητότητα της πηγής κατά την κύρια έκλαμψη έθεσε το πρόβλημα συμπαγότητας της πηγής εξαιτίας της επαγόμενης φωτονικής απορρόφησης ($\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$). Συνεπώς η κοινότητα απέκτησε μια πρώτη ισχυρή θεωρητική ένδειξη για την υπερ-σχετικιστική κίνηση της πηγής: Προκειμένου να αποφευχθεί η συγκεκριμένη απορρόφηση απαιτούνται υψηλοί παράγοντες Lorentz, τυπικές τιμές ($\gamma \sim 100 - 1000$), καθώς οδηγούν στην ελάττωση της ενεργού διατομής λόγω του φαινομένου αποπλάνησης του φωτός, βλέπε Mastichiadis and Vlahakis (2010).

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό τα θεωρητικά μοντέλα έχουν κεντρικό ρόλο στην ερμηνεία των GRB. Στις αρχές της δεκαετίας του 90 οι Kouveliotou et al. (1993) κατέληξαν σε ένα εντυπωσιακό αποτέλεσμα, εκτελώντας μια απλή στατιστική μελέτη του πλήθους των

[†]Η τελική απόδειξη για την κοσμική προέλευση ήρθε αργότερα με την παρατήρηση του υπολείμματος της έκλαμψης και την αναγνώριση των γαλαξιών-οικοδεσπότη (host galaxy). Η πρώτη σχετική ανακάλυψη έγινε για την GRB970228 και του εντοπισμού της από τον Beppo-Sax.



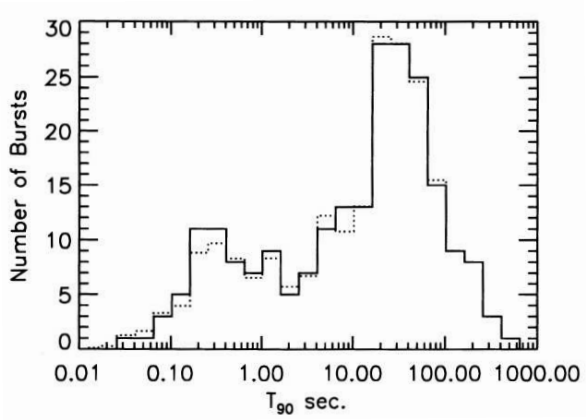
Σχήμα 1.6: Δύο από τα πιο γνωστά διαγράμματα των GRBs.**Αριστερά:** Το πρώτο καταγεγραμμένο γεγονός 2/7/1967 όπως μετρήθηκε από τους δορυφόρους Vela4a,b. **Δεξιά:** Η κατανομή των εκλάμψεων στον ουράνιο θόλο όπως τις κατέγραψε η διάταξη COMPTON/BATSE - και τα δύο σχήματα από την ιστοσελίδα NASA (2014).

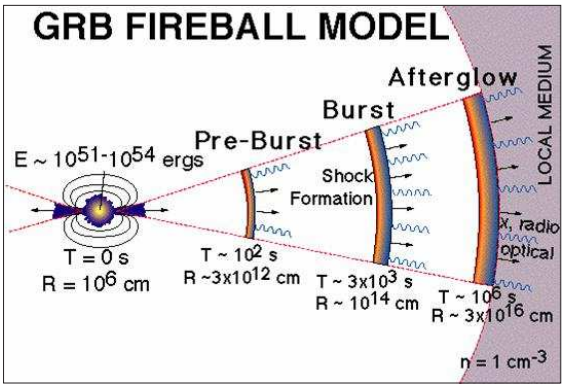
εκλάμψεων συναρτήσει της διάρκειάς τους. Οι ερευνητές αναγνώρισαν δύο κλάσεις αντικειμένων, αριστερό σχ.1.7, που συνηγορούσαν υπέρ δύο τελείως διαφορετικών φαινομένων.

Σήμερα οι εκλάμψεις μακράς διάρκειας (Long GRB) συσχετίζονται με την κατάρρευση μαζικών άστρων χαμηλής μεταλλικότητα με τυπικές μάζες μερικές δεκάδες της ηλιακής (Woosley (1993), MacFadyen and Woosley (1999)) - ο τύπος των αστέρων προσδιορίστηκε περαιτέρω ως Wolf Rayet άστρα εξαιτίας της έλλειψης υδρογόνου και τις ασθενείς γραμμές He, δηλαδή παρεμφερείς ή σχετιζόμενες(;) με τις Supernova τύπου Ib/c, αναφορές στο Zhang (2011). Σε αντιδιαστολή οι εκλάμψεις βραχείας διάρκειας (Short GRB) αποδίδονται στην κατάρρευση διπλών συστημάτων συμπαγών αντικειμένων, αλλά παρόλα αυτά η αναγνώριση μιας έκλαμψης ως βραχείας ή μακράς διάρκειας από τα παρατηρησιακά δεδομένα είναι ένα πολύπλοκο θέμα που περιλαμβάνει ένα πλήθος από κριτήρια πέρα από την διάρκεια όπως είναι η πιθανή συσχέτιση με τις Supernova τύπου Ib/c, ο οικοδεσπότης γαλαξίας και η σχετική θέση της έκλαμψης σε αυτόν κτλ (Zhang (2012)).

Η υψηλή μεταβλητότητα των καμπύλων φωτός κατά την κύρια έκλαμψη οδήγησε πολλούς ερευνητές να προτείνουν τον σενάριο των εσωτερικών ωστικών κυμάτων (internal shock scenario, Rees and Meszaros (1994), Narayan et al. (1992)) σύμφωνα με το οποίο η ακτινοβολία της κύριας έκλαμψης αποδίδεται στις ανομοιογένειες και τον μετέπειτα σχηματισμό ωστικών κυμάτων στο κύριο σώμα της εκροής. Η εικόνα της εκροής συμπληρώνεται με ένα εξωτερικό ωστικό κύμα (external shock) που δημιουργείται καθώς ο πίδακας σαρώνει το μεσοαστρικό υλικό και αποτελεί το τμήμα όπου παράγεται η ακτινοβολία του υπολείμματος (afterglow emission), δεξιό σχ.1.7 (Sari et al. (1998) για μοντελοποίηση).

Οι μηχανισμοί ακτινοβολίας που συμμετέχουν στο φαινόμενο αποτελούν ένα από τα πιο ενδιαφέροντα πεδία έρευνας. Η ερμηνεία της εκπομπής του υπολείμματος είναι σήμερα πιο αποδεκτή καθώς ο Sari et al. (1998) μοντελοποίησε το παραγόμενο φάσμα χρησιμοποιώντας την ακτινοβολία synchrotron, σχ.1.9. Η παρουσία ενός ισχυρού μαγνητικού πεδίου στην κεφαλή του εξωτερικού κύματος οδηγεί τα επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια να ακτινοβολούν την ενέργεια τους. Αναλόγως του χαρακτηριστικού χρόνου (συχνότητα) της επιτάχυνσης των σωματιδίων κατά την διάσχιση της ωστικής επιφάνειας ν_m και του χαρακτηριστικού χρόνου ενεργειακών απωλειών λόγω της ακτινοβολίας synchrotron ν_c, δύο διαφορετικά σενάρια είναι





Σχήμα 1.7: .**Αριστερά:** Το πλήθος τω εκλάμψεων όπως κατεγράφησαν μέχρι το 1993 σαν συνάρτηση της χρονικής τους διάρκειας. T_{90} είναι ο χρόνος κατά το οποίο η πηγή εκπέμπει από 5% ως 95% του συνολικού πλήθους των φωτονίων στις ακτίνες-γ. Παρατηρούμε την δικόρυφη κατανομή που υποδηλώνει την παρουσία δύο διαφορετικά φαινόμενα ερμηνείας των εκλάμψεων. Εξαιτίας της έλλειψης σαφήνειας στην μορφή της κατανομής, το συμπέρασμα αυτό αρχικά αμφισβητήθηκε κατά τα επόμενα χρόνια. Στην συνέχεια, όμως, η κατανομή αυτή εμπλουτίστηκε και σήμερα θεωρείται το επικρατές σενάριο - εικόνα από Kouveliotou et al. (1993). **Δεξιά:** Οι χωρικές κλίμακες κατά τις οποίες οι διάφορες δομές λαμβάνουν χώρα όπως ήταν η επικρατούσα άποψη κατά την προ-swift εποχή - εικόνα από SWIFT (2014).

εφικτά ονομαζόμενα ταχείας ψύξης (fast cooling, $\nu_m > \nu_c$) και βραδείας ψύξης (slow cooling, $\nu_c > \nu_m$) αντίστοιχα

$$(\nu_m > \nu_c)\ F_\nu \propto \begin{cases} \nu^2 & \nu < \nu_a \\ \nu^{1/3} & \nu_a < \nu < \nu_c \\ \nu^{-1/2} & \nu_c < \nu < \nu_m \\ \nu^{-p/2} & \nu > \nu_m \end{cases} \qquad (\nu_c > \nu_m)\, F_\nu \propto \begin{cases} \nu^2 & \nu < \nu_a \\ \nu^{1/3} & \nu_a < \nu < \nu_m \\ \nu^{-(p-1)/2} & \nu_m < \nu < \nu_c \\ \nu^{-p/2} & \nu > \nu_c \end{cases}$$

Στις εκφράσεις αυτές ν_a η συχνότητα κάτω από την οποία το πλάσμα γίνεται αδιαφανές στην ακτινοβολία και το φάσμα κυριαρχείται από το Rayleigh-Jeans ασυμπτωτικό όριο της ακτινοβολίας μέλανος σώματος. Καθώς το εξωτερικό κέλυφος διαστέλλεται το φάσμα φθίνει σε χαμηλότερες συχνότητες περνώντας από τις ακτίνες X στο οπτικό και στην συνέχεια στα ραδιοκύματα. Η χρονική εξέλιξη των ν_c, ν_m γονάτων εξελίσσονται διαφορικά με τον χρόνο και σε συνάρτηση με τον τύπο της διαστολής - για το χαρακτηριστικό παράδειγμα της αδιαβατικής διαστολής $\nu_c \propto t^{1/2}$, $\nu \propto t^{-3/2}$ που υποδεικνύει πως ακόμα και αν το κέλυφος βρίσκεται αρχικά σε ταχεία ψύξη γρήγορα θα περάσει στην φάση της βραδείας ψύξης.

Η απλή εικόνα περιπλέχτηκε με την εκτόξευση του παρατηρητηρίου SWIFT και τα νέα δεδομένα που συλλέχθηκαν στην συνέχεια. Η παρατήρηση του πρώιμου υπολείμματος (early afterglow φανέρωσε ισχυρές εκλάμψεις οι οποίες σήμερα παραμένουν χωρίς κάποια επικρατούσα ερμηνεία. Αλλά το πιο σημαντικό πρόβλημα που ανέκυψε σχετίζεται με το λεγόμενο πανχρωματικό γόνατο (panchromatic break). Το γόνατο στις καμπύλες φωτός του υπολείμματος ήταν αναμενόμενο εξαιτίας της επιβράδυνσης της ροής και του φαινομένου αποπλάνησης του φωτός (Rhoads (1997), Rhoads (1999)). Η μέχρι σήμερα έρευνα δεν έχει αποδώσει καρπούς καθώς σε πολλές εκλάμψεις το γόνατο είτε δεν εμφανίζεται, είτε έχει χρωματική υφή. Σε αντίθεση με τα παρατηρησιακά δεδομένα, οι ενεργειακοί συλλογισμοί συνηγορούν υπέρ της ύπαρξής του γονάτου και την επαγόμενη εκροή πίδακα καθώς εισαγάγουν μια διόρθωση εξαιτίας της εστίασης $f_b = 2(1 - \cos\theta_j) \sim \theta_j^2$, όπου θ_j το μισό του

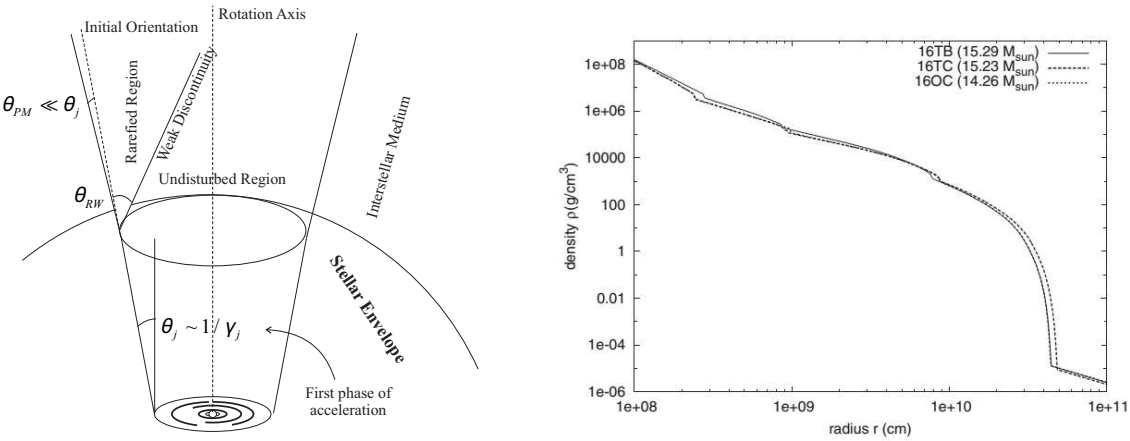
ανοίγματος του πίδακα, η οποία μειώνει την συνολική εκπεμπόμενη ενέργεια κατά δύο τάξεις μεγέθους (Zhang et al. (2014)). Το τελευταίο διάστημα η συζήτηση για την παρατηρησιακή αναγνώριση του πανχρωματικού γονάτου έχει αποκτήσει νέα τροπή καθώς πιο αναλυτικές προσεγγίσεις προσπαθούν να αποδώσουν την έλλειψη εμφάνισής του. Οι προσεγγίσεις αυτές περιλαμβάνουν εκτός άξονα παρατηρήσεις (van Eerten et al. (2010), και Zhang et al. (2014) για πρόσφατες εκτιμήσεις του ανοίγματος του πίδακα), πλάγια διαστολή και φαινόμενα σχετιζόμενα με τα όρια του πίδακα (edge effects Granot and Piran (2012) για θεωρητικά μοντέλα). Σήμερα και παρόλο που το ακριβές άνοιγμα του πίδακα παραμένει απροσδιόριστο οι περισσότερες μελέτες προτείνουν ένα άνοιγμα της τάξης μερικών ως και λίγων δεκάδων μοιρών (βλέπε επίσης Ghirlanda et al. (2013) για μια στατιστική μέθοδο που στηρίζεται στην συσχέτιση της κορυφής με την ισοτροπική εκπεμπόμενη ενέργεια της ακτινοβολίας).

Οι μηχανισμοί ακτινοβολίας που συμμετέχουν στην κύρια φάση της έκλαμψης απέχουν ακόμα από το να θεωρηθούν δεδομένοι. Τα πρώτα φάσματα που συλλέχθηκαν έδωσαν σαφείς ενδείξεις για την ύπαρξη ενός νόμου δύναμης ο οποίος προσαρμόστηκε εμπειρικά από τους Band et al. (1993).

$$F(E) \propto \begin{cases} \left(\frac{E}{100KeV}\right)^{\alpha} e^{-(2+\alpha)E/E_{peak}} & E < \frac{(\alpha-\beta)E_{peak}}{2+\alpha} \\ \left[\frac{(\alpha-\beta)E_{peak}}{(2+\alpha)100KeV}\right]^{(\alpha-\beta)} e^{(\alpha-\beta)} \left(\frac{E}{100KeV}\right)^{\beta} & E > \frac{(\alpha-\beta)E_{peak}}{2+\alpha} \end{cases}$$

Οι παράμετροι α, β, E_{peak} διαφέρουν σε κάθε έκλαμψη ($-2 < \alpha < 0$, $-4 < \beta < -1.5$, $E_{peak} \sim 100KeV - 1MeV$), σχ.1.9. Η προσπάθεια να αιτιολογηθούν οι εμπειρικές παράμετροι παρουσίασε προβλήματα κατά την εφαρμογή μιας απλής διαδικασίας synchrotron είτε κατά την ταχεία είτε κατά την βραδεία ψύξη των ηλεκτρονίων - παρόλα αυτά η ύπαρξη κάποιας μη θερμικής διαδικασίας είναι απολύτως συμβατή με τις παρατηρήσεις Guiriec et al. (2013). Επιπλέον το σενάριο των εσωτερικών κυμάτων προβλέπει την ύπαρξη μιας θερμικής συνιστώσας που εμφανίζεται την στιγμή στην οποία το πλάσμα γίνεται διαφανές στην σκέδαση Thomson η οποία πιθανά και να επισκιάσει τον μη θερμικό μηχανισμό Goodman (1986); Rees and Mészáros (2005). Το φαινόμενο αυτό έχει ήδη παρατηρηθεί σε κάποιες εκλάμψεις και οδήγησε σε προσπάθειες για προσαρμογή του φάσματος με την χρήση ταυτόχρονα δύο διαδικασιών: ενός θερμικού φάσματος μέλανος σώματος και ενός νόμου δύναμης Ryde (2005). Ως κατακλείδα, όμως, στις προσπάθειες αυτές θα πρέπει να ειπωθεί πως οι σημερινές προσαρμογές δεν παρέχουν μία μόνη σαφή απάντηση, αλλά αντιθέτως δείχνουν πως πιθανά οι εκλάμψεις εμφανίζουν ένα εύρος στην σημασία των μηχανισμών και κατ΄ επέκταση στο μαγνητικό πεδίο που συμμετέχει. Αποτέλεσμα αυτού είναι σήμερα η παρουσία στην βιβλιογραφία διαφόρων θεωρητικών μοντέλων που στηρίζονται στην κυριαρχία τόσο της θερμικής όσο και της μαγνητικής ενέργειας και περιλαμβάνουν διαδικασίες όπως η φωτοσφαιρική εκπομπή (photospheric emission), επανασύνδεση (reconnection) κτλ. (Zhang (2014) και αναφορές εκεί).

Στην προσπάθεια προσδιορισμού της σημασίας του μαγνητικού πεδίου πέρα από τα θεωρητικά μοντέλα η κύρια παρατηρησιακή μέθοδος στηρίζεται στην μέτρηση της πόλωσης της κύριας έκλαμψης και του πρώιμου υπολείμματος. Την τελευταία δεκαετία τα ηλιακά παρατηρητήρια RHESI και οι διατάξεις του INTEGRAL SPI και IBIS ανέφεραν μετρήσεις πόλωσης για τις εκλάμψεις GRB021206 και GRB041219 (Coburn and Boggs (2003); Kalemci et al. (2007); Götz et al. (2009)), αλλά οι μετρήσεις αυτές είτε δεν επιβεβαιώθηκαν, είτε ήταν αμφιλεγόμενες ως προς την μεθοδολογία τους. Πρόσφατα η διάταξη IKARUS-GAP ανέφερε μέτρηση σημαντικής πόλωσης (Toma (2013)), αλλά είναι νωρίς ακόμα να στηριχτούμε σε αυτά τα αποτελέσματα, ενώ απαιτείται περαιτέρω επιβεβαίωσή τους. Στο εγγύς μέλλον δύο αποστολές PETS και TSUBAME έχουν προταθεί και σχεδιαστεί ειδικά για την μέτρηση



Σχήμα 1.8: Αριστερά: Η απλοποιημένη εικόνα της εκροής κατά το Collapsar μοντέλο. Η εκροή ξεκινά από τον πυρήνα του καταρρέοντος άστρου και αφού διασχίσει το αστρικό περίβλημα διαδίδεται στο μεσοαστρικό χώρο. Παρατηρείστε την συσχέτιση θ_j, γ_j και την επιπλέον έκταση της αραιωμένης περιοχής. **Δεξιά:** Οι αριθμητικές προσομοιώσεις και το ακτινικό προφίλ της πυκνότητας ενός Wolf Rayet άστρου. Παρατηρείστε την απότομη πτώση στο $4\,10^{10} cm$ που προσδιορίζει την αστρική επιφάνεια και το άνεμο αμέσως μετά από αυτή που ακολουθεί τον συνηθισμένο νόμο δύναμης $\rho \propto r^{-2}$ - σχήμα από Mizuta and Aloy (2009).

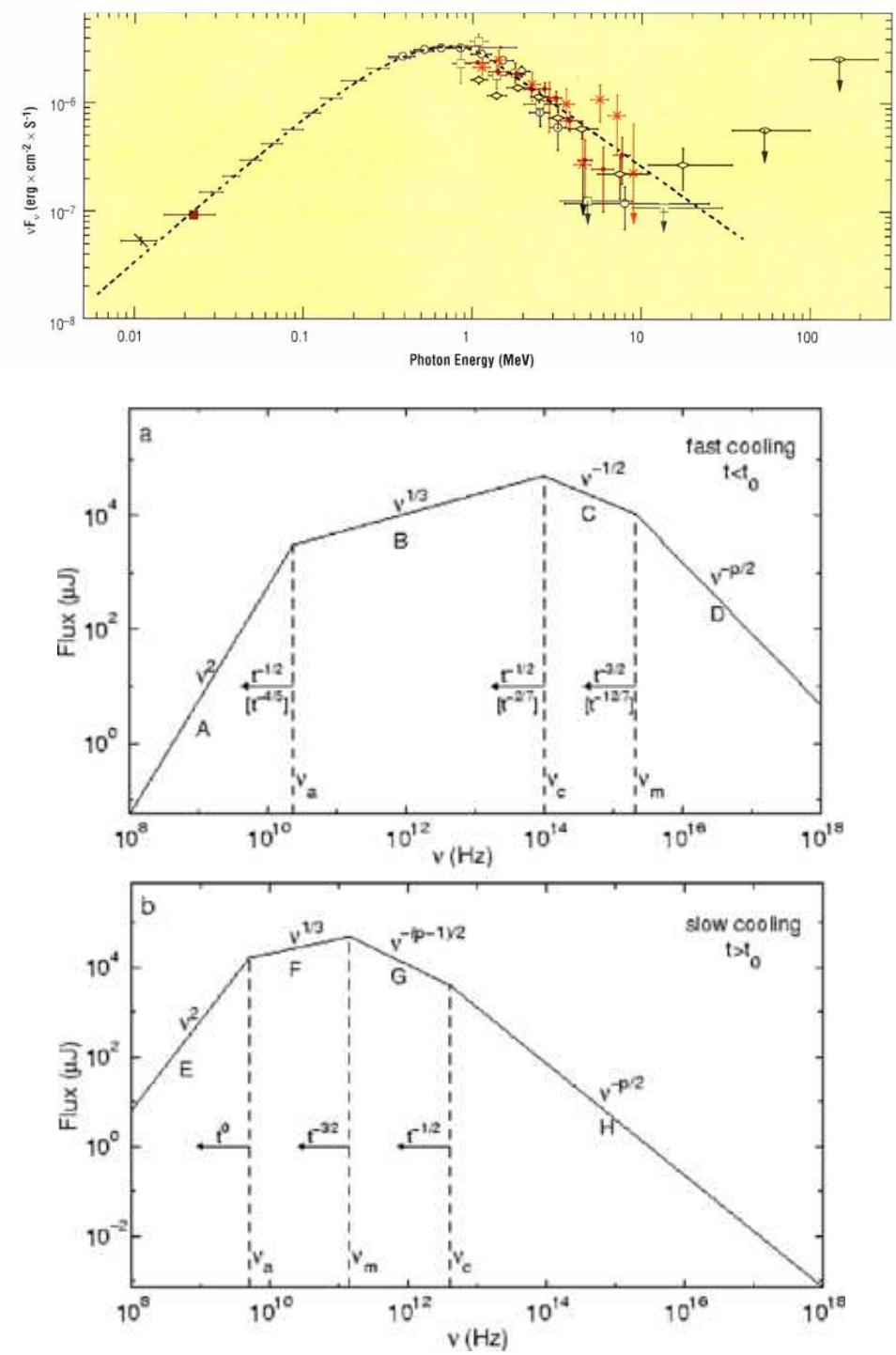
της πόλωσης των GRB. Η έγκριση και επιτυχής έκβαση των αποστολών αυτών θα δώσει μια σαφώς ακριβέστερη εικόνα για το μαγνητικό περιεχόμενο των εκροών.

Οι γεννήτορες των L-GRB αποτελούν σήμερα ίσως το πιο ενεργό πεδίο της έρευνας σε σχέση με τις εκλάμψεις. Η ανάλυση του φαινόμενου έχει καταλήξει στο επονομαζόμενο φαινόμενο του Καταρρευστή (Collapsar) κατά το οποίο οι μακρές εκλάμψεις αποδίδονται σε έναν πίδακα που πηγάζει από τον πυρήνα του καταρρέοντος άστρου (Woosley and Heger (2006) για προσομοιώσεις σε σχέση με την αστρική εξέλιξη και Morsony et al. (2007); Mizuta and Aloy (2009) για προσομοιώσεις σε σχέση με την εκροή). Στην παρούσα διατριβή θα υιοθετήσουμε την απλοποιημένη εικόνα της εκροής που εμφανίζεται στο σχ.1.8. Με όρους της μαγνητοϋδυναμικής θεωρίας αρχικά η εκροή κινείται υπο-γρήγορα μαγνητοακουστικά (υποηχητικά για αμαγνήτιστες ροές), αλλά σύντομα και μέσα στο αστρικό σώμα υφίσταται μια επιτάχυνση μέχρι και την γρήγορη- μαγνητοακουστική περιοχή. Υπό τις συνθήκες αυτές η πληροφορία της απότομης μείωσης της εξωτερικής πίεσης μεταδίδεται στο υπόλοιπο σώμα της ροής μέσω ενός κύματος αραίωσης rarefaction wave. Στην περίπτωση όπου η πίεση του μεσοαστρικού χώρου είναι αμελητέα ο μηχανισμός της αραίωσης οδηγεί την δημιουργία τριών περιοχών: στο αδιατάρακτο ρευστό, στο αραιωμένο πλάσμα και φυσικά στον κενό χώρο [‡]. Όταν η πίεση του μεσοαστρικού υλικού είναι μικρότερη, αλλά όχι αμελητέα, και όπως οι 1-D προσομοιάσεις προτείνουν μια επιπλέον ασυνέχεια επαφής contact discontinuity μεταξύ του πίδακα και του μεσοαστρικού υλικού και ένα ωστικό κύμα shock wave σχηματίζονται και διαδίδονται στο μεσοαστρικό υλικό Mizuno et al. (2008); Zenitani et al. (2010). Η όλη εικόνα συμπληρώνεται με ένα περίβλημα θερμού πλάσματος και τα σχετικά περιβάλλοντα ωστικά κύματα bow shocks στο εσωτερικό του άστρου (Lazzati et al. (2012) για προσομοιώσεις), αλλά αυτές οι δομές δεν αναμένεται να επηρεάζουν την μοντελοποίηση μας ειδικά αν δεν αποκτούν σημαντική ακτινική ταχύτητα κατά το σημείο της διάρρηξης του

[‡]Στην οριακή περίπτωση της ασυνεχούς πτώσης της εξωτερικής πίεσης, το κύμα αραίωσης είναι στην πραγματικότητα μια ασθενής ασυνέχεια week discontinuity - μια ασυνέχεια στις παραγώγους των φυσικών ποσοτήτων που περιγράφουν την ροή και όχι στις ποσότητες αυτές.

αστρικού περιβλήματος. Το εξωτερικό ωστικό κύμα στην κορυφή της εκροής επίσης δεν αναμένεται να έχει επίδραση στην υπό μελέτη εκροή.

Η σημασία της αραίωσης έχει ήδη επισημανθεί σε μια σειρά από αριθμητικές προσομοιώσεις και η επίδρασή του στην περαιτέρω επιτάχυνση της εκροής έχει ήδη διαπιστωθεί (Aloy and Rezzolla (2006) για υδροδυναμικές προσομοιώσεις και Tchekhovskoy et al. (2010); Komissarov et al. (2010) για μαγνητοϋδροδυναμικές). Εξετάζοντας με λεπτομερέστερα τους συμβατικούς μηχανισμούς ΜΗΔ επιτάχυνσης που περιγράφουν την επιτάχυνση περιορισμένων confined εκροών διαπιστώθηκε η ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ του ανοίγματος του πίδακα και του παράγοντα Lorentz που επιταχύνεται με αποτέλεσμα να είναι αδύνατη η εμφάνιση του πανχρωματικού γονάτου στις καμπύλες φωτός τους υπολείμματος, ενώ και οι παραγόμενοι πίδακες είναι εξαιρετικά εστιασμένοι για τους απαιτούμενους παράγοντες Lorentz (Komissarov et al. (2009, 2010)). Υπό την επίδραση της αραίωσης το άνοιγμα του πίδακα παραμένει πρακτικά σταθερό μετά την διάρρηξη του περιβλήματος, ενώ η ροή επιταχύνεται περαιτέρω παρακάμπτοντας το πρόβλημα της προαναφερθείσας συσχέτισης (στην πραγματικότητα η εκροή επεκτείνεται λίγο παραπάνω, βλέπε σχ.5.1). Αλλά πέρα από τα αμφισβητούμενα παρατηρησιακά δεδομένα, η εμφάνιση του κύματος αραίωσης είναι αναπόφευκτη εξαιτίας της πτώσης της εξωτερικής πίεσης με αποτέλεσμα η μελέτη της επίδρασης του να αποκτά αυτούσια βαρύνουσα σημασία.



Σχήμα 1.9: .**Πάνω:** Η εμπειρική προσαρμογή με την σχέση του Band για την έκλαμψη GRB990123 με βέλτιστες παραμέτρους $\alpha = -0.6 \pm 0.07$, $E_p = (720 \pm 10) KeV$, $\beta = -3.11 \pm 0.7$ - σχήμα από Kienlin (2003). **Κέντρο & Κάτω:** Η γνωστή μοντελοποίηση του Sari et al. (1998) για το φάσμα του υπολείμματος η οποία εξαρτάται από την ταχεία (κέντρο) ή βραδεία (κάτω) ψύξη των ηλεκτρονίων. Σε γενικές γραμμές τα παραγόμενα θεωρητικά φάσματα βρίσκονται σε καλή συμφωνία με τις παρατηρήσεις - σχήμα από Sari et al. (1998).

Κεφάλαιο 2

Οι εξισώσεις της σχετικιστικής ΜΥΔ και τα συνήθη Αστροφυσικά Όρια

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις της σχετικιστικής μαγνητοϋδροδυναμικής (ΜΥΔ) και η αναλυτική μορφή που λαμβάνουν κατά τις ακραίες συνθήκες που συνήθως επικρατούν στα περιβάλλοντα της Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών. Το πλάσμα θεωρείται πως βρίσκεται σε κατάσταση άπειρης αγωγιμότητας και η σχετική συζήτηση καθώς και κάποιες αναφορές στα συμπεράσματα της μικροσκοπικής θεωρίας αποτελούν επίσης θέμα αυτού του κεφαλαίου. Στην ίδια ενότητα παρουσιάζεται και το συναφές φαινόμενο της παγωμένης μαγνητικής ροής (flux freezing). Το κεφάλαιο κλείνει με μια τις υπολογισμούς των κυμάτων που οι γενικές αυτές εξισώσεις επάγουν και μια πρώτη προσέγγιση των συνθηκών ασυνέχειας (jump conditions) σε ένα μαγνητισμένο ρευστό.

2.1 Εισαγωγή

Ο συνήθης τρόπος εξαγωγής των ΜΥΔ εξισώσεων στηρίζεται στην κατασκευή του τανυστή ενέργειας-ορμής και ειδικότερα με την επαλληλία των δύο συνιστωσών που αποτελούν το πλάσμα: του υδροδυναμικού τελεστή ($T^{\mu\nu}_{HD}$) και του τανυστή που περιγράφει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ($T^{\mu\nu}_{EM}$). Το σύστημα των παραγόμενων εξισώσεων αποτελείτε από τις γνωστές εξισώσεις συνέχειας, διατήρησης της ορμής, της διατήρησης της εντροπίας και της αντίστοιχης καταστατικής εξίσωσης, τις εξισώσεις του Maxwell και τον νόμο του Ohm που περιγράφει την αλληλεπίδραση της ύλης και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

2.2 Οι εξισώσεις της Σχετικιστικής ΜΥΔ

2.2.1 Η πλήρης τανυστική μορφή - Εξαγωγή των εξισώσεων

Μία από τις βασικές έννοιες στην θεμελίωση της μηχανικής των συνεχών μέσων είναι ο στοιχειώδης όγκος που νοείται ως μια συλλογή. Όπως και στην κλασική υδροδυναμική ο όγκος πρέπει να περιέχει αρκετά σωματίδια ώστε να είναι εφικτή η στατιστική περιγραφή των σωματιδίων με μικρή-αμελητέα απόκλιση (deviation), ενώ θα πρέπει να είναι αρκετά μικρός σε σχέση με την διάσταση της συνολικής ροής.

Ακολουθώντας την υδροδυναμική θεμελίωση, η πρώτη εξίσωση που γράφει κάποιος αφορά την εξίσωση συνέχειας που περιγράφει την διατήρηση των φερμιονικών σωματιδίων στον στοιχειώδη όγκο. Βεβαίως, στο υπερσχετικιστικό όριο θερμοκρασιών και καθώς η ενέργεια των διακεκριμένων σωματιδίων είναι αρκετά υψηλή, οι σωματιδιακές αλληλεπιδράσεις μπορούν να καταστρέψουν την διατήρηση του συνολικού αριθμού των σωματιδίων. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να ορίσουμε μια νέα διατηρούμενη ποσότητα όπως ο λεπτονικός ή βαρυονικός αριθμός, δηλαδή το πλήθος των σωματιδίων αν όλα τα ζεύγη φερμιονίων εξουδετερωθούν, και να εκφράσουμε την εξίσωση διατήρησης συναρτήσει της αριθμητικής πυκνότητας του αριθμού αυτού αντί της μάζας των σωματιδίων - οι σχετικές αλληλεπιδράσεις στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται στην καταστατική εξίσωση.

Η εξίσωση συνέχειας εξάγεται με την βοήθεια του 4-ανύσματος της ροής μάζας

$$j^{\mu}_{\rho} = \rho u^{\mu} = \gamma\rho\left(c, \vec{v}\right) \tag{2.1}$$

όπου u^i η 4-ταχύτητα, $\vec{v}$ η συμβατική χωρική ταχύτητα, γ ο παράγοντας Lorentz και ρ η πυκνότητα μάζας του συγκεκριμένου στοιχειώδους όγκου όπως μετριέται στο συγκινούμενο σύστημα αναφοράς. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω 4-άνυσμα η εξίσωση συνέχειας στην μετρική Minkowski γράφεται άμεσα

$$\left(\rho u^{\mu}\right)_{,\mu} = \frac{\partial\left(\rho u^{\mu}\right)}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{2.2}$$

Η φυσική σημασία της παραπάνω εξίσωσης είναι ακριβώς όμοια με αυτής του κλασικού ορίου και εκφράζει το ισοζύγιο μεταξύ της υπάρχουσας μάζας του όγκου και της ροής μάζας από τα όριά του.

Η δεύτερη εξίσωση που κατασκευάζουμε είναι η εξίσωση ενέργειας-ορμής του ρευστού. Παρόλο που η κατασκευή του υδροδυναμικού τελεστή ενός νευτώνειου ρευστού παρουσιάζει ενδιαφέρον, στην εργασία αυτή παραλείπεται και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο Landau and Lifschitz (1975). Εδώ απλά σημειώνουμε ότι η συνιστώσα $T^{00} = T_{00}$ αντιστοιχεί στην ενεργειακή πυκνότητα του υδροδυναμικού ρευστού, η $T^{0i} = -T_{0i}$ στην ροή της πυκνότητας ορμής (ή ροή ενέργειας δια c^2), ενώ $T^{ij} = T_{ij}$ είναι ο τανυστής της ροής ορμής*. Η σχετικιστική γενίκευση αυτού του τελεστή επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας την ταχύτητα με την 4-ταχύτητα $u^{\mu} = \gamma\left(c, \vec{0}\right)$ και το συνηθισμένο επιχείρημα με την ισοδυναμία των τελεστών που πρώτα διατυπώνεται στο ιδιοσύστημα του ρευστού και στην συνέχεια επεκτείνεται μέσω της αρχής της συναλλοιώτητας και για τυχαίο σύστημα αναφοράς. Η διαδικασία αυτή έχει ως αποτέλεσμα τον τανυστή του σχετικιστικού ρευστού

$$T^{\mu\nu}_{hy} = wu^{\mu}u^{\nu} - pn^{\mu\nu} \tag{2.3}$$

όπου $w = e + p$ η ειδική ενθαλπία, δηλαδή ενθαλπία ανά μονάδα όγκου, e η ειδική εσωτερική ενέργεια του όγκου και p η πίεση του· όλες αυτές οι βαθμωτές ποσότητες μετριούνται-ορίζονται στο συγκινούμενο σύστημα αναφοράς. Παρατηρείστε επίσης ότι στην σχετικιστική περιοχή η εσωτερική ενέργεια περικλείει όχι μόνο την ενέργεια εξαιτίας της θερμικής κίνησης των σωματιδίων, αλλά και ενέργεια ηρεμίας των σωματιδίων του ρευστού. Σε αναλυτική μορφή οι συνιστώσες του τανυστή ενέργειας-ορμής γράφονται

$$T^{00}_{hy} = \gamma w - p = \gamma\left(e + p\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad T^{0\alpha}_{hy} = \gamma w\frac{v_{\alpha}}{c} \qquad T^{\alpha\beta}_{hy} = \gamma\frac{v_{\alpha}}{c}\frac{v_{\beta}}{c} + p\delta_{\alpha\beta}$$

*Η ροή της ορμής μέσω μια επιφάνειας $d\vec{f}$ επί την επιφάνεια αντιστοιχεί στην δύναμη και συνεπώς το γινόμενο $T^{\alpha\beta}df_{\beta}$ αντιστοιχεί στην α-συνιστώσα της δύναμης αυτής. Χρησιμοποιώντας την ισότητα τανυστών και μεταβαίνοντας στο συγκινούμενο σύστημα για ένα ρευστό χωρίς εσωτερικές δυνάμεις η δύναμη αυτή γράφεται $T^{\alpha\beta}df_{\beta} = pdf_{\alpha}$ και έτσι $T^{\alpha\beta} = p\delta^{\alpha\beta}$

Ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου κατασκευάζεται μέσω της Λαγκρανζιανής πυκνότητας και ακολουθώντας μία από τις πιο όμορφες διαδικασίες της κλασικής θεωρίας πεδίου (βλέπε Landau and Lifshits (1975)). Δυστυχώς το μέγεθος της προσέγγισης αυτής καθιστά απαγορευτική την παρουσίασή της εδώ με αποτέλεσμα να αναφερθούμε μόνο στα αποτελέσματα. Η κεντρική ποσότητα που χρησιμοποιείται είναι το 4-άνυσμα του δυναμικού

$$A^\mu = \left(\phi, \vec{A}\right) \tag{2.4}$$

όπου ϕ το ηλεκτροστατικό βαθμωτό δυναμικό και $\vec{A}$ το διανυσματικό δυναμικό του μαγνητικού πεδίου. Οι συμβατικές εντάσεις του ΗΜΠ πεδίου παράγονται από το δυναμικό μέσω των γνωστών εκφράσεων

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$$

Το 4-άνυσμα του δυναμικού παρέχει, επίσης, και την θεμελιώδη ποσότητα του αντισυμμετρικού τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \qquad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

όπου οι ποσότητες Ei, B_i αναφέρονται στις αντίστοιχες συνιστώσες των χωρικών εντάσεων του πεδίου.

Στην πορεία αυτή το πρώτο βήμα συνίσταται στο να γραφούν οι εξισώσεις του Maxwell σε αναλλοίωτη μορφή (βλέπε Landau and Lifshits (1975)) - σε gaussian μονάδες

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad F_{\mu\nu,\kappa} + F_{\kappa\mu,\nu} + F_{\nu\kappa,\mu} = 0 \tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e \\ &\vec{\nabla} \times \vec{B} = \tfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad F^{\mu\nu}_{,\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{2.7}$$

όπου $j^\mu = \left(c\rho_e, \vec{j}\right)$ το 4-άνυσμα της πυκνότητας ρεύματος, ρ_e η πυκνότητα φορτίων μετρούμενη στο συγκινούμενο σύστημα και $\vec{j}$ το συμβατικό χωρικό ρεύμα. Χρησιμοποιώντας τον τανυστή $F^{\mu\nu}$ ο τανυστής ενέργειας ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ορίζεται ως

$$T^{\mu\nu}_{el} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) \tag{2.8}$$

ή σε διανυσματική μορφή

$$T^{\mu\nu}_{el} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

όπου

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} \tag{2.10}$$

το διάνυσμα poynting και

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right)\delta_{ij}\right] \tag{2.11}$$

ο τανυστής τάσης του Maxwell.

Ο πλήρης τανυστής ενέργειας-ορμής του πλάσματος μπορεί να κατασκευαστεί άμεσα

$$T^{\mu\nu} = T_h^{\mu\nu} + T_{el}^{\mu\nu} \tag{2.12}$$

και να γραφεί η αντίστοιχη εξίσωση διατήρησής του

$$T_{,\nu}^{\mu\nu} = 0 \tag{2.13}$$

Ο νόμος διατήρησης περιέχει μαζί την διατήρηση της ορμής και της ενέργειας που εμφανίζονται διακριτά στα νευτώνεια ρευστά, μια κεντρική ενοποίηση που είναι πάντα παρούσα στον 4-ανυσματικό φορμαλισμό της σχετικιστικής μηχανικής. Αυστηρά μιλώντας η παραπάνω συναλλοίωτη εξίσωση παρέχει την πλήρη περιγραφή της δυναμικής του ρευστού, αλλά ένας πιο διαισθητικός και γόνιμος τρόπος χειρισμού του συστήματος περιλαμβάνει την αντικατάσταση κάποιας συνιστώσας της, συνήθως της χρονικής, με κάποιο απλούστερο γραμμικό συνδυασμό των εξισώσεων. Για τον σκοπό αυτό προβάλουμε την χρονική συνιστώσα κατά μήκος του ιδιόχρονου

$$u^\nu T_{,\nu}^{\mu\nu} = 0 \tag{2.14}$$

Προκειμένου να εξάγουμε μια πιο εύχρηστη μορφή των εξισώσεων ακολουθούμε τους Anile (1990) και Lichnerowicz and for Advanced Study (1967) και εισάγουμε το 4-άνυσμα

$$B_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} u^\nu F^{\kappa\lambda} \tag{2.15}$$

ή σε διανυσματική μορφή

$$B_\mu = \gamma\left(\vec{B}\cdot\vec{u}, \vec{B}\cdot\vec{u} + \vec{E}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right) = \left[\gamma\vec{u}\cdot\vec{B}, \frac{\vec{B}}{\gamma} + \left(\vec{u}\cdot\vec{B}\right)\vec{v}\right] \tag{2.16}$$

το οποίο αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο όταν μετρούμε στο συγκινούμενο σύστημα. Η απόδειξη των παρακάτω ιδιοτήτων είναι τετριμμένη όταν αναφερόμαστε στο συγκινούμενο σύστημα

$$B^\mu B_\mu = \left|\vec{B}\right|^2 \qquad B^\mu u_\mu = 0 \tag{2.17}$$

και ως εκ τούτου η ισχύς τους επεκτείνεται σε κάθε σύστημα· παρατηρείστε ότι $B^\mu B_\mu > 0$ δηλώνοντας τον χωρικό χαρακτήρα του ανύσματος. Επιπλέον διώχνουμε τους ενοχλητικούς 4π παράγοντες ορίζοντας νέα μονάδα για το μαγνητικό πεδίο

$$b^\mu = \frac{B^\mu}{\sqrt{4\pi}} \tag{2.18}$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των ανυσμάτων μπορούμε να αντιστρέψουμε τις παραπάνω σχέσεις λύνοντας ως προς $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} B_\kappa v_\lambda \tag{2.19}$$

και να εκφράσουμε τον τανυστή $T^{\mu\nu}$ για ιδανικά αγώγιμο πλάσμα μέσω του b 4-ανύσματος

$$T^{\mu\nu} = \left(w + b^2\right) u^\mu u^\nu + \left(p + \frac{b^2}{2}\right) n^{\mu\nu} - b^\mu b^\nu \tag{2.20}$$

Για τους μετέπειτα υπολογισμούς θα χρειαστούμε επίσης και το πρώτο ζεύγος των εξισώσεων του Maxwell εξ.(2.6), εκπεφρασμένες μέσω του b^μ διανύσματος (για την απόδειξη βλέπε πλαίσιο 2.1)

$$\left(v^\mu b^\nu - v^\nu b^\mu\right)_{,\mu} = 0 \tag{2.21}$$

Πλαίσιο 2.1: Απόδειξη της εξίσωσης (2.21)

Η απόδειξη της σχέσης αυτής στηρίζεται στην ιδιότητα του πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή (Landau and Lifshits (1975))

$$\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\epsilon_{\kappa\lambda\tau\sigma} = -2\left(\delta^\mu_\tau \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\tau\right)$$

Με βάση τον ορισμό εξ.2.19 γράφουμε τις εξισώσεις Maxwell εξ.2.6

$$\epsilon_{\rho\lambda\mu\nu}\left(B^\rho u^\lambda\right)_{,\kappa} + \epsilon_{\rho\lambda\kappa\mu}\left(B^\rho u^\lambda\right)_{,\nu} + \epsilon_{\rho\lambda\nu\kappa}\left(B^\rho u^\lambda\right)_{,\mu} = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\epsilon^{\tau\kappa\mu\nu}$ ο πρώτος όρος μηδενίζεται

$$-2\left(\delta^\tau_\rho \delta^\kappa_\lambda - \delta^\tau_\lambda \delta^\kappa_\rho\right)\left(B^\rho u^\lambda\right)_{,\kappa} = -2\left(v^\kappa B^\tau - v^\tau B^\kappa\right)_{,\kappa}$$

ενώ οι υπόλοιποι δύο αναιρούνται με την αλλαγή των βουβών δεικτών($\mu \leftrightarrow \nu$) και τις αντισυμμετρικές ιδιότητες της Levi-Civita ποσότητας.

Οι προβολές της παραπάνω εξίσωσης στα u_ν και b_ν διανύσματα μας παρέχουν με χρήση των εξ.2.17 δύο πολύ χρήσιμες ιδιότητες. Οι υπολογισμοί είναι εύκολοι και άμεσοι, ενώ το αποτέλεσμα τους καταλήγει στις

$$v^\mu v^\nu b_{\nu,\mu} + b^\mu_{,\mu} = 0 \tag{2.22}$$

$$\left|b^2\right| v^\mu_{,\mu} + \frac{1}{2} v^\mu \left(\left|b^2\right|\right)_{,\mu} - b^\mu b^\nu v_{\nu,\mu} = 0 \tag{2.23}$$

Επικεντρωνόμαστε, τώρα, στην προβολή της εξίσωσης ενέργειας-ορμής στην διεύθυνση του ιδιόχρονου γράφοντας την εξ.2.14 αναλυτικά ως

$$v_\mu T^{\mu\nu}_{,\nu} = -\left(w^2 + b^2\right)_{,\nu} v^\nu - \left(w^2 + b^2\right) v^\nu_{,\nu} + \left(p + \frac{b^2}{2}\right)_{,\nu} v^\nu - u_\mu b^\mu_{,\nu} b^\nu \tag{2.24}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξ.(2.23) και τον ορισμό της ενθαλπίας ($w = e + p$) η εξίσωση της ενέργειας γράφεται

$$u^\mu e_{,\mu} + (e + p)\, u^\mu_{,\mu} = 0 \tag{2.25}$$

η οποία αποτελεί μια εναλλακτική έκφραση της διατήρησης της εντροπίας. Η γνωστή μορφή του νόμου διατήρησης μπορεί να ανακτηθεί με χρήση του $1^{ου}$ θερμοδυναμικού νόμου

$TdS = d(e/\rho) + pd(1/\rho)$, όπου T η θερμοκρασία και S η ειδική εντροπία. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας γράφουμε $v^{\nu}_{,\nu} = -\rho_{,\nu}v^{\nu}/\rho$ και με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση καταλήγουμε στην ζητούμενη μορφή του νόμου διατήρησης της εντροπίας

$$v^{\nu}S_{,\nu} = 0 \tag{2.26}$$

Περαιτέρω πράξεις στην εξίσωση ενεργείας 2.25 και η αδιαβατική συνθήκη οδηγούν στην εξίσωση

$$\frac{\partial e}{\partial p}v^{\mu}p_{,\mu} + (e+p)\,u^{\mu}_{,\mu} = 0 \tag{2.27}$$

που είναι μια εύχρηστη έκφραση που θα χρησιμοποιηθεί σε λίγο. Μια επίσης χρήσιμη έκφραση εξάγεται από την προβολή της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας-ορμής κατά μήκος του b διανύσματος όπου με χρήση της εξ.2.22 καταλήγουμε

$$(e+p)\,v^{\mu}v^{\nu}b_{\mu,\nu} = b^{\mu}p_{,\mu} \tag{2.28}$$

Ορίζουμε τον προβολικό τανυστή $h_{\mu\nu} = n_{\mu\nu} + v_{\mu}v_{\nu}$ που προβάλει τις διάφορες ποσότητες στην κάθετη διεύθυνση της 4-ταχύτητας (u^{μ}) και χρησιμοποιούμε τον τανυστή αυτό για να προβάλουμε την εξίσωση ορμής[†]. Παρόλο που οι πράξεις που εμπλέκονται στον υπολογισμό δεν είναι πολύπλοκες κάνουν χρήση πολλών προαναφερθέντων ιδιοτήτων και για λόγους έκτασης παραλείπονται. Το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned}\left(e+p+|b|^2\right)v^{\mu}v^{\kappa}_{\mu} - b^{\mu}b^{\kappa}_{\mu} + \left(h^{\kappa\mu} + v^{\kappa}v^{\mu}\right)b_{\nu}b^{\nu}_{,\mu}\\ + \frac{1}{e+p}\left[(e+p)\,h^{\kappa\mu} - e'_p\,|b|^2\,v^{\kappa}v^{\mu} + b^{\kappa}b^{\mu}\right]p_{,\mu} = 0\end{aligned} \tag{2.29}$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει την παράγωγο ως προς τον δείκτη. Η τελευταία έκφραση που απαιτείται είναι το πρώτο ζεύγος των εξισώσεων του Maxwell εξ.(2.6) που αναπτύσσεται με τους δύο όρους τους να γράφονται

$$b^{\nu}v^{\mu}_{,\mu} = \frac{e'_p}{e+p}b^{\nu}v^{\mu}p_{,\mu} \qquad b^{\mu}_{,\mu}v^{\nu} = \frac{1}{e+p}v^{\mu}b^{\nu}p_{,\mu}$$

Συγκεντρώνοντας τους όρους αυτούς

$$v^{\mu}b^{\nu}_{,\mu} - b^{\mu}u^{\nu}_{,\mu} + \frac{1}{e+p}\left(v^{\nu}b^{\mu} - e'b^{\nu}v^{\mu}\right)p_{,\mu} = 0 \tag{2.30}$$

Οι εξισώσεις 2.22, 2.26, 2.27, 2.29, 2.30 αποτελούν, τώρα, το νέο σύστημα. Με την βοήθεια πινάκων το σύστημα αυτό μπορεί αν γραφεί στην μορφή

$$A^{\mu A}_{B}U^{B}_{,\mu} = 0 \qquad U = \left(u^{\nu}, b^{\nu}, p, S\right)^{T} \tag{2.31}$$

όπου U το διάνυσμα των αγνώστων ποσοτήτων, ενώ οι δείκτες A, B τρέχουν για τις 10 άγνωστες συναρτήσεις $(0, 1, ..., 9)$. Αναλυτικά ο πίνακας $(A^{\mu}_{B})^{A}$ είναι

$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} Ev^{\mu}\delta^{\kappa}_{\nu} & -b^{\mu}\delta^{\kappa}_{\nu} + p^{\kappa\mu}b_{\nu} & l^{\kappa\mu} & 0^{\kappa\mu} \\ b^{\mu}\delta^{\kappa}_{\nu} & -v^{\mu}\delta^{\kappa}_{\nu} & f^{\kappa\mu} & 0^{\kappa\mu} \\ w\delta^{\mu}_{\nu} & 0^{\mu}_{\nu} & e'_p v^{\mu} & 0^{\mu} \\ 0^{\mu}_{\nu} & 0^{\mu}_{\nu} & 0^{\mu} & v^{\mu} \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

[†]Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε την ιδιότητα αυτή σχηματίζοντας την ποσότητα $h_{\mu\nu}X^{\nu}$ για τυχόν διάνυσμα X^{ν}. Βλέπει κανείς άμεσα ότι η συνθήκη ορθογωνιότητας $u^{\mu}\left(h_{\mu\nu}X^{\nu}\right) = 0$ ισχύει

όπου

$$w = e + p \qquad E = e + p + \left|b^2\right| \qquad p^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + v^\mu v^\nu$$

$$l^{\mu\nu} = \frac{1}{w}\left(wh^{\mu\nu} - e'_p\left|b^2\right| v^\mu v^\nu + b^\mu b^\nu\right) \qquad f^{\mu\nu} = -\frac{1}{w}\left(v^\mu b^\nu - e'_p b^\mu v^\nu\right)$$

(Για να είμαστε ακριβείς με τις διαστάσεις του πίνακα, ο πίνακας των αγνώστων U^B έχει διάσταση 10×1, ενώ ο πίνακας του συστήματος A^μ είναι στην πραγματικότητα ένας 10×10 πίνακας που σχηματίζεται με έκταση των πρώτων δύο γραμμών και πρώτων δύο στηλών κατά τους δείκτες κ, ν αντίστοιχα)

2.2.2 Η Διανυσματική Μορφή

Παρόλο την κομψή μορφή των συναλλοίωτων εξισώσεων που εξήχθησαν στην προηγούμενη ενότητα, η περαιτέρω μελέτη και ολοκλήρωσή τους απαιτεί μια πιο αναλυτική μορφή, όπως η διανυσματική. Υπό το πρίσμα αυτό, οι εξισώσεις χάνουν την συναλλοίωτη ιδιότητά τους και ειδικο-σχετικιστικοί μετασχηματισμοί πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατά την μετάβαση από ένα σύστημα αναφοράς σε κάποιο άλλο. Αναφερόμενοι, όμως, στις αστροφυσικές εφαρμογές η συναλλοιώτητα δεν είναι πρωτεύουσας σημασία καθώς το κύριο ζητούμενο εστιάζεται σε συγκεκριμένες λύσεις όπου με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες περιγράφουν τις υπό εξέταση ροές.

Η εξίσωση συνέχειας εξ.2.2 γράφεται άμεσα

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\gamma\rho) + \gamma\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \tag{2.33}$$

όπου το σύμβολο $\vec{\nabla}$ παριστάνει τώρα τον γνωστό τελεστή στο εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων. Ο τελεστής στις παρενθέσεις εμφανίζεται συχνά στην μηχανική των συνεχών μέσων και σχετίζεται με την Langrangian περιγραφή του ρευστού ή απλούστερα με το σύστημα αναφοράς ενός συγκινούμενου παρατηρητή (δεν χρειάζεται να είναι αδρανειακό, μάλιστα τις περισσότερες φόρες δεν είναι). Έτσι για λόγους ευκολίας θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό

$$\hat{D} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right) \tag{2.34}$$

Οι χωρικές συνιστώσες της εξίσωσης ενέργειας-ορμής εξάγονται μέσω των 2.3, 2.9-2.13 παρέχοντας τρεις ακόμα εκφράσεις. Οι σχετικοί υπολογισμοί παρουσιάζονται στο πλαίσιο 2.2 και η τελική εξίσωση έχει την μορφή

$$\gamma\rho\hat{D}\left(\gamma\xi\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}P + \frac{\rho_e\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}}{c} \tag{2.35}$$

Η προβολή της εξίσωσης ενέργειας-ορμής στην διεύθυνση του ιδιόχρονου παρέχει την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας για το στοιχειώδη όγκο. Το αποτέλεσμα έχει ήδη δοθεί στης εξ.2.25 όπου σε συνδυασμό με την εξίσωση συνέχειας($u^\mu_{,\mu} = \rho u^\mu(1/\rho)_{,\mu}$) δίνει

$$\hat{D}e + (e+p)\,\rho\hat{D}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \tag{2.36}$$

Όταν το ρευστό βρίσκεται σε τοπική θερμοδυναμική ισορροπία οι ποσότητες e, P, ρ σχετίζονται με την καταστατική εξίσωση. Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα η παραπάνω

έκφραση και ο $1^{ος}$ θερμοδυναμικός νόμος παρέχουν την έκφραση της διατήρησης της ενέργειας. Αποδείξαμε αυτό το λήμμα για την γενική περίπτωση, αλλά εξαιτίας της σημασίας του για τις αστροφυσικές εφαρμογές είναι σημαντικό να προχωρήσουμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα του πολυτροπικού ρευστού $e = P/(\hat{\Gamma} - 1)$. Κάτω από αυτή την καταστατική εξίσωση η εξ.2.36 δίνει

$$\hat{D}\left(\frac{P}{\rho^{\hat{\Gamma}}}\right) = 0 \tag{2.37}$$

Πλαίσιο 2.2: Η διανυσματική μορφή της εξίσωσης ενέργειας-ορμής

Η διαδικασία εξαγωγής της αναλυτικής μορφής της εξίσωσης ενέργειας-ορμής έγκειται στον υπολογισμό του κάθε όρου που εμφανίζεται. Ξεκινώντας από τις συνιστώσες του T^{ij}_{hy}, όπου $i, j = 1, 2, 3$, παίρνουμε

$$T^{i\mu}_{hy,\mu} = \frac{\partial}{\partial t}\left(w\gamma^2 v^i\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(w\gamma^2 v^i v^j + p\delta^{ij}\right)$$
$$= \gamma\xi v_i\left[\frac{\partial}{\partial t}(\gamma\rho) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\gamma\rho v^j\right)\right] + \frac{\partial p}{\partial x^j}\delta^{ij} + \gamma\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\xi v^i\right) + v^j\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\gamma\xi v^i\right)\right]$$

Με χρήση της εξίσωσης συνέχειας εξ.2.2 ο πρώτος όρος στις αγκύλες εξαφανίζεται και με χρήση του τελεστή $\hat{D}$ γράφουμε τις συνιστώσες αυτές στην μορφή

$$T^{i\mu}_{hy\,,\mu} = \gamma\rho\hat{D}\left(\gamma\xi\vec{v}\right) + \vec{\nabla}p$$

σημειώστε ότι οι δείκτες i αντιστοιχούν στις αντίστοιχες συνιστώσες των διανυσμάτων του δεξιού μέλους. Οι εξισώσεις Maxwell και οι διανυσματικές ταυτότητες παρέχουν τις ηλεκτρομαγνητικές συνιστώσες

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} + \vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{J}\times\vec{B} + \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B} - \vec{E}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$$
$$= -\vec{J}\times\vec{B} - \vec{\nabla}\left(\frac{B^2+E^2}{2}\right) + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

και κατ΄ επέκταση τον τανυστή ενέργειας-ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$T^{ij}_{em\,,\mu} = -\frac{1}{4\pi}\vec{J}\times\vec{B} - \vec{\nabla}\left(\frac{B^2+E^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$$
$$-\frac{1}{4\pi}B^iB^j_{,j} - \frac{1}{4\pi}B^jB^i_{,j} - \frac{1}{4\pi}E^iE^j_{,j} - \frac{1}{4\pi}E^jE^i_{,j} + \vec{\nabla}\left(\frac{B^2+E^2}{8\pi}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\vec{J}\times\vec{B} - \frac{1}{4\pi}E^iE^j_{,j} - \frac{1}{4\pi}B^iB^j_{,j}$$

Ολοκληρώνουμε την πορεία μας εξετάζοντας τον τελευταίο όρο χρησιμοποιώντας πάλι τις $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = B^j_{,j} = 0$ και $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = E^j_{,j} = \rho_e$ εξισώσεις του Maxwell

$$T^{ij}_{em\,,\mu} = -\frac{\rho_e\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}}{4\pi}$$

καταλήγοντας στην ζητούμενη έκφραση.

Η παραπάνω έκφραση καταδεικνύει ότι η ποσότητα στις παρενθέσεις παραμένει σταθερή κατά την κίνηση του στοιχειώδους όγκου του ρευστού. Ένα σημείο που χρήζει προσοχής είναι το ακόλουθο:η τιμή του αδιαβατικού δείκτη $\hat{\Gamma}$ παρέχεται από τις μικροσκοπικές ιδιότητες των σωματιδίων του ρευστού που σχετίζουν τις θερμοδυναμικές ποσότητες του ρευστού κατά την διάρκεια της μεταβολής που εξετάζουμε. Ο καθορισμός του δείκτη εμπίπτει στο πλαίσιο της Στατιστικής Φυσικής και οι σχετικοί υπολογισμοί δεν παρουσιάζονται εδώ, αλλά θα υποθέσουμε ότι οι τιμές του είναι γνωστές - $\hat{\Gamma} = 0,\ 1,\ \infty$ για την περίπτωση της ισοβαρούς, ισόθερμης ισόχωρης μεταβολής αντίστοιχα . Κατά την αδιαβατική μεταβολή όπου η εντροπία παραμένει σταθερή ο δείκτης παίρνει τιμές από 5/3 για νευτώνειες θερμοκρασίες (όταν η κινητική ενέργεια του σωματιδίου εξαιτίας της θερμικής του κίνησης είναι μικρή σε σχέση με την μάζα ηρεμίας του) μέχρι την τιμή 4/3 για υπερ-σχετικιστικές θερμοκρασίες (όταν η κινητική ενέργεια των σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερη της μάζας ηρεμίας τους) - οι ενδιάμεσες τιμές αντιστοιχούν σε μέτριας θερμοκρασίας ρευστά. Στην παρούσα διατριβή θα θεωρήσουμε ότι όλα τα πλάσματα υπό μελέτη συμπεριφέρονται αδιαβατικά καθώς κάθε άλλη διαδικασία θα ενέπλεκε ψύξη ή θέρμανση του ρευστού και επομένως θα έπρεπε να συμπεριληφθούν και οι κατάλληλοι όροι στην εξίσωση ενέργειας-ορμής οδηγώντας μάλιστα και στην μη διατήρηση της εντροπίας που αναφέρθηκε παραπάνω.

Είναι χρήσιμο να κάνουμε μια σύντομη αναφορά για την περίπτωση ενός αδιαβατικού ρευστού σε μεγάλες θερμοκρασίες. Η καταστατική εξίσωση ενός τέτοιου αερίου είναι ένα θέμα με πολλές προεκτάσεις καθώς στην περιοχή των υψηλών θερμοκρασιών και/ή υψηλών πυκνοτήτων υπεισέρχονται πολλά ζητήματα που σχετίζονται με την σύσταση και τον εκφυλισμό του αερίου. Η αλληλεπίδραση των σωματιδίων του ρευστού μπορεί να οδηγήσει στην δημιουργία φωτονίων και άλλων σωματιδίων, στον ιονισμό του αερίου και κατέπέκταση στην χρήση της εξίσωσης Saha όπου τα κβαντικά φαινόμενα του εκφυλισμού και των ενεργειακών σταθμών πρέπει να ληφθούν υπόψη. Για να αποφύγουμε τέτοια ζητήματα εστιάζουμε την προσοχή μας σε ένα μονοατομικό μη εκφυλισμένο αέριο γνωστό στην βιβλιογραφία σαν αέριο του Synge. Σε μια τέτοια περίπτωση ο γνωστός νόμος $P \propto \rho^{\hat{\Gamma}}$ δεν ισχύει πλέον καθώς ο αδιαβατικός εκθέτης δεν είναι πλέον σταθερός. Αυτός ο τύπος αερίου μελετήθηκε από τους Chandrasekhar (1939, 2012) και Synge (1957), όπου κατέληξαν στην παρακάτω έκφραση για την εντροπία

$$h = \frac{K_3(z)}{K_2(z)} \tag{2.38}$$

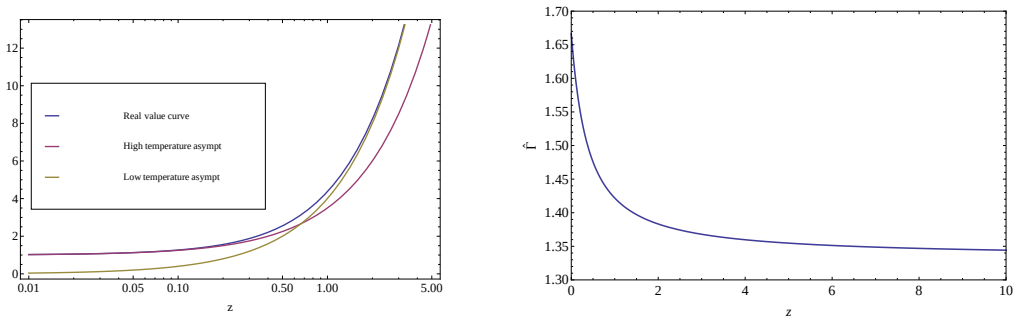
Οι $z = \rho/P = m/(k_b T)$ και K_n συναρτήσεις είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel (modified Bessel) δεύτερου είδους· m η μάζα των σωματιδίων που αποτελούν το αέριο, k_B η σταθερά του Boltzmann και T η θερμοκρασία. Κάποιες χρήσιμες ασυμπτωτικές εκφράσεις που καθορίζουν την συμπεριφορά τους βρίσκονται στο Annile, εξ.2.28, Anile (1990) και αναφέρονται στα όρια των χαμηλών ($z \to \infty$) και υψηλών ($z \to 0$) θερμοκρασιών

$$z \ll 1: \qquad h = 1 + \frac{5}{2z} \tag{2.39}$$

$$z \gg 1: \qquad h = 4/z \tag{2.40}$$

Η συμπεριφορά των ασυμπτωτικών εκφράσεων και η ακριβής τιμή της συνάρτησης παρουσιάζονται στο σχ.2.1. Χρησιμοποιώντας καταχρηστικά την έκφραση της πολυτροπικής καταστατικής εξίσωσης

$$\xi = 1 + \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{\Gamma}} \frac{P}{\rho c^2} = h = 1 + \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{\Gamma} - 1} z \tag{2.41}$$



Σχήμα 2.1: Τα διαγράμματα για το αέριο του Synge. **Αριστερά:** Η ειδική εντροπία συναρτήσει της ποσότητας $z = P/\rho$, η πραγματική τιμή της ποσότητας καθώς και οι δύο ασυμπτωτικές εκφράσεις που περιγράφουν ένα κρύο και ένα υπερ-σχετικιστικής θερμοκρασίας πλάσμα. **Δεξιά:** Ο ενεργός αδιαβατικός δείκτης όπως ορίστηκε από την εξ.2.42 σαν συνάρτηση της παραμέτρου z.

$c = 1$ στο συγκεκριμένο, μπορούμε να ορίσουμε έναν ενεργό (effective) αδιαβατικό δείκτη

$$\hat{\Gamma} = \frac{h-1}{h-1-z} \tag{2.42}$$

με τις οριακές τιμές 5/3 για κρύο και 4/3 για υπερ-σχετικιστικής θερμοκρασίας πλάσμα.

2.3 Συνήθη Όρια στα Αστροφυσικά Περιβάλλοντα

Είναι προφανές ότι ο γενικός αυτός τίτλος μπορεί να περιλάβει μια πληθώρα αστροφυσικών ορίων και φαινομένων. Στα πλαίσια, όμως, της παρούσας διατριβής θα παρουσιάσουμε τρία από τα σημαντικότερα όρια που συμμετέχουν στην περαιτέρω μελέτη μας: την άπειρη αγωγιμότητα, το θεώρημα της παγωμένης ροής και το μη-αδρανειακό όριο (force-free).

Συνήθως, τα ρευστά που συμμετέχουν στα φαινόμενα της αστροφυσική υψηλών ενεργειών είναι πολύ αραιά ώστε να εμφανίζουν σημαντική ηλεκτρική αντίσταση ή ιξώδες - μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις όπως στο εσωτερικό των άστρων, στους δίσκους προσαύξησης, περιοχές όπου λαμβάνει χώρα επανασύνδεση (reconnection) τα φαινόμενα αυτά πρέπει να ληφθούν υπόψη. Προκειμένου να προσδιορίσουμε την αγωγιμότητα πρέπει να συνδυάσουμε δύο ρευστοδυναμικές εξισώσεις που αναφέρονται στα ιόντα και τα ηλεκτρόνια του πλάσματος και τον γενικευμένο νόμο του Ohm[‡]

$$E_c = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{\sigma}\vec{J} \tag{2.43}$$

Οι δείκτες c αντιστοιχούν στις ποσότητες στο συγκινούμενο σύστημα, ενώ σ είναι η αγωγιμότητα του πλάσματος μετρημένη και αυτή στο συγκινούμενο σύστημα. Ο συντελεστής αγωγιμότητας παρέχεται από την αφαίρεση των εξισώσεων ορμής των ηλεκτρονίων και των πρωτονίων και η σχετική συζήτηση χωρίς την πλήρη εξαγωγή της σκέδασης Coulomb μπορεί να βρεθεί στο Rai Choudhuri (1998) και στο αυθεντικό μονόγραμμα του Spitzer (1962).

[‡]Βασικά ο γενικευμένος νόμος του Ohm περιλαμβάνει μερικούς ακόμα όρους που περιλαμβάνουν το φαινόμενο του Hall και τις χρονικές παραγώγους της πυκνότητας ρεύματος, αλλά για τους σκοπούς της εργασίας μας αποδεικνύεται ότι οι όροι αυτοί εισαγάγουν μικρότερης τάξης φαινόμενα και άρα αγνοούνται (βλέπε Rai Choudhuri (1998)).

T, °K	Electron Density n_e, cm^{-3}								
	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
10^2	16.3	12.8	9.43	5.97					
10^3	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97				
10^4	23.2	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97			
10^5	26.7	23.2	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97		
10^6	29.7	26.3	22.8	19.3	15.9	12.4	8.96	5.54	
10^7	32.0	28.5	25.1	21.6	18.1	14.7	11.2	7.85	4.39
10^8	34.3	30.9	27.4	24.0	20.5	17.0	13.6	10.1	6.69

Σχήμα 2.2: Οι τιμές του παράγοντα Gaunt, $\ln\Lambda$, που εμφανίζεται στην εξ.2.44, όπως υπολογίστηκε από τους Spitzer (1962). Παρατηρήστε ότι ο παράγοντας είναι αδιάστατος και επομένως δεν απαιτείται μετατροπή μονάδων· σχήμα από Spitzer (1962).

Εδώ αναφέρουμε μόνο το αποτέλεσμα της αγωγιμότητας Spitzer

$$\sigma = \frac{2\gamma_E\,(2k_BT)^{3/2}}{\pi^{3/2}m_e^{1/2}Ze^2c^2\ln\Lambda} \quad \text{όπου} \quad \Lambda = \frac{3}{2Z\,e^3}\sqrt{\frac{k_B^3T^3}{\pi n}} \tag{2.44}$$

όπου Z το φορτίο του ιόντος, γ_E ένας αριθμητικός παράγοντας που εξαρτάται από το φορτίο Z (0.582 για $Z = 1$), m_e η μάζα του ηλεκτρονίου, T η θερμοκρασία και k_B η σταθερά του Boltzmann. Αν θεωρήσουμε ένα πλήρως ιονισμένο πλάσμα υδρογόνου, ο συντελεστής αγωγιμότητας γράφεται

$$\begin{aligned} \sigma &= 1.53\,10^{-13}\frac{T^{3/2}}{\ln\Lambda}\,sec \quad \text{(cgs-esu)} \\ &= 1.53\,10^{-4}\frac{T^{3/2}}{\ln\Lambda}\,(\Omega\cdot m)^{-1} \quad (SI) \end{aligned} \tag{2.45}$$

Για τυπικές τιμές αναφερόμενες στο μεσοαστρικό αέριο $T = 10^6K$, η αριθμητική πυκνότητα δεν έχει σημαντικό ρόλο καθώς εμφανίζεται μόνο στον φυσικό λογάριθμο. Επιπλέον υποθέτοντας $\log\Lambda \sim 10$ ως τάξη μεγέθους, η παραπάνω έκφραση δίνει $10^4\Omega^{-1}m^{-1}$, και συγκρίνοντας με τους αγωγούς (μέταλλα, $\sigma \sim 10^6 - 10^7\Omega^{-1}m^{-1}$) ή με τους μονωτές (γυαλί, $\sigma \sim 10^{-11}\Omega^{-1}m^{-1}$) διαπιστώνουμε την υψηλά αγώγιμη φύση των αστροφυσικών πλασμάτων - πιο λεπτομερείς προσεγγίσεις ανεβάζουν την αγωγιμότητα κατά μία τάξη μεγέθους, βλέπε Longair (1992). Έτσι οι περισσότερες ροές που συναντώνται στα αστροφυσικά φαινόμενα θεωρούνται πως βρίσκονται στην ιδεατά αγώγιμη περιοχή - μόνο για μεγάλες πυκνότητες και χαμηλές η Ωμική αντίσταση φαίνεται να έχει κάποιο σημαντικό ρόλο.

Στην περίπτωση που η αγωγιμότητα του πλάσματος είναι άπειρη ο νόμος του Ohm παίρνει την μορφή

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B} \tag{2.46}$$

Μια εξίσωση ιδιαίτερου ενδιαφέροντος τόσο στην Νευτώνεια όσο και στην σχετικιστική περίπτωση είναι η εξίσωση επαγωγής. Χρησιμοποιώντας τον γενικευμένο νόμο του Ohm και την εξ.2.7 Maxwell

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right) - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[c^2\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) - \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\right] + \vec{\nabla}\times\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{2.47}$$

Στην νευτώνεια προσέγγιση ο όρος με το ρεύμα μετατόπισης (displacement current, όρος $\partial^2\vec{B}/\partial t^2$) είναι αμελητέος αφήνοντας δύο όρους που συνήθως λαμβάνονται υπόψη όταν μελετάμε τα εργαστηριακά $c^2/(4\pi\sigma)\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$ και αστροφυσικά πλάσματα ($\vec{v}\times\vec{B}$). Αλλά ακόμα και στο σχετικιστικό και άπειρα αγώγιμο πλάσμα ($\sigma\to\infty$) ο πρώτος όρος φεύγει αφήνοντας

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{2.48}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα που αποδεικνύεται στο παρ.Β΄ η ροή μιας ποσότητας που ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα διατηρείται

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \tag{2.49}$$

όπου S μια τυχούσα επιφάνεια ολοκλήρωσης που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$. Το πάγωμα της μαγνητικής ροής μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει διττή αιτία (Longair (1992) και αναφορές εκεί): Τα εξωτερικά ρεύματα που δημιουργούν τις μαγνητικές γραμμές που διαπερνούν την επιφάνεια και την μεταβολή στο μαγνητικό πεδίο λόγω της μεταβολής της επιφάνειας αυτής καθέαυτής. Το φαινόμενο της επαγωγής οδηγεί στην εμφάνιση ενός ρεύματος που αναιρεί την επίδραση των εξωτερικών ρευμάτων. Το δεύτερο φαινόμενο έχει ανάλογη ερμηνεία, αλλά αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι η επίδραση της παραμόρφωσης της επιφάνειας στο μαγνητικό πεδίο. Η επίδραση ερμηνεύεται από τον συνδυασμό της παγωμένης ροής και της διατήρησης της μάζας. Για παράδειγμα, ένας κύλινδρος πλάσματος με μαγνητικό πεδίο κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του που παραμορφώνεται κατά μήκος της ακτίνας του. Η μεταβολή της πυκνότητας $\rho\propto r^{-2}$ οδηγεί στον νόμο $B/\rho = const$. Αν παραμορφωθεί κατά μήκος του άξονά του (l), αλλά με την επιφάνεια του να παραμένει σταθερή η $\rho\propto 1/l$ οδηγεί στην σχέση $B/(\rho l) = const$, ενώ αν διασταλεί ισοτροπικά $\rho\propto r^{-3}$ καταλήγουμε στην $B/\rho^{2/3} = const$ (σε όλες τις περιπτώσεις $B\propto r^{-2}$ λόγω της παγωμένης ροής). Συνεπώς $B/\rho^n = const$ γενικά με την τιμή του δείκτη n να εξαρτάται από το είδος της γεωμετρικής παραμόρφωσης της τοπολογίας του πλάσματος.

Σε μερικά αστροφυσικά περιβάλλοντα εφαρμόζεται η προσέγγιση μηδενικής δύναμης (force free). Ξεκινώντας από την εξίσωση ορμής εξ.2.35 μελετάμε την περίπτωση όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι στάσιμο, δηλαδή η τοπολογία του δεν αλλάζει με τον χρόνο και παραλείπουμε τον ηλεκτρικό όρο της δύναμης Lorentz. Επιπλέον, γράφουμε τον μαγνητικό όρο ως

$$\vec{j}\times\vec{B} = \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B} = \frac{\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}}{4\pi} - \vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)$$

όπου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην μαγνητική τάση και ο δεύτερος στην μαγνητική πίεση. Ορίζοντας την παράμετρο β, λόγος θερμικής προς μαγνητική πίεση

$$\beta = \frac{p}{B^2/8\pi} \tag{2.50}$$

και εισάγοντας την παράμετρο β στην εξίσωση ορμής

$$-\beta\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}}{4\pi}-\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)$$

Παρατηρούμε ότι στα χαμηλού β πλάσματα η θερμική πίεση αγνοείται και ο όρος που κυριαρχεί είναι ο ηλεκτρομαγνητικός. Επιπλέον, αν τα σωματίδια έχουν μικρή ενεργειακή πυκνότητα σε σχέση με την μαγνητική - πχ εξαιτίας της πυκνότητάς τους, μια λογική υπόθεση όταν η θερμική πίεση θεωρείται αμελητέα - το αριστερό μέλος της εξίσωσης μηδενίζεται επίσης αφήνοντας

$$\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu\vec{B} \tag{2.51}$$

Σε μια τέτοια περίπτωση το μαγνητικό πεδίο διαμορφώνει την τοπολογία του με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί μόνο του την εξίσωση ισορροπίας. Ένα τέτοιο πεδίο καλείται στην βιβλιογραφία μηδενικής δύναμης (force free) και μπορεί να περιγραφεί χρησιμοποιώντας μόνο τις εξισώσεις Maxwell επιφέροντας έτσι σημαντικές απλοποιήσεις στο υπό εξέταση πρόβλημα.

2.4 Τα Σχετικιστικά Κύματα

Ένα σημαντικό θέμα για όλες τις πεδιακές θεωρίες αποτελεί η συνεχής-ομαλή διάδοση των διαταραχών που συμβαίνουν σε κάποιο σημείο του πεδίου, ή με άλλα λόγια τα κύματα που η θεωρία επιτρέπει. Τα αποτελέσματα για την Νευτώνεια περίπτωση θεωρούνται γνωστά και η ενότητα αυτή αποτελεί μια γενίκευση στο Minkowski χωρόχρονο. Στην παρακάτω ενότητα γίνεται εκτεταμένη χρήση των πινάκων της εν.2.2.1.

Η μορφή πίνακα του συστήματος εξ.2.32 μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον χαρακτηριστικό πίνακα του συστήματος αυτού. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε μια επιφάνεια του χωροχρόνου

$$\phi\left(t,\vec{x}\right)=0$$

και την κάθετη σε αυτή $\phi_{,\mu}$ ή ϕ_μ για συντομία,η οποία υποθέτουμε ότι είναι χωρικού χαρακτήρα $\phi_\mu\phi^\mu\geq 0$ (spacelike) καθώς έτσι αντιστοιχεί σε χρονικού τύπου διάδοση (timelike). Η επιφάνεια αυτή καλείται ως χαρακτηριστική του συστήματος αν η ορίζουσα $|A^\mu\phi_\mu|$ μηδενίζεται. Ο ζητούμενος πίνακας είναι εύκολο να προκύψει αν υπολογιστούν οι ποσότητες $p^{\kappa\mu}\phi_\mu, l^{\kappa\mu}\phi_\mu, f^{\kappa\mu}\phi_\mu$. Το αποτέλεσμα είναι

$$A^\mu\phi_\mu=\begin{pmatrix} E\alpha\delta^\kappa_\nu & m^\kappa_\nu & l^\kappa & 0^\kappa \\ B\delta^\kappa_\nu & -\alpha\delta^\kappa_\nu & f^\kappa & 0^\kappa \\ w\phi_\nu & 0_\nu & e'_p\alpha & 0 \\ 0_\nu & 0_\nu & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

όπου

$$\alpha=u^\mu\phi_\mu \qquad \mathcal{B}=b^\mu\phi_\mu \qquad m^\mu_\nu=\left(\phi^\mu+2\alpha u^\mu\right)b_\nu+2\mathcal{B}\delta^\mu_\nu$$

$$l^\mu=\phi^\mu+\left(1-\frac{e'_p\left|b\right|^2}{w}\right)\alpha u^\mu+\frac{\mathcal{B}}{w}b^\mu \qquad f^\mu=\frac{1}{w}\left(\alpha e'_p b^\mu-\mathcal{B}u^\mu\right)$$

Ο υπολογισμός της ορίζουσας του παραπάνω πίνακα είναι πολύπλοκος και απαιτεί την χρήση των αντίστοιχων θεωρημάτων για τους σύνθετους πίνακες. Το αποτέλεσμα είναι (Anile (1990))

$$|A^\mu\phi_\mu|=E\alpha^2A^2N_4 \tag{2.53}$$

όπου

$$A = E\alpha^2 - \mathcal{B}^2 \qquad N_4 = w\left(e'_p - 1\right)a^4 - \left(w + e'_p\left|b\right|^2\right)\alpha^2\phi^\nu\phi_\nu + \mathcal{B}^2\phi^\nu\phi_\nu$$

Εστιάζουμε, τώρα, στην ταχύτητα διάδοσης των διαφόρων διαταραχών. Οι ζητούμενες ταχύτητες προκύπτουν σαν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών (η σχετική απόδειξη για το κλασικό πρόβλημα μπορεί να βρεθεί στο John (1978)). Ο μηδενισμός της χαρακτηριστικής ορίζουσας εξ.2.53 παρέχει τις επιλογές

$$\alpha = 0 \qquad A = 0 \qquad N = 0$$

Πριν προχωρήσουμε περαιτέρω είναι χρήσιμο να ορίσουμε ένα βολικό σύστημα αναφοράς για να υπολογίσουμε τις εκφράσεις μας. Ορίζουμε, λοιπόν, το συγκινούμενο σύστημα $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε το μαγνητικό μας πεδίο να κείτεται στον 1° άξονα συντεταγμένων $b_\mu = (0, |b|, 0, 0)$. Υποθέστε, τώρα, ότι η επιφάνεια του κύματος δίνεται από μια εξίσωση $\phi(t, x, y, z)$. Τότε οι αντίστοιχες παράγωγοι $\phi_{,\nu}$ σχετίζονται με την ταχύτητα σύμφωνα με την σχέση:

$$v_x = \frac{\phi_{,0}}{\phi_{,1}} \qquad v_y = \frac{\phi_{,0}}{\phi_{,2}} \qquad v_z = \frac{\phi_{,0}}{\phi_{,3}}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω είναι εύκολο να υπολογίσουμε

$$\alpha = \phi_0 \qquad \mathcal{B} = |b|\,\phi_1$$

Η επίλυση της πρώτης εξίσωσης $\alpha = 0$ παρέχει τα υλικά κύματα και δίνει

$$t = 0 \tag{2.54}$$

Οι λύση της $A = 0$ παρέχει τα κύματα Alfvén και δίνει

$$a^2 = \frac{B^2}{E} \Rightarrow \left(\frac{\phi_0}{\phi_1}\right)^2 = \frac{\mathcal{B}^2}{E} \Rightarrow$$
$$v_A^2 = \frac{|b|^2}{w + |b|^2} \tag{2.55}$$

Προκειμένου να συγκρίνουμε τις παραπάνω εκφράσεις με πιο διαισθητικές εξισώσεις(βλέπε για παράδειγμα Vlahakis and Königl (2003a), appendix C) προχωρούμε στις αντικαταστάσεις

$$\frac{\phi_0^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \qquad \frac{\phi_1^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} = \cos^2\theta \tag{2.56}$$

στην σχέση αυτή θ είναι η γωνία όπως μετριέται από το πολοειδές μαγνητικό πεδίο ($\hat{z}$ στο Vlahakis and Königl (2003a), $\hat{x}$ στο δικό μας), και ορίζουμε

$$\frac{c_s}{c} = \sqrt{p'_e} = \sqrt{\frac{1}{e'_p}} \qquad \frac{u_A^2}{c^2} = \frac{|b|^2}{w + |b|^2} \tag{2.57}$$

σαν την ταχύτητα του ήχου και την ταχύτητα Alfvén αντίστοιχα. Η σχέση διασποράς παίρνει τώρα την μορφή

$$v^2 = v_A^2\cos^2\theta \tag{2.58}$$

Οι λύσεις της $N_4 = 0$ δίνει τώρα τα δύο μαγνητοακουστικά κύματα

$$
\begin{aligned}
& w\left(e_p' - 1\right)\phi_0^4 - \left(w + e_p'\left|b\right|^2\right)\phi_0^2 G^2 + \left|b\right|^2 G^2 \phi_1^2 = 0 \Rightarrow \\
& \left[w\left(e_p' - 1\right) + \left(w + e_p'\left|b\right|^2\right)\right]\phi_0^4 - \left(w + e_p'\left|b\right|^2\right)\phi_0^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) \\
& \qquad\qquad + \left|b\right|^2\left(-\phi_0^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2\right)\phi_1^2 = 0 \Rightarrow \\
& e_p'\left(w + \left|b\right|^2\right)\phi_0^4 - \left(w + e_p'\left|b\right|^2 + \left|b\right|^2\frac{\phi_1^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2}\right)\phi_0^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) + \left|b\right|^2\phi_1^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) = 0 \Rightarrow \\
& e_p'\left(w + \left|b\right|^2\right)\phi_0^4 - \left(w + e_p'\left|b\right|^2 + \left|b\right|^2\frac{\phi_1^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2}\right)\phi_0^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) + \left|b\right|^2\phi_1^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) = 0 \Rightarrow \\
& e_p'\left(w + \left|b\right|^2\right)\left(\frac{\phi_0^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2}\right)^2 - \left(w + e_p'\left|b\right|^2 + \left|b\right|^2\frac{\phi_1^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2}\right)\frac{\phi_0^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} + \left|b\right|^2\frac{\phi_1^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} = 0
\end{aligned}
$$

Οι ίδιες αντικαταστάσεις εξ.2.56, 2.57 δίνουν

$$
\left(\frac{v}{c}\right)^4 - \left[\left(\frac{u_A}{c}\right)^2 + \left(\frac{c_s}{c}\right)^2 - \left(\frac{u_A}{c}\right)^2\left(\frac{c_s}{c}\right)^2\sin^2\theta\right]\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{c_s}{c}\right)^2\left(\frac{u_A}{c}\right)^2\cos^2\theta = 0 \quad (2.59)
$$

Οι δύο λύσεις της παραπάνω εξίσωσης

$$
\begin{aligned}
v_{sf} = \frac{1}{2}\Bigg\{ & \left(\frac{u_A}{c}\right)^2 + \left(\frac{c_s}{c}\right)^2 - \left(\frac{c_s}{c}\right)^2\left(\frac{u_A}{c}\right)^2\sin^2\theta \\
& \pm\sqrt{\left[\left(\frac{u_A}{c}\right)^2 + \left(\frac{c_s}{c}\right)^2 - \left(\frac{c_s}{c}\right)^2\left(\frac{u_A}{c}\right)^2\sin^2\theta\right]^2 - 4\left[\left(\frac{c_s}{c}\right)^2\left(\frac{u_A}{c}\right)^2\cos^2\theta\right]}\Bigg\} \quad (2.60)
\end{aligned}
$$

παρέχουν τα αργά και γρήγορα μαγνητοακουστικά κύματα. Μπορεί κανείς να δείξει με έναν γενικό τρόπο ότι οι διάφορες ταχύτητες ικανοποιούν την ανισότητα (βλέπε πρόταση 2.4 και τα λήμματα παρακάτω στο Anile (1990))

$$
0 < v_s < v_A, c_s < v_f < c
$$

2.5 Ωστικές και λοιπές ασυνέχειες σε ένα πλάσμα

Στην κατακλείδα ενότητα του παρόντος κεφαλαίου πρόκειται να εξετάσουμε τις συνθήκες ασυνέχειας jump conditions για την περίπτωση των σχετικιστικών πλασμάτων. Η επιφάνεια ασυνέχειας δίνεται με παρόμοιο τρόπο σαν αυτό που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη ενότητα, κατά τον οποίο

$$
\phi\left(x^\mu\right) = 0
$$

η επιφάνεια της ασυνέχειας στον 4-χώρο. Το κάθετο μοναδιαίο 4-άνυσμα στην χωρική επιφάνεια καθορίζεται επομένως από την $l_\mu = \phi_{,\mu}$ -παρατηρήστε ότι αν το ωστικό κύμα είναι ακίνητο σε κάποιο σύστημα τότε $l_0 = 0$. Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις της ΜΥΔ (εξ.2.2,2.13) και το δεύτερο ζευγάρι των εξισώσεων Maxwell με την μορφή διατήρησής του για να βρούμε τις αναλλοίωτες ποσότητες. Τα αποτελέσματα εξάγονται άμεσα

$$
m = \rho_- u_-^\mu l_\mu = \rho_+ u_+^\mu l_\mu \quad (2.61)
$$

$$
V^\mu = u_-^\mu b_-^\nu l_\nu - b_-^\mu u_-^\nu l_\nu = u_+^\mu b_+^\nu l_\nu - b_+^\mu u_+^\nu l_\nu \quad (2.62)
$$

$$W^\mu = \frac{e + P + |b|^2}{\rho} m v^\mu + \left(p + \frac{|b|^2}{2} \right) l^\mu - B b^\mu \tag{2.63}$$

όπου $B = l^\mu b_\mu$. Οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν την συνέχεια της μάζας-ενέργειας των σωματιδίων, την συνέχεια των σχετικών ηλεκτρικών και μαγνητικών συνιστωσών του πεδίου και την διατήρηση της συνολικής ενέργειας-ορμής αντίστοιχα.

Όπως και στην κλασική υδροδυναμική περίπτωση ένα πλήθος από ασυνέχειες προκύπτει που αρχικά διαχωρίζονται από την παρουσία ή όχι μεταφοράς μάζας, δηλαδή από την τιμή του m αναλλοίωτου. Συνεπώς, αν $m = 0$ δεν διέρχεται μάζα από την ασυνέχεια αντιστοιχώντας σε μια εφαπτομενική ασυνέχεια (tangential discontinuity) ή ασυνέχεια επαφής (contact discontinuity). Μπορούμε να επιλύσουμε τέτοιους είδους ασυνέχειες με έναν γενικό τρόπο ακολουθώντας το Anile (1990). Η συνθήκη της μη ροής μάζας δίνει από την εξ.2.61 άμεσα

$$u_-^\mu l_\mu = u_+^\mu l_\mu = 0$$

(η πυκνότητα δεν μπορεί να είναι μηδέν και στις δύο πλευρές της ασυνέχειας) Συνδυάζοντας την σχέση αυτή με την εξ.2.62 παίρνουμε

$$u_-^\mu b_-^\nu l_\nu = u_+^\mu b_+^\nu l_\nu \tag{2.64}$$

ενώ η εξ.2.63 δίνει

$$(q_- - q_+)\, l^m u - b_-^\mu b_-^\nu l_\nu + b_+^\mu b_+^\nu l_\nu = 0 \tag{2.65}$$

Ανάλογα με την τιμή της κάθετης προς την επιφάνεια συνιστώσα του b^μ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Πρώτα, αν $b^\nu l_\nu \neq 0$ η εξ.2.64 συνεπάγεται ότι $u_+^\mu \propto u_-^\mu$. Αφού και τα δύο 4-ανύσματα έχουν το ίδιο μοναδιαίο μήκος $u_-^\mu u_{-\mu} = u_+^\mu u_{+\mu} = 1$ και είναι και τα δύο χρονικά, παίρνουμε

$$[u^\mu] = 0 \tag{2.66}$$

και από την ίδια εξίσωση

$$[b^\nu l_\nu] = 0 \tag{2.67}$$

Τώρα, η εξίσωση εξ.2.65 παίρνει την μορφή

$$(q_- - q_+)\, l^\mu - b_-^\nu l_\nu \left(b_-^\mu - b_+^\mu\right) = 0 \tag{2.68}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση αυτή με $(b_{-\mu} - b_{+\mu})$ ο πρώτος όρος μηδενίζεται εξαιτίας της εξ.2.67 και ο δεύτερος όρος δίνει

$$\begin{aligned} n_{\mu\nu} \left(b_-^\mu - b_+^\mu\right) \left(b_-^\nu - b_+^\nu\right) &= 0 \\ [b^\mu] &= 0 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Εισάγοντας την έκφραση αυτή στην εξ.2.68 υπολογίζουμε και τις θερμοδυναμικές ποσότητες

$$[q] = 0 \tag{2.70}$$

$$[p] = 0 \tag{2.71}$$

Παρατηρείστε ότι η πυκνότητες στις δύο πλευρές της ασυνέχειας δεν προσδιορίζεται κι επομένως μπορεί να είναι και ασυνεχής - μια τέτοια ασυνέχεια ονομάζεται ασυνέχεια επαφής.

Στην περίπτωση όπου $b_-^\nu l_\nu = 0$ τότε η εξ.2.68 δίνει απευθείας

$$[q] = 0 \tag{2.72}$$

	Επαφής	Εφαπτομενική
Συνεχείς	P(θερμική), B(όλες), v(όλες)	$B_n = 0, P_t$(συνολική)
Ασυνεχείς	ρ	ρ, B_t(εφαπτομενική)

Πίνακας 2.1: Τα χαρακτηριστικά των ασυνεχειών που δεν περιλαμβάνουν μεταφορά μάζας.

και επομένως η πίεση είναι ίση στα δύο μέρη - οι υπόλοιπες ποσότητες είναι απροσδιόριστες και μια τέτοια ασυνέχεια ονομάζεται εφαπτομενική. Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον πίνακα 2.1.

Ένας πιο ενδιαφέρον τύπος ασυνεχειών είναι αυτός στον οποίο μεταφορά μάζας λαμβάνει χώρα ($m \neq 0$), δηλαδή τα ωστικά κύματα. Παρά την απλή τους προσέγγιση, αφού οι συνθήκες ασυνέχειας (Lichnerowicz and for Advanced Study (1967)) είναι μόνο αλγεβρικές, η επίλυση των εξισώσεων στην γενική περίπτωση είναι πολύπλοκη και έχει καταβληθεί αρκετή προσπάθεια στις τελευταίες δεκαετίες για την μελέτη τους. Κοινή πρακτική αποτελεί ο χειρισμός των εξισώσεων στο σύστημα ηρεμίας του, βλέπε για παράδειγμα Appl and Camenzind (1988), παρόλο που γενικότερες προσεγγίσεις υπάρχουν επίσης, για παράδειγμα Anile (1990). Το αποτέλεσμα παρουσιάζει ομοιότητες με το αντίστοιχο υδροδυναμικό. Η σχετική ανάλυση φανερώνει την ύπαρξη δύο τύπων ασυνέχειας

γρήγορο μαγνητοακουστικό: $(v_s)_+ < (v_A)_+ < (v_f)_+ < |v_+|$
$(v_s)_- < (v_A)_- < |v_-| < (v_f)_-$

αργό μαγνητοακουστικό: $(v_s)_+ < |v_+| < (v_A)_+ < (v_f)_+$
$|v_-| < (v_s)_- < (v_A)_- < (v_f)_-$

που αντιστοιχούν σε αύξηση εντροπίας για την διαταραγμένη ροή (downstream, $S_+ > S_-$) - υπάρχουν δύο ακόμα τύποι ¨εξωτικών' ασυνεχειών που ονομάζονται Alfvén και ανώμαλα (singular) ωστικά κύματα, αλλά με λίγο αστροφυσικό ενδιαφέρον, βλέπε Anile (1990) και αναφορές εκεί για μια πιο λεπτομερής ανάλυση. Για την προσέγγιση των κλασικών ωστικών κυμάτων ο Anile συνόψισε ένα πλήθος σχετικιστικών αναλλοίωτων που παραλείπουμε εδώ. Η μόνη ποσότητα που υπεισέρχεται στην παρακάτω συζήτηση είναι

$$\mathcal{H} = -\frac{u_\mu u^\mu}{m^2} = \frac{\mathcal{B}^2}{m^2} - \frac{|b|^2}{\rho^2} \qquad \left\{ = \frac{c^2}{(\rho\gamma v_n)^2}\left(\frac{B_n}{lrz} + \frac{\gamma v_n \vec{v}\cdot\vec{B}}{c^2}\right)^2 - 2\frac{p_{mag}}{\rho^2} \right\}$$

όπου $p_{mag} = B^2/(8\pi)$. Το αναλλοίωτο αυτό χρησιμοποιείται για να εξάγουμε μια παρόμοια με την Rankine-Hugoniot αδιαβατική (ή την Taub) και η οποία στην αναλυτική της μορφή γράφεται ως

$$\frac{\xi_+ - \xi_-}{c^2} - \left(\frac{\xi_+}{\rho_+ c^2} + \frac{\xi_-}{\rho_- c^2}\right)(p_+ - p_-) + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_+}{\rho_+ c^2} - \frac{\xi_-}{\rho_- c^2}\right)(\chi_+ + \chi_-) + \alpha_+\chi_+ - \alpha_-\chi_- = 0 \qquad (2.73)$$

με τους συμβολισμούς $\chi = 2p_{mag} - m^2\mathcal{H}/c^2$, $\alpha = \xi/(\rho c^2) - \mathcal{H}/c^2$ να ακολουθούνται.

Στην ενότητα αυτή δεν πρόκειται να προχωρήσουμε περαιτέρω στην μελέτη την συνθηκών ασυνέχειας, αλλά περισσότερο αναφερθήκαμε σε αυτές σαν βάση για την εν.3.5 όπου οι συνθήκες ασυνέχειας λύνονται για την περίπτωση ενός στάσιμου κύματος, εφαρμοζόμενο δηλαδή και στην περίπτωση της στάσιμης ροής. Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος οι εξισώσεις των αναλλοίωτων πρέπει να γραφούν σε μια αναλυτική διανυσματική μορφή, Appl and Camenzind (1988); Goedbloed et al. (2010):

$$[\rho u^{\mu}]\, n_{\mu} = 0 \qquad [T^{\mu\nu}]\, n_{\mu} = 0 \qquad \left[\vec{E}\right] \times \vec{n} = 0 \qquad \left[\vec{B}\right] \cdot \vec{n} = 0 \tag{2.74}$$

Οι εξισώσεις αυτές και μια ηλεκτροδυναμική, π.χ. ο νόμος του Ohm $\vec{E} = -(1/c)\vec{v} \times \vec{B}$ για ένα ιδεατά αγώγιμο ρευστό και στις δύο πλευρές της ασυνέχειας επαρκούν προκειμένου να προσδιορίσουμε τις διαταραγμένες ποσότητες $\rho, P, \vec{v}, \vec{E}, \vec{B}$.

Κεφάλαιο 3

Οι χωρικά συμμετρικές ΜΥΔ εξισώσεις της στάσιμης κατάστασης

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την μορφή των ΜΥΔ εξισώσεων στο στάσιμο όριο. Η σημασία του ορίου αυτού είναι μεγάλη καθώς οι προκύπτουσες εξισώσεις έχουν απλούστερη μορφή παρέχοντας μια σαφέστερη εικόνα για την ροές, ενώ αποτελούν και οδηγό για την ερμηνεία των πιο εξελιγμένων χρονοεξαρτώμενων αριθμητικών προσομοιώσεων. Πέρα από την στάσιμη υπόθεση, οι εξισώσεις αυτές εξειδικεύονται σε κυλινδρικά συμμετρικές ροές που αποτελεί και την λογική υπόθεση για την μελέτη των αστροφυσικών πιδάκων. Επιπλέον, θεωρούμε ότι το υπό εξέταση πλάσμα έχει άπειρη αγωγιμότητα καθώς αυτή είναι η συνθήκη που επικρατεί στην σημαντική πλειοψηφία των αστροφυσικών φαινομένων, βλέπε εν.2.3.

Πέρα από το αυστηρά αστροφυσικό περιεχόμενο, το φαινόμενο της αραίωσης μελετήθηκε και για τις επίπεδα συμμετρικές εκροές καταλήγοντας σε όμορφα συμπεράσματα και το οποίο παρέχει ένα καλύτερο πλαίσιο για την κατανόηση του πιο πολύπλοκου κυλινδρικά συμμετρικού φαινομένου. Για τον λόγο αυτό η μελέτη των στάσιμων εξισώσεων που περιέχεται σε αυτό το κεφάλαιο ακολουθεί μια παράλληλη πορεία και οι εξαχθείσες εκφράσεις αναφέρονται όχι μόνο για τις κυλινδρικές, αλλά και για τις επίπεδα συμμετρικές ροές.

Το περιεχόμενο του κεφαλαίου αυτού είναι εκτεταμένο. Πέρα από τις εξισώσεις ένα πλήθος θεμάτων όπως οι ανώμαλες επιφάνειες, οι κώνοι Mach και οι στάσιμες συνθήκες ασυνέχειας εξετάζονται επίσης. Η συζήτηση εμπλουτίζεται με μια σύντομη παρουσίαση γνωστών, στάσιμων μοντέλων που συμπληρώνουν την εικόνα μιας πραγματικής αστροφυσικής εκροής.

3.1 Οι εξισώσεις της στάσιμης κατάστασης υπό την επίδραση χωρικών συμμετριών

Οι εξισώσεις του προηγούμενου κεφαλαίου αναφέρονται στο χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα και επομένως αποτελούν την πιο γενική βάση για τα αστροφυσικά ρευστά όταν μελετώνται ως συνεχή μέσα. Το πιο τυπικό παράδειγμα εφαρμογής τους βρίσκεται στα εξελιγμένα αριθμητικά σχήματα (PLUTO, Flash κ.α.) που προσπαθούν να προσομοιάσουν τα αστροφυσικά φαινόμενα. Παρά την αμιγώς υπερβολική μορφή τους, οι εξισώσεις της εν.2.2.2 είναι αρκετά πολύπλοκες για την άμεση αναλυτική τους επίλυση με αποτέλεσμα πολύ λίγα αναλυτικά μοντέλα να συναντώνται στην διεθνή βιβλιογραφία. Ευτυχώς, για μια σειρά από περιβάλλοντα η κατάσταση είναι απλούστερη καθώς στις χρονικές κλίμακες που ενδιαφέρουν η ροή εμφανίζεται να έχει στάσιμη τοπολογία επιτρέποντας έτσι μια διαφορετική προσέγγιση. Ακόμα

και στα πιο μεταβλητά φαινόμενα όπως είναι οι GRB, η υπερ-σχετικιστική ταχύτητα της εκροής παρασύρει τις ΜΥΔ διαταραχές με την εκροή επιφέροντας μια στάσιμη συμπεριφορά που καλείται προσέγγιση σταθερού παλμού (frozen pulse approximation, Vlahakis and Königl (2003a)).

Πέρα από την ύπαρξη χρονικής εξέλιξης, η τελική μορφή των εξισώσεων καθορίζεται επίσης από το σύστημα αναφοράς και την αντίστοιχη συμμετρία του φαινομένου. Έχει ήδη αναφερθεί ότι οι δύο συμμετρίες που θα εξεταστούν είναι η αξονική ($\partial/\partial\varphi = 0$) και η επίπεδη συμμετρία ($\partial/\partial y = 0$) όπου τα ($\hat{\varpi} - \hat{\varphi}$), ($\hat{x} - \hat{y}$) ορίζουν τα εγκάρσια επίπεδα, ενώ ($\hat{\varpi} - \hat{z}$), ($\hat{x} - \hat{z}$) τα πολοειδή επίπεδα της εκροής, βλέπε αριστερά στο σχ.4.1,5.2 για τον σχετικό ορισμό των συντεταγμένων.

Η πιο συνήθης προσέγγιση για το σύστημα των στάσιμων εξισώσεων θεμελιώνεται με ένα σύνολο κεντρικών ορισμών. Η βασική ποσότητα είναι η ροή των πολοειδών γραμμών ροής ψ (streamlines) και την στενά σχετιζόμενη ροή του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου A

$$\psi = C \iint_S \gamma\rho\vec{u}_p \cdot d\vec{S} \qquad A = C \iint_S \vec{B}_p \cdot d\vec{S} \tag{3.1}$$

Η ολοκλήρωση επιτελείται σε μια επιφάνεια S του εγκάρσιου επιπέδου που έχει την συμμετρία που υποδεικνύεται από το πρόβλημα - ένα ορθογώνιο κυτίο με μοναδιαία $y-$διάσταση για την επίπεδα συμμετρική ροή, ένας κύκλος για την κυλινδρική*. Ο συντελεστής C χρησιμοποιείται για την κανονικοποίηση και στην παρούσα συζήτηση θέτουμε 1, $1/2\pi$ για την επίπεδη και την κυλινδρική ροή αντίστοιχα. Σημειώστε ότι η συγκεκριμένη κανονικοποίηση είναι χαρακτηριστική της ομοιότητας (scaling) των στάσιμων ΜΥΔ εξισώσεων, ενώ η τιμή του μπορεί να καθοριστεί σε σχέση με τις μονάδες μήκος και μαγνητικού πεδίου που χρησιμοποιούμε. Αν το ρευστό διαδίδεται στο πολοειδές μαγνητικό πεδίο κατά μία διεύθυνση, και αυτή είναι η περίπτωση των εκροών που εξετάζουμε, οι παραπάνω συναρτήσεις είναι μονότονες κατά μήκος μιας καμπύλης κάθετης στην πολοειδή ροή και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να ονοματίσουν κάθε γραμμή ροής ή μαγνητική γραμμή του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου. Επιπλέον, στο όριο ενός ιδεατά αγώγιμου ρευστού οι πολοειδείς μαγνητικές γραμμές και οι γραμμές ροής συμπίπτουν και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όποια από τις A, ψ επιθυμούμε. Για την παρακάτω συζήτηση θα χρησιμοποιούμε την ροή των μαγνητικών γραμμών και μόνο στο κεφάλαιο 4, όταν το πολοειδές πεδίο είναι αμελητέο ($B_p \ll B_y$), θα μεταβούμε στην περιγραφή μέσω των γραμμών ροής για λόγους φυσικής συνέπειας.

Αντιστρέφοντας τον ορισμό των συναρτήσεων ροής συνάγουμε το πολοειδές μαγνητικό πεδίο

$$\text{επίπεδη συμμετρία } \vec{B}_p = \vec{\nabla}A \times \hat{y} \qquad \text{αξισυμμετρία } \vec{B}_p = \frac{\vec{\nabla}A \times \hat{\varphi}}{\varpi} \tag{3.2}$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι $\vec{\nabla}A \cdot \vec{B}_p = 0$ και έτσι η A παραμένει σταθερή κατά μήκος της γραμμής, αποτελεί δηλαδή την ετικέτα της κάθε γραμμής. Παρατηρείστε ότι λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας το διάνυσμα $\vec{\nabla}A$ κείτεται στο πολοειδές επίπεδο, ενώ με χρήση τετριμμένων διανυσματικών ταυτοτήτων για το τριπλό γινόμενο βρίσκουμε

$$\vec{\nabla}A = -\varpi\vec{B}_p \times \hat{\varphi}$$

*Στην επίπεδη συμμετρικά ροή ένας πιο αυστηρός ορισμός θα είχε αγνοήσει την ολοκλήρωση κατά την $y-$ διεύθυνση και έτσι ο παραπάνω ορισμός θα αναφερόταν στην ποσότητα dA/dy αντί A ή να εισάγαμε έναν ορισμό με το όριο $C \lim_{y_0\to\infty}(1/y_0) \iint$ όπου C έχει τώρα χωρικές διαστάσεις. Παρόλα αυτά η έκφραση αυτή θα εισήγαγε ανούσιες επιπλοκές στην ενοποιημένη προσέγγιση που παρουσιάζουμε και αντί για αυτό θεωρήσαμε μια μοναδιαία y επιφάνεια

Με άλλα λόγια τα διανύσματα $\left(\vec{B}_p, \hat{\varphi}, -\vec{\nabla}A\right)$ αποτελούν μια δεξιόστροφη ορθογώνια βάση και τα μοναδιαία

$$\hat{b} \equiv \frac{\vec{B}_p}{\mid B_p \mid} \qquad \hat{n} \equiv -\frac{\vec{\nabla}A}{\mid \vec{\nabla}A \mid} \tag{3.3}$$

μαζί με το $\hat{\varphi}$ ορίζουν μια ορθοκανονική βάση - το $\hat{b}$ ορίζει την κατεύθυνση κατά μήκος των πολοειδών δυναμικών γραμμών και το $\hat{n}$ κάθετα σε αυτές.

Στην θεμελίωση της στάσιμης ροής μια συνήθης συνθήκη που τίθεται είναι ο μηδενισμός της εγκάρσιας συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου ($E_\varphi = 0$). Η αιτία αυτής της συνθήκης έγκειται στο νόμο του Faraday που για ένα στάσιμο πεδίο επιβάλει

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \xrightarrow{\text{στάσιμη κατάσταση}} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varpi}\left(\varpi E_\varphi\right) = 0, \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = 0 \tag{3.4}$$

Η λύση της παραπάνω μερικής διαφορικής δίνει $E_\varphi = c/\varpi$, c μια σταθερά, που απειρίζεται αφύσικα στον άξονα περιστροφής στον άξονα περιστροφής για μη μηδενικές τιμές της σταθεράς, συνεπώς $E_\varphi = 0$, βλέπε Contopoulos (1996) για μη μηδενικές τιμές του E_φ. Οι ίδιοι υπολογισμοί στην επίπεδη περίπτωση δεν επιβάλουν τέτοιον μηδενισμό, το εγκάρσια ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να έχει μια σταθερή μη μηδενική τιμή ($E_y = const$) σε όλη την εξέλιξη της ροής. Παρόλα αυτά, θα θέλαμε τα επίπεδα συμμετρικά μας μοντέλα να εφαρμόζονται και στις εκροές πίδακα, για παράδειγμα σε περιπτώσεις όπου η καμπυλότητα της ροής στην εγκάρσια διεύθυνση είναι αμελητέα. Έτσι ο μηδενισμός $E_y = 0$ υιοθετείται σαν μια επιπλέον συνθήκη και στην επίπεδα συμμετρικά περίπτωση. Μια εναλλακτική ερμηνεία για την συνθήκη στηρίζεται στην ισοδύναμη απαίτηση το βαθμωτό δυναμικό να έχει την ίδια συμμετρία με την ροή, βλέπε υποσημείωση στην επόμενη σελίδα.

Ο συνδυασμός του μηδενικού εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου και η άπειρη αγωγιμότητα οδηγούν σε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα. Υπό αυτές τις συνθήκες ο νόμος του Ohm εξ.(2.46) δίνει

$$\vec{E} = \left(B_2 v_3 - B_3 v_2\right)\hat{e}_1 + \left(B_1 v_3 - B_3 v_1\right)\hat{e}_2 + \left(B_1 v_2 - B_2 v_1\right)\hat{e}_3 \tag{3.5}$$

όπου 2 η αγνοήσιμη συντεταγμένη και $1, 3$ οι πολοειδείς. Η $E_2 = 0$ δίνει

$$\frac{B_1}{B_3} = \frac{v_1}{v_3} \Rightarrow \vec{B}_p \parallel \vec{v}_p$$

Συνεπώς, το μοναδιαίο $\hat{b}$ καθορίζει επίσης την κατεύθυνση διάδοσης της ροής (άμεση διατύπωση της ισοδυναμίας περιγραφής με τις δύο συναρτήσεις ροής).

Κατ΄ επέκταση η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου βρίσκεται εύκολα από το γινόμενο

$$\vec{B}_p \cdot \vec{E} = B_2\left(v_3 B_1 - B_3 v_1\right) = 0$$

δηλαδή $\vec{E} \perp \vec{B}_p$.

Η μαγνητική ενέργεια που είναι διαθέσιμη σε μια διαδούμενη εκροή εκφράζεται από την επονομαζόμενη παράμετρο μαγνήτισης (magnetization parameter σ). Ο ορισμός της γίνεται μέσω της ποσότητας $\gamma\sigma$ η οποία ισούται με τον λόγο της ροής poynting στο πολοειδές πεδίο κανονικοποιημένη στην ενέργεια ηρεμίας της μάζας συν την ροή της θερμικής ενέργειας ($\gamma\xi\rho v_p c^2$). Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες και τον νόμο του Ohm για άπειρα αγώγιμο ρευστό, το διάνυσμα poynting γράφεται

$$\frac{4\pi}{c}\vec{S} = \left[B^2\vec{v} - \left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)\vec{B}\right] = \left(B_\varphi^2 v_p - B_p B_\varphi v_\varphi\right)\hat{b} + \left(B_p^2 v_\varphi - B_p B_\varphi v_p\right)\hat{\varphi}$$

και επομένως

$$\sigma = \frac{B_\varphi^2 v_p - B_p B_\varphi v_\varphi}{4\pi\gamma^2 \xi \rho v_p c^2} \tag{3.6}$$

Εισάγουμε μία ακόμα ποσότητα

$$M^2 = \frac{4\pi\rho\xi\left(\gamma v_p\right)^2}{B_p^2} \tag{3.7}$$

που συμβολίζει το τετράγωνο της πολοειδούς ανηγμένης ταχύτητας προς την ανηγμένη ταχύτητα Alfvén λόγω του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου (ισοδύναμα η πολοειδής συνιστώσα της ταχύτητας Alfvén). Στην γενική περίπτωση όπου υπάρχει εγκάρσιο πεδίο η παραπάνω ταχύτητα Alfvén δεν είναι φυσικά ίση με την ολική - το σημείο στο οποίο η ταχύτητα μιας επιταχυνόμενης εκροής είναι ίσο με την ταχύτητα Alfvén είναι αναμενόμενο να λαμβάνει χώρα πριν η ποσότητα M γίνει μονάδα. Η κατάσταση αυτή θα συναντάται διαρκώς στις επόμενες ενότητες και η πλήρης μελέτη της θα πραγματοποιηθεί μέσω της σχέσης διασποράς στην εν.3.3. Παρόλα αυτά η ποσότητα M εισήχθη πρώτη φορά από τον Michel (1969) και ο όρος αριθμός Alfvén έχει επικρατήσει από τότε στην βιβλιογραφία.

3.1.1 Τα ολοκληρώματα της ροής

Ένα από τα κεντρικά πλεονεκτήματα των στάσιμων ροών είναι η ύπαρξη ενός πλήθους ολοκληρωμάτων (σταθερές ποσότητες κατά μήκος της γραμμής) επιτρέποντας μια πρώτη μερική ολοκλήρωση του μη γραμμικού συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η παρουσίαση αυτών των ποσοτήτων είναι το θέμα της παρούσας ενότητας.

Χρησιμοποιούμε την παραλληλία των πολοειδών συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας για να ορίσουμε την ποσότητα Ψ_A και να γράψουμε το πεδίο ταχυτήτων ως

$$\Psi_A = \frac{4\pi\gamma\rho v_p}{B_p} \Rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho}\vec{B} + \varpi\Omega\hat{\varphi} \tag{3.8}$$

δηλαδή

$$\Omega = \frac{v_\varphi}{\varpi} - \frac{v_p}{\varpi}\frac{B_\varphi}{B_p} \tag{3.9}$$

βλέπε πλαίσιο 3.3 για την μορφή των ολοκληρωμάτων και των διαφόρων ποσοτήτων που εμφανίζονται στις επίπεδα συμμετρικές ροές. Η φυσική ερμηνεία της ποσότητας Ψ_A αναγνωρίζεται εύκολα σαν τον λόγο της ροής μάζας προς την ροή του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου. Το ολοκλήρωμα Ω έχει μονάδες γωνιακής ταχύτητας και εμφανίζεται ως το άθροισμα της συμβατικής γωνιακής ταχύτητας της ύλης συν έναν πιο πολύπλοκο συνδυασμό των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου. Η φυσική αντιστοίχιση σχετίζεται στενά με την έννοια της ταχύτητα ολίσθησης (drift velocity, $\vec{U}_{dr} \equiv \vec{E} \times \vec{B}/B^2$), γνωστή από την μη-αδρανειακή περίπτωση, και την ακτίνα του κυλίνδρου φωτός[†]. Η ταχύτητα εξ.3.8 αναλύεται σε δύο όρους με τον πρώτο να αντιστοιχεί στην ομοιόμορφη περιστροφή της ροής και τον δεύτερο

[†]Μια εναλλακτική ερμηνεία του Ω έγκειται στην έκφραση $E = (\varpi\Omega/c)B_p$ που παράγεται πιο κάτω στο κείμενο με την οποία γράφουμε

$$\vec{E} = \Omega\vec{\nabla}A = \vec{\nabla}\left(\int \Omega dA\right) \tag{3.10}$$

Η έκφραση αυτή υποδεικνύει την σχέση του Ω με το βαθμωτό δυναμικό και συν τοις άλλοις δηλώνει ότι πολοειδείς δυναμικές γραμμές είναι ισοδυναμικές

στην ολίσθηση κατά μήκος των γραμμών του μαγνητικού πεδίου. Η συμπεριστροφή αναγνωρίζεται αν λάβουμε υπόψη ότι το Ω είναι ολοκλήρωμα και επομένως η τιμή του ισούται με αυτήν στην βάση της εκροής, δηλαδή στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων ή του δίσκου προσαύξησης καθώς ο δεύτερος όρος στα συγκεκριμένα αστροφυσικά συστήματα θεωρείται αμελητέος ($B_\varphi \ll B_p$) με αποτέλεσμα $\Omega = \Omega_{st}$ όπου Ω_{st} η γωνιακή ταχύτητα της βάσης της εκροής. Καθώς κινούμαστε προς την εξωτερική περιοχή της ροής, υπάρχει μια απόσταση που καλείται ακτίνα του κυλίνδρου φωτός (light cylinder ϖ_{lc}) μετά την οποία η ταχύτητα συμπεριστροφής υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός και αυτή η αφύσικη κατάσταση εξισορροπείται με την εμφάνιση ενός τοροειδούς μαγνητικού πεδίου B_φ με αντίθετο πρόσημο από αυτό του v_φ. Η απόσταση στην οποία η συμπεριστροφή είναι αδύνατη βρίσκεται εύκολα από την έκφραση

$$\varpi_{lc} \equiv \frac{c}{\Omega} \tag{3.11}$$

Αποστάσεις μεγαλύτερες από τον κύλινδρο του φωτός μπορούν να υπερβαίνουν την ταχύτητα του φωτός. Παρόλα αυτά το άθροισμά τους είναι μικρότερη από αυτή. Η κατάσταση αλλάζει στην επίπεδα συμμετρική περίπτωση όπου το αντίστοιχο ολοκλήρωμα, φ βλέπε πλαίσιο.3.3, δεν εμφανίζει εξάρτηση από τις συντεταγμένες. Αυτο το χαρακτηριστικό είναι αναμενόμενο καθώς στην επίπεδη περίπτωση δεν μπορεί να υπάρξει η έννοια του κυλίνδρου φωτός.

Πλαίσιο 3.1: Απόδειξη των Ολοκληρωμάτων I

Αποδεικνύουμε την ολοκληρωτική ιδιότητα Ψ_A, Ω κατά μήκος των πολοειδών μαγνητικών γραμμών. Εφαρμόζοντας τον τελεστή $\vec{\nabla}$ στον ορισμό της πρώτης ποσότητα εξ.3.8 παίρνουμε

$$\vec{\nabla}\left(4\pi\gamma\rho\vec{v}_p\right) = \vec{\nabla}\Psi_A \cdot \vec{B}_p + \Psi_A \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_p$$

Το αριστερό μέλος μηδενίζεται λόγω της εξίσωσης συνέχειας 2.33 που στην στάσιμη κατάσταση δίνει

$$\vec{\nabla}\left(\gamma\rho\vec{v}\right) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\gamma\rho\vec{v}_p\right) = -\vec{\nabla}\left(\gamma\rho\vec{v}_\varphi\right)$$

Γράφοντας την εγκάρσια ταχύτητα ως $\vec{v}_\varphi = v_\varphi\hat{\varphi}$ (στις πράξεις της ΜΥΔ είναι γενικά σημαντικό να μην ξεχνάμε τα μοναδιαία μιας και οι παράγωγοί τους μπορεί να είναι διάφοροι του μηδενός) και με χρήση της χωρικής συμμετρίας $\partial/\partial\varphi = 0$ παίρνουμε

$$\vec{\nabla}\left(\gamma\rho\vec{v}_\varphi\right) = \gamma\rho v_\varphi \vec{\nabla} \cdot \hat{\varphi} + \hat{\varphi} \cdot \vec{\nabla}\left(\gamma\rho v_\varphi\right) = 0$$

Μια χρήσιμη ιδιότητα του μαγνητικού πεδίου υπό την χωρική συμμετρία εξάγεται από τον γνωστό νόμο της μηδενικής απόκλισής του

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_\varphi = -\left(\hat{\varphi} \cdot \vec{\nabla} B_\varphi + B_\varphi \vec{\nabla}\hat{\varphi}\right) = -\hat{\varphi} \cdot \vec{\nabla} B_\varphi$$

ή λόγω συμμετρίας

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_p = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_\varphi = 0$$

Συνεπώς το γινόμενο $\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}\Psi_A = 0$ μας δείχνει την σταθερή τιμή του Ψ_A κατά μήκος της πολοειδούς γραμμής.
Το αποτέλεσμα για την ποσότητα Ω είναι παρόμοιο. Εφαρμόζοντας την εξ.3.13 στον στάσιμο νόμο του Faraday παίρνουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} \times \left(\Omega\,\vec{\nabla}A\right) = \vec{\nabla}\Omega \times \vec{\nabla}A = 0$$

Η διατήρηση του Ω είναι επίσης γνωστή και ως νόμος του Ferraro για την συμπεριστροφή.

Με βάση τα παραπάνω ολοκληρώματα η παράμετρος μαγνήτισης εκφράζεται

$$\sigma = -\frac{\varpi \Omega B_\varphi}{\Psi_A \xi \gamma c^2} \tag{3.12}$$

όπου το ηλεκτρικό πεδίο έχει την $\hat{n}$ κατεύθυνση (εξ.3.5), ενώ το μέτρο του είναι

$$E = v_2^2 B_p^2 + B_2^2 v_p^2 - 2B_2 v_2 \left(v_3 B_3 + v_1 B_1\right) = v_2^2 B_p^2 + B_2^2 v_p^2 - 2B_2 v_2 B_p v_p$$

ή

$$\vec{E} = \frac{\varpi \Omega}{c} B_p \hat{n} \tag{3.13}$$

Εκτός από τα δύο αυτά ολοκληρώματα, υπάρχουν τρεις ακόμα διατηρήσιμες ποσότητες

$$L = \xi \gamma \varpi v_\varphi - \frac{\varpi B_\varphi}{\Psi_A} \tag{3.14}$$

$$\mu = \xi \gamma - \frac{\varpi \Omega B_\varphi}{\Psi_A c^2} = \xi \gamma \left(1 + \sigma\right) \tag{3.15}$$

$$Q = \frac{P}{\rho^{\hat{\Gamma}}} \tag{3.16}$$

η φυσική αντιστοιχία των οποίων διατυπώνεται στην συνέχεια. Το ολοκλήρωμα L περιέχει δύο όρους που εκφράζουν την διατήρηση της στροφορμής του σύνολου (ύλης και πεδίου) κατά τον άξονα περιστροφής. Η ποσότητα μ αντιστοιχεί στην συνολική ενέργεια της εκροής (της ύλης συν την poynting) κανονικοποιημένη στην ροή μάζας, ενώ το Q εκφράζει την διατήρηση της εντροπίας.

Τα ολοκληρώματα εξ.3.8, 3.9, 3.14, 3.15, 3.16 είναι το μέγιστο δυνατό πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων ποσοτήτων που έχει βρεθεί ως σήμερα. Το πλήθος των ζητούμενων ποσοτήτων και άρα απαιτούμενων εξισώσεων είναι: Ο νόμος του Ohm δίνει το ηλεκτρικό πεδίο αν το μαγνητικό πεδίο κι όλες οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι γνώστες αφήνοντας 8 αγνώστους. Ομοίως η συνθήκη μηδενικής κλίσης του μαγνητικού πεδίου αφαιρεί 1 ακόμα άγνωστο. Σε αντιδιαστολή με τους 7 συνολικά αγνώστους έχουμε 5 ολοκληρώματα της κίνησης και επομένως απαιτούνται 2 παραπάνω εξισώσεις. Η μέχρι τώρα αναλυτικές προσεγγίσεις στων στάσιμων εξισώσεων τείνει στο να καταλήξει σε δύο συγκεκριμένες μορφές των εξισώσεων που καλούνται transfield ή wind και στην Bernoulli.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση αυτών των εξισώσεων είναι απαραίτητο να εισάγουμε λίγους ακόμα ορισμούς. Πέρα από τον κύλινδρο φωτός ένα επιπλέον σημείο ενδιαφέροντος είναι το σημείο Alfvén η ακτίνα του οποίου σε κάθε γραμμή δίνεται από τον

$$\varpi_A = \sqrt{\frac{L}{\mu \Omega}} \tag{3.17}$$

συνδυασμό των ολοκληρωμάτων[‡]. Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι το σημείο Alfvén δεν επέρχεται όταν ο αριθμός Alfvén είναι ίσος με την μονάδα, όπως άλλωστε προαναφέραμε κατά τον ορισμό του στην προηγούμενη ενότητα, αλλά όταν $\varpi = \varpi_A$ - η αντίστοιχη τιμή

[‡]Οι πρώτοι ερευνητές που αναγνώρισαν τον συνδυασμό αυτό είναι οι Weber and Davis (1967) στις νευτώνειες σφαιρικές ροές, ενώ η μελέτη των Mestel (1968); Tsinganos (1981) επέκτεινε το αποτέλεσμα αυτό και στις κυλινδρικές νευτώνειες ροές.

του M^2 υπολογίζεται στην παρακάτω, αλλά και στην εν.3.3. Χρησιμοποιούμε την κυλινδρική ακτίνα φωτός c/Ω για να κανονικοποιήσουμε όλες τις χωρικές ποσότητες του προβλήματος

$$x = \varpi \frac{\Omega}{c} \tag{3.18}$$

και κατέπέκταση ορίζουμε $x_A = \varpi_A \Omega / c = \sqrt{L\Omega/\mu}$ ως το κανονικοποιημένο σημείο Alfvén.

Πλαίσιο 3.2: Απόδειξη των Ολοκληρωμάτων II

Τα υπόλοιπα τρία ολοκληρώματα βρίσκονται από την εξίσωση ορμής, εξ.2.35. Οι $\hat{\varphi}$ συνιστώσες του δεξιού μέλους αναιρούν την προβολή του ηλεκτρικού πεδίου λόγω συμμετρίας και αφήνουν μόνο τον όρο ρεύματος του οποίου αναλυτικά οι συνιστώσες είναι

$$\vec{J}_p = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla} \times B_\varphi \qquad \vec{J}_\varphi = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial B_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \varpi}\right)\hat{\varphi} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla} \times \vec{B}_p$$

$$\vec{J}_b = \hat{b}\frac{c}{4\pi\varpi B_p}\left[B_z \frac{\partial}{\partial \varpi} - B_\varpi \frac{\partial}{\partial z}\right](\varpi B_\varphi)$$

$$\vec{J}_n = -\hat{n}\frac{c}{4\pi\varpi B_p}\left[B_\varpi \frac{\partial}{\partial \varpi} + B_z \frac{\partial}{\partial z}\right](\varpi B_\varphi) = -\hat{n}\frac{c}{4\pi\varpi v_p}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\varpi B_\varphi)$$

Η τοροειδής προβολή της εξίσωσης ορμής μηδενίζει τους όρους $\vec{\nabla}P$, $\vec{E}$ λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας και της στάσιμης ροής, ενώ ο τελευταίος όρος γράφεται

$$\left(\vec{J}\times\vec{B}\right)\cdot\hat{\varphi} = J_n B_p = \frac{c}{4\pi}\frac{B_p}{\varpi v_p}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\varpi B_\varphi)$$

Προσοχή χρειάζεται στους υπολογισμούς του αριστερού μέλους λόγω των μη μηδενικών παραγώγων των μοναδιαίων, ενώ το αποτέλεσμα τους είναι

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\xi\gamma\vec{v})\cdot\hat{\varphi} = v_\varpi \frac{\partial}{\partial\varpi}(\xi\gamma v_\varphi) + v_z\frac{\partial}{\partial z}(\xi\gamma v_\varphi) + \xi\gamma v_\varpi v_\varphi = \frac{1}{\varpi}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\xi\gamma\varpi v_\varphi)$$

Συγκεντρώνοντας όλους τους όρους

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\xi\gamma\varpi v_\varphi) = \frac{1}{\Psi_A}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\varpi B_\varphi)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\Psi_A = 0$ σαν ολοκλήρωμα κατά μήκος της γραμμής καταλήγουμε στην διατήρηση της ποσότητας L

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\left(\xi\gamma\varpi v_\varphi - \frac{\varpi B_\varphi}{\Psi_A}\right) = 0 \tag{3.19}$$

Η εξίσωση ενέργειας λαμβάνεται αν προβάλουμε την εξίσωση ενέργειας-ορμής κατά την $\vec{v}$ διεύθυνση. Οι όροι στο δεξιό μέλος της εξίσωσης γράφονται

$$-\vec{v}\cdot\vec{\nabla}P = -\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)P = -\rho c^2\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\xi \qquad \vec{v}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\vec{v}\cdot\left(\vec{J}\times\vec{B}\right) = J_n\left(B_p v_\varphi - B_\varphi v_p\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{B_p\Omega}{v_p}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\varpi B_\varphi)$$

ενώ το αριστερό μέλος

$$\gamma\rho\vec{v}\cdot\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\gamma\xi\vec{v}) = \gamma\rho v^2\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\xi\gamma) + \frac{\gamma^2\rho\xi}{2}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)v^2$$
$$= \gamma\rho c^2\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\xi\gamma) - \rho c^2\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\xi$$

Θεωρώντας και τα δύο μέλη μαζί

$$\gamma\rho c^2\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\gamma\xi) = \frac{1}{4\pi}\frac{B_p\Omega}{v_p}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\varpi B_\varphi) \Rightarrow \qquad \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\gamma\xi - \frac{\varpi\Omega B_\varphi}{\Psi_A c^2}\right) = 0$$

Τέλος η εξίσωση εντροπίας, εξ.2.37, είναι ήδη σε διατηρήσιμη μορφή παρέχοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα Q.

Μόλις οι μεταβλητές ξ, σ, M^2 υπολογιστούν είναι εύκολο να ανακτήσουμε τις φυσικές ποσότητες

$$\rho = \frac{\xi\Psi_A}{4\pi M^2} \qquad P = Q\rho^{\hat{\Gamma}} = \frac{\hat{\Gamma}-1}{\hat{\Gamma}}(\xi-1)\rho c^2 \tag{3.20}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{\nabla}A\times\hat{\varphi}}{\varpi}\hat{p} + \frac{\mu\Psi_A c}{x}\frac{x^2-x_A^2}{1-M^2-x^2}\hat{\varphi} \qquad \vec{E} = xB_p\hat{n} \tag{3.21}$$

$$\vec{v} = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho}\frac{\vec{\nabla}A\times\hat{\varphi}}{\varpi}\hat{p} + \frac{c}{x}\frac{(1-x_A^2)\,x^2+M^2}{1-M^2-x^2} \qquad \gamma = \frac{\mu}{\xi}\frac{1-M^2-x_A^2}{1-M^2-x^2} \tag{3.22}$$

Παρατηρώντας τις παραπάνω εκφράσεις παρατηρούμε ότι το σημείο Alfvén επέρχεται με τον μηδενισμό του παρονομαστή $(1-M^2-x^2)$. Η συνθήκη για την πεπερασμένη τιμή των φυσικών ποσοτήτων επιβάλλει τον μηδενισμό και του ονομαστή $M^2 = 1-x_A^2$ στο σημείο αυτό ($x = x_A^2$, $\varpi = \varpi_A$) - παρατηρείστε, πάλι, ότι η επιφάνεια Alfvén επέρχεται πριν την μοναδιαία τιμή του M. Επιπλέον, μπορούμε τώρα να περιγράψουμε την εξέλιξη μιας εκροής από ένα αστροφυσικό σύστημα (αστέρας νετρονίων, δίσκος προσαύξησης) και επιταχύνεται σε υπερ-γρήγορες μαγνητοακουστικές ταχύτητες. Από το σημείο που η πολοειδής ταχύτητα είναι αμελητέα ($M \ll 1$) μέχρι τις ασυμπτωτικές τιμές $M > 1$, υπάρχει ένα σημείο που ικανοποιεί της παραπάνω συνθήκη και καθορίζει το πέρασμα από το σημείο Alfvén - Συνεπώς $x_A < 1$ για ιδανικά αγώγιμες, στάσιμες εκροές που διέρχονται του σημείου Alfvén. Βέβαια το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι απόλυτο. Μια εκροή που πηγάζει με ταχύτητες μεγαλύτερες της Alfvén ή μιας ροής που μέσω μια μη-ιδανικής και μη στάσιμης διαδικασίας εξελίσσεται σε μια $x_A > 1$ ροή δεν μπορεί εκ των προτέρων να αποκλειστεί. Παρόλα αυτά, οι καταστάσεις αυτές είναι πολύ ειδικές με αποτέλεσμα οι περισσότερες εφαρμογές να λαμβάνουν ροές με χαμηλότερες της μονάδας τιμές του ολοκληρώματος.

3.1.2 Η Transfield και η Bernoulli Εξίσωση

Σύμφωνα με την συζήτηση της προηγούμενης ενότητας το πλήθος των ΜΥΔ εξισώσεων έχει μειωθεί σε δύο. Η επιλογή αυτών των εξισώσεων αυτών δεν είναι μονοσήμαντη και οποιαδήποτε μορφή τους μπορεί να επιλεχθεί αρκεί να παρέχει τις ζητούμενες ποσότητες. Παρόλα αυτά η πρακτική σήμερα καταλήγει σε δύο συγκεκριμένες μορφές την Transfield και την Bernoulli εξίσωση, η εξαγωγή των οποίων αποτελεί το θέμα αυτής της ενότητας.

Η προβολή της εξίσωσης ορμής

$$\gamma\rho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\gamma\xi\vec{v}) = -\vec{\nabla}P + \frac{\rho_e\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}}{c}$$

κάθετα στις πολοειδές γραμμές ($\hat{n}$) παρέχει την πρώτη από αυτές τις εξισώσεις. Οι σχετικοί υπολογισμοί στηρίζονται στην καμπυλότητα των πολοειδών μαγνητικών γραμμών που ορίζεται ως

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial\theta}{\partial\ell} \tag{3.23}$$

όπου θ η κλίση των γραμμών που μετριέται από τον $z-$άξονα και ℓ το διάστημα κατά μήκος των καμπυλών αυτών. Μια πιο αυστηρή προσέγγιση χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές (A, ℓ) θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 5, αλλά για τους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου αναφέρουμε απλά ότι η ακτίνα καμπυλότητας σχετίζεται με την κλίση του μοναδιαίου $\hat{n}$ με την έκφραση (βλέπε πλαίσιο.5.1)

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{n} = -\frac{1}{R} + \frac{\hat{n}\cdot\hat{\varpi}}{\varpi} \tag{3.24}$$

Μπορούμε επομένως να γράψουμε την χρήσιμη εξίσωση

$$\left[\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}\right]\cdot\hat{n} = -v_pA_p\frac{\partial\theta}{\partial\ell} - \frac{v_\varphi A_\varphi}{\varpi}\hat{n}\cdot\hat{\varpi} \tag{3.25}$$

όπου παρέχει τις προβολές των υλικών παραγώγων (material derivatives) για μια τυχούσα διανυσματική ποσότητα $\vec{A}$.

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις προβολές των διαφόρων όρων της εξίσωσης ορμής χρησιμοποιώντας την σχέση εξ.3.25, για τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο ¨δύναμη' υποδεικνύοντας την φυσική τους αντιστοίχιση (στην πραγματικότητα έχουν μονάδες πυκνότητας δύναμης, Vlahakis (2004)). Το αριστερό σκέλος της εξίσωσης ορμής

$$\gamma\rho\left[\hat{n}\cdot\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)(\gamma\xi\vec{v})\right] = \frac{\gamma^2\rho\xi v_p^2}{R} - \frac{\gamma^2\rho\xi v_\varphi^2}{\varpi}\hat{n}\cdot\hat{\varpi}$$

θεωρείται ως ο συνδυασμός δύο όρων, του αδρανειακού

$$f_{I\perp} = -\frac{\gamma^2\rho\xi v_p^2}{R} = -\frac{M^2B_p^2}{4\pi R} \tag{3.26}$$

και του φυγόκεντρου

$$f_{C\perp} = \frac{\gamma^2\rho\xi v_\varphi^2}{\varpi}\hat{n}\cdot\hat{\varpi} = \frac{B_p^2}{4\pi\varpi}\left(M\frac{v_\phi}{v_p}\right)^2\hat{n}\cdot\hat{\varpi} \tag{3.27}$$

όπου ο δείκτης $\perp$ συμβολίζει την κάθετη στις γραμμές διεύθυνση. Η ηλεκτρική δύναμη γράφεται

$$f_{E\perp} = \frac{\rho_e\vec{E}}{4\pi}\cdot\hat{n} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)E = \frac{1}{4\pi}\left[\vec{\nabla}\cdot(E\hat{n})\right]E =$$
$$\frac{1}{8\pi\varpi^2}\left[\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\varpi^2E^2\right) - 2\varpi E^2\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\varpi\right] + \frac{1}{4\pi}E^2\vec{\nabla}\cdot\hat{n} = \frac{\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\varpi^2E^2\right)}{8\pi\varpi^2} - \frac{1}{4\pi R}E^2 \tag{3.28}$$

Χρησιμοποιώντας μια ανάλογη προς την εξ.2.3 έκφραση, εκτελώντας την $v_i \leftrightarrow B_i$ αντιστοίχιση, συνάγουμε την μαγνητική δύναμη

$$\begin{aligned} f_{B\perp} &= \left(\vec{J}\times\vec{B}\right)\cdot\hat{n} = \left[\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}\right]\cdot\hat{n} - \vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)\cdot\hat{n} \\ &= \left[\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}\right]\cdot\hat{n} - \frac{\vec{\nabla}\left(B^2\varpi^2\right)}{8\pi\varpi^2}\cdot\hat{n} + \frac{B^2}{4\pi\varpi}\hat{n}\cdot\hat{\varpi} \\ &= \frac{B_p^2}{4\pi R} - \frac{\vec{\nabla}\left(B^2\varpi^2\right)}{8\pi\varpi^2}\cdot\hat{n} + \frac{B_p^2}{4\pi\varpi}\hat{n}\cdot\hat{\varpi} \end{aligned} \tag{3.29}$$

ενώ ο όρος της πίεσης γράφεται απλά ως

$$f_{P\perp} = -\hat{n}\cdot\vec{\nabla}P$$

Συγκεντρώνοντας του όρους με την καμπυλότητα καταλήγουμε

$$\begin{aligned} &\frac{M^2B_p^2}{4\pi R} + \frac{1}{4\pi R}E^2 - \frac{B_p^2}{4\pi R} = \\ &\qquad - \frac{\vec{\nabla}\left[\varpi^2\left(B^2-E^2\right)\right]}{8\pi\varpi^2}\cdot\hat{n} + \frac{1}{4\pi\varpi}\hat{n}\cdot\hat{\varpi}\left[B_p^2 + \left(M\frac{v_\phi}{v_p}\right)^2 B_p^2\right] - \hat{n}\cdot\vec{\nabla}P \end{aligned}$$

Συνεπώς η εξίσωση transfield

$$f_{I\perp} + f_{C\perp} + f_{P\perp} + f_{E\perp} + f_{B\perp} = 0$$

γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{B_p^2}{4\pi R}\left(M^2+x^2-1\right) = &-\frac{1}{8\pi\varpi^2}\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\left[\varpi^2\left(B^2-E^2\right)\right] \\ &+ \frac{B_p^2}{4\pi\varpi}\left[1+\left(\frac{Mv_\varphi}{v_p}\right)^2\right]\hat{n}\cdot\hat{\varpi} - \hat{n}\cdot\vec{\nabla}P \end{aligned} \tag{3.30}$$

που αποτελεί και την μορφή που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

Ως δεύτερη εξίσωση θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την παράλληλη προς τις γραμμές συνιστώσα της εξίσωσης ενέργειας-ορμής, αλλά μια πιο εύχρηστη μορφή παράγεται με χρήση της τετριμμένης ταυτότητας

$$\gamma^2 - \left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 \tag{3.31}$$

που παράγει μια γραμμικά ανεξάρτητη μορφή γνωστή ως εξίσωση Bernoulli. Χρησιμοποιώντας τις εξ.3.20 - 3.22 η μορφή της Bernoulli γράφεται αναλυτικά ως

$$\begin{aligned} &\mu^2\left[x^2\left(1-M^2-x_A^2\right)^2 - x_A^4\left(\frac{x^2}{x_A^2} - M^2 - x^2\right)^2\right] \\ &\qquad = \left(1-M^2-x^2\right)^2\left[x^2\xi^2 + \frac{\Omega^2M^4}{c^4\Psi_A^2}\left(\vec{\nabla}A\right)^2\right] \end{aligned} \tag{3.32}$$

Και οι δύο εξισώσεις περιέχουν τις ζητούμενες ποσότητες σε έναν πεπλεγμένο μη γραμμικό συνδυασμό, αλλά μέχρι σήμερα αποτελούν την απλούστερη μορφή των ΜΥΔ εξισώσεων.

Μιλώντας αδρά, η επίλυση της εξίσωσης transfield παρέχει την καμπυλότητα και επομένως το σχήμα των πολοειδών μαγνητικών γραμμών, ενώ η Bernoulli την δυναμική εξέλιξη των ποσοτήτων κατά μήκος τους. Είναι, όμως, προφανές ότι ο διαχωρισμός αυτός αποτελεί μόνο ένα ενδεικτικό σχήμα. Παρόλα αυτά στις πρώτες προσπάθειες περιγραφής των ΜΥΔ εκροών ήταν σύνηθες να προσδιορίζουν μια συγκεκριμένη τοπολογία για τις δυναμικές γραμμές και να εξετάζουν στην συνέχεια την εξέλιξη των ποσοτήτων, όπως π.χ. του παράγοντα Lorentz. Στην συζήτηση που ακολουθεί θα περιγράψουμε ένα από τα πρώτα μοντέλα που χρησιμοποίησε αυτή την τεχνική. αλλά λόγω της χρησιμότητας και ισχύος του παρέμεινε ως κλασικό μοντέλο. Επιπλέον, θα αναφερθούμε σε δύο μοντέλα τα οποία αποδείχθηκαν χρήσιμα στην προσέγγισή μας, ενώ στην ενότητα αυτή περιλαμβάνεται και μια πιο εξελιγμένη τεχνική που λύνει τις εξισώσεις υποθέτοντας μία ακόμα ιδιότητα για το σχήμα της εκροής.

Πλαίσιο 3.3: Η αναλυτική μορφή των εκφράσεων για τις επίπεδα συμμετρικά ροές

Στις επίπεδα συμμετρικές ροές η παράμετρος μαγνήτισης δίνεται από την σχέση

$$\sigma = \frac{v_p B_y^2 - v_y B_y B_p}{4\pi\gamma^2 \rho v_p \xi c^2} \tag{3.33}$$

με την φυσική της αντιστοίχιση να παραμένει αναλλοίωτη, ενώ αναλλοίωτη είναι και η μορφή του αριθμού Alfvén. Η ταχύτητα γράφεται

$$k = \frac{4\pi\gamma\rho v_p}{B_p} \Rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{k}{4\pi\gamma\rho}\vec{B} + c\varphi\hat{\varphi} \tag{3.34}$$

δηλαδή

$$\varphi = \frac{v_y}{c} - \frac{v_p}{c}\frac{B_y}{B_p} \tag{3.35}$$

όπου το ολοκλήρωμα φ εισάγεται αντί του Ω - παρατηρείστε την μη εξάρτηση του ολοκληρώματος από τις συντεταγμένες και την επίδρασή της στην επιφάνεια του κυλίνδρου φωτός που αναφέρθηκε στο κύριο κείμενο.
Πέρα από τ ν κύλινδρο φωτός μια ενδιαφέρουσα επιπλοκή της επίπεδης συμμετρίας είναι το αντίστοιχο με το L ολοκλήρωμα

$$P = \xi\gamma\varpi v_y - \frac{B_y}{4\pi k} \tag{3.36}$$

που τώρα εκφράζει όχι την διατήρηση της στροφορμής, αλλά της συμβατικής ορμής κατά μήκος της εγκάρσιας διεύθυνσης. Τα υπόλοιπα ολοκληρώματα παραμένουν ως έχουν

$$\mu = \xi\gamma - \frac{\varphi B_y}{4\pi k c} \qquad Q = P/\rho^{\hat{\Gamma}} \tag{3.37}$$

3.2 Συγκεκριμένες Λύσεις και Μοντέλα

3.2.1 Η λύση του Michel

Μια από τις πρώτες λύσεις των σχετικιστικών ΜΥΔ εξισώσεων ανακαλύφθηκε από το 1969 από τον Michel, Michel (1969). Αυστηρά μιλώντας η λύση αυτή, παρόλο που είναι στάσιμη

και ιδεατά αγώγιμη, αναφέρεται στην σφαιρική γεωμετρία και επομένως βρίσκεται έξω από το πλαίσιο της εργασίας μας, ενώ δεν αποτελεί και ¨πλήρης' λύση υπό την έννοια ότι εξετάζει μια συγκεκριμένη τοπολογία των μαγνητικών γραμμών που προσομοιάζει μια μονοπολική κατανομή που δίνεται αυθαίρετα. Αλλά οι εφαρμογές της σαν οριακή περίπτωση και στις κυλινδρικά συμμετρικές ροές που τείνουν προς την ακτινική κατανομή την καθιστούν χρήσιμη για την περαιτέρω σύγκριση των αποτελεσμάτων, ενώ παρείχε σημαντικά συμπεράσματα και για τις μεταγενέστερες μαγνητοϋδροδυναμικές μελέτες των πιδάκων.

Στην διάσημη εργασία του ο Michel εξέτασε την επίδραση την απώλεια στροφορμής σε ένα συμπαγές και ταχέως περιστρεφόμενο αντικείμενο, δηλαδή ενός radio-pulsar, μελετώντας τις επιπτώσεις του μαγνητισμένου άνεμου. Με την μελέτη του αυτή, ο Michel επέκτεινε προγενέστερες αναλύσεις για την ηλιακή μαγνητόσφαιρα στην σχετικιστική περιοχή όπου είναι και η κατάλληλη για τα συγκεκριμένα σώματα, αν και στην ηλιακή περίπτωση η απώλεια στροφορμής δεν έχει σημαντική επίδραση.

Η παραγωγή της συγκεκριμένης λύσης γίνεται κάτω από μια σειρά υποθέσεων που αναφέρουμε εν τάχει στην συνέχεια

- Ο Michel υπέθεσε ένα μονοπολικό πεδίο που φθίνει ως $1/r^2$. Ένα αντικείμενο που πραγματώνει την παραπάνω κατανομή είναι ένας σφαιρικός αγωγός με την διπολική του ορμή στοιχισμένη με τον άξονα και αναφερόμενοι στο ισημερινό του επίπεδο.

- Η μάζα και η συχνότητα περιστροφής του κεντρικού αντικειμένου θεωρήθηκε αμετάβλητη για την χρονικές κλίμακες που μελετώνται και σε συνδυασμό με την προηγούμενη υπόθεση η εκροή βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση ($\partial/\partial t = 0$).

- Το υπό εξέταση πλάσμα θεωρείται ως ρευστό ενός τύπου σωματιδίων και απείρως αγώγιμο. Το ιξώδες και άλλα φαινόμενα μεταφοράς αγνοήθηκαν καθώς οι πιθανές επιδράσεις τους εντοπίζονταν μόνο στην κλασική περιοχή. Έτσι το συνολικό πλαίσιο που υιοθετήθηκε είναι αυτό της σχετικιστικής και ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής.

- Αγνοήθηκαν επίσης τα θερμικά φαινόμενα γεγονός που αντιστοιχεί σε εκροές όχι κοντά στην επιφάνεια του άστρου. Το κεντρικό επιχείρημα για την υπόθεση αυτή ήταν το ηλιακό περιβάλλον στο οποίο το κρίσιμο σημείο Parker (αυτό που αντιστοιχεί στην ταχύτητα του ήχου) εντοπίζεται κοντά στον Ήλιο ($R_{cr} = 3R_\odot$), ενώ σε μεγαλύτερες αποστάσεις η ταχύτητα της ροής αυξάνει με τον χρόνο καθώς η ταχύτητα του ήχου πέφτει. Συνεπώς το πλάσμα μελετήθηκε στο ψυχρό όριο με αποτέλεσμα το βραδύ μαγνητοακουστικό σημείο (αυτό δηλαδή που αντιστοιχεί στο parker σημείο) δεν υπάρχει. Επιπλέον, σε μια τέτοια κατανομή το γρήγορο μαγνητοακουστικό σημείο βρίσκεται στο άπειρο, βλέπε για παράδειγμα εν.3.2.3), και το μόνο σημείο ανωμαλίας που μελετήθηκε ήταν το σημείο Dicke-Alfvén ή απλά σημείο Alfvén.

- Καθώς οι ταχύτητες που εμφανίζονται είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ταχύτητες διαφυγής, τα βαρυτικά πεδία αγνοήθηκαν και αυτά.

Ακολουθώντας τον Michel επιλέγουμε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r, φ, θ) και παράγουμε τα ολοκληρώματα που ισχύουν στην σφαιρική περίπτωση. Οι ποσότητες αυτές έχουν παρόμοια μορφή με αυτές που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες, αλλά ο Michel χρησιμοποίησε μερικούς ελαφρώς διαφορετικούς συνδυασμούς τους. ε αυτή την ενότητα γίνεται προσπάθεια να κρατηθεί ο συμβολισμός που εισάγαμε και η σχετική αντιστοιχία με τα μεγέθη της αυθεντικής εργασίας παρουσιάζεται στο πλαίσιο 3.4. Η κεντρική ποσότητα με την οποία επιτυγχάνεται η επίλυση είναι πάλι η ροή των μαγνητικών πολοειδών

γραμμών. Αλλά αφού το πολοειδές πεδίο είναι ακτινοβολία και θ ανεξάρτητο σε μια περιοχή του ισημερινού πεδίου, επιλέγουμε ως επιφάνεια ολοκλήρωσης έναν κεκλιμένο ως προς το εγκάρσιο επίπεδο κύκλο με κέντρο την αρχή τον αξόνων:

$$A \propto \iint\limits_S \vec{B}_p \cdot d\vec{S} \propto r^2 B_r \Rightarrow \qquad A = r^2 B_r \tag{3.38}$$

όπου ο αριθμητικός συντελεστής απορρόφησε τους σταθερούς όρους της ολοκλήρωσης. Η εξίσωση συνέχειας ολοκληρώνεται άμεσα

$$\gamma \rho v_r r^2 = const \Rightarrow \Psi_A = \frac{4\pi\gamma\rho v_r}{B_r} = const \tag{3.39}$$

Η άπειρη αγωγιμότητα παρέχει το ολοκλήρωμα Ω το οποίο χρησιμοποιείται για να γράψει την ταχύτητα όπως και στην εν.3.1.1:

$$\Omega = \frac{1}{r}\left(v_\varphi - v_r \frac{B_\varphi}{B_r}\right) \tag{3.40}$$

Ακριβώς όπως και στην κυλινδρική περίπτωση η προβολή της εξίσωσης ενέργειας ορμής κατά μήκος των γραμμών

$$\mu = \gamma\,(1+\sigma) \tag{3.41}$$

και κατά την φ-διεύθυνση

$$\gamma \rho v_r r^2 \left(r v_\varphi - r\frac{B_\varphi}{\Psi_A}\right) = const \Rightarrow \qquad L = r v_\varphi - r\frac{B_\varphi}{\Psi_A} = const \tag{3.42}$$

παρέχει και τα υπόλοιπα ολοκληρώματα. Στις παραπάνω εκφράσεις ορίσαμε την συνήθη μαγνητική παράμετρο

$$\sigma = -\frac{r\Omega B_\varphi}{\Psi_A \gamma c^2} \tag{3.43}$$

Η φυσική ερμηνεία των ολοκληρωμάτων αυτό είναι ίδια με την κυλινδρική περίπτωση, ενώ και ο ορισμός του αριθμού Alfvén παραμένει ο ίδιος

$$M = \frac{\gamma v_r}{B_p/\sqrt{4\pi\rho}} \tag{3.44}$$

Ο Michel έδωσε ιδιαίτερη προσοχή στον προσδιορισμό του Dicke-Alfvénic σημείου και επιβεβαίωσε ότι δεν βρίσκεται στην μοναδιαία τιμή του αριθμού Alfvén. Οι υπολογισμοί της μελέτης είναι απλοί-αλγεβρικοί καθιστώντας την μια ιδιαίτερα κομψή της εργασία. Χωρίς να υπεισερχόμαστε σε λεπτομερείς υπολογισμούς στο επόμενο μέρος της ενότητας θα παρουσιάσουμε τους σχετικούς συλλογισμούς.

Μετά από λίγες πράξεις πάνω στις εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε τον παράγοντα Lorentz φτάνοντας σε μια τριωνυμική δομή που στην πραγματικότητα αντιστοιχεί στην εξίσωση Bernoulli. Η εξίσωση γράφεται σαν πολυώνυμο του χ ($M^2 = \chi^2 u$)

$$A\chi^4 + B\chi^2 + C = 0 \tag{3.45}$$

όπου οι συντελεστές δίνονται από τις

$$A = u^2(1+\sigma_M\lambda)^2 - (1+u^2)(u+\sigma_M)^2 \qquad B = \sigma_M + 2u^2(u+\sigma_M) - \sigma_M u^2\lambda^2 \qquad C = -u^2$$

ενώ έγιναν και οι παρακάτω αντικαταστάσεις

$$u = \frac{\gamma v_r}{c} \qquad \sigma_M = \frac{A\Omega^2}{c^3 \Psi_A} \qquad \chi = \frac{\Omega}{c\sqrt{\sigma_M}} r \qquad \lambda = \frac{\Omega L}{\sigma_M c^2}$$

(βλέπε επίσης πλαίσιο 3.4 για συμβολισμό).

Η προηγούμενη μελέτη του Parker (1963) είχε δείξει ότι τα κρίσιμα σημεία εντοπίζονται στο σημείο όπου δύο ειδικές λύσεις τέμνονται, ενώ η φυσικά αποδεκτή λύση θα πρέπει να διέρχεται από το κρίσιμο σημείο. Στο κρίσιμο σημείο η τιμές των δύο παραπάνω λύσεων συμπίπτουν με αποτέλεσμα η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα και μηδενική διακρίνουσα

$$B^2 - 4AC = \sigma_M (u\lambda - 1)^2 \left[\sigma_M (v\lambda + 1)^2 - 4u^3\right] \tag{3.46}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας αντιστοιχεί στον μηδενισμό του πρώτου όρου $u\lambda = 1$, ενώ ο δεύτερος παράγοντας μπορεί να δειχτεί ότι έχει τις μη αποδεκτές ρίζες $-1, -3$. Η διπλή λύση της εξίσωσης είναι επομένως

$$\chi_c^2 = \frac{\lambda}{1 + \sigma_M \lambda} \tag{3.47}$$

που είναι το σημείο Dicke-Alfvén, αυτό που συναντήσαμε και στα κυλινδρικά μοντέλα.

Με λίγους παραπάνω συλλογισμούς μπορούμε να καταλήξουμε στο δεύτερο σημαντικό συμπέρασμα του μοντέλου. Θεωρείστε ότι θέλουμε να επεκτείνουμε την λύση μας στο άπειρο ($\chi^2 \to \infty$). Σε μια τέτοια περίπτωση ο συντελεστής A πρέπει να μηδενίζεται οδηγώντας σε μια εξίσωση $4^{ης}$ τάξης ως προς u

$$A = 0 \Rightarrow u^4 + D_3 u^3 + D_2 u^2 + D_1 u^1 + D_0 = 0 \tag{3.48}$$

όπου οι συντελεστές δίνονται από τις εκφράσεις

$$D_3 = D_1 = 2\sigma_M \qquad D_2 = 1 + \sigma_M^2 - (1 + \sigma_M \lambda)^2 \qquad D_0 = \sigma_M^2$$

Είναι δύσκολο να προχωρήσουμε στην γενική επίλυση της παραπάνω εξίσωση καθώς οι αναλυτικές εκφράσεις για την επίλυση είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες.

Αντί αυτού, ο Michel προχώρησε σε μια συγκεκριμένη επιλογή του ολοκληρώματος λ, δηλαδή σε ένα συγκεκριμένο τύπο εκροών που αντιστοιχούν στην μικρότερες ενεργειακές απώλειες και ροπή για τον άνεμο. Η ύπαρξη αυτού του ελάχιστου γίνεται αντιληπτή αν θεωρήσουμε την τιμή $\lambda = 0$: σε μια τέτοια περίπτωση η εξίσωση $A = 0$ δεν έχει φυσικά αποδεκτές λύσεις του u στο $\chi^2 \to \infty$ όριο. Επομένως, θεωρώντας την μικρότερη δυνατή τιμή του λ για την οποία μια τέτοια λύση υπάρχει, καταλήγουμε ότι συγκεκριμένη ρίζα πρέπει αν είναι και διπλή ρίζα του πολυωνύμου. Στην περίπτωση αυτοί οι συντελεστές ικανοποιούν τις σχέσεις

$$D_0 - v_\infty^2 K = 0 \qquad D_1 - v_\infty^2 \left(D_3 + 2v_\infty^2\right) + 2v_\infty K = 0 \tag{3.49}$$

$$\tag{3.50}$$

όπου

$$K = 3v_\infty^2 + 2D_3 v_\infty + D_2 \tag{3.51}$$

Οι εξισώσεις αυτές παράγονται από μια απλή πολυωνυμική διαίρεση με την διπλή ρίζα $(v - v_\infty)^2$ και απαιτώντας το μηδενισμό του υπολοίπου. Η επίλυση του απλού αυτού συστήματος παρέχει τόσο την ζητούμενη ρίζα v_∞ όσο και την τιμή του D_2 συντελεστή

$$K = \frac{D_0}{v_\infty^2} \qquad 2\sigma_M^2 + 2\sigma_M v_\infty - 2v_\infty^3 (\sigma_M + v_\infty) = (\sigma_M + v_\infty)\left(\sigma_M - v_\infty^3\right) = 0 \tag{3.52}$$

Οι ποσότητες σ_M, v_∞ είναι όλες θετικές. Επομένως η παραγόμενη λύση εκτός από την ασυμπτωτική ταχύτητα παρέχει επίσης και την ελάχιστη τιμή του λ

$$u_\infty = \left(\frac{\gamma v_r}{c}\right)_\infty^2 = \sigma_M^{1/3} \tag{3.53}$$

$$\lambda = \frac{\left(1+\sigma_M^{2/3}\right)^{3/2} - 1}{\sigma_M} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_A^2 = \frac{\left(1+\sigma_M^{2/3}\right)^{3/2} - 1}{\mu} \tag{3.54}$$

όπου εισάγαμε την κανονικοποίηση της κυλινδρικής ακτίνας Alfvén $x_A^2 = \Omega L/(\mu c^2)$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα αποτελούν τα διάσημα πορίσματα του Michel και έπαιξαν σημαντικό ρόλο στις μετέπειτα μελέτες των ΜΥΔ μηχανισμών επιτάχυνσης. Αρχικά τα αποτελέσματα αυτά είχαν αποτρεπτική χαρακτήρα μιας και η τιμή $u_\infty \sim \sigma_M^{1/3}$ είναι της τάξης $\mu^{1/3}$ για μια εκροή που βρίσκεται κοντά στο μη-αδρανειακό όριο (βλέπε εξ.3.54 όταν $x_A \sim 1$) με αποτέλεσμα ο ΜΥΔ μηχανισμός να μην θεωρείται αποδοτικός. Αλλά η προσεκτική ανάλυση του μοντέλου φανερώνει την επίδραση των υποθέσεων πάνω στις οποίες στηρίχτηκε το μοντέλο. Στα χρόνια που ακολούθησαν ένας αριθμός κυρίως κυλινδρικά συμμετρικών μοντέλων απέδειξε ότι η ΜΥΔ επιτάχυνση μπορεί πράγματι να αποτελέσει έναν πολύ αποδοτικό μηχανισμό επιτάχυνσης του πίδακα, ενώ η επιτυχία τους τα καθιστά σήμερα ως τον πιο αποδεκτό μηχανισμό για τους πίδακες που έχουν παρατηρηθεί σε ένα πλήθος αστροφυσικών αντικειμένων. Παρόλα αυτά, εξαιτίας της απλότητας του, το μοντέλο του Michel θεωρείται ακόμα ως μια βασική και χρήσιμη λύση των ΜΥΔ εξισώσεων.

Πλαίσιο 3.4: Σχέσεις με τον συμβολισμό του Michel (1969)

Ο συμβολισμός του Michel αντιστοιχίζεται σε αυτόν που χρησιμοποιούμε εδώ. Τα ολοκληρώματα $\Omega = \Omega$, $\mu = \mu$ είναι ουσιαστικά τα ίδια, με την ϖ συνιστώσα της κυλινδρικάσυμμετρικής ροής να εναλλάσσεται με την r της σφαιρικής γεωμετρίας, όπως επίσης και στον ορισμό του αριθμού Alfvén. Μικρές διαφορές στον συμβολισμό υπάρχουν στα $\Phi \leftrightarrow A$, $\sigma \leftrightarrow \sigma_M$ (αριστερό μέλος Michel, δεξιό κείμενο εδώ), ενώ στην αυθεντική μελέτη χρησιμοποιήθηκε ένας διαφορετικός συνδυασμός ολοκληρωμάτων

$$\delta = \frac{L\Psi_A}{\Omega A} \qquad \alpha^2 = \frac{A\mu\Omega}{\Psi_A L c}\varpi_A^2 = \frac{\sigma_M c^2}{\Omega^2}$$

Η ποσότητα α χρησιμοποιήθηκε για να κανονικοποιήσει της ακτινική απόσταση ($\chi = \alpha r$), ενώ παρατηρείστε ότι η πυκνότητα στο κείμενο του Michel αναφέρεται στο εργαστηριακό σύστημα παρά στο συγκινούμενο που χρησιμοποιούμε εδώ ($\rho \leftrightarrow \rho/\gamma$).

3.2.2 Το μοντέλο των Blandford - Payne

Ένα από τα ποιο γνωστά μοντέλα για στάσιμες και κυλινδρικές ΜΥΔ εκροές είναι το μοντέλο που παρουσίασαν στις αρχές της δεκαετίας του 80ς οι Blandford & Payne, Blandford and Payne (1982). Παρόλο της νευτώνειας προσέγγισης, το μοντέλο αυτό αποτελεί μία από τις πρώτες προσπάθειες να λυθούν το σύνολο των εξισώσεων, ενώ χρησιμοποίησε μια κατηγορία ειδικών λύσεων που καλούνται ακτινικά αυτο-όμοιες λύσεις. Σημειώστε ότι ερευνητές μελέτησαν επίσης τα βαρυτικά φαινόμενα κατά την εκκίνηση του πίδακα (launching). Τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν γενικεύτηκαν τα επόμενα χρόνια περαιτέρω τόσο στην σχετικιστική περιοχή, όσο και για άλλες αρχικές κατανομές του μαγνητικού πεδίο, βλέπε συζήτηση στο τέλος της ενότητας.

Μια από τις κεντρικές υποθέσεις των συγγραφέων αφορά την μεταβολή του μαγνητικού πεδίου στην βάση της εκροής ($B_p \propto \varpi^{-5/2}$) που προκύπτει θεωρώντας ότι η περιστροφή στην βάση της εκροής είναι keplerian $u_\varphi \propto \varpi^{-1/2}$, ενώ και η ειδική ορμή και ενέργεια της εκροής ακολουθούν τις keplerian μεταβολές. Με βάση τις υποθέσεις αυτές η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου προσδιορίζεται, ενώ με την επιπλέον υπόθεση ότι ο ρυθμός εκροής της μάζας κατά την ϖ για έναν στάσιμο δίσκο προσαύξησης παραμένει σταθερή προσδιορίζεται και η μεταβολή της πυκνότητας ($\rho \propto r^{-3/2}$).

Στο αρχικό κείμενο η αυτο-ομοιότητα εισήχθη με διαφορετικό τρόπο από αυτό που χρησιμοποιούμε στην παρούσα διατριβή. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες (ϖ, φ, z) ορίζουμε το σχήμα των πολοειδών γραμμών

$$\vec{r} = [r_0\xi(\chi),\, \varphi,\, r_0\chi] \qquad \vec{v} = \left[\frac{d\xi}{d\chi} f(\chi),\, g(\chi),\, f(\chi)\right] v_{kepl}(r_0) \tag{3.55}$$

όπου r_0 το σημείο στο οποίο οι γραμμές συναντούν τον δίσκο και $\chi = z/r_0$, $\xi = \varpi/r_0$ οι κανονικοποιημένες αποστάσεις· ο δίσκος προσαύξησης θεωρείται πως κείτεται στο σημείο $\xi = 1$, $\chi_0 = 0$. Ο νόμος $v_{kepl}(r_0) = \sqrt{GM/r_0}$ για την keplerian περιστροφή είναι συμβατός με τις συνθήκες στην βάση της εκροής. Η παραπάνω μορφή είναι πράγματι μια αυτο-όμοια μορφή με την ποσότητα r_0 να αποτελεί τον παράγοντα κλίμακας (η γωνιακή εξάρτηση παρέχεται μέσω της έκφρασης $\tan\theta = \xi/\chi$). Όπως αναφέραμε, στο Κεφάλαιο 4 θα εισάγουμε μια διαφορετική έκφραση για την ακτινική αυτο-ομοιότητα

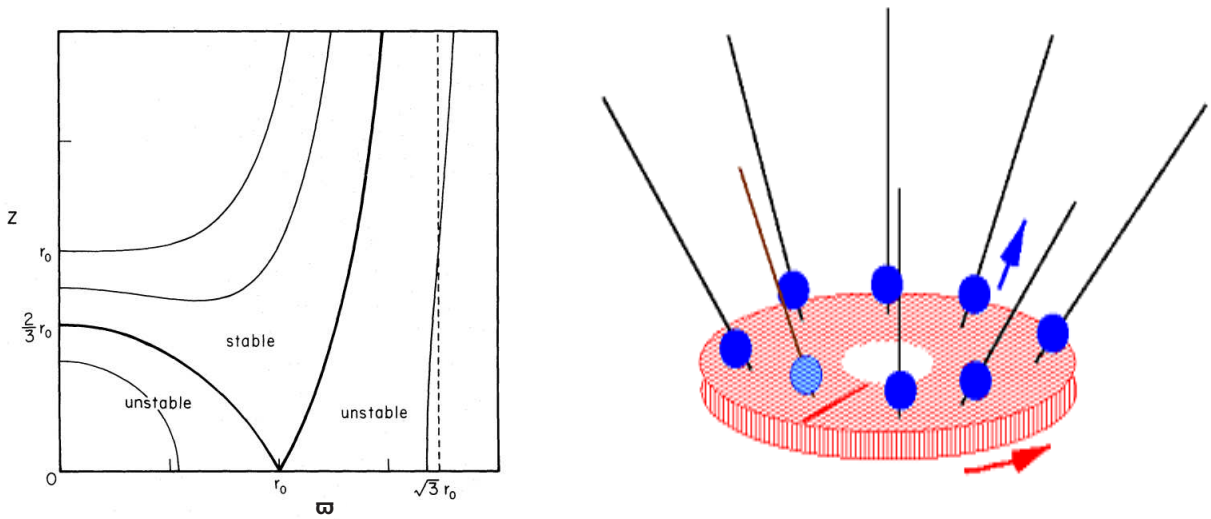
$$A = r^F f(\theta) \tag{3.56}$$

όπου η ποσότητα A χρησιμοποιείται τώρα για να προσδιορίσει την κάθε γραμμή. Η αντιστοιχία είναι άμεση $r_0 = [Af(\pi/2)]^{-1/F}$, ο δίσκος βρίσκεται στην $\theta = \pi/2$ επιφάνεια, και ο εκθέτης του μοντέλου F παίρνει την τιμή 3/4 για το μοντέλο των Blandford - Payne.

Εισάγοντας τις παραπάνω μορφές στις εξισώσεις και με χρήση των ολοκληρωμάτων της κίνησης, όμοια με αυτά που παρουσιάστηκαν στη εν.3.1.1, αλλά στο νευτώνειο όριό τους, το σύστημα των ΜΥΔ μερικών διαφορικών εξισώσεων μεταπίπτει σε δύο εξισώσεις: μία αλγεβρική και μια συνήθης διαφορική δευτέρας τάξης. Μεταξύ των πιο σημαντικών συμπερασμάτων του συγκεκριμένου μοντέλου είναι τα σημεία ανωμαλίας της εκροής που αντιστοιχούν στο σημείο Alfvén και στο γρήγορο μαγνητοακουστικό σημείο που εντοπίζονται στο σημείο όπου η θ συνιστώσα της ταχύτητας της ροής γίνεται ίση με τη ταχύτητα Alfvén ($\vec{k}\cdot\vec{B}/\sqrt{4\pi\rho} = B_\theta/\sqrt{4\pi\rho}$) και την γρήγορη μαγνητοακουστική ταχύτητα ($|\,|B|\,|/\sqrt{4\pi\rho}$) αντίστοιχα. Οι ερευνητές αναγνώρισαν ότι τα σημεία αυτά επηρεάζονται από την υπόθεση της αξισυμμετρίας και της αυτο-ομοιότητας των λύσεων η οποία επιτρέπει μόνο την διάδοση k_θ κυμάτων, Tsinganos et al. (1996). Ο προσδιορισμός των σημείων αυτών είναι κεντρικός προκείμενου να επιτύχουμε επιταχυνόμενες λύσεις από την εκκίνηση της εκροής μέχρι την ασυμπτωτική περιοχή - δηλαδή η λύση μας πρέπει να διέρχεται από όλα τα ανώμαλα σημεία. Οι απαραίτητες συνθήκες επεκτασιμότητας regularity conditions, δηλαδή ο ακριβής προσδιορισμός των αρχικών παραμέτρων που επιτρέπει στην λύση να περάσει από το Alfvén ανώμαλο σημείο, επετεύχθη επίσης στην εργασία αυτή.

Δεδομένου ότι ο κύριος στόχος των ερευνητών ήταν η διερεύνηση της διαδικασίας εκκίνησης του πίδακα, ένα από τα πιο όμορφα αποτελέσματά τους αφορά το ανάπτυγμα κοντά στον δίσκο. Παρόλο που η ακριβής μαθηματική περιγραφή δεν είναι αρκετά κομψή το αποτέλεσμα παριστάνεται εύκολα με ένα διάγραμμα που δείχνει το ενεργό δυναμικό

$$\Phi = -\frac{GM}{r_0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varpi}{r_0}\right)^2 + \frac{r_0}{\sqrt{\varpi^2+z^2}}\right] \tag{3.57}$$



Σχήμα 3.1: Αριστερά: Οι ισοδυναμικές επιφάνειες του ενεργού δυναμικού Φ (βαρυτικό συν φυγόκεντρο) και η κατανομή της ευστάθειας. Παρατηρείστε ότι για γωνίες μεγαλύτερες της $\theta_c = 30°$ όπως μετριούνται από τον άξονα, η ροή είναι ασταθής και ο πίδακας πηγάζει με επιτυχία. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην θέση της μετασταθούς ισορροπίας (marginal stability)- σχήμα από Blandford and Payne (1982). **Δεξιά:** Το μοντέλο των ¨χαντρών σε καλώδια' όπου οι μαγνητικές γραμμές συμπεριστρέφονται με τον δίσκο προσαύξησης λόγω του φαινομένου της παγωμένης ροής. Τα τμήματα του ρευστού παριστάνονται με τις χάντρες - σχήμα από Bether and Fendt (2008).

βλέπε αριστερό σχ.3.1. Η ανάλυση του διαγράμματος αυτού δείχνει ότι αν μια γραμμή, που πηγάζει από το σημείο r_0, έχει κλίση μεγαλύτερη των $\theta_c = 30°$ μετρούμενη από τον άξονα περιστροφής, τότε η κατανομή είναι ασταθής και μικρές διαταραχές μπορούν να οδηγήσουν στην εκκίνηση (launching) του πίδακα. Η εκροή στο αρχικό αυτό στάδιο μπορεί σχηματικά να περιγραφεί με το μοντέλο των ¨χαντρών σε καλώδιο' σύμφωνα με το οποίο οι μαγνητικές γραμμές είναι αγκιστρωμένες στον δίσκο και συμπεριστρέφονται με αυτόν εξαιτίας του φαινομένου της παγωμένης ροής (καλώδια). Συνεπώς η κίνηση των τμημάτων του πλάσματος (χάντρες) είναι το αποτέλεσμα της ισορροπίας του φυγόκεντρου όρου, έχει την τάση να της ανασηκώσει, και του βαρυτικού δυναμικού που τις ωθεί προς τα κάτω, βλέπε δεξί σχ.3.1.

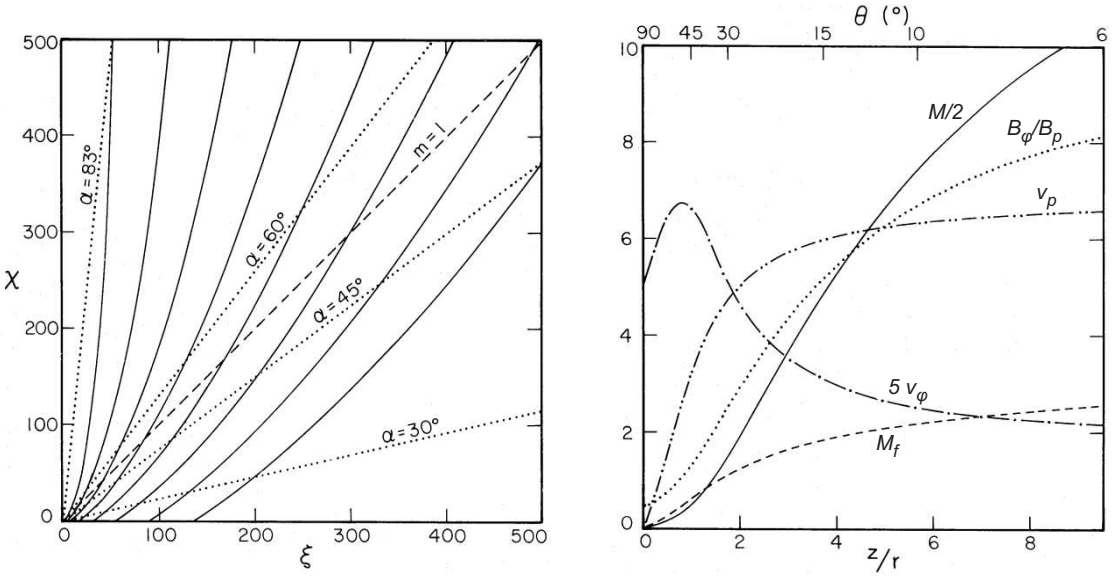
Πέρα από το σημείο Alfvén το μοντέλο των Blandford & Payne κατέληξε σε μερικά ακόμα σημαντικά συμπεράσματα. Στο σχ.3.2 παρουσιάζεται η ολοκλήρωση ενός χαρακτηριστικού σεναρίου από την οποία μπορούν να εξαχθούν τα κάτωθι συμπεράσματα

- Ακόμα και μετά το σημείο Alfvén η περισσότερη ενέργεια παραμένει σε μορφή poynting και επομένως απομένει αρκετή ενέργεια για περαιτέρω επιτάχυνση.

- Η αδράνεια της ύλης και η επιτάχυνσή της καθορίζει και την εγκάρσια ροή οδηγώντας σε περιορισμό της τοροειδούς ταχύτητας.

- Οι πολοειδείς μαγνητικές γραμμές δεν μπορούν αν επιβάλουν την συμπεριστροφή της μάζας με αποτέλεσμα η μάζα να οδηγεί στο τύλιγμα των γραμμών και την ενίσχυση του λόγου τοροειδούς προς πολοειδούς μαγνητικού πεδίου.

- Η εστίαση επιτυγχάνεται μέσω της δύναμης καμπυλότητας με κατεύθυνση προς τον άξονα, ενώ η μαγνητική πίεση έχει αντίθετη κατεύθυνση (αυτο-οργανωμένη κατανομή), μιας και από το σημείο Alfvén και πέρα η φυγόκεντρος δύναμη είναι αμελητέα.



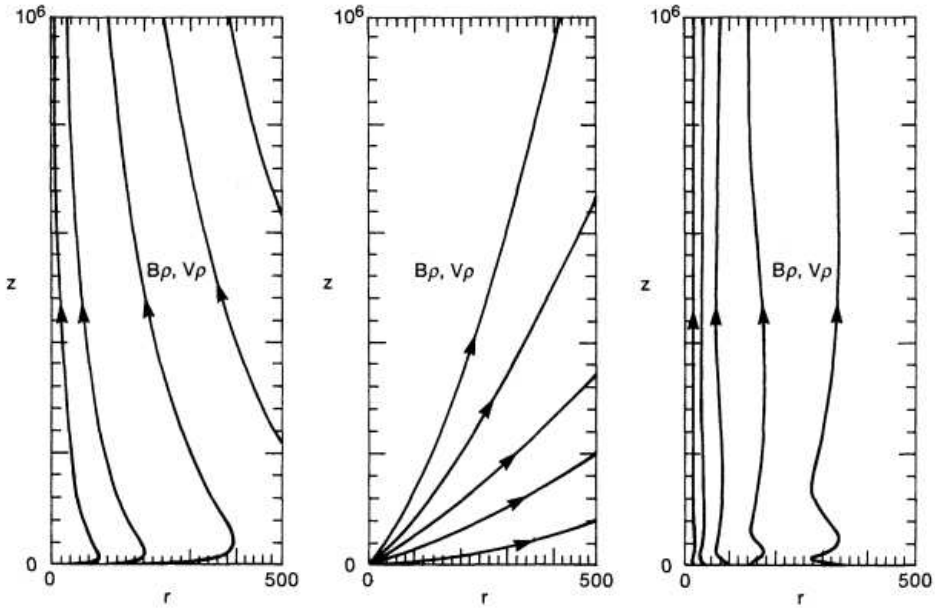
Σχήμα 3.2: Αριστερά: Το σχήμα της ροής για ένα συγκεκριμένο μοντέλο που ολοκληρώθηκε από τους Blandford and Payne (1982). Παρατηρείστε ότι οι μαγνητικές ροές σχηματίζουν σταθερή γωνία με τις γραμμές $\theta = const$ ως αποτέλεσμα της αυτο-ομοιότητας. Οι διακεκομμένες γραμμές ($m = 1$) αντιστοιχούν στο σημείο Alfvén. Η ποσότητα α παριστάνει την pitch angle $\tan\alpha =\mid B_\varphi \mid /B_p$, και η συμπεριφορά αύξησης που παρουσιάζει καθώς μεταβαίνουμε σε μεγαλύτερες αποστάσεις υποδεικνύει το τρόπο με τον οποίο η τοροειδής συνιστώσα επικρατεί της πολοειδούς. **Δεξιά:** Η μεταβολή διαφόρων φυσικών ποσοτήτων κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμής του προηγούμενου μοντέλου - και τα δύο σχήματα από Blandford and Payne (1982).

- Η μαγνητική τάση $\vec{\nabla} B_\varphi$ συνεχίζει την επιτάχυνση της εκροής μέχρι το τροποποιημένο γρήγορο μαγνητοακουστικό σημείο (modified fast magnetosonic point).

Ένα σημείο με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο μοντέλο των Blandford & Payne αφορά το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, το οποίο φανερώνει δύο είδη συμπεριφοράς: ένας τύπος λύσεων στο οποίο το γρήγορο μαγνητοακουστικό σημείο βρίσκεται στο άπειρο ($n = 1$ όταν $\chi \to \infty$ στο Blandford and Payne (1982)) και μία κατηγορία όπου το γρήγορο μαγνητοακουστικό σημείο, και επομένως και το τροποποιημένο, βρίσκεται σε πεπερασμένη απόσταση χ_t. Στην μελέτη αυτή το πέρασμα και από τα δύο σημεία, Alfvén και τροποποιημένο γρήγορο μαγνητοακουστικό, που βρίσκεται σε πεπερασμένη απόσταση δεν επετεύχθη αφήνοντας το θέμα ανοικτό για την μεταγενέστερη έρευνα.

Η πολλά υποσχόμενη φύση του μοντέλου Blandford & Payne κατέταξε τις λύσεις αυτές στα βασικά μοντέλα της ΜΥΔ αστροφυσικής κοινότητας, ενώ έδωσε το έναυσμα για αρκετές ακόμα μελέτες και γενικεύσεις για ΜΥΔ μοντέλα πίδακα. Προχωρώντας σε μια κάπως υποκειμενική επιλογή αναφέρουμε τις γενικεύσεις των Li et al. (1992); Lovelace and Contopoulos (1992) και Contopoulos (1994) στην ειδικο-σχετικιστική περιοχή τα οποία επιβεβαίωσαν τις δυσκολίες που ανακύπτουν κατά την προσπάθεια διέλευσης από το γρήγορο μαγνητοακουστικό σημείο. Μια ακόμα σημαντική γενίκευση αποτελεί η εργασία Contopoulos and Lovelace (1994) όπου οι ερευνητές μελέτησαν μια ευρύτερη κλάση ακτινικά αυτο-όμοιων λύσεων, όπου ο σταθερός δείκτης F μπορεί να πάρει και άλλες διάφορες από 3/4 τιμές. Οι ερευνητές κατέληξαν σε τρεις διαφορετικούς τύπους συμπεριφοράς ανάλογα με την τιμή του δείκτη (σχ.3.3), όπου

- $F < F_{crit}$ η ροή επαναστιάζεται,



Σχήμα 3.3: Οι τρεις διαφορετικοί τύποι λύσεων που καταλήγει το αυτο-όμοιο μοντέλο των Contopoulos and Lovelace (1994) και οι οποίοι εξαρτώνται από την τιμή του δείκτη ομοιότητας F. Το αριστερό σχήμα αντιστοιχεί στην τιμή $F = 0.8$ για την οποία καταλήγουμε σε μια επαναστιαζόμενη εκροή, το μεσαίο για την τιμή $F = 0.9$ όπου παρατηρείτε ασυμπτωτικά παραβολική γεωμετρία και το δεξιό σχήμα για την τιμή $F = 1.02$ όπου μια ταλαντούμενη και ασυμπτωτικά κυλινδρική εκροή παράγεται - σχήμα από Contopoulos and Lovelace (1994).

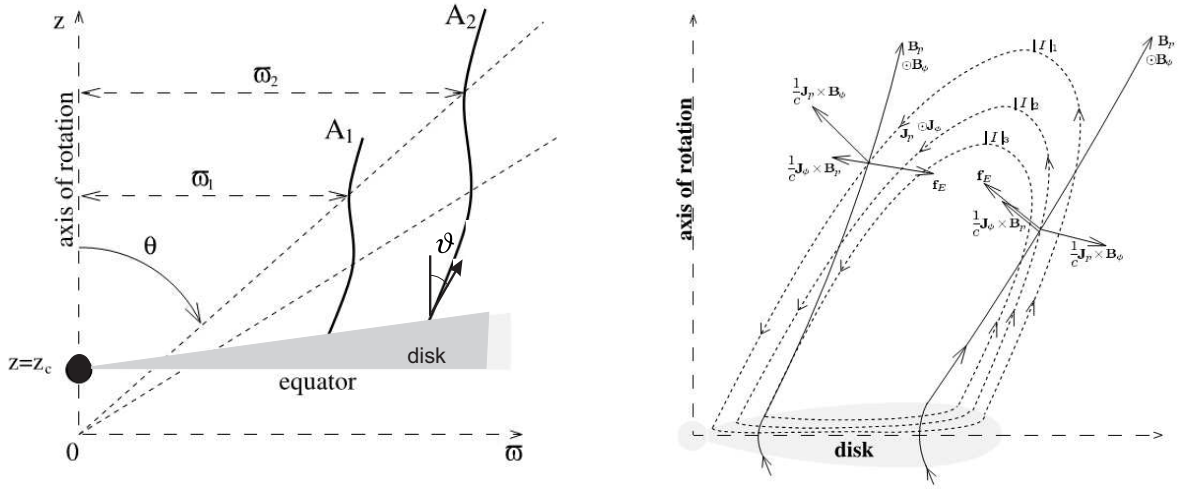
- $F_{crit} < F < 1$ ασυμπτωτικά παραβολική γεωμετρία,
- $F_{crit} > 1$ ταλαντούμενες λύσεις με γενικότερη κυλινδρική γεωμετρία.

Την ίδια περίοδο, άλλες μη αυτο-όμοιες προσεγγίσεις, έδωσαν και αυτές απαντήσεις στο πρόβλημα των πιδάκων τόσο στο θέμα της ασυμπτωτικής μορφής πίδακα, βλέπε για παράδειγμα Heyvaerts and Norman (1989) όσο και στο θέμα της εκκίνησης του πίδακα. Σε μια μελέτη των Pelletier and Pudritz (1992) όπου συμπεριέλαβαν στην βάση της εκροής το θερμικό περιεχόμενο βρέθηκε ότι η γωνία των πολοειδών γραμμών πέρα από την οποία επιτυγχάνουμε φυγόκεντρο εκκίνηση του πίδακα μειώνεται σε μικρότερες τιμές μέχρι και 20° στα μοντέλα τους.

3.2.3 Το μοντέλο των Vlahakis - Königl

Το μοντέλο των Vlahakis and Königl (2003a,b) αποτελεί μια από τις πιο πρόσφατες και πλήρεις λύσεις για την περιγραφή ενός ακτινικά αυτο-όμοιου, στάσιμου και σχετικιστικού ΜΥΔ πίδακα. Πέρα από την υπόθεση της ομοιότητας της ροής, το μοντέλο περιλαμβάνει πιθανό θερμικό περιεχόμενο, ενώ αντιθέτως η βαρυτική επίδραση αγνοείται. Το μοντέλο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η γενίκευση των προηγούμενων ψυχρών μοντέλων των Li et al. (1992); Contopoulos (1994) και παρέχει μία κατατοπιστική εικόνα για την συμπεριφορά των σχετικιστικών πιδάκων, ενώ ειδικά για τις GRB τα συμπεράσματά του αποτελούν οδηγό για την πρώτη φάση της επιτάχυνσης στο εσωτερικό του άστρου. Για το λόγο αυτό αφιερώσαμε στην παρουσίασή της συγκεκριμένης εργασίας μια αυτόνομη ενότητα.

Το υπό εξέταση μοντέλο αναπτύχθηκε για να μελετήσει τις ταχέως μεταβλητές Εκλάμψεις Ακτίνων Γάμμα. Μπορεί η χρήση των στάσιμων εξισώσεων να φαίνεται αντιφατική

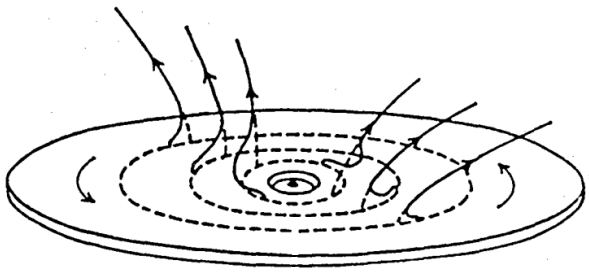


Σχήμα 3.4: Αριστερά: Η ακτινική αυτο-ομοιότητα στο μοντέλο Vlahakis and Königl (2003a). Παρατηρήστε ότι ο δίσκος προσαύξησης βρίσκεται στην σταθερή επιφάνεια ($z = z_c$), ενώ το κέντρο της ομοιότητας χαμηλότερα. Για δύο συγκεκριμένες γραμμές A_1, A_2 ο λόγος των κυλινδρικών ακτίνων ϖ_1, ϖ_2 που βρίσκονται στην ίδια γωνία θ είναι σταθερός ($\varpi_1/\varpi_2 = (A_1/A_2)^{1/F}$) όπως η αυτο-ομοιότητα επιβάλει, F ο δείκτης αυτο-ομοιότητας. **Δεξιά:** Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που δρουν σε δύο μαγνητικές γραμμές της περιοχής του ρεύματος μεταφοράς (αριστερή συνεχής γραμμή) και της περιοχής του ρεύματος επιστροφής (δεξιά συνεχής γραμμή). Η διακεκομμένες γραμμές παριστάνουν τις γραμμές ρεύματος ($I = \iint \vec{J}_p \cdot d\vec{S}$, $\mid I_1 \mid < \mid I_2 \mid < \mid I_3 \mid$) και δεν συμπίπτουν με τις πολοειδείς μαγνητικές γραμμές - σχήματα από το Vlahakis and Königl (2003a).

κατά την ερμηνεία ενός έντονα μεταβλητού φαινομένου, αλλά όπως οι ερευνητές έδειξαν επεκτείνοντας την προσέγγιση του παγωμένου παλμού (frozen pulse approximation, Piran et al. (1993)) οι υπερ-σχετικιστικές ταχύτητες που επικρατούν στην εκροή επιτρέπουν μια τέτοια περιγραφή. Οι ΜΥΔ διαταραχές συμπαρασύρονται με την εκροή με αποτέλεσμα τα διάφορα τμήματα του ρευστού να μην μπορούν να επικοινωνήσουν με τα γειτονικά τους για τις χρονικές κλίμακες της έκλαμψης Vlahakis and Königl (2003a). Ακολουθώντας την μαθηματική απόδειξη της προσέγγισης, θεωρούμε τις πλήρεις χρονοεξαρτώμενες εξισώσεις και εκτελούμε τον μετασχηματισμό της χρονικής συντεταγμένης, $s = ct - \ell$, όπου ℓ το διάστημα κατά μήκος των πολοειδών γραμμών. Είναι χρήσιμο να έχουμε κατά νου το μοντέλο των εσωτερικών ωστικών κυμάτων, όπου τμήματα της εκροής εξελίσσονται αυτόνομα πριν οι αμοιβαίες σκεδάσεις λάβουν χώρα. Στις νέες μεταβλητές οι χρονικές παράγωγοι μετασχηματίζονται στις $\partial/\partial s$ και η ενδελεχής εκτίμησή τους φανερώνει την αμελητέα τιμή τους. Έτσι οι όροι αυτοί μπορούν να αγνοηθούν και οι εξισώσεις λαμβάνουν μια παρόμοια μορφή με αυτές της στάσιμης κατάστασης. Η λύση τότε αναφέρεται σε ένα τμήμα του ρευστού με σταθερό s, όπου το s μπορεί να χρησιμοποιηθεί τώρα για να περιγράψει τον κάθε ξεχωριστό λοβό υλικού.

Η βασική θεμελίωση της εργασίας ακολουθεί αυτή που αναπτύξαμε στις εν.3.1-3.1.2 και ο διαχωρισμός των εξισώσεων στους διάφορους όρους δύναμης παρέχει έναν εύκολο τρόπο για να διαπιστώσουμε την σημασία των συγκεκριμένων δυνάμεων[§]. Εστιάζοντας στις ιδιότητες της επιτάχυνσης μια παρόμοια ανάλυση με αυτή της εν.3.1.2, αλλά τώρα κατά μήκος των

[§]Παρατηρείστε ότι η ανάλυση σε δύναμης και η συζήτηση που ακολουθεί είναι γενικότερη μιας και ακόμα δεν έχουμε εφαρμόσει την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας



Σχήμα 3.5: Το μηχανικό παράδειγμα του ¨αποσυσπειρούμενου ελατηρίου¨. Η περιέλιξη των γραμμών στην βάση της εκροής έχει σαν αποτέλεσμα μεγάλες τοροειδείς συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου αντίθετου στο v_φ στο άνω ημισφαίριο (παράλληλο στο κάτω). Η βαθμίδα της μαγνητικής πίεσης ($-\vec{\nabla}(B_\varphi^2/8\pi)$) παράγει μια εξωτερικά κατευθυνόμενη δύναμη - σχήμα από Uchida and Shibata (1985)

γραμμών, παρέχει (Vlahakis and Königl (2003a):

$$f_{I\|} = -\frac{\gamma^2\rho\xi}{2}\frac{\partial v_p^2}{\partial \ell} \qquad f_{Gp\|} = -\frac{\gamma^4\rho\xi v_p^2}{2c^2}\frac{\partial v_p^2}{\partial \ell}$$

$$f_{G\varphi\|} = -\frac{\gamma^4\rho\xi v_p^2}{2c^2}\frac{\partial v_\varphi^2}{\partial \ell} \qquad f_{T\|} = -\gamma^2\rho v_p^2\frac{\partial \xi}{\partial \ell} \qquad f_{C\|} = \frac{\gamma^2\rho\xi v_\varphi^2}{\varpi}\sin\vartheta$$

$$f_{P\|} - \rho c^2\frac{\partial \xi}{\partial \ell} \qquad f_{B\|} = -\frac{B_\varphi}{4\pi\varpi}\frac{\partial}{\partial \ell}(\varpi B_\varphi) \qquad f_{E\|} = 0$$

όπου ϑ η κλίση των γραμμών μετρούμενη από τον άξονα περιστροφής ($\tan\vartheta = v_\varpi/v_z$). Η προβολή της εξίσωσης ορμής κατά μήκος των γραμμών

$$-f_{I\|} - f_{Gp\|} = f_{G\varphi\|} + f_{T\|} + f_{C\|} + f_{P\|} + f_{B\|}$$

παρέχει την συνεισφορά των διαφόρων δυνάμεων (δεξιό μέλος) στην επιτάχυνση της ροής (αριστερό μέλος).

Ένα πρώτο συμπέρασμα στηρίζεται στην μαγνητική δύναμη η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δύο όρους που αντιστοιχούν στην βαθμίδα της μαγνητικής πίεσης ($-\partial(B_\varphi^2/8\pi)/\partial\ell$) και στην μαγνητική τάση ($-B_\varphi^2\sin\vartheta/4\pi\varpi$) που δρα αντίθετα. Ανάλογα με τον νόμο εξέλιξης $B_\varphi \propto \varpi^x$, η μαγνητική πίεση κυριαρχεί στην περίπτωση όπου $x < -1$ οδηγώντας σε επιτάχυνση, ενώ στην περίπτωση όπου $x > -1$ υπερισχύει η μαγνητική τάση - η σύγκριση στην περίπτωση αυτή αποδίδεται σε έναν αριθμητικό όρο που ενυπάρχει και όχι στον ίδιο τον νόμο δύναμης.

Στην μη-σχετικιστική περιοχή, δηλαδή στην περιοχή εκκίνησης του πίδακα, οι ποσότητες $f_{G\varphi\|}$, $f_{T\|}$ είναι αρκετά μικρότερες από τις υπόλοιπες δυνάμεις $f_{B\|}$, $f_{P\|}$, $f_{C\|}$. Παρόλο που η κυρίαρχη δύναμη μέχρι το γρήγορο μαγνητοακουστικό σημείο είναι η βαθμίδα της πίεσης, η επιτάχυνση οφείλεται είτε στον φυγόκεντρο όρο $f_{C\|}$, όπως το μοντέλο Blandford & Payne και το παράδειγμα των ¨χαντρών σε καλώδιο' προσδιορίζει, ή στην κλίση της μαγνητικής πίεσης. Η δεύτερη περίπτωση αντιστοιχεί στο νευτώνειο μοντέλο που προτάθηκε από τους Uchida and Shibata (1985), ενώ το μηχανικό ανάλογο προσομοιάζεται με ένα ¨αποσυσπειρούμενο ελατήριο' (uncoil spring, βλέπε σχ.3.5).

Στην υπερ-σχετικιστική διάδοση πάνω στο πολοειδές επίπεδο ($\gamma \gg 1$, $v_p \gg v_\varphi$) ή φυγόκεντρη δύναμη γίνεται αμελητέα, όπως και η $f_{G\varphi\|}$, ενώ και η δύναμη της πίεσης αγνοείται μιας και $f_{T\|}/f_{P\|} \sim (\gamma v_p/c)^2 \gg 1$. Συνεπώς οι δύο δυνάμεις που υπερισχύουν είναι οι $f_{T\|}$, $f_{B\|}$ παράγοντας τους όρους θερμικά κυριαρχούμενη επιτάχυνση (thermally driven) ή μαγνητικά κυριαρχούμενη (magnetic driven) ανάλογα με το διαθέσιμο ενεργειακό περιεχόμενο της εκροής. Στην μετρίως σχετικιστική περίπτωση η επίδραση του φυγόκεντρου

όρου μπορεί να είναι σημαντική, ειδικά σε περιπτώσεις που το θερμικό περιεχόμενο απουσιάζει, όπως στο ψυχρό μοντέλο του Li et al. (1992). Κάλλιστα, όμως, μπορεί η συνεισφορά του φυγόκεντρου να μην είναι σημαντική και ο κυρίαρχος όρος να είναι η μαγνητική πίεση εξαιτίας της παρουσίας ισχυρού τοροειδούς πεδίου στην βάση της εκροής, όπως συμβαίνει στο ψυχρό μοντέλο των Contopoulos (1994).

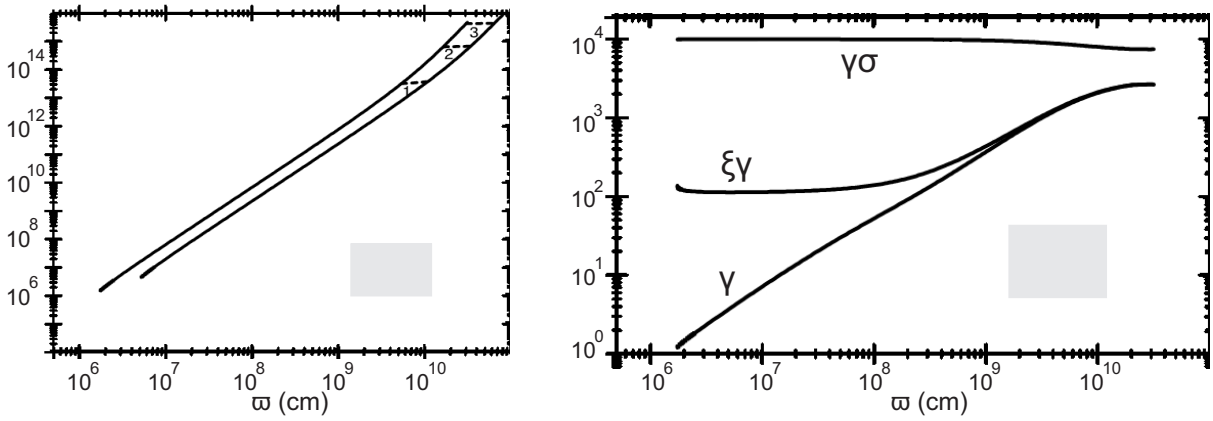
Η εστίαση της ροής εξετάζεται μέσω της εξίσωσης transfield και της σχετικής ανάλυσής της σε όρους δύναμης που ήδη παρουσιάστηκε στην εν.3.1.2. Εξετάζοντας την κατανομή του ηλεκτρικού ρεύματος η κάθετη μαγνητική δύναμη εξ.3.29 παρέχει δύο όρους $\vec{J}_p \times \vec{B}_\varphi$, $\vec{J}_\varphi \times \vec{B}_p$ και η επίδραση των δυνάμεων αυτών για εστίαση ή αποεστίαση της ροής, δηλαδή αν δρουν κατά μήκος ή αντίθετα του $\hat{n}$, καθορίζεται από το πρόσημο των J_p και J_φ. Στην περίπτωση της εστίασης, αντίθετα δηλαδή του $\hat{n}$, έχουμε $J_p < 0$ (περιοχή του ρεύματος μεταφοράς, current carrying regime)και $J_\varphi < 0$ - στην αντίθετη περίπτωση όπου $J_p > 0$ η περιοχή ονομάζεται περιοχή ρεύματος επιστροφής (return current regime). Η επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης εξ.3.28 εξαρτάται από το πρόσημο της πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου. Για μια υπερ-σχετικιστική εκροή $\rho_e \sim J_{p\|}$ και συνεπώς η ηλεκτρική δύναμη εστιάζει την εκροή στην περιοχή του ρεύματος μεταφοράς και αποεστιάζει στην περιοχή του ρεύματος επιστροφής (για μια νευτώνεια εκροή $f_{E\perp} \ll f_{B\perp}$). Το σχετικό διάγραμμα με τις κάθετες ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις εμφανίζεται στο δεξιό σχ.3.4. Στο πλαίσιο των ακτινικά αυτοόμοιων μοντέλων ο διαχωρισμός μεταξύ της περιοχής ρεύματος μεταφοράς ή επιστροφής καθορίζεται από την τιμή του εκθέτη F, όπου $I_p = (c/2\pi)\varpi B_\varphi \propto \varpi^{(F-1)/2}$. Εφαρμόζοντας την έκφραση αυτή στην αρχική επιφάνεια για $F < 1$ το μειούμενο ρεύμα αντιστοιχεί σε αρνητική συνεισφορά του J_p και συνεπώς αντιστοιχεί στην περιοχή ρεύματος επιστροφής, ενώ όταν $F = 1$ καταλήγουμε σε ισημερινά ρεύματα (meridional currents). Υπό αυτή την οπτική η πιο ρεαλιστική κατανομή θα περιελάμβανε και τους δύο τύπους περιοχών και συνεπώς ένα μοντέλο με δύο διαφορετικούς εκθέτες F είναι το κατάλληλο για την περιγραφή των αστροφυσικών εκροών.

Λόγω των αμφιβολιών για την διαδικασία εκκίνησης του πίδακα, οι ερευνητές ολοκλήρωσαν δύο τύπους μοντέλων: μία σειρά όπου αρχικά το πολοειδές μαγνητικό πεδίο είναι το κυρίαρχο (trans-Alfvén λύσεις) και μοντέλα όπου το μαγνητικό πεδίο είναι αρχικά τοροειδές (super-Alfvén λύσεις)[¶]. Στο υπόλοιπο της ενότητας θα παρουσιάσουμε μερικές από τις λύσεις της εργασίας εστιάζοντας κυρίως στις trans-Alfvén τοπολογίες καθώς αυτές οι λύσεις περιγράφουν την διάσχιση των περισσοτέρων κρίσιμων σημείων.

- trans-Alfvén, hot, fast rotator: Το μοντέλο αυτό αποτελεί το πρότυπο της μελέτης και αντιστοιχεί σε μια poynting κυριαρχούμενη εκροή ($\xi_0 \ll \mu$), αλλά με σημαντικό επίσης θερμικό περιεχόμενο ($\xi_0 \sim 110 \gg 1$). Η λύση ξεκινά ελαφρώς πάνω από το αργό μαγνητοακουστικό σημείο και επομένως αγνοεί την αλληλεπίδραση μεταξύ βαρύτητας και θερμικής πίεσης που είναι υπεύθυνη για την εκκίνηση του πίδακα. Παρόλα αυτά, η συγκεκριμένη αλλά και οι επόμενες λύσεις διασχίζουν το σημείο alfvenις και το γρήγορο μαγνητοακουστικό σημείο επιτυγχάνοντας τον κύριο στόχο της μελέτης.

  Στην super-Alfvén περιοχή της λύσης οι τρεις πιθανές εξελίξεις αναφέρονται σε μια επανεστιαζόμενη, σε μια επιβραδυνόμενη και σε μια ασυμπτωτικά κυλινδρική εκροή και αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές των αρχικών συνθηκών. Συνεπώς, θεωρώντας ως φυσικά αποδεκτό το κυλινδρικό σχήμα οι ερευνητές προχώρησαν περαιτέρω καθορισμό

[¶]Η σχέση μεταξύ του μαγνητικού πεδίου και του Alfvén χαρακτήρα της ροής μπορεί να γίνει αντιληπτή μέσω του ολοκληρώματος Ω και η κανονικοποιημένη απόσταση x, που στην περίπτωση του κυρίαρχου πολοειδούς πεδίου είναι $x = \Omega\varpi \sim v_\varphi < 1$, ενώ όταν το πεδίο αυτό είναι αμελητέο $x = \Omega\varpi = -v_p B_\varphi / B_\varpi > 1$ στην βάση της εκροής.



Σχήμα 3.6: Αριστερά: Το φυσικό σχήμα δύο μαγνητικών γραμμών που προέρχονται από τα σημεία $\varpi_0 = 1.7\,10^6 cm$ και $5.2\,10^6 cm$ αντίστοιχα όπως παρήχθησαν από την ολοκλήρωση του trans-Alfvén, θερμού και ταχύ περιστροφέα του Vlahakis and Königl (2003a) (hot and fast rotator). Το ασυμπτωτικό κυλινδρικό σχήμα φαίνεται καθαρά στο πάνω μέρος της εκροής. **Δεξιά:** Η εξέλιξη των ενεργειακών ποσοτήτων κατά μήκος της εσωτερικής γραμμής της παραπάνω λύσης- σχήματα από Vlahakis and Königl (2003a).

των αρχικών συνθηκών. Η τελική ολοκλήρωση παρείχε μια εκροή στην οποία μπορούμε να διακρίνουμε τρεις περιοχές:

– Περιοχή θερμικής επιτάχυνσης: Από το αρχικό σημείο, $\varpi_0 \sim 10^6 cm$, μέχρι την απόσταση $10^8 cm$ η επιτάχυνση συντελείτε εις βάρος του θερμικού περιεχομένου (ξ)· Η δύναμη της θερμοκρασίας $f_{T\|}$ είναι περίπου ίση με gamma δύναμη $(f_G\,\|)$ όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από το αριστερό σχ.3.7, ενώ η ενέργεια poynting παραμένει σχεδόν σταθερή, βλέπε δεξιό σχ.3.6. Η εξέλιξη των ενεργειακών ποσοτήτων είναι σε καλή προσέγγιση γραμμική και δίνεται από τις

$$\xi \propto 1/\varpi \qquad \gamma \propto \varpi$$

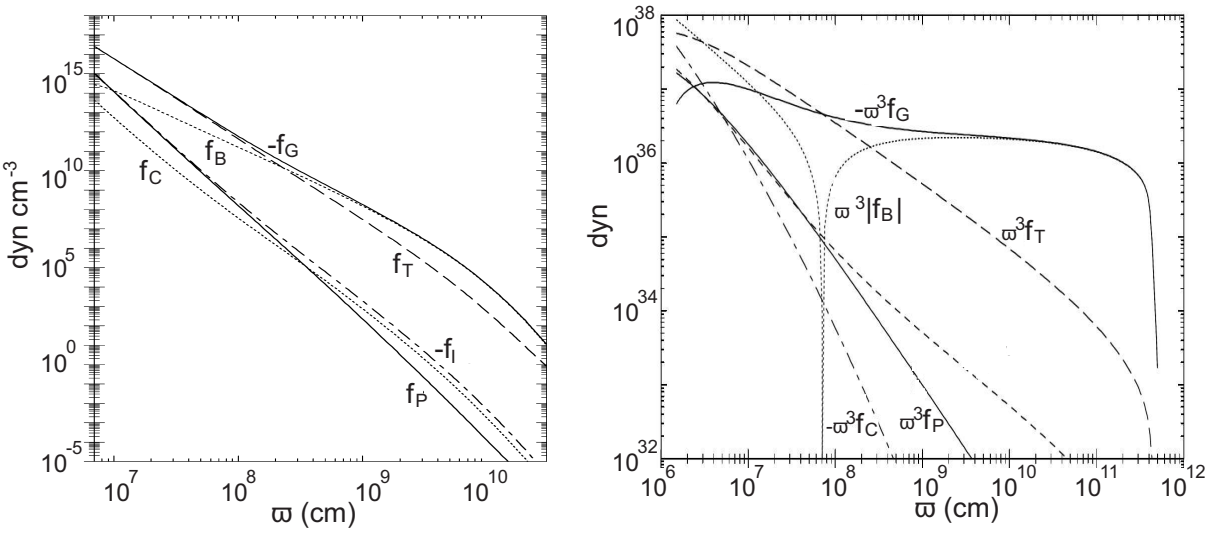
Ενδιαφέρον έχει και η εξέλιξη των φυσικών ποσοτήτων

$$\rho \propto 1/\varpi^3 \qquad B_p \propto 1/\varpi^2 B_\varphi \propto 1/\varpi^{\|}$$

– περιοχή μαγνητικής επιτάχυνσης: Όταν ενθαλπία φτάσει κοντά σε μοναδιαίες τιμές και μέχρι την απόσταση $\varpi \sim 10^{10} cm$ η συντελούμενη επιτάχυνση οφείλεται κυρίως στην μαγνητική επίδραση. Ο παράγοντας Lorentz συνεχίζει να αυξάνει $\gamma \propto \varpi^\beta$ σχεδόν γραμμικά $(\beta \sim 1)$, αλλά η ακριβής τιμή του εκθέτη εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και πιο συγκεκριμένα από την αρχική ενθαλπία (ξ_i). Η κυριαρχία της μαγνητικής δύναμης φαίνεται στο αριστερό σχ.3.7 από την περίπου ίση τιμή των δυνάμεων $f_{B\|}$ και $f_{G\|}$. Η ενέργεια poynting μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο $\gamma\sigma \sim \mu - \varpi^\beta$, ενώ οι ρ, B_p, B_φ ακολουθούν την ίδια εξέλιξη όπως και στην θερμικά επιταχυνόμενη περιοχή.

– Ασυμπτωτική κυλινδρική περιοχή: Στο τέλος της μαγνητικής περιοχής η εκροή τείνει σε μια κυλινδρική τοπολογία με το άνοιγμά της ϖ να αποκτά μια σταθερή τιμή, βλέπε αριστερό του σχ.3.6. Οι αναλυτικοί υπολογισμοί που παρουσιάζονται

‖Η εξέλιξη του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου μπορεί να εξαχθεί από το ολοκλήρωμα Ψ_A και την εξέλιξη της πυκνότητας, ενώ η τοροειδής συνιστώσα από την αμελητάια v_φ, δηλαδή $\varpi\Omega \sim v_p B_\varphi / B_p$.

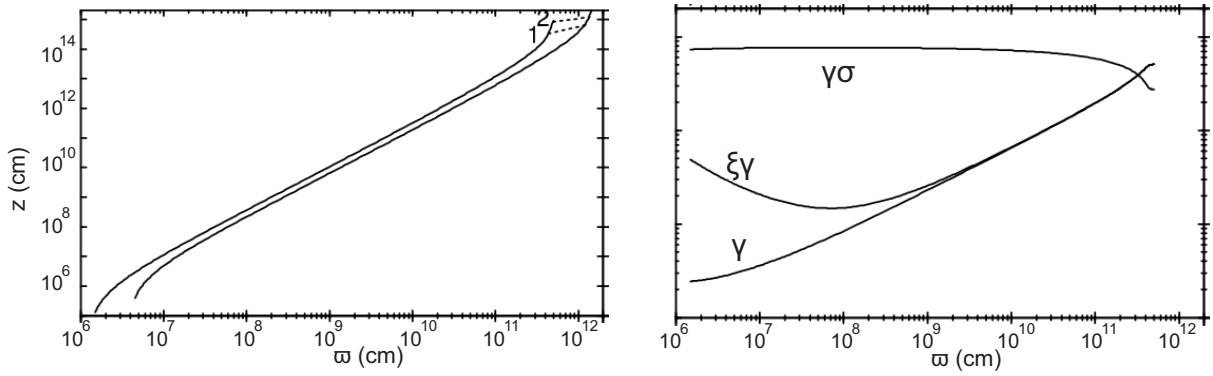


Σχήμα 3.7: Αριστερά: Οι δυνάμεις, για την ακρίβεια οι πυκνότητες δύναμης, στην trans-Alfvén, hot, fast rotator λύση. Όλες οι ποσότητες αναφέρονται στις παράλληλες συνιστώσες - σχήμα από Vlahakis and Königl (2003a). **Δεξιά:** Οι πυκνότητες δύναμης πολλαπλασιασμένες με ϖ^3, για να παράγουμε μονάδες δύναμης, για την super-Alfvén, hot, fast rotator λύση. Οι εμφανιζόμενες ποσότητες αναφέρονται πάλι στις παράλληλες συνιστώσες - σχήμα από Vlahakis and Königl (2003b).

στο Vlahakis and Königl (2003a) παρέχουν την ασυμπτωτική τιμή του παράγοντα Lorentz ($\gamma_\infty \sim \mu - F\sigma_M \sim \mu/2$) ή με άλλα λόγια μια ισοκατανομή μεταξύ της ροής της κινητικής ενέργειας και της poynting. Από ενεργειακής απόψεως η απόδοση είναι ικανοποιητική για τις εκροές των GRB, αλλά βλέπε επίσης και στην εν.1.2 για τις επιπλοκές του πανχρωματικού γονάτου και την υπόλοιπη συζήτηση για το μαγνητικό ενεργειακό περιεχόμενο.

super-Alfvén, hot, fast rotator: Οι τρεις περιοχές που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη περίπτωση συνεχίζουν να υφίστανται. Συγκρίνοντας την παρούσα τοπολογία με αυτή της προηγούμενης λύσης παρατηρούμε την πρώτη διαφορά στην θερμικά επιταχυνόμενη ζώνη, μέχρι την απόσταση $\varpi \sim 7\,10^7 cm$, όπου μέρος της ενθαλπίας δεν μετατρέπεται μόνο σε κινητική, αλλά και σε ενέργεια poynting ($\sigma 15 \to 50$), βλέπε δεξιό σχ.3.8 - το χαρακτηριστικό αυτό αποδίδεται στην μαγνητική δύναμη ($f_{B\|}$) που στην περιοχή αυτή έχει αρνητικό πρόσημο, βλέπε δεξιό σχ.φιγ.3.7. Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου συνεχίζουν να εξελίσσονται με τους ίδιους νόμους δύναμης $B_p \propto 1/\varpi^2$, $B_\varphi \propto 1/\varpi$, ενώ η πυκνότητα ακολουθεί την πιο ρηχή σχέση $\rho \propto \varpi^{-2.4}$, ενώ το ίδιο ισχύει και για τον παράγοντα Lorentz $\gamma \propto \varpi^{0.46}$. Η έκταση της θερμικής ζώνης εντοπίζεται μέχρι τα $\varpi \sim 3\,10^8 cm$, ενώ η μαγνητική ζώνη εκτείνεται μέχρι τα $\varpi \sim 4\,10^{11} cm$ γεγονός που υποδεικνύει ότι οι super-Alfvén εκροές έχουν την τάση να εστιάζονται λιγότερο από ότι οι trans-Alfvén λύσεις.

- Οι υπόλοιπες λύσεις: Στην μελέτη αυτή παρήχθησαν και μια σειρά από άλλες λύσεις. Η ψυχρή περίπτωση trans-Alfvén λύση αναπαράγει στην πραγματικότητα την ψυχρή λύση των Li et al. (1992), αλλά με κατάλληλες συνοριακές για να περιγραφεί μια GRB εκροή. Αφού η ροή είναι ψυχρή, το βραδύ μαγνητοακουστικό σημείο τείνει στο μηδέν και επομένως η παραγόμενη λύση περιγράφει την εκροή μέχρι τον δίσκο προσαύξησης εξαιρουμένων βέβαια των βαρυτικών επιδράσεων. Για λόγους πληρότητας οι ερευνητές



Σχήμα 3.8: Αριστερά: Το φυσικό σχήμα δύο μαγνητικών γραμμών που ξεκινούν από τα σημεία $\varpi_0 = 1.5\,10^6 cm$ και $4.5\,10^6 cm$ αντίστοιχα όπως υπολογίστηκαν από την ολοκλήρωση του super-Alfvén, hot and fast rotator μοντέλου του Vlahakis and Königl (2003b). **Δεξιά:** Η εξέλιξη των ενεργειακών ποσοτήτων κατά μήκος της εσωτερικής γραμμής του προηγούμενου διαγράμματος - σχήματα από Vlahakis and Königl (2003b).

συμπεριέλαβαν μια λύση της περιοχής επιστροφής ρεύματος ($F < 1$) στην οποία η μαγνητική δύναμη αποεστιάζει την ροή, ενώ η ηλεκτρική δρα για την εστίασή της. Η ηλεκτρική δύναμη υπερέχει και η λύση τερματίζει σε πεπερασμένο ύψος πάνω από τον δίσκο, όπως στο νευτώνειο ψυχρό μοντέλο των Blandford and Payne (1982).

3.3 Οι σχέσεις διασποράς της Στάσιμης Κατάστασης

Οι σχέσεις διασποράς στην γενική περίπτωση έχουν ήδη εξαχθεί στην εν.2.4

$$v_{ph}^2 = v_A^2 \cos^2\theta \tag{3.58}$$

$$\left(\frac{v_{ph}}{c}\right)^4 - \left[\left(\frac{v_A}{c}\right)^2 + \left(\frac{c_s}{c}\right)^2 - \frac{v_A^2}{c^2}\frac{c_s^2}{c^2}\sin^2\theta\right]\left(\frac{v_{ph}}{c}\right)^2 + \left(\frac{c_s}{c}\right)^2\left(\frac{v_A}{c}\right)^2\cos^2\theta = 0 \tag{3.59}$$

και παρέχουν την φασική ταχύτητα των διαταραχών ($v_{ph} = \omega/k$) στο συγκινούμενο σύστημα. Υπενθυμίζουμε ότι η ποσότητα θ αναφέρεται στην γωνία μεταξύ του κυματαριθμού της εκάστοτε διαταραχής και του μαγνητικού πεδίου, ενώ, η ταχύτητα Alfvén δίνεται απ'την έκφραση

$$u_A^2 = \frac{v_A^2}{1 - v_A^2/c^2} = \frac{B_{co}^2}{4\pi\rho\xi} \Rightarrow \qquad \frac{v_A^2}{c^2} = \frac{B_{co}^2}{4\pi\rho\xi c^2 + B_{co}^2} \tag{3.60}$$

με τον δείκτη *co* να αναφέρεται στην τιμή των ποσοτήτων στο συγκινούμενο σύστημα. Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να εξάγουμε την έκφραση για την σχέση διασποράς στο εκάστοτε εργαστηριακό σύστημα. Η διαδικασία είναι κάπως τεχνική και περιλαμβάνει εκτενείς αλγεβρικούς υπολογισμούς, αλλά τα εξαγόμενα αποτελέσματα έχουν σημαντική εφαρμογή κατά την υπόλοιπη διατριβή.

Ο μετασχηματισμός των μονοχρωματικών κυματικών διαταραχών μεταξύ των διαφόρων συστημάτων αναφοράς επιτυγχάνεται μέσω του 4-ανύσματος

$$k^\mu = \gamma\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \tag{3.61}$$

όπου ω η κυκλική συχνότητα του κύματος και $\vec{k}$ ο κυματαριθμός του. Ο μετασχηματισμός Lorentz από κάποιο αδρανειακό σύστημα σε κάποιο άλλο με σχετική ταχύτητα $\vec{v}$ δίνει

$$\omega' = \gamma\left(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}\right) \qquad \vec{k}' = \vec{k} - \vec{v}\left[\frac{\gamma\omega}{c^2} - (\gamma-1)\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{v^2}\right] \tag{3.62}$$

και η αναλλοίωτη ποσότητα που παράγεται από το μέτρο του είναι

$$\omega'^2 - c^2k'^2 = \omega^2 - c^2k^2 \tag{3.63}$$

Μια εύχρηστη μορφή του μετασχηματισμού του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου δίνεται από τις εκφράσεις

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) - (\gamma-1)\left(\vec{E}\cdot\hat{v}\right)\hat{v} \tag{3.64}$$

$$\vec{B}' = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\right) - (\gamma-1)\left(\vec{B}\cdot\hat{v}\right)\hat{v} \tag{3.65}$$

Εφαρμόζουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό μεταξύ του εργαστηριακού και του συγκινούμενου συστήματος στο άπειρα αγώγιμο όριο $\vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B}/c$. Κατά τον μετασχηματισμό του ηλεκτρικού πεδίου και οι δύο όροι του δεξιού μέλους είναι ταυτοτικά μηδέν, ενώ για τον μετασχηματισμό του μαγνητικού πεδίου εφαρμόζουμε την διανυσματική ταυτότητα $\vec{v}\times\left(\vec{v}\times\vec{b}\right) = \left(\vec{v}\cdot\vec{B}\right)\vec{v} - v^2\vec{B}$ για να καταλήξουμε

$$\vec{E}_{co} = 0 \qquad \vec{B}_{co} = \frac{\vec{B}}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma v^2}\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)\vec{v} \tag{3.66}$$

Το τετράγωνο της παραπάνω εξίσωσης δίνει μια χρήσιμη σχέση

$$\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)^2 = B_{co}^2 - \frac{B^2}{\gamma^2} \tag{3.67}$$

Επιπλέον ο τριγωνομετρικός όρος γράφεται μέσω του γινομένου $\cos\theta = \hat{k}_{co}\cdot\hat{B}_{co}$.

Η προβολή του κυματαριθμού πάνω στο συγκινούμενο μαγνητικό πεδίο παρέχει την ζητούμενη γωνιακή εξάρτηση

$$\vec{B}_{co}\cdot\vec{k}_{co} = \frac{\vec{k}\cdot\vec{B}}{\gamma} + \left[2\frac{\gamma-1}{\gamma v^2} + \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma v^2}\right]\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right) - \frac{\vec{B}\cdot\vec{v}}{\gamma}\left[\gamma\omega + (\gamma-1)\gamma\omega\right] \Rightarrow$$

$$\vec{B}_{co}\cdot\vec{k}_{co} = \frac{\vec{k}\cdot\vec{B}}{\gamma} - \gamma\left(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right) \tag{3.68}$$

Όταν η διαταραχή κείτεται πάνω στο πολοειδές επίπεδο, αυτή είναι η περίπτωση όπου η κυλινδρική και η επίπεδη συμμετρία επιβάλουν, η παραπάνω έκφραση γράφεται ως

$$\left(\vec{B}_{co}\cdot\vec{k}_{co}\right)^2 = \left(\vec{B}\cdot\vec{k}\right)^2\left[\frac{1}{\gamma^2} + 2\frac{\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)}{\vec{k}\cdot\vec{B}} - \frac{B^2\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)^2}{\left(\vec{k}\cdot\vec{B}\right)^2} - 2\omega\frac{\vec{B}\cdot\vec{v}}{\vec{k}\cdot\vec{B}}\right.$$

$$+2\omega B^2 \frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{\left(\vec{k}\cdot\vec{B}\right)^2} - \omega^2 \frac{B^2}{\left(\vec{k}\cdot\vec{B}\right)^2}\Bigg] + \gamma^2\left(B^2 - E^2\right)\left(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}\right)^2 \quad (3.69)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξ.3.62, εξ.3.67. Για μια πολοειδή διαταραχή $\vec{k}\cdot\vec{v}/\vec{k}\cdot\vec{B} = v_p/B_p$ και οι διάφοροι όροι μέσα στις αγκύλες γράφονται

$$\frac{1}{\gamma^2} + 2\frac{\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)}{\vec{k}\cdot\vec{B}} - \frac{B^2\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)^2}{\left(\vec{k}\cdot\vec{B}\right)^2} = \frac{1}{\gamma^2} + 2\frac{v_p}{B_p}\left(B_p v_p + B_t v_t\right) - B^2\frac{v_p^2}{B_p^2}$$

$$= 1 - v_t^2 + 2\frac{v_p v_t B_t}{B_p} - \frac{B_t^2}{B_p^2}v_p^2 = 1 - \left(\frac{v_t B_p + vpB_t}{B_p}\right)^2 = 1 - Z^2$$

ο δείκτης t παριστάνει τις εγκάρσιες συνιστώσες (φ ή y) και η ποσότητα Z για το φ ή $\varpi\Omega$ της επίπεδης ή της κυλινδρικής συμμετρίας αντίστοιχα. Οι επόμενοι δύο όροι γράφονται

$$-2\omega\frac{\vec{B}\cdot\vec{v}}{\vec{k}\cdot\vec{B}} + 2\omega B^2\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{\left(\vec{k}\cdot\vec{B}\right)^2} = -2\frac{\omega}{\vec{k}\cdot\vec{B}}\left(B_p v_p + B_t v_t - B^2\frac{v_p}{B_p}\right) = -2\omega B_t Z$$

Συγκεντρώνοντας όλους του όρους μαζί το τετράγωνο του συνημιτόνου παίρνει την μορφή

$$\cos^2\theta_{co} = \frac{\left(\vec{B}_{co}\cdot\vec{k}_{co}\right)^2}{k_{co}^2 B_{co}^2} = \frac{\left(\vec{k}\cdot\vec{B}\right)^2}{B_{co}^2 k_{co}^2}\left[1 - \left(Z + \omega\frac{B_t^2}{c\vec{k}\cdot\vec{B}}\right)^2 - \left(\frac{\omega B_p}{c\vec{k}\cdot\vec{B}}\right)^2\right] + \frac{\omega_{co}^2}{k_{co}^2} \quad (3.70)$$

Ο μετασχηματισμός της διασποράς για τις διαταραχές Alfvén εξ.3.58 βρίσκεται, τώρα, άμεσα

$$\left(\gamma\frac{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}}{ck}\right)^2 = \frac{\left(\vec{k}\cdot\vec{B}/k^2\right)}{4\pi\rho\xi c^2}\left[1 - \left(Z + \omega\frac{B_t^2}{c\vec{k}\cdot\vec{B}}\right)^2 - \left(\frac{\omega B_p}{c\vec{k}\cdot\vec{B}}\right)^2\right] \quad (3.71)$$

Η σχέση διασποράς για τις βραδείες/ταχείς διαταραχής εμπεριέχει λίγες πράξεις. Για τον σκοπό αυτό γράφουμε την εξ.3.59 ως (c τέθηκε ίσο με 1)

$$\omega_c^4 - \left(v_A^2 + c_s^2 - v_A^2 c_s^2 \sin^2\theta\right)\omega_c^2 k_c^2 + c_s^2 v_A^2 k_c^4 \cos^2\theta = 0$$

και χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς εξ.3.63 για να καταλήξουμε

$$\omega_c^4 - \left(v_A^2 + c_s^2 - v_A^2 c_s^2 + v_A^2 c_s^2 \cos^2\theta\right)\omega_c^2\left(k^2 + \omega_c^2 - \omega^2\right) + c_s^2 v_A^2 k_c^2\left(k^2 + \omega_c^2 - \omega^2\right)\cos^2\theta = 0$$

$$\omega_c^4\left(1 - v_A^2\right)\left(1 - c_s^2\right) - \left(v_A^2 + c_s^2 - v_A^2 c_s^2\right)\omega_c^2\left(k^2 - \omega^2\right) + c_s^2 v_A^2 k_c^2\left(k^2 - \omega^2\right)\cos^2\theta = 0$$

Το ημίτονο που εμφανίζεται περιλαμβάνει όρους του ω_c και δίνεται από την εξ.3.70

$$\omega_c^4\left(1 - v_A^2\right)\left(1 - c_s^2\right) - \left[v_A^2\left(1 - c_s^2\right) + c_s^2\left(1 - v_A^2\right)\right]\omega_c^2\left(k^2 - \omega^2\right) + c_s^2 v_A^2 k_c^2\left(k^2 - \omega^2\right)X = 0$$

$$\omega_c^4 - \left(u_A^2 + u_s^2\right)\omega_c^2\left(k^2 - \omega^2\right) + u_s^2 u_A^2 k_c^2\left(k^2 - \omega^2\right)X = 0$$

όπου για συντομία X ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξ.3.70. Με λίγες ακόμα πράξεις και αντικαθιστώντας το ω_c από την εξ.3.62 καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα, Vlahakis and Königl (2003a),

$$\left(\gamma\frac{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}}{ck}\right)^4 - \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2c^2}\right)\left(\gamma\frac{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}}{ck}\right)^2\left(\frac{U_s^2}{c^2} + \frac{B^2 - E^2}{4\pi\rho\xi c^2}\right)$$
$$+ \frac{U_s^2}{c^2}\frac{\left(\vec{B}\cdot\vec{k}/k\right)^2}{4\pi\rho\xi c^2}\left[1 - \left(Z + \omega\frac{B_t^2}{c\vec{k}\cdot\vec{B}}\right)^2 - \left(\frac{\omega B_p}{c\vec{k}\cdot\vec{B}}\right)^2\right] = 0 \quad (3.72)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η B_t συμβολίζει την εγκάρσια συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου (B_y ή B_φ), ενώ η Z για την ποσότητα φ ή $\varpi\Omega$ για τις επίπεδες και κυλινδρικά συμμετρικά ροές αντίστοιχα.

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα. Όταν η ταχύτητα της ροής είναι αντίθετη στην ειδική φασική ταχύτητα της διαταραχής τότε το κύμα εμφανίζεται στατικό ($\omega = 0$), ενώ ισχύει και η αντίστροφη πρόταση (Konigl (1980))

$$\omega = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma\vec{v}\cdot\frac{\vec{k}}{k} = -\frac{\omega_c/k_c}{\sqrt{1 - \omega_c^2/(k^2c^2)}} \quad (3.73)$$

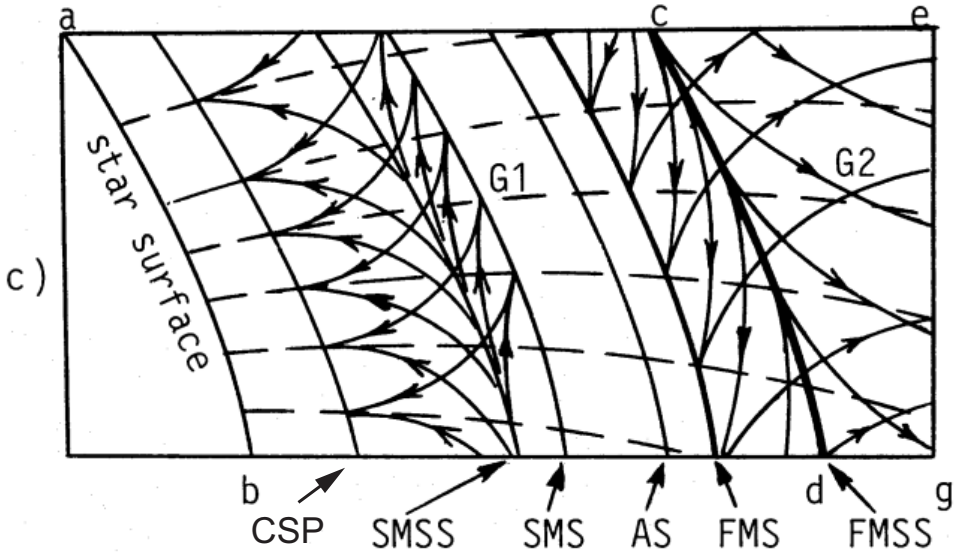
Οι συνθήκες που αναφέρθηκαν παραπάνω καθορίζουν τις ανώμαλες επιφάνειες των στάσιμων ΜΥΔ εξισώσεων. Οι επιφάνειες αυτές έχουν ήδη προκύψει στο κείμενο, ενώ θα έχουν συνεχώς κεντρική σημασία στις επόμενες ενότητες.

Οι επιφάνειες ανωμαλίας αποτελούν επίσης και χαρακτηριστικές επιφάνειες του συστήματος των στάσιμων εξισώσεων και η μαθηματική και φυσική τους σημασία οδήγησε πολλούς ερευνητές στην περαιτέρω διερεύνηση τους. Το θέμα είναι εκτεταμένο, ενώ μερικά στοιχεία του παραμένουν ακόμα ανοικτά. Παρόλα αυτά μια πρώτη εικόνα μπορεί να προκύψει από την μαθηματική κατηγοριοποίηση των νευτώνειων στάσιμων εξισώσεων που σχετίζεται με την ταχύτητα της ροής (Heinemann and Olbert (1978), Lovelace et al. (1986) για την νευτώνεια ανάλυση). Έτσι το σύστημά μας είναι

- $v_p < v_c$ ελλειπτικό
- $v_c < v_p < v_{sm}$ υπερβολικό
- $v_{sm} < v_p < v_{fm}$ ελλειπτικό
- $v_{fm} < v_p$ υπερβολικό

όπου v_p η ταχύτητα της ροής, v_{sm}, v_{fm} η αργή και γρήγορη μαγνητοακουστική ταχύτητα αντίστοιχα και $v_p = B_p/\sqrt{4\pi\rho}$, $v_c = c_s v_{Ap}/\sqrt{v_A^2 + c_s^2}$ οι επονομαζόμενες πολοειδή ταχύτητα Alfvén και cusp ταχύτητα αντίστοιχα - στην περίπτωση μιας κρύας εκροής η αργή και η cusp ταχύτητα δεν υπάρχουν και επομένως η ροή μας είναι είτε ελλειπτική($v_p < v_{fm}$), είτε υπερβολική ($v_p > v_{fm}$).

Αλλά παρόλο την συμπαγής κατηγοριοποίηση η κατάσταση στη κυλινδρική περίπτωση αποδεικνύεται πιο πολύπλοκη όταν αντιμετωπίζουμε το ζήτημα της ολοκλήρωσης των εξισώσεων καθώς ανακύπτουν τα λεγόμενα τροποποιημένα γρήγορα σημεία modified fast.



Σχήμα 3.9: . Οι διάφορες περιοχές των ΜΥΔ εξισώσεων και ο αντίστοιχος μαθηματικός τους χαρακτήρας. Οι διακεκομμένες γραμμές παριστάνουν την πολοειδή ταχύτητα, ενώ οι συνεχείς τις χαρακτηριστικές που πηγάζουν από τα σημεία της εκροής. Πέρα από την cusp (CSP), βραδεία μαγνητοακουστική (SMS), Alfvén (AS) και γρήγορη μαγνητοακουστική (FMS) επιφάνεια και οι περιοχές με το αντίστοιχο πλήθος χαρακτηριστικών, υπάρχουν και δύο ακόμα επιφάνειες η τροποποιημένη αργή (SMSS) και η τροποποιημένη γρήγορη (FMSS) επιφάνεια. Παρατηρήστε ότι στην περιοχή μεταξύ των FMS-FMSS μία από τις χαρακτηριστικές κατευθύνεται προς τα πίσω και επηρεάζει προγενέστερα τμήματα της εκροής. Μόνο μετά την FMSS και οι δύο χαρακτηριστικές φτάνουν στην ασυμπτωτική περιοχή - σχήμα από Bogovalov (1994) στο οποίο προσθέσαμε την θέση της CSP επιφάνειας.

Στην λεπτομερή ανάλυση του Bogovalov (1994), Bogovalov (1997) για το πρόβλημα Cauchy των ΜΥΔ εξισώσεων βρέθηκε ότι ενώ υπάρχουν και οι δύο χαρακτηριστικές για μια υπερ-γρήγορη μαγνητοακουστική εκροή, γενικά μιλώντας δεν είναι εξασφαλισμένο ότι και οι δύο καμπύλες φτάνουν στην ασυμπτωτική περιοχή. Αντιθέτως, υπάρχει μια περιοχή μεταξύ του γρήγορου μαγνητοακουστικού και του τροποποιημένου γρήγορου σημείου όπου η μια εκ των δύο χαρακτηριστικών έχει την ιδιότητα της προς τα πίσω διάδοσης, επηρεάζει δηλαδή προγενέστερα σημεία της εκροής, βλέπε σχ.3.9. Συνεπώς ο πραγματικός ¨ορίζοντας γεγονότων' για τις ΜΥΔ διαταραχές δεν είναι το γρήγορο, αλλά το τροποποιημένο γρήγορο σημείο και αυτή είναι η πραγματική επιφάνεια ανωμαλίας των εξισώσεών μας. Διαισθητικά η τροποποιημένη γρήγορη επιφάνεια μπορεί να βρεθεί ως η χαρακτηριστική επιφάνεια πάνω στην οποία συγκλίνουν όλες οι αριστερές χαρακτηριστικές της γρήγορης - τροποποιημένα γρήγορης περιοχής (δεξιά για την βραδεία - τροποποιημένη βραδεία περιοχή). Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου η ταχύτητα της εκροής είναι κάθετη στην επιφάνεια το συμβατικό και το τροποποιημένο σημείο συμπίπτουν Bogovalov (1994).

3.4 Η περιβάλλουσα των γρήγορων μαγνητοακουστικών διαταραχών

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε το άνοιγμα των κώνων Mach για τις ταχείες μανγητοακουστικές διαταραχές χρησιμοποιώντας απλά σχετικιστικά πορίσματα. Ο κώνος Mach των διαταραχών αυτών είναι στην πραγματικότητα ο ¨ορίζοντας γεγονότων' όλων των ΜΥΔ

διαταραχών καθώς οι γρήγορες διαταραχές είναι και εκείνες με την μεγαλύτερη ταχύτητα. Η επίλυση αυτή έχει ήδη επιτευχθεί με έμμεσο τρόπο στην προηγούμενη ενότητα όπου εξάγαμε την σχέση διασποράς στο εργαστηριακό σύστημα αναφοράς. Η ισοδυναμία αυτή θα γίνει και πιο ξεκάθαρη στα επόμενα κεφάλαια όπου θα μελετηθεί το φαινόμενο της αραίωσης. Παρόλα αυτά η πορεία που θα ακολουθήσουμε εδώ παρέχει μια πολύ διάφανη παρουσίαση των κώνων Mach, παρόλο που περιορίζεται στις ψυχρές εκροές ($\xi \to 1$, $c_s \to 0$). Το ψυχρό όριο παρέχει σημαντική απλοποίηση καθώς στο όριο αυτό η γρήγορη μαγνητοακουστική ταχύτητα (v_{fm}) γίνεται ισοτροπική στο συγκινούμενο σύστημα εξ.3.59

$$c_s = 0 \Rightarrow \qquad v_{fm,c}^2 = v_A^2 \tag{3.74}$$

όπου ο δείκτης c παριστάνει πάλι τις ποσότητες στο συγκινούμενο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η πολοειδής ταχύτητα της εκροής στο εργαστηριακό σύστημα κείτεται στην $z-$διεύθυνση ($\vec{v} = -v_y\hat{y} + v_p\hat{z}$) και επομένως αναλύουμε την γρήγορη μαγνητοακουστική ταχύτητα σε μια τοπική καρτεσιανή βάση ($\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$). Στο συγκινούμενο σύστημα η γρήγορη ταχύτητα ομάδας των διαταραχών (group velocity) γράφεται

$$\vec{v}_{fm,c} = v_A\left(\sin\theta_c\cos\varphi_c\,\hat{x} + \sin\theta_c\sin\varphi_c\,\hat{y} + \cos\theta_c\,\hat{z}\right) \tag{3.75}$$

όπου θ_c, φ_c οι σχετικές γωνίες που προσδιορίζονται από τον άξονα του μαγνητικού πεδίου, δηλαδή την z-διεύθυνση

Στο συγκινούμενο σύστημα και λόγω της ισοτροπίας, η διάδοση των γρήγορων διαταραχών σχηματίζει προφανώς μια σφαίρα που προσδιορίζεται μέσω των ταχυτήτων από την έκφραση $v_{x,fm,c}^2 + v_{y,fm,c}^2 + v_{z,fm,c}^2 = v_A^2$. Προκειμένου να βρούμε το αντίστοιχο σχήμα στο εργαστηριακό σύστημα εκτελούμε τον μετασχηματισμό Lorentz για τις ταχύτητες

$$\vec{v}_{g\|} = \frac{\vec{v}_{gc\|} - \vec{v}}{1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_{gc}}{c^2}} \qquad \vec{v}_{g\perp} = \frac{\vec{v}_{gc\perp}}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_{gc}}{c^2}\right)} \tag{3.76}$$

Παρόλο που δεν έχει σημασία στο ψυχρό όριο έχουμε διατηρήσει τον δείκτη g για να υπογραμμίσουμε το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Lorentz πρέπει να εκτελεσθεί στις ομαδικές και όχι τις φασικές ταχύτητες των διαταραχών. Ο μετασχηματισμός Lorentz δίνει

$$v_{fm,x} = \frac{\sin\theta_c\cos\varphi_c\,v_A}{\gamma\left[1 - \frac{v_A}{c^2}\left(\sin\theta_c\sin\varphi_c\,v_y - \cos\theta_c\,v_p\right)\right]}$$

$$v_{fm,y} = \frac{\left(v_p\sin\theta_c\sin\varphi_c\ + v_y\cos\theta_c\right)\frac{v_A v_p}{v_p^2+v_y^2} + \frac{v_A\gamma v_y}{v_p^2+v_y^2}\left(\sin\theta_c\sin\varphi_c\,v_y - \cos\theta_c\,v_p\right) - \gamma v_y}{\gamma\left[1 - \frac{v_A(\sin\theta_c\sin\varphi_c\,v_y - \cos\theta_c\,v_p)}{c^2}\right]}$$

$$v_{fm,z} = \frac{\left(v_p\sin\theta_c\sin\varphi_c\ + v_y\cos\theta_c\right)\frac{v_A v_y}{v_p^2+v_y^2} - \frac{\gamma v_p v_A}{v_p^2+v_y^2}\left(\sin\theta_c\sin\varphi_c\,v_y - \cos\theta_c\,v_p\right) + \gamma v_p}{\gamma\left[1 - \frac{v_A(\sin\theta_c\sin\varphi_c\,v_y - \cos\theta_c\,v_p)}{c^2}\right]}$$

Ένας εύκολος τρόπος να χειριστούμε το παραπάνω αλγεβρικό σύστημα είναι να το λύσουμε για τις παραμέτρους

$$c_1 = \cos\varphi_c\sin\theta_c \qquad c_2 = \sin\varphi_c\sin\theta_c \qquad c_3 = \cos\theta_c \tag{3.77}$$

και να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ για να καταλήξουμε

$$\frac{v_{fm,x}^2}{\gamma^2} + v_{fm,y}^2 \left(1 - \frac{c^2 v_p^2 + v_A^2 v_y^2}{c^4}\right) + v_{fm,z}^2 \left(1 - \frac{c^2 v_y^2 + v_A^2 v_p^2}{c^4}\right)$$
$$- 2 v_{fm,z} \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right) v_p + 2 v_{fm,y} v_y \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_{fm,z} v_p}{c^2}\right) = v_A^2 - v_p^2 - v_y^2 \quad (3.78)$$

που αντιστοιχεί σε ελλειψοειδές με κεκλιμένο άξονα κατά την διεύθυνση της $\vec{v} = -v_y \hat{y} + v_p \hat{p}$. Μετά από χρόνο t το ακριβές σχήμα της επιφάνειας παρέχεται από τις αντικαταστάσεις:

$$v_{fm,x} \to \frac{x}{t} \qquad v_{fm,y} \to \frac{y - y_0}{t} \qquad v_{fm,z} \to \frac{z}{t} \quad (3.79)$$

και δίνει

$$\frac{x^2}{\gamma^2} + z^2 \left(1 - \frac{c^2 v_y^2 + v_A^2 v_p^2}{c^4}\right) - 2 z\, t \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right) v_p + (y - y_0)^2 \left(1 - \frac{c^2 v_p^2 + v_A^2 v_y^2}{c^4}\right)$$
$$+ 2\,(y - y_0)\, v_y \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right) \left(t - z \frac{v_p}{c^2}\right) - \left(v_A^2 - v_p^2 - v_y^2\right) t^2 = 0 \quad (3.80)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον κώνο Mach της στάσιμης κατάστασης θεωρούμε όλες της διαταραχές που εκπέμφθησαν από ένα συγκεκριμένο σημείο και υπολογίζουμε την περιβάλλουσα επιφάνειά τους. Για μια παραμετρική οικογένεια επιφανειών της μορφής $F(x, y, z; t, y_0) = 0$ η περιβάλλουσα καμπύλη δίνεται από την επίλυση του συστήματος

$$F = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y_0} = 0 \quad (3.81)$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις δίνουν

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y_0} = 0$$
$$y - y_0 = z \frac{v_p v_y \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)}{v_A^2 - v_p^2 - v_A^2 \frac{v_y^2}{c^2}} \qquad t = \frac{z v_p \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)}{v_A^2 - v_p^2 - v_A^2 \frac{v_y^2}{c^2}} \quad (3.82)$$

και με αντικατάσταση στην πρώτη $F = 0$ καταλήγουμε στις οριακές επιφάνειες

$$z = \pm \frac{\sqrt{v_p^2 - v_A^2 \left(1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right)}}{v_A} \gamma x \qquad y \quad free \quad (3.83)$$

Συνεπώς η ζητούμενη επιφάνεια ορίζεται από την τομή δύο επιπέδων με μεταξύ τους άνοιγμα στο πολοειδές επίπεδο

$$\sin^2 \theta_{MC} = \frac{1}{\gamma^2 v_p^2} \frac{v_A^2}{1 - (v_A/c)^2} = \sigma \frac{1 - (v_p/c)^2}{(v_p/c)^2} \quad (3.84)$$

Παρατηρείστε ότι ο παραπάνω υπολογισμός της περιβάλλουσα έγινε θεωρώντας $x_0 = const$, ενώ η y_0 ελήφθη ως πλήρως ελεύθερη παράμετρος, με άλλα λόγια υποθέτοντας επίπεδη συμμετρία.

3.5 Οι Συνθήκες Ασυνέχειας σε ιδανικά αγώγιμο πίδακα με μηδενικό E_φ

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις συνθήκες ασυνέχειας για ένα στάσιμο ωστικό κύμα (standing shock), ένα κύμα δηλαδή που στο εργαστηριακό σύστημα είναι ακίνητο, και για την περίπτωση του απείρως αγώγιμου πλάσματος. Θεωρούμε ότι το πλάσμα ικανοποιεί την συνθήκη του μηδενικού τοροειδούς πεδίου στην άνω περιοχή της ασυνέχειας ($E_\varphi = 0$, upstream) μια υπόθεση που επιβάλλεται από τα ρευστά που μελετάμε σε αυτό και στο επόμενο κεφάλαιο. Λόγω της σημασίας της η συνθήκη αυτή θα εξετάζεται σε κάθε βήμα στους υπολογισμούς μας.

Παρά την κυλινδρική συμμετρία που υιοθετήθηκε, η επιφάνεια της ασυνέχειας μπορεί στην γενική περίπτωση να μην είναι κάθετη στις πολοειδείς δυναμικές γραμμές. Επιπλέον, το ωστικό κύμα ενδέχεται να μην είναι παράλληλο με κανέναν από τους άξονες συντεταγμένων, αλλά αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την κατάλληλη στροφή στο πολοειδές επίπεδο. Η στροφή κατά γωνία θ γύρω από έναν άξονα που ορίζεται από τα μοναδιαίο διάνυσμα (l, m, n) δίνεται από τον πίνακα

$$T_{rot} = \begin{pmatrix} ll(1-\cos\theta)+\cos\theta & ml(1-\cos\theta)-n\sin\theta & nl(1-\cos\theta)+m\sin\theta \\ lm(1-\cos\theta)+n\sin\theta & mm(1-\cos\theta)+\cos\theta & nm(1-\cos\theta)-l\sin\theta \\ ln(1-\cos\theta)-m\sin\theta & mn(1-\cos\theta)+l\sin\theta & nn(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση μας η κατάλληλη στροφή είναι $-\theta_{sh}$, όπου θ_{sh} η γωνία μεταξύ της κάθετης στην ασυνέχεια και του άξονα περιστροφής, γύρω δηλαδή από τον $(0, 1, 0)$ άξονα, ενώ συμπεραίνουμε άμεσα ότι μια τέτοιου τύπου στροφή διατηρεί την τοροειδή συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου μηδέν. Μπορούμε, επομένως, να θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια ασυνέχειας κείτεται στο $(\hat{\varphi}, \hat{z})$-επίπεδο και η κάθετη κατά μήκος της $\hat{\varpi}$-διεύθυνσης. Επιπλέον, το κύμα είναι στάσιμο με αποτέλεσμα η εξίσωσή της επιφάνειας και η κάθετη σε αυτή να δίνονται από την σχέση

$$\phi(x) = 0 \Rightarrow \phi_{,\mu} = (0, 1, 0, 0)$$

όπου προχωρήσαμε, επίσης, και στην κανονικοποίηση του διανύσματος.

Μιλώντας αδρά θα χωρίσουμε την μελέτη των εξισώσεων σε δύο μέρη. Πρώτα, θα εξετάσουμε τον ηλεκτρομαγνητικό τμήμα της ροής και μετά το υδροδυναμικό. Η συνθήκη που αναφέρεται στην συνέχεια της κάθετης συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου εξ.2.74 είναι τετριμμένη και παρέχει την πρώτη ζητούμενη ποσότητα

$$B_-^\varpi = B_+^\varpi \tag{3.85}$$

Η εξίσωση της συνέχειας της παράλληλης συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου δίνει

$$(E_- - E_+) \times \hat{n} = 0 \Rightarrow \left(E_+^z - E_-^z\right)\hat{\varphi} + \left(E_-^\varphi - E_+^\varphi\right)\hat{z} = 0$$

και επομένως

$$E_-^\varphi = E_+^\varphi = 0 \tag{3.86}$$

$$E_-^z = E_+^z = v_+^\varphi B_+^\varpi - v_+^\varpi B_+^\varphi \tag{3.87}$$

όπου κάναμε χρήση του νόμου του Ohm για ιδανικά ρευστά στην άνω περιοχή. Εφαρμόζοντας τον ίδιο νόμο και στην κάτω περιοχή (downstream) και με χρήση του μηδενισμού του E^φ μπορούμε να εξάγουμε, επίσης, και την ϖ-συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου

$$B_-^z = kB_-^\varpi = kB_+^\varpi \tag{3.88}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την παραλληλία των $\vec{v}_p, \vec{B}_p$ για να ορίσουμε την ποσότητα

$$k = \frac{v_-^z}{v_-^\varpi} = \frac{B_-^z}{B_-^\varpi} \tag{3.89}$$

Βεβαίως η ποσότητα k είναι άγνωστη και η εύρεσή της θα αποτελέσει το κεντρικό ζητούμενο της ενότητας. Η τοροειδής συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου μπορεί να γραφεί ξανά χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ohm και της έκφρασης για το E_-^z που εξάγαμε παραπάνω

$$\begin{aligned} E_-^z &= v_-^\varphi B_-^\varpi - v_-^\varpi B_-^\varphi \\ B_-^\varphi &= \frac{v_-^\varphi B_-^\varpi - E_-^z}{v_-^\varpi} = \frac{v_-^\varphi B_+^\varpi - E_+^z}{v_-^\varpi} \end{aligned} \tag{3.90}$$

Τέλος, η εναπομένουσα συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου προσδιορίζεται και αυτή από τον νόμο του Ohm

$$E_-^\varpi = B_-^\varphi v-^z - B_-^z u_-^\varphi = -kE_+^z \tag{3.91}$$

Εστιάζοντας την προσοχή μας στις υδροδυναμικές ποσότητες μετρούμε ότι απαιτούνται 5 ποσότητες $(\rho_-, p_-, \vec{v}_-)$ όσες ακριβώς και οι υπόλοιπες συνθήκες ασυνέχειας. Η συνθήκη ασυνέχειας που περιγράφει την συνέχεια των σωματιδίων παρέχει τον επονομαζόμενο λόγο συμπύκνωσης compression ratio

$$\chi \equiv \frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{\gamma_+ v_+^\varpi}{\gamma_- v_-^\varpi} \tag{3.92}$$

Οι συνθήκες ασυνέχειας που περιγράφουν την διατήρηση της ενέργειας-ορμής αποτελούν το πραγματικό σύστημα που πρέπει να επιλύσουμε. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις αναλυτικές εκφράσεις των 10 συνιστωσών του τανυστή ενέργειας-ορμής που παρουσιάζεται στο παρ.Γ′. Οι 4 εξισώσεις που παράγονται είναι

$$\left[\gamma^2 w v^\varpi + 4\pi \left(B^\varphi v^z - B^z v^\varphi\right)\right] = 0 \tag{3.93}$$

$$\left[\gamma^2 w (v^\varpi)^2 + p + 2\pi \left(B^2 + E^2 - 2(B^\varpi)^2 - 2(E^\varpi)^2\right)\right] = 0 \tag{3.94}$$

$$\left[\gamma^2 w v^\varpi v^\varphi - 4\pi \left(B^\varpi B^\varphi + E^\varpi E^\varphi\right)\right] = 0 \tag{3.95}$$

$$\left[\gamma^2 w v^\varpi v^z - 4\pi \left(B^\varpi B^z + E^\varpi E^z\right)\right] = 0 \tag{3.96}$$

Εκτελούμε τις αντικαταστάσεις $w = 4\pi w, p = 4\pi p$ και γράφουμε τις παραπάνω εξισώσεις στην μορφή

$$\gamma^2 w v^\varpi - kE^z = T_+^{01}/4\pi = est0 \tag{3.97}$$

$$\gamma^2 w (v^\varpi)^2 + p + \frac{B^2 + E^2 - 2(B^\varpi)^2 - 2(E^\varpi)^2}{2} = T_+^{11}/4\pi = est1 \tag{3.98}$$

$$\gamma^2 w v^\varpi v^\varphi - (B^\varpi B^\varphi + E^\varpi E^\varphi) = T_+^{21}/4\pi = est2 \tag{3.99}$$

$$\gamma^2 w v^\varpi v^z - (B^\varpi B^z + E^\varpi E^z) = T_+^{31}/4\pi = est3 \tag{3.100}$$

όπου όλες οι ποσότητες στο αριστερό μέλος αναφέρονται στην τιμή τους στην κάτω περιοχή. Χρησιμοποιούμε τις δύο τελευταίες εκφράσεις σε συνδυασμό με την πρώτη προκειμένου να εξαλείψουμε την ενθαλπία. Το αποτέλεσμα είναι

$$v^\varphi = \frac{est2 + (B^\varpi B^\varphi + E^\varpi E^\varphi)}{est0 + kE_+^z} \tag{3.101}$$

$$v^z = \frac{est3 + (B^\varpi B^z + E^\varpi E^z)}{est0 + kE^z_+} \tag{3.102}$$

και από τις εξ.3.85-3.91 και μια τετριμμένη επίλυση της πρώτης

$$v^\varphi_- = \frac{B^\varpi_+ E^z_+ - est2\, v^\varpi_-}{(B^\varpi_+)^2 - (est0 + kE^z_+)\, v^\varpi_-} \tag{3.103}$$

$$v^z_- = \frac{est3 + \left[\left(B^\varpi_+\right)^2 - \left(E^z_+\right)^2\right] k}{est0 + kE^z_+} \tag{3.104}$$

Εξισώνοντας την τελευταία σχέση με $v^z = kv^\varpi$ βρίσκουμε την έκφραση των ταχυτήτων συναρτήσει της παραμέτρου k

$$v^\varpi_- = \frac{est3 + \left[\left(B^\varpi_+\right)^2 - \left(E^z_+\right)^2\right] k}{(est0 + kE^z_+)\, k} \tag{3.105}$$

$$v^\varphi_- = \frac{-kB^\varpi_+ est0\left(est0 + E^z_+ k\right) + est2\left[est3 + \left[\left(B^\varpi_+\right)^2 - \left(E^z_+\right)^2\right] k\right]}{(est0 + E^z_+ k)\left(est3 - (E^z_+)^2 k\right)} \tag{3.106}$$

ενώ η τοροειδής συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου δίνεται από την

$$B^\varphi_- = k\frac{B^\varpi_+ est3 - E^z_+(est0 + E^z_+ k)}{est3 - (E^z_+)^2 k} \tag{3.107}$$

Έχοντας όλο το πεδίο ταχυτήτων εκπεφρασμένο σαν συνάρτηση της παραμέτρου k μπορούμε να γράψουμε και τον παράγοντα Lorentz με βάση την παράμετρο αυτή

$$\gamma_-(k) = \frac{1}{\sqrt{1 - [v^\varpi_-(k)]^2 - [v^\varphi_-(k)]^2 - [v^z_-(k)]^2}} \tag{3.108}$$

όπως και τις υπόλοιπες θερμοδυναμικές παραμέτρους

$$\rho_-(k) = \frac{estC}{\gamma_-(k) v^\varpi_-(k)} \tag{3.109}$$

Προκειμένου να ολοκληρωθούν οι υπολογισμοί μας λύνουμε την εξ.3.97 για $\gamma^2 w v^\varpi_-$

$$\gamma^2_- w_- = \frac{est0 + kE^z_+}{v^\varpi_-} = \frac{\left(est0 + kE^z_+\right)^2 k}{est3 + [(B^\varpi_+)^2 - (E^z_+)^2]\, k} \tag{3.110}$$

και αντικαθιστώντας στην εξ.3.98 παίρνουμε την θερμική πίεση

$$\begin{aligned}
p_- &= est1 - \frac{B^2 + E^2 - 2(B^\varpi)^2 - 2(E^\varpi)^2}{2} - \left(est0 + kE^z_+\right) v^\varpi_- \\
&= est1 - \frac{B^2 + E^2 - 2(B^\varpi)^2 - 2(E^\varpi)^2}{2} - \frac{est3 + \left[\left(B^\varpi_+\right)^2 - \left(E^z_+\right)^2\right] k}{k} \\
&= est1 - \frac{(B^\varphi)^2 + (B^z)^2 - (E^\varpi)^2}{2} - \frac{est3}{k} \\
&= est1 - \frac{(B^\varphi)^2 + k^2\left[(B^\varpi_+)^2 - (E^z_+)^2\right]}{2} - \frac{est3}{k}
\end{aligned}$$

$$= est1 - \frac{est3}{k} - \frac{k^2}{2}\left\{(B_+^\varpi)^2 - (E_+^z)^2 + \left[\frac{est2(B_+^\varpi)^2 - (E_+^z)^2\left(est0 + (E_+^z)^2 k\right)}{est3 - (E_+^z)^2 k}\right]^2\right\} \quad (3.111)$$

Η παράμετρος k προσδιορίζεται από τον ορισμό της ενθαλπίας ($w = p + \rho$). Η εξίσωση αυτή δίνει μια πολυωνυμική εξίσωση μεγάλου βαθμού, αλλά βρήκαμε ότι είναι απλούστερο να λύσουμε την εξίσωση αυτή αριθμητικά σαν μια αλγεβρικήέξίσωση γενικής μορφής. Η εξίσωση αυτή δίνει την ζητούμενη ποσότητα k και με αντικατάσταση στις παραπάνω εξισώσεις και τις υπόλοιπες ποσότητες της ροής.

Κεφάλαιο 4

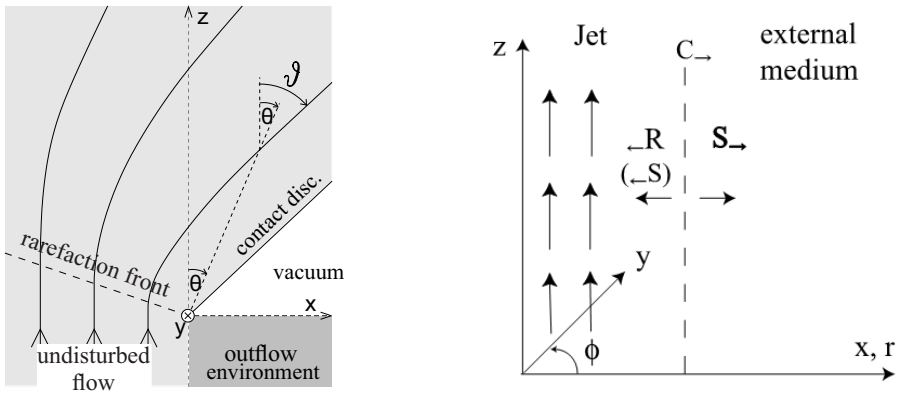
Τα αυτο-όμοια μοντέλα στην επίπεδη Αραίωση

Μετά από μια σύντομη παρουσίαση του φαινομένου της Αραίωσης (Rarefaction) αναπτύσσουμε ένα μοντέλο που στηρίζεται στις ακτινικά αυτο-όμοιες λύσεις (r-self similar). Παρά την υπόθεση της επίπεδης συμμετρίας που περιορίζει το μοντέλο κατά την εφαρμογή του στους αστροφυσικούς πίδακες, η απλότητα του μοντέλου το καθιστά ιδανικό για την ερμηνεία της φυσικής του φαινομένου και παρέχει μια εις βάθος κατανόησή του. Έτσι, και πέρα από το θεωρητικό ενδιαφέρον, χρησιμοποιώντας το μοντέλο αυτό μπορούμε να εξάγουμε σημαντικά συμπεράσματα, ενώ επιχειρούμε και μια πρώτη εφαρμογή στα αστροφυσικά περιβάλλοντα.

4.1 Ασθενείς Ασυνέχειες και Αραίωση

Όταν μια ροή διέρχεται από μια οξεία γωνία, η πληροφορία ασυνέχειας της εξωτερικής επιφάνειας διαδίδεται στην ροή και αν η ταχύτητα της ροής υπερτερεί αυτής των πιο γρήγορων διαταραχών, η γρήγορη μαγνητοακουστική αν αναφερόμαστε σε μαγνητισμένο πλάσμα ή η ταχύτητα του ήχου αν αναφερόμαστε σε ένα αμαγνήτιστο ρευστό, η διάδοση αυτή επιτελείται με την μορφή ενός κύματος αραίωσης (rarefaction wave). Αποτέλεσμα των παραπάνω είναι η εμφάνιση στο σώμα της ροής μια ασθενούς ασυνέχειας (weak discontinuity), δηλαδή μια ασυνέχειας στις παραγώγους των φυσικών ποσοτήτων που περιγράφουν την ροή και όχι στις ίδιες τις ποσότητες - στην περίπτωσή μας ασυνέχεια των πρώτων παραγώγων. Ανάλογα με την μορφή της πίεσης του εξωτερικού περιβάλλοντος μπορούμε να διακρίνουμε σχηματικά δύο περιπτώσεις, βλέπε σχ.4.1. Στην περίπτωση όπου το εξωτερικό περιβάλλον είναι πρακτικά αμελητέα η αδιατάρακτη ροή ακολουθείται από την διαταραγμένη, οι δύο περιοχές διαχωρίζονται με μια ασθενή ασυνέχεια. Η διαταραγμένη εκροή εκτείνεται μέσα στον κενό χώρο και μια ασυνέχεια επαφής (contact discontinuity) εμφανίζεται στην συνοριακή της επιφάνεια. Η κατάσταση εμπλουτίζεται όταν η εξωτερική πίεση έχει μια μικρότερη, αλλά σημαντική τιμή*. Στην περίπτωση, αυτή δημιουργείται ένα ωστικό κύμα που ταξιδεύει στο εξωτερικό μέσο με αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας ακόμα περιοχής, διαταραγμένο εξωτερικό μέσο (shocked external medium), μεταξύ της αραιωμένης ροής και του αδιατάρακτου εξωτερικού ρευστού.

* Αν η πίεση του εξωτερικού μέσου είναι υψηλότερη και η ταχύτητά του υπερτερεί αυτήν των πιο γρήγορων διαταραχών, ο ρόλος των δύο ρευστών αλλάζει και το φαινόμενο της αραίωσης αφορά πλέον το εξωτερικό μέσο.



Σχήμα 4.1: Η σχηματική αναπαράσταση της τοπολογίας του φαινομένου για τους δύο διαφορετικούς τύπους εξωτερικού περιβάλλοντος. **Αριστερά:** Όταν η πίεση του εξωτερικού περιβάλλοντος είναι αμελητέα σχηματίζονται τρεις περιοχές: αδιατάρακτη ροή, διαταραγμένη και κενός χώρος με μια ασθενής και μια ασυνέχεια επαφής να διαχωρίζουν τις τρεις περιοχές αντίστοιχα - σχήμα από Sapountzis and Vlahakis (2013). **Δεξιά:** Όταν η εξωτερική πίεση έχει σημαντική τιμή έχουμε την δημιουργία ενός ωστικού κύματος που διαδίδεται στο εξωτερικό μέσο ($S_{\rightarrow}$, το $S_{\leftarrow}$ δεν έχει σημασία για εμάς). Το διαταραγμένο εξωτερικό μέσο παρεμβάλλεται μεταξύ της ασυνέχειας επαφής και το αδιατάρακτο μεσοαστρικό ρευστό - σχήμα από Mizuno et al. (2008).

Η σημασία της αραίωσης είναι σημαντική σε ένα πλήθος φαινομένων, ενώ η τεχνολογική της εφαρμογή στα αεριωθούμενα (jets) και τους πυραύλους είναι εκτεταμένη. Για τον λόγο αυτό στην διεθνή βιβλιογραφία εμφανίζεται η μελέτη της σε διάφορες συνθήκες και περιβάλλοντα. Η νευτώνεια υδροδυναμική προσέγγιση παρουσιάζεται σε πολλά συγγράμματα (για παράδειγμα Landau and Lifschitz (1975)), ενώ η αντίστοιχη σχετικιστική και αναλυτική προσέγγιση υπό παρόμοιες συνθήκες μελετήθηκε από τον Granik (1982). Επιπλέον, το σχετικιστικό και υψηλά μαγνητισμένο όριο συναντάται συνήθως στην Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών, καθώς εκεί επικρατούν κατάλληλες συνθήκες. Σήμερα υπάρχει ήδη ένα πλήθος αριθμητικών προσομοιώσεων, ειδικά για τις GRB, ενώ ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις Tchekhovskoy et al. (2010), Komissarov et al. (2010) για προσομοιώσεις και σχετική συζήτηση και στα Mizuno et al. (2008), Zenitani et al. (2010) για προσομοιώσεις που περιλαμβάνουν εξωτερική πίεση.

Το φαινόμενο της Rarefaction σχετίζεται με την επιτάχυνση της εκροής λόγω του ανοίγματος των μαγνητικών γραμμών. Η κατάσταση είναι ήδη γνωστή από την υδροδυναμική όπου το πιο γνωστό παράδειγμα, το ακροφύσιο του de Laval. Η βασική αρχή του στηρίζεται στην χαρακτηριστική σχέση μεταξύ της τοπολογίας των γραμμών ροής και την συμπεριφορά της ροής σε υπό και υπέρ-ηχητικές ταχύτητες. Στην απλούστερη περίπτωση ενός νευτώνειου και αμιγώς υδροδυναμικού ρευστού, η εξίσωση του Euler σε συνδυασμό με τον ορισμό της ταχύτητας του ήχου δίνει, βλέπε Landau and Lifschitz (1975) §.83,

$$\frac{d\left(\rho v\right)}{dv} = \rho\left(1 - \frac{v^2}{c_s^2}\right)$$

Φανταστείτε τώρα ότι στην γειτονιά ενός σημείου η ταχύτητα αυξάνει ($dv > 0$). Ανάλογα με το αν η ταχύτητα της ροής είναι υποηχητική ή υπερηχητική, η συγκεκριμένη αύξηση οδηγεί στην αύξηση της ροής μάζας ($v < c_s$) ή στην μείωση της ($v > c_s$) αντίστοιχα. Συνεπώς στην υποηχητική περίπτωση η συγκέντρωση των γραμμών ροής σχετίζεται με την επιτάχυνση της ροής, ενώ στην υπερηχητική περίπτωση η συμπεριφορά είναι ακριβώς η αντίθετη με την αραίωση να οδηγεί στην επιτάχυνση.

Στην παρούσα διατριβή θα εξετάσουμε το φαινόμενο κατά την στάσιμη κατάσταση και θα φέρουμε τις μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις της σχετικιστικής ΜΥΔ σε ημιγραμμική μορφή, ενώ υπό συγκεκριμένες συνθήκες η διαδικασία αυτή οδηγεί ακόμα και σε αναλυτικά αποτελέσματα. Το πλήρες χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα μελετάται σήμερα με την βοήθεια των εξελιγμένων αριθμητικών προσομοιώσεων που εκτελούν διάφορες ερευνητικές ομάδες (Tchekhovskoy et al. (2010), Komissarov et al. (2010)), με την μελέτη τους να εστιάζεται στις αστροφυσικές εφαρμογές και επομένως στην κυλινδρική συμμετρία. Στις πρώτες δεκαετίες μετά την ανακάλυψη των GRB υπήρξε αμφιβολία για το αν το στάσιμο όριο ήταν κατάλληλο για την μελέτη αυτών των έντονα μεταβλητών φαινομένων. Αλλά όπως έδειξαν οι Piran et al. (1993) με την ¨προσέγγιση του παγωμένου παλμού' (frozen pulse approximation) και γενίκευσαν στην συνέχεια οι Vlahakis and Königl (2003a); Sapountzis and Vlahakis (2013) το όριο αυτό ισχύει ακόμα προς μεγάλη μας διευκόλυνσή, βλέπε πλαίσιο.4.3.

Στο κεφάλαιο αυτό σαν μια πρώτη προσέγγιση θα μελετήσουμε το φαινόμενο της επίπεδης αραίωσης και θα αφήσουμε την κυλινδρική συμμετρία για το επόμενο κεφάλαιο. Παρόλο που εκ πρώτης άποψης η χρήση της επίπεδης συμμετρίας μπορεί να φαίνεται αντιφατική όταν μελετάμε τους πίδακες, οι διαφορές αναγνωρίζονται εύκολα με αποτέλεσμα τα συμπεράσματα να γενικεύονται με άμεσο τρόπο. Έτσι χρησιμοποιούμε το απλό της προσέγγισης προκειμένου να μελετήσουμε την φυσική του γενικότερου φαινομένου. Από θεωρητικής απόψεως, οι ακτινικά αυτο-όμοιες λύσεις του κεφαλαίου αποτελούν την γενίκευση των υδροδυναμικών λύσεων των Landau and Lifschitz (1975); Granik (1982) και επομένως το κεφάλαιο αυτό μπορεί να θεωρηθεί και ως αυτόνομη μελέτη.

4.2 Επίπεδες και Αυτο-όμοιες Εκροές

Ένα από τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματα της επίπεδης συμμετρίας αφορά την δυνητική χρήση της αυτο-όμοιας ιδιότητας. Η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος (x, y, z) τίθεται στο σημείο της ασυνέχειας της συνοριακής επιφάνειας, ενώ η συμμετρία λαμβάνεται κατά $y-$διεύθυνση, αριστερό σχ.4.1. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς η ομοιότητα αναφέρεται στις γραμμές ροής, ισοδύναμα στις πολοειδές μαγνητικές γραμμές, και έχει κέντρο την αρχή των αξόνων.

Πριν προχωρήσουμε περαιτέρω έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε την αυτο-ομοιότητα στην περίπτωση της κυλινδρικής συμμετρίας κατά την στιγμή που ο κυλινδρικός πίδακας διαρρηγνύει το περίβλημα. Σε μια τέτοια περίπτωση παρατηρούμε άμεσα ότι η αρχή των αξόνων μέσω της οποίας εκφράζεται η συμμετρία είναι διαφορετική από το κέντρο στο οποίο η ροή μπορεί να εμφανίζει αυτο-ομοιότητα - στην πραγματικότητα δεν υπάρχει καθόλου αυτο-ομοιότητα αν θεωρήσουμε το 3-διάστατο χώρο, πριν δηλαδή λάβουμε υπόψη την κυλινδρική συμμετρία. Συνεπώς κατά την κυλινδρική ροή είναι πολύ δύσκολο, αν όχι ανέφικτο, να παντρέψουμε και τις δύο αυτές ιδιότητες και η αντίστοιχη προσέγγιση εστιάζεται στην εύρεση ενός πιο ¨εξωτικού' τύπου ομοιότητας ή στην εύρεση μιας εγγενούς διαφορετικής προσέγγισης προκειμένου να ολοκληρωθούν οι προκύπτουσες εξισώσεις. Στην διατριβή αυτή θα ακολουθήσουμε την δεύτερη αυτή διαδικασία και στο επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε μια συνεκτική και ακριβής μέθοδο ώστε να προσεγγίσουμε το μοντέλο του GRB/Collapsar.

Η υπόθεση της αυτο-ομοιότητας υιοθετήθηκε σιωπηρά και στις υδροδυναμικές λύσεις όπου τόσο η νευτώνεια Landau and Lifschitz (1975)), όσο και η σχετικιστική ανάλυση (Granik (1982)) υπέθεσαν ότι οι ποσότητες της ροής εμφανίζουν μόνο γωνιακή εξάρτηση. Έτσι το μοντέλο που παρουσιάζουμε αποτελεί μια γενίκευση και προς την κατεύθυνση των σχετικιστικών υδροδυναμικών ροών. Η ιδέα της χρήσης της αυτο-όμοιας ιδιότητας

προκειμένου να απλοποιηθούν οι εξισώσεις δεν είναι νέα και έχει όπως είδαμε εφαρμοστεί σε ένα πλήθος μελετών των ΜΥΔ πιδάκων, βλέπε εν.3.2 και Blandford and Payne (1982); Vlahakis and Tsinganos (1998) για νευτώνεια μοντέλα και Li et al. (1992); Contopoulos (1994); Vlahakis and Königl (2003a) για σχετικιστικά. Βασικά στην τελευταία αναφορά οι ερευνητές ανέπτυξαν μια συστηματική διαδικασία για την εύρεση κατάλληλων ακτινικά αυτο-όμοιων μορφών που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί και στην παρούσα εργασία.

4.2.1 Εφαρμογή της αυτο-ομοιότητας στην επίπεδη ροή

Εφαρμόζουμε, τώρα, την μεθοδολογία των Vlahakis and Königl (2003a) ώστε να επιβάλουμε την αυτο-ομοιότητα στις εξισώσεις. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, υποθέτουμε ότι όλες οι ποσότητες έχουν εξάρτηση της μορφής $r^{F_i} f_i(\theta)$ όπου $r = \sqrt{x^2+y^2}$ η απόσταση από την γωνία και θ η γωνία μετρούμενη από τον $\hat{z}$-άξονα. Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τους διάφορες εκθέτες F_i έτσι ώστε οι παραγόμενες διαφορικές εξισώσεις να είναι διαχωρίσιμες στις r, θ μεταβλητές. Η ακριβής διαδικασία και οι σχετικοί υπολογισμοί παρουσιάζονται στο πλαίσιο.4.1. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης συνοψίζονται στις παρακάτω μορφές

$$A = r^F a(\theta) \qquad k = k_0\, r^{F-1}\, a(\theta)^{\frac{F-1}{F}} \qquad Q = q_0\, \left[r^F a(\theta)\right]^{-2\frac{(F-1)(\hat{\Gamma}-1)}{F}}$$
$$M = M(\theta), \xi = \xi(\theta) \qquad x_A^2, \mu, \varphi = const \tag{4.1}$$

Πλαίσιο 4.1: Εφαρμογή της Μεθοδολογίας Αυτο-Ομοιότητας

Επειδή οι ποσότητες που συμμετέχουν είναι πολλές, για λόγους απλούστευσης, εισάγουμε δείκτες ομοιότητας μόνο για τις ποσότητες που χρειάζεται $A = r^F a(\theta)$, $k = r^Y \kappa(\theta)$, $Q = q(\theta) r^Z$. Οι υπολογισμοί είναι άμεσοι και παρέχουν

$$\vec{\nabla} A = \frac{\partial A}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\hat{\theta} = \frac{A}{r}\left(F\hat{r} + \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial \theta}\hat{\theta}\right) \tag{4.2}$$

$$\vec{\nabla}\left|\vec{\nabla} A\right| = \frac{1}{2\left|\vec{\nabla} A\right|}\vec{\nabla}\left(\left|\vec{\nabla} A\right|^2\right) =$$
$$\frac{(F-1)\left|\vec{\nabla} A\right|}{r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial \theta}\left[\left|\vec{\nabla} A\right| + \frac{r^{2F-2}}{\left|\vec{\nabla} A\right|}\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial a}{\partial \theta}\right)^2\right)\right]\hat{\theta} \tag{4.3}$$

$$\vec{\nabla}^2 A = F^2 r^{F-2} a + r^{F-2}\frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} = \frac{|A|^{\frac{F-1}{F}}}{r} a^{1/F}\left(F^2 + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2}\right) \tag{4.4}$$

Παρόμοιες αντικαταστάσεις ισχύον και για τα δύο ολοκληρώματα k, Q. Οι δύο εξισώσεις που εξετάζουμε είναι η Bernoulli

$$\mu^2 \frac{\left(M^2 + x_A^2 - 1\right)^2 - \left(x_A^2/\varphi\right)^2\left(M^2 + \varphi^2 - \varphi^2/x_A^2\right)^2}{\left(M^2 + \varphi^2 - 1\right)^2} = \xi^2 + \left(\frac{M^2 \vec{\nabla} A}{4\pi c k}\right)^2 \tag{4.5}$$

και η transfield

$$M^2 \mid \vec{\nabla} A \mid^2 \left[\vec{\nabla}^2 A - \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} \ln \mid \vec{\nabla} A \mid\right] + \left(\varphi^2 - 1\right) \vec{\nabla}^2 A \mid \vec{\nabla} A \mid^2 + \varphi \frac{d\varphi}{dA} \mid \vec{\nabla} A \mid^4$$
$$- \frac{\hat{\Gamma} - 1}{\hat{\Gamma}} \nabla \left[16\pi^2 k^2 c^2 \frac{\xi(\xi - 1)}{M^2}\right] \cdot \vec{\nabla} A - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{4\pi k \mu c}{\varphi} \frac{\varphi^2 - x_A^2}{M^2 + \varphi^2 - 1}\right)^2 \cdot \vec{\nabla} A = 0 \quad (4.6)$$

Εξετάζοντας πρώτα την εξίσωση Bernoulli, η πολυπλοκότητα του αριστερού μέλους μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μια εύκολα διαχωρίσιμη έκφραση μπορεί να βρεθεί μόνο αν η μακριά αυτή έκφραση αποτελεί συνάρτηση της γωνίας θ και μόνο. Το γεγονός αυτό προσδιορίζει και την εξάρτηση των M^2, φ, x_A^2 αποκλειστικά από την γωνία θ επίσης. Επιπλέον, η σύνθετη μορφή της έκφρασης που σχετίζει τα ξ και M αποκλείει και αυτή κάθε άλλη επιλογή αφήνοντας μόνο την αποκλειστικά θ εξάρτηση, δηλαδή η ποσότητα $k^2 Q^{\frac{1}{F-1}}$ δεν πρέπει να εμφανίζει ακτινική εξάρτηση και επομένως $2Y(\hat{\Gamma} - 1) + Z = 0$. Κάνοντας τις παραπάνω επιλογές το δεύτερος όρος του δεξιού μέλους είναι $\propto r^{2(F-Y-1)}$ και έχει την ίδια εξάρτηση με την ποσότητα μ^2.
Στρέφουμε, τώρα την προσοχή μας στην transfield εξίσωση και παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτοι όροι είναι ανάλογοι της απόστασης με έναν $3F - 4$ δείκτη δύναμης, ενώ οι δύο τελευταίοι στην $2Y + F - 2$ και $3F - 4$ δύναμη αντίστοιχα. Προκειμένου, λοιπόν, όλοι αυτοί οι όροι να παράγουν μια διαχωρίσιμη μορφή πρέπει να ισχύει $F - Y - 1 = 0$ το οποίο με την σειρά του επιβάλει ότι οι ποσότητες μ και ξ έχουν γωνιακή εξάρτηση μόνο. Τα ίδια συμπεράσματα εφαρμόζονται εύκολα και για το φ ολοκλήρωμα αφού ο τρίτος όρος ισούται με $\varphi^2 r^{3F-4}$.
Μια τελευταία παρατήρηση είναι η ακόλουθη: αν όλες οι ποσότητες δοθούν πάνω στην ευθεία $\theta_0 = const$ που διέρχεται από κάθε πολοειδή γραμμή τότε όλα τα ολοκληρώματα δεν είναι μόνο r ανεξάρτητα, αλλά και η θ εξάρτησή τους περιορίζεται από την απαίτηση οι ποσότητες αυτές είναι ολοκληρώματα κατά μήκος των γραμμών. Έτσι η μορφή τους δεν επιλέγεται ελεύθερα, αλλά προσδιορίζονται από τις μορφές

$$\kappa(\theta) = k_0 a(\theta)^{Y/F} = k_0 a(\theta)^{1-1/F} \qquad q(\theta) = q_0 a(\theta)^{Z/F} = q_0 a(\theta)^{-2(F-1)(\hat{\Gamma}-1)/F}$$

Για καθαρά αλγεβρικούς λόγους, αντί της ποσότητας a χρησιμοποιούμε την ποσότητα $f(\theta) \equiv 4\pi c k_0/(F\varphi^2 a^{1/F})$. Κατά συνέπεια η ποσότητα f είναι ανάλογη της ακτινικής απόστασης κατά μήκος της ίδιας μαγνητικής ροής ή γραμμής ροής: κάθε σημείο μιας γραμμή που διέρχεται από το (r_0, θ_0) ικανοποιεί $r/r_0 = f/f_0$ όπου $f_0 = f(\theta_0)$. Επιπλέον, εισάγουμε μία ακόμα γωνία, ϑ, που συμβολίζει την κλίση των μαγνητικών γραμμών μετρημένη από τον z-άξονα ($\tan\vartheta = B_x/B_z$). Χρησιμοποιώντας την μεταβλητή αυτή, γράφουμε το παράλληλο μοναδιαίο, $\hat{b} \equiv \vec{B}_p/B_p$, και την κάθετη κατεύθυνση, $\hat{n} \equiv -\vec{\nabla} A/\left|\vec{\nabla} A\right|$, προς τις γραμμές ως

$$\hat{b} = \cos(\theta - \vartheta)\,\hat{r} - \sin(\theta - \vartheta)\,\hat{\theta} \qquad \hat{n} = -\sin(\theta - \vartheta)\,\hat{r} - \cos(\theta - \vartheta)\,\hat{\theta} \quad (4.7)$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς οι φυσικές ποσότητες γράφονται

$$\rho = \frac{4\pi\xi k_0^2}{M^2} \left(\frac{4\pi c k_0 r}{F\varphi^2 f}\right)^{2(F-1)} \quad (4.8)$$

$$\vec{B}_p = \frac{FA}{r} \left(\frac{1}{\tan(\theta - \vartheta)}\hat{r} - \hat{\theta}\right) \qquad \vec{B}_y = -4\pi c \frac{k\mu}{\varphi} \frac{\varphi^2 - x_A^2}{M^2 + \varphi^2 - 1}\hat{y} \quad (4.9)$$

$$\vec{E} = -\frac{FA}{r}\varphi\left(\hat{r} + \frac{1}{\tan(\theta-\vartheta)}\hat{\theta}\right) \qquad E = \varphi B_p \tag{4.10}$$

$$\vec{\nabla}A = \frac{FA}{r}\left(\hat{r} + \frac{1}{\tan(\theta-\vartheta)}\hat{\theta}\right) \tag{4.11}$$

$$\gamma = \frac{\mu}{\xi}\frac{M^2 + x_A^2 - 1}{M^2 + \varphi^2 - 1} = \frac{\mu}{\xi(1+\sigma)} \tag{4.12}$$

$$\frac{\gamma\vec{v}_p}{c} = \frac{M^2 F}{4\pi c\xi k}\frac{A}{r}\left(\frac{1}{\tan(\theta-\vartheta)}\hat{r} - \hat{\theta}\right) \qquad \frac{\gamma\vec{v}_y}{c} = \frac{x_A^2\mu}{\xi\varphi}\frac{M^2 + \varphi^2 - \varphi^2/x_A^2}{M^2 + \varphi^2 - 1}\hat{y} \tag{4.13}$$

Πριν προχωρήσουμε στις απαιτούμενες εξισώσεις, μια σύγκριση των εξ.(4.9) και εξ.(4.11) δίνει

$$\tan(\theta-\vartheta) = -\frac{B_p\cdot\hat{r}}{B_p\cdot\hat{\theta}} = \frac{\vec{\nabla}A\cdot\hat{\theta}}{\vec{\nabla}A\cdot\hat{r}} = -\frac{f}{df/d\theta}$$

και έτσι αποκτούμε την πρώτη ημι-γραμμική μας εξίσωση

$$\frac{df}{d\theta} = -\frac{f}{\tan(\theta-\vartheta)} \tag{4.14}$$

Η εξίσωση Bernoulli (εξ.4.5) τώρα γράφεται:

$$\frac{\mu^2}{\xi^2}\frac{\left(M^2 + x_A^2 - 1\right)^2 - \left(x_A^4/\varphi^2\right)^2\left(M^2 + \varphi^2 - \varphi^2/x_A^2\right)^2}{\left(M^2 + \varphi^2 - 1\right)^2} = 1 + \left(\frac{M^2}{\varphi^2\xi f\sin(\theta-\vartheta)}\right)^2 \tag{4.15}$$

αλλά εκτός της αλγεβρικής μορφής της εξίσωσης, στους υπολογισμούς μας θα χρειαστούμε και την διαφορική μορφή της:

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{d\theta} = &-\frac{\varphi^4 f^2\xi\sin^3(\theta-\vartheta)}{M^4\cos(\theta-\vartheta)}\frac{d\xi}{d\theta}\\ &+\left[\frac{\varphi^2\mu^2 f^2\left(\varphi^2 - x_A^2\right)^2\sin^2(\theta-\vartheta)}{\left(M^2+\varphi^2-1\right)^3} - 1\right]\frac{\tan(\theta-\vartheta)}{M^2}\frac{dM^2}{d\theta}\end{aligned} \tag{4.16}$$

Οι ορισμοί του αριθμού Alfvén εξ.(3.7), εξ.(3.20) και εξ.(3.16) δίνουν μια σχέση μεταξύ των γωνιακών παραγώγων των M^2 και ξ ποσοτήτων - σημειώστε ότι τα Q, k είναι σταθερά κατά μήκος των γραμμών:

$$\frac{d\xi}{d\theta} = -\frac{\xi u_s^2}{M^2}\frac{dM^2}{d\theta} \qquad u_s^2 = \frac{\left(\hat{\Gamma}-1\right)(\xi-1)}{\hat{\Gamma} - 1 + \left(2-\hat{\Gamma}\right)\xi} \tag{4.17}$$

όπου $u_s^2 = c_s^2/(1-c_s^2)$ το τετράγωνο της ανηγμένης ταχύτητας του ήχου, αυτή δηλαδή που αντιστοιχεί στην $c_s^2 = \hat{\Gamma}p/(\rho\xi)$ ταχύτητα.

Με την χρήση των συγκεκριμένων εκφράσεων ομοιότητας η εξίσωση transfield, εξ.(4.6), γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^4 f^2}{M^2}\sin(\theta-\vartheta)\cos(\theta-\vartheta)&\left[\frac{\mu^2\left(\varphi^2 - x_A^2\right)^2 M^2}{\left(M^2+\varphi^2-1\right)^3\varphi^2}\frac{dM^2}{d\theta} - \xi\frac{d\xi}{d\theta}\right]\\ &+\left[\frac{\varphi^2-1}{\sin^2(\theta-\vartheta)} + M^2\right]\frac{d\vartheta}{d\theta} + \frac{(F-1)\left(\varphi^2-1\right)}{\sin^2(\theta-\vartheta)}\end{aligned}$$

$$-\varphi^4 f^2 (F-1)\left[\frac{\mu^2}{\varphi^2}\frac{\left(\varphi^2-x_A^2\right)^2}{\left(M^2+\varphi^2-1\right)^2}+\frac{2\left(\hat{\Gamma}-1\right)\xi\left(\xi-1\right)}{\hat{\Gamma}M^2}\right]=0 \quad (4.18)$$

και από τις εξ.(4.16), εξ.(4.17) εξάγουμε μια ημι-γραμμική εξίσωση για της M παραγώγους:

$$\frac{dM^2}{d\theta}=-\frac{(F-1)\,M^2}{\tan\left(\theta-\vartheta\right)}\frac{N}{D} \quad (4.19)$$

όπου

$$N=-\frac{M^2\left(\varphi^2-1\right)}{\varphi^4 f^2\xi^2\sin^2\left(\theta-\vartheta\right)}+\frac{\mu^2}{\xi^2\varphi^2}\frac{M^2\left(\varphi^2-x_A^2\right)^2}{\left(M^2+\varphi^2-1\right)^2}+\frac{2\left(\hat{\Gamma}-1\right)\left(\xi-1\right)}{\hat{\Gamma}\xi}$$

$$D=\frac{1-M^2-\varphi^2}{M^2}u_s^2-\frac{\mu^2}{\varphi^2\xi^2}\frac{M^2\left(\varphi^2-x_A^2\right)^2}{\left(1-M^2-\varphi^2\right)^2}+\frac{M^2}{\varphi^4 f^2\xi^2}\left[\frac{\varphi^2-1}{\sin^2\left(\theta-\vartheta\right)}+M^2\right]$$

Η όλη διαδικασία της ολοκλήρωσης περιγράφεται ως εξής: Οι ημι-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις εξ.(4.14),(4.19)και (4.17), μαζί με την αλγεβρική εξίσωση Bernoulli (εξ.(4.15» και τις αρχικές συνθήκες συνιστούν το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφουν πλήρως την ροή. Οι αρχικές συνθήκες f_0, M_0, h_0, ϑ_0 και οι συγκεκριμένες τιμές F, $\hat{\Gamma}$ του μοντέλου καθορίζουν πλήρως τις διάφορες ποσότητες στην αρχική επιφάνεια θ_0, ενώ τα ολοκληρώματα k, φ, x_A^2, μ, Q συμπληρώνουν το απαιτούμενο σετ παραμέτρων. Η ολοκλήρωση δίνει την εξέλιξη των ποσοτήτων κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμή και στην συνέχεια χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της ομοιότητας ($A\propto\left(r/f\right)^F$) για να επεκτείνουμε την λύση μας και στην υπόλοιπη ροή.

Η άμεση εξέταση της εξ.(4.19) οδηγεί στα παρακάτω συμπεράσματα. Το κύμα αραίωσης προκύπτει όταν ο παρονομαστής της εξίσωσης μηδενίζεται καθώς αυτά είναι και τα μόνα σημεία στα οποία οι παράγωγοι μπορούν να εμφανίζουν ασυνέχεια. Προκειμένου να αποκτήσουμε μια πιο διαισθητική εικόνα, γράφουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με βάση τις φυσικές ποσότητες:

$$N=\frac{B^2-E^2}{4\pi\rho\xi c^2}+\frac{2}{\hat{\Gamma}}\frac{u_s^2}{u_s^2+1}$$

$$D=\frac{\left(\frac{\gamma v_\theta}{c}\right)^4-\left(\frac{\gamma v_\theta}{c}\right)^2\left[u_s^2+\frac{B^2-E^2}{4\pi\rho\xi c^2}\right]+u_s^2\frac{B_\theta^2-E_r^2}{4\pi\rho\xi c^2}}{\left(\frac{\gamma v_\theta}{c}\right)^2} \quad (4.20)$$

Ο μηδενισμός του παρονομαστή γίνεται ξεκάθαρος αν χρησιμοποιήσουμε τις δύο εξ.(4.10) για να γράψουμε τον τελευταίο όρο ως $B_\theta^2-E_r^2=(1-\varphi^2)B_\theta^2$. Η σύγκριση με την εξ.3.72 δείχνει ότι ο παρονομαστής μηδενίζεται όταν η θ-συνιστώσα της ανηγμένης ταχύτητας της ροής γίνει ίση με την ανηγμένη, μαγνητοακουστική, φασική ταχύτητα ενός κύματος που διαδίδεται κατά την θ-διεύθυνση. Αυτά είναι και τα πραγματικά σημεία ανωμαλίας (Bogovalov (1994)) που δημιουργούν την τροποποιημένη αργή/γρήγορή επιφάνεια, ή οριακή χαρακτηριστική στην Υδροδυναμική (limiting characteristic) και έχει ήδη περιγραφεί στην εν.3.3, για αναφορές Tsinganos et al. (1996); Bogovalov (1997). Παρατηρείστε ότι παρόμοιος διαχωρισμός για το σημείο Alfvén δεν υπάρχει καθώς οι τριγωνομετρικοί/προβολικοί όροι στην αντίστοιχη εξίσωση διασποράς αναιρούνται.

Σαν τελευταία παρατήρηση θα θέλαμε να αναφέρουμε ότι η ολοκλήρωση για τον αριθμό Alfvén δεν είναι και η μοναδική μας επιλογή. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να επιλέξουμε την ολοκλήρωση της παραμέτρου μαγνήτισης μιας και οι δύο ποσότητες σχετίζονται με την έκφραση:

$$\sigma = \frac{\varphi^2 - x_A^2}{M^2 + x_A^2 - 1} \tag{4.21}$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = -\frac{\sigma}{M^2 + x_A^2 - 1}\frac{dM^2}{d\theta} = \frac{\sigma}{M^2 + x_A^2 - 1}\frac{(F-1)\,M^2}{\tan(\theta - \vartheta)}\frac{N}{D} \tag{4.22}$$

Η έκφραση αυτή θα αποδειχτεί ιδιαιτέρως χρήσιμη στην επόμενη ενότητα, όταν θα μελετήσουμε το όριο του αμελητέου πολοειδούς πεδίου.

4.2.2 Ροές με αμιγώς τοροειδές μαγνητικό πεδίο

Στο όριο όπου το πολοειδές μαγνητικό πεδίο γίνεται αμελητέο ($B_p \to 0$) μια σειρά από εύκολα χειρίσιμες επιπλοκές ανακύπτουν. Το όριο αυτό έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις αστροφυσικές εφαρμογές και συγκεκριμένα για το μοντέλο του GRB/Collapsar. Συνεπώς, κατά την μελέτη μας δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στο όριο αυτό με ένα τμήμα της να αφιερώνεται αποκλειστικά σε αυτό Sapountzis and Vlahakis (2013). Στο όριο του αμελητέου πολοειδούς πεδίου η μαγνητική ροή A γίνεται μηδέν, ενώ οι ποσότητες k, φ, M^2 άπειρες. Παρόλα αυτά ο λόγος τους διατηρεί πεπερασμένη τιμή

$$\left(\frac{\varphi}{M}\right)^2 = \sigma \qquad \frac{M^2}{k^2} = \frac{4\pi\xi}{\rho} \qquad k\vec{\nabla}A = \vec{\nabla}\psi \tag{4.23}$$

Για τον λόγο αυτό κατά την μελέτη του ορίου η κεντρική ποσότητα στην περιγραφή μας παύει πλέον να είναι η μαγνητική ροή και ο ρόλος της αντικαθίσταται από την ροή των πολοειδών γραμμών ροής ψ η οποία τώρα προσδιορίζει την εκάστοτε γραμμή ροής - βεβαίως στην ιδεατά αγώγιμη ΜΥΔ $v_p \parallel B_p$ και η διαφορά αυτή εισάγει μόνο θέμα αυστηρής φυσικής αποτύπωσης ($\vec{\nabla}\psi = k\vec{\nabla}A$)[†]. Οι αντίστοιχες τροποποιήσεις στα μοναδιαία διανύσματα $\hat{b} \leftrightarrow \hat{v}_p$, $\hat{n}$ ανδ $\tan\vartheta = v_x/v_z$ παρέχονται άμεσα, αλλά η ολοκλήρωση πρέπει πλέον να επιτελεστεί για την μαγνητική παράμετρο και όχι για τον αριθμό Alfvén

$$\sigma = \frac{B_y^2}{4\pi\xi\rho\gamma^2c^2} \tag{4.24}$$

Τα ολοκληρώματα της κίνησης μειώνονται κατά ένα που αντικαθιστά τις απειριζόμενες ποσότητες φ, k με τον πεπερασμένο τους λόγο

$$\Phi_\Psi = \frac{\varphi}{k} = \left(\frac{4\pi\xi\sigma}{\rho}\right)^{1/2} = -\frac{B_y}{\gamma\rho c} \tag{4.25}$$

[†]Προκειμένου να είμαστε ακριβείς, οι εκθέτες των δύο περιγραφών

$$A = r^F a(\theta) \qquad \psi = r^\lambda a_\psi(\theta)$$

σχετίζονται, $\lambda = 2F - 1$, και προκειμένου να αποφευχθεί η σύγχυση στην ενότητα αυτή επιλέχθηκε διαφορετικός συμβολισμός. Παρόμοια συσχέτιση υπάρχει και για τα γωνιακά τμήματα των συναρτήσεων ροής, αλλά η εισαγωγή της ποσότητας f που χρησιμοποιείται στην συνέχεια καθιστά αυτή την επιπλοκή χωρίς περιεχόμενο

Τα υπόλοιπα τρία ολοκληρώματα υφίστανται αμελητέες ή και καθόλου αλλαγές

$$P = \xi\gamma v_y \qquad \mu = \xi\gamma - \frac{\Phi_\Psi B_y}{4\pi c} = \xi\gamma\left(1+\sigma\right) \qquad Q = p/\rho^{\hat{\Gamma}} \tag{4.26}$$

Οι εξισώσεις προς ολοκλήρωση γράφονται ($d\ln\sigma \leftrightarrow -d\ln M^2$)

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\xi u_s^2}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\theta} \qquad \frac{df}{d\theta} = -\frac{f}{\tan\left(\theta-\vartheta\right)} \qquad \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\sigma\left(\lambda-1\right)}{\tan\left(\theta-\vartheta\right)}\frac{N}{D} \tag{4.27}$$

όπου τώρα

$$N = \sigma\left(1+\frac{P^2}{\xi^2}\right) + \frac{2}{\hat{\Gamma}}\frac{u_s^2}{u_s^2+1} \tag{4.28}$$

$$D = \frac{1}{\xi^2 f^2\sigma^2} - \sigma\left(1+\frac{P^2}{\xi^2}\right) - \left(1+\sigma\right)u_s^2 \tag{4.29}$$

Παρατηρείστε ότι η ποσότητα f που εμφανίζεται διατηρεί ακόμα τις μονάδες μήκους της και πέρα από έναν παράγοντα αναλογίας είναι όμοια με αυτή που εμφανίζεται στην προηγούμενη ενότητα. Η εξίσωση Bernoulli γράφεται

$$\frac{1}{f^2\sigma^2\sin^2\left(\theta-\vartheta\right)} = \frac{\mu^2}{\left(1+\sigma\right)^2} - \xi^2 - \left(\frac{P}{c}\right)^2 \tag{4.30}$$

Οι φυσικές ποσότητες δίνονται τώρα από τις σχέσεις

$$\rho = \frac{4\pi\xi\sigma}{\Phi_\Psi^2} \qquad \gamma = \frac{\mu}{\xi\left(1+\sigma\right)} \tag{4.31}$$

$$\frac{\vec{v}}{c} = -\frac{1+\sigma}{\sigma}\frac{1}{\mu f}\left[\frac{1}{\tan\left(\theta-\vartheta\right)}\hat{r} - \hat{\theta}\right] + \left(1+\sigma\right)\frac{P}{\mu c}\hat{y} \tag{4.32}$$

$$\vec{B} = -\frac{4\pi\mu c}{\Phi_\Psi}\frac{\sigma}{1+\sigma}\hat{y} \qquad \vec{E} = \Phi_\Psi\frac{F\psi}{r}\left[\hat{r} + \frac{1}{\tan\left(\theta-\vartheta\right)}\hat{\theta}\right] \tag{4.33}$$

4.2.3 Το υδροδυναμικό όριο

Στο υδροδυναμικό όριο ($\sigma \to 0$), το εγκάρσιο μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται ($\Phi_\Psi^2/\sigma = 4\pi\xi/\rho$). Σε μια τέτοια περίπτωση η παράμετρος μαγνήτισης χάνει τον κεντρικό της ρόλο και η περιγραφή της εξέλιξης της ροής γίνεται με βάση την ενθαλπία η οποία τώρα υποθέτουμε ότι είναι συνάρτηση αποκλειστικά της γωνίας θ[‡]. Ο παράγοντας κανονικοποίησης που υπεισέρχεται στον ορισμό της ποσότητας f οδηγεί στον απειρισμό της ποσότητας αυτής, αλλά το γινόμενο $y \equiv f\sigma$ διατηρεί πεπερασμένη τιμή και χρησιμοποιείται στην θέση της προηγούμενης ποσότητας. Με βάση την νέα μεταβλητή, οι φυσικές ποσότητες γράφονται ως

$$\rho = \frac{\lambda\psi}{c}\xi\, y\, r^{\lambda-1} \qquad \frac{\vec{v}_y}{c} = \frac{P}{\mu}\hat{y} \qquad \frac{\vec{v}_p}{c} = \frac{1}{\mu y}\left[\frac{1}{\tan\left(\theta-\vartheta\right)} + 1\right] \tag{4.34}$$

Οι εξισώσεις που πρέπει, τώρα, να ολοκληρωθούν είναι

$$\frac{d\xi}{d\theta} = -\frac{\left(\lambda-1\right)\xi u_s^2}{2\tan\left(\theta-\vartheta\right)}\frac{N}{D} \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{y}{\tan\left(\theta-\vartheta\right)}\left(1 - \frac{\lambda-1}{2}\frac{N}{D}\right) \tag{4.35}$$

[‡]Στο γενικότερο μοντέλο που εξετάζουμε η πυκνότητα μπορεί να έχει και ακτινική εξάρτηση, αλλά μέσω της μορφής του ολοκληρώματος $Q \propto r^{(1-\lambda)(\hat{\Gamma}-1)}$ οδηγεί σε ενθαλπία με θ μόνο εξάρτηση.

Μοντέλο	σ_0	$-B_y/B_p$	v_{y0}	ξ_0
low poloidal(LP10S)	10	inf	$5 \cdot 10^{-4}$	1
low poloidal mixed(LP05S)	5	inf	$5 \cdot 10^{-4}$	1.83
low poloidal hydro(LP00S)	0	inf	$5 \cdot 10^{-4}$	11
mild poloidal(MP)	10	158	$5 \cdot 10^{-4}$	1.0
equal poloidal(EP)	10	3.5	$5 \cdot 10^{-4}$	1.0
high poloidal mixed (HP0d1S)	$9 \cdot 10^{-3}$	0.2	$5 \cdot 10^{-4}$	10.90
high poloidal thermal (HP00S)	$9 \cdot 10^{-4}$	0.035	$5 \cdot 10^{-4}$	10.99
mild poloidal01(MP01Y)	10	158	0.1	1.0
mild poloidal03(MP03Y)	10	158	0.3	1.0
low poloidal1.5F(LP1.5F)	10	inf	0.1	1.0
low poloidal2.0F(LP2.5F)	10	inf	0.1	1.0

Πίνακας 4.1: Οι αρχικές συνθήκες των μοντέλων μας όπως θέτονται στο $\theta_0 = -\pi/2$. Όλα τα μοντέλα αναφέρονται σε ψυχρές εκροές $\xi = 1$, εκτός των (ΗΠ) όπου στην πραγματικότητα είναι θερμικά κυριαρχούμενες εκροές ($\xi_0 \sim 11$, $\hat{\Gamma} = 4/3$). Όλα τα μοντέλα έχουν κοινή συνολική ροή ενέργειας ($\mu = 1100$), τον ίδιο παράγοντα Lorentz ($\gamma_0 = 100$) και όλα είναι ομογενή ($F \sim 1$), εκτός των δύο τελευταίων όπου $F = 1.5$, 2 αντίστοιχα . Οι εκροές θεωρούνται αρχικά σε κυλινδρική ισορροπία και έτσι οι πολοειδείς μαγνητικές γραμμές είναι αρχικά παράλληλες προς τον z-άξονα ($\vartheta_0 = 0$).

$$N = \frac{2}{\hat{\Gamma}} \frac{u_s^2}{u_s^2 + 1} \qquad D = \frac{1}{\xi^2 y^2} - u_s^2$$

ενώ η εξίσωση Bernoulli γράφεται

$$\frac{1}{y^2 \sin^2(\theta - \vartheta)} = \mu^2 - \xi^2 - P^2 \tag{4.36}$$

4.3 Αποτελέσματα στην Αυτο-Όμοια Αραίωση

4.3.1 Οι αρχικές συνθήκες

Αφού το σύστημα των εξισώσεων έχει προσδιορισθεί, μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση και την παραμετρική μελέτη του φαινομένου της αραίωσης. Αλλά το πλήθος των μεταβλητών καθιστά επιτακτική την προσεκτική επιλογή των αρχικών συνθηκών. Προκειμένου να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης, θέσαμε κοινό συνολικό ενεργειακό περιεχόμενο για όλες τις εκροές που παρουσιάζουμε στο κεφάλαιο αυτό, ενώ κοινός είναι και ο παράγοντας Lorentz, $\gamma_0 \sim 100$. Οι μεταβλητές υπό εξέταση είναι οι σ_0, $(-B_y/B_p)_0$, v_{y0}, F η επίδρασή των οποίων θα συζητηθεί στην συνέχεια. Επιπλέον, όλες οι εκροές αναφέρονται σε κυλινδρική ισορροπία, δηλαδή με μηδενική κλίση ($\vartheta_0 = 0$), προκειμένου να επικεντρωθούμε μόνο στην επίδραση που η αραίωση επιφέρει στην εκροή.

Ένα σημείο που αξίζει να αναφερθούμε είναι το πλήθος των ανεξαρτήτων παραμέτρων που πρέπει να προσδιοριστεί. Το σύνολο των ποσοτήτων που εν γένει προσδιορίζουν την ΜΥΔ ροή είναι $8 - 2 = 6$ ($\vec{v}$, $\vec{B}$ και δύο θερμοδυναμικές παράμετροι μειωμένες από τις $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ και $E_y = 0$). Ακολουθώντας την παραπάνω συζήτηση, έχουμε ήδη ορίσει 5 ποσότητες (μ, γ_0, σ_0, v_{y0}, ϑ_0) και επομένως απομένει να προσδιοριστεί μόνο μία. Επιλέγουμε

την πυκνότητα ρ ως την ποσότητα αυτή, μέσω της οποίας μπορούν πλέον να προσδιοριστούν όλα τα ολοκληρώματα, οι ζητούμενες αρχικές συνθήκες και οι φυσικές ποσότητες συμπεριλαμβανομένων όλων των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου και του σχετικού τους λόγου

$$\zeta \equiv B_y/B_p \tag{4.37}$$

Πλαίσιο 4.2: Προσδιορισμός των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου από τις αρχικές συνθήκες

Οι υπολογισμοί καθίστανται ευκολότεροι αν ορίσουμε δύο μεταβλητές που συμβολίζουν τον λόγο και το γινόμενο των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου

$$\zeta_1 = |B_{y0}B_{p0}| \qquad \zeta_2 = |B_{y0}/B_{p0}| \qquad \leftrightarrow \qquad B_{p0} = \sqrt{\zeta_1/\zeta_2} \qquad B_{y0} = -\sqrt{\zeta_1\zeta_2}$$

Η διαδικασία στηρίζεται στον προσδιορισμό των ποσοτήτων μ, γ_0, σ_0, v_{y0}, ϑ_0 στην βάση μιας συγκεκριμένης πολοειδούς γραμμής (r_0, θ_0). Ο δείκτης ομοιογένειας του εκάστοτε μοντέλου F θεωρείται επίσης δεδομένος, ενώ και η πυκνότητα ρ έχει δοθεί - σημειώστε ότι με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται και η $v_{p0} = c\sqrt{1 - v_{y0}^2 - 1/\gamma^2}$.
Οι τιμές των ολοκληρωμάτων k, φ, P δεν προσδιορίζεται ακόμα πλήρως καθώς περιλαμβάνουν τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου. Το ίδιο ισχύει και τον αριθμό Alfvén M, ενώ τα υπόλοιπα δύο ολοκληρώματα Q, μ και οι ποσότητες $\sigma_0\,\xi_0$ έχουν ήδη δοθεί ή προσδιοριστεί. Η ποσότητα f δίνεται από την εξ.4.9

$$f_0 = \frac{B_{p0}\,|sin\,(\theta_0 - \vartheta_0)|}{r_0^{F-1}F} \tag{4.38}$$

Οι δύο εξισώσεις που μένουν να εξεταστούν είναι η έκφραση του $\gamma v_y/c$, ορ ή ισοδύναμα από τον ορισμό του σ

$$\sigma_0 = \frac{(v_{y0} + \zeta_2 v_{p0})\,\zeta_1}{4\pi\xi_0\gamma_0^2\rho c^2 u_{p0}} \Rightarrow \qquad \zeta_1 = \frac{4c^2\pi\xi_0 v_{p0}\gamma_0^2\rho\sigma_0}{(v_{y0} + v_{p0}\zeta_2)} \tag{4.39}$$

και η εξίσωσηBernoulli που καταλήγει σε ένα πολυώνυμο τρίτης τάξης

$$\frac{F^2}{4\pi\rho\gamma_0^4 c\xi_0^3\sigma_0^3 v_{p0}\sin\left(\theta_0 - \vartheta_0\right)^4}\zeta_2^3 - \frac{v_{p0}}{c}\zeta_2 - \frac{v_{y0}}{c} = 0 \tag{4.40}$$

Η επίλυση του τελευταίου ως προς ζ_2 δίνει επίσης το ζ_1 και επομένως προσδιορίζει όλες τις ποσότητες.
Έχει ενδιαφέρον να παράγουμε κάποια όρια για το εύρος και την επίδραση που η επιλογή των αρχικών συνθηκών επιβάλει. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε τον γρήγορο μαγνητοακουστικό αριθμό

$$M_f^2 = \frac{\zeta_2 v_{p0}(v_{y0} + v_{p0}\zeta_2)}{c^2\sigma\left[1 - v_{y0}^2 - 2v_{p0}v_{y0}\zeta_2 + \left(1 - v_{p0}^2\right)\zeta_2^2\right]}$$

Ο αριθμός M_f^2 πρέπει να υπερτερεί της μονάδας για μια γρήγορη μαγνητοακουστική εκροή, αλλά η επίδραση των διαφόρων παραγόντων δεν είναι ευδιάκριτη στην γενική

περίπτωση. Παρόλα αυτά, για χαμηλές εγκάρσιες ταχύτητες $v_{y0} \ll v_{p0}$ η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην

$$M_f^2 = \frac{(\gamma^2 - 1)\,\zeta_2^2}{(\gamma^2 + \zeta_2^2)\,\sigma}$$

Μπορούμε επομένως να συμπεράνουμε ότι όταν ο ζ_2 μειώνεται, ο γρήγορος μαγνητοακουστικός αριθμός μειώνεται και αυτός, ενώ η ενθαλπία δρα ενισχυτικά στην τιμή του μέσω της μείωσης της παραμέτρου μαγνήτισης υπό την προϋπόθεση βεβαίως ότι η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή ($\mu = \gamma\xi(1+\sigma)$). Χρησιμοποιώντας αυτό το απλό αποτέλεσμα μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και το μέγιστο πολοειδές πεδίο που επιτρέπεται για μια γρήγορη μαγνητοακουστική εκροή - για μια υπερ-σχετικιστική ροή η τιμή αυτή είναι $\zeta_2 < \sqrt{\sigma}$. Η επίδραση της αρχικής εγκάρσιας ταχύτητα είναι απαιτεί πολύπλοκους αλγεβρικούς υπολογισμούς και έτσι παραλείπεται.

Η διαδικασία είναι πολύπλοκη χωρίς κάποια περαιτέρω φυσική σημασία και οι σχετικοί υπολογισμοί περιλαμβάνονται στο πλαίσιο.4.2.

Σαν πρώτο βήμα επιλέξαμε να μελετήσουμε την επίδραση της ενέργειας poynting σε αντιδιαστολή με την θερμική ενέργεια ή με άλλα λόγια της μαγνητικής παραμέτρου σε σχέση με την ενθαλπία ξ. Για τον σκοπό αυτό, επιλέξαμε 3 μοντέλα με διαφορετικές παραμέτρους μαγνήτισης, αλλά πολύ χαμηλού πολοειδούς μαγνητικού πεδίου ($LP10S$, $LP05S$, $LP00S$). Οι αρχικές παράμετροι των μοντέλων αυτών εμφανίζονται στο πρώτο τμήμα του πίνακα.4.1. Στο δεύτερο μέρος της προσέγγισής μας επιλέξαμε μια συγκεκριμένη υψηλή τιμή της παραμέτρου μαγνήτισης, $\sigma_0 \sim 10$, και μελετήσαμε την περίπτωση όπου το πολοειδές πεδίο ισχυροποιείται - μοντέλα $MP00$, $EP00$, TP, HP στο δεύτερο τμήμα του πίνακα. Παρατηρήστε ότι καθώς το πολοειδές μαγνητικό πεδίο αυξάνει η εισαγωγή ενός θερμικού περιεχομένου καθίσταται αναπόφευκτη. Βασικά στις πολύ χαμηλές τιμές της παραμέτρου ζ_0 η ενέργεια poynting γίνεται ελάχιστη και τα μοντέλα είναι στην πραγματικότητα θερμικά κυριαρχούμενα (thermal driven), βλέπε πλαίσιο.4.2 για λεπτομέρειες.

Μια τρίτη επιλογή παραμέτρων επιλέχθηκε ώστε να εξεταστεί την επίδραση των αρχικών εγκάρσιων ταχυτήτων ($MP01Y$, $MP03Y$), ενώ συμπεριλάβαμε και μη-ομογενή προκειμένου να μελετηθεί η επίδραση της μη-ομοιογένειας ($LP15F$, $LP20F$). Τέλος, παρουσιάζουμε και 3 μοντέλα που αντιστοιχούν στις 1D και χρονοεξαρτώμενες προσομοιώσεις των Mizuno et al. (2008) και Zenitani et al. (2010) έτσι ώστε να επαληθεύσουμε την ισχύ των μοντέλων με περιπτώσεις όπου η εξωτερική πίεση δεν είναι αμελητέα. Οι αρχικές παράμετροι για τα μοντέλα που αντιστοιχούν στις αριθμητικές προσομοιώσεις δεν έχουν φυσικά το ίδιο ενεργειακό περιεχόμενο και τους αρχικούς παράγοντες Lorentz που θεωρήσαμε παραπάνω. Οι αρχικές συνθήκες των μοντέλων αυτών εμφανίζονται στον πίνακα.4.2.

Μοντέλο	σ_0	B_p	$-B_y$	μ
poloidal field (MHDA)	0	21.27	0	$2.83 \cdot 10^6$
transverse field (MHDB)	100	0	149	$5.38 \cdot 10^5$
hydrodynamic flow (HDB)	0	0	0	$4.11 \cdot 10^4$

Πίνακας 4.2: Όλα τα μοντέλα έχουν το ίδιο αρχικό κινητικό περιεχόμενο ($\gamma = 7.089$), σε μια αμιγώς πολοειδή και παράλληλη προς τον z-άξονα εκροή ($\vartheta_0 = 0$, $v_{z0} = 0.990$). Η θερμική ενέργεια είναι επίσης παραπλήσια ($\rho = 10^{-4}$, $P = 10$, $\hat{\Gamma} = 4/3$, $\xi = 4 \cdot 10^5$).

4.3.2 Αποτελέσματα

Αμελητέο μαγνητικό πολοειδές πεδίο και ομογενείς ροές

Εφαλτήριο για αυτή την σειρά ολοκληρώσεων είναι η μελέτη της μαγνητικά κυριαρχούμενης αραίωσης συγκρινόμενη με το θερμικά κυριαρχούμενο φαινόμενο. Η μαγνητικά κυριαρχούμενη αραίωση είναι εκείνη κατά την οποία η κυριαρχούμενη ενέργεια που μετατρέπεται σε κινητική είναι η ροή poynting. Λόγω της παραλληλίας $\vec{u}_p \parallel \vec{B}_p$, η συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου που καθορίζει την ροή poynting είναι η εγκάρσια, ειδικά όταν η εγκάρσια ταχύτητα είναι αμελητέα ($\vec{S}_p \propto B_y\,(v_y B_p - B_y v_p)$ το διάνυσμα poynting στο πολοειδές επίπεδο). Συνεπώς, τα μοντέλα αυτά περιέχουν αμελητέο πολοειδές μαγνητικό πεδίο, αμελητέα εγκάρσια ταχύτητα και η βασική σύγκριση επιτελείται στην κατεύθυνση υψηλή προς χαμηλότερη μαγνητική παράμετρος, χαμηλή προς υψηλότερη ενθαλπία και σε ένα συνδυασμό ώστε η συνολική ενέργεια να είναι σταθερή.

Οι συγκεκριμένες ολοκληρώσεις έχουν και το μεγαλύτερο αστροφυσικό ενδιαφέρον. Το γνωστό μοντέλο του GRB/Collapsar έχει ήδη περιγραφεί στην εν.1.2, ενώ αναμένεται ότι κατά την στιγμή της διάρρηξης το τοροειδές μαγνητικό πεδίο είναι και το κυρίαρχο. Αλλά πέρα από τις GRB η αραίωση αναμένεται να λαμβάνει χώρα σε κάθε φαινόμενο όπου η εξωτερική πίεση εμφανίζει απότομη μείωση. Μοναδικές προϋποθέσεις για την εφαρμογή του μηχανισμού είναι η εκροή που έχει ήδη επιταχυνθεί σε ταχύτητες μεγαλύτερες από την γρήγορη μαγνητοακουστική ή την ταχύτητα του ήχου ανάλογα με την παρουσία μαγνητικού πεδίου ή όχι. Η τιμή της συνολικής ενέργειας $\mu \sim 1100$ επιλέχθηκε με βάση τις αστροφυσικές απαιτήσεις, αφού αντιστοιχεί και στον μέγιστο επιτρεπτό παράγοντα Lorentz ($\gamma_{max} \sim \mu$), δηλαδή της ίδιας τάξης με τις τυπικές αναμενόμενες τιμές στις GRB ($\gamma \sim 100 - 1000$). Αντιθέτως, ο παράγοντας Lorentz κατά την στιγμή της διάρρηξης και η μαγνητική παράμετρο είναι άγνωστες καθώς δεν υπάρχουν παρατηρησιακά στοιχεία. Η πρώτη απροσδιοριστία είναι μικρής σημασίας και τυπικές τιμές ($\gamma_0 \sim 100$) επιλέχθηκαν, ενώ η δεύτερη καλύπτεται από την παρούσα μελέτη. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζουμε μια πιο αναλυτική συζήτηση και την σχετική εφαρμογή στον GRB/Collapsar μοντέλο.

Τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης εμφανίζονται στο σχ.4.2. Η πρώτη γραμμή διαγραμμάτων παρουσιάζει το φυσικό σχήμα της εκροής και την χωρική κατανομή του παράγοντα Lorentz - για την καλύτερη απεικόνιση σχεδιάστηκαν επίσης μερικές γραμμές ροής. Σύμφωνα με τα διαγράμματα η απόδοση φαίνεται να εστιάζεται κυρίως στην εξωτερική περιοχή της εκροής, αλλά στο σημείο αυτό χρειάζεται μια διευκρίνηση καθώς στην πραγματικότητα η επιτάχυνση θα είναι μέγιστη για όλα τα τμήματα της εκροής. Το γεγονός αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό μέσω της αποκλειστικής γωνιακής εξάρτηση του παράγοντα Lorentz ($\gamma = \mu/[\xi(1+\sigma)]$, όλες οι συναρτήσεις εξαρτώνται μόνο από την γωνία θ) και την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας. Κατά συνέπεια, αν η ροή αποκτήσει μέγιστη τιμή του γ, για παράδειγμα κατά μήκος της πλέον εξωτερικής γραμμής, η τιμή αυτή θα διαδοθεί μέσω της $\theta = const$ διεύθυνσης ξεκινώντας από τις γραμμές που είναι κοντά στο σύνορο προς τις εσωτερικές. Έτσι το κατάλληλο μέτρο για την απόδοση που επιτυγχάνεται μεταξύ των διαφόρων μοντέλων δεν είναι η απόδοση αυτή καθεαυτή, αλλά η γωνία θ ή παρομοίως η σχετική απόσταση $r/r_0 = f/f_0$, στην οποία η τιμή αυτή επιτυγχάνεται. Για τον ίδιο λόγο οι μονάδες μήκους που εμφανίζονται στα διαγράμματα αυτά είναι τυχαίες, ενώ η αντιστοιχούσα τιμή τους προσδιορίζεται από την εκάστοτε εφαρμογή.

Οι ενεργειακές ποσότητες κατά μήκος μια γραμμής που ανακύπτει από το σημείο $r_0 = 1$ παρουσιάζονται καλύτερα στην δεύτερη γραμμή διαγραμμάτων, όπου σχεδιάσαμε τις ενεργειακές ροής που συμμετέχουν στο φαινόμενο: poynting ($\xi\sigma\gamma$ κόκκινη), θερμική ($(\xi-1)\gamma$

γαλάζια) και συνολική (μ μπλε)[§]. Στα διαγράμματα αυτά περιλάβαμε και τον παράγοντα Lorentz, ο οποίος σε μια ψυχρή ροή αντιστοιχεί στην αδρανειακή ενέργεια (ενέργεια μάζας ηρεμίας συν την κινητική) - σε ροή με σημαντικό θερμικό περιεχόμενο η σχετική ποσότητα είναι η $\xi\gamma$, αλλά αντί αυτής επιλέχθηκε πάλι ο παράγοντας Lorentz για να δείξει την επιτάχυνση της εκροής. Η εικόνα που τα διαγράμματα αυτά υποδεικνύουν είναι ότι κατά την διάρκεια της αραίωση και οι δύο ροές poynting και θερμικές μετατρέπονται αποδοτικά σε κινητικές φτάνοντας στην μέγιστη δυνατή τιμή ($\gamma_{max} \sim \mu$), η ποσότητα $(r/r_0)_{95}$ που εμφανίζεται στα διαγράμματα αντιστοιχεί στο σημείο όπου ο γ φτάνει στο 95% της μέγιστης τιμής του. Η αύξηση της θερμικής ενέργειας που παρατηρείται στο $LP05S$ οφείλεται στην αύξηση της κινητικής ενέργειας της ροής και όχι σε μετατροπή κάποιας μορφής ενέργειας σε θερμική (βλέπε ξ στο διάγραμμα παρακάτω). Η ομαλότερη και επομένως με μεγαλύτερη κλίμακα δράσης της θερμικά κυριαρχούμενης αραίωσης είναι εμφανής και σχολιάζεται περαιτέρω στην εν.4.5. Επίσης εμφανής είναι η διαφορά στην απόσταση/κλίση (θ_{RW}) όπου βρίσκεται το μέτωπο του κύματος αραίωσης (διακεκομμένες γραμμές).

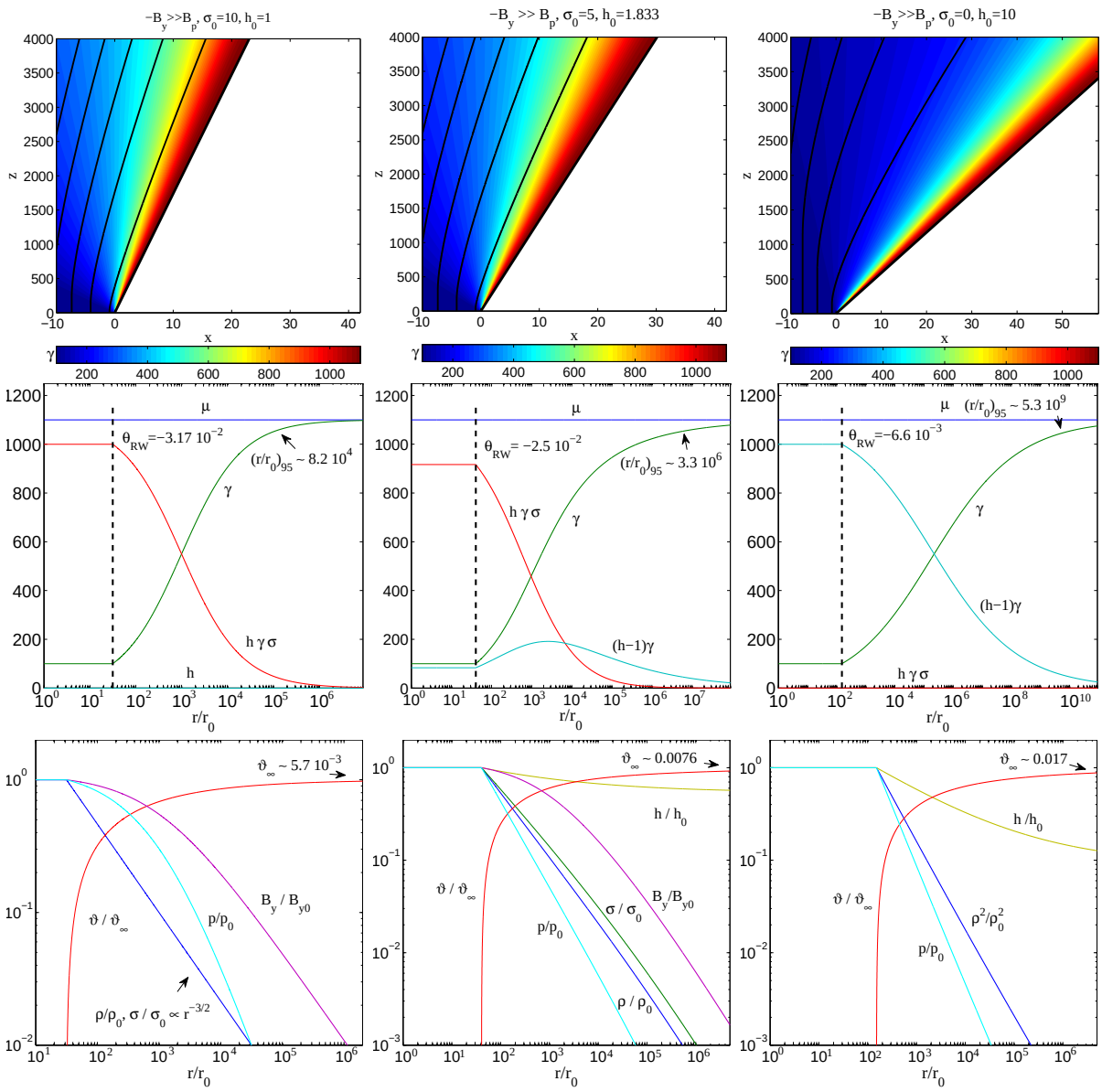
Στην επόμενη σειρά διαγραμμάτων που παρουσιάζεται η εξέλιξη των ολοκληρωτέων ποσοτήτων κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμής, ενώ περιλαμβάνεται και ένα σημαντικό συμπέρασμα της μελέτης μας. Κατά τα μαγνητικό κυριαρχούμενο φαινόμενο, η παράμετρος μαγνήτισης μειώνεται βάση ενός νόμου δύναμης($\sigma \propto r^{-2/3}$) με την συμπεριφορά αυτή να εγκαταλείπεται καθώς κινούμαστε στα πιο θερμικά μοντέλα. Η ερμηνεία αυτού του νόμου είναι γεωμετρικής φύσεως, ενώ παρατηρείται ακόμα και σε ροές που περιλαμβάνουν πολοειδές πεδίο. Η σχετική συζήτηση γίνεται στο τέλος του κεφαλαίου. Η τελική κλίση των γραμμών ($\Theta_{PM} = \vartheta_\infty \sim \theta_\infty$) υποδηλώνει την μεγαλύτερη έκταση της αραιωμένης περιοχής καθώς μεταβαίνουμε σε ροές με μικρότερο σ όπως άλλωστε ήταν εμφανές και από την πρώτη σειρά διαγραμμάτων. Η πίεση (γαλάζιο) στις μαγνητικά κυριαρχούμενες περιοχές οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο B_y και ακολουθεί τον νόμο δύναμης αυτού ($B_y \propto r^{-2/3}$, $B_y \propto r^{-4/3}$) αν και με λιγότερο οξύ τρόπο από αυτόν της μαγνητικής παραμέτρου. Στο μοντέλο $LP00S$ η πίεση κυριαρχείται από την θερμική πίεση του αερίου και επομένως ακολουθεί την εξέλιξη της πυκνότητας, ενώ στο μεικτό μοντέλο $LP05S$ η εξέλιξη είναι ένας συνδυασμός και των δύο συνιστωσών του πλάσματος.

Επίδραση του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου

Τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν παραπάνω εστιάζουν στην αστροφυσική εφαρμογή του φαινομένου με αποτέλ4εσμα η πολοειδής συνιστώσα να εκλείπει. Προκειμένου να καταλήξουμε σε μια πληρέστερη θεωρητική μελέτη και να εξάγουμε γενικότερα συμπεράσματα επεκτείνουμε μελέτη μας και προς την μελέτη της επίδρασης του πολοειδούς πεδίου. Συνεπώς, επιλέξαμε τα μοντέλα (MP, EP, $HP0d1S$, $HP00S$) στα οποία οι εκροές έχουν αμελητέα εγκάρσια ταχύτητα v_{y0}, αλλά εμφανίζουν διαφορετικής σχετικής ισχύος πολοειδή πεδία ζ_i. Στις περιπτώσεις όπου το πολοειδές πεδίου είναι κυρίαρχο ($B_p > B_y$) απαιτείται ενίσχυση της εκροής από π.χ. ενθαλπία αφού σε διαφορετική περίπτωση η εκροή γίνεται υπο-γρήγορη, βλέπε πλαίσιο.4.2[¶]. Βέβαια η επιλογή αυτή δεν είναι ιδανική καθώς επηρεάζει τόσο την κλίση του κυματικού μετώπου όσο και την έκταση της αραιωμένης περιοχής. Είναι, όμως, αναπόφευκτη αν θέλουμε να μεταβούμε στην περιοχή του ισχυρού πολοειδούς πεδίου και έτσι θα πρέπει να έχουμε την προσοχή μας ώστε η σύγκριση να αναφέρεται σε περιοχές παρόμοιου

[§]Για να είμαστε ακριβείς οι παραπάνω ποσότητες επί c^2 εκφράζουν την ροή ενέργειας κανονικοποιημένη προς την ροή μάζας μετρούμενης στο εργαστηριακό σύστημα

[¶]Μια διαφορετική επιλογή θα ήταν η αυξημένη v_{y0}, αλλά η επιλογή αυτή περιπλέκει την παραμετρική μας μελέτη



Σχήμα 4.2: Τα αποτελέσματα των τριών μοντέλων ($LP10S$, $LP05S$, $LP00S$). 1^η **Γραμμή:** Το φυσικό σχήμα της εκροής και η χωρική κατανομή του παράγοντα Lorentz (χρωματική κλίμακα). 2^η **Γραμμή:** Οι ενεργειακές ποσότητες κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμής. Εμφανίζονται η συνολική ροή ενέργειας (μ μπλε), ο παράγοντας Lorentz (γ πράσινη), η ροή poynting ($\xi\gamma\sigma$ κόκκινη) και η θερμική ενέργεια($(\xi-1)\gamma$ γαλάζια). Στο κρύο όριο ο γ αντιστοιχεί επίσης και στην αδρανειακή ενέργεια, ενώ σε μια θερμική ροή ο γ υποδηλώνει μόνο την ταχύτητά της. Οι διακεκομμένες γραμμές παριστάνουν το μέτωπο του κύματος αραίωσης, ενώ $(r/r_0)_{95}$ είναι το σημείο όπου ο γ λαμβάνει το 95% οφ της μέγιστης τιμής του ($\gamma_{max} \sim \mu$). 3^η **Γραμμή:** Η εξέλιξη των ολοκληρωτέων ποσοτήτων και οι φυσικές ποσότητες της ροής κανονικοποιημένες στις αρχικές τους τιμές (εκτός της ϑ). Παρατηρείστε τον νόμο δύναμης που η παράμετρος μαγνήτισης ακολουθεί (πράσινη) στο $LP10S$ μοντέλο, ενώ στα υπόλοιπα όχι. Η κλίση των πολοειδών γραμμών (κόκκινη) και η ασυμπτωτική τιμή της (ϑ_∞) επιδεικνύουν την μεγαλύτερη έκταση της περιοχής όσο το θερμικό περιεχόμενο γίνεται κυρίαρχο. Παρατηρείστε την πιο ρηχή μείωση της ενθαλπίας (χαλκοκίτρινη) στην οποία οφείλεται η μακρύτερη κλίμακα δράση της θερμικά κυριαρχούμενης αραίωσης. Τέλος, συμπεριλάβαμε επίσης την εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου (μοβ) και της συνολικής πίεσης (γαλάζια).

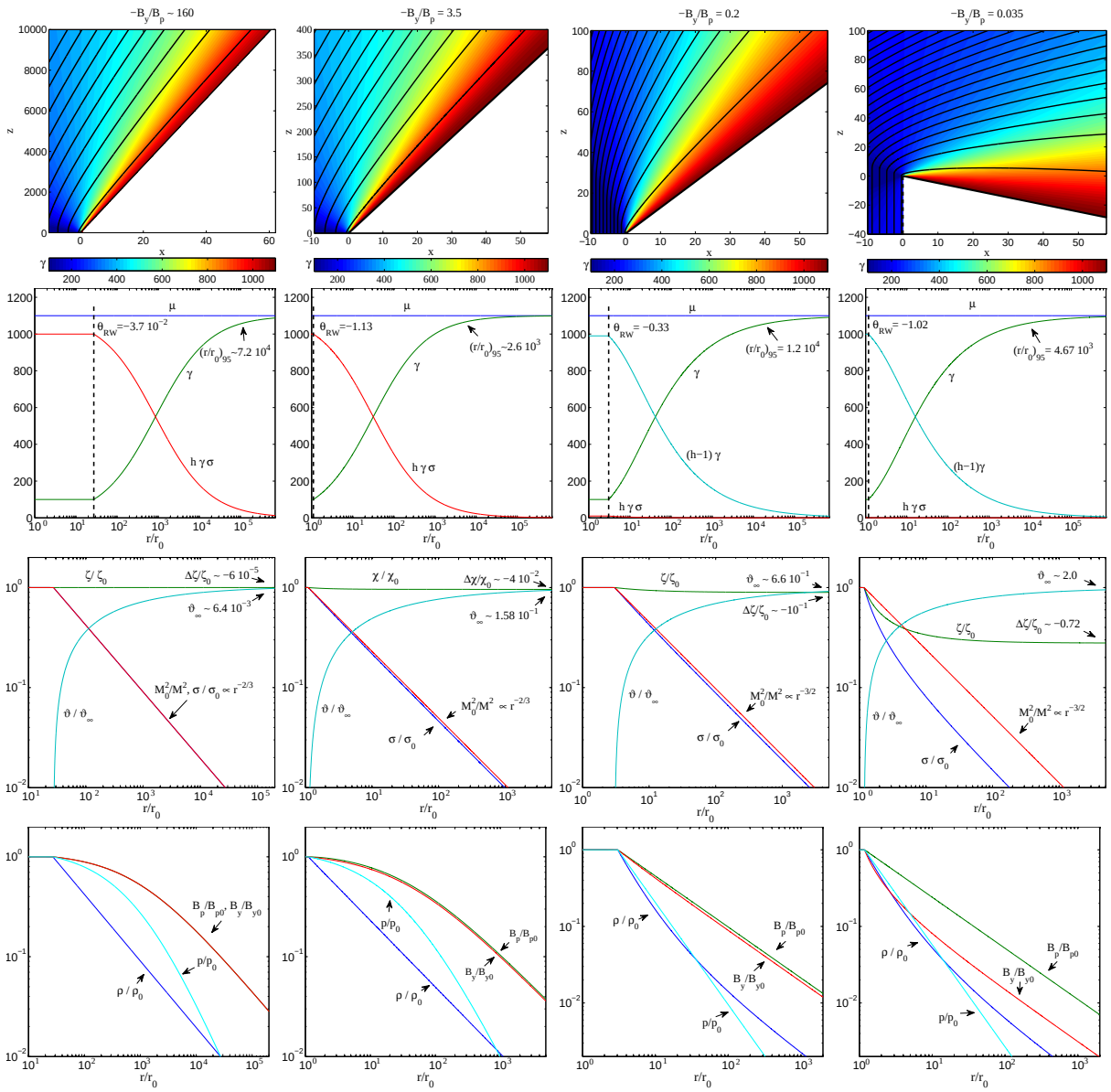
θερμικού περιεχομένου, εδώ $MP - EP$ και $HP0d1S - HP00S$.

Τα αποτελέσματα για τα συγκεκριμένα μοντέλα εμφανίζονται στο σχ.4.3. Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, η πρώτη γραμμή διαγραμμάτων αναφέρεται στην φυσική εικόνα της εκροής, περιέχει κάποιες γραμμές ροής και την χωρική κατανομή του παράγοντα Lorentz φαστορ, ενώ ισχύουν οι ίδιοι συλλογισμοί για την σχέση μεταξύ απόδοσης και αυτο-ομοιότητας. Το πιο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αναφέρεται σαφώς στην έκταση της αραιωμένης περιοχής. Μάλιστα στο τελευταίο σενάριο η στροφή είναι τόσο μεγάλη που η ροή γυρνάει προς τα πίσω καλύπτοντας περιοχές χαμηλότερα από την θέση της οξείας γωνίας - μια τέτοια περίπτωση είναι φυσική και αναμενόμενη και δεν περιέχει κάποια αντίφαση.

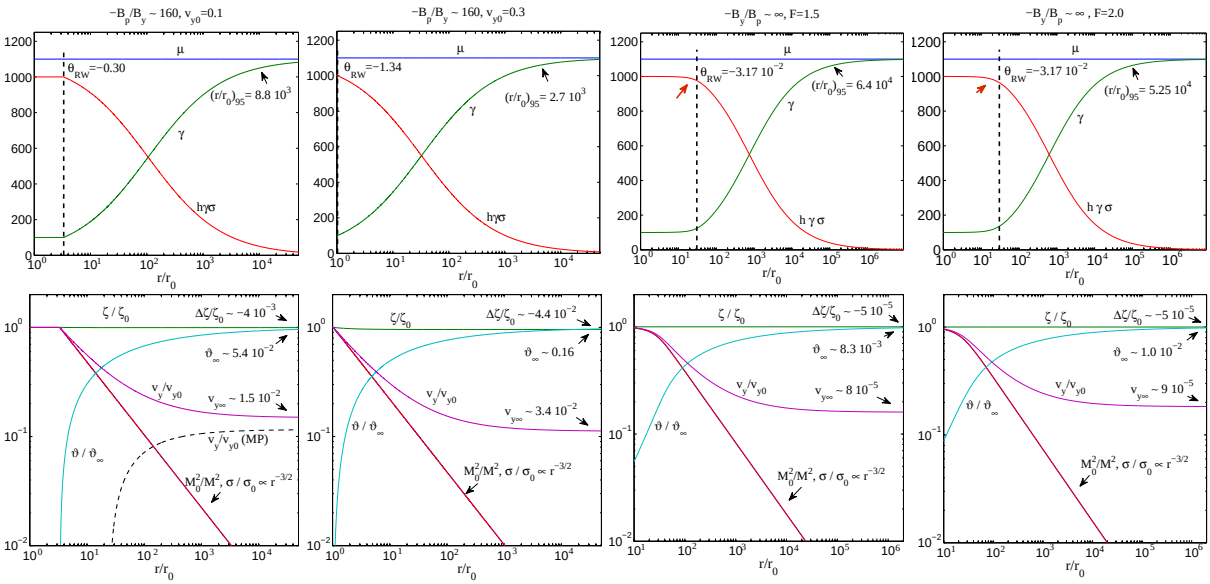
Η χωρική κλίμακα της επιτάχυνσης και οι ενεργειακές ποσότητες μιας γραμμής που ανακύπτει από το $r_0 = 1$ φαίνονται στην δεύτερη γραμμή: ροή poynting ($\xi\sigma\gamma$ κόκκινη), συνολική (μ μπλε), θερμική ($(\xi - 1)\gamma$ γαλάζια), παράγοντας Lorentz (γ πράσινη). Παρουσιάζονται οι ενεργειακές μεταβολές που λαμβάνουν χώρα κατά την αραίωση με την ροή poynting να μετατρέπεται σε κινητική στα μοντέλα $MP-EP$, ενώ στα μοντέλα $HP0d1S-HP00S$ η μαγνητική ροή είναι αμελητέα και η επιτάχυνση συντελείται εις βάρος της θερμικής. Η επίδραση του πολοειδούς πεδίου αποτυπώνεται τόσο στην κλίση του μετώπου κύματος (θ_{RW} διακεκομμένες γραμμές) με το πολοειδές πεδίο να επιδρά στην ταχύτερη εμφάνιση του μετώπου και στις χωρικές κλίμακες της επιτάχυνση, όπου το πολοειδές πεδίο οδηγεί σε μικρότερες κλίμακες - η ποσότητα $(r/r_0)_{95}$ έχει την ίδια σημασία με αυτή που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα. Σε συνδυασμό με την προηγούμενη ομάδα διαγραμμάτων καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πολοειδές πεδίο αυξάνει την έκταση της αραιωμένης περιοχής.

Ο σημαντικός νόμος δύναμης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα παίρνει εδώ ένα γενικότερο και πιο ακριβές περιεχόμενο, βλέπε τρίτη σειρά διαγραμμάτων. Γενικά η σειρά αυτή παρουσιάζει την εξέλιξη των ολοκληρωτέων ποσοτήτων κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμής. Ο αριθμός Alfvén ακολουθεί επακριβώς μείωση νόμου δύναμης ($M \propto r^{2/3}$), ενώ η παράμετρος μαγνήτισης συμφωνεί μόνο στις ροές υψηλού ζ και αποκλίνει σημαντικά όταν το πολοειδές πεδίο αυξάνει, η αυστηρή απόδειξη και η φυσική ερμηνεία παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα. Παρουσιάζουμε επίσης την κλίση των πολοειδών γραμμών και την ασυμπτωτική της τιμή ($\theta_{PM} = \vartheta_\infty \sim \theta_\infty$), ενώ συμπεριλάβαμε την εξέλιξη του ζ ο οποίος σε όλες πλην της τελευταίας περιπτώσεις δεν μεταβάλλεται σημαντικά. Η παρουσία της διαφοράς αυτής δεν θα ήταν άξια λόγου αν δεν επέφερε σημαντικές επιπλοκές κατά την εξαγωγή των αναλυτικών εκφράσεων που υπολογίζουν την γωνία θ_{PM}.

Η τελευταία σειρά διαγραμμάτων παρουσιάζει την εξέλιξη των φυσικών ποσοτήτων κανονικοποιημένες στις αρχικές τους τιμές. Η μείωση που παρατηρείται σε όλες είναι διαισθητικά αναμενόμενη λόγω της αραίωσης. Στις ψυχρές ροές (MP, EP) η πυκνότητα μειώνεται ακολουθώντας τον $-2/3$ εκθέτη όπως υποδεικνύει η εξ.(4.8) ($r/f = const$), αλλά αποκλίσεις εμφανίζονται καθώς προχωράμε προς την θερμικά κυριαρχούμενη περιοχή όπως επίσης υποδεικνύει η συγκεκριμένη σχέση. Ανάλογη συμπεριφορά ακολουθούν και οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου με μικρές διαφορές να εμφανίζονται μόνο για πολύ μικρές τιμές του ζ_0που είναι επίσης εμφανείς στην $\Delta\zeta$ εξέλιξης στα διαγράμματα της προηγούμενης σειράς. Παρά το υψηλό θερμικό περιεχόμενο στα δύο τελευταία μοντέλα, η υψηλή τιμή του μαγνητικού πεδίου οδηγεί σε υψηλές τιμές για την μαγνητική πίεση. Συνεπώς, η συμπεριφορά της συνολικής πίεσης ακολουθεί την εξέλιξη των μαγνητικών συνιστωσών και παρουσιάζει αντίστοιχη συμπεριφορά. Παρατηρήστε, τέλος, ότι λόγω της πολύ μικρής παραμέτρου μαγνήτισης, η B_y συνιστώσα στο διάγραμμα του $HP0d1S$ μοντέλου είναι στην πραγματικότητα αμελητέα και απούσα στο $HP00S$.



Σχήμα 4.3: Τα αποτελέσματα των τεσσάρων μοντέλων (MP, EP, HP0d1, HP0d035). 1^η **Γραμμή:** Το φυσικό σχήμα της εκροής και η χωρική κατανομή του παράγοντα Lorentz (χρωματική κλίμακα). 2^η **Γραμμή:** Οι ενεργειακές ποσότητες κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμής Εμφανίζονται η συνολική ροή ενέργειας (μ μπλε), η ροή poynting ($\xi\gamma\sigma$ κόκκινη) και η θερμική ενέργεια ($(\xi-1)\gamma$ γαλάζια), ενώ εμφανίζεται και ο παράγοντας Lorentz (γ πράσινη). Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στο μέτωπο του κύματος, ενώ η ποσότητα $(r/r_0)_{95}$ αντιστοιχεί στην απόσταση όπου ο γ λαμβάνει το 95% της μέγιστης τιμής του. 3^η **Γραμμή:** Η εξέλιξη των ολοκληρωτέων ποσοτήτων κανονικοποιημένες στις τιμές που αναφέρονται. Το αντίστροφο τετράγωνο του αριθμού Alfvén (κόκκινη) και η παράμετρος μαγνήτισης (μπλε) ακολουθούν τον ίδιο νόμο δύναμης στα δύο πρώτα διαγράμματα, ενώ μικρές διαφορές υπάρχουν στο τελευταίο. Εμφανίζονται επίσης η κλίση των πολοειδών γραμμών (γαλάζιο) καθώς και η ασυμπτωτική τιμή τους (ϑ_∞). Συμπεριλάβαμε το σχετικό μέγεθος των μαγνητικών συνιστωσών (πράσινο) και την ασυμπτωτική σχετική μεταβολή της ($\Delta\zeta = \zeta_\infty - \zeta_0$). 4^η **Γραμμή:** Η εξέλιξη των φυσικών ποσοτήτων κανονικοποιημένες στις αρχικές τους τιμές. Ο λόγος των πυκνοτήτων (ρ/ρ_0 μπλε) και της πίεσης (p/p_0, γαλάζιο). Η εξέλιξη των μαγνητικών συνιστωσών (B_p/B_{p0} κόκκινη, B_y/B_{y0} πράσινη) συμπίπτει στα δύο πρώτα διαγράμματα και διαφέρει λίγο στο τελευταίο.

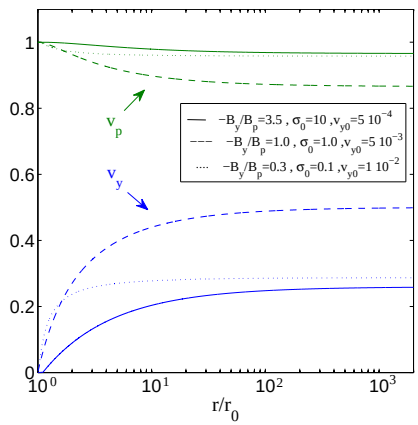


Σχήμα 4.4: Τα αποτελέσματα για τα τέσσερα μοντέλα ($MP01Y$, $MP03Y$, $LP15F$, $LP2F$). 1^{η} **Γραμμή:** Οι ενεργειακές ποσότητες κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμής: η συνολική ενέργεια (μ μπλε), η ροή poynting ($\xi\gamma\sigma$ κόκκινη) και η θερμική ενέργεια ($(\xi-1)\gamma$ ςψαν) - εμφανίζεται επίσης ο παράγοντας Lorentz (γ γρεεν). Οι διακεκομμένες γραμμές και η ποσότητα $(r/r_0)_{95}$ έχουν το ίδιο νόημα με αυτό των προηγούμενων ενοτήτων. Τα κόκκινα βέλη στα ανομοιογενή μοντέλα $LP15F$, $LP2F$ τονίζουν την ομαλότερη εμφάνιση της διαδικασίας της αραίωσης. 2^{η} **Γραμμή:** Η εξέλιξη των ολοκληρωτέων ποσοτήτων και η εγκάρσια ταχύτητα κανονικοποιημένες στις τιμές που αναφέρονται. Πέρα από τον νόμο δύναμης που ο αριθμός Alfvén (κόκκινη) και η παράμετρος μαγνήτισης (μπλε) ακολουθούν, η κλίση των γραμμών (γαλάζια) και η έκταση της αραιωμένης περιοχής (ϑ_∞) αλλάζουν σημαντικά στα δύο πρώτα μοντέλα και αμελητέα στα ανομοιογενή. Η εξέλιξη της εγκάρσιας ταχύτητα (μοβ) είναι η σημαντική ποσότητα για τα πρώτα δύο μοντέλα, ενώ στο πρώτο διάγραμμα συμπεριλάβαμε για σύγκριση την εξέλιξή της στο MP μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή). Ο λόγος ζ (πράσινη) και η ασυμπτωτική τιμή ($\Delta\zeta = \zeta_\infty - \zeta_0$) εμφανίζει μικρή μεταβολή.

Εγκάρσια ταχύτητα και ανομοιογενείς ροές

Κλείνουμε την παραμετρική μας μελέτη κινούμενοι προς την κατεύθυνση των αρχικών εγκάρσιων ταχυτήτων και των επιδράσεων της ανομοιογένειας. Τα μοντέλα που αναφέρονται στην μελέτη της εγκάρσιας ταχύτητας είναι τα $MP01Y$, $MP03Y$, ενώ στην ανομοιογένεια τα $LP15F$, $LP20F$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχ.4.4.

Η επίδραση της αρχικής εγκάρσιας ταχύτητας είναι εμφανής τόσο στην κλίση του μετώπου αραίωσης και στις χωρικές κλίμακες της επιτάχυνσης (πρώτη σειρά) όσο και στην έκταση της αραιωμένης περιοχής (δεύτερη σειρά). Η κατάσταση γίνεται πιο πολύπλοκη αν εξετάσουμε την συμπεριφορά της εγκάρσιας ταχύτητας που εμφανίζεται στην δεύτερη γραμμή - για λόγους σύγκρισης στο πρώτο διάγραμμα σχεδιάσαμε επίσης την συμπεριφορά κατά το MP μοντέλο. Έτσι παρατηρούμε ότι υπάρχουν μοντέλα στα οποία η v_y αυξάνει (MP) και άλλα στα οποία η εγκάρσια ταχύτητα μειώνεται. Το θέμα αυτό ξεκαθαρίζεται κατά την αναλυτική προσέγγιση του φαινομένου, αλλά μπορούμε εδώ να αναφέρουμε ότι η ερμηνεία του στηρίζεται στην διατήρηση της ορμής και την αδράνεια της ύλης συνδυαζόμενες με το πολοειδές πεδίο που οδηγεί στην επιτάχυνση να λαμβάνει χώρα κυρίως κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Βασικά για ειδικές τιμές των αρχικών παραμέτρων είναι πιθανό να πετύχουμε επιτάχυνση όπου λαμβάνει χώρα μόνο κατά την εγκάρσια διεύθυνση, ενώ η πολοειδής ταχύτητα μειώνεται είτε μερικά, μετά από μια μέγιστη τιμή της, είτε ολικά, δηλαδή σε τιμές μικρότερες της αρχικής. Στο



Σχήμα 4.5: Μερικές ειδικές αρχικές συνθήκες που οδηγούν στην επιτάχυνση κατά μήκος της εγκάρσιας διεύθυνσης και επιβράδυνσης στο πολοειδές επίπεδο. Παρατηρήστε ότι σε όλα το μοντέλα το πολοειδές μαγνητικό πεδίο είναι υψηλό, ενώ στο διάγραμμα εμφανίζονται επίσης οι αρχικές τους συνθήκες.

σχ.4.5 παρουσιάζονται τρία τέτοια μοντέλα καθώς και οι αρχικές τους συνθήκες.

Τα δύο τελευταία μοντέλα $LP15F$, $LP20F$ αναφέρονται σε ανομοιογενείς εκροές με τα παρόμοια μεγέθη με αυτά των ψυχρών εκροών με αμιγώς τοροειδές μαγνητικό πεδίο, αλλά με τιμές του δείκτη αυτο-ομοιότητας διαφορετικής της μονάδας, εξ.4.9[‖]. Όπως τα αποτελέσματα υποδεικνύουν η επίδραση της ανομοιογένειας δεν είναι σημαντική κατά την κλίση του κύματος και την χωρική κλίμακα δράσης της επιτάχυνσης, αλλά επηρεάζουν την απότομη εμφάνιση του μετώπου της αραίωσης παρέχοντας μια ομαλότερη μετάβαση, βλέπε τα κόκκινα βέλη στο σχήμα.

Σύγκριση με τις 1D προσομοιώσεις - Ο ρόλος της εξωτερικής πίεσης

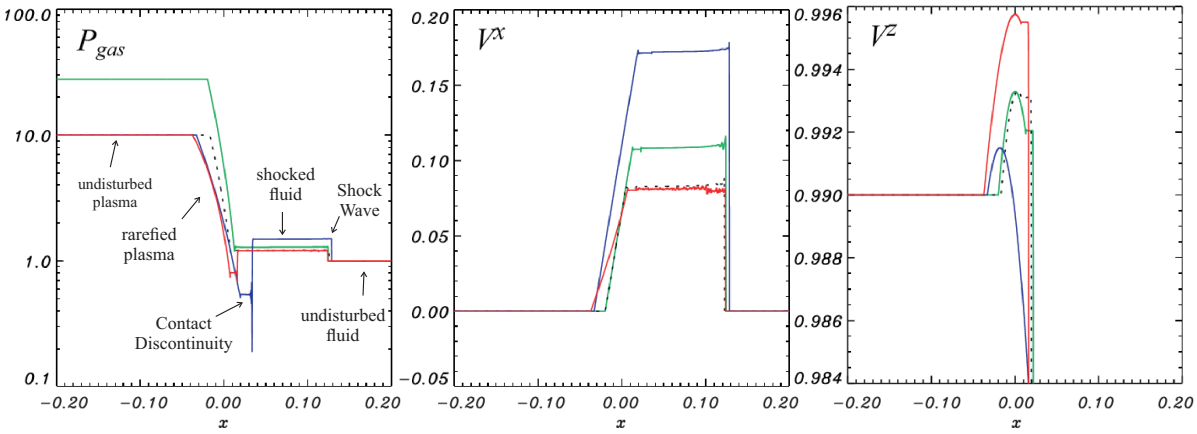
Στην τελευταία σειρά ολοκληρώσεων μελετάμε κάποιες ακόμα λύσεις προκειμένου να εξετάσουμε την συμβατότητά του μοντέλου μας με τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων. Μεταξύ των διαφόρων μοντέλων βρήκαμε ως πιο κατατοπιστική την σύγκριση με τις 1-D χρονοεξαρτώμενες προσομοιώσεις των Mizuno et al. (2008) όπου λόγω της επίπεδης συμμετρίας τους έχουν άμεση αντιστοιχία με τα αποτελέσματά μας. Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιούμε είναι ταυτόσημες με αυτές των προσομοιώσεων και παρουσιάζονται στον πίνακα.4.2. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων φαίνονται στο σχ.4.6.

Η σύγκριση με τις προσομοιώσεις γίνεται υπό τις κάτωθι παρατηρήσεις:

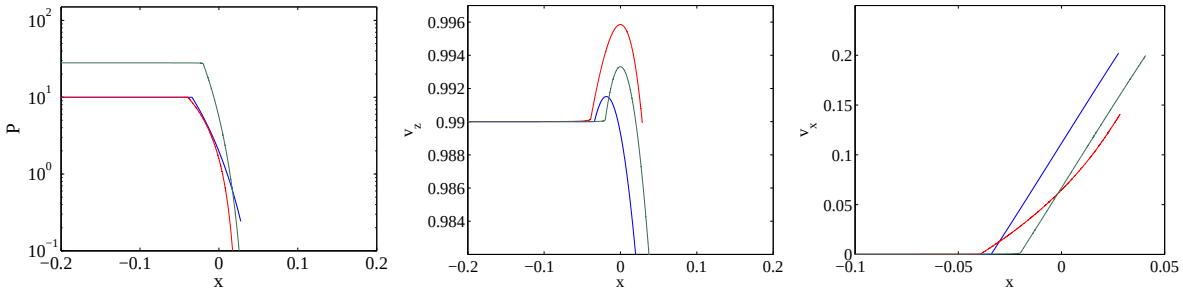
ι) Οι αριθμητικές προσομοιώσεις ελήφθησαν στην χρονική στιγμή $t_M = 0.2$. Η αντίστοιχη $z-$απόσταση κατά την στάσιμη κατάσταση προσδιορίζεται άμεσα από για μια ομογενή ροή ($z_M = v_{z0} t_M \sim 0.198$). Στην απόσταση αυτή τα σημεία που αντιστοιχούν στην γωνία των δικών μας ολοκληρώσεων απεικονίζονται άμεσα μέσω της σχέσης $x_M = z_M \tan\theta$. Έτσι για αυτή την απόσταση τα αποτελέσματα των ολοκληρώσεων μας εμφανίζονται στο σχ.4.7.

ιι) Στις αριθμητικές προσομοιώσεις βρέθηκε η πολύ ενδιαφέρουσα δομή που αποτελείται από ένα αριστερά κινούμενο κύμα αραίωσης ($R_{\leftarrow}$), μία δεξιά κινούμενη ασυνέχεια επαφής ($C_{\rightarrow}$)και ένα δεξιά κινούμενο ωστικό κύμα ($S_{\rightarrow}$). Η δομή αυτή προτείνεται και από τα αναλυτικά συμπεράσματα του μοντέλου μας και αποδίδεται στην παρουσία του εξωτερικού μέσου που είναι απαραίτητο όταν μελετάμε καταστάσεις όπου η εξωτερική πίεση είναι σημαντική. Η παρουσία της εξωτερικής πίεσης οδηγεί στον ταχύτερο τερματισμό της αραίωσης, όταν δηλαδή η πίεση φτάσει στην τιμή της πίεσης του εξωτερικού αερίου στην άλλη πλευρά της ασυνέχειας επαφής και επομένως σχετίζεται με απόδοση επιτάχυνσης μικρότερη της μέγιστης. Το μοντέλο μας δεν έχει γενικευθεί ώστε να περιγράφει ένα κινούμενο ωστικό κύμα σε μια προσέγγιση δύο ρευστών, βλέπε εν.4.5 για περαιτέρω συζήτηση. Παρόλα

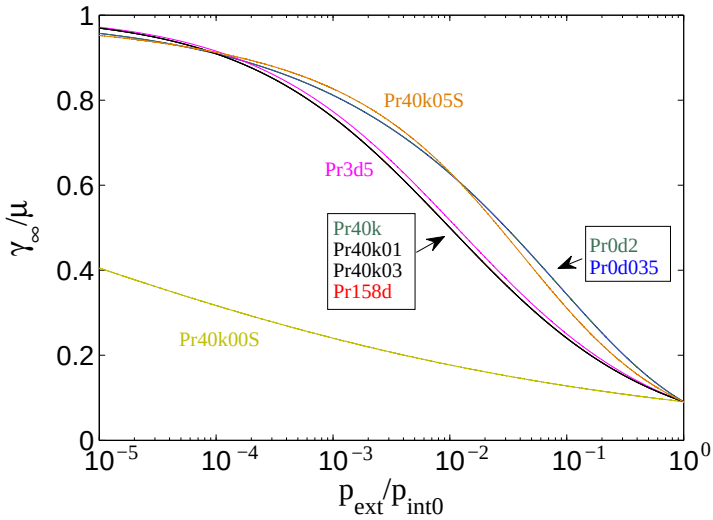
[‖] Παρατηρείστε ότι οι τιμές $F > 1$ αντιστοιχούν σε απειριζόμενο μαγνητικό πεδίο στην γωνία της εκροής. Έτσι, η συγκεκριμένη περιοχή τιμών για τον δείκτη απορρίπτεται.



Σχήμα 4.6: Τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων του Mizuno et al. (2008) που αντιστοιχούν στα εκεί μοντέλα MHDA (μπλε), MHDB (κόκκινη) και HDB (πράσινη) και για τον χρόνο $t_M = 0.2$ - οι διάστικτες γραμμές παριστάνουν το μοντέλο HDA που δεν εξετάσαμε στις ολοκληρώσεις μας.



Σχήμα 4.7: Τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν στα μοντέλα MHDA (μπλε), MHDB (κόκκινη) και HDB (πράσινη). Τα χρώματα αντιστοιχούν στην επιλογή χρωμάτων των αριθμητικών προσομοιώσεων.



Σχήμα 4.8: Η τελική απόδοση σαν συνάρτηση του λόγου της εξωτερικής προς την αρχική εσωτερική πίεση p_{ext}/p_{int0} για τα διάφορα μοντέλα που εξετάσαμε.

αυτά, αν κάποιο μοντέλο όπως οι αριθμητικές προσομοιώσεις παρέξει την πίεση της ασυνέχειας επαφής μπορούμε τότε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματά για να περιγράψουμε την αραιωμένη ροή και την απόδοσή της. Στο σχ.4.8 παρουσιάζουμε την σχετική απόδοση της επιτάχυνσης (γ_∞/μ) σαν συνάρτηση της του λόγου εξωτερικής πίεσης (p_{ext}) προς την αρχική εσωτερική πίεση (p_{int0}). Η διαφορά μεταξύ των δύο τύπων αραίωσης (μαγνητική και θερμική) είναι χαρακτηριστική, αν και δεν κατέστη εφικτό να βρεθεί ένα συγκεκριμένο μοτίβο συμπεριφοράς.

4.4 Αναλυτικά Αποτελέσματα - Το ομογενές όριο ($F = 1$)

Η ημι-γραμμική μορφή επιτρέπει ακόμα και την εξαγωγή αναλυτικών αποτελεσμάτων σε συγκεκριμένα όρια ενδιαφέροντος. Μέσω αυτής της διαδικασίας αυτής η φυσική ερμηνεία και τα αντίστοιχα συμπεράσματα διασαφηνίζουν σε βάθος το φαινόμενο της αραίωσης. Αυστηρά μιλώντας το ωστικό κύμα και η σχετιζόμενη ασθενής ασυνέχεια ορίζονται μόνο κατά το ομογενές όριο ($F = 1$, εξ.4.8).Στο όριο αυτό ο αριθμητής εξ.4.19 μηδενίζεται επίσης και μόνο όταν ο παρονομαστής μηδενιστεί και αυτός οι παράγωγοι αποκτούν πεπερασμένη τιμή και η διαδικασία της αραίωσης ξεκινά - στα προηγούμενα σημεία η ροή βρίσκεται σε κατάσταση κυλινδρικής διάδοσης. Το σημείο όπου επέρχεται για πρώτη φορά ο μηδενισμός του παρονομαστή είναι και το σημείο ασυνέχειας της $1^{ης}$ παραγώγου (αναγκαία, αλλά όχι ικανή συνθήκη) ή με άλλα λόγια το μέτωπο του κύματος αραίωσης. Η λύση αυτή είναι στην πραγματικότητα η γενίκευση των υδροδυναμικών λύσεων των Landau and Lifschitz (1975) και Granik (1982) στην σχετικιστική και μαγνητισμένη περιοχή.

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με δύο συγκεκριμένα όρια της ομογενούς ροής: το ψυχρό και μαγνητισμένο όριο ($\xi \to 1$) και το υδροδυναμικό ($\sigma \to 1$). Αλλά πριν προχωρήσουμε περαιτέρω μια πιο γενική προσέγγιση είναι εφικτή. Μια καίρια παρατήρηση σε σχέση με τους υπολογισμούς που ακολουθούν αναφέρεται στην εγκάρσια ταχύτητα. Η εγκάρσια ταχύτητα επηρεάζει την ακρίβεια των χρησιμοποιούμενων εκφράσεων, ενώ ακόμα και αν αρχικά είναι αμελητέα είναι δυνατόν να αποκτήσει σημαντική τιμή σε κάποιο μεταγενέστερο βήμα, βλέπε για παράδειγμα τα MPs μοντέλα στην εν.4.3.2. Συνεπώς είναι αναγκαία η προσοχή κατά την χρήση προσεγγιστικών εκφράσεων, ενώ είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε ακριβείς εκφράσεις όπου είναι δυνατόν.

Δύο ακριβείς εκφράσεις που θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες είναι

$$M^2 = \frac{\varphi}{\sigma}\left(\varphi - \frac{v_y}{c}\right) \tag{4.41}$$

$$x_A^2 = \frac{\xi\gamma\varphi}{\mu}\left(\frac{v_y}{c} + \frac{\sigma}{\varphi}\right) \tag{4.42}$$

Επιπλέον είναι χρήσιμο να γράψουμε τις συνιστώσες της ταχύτητες με βάση την παράμετρο μαγνήτισης. Χρησιμοποιώντας τις εξ.(4.12), (4.13), (4.21) παίρνουμε

$$v_y = \frac{x_A^2 + \sigma\left(x_A^2 - 1\right)}{\varphi} \tag{4.43}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} - v_y^2} = \sqrt{1 - \frac{x_A^4}{\varphi^2}\left[1 + \frac{x_A^2 - 1}{x_A^2}\sigma\right]^2 - \frac{\xi^2}{\mu^2}\left(1+\sigma\right)^2} \tag{4.44}$$

Χρησιμοποιούμε τον μηδενισμό του παρονομαστή εξ.4.19 και την εξίσωση Bernoulli, εξ.4.15), στην ομογενή ροή ώστε να εξαλείψουμε την ποσότητα f

$$\sin^2\left(\theta - \vartheta\right) = \frac{\sigma^2 M^2}{\varphi^2\left(v_p/c\right)^2} - \frac{\left(\varphi^2 - 1\right)}{M^2} - \frac{1 - M^2 - \varphi^2}{M^2\left(\gamma v_p/c\right)^2}u_s^2 \tag{4.45}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν και οι εξ.(4.8)-(4.13). Η παραπάνω σχέση είναι κεντρική. Όταν ως παραμέτρους λαμβάνουμε τις αρχικές τιμές των ποσοτήτων τότε η παραπάνω σχέση δίνει την κλίση του μετώπου αραίωσης ως προς την αρχική διεύθυνση των γραμμών ροής ($\Theta_{RW} \equiv (\theta - \vartheta)_{RW}$) - στα μοντέλα που μελετήσαμε $\vartheta_0 = 0$ και συνεπώς η σχέση αυτή παρέχει επίσης την κλίση του μετώπου από τον z-άξονα ($\theta_{RW} = \Theta_{RW}$). Αλλά πέρα από την κλίση του μετώπου η παραπάνω σχέση ισχύει και κατά την μετέπειτα φάση κατά την διάρκεια της διαδικασίας αραίωσης.

Εκφράζοντας τον μηδενισμό του παρονομαστή με βάση τις φυσικές ποσότητες

$$D = \frac{\left(\frac{\gamma v_\theta}{c}\right)^4 - \left(\frac{\gamma v_\theta}{c}\right)^2\left[u_s^2 + \frac{B^2 - E^2}{4\pi\rho\xi c^2}\right] + u_s^2\frac{B_\theta^2 - E_r^2}{4\pi\rho\xi c^2}}{\left(\frac{\gamma v_\theta}{c}\right)^2} \tag{4.46}$$

Συγκρίνοντας την έκφραση αυτή με τις σχέσεις διασποράς εξ.3.72 συμπεραίνουμε ότι εν λόγω μηδενισμός αντιστοιχεί στο σημείο όπου η $\gamma v_\theta/c$ είναι ίση με την φασική ταχύτητα των μαγνητοακουστικών κυμάτων. Το συμπέρασμα αυτό αποτελεί γενικό χαρακτηριστικό του φαινομένου της αραίωσης και ήταν αναμενόμενο από την υδροδυναμική προσέγγιση - η μόνη διαφορά έγκειται στο ότι οι θεωρούμενες διαταραχές είναι στην περίπτωση αυτή οι ηχητικές. Λόγω της σημασίας του θα επιστρέψουμε στο ζήτημα αυτό στην συνέχεια του κεφαλαίου.

Προκειμένου να εξάγουμε την χωρική εξέλιξη των ολοκληρωτέων ποσοτήτων χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις εξ.(4.15) και εξ.4.20 για να απαλείψουμε αυτή την φορά το ημίτονο:

$$\frac{1}{f^2} = \frac{\varphi^4\xi^2}{M^6}\left[\frac{\sigma^2\gamma^2 M^4}{\varphi^2} - \left(\varphi^2 - 1\right)\left(\gamma\frac{v_p}{c}\right)^2 - \left(1 - M^2 - \varphi^2\right)u_s^2\right] \tag{4.47}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξ.4.41, 4.42, 4.43, 4.12 η παραπάνω έκφραση απλοποιείται:

$$\frac{1}{f^2} = \frac{\varphi^4}{M^6}\left[\left(1 - x_A^2\right)^2\frac{\mu^2}{\xi^2} + \varphi^2 - 1 + \frac{\mu}{\mu - \xi\gamma}\left(\varphi^2 - x_A^2\right)u_s^2\right] \tag{4.48}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την έκταση της διαταραγμένες περιοχές. Ο συνδυασμός των εξισώσεων εξ.4.14 και εξ.4.17 δίνει

$$\frac{dM^2}{d\theta} = -\frac{1}{2\tan(\theta-\vartheta)}\left[\frac{\partial}{\partial M^2}\left(\ln f^{-2}\right) - \frac{\xi u_s^2}{M^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\ln f^{-2}\right)\right] \tag{4.49}$$

όπου ο όρος μέσα στις αγκύλες υπολογίζεται μέσω της εξ.4.48.

$$\begin{aligned}\frac{dM^2}{d\theta} = \frac{1}{2\tan(\theta-\vartheta)}\frac{\varphi^4}{M^8}\Bigg\{&3\left[-1+\frac{(1-x_A^2)^2\mu^2}{\xi^2}+\varphi^2\right]\\ &+\left[3-\frac{2(1-x_A^2)^2\mu^2}{\xi}+\frac{\xi(-1+\hat{\Gamma})}{(1+\hat{\Gamma}(-1+\xi)-2\xi)^2}\right]u_s^2\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.50}$$

Η εφαπτόμενη παρέχεται από τον συνδυασμό της Bernoulli εξ.4.15 με την εξ.4.48:

$$\sin(\theta-\vartheta)^2 = \frac{\left(M^2+\varphi^2-1\right)^2}{\xi^2 M^2 H(M2)}\left[1+\left(\frac{\mu}{\mu-\xi\gamma}\right)\frac{\left(\varphi^2-x_A^4\right)\xi^2}{\left(-1+x_A^4\right)\mu^2+\xi^2\left(-1+\varphi^2\right)}u_s^2\right] \tag{4.51}$$

όπου $H(M^2)$ μια συνάρτηση του M^2

$$H(M^2) = M^4\frac{-\xi^2\varphi^2+\mu^2\left(\varphi^2-x_A^4\right)}{x_A^2\left[(-1+x_A^2)^2\mu^2+\xi^2\left(-1+\varphi^2\right)\right]} - 2M^2 - \varphi^2 + 1$$

Η ζητούμενη γωνία βρίσκεται, τώρα, αριθμητικά από την εξ.4.50 και την εξ.4.51 υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\Theta_{PM} = \Theta_{RW} + \int_{M_0^2}^{\infty}\frac{d\theta}{dM^2}\,dM^2 \tag{4.52}$$

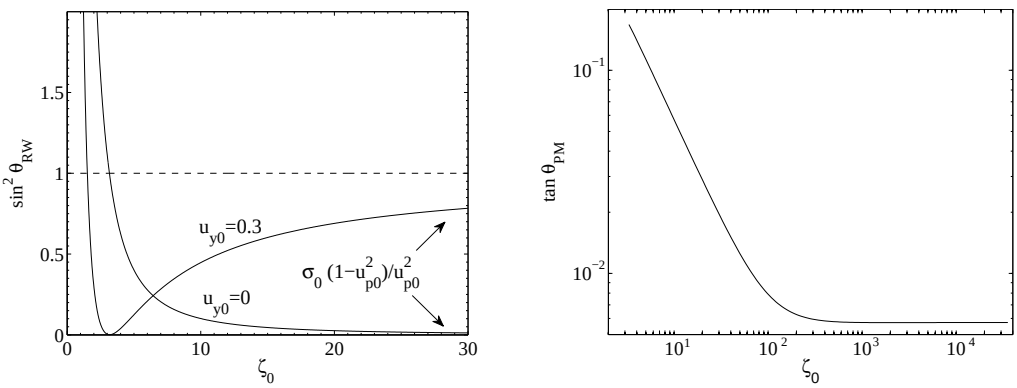
Παρόλο την μορφή ενός μόνο ολοκληρώματος, η παραπάνω έκφραση είναι αρκετά πεπλεγμένη ώστε να επιτρέπει την εύκολη εξαγωγή συμπερασμάτων. Στην συζήτηση που ακολουθεί θα θεωρήσουμε συγκεκριμένα όρια κατά τα οποία οι παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουν μια πολύ πιο κομψή μορφή.

4.4.1 Ομογενής, Ψυχρή και Μαγνητισμένη Εκροή

Όταν η εκροή είναι ψυχρή ($\xi \to 1, u_s \to 0$» οι εκφράσεις απλοποιούνται σημαντικά. Ο αντίστοιχος μηδενισμός του παρονομαστή εκφράζεται άμεσα μέσω των φυσικών ποσοτήτων εξ.4.46

$$D = 0 \Rightarrow \left(\frac{\gamma v_\theta}{c}\right)^2 = \frac{B^2-E^2}{4\pi\rho c^2} \tag{4.53}$$

Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε την πορεία της ολοκλήρωσης: Καθώς μεταβαίνουμε από την αρχική επιφάνεια $\theta_0 = -\pi/2$ προς υψηλότερες γωνίες, οι παράγωγοι $d/d\theta$ είναι μηδέν υποδηλώνοντας την φάση της κυλινδρικής ισορροπίας. Η ισορροπία αυτή σπάει στο σημείο Θ_{RW} όπου η $\theta-$συνιστώσα της ανηγμένης ταχύτητας της εκροής γίνεται ίση με την γρήγορη μαγνητοακουστική παρέχοντας την ασθενή ασυνέχεια. Από την γωνία αυτή και μετά ανακύπτει μια (0/0) μορφή και οι παράγωγοι αποκτούν πεπερασμένες τιμές σηματοδοτώντας την αρχή της αραίωσης.



Σχήμα 4.9: Ο υπολογισμός των γωνιών σε μια ψυχρή ροή ($\gamma_0 = 100$, $\sigma_0 = 10$) σαν συνάρτηση του ζ_0. **Αριστερά:** Το μέτωπο της αραίωσης ($\sin^2\theta_{RW}$) για δύο διαφορετικές τιμές της εγκάρσιας ταχύτητας και η ασυμπτωτική έκφραση όταν $\zeta_0 \to \infty$. Παρατηρείστε ότι για ακατάλληλες αρχικές συνθήκες (χαμηλό ζ_0 ή υψηλή v_{y0}) καταλήγουμε σε τιμές $\sin^2\theta_{RW} > 1$ που αντιστοιχούν σε υπογρήγορες ροές όπου το κύμα αραίωσης δεν μπορεί να υπάρξει. **Δεξιά:** Το αποτέλεσμα για την έκταση της αραιωμένης περιοχής ($\tan\theta_{PM}$) για μια ψυχρή ροή αμελητέας v_{y0}.

Προκειμένου να καταλήξουμε σε κάποια ποσοτικά συμπεράσματα για την γωνία του κύματος αραίωσης σαν συνάρτηση των αρχικών παραμέτρων χρησιμοποιούμε την εξ.(4.41) στην εξ.(4.45)

$$\sin^2(\theta - \vartheta) = \frac{\sigma}{\varphi\left(\varphi - \frac{v_y}{c}\right)} \frac{\left(\varphi - \frac{v_y}{c}\right)^2 + (1-\varphi^2)\,(v_p/c)^2}{(v_p/c)^2} \tag{4.54}$$

Υποθέτοντας τις αρχικές τιμές των παραμέτρων συνάγουμε την ζητούμενη γωνία, αλλά θα πρέπει να προσέξουμε καθώς για μία συγκεκριμένη τιμή του γ_0 η γωνία εξαρτάται από τις v_{y0}, ζ_0 μέσω του φ, βλέπε εξ.3.35 για ορισμό του *belpot* και εν.3.1.1 για την φυσική αντιστοιχία του. Στο σχ.4.9 παρουσιάζουμε το σχετικό διάγραμμα σαν συνάρτηση της ποσότητας ζ_0 για δύο διαφορετικές τιμές της εγκάρσιας ταχύτητας. Η έκφραση αυτή είναι επίσης χρήσιμη στον καθορισμό της επίδρασης της εγκάρσιας ταχύτητας που αποδεικνύεται σημαντική σε περιπτώσεις όπου το ολοκλήρωμα φ είναι κοντά στην μονάδα, όταν δηλαδή ο λόγος ζ είναι συγκρίσιμος με την v_{y0}.

Στο όριο του αμελητέου πολοειδούς πεδίου ($B_p \to 0$, $\varphi \to \infty$) η έκφραση εξ.4.54 δίνει

$$\sin^2\Theta_{RW} = \sigma_0 \frac{1 - v_{p0}^2}{v_{p0}^2} \tag{4.55}$$

που απλοποιείται περαιτέρω στην

$$\sin^2\Theta_{RW} = \frac{\sigma_0}{\gamma^2 v_{p0}^2} \tag{4.56}$$

αν η εγκάρσια ταχύτητα είναι αμελητέα ($v_{y0} \ll v_{p0}$). Αυτό το πολύ απλό αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό κατά τις αστροφυσικές εφαρμογές, πχ στο GRB/Collapsar μοντέλο, καθώς και οι δύο συνθήκες για ψυχρό και αμελητέας εγκάρσιας ταχύτητας εκροή αναμένεται να ισχύουν.

Η χωρική εξέλιξη του αριθμού Alfvén βρίσκεται από την έκφραση εξ.4.48 που στο ψυχρό όριο παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{f^2} = \frac{\varphi^4}{M^6}\left[\left(1 - x_A^2\right)^2 \mu^2 + \varphi^2 - 1\right] \tag{4.57}$$

Ο όρος στις αγκύλες αποτελεί τον συνδυασμό δύο ολοκληρωμάτων και έτσι παραμένει σταθερός κατά μήκος μιας πολοειδούς γραμμής δίνοντας έτσι τον νόμο δύναμης του αριθμού Alfvén, $M^2 \propto f^{2/3} \propto r^{2/3}$). Όταν το πολοειδές πεδίο είναι αμελητέα το ολοκλήρωμα τείνει στο άπειρο, ενώ ο λόγος $\varphi^2/M^2 \to \sigma$ είναι πεπερασμένος ($x_A^2 = P\varphi/\mu$) με αποτέλεσμα η παραπάνω έκφραση να γράφεται

$$\frac{1}{f^2} = \sigma^3 \left(P^2 + 1\right) \tag{4.58}$$

Είναι χρήσιμο να μελετήσουμε λίγο παραπάνω το αποτέλεσμα αυτό. Στο όριο αυτό οι χωρικές κλίμακες παρέχονται συναρτήσει της $\sigma \propto r^{2/3}$ αντί του αριθμού Alfvén - ούτως ή άλλως στο όριο του μηδενικού πολοειδούς πεδίου ο αριθμός Alfvén χάνει την σημασία του. Η σχέση εξ.4.41 καταδεικνύει τον λόγο για την απόκλιση μεταξύ των σ, M^2 όσο το πολοειδές πεδίο ισχυροποιείται $\zeta \to v_y$, καθώς η εξέλιξη της εγκάρσιας ταχύτητας έχει εμφανή επίδραση μέσω του $\varphi - v_y$ όρου.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για να υπολογίσουμε την έκταση της αραιωμένης εκροής. Για τον σκοπό αυτό η εξ.(4.49) γίνεται

$$\frac{d\theta}{dM^2} = -\frac{3}{2}\frac{\tan\left(\theta - \vartheta\right)}{M^2} \tag{4.59}$$

και η εφαπτόμενη που εμφανίζεται γράφεται

$$\sin^2\left(\theta - \vartheta\right) = \frac{\left(-1 + M^2 + \varphi^2\right)^2}{M^2 H\left(M^2\right)} \tag{4.60}$$

όπου $H(M^2)$ ένα πολυώνυμο, τώρα, του M^2

$$H\left(M^2\right) = M^4 \left[\frac{\left(\varphi^2 - x_A^2\right)\mu^2 - \varphi^2}{\varphi^2\left(-1 + (-1 + x_A^2)^2\mu^2 + \varphi^2\right)}\right] - 2M^2 - \left(\varphi^2 - 1\right)$$

Η παραγόμενη έκφραση υπολογίζεται πάλι αριθμητικά

$$\Theta_{PM} = \Theta_{RW} + \frac{3}{2}\int_{M_0^2}^{\infty} \sqrt{\frac{\left(-1 + M^2 + \varphi^2\right)^2}{M^2 H(M^2) - \left(-1 + M^2 + \varphi^2\right)^2}}\, d\ln M^2 \tag{4.61}$$

Στο σχ.4.9 δείχνουμε το αποτέλεσμα για την Θ_{PM} σαν συνάρτηση του ζ_0 για τις ίδιες παραμέτρους $(F, \mu, \gamma_0, v_{y0})$ όπως αυτές που χρησιμοποιήσαμε στα μοντέλα LP, MP, EP.

Στο όριο του αμελητέου πολοειδούς πεδίου

$$H(M^2) \sim \frac{M^2}{\sigma}\left[\frac{\mu^2 + P^2}{P^2 + 1} - (\sigma + 1)^2\right]$$

που καταλήγει

$$\Theta_{PM} = \Theta_{RW} - \frac{3}{2}\int_{\sigma_0}^{0} \frac{1 + \sigma}{\sqrt{\sigma\left[\frac{\mu^2 + P^2}{P^2 + 1} - (\sigma + 1)^3\right]}}\, d\sigma$$

Ο δεύτερος όρος είναι τάξης $\sim \mu^2/\gamma^2$ και μπορεί να αγνοηθεί στις υπερ-σχετικιστικές ροές. Η ολοκλήρωση δίνει

$$\Theta_{PM} = \Theta_{RW} + \sqrt{\frac{P^2 + 1}{\mu^2 + P^2}}\sqrt{\sigma_0}\left(3 + \sigma_0\right)$$

Επιπλέον, όταν και η εγκάρσια ταχύτητα είναι αμελητέα ($P \to 0$, $\Theta_{RW} \sim -\sqrt{\sigma_0}/\gamma_0$) και ο παραπάνω υπολογισμός δίνει

$$\Theta_{PM} = 2\sqrt{\sigma}/\mu \tag{4.62}$$

ένα αξιοσημείωτα απλό αποτέλεσμα.

4.4.2 Υδροδυναμικό Όριο

Ο μηδενισμός της παραμέτρου μαγνήτισης έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή της κεντρικής ποσότητας στην ενθαλπία και την επιλογή μιας ελαφρά διαφορετικής πορείας ολοκλήρωσης από αυτή που ακολουθήσαμε προηγουμένως. Τα αποτελέσματα που εξάγουμε αντιστοιχούν στην πραγματικότητα στις υδροδυναμικές λύσεις των Landau and Lifschitz (1975) και Granik (1982). Στο υδροδυναμικό όριο ο μηδενισμός του παρονομαστή της εξ.4.35 δίνει

$$\sin^2(\theta - \vartheta) = \frac{\xi^2 u_s^2}{(\mu^2 - \xi^2 - P^2)} \tag{4.63}$$

Εκτελούμε τις πράξεις στις εξ.4.35 ώστε να εξαλείψουμε την παράμετρο λ

$$\frac{d\ln\xi}{d\theta} = u_s^2\left[\frac{d\ln y}{d\theta} - \frac{1}{\tan(\theta-\vartheta)}\right]$$

Συνδυάζουμε την εξίσωση Bernoulli εξ.4.36 και τον μηδενισμό του παρονομαστή για να καταλήξουμε $y^2 = 1/(\xi u_s)^2$, ενώ αντικαθιστούμε και την εφαπτομένη που εμφανίζεται από την εξ.4.63. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{d\ln\xi}{d\theta} = -u_s^2\left[\frac{d\ln(u_s\xi)}{d\theta} + \frac{\sqrt{\mu^2 - P^2 - \xi^2(1+u_s^2)}}{\xi u_s}\right]$$

$$\frac{1}{u_s}\frac{d\xi}{d\theta} = -\left[\frac{d(u_s\xi)}{d\theta} + \sqrt{\mu^2 - P^2 - \xi^2(1+u_s^2)}\right]$$

Για αλγεβρική ευκολία χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$\xi = 1 + \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{\Gamma}-1} \Rightarrow \qquad \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\left(\hat{\Gamma}-1\right)(\xi-1)}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}$$

καταλήγοντας

$$\sqrt{\left(\hat{\Gamma}-1\right)(\xi-1)\left[\left(2-\hat{\Gamma}\right)(\xi-1)+1\right]}\frac{d\rho}{\rho d\theta} + \frac{d(u_s\xi)}{d\theta} = -\sqrt{\mu^2 - P^2 - \xi^2(1+u_s^2)}$$

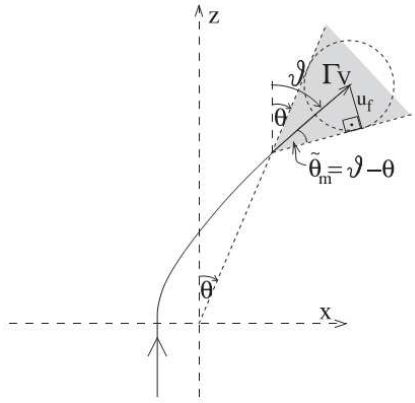
που είναι κατουσίαν όμοια με την εξ.(15) του Granik (1982).

Παρατηρείστε ότι στις υπερ-σχετικιστικές και υπερ-γρήγορες μαγνητοακουστικές εκροές ($\mu \gg (1+u_s^2)\xi$) με μηδενική εγκάρσια ταχύτητα ($P = 0$) η ολοκλήρωση εκτελείται αναλυτικά

$$\sqrt{\left(\hat{\Gamma}-1\right)(\xi-1)\left[\left(2-\hat{\Gamma}\right)(\xi-1)+1\right]}\frac{d\rho}{\rho d\theta} + \frac{d(u_s\xi)}{d\theta} = -\mu$$

Χρησιμοποιώντας την πολυτροπική καταστατική εξίσωση η παραπάνω ολοκλήρωση εκτελείται αναλυτικά δίνοντας

$$\Theta_{PM} = \Theta_{RW} - \frac{\xi_0 u_{s0}^2}{\mu} + \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{\xi_0 - 1}{\hat{\Gamma}-1}}\left[\sqrt{1+\Pi} + \frac{\mathrm{ArcSinh}\left(\sqrt{\Pi}\right)}{\sqrt{\Pi}}\right] \tag{4.64}$$



Σχήμα 4.10: Ο Κώνος Mach γύρω από μια γραμμή ροής (σκιασμένη περιοχή). Το άνοιγμα του κώνου καθορίζεται από την γρήγορη μαγνητοακουστική ταχύτητα u_f (διακεκομμένος κύκλος), η οποία είναι επίσης ίση με την (γv_θ) ταχύτητα της ροής. Κατά συνέπεια παρατηρούμε ότι οι γραμμές $\theta = const$ είναι χαρακτηριστικές καμπύλες του συστήματος.

όπου

$$\Pi = \left(2 - \hat{\Gamma}\right)(\xi_0 - 1)$$

Σαν τελευταίο βήμα εξάγουμε επίσης την εξέλιξη της ενθαλπίας. Για τον σκοπό αυτό, συνδυάζουμε την εξ.4.36, τον μηδενισμό του παρονομαστή και τις εκφράσει εξ.4.34 καταλήγοντας

$$y^2 = \frac{y_0^2}{\rho u_s^2} = \frac{1}{\rho^{\hat{\Gamma}+1}} \frac{\rho^{\hat{\Gamma}-1} + \left(2 - \hat{\Gamma}\right)(\xi_0 - 1)\rho^{\hat{\Gamma}-1}}{\left(\hat{\Gamma} - 1\right)(\xi_0 - 1)} \tag{4.65}$$

4.5 Συμπεράσματα - Συζήτηση

Το κεντρικό χαρακτηριστικό του μοντέλου που παρουσιάσαμε παραπάνω είναι η σημαντική. Ανάλογα με την διαθέσιμη δεξαμενή ενέργειας η επιτάχυνση αυτή συντελείται είτε εις της ροής poynting ($\xi\gamma\sigma$, magnetically driven), είτε της θερμικής ενέργειας ($(\xi - 1)\gamma$, thermally driven), είτε και των δύο (mixed type). Ανεξάρτητα, όμως, την μορφή κυριαρχούμενης ενέργειας σε κάθε περίπτωση η επιτάχυνση φτάνει στην μέγιστη επιτρεπτή τιμή της ($\gamma_{max} \sim \mu$). Μάλιστα, η μέγιστη αυτή απόδοση δεν περιορίζεται σε κάποια γραμμή, αλλά τελικά επεκτείνεται μέσω της αυτο-ομοιότητας σε όλη την εκροή ξεκινώντας από τις γραμμές κοντά στην γωνία και συνεχίζοντας στις πιο εσωτερικές.

Η πρώτη σύγκριση της παραμετρικής μας μελέτης αφορούσε την διαφορά μεταξύ των δύο τύπων κυριαρχίας. Από τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης είναι φανερό ότι η μαγνητικά κυριαρχούμενη αραίωση είναι αρκετά πιο γρήγορη, παρόλο που το μέτωπο του κύματος εμφανίζεται αργότερα ($LP10S$, $LP05S$, $LP00S$). Η συμπεριφορά αυτή περιπλέκεται από ένα πλήθος παραμέτρων όπως το πολοειδές μαγνητικό πεδίο. Για παράδειγμα στα μοντέλα $HP0d1$, $HP0d035$ παρόλο το παρόμοιο θερμικό περιεχόμενο των δύο εκροών και την πιο γρήγορη εμφάνιση του ωστικού κύματος στο μοντέλο $HP0d035$, εντέλει οι χωρικές κλίμακες του μοντέλου αυτού είναι μακρύτερες. Είναι, λοιπόν, προτιμότερο να διαχωρίσουμε τα δύο χαρακτηριστικά μελετώντας τα αυτόνομα. Το μέτωπο του κύματος αραίωσης σχετίζεται με την περιβάλλουσες επιφάνειες για όλες τις διαταραχές που εκπέμπονται από την ασυνέχεια του συνόρου, δηλαδή από τον εκεί κώνο Mach, ενώ η χωρική κλίμακα επιτάχυνσης από την εκάστοτε μορφή ενέργειας που μετατρέπεται σε κινητική.

Η ανάλυση της διαφοράς μεταξύ των δύο κυριαρχούμενων τύπων γίνεται μέσων των εκφράσεων εξ.4.58 και εξ.4.65 και με βάση την απλή σχέση, $\gamma = \mu\xi^{-1}(1+\sigma)^{-1}$. Για την

μαγνητικά κυριαρχούμενη εκροή ο νόμος δύναμης $\sigma \propto r^{-2/3}$ παρέχει

$$\mu - \gamma = \frac{\mu\sigma_0(r/r_0)^{-2/3}}{1+\sigma_0(r/r_0)^{-2/3}} \tag{4.66}$$

Ο δεύτερος όρος στον παρονομαστή γράφεται με βάση την απόσταση εμφάνισης του κύματος αραίωσης r_{RW} ως $(\sigma_0^2/\gamma_0)^{2/3}(r/r_{RW})^{-2/3}$ όπου ο συντελεστής είναι κοντά στην μονάδα για τα μοντέλα που παρουσιάσαμε. Έτσι για αποστάσεις από το κύμα αραίωσης και περαιτέρω ο όρος αυτός αγνοείται και η μετατροπή της ροής poynting εξελίσσεται σαν $r^{-2/3}$. Αγνοώντας τον πρώτο όρο του παρονομαστή της εξ.4.65 παίρνουμε $\rho \propto 1/r$ και επομένως $\xi \propto r^{-1/3}$ για μεγάλες τιμές της. Αγνοώντας τον δεύτερο όρο (μεταγενέστερη φάση) η πυκνότητα μεταβάλλεται ως $\rho \propto r^{-2/(\hat{\Gamma}+1)}$ και επομένως $\xi \propto r^{-2/7}$ όσο η ενθαλπία παραμένει υψηλή. Σε κάθε περίπτωση η εξέλιξη της ενθαλπίας είναι πολύ βραδύτερη από της ροής poynting υποδεικνύοντας την ταχύτερη απόδοση του μαγνητικά κυριαρχούμενου σεναρίου.

Μια πιο απλή ερμηνεία παρέχεται από τις εκροές μεικτού τύπου, όπως οι $HP0d1S$, $LP05S$. Φανταστείτε την περίπτωση μια μεικτής αραίωσης όπου το πολοειδές πεδίο είναι σημαντικό ($B_p > B_y$) οπότε $x_A^2 \sim 1-\epsilon$ με $\epsilon < 1/\xi\gamma$. Συνεπώς, $\sigma \propto 1/M^2 \propto \rho/\xi \propto \rho^{2-\hat{\Gamma}}$, ενώ αν υπάρχει σημαντικό θερμικό περιεχόμενο $\xi \propto \rho^{\hat{\Gamma}-1}$. Και οι δύο τύποι ενεργειακού περιεχομένου ακολουθούν την ίδιο εξέλιξη της πυκνότητας (μικτού τύπου σενάριο) και επομένως η τιμή $\hat{\Gamma} = 4/3$ υποδεικνύει την βραδύτερη μετατροπή της θερμικής ενέργειας. Αυτή η βραδύτερη δράση της θερμικής πίεσης φαίνεται πως είναι γενικότερο χαρακτηριστικό της αραίωσης καθώς επιβεβαιώνεται και από τις εξελιγμένες χρονοεξαρτώμενες προσομοιώσεις για κυλινδρικές ροές (Κομισσαρο ετ αλ. (2010)).

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω νόμους εξέλιξης καταλήγουμε σε μια φαινομενολογική ερμηνεία της επιτάχυνσης στα διάφορα μοντέλα. Εφαρμόζοντας τον νόμο δύναμης στα ($LP10S$, MP, EP), ακόμα και αν υπάρχουν μικρές αποκλίσεις όπως στο μοντέλο (EP), και καθώς όλα τους έχουν τις ίδιες αρχικές παραμέτρους μ, γ, σ, οι σχετικές αποστάσεις αποδίδονται στην γρηγορότερη εμφάνιση της αραίωσης και ερμηνεύουν την μειούμενη συμπεριφορά του $(r/r_0)_{95}$ στα ($LP10S \to MP \to EP$). Αντίθετα σε μια θερμικά κυριαρχούμενη εκροή ($LP00S$) η επιτάχυνση λαμβάνει χώρα σε μεγαλύτερες αποστάσεις καθώς η κλίμακα της θερμικής επιτάχυνσης είναι μεγαλύτερη. Για την αραίωση μικτού τύπου ($LP05S$ και $HP0d1S$, $HP00S$) οι τελικές χωρικές κλίμακες βρίσκονται στο ενδιάμεσο των δύο.

Το μέτωπο του κύματος αραίωσης καθορίζεται από τον μηδενισμό του παρονομαστή της εξ.(4.20). Γενικά ο μηδενισμός αυτός αντιστοιχεί στο σημείο όπου η $\gamma\theta/c$ ισούται με την φασική ταχύτητα των γρήγορων μαγνητοακουστικών κυμάτων. Συνεπώς οι γραμμές $\theta = const$ είναι και οι χαρακτηριστικές του συστήματος, ακριβώς όπως στην υδροδυναμική ομογενής αραίωση, σχηματίζοντας γύρω από την πολοειδή ταχύτητα τον κώνο Mach των γρήγορων μαγνητοακουστικών διαταραχών ($\tilde{\theta}_m$), βλέπε σχ.4.10. Θεωρώντας τον κώνο στην αρχή των αξόνων, το μέτωπο του κύματος αποτελεί την περιβάλλουσα επιφάνεια όλων των γρήγορων μαγνητοακουστικών διαταραχών που εκπέμπονται από την γωνία της συνοριακή επιφάνειας και έτσι τα αποτελέσματα εν.3.3,3.4 ισχύουν. Για μια ροή με αμελητέο πολοειδές πεδίο

$$B_p \ll B_y \Rightarrow \qquad \sin^2\Theta_{RW} = \frac{\sigma_0 v_{p0}^2}{1-v_{p0}^2} \tag{4.67}$$

ακριβώς όπως δίνει η εξ.4.55 ή η εξ.4.56 στο όριο και της αμελητέας εγκάρσιας ταχύτητας. Η παρουσία του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου και/ή της εγκάρσιας ταχύτητας επηρεάζει προφανώς την κλίση του κυματικού μετώπου, αλλά η επίδραση αυτή είναι σύνθετη και προσδιορίζεται από την εξ.(4.54). Στο σχ.4.9 παρουσιάζουμε την συμπεριφορά της γωνίας

αραίωσης σαν συνάρτηση του αρχικού λόγου ζ_0 για δύο διαφορετικές τιμές της αρχικής εγκάρσιας ταχύτητας v_{y0} για τις ίδιες παραμέτρους με αυτές που χρησιμοποιήσαμε στα ψυχρά μοντέλα. Για ένα αμιγώς τοροειδές μοντέλο σαν το $LP10S$ οι αρχικές τιμές δίνουν $\sin^2\Theta_{RW} \sim 3.17\,10^{-2}$ σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης.

Για μία αμιγώς υδροδυναμική ροή ($\sigma_0 \to 0$, $M_0^2 \to \infty$) ο κώνος Mach αντιστοιχεί στα ηχητικά κύματα. Κατά συνέπεια η γωνία Θ_{RW} δίνεται από την

$$\sin^2\Theta_{RW} = \frac{u_{s0}^2}{(\gamma_0 v_{p0}/c)^2} = \frac{1}{(\gamma_0 v_{p0}/c)^2}\frac{\left(\hat{\Gamma}-1\right)(\xi_0-1)}{\hat{\Gamma}-1+\left(2-\hat{\Gamma}\right)\xi_0} \tag{4.68}$$

Για τις τιμές του $LP00S$ μοντέλου ο υπολογισμός δίνει $\sin^2\Theta_{RW} \sim 6.9\,10^{-3}$, μια τιμή μικρότερη από αυτής των μαγνητικά κυριαρχούμενων μοντέλων. Η διαφορά μεταξύ των δύο τύπων γίνεται εύκολα αντιληπτή ποιοτικά καθώς οι γρήγορες μαγνητοακουστικές διαταραχές διαδίδονται πιο γρήγορα γενικά από ότι οι ηχητικές. Έτσι για τον ίδιο αρχικό παράγοντα Lorentz (γ_0) ο κώνος των δεύτερων αναμένεται να είναι στενότερος. Ένα ενδιαφέρον όριο προκύπτει στα $HP0d1$, $HP0d035$ το οποία αν και θερμικά κυριαρχούμενα στην πραγματικότητα, με την έννοια ότι δεν υπάρχει σημαντική ροή poynting, η παρουσία ενός ισχυρού πολοειδούς μαγνητικού πεδίου επιφέρει μαγνητοακουστικές διαταραχές και επομένως το μεγαλύτερο άνοιγμα του μετώπου κύματος όπως παρατηρείται και στα αποτελέσματα. Η εικόνα του κύματος αραίωσης εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου και την χωρικής δράσης των διαφόρων τύπων αραίωσης δίνει την γενική εικόνα που παρατηρείται σε όλες τις μικτού τύπου εκροές.

Η ψυχρή και ομογενής εκροή μελετήθηκε ενδελεχώς στην εν.4.4.1 όπου αποδείχθηκε αυστηρά ο νόμος $M^2 \propto r^{-2/3}$. Αλλά πέρα από αυτή την τεχνική προσέγγιση, ο ίδιος νόμος μπορεί να προκύψει από πιο διαισθητικά επιχειρήματα. Η κεντρική ιδέα στηρίζεται στο αναλλοίωτο της ποσότητας

$$(\gamma v_p)^2\,\frac{B^2-E^2}{B_p^2} = const \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{B_c}{\rho} = const \tag{4.69}$$

όπου B_c το μαγνητικό πεδίο στο συγκινούμενο σύστημα, ενώ μόνο για λόγους σύγκρισης αναφέρουμε ότι στις κυλινδρικές εκροές ο ίδιος λόγος εξελίσσεται σαν $\propto (\varpi^2+c)^{-1}$ όπου ϖ η σχετική με την x κυλινδρική συντεταγμένη. Η εξίσωση συνέχειας και η διατήρηση της ροής κατά μήκος της γραμμής δίνουν $\rho\gamma v_\theta = k(\vec{\nabla}A)_r \sim kA/r$, που χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τον μηδενισμό του παρονομαστή, εξ.(4.20) $\gamma v_\theta = (B^2-E^2)/(4\pi\rho c)$ για να πάρουμε $B^2-E^2 \propto 1/(\rho r^2)$. Συνδυάζοντας τον νόμο αυτό και την εξ.(4.69), καταλήγουμε στην εξέλιξη της πυκνότητας, $\rho \propto r^{-2/3}$ και από την εξ.(3.7) στο ζητούμενο $M^2 \propto r^{2/3}$.

Κάποιες επιπλέον επιπλοκές ανακύπτουν όταν υπεισέρχεται η εγκάρσια ταχύτητα. Η εξέλιξη της ταχύτητας της ίδιας εμφανίζει ποικιλία με αυξητική μορφή σε κάποια μοντέλα και φθίνουσα σε κάποια άλλα, βλέπε σχ.4.4 και σχ.4.5. Η γενική συμπεριφορά και των δύο συνιστωσών της ταχύτητας δίνεται με βάση την σ στην ανάλυση της εν.4.4. Σύμφωνα με τις εξ.(4.43), εξ.(4.44 και καθώς η αραίωση προχωρά σε μικρότερες παραμέτρους μαγνήτισης, η τιμή $x_A^2 > 1$ οδηγεί στην μείωση της εγκάρσια ταχύτητας, ενώ η $x_A^2 < 1$ στην αύξησή της**. Οι ασυμπτωτικές τιμές της ταχύτητας βρίσκονται αν θέσουμε $\sigma \to 0$

$$v_{y\infty} = x_A^2/\varphi \qquad v_{p\infty} = v_{r\infty} = \sqrt{\frac{\mu^2\varphi^2-\mu^2x_A^4-\varphi^2}{\mu^2\varphi^2}} \tag{4.70}$$

**Σε μια κυλινδρική συμμετρική εκροή όπου ο πίδακας προέρχεται από έναν δίσκο προσαύξησης μέσω ιδεατών ΜΥΔ μηχανισμών, εκροές με $x_A^2 > 1$ δεν είναι επιτρεπτές. Στην επίπεδη συμμετρία αυτός ο περιορισμός δεν υπάρχει και επομένως συμπεριλάβαμε και τέτοιες περιπτώσεις κατά την μελέτη μας.

Η εγκάρσια τιμή δηλώνει απλά την διατήρηση της ορμής και την μεταφορά στην ύλη όλης της ορμής του πλάσματος κατά την διεύθυνση αυτή. Η διατήρηση καθορίζει την εγκάρσια ορμή της ύλης (γv_y), αλλά η επιτάχυνση κατά το πολοειδές επίπεδο οδηγεί επίσης στην αύξηση της αδράνειας της ύλης (γ). Το αν θα υπερισχύσει η αύξηση της αδράνειας οδηγώντας στον περιορισμό της εγκάρσιας ταχύτητας, δεν είναι μοναδικά καθορισμένο - εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες με τον τρόπο που η παραπάνω σχέση καθορίζει. Για ειδικές επιλογές των αρχικών παραμέτρων και για υψηλές τιμές του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου μια παρόμοια μείωση θα μπορούσε να συμβεί και κατά την πολοειδή διεύθυνση. Οι ¨εξωτικές' αυτές επιλογές εμφανίζονται στο σχ.4.5, αλλά η σημασία μιας τέτοιας διαδικασίας στα αστροφυσικά περιβάλλοντα φαίνεται περιορισμένη. Έτσι η αναφορά τους γίνεται μόνο για λόγους ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος και πληρότητας της παραμετρικής μας μελέτης.

Οι παραπάνω εκφράσεις για την ταχύτητα είναι επίσης χρήσιμες για τον υπολογισμό της ασυμπτωτικής τιμής του λόγου των μαγνητικών συνιστωσών. Για τον σκοπό αυτό εφαρμόζουμε τις εκφράσεις στον ορισμό του ολοκληρώματος φ. Μετά από πράξεις

$$\frac{\zeta_\infty}{\zeta_0} = \frac{v_{p0}}{v_{p\infty}} \frac{M_0^2 + \varphi^2 - 1}{M_0^2 \left(1 + \sigma_0\right)} \tag{4.71}$$

από την οποία συνάγουμε την ασήμαντη μεταβολή του ζ λόγου.

Μπορούμε επίσης να περιγράψουμε και την εξέλιξη και των υπολοίπων παραμέτρων. Το εγκάρσιο μαγνητικό πεδίο εξάγεται εύκολα από την εξ.(4.9), η οποία φανερώνει την $B_y \propto r^{-2/3}$ μείωση, αλλά με ένα πιο ομαλό/αργό τρόπο εξαιτίας της παρουσίας του φ^2 όρου στον παρονομαστή. Η εξέλιξη του ζ υποδηλώνει ότι οι μαγνητικές συνιστώσες ακολουθούν τον ίδιο νόμο $B_p \propto r^{-2/3}$, εκτός από περιπτώσεις όπου παρατηρούνται μικρές μεταβολές στην τιμή του ζ. Είναι κατατοπιστικό να συγκρίνουμε την εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου με αυτή που τα κυλινδρικά ΜΥΔ μοντέλα στάσιμης κατάστασης προβλέπουν, $B_p \propto 1/\varpi^2$, $B_\varphi \propto 1/\varpi$, βλέπε προηγούμενο κεφάλαιο και Vlahakis and Königl (2003a). Πέρα από την διαφορά στην μείωση μεταξύ των δύο συνιστωσών, κατά την αραίωση η μετατροπή της ροής poynting $\mu - \xi\gamma \propto |B_y| \propto r^{-2/3}$ συγκρίνεται με την αυτή που τα ημι-αναλυτικά μοντέλα (Vlahakis and Königl (2003a)) και οι αριθμητικές προσομοιώσεις (Κομισσαρο ετ αλ. (2009) και αναφορές εκεί) προβλέπουν. Στα μοντέλα αυτά η μετατροπή είναι βραδύτερη λόγω της πιο αργής μείωσης του ϖB_φ. Έτσι η μαγνητικά κυριαρχούμενη αραίωση θεωρείται ένας ισχυρός και σε μικρή κλίμακα δράσης μηχανισμός για την μετατροπή της ενέργειας poynting σε κινητική. Συνεπώς, η συνεισφορά του στα φαινόμενα της αστροφυσικής υψηλών ενεργειών μπορεί να αποδειχθεί πολύτιμη.

Η παράμετρος μαγνήτισης ακολουθεί τον νόμο $-2/3$ σε μεγάλη έκταση, αλλά όπως η εξ.(4.41) υποδηλώνει, αυτή η συμπεριφορά αποκλίνει όταν ο ζ είναι κοντά στην μονάδα και $v_y \sim \varphi$, πχ στο (EP) μοντέλο - τα μικτά σενάρια $HP0d1$, $HP0d035$ είναι επίσης ενδεικτικά. Η απόκλιση αυτή δεν έχει σοβαρή επίπτωση κατά την εξαγωγή των περισσότερων νόμων που περιγράφουν την εξέλιξη των φυσικών ποσοτήτων. Επηρεάζει, όμως, τους υπολογισμούς της έκτασης της αραιωμένης περιοχής (Θ_{PM} και εξ.4.61). Οι δύο όροι που εμφανίζονται στην έκφραση αυτή έχουν την ίδια τάξη μεγέθους καθιστώντας την ακριβή αριθμητική ολοκλήρωση αναπόφευκτη, ειδικά για τις ροές χαμηλού ζ. Η τελικές τιμές της Θ_{PM} για χαμηλές τιμές της εγκάρσια ταχύτητας και ως συνάρτηση του ζ_0 εμφανίζονται στο σχ.4.9.

Όπως υποδηλώνει η ολοκλήρωση των μη ομογενών λύσεων $LP15F$, $LP2F$, η επίδραση της ανομοιογένειας δεν είναι σημαντική τόσο για την κλίση του κύματος αραίωσης όσο και για την χωρική κλίμακα του φαινομένου. Επηρεάζουν, όμως, την απότομη εμφάνιση του κύματος παράγοντας μια ομαλότερη μετάβαση που τονίζεται από τα κόκκινα βέλη στο σχ.4.4. Βασικά όταν $F \neq 1$ οι γραμμές ανακαθορίζουν την τοπολογία τους ακόμα και πριν

την διέλευση του κύματος αραίωσης, κάτι που γίνεται αντιληπτό και από τις μη μηδενικές τιμές των $d/d\theta$ παραγώγων του συστήματος. Παρόλα αυτά η διαδικασία αυτή είναι δευτερεύουσα και επισκιάζεται από την αραίωση καθώς τότε ο παρονομαστής λαμβάνει πολύ μικρές τιμές (και οι παράγωγοι πολύ μεγάλες). Αυστηρά μιλώντας το κύμα αυτό δεν αποτελεί ασθενής ασυνέχεια αλλά μια απότομη διαδικασία αραίωσης. Το μοντέλο μας, όμως, έχει την δυνατότητα να περιγράψει την συμπεριφορά και τέτοιου είδους εκροών.

Όταν η εξωτερική πίεση δεν είναι αμελητέα, οι εξισώσεις εξ.(4.8)-(4.13) απαιτούν τον τερματισμό της διαδικασίας σε μια μη μηδενική ρ οδηγώντας σε πεπερασμένες τιμές των M^2 και σ. Έτσι μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε ότι η εξίσωση Bernoulli εξ.(4.45) παρέχει μια μη μηδενική τιμή του ημιτόνου, ή αλλιώς μια μη μηδενική v_θ-συνιστώσα. Η παρουσία αυτής της συνιστώσας υποδηλώνει τον σχηματισμό μιας ασυνέχειας επαφής μεταξύ του αραιωμένου ρευστού και του εξωτερικού μέσου, καθώς επίσης και την δημιουργία ενός ωστικού κύματος που διαδίδεται στο εξωτερικό μέσο. Αυτός ο πρώιμος τερματισμός της διαδικασίας σχετίζεται με χαμηλότερες τιμές επιτάχυνσης που επίσης παρέχεται από το μοντέλο μας. Αλλά η εμφάνιση του ωστικού κύματος στο εξωτερικό μέσω δεν μπορεί να περιγραφεί με συνεπές τρόπο από το μοντέλο μας και πρέπει επομένως να δοθεί εξωτερικά, δηλαδή από κάποιο άλλο μοντέλο.

Πλαίσιο 4.3: Η χρονοεξαρτώμενη αραίωση σε αντιδιαστολή με το στάσιμο φαινόμενο

Εξετάζουμε την σχέση μεταξύ χρονοεξαρτώμενης και στάσιμης αραίωσης. Για λόγους απλούστευσης εξετάζουμε το αμιγώς τοροειδές όριο, όπου η εγκάρσια ταχύτητα είναι επίσης αμελητέα ($\vec{B}_p = 0$, $v_y = 0$) στην επίπεδα συμμετρική εκροή ($\partial/\partial\theta = 0$). Το ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{E} = -\frac{v_x}{c}B\hat{z} + \frac{v_z}{c}B\hat{x} \tag{4.72}$$

Η χρονοεξαρτώμενη ΜΥΔ εξισώσεις μετά από λίγες πράξεις παίρνουν την μορφή

$$\frac{1}{c}\frac{\partial(\gamma\rho)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma\rho\frac{v_z}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\rho\frac{v_x}{c}\right) = 0 \tag{4.73}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_z}{c}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{v_x}{c}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{B}{\gamma\rho}\right) = 0 \tag{4.74}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_z}{c}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{v_x}{c}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{p}{\rho^{\hat{\Gamma}}}\right) = 0 \tag{4.75}$$

όπου αναγνωρίζουμε τις εξισώσεις συνέχειας, διατήρησης της ορμής (μετά την χρήση των εξ.Maxwell) και διατήρησης εντροπίας. Η προβολή της εξίσωσης ορμής κατά μήκος και κάθετα στις πολοειδές γραμμές δίνει αντίστοιχα

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_z}{c}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{v_x}{c}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\xi\gamma + \frac{B^2}{4\pi\gamma\rho c^2}\right) = \frac{1}{\gamma\rho c^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(p + \frac{B^2}{8\pi\gamma^2}\right) \tag{4.76}$$

$$\left(\gamma\xi + \frac{B^2}{4\pi\gamma\rho c^2}\right)\gamma\rho v_z^2\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_z}{c}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{v_x}{c}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{v_x}{v_z}\right) = \left(\frac{v_x}{c}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{v_z}{c}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(p + \frac{B^2}{8\pi\gamma^2}\right) \tag{4.77}$$

Για υπερ-σχετικιστικές ροές που διαδίδονται σχεδόν παράλληλα με τον z-άξονα ($|v_x| \ll |v_z|$) οι παρακάτω απλοποιήσεις λαμβάνουν χώρα

- $v_z/c \approx 1$
- Το αριστερό μέλος της εξ.4.76 αγνοείται καθώς το αριστερό μέλος περιλαμβάνει όρους μεγαλύτερης τάξης - παρατηρείστε ότι $dh = dP/\rho c^2$)
- Η υπόθεση $|v_x \partial/\partial z| \ll |v_z \partial/\partial x|$ απλοποιεί την εξ.4.77.

Προσεκτική μελέτη της εξ.4.76 αποκαλύπτει ότι η υπόθεση $v_z \approx c$ ισχύει μόνο για την υπερ-γρήγορη μαγνητοακουστική περιοχή[α΄].
Το παραγόμενο σύστημα δίνει τρία ολοκληρώματα της μορφής

$$-\frac{B}{\gamma\rho c} = \Phi_\Psi \qquad \frac{p}{\rho^{\hat{\Gamma}}} = Q \qquad \xi\gamma + \frac{B^2}{4\pi\gamma\rho c^2} = \mu \tag{4.78}$$

όπου μπορεί να είναι διαφορετικά στα διάφορα τμήματα της ροής (στην περίπτωση της διαφορικής εκπομπής κελυφών) και τις εξισώσεις

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\gamma\rho\frac{v_z}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\rho\frac{v_x}{c}\right) = 0 \tag{4.79}$$

$$\mu\gamma\rho c^2\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{v_x}{c}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{v_x}{v_z} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{B^2}{8\pi\gamma^2}\right) \tag{4.80}$$

Εξετάζοντας τις εξισώσεις αυτές παρατηρούμε ότι οι παράγωγοι $\partial/\partial t$ και $\partial/\partial z$ εμφανίζονται πάντα με τον ίδιο συνδυασμό, $\partial/c\partial t + \partial/\partial z$, και έτσι οι μεταβλητές z και ct μπορούν να εναλλαχτούν. Το πρόβλημα της στάσιμης κατάστασης όπου $\partial/\partial t = 0$ με την ροή να εξαρτάται από τα z και x είναι μαθηματικά ισοδύναμο με το χρονοεξαρτώμενο και μονοδιάστατο πρόβλημα όπου $\partial/\partial z = 0$ με την ροή να εξαρτάται από τα ct και x.
Οι παραπάνω υπολογισμοί είναι η διατύπωση της προσέγγισης του παγωμένου παλμού frozen pulse που ισχύει σε μια υπερ-σχετικιστική εκροή - αρχικά διατυπώθηκε από τους Πιραν ετ αλ. (1993) για υδροδυναμικές εκροές και γενικεύθηκε από τους Vlahakis and Königl (2003a) στην ΜΥΔ περίπτωση. Λόγω της υπερ-σχετικιστικής και υπερ-γρήγορης κίνησης της εκροής, κάθε πιθανή διαταραχή παρασύρεται από την εκροή χωρίς να έχει την δυνατότητα να επηρεάσει τα γειτονικά τμήματά της. Σαν αποτέλεσμα η εξέλιξη του κάθε στοιχειώδους όγκου είναι ουσιαστικά σε στάσιμη κατάσταση. Πράγματι η αλλαγή μεταβλητών από τις (x, z, t) στις (x, z, s) όπου $s \equiv ct - z$, μετασχηματίζει τις εξισώσεις εξ.4.79, 4.80 στις

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma\rho\frac{v_z}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\rho\frac{v_x}{c}\right) = 0 \tag{4.81}$$

$$\mu\gamma\rho c^2\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{v_x}{c}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{v_x}{v_z} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{B^2}{8\pi\gamma^2}\right) \tag{4.82}$$

όπου είναι όμοιες με τις εξισώσεις της στάσιμης κατάστασης στο υπερ-σχετικιστικό τους όριο. Παρατηρείστε παρόλα αυτά ότι οι μερικές παράγωγοι $\partial/\partial z$, $\partial/\partial x$ λαμβάνονται, τώρα, υπό σταθερό s. Καθώς η κίνηση είναι σχετικιστική κατά την z-διεύθυνση η μεταβλητή s είναι πρακτικά σταθερή σε κάθε τμήμα του ρευστού και

αντιστοιχεί στον χρόνο κατά το όποιο ο όγκος πέρασε από μια συγκεκριμένη θέση z_i. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θέσουμε $z_i = 0$ - στην περίπτωση αυτή $t_i = s/c$. Η απουσία των s και $\partial/\partial s$ στις εξισώσεις εξ.4.81,4.82 σημαίνει ότι οι εξισώσεις αυτές δεν περιορίζουν την s εξάρτηση ή κάθε ποσότητα της μορφής $\mathcal{F}(x, z, s) = \mathcal{F}(x, z, ct - z)$. Η εξάρτηση αυτή καθορίζεται μόνο από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες, δηλαδή από τις τιμές των ποσοτήτων σε κάθε όγκο την χρονική στιγμή t_i όπου πέρασε από την αρχική θέση. Με άλλα λόγια μπορούμε να υπολογίσουμε την εξέλιξη μιας χρονοεξαρτώμενης ροής εφαρμόζοντας τις στάσιμες λύσεις σε κάθε τμήμα της ροής αλλάζοντας μόνο τις συνοριακές συνθήκες (βλέπε για παράδειγμα την εν.4.1.1 του Vlahakis and Königl (2003a)).
Στην ειδική περίπτωση ενός σχετικιστικού κύματος αραίωσης, η προσέγγιση του παγωμένου παλμού ισχύει[β΄]. Κατά συνέπεια οι στάσιμες λύσεις που θεωρήσαμε στην παρούσα διατριβή μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή μιας χρονοεξαρτώμενης εκροής και αυτό επιτυγχάνεται γράφοντας απλά την μεταβλητή ομοιότητας ως $z/x = (ct - s)/x = c(t - t_i)/x$. Συνεπώς απαιτείται μόνο η αλλαγή $z \to c(t - t_i)$ (με σταθερό t_i για κάθε όγκο) για να ανακτήσουμε τις εξισώσεις του χρονοεξαρτώμενου κύματος αραίωσης με υπερ-σχετικιστική ταχύτητα κατά την z-διεύθυνση που μελέτησαν οι Komissarov et al. (2010). Οι γεωδαισιακές των στοιχειωδών όγκων που διέρχονται του $(t_i = 0, z = 0)$ (για διάφορα $x < 0$) είναι ισοδύναμες με τις γραμμών ροής του στάσιμου μοντέλου. Αυτή η κατάσταση ισχύει πραγματικά με τις αριθμητικές προσομοιώσεις. Επιλέγοντας αρχικές συνθήκες σαν αυτές του σχ.4 στο Komissarov et al. (2010) παίρνουμε πρακτικά τα ίδια αποτελέσματα αντικαθιστώντας απλά $z \leftrightarrow ct$.

[α΄]Στο σημείο $\frac{v_z}{c}\left(1 + \frac{B^2}{4\pi\xi\gamma^2\rho c^2}\right) \approx \sigma\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)$ της εξίσωσης αυτής κρατάμε τον όρο $1/\sigma$, αλλά όχι τον $1/\gamma^2$, κάτι το οποίο είναι σωστό αν $\gamma^2 \gg \sigma$, ορ, $\gamma^2 \gg 1 + u_f^2$.

[β΄]Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η συνθήκη $|v_x\partial/\partial z| \ll |v_z\partial/\partial x|$ πράγματι ισχύει στην $\lambda = 1$ περίπτωση όπου οι ποσότητες της ροής εξαρτώνται μόνο από τον λόγο z/x.

4.6 Εφαρμογή στο GRB/Collapsar Μοντέλο

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου προχωρούμε σε μια πρώτη αστροφυσική εφαρμογή του μοντέλου μας.Σύμφωνα με την κρατούσα θεωρία, ο πίδακας που σχετίζεται με τις long/soft GRB σχηματίζεται στο εσωτερικό του γεννήτορα άστρου με την πρώτη φάση της επιτάχυνσης να λαμβάνει χώρα πριν ο πίδακας διασχίσει την αστρική επιφάνεια. Καθώς οι λεπτομέρειες της φάσης μέσα στο αστρικό περίβλημα είναι εν γένει άγνωστες, θεωρήσαμε μια ενδεικτική αρχική τιμή $\gamma_0 = 100$, χωρίς να αποκλείονται και άλλες τιμές οι οποίες εξετάζονται εύκολα από το μοντέλο μας αρκεί, βεβαίως, να αναφέρονται σε υπέρ-ηχητικές ή υπερ-γρήγορες μαγνητοακουστικές εκροές[††].

Η μαγνήτιση του πίδακα είναι επίσης μια τελείως άγνωστη και άρα ελεύθερη παράμετρος. Αλλά αν ο πίδακας είναι μαγνητισμένος τότε όπως προτείνουν τόσο οι αριθμητικές προσομοι-

[††]Αν η επιτάχυνση έχει μαγνητικό χαρακτήρα, η χωρική εξάρτηση του παράγοντα Lorentz μπορεί να προσομοιαστεί από την ως $\gamma \approx (R/r_{\rm lc})^{(b-1)/b}$ όπου R η απόσταση από την αρχή των αξόνων και b μια παράμετρος που σχετίζεται με το σχήμα των γραμμών, βλέπε Komissarov et al. (2010). Για παράδειγμα, η τιμή $b = 2$ δίνει $\gamma_j = 100\left(\frac{R_\star}{R_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{r_{lc}}{5\times10^6 cm}\right)^{-1/2}$, όπου $R_\star$ η ακτίνα του άστρου, ενώ η τιμή $b = 3/2$ δίνει $\gamma_j = 50\left(\frac{R_\star}{10R_\odot}\right)^{1/3}\left(\frac{r_{\rm lc}}{5\times10^6{\rm cm}}\right)^{-1/3}$.

ώσεις, όσο και τα θεωρητικά μοντέλα, η εκροή είναι στην υπερ-γρήγορη μαγνητοακουστική περιοχή την στιγμή που διασχίζει την αστρική επιφάνεια. Προκειμένου να μειώσουμε κάπως το πλήθος των αγνώστων στηριζόμαστε πάλι στα συμπεράσματα των προσομοιώσεων που συν τις άλλοις δίνουν πολύ χαμηλές τιμές εγκάρσιας ταχύτητας και πολοειδούς μαγνητικού πεδίου, αλλά και στα θεωρητικά μοντέλα του Fireball που προτείνουν τελικούς παράγοντες Lorentz της τάξης των μερικών εκατοντάδων. Υιοθετούμε, λοιπόν, την προσέγγιση αμελητέου πολοειδούς πεδίου, εν.4.3.2, μηδενικές εγκάρσιες ταχύτητες και συνολικό ενεργειακό περιεχόμενο $\mu \sim \gamma_{max} = 1100$.

Η εφαρμογή μας υποθέτει επίπεδη γεωμετρία και συμμετρία η οποία μπορεί να ισχύει μόνο κοντά στην συνοριακή επιφάνεια του πίδακα και για αποστάσεις μικρότερες από την ακτίνα καμπυλότητας. Δύο από τις κεντρικές επιπλοκές που η κυλινδρική συμμετρία επιφέρει είναι η ομογενής κατανομή των ποσοτήτων σε όλο το μήκος της αρχικής επιφάνειας, μέχρι δηλαδή και τον άξονα, και η ίδια η παρουσία του άξονα ως ανακλαστική επιφάνεια. Και οι δύο αυτοί παράγοντες επηρεάζουν τον τελικό παράγοντα Lorentz του στρωματοποιημένου πλέον πίδακας (stratified). Παρόλα σαν ένα πρώτο βήμα αγνοούμε την χωρική κατανομή των ποσοτήτων στην αρχική επιφάνεια και υποθέτουμε ομογενές προφίλ ($F = 1$) - ούτως ή άλλως όπως έχουμε ήδη αναφέρει η αυτο-ομοιότητα δεν αποτελεί χαρακτηριστικό της κυλινδρικής συμμετρίας. Επιπλέον υποθέτουμε ότι όλες οι γραμμές είναι παράλληλες προς τον z-άξονα κάτι το οποίο δεν αναμένεται στην πραγματικότητα. Όλοι αυτοί οι περιορισμοί πρόκειται να ξεπεραστούν στο επόμενο κεφάλαιο με την ανάπτυξη του κυλινδρικού μας μοντέλου. Παρόλο, όμως, τις ασυμβατότητες το απλό αυτό μοντέλο πιάνει όλη την βασική φυσική του μηχανισμού, ενώ θα αποτελέσει τον οδηγό για την μετέπειτα μελέτη.

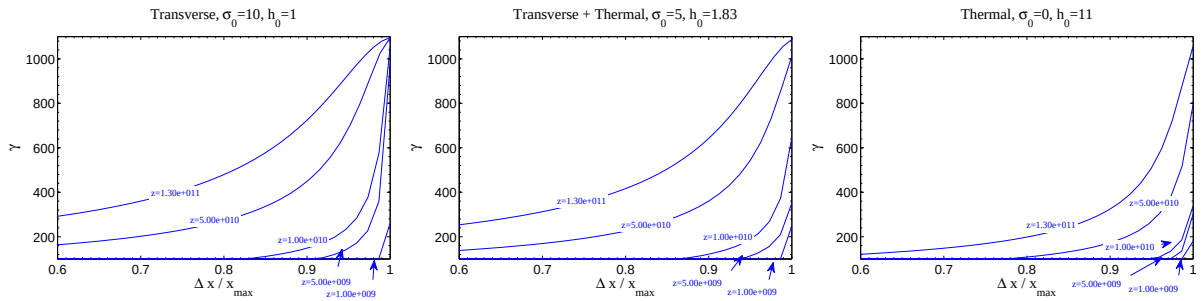
Προκειμένου να εκτιμήσουμε το ημι-άνοιγμα της οπής του αστρικού περιβλήματος (x_j) χρησιμοποιούμε την συσχέτιση ανοίγματος πίδακα - παράγοντα Lorentz ($\theta_j \gamma_j \sim 1$) που για τυπικές τιμές δίνει

$$|x_j|\,(cm) \sim 7\,10^8 \left(\frac{\gamma_0}{100}\right)^{-1} \left(\frac{R_s}{R_\odot}\right) \tag{4.83}$$

όπου R_s η ακτίνα του αστρικού γεννήτορα - για ένα Wolf-Rayet Άστρο, που αποτελεί και τον πιο προσφιλή υποψήφιο, υποθέσαμε $R_s \sim 10 R_\odot$.

Προκειμένου να εκτιμήσουμε την διαστρωμάτωση του παράγοντα Lorentz που επιτυγχάνουμε σε κάποιο σταθερό z είναι απαραίτητο πρώτα να προσδιορίσουμε την απόσταση τερματισμού z_f μέχρι την οποία το μοντέλο μας χρησιμοποιείται. Μια λογική επιλογή είναι να υποθέσουμε την απόσταση κατά την οποία το κύμα φτάνει στον άξονα ή το 2σιο αυτής $z_f \sim 2x_j/\sin\Theta_{RW}$. Βέβαια θα πρέπει να τονίσουμε ότι μετά την απόσταση αυτή το ανακλώμενο κύμα αλληλεπιδρά με την εκροή μας, αλλάζοντας επομένως την εικόνα και καθιστώντας τα συμπεράσματά μας μη ασφαλή. Ο παράγοντας Lorentz για διάφορες διατομές σταθερού z και για τα LP μοντέλα παρουσιάζονται στο σχ.4.11.

Παρόλο την σχεδόν κατασταλαγμένη άποψη για τον Wolf-Rayet τύπο του γεννήτορα, οι λεπτομέρειες της αστρικής εξέλιξης και ειδικά την ύπαρξη ή όχι ισχυρού αστρικού ανέμου που αλλάζει την κατάσταση του μεσοαστρικού χώρου είναι ακόμα άγνωστες. Για τον λόγο αυτό στην εργασία-οδηγό των Woosley and Heger (2006) και Mizuta and Aloy (2009) περιελήφθησαν και οι δύο περιπτώσεις με πυκνό άνεμο ή όχι. Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του ανέμου ισόθερμος, η θερμοκρασία του κτλ ένας πυκνός άνεμος είναι πολύ πιθανό να εισάγει επιπλοκές εξωτερικής πίεσης όμοιες με αυτές που συζητήσαμε στις προηγούμενες ενότητες. Σε μια τέτοια περίπτωση ο τερματισμός της αραίωσης οδηγεί σε χαμηλότερους παράγοντες Lorentz, ενώ θα δημιουργηθεί και ένα ωστικό κύμα στο εξωτερικό μέσο. Το όλο θέμα είναι ακόμα ανοικτό, αλλά αν και το μοντέλο μας θα μπορούσε να εφαρμοστεί και στην περίπτωση αυτή. Βέβαια, λόγω της επίπεδης συμμετρία που υιοθετήσαμε τα α-



Σχήμα 4.11: Η χωρική κατανομή του παράγοντα Lorentz για τα τρία εγκάρσια μαγνητισμένα μοντέλα LP, εν.4.3.2, σε συγκεκριμένες διατομές $z = const$, όπου η ποσότητα z παριστάνει τις αποστάσεις όπως μετριούνται από την αστρική επιφάνεια και σε μονάδες cgs. Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στην x διάσταση της διατομής κανονικοποιημένη στην ολική διάσταση της διατομής στο συγκεκριμένο z. Στο εσωτερικό σημείο η επίδραση της κυλινδρικής συμμετρίας, όπως πχ ο πυρήνας του πίδακα, επηρεάζουν την ισχύ του μοντέλου μας, αν και η επίδραση είναι χαμηλότερης τάξης. Παρατηρούμε την μικρότερη χωρική κλίμακα και επομένως υψηλότερη απόδοση της μαγνητικά κυριαρχούμενης αραίωσης σε σύγκριση με το θερμικό φαινόμενο.

ποτελέσματα μας είναι μόνο ενδεικτικά και παρέχουν μόνο σε τάξη μεγέθους εκτιμήσεις , οι οποίες όμως φαίνονται σε συμφωνία με τις απαιτήσεις του GRB/Collapsar Μοντέλου. Σκοπός του μοντέλου είναι να διευκρινίσει την φυσική του φαινομένου της αραίωσης και όχι η ακριβής περιγραφή του αστροφυσικού φαινομένου. Η ακριβής περιγραφή θα αποτελέσει αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου όπου θα αναπτύξουμε μια διαφορετική πλην, όμως, κυλινδρικά συμμετρική προσέγγιση.

Κεφάλαιο 5

Στάσιμες και υπερ-γρήγορες μαγνητοακουστικές αξισυμμετρικές εκροές

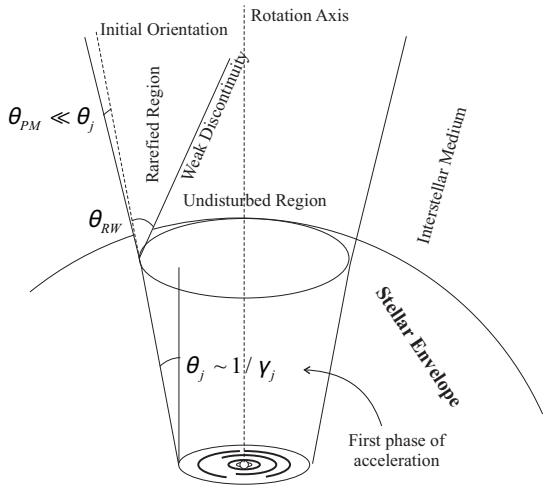
Το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφουν τους στάσιμους και ιδεατά αγώγιμους κυλινδρικούς πίδακες έχει ήδη παρουσιαστεί στο κεφ.3. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν και τα 5 ολοκληρώματα, ενώ προχωρήσαμε σε μια πρώτη μερική ολοκλήρωση καταλήγοντας σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων: της εξίσωσης Bernoulli και της transfield εξίσωσης. Προκειμένου να προσδιορίσουμε πλήρως την εκροή οι εξισώσεις αυτές πρέπει με κάποιο τρόπο να ολοκληρωθούν. Η αυτο-όμοια μεθοδολογία εφαρμόστηκε στην επίπεδη συμμετρία δίνοντας μας στην περίπτωση αυτή λύση κεφ.4. Δυστυχώς, όμως, η ιδιότητα αυτή δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην κυλινδρική ροή. Έτσι απαιτείται μια διαφορετική προσέγγιση που αποτελεί θέμα του συγκεκριμένου κεφαλαίου.

Έτσι αναπτύσσουμε ένα γενικότερο αλγοριθμικό σχήμα που είναι κατάλληλο για την ολοκλήρωση της γρήγορη μαγνητοακουστικής περιοχής εστιάζοντας την εφαρμογή της στο φαινόμενο της αραίωσης. Τα συμπεράσματα της επίπεδης μελέτης θα αποτελέσουν οδηγό και στην προσέγγισή μας αυτή. Πέρα, όμως, από την επιβεβαίωσή τους η κυλινδρική συμμετρία οδηγεί στον σχηματισμό και νέων δομών. Η εφαρμογή της στο μοντέλο Collapsar/GRB έχει πολύ ενδιαφέρον, ενώ η συμβατότητα με τις ως τώρα παρατηρήσεις είναι ελπιδοφόρα.

5.1 Ο φορμαλισμός και οι υποθέσεις του μοντέλου

Η συμμετρία του προβλήματος καθορίζει και το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται ώστε να γραφούν αναλυτικά οι εξισώσεις. Έτσι υιοθετούμε κυλινδρικές συντεταγμένες (ϖ, φ, z) όπου (φ) η αγνοήσιμη συντεταγμένη και του άξονες προσανατολισμένους όπως εμφανίζονται στο σχ.5.1 και δεξιά στο σχ.5.2. Στο κεφ.3 παρουσιάσαμε τα ολοκληρώματα εξ.3.8-3.16 που ισχύουν σε στάσιμε ροές και τις εξισώσεις transfield (εξ.3.30) και Bernoulli (3.31) που πρέπει να ολοκληρωθούν. Η υπόθεση της κυλινδρικής συμμετρίας και το ιδανικά αγώγιμο όριο περιλαμβάνονται ήδη στις εκφράσεις αυτές - οι υπολογισμοί μας συνεχίζουν από το σημείο αυτό.

Το κεντρικό σημείο της προσέγγισής μας είναι ο μετασχηματισμός σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων που παρέχει μια πιο φυσική και γόνιμη βάση για τους υπολογισμούς. Ήδη στα προηγούμενα κεφάλαια εισάγαμε έμμεσα ένα τέτοιο σύστημα καθώς χρησιμοποιήσαμε την έννοια των γραμμών ροής ή των πολοειδών μαγνητικών γραμμών - θυμίζουμε ότι στο ιδανικό όριο οι περιγραφές μέσω των συναρτήσεων αυτών είναι ισοδύναμες, βλέπε εν.3.1.



Σχήμα 5.1: Απλοποιημένο διάγραμμα του Collapsar πίδακα. Η εκροή ξεκινά από τον πυρήνα του καταρρέοντος άστρου και αφού διασχίσει το αστρικό περίβλημα διαδίδεται στο μεσοαστρικό χώρο. Παρατηρήστε ακόμα την συσχέτιση θ_j, γ_j και την αμελητέα αύξηση της έκτασης της εκροής.

Ακολουθώντας μια πιο στιβαρή θεμελίωση θα χρησιμοποιήσουμε μια αντίστοιχη μέθοδο, αλλά εξετάζοντας λεπτομερέστερα τον μετασχηματισμό. Στις κυλινδρικές συντεταγμένες η ροή των πολοειδών γραμμών ορίζεται ως

$$A = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \vec{B}_p \cdot d\vec{S} \tag{5.1}$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε μία κυκλική επιφάνεια του $\hat{\varpi} - \hat{\varphi}$ επιπέδου. Σε ένα μια κατανομή όπου για όλη την έκτασή της το μαγνητικό πεδίο έχει μονοσήμαντο προσανατολισμό, είτε προς τα πάνω, είτε προς τα κάτω, η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως μονότονη και χρησιμοποιείται ώστε να τιτλοδοτήσει κάθε πολοειδής γραμμή. Επιπλέον, ο ορισμός της A μπορεί να αντιστραφεί παρέχοντας το πολοειδές μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B}_p = \frac{\vec{\nabla} A \times \hat{\varphi}}{\varpi} \tag{5.2}$$

παρατηρήστε τον κάθετο προσανατολισμό των $\vec{B}_p \perp \vec{\nabla} A$.

Χρησιμοποιούμε την παραπάνω ιδιότητα για να ορίσουμε την κάθετη στις πολοειδείς γραμμές $\hat{n}$ και να γράψουμε

$$\vec{\nabla} A = \left|\vec{\nabla} A\right| (\cos\theta \hat{\varpi} - \sin\theta \hat{z}) \tag{5.3}$$

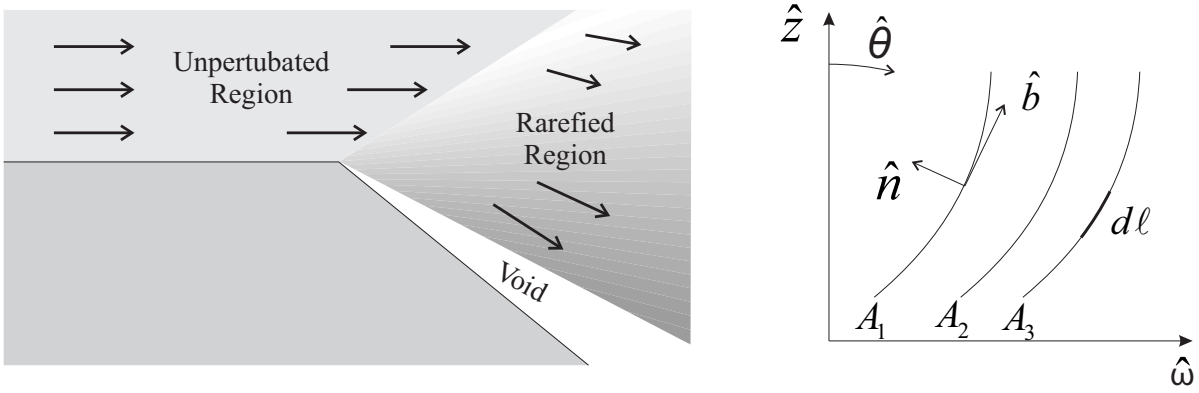
$$\hat{n} = -\frac{\vec{\nabla} A}{\left|\vec{\nabla} A\right|} = -\cos\theta \hat{\varpi} + \sin\theta \hat{z} \tag{5.4}$$

Η αντιστοιχία της γωνίας θ που εμφανίζεται στις παραπάνω εκφράσεις βρίσκεται εύκολα χρησιμοποιώντας την εξ.5.2

$$\varpi \vec{B}_p = \left|\vec{\nabla} A\right| (\cos\theta\, \hat{z} + \sin\theta\, \hat{\varpi}) \Rightarrow \qquad \tan\theta = \frac{B_\varpi}{B_z}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν και οι σχέσεις ορθογωνιότητας ($\hat{\varpi} \times \hat{z} = -\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{\varpi}$, $\hat{\varpi} \times \hat{\varphi} = -\hat{z}$). Επομένως η γωνία θ παριστάνει την κλίση των πολοειδών γραμμών μετρούμενη από τον άξονα περιστροφής. Το μοναδιαίο παράλληλο προς τις γραμμές, $\hat{b}$, βρίσκεται άμεσα

$$\hat{b} = \hat{\varphi} \times \hat{n} = \sin\theta\, \hat{\varpi} + \cos\theta\, \hat{z} \tag{5.5}$$



Σχήμα 5.2: Αριστερά: Απλοποιημένο γράφημα της αραιωμένης εκροής. Παρατηρούμε τις τρεις περιοχές που σχηματίζονται (αδιατάρακτο πλάσμα, αραιωμένο ρευστό και κενός χώρος). **Δεξιά:** Οι νέες συντεταγμένες $(A,\, \ell)$. Παρατηρείστε ότι οι κλίσεις των πολοειδών γραμμών θ μετριέται από τον άξονα περιστροφής.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το μοναδιαίο $\hat{b}$ όχι μόνο είναι παράλληλο του B_p, αλλά με απλή εφαρμογή της εξ.5.2 και το σχηματισμό του γινομένου

$$\hat{b} \cdot \vec{B}_p = \frac{1}{\varpi \left|\vec{\nabla} A\right|} \left|\vec{\nabla} A \times \hat{\varphi}\right|^2 > 0$$

ότι η τριάδα $\hat{b}$, $\hat{\varphi}$ και $\hat{n}$(ή $-\vec{\nabla} A$) αποτελεί μια δεξιόστροφη ορθογώνια βάση.

Προσδιορίζοντας περαιτέρω το νέο σύστημα συντεταγμένων, εισάγουμε την συνάρτηση A και ορίζουμε μια ακόμα ποσότητα ℓ, το μήκος τόξου πάνω στην πολοειδή γραμμή, μέσω της συνθήκης

$$\hat{b} \cdot \vec{\nabla} \ell = 1 \tag{5.6}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση σε σχέση με την παράμετρο ℓ. Αν θεωρήσουμε μια πρόσθετη ποσότητα της μορφής $\ell' = \ell + f(A)$ και επομένως $\vec{\nabla} \ell' = \vec{\nabla} \ell + \partial f / \partial A \vec{\nabla} A$, η νέα ποσότητα ικανοποιεί επίσης την συνθήκη ορισμού. Για το μήκος τόξου ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \ell} = \sin\theta \qquad \frac{\partial z}{\partial \ell} = \cos\theta \tag{5.7}$$

Ορίζουμε, τώρα, τον μετασχηματισμό από τα ϖ, z στις νέες A, ℓ συντεταγμένες. Σημαντικό πλεονέκτημα του μετασχηματισμού αυτού αποτελεί ότι πλέον δεν μας απασχολούν οι συντεταγμένες ϖ, z που καθορίζουν το σχήμα της γραμμής, αλλά αυτές προκύπτουν ως λύση των εξισώσεων - ένας λίγο διαφορετικός μετασχηματισμό χρησιμοποιήθηκε και από τους Bogovalov and Tsinganos (1999). Στους υπολογισμούς που ακολουθούν απαιτείται λίγη προσοχή καθώς το νέο σύστημα συντεταγμένων δεν είναι πλέον ορθογώνιο. Το πρώτο βήμα έγκειται στο να εκφράσουμε τα μοναδιαία $\hat{\varpi}$, $\hat{z}$ σαν συνάρτηση της $\vec{\nabla} A$, $\vec{\nabla} \ell$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της γωνίας θ εξ.5.3, 5.7. Η διαδικασία είναι τετριμμένη και δίνει

$$\hat{\varpi} = \frac{\partial \varpi}{\partial A} \vec{\nabla} A + \frac{\partial \varpi}{\partial \ell} \vec{\nabla} \ell = \frac{\partial \varpi}{\partial A} \left|\vec{\nabla} A\right| (\cos\theta\, \hat{\varpi} - \sin\theta\, \hat{z}) + \sin\theta\, \vec{\nabla} \ell$$

$$\hat{z} = \frac{\partial z}{\partial A} \vec{\nabla} A + \frac{\partial z}{\partial \ell} \vec{\nabla} \ell = \frac{\partial z}{\partial A} \left|\vec{\nabla} A\right| (\cos\theta\, \hat{\varpi} - \sin\theta\, \hat{z}) + \cos\theta\, \vec{\nabla} \ell$$

Η επίλυση του παραπάνω συστήματος παρέχει τα $\vec{\nabla}\ell$, $\left|\vec{\nabla}A\right|$ (η μία εξίσωση είναι εξαρτημένη). Το αποτέλεσμα για την $\vec{\nabla}\ell$ είναι

$$\vec{\nabla}\ell = \frac{1 - \frac{\partial\varpi}{\partial A}\left|\vec{\nabla}A\right|\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\varpi} + \frac{\partial\varpi}{\partial A}\left|\vec{\nabla}A\right|\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}\ell = -\frac{\partial z}{\partial A}\left|\vec{\nabla}A\right|\hat{\varpi} + \frac{1 + \frac{\partial z}{\partial A}\left|\vec{\nabla}A\right|\sin\theta}{\cos\theta}\hat{z}$$

Πλαίσιο 5.1: Μερικές Χρήσιμες Εκφράσεις

Η αντιστροφή των μερικών παραγώγων των συντεταγμένων γίνεται είτε με χρήση των Ιακωβιανών είτε κατευθείαν μέσω της εξ.5.3

$$\frac{\partial A}{\partial\varpi} = \left|\vec{\nabla}A\right|\cos\theta \qquad \frac{\partial A}{\partial z} = -\left|\vec{\nabla}A\right|\sin\theta$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\varpi} = -\left|\vec{\nabla}A\right|\frac{\partial z}{\partial A} \qquad \frac{\partial\ell}{\partial z} = \left|\vec{\nabla}A\right|\frac{\partial\varpi}{\partial A}$$

Οι μικτές παράγωγοι δεύτερης τάξης υπολογίζονται απευθείας με παραγώγιση

$$\frac{\partial^2\varpi}{\partial A\partial\ell} = \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial A} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial A\partial\ell} = -\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial A}$$

ενώ δύο χρήσιμες προβολές κατά μήκος των πολοειδών γραμμών είναι

$$\hat{b}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\varpi}{\partial A}\right) = \frac{\partial^2\varpi}{\partial A\partial\ell} = \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial A} \qquad \hat{b}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\partial z}{\partial A}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial A\partial\ell} = -\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial A}$$

Η κλίση της γωνίας θ σχετίζεται με την ακτίνα καμπυλότητας R κατά το πολοειδές επίπεδο σύμφωνα με την σχέση

$$\hat{b}\cdot\vec{\nabla}\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\ell} = -\frac{1}{R}$$

ενώ ένας χρήσιμο αποτέλεσμα που εμφανίζεται είναι

$$\hat{b}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{\nabla}\ell\cdot\vec{\nabla}A}{\left|\vec{\nabla}A\right|^2}\right) = \frac{1}{R\left|\vec{\nabla}A\right|}$$

Η κλίση του κάθετου μοναδιαίου, εμφανίζεται και στο κεφάλαιο 3, υπολογίζεται άμεσα

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{n} = \sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial\varpi} + \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} + \hat{n}\cdot\hat{\varpi} = \hat{b}\cdot\vec{\nabla}\theta + \hat{n}\cdot\hat{\varpi} = -\frac{1}{R} + \hat{n}\cdot\hat{\varpi}$$

Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις και μία από τις δύο συνιστώσες που εξάγαμε (η άλλη δίνει το ίδιο αποτέλεσμα) παίρνουμε

$$\left|\vec{\nabla}A\right| = \frac{1}{\frac{\partial\varpi}{\partial A}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial A}\sin\theta} \tag{5.8}$$

Επομένως υπολογίζουμε και την κλίση του ℓ

$$\vec{\nabla}\ell = \left|\vec{\nabla}A\right| \left(-\frac{\partial z}{\partial A}\hat{\varpi} + \frac{\partial \varpi}{\partial A}\hat{z}\right) \tag{5.9}$$

Ας υπολογίσουμε την κλίση μιας τυχούσας βαθμωτής ποσότητας Φ στην νέα βάση των διανυσμάτων $\hat{b}$, $\hat{n}$τ. Η αμοιβαία προβολή των δύο διανυσμάτων, εξ.5.9 και ορισμός εξ.5.4, είναι

$$\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}\ell = -\left|\vec{\nabla}A\right|^2 \left(-\frac{\partial z}{\partial A}\hat{\varpi} + \frac{\partial \varpi}{\partial A}\hat{z}\right) \tag{5.10}$$

Η έκφραση αυτή δείχνει ακριβώς τον μη-ορθογώνιο χαρακτήρα της βάσης μας. Η προβολές της κλίσης τυχούσας ποσότητας στην βάση μας δίνει τώρα

$$\hat{b} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \left(\hat{b} \cdot \vec{\nabla}A\right)\frac{\partial \Phi}{\partial A} + \left(\hat{b} \cdot \vec{\nabla}\ell\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \ell} = \frac{\partial \Phi}{\partial \ell} \tag{5.11}$$

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \left(\hat{n} \cdot \vec{\nabla}A\right)\frac{\partial \Phi}{\partial A} + \left(\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\ell\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \ell} = -\left|\vec{\nabla}A\right|\frac{\partial \Phi}{\partial A} + \Lambda\frac{\partial \Phi}{\partial \ell} \tag{5.12}$$

όπου

$$\Lambda = \left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial A} + \sin\theta\frac{\partial \varpi}{\partial A}\right)\left|\vec{\nabla}A\right| = \frac{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial A} + \sin\theta\frac{\partial \varpi}{\partial A}}{\frac{\partial \varpi}{\partial A}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial A}\sin\theta} \tag{5.13}$$

Ο μετασχηματισμός στο νέο σύστημα συντεταγμένων απαιτεί/συντελείται με την βοήθεια ενός πλήθος εκφράσεων. Για να διατηρήσουμε, όμως, την κεντρική ιδέα του κειμένου επιλέξαμε να συγκεντρώσουμε τις εκφράσεις αυτές στο πλαίσιο.5.1.

Οι εξισώσεις της στάσιμης ΜΥΔ παραμένουν δεύτερης τάξης ακόμα και μετά την μερική τους ολοκλήρωσης. Προκειμένου, λοιπόν, να υποβιβάσουμε το σύστημα εισάγουμε μια ακόμα ποσότητα

$$S = \frac{A}{\varpi\left|\vec{\nabla}A\right|} = \frac{A}{\varpi}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial A}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial A}\sin\theta\right) \tag{5.14}$$

η οποία θεωρείται μαζί με την παράμετρο Λ. Οι δύο ποσότητες έχουν μια κομψή γεωμετρική ερμηνεία που παρουσιάζεται στο πλαίσιο.5.2, αλλά τεχνικά η χρησιμότητά τους έγκειται στην αντικατάσταση των παραγώγων πρώτης τάξης

$$\frac{\partial \varpi}{\partial A} = \frac{\varpi S}{A}\left(\cos\theta + \Lambda\sin\theta\right) \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial z}{\partial A} = \frac{\varpi S}{A}\left(\Lambda\cos\theta - \sin\theta\right) \tag{5.16}$$

Τέλος, η έκφραση για τις παραγώγους της Φ, εξ.5.12, γράφεται

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\Phi = -\frac{A}{\varpi S}\frac{\partial \Phi}{\partial A} + \Lambda\frac{\partial \Phi}{\partial \ell} \tag{5.17}$$

Πλαίσιο 5.2: Η γεωμετρική ερμηνεία των ποσοτήτων Λ, S

Προκειμένου να αναγνωρίσουμε την σημασία της παραμέτρου Λ θεωρούμε την κάθετη $\vec{\nabla}\ell$ στις επιφάνειες $\ell = const$. Εφαρμόζοντας την εξ.5.12 για την ℓ ποσότητα παίρνουμε $\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\ell = \Lambda$, ενώ ο ορισμός εξ.5.6 δίνει τις προβολές $\hat{b}\cdot\vec{\nabla}\ell = 1$. Συνεπώς, γράφοντας την $\vec{\nabla}\ell$ στην ορθογώνια βάση $(\hat{b}, \hat{n})$ παίρνουμε

$$\vec{\nabla}\ell = \hat{b} + \Lambda\hat{n} \tag{5.18}$$

Είναι, λοιπόν, φανερό ότι η ποσότητα Λ αντιστοιχεί στην εφαπτόμενη $\Lambda = \tan\vartheta_x$, όπου ϑ_x η γωνία μεταξύ του κάθετου διανύσματος στις επιφάνειες $\ell = const$ και της εφαπτόμενης στις πολοειδείς μαγνητικές γραμμές $\hat{b}$. Με άλλα λόγια η Λ είναι ένα μέτρο της ορθογωνιότητας του (A, ℓ) συστήματός μας με την μηδενική τιμή να δηλώνει τον ορθογώνιο χαρακτήρα.
Η ποσότητα S, συνάρτηση συγκέντρωσης (bunching function), είναι ένα μέτρο που εκφράζει τον βαθμό συγκέντρωσης των πολοειδών γραμμών. Φανταστείτε ότι η εξέλιξη του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου ακολουθεί τον νόμο $B_p \propto \varpi^\lambda$. Κατά επέκταση η πολοειδής ροή ακολουθεί τον $A \propto \varpi^{\lambda+2}$

$$S = \frac{A}{\varpi\left|\vec{\nabla}A\right|} = \frac{1}{\lambda+2} \tag{5.19}$$

Επομένως η τιμή $S = 1/2$ αντιστοιχεί σε μια ομογενή κατανομή του πολοειδούς πεδίου, ενώ καθώς η S αυξάνει, η πολοειδής ροή γίνεται μικρότερη υποδεικνύοντας μια πιο αραιή ροή σε σχέση με την ομογενή ή αλλιώς ότι το πολοειδές πεδίο αποτελεί μειούμενη συνάρτηση της ϖ. Έχοντας κατά νου το πρότυπο του μαγνητικού ακροφυσίου είναι φανερό ότι η αύξηση της bunching συνάρτησης αντιστοιχεί στην επιτάχυνση της εκροής.

5.2 Οι εξισώσεις και το σύστημα ολοκλήρωσης

Ένα σημαντικό τμήμα της εργασίας έχει ήδη επιτελεσθεί με τον προσδιορισμό του χώρου συντεταγμένων. Είναι, τώρα, ώρα να προχωρήσουμε στις εξισώσεις τις ίδιες, ενώ η πρώτη μερική ολοκλήρωση έχει ήδη επιτελεσθεί στο κεφ.3. Επομένως, τα ολοκληρώματα εξ.3.8, 3.9, 3.14, 3.15, 3.16 παραμένουν σε ισχύ, ενώ απομένουν οι transfield, εξ.3.30 και η Bernoulli εξίσωση, οι οποίες στο κρύο όριο παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned}\frac{B_p^2}{4\pi R}\left(M^2 + x^2 - 1\right) = &-\frac{1}{8\pi\varpi^2}\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\left[\varpi^2\left(B^2 - E^2\right)\right] \\ &+ \frac{B_p^2}{4\pi\varpi}\left(1 + \frac{4\pi\rho\gamma^2 u_\varphi^2}{B_p^2}\right)\hat{n}\cdot\hat{\varpi} - \hat{n}\cdot\vec{\nabla}P\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\gamma^2 - \left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 \tag{5.21}$$

ο σχετικός συμβολισμός αναφέρεται στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Η κεντρική ιδέα για τους υπολογισμούς που παρουσιάζονται παρακάτω είναι η ακόλουθη: Οι φυσικές ποσότητες γράφονται με βάση τα ολοκληρώματα και τις ποσότητες που ορίσαμε

παραπάνω

$$\vec{B}_p = \frac{A}{\varpi^2 S}\hat{b} \qquad \vec{B}_\varphi = \frac{\mu c \Psi_A}{x}\frac{x^2 - x_A^2}{1 - M^2 - x^2}\hat{\varphi} \tag{5.22}$$

$$\frac{\gamma \vec{v}_p}{c} = \frac{\sigma_M M^2}{S x^2}\hat{b} \qquad \frac{\gamma \vec{v}_\varphi}{c} = \mu \frac{x_A^2}{x}\frac{G^2 - M^2 - x^2}{1 - M^2 - x^2}\hat{\varphi} \tag{5.23}$$

$$\vec{E} = x B_p \hat{n} = \frac{A\Omega}{cS}\hat{n} \tag{5.24}$$

$$\gamma = \mu \frac{1 - M^2 - x_A^2}{1 - M^2 - x^2} \tag{5.25}$$

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\frac{A^2\Omega^4}{M^2 \sigma_M^2 c^6} \tag{5.26}$$

$$P_{mag} = \frac{B^2 - E^2}{8\pi} = \left(\frac{A\Omega^2}{\sigma_M c^2}\right)^2 \frac{x^2 - 1 + \mu\left(1 - x_A^2\right)}{M^4} \tag{5.27}$$

Ο λόγος

$$G \equiv \frac{\varpi}{\varpi_A} = \frac{x}{x_A} \tag{5.28}$$

εκφράζει την κανονικοποιημένη απόσταση σε μονάδες της Alfvén κυλινδρικής απόστασης - με την ισότητα να παρέχεται από τις κανονικοποιήσεις εξ.3.18. Για μια υπέρ-γρήγορη και επομένως και υπέρ-Alfvén εκροή $G > 1$.

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις παραπάνω γράφουμε τις εξισώσεις Bernoulli και transfield στις νέες συντεταγμένες - η όλη διαδικασία εμφανίζεται αναλυτικά στο παρ.Γ′. Η απλούστερη εξίσωση είναι η Bernoulli

$$\mu^2 \frac{x^2\left(1 - M^2 - x_A^2\right)^2 - G^2\left(G^2 - M^2 - x^2\right)^2}{x^2\left(1 - M^2 - x_A^2\right)} = 1 + \frac{\sigma_M^2 M^4}{S^2 x^4} \tag{5.29}$$

η οποία τώρα έχει υποβιβαστεί σε μια αλγεβρική εξίσωση, ένα $4^{ης}$ τάξης πολυώνυμο ως προς M^2. Στο τελικό στάδιο του αλγόριθμού μας η εξίσωση Bernoulli θα λύνεται ως μια αλγεβρική εξίσωση, αλλά για τους υπολογισμούς που ακολουθούν χρειαζόμαστε επίσης την διαφορική μορφή της. Η παραγώγιση δίνει ένα ιδιαίτερα μακρύ αποτέλεσμα, παρ.Γ′, η γενική μορφή του οποίου είναι

$$(...)\vec{\nabla} M^2 = (...)\vec{\nabla} S + (...)\vec{\nabla}\varpi + (...)\vec{\nabla} A \tag{5.30}$$

Χειριζόμαστε την transfield εξίσωση με τον ίδιο τρόπο και αντικαθιστούμε τους όρους $\hat{n}\cdot\vec{\nabla}M^2$ από την διαφορική εξίσωση Bernoulli. Το αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί στην συμπαγή μορφή

$$\frac{\partial\theta}{\partial\ell} = \frac{P_3 + P_2 P_4}{\Lambda S P_2 - P_1} \tag{5.31}$$

όπου οι αναλυτικές εκφράσεις των P_i βρίσκονται επίσης στο παρ.Γ′.

Στην συμβολική γραφή της εξίσωσης, εξ.5.30, εμφανίζεται και ο όρος $\partial S/\partial\ell$. Γενικά η εξέλιξη των δύο ποσοτήτων S, Λ που εισάγαμε υποβιβάζει το σύστημά στην πρώτη τάξη, ενώ οι παράγωγοι υπολογίζονται άμεσα με την παραγώγιση των ορισμών τους εξ.5.14,5.13

$$\frac{\partial S}{\partial\ell} = -\frac{A}{\varpi^2}\left(\cos\theta\frac{\partial\varpi}{\partial A} - \sin\theta\frac{\partial z}{\partial A}\right)\frac{\partial\varpi}{\partial\ell} + \frac{A}{\varpi}\left(-\sin\theta\frac{\partial\varpi}{\partial A} - \cos\theta\frac{\partial z}{\partial A}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\ell}$$

$$+\frac{A}{\varpi}\left(\cos\theta\frac{\partial^2\varpi}{\partial\ell\partial A}-\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\ell\partial A}\right)$$

Με χρήση των εκφράσεων του πλαισίου.5.1 για τις παραγώγους δεύτερης τάξης καταλήγουμε

$$\frac{\partial S}{\partial\ell}=-\frac{S}{\varpi}\sin\theta-\Lambda S\frac{\partial\theta}{\partial\ell}+\frac{A}{\varpi}\frac{\partial\theta}{\partial A} \tag{5.32}$$

Ομοίως, υπολογίζουμε την παράγωγο της ποσότητας Λ

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\ell}=\frac{\partial\Lambda S}{\partial\ell}-\Lambda\frac{\partial S}{\partial\ell}=-\frac{A}{\varpi^2}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial A}+\sin\theta\frac{\partial\varpi}{\partial A}\right)+\frac{A}{\varpi}\left(-\sin\theta\frac{\partial z}{\partial A}+\cos\theta\frac{\partial\varpi}{\partial A}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\ell}$$
$$+\frac{A}{\varpi}\left(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\ell\partial A}+\sin\theta\frac{\partial^2\varpi}{\partial\ell\partial A}\right)-\Lambda\frac{\partial S}{\partial\ell}$$

όπου τώρα οι σχέσεις του πλαισίου.5.1 οδηγούν στον μηδενισμό του τελευταίου όρου. Σε συνδυασμό με την εξ.5.32 παίρνουμε

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\ell}=\left(1-\Lambda^2\right)\frac{\partial\theta}{\partial\ell}-\frac{\Lambda A}{S\varpi}\frac{\partial\theta}{\partial A} \tag{5.33}$$

Συνοψίζοντας, η εξέλιξη των ποσοτήτων $U=(\varpi,\,z,\,\theta,\,S,\,\Lambda)$ δίνονται από τις 5 εξισώσεις εξ.5.7, 5.31, 5.32, 5.33 όπου γράφονται εύκολα με στην μορφή πινάκων

$$\frac{\partial U}{\partial\ell}=H(A,U,\partial U/\partial A)\qquad H=\left[\sin\theta,\,\cos\theta,\,\frac{P_3+P_2P_4}{\Lambda SP_2-P_1},\,-\frac{P_4P_1+\Lambda SP_3}{\Lambda SP_2-P_1},\,\frac{P_5}{P_2\Lambda S-P_1}\right]$$

όπου H ο πίνακας που καθορίζει το σύστημα. Η παραπάνω έκφραση αποτελεί ένα ημιγραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων $1^{\eta\varsigma}$ τάξης και στην βιβλιογραφία υπάρχουν αλγόριθμοι κατάλληλοι για την αριθμητική επίλυσή τέτοιων συστημάτων. Βασικά, αυτή ήταν και η μορφή που επιλέξαμε να ολοκληρώσουμε στις πρώτες προσπάθειες της διατριβής μας. Πέρα, όμως, από την άμεση ολοκλήρωση, οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν σε πιο χρήσιμη μορφή. Για τον σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι οι παράγωγοι $\partial/\partial A$ δύναται να απομονωθούν παρέχοντας

$$\ell_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial\ell}+a_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial A}=h_i \tag{5.34}$$

όπου οι πίνακες ℓ_{ik}, a_{ik}, h_i είναι τώρα συναρτήσεις μόνο των ζητούμενων μεταβλητών, το ολοκληρωμάτων της ροής και των συντεταγμένων. Το μεγάλο πλεονέκτημα της μορφής αυτής έγκειται στις χαρακτηριστικές καμπύλες των εξισώσεων που μπορούν πλέον να υπολογισθούν άμεσα. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι πρωτεύουσας σημασίας για τον αλγόριθμο που θα φτιάξουμε ώστε να ολοκληρώσουμε το σύστημα. Αυτό είναι και το αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

5.3 Οι Χαρακτηριστικές και ο Αλγόριθμος

5.3.1 Οι Χαρακτηριστικές και τα Αναλλοίωτα του Riemann

Οι χαρακτηριστικές του συστήματος

$$\ell_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial\ell}+a_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial A}=h_i \tag{5.35}$$

δίνονται απευθείας με διαδικασία που περιγράφεται στην βιβλιογραφία, βλέπε για παράδειγμα John (1978), όπου ως συνήθως παρέχει ένα ημι-γραμμικό σύστημα ολικών διαφορικών εξισώσεων.

Σύμφωνα με την θεωρία, οι χαρακτηριστικές καμπύλες ορίζονται ως τον γεωμετρικό τόπο των σημείων στα οποία οι πίνακες ℓ_{ik}, a_{ik} παρουσιάζουν ανωμαλία και έτσι ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση

$$|dA\,\ell_{ik} - d\ell a_{ik}| = dA^3\left[(S\Lambda P_2 - P_1)\,dA^2 + 2\frac{A}{\varpi}P_2 dA d\ell + \frac{A^2}{\varpi^2\Lambda S}d\ell^2\right] = 0 \qquad (5.36)$$

Η εξίσωση αυτή έχει 5 λύσεις, 3 τετριμμένες κατά μήκος των πολοειδών γραμμών και 2 που δίνονται ως λύσεις του τριώνυμου

$$\frac{dA}{d\ell} = 0 \qquad (5.37)$$

$$\frac{dA}{d\ell} \equiv \lambda_\pm = \frac{A}{\varpi}\frac{P_2 \pm \sqrt{\frac{P_1 P_2}{\Lambda S}}}{P_1 - \Lambda S P_2} \qquad (5.38)$$

Προκειμένου να βρούμε την εξέλιξη των αναλλοίωτων του Riemann διαγωνοποιούμε το σύστημα ($u_\ell + \mathcal{L}u_A = d_i$ όπου $\mathcal{L} = \ell_{ik}^{-1}a_{kj}$, $d_i = \ell_{ik}^{-1}H_k$) και υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα του $\mathcal{L}$ σχηματίζοντας τον σχετικό πίνακα Υ. Οι εξισώσεις $\Upsilon_{ik}^{-1}du_k = d_i$ δίνουν:

$$d\varpi = \sin\theta d\ell \qquad \text{κατά μήκος } dA = 0 \qquad (5.39)$$

$$dz = \cos\theta d\ell \qquad \text{κατά μήκος } dA = 0 \qquad (5.40)$$

$$-d\theta + \frac{\Lambda}{S}dS + d\Lambda = -\frac{\Lambda}{\varpi}\sin\theta d\ell \qquad \text{κατά μήκος } dA = 0 \qquad (5.41)$$

$$d\theta - \frac{dS}{S\sqrt{M_f^2 - 1}} = \frac{S}{A}\lambda_+\left(\sin\theta + \frac{\varpi H_s}{P_1}\sqrt{M_f^2 - 1}\right) \qquad \text{κατά μήκος } \frac{dA}{d\ell} = \lambda_+ \qquad (5.42)$$

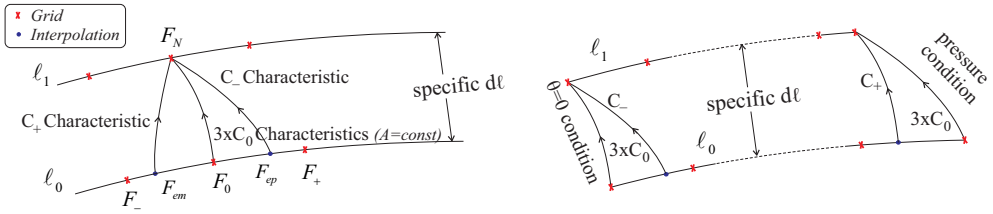
$$-d\theta - \frac{dS}{S\sqrt{M_f^2 - 1}} = \frac{S}{A}\lambda_-\left(-\sin\theta + \frac{\varpi H_s}{P_1}\sqrt{M_f^2 - 1}\right) \qquad \text{κατά μήκος } \frac{dA}{d\ell} = \lambda_- \qquad (5.43)$$

Όπως ήταν αναμενόμενο από τον υπερβολικό χαρακτήρα του συστήματος, από κάθε σημείο της ροής ανακύπτουν (ή τερματίζουν) πέντε χαρακτηριστικές καμπύλες και επομένως οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν καταρχάς να δώσουν τις 5 ζητούμενες ποσότητες μέσω των τιμών τους στα γειτονικά σημεία.

5.3.2 Ο αλγόριθμος

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες εξ.5.39-5.43 αποτελούν την βάση του σχήματος των πεπερασμένων διαφορών (finite differences). Στο σχ.5.3 δίνουμε μια γραφική παρουσίαση του αλγορίθμου που κατασκευάσαμε: Υποθέστε ότι βρισκόμαστε σε μια αρχική επιφάνεια $\ell = 0$ και θέλουμε να προχωρήσουμε προς την επόμενη ℓ_1 η οποία βρίσκεται σε μια σταθερή απόσταση $d\ell$, δηλαδή η ίδια για όλα τα σημεία του πλαισίου (grid)*. Εστιάζοντας την προσοχή

*Η μετάβαση σε μια επόμενη επιφάνεια $\ell = const$ δεν είναι απαραίτητη, αλλά θα μπορούσαμε αντί αυτού να μεταβούμε σε μια επιφάνεια $(A,\,\ell)$ όπως προκύπτει από την τομή των καμπυλών που πηγάζουν από τα σημεία του πλαισίου αποκλειστικά. Παρόλα αυτά και αυτή η μέθοδος δεν αποφεύγει την παρεμβολή και τελικά οδηγεί σε έναν πιο πολύπλοκο αλγόριθμο



Σχήμα 5.3: Το αλγοριθμικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών. Οι κόκκινες τελείες αναπαριστούν τα σημεία του πλαισίου και παρέχουν τις χαρακτηριστικές C_0. Οι μοβ τελείες αντιστοιχούν στα ενδιάμεσα σημεία F_{em}, F_{ep} που υπολογίζονται με παρεμβολή των αρχικών κλίσεων $\lambda_\pm$ ή F_-, F_+, F_0 και παρέχουν τις υπόλοιπες δύο καμπύλες $C_\pm$. Το αριστερό σχήμα παρουσιάζει τα εσωτερικά σημεία του πλαισίου, ενώ το δεξιό τα δύο άκρα του πλαισίου στα οποία λείπει η μία χαρακτηριστική.

μας στο νέο σημείο N, οι τρεις χαρακτηριστικές C_0 είναι τετριμμένες/γνωστές καθώς ανακύπτουν από το σημείο O. Αντιθέτως, οι υπόλοιπες δύο καμπύλες $C_\pm$ είναι άγνωστε καθώς τα σημεία που εκπορεύονται είναι αρχικά άγνωστα. Χρησιμοποιούμε γραμμική παρεμβολή (linear interpolation) μεταξύ των σημείων του πλαισίου ℓ_0 για να παρεμβάλλουμε τις κλίσεις $C_\pm$ και να εντοπίσουμε την θέση των ζητούμενων σημείων εκπόρευσης. Η θέση των σημείων αυτών δίνεται από τις εκφράσεις

$$F_{ep} = \frac{F_0\,(F_- - F_0) + d\ell\,[\lambda_+(-)F_0 - \lambda_+(0)F_-]}{F_- - F_0 + [\lambda_+(-) - \lambda_+(0)]\,d\ell} \tag{5.44}$$

$$F_{em} = \frac{F_0\,(F_p - F_0) + d\ell\,[\lambda_-(+)F_0 - \lambda_-(0)F_+]}{(F_p - F_0) + d\ell\,[\lambda_-(+) - \lambda_-(0)]} \tag{5.45}$$

όπου η ποσότητα $\lambda_\pm(X)$ συμβολίζει την κλίση των $\pm$ χαρακτηριστικών στο X σημείο του πλαισίου, τα σχετικά σημεία ορίζονται στο σχ.5.3. Παρατηρήστε επίσης ότι η όλη διαδικασία γράφεται για την ποσότητα $F = \sqrt{A}$ και όχι για την ποσότητα A για λόγους που αναφέρονται στο πλαίσιο.5.2. Το σύστημα των εξισώσεών μας έχει τώρα ολοκληρωθεί παρέχοντας τις τιμές των ποσοτήτων στο σημείο N.

Δύο σημεία ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι οι δύο άκρες της επιφάνειας ολοκλήρωσης, με το αριστερό ($A = 0$) να αντιστοιχεί στον άξονα περιστροφής και το δεξιό στην εξωτερική επιφάνεια (wall $A = A_j$), στα οποία η χαρακτηριστική C_- και C_+ αντίστοιχα απουσιάζει (βλέπε δεξιό σχ.5.3). Καλύπτουμε την έλλειψη πληροφορίας με βάση τις φυσικές συνθήκες: Στο όριο του άξονα, η κυλινδρική συμμετρία και η συνέχεια της κάθετης συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου απαιτεί η μαγνητική γραμμή να κείτεται εξ ολοκλήρου στον z-άξονα, $\theta\,(A = 0) = 0$. Στο σύνορο του πίδακα η υπολειπόμενη πληροφορία καλύπτεται από την ισορροπία των πιέσεων μεταξύ της εκροής και του εξωτερικού περιβάλλοντος

$$P_{ext} = P_{int} \tag{5.46}$$

Για το μοντέλο της αραίωσης που επιλέξαμε να μελετήσουμε ισχύει $P_{ext} = 0$, αλλά εν γένει μπορούμε να θεωρήσουμε διαφορετικά προφίλ εξωτερικής πίεσης, βλέπε επίσης την σχετική συζήτηση τόσο στην εισαγωγή της διατριβής όσο και στην συζήτηση στο τέλος του κεφαλαίου. Αλλά όποια και αν είναι η εξωτερική πίεση, το σημαντικό πλεονέκτημα του σχήματος που παρουσιάσαμε είναι ότι οι ποσότητες της τελευταίας πολοειδούς γραμμής, και επομένως το σχήμα της συνοριακής επιφάνειας, προσδιορίζεται με έναν αυτο-συνεπή τρόπο.

5.4 Αρχικές Συνθήκες

Οι αρχικές συνθήκες για το σύστημα εξ.5.35 είναι ζήτημα συζήτησης με ένα πλήθος αρχικών κατανομών να είναι εφικτό. Οι ακριβείς συνθήκες που αρμόζουν σε μια GRB/Collapsar εκροή στο σημείο διάρρηξης του αστρικού περιβλήματος δεν είναι εύκολο να βρεθούν, έστω και με θεωρητικούς συλλογισμούς. Επιπλέον, οι αριθμητικές προσομοιώσεις που γίνονται προκειμένου να περιγράψουν την εκροή στο σύνολο της, δηλαδή από την εκκίνησή της στο δίσκο προσαύξησης μέχρι πολύ μακριά από την αστρική επιφάνεια, βρίσκονται σε πολύ πρώιμο στάδιο για να παρέχουν κάποια χρήσιμη πληροφορία. Έτσι, η μελέτη μας επικεντρώθηκε αποκλειστικά στην επίδραση της αραίωσης, ενώ καταβλήθηκε ειδική προσπάθεια ώστε να επιλέξουμε το απλούστερο δυνατό σύνολο αρχικών συνθηκών συμβατών με την αναμενόμενη εκροή.

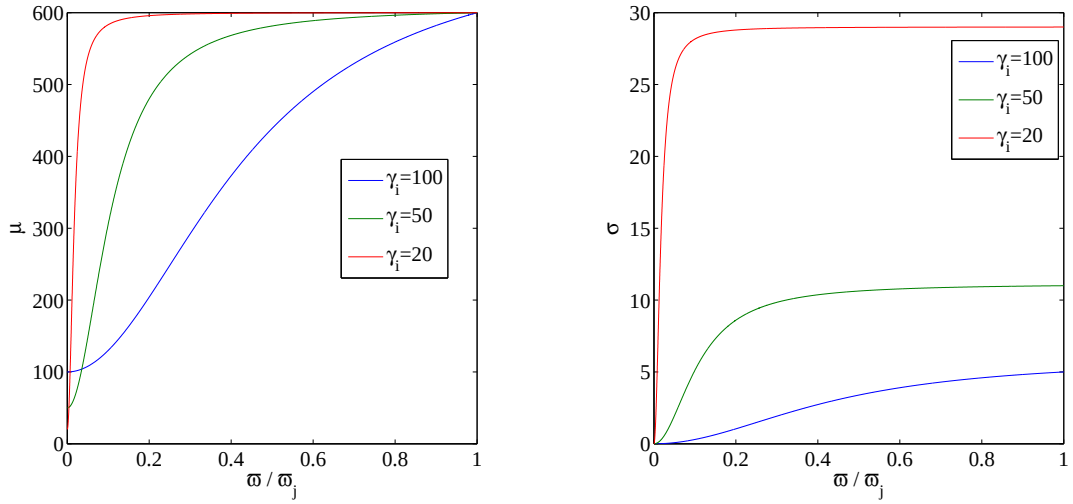
Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε δύο διαφορετικές κατανομές για το σχήμα της αρχικής επιφανείας. Μια κυλινδρική, η διατομή της οποίας στις 2D είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, ενώ οι γραμμές αρχικά προσανατολίζονται στον z-άξονα και μια σφαιρική η 2D τομή της οποίας είναι ένα τόξο κύκλου και οι γραμμές κατευθύνονται ακτινικά - το τελευταίο αποτελεί και το χαρακτηριστικό παράδειγμά μας. Καθώς η συνολική επιχειρηματολογία είναι παρόμοια και στις δύο κατανομές οι ζητούμενες εκφράσεις θα εξαχθούν ταυτοχρόνως.

Προκειμένου να προσομοιάσουμε την δομή του πυρήνα του πίδακα (core like structure, Heyvaerts and Norman (1989); S. V. Bogovalov (2001); Tchekhovskoy et al. (2009)), μια περιοχή στο εσώτερο τμήμα του πίδακα όπου το πολοειδές μαγνητικό πεδίο είναι περίπου ομογενές και παράλληλο με τον άξονα περιστροφής, επιλέγουμε τις κάτωθι μορφές του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου

$$\text{κυλινδρικό: } B_p = \frac{B_j}{\left[1+(\varpi/\varpi_0)^2\right]^\zeta} \qquad \text{σφαιρικό: } B_p = \frac{B_j}{\left[1+(r\sin\theta/\varpi_0)^2\right]^\zeta} \tag{5.47}$$

Οι εκφράσεις αντιστοιχούν στην κυλινδρική και σφαιρική κατανομή, ενώ η αρχική διεύθυνση των γραμμών είναι παράλληλη στον z-άξονα ή ακτινικές, $\theta_i = 0$, $\theta_i = \arcsin(\varpi_i/r_i)$ αντίστοιχα. Στις μορφές αυτές η σταθερά ϖ_0 καθορίζει το μέγεθος του πυρήνα του πίδακα, ενώ ζ μια παράμετρος του μοντέλου που ελέγχει την μεταβολή του μέτρου του πεδίου κατά μήκος της αρχικής επιφάνειας - η B_j είναι μια σταθερά που καθορίζει την κλίμακα του μαγνητικού πεδίου. Η αρχική διάσταση της επιφανείας ϖ_j αντιστοιχεί σε ένα γωνιακό άνοιγμα του πίδακα $1/\gamma_i$. Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου ο δείκτης i παριστάνει τις τιμές των ποσοτήτων στην βάση της εκροής, δηλαδή την στιγμή της διάρρηξης, ο δείκτης 0 τις τιμές στον άξονα περιστροφής και ο δείκτης j στην εξωτερική επιφάνεια της εκροής - εξαίρεση αποτελεί η διάσταση του πυρήνα ϖ_0. Μια τυπική ακτίνα για ένα Wolf-Raylet άστρο είναι κατέκτίμηση $R_{WR} \sim R_\odot \sim 4.7 \cdot 10^4$ σε ακτίνες κυλίνδρου φωτός (βλέπε παρακάτω και εν.5.6 για τις μονάδες αυτές). Στα μοντέλα μας θεωρήσαμε διάφορες μεγάλες τιμές του αρχικού παράγοντα Lorentz $(20, 50, 100)$ που αντιστοιχούν στην ανάλογη διάσταση της αρχικής επιφάνειας ($\varpi_j = R_{WR}/\gamma_i = 890$, 360, 180 αντίστοιχα) για το σφαιρικό μοντέλο - στο κυλινδρικό εξετάσαμε μόνο ένα σενάριο. Παρατηρήστε ότι οι αρχικές εκφράσεις στις δύο κατανομές είναι παρόμοιες και η κάθε περίπτωση παράγεται από την άλλη εκτελώντας ένα απλό μετασχηματισμό $\varpi \leftrightarrow r\sin\theta$.

Η επίδραση της διαδικασίας αραίωσης μπορεί να επισκιαστεί από την ενδογενή τάση της εκροής να διασταλεί ή συμπιεσθεί εξαιτίας της επιλογής των αρχικών συνθηκών με αποτέλεσμα μια άσχετη προς το φαινόμενο επιτάχυνση ή επιβράδυνση. Για τον λόγο αυτό προχωρούμε στην επίλυση της εξίσωσης transfield, εξ.(3.30), ψάχνοντας μια λύση ¨ισορροπίας¨, βλέπε παρ.Δ΄. Επιπλέον, για απλότητα επιλέχθηκε ένας σταθερός παράγοντας Lorentz



Σχήμα 5.4: Οι αρχικές τιμές των ενεργειακών ποσοτήτων για την σφαιρική διάταξη. **Αριστερά:** Το ολοκλήρωμα της συνολικής ενεργειακής ροής, **δεξιά:** η αρχική παράμετρος μαγνήτισης. Παρατηρείστε ότι και στις δύο περιπτώσεις είναι αδύνατο να έχουμε μια σταθερή τιμή των ποσοτήτων σε όλο το μήκος εξαιτίας της των φυσικών συνθηκών που επιβάλουν την μηδενική ροή poynting στον άξονα.

(γ_i) και αμελητέα τοροειδής ταχύτητα σε όλο το μήκος της αρχικής επιφάνειας. Με βάση τα παραπάνω η λύση της εξίσωσης transfield παρέχει τότε και το τοροειδές μαγνητικό πεδίο ισορροπίας

$$B_\varphi = -\frac{B_j}{\left[1+(\varpi/\varpi_o)^2\right]^\zeta}\frac{\gamma\varpi_o}{\varpi}\sqrt{\frac{-1+\left(1+\frac{\varpi^2}{\varpi_o^2}\right)^{2\zeta}-2\zeta\frac{\varpi^2}{\varpi_o^2}}{-1+2\zeta}} \tag{5.48}$$

παρατηρείστε ότι παρά τις διαφορές στις πράξεις, η σφαιρική κατανομή ανακτάται πάλι μέσω του $\varpi \leftrightarrow r\sin\theta$ μετασχηματισμού. Από τις υπόλοιπες ποσότητες, η πίεση ρ είναι ελεύθερα δοσμένη συνάρτηση και επιλέγουμε

$$\rho = \frac{B_j^2}{4\pi\sigma_j}\frac{\varpi_o^4}{\varpi^4}\left(1+\varpi^2/\varpi_o^2\right)^{1-2\zeta}\frac{-1+(1+\varpi^2/\varpi_o^2)^{2\zeta}-2\zeta\varpi^2/\varpi_o^2}{2\zeta-1} \tag{5.49}$$

$$\sigma = -\frac{\varpi\Omega B_\varphi}{\gamma k c^2} = \sigma_j\frac{\varpi_o^2+\varpi_j^2}{\varpi_j^2}\frac{\varpi^2}{\varpi^2+\varpi_o^2} \tag{5.50}$$

προκειμένου να καταλήξουμε σε μια απλή έκφραση για την παράμετρο μαγνήτισης. Ως αποτέλεσμα η μαγνήτιση παραμένει σταθερή για το μεγαλύτερο ποσοστό της αρχικής διατομής με σ_j να αντιστοιχεί στην τιμή στην εξωτερική επιφάνεια του πίδακα - στον άξονα περιστροφής το μηδενικό τοροειδές πεδίο επιβάλλει τον μηδενισμό του σ, σχ.5.4. Μέσω της συγκεκριμένης επιλογής φυσικών παραμέτρων, τα ολοκληρώματα της ροής γράφονται

$$\Omega = \frac{\varpi_o\sqrt{\gamma^2-1}}{\varpi^2}\sqrt{\frac{\left[1+(\varpi/\varpi_o)^2\right]^{2\zeta}-1-2\zeta(\varpi/\varpi_o)^2}{2\zeta-1}} \tag{5.51}$$

$$x_A = \sqrt{\frac{\sigma}{1+\sigma}} \qquad \mu = \gamma\,(1+\sigma) \qquad \sigma_M = \sqrt{\gamma^2-1}\;S\;\sigma \tag{5.52}$$

Μοντέλο	γ_i	ζ	σ_j	ϖ_0	ϖ_0/ϖ_j
g100z06	100	0.6	5	77.5	0.434
g50z06	50	0.6	11	38.7	0.1084
g20z06	20	0.6	29	15.5	0.0173
g50z06pl	50	0.6	11	38.7	0.1084

Πίνακας 5.1: Οι βασικές παράμετροι των μοντέλων. Όλες οι ροές έχουν κοινή τιμή $\Omega_0 = 1$ που ορίζει τις μονάδες κυλίνδρου φωτός και προσδιορίζει μαζί με τα γ_0, ζ την διάσταση του πυρήνα του πίδακα ϖ_0, ενώ και η τιμή του εκθέτη $\zeta = 0.6$ είναι επίσης κοινή σε όλα τα μοντέλα.

Το ολοκλήρωμα της συνολικής ενέργειας μ καθορίζει την μέγιστη δυνατή τιμή του παράγοντα Lorentz ($\gamma_{max} = \mu$), όταν δηλαδή όλη η ενέργεια μετατραπεί σε κινητική ενέργεια. Για σύγκριση επιλέγουμε όλα τα μοντέλα να μοιράζονται κοινό ενεργειακό περιεχόμενο, τυπική τιμή $\mu_j = 600$ - κοντά στον άξονα η ροή poynting πρέπει να μηδενίζεται και επομένως η μορφή του $\gamma_i = const$ επηρεάζει επίσης την τιμή μ_0. Ένα σημείο που πρέπει να επισημανθεί είναι η επιλογή της διάστασης του πυρήνα ϖ_0 που παρέχεται σαν συνάρτηση των γ_0, ζ, Ω_0. Έτσι η διάσταση του πυρήνα καθορίζεται από το ολοκλήρωμα Ω_0 που με την σειρά του παρέχεται από τις συνθήκες που επικρατούν στο σημείο εκκίνησης της εκροής, δηλαδή στον δίσκο προσαύξησης, εξ.(3.9). Προκειμένου να έχουμε πίδακες που παράγονται από την ίδια εκκίνηση επιλέγουμε όλα τα μοντέλα να μοιράζονται την ίδια τιμή $\Omega_0 = 1$, μια επιλογή που τελικά παρέχει την ϖ_0 στο εκάστοτε μοντέλο.

Πέρα από την διάσταση του πίδακα, το ολοκλήρωμα Ω καθορίζει επίσης την θέση του κυλίνδρου φωτός και επομένως αποτελεί την χαρακτηριστική χωρική κλίμακα ή με άλλα λόγια ως ένας δείκτης των διαφόρων ΜΥΔ λύσεων - διπλασιάστε την διάσταση της περιοχής του πίδακα και την τιμή του Ω, αλλά κρατώντας τις εκφράσεις των ολοκληρωμάτων σταθερές και καταλήγουμε στην όμοια (scaled) λύση. Συνεπώς, η κοινή τιμή του Ω_0 επιβάλει τις ίδιες χωρικές μονάδες σε όλα τα μοντέλα. Τέλος, η παράμετρος ζ που καθορίζει την μαγνητική κατανομή κατά μήκος της αρχικής επιφανείας στην συγκεκριμένη λύση ισορροπίας παίρνει τις τιμές $(0.5-1.0)$ και αποτελεί ελεύθερη παράμετρος. Στα μοντέλα επιλέγει η τιμή $\zeta = 0.6$. Οι σημαντικές παράμετροι κάθε μοντέλου συνοψίζονται στον πίνακα.4.1.

Το σύνολο των αρχικών συνθηκών συμπληρώνεται με τις αρχικές τιμές των S, Λ, ενώ ο ορισμός εξ.5.1 εφαρμόζεται προκειμένου να βρούμε την $\varpi = \varpi(A)$ σχέση. Και στις δύο διατάξεις, το στοιχείο επιφανείας είναι παράλληλο προς το πολοειδές μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B}_p \cdot d\vec{S} = 2\pi\varpi d\varpi \qquad \vec{B}_p \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$$

και το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίνει

$$\text{Κυλινδρικό: } A = \frac{B_j \varpi_0^2 \pi}{1-\zeta}\left[\left(1+\frac{\varpi^2}{\varpi_0^2}\right)^{1-\zeta} - 1\right] \tag{5.53}$$

$$\text{Σφαιρικό: } \quad A = B_j r^2 \left(\frac{\varpi_0^2}{r^2+\varpi_0^2}\right)^{\zeta}\left[\cos\theta \;\; {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\zeta,\frac{3}{2},\frac{\cos\theta^2 r^2}{r^2+\varpi_0^2}\right) - \; {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\zeta,\frac{3}{2},\frac{r^2}{r^2+\varpi_0^2}\right)\right] \tag{5.54}$$

όπου ${}_2F_1$ η υπεργεωμετρική συνάρτηση του Gauss. Στην πραγματική εφαρμογή του αλγορίθμου επιβάλλεται μια επιπλέον κανονικοποίηση στην τιμή της (B_j) μέσω της συνθήκης

$A(\varpi_j) = 1$. Οι παραπάνω εκφράσεις πρέπει να αντιστραφούν προκειμένου να παράγουμε την $\varpi = \varpi(A)$. Επιπλέον, αφού $\varpi^2 \propto A$ κοντά στον άξονα, οι παράγωγοι $\partial\varpi/\partial A$ απειρίζονται. Για τον λόγο αυτό εκτελούμε την αλλαγή $A \leftrightarrow F^2$ και ολοκληρώνουμε για την μεταβλητή αντί της A. Έτσι οι παράγωγοι υπολογίζονται

$$\text{κυλινδρικό:}\ \frac{\partial\varpi}{\partial F} = \frac{F\left(1+\frac{F^2(1-\zeta)^2}{B_j\pi\varpi_0^2}\right)^{\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)}\varpi_0^2}{\varpi\,(1-\zeta)} \qquad \frac{\partial z}{\partial F} = 0 \tag{5.55}$$

$$\text{σφαιρικό:}\quad \frac{\partial\varpi}{\partial F} = \frac{2F}{F_0^2}\left[1+\left(\frac{\varpi_0}{r}\right)^2\right]^{1-2\zeta}\sin\theta^{1-2\zeta} r\cos\theta \qquad F_0^2 = \frac{r^{2(1-\zeta)}\varpi_0^{2\zeta}B_j}{\left[1+(\varpi_0/r)^2\right]^{\frac{\zeta-1}{2}}}$$

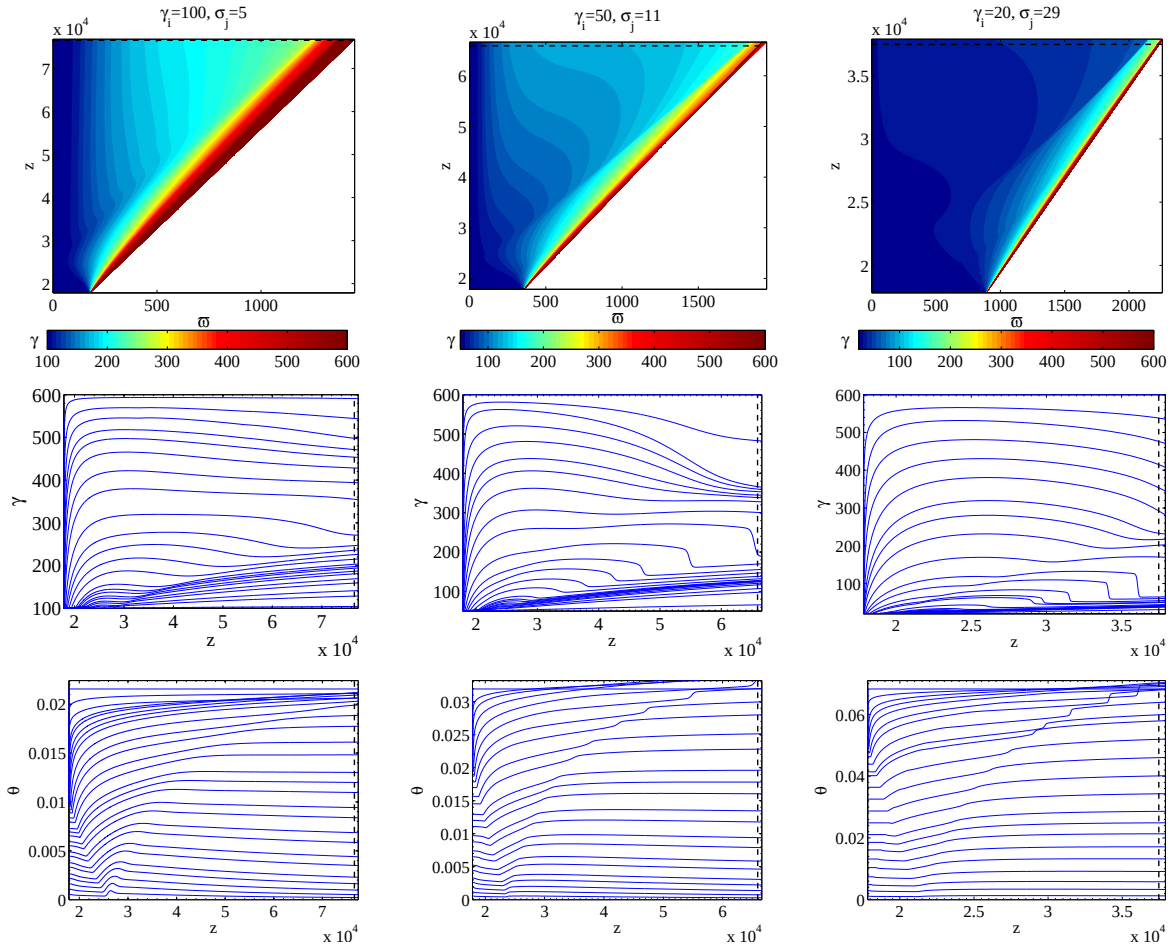
$$\frac{\partial z}{\partial F} = -\frac{2F}{F_0^2}\left[1+\left(\frac{\varpi_0}{r}\right)^2\right]^{1-2\zeta}\sin\theta^{1-2\zeta} r\sin\theta \tag{5.56}$$

(για την σφαιρική περίπτωση η άμεση παραγώγιση της ολοκληρωτικής μορφής του ορισμού και η χρήση του θεωρήματος για τις παραγώγους πεπλεγμένων συναρτήσεων παρέχει έναν πολύ πιο εύκολο τρόπο υπολογισμού). Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τις εναπομένουσες δύο ποσότητες Λ, S εξ.5.13- 5.14 και να προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση.

5.5 Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης παρουσιάζονται στο σχ.5.5. Η πρώτη σειρά διαγραμμάτων παρουσιάζει το φυσικό σχήμα της εκροής και την χωρική κατανομή του παράγοντα Lorentz. Η παρουσία του φαινομένου της αραίωσης γίνεται εμφανής από την κάμψη των γραμμών και την διαστολή της εκροής. Η σχετική χρωματική κλίμακα αντιστοιχεί στο γ, ενώ η επιτάχυνση που επιτυγχάνεται είναι επίσης εμφανής στο εξωτερικό τμήμα του ρευστού - λόγω των αρχικών μας συνθηκών κοντά στον άξονα όλη η ενέργεια βρίσκεται ήδη σε μορφή κινητικής $\gamma_i \sim \mu$ και έτσι δεν είναι εφικτή περαιτέρω επιτάχυνση. Στα ίδια διαγράμματα παρατηρούμε τις τρεις περιοχές που εμφανίζονται στην σχηματική παράσταση της αραίωσης, ενώ ακολουθώντας την χρωματική κλιμάκωση είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε και την απόσταση z στην οποία το μέτωπο του κύματος αραίωσης ανακλάται από τον άξονα, $(2.80, 2.38, 2.16)\cdot 10^4$ σε μονάδες κυλίνδρου φωτός. Μέχρι κάποιο σημείο η κατάσταση είναι όμοια με αυτή που περιμένουμε από τα επίπεδα συμμετρικά μοντέλα (Sapountzis and Vlahakis (2013, 2014)), όπου κάποιες μικρές διαφορές οφείλονται στην μη ομοιογένεια του ολοκληρώματος μ κοντά στον άξονα.

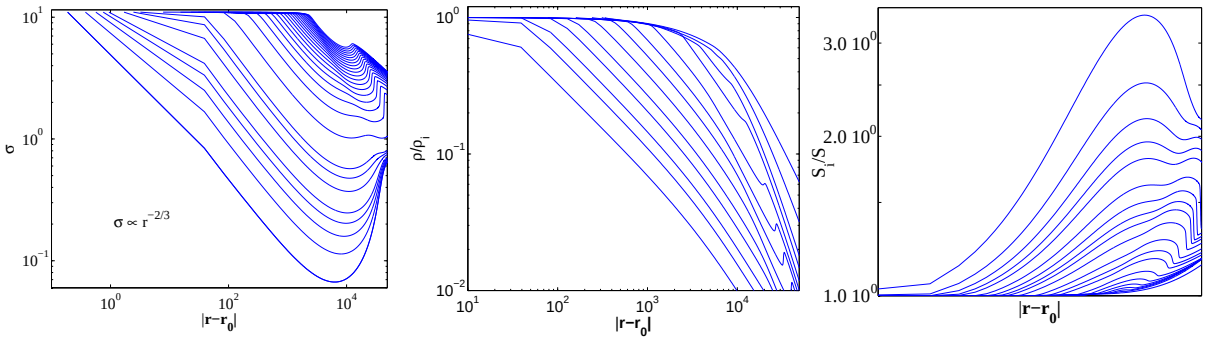
Η δομή της εκροής εμφανίζεται καλύτερα στις επόμενες δύο σειρές διαγραμμάτων που παρουσιάζουν τον παράγοντα Lorentz και την κλίση κατά μήκος συγκεκριμένων πολοειδών γραμμών και σαν συνάρτηση της απόστασης z. Κατά την αρχική φάση οι γραμμές διαδίδονται ακτινικά, ενώ μετά την διέλευση από το μέτωπο της αραίωσης η κάμψη και η σχετιζόμενη επιτάχυνση είναι έντονη - σχηματικά η διαδικασία της αραίωσης θα έπρεπε να προχωρήσει μέχρι του σημείου όπου οι καμπύλες θα αποκτούσαν μία σχεδόν σταθερή κατανομή του γ. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα διαγράμματα αυτά για να υπολογίσουμε την γωνία θ_{RW} που σχηματίζει το μέτωπο του κύματος από την κατεύθυνση της εξωτερικής συνοριακής γραμμής και επίσης για να υπολογίσουμε την έκταση της αραιωμένης περιοχής. Τα αποτελέσματα αυτά καθώς και οι τιμές που τα επίπεδα συμμετρικά μοντέλα εμφανίζονται για σύγκριση στον πίνακα.5.2. Έχουμε ήδη δείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο, ότι κατά την διαδικασία αραίωσης η διαφορική κάμψη των γραμμών οδηγεί στην μετατροπή ροής poynting σε



Σχήμα 5.5: Τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης για τα μοντέλα $g100z06$ (αριστερή στήλη), $g50z06$ (μεσαία στήλη), $g20z06$ (δεξιά στήλη). 1^{η} **γραμμή:** Η φυσική εικόνα της εκροής και η χωρική κατανομή του παράγοντα Lorentz. 2^{η} **γραμμή:** Η εξέλιξη του παράγοντα Lorentz κατά μήκος συγκεκριμένων γραμμών σαν συνάρτηση της απόστασης z. 3^{η} **γραμμή:** Η εξέλιξη της κλίσης των πολοειδών γραμμών - σε όλα τα διαγράμματα εμφανίζεται και η απόσταση στην οποία το ωστικό κύμα φτάνει στην εξωτερική επιφάνεια της εκροής (διακεκομμένη μαύρη γραμμή).

κινητική, διατηρώντας βεβαίως σταθερή συνολική ενέργεια μ - η μετατροπή αυτή παρουσιάζεται και εδώ, σχ.5.7, για το μοντέλο $g50z06$ όπου σχεδιάσαμε τις ενεργειακές ποσότητες για κάποιες συγκεκριμένες γραμμές της εκροής.

Ένα νέο χαρακτηριστικό της κυλινδρικής περίπτωσης εμφανίζεται στην επόμενη φάση κατά την οποία παρατηρείται μια σημαντική επιβράδυνση των επιταχυμένων τμημάτων του ρευστού. Η ερμηνεία της επιβράδυνσης αποδίδεται στην επίδραση του ανακλώμενου κύματος. Ακολουθώντας την εξέλιξη που περιγράφουν τα διαγράμματα Lorentz, το κύμα αραίωσης ξεκινά την διάδοση του από την γωνία της εκροής προς το εσωτερικό της τμήμα. Σε κάποια απόσταση, που εκτιμούμε αργότερα, το κύμα φτάνει στον άξονα, ανακλάται από αυτόν και συνεχίζει την διάδοσή του προς την αντίθετη-εξωτερική κατεύθυνση. Καθώς το κύμα ανάκλασης σαρώνει την ήδη αραιωμένη εκροή πιέζει τις πολοειδείς γραμμές (από εσωτερικά προς εξωτερικές) οδηγώντας στην συμπίεση τους και στην παρατηρούμενη επιβράδυνση. Η επιβράδυνση αυτή γίνεται εντονότερη προς την εξωτερική επιφάνεια της εκροής, ενώ οδηγεί τελικά στον σχηματισμό μιας ωστικής ασυνέχειας. Η όλη αλληλεπίδραση εμφανίζεται επίσης και στο πάνω τμήμα της χρωματικής κατανομής του Lorentz, όπου το κύμα ανάκλασης και η διάδοσή του είναι εμφανής - οι διακεκομμένες γραμμές στα διαγράμματα αντιστοιχούν στην



Σχήμα 5.6: Η εξέλιξη κάποιων ποσοτήτων ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για το $g50z06$ μοντέλο και σαν συνάρτηση της απόστασης από την γωνία του εξωτερικού συνόρου. Το αριστερό διάγραμμα δείχνει την εξέλιξη της παραμέτρου μαγνήτισης, το μεσαίο της πυκνότητας κανονικοποιημένης στην αρχική της τιμή και το τελευταίο το διάγραμμα της συνάρτησης συγκέντρωσης S. Παρατηρήστε τον νόμο που ακολουθεί η παράμετρος μαγνήτισης, $\sigma \propto r^{-2/3}$, και η αύξηση/μείωση κατά την φάση της επιτάχυνσης/επιβράδυνσης.

απόσταση όπου το ανακλώμενο κύμα φτάνει στην εξωτερική επιφάνεια. Το κύμα αυτό είναι επίσης εμφανές και στις απότομε αυξήσεις του διαγράμματος των κλίσεων.

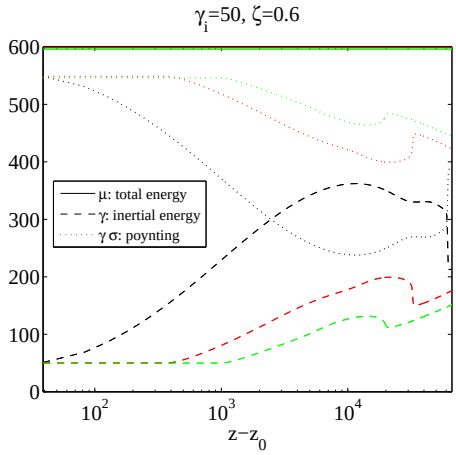
Μια τελική περιοχή ενδιαφέροντος αντιστοιχεί στην λογαριθμική αύξηση του παράγοντα Lorentz (κάτω δεξιά γωνία στα διαγράμματα) και στην ομαλή μείωση που παρατηρούμε στο ήδη αραιωμένο τμήμα της εκροής πριν από την επίδραση με το κύμα ανάκλασης. Η λογαριθμική αυτή μεταβολή αποδίδεται στην κυλινδρική συμμετρία και στην ροπή της εκροής προς μια μονοπολική κατανομή. Εξαιτίας της μεγάλης χωρικής κλίμακας δράσης η επίδραση αυτή επισκιάζεται από την αραίωση και την αλληλεπίδραση με το κύμα ανάκλασης και η σημασία της εντοπίζεται κυρίως στις εσωτερικές περιοχές. Το θέμα αυτό θα συζητηθεί πιο αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Στο σχ.5.6 επιλέξαμε ένα συγκεκριμένο μοντέλο, $g50z06$, για να παρουσιάσουμε την εξέλιξη των σ, ρ, S σαν συνάρτηση της απόστασης των σημείων της γραμμής από την γωνία του εξωτερικού συνόρου ($|\vec{r} - \vec{r}_0|$). Το αριστερό λογαριθμικό διάγραμμα παρουσιάζει την εξέλιξη της παραμέτρου μαγνήτισης και καταδεικνύει τον νόμο δύναμης με δείκτη $2/3$ που ισχύει κατά την πρώτη φάση της αραίωσης. Ο νόμος αυτός είναι σημαντικός και έχει ήδη παρατηρηθεί στην συμμετρικά επίπεδη περίπτωση. Η επιχειρηματολογία που εφαρμόστηκε στην εν.4.5 ισχύει επίσης και εδώ οδηγώντας στον συγκεκριμένο νόμο.

Τα υπόλοιπα διαγράμματα εμφανίζουν την εξέλιξη της πυκνότητας κανονικοποιημένη στην αρχική της τιμής και της συνάρτησης συγκέντρωσης S κατά μήκος μιας γραμμής. Παρόλο την μορφή της η πυκνότητα δεν ακολουθεί κάποιο συγκεκριμένο νόμο δύναμης κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο εξετάζοντας τις σχέσεις εξ.5.22-5.27 και λαμβάνοντας υπόψη την πολύπλοκη συμπεριφορά των εμπλεκόμενων ποσοτήτων και εδικά του γ. Η εξέλιξη της συνάρτησης συγκέντρωσης υποδεικνύει το διαφορικό άνοιγμα των γραμμών κατά την πρώτη φάση της αραίωσης με την συνεπαγόμενη επιτάχυνση. Η αντίθετη συμπεριφορά παρατηρείται κατά το κύμα ανάκλασης.

5.6 Συμπεράσματα - Συζήτηση

Μελετήσαμε τα αποτελέσματα που η διάρρηξη του αστρικού περιβλήματος επιφέρει στην διάδοση του πίδακα του Collapsar εστιάζοντας στην επίδραση της διαδικασίας αραίωσης στις συγκεκριμένες κυλινδρικές ροές. Για μεθοδολογικούς λόγους χωρίζουμε την εξέλιξη



Σχήμα 5.7: Η εξέλιξη των ενεργειακών ποσοτήτων σε κάποιες πολοειδείς γραμμές με την μαύρη να αντιστοιχεί σε μια γραμμή κοντά στο σύνορο, την κόκκινη στα 3/4 της απόστασης κοντά σε αυτό και την πράσινη ακόμα μακρύτερα. Όλες οι γραμμές έχουν περίπου το ίδιο ενεργειακό περιεχόμενο ($\mu \sim 600$), ενώ οι διακεκομμένες γραμμές παριστάνουν την εσωτερική ενέργεια και οι διάστικτες την ροή poynting. Παρατηρήστε την διαφορά στην επιτάχυνση εξαιτίας της διαφορετικής απόστασης από τον άξονα και του συνεπαγόμενου διαφορετικής απόστασης δράσης της αραίωσης.

των πολοειδών γραμμών σε δύο στάδια: στο πρώτο όπου η αραίωση είναι το μόνο φαινόμενο και στο δεύτερο όπου λαμβάνει χώρα η αλληλεπίδραση του ανακλώμενου κύματος με την ήδη αραιωμένη ροή. Κατά την διάρκεια της πρώτης φάσης το κύμα αραίωσης διαδίδει σε όλο το τμήμα της εκροής την πληροφορία της πτώσης πίεσης στην εξωτερική επιφάνεια - έτσι στην στάσιμη περίπτωση μια ισοδύναμη πρόταση είναι ότι το μέτωπο του κύματος αποτελεί την περιβάλλουσα επιφάνεια όλων των γρήγορων μαγνητοακουστικών διαταραχών που εκπέμπονται από τα σημεία στα οποία συμβαίνει η πτώση πίεσης. Οι ομοιότητες με την επίπεδα συμμετρική περίπτωση είναι κεντρικές και η σύγκριση με τα αποτελέσματά μας παρέχει σημαντικά συμπεράσματα (Sapountzis and Vlahakis (2013, 2014)). Σύμφωνα με αυτά τα συμπεράσματα στο όριο της ψυχρής εκροής και του αμελητέου πολοειδούς πεδίου ($B_p \ll B_y$), η κλίση του μετώπου κύματος (θ_{RW}) δίνεται αναλυτικά από την

$$\sin\theta_{RW} = \frac{\sqrt{\sigma_i}}{\gamma_i} \tag{5.57}$$

Στον πίνακα.5.2 δίνουμε τις χαρακτηριστικές ποσότητες που εξάγαμε από τα συγκεκριμένα μοντέλα και αυτές των επίπεδα συμμετρικών για σύγκριση - λόγω της ανομοιογένειας των ποσοτήτων απαιτείται λίγο προσοχή ώστε η μέτρηση της γωνίας θ_{RW} να γίνει κοντά στο εξωτερικό σύνορο. Η συμφωνία των δύο αποτελεσμάτων είναι αναμενόμενη καθώς η καμπυλότητα της αρχικής διατομής δεν επηρεάζει το σχήμα της περιβάλλουσας επιφανείας κοντά στο σύνορο. Επιπλέον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω απλή έκφραση για να εκτιμήσουμε την απόσταση στην οποία συντελείται η ανάκλαση του κύματος από τον άξονα περιστροφής. Για έναν υπερ-σχετικιστικό πίδακα κατά την στιγμή της διάρρηξης ο παραπάνω υπολογισμός δίνει

$$z_{rw} \sim \frac{\sqrt{\sigma_j}}{\sqrt{\sigma_j}-1} R_{WR} \sim 7\cdot 10^{10}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\gamma_\infty/\gamma_j-1}-1}\right)\left(\frac{R_{WR}}{R_\odot}\right) cm \tag{5.58}$$

όπου συμπεριελήφθησαν η επίδραση της διάστασης της αρχικής περιοχής ($w_j = R_{WR}/\gamma_i$, R_{WR} η ακτίνα του άστρου). Οι αποκλίσεις λόγω της ανομοιογένειας των ποσοτήτων που υπεισέρχονται και εξαιτίας του σφαιρικού σχήματος της επιφάνειας γίνονται ισχυρότερες όταν η σχετική έκταση του πυρήνα και επομένως της ανομοιογένειας αυξάνει, πίνακας.5.1. Η ποιοτική συμπεριφορά του παραπάνω αποτελέσματος μπορεί να εξαχθεί αν θεωρήσουμε το κοινό ενεργειακό περιεχόμενο με τις υψηλότερες αρχικές τιμές του παράγοντα Lorentz να οδηγούν σε χαμηλότερες παραμέτρους μαγνήτισης ($\mu = \gamma(1+\sigma)$) και μικρότερες αποστάσεις ανάκλασης και επομένως συντομότερο σχηματισμό του ωστικού κύματος. Ο όρος

Μοντέλο	γ_i	ϖ_j	θ_{RW}		θ_{PM}		$z_{RW}(\cdot 10^4)$		$z_{sh}(\cdot 10^4)$
			κυλ.	επίπεδο	κυλ.	επίπεδο	κυλ.	επίπεδο	κυλ.
g100z06	100	178.6	0.0218	0.0223	0.0188	0.0182	2.80	3.23	7.66
g50z06	50	357.1	0.0685	0.0663	0.0320	0.0316	2.38	2.55	4.93
g20z06	20	892.9	0.269	0.269	0.0681	0.0650	2.16	2.20	3.75
g50z06pl	50	357.1	0.0685	0.0663	0.0123	0.0116	2.38	2.32	3.51

Πίνακας 5.2: Τα αποτελέσματα όπως παρήχθησαν για κάθε μοντέλο και οι αντίστοιχες ποσότητες όπως προβλέπονται από τα επίπεδα συμμετρικά μοντέλα. Παρατηρήστε ότι οι θ_{PM} γωνίες στα επίπεδα μοντέλα περιέχουν την διόρθωση εξαιτίας της αρχικής κλίσης του συνόρου ($\theta_i \sim 1/\gamma_i$), ενώ οι θ_{RW} των κυλινδρικά συμμετρικών μοντέλων έχουν διορθωθεί για τον ίδιο λόγω ώστε να δίνουν το άνοιγμα του κώνου Mach. Σημειώνουμε ότι οι τιμές z_{RW} της ανάκλασης του κύματος από τον z-άξονα διαφέρουν λίγο εξαιτίας της ανομοιογενής κατανομής των αρχικών συνθηκών.

στις παρενθέσεις παρέχει έναν παράγοντα μερικών μονάδων ως μερικών δεκάδων καθώς προχωρούμε από τις υψηλές παραμέτρους μαγνήτισης προς μια ισοκατανομή μεταξύ της ροής poynting και της κινητικής ενέργειας ($\sigma_{ep} = 1$).

Το μοντέλο που παρουσιάσαμε περιέχει τις φυσικές ποσότητες σε μία κανονικοποιημένη μορφή παρέχοντας την απευθείας γενίκευση για ένα σύνολο εκροών με παρόμοια φυσικά χαρακτηριστικά. Μια από τις κεντρικές ποσότητες που υπεισέρχονται αφορά την σχετική έκταση του πυρήνα προς την συνολική αρχική επιφάνεια ολοκλήρωσης η οποία παράγεται από την απαίτηση της εκκίνησης των πιδάκων από έναν κοινό δίσκο προσαύξησης - η συνθήκη αυτή μπορεί να μην έχει αστροφυσική αντιστοιχία υιοθετήθηκε, όμως, για λόγους σύγκρισης. Ο κύλινδρος φωτός μπορεί να υπολογιστεί μέσω της σταθερότητας του Ω κατά μήκος της πολοειδής γραμμής και τις συνθήκες που αναμένουμε να επικρατούν στην βάση της εκροής. Θεωρώντας ένα μοντέλο για τον δίσκο προσαύξησης γύρω από τον αστρικό πυρήνα που καταρρέει μάζας M_c, μια μέγιστα περιστρεφόμενη μαύρη τρύπα και υποθέτοντας ότι η πολοειδής ταχύτητα κατά την εκκίνηση είναι αμελητέα ο κύλινδρος φωτός για την εσώτερη γραμμή είναι

$$r_{lc} = \frac{r_s}{2} = 1.5 \cdot 10^5 \left(\frac{M_c}{M_\odot}\right)\left(\frac{R_d}{R_s}\right) cm \tag{5.59}$$

όπου R_d η ακτίνα στον δίσκο από την οποία πηγάζει η συγκεκριμένη γραμμή. Παρά την αυθαιρεσία για τα ακριβή χαρακτηριστικά του γεννήτορα, μπορούμε να υποθέσουμε έναν πυρήνα 5 ηλιακών μαζών και $R_d \sim 5R_s$ καταλήγοντας σε ακτίνες του κυλίνδρου φωτός cm. Συνεπώς για ένα Wolf-Rayet άστρο μιας ηλιακής ακτίνας, το ημι-άνοιγμα της διάρρηξης είναι $w_j \sim 180, 360, 900\ r_{lc}$ για $\gamma_i = 100, 50, 20$ αντίστοιχα. Επιπλέον τα αποτελέσματα που εξάγαμε φαίνεται να συνηγορούν υπέρ των υψηλότερων παραγόντων Lorentz την στιγμή της διάρρηξης αν θέλουμε να είμαστε σε συμφωνία με το Collapsar μοντέλο, αλλά το συμπέρασμα αυτό εξαρτάται έντονα τόσο από τις αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήσαμε όσο και από την θεωρούμενη ακτίνα του αστρικού γεννήτορα.

Τα αναλυτικά αποτελέσματα των επίπεδα συμμετρικών μοντέλων παρέχουν τον νόμο δύναμης που ακολουθεί η παράμετρος μαγνήτισης $\sigma \propto |\vec{r} - \vec{r}_0|^{-2/3}$ καθώς επίσης και την γωνιακή διάσταση της αραιωμένης περιοχής θ_{PM}

$$\theta_{PM} = \frac{\sqrt{\sigma_i}}{\gamma_i\,(1+\sigma_i)} \tag{5.60}$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι σε καλή συμφωνία με αυτά της κυλινδρικά συμμετρικής περίπτωσης, πίνακας.5.2. Η τάξη των τιμών αυτών είναι σημαντικά μικρότερη από την τιμή $1/\gamma_{fi}$ και επομένως η εστίαση της εκροής μένει πρακτικά αμετάβλητη κατά την επιτάχυνσή της.

Η κυλινδρική συμμετρία και η παρουσία του άξονα περιστροφής εισάγει νέα ενδιαφέροντα φαινόμενα στην συνολική εξέλιξη. Η ανάκλαση του κύματος αραίωσης από τον άξονα συμπιέζει τις πολοειδείς γραμμές και οδηγεί στην έντονη επιβράδυνση. Όταν το κύμα φτάσει στο σύνορο της εκροής δημιουργείται μια ωστική ασυνέχεια που ίσως έχει σημαντικές επιπτώσεις στην συνολική εικόνα της κύριας φάσης των GRB - το σχήμα μας αναφέρεται στο ψυχρό όριο και έτσι δεν μπορεί να υπερκεράσει τις ασυνέχειες αυτές. Συμπερασματικά μπορούμε να αναφέρουμε ότι η απόδοση της εκροής εξαρτάται από μια σειρά παραγόντων που σχετίζονται με την διάσταση της αρχικής επιφάνειας, την απόσταση στην οποία γίνεται η ανάκλαση και η αλληλεπίδραση με την εκροή και την απόσταση που έχει στην διάθεσή της η αραίωση.

Μια ενδιαφέρουσα επίπτωση της καμπυλότητας παρατηρείται στην κάτω δεξιά γωνία των διαγραμμάτων του παράγοντα Lorentz και στην ελαφρά πτώση του στις εξωτερικές περιοχές πριν την αλληλεπίδραση με το ανακλώμενο κύμα. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα για τις μη περιοριζόμενες εκροές (unconfined, Beskin et al. (1998); Tchekhovskoy et al. (2009); Komissarov et al. (2009) και αναφορές εκεί) η σημαντική επιφάνεια για την μαγνητική περιοχή δεν είναι η γρήγορη μαγνητοακουστική, αλλά η επονομαζόμενη επιφάνεια αιτιότητας (casuality surface) πέρα από την οποία η επιτάχυνση είναι μόνο λογαριθμική. Στα αποτελέσματα που εξάγαμε παρατηρούμε μια ανάλογη συμπεριφορά, αλλά έχει ενδιαφέρον ότι οι λύσεις δεν τείνουν στο όριο του Michel, $\gamma_{max} \sim \mu^{1/3} = 8.4$, αλλά σε μια υψηλότερη τιμή του παράγοντα Lorentz. Αυτό βέβαια δεν αποτελεί έκπληξη καθώς η ροή μας δεν τείνει σε μια ακτινική αλλά σε μια ημι-ακτινική (quasi-radial) γεωμετρία.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των χαρακτηριστικών και του (A, ℓ) φορμαλισμού αποτελεί ο αυτο-συνεπής υπολογισμός της συνοριακής επιφάνειας της εκροής. Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιήσαμε ένα μάλλον απλό σύνολο αρχικών και συνοριακών συνθηκών προκειμένου να εξετάσουμε τα αποτελέσματα της αραίωσης στην εκροή και να κατανοήσουμε την φυσική του φαινομένου μέσω της συσχέτισής του με τα ακτινικά αυτο-όμοια μοντέλα. Συνεπώς, η κατάσταση γίνεται πιο πολύπλοκη όταν αναφερόμαστε για εφαρμογή στις πραγματικές συνθήκες του Collapsar περιβάλλοντος. Στην προσπάθειά μας αυτή οι κεντρικές περιπλοκές ανακύπτουν λόγω της πίεσης του εξωτερικού περιβάλλοντος. Στην ολοκλήρωσή μας η εξωτερική πίεση μειώνεται σύμφωνα με τον εκθετικό νόμο $e^{-a_p z}$ όπου η τιμή του a_p καθορίζει την κλίμακα της μείωσης. Στην περίπτωση όπου η πίεση του εξωτερικού περιβάλλοντος είναι μη αμελητέα και υπάρχουν απώλειες λόγω ενός πυκνού ανέμου, ένα νόμος δύναμης $\rho \sim R^{-2}$ είναι ίσως μια πρώτη χονδροειδής υπόθεση - περισσότερες επιπλοκές ανακύπτουν αν υπάρχει μια σημαντική συνιστώσα του περιβλήματος cocoon στον περιβάλλοντα χώρο. Επιπλέον, κεντρική σημασία στους συλλογισμούς μας δεν έχει μόνο το προφίλ της πυκνότητας του εξωτερικού μέσου αλλά και η πίεση του, δηλαδή η καταστατική εξίσωση. Το τελευταίο θέμα είναι ακόμα πιο πολύπλοκο να προσδιοριστεί και μάλλον ανήκει στα πλαίσια της θεωρίας διάδοσης της ακτινοβολία (radiative transfer theory) με τις επιλογές μας να ποικίλουν για την $P_{ext} \propto \rho^{\hat{\Gamma}} \propto R^{-2\hat{\Gamma}}$ από $\hat{\Gamma} = 1$ για μία ισόθερμη ροή μέχρι $\hat{\Gamma} = 5/3, 4/3$ για μια αδιαβατική ή μια άλλη πιο πολύπλοκη καταστατική εξίσωση. Κάποιες εκτιμήσεις έχουν ήδη επισημανθεί για την επίδρασή της εξωτερικής πίεσης Sapountzis and Vlahakis (2014), αλλά προς το παρόν δεν υπάρχουν ακριβείς προσομοιώσεις. Οι δυσκολίες που υπάρχουν θέτουν την κοινότητα μπροστά σε ένα δύσκολο πλην, όμως, πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα.

Κατακλείδα

Ως κατακλείδα στην παρούσα διατριβή συνοψίζουμε τα σημαντικότερα ευρήματα των μοντέλων που παρουσιάστηκαν, ενώ συζητούμε διάφορες πιθανές προεκτάσεις που μπορούν να αποτελέσουν θέμα μελλοντικών εργασιών. Το φαινόμενο της αραίωσης μελετήθηκε αναλυτικά στο όριο των μαγνητισμένων, σχετικιστικών και ιδεατά αγώγιμων εκροών τόσο στην επίπεδη όσο και στην κυλινδρική συμμετρία. Τα επίπεδα συμμετρικά μοντέλα μπορούν να θεωρηθούν ως η γενίκευση των λύσεων της νευτώνειας και σχετικιστικής υδροδυναμικής. Επιπλέον, όμως, τα ακτινικά αυτο-όμοια μοντέλα είναι πιο γενικά καθώς επιτρέπουν την ακτινική εξάρτηση των ποσοτήτων από την γωνία της συνοριακής επιφάνειας και όχι μόνο την γωνιακή εξάρτηση όπως η υπάρχουσα βιβλιογραφία επιτρέπει. Βεβαίως, στην οριακή περίπτωση όπου η εξωτερική πίεση μηδενίζεται ασυνεχώς η ασθενής ασυνέχεια που σχηματίζεται μπορεί με ακρίβεια να περιγραφεί από την αμιγώς γωνιακή εξάρτηση, αλλά ο ασυνεχής μηδενισμός δεν αντιστοιχεί ακριβής πραγματική εκροή.

Ένα εναλλακτικό σενάριο για το GRB/Collapsar μοντέλο αποτελεί η παρουσία ενός πυκνού ανέμου από τον γεννήτορα με αποτέλεσμα την μη-αμελητέα εξωτερική πίεση· η έρευνα για την εξέλιξη/δομή ενός Wolf-Rayet άστρου είναι ακόμα ανοικτή και τα αποτελέσματα απέχουν πολύ από το να θεωρηθούν δεδομένα. Σε μια τέτοια περίπτωση το ακτινικά αυτο-όμοιο μοντέλο προβλέπει τον σχηματισμό μιας ασυνέχειας επαφής και ενός ωστικού κύματος, όπως προβλέπουν ακριβώς οι 1-D προσομοιώσεις, με αποτέλεσμα την μικρότερη απόδοση της επιτάχυνσης. Το αυτο-όμοιο μοντέλο μας αδυνατεί να περιγράψει το εξωτερικό μέσο και επομένως είναι ακατάλληλο για να περιγράψει την εξέλιξη του εξωτερικού ωστικού κύματος· προς το παρόν δεν είναι ξεκάθαρο αν το ωστικό κύμα είναι στάσιμο, και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε έναν συνδυασμό των μοντέλων μας με τις λύσεις για τα ωστικά κύματα που περιγράφηκαν στην εν.3.5, ή αν πρόκειται για κινούμενη ασυνέχεια με αποτέλεσμα οι αριθμητικές προσομοιώσεις να είναι αναπόφευκτες. Στην περίπτωση όπου οι 2-D προσομοιώσεις είναι αναπόφευκτες, ένας τέτοιος συνδυασμός αποτελεί την πρότασή μας για μελλοντική έρευνα: παραγωγή επίπεδα συμμετρικών, και στάσιμων αραιωμένων εκροών χρησιμοποιώντας εξελιγμένους αριθμητικούς κώδικες, μελέτη της συμπεριφοράς του εξωτερικού ωστικού κύματος και της τελικής στάσιμης κατάστασης, σύγκριση με τα αποτελέσματα των ακτινικών αυτο-όμοιων μοντέλων.

Μεταξύ των δύο διαφορετικών τύπων της αραίωσης, μαγνητικά ή θερμικά κυριαρχούμενη, τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι ο μαγνητικός τύπος είναι πιο αποδοτικός υπό την έννοια ότι δρα σε μικρότερες χωρικές κλίμακες. Σύμφωνα με την άποψη του γράφοντος οι παρατηρήσεις της κύριας ακτινοβολίας υποδηλώνουν πως και οι δύο τύποι αραίωσης είναι πιθανοί, βλέπε εν.1.2. Παρόλα αυτά, η προσοχή μας εστιάστηκε στην μαγνητισμένη εκροή και η περίπτωση αυτή επιλέχθηκε για την μελέτη με την χρήση των χαρακτηριστικών και το νέο αλγοριθμικά σχήμα που αναπτύξαμε, Κεφ.5. Είναι προφανές ότι ο αλγόριθμος αυτών ολοκληρώνει αποκλειστικά την υπερ-γρήγορη μαγνητοακουστική περιοχή όπου και οι δύο χαρακτηριστικές υπάρχουν. Μια πιθανή επέκτασή του με κάποιον ελλειπτικό αλγόριθμο κατάλληλο για την ολοκλήρωση της υπο-γρήγορης περιοχής είναι πιθανά εφικτή, αλλά ως

τώρα δεν έχουμε προχωρήσει σε αντίστοιχες προσπάθειες.

Θεωρώντας αμελητέα εξωτερική πίεση το αλγοριθμικό μας σχήμα παράγει το φαινόμενο της αραίωσης. Στην πρώτη φάση, όπου η αραίωση είναι το μόνο ενεργό φαινόμενο, τα αποτελέσματα της κυλινδρικά συμμετρικής ροής είναι σε ισχυρή συμφωνία με τα αποτελέσματα της επίπεδα-συμμετρικής ροής. Μικρές διαφορές οφείλονται κυρίως στις αρχικές συνθήκες και στους περιορισμούς που επιβάλει ο άξονας περιστροφής ή εξαιτίας της θεωρούμενης συμμετρίας και της τελικής ασυμπτωτικής κατάστασης, αλλά ο τελευταίος παράγοντας δρα σε πολύ μεγαλύτερη χωρική κλίμακα και έχει μικρότερη επίδραση. Η ομοιότητα με την επίπεδη περίπτωση παύει με την εμφάνιση του ανακλώμενου κύματος και τον σχηματισμό της ωστικής ασυνέχειας. Είναι ενδιαφέρον ότι οι χωρικές κλίμακες που εμφανίζεται η ασυνέχεια είναι σε συμφωνία με αυτές που το Μοντέλο των Εσωτερικών Ωστικών Κυμάτων προτείνει. Αλλά, βεβαίως, είναι ακόμα νωρίς και παρακινδυνευμένο να επεκτείνουμε περαιτέρω τον συλλογισμό αυτό. Στο κάτω κάτω ο αλγόριθμός μας αδυνατεί να ολοκληρώσει την εκροή από το σημείο του ωστικού κύματος και πέρα. Αυτό ακριβώς αποτελεί και τον επόμενο στόχο έρευνας που θέτουμε: να επεκτείνουμε τον αλγόριθμό μας με τεχνικές που είναι γνωστές στις βιβλιογραφία προκειμένου να μπορεί να περιγράψει και να υπερκεράσει την ωστική ασυνέχεια.

Σαν τελική παρατήρηση θα θέλαμε να επισημάνουμε το πλεονέκτημα της μορφής των εξισώσεων στάσιμης κατάστασης που εξάγαμε στο τελευταίο κεφάλαιο, μιας και το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσής τους παρέχει αυτοσυνεπώς το σχήμα της συνοριακής επιφάνειας. Η βελτίωση αυτή είναι σημαντική συγκρίνοντας με τους εξελιγμένους χρονοεξαρτώμενους κώδικες κατά τους οποίους η εξωτερική επιφάνεια πρέπει είτε να δοθεί με το χέρι, είτε να βρεθεί κάποια έμμεση μέθοδος προσδιορισμού της. Γενικά μιλώντας και παρά τις δυσκολίες που ανακύπτουν οι εξισώσεις στάσιμης κατάστασης παρέχουν μια πολύ πιο βαθιά εικόνα για την φυσική των εκροών. Αυτός είναι και ο λόγος που οι ολοκληρώσεις της στάσιμης κατάστασης είναι τόσο σημαντικές και για αυτό πιστεύουμε στην σημασία της επέκτασης της μελέτης μας στα πλαίσια που περιγράφηκαν παραπάνω.

Παράρτημα Α΄

Ακτινοβολία Synchrotron και Πόλωση

Α΄.1 Βασική θεωρία - Παράμετροι Stoke's

Ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία, αν όχι το μοναδικό, για την αναγνώριση και εκτίμηση του μαγνητικού πεδίου είναι οι μετρήσεις της πόλωσης της λαμβάνουσας ακτινοβολίας. Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε μια σύντομη εισαγωγή στο θέμα. Είναι γνωστό ότι η πόλωση αναφέρεται στην κατεύθυνση ταλάντωσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Η απλούστερη περίπτωση ενός μονοχρωματικού επίπεδου κύματος συνίσταται στην ταλάντωση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα επίπεδο και μια κατεύθυνση $\hat{n}$ κάθετη στην διεύθυνση διάδοσης $\vec{k}\cdot$ το μαγνητικό πεδίο ταλαντώνεται σε μια διεύθυνση κάθετη σε αυτά και δεν χρειάζεται να εξεταστεί αυτόνομα. Προσανατολίζοντας το σύστημα συντεταγμένων μας έτσι ώστε το $\vec{z}$ να αντιστοιχεί στην διεύθυνση διάδοσης $\vec{k}$, η γενική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{E} = (E_x\hat{x} + E_y\hat{y})\, e^{-i\omega t} \tag{A΄.1}$$

όπου i η φανταστική μονάδα και ω η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης - προφανώς για να εξάγουμε μια φυσικά μετρούμενη ποσότητα πρέπει να θεωρήσουμε το πραγματικό μέρος της παραπάνω έκφρασης. Η έκφραση αυτή παρήχθη ως η υπέρθεση δύο κάθετων επίπεδων ταλαντώσεων E_x, E_y

$$E_x = E_1 e^{i\phi_1} \qquad E_y = E_2 e^{i\phi_2} \tag{A΄.2}$$

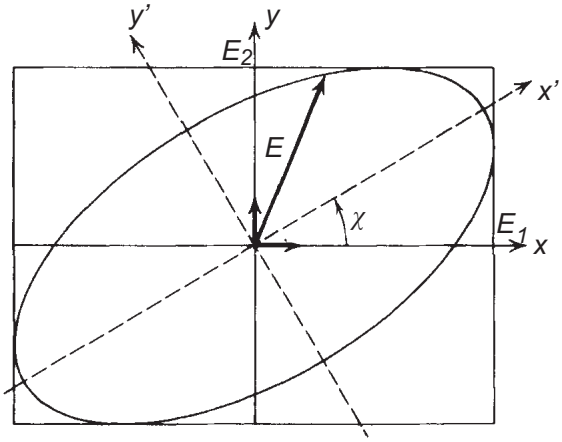
όπου $\phi_{1,2}$ η αρχική φάση της κάθε ταλάντωσης και $E_{1,2}$ το πλάτος τους. Σε κάθε στιγμή το μέγεθος των ταλαντώσεων αυτών δίνεται από το πραγματικό μέρος του $\vec{E}$

$$E_x = E_1 \cos(\omega t - \phi_1) \qquad E_y = E_2 \cos(\omega t - \phi_2) \tag{A΄.3}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι στην γενική περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο περιστρέφεται γύρω από μία έλλειψη με τους κύριους άξονές της $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ στραμμένους ως προς τους αρχικούς κατά μία γωνία χ, βλέπε σχ.Α΄.1. Οι παραμετρικές εκφράσεις της καμπύλης αυτής είναι

$$\left.\begin{aligned} E'_x &= E_0 \cos\beta \sin\omega t \\ E'_y &= -E_0 \sin\beta \sin\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \left(\frac{E'_x}{E_0\cos\beta}\right)^2 + \left(\frac{E'_y}{E_0\sin\beta}\right)^2 = 1$$

όπου $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2\beta$. Η έλλειψη διαγράφεται κατά την ανάστροφη φορά αν $0 < \beta < \pi/2$, ή κατά την ορθή αν $-\pi/2 < \beta < 0$ παράγοντας την ορολογία αριστερόστροφη και δεξιόστροφη ελλειπτική πόλωση αντίστοιχα. Επιπλέον, ειδικές περιπτώσεις συμβαίνουν όταν



Σχήμα Α΄.1: Η διάταξη του ηλεκτρικού πεδίου κατά την ελλειπτική πόλωση.

$\beta = \pm\pi/4$ όπου η έλλειψη μεταπίπτει σε κύκλο (κυκλική πόλωση) και $\beta = 0, \pm\pi/2$ όπου η έλλειψη μεταπίπτει σε ευθύγραμμο τμήμα (γραμμική πόλωση). Οι ποσότητες της κεκλιμένης έλλειψης σχετίζονται με τις αρχικές ποσότητες από την επίλυση του συστήματος

$$E_1 \cos\phi_1 = E_0 \cos\beta \cos\chi \qquad E_1 \sin\phi_1 = E_0 \sin\beta \sin\chi$$
$$E_2 \cos\phi_2 = E_0 \cos\beta \sin\chi \qquad E_2 \sin\phi_2 = -E_0 \sin\beta \cos\chi$$

δηλαδή αν τα $E_{1,2}$, $\phi_{1,2}$ είναι γνωστά μπορούμε να υπολογίσουμε τα E_0, β, χ. Παρόλο που η ευθεία επίλυση του συστήματος είναι εύκολη, για λόγους που θα φανούν στην συνέχεια, είναι προτιμότερο να προχωρήσουμε μέσω των παραμέτρων του Stokes που ορίζονται από τις σχέσεις

$$I = E_1^2 + E_2^2 = E_0^2 \tag{Α΄.4}$$
$$Q = E_1^2 - E_2^2 = E_0^2 \cos 2\beta \cos 2\chi \tag{Α΄.5}$$
$$U = 2E_1E_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) = E_0^2 \cos 2\beta \sin 2\chi \tag{Α΄.6}$$
$$V = 2E_1E_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) = E_0^2 \sin 2\beta \tag{Α΄.7}$$

και έχουν μια άμεση φυσική αντιστοιχία. Η παράμετρος I αντιστοιχεί στην συνολική ροή ενέργειας της ακτινοβολίας, μια σταθερά αναλογία που υπεισέρχεται πολλές φορές σε άλλους ορισμούς και σε κάθε ποσότητα έχει παραληφθεί, ενώ η παράμετρος V είναι ένα μέτρο της κυκλικότητας - το όριο $V = 0$ αντιστοιχεί στη γραμμική πόλωση (η εκκεντρότητα δίνεται από την $\sqrt{2 - 1/\cos^2\beta}$). Οι παράμετροι Q, U καθορίζουν την κλίση της έλλειψης από τον $\hat{x}$ άξονα, ενώ στην περίπτωση της κυκλικής πόλωσης $Q = U = 0$, ενώ $I = V$. Φυσικά μιας και οι ζητούμενες ποσότητες είναι τρεις οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Με άμεση αντικατάσταση δείχνεται ότι στην περίπτωση ενός μονοχρωματικού πολωμένου κύματος οι παράμετροι σχετίζονται με την έκφραση

$$I^2 = V^2 + Q^2 + U^2 \tag{Α΄.8}$$

Αντιστρέφοντας τους ορισμούς, τα μεγέθη της έλλειψης εκφράζονται μέσω των παραμέτρων του Stokes

$$E_0 = \sqrt{I} \qquad \sin 2\beta = \frac{V}{I} \qquad \tan 2\chi = \frac{U}{Q} \tag{Α΄.9}$$

Η παραπάνω προσέγγιση αναφέρεται στην περίπτωση ενός συγκεκριμένου μονοχρωματικού κύματος. Αλλά στην πραγματικότητα η ακτινοβολία που λαμβάνουμε παράγεται ως μια υπέρθεση μονοχρωματικών κυμάτων, το καθένα με την δική του πόλωση και επομένως δική

του χρονική εξέλιξη. Προκειμένου να προχωρήσουμε σε μια τέτοια περίπτωση θεωρούμε το όριο στο οποίο η αρχική φάση και το πλάτος ενός τέτοιου κύματος εξελίσσεται αργά με τον χρόνο

$$E_x = E_1(t)e^{i\phi_1(t)} \qquad E_y = E_2(t)e^{i\phi_2(t)}$$

Ο χαρακτηριστικός χρόνος που το κύμα μπορεί να θεωρηθεί πως βρίσκεται σε συγκεκριμένη κατάσταση πόλωσης εκτιμάται μέσω του θεωρήματος ζώνης $\Delta t\,\Delta\omega \sim 1$. Η διασπορά συχνοτήτων $\Delta\omega$ (bandwidth) γύρω από την συχνότητα ω και επομένως ο χρόνος της μέτρησης (coherent time) περιορίζει τις παρατηρούμενες συχνότητες $\omega \gg 1/\Delta t$. Ένα τέτοιο κύμα ονομάζεται ημι-μονοχρωματικό κύμα (quasi monochromatic wave).

Ακολουθώντας τους Rybicki & Lightman, οι συσκευές που χρησιμοποιούνται για την μέτρηση της πόλωσης μετρούν ένα μέσο ως προς το χρόνο ηλεκτρικό πεδίο, ενώ επηρεάζουν την μέτρηση ας πούμε με έναν γραμμικό τρόπο της μορφής

$$\begin{aligned} E'_x &= \lambda_{11}E_x + \lambda_{12}E_y \\ E'_y &= \lambda_{21}E_x + \lambda_{22}E_y \end{aligned}$$

όπου λ_{ij} μιγαδικές σταθερές που περιγράφουν την επίδραση της διάταξης. Υπολογίζοντας την μέση τιμή του τετραγώνου E'_x

$$\left\langle \Re\left[E'_x \exp^{-i\omega t}\right]^2 \right\rangle = |\lambda_{11}|^2 \left\langle E_x E_x^* \right\rangle + \lambda_{11}\lambda_{12}^* \left\langle E_x E_y^* \right\rangle + \lambda_{11}^*\lambda_{12} \left\langle E_x^* E_y \right\rangle + |\lambda_{12}|^2 \left\langle E_y E_y^* \right\rangle$$

ενώ η μέση τιμή του τετραγώνου E'_y μια παρόμοια έκφραση με τις σταθερές $\lambda_{12} \leftrightarrow \lambda_{22}$, $\lambda_{11} \leftrightarrow \lambda_{21}$ εναλλαγμένες.

Οι τέσσερις όροι που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση παρέχουν τέσσερις πραγματικές παράμετροι που χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε της παραμέτρους Stokes στα ημι-μονοχρωματικά κύματα

$$I = \langle E_x^* E_x \rangle + \left\langle E_y^* E_y \right\rangle = \left\langle E_1^2 + E_2^2 \right\rangle \tag{A'.10}$$

$$Q = \langle E_x^* E_x \rangle - \left\langle E_y^* E_y \right\rangle = \left\langle E_1^2 - E_2^2 \right\rangle \tag{A'.11}$$

$$U = \left\langle E_y^* E_x \right\rangle + \langle E_x^* E_y \rangle = \langle 2E_1E_2\cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle \tag{A'.12}$$

$$V = \frac{1}{i}\left(\left\langle E_y^* E_x \right\rangle - \langle E_x^* E_y \rangle\right) = \langle 2E_1E_2\sin(\phi_1 - \phi_2) \rangle \tag{A'.13}$$

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια της παραπάνω μέσης τιμής είναι ότι τώρα η εξ.A'.8 δεν μπορεί να ισχύει γενικά αφού

$$\langle E_x^* E_x \rangle \left\langle E_y^* E_y \right\rangle \geq \langle E_x^* E_y \rangle \left\langle E_y^* E_x \right\rangle$$

Η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου οι E_x, E_y είναι σταθερές με τον χρόνο, δηλαδή σε ένα πλήρως ελλειπτικά πολωμένο κύμα. Στην ακραία περίπτωση όπου τα E_x, E_y δεν εμφανίζουν καμία σχέση μεταξύ τους και δεν υπάρχει κάποια προτιμητέα διεύθυνση, δηλαδή η ακτινοβολία είναι πλήρως μη πολωμένη, τότε $\langle E_1^2 \rangle = \langle E_2^2 \rangle$ και οι παράμετροι του Stokes γράφονται

$$V = Q = U = 0$$

Η μεγάλη χρησιμότητα των παραμέτρων του Stokes έγκειται στην προσθετική τους ιδιότητα όταν αναφερόμαστε στην υπέρθεση ανεξάρτητων κυμάτων - με τον όρο ανεξάρτητα εννοούμε κύματα που δεν εμφανίζουν μόνιμη σχέση μεταξύ τους ή με άλλα λόγια η σχετική τους φάση είναι ομογενώς κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 2\pi]$ για το θεωρούμενο διάστημα.

Επομένως, η υπέρθεση που αποτελείται από τα $E_x^{(k)}$, $E_y^{(k)}$ με $k = 0, 1, 2 ...$, ανεξάρτητα κύματα ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

$$I = \sum I^{(k)} \qquad Q = \sum Q^{(k)} \qquad U = \sum U^{(k)} \qquad V = \sum V^{(k)} \tag{A′.14}$$

Η ανισότητα του Schwartz γράφεται ως

$$I^2 \geqslant Q^2 + U^2 + V^2 \tag{A′.15}$$

και η αρχή της επαλληλίας μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε την συνολική εκπομπή σε δύο τμήματα: ι) το πολωμένο κύμα με ένταση $\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}$ και ιι) το μη-πολωμένο κύμα με ένταση $I - \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}$. Κατ΄ επέκταση ορίζουμε τον λόγο

$$\Pi \equiv \frac{I_{pol}}{I} = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} \tag{A′.16}$$

που καλείται βαθμός πόλωσης. Για ένα πλήρως ελλειπτικά πολωμένο μονοχρωματικό κύμα ο βαθμός είναι $\Pi = 100\%$.

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση συναντάται σε πραγματικές συνθήκες όπου η γραμμική πόλωση λαμβάνει χώρα ($V = 0$). Σε μια τέτοια περίπτωση η στρέψη του γραμμικού πολωτή προσδιορίζει την διεύθυνση όπου λαμβάνεται η μέγιστη(I_{max}) και η ελάχιστη ακτινοβολία (I_{min}). Κάθετα στο επίπεδο πόλωσης η μη πολωμένη ακτινοβολία συνεισφέρει κατά το ήμισυ της συνολικής - το άλλο μισό της συμμετέχει στο επίπεδο της πόλωσης. Έτσι μπορούμε να γράψουμε άμεσα

$$I_{max} = \frac{1}{2} I_{unpol} + \frac{1}{2} I_{pol} \qquad I_{min} = \frac{1}{2} I_{unpol}$$

καταλήγοντας

$$\Pi = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{A′.17}$$

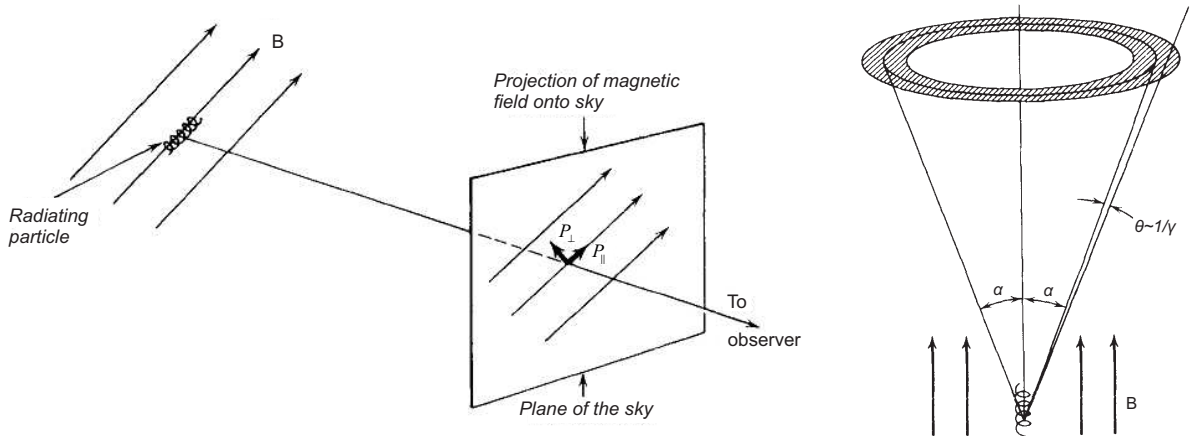
A′.2 Πόλωση της Synchrotron Ακτινοβολίας

Η σημαντικότερη εφαρμογή της πόλωσης στην αστροφυσική υψηλών ενεργειών εμφανίζεται στην ακτινοβολία synchrotron, μια κεντρική διαδικασία που συναντάται όταν σχετικιστικά κινούμενα σωματίδια ακτινοβολούν λόγω της παρουσίας μαγνητικού πεδίου - η διαδικασία αυτή είναι η κυρίαρχη και στους σχετικιστικούς πίδακες. Οι σχετικοί υπολογισμοί που αφορούν την διαδικασία ακτινοβολίας θεωρούνται γνωστοί, βλέπε Rybicki and Lightman (1986).

Η εκπεμπόμενη ακτινοβολία, ισχύς ανά συχνότητα, από ένα σωματίδιο μάζας m και φορτίου q υπό την επίδραση ενός οργανωμένου (oriented) μαγνητικού πεδίου B δίνεται από την

$$P_{\parallel}(\omega) = \frac{\sqrt{3} q^3 B \sin\alpha}{4\pi m c^2} \left[F(x) + G(x)\right]$$
$$P_{\perp}(\omega) = \frac{\sqrt{3} q^3 B \sin\alpha}{4\pi m c^2} \left[F(x) - G(x)\right]$$

όπου α η γωνία μεταξύ της ταχύτητας του σωματιδίου και του μαγνητικού πεδίου (pitch angle). Στην σχέση αυτή $x \equiv \omega/\omega_c$ όπου $\omega_c = 3\gamma^2 qB \sin\alpha/(2mc)$ η κρίσιμη συχνότητα και γ ο παράγοντας Lorentz του σωματιδίου. Παρατηρείστε ότι οι δείκτες $\parallel$, $\perp$ αναφέρονται



Σχήμα Α΄.2: Χαρακτηριστικά της πόλωσης στην ακτινοβολία synchrotron. **Αριστερά:** Η γεωμετρία και τα διανύσματα της πόλωσης. **Δεξιά:** Η εκπομπή synchrotron από σωματίδιο με pitch angle α. Η σκιασμένη περιοχή αντιστοιχεί στην επιφάνεια πάνω στην οποία εκπέμπεται το μέγιστο μέρος της ακτινοβολίας λόγω του φαινομένου αποπλάνησης του φωτός - σχήματα από Rybicki and Lightman (1986).

στην διεύθυνση εφαπτόμενη με το μαγνητικό πεδίο και κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν η ταχύτητα του σωματιδίου και το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα*. Οι εδικές συναρτήσεις F, G σχετίζονται με τις τροποποιημένες συναρτήσεις $2^{ου}$ είδους του Bessel, βλέπε εξ.(6.31ς) στον Rybicki and Lightman (1986) για ορισμό.

Η ακτινοβολία synchrotron ενός σωματιδίου είναι ελλειπτικά πολωμένη, δεξιά ή αριστερά αναλόγως με το αν ο παρατηρητής βρίσκεται ακριβώς μέσα ή ακριβώς έξω από τον κώνο της μέγιστης εκπομπής, βλέπε δεξί σχ.Α΄.2. Σε μια κατανομή σωματιδίων κατά την οποία μεταβάλλεται ομαλά η pitch angle, οι εγκάρσιες ελλειπτικές συνιστώσες αλληλοαναιρούνται επιτρέποντας μονό μια γραμμικά πολωμένη συνιστώσα. Υποθέτοντας ότι τα σωματίδια είναι ισοτροπικά κατανεμημένα και παίρνοντας την μέση τιμή ως προς την στερεά γωνία απλά αντικαθιστούμε τον όρο $\sin\alpha$ με $\pi/4$ κι επομένως η έκφραση που δίνει την πόλωση, εξ.Α΄.17, δίνει

$$\Pi = \frac{P_\perp(\omega) - P_\parallel(\omega)}{P_\perp(\omega) + P_\parallel(\omega)} = \frac{G\,(x)}{F\,(x)} \tag{A΄.18}$$

όπου Γ η γνωστή ειδική συνάρτηση. Ολοκληρώνοντας για όλες τις συχνότητες, ο βαθμός πόλωσης γίνεται αρκετά υψηλός $P = \Gamma(4/3)/\Gamma(7/3) = 75\%^\dagger$. Για μια κατανομή ηλεκτρονίων που ακολουθεί τον νόμο δύναμης ($N(\gamma) = C\gamma^{-p}$, $\gamma_{min} < \gamma < \gamma_{max}$) ο παραπάνω υπολογισμός παράγει ένα αρκετά κομψό αποτέλεσμα

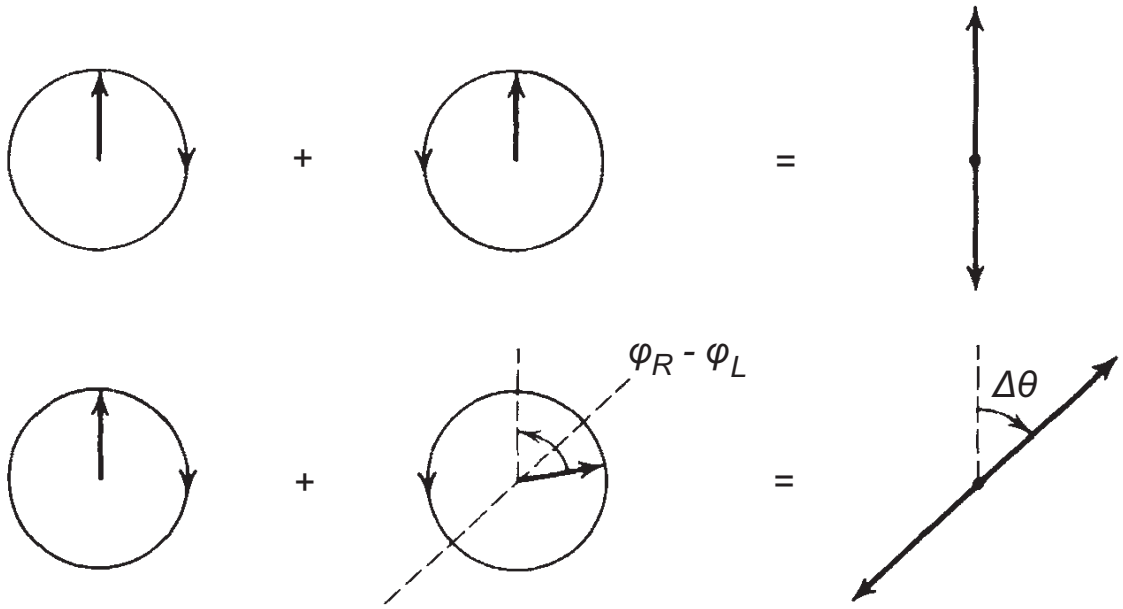
$$\Pi = \frac{p+1}{p+7/3} \tag{A΄.19}$$

*Όταν ένα σωματίδιο διαδίδεται κατά την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου δεν εκπέμπεται ακτινοβολία synchrotron αφού δεν υπάρχει επιτάχυνση φορτίων. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι γενικά δεν λαμβάνει χώρα εκπομπή ακτινοβολία κατά την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, το σωματίδιο μπορεί να κινείται σε μια μηδενική pitch angle και να εκπέμπει κατά την $\vec{B}$ διεύθυνση

†Οι απαραίτητοι τύποι για την ολοκλήρωση είναι

$$\int_0^\infty x^\mu F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{2}{3}\right) \qquad \int_0^\infty x^\mu G(x)\,\mathrm{d}x = 2^\mu\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{2}{3}\right)$$

ενώ χρησιμοποιήσαμε και την ταυτότητα $\Gamma(q+1) = q\Gamma(q)$.



Σχήμα Α΄.3: Η υπέρθεση κυκλικά πολωμένων κυμάτων. **Πάνω:** Το αριστερόστροφο και το δεξιόστροφο κύμα έχουν την ίδια φασική ταχύτητα. Σαν αποτέλεσμα παρατηρείται ένα γραμμικά σταθερά πολωμένο κύμα. **Κάτω:** Τα δύο κυκλικά πολωμένα κύματα διαδίδονται με διαφορετική φασική ταχύτητα. Σαν αποτέλεσμα η γραμμική πόλωση στρέφεται κατά μία γωνιά $\Delta\theta$ που εξαρτάται από την διανυθείσα απόσταση - σχήματα από Rybicki and Lightman (1986).

Α΄.3 Η Στροφή Faraday

Ένα από τα πρώτα πειράματα που κατέδειξαν την σχέση του φωτός με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, στην πραγματικότητα το πρώτο, ήταν η στροφή της πολωμένης ακτινοβολίας όταν το φως διέρχεται από ένα μαγνητικό πεδίο (Faraday 1845). Η παρουσία ενός μακρύ οργανωμένου μαγνητικού πεδίου προκαλεί μια διασπορά μεταξύ της αριστερόστροφης και δεξιόστροφης κυκλικά πολωμένης ακτινοβολίας προκαλώντας την εν λόγω στροφή. Στην ενότητα αυτή ακολουθούμε μια εισαγωγική και επομένως γεμάτη προσεγγίσεις παρουσίαση του φαινομένου.

Θεωρούμε ένα φορτισμένο σωματίδιο σε ένα κρύο και ακίνητο πλάσμα, ένα μη σχετικιστικό ηλεκτρόνιο. Η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από την εξίσωση

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}_0$$

όπου $\vec{E}$ το κυρίαρχο ηλεκτρικό πεδίο, αυτό του ηλεκτρομαγνητικού παλμού, και $\vec{B}_0$ το κυρίαρχο μαγνητικό πεδίο, υποθέτουμε το οργανωμένο μαγνητικό πεδίο του πλάσματος. Θα χειριστούμε την γραμμικά πολωμένη ακτινοβολία σαν μια υπέρθεση δύο κυκλικών κυμάτων (δεξιόστροφο, αριστερόστροφο), βλέπε σχ.Α΄.3. Για απλούστευση θα υποθέσουμε ένα $\vec{B}_0 = B_0\hat{z}$ πεδίο και ένα κυκλικό πολωμένο κύμα της μορφής

$$\vec{E} = Ee^{-i\omega t}\left(\hat{x} \pm \hat{y}\right)$$

όπου $-$ το δεξιό και $+$ το αριστερό πολωμένο κύμα.

Με τις υποθέσεις αυτές, η εξίσωση κίνηση δίνει

$$\vec{v} = \frac{-ie}{m\left(\omega - \omega_B\right)}\vec{E} \tag{Α΄.20}$$

όπου $\omega_B = eB_0/(mc)$ η συνήθης συχνότητα cyclotron, δηλαδή περιστροφής γύρω από τις μαγνητικές γραμμές. Εκφράζοντας το ρεύμα σαν $\vec{j} = -ne\vec{v}$ και από την γνωστή σχέση $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, όπου n η αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων, μπορούμε να εισάγουμε μια ενεργός αγωγιμότητα $\sigma = ine^2/[m(\omega - \omega_B)]$. Είναι επομένως δυνατό να ορίσουμε την διηλεκτρική σταθερά του μέσου

$$\epsilon_{R,L} \equiv 1 - \frac{4\pi\sigma}{i\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)} \tag{A'.21}$$

όπου $\omega_p = \sqrt{4\pi ne^2/m}$ η συχνότητα αποκοπής του πλάσματος.

Οι αντιστοιχίες γίνονται εύκολα. Η μεταβολή της φάσης μετά από απόσταση d, είναι απλά $\vec{k} \cdot \vec{d}$, ενώ ο κυματαριθμός βρίσκεται από την $k = \omega/(c\sqrt{\epsilon})$. Με την υπόθεση $\omega \gg \omega_p$, $\omega \gg \omega_B$ η επακόλουθη στροφή υπολογίζεται εύκολα

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\int_0^d (k_R - k_L)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^d \frac{\omega_p^2\omega_B}{\omega^2 c}\,\mathrm{d}s$$

ή

$$\Delta\theta = \frac{2\pi e^3}{m^2c^2\omega^2}\int_0^d nB_\parallel\,\mathrm{d}s$$

όπου $B_\parallel$ η προβολή του μαγνητικού πεδίου κατά την διεύθυνση παρατήρησης. Αυτή είναι η σχέση που εφαρμόζεται γενικά για την Στροφή Faraday. Μια άλλη μορφή που εφαρμόζεται συνήθως στην Αστροφυσική είναι

$$\Delta\theta = RM\,\lambda^2 \qquad RM = \frac{e^3}{2\pi\,(mc^2)^2}\int_0^d nB_\parallel\,\mathrm{d}s \tag{A'.22}$$

όπου η ποσότητα RM καλείται μέτρο στροφής (Rotation Measure) και χρησιμοποιείτε για να μετρήσει την ισχύ του φαινομένου.

Οι παραπάνω ποσότητες υπεισέρχονται στις μελέτες πόλωσης για να εκτιμήσουν το μέγεθος του μαγνητικού πεδίο συναρτήσει της αριθμητικής πυκνότητας των ηλεκτρονίων. Αλλά φυσικά το κύριο πρόβλημα έγκειται στην αρχική διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που είναι εν γένει άγνωστη. Για τον σκοπό αυτό μια κοινή πρακτική είναι να μετρήσει κανείς την στροφή θ από αυθαίρετο άξονα σε δύο συχνότητες ώστε να απαλείψει την συνεισφορά της αρχικής διεύθυνσης

$$RM = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \tag{A'.23}$$

Προκειμένου να έχουμε μια αίσθηση για την δύναμη του φαινομένου, για τυπικές τιμές μαγνητικού πεδίου $B \sim 5\mu G$, $n \sim 1cm^{-3}$ και γαλαξιακές διαστάσεις μερικά Kpc αντιστοιχεί $RM \sim 1cm^{-2}$. Για τυπικά ραδιοκύματα με συχνότητα $30GHz$ η Στροφή Faraday είναι σημαντική $1rad \sim 57°$.

Παράρτημα Β΄

Θεώρημα για την ροή ποσότητας

Ακολουθώντας τον Rai Choudhuri (1998) θα αποδείξουμε μια γενικότερη πρόταση για την διατήρηση μιας ποσότητας $\vec{Q}$ που ικανοποιεί την συνθήκη

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{v} \times \vec{Q}\right) \tag{B΄.1}$$

Η μεταβολή της ροής της ποσότητας κατά την διάδοση του στοιχειώδους όγκου μπορεί να αποδοθεί σε δύο λόγους: πρώτον στην μεταβολή της ροής αυτής καθεαυτής, δεύτερον λόγω της μεταβολής της οριακής επιφάνειας της ολοκλήρωσης. Η μεταβολή αυτή γράφεται συμβολικά

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{Q} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{Q} \cdot \frac{d\left(d\vec{S}\right)}{dt} \tag{B΄.2}$$

Ο κεντρικός μας στόχος είναι να εκφράσουμε την μεταβολή της επιφάνειας ολοκλήρωση. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Green για να μετατρέψουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε ένα επικαμπύλιο:

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{B΄.3}$$

Θεωρούμε τώρα ένα στοιχειώδες τμήμα της καμπύλης $d\vec{r}$ της συνοριακής επιφάνειας ∂dS. Η μεταβολή αυτού του τμήματος οφείλεται στην εξέλιξή της προς την επόμενη επιφάνεια dS' είναι

$$d\vec{r'} - d\vec{r} = dt\,\vec{v} - d\vec{r} \Rightarrow \tag{B΄.4}$$

$$dS' - dS = dt \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \tag{B΄.5}$$

$$\frac{d\,(dS)}{dt} = \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} \tag{B΄.6}$$

όπου η ολοκλήρωση λαμβάνεται στο σύνορο της στοιχειώδους επιφάνειας. Η εξίσωση Β΄.2 δηλώνει ότι απαιτείται μια επιπλέον ολοκλήρωση για την συνολική επιφάνεια μετά την οποία η εξ.(Β΄.2) γίνεται

$$\int_S \vec{Q} \cdot \frac{d\left(d\vec{S}\right)}{dt} = \oint \vec{Q} \cdot (\vec{v} \times d\vec{r}) = \oint \left(\vec{Q} \times \vec{v}\right) \cdot d\vec{r} \tag{B΄.7}$$

Μετά από παρόμοιους συλλογισμούς με αυτούς που εφαρμόζονται για τα ελεύθερα ρεύματα ενός μαγνητισμένου αντικειμένου, οι γειτονικές συνεισφορές στο εσωτερικό της επιφάνειας αλληλοαναιρούνται αφήνοντας μόνο τις συνεισφορές από το συνολικό σύνορο της επιφάνειας

$$\int_S \vec{Q} \cdot \frac{d\left(d\vec{S}\right)}{dt} = \oint_{\partial S} \left(\vec{Q} \times \vec{v}\right) \cdot d\vec{r} = \int_S \left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{Q} \times \vec{v}\right)\right] \cdot d\vec{S} \tag{B′.8}$$

Εισάγοντας την παραπάνω έκφραση στην εξ.(B′.2)

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{Q} \cdot d\vec{S} = \int_S \left[\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \left(\vec{v} \times \vec{Q}\right)\right] \cdot d\vec{S} = 0 \tag{B′.9}$$

το θεώρημα της διατήρησης για την ροή της $\vec{Q}$ αποδεικνύεται. Η παραπάνω έκφραση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθούν διάφορες προτάσεις όπως είναι για παράδειγμα το θεώρημα του Kelvin για την στροβιλότητα (vorticity) ή για την παγωμένη ροή που αναφέρεται στο κύριο κείμενο.

Παράρτημα Γ′

Αναφορές στις μεγάλες εκφράσεις του κύριου κειμένου

Γ′.1 Ο Τανυστής Ενέργειας - Ορμής

Η αναλυτική μορφή του συμμετρικού τανυστή ενέργειας-ορμής του πλάσματος περιλαμβάνει 10 ανεξάρτητες εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
T^{00} &= \gamma^2\xi - p + 2\pi\left(B^2 + E^2\right)\\
T^{01} &= \gamma^2\xi v^1 + 4\pi\left(B^2v^3 - B^3v^2\right)\\
T^{02} &= \gamma^2\xi v^2 + 4\pi\left(B^3v^1 - B^1v^3\right)\\
T^{03} &= \gamma^2\xi v^3 + 4\pi\left(B^1v^2 - B^2v^1\right)\\
T^{11} &= \gamma^2\xi (v^1)^2 + p + 2\pi\left(B^2 + E^2 - 2(B^1)^2 - 2(E^1)^2\right)\\
T^{12} &= \gamma^2\xi v^1v^2 - 4\pi\left(B^1B^2 + E^1E^2\right)\\
T^{13} &= \gamma^2\xi v^1v^3 - 4\pi\left(B^1B^3 + E^1E^3\right)\\
T^{22} &= \gamma^2\xi (v^2)^2 + p + 2\pi\left(B^2 + E^2 - 2(B^2)^2 - 2(E^2)^2\right)\\
T^{23} &= \gamma^2\xi v^2v^3 - 4\pi\left(B^2B^3 + E^2E^3\right)\\
T^{33} &= \gamma^2\xi (v^3)^2 + p + 2\pi\left(B^2 + E^2 - 2(B^3)^2 - 2(E^3)^2\right)
\end{aligned}
$$

Γ′.2 Εκφράσεις για το Κεφάλαιο 5

Στην ενότητα αυτή περιλάβαμε διάφορους υπολογισμούς και εκφράσεις που εμφανίζονται στο Κεφάλαιο 5. Επιλέξαμε να απαλείψουμε τις εκφράσεις αυτές από το κύριο κείμενο για να αυξήσουμε την αναγνωσιμότητα του κειμένου

Γ′.2.1 Η εξίσωση Bernoulli σε διαφορική μορφή

Η κλίση της εξίσωσης Bernoulli

$$
\xi^2 + \left(\frac{\sigma_M M^2}{x^2 S}\right)^2 - \left(\mu\frac{1 - M^2 - x_A^2}{1 - M^2 - x^2}\right)^2 + \left(\frac{\mu x_A}{G}\frac{G^2 - M^2 - x^2}{1 - M^2 - x^2}\right)^2 = 0 \qquad (\Gamma'.1)
$$

γράφεται

$$
\begin{aligned}
&\xi\vec{\nabla}\xi+\sigma_M\left(\frac{M^2}{x^2S}\right)^2\vec{\nabla}\sigma_M-\left(\frac{\sigma_M M^2}{x^2}\right)^2\frac{\vec{\nabla}S}{S^3}\\
&+\left[\left(\frac{\mu x_A}{G}\frac{G^2-M^2-x^2}{1-M^2-x^2}\right)^2-\left(\mu\frac{1-M^2-x_A^2}{1-M^2-x^2}\right)^2\right]\frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu}\\
&+\left[\mu^2\frac{1-M^2-x_A^2}{\left(1-M^2-x^2\right)^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{G}\frac{G^2-M^2-x^2}{1-M^2-x^2}\right)^2\right]\vec{\nabla}x_A^2\\
&-\left[\left(\frac{1}{G}\frac{G^2-M^2-x^2}{1-M^2-x^2}\right)^2-2\frac{G^2-M^2-x^2}{\left(1-M^2-x^2\right)^2}\right]\frac{\mu^2x_A^2}{G}\vec{\nabla}G\\
&+\vec{\nabla}x^2\left[-\left(\frac{\sigma_M M^2}{S}\right)^2\frac{1}{x^4}-\mu^2\frac{\left(1-M^2-x_A^2\right)^2}{\left(1-M^2-x^2\right)^3}-\frac{\mu^2x_A^2}{G^2}\frac{\left(1-G^2\right)\left(G^2-M^2-x^2\right)}{\left(1-M^2-x^2\right)^3}\right]\\
&+\vec{\nabla}M^2\left[M^2\left(\frac{\sigma_M}{x^2S}\right)^2+\mu^2\frac{\left(1-M^2-x_A^2\right)\left(x_A^2-x^2\right)}{\left(1-M^2-x^2\right)^3}\right.\\
&\left.-\frac{\mu^2x_A^2}{G^2}\frac{\left(1-G^2\right)\left(G^2-M^2-x^2\right)}{\left(1-M^2-x^2\right)^3}\right]=0
\end{aligned}
\tag{Γ.2}
$$

Προκειμένου να παράγουμε μια πιο εύχρηστη μορφή συγκεντρώνουμε τους διάφορους όρους - κατά την πορεία αυτή χρησιμοποιούμε τις φυσικές ποσότητες εξ. 5.22-5.27 για να γράψουμε τις χρήσιμες προτάσεις

$$1-G^2=-\frac{\chi B_\varphi}{\mu c\Psi_A x_A^2}\left(1-M^2-x^2\right) \tag{Γ.3}$$

$$1-M^2-x_A^2=\frac{\gamma\xi}{\mu}\left(1-M^2-x^2\right) \tag{Γ.4}$$

$$G^2-M^2-x^2=\frac{x\xi}{\mu x_A^2}\frac{\gamma v_p}{c}\left(1-M^2-x^2\right) \tag{Γ.5}$$

Προχωρούμε στους διάφορους συντελεστές που εμφανίζονται. Οι συντελεστές C_{M^2} του $\vec{\nabla}M^2$ προκύπτουν θεωρώντας τους εκάστοτε όρους

$$
\begin{aligned}
&M^2\left(\frac{\sigma_M}{x^2S}\right)^2=\frac{\xi B_p^2}{4\pi\rho c^2}\\
&\mu^2\frac{\left(1-M^2-x_A^2\right)\left(x^2-x_A^2\right)}{\left(1-M^2-x^2\right)^3}=-\frac{\gamma\xi x B_\varphi}{\Psi_A c}\frac{1}{1-M^2-x^2}\\
&\frac{\mu^2x_A^2}{G^2}\frac{\left(1-G^2\right)\left(G^2-M^2-x^2\right)}{\left(1-M^2-x^2\right)^3}=-\frac{\xi B_\varphi}{\Psi_A c}\frac{\gamma v_\varphi}{c}\frac{1}{1-M^2-x^2}
\end{aligned}
$$

Ο ορισμός της κανονικοποιημένης απόστασης (x) παρέχει

$$x=\frac{\Omega}{c}\varpi=\frac{v_\varphi}{c}-\frac{v_p}{c}\frac{B_\varphi}{B_p} \tag{Γ.6}$$

Από τον ορισμό, εξ.3.7, του αριθμού Alfvén (M) παίρνουμε

$$C_{M^2}=\frac{\xi^2}{1-M^2-x^2}\left[\frac{B^2-E^2}{4\pi\rho\xi c^2}-\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\right]\vec{\nabla}M^2 \tag{Γ.7}$$

Οι όροι της ενθαλπίας υπολογίζονται μέσω της εξίσωσης

$$\rho = \frac{\xi}{4\pi}\frac{A^2\Omega^4}{M^2\sigma_M^2} \tag{Γ'.8}$$

και τον ορισμό της

$$\xi = 1 + \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{\Gamma}-1}\frac{Q}{c^2}\rho^{\hat{\Gamma}-1} = 1 + \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{\Gamma}-1}\frac{Q^{1/\hat{\Gamma}}}{c^2}P^{\frac{\hat{\Gamma}-1}{\hat{\Gamma}}} \tag{Γ'.9}$$

Παραγωγίζοντας την δεύτερη σχέση παίρνουμε

$$\vec{\nabla}\xi c^2 = \frac{1}{\hat{\Gamma}-1}\left(\frac{P}{Q}\right)^{\frac{\hat{\Gamma}-1}{\hat{\Gamma}}}\vec{\nabla}Q + \left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{\hat{\Gamma}}}\vec{\nabla}P \tag{Γ'.10}$$

$$\vec{\nabla}P = \rho c^2\vec{\nabla}\xi - \frac{1}{\hat{\Gamma}-1}\frac{P}{Q}\vec{\nabla}Q \tag{Γ'.11}$$

Για να αντικαταστήσουμε τους όρους ξ στην transfield εξίσωση, οι εξ.Γ'.8, Γ'.9 δίνουν

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\ln(\xi-1) &= \vec{\nabla}\ln Q + \left(\hat{\Gamma}-1\right)\left(\vec{\nabla}\ln M^2 - 2\vec{\nabla}\ln\Psi_A - \vec{\nabla}\ln\xi\right)\\
\vec{\nabla}\xi &= \frac{\xi(\xi-1)}{\left(2-\hat{\Gamma}\right)\xi + \left(\hat{\Gamma}-1\right)}\Big[\vec{\nabla}\ln Q\\
&\qquad + \left(\hat{\Gamma}-1\right)\left(\vec{\nabla}\ln M^2 - 2\vec{\nabla}\ln A + 4\vec{\nabla}\ln\Omega - 2\vec{\nabla}\ln\sigma_M\right)\Big]
\end{aligned} \tag{Γ'.12}$$

Συνεπώς, οι όροι που αντιστοιχούν στην ενθαλπία γράφονται τώρα

$$\begin{aligned}
C_\xi = \frac{\xi^2(\xi-1)}{\left(2-\hat{\Gamma}\right)\xi + \left(\hat{\Gamma}-1\right)}&\Big[\vec{\nabla}\ln Q\\
&+ \left(\hat{\Gamma}-1\right)\left(\vec{\nabla}\ln M^2 - 2\vec{\nabla}\ln A + 4\vec{\nabla}\ln\Omega - 2\vec{\nabla}\ln\sigma_M\right)\Big]
\end{aligned}$$

Οι επόμενοι τρεις όροι γράφονται άμεσα

$$\begin{aligned}
C_{\sigma_M} &= \sigma_M\left(\frac{M^2}{x^2S}\right)^2\vec{\nabla}\sigma_M = \xi^2\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\frac{\vec{\nabla}\sigma_M}{\sigma_M}\\
C_S &= -\left(\frac{\sigma_M M^2}{x^2}\right)^2\frac{\vec{\nabla}S}{S^3} = -\xi^2\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\frac{\vec{\nabla}S}{S}\\
C_\mu &= \left[\left(\frac{\mu x_A}{G}\frac{G^2-M^2-x^2}{1-M^2-x^2}\right)^2 - \left(\mu\frac{1-M^2-x_A^2}{1-M^2-x^2}\right)^2\right]\frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu} = \xi^2\left[\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2 - \gamma^2\right]\frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu}
\end{aligned}$$

ενώ οι υπόλοιποι γράφονται αρχικά ως

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}x^2\left[-\left(\frac{\sigma_M M^2}{x^2S}\right)^2\frac{1}{x^2} - \mu^2\frac{\left(1-M^2-x_A^2\right)^2}{\left(1-M^2-x^2\right)^3} - \frac{\mu^2x_A^2}{G^2}\frac{\left(1-G^2\right)\left(G^2-M^2-x^2\right)}{\left(1-M^2-x^2\right)^3}\right]\\
&\quad = \frac{\vec{\nabla}x^2}{x^2}\frac{\xi^2}{1-M^2-x^2}\left[-\left(1-M^2-x^2\right)\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \gamma^2x^2 + \left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)\frac{x^2}{\xi^2}\frac{B_\varphi}{\Psi_A c}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \left[\left(\frac{1}{G}\frac{G^2-M^2-x^2}{1-M^2-x^2}\right)^2 - 2\frac{G^2-M^2-x^2}{\left(1-M^2-x^2\right)^2}\right]\frac{\mu^2 x_A^2}{G}\vec{\nabla}G \\
&= \frac{\xi^2}{1-M^2-x^2}\left[-\left(1-M^2-x^2\right)\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2 + 2\frac{\mu x}{\xi}\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right]\frac{\vec{\nabla}G}{G} \\
&+ \left[\mu^2\frac{1-M^2-x_A^2}{\left(1-M^2-x^2\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{G}\frac{G^2-M^2-x^2}{1-M^2-x^2}\right)^2\right]\vec{\nabla}x_A^2 \\
&= \frac{\xi^2}{1-M^2-x^2}\left[\frac{1-M^2-x^2}{2}\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2 + \frac{\gamma\mu}{\xi}\right]\frac{\vec{\nabla}x_A^2}{x_A^2}
\end{aligned}
$$

Οι όροι $\vec{\nabla}G$ διαχωρίζονται ($\vec{\nabla}\ln G = \vec{\nabla}\ln x - \vec{\nabla}\ln x_A$) και συλλέγονται με τους αντίστοιχους όρους δίνοντας

$$
\begin{aligned}
C_{x^2} = \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1-M^2-x^2}\Bigg[&-\left(1-M^2-x^2\right)\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2 + 2\frac{\mu x}{\xi}\frac{\gamma v_\varphi}{c} \\
&-2\left(1-M^2-x^2\right)\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - 2\gamma^2 x^2 + 2\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)\frac{x^2}{\xi}\frac{B_\varphi}{\Psi_A}\Bigg]\frac{\vec{\nabla}x^2}{x^2} \\
C_{x^2} = \frac{\xi^2}{1-M^2-x^2}&\left\{-\left(1-M^2-x^2\right)\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2\right] + \gamma^2 x\frac{v_p}{c}\frac{B_\varphi}{B_p}\right\}\frac{\vec{\nabla}x^2}{x^2}
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και τους ορισμούς των μ και x. Οι όροι των x_A^2, G μαζεύονται μαζί

$$
C_{x_A^2} = \frac{\vec{\nabla}x_A^2}{x_A^2}\frac{\xi^2}{1-M^2-x^2}\left[\left(1-M^2-x^2\right)\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2 + \frac{\gamma\mu x_A^2}{\xi} - \frac{\mu x}{\xi}\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right]
$$

Χρησιμοποιώντας τις βοηθητικές σχέσεις

$$
\mu x_A^2 = L\Omega = x\left(\xi\gamma v_\varphi - \frac{B_\varphi}{\Psi_A}\right) \qquad \mu\left(1-x_A^2\right) = \gamma\xi\left(1 - x\frac{v_\varphi}{c}\right)
$$

γράφουμε περαιτέρω τους όρους του x_A^2 σαν

$$
C_{x_A^2} = \frac{\vec{\nabla}x_A^2}{x_A^2}\frac{\xi^2}{1-M^2-x^2}\left[\left(1-M^2-x^2\right)\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2 + \gamma^2 x\frac{v_\varphi}{c} + \left(\frac{\mu}{\xi}\right)^2\left(1-x_A^2\right) - \gamma^2\right]
$$

Μαζεύοντας όλους τους όρους (C_{M^2}, C_{σ_M}, C_S, C_{x^2}, $C_{x_A^2}$) καταλήγουμε τελικά

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{B^2-E^2}{4\pi\xi\rho c^2} - \frac{\left(1-M^2-x^2\right)}{M^2}\frac{(\xi-1)\left(\hat{\Gamma}-1\right)}{\left(2-\hat{\Gamma}\right)\xi + \left(\hat{\Gamma}-1\right)}\right]\vec{\nabla}M^2 = \\
&\left(1-M^2-x^2\right)\left\{\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\frac{\vec{\nabla}\sigma_M}{\sigma_M} - \left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\frac{\vec{\nabla}S}{S} + \left[\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2 - \gamma^2\right]\frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu}\right\} \\
&-\frac{\vec{\nabla}x}{x}\left\{\left(1-M^2-x^2\right)\left[2\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 + \left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2\right] - 2\gamma^2 x\frac{v_p}{c}\frac{B_\varphi}{B_p}\right\} \\
&+\frac{\vec{\nabla}x_A^2}{x_A^2}\left[\left(1-M^2-x^2\right)\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2 + \gamma^2 x\frac{v_\varphi}{c} + \left(\frac{\mu}{\xi}\right)^2\left(1-x_A^2\right) - \gamma^2\right]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{(1-M^2-x^2)(\xi-1)}{\left(2-\hat{\Gamma}\right)\xi+\left(\hat{\Gamma}-1\right)}\left[\vec{\nabla}\ln Q-2\left(\hat{\Gamma}-1\right)\left(\vec{\nabla}\ln A-2\vec{\nabla}\ln\Omega+\vec{\nabla}\ln\sigma_M\right)\right] \quad (\Gamma'.13)$$

ή σε μια πιο συμπτυγμένη μορφή

$$\frac{C_{M^2}-(1-M^2-x^2)\,C_{M\xi}}{1-M^2-x^2}\vec{\nabla}M^2=-2C_{M\xi}\left(\hat{\Gamma}-1\right)\vec{\nabla}\ln A+4C_{M\xi}\left(\hat{\Gamma}-1\right)\vec{\nabla}\ln\Omega$$
$$+C_{\sigma_M}\vec{\nabla}\ln\sigma_M+C_\mu\vec{\nabla}\ln\mu+C_{x^2}\vec{\nabla}\ln x^2+C_{x_A^2}\vec{\nabla}\ln x_A^2+C_{M\xi}\vec{\nabla}\ln Q \quad (\Gamma'.14)$$

όπου

$$C_{\sigma_M}=\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2-2\left(\hat{\Gamma}-1\right)C_{M\xi}\qquad C_S=-\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\frac{\vec{\nabla}S}{S}\qquad C_\mu=\left[\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2-\gamma^2\right]\frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu}$$

$$C_{x^2}=\frac{1}{1-M^2-x^2}\left\{-\left(1-M^2-x^2\right)\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2\right]+\gamma^2x\frac{v_p}{c}\frac{B_\varphi}{B_p}\right\}\frac{\vec{\nabla}x^2}{x^2}$$

$$C_{x_A^2}=\frac{\vec{\nabla}x_A^2}{x_A^2}\frac{1}{1-M^2-x^2}\left[\left(1-M^2-x^2\right)\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2+\gamma^2x\frac{v_\varphi}{c}+\left(\frac{\mu}{\xi}\right)^2\left(1-x_A^2\right)-\gamma^2\right]$$

$$C_{M^2}=\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2-\frac{B^2-E^2}{4\pi\xi\rho c^2}\right]\qquad C_{M\xi}=\frac{(\xi-1)}{\left(2-\hat{\Gamma}\right)\xi+\left(\hat{\Gamma}-1\right)}$$

Αντικαθιστώντας στην εξ.Γ'.12 βρίσκουμε επίσης την κλίση της ενθαλπίας

$$\vec{\nabla}\xi=C_{M\xi}\left(\hat{\Gamma}-1\right)\left\{\left[1+\Pi C_{M\xi}\left(\hat{\Gamma}-1\right)\right]\frac{1}{\left(\hat{\Gamma}-1\right)}\vec{\nabla}\ln Q\right.$$
$$-2\left[\Pi C_{M\xi}\left(\hat{\Gamma}-1\right)+1\right]\vec{\nabla}\ln A+4\left[\Pi C_{M\xi}\left(\hat{\Gamma}-1\right)+1\right]\vec{\nabla}\ln\Omega$$
$$\left.+\left(\Pi C_{M\xi}-2\right)\vec{\nabla}\ln\sigma_M+\Pi C_\mu\vec{\nabla}\ln\mu+\Pi C_{x^2}\vec{\nabla}\ln x^2+\Pi C_{x_A^2}\vec{\nabla}\ln x_A^2\right\} \quad (\Gamma'.15)$$

όπου

$$\Pi=\frac{1-M^2-x^2}{M^2\left[C_{M^2}-(1-M^2-x^2)C_{M\xi}\right]}$$

Το τελικό ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε την προβολή των διαφόρων όρων που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση κατά την διεύθυνση $\hat{n}$. Χρησιμοποιώντας την γενική έκφραση εξ.5.17 για τις παραγώγους τυχούσας συνάρτησης

$$\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\varpi=-\frac{A}{\varpi S}\frac{\partial\varpi}{\partial A}+\Lambda\sin\theta=-\cos\theta \quad (\Gamma'.16)$$

όπου χρήση των αντίστροφων σχέσεων 5.15 έγινε. Η προβολή της $\vec{\nabla}G$ δίνει

$$\hat{n}\cdot\vec{\nabla}G=\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\varpi}{\varpi_A}\right)=\frac{A}{S\varpi_A^2}\frac{\partial\varpi_A}{\partial A}-\frac{\cos\theta}{\varpi_A} \quad (\Gamma'.17)$$

Η $\vec{\nabla}x$ γράφεται μέσω της εξίσωσης 5.28

$$\hat{n}\cdot\vec{\nabla}x=\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\varpi x_A}{\varpi_A}\right)=-\frac{A}{S}\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{x_A}{\varpi_A}\right)-\frac{x_A}{\varpi_A}\cos\theta \quad (\Gamma'.18)$$

Τέλος, για κάθε γραμμή η προβολή της ποσότητας I_A δίνει

$$\hat{n}\cdot\vec{\nabla}I_A = -\frac{A}{S\varpi}\frac{\partial I_A}{\partial A} \tag{Γ'.19}$$

Γ'.2.2 Η Transfield Εξίσωση

Η transfield εξίσωση, εξ.5.20, γράφεται

$$\frac{\varpi}{R}\left(M^2+x^2-1\right)+\left[1+\left(\frac{Mv_\varphi}{v_p}\right)^2\right]\cos\theta = -\frac{1}{2\varpi B_p^2}\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\left[w^2\left(B^2-E^2\right)\right] -\frac{4\pi\varpi}{B_p^2}\hat{n}\cdot\vec{\nabla}P \tag{Γ'.20}$$

με τον όρο της πίεσης να προκύπτει από την εξ.Γ'.11. Ο πιο πολύπλοκος υπολογισμός αφορά τον όρο την μαγνητικής τάσης. Ο όρος αυτός γράφεται

$$\varpi^2\left(B^2-E^2\right)=\varpi^2\left(1-x^2\right)B_p^2+\varpi^2B_\varphi^2 = \left(\frac{A}{S\varpi}\right)^2\left(1-x^2\right) + \left(\frac{x_A^3\mu A}{\varpi_A\sigma_M}\right)^2\left(\frac{1-G^2}{1-M^2-x^2}\right)^2$$

όπου η ζητούμενη παράγωγος προκύπτει από την εξ.5.13 που δίνει την αντίστοιχη προβολή. Ο πρώτος όρος της παραπάνω ποσότητας δίνει

$$\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\left[\left(\frac{A}{S\varpi}\right)^2\left(1-x^2\right)\right] = 2\left(1-x^2\right)\frac{A^2}{\varpi^3S^2}\left(\frac{A}{S^2}\frac{\partial S}{\partial A}-\frac{\Lambda\varpi}{S}\frac{\partial S}{\partial\ell}+\cos\theta-\frac{1}{S}\right) +2x\left(\frac{A}{S\varpi}\right)^2\left[\frac{A}{S}\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{x_A}{\varpi_A}\right)+\frac{x_A}{\varpi_A}\cos\theta\right] \tag{Γ'.21}$$

Ο δεύτερος όρος είναι πιο μακροσκελής, αλλά παρατηρώντας ότι το πρώτο εκ των δύο πολλαπλάσιων είναι σταθερός κατά μήκος μιας γραμμής παίρνουμε

$$\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\left[\left(\frac{x_A^3\mu A}{\varpi_A\sigma_M}\right)^2\left(\frac{1-G^2}{1-M^2-x^2}\right)^2\right] = 2\varpi^2B_\varphi^2\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{x_A^3\mu A}{\varpi_A\sigma_M}\right) +2\varpi^2B_\varphi^2\left(\frac{\hat{n}\cdot\vec{\nabla}M^2+2x\hat{n}\cdot\vec{\nabla}x}{1-M^2-x^2}-2\frac{G}{1-G^2}\hat{n}\cdot\vec{\nabla}G\right) \tag{Γ'.22}$$

Συγκεντρώνοντας όλους τους όρους μαζί

$$\frac{(M^2+x^2-1)}{R}-\left[2+\left(\frac{Mv_\varphi}{v_p}\right)^2\right]\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\ln\varpi = \left(1-x^2\right)\left(\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\ln S-\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\ln A\right) -\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\left(\frac{\hat{n}\cdot\vec{\nabla}M^2+x^2\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\ln x^2}{1-M^2-x^2}-2\frac{G^2}{1-G^2}\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\ln G\right)+x^2\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\ln\Omega -\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\frac{\Omega x_A^2\mu A}{c\sigma_M}\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\ln\left(\frac{x_A^2\Omega\mu A}{c\sigma_M}\right)-\frac{4\pi}{B_p^2}\left(\rho c^2\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\xi-\frac{1}{\hat{\Gamma}-1}P\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\ln Q\right) \tag{Γ'.23}$$

Από τις ποσότητες που εμφανίζονται αντικαθιστούμε

$$\vec{\nabla}\ln G^2 = \ln x^2 - \ln x_A^2 \qquad \vec{\nabla}\ln\varpi = (1/2)\vec{\nabla}\ln x^2 - \vec{\nabla}\ln\Omega$$

και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις Γ′.14 και Γ′.15 για να αντικαταστήσουμε τα $\hat{n}\cdot\vec{\nabla}M^2$, $\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\xi$ αντίστοιχα. Συγκεντρώνοντας όλους τους όρους μαζί καταλήγουμε

$$\frac{(M^2+x^2-1)}{R} = I_A\hat{\cdot}\vec{\nabla}\ln A + I_S\hat{\cdot}\vec{\nabla}\ln S + I_\mu\hat{\cdot}\vec{\nabla}\ln\mu + I_{\sigma_M}\hat{\cdot}\vec{\nabla}\ln\sigma_M$$
$$+I_{x_A^2}\hat{\cdot}\vec{\nabla}\ln x_A^2 + I_x^2\hat{\cdot}\vec{\nabla}\ln x^2 + I_\Omega\hat{\cdot}\vec{\nabla}\ln\Omega + I_Q\hat{\cdot}\ln\vec{\nabla}Q \quad (\Gamma'.24)$$

όπου

$$I_A = \frac{B_\varphi^2}{B_p^2} + \left(1-x^2\right) - \frac{2U_S^2\left[\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - M^2\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right] - U_S^2\left(x^2+M^2\right)\right]}{\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{U_S^2(1-x^2-M^2)}{M^2} - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right]} \quad (\Gamma'.25)$$

$$I_S = \left(x^2-1\right) - \frac{\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{U_S^2}{c}}{\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho} - \frac{U_S^2(1-x^2-M^2)}{M^2}} \quad (\Gamma'.26)$$

$$I_{\sigma_M} = -\frac{B_\varphi^2}{B_p^2} + \frac{\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2}{\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{U_S^2(1-x^2-M^2)}{M^2} - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right]}$$
$$+\frac{cU_S^2\left[2U_S^2\left(x^2+M^2\right) - \left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - 2\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 + 2M^2\left(\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right)\right]}{\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{U_S^2(1-x^2-M^2)}{M^2} - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right]} \quad (\Gamma'.27)$$

$$I_\mu = \frac{B_\varphi^2}{B_p^2} + \frac{\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - cU_S^2}{\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{U_S^2(1-x^2-M^2)}{M^2} - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right]}\left[-\gamma^2 + \left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\right] \quad (\Gamma'.28)$$

$$I_{x^2} = \frac{1}{2}\left(-2 - \frac{M^2 v_\varphi^2}{v_p^2}\right) + \frac{B_\varphi^2 x^2}{B_p^2\left(1-M^2-x^2\right)} + \frac{B_\varphi^2 x^2}{B_p^2\left(x^2-x_A^2\right)} \quad (\Gamma'.29)$$
$$+\frac{\frac{B_\varphi v_p x\gamma^2}{B_p c} - \left(1-M^2-x^2\right)\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma v_\varphi}{c}\right)^2\right]}{\left(1-M^2-x^2\right)\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{U_S^2(1-x^2-M^2)}{M^2} - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right]}\left[\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - cU_S^2\right] \quad (\Gamma'.30)$$

$$I_{x_A^2} = -\frac{B_\varphi^2 x_A^2}{B_p^2\left(x^2-x_A^2\right)}$$
$$+\frac{-\gamma^2 + \frac{v_\varphi x\gamma^2}{c} + \left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\left(1-M^2-x^2\right) + \frac{\left(1-x_A^2\right)\mu^2}{\xi^2}}{\left(1-x^2-M^2\right)\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{U_S^2(1-x^2-M^2)}{M^2} - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right]}\left[\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - cU_S^2\right] \quad (\Gamma'.31)$$

$$I_\Omega = \frac{B_\varphi^2}{B_p^2} + \left(1 + \frac{M^2 v_\varphi^2}{v_p^2}\right) + (1 - x^2) + 4U_S^2 \frac{\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - cM^2\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right] - cU_S^2\left(x^2+M^2\right)}{\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{U_S^2(1-x^2-M^2)}{M^2} - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right]} \tag{Γ'.32}$$

$$I_Q = \frac{4\pi P}{B_p^2\left(\hat{\Gamma}-1\right)} + U_S^2 \frac{\frac{B_\varphi^2}{B_p^2}\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - M^2 c\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 + \frac{U_S^2\left(x^2+M^2\right)}{M^2} - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right]}{\left(\hat{\Gamma}-1\right)\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2\left[\left(\frac{\gamma v_p}{c}\right)^2 - \frac{U_S^2(1-x^2-M^2)}{M^2} - \frac{B^2-E^2}{4c^2\pi\xi\rho}\right]} \tag{Γ'.33}$$

με τον U_s^2 να αντιστοιχεί στο τετράγωνο της ανηγμένης ταχύτητας (proper velocity) του ήχου

$$U_S^2 = \frac{\left(\hat{\Gamma}-1\right)(\xi-1)}{\left(2-\hat{\Gamma}\right)\xi + \left(\hat{\Gamma}-1\right)}$$

Γ'.2.3 Οι όροι P_i

Παρουσιάζουμε την αναλυτική μορφή των όρων P_i που εμφανίζονται στο σύστημα εξ.5.35

$$\ell_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial \ell} + a_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial A} = h_i \tag{Γ'.34}$$

Οι πίνακες του συστήματος είναι

$$\ell_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 - \Lambda S P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_1 - \Lambda S P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varpi\left(P_1 - \Lambda S P_2\right) \end{pmatrix}$$

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A/\varpi P_2 & P_{3S} & 0 \\ 0 & 0 & A/\varpi P_1 & \Lambda S P_{3S} & 0 \\ 0 & 0 & A/\varpi\left(S P_2 - \Lambda P_1\right) & \left(1-\Lambda^2\right) S P_{3S} & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_i = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ -\tilde{P}_3 - P_2\tilde{P}_4 \\ -\left(\Lambda S\tilde{P}_3 + \tilde{P}_4 P_1\right) \\ \left[\left(\Lambda^2-1\right) S\tilde{P}_3 + \left(\Lambda P_1 - s P_2\right)\tilde{P}_4\right]\varpi - \Lambda S\left(P_1 - \Lambda S P_2\right) \end{pmatrix}$$

Αναλυτικά, οι όροι P_i δίνονται από

$$P_1 = \varpi(1 - M^2 - x^2) \tag{Γ'.35}$$

$$P_2 = -\frac{\Lambda\varpi}{S}\frac{\frac{\sigma_M^2}{x^2\mu^2S^2}\left(1-x^2\right)+\frac{\left(x^2-x_A^2\right)^2}{(1-M^2-x^2)^2}}{\frac{\sigma_M^2}{x^2\mu^2S^2}+\frac{\left(x^2-x_A^2\right)^2}{(1-M^2-x^2)^3}} \tag{Γ.36}$$

$$P_4 = \frac{1}{\varpi}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial A} - S\sin\theta\right) \tag{Γ.37}$$

$$P_5 = \left(P_3 + P_2P_4\right)S + \Lambda\left(P_4P_1 + P_3S\Lambda\right) - \frac{\sin\theta(\Lambda S)}{\varpi}\left(P_2S\Lambda - P_1\right) \tag{Γ.38}$$

Ο πιο πολύπλοκος όρος

$$P_3 = P_{3n} + P_{3\theta} + P_{3S} + P_{3\Omega} + P_{3x_A} \tag{Γ.39}$$

αναλύεται στα ακόλουθα μέρη

$$P_{3n} = -\frac{1}{S}\left[1 - x^2 + \frac{(x^2-x_A^2)}{\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2}\left(1-M^2-x^2\right)^2}\right]$$

$$P_{3\theta} = \frac{(1-M^2-x^2)}{\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2}(1-M^2-x^2)^3+(x^2-x_A^2)^2}\left\{2\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2}\left(1-M^2-x^2\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{M^2}\left[\left(x^2-4M^2x_A^2+x_A^2-2x_A^2x^2\right)\left(x^2-x_A^2\right)+\left(1-M^2-x^2\right)^2x_A^4\right]\right\}\cos\theta$$

$$P_{3S} = \left[1 + M^2\frac{\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2}(1-M^2-x^2)^2}{\left(x^2-x_A^2\right)^2+\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2}(1-M^2-x^2)^3}\right]\left(1-M^2-x^2\right)\frac{A}{S^2}\frac{\partial S}{\partial A}$$

$$P_{3\mu} = -\frac{\left(x^2-x_A^2\right)^2}{M^2\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2(1-M^2-x^2)}}\cdot$$
$$\frac{\left(x^2-x_A^4\right)\left(1-M^2-x^2\right)+\left(x^2-x_A^2\right)^2+M^2\frac{\sigma_M^2}{\mu^2s^2x^2}(1-M^2-x^2)^2}{\left(x^2-x_A^2\right)^2+\frac{\sigma_M^2}{\mu^2s^2x^2}(1-M^2-x^2)^3}\frac{A}{S}\frac{\partial\ln\mu}{\partial A}$$

$$P_{3\sigma_M} = \left[1 + M^2\frac{\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2}(1-M^2-x^2)^2}{\left(x^2-x_A^2\right)^2+\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2}\left(1-M^2-x^2\right)^3}\right]\frac{\left(x^2-x_A^2\right)^2}{\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2}(1-M^2-x^2)^2}\frac{A}{S}\frac{\partial\ln\sigma_M}{\partial A}$$

$$P_{3x_A} = \left[\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2} + \left(x^2-x_A^2\right)\frac{x_A^2}{M^2}\frac{G^2-M^2-x^2}{\left(1-M^2-x^2\right)^2}\right]x_A^2\cdot$$
$$\frac{\left(1-M^2-x^2\right)^2}{\frac{\sigma_M^2}{\mu^2S^2x^2}\left[\left(x^2-x_A^2\right)^2+\left(1-M^2-x^2\right)^3\right]}\frac{A}{S}\frac{\partial\ln x_A^2}{\partial A}$$

$$P_{3\Omega} = \frac{1}{\frac{\sigma_M^2}{\mu^2 S^2 x^2} M^2 \left[\frac{\sigma_M^2}{\mu^2 s^2 x^2}(1-M^2-x^2)^3 + (x^2-x_A^2)^2\right]}$$
$$\left\{-\frac{\sigma_M^2}{\mu^2 S^2 x^2}\left(x^2-x_A^2\right) M^2 \left[\left(M^2+1\right)\left(x^2-x_A^2\right) + 2x^2\left(1-M^2-x^2\right)\right]\right.$$
$$-\left[\left(M^2+1\right)\left(x^2-x_A^2\right)^2 + 2x_A^2\left(x^2-x_A^2\right)\left(1-M^2-x^2\right) + \left(1-M^2-x^2\right)^2 x_A^4\right]$$
$$\left. + \left(\frac{\sigma_M^2}{\mu^2 S^2 x^2}\right)^2 M^2 x^2 \left(1-M^2-x^2\right)^3\right\} \frac{\left(x^2-x_A^2\right)^2}{\left(1-M^2-x^2\right)^2} \frac{A}{S} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial A}$$

Στο κύριο κείμενο οι ποσότητες με την περισπωμένη παριστάνει τις ποσότητες χωρίς τον παράγοντες των A παραγώγων, δηλαδή

$$\tilde{P}_3 = P_{3n} + P_{3\theta} + P_{3\Omega} + P_{3x_A} \qquad \tilde{P}_4 = -\frac{1}{\varpi} S \sin\theta$$

Παράρτημα Δ΄

Οι λύσεις ισορροπίας της Transfield Εξίσωσης

Στο παράρτημα αυτο εξάγουμε τις λύσεις ισορροπίας της transfield εξίσωσης που χρησιμοποιούνται σαν αρχικές συνθήκες κατά τις ολοκληρώσεις του κεφ.5. Αναλόγως του σχήματος της αρχικής επιφάνειας είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές (ϖ, φ, z) ή σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) αναφερόμενοι σε μια κυκλική επιφάνεια ή σε έναν σφαιρικό τομέα. Εισάγουμε την γωνία θ_1 που σχηματίζουν οι γραμμές ροής με τον άξονα περιστροφής. Συνεπώς, η κάθετη διεύθυνση στις γραμμές ροής προσδιορίζεται από τις

$$\hat{n} = \cos\theta_1 \hat{\varpi} - \sin\theta \hat{z} = \sin(\theta - \theta_1)\,\hat{r} + \cos(\theta - \theta_1)\,\hat{\theta} \tag{Δ΄.1}$$

Η ακτίνα καμπυλότητας βρίσκεται εύκολα

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R} = \frac{\partial\theta_1}{\partial\ell} &= \sin\theta_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial\varpi} + \cos\theta_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial z} \\ &= \cos(\theta - \theta_1)\,\frac{\partial\theta_1}{\partial r} - \sin(\theta - \theta_1)\,\frac{1}{r}\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{Δ΄.2}$$

Το δεξιό μέλος της εξ.5.20 γράφεται

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\varpi = \cos\theta_1 \tag{Δ΄.3}$$

και

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \vec{\nabla}\left[\varpi^2\left(B^2 - E^2\right)\right] &= 2\varpi\cos\theta_1\left(B^2 - E^2\right) \\ &\quad + \varpi^2\left[\cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial\varpi}\left(B^2 - E^2\right) - \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial z}\left(B^2 - E^2\right)\right] \\ &= 2\varpi\left(B^2 - E^2\right)\cos\theta_1 + \varpi^2 \sin(\theta - \theta_1)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(B^2 - E^2\right) \\ &\quad + \frac{\varpi^2}{r}\cos(\theta - \theta_1)\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(B^2 - E^2\right) \end{aligned} \tag{Δ΄.4}$$

Η υπόθεση της μηδενικής τοροειδούς ταχύτητας συνεπάγεται

$$v_\varphi = 0 \Rightarrow \qquad 1 - M^2 - x^2 = 1 - G^2 = \frac{\varpi_A^2 - \varpi^2}{\varpi_A^2} \qquad \Omega = \frac{v_p}{\varpi}\frac{B_\varphi}{B_p} \tag{Δ΄.5}$$

ενώ το μαγνητικό πεδίο στο συγκινούμενο σύστημα γράφεται

$$B^2 - E^2 = (1-\Omega^2)B_p^2 + B_\varphi^2 = \left(1 - \frac{v_p^2 B_\varphi^2}{B_p^2}\right) B_p^2 + B_\varphi^2 = B_p^2 + \frac{B_\varphi^2}{\gamma^2} \qquad (\Delta'.6)$$

και η transfield εξ.5.20 στις κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{B_p^2}{4\pi}\frac{\varpi^2 - \varpi_A^2}{\varpi_A^2}\left[\sin\theta_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial\varpi} + \cos\theta_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right] = -\frac{1}{4\pi}\frac{\cos\theta_1}{\varpi}\left(B^2 - E^2\right)$$
$$-\frac{1}{8\pi}\left[\cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial\varpi}\left(B^2 - E^2\right) - \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial z}\left(B^2 - E^2\right)\right] + \frac{B_p^2}{4\pi}\frac{\cos\theta_1}{\varpi} \qquad (\Delta'.7)$$

ή στις σφαιρικές

$$\frac{B_p^2}{4\pi}\frac{\varpi^2 - \varpi_A^2}{\varpi_A^2}\left[\cos(\theta-\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial r} - \sin(\theta-\theta_1)\frac{1}{r}\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta}\right] = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\theta_1\left(B^2 - E^2\right)}{r\sin\theta}$$
$$-\frac{1}{8\pi}\sin(\theta-\theta_1)\frac{\partial}{\partial r}\left(B^2 - E^2\right) - \frac{1}{8\pi}\cos(\theta-\theta_1)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(B^2 - E^2\right) + \frac{B_p^2}{4\pi}\frac{\cos\theta_1}{r\sin\theta} \qquad (\Delta'.8)$$

Αναζητούμε, τώρα, λύσεις για γραμμές με μηδενική καμπυλότητα ή με άλλα λόγια τέτοιες ώστε το αριστερό μέλος των εξ.Δ΄.7, Δ΄.8 να μηδενίζεται. Μια διάταξη που παρέχει τέτοια λύση είναι η $\theta_1 = 0$ για κάθε ϖ της αρχικής κυλινδρικής επιφάνειας και $\theta_1 = \theta$ για όλα τα σημεία του αρχικού σφαιρικού τομέα. Παρατηρούμε παρόλα αυτά ότι η παραπάνω εξίσωση αναφέρεται μόνο στην αρχική επιφάνεια με τις παραγώγους $\partial/\partial z$ στην κυλινδρική και $\partial/\partial r$ στην σφαιρική περίπτωση να λαμβάνονται για σταθερά ϖ και r αντίστοιχα, κατ΄ συνέπεια οι τιμές της κλίσης τους δεν προσδιορίζονται. Από την άλλη, η συνθήκη της μηδενικής καμπυλότητας προσδιορίζει την τιμή των ποσοτήτων και στο επόμενο σημείο (z κυλινδρική, r σφαιρική), όπως άλλωστε φαίνεται άμεσα και από τον ορισμό της R εξ.Δ΄.2.

Προχωρούμε στην διαφορική εξίσωση που παράγεται από την συνθήκη της μηδενικής καμπυλότητας. Για την κυλινδρική περίπτωση η ομογενής αντιστοιχούσα εξίσωση δίνει

$$\frac{2}{\varpi}\left(B^2 - E^2\right)_h + \frac{\partial}{\partial\varpi}\left(B^2 - E^2\right)_h = 0 \Rightarrow \qquad \left(B^2 - E^2\right)_h = \frac{C}{\varpi^2} \qquad (\Delta'.9)$$

Θεωρώντας έναν συντελεστή που εξαρτάται από τις μεταβλητές παίρνουμε

$$\frac{dC}{d\varpi} = 2C\varpi B_p^2 = 2C\frac{B_j^2}{\left[1 + (\varpi/\varpi_0)^2\right]^{2\zeta}} \Rightarrow C = \frac{b_j^2\varpi_0^2}{(1-2\zeta)}\left\{\left[1 + (\varpi/\varpi_0)^2\right]^{1-2\zeta} - 1\right\}$$

όπου οι συνοριακές συνθήκες αντιστοιχούν σε μια πεπερασμένη τιμή του συγκινούμενου μαγνητικού πεδίου στον άξονα ($B^2 - E^2 \to B_j^2$ καθώς $\varpi \to 0$) και έχουν εγκολπωθεί στον όρο αυτό. Συνεπώς

$$B^2 - E^2 = \frac{b_j^2}{(1-2\zeta)}\frac{\varpi_0^2}{\varpi^2}\left\{\left[1 + (\varpi/\varpi_0)^2\right]^{1-2\zeta} - 1\right\} \qquad (\Delta'.10)$$

$$B_\varphi = -\frac{B_j}{\left[1 + (\varpi/\varpi_o)^2\right]^{\zeta}}\frac{\gamma\varpi_o}{\varpi}\sqrt{\frac{-1 + \left(1 + \frac{\varpi^2}{\varpi_o^2}\right)^{2\zeta} - 2\zeta\frac{\varpi^2}{\varpi_o^2}}{-1 + 2\zeta}} \qquad (\Delta'.11)$$

όπου επιλέξαμε το αρνητικό πρόσημο. Σημειώνουμε ότι κατά την παραπάνω διαδικασία δεν χρησιμοποιήσαμε κάποια συγκεκριμένη έκφραση για την πυκνότητα, η οποία είναι μια

ελεύθερη παράμετρος. Αντιθέτως, οι συναρτήσεις v_φ, γ, B_p, B_φ, Ω έχουν είτε δοθεί, είτε προκύπτουν από αυτές. Για την τελευταία ποσότητα

$$\Omega = \frac{\varpi_o\sqrt{\gamma^2-1}}{\varpi^2}\sqrt{\frac{[1+(\varpi/\varpi_o)^2]^{2\zeta}-1-2\zeta(\varpi/\varpi_o)^2}{2\zeta-1}} \tag{Δ'.12}$$

Παρατηρήστε για την οριακή περίπτωση $\zeta = 1.0$ οι παραπάνω εκφράσεις μεταπίπτουν σε πιο απλές μορφές.

Η κατάσταση είναι εντελώς όμοια και για την σφαιρική περίπτωση όπου η παραγόμενη εξίσωση Δ'.8 δίνει

$$2\frac{(B^2-E^2)}{r\sin\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(B^2-E^2\right) + 2\frac{B_p^2}{r\sin\theta} = 0 \tag{Δ'.13}$$

οδηγώντας στην λύση

$$\left(B^2-E^2\right)_h = \frac{C}{\sin^2\theta} \qquad C = \frac{B_j^2\varpi_0^2}{r^2\left(1-2\zeta\right)}$$

$$B^2-E^2 = \frac{B_j^2\varpi_0^2}{r^2\sin^2\theta}\frac{1+\frac{r^2\sin^2\theta}{\varpi_0^2}-\left(1+\frac{r^2\sin^2\theta}{w_0^2}\right)^{2\zeta}}{(1-2\zeta)}$$

Συνεπώς οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου είναι

$$B_p = \frac{B_j}{[1+(r\sin\theta/\varpi_0)]^\zeta} \tag{Δ'.14}$$

$$B_\varphi = -\frac{B_j}{\left[1+(r\sin\theta/\varpi_o)^2\right]^\zeta}\frac{\gamma\varpi_o}{r\sin\theta}\sqrt{\frac{-1+\left(1+\frac{r^2\sin^2\theta}{\varpi_o^2}\right)^{2\zeta}-2\zeta\frac{r^2\sin^2\theta}{\varpi_o^2}}{-1+2\zeta}} \tag{Δ'.15}$$

ενώ το ολοκλήρωμα Ω έχει, τώρα, την μορφή

$$\Omega = \frac{\varpi_o\sqrt{\gamma^2-1}}{r\sin\theta}\sqrt{\frac{-1+\left(1+\frac{r^2\sin^2\theta}{\varpi_o^2}\right)^{2\zeta}-2\zeta\frac{r^2\sin^2\theta}{\varpi_o^2}}{-1+2\zeta}} \tag{Δ'.16}$$

Όπως και στην κυλινδρική περίπτωση η ρ συνάρτηση είναι ελεύθερη.

Οι λύσεις που εξάγαμε παραπάνω είναι λύσεις που ικανοποιούν την transfield εξίσωση, δηλαδή την εξίσωση ενέργειας-ορμής στην κάθετη προς την ροή διεύθυνση. Παρόλα αυτά, απαιτείται ένας επιπλέον έλεγχος που αφορά την συνθήκη μηδενισμού του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου (το τοροειδές πεδίο είναι κατά μήκος της αγνοούμενης συντεταγμένης και η κλίση του είναι ταυτοτικά μηδέν). Στην κυλινδρική περίπτωση η μη εξάρτηση των εκφράσεων εξ.Δ'.11 από την z συντεταγμένη παρέχει τον μηδενισμό της απόκλισης και επαληθεύει την πρόταση ότι η ίδια διάταξη μπορεί να εφαρμοστεί όχι μόνο στην z_i επιφάνεια, αλλά και στην $z_i + \delta z$ παρέχοντας μια σταθερή μορφή ισορροπίας.

Η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη στην σφαιρική περίπτωση όπου ο μηδενισμός της κλίσης του μαγνητικού πεδίου επιβάλει μια $1/r^2$ μορφή του της πολοειδούς συνιστώσας ($\vec{B}_p \parallel \hat{r}$). Προκειμένου να ικανοποιήσουμε την ιδιότητα αυτή επιλέγουμε την παρακάτω μορφή

$$B_p = \frac{B_j}{[1+(r_i\sin\theta/\varpi_0)]^\zeta}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \tag{Δ'.17}$$

$$B_\varphi = -\frac{B_j}{\left[1+(r_i\sin\theta/\varpi_o)^2\right]^\zeta}\frac{\gamma\varpi_o}{r\sin\theta}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\sqrt{\frac{-1+\left(1+\frac{r_i^2\sin^2\theta}{\varpi_o^2}\right)^{2\zeta}-2\zeta\frac{r_i^2\sin^2\theta}{\varpi_o^2}}{-1+2\zeta}} \quad (\Delta'.18)$$

όπου r_i η ακτινική απόσταση της αρχικής επιφάνειας ℓ_i. Αυτή είναι και η πλήρης μορφή του μαγνητικού πεδίου.

Βιβλιογραφία

M. A. Aloy and L. Rezzolla. A Powerful Hydrodynamic Booster for Relativistic Jets. *ApJ*, 640:L115–L118, Apr. 2006. doi: 10.1086/503608.

A. M. Anile. *Relativistic Fluids and Magneto-fluids*. Cambridge University Press, 1990.

S. Appl and M. Camenzind. Shock conditions for relativistic MHD jets. *A&A*, 206: 258–268, Nov. 1988.

W. Baade. Polarization in the Jet of Messier 87. *ApJ*, 123:550–551, May 1956. doi: 10.1086/146194.

W. Baade and R. Minkowski. On the Identification of Radio Sources. *ApJ*, 119:215, Jan. 1954. doi: 10.1086/145813.

D. Band, J. Matteson, L. Ford, B. Schaefer, D. Palmer, B. Teegarden, T. Cline, M. Briggs, W. Paciesas, G. Pendleton, G. Fishman, C. Kouveliotou, C. Meegan, R. Wilson, and P. Lestrade. BATSE observations of gamma-ray burst spectra. I - Spectral diversity. *ApJ*, 413:281–292, Aug. 1993. doi: 10.1086/172995.

V. S. Beskin, I. V. Kuznetsova, and R. R. Rafikov. On the mhd effects on the force-free monopole outflow. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 299(2): 341–348, 1998. ISSN 1365-2966. doi: 10.1046/j.1365-8711.1998.01659.x. URL `http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-8711.1998.01659.x`.

V. S. Beskin, Y. Y. Kovalev, and E. E. Nokhrina. Determination of a magnetization parameter of the parsec-scale AGN jets. *ArXiv e-prints*, July 2011.

H. Bether and C. Fendt. Outflows & Jets: Theory & Observations. IMPRS, Lectures, 2008. URL `http://www.mpia-hd.mpg.de/homes/fendt/Lehre/Lecture_JETS/lect_jets3.pdf`.

S. Bird, W. E. Harris, J. P. Blakeslee, and C. Flynn. The inner halo of M 87: a first direct view of the red-giant population. *A&A*, 524:A71, Dec. 2010. doi: 10.1051/0004-6361/201014876.

J. A. Biretta, W. B. Sparks, and F. Macchetto. Hubble Space Telescope Observations of Superluminal Motion in the M87 Jet. *ApJ*, 520:621–626, Aug. 1999. doi: 10.1086/307499.

R. D. Blandford and D. G. Payne. Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets. *MNRAS*, 199:883–903, June 1982.

S. Bogovalov and K. Tsinganos. On the magnetic acceleration and collimation of astrophysical outflows. *MNRAS*, 305:211–224, May 1999. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02413.x.

S. V. Bogovalov. On the Theory of Magnetohydrodynamic Winds from a Magnetosphere of Axisymmetric Rotators. *MNRAS*, 270:721, Oct. 1994.

S. V. Bogovalov. Boundary conditions and critical surfaces in astrophysical MHD winds. *A&A*, 323:634–643, July 1997.

G. R. Burbidge. On Synchrotron Radiation from Messier 87. *ApJ*, 124:416, Sept. 1956. doi: 10.1086/146237.

S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. University of Chicago press 1st edt, Dover Books on Astronomy Series last edt. University of Chicago press 1st edt, Dover Books on Astronomy Series last edt, 1939, 2012. ISBN 0486604136, 9780486604138. URL `http://books.google.gr/books?id=joWn8s2BF04C`.

W. Coburn and S. E. Boggs. Polarization of the prompt γ-ray emission from the γ-ray burst of 6 December 2002. *Nature*, 423:415–417, May 2003. doi: 10.1038/nature01612.

J. Contopoulos. Magnetically driven relativistic jets and winds: Exact solutions. *ApJ*, 432:508–517, Sept. 1994. doi: 10.1086/174590.

J. Contopoulos. General Axisymmetric Magnetohydrodynamic Flows: Theory and Solutions. *ApJ*, 460:185, Mar. 1996. doi: 10.1086/176960.

J. Contopoulos and R. V. E. Lovelace. Magnetically driven jets and winds: Exact solutions. *ApJ*, 429:139–152, July 1994. doi: 10.1086/174307.

G. Ghirlanda, G. Ghisellini, R. Salvaterra, L. Nava, D. Burlon, G. Tagliaferri, S. Campana, P. D'Avanzo, and A. Melandri. The faster the narrower: characteristic bulk velocities and jet opening angles of gamma-ray bursts. *MNRAS*, 428:1410–1423, Jan. 2013. doi: 10.1093/mnras/sts128.

G. Ghisellini, P. Padovani, A. Celotti, and L. Maraschi. Relativistic bulk motion in active galactic nuclei. *ApJ*, 407:65–82, Apr. 1993. doi: 10.1086/172493.

J. Goedbloed, R. Keppens, and S. Poedts. *Advanced Magnetohydrodynamics: With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781139487283. URL `http://books.google.gr/books?id=wHDyYpsqp04C`.

J. Goodman. Are gamma-ray bursts optically thick? *ApJ*, 308:L47–L50, Sept. 1986. doi: 10.1086/184741.

D. Götz, P. Laurent, F. Lebrun, F. Daigne, and Ž. Bošnjak. Variable Polarization Measured in the Prompt Emission of GRB 041219A Using IBIS on Board INTEGRAL. *ApJ*, 695:L208–L212, Apr. 2009. doi: 10.1088/0004-637X/695/2/L208.

A. Granik. Rarefaction wave in relativistic gasdynamics. *Physics of Fluids*, 25:1165–1168, July 1982. doi: 10.1063/1.863884.

J. Granot and T. Piran. On the lateral expansion of gamma-ray burst jets. *MNRAS*, 421:570–587, Mar. 2012. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.20335.x.

S. Guiriec, F. Daigne, R. Hascoët, G. Vianello, F. Ryde, R. Mochkovitch, C. Kouveliotou, S. Xiong, P. N. Bhat, S. Foley, D. Gruber, J. M. Burgess, S. McGlynn, J. McEnery, and N. Gehrels. Evidence for a Photospheric Component in the Prompt Emission of the Short GRB 120323A and Its Effects on the GRB Hardness-Luminosity Relation. *ApJ*, 770:32, June 2013. doi: 10.1088/0004-637X/770/1/32.

F. Hardee. Dynamics and Microphysics inside the Blazar Zone & M87 . Fermi meets Jansky, Bonn, 2010. URL `http://www3.mpifr-bonn.mpg.de/div/vlbi/agn2010/PdfFiles/27_Hardee_Philip.pdf`.

M. Heinemann and S. Olbert. Axisymmetric ideal MHD stellar wind flow. *J. Geoph. Res.*, 83:2457–2460, June 1978. doi: 10.1029/JA083iA06p02457.

J. Heyvaerts and C. Norman. The collimation of magnetized winds. *ApJ*, 347:1055–1081, Dec. 1989. doi: 10.1086/168195.

W. A. Hiltner. Letters to the Editor Photoelectric Polarization Observations of the Jet in M87. *ApJ*, 130:340, July 1959. doi: 10.1086/146723.

T. Hovatta, E. Valtaoja, M. Tornikoski, and A. Lähteenmäki. Doppler factors, Lorentz factors and viewing angles for quasars, BL Lacertae objects and radio galaxies. *A&A*, 494:527–537, Feb. 2009. doi: 10.1051/0004-6361:200811150.

s. Hubble. Hubblesite, 2000. URL `http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2000/20/image/a/`.

F. John. *Partial Differential Equations*. Springer US, New York, NY, 1978. ISBN 978-1-4684-0059-5.

E. Kalemci, S. E. Boggs, C. Kouveliotou, M. Finger, and M. G. Baring. Search for Polarization from the Prompt Gamma-Ray Emission of GRB 041219a with SPI on INTEGRAL. *ApJS*, 169:75–82, Mar. 2007. doi: 10.1086/510676.

R. Keppens, O. Porth, R. Monceau-Baroux, and S. Walg. Relativistic HD and MHD modelling for AGN jets. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 55(12):124038, Dec. 2013. doi: 10.1088/0741-3335/55/12/124038.

A. Kienlin. GRB Spectra and their Evolution:prompt GRB spectra in the γ-regime. MaxPlanck Institute for Astrophysics, 2003. URL `http://www.mpa-garching.mpg.de/lectures/ADSEM/WS0304_Kienlin.pdf`.

M. Kino, F. Takahara, K. Hada, and A. Doi. Relativistic electrons and magnetic fields of the m87 jet on the 10 schwarzschild radii scale. *The Astrophysical Journal*, 786(1): 5, 2014. URL `http://stacks.iop.org/0004-637X/786/i=1/a=5`.

R. W. Klebesadel, I. B. Strong, and R. A. Olson. Observations of Gamma-Ray Bursts of Cosmic Origin. *ApJ*, 182:L85, June 1973. doi: 10.1086/181225.

S. S. Komissarov, N. Vlahakis, A. Königl, and M. V. Barkov. Magnetic acceleration of ultrarelativistic jets in gamma-ray burst sources. *MNRAS*, 394:1182–1212, Apr. 2009. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.14410.x.

S. S. Komissarov, N. Vlahakis, and A. Königl. Rarefaction acceleration of ultrarelativistic magnetized jets in gamma-ray burst sources. *MNRAS*, 407:17–28, Sept. 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16779.x.

A. Konigl. Relativistic gasdynamics in two dimensions. *Physics of Fluids*, 23:1083–1090, June 1980. doi: 10.1063/1.863110.

C. Kouveliotou, C. A. Meegan, G. J. Fishman, N. P. Bhat, M. S. Briggs, T. M. Koshut, W. S. Paciesas, and G. N. Pendleton. Identification of two classes of gamma-ray bursts. *ApJ*, 413:L101–L104, Aug. 1993. doi: 10.1086/186969.

L. Landau and E. Lifshits. *The classical theory of fields*. Pergamon international library of science, technology, engineering, and social studies. Pergamon Press, 1975. ISBN 9780080250724.

L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, §82, 1975.

D. Lazzati, B. J. Morsony, C. H. Blackwell, and M. C. Begelman. Unifying the Zoo of Jet-driven Stellar Explosions. *ApJ*, 750:68, May 2012. doi: 10.1088/0004-637X/750/1/68.

Z.-Y. Li, T. Chiueh, and M. C. Begelman. Electromagnetically driven relativistic jets - A class of self-similar solutions. *ApJ*, 394:459–471, Aug. 1992. doi: 10.1086/171597.

A. Lichnerowicz and S. C. for Advanced Study. *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics: Lectures on the Existence of Solutions*. The Mathematical physics monograph series. Benjamin, 1967.

M. L. Lister, H. D. Aller, M. F. Aller, M. H. Cohen, D. C. Homan, M. Kadler, K. I. Kellermann, Y. Y. Kovalev, E. Ros, T. Savolainen, J. A. Zensus, and R. C. Vermeulen. MOJAVE: Monitoring of Jets in Active Galactic Nuclei with VLBA Experiments. V. Multi-Epoch VLBA Images. *AJ*, 137:3718–3729, Mar. 2009. doi: 10.1088/0004-6256/137/3/3718.

S. Longair. *High energy astrophysics: Particles, photons and their detection. Vol. 1*. Cambridge University Press, 1992. ISBN 9780521383745. URL `http://books.google.gr/books?id=CJwRAQAAIAAJ`.

R. V. E. Lovelace and J. Contopoulos. Relativistic magnetically driven jets and winds. In S. F. Dermott, J. H. Hunter, Jr., and R. E. Wilson, editors, *Astrophysical Disks*, volume 675 of *Annals of the New York Academy of Sciences*, pages 286–294, 1992. doi: 10.1111/j.1749-6632.1992.tb56811.x.

R. V. E. Lovelace, C. Mehanian, C. M. Mobarry, and M. E. Sulkanen. Theory of axisymmetric magnetohydrodynamic flows - Disks. *ApJS*, 62:1–37, Sept. 1986. doi: 10.1086/191132.

A. I. MacFadyen and S. E. Woosley. Collapsars: Gamma-Ray Bursts and Explosions in "Failed Supernovae". *ApJ*, 524:262–289, Oct. 1999. doi: 10.1086/307790.

H. L. Marshall, B. P. Miller, D. S. Davis, E. S. Perlman, M. Wise, C. R. Canizares, and D. E. Harris. A High-Resolution X-Ray Image of the Jet in M87. *ApJ*, 564:683–687, Jan. 2002. doi: 10.1086/324396.

A. Mastichiadis and N. Vlahakis. High Energy Astrophysics Lecture Notes. University of Athens, 2010. URL `http://users.uoa.gr/~vlahakis/HEAfull.pdf`.

L. Mestel. Magnetic braking by a stellar wind-I. *MNRAS*, 138:359, 1968.

F. C. Michel. Relativistic Stellar-Wind Torques. *ApJ*, 158:727, Nov. 1969. doi: 10.1086/150233.

Y. Mizuno, P. Hardee, D. H. Hartmann, K.-I. Nishikawa, and B. Zhang. A Magnetohydrodynamic Boost for Relativistic Jets. *ApJ*, 672:72–82, Jan. 2008. doi: 10.1086/523625.

A. Mizuta and M. A. Aloy. Angular Energy Distribution of Collapsar-Jets. *ApJ*, 699:1261–1273, July 2009. doi: 10.1088/0004-637X/699/2/1261.

B. J. Morsony, D. Lazzati, and M. C. Begelman. Temporal and Angular Properties of Gamma-Ray Burst Jets Emerging from Massive Stars. *ApJ*, 665:569–598, Aug. 2007. doi: 10.1086/519483.

R. Narayan, B. Paczynski, and T. Piran. Gamma-ray bursts as the death throes of massive binary stars. *ApJ*, 395:L83–L86, Aug. 1992. doi: 10.1086/186493.

s. NASA. Astronomy picture of the day, 2014. URL `http://apod.nasa.gov/`.

L. Observatory, H. Curtis, W. Campbell, J. Moore, R. Wilson, and W. Wright. *Studies of the Nebulae: Made at the Lick Observatory, University of California, at Mount Hamilton, California, and Santiago, Chile*. Number τ. 13 in Publications. University of California Press, 1918. URL `http://books.google.gr/books?id=HYnnAAAAMAAJ`.

E. Parker. *Interplanetary dynamical processes*. Interscience monographs and texts in physics and astronomy. Interscience Publishers, 1963. URL `http://books.google.gr/books?id=juK3AAAAIAAJ`.

G. Pelletier and R. E. Pudritz. Hydromagnetic disk winds in young stellar objects and active galactic nuclei. *ApJ*, 394:117–138, July 1992. doi: 10.1086/171565.

E. S. Perlman, J. A. Biretta, F. Zhou, W. B. Sparks, and F. D. Macchetto. Optical and Radio Polarimetry of the M87 Jet at 0.2" Resolution. *AJ*, 117:2185–2198, May 1999. doi: 10.1086/300844.

T. Piran, A. Shemi, and R. Narayan. Hydrodynamics of Relativistic Fireballs. *MNRAS*, 263:861, Aug. 1993.

A. Rai Choudhuri. *The physics of fluids and plasmas*. Cambridge University Press, 1998.

M. J. Rees. Appearance of Relativistically Expanding Radio Sources. *Nature*, 211:468–470, July 1966. doi: 10.1038/211468a0.

M. J. Rees and P. Meszaros. Unsteady outflow models for cosmological gamma-ray bursts. *ApJ*, 430:L93–L96, Aug. 1994. doi: 10.1086/187446.

M. J. Rees and P. Mészáros. Dissipative Photosphere Models of Gamma-Ray Bursts and X-Ray Flashes. *ApJ*, 628:847–852, Aug. 2005. doi: 10.1086/430818.

J. E. Rhoads. How to Tell a Jet from a Balloon: A Proposed Test for Beaming in Gamma-Ray Bursts. *ApJ*, 487:L1, Sept. 1997. doi: 10.1086/310876.

J. E. Rhoads. The Dynamics and Light Curves of Beamed Gamma-Ray Burst Afterglows. *ApJ*, 525:737–749, Nov. 1999. doi: 10.1086/307907.

G. B. Rybicki and A. P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics*. Wiley-VCH Verlag GambH & Co.KGaA, June 1986.

F. Ryde. Is Thermal Emission in Gamma-Ray Bursts Ubiquitous? *ApJ*, 625:L95–L98, June 2005. doi: 10.1086/431239.

S. V. Bogovalov. Acceleration and collimation of relativistic plasmas ejected by fast rotators. *A&A*, 371(3):1155–1168, 2001. doi: 10.1051/0004-6361:20010201. URL `http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20010201`.

K. Sapountzis and N. Vlahakis. Rarefaction acceleration in magnetized gamma-ray burst jets. *MNRAS*, 434:1779–1788, Sept. 2013. doi: 10.1093/mnras/stt1142.

K. Sapountzis and N. Vlahakis. Rarefaction wave in relativistic steady magnetohydrodynamic flows. *Physics of Plasmas*, 21(7):072124, July 2014. doi: 10.1063/1.4891441.

R. Sari, T. Piran, and R. Narayan. Spectra and Light Curves of Gamma-Ray Burst Afterglows. *ApJ*, 497:L17–L20, Apr. 1998. doi: 10.1086/311269.

L. Spitzer. *Physics of fully ionized gases*. Interscience tracts on physics and astronomy. Interscience Publishers, 1962. URL `http://books.google.gr/books?id=CilRAAAAMAAJ`.

G. J. Stanley and O. B. Slee. Galactic Radiation at Radio Frequencies. II. The Discrete Sources. *Australian Journal of Scientific Research A Physical Sciences*, 3:234, June 1950.

s. SWIFT. Uk swift site, 2014. URL `http://www.swift.ac.uk/about/grb.php`.

J. Synge. *The relativistic gas*. Series in physics. North-Holland Pub. Co., 1957. URL `http://books.google.gr/books?id=HM1-AAAAIAAJ`.

A. Tchekhovskoy, J. C. McKinney, and R. Narayan. Efficiency of Magnetic to Kinetic Energy Conversion in a Monopole Magnetosphere. *ApJ*, 699:1789–1808, July 2009. doi: 10.1088/0004-637X/699/2/1789.

A. Tchekhovskoy, R. Narayan, and J. C. McKinney. Magnetohydrodynamic simulations of gamma-ray burst jets: Beyond the progenitor star. *New Astronom.*, 15:749–754, Nov. 2010. doi: 10.1016/j.newast.2010.03.001.

K. Toma. Polarization of GRB Prompt Emission. *ArXiv e-prints*, Aug. 2013.

K. Tsinganos, C. Sauty, G. Surlantzis, E. Trussoni, and J. Contopoulos. On the relation of limiting characteristics to critical surfaces in magnetohydrodynamic flows. *MNRAS*, 283:811–820, Dec. 1996.

K. C. Tsinganos. Magnetohydrodynamic equilibrium. I - Exact solutions of the equations. *ApJ*, 245:764–782, Apr. 1981. doi: 10.1086/158851.

Y. Uchida and K. Shibata. Magnetodynamical acceleration of CO and optical bipolar flows from the region of star formation. *PASJ*, 37:515–535, 1985.

C. M. Urry and P. Padovani. Unified Schemes for Radio-Loud Active Galactic Nuclei. *PASP*, 107:803, Sept. 1995. doi: 10.1086/133630.

H. van Eerten, W. Zhang, and A. MacFadyen. Off-axis Gamma-ray Burst Afterglow Modeling Based on a Two-dimensional Axisymmetric Hydrodynamics Simulation. *ApJ*, 722:235–247, Oct. 2010. doi: 10.1088/0004-637X/722/1/235.

N. Vlahakis. Ideal Magnetohydrodynamic Solution to the σ Problem in Crab-like Pulsar Winds and General Asymptotic Analysis of Magnetized Outflows. *ApJ*, 600:324–337, Jan. 2004. doi: 10.1086/379701.

N. Vlahakis and A. Königl. Relativistic Magnetohydrodynamics with Application to Gamma-Ray Burst Outflows. I. Theory and Semianalytic Trans-Alfvénic Solutions. *ApJ*, 596:1080–1103, Oct. 2003a. doi: 10.1086/378226.

N. Vlahakis and A. Königl. Relativistic Magnetohydrodynamics with Application to Gamma-Ray Burst Outflows. II. Semianalytic Super-Alfvénic Solutions. *ApJ*, 596: 1104–1112, Oct. 2003b. doi: 10.1086/378227.

N. Vlahakis and K. Tsinganos. Systematic construction of exact magnetohydrodynamic models for astrophysical winds and jets. *MNRAS*, 298:777–789, Aug. 1998. doi: 10. 1046/j.1365-8711.1998.01660.x.

E. J. Weber and L. Davis, Jr. The Angular Momentum of the Solar Wind. *ApJ*, 148: 217–227, Apr. 1967. doi: 10.1086/149138.

S. E. Woosley. Gamma-ray bursts from stellar mass accretion disks around black holes. *ApJ*, 405:273–277, Mar. 1993. doi: 10.1086/172359.

S. E. Woosley and A. Heger. The Progenitor Stars of Gamma-Ray Bursts. *ApJ*, 637: 914–921, Feb. 2006. doi: 10.1086/498500.

S. Zenitani, M. Hesse, and A. Klimas. Scaling of the Anomalous Boost in Relativistic Jet Boundary Layer. *ApJ*, 712:951–956, Apr. 2010. doi: 10.1088/0004-637X/712/2/951.

B. Zhang. Open questions in GRB physics. *Comptes Rendus Physique*, 12:206–225, Apr. 2011. doi: 10.1016/j.crhy.2011.03.004.

B. Zhang. GRB Progenitors and Observational Criteria. In *IAU Symposium*, volume 279 of *IAU Symposium*, pages 102–109, Sept. 2012. doi: 10.1017/S1743921312012768.

B. Zhang. Gamma-Ray Burst Prompt Emission. *International Journal of Modern Physics D*, 23:1430002, Dec. 2014. doi: 10.1142/S021827181430002X.

B.-B. Zhang, H. van Eerten, D. N. Burrows, G. S. Ryan, J. L. Racusin, E. Troja, and A. MacFadyen. A Comprehensive Analysis on Chandra Deep Follow-up GRBs: Implications for Off-Axis Jets. *ArXiv e-prints*, May 2014.

J. Zhang, J. M. Bai, L. Chen, and E. Liang. X-Ray Radiation Mechanisms and Beaming Effect of Hot Spots and Knots in Active Galactic Nuclear Jets. *ApJ*, 710:1017–1031, Feb. 2010. doi: 10.1088/0004-637X/710/2/1017.

This research has been co-financed by the European Union (European Social Fund – ESF) and Greek national funds through the Operational Program "Education and Lifelong Learning" of the National Strategic Reference Framework (NSRF) - Research Funding Program: Heracleitus II. Investing in knowledge society through the European Social Fund.

European Union
European Social Fund

OPERATIONAL PROGRAMME
EDUCATION AND LIFELONG LEARNING
investing in knowledge society
MINISTRY OF EDUCATION, LIFELONG LEARNING AND RELIGIOUS AFFAIRS
MANAGING AUTHORITY

NSRF 2007-2013
programme for development
EUROPEAN SOCIAL FUND

Co- financed by Greece and the European Union