Κυριακος Καμπουκος

Τοπολογικές Ιδιότητες Χώρων Banach

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2011

Επιβλέπων: Καθηγητής Σοφοκλής Μερκουράκης

Αφιερώνεται
στην Αγγελική
και στον Κωνσταντίνο.

Ευχαριστίες

Εκφράζω τις θερμότερες ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Σοφοκλή Μερκουράκη, τόσο για την υπόδειξη του θέματος, όσο και για την ουσιαστική και ολόπλευρη βοήθεια, την οποία παρείχε κατά την εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής, χωρίς την οποία δεν θα ήταν δυνατή η ολοκλήρωσή της.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τους κκ. Σ. Αργυρό Καθηγητή ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ, Α. Γιαννόπουλο Καθηγητή Τμ. Μαθ/κών ΕΚΠΑ, Γ. Κουμουλλή Καθηγητή Τμ. Μαθ/κών ΕΚΠΑ, Τ. Χατζηαφράτη Καθηγητή Τμ. Μαθ/κών ΕΚΠΑ, Α. Τσαρπαλιά Αν. Καθηγητή Τμ. Μαθ/κών ΕΚΠΑ και Α. Αρβανιτάκη Επ. Καθηγητή ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή για την αξιολόγηση της διδακτορικής διατριβής.

Ιδιαιτέρως ευχαριστώ τον κ. Σ. Αργυρό, τόσο για τις ενδιαφέρουσες επιστημονικές συζητήσεις που είχα μαζί του, όσο και για τις διαλέξεις του στο Σεμινάριο Μαθηματικής Ανάλυσης, οι οποίες εκτός όλων των άλλων αποτέλεσαν για μένα υπόδειγμα διδακτικής παρουσίασης.

Ακόμα θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Ε. Γκρέκα Καθηγητή Τμ. Μαθ/κών ΕΚΠΑ για τη βοήθειά του, το ενδιαφέρον και την ενθάρρυνση που παρείχε κατά την εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

Ένα μέρος των αποτελεσμάτων παρουσιάσθηκαν στο Σεμινάριο Μαθηματικής Ανάλυσης που διοργανώνεται από τους κκ. Σ. Αργυρό και Σ. Μερκουράκη. Ευχαριστώ τους διοργανωτές του σεμιναρίου που μου παρείχαν τη δυνατότητα αυτή.

Ευχαριστώ επίσης το Ελληνικό Δημόσιο για τη χορήγηση της εκπαιδευτικής άδειας από τον Οκτώβριο 2006 έως τον Αύγουστο 2010, η οποία μου επέτρεψε να ασχοληθώ απερίσπαστα με την έρευνα.

Τέλος ευχαριστώ τους συναδέλφους Νίκο Καρβέλα και Βασίλη Πασχάλη καθώς και το φοιτητή του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ Γιώργο Ελευθερίου για την πολύτιμη βοήθειά τους στη LaTeX, κατά τη συγγραφή της διδακτορικής διατριβής.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στη Διατριβή αυτή μελετώνται ιδιότητες τοπολογικών χώρων, κυρίως ιδιότητες της ασθενούς τοπολογίας ενός χώρου Banach, οι οποίες έχουν περιγραφικό χαρακτήρα, με την έννοια της $\mathcal{K}$–αναλυτικότητας κατά Choquet. Οι κλάσεις των $\mathcal{K}$–αναλυτικών τοπολογικών χώρων (Choquet [**Cho2**]) και η ευρύτερη κλάση των αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων (Frolik, [**Fro**]), κτίζονται με πράξεις αναλυτικού (ή αριθμήσιμου) χαρακτήρα, από συμπαγείς χώρους. Αυτές οι δύο κλάσεις τοπολογικών χώρων, έχουν βρει σημαντικές εφαρμογές στη μελέτη της γεωμετρίας των (μη διαχωρίσιμων) χώρων Banach. Δύο πολύ σημαντικά άρθρα στην κατεύθυνση αυτή είναι του Vašák ([**V**]) και του Talagrand ([**T1**]). Και τα δύο αυτά άρθρα στηρίζονται στο θεμελιώδες άρθρο των Amir και Lindestrauss ([**A-L**]), στο οποίο αποδεικνύονται αποτελέσματα κεντρικής σημασίας για την κλάση των ασθενώς συμπαγώς παραγόμενων (WCG) χώρων Banach (Ένας χώρος Banach είναι WCG, αν ισούται με την κλειστή γραμμική θήκη ενός ασθενώς συμπαγούς υποσυνόλου του). Στο άρθρο του Vašák εισάγεται η κλάση των χώρων Banach, οι οποίοι είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενοι στην ασθενή τοπολογία τους (WCD) και αποδεικνύεται ότι πολλές από τις γεωμετρικές ιδιότητες των WCG χώρων Banach (όπως η ύπαρξη μεγάλης ακολουθίας προβολών και η ύπαρξη ισοδύναμης τοπικά ομοιόμορφα κυρτής νόρμας) κληροδοτούνται στην κλάση των WCD χώρων Banach. Στο άρθρο [**T1**] ο Talagrand αποδεικνύει μεταξύ άλλων ότι κάθε κλειστός υποχώρος ενός WCG χώρου είναι $\mathcal{K}$–αναλυτικός στην ασθενή του τοπολογία (WKA) και ακόμα κατασκευάζει ένα συμπαγή χώρο K τέτοιο ώστε ο χώρος Banach $C(K)$ να είναι WKA αλλά όχι ισομορφικός με κλειστό υποχώρο ενός WCG χώρου Banach. Σημειώνουμε ότι κάθε WKA χώρος Banach είναι WCD.

Όλες οι παραπάνω εφαρμογές της $\mathcal{K}$–αναλυτικότητας και των γενικεύσεών της (βλ. [**A-N**], [**A-A-M 1**], [**M1**], [**M2**], [**D-G-Z**], [**F**], [**N**]) αφορούν μη διαχωρίσιμους χώρους Banach. Πράγματι, είναι απλό να εξακριβώσουμε ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach είναι WCG, καθώς επίσης και αναλυτικός στην ασθενή τοπολογία του (η ταυτοτική απεικόνιση $I\colon (X, \|\cdot\|) \to (X, w)$ είναι συνεχής). Έτσι οι έννοιες της $\mathcal{K}$–αναλυτικότητας και της αριθμήσιμης καθορισιμότητας δεν φαινόταν ότι μπορούν να συνεισφέρουν στη θεωρία των διαχωρίσιμων χώρων Banach. Μια ισχυρή ένδειξη ότι αυτό μπορεί να αλλάξει ήταν η εμφάνιση του άρθρου των Schlüchterman και Wheeler ([**S-W**]), στο οποίο εισάγεται μια υποκλάση των WCG χώρων Banach, η οποία είναι η κλάση των ισχυρά ασθενώς συμπαγώς παραγόμενων (SWCG) χώρων Banach. Ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach δεν είναι κατ' ανάγκη SWCG. Για παράδειγμα ο $c_0(\mathbb{N})$ δεν είναι SWCG. Στη συνέχεια εμφανίζεται το άρθρο των Μερκουράκη και Σταμάτη ([**M-S**]), όπου εισάγεται η έννοια του ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικού τοπολογικού χώρου (η οποία ισχυροποιεί την έννοια της κλασικής $\mathcal{K}$–αναλυτικότητας) και συγχρόνως η έννοια των χώρων Banach, οι οποίοι είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικοί στην ασθενή τοπολογία τους (SWKA). Αυτή η νέα κλάση χώρων Banach επεκτείνει γνήσια την κλάση (των κλειστών υποχώρων) των SWCG και έχει νόημα και για τους διαχωρίσιμους χώρους Banach (αφού δεν τους περιέχει όλους) και εν γένει σχετίζεται με την κλάση των SWCG χώρων Banach, όπως σχετίζονται οι γνωστές κλάσεις των WKA και WCG χώρων Banach.

Παρ' όλα αυτά η εικόνα σε σχέση με την κλασική θεωρία ήταν ελλιπής, ακόμα και σε τοπολογικό επίπεδο. Για παράδειγμα, δεν είχαμε έναν χαρακτηρισμό των ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικών τοπολογικών χώρων ανάλογο με τον ορισμό του Choquet των $\mathcal{K}$–αναλυτικών τοπολογικών χώρων (ένας τοπολογικός χώρος λέγεται $\mathcal{K}$–αναλυτικός αν είναι συνεχής εικόνα ενός $K\sigma\delta$ υποσυνόλου κάποιου συμπαγούς τοπολογικού χώρου). Επίσης δεν υπήρχε κάποια έννοια αριθμήσιμης καθορισιμότητας, ισχυρότερη της κλασικής του Frolik και αντίστοιχη της ισχυρής $\mathcal{K}$–αναλυτικότητας. Τέτοιου είδους αποτελέσματα θα τόνιζαν ακόμα περισσότερο τις αναλογίες με την κλασική θεωρία και την φυσιολογικότητα των καινούργιων κλάσεων τοπολογικών χώρων και χώρων Banach. Στην παρούσα Διατριβή προσπαθούμε να αντιμετωπίσουμε αυτού του είδους τις «ελλείψεις».

Έτσι στο πρώτο Κεφάλαιο της Διατριβής, το οποίο αποτελεί και το τοπολογικό της υπόβαθρο, εισάγονται οι έννοιες, του ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενου τοπολογικού χώρου, του ισχυρά $K\sigma\delta$ υποσυνόλου ενός τοπολογικού χώρου καθώς και η ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης για μια άνω ημισυνεχή συνάρτηση με συμπαγείς τιμές. Όλες αυτές οι νέες έννοιες χρησιμοποιούνται για να επεκτείνουν κατά φυσιολογικό τρόπο κλασικούς χαρακτηρισμούς των $\mathcal{K}$–αναλυτικών και των αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων στις νέες κλάσεις τοπολογικών χώρων. Έτσι αποδεικνύονται τα ακόλουθα αποτελέσματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεώρημα 1.1, Θεώρημα 1.15, Πόρισμα 1.28). Έστω X Hausdorff και τελείως κανονικός τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο τοπολογικός χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός)

(ii) Ο τοπολογικός χώρος X είναι εικόνα μέσω μιας (συνεχούς) απεικόνισης f με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης ενός κλειστού υποσυνόλου C χώρου της μορφής $M \times K$, όπου K είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος και M διαχωρίσιμος (αντ. Πολωνικός) μετρικός χώρος.

(iii) Υπάρχει $\Sigma' \subseteq \Sigma$ (αντ. $\Sigma' = \Sigma$ ο χώροςτου Baire) και μια άνω ημισυνεχής απεικόνιση $F\colon \Sigma' \to \mathcal{K}(X)$ (αντ. $F\colon \Sigma \to \mathcal{K}(X)$) με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

Επίσης με τη χρήση της τοπολογίας Vietoris τ_ν στον υπερχώρο $\mathcal{K}(X)$ των συμπαγών μη κενών υποσυνόλων του χώρου X, αποδεικνύεται ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων, ο οποίος γενικεύει αντίστοιχο χαρακτηρισμό των ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικών χώρων από το [**M-S**].

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεώρημα 1.29). Έστω X ένας (Hausdorff και τελείως κανονικός) τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

(ii) Ο χώρος $(\mathcal{K}(X), \tau_\nu)$ είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

(iii) Ο χώρος $(\mathcal{K}(X), \tau_\nu)$ είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

Η ισοδυναμία (i) $\Leftrightarrow$ (iii) του παραπάνω αποτελέσματος υποδηλώνει κατά την άποψή μας ότι η κλάση των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων είναι φυσιολογική και όχι τεχνητή.

Όσον αφορά στους ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικούς τοπολογικούς χώρους αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο αντιστοιχεί στον κλασικό ορισμό του Choquet των $\mathcal{K}$–αναλυτικών τοπολογικών χώρων.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεώρημα 1.42). Έστω X (Hausdorff και τελείως κανονικός) τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο X είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός.

(ii) Υπάρχει ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος Ω, ένα ισχυρά Κσδ υποσύνολο C του Ω και μια (συνεχής) συνάρτηση $f\colon C \to X$ με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο της Διατριβής εισάγεται η κλάση εκείνων των χώρων Banach, οι οποίοι είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενοι στην ασθενή τοπολογία τους (SWCD). Η κλάση αυτή (είναι το ανάλογο της κλάσης των WCD χώρων Banach του Vašák, περιέχεται σε αυτή και) περιέχει γνήσια τους SWKA χώρους Banach των Μερκουράκη και Σταμάτη. Επίσης η κλάση των SWCD χώρων Banach δεν περιέχει όλους τους διαχωρίσιμους χώρους Banach, αλλά περιέχει όλους τους χώρους Banach με διαχωρίσιμο δυϊκό. Τα σημαντικότερα αποτελέσματα σε αυτό το Κεφάλαιο είναι τα ακόλουθα:

Θεωρημα (Θεώρημα 2.11). Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach που δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$. Τότε ο χώρος X είναι SWCD αν και μόνον αν ο X έχει διαχωρίσιμο δυϊκό.

Έπεται προφανώς από το αποτέλεσμα αυτό ότι, αν ο X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, ο οποίος δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$ και έχει μη διαχωρίσιμο δυϊκό (π.χ. ένας χώρος τύπου James), τότε ο X δεν είναι SWCD. Σημειώνουμε ότι το Θεώρημα αυτό γενικεύει ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα, το οποίο χαρακτηρίζει τους SWKA χώρους Banach, από το [**M-S**]. Στο ίδιο Κεφάλαιο μελετώνται ευθέα αθροίσματα SWCD χώρων Banach και αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεωρημα (Θεώρημα 2.16). Έστω (X_n) μια ακολουθία SWCD (αντ. SWKA) χώρων Banach και $p \geq 1$. Τότε ο χώρος $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_p$ είναι SWCD (αντ. SWKA).

Ένα αντίστοιχο (με περιοριστικές όμως υποθέσεις) αποτέλεσμα αποδεικνύεται και για αριθμήσιμα c_0–ευθέα αθροίσματα (Πρόταση 2.17). Όσον αφορά σε ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος παραγόντων, αποδεικνύεται ότι ένα υπεραριθμήσιμο c_0 ή ℓ^p, $p \geq 1$ ευθύ άθροισμα SWCD χώρων Banach δεν είναι κατ' ανάγκη SWCD (Θεώρημα 2.18). Ιδιαίτερα αποδεικνύεται ότι ο κλασικός χώρος Banach $c_0(\Gamma)$ με Γ υπεραριθμήσιμο σύνολο δεν είναι SWCD (Πόρισμα 2.21). Με τη βοήθεια του τελευταίου αποτελέσματος αποδεικνύεται ότι:

Θεωρημα (Θεώρημα 2.23). Έστω K ένας συμπαγής χώρος. Τότε ο χώρος $C(K)$ είναι SWCD αν και μόνον αν το K είναι αριθμήσιμο.

Στο τρίτο Κεφάλαιο της Διατριβής εισάγονται και μελετώνται δύο συγκρίσιμες και διακριτές υποκλάσεις της κλάσης των SWKA χώρων Banach.

Κατά πρώτον εξασθενούμε τον ορισμό του SWCG χώρου Banach και εισάγουμε τον ορισμό του SWCG χώρου Banach σχετικά με κάποιον υπερχώρο Z του X, επιτρέποντας το ασθενώς συμπαγές σύνολο, το οποίο παράγει ισχυρά το X να είναι εκτός του X και μέσα στο Z (Ορισμός 3.1). Αν $X = Z$, τότε ο ορισμός μας συμπίπτει με αυτόν των Schlüchterman και Wheeler (Ορισμός 0.20). Η προκύπτουσα κλάση είναι (προφανώς) κλειστή ως προς τους κλειστούς υποχώρους και περιέχει γνήσια την κλάση των SWCG χώρων Banach, αφού υπάρχει παράδειγμα κλειστού υποχώρου του SWCG χώρου $L^1[0,1]$, το οποίο δεν είναι SWCG. Το παράδειγμα αυτό κατασκευάσθηκε από τους Μερκουράκη και Σταμάτη ([**M-S**]) και απαντά σε ένα ερώτημα των Schlüchterman και Wheeler ([**S-W**]). Τα βασικά αποτελέσματα, τα οποία δείχνουν ότι η νέα κλάση κληρονομεί τις κύριες ιδιότητες της παλαιάς, είναι τα ακόλουθα:

Θεωρημα (Θεώρημα 3.11). Έστω X χώρος Banach. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι SWCG σχετικά με κάποιο χώρο Banach.
(ii) Ο X περιέχεται σε κάποιο χώρο Z και υπάρχει μια μετρικοποιήσιμη τοπολογία τ_d στο B_{Z^*} τέτοια ώστε: (α) Η τοπολογία τ_d είναι μικρότερη από την τοπολογία Mackey τ του B_{Z^*} (β) Η τοπολογία τ_d είναι λεπτότερη από την τοπολογία τ_X του B_{Z^*} της ομοιόμορφης σύγκλισης στα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του X.

Επίσης αποδεικνύεται και το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο γενικεύει αντίστοιχο αποτέλεσμα των Schlüchterman και Wheeler ([**S-W**, Th. 2.5]), (βλ. επίσης Θεώρημα 3.22).

Θεωρημα (Πόρισμα 3.23). Κάθε χώρος Banach X, ο οποίος είναι SWCG σχετικά με κάποιον χώρο Banach Z είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης.

Η νέα κλάση χώρων περιέχεται γνήσια στην κλάση των SWKA, αφού κάθε Πολωνικός χώρος Banach, ο οποίος δεν είναι αυτοπαθής είναι βέβαια SWKA ([**M-S**, Prop. 1.9]), αλλά δεν είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης (Πόρισμα 3.26). Επίσης αποδεικνύεται ότι η κλάση, την οποία ορίσαμε, δεν είναι κλειστή ως προς τα αριθμήσιμα ℓ^p ευθέα αθροίσματα με $1 < p < +\infty$. (Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύει επίσης ότι η κλάση, την οποία ορίσαμε, περιέχεται γνήσια στους SWKA χώρους Banach).

Θεωρημα (Θεώρημα 3.27 και Παρατήρηση 3.28). Ο χώρος Banach $X = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus \ell^1(\mathbb{N} \times \{m\})\right)_p$, $1 < p < +\infty$ είναι SWKA και ασθενώς ακολουθιακά πλήρης, αλλά δεν είναι SWCG σχετικά με κανένα χώρο Banach.

Η δεύτερη υποκλάση SWKA χώρων Banach, την οποία μελετάμε έχει ως μέλη εκείνους τους χώρους Banach, οι οποίοι είναι ισχυρά Κσδ, θεωρούμενοι ως υποχώροι του (X^{**}, w^*). Η αντίστοιχη υποκλάση των χώρων Banach, οι οποίοι είναι (απλώς) Κσδ μέσα στον (X^{**}, w^*), είναι μια διακριτή υποκλάση των WKA χώρων Banach και έχει μελετηθεί από τους Αρβανιτάκη, Αργυρό και Μερκουράκη στα άρθρα [**A-A-M 1**] και [**A-A-M 2**].

Θεωρημα (Θεώρημα 3.36, Θεώρημα 3.38). Έστω X χώρος Banach, ο οποίος είναι SWCG σχετικά με κάποιον χώρο Banach ή Πολωνικός. Τότε ο X είναι ισχυρά Kσδ (στο (X^{**}, w^*)).

Επίσης αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεωρημα (Θεώρημα 3.41). Έστω (X_n) ακολουθία (ισχυρά) Kσδ χώρων Banach και $1 \leq p < \infty$. Τότε ο χώρος $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_p$ είναι (ισχυρά) Kσδ.

Σημειώνουμε ότι δεν είναι ακόμα σαφές αν η κλάση των ισχυρά Kσδ χώρων Banach είναι γνήσια υποκλάση των SWKA χώρων Banach.

Βέβαια για την κλάση των Kσδ χώρων Banach γνωρίζουμε ότι είναι γνήσια υποκλάση των WKA χώρων Banach, σύμφωνα με ένα παράδειγμα, το οποίο κατασκευάσθηκε από τους Αρβανιτάκη, Αργυρό και Μερκουράκη (βλ. [**A-A-M 1**]) και το οποίο απάντησε σε ένα πρόβλημα του Talagrand ([**T1**]).

Τα υπόλοιπα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου εξετάζουν τοπικά την ιδιότητα της ισχυρής $\mathcal{K}$–αναλυτικότητας και του (ισχυρά) Kσδ συνόλου στην ασθενή τοπολογία ενός χώρου Banach. Έτσι αποδεικνύεται ότι σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Banach X και $A \subseteq X$, το A είναι $\|\cdot\| - G_\delta$ υποσύνολο του X, αν ο χώρος (A, w) είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός (Πρόταση 3.49). Στην περίπτωση κατά την οποία ο X έχει την ιδιότητα Schur, τότε για ένα υποσύνολο A του X το (A, w) είναι ισχυρά Kσδ στο (X^{**}, w^*) αν και μόνον αν $(A, \|\cdot\|)$ είναι G_δ στο X (Πρόταση 3.51).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

Προκαταρκτικά

1. Στοιχεία από τη Γενική Τοπολογία

Για τις στοιχειώδεις έννοιες και θεωρήματα της Γενικής Τοπολογίας παραπέμπουμε στα [**E**], [**K**] και [**N-Z-K-Φ**].

1.1. Ο χώρος του Baire. Ο χώρος $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ των ακολουθιών φυσικών αριθμών εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο ονομάζεται συνήθως χώρος του Baire. Το χώρο του Baire θα τον συμβολίζουμε σε αυτή τη διατριβή με Σ.

Είναι γνωστό ([**Cho2**], [**E**]) ότι ο χώρος Σ του Baire είναι ομοιομορφικός με το χώρο των αρρήτων του διαστήματος $[0,1]$ με τη συνήθη τοπολογία.

Το χώρο Σ του Baire το θεωρούμε εφοδιασμένο με τη σημειακή (μερική) διάταξη, δηλαδή αν σ, $\rho \in \Sigma$ θα γράφουμε

$$\sigma \leq \rho \quad \text{αν} \quad \sigma(n) \leq \rho(n) \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Για κάθε $\sigma \in \Sigma$ θέτουμε

$$\Sigma(\sigma) = \prod_{n=1}^{\infty} \{1, 2, \dots \sigma(n)\}.$$

Είναι σαφές ότι

$$\Sigma(\sigma) = \{\rho \in \Sigma : \rho \leq \sigma\}$$

και ότι το $\Sigma(\sigma)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Σ. Σημειώνουμε επίσης ότι η οικογένεια $\{\Sigma(\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ συμπαγών υποσυνόλων του Σ κυριαρχεί τα συμπαγή υποσύνολα του Σ, δηλαδή αν K συμπαγές υποσύνολο του Σ, τότε υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ με $K \subseteq \Sigma(\sigma)$.

Με $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών. Προφανώς το S είναι αριθμήσιμο σύνολο. Αν $s = (s_1, s_2, \dots s_n)$, τότε το φυσικό αριθμό n τον ονομάζουμε μήκος της ακολουθίας s και θα τον συμβολίζουμε με $|s|$. Επίσης για κάθε s, $t \in S$ θα γράφουμε $s \leq t$ αν $|s| \leq |t|$ και για κάθε $i = 1, 2, \dots |s|$ ισχύει $s_i \leq t_i$. Αν $s \in S$ και $\sigma \in \Sigma$ θα γράφουμε $s < \sigma$ αν $s_i = \sigma_i$ για κάθε $i = 1, 2 \dots |s|$. Επίσης αν $n \in \mathbb{N}$ με $\sigma|n$ θα συμβολίζουμε την ακολουθία των n πρώτων όρων του σ. Για κάθε $s \in S$ θέτουμε $I(s) = \{\sigma \in \Sigma : s < \sigma\}$. Τότε η αριθμήσιμη οικογένεια $\{I(s) : s \in S\}$ είναι βάση του Σ, η οποία αποτελείται από σύνολα τα οποία είναι ανοικτά και κλειστά.

Ορισμος 0.1. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται Πολωνικός (Polish) αν είναι ομοιομορφικός με κάποιον πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο.

Ο χώρος Σ του Baire είναι Πολωνικός χώρος. Μια μετρική, η οποία καθιστά το χώρο του Baire πλήρη μετρικό χώρο είναι η εξής: Για κάθε $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \Sigma$ ορίζουμε

$$d(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho(x,y)}, & \text{αν} \quad x \neq y \\ 0, & \text{αν} \quad x = y, \end{cases}$$

όπου $\rho(x,y) = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ για $x \neq y$. Προφανώς $d(x,y) = \dfrac{1}{n}$ αν και μόνον αν $x_n \neq y_n$ και $x|n-1 = y|n-1$.

Ορισμος 0.2. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται αναλυτικός αν είναι συνεχής εικόνα του χώρου Σ του Baire.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ένας κομψός και χρήσιμος χαρακτηρισμός των Πολωνικών χώρων και οφείλεται στον Christensen.

Θεωρημα 0.3 (Christensen). *Έστω M ένας μετρικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο M είναι Πολωνικός χώρος*
(ii) *Υπάρχει μια οικογένεια $\{M_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ συμπαγών υποσυνόλων του M με τις ακόλουθες ιδιότητες:*
 (α) Αν $\sigma, \tau \in \Sigma$ με $\sigma \leq \tau$, τότε $M_\sigma \subseteq M_\tau$.
 (β) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του M, υπάρχει $\sigma \in \Sigma$, τέτοιο ώστε $L \subseteq M_\sigma$.

1.2. Ο χώρος $\mathcal{K}(X)$. Έστω X τοπολογικός χώρος. Με $\mathcal{K}(X)$ συμβολίζουμε το χώρο των συμπαγών μη κενών υποσυνόλων του X. Ο χώρος $\mathcal{K}(X)$ θεωρείται εφοδιασμένος με την τοπολογία Vietoris τ_ν, η οποία έχει ως βάση τα σύνολα της μορφής

$$\beta(V_1, \ldots, V_n) = \left\{ K \in \mathcal{K}(X) : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i \text{ και } K \cap V_i \neq \emptyset \text{ για } i = 1, \ldots, n \right\},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $V_1, \ldots, V_n$ είναι ανοικτά μη κενά υποσύνολα του X (βλέπε [**E**, p. 162]).

Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση $F \colon Y \to \mathcal{K}(X)$ ονομάζεται άνω (αντ. κάτω) ημισυνεχής, αν για κάθε A ανοικτό (αντ. κλειστό) υποσύνολο του X το σύνολο $\{y \in Y : F(y) \subseteq A\}$ είναι ανοικτό (αντ. κλειστό) υποσύνολο του X.

Μια απεικόνιση $F\colon Y \to \mathcal{K}(X)$ είναι συνεχής (Ο χώρος $\mathcal{K}(X)$ θεωρείται εφοδιασμένος με την τοπολογία Vietoris τ_ν) αν και μόνον αν για κάθε υποσύνολο A του X το σύνολο $\{y \in Y : F(y) \subseteq A\}$ είναι ανοικτό όταν το A είναι ανοικτό και κλειστό όταν το A είναι κλειστό. Με άλλα λόγια η απεικόνιση F είναι συνεχής αν μόνον αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Εύκολα αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 0.4. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $F\colon Y \to \mathcal{K}(X)$ άνω ημισυνεχής απεικόνιση. Αν A είναι συμπαγές υποσύνολο του Y, τότε το $F(A)$ είναι συμπαγές.*

Επίσης αν Y είναι τοπολογικός υποχώρος του X, τότε ο $\mathcal{K}(Y)$ είναι τοπολογικός υποχώρος του $\mathcal{K}(X)$. Ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 0.5. *Έστω X τοπολογικός χώρος.*

(i) *Αν Y είναι συμπαγές υποσύνολο του X, τότε το $\mathcal{K}(Y)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{K}(X)$.*

(ii) *Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{K}(X)$, τότε το $\bigcup\{A : A \in K\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.*

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Η μετρική Hausdorff επί του $\mathcal{K}(X)$ ορίζεται ως εξής:

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} \rho(a, B)\,,\ \sup_{b\in B} \rho(b, A)\right\}$$

για κάθε A, $B \in \mathcal{K}(X)$. Η τοπολογία, η οποία επάγεται από τη μετρική Hausdorff συμπίπτει με την τοπολογία Vietoris τ_ν. Ισχύει επίσης το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 0.6. *Έστω X μετρικός χώρος.*

(i) *Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε ο $\mathcal{K}(X)$ είναι διαχωρίσιμος.*

(ii) *Αν ο X είναι Πολωνικός, τότε ο $\mathcal{K}(X)$ είναι Πολωνικός.*

1.3. Αριθμήσιμα καθοριζόμενοι τοπολογικοί χώροι.

Πρόταση 0.7 ([**T1**]). *Έστω X υποχώρος ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου K. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Υπάρχουν συμπαγή υποσύνολα K_n, $n \in \mathbb{N}$ του K τέτοια ώστε για κάθε $u \in X$ και $x \in K \setminus X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με*

$$u \in K_n \quad \textit{και} \quad x \notin K_n.$$

(ii) *Υπάρχουν συμπαγή σύνολα* B_s, $s \in S$ *του* K *και υποσύνολο* Σ' *του* Σ *τέτοια ώστε*

$$X = \bigcup_{\sigma \in \Sigma'} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n}$$

(iii) *Υπάρχει ένα υποσύνολο* Σ' *του* Σ *και μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση* $F : \Sigma' \to \mathcal{K}(X)$ *τέτοια ώστε* $X = F(\Sigma')$.

.

Ορισμος 0.8. Έστω X ένας Hausdorff και τελείως κανονικός τοπολογικός χώρος.

(1) Ο X λέγεται *αριθμήσιμα καθοριζόμενος*, αν πληρούται κάποια από τις ισοδύναμες συνθήκες της Πρότασης 0.7 σε κάποιο συμπαγή χώρο K, στον οποίο ο X περιέχεται ομοιομορφικά.

(2) Ο X λέγεται *$\mathcal{K}$–αναλυτικός* αν η συνθήκη (ii) ή η (iii)πληρούται από το Σ αντί του Σ'.

Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται realcompact αν είναι ομοιομορφικός με έναν κλειστό υποχώρο χώρου της μορφής $\mathbb{R}^\Gamma$, όπου ο χώρος $\mathbb{R}^\Gamma$ θεωρείται εφοδιασμένος με την καρτεσιανή τοπολογία.

Το επόμενο θεώρημα είναι ένας χαρακτηρισμός των αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων και οφείλεται στους Cascales και Orihuela.

Θεωρημα 0.9. *(*[**C-O**, Th. 4]*) Έστω* Y *ένας κανονικός τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο* Y *είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος.*

(ii) *Ο* Y *είναι Lindelöf και υπάρχει ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος* M *και μια οικογένεια* $\{Y_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ *συμπαγών υποσυνόλων του* Y *τέτοια ώστε:*
  (α) Αν $K_1 \subseteq K_2$*, τότε* $Y_{K_1} \subseteq Y_{K_2}$.
  (β) $Y = \bigcup\{Y_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$.

(iii) *Ο* Y *είναι Dieudonné πλήρης και υπάρχει ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος* M *και μια οικογένεια* $\{Y_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ *συμπαγών υποσυνόλων του* Y *τέτοια ώστε:*
  (α) Αν $K_1 \subseteq K_2$*, τότε* $Y_{K_1} \subseteq Y_{K_2}$.
  (β) $Y = \bigcup\{Y_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$.

(iv) *Τα σχετικά αριθμήσιμα συμπαγή υποσύνολα του* Y *είναι σχετικά συμπαγή και υπάρχει ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος* M *και μια οικογένεια* $\{Y_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ *συμπαγών υποσυνόλων του* Y *τέτοια ώστε:*
  (α) Αν $K_1 \subseteq K_2$*, τότε* $Y_{K_1} \subseteq Y_{K_2}$.
  (β) $Y = \bigcup\{Y_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$.

1.4. k–χώροι. Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Με τ^k συμβολίζουμε την τοπολογία του X, η οποία έχει ως ανοικτά σύνολα εκείνα τα υποσύνολα του X, των οποίων η τομή με κάθε συμπαγές υποσύνολο του (X, τ) είναι σχετικά ανοικτό υποσύνολο του συμπαγούς. Ισοδύναμα το F είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου τ^k, αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του (X, τ) το $F \cap K$ είναι συμπαγές.

Προφανώς η τοπολογία τ^k είναι λεπτότερη από την (X, τ) και οι δύο τοπολογίες έχουν τα ίδια συμπαγή σύνολα.

Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) λέγεται k–χώρος αν $\tau^k = \tau$. Ισοδύναμα ο τοπολογικός χώρος (X, τ) είναι k–χώρος αν για κάθε υποσύνολο F του X, του οποίου η τομή $F \cap K$ με κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X είναι συμπαγές σύνολο είναι κλειστό σύνολο.

Για τους k–χώρους ισχύουν τα εξής:

- **(α)** Ο χώρος (X, τ^k) είναι k–χώρος και η τοπολογία τ^k είναι η μεγαλύτερη τοπολογία k–χώρου, η οποία είναι λεπτότερη από την τ.
- **(β)** Οι πρώτοι αριθμήσιμοι (ειδικότερα οι μετρικοί χώροι) καθώς και οι τοπικά συμπαγείς τοπολογικοί χώροι είναι k–χώροι.
- **(γ)** Κάθε κλειστός υποχώρος ενός k–χώρου είναι k–χώρος.
- **(δ)** Αν X είναι k–χώρος και K συμπαγής χώρος, τότε ο $X \times K$ είναι k–χώρος.
- **(ε)** Η ταυτοτική απεικόνιση $I\colon (X, \tau^k) \to (X, \tau)$ είναι συνεχής.

Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα το γεγονός ότι ένας τοπολογικός χώρος είναι $\mathcal{K}$–αναλυτικός (αντ. αριθμήσιμα καθοριζόμενος) οφείλεται στα συμπαγή του υποσύνολα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.10 (Talagrand, [**T1**]). *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Ο (X, τ) είναι $\mathcal{K}$–αναλυτικός (αντ. αριθμήσιμα καθοριζόμενος) αν και μόνον αν ο (X, τ^k) είναι $\mathcal{K}$–αναλυτικός (αντ. αριθμήσιμα καθοριζόμενος).*

Για περισσότερες λεπτομέρειες στους k–χώρους παραπέμπουμε στα [**J-R**], [**E**] και [**T1**].

2. Στοιχεία από τη Συναρτησιακή Ανάλυση

Για τις βασικές έννοιες και θεωρήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης παραπέμπουμε στα [**F-H-H-M-P-Z**], [**N-Z-K-Φ**], [**L-T**] και [**D-G-Z**].

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.11 (Grothendieck). *Έστω K συμπαγής χώρος και B ένα φραγμένο υποσύνολο του $C(K)$. Τότε το B είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνον αν είναι συμπαγές στην τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.*

Θεωρημα 0.12 (Rosenthal). *Έστω (x_n) μια φραγμένη ακολουθία ενός χώρου Banach. Τότε η (x_n) έχει μια υπακολουθία (x_{k_n}), η οποία είτε είναι ασθενώς Cauchy ή είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του $\ell^1(\mathbb{N})$.*

Με T συμβολίζουμε το δυαδικό δένδρο των ακολουθιών με στοιχεία 0 και 1. Υποδένδρο του T λέγεται κάθε υποσύνολο T' του T, το οποίο έχει μοναδικό ελάχιστο στοιχείο και κάθε στοιχείο του έχει ακριβώς δύο επόμενους.

Θεωρημα 0.13 (Stern, [**S**]). *Θεωρούμε ένα χώρο Banach X και μια φραγμένη οικογένεια $(x_s)_{s\in T}$ στοιχείων του X. Τότε υπάρχει ένα υποδένδρο T' του T τέτοιο ώστε να ισχύει ακριβώς ένα από τα επόμενα:*

(i) *Για κάθε κλαδί δ του T' η ακολουθία $(x_{\delta|n})$ είναι ασθενώς Cauchy.*

(ii) *Για κάθε κλαδί δ του T' η ακολουθία $(x_{\delta|n})$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του $\ell^1(\mathbb{N})$.*

Θεωρημα 0.14 (Milyutin). *Αν K, L είναι υπεραριθμήσιμοι συμπαγείς μετρικοί χώροι, τότε οι χώροι $C(K)$ και $C(L)$ είναι ισομορφικοί.*

2.1. Ασθενώς αριθμήσιμα καθοριζόμενοι (WCD) χώροι Banach.

Ορισμος 0.15 ((i)). Έστω X χώρος Banach.

(1) Ο X λέγεται *ασθενώς συμπαγώς παραγόμενος* (WCG) αν περιέχει ένα ασθενώς συμπαγές ολικό υποσύνολο.

(2) Ο X λέγεται *ασθενώς $\mathcal{K}$–αναλυτικός* (WKA) αν είναι $\mathcal{K}$–αναλυτικός στην ασθενή του τοπολογία.

(3) Ο X λέγεται *ασθενώς αριθμήσιμα καθοριζόμενος* (WCD) αν είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος στην ασθενή του τοπολογία.

(4) Ο X λέγεται *Πολωνικός* (Polish) αν ο χώρος (B_X, w) είναι Πολωνικός. ([**E-W**], [**R**])

Μια παρουσίαση της θεωρίας των ασθενώς αριθμήσιμα καθοριζόμενων χώρων Banach μπορεί να βρεθεί στα [**N**], [**V**], [**T1**], [**M1**] και [**M2**]. Για τη θεωρία των ασθενώς συμπαγώς παραγόμενων χώρων Banach παραπέμπουμε στα [**F**], [**D-G-Z**] και [**L**].

Θεωρημα 0.16 (Talagrand, [**T1**]). *Αν ο χώρος Banach X είναι WCG, τότε κάθε κλειστός υποχώρος του είναι WKA.*

Ορισμος 0.17. Ένα συμπαγές σύνολο K λέγεται *Talagrand* (αντ. *Gul'ko*) συμπαγές αν ο χώρος $C(K)$ είναι WKA (αντ. WCD).

Το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο οφείλεται στο Μερκουράκη αποδείχθηκε για πρώτη φορά στο [**M1**] και ανεξάρτητα από τους Cascales και Orihuela ως Πόρισμα του Θεωρήματος 0.9.

Θεώρημα 0.18 (Μερκουράκη,[**M1**]). *Ένας χώρος Banach X είναι ασθενώς αριθμήσιμα καθοριζόμενος (WCD) αν και μόνον αν υπάρχει ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος M και μια οικογένεια $\{W_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του X έτσι ώστε:*

(α) $W_{K_1} \subseteq W_{K_2}$ για κάθε $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$.

(β) Το σύνολο $\bigcup\{W_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ είναι ολικό υποσύνολο του X.

Θεώρημα 0.19 (Αργυρού–Νεγρεπόντη, [**A-N**], [**N**]). *Αν K είναι Gul'ko συμπαγές σύνολο, τότε $s(K) = w(K)^+$, όπου $s(K)$ είναι ο αριθμός Souslin και $w(K)$ το τοπολογικό βάρος του K.*

2.2. Τοπολογία Mackey. Έστω X χώρος Banach. Η λεπτότερη τοπικά κυρτή τοπολογία τ επί του X^* τέτοια ώστε $(X^*, \tau)^* = X$ ονομάζεται τοπολογία Mackey. Το θεώρημα Mackey–Arens ([**F-H-H-M-P-Z**]) χαρακτηρίζει την τοπολογία τ ως την τοπολογία επί του X^* της ομοιόμορφης σύγκλισης στα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του X.

2.3. SWCG και SWKA χώροι Banach.

Ορισμός 0.20 ([**S-W**]). Ένας χώρος Banach X λέγεται ισχυρά ασθενώς συμπαγώς παραγόμενος (SWCG) αν υπάρχει ένα ασθενώς συμπαγές (κυρτό και συμμετρικό) υποσύνολο K του X, τέτοιο ώστε για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $L \subseteq nK + \varepsilon B_X$.

Παραδείγματα SWCG χώρων Banach είναι οι αυτοπαθείς χώροι Banach και οι διαχωρίσιμοι χώροι Banach με την ιδιότητα Schur. Επίσης οι χώροι Banach $L^1(\mu)$, όπου μ είναι σ–πεπερασμένο μέτρο είναι SWCG.

Οι SWCG χώροι Banach χαρακτηρίζονται από το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 0.21. *(*[**S-W**, Th. 2.1]*) Έστω X χώρος Banach. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο χώρος (B_{X^*}, τ) είναι (πλήρης) μετρικοποιήσιμος*

(ii) *Υπάρχει ακολουθία (K_n) ασθενώς συμπαγών (κυρτών συμμετρικών) υποσυνόλων του X τέτοια ώστε για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $L \subseteq K_n + \varepsilon B_X$*

(iii) *Υπάρχει ασθενώς συμπαγές (κυρτό συμμετρικό) υποσύνολο K του X τέτοιο ώστε για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $L \subseteq nK + \varepsilon B_X$*

Ορισμος 0.22. ([**M-S**]) Ένας χώρος Banach X λέγεται ισχυρά ασθενώς $\mathcal{K}$–αναλυτικός (SWKA) αν υπάρχει μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση $F\colon \Sigma \to \mathcal{K}(X)$ τέτοια ώστε ($F(\Sigma) = X$ και με την επιπλέον ιδιότητα) για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο K του X να υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ με $K \subseteq F(\sigma)$.

Προταση 0.23. *([**M-S**, Prop.1.5]) Κάθε κλειστός υποχώρος ενός SWCG χώρου Banach είναι SWKA.*

Θεωρημα 0.24. *([**M-S**, Th. 2.6]) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach, ο οποίος δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$. Ο X είναι SWKA αν και μόνον αν είναι Πολωνικός.*

Θεωρημα 0.25. *([**M-S**, Th. 2.8]) Έστω X ένας χώρος Banach και $(e_s)_{s\in T}$ μια φραγμένη οικογένεια του X. Υποθέτουμε ότι:*

(i) *Δεν υπάρχει αλυσίδα (t_n) του T τέτοια ώστε η ακολουθία (e_{t_n}) να είναι ασθενώς συγκλίνουσα*

(ii) *Για κάθε αντιαλυσίδα (s_n) του T υπάρχει υπακολουθία (s'_n) της (s_n) τέτοια ώστε η ακολουθία $(e_{s'_n})$ να είναι ασθενώς συγκλίνουσα.*

Τότε ο χώρος X δεν είναι SWKA.

2.4. ε–σχετικά ασθενώς συμπαγή σύνολα.

Ορισμος 0.26. ([**F-M-Z**]) Έστω X χώρος Banach, $\varepsilon \geq 0$ και M φραγμένο υποσύνολο του X. Το M λέγεται ε–σχετικά ασθενώς συμπαγές αν ισχύει

$$\overline{M}^{w^*} \subseteq X + \varepsilon B_{X^{**}}\,.$$

Προφανώς για $\varepsilon = 0$ έχουμε τη συνήθη έννοια του σχετικά ασθενώς συμπαγούς συνόλου ενός χώρου Banach.

Προταση 0.27. *Έστω Z χώρος Banach, X ένας κλειστός υποχώρος του Z, $\varepsilon \geq 0$ και M ένα ε–σχετικά ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του Z. Τότε το $M \cap X$ είναι 4ε–σχετικά ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X.*

Το επόμενο σημαντικό Θεώρημα, το οποίο οφείλεται στους Fabian, Montesinos και Zizler μας δίνει έναν εσωτερικό χαρακτηρισμό των υποχώρων WCG χώρων Banach

Θεωρημα 0.28. *([**F-M-Z**]) Ένας χώρος Banach είναι υποχώρος ενός WCG χώρου Banach αν και μόνον αν για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακολουθία $(M_{n,p})_n$ αποτελούμενη από $\frac{1}{p}$-ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του X ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{n,p}$.*

2.5. Ύψος τοπολογικού χώρου. Έστω K (scattered) τοπολογικός χώρος. Με K' συμβολίζουμε το παράγωγο σύνολο του K, το οποίο αποτελείται από τα σημεία συσσώρευσης του K. Για κάθε διατακτικό αριθμό α ορίζουμε

$$K^{(\alpha)} = (K^{(\beta)})' \quad \text{αν} \quad \alpha = \beta + 1$$

και

$$K^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} K^{(\beta)} \quad \text{αν είναι οριακός}\,.$$

Το ύψος $\eta(K)$ του K ορίζεται ως ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός β για τον οποίο ισχύει $K^{(\beta)} = \emptyset$.

Υπενθυμίζουμε ότι ισχυρά Eberlein συμπαγές είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του χώρου $[\Gamma]^{<\omega}$, όπου Γ είναι ένα μη κενό σύνολο. Με $[\Gamma]^{<\omega}$ συμβολίζουμε το χώρο των πεπερασμένων υποσυνόλων του Γ, ο οποίος θεωρείται υποχώρος του συμπαγούς χώρου $\{0,1\}^{\Gamma}$.

Θεωρημα 0.29 ([**H-L-M**]). *Θεωρούμε έναν άπειρο πληθάριθμο τ. Τότε για κάθε διατακτικό αριθμό $\alpha < \tau^+$ υπάρχει ένα ισχυρά Eberlein συμπαγές υποσύνολο K του $c_0(\tau)$, με ύψος $\eta(K) \geq \alpha$.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Κλάσεις αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται ιδιότητες τοπολογικών χώρων, οι οποίες επεκτείνουν κατά φυσιολογικό χώρο την κλασική έννοια του $\mathcal{K}$–αναλυτικού τοπολογικού χώρου του Choquet και την έννοια του αριθμήσιμα καθοριζόμενου χώρου του Frolik.

Έτσι εισάγουμε την έννοια του ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενου τοπολογικού χώρου, η οποία γενικεύει την έννοια του ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικού τοπολογικού χώρου που εισάγεται στο [**M-S**]. Κάθε ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος τοπολογικός χώρος είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Αποδεικνύεται ότι κάθε ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος τοπολογικός χώρος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός) είναι συνεχής εικόνα μέσω μιας απεικόνισης με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης ενός κλειστού υποσυνόλου ενός γινομένου $M \times K$, όπου M ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (αντ. Πολωνικός χώρος) και K ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος. Στη συνέχεια επεκτείνουμε την έννοια της απεικόνισης με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης σε άνω ημισυνεχείς συνολοσυναρτήσεις και αποδεικνύουμε ότι η εικόνα μέσω μιας άνω ημισυνεχούς συνολοσυνάρτησης με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης ενός ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενου (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικού) τοπολογικού χώρου είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός). Τέλος εισάγεται η έννοια του ισχυρά Kσδ υποσυνόλου ενός τοπολογικού χώρου και μελετάται η σχέση τους με τους ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικούς τοπολογικούς χώρους.

1. Ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενοι τοπολογικοί χώροι. Γενικές ιδιότητες.

Με το ακόλουθο αποτέλεσμα ουσιαστικά εισάγεται η έννοια του ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενου τοπολογικού χώρου. Το αποτέλεσμα αυτό έχει το ανάλογό του στην κλάση των αριθμήσιμα καθοριζόμενων χώρων. (βλ. [**T1**, Prop. 1.1], [**F**, Prop. 7.1.1], και [**J-R**]).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1. *Έστω X υποχώρος ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου K. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Υπάρχουν συμπαγή υποσύνολα K_n, $n \in \mathbb{N}$ του K τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X και $x \in K \setminus X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με*

$$L \subseteq K_n \quad \text{και} \quad x \notin K_n.$$

(ii) *Υπάρχουν συμπαγή σύνολα B_s, $s \in S$ του K και υποσύνολο Σ' του Σ τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X να υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ με*

$$L \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \subseteq X \quad \text{και} \quad X = \bigcup_{\sigma \in \Sigma'} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n}$$

(iii) *Υπάρχει ένα υποσύνολο Σ' του Σ και μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση $F : \Sigma' \to \mathcal{K}(X)$ τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X να υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ με $L \subseteq F(\sigma)$. Ειδικότερα $X = F(\Sigma')$.*

.

Αποδειξη. (i)⇒(ii) Για κάθε $s = (n_1, n_2, \ldots n_m) \in S$ θέτουμε

$$B_s = \bigcap_{i=1}^{m} K_{n_i} \quad \text{και} \quad \Sigma' = \{\sigma \in \Sigma : \emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \subseteq X\}.$$

Έστω L ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του X. Θέτουμε

$$M = \{n \in \mathbb{N} : L \subseteq K_n\}.$$

Είναι προφανές ότι $L \subseteq \bigcap_{n \in M} K_n$. Ισχυριζόμαστε ότι $\bigcap_{n \in M} K_n \subseteq X$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $u \in \bigcap_{n \in M} K_n$ με $u \notin X$, τότε από υπόθεση υπάρχει $n_0 \in M$ τέτοιο ώστε $L \subseteq K_{n_0}$ και $u \notin K_{n_0}$, άτοπο. Έστω $\sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots)$, όπου $\{n_1, n_2, \ldots n_m \ldots\}$ είναι μια αρίθμηση του συνόλου M. Τότε

$$L \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n}$$

και η συνθήκη (ii) ικανοποιείται.

(ii) ⇒ *(iii)* Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \neq \emptyset$ για κάθε $\sigma \in \Sigma'$. Ορίζουμε μια απεικόνιση

$$F : \Sigma' \to \mathcal{K}(X) \quad \text{με} \quad F(\sigma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η F είναι άνω ημισυνεχής. Θεωρούμε $\sigma \in \Sigma'$ και ένα ανοικτό υποσύνολο U του X τέτοιο ώστε

$$F(\sigma) \subseteq U \quad \text{δηλαδή,} \quad F(\sigma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \subseteq U.$$

Καθώς τα σύνολα $B_s, s \in S$ είναι συμπαγή, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\bigcap_{n=1}^{m} B_{\sigma|n} \subseteq U$, απο το οποίο προκύπτει $F(I(\sigma|m) \cap \Sigma') \subseteq U$, οπότε η συνάρτηση F είναι άνω ημισυνεχής. Επίσης είναι άμεσο ότι για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ τέτοιο ώστε $L \subseteq F(\sigma)$, οπότε η συνθήκη (iii) ικανοποιείται

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Για κάθε $s \in S$, θέτουμε B_s να είναι η κλειστή θήκη στο K του συνόλου $F(I(s)\bigcap \Sigma')$. Για κάθε $\sigma \in \Sigma'$ έχουμε $F(\sigma) \subseteq B_{\sigma|n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$F(\sigma) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n}\,.$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$F(\sigma) \subsetneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n}\,.$$

Τότε υπάρχει $x \in K$ τέτοιο ώστε

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \quad \text{και} \quad x \notin F(\sigma)\,.$$

Από τη συμπάγεια του συνόλου $F(\sigma)$ έπεται ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο V, τέτοιο ώστε

$$F(\sigma) \subseteq V \quad \text{και} \quad x \notin \overline{V}\,.$$

Η συνάρτηση F είναι άνω ημισυνεχής, άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$F(I(\sigma|m) \cap \Sigma') \subseteq V \quad \text{οπότε} \quad B_{\sigma|m} \subseteq \overline{V}\,.$$

Τότε έχουμε

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \subseteq B_{\sigma|m} \subseteq \overline{V}\,,$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως για κάθε $\sigma \in \Sigma'$ έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \subseteq X$. Επίσης αν L είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X, τότε υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ τέτοιο ώστε $L \subseteq F(\sigma)$, από το οποίο προκύπτει ότι $L \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n}$ και η συνθήκη (ii) ικανοποιείται.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Το σύνολο S είναι αριθμήσιμο. Έστω $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του S. Είναι αρκετό να θέσουμε $K_n = B_{s_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Παρατηρηση 1.2. Το παραπάνω Θεώρημα 1.1 (όπως είναι γνωστό) είναι αληθές αν αντί για ζεύγη (L, x), με L συμπαγές υποσύνολο του X και $x \in K \setminus X$, στον ισχυρισμό (i), θεωρήσουμε ζεύγη (u, x) με $u \in X$ και $x \in K \setminus X$ (και ανάλογες μετατροπές στους ισχυρισμούς (ii) και (iii)). Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε τη γνωστή έννοια του αριθμήσιμα καθοριζόμενου τοπολογικού χώρου. (βλ. [**T1**, Prop. 1.1])

Είναι σαφές από τον ισχυρισμό (iii) του παραπάνω Θεωρήματος 1.1, ότι ο χώρος K μπορεί να αντικατασταθεί από οποιονδήποτε συμπαγή χώρο που περιέχει το X. Έτσι καταλήγουμε στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμος 1.3. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (SCD)* αν υπάρχει ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος K τέτοιος ώστε $X \subseteq K$ και οι ισοδύναμοι ισχυρισμοί του Θεωρήματος 1.1 να ικανοποιούνται.

Σημειωση 1.4. Αν στους ισχυρισμούς (ii) και (iii) του Θεωρήματος 1.1 το Σ' αντικατασταθεί από το χώρο Σ του Baire, τότε έχουμε την έννοια του ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικού τοπολογικού χώρου χώρου, η οποία εισάγεται για πρώτη φορά στο [**M-S**, Def. 1.11]. Είναι σαφές ότι κάθε ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικός χώρος είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

Παραδειγματα 1.5. **(i)** Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Πράγματι, έστω K μια μετρικοποιήσιμη συμπαγοποίηση του X. Θεωρούμε μια βάση $\mathcal{B} = \{U_n : n \geq 1\}$ για την τοπολογία του K, η οποία είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις. Θέτουμε $K_n = \overline{U}_n \subseteq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X και για κάθε $u \in K \setminus X$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq K_{n_0}$ και $u \notin K_{n_0}$. Έστω V ένα ανοικτό υποσύνολο του K τέτοιο ώστε $L \subseteq V$ και $u \notin \overline{V}$. Τότε για κάποιο $M \subseteq \mathbb{N}$ έχουμε $V = \bigcup_{n\in M} U_n$ και από τη συμπάγεια του L υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο F του M, τέτοιο ώστε $L \subseteq \bigcup_{n\in F} U_n \subseteq V$. Το σύνολο $\bigcup_{n\in F} U_n$ είναι επίσης ένα στοιχείο του $\mathcal{B}$, ας πούμε U_{n_0}, για το οποίο έχουμε $L \subseteq U_{n_0} \subseteq K_{n_0} \subseteq \overline{V}$ και βέβαια $u \notin K_{n_0}$. Έπεται άμεσα από τη συνθήκη (i) του Θεωρήματος 1.1 ότι ο χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

Μια πιο σύντομη απόδειξη αυτού του παραδείγματος χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό (iii) του Θεωρήματος 1.1, έχει ως εξής: Ο χώρος $\mathcal{K}(X)$ εφοδιασμένος με τη μετρική Hausdorff (η οποία δίνει την τοπολογία Vietoris του $\mathcal{K}(X)$) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, οπότε είναι συνεχής εικόνα ενός υποσυνόλου Σ' του Σ.

Αν ο χώρος X είναι Πολωνικός, τότε ο χώρος $\mathcal{K}(X)$ είναι επίσης Πολωνικός, οπότε είναι συνεχής εικόνα του χώρου Σ του Baire. Έπεται τότε ότι ο X είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός. (βλ. [**M-S**, Remark 1.11])

(ii) Έστω M ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και Ω ένας συμπαγής χώρος. Τότε ο χώρος $M \times \Omega$ είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Αυτό το αποτέλεσμα εύκολα επαληθεύεται, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο παράδειγμα. Επίσης έπεται άμεσα από την Πρόταση 1.17 παρακάτω ότι κάθε κλειστός υποχώρος C του $M \times \Omega$ είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

Αν ο χώρος M είναι Πολωνικός, τότε το C είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός τοπολογικός χώρος (βλ. [**M-S**, Remark 1.11.1]).

Παρατηρηση 1.6. Είναι μάλλον εύκολο να αποδείξουμε ότι, αν ο τοπολογικός χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος, τότε υπάρχει ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος M και μια οικογένεια $\{M_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ συμπαγών υποσυνόλων του X με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Αν $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$, τότε $M_{K_1} \subseteq M_{K_2}$

(β) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X υπάρχει $K \in \mathcal{K}(M)$ τέτοιο ώστε $L \subseteq M_K$.

Πράγματι, έστω $\Sigma' \subseteq \Sigma$ και $F : \Sigma' \mapsto \mathcal{K}(X)$ μια άνω ημισυνεχής απεικόνιση που ικανοποιεί τη συνθήκη (iii) του Θεωρήματος 1.1. Θέτουμε

$$M = \Sigma' \quad \text{και} \quad M_K = F(K) = \bigcup_{\sigma \in K} F(\sigma) \quad \text{για κάθε} \quad K \in \mathcal{K}(M)\,.$$

Επειδή η F είναι άνω ημισυνεχής το σύνολο $M_K = F(K)$ είναι συμπαγές και είναι εύκολο να δούμε ότι η οικογένεια $\{M_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. (Αν X είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το χώρο M με το χώρο Σ του Baire).

Σχετικά με την αντίθετη κατεύθυνση, έστω X ένας (κανονικός) τοπολογικός χώρος που έχει μια οικογένεια $\{M_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ συμπαγών υποσυνόλων που ικανοποιούν τα (α) και (β). Αν επιπροσθέτως ο χώρος X είναι Lindelöf (ή Dieudoné πλήρης ή τα σχετικά αριθμήσιμα συμπαγή υποσύνολα του X είναι σχετικά συμπαγή), τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 0.9 των Cascales–Orihuela ([**C-O**, Th. 4]), ο X είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Επιπλέον από τη μέθοδο της απόδειξης αυτού του αποτελέσματος και την ιδιότητα (β) έπεται εύκολα ότι ο X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αν ο M είναι Πολωνικός, τότε ο X είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός).

Ένας χρήσιμος χαρακτηρισμός των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων είναι και ο ακόλουθος (βλ. επίσης [**A-A-M 2**, Lemma 5.3])

Προταση 1.7. *Έστω X ένας Hausdorff τελείως κανονικός τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.*

(ii) *Υπάρχει $\Sigma' \subseteq \Sigma$ και οικογένεια $(X_s)_{s\in S}$ κλειστών υποσυνόλων του X με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) $X_\emptyset = X$ και $X_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{s^\frown n}$ για κάθε $s \in S$

(β) Για κάθε $\sigma \in \Sigma'$ και για κάθε ακολουθία (x_n) του X με $x_n \in X_{\sigma|n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $X_\sigma = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{\sigma|n}$ είναι συμπαγές και η ακολουθία (x_n) έχει οριακό σημείο στο X.

(γ) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο Ω του X υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ τέτοιο ώστε $\Omega \subseteq X_\sigma$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Επειδή ο τοπολογικός χώρος X υποτίθεται Hausdorff και τελείως κανονικός υπάρχει συμπαγής χώρος, ο οποίος περιέχει ομοιομορφικά το X. Έστω K λοιπόν ένας συμπαγής χώρος, ο οποίος περιέχει το X και (K_n) ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του K που ικανοποιεί τον ισχυρισμό (i) του Θεωρήματος 1.1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $K_{n_0} = K$. Θέτουμε

$$K_\emptyset = K \quad \text{και} \quad K_s = \bigcap_{i=1}^{p} K_{n_i} \quad \text{για κάθε} \quad s = (n_1, n_2, \cdots, n_p).$$

Τότε η οικογένεια $(K_s)_{s\in S}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (ii) του Θεωρήματος 1.1 και επιπλέον για κάθε $s \in S$ ισχύει $K_s = \bigcup_{n=1}^\infty K_{s^\frown n}$. Τότε η οικογένεια $(X_s)_{s\in S}$ με $X_s = X \cap K_s$ ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Ορίζουμε μια απεικόνιση $F : \Sigma' \to \mathcal{K}(X)$ με $F(\sigma) = \bigcap_{n=1}^\infty X_{\sigma|n}$. Η απεικόνιση F είναι άνω ημισυνεχής. Πράγματι, αν η F δεν είναι άνω ημισυνεχής, τότε υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του X και $\sigma \in \Sigma'$ τέτοιο ώστε $F(\sigma) \subseteq U$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $X_{\sigma|n} \nsubseteq U$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in X_{\sigma|n} \backslash U$. Η ακολουθία (x_n) έχει από υπόθεση οριακό σημείο x στο σύνολο $\bigcap_{n=1}^\infty X_{\sigma|n}$, το οποίο είναι άτοπο, διότι $x \in U$ και $x_n \notin U$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Παρατηρηση 1.8. Ο ανάλογος χαρακτηρισμός για ισχυρά $\mathcal{K}$− αναλυτικούς τοπολογικούς χώρους ισχύει με το χώρο Σ του Baire στη θέση του Σ' στον ισχυρισμό (ii) της προηγούμενης πρότασης 1.7

Στο ακόλουθο αποτέλεσμα συνοψίζονται οι ιδιότητες των ισχυρά $\mathcal{K}$− αναλυτικών τοπολογικών χώρων.

Προταση 1.9. *Έστω X υποχώρος ενός συμπαγούς χώρου K. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο χώρος X είναι ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικός.*
(ii) *Υπάρχει οικογένεια $(B_s)_{s\in S}$ συμπαγών υποσυνόλων του K με τις ακόλουθες ιδιότητες:*
 (α) $X = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_{n=1}^\infty B_{\sigma|n}$
 (β) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο Ω του X υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $\Omega \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty B_{\sigma|n}$
(iii) *Υπάρχει οικογένεια $(X_s)_{s\in S}$ κλειστών υποσυνόλων του X με τις ακόλουθες ιδιότητες:*
 (α) $X_\emptyset = X$ και $X_s = \bigcup_{n=1}^\infty X_{s^\frown n}$ για κάθε $s \in S$

(β) Για κάθε $\sigma \in \Sigma$ και για κάθε ακολουθία (x_n) του X με $x_n \in X_{\sigma|n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $X_\sigma = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{\sigma|n}$ είναι συμπαγές και η ακολουθία (x_n) έχει οριακό σημείο στο X.

(γ) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο Ω του X υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $\Omega \subseteq X_\sigma$.

Απόδειξη. Είναι ανάλογη με την περίπτωση των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων χώρων (βλ. Θεώρημα 1.1 και Πρόταση 1.7) και έτσι παραλείπεται. □

Όπως είναι γνωστό ένας $\mathcal{K}$–αναλυτικός χώρος είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Με το ακόλουθο παράδειγμα αποδεικνύουμε ότι ένας $\mathcal{K}$–αναλυτικός τοπολογικός χώρος δεν είναι αναγκαία ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος ακόμα και αν είναι σ–συμπαγής (δηλαδή αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων).

Παράδειγμα 1.10. Ένας σ–συμπαγής χώρος δεν είναι αναγκαία ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Έστω Γ ένα σύνολο με $|\Gamma| = c$ (την ισχύ του συνεχούς) και $X = [\Gamma]^{<\omega}$ (το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του Γ), θεωρούμενο ως υποχώρος του συμπαγούς χώρου $\{0,1\}^\Gamma$. Ο χώρος X είναι σ–συμπαγής (ειδικότερα $\mathcal{K}$–αναλυτικός), διότι μπορεί να γραφεί στη μορφή $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\Gamma]^{\leq n}$, όπου $[\Gamma]^{\leq n}$ είναι το σύνολο των υποσυνόλων A του Γ με $|A| \leq n$. Θα δείξουμε ότι ο X δεν είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 0.29 των Hájek, Lancien και Montesinos.

Υποθέτουμε ότι ο χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.6 υπάρχει ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος M και μια οικογένεια $\{X_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ συμπαγών υποσυνόλων του X με τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) Αν $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$, τότε $X_{K_1} \subseteq X_{K_2}$.

(ii) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο Ω του X υπάρχει $K \in \mathcal{K}(M)$ τέτοιο ώστε $\Omega \subseteq X_K$.

Σημειώνουμε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X είναι ισχυρά Eberlein συμπαγές και επειδή $|\Gamma| = c$ έχουμε $|\eta(K)| < c^+$. Θεωρούμε τώρα τα σύνολα $X_K, K \in \mathcal{K}(M)$ να έχουν ξένους φορείς τα σύνολα

$$\Gamma_K = \bigcup \{A \subseteq \Gamma \mid \chi_A \in X_K\} \times \{K\}$$

και θέτουμε

$$\Delta = \bigcup \{\, \Gamma_K : K \in \mathcal{K}(M) \,\}\,.$$

Επειδή $|\varGamma_K| \leq c$ για κάθε $K \in \mathcal{K}(M)$ και $|\mathcal{K}(M)| \leq c$ έχουμε $|\varDelta| = c$. Ορίζουμε τώρα ένα συμπαγές υποσύνολο K_0 του $\{0,1\}^{\varDelta}$ ως εξής:

$$K_0 = \{\chi_A \mid A \subseteq \varDelta \text{ και } |A \setminus B| \leq 1 \text{ για κάποιο } B \subseteq A, \chi_B \in X_K, K \in \mathcal{K}(M)\}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι το K_0 είναι ισχυρά Eberlein συμπαγές (δηλαδή, ένα συμπαγές υποσύνολο του $[\varDelta]^{<\omega}$). Από τη συνθήκη (ii) έπεται ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του X εμφυτεύεται στο K_0, κατά συνέπεια

$$\eta(\Omega) \leq \eta(K_0)$$

για κάθε συμπαγές υποσύνολο Ω του X. Τότε όμως το αποτέλεσμα που αναφέραμε παραπάνω, δηλαδή το Θεώρημα 0.29 συνεπάγεται ότι $\eta(K_0) = c^+$, το οποίο είναι άτοπο.

Σημειώνουμε επίσης ότι το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μεθόδους από το [**A-B**].

Αποδεικνύουμε τώρα έναν χαρακτηρισμό των διαχωρίσιμων μετρικών χώρων ανάλογο με αυτόν του Christensen (Θεώρημα 0.3) για Πολωνικούς χώρους. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί και στο επόμενο Κεφάλαιο.

Λημμα 1.11. *Έστω $\varGamma$ ένα μη κενό σύνολο, M ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $\{\, \varGamma_K : K \in \mathcal{K}(M)\,\}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $\varGamma$ τέτοια ώστε:*

(i) $\varGamma = \bigcup\{\varGamma_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$
(ii) *Αν $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$, τότε $\varGamma_{K_1} \subseteq \varGamma_{K_2}$.*
(iii) *Κάθε $\varGamma_K$ είναι πεπερασμένο.*

Τότε το σύνολο $\varGamma$ είναι αριθμήσιμο.

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\varGamma$ είναι υπεραριθμήσιμο. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $|\varGamma| = \omega_1$ και έστω $\varGamma = \{\gamma_\xi : \xi < \omega_1\}$ μια αρίθμηση του $\varGamma$. Για κάθε $\xi < \omega_1$ επιλέγουμε $K_\xi \in \mathcal{K}(M)$ τέτοιο ώστε $\gamma_\xi \in \varGamma_{K_\xi}$. Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο $\{K_\xi : \xi < \omega_1\}$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathcal{K}(M)$. Αν ο ισχυρισμός δεν είναι σωστός, τότε επειδή ο χώρος $\mathcal{K}(M)$ εφοδιασμένος με την τοπολογία Vietoris είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, υπάρχει ακολουθία (K_{ξ_n}) διακεκριμένων στοιχείων του χώρου $\mathcal{K}(M)$ και $K \in \mathcal{K}(M)$ έτσι ώστε $K_{\xi_n} \xrightarrow{\tau_\nu} K$. Τότε έπεται ότι το σύνολο $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\xi_n} \cup K$ είναι συμπαγές στο M και $\Gamma_{K_{\xi_n}} \subseteq \Gamma_W$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $\{\gamma_{\xi_n} : n \geq 1\} \subseteq \Gamma_W$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Για μια εναλλακτική απόδειξη του προηγούμενου λήμματος μπορεί κανείς να ανατρέξει στο [**M2**, Remark 1.4].

Πρόταση 1.12. *Έστω M μετρικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο χώρος M είναι διαχωρίσιμος*

(ii) *Υπάρχει ένα υποσύνολο Σ' του χώρου Σ του Baire και μια οικογένεια $\{M_K : K \in \mathcal{K}(\Sigma')\}$ συμπαγών υποσυνόλων του M με τις ακόλουθες ιδιότητες:*
   - *(α) Για κάθε $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(\Sigma')$ με $K_1 \subseteq K_2$ ισχύει $M_{K_1} \subseteq M_{K_2}$.*
   - *(β) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του M υπάρχει $K \in \mathcal{K}(\Sigma')$ τέτοιο ώστε $L \subseteq M_K$.*

(iii) *Υπάρχει ένα υποσύνολο Σ' του Σ και μια οικογένεια $\{M_K : K \in \Sigma'\}$ συμπαγών υποσυνόλων του M με τις ακόλουθες ιδιότητες:*
   - *(α) Για κάθε $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(\Sigma')$ με $K_1 \subseteq K_2$ έπεται $M_{K_1} \subseteq M_{K_2}$.*
   - *(β) $M = \bigcup\{M_K : K \in \mathcal{K}(\Sigma')\}$.*

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Ο μετρικός χώρος M είναι διαχωρίσιμος, άρα είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος(βλ. Παράδειγματα 1.5 (i)), οπότε το ζητούμενο έπεται άμεσα από την Παρατήρηση 1.6.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Προφανές.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Θεωρούμε ένα κλειστό και διακεκριμένο υποσύνολο D του M και θα δείξουμε ότι είναι αριθμήσιμο. Για κάθε $K \in \mathcal{K}(\Sigma')$ θέτουμε $D_K = D \cap M_K$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(1) Για κάθε $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(\Sigma')$ με $K_1 \subseteq K_2$ έπεται $D_{K_1} \subseteq D_{K_2}$

(2) $D = \bigcup\{D_K : K \in \mathcal{K}(\Sigma')$

Επειδή $D' = \emptyset$ και κάθε M_K είναι συμπαγές υποσύνολο του M, προκύπτει ότι κάθε D_K είναι πεπερασμένο. Τότε από το προηγούμενο Λήμμα 1.11 έπεται ότι το D είναι αριθμήσιμο, κατά συνέπεια ο μετρικός χώρος M είναι διαχωρίσιμος. □

Παρατήρηση 1.13. Ένας μετρικός χώρος M είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός αν και μόνον αν είναι Πολωνικός.

Πράγματι, αν ο M είναι Πολωνικός, τότε από το Παράδειγμα 1.5 (i) είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο M είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός. Τότε υπάρχει μια άνω ημισυνεχής απεικόνιση $F\colon \Sigma \to \mathcal{K}(M)$, η οποία πληροί τον ισχυρισμό (iii) του Θεωρήματος 1.1. Τότε θέτουμε $M_\sigma = F(\Sigma(\sigma))$ και η οικογένεια των συμπαγών συνόλων M_σ, $\sigma \in \Sigma$ του M ικανοποιεί την υπόθεση του Θεωρήματος 0.3 του Christensen, οπότε ο M είναι Πολωνικός.

2. Απεικονίσεις με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνεχής απεικόνιση f από έναν τοπολογικό χώρο X σε έναν τοπολογικό χώρο Y λέμε ότι έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης (*compact covering*) (βλ. [**E**, p. 423] και [**S-W**]), αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του Y υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο K του X τέτοιο ώστε $f(K) = L$ (ισοδύναμα, για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του Y υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο K του X τέτοιο ώστε $L \subseteq f(K)$). Είναι προφανές ότι μία απεικόνιση με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης είναι επί.

Παραδειγματα 1.14. **(i)** Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Τότε οι προβολές $\pi_1 : X \times Y \to X$ και $\pi_2 : X \times Y \to Y$, είναι απεικονίσεις με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

(ii) Έστω $f\colon X \to Y$ μια τέλεια απεικόνιση του X επί του Y. Υπενθυμίζουμε ότι μια απεικόνιση $f : X \mapsto Y$ λέγεται τέλεια (perfect ή proper) αν είναι συνεχής, κλειστή (δηλαδή απεικονίζει κλειστά σύνολα σε κλειστά) και για κάθε $y \in Y$ το σύνολο $f^{-1}(\{y\})$ είναι συμπαγές. Τότε η f έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης. Πράγματι, αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του Y, τότε το $f^{-1}(K)$, είναι συμπαγές υποσύνολο του X (βλ. [**E**, Th.3.7.2, p. 236]) και επειδή η f είναι επί έχουμε $f(f^{-1}(K)) = K$, το οποίο αποδεικνύει ότι η f έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

(iii) Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Τότε η ταυτοτική απεικόνιση

$$I\colon (X, \tau^{\kappa}) \to (X, \tau)$$

είναι συνεχής και έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης. (Υπενθυμίζουμε ότι τ^{κ} είναι η λεπτότερη τοπολογία του X, η οποία περιέχει την τ και καθιστά το X k–χώρο.)

(iv) Έστω K ένας συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος και B η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $C(K)$. Με τ_w συμβολίζουμε την ασθενή τοπολογία και με τ_p την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης επί του B. Σύμφωνα με το Θεώρημα 0.11 του Grothendieck ένα υποσύνολο Ω του B είναι τ_w–συμπαγές αν και μόνον αν είναι τ_p–συμπαγές. Τότε έπεται άμεσα ότι η ταυτοτική απεικόνιση

$$I\colon (B, \tau_w) \to (B, \tau_p)$$

είναι συνεχής και έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

(v) Έστω X χώρος Banach. Παρατηρούμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση $I\colon (X, \|\cdot\|) \to (X, w)$ έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης αν και μόνον αν κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X είναι norm συμπαγές, δηλαδή αν και μόνον αν ο X έχει την ιδιότητα Schur. Υπενθυμίζουμε ότι ο $\ell^1(\mathbb{N})$ έχει την ιδιότητα Schur. Έτσι αν ο X δεν έχει την ιδιότητα Schur, για παράδειγμα αν ο X είναι απειροδιάστατος και αυτοπαθής, τότε η ταυτοτική απεικόνιση I δεν έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

Για περαιτέρω παραδείγματα απεικονίσεων με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης παραπέμπουμε στο [**E**, pp. 423–424].

Χρησιμοποιώντας την έννοια της απεικόνισης με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης μπορούμε να δώσουμε έναν ακόμα χαρακτηρισμό των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων και των ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικών τοπολογικών χώρων.

Θεωρημα 1.15. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$– αναλυτικός)*
(ii) *Ο X είναι εικόνα μέσω μιας απεικόνισης f με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης ενός κλειστού υποσυνόλου C ενός χώρου της μορφής $M \times K$, όπου M διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (αντ. Πολωνικός) και K ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Αποδειξη. (Αποδεικνύουμε την περίπτωση των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων χώρων. Η περίπτωση των ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικών χώρων είναι ανάλογη)

$(i) \Rightarrow (ii)$ Θεωρούμε έναν συμπαγή τοπολογικό χώρο K, τέτοιον ώστε $X \subseteq K$. Έστω $F : \Sigma' \to \mathcal{K}(X)$ μια άνω ημισυνεχής απεικόνιση που ικανοποιεί τη συνθήκη (iii) του Θεωρήματος 1.1. Έστω

$$C = \bigcup \{ \{\sigma\} \times F(\sigma) \, : \sigma \in \Sigma' \}$$

το γράφημα της F. Καθώς η F είναι άνω ημισυνεχής, το C είναι κλειστό υποσύνολο του $\Sigma' \times K$. Είναι άμεσο ότι η προβολή π_2 από το C επί του X έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης, καθώς για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ τέτοιο ώστε $L \subseteq F(\sigma)$, κατά συνέπεια

$$L \subseteq \pi_2(\{\sigma\} \times F(\sigma)) \, .$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Ο χώρος $M \times K$ είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος, οπότε ο C είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος ως κλειστός υποχώρος ενός ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενου χώρου. Άρα υπάρχει μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση $\Phi : \Sigma' \to \mathcal{K}(C)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (iii) του Θεωρήματος 1.1. Εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση $F : \Sigma' \to \mathcal{K}(X)$ που ορίζεται από τη σχέση $F(\sigma) = f(\Phi(\sigma))$ καθιστά το X έναν ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενο χώρο. □

Παρατηρηση 1.16. Είναι σαφές από τα παραπάνω ότι μπορούμε να επεκτείνουμε τον Ορισμό 1.3 στην ευρύτερη κλάση των Hausdorff τοπολογικών χώρων. Έναν τοπολογικό χώρο Hausdorff X θα τον ονομάζουμε ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενο (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικό) αν υπάρχει ένα κλειστό υποσύνολο C ενός γινομένου $M \times K$, όπου M είναι ένας διαχωρίσιμος (αντ. Πολωνικός) μετρικός χώρος, K ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και μια απεικόνιση με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης από το C επί του X. Τότε έπεται, όπως στην Θεώρημα 1.15 ότι υπάρχει μια άνω ημισυνεχής απεικόνιση $F : \Sigma' \to \mathcal{K}(X)$ τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X να υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ με $L \subseteq F(\sigma)$. Έτσι αν X είναι υποχώρος ενός συμπαγούς χώρου, τότε είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικός) σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3 και ο νέος ορισμός είναι μια συνεπής επέκταση του αρχικού.

Στα επόμενα με τον όρο τοπολογικός χώρος θα εννοούμε ένα Hausdorff τελείως κανονικό τοπολογικό χώρο.

Τα ακόλουθα αποτελέσματα αποδεικνύουν ορισμένες στοιχειώδεις ιδιότητες ευστάθειας των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων (βλ. επίσης [**M-S**, Prop. 1.13]). Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι η κλάση των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων είναι κλειστή ως προς τα αριθμήσιμα γινόμενα και ως προς τους κλειστούς υποχώρους. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τους ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικούς τοπολογικούς χώρους αποδεικνύονται στο [**M-S**, Prop. 1.13].

Προταση 1.17. *(i) Αν ο X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος τοπολογικός χώρος και Y είναι κλειστός υποχώρος του X, τότε ο Y είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.*

(ii) Αν (X_n) είναι μια ακολουθία ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων, τότε ο χώρος $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

Αποδειξη. (i) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό (ii) του Θεωρήματος 1.1. Έστω K ένας συμπαγής υπερχώρος του X και $\{B_s : s \in S\}$ μια οικογένεια συμπαγών υποσυνόλων του K που ικανοποιούν τη συνθήκη (ii) του Θεωρήματος 1.1. Έστω Z ένας κλειστός και κατά συνέπεια συμπαγής υποχώρος του K τέτοιος ώστε $Y = X \cap Z$. Θέτουμε $A_s = B_s \cap Z$ για κάθε $s \in S$. Προφανώς κάθε A_s είναι συμπαγές υποσύνολο του K, κατά συνέπεια και του Z. Έστω L ένα συμπαγές υποσύνολο του Y. Τότε το L είναι συμπαγές υποσύνολο του X, οπότε υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ τέτοιο ώστε

$$L \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \subseteq X,$$

άρα

$$L \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \cap Z \subseteq X \cap Z = Y.$$

Θέτουμε

$$\Sigma'' = \{\sigma \in \Sigma' : \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \cap Z \neq \emptyset\}.$$

Τότε προφανώς

$$Y = \bigcup_{\sigma \in \Sigma''} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\sigma|n}$$

και για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του Y υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ τέτοιο ώστε

$$L \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\sigma|n}.$$

Άρα ο χώρος Y είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

(ii) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό (i) του Θεωρήματος 1.1 , για να ελέγξουμε ότι χώρος $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε ένα συμπαγή υπέρχωρο Ω_n του X_n. Τότε από τη συνθήκη (i) έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια ακολουθία $(K_n^m)_m$ συμπαγών υποσυνόλων του Ω_n τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του Ω_n και $w \in \Omega_n \setminus X_n$ να υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $L \subseteq K_n^m$ και $w \notin K_n^m$. Θέτουμε

$$\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n \quad \text{και} \quad Z_n^m = \pi_n^{-1}(K_n^m) \quad \text{για κάθε} \quad n, m \in \mathbb{N},$$

όπου π_n είναι η n-ιοστή προβολή του χώρου Ω στο χώρο Ω_n. Θα δείξουμε ότι η αριθμήσιμη οικογένεια $\{Z_n^m : n, m \in \mathbb{N}\}$ διαχωρίζει τα συμπαγή υποσύνολα του X από τα σημεία του $\Omega \setminus X$. Έστω Z ένα συμπαγές υποσύνολο του X και $w = (w_n) \in \Omega \setminus X$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $w_n \notin X_n$, οπότε για το συμπαγές υποσύνολο $Z_n = \pi_n(Z)$ του X_n υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $Z_n \subseteq K_n^m$ και $w_n \notin K_n^m$. Τότε έπεται ότι $Z \subseteq Z_n^m$ και $w \notin Z_n^m$, οπότε η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Παρατηρηση 1.18. Δεν είναι σωστό γενικά ότι συνεχής εικόνα ενός ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενου χώρου είναι ένας ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος χώρος.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε έναν τοπολογικό χώρο X, ο οποίος είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος, αλλά όχι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος, ας πούμε το χώρο του παραδείγματος 1.10. Είναι γνωστό ότι κάθε αριθμήσιμα καθοριζόμενος τοπολογικός χώρος είναι συνεχής εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου C, ενός χώρου της μορφής $M \times K$, όπου M είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και K ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος (βλ. [**J-R**] , [**T1**]). Το C είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος τοπολογικός χώρος, όπως έχουμε αναφέρει στα Παραδείγματα 1.5. Όμως ο χώρος X, ο οποίος είναι συνεχής εικόνα του C δεν είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Έπεται ιδιαίτερα ότι αν f είναι συνεχής απεικόνιση από το C επί του X, τότε η f δεν μπορεί να έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

Ισχύει όμως το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο μας λέει ότι οι απεικονίσεις με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης διατηρούν τους ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενους τοπολογικούς χώρους και τους ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικούς αντίστοιχα.

Πρόταση 1.19. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια απεικόνιση με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης. Αν ο χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος, (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός), τότε ο χώρος Y είναι επίσης ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός).*

Απόδειξη. Αυτή η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη του $(ii) \Rightarrow (i)$ του Θεωρήματος 1.15, οπότε παραλείπεται. □

Θα γενικεύσουμε τώρα ένα αποτέλεσμα του Talagrand σύμφωνα με το οποίο ένας χώρος (X, τ) είναι $\mathcal{K}$–αναλυτικός (αντ. αριθμήσιμα καθοριζόμενος) αν και μόνον αν ο χώρος (X, τ^κ) είναι $\mathcal{K}$–αναλυτικός (αντ. αριθμήσιμα καθοριζόμενος).

Υπενθυμίζουμε ότι αν (X, τ) είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε η ταυτοτική απεικόνιση $I\colon (X, \tau^\kappa) \to (X, \tau)$ είναι συνεχής και έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης (βλ. Παράδειγμα 1.14 (iii)).

Θεώρημα 1.20. *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο χώρος (X, τ) είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός).*
(ii) *Ο χώρος (X, τ^κ) είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός).*

Απόδειξη. **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** Από το Θεώρημα 1.15 ο χώρος (X, τ) είναι συνεχής εικόνα μέσω μιας απεικόνισης f με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης, ενός κλειστού υποσυνόλου C ενός χώρου της της μορφής $M \times K$, όπου M

διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και K συμπαγής τοπολογικός χώρος. Ο χώρος C είναι k–χώρος ως κλειστός υποχώρος ενός k–χώρου. Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση f παραμένει συνεχής, όταν ο X είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία τ^{κ}, οπότε από την Πρόταση 1.19 έχουμε το συμπέρασμα.

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του X στην τοπολογία τ^{κ}. Αν L είναι συμπαγές υποσύνολο του C, τότε το $f(L)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X, άρα το $U \bigcap f(L)$ είναι σχετικά ανοικτό υποσύνολο του $f(L)$. Επειδή η f είναι συνεχής το σύνολο $L \bigcap f^{-1}(U)$ είναι σχετικά ανοικτό υποσύνολο του L. Επιπλέον το C είναι k–χώρος, κατα συνέπεια το $f^{-1}(U)$, είναι ανοικτό υποσύνολο του C. Άρα η f είναι συνεχής.

(ii)$\Rightarrow$ **(i)** Έπεται άμεσα από το γεγονός ότι η ταυτοτική απεικόνιση $I\colon (X,\tau^{\kappa}) \to (X,\tau)$ έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης και την Πρόταση 1.19.

Η απόδειξη της περίπτωσης κατά την οποία ο X είναι $\mathcal{K}$–αναλυτικός είναι εντελώς ανάλογη. □

Πόρισμα 1.21. *Έστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος και d μια μετρική του X με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *(X,d) είναι διαχωρίσιμος (αντ. πλήρης διαχωρίσιμος) μετρικός χώρος.*
(ii) *Η μετρική τοπολογία τ_d είναι λεπτότερη από την τ.*
(iii) *Ένα υποσύνολο K του X είναι τ–συμπαγές αν και μόνον αν είναι τ_d–συμπαγές.*

Τότε κάθε υποχώρος (αντ. κλειστός υποχώρος) Y του X εφοδιασμένος με τη σχετική τοπολογία τ_Y είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός).

Απόδειξη. Ο χώρος (Y,τ_Y^d) είναι διαχωρίσιμος, άρα ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Η ταυτοτική απεικόνιση

$$I\colon (Y,\tau_Y^d) \to (Y,\tau_Y)$$

είναι συνεχής λόγω της συνθήκης (ii) και έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης λόγω της συνθήκης (iii). Από την Πρόταση 1.19 έπεται άμεσα ότι ο χώρος (Y,τ_Y) είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

Η περίπτωση κατά την οποία ο (X,d) υποτίθεται επιπλέον πλήρης είναι εντελώς ανάλογη. □

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα έπεται και από το Θεώρημα 1.20, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η τοπολογία τ^d συμπίπτει με την τοπολογία τ^k, η οποία αντιστοιχεί στην τ.

Παραδειγμα 1.22. Ένα ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός χώρος δεν είναι αναγκαία k–χώρος. Πράγματι, έστω $X = \ell^1(\mathbb{N})$ και τ η ασθενής τοπολογία του X. Επειδή ο X έχει την ιδιότητα Schur (κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία είναι συγκλίνουσα ως προς τη νόρμα) η κλάση των norm συμπαγών υποσυνόλων του X συμπίπτει με την κλάση των ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του X. Έτσι από το Πόρισμα 1.21 ο (X, w) είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός και κάθε υποσύνολό του με την ασθενή τοπολογία είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Ακόμα παρατηρούμε ότι η τοπολογία τ^κ ταυτίζεται με την τοπολογία της νόρμας, οπότε ο χώρος (X, w) δεν είναι k–χώρος. Σημειώνουμε ότι στη θέση του $\ell^1(\mathbb{N})$ μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε διαχωρίσιμο χώρο Banach με την ιδιότητα Schur.

Η έννοια της απεικόνισης με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης μεταξύ τοπολογικών χώρων μπορεί να επεκταθεί στις άνω ημισυνεχείς συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στα συμπαγή υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 1.23. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Y υπάρχει συμπαγές υποσύνολο L του X τέτοιο ώστε $K \subseteq F(L) = \bigcup_{x \in L} F(x)$.

Παρατηρούμε ότι: (1) Αν η άνω ημισυνεχής συνάρτηση $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης, τότε $Y = F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x)$.

(2) Αν $f : X \to Y$ είναι μια συνεχής συνάρτηση μεταξύ των τοπολογικών χώρων X και Y, τότε η απεικόνιση $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ με $F(x) = \{f(x)\}$ είναι άνω ημισυνεχής με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης αν και μόνον αν η $f : X \to Y$ έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης. Έτσι ο Ορισμός 1.23 επεκτείνει φυσιολογικά τον κλασικό ορισμό.

Παραδειγματα 1.24. **(i)** Η απεικόνιση

$$F : [0,1] \to \mathcal{K}([0,1]) \quad \text{με} \quad F(t) = [0,t]$$

είναι άνω ημισυνεχής με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $[0,1]$ τέτοιο ώστε $F(t) \subseteq U$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq U\,,$$

οπότε για κάθε $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ ισχύει $F(s) \subseteq U$. Άρα η F είναι άνω ημισυνεχής. Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του $[0,1]$, τότε προφανώς υπάρχει $t \in [0,1]$ ώστε $K \subseteq [0,t]$, δηλαδή $K \subseteq F(t)$, οπότε η απεικόνιση F έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

(ii) Έστω X ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος τοπολογικός χώρος. Από τον Ορισμό 1.3 και το Θεώρημα 1.1 έπεται ότι υπάρχει $\Sigma' \subseteq \Sigma$ και $F : \Sigma' \to \mathcal{K}(X)$ τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X να υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ με $K \subseteq F(\sigma)$. Τότε είναι προφανές ότι η συνάρτηση F έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

(iii) Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $F\colon X \to \mathcal{K}(Y)$ συνεχής και επί συνάρτηση, όπου ο χώρος $\mathcal{K}(Y)$ θεωρείται εφοδιασμένος με την τοπολογία Vietoris. Τότε η απεικόνιση F θεωρούμενη ως συνολοσυνάρτηση είναι άνω ημισυνεχής και έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

Μια φυσιολογική συνολοσυνάρτηση με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης είναι η επόμενη:

$$F : \Sigma \to \mathcal{K}(\Sigma) \quad \text{με} \quad F(\sigma) = \Sigma(\sigma) = \prod_{n=1}^{\infty}\{1, 2, \dots \sigma(n)\}$$

Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.25. *Η απεικόνιση $F : \Sigma \to \mathcal{K}(\Sigma)$ με $F(\sigma) = \Sigma(\sigma)$ είναι άνω ημισυνεχής και έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.*

Απόδειξη. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του Σ και $\sigma_0 \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $F(\sigma_0) \subseteq U$, δηλαδή $\Sigma(\sigma_0) \subseteq U$. Επειδή το σύνολο $\Sigma(\sigma_0)$ είναι συμπαγές υπάρχουν $s_1, s_2, \dots, s_N \in S$, τέτοια ώστε

$$\Sigma(\sigma_0) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} I(s_i) \subseteq U.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$|s_1| = |s_2| = \cdots = |s_N|.$$

Πράγματι, για κάθε $s \in S$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$I_s = \bigcup \big\{ I(s^\frown t) : |t| = n \big\}$$

Θέτουμε

$$m = \max\{|s_1|, |s_2|, \dots, |s_N|\}$$

Αν $|s_i| < m$, τότε ισχύει

$$I(s_i) = \bigcup \big\{ I(s^\frown t) : |t| = m - |s_i| \big\}$$

οπότε από τη συμπάγεια του $\Sigma(\sigma_0)$ έπεται το ζητούμενο.
Έστω $m = |s_1| = |s_2| = \ldots = |s_N|$. Ισχυριζόμαστε ότι $F(I(\sigma_0|m)) \subseteq U$,

δηλαδή $\Sigma(\sigma) \subseteq U$ για κάθε $\sigma \in I(\sigma_0|m)$. Έστω $\sigma \in I(\sigma_0|m)$ και $\tau \in \Sigma(\sigma)$. Ορίζουμε $\rho \in \Sigma$ ως εξής:

$$\rho(k) = \begin{cases} \tau(k), & k \leq m \\ \sigma_0(k), & k \geq m+1 \end{cases}$$

Τότε για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$ έχουμε $\rho(k) \leq \sigma(k) = \sigma_0(k)$, άρα $\rho \leq \sigma_0$. Επειδή $\Sigma(\sigma_0) \subset \bigcup_{i=1}^N I(s_i)$ υπάρχει $i = 1, 2, \dots, N$ ώστε $\rho \in I(s_i)$, δηλαδή $\rho|m = s_i$. Άρα $\tau|m = s_i$, οπότε $\tau \in U$. □

Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύουμε ότι η «σύνθεση» άνω ημισυνεχών συναρτήσεων, οι οποίες έχουν την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης είναι άνω ημισυνεχής και έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

Λημμα 1.26. *Έστω X, Y, Z τοπολογικοί χώροι, $\Phi\colon Z \to \mathcal{K}(X)$ και $F\colon X \to \mathcal{K}(Y)$ άνω ημισυνεχείς συναρτήσεις οι οποίες έχουν την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης. Τότε η απεικόνιση $f\colon Z \to \mathcal{K}(Y)$ με $f(z) = F(\Phi(z))$ είναι επίσης άνω ημισυνεχής και έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.*

Αποδειξη. Θεωρούμε ένα ανοικτό υποσύνολο G του Y και $z \in Z$ τέτοιο ώστε

$$f(z) \subseteq G, \quad \text{δηλαδή} \quad F(\Phi(z)) \subseteq G\,.$$

Επειδή η απεικόνιση F είναι άνω ημισυνεχής το σύνολο

$$V = \{x \in X : F(x) \subseteq G\}$$

είναι ανοικτό και επιπλέον $\Phi(z) \subseteq V$. Η Φ είναι άνω ημισυνεχής, άρα υπάρχει W περιοχή του z τέτοια ώστε

$$\Phi(W) \subseteq V\,.$$

Τότε

$$F(\Phi(W)) \subseteq G \quad \text{δηλαδή} \quad f(W) \subseteq G\,,$$

το οποίο σημαίνει ότι η απεικόνιση f είναι άνω ημισυνεχής. Απομένει να δείξουμε ότι η συνάρτηση f έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του Y. Επειδή η F έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης υπάρχει συμπαγές υποσύνολο L του X τέτοιο ώστε $K \subseteq f(L)$. Επίσης η Φ έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης υπάρχει συμπαγές υποσύνολο A του Z με $L \subseteq \Phi(A)$. Τότε

$$F(L) \subseteq F(\Phi(A)), \quad \text{δηλαδή} \quad K \subseteq f(A)\,,$$

άρα η f έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης. □

Ακολούθως γενικεύουμε την Πρόταση 1.19 αποδεικνύοντας ότι η εικόνα ενός ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικού (αντ. ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενου) τοπολογικού χώρου μέσω μιας άνω ημισυνεχούς απεικόνισης με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης είναι επίσης ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικός (αντ. ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος). Με τη βοήθεια αυτού του αποτελέσματος δίνουμε έναν ακόμα χαρακτηρισμό των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων και των ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικών τοπολογικών χώρων.

Πρόταση 1.27. *Έστω X ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός (αντ. ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος) τοπολογικός χώρος και $F\colon X \to \mathcal{K}(Y)$ μια άνω ημισυνεχής απεικόνιση με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης. Τότε ο Y είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός (αντ. ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος) τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. (Αποδεικνύουμε την περίπτωση των ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικών χώρων καθώς η περίπτωση των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων χώρων είναι ανάλογη). Ο χώρος X είναι ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικός, άρα υπάρχει μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση $\Phi : \Sigma \to \mathcal{K}(X)$, τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X να υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ με $L \subseteq \Phi(\sigma)$. Από το Λήμμα 1.26 η συνάρτηση

$$f : \Sigma \to \mathcal{K}(Y) \quad \text{με} \quad f(\sigma) = F(\Phi(\sigma))\,.$$

είναι άνω ημισυνεχής και έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

Απομείνει να δείξουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση f καθιστά το χώρο X ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικό. Έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο του Y. Επειδή η συνάρτηση F έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης, υπάρχει συμπαγές υποσύνολο L του X ώστε $K \subseteq F(L)$. Επίσης υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ ώστε $L \subseteq \Phi(\sigma)$, κατά συνέπεια $K \subseteq F(\Phi(\sigma))$, δηλαδή $K \subseteq f(\sigma)$. □

Πόρισμα 1.28. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$– αναλυτικός).*
(ii) *Υπάρχει $\Sigma' \subseteq \Sigma$ (αντ. $\Sigma' = \Sigma$) και μια άνω ημισυνεχής απεικόνιση $F\colon \Sigma' \to \mathcal{K}(X)$ (αντ. $F\colon \Sigma \to \mathcal{K}(X)$) με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.*

Απόδειξη. **(i)**⇒ **(ii)** Άμεσο από τον ισχυρισμό (iii) του Θεωρήματος 1.1.

(ii)$\Rightarrow$ **(i)** Ο Σ' είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (αντ. Ο Σ είναι Πολωνικός), άρα είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (αντ. ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός). (βλ. Παραδείγματα 1.5 (i)). Τότε από την Πρόταση 1.27 έπεται άμεσα το ζητούμενο. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα γενικεύει το Θεώρημα 1.12 του [**M-S**]. Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος, τότε η τοπολογία Vietoris τ_ν του $\mathcal{K}(X)$ έχει ως βάση τα υποσύνολα του $\mathcal{K}(X)$ της μορφής:

$$\beta(V_1,\dots,V_n)=\left\{K\in\mathcal{K}(X): K\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_i \text{ και } K\cap V_i\neq\emptyset \text{ για } i=1,\dots,n\right\}$$

όπου $n\in\mathbb{N}$ και $V_1,\dots,V_n$ είναι ανοικτά μη κενά υποσύνολα του X.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.29. *Έστω X ένας (Hausdorff και τελείως κανονικός) τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.*
(ii) *Ο χώρος $(\mathcal{K}(X),\tau_\nu)$ είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.*
(iii) *Ο χώρος $(\mathcal{K}(X),\tau_\nu)$ είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. $(i)\Rightarrow(ii)$ Έστω Ω ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος με $X\subseteq\Omega$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(A_n)_n$ συμπαγών υποσυνόλων του Ω τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X και $w\in\Omega\setminus X$ υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ με $K\subseteq A_n$ και $w\notin A_n$. Θέτουμε $B_n=\mathcal{K}(A_n)$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε ο χώρος $\mathcal{K}(\Omega)$ εφοδιασμένος με την τοπολογία Vietoris είναι ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και (B_n) είναι μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του $\mathcal{K}(\Omega)$. Έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{K}(X)$ και $L\in\mathcal{K}(\Omega)\setminus\mathcal{K}(X)$. Θέτουμε $X_K=\bigcup\{A: A\in K\}$. Τότε το X_K είναι συμπαγές υποσύνολο του X και L δεν είναι υποσύνολο του X, οπότε υπάρχει $w\in L$ με $w\notin X$. Τότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $X_K\subseteq A_n$ και $w\notin A_n$.
Ισχυρισμός: $K\subseteq B_n$ και $L\notin B_n$. *Απόδειξη του ισχυρισμού:* Πράγματι, $X_K\subseteq A_n$, οπότε για κάθε $A\in K$ έχουμε $A\subseteq X_K\subseteq A_n$, δηλαδή, $A\in B_n=\mathcal{K}(A_n)$, το οποίο σημαίνει ότι $K\subseteq B_n$. Επιπλέον, $w\notin A_n$. Αν $L\in B_n$, τότε $L\subseteq A_n$, άρα $w\in A_n$, το οποίο είναι άτοπο.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Προφανές.

$(iii)\Rightarrow(i)$ Υπάρχει υποσύνολο Σ' του Σ και μια άνω ημισυνεχής απεικόνιση

$$\Phi:\Sigma'\mapsto\mathcal{K}(\mathcal{K}(X)) \quad \text{με} \quad \mathcal{K}(X)=\Phi(\Sigma')=\bigcup_{\sigma\in\Sigma'}\Phi(\sigma).$$

Ορίζουμε μια απεικόνιση

$$F:\Sigma'\mapsto\mathcal{K}(X) \quad \text{με} \quad F(\sigma)=\bigcup\Phi(\sigma)=\bigcup\{K: K\in\Phi(\sigma)\}.$$

Έστω L ένα συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε $L \in \mathcal{K}(X)$, οπότε υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$, με $L \in \Phi(\sigma)$, κατά συνέπεια έχουμε $L \subseteq F(\sigma)$. Απομένει να δείξουμε ότι η απεικόνιση F είναι άνω ημισυνεχής. Έστω $F(\sigma) \subseteq V$ για κάποιο $\sigma \in \Sigma'$ και V ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Θεωρούμε το σύνολο

$$\beta(V) = \{K : K \in \mathcal{K}(X) \quad \text{με} \quad K \subseteq V\},$$

το οποίο είναι ανοικτό στην τοπολογία Vietoris του $\mathcal{K}(X)$. Προφανώς $\Phi(\sigma) \subseteq \beta(V)$. Από την άνω ημισυνέχεια της απεικόνισης Φ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\Phi(I(\sigma|n) \cap \Sigma') \subseteq \beta(V),$$

δηλαδή για κάθε $\tau \in \Sigma'$ με $\tau|n = \sigma|n$ έχουμε $\Phi(\tau) \subseteq \beta(V)$. Τότε $K \subseteq V$ για κάθε $K \in \Phi(\tau)$, οπότε $F(\tau) \subseteq V$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

3. Χαρακτηρισμοί τύπου Choquet των ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικών χώρων.

Όπως είναι γνωστό ο Choquet όρισε τους $\mathcal{K}$–αναλυτικούς χώρους ως εκείνους τους τοπολογικούς χώρους, οι οποίοι είναι συνεχείς εικόνες Κσδ υποσυνόλων συμπαγών χώρων (βλ. [**J-R**, p. 37]).

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε ότι οι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικοί χώροι μπορούν να χαρακτηρισθούν με έναν ανάλογο τρόπο, ισχυροποιώντας την έννοια του Κσδ συνόλου και αντικαθιστώντας τη συνεχή απεικόνιση με μια (συνεχή) απεικόνιση, η οποία έχει επιπλέον την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο A, ενός τοπολογικού χώρου X (ο οποίος υποτίθεται τελείως κανονικός και Hausdorff) λέγεται Κσδ αν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{K_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ συμπαγών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m}$.

Με άλλα λόγια το A είναι Κσδ υποσύνολο του X, αν μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη τομή σ–συμπαγών υποσυνόλων του X.

Με τον επόμενο ορισμό ισχυροποιούμε την έννοια του Κσδ υποσυνόλου ενός τοπολογικού χώρου.

Ορισμος 1.30. Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X θα λέγεται ισχυρά Κσδ αν υπάρχει μια διπλή ακολουθία $\{K_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ συμπαγών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε:

(i) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m}$

(ii) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του A και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $K \subseteq K_{n,m}$

$$\begin{array}{cccccc}
K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,m} & \dots & \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{1,m} \\
K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,m} & \dots & \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{2,m} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,m} & \dots & \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m}
\end{array}$$

Παρατηρηση 1.31. **(i)** Προφανώς κάθε ισχυρά Κσδ υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X είναι Κσδ υποσύνολο του X.

(ii) Είναι απλό να ελέγξουμε ότι αν A είναι Κσδ (αντ. ισχυρά Κσδ) υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X και B ένα σχετικά κλειστό υποσύνολο του A, τότε το B είναι Κσδ (αντ. ισχυρά Κσδ) υποσύνολο του X.

Παραθέτουμε τώρα κάποια απλά παραδείγματα ισχυρά Κσδ συνόλων σε (Hausdorff και τελείως κανονικούς) τοπολογικούς χώρους. Μια κλάση τοπολογικών χώρων, οι οποίοι είναι ισχυρά Κσδ σε κάθε χώρο, στον οποίο περιέχονται, είναι οι ημισυμπαγείς (hemicompact) τοπολογικοί χώροι. Υπενθυμίζουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται ημισυμπαγής (hemicompact) αν υπάρχει μια ακολουθία (K_n) συμπαγών υποσυνόλων του X, η οποία κυριαρχεί τα συμπαγή υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq K_n$ (βλ. [**E**, pp. 216–217]). Προφανώς κάθε ημισυμπαγής τοπολογικός χώρος είναι σ–συμπαγής, διότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Παραδειγματα 1.32. **(α)** Κάθε σ–συμπαγής και τοπικά συμπαγής χώρος είναι ημισυμπαγής ([**E**, p. 250]). Μια σημαντική κλάση τέτοιων χώρων είναι οι τοπικά συμπαγείς μετρικοποιήσιμοι και διαχωρίσιμοι χώροι. Ιδιαίτερα ένα ανοικτό και F_σ υποσύνολο ενός συμπαγούς χώρου είναι στη σχετική τοπολογία τοπικά συμπαγής και σ–συμπαγής χώρος, κατά συνέπεια ημισυμπαγής.

(β) Κάθε αριθμήσιμος χώρος Hausdorff, του οποίου τα συμπαγή υποσύνολα είναι πεπερασμένα είναι ημισυμπαγής.

(γ) Κάθε δυϊκός χώρος Banach X^*, εφοδιασμένος με τη w^* τοπολογία είναι ημισυμπαγής. Πράγματι, έχουμε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_{X^*}$ και κάθε nB_{X^*} είναι

w^*–συμπαγές. Επίσης κάθε w^*–συμπαγές υποσύνολο L του X^* είναι norm φραγμένο, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq nB_{X^*}$. Έπεται ότι ο χώρος (X^*, w^*) είναι ημισυμπαγής.

Πρόταση 1.33. *Έστω X, K τοπολογικοί χώροι, X ημισυμπαγής και $X \subseteq K$. Τότε το X είναι ισχυρά $K\sigma\delta$ υποσύνολο του K.*

Απόδειξη. Έστω (K_n) μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X, η οποία κυριαρχεί τα συμπαγή υποσύνολα του X. Για κάθε n, $m \in \mathbb{N}$ θέτουμε $K_{n,m} = K_m$ και έχουμε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} X = X.$$

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq K_m = K_{n,m}$, άρα το X είναι ισχυρά $K\sigma\delta$ υποσύνολο του K. □

Πρόταση 1.34. *Κάθε ισχυρά $K\sigma\delta$ υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X είναι με τη σχετική τοπολογία ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $(K_{n,m})$ μια διπλή ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X, η οποία πληροί τις συνθήκες (i) και (ii) του ορισμού 1.30. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(K_{n,m})_m$ είναι αύξουσα (αντικαθιστώντας αν είναι αναγκαίο τα σύνολα $K_{n,m}$ με τα σύνολα $\Omega_{n,m} = \bigcup_{i=1}^{m} K_{n,i}$). Για κάθε $s = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in S$ θέτουμε

$$B_s = \bigcap_{i=1}^{n} K_{i,m_i}\,.$$

Έστω K συμπαγές υποσύνολο του A. Τότε από τη συνθήκη (ii) του ορισμού 1.30 για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_i \in \mathbb{N}$ ώστε $K \subseteq K_{i,m_i}$. Αν θέσουμε $\sigma = (m_1, m_2, \ldots, m_i \ldots)$, τότε έχουμε

$$K \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} K_{i,m_i}, \quad \text{οπότε} \quad K \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \subseteq A\,.$$

Επειδή η απεικόνιση

$$F\colon \Sigma \to \mathcal{K}(X) \quad \text{με} \quad F(\sigma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n}$$

είναι (όπως εύκολα αποδεικνύεται) άνω ημισυνεχής ο A είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός χώρος (βλ. Σημείωση μετά τον Ορισμό 1.3). □

Πόρισμα 1.35. *Έστω A ένα μετρικοποιήσιμο και ισχυρά $K\sigma\delta$ υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X. Τότε το A είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη Πρόταση 1.34 το A είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός χώρος, συνεπώς από την Παρατήρηση 1.13 έχουμε το συμπέρασμα. □

Στόχος μας στη συνέχεια είναι να αποδείξουμε το χαρακτηρισμό των ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικών χώρων ως εικόνων ισχυρά Κσδ συνόλων μέσω απεικονίσεων με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης. Θα χρειασθούμε κάποια βοηθητικά αποτελέσματα, τα οποία όμως έχουν και αυτοτελή αξία. Σημειώνουμε ότι οποτεδήποτε το επίρρημα ισχυρά εμφανίζεται σε παρένθεση το αποτέλεσμα ισχύει και για τα κλασικά Κσδ σύνολα και η απόδειξη είναι ανάλογη.

Πρόταση 1.36. *Έστω $(A_i)_i$ ακολουθία (ισχυρά) Κσδ υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X. Τότε το σύνολο $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ είναι (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Για κάθε $i = 1, 2, \cdots$ υπάρχει διπλή ακολουθία $(K^i_{n,m})_{n,m}$ συμπαγών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K^i_{n,m}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε L συμπαγές υποσύνολο του X υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $L \subseteq K^i_{n,m}$. Για κάθε $i, n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $\bigcup_{m=1}^{\infty} K^i_{n,m}$. Το πλήθος των συνόλων $K^i_{n,m}$ είναι αριθμήσιμο και επιπλέον έχουμε

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i,n} \bigcup_{m=1}^{\infty} K^i_{n,m}$$

Έστω $i, n \in \mathbb{N}$ και L συμπαγές υποσύνολο του A. Τότε έχουμε $L \subseteq A_i$, οπότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $L \subseteq K^i_{n,m}$. Άρα το A είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του X. □

Πρόταση 1.37. *Έστω X τοπολογικός χώρος, A, Y υποσύνολα του X τέτοια ώστε $A \subseteq Y$ και A (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του X. Αν Y είναι (ημισυμπαγής υποχώρος του X) σ–συμπαγές υποσύνολο του X, τότε το A είναι (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του Y.*

Απόδειξη. Έστω $K_{n,m}$ και Ω_l, n, m, $l \in \mathbb{N}$ συμπαγή υποσύνολα του X τέτοια ώστε

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m} \quad \text{και} \quad Y = \bigcup_{l=1}^{\infty} \Omega_l \,.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} A &= A \bigcap Y \\ &= \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m}\right] \bigcap \left[\bigcup_{l=1}^{\infty} \Omega_l\right] \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\bigcup_{l=1}^{\infty} K_{n,m} \bigcap \Omega_l\right] \\ &= \bigcap_{n} \bigcup_{m,l} \left(K_{n,m} \bigcap \Omega_l\right) . \end{aligned}$$

από το οποίο έπεται το συμπέρασμα. □

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο δύο (ισχυρά) Κσδ υποσυνόλων είναι (ισχυρά) Κσδ, κατά συνέπεια επαγωγικά προκύπτει ότι η κλάση των (ισχυρά) Κσδ υποσυνόλων είναι κλειστή ως προς τα πεπερασμένα γινόμενα. Επίσης αν θεωρήσουμε μια ακολουθία $(A_i)_i$ από (ισχυρά) Κσδ υποσύνολα των συμπαγών χώρων $(X_i)_i$ αντιστοίχως, τότε το γινόμενο $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ είναι (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του γινομένου $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Πρόταση 1.38. *Έστω A_1, A_2 (ισχυρά) Κσδ υποσύνολα των τοπολογικών χώρων X_1 και X_2 αντιστοίχως. Τότε το σύνολο $A_1 \times A_2$ είναι (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του τοπολογικού χώρου $X_1 \times X_2$.*

Απόδειξη. Για κάθε $i = 1, 2$ υπάρχει διπλή ακολουθία $\left(K^i_{n,m}\right)_{n,m}$ συμπαγών υποσυνόλων του X_i, η οποία πληροί τις συνθήκες (i), (ii) του ορισμού 1.30. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την αριθμήσιμη οικογένεια

$$\left\{ K^1_{n,m_1} \times K^2_{n,m_2} \mid m_1, m_2 \in \mathbb{N} \right\}$$

συμπαγών υποσυνόλων του $X_1 \times X_2$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K^1_{n,m_1}\right) \times \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K^2_{n,m_2}\right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} K^1_{n,m} \times \bigcup_{m=1}^{\infty} K^2_{n,m}\right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup \left\{ K^1_{n,m_1} \times K^2_{n,m_2} \mid m_1, m_2 \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

Έστω L συμπαγές υποσύνολο του $A_1 \times A_2$. Τότε υπάρχουν L_1, L_2 συμπαγή υποσύνολα των A_1 και A_2 αντιστοίχως, ώστε $L \subseteq L_1 \times L_2$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $L_1 \subseteq K^1_{n,m_1}$ και $L \subseteq K^2_{n,m_2}$, οπότε

$$L_1 \times L_2 \subseteq K^1_{n,m_1} \times K^2_{n,m_2}$$

κατά συνέπεια

$$L \subseteq K^1_{n,m_1} \times K^2_{n,m_2}$$

Άρα το σύνολο $A_1 \times A_2$ είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του $X_1 \times X_2$. □

Πρόταση 1.39. *Έστω A_i (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του συμπαγούς τοπολογικού χώρου X_i για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε το σύνολο $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ είναι (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του χώρου $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\prod_{i=1}^{n} A_i$ είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του τοπολογικού χώρου $\prod_{i=1}^{n} X_i$. Ο χώρος $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ είναι συμπαγής, άρα το σύνολο $\prod_{i=1}^{n} A_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του τοπολογικού χώρου $\prod_{i=1}^{n} X_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$, δηλαδή του χώρου $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Επειδή, από την Πρόταση 1.36, αριθμήσιμη τομή ισχυρά Κσδ υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο, προκύπτει ότι το σύνολο

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} A_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \right)$$

είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Επίσης

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} A_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \right) = \prod_{i=1}^{\infty} A_i\,,$$

οπότε έπεται το ζητούμενο. □

Παρατηρηση 1.40. Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση της συμπάγειας για τους χώρους X_i. Πράγματι έστω $A_i = X_i = \mathbb{N}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, όπου ο χώρος $\mathbb{N}$ θεωρείται εφοδιασμένος με τη διακριτή τοπολογία. Τότε

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} X_i = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \Sigma\,.$$

Όμως ο χώρος Σ του Baire δεν είναι Κσδ υποσύνολο του εαυτού του, διότι τότε θα ήταν σ–συμπαγής και αυτό αποκλείεται από το θεώρημα του Baire. Σημειώνουμε ότι ένα Κσδ υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου περιέχεται σε κάποιο σ–συμπαγές υποσύνολο του χώρου.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι κατά κάποιον τρόπο το αντίστροφο του Πορίσματος 1.35

Θεωρημα 1.41. *Κάθε Πολωνικός χώρος M είναι ισχυρά Κσδ σε κάθε συμπαγοποίησή του.*

Απόδειξη. Έστω K μια συμπαγοποίηση του M. Θεωρούμε μια πλήρη μετρική d, η οποία επάγει την τοπολογία του M. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in M$ επιλέγουμε $V_n(x)$ ανοικτό υποσύνολο του K τέτοιο ώστε $diam(V_n(x) \cap M) \leq \frac{1}{n}$. Ορίζουμε $V_n = \bigcup_{x \in M} V_n(x)$. Είναι εύκολο να δούμε από την πληρότητα του μετρικού χώρου (M, d) ότι $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Για κάθε $x \in M$ θεωρούμε $W_n(x)$ ένα ανοικτό υποσύνολο του K τέτοιο ώστε

$$x \in W_n(x) \subseteq \overline{W_n(x)} \subseteq V_n(x) \,.$$

Ο χώρος M είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, κατά συνέπεια Lindelöf , οπότε το ανοικτό κάλυμμα $\{ V_n(x) : x \in M \}$ του M έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε ακολουθία $(x_{n,m})_m$ του M τέτοια ώστε

$$M \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} W_n(x_{n,m}) \,.$$

Τότε έχουμε

$$M \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{W_n(x_{n,m})} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} V_n(x_{n,m}) \subseteq M \,,$$

κατά συνέπεια

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{W_n(x_{n,m})} \,.$$

Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$G_{n,m} = \bigcup_{k=1}^{m} \overline{W_n(x_{n,k})}$$

και έχουμε

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} G_{n,m} \,.$$

Έστω L συμπαγές υποσύνολο του M και $n \in \mathbb{N}$. Τότε το ανοικτό κάλυμμα $(W_n(x_{n,m}))_{m=1}^{\infty}$ του L έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$L \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \overline{W_n(x_{n,k})}, \quad \text{άρα} \quad L \subseteq G_{n,m} \,.$$

Επομένως το M είναι ισχυρά $\mathcal{K}\sigma\delta$ υποσύνολο του K. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.42. *Έστω X (Hausdorff και τελείως κανονικός) τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο X είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός.*

(ii) *Υπάρχει ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος Ω, ένα ισχυρά $\mathcal{K}\sigma\delta$ υποσύνολο C του Ω και μια (συνεχής) συνάρτηση $f\colon C \to X$ με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης.*

Απόδειξη. **(ii)** $\Rightarrow$ **(i)** Έπεται άμεσα από την Πρόταση 1.34 και την Πρόταση 1.19.

(i) $\Rightarrow$ **(ii)** Από το Θεώρημα 1.15 ο X είναι εικόνα, μέσω μιας απεικόνισης f με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης, ενός κλειστού υποσυνόλου C ενός χώρου της μορφής $M \times K$, όπου M είναι ένας Πολωνικός χώρος και K ένας συμπαγής χώρος. Έστω K_0 μια συμπαγοποίηση του M. Από το Θεώρημα 1.41 ο M είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του K_0, συνεπώς από την Πρόταση 1.38 το $M \times K$ είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του συμπαγούς χώρου $\Omega = K_0 \times K$. Έπεται τότε ότι C ως κλειστό υποσύνολο του $M \times K$ είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του Ω. (βλ. Παρατήρηση 1.31) □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο αποδεικνύοντας ότι αν ένα σύνολο A έχει την ιδιότητα ισχυρά Κσδ, τότε και ο υπερχώρος $\mathcal{K}(A)$ την έχει.

Θεώρημα 1.43. *Έστω A ένα ισχυρά Κσδ υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X. Τότε το $\mathcal{K}(A)$ είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του $\mathcal{K}(X)$.*

Απόδειξη. Το A είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του τοπολογικού χώρου X, άρα υπάρχει μια διπλή ακολουθία $K_{n,m}$, n, $m \in \mathbb{N}$ συμπαγών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m}$ και για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του A και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $L \subseteq K_{n,m}$. Θα δείξουμε ότι η διπλή ακολουθία $\mathcal{K}(K_{n,m})$, n, $m \in \mathbb{N}$ συμπαγών υποσυνόλων του $\mathcal{K}(X)$, καθιστά το $\mathcal{K}(A)$ ένα ισχυρά Κσδ υποσύνολο του $\mathcal{K}(X)$.
Βήμα 1 Ισχυρισμός:

$$\mathcal{K}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}(K_{n,m})$$

Έστω $K \in \mathcal{K}(A)$. Επειδή το A είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του X για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $K \subseteq K_{n,m}$, με άλλα λόγια $K \in \mathcal{K}(K_{n,m})$, οπότε $K \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}(K_{n,m})$. Επομένως

$$\mathcal{K}(A) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}(K_{n,m})\,.$$

Έστω $K \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}(K_{n,m})$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $K \in \mathcal{K}(K_{n,m})$, δηλαδή $K \subseteq K_{n,m}$, οπότε $K \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m}$, δηλαδή $K \subseteq A$. Επομένως

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}(K_{n,m}) \subseteq \mathcal{K}(A)$$

και η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.
Βήμα 2 Ισχυρισμός:
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε L συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{K}(A)$ υπάρχει

$m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq \mathcal{K}(K_{n,m})$.
Έστω $n \in \mathbb{N}$ και L συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{K}(A)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$X_L = \bigcup L = \bigcup \{ K \mid K \in L \},$$

το οποίο είναι συμπαγές υποσύνολο του A. Τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $X_L \subseteq K_{n,m}$. Επομένως για κάθε $K \in L$ έχουμε $K \subseteq K_{n,m}$, δηλαδή $K \in \mathcal{K}(K_{n,m})$. Άρα $L \subseteq \mathcal{K}(K_{n,m})$ και η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Άρα το $\mathcal{K}(A)$ είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του $\mathcal{K}(X)$. □

Παρατηρηση 1.44. Αν το A είναι Κσδ υποσύνολο ενός συμπαγούς χώρου X, τότε το $\mathcal{K}(A)$ δεν είναι κατ' ανάγκη Κσδ υποσύνολο του υπερχώρου $\mathcal{K}(X)$. Πράγματι, αν $X = [0,1]$ και $A = \mathbb{Q} \cap X$, τότε το A είναι Κσ υποσύνολο του X, αλλά το $\mathcal{K}(A)$ δεν είναι αναλυτικό σύνολο.

Ερωτηση 1.45. Έστω K συμπαγής χώρος και $X \subseteq K$.

(i) Υποθέτουμε ότι ο X είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός υποχώρος του K. Είναι τότε ο X ισχυρά Κσδ ή τουλάχιστον Κσδ υποσύνολο του K; Τι συμβαίνει αν υποθέσουμε ότι το $\mathcal{K}(X)$ είναι Κσδ υποσύνολο του $\mathcal{K}(K)$;
(ii) Υποθέτουμε ότι ο X είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του K. Είναι τότε ο X ισχυρά Κσδ σε κάθε άλλο συμπαγή χώρο στον οποίο περιέχεται ομοιομορφικά;

Σχολιο. Είναι σαφές ότι αν το πρώτο ερώτημα έχει καταφατική απάντηση, τότε και το δεύτερο θα έχει καταφατική απάντηση. Τα αντίστοιχα ερωτήματα στην κλασική περίπτωση, όπου έχουμε παντού παραλλείψει το επίρρημα ισχυρά έχουν και τα δύο αρνητική απάντηση. Πράγματι, στο πρώτο ερώτημα αρκεί να θεωρήσουμε ένα Borel και όχι Κσδ (ή ένα αναλυτικό και όχι Borel) υποσύνολο του $K = [0,1]$. Όσον αφορά στο δεύτερο ερώτημα ένα παράδειγμα κατασκεύασε πρώτος ο Talagrand στο [**T2**] και ένα δεύτερο μπορεί να βρεθεί στο [**A-A-M 1**].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Χώροι Banach ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενοι στην ασθενή τοπολογία (SWCD χώροι Banach)

1. Βασικές ιδιότητες και χαρακτηρισμοί της κλάσης των SWCD χώρων Banach

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε και μελετάμε μια νέα κλάση χώρων Banach, οι οποίοι είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενοι στην ασθενή τους τοπολογία και τους ονομάζουμε ισχυρά ασθενώς αριθμήσιμα καθοριζόμενους (SWCD). Η κλάση των SWCD χώρων Banach περιέχει γνήσια την κλάση των ισχυρά ασθενώς $\mathcal{K}$–αναλυτικών (SWKA) χώρων Banach, η οποία εισήχθη από τους Μερκουράκη και Σταμάτη στο [**M-S**]. Οι δύο αυτές κλάσεις γενικεύουν την αντίστοιχη κλάση των ισχυρά ασθενώς συμπαγώς παραγόμενων (SWCG) χώρων Banach, η οποία εισήχθη από τους Schlüchterman και Wheeler στο [**S-W**]. Οι παραπάνω κλάσεις είναι διακριτές και υποκλάσεις των γνωστών και ευρέως μελετημένων κλάσεων των WCD, WKA και WCG χώρων Banach αντιστοίχως. Αξίζει να σημειώσουμε ότι καμία από τις παραπάνω κλάσεις δεν περιέχει όλους του διαχωρίσιμους χώρους Banach.

Κατ' αρχάς δίνουμε ένα χαρακτηρισμό των SWCD χώρων Banach, χρησιμοποιώντας το χώρο $\mathcal{K}(M)$ των συμπαγών μη κενών υποσυνόλων ενός διαχωρίσιμου μετρικού χώρου M, ανάλογο του χαρακτηρισμού των WKA ([**T1**]), WCD ([**M1**], [**A-M**], [**C-O**]) και SWKA ([**M-S**]) χώρων Banach. Αποδεκνύουμε επίσης ότι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach X, ο οποίος δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$ είναι SWCD αν και μόνον αν έχει διαχωρίσιμο δυϊκό.

Στη συνέχεια εξετάζουμε κατά πόσο οι κλάσεις των SWCD και SWKA χώρων Banach είναι κλειστές ως προς τα ευθέα αθροίσματα. Η σύγκριση με τις αντίστοιχες ιδιότητες των γνωστών κλάσεων των WCG, WKA και WCD χώρων Banach είναι εντυπωσιακή, διότι οι τελευταίες κλάσεις είναι κλειστές ως προς τα αυθαίρετα ℓ^p , $p > 1$ και c_0–ευθέα αθροίσματα, ενώ οι κλάσεις των SWCD και SWKA χώρων Banach είναι κλειστές μόνο ως προς τα αριθμήσιμα ℓ^p–ευθέα αθροίσματα με $p \geq 1$. Όσον αφορά στα αριθμήσιμα c_0–ευθέα αθροίσματα έχουμε καταφατική απάντηση σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις, ενώ η γενική περίπτωση παραμένει ανοικτό πρόβλημα.

Τέλος αποδεικνύουμε ότι ο χώρος Banach $c_0(\omega_1)$ δεν είναι SWCD παρ' ότι είναι WCG. Επιπλέον ένας χώρος Banach της μορφής $C(K)$, όπου K είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος είναι SWCD αν και μόνον αν το σύνολο K είναι αριθμήσιμο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1. Ένας χώρος Banach X θα λέγεται *ασθενώς ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (strongly weakly countably determined, SWCD)* αν είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος στην ασθενή του τοπολογία.

Σημειώνουμε ότι αν ο χώρος (X, w) είναι ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικός (WKA), τότε ο χώρος Banach X καλείται ισχυρά ασθενώς $\mathcal{K}$-αναλυτικός (SWKA). Η κλάση των SWKA χώρων Banach εισάγεται στο [**M-S**]. Ακόμη παρατηρούμε ότι η κλάση των SWCD χώρων Banach περιέχεται στην κλάση των WCD (όπως η κλάση των SWKA περιέχεται στην κλάση των WKA χώρων Banach).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.2. Ένας χώρος Banach X είναι SWCD αν και μόνον αν ο τοπολογικός χώρος (B_X, w) είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Η μια κατεύθυνση είναι προφανής, διότι ο χώρος (B_X, w) είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου X. Για την αντίθετη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι ο χώρος (B_X, w) είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Τότε υπάρχει ένα υποσύνολο Σ' του Σ και μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση $F : \Sigma' \to \mathcal{K}(B_X)$ η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (iii) του Θεωρήματος 1.1. Ορίζουμε μια συνάρτηση

$$\Phi : \Sigma' \times \mathbb{N} \to \mathcal{K}(X) \quad \text{με} \quad \Phi(\sigma, n) = nF(\sigma)$$

η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (iii) του Θεωρήματος 1.1 και καθιστά το χώρο X έναν SWCD χώρο.

Ο επόμενος χαρακτηρισμός είναι μάλλον μια απλή συνέπεια του Θεωρήματος 1.1. Ένας ανάλογος χαρακτηρισμός ισχύει βέβαια και για τους WCD χώρους Banach (βλ. [**T1**], [**D-G-Z**]).

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3. *Έστω X χώρος Banach. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) *Ο χώρος X είναι SWCD.*
(ii) *Υπάρχει μια ακολουθία (K_n) w^*-συμπαγών υποσυνόλων X^{**} με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X και για κάθε $x^{**} \in X^{**} \setminus X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq K_n$ και $x^{**} \notin K_n$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. **(i) ⇒ (ii)** Υποθέτουμε ότι ο χώρος Banach X είναι SWCD. Τότε η μοναδιαία μπάλα B_X του X εφοδιασμένη με την ασθενή τοπολογία είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος χώρος, ως κλειστός υπόχωρος ενός ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενου χώρου. Επομένως υπάρχει μια ακολουθία (K_n) από w^*-συμπαγή υποσύνολα του $B_{X^{**}}$ η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (i) του Θεωρήματος 1.1. Είναι εύκολο να δούμε ότι η αριθμήσιμη οικογένεια mK_n, $m \geq 1$, $n \geq 1$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

(ii)$\Rightarrow$ **(i)** Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια τέτοια ακολουθία (K_n), η οποία διαχωρίζει τα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του X από τα στοιχεία του $X^{**} \setminus X$. Τότε η ακολουθία $(K_n \cap B_{X^{**}})$ των w^*-συμπαγών υποσυνόλων του $B_{X^{**}}$ ικανοποιεί τον ισχυρισμό (i) του Θεωρήματος 1.1, οπότε ο χώρος (B_X, w) είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος, κατά συνέπεια ο χώρος X είναι SWCD. $\square$

Πρόταση 2.4. *Η κλάση των SWCD χώρων Banach είναι κλειστή ως προς τους κλειστούς υποχώρους και τα πεπερασμένα γινόμενα.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.17 έπεται άμεσα ότι η κλάση των SWCD χώρων Banach είναι κλειστή ως προς τους κλειστούς υποχώρους και τα πεπερασμένα γινόμενα. $\square$

Πρόταση 2.5. *Ο χώρος Banach X είναι SWCD αν και μόνον αν ο υπερχώρος $\mathcal{K}(X)$ εφοδιασμένος με την τοπολογία Vietoris (η οποία επάγεται από την ασθενή τοπολογία του X) είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος.*

Απόδειξη. Άμεση από το Θεώρημα 1.29. $\square$

Παραδείγματα 2.6. **(i)** Κάθε SWKA χώρος Banach είναι SWCD. Ειδικότερα, κάθε SWCG χώρος Banach είναι SWCD. (βλ. [**M-S**])

(ii) Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach με διαχωρίσιμο δυϊκό είναι SWCD. Αυτό συμβαίνει, διότι η μοναδιαία μπάλα (B_X, w) του X είναι διαχωρίσιμος και μετρικοποιήσιμος χώρος, άρα ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Ειδικότερα ο χώρος $c_0(\mathbb{N})$ είναι SWCD, αλλά δεν είναι SWKA. (βλ. [**M-S**, Prop. 1.9 , Cor. 1.10]).

(iii) Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach X με την ιδιότητα Schur είναι SWKA. Πράγματι, από το Πόρισμα 1.21 και το παράδειγμα το οποίο ακολουθεί έπεται ότι κάθε υποσύνολο A του X με την ασθενή τοπολογία είναι ένας ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος τοπολογικός χώρος. Ιδιαίτερα ο ίδιος ο X είναι SWKA. Βέβαια το αποτέλεσμα αυτό έπεται και από το γεγονός ότι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach με την ιδιότητα Schur είναι SWCG. Υπενθυμίζουμε ότι ο χώρος $\ell^1(\mathbb{N})$ έχει την ιδιότητα Schur.

(iv) Αν ο δυϊκός χώρος X^* είναι διαχωρίσιμος, ο Y είναι αυτοπαθής και ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $X \times Y$, τότε ο Z είναι SWCD. (βλ. Πρόταση 2.4 και Παράδειγμα (ii) παραπάνω)

Δίνουμε στη συνέχεια ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό των SWCD χώρων. (βλ. [**M-S**, Prop. 1.7] για έναν παρόμοιο χαρακτηρισμό των SWKA χώρων Banach). Ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός για WCD χώρους, ο οποίος είναι το Θεώρημα 0.18, έχει αποδειχθεί πρώτα στο [**M1**] (βλ. επίσης [**A-M**, Th. 3.16]) και ανεξάρτητα στο [**C-O**, Cor. 4.1].

Ένας ανάλογος χαρακτηρισμός των ασθενώς $\mathcal{K}$-αναλυτικών χώρων Banach οφείλεται στον Talagrand, [**T1**, Prop. 6.13].

Πρόταση 2.7. *Έστω X ένας χώρος Banach. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο χώρος X είναι SWCD.

(ii) Υπάρχει ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος M και μια οικογένεια $\{W_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του X (αντ. του B_X) με τις ακόλουθες ιδιότητες:

  (α) Αν $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$, τότε $W_{K_1} \subseteq W_{K_2}$

  (β) Για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X (αντ. του B_X) υπάρχει $K \in \mathcal{K}(M)$ τέτοιο ώστε $L \subseteq W_K$.

Απόδειξη. Επειδή ο χώρος Banach X εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία είναι Hausdorff και τελείως κανονικός και επιπλέον τα σχετικά αριθμήσιμα συμπαγή υποσύνολα του χώρου (X, w) είναι σχετικά συμπαγή, το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από την Παρατήρηση 1.6. Προτιμούμε πάντως να δώσουμε μια απευθείας απόδειξη αυτού του αποτελέσματος.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Άμεση συνέπεια (του εύκολου μέρους) του αποτελέσματος το οποίο περιγράφεται στην Παρατήρηση 1.6.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω $\{W_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ μια οικογένεια ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του B_X που πληρούν τις ιδιότητες (α) και (β) της συνθήκης (ii). Τότε έπεται, από το χαρακτηρισμό των WCD χώρων Banach, που αναφέρθηκε παραπάνω, ότι ο X είναι WCD, άρα το σύνολο (B_{X^*}, w^*) είναι Gul'ko συμπαγές. (Ειδικότερα αυτός ο χώρος είναι αγγελικός). Έστω $\{V_n : n \geq 1\}$ μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του διαχωρίσιμου μετρικού χώρου $\mathcal{K}(M)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε Ω_n να είναι η w^*-κλειστότητα του συνόλου $\bigcup\{W_K : K \in V_n\}$ στο $B_{X^{**}}$. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η ακολουθία (Ω_n) των w^*-συμπαγών υποσυνόλων του $B_{X^{**}}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (i) του Θεωρήματος 1.1. $\square$

Η κλάση των SWCD χώρων Banach δεν είναι κλειστή ως προς τις συνεχείς γραμμικές απεικονίσεις (βλ. επίσης [**M-S**, Remark 1.16]). Πράγματι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach είναι χώρος πηλίκο του $\ell^1(\mathbb{N})$, αλλά όπως θα αποδειχθεί παρακάτω (βλ. Παρατήρηση 2.13) ένας διαχωρίσιμος χώρος

Banach με μη διαχωρίσιμο δυϊκό, ο οποίος δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$ δεν είναι SWCD. Ισχύει όμως το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο γενικεύει το [**S-W**, Th. 2.7].

Πρόταση 2.8. *Έστω X χώρος Banach και Y ένας αυτοπαθής υπόχωρος του X. Τότε ο χώρος X είναι SWCD (αντ. SWKA) αν και μόνον αν ο χώρος X/Y είναι SWCD (αντ. SWKA).*

Απόδειξη. Όπως έχει αποδειχθεί στο [**S-W**, Th. 2.7], αν Y είναι ένας αυτοπαθής υπόχωρος ενός χώρου Banach X, τότε η κανονική απεικόνιση $q : X \to X/Y$ έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης ως προς την ασθενή τοπολογία. Πράγματι, είναι μάλλον εύκολο να δούμε ότι αν K είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του χώρου X/Y και $\delta > 0$, τότε το σύνολο $\Omega = B_X(0,\delta)\cap q^{-1}(K)$ είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και αν επιπλέον $\delta > \sup\{\|\hat{x}\| : \hat{x} \in K\}$, τότε $q(\Omega) = K$.

Θα εξετάσουμε την περίπτωση των SWCD χώρων. (Η περίπτωση των SWKA χώρων χρησιμοποιεί την Prop. 1.7 του [**M-S**]).

Η μια κατεύθυνση είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.19.

Για την αντίστροφη, έστω $\{W_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ μια οικογένεια ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του $B_{X/Y}$, η οποία κάνει το χώρο X/Y έναν SWCD χώρο σύμφωνα με την Πρόταση 2.7. Θέτουμε $\Omega_K = B_X \cap q^{-1}(W_K)$ για κάθε $K \in \mathcal{K}(M)$. Τότε κάθε Ω_K είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του B_X και αν $K_1 \subseteq K_2$, τότε $\Omega_{K_1} \subseteq \Omega_{K_2}$. Έστω Ω ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του B_X. Τότε $q(\Omega) \subseteq q(B_X) \subseteq B_{X/Y}$, οπότε υπάρχει κάποιο K τέτοιο ώστε $q(\Omega) \subseteq W_K$. Τότε έχουμε $\Omega \subseteq q^{-1}(W_K) \cap B_X = \Omega_K$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης. □

Παρατηρηση 2.9. Ανάλογο αποτέλεσμα της Πρότασης 2.8 για WCD και ασθενώς $\mathcal{K}$–αναλυτικούς χώρους Banach είναι επίσης αληθές. (βλ. επίσης [**S-W**, Th. 2.7]) Για να το αποδείξουμε χρησιμοποιούμε το χαρακτηρισμό των WCD χώρων, ο οποίος αναφέρθηκε παραπάνω και το αντίστοιχο αποτέλεσμα, το οποίο χαρακτηρίζει τους ασθενώς $\mathcal{K}$–αναλυτικούς χώρους Banach, του Talagrand ([**T1**, Prop. 6.13])

Στη συνέχεια δίνουμε ένα χαρακτηρισμό των διαχωρίσιμων SWCD χώρων Banach, οι οποίοι δεν περιέχουν τον $\ell^1(\mathbb{N})$, καθώς και ένα κριτήριο, το οποίο σε κάποιες περιπτώσεις επιτρέπει να αποφανθούμε ότι ένας χώρος Banach δεν είναι SWCD. Οι αποδείξεις αυτών των αποτελεσμάτων ακολουθούν τις βασικές γραμμές της απόδειξης των αντίστοιχων αποτελεσμάτων για SWKA χώρους Banach, οι οποίες υπάρχουν στο [**M-S**].

Στα επόμενα αποτελέσματα με T θα συμβολίζουμε το δυαδικό δένδρο, δηλαδή, $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0,1\}^n$ διατεταγμένο (όπως το δένδρο $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$) από τη σχέση « το s είναι αρχικό τμήμα του t», η οποία συμβολίζεται με $s \leq t$.

ΛΗΜΜΑ 2.10. [**M-S**, Lemma 2.4] *Αν ο χώρος Banach X είναι διαχωρίσιμος με μη διαχωρίσιμο δυϊκό, τότε υπάρχει μια φραγμένη οικογένεια $(e_s)_{s\in T}$ με την εξής ιδιότητα: Αν (t_n) είναι μια αλυσίδα και (s_n) μια αντιαλυσίδα του δυαδικού δένδρου T, τότε η ακολουθία $(e_{s_n} - e_{t_n})$ του X δεν έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.11. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach που δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$. Τότε ο χώρος X είναι SWCD αν και μόνον αν ο X έχει διαχωρίσιμο δυϊκό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε βέβαια ο X είναι SWCD (βλ. Παραδείγματα 2.6 (ii)).

Έστω ότι ο χώρος Banach είναι SWCD. Υποθέτουμε, προς άτοπο απαγωγή, ότι ο X^* δεν είναι διαχωρίσιμος. Έστω $(e_s)_{s\in T}$ η οικογένεια του παραπάνω Λήμματος 2.10. Εφαρμόζουμε στην οικογένεια $(e_s)_{s\in T}$ το Θεώρημα 0.13 του Stern. Επειδή ο χώρος $\ell^1(\mathbb{N})$ δεν περιέχεται στο χώρο X υπάρχει υποδένδρο T' του T τέτοιο ώστε για κάθε κλαδί δ του X η ακολουθία $(e_{\delta|k})$ να είναι w–Cauchy.

Ο χώρος X είναι SWCD, άρα υπάρχει ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος M και μια οικογένεια $\{W_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του X με τις εξής ιδιότητες:

(i) Αν K_1, $K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$, τότε $W_{K_1} \subseteq W_{K_2}$.

(ii) Για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X υπάρχει $K \in \mathcal{K}(M)$ τέτοιο ώστε $L \subseteq W_K$.

Το σύνολο Δ' των κλαδιών του T' μπορεί να ταυτισθεί με το σύνολο Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Για κάθε $\delta \in \Delta'$ ορίζουμε την ακολουθία

$$\phi(\delta) = \{e_{\delta|n-1} - e_{\delta|n} : n \in \mathbb{N}\},$$

η οποία είναι ασθενώς μηδενική. Για κάθε $\delta \in \Delta'$ υπάρχει $K \in \mathcal{K}(M)$ τέτοιο ώστε $\phi(\delta) \subseteq W_K$. Για κάθε $K \in \mathcal{K}(M)$ θέτουμε $\Gamma_K = \{\delta \in \Delta' : \phi(\delta) \subseteq W_K\}$ και από τις ιδιότητες της οικογένειας $\{W_K : K \in \mathcal{K}(M)$ έπεται ότι:

(i) $\Delta' = \bigcup_{K\in\mathcal{K}(M)} \Gamma_K$

(ii) Αν K_1, $K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$, τότε $\Gamma_{K_1} \subseteq \Gamma_{K_2}$.

Επειδή το Δ' είναι υπεραριθμήσιμο, σύμφωνα με το Λήμμα 1.11 υπάρχει K_0 τέτοιο ώστε το σύνολο Γ_{K_0} να είναι άπειρο. Έστω (δ_k) μια ακολουθία διακεκριμένων σημείων του Γ_{K_0}, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $\delta \in \Delta'$.

Θέτουμε $d(\delta_k, \delta) = \frac{1}{m_k}$, όπου d η συνήθης μετρική του συνόλου Cantor. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $2 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$. Τότε η ακολουθία $(\delta_k|m_k)$ είναι αντιαλυσίδα και η $(\delta|m_k - 1)$ είναι αλυσίδα. Άρα η ακολουθία $(e_{\delta|m_k-1} - e_{\delta_k|m_k})$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Όμως $e_{\delta|m_k-1} = e_{\delta_k|m_k-1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $e_{\delta|m_k-1} - e_{\delta_k} = e_{\delta_k|m_k-1} - e_{\delta_k|m_k-1} \in W_{K_0}$, το οποίο αντιφάσκει προς την ασθενή συμπάγεια του W_{K_0}. Άρα ο χώρος X^* είναι διαχωρίσιμος. □

Πορισμα 2.12. *Κάθε SWCD χώρος Banach E που δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$ είναι Asplund και κατά συνέπεια WCG.*

Αποδειξη. Κάθε διαχωρίσιμος υπόχωρος του E έχει διαχωρίσιμο δυϊκό, οπότε ο E είναι Asplund. Επειδή ο χώρος E είναι Asplund και WCD είναι WCG. □

Παρατηρηση 2.13. Έπεται άμεσα από το Θεώρημα 2.11 ότι ένας χώρος Banach X με μη διαχωρίσιμο δυϊκό, που δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$ (για παράδειγμα ο χώρος του James (James tree space)) δεν είναι SWCD. Ένας τέτοιος χώρος Banach μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντιπαράδειγμα για να δείξουμε ότι η κλάση των ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων τοπολογικών χώρων δεν είναι κλειστή ως προς τις συνεχείς εικόνες. Πράγματι η ταυτοτική απεικόνιση $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, w)$ είναι συνεχής, ο χώρος $(X, \|\cdot\|)$ είναι Πολωνικός, κατά συνέπεια ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (και μάλιστα $\mathcal{K}$–αναλυτικός), αλλά ο χώρος (X, w) δεν είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Σημειώνουμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση I δεν έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης (βλ. Παραδείγματα 1.14 (v)).

Θεωρημα 2.14. *Έστω X ένας χώρος Banach και $(e_s)_{s \in T}$ μια φραγμένη οικογένεια του X. Υποθέτουμε ότι:*

(i) *Δεν υπάρχει αλυσίδα (t_n) του T τέτοια ώστε η ακολουθία (e_{t_n}) να είναι ασθενώς συγκλίνουσα*

(ii) *Για κάθε αντιαλυσίδα (s_n) του T υπάρχει υπακολουθία (s'_n) της (s_n) τέτοια ώστε η ακολουθία $(e_{s'_n})$ να είναι ασθενώς συγκλίνουσα.*

Τότε ο χώρος X δεν είναι SWCD.

Αποδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τη γραμμή της απόδειξης του [**M-S**, Th. 2.8]. Η μόνη διαφορά είναι ότι αντί του χαρακτηρισμού των SWKA χώρων Banach και του [**M-S**, Lemma 2.1], χρησιμοποιούμε το χαρακτηρισμό των SWCD χώρων Banach και το Λήμμα 1.11. □

Παρατηρηση 2.15. Ως εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος 2.14 μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένας διαχωρίσιμος και ασθενώς ακολουθιακά πλήρης χώρος Banach με unconditional βάση δεν είναι κατ' ανάγκη SWCD. Πράγματι στο [**M-S**] (Example 2.9) αποδεικνύεται ότι ο χώρος X_0, που εισάγεται από τους Batt και Hiermeyer [**B-H**] δεν είναι SWKA. Ακολουθώντας τη μέθοδο της απόδειξης αυτού του παραδείγματος, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο χώρος X_0 δεν είναι ούτε SWCD.

2. Ευθέα αθροίσματα SWCD χώρων Banach

Εξετάζουμε τώρα κατά πόσο ευθέα αθροίσματα SWCD ή SWKA χώρων Banach είναι πάλι SWCD ή SWKA. Αποδεικνύουμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις ένα αριθμήσιμο ευθύ άθροισμα SWCD ή SWKA χώρων είναι επίσης SWCD ή SWKA. Όμως ένα υπεραριθμήσιμο ευθύ άθροισμα SWCD χώρων δεν είναι αναγκαία SWCD. Εδικότερα αποδεικνύουμε ότι ο χώρος $c_0(\omega_1)$ δεν είναι SWCD. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύουμε ότι ένας χώρος της μορφής $C(K)$, όπου K συμπαγής τοπολογικός χώρος είναι SWCD αν και μόνον αν το K είναι αριθμήσιμο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.16. *Έστω (X_n) μια ακολουθία SWCD (αντ. SWKA) χώρων Banach και $p \geq 1$. Τότε ο χώρος $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_p$ είναι SWCD (αντ. SWKA).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε κάθε X_n εφοδιασμένο με την ασθενή τοπολογία και έστω τ η τοπολογία γινόμενο του $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, δηλαδή τ είναι η κατά σημείο ασθενής τοπολογία. Προφανώς η κατά σημείο ασθενής τοπολογία είναι μικρότερη από την ασθενή τοπολογία του X.

Περίπτωση I. Έστω $p > 1$. Στην περίπτωση αυτή η ασθενής τοπολογία συμπίπτει με την κατά σημείο ασθενή τοπολογία στο B_X και ο χώρος (B_X, w) είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, \tau)$. Τότε το επιθυμητό συμπέρασμα έπεται άμεσα από την Πρόταση 1.17.

Περίπτωση II. Έστω $p = 1$. Στην περίπτωση αυτή ο χώρος B_X είναι ένας κλειστός υπόχωρος του X όταν είναι εφοδιασμένος με την κατά σημείο ασθενή τοπολογία. Δεν είναι δύσκολο να επιβεβαιώσουμε τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

(α) Κάθε συμπαγές υποσύνολο του χώρου $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, \tau)$ είναι ακολουθιακά συμπαγές. Επιπλέον είναι Eberlein συμπαγές.

(β) Έστω Ω ένα σχετικά συμπαγές υποσύνολο του B_X στην τοπολογία τ. Τότε το Ω είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x = (x_k) \in \Omega \,.$$

Θα αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.7 του [**M-S**] την περίπτωση του SWKA χώρου. (Η περίπτωση του SWCD χώρου αποδεικνύεται παρόμοια χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη Πρόταση 2.7). Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια οικογένεια $\{\,\Omega_\sigma^k : \sigma \in \Sigma\,\}$ από ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του B_{X_k} τέτοια ώστε:

(i) Αν $\sigma, \tau \in \Sigma$ με $\sigma \leq \tau$, τότε $\Omega_\sigma^k \subseteq \Omega_\tau^k$, όπου $\sigma \leq \tau$ σημαίνει ότι $\sigma(n) \leq \tau(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(ii) Για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του B_{X_k}, υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $L \subseteq \Omega_\sigma^k$.

Για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(m_k) \subseteq \mathbb{N}$ και $(\sigma_k) \subseteq \Sigma$ θέτουμε

$$\Omega_{((m_k),(\sigma_k))} = \left\{ (x_k) \in B_X : x_k \in \Omega_{\sigma_k}^k \ \forall\, k \text{ και } \sum_{k=m_i}^{\infty} ||x_k|| \leq \frac{1}{i} \quad \forall\, i \geq 1 \right\}$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Κάθε σύνολο $\Omega_{((m_k),(\sigma_k))}$ είναι ασθενώς συμπαγές. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{i} < \varepsilon$, τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=m_i}^{\infty} ||x_k|| < \frac{1}{i} \quad \text{για κάθε} \quad x = (x_k) \in \Omega_{((m_k),(\sigma_k))}\,.$$

Τότε έπεται εύκολα ότι $\Omega_{((m_k),(\sigma_k))}$ είναι τ-συμπαγές, άρα είναι ασθενώς συμπαγές (Ιδιότητα (β)).

(ii) Αν $(m_k), (l_k) \subseteq \mathbb{N}$ και $(\sigma_k), (\tau_k) \subseteq \Sigma$ με $m_k \leq l_k$ and $\sigma_k \leq \tau_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε

$$\Omega_{((m_k),(\sigma_k))} \subseteq \Omega_{((l_k),(\tau_k))}\,.$$

Πράγματι, αν $x = (x_k) \in \Omega_{((m_k),(\sigma_k))}$, τότε $x_k \in \Omega_{\sigma_k}^k$ για κάθε k και

$$\sum_{k=m_i}^{\infty} \|x_k\| < \frac{1}{i} \quad \text{για κάθε} \quad i \in \mathbb{N}\,.$$

Τότε έπεται ότι $x_k \in \Omega_{\tau_k}^k$ για κάθε k και

$$\sum_{k=l_i}^{\infty} \|x_k\| < \frac{1}{i} \quad \text{για κάθε} \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

οπότε $x \in \Omega_{((l_k),(\tau_k))}$.

(iii) Έστω Z ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του B_X. Για κάθε k θέτουμε $Z_k = p_k(Z)$. Τότε το Z_k είναι ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του B_{X_k}, οπότε υπάρχει $\sigma_k \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $Z_k \subseteq \Omega_{\sigma_k}^k$. Επειδή το Z είναι ασθενώς συμπαγές για κάθε $i \geq 1$ υπάρχει $m_i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sum_{k=m_i}^{\infty} \|x_k\| < \frac{1}{i}$ για κάθε $x = (x_k) \in Z$. Ισχυριζόμαστε ότι $Z \subseteq$

$\Omega_{((m_k),(\sigma_k))}$. Πράγματι, αν $x = (x_k) \in Z$, τότε $x_k \in Z_k \subseteq \Omega^k_{\sigma_k}$ και για κάθε $i \geq 1$ έχουμε

$$\sum_{k=m_i}^{\infty} \|x_k\| < \frac{1}{i}$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Τότε ο χώρος X είναι SWKA. □

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $p = 0$. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι ένα c_0–άθροισμα $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_0$ (μη τετριμένων) χώρων Banach δεν είναι ποτέ SWKA. Αυτό συμβαίνει, διότι ο χώρος $c_0(\mathbb{N})$ εμφυτεύεται ισομετρικά στο X και όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο χώρος $c_0(\mathbb{N})$ δεν είναι SWKA. Δεν γνωρίζουμε αν ένα αριθμήσιμο c_0-άθροισμα (διαχωρίσιμων) SWCD χώρων Banach είναι ένας SWCD χώρος. Μπορεί όμως να αποδειχθεί η ακόλουθη ειδική περίπτωση.

Πρόταση 2.17. *Έστω (X_n) μια ακολουθία διαχωρίσιμων (SWCD) χώρων Banach ώστε κάθε X_n να έχει διαχωρίσιμο δυϊκό ή να έχει την ιδιότητα Schur. Τότε ο χώρος $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_0$ είναι SWCD. (Για παράδειγμα, για κάθε n, μπορούμε να έχουμε $X_n = c_0(\mathbb{N})$ ή $X_n = \ell^p(\mathbb{N})$, $\quad 1 \leq p < +\infty$)*

Απόδειξη. Θεωρούμε το χώρο $Z = \prod_{n=1}^{\infty} B_{X_n}$ εφοδιασμένο με την κατά σημείο ασθενή τοπολογία τ. Τότε η μοναδιαία μπάλλα B_X του X είναι υποσύνολο του Z και η ασθενής τοπολογία στο B_X συμπίπτει με τη σχετική τοπολογία η οποία επάγεται από την τ στο B_X. Από την υπόθεση για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια διαχωρίσιμη και μετρικοποιήσιμη τοπολογία τ_{d_n} on B_{X_n}, λεπτότερη από την ασθενή τοπολογία η οποία έχει τα ίδια συμπαγή υποσύνολα με αυτή. (Αν ο X_n έχει διαχωρίσιμο δυϊκό τότε η ασθενής τοπολογία στο B_X είναι μετρικοποιήσιμη και αν ο X_n έχει την ιδιότητα Schur, τότε η τοπολογία της νόρμας και η ασθενής τοπολογία έχουν τα ίδια συμπαγή υποσύνολα). Θεωρούμε τώρα κάθε B_{X_n} εφοδιασμένο με τη μετρική τοπολογία τ_{d_n} και εφοδιάζουμε το χώρο Z με την αντίστοιχη τοπολογία γινόμενο τ_d. Τότε ο χώρος (Z, τ_d) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και η τοπολογία τ_d είναι λεπτότερη από την τοπολογία τ. Έστω Ω ένα τ–συμπαγές υποσύνολο του Z και $x_k = (x^k_n)_{n=1}^{\infty}$, $k \geq 1$ μια ακολουθία του Ω. Από τη συμπάγεια του Ω έπεται ότι κάθε σύνολο $p_n(\Omega) \subseteq B_{X_n}$ είναι ασθενώς συμπαγές (όπου p_n είναι η προβολή του Z στην n-συντεταγμένη B_{X_n}). Έτσι για κάθε $n \geq 1$ η ακολουθία $(x^k_n)_k$ έχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία. Με ένα διαγώνιο επιχείρημα έπεται ότι η ακολουθία $(x_k)_k$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία στο Ω, ας πούμε ότι $x_{k_m} \xrightarrow{\tau} x$, το οποίο σημαίνει ότι $x_{k_m} \xrightarrow{\tau_d} x$. Επομένως το

Ω είναι τ_d-συμπαγές και από το Πόρισμα 1.21 ο χώρος (B_X, w) είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος, κατά συνέπεια ο χώρος X είναι SWCD. $\square$

Είναι φυσιολογικό να αναρωτηθούμε αν ένα υπεραριθμήσιμο ευθύ άθροισμα $(\sum_{\gamma\in\Gamma} \oplus X_\gamma)_p$ με $p = 0$ ή $p > 1$ μιας οικογένειας $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ SWCD χώρων Banach είναι επίσης ένας SWCD χώρος Banach. Όπως φαίνεται από το επόμενο θεώρημα 2.18 η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική. Επίσης ένα υπεραριθμήσιμο ευθύ άθροισμα $(\sum_{\gamma\in\Gamma} \oplus X_\gamma)_1$ (μη τετριμένων) χώρων Banach $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ δεν είναι ούτε WCD, διότι περιέχει ισομετρικά το χώρο $\ell^1(\Gamma)$, ο οποίος δεν είναι ασθενώς Lindelöf.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.18. *Για κάθε $\xi < \omega_1$ θεωρούμε ένα χώρο Banach E_ξ με μια νορμαρισμένη Schauder βάση $(e_{(n,\xi)})$, η οποία δεν έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε ο χώρος Banach $E = (\sum_{\xi<\omega_1} \oplus E_\xi)_p$, όπου $p = 0$ ή $p > 1$ είναι WCG, αλλά όχι SWCD.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι γνωστό ότι ένα c_0 ή ℓ^p–ευθύ άθροισμα, με $p > 1$ WCG χώρων Banach είναι επίσης WCG. Έστω K ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του E. Τότε για κάθε $\xi < \omega_1$ θέτουμε $N_\xi = \{n \in \mathbb{N} : e_{(n,\xi)} \in K\}$. Το σύνολο N_ξ είναι πεπερασμένο, διότι το K είναι ασθενώς συμπαγές και η ακολουθία $(e_{(n,\xi)})$ δεν έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία. Ορίζουμε

$$m(K,\xi) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad N_\xi = \emptyset \\ \max N_\xi, & \text{αν} \quad N_\xi \neq \emptyset. \end{cases}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$F : \mathcal{K}(E) \mapsto \mathcal{K}(\mathbb{N}^{\omega_1}) \quad \text{με} \quad F(K) = \prod_{\xi<\omega_1} \{1, 2 \dots m(K,\xi)\} \,.$$

Η απεικόνιση F έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Αν $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E)$ με $K_1 \subseteq K_2$, τότε είναι προφανές ότι $F(K_1) \subseteq F(K_2)$.

(ii) Αν μια οικογένεια $\mathcal{C}$ αποτελούμενη από ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του E κυριαρχεί τα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του E, τότε η οικογένεια $\{F(C) : C \in \mathcal{C}\}$ κυριαρχεί τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{N}^{\omega_1}$. Πράγματι, έστω $\Omega \in \mathcal{K}(\mathbb{N}^{\omega_1})$. Τότε υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^{\omega_1}$ τέτοιο ώστε

$$\Omega \subseteq \Omega(\sigma) = \prod_{\xi<\omega_1} \{1, 2, \dots, \sigma(\xi)\} \,.$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$K = \{e_{(n,\xi)} : n \leq \sigma(\xi),\ \xi < \omega_1\} \cup \{0\} \,.$$

Το σύνολο K είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του E και $F(K) = \Omega(\sigma)$. Επίσης υπάρχει $C \in \mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $K \subseteq C$, οπότε

$$\Omega \subseteq \Omega(\sigma) = F(K) \subseteq F(C)$$

Ας υποθέσουμε ότι ο χώρος E είναι SWCD. Τότε, από την Παρατήρηση 1.6, υπάρχει ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος M και μια οικογένεια $\{X_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ από ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του E τέτοια ώστε:

(α) Για κάθε $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$ ισχύει $X_{K_1} \subseteq X_{K_2}$.
(β) Για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του E υπάρχει $K \in \mathcal{K}(M)$ τέτοιο ώστε $L \subseteq X_K$.

Τότε έπεται ότι η οικογένεια $\{F(X_K) : K \in \mathcal{K}(M)\}$ κυριαρχεί τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{N}^{\omega_1}$, οπότε ειδικότερα έχουμε,

$$\mathbb{N}^{\omega_1} = \bigcup\{F(X_K) : K \in \mathcal{K}(M)\}$$

και $F(X_{K_1}) \subseteq F(X_{K_2})$, για οποιαδήποτε $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$. Επειδή ο χώρος $\mathbb{N}^{\omega_1}$ είναι realcompact, άρα Dieudonné πλήρης (βλ. [**E**, p. 569]) από την Παρατήρηση 1.6) συμπεραίνουμε ότι ο χώρος $\mathbb{N}^{\omega_1}$ είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος κατά συνέπεια Lindelöf, το οποίο είναι άτοπο. (βλ. επίσης Παρατήρηση 2.19 παρακάτω) □

Παρατηρηση 2.19. Ένας εναλλακτικός τρόπος για να καταλήξουμε σε αντίφαση, είναι ο ακόλουθος:
Έστω D ένα κλειστό και διακριτό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{N}^{\omega_1}$ με πληθικότητα ω_1. Για κάθε $K \in \mathcal{K}(M)$ ορίζουμε $D_K = D \cap F(X_K)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $D = \bigcup\{D_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$
(ii) $D_{K_1} \subseteq D_{K_2}$ για κάθε $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$
(iii) Κάθε D_K είναι πεπερασμένο.

Τότε το Λήμμα 1.11 συνεπάγεται ότι το σύνολο D είναι αριθμήσιμο, το οποίο είναι άτοπο.

Σημειώνουμε το γεγονός ότι ο χώρος $\mathbb{N}^{\omega_1}$ περιέχει υπεραριθμήσιμο κλειστό και διακριτό υποσύνολο μας έγινε γνωστό από τον D.H. Fremlin (ηλεκτρονική επικοινωνία), τον οποίο και ευχαριστούμε για αυτό. Στη συνέχεια και για λόγους πληρότητας παραθέτουμε την απόδειξη, (την οποία μας υπέδειξε ο Fremlin) αυτού του αποτελέσματος.

Προταση 2.20. *Υπάρχει κλειστό και διακριτό υποσύνολο A του $\mathbb{N}^{\omega_1}$ με $|A| = \omega_1$.*

Απόδειξη. Για κάθε ξ με $1 \leq \xi < \omega_1$ υπάρχει 1–1 συνάρτηση $\theta_\xi \colon [0,\xi) \to \mathbb{N}$. Για κάθε $\xi \in [1,\omega_1)$ θεωρούμε το στοιχείο x_ξ του $\mathbb{N}^{\omega_1}$, το οποίο ορίζουμε ως εξής:

$$x_\xi = \begin{cases} \theta_\xi(\eta), & \text{αν} \quad \eta < \xi \\ 0, & \text{αν} \quad \eta = \xi \\ \theta_\eta(\xi), & \text{αν} \quad \xi < \eta. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $A = \{x_\xi : 1 \leq \xi < \omega_1\}$ είναι το ζητούμενο.

Αν $1 \leq \xi_1 < \xi_2$, τότε για κάθε $\eta > \xi_2$ έχουμε $x_{\xi_1}(\eta) \neq x_{\xi_2}(\eta)$, διότι $\theta_\eta(\xi_1) \neq \theta_\eta(\xi_2)$. Άρα $|A| = \omega_1$.

Έστω $x \in \mathbb{N}^{\omega_1}$. Τότε υπάρχουν ξ, η με $1 \leq \xi < \eta < \omega_1$, τέτοια ώστε $x(\xi) = x(\eta)$. Θεωρούμε την εξής περιοχή του x,

$$V_x = \{y \in \mathbb{N}^{\omega_1} : y(a) = x(a), \quad \text{για κάθε} \quad a \in \{\eta, \eta+1, \xi\}\}$$

Ισχυρισμός 1. $|V_x \bigcap A| \leq 1$

Αν $\eta + 1 \leq \zeta$, τότε $x_\zeta \notin V_x$, διότι $x_\zeta(\xi) \neq x_\zeta(\eta)$, αφού $x_\zeta(\xi) = \theta_\zeta(\xi)$, $x_\zeta(\eta) = \theta_\zeta(\eta)$ και η συνάρτηση θ_ζ είναι 1–1.

Αν $1 \leq \zeta' < \zeta \leq \eta$ και $x_{\zeta'}, x_\zeta \in A \cap V_x$, τότε $x_\zeta(\eta+1) = x'_\zeta(\eta+1)$, το οποίο είναι άτοπο, διότι η συνάρτηση $\theta_{\eta+1}$ είναι 1–1.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{N}^{\omega_1}$ υπάρχει περιοχή V_x του x, τέτοια ώστε $|A \cap V_x| \leq 1$. Επομένως το σύνολο A είναι διακριτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\omega_1}$. □

Πόρισμα 2.21. *Έστω $\{X_\xi : \xi < \omega_1\}$ μια οικογένεια χώρων Banach και $X = (\sum_{\xi<\omega_1} \oplus X_\xi)_p$, όπου $p = 0$ ή $p > 1$. Τότε:*

(i) Αν για κάθε $\xi < \omega_1$ έχουμε $X_\xi = \ell^1(\mathbb{N})$ ή $X_\xi = c_0(\mathbb{N})$, τότε ο χώρος X είναι WCG, αλλά όχι SWCD. Ειδικότερα ο χώρος Banach $c_0(\omega_1)$ δεν είναι SWCD.

(ii) Αν $p = 0$ (και υπεραριθμήσιμο πλήθος από τους χώρους X_ξ είναι μη τετριμμένοι), τότε ο χώρος X δεν είναι SWCD.

Απόδειξη. (i) Η συνήθης βάση του $\ell^1(\mathbb{N})$ και η αθροίζουσα βάση του $c_0(\mathbb{N})$ δεν έχουν ασθενώς συγκλίνουσες υπακολουθίες, οπότε το προηγούμενο θεώρημα 2.18 μπορεί να εφαρμοστεί. Αν θέσουμε $p = 0$ και $X_\xi = c_0(\mathbb{N})$ έχουμε $X = c_0(\omega_1)$, οπότε ο χώρος $c_0(\omega_1)$ δεν είναι SWCD.
(ii) Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $X_\xi \neq \{0\}$ για κάθε $\xi < \omega_1$. Τότε ο χώρος $c_0(\omega_1)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στο X, οπότε ο χώρος X δεν είναι SWCD. □

Παρατήρηση 2.22. Επειδή ο χώρος $c_0(\omega_1)$ (ως WCG) είναι WKA, έχουμε ακόμα ένα παράδειγμα ενός $\mathcal{K}$-αναλυτικού τοπολογικού χώρου ο οποίος δεν είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (βλ. Παράδειγμα 1.10)

Σύμφωνα με το [**M-S**, Cor. 1.10], αν K είναι ένας συμπαγής χώρος, τότε ο χώρος $C(K)$ είναι SWKA αν και μόνον αν το K είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση των SWCD χώρων Banach έχουμε το ακόλουθο ανάλογο αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.23. *Έστω K ένας συμπαγής χώρος. Τότε ο χώρος $C(K)$ είναι SWCD αν και μόνον αν το K είναι αριθμήσιμο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν K είναι αριθμήσιμο, τότε ο δυϊκός $C(K)^* = \ell^1(K)$ του $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος, οπότε ο χώρος $C(K)$ είναι SWCD.

Έστω ότι ο χώρος $C(K)$ είναι SWCD. Υποθέτουμε ότι ο τοπολογικός χώρος K δεν είναι μετρικοποιήσμος. Τότε το τοπολογικό βάρος $w(K) = \alpha$ του K είναι υπεραριθμήσιμο. Επειδή ο $C(K)$ είναι WCD (ισοδύναμα το K είναι Gul'ko συμπαγές), από το θεώρημα 0.19, των Αργυρού-Νεγρεπόντη υπάρχει οικογένεια $\{U_\xi : \xi < \alpha\}$ ανοικτών μη κενών και ξένων ανά δύο υποσυνόλων του K. (βλ. [**A-N**] [**N**]) Τότε ο χώρος Banach $c_0(\alpha)$ εμφυτεύεται στο $C(K)$, οπότε ο χώρος $c_0(\alpha)$ είναι SWCD, το οποίο είναι άτοπο, καθώς ο πληθάριθμος α είναι υπεραριθμήσιμος. Επομένως ο τοπολογικός χώρος K είναι μετρικοποιήσιμος. Τώρα αν το K είναι υπεραριθμήσιμο, τότε ο $C(K)$ είναι ισομορφικός με το χώρο $C[0,1]$, από το Θεώρημα 0.14 του Milyutin. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι ο χώρος $C(K)$ περιέχει ισομορφικά κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach. Άρα ο $C(K)$ περιέχει ένα διαχωρίσιμο χώρο Banach με μη διαχωρίσιμο δυϊκό ο οποίος δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$ (για παράδειγμα το χώρο JT του James) και αυτό αντιφάσκει με το Θεώρημα 2.11. $\square$

Ανοικτά ερωτήματα

(1) Έστω X ένας SWCD χώρος Banach.
  - (α) Είναι ο X υποχώρος ενός WCG χώρου Banach ή τουλάχιστον είναι ο X WKA χώρος Banach;
  - (β) Υποθέτουμε ότι ο X δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$. Είναι ο X ισομορφικός με έναν κλειστό υπόχωρο ενός ευθέος αθροίσματος $Y \oplus Z$, όπου Y^* είναι διαχωρίσιμος και Z είναι αυτοπαθής; (βλ. Πόρισμα 2.12)

(2) Έστω X διαχωρίσιμος και ασθενώς ακολουθιακά πλήρης χώρος Banach, ο οποίος περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$ κληρονομικά. Είναι τότε ο X SWCD; (βλ. [**S-W**, Question (c)])

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κλάσεις χώρων Banach ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικών στην ασθενή τοπολογία

1. Χώροι Banach ισχυρά ασθενώς συμπαγώς παραγόμενοι σε σχέση με έναν υπερχώρο τους.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας χώρος Banach X λέγεται ισχυρά ασθενώς συμπαγώς παραγόμενος (SWCG) αν υπάρχει ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο K του X, το οποίο τον παράγει ισχυρά, δηλαδή τέτοιο ώστε για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $L \subseteq nK + \varepsilon B_X$. Οι SWCG χώροι Banach εισάγονται και μελετώνται από τους Schlüchtermann και Wheeler στο [**S-W**]. Στον επόμενο ορισμό γενικεύουμε την έννοια του SWCG χώρου Banach, θεωρώντας το ασθενώς συμπαγές υποσύνολο K, το οποίο παράγει ισχυρά το χώρο X σε έναν υπερχώρο Z του X. Έτσι καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 3.1. Έστω X, Z χώροι Banach με $X \subseteq Z$. Θα λέμε ότι ο X είναι ισχυρά ασθενώς συμπαγώς παραγόμενος (SWCG) σε σχέση (ή σχετικά) με το Z αν υπάρχει ασθενώς συμπαγές (κυρτό και συμμετρικό) υποσύνολο K του Z, τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$L \subseteq nK + \varepsilon B_Z$$

Παρατηρηση 3.2. **(i)** Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον εξής: Ο χώρος Banach X είναι SWCG σχετικά με έναν υπερχώρο Z αν υπάρχει μια ακολουθία (K_n) ασθενώς συμπαγών, κυρτών συμμετρικών υποσυνόλων του Z τέτοια ώστε για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $L \subseteq K_n + \varepsilon B_Z$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$p_n = \sup\{\|x\| : x \in K_n\} + 1 \quad \text{και} \quad K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np_n} K_n\,.$$

Το σύνολο K είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του Z και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $K_n \subseteq np_nK$, οπότε το K παράγει ισχυρά το X.

(ii) Έστω Z ένας SWCG χώρος Banach σύμφωνα με τον Ορισμό 0.20, ο οποίος δίνεται στο [**S-W**], και K ένα ασθενώς συμπαγές σύνολο, το οποίο παράγει ισχυρά το Z. Είναι προφανές ότι αν X είναι κλειστός γραμμικός υποχώρος του Z, τότε το K παράγει ισχυρά το X σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1. Επειδή δε, υπάρχει κλειστός γραμμικός υποχώρος X του $Z = L^1[0,1]$, ο οποίος δεν είναι SWCG ([**M-S**, Cor. 3.10]), ο Ορισμός 3.1 έχει περιεχόμενο. Αν $X = Z$, τότε ο Ορισμός 3.1 μας δίνει την έννοια του SWCG χώρου σύμφωνα με τους Schlüchterman και Wheeler ([**S-W**]).

(iii) Έστω X, Z χώροι Banach τέτοιοι ώστε $X \subseteq Z$ και ο X να είναι SWCG σχετικά με το Z. Αν Y είναι κλειστός γραμμικός υποχώρος του X, τότε είναι SWCG σχετικά με το Z. Έτσι η κλάση χώρων του Ορισμού 3.1 είναι κλειστή για τους υποχώρους.

Πρόταση 3.3. *Αν ο χώρος Banach X είναι SWCG σχετικά με ένα χώρο Banach Z, τότε υπάρχει ένας WCG χώρος Banach Y, με $X \subseteq Y \subseteq Z$, ώστε ο X να είναι SWCG σχετικά με τον Y.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο K του Z, το οποίο παράγει ισχυρά το X. Θέτουμε $Y = \overline{\langle K \rangle}$ (η κλειστή γραμμική θήκη του K) στο Z. Είναι προφανές ότι ο Y είναι ο ζητούμενος χώρος. $\square$

Παρατήρηση 3.4. **(i)** Έστω $X \subseteq Z_1 \subseteq Z_2$ χώροι Banach. Αν ο X είναι SWCG σχετικά με τον Z_1, τότε είναι SWCG σχετικά με τον Z_2.

(ii) Έστω $X \subseteq Z$ χώροι Banach, τέτοιοι ώστε ο X να είναι SWCG σχετικά με τον υπερχώρο του Z. Από την Πρόταση 3.3 ο Z μπορεί να θεωρηθεί ως WCG κατά συνέπεια ο X ως υποχώρος του Z θα είναι WKA. Λίγο αργότερα θα αποδείξουμε ότι ο X ικανοποιεί ισχυρότερες ιδιότητες. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι ο X είναι SWKA (Πόρισμα 3.20). και ακόμα περισσότερο είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*)

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η παραπάνω ιδιότητα παραμένει αναλλοίωτη ως προς τους ισομορφισμούς. Για την ακρίβεια αποδεικνύουμε κάτι γενικότερο. Η ιδιότητα διατηρείται από τους φραγμένους γραμμικούς τελεστές, οι οποίοι έχουν την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης ως προς την ασθενή τοπολογία.

Πρόταση 3.5. *Έστω X,Y, Z χώροι Banach ώστε ο X να είναι SWCG σχετικά με τον Z. Αν υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T\colon X \to Y$ με την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης ως προς την ασθενή τοπολογία, τότε υπάρχει χώρος Banach Z_1, ώστε ο Y να είναι SWCG σχετικά με τον Z_1.*

Απόδειξη. Ο χώρος Banach Y περιέχεται ισομετρικά σε κάποιον χώρο της μορφής $\ell^\infty(\Gamma)$. Ο $\ell^\infty(\Gamma)$ είναι injective χώρος Banach, άρα υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $\widetilde{T}\colon Z \to \ell^\infty(\Gamma)$, ο οποίος επεκτείνει τον τελεστή T. Θέτουμε $Z_1 = \ell^\infty(\Gamma)$ και $\Omega = \widetilde{T}(K)$. Θα δείξουμε ότι το Ω παράγει ισχυρά το Y. Θεωρούμε ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του Y και $\varepsilon > 0$. Ο τελεστής T έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης ως προς την ασθενή τοπολογία, άρα υπάρχει ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L_1 του X, τέτοιο ώστε $T(L_1) = L$. Το K παράγει ισχυρά το X, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$L_1 \subseteq nK + \frac{\varepsilon}{\|\widetilde{T}\|} B_Z, \quad \text{οπότε} \quad \widetilde{T}(L_1) \subseteq n\widetilde{T}(K) + \frac{\varepsilon}{\|\widetilde{T}\|}\widetilde{T}(B_Z)$$

Τότε

$$L \subseteq n\Omega + \frac{\varepsilon}{\|\widetilde{T}\|}\|\widetilde{T}\| B_{Z_1}, \quad \text{δηλαδή} \quad L \subseteq n\Omega + \varepsilon B_{Z_1}\,.$$

Επομένως το ασθενώς συμπαγές σύνολο Ω παράγει ισχυρά το χώρο Y και ο Y είναι SWCG σχετικά με το Z_1. □

Πρόταση 3.6. *Έστω X, Z χώροι Banach ώστε ο X να είναι SWCG σχετικά με το Z. Αν ο χώρος Banach Y είναι ισομορφικός με το χώρο X, τότε υπάρχει χώρος Banach Z_1, τέτοιος ώστε ο Y να είναι SWCG σχετικά με το χώρο Z_1.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από την προηγούμενη Πρόταση 3.5. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι εντελώς αντίστοιχο του [**S-W**, Th. 2.7] (και επίσης είναι ανάλογο της Πρότασης 2.8).

Πρόταση 3.7. *Έστω X, Z χώροι Banach ώστε ο X να είναι SWCG σχετικά με το Z. Αν Y είναι αυτοπαθής υποχώρος του X, τότε ο χώρος πηλίκο X/Y είναι SWCG σχετικά με κάποιο χώρο Banach Z_1.*

Απόδειξη. Η κανονική απεικόνιση $\pi\colon X \to X/Y$ με $\pi(x) = x + Y$ έχει την ιδιότητα της συμπαγούς κάλυψης ως προς την ασθενή τοπολογία (βλ. Πρόταση 2.8), κατά συνέπεια ο χώρος X/Y είναι SWCG σχετικά με κάποιον χώρο Banach. □

Πρόταση 3.8. *Έστω X, Z χώροι Banach ώστε ο X να είναι SWCG σχετικά με το Z. Αν X είναι διαχωρίσιμος, τότε υπάρχει ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach Y, τέτοιος ώστε ο X να είναι SWCG σχετικά με τον Y.*

Απόδειξη. Όπως αποδείξαμε παραπάνω ο X είναι SWCG σχετικά με έναν WCG χώρο Banach, κατά συνέπεια μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο χώρος Z είναι WCG. Επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος υποχώρος ενός WCG χώρου Banach υπάρχει προβολή

$$P\colon Z \to Z \quad \text{με} \quad \|P\| = 1\,, \quad P(Z) \quad \text{διαχωρίσιμος και} \quad X \subseteq P(Z)\,.$$

(βλ. [**L**, Th. 3.1]). Θα δείξουμε ότι ο X είναι SWCG σχετικά με το διαχωρίσιμο χώρο Banach $Y = P(Z)$. Θεωρούμε ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο K του Z, το οποίο παράγει ισχυρά το X και θέτουμε $\Omega = P(K)$.

Έστω L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq nK + \varepsilon B_Z$, οπότε $P(L) \subseteq nP(K) + \varepsilon P(B_Z)$. Επειδή P είναι προβολή με $\|P\| = 1$ και $L \subseteq X \subseteq P(Z)$, από την τελευταία σχέση έπεται ότι $L \subseteq n\Omega + \varepsilon B_Y$. Επομένως ο X είναι SWCG σχετικά με το διαχωρίσιμο χώρο Banach Y. □

Πορισμα 3.9. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach, ο οποίος είναι SWCG σχετικά με κάποιο χώρο Banach. Τότε ο X είναι SWCG σχετικά με το διαχωρίσιμο χώρο Banach $C(B_{X^*})$.*

Αποδειξη. Ο χώρος Banach X είναι διαχωρίσιμος και είναι SWCG σχετικά με κάποιο χώρο Banach, κατά συνέπεια είναι SWCG σχετικά με ένα διαχωρίσιμο χώρο Banach Z. Ο Z ως διαχωρίσιμος χώρος Banach εμφυτεύεται ισομορφικά στο χώρο $C([0,1])$. Ο χώρος $C([0,1])$ είναι ισομορφικός με το χώρο $C(B_{X^*})$ από το Θεώρημα 0.14 του Milyutin. Ο X είναι SWCG σχετικά με το Z, άρα και σχετικά με κάθε υπερχώρο του, κατά συνέπεια είναι SWCG σχετικά και με το χώρο $C(B_{X^*})$ (βλ. Παρατήρηση 3.4 (i)). □

Παρατηρηση 3.10. Έστω $X \subseteq Z$ χώροι Banach, ώστε ο X είναι SWCG σχετικά με το Z. Δεν μας είναι γνωστό αν το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει στην περίπτωση κατά την οποία ο χώρος Banach X είναι μη διαχωρίσιμος.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε έναν χαρακτηρισμό της κλάσης των χώρων Banach, οι οποίοι εισάγονται με τον Ορισμό 3.1, ο οποίος είναι ανάλογος του χαρακτηρισμού της κλάσης των SWCG χώρων ([**S-W**, Th. 2.1]).

Θεωρημα 3.11. *Έστω X χώρος Banach. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *X είναι SWCG σχετικά με κάποιο χώρο Banach.*

(ii) *Ο X περιέχεται σε κάποιο χώρο Z και υπάρχει μια μετρικοποιήσιμη τοπολογία τ_d στο B_{Z^*} τέτοια ώστε:*
   - *(α) Η τοπολογία τ_d είναι μικρότερη από την τοπολογία Mackey τ του B_{Z^*}.*
   - *(β) Η τοπολογία τ_d είναι λεπτότερη από την τοπολογία τ_X του B_{Z^*} της ομοιόμορφης σύγκλισης στα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του X.*

Αποδειξη. **(i)⇒ (ii)** Θεωρούμε ότι ο χώρος Banach X είναι SWCG σχετικά με το Z. Μπορούμε να υποθέσουμε και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ασθενώς συμπαγές, κυρτό, συμμετρικό και ολικό υποσύνολο K του Z τέτοιο ώστε για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $L \subseteq nK + \varepsilon B_Z$. Ορίζουμε μια μετρική d στο B_{Z^*} ως εξής:

$$d(x^*, y^*) = \max\{|x^*(x) - y^*(x)| : x \in K\} \quad \text{για κάθε} \quad x^*, y^* \in B_{Z^*}\,.$$

Επειδή το σύνολο K είναι ασθενώς συμπαγές, κυρτό και συμμετρικό, η μετρική τοπολογία τ_d είναι μικρότερη από την Mackey τοπολογία του B_{Z^*}. Απομένει να δείξουμε ότι η τοπολογία τ_d είναι λεπτότερη από την τοπολογία τ_X. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα δίκτυο $(f_i)_{i\in I}$ του B_{Z^*} και $f \in B_{Z^*}$ τέτοιο ώστε $f_i \xrightarrow{d} f$ και θα δείξουμε ότι $f_i \xrightarrow{\tau_X} f$. Έστω L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq nK + \frac{\varepsilon}{4} B_Z$. Επιλέγουμε $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$|f_i(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2n} \quad \text{για κάθε} \quad i \geq i_0 \quad \text{και για κάθε} \quad y \in K\,.$$

Έστω $x \in L$. Τότε υπάρχει $y \in K$ και $z \in Z$ με $\|z\| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$ ώστε $x = ny + z$. Επομένως

$$\begin{aligned}
|f_i(x) - f(x)| &= |f_i(ny+z) - f(ny+z)| \\
&\leq |f_i(ny) - f(ny)| + |f_i(z) - f(z)| \\
&\leq n|f_i(y) - f(y)| + \|f_i - f\| \cdot \|z\| \\
&< n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Άρα $f_i \xrightarrow{\tau_X} f$, το οποίο σημαίνει ότι η μετρική τοπολογία τ_d είναι λεπτότερη από την τοπολογία τ_X, της ομοιόμορφης σύγκλισης στα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του X.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)** Έστω Z χώρος Banach με $X \subseteq Z$, ο οποίος ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (β). Θεωρούμε μια βάση περιοχών (U_n) του 0 στο χώρο (B_{Z^*}, τ_d). Επειδή η τοπολογία Mackey τ είναι λεπτότερη από τη μετρική τοπολογία τ_d υπάρχει ακολουθία ασθενώς συμπαγών, κυρτών και συμμετρικών υποσυνόλων του Z τέτοια ώστε

$$K_n^0 \cap B_{Z^*} \subseteq U_n \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Έστω L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και $0 < \varepsilon < 1$. Θέτουμε $c = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Επειδή η μετρική τοπολογία τ_d είναι λεπτότερη από την τοπολογία τ_X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$U_n \subseteq (cL)^0 \cap B_{Z^*}\,.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$$K_n^0 \cap B_{Z^*} \subseteq (cL)^0 \cap B_{Z^*}\,, \quad \text{οπότε} \quad \big((cL)^0 \cap B_{Z^*}\big)^0 \subseteq \big(K_n^0 \cap B_{Z^*}\big)^0\,.$$

Επομένως

$$cL \subseteq \big((cL)^{00} \cup B_Z\big)^{00} \subseteq \big(K_n^{00} \cup B_Z\big)^{00} \subseteq K_n + B_Z\,.$$

Τότε έχουμε

$$L \subseteq \frac{1}{c}K_n + \frac{1}{c}B_Z = \varepsilon K_n + \varepsilon B_Z \subseteq K_n + \varepsilon B_Z\,,$$

οπότε από την παρατήρηση 3.2 έπεται ότι ο χώρος Banach X είναι SWCG σχετικά με το Z. □

Παρατηρηση 3.12. Η μετρική d, η οποία εμφανίζεται στην απόδειξη της κατεύθυνσης (i)⇒ (ii) του Θεωρήματος 3.11 δεν είναι άλλη από τη μετρική της supremum νόρμας του χώρου $C(K)$. Πράγματι, ο τελεστής $T\colon Z^* \to C(K)$ ο οποίος ορίζεται από τη σχέση $T(z^*) = z^*|K$ είναι φραγμένος γραμμικός και (επειδή το K είναι ολικό στο Z) είναι 1–1. Επίσης ο T είναι (w^*, τ_p) συνεχής (όπου τ_p η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης), συνεπώς η εικόνα $\Omega = T(B_{Z^*})$ είναι με την τοπολογία τ_p συμπαγές σύνολο ομοιομορφικό με τη μοναδιαία μπάλα (B_{Z^*}, w^*). Επειδή είναι και φραγμένο είναι ασθενώς συμπαγές (Θεώρημα 0.11 του Grothendieck). Έτσι ο Ω με τη μετρική της supremum νόρμας είναι πλήρης μετρικός χώρος, ως κλειστό υποσύνολο του χώρου Banach $C(K)$.

Πορισμα 3.13. *Έστω X, Z χώροι Banach ώστε ο X να είναι SWCG σχετικά με το Z. Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε ο χώρος (B_{X^*}, τ), όπου τ η τοπολογία Mackey του X^*, είναι αναλυτικός.*

Αποδειξη. Ο Z μπορεί να επιλεγεί διαχωρίσιμος, οπότε από την προηγούμενη παρατήρηση ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach (διότι το K είναι ασθενώς συμπαγές μετρικοποιήσιμο σύνολο). Έπεται ότι ο κλειστός υποχώρος $\Omega = T(B_{Z^*})$ του $C(K)$ είναι με τη μετρική d της supremum νόρμας πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Επειδή από το (β) του ισχυρισμού (ii) του Θεωρήματος 3.11 η απεικόνιση

$$\Phi\colon (B_{Z^*}, \tau_d) \to (B_{Z^*}, \tau) \quad \text{με} \quad \Phi(z^*) = z^*|X$$

είναι συνεχής και επί, έπεται το συμπέρασμα. □

Πορισμα 3.14. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και $Z = C(B_{X^*})$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο X είναι SWCG σχετικά με κάποιο χώρο Banach.*

(ii) *Υπάρχει μια μετρικοποιήσιμη τοπολογία τ_d στο $\Omega = B_{M(X^*)}$ τέτοια ώστε*

  (α) *Η Mackey τοπολογία τ στο Ω είναι λεπτότερη από τη μετρική τοπολογία τ_d*

(β) Η μετρική τοπολογία τ_d είναι λεπτότερη από την τοπολογία τ_X της ομοιόμορφης σύγκλισης στα ασθενώς συμπαγή κυρτά και συμμετρικά υποσύνολα του X

Απόδειξη. Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach X, ο οποίος είναι SWCG σχετικά με κάποιο χώρο Banach, είναι επίσης SWCG σχετικά με το χώρο $C(B_{X^*})$ (Πόρισμα 3.9). Επομένως από το Θεώρημα 3.11 έπεται το ζητούμενο. □

Όπως έχουμε σημειώσει (Παρατήρηση 3.2) ένας κλειστός γραμμικός υποχώρος X, ενός SWCG χώρου Z είναι SWCG σχετικά με το Z. Δε γνωρίζουμε όμως την απάντηση στην ακόλουθη ερώτηση.

Ερωτηση 3.15. Έστω $X \subseteq Z$ χώροι Banach, τέτοιοι ώστε ο X να είναι SWCG σχετικά με το Z. Είναι τότε ο X ισομορφικός με έναν υποχώρο ενός SWCG χώρου Banach; Με άλλα λόγια μπορούμε πάντοτε να υποθέτουμε στον Ορισμό 3.1 ότι ο Z είναι SWCG; (Σύμφωνα μετην Πρόταση 3.3 μπορούμε να υποθέτουμε ότι ο Z είναι WCG).

Στη συνέχεια πρόκειται να αποδείξουμε ότι η κλάση χώρων Banach, η οποία εντοπίστηκε με τον Ορισμό 3.1 περιέχεται στην κλάση των SWKA χώρων Banach. Εκ των πραγμάτων οδηγούμαστε σε έναν γενικότερο ορισμό από τον Ορισμό 3.1 και θα αποδείξουμε ότι (η τουλάχιστον τυπικά) ευρύτερη κλάση έχει την ιδιότητα. Ξεκινάμε υπενθυμίζοντας έναν εσωτερικό χαρακτηρισμό των υποχώρων WCG χώρων Banach, ο οποίος οφείλεται στους Fabian, Montesinos και Zizler. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει το εξής σημαντικό αποτέλεσμα (Θεώρημα 0.28):

Θεωρημα (Fabian, Montesinos, Zizler). Ένας χώρος Banach X είναι υποχώρος ενός WCG χώρου Banach αν και μόνον αν για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακολουθία $(M_{n,p})_n$ αποτελούμενη από $\frac{1}{p}$-σχετικά ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του X τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{n,p}$.

Ένα φυσιολογικό ερώτημα το οποίο ανακύπτει από το προηγούμενο θεώρημα είναι αν μπορεί να δοθεί ένας αντίστοιχος χαρακτηρισμός για τους υποχώρους ενός SWCG χώρου Banach. Επί του παρόντος δεν έχουμε απάντηση σε αυτό το ερώτημα, όμως μια αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας χώρος Banach υποχώρος ενός SWCG χώρου Banach και γενικότερα για να είναι SWCG σχετικά με κάποιον χώρο Banach, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1 δίνεται από την ακόλουθη πρόταση. Σημειώνουμε ότι στην πρόταση αυτή ακολουθούμε τη μέθοδο απόδειξης του Θεωρήματος 0.28.

Πρόταση 3.16. *Αν ο χώρος Banach X είναι SWCG σχετικά με κάποιον χώρο Banach Z, τότε υπάρχει μια οικογένεια $\{M_{n,p} : n, p \in \mathbb{N}\}$ υποσυνόλων του X με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $p \in \mathbb{N}$ το σύνολο $M_{n,p}$ είναι $\frac{1}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές.*

(ii) *Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ και για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq M_{n,p}$.*

Απόδειξη. Έστω K ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του Z, το οποίο παράγει ισχυρά το X. Τότε για κάθε n, $p \in \mathbb{N}$ το σύνολο $nK + \dfrac{1}{p}B_Z$ είναι $\frac{1}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του Z. Πράγματι

$$\begin{aligned}
\overline{nK + \frac{1}{p}B_Z}^{*} &\subseteq \overline{nK}^{*} + \overline{\frac{1}{p}B_Z}^{*} \\
&= nK + \frac{1}{p}B_{Z^{**}} \\
&\subseteq Z + \frac{1}{p}B_{Z^{**}}
\end{aligned}$$

Για κάθε n, $p \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$M_{n,p} = X \cap (nK + \frac{1}{4p}B_Z).$$

Τότε, από την Πρόταση 0.27, το σύνολο $M_{n,p}$ είναι $\frac{1}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X για κάθε n, $p \in \mathbb{N}$. Επίσης για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X και για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq nK + \dfrac{1}{4p}B_Z$, οπότε $L \subseteq M_{n,p}$. Επομένως η οικογένεια $\{M_{n,p} : n, p \in \mathbb{N}\}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. □

Έτσι καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 3.17. Ένας χώρος Banach X θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα (*) αν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{M_{n,p} : n, p \in \mathbb{N}\}$ (κυρτών και συμμετρικών) υποσυνόλων του X, η οποία ικανοποιεί τους ισχυρισμούς (i) και (ii) της Πρότασης 3.16.

Παρατηρηση 3.18. **(α)** Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον εξής:

Ο χώρος X έχει την ιδιότητα (*) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $(M_{n,\varepsilon})$ φραγμένων (κυρτών συμμετρικών υποσυνόλων) του X με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ το σύνολο $M_{n,\varepsilon}$ είναι ε–σχετικά ασθενώς συμπαγές.

(ii) Για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $L \subseteq M_{n,\varepsilon}$.

(β) Είναι εύκολο να δούμε ότι ο χώρος Banach X έχει την ιδιότητα (*) αν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{M_{n,p} : n, p \in \mathbb{N}\}$ (κυρτών και συμμετρικών) υποσυνόλων του B_X τέτοια ώστε:

(i) Για κάθε n, p το σύνολο $M_{n,p}$ είναι $\frac{1}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές.
(ii) Για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του B_X και για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq M_{n,p}$.

(γ) Είναι προφανές, από την Πρόταση 3.16 ότι κάθε χώρος Banach X ο οποίος είναι SWCG σχετικά με έναν χώρο Banach Z έχει την ιδιότητα (*)

(δ) Αν A, B είναι ε–σχετικά ασθενώς συμπαγή υποσύνολα ενός χώρου Banach X, τότε προφανώς και το $A \cup B$ είναι ε–σχετικά ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X. Έτσι στον Ορισμό 3.17 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M_{n,p} \subseteq M_{n+1,p}$ για κάθε n, $p \in \mathbb{N}$.

(ε) Αν ο χώρος Banach Z έχει την ιδιότητα (*), τότε και κάθε κλειστός γραμμικός υποχώρος του X έχει την (*). Πράγματι, αν η αριθμήσιμη οικογένεια $\{M_{n,p} : n, p \in \mathbb{N}\}$ υποσυνόλων του Z πιστοποιεί ότι ο χώρος Z έχει την ιδιότητα (*), τότε από την Πρόταση 0.27 τα σύνολα $K_{n,p} = X \bigcap M_{n,4p}$, n, $p \in \mathbb{N}$ εξασφαλίζουν ότι ο χώρος X έχει την ιδιότητα (*).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.19. *Έστω X χώρος Banach με την ιδιότητα (*). Τότε ο X είναι SWKA και υποχώρος ενός WCG χώρου Banach.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή ο χώρος X έχει την ιδιότητα (*) υπάρχει οικογένεια $\{M_{n,p} : n, p \in \mathbb{N}\}$ υποσυνόλων του X τέτοια ώστε:

(i) Για κάθε n, $p \in \mathbb{N}$ το σύνολο $M_{n,p}$ είναι $\frac{1}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές.
(ii) Για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X και για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $L \subseteq M_{n,p}$.

Το γεγονός ότι ο X είναι υποχώρος ενός WCG χώρου Banach έπεται άμεσα από το Θεώρημα 0.28. Για να δείξουμε ότι ο X είναι SWKA θεωρούμε την απεικόνιση

$$F\colon \Sigma \to \mathcal{K}(X) \quad \text{με} \quad F(\sigma) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{M}^*_{\sigma(p),p} \,.$$

Θα δείξουμε κατ' αρχάς ότι η απεικόνιση F είναι καλά ορισμένη. Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\overline{M}^*_{\sigma(p),p}$ είναι ασθενώς*–συμπαγές υποσύνολο του X^{**} και ισχύει $\overline{M}^*_{\sigma(p),p} \subseteq X + \dfrac{1}{p} B_{X^{**}}$. Επομένως το $F(\sigma)$ είναι ασθενώς*–συμπαγές και

$$F(\sigma) \subseteq \bigcap_{p=1}^{\infty} \left(X + \frac{1}{p} B_{X^{**}} \right) = X \,,$$

κατά συνέπεια το σύνολο $F(\sigma)$ είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X, το οποίο σημαίνει ότι η F είναι καλά ορισμένη.

Η απεικόνιση F είναι άνω ημισυνεχής. Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη της κατεύθυνσης (ii)$\Rightarrow$ (iii) του Θεωρήματος 1.1. Έστω L συμπαγές υποσύνολο του X. Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_p \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq M_{n_p,p}$. Θέτουμε $\sigma = (n_1, n_2, \ldots n_p \ldots)$ και έχουμε $L \subseteq F(\sigma)$. Άρα ο χώρος X είναι SWKA. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.20. *Κάθε χώρος Banach X, ο οποίος είναι SWCG σχετικά με κάποιον χώρο Banach Z είναι SWKA.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση από το προηγούμενο θεώρημα καθώς κάθε χώρος Banach X, ο οποίος είναι SWCG σχετικά με κάποιον χώρο Banach Z, έχει την ιδιότητα (*). $\square$

ΛΗΜΜΑ 3.21. *Έστω X χώρος Banach, ο οποίος έχει την ιδιότητα (*), μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{M_{n,p} : n,p \in \mathbb{N}\}$ (κυρτών και συμμετρικών) υποσυνόλων του X, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού 3.17 και $L \subseteq X$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το L είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές.*
(ii) *Υπάρχουν ακολουθίες (n_p) και (m_p) φυσικών αριθμών με $m_p \geq p$ για κάθε $p \in \mathbb{N}$ ώστε $L \subseteq M_{n_p,m_p}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω L σχετικά ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε το $\overline{L}$ είναι ασθενώς συμπαγές, άρα για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει n_p τέτοιο ώστε $\overline{L} \subseteq M_{n_p,p}$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω $L \subseteq M_{n_p,m_p}$ και $m_p \geq p$ για κάθε $p \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\overline{L}^* \subseteq \overline{M}^*_{n_p,m_p} \subseteq X + \frac{1}{m_p} B_{X^{**}}$$

άρα

$$\overline{L}^* \subseteq \bigcap_{p=1}^{\infty} \left(X + \frac{1}{m_p} B_{X^{**}} \right)$$

και επειδή $\lim_{p\to\infty} m_p = 0$, έπεται $\overline{L}^* \subseteq X$, το οποίο σημαίνει ότι το L είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές. $\square$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα επεκτείνει ένα αποτέλεσμα των Schlüchterman και Wheeler ([**S-W**, Th. 2.5]) στην ευρύτερη κλάση των χώρων Banach με την ιδιότητα (*).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.22. *Έστω X χώρος Banach ο οποίος έχει την ιδιότητα (*). Τότε ο X είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης.*

Απόδειξη. Ο χώρος Banach X έχει την ιδιότητα (*), άρα υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{K_{m,p} : m, p \in \mathbb{N}\}$ κυρτών και συμμετρικών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε:

(i) Για κάθε m, p το σύνολο $K_{m,p}$ είναι $\frac{1}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές.
(ii) Για κάθε m, $p \in \mathbb{N}$ ισχύει $K_{m,p} \subseteq K_{m+1,p}$
(iii) Για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq K_{m,p}$.

Έστω (x_n) μια ασθενώς Cauchy ακολουθία του X. Τότε υπάρχει $x^{**} \in X^{**}$ τέτοιο ώστε $x_n \overset{w^*}{\to} x^{**}$. Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές. Η οικογένεια $\{2K_{m,p} : m, p \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από φραγμένα, κυρτά και συμμετρικά σύνολα και πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:

(α) Για κάθε m, p το σύνολο $2K_{m,p}$ είναι $\frac{2}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές.
(β) Για κάθε m, $p \in \mathbb{N}$ ισχύει $2K_{m,p} \subseteq 2K_{m+1,p}$
(γ) Για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq 2K_{m,p}$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $p \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ να ισχύει

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \nsubseteq 2K_{m,p}\,.$$

Άρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_{n_m} \notin 2K_{m,p}$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{n_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο, διότι αν υποθέσουμε ότι είναι πεπερασμένο, τότε από τη συνθήκη (β) για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq 2K_{m,p}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$m_1(n) = \min\{m \in \mathbb{N} : x_n \in 2K_{m,p}\}$$

και

$$m_2(n) = \min\{m \in \mathbb{N} : x_n \in K_{m,p}\}\,.$$

Προφανώς έχουμε $m_1(n) \leq m_2(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in 2K_{m_1(n),p}$ και $x_n \notin 2K_{\lambda,p}$ αν και μόνον αν $\lambda < m_1(n)$.

Μπορούμε επαγωγικά να επιλέξουμε μια υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει

$$m_1(k_{n+1}) > m_2(k_n)$$

Η επιλογή γίνεται ως εξής:
Επιλέγουμε $k_1 = 1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$. Για $m = m_2(k_n)$ υπάρχει n_m τέτοιος ώστε $x_{n_m} \notin 2K_{m,p}$. Θέτουμε $k_{n+1} = n_m$ και έχουμε

$$m_1(k_{n+1}) > m = m_2(k_n)\,.$$

Η ακολουθία (x_{k_n}) είναι ασθενώς Cauchy, άρα υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$x_{k_{n+1}} - x_{k_n} \in K_{m_o,p} \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$x_{k_{n+1}} = (x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) + x_{k_n} \in K_{m_o,p} + K_{m_2(k_n),p}\,.$$

Επιλέγουμε $m_2(k_n) \geq m_o$. Τότε

$$K_{m_o,p} + K_{m_2(k_n),p} \subseteq 2K_{m_2(k_n),p}\,, \quad \text{οπότε} \quad x_{k_{n+1}} \in 2K_{m_2(k_n),p}$$

κατά συνέπεια

$$m_1(k_{n+1}) \leq m_2(k_n)$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές, οπότε $x^{**} \in X$ και ο χώρος X είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης. □

Πορισμα 3.23. *Κάθε χώρος Banach X, ο οποίος είναι SWCG σχετικά με κάποιον χώρο Banach Z είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης.*

Αποδειξη. Είναι άμεση από το προηγούμενο Θεώρημα 3.22, καθώς ο χώρος X έχει την ιδιότητα (*). □

Πορισμα 3.24. *Έστω X χώρος Banach, ο οποίος δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$. Τότε ο X έχει την ιδιότητα (*) αν και μόνον αν είναι αυτοπαθής.*

Αποδειξη. Έστω ότι ο χώρος X είναι αυτοπαθής. Τότε η μοναδιαία μπάλα B_X είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο, οπότε ο X είναι SWCG, κατά συνέπεια έχει την ιδιότητα (*).

Υποθέτουμε ότι ο X έχει την ιδιότητα (*). Τότε σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα 3.22 ο X είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης και επειδή δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$, από το Θεώρημα 0.12 του Rosenthal έπεται ότι ο X είναι αυτοπαθής. □

Πορισμα 3.25. *Έστω X ένας Asplund χώρος Banach (Ειδικότερα ο X έχει διαχωρίσιμο δυϊκό). Αν ο X έχει την ιδιότητα (*), τότε είναι αυτοπαθής.*

Αποδειξη. Κάθε διαχωρίσιμος υποχώρος του X έχει διαχωρίσιμο δυϊκό, άρα ο X δεν περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$. Σύμφωνα με το προηγούμενο Πόρισμα 3.24 έπεται ότι ο X είναι αυτοπαθής. □

Πορισμα 3.26. *Έστω X ένας μη αυτοπαθής χώρος Banach με μοναδιαία μπάλα (B_X, w) Čech πλήρη (Ειδικότερα ο X είναι μη αυτοπαθής Πολωνικός χώρος Banach). Τότε ο X δεν έχει την ιδιότητα (*).*

Απόδειξη. Άμεση από το προηγούμενο Πόρισμα 3.25. □

Όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 2 (Θεώρημα 2.16) ένα ℓ^p–ευθύ άθροισμα ($p \geq 1$) SWKA χώρων Banach είναι SWKA. Θα αποδείξουμε τώρα, με ένα παράδειγμα, ότι η ιδιότητα (*) δε διατηρείται από ℓ^p–ευθέα αθροίσματα ($p > 1$), ακόμα και αν κάθε όρος της ακολουθίας είναι SWCG.

Θεώρημα 3.27. *Ο χώρος Banach*

$$X = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus \ell^1(\mathbb{N} \times \{m\}) \right)_2$$

δεν έχει την ιδιότητα (*), ενώ είναι SWKA και ασθενώς ακολουθιακά πλήρης. Ειδικότερα δεν είναι SWCG σχετικά με κανένα χώρο Banach.

Απόδειξη. Ο χώρος X είναι βέβαια από το Θεώρημα 2.16 SWKA, διότι ο $\ell^1(\mathbb{N})$ είναι SWCG. Επίσης έχουμε

$$X = Y^* \quad \text{όπου} \quad Y = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus c_0(\mathbb{N} \times \{m\}) \right)_2 ,$$

και ακόμα ο X έχει ως unconditional βάση τη διπλή ακολουθία $e_{(n,m)}$, n, $m \in \mathbb{N}$ όπου $\bar{e}_{(n,m)}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι η συνήθης βάση του $\ell^1(\mathbb{N}) = \ell^1(\mathbb{N} \times \{m\})$. Ακριβέστερα έχουμε

$$e_{(n,m)} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1}, \bar{e}_{(n,m)}, 0, \ldots, 0)$$

(στη συνέχεια ταυτίζουμε το $\bar{e}_{(n,m)} \in \ell^1(\mathbb{N})$ με το $e_{(n,m)} \in X$). Ο X δεν περιέχει το $c_0(\mathbb{N})$, διότι είναι SWKA (βλ. 2.6 (ii)), επομένως είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης ([**L-T**, Th. 1.c.10]). Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι ο χώρος X έχει την ιδιότητα (*). Τότε υπάρχει μια οικογένεια $\{M_{n,p} : n, p \in \mathbb{N}\}$ αποτελούμενη από κλειστά, κυρτά και συμμετρικά υποσύνολα του B_X τέτοια ώστε

(i) Για κάθε n, $p \in \mathbb{N}$ το σύνολο $M_{n,p}$ είναι $\frac{1}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές.
(ii) Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ και για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του B_X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $L \subseteq M_{n,p}$

Για κάθε $\sigma \in \Sigma$ θεωρούμε το χώρο

$$X_\sigma = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus \ell_1(\{1, 2, \ldots \sigma(m)) \right)_2 ,$$

ο οποίος είναι αυτοπαθής και ισχύει $X_\sigma \subseteq X$. Με B_σ συμβολίζουμε τη κλειστή μοναδιαία μπάλα του X_σ. Τότε $\bigcup B_\sigma \subseteq B_X$ και για κάθε $\sigma \in \Sigma$ το B_σ είναι ασθενώς συμπαγές.

Έστω $p > 2$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n = \{\sigma \in \Sigma : B_\sigma \subseteq M_{n,p}\} \quad \text{και έχουμε} \quad \Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,.$$

Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα Baire, το οποίο οφείλεται στον Talagrand (βλ. την απόδειξη του [**T1**, Th. 4.3]) βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ και ένα άπειρο υποσύνολο $D = \{\sigma_k : k \in \mathbb{N}\}$ του A_{n_0} τέτοιο ώστε για κάποιο $s_0 \in S$ να ισχύει $s_0 < \sigma_k$ και $\sigma_k(|s_0| + 1) = k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $m_0 = |s_0|$ (= το μήκος της πεπερασμένης ακολουθίας s_0). Επειδή $D \subseteq A_{n_0}$, έπεται ότι $B_{\sigma_k} \subseteq M_{n_0,p}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\{e_{(n,m_0+1)} : 1 \le n \le k = \sigma_k(m_0 + 1)\} \subseteq B_{\sigma_k} \subseteq M_{n_0,p} \quad \text{για κάθε} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Ετσι συμπεραίνουμε ότι

$$M = \{e_{(n,m_0+1)} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq M_{n_0,p}\,.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι η συνήθης βάση του $\ell^1(\mathbb{N})$ είναι $\frac{1}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X, επομένως $\frac{2}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του $\ell^1(\mathbb{N})$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\frac{2}{p} < 1$ και η συνήθης βάση του $\ell^1(\mathbb{N})$ δεν είναι ε–σχετικά ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του $\ell^1(\mathbb{N})$ για $0 < \varepsilon < 1$. □

Παρατηρηση 3.28. Το αποτέλεσμα που περιγράφεται στο Θεώρημα 3.27 γενικεύεται, με την ίδια ουσιαστικά απόδειξη, και για ένα ευθύ άθροισμα της μορφής

$$X = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus \ell^1(\mathbb{N} \times \{m\}) \right)_p, \quad \text{όπου} \quad 1 < p < +\infty\,.$$

Πορισμα 3.29. *Έστω (X_n) ακολουθία χώρων Banach ώστε ο $\ell^1(\mathbb{N})$ να εμφυτεύεται στο X_n για άπειρα $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο χώρος*

$$X = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus X_n \right)_p, \quad \text{όπου} \quad 1 < p < +\infty\,,$$

δεν έχει την ιδιότητα (*)

Αποδειξη. Έπεται προφανώς από το Θεώρημα 3.27 και την προηγούμενη Παρατήρηση 3.28. □

Πορισμα 3.30. *Έστω (X_n) ακολουθία χώρων Banach, ώστε ο X_n να έχει την ιδιότητα (*) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν ο X_n δεν είναι αυτοπαθής για άπειρα $n \in \mathbb{N}$, τότε ο χώρος*

$$X = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus X_n \right)_p, \quad \text{όπου} \quad 1 < p < +\infty\,.$$

δεν έχει την ιδιότητα (*).

Απόδειξη. Αν ο X_n δεν είναι αυτοπαθής, τότε από το Πόρισμα 3.24 περιέχει τον $\ell^1(\mathbb{N})$. Από το προηγούμενο Πόρισμα 3.29 έπεται το συμπέρασμα. $\square$

Πόρισμα 3.31. *Έστω (X_n) ακολουθία SWCG χώρων Banach, τέτοια ώστε ο X_n να μην είναι αυτοπαθής για άπειρα $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο χώρος*

$$X = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus X_n \right)_p , \quad \textit{όπου} \quad 1 < p < +\infty$$

δεν είναι ισομορφικός με υποχώρο SWCG χώρου Banach.

Απόδειξη. Προφανής από τα Πορίσματα 3.24 και 3.30. $\square$

Σε αντίθεση με το Θεώρημα 3.27 ένα ℓ^1–ευθύ άθροισμα μιας ακολουθίας (X_n) από SWCG χώρους Banach είναι SWCG ([**S-W**, Prop. 2.9]). Το ανάλογο αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί και αν κάθε X_n είναι SWCG σχετικά με κάποιον υπερχώρο του.

Πρόταση 3.32. *Έστω $X_n \subseteq Z_n$, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθίες χώρων Banach, τέτοιες ώστε κάθε X_n να είναι SWCG σχετικά με το Z_n. Τότε ο χώρος $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_1$ είναι SWCG σχετικά με το χώρο $Z = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus Z_n)_1$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.11 για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια μετρικοποιήσιμη τοπολογία τ_{d_n} στον $B_{Z_n^*}$ τέτοια ώστε:

(i) Η τ_{d_n} είναι μικρότερη από την τοπολογία Mackey τ_n του $B_{Z_n^*}$.

(ii) Η τ_{d_n} λεπτότερη από την τοπολογία τ_{X_n} του $B_{Z_n^*}$ (της ομοιόμορφης σύγκλισης στα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του X_n).

Επειδή ο Z είναι ένα ℓ^1–ευθύ άθροισμα χώρων Banach έπεται ότι $B_{Z^*} = \prod_{n=1}^{\infty} B_{Z_n^*}$. Επίσης είναι γνωστό από κλασικά αποτελέσματα για την τοπολογία Mackey (βλ. [**S-W**, Prop. 1.2]) ότι η Mackey τοπολογία τ στο B_{Z^*} ταυτίζεται με την τοπολογία γινόμενο των χώρων $(B_{Z_n^*}, \tau_n)$. Θεωρούμε επίσης το B_{Z^*} εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο των τοπολογιών τ_{d_n}, την οποία τη συμβολίζουμε με τ_d. Είναι σαφές ότι η τοπολογία τ_d είναι μετρικοποιήσιμη και μικρότερη από την τοπολογία τ (από το (i)). Αν με τ_X συμβολίσουμε την τοπολογία του B_{Z^*} της ομοιόμορφης σύγκλισης στα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του X, τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι η τ_X ταυτίζεται με την τοπολογία γινόμενο των τ_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$, κατά συνέπεια είναι μικρότερη από την τοπολογία τ_d (η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη ότι η (B_{Z^*}, τ) ταυτίζεται με το τοπολογικό γινόμενο των $(B_{Z_n^*}, \tau_n)$). Έπεται από το Θεώρημα 3.11 ότι ο X είναι SWCG σχετικά με το Z. $\square$

Παρατηρηση 3.33. Αξίζει να σημειώσουμε ότι αποτελέσματα όπως αυτό, το οποίο περιγράφεται στην προηγούμενη πρόταση ή όπως το ανάλογο αποτέλεσμα των Schlüchterman και Wheeler, οφείλονται στο γεγονός ότι η ℓ^1 νόρμα ουσιαστικά δεν εισάγει καινούρια ασθενώς συμπαγή σύνολα σε ένα ℓ^1–ευθύ άθροισμα χώρων Banach. Έτσι με (παρόμοιες μεθόδους) μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα ℓ^1–ευθύ άθροισμα χώρων Banach με την ιδιότητα (*), έχει επίσης την (*).

Ερωτηση 3.34. Έστω X χώρος Banach με την ιδιότητα (*). Είναι τότε ο X SWCG σχετικά με κάποιον υπερχώρο του;

2. Χώροι Banach ισχυρά $K_{\sigma\delta}$.

Στην παράγραφο αυτή εισάγουμε μια υποκλάση των SWKA χώρων Banach, δηλαδή τους χώρους Banach, οι οποίοι είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολα του χώρου (X^{**}, w^*). Υπενθυμίζουμε ότι η κλάση των Κσδ χώρων Banach X (δηλαδή, των χώρων Banach X, οι οποίοι είναι Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*)) περιέχει τους κλειστούς υποχώρους των WCG χώρων Banach και περιέχεται γνήσια στους WKA χώρους Banach ([**A-A-M 1**]). Έστω X ένας SWCG χώρος Banach και K ένα ασθενώς συμπαγές (κυρτό και συμμετρικό) υποσύνολο του X, το οποίο παράγει ισχυρά το X, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $L \subseteq nK + \varepsilon B_X$. Τότε ισχύει

$$X = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(mK + \frac{1}{p} B_{X^{**}} \right) ,$$

δηλαδή ο χώρος X είναι Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*). Επιπλέον για κάθε $p \in \mathbb{N}$ και για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$L \subseteq mK + \frac{1}{p} B_{X^{**}} ,$$

δηλαδή κάθε SWCG χώρος Banach είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του δεύτερου δυϊκού του (X^{**}, w^*).

Όπως αποδεικνύεται παρακάτω το ίδιο ισχύει και για τους χώρους Banach, οι οποίοι έχουν την ιδιότητα (*) (κατά συνέπεια και για τους χώρους, οι οποίοι παράγονται ισχυρά από κάποιο υπερχώρο).

Έτσι οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό

Ορισμος 3.35. Ένας χώρος Banach X θα λέγεται ισχυρά Κσδ αν είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του δεύτερου δυϊκού του (X^{**}, w^*).

Θεωρημα 3.36. *Κάθε χώρος Banach X, ο οποίος έχει την ιδιότητα (*) είναι ισχυρά Κσδ.*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω $\{K_{n,p} : n, p \in \mathbb{N}\}$ μια οικογένεια κυρτών και συμμετρικών υποσυνόλων του X με τις ιδιότητες:

(i) Για κάθε n, $p \in \mathbb{N}$ το σύνολο $K_{n,p}$ είναι $\frac{1}{p}$–σχετικά ασθενώς συμπαγές.
(ii) Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ και για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L του X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq K_{n,p}$.

Τότε για κάθε n, $p \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\overline{K}^*_{n,p} \subseteq X + \frac{1}{p} B_{X^{**}}, \quad \text{οπότε} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K}^*_{n,p} \subseteq X + \frac{1}{p} B_{X^{**}},$$

κατά συνέπεια

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K}^*_{n,p} \subseteq \bigcap_{p=1}^{\infty} \left(X + \frac{1}{p} B_{X^{**}} \right) \subseteq X.$$

Επομένως

$$X = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K}^*_{n,p}.$$

Επίσης για κάθε $p \in \mathbb{N}$ και για κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο L υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq \overline{K}^*_{n,p}$. Άρα ο X είναι ισχυρά Kσδ χώρος Banach. □

Μια άλλη κλάση χώρων Banach, η οποία είναι ισχυρά Kσδ είναι αυτή των Πολωνικών χώρων Banach, δηλαδή εκείνων των χώρων Banach, των οποίων η κλειστή μοναδιαία μπάλα είναι στην ασθενή τοπολογία Πολωνικός χώρος. Η κλάση των Πολωνικών χώρων Banach εισήχθη και μελετήθηκε από τους Edgar και Wheeler στο [**E-W**] (βλ. επίσης και το [**R**]).

Λήμμα 3.37. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Κάθε ανοικτό (ή κλειστό) υποσύνολο του (X^*, w^*) είναι στη w^* τοπολογία ημισυμπαγής χώρος, κατά συνέπεια ισχυρά Kσδ υποσύνολο του (X^*, w^*).*
(ii) *Κάθε G_δ υποσύνολο του (X^*, w^*) είναι ισχυρά Kσδ υποσύνολο του (X^*, w^*).*

Απόδειξη. **(i)** Επειδή ο (X^*, w^*) είναι ημισυμπαγής χώρος έπεται άμεσα ότι κάθε κλειστό υποσύνολό του είναι επίσης ημισυμπαγής χώρος.

Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του (X^*, w^*). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$U_n = U \bigcap n B_{X^*} = U \bigcap B_{X^*}[0, n]$$

Είναι σαφές ότι το U_n είναι ανοικτό υποσύνολο του συμπαγούς μετρικού χώρου $B_{X^*}[0, n]$ (αφού ο X είναι διαχωρίσιμος). Επομένως το U_n είναι τοπικά συμπαγής διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, κατά συνέπεια είναι ένας ημισυμπαγής τοπολογικός χώρος (βλ. Παράδειγμα 1.32 (α)). Έτσι το U_n γράφεται στη μορφή $U_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m}$, όπου κάθε $K_{n,m}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (X^*, w^*) και επιπλέον για κάθε K w^* συμπαγές υποσύνολο του U_n υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $K \subseteq K_{n,m}$. Παρατηρούμε ότι

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m}\,,$$

δηλαδή, ότι το U γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του. Έστω K ένα w^* συμπαγές υποσύνολο του U. Επειδή το K είναι φραγμένο περιέχεται σε κάποια κλειστή μπάλα $B_{X^*}[0,n]$, οπότε $U \subseteq U_n$. Τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $K \subseteq K_{n,m}$, το οποίο σημαίνει ότι η αριθμήσιμη οικογένεια συμπαγών συνόλων $\{K_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ κυριαρχεί τα συμπαγή υποσύνολα του U, κατά συνέπεια το U είναι στη w^* τοπολογία ημισυμπαγής χώρος. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.33 είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^*, w^*).

(ii) Από το (i) και την Πρόταση 1.36, έπεται το συμπέρασμα. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.38. *Κάθε Πολωνικός χώρος Banach είναι ισχυρά Κσδ.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω X Πολωνικός χώρος Banach. Τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα B_X του X είναι G_δ υποσύνολο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας $(B_{X^{**}}, w^*)$ του X^{**}. Επίσης έχουμε

$$X^{**} \setminus X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{X^{**}}[0,n] \setminus B_X[0,n])$$

και καθένα από τα σύνολα $B_{X^{**}}[0,n] \setminus B_X[0,n]$ είναι w^* σ–συμπαγές υποσύνολο του X^{**}. Επομένως ο χώρος $X^{**} \setminus X$ είναι w^* σ–συμπαγές υποσύνολο του X^{**} κατά συνέπεια ο χώρος X είναι G_δ υποσύνολο του X^{**}. Τότε από το προηγούμενο Λήμμα 3.37 έπεται άμεσα ότι ο X είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του X^{**}. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.39. **(α)** Από το Πόρισμα 3.24 έχουμε ότι αν ένας Πολωνικός χώρος Banach δεν είναι αυτοπαθής (π.χ. ο προσυζυγής του χώρου JT του James), τότε ο X δεν έχει την ιδιότητα (*), ιδιαίτερα ο X δεν είναι SWCG σχετικά με κάποιον υπερχώρο του.

(β) Ένας w^* Πολωνικός χώρος Banach είναι (σύμφωνα με τον ορισμό του Rosenthal ([**R**]) ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach X, οποίος εμφυτεύεται στο συζυγή ενός (διαχωρίσιμου) χώρου Banach Y έτσι ώστε η μοναδιαία μπάλα B_X να είναι Πολωνικός χώρος στη w^* τοπολογία του Y^*. Είναι σαφές ότι ένας Πολωνικός χώρος Banach X είναι ασθενώς* Πολωνικός στο X^{**}.

Αυτή η γενικότερη κλάση χώρων Banach μελετάται από τον Rosenthal στο [**R**]. Σημειώνουμε ότι το επιχείρημα του προηγουμένου Θεωρήματος μαζί με το Λήμμα 3.37 συνεπάγονται ότι κάθε w^* Πολωνικός χώρος Banach είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του χώρου (Y^*, w^*).

(γ) Το αποτέλεσμα, το οποίο διατυπώνουμε στο Θεώρημα 3.38 ισχύει και για χώρους Banach με (B_X, w) Čech πλήρη χώρο, διότι κάθε τέτοιος χώρος είναι ισομορφικός με ένα ευθύ άθροισμα ενός Πολωνικού και ενός αυτοπαθούς χώρου Banach (βλ. [**E-W**]).

Πρόταση 3.40. *Η κλάση των ισχυρά Κσδ χώρων Banach είναι κλειστή για τους κλειστούς υποχώρους και τα πεπερασμένα γινόμενα.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την Παρατήρηση 1.31 (ii) και την Πρόταση 1.38. □

Επίσης αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα ανάλογο του Θεωρήματος 2.16. (βλ. επίσης Θεώρημα 3.27).

Θεώρημα 3.41. *Έστω (X_n) ακολουθία (ισχυρά) Κσδ χώρων Banach και $1 \leq p < \infty$. Τότε ο χώρος*

$$X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_p$$

είναι (ισχυρά) Κσδ.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$Y_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \oplus X_k\right)_p \quad \text{και} \quad Z_n = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \oplus X_k\right)_p$$

κατά συνέπεια

$$X = Y_n \oplus Z_n \quad \text{και} \quad X^{**} = Y_n^{**} \oplus Z_n^{**}$$

όπου

$$Y_n^{**} = \left(\sum_{k=1}^{n} \oplus X_k^{**}\right)_p$$

(Ακριβέστερα $X = (Y_n \oplus Z_n)_p$ και $X^{**} = (Y_n^{**} \oplus Z_n^{**})_p$)

Έστω ότι $p > 1$.

Έπεται από την Πρόταση 1.38 ότι ο χώρος $Y_n \oplus Z_n^{**}$ είναι (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*), συνεπώς και το υποσύνολο $Y_n + \dfrac{1}{n} B_{Z_n^{**}}$ είναι (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω

$$x^{**} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y_n + \frac{1}{n} B_{Z_n^{**}})$$

Τότε υπάρχουν

$$y_n \in Y_n \quad \text{και } z_n^{**} \in B_{Z_n^{**}} \text{ τέτοια ώστε} \quad x^{**} = y_n + \frac{1}{n} z_n^{**} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

οπότε

$$\|x^{**} - y_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

Έπεται ότι $y_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x^{**}$. Επιπλέον $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ και ο υποχώρος $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ είναι πυκνός στο χώρο $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_p$, οπότε $x^{**} \in X$. Άρα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(Y_n + \frac{1}{n} B_{Z_n^{**}} \right) = X$$

και από την Πρόταση 1.36 ο X είναι (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*).

Έστω $p = 1$

Θέτουμε

$$Y_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \oplus X_k \right)_1, \qquad Z_n = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \oplus X_k \right)_1 \quad \text{και} \quad E = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \oplus X_k^{**} \right)_1$$

Τότε ο E είναι (συμπληρωματικός) υποχώρος του X^{**} και επιπλέον ισχύει

$$E = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(Y_n^{**} + \frac{1}{p} B_{Z_n^{**}} \right) \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε σύνολο $Y_n^{**} + \frac{1}{p} B_{Z_n^{**}}$ είναι σ–συμπαγές υποσύνολο του (X^{**}, w^*), στην πραγματικότητα ημισυμπαγής υποχώρος του (X^{**}, w^*). Επομένως αν η ισότητα (1) αποδειχθεί, τότε ο E είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*). Έστω $x^{**} = (x_1^{**}, x_2^{**}, \dots x_n^{**}, \dots) \in E$. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^{**}\| < +\infty$. Άρα για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n(p) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=n(p)+1}^{\infty} \|x_k^{**}\| < \frac{1}{p}\,.$$

Έπεται ότι δοθέντος του $p \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$x^{**} = (x_1^{**}, x_2^{**}, \dots x_{n(p)}^{**}, 0, 0 \dots) + (0, 0, \dots 0, x_{n(p)+1}^{**}, \dots) \in Y_{n(p)}^{**} + \frac{1}{p} B_{Z_{n(p)}^{**}}\,,$$

οπότε

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(Y_n^{**} + \frac{1}{p} B_{Z_n^{**}} \right)$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$x^{**} \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(Y_n^{**} + \frac{1}{p} B_{Z_n^{**}} \right)\,.$$

Τότε για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n(p) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$x^{**} \in Y_{n(p)}^{**} + \frac{1}{p} B_{Z_{n(p)}^{**}},$$

κατά συνέπεια για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $y_p^{**} \in Y_{n(p)}^{**}$ και $z_p^{**} \in B_{Z_{n(p)}^{**}}$, οπότε $x^{**} = y_p^{**} + \frac{1}{p} z_p^{**}$. Τότε για κάθε $p \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|x^{**} - y_p^{**}\| \leq \dfrac{1}{p}$, από το οποίο προκύπτει ότι $y_p^{**} \to x^{**} \in X^{**}$. Επειδή για κάθε $p \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$y_p^{**} \in Y_{n(p)}^{**} \subseteq E = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \oplus X_k^{**} \right)_1 \subseteq X^{**},$$

έπεται ότι $x^{**} \in E$, άρα η ισότητα (1) αποδείχθηκε.

Είναι τώρα σαφές ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \oplus X_k^{**} \right)_1$$

είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του Z_n^{**}. Επειδή ο χώρος

$$Y_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \oplus X_k \right)_1$$

είναι (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του (Y_n^{**}, w^*) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \oplus X_k \right)_1 \oplus \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k^{**} \right)_1 \right]_1$$

είναι (ισχυρά) Κσδ στο χώρο $(Y_n^{**} \oplus Z_n^{**})_1 = X^{**}$. Τότε έπεται ότι ο χώρος

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[Y_n \oplus \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k^{**} \right)_1 \right]_1 = X$$

είναι (ισχυρά) Κσδ υποσύνολο του X^{**}. □

Στη συνέχεια εξετάζουμε τοπικά τις ιδιότητες της ισχυρής $\mathcal{K}$– αναλυτικότητας και του (ισχυρά) Κσδ συνόλου σε ένα χώρο Banach.

Πρόταση 3.42. *Έστω X χώρος Banach ισχυρά Κσδ. Τότε κάθε μπάλα (ανοικτή ή κλειστή) του X είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*).*

Απόδειξη. Προφανώς κάθε κλειστή μπάλα του X είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*), ως κλειστό υποσύνολο του (X, w).

Θα δείξουμε ότι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα B_X^o του X είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του X^{**}.

Ισχύει

$$B_X^o = X \bigcap B_{X^{**}}^o \quad \text{και} \quad B_{X^{**}}^o = \bigcup_{m=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{m}) B_{X^{**}}.$$

Ο χώρος $(B^o_{X^{**}}, w^*)$ είναι ημισυμπαγής (hemicompact), διότι για κάθε L w^*–συμπαγές υποσύνολο του $B^o_{X^{**}}$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$L \subseteq (1 - \frac{1}{m}) B_{X^{**}} .$$

Άρα $(B^o_{X^{**}}, w^*)$ είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του X^{**}, κατά συνέπεια η ανοικτή μοναδιαία μπάλα του X είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του X^{**}, ως τομή δύο ισχυρά Κσδ υποσυνόλων.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε ανοικτή μπάλα του X είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*). □

Παρατηρηση 3.43. Ομοίως μπορεί να αποδειχθεί ότι, αν ο χώρος X είναι Κσδ, τότε κάθε μπάλα του είναι Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*).

Προταση 3.44. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Τότε κάθε norm ανοικτό υποσύνολο του X είναι Κσδ υποσύνολο του X^{**}.*

Αποδειξη. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $(X, \|\cdot\|)$. Επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος, το U μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών μπαλών. Έστω $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_X[x_n, \varepsilon_n]$. Τότε

$$U = X \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{X^{**}}[x_n, \varepsilon_n] \right)$$

Το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{X^{**}}[x_n, \varepsilon_n]$ είναι σ–συμπαγές υποσύνολο του (X^{**}, w^*), άρα Κσδ. Τότε το U, ως τομή δύο Κσδ υποσυνόλων του (X^{**}, w^*) είναι Κσδ. □

Πορισμα 3.45. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Τότε κάθε norm G_δ υποσύνολο του X είναι Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*).*

Αποδειξη. Έστω $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, όπου V_n ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε V_n είναι Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*), άρα το V είναι Κσδ, ως αριθμήσιμη τομή Κσδ υποσυνόλων του (X^{**}, w^*). □

Προταση 3.46. *Έστω X χώρος Banach και $A \subseteq X$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το (A, w) είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*).*
(ii) *Υπάρχει οικογένεια $\{K_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ w^*–συμπαγών υποσυνόλων του X^{**} τέτοια ώστε:*
  - *(α) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m}$*
  - *(β) Για κάθε ακολουθία (x_k) του A, η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο x στο A και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq K_{n,m}$.*

Απόδειξη. **(i)$\Rightarrow$ (ii)** Προφανές

(ii)$\Rightarrow$ (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$\Omega_{n,m} = \bigcup_{k=1}^{m} K_{n,k}\,,$$

οπότε η ακολουθία $(\Omega_{n,m})_m$ είναι αύξουσα και αποτελείται από w^*–συμπαγή υποσύνολα του (X^{**}, w^*). Προφανώς η οικογένεια $\{\Omega_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ πληροί τις συνθήκες (α) και (β).

Ας υποθέσουμε ότι το A δεν είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*). Τότε υπάρχει K ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $K \nsubseteq \Omega_{n_0,m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_m \in K \setminus \Omega_{n_0,m}$. Το σύνολο K είναι ασθενώς συμπαγές, άρα υπάρχει υπακολουθία (x_{m_k}) της (x_m) και $x \in K$ ώστε $x_{m_k} \xrightarrow{w} x$. Από τη συνθήκη (β) υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\{x_{m_k} : k = 1, 2, \cdots\} \subseteq \Omega_{n_0,m_0}\,.$$

Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $m_k > m_0$, οπότε $\Omega_{n_0,m_0} \subseteq \Omega_{n_0,m_k}$. Τότε όμως $x_{m_k} \in \Omega_{n_0,m_k}$, το οποίο αντιβαίνει προς την επιλογή του x_{m_k}. Άρα το σύνολο A είναι Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*). $\square$

Λημμα 3.47. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και V ανοικτό υποσύνολο του X. Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ κλειστών μπαλών του X ώστε $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ και με την εξής ιδιότητα: Για κάθε ακολουθία (x_n) του X, $x \in X$ με $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ και $L = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x\} \subseteq V$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} V_n$.*

Απόδειξη. Επειδή ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος το ανοικτό σύνολο V γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών μπαλών, δηλαδή

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \varepsilon_k)\,.$$

Επίσης για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$B(x_k, \varepsilon_k) = \bigcup_{m=1}^{\infty} B[x_k, (1 - \frac{1}{m})\varepsilon_k]$$

άρα

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} B[x_k, (1 - \frac{1}{m})\varepsilon_k],$$

δηλαδή το V γράφεται ως ένωση αριθμήσιμου πλήθους κλειστών μπαλών, των $B[x_k, (1 - \frac{1}{m})\varepsilon_k]$, k, $m \in \mathbb{N}$. Αν (V_n) είναι μια αρίθμηση της παραπάνω οικογένειας, τότε έχουμε $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Έστω $x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x$ και $L = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x\} \subseteq V$. Τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_n \in B[x_{k_0}, (1 - \frac{1}{m})\varepsilon_{k_0}]$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κατάλληλο $N \in \mathbb{N}$ ισχύει $L \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} V_n$. □

Λημμα 3.48. *Έστω X ένας Πολωνικός χώρος και $\{F_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε:*

(i) *Αν $\sigma \leq \tau$, τότε $F_\sigma \subseteq F\tau$.*

(ii) *Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του χώρου $Y = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} F_\sigma$ υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $K \subseteq F_\sigma$.*

Τότε ο χώρος Y είναι Πολωνικός.

Αποδειξη. Επειδή ο χώρος X είναι Πολωνικός υπάρχει μια οικογένεια $\{X_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ συμπαγών υποσυνόλων του τέτοια ώστε:

(i) Αν $\sigma \leq \tau$, τότε $X_\sigma \subseteq X\tau$

(ii) Για κάθε K συμπαγές υποσύνολο του χώρου X υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $K \subseteq X_\sigma$

Θέτουμε

$$K_\tau^\sigma = F_\sigma \bigcap X_\tau \quad \text{για κάθε} \quad \sigma, \tau \in \Sigma$$

Προφανώς κάθε K_τ^σ είναι συμπαγές σύνολο και επίσης για κάθε $\sigma \in \Sigma$ ισχύει

$$F_\sigma = \bigcup (F_\sigma \bigcap X_\tau) = \bigcup_{\tau \in \Sigma} K_\tau^\sigma\,,$$

επομένως

$$Y = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} F_\sigma = \bigcup_{\sigma, \tau \in \Sigma} K_\tau^\sigma\,.$$

Παρατηρούμε ότι:

(α) Αν $\tau_1 \leq \tau_2$ και $\sigma_1 \leq \sigma_2$, τότε $K_{\tau_1}^{\sigma_1} = F_{\sigma_1} \bigcap X_{\tau_1} \subseteq F_{\sigma_2} \bigcap X_{\tau_2} = K_{\tau_2}^{\sigma_2}$

(β) Αν K συμπαγές υποσύνολο του Y, τότε υπάρχουν σ, $\tau \in \Sigma$ τέτοια ώστε $K \subseteq K_\tau^\sigma$. (Από το (i) υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ ώστε $K \subseteq F_\sigma$ και τ ώστε $K \subseteq F_\sigma \bigcap X_\tau = K_\tau^\sigma$

Από το Θεώρημα 0.3 του Christensen έπεται το συμπέρασμα. □

Προταση 3.49. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και $A \subseteq X$. Αν (A, w) είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός χώρος, τότε ο $(A, \|\cdot\|)$ είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός, ισοδύναμα το A είναι norm G_δ υποσύνολο του X.*

Αποδειξη. Επειδή ο χώρος (A, w) είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός, υπάρχουν συμπαγή υποσύνολα $\{A_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ τέτοια ώστε:

(i) Αν $\sigma \leq \tau$, τότε $A_\sigma \subseteq A\tau$.

(ii) Για κάθε K ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του A υπάρχει $\sigma \in \Sigma$, τέτοιο ώστε $K \subseteq A_\sigma$.

Τα σύνολα A_σ είναι ασθενώς συμπαγή και επομένως norm–κλειστά στο X. Επίσης κάθε norm–συμπαγές είναι ασθενώς συμπαγές, επομένως οι απαιτήσεις του προηγούμενου Λήμματος 3.48 ικονοποιούνται και ο χώρος $(A, \|\cdot\|)$ είναι Πολωνικός. Έτσι το A είναι norm G_δ υποσύνολο του X. □

Πρόταση 3.50. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach με την ιδιότητα Schur. Τότε κάθε norm G_δ υποσύνολο του X είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*).*

Απόδειξη. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τα norm ανοικτά υποσύνολα του X. Έστω V norm ανοικτό υποσύνολο του X. Επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος το V γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών μπαλών, όπως στο προηγούμενο λήμμα 3.47. Έστω

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} B[y_n, r_n]$$

Τότε

$$V = X \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{X^{**}}[y_n, r_n] \right)$$

Ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach με την ιδιότητα Schur, άρα είναι SWCG. Έστω K ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X, το οποίο παράγει ισχυρά το X. Τότε ισχύει

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} (mK + \frac{1}{n} B_{X^{**}})$$

Επομένως

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} (mK + \frac{1}{n} B_{X^{**}}) \right] \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=1}^{n} B_{X^{**}}[y_m, r_m] \right) \right] .$$

Έστω $x_n \xrightarrow{w} x$ και $L = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x\} \subseteq V$. Το σύνολο L είναι ασθενώς συμπαγές, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq mK + \frac{1}{n} B_{X^{**}}$. Επίσης, επειδή ο χώρος X έχει την ιδιότητα Schur, έχουμε $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Τότε σύμφωνα με το λήμμα 3.47 υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$L \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} V_n , \quad \text{άρα} \quad L \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} B_{X^{**}}[y_n, r_n] .$$

Επομένως το V είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*). □

Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach με την ιδιότητα Schur, τότε κάθε (κλειστό) υποσύνολο του A είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός) χώρος. Ισχύει επίσης και η ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.51. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach με την ιδιότητα Schur και $A \subseteq X$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο χώρος (A, w) είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός*
(ii) *Ο χώρος $(A, \|\cdot\|)$ είναι G_δ υποσύνολο του $(X, \|\cdot\|)$ (ισοδύναμα Πολωνικός χώρος)*
(iii) *Το A είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** Έπεται προφανώς από την Πρόταση 3.49

(ii)$\Rightarrow$ **(iii)** Άμεση από την προηγούμενη πρόταση.

(iii) $\Rightarrow$ **(i)** Κάθε ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*) είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός χώρος. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.52. *Έστω X χώρος Banach με διαχωρίσιμο δυϊκό και A φραγμένο υποσύνολο του X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το σύνολο (A, w) είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικό.*
(ii) *Το σύνολο (A, w) είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*).*
(iii) *Το σύνολο είναι Πολωνικός χώρος (A, w).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)$\Rightarrow$(iii) Επειδή το A είναι φραγμένο υποσύνολο και ο χώρος X έχει διαχωρίσιμο δυϊκό, η ασθενής τοπολογία του A είναι μετρικοποιήσιμη. Το συμπέρασμα είναι άμεσο, διότι ένας μετρικός χώρος είναι ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός αν και μόνον αν είναι Πολωνικός. (βλ. [**M-S**])

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Κάθε Πολωνικός χώρος είναι ισχυρά Κσδ σε κάθε συμπαγοποίησή του. Άρα το (A, w) είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του $(\overline{A}^*, w^*)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Κάθε ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*) είναι ισχυρά $\mathcal{K}$– αναλυτικό. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.53. *Έστω X χώρος Banach με διαχωρίσιμο δυϊκό. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο χώρος X είναι SWKA.*
(ii) *Το B_X είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του $(B_{X^{**}}, w^*)$.*
(iii) *Ο χώρος X είναι Πολωνικός.*
(iv) *Ο χώρος X είναι ισχυρά Κσδ.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση από την προηγούμενη πρόταση και το Θεώρημα 3.38. □

Τελειώνοντας αναφέρουμε κάποια ανοικτά ερωτήματα.

(α) Έστω X χώρος Banach.

(i) Αν ο X είναι SWKA, είναι τότε ισχυρά Κσδ ή τουλάχιστον Κσδ;

(ii) Αν ο X είναι SWKA με unconditional βάση, είναι τότε ο X ισχυρά Κσδ;

Σημειώνουμε ότι υπάρχει WKA χώρος Banach, ο οποίος δεν είναι Κσδ και ακόμα ότι κάθε WKA χώρος Banach με unconditional βάση είναι Κσδ ([**A-A-M 1**]).

(β) Έστω X χώρος Banach.

(i) Υποθέτουμε ότι η μοναδιαία μπάλα B_X του X είναι Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*). Είναι ο ίδιος ο X Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*); (Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε βέβαια είναι Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*))

(ii) Υποθέτουμε ότι η μοναδιαία μπάλα B_X του X είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*). Είναι ο ίδιος ο X ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*);

(γ) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach.

(1) Υποθέτουμε ότι ο X είναι ισχυρά Κσδ. Υπάρχει ένα norm G_δ υποσύνολο του X, το οποίο δεν είναι ισχυρά Κσδ του (X^{**}, w^*);

(2) Υπάρχει ένα (αναγκαία norm G_δ) ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικό υποσύνολο του (X, w), το οποίο δεν είναι ισχυρά Κσδ υποσύνολο του (X^{**}, w^*);

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι ερωτήσεις (α) και (γ) έχουν περιεχόμενο και στην κλάση των διαχωρίσιμων χώρων Banach.

Βιβλιογραφία

[A-L] D. Amir and J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. of Math. 88 (1968), 35–46

[A-A-M 1] S.A. Argyros, A.D. Arvanitakis, S.K. Mercourakis, *Talagrand's $K_{\sigma\delta}$ problem*, Topology and its Applications 155 (2008) 1737–1755.

[A-A-M 2] S.A. Argyros, A.D. Arvanitakis, S.K. Mercourakis, *Reznichenko families of trees and their applications*, J. Math. Anal. Appl. 350 (2009) 792–810.

[A-B] S. Argyros, Y. Benyamini, *Universal WCG Banach spaces and universal Eberlein compacts*, Israel J. Math. 38 (1987), 305–320.

[A-M] S. Argyros, S. Mercourakis, *On weakly Lindelöf Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), 395–446.

[A-N] S. Argyros, S. Negrepontis, *On weakly $\mathcal{K}$-countably determined spaces of continuous functions.*, Proc. Amer. Math. Soc., 87 (1983), 731–736.

[B-H] J. Batt, W. Hiermeyer, *On compactness in $L_p(\mu, X)$ in the weak topology and in the topology $(L_p(\mu, X), L_q(\mu, X'))$*. Math. Z. 182, 409-423 (1983).

[Cho1] G. Choquet, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier 5 (1953) 131–297.

[Cho2] G. Choquet, *Lectures on Analysis*, Volume I, W.A. Benjamin inc., (1969).

[Chr] Christensen J.P.R., *Topology and Borel Structure*, North–Holland, Amsterdam, 1974.

[C-O] B. Cascales, J. Orihuela, *A sequential property of set-valued maps*, J.Math. Anal. and Appl., 156, (1991,) 86–100.

[D-G-Z] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 64.

[E] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[E-W] G.A. Edgar, R.F. Wheeler *Topological properties of Banach spaces*, Pacific J. Math. 115 (1984), no 2, 317–350.

[F] M. Fabian, *Gâteaux Diffentiability of Convex Functions and Topology*, John Wiley Sons, New York, 1997.

[Fro] Z. Frolik *A survey of separable descriptive theory of sets and spaces*, Chech. Math. J. 20 (95) 1970.

[F-H-H-M-P-Z] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, S.V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler, *Funcional Analysis and Infinite Dimensional Geometry*, CMS Books in Math., vol. 8, Springer Verlang, New York, 2001.

[F-M-Z] M. Fabian, V. Montesinos and V. Zizler *A characterization of subspaces of weakly compactly generated Banach spaces* J. London Math. Soc. (2) 69 (2004) 457–464

[H-L-M] P. Hájek, G. Lancien, V. Montesinos, *Universality of Asplund spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 135 (2007), 2031–2035.

[H-M-V-Z] P. Hájek, V. Montesinos, J. Vanderwerff, V. Zizler *Biorthogonal Systems in Banach Spaces*, CMS Books in Math. Vol. 26, Springer, New York, 2008.

[J-R] J.E. Jayne, C.A. Rogers, *$\mathcal{K}$-analytic sets*, in Analytic Sets, Academic Press, London, 1980.

[K] K. Kuratowski, *Topology*, Volume I (1966), Volume II (1968), Academic Press.

[L] J. Lindenstrauss, *Weakly compact sets, their topological properties and the Banach spaces they generate*, Annals of Math. Stud. 69, Princeton Univ. Press, 1972, 235–273.

[L-T] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I, Sequence Spaces*, Springer Verlag, New York, 1977.

[M1] Σοφοκλής Μερκουράκης, *Corson-Συμπαγείς Χώροι και η Δομή των Ασθενώς $\mathcal{K}$–Αναλυτικών Χώρων Banach*, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα 1983.

[M2] S. Mercourakis, *On weakly countably determined Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 300 (1987), 307–327.

[M-S] S. Mercourakis, E. Stamati, *A new class of weakly $\mathcal{K}$-analytic Banach Spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 47, 2 (2006) 291–312.

[N] S. Negrepontis *Banach Spaces and Topology*, in Handbook of Set-Theoretic Topology, ed. K. Kunnen, J. Vaughan, North-Holland, (1983), 1041–1138.

[N-Z-K-Φ] *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Αθήνα (1988), Εκδόσεις Συμμετρία.

[R] H. Rosenthal, *$Weak^*$–Polish Banach spaces*, Journal of Functional Analysis, 76, 267–316 (1988)

[S] J. Stern, *A Ramsey theorem for trees, with an application to Banach spaces*, Israel J. Math. 29 (1978), 179–188.

[S-W] G. Schlüchterman, R.F. Wheeler, *On strongly WCG Banach spaces*, Math. Z. 199 (1988), 387–398.

[T1] M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement $\mathcal{K}$-analytiques*, Ann. of Math. 110 (1979) 407–438.

[T2] M. Talagrand, *Choquet simplexes whose set of extreme points is $\mathcal{K}$–analytic*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 35(3) (1985) 195–206

[V] L. Vašak, *On a generalization of weakly compactly generated Banach spaces*, Studia Math. 70 (1981), 11–19.