ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Phantom maps στη θεωρία ομοτοπίας

Ιωάννης Τσακανίκας

Διδακτορική διατριβή

Επιβλέπων: Ιωάννης Εμμανουήλ

ΑΘΗΝΑ 2011

Η τριμελής συμβουλευτική επιτροπή:

- Ιωάννης Εμμανουήλ, Αναπληρωτής Καθηγητής (επιβλέπων)
- Μιχάλης Μαλιάκας, Καθηγητής
- Παναγιώτης Παπάζογλου, Καθηγητής

Τα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής:

- Δημήτριος Βάρσος, Καθηγητής
- Ευάγγελος Ράπτης, Καθηγητής
- Μιχαήλ Συκιώτης, Επίκουρος Καθηγητής
- Ολυμπία Ταλέλλη, Καθηγήτρια

Περίληψη

Σε αυτή τη διδακτορική διατριβή μελετάμε μια κλάση απεικονίσεων ανάμεσα σε CW συμπλέγματα οι οποίες ονομάζονται phantom maps. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε μια αριθμητική αναλλοίωτη των phantom maps, η οποία ονομάζεται δείκτης Gray. Ένα κεντρικό αποτέλεσμα της εργασίας περιγράφει ένα νέο χαρακτηρισμό του δείκτη Gray μέσω της ρητοποιήσεως ενός χώρου. Χρησιμοποιώντας αυτόν το χαρακτηρισμό, αναπτύσσουμε μία μέθοδο εντοπισμού phantom maps με ένα συγκεκριμένο δείκτη Gray, ελέγχοντας αλγεβρικές αναλλοίωτες των χώρων. Χρησιμοποιούμε αυτή τη μέθοδο για να παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα δύο χώρων ανάμεσα στους οποίους υπάρχουν phantom maps με οποιοδήποτε πεπερασμένο δείκτη Gray. Επίσης, εξετάζουμε το σύνολο των phantom maps με άπειρο δείκτη Gray, χρησιμοποιώντας πύργους αβελιανών ομάδων. Οι μέθοδοι απόδειξης των αποτελεσμάτων χρησιμοποιούν στοιχεία της θεωρίας ομολογίας, συνομολογίας και ομοτοπίας CW συμπλεγμάτων (όπως οι ανώτερες ομάδες ομοτοπίας, νηματικές και συννηματικές ακολουθίες, τοπικοποίηση και πλήρωση). Επίσης, γίνεται εκτενής χρήση μεθόδων και εργαλείων της ομολογικής άλγεβρας, όπως ο παραγόμενος συναρτητής του αντιστρόφου ορίου.

Λέξεις κλειδιά: Θεωρία ομοτοπίας, phantom map, δείκτης Gray, ρητοποίηση, $\varprojlim^1$.

Summary

In this thesis we study a class of maps between CW complexes called phantom maps. We examine, in particular, a numerical invariant of phantom maps called the Gray index. A central result describes a new characterization of the Gray index in terms of the rationalization of a space. Using this characterization, we develop a method of locating phantom maps of a specific Gray index, by checking algebraic invariants of the spaces. We use this method in order to present an example of two spaces, such that there are phantom maps of any finite Gray index between them. We also examine the set of phantom maps having infinite Gray index, using towers of abelian groups. Our proofs use elements of homology, cohomology and homotopy theory of CW complexes (such as higher homotopy groups, fibration and cofibration sequences, localization and completion). We also use extensively methods and tools of homological algebra, such as the derived functor of the inverse limit.

Key words: Homotopy theory, phantom map, Gray index, rationalization, $\varprojlim^1$.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου Ιωάννη Εμμανουήλ για την καθοδήγηση και βοήθεια του καθόλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών και διδακτορικών μου σπουδών, καθώς και τους καθηγητές Μιχάλη Μαλιάκα και Παναγιώτη Παπάζογλου που συμμετείχαν στη συμβουλευτική μου επιτροπή. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη στήριξη της όλα αυτά τα χρόνια.

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε με τη χορήγηση υποτροφίας από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η έννοια των phantom maps έχει τις βάσεις της στη θεωρία ομοτοπίας. Ας υποθέσουμε ότι X και Y είναι συνεκτικά CW συμπλέγματα και X_n είναι ο n-σκελετός του X. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ καλείται phantom αν ο περιορισμός της στο X_n είναι ομοτοπικός με τη σταθερή απεικόνιση για κάθε n. Για να καταλάβουμε τη χρησιμότητα αυτού του ορισμού θα βοηθούσε να θυμηθούμε τον ορισμό του CW συμπλέγματος, ο οποίος μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε βιβλίο αλγεβρικής τοπολογίας, π.χ. στο [9]. Συμβολίζουμε με D^n τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο του $\mathbb{R}^n$, με e^n το εσωτερικό του και με S^{n-1} το σύνορο του.

(1) Ξεκινάμε με ένα διακριτό σύνολο X_0, τα στοιχεία του οποίου θεωρούνται ως 0-κελιά.

(2) Επαγωγικά σχηματίζουμε τον n-σκελετό X_n από τον X_{n-1} προσκολλώντας n-κελιά e^n_a μέσω απεικονίσεων $f_a : S^{n-1} \to X_{n-1}$. Δηλαδή ο X_n είναι ο χώρος πηλίκο της ξένης ένωσης $X_{n-1} \coprod (\coprod_a D^n_a)$ του X_{n-1} με μια συλλογή n δίσκων D^n_a, όπου έχουμε ταυτίσει το x με το $f_a(x)$ αν το x ανήκει στο σύνορο του D^n_a.

(3) Αυτή η διαδικασία είτε σταματάει για κάποιο n είτε συνεχίζεται επ' άπειρον, θέτοντας $X = \bigcup X_n$. Στην τελευταία περίπτωση ο X εφοδιάζεται με την ασθενή τοπολογία.

Δηλαδή ένα CW σύμπλεγμα X είναι ένας χώρος που φτιάχνεται από κάποια αρκετά εύκολα και κατανοητά κομμάτια X_n και η $f : X \to Y$ λέγεται phantom map αν δεν μπορεί να "εντοπιστεί' από αυτά τα κομμάτια. Το πρώτο παράδειγμα μιας μη τετριμμένης phantom map (από το $\Sigma\mathbb{C}P^\infty$ σε ένα άπειρο μπουκέτο σφαιρών) δόθηκε από τους Adams και Walker στο [1]. Έκτοτε. η έννοια αυτή μελετήθηκε εκτενώς και έχει βοηθήσει στην κατανόηση της δομής των CW συμπλεγμάτων. Δύο πολύ καλά εγχειρίδια πάνω στη χρήση των phantom maps στη μη ευσταθή θεωρία ομοτοπίας είναι τα [13, 18].

Ένα πολύ χρήσιμο αλγεβρικό εργαλείο στη θεωρία των phantom maps είναι ο πρώτος δεξιά παραγόμενος συναρτητής του αντιστρόφου ορίου $\varprojlim^1$. Αν και ήδη είχαν χρησιμοποιηθεί $\varprojlim^1$ υπολογισμοί σε τοπολογικά προβλήματα, ο πρώτος που έδωσε έναν ορισμό σε γενικό πλαίσιο ήταν ο Roos στο [19]. Μια πολύ εκτενέστερη μελέτη του συναρτητή $\varprojlim^1$ έγινε λίγο αργότερα από τον Jensen στο [12]. Χρησιμοποιώντας $\varprojlim^1$ υπολογισμούς ο Gray στο [4] έδειξε ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμες, μη ομοτοπικές, phantom maps από το $\mathbb{C}P^\infty$ στην S^3. Το παράδειγμα του Gray ήταν μια βελτίωση του παραδείγματος των Adams και Walker δεδομένου ότι οι χώροι που χρησιμοποιεί είναι πεπερασμένου τύπου.

Στο κεφάλαιο 2 μελετάμε τους δεξιά παραγόμενους συναρτητές του αντιστρόφου ορίου, ώστε αυτοί να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Αφού δώσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου ορίου που αντιστοιχεί σε έναν συναρτητή $F : \mathbb{N}^{op} \to \mathfrak{Ab}$, όπου $\mathbb{N}^{op}$ είναι η αντίθετη κατηγορία του διατεταγμένου συνόλου των φυσικών αριθμών και $\mathfrak{Ab}$ η κατηγορία των αβελιανών ομάδων, δείχνουμε ότι αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως ένας συναρτητής $\varprojlim : \mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}} \to \mathfrak{Ab}$. Εδώ $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$ είναι η κατηγορία των συναλλοίωτων συναρτητών $F : \mathbb{N}^{op} \to \mathfrak{Ab}$. Τα στοιχεία της δηλαδή έχουν τη μορφή

$$A_1 \xleftarrow{a_1} A_2 \xleftarrow{a_2} A_3 \xleftarrow{a_3} \cdots ,$$

όπου οι $A_i, i \in \mathbb{N}$ είναι αβελιανές ομάδες και οι απεικονίσεις a_i είναι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων και ονομάζονται πύργοι αβελιανών ομάδων. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη εμφυτευτικών αντικειμένων και εμφυτευτικών επιλύσεων σε αυτή την κατηγορία και δεδομένου ότι ο συναρτητής $\varprojlim$ είναι αριστερά ακριβής, ορίζουμε ως $\varprojlim^i$ να είναι οι δεξιά παραγόμενοι συναρτητές του, δηλαδή

$$\varprojlim^i = R^i \varprojlim, i \geq 0.$$

Προκειμένου να εξετάσουμε πότε αυτοί μηδενίζονται, θεωρούμε τη συνθήκη Mittag-Leffler για έναν πύργο αβελιανών ομάδων, η οποία εισήχθη από τον Grothendieck στο [6]. Λέμε ότι ένας πύργος αβελιανών ομάδων A ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler αν για κάθε k υπάρχει κάποιο $j \geq k$ ώστε η εικόνα της απεικόνισης $A_i \to A_k$ να ισούται με την εικόνα της $A_j \to A_k$, για όλα τα $i \geq j$. Αποδεικνύουμε ότι σε αυτή την περίπτωση $\varprojlim^1 A_n = 0$, και χρησιμοποιώντας τη αποδεικνύουμε ότι οι δεξιά παραγόμενοι συναρτητές είναι ταυτοτικά μηδέν στις διαστάσεις μεγαλύτερες ή ίσες του δύο. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνουμε μια ισοδύναμη περιγραφή του συναρτητή $\varprojlim^1$. Περισσότερες λεπτομέρειες και εφαρμογές για το συναρτητή $\varprojlim^1$ μπορούν να βρεθούν στο [12].

Στο κεφάλαιο 3 μελετάμε phantom maps στη μη ευσταθή ομοτοπική κατηγορία των CW συμπλεγμάτων. Τα αντικείμενα της κατηγορίας είναι τα συνεκτικά CW συμπλέγματα και οι απεικονίσεις είναι οι κλάσεις ομοτοπίας συνεχών απεικονίσεων ανάμεσα τους. Θεωρούμε ότι όλα τα σύνολα έχουν κάποιο σημείο στηρίξης, το οποίο διατηρείται από οποιαδήποτε απεικόνιση. Για δύο τυχαία CW συμπλέγματα X και Y συμβολίζουμε με $[X, Y]$ το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας απεικονίσεων από το X στο Y και με $\mathrm{Ph}(X, Y)$ το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των phantom maps από το X στο Y. Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι προσέγγισης της θεωρίας των phantom maps. Ο πρώτος στηρίζεται στην ύπαρξη αμφιμονοσήμαντων αντιστοιχιών συνόλων με σημείο στήριξης $\mathrm{Ph}(X, Y) \cong \varprojlim^1[\Sigma X_n, Y] \cong \varprojlim^1[X, \Omega Y^{(n)}]$, όπου $Y^{(n)}$ είναι το n-οστό επίπεδο του πύργου Postnikov του Y (βλέπε παράγραφο 3.1 για τον ορισμό του πύργου Postnikov ενός χώρου).

Η δεύτερη προσέγγιση στη θεωρία των phantom maps χρησιμοποιεί τις δύο παρακάτω νηματικές ακολουθίες (fibration sequences) για μηδενοδύναμα, πεπερασμένου τύπου συμπλέγματα X και Y. Η πρώτη είναι η

$$X_\tau \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X_0$$

όπου $r : X \to X_0$ είναι η ρητοποίηση του X (βλέπε [10] για λεπτομέρειες ως προς την τοπικοποίηση CW συμπλεγμάτων). Η δεύτερη νηματική ακολουθία είναι η

$$Y_\rho \longrightarrow Y \xrightarrow{\widehat{e}} \widehat{Y}$$

όπου $\widehat{e} : Y \to \widehat{Y}$ είναι η προπεπερασμένη πλήρωση του Y [21]. Προκύπτει ότι $\mathrm{Ph}(X, Y) = ker\widehat{e}_* = imr^*$, όπου $\widehat{e}_* : [X, Y] \to [X, \widehat{Y}]$ και $r^* : [X_0, Y] \to [X, Y]$ είναι οι απεικονίσεις που επάγονται από τις $\widehat{e}$ και r αντίστοιχα [13, Θεώρημα 5.1].

Επειδή το σύνολο $\mathrm{Ph}(X, Y)$, αν δεν είναι τετριμμένο, είναι συνήθως πολύ μεγάλο, προσπαθούμε να αντιστοιχίσουμε κάποιες αριθμητικές αναλλοίωτες στα στοιχεία του ώστε να διαχωρίζονται ευκολότερα. Μία τέτοια είναι ο δείκτης Gray που ορίστηκε από τον Gray στη διδακτορική του διατριβή [4]. Δοθέντος μιας phantom map $f : X \to Y$, αφού ο περιορισμός της στον n-σκελετό του X είναι ομοτοπικός με τη σταθερή απεικόνιση, αυτή παραγοντοποιείται, ως προς ομοτοπία, ως εξής

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & X/X_n \arrow[ur, "f_n"'] & \end{tikzcd}$$

για κάθε n. Η απεικόνιση f_n συνήθως δεν είναι μοναδική. Ο δείκτης Gray $G(f)$ της f, είναι ο μεγαλύτερος n για τον οποίο η f_n μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι phantom map. Αυτή η έννοια έχει μελετηθεί αναλυτικά στα [7, 8, 11, 16, 22]. Συγκεκριμένα, στο [8] οι Hà και Strom έδωσαν μία ερμηνεία του δείκτη Gray χρησιμοποιώντας τη $\varprojlim^1$ προσέγγιση στη θεωρία των phantom maps. Ένα από τα βασικά τους αποτελέσματα είναι το εξής: Έστω $G_n = [X, \Omega Y^{(n)}]$ και $G_k^{(n)} = \mathrm{Im}(G_n \to G_k)$ για κάθε $n \geq k$. Τότε, μέσω της ταύτισης $\mathrm{Ph}(X, Y) \cong \varprojlim^1 G_n$, ο δείκτης Gray μιας phantom map $f : X \to Y$ είναι $\geq k - 1$, αν και μόνο αν η κλάση ομοτοπίας της f ανήκει στον πυρήνα της φυσικής απεικόνισης $p_k : \varprojlim^1_n G_n \to \varprojlim^1_n G_k^{(n)}$. Εδώ αρχικά δίνουμε έναν νέο χαρακτηρισμό του δείκτη Gray, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των phantom maps μέσω της ρητοποίησης του X.

Θεώρημα A. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για μια phantom map $f : X \to Y$ ανάμεσα σε 1-συνεκτικά, πεπερασμένου τύπου CW συμπλέγματα:

(1) $G(f) \leq k - 2$.

(2) Η σύνθεση $q_k \circ \overline{f}$ δεν είναι ομοτοπική με τη σταθερή απεικόνιση, για οποιαδήποτε απεικόνιση $\overline{f} : X_0 \to Y$ έτσι ώστε $f = \overline{f} \circ r$ στο παρακάτω ομοτοπικά μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "f"'] & X_0 \arrow[d, "\overline{f}"] \arrow[dr, "q_k \circ \overline{f}"] & \\ & Y \arrow[r, "q_k"'] & Y^{(k)}, \end{tikzcd}$$

όπου q_k είναι η φυσιολογική απεικόνιση από το Y στο κ-οστό επίπεδο $Y^{(k)}$ του πύργου Postnikov του Y και r είναι η ρητοποίηση του X.

Χρησιμοποιώντας αυτό το χαρακτηρισμό του δείκτη Gray, αναπτύσσουμε μια καινούρια μέθοδο ώστε να κατασκευάζουμε phantom maps που έχουν κάποιο συγκεκριμένο δείκτη Gray.

Θεώρημα B. Έστω X και Y 1-συνεκτικά, πεπερασμένου τύπου CW συμπλέγματα, ώστε η απεικόνιση $r^* : [X_0, Y] \to \mathrm{Ph}(X, Y)$ να είναι αμφιμονοσήμαντη. Αν οι αβελιανές ομάδες $H_{n-1}(X_0)$ και $\pi_n(Y) \otimes \mathbb{Q}$ είναι και οι δύο μη μηδενικές, τότε υπάρχουν υπεραριθμήσιμες κλάσεις ομοτοπίας phantom maps $X \to Y$ με δείκτη Gray $n-2$.

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο θεώρημα δείχνουμε ότι υπάρχουν phantom maps με δείκτη Gray n, για οποιοδήποτε $n \geq 1$ ανάμεσα στους χώρους $K(\mathbb{Z}, 2) \times K(\mathbb{Z}, 3)$ και $S^2 \vee S^2$. Αυτό είναι το πρώτο γνωστό παράδειγμα χώρων ανάμεσα στους οποίους υπάρχουν phantom maps οποιουδήποτε πεπερασμένου δείκτη Gray .

Στη συνέχεια μελετάμε το σύνολο $\mathrm{Ph}_\omega(X, Y)$ των phantom maps ανάμεσα στους X και Y που έχουν άπειρο δείκτη Gray. Σύμφωνα με το [7] το σύνολο $\mathrm{Ph}_\omega(X, Y)$ περιγράφεται αλγεβρικά ως

$$\mathrm{Ph}_\omega(X, Y) \cong \varprojlim{}^1(\mathrm{Im}^\omega[X, \Omega Y^{(n)}]),$$

όπου $\mathrm{Im}^\omega G_n = \bigcap_{k \geq 1} \mathrm{image}(G_{n+k} \to G_n)$ για οποιοδήποτε πύργο ομάδων $\{G_n\}$. Στο [7] ο Há έδειξε, χρησιμοποιώντας την παραπάνω αντιστοιχία, ότι το σύνολο $\mathrm{Ph}_\omega(X, Y)$ είναι τετριμμένο, στην περίπτωση που ο Y είναι ένα πεπερασμένου τύπου μπουκέτο σφαιρών. Όμως για οποιοδήποτε πεπερασμένου τύπου χώρο Y', υπάρχει ένα πεπερασμένου τύπου μπουκέτο σφαιρών Y και μια απεικόνιση $g : Y \to Y'$ η οποία επάγει έναν επιμορφισμό στις ομάδες ομοτοπίας. Η επαγόμενη απεικόνιση

$$g_* : \mathrm{Ph}(X, Y) \to \mathrm{Ph}(X, Y')$$

είναι επίσης επί [14, Θεώρημα 2]. Δεν είναι όμως γνωστό εάν και η απεικόνιση

$$g_* : \mathrm{Ph}_\omega(X, Y) \to \mathrm{Ph}_\omega(X, Y')$$

είναι επί. Παρουσιάζουμε ένα αλγεβρικό παράδειγμα ενός (ρητού) επιμορφισμού μεταξύ πύργων $\varphi : A \to B$, ώστε η επαγόμενη απεικόνιση

$$\varprojlim{}^1\mathrm{Im}^\omega\varphi : \varprojlim{}^1\mathrm{Im}^\omega A_n \to \varprojlim{}^1\mathrm{Im}^\omega B_n$$

να μην είναι επί. Συμπεραίνουμε ότι δεν είναι δυνατόν να δείξουμε με ένα καθαρά αλγεβρικό επιχείρημα ότι μια απεικόνιση $g : Y \to Y'$ που επάγει έναν επιμορφισμό στις ομάδες ομοτοπίας, θα επάγει και έναν επιμορφισμό $g_* : \mathrm{Ph}_\omega(X, Y) \to \mathrm{Ph}_\omega(X, Y')$.

Κεφάλαιο 2

Ο παραγόμενος συναρτητής του αντιστρόφου ορίου

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τους δεξιά παραγόμενους συναρτητές του αντιστρόφου ορίου. Στην πρώτη παράγραφο δίνουμε τον ορισμό του αντιστρόφου ορίου που αντιστοιχεί σε έναν συναρτητή $F : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$, ανάμεσα σε δύο κατηγορίες $\mathcal{I}$ και $\mathcal{A}$. Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση κατά την οποία $\mathcal{I}$ είναι η αντίθετη κατηγορία του διατεταγμένου συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^{op}$ και $\mathcal{A}$ η κατηγορία $\mathfrak{Ab}$ των αβελιανών ομάδων. Περιγράφουμε τα εμφυτευτικά αντικείμενα και αποδεικνύουμε την ύπαρξη εμφυτευτικών επιλύσεων στην κατηγορία συναρτητών $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$. Ορίζουμε τους δεξιά παραγόμενους συναρτητές του αντιστρόφου ορίου, και θεωρούμε την συνθήκη Mittag-Leffler, η οποία είναι μια ικανή συνθήκη ώστε αυτοί να είναι μηδέν στη διάσταση ένα. Χρησιμοποιώντας την, αποδεικνύουμε ότι οι συναρτητές $\varprojlim^i$ μηδενίζονται σε όλες τις διαστάσεις μεγαλύτερες ή ίσες του δύο. Στην τελευταία παράγραφο δίνουμε έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό του $\varprojlim^1$, ο οποίος επιτρέπει να κάνουμε υπολογισμούς $\varprojlim^1$ όρων με έναν ευκολότερο τρόπο.

2.1 Το αντίστροφο όριο

Ας θεωρήσουμε μια μικρή κατηγορία $\mathcal{I}$, μια κατηγορία $\mathcal{A}$ και έναν συναρτητή $F : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$. Το αντίστροφο όριο του συναρτητή F είναι ένα αντικείμενο $\varprojlim F_i$ της $\mathcal{A}$ και μορφισμοί $\pi_i : \varprojlim F_i \to F_i, i \in \mathcal{I}$ της κατηγορίας $\mathcal{A}$, οι οποίοι είναι συμβιβαστοί υπό την έννοια ότι για κάθε μορφισμό $\varphi : j \to i$ στην $\mathcal{I}$ έχουμε ότι $\pi_i = F_\varphi \pi_j$. Επιπλέον ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα: Για οποιοδήποτε αντικείμενο A της $\mathcal{A}$

και οικογένεια συμβιβαστών μορφισμών $f_i : A \to F_i$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\lambda : A \to \varprojlim F_i$ ώστε $f_i = \pi_i \lambda$. Αν και το αντίστροφο όριο ενός συναρτητή δεν υπάρχει απαραίτητα, η καθολική του ιδιότητα δείχνει ότι εφόσον υπάρχει αυτό είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό. Εμάς θα ενδιαφέρει ιδιαίτερα η περίπτωση κατά την οποία η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι η κατηγορία $\mathfrak{Ab}$ των αβελιανών ομάδων. Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να δούμε ότι το αντίστροφο όριο οποιουδήποτε συναρτητή υπάρχει [20, σελ.51].

Υπάρχει κι ένας διαφορετικός τρόπος να ¨δούμε' το αντίστροφο όριο ως έναν συναρτητή. Γι' αυτό το λόγο θα χρειαστούμε πρώτα κάποια στοιχεία από κατηγορίες συναρτητών. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στο [23, Παράρτημα]. Είμαστε πάντα στην περίπτωση κατά την οποία $\mathcal{I}$ είναι μια μικρή κατηγορία και $\mathcal{A}$ μια οποιαδήποτε κατηγορία. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να φτιάξουμε μια καινούρια κατηγορία, την κατηγορία συναρτητών $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ που ορίζεται ως εξής. Τα αντικείμενα της $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ είναι οι συναλλοίωτοι συναρτητές $F : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ και το σύνολο των μορφισμών ανάμεσα σε δύο τέτοιους συναρτητές F και G είναι το σύνολο των φυσικών μετασχηματισμών ανάμεσα τους. Αυτή είναι μια καινούρια κατηγορία η οποία έχει αρκετές από τις ιδιότητες της κατηγορίας $\mathcal{A}$. Για παράδειγμα αν η $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή, το ίδιο είναι και η $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση που το αντίστροφο όριο οποιουδήποτε συναρτητή $F : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ υπάρχει (σε αυτή την περίπτωση η $\mathcal{A}$ ονομάζεται πλήρης κατηγορία), μπορούμε να θεωρήσουμε το αντίστροφο όριο ως ένα συναρτητή $\varprojlim : \mathcal{A}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{A}$. Σε αυτή την περίπτωση η καθολική ιδιότητα του αντιστρόφου ορίου μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής. Θεωρούμε τον διαγώνιο συναρτητή $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathcal{I}}$, ο οποίος στέλνει ένα αντικείμενο $A \in \mathcal{A}$ στο σταθερό συναρτητή ΔA με $(\Delta A)_i = A$, για κάθε $i \in \mathcal{I}$ και αν $f : i \to j$ είναι ένας μορφισμός της κατηγορίας $\mathcal{I}$, τότε $\Delta A(f) = 1_A$. Τώρα η καθολική ιδιότητα του αντιστρόφου ορίου είναι απλά ότι ο συναρτητής $\varprojlim$ είναι δεξιά συζυγής του συναρτητή Δ. Δηλαδή για κάθε αντικείμενο $A \in \mathcal{A}$ και συναρτητή $F : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ έχουμε ότι

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \varprojlim F_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{I}}}(\Delta A, F).$$

Δεδομένου ότι ένας δεξιά συζυγής συναρτητής είναι αριστερά ακριβής [20, σελ.55], έχουμε αμέσως το συμπέρασμα ότι ο συναρτητής $\varprojlim$ είναι αριστερά ακριβής. Διαλέγοντας ως $\mathcal{A}$ να είναι η κατηγορία $\mathfrak{Ab}$ των αβελιανών ομάδων, αυτό που θα δούμε είναι ότι η κατηγορία συναρτητών $\mathfrak{Ab}^{\mathcal{I}}$ έχει αρκετά εμφυτευτικά αντικείμενα και συνεπώς έχει ενδιαφέρον να θεωρήσουμε τους δεξιά παραγόμενους συναρτητές του αριστερά ακριβούς συναρτητή $\varprojlim$. Αυτά θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

2.2 Εμφυτευτικά αντικείμενα και επιλύσεις στην $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$

Από δω και στο εξής θα θεωρούμε ως κατηγορία $\mathcal{I}$ την αντίθετη κατηγορία του διατεταγμένου συνόλου των φυσικών αριθμών, δηλαδή τη $\mathbb{N}^{op}$, και ως κατηγορία $\mathcal{A}$ την κατηγορία $\mathfrak{Ab}$ των αβελιανών ομάδων. Δηλαδή, για να είμαστε λίγο πιο σαφείς, τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathbb{N}^{op}$ είναι οι φυσικοί αριθμοί και για δύο αντικείμενα n και m υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $n \to m$, αν $n \geq m$. Επομένως τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$ έχουν την εξής μορφή

$$A_1 \xleftarrow{a_1} A_2 \xleftarrow{a_2} A_3 \xleftarrow{a_3} \cdots,$$

όπου οι $A_i, i \in \mathbb{N}$ είναι αβελιανές ομάδες και οι απεικονίσεις a_i είναι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων.

Ορισμός 2.2.1. *Ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$ ονομάζεται πύργος αβελιανών ομάδων.*

Θα συμβολίζουμε με $\{A_n\}$, ή και απλά A όταν δεν δημιουργείται σύγχιση, έναν πύργο αβελιανών ομάδων. Αν έχουμε δύο πύργους αβελιανών ομάδων $\{A_n\}$ και $\{B_n\}$ με ομομορφισμούς $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ αντίστοιχα τότε ένας μορφισμός πύργων $\varphi : A \to B$, ως φυσικός μετασχηματισμός ανάμεσα στους συναρτητές A και B, είναι μια ακολουθία ομομορφισμών αβελιανών ομάδων $\varphi_n : A_n \to B_n, n \geq 1$ ώστε $\varphi_n a_n = b_n \varphi_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$.

Προκειμένου να κάνουμε ομολογική άλγεβρα στην κατηγορία $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$ θα χρειαστεί πρώτα να δούμε ότι έχει αρκετά εμφυτευτικά αντικείμενα. Ας θυμηθούμε τους αντίστοιχους ορισμούς.

Ορισμός 2.2.2. *Ένας μορφισμός $\mu : A \to B$ στην κατηγορία $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$ ονομάζεται μονικός αν για οποιοδήποτε ζευγάρι μορφισμών $\alpha, \beta : C \to A$ ισχύει ότι $\mu\alpha = \mu\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.*

Ισοδύναμα, ο μ είναι μονικός εάν και μόνο εάν για κάθε μορφισμό $\alpha : C \to A$ με $\mu\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Ορισμός 2.2.3. *Ένα αντικείμενο I της κατηγορίας $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$ ονομάζεται εμφυτευτικό αν για κάθε μονικό μορφισμό $f : A \to B$ και κάθε μορφισμό $\alpha : A \to I$ υπάρχει τουλάχιστον ένας μορφισμός $\beta : B \to I$ ώστε $\alpha = \beta f$.*

Χρησιμοποιώντας το ότι κάθε αβελιανή ομάδα εμφυτεύεται σε μια διαιρετή αβελιανή ομάδα καθώς και το ότι η κατηγορία των αβελιανών ομάδων δέχεται τυχαία γινόμενα, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε αντικείμενο της κατηγορίας $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$ εμφυτεύεται σε ένα εμφυτευτικό αντικείμενο χρησιμοποιώντας γενικά κατηγορικά επιχειρήματα [23, σελ.43]. Εδώ θα δώσουμε έναν πολύ σαφέστερο χαρακτηρισμό των εμφυτευτικών αντικειμένων και των εμφυτευτικών επιλύσεων. Πρώτα θα χρειαστούμε έναν απλούστερο χαρακτηρισμό των μονικών μορφισμών της κατηγορίας.

Πρόταση 2.2.4. *Έστω A και B πύργοι αβελιανών ομάδων. Τότε ο μορφισμός πύργων $\mu : A \to B$ είναι μονικός εάν και μόνο εάν η απεικόνιση $\mu_n : A_n \to B_n$ είναι μονομορφισμός αβελιανών ομάδων για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. $\Leftarrow$) Έστω $\alpha, \beta : C \to A$ ώστε $\mu\alpha = \mu\beta$. Θα δείξουμε ότι $\alpha = \beta$. Όμως $\mu\alpha = \mu\beta \Rightarrow \mu_n\alpha_n = \mu_n\beta_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_n = \beta_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha = \beta$.

$\Rightarrow$) Θεωρούμε τον πύργο των πυρήνων $\{\ker\mu\}$ που στην k θέση έχει τον πυρήνα της απεικόνισης μ_k, $\ker\mu_k$, και την απεικόνιση πύργων $\alpha : \ker\mu \to A$ όπου α_k είναι η εμφύτευση της υποομάδας $\ker\mu_k$ στην ομάδα A_k. Έχουμε δηλαδή τον εξής μορφισμό πύργων.

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\ker\mu_{k+1} \arrow[r, "\alpha_{k+1}"] \arrow[d] & A_{k+1} \arrow[r, "\mu_{k+1}"] \arrow[d, "\lambda_k"] & B_{k+1} \arrow[d, "\phi_k"] \\
\ker\mu_k \arrow[r, "\alpha_k"] \arrow[d, "\tau_{k-1}"] & A_k \arrow[r, "\mu_k"] \arrow[d, "\lambda_{k-1}"] & B_k \arrow[d, "\phi_{k-1}"] \\
\ker\mu_{k-1} \arrow[r, "\alpha_{k-1}"] & A_{k-1} \arrow[r, "\mu_{k-1}"] & B_{k-1}
\end{tikzcd}$$

Είναι φανερό ότι έχουμε φτιάξει έναν μορφισμό πύργων α ώστε $\mu\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Άρα $\alpha_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ker\mu_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα η απεικόνιση μ_n είναι μονομορφισμός για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. □

Μπορούμε τώρα να δούμε τι μορφή έχουν τα εμφυτευτικά αντικείμενα της κατηγορίας $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$.

Πρόταση 2.2.5. *Έστω I ένας πύργος αβελιανών ομάδων του οποίου συμβολίζουμε τους εσωτερικούς ομομορφισμούς με s. Ο I είναι εμφυτευτικό αντικείμενο της $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$ εάν και μόνο εάν η I_n είναι εμφυτευτική αβελιανή ομάδα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ο ομομορφισμός $s_n : I_{n+1} \to I_n$ είναι διασπώμενος επιμορφισμός αβελιανών ομάδων για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. $\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε πύργους αβελιανών ομάδων A και B με εσωτερικούς ομομορφισμούς a και b αντίστοιχα και απεικονίσεις πύργων $\mu : A \to B$, $\tau : A \to I$, ώστε ο μ να είναι μονικός. Θα κατασκευάσουμε μορφισμό πύργων $\phi : B \to I$ ώστε $\phi\mu = \tau$. Αρχικά έχουμε ότι η I_1 είναι εμφυτευτική αβελιανή ομάδα και ο $\mu_1 : A_1 \to B_1$ μονομορφισμός. Άρα υπάρχει ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $\phi_1 : B_1 \to I_1$ ώστε $\phi_1\mu_1 = \tau_1$. Θα δείξουμε πως να κατασκευάσουμε $\phi_2 : B_2 \to I_2$ ώστε $\phi_2\mu_2 = \tau_2$ και επιπλέον $s_1\phi_2 = \phi_1 b_1$, δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} B_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "b_1"] & I_2 \arrow[d, "s_1"] \\ B_1 \arrow[r, "\phi_1"] & I_1 \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Έχουμε ότι η απεικόνιση $s_1 : I_2 \to I_1$ είναι διασπώμενος επιμορφισμός, άρα υπάρχει κάποια αβελιανή ομάδα C ώστε $I_2 \simeq I_1 \oplus C$ και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η s_1 είναι η προβολή στην I_1. Επιπλέον και η C είναι εμφυτευτική αβελιανή ομάδα ως ευθύς προσθετέος της εμφυτευτικής I_2. Συμβολίζουμε με π_c την προβολή από την I_2 στη C. Έχουμε όμως την σύνθεση

$$A_2 \xrightarrow{\tau_2} I_2 \xrightarrow{\pi_c} C$$

και τον μονομορφισμό $\mu_2 : A_2 \to B_2$. Αφού η C είναι εμφυτευτική, υπάρχει κάποια απεικόνιση $\chi : B_2 \to C$ ώστε $\chi\mu_2 = \pi_c\tau_2$. Ορίζουμε $\phi_2 : B_2 \to I_2 \simeq I_1 \oplus C$ με $\phi_2(y) = (\phi_1 b_1(y), \chi(y))$.

Από τον τρόπο που ορίσαμε τη ϕ_2 είναι άμεσο ότι $s_1\phi_2 = \phi_1 b_1$.

Μένει να δείξουμε ότι $\phi_2\mu_2 = \tau_2$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $s_1\phi_2\mu_2 = s_1\tau_2$ και ότι $\pi_c\phi_2\mu_2 = \pi_c\tau_2$. Όμως $\pi_c\phi_2\mu_2 = \chi\mu_2 = \pi_c\tau_2$ και $s_1\phi_2\mu_2 = \phi_1 b_1\mu_2 = \phi_1\mu_1 a_1 = \tau_1 a_1 = s_1\tau_2$.

Συνεχίζοντας επαγωγικά κατασκευάζουμε για κάθε $n \geq 3$ ομομορφισμό $\phi_n : B_n \to I_n$ ώστε $\phi_n\mu_n = \tau_n$ και $s_{n-1}\phi_n = \phi_{n-1}b_{n-1}$. Άρα φτιάξαμε έναν μορφισμό πύργων $\phi : B \to I$ ώστε $\phi\mu = \tau$ και συνεπώς ο πύργος I είναι εμφυτευτικό αντικείμενο της $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$.

$\Rightarrow$) Δείχνουμε αρχικά ότι η I_n είναι εμφυτευτική αβελιανή ομάδα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε έναν μονομορφισμό αβελιανών ομάδων $\mu_n : A_n \to B_n$ και έναν ομομορφισμό $\tau_n : A_n \to I_n$. Πρέπει να βρούμε $\phi_n : B_n \to I_n$ ώστε $\phi_n\mu_n = \tau_n$. Θεωρούμε δύο καινούριους πύργους A και B. Ο πύργος A στις θέσεις μικρότερες ή ίσες του n έχει την ομάδα A_n με ταυτοτικούς μορφισμούς και στις θέσεις μεγαλύτερες του n τη μηδενική ομάδα. Αντίστοιχα για τον πύργο B με την ομάδα B_n. Έχουμε και την απεικόνιση μ ανάμεσα σε αυτούς τους πύργους που στις θέσεις μικρότερες του n είναι η μ_n και στις μεγαλύτερες θέσεις η μηδενική απεικόνιση. Σχηματικά

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
A_n \arrow[r, "\mu_n"] \arrow[d, equal] & B_n \arrow[d, equal] \\
A_n \arrow[r, "\mu_n"] \arrow[d, equal] & B_n \arrow[d, equal] \\
\vdots \arrow[r, "\mu_n"] & \ddots
\end{tikzcd}$$

Προφανώς ο μ είναι μονικός μορφισμός. Έχουμε όμως και τον μορφισμό πύργων $\tau : A \to I$ που είναι ο

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[d, "s_{n+1}"] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & I_{n+1} \arrow[d, "s_n"] \\
A_n \arrow[r, "\tau_n"] \arrow[d, equal] & I_n \arrow[d, "s_{n-1}"] \\
A_n \arrow[r, "s_{n-1}\tau_n"] \arrow[d, equal] & I_{n-1} \arrow[d, "s_{n-2}"] \\
\vdots \arrow[r] & \ddots
\end{tikzcd}$$

Αφού ο πύργος I είναι εμφυτευτικό αντικείμενο της $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$, υπάρχει μορφισμός πύργων $\phi : B \to I$ ώστε $\phi\mu = \tau$. Υπολογίζοντας στη θέση n έχουμε ότι $\phi_n\mu_n = \tau_n$ και συνεπώς η I_n είναι εμφυτευτική αβελιανή ομάδα.

Μένει να δείξουμε και ότι κάθε $s_n : I_{n+1} \to I_n$ είναι διασπώμενος επιμορφισμός. Θεωρούμε τους πύργους C και D όπου ο πύργος C ταυτίζεται με τον πύργο I μέχρι τη θέση n και στις θέσεις μεγαλύτερες του n έχει την τετριμμένη ομάδα. Ο πύργος D είναι ο ίδιος με τον C, με τη μόνη διαφορά ότι στη θέση $n+1$ έχει την ομάδα I_n.

Απεικονίζουμε τον C στο D μέσω του μορφισμού λ ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & I_n \arrow[d, equal] \\
I_n \arrow[r, equal] \arrow[d, "s_{n-1}"] & I_n \arrow[d, "s_{n-1}"] \\
I_{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d, "s_{n-2}"] & I_{n-1} \arrow[d, "s_{n-2}"] \\
\vdots \arrow[r, equal] & \vdots
\end{tikzcd}$$

Είναι φανερό ότι ο λ είναι μονικός ως μορφισμός πύργων. Όμως έχουμε και τον μορφισμό $\sigma : C \to I$ με

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & I_{n+1} \arrow[d, "s_n"] \\
I_n \arrow[r, equal] \arrow[d, "s_{n-1}"] & I_n \arrow[d, "s_{n-1}"] \\
I_{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d, "s_{n-2}"] & I_{n-1} \arrow[d, "s_{n-2}"] \\
\vdots \arrow[r, equal] & \vdots
\end{tikzcd}$$

Αφού ο I είναι εμφυτευτικό αντικείμενο, υπάρχει $\psi : D \to I$ ώστε $\psi\lambda = \sigma$. Άρα βρήκαμε $\psi_{n+1} : I_n \to I_{n+1}$, ώστε $s_n\psi_{n+1} = 1_{I_n}$. Συνεπώς ο s_n είναι διασπώμενος επιμορφισμός. $\square$

Γνωρίζοντας τώρα ποια είναι τα εμφυτευτικά αντικείμενα της κατηγορίας $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$, είναι σχετικά εύκολο να αποδείξουμε ότι κάθε αντικείμενο εμφυτεύεται σε κάποιο εμφυτευτικό αντικείμενο. Δηλαδή έχουμε ότι:

Πρόταση 2.2.6. *Έστω $F \in \mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$. Τότε υπάρχει εμφυτευτικό αντικείμενο $I \in \mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$ και μονικός μορφισμός $i : F \to I$.*

Απόδειξη. Αρχικά εμφυτεύουμε κάθε μία από τις αβελιανές ομάδες $F_i, i \in \mathbb{N}$ σε μία εμφυτευτική αβελιανή J_i ομάδα μέσω μονομορφισμών $j_i : F_i \to J_i$. Θέτουμε $I_i = \bigoplus_{k \le i} J_k$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Κάθε ομάδα I_i είναι εμφυτευτική ως πεπερασμένο ευθύ άθροισμα εμφυτευτικών. Θεωρώ και τον αντίστοιχο πύργο I που στη θέση i έχει την ομάδα I_i και οι απεικονίσεις δίνονται από τις προβολές. Είναι σαφές ότι ο I είναι εμφυτευτικό αντικείμενο της $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$. Εμφυτεύουμε τον F στον I ως εξής.

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
F_3 \arrow[r, "(j_1 f_1 f_2, j_2 f_2, j_3)"] \arrow[d, "f_2"] & J_1 \oplus J_2 \oplus J_3 \arrow[d] \\
F_2 \arrow[r, "(j_1 f_1, j_2)"] \arrow[d, "f_1"] & J_1 \oplus J_2 \arrow[d] \\
F_1 \arrow[r, "j_1"] & J_1.
\end{tikzcd}$$

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση $i : F \to I$ που φτιάξαμε είναι ένας μορφισμός πύργων, ο οποίος είναι μονικός. □

2.3 Η συνθήκη Mittag-Leffler

Δεδομένου ότι η κατηγορία $\mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$ είναι αβελιανή και έχει αρκετά εμφυτευτικά αντικείμενα, έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε τους δεξιά παραγόμενους συναρτητές ενός αριστερά ακριβούς συναρτητή.

Ορισμός 2.3.1. *Ορίζουμε ως* $\varprojlim^i$ *να είναι οι δεξιά παραγόμενοι συναρτητές του συναρτητή* $\varprojlim : \mathfrak{Ab}^{\mathbb{N}^{op}} \to \mathfrak{Ab}$*, δηλαδή*

$$\varprojlim^i = R^i \varprojlim, i \geq 0.$$

Δεδομένου ότι το αντίστροφο όριο είναι αριστερά ακριβής συναρτητής έχουμε ότι $\varprojlim^0 \simeq \varprojlim$, δηλαδή είναι φυσικά ισοδύναμοι συναρτητές. Επιπλέον έχουμε τη μακρά ακριβή ακολουθία των παραγόμενων συναρτητών, δηλαδή αν

$$0 \to \{A_n\} \to \{B_n\} \to \{C_n\} \to 0$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία πύργων αβελιανών ομάδων, τότε παίρνουμε την επαγόμενη μακρά ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to \varprojlim^1 A_n \to \varprojlim^1 B_n \to \varprojlim^1 C_n \to \dots$$

Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό είναι αρκετά δύσκολο ακόμα και να αποφανθούμε αν για κάποιον πύργο A ισχύει $\varprojlim^1 A_n \neq 0$ (θα δούμε όμως ότι πάντα $\varprojlim^i A_n = 0$, για $i \geq 2$). Η συνθήκη Mittag-Leffler, η οποία εισήχθη από τον Grothendieck στο [6], μας δίνει ένα σχετικά εύκολο κριτήριο για να δούμε ότι $\varprojlim^1 A_n = 0$.

Ορισμός 2.3.2. *Ένας πύργος A αβελιανών ομάδων ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler αν για κάθε k υπάρχει κάποιο $j \geq k$ ώστε η εικόνα της απεικόνισης $A_i \to A_k$ να ισούται με την εικόνα της $A_j \to A_k$, για όλα τα $i \geq j$.*

Δηλαδή ένας πύργος ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler αν το φιλτράρισμα

$$A_k \supseteq \mathrm{im}(A_{k+1} \to A_k) \supseteq \mathrm{im}(A_{k+2} \to A_k) \supseteq \dots$$

τελικά σταθεροποιείται για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$.

Για παράδειγμα, ένας πύργος πεπερασμένων αβελιανών ομάδων ή ένας πύργος που όλες του οι απεικονίσεις είναι επιμορφισμοί ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω $\{A_n\}$ ένας πύργος αβελιανών ομάδων ο οποίος ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler. Τότε $\varprojlim^1 A_n = 0$.*

Απόδειξη. Εμφυτεύουμε τον πύργο $\{A_n\}$ σε έναν εμφυτευτικό πύργο $\{B_n\}$ και παίρνουμε την παρακάτω βραχεία ακριβή ακολουθία πύργων

$$0 \longrightarrow \{A_n\} \xrightarrow{f} \{B_n\} \xrightarrow{g} \{C_n\} \longrightarrow 0.$$

Θεωρώντας τη μακρά ακριβή ακολουθία των παραγόμενων συναρτητών και δεδομένου ότι οι δεξιά παραγόμενοι συναρτητές μηδενίζονται στα εμφυτευτικά αντικείμενα, αρκεί να δείξουμε ότι η επαγόμενη απεικόνιση $\varprojlim g : \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n$ είναι επί.

Θα θεωρήσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Ας υποθέσουμε ότι όλοι οι ομομορφισμοί του πύργου $\alpha_n : A_{n+1} \to A_n, n \geq 1$ είναι επιμορφισμοί.

Έστω $(c) = (c_1, c_2, \dots) \in \varprojlim C_n$. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε τις απεικονίσεις του πύργου C με γ, έχουμε ότι $\gamma_i(c_{i+1}) = c_i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] & C_1 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Αφού οι απεικονίσεις g_1, g_2 είναι επί, υπάρχουν $b_1 \in B_1$, $\bar{b}_2 \in B_2$ ώστε $g_1(b_1) = c_1$, $g_2(\bar{b}_2) = c_2$. Όμως $g_1\beta_1(\bar{b}_2) = \gamma_1 g_2(\bar{b}_2) = \gamma_1(c_2) = c_1 = g_1(b_1) \Rightarrow \beta_1(\bar{b}_2) - b_1 \in \mathrm{ker} g_1 = \mathrm{im} f_1$. Άρα υπάρχει $a_1 \in A_1$ ώστε $f_1(a_1) = \beta_1(\bar{b}_2) - b_1$. Η απεικόνιση α_1 όμως είναι επί, άρα υπάρχει $a_2 \in A_2$ ώστε $\alpha_1(a_2) = a_1$, επομένως $f_1\alpha_1(a_2) = \beta_1(\bar{b}_2) - b_1 \Rightarrow \beta_1 f_2(a_2) = \beta_1(\bar{b}_2) - b_1 \Rightarrow b_1 = \beta_1(\bar{b}_2 - f_2(a_2))$. Θέτουμε $b_2 = \bar{b}_2 - f_2(a_2)$ και έχουμε ότι $\beta_1(b_2) = b_1$ και επιπλέον $g_2(b_2) = g_2(\bar{b}_2 - f_2(a_2)) = g_2(\bar{b}_2) - g_2 f_2(a_2) = g_2(\bar{b}_2) = c_2$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $b_i \in B_i, i \geq 2$ ώστε $\beta_{i-1}(b_i) = b_{i-1}$ και επιπλέον $g_i(b_i) = c_i$. Άρα βρήκαμε $(b) = (b_1, b_2, \ldots) \in \varprojlim B_n$ ώστε $\varprojlim g(b) = (c)$. Συνεπώς η απεικόνιση $\varprojlim g$ είναι επί και $\varprojlim^1 A_n = 0$.

Περίπτωση 2: Ας υποθέσουμε ότι για κάθε k το φιλτράρισμα της A_k τελικά μηδενίζεται. Δηλαδή υπάρχει κάποιο $i_k > k$ ώστε η απεικόνιση $A_{i_k} \to A_k$ να είναι η μηδενική. Θεωρώντας πως ο i_k είναι ο ελάχιστος τέτοιος φυσικός, είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι $i_{k-1} \leq i_k, \forall k \geq 2$. Θεωρούμε το στοιχείο $(c) = (c_1, c_2, \ldots) \in \varprojlim C_n$ και βρίσκουμε στοιχεία $\bar{b}_i \in B_i$ ώστε $g_i(\bar{b}_i) = c_i$. Τότε (όπως στην περίπτωση 1) μπορούμε να βρούμε $a_k \in A_k$ ώστε $\beta_k(\bar{b}_{k+1}) - \bar{b}_k = f_k(a_k), \forall k \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $b_k = \bar{b}_k + f_k(a_k + \bar{a}^k_{k+1} + \ldots + \bar{a}^k_{i_k-1})$, όπου συμβολίζουμε με $\bar{a}^k_i$ την εικόνα του a_i στην A_k (θυμίζουμε ότι $\bar{a}^k_j = 0, j \geq i_k$). Τότε προφανώς $g_k(b_k) = g_k(\bar{b}_k) = c_k$. Επιπλέον έχουμε ότι $\beta_{k-1}(b_k) = \beta_{k-1}(\bar{b}_k) + \beta_{k-1} f_k(a_k + \bar{a}^k_{k+1} + \ldots + \bar{a}^k_{i_k-1}) = \bar{b}_{k-1} + f_{k-1}(a_{k-1}) + \beta_{k-1} f_k(a_k + \bar{a}^k_{k+1} + \ldots + \bar{a}^k_{i_k-1}) = \bar{b}_{k-1} + f_{k-1}(a_{k-1}) + f_{k-1}\alpha_{k-1}(a_k + \bar{a}^k_{k+1} + \ldots + \bar{a}^k_{i_k-1}) = \bar{b}_{k-1} + f_{k-1}(a_{k-1} + \bar{a}^{k-1}_k + \ldots + \bar{a}^{k-1}_{i_{k-1}-1}) = b_{k-1}$. Άρα το στοιχείο $(b) = (b_1, b_2, \ldots) \in \varprojlim B_n$ και $\varprojlim g(b) = (c)$. Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση $\varprojlim^1 A_n = 0$.

Επιστρέφοντας στη γενική περίπτωση που ο πύργος $\{A_n\}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler, ας συμβολίσουμε με A'_k την εικόνα $A_i \to A_k$, για αρκετά μεγάλο i. Τότε οι απεικονίσεις $A'_{k+1} \to A'_k$ είναι όλες επί, άρα $\varprojlim^1 A'_n = 0$. Επιπλέον ο πύργος $\{A_n/A'_n\}$ ικανοποιεί τις προυποθέσεις της περίπτωσης 2, άρα $\varprojlim^1 A_n/A'_n = 0$. Η βραχεία ακριβής ακολουθία πύργων

$$0 \to \{A'_n\} \to \{A_n\} \to \{A_n/A'_n\} \to 0$$

δείχνει και ότι $\varprojlim^1 A_n = 0$. $\square$

Παρατήρηση 2.3.4. *Ο Gray έδειξε στο [5] ότι για πύργους αριθμήσιμων αβελιανών ομάδων η συνθήκη Mittag-Leffler είναι ικανή και αναγκαία για το μηδενισμό του* $\varprojlim^1$ *όρου. Όμως υπάρχουν πύργοι μη αριθμήσιμων αβελιανών ομάδων που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη Mittag-Leffler και όμως ο* $\varprojlim^1$ *όρος τους είναι μηδενικός. Βλέπε [13, Παράδ.4.5] για ένα τέτοιο παράδειγμα.*

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι οι δεξιά παραγόμενοι συναρτητές του αντιστρόφου ορίου μηδενίζονται στις διαστάσεις μεγαλύτερες ή ίσες του 2.

Πρόταση 2.3.5. *Έστω $\{A_n\}$ ένας πύργος αβελιανών ομάδων. Τότε $\varprojlim^i A_n = 0, \forall i \geq 2$.*

Απόδειξη. Εμφυτεύουμε τον πύργο $\{A_n\}$ σε έναν εμφυτευτικό πύργο $\{B_n\}$ και παίρνουμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία πύργων

$$0 \longrightarrow \{A_n\} \xrightarrow{f} \{B_n\} \xrightarrow{g} \{C_n\} \longrightarrow 0.$$

Αφού ο πύργος $\{B_n\}$ είναι εμφυτευτικός κάθε απεικόνιση $\beta_n : B_{n+1} \to B_n$ είναι επιμορφισμός. Χρησιμοποιώντας και το ότι κάθε απεικόνιση $g_n : B_n \to C_n$ είναι επιμορφισμός, είναι εύκολο να αποδείξουμε και ότι κάθε απεικόνιση του πύργου $\{C_n\}$, $\gamma_n : C_{n+1} \to C_n$ είναι επιμορφισμός. Άρα $\varprojlim^1 C_n = 0$ και από τη μακρά ακριβή ακολουθία των παραγόμενων συναρτητών έπεται ότι $\varprojlim^2 A_n = 0$. Αφού αυτό ισχύει για οποιονδήποτε πύργο, θα έχουμε και ότι $\varprojlim^2 C_n = 0$. Χρησιμοποιώντας πάλι τη μακρά ακριβή ακολουθία έχουμε ότι $\varprojlim^3 A_n = 0$ και τελικά συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε ότι $\varprojlim^i A_n = 0, \forall i \geq 2$. □

Παρατήρηση 2.3.6. *Η υπόθεση ότι το σύνολο δεικτών είναι οι φυσικοί αριθμοί είναι αναγκαία για να ισχύει η παραπάνω πρόταση. Γενικότερα ο Mitchell έδειξε στο [17] πως αν I είναι ένα διατεταγμένο σύνολο πληθικού αριθμού $\aleph_d$, τότε $\varprojlim^n = 0, n \geq d+2$.*

2.4 Μια ισοδύναμη περιγραφή του $\lim^1$

Θα δώσουμε εδώ έναν διαφορετικό και ευκολότερο τρόπο υπολογισμού του $\varprojlim^1$ όρου ενός πύργου αβελιανών ομάδων. Έστω

$$A = \{A_1 \xleftarrow{f_1} A_2 \xleftarrow{f_2} A_3 \xleftarrow{f_3} \cdots\}$$

ένας πύργος αβελιανών ομάδων. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$D_A : \prod A_n \to \prod A_n,$$

με τύπο

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \to (a_1 - f_1(a_2), a_2 - f_2(a_3), a_3 - f_3(a_4), \ldots).$$

Είναι φανερό ότι $\ker D_A \simeq \varprojlim A_n$ και ο ισομορφισμός αυτός είναι φυσικός. Εμείς θα δείξουμε ότι $\varprojlim^1 A_n \simeq \operatorname{coker} D_A$. Καταρχήν όμως παρατηρούμε το εξής.

Λήμμα 2.4.1. *Αν όλες οι απεικονίσεις του πύργου $A_{n+1} \to A_n$ είναι επιμορφισμοί, τότε $\operatorname{coker} D_A = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $(b_1, b_2, \ldots) \in \prod A_n$. Ξεκινάμε με ένα οποιοδήποτε στοιχείο $a_1 \in A_1$ και επαγωγικά διαλέγουμε $a_{i+1} \in A_{i+1}$, ώστε $f_i(a_{i+1}) = a_i - b_i$. Είναι φανερό ότι η απεικόνιση D_A στέλνει το στοιχείο $(a_1, a_2, \ldots)$ στο $(b_1, b_2, \ldots)$. Επομένως η D_A είναι επί και $\mathrm{coker} D_A = 0$. $\square$

Πρόταση 2.4.2. *Έστω $\{A_n\}$ ένας πύργος αβελιανών ομάδων. Τότε $\varprojlim^1 A_n \simeq \mathrm{coker} D_A$.*

Απόδειξη. Εμφυτεύουμε τον πύργο $\{A_n\}$ σε έναν εμφυτευτικό πύργο $\{B_n\}$ και παίρνουμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία πύργων

$$0 \longrightarrow \{A_n\} \longrightarrow \{B_n\} \longrightarrow \{C_n\} \longrightarrow 0.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα του φιδιού στο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \prod A_n \arrow[r] \arrow[d, "D_A"] & \prod B_n \arrow[r] \arrow[d, "D_B"] & \prod C_n \arrow[r] \arrow[d, "D_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod A_n \arrow[r] & \prod B_n \arrow[r] & \prod C_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

παίρνουμε τη μακρά ακριβή ακολουθία

$$0 \to \ker D_A \to \ker D_B \to \ker D_C \to \mathrm{coker} D_A \to 0,$$

δεδομένου ότι $\mathrm{coker} D_B = 0$. Άρα, θεωρώντας και τη μακρά ακριβή ακολουθία των παραγόμενων συναρτητών, έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker D_A \arrow[r] \arrow[d] & \ker D_B \arrow[r] \arrow[d] & \ker D_C \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{coker} D_A \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim A_n \arrow[r] & \varprojlim B_n \arrow[r] & \varprojlim C_n \arrow[r] & \varprojlim^1 A_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Αφού οι τρεις πρώτες κατακόρυφες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί, ένα κυνήγι διαγράμματος δείχνει και ότι η επαγόμενη κατακόρυφη απεικόνιση είναι ισομορφισμός και συνεπώς $\varprojlim^1 A_n \simeq \mathrm{coker} D_A$. $\square$

Κεφάλαιο 3

Phantom maps στη μη-ευσταθή ομοτοπική κατηγορία

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τον δείκτη Gray των phantom maps στη μη-ευσταθή ομοτοπική κατηγορία των CW συμπλεγμάτων. Δηλαδή τα αντικείμενα της κατηγορίας είναι τα συνεκτικά CW συμπλέγματα και το σύνολο των μορφισμών $[X, Y]$, ανάμεσα σε δύο τέτοια αντικείμενα X και Y, είναι οι κλάσεις ομοτοπίας συνεχών απεικονίσεων ανάμεσα τους. Θεωρούμε ότι κάθε αντικείμενο έχει ένα σημείο στήριξης, το οποίο διατηρείται από οποιαδήποτε απεικόνιση. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Ph}(X, Y)$ το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των phantom maps από το X στο Y. Ως σημείο στήριξης αυτού του συνόλου θεωρούμε τη σταθερή απεικόνιση. Στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου δίνουμε όλα τα απαραίτητα προαπαιτούμενα και κάποια βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των phantom maps. Στη δεύτερη, επικεντρωνόμαστε στον δείκτη Gray, αποδεικνύουμε τα Θεωρήματα A και B της εισαγωγής και παίρνουμε διάφορα παραδείγματα και πορίσματα χρησιμοποιώντας τα. Στη συνέχεια, εξετάζουμε το ερώτημα αν μια απεικόνιση $g : Y \to Y'$ που επάγει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $g_* : \mathrm{Ph}(X, Y) \to \mathrm{Ph}(X, Y')$, διατηρεί τον δείκτη Gray. Δίνουμε μια επιμέρους λύση. Τέλος, εξετάζουμε το σύνολο των phantom maps που έχουν άπειρο δείκτη Gray χρησιμοποιώντας την προσέγγιση στη θεωρία των phantom maps μέσω του συναρτητή $\varprojlim^1$.

3.1 Τρόποι προσέγγισης των phantom maps

Έστω X και Y δύο CW συμπλέγματα. Ένα βασικό αλγεβρικό εργαλείο για τον έλεγχο του συνόλου $\mathrm{Ph}(X, Y)$ είναι ο πρώτος δεξιά παραγόμενος συναρτητής του αντιστρόφου ορίου $\varprojlim^1$. Για να δούμε πως αυτός χρησιμοποιείται στη θεωρία των phantom maps, χρειάζεται να γενικεύσουμε τον ορισμό του και σε πύργους μη αβελιανών ομάδων.

Ορισμός 3.1.1. *Ένας πύργος ομάδων $\{G_n\}$ είναι ένα αντίστροφο σύστημα ομάδων και ομομορφισμών*

$$G_1 \xleftarrow{a_1} G_2 \xleftarrow{a_2} G_3 \xleftarrow{a_3} \cdots .$$

Οι Bousfield και Kan στο [2] επέκτειναν τον ορισμό του $\varprojlim^1$ και σε πύργους μη αβελιανών ομάδων με τον παρακάτω τρόπο.

Ορισμός 3.1.2. *Δοθέντος ενός πύργου ομάδων*

$$G = \{G_1 \xleftarrow{f_1} G_2 \xleftarrow{f_2} G_3 \xleftarrow{f_3} \cdots\} ,$$

ορίζουμε ως $\varprojlim^1 G$ το πηλίκο της δράσης της ομάδας $\prod G_n$ στο σύνολο $\prod G_n$ όπου

$$\{g_n\} \cdot \{x_n\} = \{g_n x_n (f_n(g_{n+1}))^{-1}\}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο τελευταίος ορισμός συμφωνεί με τον ορισμό του $\varprojlim^1$ στην περίπτωση των αβελιανών πύργων. Επίσης, θα πρέπει να τονίσουμε ότι, στη μη αβελιανή περίπτωση ο όρος $\varprojlim^1$ δεν έχει κάποια αλγεβρική δομή. Είναι μόνο ένα σύνολο όπου διαλέγουμε για σημείο στήριξης του την κλάση του ουδέτερου στοιχείου $(1, 1, 1, ...)$. Η ακριβής ακολουθία 6 όρων που επάγεται από μια βραχεία ακριβή ακολουθία πύργων γενικεύεται και στη μη αβελιανή περίπτωση [2, σελ.252].

Για να δούμε τον τρόπο με τον οποίο οι πύργοι ομάδων εμφανίζονται στη θεωρία ομοτοπίας, θα χρειαστούμε πρώτα τον ορισμό του πύργου Postnikov ενός χώρου.

Ορισμός 3.1.3. *Έστω Y ένα συνεκτικό CW σύμπλεγμα. Ο πύργος Postnikov του Y είναι μια ακολουθία χώρων $Y^{(n)}, n \geq 1$ και απεικονίσεων $q_n : Y \to Y^{(n)}$, $f_n : Y^{(n+1)} \to Y^{(n)}, n \geq 1$ ώστε για κάθε n να ισχύουν τα εξής:*

(1) Η απεικόνιση q_n επάγει έναν ισομορφισμό στις ομάδες ομοτοπίας στις διαστάσεις μικρότερες ή ίσες του n.

(2) $\pi_i(Y^{(n)}) = 0, i > n$.

(3) $f_n q_{n+1} = q_n$.

Είναι γνωστό ότι κάθε συνεκτικό CW σύμπλεγμα έχει έναν πύργο Postnikov, ο οποίος είναι μοναδικός ως προς ομοτοπική ισοδυναμία [9, σελ.354].

Ας δούμε τώρα πως ο συναρτητής $\varprojlim^1$ εμπλέκεται στη θεωρία των phantom maps. Θεωρούμε δύο χώρους X και Y και τον πύργο Postnikov $\{Y^{(n)}\}$ του Y. Θέτοντας $G_n = [X, \Omega Y^{(n)}]$ και θεωρώντας τους ομομορφισμούς που επάγονται από τον πύργο Postnikov του Y, έχουμε έναν πύργο ομάδων. Μπορούμε να θεωρήσουμε και έναν ελαφρώς διαφορετικό πύργο, που ο n-οστός του όρος είναι ο $[\Sigma X_n, Y]$ με τις προφανείς απεικονίσεις. Οι Bousfield και Kan έδειξαν στο [2, σελ.254-255] ότι υπάρχουν οι παρακάτω βραχείες ακριβείς ακολουθίες συνόλων με σημείο στήριξης

$$* \to \varprojlim^1[\Sigma X_n, Y] \to [X, Y] \to \varprojlim[X_n, Y] \to *$$

και

$$* \to \varprojlim^1[X, \Omega Y^{(n)}] \to [X, Y] \to \varprojlim[X, Y^{(n)}] \to *,$$

οι οποίες μας επιτρέπουν να ταυτίσουμε τα $\varprojlim^1[\Sigma X_n, Y]$ και $\varprojlim^1[X, \Omega Y^{(n)}]$ με το $\mathrm{Ph}(X, Y)$.

Ο δεύτερος τρόπος προσέγγισης της θεωρίας των phantom maps προέρχεται μέσω της τοπικοποίησης και της πλήρωσης ενός CW συμπλέγματος. Δεδομένου ότι αυτές οι κατασκευές δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν για οποιοδήποτε σύμπλεγμα, θα περιοριστούμε στην κατηγορία των μηδενοδύναμων CW συμπλεγμάτων πεπερασμένου τύπου, την οποία τώρα θα περιγράψουμε. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στα [10, 21]. Θα χρειαστούμε πρώτα κάποιες ιδιότητες της τοπικοποιήσεως μηδενοδύναμων ομάδων.

Ορισμός 3.1.4. *Έστω P ένα σύνολο πρώτων αριθμών. Μια ομάδα G θα λέγεται P τοπική αν η αντιστοιχία $x \to x^n$, $x \in G$, είναι αμφιμονοσήμαντη, για κάθε ακέραιο n που δεν διαιρείται από κανέναν πρώτο αριθμό $p \in P$.*

Οποιαδήποτε μηδενοδύναμη ομάδα τοπικοποιείται σε οποιοδήποτε σύνολο πρώτων αριθμών όπως προκύπτει από το:

Θεώρημα 3.1.5. *[10, σελ.7] Έστω G μια μηδενοδύναμη ομάδα και P ένα σύνολο πρώτων αριθμών. Τότε υπάρχει μια μηδενοδύναμη ομάδα G_P η οποία είναι P τοπική και ένας ομομορφισμός ομάδων $e : G \to G_P$, ώστε η επαγόμενη απεικόνιση $e^\star : \mathrm{Hom}(G_P, K) \to \mathrm{Hom}(G, K)$ να είναι αμφιμονοσήμαντη, στην περίπτωση που η K είναι P τοπική μηδενοδύναμη ομάδα. Το ζευγάρι (G_P, e) θα ονομάζεται P τοπικοποίηση της G και είναι μοναδικό.*

Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η περίπτωση κατά την οποία $P = \emptyset$. Σε αυτήν την περίπτωση θα μιλάμε για ρητοποίηση της ομάδας G. Προκειμένου να ορίσουμε αντίστοιχες έννοιες και στην κατηγορία των CW συμπλεγμάτων, πρέπει να θέσουμε κάποιους περιορισμούς στον τρόπο που η θεμελιώδης ομάδα δρα στις ανώτερες ομάδες ομοτοπίας.

Ορισμός 3.1.6. *Έστω Q μια ομάδα η οποία δρα σε μια αβελιανή ομάδα A. Θα λέμε ότι η Q δρα μηδενοδύναμα στην A αν για κάποιο θετικό ακέραιο j ισχύει ότι $(IQ)^j A = \{0\}$, όπου IQ το ιδεώδες επαύξησης του ομαδοδακτυλίου $\mathbb{Z}Q$.*

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε τους χώρους που ουσιαστικά θα μας απασχολήσουν από εδώ και πέρα.

Ορισμός 3.1.7. *Ένα CW σύμπλεγμα X ονομάζεται μηδενοδύναμο αν η θεμελιώδης ομάδα του X, $\pi_1(X)$, είναι μηδενοδύναμη και δρα μηδενοδύναμα στις ανώτερες ομάδες ομοτοπίας $\pi_n(X)$, για κάθε $n \geq 2$.*

Είναι φανερό από τον ορισμό ότι κάθε 1-συνεκτικό CW σύμπλεγμα είναι μηδενοδύναμο. Πολλά ακόμα παραδείγματα μηδενοδύναμων συμπλεγμάτων μπορούν να βρεθούν στο [10, Κεφ.2]. Η σημαντικότερη ιδιότητα τους είναι ότι δέχονται και αυτά μια έννοια τοπικοποίησης, δηλαδή αν το X είναι μηδενοδύναμο σύμπλεγμα τότε υπάρχει ένα άλλο σύμπλεγμα X_P και μια απεικόνιση $f : X \to X_P$, ώστε οι επαγόμενες απεικονίσεις στις ομάδες ομοτοπίας και ομολογίας να είναι οι αλγεβρικές τοπικοποιήσεις τους. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

Ορισμός 3.1.8. *Έστω X ένα μηδενοδύναμο CW σύμπλεγμα και P ένα σύνολο πρώτων αριθμών. Το X λέγεται P-τοπικό αν οι ομάδες ομοτοπίας $\pi_n(X)$ είναι P-τοπικές για κάθε $n \geq 1$. Θα ονομάζουμε μια απεικόνιση $f : Y \to Z$ ανάμεσα σε δύο μηδενοδύναμα CW σύμπλεγματα P-τοπικοποίηση του Y, αν το Z είναι P-τοπικό και η επαγόμενη απεικόνιση $f^\star : [Z, W] \to [Y, W]$ είναι αμφιμονοσήμαντη για οποιοδήποτε P-τοπικό μηδενοδύναμο σύμπλεγμα W.*

Έχουμε τις εξής θεμελιώδεις ιδιότητες που αφορούν την τοπικοποίηση των μηδενοδύναμων συμπλεγμάτων.

Θεώρημα 3.1.9. *[10, Θεώρημα 3A, σελ.72] Έστω X ένα μηδενοδύναμο CW σύμπλεγμα και P ένα σύνολο πρώτων αριθμών. Τότε το X δέχεται μια P-τοπικοποίηση.*

Θεώρημα 3.1.10. *[10, Θεώρημα 3B, σελ.72] Έστω X και Y μηδενοδύναμα CW συμπλέγματα, P ένα σύνολο πρώτων αριθμών και $f : X \to Y$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι P-τοπικοποίηση του X.

(2) Η $\pi_n(f) : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ είναι P-τοπικοποίηση για κάθε $n \geq 1$.

(3) Η $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ είναι P-τοπικοποίηση για κάθε $n \geq 1$.

Δηλαδή για να εξετάσουμε αν μια δεδομένη απεικόνιση είναι η τοπικοποίηση ενός συμπλέγματος, αρκεί να εξετάσουμε αν οι επαγόμενες απεικονίσεις είναι οι τοπικοποιήσεις των ομάδων ομοτοπίας και ομολογίας του. Θα συμβολίζουμε με $r : X \to X_0$ την ρητοποίηση ενός μηδενοδύναμου συμπλέγματος X, δηλαδή την περίπτωση που $P = \emptyset$. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι ανώτερες ομάδες ομοτοπίας και οι ομάδες ομολογίας του X_0 είναι το τανυστικό γινόμενο των αντίστοιχων ομάδων του X με το σώμα των ρητών αριθμών.

Μια άλλη χρήσιμη αλγεβρική κατασκευή που μεταφέρεται στη θεωρία ομοτοπίας είναι η προπεπερασμένη πλήρωση μιας ομάδας. Όλες οι κατασκευές μπορούν να βρεθούν αναλυτικά στο [21].

Ορισμός 3.1.11. *Έστω G μια ομάδα. Η προπεπερασμένη πλήρωση της G είναι το ζεύγος $(\widehat{G}, \varphi)$, όπου $\widehat{G} = \varprojlim G/H_a$, $\{H_a\}$ είναι το σύνολο των κανονικών υποομάδων πεπερασμένου δείκτη της G και φ η φυσική απεικόνιση, $\varphi : G \to \widehat{G}$.*

Αντίστοιχα με την τοπικοποίηση ορίζεται και η προπεπερασμένη πλήρωση ενός CW συμπλέγματος X ως ένα CW σύμπλεγμα $\widehat{X}$ και μια απεικόνιση $\widehat{e} : X \to \widehat{X}$, ώστε οι επαγόμενες απεικονίσεις στις ομάδες ομοτοπίας να είναι οι προπεπερασμένες πληρώσεις τους. Προκειμένου να είναι δυνατή αυτή η κατασκευή, είναι αναγκαία προυπόθεση οι ομάδες ομοτοπίας του X να είναι πεπερασμένα παραγόμενες. Για το σκοπό αυτό θα θέσουμε ως επιπλέον συνθήκη το σύμπλεγμα X να είναι πεπερασμένου τύπου, δηλαδή να έχει πεπερασμένο αριθμό κελιών σε κάθε διάσταση. Αυτό εξασφαλίζει ότι οι ομάδες ομοτοπίας του είναι πεπερασμένα παραγόμενες. Με αυτή την επιπλέον συνθήκη έχουμε το παρακάτω θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.1.12. *[21, Θεώρημα 3.1, σελ.45] Έστω X ένα πεπερασμένου τύπου CW σύμπλεγμα. Τότε υπάρχει η προπεπερασμένη πλήρωση $\widehat{X}$ του X.*

Ας δούμε τώρα πώς αυτές οι κατασκευές βοηθούν ώστε να πάρουμε πληροφορίες για το σύνολο των phantom maps ανάμεσα στα X και Y. Υποθέτουμε ότι τα συμπλέγματα είναι μηδενοδύναμα και πεπερασμένου τύπου ώστε να είναι εφικτή η ρητοποίηση $r : X \to X_0$ του X και η πλήρωση $\widehat{e} : Y \to \widehat{Y}$ του Y.

Θεώρημα 3.1.13. *[13, Θεώρημα 5.1] Έστω X και Y μηδενοδύναμα, πεπερασμένου τύπου CW σύμπλεγματα. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι phantom map αν και μόνο αν*

(1) Η σύνθεση $\widehat{e} \circ f : X \to Y \to \widehat{Y}$ είναι ομοτοπική με τη σταθερή, ή

(2) Η f παραγοντοποιείται μέσω της απεικόνισης $r : X \to X_0$. Δηλαδή υπάρχει $\overline{f} : X_0 \to Y$, ώστε η απεικόνιση $\overline{f} \circ r : X \to Y$ να είναι ομοτοπική με την f.

Απόδειξη. Για το (1) αρχικά παρατηρούμε ότι αν η $f : X \to Y$ είναι phantom map, το ίδιο είναι και η σύνθεση $\widehat{e} \circ f : X \to \widehat{Y}$. Όμως $\mathrm{Ph}(X, \widehat{Y}) = *$, διότι αυτό είναι ισόμορφο με τον $\varprojlim^1$ όρο ενός πύργου προπεπερασμένων ομάδων και συνεχών ομομορφισμών, ο οποίος είναι τετριμμένος από το [13, Πρόταση 4.3]. Για την αντίθετη κατεύθυνση αν η $\widehat{e} \circ f : X \to \widehat{Y}$ είναι ομοτοπική με τη σταθερή, το ίδιο είναι και ο περιορισμός της σε οποιοδήποτε πεπερασμένο σκελετό του X. Όμως αυτό εξαναγκάζει την $f|X_n$ να είναι ομοτοπική με τη σταθερή από ένα βασικό αποτέλεσμα του Sullivan [21, Θεώρημα 3.2].

Για το (2) θεωρούμε τη νηματική ακολουθία

$$X_\tau \xrightarrow{\ i\ } X \xrightarrow{\ r\ } X_0,$$

η οποία προκύπτει ότι είναι και συννηματική [13]. Ο X_τ είναι ένας χώρος του οποίου οι ομάδες ομοτοπίας και οι ανηγμένες ακέραιες ομάδες ομολογίας είναι ομάδες στρέψης. Τώρα, αν η $f : X \to Y$ είναι phantom map, το ίδιο είναι και η σύνθεση $f \circ i : X_\tau \to Y$. Όμως $\mathrm{Ph}(X_\tau, Y) = *$ από το [13, Παράδειγμα 3.15] και άρα η $f \circ i$ είναι ομοτοπική με τη σταθερή. Επομένως η f παραγοντοποιείται μέσω του χώρου X_0. Για την αντίθετη κατεύθυνση αρχικά παρατηρούμε ότι αν A και B είναι πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές ομάδες, A_0 η ρητοποίηση της πρώτης και $\widehat{B}$ η προπεπερασμένη πλήρωση της δεύτερης, τότε

$$\mathrm{Hom}(A_0, \widehat{B}) = \mathrm{Ext}(A_0, \widehat{B}) = 0.$$

Μια απόδειξη του τελευταίου μπορεί να βρεθεί στο [3, Κεφάλαιο 9]. Αυτό όμως σημαίνει ότι κάθε απεικόνιση από τον X_0 στον $\widehat{Y}$ είναι ομοτοπική με τη σταθερή, άρα από το (1) έχουμε ότι αν η f παραγοντοποιείται μέσω του X_0 τότε πρέπει να είναι phantom map. $\square$

Δηλαδή το πρώτο μέρος του θεωρήματος χαρακτηρίζει το σύνολο $\mathrm{Ph}(X, Y)$ ως τον πυρήνα της απεικόνισης $\widehat{e}_* : [X, Y] \to [X, \widehat{Y}]$ και το δεύτερο ως την εικόνα της απεικόνισης $r^* : [X_0, Y] \to [X, Y]$. Επομένως, αυτή η προσέγγιση του συνόλου $\mathrm{Ph}(X, Y)$ είναι αποτελεσματική, μόνο εφόσον μπορούμε να κατανοήσουμε αυτά τα σύνολα απεικονίσεων. Στην περίπτωση που τα συμπλέγματα είναι επιπλέον και 1-συνεκτικά, έχουμε μια αρκετά καλή περιγραφή του συνόλου $[X_0, Y]$ συναρτήσει αλγεβρικών αναλλοιώτων των X και Y, όπως προκύπτει από το

Θεώρημα 3.1.14. *[13, Θεώρημα 5.2] Έστω X και Y 1-συνεκτικά, πεπερασμένου τύπου CW συμπλέγματα. Τότε υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία συνόλων, η οποία διατηρεί το σημείο στήριξης*

$$[X_0, Y] \approx \prod_{n\geq 1} \mathrm{Ext}(H_{n-1}X_0, \pi_n Y).$$

Απόδειξη. (σκιαγράφηση) Θεωρούμε $j : Y \to \bar{Y}$ μια ακέραια προσέγγιση (integral approximation) του Y. Αυτό σημαίνει ότι οι ομάδες ομοτοπίας του $\bar{Y}$ είναι ελεύθερες στρέψης και πεπερασμένα παραγόμενες, ο χώρος $\Omega\bar{Y}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα γινόμενο Eilenberg-Maclane χώρων και η απεικόνιση j επάγει μια ομοτοπική ισοδυναμία ανάμεσα στις ρητοποιήσεις των δύο χώρων. Μια τέτοια προσέγγιση υπάρχει από το [25, Λήμμα A]. Επειδή η ίνα της απεικόνισης j έχει πεπερασμένες ομάδες ομοτοπίας, η j επάγει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα σύνολα $[X_0, Y]$ και $[X_0, \bar{Y}]$. Εφαρμόζοντας $[\ \ , \bar{Y}]$ στη συννηματική ακολουθία

$$X_\tau \xrightarrow{\ i\ } X \xrightarrow{\ r\ } X_0$$

παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$\ldots \longrightarrow [\Sigma X, \bar{Y}] \xrightarrow{\Sigma i^*} [\Sigma X_\tau, \bar{Y}] \longrightarrow [X_0, \bar{Y}] \xrightarrow{r^*} [X, \bar{Y}]\ .$$

Όμως η απεικόνιση r^* προκύπτει ότι είναι τετριμμένη και η Σi^* ένα προς ένα (βλέπε το άρθρο του McGibbon για λεπτομέρειες). Συνδυάζοντας αυτά τα δύο έχουμε ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο $[X_0, Y]$ και στον συμπυρήνα της απεικόνισης

$$[X, \Omega\bar{Y}] \xrightarrow{i^*} [X_\tau, \Omega\bar{Y}]\ .$$

Δεδομένου όμως ότι ο $\bar{Y}$ είναι ένα γινόμενο Eilenberg-Maclane χώρων αυτός ο συμπυρήνας έχει τη μορφή

$$\prod_{n\geq 1} H^n(X_0, F_n) \approx \prod_{n\geq 1} \mathrm{Ext}(H_{n-1}X_0, \pi_n Y),$$

όπου F_n είναι το μέγιστο ελεύθερης στρέψης πηλίκο της $\pi_n(Y)$ και ο τελευταίος ισομορφισμός προκύπτει από το θεώρημα καθολικών συντελεστών και από το ότι $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, T) = 0$, αν T είναι πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. □

Επομένως, στην περίπτωση που η απεικόνιση $r^* : [X_0, Y] \to [X, Y]$ είναι ένα προς ένα, καταφέρνουμε να εκφράσουμε το σύνολο $\mathrm{Ph}(X, Y)$ (που είναι η εικόνα αυτής της απεικόνισης) ως ένα ευθύ γινόμενο Ext ομάδων. Αυτή η απεικόνιση είναι ένα προς ένα σε αρκετές συνηθισμένες περιπτώσεις, για παράδειγμα όταν ο X είναι 1-συνεκτικός χώρος Postnikkov πεπερασμένου τύπου (δηλαδή $\pi_n(X) = 0$ για $n >> 0$) και το Y είναι 1-συνεκτικό πεπερασμένο σύμπλεγμα [25, Θεώρημα Δ]. Περισσότερα παραδείγματα που η r^* είναι ένα προς ένα μπορούν να βρεθούν στο [13, Παραγ.5].

3.2 Ρητοποίηση και ο δείκτης Gray

Ο δείκτης Gray ενός phantom map $f : X \to Y$ ορίστηκε από τον Gray στη διδακτορική του διατριβή [4]. Αφού η f όταν περιοριστεί στον n-σκελετό X_n είναι ομοτοπική με τη σταθερή απεικόνιση, παραγοντοποιείται, ως προς ομοτοπία, για κάθε n όπως παρακάτω

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y . \\ & X/X_n \arrow[ur, "f_n"'] & \end{tikzcd}$$

Η επέκταση f_n δεν είναι απαραίτητα μοναδική.

Ορισμός 3.2.1. *Ο δείκτης Gray της f, $G(f)$, είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος n για τον οποίο η απεικόνιση f_n μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι phantom map.*

Θα λέμε ότι $G(f) = \infty$ αν η f_n μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι phantom map για κάθε n. Προφανώς ο δείκτης Gray της σταθερής απεικόνισης είναι άπειρος. Μπορούμε να ορίσουμε και έναν δυϊκό δείκτη Gray με τον εξής τρόπο.

Έστω $Y\langle n\rangle$ το n-οστό συνεκτικό κάλυμμα του Y, έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει μια φυσική νηματική ακολουθία

$$Y\langle n\rangle \xrightarrow{p_n} Y \xrightarrow{q_n} Y^{(n)}.$$

Η απεικόνιση $p_n : Y\langle n\rangle \to Y$ επάγει έναν ισομορφισμό $\pi_j(p_n) : \pi_j(Y\langle n\rangle) \to \pi_j(Y)$ για όλα τα $j > n$, ενώ $\pi_j(Y\langle n\rangle) = 0$, αν $j \leq n$. Δηλαδή κάποιος μπορεί να σκεφτεί την ακολουθία των χώρων $(Y\langle n\rangle)_n$ ως έναν ανάποδο πύργο Postnikov του Y.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f : X \to Y$ είναι μια phantom map. Τότε το ίδιο είναι και η σύνθεση $q_n \circ f : X \to Y^{(n)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως ο χώρος $Y^{(n)}$ έχει μόνο πεπερασμένες το πλήθος μη μηδενικές ομάδες ομοτοπίας, επομένως δεν υπάρχουν μη τετριμμένοι phantom maps ανάμεσα στους X και $Y^{(n)}$. Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι phantom map αν και μόνο αν παραγοντοποιείται (ως προς ομοτοπία) για κάθε n ως εξής

$$\begin{tikzcd} & Y\langle n\rangle \arrow[d] \\ X \arrow[ur, "\varphi_n"] \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Τότε, ο δϋικός δείκτης Gray, $G^{'}(f)$, της f είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος n για τον οποίο η απεικόνιση φ_n μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι phantom map. Η σύνδεση μεταξύ τους είναι άμεση, όπως προκύπτει από το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.2.2. *[8, Πρόταση 1] Αν $f : X \to Y$ είναι μια phantom map τότε $G^{'}(f) = G(f) + 1$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε ότι $\mathrm{Ph}(X, Y) \cong \varprojlim^1[X, \Omega Y^{(n)}]$. Ας υποθέσουμε ότι $G(f) > k$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποια phantom map $f_{k+1} : X/X_{k+1} \to Y$ η οποία παραγοντοποιεί την f. Θα δείξουμε ότι η f_{k+1} ανυψώνεται σε κάποια phantom map $\overline{\varphi} : X/X_{k+1} \to Y\langle k+2\rangle$, άρα θα έχουμε ότι $G^{'}(f) > k + 1$. Πράγματι η απεικόνιση πύργων (όπου το k είναι σταθερό)

$$\{[X/X_{k+1}, \Omega Y^{(n)}\langle k+2\rangle]\} \to \{[X/X_{k+1}, \Omega Y^{(n)}]\}$$

είναι επί, επομένως αφού ο συναρτητής $\varprojlim^1$ είναι δεξιά ακριβής και η επαγόμενη απεικόνιση $\mathrm{Ph}(X/X_{k+1}, Y\langle k+2\rangle) \to \mathrm{Ph}(X/X_{k+1}, Y)$ είναι επίσης επί.

Αντίστοιχα, για την αντίθετη κατεύθυνση παρατηρούμε ότι η απεικόνιση πύργων

$$\{[X/X_{k+1}, \Omega Y^{(n)}\langle k+2\rangle]\} \to \{[X, \Omega Y^{(n)}\langle k+2\rangle]\}$$

είναι επί. □

Στη διδακτορική του διατριβή ο Gray [4] ισχυρίστηκε ότι κάθε μη τετριμμένη phantom map έχει πεπερασμένο δείκτη Gray. Όμως στην απόδειξη του υπήρχε κάποιο λάθος, επομένως αυτή η εικασία ήταν για πολλά χρόνια ανοιχτή. Τελικά οι McGibbon και Strom στο [16] κατασκεύασαν μια μη τετριμμένη phantom map με πεδίο ορισμού το άπειρο μιγαδικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{C}P^{\infty}$ η οποία έχει άπειρο δείκτη Gray, δείχνοντας ότι αυτή η εικασία δεν ισχύει. Παρόλα αυτά, το σύνολο τιμών αυτής της απεικόνισης είναι ένας χώρος που δεν είναι πεπερασμένου τύπου, και η αδυναμία τους στο να κατασκευάσουν μια μη τετριμμένη phantom map άπειρου δείκτη Gray, ανάμεσα σε χώρους πεπερασμένου τύπου, τους οδήγησε στην εξής εικασία.

Εικασία 3.2.3. *Κάθε μη τετριμμένη phantom map ανάμεσα σε χώρους πεπερασμένου τύπου έχει πεπερασμένο δείκτη Gray.*

Πρόσφατα, και καθώς αυτή η διατριβή βρισκόταν σε εξέλιξη, ο Iriye στο [11] κατασκεύασε μια μη τετριμμένη phantom map με άπειρο δείκτη Gray ανάμεσα σε χώρους πεπερασμένου τύπου, δείχνοντας ότι η παραπάνω εικασία δεν ισχύει. Το πεδίο ορισμού της απεικόνισης που κατασκεύασε ο Iriye είναι το άπειρο μιγαδικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{C}P^{\infty}$ και το σύνολο τιμών το ΩY, όπου Y ένας 3-συνεκτικός χώρος πεπερασμένου τύπου. Υπάρχουν, παρόλα αυτά, αρκετοί συνηθισμένοι χώροι που κάθε phantom map ανάμεσα τους έχει πεπερασμένο δείκτη Gray. Μερικά τέτοια παραδείγματα μπορούν να βρεθούν στα [7, 16]. Το πρώτο αποτέλεσμα μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει μια phantom map πεπερασμένο δείκτη Gray, χρησιμοποιώντας τη ρητοποίηση του X. Υπενθυμίζουμε ότι $\mathrm{Ph}(X,Y) = r^*[X_0, Y]$, όπου $r : X \to X_0$ είναι η ρητοποίηση του X.

Θεώρημα 3.2.4. *Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για μια phantom map $f : X \to Y$ ανάμεσα σε 1-συνεκτικά, πεπερασμένου τύπου CW συμπλέγματα:*

(1) $G(f) \leq k - 2$.

(2) Η σύνθεση $q_k \circ \overline{f}$ δεν είναι ομοτοπική με τη σταθερή απεικόνιση, για οποιαδήποτε απεικόνιση $\overline{f} : X_0 \to Y$ έτσι ώστε $f = \overline{f} \circ r$ στο παρακάτω ομοτοπικά μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "f"'] & X_0 \arrow[d, "\overline{f}"] \arrow[dr, "q_k \circ \overline{f}"] & \\ & Y \arrow[r, "q_k"'] & Y^{(k)}, \end{tikzcd}$$

όπου q_k είναι η φυσιολογική απεικόνιση από το Y στο k-οστό επίπεδο $Y^{(k)}$ του πύργου Postnikov του Y και r είναι η ρητοποίηση του X.

Απόδειξη. (1) ⇒ (2) Θεωρούμε τις νηματικές ακολουθίες

$$Y\langle k\rangle \xrightarrow{p_k} Y \xrightarrow{q_k} Y^{(k)}$$

και

$$X_\tau \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X_0.$$

Στην περίπτωση που η θεμελιώδης ομάδα του X είναι πεπερασμένη, προκύπτει ότι η δεύτερη ακολουθία είναι και συννηματική (cofibration sequence) [13]. Αυτό ισχύει και στη συγκεκριμένη περίπτωση, αφού έχουμε υποθέσει ότι τα συμπλέγματα είναι 1-συνεκτικά. Άρα οι παραπάνω ακολουθίες επάγουν το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα, του οποίου οι γραμμές και στήλες είναι ακριβείς ακολουθίες συνόλων με σημείο στήριξης.

$$\begin{array}{ccccc}
[X_0, Y\langle k\rangle] & \xrightarrow{r^*} & [X, Y\langle k\rangle] & \xrightarrow{i^*} & [X_\tau, Y\langle k\rangle] \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (p_k)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (p_k)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (p_k)_*} \\
[X_0, Y] & \xrightarrow[r^*]{} & [X, Y] & \xrightarrow[i^*]{} & [X_\tau, Y] \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (q_k)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (q_k)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (q_k)_*} \\
[X_0, Y^{(k)}] & \xrightarrow[r^*]{} & [X, Y^{(k)}] & \xrightarrow[i^*]{} & [X_\tau, Y^{(k)}]
\end{array}$$

Αν $G(f) \leq k-2$ τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.2, κάθε $f_k : X \to Y\langle k\rangle$ ώστε $f = p_k \circ f_k$ δεν είναι phantom map. Άρα, αν υπάρχει κάποια $\overline{f} : X_0 \to Y$ ώστε $r^*(\overline{f}) = f$ και η $q_k \circ \overline{f}$ να είναι ομοτοπική με τη σταθερή, τότε $\overline{f} \in ker(q_k)_* = im(p_k)_*$ και επομένως $\overline{f} = (p_k)_*(g)$ για κάποια $g : X_0 \to Y\langle k\rangle$. Τότε, η $r^*(g) : X \to Y\langle k\rangle$ είναι μια απεικόνιση που ανήκει στην αντίστροφη εικόνα της f μέσω της $(p_k)_*$ και επομένως, σύμφωνα με τα προηγούμενα, η $r^*(g)$ δεν είναι phantom map. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $r^*[X_0, Y\langle k\rangle] = \mathrm{Ph}(X, Y\langle k\rangle)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Αν η $q_k \circ \overline{f}$ δεν είναι ομοτοπική με τη σταθερή, για κάθε $\overline{f} : X_0 \to Y$ ώστε $r^*(\overline{f}) = f$, τότε ο δείκτης Gray της f είναι αυστηρά μικρότερος του $k-1$. Πράγματι, αν υπάρχει μια $f_k : X \to Y\langle k\rangle$ ώστε $(p_k)_*(f_k) = f$ και η f_k να είναι phantom map, τότε υπάρχει κάποια $g \in [X_0, Y\langle k\rangle]$ ώστε $r^*(g) = f_k$. Έπεται ότι η $\overline{f} = (p_k)_*(g) = p_k \circ g : X_0 \to Y$ είναι μια απεικόνιση για την οποία $r^*(\overline{f}) = f$ και η $q_k \circ \overline{f}$ είναι ομοτοπική με τη σταθερή, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Ας θεωρήσουμε X, Y δύο 1-συνεκτικά CW συμπλέγματα πεπερασμένου τύπου και τη ρητοποίηση X_0 του X. Λόγω του Θεωρήματος 3.2.4, έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε την απεικόνιση $(q_k)_* : [X_0, Y] \to [X_0, Y^{(k)}]$, η οποία επάγεται από τη φυσική απεικόνιση $q_k : Y \to Y^{(k)}$ από το Y στο k επίπεδο του πύργου Postnikov του. Όμως, για 1-συνεκτικά CW -συμπλέγματα πεπερασμένου τύπου έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία συνόλων, η οποία διατηρεί το σημείο στήριξης,

$$[X_0, Y] \approx \prod_{n\geq 1} \mathrm{Ext}(H_{n-1}X_0, \pi_n Y),$$

η οποία είναι φυσική στο Y [13, Θεώρημα 5.2]. Επομένως μπορούμε να ταυτίσουμε την επαγόμενη απεικόνιση $(q_k)_* : [X_0, Y] \to [X_0, Y^{(k)}]$ με την προβολή

$$\prod_{n\geq 1} \mathrm{Ext}(H_{n-1}X_0, \pi_n Y) \to \prod_{n\geq 1} \mathrm{Ext}(H_{n-1}X_0, \pi_n Y^{(k)}) = \prod_{n=1}^{k} \mathrm{Ext}(H_{n-1}X_0, \pi_n Y).$$

Συγκεκριμένα, ένα μη τετριμμένο στοιχείο $g \in [X_0, Y]$ αντιστοιχεί σε μια μη τετριμμένη ακολουθία $(g_1, g_2, ...) \in \prod_{n\geq 1} \mathrm{Ext}(H_{n-1}X_0, \pi_n Y)$. Έστω g_{i_0} το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο σε μια τέτοια ακολουθία. Τότε, η g δεν ανήκει στον πυρήνα της απεικόνισης $(q_{i_o})_* : [X_0, Y] \to [X_0, Y^{(i_0)}]$. Συνδυάζοντας όλα αυτά, φτάνουμε σε μια νέα απόδειξη του:

Πρόταση 3.2.5. *[16, Πρόταση 3] Έστω X και Y 1-συνεκτικά, πεπερασμένου τύπου CW συμπλέγματα, έτσι ώστε η $r^* : [X_0, Y] \to \mathrm{Ph}(X, Y)$ να είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία συνόλων με σημείο στήριξης. Τότε κάθε μη τετριμμένη phantom map $X \to Y$ έχει πεπερασμένο δείκτη Gray.*

Απόδειξη. Μία μη τετριμμένη phantom map $f : X \to Y$ αντιστοιχεί σε μια μοναδική μη τετριμμένη απεικόνιση $\overline{f} : X_0 \to Y$, η οποία με τη σειρά της αντιστοιχεί σε μια μη τετριμμένη ακολουθία $(f_1, f_2, ...) \in \prod_{n\geq 1} \mathrm{Ext}(H_{n-1}X_0, \pi_n Y)$. Αν f_{i_0} είναι το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο αυτής της ακολουθίας, τότε η f δεν ανήκει στον πυρήνα της απεικόνισης $(q_{i_o})_* : [X_0, Y] \to [X_0, Y^{(i_0)}]$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.4, ο δείκτης Gray της f είναι $\leq i_o - 2$. □

Το Θεώρημα 3.2.4 μας επιτρέπει να κάνουμε πολύ περισσότερα στην περίπτωση που η r^* είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα $[X_0, Y]$ και $\mathrm{Ph}(X, Y)$. Οι Hà και Strom έδειξαν στο [8] ότι για phantom maps ανάμεσα σε μηδενοδύναμους χώρους πεπερασμένου τύπου, οι πεπερασμένες τιμές του δείκτη Gray περιορίζονται στους ακέραιους $n - 2$, για τους οποίους οι ομάδες $H^{n-1}(X; \mathbb{Q})$ και $\pi_n(Y) \otimes \mathbb{Q}$ είναι και οι δύο μη μηδενικές (ή, ισοδύναμα, οι $H_{n-1}(X_0)$ και $\pi_n(Y) \otimes \mathbb{Q}$ είναι και οι δύο μη μηδενικές). Στην περίπτωση που η r^* είναι αμφιμονοσήμαντη ανάμεσα στα $[X_0, Y]$ και $\mathrm{Ph}(X, Y)$, μπορούμε να δείξουμε ότι πράγματι υπάρχει μια phantom map $X \to Y$ με δείκτη Gray $n - 2$, στην περίπτωση που αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται.

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω X και Y 1-συνεκτικά, πεπερασμένου τύπου CW συμπλέγματα, έτσι ώστε η $r^* : [X_0, Y] \to \mathrm{Ph}(X, Y)$ να είναι αμφιμονοσήμαντη. Αν οι αβελιανές ομάδες $H_{n-1}(X_0)$ και $\pi_n(Y) \otimes \mathbb{Q}$ είναι και οι δύο μη μηδενικές, τότε υπάρχουν υπεραριθμήσιμες το πλήθος κλάσεις ομοτοπίας μη τετριμμένων phantom maps $X \to Y$ με δείκτη Gray $n-2$.*

Απόδειξη. Οι ομάδες ομολογίας του X_0 είναι πεπερασμένης διάστασης ρητοί διανυσματικοί χώροι και οι ομάδες ομοτοπίας του Y είναι πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές ομάδες. Είναι γνωστό ότι $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}$ και $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, T) = 0$, αν η T είναι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Επομένως, αν $H_{n-1}(X_0) \neq 0$ και $\pi_n(Y) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$, το σύνολο $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(X_0), \pi_n(Y))$ είναι υπεραριθμήσιμο. Άρα, αν αυτές οι δύο συνθήκες ικανοποιούνται, μπορούμε να διαλέξουμε υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία $(f_i) \in \prod_{i \geq 1} \mathrm{Ext}(H_{i-1}X_0, \pi_i Y)$, των οποίων η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη είναι η n-οστή. Έστω (f_i) ένα τέτοιο στοιχείο. Τότε, το (f_i) βρίσκεται στον πυρήνα της απεικόνισης

$$\prod_{i \geq 1} \mathrm{Ext}(H_{i-1}X_0, \pi_i Y) \to \prod_{i \geq 1} \mathrm{Ext}(H_{i-1}X_0, \pi_i Y^{(k)})$$

για $k < n$, αλλά όχι για $k = n$ (αφού $\pi_i(Y^{(k)}) = \pi_i(Y)$ για $i \leq k$ και είναι μηδενική διαφορετικά).

Αφού $\prod_{i \geq 1} \mathrm{Ext}(H_{i-1}X_0, \pi_i Y) \approx [X_0, Y]$ και $[X_0, Y] \approx \mathrm{Ph}(X, Y)$, η ακολουθία (f_i) αντιστοιχεί σε μια μοναδική, μη τετριμμένη, phantom map $f : X \to Y$. Εκ κατασκευής, η σύνθεση $q_k \circ \overline{f}$ είναι ομοτοπική με τη σταθερή για $k < n$ και δεν είναι για $k = n$, για την μοναδική απεικόνιση $\overline{f} : X_0 \to Y$ στην οποία η f αντιστοιχεί. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.4, ο δείκτης Gray της f είναι $n - 2$. □

Παράδειγμα 3.2.7. *Σύμφωνα με τους McGibbon και Strom [16], υπάρχουν phantom maps $\mathbb{C}P^{\infty} \to S^2 \vee S^2$ με δείκτη Gray $2n-1$, για κάθε $n \geq 1$. Πράγματι, αφού ο $\mathbb{C}P^{\infty}$ είναι ένας 1-συνεκτικός χώρος Postnikov πεπερασμένου τύπου και ο χώρος $S^2 \vee S^2$ είναι ένα 1-συνεκτικό πεπερασμένο σύμπλεγμα, η απεικόνιση $r^* : [\mathbb{C}P_0^{\infty}, S^2 \vee S^2] \to \mathrm{Ph}(\mathbb{C}P^{\infty}, S^2 \vee S^2)$ είναι αμφιμονοσήμαντη (βλ. σχόλια στο τέλος της Παραγράφου 3.1). Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.6, αρκεί να επαληθεύσουμε ότι ο $\mathbb{C}P^{\infty}$ έχει μη μηδενική ρητή ομολογία στις άρτιες και ο $S^2 \vee S^2$ μη μηδενική ρητή ομοτοπία στις περιττές διαστάσεις. Από τη μία, αν $X = \mathbb{C}P^{\infty}$*

$$H_n(X_0) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & n \text{ άρτιος} \\ 0, & n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Από την άλλη, από το θεώρημα Hilton-Milnor [24, σελ.515], έχουμε ότι

$$\Omega(S^2 \vee S^2) \approx \prod_a \Omega S^{n_a}$$

όπου οι loop spaces όλων των σφαιρών των οποίων η διάσταση είναι ≥ 2 εμφανίζονται ως παράγοντες αυτού του γινομένου. Έπεται ότι ο χώρος $S^2 \vee S^2$ έχει μη μηδενική ρητή ομοτοπία για κάθε $n \geq 3$. Η ύπαρξη phantom maps με δείκτη Gray $2n-1$ για κάθε $n \geq 1$ συνεπώς προκύπτει από το Θεώρημα 3.2.6.

Παράδειγμα 3.2.8. *Υπάρχουν μη τετριμμένοι phantom maps $K(\mathbb{Z},2)\times K(\mathbb{Z},3) \to S^2 \vee S^2$ με δείκτη Gray n, για κάθε $n \geq 1$. Πράγματι, δεδομένου ότι ο $K(\mathbb{Z},2)\times K(\mathbb{Z},3)$ είναι ένας 1-συνεκτικός χώρος Postnikov πεπερασμένου τύπου και ο $S^2 \vee S^2$ είναι ένα 1-συνεκτικό πεπερασμένο σύμπλεγμα, ξέρουμε ότι η απεικόνιση*

$$r^* : [(K(\mathbb{Z},2) \times K(\mathbb{Z},3))_0, S^2 \vee S^2] \to \mathrm{Ph}(K(\mathbb{Z},2) \times K(\mathbb{Z},3), S^2 \vee S^2)$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Από το προηγούμενο παράδειγμα, ξέρουμε ότι ο $S^2 \vee S^2$ έχει μη μηδενική ρητή ομοτοπία σε όλες τις διαστάσεις, ενώ ο τύπος του Künneth [9, σελ.275] δείχνει ότι ο $K(\mathbb{Z},2) \times K(\mathbb{Z},3)$ επίσης έχει μη μηδενική ρητή ομολογία σε όλες τις διαστάσεις. Επομένως, η ύπαρξη των προαναφερθέντων phantom maps προκύπτει από το Θεώρημα 3.2.6.

3.3 Ρητές ισοδυναμίες

Σε αυτή την παράγραφο εξετάζουμε το ερώτημα κατά πόσον μία απεικόνιση $g : Y \to Y'$ ανεβάζει το δείκτη Gray μίας phantom map $f : X \to Y$. Δείχνουμε ότι αν η g είναι μια ρητή ισοδυναμία, ώστε η επαγόμενη απεικόνιση $g_* : \mathrm{Ph}(X,Y) \to \mathrm{Ph}(X,Y')$ να είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε ο δείκτης Gray κάθε phantom map ανάμεσα στους X και Y διατηρείται.

Παρατήρηση 3.3.1. *Μία ρητή ισοδυναμία $g : Y \to Y'$ είναι μία απεικόνιση που επάγει μία ομοτοπική ισοδυναμία ανάμεσα στις ρητοποιήσεις των δύο χώρων. Γενικά, μία ρητή ισοδυναμία επάγει έναν επιμορφισμό $g_* : \mathrm{Ph}(X,Y) \to \mathrm{Ph}(X,Y')$ [14, Θεώρημα 2]. Αν υπάρχει μία ρητή ισοδυναμία και στην αντίθετη κατεύθυνση, τότε αυτή η απεικόνιση είναι ισομορφισμός (βλ. [14] ή [13, Παράγ.7] για περισσότερες λεπτομέρειες ως προς τις ρητές ισοδυναμίες).*

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής. Έστω X, Y και Y' 1-συνεκτικά, πεπερασμένου τύπου συμπλέγματα και $g : Y \to Y'$ είναι μια απεικόνιση που επάγει έναν επιμορφισμό στις ρητές ομάδες ομοτοπίας. Τότε, σύμφωνα με το [14, Θεώρημα 2], η επαγόμενη απεικόνιση $g_* : \mathrm{Ph}(X, Y) \to \mathrm{Ph}(X, Y')$ είναι επί. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τον παρακάτω χαρακτηρισμό του δείκτη Gray.

Πρόταση 3.3.2. *Έστω X, Y, Y' 1-συνεκτικά, πεπερασμένου τύπου CW συμπλέγματα, ώστε να υπάρχει μια απεικόνιση $g : Y \to Y'$ που επάγει έναν επιμορφισμό στις ρητές ομάδες ομοτοπίας, $f \in \mathrm{Ph}(X, Y')$ και $g_*^{-1}(f) = \{\overline{f}_i, i \in I\}$. Τότε,*

$$G(f) = \sup\{G(\overline{f}_i), i \in I\},$$

όπου το $\sup\{G(\overline{f}_i), i \in I\}$ μπορεί να είναι άπειρο.

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι $G(f) \geq \sup\{G(\overline{f}_i), i \in I\}$. Θα δείξουμε ότι $G(f) \leq \sup\{G(\overline{f}_i), i \in I\}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\sup\{G(\overline{f}_i), i \in I\}$ είναι πεπερασμένο, αλλιώς δεν υπάρχει κάτι να δείξουμε. Έστω $m = \sup\{G(\overline{f}_i), i \in I\} + 1$. Τότε, η απεικόνιση $\overline{f_i}$ δεν ανήκει στην εικόνα της

$$(j_m)^* : \mathrm{Ph}(X/X_m, Y) \to \mathrm{Ph}(X, Y)$$

για κανένα $i \in I$, όπου $j_m : X \to X/X_m$ είναι η φυσική απεικόνιση. Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ph}(X/X_m, Y) & \xrightarrow{(j_m)^*} & \mathrm{Ph}(X, Y) \\
{\scriptstyle g_*}\big\downarrow & & {\scriptstyle g_*}\big\downarrow \\
\mathrm{Ph}(X/X_m, Y') & \xrightarrow{(j_m)^*} & \mathrm{Ph}(X, Y')
\end{array}$$

του οποίου οι κατακόρυφες απεικονίσεις είναι επί [14, Θεώρημα 2], συμπεραίνουμε ότι η f δεν ανήκει στην εικόνα της $(j_m)^*$. Επομένως $G(f) \leq m - 1$. □

Χρησιμοποιώντας αυτή την πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε το εξής.

Πρόταση 3.3.3. *Έστω X, Y, Y' 1-συνεκτικά, πεπερασμένου τύπου CW-συμπλέγματα, ώστε να υπάρχει μία ρητή ισοδυναμία $g : Y \to Y'$, η οποία επάγει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $g_* : \mathrm{Ph}(X, Y) \to \mathrm{Ph}(X, Y')$. Τότε, $G(f) = G(g \circ f)$ για κάθε phantom map $f : X \to Y$.*

Απόδειξη. Αφού η g είναι μια ρητή ισοδυναμία, αυτή επάγει έναν επιμορφισμό στις ρητές ομάδες ομοτοπίας και η απόδειξη έπεται από την Πρόταση 3.3.2. □

Θα δώσουμε και μια δεύτερη απόδειξη της τελευταίας πρότασης χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.3.2, αλλά κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 3.2.4.

Απόδειξη. (Δεύτερη απόδειξη Πρότασης 3.3.3) Αν $G(f) = \infty$ προφανώς και $G(g \circ f) = \infty$.
Ας υποθέσουμε ότι $G(f) = k$. Είναι προφανές ότι $G(g \circ f) \geq k$. Θα δείξουμε ότι η ανισότητα $G(g \circ f) > k$ δεν μπορεί να ισχύει. Έστω, για άτοπο, ότι $G(g \circ f) > k$.

Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.4, υπάρχει μία απεικόνιση $\overline{h} \in [X_0, Y']$ ώστε $r^*(\overline{h}) = g \circ f$ και η σύνθεση $q_{k+2} \circ \overline{h}$ να είναι ομοτοπική με τη σταθερή απεικόνιση. Δηλαδή, η $\overline{h}$ ανήκει στον πυρήνα της $(q_{k+2})_* : [X_0, Y'] \to [X_0, Y'^{(k+2)}]$.

Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} [X_0, Y] & \xrightarrow{(q_{k+2})_*} & [X_0, Y^{(k+2)}] \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ [X_0, Y'] & \xrightarrow{(q_{k+2})_*} & [X_0, Y'^{(k+2)}] \end{array}$$

του οποίου οι κατακόρυφες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί, λόγω του ότι η g είναι μια ρητή ισοδυναμία. Η $\overline{h}$ τότε αντιστοιχεί σε μία μη τετριμμένη απεικόνιση $\overline{f} \in [X_0, Y]$, ώστε η $q_{k+2} \circ \overline{f}$ να είναι τετριμμένη.

Αφού το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} [X_0, Y] & \xrightarrow{r^*} & \mathrm{Ph}(X, Y) \\ {\scriptstyle g_*}\Big\downarrow & & {\scriptstyle g_*}\Big\downarrow \\ [X_0, Y'] & \xrightarrow{r^*} & \mathrm{Ph}(X, Y') \end{array}$$

είναι μεταθετικό και οι κατακόρυφες απεικονίσεις είναι επίσης ισομορφισμοί, έχουμε ότι $r^*(\overline{f}) = f$. Αυτό όμως είναι άτοπο, από το Θεώρημα 3.2.4, αφού η $q_{k+2} \circ \overline{f}$ είναι τετριμμένη και $G(f) = k$.

□

3.4 Πύργοι και phantom maps με άπειρο δείκτη Gray

Σε αυτή την παράγραφο θα επικεντρωθούμε στο κατά πόσον είναι εφικτή η ύπαρξη phantom maps ανάμεσα σε δύο χώρους X και Y με άπειρο δείκτη Gray. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Ph}_\omega(X, Y)$ το σύνολο των phantom maps ανάμεσα στους X και Y με άπειρο δείκτη Gray. Ένα από τα βασικά αποτελέσματα του [7] είναι ότι αυτό το σύνολο είναι τετριμμένο, στην περίπτωση που ο Y είναι ένα πεπερασμένου τύπου μπουκέτο σφαιρών. Με άλλα λόγια η Εικασία 3.2.3 είναι αληθής στην περίπτωση που το πεδίο τιμών ενός phantom map είναι ένα πεπερασμένου τύπου μπουκέτο σφαιρών. Όμως για οποιοδήποτε πεπερασμένου τύπου χώρο Y', κάθε σύνολο γεννητόρων του $\pi_*(Y')$ δίνει ένα πεπερασμένο τύπου μπουκέτο σφαιρών Y και μία απεικόνιση $g : Y \to Y'$, που επάγει έναν επιμορφισμό στις ομάδες ομοτοπίας. Η επαγόμενη απεικόνιση

$$g_* : \mathrm{Ph}(X,Y) \to \mathrm{Ph}(X,Y')$$

είναι επίσης επί, όπως προκύπτει από το [14, Θεώρημα 2]. Το επόμενο αποτέλεσμα προτείνει ότι ο υπολογισμός του πυρήνα της απεικόνισης $g_* : \mathrm{Ph}(X,Y) \to \mathrm{Ph}(X,Y')$, είναι χρήσιμος για τον έλεγχο του συνόλου $\mathrm{Ph}_\omega(X,Y')$.

Θα λέμε ότι η $g_* : \mathrm{Ph}(X,Y) \to \mathrm{Ph}(X,Y')$ είναι ένα πεπερασμένο προς ένα κάλυμμα αν για κάθε $f \in \mathrm{Ph}(X,Y')$, το (μη κενό) σύνολο $g_*^{-1}(f)$ είναι πεπερασμένο.

Πρόταση 3.4.1. *Έστω X, Y και Y' μηδενοδύναμα, πεπερασμένου τύπου CW συμπλέγματα, όπου ο Y είναι ένα μπουκέτο σφαιρών και $g : Y \to Y'$ είναι μια απεικόνιση που επάγει επιμορφισμούς στις ομάδες ομοτοπίας. Αν η $g_* : \mathrm{Ph}(X,Y) \to \mathrm{Ph}(X,Y')$ είναι ένα πεπερασμένο προς ένα κάλυμμα, τότε κάθε phantom map ανάμεσα στους X και Y' έχει πεπερασμένο δείκτη Gray.*

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathrm{Ph}(X,Y')$ και $g_*^{-1}(f) = \{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_n}\}$. Αφού ο Y είναι ένα μπουκέτο σφαιρών πεπερασμένου τύπου, κάθε phantom map ανάμεσα στους X και Y έχει πεπερασμένο δείκτη Gray. Συγκεκριμένα, οι $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_n}$ έχουν πεπερασμένο δείκτη Gray. Έπεται ότι το $\sup\{G(\overline{f}_i), i = 1,2,\ldots,n\}$ είναι πεπερασμένο. Αφού $G(f) = \sup\{G(\overline{f}_i), i = 1,2,\ldots,n\}$ από την Πρόταση 3.3.2, η f έχει πεπερασμένο δείκτη Gray. □

Όπως αναφέραμε στην Παράγραφο 2 αυτού του Κεφαλαίου, η Εικασία 3.2.3 δεν είναι αληθής για οποιοδήποτε ζευγάρι χώρων X και Y. Αυτό δείχνει ότι μια απεικόνιση $g : Y \to Y'$, που επάγει έναν επιμορφισμό στις ομάδες ομοτοπίας, αν και επάγει έναν επιμορφισμό

$$g_* : \mathrm{Ph}(X,Y) \to \mathrm{Ph}(X,Y'),$$

δεν επάγει απαραίτητα έναν επιμορφισμό

$$g_* : \mathrm{Ph}_\omega(X,Y) \to \mathrm{Ph}_\omega(X,Y')$$

(διαφορετικά, κάθε phantom map θα είχε πεπερασμένο δείκτη Gray, δεδομένου ότι $\mathrm{Ph}_\omega(X,Y) = *$, όταν ο είναι Y μπουκέτο σφαιρών πεπερασμένου τύπου). Στο τελευταίο μέρος αυτού του Κεφαλαίου θα δώσουμε ένα αλγεβρικό παράδειγμα, το οποίο δείχνει για ποιο λόγο η απεικόνιση $g_* : \mathrm{Ph}_\omega(X, Y) \to \mathrm{Ph}_\omega(X, Y')$ δεν είναι απαραίτητα επί.

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε από τους McGibbon και Roitberg στο [14] για να αποδείξουν ότι μια απεικόνιση $g : Y \to Y'$ η οποία επάγει έναν (ρητό) επιμορφισμό στις ομάδες ομοτοπίας, θα επάγει και έναν επιμορφισμό $g_* : \mathrm{Ph}(X, Y) \to \mathrm{Ph}(X, Y')$ ήταν η εξής: Η απεικόνιση $g : Y \to Y'$ επάγει μια απεικόνιση ανάμεσα στους πύργους $\{G_n\}$ και $\{G'_n\}$, όπου $G_n = [X, \Omega Y^{(n)}]$ και $G'_n = [X, \Omega Y'^{(n)}]$. Αυτή η απεικόνιση πύργων προκύπτει ότι έχει πεπερασμένο συμπυρήνα σε κάθε επίπεδο. Όμως, μια απεικόνιση πύργων με πεπερασμένους συμπυρήνες επάγει έναν επιμορφισμό $\varprojlim^1(G_n) \to \varprojlim^1(G'_n)$. Χρησιμοποιώντας το ότι $\mathrm{Ph}(X, Y) \cong \varprojlim^1[X, \Omega Y^{(n)}]$ και $\mathrm{Ph}(X, Y') \cong \varprojlim^1[X, \Omega Y'^{(n)}]$, συμπεραίνουν ότι η $g_* : \mathrm{Ph}(X, Y) \to \mathrm{Ph}(X, Y')$ είναι επί.

Στην περίπτωση που οι X και Y είναι πεπερασμένου τύπου, μηδενοδύναμα CW συμπλέγματα, ο πύργος $\{G_n\} = \{[X, \Omega Y^{(n)}]\}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

Πρόταση 3.4.2. *[15, Πρόταση 0.1] Έστω X και Y πεπερασμένου τύπου, μηδενοδύναμα CW συμπλέγματα και $G_n = [X, \Omega Y^{(n)}]$. Τότε, για κάθε $n \geq 1$:*

(1) Η G_n είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα.

(2) Ο πυρήνας της $g_n : G_{n+1} \to G_n$ ανήκει στο κέντρο της G_{n+1}.

(3) Ο συμπυρήνας της g_n είναι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα.

Ο αλγεβρικός χαρακτηρισμός του συνόλου $\mathrm{Ph}_\omega(X, Y)$ χρησιμοποιώντας πύργους είναι ο ακόλουθος: Έστω ένας πύργος ομάδων $\{G_n\}$. Ορίζουμε τον ω υποπύργο των εικόνων, ο οποίος συμβολίζεται ως $\mathrm{Im}^\omega G$, με

$$\mathrm{Im}^\omega G_n = \bigcap_{k \geq 1} \mathrm{image}(G_{n+k} \to G_n).$$

Τότε, σύμφωνα με τον Hà [7], υπάρχει ένας ισομορφισμός συνόλων με σημείο στήριξης

$$\mathrm{Ph}_\omega(X, Y) \cong \varprojlim{}^1(\mathrm{Im}^\omega[X, \Omega Y^{(n)}]).$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν πύργοι αβελιανών ομάδων $\{A_n\}$ και $\{B_n\}$ και μια απεικόνιση πύργων $\varphi : A \to B$ η οποία είναι ρητά επί (δηλαδή έχει πεπερασμένους συμπυρήνες), ώστε η απεικόνιση

$$\varprojlim{}^1 \mathrm{Im}^\omega \varphi : \varprojlim{}^1 \mathrm{Im}^\omega A_n \to \varprojlim{}^1 \mathrm{Im}^\omega B_n$$

να μην είναι επί. Οι πύργοι $\{A_n\}$ και $\{B_n\}$ θα προκύψει ότι έχουν τις ιδιότητες που αναφέραμε στην Πρόταση 3.4.2. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 3.4.3. *Έστω $\{A_n\}$ ένας πύργος πεπερασμένα παραγόμενων ελεύθερων αβελιανών ομάδων. Τότε, υπάρχει ένας πύργος πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων $\{T_n\}$, ώστε $\{\mathrm{Im}^{\omega} T_n\} = \{A_n\}$. Επιπλέον, ο πύργος $\{T_n\}$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να ικανοποιεί τις ιδιότητες της Πρότασης 3.4.2.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{A_1 \xleftarrow{a_1} A_2 \xleftarrow{a_2} A_3 \xleftarrow{a_3} \cdots\}$ ένας πύργος πεπερασμένα παραγόμενων ελεύθερων αβελιανών ομάδων. Επιλέγουμε δύο διαφορετικούς πρώτους p και q και θεωρούμε τον ακόλουθο πύργο T:

$$
\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & A_1^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & A_1^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & A_1^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & A_1^2 \arrow[r, "\Sigma"] & A_1 \\
 & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \\
\ldots \arrow[r] & A_2^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & A_2^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & A_2^2 \arrow[r, "\Sigma"] & A_2 \arrow[uur, "a_1"'] & \\
 & \oplus & \oplus & \oplus & & \\
\ldots \arrow[r] & A_3^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & A_3^2 \arrow[r, "\Sigma"] & A_3 \arrow[uur, "a_2"'] & & \\
 & \oplus & \oplus & & & \\
\ldots \arrow[r] & A_4^2 \arrow[r, "\Sigma"] & A_4 \arrow[uur, "a_3"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

Δηλαδή, T_1 είναι η ομάδα A_1, T_2 είναι η $A_1^2 \oplus A_2$ και, γενικά, η ομάδα T_n στο n-οστό επίπεδο του πύργου είναι $T_n = (\bigoplus_{i=1}^{n-1} A_i^2) \oplus A_n$. Ο ομομορφισμός Σ είναι η πρόσθεση $\Sigma(x, y) = x + y$ και ο ομομορφισμός $p \oplus q$ είναι $(p \oplus q)(x, y) = (px, qy)$. Οι ομομορφισμοί στη ¨διαγώνιο' είναι οι ομομορφισμοί του αρχικού πύργου. Άρα, η απεικόνιση $t_{n-1} : T_n \to T_{n-1}$ είναι

$$t_{n-1}(x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}, z) = (px_1, qy_1, \ldots, x_{n-1} + y_{n-1} + a_{n-1}(z)),$$

με $x_i, y_i \in A_i, i = 1, \ldots, n-1, z \in A_n$. Είναι φανερό ότι κάθε απεικόνιση t_i έχει πεπερασμένο συμπυρήνα και συνεπώς, ο πύργος T ικανοποιεί τις ιδιότητες της Πρότασης 3.4.2. Αφού η εξίσωση $1 = p^n x + q^n y$ έχει ακέραιες λύσεις για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι φανερό ότι $\mathrm{Im}^{\omega} T_n = A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ο πύργος $\mathrm{Im}^{\omega} T$ είναι ο αρχικός πύργος

$$A_1 \xleftarrow{a_1} A_2 \xleftarrow{a_2} A_3 \xleftarrow{a_3} \cdots .$$

□

Μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε το επόμενο παράδειγμα. Το συμπέρασμα που προκύπτει από αυτό είναι ότι μια απεικόνιση ανάμεσα σε πύργους $\varphi : A \to B$, με την ιδιότητα η $im\varphi_n$ να έχει πεπερασμένο δείκτη στη B_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δεν επάγει απαραίτητα έναν επιμορφισμό ανάμεσα στις ομάδες $\varprojlim^1$ των υποπύργων των εικόνων τους.

Παράδειγμα 3.4.4. Θεωρούμε τον παρακάτω πύργο του οποίου ο όρος $\varprojlim^1$ είναι μη μηδενικός [13, σελ.1228]:

$$B' = \left\{\mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \cdots\right\}.$$

Για να δούμε ότι έχει μη μηδενικό $\varprojlim^1$ όρο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Jensen [12, Κεφ.2] για πύργους πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων που λέει ότι για έναν τέτοιο πύργο C

$$\varprojlim^1 C \simeq \mathrm{Ext}(\varinjlim(\mathrm{Hom}(C_n, \mathbb{Z})), \mathbb{Z}).$$

Για τον πύργο B' μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$\varprojlim^1 B' \simeq \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}[1/2], \mathbb{Z}).$$

Εφαρμόζοντας $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z})$ στη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[1/2] \to \mathbb{Z}/2^\infty \to 0$$

έπεται ο ισομορφισμός

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}[1/2], \mathbb{Z}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}_2/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R} \oplus_{q \neq 2} \mathbb{Z}/q^\infty,$$

όπου $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ είναι η ομάδα των 2-αδικών ακεραίων.

Κατασκευάζουμε, σύμφωνα με την απόδειξη του Λήμματος 3.4.3, έναν πύργο B ώστε $\mathrm{Im}^\omega B = B'$. Θα κατασκευάσουμε έναν πύργο A, του οποίου ο υποπύργος των εικόνων $\mathrm{Im}^\omega A$, θα είναι ο τετριμμένος πύργος και μια απεικόνιση πύργων $\varphi : A \to B$ ώστε η $im\varphi_n$ να έχει πεπερασμένο δείκτη στην B_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, η επαγόμενη απεικόνιση

$$\varprojlim^1 \mathrm{Im}^\omega \varphi : \varprojlim^1 \mathrm{Im}^\omega A_n \to \varprojlim^1 \mathrm{Im}^\omega B_n$$

δεν θα είναι επί. Ο πύργος B που κατασκευάστηκε στην απόδειξη του Λήμματος 3.4.3 είναι ο εξής:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\Sigma"] & \mathbb{Z} \\
 & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\Sigma"] & \mathbb{Z} \arrow[uur, "2"'] & \\
 & \oplus & \oplus & \oplus & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\Sigma"] & \mathbb{Z} \arrow[uur, "2"'] & & \\
 & \oplus & \oplus & & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\Sigma"] & \mathbb{Z} \arrow[uur, "2"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε τον επόμενο πύργο A

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \\
 & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[uur, "2p\oplus 2q"'] & \\
 & \oplus & \oplus & \oplus & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[uur, "2p\oplus 2q"'] & & \\
 & \oplus & \oplus & & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p\oplus q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[uur, "2p\oplus 2q"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή, $A_n = \mathbb{Z}^{2n}$ και οι απεικονίσεις στον πύργο $a_{n-1} : A_n \to A_{n-1}, n \geq 2$ δίνονται από

$$a_{n-1}(x_1, y_1, \ldots, x_{n-2}, y_{n-2}, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n, y_n) =$$

$$= (px_1, qy_1, \ldots, px_{n-2}, qy_{n-2}, px_{n-1} + 2px_n, qy_{n-1} + 2qy_n).$$

Είναι φανερό ότι $\mathrm{Im}^{\omega} A$ είναι ο τετριμμένος πύργος.

Απεικονίζουμε τον A στον B ως εξής: $\varphi_n : A_n \to B_n, n \geq 1$ είναι

$$\varphi_1(x_1, y_1) = x_1 + y_1$$

$$\varphi_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (px_1, qy_1, px_2 + qy_2)$$

$$\varphi_n(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n, y_n) =$$

$$= (px_1, qy_1, p^2x_2, q^2y_2, \ldots, p^{n-1}x_{n-1}, q^{n-1}y_{n-1}, p^{n-1}x_n + q^{n-1}y_n), n \geq 3.$$

Η $\varphi : A \to B$ είναι πράγματι μια απεικόνιση πύργων, ώστε η $im\varphi_n$ να έχει δείκτη $p^{1+2+\ldots+(n-1)}q^{1+2+\ldots+(n-1)} = p^{\frac{n(n-1)}{2}}q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ στη B_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, οι πύργοι A και B ικανοποιούν τις συνθήκες της Πρότασης 3.4.2.

Βιβλιογραφία

[1] J. F. Adams, J. Walker, An example in homotopy theory, Proc. Cambridge Phil. Society 60 (1964) 699-700.

[2] A. K. Bousfield, D. M. Kan, Homotopy Limits, Completions and Localizations, Lecture Notes in Math. 304, Springer, Berlin (1972).

[3] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups, Pure and Applied Math. vol. 36-I, Academic Press, New York (1970).

[4] B. Gray, Operations and a problem of Heller, Ph.D. thesis, Univ. of Chicago (1965).

[5] B. Gray, Spaces of the same n type, for all n, Topology 5 (1966), 241-243.

[6] A. Grothendieck, EGA III, Publ. Math. I.H.E.S. 11 (1961).

[7] L. M. Hà, On the Gray index of phantom maps, Topology 44 (2005), 217-229.

[8] L. M. Hà, J. Strom, The Gray filtration on phantom maps, Fund. Math. 167 (2001), 251-268.

[9] Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (2002).

[10] P. Hilton, G. Mislin, J. Roitberg, Localization of Nilpotent Groups and Spaces, North-Holland, Amsterdam (1975).

[11] Kouyemon Iriye, On the Gray index conjecture for phantom maps, Topology and its Appl. 157 (2010), 2059-2068.

[12] C. U. Jensen, Les Foncteurs Derives de lim et leurs Applications en Theorie des Modules, Springer Lecture Notes in Mathematics 254 (1972).

[13] C. A. McGibbon, Phantom maps, Handbook of Algebraic Topology, North-Holland, Amsterdam (1995), 1209-1257.

[14] C. A. McGibbon, J. Roitberg, Phantom maps and rational equivalences, Am. J. Math. 116 (1994), 1365-1379.

[15] C. A. McGibbon, R. Steiner, Some questions about the first derived functor of the inverse limit, J. Pure Appl. Algebra 103 (1995), 325-340.

[16] C. A. McGibbon, J.Strom, Numerical invariants of phantom maps, Am. J. Math. 123 (4) (2001), 679-697.

[17] B. Mitchell, Rings with several objects, Adv. Math. 8 (1972), 1-161.

[18] J. Roitberg, Computing Homotopy Classes of Phantom Maps, CRM Proceedings and Lecture Notes vol. 6 (1994), 141-168.

[19] J. E. Roos, Sur les foncteurs dérivés de lim, C. R. Acad. Sci. Paris 252 (1961), 3702-3704.

[20] J. J. Rotman, An introduction to homological algebra, Academic Press (1979).

[21] D.Sullivan, Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture, Ann. Math. 100 (1974), 1-79.

[22] Ioannis Tsakanikas, Rationalization and the Gray index of phantom maps, Topology and its Appl. 157 (2010), 2316-2324.

[23] Charles Weibel, An introduction to Homological Algebra, Cambridge studies in advanced mathematics 38, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1994).

[24] G. Whitehead, Elements of homotopy theory, Graduate Texts in Math., vol. 61, Springer, Berlin (1978).

[25] A. Zabrodsky, On phantom maps and a theorem of H. Miller, Israel J. Math 58 (1987), 129-143.