

Αιτιακές και Τοπολογικές Δομές σε
Καμπύλους Χωρόχρονους

Ζαχαρίας Φλουρής

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική επιχειρεί να μελετήσει τις αιτιακές και τοπολογικές δομές που ορίζονται επί ημιρημάννιων πολλαπλοτήτων καθώς και τις μεταξύ τους συσχετίσεις. Το βασικό αντικείμενο μελέτης μας είναι ο «χωρόχρονος». Με αυτό εννοούμε μια τετραδιάστατη ημιρημάννια πολλαπλότητα με δείκτη 1, το βασικό μαθηματικό μοντέλο δηλαδή που χρησιμοποιούμε στις σχετικιστικές θεωρίες βαρύτητας.

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετάμε την απλούστερη περίπτωση, αυτή του χώρου Minkowski. Κεντρικό αποτέλεσμα εδώ είναι θεώρημα Zeeman το οποίο μας υπαγορεύει ότι ομάδα Lorentz έχει σαν γεννήτορες (modulo τις πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις) τους αιτιακούς αυτομορφισμούς του χώρου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ξεκινάμε την μελέτη των καμπύλων χωροχρόνων. Αφού πρώτα μιλήσουμε για όλα τα βασικά αποτελέσματα από την γενική θεωρία των πολλαπλοτήτων (όπως το θεώρημα ύπαρξης κυρτών κανονικών περιοχών) ορίζουμε τις αιτιακές σχέσεις και μελετάμε την αιτιακή ιεραρχία των χωροχρόνων. Στην τρίτη παράγραφο καταπιανόμαστε με την σπουδαιότερη αιτιακή συνθήκη, αυτή της καθολικής υπερβολικότητας.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικά αποτελέσματα. Πρώτα παρουσιάζουμε την δουλειά του David Malament που αποδεικνύει ότι, υπό ορισμένες προϋποθέσεις η συνήθη τοπολογία της πολλαπλότητας καθορίζεται, κατά κάποιο τρόπο, από την αιτιακή της δομή. Στη συνέχεια αναλύουμε την τοπολογία που εισήγαγε ο Stephen Hawking, μαζί με άλλους συνεργάτες του, και η οποία έχει την παράδοξη ιδιότητα να εμπεριέχει τρόπο τινά την διαφορική, την τοπολογική και την σύμμορφη δομή της πολλαπλότητας.

Παρόλο που τα θέματα με τα οποία ασχολείται η εργασία έχουν μια κάποια φυσική σημασία δεν καταπιανόμαστε καθόλου με αυτήν, η παρουσίαση είναι εντελώς μαθηματική και η έμφαση δίνεται στην αυστηρότητα της παρουσίασης και την πληρότητα των ορισμών. Ο αναγνώστης δεν θα χρειαστεί καμία γνώση φυσικής, παρόλο που θα ήταν χρήσιμη αν υπήρχε. Το μόνο που θεωρείται δεδομένο είναι τα βασικά αποτελέσματα της Ρημάννιας διαφορική γεωμετρίας καθώς και στοιχειώδεις γνώσεις τοπολογίας.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε έχουν, πέρα από το εγγενές ενδιαφέ-

ρον τους, και μια ιστορική σημασία. Είχαν καθοριστική συμβολή στο λεγόμενο πρόγραμμα των «αιτιακών θεωριών του χρόνου ή του χωροχρόνου» με το οποίο οι φιλόσοφοι της φυσικής στον 20ο αιώνα επιδίωκαν να απαντήσουν σε ερωτήματα σε σχέση με την θεμελίωση και την ερμηνεία των χωροχρονικών θεωριών (κοίτα [9] και [10]). Επιπλέον διάνοιξαν το έδαφος για μια καινούρια προσπάθεια στα πλαίσια αναζήτησης μιας θεωρίας κβαντικής βαρύτητας, την επονομαζόμενη «κβαντική βαρύτητα των αιτιακών συνόλων» (μια εισαγωγή μπορεί να βρεθεί στο [2]).

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την Ναστάζια Κοψαντοπούλου για τον εντοπισμό των ορθογραφικών λαθών και τον Αστέριο Γαντζούνη για τις πάντα ενδιαφέρουσες απόψεις του.

Abstract

In this theses the standard results concerning the topological and causal structures of curved spacetimes is presented. In the first chapter the simplest instance, the so called Minkowski space, is presented and, apart from the basic properties, is also proven the Zeeman's theorem about causal automorphisms. The curved spacetimes are examined in the second chapter. After the necessary definitions and propositions about Semi-riemannian manifolds, all the basic causal properties of these spaces are examined carefully. Special attention is paid on the notion of global hyperbolicity. In the last chapter the Malament's and Hawking's theorem that involve and relate all the causal, differential and conformal structure of a Lorentzian manifold are proven.

Περιεχόμενα

1	Ο χώρος Minkowski	9
1.1	Ο χώρος Minkowski	9
1.2	Οι μετασχηματισμοί Lorentz	14
1.3	Το θεώρημα Zeeman	15
2	Ημιρηνάννια γεωμετρία	25
2.1	Βασικές ιδιότητες	25
2.2	Αιτιακές δομές	36
2.3	Καθολική υπερβολικότητα	47
3	Αιτιακές και τοπολογικές δομές	59
3.1	Οι χρονοειδείς καμπύλες και η τοπολογία της πολλαπλότητας	59
3.2	Η $\mathcal{P}$ - τοπολογία	69

Κεφάλαιο 1

Ο χώρος Minkowski

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τον χώρο Minkowski, την απλούστερη περίπτωση χώρου που θα μελετήσουμε που είναι και ιστορικά η πρώτη που μελετήθηκε. Αφού δώσουμε τους πρώτους ορισμούς, που μας εισάγουν για πρώτη φορά στο θέμα των αιτιακών δομών, θα ορίσουμε τους σημαντικούς μετασχηματισμούς Lorentz και θα κινηθούμε κατευθείαν προς την απόδειξη του σημαντικού θεωρήματος του Zeeman. Η βασική μας αναφορά σε αυτό το κεφάλαιο είναι τα [12] και [6] όσον αφορά το βασικό θεώρημα, καθώς και το [7].

1.1 Ο χώρος Minkowski

Ορισμός 1. *Ο χώρος Minkowski $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι ένας τετραδιάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ τέτοιο ώστε:*

$$\langle u, v \rangle = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4$$

για κάθε $u, v \in M$ με $u = (u^1, u^2, u^3, u^4)$ και $v = (v^1, v^2, v^3, v^4)$.

Η διγραμμική μορφή $\langle \cdot, \cdot \rangle$ εύκολα αποδεικνύεται πως είναι εσωτερικό γινόμενο που διαφέρει προς το σύνηθες μόνο όσον αφορά την ιδιότητα του θετικά ορισμένου. Ορίζουμε την αντίστοιχη διγραμμική μορφή

$$Q(u) = \langle u, u \rangle$$

Σε όλο το υπόλοιπο κεφάλαιο με $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ θα γράφουμε μια βάση του M και θα χρησιμοποιούμε για συντομογραφία την σύμβαση επαναλαμβανόμενου δείκτη, οπότε $u = u^\alpha e_\alpha$, $v = v^\alpha e_\alpha$ και $\langle u, v \rangle = \eta_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta$ όπου $\eta_{\alpha\beta}$ είναι τα

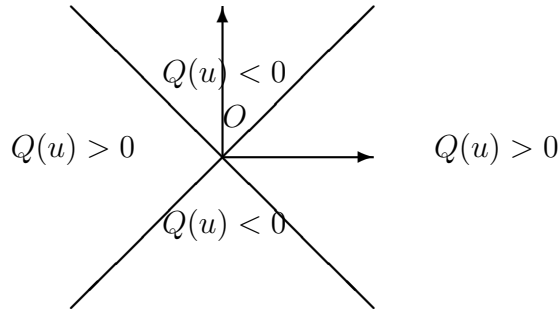
στοιχεία του πίνακα

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ορισμός 2. Ένα διάνυσμα $u \in M$ θα ονομάζεται:

1. *μηδενικό ή φωτοειδές* αν $Q(u) = 0$
2. *χρονοειδές* αν $Q(u) < 0$
3. *χωροειδές* αν $Q(u) > 0$

Τα στοιχεία του M , που μερικές φορές θα τα αποκαλούμε και **γεγονότα**¹, διαμερίζονται στις τρεις κατηγορίες του ορισμού 2. Στο σχήμα 1 παρουσιάζουμε αυτήν την κατάσταση (στις δύο διαστάσεις όμως για απλότητα).

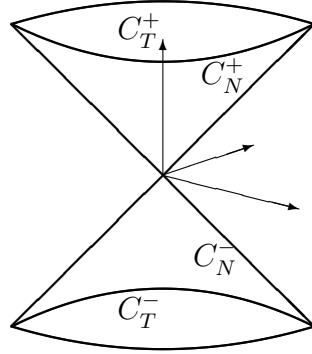


Σχήμα 1

Το σύνολο των μηδενικών διανυσμάτων θα ονομάζεται και **κώνος φωτός**. Αυτός είναι πράγματι ένας κώνος με την έννοια που δίνει η αναλυτική γεωμετρία

¹Η ορολογία γεγονότα, όπως και οι ορολογίες του ορισμού 2 και οι ορισμοί που θα ακολουθήσουν αμέσως παρακάτω προέρχονται από την ερμηνεία που έχουν όλες αυτές οι δομές στην ειδική θεωρία της σχετικότητας. Εκεί ο χώρος Minkowski είναι ο κόσμος όλων των φυσικών γεγονότων τα οποία καθορίζονται από τρεις χωρικές συντεταγμένες και μια χρονική. Η ερμηνεία των εννοιών φωτοειδές κτλ είναι δυσκολότερη και θα φανεί εν καιρώ.

αφού $Q(u) = 0$ ακριβώς όταν $(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = (u^4)^2$. Η τελευταία είναι μια εξίσωση κώνου στον $\mathbb{R}^4$. Τα χρονοειδή βρίσκονται εντός του κώνου και τα χωροειδή εκτός. Ο κώνος μοιάζει όπως ο κώνος στο σχήμα 2 (εδώ η αναπαράσταση είναι τρισδιάστατη)



Σχήμα 2

Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε τον **κώνο φωτός στο** x_0 , $x_0 \in M$ να είναι (σχήμα 2)

$$C_N(x_0) = \{x \in M : Q(x - x_0) = 0\}.$$

Ο προηγούμενος κώνος φωτός που ορίσαμε είναι ο κώνος φωτός στο σημείο $O = (0, \dots, 0)$ για μια δεδομένη βάση. Ο κώνος φωτός στο x_0 δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια παράλληλη μεταφορά κατά x_0 του κώνου φωτός στο O . Ακόμα, αν x, x_0 μηδενικά τότε ονομάζουμε το σύνολο

$$R_{x_0, x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbb{R}\}$$

γραμμή ή ακτίνα φωτός των x_0, x . Τέλος, όπως θα ήταν αναμενόμενο, τα $u, v \in M$ θα λέγονται **ορθογώνια ή κάθετα** μεταξύ τους όταν $\langle u, v \rangle = 0$

Πρόταση 1. Υπάρχει μια βάση του M αποτελούμενη από μηδενικά διανύσματα.

Απόδειξη. Η $\{e_1 + e_4, e_2 + e_4, e_3 + e_4, 2e_4\}$, όπου $\{e_i\}$ η κανονική βάση, είναι μια τέτοια. $\square$

Η γεωμετρία στον χώρο Minkowski είναι με ουσιαστικό τρόπο διαφορετική από αυτή του Ευκλείδειου χώρου. Έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

Πρόταση 2. Τα μηδενικά $u, v \in M$ είναι ορθογώνια ακριβώς όταν $u = tv$ για κάποιο $t \in \mathbb{R}$

Απόδειξη. Θα δείξουμε το ευθύ (το αντιστροφο είναι προφανές). Αφού $\langle u, u \rangle = 0$ έχουμε ότι $(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = (u^4)^2$ και ομοίως για το v . Αφού είναι κάθετα έχουμε επίσης και ότι $u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3 = u^4v^4$. Για τα διανύσματα (u^1, u^2, u^3) και (v^1, v^2, v^3) του $\mathbb{R}^3$ έχουμε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz ότι

$$(u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3)^2 \leq ((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2)((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2).$$

Εν προκειμένου όμως ισχύει η ισότητα (και τα δύο μέλη είναι ίσα με $(u^4v^4)^2$). Άρα υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$(u^1, u^2, u^3) = (tv^1, tv^2, tv^3)$$

και άρα από την ιδιότητα $Q(u) = Q(v) = 0$ έπεται ότι $u^4 = tv^4$ και συνεπώς $u = tv$. $\square$

Η επόμενη πρόταση είναι πιο δύσκολη και θα χρειαστούμε ένα λήμμα το οποίο έχει σημασία και από μόνο του.

Λήμμα 1. Έστω $u, v \in M$ με v χρονοειδές και $u \neq 0$ όχι χωροειδές². Τότε για κάθε βάση $\{e_\alpha\}$ του M ισχύει ότι $u^4v^4 \neq 0$. Ιδιαίτερα $u^4v^4 > 0$ όταν $\langle u, v \rangle < 0$ και $u^4v^4 < 0$ όταν $\langle u, v \rangle > 0$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\langle v, v \rangle = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^4)^2 < 0$ και επίσης $\langle u, u \rangle = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - (u^4)^2 \leq 0$. Έπεται ότι:

$$(u^4v^4)^2 > ((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2)((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2) \geq (u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3)^2$$

με την τελευταία ανισότητα να είναι εφαρμογή της Cauchy-Schwartz. Συνεπάγεται επίσης ότι

$$|u^4v^4| > |u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3|$$

και άρα $u^4v^4 \neq 0$.

Έστω τώρα πως $u^4v^4 > 0$. Τότε

$$u^4v^4 = |u^4v^4| > |u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3| \geq u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3$$

και συνεπάγεται ότι $\langle u, v \rangle < 0$. Ομοίως για $u^4v^4 < 0$. $\square$

Πρόταση 3. Ένα διάνυσμα ορθογώνιο σε ένα χρονοειδές είναι είτε μηδέν είτε χωροειδές.

Απόδειξη. Άμεση από το προηγούμενο λήμμα. $\square$

²Τα διανύσματα που δεν είναι χωροειδή, και άρα είναι χρονοειδή ή μηδενικά, θα λέγονται και **αιτιακά** εφεξής.

Το Λήμμα 1 μας επιτρέπει να διαμερίσουμε όλα τα χωροειδή γεγονότα σε δύο κλάσεις. Την κλάση όσων έχουν μεταξύ τους θετικό το γινόμενο των τέταρτων όρων και την κλάση όσων το έχουν αρνητικό. Η διαμέριση έχει νόημα γιατί στο λήμμα όλα είναι ανεξάρτητα βάσης. Έτσι έχουμε σε κάθε σημείο τον **μελλοντικό** και τον **παρελθοντικό** κώνο. Συμβολίζουμε $C_T^+(x_0)$ και $C_T^-(x_0)$. Επίσης θα γράψουμε $C_T(x_0) = C_T^+(x_0) \cup C_T^-(x_0)$.

Πρόταση 4. *Αν το $u \in M$ είναι φωτεινός τότε για κάθε $v \in C_T^+(0)$ το $\langle u, v \rangle$ έχει το ίδιο πάντα πρόσημο.*

Απόδειξη. Έστω $v_1, v_2 \in M$ τέτοια ώστε $\langle u, v_1 \rangle < 0$ και $\langle u, v_2 \rangle > 0$. Θέτουμε

$$v_3 = \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\langle u, v_1 \rangle} v_1.$$

Για το v_3 ισχύει ότι $v_3 \in C_T^+(0)$ και $\langle u, v_3 \rangle = -\langle u, v_2 \rangle$ (προκύπτουν εύκολα). Άρα $\langle u, v_3 \rangle + \langle u, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v_2 + v_3 \rangle = 0$. Το τελευταίο όμως είναι άτοπο διότι $v_2, v_3 \in C_T^+(0) \Rightarrow v_2 + v_3 \in C_T^+(0)$ (αυτό είναι κάτι που επίσης προκύπτει εύκολα). Το $v_2 + v_3$ είναι χρονοειδές, κάτι που αντιφάσκει με την πρόταση 3. $\square$

Η τελευταία πρόταση μας επιτρέπει να ορίσουμε ανάλογη διαμέριση και στα μηδενικά διανύσματα.

$$C_N^+(x_0) = \{x \in C_N(x_0) : \langle n, x \rangle < 0 \ \forall n \in C_T^+(x_0)\}$$

είναι ο **μελλοντικός κώνος φωτός**. Ανάλογα ορίζεται και ο **παρελθοντικός κώνος φωτός** $C_N^-(x_0)$ (σχήμα 2).

Πρόταση 5. *Αν $x_0 \neq x \in M$ και $Q(x_0 - x) = 0$ τότε $R_{x_0, x} = C_N(x_0) \cap C_N(x)$.*

Απόδειξη. Έστω $z \in R_{x_0, x}$ με $z = x_0 + t(x - x_0)$ τότε $z - x_0 = t(x - x_0)$ και $Q(z - x_0) = t^2 Q(x - x_0) = 0$, άρα $z \in C_N(x)$. Ομοίως, χρησιμοποιώντας το εντελώς προφανές $R_{x_0, x} = R_{x, x_0}$ έχουμε και $z \in C_N(x_0)$.

Για το αντίστροφο τώρα, έστω $z \in C_N(x_0) \cap C_N(x)$ τότε $z - x_0 = (z - x) - (x_0 - x)$ και άρα

$$Q(z - x_0) = Q(z - x) - 2\langle z - x, x_0 - x \rangle + Q(x_0 - x) \Rightarrow \langle z - x, x_0 - x \rangle = 0.$$

Έστω $z \neq x$ (αλλιώς το έχουμε το ζητούμενο). Από την πρόταση 2 $\exists t$ τέτοιο ώστε $z - x = t(x_0 - x)$ $\square$

1.2 Οι μετασχηματισμοί Lorentz

Όπως θα ήταν αναμενόμενο, ένας $L : M \longrightarrow M$ λέγεται ορθογώνιος όταν $\forall x, y \in M$

$$\langle L(x), L(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Για έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό έχουμε τον αντίστοιχο πίνακα $[\Lambda_b^a]_{a,b}$ με $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Πρόταση 6. *Αν L ορθογώνιος μετασχηματισμός τότε*

$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^\top \eta$$

Απόδειξη. Έστω $L(e_\alpha) = \hat{e}_\alpha$ για κάθε α όπου $\{e_\alpha\}$ μια βάση του M . Τότε $e_u = \Lambda_u^\alpha \hat{e}_\alpha$. Επειδή τώρα $\langle e_c, e_d \rangle = \eta_{cd}$ η προηγούμενη σχέση δίνει:

$$\Lambda_c^1 \Lambda_d^1 + \Lambda_c^2 \Lambda_d^2 + \Lambda_c^3 \Lambda_d^3 - \Lambda_c^4 \Lambda_d^4 = \eta_{cd}$$

η οποία συνεπάγεται ότι $\Lambda_c^\alpha \Lambda_d^\beta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{cd}$ και άρα:

$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^\top \eta.$$

□

Ορισμός 3. *Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί L για τους οποίους $\Lambda_4^4 \geq 1$ και $\det \Lambda = +1$ αποκαλούνται **μετασχηματισμοί Lorentz**.*

Ιδιαίτερα, αυτοί που έχουν μόνο την πρώτη ιδιότητα λέγονται **ορθόχρονοι**.

Πρόταση 7. *Ο Λ είναι ορθόχρονος ακριβώς όταν διατηρεί την κατεύθυνση (παρελθοντική ή μελλοντική) των χρονοειδών γεγονότων (απεικονίζει δηλαδή παρελθοντικά σε παρελθοντικά και μελλοντικά σε μελλοντικά).*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε το ευθύ. Έστω Λ ορθόχρονος, $v = v^\alpha e_\alpha$ ένα χρονοειδές ή μηδενικό διάνυσμα και $\hat{v}^4 = \Lambda_4^\beta v_\beta$ τότε θα δείξουμε πως $v^4 \hat{v}^4 > 0$. Πράγματι, από την Cauchy-Schwartz:

$$(\Lambda_1^4 v^1 + \Lambda_2^4 v^2 + \Lambda_3^4 v^3)^2 \leq \sum_{i=1}^3 (\Lambda_i^4)^2 \cdot \sum_{i=1}^3 (v^i)^2$$

Εφαρμόζοντας όμως την προηγούμενη πρόταση για $\alpha = 4$ έχουμε:

$$(\Lambda_1^4)^2 + (\Lambda_2^4)^2 + (\Lambda_3^4)^2 - (\Lambda_4^4)^2 = -1 < 0$$

Επιπλέον, αφού το v δεν είναι χωροειδές, $(v^4)^2 \geq (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$. Η πρώτη ανισότητα της απόδειξης γίνεται ως εξής:

$$(\Lambda_1^4 v^1 + \Lambda_2^4 v^2 + \Lambda_3^4 v^3)^2 < (\Lambda_4^4 v^4)^2$$

ή ισοδύναμα

$$(\Lambda_1^4 v^1 + \Lambda_2^4 v^2 + \Lambda_3^4 v^3 - \Lambda_4^4 v^4)(\Lambda_1^4 v^1 + \Lambda_2^4 v^2 + \Lambda_3^4 v^3 + \Lambda_4^4 v^4) < 0.$$

Ορίζουμε τώρα $w = \Lambda_1^4 e^1 + \Lambda_2^4 e^2 + \Lambda_3^4 e^3 + \Lambda_4^4 e^4$ και τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται ως $\langle v, w \rangle \hat{v}^4 < 0$ δηλαδή, οι δυο παράγοντες έχουν αντίθετα πρόσημα. Επίσης, από το Λήμμα 1 τα $\langle v, w \rangle$ και $v^4 w^4$ έχουν και αυτά αντίθετα πρόσημα, συνεπώς από την στιγμή που $w^4 = \Lambda_4^4 > 0$ (υπόθεση ορθοχρονίας) έχουμε αμέσως το ζητούμενο.

Το αντίστροφο προκύπτει ως μικρή τροποποίηση του ευθέου. Αν υποθέσουμε $v^4 \hat{v}^4 > 0$ τότε η σχέση $\langle v, w \rangle \hat{v}^4 < 0$ συνεπάγεται ότι $\langle v, w \rangle v^4 < 0$ και τότε αναγκαστικά $w^4 > 0$ το οποίο φυσικά σημαίνει $\Lambda_4^4 > 0$. Αυτό το τελευταίο γεγονός συνεπάγεται ότι $\Lambda_4^4 > 1$ μια και $|\Lambda_4^4| \geq 1$ και το οποίο είναι προφανές από την δεύτερη ανισότητα της απόδειξης. $\square$

1.3 Το θεώρημα Zeeman

Προχωράμε τώρα στην διαδικασία για την απόδειξη του Θεωρήματος Zeeman. Πρώτα όμως μερικοί ορισμοί και στην συνέχεια μια σειρά λήμματα που μας οδηγούν στο Zeeman.

Ορισμός 4. Αν $x, y \in M$ τότε θα γράφουμε

- $x \ll y$ αν $y \in C_T^+(x)$ και θα λέμε ότι ο y **προηγείται χρονολογικά** του x .
- $x < y$ αν $y \in C_N^+(x)$ και θα λέμε ότι ο y **προηγείται αιτιακά** του x .

Όσον αφορά τον ορισμό αυτό έχουμε να παρατηρήσουμε κάποια πράγματα. Πρώτον μπορεί ναδειχθεί ότι η σχέση " $\ll$ " είναι ,εν αντιθέση με τη σχέση "<", μεταβατική. Δεύτερον, κάθε μια από αυτές τις σχέσεις μπορούμε να την διατυπώσουμε μέσω της άλλης. Ισχύει ότι: $x < y$ αν, και μόνο αν δεν ισχύει η ιδιότητα $x \ll y$ και για κάθε $z \in M$ με $y \ll z \Rightarrow x \ll z$. Επίσης, $x \ll y$ αν και μόνο αν δεν ισχύει η ιδιότητα $x < y$ και υπάρχει $z \in M$ με $x < z < y$. Αυτές τις δύο ιδιότητες θα αποφύγουμε να τις αποδείξουμε και δεν θα έχουν κάποιο ρόλο στα επόμενα. Απόδειξη υπάρχει στο [4].

Λόγω αυτών των ιδιοτήτων ο παρακάτω ορισμός μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα με $\ll$ αντι για $<$.

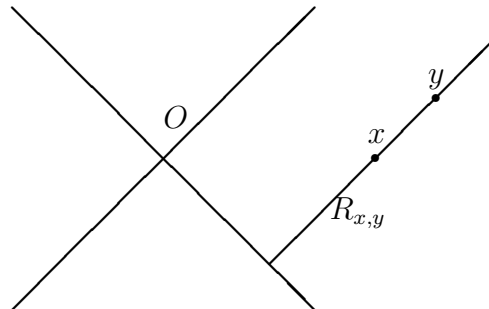
Ορισμός 5. Μια "1-1" απεικόνιση $F : M \longrightarrow M$ θα ονομάζεται **αιτιακός αυτομορφισμός** όταν τόσο η F όσο και η F^{-1} διατηρούν την σχέση $<$. Δηλαδή αν ισχύει ότι $x < y$ ακριβώς όταν $F(x) < F(y)$.

Πρόταση 8. Ένας αιτιακός αυτομορφισμός F απεικονίζει παράλληλες ακτίνες φωτός σε παράλληλες ακτίνες φωτός.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι η F απεικονίζει ακτίνες φωτός σε ακτίνες φωτός. Πράγματι, έστω $R_{x,y}$ μια τέτοια με $x < y$, τότε έχουμε: $F(C_N(x)) = C_N(F(x))$ και αντίστοιχα για το y (προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του αιτιακού αυτομορφισμού). Έτσι έχουμε:

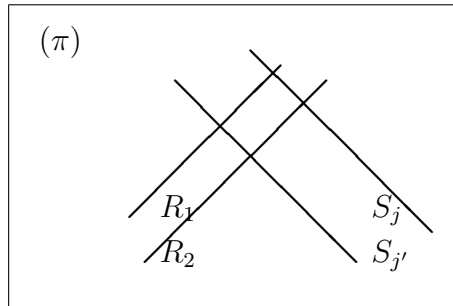
$$\begin{aligned} F(R_{x,y}) &= F(C_N(x) \cap C_N(y)) \\ &= F(C_N(x)) \cap F(C_N(y)) \\ &= C_N(F(x)) \cap C_N(F(y)) \\ &= R_{F(x), F(y)}. \end{aligned}$$

Έστω τώρα R_1, R_2 δύο διακριτές παράλληλες ακτίνες φωτός. Έστω επίσης και (π) να είναι το επίπεδο που τις περιέχει. Είναι σαφές ότι κάθε παράλληλη ακτίνα τέμνει τον κώνο φωτός του σημείου O . Το σχήμα 3 παρακάτω παρουσιάζει μια τέτοια κατάσταση. Έτσι το επίπεδο π περιέχει τουλάχιστον μια διεύθυνση (μια ευθεία δηλαδή) κοινή με τον κώνο φωτός. Ενδεχομένο να περιέχει και μια ακόμα, αυτό είναι κάτι που εξαρτάται από την σχετική θέση του κώνου και του επιπέδου. Αν το επίπεδο εφάπτεται στον κώνο έχει μια κοινή διεύθυνση ενώ αν τέμνεται μαζί του έχει δύο. Θα εξετάσουμε αυτές τις δύο περιπτώσεις ξεχωριστά.



Σχήμα 3

Έστω πρώτα πως περιέχει δύο τέτοιες διευθύνσεις. Τότε θα διαμερίσουμε το π με τους εξής δύο τρόπους: Με μια οικογένεια ευθειών $\{R_i\}_{i \in I}$ παραλλήλων τόσο στην R_1 όσο και στην R_2 (και οι οποίες είναι ως εκ τούτου όλες ακτίνες φωτός) και με μια άλλη οικογένεια ευθειών $\{S_j\}_{j \in J}$ οι οποίες είναι επίσης ακτίνες φωτός μόνο που τώρα είναι συμμετρικές ως προς ευθεία με τις R_i (κοιτα σχήμα 4). Είναι σαφές ότι κάθε μια S_j τέμνει κάθε μια R_i . Το γεγονός ότι η F είναι $1-1$ και οι ευθείες διαμερίζουν το επίπεδο μας επιτρέπει να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι οι $\{F(S_j)\}_{j \in J}$ και οι $\{F(R_i)\}_{i \in I}$ είναι δυο οικογένειες μη τεμνόμενων ευθειών.



Σχήμα 4

Εν συνεχεία προχωράμε στην απόδειξη ότι οι $F(R_1)$ και $F(R_2)$ είναι παράλληλες. Εφόσον είναι μη τεμνόμενες αρκεί να δειχθεί πως είναι συνεπίπεδες. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι δεν είναι. Τότε θα υπάρχει ένας ελάχιστος αφινικός υπόχωρος του M , έστω R , ο οποίος είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^3$ και περιέχει τις $F(R_1)$ και $F(R_2)$. Προφανώς λόγω των παραπάνων, τόσο οι $\{F(R_i)\}_{i \in I}$ όσο και οι $\{F(S_j)\}_{j \in J}$ κείτονται στον R .

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι σε αυτήν την περίπτωση κανένα μέλος της οικογένειας $\{F(R_i)\}_{i \in I}$, πλην των $F(R_1)$ και $F(R_2)$ μπορεί να είναι συνεπίπεδο με κάποια ακτίνα εκ αυτών των δύο (με κάποια από τις $F(R_1)$ ή $F(R_2)$ δηλαδή). Πράγματι, έστω ότι το $F(R_{i_0})$ είναι συνεπίπεδο με το $F(R_1)$. Έστω (π_2) το επίπεδο αυτό. Κάθε μια $F(S_j)$ τέμνει και το $F(R_{i_0})$ και το $F(R_1)$. Άρα $F(S_j) \in \pi_2$ για κάθε $j \in J$. Από την αρχική υπόθεση όμως $F(R_2) \notin \pi_2$, άρα έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με αυτό, συνεπώς τέμνει το πολύ ένα $F(S_{j_0})$. Άτοπο.

Μπορούμε λοιπόν να δεχτούμε ότι υπάρχει $F(R_3)$ τέτοιο ώστε στο σύνολο των ευθειών $\{F(R_1), F(R_2), F(R_3)\}$ ανα δύο οι ακτίνες να είναι μη συνεπίπε-

δες. Η οικογένεια $F(S_j)$ όμως τέμνει κάθε μια από αυτές τις τρεις. Από ένα θεώρημα τώρα της αναλυτικής γεωμετρίας³ οι $F(S_j)$ είναι οι γεννήτορες ενός υπερβολοειδούς στον R . Το ίδιο μπορούμε να ισχυριστούμε και για την οικογένεια $\{F(R_i)\}$ (τα επιχειρήματα είναι εντελώς ανάλογα). Έπεται (από το ότι οι γεννήτορες ενός υπερβολοειδούς είναι μοναδικοί) πως κάθε $F(R_i)$ είναι παράλληλο με κάποιο $F(S_j)$, κάτι επίσης άτοπο.

Περνάμε τώρα στην περίπτωση πως υπάρχει μια μόνο διεύθυνση κοινή σε κώνο και επίπεδο. Αυτό σημαίνει πως το επίπεδο π εφάπτεται στον κώνο του O . Ισχυριζόμαστε και σε αυτήν την περίπτωση ότι υπάρχει ομοίως ακτίνα φωτός R_3 παράλληλη στις R_1 και R_2 τέτοια ώστε τα ζεύγη παραλλήλων ακτίων $\{R_1, R_3\}$ και $\{R_2, R_3\}$ να εμπίπτουν στην προηγούμενη κατηγορία. Αυτό θα ολοκληρώνει την απόδειξη μιας και τότε η $F(R_3)$ θα ήταν παράλληλη στις $F(R_1)$ και $F(R_2)$ και άρα αυτές θα ήταν παράλληλες και μεταξύ τους. Η ύπαρξη τώρα της $F(R_3)$ διασφαλίζεται ως εξής: Έστω (ϵ) η μοναδική αυτή διεύθυνση. Παίρνουμε παράλληλη προς αυτήν που δεν ανήκει στο επίπεδο π και η οποία τέμνει τον κώνο. Αυτή είναι κατάλληλη για τους σκοπούς μας και υπάρχει με τρόπο προφανή. $\square$

Η επόμενη πρόταση θα μας δείξει ότι η F όχι μόνο στέλνει ακτίνες σε ακτίνες αλλά το κάνει και με γραμμικό τρόπο, δηλαδή ο περιορισμός της F σε κάθε μια ακτίνα φωτός είναι γραμμική απεικόνιση. Πρώτα θα δώσουμε κάποιους ορισμούς και ένα λήμμα.

Αν $R_{x,y} = \{x + r(y - x) : r \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ακτίνα φωτός τότε και η $F(R_{x,y})$ είναι τέτοια. Ας την γράψουμε $\{a + t(b - a) : t \in \mathbb{R}\}$. Σε αυτήν ανήκουν τα σημεία $F(x)$ και $F(y)$, συνεπώς μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας να γράψουμε την $F(R_{x,y})$ ως $\{F(x) + s(F(y) - F(x)) : s \in \mathbb{R}\}$. Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της $R_{x,y}$ και των t όπως και μεταξύ των σημείων της $F(R_{x,y})$ και των s . Ας γράψουμε f την επαγόμενη από την F συνάρτηση που αντιστοιχίζει το t του $\mu \in R_{x,y}$ στο s του $F(\mu)$.

Μια απεικόνιση $g : R_{x,y} \rightarrow R_{x,y}$ θα την λέμε **μετάθεση** αν είναι τέτοια ώστε να υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε

$$g(x + r(y - x)) = x + (r + t)(y - x)$$

Επίσης θα λέμε ότι η F μεταφέρει την μετάθεση g όταν υπάρχει μια μετάθεση e της $F(R_{x,y})$ για την οποία να ισχύει $F \circ g = e \circ F$, όταν το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται δηλαδή

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{F} & F(R) \\ g \downarrow & & e \downarrow \\ R & \xrightarrow{F} & F(R) \end{array}$$

³Κοίτα [1] σελ 166 σχετικά

Λήμμα 2. Έστω R μια ακτίνα φωτός, $F : M \longrightarrow M$ ένας αιτιακός αυτομορφισμός και $g : R \longrightarrow R$ μια μετάθεση. Τότε η F μεταφέρει την g .

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το λήμμα σε τρία βήματα. Στο πρώτο βήμα θα δείξουμε ότι όντως μεταφέρεται μια συγκεκριμένη κατηγορία μεταθέσεων. Στο δεύτερο βήμα θα υποδείξουμε μια συγκεκριμένη ακτίνα για την οποία κάθε της μετάθεση ανήκει στην κατηγορία του βήματος 1, και τέλος στο τρίτο βήμα θα δείξουμε ότι αν ο ισχυρισμός ισχύει για μια τυχούσα ακτίνα τότε θα ισχύει και για κάθε άλλη. Με αυτό το τρόπο θα έχουμε εξασφαλίσει την ισχύ του λήμματος.

Βήμα 1 Έστω R μια ακτίνα φωτός και R_1 μια παράλληλη σε αυτή έτσι ώστε το επίπεδο στο οποίο κείτονται οι δύο να εμπεριέχει και δύο μη μηδενικές διευθύνσεις (κοίτα και την προηγούμενη απόδειξη). Το επίπεδο αυτό διαμερίζεται σε μια οικογένεια $\{S_j\}_{j \in J}$ παράλληλων ακτίνων οι οποίες τέμνουν όλες τις R και R_1 . Αν $g_1 : R \longrightarrow R_1$ είναι η παράλληλη μεταφορά της R στην R_1 (δηλαδή η g_1 πέρνει ένα σημείο της R που ανοίκει σε κάποια S_{j_0} και το απεικονίζει στο σημείο τομής των S_{j_0} και R_1). Ανάλογα ή $e_1 : F(R) \longrightarrow F(R_1)$ είναι η παράλληλη μεταφορά της $F(R)$ στην $F(R_1)$. Τότε το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{F} & F(R) \\ g_1 \downarrow & & \downarrow e_1 \\ R_1 & \xrightarrow{F} & F(R_1) \end{array}$$

Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο βρίσκουμε ακίνα R_2 παράλληλα στην R_1 με αντίστοιχη ιδιότητα ώστε να υπάρχουν παράλληλες μεταθέσεις e_2, e_3, g_2 και g_3 ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{F} & F(R) \\ \downarrow g_1 & & \downarrow e_1 \\ R_1 & \xrightarrow{F} & F(R_1) \\ \downarrow g_2 & & \downarrow e_2 \\ R_2 & \xrightarrow{F} & F(R_2) \\ \downarrow g_3 & & \downarrow e_3 \\ R_3 & \xrightarrow{F} & F(R_3) \end{array}$$

και συνεπώς να μετατίθεται το επόμενο διάγραμμα από την στιγμή που οι g_i και e_i είναι παράλληλες μεταθέσεις οι g και e είναι μεταθέσεις (με την έννοια που

ορίσαμε νωρίτερα).

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{F} & F(R) \\ g=g_1 \circ g_2 \circ g_3 \downarrow & & \downarrow e=e_1 \circ e_2 \circ e_3 \\ R & \xrightarrow{F} & F(R) \end{array}$$

Συνεπώς δείξαμε ότι μια μετάθεση αν μπορεί να σπάσει σε τρία τέτοια βήματα, τότε μεταφέρεται.

Βήμα 2 Έστω $\tilde{R} = R_{x,y}$ με $x = (0, 0, 0, 0)$ και $y = (0, 0, 1, 1)$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{e_i\}_{i=1}^4$ και $\tilde{g}$ η μετάθεση της $\tilde{R}$ κατά t . Δηλαδή

$$\tilde{g}(x + r(y - x)) = \tilde{g}(0, 0, r, r) = (0, 0, r + t, r + t)$$

Έστω $x_1 = (0, -t, 0, -t)$ και $x_2 = (0, 0, 0, 2t)$ και $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ να είναι οι παράλληλες στην R ακτίνες που διέρχονται από τα x_1 και x_2 αντίστοιχα. Ορίζουμε τώρα τις μεταθέσεις $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3$ να είναι οι παράλληλες μεταθέσεις

$$\tilde{R} \xrightarrow{\tilde{g}_1} \tilde{R}_1 \xrightarrow{\tilde{g}_2} \tilde{R}_2 \xrightarrow{\tilde{g}_3} R$$

με $x \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto \tilde{g}(x)$ για $x = (0, 0, 0, 0)$ και άρα $\tilde{g} = \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1$. Η επιβεβαίωση αυτού του γεγονότος καθώς και του ότι οι $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ έχουν ιδιότητες όπως στο προηγούμενο βήμα είναι απλώς θέμα πράξεων.

Βήμα 3 Ας υποθέσουμε πως το ζητούμενο ισχύει για την ακτίνα $\tilde{R}$ και έστω R μια τυχούσα ακτίνα. Μπορούμε να βρούμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό G_1 που να απεικονίζει την R στην $\tilde{R}$ επιμορφικά. Τον G_1 μπορούμε να το πάρουμε επιπλέον ορθογώνιο και ορθόχρονο (επαληθεύεται άμεσα με απλή γραμμική άλγεβρα). Είναι δυνατόν τώρα να θέσουμε έναν αφινικό μετασχηματισμό $G = x_0 + \tilde{G}_1$ έτσι ώστε μέσω της G η R και η $\tilde{R}$ να ταυτίζονται πλήρως.

Αν τώρα g εάι μια μετάθεση της R τότε $\tilde{g} = G \circ g \circ G^{-1}$ είναι μια μετάθεση της $\tilde{R}$. Αφού η $\tilde{g}$ μπορεί να γραφτεί $\tilde{g} = \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1$ τότε έχουμε $\tilde{g} = G^{-1} \circ \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ G$ δηλαδή:

$$g = (G^{-1} \circ \tilde{g}_3 \circ G) \circ (G^{-1} \circ \tilde{g}_2 \circ G) \circ (G^{-1} \circ \tilde{g}_1 \circ G)$$

Οι G και G^{-1} είναι φυσικά αιτιακοί αυτομορφισμοί και απεικονίζουν, κατα τα προηγούμενα, ακτίνες σε ακτίνες. Άρα έχουμε:

$$R = G^{-1}(\tilde{R}) \xrightarrow{\tilde{g}_1} G^{-1}(\tilde{R}_1) \xrightarrow{\tilde{g}_2} G^{-1}(\tilde{R}_2) \xrightarrow{\tilde{g}_3} G^{-1}(\tilde{R}) = R$$

που είναι ότι ακριβώς ζητούσαμε αφού οι $g_i = (G^{-1} \circ \tilde{g}_i \circ G)$ είναι παράλληλες μεταθέσεις. $\square$

Πρόταση 9. Ένας αιτιακός αυτομορφισμός $F : M \longrightarrow M$ είναι γραμμικός σε κάθε ακτίνα φωτός. Αυτό σημαίνει ότι η f που ορίσαμε προηγουμένως είναι γραμμική.

Απόδειξη. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι $f(0) = 0$. Πρώτα θα επιδιώξουμε να δείξουμε ότι

$$f(r+t) = f(r) + f(t) \quad \text{για κάθε } r, t \in \mathbb{R}$$

δηλαδή ότι

$$F(x + (r+t)(y-x)) = F(x) + (f(r) + f(t))(F(y) - F(x)).$$

έστω g να είναι η μετάθεση κατά t δηλαδή $g(x + r(y-x)) = x + (r+t)(y-x)$. Από την προηγούμενη πρόταση η g μεταφέρεται από την F . Υπάρχει δηλαδή $e : F(R) \longrightarrow F(R)$ τέτοια ώστε $F \circ g = e \circ F$. Έστω επίσης ότι η e είναι η μετάθεση κατά $u(t)$, δηλαδή:

$$e(F(x) + s(F(y) - F(x))) = F(x) + (s + u(t))(F(y) - F(x))$$

Τελικά μετά από όλα αυτά έχουμε:

$$\begin{aligned} F(x + (r+t)(y-x)) &= F \circ g(x + r(y-x)) \\ &= e \circ F(x + r(y-x)) \\ &= e(F(x) + f(r)(F(y) - F(x))) \\ &= F(x) + (f(r) + u(t))(F(y) - F(x)) \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι $f(r+t) = f(r) + u(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αν $r = 0$ τότε $u(t) = f(t)$ και συνεπάγεται το ζητούμενο.

Μας μένει να δείξουμε ότι

$$f(tr) = tf(r).$$

Αυτό όμως είναι εύκολο και γίνεται με συνηθισμένο σε αυτές τις περιπτώσεις τρόπο. Πρώτα το δείχνουμε για $n \in \mathbb{N}$.

$$f(nr) = f(r + \dots + r) = f(r) + \dots + f(r) = nf(r)$$

Όμοια δείχνουμε ότι $f(-r) = -f(r)$ και έτσι το έχουμε για $n \in \mathbb{Z}$. Αν τώρα $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ τότε

$$nf\left(\frac{m}{n}r\right) = f\left(n\frac{m}{n}r\right) = f(mr) = mf(r) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}r\right) = \frac{m}{n}f(r)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι είναι επίσης αύξουσα συνεπώς και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περνώντας στο όριο έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Έπεται ότι η f έχει αναγκαστικά την μορφή $f(t) = kt$ για κάποιο $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή

$$F(x + r(y - x)) = F(x) + kr(F(y) - F(x))$$

Πρόταση 10. *Αν η F είναι αιτιακός αυτομορφισμός τότε, είναι σύνθεση μιας γραμμικής απεικόνισης και μιας μετάθεσης.*

Απόδειξη. Η σύνθεση ενός αιτιακού αυτομορφισμού με μια παράλληλη μετατόπιση είναι πάλι αιτιακός αυτομορφισμός, συνεπώς χωρίς βλάβη ης γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $F(O) = O$.

Έστω επιπλέον $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ μια βάση από μηδενικά διανύσματα (δείξαμε νωρίτερα ότι υπάρχει μια τέτοια). Ορίζουμε την απεικόνιση $G : M \rightarrow M$ με

$$G(y) = G\left(\sum y^i e_i\right) = \sum y^i F(e_i)$$

η οποία είναι σαφώς γραμμική.

Προκειμένου τώρα να εξασφαλίσουμε την γραμμικότητα της F θα αποδείξουμε ότι $F = G$. Συμβολίζουμε με $M_i = \langle e_j : j \leq i \rangle$ $i = 1, 2, 3, 4$. Φυσικά $M_4 = M$. Θα δουλέψουμε επαγωγικά. Για $i = 1$ έχουμε ότι $F|_{M_1} = G|_{M_1}$ καθότι, όπως δείξαμε, η F είναι γραμμική σε κάθε ακτίνα φωτός.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $F|_{M_{i-1}} = G|_{M_{i-1}}$ και ας επιδιώξουμε να δείξουμε ότι $F|_{M_i} = G|_{M_i}$. Έστω $y \in M_i$ το y μπορεί να γράφτεί στη μορφή $y = x + \lambda e_i$ με $x \in M_{i-1}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Συνεπάγεται ότι $y - x = \lambda e_i$ δηλαδή το $y - x$ είναι μηδενικό. Θεωρούμε ακτίνες

$$R_1 = R_{x,y} = \{x + r(y - x) : r \in \mathbb{R}\}$$

$$R_2 = R_{0,\lambda e_i} = \{O + r(\lambda e_i - O) : r \in \mathbb{R}\}$$

Οι $F(R_1)$ και $F(R_2)$ από τα προηγούμενα λήμματα είναι παράλληλες και

$$F(R_1) = \{F(x) + k_1 r(F(y) - F(x)) : r \in \mathbb{R}\}$$

$$F(R_2) = \{O + k_2 r(F(\lambda e_i) - O) : r \in \mathbb{R}\}$$

Στην πραγματικότητα τώρα ισχύει ότι $k_1 = k_2$ διότι, αν δεν ίσχυε αυτό, τότε η οικογένεια των ακτίνων που καλύπτουν το επίπεδο που ορίζουν οι R_1 και R_2 θα μεταφερόταν μέσω της F σε μη παράλληλες ευθείες. Για παράδειγμα, ένα σημείο που απέχει απόσταση d από σημείο $x \in R_1$ και η παράλληλη μεταφορά (διαμέσω αυτής της οικογένειας) του στην R_2 απέχει επίσης απόσταση d από το 0 , εξαιτίας της δράσης της F η εικόνα του θα απέχει απόσταση $k_1 d$ από $F(x)$ και $k_2 d$ από το O πράγμα άτοπο (σε περίπτωση που δεν υπάρχει τέτοια οικογένεια κάνουμε μια παράκαμψη όπως στο πρώτο λήμμα).

Εχουμε λοιπόν ότι η $F(R_1)$ είναι μια παράλληλη μετάθεση της $F(R_2)$ κατά $F(x)$. Ειδικά για $r = 1$ έχουμε ότι

$$F(x) = (0 + k(F(\lambda e_i)) - 0) = F(x) + k(F(y) - F(x))$$

δηλαδή $F(\lambda e_i) = F(y) - F(x)$. Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x) + F(\lambda e_i) \\ &= G(x) + F(\lambda e_i) \\ &= G(x) + \lambda F(e_i) \\ &= G(x) + G(\lambda e_i) \\ &= G(x + \lambda e_i) = G(y) \end{aligned}$$

□

Μετά από όλα αυτά τα λήμματα φθάνουμε εν τέλει στην διατύπωση και την απόδειξη του θεωρήματος του Zeeman.

Θεώρημα 1. Αν $F : M \longrightarrow M$ είναι ένας αιτιακός αυτομορφισμός τότε υπάρχουν

1. ένας ορθογώνιος και ορθόχρονος μετασχηματισμός $L : M \longrightarrow M$
2. μια μετάθεση $T : M \longrightarrow M$
3. μια $K : M \longrightarrow M$ με $K(x) = kx$ για κάποιο $k > 0$

τέτοια ώστε να ισχύει

$$F = T \circ K \circ L.$$

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει η T έτσι ώστε η $T^{-1} \circ F$ να είναι γραμμική και ορθόχρονη. Ισχύει επίσης το ακόλουθο: Μια απεικόνιση $H : M \longrightarrow M$ είναι ορθογώνια ακριβώς όταν $Q(L(x)) = Q(x)$ για όλα τα $x \in M$. Πράγματι, το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο υπολογίζοντας βρίσκει κανείς ότι

$$4\langle x, y \rangle = Q(L(x - y)) - Q(L(x + y)) = 4\langle L(x), L(y) \rangle \quad \forall x, y \in M$$

Συνεπώς, για την απόδειξη του θεωρήματος, αρκεί να βρεθεί σταθερά $k > 0$ τέτοια ώστε ο $\frac{1}{k}T^{-1} \circ F$ να διατηρεί το Q . Αν δείξουμε αυτό έχουμε όλη την πρόταση.

Ως αιτιακός αυτομορφισμός ο $T^{-1} \circ F$ απεικονίζει τον κώνο $C_N(O)$ στον εαυτό του. Άρα $Q(x) = 0$ ακριβώς όταν $Q(T^{-1} \circ F(x)) = 0$. Αφού ο $T^{-1} \circ F$ είναι γραμμικός τόσο η $Q(\cdot)$ όσο και η $Q(T^{-1} \circ F(\cdot))$ είναι τετραγωνικές μορφές

και αφού έχουν τον ίδιο πυρήνα, από ένα θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας, είναι ίσες modulo μια πολλαπλασιαστική σταθερά. Δηλαδή,

$$Q(x) = k_1 Q(T^{-1} \circ F(x)) \quad \forall x \in M.$$

Επιπλέον όμως, η $Q(T^{-1} \circ F)$ διατηρεί τον μελλοντικό κώνο φωτός και άρα $Q(x) < 0$ ακριβώς όταν $Q(T^{-1} \circ F(x)) < 0$ και άρα ο όρος k_1 πρέπει να είναι θετικός. Θέτοντας $k = \sqrt{k_1}$ και τότε

$$Q(x) = Q\left(\frac{1}{k}(T^{-1} \circ F(x))\right)$$

□

Κεφάλαιο 2

Ημιρημάννια γεωμετρία

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την πιο σημαντική περίπτωση των πολλαπλοτήτων με καμπυλότητα. Η κατάσταση εδώ είναι σαφώς πολύπλοκότερη και δεν έχουμε τόσο καλά θεωρήματα όπως στον επίπεδο χώρο. Στην πρώτη παράγραφο κάνουμε μια ανασκόπηση της ημιρημάννιας γεωμετρίας και παρουσιάζουμε όλα τα απαραίτητα τεχνικά αποτελέσματα. Η δεύτερη παράγραφος μελετά την ιεραρχία των αιτιακών δομών σε μια πολλαπλότητα και η τρίτη εισέρχεται στην πιο σημαντική από αυτές, την καθολική υπερβολικότητα. Οι βασικές μας αναφορές σε αυτό το κεφάλαιο είναι οι [7], [11], [3] και [8].

2.1 Βασικές ιδιότητες

Θα ξεκινήσουμε την μελέτη των καμπύλων χωροχρόνων κάνοντας πρώτα μια ανασκόπηση της θεωρίας των ημιρημάννιων πολλαπλοτήτων. Σε ότι είναι κοινό με την θεωρία των ρημάνια περίπτωση δεν θα δώσουμε απόδειξη.

Ορισμός 6. Έστω N n -διάστατη διαφορίσημο πολλαπλότητα εφοδιασμένη με έναν $(0,2)$ τανυστή (δηλαδή με ένα εσωτερικό γινόμενο) g για το οποίο να ισχύει: Αν $X, Y \in T_p M$ για $p \in M$ τότε:

1. Ο g δεν είναι εκφυλισμένος
2. $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$ για κάθε $X, Y \in T_p M$
3. Για κάθε $p \in M$ το g_p είναι ένα εσωτερικό γινόμενο με δείκτη $\nu \leq n$ ¹

¹Θυμίζουμε ότι ο δείκτης ενός εσωτερικού γινομένου ορίζεται ως εξής: Κάθε ένα εσωτερικό γινόμενο που δεν είναι θετικά ορισμένο σε ένα n -διάστατο διανυσματικό χώρο είναι όμοιο με ένα πίνακα της μορφής

$$\text{diag}(1, 1, \dots, -1, -1)$$

Ο αριθμός των -1 ονομάζεται ο **δείκτης** του εσωτερικού γινομένου είναι αναλλοίωτος.

$H(M, g)$ θα ονομάζεται ημιρημάνια πολλαπλότητα

Σε όλα τα υπόλοιπα θα συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο g_p και $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Μια ημιρημάνια πολλαπλότητα θα είναι δηλαδή μια συνήθης πολλαπλότητα Ρημαν της οποίας το εσωτερικό δεν ικανοποιεί της σχέση

$$g_p(X, X) = 0 \text{ ακριβώς όταν } X = 0.$$

είναι επιτρεπτές ως εκ τούτου και αρνητικές τιμές $g_p(X, X) < 0$.

Το πρώτο παράδειγμα μιας τέτοιας πολλαπλότητας είναι τα επίπεδα $\mathbb{R}_\nu^n = (\mathbb{R}^n, g)$ όπου

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_{n-\nu-1} y_{n-\nu-1} - x_{\nu-1} y_{\nu-1} - \cdots - x_n y_n$$

Μια ημιρημάνια πολλαπλότητα με $\nu = 1$ ονομάζεται και **πολλαπλότητα Lorentz**. Αυτές είναι που θα μας απασχολήσουν σε όλη την εργασία.

Σε ένα $p \in M$ έχουμε ότι $T_p M \cong \mathbb{R}_\nu^n$ και έτσι όλα τα $X \in T_p M$ μπορούν να διαμεριστούν:

- Αν $g_p(X, X) = 0$ τότε το X θα λέγεται **μηδενικό ή φωτοειδές**.
- Αν $g_p(X, X) < 0$ τότε το X θα λέγεται **χρονοειδές**.
- Αν $g_p(X, X) > 0$ τότε το X θα λέγεται **χωροειδές**.

Παρόμοια με την περίπτωση του χώρου Minkowski, μια **λεία** καμπύλη $\gamma[a, b] \rightarrow M$ λέγεται μηδενική, χρονοειδής ή χωροειδής όταν για κάθε $t \in [a, b]$ το $\gamma'(t)$ είναι μηδενικό, χρονοειδές ή χωροειδές.

Εν συνεχεία θα επαναλάβουμε σύντομα τις σημαντικότερες προτάσεις που έχουμε από την θεωρία των ρημάνιων πολλαπλοτήτων και οι οποίες μεταφέρουμε αυτούσιες στην ημιρημάνια γεωμετρία.

Αν λοιπόν M είναι μια ημιρημάνια πολλαπλότητα, τότε μπορούμε να έχουμε μια μοναδική **συνοχή**

$$D : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

που να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες (Θα συμβολίζουμε $D(V, W)$ ως $D_V W$)

1. Η D να είναι τανυστική ως προς την πρώτη μεταβλητή ενώ να είναι $\mathbb{R}$ -γραμμική και Leibniz ως προς την δεύτερη. Δηλαδή, για κάθε $V_1, V_2, W, V \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in \mathcal{F}(M)^2$ να έχουμε:

$$\bullet D_{fV_1+V_2} W = f D_{V_1} W + D_{V_2} W$$

²Θυμίζουμε ότι $\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ διαφορίσιμη} \}$

- $D_V(fW + W) = V(f)W + fD_VW$
- 2. $[V, W] = D_VW - D_WV$
- 3. $X(\langle V, W \rangle) = \langle D_XV, W \rangle + \langle V, D_XW \rangle$

Αν τώρα $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ είναι ένα σύστημα χαρτών τότε τοπικά για την συνοχή έχουμε ότι:

$$D_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

Με Γ_{ij}^k να είναι τα γνωστά σύμβολα του Christoffel. Έτσι

$$D_{\partial_i}(\sum_j \partial_j) = \sum_k \left\{ \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W^j \right\}$$

Εν συνεχεία ορίζουμε το ρυθμό μεταβολής ενός διανυσματικού πεδίου επί μιας καμπύλης

$$D_t : \mathcal{X}(\alpha) \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha)$$

όπου $\alpha : I \longrightarrow M$ μια καμπύλη και $\mathcal{X}(\alpha)$ να είναι το σύνολο των διανυσματικών πεδίων που ορίζονται επί της α να είναι η μοναδική τέτοια απεικόνιση για την οποία

1. $D_t(Z_1 + Z_2) = D_t(Z_1) + D_t(Z_2)$
2. $D_t(fZ) = f'D_t(Z)$
3. $D_t(V_{\alpha(t)}) = D_{\alpha'(t)}V$ για κάθε $V \in \mathcal{X}(M)$
4. $\frac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle D_tZ_1, Z_2 \rangle + \langle Z_1, D_tZ_2 \rangle$

Όταν $Z = \alpha'$ η ταχύτητα της καμπύλης τότε το $D_tZ = \alpha''$ ορίζουμε να είναι η **επιτάχυνση** της καμπύλης. Αν $D_tZ = 0$ τότε λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο **μεταφέρεται παράλληλα** κατά μήκος της καμπύλης α . Σε τοπικές συντεταγμένες ο ρυθμός μεταβολής ενός πεδίου είναι:

$$D_t(Z) = \sum_k \left\{ \frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha) Z^j \right\} \partial_k$$

Μια καμπύλη η οποία $\gamma'' = 0$ θα ονομάζεται **γεωδαισιακή**. Δεδομένου ενός $p \in M$ και ενός $V \in T_pM$ μπορούμε πάντοτε να βρούμε μια μέγιστη γεωδαισιακή που ξεκινάει από το p έχοντας ως αρχικό διάνυσμα ταχύτητας το V . Αυτό συμβαίνει διότι η ύπαρξη μιας τέτοιας γεωδαισιακής ισοδυναμεί με την λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha) Z^j = 0 \text{ για } k = 1, \dots, n$$

με τις παραπάνω αρχικές συνθήκες. Μάλιστα η λύση είναι λεία και εξαρτάται με λείο τρόπο από τις αρχικές συνθήκες.

Για τις γεωδαισιακές ισχύει επιπλέον το εξής: Αν TM είναι η εφαπτόμενη δέσμη της M και $\pi : TM \longrightarrow M$ η προβολή της δέσμης (δηλαδή αν $v \in T_p M$ τότε $\pi(v) = p$), τότε υπάρχει ένα διανυσματικό πεδίο G της TM του οποίου οι ολοκληρωτικές καμπύλες προβάλλονται μέσω της π στις γεωδαισιακές της M και αντιστρόφως, αν γ είναι μια γεωδαισιακή τότε η γ' είναι ολοκληρωτική καμπύλη του G .³

Για κάθε $p \in M$ μπορούμε να ορίσουμε τον **εκθετικό** χάρτη

$$\exp_p : T_p M \longrightarrow M$$

που ορίζεται από τον κανόνα $T_p \ni u \rightarrow \gamma_u(1)$ όπου γ_u είναι αυτή η (μοναδική) γεωδαισιακή που εκκινεί από το p με αρχική ταχύτητα u . Στην πραγματικότητα η $\exp_p$ δεν μπορεί να ορισθεί σε ολόκληρο το $T_p M$. Ορίζουμε λοιπόν

$$D_p = \{u \in T_p M : \text{η } \gamma_u \text{ ορίζεται στο } 1.\}$$

Η εικόνα μέσω της $\exp_p$ μιας αστερόμορφης περιοχής του $0 \in T_p M$ είναι αμφιδιαφορική με μια περιοχή του p η οποία και ονομάζεται **κανονική περιοχή** του p . Στην περιοχή αυτή μπορούμε να βρούμε ένα συστημά συντεταγμένων, τις **κανονικές συντεταγμένες**, στις οποίες $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ και η $g_{ij}(p)$ έχει την μορφή $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$. Επιπλέον για κάθε q στην κανονική περιοχή υπάρχει γεωδαισιακή που διέρχεται τόσο από το p όσο και από το q και που δεν είναι άλλη από την εικόνα μέσω της $\exp_p$ του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει στο $\mathbb{R}_v^n$ το p με το $\exp_p^{-1}(q)$. Για αυτό το λόγο και η γεωδαισιακή ονομάζεται **ακτινική**.

Για την απεικόνιση $\exp_p$ πολύ σημαντικό είναι το λεγόμενο λήμμα του Gauss σύμφωνα με το οποίο αν $p \in M$, $T_p M \ni x \neq 0$ και $u_x, w_x \in T_x(T_p M)$ με $u = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$\langle d\exp_p(u_x), d\exp_p(w_x) \rangle = \langle u_x, w_x \rangle.$$

Από εδώ και πέρα θα δώσουμε απόδειξη σε όλα όσα λέμε. Το πρώτο πράγμα που θα δείξουμε είναι η ύπαρξη κυρτών κανονικών περιοχών και η οποία θα ισχύει φυσικά και στην περίπτωση των ρημάνιων πολλαπλοτήτων.

Ορισμός 7. Ένα σύνολο C σε μια ημιρημάννια πολλαπλότητα θα λέγεται **κυρτή κανονική περιοχή** όταν είναι κανονική περιοχή για κάθε ένα από τα σημεία του, δηλαδή όταν για κάθε $p \in C$ υπάρχει ένα $\mathcal{U}_p \subset T_p M$ ανοιχτό και αμφιδιαφορικό μέσω της $\exp_p$ με το C .

³ Αν $v \in TM$ τότε G_v είναι η αρχική ταχύτητα της καμπύλης $s \rightarrow \gamma'_v(s)$ στην TM .

Ισοδύναμα, ένα σύνολο είναι κυρτό κανονικό ακριβώς όταν κάθε δυο σημεία του ενώνονται με μια γεωδαισιακή καμπύλη που στο εν τω μεταξύ παραμένει πλήρως εντός του συνόλου. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι κάθε σημείο σε μια πολλαπλότητα έχει μια κυρτή κανονική περιοχή. Ξεκινάμε με ένα λήμμα.

Λήμμα 3. Έστω $E : TM \longrightarrow M \times M$ με $E(u) = (\pi(u), \exp_{\pi(u)}(u))$. Η E απεικονίζει αμφιδιαφορικά μια περιοχή του $0 \in T_p M$ σε μια περιοχή του (p, p) στην $M \times M$.

Απόδειξη. Κατ' αρχην ισχυριζόμαστε ότι το πεδίο ορισμού της απεικόνισης $\exp_p$ (το D_p) είναι ανοιχτό. Πράγματι, από όσα είπαμε νωρίτερα, η απεικόνιση

$$\psi(u, s) : TM \times \mathbb{R} \longrightarrow TM \text{ με } \psi(u, s) = \gamma'_u(s)$$

είναι η ροή του πεδίου G . Επειδή η ροή αυτή είναι η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, το πεδίο ορισμού της (έστω $\mathcal{U}$) είναι ανοιχτό (αυτό ισχύει από σχετικό θεώρημα των διαφορικών εξισώσεων). Το ίδιο πεδίο ορισμού έχει και η $\pi \circ \psi : TM \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ (π εδώ είναι η προβολή όπως ορίστηκε παραπάνω). Έστω

$$D = \bigcup_{p \in M} D_p$$

Επειδή τώρα το D είναι ταυτόσιμο με το $\mathcal{U} \cap (TM \times \{1\})$ είναι ανοιχτό στο TM ως τομή ανοιχτού με υπόχωρο. Ομοίως τα σύνολα $D_p = D \cap T_p M$ είναι επίσης ανοιχτά.

Εν συνεχεία παρατηρούμε ότι για $p \in M$ η $\exp_p$ είναι μη ιδιάζουσα στο σημείο $0 \in T_p M$ διότι για $u \in T_0(T_p M)$ ισχύει ότι $\exp_p(u) = p$. Θα δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για την E . Κατα πρώτον, το πεδίο ορισμού της E είναι D (εύκολο), είναι δηλαδή ανοιχτό και $0 \in D \subset TM$. Έστω τώρα ότι $dE(u) = 0$ για $u \in T_0(TM)$, θα δείξουμε ότι $u = 0$. Έχουμε ότι $p_1 \circ E = \pi$ όπου p_1 είναι η προβολή στην πρώτη συνιστώσα. Έπεται ότι:

$$d\pi(u) = dp_1(dE(u)) = 0.$$

Το $d\pi(u) = 0$ σημαίνει ότι η παράγωγος της π στην κατεύθυνση u είναι σταθερή και άρα ίση με $\pi(0) = p$. Συνεπώς το u εφάπτεται στο $T_p M$, δηλαδή $u \in T_0(T_p M)$ και

$$\exp_p(u) = dp_2(dE(u)) = 0.$$

Έπεται ότι (από την στιγμή που η $\exp_p$ είναι μη ιδιάζουσα στο 0) ότι $u = 0$. $\square$

Πρόταση 11. Κάθε ένα $p \in M$ διαθέτει μια κυρτή κανονική περιοχή.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $p \in M$ τότε υπάρχει κυρτή περιοχή $\mathcal{U}$ του p η οποία να είναι αμφιδιαφορική εικόνα ενός αστερόμορφου $W_p \subset T_p M$.

Ας πάρουμε $(\mathcal{V}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ μια κανονική (όχι απαραίτητα κυρτή) περιοχή του p . Για $\delta > 0$ γράφουμε

$$\mathcal{V}(\delta) = \left\{ r \in \mathcal{V} : N(r) = (x^1(r))^2 + \dots + (x^n(r))^2 < \delta \right\}$$

Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει μια περιοχή W του $O \in T_p M$ η οποία να είναι αμφιδιαφορική με το $\mathcal{V}(\delta_0) \times \mathcal{V}(\delta_0)$ για κάποιο δ_0 . Ορίζουμε $W_p = W \cap T_M$ και παρατηρούμε ότι από την κατασκευή της E το W_p είναι αμφιδιαφορικό με το $\mathcal{V}(\delta_0)$ μέσω της $\exp_p|_{W_p}$. Ορίζουμε λοιπόν

$$\mathcal{U} = \mathcal{V}(\delta_0)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι το W_p είναι αστερόμορφο. Πραγματι, έστω $q \in \mathcal{U}$ με $q \neq p$ και $E^{-1}(p, q) = u$ τότε το $u \in W_p$ και η καμπύλη $\sigma = \gamma_u|_{[0,1]}$ είναι μια γεωδαισιακή από το p στο q . Το μόνο που μας μένει να δείξουμε τώρα είναι ότι η σ παραμένει συνεχώς μέσα στο $\mathcal{U} = \mathcal{V}(\delta_0)$. Ισοδύναμα επιδιώκουμε να έχουμε $N(\sigma(t)) < \delta_0$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι η σ διαφεύγει του $\mathcal{U}$. Σε μια τέτοια περίπτωση η συνάρτηση $N(\sigma(\cdot))$ βρίσκει ένα μέγιστο σε κάποια τιμή $t_0 \in (0, 1)$. Τότε έχουμε:

$$\frac{d^2}{dt^2} N \circ \sigma = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i (x^i \circ \sigma(t))^2 \right) = 2 \sum \left\{ \left(\frac{dx^i \circ \sigma}{dt} \right)^2 + x^i \circ \sigma \frac{d^2 x^i \circ \sigma}{dt^2} \right\}.$$

Εφόσον όμως η σ είναι γεωδαισιακή, εφαρμόζουμε την εξίσωση της γεωδαισιακής και πέρνουμε:

$$\frac{d^2}{dt^2} N \circ \sigma = 2 \sum_{i,j} \left\{ \delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k x^k \circ \sigma \right\} \frac{x^i \circ \sigma}{dt} \frac{x^j \circ \sigma}{dt} \quad (\text{όλες οι παράγωγοι για } t = t_0)$$

Το δεξί μέλος όμως της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να το δούμε ως την τιμή

$$A(\sigma^i(t), \sigma^j(t))$$

όπου A είναι ένας (0,2)-τανυστής με στοιχεία (με βάση την κανονική στην περιοχή που δουλεύουμε)

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k x^k.$$

Επειδή $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ (μιας και βρισκόμαστε σε κανονικές συντεταγμένες) ο A είναι θετικά ορισμένος στο σημείο p δηλαδή

$$A(u, w) > 0 \text{ για κάθε } u, w \in T_p M.$$

Το ίδιο θα ισχύει συνεπώς και για μια μικρή περιοχή γύρω από το p . Μειώνοντας όσο χρειαστεί το δ_0 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $\mathcal{U}$ βρίσκεται εξ ολοκλήρου εντός αυτής της περιοχής. Συνεπώς

$$\frac{d^2}{dt^2} N(\sigma(t)) \Big|_{t=t_0} = 2A(\sigma'(t_0), \sigma'(t_0)) > 0$$

Άτοπο διότι υποθέσαμε πως το t_0 είναι μέγιστο. $\square$

Μέχρις αυτό το σημείο όλα όσα είδαμε είναι ταυτόσημα και στις Riemann και στις Semi-Riemann πολλαπλότητες. Η διαφοροποίηση ξεκινά από την στιγμή που θελήσουμε να μιλήσουμε για έννοιες όπως η γεωδαισιακή πληρότητα. Από εδώ και πέρα θα μελετάμε τις αποκλειστικές ιδιότητες των ημιημάντων πολλαπλοτήτων και ιδιαίτερα των Lorentz (εκείνων που, θυμίζουμε, έχουν δείκτη $\nu = 1$).

Κάποια εισαγωγικά θέματα πρώτα. Έστω $\tilde{q} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ η τετραγωνική μορφή:

$$T_p M \ni v \mapsto \langle v, v \rangle.$$

Όταν έχει νόημα θα γράφουμε επίσης $q : M \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση για την οποία ισχύει $q = \tilde{Q} \circ \exp_p^{-1}$. Αν $\tilde{P}$ είναι το διανυσματικό πεδίο θέσης στον $T_p M$ ⁴ Ορίζουμε ομοίως $P = \exp_p \circ \tilde{P}$ να είναι το διανυσματικό πεδίο θέσης στην M .

Από το γεγονός ότι $\text{grad} \tilde{q} = 2\tilde{P}$ ⁵ και χρησιμοποιώντας το λήμμα του Gauss μπορούμε αμέσως να εξάγουμε ότι $\text{grad} q = 2P$.

Το επόμενο λήμμα είναι χρήσιμο για την Ημιημάννια περίπτωση. Πρώτα δίνουμε έναν ορισμό.

⁴Υπενθυμίζουμε ότι στον $\mathbb{R}_\nu^n$ το διανυσματικό πεδίο θέσης μπορεί να ορισθεί ως εξής: Για $s \in \mathbb{R}_\nu^n$ με $s = (x^1, \dots, x^n)$ έχουμε

$$\tilde{P}_s = \sum_k x^k \partial_k.$$

⁵Θυμίζουμε ότι για $f \in \mathcal{F}(M)$ το $\text{grad} f$ είναι το πεδίο για το οποίο

$$\langle \text{grad} f, X \rangle = X(f)$$

για κάθε $X \in \mathcal{X}(M)$. Στην περίπτωση του $\mathbb{R}_\nu^n$ τώρα

$$q(\cdot) = \sum_i g_{ii} x^i(\cdot)$$

και για $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}_\nu^n)$ $\mu = (X^1, \dots, X^n)$. Άρα

$$X(q) = \sum_i X^i \frac{\partial q}{\partial x^i} = \sum_i X^i 2x^i$$

άρα $\text{grad} q = 2(x^1, \dots, x^n) = 2P$.

Ορισμός 8. Μια καμπύλη α στην (M, g) η οποία είναι κατα τμήματα λεία θα λέγεται *χρονοειδής* αν είναι χρονοεοδής στα τμήματα $[t_i, t_{i+1}]$ στα οποία και είναι λεία και επιπλέον για κάθε σημείο t_i (στο οποίο δεν είναι διαφορίσιμη) ισχύει ότι

$$\langle \alpha'^+(t_i), \alpha'^-(t_i) \rangle < 0.$$

Λήμμα 4. Έστω (M, g) πολλαπλοτητα Lorentz και $p \in M$. Έστω $\beta : [0, b] \rightarrow T_p M$ κατα τμήματα λεία καμπύλη στο $T_p M$ που εκκινεί από το σημείο O και είναι τέτοια ώστε η $\exp_p \circ \beta = \alpha$ να είναι χρονοειδής. Τότε η β βρίσκεται σε ένα αποκλειστικά κώνο φωτός του $T_p M$ ⁶.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η β είναι λεία, τότε το $\beta'(0)$ είναι αναγκαστικά χρονοειδές. Πράγματι, αυτό είναι συνέπεια του λήμματος Gauss διότι το $\beta'(0) \in T_O(T_p M)$ είναι με τετριμμένο τρόπο συγγραμικό με το $O \in T_p M$ και άρα

$$\langle \beta'(0), \beta'(0) \rangle = \langle \exp_p(\beta'(0)), \exp_p(\beta'(0)) \rangle = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle < 0$$

Επειδή τώρα κάθε κώνος φωτός είναι ανοιχτό και κυρτό σύνολο υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε αν $0 < t < \epsilon$ τότε το $\beta'(t)$ είναι στον ίδιο κώνο φωτός με το $\beta'(0)$.

Σε κάθε ένα σημείο τώρα της καμπύλης β το $\tilde{P}$ είναι φυσικά χρονοειδές και άρα για ένα αρχικό διάστημα τα $\beta'(t)$ και $\tilde{P}_{\beta(t)}$ βρίσκονται στον ίδιο κώνο φωτός, δηλαδή $\langle \beta', \tilde{P} \rangle < 0$. Επιπλέον από τον ορισμό του *grad* έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt}(\tilde{q} \circ \beta) = 2\langle \beta', \tilde{P} \rangle < 0.$$

Από το λήμμα του Gauss έχουμε τώρα άμεσα ότι τα $\langle \alpha', P \rangle = \langle \beta', \tilde{P} \rangle$ και άρα για ένα αρχικό διάστημα τα $\langle \alpha', P \rangle$ και $\frac{d}{dt}(\tilde{q} \circ \beta)$ θα είναι αρνητικά. Αρνητικός ρυθμός μεταβολής όμως του $(\tilde{q} \circ \beta)$ σημαίνει πως αυτό θα μειώνεται συνεχώς (και αφού ξεκίνησε όντας ήδη αρνητικός) δεν πρόκυτει ποτέ να έχουμε $(\tilde{q} \circ \beta) = 0$ και άρα η β δεν θα μπορέσει ποτέ να εξέλθει του κώνου στο οποίο βρίσκεται.

Τα παραπάνω επιχειρήματα επεκτείνονται εύκολα και στην περίπτωση των κατά τμήματα λείων καμπύλων. $\square$

Θα μιλήσουμε τώρα για μήκος καμπύλης σε μια ημιρημάννια πολλαπλότητα. Η κατάσταση εδώ είναι ανάλογη με την ρημάννια περίπτωση. Ο ορισμός του μήκους είναι ο ίδιος αλλά η γεωδαισιακή ως καμπύλη ελάχιστου μήκους ανάμεσα σε όλες τις καμπύλες είναι πλέον η καμπύλη *μέγιστου* μήκους ανάμεσα σε όλες τις χρονοειδής καμπύλες.

⁶Η κώνοι φωτός ορίζονται όπως ακριβώς κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο με τον χώρο Minkowski

Ορισμός 9. Έστω $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ μια κατα τμήματα λεία χρονοειδής καμπύλη, τότε ορίζουμε το **μήκος** της να είναι

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{-\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle} ds$$

Πρόταση 12. Έστω $\mathcal{U}$ μια κανονική περιοχή του σημείου p . Από όλες τις χρονοειδής καμπύλες του $\mathcal{U}$ που ενώνουν το p και το q αυτή με το μεγαλύτερο μήκος είναι η ακτική γεωδαισιακή.

Απόδειξη. Αν α είναι τυχούσα χρονοειδή καμπύλη του $\mathcal{U}$ που ενώνει το p και το q τότε από το προηγούμενο λήμμα η καμπύλη $\beta = \exp_p^{-1}(\alpha)$ βρίσκεται σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα σε ένα αιτιακό κώνο. Αν ορίσουμε $r = \sqrt{-q}$ τότε κώνος αυτός είναι εκείνος στον οποίο κοιτάει το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $U = \frac{P}{r}$. Αν γράψουμε

$$\alpha' = -\langle \alpha', U \rangle + N$$

για κάποιο χωροειδές διανυσματικό πεδίο N κατα μήκος της α και κάθετο στο U τότε

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = [\langle \alpha', U \rangle^2 - \langle N, N \rangle^2]^{\frac{1}{2}} \leq |\langle \alpha', U \rangle|$$

Από όσα σημειώσαμε παραπάνω έχουμε ότι

$$\text{grad} r = \text{grad} \sqrt{q} = \frac{-1}{2\sqrt{-q}} \text{grad} q = \frac{P}{r} = -U$$

και επειδή από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι τα $\langle \beta, \tilde{P} \rangle$ και $\langle \alpha', U \rangle$ είναι και τα δύο αρνητικά παίρνουμε

$$|\langle \alpha', U \rangle| = -\langle \alpha', U \rangle = \frac{dr \circ \alpha}{dt}$$

και συνεπώς,

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{-\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle} ds \leq r(p) = L(\sigma)$$

όπου σ η γεωδαισιακή που ενώνει τα δύο σημεία. □

Ορισμός 10. Μια πολλαπλότητα Lorentz ονομάζεται χρονικά κατευθυνόμενη όταν αποδέχεται ένα $X \in \mathcal{X}(M)$ τέτοιο ώστε για κάθε $p \in M$ το X_p να είναι χρονοειδές.

Η ύπαρξη ενός τέτοιου πεδίου μας διασφαλίζει ότι μπορούμε να ορίσουμε ένα κώνο φωτός σε κάθε σημείο που να είναι θετικός. Από τώρα και στο εξής όλες οι πολλαπλότητες που θα θεωρούμε θα είναι χρονικά προσανατολισμένες.

Για τα επόμενα η α θα είναι μια καμπύλη ορισμένη και λεία σε ένα ανοιχτό (a, b) έτσι ώστε η παράγωγος να ορίζεται στα άκρα.

Ορισμός 11. Μια **μεταβολή** της καμπύλης καμπύλης $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ είναι μια απεικόνιση δύο παραμέτρων

$$x : [a, b] \times (-\delta, +\delta) \longrightarrow M$$

τέτοια ώστε για κάθε $u \in [a, b]$ να ισχύει ότι $\alpha(u) = x(u, 0)$. Το διανυσματικό πεδίο $V(u) = x_v(u, 0)$ θα ονομάζεται **πεδίο μεταβολής**.

Λήμμα 5. Έστω α μια αιτιακή καμπύλη ⁷, x μια μεταβολή της και V το αντίστοιχο πεδίο μεταβολής. Αν $\langle D_t V, \alpha' \rangle < 0$ τότε υπάρχει επαρκώς μικρό v ώστε η καμπύλη $x(\cdot, v)$ να είναι χρονοειδής.

Απόδειξη. Επειδή η α είναι αιτιακή έχουμε ότι για $u = 0$

$$\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle = \langle x_u, x_u \rangle(u, 0) \leq 0 \text{ για κάθε } u \in [0, 1].$$

Η παράγωγος του $\langle x_u, x_u \rangle$ είναι

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle x_u, x_u \rangle = \langle D_v x_u, x_u \rangle$$

και για $v = 0$ είναι ίση με $\langle D_v V, \alpha' \rangle < 0$ από την υπόθεση. Συνεπώς υπάρχει $v > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\langle x_u, x_u \rangle(u, v) \leq 0$ για κάθε $u \in [0, 1]$ και άρα η $x(\cdot, v)$ να είναι χρονοειδής. $\square$

Πρόταση 13. Αν M είναι πολλαπλότητα Lorentz και α είναι μια αιτιακή καμπύλη η οποία ενώνει τα p και q ($p, q \in M$) η οποία δεν είναι μηδενική γεωδαισιακή για καμία επαναπαραμέτρηση τότε υπάρχει χρονοειδής καμπύλη από το p στο q η οποία να βρίσκεται οσοδήποτε κοντά στην α .

Απόδειξη. Έστω ότι το πεδίο ορισμού της α είναι το $[0, 1]$. Θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

1) Το $\alpha'(0)$ ή το $\alpha'(1)$ να είναι χρονοειδή. Ας θεωρήσουμε ότι το $\alpha'(1)$ είναι χρονοειδές. Παίρνουμε W να είναι η παράλληλη μεταφορά του $\alpha'(1)$ κατα μήκος της α . Το $W_{\alpha(t)}$ βρίσκεται πάντοτε εντός του ίδιο αιτιακού κώνου. Πράγματι, από τις σχέσεις

$$\langle W_{\alpha(1)}, W_{\alpha(1)} \rangle = \langle \alpha'(1), \alpha'(1) \rangle < 0 \text{ και}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W_{\alpha(t)}, W_{\alpha(t)} \rangle = 2 \langle D_t W_{\alpha(t)}, W_{\alpha(t)} \rangle = 0$$

συνάγουμε ότι το $\langle W_{\alpha(t)}, W_{\alpha(t)} \rangle$ δεν γίνεται ποτέ μηδέν και συνεπώς δεν εξέρχεται ποτέ του αιτιακού κώνου στον οποίο βρίσκεται. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για το α' από την υπόθεση. Συνεπώς έχουμε ότι

$$\langle W, \alpha' \rangle < 0.$$

⁷Η α είναι **αιτιακή** αν για κάθε t το $\alpha'(t)$ είναι μη-χωροειδές (είναι δηλαδή είτε χρονοειδές είτε μηδενικό)

Επειδή τώρα το πεδίο α' μεταβάλλεται συνεχώς έχουμε επιπλέον πως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle < \delta \text{ στο διάστημα } [1 - \delta, 1)$$

Έστω τώρα f να είναι μια λεία συνάρτηση στο $[0, 1]$ τέτοια ώστε $f(0) = f(1) = 0$ και $f' > 0$ στο $[0, 1 - \delta]$. Ορίζουμε διανυσματικό πεδίο $v = fW$. Τότε

$$\langle D_t V, \alpha' \rangle = f' \langle W, \alpha' \rangle < 0 \text{ στο } [0, 1 - \delta].$$

έστω επίσης $x : [0, 1] \times (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$ μια μεταβολή της α για την οποία

$$x(0, v) = x(0, 0) = \alpha(0)$$

$$x(1, v) = x(1, 0) = \alpha(1)$$

για κάθε $v \in (-\epsilon, +\epsilon)$ (δηλαδή η μεταβολή έχει σταθερά άκρα) και για την οποία το πεδίο μεταβολής είναι το V (Το ότι ισχύει αυτό είναι προφανές αν σκεφτούμε τις παραπάνω συνθήκες σαν αρχικές συνθήκες μιας διαφορικής εξίσωσης) Το ζητούμενο τώρα προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο λήμμα.

2) Η α είναι μια λεία μηδενική καμπύλη: Πρώτα θα έχουμε ότι το α'' δεν μπορεί να είναι ταυτοτικά μηδενικό (διαφορετικά θα ήταν η καμπύλη γεωδαισιακή, πράγμα αδύνατο από την υπόθεση). Έστω τώρα W ένα χρονοειδές διανυσματικό πεδίο πάνω στην καμπύλη α που να βρίσκεται συνεχώς στον ίδιο αιτιακό κώνο με το α' , δηλαδή $\langle W, \alpha' \rangle < 0$. Ορίζουμε επίσης διανυσματικό πεδίο

$$v = f_1 W + f_2 \alpha''$$

με τις f_1 και f_2 να είναι συναρτήσεις που μηδενίζονται στα άκρα του $[0, 1]$ και τις οποίες επιδιώκουμε να ορίσουμε με τέτοιο τρόπο ώστε $\langle D_t V, \alpha' \rangle < 0$.

Αφού $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ με διαδοχικές παραγωγίσεις συνεπάγεται ότι $\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$ και ότι $\langle \alpha''', \alpha' \rangle + \langle \alpha'', \alpha'' \rangle = 0$. Συνεπώς

$$\langle D_t V, \alpha' \rangle = \langle f_1 W + f_2 \alpha'', \alpha' \rangle = f_1' \langle W, \alpha' \rangle - f_2 \langle \alpha'', \alpha'' \rangle$$

Επειδή το $\langle \alpha'', \alpha'' \rangle$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν το ίδιο θα ισχύει και για την συνάρτηση

$$h = \frac{\langle \alpha'', \alpha'' \rangle}{\langle W, \alpha' \rangle}.$$

Μπορούμε να βρούμε ακόμα μια f_2 που να μηδενίζεται στα άκρα και να ισχύει ότι

$$\int_0^1 f_2 h = -1.$$

και να ορίσουμε επίσης και

$$f_1 = \int_0^t (f_2 h + 1)$$

Η f_2 μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος και

$$f'_1 = f_2 h + 1 > f_2 h = f_2 \frac{\langle \alpha'', \alpha'' \rangle}{\langle W, \alpha' \rangle}$$

Συνεπώς για αυτές τις f_1 και f_2 ισχύει ότι $\langle D_t V, \alpha' \rangle < 0$ και το ζητούμε είναι άμεση απόρροια του προηγούμενου λήμματος.

Κάθε άλλη περίπτωση μπορεί να αναχθεί σε μια από τις δύο αυτές περιπτώσεις. $\square$

2.2 Αιτιακές δομές

Θα επεκτείνουμε σε τυχούσα πολλαπλότητα όσα είπαμε στο πρώτο κεφάλαιο για αιτιακές δομές στον χώρο Minkowski.

Ορισμός 12. Έστω M μια ημιρημάννια πολλαπλότητα και γ μια διαφορίσιμη καμπύλη σε αυτή. Τότε:

1. Αν το γ' είναι παντού χρονοειδές τότε ονομάζεται **χρονοειδής**.
2. Αν το γ' είναι παντού χωροειδές τότε ονομάζεται **χωροειδής**.
3. Αν το γ' είναι παντού αιτιακό τότε ονομάζεται **αιτιακή**.

Αν επιπλέον το γ' είναι παντού μελλοντικό τότε ονομάζουμε την καμπύλη **μελλοντικά κατευθυνόμενη**. Ανάλογα έχουμε τις **παρελθοντικά κατευθυνόμενες** καμπύλες.

Ορισμός 13. Έστω (M, g) μια ημιρημάννια πολλαπλότητα χρονικά προσανατολισιμη. Αν $p, q \in M$ τότε θα γράφουμε:

- $p \ll q$ όταν υπάρχει μια μελλοντικά κατευθυνόμενη χρονοειδής καμπύλη της M που εκκινεί στο p και τερματίζει στο q .
- $p < q$ όταν υπάρχει μια μελλοντική κατευθυνόμενη αιτιακή καμπύλη της M που εκκινεί στο p και τερματίζει στο q .

Εντελώς ανάλογα ορίζουμε και

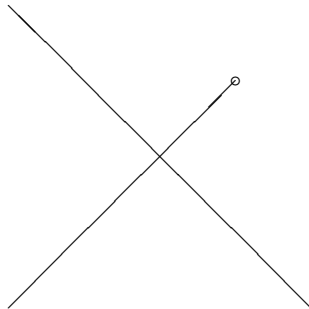
Ορισμός 14. Έστω (M, g) μια ημιρημάννια πολλαπλότητα χρονικά προσανατολισμένη. Αν $p \in M$ τότε:

- $I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}$ θα είναι το **χρονολογικό μέλλον** του p .
- $J^+(p) = \{q \in M : p < q\}$ θα είναι το **αιτιακό μέλλον** του p .
- $E^+(p) = J^+(p) \setminus I^+(p)$ θα είναι ο **μελλοντικός χωρισμός** του p .

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να γενικευτεί για να εκφράσει και άλλες καταστάσεις. Κατ' αρχήν ορίζουμε το **χρονολογικό παρελθόν** του p να είναι το $I^-(p) = \{q \in M : q \ll p\}$ και παρόμοια το **αιτιακό παρελθόν** $J^-(p)$ και τον **παρελθοντικό χωρισμό** $E^-(p)$.

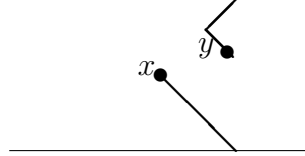
Ακόμα $I^+(A) = \bigcup_{p \in A} I^+(p)$ το χρονολογικό μέλλον του συνόλου A και αντίστοιχα για όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Τελειώνοντας με αυτούς τους προκαταρκτικούς ορισμούς να πούμε ότι αν $U \subset M$ ανοιχτό τότε για $p \in U$ θα γράφουμε $I^+(p, U)$ και θα εννοούμε το $I^+(p)$ στην πολλαπλότητα $U, g|_U$ και όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις να είναι παρόμοιες. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι $I^+(p, U) \subseteq I^+(p) \cap U$ με την ισότητα να μην είναι πάντα εξασφαλισμένη.

Θα δώσουμε τώρα κάποια παραδείγματα για να γίνουν πιο σαφή τα παραπάνω. Πρώτα παρατηρούμε ότι ο χώρος Minkowski, ειδομένος ως πολλαπλότητα είναι μια ημιρημάννια πολλαπλότητα με το χρονολογικό μέλλον, χρονολογικό μέλλον κτλ να είναι όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο. Όταν όμως είμαστε σε μια τυχούσα πολλαπλότητα τότε τα πράγματα είναι πιο ενδιαφέροντα. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα χώρο Minkowski του οποίου έχουμε αφαιρέσει ένα σημείο.



Σχήμα 1

Το αιτιακό μέλλον σε αυτήν την περίπτωση διακόπτεται απότομα στο σημείο στο οποίο λείπει. Το επόμενο παράδειγμα είναι ο λεγόμενος κύλινδρος Lorentz $(S^1 \times \mathbb{R}, g)$ ο οποίος δημιουργείται όταν πάρουμε μια λουρίδα του χώρου Minkowski και ενώσουμε τα άκρα της αφήνοντας ως μετρική την επαγόμενη.



Σχήμα 2

Στον κύλινδρο αυτό ισχύει (όπως ελπίζουμε να γίνει κατανοητό από το σχήμα) ότι $I^+(p) = J^+(p) = S^1 \times \mathbb{R}$ για κάθε p .

Πρόταση 14. Έστω $x, y, z \in M$ τότε,

1. Αν $x \ll y$ και $y < z$ τότε $x \ll z$.
2. Αν $x < y$ και $y \ll z$ τότε $x \ll z$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από την πρόταση ?? του προηγούμενου κεφαλαίου. $\square$

Άμεση απόρροια της πρότασης αυτής είναι η παρακάτω χρήσιμη σχέση για $A \subset M$

$$I^+(A) = I^+(I^+(A)) = I^+(J^+(A)) = J^+(I^+(A)) \subseteq J^+(J^+(A)) = J^+(A)$$

Η γενική περίπτωση πολλαπλοτήτων με καμπυλότητα είναι αρκετά διαφορετική από την αποπροσανατολιστική απλότητα του επιπέδου Minkowski στο οποίο ισχύει ότι $\overline{I^+(p)} = J^+(p)$ και ότι για κάθε σημείο το $I^+(p)$ μπορεί να "πιαστεί" από μια γεωδαισιακή που εκκινεί από το p . Παρόλα αυτά μπορούμε να έχουμε το επόμενο:

Πρόταση 15. Αν $\mathcal{U}$ είναι μια κυρτή κανονική περιοχή του $p \in M$ τότε:

1. Το $I^+(p, \mathcal{U})$ είναι ανοιχτό
2. $\overline{I^+(p, \mathcal{U})} = J^+(p, \mathcal{U})$
3. $I^+(p, \mathcal{U}) = \{q \in \mathcal{U} : \text{υπάρχει χρονοειδής γεωδαισιακή της } (\mathcal{U}, g|_{\mathcal{U}}) \text{ που ενώνει τα } p, q\}$

Απόδειξη. Η πρώτη και η δεύτερη πρόταση ισχύουν προφανώς στην περίπτωση του χώρου Minkowski. Μέσω της απεικόνισης exp μπορούμε να "κατεβάσουμε" την ισχύ τους και στην τυχούσα κυρτή κανονική περιοχή.

Για τον τρίτο ισχυρισμό πρέπει να πούμε κάποια πράγματα παραπάνω. Κατ' αρχήν ένα σημείο που ανήκει στο αριστερό σκέλος ανήκει φυσικά και στο δεξιό. Άρκει λοιπόν να δούμε πως προκύπτει η άλλη φορά. Έστω ένα q που συνδέεται μέσω μιας χρονοειδούς καμπύλης λ με το p . Από το θεώρημα ?? υπάρχει μια καμπύλη $\tilde{\lambda}$ ώστε $\lambda = exp_p(\tilde{\lambda})$ και η οποία είναι χρονοειδής και άρα παραμένει εντός $I^+(O)$. Συνεπώς κάθε σημείο πάνω στην $\tilde{\lambda}$ μπορεί να συνδεθεί με το O μέσω μιας ακτινικής καμπύλης η οποία προβάλλεται μέσω της exp_p σε μια γεωδαισιακή. $\square$

Πρόταση 16. *Αν $p, q \in M$ με $p \ll q$ τότε υπάρχουν ανοιχτές περιοχές U, V των p, q αντίστοιχα τέτοιες ώστε $p' \ll q'$ για κάθε $p' \in U$ και $q' \in V$.*

Απόδειξη. Παίρνοντας ξένες κανονικές κυρτές περιοχές U_1, V_1 γύρω από τα σημεία αυτά (υπάρχουν από ιδιότητα Hausdorff) και επιλέγουμε $U = I^-(p, U_1)$ και $V = I^+(q, V_1)$. Από τις δύο προηγούμενες προτάσεις έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 17. *Αν $q \in E^+(p)$ τότε κάθε αιτιακή καμπύλη που ενώνει τα p και q πρέπει να είναι μια μηδενική γεωδαισιακή (modulo μια επαναπαραμέτρηση).*

Απόδειξη. Αν γινόταν διαφορετικά τότε από την πρόταση ?? θα είχαμε μια αιτιακή καμπύλη ανάμεσα σε αυτά τα δύο σημεία. $\square$

Πρόταση 18. 1. $J^+(A) \subseteq \overline{I^+(A)}$

$$2. \overline{I^+(A)} = \overline{J^+(A)}$$

$$3. I^+(A) = \text{int} J^+(A)$$

$$4. \partial I^+(A) = J^+(A)$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα την πρώτη σχέση. Η απόδειξη θα είναι για $A = \{p\}$ μιας και μετά από αυτό παίρνοντας ενώσεις θα έχουμε την πρόταση και για τυχόν σύνολο. Έστω $q \in J^+(A)$, θα δείξουμε ότι $q \in \overline{I^+(A)}$. Έστω λοιπόν σ μια αιτιακή καμπύλη που συνδέει τα p και q και $\mathcal{U}$ μια κυρτή κανονική περιοχή του q . Έστω ακόμα και q' ένα ακόμα σημείο της σ μέσα στο $J^-(q, \mathcal{U})$. Συνεπώς $q \in J^+(q', \mathcal{U})$ και άρα από την προηγούμενη πρόταση $q \in \overline{I^+(q', \mathcal{U})}$. Όμως επειδή $q' \in J^+(p)$ έχουμε ότι $I^+(q', \mathcal{U}) \subset I^+(J^+(p))$ και

$$I^+(J^+(p)) = J^+(I^+(p)) \subset I^+(p)$$

άρα και

$$\overline{I^+(q', \mathcal{U})} \subseteq \overline{I^+(p)} \Rightarrow q \in \overline{I^+(p)}.$$

Η δεύτερη σχέση προκύπτει από την πρώτη καθώς και το γεγονός ότι:

$$I^+(A) \subset J^+(A) \Rightarrow \overline{I^+(A)} \subseteq \overline{J^+(A)}$$

Η τρίτη και η τέταρτη προκύπτουν άμεσα από τις δύο πρώτες. $\square$

Ορισμός 15. Ένα $S \subset M$ θα λέγεται *άχρονο* αν $I^+(S) \cap S = \emptyset$ δηλαδή, αν δεν υπάρχουν $p, q \in S$ που να συνδέονται με μια χρονοειδή καμπύλη.

Μέχρι εδώ μελετήσαμε την αιτιακή δομή τοπικά, στην κανονική γειτονιά ενός σημείου. Σε αυτό το επίπεδο τα πράγματα λειτουργούσαν όπως περιπου και στον χώρο Minkowski. Όταν όμως δούμε τη πολλαπλότητα καθολικά τα πράγματα αλλάζουν δραματικά. Σε γενικότερους χώρους υπάρχει εν γένει η δυνατότητα ύπαρξης κλειστών χρονοειδών καμπύλων αλλά για λόγους που έχουν να κάνουν με την ερμηνεία αυτών των δομών στην φυσική, αυτή η συμπεριφορά είναι ανεπιθύμητη (συνεπάγεται ταξίδια στον χρόνο). Γι' αυτό θα μελετήσουμε την αιτιακή δομή των πολλαπλοτήτων Lorentz σε σχέση με αυτή την συμπεριφορά. Συγκεκριμένα θα ορίσουμε μια ιεραρχία αιτιακών δομών με κριτήριο το πόσο μακριά βρίσκονται από την δυνατότητα για ταξίδια στον χρόνο.

Ορισμός 16. Μια πολλαπλότητα Lorentz θα λέμε ότι ικανοποιεί την

1. *χρονολογική συνθήκη* αν δεν εμπεριέχει κλειστές χρονοειδείς καμπύλες
2. *αιτιακή συνθήκη* αν δεν εμπεριέχει κλειστές αιτιακές καμπύλες

Πρόταση 19. Αν η M είναι μια συμπαγής τότε περιέχει τουλάχιστον μια κλειστή χρονοειδή καμπύλη (και άρα δεν ισχύει η χρονολογική συνθήκη)

Απόδειξη. Έστω $\{I^+(p)\}_{p \in M}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα της M . Από συμπαγεία υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα

$$\{I^+(p_1), \dots, I^+(p_n)\}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το $I^+(p_1)$ δεν εμπεριέχεται σε κανένα άλλο στοιχείο του καλύμματος (αν περιεχόταν τότε απλώς το αφαιρούμε από το υποκάλυμμα). Τότε αναγκαστικά $p_1 \in I^+(p_1)$ αφού διαφορετικά $p_1 \in I^+(p_k)$ και άρα $I^+(p_1) \subset I^+(p_k)$. Η σχέση $p_1 \in I^+(p_1)$ σημαίνει αυτό ακριβώς που θέλουμε να δείξουμε, ότι υπάρχει μια κλειστή αιτιακή καμπύλη δηλαδή. $\square$

Είναι σαφές ότι αν η πολλαπλότητα ικανοποιεί την αιτιακή συνθήκη τότε ικανοποιεί και την χρονολογική. Αυτές οι δύο όμως δεν είναι ισοδύναμες. Αντιπαράδειγματα για αυτό το γεγονός υπάρχουν αλλά είναι όμως κάπως πολύπλοκα, κοίτα πχ [7] σελ 407 ή [3] σελ 190.

Πρόταση 20. Το σύνολο των σημείων της M το οποίο δεν ικανοποιεί τη συνθήκη της χρονολογικότητας μπορεί να γραφτεί ως μια ξένη ένωση συνόλων της μορφής

$$I^+(p) \cap I^-(p) \text{ για } p \in M.$$

Απόδειξη. Αν στο σημείο p δεν ισχύει η συνθήκη χρονολογικότητας τότε $p \in I^+(p)$ δηλαδή υπάρχει χρονοειδής καμπύλη λ με άκρα στο p . Επιπλέον $p \in I^-(p)$ διότι αν αντιστρέψουμε την φορά μιας χρονοειδούς καμπύλης από το p στο p τότε έχουμε χρονοειδή καμπύλη με τα ίδια άκρα. Άρα $p \in I^+(p) \cap I^-(p)$.

Αν τώρα $r \in I^+(p) \cap I^-(p)$ τότε υπάρχουν χρονοειδείς καμπύλες μ_1 και μ_2 που να ενώνουν τα r και p . Αν $\tilde{\mu}_2$ είναι η μ_2 με αντεστραμμένη φορά τότε η καμπύλη $\tilde{\mu}_2 \circ \lambda \circ \mu_1$ είναι μια χρονοειδής και κλειστή καμπύλη με άκρα στο r . Συνεπώς εξασφάλισαμε ότι αν $r \in I^+(p) \cap I^-(p)$ με το p να μην ικανοποιεί την συνθήκη χρονολογικότητας τότε και το r δεν την ικανοποιεί.

Αν επιπλέον υπήρχε ένα $q \in M$ τέτοιο ώστε $r \in I^+(q) \cap I^-(q)$ τότε επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα επιχειρήματα προκύπτει ότι $p \in I^+(q) \cap I^-(q)$ (διότι $p \ll r$ και $r \ll q$ συνεπάγεται $p \ll q$ κτλ). Αυτό συνάγουμε εύκολα ότι $I^+(p) \cap I^-(p) = I^+(q) \cap I^-(q)$. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Σε ότι ακολουθεί θα γράφουμε ότι η M ικανοποιεί τη χρονολογική (ή αιτιακή) συνθήκη στο $p \in M$ αν δεν υπάρχει χρονοειδής (ή αιτιακή αντίστοιχα) καμπύλη που να περνά από το p .

Ορισμός 17. Θα λέμε ότι το $p \in M$ ικανοποιεί την **ισχυρά αιτιακή συνθήκη** όταν για κάθε γειτονιά U του p υπάρχει μια άλλη γειτονιά του $V \subset U$ τέτοια ώστε κάθε αιτιακή καμπύλη με άκρα στο V να εμπεριέχεται πλήρως σε αυτό.

Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι αν μια αιτιακή καμπύλη ξεκινήσει κοντά από το p και θελήσει να απομακρυνθεί κάπως από αυτό τότε, όχι μόνο δεν μπορεί να επιστρέψει στο p αλλά ούτε καν να πλησιάσει επαρκώς. Θα λέμε ότι μια πολλαπλότητα ικανοποιεί τη συνθήκη ισχυρής αιτιότητας αν την ικανοποιεί σε κάθε σημείο. Μπορούμε να δώσουμε δύο ισοδύναμες διατυπώσεις αυτής της ιδιότητας

- Κάθε αιτιακή καμπύλη που εκκινεί από το εσωτερικό του V τέμνει το σύνορο το πολύ μια φορά
- Για κάθε $x, y \in V$ κάθε φορά που για κάποιο z ισχύει ότι $x < z < y$ τότε έχουμε ότι $z \in V$. Τα σύνολα με αυτήν την ιδιότητα ονομάζονται και **αιτιακά κυρτά**

Η ισχυρά αιτιακή συνθήκη συνεπάγεται φυσικά την αιτιακή, και άρα τη χρονολογική, συνθήκη στο p αλλά το αντίστροφο και πάλι δεν ισχύει. Παραθέτουμε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας περίπτωσης παρμένο από τους [3].

$$p.$$

Ορισμός 18. Μια αιτιακή καμπύλη $\sigma : (a, b) \longrightarrow M$ λέγεται μελλοντικά (ή παρελθοντικά) **επεκτάσιμη** αν υπάρχει το $\lim_{t \rightarrow b^-} \sigma(t)$ (ή το $\lim_{t \rightarrow a^+} \sigma(t)$ αντίστοιχα)

Μια επεκτάσιμη καμπύλη μπορεί φυσικά να επεκταθεί σε μια καμπύλη που να εμπεριέχει και το οριακό σημείο. Μια καμπύλη που δεν μπορεί να επεκταθεί ονομάζεται **μη επεκτάσιμη**.

Για τον τρόπο που λειτουργεί η συνθήκη της ισχυρής αιτιότητας χαρακτηριστική είναι η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 21. Αν στην πολλαπλότητα M έχει ισχύ η ισχυρή αιτιακή συνθήκη και $\sigma : (a, b) \longrightarrow M$ είναι μια αιτιακή καμπύλη σε αυτήν και $K \subset M$ συμπαγές, τότε:

1. Αν η σ είναι μη επεκτάσιμη και εκκινεί από το K τότε υπάρχει ένα $t_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\sigma(s) \notin K$ για κάθε $s > t_0$. Δηλαδή η σ διαφεύγει από το K χωρίς ποτέ να επιστρέψει.
2. Αν η σ παραμένει συνεχώς μέσα στο K τότε θα είναι αναγκαστικά επεκτάσιμη.

Απόδειξη. 1) Έστω πως ισχύει το αντίθετο, η σ δηλαδή παραμένει στο K . Τότε αν $\{t_n\}_n \subset (a, b)$ ακολουθία με $t_n \rightarrow b$ η ακολουθία $\sigma(t_n) \in K$ για κάθε n . Λόγω συμπαγείας υπάρχει υπακολουθία $\{t_{n_k}\}_k$ ώστε η $\sigma(t_{n_k})$ να συγκλίνει σε σημείο $p \in K$. Εξαιτίας της μη επεκτασιμότητας της σ υπάρχει άλλη υπακολουθία $\{t_{n_\ell}\}_\ell$ με $t_{n_\ell} \rightarrow b$ ενώ το $\sigma(t_{n_\ell})$ να μην συγκλίνει στο p . Θεωρώντας ενδεχομένως περαιτέρω υπακολουθία, υπάρχει περιοχή U του p που δεν εμπεριέχει κανένα $\sigma(t_{n_\ell})$ αλλά περιέχει εντούτις όλα τα $\sigma(t_n)$ για $n > n_0$. Αυτό όμως μας οδηγεί σε άτοπο γιατί αντιφάσκει με την αρχή της ισχυρής αιτιότητας. Πράγματι, για αυτήν την περιοχή U υπάρχει περιοχή V του p ώστε αν μια καμπύλη που εξέρχεται του V να μην μπορεί να επανέλθει σε αυτό. Αυτό ακριβώς θα συμβεί και με την σ μιας και από ένα σημείο και μετά τα $\sigma(t_n) \in V$ για $n > n_1$. Όμως, μέσα σε αυτά τα n υπάρχουν οπωσδήποτε και κάποια n_ℓ για τα οποία $\sigma(t_{n_\ell}) \notin U$.

2) Έστω $t_n \rightarrow b$. Το σύνολο $\{\sigma(t_i)\}_i$ έχει ένα σημείο συσσώρευσης $p \in K$. Αν το σημείο αυτό δεν είναι το όριο $\lim_{t \rightarrow b} \sigma(t)$ τότε για κάθε ανοιχτή περιοχή U του p δεν υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε $\sigma(t_0) \in U$ για κάθε $t > t_0$. Το ίδιο θα ισχύει όμως και για κάθε περιοχή $V \subset U$ του σημείου. Αυτό σημαίνει ότι η σ εισέρχεται σε κάθε τέτοιο V πάνω από μια φορά, πράγμα άτοπο εξαιτίας της συνθήκης ισχυρής αιτιότητας. $\square$

Πρόταση 22. *Αν η $\mathcal{U} \subset M$ είναι κυρτή κανονική περιοχή τότε η πολλαπλότητα $(U, g|_U)$ είναι ισχυρώς αιτιακή.*

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης θα είναι προφανής αν κάνουμε δύο παρατηρήσεις. Πρώτον για κάθε σημείο $p \in \mathcal{U}$ υπάρχει μια περιοχή του σημείου που έχει την μορφή $I^+(u) \cap I^-(v) \subset \mathcal{U}$ (αυτό συμβαίνει στον χώρο Minkowski και μπορούμε να το κατεβάσουμε και στην πολλαπλότητα μέσω της κανονικής απεικόνισης). Δεύτερον, στις περιοχές αυτής της μορφής δεν υπάρχει κάποια χρονοειδής καμπύλη που να εξέρχεται και κατόπιν να εισέρχεται πάλι. Λεπτομέρειες για αυτά τα επιχειρήματα μπορούν να βρεθούν στο [8] σελ 30. $\square$

Ενδιάμεσες συνθήκες μεταξύ της συνθήκης ισχυρής αιτιότητας και της συνθήκης αιτιότητας είναι οι ακόλουθες:

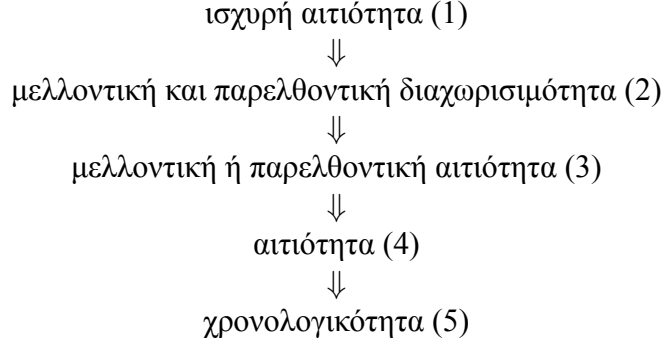
Ορισμός 19. *Η M θα λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη της μελλοντικής (παρελθοντικής) διαχωρισιμότητας στο σημείο $p \in M$ αν το $I^+(p) = I^+(q)$ (ή $I^-(p) = I^-(q)$ αντίστοιχα) συνεπάγεται ότι $p = q$.*

Πρόταση 23. *Η συνθήκη της μελλοντικής (παρελθοντικής) διαχωρισιμότητας στο σημείο $p \in M$ ικανοποιείται ακριβώς όταν για κάθε γειτονιά U του p υπάρχει μια άλλη γειτονιά του $V \subset U$ τέτοια ώστε καμία μελλοντική (ή παρελθοντική) αιτιακή καμπύλη που εκκινεί από το p και εξέρχεται από το U μπορεί να ξαναεισέλθει στο V .*

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Έστω πως ισχύει η ιδιότητα πως αν $I^+(p) = I^+(q)$ τότε $p = q$. Έστω U μια περιοχή του p και $\mathcal{V}$ μια κανονική κυρτή περιοχή εντός αυτής. Έστω ακόμα λ μια καμπύλη $\lambda : [0, 1] \rightarrow M$ με $\lambda(0) = p$ που εξέρχεται από το U και επιστρέφει εκ νέου στο $\mathcal{V}$ δηλαδή $\lambda(1) \in \mathcal{V}$. Παίρνοντας το q να είναι σημείο της λ έξω από το $\mathcal{V}$ τότε έχουμε ότι $q \in I^+(p)$ και λόγω κυρτότητας $p \in I^+(\lambda(1))$, συνεπώς και $p \in I^+(q)$. Από αυτά τα δύο συνεπάγεται ότι $I^+(p) = I^+(q)$ και άρα από την υπόθεσή μας $p = q$. Άτοπο γιατί τα πήραμε διακριτά αυτά τα δύο σημεία (το ένα ανήκει στο V και το άλλο όχι).

($\Rightarrow$) Για το αντίστροφο τώρα έστω $p, q \in M$ με $I^+(p) = I^+(q)$ ενώ $p \neq q$ και τη συνθήκη της μελλοντικής διαχωρισιμότητας εν ισχύ. Τότε υπάρχουν μια περιοχή U του p με $q \notin U$ και άλλη μια V με $V \cap I^+(p) \neq \emptyset$. Έστω $p_1 \in V \cap I^+(p)$ και άρα $p_1 \in I^+(q)$. Έστω επίσης σ η χρονοειδής καμπύλη που ενώνει τα p και q . Φέρνουμε άλλη χρονοειδή καμπύλη που ενώνει το p με κάποιο άλλο σημείο της σ εκτός U . Δημιουργείται έτσι μια χρονοειδής καμπύλη που εκκινεί και καταλήγει στο V πράγμα άτοπο. $\square$

Έχουμε συνεπώς την εξής ιεραρχία συνθηκών αιτιότητας:



Οι συνεπαγωγές $(1) \Rightarrow (2)$ και $(2) \Rightarrow (3)$ είναι προφανείς. Η $(3) \Rightarrow (4)$ είναι επίσης εύκολη. Πρέπει να σημειώσουμε ότι καμία από τις αντίστροφες συνεπαγωγές δεν ισχύει, για όλες υπάρχουν αντιπαραδείγματα.

Στην πορεία μέχρι τώρα είχαμε ξεκινήσει από μια πολλαπλότητα M η οποία είχε από μόνη της την δική της τοπολογία ως πολλαπλότητα. Ας συμβολίσουμε αυτήν την τοπολογία με $\mathcal{T}_M$. Με την βοήθεια αυτής της τοπολογίας ορίσαμε όλες τις αιτιακές δομές στην M . Εν συνεχεία θα ορίσουμε μια νέα τοπολογία που συνδέεται στενότερα με την αιτιακή δομή.

Ορισμός 20. Ορίζουμε η τοπολογία Alexandroff $\mathcal{T}_A$ στην M να είναι η τοπολογία εκείνη που έχει ως βάση τα σύνολα

$$\{I^+(p) \cap I^-(q)\}_{p,q \in M}.$$

Παρατηρούμε δύο πράγματα: Πρώτον κάθε ανοιχτό στην $\mathcal{T}_A$ είναι και ανοιχτό στην $\mathcal{T}_M$, δηλαδή

$$\mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}_M.$$

Το αντίστροφο δεν είναι, όπως θα δούμε, απαραίτητα σωστό. Δεύτερον, παρότι φαινομενικά η $\mathcal{T}_A$ δεν μπορεί να ορισθεί αν δεν έχει προσδιορισθεί νωρίτερα η $\mathcal{T}_M$, στην πραγματικότητα το μόνο που χρειάζεται είναι μια κατάλληλα ορισμένη αιτιακή δομή επί της M , δηλαδή μια κατάλληλη διμελής σχέση $\ll$ επί της πολλαπλότητας.

Πρόταση 24. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. Η M είναι ισχυρώς αιτιακή
2. $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_M$
3. Η $\mathcal{T}_A$ είναι Hausdorff

Απόδειξη. $(1) \Rightarrow (2)$ Έστω $\mathcal{T}_M$ -ανοιχτό σύνολο $\mathcal{U}$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p \in \mathcal{U}$ υπάρχει $\mathcal{T}_A$ -ανοιχτή περιοχή αυτού, εξ ολοκλήρου μέσα στο $\mathcal{U}$. Από τον

ορισμό της ισχυρής αιτιότητας υπάρχει $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε για κάθε $q, r \in \mathcal{V}$ δεν υπάρχει χρονοειδής καμπύλη από το q στο r που να εξέρχεται του $\mathcal{V}$, δηλαδή $I^+(q) \cap I^-(r) \subset \mathcal{V}$. Αν επιλέξουμε τα r και q κοντά στο p ώστε $p \in I^+(q) \cap I^-(r)$ τότε έχουμε το ζητούμενο.

(2) $\Rightarrow$ (3) Προφανές αφού η $\mathcal{T}_M$ είναι Hausdorff.

(3) $\Rightarrow$ (1) Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι η πολλαπλότητα δεν είναι ισχυρώς αιτιακή. Τότε, αν πάρουμε σημείο p και περιοχή αυτού $\mathcal{U}$ $\mathcal{T}_M$ -ανοιχτή τότε για κάθε άλλη ανοιχτή περιοχή $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ υπάρχει μια αιτιακή καμπύλη με άκρα μέσα στο $\mathcal{V}$. Φυσικά αυτά τα σύνολα είναι και $\mathcal{T}_A$ -ανοιχτά. Παίρνοντας λοιπόν μια αριθμήσιμη $\mathcal{T}_A$ -βάση περιοχών $\mathcal{V}_n$ του p (δηλαδή $\mathcal{V}_n = I^+(s_n) \cap I^-(r_n)$ για κάποια r_n, s_n) ώστε να υπάρχει χρονοειδής καμπύλη λ_n που να ενώνει τα p_n και q_n που είναι σημεία $\mathcal{V}_n$ και η οποία εξέρχεται της περιοχής αυτής. Λόγω της ιδιότητας Hausdorff:

$$\bigcap_n \mathcal{V}_n = \{p\}.$$

Από το θεώρημα που θα αποδείξουμε αμέσως μετά έπεται, το διαισθητικά προφανές, ότι υπάρχει μια κλειστή αιτιακή καμπύλη γύρω από το p . Αυτό όμως αντιφάσκει με την ιδιότητα Hausdorff, όπως είναι εύκολο να δει κανείς. $\square$

Ορισμός 21. Το $p \in M$ θα λέγεται **μελλοντικά τελικό σημείο** της μελλοντικά κατευθυνόμενης αιτιακής καμπύλης λ αν για κάθε περιοχή O του p υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε $\lambda(t_0) \in O$ για κάθε $t > t_0$. Αντίστοιχα έχουμε και το **παρελθοντικά τελικό σημείο**.

Φυσικά μια καμπύλη είναι παρελθοντικά ή μελλοντικά μη επεκτάσιμη ακριβώς όταν δεν έχει παρελθοντικό ή μελλοντικό τελικό σημείο.

Ορισμός 22. Έστω $\{\lambda_n\}_n$ μια ακολουθία αιτιακών καμπύλων και $p \in M$. Ορίζουμε:

1. Το p είναι **σημείο σύγκλισης** της $\{\lambda_n\}_n$ αν για κάθε περιοχή O του p υπάρχει N τέτοιο ώστε $\lambda_n \cap O \neq \emptyset$ για κάθε $N > n$.
2. Μια καμπύλη λ θα λέμε ότι είναι **καμπύλη σύγκλισης** αν κάθε $p \in \lambda$ είναι σημείο σύγκλισης.
3. Το p είναι **οριακό σημείο** της $\{\lambda_n\}_n$ αν κάθε περιοχή O του p τέμνει άπειρες το πλήθος λ_n .
4. Μια καμπύλη λ θα λέμε ότι είναι **οριακή καμπύλη** αν υπάρχει μια υπακολουθία λ_{k_ℓ} για την οποία η λ είναι καμπύλη σύγκλισης.

Η επόμενη πρόταση θα είναι χρήσιμη στα παρακάτω

Πρόταση 25. Έστω $\{\lambda_n\}_n$ μια ακολουθία μελλοντικά μη επεκτάσιμων αιτιακών καμπύλων οι οποίες έχουν το $p \in M$ οριακό σημείο. Τότε υπάρχει μια μελλοντικά μη επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη λ που διέρχεται από το p και η οποία είναι οριακή για την $\{\lambda_n\}_n$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U}_1$ να είναι μια κυρτή κανονική περιοχή γύρω από το p και $B(\rho, \alpha)$ μια κανονική γεωδαισιακή μπάλα που βρίσκεται εντός της $\mathcal{U}_1$. Το $BdB(\rho, \alpha)$ είναι συμπαγές και αν $\{\lambda_n^{0,1}\}_n$ είναι μια υπακολουθία της $\{\lambda_n\}_n$ που συγκλίνει στο p τότε (λόγω συμπαγείας) το $BdB(\rho, \alpha)$ περιέχει οριακά σημεία της $\{\lambda_n^{0,1}\}_n$. Τα οριακά αυτά σημεία θα πρέπει να βρίσκονται εντός του $J^-(p, \mathcal{U}_1)$ ή του $J^-(p, \mathcal{U}_1)$ γιατί διαφορετικά αν y ένα τέτοιο σημείο θα υπήρχαν περιοχές V_1 και V_2 των p και y μεταξύ των οποίων δεν μπορεί να υπάρξει αιτιακή καμπύλη (και το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση ότι τα p και y είναι οριακά σημεία). Επιλέγουμε έτσι

$$x_{11} \in J^+(p, \mathcal{U}_1) \cap \partial B(\rho, \alpha)$$

Ο σκοπός μας τώρα είναι να κάνουμε το ίδιο για συνεχώς μικρότερες γεωδαισιακές μπάλες επιλέγοντας κάθε φορά σημεία στα οποία μια υπακολουθία να συγκλίνει. Αυτό θα γίνει με κατάλληλο τρόπο ο οποίος θα μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει μια υπακολουθία που να έχει ως οριακό κάθε ένα από αυτά τα σημεία. Κατόπιν η καμπύλη που προβλέπει η πρόταση θα είναι απλώς η κλειστότητα όλων αυτών των σημείων.

Δουλεύουμε ως εξής: Πρώτα επιλέγουμε υπακολουθία $\{\lambda_n^{1,1}\}_n$ της $\{\lambda_n^{1,0}\}_n$ η οποία να συγκλίνει στο x_{11} . Εν συνεχεία επιλέγουμε σημείο $x_{20} \in J^+(p, \mathcal{U}_1) \cap \partial B(\rho, \frac{\alpha}{2})$ (δηλαδή $x_{20} = p$) το οποίο είναι οριακό σημείο της $\{\lambda_n^{1,1}\}_n$. Κατόπιν επιλέγουμε

$$x_{21} \in J^+(p, \mathcal{U}_1) \cap \partial B(\rho, \frac{1}{2}\alpha)$$

και υπακολουθία $\{\lambda_n^{2,1}\}_n$ της $\{\lambda_n^{1,2}\}_n$ η οποία να συγκλίνει στο x_{21} .

Προχωρώντας αναδρομικά ορίζουμε:

$$x_{ij} \in J^+(p, \mathcal{U}_1) \cap \partial B(\rho, \frac{j}{i}\alpha) \text{ για } i \leq j \leq 0$$

καθώς και υπακολουθία $\{\lambda_n^{i,j}\}_n$ ως εξής:

$$\{\lambda_n^{i,j}\}_n = \begin{cases} \text{υπακολουθία της } \{\lambda_n^{i-1,i-1}\}_n \text{ που συγκλίνει στο } x_{ij}, & \text{αν } j = 0, \\ \text{υπακολουθία της } \{\lambda_n^{i,j-1}\}_n \text{ που συγκλίνει στο } x_{ij}, & \text{αν } i \leq j \leq 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $x_{i0} = p$ και $x_{ii} = x_{11}$ για κάθε i . Παίρνουμε λ να είναι η κλειστότητα όλων των σημείων x_{ij} . Η υπακολουθία τώρα $\{\lambda'_n\}$ για την οποία η λ να είναι οριακή βρίσκεται ως εξής: Για κάθε m ορίζουμε το λ_m να είναι ένα μέλος

τη ακολουθίας $\{\lambda_n^{m,m}\}_n$ το οποίο τέμνει όλες τις $B(x_{mj}, \frac{\alpha}{m})$ για $0 \leq j \leq m$. Μια τέτοια καμπύλη υπάρχει γιατί από την κατασκευή της η $\{\lambda_n^{m,m}\}_n$ συγκλίνει σε όλα τα x_{mj} $0 \leq j \leq m$.

Φυσικά ενδέχεται η καμπύλη που κατασκευάσαμε να είναι μελλοντικά επεκτάσιμη. Για να φτιάξουμε μια μέγιστη, ως προς την έννοια της μη επεκτασιμότητας, καμπύλη ενεργούμε με τον ίδιο τρόπο αυτή την φορά γύρω από το x_{11} και εξακολουθούμε να κάνουμε το ίδιο όσο χρειάζεται. Το λήμμα του Zorn μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας μη επεκτάσιμης καμπύλης. $\square$

Τελειώνουμε αυτήν την παράγραφο δίνοντας μια γενίκευση της έννοιας της αιτιακής καμπύλης στην περίπτωση των καμπύλων που δεν είναι διαφορίσιμα παντού.

Ορισμός 23. Μια καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow M$ θα ονομάζεται **συνεχής χρονοειδής και μελλοντικά κατευθυνόμενη** στο $t_0 \in I$ αν η γ είναι συνεχής στο σημείο αυτό και υπάρχει μια συνεκτική περιοχή $F \subset I$ του t_0 όπως επίσης μια κυρτή κανονική περιοχή $\mathcal{U}$ του $p = \gamma(t_0)$ έτσι ώστε:

1. για κάθε $t \in F$ με $t < t_0$ να ισχύει ότι $\gamma(t) \in I^-(p, \mathcal{U})$ και
2. για κάθε $t \in F$ με $t > t_0$ να ισχύει ότι $\gamma(t) \in I^+(p, \mathcal{U})$.

Μια καμπύλη θα λέγεται **συνεχής χρονοειδής και μελλοντικά κατευθυνόμενη** αν είναι συνεχής χρονοειδής και μελλοντικά κατευθυνόμενη σε κάθε σημείο. Τέλος, ανάλογα ορίζουμε τις περελθοντικά κατευθυνόμενες αιτιακές καμπύλες.

2.3 Καθολική υπερβολικότητα

Ορισμός 24. έστω $S \subset M$ ένα κλειστό και άχρονο σύνολο, ορίζουμε το **μελλοντικό πεδίο εξάρτησης** $D^+(S)$ να είναι το σύνολο όλων των $p \in M$ για τα οποία κάθε μελλοντικά μη επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη που διέρχεται από το p να τέμνει αναγκαστικά το S .

Φυσικά ισχύει ότι $S \subset D^+(S) \subset J^+(S)$ και $D(S) \cap I^-(S) = \emptyset$. Όμοια, με εναλλαγή των προσοίμων, ορίζουμε το $D^-(S)$ και έχουμε

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$$

Θα δώσουμε δυο βασικές ιδιότητες του πεδίου εξάρτησης αλλά πρώτα κάποια χρήσιμα λήμματα

Λήμμα 6. Αν η καμπύλη λ είναι μια μελλοντικά μη επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη που διέρχεται εκ του p τότε για κάθε $q \in I^+(p)$ υπάρχει μια μελλοντικά μη επεκτάσιμη καμπύλη γ τέτοια ώστε

$$\gamma \subset I^+(\lambda).$$

Απόδειξη. χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πούμε να υποθέσουμε ότι η λ ορίζεται στο $[0, +\infty)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει μια χρονοειδής καμπύλη, ας την πούμε $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M$ με $\gamma(0) = q$ ώστε να έχουμε $\gamma_1 \subset I^+(\lambda)$. Για να είναι όμως ολοκληρωμένη πρόταση πρέπει να δειχθεί και η ιδιότητα της μη επεκτασιμότητας. Για να το πετύχουμε αυτό εφαρμόζουμε το ακόλουθο τέχνασμα: Θεωρούμε μια τυχαία μετρική *Riemann* (η πολλαπλότητά μας αποδέχεται τέτοια), την d και επίσης διαλέγουμε την γ να είναι τέτοια ώστε να ισχύει

$$d(\gamma_1(t), \lambda(t)) < \frac{1}{1+t} \text{ για κάθε } t \in [0, 1].$$

Δουλεύοντας με αυτόν τον τρόπο στα διαδοχικά διαστήματα $[n, n+1]$ επιλέγουμε τέτοιες γ_n . Τελικά η

$$\gamma = \cup \gamma_n$$

είναι εξασφαλισμένο ότι δεν είναι επεκτάσιμη. □

Λήμμα 7. *Αν ένα σημείο $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ τότε κάθε αιτιακή καμπύλη που συνδέει τα p και q πρέπει να είναι μια μηδενική γεωδαισιακή.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα ?? αν δεν ήταν γεωδαισιακή (είτε αυτή είτε μια άλλη παραμετροποίησή που εδώ σιωπηρά τις ταυτίζουμε) θα προσεγγιστεί από μια χρονοειδή με τα ίδια άκρα πράγμα άτοπο γιατί $q \notin I^+(p)$. □

Πρόταση 26. *Η κλειστότητα του $D^+(S)$ είναι το σύνολο όλων των $p \in M$ για τα οποία κάθε μελλοντικά μη επεκτάσιμη χρονοειδής καμπύλη που διέρχεται από το p να τέμνει απαραίτητως το S .*

Απόδειξη. Έστω πως $p \in \overline{D^+(S)}$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει μια τέτοια καμπύλη που δεν διέρχεται από το S . Είναι τότε εύκολο να δούμε ότι το ίδιο θα ισχύει και για μια περιοχή O του p . Πράγματι, εφόσον αυτό ισχύει για το κώνο Minkowski, μπορούμε να πάμε σε μια πολύ μικρή περιοχή που να τον προσεγγίζει. Σε μια τέτοια περίπτωση θα έχουμε επιπλέον ότι $O \cap D^+(S) = \emptyset$ και άρα $p \notin \overline{D^+(S)}$. Άτοπο.

Για την άλλη φορά τώρα. Έστω πως κάθε χρονοειδής παρελθοντικά μη επεκτάσιμη καμπύλη που διέρχεται από το p τέμνει το S , τότε $p \in I^+(S)$ (η περίπτωση που $p \in S \subset \overline{D^+(S)}$ είναι τετριμμένη). Έστω τώρα ένα

$$q \in I^-(p) \cap I^+(S).$$

Ισχυριζόμαστε ότι κάθε αιτιακή παρελθοντική και μη επεκτάσιμη καμπύλη που διέρχεται από το q τέμνει το S , δηλαδή $q \in D^+(S)$. Η ορθότητα αυτού του ισχυρισμού αποδεικνύει και την πρόταση διότι κάθε περιοχή του p τέμνει αναγκαστικά το $I^-(p) \cap I^+(S)$ και από τον ισχυρισμό θα τέμνει και το $D^+(S)$, πράγμα που σημαίνει ακριβώς ότι $p \in \overline{D^+(S)}$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού τώρα έστω λ αιτιακή και μελλοντικά μη επεκτάσιμη καμπύλη που διέρχεται από το q και η οποία δεν τέμνει το S . Τότε θα ισχύει απαραίτητα ένα από τα παρακάτω δύο:

1. Η λ παραμένει συνεχώς εντός του $I^+(S)$ ή
2. Η λ τέμνει το σύνορο $\partial I^+(S)$ σε ένα σημείο $r \notin S$.

Σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις μπορεί να κατασκευαστεί χρονοειδής και μελλοντικά μη επεκτάσιμη καμπύλη η οποία δεν τέμνει το S . Η κατασκευή της καμπύλης γίνεται στην πρώτη περίπτωση μέσω του πρώτου λήμματος και στην δεύτερη περίπτωση μέσω του δεύτερου λήμματος. $\square$

Για το εσωτερικό του πεδίου εξάρτησης έχουμε το εξής:

Πρόταση 27. 1. $\text{int}D^+(S) = I^+(S) \cap I^-(D^+(S))$

2. $\text{int}D(S) = I^-(D^+(S)) \cap I^+(D^-(S))$

Απόδειξη. Σε αντίθεση με την προηγούμενη είναι απλή εφαρμογή των ορισμών και για αυτό την παραλείπουμε. $\square$

Την έννοια του πεδίου εξάρτησης την χρειαζόμαστε για να ορίζουμε την επόμενη συνθήκη αιτιότητας που είναι μακράν και η σημαντικότερη. Πρώτα πρέπει να πούμε όμως τι είναι μια επιφάνεια Cauchy.

Ορισμός 25. Ένα κλειστό και άχρονο $S \subset M$ ονομάζεται *επιφάνεια Cauchy* αν

$$D(S) = M.$$

Η φυσική ερμηνεία των σύνολων αυτών είναι ενδιαφέρουσα. Όταν υπάρχουν τότε όλα τα υπόλοιπα σημεία του χωρόχρονου εξαρτώνται κατα μια έννοια από τα σημεία του συνόλου αυτού. Ο λόγος που πέρνουν και αυτήν την ονομασία είναι γιατί αποτελούν τα πιο κατάλληλα σύνολα για να ορισθεί πάνω σε ένα τέτοιο η αρχική συνθήκη ενός προβλήματος διαφορικών εξισώσεων. Το γιατί ονομάζοντε επιφάνειες θα το δούμε αμέσως μετά. Βέβαια δεν είναι δεδομένο ότι κάθε πολλαπλότητα Lorentz έχει ένα τέτοιο σύνολο.

Ορισμός 26. Μια πολλαπλότητα (M, g) ονομάζεται *καθολικά υπερβολική* όταν διαθέτει μια επιφάνεια Cauchy.

Πρωτού αρχίσουμε να μελετάμε τις ιδιότητες των καθολικά υπερβολικών χώρων θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε πως περίπου μοιάζει μια επιφάνεια Cauchy.

Ορισμός 27. Αν $A \subset M$ είναι ένα άχρονο σύνολο τότε ορίζουμε $edge(A)$ να είναι όλα τα $p \in \bar{A}$ σε κάθε εριοχή $\mathcal{U}$ των οποίων να μπορούμε να βρούμε μια χρονοειδή καμπύλη από το $I^-(A, \mathcal{U})$ στο $I^+(A, \mathcal{U})$ η οποία να μην τέμνει το A .

Για παράδειγμα αν

$$A = \{(0, x) : 0 < x \leq 1\} \subset \mathbb{R}_1^2$$

τότε $edge(A) = \{0, 1\}$

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τα άχρονα σύνολα με $edge = \emptyset$ και είναι χρήσιμη για εμάς διότι κάθε επιφάνεια Cauchy είναι τέτοια. Πρώτα όμως πρέπει να θυμίσουμε ότι αν M είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα τότε ένα $S \subset M$ λέγεται **τοπολογική υπερεπιφάνεια** αν για κάθε $p \in M$ υπάρχει περιοχή O του σημείου καθώς και ομοιομορφισμός

$$\varphi : O \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

έτσι ώστε να ισχύει ότι

$$\varphi(O \cap S) = \varphi(O) \cap \Pi$$

όπου Π είναι μια υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 28. Ένα άχρονο σύνολο $A \subset M$ είναι τοπολογική υπερεπιφάνεια ακριβώς όταν $A \cap edge(A) = \emptyset$

Απόδειξη. Έστω πως το A είναι μια τοπολογική υπερεπιφάνεια με $p \in A$ και O περιοχή όπως στην εκφώνηση. Από τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω συνάγεται ότι το O είναι συνεκτικό ενώ το $O \setminus A$ αποτελείται από δύο ξένες μεταξύ τους συνεκτικές συνιστώσες. Τα $I^+(p, O)$ και $I^-(p, O)$ βρίσκονται σε ξένες μεταξύ τους συνιστώσες και δεν τέμνουν το A (αυτά τα δύο συμβαίνουν λόγω αχρονικότητας). Δεν μπορεί συνεπώς καμία καμπύλη να πάει από το ένα στο άλλο χωρίς να τμήσει το A . Έτσι δείξαμε ότι $p \notin edge(A)$.

Για την άλλη φορά τώρα επιλέγουμε χάρτη $\mathcal{U}, \phi = (x^0, \dots, x^{n-1})$ γύρω από το p τέτοιο ώστε το $\frac{\partial}{\partial x^0}$ να είναι χρονοειδές και κατόπιν επιλέγουμε μικρότερη περιοχή $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ με $p \in \mathcal{V}$ ώστε να ικανοποιούντε οι συνθήκες:

- $\phi(\mathcal{V}) = (a - \delta, b + \delta) \times \mathcal{N} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
- τα τμήματα $\{x^0 = a\}$ και $\{x^0 = b\}$ να βρίσκονται εντός των $I^+(p, \mathcal{U})$ και $I^-(p, \mathcal{U})$ αντίστοιχα.

Για κάθε ένα $y \in \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ η καμπύλη $\phi^{-1}(t, y)$ με $t \in [a, b]$ πηγαίνει από το $I^+(p, \mathcal{U})$ στο $I^-(p, \mathcal{U})$ και άρα (αφού $p \notin edge(A)$) τέμνει το A σε ένα σημείο,

έστω $h(y)$. Ισχυριζόμαστε ότι η συνάρτηση $y \mapsto h(y)$ είναι συνεχής. Η εγκυρότητα αυτού του ισχυρισμού συνεπάγεται και την εγκυρότητα της πρότασης διότι τότε η συνάρτηση

$$\varphi(x^0, \dots, x^{n-1}) = (x^0 - h(x^1, \dots, x^{n-1}), x^1, \dots, x^{n-1})$$

είναι ομοιομορφισμός που απεικονίζει το $A \cap \mathcal{V}$ στο $\{u \in \mathbb{R}^n : u^0 = 0\}$ το οποίο και είναι υπερεπιφάνεια.

Η h τώρα είναι όντως συνεχής. Έστω πως δεν ήταν, τότε θα υπήρχαν ακολουθίες $\{y_n\}_n$ και $\{z_n\}_n$ που συγκλίνουν στο ίδιο y την στιγμή που $h(y_n) \rightarrow t_1$ και $h(z_n) \rightarrow t_2$ με $t_1 \neq t_2$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα ίσχυε επίσης ότι $\phi^{-1}(h(y_n), y_n) \rightarrow \phi^{-1}(t_1, y)$ και ότι $\phi^{-1}(h(z_n), z_n) \rightarrow \phi^{-1}(t_2, y)$ με τα

$$\phi^{-1}(t_1, y), \phi^{-1}(t_2, y) \in A$$

να είναι διάφορα μεταξύ τους. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί τα δύο αυτά σημεία ανήκουν για κάθε y στην ίδια αιτιακή καμπύλη $\phi^{-1}(t, y)$ με $t \in [a, b]$ η οποία λόγω αχρονικότητας δεν μπορεί να τέμνει δύο φορές το A . $\square$

Μπορούμε να σκεφτόμαστε λοιπόν μια επιφάνεια Cauchy σαν μια φέτα που τέμνει ολοκληρο την πολλαπλότητα. Θα δώσουμε άλλη μια χαρακτηριστική ιδιότητα των επιφανειών Cauchy. Άλλο ένας ορισμός όμως είναι απαραίτητος.

Ορισμός 28. Αν S είναι ένα κλειστό και άχρονο σύνολο τότε ορίζουμε τον **μελλοντικό ορίζοντα Cauchy** $H^+(S)$ να είναι το σύνολο

$$H^+(S) = \overline{D^+(S)} \setminus I^-(D^+(S))$$

όμοια έχουμε τον **παρελθοντικό ορίζοντα Cauchy** $H^-(S) = \overline{D^-(S)} \setminus I^+(D^-(S))$ και

$$H(S) = H^+(S) \cap H^-(S)$$

Το $H^+(S)$ (αλλά και οι υπόλοιποι ορίζοντες Cauchy) είναι κλειστά σύνολα (ως τομή των κλειστών $\overline{D^+(S)}$ και $M \setminus I^-(D^+(S))$). Επίσης δείχνεται εύκολα ότι

$$I^-(H^+(S)) \cap H^+(S) = \emptyset$$

και άρα το $H^+(S)$ είναι άχρονο. Τέλος από την πρόταση ?? μπορούμε να εξάγουμε ότι $H(S) = \partial D(S)$.

Πρόταση 29. Αν M μια συνεκτική πολλαπλότητα Lorentz τότε ένα μη κενό, κλειστό και άχρονο σύνολο Σ είναι επιφάνεια Cauchy ακριβώς όταν

$$H(\Sigma) = \emptyset$$

Απόδειξη. Αν $\partial D(\Sigma) = \emptyset$ τότε $\overline{D(\Sigma)} = \text{int} D(\Sigma) = D(\Sigma)$, δηλαδή το $D(\Sigma)$ είναι και ανοιχτό και κλειστό. Από συνεκτικότητα έπεται ότι $D(\Sigma) = M$. $\square$

Ξεκινάμε τώρα τη μελέτη των ιδιοτήτων που έχουν οι καθολικά υπερβολικές πολλαπλότητες. Εξαιτίας της ύπαρξης μιας επιφάνειας Cauchy Σ κάθε μια τέτοια πολλαπλότητα μπορεί να διαμεριστεί σε τρία ξένα υποσύνολα: Το Σ , το $I^+(\Sigma)$ και το $I^-(\Sigma)$. Η επόμενη πρόταση που λέει πως συμπεριφέροντε οι καμπύλες θα μας χρειαστεί.

Πρόταση 30. *Αν Σ είναι μια επιφάνεια Cauchy και λ μια μη επεκτάσιμη μελλοντικά και παρελθοντικά καμπύλη, τότε η λ τέμνει τα Σ , $I^+(\Sigma)$ και $I^-(\Sigma)$.*

Απόδειξη. Έστω πως η λ δεν τέμνει το $I^-(\Sigma)$. Τότε $\lambda \subset \Sigma \cup I^+(\Sigma)$ και άρα από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει παρελθοντικά μη επεκτάσιμη καμπύλη γ με

$$\gamma \subset I^+(\lambda) \subset I(\Sigma \cup I^+(\Sigma)) = I^+(\Sigma)$$

Αν επεκτείνουμε την γ μελλοντικά δε θα συναντήσει ποτέ το Σ (γιατί διαφορετικά θα παραβιαζόταν η αχρονικότητα), πράγμα άτοπο.

Με όμοια επιχειρήματα εξασφαλίζουμε το αδύνατο του να μην τέμνει η λ κάποιο από αυτά τα τρία σύνολα. $\square$

Η καθολική υπερβολικότητα όπως την ορίσαμε είναι στην πραγματικότητα μια αιτιακή συνθήκη ισχυρότερη από όσες έχουμε δει μέχρι τώρα.

Πρόταση 31. *Αν η (M, g) είναι καθολικά υπερβολική τότε είναι και ισχυρώς αιτιακή.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ιδιότητα της ισχυρής αιτιακότητας παραβιάζεται στο σημείο $p \in M$ το οποίο βρίσκεται στο $I^+(\Sigma)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια κυρτή κανονική περιοχή $\mathbb{U}$ του p και μια ακολουθία $\{O_n\}_n$ εγκυβωτισμένων περιοχών του p εντός του $\mathbb{U}$ που βρίσκοντε οσοδήποτε κοντά στο σημείο για την οποία μπορούμε να βρούμε ακολουθία καμπύλων $\{\lambda_n\}_n$ τέτοια ώστε για κάθε n η λ_n να εκκινεί εντός του O_n , κατόπιν να εξέρχεται του $\mathbb{U}$ και τέλος να εισέρχεται εκ νέου εντός του O_n . Από την πρόταση ?? υπάρχει η οριακή καμπύλη λ των λ_n η οποία και διέρχεται από το p . Αν η λ ήταν μελλοντικά επεκτάσιμη αυτό θα σήμαινε ότι θα μπορούσε να επεκταθεί και στο p , κάτι που συνεπάγεται φυσικά ότι θα μπορούσαμε να έχουμε μια κλειστή αιτιακή καμπύλη. Αυτό όμως είναι αδύνατο σε ένα καθολικά υπερβολικό χώρο αφού αν μια κλειστή αιτιακή καμπύλη τέμνει το Σ έρχεται σε αντίθεση με την αχρονικότητα (θα πρέπει να το τέμνει δυο φορές), αν δε το τέμνει έρχεται σε ρήξη με την καθολική υπερβολικότητα.

Συνεπώς έχουμε ότι η λ είναι μη επεκτάσιμη. Επειδή τώρα καμία από τις λ_n είναι δεν μπορεί να περάσει στην άλλη μεριά του Σ ⁸ (λόγο αχρονικότητας και

⁸ Αυτό δεν έρχεται σε ρήξη με την συνθήκη της καθολικής υπερβολικότητας καθώς πουθενά δεν υποθέσαμε ότι οι λ_n είναι μη επεκτάσιμες.

πάλι), το ίδιο πρέπει να ισχύει και για την λ . Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο γιατί σε μια καθολικά υπερβολική πολλαπλότητα δεν μπορεί να υπάρχει (από την παραπάνω πρόταση) μη επεκτασιμη αιτιακή καμπύλη που δεν διέρχεται εκ όλων των τριών αυτών περιοχών.

Με ανάλογα επιχειρήματα δουλεύουμε και στην περίπτωση που το σημείο παραβίασης βρίσκεται στο $I^+(\Sigma)$ ή στο Σ . $\square$

Ο τελικός σκοπός στην μελέτη της καθολικής υπερβολικότητας είναι να δείξουμε ότι σε αυτές τις πολλαπλότητες ισχύει κάτι ανάλογο με την ύπαρξη γεωδαισιακών ελαχίστου μήκους στην πολλαπλότητα Riemann. Ξεκινάμε τώρα μια προκαταρκτική εργασία η οποία έχει όμως και μεγάλη αξία από μόνη της.

Έστω $p, q \in M$ με $q \in I^+(p)$. Ορίζουμε $C(p, q)$ να είναι το σύνολο όλων των αιτιακών καμπύλων modulo τις επαναπαραμετροποιήσεις τους. Μια πρώτη παρατήρηση για τον $C(p, q)$ είναι ότι δύο στοιχεία του δεν τέμνονται ποτέ (γιατί αλλιώς θα είχαμε παραβίαση της αιτιότητας). Εν συνεχεία θα εφοδιάσουμε το $C(p, q)$ με μια τοπολογία ως εξής: Για κάθε $\mathcal{U} \subset M$ ανοιχτό ορίζουμε $O(\mathcal{U}) \subset C(p, q)$ να είναι:

$$O(\mathcal{U}) = \{ \lambda \in C(p, q) : \lambda \subset \mathcal{U} \}$$

Για τα σύνολα αυτά είναι εύκολο να δει κανείς ότι ισχύει:

$$C(p, q) = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{T}_M} O(\mathcal{U})$$

και για κάθε $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ ανοιχτά της έχουμε ότι

$$O(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = O(\mathcal{U}_1) \cap O(\mathcal{U}_2)$$

Συνεπώς όλα σύνολα της μορφής $O(\mathcal{U})$ μπορούν να ορίσουν μια τοπολογία της οποίας να είναι η βάση. Επιπλέον για την τοπολογία αυτή ισχύουν τα παρακάτω τα οποία θα πάρουμε δεδομένα (είναι διαισθητικά προφανή και δεν θα επιμείνουμε στις τεχνικές αποδείξεις τους).

1. Η τοπολογία αυτή είναι δεύτερα αριθμήσιμη
2. Η σύγκλιση καμπύλων σύμφωνα με αυτήν ταυτίζεται με την σύγκλιση ακολουθιών που ορίσαμε νωρίτερα.

Έχοντας αυτά κατά νου μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 8. *Αν $\eta(M, g)$ είναι καθολικά υπερβολική πολλαπλότητα τότε για $p, q \in M$ με $q \in I^+(p)$ το $C(p, q)$ είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα της τοπολογίας που αναφέρει πως ένας δεύτερα αριθμήσιμος χώρος είναι συμπαγής ακριβώς όταν κάθε ακολουθία του έχει σημείο συσσώρευσης. Έστω λοιπόν $\{\lambda_n\}_n \subset C(p, q)$ ακολουθία. Υποθέτουμε αρχικά ότι $p, q \in D^+(\Sigma)$. (Σ είναι η απιφάνεια Cauchy της M). Εφαρμόζοντας το θεώρημα ?? στο χώρο $(M \setminus \{q\})$ βρίσκουμε ότι υπάρχει καμπύλη λ μελλοντικά μη επεκτάσιμη που είναι αριακή για την υπακολουθία $\{\lambda_{k_n}\}_n$ και η οποία διέρχεται από το p . Η λ δεν εισέρχεται φυσικά στο $I^-(\Sigma)$ μιας και καμία από τις λ_n δεν το κάνει. Αν επαναφέρουμε τώρα το σημείο q τότε για την λ θα ισχύει ένα από τα δύο: Είτε δεν είναι επεκτάσιμη (πράγμα άτοπο από την καθολική υπερβολικότητα) είτε ότι σημείο q θα είναι οριακό σημείο. Συνεπώς η λ επεκτεταμένη και στο q θα είναι η ζητούμενη καμπύλη.

Οι περιπτώσεις στις οποίες $p, q \in D^-(\Sigma)$ και $q \in D^-(\Sigma)$ ενώ $p \in D^+(\Sigma)$ προκύπτουν με παραλλαγές των παραπάνω επιχειρημάτων. $\square$

Η επόμενη πρόταση είναι σημαντική

Πρόταση 32. *Αν η (M, g) είναι καθολικά υπερβολική πολλαπλότητα τότε για $p, q \in M$ με $q \in I^+(p)$ το $J^+(p) \cap J^-(q)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Επειδή η τοπολογία των πολλαπλοτήτων είναι δεύτερα αριθμήσιμη αρκεί να δείξουμε και εδώ πως κάθε ακολουθία σημείων του $J^+(p) \cap J^-(q)$ είναι έχει σημείο συσσώρευσης. Έστω λοιπόν ακολουθία $\{r_n\}_n$. Παίρνουμε λ_n ακολουθία σημείων του $C(p, q)$ τέτοια ώστε κάθε λ_n να διέρχεται από το r_n . Από το λήμμα υπάρχει υπακολουθία λ_{k_n} που να έχει ως οριακή καμπύλη $\lim C(p, q)$. Έστω τώρα U ανοιχτό σύνολο της M με $\lambda \subset U$ και $\bar{U}$ συμπαγές (Τέτοιο U υπάρχει από την στιγμή που το η λ ως υποσύνολο της M είναι συμπαγές και άρα μπορούμε να βρούμε πεπερασμένη οικογένεια ανοιχτών με συμπαγή κλειστότητα που καλύπτουν την λ . Η ένωση όλων αυτών παίρνουμε να είναι το U).

Αφού τώρα $r_{k_n} \in \lambda_{k_n} \subset U \subset \bar{U}$ η r_{k_n} θα έχει περαιτέρω υπακολουθία που θα συγκλίνει σε κάποιο $r \in \bar{U}$. Όμως πρέπει $r \in \lambda$ γιατί αλλιώς θα καταλήγαμε σε αντίφαση με το γεγονός ότι οι λ_{k_n} έχουν τα οριακά τους σημεία στη λ . $\square$

Πρωτού να είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε την βασική ιδιότητα των καθολικά υπερβολικών πολλαπλοτήτων θα δώσουμε δύο γενικά αποτελέσματα που αφορούν την έννοια απόστασης στους ημιρημάννιες πολλαπλότητες.

Πρόταση 33. 1. $\tau(p, q) > 0$ αν και μόνο αν $q \in I^+(p)$

2. Αν $p < q < r$ τότε $\tau(p, q) + \tau(q, r) \leq \tau(p, r)$ (αντίστροφη τριγωνική ιδιότητα)

Απόδειξη. 1) Αν $\tau(p, q) > 0$ τότε υπάρχει $\alpha \in C(p, q)$ με $L(\alpha) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η α δεν είναι μηδενική γεωδαισιακή άρα υπάρχει από το θεώρημα ?? χρονοειδής που να συνδέει τα p και q . Το αντίστροφο είναι προφανές.

2) Αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει α από το p στο q μήκους $L(\alpha)$ με $\tau(p, q) - L(\alpha) < \frac{\delta}{2}$ και β από το q στο r με $\tau(q, r) - L(\beta) < \frac{\delta}{2}$ τότε

$$\tau(p, q) \geq L(\alpha \cup \beta) \geq \tau(p, q) + \tau(q, r) - \delta$$

που είναι ισοδύναμο με το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 34. Η συνάρτηση $\tau : M \times M \longrightarrow [0, \infty]$ είναι κάτω ημισυνεχής.⁹

Απόδειξη. Έστω $p, q \in M$ με $\tau(p, q) \neq 0$ (αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε) και $q \in I^+(p)$. Θα υποθέσουμε πρώτα ότι $\tau(p, q) \neq \infty$. Αυτό που επιθυμούμε να δείξουμε ότι για κάθε p, q τέτοια και για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε περιοχές U και V των p και q αντίστοιχα τέτοιες ώστε για κάθε $p' \in U$ και για κάθε $q' \in V$

$$\tau(p', q') > \tau(p, q) - \delta.$$

Έστω λοιπόν $\delta > 0$ και α μια χρονοειδής καμπύλη από το p στο q . Πηγαίνουμε στο q και παίρνουμε γύρω από αυτό μια κυρτή κανονική περιοχή C και ένα $q_1 \in C$ ένα σημείο πάνω στην α . Σε ότι ακολουθεί θα συμβολίζουμε με $[r_1, r_2]$ την ακτινική γεωδαισιακή που ενώνει δύο σημεία μέσα στην κυρτή κανονική περιοχή. Παίρνουμε τώρα περιοχή V του q με $V \subset U$ που έχει την ιδιότητα για κάθε $q' \in V$

$$L([q', q]) > L([q_1, q]) - \frac{\delta}{2}$$

Τέτοια περιοχή υπάρχει γιατί στις κυρτές κανονικές περιοχές μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι το μήκος μιας ακτινικής γεωδαισιακής είναι συνεχής συνάρτηση των άκρων της. Επιπλέον, από την πρόταση ??, το $[q_1, q]$ έχει μεγαλύτερο μήκος από το τμήμα της α που ενώνει τα q_1 και q .

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο γύρω από το p βρίσκουμε και εκεί σημείο p_1 και περιοχή U . Τότε θα έχουμε για κάθε καμπύλη α_1 που ενώνει τα σημεία $p' \in U$ και $q' \in V$ ότι

$$L(\alpha_1) > L([p', p]) + \tau(p, q) + L([q', q]) > \tau(p, q) - \delta$$

Για $\tau(p, q) = +\infty$ εργαζόμαστε με ανάλογα επιχειρήματα. $\square$

Πρόταση 35. Αν ο (M, g) είναι ισχυρώς αιτιατός και για κάθε p, q το $J^+(p) \cap J^-(q)$ είναι συμπαγές τότε η συνάρτηση τ είναι συνεχής και πάντοτε πεπερασμένη.

⁹Θυμίζουμε ότι μια $f : (X, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται κάτω ημισυνεχής στο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ανοιχτό $\mathcal{U}$ του x_0 έτσι ώστε

$$f(x) - f(x_0) < \delta \text{ για κάθε } x \in \mathcal{U}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι για $p, q \in M$ με $q \in I^+(p)$ το $\tau(p, q) < +\infty$. Αφού το $J^+(p) \cap J^-(q)$ είναι συμπαγές μπορούμε να βρούμε μια πεπερασμένη του κάλυψη από αιτιακά σύνολα (κοίτα τον ορισμό της ισχυρής αιτιότητας) τα οποία να είναι τέτοια ώστε να μην μπορούν να περιέχουν αιτιακές καμπύλες μεγαλύτερες από μια σταθερά. Κάθε μια καμπύλη επίσης δεν μπορεί να εισέρχεται μια μόνο φορά σε πεπερασμένο το πλήθος τέτοιες περιοχές. Συνεπώς $\tau(p, q) < +\infty$.

Ας υποθέσουμε τώρα προς άτοπο ότι η τ δεν είναι άνω ημισυνεχής¹⁰. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $p, q \in M$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε για κάθε γειτονιά του q να υπάρχει ένα σημείο r σε αυτήν έτσι ώστε

$$\tau(p, r) > \tau(p, q) + \delta$$

Έστω $\{x_n\}_n$ να είναι μια ακολουθία σημείων της πολλαπλότητας που συγκλίνουν στο q χρονοειδώς και τα οποία είναι τέτοια ώστε $\tau(p, x_n) > \tau(p, q) + \delta$ για κάθε $n \leq 0$. Έστω τώρα $\{\lambda_n\}_n$ να είναι ακολουθία καμπύλων ώστε κάθε λ_n να συνδέει το x_n με το p και να ισχύει

$$L(\lambda_n) > \tau(p, q) + \delta$$

(για να πετύχουμε αυτό ενδεχομένως να χρειαστεί να αφαιρέσουμε ένα πεπερασμένο αριθμό όρων της ακολουθίας). Από την πρόταση ?? υπάρχει μια χρονοειδής καμπύλη λ η οποία να διέρχεται από το q και η οποία είναι οριακή καμπύλη για τις λ_n . Ισχυριζόμαστε τώρα τρία πράγματα:

Πρώτον: Αν $\mathcal{U}$ είναι μια αιτιακή περιοχή γύρω από το q τότε η $\lambda \cap \mathcal{U}$ πρέπει να είναι οπωσδήποτε μια μηδενική γεωδαισιακή. Πράγματι, αν δεν ήταν τότε θα μπορούσε να βρεθεί χρονοειδής από τη p στο q οσοδήποτε κοντά στην λ . Τότε θα μπορούσαμε να αλλάξουμε κάποια λ_k η οποία βρίσκεται επίσης πολύ κοντά στην λ ώστε να αποκτήσουμε μια αιτιακή καμπύλη ανάμεσα σε αυτά τα δύο σημεία με μήκος μεγαλύτερο από $\tau(p, q)$ πράγμα άτοπο.

Δεύτερον: Η συνάρτηση $\tau(p, \cdot) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει ασυνέχεια σε κάθε σημείο $x \in \lambda \cap \mathcal{U}$.

Πράγματι, έστω $\{y_n\}_n$ ακολουθία σημείων $y_n \in \lambda_n$ που συγκλίνουν σε κάποιο $x \in \lambda \cap \mathcal{U}$. Επειδή η $\lambda \cap \mathcal{U}$ είναι μηδενική έχουμε ότι $\tau(p, x) = \tau(p, q)$ (εντός του $\mathcal{U}$ το μήκος της λ είναι 0) και άρα $\tau(p, y_n) < \tau(p, x) + \delta$. Συνεπώς έχουμε μια ασυνέχεια τουλάχιστον κατά δ .

Τρίτον: Οι δύο παραπάνω ισχυρισμοί γενικεύονται. Η λ δηλαδή είναι παντού μηδενική γεωδαισιακή και η $\tau(p, \cdot)$ είναι ασυνεχής για κάθε $x \in \lambda$.

¹⁰Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής ακριβώς όταν είναι άνω ημισυνεχής και κάτω ημισυνεχής.

Πράγματι, επαναλαμβάνουμε το ίδιο επιχείρημα για όσες φορές χρειαστεί στα σημεία στα οποία κατοχυρώσαμε την μη συνέχεια της τ θα καταφέρουμε να εξαντλήσουμε όλη η λ .

Σε μια κυρτή κανονική περιοχή του p όμως η τ θα πρέπει να είναι συνεχής και συνεπώς η ασυνέχεια στην οποία καταλήξαμε είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η λ δεν έχει ως οριακό σημείο το p . Ομως παράλληλα θα πρέπει να είναι και μη επεκτάσιμη και άρα είναι αναγκαίο να εξέρχεται του συμπαγούς $J^+(p) \cap J^-(q)$. Αυτό όμως είναι άτοπο από πρόταση ??.

Πρόταση 36. *Αν η πολλαπλότητα (M, g) είναι καθολικά υπερβολική τότε για κάθε $p, q \in M$ υπάρχει μια καμπύλη μέγιστου μήκους που να τα συνδέει.*

Απόδειξη. Από τις προτάσεις ?? και ?? οι καθολικά υπερβολικοί χώροι ικανοποιούν τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, άρα η τ είναι συνεχής. Έστω $p, q \in M$. Θα δείξουμε κατασκευαστικά την ύπαρξη μιας τέτοιας καμπύλης.

Έστω $\mathcal{U}$ να είναι μια αιτιακή περιοχή γύρω από το p η οποία να μη εμπεριέχει το q και έστω ακόμα $r \in J^+(p) \cap J^-(q)$ τέτοιο ώστε η ποσότητα

$$\tau(p, x) + \tau(x, q), \quad x \in \overline{\mathcal{U}}$$

να γίνεται μέγιστη για $x = r$. Φέρουμε την καμπύλη (ας την ονομάσουμε γ). Η σχέση $\tau(p, x) + \tau(x, q) = \tau(p, q)$ ισχύει για όλα τα σημεία της γ μεταξύ p και r . Έστω

$$A = \{r \in \gamma \cap I^-(q) : \tau(p, r) + \tau(r, q) = \tau(p, q)\}$$

$A \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι $A = \gamma \cap I^-(q)$. Πράγματι, αν $s \in A$ και όλα τα σημεία πριν από αυτό είναι στο A και $\mathcal{V}$ μια αιτιακή περιοχή αυτού τότε εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα βρίσκουμε $y \in \overline{\mathcal{V}} \cap J^+(p) \cap J^-(q)$ ώστε η παράσταση

$$\tau(s, x) + \tau(x, q), \quad x \in \overline{\mathcal{V}}$$

να γίνεται μέγιστη για $x = y$. Το y βρίσκεται αναγκαστικά στην γ γιατί διαφορετικά θα έπρεπε να ισχύει

$$\tau(p, y) > \tau(p, s) + \tau(s, y)$$

και άρα τότε

$$\tau(p, y) + \tau(y, q) > \tau(p, s) + \tau(s, y) + \tau(y, q) = \tau(p, s) + \tau(s, q) = \tau(p, q)$$

το οποίο είναι άτοπο.

Έχοντας αυτό μπορούμε να πούμε ότι η γ διέρχεται και από το σημείο q γιατί αν δεν ίσχυε θα έτεμνε το σύνορο $J^+(p) \cap J^-(q)$ (αναγκαστικά επειδή είναι συμπαγές) και μάλιστα σε ένα σημείο z διάφορο του q και σε μια τέτοια περίπτωση θα μπορούσαμε να φτιάξουμε μια αιτιακή καμπύλη από το p στο q διαμέσω του z η οποία να έχει μεγαλύτερο μήκος από $\tau(p, q)$.

Κεφάλαιο 3

Αιτιακές και τοπολογικές δομές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα κεντρικά αποτελέσματα. Εφ' εξής οι χώροι που θα πραγματευόμαστε θα είναι τετραδιάστατες ημι-ρημανιες πολλαπλότητες με δείκτη 1 (Ακριβώς δηλαδή ότι ονομάζουμε χωρόχρονους στην φυσική). Σημειώνουμε εκ των προτέρων ότι γενικά οι παρακάτω προτάσεις δεν γενικεύονται σε άλλες διαστάσεις ακόμη δε και η διάσταση 4 είναι κρίσιμη.

3.1 Οι χρονοειδείς καμπύλες και η τοπολογία της πολλαπλότητας

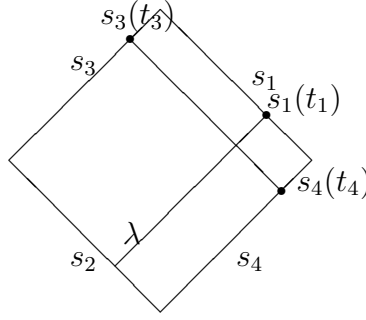
Το πρώτο θεώρημα που θα δείξουμε οφείλεται στον Stephen Hawking, μπορεί να βρεθεί στο [4] και είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακό και μη αναμενόμενο.

Θεώρημα 2. Έστω M μια πολλαπλότητα και $H : M \longrightarrow M$ ομοιομορφισμός με την ιδιότητα να απεικονίζει μηδενικές γεωδαισιακές καμπύλες σε μηδενικές γεωδαισιακές, τότε η H είναι λεία αμφιδιαφόριση.

Απόδειξη. Το σκεπτικό της απόδειξης είναι να ορίσουμε έναν άτλα της M ως προς τον οποίο η H να είναι λεία αμφιδιαφόριση (κάτι που είναι αρκετό για την απόδειξη του θεωρήματος) Έστω $\mathcal{U}$ να είναι μια κυρτή κανονική περιοχή ενός σημείου και $s_i : F_i \longrightarrow \mathcal{U}, i = 1, 2, 3, 4$ γεωδαισιακές καμπύλες του $\mathcal{U}$ ορισμένες σε F_i διαστήματα του $\mathbb{R}$ οι οποίες να ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

1. Για κάθε $t_1 \in F_1$, υπάρχει μια μοναδική μηδενική γεωδαισιακή καμπύλη λ στο $\mathcal{U}$ που ενώνει το σημείο $s_1(t_1)$ με την καμπύλη s_2 .
2. Για κάθε $t_3 \in F_3$ υπάρχει μοναδικό σημείο $q \in \lambda$ τέτοιο ώστε τα q και $s_3(t_3)$ να κοιτονται επί μηδενικής γεωδαισιακής του $\mathcal{U}$.

3. Για κάθε $q \in \lambda$ υπάρχει ένα μοναδικό $t_4 \in F_4$ τέτοιο ώστε τα q και $s_4(t_4)$ να κοιτονται επι μηδενικής γεωδαισιακής του $\mathcal{U}$.
4. Η απεικόνιση $\xi : F_1 \times F_3 \longrightarrow F_4$ για την οποία $\xi(t_1, t_3)$ με τα t_1, t_3 όπως θεωρήθηκαν στις τρεις παραπάνω παραδοχές είναι λεία και είναι τέτοια ώστε τα $\frac{\partial \xi}{\partial t_1}, \frac{\partial \xi}{\partial t_3}$ να είναι μη μηδενικά.



Καμπύλες με αυτές τις προϋποθέσεις υπάρχουν. Αρκεί να σκεφτεί κανείς ότι ικανοποιούνται τετριμμένα στον χώρο Minkowski, με τον τρόπο που παρουσιάζεται στο παραπάνω σχήμα, για τέσσερις συνεπίπεδες γεωδαισιακές που σχηματίζουν παραλληλόγραμμο και μεταφέρονται με τον φυσιολογικό τρόπο στην πολλαπλότητα.

Σύμφωνα με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος τώρα, οι $H(s_i)$ θα είναι τέσσερις μηδενικές γεωδαισιακές στην $H(\mathcal{U})$. Έτσι, μπορούμε να βρούμε τέσσερα μονοπάτια $s'_i : F'_i \longrightarrow H(\mathcal{U})$ που ορίζουν τις ίδιες γεωδαισιακές. Έστω επιπλέον $h_i : F_i \longrightarrow F'_i$ με $h_i = s'^{-1}_i \circ H \circ s_i$. Οι απεικονίσεις h_i είναι συνεχείς και μονότονες. Η ιδιότητα της μονοτονίας προκύπτει από το γεγονός ότι η H , με κατάλληλη επιλογή παραμετροποίησης, διατηρεί ή αντιστρέφει την αιτιακή φορά των μηδενικών γεωδαισιακών. Συνεπώς, από το θεώρημα διαφορισμότητας του Lebesgue, είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμες. Ορίζουμε με ανάλογο τρόπο και $\xi' : F'_1 \times F'_3 \longrightarrow F'_4$. Τότε έχουμε την σχέση

$$\xi'(h_1(t_1), h_3(t_3)) = h_4(\xi(t_1, t_3))$$

την οποία, αν διαφορίσουμε ως προς t_3 έχουμε:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t'_3} \cdot \frac{dh_3}{dt} = \frac{dh_4}{d\xi}(\xi(t_1, t_3)) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t_3}$$

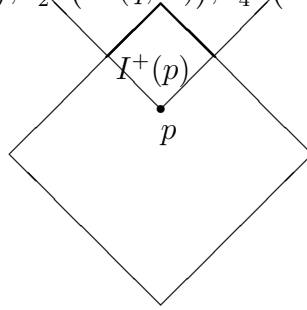
Επειδή τώρα η h_4 είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη, από την ιδιότητα 4 έχουμε ότι η $\frac{dh_3}{dt}$ υπάρχει και είναι συνεχής. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι και οι υπόλοιπες h_i είναι C^1 . Την τελευταία σχέση όμως μπορούμε να την

3.1. ΟΙ ΧΡΟΝΟΕΙΔΕΙΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΚΑΙ Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑΣ 61

διαφορίσουμε απεριόριστα πολλές φορές και να βεβαιωθούμε, με ανάλογα επιχειρήματα, ότι όλες οι h_i είναι στην πραγματικότητα C^∞ . Συνοψίζοντας, η H έχει την ιδιότητα να απεικονίζει με τον φυσιολογικό τρόπο λείες παραμετροποιήσεις σε λείες παραμετροποιήσεις στην εικόνα της

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος τώρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις παρατηρήσεις για να κατασκευάσουμε κατάλληλο άτλα. Για κάθε $p \in M$ θεωρούμε κυρτή κανονική περιοχή U_p εφοδιασμένη με την δομή των τεσσάρων γεωδαισιακών που περιγράψαμε πριν καθώς και $W_p \subset U_p$ μαζί με $\phi_p : W_p \longrightarrow \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε το παρακάτω να έχει νόημα. Για $q \in W_p$

$$\phi_p(q) = (s_1^{-1}(I^+(q, U)), s_2^{-1}(I^+(q, U)), s_4^{-1}(I^+(q, U)), s_4^{-1}(I^+(q, U)))$$



Σχήμα 2

Η οικογένεια $\{W_p, \phi_p\}$ είναι ένας άτλας στον οποίο η παραπάνω ιδιότητα των παραμετροποιήσεων μπορεί να ερμηνευτεί ως λεία διαφορισιμότητα της H . Η ύπαρξη των ανοιχτών περιοχών W_p ώστε η $s_i^{-1}(I^+(q, U))$ μπορεί να εξασφαλιστεί στον χώρο Minkowski και έτσι για μικρές αποστάσεις σε κάθε πολλαπλότητα. $\square$

Κατευθείαν από το θεώρημα μπορούμε να έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα που θα μας είναι πιο χρήσιμο σε ότι ακολουθεί.

Πρόταση 37. Έστω M_1, g_1 και M_2, g_2 να είναι χωρόχρονοι¹ και $f : M_1 \longrightarrow M_2$ ομοιομορφισμός με την επιπλέον απαίτηση η f και η f^{-1} να διατηρούν τις μελλοντικά κατευθυνόμενες συνεχείς μηδενικές γεωδαισιακές. Τότε η f είναι μια λεία σύμμορφη ισομετρία.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης δεν παίζει κανένα ρόλο η ταύτιση της πολλαπλότητας αναχώρησης και πολλαπλότητας κατάληξης (ολά τα επιχειρήματα λειτουργούν και για $H : M_1 \longrightarrow M_2$) και να ανακαλέσουμε την πρόταση σύμφωνα με την οποία δυο πολλαπλότητες είναι σύμμορφα ισομετρικές εαν υπάρχει μια απεικόνιση που διατήρει τους κώνους φωτός. $\square$

¹Κοίτα και σημείωση στην αρχή. Εφεξής λέγοντας χωροχρόνος θα εννοούμε τετραδιάστατη ημι-ρημάνια πολλαπλότητα με δείκτη 1.

Ξεκινάμε τώρα την διαδικασία να αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα της εργασίας μας το οποίο οφείλεται στον David Malament [5] και το οποίο μας επιτρέπει να καθορίσουμε την τοπολογία του χωρόχρονου έχοντας γνώση μονάχα της αιτιακής δομής της. Πιο συγκεκριμένα ο Malament απέδειξε ότι αν μια απεικόνιση διατηρεί τις μελλοντικά κατευθυνόμενες συνεχείς χρονοειδείς καμπύλες, τότε είναι και συνεχής. Συνδιάζοντας μάλιστα αυτό το αποτέλεσμα με το θεώρημα του Hawking θα δείξουμε ότι η αιτιακή δομή καθορίζει και την διαφορική δομή επίσης. Βέβαια για να φτάσουμε έως εκεί θα χρειαστούμε μια σειρά από λήμματα τα οποία ξεκινάμε αμέσως να αποδεικνύουμε.

Σε όλα όσα ακολουθούν εφ' εξής (M, g) (M', g') θα είναι χωρόχρονοι, η $f : M \rightarrow M'$ και η f^{-1} θα έχουν την ιδιότητα να διατηρούν τις μελλοντικά κατευθυνόμενες συνεχείς χρονοειδείς καμπύλες και θα συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$ και $\mathcal{D}'$ να είναι αντίστοιχα τα σημεία ασυνέχειας των f και f^{-1} αντίστοιχα.

Λήμμα 9. Έστω O ανοιχτό υποσύνολο του M και O' κυρτή κανονική περιοχή του M' ώστε $f(O) \subseteq O'$. Τότε $O \subseteq M \setminus \mathcal{D}$.

Απόδειξη. Για κάθε $p \in O$ για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο p αρκεί να δείχθει ότι για κάθε ανοιχτό U' του M' που εμπεριέχει το $f(p)$ το σύνολο $f^{-1}(U' \cap O')$ είναι ανοιχτό στον M . Αυτό θα γίνει μέσω της τοπολογίας Alexandroff. Εφόσον το U' είναι κύρτη κανονική περιοχή, ιδωμένο ως υποπολλαπλότητα το ίδιο είναι ισχυρά αιτιακή πολλαπλότητα, άρα η τοπολογία Alexandroff ταυτίζεται με την σύνηθη τοπολογία. Από την υπόθεσή μας για την f καταλαβαίνουμε ότι είναι $\mathcal{A}$ -συνεχής και άρα το $f^{-1}(U' \cap O')$ είναι $\mathcal{A}$ -ανοιχτό. Κατ'έλλασων λόγο είναι και ανοιχτό με τη συνηθισμένη τοπολογία. $\square$

Λήμμα 10. Δοθέντος ενός $p \in M$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $O \subseteq M$ με $p \in O$ τέτοιο ώστε $I(p, O) \subseteq M \setminus \mathcal{D}$. Δηλαδή σε κάθε σημείο υπάρχει μια χρονοειδή περιοχή που η f είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω O' κυρτή κανονική περιοχή του M' που περιέχει το $f(p)$. Για να κάνουμε κατόπιν χρήση του Λήμματος 1, θα δείξουμε ότι υπάρχει O ανοιχτή περιοχή του p ώστε $f(I^+(p, O)) \subseteq O'$

Πράγματι, έστω πως δεν υπάρχει καμία τέτοια περιοχή, δηλαδή για κάθε O_1 ανοιχτό του p υπάρχει $p_1 \in I^+(p, O_1)$ τέτοιο ώστε $f(p_1) \notin O'$. Το σύνολο $I^-(p_1, O_1)$ είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει εντός του ανοιχτή περιοχή O_2 του p και φυσικά τα σημεία p_1 και p μπορούν να συνδεθούν με συνεχή χρονοειδή καμπύλη του O_1 . Εργαζόμενοι αντίστοιχα στο O_2 βρίσκουμε σημείο p_2 και περιοχή O_3 με $f(p_2) \notin O'$ $O_3 \subseteq I^-(p_2, O_2)$ και με τα p_2 και p_1 μπορούν να συνδεθούν με συνεχή χρονοειδή καμπύλη του O_2 . Συνεχίζοντας με αυτήν την κατασκευή μπορούμε να πάρουμε εγκυβωτισμό ανοιχτών περιοχών $\cdots O_n \subseteq O_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq O_1$ καθώς και ακολουθία σημείων p_n τα οποία μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους με συνεχή

χρονοειδή καμπύλη και επιπλέον $f(p_n) \notin O'$. Αν μάλιστα πάρουμε τις περιοχές έτσι ώστε να συγκλίνουν στο p τότε βρισκόμαστε ενώπιον της εξής άτοπης κατάστασης: Να έχουμε μια συνεχή χρονοειδή καμπύλη να διέρχεται από το p την στιγμή που η εικόνα της μέσω της f να απαγορεύεται να αγγίξει το $f(p)$.

Συνεπώς υπάρχει O_1 ανοιχτή περιοχή του p ώστε $f(I^+(p, O)) \subseteq O'$. Εντελώς ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει O_2 ανοιχτή περιοχή του p ώστε $f(I^-(p, O)) \subseteq O'$. Είναι τότε σαφές ότι για $O = O_1 \cup O_2$ έχουμε ότι $f(I(p, O)) \subseteq O'$ και έτσι από το λήμμα 1 έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 11. *Τόσο η f όσο και η f^{-1} διατηρούν τις συνεχείς αιτιακές καμπύλες.*

Απόδειξη. Έστω $\gamma : I \rightarrow M$ να είναι μια μελλοντικά κατευθυνόμενη και συνεχής αιτιακή καμπύλη. Πέρνουμε τυχόν σημείο $p \in \gamma$ έστω $p = \gamma(t_0)$, και O' μια κυρτή κανονική περιοχή του $f(p)$. Σύμφωνα με τον ορισμό των συνεχών αιτιακών καμπύλων, χρειαζόμαστε υποδιάστημα $I' \subseteq I$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} \text{εάν } t \in I' \text{ και } t < t_0 & \Rightarrow f \circ \gamma(t) < f(p) \text{ στο } O' \\ \text{εάν } t \in I' \text{ και } t_0 < t & \Rightarrow f(p) < f \circ \gamma(t) \text{ στο } O' \end{cases}$$

Όπως ακριβώς στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ανοιχτή περιοχή O με $p \in O$ ώστε

$$f(I(p, O)) \subseteq O'.$$

Πηγαίνοντας αν χρειαστεί σε υποσύνολο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το O είναι κυρτή κανονική περιοχή. Εφαρμόζοντας τώρα τον ορισμό της συνεχούς αιτιακής καμπύλης, επιλέγουμε υποδιάστημα $I_1 \subseteq I$ έτσι ώστε:

$$\begin{cases} \text{εάν } t \in I_1 \text{ και } t < t_0 & \Rightarrow \gamma(t) < p \text{ στο } O \\ \text{εάν } t \in I_1 \text{ και } t_0 < t & \Rightarrow p < \gamma(t) \text{ στο } O \end{cases}$$

Εφόσον τώρα πάρουμε ένα $t \in I_1$ με $\gamma(t) < p$ κάθε χρονοειδής καμπύλη που διέρχεται από το $\gamma(t)$ τέμνει το $I^-(p, O)$. Έπεται ότι κάθε τέτοια καμπύλη που διέρχεται από το $f(\gamma(t))$ τέμνει το $I^-(f(p), O')$. Έτσι έχουμε ότι

$$f(\gamma(t)) \in \overline{I^-(f(p), O')} = J^-(f(p), O')$$

με την τελευταία ισότητα να ισχύει γιατί πήραμε το O' κυρτή κανονική περιοχή. Έτσι εξασφαλίζεται η πρώτη σχέση που επιδιώκαμε. η δεύτερη αποδεικνύεται ανάλογα. $\square$

Λήμμα 12. 1. Τα $\mathcal{D}$ και $\mathcal{D}'$ είναι κλειστά στους M και M' .

2. Για όλα τα $p \in M$ το $p \in \mathcal{D}$ ακριβώς όταν $f(p) \in \mathcal{D}'$

3. Αν $p \in \mathcal{D}$, τότε υπάρχει μια μη επεκτάσιμη μελλοντικά κατευθυνόμενη και συνεχή αιτιακή καμπύλη που διέρχεται από το p και βρίσκεται πλήρως μέσα στο $\mathcal{D}$.

Απόδειξη. 1. Εφαρμόζοντας το λήμμα 2 στο λήμμα 1, έχουμε αμέσως ότι το $M - \mathcal{D}$ είναι ανοίχτο.

2. Αν $p \in \mathcal{D}$ υπάρχει κυρτή κανονική περιοχή O' του $f(p)$ και ακολουθία σημείων $\{p_i\}_i$ που συγκλίνει στο p ενώ η $\{f(p_i)\}_i$ μένει εκτός της O' . Μπορούμε να βρούμε ακολουθίες $\{r_i\}_i$ και $\{s_i\}_i$ που συγκλίνουν χρονολογικά στο p , η πρώτη από πάνω και η δεύτερη από κάτω και για της οποίες υπάρχει μια μελλοντικά κατευθυνόμενη χρονοειδής καμπύλη γ_i που εκκινεί από το r_i , καταλήγει στο s_i , και διέρχεται εκ του p_i . Αυτή η δομή υπάρχει (την χρησιμοποιήσαμε και σε προηγούμενη απόδειξη). Το μοναδικό σημείο συσσώρευσης των καμπύλων είναι το p . Εξαιτίας της αρχικής υπόθεσης που κάναμε για την f οι ακολουθίες $\{f(r_i)\}_i$ και $\{f(s_i)\}_i$ θα πρέπει να συγκλίνουν στο $f(p)$. Έτσι, περνώντας να σε υπακολουθία αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να πούμε ότι όλα τα $f(\gamma_i)$ εκκινούν και καταλήγουν στο O' . Παρόλα αυτά θα πρέπει κάποια στιγμή να το εγκαταλήψουν γιατί $f(p_i) \notin O'$. Από το θεώρημα [??] υπάρχει καμπύλη δ μη επεκτεινόμενη, συνεχώς αιτιακή², και μελλοντικά κατευθυνόμενη η οποία διέρχεται από το $f(p)$ και κάθε σημείο της είναι σημείο συσσώρευσης των $f(\gamma_i)$. Από την στιγμή που το μόνο σημείο συσσώρευσης των γ_i είναι το p , θα πρέπει να ισχύει ότι $\delta - f(p) \subseteq \mathcal{D}'$. Εφόσον όμως το $\mathcal{D}'$ είναι κλειστό, έπεται ότι $\delta \subseteq \mathcal{D}'$. Έτσι, $p \in \mathcal{D}$ και άρα $f(p) \in \mathcal{D}'$. Το αντίστροφο είναι συμμετρικό.

3. Εφαρμόζουμε το τελευταίο επιχείρημα της απόδειξης του 2).

□

Λήμμα 13. *Εαν το $\mathcal{D}$ είναι μη κενό, τότε υπάρχει μια κυρτή κανονική περιοχή $O \subseteq M$ με $\mathcal{D} \cap O$ μη κενό τέτοια ώστε:*

1. Το $\mathcal{D}$ είναι άχρονο στο O .
2. Διαμέσου καθενός $p \in \mathcal{D} \cap O$ διέρχεται μοναδική συνεχής μηδενικής γεωδαισιακή γ_p τέτοια ώστε $\gamma_p \cap O \subseteq \mathcal{D}$.
3. Δοθήσης όποιας συνεχής μηδενικής γεωδαισιακής γ η οποία τέμνει το $\mathcal{D} \cap O$, είτε $\gamma_p \cap O \subseteq \mathcal{D}$ είτε το $\gamma_p \cap O \cap \mathcal{D}$ έχει μόνο ένα στοιχείο.

²Η συνεχής αιτιότητα δεν είναι μέσα στις προϋποθέσεις της πρότασης εκείνης, παρόλα αυτά, μια μικρή της τροποποίηση μπορεί να την κάνει να επεκταθεί και σε μια τέτοια περίπτωση.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το 1). Το 2) προκύπτει άμεσα από το 1) υπό το φώς του προηγούμενου λήμματος. Το 3) προκύπτει άμεσα από το 2) και το γεγονός ότι κάθε κυρτή κανονική περιοχή είναι ισχυρά αιτιακή.

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι δεν υπάρχει τέτοια περιοχή. Έστω O_1 μια κυρτή κανονική περιοχή έτσι ώστε το $p \in \mathcal{D} \cap O_1$ να είναι μη κενό και επιπλέον να έχει συμπαγή κλειστότητα. Πέρνουμε σημεία $r_1, s_1 \in \mathcal{D} \cap O_1$ με $r_1 \ll s_1$ στο O_1 . Μπορούμε να βρούμε, από προηγούμενο λήμμα, κυρτή κανονική περιοχή O_2 του r_1 τέτοια ώστε $O_2 \subset I^-(s_1, O_1)$. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το O_2 και βρίσκουμε $r_2, s_2 \in \mathcal{D} \cap O_2$ με $r_2 \ll s_2$ στο O_2 και φυσικά $s_2 \ll s_1$. Προχωρώντας με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε ακολουθία σημείων $\{s_i\}$ για την οποία έχουμε $s_i \ll s_{i-1}$ στο O_1 και η οποία έχει ένα σημείο συσσώρευσης, έστω s . Εφαρμόζοντας το λήμμα 2 μπορούμε να βρούμε περιοχή O' το s για την οποία $I^+(s, O) \subseteq M - \mathcal{D}$. Αυτό οδηγεί σε αντίφαση διότι τουλάχιστον ένα από τα s_i πρέπει να είναι μέσα στο $I^+(s, O)$. $\square$

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα

Θεώρημα 3. *Έστω (M, g) και (M', g') να είναι χωρόχρονοι και $f : M \rightarrow M'$ μια αφιομοσήμαντη απεικόνιση τέτοια ώστε και η f και η f^{-1} να διατηρούν τις μελλοντικά κατευθυνόμενες χρονοειδείς καμπύλες. Τότε η f είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Για να αποδειχθεί ότι είναι ομοιομορφισμός αρκεί ναδειχθεί ότι το $\mathcal{D}$ είναι κενό. Θα υποθέσουμε το αντίθετο και θα εργαστούμε σε μια γειτονία O όπως στο λήμμα 5 και αντί να διαχειριστούμε ακολουθίες σημείων θα ορίσουμε με βάση αυτές μια ακολουθία μηδενικών γεωδαισιακών. Στον πυρήνα των επιχειρημάτων θα είναι πάντα οι ιδιότητες που μας υπόσχεται το προηγούμενο λήμμα.

Έστω $p \in \mathcal{D} \cap O$ και γ_p όπως στην δεύτερη πρόταση του προηγούμενου λήμματος. Είναι σαφές ότι $I(\gamma_p, O) \subseteq M - \mathcal{D}$. Έστω επίσης ακολουθία $\{p_i\}_i$ που να συγκλίνει στο p και περιοχή O' τέτοια ώστε $f(p) \in O'$ αλλά $f(p_i) \notin O'$ για κάθε i .

Όπως μας επιτρέπει η τρίτη πρόταση του προηγούμενου λήμματος παίρνουμε λ να είναι τυχούσα συνεχής μηδενική γεωδαισιακή (ή ορθότερα τμήμα γεωδαισιακής ή γεωδαισιακή καμπύλη) διάφορη της γ_p που να διέρχεται από το p και η εικόνα της να είναι πλήρως εντός του O' . Για κάθε ένα p_i θεωρούμε γεωδαισιακή καμπύλη λ_i που να διέρχεται από αυτό και παραμένει εντός του O και η οποία να είναι συνεχής μηδενική. Απαιτούμε επίσης οι λ_i να συγκλίνουν στην λ υπό την εξής έννοια: κάθε ανοιχτό που τέμνει την λ να τέμνει και άπειρες το πλήθος λ_i , δηλαδή να είναι αυτό που στο προηγούμενο κεφάλαιο ονομάσαμε καμπύλη σύγκλισης. Τις πέρνουμε επιπλέον αρκετά μικρές ώστε να μην υπάρχει άλλο σημείο εκτός της λ του οποίου κάθε περιοχή να τέμνει άπειρες λ_i . Για να πειστεί ο αναγνώστης για την ύπαρξη τέτοιας οικογένειας ας δει ότι μια τέτοια κατασκευή

είναι σαφές ότι είναι δυνατή στον χώρο Minkowski και οτι κατόπιν μπορεί να περάσει με τον φυσιολογικό τρόπο στην κυρτή περιοχή. Από το προηγούμενο λήμμα μπορούμε να πούμε ότι η τομή $\lambda_i \cap \mathcal{D}$ είναι είτε κενή είτε έχει μόνο ένα σημείο. Υποθέτουμε επίσης χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι όλα τα p_i κοίτονται είτε πάνω στο $\mathcal{D}$ είτε "από την μια πλευρά αυτού". Γράφουμε με λ_i^- και λ^- το κομμάτι των ευθειών αυτών που στην "πλευρά του $\mathcal{D}$ " αυτή. Αυτοί οι τελευταίοι ορισμοί παρότι τους περιγράψαμε διαισθητικά, μπορούν να έχουν και αυστηρή περιγραφή, πράγμα που οφείλεται στην ιδιότητα του χρονικού προσανατολισμού των πολλαπλοτήτων.

Σημειώνουμε επίσης τα εξής: Πρώτον οι λ_i^- συγκλίνουν στην λ^- και κανένα σημείο συσσώρευσης αυτών βρίσκεται εκτός της δεύτερης. Δεύτερον οι $f(\lambda_i^-)$ συγκλίνουν στην $f(\lambda^-)$. Αυτό συμβαίνει γιατί εξ ορισμού η f διατήρει τις χρονοειδείς καμπύλες και, από το λήμμα 6 που θα ακολουθήσει αμέσως μετά, αυτό συνεπάγεται οτι διατηρούνται και οι μηδενικές καμπύλες.

Ισχυριζόμαστε τώρα το εξής: Αν πάρουμε οποιαδήποτε γεωδαισιακή επέκταση της $f(\lambda_i^-)$ και $f(q)$ κάποιο σημείο σε αυτή, τότε $f(q) \in \mathcal{D}'$. Πράγματι, έστω πως όχι, τότε αφού το $f(q)$ είναι σημείο σύγκλισης των $f(\lambda^-)$, το q θα πρέπει να είναι σημείο σύγκλισης των λ_i^- . Αυτό όμως είναι αδύνατον μιας και $q \notin \lambda^-$.

Μετά από όλα αυτά μπορούμε να δείξουμε πως η υπόθεση $\mathcal{D}$ διάφορο του κενού μας οδηγεί σε άτοπο. Αν συμβολίσουμε λ^+ το άλλο μισό γεωδαισιακό τμήμα της λ τότε είτε η γεωδαισιακή επέκταση της $f(\lambda^+)$, είτε γεωδαισιακή επέκταση της $f(\lambda^+)$ σύμφωνα με τα προηγούμενα θα πρέπει να βρίσκεται ολοκληρωτικά μέσα στο $\mathcal{D}'$. Η επιλογή της λ όμως ήταν τυχαία και η f είναι αμφιμονοσήμαντη, συνεπώς έχουμε διακριτές μηδενικές αιτιακές γεωδαισιακές να διέρχονται από το $f(p)$ και να βρίσκονται εντός του $\mathcal{D}'$. Αναγκαστικά όμως οι εικόνες αυτών δια μέσου της f^{-1} είναι μηδενικές αιτιακές γεωδαισιακές του $\mathcal{D}$ και διέρχονται από το p . Αυτό όμως είναι άτοπο από το προηγούμενο λήμμα. $\square$

Τα θεωρήματα των Hawking και Malament μπορούν να συνδιαστούν μεταξύ του με την βοήθεια του εξής λήμματος:

Λήμμα 14. Έστω (M, g) και (M', g') να είναι χωρόχρονοι και $f : M \rightarrow M'$ μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση τέτοια ώστε και η f και η f^{-1} να διατηρούν τις μελλοντικά κατευθυνόμενες συνεχείς χρονοειδείς καμπύλες τότε, τόσο f όσο και η f^{-1} διατηρούν τις μελλοντικά κατευθυνόμενες συνεχείς μηδενικές καμπύλες.

Απόδειξη. Για την απόδειξη κάνουμε την εξής παρατήρηση: Αν μπορέσουμε να εκφράσουμε την ιδιότητα μια καμπύλη να είναι μελλοντικά κατευθυνόμενη συνεχής μηδενική καμπύλη δια μέσω όρων που αφορούν 1) στοιχεία της τοπολογίας της πολλαπλότητας και 2) την ιδιότητα να είναι μια καμπύλη μελλοντικά κατευθυνόμενη, συνεχής και μηδενική καμπύλη τότε θα έχουμε το ζητούμενο. Αυτό μπορεί να συμβεί με την βοήθεια των παρακάτω δυο προφανών γεγονότων:

3.1. ΟΙ ΧΡΟΝΟΕΙΔΕΙΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΚΑΙ Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑΣ 67

1. Αν U ανοιχτό σύνολο και $p, q \in U$ τότε $q \in \partial I^+(p, U)$ ακριβώς όταν για όλες τις μελλοντικά κατευθυνόμενες συνεχείς μηδενικές καμπύλες $\sigma : (0, 1) \rightarrow U$, αν $\sigma(t_0) = q$ για $0 < t_0 < 1$ τότε υπάρχουν t_1 και t_2 με $0 < t_1 < t_0 < t_2 < 1$ τέτοια ώστε $\sigma(t_1) \notin I^+(p, U)$, αλλά $\sigma(t_2) \in I^+(p, U)$.
2. Αν $\gamma : I \rightarrow M$ είναι συνεχής καμπύλη, τότε η γ είναι μελλοντικά κατευθυνόμενη και μηδενική ακριβώς όταν για όλα τα $t_0 \in I$ και όλα τα ανοιχτά σύνολα O που εμπεριέχουν το $\gamma(t_0)$, υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο (η οποία είναι εν προκειμένω η κυρτή κανονική περιοχή) $U \subseteq O$ που εμπεριέχει το $\gamma(t_0)$ τέτοιο ώστε για όλα τα $t_1, t_2 \in I$ με $t_1 < t_2$, αν $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in U$ τότε $\gamma(t_2) \in \partial I^+(\gamma(t_1), U)$.

□

Τα δύο θεωρήματα μαζί μας δίνουν λοιπόν:

Πρόταση 38. Έστω (M, g) και (M', g') να είναι χωρόχρονοι και $f : M \rightarrow M'$ μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση τέτοια ώστε και η f και η f^{-1} να διατηρούν τις μελλοντικά κατευθυνόμενες χρονοειδείς καμπύλες. Τότε η f είναι ομοιομορφισμός, αμφιδιαφόριση και σύμμορφη ισομετρία.

Στην πραγματικότητα μπορούμε να έχουμε ακόμα μια μικρή βελτίωση στο αποτέλεσμα: Στις υποθέσεις, η συνθήκη διατήρησης των μελλοντικά κατευθυνόμενων χρονοειδών καμπύλων μπορεί να αντικατασταθεί από την συνθήκη διατήρησης των παρελθοντικά κατευθυνόμενων χρονοειδών καμπύλων. Το γεγονός αυτό είναι άμεσο αποτέλεσμα του επόμενου λήμματος.

Λήμμα 15. Έστω (M, g) και (M', g') να είναι χωρόχρονοι και $f : M \rightarrow M'$ μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση τέτοια ώστε και η f και η f^{-1} να διατηρούν τις συνεχείς χρονοειδείς καμπύλες τότε ένα από τα παρακάτω συμβαίνει,

1. Τόσο η f όσο και η f^{-1} διατηρούν τις συνεχείς και μελλοντικά κατευθυνόμενες χρονοειδείς καμπύλες ή
2. τόσο η f όσο και η f^{-1} αντιστρέφουν τις συνεχείς και μελλοντικά κατευθυνόμενες χρονοειδείς καμπύλες σε παρελθοντικά κατευθυνόμενες.

Απόδειξη. Η στρατηγική μας στην απόδειξη θα είναι η εξής: πρώτα θα δείξουμε είτε το 1) είτε το 2) ισχύει για τις καμπύλες που διέρχονται από ένα σημείο και κατόπιν θα δείξουμε όλα τα σημεία του χωροχρόνου κάνουν την ίδια επιλογή.

Έστω $p \in M$ ένα σημείο και δυο μελλοντικά κατευθυνόμενες συνεχείς χρονοειδείς καμπύλες γ και σ που διέρχονται από το σημείο και είναι τέτοιες ώστε η $f \circ \gamma$ να είναι μελλοντικά κατευθυνόμενη και $f \circ \sigma$ παρελθοντικά. Έστω γ^- να είναι το "κάτω τμήμα" της γ που έχει σαν μελλοντικό τελικό σημείο το p και

σ^+ να είναι το "πάνω τμήμα" της σ που έχει ως παρελθοντικό τελικό σημείο το p . Η ένωση των γ^- και σ^+ είναι μια συνεχής χρονοειδής καμπύλη της οποίας όμως η εικόνα μέσω της f δεν είναι συνεχής χρονοειδής. Αυτό το τελευταίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Συνεπώς κάθε ένα σημείο "επιλέγει" για της καμπύλες που διέρχονται από αυτό να ισχύει είτε το 1) είτε το 2).

Ας συμβολίσουμε με A τα σημεία που επιλέγουν το 1) και με B τα σημεία που επιλέγουν το 2). Αν αποδείξουμε ότι τόσο το σύνολο A όσο και το σύνολο B είναι ανοιχτά, τότε από την συνεκτικότητα του χωροχρόνου ένα από τα δυο είναι ίσο με M και το άλλο είναι κενό.

Έστω $p \in A$ και $p \ll q$ για κάποιο q . Παίρνουμε ανοιχτό σύνολο O με $p \in O \subset I^-(q)$ και γ να είναι μια μελλοντικά κατευθυνόμενη συνεχής χρονοειδής καμπύλη που συνδέει το p και το q . Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει σημείο $r \in O \cap B$. Αν σ είναι μια μελλοντικά κατευθυνόμενη συνεχής χρονοειδής καμπύλη που συνδέει το r και το p τότε η ένωσή της με την καμπύλη γ είναι μια συνεχής χρονοειδής καμπύλη ενώ η εικόνα της μέσω της f δεν είναι. Καταλήξαμε συνεπώς σε άτοπο ξανά. $\square$

Ερχόμαστε τώρα αντιμέτωποι με το ερώτημα πως μπορεί να συνδεθεί η αιτιακή δομή του χωροχρόνου με την τοπολογική. Το ζήτημα εδώ είναι αν μπορούμε να ανάγουμε την μια στην άλλη. Ο Malament, στο ίδιο άρθρο, χρησιμοποίησε τα παραπάνω θεωρήματα για να δώσει μια, κατά κάποιο τρόπο, απάντηση. Αυτήν την απάντηση θα παρουσιάσουμε τώρα. Πρώτα ένας ορισμός και ένα λήμμα.

Ορισμός 29. Έστω (M, g) και (M', g') να είναι χωροχρόνοι μια απεικόνιση $f : M \rightarrow M'$ λέγεται **αιτιακός ισομορφισμός** όταν είναι αμφιμονοσήμαντη και τέτοια ώστε για όλα τα $x, y \in M$ με $x \ll y$ ισχύει $f(x) \ll f(y)$.

Λήμμα 16. Έστω (M, g) και (M', g') να είναι μελλοντικά και παρελθοντικά διακρίνοντες χωροχρόνοι και $f : M \rightarrow M'$ ένας αιτιακός αυτομορφισμός. Τότε, τόσο η f όσο και η f^{-1} διατηρούν τις μελλοντικά κατευθυνόμενες, συνεχείς χρονοειδείς καμπύλες.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η $\gamma : I \rightarrow M$ είναι τυχούσα μελλοντικά κατευθυνόμενη συνεχής χρονοειδής καμπύλη. Εάν $p = \gamma(t_0)$ με $t_0 \in I$ και O' μια κυρτή κανονική περιοχή του $f(p)$ τότε, θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει υποδιάστημα $I' \subseteq I$ με $t_0 \in I'$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} t \in I' \text{ και } t < t_0 &\Rightarrow (f \circ \gamma)(t) \ll f(p) \text{ στο } O' \\ t \in I' \text{ και } t_0 < t &\Rightarrow f(p) \ll (f \circ \gamma)(t) \text{ στο } O' \end{aligned}$$

Από την στιγμή τώρα που ο (M', g') είναι μελλοντικά διακρίνων χωροχρόνος, υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο U' με $f(p) \in U' \subseteq O'$ τέτοιο ώστε καμία μελλοντικά

κατευθυνόμενη χρονοειδής καμπύλη που εξέρχεται αυτού να μην μπορεί να ξαναμπεί πάλι μέσα. Έστω επίσης $f(q)$ να είναι οποιοδήποτε σημείο του $I^+(f(p), U')$. Από την στιγμή που $f(p) \ll f(q)$ θα πρέπει να έχουμε $p \ll q$ και συνεπώς θα πρέπει να υπάρχει μια ανοιχτή κανονική περιοχή O του p με $O \subseteq I^-(q)$. Άρα, από τον ορισμό της συνεχούς χρονοειδούς καμπύλης, θα πρέπει να υπάρχει $I_1 \subseteq I$ με $t_0 \in I_1$ τέτοια ώστε:

$$t \in I_1 \text{ και } t_0 < t \Rightarrow p \ll \gamma(t) \text{ στο } O.$$

Ισχυζόμαστε τώρα ότι ισχύει:

$$p \ll \gamma(t) \text{ στο } O \Rightarrow f(p) \ll (f \circ \gamma)(t) \text{ στο } O'.$$

Πράγματι, αν $p \ll \gamma(t)$ στο O τότε έχουμε ότι $p \ll \gamma(t) \ll q$. Έτσι $f(p) \ll (f \circ \gamma)(t) \ll f(q)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια μελλοντικά κατευθυνόμενη λεία χρονοειδής καμπύλη η οποία διέρχεται διαμέσω των $f(p)$, $(f \circ \gamma)$ και $f(q)$ στη σειρά. Γνωρίζουμε όμως ότι αυτή η καμπύλη δεν μπορεί να βγει, μεταξύ των σημείων $f(p)$ και $f(q)$, εκτός του U' . Άρα θα πρέπει να έχουμε

$$f \circ \gamma \in I^+(f(p), U') \subseteq I^+(f(p), O')$$

που είναι ακριβώς το μισό αυτού που θέλουμε να αποδείξουμε.

Για το άλλο μισό χρησιμοποιούμε την συνθήκη της παρελθοντικής διαχωρισιμότητας και ανάλογα επιχειρήματα. Χρειάζεται μονάχα μια προσοχή στην επιλογή των διαστημάτων. Αν I_2 είναι το διάστημα που καταληγούμε στο σκέλος της απόδειξης που παραλείψαμε τότε το τελικό διάστημα που κάνει την δουλειά είναι το

$$I' = \{t \in I_1 : t \geq t_0\} \cup \{t \in I_2 : t \leq t_0\}$$

□

Άμεσα από το λήμμα προκύπτει το θεώρημα για το οποίο κάναμε λόγο νωρίτερα.

Θεώρημα 4. Έστω (M, g) και (M', g') να είναι μελλοντικά και παρελθοντικά διακρίνοντες χωροχρόνοι και $f : M \rightarrow M'$ ένας αιτιακός αυτομορφισμός. Τότε η f είναι ομοιομορφισμός, λεία αμφιδιαφόριση και σύμμορφη ισομετρία.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από το λήμμα 8 και την πρόταση 2. □

3.2 Η $\mathcal{P}$ -τοπολογία

Θα περιγράψουμε και θα δώσουμε τις βασικές ιδιότητες μιας νέας τοπολογίας για τον χωροχρόνο, της $\mathcal{P}$ -τοπολογίας την οποία εισηγήθηκαν οι Hawking ,

Ellis και McCarthy [4]. Η τοπολογία αυτή διαφέρει από την συνήθη τοπολογία του χωροχρόνου, την τοπολογία της πολλαπλότητας δηλαδή, την οποία θα την ονομάζουμε εφεξής $\mathcal{M}$ -τοπολογία.

Σε όλα όσα ακολουθούν θα θεωρούμε ότι όλες οι καμπύλες ορίζονται σε ένα συνεκτικό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και εμπεριέχουν όλα τα τελικά σημεία τους.

Ορισμός 30. Σε ένα χωροχρόνο M ορίζουμε την $\mathcal{P}$ -τοπολογία να είναι η μικρότερη τοπολογία που ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα: Για κάθε συνεχή χρονοειδή καμπύλη $\gamma : I \rightarrow M$ η επαγόμενη $\mathcal{P}$ -τοπολογία στο $\gamma(I)$ να συμπίπτει με την επαγόμενη $\mathcal{M}$ -τοπολογία.

Αυτό σημαίνει ότι ένα σύνολο $E \subset M$ είναι $\mathcal{P}$ -ανοιχτό ακριβώς όταν για κάθε χρονοειδή καμπύλη γ υπάρχει ένα $\mathcal{M}$ -ανοιχτό σύνολο O τέτοιο ώστε

$$E \cap \gamma = O \cap \gamma.$$

Είναι σαφές ότι κάθε $\mathcal{M}$ -ανοιχτό σύνολο είναι και $\mathcal{P}$ -ανοιχτό όμως, όπως θα δείξουμε αμέσως παρακάτω, το αντίστροφο δεν ισχύει.

Σε ότι ακολουθεί χρησιμοποιώντας την ορολογία **καμπύλη** θα εννοούμε και την εικόνα μιας καμπύλης ως υποσύνολο της πολλαπλότητας. Λέγοντας **μονοπάτι** θα αναφερόμαστε στην καμπύλη ως συνάρτηση.

Πρόταση 39. Έστω $\gamma : I \rightarrow M$ ένα μονοπάτι. Αν το γ είναι $\mathcal{P}$ -συνεχές τότε είναι και $\mathcal{M}$ -συνεχές. Αν είναι χρονοειδές τότε είναι και $\mathcal{P}$ -συνεχές.

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος είναι άμεσο από την προηγούμενη παρατήρηση. Για το δεύτερο μέρος παρατηρούμε ότι αν το σύνολο $E \in \mathcal{P}$ τότε $E \cap \gamma = O \cap \gamma$ για κάποιο $O \in \mathcal{M}$. Έτσι

$$\gamma^{-1}(E) = \gamma^{-1}(E \cap \gamma) = \gamma^{-1}(O \cap \gamma) = \gamma^{-1}(O).$$

Από την στιγμή όμως που το γ είναι χρονοειδές είναι (εξ ορισμού) και συνεχές, άρα το $\gamma^{-1}(E) = \gamma^{-1}(O)$ είναι ανοιχτό. $\square$

Πρόταση 40. Τα παρακάτω συνόλα

$$K(p, U) = \{p\} \cup I^+(p, U) \cup I^-(p, U),$$

$$L_U(p, \epsilon) = K(p, U) \cap \exp_p(B_{\mathbb{R}^4}(0, 1))$$

είναι $\mathcal{P}$ -ανοιχτά για κάθε $p \in M$ και $\epsilon > 0$.

Απόδειξη. Έστω γ να είναι τυχούσα χρονοειδής καμπύλη και $p \in \gamma$, τότε πρέπει να ισχύει ότι $\gamma \subset K(p)$ και άρα $\gamma \cap K(p) = \gamma \cap M$. Αν πάρουμε $p \notin \gamma$ τότε $\gamma \cap K(p) = \gamma \cap (I^+(p) \cup I^-(p))$. Και στις δύο περιπτώσεις $\gamma \cap K(p) = \gamma \cap O$ για κάποιο $\mathcal{M}$ -ανοιχτό σύνολο O . Η απόδειξη για το $K(p, U)$ είναι όμοια. Η απόδειξη για το δεύτερο σύνολο είναι άμεση αν θυμηθεί κανείς ότι το $\exp_p(B_{\mathbb{R}^4}(0, 1))$ είναι $\mathcal{M}$ -ανοιχτό και άρα είναι επίσης και $\mathcal{P}$ -ανοιχτό. $\square$

Η παράπανω πρόταση έχει ως πόρισμα ότι η $\mathcal{P}$ -τοπολογία είναι γνήσια μεγαλύτερη της $\mathcal{M}$ -τοπολογίας. Το $p \in K(p)$ για παράδειγμα δεν έχει καμία $\mathcal{M}$ -ανοιχτή περιοχή εντός του $K(p)$. Συνεχίζουμε με την εξαγωγή των βασικών ιδιοτήτων της νέας τοπολογίας. Θα δώσουμε τώρα μια βάση για αυτή.

Πρόταση 41. Τα σύνολα της μορφής $L_U(p, \epsilon)$ συγκροτούν μια βάση για την τοπολογία $\mathcal{P}$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι σε κάθε $\mathcal{P}$ -ανοιχτό σύνολο E , για κάθε $p \in E$ υπάρχει μια γειτονία $L_U(p, \epsilon)$ που εμπεριέχεται πλήρως στο E . Ας υποθέσουμε ότι αυτό είναι λανθασμένο, τότε υπάρχει μια κυρτή κανονική περιοχή U του p για την οποία για κάθε μπάλα $B_U(p, \epsilon)$ και κάθε αντίστοιχο $L_U(p, \epsilon)$ υπάρχει ένα $q \in L_U(p, \epsilon)$ με $q \notin E$. Έστω $L_U(p, \epsilon_1)$ και q_1 να είναι τέτοια. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q_1 \in I^+(p, U)$ (αν όχι τότε όλα τα σημεία αυτά βρίσκονται στο $I^-(p, U)$ και μπορούμε να συνεχίσουμε την απόδειξη με εντελώς συμμετρικό τρόπο). Από την στιγμή που $p \in I^-(q_1, U)$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με $B_U(p, \delta) \subset I^-(q_1, U)$. Πέρνουμε ϵ_2 να είναι θετικός αριθμός με $\epsilon_2 \leq \min(\delta, \frac{1}{2}\epsilon_1)$

Υπάρχει τώρα ένα $q_2 \in L_U(p, \epsilon_2)$ με $q_2 \notin E$ το οποίο μπορούμε να το πάρουμε όπως πριν $q_2 \in I^+(p, U)$. Συνεχίζουμε παίρνοντας $\epsilon_3 \leq \frac{1}{2}\epsilon_2$ και ανάλογο $q_3 \in L_U(p, \epsilon_3)$. Συνεχίζοντας επαγωγικά κατασκευάζουμε ακολουθίες $\{\epsilon_n\}_n$ και $\{q_n\}_n$ τέτοιές ώστε $\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n \leq \frac{1}{2^n}\epsilon_1$ και $q_n \in L_U(p, \epsilon_n)$.

Η ακολουθία $\{q_n\}_n$ έχει την ιδιότητα να βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο $I^+(p, U)$ αλλά εκτός του E και τα διαδοχικά σημεία q_n και q_{n+1} μπορούν να συνδεθούν με μια χρονοειδή, γεωδαισιακή καμπύλη. Έστω γ η καμπύλη που προκύπτει αν συνδέσουμε (κολλήσουμε τη μια δίπλα στην άλλη δηλαδή) αυτές τις καμπύλες. Επιπλέον η $\{q_n\}_n$ συγκλίνει στο p άρα την γ μπορούμε να την πάρουμε έτσι ώστε να διέρχεται και από εκεί. Από εδώ εύκολα οδηγούμαστε σε άτοπο. Από την στιγμή που το E είναι $\mathcal{P}$ -ανοιχτό σύνολο υπάρχει $\mathcal{M}$ -ανοιχτό σύνολο O ώστε $E \cap \gamma = O \cap \gamma$. Όμως $\{q_n\}_n \not\subseteq E$ και άρα $\{q_n\}_n \not\subseteq E \cap \gamma = O \cap \gamma$ και άρα $\{q_n\}_n \subseteq M \setminus (O \cap \gamma) = (M \setminus O) \cup (M \setminus \gamma)$. Αλλά $\{q_n\}_n \subset \gamma$, έτσι $\{q_n\}_n \not\subseteq M \setminus \gamma$ συνεπώς $\{q_n\}_n \subset O$.

Όμως το $M \setminus O$ είναι κλειστό και άρα το σημείο σύγκλισης της $\{q_n\}_n$ ανήκει σε αυτό, δηλαδή $p \notin O$. Αυτό συνεπάγεται ότι $p \notin O \cap \gamma = E \cap \gamma$ κάτι άτοπο γιατί το p ανήκει τόσο στο E όσο και στο γ . $\square$

Διακόπτουμε λίγο την ροή αποτελεσμάτων για την νέα τοπολογία για να δώσουμε δύο ενδιαφέροντα και χρήσιμα λήμματα.

Λήμμα 17. Μια συνεχής χρονοειδής καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow M$ είναι είτε μελλοντικά κατευθυνόμενη είτε παρελθοντικά κατευθυνόμενη χρονοειδής συνεχής καμπύλη.

Απόδειξη. Έστω $I' \subset I$ και U κυρτή κανονική περιοχή γύρω από ένα σημείο $\gamma(t_0) = q$ όπως στον ορισμό της συνεχούς χρονοειδούς καμπύλης. Ας υποθέσουμε πως στο $\gamma(t_0)$ η καμπύλη είναι μελλοντικά κατευθυνόμενη και υπάρχει ένα σημείο $t_1 > t_0$ στο οποίο να είναι παρελθοντικά κατευθυνόμενη. Εφαρμόζοντας κατα μήκος της $\gamma|_{[t_0, t_1]}$ την x^0 (την πρώτη συντεταγμένη των κανονικών συντεταγμένων της πολλαπλότητας) καταλήγουμε σε άτοπο γιατί η x^0 έχει την ιδιότητα να είναι σε κάθε σημείο του $I^+(q, U)$ να παίρνει μεγαλύτερη τιμή από ότι στο q . $\square$

Λήμμα 18. Αν η $\gamma : I \longrightarrow M$ είναι μια συνεχής καμπύλη η οποία είναι χρονοειδής σε κάθε $t_0 \in \text{int} I$ τότε είναι μια μελλοντικά ή παρελθοντικά κατευθυνόμενη συνεχής χρονοειδής καμπύλη σε όλο το I , δηλαδή και στα τελικά της σημεία.

Απόδειξη. Έστω $q = \gamma(t_1)$ να είναι ένα παρελθοντικό τελικό σημείο. Έστω $\mathcal{U}$ μια κυρτή κανονική περιοχή του. Έστω $t_2 > t_1$ με $\gamma(t_2) \in \mathcal{U}$, τότε $\gamma((t_1, t_2)) \subset I^-(\gamma(t_2), \mathcal{U})$. Έπετε από συνέχεια $q \in \text{cl} I^-(\gamma(t_2), \mathcal{U}) = J^-(\gamma(t_2), \mathcal{U})$. Έτσι $\gamma(t_2) \in J^+(q, \mathcal{U})$. Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να βρούμε $t_3 \in (t_1, t_2)$ τέτοιο ώστε $\gamma(t_3) \in J^+(q, \mathcal{U}) \cap I^-(\gamma(t_2), \mathcal{U})$ και άρα έτσι από πρόταση ?? $q \ll \gamma(t_2)$. $\square$

Από τα παραπάνω βγαίνει άμεσα το συμπέρασμα ότι μια συνεχής χρονοειδής καμπύλη είναι πάντα τοπικά ένα προς ένα. Αυτό είναι το στοιχείο που θα χρησιμοποιήσουμε σε ότι ακολουθεί.

Επόμενος στόχος μας είναι να χαρακτηρίσουμε πλήρως τις $\mathcal{P}$ -συνεχείς καμπύλες. Θα δείξουμε ότι είναι ακριβώς τα μονοπάτια Feynman που θα ορίσουμε αμέσως.

Ορισμός 31. Μία καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow M$ θα ονομάζεται **μονοπάτι Feynman** αν για κάθε $t_0 \in I$ υπάρχει $I' \subseteq I$ και μια κυρτή κανονική περιοχή $\mathcal{U}$ του $p = \gamma(t_0)$ ώστε

$$\gamma(I') \subset K(p, \mathcal{U}) = \{p\} \cup I^+(p, \mathcal{U}) \cup I^-(p, \mathcal{U}).$$

θα ονομάζεται επιπλέον **τμήμα Feynman** αν είναι τοπικά ένα προς ένα.

Για τα τμήματα Feynman μπορούμε να παρατηρήσουμε δύο πράγματα. Πρώτον κάθε χρονοειδής καμπύλη είναι τμήμα Feynman άλλα όχι αντιστρόφως. Δεύτερον αν ένα τμήμα Feynman είναι ένα προς ένα και συνεχές σε ένα συνεκτικό W τότε είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι είτε $\gamma(I) \subset I^+(p, \mathcal{U}) \cup \{p\}$ είτε $\gamma(I) \subset I^-(p, \mathcal{U}) \cup \{p\}$.

Πρόταση 42. Μια καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow M$ είναι $\mathcal{P}$ -συνεχής ακριβώς όταν είναι μονοπάτι Feynman.

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι το γ είναι ένα μονοπάτι Feynman, τότε πρέπει να δείξουμε πως για κάθε $t_0 \in I$ η αντίστροφη εικόνα κάθε $\mathcal{P}$ -γειτονιάς του $\gamma(t_0) = p$ είναι ανοιχτό σύνολο. Έστω $\mathcal{U}$ μια κυρτή κανονική τέτοια γειτονιά και $\{L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)\}_{\epsilon}$ μια βάση περιοχών του $\gamma(t_0)$. Τότε:

$$\gamma^{-1}(L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)) = \gamma^{-1}(K(p, \mathcal{U}) \cap B_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)) = \gamma^{-1}(K(p, \mathcal{U})) \cap \gamma^{-1}(B_{\mathcal{U}}(p, \epsilon))$$

Επειδή όμως το $\gamma^{-1}(K(p, \mathcal{U}))$ περιέχει μια ανοιχτή περιοχή του t_0 και το $\gamma^{-1}(B_{\mathcal{U}}(p, \epsilon))$ είναι ανοιχτό συνεπάγεται ότι η γ είναι $\mathcal{P}$ -συνεχής.

Για το αντίστροφο ας υποθέσουμε ότι η γ είναι $\mathcal{P}$ -συνεχής. Τότε αν $\mathcal{U}$ μια κυρτή κανονική περιοχή του p το $K(p, \mathcal{U})$ είναι $\mathcal{P}$ -περιοχή του p . Έπεται ότι $\gamma^{-1}(K(p, \mathcal{U}))$ είναι επίσης ανοιχτή περιοχή (του $t_0 \in I$ αυτή τη φορά) και άρα μπορούμε να βρούμε ανοιχτό διάστημα I' του t_0 ώστε $\gamma(I') \subset K(p, \mathcal{U})$. Από αυτό και το πρώτο λήμμα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Μπορούμε τώρα να εξάγουμε εύκολα κάποια συμπεράσματα για τις ιδιότητες της τοπολογίας $\mathcal{P}$.

- Η $\mathcal{P}$ είναι πρώτη αριθμήσιμη γιατί τα σύνολα $L_{\mathcal{U}}(p, \frac{1}{n})$ είναι μια βάση περιοχών.
- Τα σύνολα της μορφής $K(p, \mathcal{U})$, $I^+(p, \mathcal{U})$, $I^-(p, \mathcal{U})$ και $L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)$ είναι path connected άρα η τοπολογία είναι τοπικά path connected.
- Είναι τοπολογία Hausdorff γιατί είναι ισχυρότερη της $\mathcal{M}$ η οποία είναι Hausdorff.
- Μπορεί ναδειχθεί ότι επιπλέον είναι και καθολικά path connected. Αυτό συμβαίνει γιατί η τοπολογία $\mathcal{M}$ είναι path connected και κάθε ένα συνεχές μονοπάτι μπορεί να προσεγγιστεί από ένα μονοπάτι Feynman.

Πρόταση 43.

$$\overline{L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)}^{\mathcal{P}} = \overline{L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)}^{\mathcal{M}} \setminus (\partial_{\mathcal{M}} B_{\mathcal{U}}(p, \epsilon) \cap \partial_{\mathcal{M}} K(p, \mathcal{U}))$$

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι $\overline{L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)}^{\mathcal{P}} \subseteq \overline{L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)}^{\mathcal{M}}$ από την στιγμή που η $\mathcal{P}$ είναι μεγαλύτερη της $\mathcal{M}$. Τα σημεία $q \in \partial_{\mathcal{M}} B_{\mathcal{U}}(p, \epsilon) \cap \partial_{\mathcal{M}} K(p, \mathcal{U})$ είναι τέτοια ώστε να έχουν $\mathcal{P}$ -περιοχές της μορφής $L_{\mathcal{U}}(q, \frac{\epsilon}{2})$ οι οποίες να μην τέμνουν το $L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)$ (μια ματιά στην περίπτωση του χώρου Minkowski μπορεί να πείσει τον αναγνώστη επ' αυτού). Έτσι έχουμε ότι

$$\overline{L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)}^{\mathcal{P}} \subseteq \overline{L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)}^{\mathcal{M}} \setminus (\partial_{\mathcal{M}} B_{\mathcal{U}}(p, \epsilon) \cap \partial_{\mathcal{M}} K(p, \mathcal{U}))$$

Η άλλη φορά του εγκλεισμού ισχύει με τρόπο σχεδόν προφανή. $\square$

Ολοκληρώνουμε τον τοπολογικό χαρακτηρισμό της τοπολογίας με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 44. *Η $\mathcal{P}$ -τοπολογία δεν είναι τοπικά συμπαγής, παρασυμπαγής, κανονική (T_3) ή φυσιολογική (T_4).*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι δεν είναι κανονική. Ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: Ένας χώρος X είναι κανονικός ακριβώς όταν για κάθε $x \in X$ και κάθε κλειστό σύνολο $F \subset X$ με $x \notin F$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή V του x ώστε $\bar{V} \cap F = \emptyset$. ([14], σελ 260). Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση όμως για $F = \overline{L_{\mathcal{U}}(p, \epsilon)}^{\mathcal{P}}$ τα $x \in \partial_{\mathcal{M}} B_{\mathcal{U}}(p, \epsilon) \cap \partial_{\mathcal{M}} K(p, \mathcal{U})$ δεν ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα.

Άμεσα έπεται ότι δεν είναι και φυσιολογική η τοπολογία γιατί όποτε ένας χώρος είναι T_4 και T_2 τότε συνεπάγεται ([14], σελ 263) ότι είναι και T_3 πράγμα άτοπο.

Επιπλέον δεν μπορεί να είναι και παρασυμπαγής γιατί όλοι οι παρασυμπαγείς χώροι είναι φυσιολογικοί (N[14], σελ 404).

Τέλος δεν είναι τοπικά συμπαγής γιατί κάθε τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff είναι τελείως κανονικός ($T_{3/4}$) ([14], σελ 398) και κάθε τελείως κανονικός χώρος είναι κανονικός ([14], σελ 365). $\square$

Για την $\mathcal{P}$ -τοπολογία λοιπόν ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει όλες τις ιδιότητες που αποδείξαμε μέχρι τώρα.

ισχύει	δεν ισχύει
Hausdorff	κανονικός
πρώτα αριθμήσιμος	φυσιολογικός
διαχωρίσιμος	παρασυμπαγής
path connected	τοπικά συμπαγής
τοπικά path connected	
συνεκτικός	

Σειρά τώρα έχει να καταπιαστούμε με το πως συμβιώνουν η $\mathcal{P}$ -τοπολογία και η αιτιακή δομή. Συγκεκριμένα θα επιδιώξουμε πρώτα να καθορίσουμε τις χρονοειδείς καμπύλες με όρους που αναφέρονται στην τοπολογία. Αυτό θα μας φανερώσει μια βαθιά συνάφεια μεταξύ της αιτιακής δομής και της νέας τοπολογίας. Να σημειώσουμε ότι είναι αδύνατον να έχουμε $\mathcal{M}$ -τοπολογικό ορισμό μιας χρονοειδούς καμπύλης. Ξεκινάμε με ένα ορισμό.

Ορισμός 32. *Μια καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow M$ θα ονομάζεται **κανονική** όταν*

1. *Είναι $\mathcal{P}$ -συνεχής και τοπικά ένα προς ένα*
2. *Για κάθε $t_0 \in I$ υπάρχει μια συνεκτική περιοχή I' του I και μια $\mathcal{P}$ -γειτονιά Π του $p = \gamma(t_0)$ τέτοια ώστε αν $\mathcal{U}$ μια περιοχή όπως στον ορισμό των μονοπατιών Feynman τότε:*

- $\gamma(U) \subset \Pi$
- Οποτεδήποτε $t_0 \in \text{int}I$ και $a, b \in U$ με $a < t_0 < b$ κάθε $\mathcal{P}$ -συνεχής καμπύλη του Π που ενώνει τα σημεία $\gamma(a)$ και $\gamma(b)$ διέρχεται από το p .

Έχουμε κατευθείαν την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 45. Οι $\mathcal{P}$ -ομοιομορφισμοί απεικονίζουν κανονικές καμπύλες σε καμπύλες.

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης είναι προφανής αν πατατηρήσει κανείς ότι όλοι οι όροι που εμπλέκονται στον ορισμό είναι όροι που αφορούν την τοπολογία και αν μέσω μιας απεικόνισης η τοπολογία διατηρήεται τότε θα διατηρήεται και η ιδιότητα μιας καμπύλης να είναι κανονική. $\square$

Οι κανονικές καμπύλες είναι ακριβώς οι χρονοειδής

Πρόταση 46. Μια συνεχής καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow M$ είναι χρονοειδής αν, και μόνο αν είναι κανονική.

Απόδειξη. Έστω ότι η γ είναι χρονοειδής. Μπορούμε να υποθέσουμε (λόγω του προηγούμενου λήμματος) ότι είναι μελλοντικά κατευθυνόμενη. Έπεται ότι είναι $\mathcal{P}$ -συνεχής και τοπικά ένα προς ένα από τη στιγμή που είναι $\mathcal{M}$ -συνεχής. Έτσι έχουμε εξασφαλίσει το πρώτο μέρος του ορισμού. Έστω $t_0 \in \text{int}I$, $I' \subset I$ και $\mathcal{U} \subset M$ όπως στον ορισμό των χρονοειδών καμπύλων. Θέτουμε $\Pi = K(p, \mathcal{U})$ όπου $p = \gamma(t_0)$. και έχουμε $\gamma(\mathcal{U}) \subset \Pi$. Έστω ακόμα $a, b \in U$ με $a < t_0 < b$. Αφού η γ είναι μελλοντικά κατευθυνόμενη και χρονοειδής $\gamma(a) \in I^-(p, \mathcal{U})$ και $\gamma(b) \in I^+(p, \mathcal{U})$. Έστω τώρα $\psi : [0, 1] \longrightarrow \Pi$ να είναι μια $\mathcal{P}$ -συνεχής καμπύλη με $\psi(0) = \gamma(a)$ και $\psi(1) = \gamma(b)$. Λόγω συνέχειας το $\psi([0, 1])$ είναι συνεκτικό. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $p \notin \psi([0, 1])$ τότε $\psi([0, 1]) \subset I^+(p, \mathcal{U}) \cup I^-(p, \mathcal{U})$, δηλαδή τέμνει δύο ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα. Άτοπο λόγω συνεκτικότητας. Έτσι $p \in \psi([0, 1])$. Εξασφαλίζουμε με αυτό τον τρόπο και το δεύτερο κομμάτι του ορισμού της κανονικής καμπύλης. Μπορούμε να δουλέψουμε ανάλογα και για παρελθοντικά κατευθυνόμενη καμπύλη.

Για το αντίστροφο τώρα. Έστω γ μια κανονική καμπύλη και Π η προβλεπόμενη από τον ορισμό γειτονιά. Από την στιγμή που η γ είναι $\mathcal{P}$ -συνεχής είναι και $\mathcal{M}$ -συνεχής. Το p έχει μια $\mathcal{P}$ -γειτονιά της μορφής $L_{\mathcal{U}'}(p, \epsilon) \subset \Pi$. Επιλέγουμε μια κυρτή κανονική περιοχή $\mathcal{U} \subset B_{\mathcal{U}'}(p, \epsilon)$ του p . Λόγω $\mathcal{P}$ -συνέχειας η $\gamma^{-1}(K(p, \mathcal{U}))$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του t_0 . Έστω $I' \subset \gamma^{-1}(K(p, \mathcal{U}))$ μια συνεκτική περιοχή του t_0 στην οποία η καμπύλη είναι ένα προς ένα (υπάρχει τέτοια περιοχή από τον ορισμό). Φυσικά $\gamma(I') \subset K(p, \mathcal{U})$. Υποθέτουμε επίσης ότι $t_0 \in \text{int}I'$ και επιλέγουμε $a, b \in I'$ με $a < t_0 < b$. Χάρη στο μονοσήμαντο της απεικόνισης $\gamma(a), \gamma(b) \in I^+(p, \mathcal{U}) \cup I^-(p, \mathcal{U})$ και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\gamma(a) \in I^-(p, \mathcal{U})$. Τότε αναγκαστικά και $\gamma(b) \in I^+(p, \mathcal{U})$ διότι διαφορετικά από

την ιδιότητα του τοπικά path-connected θα υπήρχε μια $\mathcal{P}$ -συνεχής καμπύλη εντός του $I^-(p, \mathcal{U})$ που να συνδέει τα $\gamma(a)$ και $\gamma(b)$ και η οποία δεν θα διερχόταν από το $p \notin I^-(p, \mathcal{U})$. Τώρα ορίζουμε:

$$I_0^+ = \{t \in I' : t < t_0\} \text{ και } I_0^- = \{t \in I' : t > t_0\}$$

ξένα και συνεκτικά διαστήματα τα οποία βρίσκονται εντός του συνόλου $I^+(p, \mathcal{U}) \cup I^-(p, \mathcal{U})$. Λόγω συνεκτικότητας δεν μπορούν οι συνεχείς εικόνες τους (που είναι επίσης συνεκτικές) να τέμνουν δύο ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα. Αφού λοιπόν λίγο νωρίτερα δείξαμε ότι το $\gamma(I_0^+)$ τέμνει το $I^+(p, U)$ και το $\gamma(I_0^-)$ τέμνει το $I^-(p, U)$ έχουμε ότι:

$$\gamma(I_0^+) \subset I^+(p, U) \text{ και } \gamma(I_0^-) \subset I^-(p, U)$$

Συνεπώς δείξαμε ότι η γ είναι μελλοντικά ή παρελθοντικά κατευθυνόμενη και χρονοειδής σε κάθε $t_0 \in \text{int} I$ και από το λήμμα 1 έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 47. *Αν $C(p) = I^+(p) \cup I^-(p)$ είναι ο κώνος φωτός σε ένα σημείο και $f : M \rightarrow M$ είναι ένας $\mathcal{P}$ -ομοιομορφισμός τότε ο f απεικονίζει αμφιμονοσήματα κώνους φωτός σε κώνους φωτός. Δηλαδή για κάθε p*

$$f(C(p)) = C(f(p)).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη. Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι η εικόνα ενός χρονοειδούς μονοπατιού (όπως το καθορίσαμε παραπάνω) μέσω ενός $\mathcal{P}$ -ομοιομορφισμού είναι χρονοειδές μονοπάτι. Έτσι, $q \in C(p)$ ακριβώς όταν p και q συνδέονται μέσω ενός χρονοειδούς μονοπατιού που συμβαίνει ακριβώς όταν τα $f(p)$ και $f(q)$ συνδέονται μέσω ενός χρονοειδούς μονοπατιού, δηλαδή όταν $q \in C(p)$. $\square$

Πρόταση 48. *Έστω M να είναι χωροχρόνος και $f : M \rightarrow M$ είναι ένας $\mathcal{P}$ -ομοιομορφισμός και σημείο $p \in M$. Τότε ο f απεικονίζει αμφιμονοσήματα το $I^+(p)$ στο $I^+(f(p))$ ή στο $I^-(f(p))$. Αντίστοιχα απεικονίζει το $I^-(p)$ στο $I^-(f(p))$ ή στο $I^+(f(p))$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι υπάρχουν r και q με $r \in I^+(p)$ και $q \in I^-(p)$ τέτοια ώστε $f(q) \in I^+(f(p))$ αλλά $f(r) \in I^-(f(p))$. Παίρνουμε μια χρονοειδή καμπύλη που διέρχεται κατά σειρά από τα q, p και r . Η εικόνα της θα έπρεπε να είναι χρονοειδής αλλά δεν είναι, συνεπώς πρέπει $f(r) \in I^-(f(p))$ για κάθε $r \in I^+(p)$ είτε $f(q) \in I^-(f(p))$ για κάθε $r \in I^+(p)$. $\square$

Κάθε $\mathcal{P}$ -ομοιομορφισμός λοιπόν συμπεριφέρεται με καλό τρόπο σε κάθε σημείο και επιλέγει είτε διατηρεί τους κώνους είτε τους αντιστρέφει. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αυτή η επιλογή είναι η ίδια σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας.

Πρόταση 49. Έστω M να είναι χωροχρόνος και $f : M \longrightarrow M$ είναι ένας $\mathcal{P}$ -ομοιομορφισμός. Τότε για κάθε σημείο $p \in M$ ο f απεικονίζει αμφιμονοσήματα το $I^+(p)$ στο $I^+(f(p))$ ή στο $I^-(f(p))$. Αντίστοιχα απεικονίζει το $I^-(p)$ στο $I^-(f(p))$ ή στο $I^+(f(p))$.

Απόδειξη. Έστω ένα σημείο p στο οποίο να διατηρείται ο προσανατολισμός των κώνων μέσω της f . Έστω επίσης A να είναι το σύνολο όλων αυτών των σημείων στα οποία ο προσανατολισμός να διατηρείται. $A \neq \emptyset$ και όταν $C(p) \cap C(r) \neq \emptyset$ συνεπάγεται πως $r \in A$ (αυτό είναι σαφές από τις προηγούμενες δύο προτάσεις γιατί ισχύει).

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το A είναι $\mathcal{M}$ -ανοιχτό. Πράγματι, αν επιλέξουμε ένα $s \in I^+(p)$ τότε υπάρχει περιοχή U του p με $U \subset I^-(s)$. Τότε για κάθε $q \in U$ έχουμε ότι $s \in I^+(q) \cap I^+(p)$ και άρα κατ' ελάσσων λόγο $s \in C(p) \cap C(q)$. Συνεπώς $q \in A$ δηλαδή $U \subset A$ (που σημαίνει ακριβώς ότι το A είναι $\mathcal{M}$ -ανοιχτό).

Δουλεύοντας ανάλογα δείχνουμε ότι το $M \setminus A$ είναι επίσης ανοιχτό. Επείτα λόγω συνεκτικότητας της M ότι ένα από τα δύο αυτά σύνολα ταυτίζεται με ολόκληρη την πολλαπλότητα. $\square$

Οι επόμενες προτάσεις, που είναι ουσιαστικά πορίσματα όσων έχουμε πεί μέχρι τώρα, οριστικοποιούν την σύνδεση που είχαμε προαναγγείλει νωρίτερα. Είναι πραγματικά εντυπωσιακό πως μια κατάλληλη τοπολογία μπορεί να ενσωματώσει και την διαφορική δομή της πολλαπλότητας με την έννοια ότι οι απεικονίσεις που διατηρούν την τοπολογία διατηρούν και την διαφορική δομή.

Πρόταση 50. 1. Ένας $\mathcal{P}$ -ομοιομορφισμός είναι και $\mathcal{A}$ -ομοιομορφισμός.

2. Ένας $\mathcal{P}$ -ομοιομορφισμός διατηρεί τις συνεχείς χρονοειδής καμπύλες.

Απόδειξη. Το πρώτο προκύπτει κατευθείαν από την προηγούμενη πρόταση και τον ορισμό της τοπολογίας Alexandroff. Το δεύτερο είναι προφανές απόρροια του πρώτου. $\square$

Πρόταση 51. Αν $f : M \longrightarrow M$ είναι ένας $\mathcal{P}$ -ομοιομορφισμός τότε είναι και μια λεία σύμμορφη ισομετρία.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από την προηγούμενη πρόταση και το θεώρημα του προηγούμενου κεφαλαίου. $\square$

Βιβλιογραφία

- [1] Bell, J. T. R., An Elementary Treatise on Coordinate Geometry of three dimensions, third edition, MacMillan, 1944
- [2] Dowker, F., Causal Sets and the Deep Structure of spacetime. In A. Ashtekar (ed.), 100 Years of Relativity: Space-Time Structure: Einstein and Beyond (pp. 445-464). Singapore: World Scientific, 2005
- [3] Hawking, S.W., και Ellis, G.F.R. The Large-Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, Cambridge, 1973
- [4] Hawking, S.W., King, A.R. και McCarthy P.J., A New Topology For Curved Space-time Which Incorporates the Causal, Differential and Conformal Structures, J. Math. Phys. 17, 174-181, 1976
- [5] Malament, D. B., The Class of Continuous Timelike Curves Determines the Topology of Spacetime, J. Math. Phys. 18, 1399-1404, 1977
- [6] Naber, G., The Geometry of Minkowski Spacetime, Springer-Verlang, New York, 1992
- [7] O'Neill, B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to General Relativity, Academic Press, New York, 1983
- [8] Penrose, R., Techniques of Differential Topology in Relativity, Siam, Philadelphia, 1972
- [9] Sklar, L., Space, Time, and Spacetime, University of California Press, 1974
- [10] Torreti, R., Relativity and Geometry, Dover Publications, 1995
- [11] Wald, R., M., General Relativity, University of Chicago Press, Chicago, 1984
- [12] Zeeman, E., C., Causality implies the Lorentz Group, J. Math. Phys., 5, 490-493, 1964

- [13] Zeeman, E., C., The Topology of Minkowski Space, *Topology*, 6, 161-170, 1967
- [14] Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν., Φαρμακη Β., Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα , 1997