



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αντιλήψεις των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για
την έννοια του συνόλου

Ιωάννης Βλάχος
Δ201223

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης

Καθηγητής

Αθήνα
Ιούνιος, 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 16^η Ιουνίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητής
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. καθηγητής

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητής
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Λ. Κυριακίδης	Καθηγητής

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί του, τις εποικοδομητικές συμβουλές του, τον πολύτιμο χρόνο που μου αφιέρωσε και την υπομονή του.

Τον κ. Λεωνίδα Κυριακίδη ο οποίος, παρά το εμπόδιο της απόστασης δεν δίστασε να μου προσφέρει την πολύτιμη βοήθειά του, καθοριστική για την διεκπεραίωση της εργασίας.

Την κ. Δέσποινα Πόταρη η οποία με ενέπνευσε να ακολουθήσω τον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών και μου έκανε την τιμή να συμμετάσχει στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή.

Ευχαριστώ επίσης:

Τον κ. Ιωάννη Θωμαΐδη για τις συμβουλές και τις προτάσεις του, τον σύμβουλο καθηγητή μου κ. Παναγιώτη Σπύρου για την στήριξή του αλλά και όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών για την συνεργασία και τη βοήθεια που πρόθυμα προσφέρουν σε κάθε φοιτητή ανεβάζοντας έτσι το επίπεδο σπουδών μας.

Τον κ. Νίκο Χούτο και την Χρυσούλα Χούτου για την βοήθειά τους στο κομμάτι της δειγματοληψίας, καθώς και όλους τους μαθητές που πρόθυμα συμμετείχαν στην έρευνα.

Την Διονυσία Μπακογιάννη και την Ελένη Κλή που διευκόλυναν την καθημερινότητά μας μέσω τις άριστης δουλειάς τους στη γραμματεία του τμήματος.

Τους συμφοιτητές και καινούργιους μου φίλους που έκαναν την σκληρή δουλειά να μοιάζει διασκέδαση.

Τους φίλους και την οικογένειά μου για την στήριξη, την βοήθεια και κυρίως για την υπομονή τους.

Πίνακας περιεχομένων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	5
ABSTRACT	5
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	6
1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ – Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΣΥΝΟΛΟ	8
2. ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	13
2.1 Τα Νέα Μαθηματικά	13
2.2 Αντίδραση	15
2.3 Απολογισμός	16
2.4 Μεταμοντέρνα Μαθηματικά.....	17
2.5 Η Ελληνική Πραγματικότητα	19
3. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ.....	23
3.1 Εικόνα έννοιας.....	23
3.2 Ορισμός έννοιας	24
3.3 Εικόνα ορισμού έννοιας	25
3.4 Κριτική σχετικά με την εικόνα έννοιας	26
3.5 Μοντέλα και εικόνα έννοιας.....	27
3.6 Παρανοήσεις στα Σύνολα – Προϋπάρχουσα Έρευνα	29
3.6.1 Η έρευνα των Fischbein και Baltsan.....	29
3.6.2 Η έρευνα του Bagni.....	33
3.6.2 Η έρευνα των Sirmaci και Tas.....	36
4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ.....	39
4.1 Ερευνητικά ερωτήματα	39
4.2 Μέθοδος – Ερευνητικό εργαλείο	39
4.3 Το Ερωτηματολόγιο	40
4.4 Ανάλυση Αποτελεσμάτων	41
5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	43
6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	71
7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	82
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	85

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία εξετάζει τις παρανοήσεις των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αναφορικά με την έννοια σύνολο. Η βιβλιογραφία αναδεικνύει δυσκολίες ακόμη και υποψήφιων εκπαιδευτικών όταν η θεωρία συνόλων είναι το αντικείμενο μελέτης. Η μέθοδος της έρευνας επισκόπησης επιλέχθηκε για την εξυπηρέτηση των ερευνητικών σκοπών. Συγκεκριμένα, μελετώνται οι αντιλήψεις που σχηματίζουν οι μαθητές Λυκείου για την έννοια σύνολο και τον αντίστοιχο ορισμό της, καθώς και οι παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τις ιδιότητες των συνόλων. Ένα κατάλληλα σχεδιασμένο ερωτηματολόγιο δόθηκε σε 138 μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου. Τα αποτελέσματα της έρευνας αναλύθηκαν με χρήση του λογισμικού IBM SPSS Statistics 20. Από την ανάλυση αναδείχθηκαν 15 διακεκριμένες παρανοήσεις, καθώς και η υιοθέτηση του *μοντέλου της ομάδας* από τους περισσότερους μαθητές.

Λέξεις κλειδιά: θεωρία συνόλων, αντιλήψεις, παρανοήσεις, εικόνα έννοιας, συλλογή, ομάδα

ABSTRACT

The present paper examines the misconceptions of secondary education students in relation to the mathematical concept of set. The literature shows difficulties even among teacher candidates when set theory is the subject. Quantitative research was chosen for the research goals. Specifically, the study concentrates on conceptions that students form in regard with set concept and its respective definition and also possible misconceptions of students concerning the properties of a set. An appropriately designed questionnaire was given to 138 students of Grade 10 and 11. The study results were analyzed using the software IBM SPSS Statistics 20. The analysis highlighted 15 distinct misconceptions and the adoption of *group model* for most students.

Key words: *set theory, perceptions, misconceptions, concept image, collection, group*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η βάση των μαθηματικών είναι η *θεωρία συνόλων* (Gavalas, 2005). Τα σύνολα αποτελούν το παράγωγο της προσπάθειας για συνάφεια στη γλώσσα των μαθηματικών (Sirmaci & Tas, 2013). Η σύλληψη της έννοιας σύνολο έχει συνεισφέρει τα μέγιστα στην ανάπτυξη των σύγχρονων μαθηματικών και την ανάπτυξη των κλάδων της λογικής και του υπολογιστή ενώ σημαντικός είναι ο ρόλος της και στη μαθηματική εκπαίδευση (Sirmaci & Tas, 2013).

Στο τέλος του 19ου αιώνα, ο Cantor διατύπωσε μια θεωρία η οποία έθεσε τις βάσεις για την Θεωρία Συνόλων και την Μαθηματική Λογική όπως την γνωρίζουμε σήμερα. Με τη λέξη *σύνολο* ο Cantor εννοούσε μια συλλογή καλώς ορισμένων και διακεκριμένων αντικειμένων της νόησής μας, μέσα στην οποία κανείς μπορεί να αποφασίσει αν ένα δοθέν αντικείμενο ανήκει ή όχι. Οποιαδήποτε λεκτική περιγραφή, ωστόσο δεν μπορεί στην ουσία να αποτελέσει ορισμό της έννοιας σύνολο, αφού γίνεται δεκτή σε κάθε αξιωματική θεμελίωση ως πρωταρχική (Bagni, 2006).

Τα μαθηματικά, εξαρτώνται άμεσα από τις πρωταρχικές ιδέες, τους ορισμούς και τα αξιώματα. Οι πρωταρχικές έννοιες δεν έχουν τυπικούς ορισμούς αλλά διαισθητικές περιγραφές. Η ιστορία έχει δείξει ότι σε πολλές περιπτώσεις πρωταρχικές έννοιες των μαθηματικών δεν γίνονται αμέσως αποδεκτές (Narli & Baser, 2008). Στην πραγματικότητα, ενδέχεται να χρειαστούν δεκαετίες ακόμη και αιώνες ώστε, τέτοιες έννοιες να γίνουν αποδεκτές από τον κόσμο των μαθηματικών (Fischbein, 1987).

Στα σχολικά μαθηματικά η έννοια σύνολο χρησιμοποιείται σε διάφορα πλαίσια, εν γένει με τρόπο ασυνεπή. Το γεγονός ότι η έννοια σύνολο γίνεται δεκτή στα μαθηματικά ως πρωταρχική αποτελεί συχνά εμπόδιο για τους μαθητές. Αντί για κάποιον αυστηρό ορισμό, ξεκινάει κανείς με το διαισθητικό *μοντέλο της συλλογής* αντικειμένων (Fischbein & Baltsan, 1999). Η έννοια σύνολο όμως έχει ένα πλήθος ιδιοτήτων και πτυχών που έρχονται σε αντίθεση με το αρχικό μοντέλο. Πολύ μαθητές ασυνείδητα υιοθετούν τις ιδιότητες του μοντέλου της συλλογής ξεχνώντας τις τυπικές ιδιότητες της μαθηματικής έννοιας σύνολο.

Έννοιες της καθομιλουμένης που είναι ήδη γνωστές στους μαθητές και έρχονται σε αντίθεση με τις αντίστοιχες επιστημονικές αποκαλούνται παρανοήσεις

(Gilberts & Wats, 1983). Οι Fischbein και Baltsan (1999) υποστήριξαν ότι όλες οι παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια σύνολο προέρχονται από την σιωπηρή επίδραση του μοντέλου της συλλογής, συνεπώς γνωρίζοντάς το μπορούμε να τις προβλέψουμε.

Στην Ελλάδα, η έννοια σύνολο ορίζεται για πρώτη φορά στην Γ΄ Γυμνασίου. Ένα σύνολο, σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο είναι μια *ομάδα ή κατηγορία αντικειμένων* τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια. Στην Α΄ Λυκείου ωστόσο, το σύνολο ορίζεται ως μια *συλλογή αντικειμένων*, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διάνοησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο. Το γεγονός αυτό ενδέχεται να οδηγήσει κάποιους μαθητές στην ταυτόχρονη υιοθέτηση του *μοντέλου της συλλογής* και του *μοντέλου της ομάδας ή κατηγορίας* αντικειμένων.

Οι Tall και Vinner όρισαν το 1981 την *εικόνα έννοιας* η οποία αποτελείται από οποιαδήποτε γνωστική δομή ενός ατόμου, σχετικά με μία έννοια. Η εικόνα έννοιας ενδέχεται να περιέχει τόσο τα σύνολα – συλλογές όσο και τα σύνολα – ομάδες. Είναι ως εκ τούτου, μια σύλληψη ευρύτερη από αυτήν του μοντέλου της συλλογής και συνεπώς καταλληλότερη για να προβλέψει τις παρανοήσεις ενός μαθητή.

Οι Linchevski και Vinner (1988) στην έρευνά τους, κατηγοριοποίησαν τις παρανοήσεις που εμφανίστηκαν μεταξύ καθηγητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αναφορικά με την έννοια σύνολο. Η λίστα τους επεκτάθηκε αργότερα από τους Fischbein και Baltsan (1999) και τον Bagni (2006). Οι τελευταίοι, στην έρευνά τους εστιάζουν κυρίως σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Αντικείμενο της παρούσας μελέτης είναι η ανάδειξη των παρανοήσεων των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε σχέση με την έννοια σύνολο. Εξετάζονται, η υπόθεση των Fischbein και Baltsan (1999) ότι όλες οι παρανοήσεις μπορούν να προβλεφθούν αν λάβουμε υπόψη το διαισθητικό μοντέλο της συλλογής, οι εικόνες που σχηματίζουν οι μαθητές για την έννοια σύνολο και τον αντίστοιχο ορισμό της και γενικότερα οι παρανοήσεις και οι πεποιθήσεις που εμφανίζονται μεταξύ των μαθητών όταν εμπλέκονται με την θεωρία συνόλων.

1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ – Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΣΥΝΟΛΟ

Από πολύ παλιά, οι μαθηματικοί εξέταζαν τα σύνολα αντικειμένων κάποιου είδους ενώ οι στοιχειώδεις έννοιες της σύγχρονης θεωρίας συνόλων υπονοούνται σε πολλά κλασικά κείμενα. Ο πρώτος που ανέδειξε, εν αγνεία του, τη δυσκολία να δοθεί ένας ορισμός για το σύνολο ήταν ο Έλληνας φιλόσοφος Επιμενίδης τον 6ο αιώνα π.Χ. Ο Επιμενίδης δήλωσε ότι: «Κρήτες ἀεὶ ψεύσται», δηλαδή ότι οι κάτοικοι της Κρήτης λένε πάντοτε ψέματα. Δεδομένου όμως, ότι και εκείνος ήταν κάτοικος της Κρήτης, συμπεραίνουμε ότι αν έλεγε την αλήθεια τότε έλεγε ψέματα, ενώ αντίστροφα αν έλεγε ψέματα τότε έλεγε την αλήθεια. Ο Ευβουλίδης τον 4ο αιώνα π.Χ. έθεσε το ερώτημα: «Αν κάποιος παραδεχτεί ότι αυτή τη στιγμή ψεύδεται, αυτό που λέει είναι αλήθεια ή ψέμα;». Τα «παράδοξα» αυτά ήταν στην ουσία μερικά από τα προβλήματα στα οποία προσέκρουσαν οι μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα κατά την εμπλοκή τους με την έννοια σύνολο (Vilenkin, 1995).

Μια ιστορική αναδρομή για τη θεωρία των συνόλων συνδέεται άμεσα με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του απείρου στα Μαθηματικά. Οι μαθηματικοί και οι φιλόσοφοι εμπλέκονται με τις έννοιες του απείρου και των απειροσυνόλων από τις μέρες των αρχαίων Ελλήνων μέχρι και σήμερα. Τα παράδοξα του Ζήνωνα είναι μια από τις πρώτες ενδείξεις για τις δυσκολίες που εμφανίστηκαν. Κάποιοι Έλληνες αποδέχτηκαν το γεγονός ότι ένα σύνολο μπορεί να είναι απεριορίστα μεγάλο αλλά αρνήθηκαν την ύπαρξη ενός ολοκληρωμένου απειροσυνόλου. Κατά το Μεσαίωνα, οι γνώμες των φιλοσόφων διχάζονταν μεταξύ του εν δυνάμει και του εν ενεργεία απείρου. Γεγονός ήταν, ότι η σύγκριση ορισμένων απειροσυνόλων οδηγούσε σε παράδοξα. Ο Γαλιλαίος για παράδειγμα, στο έργο του *Two New Sciences* το 1683, παρατήρησε ότι τα σημεία δύο άνισων ευθύγραμμων τμημάτων μπορούν να τεθούν σε αντιστοιχία ένα προς ένα και έτσι τα δύο τμήματα θα πρέπει να περιέχουν τον ίδιο αριθμό σημείων, παρότι το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο. Κατά παρόμοιο τρόπο παρατήρησε ότι οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να τεθούν σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα τετράγωνα τους, αν και το σύνολο των τετραγώνων φυσικών αποτελεί μόνο ένα μέρος των φυσικών αριθμών. Υποστήριξε ως εκ τούτου ότι η ύπαρξη εν ενεργεία απείρων πρέπει να απορριφθεί (Eves, 1983).

Μια αληθινά μαθηματική μελέτη των άπειρων συνόλων δεν έγινε παρά με τη σημαντική εργασία του Georg Cantor κατά τα τέλη του δέκατου ένατου αιώνα (Eves, 1983). Ο G. Cantor (1845-1918) γεννήθηκε στην Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας από

γονείς που είχαν μεταναστεύσει από τη Δανία. Σε ηλικία 11 ετών βρέθηκε μαζί με τους γονείς του στη Φρανκφούρτη και πάλι ως μετανάστης όπου πέρασε και το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του. Από το 1874 με μια σειρά δημοσιεύσεων έθεσε τις βάσεις της Θεωρίας Συνόλων. Με τη λέξη *σύνολο* ο Cantor εννοούσε μια συλλογή καλώς ορισμένων και διακεκριμένων αντικειμένων της νόησής μας ή της εμπειρίας μας, μέσα στην οποία κανείς μπορεί να αποφασίσει αν ένα δοθέν αντικείμενο ανήκει ή όχι. Μια από τις βασικές ιδιότητες ενός συνόλου σύμφωνα με τον Cantor, είναι η ικανότητα του να ανήκει σε άλλα σύνολα. Θεώρησε επιπλέον ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία ενώ, έδωσε και τον ορισμό του κενού συνόλου, ως το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Βασικό χαρακτηριστικό του συνόλου είναι η ανεξαρτησία του από οποιαδήποτε λεκτική ή θεωρητική μας επιλογή. Οποιαδήποτε λεκτική περιγραφή, δεν μπορεί στην ουσία να αποτελέσει ορισμό της έννοιας σύνολο, αφού γίνεται δεκτή σε κάθε αξιωματική θεμελίωση ως πρωταρχική (Bagni, 2006).

Στη Θεωρία Συνόλων του, ο Cantor όρισε ένα άπειρο σύνολο ως ένα σύνολο το οποίο μπορεί να έρθει σε 1-1 αντιστοιχία με κάποιο από τα γνήσια υποσύνολά του (Narli & Baser, 2008). Στα γραπτά του ανέπτυξε μια θεωρία για τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, πραγματευόμενος το εν ενεργεία άπειρο, δημιουργώντας έτσι μια αριθμητική των υπερπεπερασμένων αριθμών, παρόμοια με εκείνη των πεπερασμένων. Οι πληθικοί αριθμοί πεπερασμένων συνόλων μπορούν να ταυτιστούν με τους ίδιους τους φυσικούς (για παράδειγμα το 1 να ταυτιστεί με το μονοσύνολο $\{a\}$, το 2 με το σύνολο $\{a, a'\}$, το 3 με το $\{a, a', a''\}$ κ.ο.κ). Κατά τον Cantor, οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί αντιστοιχούν κατά παρόμοιο τρόπο στον πληθικό αριθμό απειροσυνόλων (Eves, 1983). Στο πλαίσιο της θεωρίας του, ο Cantor απέδειξε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των ακεραίων και συνεπώς με το σύνολο των φυσικών. Σύνολα με τη παραπάνω ιδιότητα χαρακτηρίζονται *αριθμήσιμα* και έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, τον οποίο ονόμασε $\aleph_0$ (το εβραϊκό γράμμα άλεφ με δείκτη μηδέν). Ο Cantor απέδειξε επιπλέον, ότι το ανοικτό διάστημα $(0,1)$ είναι μη αριθμήσιμο έχει λοιπόν ένα πληθικό αριθμό $\aleph_1$, μεγαλύτερο από τον $\aleph_0$. Η τελευταία απόδειξη μάλιστα, έχει μείνει στην Ιστορία των Μαθηματικών ως η *διαγώνια μέθοδος του Cantor*. Υπάρχει γενικά η πεποίθηση ότι ο αριθμός $\aleph_1$ είναι ο αμέσως επόμενος υπερπεπερασμένος αριθμός μετά τον $\aleph_0$. Η πεποίθηση αυτή είναι γνωστή ως η *υπόθεση του συνεχούς* και δεν έχει βρεθεί ως τώρα απόδειξη για την ισχύ της ούτε και απόδειξη που να την απορρίπτει (Eves, 1983).

Η έννοια σύνολο επηρέασε σημαντικά τη μαθηματική σκέψη. Ωστόσο, οι περισσότεροι σύγχρονοι του Cantor μαθηματικοί, απέρριψαν αρχικά τις ιδέες του. Η θεωρία του επικρίθηκε σκληρά από τον Kronecker, τον Poincaré, και άλλους σημαντικούς μαθηματικούς της εποχής, που ήταν απρόθυμοι να βουτήξουν στον κόσμο του πραγματικού - εν ενεργεία απείρου όπου, ένα σύνολο θα μπορούσε να έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με ένα γνήσιο υποσύνολό του και ένα ευθύγραμμο τμήμα θα μπορούσε να περιέχει τον ίδιο αριθμό σημείων με ένα ευθύγραμμο τμήμα μισού μήκους ενώ, άπειρες διαδικασίες θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως ολοκληρωμένες (Rucker, 1982 στο Narli & Baser, 2008).

Από την άλλη πλευρά, η Θεωρία Συνόλων είχε γίνει δεκτή με μεγάλο ενθουσιασμό από μερικούς διάσημους μαθηματικούς της εποχής εκείνης, όπως ο B. Russell και ο D. Hilbert (Eves, 1983). Στη δεκαετία του 1890-1900 η θεωρία του Cantor άρχισε να βρίσκει εφαρμογή στην Ανάλυση και τη Γεωμετρία. Ο Hilbert υποστήριξε ότι «κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που δημιούργησε για εμάς ο Cantor». Ο R. Dedekind, φίλος του Cantor, μελέτησε και αυτός τα απειροσύνολα. Αναρωτήθηκε για τη διαφορά που έχει ένα συνεχές γεωμετρικό μέγεθος με το σύνολο των ρητών αριθμών και προσπάθησε να δώσει απάντηση στο ερώτημα αυτό (Vilenkin, 1995). Όρισε επιπλέον, το σύνολο των πραγματικών αριθμών σαν σύνολο τομών (τομές Dedekind) ρητών αριθμών, ορισμός βάση του οποίου μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολό των πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα κάτι που γινόταν παλαιότερα αποδεκτό ως αξίωμα. Ο Γερμανός μαθηματικός, φιλόσοφος και επιστήμων της λογικής G. Frege ασχολήθηκε με τη θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων, έδωσε τον ορισμό του πληθικού αριθμού και στα βιβλία του με τίτλο «οι βάσεις της αριθμητικής» και «βασικοί νόμοι της αριθμητικής» προσπάθησε να παρουσιάσει τα βασικά σύνολα των αριθμών και τις πράξεις αυτών με τη βοήθεια του πληθικού αριθμού.

Ότι σχετιζόταν με την έννοια ήταν εντελώς καινούργιο και ξένο ενώ ερχόταν σε αντίθεση με τον αποδεκτό τρόπο σκέψης ειδικά όσον αφορά στο άπειρο. Παρόλα αυτά, όταν η μαθηματική κοινότητα εξοικειώθηκε με την έννοια, άρχισαν να φαίνονται τα πρώτα προβλήματα του συνόλου όπως το όρισε ο Cantor. Το πρώτο σημάδι των προβλημάτων στα ίδια τα θεμέλια της Θεωρίας Συνόλων ήταν ένα παράδοξο που ανακαλύφθηκε από τον ίδιο τον Cantor. Θέμα του ήταν το σύνολο

όλων των υπερπεπερασμένων αριθμών το οποίο, εφόσον είναι καλώς διατεταγμένο, μπορούσε να περιγραφεί από κάποιον υπερπεπερασμένο αριθμό Ω . Αλλά τότε ο Ω πρέπει να είναι μεγαλύτερος από όλους τους υπερπεπερασμένους αριθμούς και άρα από τον εαυτό του (Vilenkin, 1995). Τα πιο τσανταχτά και διασημότερα προβλήματα, φάνηκαν με το παράδοξο του Russell: «Αν A είναι ένα σύνολο συνόλων και κάθε στοιχείο x του συνόλου έχει την ιδιότητα ότι δεν ανήκει στον εαυτό του τότε, το A ανήκει στο A αν και μόνο αν το A δεν ανήκει στο A ». Μια άλλη παρατήρησή του ήταν ότι, με βάση την αρχή συμπερίληψης στοιχείων του Cantor, το σύνολο όλων των συνόλων είναι αδύνατο να οριστεί αφού θα πρέπει να περιέχει τον εαυτό του. Ο Russell προσπάθησε με επιτυχία να δώσει λύση στα προβλήματα αυτά προτείνοντας μια νέα προσέγγιση της έννοιας σύνολο (Wilder, 1965 στο Fischbein & Baltsan, 1999). Ο E. Zermelo είχε ένα παρόμοιο σύνολο παραδόξων, του οποίου δεν είχε δημοσιεύσει τα αποτελέσματα.

Στο έργο *Principia Mathematica*, ο B. Russell και ο A.N. Whitehead επιχείρησαν να εξάγουν τη θεωρία συνόλων από τα θεμέλια του προτασιακού λογισμού (Eves, 1983). Τα προβλήματα αντιφατικότητας των συνόλων αντιμετωπίστηκαν τελικά με την αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων των Zermelo-Freankel η οποία αποκλείει τα παράδοξα σύνολα του Cantor και του Russell και είναι σήμερα η πιο αποδεκτή (Vilenkin, 1995). Το 1908 ο E. Zermelo παρουσίασε σαν μια πρώτη προσπάθεια αξιωματικής θεμελίωσης της Θεωρίας Συνόλων, ένα σύστημα αξιωμάτων. Αργότερα το σύστημα του Zermelo τελειοποιήθηκε από τον A. Fraenkel. Το 1925 προστέθηκε ένα ακόμη αξίωμα, η πατρότητα του οποίου δεν είναι γνωστή. Το σύστημα Zermelo-Fraenkel περιγράφει τη σχέση του *ανήκειν* ($x \in y$) μέσω της οποίας ορίζεται η σχέση *εγκλεισμού* των συνόλων ($x \subset y$). Καθώς επίσης και την σχέση *ισότητας* συνόλων.

Ο κορυφαίος ερευνητής της λογικής K. Gödel έδωσε το 1931 το εντυπωσιακό αποτέλεσμα, ότι δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων δεν θα μας οδηγήσουν σε αντιφάσεις. Το 1939, απέδειξε ότι, αν το αξιωματικό σύστημα των Zermelo-Fraenkel για την Θεωρία Συνόλων είναι συνεπές, δηλαδή δεν περικλείει λογική αντίφαση, θα εξακολουθήσει να είναι συνεπές αν προσθέσουμε το αξίωμα επιλογής ή την υπόθεση του συνεχούς. Είκασε επιπλέον, ότι και η διάψευση της υπόθεσης τους συνεχούς είναι συνεπής με τα συγκεκριμένα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων, κάτι που απέδειξε το 1963 ο P. Cohen (Eves, 1983).

Το 1940, ο Gödel απέδειξε ότι το αξίωμα της επιλογής, εκτός από συμβιβαστό με τα άλλα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων είναι και απαραίτητο για την Ανάλυση.

Ο J. von Neumann παρουσίασε ένα σύστημα αξιωμάτων για τη θεωρία συνόλων εναλλακτικό του συστήματος αξιωμάτων των Zermelo και Fraenkel. Το εναλλακτικό σύστημα αξιωμάτων που παρουσίασε ο von Neumann είναι γνωστό ως σύστημα αξιωμάτων Neumann-Bernays-Gödel. Αποδείχθηκε ότι στις θεωρίες τους ισχύουν οι ίδιες ακριβώς προτάσεις για τα σύνολα. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι στη θεωρία των Neumann-Bernays-Gödel δίνεται η έννοια της κλάσης. Τα πάντα στη συγκεκριμένη θεωρία είναι κλάσεις, ενώ τα σύνολα είναι κλάσεις που είναι στοιχεία άλλων κλάσεων.

Μια ομάδα μαθηματικών του 20^{ου} αιώνα, κάτω από το ψευδώνυμο Nicolas Bourbaki, προσπάθησε να ανασυγκροτήσει και να αναδιατάξει τα μαθηματικά της εποχής με εντελώς αφηρημένο, τυπικό και παράλληλα αυτόνομο τρόπο, αδιαφορώντας τελείως για το αν τα μαθηματικά αυτού του είδους εφαρμόζονται στο πρόβλημα της γνώσης του πραγματικού κόσμου (Vilenkin, 1995). Κύρια δουλειά των Bourbaki είναι τα *Στοιχεία των Μαθηματικών* (*Éléments de mathématique*), μια σειρά βιβλίων μέσω των οποίων προσπάθησαν να θεμελιώσουν όλα τα μαθηματικά με βάση την θεωρία συνόλων. Μόνιμη μέριμνα της ομάδας ήταν η διατήρηση της αυστηρότητας και της γενικότητας. Μη προϋποθέτοντας ιδιαίτερες γνώσεις μαθηματικών, επιχείρησαν να ξεκινήσουν από τις αρχές των μαθηματικών και προχωρώντας αξιωματικά να παρέχουν πλήρεις αποδείξεις. Η εργασία των Bourbaki ξεκίνησε το 1935 με τη *Θεωρία Συνόλων* (*Théorie des Ensembles*) και οδήγησε στην ανακάλυψη αρκετών εννοιών και ορολογιών που εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται. Επηρέασε τέλος, πολλούς κλάδους των μαθηματικών καθώς και την μαθηματική εκπαίδευση.

2. ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Αφότου υπάρχει η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο, υπάρχουν και οι μεταρρυθμίσεις οι οποίες επιδιώκουν αλλαγή του τρόπου διδασκαλίας τους (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999). Η μαθηματική εκπαίδευση πέρασε κατά τα τελευταία χρόνια σε παγκόσμιο επίπεδο μέσα από διάφορες αλλαγές και μεταρρυθμίσεις. Μια πρώτη σημαντική μεταρρύθμιση έγινε στις ΗΠΑ στις αρχές της δεκαετίας του 1950 ως αποτέλεσμα κυρίως την διαπίστωση ότι η διδασκόμενη ύλη έμεινε σταθερή και αναλλοίωτη επί δεκαετίες.

Από τα μέσα του 1950 μέχρι τα μέσα του 1970 και αργότερα σε κάποιες περιπτώσεις, πολλές απόπειρες για αλλαγή των σχολικών μαθηματικών έλαβαν χώρα υπό το όνομα *Νέα ή Μοντέρνα Μαθηματικά*. Οι απόπειρες αυτές, προερχόμενες από διάφορες πηγές και παίρνοντας διάφορες μορφές, είχαν βασική κοινή συνιστώσα την επιθυμία να φέρουν τα σχολικά μαθηματικά κοντά στα μαθηματικά του πανεπιστημίου (Kilpatrick, 2009). Σημαντική ήταν η επιρροή από την ομάδα των Bourbaki η οποία, ξεκινώντας το 1930 επιχείρησε να γενικεύσει, να επισημοποιήσει και να ενοποιήσει τα «καθαρά» μαθηματικά (Kilpatrick, 2012). Έντονο ενδιαφέρον εκδηλώθηκε, κυρίως από τους πανεπιστημιακούς καθηγητές να συμπεριλάβουν στα πανεπιστημιακά και στα σχολικά προγράμματα μερικές από τις νέες μαθηματικές ιδέες των προηγούμενων εκατό ετών. Η κίνηση αυτή επηρέασε ωστόσο την πανεπιστημιακή κυρίως εκπαίδευση και λιγότερο τα σχολικά Μαθηματικά (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999).

2.1 Τα Νέα Μαθηματικά

Το 1955 η *εξεταστική επιτροπή για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση* (CEEB) στις ΗΠΑ, συγκρότησε μια επιτροπή, μέλημα της οποίας ήταν η εξέταση των μαθηματικών που χρειάζονται οι μαθητές καθώς εισέρχονται στο πανεπιστήμιο. Η επιτροπή επισήμανε την ύπαρξη ενός διευρυνόμενου χάσματος μεταξύ των εξετάσεων για την εισαγωγή στα αμερικάνικα κολέγια και των μαθηματικών που διδάσκονται οι μαθητές λυκείου, ενώ συμπέρανε ότι το επίπεδο των μαθηματικών πολλών αποφοίτων λυκείου είναι χαμηλό, η κατανόηση ανεπαρκής και η στάση τους απέναντι στα μαθηματικά κακή (Meder, 1959, Wooton, 1965 στο Kilpatrick, 2012). Η

επιτροπή πρότεινε αλλαγές στα αμερικάνικα αναλυτικά προγράμματα και συγκεκριμένα την εισαγωγή νέων αντικειμένων των μαθηματικών όπως η Λογική και οι Πιθανότητες, θεωρίες που σχετίζονται άμεσα με την Θεωρία Συνόλων (Fay & Graeber, 2003 στο Kilpatrick, 2012). Δύο συνέδρια μαθηματικών το 1958 οδήγησαν στην ίδρυση της *Ομάδας Μελέτης των Σχολικών Μαθηματικών* (SMMSG) η οποία έμελε να γίνει η μεγαλύτερη και διασημότερη κίνηση για την ανάπτυξη των αναλυτικών προγραμμάτων (Kilpatrick, 2012).

Αξιοσημείωτο γεγονός ήταν η πραγματοποίηση το 1959 ενός δωδεκαήμερου σεμιναρίου υπό την αιγίδα του Οργανισμού Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (ΟΟΣΑ). Στο σεμινάριο προτάθηκε πληθώρα προτάσεων για τον εκσυγχρονισμό των σχολικών αναλυτικών προγραμμάτων, την διδασκαλία των μαθηματικών και την προετοιμασία των καθηγητών. Ο Jean Dieudonné, πρώην μέλος των Bourbaki, υποστήριξε ότι οι μαθητές κατά την εισαγωγή τους στο πανεπιστήμιο θα πρέπει μεν να είναι εξοικειωμένοι με κάποιες στοιχειώδεις τεχνικές της στοιχειώδους γραμμικής άλγεβρας, της τριγωνομετρίας και της ανάλυσης, θα πρέπει όμως να είναι ήδη ικανοί στη χρήση της μαθηματικής λογικής (παραγωγή, επαγωγή, απαγωγή κλπ.) και να έχουν μια ιδέα περί της μεθόδου αξιωματικής θεμελίωσης. Ήθελε η «νέα γλώσσα» που τα μαθηματικά είχαν πρόσφατα αναπτύξει, η γλώσσα της θεωρίας των συνόλων, των ομάδων, των διανυσματικών χώρων και των λοιπών θεωριών, να υιοθετηθεί από τα σχολικά μαθηματικά έτσι όπως υιοθετήθηκε από τους Bourbaki (Kilpatrick, 2012).

Παρόμοιες κινήσεις έγιναν και από πλευράς Ευρώπης. Η διεθνής επιτροπή για τη μελέτη και βελτίωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών (CIEAEM) πραγματοποιούσε περιοδικές συναντήσεις στις οποίες συμμετείχαν, παιδαγωγοί, μαθηματικοί, δάσκαλοι της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ψυχολόγοι, φιλόσοφοι και επιστημολόγοι. Στο πρώτο βιβλίο των ιδρυτών της διεθνούς επιτροπής προτάθηκε η εισαγωγή στο πνεύμα των μοντέρνων μαθηματικών μέσω της προσαρμογής της κατάλληλης γλώσσας και επισημαίνοντας δομές όπως οι δακτύλιοι, οι ομάδες ή ο διανυσματικός χώρος. Το 1967 στο Ηνωμένο Βασίλειο ξεκίνησε η κίνηση *Μαθηματικά για την Πλειοψηφία*, η οποία είχε αντικείμενο τη διδασκαλία μαθητών μέσης και χαμηλής επίδοσης (Kaner, 1973, Wood, 1975, Howson, 1975 στο Kilpatrick, 2012). Πολλοί μεταρρυθμιστές από το κίνημα των Νέων Μαθηματικών πίστευαν ότι τα ίδια μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται σε όλους τους μαθητές, ως εκ τούτου τα Νέα Μαθηματικά είναι μαθηματικά για όλους.

Μεταρρυθμίσεις ξεκίνησαν και στην Ρωσία το 1960 υπό την καθοδήγηση του σημαντικού μαθηματικού Α. Kolomoogorov, η ομάδα του οποίου παρήγαγε ένα αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο εγκρίθηκε επίσημα το 1968 (Abramov, 2010 στο Kilpatrick, 2012). Πολλές μεταρρυθμίσεις έμοιαζαν με εκείνες των χωρών του ΟΟΣΑ. Τα Νέα Μαθηματικά της Σοβιετικής Ένωσης περιείχαν στοιχεία της Στοιχειώδους Θεωρίας Συνόλων, όχι όμως στο βαθμό των μαθηματικών των χωρών του ΟΟΣΑ. Το 1961 στην Αθήνα, πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του ΟΟΣΑ ένα συνέδριο με θέμα τις νέες μεθόδους διδασκαλίας των σχολικών μαθηματικών στο οποίο συμμετείχε μεταξύ άλλων και η Ελλάδα. Κάποιες από τις χώρες που συμμετείχαν στο συνέδριο υιοθέτησαν τις «διδασκτικές καινοτομίες» ενώ άλλες δεν επιχείρησαν ακόμη κάποιο καινοτόμο βήμα.

2.2 Αντίδραση

Ο Μ. Kline, πολέμιος του κινήματος των Νέων Μαθηματικών, ο G. Polya, ο L. Bers και ο M. Schiffer δημοσίευσαν το 1962 ένα υπόμνημα στο οποίο υποστήριζαν ότι τα αναλυτικά προγράμματα δεν θα πρέπει να καλύπτουν τις ανάγκες μόνο όσων σκοπεύουν να γίνουν μαθηματικοί, ότι οι μαθητές δεν θα πρέπει να διδάσκονται πρόωρα αφηρημένες έννοιες, θα πρέπει να βλέπουν την σύνδεση των μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες, οι τυπικές αποδείξεις είναι εύλογο να έπονται των εικασιών και της διαίσθησης ενώ, όπου είναι δυνατόν τα μαθηματικά θα πρέπει να παρουσιάζονται όπως προέκυψαν ιστορικά (Kilpatrick, 2012). Ο Kline δημοσίευσε μια σειρά από άρθρα ενάντια στα Νέα Μαθηματικά καθώς και ένα βιβλίο, το 1973 με τίτλο «*Why Johnny Can't Add: The failure of the New Math*» (Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης: Η αποτυχία των Νέων Μαθηματικών). Η κριτική που ασκήθηκε από τον Kline και άλλους στις ΗΠΑ, ήταν παρόμοια με εκείνη που εμφανίστηκε στις υπόλοιπες χώρες της Δύσης και διαμόρφωσε τελικά την κοινή γνώμη. Βασική διαφορά της κριτικής στις ΗΠΑ ήταν ότι ήρθε πρώτη και ήταν πιο τεκμηριωμένη (Malaty, 1999 στο Kilpatrick, 2012).

Αντίδραση όμως ήρθε και από τα μέλη του κινήματος των Νέων Μαθηματικών. Ο Beberman (1958) θεώρησε το κίνημα των Νέων Μαθηματικών ως βιαστικό και ασύνετο δηλώνοντας ότι, «κινδυνεύουμε να αναθρέψουμε μια γενιά παιδιών που θα είναι ανίκανα να κάνουν υπολογιστική αριθμητική» (Kilpatrick,

2012). Υποστήριξε επιπλέον, ότι οι αλλαγές στο αναλυτικό πρόγραμμα θα πρέπει να γίνουν πολύ αργά και προσεκτικά δεδομένου ότι πολλοί δάσκαλοι της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης θα πρέπει να επανεκπαιδευτούν αφού δεν μπορούμε να αναμένουμε να προσαρμοστούν στις αλλαγές όσο αποτελεσματικά και γρήγορα θα προσαρμοστούν καθηγητές που ειδικεύονται στη διδασκαλία των μαθηματικών. Το 1975 με άρθρο της, η Εθνική Συμβουλευτική Επιτροπή για τη Μαθηματική Εκπαίδευση στις ΗΠΑ επιχειρηματολόγησε ενάντια στις διχοτομικές επιλογές που προτάθηκαν για τα σχολικά μαθηματικά δηλαδή, έννοιες ενάντια στις δεξιότητες, φορμαλισμός ενάντια στη διαίσθηση και γενικά το νέο ενάντια στο παλιό. Υποστήριξε συγκεκριμένα ότι ο όρος *Νέα Μαθηματικά* αποτελεί περισσότερο μια *ετικέτα* για τις μεταρρυθμίσεις που συνέβησαν κατά τα έτη 1955–1975 σε διάφορες χώρες παρά ένα σύνολο μεταρρυθμιστικών προτάσεων ή κινήσεων (Kilpatrick, 2012).

2.3 Απολογισμός

Ο Davis (2003) υποστήριξε τα εξής:

- Δεν υπήρξε ποτέ στην ουσία ένα ενιαίο, καλά ορισμένο και αναγνωρίσιμο πρόγραμμα το οποίο θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε «τα *Νέα Μαθηματικά*».
- Τα περισσότερα σχολεία επηρεάστηκαν ελάχιστα από το αποκαλούμενο «*Κίνημα των Νέων Μαθηματικών*».
- Σε χώρες όπου, κάποια νέα προγράμματα εφαρμόστηκαν προσεκτικά από ανθρώπους που τα κατανοούσαν, τα αποτελέσματα ήταν ιδιαιτέρως θετικά.

Σύμφωνα με τον Kilpatrick (2012) ωστόσο, το δεύτερο επιχείρημα του Davis, αν και ισχύει για τις ΗΠΑ δεν είναι και τόσο εύστοχο δεδομένου ότι σε χώρες όπως η Γαλλία και η Ρωσία όπου κάθε καθηγητής, κάθε μαθητής και κάθε σχολείο έπρεπε αναγκαστικά να εμπλακεί με τις μεταρρυθμιστικές προσπάθειες.

Σε καμία χώρα τα μαθηματικά δεν επέστρεψαν στο σημείο που βρίσκονταν πριν την κίνηση των Νέων Μαθηματικών. Πολλές πτυχές του κινήματος όπως η Αξιωματική Θεωρία Συνόλων αποδείχθηκαν αποτυχημένες και μη παραγωγικές. Ωστόσο πολλές ιδέες των Νέων Μαθηματικών παρέμειναν σε ενέργεια στα σχολικά μαθηματικά. Σύμφωνα με τον R. Kapadia (1976), η τάση στην μαθηματική εκπαίδευση το 1976 ήταν η εξής: Τα μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται στους

μαθητές ως ένα ενιαίο οικοδόμημα και όχι με τον παραδοσιακό διαχωρισμό σε αριθμητική, άλγεβρα και γεωμετρία. Η Λογική και η Θεωρία Συνόλων επιλέχθηκαν ως το βασικό δομικό στοιχείο για την οικοδόμηση των προγραμμάτων των σχολικών μαθηματικών. Υπάρχουν δύο βασικά επιχειρήματα που αναπτύχθηκαν για να υποστηρίξουν αυτή την προσέγγιση:

- Η θεωρία του Piaget υποθέτει ότι τα παιδιά αναπτύσσουν μια αυθόρμητη και σταδιακή κατασκευή των στοιχειωδών λογικο-μαθηματικών δομών.
- Η Θεωρία Συνόλων είναι το θεμέλιο για τα σύγχρονα μαθηματικά – έτσι ξεκινά εξάλλου και το έργο της σχολής των Bourbaki.

Το δεύτερο επιχείρημα ήταν ανέκαθεν σαθρό. Παρότι, Οι Bourbaki ξεκίνησαν το έργο τους με τη Θεωρία Συνόλων, εντούτοις τα περισσότερα μαθηματικά στο έργο τους δεν προσεγγίζονται συνολοθεωρητικά. Όταν η πρωταρχική λογική έχει ολοκληρωθεί, μπορεί να αγνοηθεί (Karadia, 1976). Τα σύνολα όμως συνέχισαν να χρησιμοποιούνται παντού ώστε να βοηθούν τους μαθητές να σκέφτονται πιο καθαρά. Η ιδέα αυτή ήταν βασισμένη στην θεωρία του Kant ότι η λογική είναι η επιστήμη των απαραίτητων για τη σκέψη κανόνων (Karadia, 1976). Ακόμη και σήμερα τα σχολικά εγχειρίδια αναφέρονται για παράδειγμα σε σύνολα αριθμών ή σύνολα σημείων (Kilpatrick, 2012).

2.4 Μεταμοντέρνα Μαθηματικά

Ήδη όπως είδαμε, από τα μέσα της δεκαετίας του 1970 άρχισε να εκδηλώνεται σε διάφορες χώρες μια έντονη δυσφορία απέναντι στα *Νέα - Μοντέρνα Μαθηματικά*, τα οποία θεωρήθηκαν ως υπεύθυνα για την πτώση των επιδόσεων των μαθητών σε εθνικές και υπερεθνικές εξετάσεις, τις οποίες διοργάνωσαν παγκόσμιοι οργανισμοί και διεθνείς επιστημονικές εταιρείες. Η δυσφορία αυτή εκδηλώθηκε κυρίως ως ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την πλειοψηφία των μαθητών, οι οποίοι είχαν παραμεληθεί κατά την προηγούμενη μεταρρύθμιση, η οποία θεωρήθηκε ως ελιτιστική και απευθυνόμενη μόνο στους λίγους, ήτοι στους καλούς μαθητές (Καψάλης & Λεμονίσης, 1999).

Παράλληλα άρχισε να διαμορφώνεται μια γενικότερη κίνηση με τη μορφή της στροφής «πίσω στα βασικά». Η θεωρία των συνόλων, βασική ιδέα των *Νέων*

Μαθηματικών, αρχίζει να εγκαταλείπεται. Έμφαση δίνεται πλέον κυρίως σε υπολογιστικές δεξιότητες και τεχνικές, οι οποίες είχαν παραμεληθεί εντελώς. Οι μπηχεύβιοριστικοί στόχοι διδασκαλίας, οι οποίοι συζητιούνται ευρύτερα την εποχή αυτή, βρίσκουν την είσοδο τους και στην Διδακτική των Μαθηματικών και παίρνουν τη θέση των γενικών και ασαφών στόχων της ανακαλυπτικής διδασκαλίας. Σε μερικές περιπτώσεις μάλιστα η κίνηση αυτή πήρε τη μορφή υστερίας, η οποία κατέληγε στο άλλο άκρο και γινόταν πολύ πιο επικίνδυνη από την κίνηση των Νέων Μαθηματικών, την οποία ερχόταν να υποκαταστήσει (Καψάλης & Λεμονίσης, 1999).

Η κίνηση των Μοντέρνων Μαθηματικών στηρίχθηκε σε ψυχολογικά δεδομένα κυρίως του J. Piaget αλλά και άλλων (J. Bruner, Z. Dienes κλπ.). Τα δεδομένα αυτά δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι ξεπερασμένα, αν και ορισμένες απόψεις του Piaget αναθεωρήθηκαν ήδη εδώ και μερικά χρόνια από μαθητές του ή άλλους επιστήμονες. Για τον λόγο αυτό οι νεότερες διδακτικές προσπάθειες, οι οποίες αναγκαστικά πρέπει να πάρουν το όνομα *Μεταμοντέρνα Μαθηματικά*, δεν μπορούμε να πούμε ότι στηρίζονται σε απολύτως νέα ψυχολογικά δεδομένα, αλλά σε μια καινούργια αξιολόγηση, προσπαθώντας να αξιοποιήσουν καθιερωμένες διδακτικές αρχές συμπληρωματικώς προς νεότερα αλλά αδιαμφισβήτητα δεδομένα. (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999).

Βασική αφετηριακή αρχή των νέων προσεγγίσεων αποτελεί η απόκτηση της έννοιας του αριθμού από το παιδί. Τρεις είναι κατά τους Καψάλη και Λεμονίδη (1999) οι σχετικές βασικές θέσεις:

- Η θεωρία του Piaget η οποία τονίζει την σπουδαιότητα των λογικών διαδικασιών για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού από το παιδί.
- Νεότεροι ερευνητές τονίζουν τη σημασία τριών βασικών δεξιοτήτων για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού από το παιδί, της άμεσης εκτίμησης (μέχρι τρία ή το πολύ τέσσερα αντικείμενα γίνονται αντιληπτά ως ένας πληθάρθρωμος χωρίς να χρειάζονται καταμέτρηση), της καταμέτρησης και της αποτίμησης.
- Οι R. Gelman & C. - R. Gallistel (1978) θεωρούν την καταμέτρηση ως την πλέον βασική δεξιότητα η οποία οδηγεί στην κατάκτηση της έννοιας του αριθμού από το παιδί. Με αυτήν ελέγχονται επακριβώς οι πληθάρθρωμοι των συνόλων και ως εκ τούτου είναι η πρώτη δεξιότητα με δάση την οποία το παιδί έρχεται σε επαφή με τον τομέα των αριθμών.

Συχνή είναι την περίοδο εκείνη, η άποψη ότι κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις αριθμητικές σχέσεις. Με τον όρο αριθμητικές σχέσεις εννοούμε τις σχέσεις ισότητας και ανισότητας μεταξύ δύο συλλογών αντικειμένων. Ακόμα και παιδιά δύο ετών μπορούν να αναγνωρίσουν αν δύο μικρές συλλογές αντικειμένων έχουν ή όχι το ίδιο πλήθος στοιχείων (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999). Ωστόσο, όταν οι συλλογές είναι μεγάλες, η κρίση των παιδιών στηρίζεται κυρίως στα εξωτερικά χαρακτηριστικά των συλλογών όπως για παράδειγμα το μήκος των συλλογών. Αργότερα οι μαθητές, προκειμένου να απαντήσουν σε τέτοιου είδους προβλήματα, χρησιμοποιούν την ένα προς ένα αντιστοίχιση ή την απαρίθμηση (Σ. Καφούση & Ε. Ντζιαχρήστος, 1997).

2.5 Η Ελληνική Πραγματικότητα

Ειδικά για την Ελλάδα λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι μέχρι τη δεκαετία του 1970 διδάσκονταν τα «παλιά» μαθηματικά, τα οποία έδιναν έμφαση σε δεξιότητες αυτοματισμού, εκτέλεσης δηλαδή αυτόματων δεξιοτήτων αρίθμησης και εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων. Στα πλαίσια αυτής της αντιμετώπισης επιδιωκόταν κυρίως η διαμόρφωση δεξιοτήτων ρουτίνας. Αντίθετα τα Νέα Μαθηματικά έθεταν έμφαση στην κατανόηση μαθηματικών δομών (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999).

Το 1982-1983 συγγράφονται στη χώρα μας τα «νέα» βιβλία μαθηματικών, με τα οποία εισάγεται η νέα προσέγγιση των Νέων Μαθηματικών. Τα βιβλία αυτά είχαν ως αναφορά δύο κυρίως πλαίσια:

- Το έργο του J. Piaget για τη γένεση του αριθμού στο παιδί. Στα πλαίσια της θεωρίας του Piaget μερικές δραστηριότητες, όπως η σειροθέτηση, η ταξινόμηση και η διάταξη, θεωρήθηκαν ως «προαριθμητικές» ή «προμαθηματικές».
- Μια μαθηματική θεωρία η οποία είχε αναπτυχθεί ήδη πριν από έναν αιώνα, σύμφωνα με την οποία οι αριθμοί ορίστηκαν με τη βοήθεια των συνόλων (Χ. Λεμονίδης, 1994, στο Καψάλης & Λεμονίδης, 1999).

Τα έτη 2004-2005 συγγράφονται νέα σχολικά εγχειρίδια για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο ενώ εμπλουτίζονται (σχεδόν κάθε χρόνο) αυτά του Λυκείου. Τα σχολικά βιβλία παρέχονται σήμερα και σε ηλεκτρονική μορφή

(<http://ebooks.edu.gr/new/allcourses.php>). Το *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών* του υπουργείου παιδείας (http://ebooks.edu.gr/info/cps/11deppsaps_math.pdf) καθορίζει τους διδακτικούς στόχους βάση των οποίων λειτουργεί το 2015 η σχολική τάξη και αποτελείται από τρεις άξονες:

1. Γνωστικό Περιεχόμενο
2. Γενικοί Στόχοι (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις, αξίες)
3. Ενδεικτικές θεμελιώδεις Έννοιες – Διαθεματικές προσεγγίσεις

Σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού, μεταξύ των ενδεικτικών θεμελιωδών εννοιών αναφέρεται η έννοια *σύνολο*. Πολύ συχνά μάλιστα, αναφέρεται και η έννοια της *ταξινόμησης* με βάση κάποια χαρακτηριστικά, γεωμετρικών σχημάτων ή αριθμών.

Στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου η έννοια σύνολο συνεχίζει να αναφέρεται συνεχώς στις ενδεικτικές θεμελιώδεις έννοιες. Στους γενικούς στόχους της Α΄ Γυμνασίου αναφέρεται χαρακτηριστικά: «Να γνωρίσουν τα σύνολα των φυσικών, των κλασματικών και των δεκαδικών αριθμών, να μπορούν να εκτελούν με ευχέρεια τις πράξεις στα σύνολα αυτά, να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων και να τις εφαρμόζουν στην επίλυση εξισώσεων και προβλημάτων. Να γνωρίσουν το σύνολο των αρνητικών ρητών και κατ' επέκταση το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις και προβλήματα στα σύνολα αυτά». Στη γεωμετρία της Α΄ Γυμνασίου δίνεται ο ορισμός του κύκλου με τον εξής τρόπο: «Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο Ο».

Ανάμεσα στους γενικούς στόχους της Β΄ Γυμνασίου αναφέρεται ότι οι μαθητές θα πρέπει «να γνωρίσουν το σύνολο των άρρητων αριθμών και, κατ' επέκταση το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, τη σημασία των πράξεων, τις ιδιότητες αυτών και να μπορούν να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις και ανισώσεις α΄ βαθμού». Στο τέταρτο κεφάλαιο του σχολικού εγχειριδίου της Β΄ Γυμνασίου ορίζονται οι βασικές έννοιες της Περιγραφικής Στατιστικής. Ο ενιαίος ορισμός που δίνεται για την έννοια του πληθυσμού και της μεταβλητής είναι ο εξής: «Ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους, λέγεται *πληθυσμός*. Το χαρακτηριστικό (π.χ. η ομάδα προτίμησης στο

ποδόσφαιρο) ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού, ονομάζεται *μεταβλητή*».

Στην Γ΄ Γυμνασίου ορίζεται για πρώτη φορά η έννοια *σύνολο*. Συγκεκριμένα το σχολικό εγχειρίδιο αναφέρει: «Σε πολλές περιπτώσεις συνηθίζουμε να *συλλέγουμε* ή να *επιλέγουμε* διάφορα αντικείμενα και να τα ταξινομούμε σε ομάδες ή κατηγορίες. Για παράδειγμα, τα βιβλία μιας βιβλιοθήκης ανάλογα με το περιεχόμενο τους ταξινομούνται σε ιστορικά, λογοτεχνικά, ιατρικά κλπ. Σε κατηγορίες επίσης, ταξινομούμε τους αριθμούς (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί, θετικοί, αρνητικοί κλπ.), τα γράμματα της αλφαβήτου (φωνήεντα, σύμφωνα, μικρά, κεφαλαία κλπ.) και κάθε *ομάδα αντικειμένων* τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια. *Ομάδες ή κατηγορίες*, όπως οι παραπάνω, ονομάζονται στα Μαθηματικά, *σύνολα*. Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σ' ένα σύνολο ονομάζεται *στοιχείο* του συνόλου». Αναφέρονται επιπλέον οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης ενός συνόλου δηλαδή: «με αναγραφή των στοιχείων του», «με περιγραφή των στοιχείων του», «με διάγραμμα Venn». Ορίζονται τέλος, η ισότητα και η έννοια του υποσυνόλου ως εξής: «Δύο σύνολα είναι ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία», «Ένα σύνολο A ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου B, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B».

Στους ειδικούς στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος για τη Γ΄ Γυμνασίου αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι, σκοπός είναι οι μαθητές «Να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών» και «να ορίζουν ένα σύνολο με περιγραφή ή αναγραφή των στοιχείων του και να το παριστάνουν με διάγραμμα Venn, να κατανοούν πότε δυο σύνολα είναι ίσα και πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου. Να βρίσκουν την ένωση και την τομή δυο συνόλων, καθώς και το συμπλήρωμα ενός συνόλου».

Στο Λύκειο, η έννοια σύνολο είναι κομμάτι της καθημερινότητας του μαθητή. Στην Α΄ Λυκείου, στο εισαγωγικό κεφάλαιο δίνονται οι εξής ορισμοί: «Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανοήσή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο», «Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία», «Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B», «Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία». Επιπλέον, αναφέρονται οι τρεις τρόποι αναπαράστασης ενός συνόλου.

Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος ορίζεται στην Α΄ Λυκείου ως «το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$ των δυνατών αποτελεσμάτων $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_\lambda\}$ », το ενδεχόμενο ορίζεται ως «το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης», ορίζονται οι έννοιες *κενό σύνολο*, *υποσύνολο* και *συμπλήρωμα* καθώς και οι πράξεις της ένωσης και της τομής ενώ σημειώνεται ότι τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω .

Η *συνάρτηση* ορίζεται στην Α΄ Λυκείου ως «μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α (σύνολο ορισμού) αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο ενός συνόλου Β (σύνολο τιμών)». Επιπλέον, μέσω της έννοιας σύνολο ορίζεται και η *γραφική παράσταση* μιας συνάρτησης με τύπο $y = f(x)$, η οποία σύμφωνα με το σχολικό εγχειρίδιο είναι «το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$ ». Τέλος, στην Ευκλείδεια γεωμετρία της Α΄ Λυκείου αναφέρεται μεταξύ άλλων ο εξής ορισμός: «Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται *γεωμετρικός τόπος*».

Στο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου γίνεται αναφορά σε *σύνολα λύσεων* μιας εξίσωσης, ενώ ορίζεται για πρώτη φορά το σύνολο C των *Μιγαδικών* αριθμών ως ένα *υπερσύνολο* του συνόλου R των Πραγματικών αριθμών. Τέλος, ως σύνολο ορίζεται και το *αόριστο ολοκλήρωμα*. Συγκεκριμένα, στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι «το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται *αόριστο ολοκλήρωμα* της f στο Δ ».

3. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

3.1 Εικόνα έννοιας

Η *εικόνα έννοιας* αποτελείται από όλες τις γνωστικές δομές που σχετίζονται με μία έννοια (Tall & Vinner, 1981). Συγκριτικά με άλλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, τα μαθηματικά θεωρούνται ως ένα αντικείμενο μεγάλης ακρίβειας στο οποίο, οι έννοιες ορίζονται μέσω ενός τυπικού ορισμού ώστε να παρέχουν ισχυρά θεμέλια για τη μαθηματική θεωρία. Πολλές έννοιες των μαθηματικών συναντώνται εντός ή εκτός μαθηματικού πλαισίου για να οριστούν αργότερα με αυστηρό μαθηματικό τρόπο δημιουργώντας σύνθετες γνωστικές δομές στο νου κάθε ατόμου, αποδίδοντας μια ποικιλία από νοητικές εικόνες στο άκουσμα του ονόματος της έννοιας. Το όνομα μιας έννοιας, όταν το βλέπουμε ή όταν το ακούμε προκαλεί ένα ερέθισμα στη μνήμη μας. Το ερέθισμα αυτό είναι η εικόνα που έχουμε σχηματίσει για την έννοια. Γενικά, η εικόνα έννοιας μπορεί να είναι μια οπτική αναπαράσταση της έννοιας, στην περίπτωση που η έννοια έχει οπτικές αναπαραστάσεις ή απλά μια συλλογή εντυπώσεων ή εμπειριών. Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει το σχηματισμό μιας εικόνας για αυτήν (Vinner, 1991).

Συχνά στην καθημερινότητα χρησιμοποιούμε έννοιες αγνοώντας τον επίσημο ορισμό τους. Οι έννοιες αυτές νοηματοδοτούνται από τη χρήση τους σε κατάλληλα πλαίσια και μαθαίνουμε να τις αναγνωρίζουμε μέσω της εμπειρίας μας. Αργότερα αυτές οι έννοιες μπορεί να τελειοποιηθούν ως προς το νόημά τους και να ερμηνευθούν με αυξανόμενη λεπτότητα, με ή χωρίς την πολυτέλεια ενός ακριβούς ορισμού. Στα μαθηματικά, συνήθως κατά τη διαδικασία απόδοσης ενός ορισμού δίνεται στην έννοια ένα σύμβολο ή ένα όνομα που της επιτρέπει να κοινοποιείται και το οποίο βοηθά στην χρήση της. Η συνολική όμως γνωστική δομή που χρωματίζει το νόημά της είναι πολύ ευρύτερη. Είναι κάτι περισσότερο από κάποια νοητική αναπαράσταση, είτε εικονική, είτε συμβολική, είτε οποιασδήποτε άλλης μορφής. Κατά τις νοητικές διεργασίες της ανάκλησης και χρήσης μιας έννοιας, πολλές σχετικές διαδικασίες που τέθηκαν συνειδητά ή ασυνείδητα σε ενέργεια, επηρεάζουν την έννοια και τη χρήση της. Ένα μέρος της *εικόνας έννοιας* που μας έρχεται στη μνήμη μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο θα ονομάζεται, σύμφωνα με τους Tall και Vinner *προκλητέα εικόνα έννοιας* (Tall & Vinner, 1981).

Η εικόνα έννοιας χτίζεται με την πάροδο των χρόνων, μέσω εμπειριών κάθε είδους. Εξελίσσεται καθώς το άτομο ωριμάζει και συναντά νέα ερεθίσματα. Για παράδειγμα η πεποίθηση ενός μαθητή, που διδάσκεται για πρώτη φορά την αφαίρεση, ότι « αν $\alpha - \beta = \gamma$ τότε $\gamma < \alpha$ », δηλαδή ότι η αφαίρεση συνεπάγεται μείωση, αποτελεί μέρος της εικόνας του μαθητή για την έννοια της αφαίρεσης. Καθώς η εικόνα έννοιας αναπτύσσεται δεν χρειάζεται να είναι συνεκτική ανά πάσα στιγμή. Ο εγκέφαλος δεν λειτουργεί με αυτόν τον τρόπο. Διαφορετικά ερεθίσματα ενδέχεται να ενεργοποιήσουν διαφορετικά μέρη της εικόνας της έννοιας, αναπτύσσοντάς τα έτσι ώστε να μην απαιτείται η συγκρότησή τους σε ένα συνεκτικό όλον. Σε διαφορετικές στιγμές, φαινομενικά αντικρουόμενες εικόνες μπορεί να προκληθούν. Μόνο όταν οι αντικρουόμενες πλευρές προκληθούν ταυτόχρονα μπορεί να προκύψει οποιαδήποτε πραγματική αντίληψη σύγκρουσης ή σύγχυσης (Tall & Vinner, 1981).

3.2 Ορισμός έννοιας

Ο ορισμός μιας έννοιας (αν υπάρχει) είναι ένα εντελώς διαφορετικό θέμα από την εικόνα που σχηματίζουμε για αυτήν. Ως *ορισμό έννοιας* θα θεωρούμε ένα σύνολο λέξεων που χρησιμοποιούνται για να διευκρινιστεί η εν λόγω έννοια (Tall & Vinner, 1981). Η αποστήθιση του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόηση της.

Στα πλαίσια της καθημερινότητας, οι περισσότερες έννοιες κατανοούνται χωρίς οποιαδήποτε συμμετοχή ορισμών. Από την άλλη πλευρά, μερικές έννοιες, ακόμη και έννοιες της καθημερινής ζωής, μπορεί να εισαχθούν μέσω ορισμών. Για παράδειγμα η λέξη «δάσος» μπορεί να εξηγηθεί σε ένα παιδί με το να πούμε «πάρα πολλά δέντρα μαζί». Ορισμοί όπως αυτός βοηθούν να σχηματιστεί μια εικόνα της έννοιας. Από τη στιγμή όμως που σχηματίζεται μια εικόνα, ο ορισμός παύει να χρησιμοποιείται. Θα παραμείνει ανενεργός ή ακόμα θα ξεχαστεί και κατά το χειρισμό των προτάσεων που σχετίζονται με την έννοια θα γίνεται χρήση μόνο της εικόνας που δημιουργήθηκε.

Στα Μαθηματικά όμως, οι ορισμοί έχουν εξαιρετικά σημαντικό ρόλο. Όχι μόνο βοηθούν στο σχηματισμό της εικόνας της έννοιας αλλά πολύ συχνά διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο. Απαιτούν από τους μαθητές κάποιες νοητικές διαδικασίες – συνήθειες που είναι εντελώς διαφορετικές από εκείνες που έχουν

συναντήσει στα πλαίσια της καθημερινότητας (Vinner, 1991). Είναι πολύ πιθανό, τουλάχιστον στην αρχή της διαδικασίας της μάθησης, οι νοητικές συνήθειες που διαμορφώνονται από την καθημερινή ζωή να κυριαρχήσουν πάνω στις νοητικές συνήθειες που απαιτούνται κατά την εμπλοκή κάποιου με τα μαθηματικά.

Όταν τίθεται ένα ερώτημα σε έναν μαθητή, τόσο η εικόνα της έννοιας όσο και ο ορισμός της υποτίθεται ότι πρόκειται να ενεργοποιηθούν. Στην πράξη, φαίνεται, πως πολλοί εκπαιδευτικοί στη δευτεροβάθμια αλλά και στη τριτοβάθμια εκπαίδευση αναμένουν ότι οι νοητικές διαδικασίες που ενεργοποιούνται στο νου του μαθητή θα εκφράζονται με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

- i. Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της εικόνας
- ii. Καθαρά τυπική αφαίρεση με χρήση μόνο του ορισμού
- iii. Τυπική αφαίρεση μετά από τη διαισθητική σκέψη

Το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα όλων των παραπάνω είναι ότι για την επίλυση ενός προβλήματος οι νοητικές διαδικασίες που συντελούνται περιλαμβάνουν οπωσδήποτε και τον ορισμό της έννοιας. Αυτό είναι φυσικά η επιθυμητή διαδικασία. Δυστυχώς, στην πράξη οι περισσότεροι μαθητές επιλέγουν να απαντούν διαισθητικά χρησιμοποιώντας αποκλειστικά την εικόνα έννοιας (Vinner, 1991).

Ο τρόπος σκέψης που έχει συνηθίσει ο μαθητής στα πλαίσια της καθημερινής ζωής κυριαρχεί και έτσι αγνοεί την ανάγκη να συμβουλευτεί τον τυπικό ορισμό. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η αναφορά μόνο στην εικόνα της έννοιας οδηγεί τον μαθητή σε επιτυχή αποτελέσματα. Το γεγονός αυτό δεν του δημιουργεί την ανάγκη να αλλάξει τον τρόπο σκέψης που έχει συνηθίσει και να χρησιμοποιεί τον τυπικό ορισμό της έννοιας. Μόνο προβλήματα, στα οποία οι ελλιπείς εικόνες έννοιας μπορεί να είναι παραπλανητικές, μπορούν να ενθαρρύνουν τους μαθητές να στραφούν και στον ορισμό της έννοιας (Vinner, 1991).

3.3 Εικόνα ορισμού έννοιας

Μπορεί κανείς απλά να αποστηθίσει έναν ορισμό ή ουσιαστικότερα να τον κατανοήσει και να τον συσχετίσει σε κάποιο βαθμό με την έννοια. Ενδέχεται

επιπλέον, ο μαθητής να καταφύγει σε κάποια προσωπική ανασυγκρότηση του ορισμού της έννοιας. Σε αυτή την περίπτωση, ο ορισμός της έννοιας είναι το σύνολο των λέξεων που χρησιμοποιεί ο μαθητής για τη δική του εξήγηση της εικόνας που έχει διαμορφώσει για την έννοια δημιουργώντας έτσι ουσιαστικά, μια *εικόνα ορισμού της έννοιας* (Tall & Vinner, 1981). Η εικόνα αυτή είναι, φυσικά, μέρος της εικόνας έννοιας.

Ένα μέρος της εικόνας έννοιας που έρχεται σε αντιπαράθεση με κάποιο άλλο μέρος της, αποκαλείται *δυνητικός παράγοντας σύγκρουσης*. Τέτοιοι παράγοντες δεν πρέπει να προκαλούνται σε περιστάσεις που προκαλείται πραγματική γνωστική σύγκρουση, αν όμως συμβεί κάτι τέτοιο θα πρέπει να αποκαλούνται *παράγοντες γνωστικής σύγκρουσης*. Ένας σημαντικότερος δυνητικός παράγοντας σύγκρουσης είναι αυτός κατά τον οποίο ένα μέρος της εικόνας έννοιας έρχεται σε αντίθεση όχι με κάποιο άλλο μέρος της εικόνας έννοιας αλλά με τον επίσημο ορισμό της. Οι μαθητές που έχουν ένα τέτοιο δυνητικό παράγοντα σύγκρουσης στην εικόνα έννοιας τους μπορεί να είναι ασφαλής στη δική τους ερμηνεία και απλά να αντιμετωπίζουν την επίσημη θεωρία ως αδρανή και επιφανειακή (Tall & Vinner, 1981). Αν σκεφτούμε με όρους εικόνας έννοιας για την έννοια σύνολο, συνειδητοποιούμε ότι οι μαθητές δεν κάνουν πάντοτε σωστές συνδέσεις για την προσέγγιση ενός συγκεκριμένου έργου. Συγκεκριμένα, η εικόνα του ορισμού της έννοιας, μπορεί να έρχεται σε αντίθεση με άλλες πτυχές της εικόνας έννοιας.

3.4 Κριτική σχετικά με την εικόνα έννοιας

Η ιδέα της εικόνας έννοιας και της αντιπαράθεσής της με τον ορισμό της έννοιας γεννήθηκε σε μια εποχή όπου οι ατομικές και γνωστικές θεωρίες μάθησης κυριαρχούσαν στη διδακτική των μαθηματικών. Αυτό που είναι εκπληκτικό είναι ότι όσο οι κοινωνικές θεωρίες μάθησης αποκτούσαν υπεροχή, η εικόνα έννοιας διατηρούνταν μόνο από τους «γνωστικούς θεωρητικούς» (Bingolbali & Monaghan, 2007). Αυτό δεν χρειάζεται να συμβαίνει αφού η συγκεκριμένη ιδέα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ερμηνεία των δεδομένων κοινωνικοπολιτισμικών μελετών.

Αληθεύει ότι η μάθηση είναι μία εγγενώς κοινωνική δραστηριότητα που κινητοποιείται και ενθαρρύνεται μέσω της αλληλεπίδρασης με τους άλλους. Όσο

επαναστατική και να φαίνεται κάθε νέα τάση της διδακτικής των μαθηματικών ή η χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση, αυτό που τελικά μετράει περισσότερο από οτιδήποτε είναι το «τι συμβαίνει στο μυαλό του μαθητή» (Muller, 2008). Οι κοινωνικές θεωρίες μάθησης ερευνούν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες, ο μαθητής θα οδηγηθεί στο να σκεφτεί ώστε να συλλάβει τις έννοιες που διδάσκεται και το ρόλο που παίζει στη διαδικασία αυτή το περιβάλλον του μαθητή. Σε καμία περίπτωση οι κοινωνικές θεωρίες μάθησης δεν σκοπεύουν στο να καταργήσουν τις γνωστικές θεωρίες μάθησης όσο στο να αλλάξουν την εστίαση των διδασκόντων, από το άτομο καθαυτό, στο κοινωνικό σύνολο. Υπό αυτή την έννοια, η θεωρία της εικόνας έννοιας δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να θεωρηθεί απαρχαιωμένη ή ξεπερασμένη.

Οι Bingolbali και Monaghan (2007) εξέτασαν πως διαφορετικοί παράγοντες, όπως η προδιάθεση των φοιτητών διαφορετικών σχολών, συνεισφέρει στην διαμόρφωση της εικόνας έννοιας. Συγκεκριμένα μελέτησαν την εννοιολογική ανάπτυξη των πρωτοετών φοιτητών δυο σχολών, των μηχανολόγων μηχανικών και των μαθηματικών, ως προς την έννοια της παραγώγου. Αυτό που συμπέραναν είναι ότι οι πρωτοετείς μηχανολόγοι αντιλαμβάνονταν καλύτερα την έννοια της παραγώγου ως ρυθμό μεταβολής και απαντούσαν καλύτερα σε όλα τα σχετικά ερωτήματα, ενώ οι πρωτοετείς μαθηματικοί είχαν αντίστοιχη κλίση προς την παράγωγο ως εφαπτομένη. Τα ευρήματά τους είναι ενδεικτικά του ρόλου που μπορεί να παίζει το πλαίσιο στην εκάστοτε προκλητέα εικόνα έννοιας.

3.5 Μοντέλα και εικόνα έννοιας

Στα σχολικά μαθηματικά η έννοια σύνολο χρησιμοποιείται σε διάφορα πλαίσια αλλά, εν γένει, με τρόπο ασυνεπή (Fischbein & Baltsan, 1999). Βασική δυσκολία για τους μαθητές αποτελεί το γεγονός ότι καμία λεκτική περιγραφή, δεν μπορεί στην ουσία να αποτελέσει ορισμό της έννοιας σύνολο αφού γίνεται δεκτή σε κάθε αξιωματική θεμελίωση ως πρωταρχική και απροσδιόριστη (Bagni, 2006) όπως συμβαίνει για παράδειγμα με το σημείο ή την ευθεία. Αντί για κάποιον αυστηρό ορισμό, ξεκινά κανείς με μια διαισθητική διατύπωση άνευ ουσιαστικής σημασίας. Συγκεκριμένα το σύνολο ορίζεται σαν μια συλλογή αντικειμένων. Η έννοια σύνολο όμως έχει ένα πλήθος ιδιοτήτων και πτυχών που έρχονται σε αντίθεση με το αρχικό *μοντέλο της συλλογής* (Fischbein & Baltsan, 1999). Οι μαθητές ενδέχεται να υιοθετήσουν

ασυνείδητα τις ιδιότητες του μοντέλου της συλλογής ξεχνώντας τις τυπικές ιδιότητες της μαθηματικής έννοιας σύνολο.

Ένα μοντέλο (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985) έχει δύο σημασίες: (1) Ένα αρχικό αντικείμενο που χρησιμοποιείται σαν πρότυπο για την ανακατασκευή όμοιων αντικειμένων ή απομιμήσεων. Για παράδειγμα ένα ζωγραφικό μοντέλο, ένας άνθρωπος που λειτουργεί ως πρωτότυπο για την σχεδίαση ενός πίνακα. (2) Ένα δημιούργημα που έπεται μιας έννοιας, ενός αξιωματικού συστήματος, μιας μαθηματικής θεωρίας και βοηθά στην καλύτερη κατανόηση και αντιμετώπιση τυχόντων προβλημάτων. Σε αυτή την περίπτωση είναι εύλογο, το μοντέλο να είναι προσβάσιμο από το πρωτότυπο. Για παράδειγμα, στις απαρχές της ανάπτυξης της θεωρίας του ηλεκτρισμού, το ηλεκτρικό ρεύμα παρομοιάστηκε με υδάτινο ρεύμα που ρέει μέσα σε έναν πολύ στενό σωλήνα. Ο νόμος του Ohm ήταν αποτέλεσμα αυτής της αναλογίας. Στην έρευνα τους, οι Fischbein και Baltsan (1999) συμπεριέλαβαν και τις δύο παραπάνω έννοιες του μοντέλου το οποίο αποκάλεσαν «σιωπηρό» αφού όπως υποστήριζαν λειτουργεί ασυνείδητα στο νου των μαθητών.

Όταν ο Cantor δημιουργούσε την θεωρία συνόλων, είχε στον νου του την συλλογή αντικειμένων ως μοντέλο, με την πρώτη σημασία. Οι μαθητές όμως, που διδάσκονται αρχικά (ή απλά χρησιμοποιούν στο πλαίσιο του μαθήματος) την μαθηματική έννοια σύνολο, αλλά την αντικαθιστούν ασυνείδητα με το μοντέλο της συλλογής αντικειμένων και όλους τους περιορισμούς που αυτό φέρει, κάνουν χρήση του μοντέλου με την δεύτερη σημασία του.

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, οι Fischbein και Baltsan (1999) υποστηρίζουν ότι το μοντέλο της συλλογής αντικειμένων είναι αρκετό για να προβλέψουμε όλες τις παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια. Κατά την άποψη μας, το μοντέλο της συλλογής αποτελεί στην ουσία ένα μέρος της εικόνας της έννοιας σύνολο στο νου κάποιων μαθητών. Υπό αυτή την έννοια, θα ήταν ανώριμο να υποστηρίξουμε ότι όλες οι παρανοήσεις προκύπτουν από κάποιο ενιαίο μοντέλο το οποίο δρα κατά παρόμοιο τρόπο σε όλους τους μαθητές. Στην ουσία, κάθε μαθητής αναπτύσσει την προσωπική του εικόνα έννοιας την οποία εμπλουτίζει με τις ιδιότητες που ο ίδιος κρίνει ορθές ή λογικές. Ιδιαίτερα στην περίπτωση της έννοιας *σύνολο* αλλά και οποιασδήποτε πρωταρχικής έννοιας, η δημιουργία μιας *εικόνας ορισμού έννοιας* είναι μονόδρομος ακόμη και για τον έμπειρο μαθηματικό.

3.6 Παρανοήσεις στα Σύνολα – Προϋπάρχουσα Έρευνα

Οι μαθητές ξεκινούν να μαθαίνουν χτίζοντας πάνω στις έννοιες που ήδη γνωρίζουν. Οι έννοιες αυτές αποτελούν τις προ – μάθησης πεποιθήσεις τους. Μεταξύ αυτών των εννοιών υπάρχουν αυτές που έρχονται σε αντίθεση με τις αντίστοιχες επιστημονικές και ως εκ τούτου αποκαλούνται παρανοήσεις (Gilberts & Wats, 1983). Παρανόηση είναι η νόηση ή η αντίληψη οποιουδήποτε φιλολογικού ζητήματος με τρόπο αντιφατικό προς την ομόφωνη γνώμη των ειδικών (Zembat, 2008 στο Sirmaci και Tas, 2013). Οι παρανοήσεις είναι πραγματικά επικίνδυνες, δεδομένου ότι επισκιάζουν τις πραγματικές έννοιες που σχετίζονται με το ίδιο φαινόμενο. Το να μην έχεις καθόλου γνώση ενός θέματος είναι, σε κάποιες περιπτώσεις προτιμότερο από το να έχεις παρανοήσεις σχετικά με αυτό (Sirmaci και Tas, 2013).

3.6.1 Η έρευνα των Fischbein και Baltsan

Οι Fischbein και Baltsan (1999) ανέδειξαν πληθώρα παρανοήσεων τόσο μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου όσο και φοιτητών – εκπαιδευόμενων δασκάλων και εκπαιδευόμενων καθηγητών στη θεωρία συνόλων, ανοίγοντας τον δρόμο για περαιτέρω έρευνα. Η έρευνα τους στηρίχτηκε ως επί τω πλείστον στην αντίστοιχη έρευνα των Linchevski και Vinner (1988) η οποίοι κατηγοριοποίησαν τις παρανοήσεις που εμφανίστηκαν μεταξύ καθηγητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αναφορικά με την έννοια σύνολο, όπως φαίνεται παρακάτω:

- i. Τα στοιχεία που περιέχονται σε ένα σύνολο θα πρέπει να μοιράζονται κάποια συγκεκριμένη και σαφή, κοινή ιδιότητα.
- ii. Ένα σύνολο πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο.
- iii. Επαναλαμβανόμενα στοιχεία μετρούνται ως διακεκριμένα.
- iv. Ένα στοιχείο που ανήκει σε ένα σύνολο, δεν μπορεί να ανήκει σε άλλο σύνολο.
- v. Δύο σύνολα είναι ίσα αν περιέχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Βασιζόμενοι στο γεγονός ότι, η έννοια σύνολο γίνεται δεκτή στα μαθηματικά ως πρωταρχική και απροσδιόριστη συνεπώς, αντί για κάποιον αυστηρό ορισμό

ξεκινάει κανείς με το διαισθητικό μοντέλο της συλλογής αντικειμένων, οι Fischbein και Baltsan (1999) υπέθεσαν ότι: κάθε παρανόηση που σχετίζεται με την έννοια σύνολο, μπορεί να εξηγηθεί αν λάβουμε υπόψη το διαισθητικό μοντέλο της συλλογής που δρα σιωπηρά και υπόρρητα. Συγκεκριμένα υποστήριξαν ότι:

- i. Ένα σύνολο δεν είναι υποχρεωτικά μια συλλογή όμοιων αντικειμένων. Τα στοιχεία δηλαδή του συνόλου δεν είναι υποχρεωτικό να μοιράζονται κάποιες κοινές ιδιότητες. Ως εκ τούτου, η έννοια σύνολο διαφέρει από την καθημερινή χρήση της λέξης συλλογή. Το να βάλουμε στην ίδια *κατηγορία* ένα βιβλίο, μια ευθεία και έναν αριθμό είναι ασύλληπτο στο πλαίσιο της καθημερινότητας. Μια συλλογή που ομαδοποιεί εντελώς *ασυσχέτιστα* αντικείμενα είναι διαισθητικά και πρακτικά ανούσια.
- ii. Στην καθημερινή γλώσσα, δύο ίσα σύνολα είναι δυο σύνολα με το ίδιο πλήθος στοιχείων. Στα μαθηματικά από την άλλη, ίσα είναι τα σύνολα που αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Για την σύγκριση απειροσυνόλων, ο Cantor εισήγαγε την έννοια της ισοπληθικότητας. Σύνολα με άπειρα στοιχεία δεν είναι πρακτικά δυνατόν να μετρηθούν ενώ υπάρχουν και σύνολα που ακόμη και θεωρητικά είναι μη μετρήσιμα. Για να συγκρίνουμε πληθικά δύο σύνολα χρειαζόμαστε την μαθηματική διαδικασία της ένα προς ένα αντιστοίχισης. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να αντιστοιχίσει όλους τους διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς σε διαφορετικούς άρτιους αριθμούς (αριθμήσιμο σύνολο) αλλά όχι σε όλα τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος (υπεραριθμήσιμο σύνολο). Όλες αυτές οι συγκρίσεις απειροσυνόλων ως προς το πλήθος, είναι δύσκολα αποδεκτές διαισθητικά, είναι όμως διαδικασίες που αποδείχτηκαν μαθηματικά από τον Cantor. Τέλος, δυο ίσα σύνολα είναι ισοπληθικά, το αντίστροφο όμως δεν είναι απαραίτητο.
- iii. Επαναλαμβανόμενα στοιχεία μετρούνται μία μόνο φορά όταν προσδιορίζουμε τον πληθάριθμο (το πλήθος των στοιχείων) ενός συνόλου. Για παράδειγμα το σύνολο $\{3,3,3,\dots\}$ περιέχει μόνο έναν αριθμό, δηλαδή το 3. Ο κανόνας αυτός έρχεται σε αντίθεση με την πρακτική σημασία της απαρίθμησης στην καθημερινότητα. Αν κάποιος έχει ένα κουτί με 3 άσπρα και 4 μαύρα σφαιρίδια, τότε η πιθανότητα να επιλέξει άσπρο σφαιρίδιο είναι $3/7$. Μετράμε κάθε σφαιρίδιο ξεχωριστά παρόλο που τα άσπρα σφαιρίδια είναι μεταξύ τους πανομοιότυπα όπως ακριβώς και τα μαύρα.

- iv. Στη Θεωρία Συνόλων ορίζουμε το κενό σύνολο ως το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Διαισθητικά και πρακτικά αυτό δεν έχει κανένα νόημα. Η μαθηματική γενίκευση οδήγησε στην κατασκευή αυτής της έννοιας χάριν συνεπείας της Θεωρίας Συνόλων. Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι το σύνολο των κοινών σημείων δύο παραλλήλων ευθειών είναι το κενό. Σε μία καθημερινή συζήτηση, αντί αυτού θα λέγαμε ότι οι δύο ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- v. Ένα σύνολο που περιέχει μόνο ένα σύνολο, ήτοι μονοσύνολο είναι διαισθητικά αντιφατικό. Μια συλλογή θα πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Μια συλλογή με ένα μόνο σύνολο, πρακτικά είναι μη αποδεκτή.
- vi. Στην καθημερινότητα, θεωρούμε το «0» ως το «τίποτα». Ένας μαθητής που αντιλαμβάνεται κατά τα άλλα την έννοια του κενού συνόλου, ενδέχεται να θεωρήσει το σύνολο $\{0\}$ ως κενό σύνολο.

Το μοντέλο της συλλογής και οι ιδιότητες που συνοδεύουν, συνιστούν σύμφωνα με τους Fischbein και Baltsan (1999) ένα συνεκτικό οικοδόμημα ενώ οι τυπικές ιδιότητες που συνοδεύουν την μαθηματική έννοια σύνολο, φαντάζουν εκ πρώτης όψεως σαν μια αυθαίρετη μίξη. Γενικά, όρους που οι επιστήμες δανείστηκαν από την καθομιλουμένη και ορίστηκαν εκ των υστέρων αυστηρά στο εκάστοτε επιστημονικό πλαίσιο, φέρουν σιωπηρά μαζί τους ιδιότητες και περιορισμούς οι οποίες, ουδεμία σχέση δεν έχουν με τις ορθές ερμηνείες στο πλαίσιο αυτό. Ενώ σε κάποιες περιπτώσεις το εκάστοτε μοντέλο μπορεί να δίνει σωστά αποτελέσματα, εντούτοις, το ίδιο μοντέλο μπορεί να οδηγήσει σε παράδοξα, λάθη και αντιφάσεις. Η πάροδος του χρόνου επιδεινώνει την κατάσταση αφού οι μαθητές τείνουν να ξεχνούν τις τυπικές ιδιότητες του συνόλου και να τις αντικαθιστούν με εκείνες του διαισθητικού μοντέλου της συλλογής.

Η θέση που υποστηρίζεται στην παρούσα έρευνα είναι ότι δεν θα ήταν ασφαλές να υποθέσουμε ότι όλες οι παρανοήσεις προκύπτουν από κάποιο ενιαίο μοντέλο το οποίο δρα κατά παρόμοιο τρόπο σε όλους τους μαθητές αλλά θα ήταν προτιμότερο να σκεφτούμε με όρους *εικόνας έννοιας*. Ας πάρουμε για παράδειγμα την δεύτερη υπόθεση των Fischbein και Baltsan (1999) ότι στην καθομιλουμένη, δύο ίσα σύνολα είναι απαραίτητα δυο σύνολα με το ίδιο πλήθος στοιχείων και όχι δύο σύνολα με τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Στην ουσία, το να φανταστούμε δύο συλλογές με τα ίδια αντικείμενα στερείται νοήματος στον κόσμο της εμπειρίας μας. Πως θα

μπορούσαν τα ίδια μολύβια να βρίσκονται ταυτόχρονα σε δύο κασετίνες; Υπό αυτήν την έννοια, κενή νοήματος είναι και η τομή δύο συνόλων. Από την άλλη όμως, δύο ομάδες με τους ίδιους αντιπροσώπους γίνονται, ενδεχομένως, ευκολότερα αποδεκτές διαισθητικά. Ένας μαθητής για παράδειγμα, θα μπορούσε να ανήκει ταυτόχρονα σε μια σχολική ομάδα ανάγνωσης βιβλίου και μια σχολική ομάδα καλαθοσφαίρισης, ενώ τίποτα δεν απαγορεύει στις δύο ομάδες να περιέχουν ακριβώς τους ίδιους μαθητές.

Μια παρατυπία, όχι ιδιαίτερης πρακτικής σημασίας εμφανίζεται από πλευράς των Fischein και Baltsan (1999) όταν σημειώνουν ότι το σύνολο $\{3,3,3,\dots\}$ περιέχει μόνο έναν αριθμό, δηλαδή το 3. Στην πραγματικότητα το $\{3,3,3,\dots\}$ δεν είναι σύνολο δεδομένου ότι τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να είναι διακεκριμένα. Θα ήταν ορθότερη τοποθέτηση να πούμε ότι για παράδειγμα το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $x^3+x^2-x-1 = 0$ είναι το $\{-1,1\}$ και όχι το $\{-1,1,1\}$. Επιπλέον, κάπως βιαστικός είναι ο ισχυρισμός: μετράμε κάθε σφαιρίδιο ξεχωριστά παρόλο που τα άσπρα σφαιρίδια είναι μεταξύ τους πανομοιότυπα όπως ακριβώς και τα μαύρα. Δεν είναι πανομοιότυπα. Τίποτα στη φύση δεν είναι. Μόνο αντικείμενα της νόησής μας έχουν την πολυτέλεια να είναι πανομοιότυπα. Δεν προσπαθούμε εδώ σε καμία περίπτωση να ασχοληθούμε περεταίρω με την επιστημολογία του θέματος απλά αναγνωρίζουμε ότι το παραπάνω αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο για την μαθηματική κοινότητα συνεπώς, επικείμενο γνωστικό εμπόδιο για τους μαθητές.

Παλαιότερα, κατά τους Fischein και Baltsan (1999) ήταν σύνηθες φαινόμενο και ενδεχομένως είναι ακόμη, να χρησιμοποιείται η έννοια σύνολο στο μάθημα των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση ή ακόμη και στο νηπιαγωγείο. Κατά τη άποψη των ερευνητών, αυτό είναι βασικό διδακτικό λάθος. Τα παιδιά συνηθίζουν στην ιδέα ότι το σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων με όλες τις ιδιότητες που περιγράψαμε παραπάνω και που έρχονται σε αντίθεση με τις τυπικές. Σημειώνουν τέλος ότι η έννοια σύνολο είναι μια αφηρημένη, τυπική μαθηματική έννοια που μπορεί να αφομοιωθεί μόνο όταν η διανοητική ικανότητα του μαθητή είναι ώριμη αρκετά για να χρησιμοποιεί τυπικές έννοιες. Ο ισχυρισμός αυτός θα μπορούσε να εξεταστεί μέσω των «τριών κόσμων των μαθηματικών» του Tall (2004):

- i. Ο *ενσώματος κόσμος* είναι απόλυτα συνδεδεμένος με τις δράσεις και τις αισθήσεις μας μέσα στον πραγματικό – φυσικό κόσμο και είναι ο αρχικός μαθηματικός τρόπος σκέψης. Αφορά όχι μόνο στις νοητικές αντιλήψεις μας

για τον κόσμο αυτό, αλλά και τις εσωτερικές έννοιες που έχουμε δημιουργήσει. Η δημιουργία των εννοιών αυτών γίνεται με τις νοερές εικόνες που έχουμε κατασκευάσει μέσω των οπτικών και χωρικών μας αισθήσεων. Δηλαδή, έχει να κάνει με τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε έννοιες και αντικείμενα, τα οποία μπορεί να μην υπάρχουν μέσα σε αυτόν.

- ii. Ο *συμβολικός κόσμος* έχει να κάνει με τον κόσμο των συμβόλων που χρησιμοποιούμε στους διάφορους τομείς των μαθηματικών. Αρχίζει από τις δράσεις όπως για παράδειγμα η αρίθμηση, οι οποίες ενθυλακώνονται με τη μορφή εννοιών μέσω της χρήσης των συμβόλων. Με τις δράσεις αυτές ουσιαστικά μεταβαίνουμε από τις διαδικασίες που χρησιμοποιούμε όταν κάνουμε μαθηματικά στις μαθηματικές έννοιες που σκεφτόμαστε.
- iii. Ο *Τυπικός κόσμος* έχει να κάνει με τα αξιώματα και τις θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών και βασίζεται στις ιδιότητες που εκφράζονται μέσω αυτών. Είναι ουσιαστικά ο κόσμος που αντιμετωπίζει τα μαθηματικά με τυπικό, αξιωματικό τρόπο. Μέσω των αξιωμάτων δύναται να ορισθούν νέες έννοιες και οι ιδιότητές τους, με σκοπό την κατασκευή μιας συνεκτικής και λογικά παραγόμενης θεωρίας.

Δεν θα επιχειρήσουμε να εμβαθύνουμε στο συγκεκριμένο θέμα, θέλουμε απλά να επιστήσουμε την προσοχή του αναγνώστη στο γεγονός ότι, ενώ η έννοια σύνολο βασιλεύει στον τυπικό κόσμο αφού αποτελεί βασικό πυλώνα των σύγχρονων μαθηματικών (Sirmaci και Tas, 2013), εντούτοις δεν απουσιάζει από τους άλλους δύο. Ας θυμηθούμε ότι στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια, ο κύκλος ορίζεται σαν *σύνολο σημείων* του επιπέδου, σε μαθητές νεαρής ηλικίας που όχι απλά δεν έχουν διδαχτεί την έννοια σύνολο αλλά αναμφίβολα δεν έχουν προλάβει να «εγκατασταθούν» στον τυπικό κόσμο.

3.6.2 Η έρευνα του Bagni

Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν υπάρχουν σαν πραγματικά, απτά αντικείμενα. Η σύλληψή τους καθώς και η κατασκευή τους διαμεσολαβείται πάντοτε από σύμβολα. Το γεγονός αυτό, που επισημάνθηκε από τον Vygotsky (1962) σε γενικότερο πλαίσιο (δεν υπάρχει μαθηματική έννοια χωρίς συμβολισμό), μας οδηγεί στα λεγόμενα *γνωστικά παράδοξα της μαθηματικής σκέψης*.

Στην έρευνα του, ο Bagni (2006) εστίασε στις δυσκολίες των μαθητών στη διάκριση δύο βασικών εννοιών της θεωρίας συνόλων, το «περιέχεται» και το «ανήκει». Οι έννοιες αυτές δεν μπορούν να θεωρηθούν ξεπερασμένες σε σχέση με τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα αφού τα διαγράμματα Venn και η διαδικασία της ταξινόμησης, είναι ακόμη μέρος τους. Αποτελούν μεταξύ άλλων, τη βάση για την ιεραρχία των γεωμετρικών αντικειμένων (τετράγωνα, ορθογώνια, παραλληλόγραμμα, τετράπλευρα), την ιεραρχία του συστήματος αριθμών (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, πραγματικοί), ενώ παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατασκευή μαθηματικών αποδείξεων. Οι έννοιες του «περιέχεται» και του «ανήκει», έχουν μια διαισθητική σημασία (στην καθομιλουμένη) που τις κάνει να μοιάζουν εύκολες στην κατανόηση και εκμάθηση. Παρόλα αυτά, οι αντίστοιχες μαθηματικές σημασίες και ο τρόπος συμβολισμού τους απαιτούν μια σύνθετη και αυστηρή εννοιολογική σύλληψη.

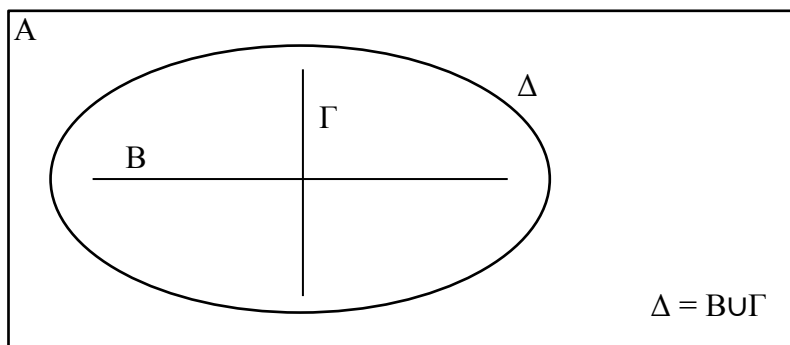
Σύμφωνα με τον Bagni (2006) τα διαγράμματα Venn παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση μιας εικόνας για την έννοια σύνολο. Όταν ένας μαθητής σχεδιάζει μια καμπύλη γραμμή για να θεωρήσει μια συλλογή αντικειμένων στο εσωτερικό της, αντιλαμβάνεται μεταφορικά την οπτική αυτή αναπαράσταση σαν ένα δοχείο. Η σχηματική αναπαράσταση με τη μορφή δοχείου σχετίζεται με τις βασικούς, κοινούς τρόπους αλληλεπίδρασης με τον πραγματικό κόσμο. Τα διαγράμματα Venn όμως δεν μπορούν να ταυτιστούν με την έννοια σύνολο. Το πέρασμα από την αρχική θεώρηση ορισμένων στοιχείων ως αμοιβαία συνδεόμενα, στην ευρεία έννοια σύνολο δεν είναι εύκολο.

Μια από τις βασικές ιδιότητες ενός συνόλου σύμφωνα με τον Cantor, είναι η ικανότητα του να ανήκει σε άλλα σύνολα. Είναι δυνατόν λοιπόν να ορίσουμε ένα σύνολο, τα στοιχεία του οποίου να είναι επίσης σύνολα. Στα διαγράμματα Venn, τα στοιχεία ενός συνόλου παρουσιάζονται ως σημεία στο εσωτερικό του σχήματος. Πως θα μπορούσαμε όμως να αναπαραστήσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου αν ήταν και αυτά σύνολα; Το να χαράξουμε μια περιοχή μέσα στην αρχική περιοχή θα ήταν παραπλανητικό αφού θα δημιουργούσε σύγχυση της έννοιας του «ανήκει» και του «υποσυνόλου». Γενικά τα σύμβολα « ϵ » και « $\subseteq$ » δεν μπορούν να θεωρηθούν αμοιβαίως ανταλλάξιμα. Συγκεκριμένα, δεν ισχύει πάντα ότι $\forall x(x \in \alpha \rightarrow x \subseteq \alpha)$, για τον λόγο αυτό άλλωστε, σύνολα που πληρούν την προηγούμενη ιδιότητα ονομάζονται μεταβατικά.

Το κρίσιμο σημείο που πρέπει να τονιστεί εδώ είναι κατά τον Bagni (2006) ότι οι έννοιες κλειδιά της θεωρίας συνόλων όπως το «ανήκει» και το «υποσύνολο» έχουν μια διαισθητική σημασία που ορίζεται αρκετά αργότερα, αυστηρότερα μέσω μιας ακριβούς λεκτικής περιγραφής. Η διαδικασία αυτή είναι εξάλλου χαρακτηριστικό των επιστημονικών εννοιών (Vygotsky, 1962). Η ένταξη των εννοιολογικών και σχηματικών ιδιοτήτων σε ενιαίες νοητικές δομές, με την επικράτηση των εννοιολογικών περιορισμών πάνω στις εικονικές, δεν είναι μια φυσική διαδικασία και θα πρέπει να αποτελούν διαρκή μέριμνα από μέρους του δασκάλου (Fischbein, 1993).

Ένα πρόβλημα που χρησιμοποίησε ο Bagni (2006) στην έρευνα του, είναι το εξής: Έστω A το σύνολο των σημείων του επιπέδου, B το σύνολο των σημείων δοθείσης ευθείας του επιπέδου και Γ το σύνολο των σημείων μια ευθείας διαφορετικής από την πρώτη και κάθετη προς αυτήν. Ονομάζουμε Δ το σύνολο με στοιχεία του τα σύνολα B, Γ . *Ανήκει* το Δ στο δυναμοσύνολο του A ; Η απάντηση είναι «όχι» διότι το Δ είναι σύνολο με στοιχεία σύνολα. Το δυναμοσύνολο του A περιέχει μεν σύνολα αλλά, σύνολα σημείων του επιπέδου και όχι σύνολα συνόλων. Στην περίπτωση του δεκαπεντάχρονου μαθητή που μελέτησε ο Bagni (2006), η απάντηση που δόθηκε ήταν «ναι». Ο μαθητής στηρίχτηκε σε μια απλή χρήση διαγράμματος Venn που όπως είπαμε δεν αρκεί για το διαχωρισμό των εννοιών «ανήκει» και «υποσύνολο» στην περίπτωση συνόλων με στοιχεία σύνολα. Αυτό που ο μαθητής θα έπρεπε να συμπεράνει είναι ότι «το Δ είναι υποσύνολο του δυναμοσυνόλου του A ».

Αν εξετάσουμε λίγο πιο προσεκτικά το παραπάνω πρόβλημα, θα δούμε πως, τα σύνολα A, B, Γ και Δ παρουσιάζονται μέσω λεκτικής περιγραφής. Η σωστή απάντηση εδώ, απαιτεί την άμεση μετάβαση από την λεκτική στην συμβολική αναπαράσταση. Αυτό που συνέβη στην περίπτωση του δεκαπεντάχρονου μαθητή ήταν μια έμμεση μετάβαση στην συμβολική αναπαράσταση. Η αυθόρμητη τάση του μαθητή ήταν να περάσει πρώτα από την οπτική αναπαράσταση. Το γεγονός αυτό τον οδήγησε στο λανθασμένο συμπέρασμα $\Delta = B \cup \Gamma$ αντί για $\Delta = \{B, \Gamma\}$ και συνεπώς στο $\Delta \in P(A)$ αντί για $\Delta \subseteq P(A)$.



Τα συμπεράσματα του Bagni (2006) επιβεβαιώνει και το αποτέλεσμα της έρευνας των Incikabi, Tuna και Biber (2012), ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δυσκολεύονται να εντοπίσουν τα στοιχεία ενός συνόλου ενώ όριζαν με επιτυχία υποσύνολά του ενώ δυσκολίες συναντούν στη χρήση της μεθόδου της περιγραφής δείχνοντας προτίμηση προς την μέθοδο της αναγραφής και των διαγραμμάτων Venn.

3.6.2 Άλλες έρευνες – Η οπτική μας

Οι Fischbein και Baltsan (1999) υποστήριξαν ότι στα σχολικά μαθηματικά η έννοια σύνολο εισάγεται με το διαισθητικό μοντέλο της συλλογής αντικειμένων συνεπώς αν παρατηρήσουμε προσεκτικά το μοντέλο αυτό είμαστε σε θέση να εξηγήσουμε αλλά και να προβλέψουμε τις παρανοήσεις των μαθητών. Οι Incikabi, Tuna και Biber (2012) ενισχύουν την υπόθεση αυτή σημειώνοντας ότι στην έρευνά τους, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, στην προσπάθειά τους να ορίσουν την έννοια σύνολο συχνά χρησιμοποιούσαν τον όρο συλλογή.

Για να σχηματίσει κανείς την *εικόνα της συλλογής αντικειμένων* για την έννοια σύνολο θα πρέπει ενδεχομένως να την διδαχθεί πρώτα με αυτόν τον τρόπο. Αυτό που συχνά συμβαίνει στην ελληνική πραγματικότητα είναι ότι η έννοια σύνολο διδάσκεται από επιφανειακά έως καθόλου. Οι καθηγητές δεν σπαταλούν σχεδόν καθόλου χρόνο στο να διδάξουν την έννοια αντιθέτως στηρίζονται στο γεγονός ότι η έννοια έχει ήδη μια διαισθητική σημασία στο νου των μαθητών (Bagni 2006). Δεν υπάρχει καμία έρευνα που να στηρίζει την υπόθεσή μας περί μη διδασκαλίας της έννοιας στα ελληνικά σχολεία ούτε εξετάζεται η συγκεκριμένη υπόθεση στην

παρούσα έρευνα. Αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι, ποιά εικόνα έχουν οι Έλληνες μαθητές για την έννοια σύνολο και τον ορισμό της. Είναι πράγματι η εικόνα της συλλογής αντικειμένων αυτή που έχει σχηματίσει κάθε μαθητής; Η αυτονόητη λοιπόν ερώτηση που θα κάναμε σε έναν μαθητή είναι: Τι είναι σύνολο (Sirmaci και Tas, 2013);

Οι Sirmaci και Tas (2013) στην έρευνά τους σε φοιτητές – υποψήφιους δασκάλους της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έθεσαν το ερώτημα: Είναι το σύνολο των ακεραίων ισοπληθικό με αυτό των αρτίων; Σχεδόν όλοι οι φοιτητές έδωσαν λάθος απαντήσεις στην ερώτηση σχετικά με αυτό το θέμα. Οι Tirosh, Tsamir, Levenson και Tabach (2011) σε έρευνα σε αντίστοιχο κοινό έθεσαν τρία ενδιαφέροντα προβλήματα:

- i. Στο χορό του σχολείου, οι μαθητές χόρευαν σε ζευγάρια. Ένα αγόρι και ένα κορίτσι αποτελούσαν κάθε ζευγάρι. Κανένας μαθητής δεν έμεινε χωρίς συνοδό. Αν $A = \{\text{Τα αγόρια}\}$ και $K = \{\text{Τα κορίτσια}\}$ είναι δύο σύνολα, είναι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A το ίδιο με το πλήθος των στοιχείων του συνόλου K ; Πως φτάσατε σε αυτό το συμπέρασμα;
- ii. Δίνονται τα σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$ και $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Είναι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A το ίδιο με το πλήθος των στοιχείων του συνόλου B ; Πως φτάσατε σε αυτό το συμπέρασμα;
- iii. Ο Γιάννης ήταν άρρωστος έτσι ο γιατρός του συνέστησε μια αγωγή δύο εβδομάδων. Την πρώτη εβδομάδα θα παίρνει ένα πράσινο χάπι κάθε 3 ώρες. Την δεύτερη εβδομάδα θα παίρνει ένα κόκκινο χάπι κάθε 3 ώρες. Αν $\Pi = \{\text{Τα πράσινα χάπια}\}$ και $K = \{\text{Τα κόκκινα χάπια}\}$ είναι δύο σύνολα, είναι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Π το ίδιο με το πλήθος των στοιχείων του συνόλου K ; Πως φτάσατε σε αυτό το συμπέρασμα;

Τα προβλήματα (i) και (iii) οδηγούν στην διαδικασία της 1-1 αντιστοίχισης η οποία είναι στην ουσία μια μέθοδος που μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε πεπερασμένα όσο και σε αριθμήσιμα σύνολα για τον προσδιορισμό του πληθικού τους αριθμού. Το πρόβλημα (ii) όμως μπορεί να οδηγήσει στο παραπλανητικό συμπέρασμα ότι, αν ένα σύνολο αποτελεί γνήσιο υποσύνολο ενός ευρύτερου συνόλου τότε έχει κατ' ανάγκη μικρότερο πληθικό αριθμό. Το συμπέρασμα αυτό είναι βέβαια ορθό για πεπερασμένα σύνολα όχι όμως και για άπειρα αφού ένα απειροσύνολο, μπορεί να είναι ισοπληθικό με κάποια από τα υποσύνολα του (Sirmaci και Tas, 2013). Η υπόθεσή μας εδώ είναι

πως ένας μαθητής της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι (σχεδόν) αδύνατο να επιχειρηματολογήσει ορθά σε ερωτήσεις περί πληθικού αριθμού απειροσυνόλων. Συγκεκριμένα, αν τροποποιούσαμε το ζήτημα που τέθηκε από τους Sirmaci και Tas (2013) για το πλήθος των στοιχείων του συνόλου των ακεραίων σε σχέση με αυτό των αρτίων και ζητούσαμε για παράδειγμα να συγκριθούν ως προς το πλήθος των στοιχείων τους, το σύνολο των φυσικών με αυτό των αρτίων (θετικών), η πιθανή πορεία της σκέψης ενός μαθητή θα αναμέναμε να είναι μια από τις παρακάτω:

i. Μέτρηση στοιχείων

- Οι φυσικοί και οι άρτιοι είναι άπειροι άρα ισοπληθικοί (σωστό συμπέρασμα, λάθος αιτιολόγηση).
- Οι άρτιοι είναι ακριβώς μισοί από τους φυσικούς (λάθος συμπέρασμα).

ii. Αντιστοίχιση στοιχείων

- Οι άρτιοι είναι υποσύνολο των φυσικών και άρα λιγότεροι ως προς το πλήθος (σωστή παρατήρηση, λάθος συμπέρασμα).
- Αντιστοιχώ κάθε φυσικό αριθμό n στον άρτιο αριθμό $2n$ και συμπεραίνω ότι είναι ίσοι (σωστό συμπέρασμα, σωστή αιτιολόγηση).

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Ερευνητικά ερωτήματα

Η εστίαση στην παρούσα έρευνα είναι οι παρανοήσεις των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε σχέση με την Θεωρία Συνόλων. Τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας είναι τα εξής:

1. Ποιες αντιλήψεις σχηματίζουν οι μαθητές για την έννοια σύνολο και τον αντίστοιχο ορισμό της;
2. Ποιές παρανοήσεις εμφανίζονται μεταξύ των μαθητών του Λυκείου σχετικά με τις ιδιότητες των συνόλων;

4.2 Μέθοδος – Ερευνητικό εργαλείο

Για τους ερευνητικούς μας σκοπούς επιλέξαμε την ποσοτική μεθοδολογία έρευνας και συγκεκριμένα έρευνα επισκόπησης. Το δείγμα μας αποτελείται από 78 μαθητές της Α' τάξης και 60 της Β' τάξης ενός δημόσιου Λυκείου της Αττικής. Τα τμήματα της Β' Λυκείου ήταν γενικής παιδείας. Η δειγματοληψία μας ήταν συμπτωματική (ευκαιριακό δείγμα). Για τους σκοπούς της έρευνας σχεδιάσαμε ένα ερωτηματολόγιο 9 ερωτήσεων. Το πλήρες ερωτηματολόγιο παρατίθεται στο τέλος της παρούσας εργασίας.

Η έρευνα διεξήχθη στον χώρο των μαθητών (μέσα στις τάξεις τους). Προηγήθηκε πιλοτική έρευνα σε 4 μαθητές της Α' Λυκείου και 2 φοιτητές των ΑΤΕΙ Αθηνών. Σκοπός της πιλοτικής έρευνας ήταν η αξιολόγηση των ερωτήσεων ως προς τη σαφήνεια αλλά και ο καθορισμούς του απαραίτητου χρονικού περιθωρίου για την περάτωση του ερωτηματολογίου. Στην πιλοτική έρευνα, οι συμμετέχοντες ολοκλήρωναν το ερωτηματολόγιο σε λιγότερο από 35 λεπτά, ως εκ τούτου, στα υποκείμενα τις βασικής έρευνας διατέθηκε μια διδακτική ώρα. Διευκρινήσεις ως προς το νόημα των ερωτήσεων γίνονταν δεκτές μόνο στην περίπτωση που δεν καθοδηγούσαν τους εμπλεκόμενους προς κάποια κατεύθυνση.

4.3 Το Ερωτηματολόγιο

Οι ερωτήσεις 1 και 2 του ερωτηματολογίου σχεδιάστηκαν με πρότυπο το αντίστοιχο ερωτηματολόγιο των Fischbein και Baltsan (1999,) τις υποθέσεις των οποίων στόχευαν να εξετάσουν και οι ερωτήσεις 5, 6 και 7 με τρόπο άμεσο. Συγκεκριμένα, σκοπός της πρώτης ερώτησης ήταν να εξετάσει την υπόθεση των Linchevski και Vinner (1988) και Fischbein και Baltsan (1999) ότι οι μαθητές συχνά έχουν την παρανόηση ότι τα στοιχεία που περιέχονται σε ένα σύνολο θα πρέπει να μοιράζονται κάποια συγκεκριμένα, σαφής, κοινή ιδιότητα. Οι Linchevski και Vinner (1988) σημείωσαν ότι είναι συχνό φαινόμενο μεταξύ των καθηγητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η πεποίθηση ότι ένα σύνολο πρέπει να αποτελείται από τουλάχιστον ένα στοιχείο. Συνέπεια του παραπάνω είναι προφανώς η απόρριψη του κενού συνόλου και του μονοσυνόλου. Οι Fischbein και Baltsan (1999) συμφωνούν με την παραπάνω δήλωση ενώ σημειώνουν επιπροσθέτως πως οι μαθητές αναμένεται να παρουσιάσουν δυσκολίες και στην κατανόηση της έννοιας του απειροσυνόλου. Τέλος, εικάζουμε ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν τότε τα στοιχεία ενός συνόλου είναι καλώς ορισμένα. Αυτές ακριβώς τις υποθέσεις επιχειρούμε να εξετάσουμε μέσω της δεύτερης ερώτησης του ερωτηματολογίου. Η παρανόηση που υποθέσαμε ότι θα εμφανιστεί στην τρίτη ερώτηση ήταν ότι ένα σύνολο είναι μια *διατεταγμένη* ν-άδα δηλαδή δύο σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια στοιχεία και μάλιστα στην ίδια σειρά.

Μέσω της τέταρτης ερώτησης, η οποία διατυπώθηκε από τους Sirmaci και Tas (2013) επιχειρήσαμε να ελέγξουμε τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τον πληθικό αριθμό απειροσυνόλων. Οι τρεις παρανοήσεις που υποθέτουμε ότι θα εμφανιστούν σε αυτό το σημείο είναι: ότι δύο απειροσύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, ότι οι άρτιοι αριθμοί (θετικοί) είναι οι μισοί από τους φυσικούς αριθμούς και ότι ένα σύνολο έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό από κάθε γνήσιο υποσύνολό του (Sirmaci και Tas, 2013). Η ερώτηση είναι φυσικά πολύ απαιτητική για μαθητές Λυκείου, δεδομένου ότι δεν διδάσκεται καθόλου στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση η έννοια του πληθαρίθμου. Στην πραγματικότητα λοιπόν, θα ήταν ίσως πιο κατάλληλο να μιλούμε για πεποιθήσεις και όχι παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με τις εν λόγω έννοιες (απειροσύνολο, πληθικό αριθμός).

Οι ερωτήσεις 5, 6 και 7 σχεδιάστηκαν ώστε να ελέγξουν άμεσα τις πεποιθήσεις των μαθητών και συνεπώς τις υποθέσεις των Fischbein και Baltsan (1999). Συγκεκριμένα, η πέμπτη ερώτηση αποσκοπεί στην εξέταση της υπόθεσης ότι οι μαθητές ενδέχεται να έχουν την παρανόηση ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Στην έκτη ερώτηση ζητείται από τους μαθητές να δηλώσουν αν «τα στοιχεία που περιέχονται σε ένα σύνολο θα πρέπει να μοιράζονται κάποια συγκεκριμένη, σαφή, κοινή ιδιότητα». Τέλος, μέσω της έβδομης ερώτησης εξετάζεται η αντίληψη ή μη, της έννοιας της τομής δύο ή παραπάνω συνόλων από τους μαθητές, δηλαδή η άμεση εξέταση της υπόθεσης των Linchevski και Vinner (1988) ότι οι μαθητές θα έχουν την παρανόηση ότι ένα στοιχείο που ανήκει σε ένα σύνολο, δεν μπορεί να ανήκει σε άλλο σύνολο.

Στην όγδοη ερώτηση, ζητείται από τους μαθητές να διατυπώσουν, «πως αντιλαμβάνονται την έννοια σύνολο». Η επιλογή της λέξης «αντιλαμβάνεστε» δεν είναι τυχαία. Πράγματι αυτό που θέλουμε να μελετήσουμε είναι οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια σύνολο. Τους δίνουμε λοιπόν την ευκαιρία με αυτό το ερώτημα, να μας περιγράψουν την εικόνα ορισμού έννοιας που έχουν σχηματίσει. Τέλος, η ερώτηση 9 δημιουργήθηκε για να αποκαλύψει κάποιες από τις δυσκολίες των μαθητών στη διάκριση δύο βασικών εννοιών της θεωρίας συνόλων, το «περιέχεται» και το «ανήκει» Bagni (2006).

4.4 Ανάλυση Αποτελεσμάτων

Στις ερωτήσεις τύπου «Ναι/Όχι» ή «Σωστό/Λάθος», σωστές θεωρήσαμε τις ερωτήσεις που χαρακτηρίστηκαν ορθά (Ναι, Λάθος κ.ο.κ) ακόμη και αν η αιτιολόγηση ήταν λανθασμένη. Ομοίως, χαρακτηρίσαμε λάθος της απαντήσεις με βάση το χαρακτηρισμό ανεξάρτητα από τις αιτιολογήσεις, ενώ λάθος θεωρήθηκαν και οι μη απαντήσεις. Η εξέταση της εμφάνισης ή μη εμφάνισης των παρανοήσεων έγινε βάση τις αιτιολογήσεις που λάβαμε. Στην περίπτωση μη αιτιολόγησης οι τιμές θεωρήθηκαν ελλείπουσες (missing values), έτσι η διασταύρωση των σωστών ή λάθος απαντήσεων με την εμφάνιση ή μη εμφάνιση της παρανόησης έγινε για όσους παρείχαν κάποια αιτιολόγηση (valid values).

Η στατιστική ανάλυση έγινε με το λογισμικό IBM SPSS Statistics 20. Συχνότητες, μέσοι, συντελεστές r γραμμικής συσχέτισης Pearson, Wilcoxon Signed Ranks test και Mann Whitney tests, εκτελέστηκαν θεωρώντας $p < 0.05$ σαν στατιστικά σημαντικό (λόγω του μικρού δείγματος θεωρήθηκε πολύ μεγάλη απαίτηση να αναμένουμε $p < 0.01$ σε όλα τα test). Εκτός από τη στατιστική ανάλυση, παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποιες απαντήσεις των μαθητών μέσα από το ερωτηματολόγιο, που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Προς διευκόλυνση του αναγνώστη παρατίθεται μια λίστα με τις παρανοήσεις που εμφανίστηκαν στην έρευνα, στην αρχή της ενότητας των αποτελεσμάτων (Πίνακας 2).

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται συγκεντρωτικά οι συχνότητες των σωστών απαντήσεων των μαθητών στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.

Ερωτήσεις	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες
1α	137	99.3%
1β	62	44.9%
1γ	100	72.5%
1δ	35	25.4%
2α	108	78.3%
2β	93	67.4%
2γ	50	36.2%
2δ	73	52.9%
2ε	22	15.9%
2στ	85	61.6%
2ζ	8	5.8%
3	122	88.4%
4	7	5.1%
5	78	56.5%
6	32	23.2%
7	118	85.5%
8	90	65.3%
9α	17	12.3%
9β	41	29.7%
9γ	98	71%
9δ	66	47.8%
9ε	99	71.7%
9ζ	38	27.5%

Πίνακας 1. Σωστές απαντήσεις, συχνότητες, σχετικές συχνότητες.

Από την ανάλυση των απαντήσεων σε κάθε ερώτηση προέκυψαν οι παρακάτω παρανοήσεις (Πίνακας 2) σχετικά με την έννοια και τις ιδιότητες των συνόλων. Ορισμένες από αυτές συμπίπτουν με τις παρανοήσεις που εντοπίστηκαν σε προηγούμενες εργασίες (Linchevski & Vinner, 1988, Fischbein & Baltsan, 1999,

Bagni, 2006, Incikabi et al., 2012, Sirmaci & Tas, 2013. Sharif-Rasslan et al., 2014) ενώ άλλες, από όσο γνωρίζουμε δεν αναφέρονται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία:

Π1	Τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να μοιράζονται κάποια κοινή ιδιότητα.
Π2	Δεν ορίζεται σύνολο χωρίς κανένα στοιχείο.
Π3	Δεν ορίζεται σύνολο με μοναδικό στοιχείο.
Π4	Δεν ορίζονται σύνολα με άπειρα στοιχεία.
Π5	Δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.
Π6	Ένα στοιχείο δεν μπορεί να ανήκει σε παραπάνω από ένα σύνολα.
Π7	Σύνολο είναι μια συλλογή <i>αριθμών</i> .
Π8	Σύνολο είναι μια <i>διαδικασία</i> ή το <i>αποτέλεσμα</i> μιας πράξης.
Π9	Σύνολο είναι μια <i>διατεταγμένη ν-άδα</i> .
Π10	Δύο απειροσύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.
Π11	Οι άρτιοι αριθμοί (θετικοί) είναι οι μισοί από τους φυσικούς αριθμούς.
Π12	Ένα σύνολο έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό από κάθε γνήσιο υποσύνολό του.
Π13	Ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι υποσύνολο του εαυτού του.
Π14	Ταύτιση των συμβόλων $\subseteq$ και $\in$
Π15	$\{\emptyset\} = \emptyset$

Πίνακας 2. Παρανοήσεις.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται διαδοχικά τα αποτελέσματα κάθε ερώτησης. Οι πίνακες με την ένδειξη «crosstabulation» διασταυρώνουν την ορθότητα των απαντήσεων των μαθητών με την εμφάνιση ή μη εμφάνιση της παρανόησης που αναμένουμε να αναδεχθεί. Για παράδειγμα, ένας μαθητής ενδέχεται να απαντά σωστά σε κάποια ερώτηση αλλά από την απάντησή του να φαίνεται ότι έχει την υποτιθέμενη παρανόηση. Από την άλλη, κάποιος που απαντά λάθος ενδέχεται να μην εμφανίζει την παρανόηση που αναζητούμε. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι δεν εμφανίζει καμία

παρανόηση. Επισημαίνουμε λοιπόν ότι, η στήλη με την ένδειξη «Μη εμφάνιση» δεν αναφέρεται στους μαθητές που δεν εμφάνισαν κάποια παρανόηση αλλά σε εκείνους που δεν εμφάνισαν την προς εξέταση παρανόηση. Ελλείπουσες (missing) θεωρήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες απουσίαζε η αιτιολόγηση.

Σε ερωτήσεις που στοχεύουν να εξετάσουν την ίδια παρανόηση, ελέγξαμε τη συσχέτιση μεταξύ των δεδομένων μας. Συγκεκριμένα, το δεύτερο είδος πίνακα εξετάζει τον δειγματικό συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson. Στην ουσία αυτό που φανερώνεται μέσα από αυτούς τους πίνακες είναι η συνέπεια των απαντήσεων των μαθητών, δηλαδή, αν κάποιος που εμφανίζει μια παρανόηση σε κάποιο ερώτημα εμφανίζει την ίδια παρανόηση και στα υπόλοιπα ερωτήματα που την εξετάζουν. Τέλος, παρατίθενται ενδεικτικά κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών από το ερωτηματολόγιο, ενώ διεξάγεται και ένα Mann – Whitney test για τη σύγκριση των μαθητών των δύο τάξεων.

Ερώτηση 1 του ερωτηματολογίου

Μπορεί καθεμιά από τις παρακάτω συλλογές να αποτελέσει σύνολο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

α) 2 , 4 , 6 , 8 , 10

β) 2 , 4 , 5 , 8 , 10

γ) Ένα τρίγωνο, ένας κύκλος και ένα τετράγωνο

δ) Ένα τρίγωνο, ένας κύκλος, ένα τετράγωνο, μια ευθεία, ένα σημείο και ο αριθμός 5

Σκοπός της συγκεκριμένης ερώτησης είναι να εξετάσει την υπόθεση ότι, οι μαθητές συχνά έχουν την παρανόηση ότι τα στοιχεία που περιέχονται σε ένα σύνολο θα πρέπει να μοιράζονται κάποια συγκεκριμένη, σαφή, κοινή ιδιότητα. Σχεδόν όλοι οι μαθητές (99,7%) δέχονται τη συλλογή {2, 4, 6, 8, 10} ως σύνολο ενώ περισσότεροι από τους μισούς (55.1%) δεν δέχονται ως σύνολο τη συλλογή {2, 4, 5, 8, 10}.

Όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες η παρανόηση (Π1) περί κοινής ιδιότητας εμφανίστηκε στο 91.2% των μαθητών που αιτιολόγησαν την απάντησή τους στην ερώτηση (1α) και στο 92.3% των μαθητών που αιτιολόγησαν την απάντησή τους στην ερώτηση (1β). Αν συγκρίνουμε τα ποσοστά του από τους δύο

πίνακες θα δούμε ότι, ανεξάρτητα από το αν απαντούν σωστά ή λάθος στα ερωτήματα (1α) και (1β), οι περισσότεροι μαθητές έχουν την παρανόηση ότι τα στοιχεία που περιέχονται σε ένα σύνολο θα πρέπει να μοιράζονται κάποια κοινή ιδιότητα. Για παράδειγμα όταν ρωτάμε αν η συλλογή {2, 4, 6, 8, 10} είναι σύνολο, η απάντηση «Ναι, γιατί είναι όλοι ζυγοί» που λάβαμε από έναν μαθητή, χαρακτηρίζεται σωστή με λάθος αιτιολόγηση (εμφάνιση της εν λόγω παρανόησης) αφού ο μαθητής απαιτεί μια κοινή ιδιότητα μεταξύ των αριθμών.

Case Processing Summary

	Valid	Missing
1α * 1α – Π1	82,6%	17,4%

1α * 1α – Π1 Crosstabulation

Ερώτηση 1α		Παρανόηση Π1		
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο
Λάθος	Συχνότητες	-	-	-
	Σχ. Συχνότητες	-	-	-
Σωστό	Συχνότητες	10	104	114
	Σχ. Συχνότητες	8,8%	91,2%	100,0%
Σύνολο	Συχνότητες	10	104	114
	Σχ. Συχνότητες	8,8%	91,2%	100,0%

Πίνακας 3. Ερώτηση 1α, παρανόηση (Π1).

Case Processing Summary

	Valid	Missing
1β * 1β – Π1	75,4%	24,6%

1β * 1β – Π1 – Crosstabulation

Ερώτηση 1β		Παρανόηση Π1		
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο
Λάθος	Συχνότητες	0	51	51
	Σχ. Συχνότητες	0,0%	100,0%	100,0%
Σωστό	Συχνότητες	8	45	53
	Σχ. Συχνότητες	15,1%	84,9%	100,0%
Σύνολο	Συχνότητες	8	96	104
	Σχ. Συχνότητες	7,7%	92,3%	100,0%

Πίνακας 4. Ερώτηση 1β, παρανόηση (Π1).

Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που δεν αναμέναμε είναι ότι ένα σχετικά μικρό ποσοστό μαθητών (Πίνακας 5 και 6) έχουν την παρανόηση (Π7) ότι ένα σύνολο είναι μόνο μια συλλογή *αριθμών* και όχι μια συλλογή αντικειμένων με την ευρεία έννοια. Συγκεκριμένα, ορισμένοι μαθητές δυσκολεύονται να δεχτούν ότι ένα τρίγωνο, ένας κύκλος και ένα τετράγωνο μπορούν να αποτελέσουν σύνολο, όχι επειδή δεν βρίσκουν κάποια κοινή ιδιότητα μεταξύ τους αλλά επειδή τα συγκεκριμένα αντικείμενα δεν είναι αριθμοί. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε ενδεχομένως να εξηγήσει γιατί τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων στα ερωτήματα (1γ) και (1δ) του Πίνακα 1 είναι λίγο χαμηλότερα. Ενδεικτικά αναφέρεται το παράδειγμα ενός μαθητή ο οποίος υποστηρίζει ότι: «Η συγκεκριμένη συλλογή δεν μπορεί να αποτελέσει σύνολο γιατί στα σύνολα περιλαμβάνονται μόνο αριθμοί».

Case Processing Summary

	Valid	Missing
1γ * 1β – Π1	65,9%	34,1%
1γ * 1β – Π7	65,9%	34,1%

1γ * 1β – Π1, 1β – Π7 Crosstabulation

Ερώτηση 1γ		Παρανόηση Π1			Παρανόηση Π7		
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο	Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο
Λάθος	Συχ.	0	15	15	11	4	15
	Σ.. Συχ.	0,0%	100,0%	100,0%	73,3%	26,7%	100,0%
Σωστό	Συχ.	6	70	76	73	3	76
	Σ. Συχ.	7,9%	92,1%	100,0%	96,1%	3,9%	100,0%
Σύνολο	Συχ.	6	85	91	84	7	91
	Σ. Συχ.	6,6%	93,4%	100,0%	92,3%	7,7%	100,0%

Πίνακας 5. Ερώτηση 1γ, παρανοήσεις (Π1), (Π7).

Case Processing Summary

	Valid	Missing
1δ * 1δ – Π1	65,9%	34,1%
1δ * 1δ – Π7	65,9%	34,1%

1δ * 1δ – Π1, 1δ – Π7 Crosstabulation

Ερώτηση 1δ		Παρανόηση Π1			Παρανόηση Π7		
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο	Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο
Λάθος	Συχ.	0	72	72	65	7	72
	Σ.. Συχ.	0,0%	100,0%	100,0%	90,3%	9,7%	100,0%

Σωστό	Συχ. Σ. Συχ.	7 36,8%	12 63,2%	19 100,0%	19 100,0%	0 0,0%	19 100,0%
Σύνολο	Συχ. Σ. Συχ.	7 7,7%	84 92,3%	91 100,0%	84 92,3%	7 7,7%	91 100,0%

Πίνακας 6. Ερώτηση 1δ, παρανοήσεις (Π1), (Π7).

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι συσχετίσεις των ερωτημάτων (1α), (1β), (1γ) και (1δ) ως προς την παρανόηση Π1. Όπως φαίνεται οι συσχετίσεις είναι ιδιαίτερα υψηλές σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $p < 0.01$. Η συσχέτιση φανερώνει στην ουσία την συνέπεια στις αιτιολογήσεις των μαθητών. Τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα συγκεκριμένα, δείχνουν ότι οι μαθητές που εμφανίζουν την παρανόηση (Π1) περί κοινής ιδιότητας σε κάποια ερώτηση, την διατηρούν και στις υπόλοιπες.

		1α – Π1	1β – Π1	1γ – Π1	1δ – Π1
1α – Π1	Pearson				
	Correlation	1	0.865	1.000	0.784
	Sig.(2-tailed)		.000	.000	.000
	N	114	104	90	90
1β – Π1	Pearson				
	Correlation	0.865	1	0.920	1.000
	Sig.(2-tailed)	.000		.000	.000
	N	104	104	88	87
1γ – Π1	Pearson				
	Correlation	1.000	0.920	1	0.920
	Sig.(2-tailed)	.000	.000		.000
	N	90	88	91	89
1δ – Π1	Pearson				
	Correlation	0.784	1.000	0.920	1
	Sig.(2-tailed)	.000	.000	.000	
	N	90	87	89	91

Πίνακας 7. Ερώτηση 1, παρανόηση (Π1), συσχετίσεις.

Ερώτηση 2 του ερωτηματολογίου

Ορίζουν οι παρακάτω δηλώσεις ένα σύνολο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

- α. Οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 11
- β. Οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 10.
- γ. Οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 9.
- δ. Οι λύσεις της εξίσωσης $3+x = 12$.
- ε. Οι λύσεις της εξίσωσης $0 \cdot x = 5$.
- στ. Οι λύσεις της εξίσωσης $0 \cdot x = 0$.
- ζ. Οι ψηλοί μαθητές της τάξης σας

Τόσο το ερώτημα (2β) όσο και το (2δ) εξετάζουν την παρανόηση (Π3): Δεν ορίζεται σύνολο με μοναδικό στοιχείο. Με μια πρώτη ματιά στα ποσοστά επιτυχίας (Πίνακας 1) των μαθητών βλέπουμε ότι το 67.4% απαντά σωστά στην (2β) ενώ το 52.9% απαντά σωστά στην (2δ). Τα δύο ερωτήματα είναι στην ουσία ισοδύναμα και συγκεκριμένα θα μπορούσαν να αναδιατυπωθούν ως: «Είναι η έκφραση {9} ένα σύνολο;». Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα υπάρχουν διαφορές στατιστικά σημαντικές και η τάση είναι με την ομάδα των «negative ranks» δηλαδή με όσους πήραν καλύτερο score στην 2β, συνεπώς η 2δ δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές.

Wilcoxon Signed Ranks Test

		Ranks		
	Τάξη	N	Mean Rank	Sum of Ranks
2δ – 2β	Negative Ranks	32 ^a	22,50	720,00
	Positive Ranks	12 ^b	22,50	270,00
	Ties	94 ^c		
	Total	138		

a. $2\delta < 2\beta$

b. $2\delta > 2\beta$

c. $2\delta = 2\beta$

Test Statistics

	2δ – 2β
Z	-3,015 ^b
Asymp. Sig.	,003

Πίνακας 8. Σύγκριση ερωτημάτων 2β και 2δ.

Η παρανόηση (Π3) περί μονοσυνόλου, εμφανίζεται (Πίνακας 9) στους μισούς περίπου μαθητές που επιχειρούν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους στα δύο ερωτήματα. Άξιο αναφοράς είναι ότι ένας στους τρεις μαθητές που απαντούν σωστά στην ερώτηση (2β) έχουν την παρανόηση, όπως άλλωστε και το 16,7% εκείνων που απάντησαν σωστά στην (2γ) ενώ, το 61,6% των μαθητών δεν έδωσε καθόλου αιτιολόγηση στο ερώτημα (2β) ενώ το 46,4 δεν αιτιολόγησε καθόλου στο (2δ).

Case Processing Summary

	Valid	Missing
2β * 2β –Π3	38,4%	61,6%
2δ * 2δ –Π3	53,6%	46,4%

2β * 2β –Π3, 2δ * 2δ –Π3 Crosstabulation

Ερώτηση 2β		Παρανόηση Π3		
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο
Λάθος	Συχνότητες	3	17	20
	Σχ. Συχνότητες	15,0%	85,0%	100,0%
Σωστό	Συχνότητες	23	10	33
	Σχ. Συχνότητες	69,7%	30,3%	100,0%
Σύνολο	Συχνότητες	26	27	53
	Σχ. Συχνότητες	49,1%	50,9%	100,0%
Ερώτηση 2δ		Παρανόηση Π3		
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο
Λάθος	Συχνότητες	6	32	38
	Σχ. Συχνότητες	15,8%	84,2%	100,0%
Σωστό	Συχνότητες	30	6	36
	Σχ. Συχνότητες	83,3%	16,7%	100,0%
Σύνολο	Συχνότητες	36	38	74
	Σχ. Συχνότητες	48,6%	51,4%	100,0%

Πίνακας 9. Ερώτηση (2β), (2δ) παρανόηση (Π3).

Η συσχέτιση μεταξύ των (2β – Π3) και (2δ – Π3) που αντιστοιχούν στην εμφάνιση ή μη, της παρανόησης (Π3) στα δύο ερωτήματα είναι πολύ μεγάλη. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές που εμφανίζουν την παρανόηση στο ένα ερώτημα την διατηρούν και στο άλλο, συνεπώς τα αποτελέσματά μας δεν οφείλονται στην τύχη.

		2β – Π3	2δ – Π3
2β – Π3	Pearson	1.000	0.923
	Correlation		
	Sig.(2-tailed)	.000	.000
	N	53	50
2δ – Π3	Pearson	0.923	1.000
	Correlation		
	Sig.(2-tailed)	1.000	0.923
	N	.000	.000

Πίνακας 10. Ερώτηση (2β), (2δ), παρανόηση Π3, συσχετίσεις.

Τα ερωτήματα (2γ) και (2ε) εξετάζουν την παρανόηση (Π2): Δεν ορίζεται σύνολο χωρίς κανένα στοιχείο. Τα ποσοστά επιτυχίας (Πίνακας 1) στα συγκεκριμένα ερωτήματα είναι ιδιαίτερος χαμηλά ενώ η εμφάνιση της παρανόησης μεταξύ των μαθητών που παρείχαν κάποια αιτιολόγηση (Πίνακας 11) ιδιαίτερος συχνή.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε η απάντηση ενός μαθητή ο οποίος και στα δύο ερωτήματα δήλωσε «όχι, γιατί αποτελεί κενό σύνολο». Ο συγκεκριμένος μαθητής γνωρίζει το κενό σύνολο κι όμως δεν το δέχεται ως τέτοιο.

Case Processing Summary

	Valid	Missing
2γ * 2γ – Π2	36,2%	63,8%
2ε * 2ε – Π2	52,9%	47,1%

2γ * 2γ – Π2, 2ε * 2γ – Π2 Crosstabulation

Ερώτηση 2γ		Παρανόηση Π2		
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο
Λάθος	Συχνότητες	5	33	38
	Σχ. Συχνότητες	13,2%	86,8%	100,0%
Σωστό	Συχνότητες	5	7	12
	Σχ. Συχνότητες	41,7%	58,3%	100,0%
Σύνολο	Συχνότητες	10	40	50
	Σχ. Συχνότητες	20,0%	80,0%	100,0%

Ερώτηση 2ε		Παρανόηση Π2		
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο
Λάθος	Συχνότητες	6	59	65
	Σχ. Συχνότητες	9,2%	90,8%	100,0%
Σωστό	Συχνότητες	5	3	8
	Σχ. Συχνότητες	62,5%	37,5%	100,0%
Σύνολο	Συχνότητες	11	62	73
	Σχ. Συχνότητες	15,1%	84,9%	100,0%

Πίνακας 11. Ερώτηση (2γ), (2ε) παρανόηση (Π2).

Υψηλή συσχέτιση μεταξύ των (2γ – Π2) και (2ε – Π2), που αντιστοιχούν στην εμφάνιση ή μη της παρανόησης (Π2) στα δύο ερωτήματα, παρατηρείται στον Πίνακα 12. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα αποτελέσματα δεν είναι τυχαία και οι περισσότεροι μαθητές που αιτιολογούν, έχουν πράγματι την παρανόηση ότι δεν ορίζονται κενά σύνολα.

		2γ – Π2	2ε – Π2
2γ – Π2	Pearson		
	Correlation	1.000	0.923
	Sig.(2-tailed)	.000	.000
	N	50	46
2ε – Π2	Pearson		
	Correlation	0.923	1.000
	Sig.(2-tailed)	.000	.000
	N	46	73

Πίνακας 12. Ερώτηση (2γ), (2ε), παρανόηση Π2, συσχετίσεις.

Μέσω της ερώτησης (2στ) επιχειρούμε να ελέγξουμε την παρανόηση (Π4): Δεν ορίζονται σύνολα με άπειρα στοιχεία. Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μόνο 8.6% των μαθητών που αιτιολόγησαν την απάντησή τους παρουσίασαν την συγκεκριμένη παρανόηση ενώ αν δεν λάβουμε υπόψη τις αιτιολογήσεις, το 61.6% του συνόλου των μαθητών απάντησε σωστά στην ερώτηση. Το γεγονός αυτό δεν είναι και τόσο περίεργο αν αναλογιστεί κανείς ότι τα σύνολα που συναντά ως επί το πλείστον ο έλληνας μαθητής είναι απειροσύνολα ήτοι, τα «γνωστά» σύνολα αριθμών και οι γεωμετρικοί τόποι.

Case Processing Summary

	Valid	Missing
2στ * Π4	42,0%	58,0%

* – Crosstabulation

Ερώτηση 2στ		Παρανόηση Π4		
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Σύνολο
Λάθος	Συχνότητες	6	5	11
	Σχ. Συχνότητες	54,5%	45,5%	100,0%
Σωστό	Συχνότητες	47	0	47
	Σχ. Συχνότητες	100,0%	0,0%	100,0%
Σύνολο	Συχνότητες	53	5	58
	Σχ. Συχνότητες	91,4%	8,6%	100,0%

Πίνακας 13. Ερώτηση (2στ), παρανόηση (Π4).

Τέλος, το 94.2% των μαθητών απάντησε εσφαλμένα στο ερώτημα (2ζ) μέσω του οποίου επιχειρήσαμε να εξετάσουμε αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται τότε τα στοιχεία ενός συνόλου είναι καλά ορισμένα. Αξίζει να αναφερθεί το παράδειγμα ενός μαθητή ο οποίος δήλωσε «Δεν μπορώ να απαντήσω καθώς δεν γνωρίζω από ποιο ύψος και πάνω». Ο συγκεκριμένος είναι και ο μόνος μαθητής που απάντησε σωστά στην ερώτηση (2ζ) παρέχοντας και μια σωστή αιτιολόγηση. Οι υπόλοιποι 7 που απάντησαν σωστά στο συγκεκριμένο ερώτημα δεν παρείχαν καμία αιτιολόγηση, όχι μόνο σε αυτό αλλά και στα περισσότερα ζητήματα του ερωτηματολογίου, γεγονός που μας οδηγεί στην εικασία ότι απάντησαν τυχαία.

Ερώτηση 3 του ερωτηματολογίου

Είναι τα σύνολα $\{1,2,3\}$ και $\{3,2,1\}$ ίσα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Η παρανόηση που επιχειρούμε να εξετάσουμε εδώ είναι, ότι ένα σύνολο είναι μια διατεταγμένη ν-άδα (Π9) δηλαδή δύο σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια στοιχεία και μάλιστα στην ίδια σειρά. Η συγκεκριμένη παρανόηση εμφανίστηκε μόλις στο 5,1% των μαθητών που αιτιολόγησαν την απάντησή τους. Όσοι μαθητές είχαν την παρανόηση απάντησαν λάθος θεωρώντας ότι τα σύνολα δεν μπορούν να είναι ίσα αν

τα στοιχεία τους δεν βρίσκονται στην ίδια σειρά. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την απάντηση ενός μαθητή: «Όχι, δεν είναι ίσα διότι υπάρχει λάθος σειρά».

Μια παρανόηση που εμφανίστηκε εδώ παρότι δεν το σχεδιάζαμε, είναι ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων (Π5). Επιπλέον, από τους μαθητές που επιχείρησαν να δώσουν κάποια αιτιολόγηση, το 6,1% είχε την παρανόηση (Π8) ότι ένα σύνολο είναι μια διαδικασία ή το αποτέλεσμα μιας πράξης. Στην ουσία η τελευταία παρανόηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως δύο διακεκριμένες (το σύνολο ως διαδικασία και το σύνολο ως αποτέλεσμα). Εντούτοις, επειδή κατά τον σχεδιασμό της έρευνας δεν είχαμε προβλέψει την εμφάνιση των συγκεκριμένων παρανοήσεων δεν υπήρχαν ερωτήσεις που να στοχεύουν στην ανάδειξή τους. Για τον λόγο αυτό, δεν ήταν σε κάθε περίπτωση καθαρό ποιά από τις δύο εμφανιζόταν, συνεπώς επιλέξαμε να τις ενοποιήσουμε στην παρανόηση (Π8). Αξίζει να τονιστεί εδώ ότι, το ποσοστό εμφάνισης της εν λόγω παρανόησης, αν και πολύ χαμηλό είναι υψηλότερο από εκείνο της παρανόησης (Π9) που αναμέναμε να εμφανιστεί.

Case Processing Summary

	Valid	Missing
3 * Π9, Π5, Π8	71,7%	28,3%

3 * Π5, Π8, Π9 Crosstabulation

Ερώτηση 3		Παρανόηση Π9		Παρανόηση Π5		Παρανόηση Π8		Σύνολο
		Μη εμφ.	Εμφ.	Μη εμφ.	Εμφ.	Μη εμφ.	Εμφ.	
Λάθος	Συχνότητες	1	5	6	0	4	2	6
	Σχ. Συχνότητες	16,7%	83,3%	100%	0,0%	66,7%	33,3%	100%
Σωστό	Συχνότητες	93	0	90	3	89	4	93
	Σχ. Συχνότητες	100%	0,0%	96,8%	3,2%	95,7%	4,3%	100%
Σύνολο	Συχνότητες	94	5	96	3	93	6	99
	Σχ. Συχνότητες	94,9%	5,1%	97,0%	3,0%	93,9%	6,1%	100%

Πίνακας 14. Ερώτηση 3, παρανοήσεις (Π9), (Π5), (Π8).

Η συγκεκριμένη ερώτηση αποδείχθηκε πολύ εύκολη συνεπώς δεν θα ήταν φρόνιμο να στηριχτούμε στα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτήν για να καταλήξουμε σε συμπεράσματα. Ωστόσο αξίζει να αναφέρουμε κάποιες από τις απαντήσεις των μαθητών με ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ένας μαθητής θεωρώντας το σύνολο ως το αποτέλεσμα μιας πράξης (Π8) έγραψε «Τα σύνολα είναι ίσα διότι αν προστεθούν βγάζουν τον ίδιο αριθμό». Να θυμίσουμε εδώ ότι στα Ελληνικά η λέξη σύνολο χρησιμοποιείται συχνά στην καθομιλουμένη ως άθροισμα. Όταν για παράδειγμα θέλουμε να πληρώσουμε σε ένα εστιατόριο, δεν λέμε συνήθως «πόσο είναι το άθροισμα» αλλά «πόσα είναι στο σύνολο».

Ένας άλλος μαθητής θεωρώντας το σύνολο ως μια ακολουθία (Π8) δήλωσε ότι «Τα σύνολα δεν είναι ίσα αφού τα στοιχεία δεν προκύπτουν από την πρόσθεση ή την αφαίρεση του ίδιου αριθμού». Συγχέει δηλαδή ο μαθητής ότι τα σύνολα με τις αριθμητικές προόδους και θεωρεί ότι δεν είναι ίσα επειδή η διαφορά των όρων στο πρώτο σύνολο είναι 1 ενώ στο δεύτερο -1.

Η συχνότερη απάντηση που λάβαμε είναι ότι: «Τα σύνολα είναι ίσα διότι έχουν τα ίδια στοιχεία απλά σε διαφορετική σειρά» ή «Τα σύνολα είναι ίσα διότι η σειρά δεν παίζει ρόλο». Με την Ερώτηση 5 επιχειρούμε όπως θα δούμε παρακάτω, να εξετάσουμε άμεσα τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με την ισότητα συνόλων.

Ερώτηση 4 του ερωτηματολογίου

Συγκρίνετε ως προς το πλήθος των στοιχείων τους, το σύνολο των φυσικών αριθμών με αυτό των άρτιων αριθμών.

Οι τρεις παρανοήσεις που υποθέτουμε ότι θα εμφανιστούν σε αυτό το σημείο είναι, η παρανόηση (Π10) ότι δύο απειροσύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, η παρανόηση (Π11) ότι οι άρτιοι αριθμοί (θετικοί) είναι οι μισοί από τους φυσικούς αριθμούς και η παρανόηση (Π12) ότι ένα σύνολο έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό από κάθε γνήσιο υποσύνολό του. Να σημειώσουμε εδώ ότι κανένας μαθητής δεν εμφάνισε ταυτόχρονα περισσότερες από μία παρανοήσεις. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο διότι ακόμη και κάποιος που στην εικόνα έννοιάς του έχει και τις τρεις πεποιθήσεις, θα ανακαλέσει συνήθως μία από αυτές για να εξάγει το απαραίτητο συμπέρασμα. Η ερώτηση είναι φυσικά πολύ απαιτητική για μαθητές Λυκείου, δεδομένου ότι δεν διδάσκεται καθόλου στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση η έννοια του πληθαρίθμου. Στην πραγματικότητα λοιπόν, θα ήταν ίσως πιο κατάλληλο να μιλούμε

για πεποιθήσεις και όχι παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με τις εν λόγω έννοιες (απειροσύνολο, πληθικό αριθμός).

Στον Πίνακα 15 αναγράφονται οι συχνότητες εμφάνισης της κάθε παρανόησης – πεποίθησης. Όπως αναφέραμε παραπάνω, η στήλη με την ένδειξη «Μη εμφάνιση» δεν υπονοεί ότι το 52,8% των μαθητών δεν εμφάνισαν κάποια παρανόηση αλλά ότι δεν εμφάνισαν κάποια από τις προαναφερθείσες. Αντιθέτως, κάποιες απαντήσεις των μαθητών ήταν πιο προβληματικές από ότι θα αναμέναμε. Ορισμένοι μαθητές για παράδειγμα δήλωσαν ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι 10 στο πλήθος θεωρώντας ότι το σύνολο των φυσικών είναι το $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ενώ κάποιοι δήλωσαν ότι οι φυσικοί είναι κατά 5 περισσότεροι από τους άρτιους υπονοώντας ότι οι άρτιοι είναι το σύνολο $\{0,2,4,6,8\}$. Είναι άλλωστε, το πιο εντυπωσιακό αποτέλεσμα ότι λιγότεροι από τους μισούς μαθητές εμφάνισαν κάποια από τις αναμενόμενες απαντήσεις, παρότι θεωρούσαμε ότι είναι και οι μόνες πιθανές.

Στην προσπάθειά μας να κρίνουμε αν κάποιος μαθητής έχει κάποια από τις παραπάνω παρανοήσεις, συναντήσαμε απαντήσεις που δυσκολευτήκαμε να ερμηνεύσουμε. Για παράδειγμα ένας μαθητής έγραψε: «Μπορεί οι αριθμοί να είναι άπειροι ωστόσο οι φυσικοί θα είναι περισσότεροι αφού ανάμεσα παρεμβάλλονται τόσα άρτια όσα και περιττά». Ο μαθητής ενδέχεται να στηρίχτηκε στην διαδικασία της αντιστοίχισης στοιχείων και να συμέρανε ότι αν «διαγράψει» όλους τους άρτιους, μένουν όλοι οι περιττοί. Αυτό συμβαίνει επειδή οι άρτιοι αριθμοί είναι υποσύνολο των φυσικών συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση ο μαθητής θα είχε την παρανόηση (Π12). Αν όμως, ο μαθητής δεν σκεπτόταν με όρους αντιστοίχισης αλλά μέτρησης, τότε ο θα είχε την παρανόηση ότι μπορούμε να μετρήσουμε τα άπειρα στοιχεία των δύο συνόλων και να συμπεράνουμε ότι οι φυσικοί είναι διπλάσιοι από τους άρτιους (Π11).

Η στρατηγική της μέτρησης, όπως είδαμε στο θεωρητικό μας πλαίσιο μπορεί να οδηγήσει τόσο στην παρανόηση (Π10) ότι τα δύο σύνολα είναι ισοπληθικά (7% των μαθητών που απάντησαν την Ερώτηση 5) όσο και στην παρανόηση (Π11) ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι διπλάσιοι ως προς το πλήθος από τους θετικούς άρτιους αριθμούς (16,3% των μαθητών που απάντησαν την Ερώτηση 5).

Case Processing Summary

	Valid	Missing
4 * Π10, Π11, Π12	62,3%	37,7%

4 * Π10, Π11, Π12 – Crosstabulation

Ερώτηση 5		Παρανοήσεις				Σύνολο
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση Π10	Εμφάνιση Π11	Εμφάνιση Π12	
Λάθος	Συχνότητες	46	2	14	17	79
	Σχ. Συχνότητες	58,2%	2,5%	17,7%	21,5%	100,0%
Σωστό	Συχνότητες	3	4	0	0	7
	Σχ. Συχνότητες	42,9%	57,1%	0,0%	0,0%	100,0%
Σύνολο	Συχνότητες	49	6	14	17	86
	Σχ. Συχνότητες	57,0%	7,0%	16,3%	19,8%	100,0%

Πίνακας 15. Ερώτηση 4, παρανοήσεις (Π10), (Π11), (Π12)

Στην συγκεκριμένη ερώτηση, ελλείπουσες (missing) θεωρήθηκαν οι μη απαντήσεις και όχι οι μη αιτιολογήσεις. Ο πρώτος από τους τρεις μαθητές που απάντησαν σωστά και δεν εμφάνισαν κάποια παρανόηση δήλωσε απλά ότι «είναι ίσοι». Ο δεύτερος μαθητής ωστόσο, έδωσε μια πολύ ενδιαφέρουσα απάντηση. Συγκεκριμένα έγραψε ότι «οι φυσικοί αριθμοί είναι παραπάνω, τα σύνολα όμως ίσα». Πράγματι, το σύνολο των φυσικών αριθμών μπορεί να θεωρηθεί πλουσιότερο των αρτίων, δεδομένου ότι τους περιέχει, ωστόσο οι πληθικοί αριθμοί των δύο συνόλων είναι οι ίδιοι. Ο τρίτος μαθητής έδωσε μια εκτεταμένη απάντηση, εξίσου ενδιαφέρουσα: «Οι φυσικοί αποτελούν ευρύτερο κομμάτι αριθμών μέσα στο οποίο ανήκουν και οι άρτιοι. Συνεπώς είναι υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Όσο μπορεί να είναι το πλήθος των μεν θα είναι και των δε». Οι απαντήσεις των δύο τελευταίων ήταν και οι μόνες «πραγματικά» σωστές απαντήσεις που λάβαμε. Δεν υποστηρίζουμε φυσικά ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται για παράδειγμα ότι, οι φυσικοί αριθμοί έχουν μικρότερο πληθάρημο από τους πραγματικούς, εντούτοις δεν εμφανίζουν ρητά κάποια παρανόηση.

Όλοι οι μαθητές που απάντησαν σωστά και αιτιολόγησαν λάθος την απάντησή τους εμφάνισαν την παρανόηση (Π10). Ενδεικτικά αναφέρουμε τις απαντήσεις δύο μαθητών που είχαν την εν λόγω παρανόηση: «Είναι το ίδιο πλήθος, άπειροι και οι δύο», «Όσο είναι το πλήθος των μεν είναι και των δε αφού είναι άπειροι». Όπως ήταν αναμενόμενο στην συγκεκριμένη ερώτηση, όσοι μαθητές

απαντούν σωστά ότι το πλήθος των στοιχείων των δύο συνόλων είναι το ίδιο, εμφανίζουν όμως ρητά κάποια παρανόηση, η παρανόηση αυτή είναι ότι δύο απειροσύνολα έχουν πάντα τον ίδιο πληθάριθμο. Η (Π10) δηλαδή, είναι η μόνη παρανόηση που μπορεί να οδηγήσει σε σωστά αποτελέσματα.

Από την άλλη μεριά, οι μαθητές που εμφάνισαν τις παρανοήσεις (Π11) και (Π15) είναι πολύ περισσότεροι από εκείνους που εμφάνισαν την (Π10). Συχνές ήταν οι απαντήσεις όπως αυτή ενός μαθητή που έγραψε ότι «οι άρτιοι είναι οι μισοί από τους φυσικούς». Χαρακτηριστικά είναι επιπλέον, τα ακόλουθα τρία παραδείγματα μαθητών που έχουν την παρανόηση (Π12) ότι ένα σύνολο έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό από κάθε γνήσιο υποσύνολό του: «Το σύνολο των φυσικών είναι πολύ μεγαλύτερο διότι το σύνολο των αρτίων είναι υποσύνολο των φυσικών», «Το σύνολο των φυσικών είναι σαφώς μεγαλύτερο γιατί περιέχει και το σύνολο των αρτίων».

Ερώτηση 5 του ερωτηματολογίου

Πότε πιστεύετε ότι είναι ίσα δυο σύνολα;

Αυτή η ερώτηση αποσκοπεί στην άμεση εξέταση της εμφάνισης της παρανόησης (Π5) ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Περισσότεροι από τους μισούς μαθητές έδωσαν σωστούς ορισμούς για την ισότητα δύο συνόλων. Συχνή ήταν η απάντηση «Δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν τα ίδια στοιχεία» ή «Δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν τα ίδια πράγματα». Κάποιοι μαθητές προσπάθησαν ανεπιτυχώς να δώσουν έναν πιο αυστηρό ορισμό. Μια απάντηση που λάβαμε ήταν για παράδειγμα ότι δύο σύνολα είναι ίσα «όταν κάθε στοιχείο του Α περιέχεται και στο Β».

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 16 η παρανόηση (Π5) περί σύγχυσης της ισότητας με την ισοπληθικότητα εμφανίστηκε στο 12.4% των αιτιολογήσεων των μαθητών. Το ποσοστό αυτό, αν και όχι ιδιαίτερα υψηλό, δεν είναι σε καμία περίπτωση ευκαταφρόνητο. Αξίζει όμως να παρατηρήσουμε ότι, η παρανόηση (Π1) ότι τα στοιχεία θα πρέπει να μοιράζονται μια κοινή ιδιότητα, η παρανόηση (Π8) ότι το σύνολο είναι μια διαδικασία και ιδιαίτερα η παρανόηση (Π7) ότι ένα σύνολο στα μαθηματικά μπορεί να περιέχει μόνο αριθμούς, σημείωσαν υψηλότερα ποσοστά εμφάνισης παρότι δεν αποτελούσαν τις υπό εξέταση παρανοήσεις.

Case Processing Summary

	Valid	Missing
5 * Π1, Π5, Π7, Π8	88,4%	11,6%

5 * Π1, Π5, Π7, Π8 – Crosstabulation

Ερώτηση 5		Παρανόηση Π1		Παρανόηση Π5		
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	
Λάθος	Συχνότητες	27	17	37	7	
	Σχ. Συχνότητες	61,4%	38,6%	84,1%	15,9%	
Σωστό	Συχνότητες	73	5	70	8	
	Σχ. Συχνότητες	93,6%	6,4%	89,7%	10,3%	
Σύνολο	Συχνότητες	100	22	107	15	
	Σχ. Συχνότητες	82,0%	18,0%	87,7%	12,3%	
Ερώτηση 5		Παρανόηση Π7		Παρανόηση Π8		Σύνολο
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	
Λάθος	Συχνότητες	27	17	23	21	44
	Σχ. Συχνότητες	61,4%	38,6%	52,3%	47,7%	100%
Σωστό	Συχνότητες	49	29	78	0	78
	Σχ. Συχνότητες	62,8%	37,2%	100%	0,0%	100%
Σύνολο	Συχνότητες	76	46	101	21	122
	Σχ. Συχνότητες	62,3%	37,7%	82,8%	17,2%	100%

Πίνακας 16. Ερώτηση 6, παρανόηση (Π1), (Π5), (Π7), (Π8).

Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές απαντήσεις που λάβαμε:

- Δύο σύνολα είναι ίσα όταν περιέχουν το ίδιο πλήθος αριθμών.
- Όταν έχουν τους ίδιους αριθμούς.
- Δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο είδος πραγμάτων.
- Όταν τα στοιχεία του ενός συνόλου τιμών αντιστοιχούν σε ίσες τιμές του άλλου συνόλου.
- Όταν κάθε τιμή ενός συνόλου αντιστοιχεί σε κάποια τιμή ενός άλλου συνόλου.
- Δυο σύνολα είναι ίσα αν έχουν ίδιους όρους ή όταν το άθροισμα των όρων τους είναι ίδιο.
- Στα Μαθηματικά όταν έχουν το ίδιο αποτέλεσμα. Στην ζωή όταν έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά.

Όπως φαίνεται από τις απαντήσεις των μαθητών, δεν έλλειπαν εκείνοι που παρουσίασαν ταυτόχρονα παραπάνω από μια παρανοήσεις.

Ερώτηση 6 του ερωτηματολογίου

Πιστεύετε ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να μοιράζονται κάποια κοινή ιδιότητα;

Όπως είναι φανερό, με το συγκεκριμένο ερώτημα εξετάζουμε την εμφάνιση της παρανόησης (Π1), δηλαδή ότι τα στοιχεία ενός συνόλου διέπονται από τουλάχιστον μια κοινή ιδιότητα.

Case Processing Summary

	Valid	Missing
6	94,1%	5,1%

Ερώτηση 6	Παρανόηση Π1	
	Εμφάνιση	Μη εμφάνιση
Συχνότητες	98	33
Σχετικές Συχνότητες	74,8%	25,2%

Πίνακας 17. Ερώτηση 6 παρανόηση (Π1).

Στην συγκεκριμένη ερώτηση, όπως άλλωστε και στις δύο προηγούμενες, ελλείπουσες (missing) θεωρήθηκαν οι μη απαντήσεις και όχι οι μη αιτιολογήσεις. Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα το 94,1% απαντά στην συγκεκριμένη ερώτηση, ενώ από αυτούς το 74,8% εμφανίζει την παρανόηση (Π1) ότι τα στοιχεία που περιέχονται σε ένα σύνολο θα πρέπει να μοιράζονται κάποια συγκεκριμένη, σαφή, κοινή ιδιότητα. Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματά μας ως τώρα, η συγκεκριμένη παρανόηση είναι αυτή που εμφανίζεται συχνότερα.

Τα συμπεράσματα από την έκτη ερώτηση του ερωτηματολογίου συμφωνούν με εκείνα της πρώτης, εντούτοις, η συσχέτιση είναι πολύ χαμηλή σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $p > 0.05$ σε κάθε περίπτωση, στερώντας μας τη δυνατότητα να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα.

		1α – Π1	1β – Π1	1γ – Π1	1δ – Π1
6 – Π1	Pearson				
	Correlation	0.175	0.158	0.183	0.147
	Sig.(2-tailed)	.069	.119	.094	.178
	N	114	104	90	90

Πίνακας 18. Ερώτηση 6 παρανόηση Π1, συσχέτιση με Ερώτηση 1.

Ερώτηση 7 του ερωτηματολογίου

Μπορεί ένα στοιχείο να ανήκει σε παραπάνω από ένα σύνολο; Δώστε ένα παράδειγμα.

Η παρανόηση (Π6) που σχετίζεται με αυτό το ερώτημα είναι ότι ένα στοιχείο που ανήκει σε ένα σύνολο, δεν μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε άλλο σύνολο. Αυτό που φαίνεται από την έρευνά μας είναι πως η συγκεκριμένη παρανόηση υπάρχει σε ελάχιστους μαθητές κάτι που είναι άλλωστε αναμενόμενο αν σκεφτεί κανείς πως η τάση των μαθητών είναι να χρησιμοποιούν τα διαγράμματα Venn για να εξάγουν τα συμπεράσματα τους.

Ακόμη όμως και οι μαθητές που δεν χρησιμοποίησαν διαγράμματα Venn δεν δυσκολεύονταν να βρουν ένα παράδειγμα για να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικά παραδείγματα: «Το 2 ανήκει και στους άρτιους και στους φυσικούς αριθμούς», «Για παράδειγμα στα σύνολα $\{1,2,3,4,5,6\}$ και $\{2,4,6,8,10\}$, το 2 και το 4 ανήκουν και στα δύο», «Ένα αγόρι από την τάξη που φοράει γυαλιά ανήκει και στα αγόρια της τάξης και σε αυτούς που φορούν γυαλιά», «Ο Messi παίζει και στη Barcelona και στην Αργεντινή». Ο τελευταίος μαθητής είναι ένας από αυτούς που στην Ερώτηση 5 του ερωτηματολογίου εμφάνισε την παρανόηση (Π5) ότι δύο σύνολα είναι ίσα «αν περιλαμβάνουν τον ίδιο αριθμό αντικειμένων». Η εικόνα που χρησιμοποιεί εδώ ο μαθητής για την έννοια σύνολο φαίνεται να είναι αυτή της *ομάδας* αντικειμένων. Το γεγονός ότι, ένα στοιχείο που ανήκει σε πολλές ομάδες ταυτόχρονα είναι διαισθητικά αποδεκτό, ενδεχομένως να εξηγεί το σωστό παράδειγμα που επιλέγει ο μαθητής από την καθημερινότητα.

Case Processing Summary

	Valid	Missing
7	94,2%	5,8%

Ερώτηση 7	Παρανόηση Π6	
	Εμφάνιση	Μη εμφάνιση
Συχνότητες	12	118
Σχετικές Συχνότητες	9,2%	90,8%

Πίνακας 19. Ερώτηση 7, παρανόηση (Π6)

Ερώτηση 8 του ερωτηματολογίου

Πως αντιλαμβάνεστε την έννοια «σύνολο»;

Σκοπός μας με αυτήν την ερώτηση ήταν να αφήσουμε ελεύθερους τους μαθητές να περιγράψουν την έννοια σύνολο όπως οι ίδιοι την αντιλαμβάνονται. Στην ουσία αυτό που αναμέναμε να φανερωθεί είναι η εικόνα ορισμού έννοιας του εκάστοτε μαθητή. Κάτι τέτοιο είναι φυσικά πολύ δύσκολο καθώς οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να εκφράσουν γραπτώς τη σκέψη τους, εντούτοις αντλήθηκαν αρκετές ενδιαφέρουσες πληροφορίες.

Το πιο ενδιαφέρον εύρημα ήταν ότι, ενώ στο ερωτηματολόγιο χρησιμοποιήσαμε δύο φορές τον όρο *συλλογή*, τον οποίο χρησιμοποιεί και το σχολικό βιβλίο στην 'Α Λυκείου για να ορίσει την έννοια σύνολο, μόλις 4 μαθητές χαρακτήρισαν το σύνολο ως συλλογή. Η επικρατούσα εικόνα φάνηκε να είναι αυτή της *ομάδας* αντικειμένων η οποία εμφανίστηκε στο 38.4% των αιτιολογήσεων που λάβαμε. Φυσικά καμία από τις δύο πεποιθήσεις δεν είναι κατ' ανάγκη παρανόηση ούτε θεωρήθηκε ως τέτοια στα πλαίσια της παρούσας έρευνας.

Case Processing Summary

	Valid	Missing
8	90,6%	9,4%

Crosstabulation

Ερώτηση 8		Το σύνολο ως συλλογή		Το σύνολο ως ομάδα		Σύνολο
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	
Λάθος	Συχνότητες	111	3	69	45	114
	Σχ. Συχνότητες	97,4%	2,6%	60,5%	39,5%	100%
Σωστό	Συχνότητες	10	1	8	3	11
	Σχ. Συχνότητες	90,9%	9,1%	72,7%	27,3%	100%
Σύνολο	Συχνότητες	121	4	77	48	125
	Σχ. Συχνότητες	96,8%	3,2%	61,6%	38,4%	100%

Πίνακας 20. Ερώτηση 8, παρανόηση (Π7), (Π8).

Στη συγκεκριμένη ερώτηση ενδεχομένως λόγω της φύσης της, εμφανίστηκαν πολλές από τις παρανοήσεις από αυτές που αναφέραμε στο θεωρητικό μας πλαίσιο. Δύο παρανοήσεις που δεν αναμέναμε να εμφανιστούν όταν σχεδιάζαμε την έρευνα και

είδαμε ήδη σε προηγούμενα ερωτήματα ήταν, η άποψη (Π7) ότι ένα σύνολο είναι μια συλλογή *αριθμών* και η άποψη (Π8) ότι το σύνολο είναι μια *διαδικασία* ή ένα *αποτέλεσμα*.

Case Processing Summary

	Valid	Missing
8 * Π7, Π8	90,6%	9,4%

8 * Π7, Π8 – Crosstabulation

Ερώτηση 8		Παρανόηση Π7		Παρανόηση Π8		Σύνολο
		Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	Μη εμφάνιση	Εμφάνιση	
Λάθος	Συχνότητες	81	33	104	10	114
	Σχ. Συχνότητες	71,1%	28,9%	91,2%	8,8%	100%
Σωστό	Συχνότητες	9	2	10	1	11
	Σχ. Συχνότητες	81,8%	18,2%	90,9%	9,1%	100%
Σύνολο	Συχνότητες	90	35	114	11	125
	Σχ. Συχνότητες	72,0%	28,0%	91,2%	8,8%	100%

Πίνακας 21. Ερώτηση 8, παρανόηση (Π7), (Π8).

Συχνότερη ήταν και σε αυτήν την ερώτηση η παρανόηση (Π1) περί κοινής ιδιότητας. Πολύ μεγάλες συχνότητες εμφάνισης παρουσίασαν επιπλέον οι παρανοήσεις (Π2) και (Π3) δηλαδή η απόρριψη του κενού συνόλου και του μονοσυνόλου αντίστοιχα. Ορισμένες ενδιαφέρουσες απαντήσεις που σχετίζονται με τις παραπάνω παρανοήσεις είναι οι εξής:

- Το σύνολο είναι μια ομάδα αριθμών που έχουν ίδιες ιδιότητες.
- Σύνολο είναι η κατηγοριοποίηση ανάλογα με τις ιδιότητες.
- Σύνολο έχουμε όταν υπάρχει ένα ή παραπάνω στοιχεία.

Case Processing Summary

	Valid	Missing
8 * Π9, Π5, Π8	71,7%	28,3%

8 * Π1, Π2, Π3 Crosstabulation

Ερώτηση 8		Παρανόηση Π1		Παρανόηση Π2		Παρανόηση Π3		Σύνολο
		Μη εμφ.	Εμφ.	Μη εμφ.	Εμφ.	Μη εμφ.	Εμφ.	
Λάθος	Συχνότητες	38	76	85	29	89	25	114
	Σχ. Συχνότητες	33,3%	66,7%	74,6%	25,4%	78,1%	21,9%	100%

Σωστό	Συχνότητες	11	0	90	9	9	2	11
	Σχ. Συχνότητες	100%	0,0%	96,8%	81,8%	81,8%	18,2%	100%
Σύνολο	Συχνότητες	49	76	94	31	98	27	125
	Σχ. Συχνότητες	39,2%	60,8%	75,2%	24,8%	78,4%	21,6%	100%

Πίνακας 22. Ερώτηση 8 , παρανοήσεις (Π1), (Π2) και (Π3).

Εκτός από τα ποσοστά, θα ήταν κατάλληλο στη συγκεκριμένη ερώτηση να εστιάσουμε σε κάποια παραδείγματα από τις απαντήσεις των μαθητών. Μεταξύ αυτών των απαντήσεων παρατηρήθηκαν κάποιες κανονικότητες – ομοιότητες που μας επιτρέπουν να τις χωρίσουμε στις παρακάτω κατηγορίες με σκοπό να προσδιορίσουμε διάφορες πτυχές της εικόνας ορισμού έννοιας ορισμένων μαθητών:

i. Το σύνολο ως ομάδα.

Ένας μαθητής δήλωσε:

- Σύνολο είναι μια ομάδα στοιχείων.

Η απάντησή του μαθητή θεωρούμε ότι ενδεικτική της εικόνας του μαθητή για την έννοια σύνολο. Όπως ήδη αναφέραμε, οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποιούν τη λέξη ομάδα για να περιγράψουν την έννοια σύνολο. Η επιλογή της λέξης βέβαια ενδέχεται να είναι τυχαία, εικάζουμε ωστόσο ότι οι περισσότεροι μαθητές που τη χρησιμοποιούν έχουν στο μυαλό τους το μοντέλο της ομάδας για να απαντήσουν στα ερωτήματα που τους τίθενται.

ii. Το σύνολο ως δοχείο.

Δύο ενδιαφέρουσες απαντήσεις που λάβαμε είναι οι παρακάτω:

- Σύνολο είναι ένα τσουβάλι που περιέχει διάφορα στοιχεία.
- Ως ένα χώρο που μέσα του υπάρχουν αριθμοί, αντικείμενα ή ότι άλλο θέλω.

Το φαινόμενο αυτό είναι λογικό αν αναλογιστούμε ότι οι μαθητές Λυκείου μαθαίνουν να αναπαριστούν τα σύνολα, σχεδόν αποκλειστικά με χρήση των διαγραμμάτων Venn.

iii. Το σύνολο ως διαδικασία - ακολουθία.

Ο μαθητής που προηγουμένως είχε δηλώσει ότι τα σύνολα $\{1,2,3\}$ και $\{3,2,1\}$ δεν είναι ίσα αφού δεν προκύπτουν από την πρόσθεση ή την αφαίρεση του ίδιου αριθμού, στην συγκεκριμένη ερώτηση απάντησε το εξής:

- Σύνολο ορίζεται μια σειρά μελών, τα οποία όλα προκύπτουν από την ίδια ιδιότητα που προκύπτει το προηγούμενο.

Η ερμηνεία που δίνουμε στο συγκεκριμένο σημείο είναι ότι ο μαθητής συγχέει τα σύνολα με τις προόδους και απαιτεί κάθε αριθμός να προκύπτει από τον προηγούμενο με την πρόσθεση κάποιου σταθερού αριθμού.

iv. Το σύνολο ως αποτέλεσμα.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν ορισμένες απαντήσεις όπως η επόμενη:

- Σύνολο είναι το άθροισμα μιας πράξης.

Αξίζει να θυμηθούμε εδώ τη διττή σημασία της λέξης σύνολο στα Ελληνικά. Σύνολο θα μπορούσε να σημαίνει το αποτέλεσμα της συνένωσης (set) στοιχείων που μπορούν να αποτελέσουν μία ενότητα ή τον ολικό (total) αριθμό ή την ολική ποσότητα πραγμάτων που ανήκουν στην ίδια κατηγορία. Αν δούμε τη σημασία της έννοιας σαν επίρρημα (συνολικά), θα ήταν μάλλον η πρόσθεση ή γενικά ο υπολογισμός όλων των στοιχείων.

v. Το σύνολο ως πλήθος στοιχείων.

Όπως είδαμε, πολλοί μαθητές έχουν την παρανόηση ότι σε ένα σύνολο θα πρέπει να περιέχονται τουλάχιστον δύο στοιχεία. Ενδεικτικά παραθέτουμε τις επόμενες απαντήσεις:

- Μια έννοια που έχει αρχή και τέλος και εμπεριέχει περισσότερα του ενός στοιχεία.
- Σύνολο έχουμε όταν υπάρχει ένα ή παραπάνω στοιχεία

Ανεξάρτητα από το αν θα χαρακτηρίζαμε το σύνολο ως συλλογή, ομάδα, δοχείο ή διαδικασία, όταν αναφερόμαστε σε ένα σύνολο στην καθημερινότητα (για παράδειγμα το κοινωνικό σύνολο), αναφερόμαστε σε ένα πλήθος στοιχείων που αποτελούν μια ενότητα. Θα ήταν ως εκ τούτου περίεργο να φανταζόμασταν ένα σύνολο χωρίς αντιπροσώπους.

vi. Το σύνολο ως συλλογή αριθμών.

Πολλοί μαθητές, θεωρούν ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να είναι κατ' ανάγκη αριθμοί. Χαρακτηριστικές είναι οι παρακάτω απαντήσεις:

- Το σύνολο είναι μια ομάδα αριθμών.
- Το σύνολο είναι η ένωση δύο ή περισσότερων αριθμών στα πλαίσια του συμβολισμού $\{\}$ χωρίς να είναι απαραίτητο να ενώνονται κάτω από τις ίδιες ιδιότητες.
- Σύνολο είναι για παράδειγμα οι πραγματικοί και οι φυσικοί αριθμοί. Στον πραγματικό κόσμο μπορεί να είναι μια ομάδα ανθρώπων ίδιων πεποιθήσεων.

Θεωρούμε πως η συγκεκριμένη αντίληψη επιβάλλεται στους μαθητές από το πλαίσιο (Tall & Vinner, 1981) δηλαδή την τάξη των μαθηματικών. Δυστυχώς τα δεδομένα μας δεν μας επιτρέπουν να εμβαθύνουμε στη συγκεκριμένη υπόθεση.

vii. Το σύνολο ως γεωμετρικός τόπος ή γεωμετρική κατασκευή.

Δύο ιδιαίζουσες περιπτώσεις ήταν οι παρακάτω:

- Είναι κάποια σχήματα που ενώνονται μεταξύ τους
- Ένα σύνολο είναι για παράδειγμα ένας κύκλος.

Ο μαθητής που δίνει την πρώτη απάντηση, στην Πέμπτη ερώτηση περί ισότητας συνόλων δήλωσε ότι «Δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν όλες τις πλευρές ίσες». Οι παρανοήσεις του αυτές όμως, δεν εμφανίστηκαν σε κάποια άλλη ερώτηση. Η δεύτερη απάντηση είναι κάπως πιο δικαιολογημένη. Ο κύκλος άλλωστε, ορίζεται ως ένα σύνολο σημείων πριν ακόμη οριστεί το ίδιο το σύνολο.

Ερώτηση 9 του ερωτηματολογίου

Χαρακτηρίστε τα παρακάτω ως «σωστά» ή «λάθος».

α) $\{1\} \in \{1,2,3,4,5\}$

β) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$

γ) $\{1\} \in \{1,\{1\}\}$

δ) $\{1\} \subseteq \{1,\{1\}\}$

ε) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

ζ) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Το παραπάνω ερώτημα αποδείχτηκε πολύ απαιτητικό αφού το 65% περίπου των μαθητών δεν αιτιολόγησε τις απαντήσεις του. Αν λάβουμε υπόψη μας μόνο όσους μαθητές παρέιχαν κάποια αιτιολόγηση παρατηρούμε συχνή εμφάνιση των εξής παρανοήσεων: Ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι υποσύνολο του εαυτού του (Π13), ταύτιση των συμβόλων $\subseteq$ και $\in$ (Π14) και τέλος ότι $\{\emptyset\} = \emptyset$ (Π15).

Π13	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες	Έγκυρες Σχετικές Συχνότητες
Εμφάνιση	22	15.9%	44.9%
Μη εμφάνιση	27	19.6%	55.1%
Μη αιτιολόγηση	89	64.5%	
Π14	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες	Έγκυρες Σχετικές Συχνότητες
Εμφάνιση	26	18.8%	50%
Μη εμφάνιση	26	18.8%	50%
Μη αιτιολόγηση	86	62.3%	
Π15	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες	Έγκυρες Σχετικές Συχνότητες
Εμφάνιση	16	23.2%	33.3%
Μη εμφάνιση	32	11.6%	66.7%
Μη αιτιολόγηση	90	65.2%	

Πίνακας 23. Ερώτηση 9 παρανοήσεις (Π13), (Π14) και (Π15).

Ενδεικτικά αναφέρουμε και εδώ κάποιες απαντήσεις των μαθητών:

- Ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι υποσύνολο του εαυτού του.
- Ένα στοιχείο μπορεί να ανήκει στον εαυτό του όχι όμως να είναι υποσύνολο του εαυτού του.
- Το $\emptyset$ είναι το ίδιο το σύνολο $\{\emptyset\}$ όχι υποσύνολο του.
- Το $\emptyset$ και το $\{\emptyset\}$ αποτελούν μάλλον το κενό σύνολο.

Μια ενδιαφέρουσα απάντηση ενός μαθητή (που υποστηρίζει την υπόθεση των Fischbein και Baltsan περί σύγχυσης του $\emptyset$ και του 0) ήταν η εξής: «Το $\emptyset$ ανήκει μόνο στο 0». Δυστυχώς η έρευνα μας δεν κατάφερε να αναδείξει την συγκεκριμένη παρανόηση.

Τέλος δεν θα μπορούσαν να λείπουν οι απαντήσεις ενός μαθητή ο οποίος φάνηκε να είναι ο μόνος που μπορούσε πραγματικά να διαχειριστεί την ερώτηση 9 και ενδεχομένως ο μόνος που σκέφτεται «τυπικά» μαθηματικά (Tall, 2004). Ο συγκεκριμένος, στην ερώτηση (9α) απάντησε ότι «το $\{1\}$ δεν περιέχεται στο $\{1,2,3,4,5\}$ ». Η βαθιά κατανόηση των εννοιών «ανήκει» και «περιέχεται» φαίνεται και στην ερώτηση (9β) όπου γράφει ότι «το ένα είναι σύνολο συνόλων ενώ το άλλο σύνολο αριθμών». Στην ερώτηση (9ζ) εμφανίζει την ιδιαίτερη παρανόηση ότι το κενό είναι αριθμός, η απάντηση που δίνει όμως φανερώνει για ακόμη μια φορά το επίπεδο κατανόησής του. Συγκεκριμένα σημειώνει ότι «δεν γίνεται “αριθμός $\subseteq$ σύνολο” έπρεπε “σύνολο $\subseteq$ σύνολο”».

Σύγκριση Α΄ και Β΄ Λυκείου

Οι Fischbein και Baltsan (1999) συμπέραναν ότι οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου έχουν καλύτερη κατανόηση από αυτούς της Β΄ Λυκείου, θεωρώντας ως εκ τούτου ότι ο χρόνος έχει αρνητική επίδραση, οι μαθητές τείνουν να ξεχνούν τις τυπικές ιδιότητες του συνόλου και να τις αντικαθιστούν με εκείνες του διαισθητικού μοντέλου της συλλογής.

Στα ερευνητικά μας ερωτήματα δεν αναφέρεται και στη ουσία δεν είναι στόχος μας η σύγκριση μεταξύ των μαθητών της Α΄ και της Β΄ Λυκείου εντούτοις, πραγματοποιήσαμε κάποια Mann-Whitney tests στις ερωτήσεις που εξετάζουν τις

υποθέσεις των Fischbein και Baltsan (1999). Φυσικά δεν αναμέναμε να πετύχουμε $p < 0.01$ δεδομένου του μικρού δείγματος, οπότε θεωρήσαμε στατιστικό επίπεδο σημαντικότητας το 0.05. Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα οι μαθητές της Β' Λυκείου είχαν σε κάθε περίπτωση καλύτερη επίδοση κάτι που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που αναμέναμε.

Οι ερωτήσεις (1δ), (2γ), (2στ) και (6) έδωσαν πολύ μεγάλο δείκτη στατιστικής σημαντικότητας μη επιτρέποντας μας να εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα. Οι ερωτήσεις (1β), (2ζ), ωστόσο ήταν στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο 0.05 ενώ οι υπόλοιπες ερωτήσεις ήταν σημαντικές σε αρκετά χαμηλό επίπεδο αν αναλογιστούμε ότι είχαμε μόλις 78 μαθητές της Α' και 60 μαθητές της Β' Λυκείου.

Mann-Whitney Test

Ranks				
	Τάξη	N	Mean Rank	Sum of Ranks
1β	A' Λυκείου	78	74.77	5832.00
	B' Λυκείου	60	62.65	3759.00
	Σύνολο	138		
1γ	A' Λυκείου	78	67.27	5247.00
	B' Λυκείου	60	72.40	4344.00
	Σύνολο	138		
1δ	A' Λυκείου	78	69.69	5436.00
	B' Λυκείου	60	69.25	4155.00
	Σύνολο	138		
2β	A' Λυκείου	78	67.23	5244.00
	B' Λυκείου	60	72.45	4347.00
	Σύνολο	138		
2γ	A' Λυκείου	78	70.15	5472.00
	B' Λυκείου	60	68.65	4119.00
	Σύνολο	138		
2δ	A' Λυκείου	78	66.62	5196.00.
	B' Λυκείου	60	73.25	4395.00
	Σύνολο	138		
2ε	A' Λυκείου	78	72.65	5667.00
	B' Λυκείου	60	65.40	3924.00
	Σύνολο	138		

2στ	A' Λυκείου	78	69.46	5418.00
	B' Λυκείου	60	69.55	4137.00
	Σύνολο	138		
2ζ	A' Λυκείου	78	65.39	4970.00
	B' Λυκείου	60	72.43	4346.00
	Σύνολο	138		
5	A' Λυκείου	78	66.01	5148.50
	B' Λυκείου	60	72.96	4304.50
	Σύνολο	138		
6	A' Λυκείου	78	69.10	5182.50
	B' Λυκείου	60	66.63	3997.50
	Σύνολο	138		
7	A' Λυκείου	78	67.12	5235.00
	B' Λυκείου	60	72.60	4356.00
	Σύνολο	138		

Test Statistics

	1β	1γ	1δ	2β	2γ	2δ
U	1929.00	2166.00	2325.00	2163.00	2289.00	2115.00
Z	-2.049	-0.966	-0.085	-0.936	-0.263	-1.118
Sig.	.040	.334	.932	.349	.792	.264

2ε	2στ	2ζ	5	6	7
2094.0	2337.00	2044.00	2067.50	2167.50	2154.00
-1.666	-0.015	-2.538	-1.183	-0.496	-1.130
.096	.988	.011	.237	.620	.190

Πίνακας 24. Σύγκριση Α' και Β' Λυκείου

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία μας μελετήσαμε μια σειρά παρανοήσεων που σχετίζονται με τη μαθηματική έννοια σύνολο. Η κατανόηση μιας έννοιας τόσο στα μαθηματικά όσο και στην καθημερινότητα, προϋποθέτει το σχηματισμό μιας εικόνας για αυτήν (Vinner, 1991). Όλες οι γνωστικές δομές που σχετίζονται με μία έννοια αποτελούν την *εικόνα έννοιας* (Tall & Vinner, 1981). Η εικόνα ενός ατόμου για μια έννοια είναι μια σύνθετη οντότητα αποτελούμενη από διαφορετικές αναπαραστάσεις, πεποιθήσεις, νοήματα, μοντέλα και ορισμούς που εμφανίζονται σε διαφορετικούς συνδυασμούς και με διαφορετικό τρόπο ανάλογα το πλαίσιο στο οποίο γίνονται αντικείμενο επεξεργασίας. Η έννοια σύνολο στα μαθηματικά γίνεται αποδεκτή ως πρωταρχική ενώ έχει μια διαισθητική σημασία από την καθομιλουμένη, όπου χρησιμοποιείται σε διάφορα πλαίσια και μάλιστα με τρόπο ασυνεπή. Είναι μη ρεαλιστική προσδοκία για έναν καθηγητή να θεωρήσει ότι μπορεί να αντιληφθεί τις εικόνες έννοιας των μαθητών του, ιδιαίτερα για πολύπλευρες έννοιες όπως αυτή του συνόλου. Εντούτοις, είναι καθ' όλα εφικτό να προβλέψουμε πιθανές πτυχές της εικόνας ενός μαθητή για κάποια έννοια.

Στην παρούσα έρευνά εστιάσαμε σε δύο άξονες:

1. Στις αντιλήψεις που σχηματίζουν οι μαθητές για την έννοια σύνολο και τον αντίστοιχο ορισμό της.
2. Στις παρανοήσεις που εμφανίζονται μεταξύ των μαθητών του Λυκείου σχετικά με τις ιδιότητες των συνόλων;

Οι αντιλήψεις που φάνηκε να σχηματίζουν οι μαθητές για την έννοια σύνολο όπως αναδείχθηκαν όταν τους ζητήσαμε να δώσουν έναν ορισμό ήταν οι ακόλουθες:

- Το σύνολο είναι μια ομάδα αντικειμένων.
- Το σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων.
- Το σύνολο είναι ένα δοχείο.

Η συχνότερη απάντηση των μαθητών όταν τους ζητήσαμε να ορίσουν το σύνολο, ήταν ότι ένα σύνολο είναι μια ομάδα. Αξίζει να θυμηθούμε σε αυτό το σημείο ότι, ενώ στο Λύκειο το σύνολο ορίζεται σαν συλλογή αντικειμένων, ο πρώτος ορισμός που συναντούν οι μαθητές είναι στην Γ' Γυμνασίου όπου το σχολικό

εγχειρίδιο ορίζει το σύνολο σαν μια ομάδα ή μια κατηγορία αντικειμένων. Φαίνεται ότι μια βασική διαφορά της *ομάδας* σε σχέση με την *συλλογή* στοιχείων είναι ότι η ομάδα επιτρέπει διαισθητικά την ύπαρξη τομής. Μια ενδιαφέρουσα και ταυτόχρονα διασκεδαστική δήλωση ενός μαθητή, ενδεικτική της υπόθεσής μας σε σχέση με την τομή, είναι η εξής: «Ο Messi παίζει και στη Barcelona και στην Αργεντινή». Πράγματι, τίποτα δεν εμποδίζει τον αντιπρόσωπο μιας ομάδας να ανήκει ταυτόχρονα και σε κάποια άλλη ομάδα.

Από την άλλη πλευρά, για να ανήκει κανείς σε μια ομάδα θα πρέπει να πληροί κάποιες προϋποθέσεις ή κάποια κριτήρια άρα τα μέλη μιας ομάδας είναι αναγκαίο να έχουν τουλάχιστον ένα κοινό χαρακτηριστικό. Η ομάδα ξεχωρίζει από το άτομο λόγω του πλήθους των αντιπροσώπων της. Δεν θα είχε νόημα για παράδειγμα ο διαχωρισμός των αθλημάτων σε ατομικά και ομαδικά αν μια ομάδα μπορούσε να αποτελείται από ένα μόνο άτομο. Όπως φαίνεται λοιπόν, πολλές από τις παρανοήσεις που εξηγούνται αν λάβουμε υπόψη μας το *διαισθητικό μοντέλο της συλλογής* και τις ιδιότητες που το συνοδεύουν (Fischbein & Baltsan, 1999), εξηγούνται επαρκώς και από το *διαισθητικό μοντέλο της ομάδας*. Να τονίσουμε εδώ ότι δεν προσπαθούμε να αντικαταστήσουμε το μοντέλο της συλλογής με αυτό της ομάδας και να επιχειρήσουμε να ερμηνεύσουμε έτσι όλες τις παρανοήσεις των μαθητών. Αυτό που υποστηρίζουμε είναι ότι η εικόνα έννοιας ενός μαθητή ενδέχεται να περιέχει ταυτόχρονα τα δύο μοντέλα, με αποτέλεσμα σε διαφορετικές στιγμές να γίνεται αναφορά σε διαφορετικό μοντέλο.

Ορισμένοι μαθητές αντιλαμβάνονται το σύνολο ως δοχείο. Συγκεκριμένα λάβαμε απαντήσεις όπως «Το σύνολο είναι μια σακούλα» ή «Αντιλαμβάνομαι το σύνολο ως ένα χώρο που μέσα του υπάρχουν αριθμοί, αντικείμενα ή ότι άλλο θέλω». Το φαινόμενο αυτό είναι λογικό αν αναλογιστούμε ότι οι μαθητές Λυκείου μαθαίνουν να αναπαριστούν τα σύνολα, σχεδόν αποκλειστικά με χρήση των διαγραμμάτων Venn (Bagni, 2006).

Από τις παρανοήσεις που εμφανίστηκαν μεταξύ των μαθητών, συχνότερη σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας είναι η πεποίθηση ότι τα στοιχεία που περιέχονται σε ένα σύνολο θα πρέπει να μοιράζονται κάποια συγκεκριμένη, σαφή, κοινή ιδιότητα. Ο ορισμός που δίνεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου ωθεί τον αναγνώστη, εμμέσως πλην σαφώς στην συγκεκριμένη παρανόηση. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι:

«Σε πολλές περιπτώσεις συνηθίζουμε να συλλέγουμε ή να επιλέγουμε διάφορα αντικείμενα και να τα ταξινομούμε σε ομάδες ή κατηγορίες. Για παράδειγμα, τα βιβλία μιας βιβλιοθήκης ανάλογα με το περιεχόμενο τους ταξινομούνται σε ιστορικά, λογοτεχνικά, ιατρικά κλπ. Σε κατηγορίες επίσης, ταξινομούμε τους αριθμούς (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί, θετικοί, αρνητικοί κλπ.), τα γράμματα της αλφαβήτου (φωνήεντα, σύμφωνα, μικρά, κεφαλαία κλπ.) και κάθε ομάδα αντικειμένων τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια. Ομάδες ή κατηγορίες, όπως οι παραπάνω, ονομάζονται στα Μαθηματικά, σύνολα». Η ταξινόμηση με βάση κάποιο χαρακτηριστικό, όπως αναφέρεται παραπάνω, υποστηρίζουμε ότι είναι παραπλανητική. Ένα σύνολο για παράδειγμα θα μπορούσε κάλλιστα να περιέχει, ένα λογοτεχνικό βιβλίο, ένα ιστορικό βιβλίο, έναν αριθμό και ένα γράμμα της αλφαβήτου.

Αν υποθέσουμε ότι η εικόνα έννοιας ενός μαθητή περιέχει τα σύνολα ως ομάδες και ειδικά ως κατηγορίες, το προηγούμενο φαινόμενο είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι για να κατηγοριοποιήσουμε κάποια αντικείμενα είναι απαραίτητο να έχουμε κάποιο κριτήριο. Τα αποτελέσματά μας αυτά συμφωνούν με εκείνα των Fischbein και Baltsan (1999). Όπως είδαμε, σχεδόν όλοι οι μαθητές (99,7%) δέχονται τη συλλογή {2, 4, 6, 8, 10} ως σύνολο ενώ περισσότεροι από τους μισούς (55.1%) δεν δέχονται ως σύνολο τη συλλογή {2, 4, 5, 8, 10}. Η ερμηνεία των Fischbein και Baltsan (1999) για το συγκεκριμένο φαινόμενο είναι ότι οι αριθμοί της πρώτης συλλογής έχουν μια κοινή ιδιότητα (είναι όλοι άρτιοι) η οποία δεν διατηρείται στους αριθμούς της δεύτερης συλλογής.

Πολλοί μαθητές θεωρούν ότι ένα σύνολο με ένα ή κανένα στοιχείο στερείται νοήματος. Οι Linchevski και Vinner (1988) σημείωσαν ότι είναι συχνό φαινόμενο ακόμη και μεταξύ καθηγητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η πεποίθηση ότι ένα σύνολο πρέπει να αποτελείται από περισσότερα του ενός στοιχεία. Συνέπεια του παραπάνω είναι προφανώς η απόρριψη του κενού συνόλου και του μονοσυνόλου. Όπως είδαμε στο κομμάτι της ανάλυσης των αποτελεσμάτων, οι μισοί περίπου μαθητές αναγνωρίζουν του φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 10 ως σύνολο. Το ίδιο ποσοστό μαθητών απαντά σωστά, αναγνωρίζοντας ότι οι λύσεις της εξίσωσης $3 + x = 12$ αποτελούν σύνολο. Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που παρατηρήθηκε σχετικά συχνά ήταν ότι ορισμένοι μαθητές δέχονταν ως σύνολο μόνο ένα από τα παραπάνω και απέρριπταν το άλλο. Στην

πραγματικότητα όμως, το σύνολο που προκύπτει και στις δύο περιπτώσεις είναι το {9}. Το παραπάνω φαινόμενο σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ένας στους πέντε μαθητές απάντησε λανθασμένα στο ερώτημα «ορίζουν οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 11 ένα σύνολο», μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ένα σύνολο όταν αυτό εκφράζεται με τη μέθοδο της περιγραφής (Incikabi et al., 2012). Συγκεκριμένα, πολλοί μαθητές φαίνεται να μην κατανοούν το νόημα των ερωτήσεων και να οδηγούνται σε λανθασμένα, αν όχι σε τυχαία συμπεράσματα.

Όταν ρωτήσαμε τους μαθητές αν η έκφραση «οι ψηλοί μαθητές της τάξης» ορίζει κάποιο σύνολο, σχεδόν όλοι οι μαθητές απάντησαν καταφατικά. Το γεγονός αυτό φανερώνει ότι ερώτηση ήταν πολύ δύσκολη. Οι μαθητές αδυνατούν ότι να αντιληφθούν ότι τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να είναι σαφώς ορισμένα. Το συμπέρασμά μας εδώ είναι ότι η μαθητές δεν είναι εξοικειωμένη με την αυστηρή, τυπική γλωσσά των μαθηματικών (Tall, 2004). Όπως αναφέραμε και παραπάνω άλλωστε, η μέθοδος της περιγραφής αποτελεί τροχοπέδη ακόμη και για υποψήφιους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Incikabi et al., 2012).

Τέλος, πολλοί μαθητές φάνηκε να συγχέουν τις έννοιες «ανήκει» και «περιέχεται». Συγκεκριμένα, οι μισοί περίπου μαθητές δεν μπορούσαν να διακρίνουν το σύμβολο « $\in$ » από το σύμβολο « $\subseteq$ ». Το φαινόμενο αυτό θεωρούμε ότι οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές μαθαίνουν να χειρίζονται ζητήματα που εμπλέκουν τις δύο έννοιες μέσω διαγραμμάτων Venn. Με τα διαγράμματα Venn όμως, δεν μπορεί κανείς να διακρίνει τις έννοιες «ανήκει» και «υποσύνολο» στην περίπτωση συνόλων με στοιχεία σύνολα (Bagni, 2006, Sharif-Rasslan, Saleh & Abboud, 2014).

Όπως αναφέραμε στο θεωρητικό μας πλαίσιο οι Sirmaci και Tas (2013) στην έρευνά τους σε φοιτητές – υποψήφιους δασκάλους της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έθεσαν το ερώτημα: Είναι το σύνολο των ακεραίων ισοπληθικό με αυτό των αρτίων; Το συγκεκριμένο ερώτημα όπως είδαμε στην ανάλυση φάνηκε ιδιαίτερα απαιτητικό, επιβεβαιώνοντας την υπόθεσή μας ότι ένας μαθητής της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι σχεδόν αδύνατο να επιχειρηματολογήσει ορθά σε ερωτήσεις περί πληθικού αριθμού απειροσυνόλων. Οι τρεις κυριότερες παρανοήσεις που εμφανίστηκαν σε αυτό το σημείο ήταν:

- Η παρανόηση ότι δύο απειροσύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων

- Η παρανόηση ότι οι άρτιοι αριθμοί (θετικοί) είναι οι μισοί από τους φυσικούς αριθμούς
- Η παρανόηση ότι ένα σύνολο έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό από κάθε γνήσιο υποσύνολό του.

Οι παραπάνω στάση απέναντι στο άπειρο είναι όμοια με εκείνη σημαντικών επιστημόνων του παρελθόντος. Ο Γαλιλαίος υποστήριξε ότι η ύπαρξη του εν ενεργεία απείρου θα πρέπει να απορριφθεί. Στο έργο του *Two New Sciences* το 1638, παρατήρησε ότι τα στοιχεία δύο άνισων ευθύγραμμων τμημάτων μπορούν να τεθούν σε ένα προς ένα αντιστοιχία με απλή προβολή του ενός τμήματος πάνω στο άλλο, και έτσι ίσως τα δύο σύνολα περιέχουν τον ίδιο αριθμό σημείων. Παρατήρησε επίσης ότι οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να τεθούν σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα τετράγωνα τους, παρότι το σύνολο των τετραγώνων των φυσικών αριθμών αποτελεί μόνο ένα υποσύνολο όλων των φυσικών. Ο Gauss το 1831 διαμαρτυρήθηκε για τη χρήση άπειρων ποσοτήτων σαν πραγματικές, δηλώνοντας μάλιστα ότι το άπειρο είναι μόνο ένας «τρόπος του λέγειν». Ο Cauchy αρνήθηκε επίσης την ύπαρξη εν ενεργεία άπειρων συνόλων, στηριζόμενος στην παράδοξη βάση ότι ένα τέτοιο σύνολο μπορεί να τεθεί σε ένα προς ένα αντιστοιχία με ένα υποσύνολό του (Eves, 1983). Θα ήταν λοιπόν, παράλογο να αναμένουμε από τους μαθητές μας να μην εμφανίσουν παρανοήσεις που ταλαιπώρησαν επιστήμονες όπως τον Γαλιλαίο, τον Gauss, τον Cauchy τον Kronecker ή τον Poincaré. Αναμενόμενη είναι εξάλλου, η εντύπωση που θα προκαλέσει το *άπειρο ξενοδοχείο* του Hilbert σε κάποιον που έρχεται αντιμέτωπος με το άπειρο και τα απειροσύνολα για πρώτη φορά.

Τα παραπάνω ευρήματά έρχονται σε συμφωνία με την προϋπάρχουσα έρευνα (Linchevski & Vinner, 1988, Fischbein & Baltsan, 1999, Bagni, 2006, Incikabi et al., 2012, Sirmaci & Tas, 2013. Sharif-Rasslan et al., 2014). Η παρανόηση ωστόσο ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να έχει άπειρα στοιχεία, εμφανίστηκε σε ελάχιστους μαθητές. Το φαινόμενο αυτό μας φαίνεται απόλυτα λογικό αφού τα σύνολα που συναντούν κυρίως οι μαθητές κατά την δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι τα «γνωστά» σύνολα αριθμών (φυσικοί, ρητοί, πραγματικοί, μιγαδικοί) τα οποία περιέχουν άπειρα στοιχεία ή οι διάφοροι γεωμετρικοί τόποι (κύκλος, μεσοκάθετος, διχοτόμος) που ορίζονται ως σημειοσύνολα που περιέχουν άπειρα σημεία.

Σε αντίθεση με τη βιβλιογραφία έρχονται και τα αποτελέσματα της έρευνάς μας σε σχέση με την παρανόηση ότι ένα στοιχείο δεν μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε δύο σύνολα. Οι Fischbein και Baltsan σημείωσαν ότι ένα στοιχείο που βρίσκεται ταυτόχρονα σε δύο συλλογές φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με τη διαίσθηση. Ένα στοιχείο που ανήκει ταυτόχρονα σε πολλές ομάδες όμως, φαίνεται να είναι διαισθητικά αποδεκτό. Δεν αποκλείεται λοιπόν τα ευρήματα μας σχετικά με την επικράτηση του διαισθητικού μοντέλου της ομάδας έναντι εκείνου της συλλογής (τουλάχιστον για τα ελληνικά σχολεία στις μέρες μας), να σχετίζονται με το γεγονός ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές στην έρευνά μας μπορούσαν να βρουν ένα παράδειγμα τομής δυο συνόλων ενώ ελάχιστοι απέρριπταν την ύπαρξή της. Επιπλέον, οι μαθητές συχνά, χρησιμοποιούσαν διαγράμματα Venn για να εξάγουν τα συμπεράσματα τους κάτι που υποστηρίζεται άλλωστε και στην έρευνα του Bagni (2006). Η τομή, μια από τις βασικές πράξης της άλγεβρας συνόλων, διδάσκεται συστηματικά μέσω διαγραμμάτων Venn οπότε, είναι αναμενόμενο να αποτελεί τμήμα της εικόνας έννοιας των περισσότερων μαθητών.

Παρόμοια ήταν τα αποτελέσματα μας σε σχέση με την υπόθεση ότι πολλοί μαθητές θεωρούν ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Περισσότεροι από τους μισούς μαθητές έδωσαν ορθούς και μάλιστα ιδιαίτερος εύστοχους ορισμούς για την ισότητα δύο συνόλων ενώ ελάχιστοι φάνηκαν να συγχέουν την ισότητα με την ισοπληθικότητα. Το συμπέρασμά μας είναι πως οι μαθητές έχουν συνηθίσει να χρησιμοποιούν την έννοια της ισότητας σε διαφορετικά πλαίσια (Tall & Vinner, 1981). Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα ενός μαθητή ο οποίος έγραψε ότι δύο σύνολα είναι ίσα, «στα Μαθηματικά, όταν έχουν το ίδιο αποτέλεσμα, στην ζωή, όταν έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά».

Στην καθομιλουμένη δύο συλλογές μπορεί να είναι ίσες αν είναι ισοπληθικές ή αν είναι ίδιες. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τις συλλογές με πίνακες ζωγραφικής δύο μουσείων, μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι είναι ίσες αν έχουν το ίδιο πλήθος εκθεμάτων ή αν αποτελούνται από αντίγραφα των ίδιων ακριβώς πινάκων. Δύο κοινωνικές ομάδες μπορούν να θεωρηθούν ίσες αν έχουν το ίδιο πλήθος αντιπροσώπων, μπορεί όμως να θεωρηθούν ίσες αν χρήζουν όμοιας αντιμετώπισης ως προς το νομοθετικό ή το κοινωνικό πλαίσιο. Ας θυμηθούμε τέλος, ότι ο Ευκλείδης στο έκτο βιβλίο των Στοιχείων του ονομάζει ίσα δύο τρίγωνα με το ίδιο εμβαδό. Αυτό που γενικά προσπαθούμε να τονίσουμε εδώ είναι ότι, τυχόν λάθη σε σχέση με την

ισότητα δεν μπορούν να ερμηνευθούν επαρκώς με όρους μοντέλου όπως υποστήριξαν οι Fischbein και Baltsan (1999). Η ισότητα είναι μια έννοια που υφίσταται καθημερινής «κατάχρησης». Αν κανείς θέλει να εξετάσει τις πεποιθήσεις ενός πληθυσμού για την έννοια της ισότητας, θα ήταν σκόπιμο να αφιερώσει μια ολόκληρη έρευνα σε αυτό. Τέλος, μια παρανόηση που φάνηκε να υπάρχει σε ορισμένους μαθητές, είναι ότι η ύπαρξη κοινής ιδιότητας μεταξύ δύο συνόλων είναι αναγκαία συνθήκη για την ισότητά τους. Στην πραγματικότητα όμως, η συγκεκριμένη συνθήκη μπορεί να είναι παραπλανητική. Τα σύνολα $\{x \in \mathbb{N} | 0 < x < 2\}$ και $\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x + 1 = 0\}$ για παράδειγμα, είναι ίσα παρότι τα στοιχεία τους προκύπτουν με διαφορετικό τρόπο.

Στην έρευνά μας αναδείχθηκαν τρεις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με την έννοια σύνολο οι οποίες δεν φαίνεται να αναφέρονται πουθενά στη βιβλιογραφία:

- Σύνολο είναι μια συλλογή *αριθμών*.
- Σύνολο είναι το *αποτέλεσμα* μιας πράξης.
- Ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι υποσύνολο του εαυτού του.

Η πρώτη παρανόηση που αναφέραμε παραπάνω είναι ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να είναι κατ' αποκλειστικότητα αριθμοί. Είναι αδύνατο μια έννοια να διαχωριστεί από τις κοινωνικές και τις επιστημολογικές της πτυχές ενώ, η νομιμοποίηση της εξαρτάται από το εκάστοτε πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται (Radford, 2002). Μια έννοια λοιπόν, μπορεί να φέρει στο νου διαφορετικές εικόνες ανάλογα το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται (Tall & Vinner, 1981). Αποτέλεσμα αυτών των παρατηρήσεων είναι το συμπέρασμά μας ότι η συγκεκριμένη παρανόηση επιβάλλεται στην ουσία σε κάποιους μαθητές από το πλαίσιο της σχολικής τάξης των μαθηματικών (Bingolbali και Monaghan, 2007). Έτσι, ένα μέρος της εικόνας έννοιας (προκλητέα εικόνα έννοιας) έρχεται στη μνήμη του μαθητή μέσα στο συγκεκριμένο πλαίσιο (Tall & Vinner, 1981).

Κάποιοι μαθητές θεωρούν το σύνολο ως το αποτέλεσμα μιας πράξης. Συγκεκριμένα το 15% των μαθητών εμφάνισε την συγκεκριμένη παρανόηση. Το ποσοστό αν και φαίνεται χαμηλό δεν είναι αμελητέο. Αν αναλογιστούμε ότι δεν ήταν μια παρανόηση που αναμέναμε όταν σχεδιάζαμε την έρευνα και συνεπώς καμία ερώτηση δεν στόχευε στον άμεσο έλεγχο της, θεωρούμε ότι η ανάδειξή της έχει ιδιαίτερη σημασία. Να θυμίσουμε τέλος ότι στα ελληνικά η λέξη σύνολο

χρησιμοποιείται συχνά στην καθομιλουμένη ως το αποτέλεσμα (μιας πράξης, συνήθως αθροίσματος). Αν για παράδειγμα δηλώσουμε ότι «το δείγμα μας αποτελείται από 78 μαθητές της Α' Λυκείου και 60 της Β' Λυκείου, άρα 138 μαθητές στο σύνολο», χρησιμοποιούμε την λέξη σύνολο με αυτόν ακριβώς τον τρόπο. Θα μπορούσε δηλαδή στη λέξη σύνολο να δοθεί η σημασία τόσο της αγγλικής λέξης *set* όσο και της λέξης *total*. Το γεγονός αυτό θεωρούμε ότι είναι ένας επιπλέον δυνητικός παράγοντας σύγκρουσης (Tall & Vinner, 1981) στην εικόνα έννοιας πολλών μαθητών.

Η τρίτη παρανόηση, που θεωρούμε ότι πρέπει να σημειωθεί είναι ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι υποσύνολο του εαυτού του. Μια πιθανή εξήγηση για την πεποίθηση αυτή είναι η σύγχυση της έννοιας του υποσυνόλου με το γνήσιο υποσύνολο. Στην πραγματικότητα υπάρχουν ακόμη και μαθηματικά συγγράμματα όπου οι δύο έννοιες συγχέονται. Ένα σύνολο X όμως, είναι υποσύνολο ενός συνόλου Y (συμβολικά $X \subseteq Y$) αν και μόνο αν $\forall x(x \in X \rightarrow x \in Y)$, συνεπώς τίποτα δεν απαγορεύει στο σύνολο Y να είναι το ίδιο το X . Όπως όμως ήδη αναφέραμε, συνήθως οι μαθητές δεν διδάσκονται ορισμούς και μαθαίνουν τις έννοιες αποκλειστικά μέσω παραδειγμάτων. Ο απλούστερος και ταυτόχρονα συχνότερος τρόπος για να εξηγήσει κανείς την έννοια υποσύνολο, είναι το διάγραμμα Venn. Μια εικόνα είναι χίλιες λέξεις σωστά; Στην πραγματικότητα όμως η χρήση των διαγραμμάτων Venn είναι συχνά παραπλανητική (Bagni, 2006) και στη συγκεκριμένη περίπτωση υπονομεύει την συνάφεια μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων (Sharif-Rasslan et al., 2014).

Από την έρευνά μας προέκυψαν κάποια επιπλέον ζητήματα με ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Οι Fischbein και Baltsan (1999) υποστήριξαν ότι η πάροδος του χρόνου επιδεινώνει την κατάσταση που ήδη υπάρχει, σε σχέση με την απαιτητική έννοια σύνολο. Οι μαθητές τείνουν να ξεχνούν τις τυπικές ιδιότητες του συνόλου και να τις αντικαθιστούν με άλλες, πιο συμβατές με τη διαίσθηση. Στην έρευνά τους σύγκριναν μαθητές της Β' Γυμνασίου, μαθητές της Α' Λυκείου, φοιτητές – εκπαιδευόμενους δασκάλους της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και φοιτητές – εκπαιδευόμενους καθηγητές της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι τελευταίες δύο ομάδες φοιτητών θεωρούμε ότι δεν συσχετίζονται μεταξύ τους όπως φυσικά δεν συσχετίζονται με τις δύο ομάδες μαθητών. Εντούτοις, οι ερευνητές παρατήρησαν μια διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών και συγκεκριμένα σημείωσαν ότι οι μικρότεροι μαθητές,

έχοντας την έννοια σύνολο πιο πρόσφατη απάντησαν καλύτερα. Στη δική μας έρευνα, παρότι τα σύνολα διδάσκονται στην Ελλάδα στην Α΄ Λυκείου, οι μαθητές της Β΄ Λυκείου απάντησαν επιτυχέστερα. Το δείγμα μας δεν ήταν αρκετά μεγάλο για σύγκριση των δύο βαθμίδων και εξαγωγή ασφαλούς συμπεράσματος, ενώ σε καμία περίπτωση δεν θεωρούμε ότι διαψεύσαμε τα συμπεράσματα των Fischbein και Baltsan (1999), ωστόσο θεωρούμε ότι τα αποτελέσματα μας είναι ενδεικτικά μιας κατάστασης διαφορετικής από αυτήν που περιγράφεται στην βιβλιογραφία (τουλάχιστον για την Ελλάδα του 2015). Η υπόθεση λοιπόν περί αρνητικής επίδρασης του χρόνου αφήνεται σαν αντικείμενο μελέτης μελλοντικής έρευνας.

Τόσο οι Linchevski και Vinner (1988) όσο και οι Fischbein και Baltsan (1999) υποστήριζαν ότι οι μαθητές τείνουν να μετρούν επαναλαμβανόμενα στοιχεία σαν διακεκριμένα. Οι τελευταίοι μάλιστα δηλώνουν ότι μια συλλογή στην καθημερινότητα μπορεί να περιέχει πανομοιότυπα στοιχεία, όπως για παράδειγμα ένα κουτί με δέκα μαύρα σφαιρίδια. Είναι όμως ποτέ στη φύση δύο αντικείμενα πανομοιότυπα; Δεν μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε το σύνολο όλων των μαύρων σφαιριδίων της Γής; Θα είναι το συγκεκριμένο σύνολο μονοσύνολο; Στην πραγματικότητα, πανομοιότυπα μπορεί να είναι μόνο αντικείμενα της νόησης. Επιπλέον, είναι λάθος να θεωρήσουμε ότι το σύνολο $\{3, 3, 3, \dots\}$ είναι στην ουσία το $\{3\}$ όπως υποστηρίζουν οι Fischbein και Baltsan (1999). Στην πραγματικότητα τα στοιχεία της παραπάνω συλλογής δεν είναι διακεκριμένα συνεπώς το $\{3, 3, 3, \dots\}$ δεν είναι σύνολο. Στην πιλοτική μας έρευνα, επιχειρήσαμε να θέσουμε το ερώτημα «ορίζει η συλλογή 6,7,6,7,6,7 ένα σύνολο» και λάβαμε την εξής απάντηση από έναν συμμετέχοντα: «όχι διότι θα έπρεπε να έχουν γραφεί μια φορά». Η απάντηση αυτή, θα έπρεπε σύμφωνα με τη βιβλιογραφία να χαρακτηριστεί «λάθος» εφόσον δεν αναγνωρίζει την συλλογή ως σύνολο, στην ουσία όμως είναι καθόλα σωστή. Αν και αποφασίσαμε να μην συμπεριλάβουμε την συγκεκριμένη ερώτηση στην παρούσα έρευνά, μια πρόταση μας για μελλοντική έρευνα θα ήταν ο έλεγχος της συγκεκριμένης πεποίθησης ζητώντας από το κοινό να προσδιορίσει το σύνολο των λύσεων της $x^3+x^2-x-1 = 0$. Αν κάποιος δηλώσει ότι το ζητούμενο σύνολο είναι το $\{-1,1,1\}$ μπορούμε με ασφάλεια να υποθέσουμε ότι έχει την παρανόηση περί επαναλαμβανομένων στοιχείων.

Ξεχωριστό ενδιαφέρον θεωρούμε ότι παρουσιάζουν οι παρανοήσεις ότι «τα στοιχεία ενός συνόλου μπορούν να είναι μονάχα αριθμοί» και ότι «ένα σύνολο είναι

το αποτέλεσμα μιας πράξης. Οι παραπάνω παρανοήσεις, όπως ήδη αναφέρθηκε δεν είχαν προβλεφθεί κατά τον σχεδιασμό της έρευνας και συνεπώς δεν υπήρχαν κατάλληλα ερωτήματα στο ερωτηματολόγιό μας για την περαιτέρω διερεύνησή τους. Το ζήτημα αυτό λοιπόν, αφήνεται σαν αντικείμενο για μελλοντική έρευνα.

Μια παρατήρησή μας μελετώντας την προϋπάρχουσα έρευνα σε σχέση με τη θεωρία συνόλων από τη σκοπιά της διδακτικής των μαθηματικών, είναι ότι οι περισσότερες έρευνες ακολουθούν την ποσοτική μεθοδολογία και ιδιαίτερα την έρευνα επισκόπησης. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία είναι βέβαια αυτή που επιλέξαμε και εμείς για την έρευνά μας δεδομένου ότι σκοπός μας ήταν να ελέγξουμε ποιές παρανοήσεις εμφανίζουν οι μαθητές σε σχέση με την έννοια σύνολο αλλά, ποιες από αυτές είναι οι επικρατέστερες και σε έναν βαθμό να γενικεύσουμε τα συμπεράσματά μας για τους μαθητές τουλάχιστον στην Ελλάδα και τουλάχιστον την παρούσα χρονική περίοδο. Εντούτοις, θεωρούμε ότι είναι πλέον απαραίτητη η διεξαγωγή έρευνας ποιοτικής μεθοδολογίας όπως για παράδειγμα η μελέτη περίπτωσης κάποιων μαθητών με χρήση συνέντευξης για περεταίρω εμβάθυνση πάνω σε όλες τις παρανοήσεις που σημειώθηκαν στην παρούσα έρευνα.

Είναι αλήθεια ότι η έννοια σύνολο δεν είναι στην ουσία απαραίτητη για να «κάνουμε μαθηματικά» στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για την ακρίβεια, αν εξαιρέσουμε την περίπτωση των πιθανοτήτων, όλες οι υπόλοιπες έννοιες των μαθηματικών μπορούν να προσεγγιστούν κάλλιστα χωρίς αναφορά στα σύνολα. Τα περισσότερα μαθηματικά εξάλλου, δεν προσεγγίζονται συνολοθεωρητικά ενώ η πρωταρχική λογική, μόλις ολοκληρωθεί, μπορεί να αγνοηθεί (Karadia, 1976). Ακριβώς αυτήν την στάση φαίνεται να υιοθετούν, ασυνείδητα ενδεχομένως και εμμέσως πλην σαφώς οι περισσότεροι καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Δεν έχουμε βέβαια αποτελέσματα από κάποια έρευνα σε σχέση με το τελευταίο μας επιχείρημα και θα ήταν ενδιαφέρον να ερευνήσει κανείς τις πεποιθήσεις των ενεργεία καθηγητών για το συγκεκριμένο θέμα, εντούτοις θεωρούμε ότι η «ελληνική πραγματικότητα» είναι ότι, η έννοια σύνολο σπάνια διδάσκεται συστηματικά. Το γεγονός αυτό από μόνο του δεν είναι απαραίτητα αρνητικό, αν όμως αναλογιστεί κανείς ότι η έννοια σύνολο αναφέρεται στα σχολικά εγχειρίδια πολύ συχνά και μάλιστα αρκετά πριν δοθεί κάποιος ορισμός, το παράδοξο της διδασκαλίας των συνόλων γίνεται εμφανές. Τονίζουμε πάλι ότι δεν προτείνουμε την συστηματική διδασκαλία της έννοιας σύνολο και την θεμελίωση των σχολικών μαθηματικών εν

είδει Bourbaki μέσω της θεωρίας συνόλων ώστε να εισάγουμε τους μαθητές στον «τυπικό κόσμο» (Tall, 2004). Αυτό που υποστηρίζουμε είναι ότι *«Εφόσον χρησιμοποιούμε την έννοια σύνολο ως το κάνουμε σωστά, αλλιώς ως μην την χρησιμοποιούμε καθόλου!»*. Το να μην έχεις καθόλου γνώση ενός θέματος είναι προτιμότερο από το να έχεις παρανοήσεις σχετικά με αυτό (Yagbasan et al., 2005 στο Sirmaci και Tas, 2013).

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bagni, G. T. (2006). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 259-280.
- Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 68(1), 19-35.
- Borel, Armand (1998). 'Twenty-Five Years with Nicolas Bourbaki, (1949-1973)' *Notices of the American Mathematical Society*, 45 (3): 373–380.
- Davis, R. B. (2003). Changing school mathematics. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics* (pp. 623–646). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Eves, H. W. (1983). *Great moments in mathematics (after 1650)*. MAA.
- Fischbein, E., & Baltsan, M. (1999). The mathematical concept of set and the 'collection' model. *Educational studies in mathematics*, 37(1), 1-22.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, 3-17.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24(2), 139-162.
- Gavalas, D. (2005). Conceptual mathematics: an application to education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(5):497-0516.
- Gilbert JK., Watts DM. (1983). 'Concepts, misconception and alternative conceptions: changing perspectives in science education'. *Studies in Science Education*, 10:61-98.
- İNCİKABI, L., Abdulkadir, T. U. N. A., & BİBER, A. Ç. (2012). An Analysis of Elementary School Teacher Candidates' Conceptual Knowledge in Sets. *Journal of Education Faculty*, 14(2), 523-538.
- Kapadia, R. (1976). Set-theory and logic in school. *Educational Studies in Mathematics*, 6(4), 409-413.
- Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM Mathematics Education*, 44(4), 563-571.
- Kilpatrick, J. (2009). The mathematics teacher and curriculum change. *Pna*, 3(3), 107-121.
- Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: The failure of the new math*. New York, NY: St. Martin's.

- Linchevski, L., & Livneh, D. (2002). The competition between numbers and structure: Why expressions with identical algebraic structures trigger different interpretations. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 24(2), 20.
- Linchevski, L. and Vinner, Sh. (1988), 'The naive concept of sets in elementary teachers', *Proceedings of the 12th International Conference, Psychology of Mathematics Education*, Vol. 11, Vezprem, Hungary, pp. 471–478.
- Muller, D. A. (2008). Designing effective multimedia for physics education (Doctoral dissertation, University of Sydney Australia 2008).
- Narli, S., & Baser, N. E. (2008). Cantorian Set Theory and Teaching Prospective Teachers, *International Journal of Environmental & Science Education* v3 n2, p99
- Radford, L.: (2002), 'The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge', *For the Learning of Mathematics* 22(2), 14–23.
- Sharif-Rasslan, A., Saleh, F., & Abboud, E., (2014) 'Connectivity between Various Representations of Sets and their Relations among Teachers-Training Students' *Journal of Mathematical Sciences* 6-13.
- Tall, D. (1991), The psychology of advanced mathematical thinking, in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking, Mathematics Education Library*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 3–21.
- Tall, D. (2004, July). Thinking through three worlds of mathematics. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 281-288).
- Tall, D., & Vinner, Sh. (1981), 'Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics*, 12 151–169.
- Vinner, Sh. (1991). The role of definitins in the teaching and learning of mathematics. In Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.
- Vygotsky, L.S.: 1962, *Thought and Language*. MIT Press, Cambridge, MA
- Vilenkin, N. Y. (1995). *In Search of Infinity*, Springer Science & Business Media, 2013.
- Sırmacı, N. & Taş, F. (2013), Knowledge levels of pre-service mathematics teachers on the concept of set, *Educational Research and Reviews*, Vol. 8(17), pp. 1519-1524.
- Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E. & Tabach, M. (2011), From preschool teachers' professional development to children's knowledge: comparing sets, *Journal for Mathematics Teacher Education* 14: 113–131.

- Καφούση, Σ. & Ντζιαχρήσιος, Ε. (1997), Οι μαθηματικές γνώσεις των παιδιών της Πρώτης τάξης τον Δημοτικού Σχολείου. Αθήνα, Παιδαγωγική έρευνα.
- Καψάλης, Α. & Λεμονίδης, Χ. (1999). Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των μαθηματικών. *ΜΑΚΕΔΝΟΝ*, Περιοδική επιστημονική έκδοση της Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας του Α.Π.Θ. Τεύχος 6, σσ. 95-115.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Το παρόν ερωτηματολόγιο συντάχτηκε από τον φοιτητή του μεταπτυχιακού προγράμματος «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» Βλάχο Ιωάννη στα πλαίσια της διπλωματικής του εργασίας. Στόχος είναι η διερεύνηση των πεποιθήσεων των μαθητών της Α΄ και Β΄ Λυκείου, σχετικά με την έννοια *σύνολο*. Η έρευνα είναι ανώνυμη.

Ευχαριστώ πολύ εκ των προτέρων.

1. Μπορεί καθεμιά από τις παρακάτω συλλογές να αποτελέσει σύνολο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

α) 2, 4, 6, 8, 10

.....

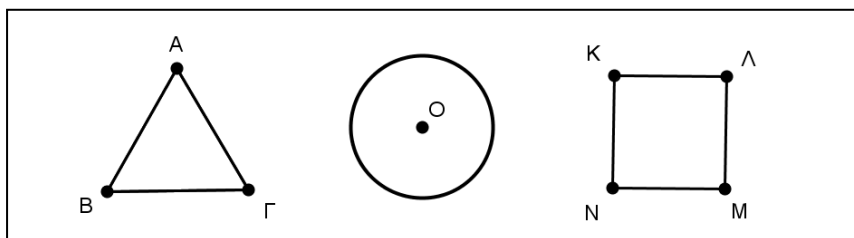
.....

β) 2, 4, 5, 8, 10

.....

.....

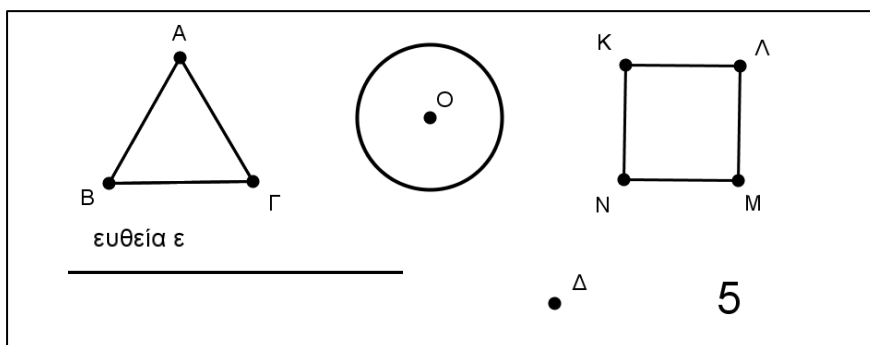
γ)



.....

.....

δ)



.....

.....

2. Ορίζουν οι παρακάτω δηλώσεις ένα σύνολο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

α) Οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 11.

.....
.....
.....

β) Οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 10.

.....
.....
.....

γ) Οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 9.

.....
.....
.....

δ) Οι λύσεις της εξίσωσης $3+x = 12$.

.....
.....
.....

ε) Οι λύσεις της εξίσωσης $0 \cdot x = 5$.

.....
.....
.....

στ) Οι λύσεις της εξίσωσης $0 \cdot x = 0$.

.....
.....
.....

ζ) Οι ψηλοί μαθητές της τάξης σας.

.....
.....
.....

3. Είναι τα σύνολα $\{1,2,3\}$ και $\{3,2,1\}$ ίσα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

.....
.....
.....

4. Συγκρίνετε ως προς το πλήθος των στοιχείων τους, το σύνολο των φυσικών αριθμών με αυτό των άρτιων αριθμών.

.....
.....
.....

5. Πότε πιστεύετε ότι είναι ίσα δυο σύνολα;

.....
.....
.....

6. Πιστεύετε ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να μοιράζονται κάποια κοινή ιδιότητα;

.....
.....
.....

7. Μπορεί ένα στοιχείο να ανήκει σε παραπάνω από ένα σύνολα; Δώστε ένα παράδειγμα.

.....
.....
.....

8. Πως αντιλαμβάνεστε την έννοια «σύνολο»;

.....
.....
.....

9. Χαρακτηρίστε τα παρακάτω ως σωστά ή λάθος. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

α) $\{1\} \in \{1,2,3,4,5\}$ Σωστό Λάθος

.....

β) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ Σωστό Λάθος

.....

γ) $\{1\} \in \{1,\{1\}\}$ Σωστό Λάθος

.....

δ) $\{1\} \subseteq \{1,\{1\}\}$ Σωστό Λάθος

.....

ε) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ Σωστό Λάθος

.....

ζ) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ Σωστό Λάθος

.....
