



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Απειρότιμη Σημασιολογία και Στρωματοποίηση

Ιωάννα Α. Συμεωνίδου

Επιβλέπων: Παναγιώτης Ροντογιάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2014

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Απειρότιμη Σημασιολογία και Στρωματοποίηση

Ιωάννα Α. Συμεωνίδου

A.M.: 0640

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Παναγιώτης Ροντογιάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: Παναγιώτης Ροντογιάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής
Ιωάννης Σμαραγδάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Φεβρουάριος 2014

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μελετάμε την συμπεριφορά των απειρότιμων μοντέλων, μίας από τις πιο πρόσφατες και ενδιαφέρουσες επεκτάσεις της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας για διαζευκτικά προγράμματα, στην κλάση των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων. Τα μοντέλα της ανήκουν σε μία εναλλακτική λογική με άπειρες τιμές αληθείας, οι οποίες εκφράζουν διαφορετικούς βαθμούς βεβαιότητας για την λογική τιμή ενός ατόμου, από την σαφώς αληθή ή ψευδή, ως την εντελώς άγνωστη. Αποδεικνύουμε ότι τα ελαχιστικά απειρότιμα μοντέλα των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων δεν περιλαμβάνουν την άγνωστη τιμή αληθείας, ενώ τα άτομα των κατώτερων στρωμάτων αποτιμούνται με μεγαλύτερη βεβαιότητα από ότι αυτά των ανώτερων. Ταυτόχρονα, δείχνουμε τον αριθμό των στρωμάτων του προγράμματος ως άνω φράγμα για τον αριθμό των διακεκριμένων τιμών αληθείας που εμφανίζονται στα ελαχιστικά απειρότιμα μοντέλα του. Η δομική σχέση των μοντέλων αυτών με την στρωματοποίηση, ενισχύεται επίσης από την ιδιότητά τους να διατηρούν την ελαχιστικότητα σε κάθε υποσύνολο του προγράμματος, που ορίζεται από την στρωματοποίησή του.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Σημασιολογία Γλωσσών Προγραμματισμού

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: διαζευκτικός λογικός προγραμματισμός, καλώς-θεμελιωμένη σημασιολογία, απειρότιμη σημασιολογία, στρωματοποίηση, τοπική στρωματοποίηση

ABSTRACT

We study the behavior of infinite valued models, one of the most recent and interesting extensions of the Well-Founded Semantics to disjunctive programs, within the class of locally stratified programs. Its models belong to an alternative logic with infinite truth values, which denote different degrees of certainty regarding an atom's logic value, ranging from absolutely true or absolutely false to completely unknown. We show that minimal infinite-valued models of locally stratified programs do not include the *unknown* truth value, while the atoms of the lower strata are evaluated with greater certainty than those of the higher strata. At the same time, we show the number of strata as an upper bound of the multitude of distinct truth values appearing in its minimal infinite-valued models. These models' structural relationship to stratification is also reinforced by their property of maintaining minimality in every subset of the program, defined by its stratification.

SUBJECT AREA: Programming Languages Semantics

KEYWORDS: disjunctive logic programming, well-founded semantics, infinite-valued semantics, stratification, local stratification

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	8
1. Εισαγωγή	9
2. Διαζευκτικός Λογικός Προγραμματισμός	12
2.1 Σύνταξη	12
2.2 Ερμηνείες, Μοντέλα και Καταστάσεις-Μοντέλα	16
2.3 Μοντελοθεωρητική Σημασιολογία	20
2.4 Σημασιολογία Σταθερού Σημείου	24
3. Άρνηση	29
3.1 Επεκτάσεις των Κανόνων της Άρνησης	30
3.2 Γενικά Λογικά Προγράμματα	32
3.3 Στρωματοποίηση	34
3.4 Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία	37
4. Επεκτάσεις Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας	42
4.1 Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία (Ross)	43
4.1.1 Ορισμός	43
4.1.2 Χαρακτηριστικά	45
4.2 Διαζευκτική Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία (Baral)	45
4.2.1 Ορισμός	45
4.2.2 Χαρακτηριστικά	47
4.3 D-WFS(Brass, Dix)	48
4.3.1 Ορισμός	48
4.3.2 Χαρακτηριστικά	50
4.4 Στατική Σημασιολογία (Przymusinski)	50
4.4.1 Ορισμός	50
4.4.2 Χαρακτηριστικά	53
4.5 Καλώς-Θεμελιωμένη Διαζευκτική Σημασιολογία (Wang)	54
4.5.1 Ορισμός	54
4.5.2 Χαρακτηριστικά	55

4.6	WFS_d (Alcântara, Damàsio, Pereira)	55
4.6.1	Ορισμός	55
4.6.2	Χαρακτηριστικά	56
5.	Απειρότιμη Σημασιολογία	57
5.1	Απειρότιμα Μοντέλα	57
5.2	Ιδιότητες των Απειρότιμων Μοντέλων	60
5.3	Χαρακτηριστικά	62
6.	Απειρότιμη Σημασιολογία και Στρωματοποίηση	64
6.1	Διατήρηση της Ιδιότητας της Ελαχιστικότητας	65
6.2	Τάξη Τιμών Στρωματοποιημένων Προγραμμάτων	71
7.	Επίλογος	75
7.1	Συμπεράσματα	75
7.2	Σύγκριση προσεγγίσεων	75
7.3	Μελλοντικές Επεκτάσεις	77
	ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ	79
	ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ, ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ ΚΑΙ ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ	84

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1: Αντιπαραβολή χαρακτηριστικών των επεκτάσεων της Καλώς-Θεμελιωμένης σημασιολογίας	76
Πίνακας 2: Συσχετίσεις μεταξύ επεκτάσεων της Καλώς-Θεμελιωμένης σημασιολογίας	77

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στην Αθήνα, το 2013, στα πλαίσια των σπουδών μου για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην «Υπολογιστική Επιστήμη», που απονέμει το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Ε.Κ.Π.

Η εργασία αποτελείται από δύο συνιστώσες, με πρώτη την εκτενή βιβλιογραφική και κριτική έρευνα πάνω στο ζήτημα της επέκτασης της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας στα Διαζευκτικά λογικά προγράμματα. Η δεύτερη, και κυριότερη, είναι η συνεισφορά πρωτότυπων αποτελεσμάτων, υπό την μορφή Λημμάτων και Θεωρήματος.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα θερμά τον κ. Π. Ροντογιάννη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος και επιβλέποντα της εργασίας, για την καθοδήγηση και την κάθε συνεισφορά του στην εκπόνησή της. Ακόμη περισσότερο, όμως, τον ευχαριστώ για την γενικότερη βοήθεια, εμπιστοσύνη και εμπύχωση που μου προσέφερε, χάρις στην οποία κατέστη εφικτή η ολοκλήρωση, τελικά, των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δηλωτική φύση του λογικού προγραμματισμού απαιτεί τη συσχέτιση κάθε λογικού προγράμματος με μία σημασιολογία που θα είναι δηλωτική, ανεξάρτητη από διαδικαστικές λεπτομέρειες και υποθέσεις, εύκολη στη διαχείριση και κοντά στη διαισθητική σημασία του προγράμματος. Η σημασιολογία ελάχιστου μοντέλου των Van Emden και Kowalski πέτυχε αναμφισβήτητα αυτό το στόχο. Επιπλέον, λόγω της ταύτισής του με το ελάχιστο σταθερό σημείο του τελεστή άμεσου επακόλουθου, το ελάχιστο μοντέλο ενός προγράμματος μπορεί να υπολογιστεί εύκολα και άμεσα.

Καθώς όμως η εκφραστική δύναμη των προτάσεων Horn αποδείχθηκε αρκετά περιορισμένη για πολλές εφαρμογές, σύντομα άρχισε να ανιχνεύεται η πιθανότητα προσθήκης επιπρόσθετων στοιχείων, εντός ή εκτός της λογικής πρώτης τάξης. Η πλέον ενδιαφέρουσα και διαδεδομένη επέκταση των λογικών γλωσσών αφορά στην δυνατότητα ικανοποίησης αρνητικών στόχων. Αυτοί εκφράζονται με τη βοήθεια ενός τελεστή άρνησης, ο οποίος διαφοροποιείται από τη λογική άρνηση.

Η επέκταση της σημασιολογίας μιας λογικής γλώσσας, ώστε να ενσωματώσει τον προαναφερθέντα τελεστή, δεν είναι τετριμμένη διαδικασία. Ωστόσο, υπάρχει μία σημαντική κλάση προγραμμάτων, τα οποία διαθέτουν, κατά κοινή αποδοχή, ξεκάθαρο φυσικό νόημα, που συλλαμβάνεται από το τέλειο μοντέλο τους. Πράγματι, όλες οι μείζονες σημασιολογικές θεωρίες δίνουν ισοδύναμα αποτελέσματα για τα ονομαζόμενα τοπικά στρωματοποιημένα λογικά προγράμματα.

Η κλάση των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων περιλαμβάνει όλα τα λογικά προγράμματα στα οποία η άρνηση δεν χρησιμοποιείται με κυκλικό τρόπο. Διαισθητικά, για τα προγράμματα αυτά μπορούμε να ορίσουμε μία σειρά επίλυσης των κατηγορημάτων τους, ώστε να χρειαστεί να αποφασίσουμε για την αλήθεια ενός ατόμου, μόνο αφού έχουμε αποφασίσει για την αλήθεια όλων των ατόμων από τα οποία εξαρτάται αρνητικά.

Για το ευρύτερο σύνολο των λογικών προγραμμάτων, θεωρείται ότι οι δύο επικρατούσες εναλλακτικές, της Σταθερής και της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας, αποτελούν ικανοποιητική απάντηση στο πρόβλημα της σημασιολογίας τους. Οι δύο θεωρίες αντιπροσωπεύουν διαφορετικές φιλοσοφικές προσεγγίσεις στην αναπαράσταση της γνώσης. Η Σταθερή Σημασιολογία επιδιώκει την πλήρη αποτίμηση ενός λογικού προγράμματος, με το κόστος της μη ύπαρξης μοναδικού μοντέλου για ορισμένα προγράμματα. Αντίθετα, η Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία επιτυγχάνει να αποδώσει νόημα σε κάθε λογικό πρόγραμμα, επιτρέποντας να μείνουμε αναποφάσιστοι για την λογική τιμή ορισμένων “προβληματικών” ατόμων.

Ένας διαφορετικός τρόπος για να εμπλουτίσουμε τις δυνατότητες του λογικού προγραμματισμού, που παρουσιάζει επίσης μεγάλο ενδιαφέρον, είναι η αξιοποίηση λογικών διαζεύξεων για την μοντελοποίηση αόριστης πληροφορίας. Τα διαζευκτικά προγράμματα μπορεί να περιλαμβάνουν ή να μην περιλαμβάνουν τον τελεστή της άρνησης· σε κάθε περίπτωση

αφήνουν περιθώρια διαφοροποίησης στον τρόπο ερμηνείας τους, όπως αποδεικνύεται από την πληθώρα σημασιολογιών που έχουν προταθεί.

Πολλές από τις εν λόγω προτάσεις αποτελούν προσπάθειες επέκτασης των δημοφιλών σημασιολογιών για προγράμματα χωρίς διαζεύξεις. Ωστόσο η φύση των διαζευκτικών προγραμμάτων δείχνει να επιβάλλει ένα βαθμό αβεβαιότητας, έτσι όλες οι προσεγγίσεις προβλέπουν την αδυναμία απόδοσης λογικής τιμής σε κάποιο σύνολο ατόμων.

Πράγματι, τα ελαχιστικά μοντέλα για προγράμματα χωρίς άρνηση του Minker, τα διαζευκτικά τέλεια μοντέλα για στρωματοποιημένα προγράμματα και τα διαζευκτικά σταθερά μοντέλα για γενικά προγράμματα του Przytusinski, αποτελούν άμεσες επεκτάσεις του ελάχιστου, του τέλει και των σταθερών μοντέλων αντίστοιχα. Επιπλέον, κατ' αναλογία με την περίπτωση των οριστικών προγραμμάτων, τα διαζευκτικά σταθερά μοντέλα επεκτείνουν επίσης τα διαζευκτικά τέλεια μοντέλα.

Δυστυχώς η περίπτωση της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας παρουσίασε πολύ μεγαλύτερη δυσκολία και μέχρι σήμερα καμία σημασιολογία δεν έχει εδραιωθεί ως η επέκτασή της στα διαζευκτικά προγράμματα, παρόλο το πλήθος των προτάσεων. Μάλιστα, το πρόβλημα δεν εντοπίζεται μόνο στην εύρεση της καταλληλότερης σημασιολογίας, αλλά υπάρχει διαφωνία στο ποια είναι τα κριτήρια για την καταλληλότητα της. Συγκεκριμένα, η επιθυμητή σημασιολογική ερμηνεία της άρνησης αλλά και των διαζεύξεων βρίσκονται υπό αμφισβήτηση. Περαιτέρω επιπλοκές δημιουργεί το γεγονός ότι οι προτάσεις αυτές βασίζονται σε πολύ διαφορετικές κατασκευές και διαθέτουν πολύ διαφορετικούς χαρακτηρισμούς. Έτσι η σύγκριση μεταξύ τους και η εξαγωγή συμπερασμάτων είναι από μόνη της εξαιρετικά δυσχερής.

Είναι ενδιαφέρον επίσης, ότι στην έρευνά μας δεν εντοπίσαμε κάποια εκδοχή της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας, η οποία να επεκτείνει αποδεδειγμένα την σημασιολογία τέλει μοντέλου. Ορισμένες εξ' αυτών αποδεικνύονται ασθενέστερες από την τελευταία, ενώ για άλλες δεν υπάρχουν σχετικά αποτελέσματα στην βιβλιογραφία. Αν και το γεγονός αυτό οδήγησε ορισμένους συγγραφείς (για παράδειγμα, [25]) να επικρίνουν την σημασιολογία τέλει μοντέλου ως υπερβολικά ισχυρή (strong) για τα διαζευκτικά προγράμματα, η συσχέτισή της με την Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία παραμένει ανοικτή προς διερεύνηση.

Στην κατεύθυνση αυτή, θα επιχειρήσουμε να ανιχνεύσουμε την συμπεριφορά των απειρότιμων μοντέλων, μίας από τις πιο πρόσφατες και ενδιαφέρουσες επεκτάσεις της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας, στην κλάση των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων. Η σημασιολογία απειρότιμων μοντέλων, των Cabalar, Pearce, Ροντογιάννη και Wadge, είναι μία καθαρά μοντελοθεωρητική σημασιολογία για γενικά διαζευκτικά προγράμματα. Τα μοντέλα της ανήκουν σε μία νέα λογική με άπειρες τιμές αληθείας, οι οποίες εκφράζουν διαφορετικούς βαθμούς βεβαιότητας για την λογική τιμή ενός ατόμου, από την σαφώς αληθή ή ψευδή, ως την εντελώς άγνωστη. Το νόημα του προγράμματος αποδίδεται υπό την μορφή του συνόλου των ελαχιστικών απειρότιμων μοντέλων του, ενώ προγράμ-

ματα χωρίς διαζεύξεις διαθέτουν μοναδικό ελάχιστο μοντέλο.

Φαίνεται ότι τα ελαχιστικά απειρότιμα μοντέλα των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων είναι μία υποψήφια επέκταση των τέλειων μοντέλων, αφού όπως θα δείξουμε δεν περιλαμβάνουν την άγνωστη τιμή αληθείας. Μάλιστα, το στρώμα στο οποίο ανήκει κάθε άτομο περιορίζει τον πιθανό βαθμό αβεβαιότητας της τιμής του, δηλαδή τα άτομα των κατώτερων στρωμάτων αποτιμούνται με μεγαλύτερη βεβαιότητα από ότι αυτά των ανώτερων. Το γεγονός αυτό συμφωνεί απόλυτα με τις διαισθητικές ιδέες πίσω από την στρωματοποίηση και την απειρότιμη σημασιολογία, αφού η αβεβαιότητα πηγάζει από την χρήση της άρνησης. Ταυτόχρονα, δείχνει τον αριθμό των στρωμάτων του προγράμματος ως άνω φράγμα για τον αριθμό των διακεκριμένων τιμών αληθείας που εμφανίζονται στα ελαχιστικά απειρότιμα μοντέλα του. Η δομική σχέση των μοντέλων αυτών με την στρωματοποίηση, ενισχύεται επίσης από την ιδιότητά τους να διατηρούν την ελαχιστικότητα σε κάθε υποσύνολο του προγράμματος, που ορίζεται από την στρωματοποίησή του.

Το υπόλοιπο της εργασίας είναι δομημένο ως εξής: Στο Κεφάλαιο 2 κάνουμε μία εισαγωγή στον λογικό προγραμματισμό, όπου παρουσιάζουμε την σύνταξη των διαζευκτικών προγραμμάτων και τα βασικά σημεία της σημασιολογίας ελαχιστικών μοντέλων. Στο Κεφάλαιο 3 ανατρέχουμε στις σημαντικότερες, τουλάχιστον για τους σκοπούς μας, σημασιολογίες της άρνησης, όπως την Γενικευμένη Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου, για προγράμματα χωρίς άρνηση, την Σημασιολογία Τέλειου Μοντέλου, για τοπικά στρωματοποιημένα προγράμματα, και την Σημασιολογία Καλώς-Θεμελιωμένου Μοντέλου, για προγράμματα χωρίς διαζεύξεις. Στο Κεφάλαιο 4 παραθέτουμε και συγκρίνουμε τις προταθείσες επεκτάσεις της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας στην κλάση των διαζευκτικών προγραμμάτων, εκτός από την Σημασιολογία Απειρότιμων Μοντέλων, η οποία συζητείται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 5. Τα κύρια αποτελέσματα της εργασίας αυτής παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 6, ενώ το Κεφάλαιο 7 περιλαμβάνει τα συμπεράσματά μας και πιθανές κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

2. ΔΙΑΖΕΥΚΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ο λογικός προγραμματισμός γεννήθηκε με την παρατήρηση, ότι η μαθηματική λογική διαθέτει μία διαδικαστικής φύσης ερμηνεία, που επιτρέπει τη χρήση της ως γλώσσας προγραμματισμού. Η ιδέα εισήχθη από τον Kowalski και τον Colmerauer το 1972.

Μία από τις θεμελιώδεις ιδέες του είναι ότι ένας αλγόριθμος αποτελείται από δύο διαχωρίσιμα τμήματα, τη λογική και τον έλεγχο. Το πρώτο περιλαμβάνει την περιγραφή του ποιο είναι το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί. Το δεύτερο την περιγραφή του πώς πρόκειται να γίνει η επίλυση. Στη γενική περίπτωση ο προγραμματιστής επιβαρύνεται να προσδιορίσει και τα δύο αυτά τμήματα, ωστόσο βασική επιδίωξη του λογικού προγραμματισμού είναι το κομμάτι του ελέγχου να ανατεθεί εξ ολοκλήρου στο προγραμματιστικό σύστημα. Έτσι, ένα λογικό πρόγραμμα (logic program) είναι απλά η περιγραφή των γνώσεών μας για το εν λόγω πρόβλημα, με τη χρήση της μαθηματικής λογικής.

Η γλώσσα Prolog αποτέλεσε την πρώτη προσπάθεια υλοποίησης αυτής της ιδέας και στηρίχθηκε σε ένα υποσύνολο της λογικής πρώτης τάξης. Η σημασιολογία (semantics) της βασίζεται στην έννοια του ελάχιστου μοντέλου Herbrand (least Herbrand model) [31]. Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου αυτού, θα παρουσιάσουμε τη σύνταξη της λογικής πρώτης τάξης. Στη δεύτερη θα ορίσουμε το ελάχιστο μοντέλο Herbrand ενός κλασσικού λογικού προγράμματος ως σύνολο και ως σταθερό σημείο (fixpoint) του τελεστή άμεσου επακόλουθου (immediate consequence operator). Η παρουσίαση που ακολουθεί βασίζεται κυρίως στα [18], [19] και [1].

2.1 Σύνταξη

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζονται οι συντακτικοί κανόνες δημιουργίας των καλοσχηματισμένων τύπων (well-formed formulas) της λογικής πρώτης τάξης. Θα δούμε ότι ένα υποσύνολο των τύπων αυτών, οι προτάσεις (clauses), αποτελούν τις δομικές μονάδες ενός λογικού προγράμματος.

Το σύνολο όλων των δυνατών συμβόλων, που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία των τύπων, καλείται αλφάβητο. Στη λογική πρώτης τάξης, ένα αλφάβητο περιλαμβάνει έξι διαφορετικά είδη συμβόλων, όπως φαίνεται στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.1. Ένα αλφάβητο αποτελείται από έξι σύνολα συμβόλων:

1. Το σύνολο V των μεταβλητών
2. Το σύνολο F των συναρτησιακών συμβόλων
3. Το σύνολο P των κατηγορημάτων
4. Τα συνδετικά: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
5. Τους ποσοδείκτες: $\exists, \forall$
6. Τα σημεία στίξης: $(,), ", ,$

Σε κάθε κατηγορήμα ή συναρτησιακό σύμβολο k αντιστοιχεί ένας ακέραιος αριθμός n , που λέγεται βαθμός του k . Το k συμβολίζεται και ως k/n . Τα συναρτησιακά σύμβολα βαθμού 0 λέγονται και σταθερές.

Είθισται οι μεταβλητές, τα συναρτησιακά σύμβολα, οι σταθερές και τα κατηγορήματα να δηλώνονται με πεπερασμένες ακολουθίες από γράμματα της λατινικής αλφαβήτου.

Τα συναρτησιακά σύμβολα αντιπροσωπεύουν αντικείμενα του κόσμου του προβλήματος, ενώ τα κατηγορήματα συνήθως εκφράζουν ιδιότητες ή σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Άτυπα, τα συνδετικά $\neg$, $\wedge$ και $\vee$ αντιπροσωπεύουν τη λογική άρνηση, τη σύζευξη και τη διάζευξη αντιστοίχως, το $\rightarrow$ τη συνεπαγωγή και το $\leftrightarrow$ την ισοδυναμία. Το $\exists$ ονομάζεται υπαρξιακός ποσοδείκτης και το $\forall$ καθολικός ποσοδείκτης. Έτσι “ $\exists x$ ” σημαίνει «υπάρχει x » και “ $\forall x$ ” σημαίνει «για κάθε x ».

Για την αποφυγή μεγάλου αριθμού παρενθέσεων στους τύπους, υιοθετούμε την εξής ιεραρχία, με φθίνουσα προς τα κάτω σειρά προτεραιότητας:

$$\neg, \forall, \exists$$

$$\vee$$

$$\wedge$$

$$\rightarrow, \leftrightarrow$$

Ορισμός 2.2. Ένας όρος (*term*) ορίζεται ως εξής:

1. Αν $x \in V$, το x είναι όρος.
2. Αν $f/n \in F$ και $t_1, \dots, t_n$ είναι όροι, το $f(t_1, \dots, t_n)$ είναι όρος ($n \geq 0$).

Παράδειγμα 2.1. Αν $x, y \in V$ και $john, father_of \in F$, τα:

x
 $john$
 $father_of(john)$
 $father_of(y)$

είναι όροι.

Ορισμός 2.3. Αν $p/n \in P$ και $t_1, \dots, t_n$ είναι όροι, το $p(t_1, \dots, t_n)$ ονομάζεται ατομικός τύπος (*atomic formula*) ή άτομο (*atom*).

Ορισμός 2.4. Ένας (καλοσχηματισμένος) τύπος ορίζεται ως εξής:

1. Αν το A είναι άτομο, τότε το A είναι τύπος.
2. Αν τα F και G είναι τύποι, τότε και τα $(\neg F)$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ είναι τύποι.
3. Αν το F είναι τύπος και το $x \in V$, τότε τα $(\forall x F)$ και $(\exists x F)$ είναι τύποι.

Σημείωση 2.1. Πολλές φορές, προτιμάται το $F \rightarrow G$ να γράφεται σαν $G \leftarrow F$.

Παράδειγμα 2.2. Αν $p, q, relatives \in P$, τα:

$relatives(john, father_of(john))$

$$(\forall x (\exists y (p(x, y) \rightarrow q(x))))$$

$$(\neg(\exists x (p(x, john) \wedge q(father_of(y)))))$$

είναι τύποι. Ο πρώτος από αυτούς είναι ατομικός τύπος. Παραλείποντας τις μη απαραίτητες παρενθέσεις, οι δύο τελευταίοι τύποι γράφονται:

$$\forall x \exists y (p(x, y) \rightarrow q(x))$$

$$\neg \exists x (p(x, john) \wedge q(father_of(y)))$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την έννοια της γλώσσας πρώτης τάξης:

Ορισμός 2.5. Το σύνολο όλων των καλοσχηματισμένων τύπων, που μπορούν να κατασκευαστούν από τα σύμβολα ενός αλφάβητου, αποτελεί μια γλώσσα πρώτης τάξης.

Ορισμός 2.6. Η εμβέλεια του $\forall$ (αντιστοίχως, του $\exists$) στον τύπο $\forall x F$ (αντ., στον $\exists x F$) είναι ο τύπος F . Μία δεσμευμένη εμφάνιση μιας μεταβλητής μέσα σε έναν τύπο είναι μία εμφάνιση αμέσως μετά από έναν ποσοδείκτη ή μια εμφάνιση μέσα στην εμβέλεια ενός ποσοδείκτη, ο οποίος ακολουθείται από την ίδια μεταβλητή. Οποιαδήποτε άλλη εμφάνιση μιας μεταβλητής καλείται ελεύθερη εμφάνιση.

Ορισμός 2.7. Ένας κλειστός τύπος είναι ένας τύπος που δεν περιέχει ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών.

Παράδειγμα 2.3. Στον τύπο $\exists x p(x, y) \wedge q(x)$ οι δύο πρώτες εμφανίσεις του x είναι δεσμευμένες, ενώ η τελευταία είναι ελεύθερη, αφού η εμβέλεια του $\exists x$ είναι ο $p(x, y)$. Στον τύπο $\exists x (p(x, y) \wedge q(x))$ όλες οι εμφανίσεις του x είναι δεσμευμένες. Κανείς από τους παραπάνω τύπους δεν είναι κλειστός. Αντίθετα, ο $\forall x (\forall y (\exists x p(x, y) \wedge q(x)))$ είναι κλειστός τύπος.

Ορισμός 2.8. Ένα λεκτικό (literal) ή στοιχειώδης τύπος είναι ένα άτομο ή η άρνηση ενός ατόμου. Ειδικότερα, ένα θετικό λεκτικό (positive literal) είναι ένα άτομο και ένα αρνητικό λεκτικό (negative literal) είναι η άρνηση ενός ατόμου.

Ορισμός 2.9. Ένας βασικός όρος (ground term) είναι ένας όρος που δεν περιέχει μεταβλητές. Ομοίως, ένα βασικό άτομο (ground atom) είναι ένα άτομο που δεν περιέχει μεταβλητές. Ένα βασικό λεκτικό (ground literal) είναι ένα λεκτικό που σχηματίζεται από ένα βασικό άτομο ή την άρνηση ενός τέτοιου.

Θα μας απασχολήσει ένα συγκεκριμένο υποσύνολο των τύπων, που ονομάζονται προτάσεις:

Ορισμός 2.10. Μία διαζευκτική πρόταση (disjunctive clause) ή απλά πρόταση (clause) είναι ένας τύπος της μορφής

$$\forall x_1 \dots \forall x_s (L_1 \vee \dots \vee L_m)$$

όπου τα $L_1, \dots, L_m$ είναι λεκτικά και τα $x_1, \dots, x_s$ είναι όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονται στον $L_1 \vee \dots \vee L_m$.

Αν τα $L_1, \dots, L_m$ είναι όλα θετικά (αντίστοιχα, αρνητικά) λεκτικά, τότε η πρόταση λέγεται θετική (αντίστοιχα, αρνητική) διαζευκτική πρόταση. Επίσης, αν τα $L_1, \dots, L_m$ είναι όλα βασικά λεκτικά, τότε η πρόταση λέγεται βασική διαζευκτική πρόταση.

Στο εξής θα χρησιμοποιήσουμε μία εναλλακτική γραφή για τις προτάσεις, που είναι και πιο συνηθισμένη στην βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, η πρόταση

$$\forall x_1 \dots \forall x_s (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_n)$$

όπου τα $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_n$ είναι άτομα και τα $x_1, \dots, x_s$ είναι όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτά τα άτομα, θα γράφεται ως

$$A_1 \vee \dots \vee A_k \leftarrow B_1, \dots, B_n$$

Έτσι όλες οι μεταβλητές μίας πρότασης θεωρούνται καθολικά ποσοτικοποιημένες, ενώ οι αντίστοιχοι ποσοδείκτες παραλείπονται, και τα κόμματα αντικαθιστούν τα σύμβολα της λογικής σύζευξης.

Ορισμός 2.11. Αν $A_1 \vee \dots \vee A_k \leftarrow B_1, \dots, B_n$ είναι μία πρόταση, τότε το $A_1 \vee \dots \vee A_k$ καλείται κεφαλή και το $B_1, \dots, B_n$ σώμα της πρότασης.

Ορισμός 2.12. Μια πρόταση της μορφής

$$A \leftarrow B_1, \dots, B_n$$

δηλαδή μια πρόταση για την οποία $k = 1$, καλείται οριστική πρόταση.

Ορισμός 2.13. Ένα διαζευκτικό (αντίστοιχα, οριστικό) πρόγραμμα (disjunctive/definite program) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο διαζευκτικών (αντίστοιχα, οριστικών) προτάσεων.

Σαφώς, τα οριστικά προγράμματα αποτελούν υποσύνολο των διαζευκτικών. Πολλές φορές, θα αναφερόμαστε στα διαζευκτικά προγράμματα ως λογικά προγράμματα ή απλά προγράμματα.

Ορισμός 2.14. Μια πρόταση της μορφής

$$A_1 \vee \dots \vee A_k \leftarrow$$

δηλαδή μία πρόταση με $n = 0$, καλείται μοναδιαία πρόταση, ή και γεγονός (fact).

Το σύμβολο $\leftarrow$ της συνεπαγωγής, στο τέλος μίας μοναδιαίας πρότασης, μπορεί να παραλειφθεί.

Ορισμός 2.15. Μια πρόταση της μορφής

$$\leftarrow B_1, \dots, B_n$$

δηλαδή μία πρόταση με $k = 0$, καλείται στόχος. Κάθε ένα από τα $B_1, \dots, B_n$ καλείται υποστόχος (subgoal) του στόχου.

Ορισμός 2.16. Μία βασική πρόταση $A = A_1 \vee \dots \vee A_n$ είναι υποπρόταση (subclause) μίας βασικής πρότασης $B = B_1 \vee \dots \vee B_m$ αν για κάθε $A_i, 1 \leq i \leq n$ υπάρχει κάποιο B_j τέτοιο ώστε $A_i = B_j$. Η πρόταση A καλείται γνήσια υποπρόταση της B αν είναι υποπρόταση της B και επιπλέον υπάρχει κάποιο $B_j, 1 \leq j \leq m$, τέτοιο ώστε για κάθε A_i στην $A, A_i \neq B_j$.

2.2 Ερμηνείες, Μοντέλα και Καταστάσεις-Μοντέλα

Μία ερμηνεία (interpretation) προσδιορίζει ένα νόημα για κάθε σύμβολο με τυπικό τρόπο. Συγκεκριμένα, ορίζει ένα πεδίο από το οποίο παίρνουν τιμές οι μεταβλητές και αντιστοιχίζει σε κάθε σταθερά μία τιμή από το πεδίο αυτό, σε κάθε συναρτησιακό σύμβολο μία απεικόνιση πάνω στο πεδίο και σε κάθε κατηγορημα μία σχέση πάνω στο πεδίο.

Ορισμός 2.17. Μία προ-ερμηνεία (pre-interpretation) μίας γλώσσας πρώτης τάξης L συνίσταται από τα εξής:

1. Ένα μη κενό σύνολο D , που ονομάζεται πεδίο (domain) της προ-ερμηνείας.
2. Για κάθε σταθερά στην L , η ανάθεση ενός στοιχείου του D .
3. Για κάθε συναρτησιακό σύμβολο βαθμού n στην L , η ανάθεση μίας απεικόνισης από το D^n στο D .

Ορισμός 2.18. Μία ερμηνεία I μίας γλώσσας πρώτης τάξης L συνίσταται από μία προ-ερμηνεία J με πεδίο D και επιπλέον, για κάθε κατηγορημα βαθμού n , την ανάθεση μίας απεικόνισης από το D^n στο $\{true, false\}$ (ισοδύναμα, μίας σχέσης πάνω στο D^n).

Λέμε ότι η I βασίζεται στην J .

Ορισμός 2.19. Έστω J μία προ-ερμηνεία μίας γλώσσας πρώτης τάξης L . Μία ανάθεση μεταβλητών (variable assignment) είναι η ανάθεση ενός στοιχείου από το πεδίο της J σε κάθε μεταβλητή της L .

Ορισμός 2.20. Έστω J μία προ-ερμηνεία με πεδίο D μίας γλώσσας πρώτης τάξης L και έστω V μία ανάθεση μεταβλητών. Η ανάθεση όρων (term assignment) των όρων της L ορίζεται ως εξής:

1. Σε κάθε μεταβλητή δίνεται η κατάλληλη ανάθεση, σύμφωνα με την V .
2. Σε κάθε σταθερά δίνεται η κατάλληλη ανάθεση, σύμφωνα με την J .
3. Αν $t_1, \dots, t_n$ είναι οι αναθέσεις όρων των όρων $t_1, \dots, t_n$, και f είναι η ανάθεση του συναρτησιακού συμβόλου f , βαθμού n , η $f(t_1, \dots, t_n) \in D$ είναι η ανάθεση όρου του όρου $f(t_1, \dots, t_n)$.

Ο επόμενος ορισμός, δίνει αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε (αναδρομικά) την τιμή αληθείας ενός οποιουδήποτε τύπου της λογικής πρώτης τάξης, ως προς μία ερμηνεία και μία συγκεκριμένη ανάθεση μεταβλητών.

Ο συμβολισμός $V(x/d)$, που χρησιμοποιούμε στον ορισμό αυτό, δηλώνει μία ανάθεση μεταβλητών, η οποία είναι ακριβώς ίδια με την ανάθεση μεταβλητών V , μόνο που στη μεταβλητή x ανατίθεται η τιμή d .

Ορισμός 2.21. Έστω I μία ερμηνεία με πεδίο D μίας γλώσσας πρώτης τάξης L και V μία ανάθεση μεταβλητών. Τότε ένας τύπος της L μπορεί να λάβει μία τιμή αληθείας, $true$ ή $false$, ως προς τις I και V ως εξής:

1. Αν ο τύπος είναι ένα άτομο $p(t_1, \dots, t_n)$ τότε η τιμή αληθείας προκύπτει υπολογίζοντας την τιμή του $p'(t_1, \dots, t_n)$, όπου p' είναι η απεικόνιση που έχει ανατεθεί από την I στο

p και $t'_1, \dots, t'_n$ είναι οι αναθέσεις όρων των $t_1, \dots, t_n$ ως προς τις I και V .

2. Αν ο τύπος έχει μία από τις μορφές $\neg F, F \vee G, F \wedge G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G$, η τιμή αληθείας του δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

F	G	$\neg F$	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \rightarrow G$	$F \leftrightarrow G$
true	true	false	true	true	true	true
true	false	false	false	true	false	false
false	true	true	false	true	true	false
false	false	true	false	false	true	true

3. Αν ο τύπος έχει τη μορφή $\exists x F$, τότε η τιμή αληθείας του είναι true, εφόσον υπάρχει $d \in D$, τέτοιο ώστε ο F να έχει τιμή αληθείας true ως προς τις I και $V(x/d)$. Διαφορετικά η τιμή αληθείας του είναι false.
4. Αν ο τύπος έχει τη μορφή $\forall x F$, τότε η τιμή αληθείας του είναι true, εφόσον, για κάθε $d \in D$, ο F έχει τιμή αληθείας true ως προς τις I και $V(x/d)$. Διαφορετικά η τιμή αληθείας του είναι false.

Προφανώς η τιμή αληθείας ενός κλειστού τύπου δεν εξαρτάται από την ανάθεση των μεταβλητών. Συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για την τιμή αληθείας ενός κλειστού τύπου, άρα και μίας πρότασης, ως προς μία ερμηνεία.

Ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για τις ερμηνείες εκείνες στις οποίες ο τύπος που εξετάζουμε είναι αληθής. Τέτοιες ερμηνείες ονομάζονται μοντέλα (models) του τύπου. Όταν ένας τύπος εμφανίζεται μέσα σε ένα διαζευκτικό πρόγραμμα, υπάρχει προφανώς η πρόθεση να είναι αληθής. Επιπλέον, κάποιος που διατυπώνει ένα πρόγραμμα, έχει υπ' όψιν του έναν συγκεκριμένο κόσμο και ένα συγκεκριμένο νόημα για κάθε σύμβολο του προγράμματός του. Η ερμηνεία που αποδίδει αυτό το συγκεκριμένο νόημα, θα πρέπει επομένως να είναι μοντέλο του προγράμματος.

Ορισμός 2.22. Έστω I μία ερμηνεία μίας γλώσσας πρώτης τάξης L και έστω F ένας κλειστός τύπος της L . Η I είναι μοντέλο του F αν ο F είναι αληθής ως προς την I .

Ορισμός 2.23. Έστω S ένα σύνολο από κλειστούς τύπους μίας γλώσσας πρώτης τάξης L και έστω I μία ερμηνεία της L . Λέμε ότι η I είναι μοντέλο του S και γράφουμε $I \models S$, αν η I είναι μοντέλο για κάθε τύπο του S . Αν το S έχει μοντέλο, λέμε ότι το S είναι συνεπές (consistent), αλλιώς λέμε ότι είναι ασυνεπές (inconsistent).

Παράδειγμα 2.4. Θεωρούμε τον τύπο $\forall x \exists y p(x, y)$ και μία ερμηνεία I . Έστω ότι το πεδίο της ερμηνείας είναι το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων και ότι στο p ανατίθεται η σχέση $<$. Στην ερμηνεία αυτή, ο τύπος εκφράζει την πρόταση “για κάθε μη αρνητικό ακέραιο, υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος που είναι αυστηρά μεγαλύτερός του” και είναι αληθής. Η ερμηνεία I είναι μοντέλο του τύπου. Αντιθέτως η I δεν είναι μοντέλο του τύπου $\exists y \forall x p(x, y)$.

Ορισμός 2.24. Έστω S ένα σύνολο από κλειστούς τύπους και F ένας κλειστός τύπος μίας γλώσσας πρώτης τάξης L . Λέμε ότι ο F είναι λογικό επακόλουθο του S και γράφουμε $S \models F$, αν κάθε μοντέλο του S είναι και μοντέλο του F .

Προφανώς μπορούν να υπάρχουν ερμηνείες, που είναι μοντέλα του τύπου F , αλλά δεν είναι μοντέλα του συνόλου S . Η σχέση του λογικού επακόλουθου δεν είναι αντιμεταθετική.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει σχετικά άμεσα, η ακόλουθη ενδιαφέρουσα πρόταση:

Πρόταση 2.1. Έστω S ένα σύνολο από κλειστούς τύπους και F ένας κλειστός τύπος μίας γλώσσας πρώτης τάξης L . Ο F είναι λογικό επακόλουθο του S αν και μόνο αν το σύνολο τύπων $S \cup \{\neg F\}$ είναι ασυνεπές.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι το F είναι λογικό επακόλουθο του S . Τότε κάθε ερμηνεία I , που είναι μοντέλο του S είναι και μοντέλο του F . Άρα η I δεν είναι μοντέλο του $\neg F$, ούτε κατ' επέκταση και του συνόλου $S \cup \{\neg F\}$. Επομένως το σύνολο αυτό είναι ασυνεπές.

Αντιστρόφως, έστω ότι το σύνολο $S \cup \{\neg F\}$ είναι ασυνεπές. Τότε μία ερμηνεία I που είναι μοντέλο του S δεν μπορεί να είναι μοντέλο του $\neg F$. Άρα η I είναι μοντέλο του F και ο F είναι λογικό επακόλουθο του S . $\square$

Ορισμός 2.25. Έστω F και G δύο κλειστοί τύποι μίας γλώσσας πρώτης τάξης L . Λέμε ότι ο F και ο G είναι λογικά ισοδύναμοι (*logically equivalent*), αν $\{F\} \models G$ και $\{G\} \models F$.

Ορισμός 2.26. Έστω μία γλώσσα πρώτης τάξης L . Το σύνολο όλων των βασικών όρων, που μπορούν να σχηματισθούν από τα συναρτησιακά σύμβολα (συμπεριλαμβανομένων και των σταθερών) που περιλαμβάνει η L , ονομάζεται σύμπαν Herbrand της L και συμβολίζεται με U_L . Στην περίπτωση που η L δεν περιλαμβάνει καμία σταθερά, εισάγουμε κάποια αυθαίρετα, ώστε το U_L να μην είναι το κενό σύνολο.

Ορισμός 2.27. Έστω μία γλώσσα πρώτης τάξης L . Το σύνολο όλων των βασικών ατόμων, που μπορούν να σχηματισθούν χρησιμοποιώντας τα κατηγορήματα της L με βασικούς όρους από το σύμπαν Herbrand ως ορίσματα, ονομάζεται βάση Herbrand της L και συμβολίζεται με B_L .

Παράδειγμα 2.5. Έστω μία γλώσσα πρώτης τάξης L , που περιλαμβάνει το σύνολο κατηγορημάτων $P = \{p/0, q/2\}$ και το σύνολο συναρτησιακών συμβόλων $F = \{a/0, f/1, g/1\}$. Τότε το σύμπαν Herbrand της L είναι

$$U_L = \{a, f(a), g(a), f(f(a)), f(g(a)), g(f(a)), g(g(a)), f(f(f(a))), \dots\}$$

και η βάση Herbrand

$$B_L = \{p, q(a, a), q(a, f(a)), q(a, g(a)), \dots, q(f(a), a), \dots, q(f(a), f(a)) \dots\}$$

Αν το σύνολο F περιέχει έστω και ένα συναρτησιακό σύμβολο με βαθμό μεγαλύτερο του 0, τότε τα U_L και B_L είναι απειροσύνολα. Επίσης, αν το F δεν περιείχε την σταθερά a , θα έπρεπε να την προσθέσουμε.

Ορισμός 2.28. Έστω μία γλώσσα πρώτης τάξης L . Το σύνολο όλων των θετικών βασικών διαζευκτικών προτάσεων, που μπορούν να σχηματισθούν χρησιμοποιώντας διακριτά βα-

σικά άτομα από την B_L , έτσι ώστε να μην υπάρχει ζεύγος προτάσεων μέσα στο σύνολο, που να είναι λογικά ισοδύναμες μεταξύ τους, ονομάζεται διαζευκτική βάση Herbrand (disjunctive Herbrand base) της L και συμβολίζεται με DB_L .

Παράδειγμα 2.6. Έστω μία γλώσσα πρώτης τάξης L , που περιλαμβάνει το σύνολο κατηγορημάτων $P = \{p/0, q/2, r/1\}$ και το σύνολο συναρτησιακών συμβόλων $F = \{a/0\}$. Η διαζευκτική βάση Herbrand της L είναι

$$DB_L = \{p, q(a, a), r(a), p \vee q(a, a), p \vee r(a), q(a, a) \vee r(a), p \vee q(a, a) \vee r(a)\}$$

Ορισμός 2.29. Έστω ένα σύνολο θετικών βασικών προτάσεων, S . Η κανονική μορφή (canonical form) του S συμβολίζεται με $can(S)$ και ορίζεται ως εξής:

$$can(S) = \{C \in S \mid \nexists C' \in S \text{ τ.ώ. } C' \text{ είναι γνήσια υποπρόταση της } C\}.$$

Ορισμός 2.30. Έστω μία γλώσσα πρώτης τάξης L και ένα σύνολο θετικών βασικών προτάσεων της L , S . Η επέκταση (expansion) του S συμβολίζεται με $exp(S)$ και ορίζεται ως εξής:

$$exp(S) = \{C \in DB_L \mid C \in S \text{ ή } \exists C' \in S \text{ τ.ώ. } C' \text{ είναι υποπρόταση της } C\}.$$

Ορισμός 2.31. Η προ-ερμηνεία Herbrand μίας γλώσσας πρώτης τάξης L είναι μία προ-ερμηνεία, στην οποία:

1. Το πεδίο της προ-ερμηνείας είναι το σύμπαν Herbrand U_L .
2. Στις σταθερές της L ανατίθεται ο εαυτός τους στο U_L .
3. Αν f είναι ένα συναρτησιακό σύμβολο βαθμού n της L , σε αυτό ανατίθεται η απεικόνιση από το $(U_L)^n$ στο U_L , που καθορίζεται από $(t_1, \dots, t_n) \rightarrow f(t_1, \dots, t_n)$.

Ορισμός 2.32. Μία ερμηνεία Herbrand μίας γλώσσας πρώτης τάξης L είναι μία ερμηνεία, που βασίζεται στην προ-ερμηνεία Herbrand της L .

Ο ορισμός του μοντέλου Herbrand ενός συνόλου κλειστών τύπων, προκύπτει άμεσα:

Ορισμός 2.33. Έστω L μία γλώσσα πρώτης τάξης και S ένα σύνολο κλειστών τύπων της L . Ένα μοντέλο Herbrand του S είναι μία ερμηνεία Herbrand της L που είναι μοντέλο του S .

Όταν εξετάζουμε διαζευκτικά προγράμματα και εφόσον αυτή δεν ορίζεται διαφορετικά, θα θεωρούμε ότι η γλώσσα πρώτης τάξης L , στην οποία ανήκει ένα πρόγραμμα P , σχηματίζεται από τις σταθερές, τα συναρτησιακά σύμβολα και τα κατηγορήματα που εμφανίζονται στο P . Βασιζόμενοι στην σύμβαση αυτή, θα αναφερόμαστε επίσης στο σύμπαν Herbrand U_P , στην βάση Herbrand B_P , στην προ-ερμηνεία Herbrand και σε ερμηνείες και μοντέλα Herbrand του P .

Γενικά, ένα σύνολο που διαθέτει μία συγκεκριμένη ιδιότητα ονομάζεται ελαχιστικό (minimal) αν είναι τέτοιο, ώστε όταν αφαιρέσουμε έστω και ένα στοιχείο του, το σύνολο που

θα προκύψει να μην έχει αυτήν την ιδιότητα. Ειδικότερα, για τα μοντέλα Herbrand ενός διαζευκτικού προγράμματος P :

Ορισμός 2.34. Έστω L μία γλώσσα πρώτης τάξης και P ένα διαζευκτικό πρόγραμμα της L . Ένα μοντέλο Herbrand του P είναι ελαχιστικό αν δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολό του, που να είναι επίσης μοντέλο Herbrand του P . Το σύνολο των ελαχιστικών μοντέλων του P θα δηλώνεται με $MM(P)$.

Αν το P έχει μοναδικό ελαχιστικό μοντέλο Herbrand (minimal Herbrand model), τότε αυτό ονομάζεται ελάχιστο μοντέλο Herbrand του P . Το ελάχιστο μοντέλο Herbrand, αν υπάρχει, θα δηλώνεται με M_P .

Ορισμός 2.35. Έστω L μία γλώσσα πρώτης τάξης και P ένα διαζευκτικό πρόγραμμα της L . Μία κατάσταση Herbrand (Herbrand state) της L (αντίστοιχα, του P) είναι ένα υποσύνολο της διαζευκτικής βάσης Herbrand της L (αντίστοιχα, του P).

Ορισμός 2.36. Έστω L μία γλώσσα πρώτης τάξης και P ένα διαζευκτικό πρόγραμμα της L . Μία επεκτεταμένη κατάσταση Herbrand (expanded Herbrand state) της L (αντίστοιχα, του P) είναι μία κατάσταση Herbrand S τέτοια ώστε $S = \text{exp}(S)$.

Δηλαδή, αν μία επεκτεταμένη κατάσταση Herbrand περιέχει μία θετική βασική πρόταση C , τότε περιέχει επίσης όλες τις θετικές βασικές προτάσεις στην διαζευκτική βάση Herbrand, οι οποίες είναι λογικά επακόλουθα της C .

Ορισμός 2.37. Έστω L μία γλώσσα πρώτης τάξης και P ένα διαζευκτικό πρόγραμμα της L . Μία κατάσταση-μοντέλο (model state) του P είναι μία επεκτεταμένη κατάσταση Herbrand ST , τέτοια ώστε

1. Κάθε μοντέλο Herbrand της ST είναι και μοντέλο Herbrand του P .
2. Κάθε ελαχιστικό μοντέλο Herbrand του P εμπεριέχεται σε ένα ελαχιστικό μοντέλο Herbrand της ST .

Μία κατάσταση-μοντέλο ST ενός λογικού προγράμματος P είναι ελαχιστική αν δεν υπάρχει κατάσταση Herbrand S' του P , που να είναι γνήσιο υποσύνολο της ST και να είναι επίσης κατάσταση-μοντέλο του P . Αν το P έχει μοναδική ελαχιστική κατάσταση-μοντέλο, τότε αυτή ονομάζεται ελάχιστη κατάσταση-μοντέλο του P και συμβολίζεται με MS_P .

2.3 Μοντελοθεωρητική Σημασιολογία

Σε μία ερμηνεία Herbrand οι αναθέσεις στις σταθερές και τα υπόλοιπα συναρτησιακά σύμβολα είναι συγκεκριμένες και μέσα από το U_L . Συνεπώς, είναι δυνατόν να την συνδέσουμε με ένα υποσύνολο της βάσης Herbrand. Το κατάλληλο υποσύνολο είναι αυτό που περιέχει όλα τα βασικά άτομα, που είναι αληθή ως προς την ερμηνεία.

Αντιστρόφως, κάθε υποσύνολο της βάσης Herbrand μπορεί να συσχετιστεί με μία ερμηνεία Herbrand. Η ερμηνεία αυτή θα αναθέτει σε κάθε κατηγορημα μία απεικόνιση, που απεικονίζει μία πλειάδα ορισμάτων στην τιμή αληθείας *true*, αν και μόνο αν το βασικό άτομο που σχηματίζεται από το κατηγορημα και την πλειάδα των ορισμάτων ανήκει στο

συγκεκριμένο υποσύνολο.

Επομένως, κάθε ερμηνεία Herbrand μπορεί να ταυτιστεί απολύτως με ένα υποσύνολο της βάσης Herbrand. Η ταύτιση αυτή, που στο εξής θα γίνεται διαρκώς, μας εισάγει στην μοντελοθεωρητική σημασιολογία των λογικών προγραμμάτων.

Οι δύο προτάσεις που ακολουθούν, εδραιώνουν την σπουδαιότητα των ερμηνειών Herbrand. Αποδεικνύουν ότι είναι το μόνο είδος ερμηνειών που απαιτείται να εξετάσουμε, για να αποδείξουμε την ασυνέπεια ενός συνόλου λογικών προτάσεων.

Πρόταση 2.2. Έστω ένα σύνολο προτάσεων S μίας γλώσσας πρώτης τάξης L . Αν το S έχει μοντέλο, τότε το S έχει μοντέλο Herbrand.

Απόδειξη. Έστω μία ερμηνεία I της L . Ορίζουμε την ερμηνεία Herbrand I' της L ως εξής:

$$I' = \{p(t_1, \dots, t_n) \in B_S : p(t_1, \dots, t_n) \text{ είναι αληθές ως προς την } I\}$$

Η απόδειξη, ότι αν η I είναι μοντέλο του S τότε και η I' είναι μοντέλο, είναι τετριμμένη. $\square$

Πρόταση 2.3. Έστω ένα σύνολο προτάσεων S μίας γλώσσας πρώτης τάξης L . Το S είναι ασυνεπές αν και μόνο αν το S δεν έχει κανένα μοντέλο Herbrand.

Απόδειξη. Αν το S έχει μοντέλο Herbrand, εξ' ορισμού είναι συνεπές.

Αντιστρόφως, αν το S είναι συνεπές, από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι το S έχει μοντέλο Herbrand. $\square$

Πρέπει να τονίσουμε, ότι τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν μόνο, επειδή έχουμε περιορίσει το ενδιαφέρον μας σε σύνολα προτάσεων. Για σύνολα αυθαίρετων τύπων, δεν είναι γενικά εφικτό να αποδειχθεί η ασυνεπεία τους, εξετάζοντας μόνο ερμηνείες Herbrand.

Στην περίπτωση των οριστικών προγραμμάτων, η μοντελοθεωρητική σημασιολογία καθορίζεται από το ελάχιστο μοντέλο Herbrand του προγράμματος.

Πρόταση 2.4 (Ιδιότητα της Τομής Μοντέλων). Έστω ένα οριστικό πρόγραμμα P και ένα μη κενό σύνολο $\{M_i\}_{i \in I}$ από μοντέλα Herbrand του P . Τότε η τομή $\bigcap_{i \in I} M_i$ είναι επίσης μοντέλο Herbrand του P .

Επειδή οποιοδήποτε οριστικό πρόγραμμα P έχει τη βάση Herbrand ως μοντέλο, το σύνολο των μοντέλων Herbrand του P δεν είναι ποτέ το κενό σύνολο. Επιπλέον, η ιδιότητα της τομής μοντέλων βεβαιώνει ότι η τομή όλων των μοντέλων Herbrand ενός οριστικού προγράμματος είναι επίσης μοντέλο του προγράμματος και μάλιστα το ελάχιστο μοντέλο. Συνεπώς, κάθε οριστικό πρόγραμμα έχει μοναδικό ελάχιστο μοντέλο Herbrand.

Θεώρημα 2.1. Έστω ένα οριστικό πρόγραμμα P . Τότε $M_P = \{A \in B_P : \text{Το } A \text{ είναι λογικό επακόλουθο του } P\}$.

Απόδειξη. Το A είναι λογικό επακόλουθο του P ανν το $P \cup \{\neg A\}$ είναι ασυνεπές

ανν το $P \cup \{\neg A\}$ δεν έχει μοντέλα Herbrand

ανν το $\neg A$ είναι ψευδές ως προς όλα τα μοντέλα Herbrand του P

ανν το A είναι αληθές ως προς όλα τα μοντέλα Herbrand του P

ανν $A \in M_P$.

□

Παράδειγμα 2.7. Θεωρούμε το ακόλουθο οριστικό πρόγραμμα P :

$$p(x) \leftarrow q(x)$$

$$q(x) \leftarrow r(x)$$

$$p(a) \leftarrow$$

$$q(b) \leftarrow$$

$$r(c) \leftarrow$$

με

$$U_L = \{a, b, c\},$$

$$B_L = \{p(a), p(b), p(c), q(a), q(b), q(c), r(a), r(b), r(c)\}$$

Το ελάχιστο μοντέλο Herbrand του P είναι:

$$M_P = \{p(a), p(b), p(c), q(b), q(c), r(c)\}$$

Για να επιβεβαιώσουμε αυτό το αποτέλεσμα, στα πλαίσια της μοντελοθεωρητικής σημασιολογίας, απαιτείται να απαριθμήσουμε όλες τις ερμηνείες Herbrand του P , να επιλέξουμε από αυτές όσες είναι μοντέλα και να αναζητήσουμε το ελάχιστο ή να υπολογίσουμε την τομή τους. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, οι δυνατές ερμηνείες Herbrand είναι $2^{|B_L|} = 512$. Ακόμη και για ένα τόσο μικρό πρόγραμμα, ο τρόπος αυτός δεν είναι αποδοτικός.

Το θεώρημα 2.1 αποτελεί έναν σημαντικό λόγο, για να δεχτούμε το ελάχιστο μοντέλο Herbrand ενός οριστικού προγράμματος ως το φυσικό του νόημα. Το M_P αποτελείται από όλα τα λογικά επακόλουθα του προγράμματος P και μόνο αυτά. Συνεπώς είναι το ελάχιστο σύνολο, που περιλαμβάνει όλα τα βασικά άτομα που πρέπει να είναι αληθή, ώστε οι προτάσεις του προγράμματος να είναι αληθείς.

Όταν θεωρήσουμε το σύνολο των διαζευκτικών προγραμμάτων, η ιδιότητα της τομής μοντέλων παύει γενικά να ισχύει και αίρεται η βεβαιότητα της ύπαρξης μοναδικού ελάχιστου μοντέλου Herbrand. Η μοντελοθεωρητική σημασιολογία των διαζευκτικών προγραμμάτων, μπορεί αντ' αυτού να εκφραστεί με δύο ισοδύναμους τρόπους. Ο πρώτος συσχετίζει το νόημα ενός διαζευκτικού προγράμματος με το σύνολο των ελαχιστικών μοντέλων Herbrand αυτού. Ο δεύτερος συλλαμβάνει το ίδιο νόημα ως μία μοναδική ελάχιστη κατάσταση Herbrand, δηλαδή ένα υποσύνολο της διαζευκτικής βάσης Herbrand.

Η σημασιολογία ελαχιστικών μοντέλων υποστηρίζεται από το ακόλουθο θεώρημα, που επεκτείνει το Θεώρημα 2.1.

Θεώρημα 2.2. Έστω ένα διαζευκτικό πρόγραμμα P . Μία θετική βασική πρόταση C είναι λογικό επακόλουθο του P αν και μόνο αν η C είναι αληθής ως προς κάθε ελαχιστικό μοντέλο Herbrand του P .

Απόδειξη. Η C είναι λογικό επακόλουθο του P
 ανν το $P \cup \{\neg C\}$ είναι ασυνεπές
 ανν το $P \cup \{\neg C\}$ δεν έχει μοντέλα Herbrand
 ανν ο $\neg C$ είναι ψευδής ως προς όλα τα μοντέλα Herbrand του P
 ανν η C είναι αληθής ως προς όλα τα μοντέλα Herbrand του P
 ανν η C είναι αληθής ως προς όλα τα ελαχιστικά μοντέλα Herbrand του P . $\square$

Η δεύτερη προσέγγιση, η σημασιολογία της ελάχιστης κατάστασης-μοντέλου, αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο να επεκτείνουμε την σημασιολογία ελάχιστου μοντέλου των οριστικών προγραμμάτων, θεωρώντας τα λογικά επακόλουθα ενός διαζευκτικού προγράμματος ως θετικές βασικές προτάσεις, αντί άτομα. Συνεπώς, χρησιμοποιείται η διαζευκτική βάση Herbrand και τα υποσύνολά της (καταστάσεις), για να παραχθούν αποτελέσματα συμμετρικά με τα προηγούμενα.

Πράγματι, η επόμενη πρόταση, δείχνει ότι οι καταστάσεις-μοντέλα, έχουν την ιδιότητα της τομής:

Πρόταση 2.5 (Ιδιότητα της Τομής καταστάσεων-μοντέλων). *Έστω ένα οριστικό πρόγραμμα P και ένα μη κενό σύνολο $\{MS_i\}_{i \in N}$ από καταστάσεις-μοντέλα του P , όπου N ένα σύνολο φυσικών αριθμών. Τότε η τομή $\bigcap_{i \in N} MS_i$ είναι επίσης κατάσταση-μοντέλο του P .*

Καθώς η διαζευκτική βάση Herbrand ενός προγράμματος P είναι κατάσταση-μοντέλο του προγράμματος, το σύνολο των καταστάσεων-μοντέλων δεν είναι ποτέ το κενό σύνολο. Η τομή όλων των καταστάσεων-μοντέλων είναι η (μοναδική) ελάχιστη κατάσταση-μοντέλο, MS_P , του P και υπάρχει για κάθε διαζευκτικό πρόγραμμα. Το επόμενο θεώρημα, ανάλογο του Θεωρήματος 2.1, δείχνει ότι η MS_P ταυτίζεται με το σύνολο των θετικών βασικών προτάσεων, που είναι λογικά επακόλουθα του προγράμματος.

Θεώρημα 2.3. *Έστω ένα διαζευκτικό πρόγραμμα P . Τότε $MS_P = \{C \in DB_P : \text{Το } C \text{ είναι λογικό επακόλουθο του } P\}$.*

Απόδειξη. Η C είναι λογικό επακόλουθο του P
 ανν το $P \cup \{\neg C\}$ είναι ασυνεπές
 ανν το $P \cup \{\neg C\}$ δεν έχει μοντέλα Herbrand
 ανν ο $\neg C$ είναι ψευδής ως προς όλα τα μοντέλα Herbrand του P
 ανν η C είναι αληθής ως προς όλα τα μοντέλα Herbrand του P
 ανν η C είναι αληθής ως προς όλα τα μοντέλα Herbrand
 οποιασδήποτε κατάστασης-μοντέλου του P (εξ' ορισμού των καταστάσεων-μοντέλων)
 ανν $MS \models C$ για οποιαδήποτε κατάσταση-μοντέλο MS του P
 ανν $C \in MS$ για οποιαδήποτε κατάσταση-μοντέλο MS του P
 (αφού κάθε κατάσταση-μοντέλο είναι μία επεκτεταμένη κατάσταση Herbrand)
 ανν $C \in MS_P$. $\square$

Τα μοντέλα Herbrand αποτελούνται από βασικά άτομα, ενώ οι καταστάσεις-μοντέλα αποτελούνται από βασικές προτάσεις. Ωστόσο μεταξύ τους υπάρχει μία στενή σχέση, όπως

φαίνεται από τα ακόλουθα Θεωρήματα. Το πρώτο είναι άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 2.2 και 2.3. Σύμφωνα με αυτό, μία πρόταση περιέχεται στην ελάχιστη κατάσταση-μοντέλο αν και μόνο αν είναι αληθής σε κάθε ελαχιστικό μοντέλο του διαζευκτικού προγράμματος.

Θεώρημα 2.4. Έστω ένα διαζευκτικό πρόγραμμα P και έστω $C \in DB_P$. Τότε $C \in MS_P$ αν και μόνο αν $\forall M \in MM(P) M \models C$.

Το επόμενο Θεώρημα συσχετίζει τα μοντέλα Herbrand και το ελάχιστο μοντέλο Herbrand των οριστικών προγραμμάτων με τις καταστάσεις-μοντέλα των διαζευκτικών. Η σημασία του είναι πρακτικά, ότι η ελάχιστη κατάσταση-μοντέλο ενός οριστικού προγράμματος είναι το ελάχιστο μοντέλο του.

Θεώρημα 2.5. Έστω ένα οριστικό πρόγραμμα P και έστω $A \in B_P$. Αν M είναι ένα μοντέλο Herbrand του P τότε υπάρχει μία αντίστοιχη κατάσταση-μοντέλο MS τέτοια ώστε

1. $A \in M \Rightarrow A \in MS$
2. $M = can(MS)$
3. $M = can(MS)$

2.4 Σημασιολογία Σταθερού Σημείου

Η σημασιολογία σταθερού σημείου, μας προσφέρει αποτελέσματα πιο πρακτικά, από αυτά της μοντελοθεωρητικής σημασιολογίας. Πρόκειται για μία διαφορετική αλλά ισοδύναμη προσέγγιση στη σημασιολογία των οριστικών προγραμμάτων, η οποία στηρίζεται στην μαθηματική έννοια του ελάχιστου σταθερού σημείου μιας μονοτονικής απεικόνισης. Θα δούμε στη συνέχεια, ότι με κάθε οριστικό πρόγραμμα σχετίζεται μία τέτοια απεικόνιση, που ονομάζεται τελεστής άμεσου επακόλουθου.

Η θεωρία της σημασιολογίας σταθερού σημείου, εμπλέκει αρκετές μαθηματικές έννοιες. Ωστόσο εδώ θα παραλείψουμε μερικά σημεία, κυρίως τις αποδείξεις ορισμένων προτάσεων.

Η έννοια της σχέσης μερικής διάταξης μας είναι γενικά οικεία. Τυπικά, ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.38. Μία σχέση R πάνω σε ένα σύνολο S , καλείται σχέση μερικής διάταξης, αν είναι:

1. ανακλαστική: xRx για κάθε $x \in S$
2. αντισυμμετρική: xRy και $yRx \Rightarrow x = y$ για κάθε $x, y \in S$
3. μεταβατική: xRy και $yRz \Rightarrow xRz$ για κάθε $x, y, z \in S$

Γνωστές μας τέτοιες σχέσεις είναι η σχέση $\leq$ (μικρότερος ή ίσος) στο σύνολο των ακέραιων αριθμών, η σχέση $\leq$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, η σχέση $\subseteq$ (υποσύνολο) πάνω σε ένα σύνολο συνόλων κτλ.

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\sqsubseteq$ για να δηλώσουμε μία σχέση μερικής διάταξης.

Ορισμός 2.39. Έστω ένα σύνολο S , εφοδιασμένο με μία σχέση μερικής διάταξης $\sqsubseteq$. Τότε

το $a \in S$ είναι ένα άνω (αντ. κάτω) φράγμα ενός υποσυνόλου X του S , αν $x \sqsubseteq a$ (αντ. $a \sqsubseteq x$) για κάθε $x \in X$.

Ορισμός 2.40. Έστω ένα σύνολο S , εφοδιασμένο με μία σχέση μερικής διάταξης $\sqsubseteq$. Τότε το $a \in S$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα ενός υποσυνόλου X του S , αν το a είναι ένα άνω φράγμα του X και, για κάθε άνω φράγμα a' του X , $a \sqsubseteq a'$. Αντίστοιχα το $b \in S$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του X αν είναι ένα κάτω φράγμα και, για κάθε κάτω φράγμα b' του X , $b' \sqsubseteq b$.

Το ελάχιστο άνω φράγμα ενός υποσυνόλου X , αν υπάρχει, είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\text{lub}(X)$. Αναλόγως, το μέγιστο κάτω φράγμα του X , αν υπάρχει, είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\text{glb}(X)$.

Ορισμός 2.41. Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο L είναι ένα πλήρες πλέγμα (complete lattice) αν τα $\text{lub}(X)$ και $\text{glb}(X)$ υπάρχουν για κάθε υποσύνολο X του L .

Για ένα πλήρες πλέγμα, συμβολίζουμε το $\text{lub}(L)$ με το $\top$ και το ονομάζουμε ανώτατο στοιχείο (top element) του L , ενώ το $\text{glb}(L)$ με το $\perp$ και το ονομάζουμε κατώτατο στοιχείο (bottom element) του L .

Παράδειγμα 2.8. Έστω S ένα σύνολο και 2^S το σύνολο των υποσυνόλων του. Το 2^S εφοδιασμένο με τη σχέση μερικής διάταξης $\subseteq$ είναι ένα πλήρες πλέγμα. Το ελάχιστο άνω φράγμα μίας συλλογής από υποσύνολα του S είναι η ένωσή τους και το μέγιστο κάτω φράγμα είναι η τομή τους. Το ανώτατο στοιχείο του 2^S είναι το S και το κατώτατο είναι το $\emptyset$.

Μία άλλη, επίσης οικεία μας και επίσης σημαντική έννοια, είναι αυτή της μονοτονικής απεικόνισης. Ο τυπικός ορισμός της έχει ως εξής:

Ορισμός 2.42. Έστω ένα πλήρες πλέγμα L και μία απεικόνιση $T : L \rightarrow L$. Λέμε ότι η T είναι μονοτονική αν $x \sqsubseteq y \Rightarrow T(x) \sqsubseteq T(y)$.

Ορισμός 2.43. Έστω ένα πλήρες πλέγμα L και X ένα υποσύνολό του. Λέμε ότι το X είναι κατευθυνόμενο σύνολο (directed set) αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X έχει άνω φράγμα στο X .

Ορισμός 2.44. Έστω ένα πλήρες πλέγμα L και μία απεικόνιση $T : L \rightarrow L$. Λέμε ότι η T είναι συνεχής αν $T(\text{lub}(X)) = \text{lub}(T(X))$ για κάθε κατευθυνόμενο υποσύνολο X του L .

Μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση είναι και μονοτονική. Το αντίστροφο, ωστόσο, δεν ισχύει.

Το ελάχιστο σταθερό σημείο μίας μονοτονικής απεικόνισης, είναι η έννοια κλειδί στη θεωρία της σημασιολογίας σταθερού σημείου. Ένα σταθερό σημείο μίας απεικόνισης T είναι ένα στοιχείο το οποίο η T απεικονίζει στον εαυτό του· το δε ελάχιστο σταθερό σημείο της T είναι ακριβώς το ελάχιστο (ως προς τη θεωρούμενη σχέση μερικής διάταξης) τέτοιο στοιχείο.

Ορισμός 2.45. Έστω μία απεικόνιση $T : L \rightarrow L$. Ένα στοιχείο a του L ονομάζεται σταθερό σημείο της T αν $T(a) = a$. Αν επιπλέον το L είναι πλήρες πλέγμα, ένα σταθερό σημείο a της T λέγεται ελάχιστο σταθερό σημείο $\text{lfp}(T)$ αν για κάθε σταθερό σημείο b της T ισχύει $a \sqsubseteq b$.

Σχετικά με το ελάχιστο σταθερό σημείο ισχύει η επόμενη πολύ σημαντική πρόταση:

Πρόταση 2.6. Έστω ένα πλήρες πλέγμα L και μία μονοτονική απεικόνιση $T : L \rightarrow L$. Τότε η T έχει ένα ελάχιστο σταθερό σημείο. Επιπλέον $\text{lfp}(T) = \text{glb}(x : T(x) = x) = \text{glb}(x : T(x) \sqsubseteq x)$.

Σημείωση 2.2. Εκτός από την ύπαρξη του ελάχιστου σταθερού σημείου μίας μονοτονικής απεικόνισης, για την οποία μας βεβαιώνει η προηγούμενη πρόταση, πολύ βασική για τη σημασιολογία σταθερού σημείου είναι και η μοναδικότητά του. Πράγματι, το γεγονός ότι $\text{lfp}(T) \equiv \text{glb}(x : T(x) = x)$ σημαίνει ότι το $\text{lfp}(T)$ είναι μοναδικό, αφού το glb οποιουδήποτε συνόλου είναι μοναδικό.

Το ενδιαφέρον μας για τις έννοιες αυτές πηγάζει από το γεγονός, ότι για ένα οριστικό πρόγραμμα P το σύνολο 2^{B_P} (το σύνολο όλων των ερμηνειών Herbrand) αποτελεί ένα πλήρες πλέγμα. Μάλιστα, από προηγούμενο παράδειγμα, προκύπτει ότι το ανώτατο στοιχείο του είναι $\top = B_P$ και το κατώτατο είναι $\perp = \emptyset$. Επιπλέον υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση που ορίζεται πάνω σε αυτό το πλέγμα.

Η συγκεκριμένη απεικόνιση για την οποία ενδιαφερόμαστε και την οποία προηγουμένως ονομάσαμε τελεστή άμεσου επακόλουθου, ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.46. Ο τελεστής άμεσου επακόλουθου ενός οριστικού προγράμματος P είναι μία απεικόνιση $T_P : 2^{B_P} \rightarrow 2^{B_P}$, με $T_P(I) = \{A \in B_P : A \leftarrow A_1, \dots, A_n \text{ είναι ένα βασικό στιγμιότυπο μιας πρότασης στο } P \text{ και } \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq I\}$, για κάποια ερμηνεία I του P .

Με τη φράση βασικό στιγμιότυπο (ground instance), εννοούμε ένα στιγμιότυπο μίας πρότασης, στο οποίο όλες οι μεταβλητές είναι δεσμευμένες με τιμές από το πεδίο της I .

Ας δούμε τι σημαίνει πρακτικά ο προηγούμενος ορισμός, μέσα από ένα απλό παράδειγμα. Έστω λοιπόν ότι το P είναι το λογικό πρόγραμμα

$$q(X) \leftarrow p(X)$$

και η I_1 είναι η ερμηνεία $\{p(a), p(b)\}$, με πεδίο το σύνολο $\{a, b, c\}$. Τα δυνατά βασικά στιγμιότυπα της πρότασης $q(X) \leftarrow p(X)$ είναι τρία, τα: $q(a) \leftarrow p(a)$, $q(b) \leftarrow p(b)$ και $q(c) \leftarrow p(c)$. Τότε $T_P(I_1) = \{q(a), q(b)\}$.

Μία πρόταση είναι αληθής σε δύο περιπτώσεις: είτε αν το σώμα της είναι αληθές και η κεφαλή της είναι αληθής, είτε αν το σώμα της είναι ψευδές. Στα στιγμιότυπα $q(a) \leftarrow p(a)$ και $q(b) \leftarrow p(b)$ τα σώματα είναι αληθή ως προς την ερμηνεία I_1 , άρα για να είναι η εν λόγω πρόταση αληθής, θα πρέπει να είναι αληθή και τα $q(a)$, $q(b)$. Μπορούμε να πούμε ότι δεδομένων των I_1 και P συμπεραίνουμε τα $q(a)$ και $q(b)$.

Άρα η τιμή του τελεστή άμεσου επακόλουθου είναι τα συμπεράσματα (λογικά επακόλουθα) που προκύπτουν από το πρόγραμμα P και το όρισμά του, δηλαδή την ερμηνεία I_1 .

Προφανώς η T_P είναι μονοτονική, δηλαδή αν I_1, I_2 είναι δύο ερμηνείες και $I_1 \subseteq I_2$ τότε $T(I_1) \subseteq T(I_2)$. Το γεγονός αυτό σημαίνει διαισθητικά ότι όσο περισσότερα δεδομένα έχουμε στη διάθεσή μας, τόσο περισσότερα συμπεράσματα είμαστε σε θέση να εξάγουμε από το πρόγραμμα. Πράγματι, αν στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρήσουμε την ερμηνεία

$I_2 = \{p(a), p(b), p(c)\}$, η οποία είναι υπερσύνολο της I_1 , τότε μπορούμε να συμπεράνουμε επιπλέον και το $q(c)$.

Πρόταση 2.7. Έστω ένα οριστικό πρόγραμμα P . Τότε η απεικόνιση T_P είναι συνεχής και κατά συνέπεια μονοτονική.

Τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα μοντέλο Herbrand χρησιμοποιώντας τον τελεστή άμεσου επακόλουθου.

Πρόταση 2.8. Έστω ένα οριστικό πρόγραμμα P και μία Herbrand ερμηνεία του, I . Τότε η I είναι μοντέλο του P αν και μόνο αν $T_P(I) \subseteq I$.

Απόδειξη. Η I είναι μοντέλο του P αν και μόνο αν για κάθε βασικό στιγμιότυπο $A \leftarrow A_1, \dots, A_n$ κάθε πρότασης στο P ισχύει ότι $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq I \Rightarrow A \in I$ (γιατί, αν το σώμα μίας πρότασης είναι αληθές, για να είναι η πρόταση αληθής πρέπει να είναι αληθής και η κεφαλή της). Αυτό όμως ισχύει αν και μόνο αν $T_P(I) \subseteq I$. $\square$

Αφού η T_P είναι μονοτονική και το 2^{B_L} είναι πλήρες πλέγμα, η T_P θα έχει μοναδικό lfp . Έτσι, ερχόμαστε στο κύριο συμπέρασμα της θεωρίας της σημασιολογίας σταθερού σημείου, που είναι ο προσδιορισμός του ελάχιστου μοντέλου Herbrand ενός οριστικού προγράμματος, ως το ελάχιστο σταθερό σημείο του τελεστή άμεσου επακόλουθου.

Θεώρημα 2.6. Έστω ένα οριστικό πρόγραμμα P . Τότε $M_P = lfp(T_P)$.

Απόδειξη. Έχουμε, διαδοχικά:

$$\begin{aligned} M_P &= glb\{I : \eta \ I \text{ είναι μοντέλο Herbrand του } P\} \\ &= glb\{I : T_P(I) \subseteq I\} \text{ από την πρόταση 2.10} \\ &= lfp(T_P) \text{ από την πρόταση 2.6} \end{aligned}$$

$\square$

Από το θεώρημα αυτό έπεται ότι το ελάχιστο μοντέλο Herbrand ενός οριστικού προγράμματος είναι μοναδικό.

Ο τελεστής άμεσου επακόλουθου, όπως ορίστηκε, δεν παρέχει το επιθυμητό ελάχιστο σταθερό σημείο μέσα στο 2^{B_P} , στην περίπτωση των διαζευκτικών προγραμμάτων. Η εφαρμογή του T_P σε μία ερμηνεία Herbrand, δηλαδή ένα σύνολο ατόμων, παράγει ένα σύνολο, το οποίο ενδέχεται να περιέχει διαζεύξεις. Ωστόσο, τα αποτελέσματα που προηγουμένως παρουσιάσαμε, προϋποθέτουν μία απεικόνιση, η οποία μετασχηματίζει στοιχεία ενός συνόλου σε στοιχεία του ίδιου συνόλου.

Η διαζευκτική βάση Herbrand ενός προγράμματος, ωστόσο, αποτελεί επίσης ένα πλήρες πλέγμα υπό την σχέση μερικής διάταξης $\subseteq$. Ως τέτοιο, μπορεί να αποτελέσει το ανάλογο πεδίο εφαρμογής, για έναν τελεστή που θα απεικονίζει σύνολα θετικών προτάσεων, δηλαδή καταστάσεις Herbrand, σε καταστάσεις Herbrand. Πράγματι, ένας τέτοιος τελεστής

θα οριστεί στην συνέχεια και θα χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή της σημασιολογίας σταθερού σημείου των διαζευκτικών προγραμμάτων.

Ορισμός 2.47. Ο τελεστής άμεσου επακόλουθου ενός διαζευκτικού προγράμματος P είναι μία απεικόνιση $T_P^S : 2^{DB_P} \rightarrow 2^{DB_P}$, με:

$$T_P^S(D) = \{C \in DB_P : C' \leftarrow B_1, \dots, B_n \text{ είναι ένα βασικό στιγμιότυπο μιας πρότασης στο } P \text{ και } \{B_1 \vee C_1, \dots, B_n \vee C_n\} \subseteq D \text{ και } C'' = C' \vee C_1 \vee \dots \vee C_n, \text{ όπου τα } C_1, \dots, C_n \text{ είναι ενδεχομένως κενές θετικές προτάσεις και } C \text{ είναι ο ελάχιστος παράγοντας της } C''\}$$

για κάποια κατάσταση Herbrand D του P .

Είναι εμφανές ότι η αναφερόμενη C είναι στοιχείο της DB_P . Κάθε πρόταση στο $T_P^S(D)$ είναι λογικό επακόλουθο των προτάσεων της D .

Ο προηγούμενος ορισμός ανάγεται στον Ορισμό 2.46 όταν το πρόγραμμα P είναι οριστικό και η D είναι ερμηνεία Herbrand. Εξάλλου αποδεικνύεται ότι ο T_P^S διατηρεί τις επιθυμητές ιδιότητες του T_P .

Πρόταση 2.9. Έστω ένα διαζευκτικό πρόγραμμα P . Τότε η απεικόνιση T_P^S είναι συνεχής και κατά συνέπεια μονοτονική.

Έτσι, αφού η DB_P είναι πλήρες πλέγμα, ο T_P^S διαθέτει ελάχιστο σταθερό σημείο. Η επόμενη πρόταση και το θεώρημα, που παρουσιάζονται χωρίς αποδείξεις, παρέχουν έναν χαρακτηρισμό για την σημασιολογία ελαχιστικών μοντέλων και την σημασιολογία της ελάχιστης κατάστασης-μοντέλου, με όρους σταθερού σημείου.

Πρόταση 2.10. Έστω ένα διαζευκτικό πρόγραμμα P και μία κατάσταση Herbrand του, S . Η S είναι κατάσταση-μοντέλο του P αν και μόνο αν $T_P^S(S) \subseteq S$.

Θεώρημα 2.7. Έστω ένα διαζευκτικό πρόγραμμα P και κάποια θετική πρόταση $C \in DB_P$. Τότε τα ακόλουθα είναι μεταξύ τους ισοδύναμα:

1. Η C είναι αληθής σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα Herbrand του P .
2. $C \in MS_P$.
3. $C \in \exp(\text{Ifp}(T_P^S))$.
4. Η C είναι λογικό επακόλουθο του P .

3. ΑΡΝΗΣΗ

Για μία πληθώρα εφαρμογών, η εκφραστική δυνατότητα των διαζευκτικών προτάσεων, αποδεικνύεται περιορισμένη, επειδή, δεδομένου ενός συνόλου τέτοιων προτάσεων και ενός γεγονότος (ατόμου) F , δεν μπορούμε ποτέ να συμπεράνουμε το $\neg F$.

Στην προσπάθεια να υπερβούμε τον περιορισμό αυτόν, βρισκόμαστε μπροστά σε δύο πιθανές επιλογές. Η πρώτη από αυτές είναι να επεκταθεί η σύνταξη των διαζευκτικών προγραμμάτων, ώστε να επιτρέπεται η δήλωση αρνητικής πληροφορίας. Μία τέτοια λύση δεν είναι καθόλου αποδοτική, καθώς η αρνητική πληροφορία είναι κατά κανόνα υπέρογκη.

Η άλλη εναλλακτική είναι η έμμεση εξαγωγή της αρνητικής πληροφορίας. Μόνο η θετική πληροφορία αναπαρίσταται ως μέρος του προγράμματος, ενώ η αρνητική συμπεραίνεται από την αδυναμία εξαγωγής θετικής πληροφορίας. Η προσέγγιση αυτή απαιτεί έναν καλά καθορισμένο κανόνα, βάσει του οποίου θα αποφασίζεται κατά πόσο μία πρόταση μπορεί να θεωρηθεί ψευδής. Αρκετοί τέτοιοι κανόνες έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία, οδηγώντας σε διαφορετικές σημασιολογίες της άρνησης.

Για τα οριστικά προγράμματα, η Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου (Closed World Assumption - CWA) είναι η επικρατούσα σημασιολογία. Ορίζεται πολύ φυσικά: τα βασικά άτομα, τα οποία ανήκουν στο ελάχιστο μοντέλο Herbrand (εναλλακτικά, είναι λογικά επακόλουθα) του προγράμματος, θεωρούνται αληθή. Όλα τα υπόλοιπα βασικά άτομα θεωρούνται ψευδή.

Επειδή η λογική πρώτης τάξης δεν είναι αποφασίσιμη, δεν υπάρχει αλγόριθμος που να αποφαινεται σε πεπερασμένο χρόνο για το αν ένα άτομο είναι λογικό επακόλουθο του προγράμματος ή όχι. Έτσι, ο κανόνας της CWA είναι εξαιρετικά δύσκολο να υλοποιηθεί στην πράξη και χρειάζεται να περιοριστεί στα άτομα εκείνα, για τα οποία η απόδειξη της αλήθειας τους αποτυγχάνει πεπερασμένα. Ο πιο αδύναμος αυτός κανόνας ονομάζεται Άρνηση Μέσω Αποτυχίας (Negation As Failure - NAF).

Επιπλέον, η CWA δίνει ασυνεπή αποτελέσματα, αν εφαρμοστεί στην περίπτωση των διαζευκτικών λογικών προγραμμάτων. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το παρακάτω πρόγραμμα:

$$p \vee q \leftarrow$$

Τα άτομα p και q θεωρούνται και τα δύο ψευδή, σύμφωνα με την CWA, αφού κανένα από τα δύο δεν είναι λογικό επακόλουθο του προγράμματος. Αυτό δεν συνάδει με το γεγονός ότι η πρόταση $p \vee q$ είναι αληθής.

Ο ορισμός της CWA στηρίζεται στο ελάχιστο μοντέλο Herbrand, το οποίο δεν είναι μοναδικό για τα διαζευκτικά προγράμματα. Έτσι δημιουργείται το ζήτημα της επέκτασης του ορισμού, ώστε να λαμβάνεται υπ' όψιν το σύνολο των ελαχιστικών μοντέλων.

Στο [20] προτάθηκε η προσέγγιση, που είναι γνωστή ως Γενικευμένη Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου (Generalized Closed World Assumption - GCWA). Ορίζει, ότι ένα βασικό άτομο είναι αληθές ως προς ένα λογικό πρόγραμμα, αν είναι αληθές σε όλα τα ελαχιστικά

μοντέλα του προγράμματος. Αντίστοιχα, το άτομο είναι ψευδές, αν είναι ψευδές σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα. Είναι φανερό, ο ορισμός δεν είναι εξαντλητικός. Είναι δυνατόν να υπάρχουν άτομα, που είναι αληθή σε κάποια από τα ελαχιστικά μοντέλα και ψευδή σε άλλα. Στα πλαίσια της GCWA, η τιμή αυτών των ατόμων θεωρείται άγνωστη.

Αντίθετα με την περίπτωση των οριστικών προγραμμάτων, η φύση των διαζευκτικών προγραμμάτων δείχνει να επιβάλλει ένα βαθμό αβεβαιότητας. Πράγματι, όλες οι προσπάθειες επέκτασης της CWA στα διαζευκτικά προγράμματα προβλέπουν την αδυναμία απόδοσης λογικής τιμής σε κάποιο σύνολο ατόμων. Το σημείο όπου διαφοροποιούνται, είναι η σύσταση των συνόλων των αληθών, των ψευδών και των άγνωστων ατόμων.

Επεκτάσεις έχουν επίσης προταθεί για τον κανόνα της άρνησης μέσω αποτυχίας, ώστε να μπορέσει να συλλάβει καλύτερα την εκφραστικότητα των διαζευκτικών προγραμμάτων. Για παράδειγμα, ο κανόνας της Γενικευμένης Άρνησης μέσω Αποτυχίας (Generalized Negation as Failure - GNAF) [4] επιτρέπει τον χαρακτηρισμό συζεύξεων ως ψευδείς, ακόμα και αν η λογική τιμή των μεμονωμένων ατόμων δεν μπορεί να προσδιοριστεί. Ορίζεται σε διάφορες παραλλαγές ($GNAF_0$, $GNAF_{-1}$, $GNAF_{-2}$), οι οποίες πλησιάζουν λιγότερο ή περισσότερο την GCWA.

Στην επόμενη παράγραφο δίνεται και τυπικά ο ορισμός της GCWA και παρουσιάζεται μία ακόμα προσέγγιση, η Επεκτεταμένη Γενικευμένη Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου (Extended Generalized Closed World Assumption - EGCWA).

3.1 Επεκτάσεις των Κανόνων της Άρνησης

Το σύνολο των προτάσεων που είναι αληθείς ως προς ένα πρόγραμμα P , καθορίζεται από την σημασιολογία για τα διαζευκτικά λογικά προγράμματα, που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ταυτίζεται με το σύνολο των προτάσεων της διαζευκτικής βάσης Herbrand, που είναι λογικά επακόλουθα του προγράμματος.

Για να ορίσουμε λοιπόν την GCWA, αρκεί να ορίσουμε το σύνολο των ψευδών προτάσεων. Έτσι, κάθε πρόταση που δεν ανήκει σε κανένα από τα προαναφερθέντα σύνολα, θα ανήκει στο σύνολο των προτάσεων με άγνωστη τιμή.

Ακολουθεί ο σημασιολογικός ορισμός, από το [20]. Η GCWA περιγράφεται από το σύνολο $GCWA(P)$, το οποίο περιλαμβάνει όλα τα βασικά αρνητικά λεκτικά τα οποία μπορούν να θεωρηθούν αληθή (ισοδύναμα, τις αρνήσεις των ατόμων που θεωρούνται ψευδή).

Ορισμός 3.1. Έστω P ένα διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα. Ο μοντελοθεωρητικός ορισμός της γενικευμένης υπόθεσης του κλειστού κόσμου έχει ως εξής:

$$GCWA(P) = \{ \neg A \mid A \in B_P \text{ και το } A \text{ δεν ανήκει σε κανένα} \\ \text{ελαχιστικό μοντέλο Herbrand του } P \}$$

Παράδειγμα 3.1. Έστω το πρόγραμμα που θεωρήσαμε προηγουμένως:

$$p \vee q \leftarrow$$

Τα ελαχιστικά μοντέλα του προγράμματος αυτού είναι τα $\{p\}, \{q\}$. Το p ανήκει στο ένα από τα δύο, αλλά όχι σε όλα. Έτσι το p έχει άγνωστη τιμή αληθείας βάσει της GCWA. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συνεπές με τα λογικά επακόλουθα του προγράμματος, αφού ούτε το p ούτε το $\neg p$ μπορούν να αποδειχθούν από το πρόγραμμα.

Παράδειγμα 3.2. Έστω P το παρακάτω διαζευκτικό πρόγραμμα:

$$p \vee q \leftarrow$$

$$q \leftarrow$$

$$r \vee s \leftarrow$$

Τα ελαχιστικά μοντέλα του προγράμματος αυτού είναι τα $\{q, r\}, \{q, s\}$. Αφού το p δεν ανήκει σε κανένα ελαχιστικό μοντέλο του P , μπορεί να θεωρηθεί ψευδές και άρα το $\neg p$ να θεωρηθεί αληθές από την GCWA. Το q ανήκει σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα, άρα θεωρείται αληθές, ενώ τα r και s έχουν άγνωστη τιμή. Έτσι έχουμε $GCWA(P) = \{\neg p\}$.

Στο [20], παρουσιάζεται επίσης ένας συντακτικός ορισμός της GCWA, ο οποίος αποδεικνύεται ισοδύναμος με τον παραπάνω. Επιπλέον αποδεικνύονται μερικές ιδιότητες της, μεταξύ των οποίων και το γεγονός ότι επεκτείνει την CWA.

Ορισμός 3.2. Έστω P ένα διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα. Ο συντακτικός ορισμός της γενικευμένης υπόθεσης του κλειστού κόσμου έχει ως εξής:

$$GCWA(P) = \{\neg A \mid A \in B_P \text{ και για όλες τις θετικές (ενδεχομένως κενές) βασικές προτάσεις } K, \text{ το } P \models A \vee K \text{ συνεπάγεται το } P \models K\}$$

Στο επόμενο θεώρημα, με $CWA(P)$ συμβολίζεται το σύνολο των βασικών αρνητικών λεκτικών, τα οποία θεωρούνται αληθή με βάση την CWA.

Θεώρημα 3.1. Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα. Αν το P είναι οριστικό, τότε $GCWA(P) = CWA(P)$.

Απόδειξη. Αν το P είναι οριστικό πρόγραμμα, τότε έχει μόνο ένα ελαχιστικό μοντέλο Herbrand, δηλαδή το ελάχιστο μοντέλο Herbrand M_P . Τότε, το $\neg A$ ανήκει στο $GCWA(P)$ αν και μόνο αν το A δεν ανήκει στο M_P , αν και μόνο αν το $\neg A$ ανήκει στο $CWA(P)$ (εκ του ορισμού της CWA). $\square$

Στο [34], ο ορισμός του $GCWA(P)$ επεκτείνεται ώστε να περιλαμβάνει αρνήσεις προτάσεων, δηλαδή, διαζεύξεις αρνητικών λεκτικών. Η επέκταση αυτή ονομάζεται Επεκτεταμένη Γενικευμένη Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου. Και πάλι, παρατίθεται ο σημασιολογικός ορισμός της.

Ορισμός 3.3. Έστω P ένα διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα και έστω C μία βασική πρόταση της μορφής $\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n$, τέτοια ώστε $A_i \in B_P, i = 1 \dots n$. Ο μοντελοθεωρητικός ορισμός

της επεκτεταμένης γενικευμένης υπόθεσης του κλειστού κόσμου έχει ως εξής:

$$EGCWA(P) = \{C \mid \eta \ C \text{ είναι αληθής σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα Herbrand του } P\}$$

Το ακόλουθο λήμμα [5] δηλώνει την σχέση ανάμεσα στην GCWA και την EGCWA.

Λήμμα 3.1. Έστω P ένα διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα και A_* ένα βασικό άτομο, που δεν ανήκει στην B_P . Έστω $A_1, \dots, A_r$ βασικά άτομα, που ανήκουν στην B_P . Τότε $\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_r \in EGCWA(P)$ αν και μόνο αν το A_* ανήκει στο $GCWA(P \cup \{A_* \leftarrow A_1, \dots, A_r\})$.

Απόδειξη. $\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_r \in EGCWA(P)$

ανν $\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_r$ αληθής σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα Herbrand του P

ανν $A_1 \vee \dots \vee A_r$ ψευδής σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα Herbrand του P

ανν για κάθε ελαχιστικό μοντέλο Herbrand M του P υπάρχει $i, 1 \leq i \leq r$ τέτοιο ώστε το A_i να είναι ψευδές στο M

ανν A_* ψευδής σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα Herbrand του P

ανν A_* ψευδής σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα Herbrand του $P \cup \{A_* \leftarrow A_1, \dots, A_r\}$

ανν $A_* \in GCWA(P \cup \{A_* \leftarrow A_1, \dots, A_r\})$. □

Όπως προαναφέρθηκε, η GCWA δεν είναι η μόνη θεωρία για την σημασιολογία της άρνησης στην βιβλιογραφία, για παράδειγμα αναφέρουμε επίσης την Ασθενή Γενικευμένη Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου (Weak Generalized Closed World Assumption) [26]. Άλλωστε, έχει προταθεί ένα σύνολο από επεκτάσεις της GCWA, όπως η Επεκτεταμένη Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου (Extended Closed World Assumption) [16] κ.α.

3.2 Γενικά Λογικά Προγράμματα

Η δυνατότητα εξαγωγής αρνητικής πληροφορίας μέσω μίας κατάλληλης θεωρίας, όπως εκείνες που συζητήθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, επιτρέπει την ικανοποίηση υποστόχων που θα περιέχουν άρνηση. Δηλαδή, καθίσταται δυνατόν να επεκταθεί η σύνταξη των λογικών προγραμμάτων, ώστε να περιλαμβάνουν αρνητικά λεκτικά στο σώμα των κανόνων.

Ωστόσο, πρέπει να διαχωριστεί η λογική άρνηση από την άρνηση αυτού του τύπου, αφού το $\neg q$ δεν μπορεί να αποδειχθεί από ένα διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα μέσα στα πλαίσια της λογικής πρώτης τάξης. Αντίθετα, θα πρέπει να εφαρμοστεί κάποιος προεπιλεγμένος κανόνας άρνησης, για να εκτιμηθεί η λογική τιμή του τύπου. Για τον λόγο αυτόν, η λογική γλώσσα επεκτείνεται με ένα νέο τελεστή, τον λεγόμενο τελεστή της κατά παραδοχή άρνησης (default negation), τον οποίο θα συμβολίζουμε με not .

Κατ' επέκταση, τροποποιούμε τον ορισμό των λογικών προτάσεων ώστε να περιλαμβάνει τον not :

Ορισμός 3.4. Μία γενική λογική πρόταση (general ή normal logic clause) είναι μία πρόταση

της μορφής:

$$A_1 \vee \dots \vee A_k \leftarrow L_1, \dots, L_n$$

όπου $k \geq 1$ και $n \geq 0$. Κάθε L_i , $1 \leq i \leq n$ καλείται λεκτικό και ταυτίζεται είτε με ένα άτομο, B , είτε με την κατά παραδοχή άρνησή ενός ατόμου, $\text{not } B$. Στην πρώτη περίπτωση, θα λέμε ότι το B εμφανίζεται θετικώς στο σώμα της πρότασης, ενώ στην δεύτερη αρνητικώς. Επίσης, ένα πρόγραμμα που αποτελείται από γενικές προτάσεις θα καλείται γενικό λογικό πρόγραμμα (*general ή normal logic program*).

Στα επόμενα θα ενδιαφερθούμε κυρίως για γενικές προτάσεις και γενικά προγράμματα, έτσι θα αναφερόμαστε σε αυτά απλά ως προτάσεις και προγράμματα, εφόσον δεν δημιουργείται σύγχυση.

Το πρόβλημα που έπεται, είναι η εύρεση της κατάλληλης σημασιολογίας για την νέα κλάση προγραμμάτων. Η θεωρία που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2 δεν είναι πλέον εφαρμόσιμη, καθώς πολλά αποτελέσματά της αναιρούνται στην περίπτωση των γενικών προγραμμάτων. Για παράδειγμα, ένα γενικό πρόγραμμα χωρίς διαζεύξεις, δεν έχει απαραίτητα μοναδικό ελάχιστο μοντέλο Herbrand.

Επιπλέον, το σύνολο των ελαχιστικών μοντέλων ενός γενικού προγράμματος δεν θεωρείται ότι εκφράζει την σημασία του, επειδή ενδέχεται κάποια από αυτά να είναι ασύμβατα με την διαισθητική ερμηνεία του.

Παράδειγμα 3.3. Έστω το ακόλουθο πρόγραμμα, *Numbers*:

```
negative(-1) ←
positive(1) ←
zero(0) ←
non_negative(X) ← not negative(X)
```

Οι ερμηνείες

$$M_1 = \{\text{negative}(-1), \text{positive}(1), \text{zero}(0), \text{non_negative}(0), \text{non_negative}(1)\}$$

και

$$M_2 = \{\text{negative}(-1), \text{positive}(1), \text{zero}(0), \text{negative}(1), \text{negative}(0)\}$$

είναι ελαχιστικά μοντέλα του προγράμματος.

Το ελάχιστο μοντέλο Herbrand ενός οριστικού προγράμματος (χωρίς άρνηση) περιέχει ακριβώς εκείνα τα άτομα που μπορούμε να εξάγουμε ως λογικά συμπεράσματα από το πρόγραμμα. Αυτή η ιδιότητα, που το καθιστά κοινώς αποδεκτό ως το φυσικό νόημα του προγράμματος, δεν χαρακτηρίζει την ερμηνεία M_2 . Το γεγονός $\text{negative}(1)$ δεν υπονοείται με κανένα τρόπο από τις προτάσεις του προγράμματος.

Η ερμηνεία M_1 φαίνεται να εκφράζει το νόημα του προγράμματος, ενώ αντίθετα η ερμηνεία M_2 δεν έχει κάποιο "φυσικό νόημα". Ωστόσο, η δεύτερη δεν παύει να είναι ελαχιστικό

μοντέλο του παραπάνω προγράμματος. Από την άλλη, καμία από τις δύο ερμηνείες δεν είναι ελάχιστη ως προς τη σχέση μερικής διάταξης $\subseteq$, άρα δεν διαθέτουμε κανένα τυπικό κριτήριο για να επιλέξουμε κάποια από τις δύο.

Το πρόβλημα της σημασιολογίας των γενικών προγραμμάτων έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα περίπλοκο και έχει αποτελέσει αντικείμενο μακροχρόνιας έρευνας, στην οποία δύο προσεγγίσεις έχουν εδραιωθεί ως επικρατέστερες. Η Σταθερή Σημασιολογία (Stable Semantics) [15], από τους Gelfond και Lifschitz, προτάθηκε το 1988 για τα προγράμματα χωρίς διαζεύξεις, βασισμένη στην CWA, και επεκτάθηκε στην κλάση των διαζευκτικών προγραμμάτων από τον Przymusinski [24]. Η προσέγγιση της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας (Well-Founded Semantics) προτάθηκε από τους Van Gelder, Ross και Schlipf το 1988 [13] και βασίστηκε στην GCWA, ωστόσο η επέκτασή της στον διαζευκτικό προγραμματισμό παραμένει ανοικτό πρόβλημα, που αποτελεί το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

Το επόμενο παράδειγμα επιδεικνύει ακόμη έναν προβληματισμό, που συνδέεται με τη χρήση άρνησης στα σώματα των προτάσεων.

Παράδειγμα 3.4. Έστω το πρόγραμμα *Contradiction*:

$$p(a) \leftarrow \text{not } p(a)$$

Από δηλωτικής απόψεως, το πρόγραμμα αυτό δεν έχει κανένα φυσικό νόημα. Από διαδικαστικής πλευράς, οποιοδήποτε υπολογιστικό σύστημα επιχειρήσει να αποδείξει την ισχύ ή μη του γεγονότος $p(a)$ είναι καταδικασμένο να εισέλθει σε ατέρμονα βρόχο ή να εγκαταλείψει την προσπάθεια, αναγνωρίζοντας την αντίφαση. Ωστόσο το πρόγραμμα έχει μοντέλο: η ερμηνεία $M = \{p(a)\}$ είναι το ελάχιστο μοντέλο του.

Έχει προταθεί ότι προγράμματα όπως το *Contradiction*, δεν διαθέτουν κανένα φυσικό νόημα, λόγω της χρήσης της άρνησης με κυκλικό τρόπο, και ως εκ τούτου η σημασιολογική μελέτη τους είναι άσκοπη. Σε αυτήν την πεποίθηση στηρίζεται το ενδιαφέρον που συγκεντρώνει η κλάση των λεγόμενων Στρωματοποιημένων (Stratified) λογικών προγραμμάτων, δηλαδή των προγραμμάτων εκείνων που δεν παρουσιάζουν τέτοια μορφολογία. Η στρωματοποίηση (Stratification) συζητείται αναλυτικά στην ακόλουθη ενότητα.

3.3 Στρωματοποίηση

Οι Apt, Blair και Walker [3] και, ανεξάρτητα, ο Van Gelder [12], ήταν οι πρώτοι που εισήγαγαν την έννοια της στρωματοποίησης, για τα γενικά προγράμματα χωρίς διαζεύξεις. Στην συνέχεια, ο Przymusinski [22] την επέκτεινε στα γενικά διαζευκτικά προγράμματα.

Για ένα στρωματοποιημένο πρόγραμμα, είναι δυνατόν να ορίσουμε μία σειρά προτεραιότητας για τα κατηγορήματα, η οποία θα μας επιτρέψει να "επιλύσουμε" ένα κατηγορήμα p μόνο αφού έχουμε "επιλύσει" όλα εκείνα τα κατηγορήματα από τα οποία το p εξαρτάται αρνητικά. Η ύπαρξη μίας τέτοιας ακολουθίας εξασφαλίζει την απουσία κυκλικών εξαρτήσεων μέσω άρνησης.

Ορισμός 3.5. Ένα γενικό λογικό πρόγραμμα GP ονομάζεται στρωματοποιημένο αν είναι

δυνατόν να διαχωρίσουμε το σύνολο P των κατηγορημάτων του GP σε ξένα μεταξύ τους σύνολα $P_0, P_1, \dots, P_r$, που ονομάζονται στρώματα (strata), με τρόπο τέτοιο, ώστε για κάθε πρόταση

$$A_1 \vee \dots \vee A_k \leftarrow B_1, \dots, B_m, \text{not } C_1, \dots, \text{not } C_n$$

μέσα στο GP , ισχύει ότι:

- i. όλα τα κατηγορήματα των ατόμων $A_1, \dots, A_m$ ανήκουν στο ίδιο στρώμα, έστω P_k
- ii. όλα τα κατηγορήματα των $B_1, \dots, B_m$ ανήκουν στο $\bigcup \{P_j : j \leq k\}$
- iii. όλα τα κατηγορήματα των $C_1, \dots, C_n$ ανήκουν στο $\bigcup \{P_j : j < k\}$.

Κάθε διαχωρισμός $\{P_0, P_1, \dots, P_r\}$ του P που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες καλείται στρωματοποίηση του GP .

Τα στρώματα ορίζουν ουσιαστικά την προαναφερθείσα σειρά επίλυσης για τα κατηγορήματα, με το χαμηλότερο στρώμα να ορίζει την μεγαλύτερη προτεραιότητα. Ο τρόπος διαχωρισμού σε στρώματα δεν είναι γενικά μοναδικός για ένα πρόγραμμα.

Η κλάση των στρωματοποιημένων γενικών λογικών προγραμμάτων είναι αρκετά περιορισμένη, αφού δεν περιλαμβάνει αρκετά προγράμματα τα οποία έχουν ξεκάθαρο φυσικό νόημα.

Παράδειγμα 3.5. Ας θεωρήσουμε το πρόγραμμα LS :

$$p(a) \leftarrow \text{not } p(b)$$

Το πρόγραμμα αυτό δεν είναι στρωματοποιημένο, αφού το κατηγορήμα p εξαρτάται αρνητικά από τον εαυτό του. Ωστόσο η διαισθητική κατανόησή του δεν παρουσιάζει δυσκολία, αφού δεν υπάρχει λόγος να συγχέουμε το άτομο $p(a)$ με το άτομο $p(b)$.

Στο [22], ο Przymusiński πρότεινε την κλάση των τοπικά στρωματοποιημένων (locally stratified) γενικών προγραμμάτων, η οποία εμπεριέχει την κλάση των στρωματοποιημένων προγραμμάτων και επιπλέον περιλαμβάνει προγράμματα σαν το LS . Η ιδέα πίσω από την τοπική στρωματοποίηση (local stratification) είναι ότι, όταν εξετάζουμε την κυκλική χρήση της άρνησης, πρέπει να λαμβάνουμε υπ' όψιν και τις συγκεκριμένες τιμές που μπορούν να πάρουν τα ορίσματα. Έτσι τα κατηγορήματα μπορούν να εξαρτώνται αρνητικά από τον εαυτό τους, εφόσον δεν εμφανίζονται κυκλικές εξαρτήσεις που εμπλέκουν άτομα με άρνηση, για καμία από τις δυνατές δεσμεύσεις των μεταβλητών τους.

Ορισμός 3.6. Ένα γενικό λογικό πρόγραμμα GP ονομάζεται τοπικά στρωματοποιημένο αν είναι δυνατόν να διαχωρίσουμε τη βάση Herbrand B_{GP} του GP σε ξένα μεταξύ τους σύνολα $H_0, H_1, \dots, H_a, \dots$, όπου $a < \gamma$ και γ είναι ένας μετρήσιμος διατακτικός αριθμός (countable ordinal), με τρόπο τέτοιο, ώστε για κάθε βασικό στιγμιότυπο

$$A_1 \vee \dots \vee A_k \leftarrow B_1, \dots, B_m, \text{not } C_1, \dots, \text{not } C_n$$

μίας πρότασης στο GP , ισχύει ότι:

- i. όλα τα βασικά άτομα $A_1, \dots, A_m$ ανήκουν στο ίδιο στρώμα, έστω H_k

ii. όλα τα βασικά άτομα $B_1, \dots, B_m$ ανήκουν στο $\bigcup\{H_j : j \leq k\}$

iii. όλα τα βασικά άτομα $C_1, \dots, C_n$ ανήκουν στο $\bigcup\{H_j : j < k\}$.

Κάθε διαχωρισμός $\{H_0, H_1, \dots, H_a, \dots\}$ της B_{GP} που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες καλείται τοπική στρωματοποίηση του GP .

Και πάλι τα σύνολα αυτά ονομάζονται στρώματα, ενώ ο διαχωρισμός δεν είναι γενικά μοναδικός. Επίσης, είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η κλάση των στρωματοποιημένων προγραμμάτων αποτελεί υποσύνολο αυτής των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων.

Πρόταση 3.1. Κάθε στρωματοποιημένο λογικό πρόγραμμα GP είναι τοπικά στρωματοποιημένο.

Απόδειξη. Κάθε διαχωρισμός $D = P_0, P_1, \dots, P_r$ του συνόλου P των κατηγορημάτων του GP οδηγεί άμεσα στον αντίστοιχο διαχωρισμό $E = H_0, H_1, \dots, H_a, \dots$ της βάσης Herbrand B_{GP} του GP , ως εξής:

$$H_i = \{A \in H : \text{το κατηγορημα του } A \text{ ανήκει στο } P_i\}$$

Η απόδειξη ότι, αν ο D είναι μία στρωματοποίηση του GP , τότε ο E είναι μία τοπική στρωματοποίησή του, είναι τετριμμένη. $\square$

Παράδειγμα 3.6. Το πρόγραμμα *Numbers* της προηγούμενης ενότητας είναι στρωματοποιημένο, άρα και τοπικά στρωματοποιημένο. Το πρόγραμμα *LS* δεν είναι στρωματοποιημένο, αλλά είναι τοπικά στρωματοποιημένο. Τέλος το πρόγραμμα *Contradiction* δεν είναι ούτε τοπικά στρωματοποιημένο.

Με τον ορισμό της κλάσης των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων έχουμε επιτύχει να προσδιορίσουμε ένα σύνολο γενικών λογικών προγραμμάτων, τα οποία θεωρούμε ότι διαθέτουν ένα φυσικό νόημα. Το επόμενο μέλημά μας είναι να ορίσουμε το κατάλληλο σύνολο μοντέλων για τα προγράμματα της κλάσης, το οποίο να εκφράζει αυτό το νόημα.

Η σημασιολογία των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων βασίζεται στην σχέση προτεραιότητας μεταξύ των ατόμων της βάσης Herbrand, που αντικατοπτρίζεται από τα στρώματα στα οποία διαχωρίζεται. Αν A, B είναι δύο άτομα στην βάση Herbrand, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $A < B$ για να δηλώσουμε ότι το B έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα από το A . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να πούμε ότι αυτό συμβαίνει αν το B ανήκει σε χαμηλότερο στρώμα από ότι το A . Στην πραγματικότητα η σχέση είναι ανεξάρτητη από την εκάστοτε στρωματοποίηση, στο [22] δίνεται ένας αναλυτικός συντακτικός ορισμός της.

Ο επόμενος ορισμός και το θεώρημα 3.2 [22] συμπληρώνουν την θεωρία της σημασιολογίας τέλειου μοντέλου (perfect model semantics) για τα τοπικά στρωματοποιημένα διαζευκτικά προγράμματα.

Ορισμός 3.7. Έστω M, N δύο διακεκριμένα μοντέλα Herbrand ενός γενικού λογικού προγράμματος GP . Λέμε ότι το N είναι προτιμότερο (preferable) του M και γράφουμε $N \ll M$,

αν για κάθε βασικό άτομο $A \in N - M$ υπάρχει ένα βασικό άτομο $B \in M - N$ τέτοιο ώστε $A < B$. Ένα μοντέλο Herbrand M του GP καλείται τέλειο (perfect) αν δεν υπάρχει κανένα μοντέλο Herbrand του GP που να είναι προτιμότερο του M .

Θεώρημα 3.2. Για κάθε μοντέλο N ενός τοπικά στρωματοποιημένου προγράμματος P , υπάρχει ένα τέλειο μοντέλο M τέτοιο ώστε $M \ll N$ ή $M = N$. Ως εκ τούτου, κάθε τοπικά στρωματοποιημένο πρόγραμμα έχει τουλάχιστον ένα τέλειο μοντέλο.

Επιπλέον, αν το P είναι γενικό πρόγραμμα χωρίς διαζεύξεις, τότε έχει ένα μοναδικό τέλειο μοντέλο M_P και για κάθε άλλο μοντέλο του, M , ισχύει $M_P \ll M$.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι εκτεταμένη και δεν παρατίθεται.

Η σημασιολογία τέλειου μοντέλου επεκτείνει την σημασιολογία των ελαχιστικών μοντέλων, δηλαδή για προγράμματα χωρίς άρνηση, το σύνολο των τέλειων μοντέλων ταυτίζεται με το σύνολο των ελαχιστικών μοντέλων Herbrand. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι ένα τέλειο μοντέλο ενός γενικού λογικού προγράμματος είναι πάντα ελαχιστικό [22].

Είναι ευρέως αποδεκτό, ότι το μοναδικό τέλειο μοντέλο ενός τοπικά στρωματοποιημένου προγράμματος χωρίς διαζεύξεις συλλαμβάνει επιτυχώς το φυσικό του νόημα. Ο ισχυρισμός αυτός ενισχύεται από το γεγονός, ότι οι δύο μείζονες προσεγγίσεις στην σημασιολογία γενικών προγραμμάτων χωρίς διαζεύξεις επεκτείνουν την σημασιολογία του τέλειου μοντέλου. Τόσο το καλώς-θεμελιωμένο (well-founded), όσο και το σταθερό (stable) μοντέλο ενός προγράμματος χωρίς διαζεύξεις ταυτίζονται με το τέλειο μοντέλο του, στην περίπτωση που το πρόγραμμα είναι τοπικά στρωματοποιημένο ([14] και [15] αντίστοιχα).

Στην περίπτωση των διαζευκτικών προγραμμάτων δεν υπάρχει η αντίστοιχη σύμπτωση. Αν και η Σταθερή Σημασιολογία για διαζευκτικά προγράμματα επεκτείνει την σημασιολογία τέλειου μοντέλου [24], από την έρευνά μας δεν προέκυψε ότι κάποια από τις εκδοχές της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας διαθέτει αποδεδειγμένα την ίδια ιδιότητα. Ορισμένες εξ' αυτών αποδεικνύονται ασθενέστερες από την σημασιολογία τέλειου μοντέλου, ενώ για άλλες δεν υπάρχουν σχετικά αποτελέσματα στην βιβλιογραφία. Επιπροσθέτως, η σημασιολογία τέλειου μοντέλου έχει επικριθεί από ορισμένους συγγραφείς (για παράδειγμα, [25]) ως υπερβολικά ισχυρή (strong) για τα διαζευκτικά προγράμματα, υπάρχει δηλαδή ασυμφωνία ως προς το θεμιτό της επέκτασής της.

3.4 Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία

Στην ενότητα αυτή συζητείται η προσέγγιση του καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου στην σημασιολογία των γενικών προγραμμάτων χωρίς διαζεύξεις. Οι προσπάθειες επέκτασης της θεωρίας στα διαζευκτικά προγράμματα αποτελούν το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

Η Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία (Well-Founded Semantics - WFS) των Van Gelder, Ross και Schlipf [13] επεκτείνει τη σημασιολογία τέλειου μοντέλου. Καθώς βασίζεται στην GCWA, η επέκταση αφορά στην εισαγωγή της τιμής αληθείας *unknown*, η οποία υποδηλώ-

νει την αδυναμία εξαγωγής κάποιου δικαιολογημένου συμπεράσματος για την αλήθεια ή μη ενός ατόμου. Το καλώς-θεμελιωμένο μοντέλο ενός λογικού προγράμματος είναι εκείνο, που ελαχιστοποιεί το σύνολο των ατόμων που θεωρούνται αληθή, ενώ μεγιστοποιεί το σύνολο αυτών που θεωρούνται ψευδή.

Ο Przymusiński στο [23] παρέχει έναν εναλλακτικό χαρακτηρισμό του καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου για προγράμματα χωρίς διαζεύξεις, μέσω επαναλαμβανόμενων ελάχιστων σταθερών σημείων (iterated least fixpoints). Ακολουθούμε την παρουσίαση του Przymusiński, ως περισσότερο διαισθητική, και παραπέμπουμε στο [23] για τις αποδείξεις των προτάσεων και θεωρημάτων.

Ορισμός 3.8. Μία τρίτιμη ή μερική ερμηνεία (three-valued/partial interpretation) I ενός προγράμματος P είναι ένα ζεύγος $\langle T, F \rangle$, όπου τα T, F είναι υποσύνολα της βάσης Herbrand, B_P , του προγράμματος. Το σύνολο T περιέχει τα άτομα που είναι αληθή (true) ως προς την ερμηνεία και το F αυτά που είναι ψευδή (false). Τα άτομα που ανήκουν στο σύνολο $U = B_P - (T \cup F)$, θεωρούνται ότι έχουν την τιμή unknown (0) ως προς την I .

Αν τυγχάνει ώστε όλα τα άτομα της B_P να είναι είτε αληθή είτε ψευδή ως προς την I , δηλαδή $U = \emptyset$, τότε προφανώς πρόκειται για μία ερμηνεία με την κλασσική έννοια, όπως την ορίσαμε στο Κεφάλαιο 2. Στο εξής, θα ονομάζουμε αυτές τις ερμηνείες δίτιμες ή πλήρεις (two-valued/total), για να τις διαχωρίζουμε από τις μερικές ερμηνείες.

Μία μερική ερμηνεία είναι συνεπής (consistent) αν τα σύνολα T και F είναι ξένα μεταξύ τους. Αν αυτό δεν συμβαίνει, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο, που είναι ταυτόχρονα αληθές και ψευδές. Στο εξής, όταν αναφερόμαστε σε ερμηνείες, θα θεωρούμε ότι είναι συνεπείς, αφού μόνο αυτές έχουν νόημα.

Για τις τιμές αληθείας θεωρούμε τη διάταξη $true > 0 > false$. Κατά τα γνωστά ισχύει ότι $\neg true = false$, $\neg false = true$ και επιπλέον $\neg 0 = 0$. Ο νέος ορισμός για την έννοια της ερμηνείας απαιτεί έναν νέο ορισμό για την λογική τιμή ενός τύπου ως προς αυτήν. Η τιμή αληθείας ενός τύπου F ως προς μία ερμηνεία I , θα συμβολίζεται με $I(F)$.

Ορισμός 3.9. Έστω ένα γενικό πρόγραμμα P , δύο τύποι E, G στο P και μία συνεπής μερική ερμηνεία $I = \langle T, F \rangle$ του P . Τότε

$$\begin{aligned}
 I(E) &= false, \text{ αν ο } E \text{ είναι άτομο και } E \in F \\
 I(E) &= true, \text{ αν ο } E \text{ είναι άτομο και } E \in T \\
 I(E) &= 0, \text{ αν ο } E \text{ είναι άτομο και } E \in U \\
 I(not\ E) &= \neg I(E) \\
 I(E \vee G) &= \max\{I(E), I(G)\} \\
 I(E \wedge G) &= \min(I(E), I(G)) \\
 I(E \leftarrow G) &= \begin{cases} true, & \text{αν } I(E) \geq I(G) \\ false, & \text{αλλιώς} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ορισμός 3.10. Αν $I_1 = \langle T_1, F_1 \rangle, I_2 = \langle T_2, F_2 \rangle$ είναι δύο μερικές ερμηνείες, ορίζουμε την ένωσή τους ως $I_1 \cup I_2 = \langle T_1 \cup T_2, F_1 \cup F_2 \rangle$.

Ορισμός 3.11. Έστω ένα γενικό πρόγραμμα P και μία συνεπής μερική ερμηνεία I του P . Η I είναι τρίτιμο ή μερικό μοντέλο (*three-valued/partial model*) του P αν κάθε πρόταση του προγράμματος είναι αληθής ως προς την I . Ισοδύναμα, η I είναι μοντέλο του P αν για κάθε βασικό στιγμιότυπο

$$A \leftarrow L_1, \dots, L_m$$

μίας πρότασης του προγράμματος, έχουμε

$$I(A) \geq \min\{I(L_1), \dots, I(L_m)\}$$

Αν η I είναι δίτιμη, τότε καλείται δίτιμο ή πλήρες (*two-valued/total model*) μοντέλο του P .

Ορισμός 3.12. Έστω P ένα γενικό πρόγραμμα και $I_1 = \langle T_1, F_1 \rangle, I_2 = \langle T_2, F_2 \rangle$ δύο μερικές ερμηνείες του P . Η σχέση μερικής διάταξης για μερικές ερμηνείες ορίζεται ως εξής:

$$I_1 \preceq I_2 \text{ αν } T_1 \subseteq T_2 \text{ και } F_1 \supseteq F_2$$

Οι έννοιες του ελαχιστικού και ελάχιστου τρίτιμου μοντέλου ορίζονται τετριμμένα με βάση τη σχέση $\preceq$. Συνεπώς, τα ελαχιστικά τρίτιμα μοντέλα ελαχιστοποιούν την θετική, ενώ μεγιστοποιούν την αρνητική πληροφορία. Τα δίτιμα ελαχιστικά μοντέλα ταυτίζονται με τα συνήθη ελαχιστικά μοντέλα.

Εισάγονται στην συνέχεια δύο μονοτονικοί τελεστές, οι οποίοι απεικονίζουν σύνολα βασικών ατόμων σε σύνολα βασικών ατόμων. Ο τελεστής $\mathcal{T}_I(T)$ μας δίνει το σύνολο των ατόμων, των οποίων η αλήθεια μπορεί να εξαχθεί άμεσα από ένα πρόγραμμα P , δεδομένης της I και αν υποθεθεί ότι κάθε άτομο στο T είναι αληθές. Ο τελεστής $\mathcal{F}_I(F)$, αναλόγως, μας δίνει το σύνολο των ατόμων, τα οποία μπορούν να αποδειχθούν ψευδή από το P , δεδομένης της I και αν υποθεθεί ότι κάθε άτομο στο F είναι ψευδές.

Ορισμός 3.13. Έστω ένα γενικό πρόγραμμα χωρίς διαζεύξεις P και μία μερική ερμηνεία I του P . Έστω επίσης δύο σύνολα βασικών ατόμων, T και F . Ορίζουμε:

$$\mathcal{T}_I(T) = \{A : I(A) \neq \text{true} \text{ και υπάρχει ένα βασικό στιγμιότυπο } A \leftarrow L_1, \dots, L_m, \text{ μίας πρότασης στο } P, \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } i \leq m, \text{ είτε το } L_i \text{ είναι αληθές στην } I \text{ είτε } L_i \in T\}$$

$$\mathcal{F}_I(F) = \{A : I(A) \neq \text{false} \text{ και για κάθε βασικό στιγμιότυπο } A \leftarrow L_1, \dots, L_m, \text{ μίας πρότασης στο } P, \text{ υπάρχει } i \leq m \text{ τέτοιο ώστε είτε το } L_i \text{ είναι ψευδές στην } I \text{ είτε } L_i \in F\}$$

Οι συνθήκες $I(A) \neq \text{true}$ και $I(A) \neq \text{false}$ εξασφαλίζουν απλά ότι μόνο νέα άτομα θα εισάγονται κάθε φορά και κατά τα άλλα δεν είναι ουσιώδεις.

Όπως προαναφέραμε, οι δύο τελεστές αποδεικνύονται μονοτονικοί (στην περίπτωση του $\mathcal{F}_I$, η διάταξη ορίζεται ως αντίστροφη έγκλειση) [23].

Ορισμός 3.14. Έστω ένα γενικό πρόγραμμα χωρίς διαζεύξεις P και μία μερική ερμηνεία I του P . Ορίζουμε:

$$T_I \uparrow 0 = \emptyset, T_I \uparrow (n+1) = \mathcal{T}_I(T_I \uparrow n) \text{ και } T_I = \bigcup_{n < \omega} T_I \uparrow n.$$

$$F_I \downarrow 0 = HB_P, F_I \downarrow (n+1) = \mathcal{F}_I(F_I \downarrow n) \text{ και } F_I = \bigcap_{n < \omega} F_I \downarrow n.$$

Πρόταση 3.2. Η ακολουθία $T_I \uparrow n$ αυξάνει μονοτονικά και η $F_I \downarrow n$ φθίνει μονοτονικά. Το σύνολο T_I είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο του τελεστή $\mathcal{T}_I$ και το σύνολο F_I είναι το ελάχιστο¹ σταθερό σημείο του τελεστή $\mathcal{F}_I$ αντίστοιχα.

Διαισθητικά, το T_I εμπεριέχει τα νέα άτομα που μπορούν να εξαχθούν από το P , δεδομένης της I , και το F_I εμπεριέχει τα νέα άτομα που μπορούν να θεωρηθούν ψευδή στο P , δεδομένης της I .

Στη συνέχεια ορίζουμε τον τελεστή $\mathcal{I}$, που απεικονίζει ερμηνείες σε ερμηνείες και είναι επίσης μονοτονικός [23].

Ορισμός 3.15. Έστω ένα γενικό πρόγραμμα χωρίς διαζεύξεις P και μία μερική ερμηνεία I του P . Ορίζουμε τον τελεστή $\mathcal{I}$ ως εξής:

$$\mathcal{I}(I) = I \cup \langle T_I, F_I \rangle$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το καλώς-θεμελιωμένο μοντέλο M_P ενός προγράμματος P , ως το ελάχιστο σταθερό σημείο του τελεστή $\mathcal{I}$.

Ορισμός 3.16. Για ένα γενικό πρόγραμμα χωρίς διαζεύξεις P ορίζουμε την ακολουθία $\{M_a\}$ ως εξής:

$$M_0 = \langle \emptyset, \emptyset \rangle$$

$$M_{a+1} = \mathcal{I}(M_a) \text{ για επόμενους διατακτικούς αριθμούς (successor ordinals)}$$

$$M_a = \bigcup_{b < a} M_b \text{ για οριακούς διατακτικούς αριθμούς (limit ordinals).}$$

Αφού η ακολουθία είναι αύξουσα, θα υπάρχει ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός δ , για τον οποίο το M_δ είναι σταθερό σημείο του τελεστή $\mathcal{I}$, δηλαδή ώστε:

$$M_\delta = \mathcal{I}(M_\delta) = M_{\delta+1}$$

Ονομάζουμε την ερμηνεία M_δ καλώς-θεμελιωμένο μοντέλο (well-founded model) του P και την συμβολίζουμε με M_P .

Θεώρημα 3.3. Το M_P είναι ένα ελαχιστικό τρίτιμο μοντέλο του P . Επίσης, είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο του τελεστή $\mathcal{I}$.

Σύμφωνα με την προσέγγιση της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας, το M_P είναι το μοντέλο που συλλαμβάνει βέλτιστα το νόημα του προγράμματος. Η σχέση μεταξύ του καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου και του τέλει μοντέλου αποδεικνύεται στο [14]:

¹Θεωρώντας πάντα ως διάταξη την αντίστροφη έγκλειση.

Θεώρημα 3.4. Έστω ένα γενικό πρόγραμμα χωρίς διαζεύξεις P . Αν το P είναι τοπικά στρωματοποιημένο, τότε το καλώς-θεμελιωμένο μοντέλο του, M_P , είναι δίτιμο και ταυτίζεται με το τέλειο μοντέλο του.

Ωστόσο, το M_P ορίζεται για όλα τα προγράμματα χωρίς διαζεύξεις και όχι για μία περιορισμένη κλάση. Υπενθυμίζεται, ότι το τέλειο μοντέλο ενός προγράμματος χωρίς άρνηση συμπίπτει με το ελάχιστο μοντέλο του. Συνεπώς, από το προηγούμενο θεώρημα, έπεται άμεσα ότι η Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία επεκτείνει επίσης την σημασιολογία ελάχιστου μοντέλου.

4. ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΚΑΛΩΣ-ΘΕΜΕΛΙΩΜΕΝΗΣ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΑΣ

Το πρόβλημα της επέκτασης της θεωρίας της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας στα γενικά διαζευκτικά προγράμματα παραμένει ανοικτό μέχρι σήμερα, παρά τις εκτεταμένες προσπάθειες προς την κατεύθυνση αυτή. Αποτέλεσμα της έρευνας, που έχει πραγματοποιηθεί τα τελευταία είκοσι έτη στην περιοχή, υπήρξε μία πληθώρα διαφορετικών προτάσεων, εκ των οποίων καμία δεν έχει προς το παρόν τύχει γενικής αποδοχής.

Σαν αποτέλεσμα, προέκυψε μία ογκώδης φιλολογία γύρω από τις διάφορες προσεγγίσεις, με στόχο την εύρεση της καταλληλότερης. Ωστόσο, φαίνεται να υπάρχει διαφωνία όχι μόνο στο ποια είναι αυτή η προσέγγιση, αλλά και στο ποια είναι τα κριτήρια για την καταλληλότητα της. Συγκεκριμένα, η επιθυμητή σημασιολογική ερμηνεία της άρνησης αλλά και των διαζεύξεων βρίσκονται υπό αμφισβήτηση.

Από τις πρώτες απόπειρες ορισμού μίας Καλώς-Θεμελιωμένης σημασιολογίας για διαζευκτικά προγράμματα, ήταν η Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία (Strong Well-Founded Semantics) του Ross [29], η οποία διαθέτει έναν διαδικαστικό “από πάνω προς τα κάτω” χαρακτηρισμό. Σύντομα ακολούθησε ο Baral, με την Διαζευκτική Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία (Disjunctive Well-Founded Semantics) [4], οριζόμενη με όρους σταθερών σημείων τριών τελεστών και βασισμένη στην Γενικευμένη Άρνηση μέσω Αποτυχίας (GNAF). Η πρόταση των Brass, Dix [7], που ορίζεται αφηρημένα ως η ασθενέστερη σημασιολογία που ικανοποιεί ένα συγκεκριμένο σύνολο ιδιοτήτων, αλλά και διαδικαστικά, μέσω μετασχηματισμών του προγράμματος και μονοτονικών τελεστών, ονομάστηκε D-WFS. Την ίδια χρονική περίοδο ο Przymusiński εισήγαγε την Στατική Σημασιολογία (Static Semantics) [25], χρησιμοποιώντας την έννοια των στατικών επεκτάσεων (static expansions) ενός λογικού προγράμματος.

Στην αρχή της επόμενης δεκαετίας (2000), το ενδιαφέρον για το θέμα συνεχίστηκε, με την Καλώς-Θεμελιωμένη Διαζευκτική Σημασιολογία (Well-Founded Disjunctive Semantics) του Wang [32], που βασίζεται σε πλαίσια απαγωγής (abduction frameworks), και την Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία με Διάζευξη (Well-Founded Semantics with Disjunction) των Alcântara, Damásio και Pereira [2], την οποία όρισαν μέσω ενός τελεστή που ενεργεί πάνω σε σύνολα από ερμηνείες.

Πιο πρόσφατα, παρουσιάστηκε η μοναδική, εξ όσων γνωρίζουμε, επέκταση της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας, η οποία διαθέτει έναν καθαρά μοντελοθεωρητικό χαρακτηρισμό, από τους Cabalar, Pearce, Ροντογιάννη και Wadge. Ονομάστηκε Απειρότιμη Σημασιολογία (Infinite-Valued Semantics) [10] και βασίζεται σε μία νέα λογική, με άπειρες τιμές αληθείας. Η προσέγγιση αυτή, στην οποία συνεισφέρουν και τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, παρουσιάζεται αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Στην μελέτη που θα ακολουθήσει, θα αναφερόμαστε συχνά στην έννοια του βασικού αναπτύγματος (ground instantiation) ενός προγράμματος P . Με αυτόν τον όρο, θα εννοούμε το πρόγραμμα που προκύπτει, αν κάθε πρόταση του P αντικατασταθεί από το σύνολο

των βασικών στιγμιοτύπων της, τα οποία σχηματίζονται από κάθε πιθανή δέσμευση των μεταβλητών της με τιμές από το U_P . Για να διευκολυνθεί η σημασιολογική μελέτη ενός προγράμματος, μπορεί αυτό να ταυτίζεται με το βασικό του ανάπτυγμα, χωρίς βλάβη της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων.

Επίσης, ο παρακάτω συμβολισμός θα χρησιμοποιηθεί για διευκόλυνση:

Ορισμός 4.1. Έστω ένα λογικό πρόγραμμα P και μία πρόταση Π του P της μορφής $A_1 \vee \dots \vee A_k \leftarrow B_1, \dots, B_m, \text{not } C_1, \dots, \text{not } C_n$. Η Π συμβολίζεται ως $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}, \text{not } \mathcal{C}$, όπου $\mathcal{A} := \{A_1, \dots, A_k\}$, $\mathcal{B} := \{B_1, \dots, B_m\}$ και $\mathcal{C} := \{C_1, \dots, C_n\}$.

Τέλος, με τον όρο καθαρή διάζευξη (pure disjunction) θα εννοούμε μία διάζευξη που περιέχει μόνο θετικά ή μόνο αρνητικά λεκτικά.

4.1 Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία (Ross)

Strong Well-Founded Semantics

4.1.1 Ορισμός

Ο Ross, στο [29], ορίζει μία διαδικαστική σημασιολογία, βασισμένη σε μία “από πάνω προς τα κάτω” προσέγγιση του ιδίου, για την Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία [28]. Θα ακολουθήσουμε την παρουσίαση από το [17].

Κεντρική έννοια είναι αυτή του ισχυρά παραγόμενου συνόλου (strongly derived set) διαζεύξεων:

Ορισμός 4.2. Έστω I ένα σύνολο από διαζεύξεις και αρνήσεις διαζεύξεων και P ένα διαζευκτικό πρόγραμμα. Το παράγωγο (derivate) I' παράγεται ισχυρά από το I (συμβολίζουμε $I \Leftarrow I'$) αν το I περιέχει μία διάζευξη D και υπάρχει κάποια πρόταση

$$\mathcal{H} \leftarrow A_1, \dots, A_n, \text{not } \mathcal{B}$$

στο βασικό ανάπτυγμα του P , τέτοια ώστε είτε

1. $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{D}$ και $I' = (I - \{D\}) \cup \{A_1 \vee D, \dots, A_n \vee D\} \cup \neg \mathcal{B}$ ή
2. $\mathcal{H} \not\subseteq \mathcal{D}$, $\mathcal{C} = \mathcal{H} - \mathcal{D} \neq \emptyset$ και $I' = (I - \{D\}) \cup \{A_1, \dots, A_n\} \cup \neg \mathcal{B} \cup \neg \mathcal{C}$.

Όπως και στα προηγούμενα, στον παραπάνω ορισμό το $\neg \mathcal{C}$ δηλώνει το σύνολο που σχηματίζεται από τις αρνήσεις των ατόμων του συνόλου $\mathcal{C}$.

Ορισμός 4.3. Έστω D μία βασική διάζευξη και $I_0 = \{D\}$. Έστω ότι το I_1 παράγεται ισχυρά από το I_0 , το I_2 παράγεται ισχυρά από το I_1 κ.ο.κ. Καλούμε την ακολουθία $I_0, I_1, I_2, \dots$ μία ακολουθία ισχυρής παραγωγής (strong derivation sequence) για την D .

Μία ακολουθία ισχυρής παραγωγής μπορεί να είναι είτε πεπερασμένη είτε άπειρη. Επίσης, μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία ακολουθίες για μία ορισμένη διάζευξη.

Ορισμός 4.4. Μία ενεργή (active) ακολουθία ισχυρής παραγωγής για μία διάζευξη D είναι μία πεπερασμένη ακολουθία ισχυρής παραγωγής για την D , της οποίας το τελευταίο στοι-

χείο είναι είτε το κενό σύνολο ή περιέχει μόνο αρνητικά λεκτικά. Το τελευταίο στοιχείο μίας ενεργής ακολουθίας ισχυρής παραγωγής καλείται βάση (basis) της D .

Οι ακολουθίες παραγωγής ορίζουν δέντρα παραγωγής (drivation trees), όπου τα κλαδιά αναπαριστούν τις διαφορετικές ακολουθίες για μία διάζευξη και οι βάσεις είναι τα φύλλα. Χρησιμοποιώντας την άρνηση μίας οποιασδήποτε βάσης ως ρίζα, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα νέο δέντρο που συνδέεται με το αρχικό. Φυσικά αυτό προϋποθέτει η βάση να μην είναι κενή, σε αντίθετη περίπτωση δεν μπορεί να δημιουργηθεί δέντρο για το συγκεκριμένο φύλλο. Πιο τυπικά, η διαδικασία περιγράφεται στους ακόλουθους δύο ορισμούς.

Ορισμός 4.5. Αν $I = \{\neg I_1, \dots, \neg I_n\}$ είναι ένα σύνολο από αρνήσεις βασικών διαζεύξεων, τότε $\bar{I} = I_1 \vee \dots \vee I_n$. Αν το I είναι κενό, δηλώνει την τιμή *true* και τότε το $\bar{I}$ δηλώνει την τιμή *false*.

Ορισμός 4.6. Το ισχυρό καθολικό δέντρο (strong global tree) Γ_D^S μίας δεδομένης βασικής διάζευξης $D \in DB_P$ ορίζεται ως ακολούθως:

- Η ρίζα του Γ_D^S είναι η D .
- Αν η διάζευξη D' είναι ένας κόμβος του Γ_D^S , τότε τα παιδιά του είναι όλες οι βασικές διαζεύξεις της μορφής $\bar{I}$, όπου το I διατρέχει όλες τις βάσεις για το D' .

Το ισχυρό καθολικό δέντρο χρησιμοποιείται για την αποτίμηση των διαζεύξεων που περιλαμβάνει, βάσει των παρακάτω κανόνων:

- Αν κάθε παιδί της D' είναι αληθές, τότε η D' είναι ψευδής. Ειδικότερα, η D' είναι ψευδής αν δεν έχει παιδιά.
- Αν κάποιο παιδί της D' είναι ψευδές, τότε η D' είναι αληθής.
- Κάθε κόμβος, που δεν είναι αληθής ή ψευδής κατά τους προηγούμενους κανόνες, έχει άγνωστη τιμή.

Η τιμή ενός κόμβου μπορεί να είναι άγνωστη, αν κάποιο από τα κλαδιά του εκτείνεται στο άπειρο.

Η Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία ορίζεται μέσω του συνόλου των ισχυρών καθολικών δέντρων.

Ορισμός 4.7. Έστω P ένα διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα και $M_{WF}^S(P)$ το σύνολο από διαζεύξεις και αρνήσεις διαζεύξεων, τέτοιο ώστε για κάθε διάζευξη D

- Αν η D είναι αληθής στο Γ_D^S , τότε $D \in M_{WF}^S(P)$.
- Αν η D είναι ψευδής στο Γ_D^S , τότε $\neg D \in M_{WF}^S(P)$.
- Αν η D είναι άγνωστης τιμής στο Γ_D^S , τότε $D, \neg D \notin M_{WF}^S(P)$.

Το $M_{WF}^S(P)$ καλείται το ισχυρό καλώς-θεμελιωμένο μοντέλο strong well-founded model του P .

Λήμμα 4.1. Δεδομένου ενός διαζευκτικού προγράμματος P , το $M_{WF}^S(P)$ είναι συνεπές.

4.1.2 Χαρακτηριστικά

Στην σημασιολογία του Ross η σημασία του προγράμματος αποδίδεται από ένα σύνολο που περιέχει διαζεύξεις και αρνήσεις διαζεύξεων. Κάθε στοιχείο του συνόλου θεωρείται αληθές ως προς το μοντέλο του. Έτσι μία διάζευξη είναι αληθής αν ανήκει στο μοντέλο, ψευδής αν η άρνησή της ανήκει στο μοντέλο και άγνωστης τιμής αν δεν συμβαίνει τίποτα από αυτά.

Αποδεικνύεται στο [7] ότι η Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία δεν επεκτείνει την GCWA. Αποτελεί όμως επέκταση της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας για προγράμματα χωρίς διαζεύξεις, όπως δείχνει ο Ross στο [29]. Τέλος, δεν επεκτείνει την σημασιολογία τέλειου μοντέλου των τοπικά στρωματοποιημένων διαζευκτικών προγραμμάτων [6].

4.2 Διαζευκτική Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία (Baral)

Disjunctive Well-Founded Semantics

4.2.1 Ορισμός

Η σημασιολογία του Baral [4] δίνεται με όρους ελάχιστου σταθερού σημείου. Οι ορισμοί είναι ανάλογοι με αυτούς του Przymusiński για τον χαρακτηρισμό της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας λογικών προγραμμάτων χωρίς διαζεύξεις, μέσω επαναλαμβανόμενων σταθερών σημείων.

Στη συνέχεια ορίζουμε τους τρεις τελεστές, στους οποίους στηρίζεται η Διαζευκτική Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία (DWFS). Θα χρησιμοποιήσουμε τον συνήθη συμβολισμό $\text{not } A$ για να δηλώσουμε το σύνολο $\{\text{not } a : a \in A\}$.

Ορισμός 4.8. Το σύνολο των μη λογικά ισοδύναμων μεταξύ τους βασικών διαζευκτικών προτάσεων, που μπορούν να σχηματισθούν χρησιμοποιώντας διακριτά βασικά άτομα από το $\text{not } (B_L)$ (αντίστοιχα, από το $B_L \cup \text{not } (B_L)$), ονομάζεται αρνητική βάση Herbrand (αντίστοιχα, γενική βάση Herbrand) (negative/general Herbrand base) της L και συμβολίζεται με NDB_L (αντίστοιχα, GDB_L).

Ορισμός 4.9. Μία γενική κατάσταση Herbrand (general Herbrand state) ή γ -κατάσταση (g -state) της L (αντίστοιχα, του P) είναι ένα υποσύνολο της γενικής βάσης Herbrand της L (αντίστοιχα, του P).

Οι τελεστές του Baral επενεργούν πάνω σε γ -καταστάσεις, έτσι σε κάποιες περιπτώσεις μας δίνουν την δυνατότητα να αποδίδουμε την τιμή *false* σε κάποια σύζευξη, ενώ κανένα από τα άτομα που συμμετέχουν σε αυτή δεν μπορεί να αποδειχθεί ψευδές.

Ορισμός 4.10. Έστω S και s δύο γ -καταστάσεις ενός προγράμματος P . Οι τελεστές $\mathcal{T}_S(s)$ και $\mathcal{F}_S(s)$ ορίζονται ως εξής:

$$\mathcal{T}_S(s) = \{C \in GHB(P) : \exists C' \leftarrow B_1, \dots, B_m, \text{ βασικό στιγμιότυπο ενός κανόνα στο } P, \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } i, 1 \leq i \leq m, (B_i \vee C_i) \in S \cup s, \text{ το } C_i \text{ μπορεί να είναι κενό και } C \text{ είναι ο ελάχιστος παράγοντας του } (C' \vee C_1 \vee \dots \vee C_m).\}$$

$\mathcal{F}_S(s) = \{G \in NHB(P) : \text{για όλα τα σύνολα βασικών στιγμιοτύπων κανόνων του } P, \text{ της μορφής}$

$$\begin{aligned} \{A_1 \vee E_1 \leftarrow B_{11}, \dots, B_{1m}, \text{not } B_{1m+1}, \dots, \text{not } B_{1n}, \\ \vdots \\ A_k \vee E_k \leftarrow B_{k1}, \dots, B_{km}, \text{not } B_{km+1}, \dots, \text{not } B_{kn}\} \end{aligned}$$

όπου $\text{not } (A_1 \wedge \dots \wedge A_k) = G$, ισχύει ότι $E_1 \vee \dots \vee E_k \vee B_{1m+1} \vee \dots \vee B_{1n} \vee \dots \vee B_{km+1} \vee \dots \vee B_{kn} \vee \text{not } B_{11} \vee \dots \vee \text{not } B_{1m} \vee \dots \vee \text{not } B_{k1} \vee \dots \vee \text{not } B_{km} \in S \cup s$.

Συνεπώς ο τελεστής $\mathcal{T}_S(s)$ μας δίνει το σύνολο των διαζεύξεων από λεκτικά, που μπορούν να θεωρηθούν αληθείς από το P , δεδομένου του $S \cup s$ και σε ένα συλλογιστικό βήμα. Ο τελεστής $\mathcal{F}_S(s)$, αναλόγως, μας δίνει το σύνολο των διαζεύξεων από αρνητικά λεκτικά, που μπορούν να θεωρηθούν αληθείς (ισοδύναμα, συζεύξεων από άτομα, που μπορούν να θεωρηθούν ψευδείς) από το P , δεδομένου του $S \cup s$ και σε ένα συλλογιστικό βήμα. Αποδεικνύεται, ότι οι δύο τελεστές είναι μονοτονικοί.

Ορισμός 4.11. Ορίζουμε ότι:

$$T_S \uparrow 0 = \emptyset, T_S \uparrow (n+1) = \mathcal{T}_S(T_S \uparrow n) \text{ και } T_S = \bigcup_{n < \omega} T_S \uparrow n.$$

$$F_S \downarrow 0 = NHB_P, F_S \downarrow (n+1) = \mathcal{F}_S(F_S \downarrow n) \text{ και } F_S = \bigcap_{n < \omega} F_S \downarrow n.$$

Αποδεικνύεται ότι τα σύνολα T_S και F_S είναι τα ελάχιστα σταθερά σημεία των τελεστών $\mathcal{T}_S$ και $\mathcal{F}_S$ αντίστοιχα.

Ορισμός 4.12. Έστω S μία γ -κατάσταση ενός προγράμματος P . Ορίζουμε τον τελεστή $\mathcal{S}$ ως:

$$\mathcal{S}(S) = S \cup T_S \cup F_S.$$

Ο τελεστής $\mathcal{S}$ είναι επίσης μονοτονικός, άρα έχει ελάχιστο σταθερό σημείο, το οποίο συμβολίζουμε με M_P^S . Το M_P^S καλείται η Διαζευκτική Καλώς-Θεμελιωμένη Κατάσταση (Disjunctive Well-Founded State) του P και θεωρείται ότι αποδίδει το νόημα του P . Στη συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω ορισμών.

Παράδειγμα 4.1. Έστω το πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} r_1 : e_1 \vee e_2 \leftarrow \text{not } d_1 \\ r_2 : b_1 \vee d_1 \end{aligned}$$

Ξεκινάμε με $S_0 = \emptyset$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} T_{S_0} \uparrow 0 &= \emptyset \\ T_{S_0} \uparrow 1 &= \mathcal{T}_{S_0}(\emptyset) = \{b_1 \vee d_1\} \end{aligned}$$

που είναι σταθερό σημείο. Άρα $T_{S_0} = \{b_1 \vee d_1\}$.

$$\begin{aligned} F_{S_0} \downarrow 0 &= NHB(P) \\ F_{S_0} \downarrow 1 &= \mathcal{F}_{S_0}(NHB(P)) = \{\text{not } b_1 \vee \text{not } d_1\} \end{aligned}$$

και $F_{S_0} = \{\text{not } b_1 \vee \text{not } d_1\}$. Θέτουμε τώρα $S_1 = \mathcal{S}(S_0) = S_0 \cup T_{S_0} \cup F_{S_0} = \{b_1 \vee d_1, \text{not } b_1 \vee \text{not } d_1\}$.

$not\ d_1\}$.

$$T_{S_1} \uparrow 0 = \emptyset$$

$$T_{S_1} \uparrow 1 = T_{S_1}(\emptyset) = \{b_1 \vee d_1, e_1 \vee e_2 \vee not\ b_1\}$$

άρα $T_{S_1} = T_{S_1} \uparrow 1$.

$$F_{S_1} \downarrow 0 = NHB(P)$$

$$F_{S_1} \downarrow 1 = T_{S_1}(NHB(P)) = \{not\ b_1 \vee not\ d_1\}$$

και $F_{S_1} = \{not\ b_1 \vee not\ d_1\}$.

Είναι εύκολο να δούμε, ότι το σύνολο $S_2 = \mathcal{S}(S_1) = \{b_1 \vee d_1, e_1 \vee e_2 \vee not\ b_1, not\ b_1 \vee not\ d_1\}$ είναι σταθερό σημείο του τελεστή $\mathcal{S}$, δηλαδή $S_2 = M_P^S$.

Στο [4] δίνονται επίσης δύο θεωρήματα σχετικά με τη σημασιολογία που μόλις περιγράψαμε. Το πρώτο τη συνδέει με την WFS των κλασσικών λογικών προγραμμάτων.

Θεώρημα 4.1. *Για τα προγράμματα χωρίς διαζεύξεις η DWFS συμπίπτει με την WFS.*

Εκτός όμως του ότι οι δύο σημασιολογίες συμφωνούν, αναφέρεται ότι οι αντίστοιχοι τελεστές συμπεριφέρονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σε κάθε βήμα της διαδικασίας κατασκευής. Επιπλέον, η DWFS επεκτείνει την κλασσική σημασιολογία σταθερού σημείου των διαζευκτικών προγραμμάτων χωρίς άρνηση, όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.4.

Θεώρημα 4.2. *Για τα διαζευκτικά προγράμματα που δεν περιέχουν άρνηση, η DWFS είναι ισοδύναμη με τον χαρακτηρισμό σταθερού σημείου της σημασιολογίας της ελάχιστης κατάστασης-μοντέλου και δίνει έναν χαρακτηρισμό σταθερού σημείου της GCWA.*

4.2.2 Χαρακτηριστικά

Η σημασία του προγράμματος αποδίδεται μέσω μίας γ-κατάστασης, δηλαδή ενός συνόλου από διαζεύξεις λεκτικών. Αν S είναι μία γ-κατάσταση και F ένας τύπος, η τιμή αληθείας του F ως προς την S είναι *true* αν είναι αληθής σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα της S , *false* αν είναι ψευδής σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα της S και 0 διαφορετικά.

Ο κανόνας άρνησης, στον οποίο βασίζεται η DWFS, είναι η $GNAF_0$. Ωστόσο μπορεί να οριστεί πάνω σε άλλες εκδοχές της γενικευμένης άρνησης μέσω αποτυχίας ($GNAF$), που προσεγγίζουν λιγότερο ή περισσότερο την GCWA. Άλλωστε, για προγράμματα χωρίς άρνηση, η DWFS δίνει αποτελέσματα ταυτόσημα με την GCWA.

Η σημασιολογία DWFS επεκτείνει την Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία των προγραμμάτων χωρίς διαζεύξεις και την κλασσική σημασιολογία σταθερού σημείου των διαζευκτικών προγραμμάτων χωρίς άρνηση. Η σχέση της με την σημασιολογία τέλειου μοντέλου δεν διερευνάται σε βάθος στο [4], ωστόσο δίνονται παραδείγματα, όπου τα αποτελέσματά τους ταυτίζονται. Τέλος, αποδεικνύεται ότι διαφέρει από την Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία του Ross.

4.3 D-WFS (Brass, Dix)

Disjunctive Well-Founded Semantics

4.3.1 Ορισμός

Οι Brass και Dix ορίζουν την σημασιολογία τους στο [7] ως την ασθενέστερη που παραμένει αμετάβλητη κάτω από ένα σύνολο μετασχηματισμών προγραμμάτων. Θεωρείται ότι οι μετασχηματισμοί αυτοί εκφράζουν ιδιότητες μίας καλής σημασιολογίας, άλλωστε όλες οι δημοφιλείς προσεγγίσεις ικανοποιούν αυτήν την απαίτηση. Το γεγονός ότι η D-WFS είναι η ασθενέστερη σημασιολογία με αυτό το χαρακτηριστικό, την καθιστά γενική.

Ένα δεύτερο πλεονέκτημά της, είναι ότι είναι διαδικαστική, δηλαδή διαθέτει χαρακτηρισμούς που οδηγούν σε αποδοτική υλοποίηση. Ωστόσο αυτό γίνεται με το τίμημα του περιορισμού των προγραμμάτων στα οποία μπορούν να εφαρμοστεί: θεωρούνται μόνο προγράμματα χωρίς συναρτησιακά σύμβολα. Επίσης, όλοι οι μετασχηματισμοί ορίζονται επάνω στο βασικό ανάπτυγμα του προγράμματος. Στο υπόλοιπο της ενότητας θα ταυτίζουμε το πρόγραμμα με το βασικό του ανάπτυγμα.

Με $\mathcal{P}(P)$ θα συμβολίζουμε το υποσύνολο της B_P , που αποτελείται από βασικά άτομα, των οποίων το κατηγορήμα εμφανίζεται στην κεφαλή τουλάχιστον μίας πρότασης του P . Τα άτομα του $\mathcal{P}(P)$ είναι τα πιθανώς αληθή άτομα.

Ορισμός 4.13. Έστω ένα πρόγραμμα P , δύο καθαρές διαζεύξεις Q, Q' , μία διάζευξη D και ένα άτομο a . Ένας σημασιολογικός τελεστής (semantic operator) $\vdash$ είναι μία δυαδική σχέση ανάμεσα σε λογικά προγράμματα και καθαρές διαζεύξεις, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες (προφανείς) συνθήκες:

1. Δεξιά Αποδυνάμωση (Right Weakening): $\text{An } P \vdash Q \text{ και } Q \subseteq Q' \text{ τότε } P \vdash Q'.$
2. Απαραιτήτως Αληθές (Necessarily True): $\text{An } D \leftarrow \in P \text{ τότε } P \vdash D.$
3. Απαραιτήτως Ψευδές (Necessarily False): $\text{An } a \notin \mathcal{P}(P) \text{ τότε } P \vdash \neg a.$

Ορίζουμε τυπικά τι σημαίνει ότι μία σημασιολογία είναι αμετάβλητη υπό έναν μετασχηματισμό.

Ορισμός 4.14. Έστω ένας μετασχηματισμός προγραμμάτων $Trans$. Θεωρούμε έναν μετασχηματισμό ως μία σχέση που καθορίζει υπό ποιες προϋποθέσεις ένα πρόγραμμα είναι μετασχηματισμός ενός άλλου. Ο $Trans(P)$ δεν είναι γενικά μοναδικά ορισμένος. Λέμε ότι ο σημασιολογικός τελεστής $\vdash$ είναι αμετάβλητος υπό τον $Trans$ αν

$$P \vdash Q \Leftrightarrow Trans(P) \vdash Q$$

για οποιοδήποτε πρόγραμμα P και καθαρή διάζευξη Q .

Καταχρηστικά, θα λέμε απλά ότι “ο $\vdash$ ικανοποιεί τον $Trans$ ” αντί “ο $\vdash$ είναι αμετάβλητος υπό τον $Trans$ ”.

Ορισμός 4.15. Ορίζουμε τους μετασχηματισμούς:

TAUT: Διάγραψε μία πρόταση $A \leftarrow B, \text{not } C$ για την οποία $A \cap B \neq \emptyset$

NMIN: Διάγραψε μία πρόταση $A \leftarrow B, \text{not } C$ αν υπάρχει μία άλλη πρόταση $A' \leftarrow B', \text{not } C'$ με $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ και $C' \subseteq C$.

RED+: Αντικατάστησε μία πρόταση $A \leftarrow B, \text{not } C$ με την $A \leftarrow B, \text{not } (C \cap \mathcal{P}(P))$.

RED-: Διάγραψε μία πρόταση $A \leftarrow B, \text{not } C$ αν υπάρχει μία άλλη πρόταση $A' \leftarrow$, με $A' \subseteq C$.

GPPE: Αντικατάστησε μία πρόταση $A \leftarrow B, \text{not } C$, όπου το B περιέχει ένα άτομο B , με τις προτάσεις

$$A \cup (A_i \setminus \{B\}) \leftarrow (B \setminus \{B\}) \cup B_i, \text{not } (C \cup C_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

όπου $A_i \leftarrow B_i, \text{not } C_i$ ($i = 1, \dots, n$) είναι όλες οι προτάσεις με $B \in A_i$.

Ο TAUT αφορά την διαγραφή ταυτολογιών και ο NMIN προτάσεων που αποτελούν υπερ-σύνολα άλλων απλούστερων.

Αν ένα άτομο A δεν εμφανίζεται στην κεφαλή καμίας πρότασης του προγράμματος, είναι αδύνατον να αποδειχθεί αληθές και συμπεραίνεται άμεσα το $\text{not } A$. Έτσι ο RED+ επιτρέπει την διαγραφή του $\text{not } A$ από το σώμα οποιασδήποτε πρότασης, ως επιβεβαιωμένα αληθούς. Αντίστροφα, αν το πρόγραμμα περιέχει την πρόταση $A_1 \vee \dots \vee A_k \leftarrow$ η άρνησή της είναι οπωσδήποτε ψευδής. Έτσι, το σώμα οποιασδήποτε πρότασης περιέχει το $\text{not } A_1, \dots, \text{not } A_k$ είναι ψευδές, η πρόταση δεν προσφέρει χρήσιμη πληροφορία και ο RED- επιτρέπει την διαγραφή της.

Ο GPPE σημαίνει την αντικατάσταση ενός θετικού λεκτικού στο σώμα μίας πρότασης με τον ορισμό του, δηλαδή τα σώματα όλων των προτάσεων που περιέχουν το λεκτικό στην κεφαλή τους.

Αποδεικνύεται [8] ότι (σχεδόν) οποιαδήποτε ακολουθία των παραπάνω μετασχηματισμών, οδηγεί τελικά σε μία κανονική μορφή του προγράμματος, όπου δεν μπορούν να εφαρμοστούν επιπλέον μετασχηματισμοί, και αυτή η μορφή είναι μοναδική. Θα την συμβολίζουμε με $\text{res}(P)$.

Η σχέση “ασθενέστερη” (weaker) μεταξύ σημασιολογιών, τυπικά ορίζεται ως εξής: Η σημασιολογία $\vdash_1$ είναι ασθενέστερη από τη σημασιολογία $\vdash_2$ αν, για κάθε πρόγραμμα P και καθαρή διάζευξη Q , έχουμε $P \vdash_1 Q \Rightarrow P \vdash_2 Q$. Δηλαδή, σε κάθε διάζευξη, στην οποία η $\vdash_1$ αποδίδει τιμή true , η $\vdash_2$ αποδίδει την ίδια τιμή.

Θεώρημα 4.3. Υπάρχει μία μοναδική ασθενέστατη (weakest) σημασιολογία που ικανοποιεί τους πέντε μετασχηματισμούς TAUT, NMIN, RED+, RED- και GPPE. Επιπλέον, η σημασιολογία αυτή είναι συνεπής και κλειστή κάτω από τα λογικά επακόλουθα. Καλούμε τη σημασιολογία αυτή D-WFS.

Τελικά, η κανονική μορφή ενός προγράμματος P αρκεί για να καθορίσουμε την D-WFS του

P , όπως αποδεικνύεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.4. *Η D-WFS ενός προγράμματος P μπορεί να καθοριστεί άμεσα από την κανονική μορφή $res(P)$ του προγράμματος με τον εξής τρόπο:*

$$P \vdash_{D-WFS} Q \quad \text{ανν} \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists A \subseteq Q \text{ με } (A \leftarrow) \in res(P) \text{ ή} \\ \exists (not\ a) \in Q \text{ και } a \notin P(res(P)) \end{array} \right\}$$

Παρατηρούμε ότι, στην ουσία δεν μπορούμε να εξάγουμε καθαρές διαζεύξεις αρνητικών λεκτικών, παρά μόνο μεμονωμένα αρνητικά λεκτικά.

Όπως προαναφέραμε, η D-WFS διαθέτει και διαδικαστικούς χαρακτηρισμούς ([7], [8]), βασισμένους σε επαναληπτικές διαδικασίες, οι οποίοι επιτρέπουν μία αποδοτική υλοποίησή της.

4.3.2 Χαρακτηριστικά

Η σημασία του προγράμματος αποδίδεται μέσω ενός συνόλου από συγκεκριμένης μορφής καθαρές διαζεύξεις, δηλαδή διαζεύξεις θετικών λεκτικών και μεμονωμένα αρνητικά λεκτικά.

Για προγράμματα χωρίς άρνηση, η D-WFS ταυτίζεται με την σημασιολογία της GCWA. Ωστόσο, ο ορισμός της δύναται να τροποποιηθεί ώστε να επεκτείνει, εναλλακτικά, την WGCWA [7].

Η σημασιολογία D-WFS επεκτείνει την Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία των προγραμμάτων χωρίς διαζεύξεις [7]. Αποδεικνύεται όμως αυστηρά ασθενέστερη από την σημασιολογία τέλειου μοντέλου [7]. Επίσης, διαφέρει από την Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία του Ross, η οποία άλλωστε ικανοποιεί μόνον έναν από τους μετασχηματισμούς που ορίσαμε.

4.4 Στατική Σημασιολογία (Przymusinski)

Static Semantics

4.4.1 Ορισμός

Η σημασιολογία που προτείνει ο Przymusinski στο [25] στηρίζεται στην έννοια των στατικών επεκτάσεων και την ελάχιστη από αυτές, που ονομάζεται στατική ολοκλήρωση (static completion) του προγράμματος. Και σε αυτήν την ενότητα, ταυτίζουμε το λογικό πρόγραμμα με το βασικό του ανάπτυγμα, ωστόσο δεν αποκλείουμε την περίπτωση αυτό να είναι άπειρο.

Για να μπορέσει ο συγγραφέας να εκφράσει με τυπικό τρόπο την κατά παραδοχή άρνηση που θα χρησιμοποιήσει, δηλαδή τον τελεστή *not*, εισάγει έναν επιπλέον τελεστή πεποίθησης (belief operator), που καλεί B .

Οι τύποι και τα άτομα της επεκτεταμένης αυτής γλώσσας καλούνται αντικειμενικά, αν δεν

περιέχουν τον τελεστή πεποίθησης. Αν F είναι ένας αντικειμενικός τύπος (objective formula), τότε ο τύπος $\mathcal{B}F$ καλείται άτομο πεποίθησης (belief atom).

Ορισμός 4.16. Μία θεωρία πεποίθησης (belief theory) είναι ένα σύνολο (πιθανώς άπειρο) από προτάσεις της μορφής:

$$b_1 \wedge \dots \wedge b_m \wedge \mathcal{B}G_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{B}G_k \rightarrow a_1 \vee \dots \vee a_l \vee \mathcal{B}F_1 \vee \dots \vee \mathcal{B}F_n$$

όπου τα a_i, b_i είναι αντικειμενικά άτομα (objective atoms) και τα G_i, F_i είναι αντικειμενικοί τύποι.

Θεωρούμε ότι κάθε τέτοια θεωρία περιλαμβάνει επίσης δύο ομάδες αξιωμάτων, που περιγράφουν τις ιδιότητες του τελεστή πεποίθησης. Συγκεκριμένα, η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει αξιώματα συνέπειας της μορφής $\mathcal{B}F \rightarrow \neg \mathcal{B}\neg F$ και η δεύτερη αξιώματα της μορφής $\mathcal{B}(F \wedge G) = \mathcal{B}F \wedge \mathcal{B}G$. Στο εξής θα κάνουμε πάντα αυτή την υπόθεση, χωρίς ιδιαίτερη αναφορά.

Η κεντρική ιδέα της Στατικής Σημασιολογίας (Static Semantics) είναι να μετατρέψουμε κάθε δεδομένο πρόγραμμα σε μία θεωρία πεποίθησης, την οποία επεκτείνουμε ώστε να περιέχει και τα λογικά επακόλουθα του προγράμματος.

Ορισμός 4.17. Η μετάφραση ενός προγράμματος P στην αντίστοιχη θεωρία πεποίθησης $T(P)$ ορίζεται από την αντικατάσταση κάθε πρότασης του P της μορφής

$$a_1 \vee \dots \vee a_l \leftarrow b_1, \dots, b_m, \text{not } c_1, \dots, \text{not } c_n$$

όπου τα a_i, b_i, c_i είναι αντικειμενικά άτομα, με την πρόταση

$$b_1 \wedge \dots \wedge b_m \wedge \mathcal{B}\neg c_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{B}\neg c_n \rightarrow a_1 \vee \dots \vee a_l$$

Η παραπάνω διαδικασία οδηγεί στον τυπικό ορισμό της άρνησης $\text{not } F$ ως $\mathcal{B}\neg F$, δηλαδή “υπάρχει η πεποίθηση ότι το F είναι ψευδές”, που είναι ταυτόσημο με “υπάρχει η πεποίθηση ότι το $\neg F$ είναι αληθές”.

Η μετάφραση των λογικών προγραμμάτων οδηγεί σε μία περιορισμένη κλάση θεωριών πεποίθησης. Συγκεκριμένα πρόκειται για μία υποκλάση των οριστικών θεωριών πεποίθησης, δηλαδή εκείνων που περιέχουν τουλάχιστον ένα αντικειμενικό άτομο στην κεφαλή κάθε πρότασης.

Ο κατά παραδοχή κανόνας άρνησης στον οποίο στηρίζεται η Στατική Σημασιολογία είναι η GCWA. Δηλαδή, υπάρχει η πεποίθηση ότι ένας τύπος F είναι αληθής (διαφορετικά, το $\mathcal{B}F$ είναι αληθές) αν ο τύπος F είναι αληθής σε κάθε ελαχιστικό μοντέλο μιας θεωρίας πεποίθησης. Αντίστοιχα, υπάρχει η πεποίθηση ότι ένας τύπος F είναι ψευδής (διαφορετικά, το $\mathcal{B}\neg F$ είναι αληθές) αν ο τύπος F είναι ψευδής σε κάθε ελαχιστικό μοντέλο της θεωρίας.

Σημειώνουμε, ότι όσον αφορά τις θεωρίες πεποίθησης, ενδιαφερόμαστε για δίτιμα μοντέλα. Έτσι, στον επόμενο ορισμό θεωρούμε την κλασσική αναπαράσταση των μοντέλων,

ως συνόλων από θεωρούμενα ως αληθή άτομα, και την κλασσική σχέση μερικής διάταξης μεταξύ τους, δηλαδή αυτήν της έγκλεισης.

Ορισμός 4.18. Με τον όρο ελαχιστικό μοντέλο μίας θεωρίας πεποίθησης T εννοούμε ένα μοντέλο M της T με την ιδιότητα ότι δεν υπάρχει κανένα μοντέλο N της T , τέτοιο ώστε $N \subseteq M$, που να συμπίπτει με το M ως προς τα άτομα πεποίθησης. Αν ένας τύπος F είναι αληθής σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα της T , τότε γράφουμε:

$$T \models_{\min} F$$

Με άλλα λόγια, τα ελαχιστικά μοντέλα μίας θεωρίας πεποίθησης προκύπτουν δίνοντας αυθαίρετες τιμές στα άτομα πεποίθησης $\mathcal{BF}$ και ελαχιστοποιώντας κατόπιν τα αντικειμενικά άτομα.

Εφόσον έχουμε μετατρέψει ένα πρόγραμμα σε θεωρία πεποίθησης, στη συνέχεια θα επεκτείνουμε την θεωρία αυτή, ώστε να περιλαμβάνει όλα τα άτομα πεποίθησης $\mathcal{BF}$, για τα οποία το F είναι αληθές σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα της επεκτεταμένης θεωρίας. Με άλλα λόγια, θα αναζητήσουμε μία θεωρία η οποία θα εμπεριέχει όλα τα συμπεράσματά της. Μία τέτοια θεωρία καλείται στατική επέκταση.

Ορισμός 4.19. Μία στατική επέκταση (static expansion) μίας θεωρίας πεποίθησης T είναι μία οποιαδήποτε θεωρία πεποίθησης $\hat{T}$ που ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\hat{T} = \text{Con}(T \cup \{\mathcal{BF} : \hat{T} \models_{\min} F\})$$

όπου το F μπορεί να είναι οποιοσδήποτε τύπος και με $\text{Con}(T)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των λογικών επακόλουθων της θεωρίας T .

Στα προηγούμενα δεν προσδιορίζεται πότε ένα άτομο πεποίθησης $\mathcal{BF}$ είναι ψευδές στην στατική επέκταση, αφού αυτό είναι άνευ ενδιαφέροντος.

Κάθε θεωρία πεποίθησης T έχει μία μοναδική ελάχιστη (ως προς τη σχέση της έγκλεισης) στατική επέκταση, την οποία ονομάζουμε στατική ολοκλήρωση $\bar{T}$ της T . Η στατική ολοκλήρωση μίας θεωρίας πεποίθησης μπορεί στη γενική περίπτωση να είναι ασυνεπής, ωστόσο θα δούμε ότι μία οριστική θεωρία πεποίθησης διαθέτει πάντα συνεπή στατική ολοκλήρωση.

Η στατική ολοκλήρωση μπορεί επίσης να οριστεί μέσω του ελάχιστου σταθερού σημείου ενός μονοτονικού τελεστή.

Ορισμός 4.20. Έστω T μία θεωρία πεποίθησης. Ο τελεστής Ψ_T ορίζεται από τον τύπο:

$$\Psi_T(S) = \text{Con}(T \cup \{\mathcal{BF} : S \models_{\min} F\})$$

όπου S είναι μία αυθαίρετη θεωρία πεποίθησης και το F μπορεί να είναι οποιοσδήποτε τύπος.

Σχετικά αποδεικνύονται οι επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 4.1. Μία θεωρία $\hat{T}$ είναι στατική επέκταση της θεωρίας πεποίησης T , αν και μόνο αν η $\hat{T}$ είναι σταθερό σημείο του τελεστή Ψ_T .

Πρόταση 4.2. Ο τελεστής Ψ_T είναι μονοτονικός και άρα έχει ελάχιστο σταθερό σημείο, το οποίο συμβολίζουμε με $\bar{T}$ και ονομάζουμε στατική ολοκλήρωση (static completion) της T .

Η στατική ολοκλήρωση μίας θεωρίας πεποίησης T μπορεί να υπολογιστεί με την παρακάτω διαδικασία.

$$\begin{aligned} T_0 &= \text{Con}(T) \\ T_{a+1} &= \Psi_T(T_a) = \text{Con}(T \cup \{F : T_a \models_{\min} F\}) \text{ για επόμενους διατακτικούς} \\ T_a &= \bigcup_{b < a} T_b \text{ για οριακούς διατακτικούς αριθμούς.} \end{aligned}$$

όπου το F μπορεί να είναι οποιοσδήποτε τύπος.

Κατά την θεωρία της Στατικής Σημασιολογίας, η στατική ολοκλήρωση ορίζει την σημασία μίας θεωρίας πεποίησης.

Ορισμός 4.21. Με τον όρο Στατική Σημασιολογία (Static Semantics) μίας θεωρίας πεποίησης T εννοούμε το σύνολο όλων των τύπων που ανήκουν στην στατική ολοκλήρωση $\bar{T}$ της T .

Επειδή η $\bar{T}$ είναι η ελάχιστη στατική επέκταση μίας θεωρίας, περιλαμβάνει μόνο εκείνους τους τύπους που ανήκουν σε όλες τις στατικές επεκτάσεις της θεωρίας.

Θεώρημα 4.5. Η στατική ολοκλήρωση οποιασδήποτε οριστικής θεωρίας πεποίησης είναι συνεπής. Ιδιαίτερα, η στατική ολοκλήρωση της μετάφρασης οποιουδήποτε (διαζευκτικού ή μη) λογικού προγράμματος είναι πάντα συνεπής.

Για ένα λογικό πρόγραμμα χωρίς διαζεύξεις P , το καλώς-θεμελιωμένο μοντέλο του P αντιστοιχεί στην στατική ολοκλήρωση $\bar{T}$ του T . Σχετικά με τα διαζευκτικά προγράμματα χωρίς άρνηση, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.6. Ένα διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα P , που δεν περιέχει άρνηση, η μετάφρασή του $T = T(P)$ διαθέτει ακριβώς μία συνεπή στατική επέκταση, την στατική ολοκλήρωση $\bar{T}$, η οποία αντιστοιχεί στην σημασιολογία ελαχιστικών μοντέλων της θεωρίας T .

Από την παρουσίαση της θεωρίας της Στατικής Σημασιολογίας προκύπτει, ότι παρουσιάζει πρόβλημα στον υπολογισμό. Δεν μπορεί να εξαχθεί ένα συγκεκριμένο και προκαθορισμένο σύνολο συμπερασμάτων από ένα δεδομένο πρόγραμμα, αφού δεν είναι εν γένει εφικτό να απαριθμήσουμε όλα τα αυθαίρετα άτομα πεποίησης, που είναι αληθή σε όλα τα ελαχιστικά μοντέλα μίας θεωρίας.

4.4.2 Χαρακτηριστικά

Η σημασία του προγράμματος αποδίδεται μέσω της στατικής επέκτασής του, δηλαδή ενός συνόλου από αυθαίρετους τύπους της επεκτεταμένης με τον τελεστή πεποίησης $\mathcal{B}$ λογικής γλώσσας, που θεωρούνται αληθείς.

Η Στατική Σημασιολογία επεκτείνει την σημασιολογία ελαχιστικών μοντέλων, κατ' επέκταση και την GCWA. Επιπλέον, επεκτείνει την σημασιολογία καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου των προγραμμάτων χωρίς διαζεύξεις, ενώ είναι ασθενέστερη από την σημασιολογία τέλειου μοντέλου.

Αποδεικνύεται ότι η Στατική Σημασιολογία ικανοποιεί τους πέντε μετασχηματισμούς TAUT, NMIN, RED+, RED- και enGPPE της προηγούμενης ενότητας και είναι αυστηρά ισχυρότερη από την D-WFS [9]. Η διαφορά τους εντοπίζεται στο γεγονός ότι η D-WFS εκφράζεται μέσω ενός συνόλου καθαρών διαζεύξεων, ενώ η Στατική Σημασιολογία επιτρέπει την αποτίμηση πολύ πιο περίπλοκων τύπων. Αν, ωστόσο, περιοριστούμε σε μία κοινή λογική γλώσσα, τότε οι δύο σημασιολογίες ταυτίζονται [9].

4.5 Καλώς-Θεμελιωμένη Διαζευκτική Σημασιολογία (Wang)

Well-Founded Disjunctive Semantics

4.5.1 Ορισμός

Ο Wang, στο [32] παρουσιάζει ένα σημασιολογικό πλαίσιο για διαζευκτικά προγράμματα, αποκαλούμενο DAS και βασισμένο στην θεωρία της απαγωγής βάσει επιχειρηματολογίας (argumentation-based abduction).

Μέσα στο DAS, μπορούν να οριστούν ένας αριθμός από σημασιολογίες, που αντιπροσωπεύουν διαφορετικές διαισθητικές ιδέες. Πράγματι, παρουσιάζονται τρία τέτοια παραδείγματα σημασιολογιών, μεταξύ των οποίων μία επέκταση της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας, η οποία ονομάζεται Καλώς-Θεμελιωμένη Διαζευκτική Σημασιολογία (Well-Founded Disjunctive Semantics - WFDS).

Στο [33] δίνονται εναλλακτικοί χαρακτηρισμοί της WFDS, μέσω των οποίων διερευνάται και η σχέση της με την D-WFS. Συγκεκριμένα, προστίθεται ένας νέος μετασχηματισμός προγράμματος στο σύνολο των πέντε μετασχηματισμών των Brass, Dix. Η WFDS ορίζεται ως η ασθενέστερη σημασιολογία που ικανοποιεί το επαυξημένο σύνολο μετασχηματισμών.

Η διαισθητική δικαιολόγηση του νέου μετασχηματισμού βασίζεται στον συντακτικό ορισμό της GCWA, τον οποίο ο Wang τροποποιεί για να καλύψει την περίπτωση των γενικών λογικών προγραμμάτων, ως εξής:

Αν, για κάθε πρόταση της μορφής $a \vee \mathcal{A} \leftarrow \text{not } \mathcal{C}$, το $P \vdash (a \vee \mathcal{A} \leftarrow \text{not } \mathcal{C})$ συνεπάγεται το $P \vdash (\mathcal{A} \leftarrow \text{not } \mathcal{C})$, τότε το $\text{not } a$ συμπεραίνεται από το P , όπου $\vdash$ είναι η σχέση του “συμπεραίνεται” με την έννοια της κλασσικής λογικής, a είναι ένα άτομο και τα $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ είναι σύνολα ατόμων, σύμφωνα με τον συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε για τις προτάσεις στην ενότητα 4.3.

Ορισμός 4.22. Έστω ένα διαζευκτικό πρόγραμμα P . Ένα άτομο a στο P ονομάζεται GCWA-αρνητικό (GCWA-negated) αν, για κάθε πρόταση Π στο P της μορφής $a \vee \mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}, \text{not } c_1, \dots, \text{not } c_t$, υπάρχει μία πρόταση $\mathcal{A}' \leftarrow$ στο P , τέτοια ώστε $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \cup \{c_1, \dots, c_t\}$.

Ο μετασχηματισμός HR αφορά ουσιαστικά στην διαγραφή των GCWA-αρνητικών απόμων από τις κεφαλές των προτάσεων, αφού αυτά θεωρούνται ψευδή.

Ορισμός 4.23. *Ορίζουμε τον μετασχηματισμό HR ως εξής:*

HR: Αντικατάστησε μία πρόταση $a \vee A \leftarrow B, \text{not } C$, τέτοια ώστε το a είναι ένα GCWA-αρνητικό άτομο, με την πρόταση $A \leftarrow B, \text{not } C$.

Η WFDS μπορεί να περιγραφεί ως μία (ισχυρότερη) επέκταση της D-WFS.

Θεώρημα 4.7. *Υπάρχει μία μοναδική ασθενέστατη σημασιολογία που ικανοποιεί τους έξι μετασχηματισμούς TAUT, NMIN, RED+, RED-, GPPE και HR. Καλούμε τη σημασιολογία αυτή WFDS.*

Τέλος, αναφέρουμε ότι η WFDS διαθέτει, μεταξύ άλλων, και έναν διαδικαστικό από κάτω προς τα πάνω χαρακτηρισμό [33].

4.5.2 Χαρακτηριστικά

Η σημασία του προγράμματος αποδίδεται μέσω ενός συνόλου από καθαρές διαζεύξεις, δηλαδή διαζεύξεις που περιέχουν μόνο θετικά ή μόνο αρνητικά λεκτικά.

Για προγράμματα χωρίς άρνηση, η WFDS ταυτίζεται με την σημασιολογία της EGCWA. Επιπλέον, επεκτείνει την σημασιολογία καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου των προγραμμάτων χωρίς διαζεύξεις. Ωστόσο, η σχέση της με την σημασιολογία τέλειου μοντέλου δεν εξετάζεται.

Η D-WFS και, κατ' επέκταση, η περιορισμένη εκδοχή της Στατικής Σημασιολογίας δεν ικανοποιούν τον μετασχηματισμό HR και είναι αυστηρά ασθενέστερες από την WFDS. Ωστόσο, η WFDS δεν είναι ισχυρότερη από την πλήρη μορφή της Στατικής Σημασιολογίας. Επίσης, δίνει διαφορετικά αποτελέσματα από την Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία του Ross.

4.6 WFS_d (Alcântara, Damàsio, Pereira)

Well-Founded Semantics with Disjunction

4.6.1 Ορισμός

Η πρόταση των Alcântara, Damàsio και Pereira ονομάζεται Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία με Διάζευξη (Well-Founded Semantics with Disjunction - WFS_d) και παρουσιάζεται στο [2].

Ο ορισμός της WFS_d δίνεται με όρους ελάχιστου σταθερού σημείου. Ο μονοτονικός τελεστής Φ_P , που εισάγεται, χρησιμοποιεί τον επονομαζόμενο μετασχηματισμό της διαίρεσης του προγράμματος (program division), για να εξάγει τα αληθή και άγνωστα άτομα από ένα σύνολο ερμηνειών. Ο Φ_P αποτελεί γενίκευση του τελεστή Ω_P ώστε να χειρίζεται σύνολα ερμηνειών (αντί μεμονωμένες ερμηνείες. Ο Ω_P , με την σειρά του, είναι ένας μονοτονικός τε-

λεστής για τον υπολογισμό του καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου των προγραμμάτων χωρίς διαζεύξεις, εναλλακτικός αυτού της ενότητας 3.4, ο οποίος δίνεται στο [21].

4.6.2 Χαρακτηριστικά

Η σημασιολογία WFS_d αποδίδει το νόημα του προγράμματος μέσα από ένα σύνολο (τρίτιμων) μοντέλων.

Όσον αφορά την ερμηνεία της άρνησης, η WFS_d αποτελεί επέκταση της EGCWA.

Επιπλέον, επεκτείνει την σημασιολογία καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου των προγραμμάτων χωρίς διαζεύξεις, αλλά όχι και την σημασιολογία τέλειου μοντέλου των διαζευκτικών προγραμμάτων.

Σχετικά με τις υπόλοιπες επεκτάσεις της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας, αποδεικνύεται ότι διαφέρει από τις περισσότερες. Συγκεκριμένα, στο [2] δίνονται σχετικά αποτελέσματα για την Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία του Ross, την D-WFS και την Καλώς-Θεμελιωμένη Διαζευκτική Σημασιολογία του Wang. Ιδιαίτερα, αποδεικνύεται αυστηρά ισχυρότερη από την D-WFS, αφού ικανοποιεί τους πέντε μετασχηματισμούς TAUT, NMIN, RED+, RED- και GPPE και η D-WFS είναι εξ ορισμού η ασθενέστερη σημασιολογία με αυτήν την ιδιότητα.

5. ΑΠΕΙΡΟΤΙΜΗ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΑ

Η σημασιολογία των απειρότιμων μοντέλων (infinite-valued models) [10] προτάθηκε το 2007 από τους Cabalar, Pearce, Ροντογιάννη και Wadge και επεκτείνει τόσο την σημασιολογία ελαχιστικών μοντέλων για τα διαζευκτικά προγράμματα χωρίς άρνηση, όσο και την σημασιολογία καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου για τα γενικά προγράμματα χωρίς διαζεύξεις.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της προσέγγισης αυτής είναι ότι, αντίθετα με όσες προηγούμενα αναφέραμε, είναι καθαρά μοντελοθεωρητική. Τα μοντέλα που εξετάζονται εντάσσονται σε μία νέα λογική με άπειρες τιμές αληθείας. Η ιδέα του λογισμού με άπειρες τιμές εισήχθη αρχικά στο [27], όπου αναπτύχθηκε μία σημασιολογία ελάχιστου (απειρότιμου) μοντέλου για προγράμματα χωρίς διαζεύξεις και αποδείχθηκε ότι επεκτείνει την σημασιολογία καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου.

Στην περίπτωση των διαζευκτικών προγραμμάτων, η απειρότιμη σημασιολογία ταυτίζει την σημασία του προγράμματος με το σύνολο των ελαχιστικών απειρότιμων μοντέλων του, σε αναλογία με την σημασιολογία των προγραμμάτων χωρίς άρνηση.

Αν και στο [27] η απειρότιμη σημασιολογία ορίζεται για κάθε γενικό πρόγραμμα χωρίς διαζεύξεις, στο [10] μελετώνται μόνο προγράμματα, των οποίων το βασικό ανάπτυγμα είναι πεπερασμένο· ουσιαστικά, προγράμματα τα οποία δεν περιέχουν συναρτησιακά σύμβολα. Ακολουθείται άλλωστε η διαδεδομένη πρακτική της απευθείας μελέτης του βασικού αναπτύγματος αντί της μελέτης του προγράμματος καθαυτού. Στο εξής κάθε αναφορά μας σε ένα πρόγραμμα, θα πρέπει να ταυτίζεται με το πεπερασμένο βασικό ανάπτυγμά του, με άλλα λόγια θα θεωρούμε μόνο πεπερασμένα προγράμματα χωρίς μεταβλητές. Σχετικά με τον περιορισμό αυτόν, οι συγγραφείς σημειώνουν ότι γίνεται με σκοπό την απλούστευση της παρουσίασης και τα αποτελέσματά τους μπορούν να γενικευθούν άμεσα στο σύνολο των γενικών προγραμμάτων.

5.1 Απειρότιμα Μοντέλα

Βασική ιδέα πίσω από την απειρότιμη σημασιολογία, είναι ότι ο διαχωρισμός μεταξύ της κλασικής άρνησης από την κατά παραδοχή άρνηση θα ήταν χρήσιμο να αντικατοπτρίζεται από διαφορετικές τιμές αληθείας. Έτσι, εκτός από τις τρεις γνωστές μας τιμές, εισάγονται επιπλέον άπειρες το πλήθος διαβαθμίσεις των τιμών *true* και *false*.

Ας εξετάσουμε για παράδειγμα το επόμενο πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} p &\leftarrow \\ r &\leftarrow \text{not } p \\ s &\leftarrow \text{not } q \end{aligned}$$

Με βάση την υπόθεση του κλειστού κόσμου, τα p και s χαρακτηρίζονται και τα δύο αληθή. Θα μπορούσαμε ωστόσο να ισχυριστούμε ότι το p είναι κατά κάποιο τρόπο “αληθέστερο” από το s . Συγκεκριμένα, το p είναι αδιαμφισβήτητα αληθές, επειδή υπάρχει μία πρόταση

στο πρόγραμμα, η οποία το δηλώνει ρητώς. Από την άλλη, το s θεωρείται αληθές, μόνον επειδή δεν υπάρχει κάποιος λόγος που μας αναγκάζει να θεωρήσουμε το q αληθές. Για να εκφράσουμε τυπικά αυτήν την διαφορά, εισάγουμε στην λογική μας μία νέα τιμή αληθείας, T_1 . Θα την εκλαμβάνουμε ως αληθή μεν, αλλά ασθενέστερη από την “πραγματική” αληθή τιμή, την οποία στο εξής θα σημειώνουμε με T_0 . Αναλόγως εισάγουμε μία ασθενώς ψευδή τιμή F_1 , που θα εκλαμβάνεται ως “λιγότερο ψευδής” από την “πραγματική” ψευδή τιμή F_0 .

Σύμφωνα με το προηγούμενο σκεπτικό, μπορούμε να πούμε ότι η κατά παραδοχή άρνηση συνδυάζει την κλασσική άρνηση με μία αποδυνάμωση των τιμών, δηλαδή $\text{not } F_0 = T_1$ και $\text{not } T_0 = F_1$. Κατ’ επέκταση, αν συνδυάσουμε την κατά παραδοχή άρνηση με μία ήδη αποδυναμωμένη τιμή αληθείας, θα πρέπει να προκύψει μία ακόμη πιο αποδυναμωμένη τιμή. Έτσι ορίζουμε μία ολόκληρη ακολουθία $T_1, T_2, T_3, \dots$ από αληθείς τιμές, κάθε μία ασθενέστερη από την προηγούμενή της, καθώς και μία ακολουθία $F_1, F_2, F_3, \dots$ από όλο και ασθενέστερες ψευδείς τιμές. Επειδή λοιπόν, μέσα σε ένα πρόγραμμα μπορεί να εμφανίζεται οποιαδήποτε ακολουθία, από αναφορές μέσω άρνησης, απαιτείται άπειρο πλήθος τόσο αληθών όσο και ψευδών τιμών, οι οποίες θα εκφράζουν διάφορα επίπεδα αλήθειας και ψεύδους. Μάλιστα, στο [27], ορίζεται ένα T_a και ένα F_a για κάθε μετρήσιμο διατακτικό αριθμό a , ωστόσο ο περιορισμός μας σε πεπερασμένα προγράμματα αναιρεί αυτήν την ανάγκη.

Τέλος, το σύνολο των τιμών περιλαμβάνει επίσης την άγνωστη τιμή 0 και θεωρείται διατεταγμένο, ως εξής:

$$F_0 < F_1 < \dots < 0 < \dots < T_1 < T_0$$

Το παραπάνω σύνολο λογικών τιμών θα σημειώνεται με V .

Κάθε τιμή του V αντιστοιχίζεται σε έναν φυσικό αριθμό που ονομάζεται τάξη (order) της τιμής:

Ορισμός 5.1. Η τάξη μίας τιμής αληθείας ορίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \text{order}(F_n) &= n \\ \text{order}(T_n) &= n \\ \text{και } \text{order}(0) &= +\infty. \end{aligned}$$

Στο πλαίσιο της νέας λογικής που ορίσαμε, η έννοια της ερμηνείας Herbrand γενικεύεται για να συμπεριλάβει το σύνολο των τιμών αληθείας.

Ορισμός 5.2. Μία απειρότιμη ερμηνεία (infinite-valued interpretation) I ενός διαζευκτικού προγράμματος P είναι μία απεικόνιση από την βάση Herbrand B_P του P στο σύνολο V .

Προφανώς η τιμή στην οποία απεικονίζεται ένα άτομο A ταυτίζεται με την τιμή $I(A)$ του ατόμου ως προς την I . Για έναν σύνθετο τύπο, ο ορισμός της λογικής τιμής του ως προς μία απειρότιμη ερμηνεία έχει ως ακολούθως:

Ορισμός 5.3. Έστω ένα γενικό πρόγραμμα P , δύο τύποι E, G στο P και μία απειρότιμη

ερμηνεία $I = \langle T, F \rangle$ του P . Τότε

$$\begin{aligned} I(\text{not } E) &= \begin{cases} T_{n+1}, & \text{αν } I(E) = F_n \\ F_{n+1}, & \text{αν } I(E) = T_n \\ 0, & \text{αν } I(E) = 0 \end{cases} \\ I(E \vee G) &= \max\{I(E), I(G)\} \\ I(E \wedge G) &= \min\{I(E), I(G)\} \\ I(E \leftarrow G) &= \begin{cases} T_0, & \text{αν } I(E) \geq I(G) \\ I(E), & \text{αν } I(E) < I(G) \end{cases} \end{aligned}$$

Η ιδιότητα του μοντέλου για μία απειρότιμη ερμηνεία ορίζεται με τον ίδιο τρόπο που ορίζεται και για τις κλασσικές και τις τρίτιμες ερμηνείες. Δηλαδή, για να είναι μία απειρότιμη ερμηνεία μοντέλο ενός προγράμματος, απαιτείται να αποδίδει σε όλες τις προτάσεις του την τιμή T_0 , που ταυτίζεται με την κλασσική αληθή τιμή (*true*).

Ορισμός 5.4. Έστω ένα γενικό πρόγραμμα P και μία απειρότιμη ερμηνεία I του P . Η I ικανοποιεί μία πρόταση

$$A_1 \vee \dots \vee A_n \leftarrow L_1, \dots, L_m$$

του P αν

$$I(A_1 \vee \dots \vee A_n) \geq \min\{I(L_1), \dots, I(L_m)\}.$$

Επιπλέον, η I είναι απειρότιμο μοντέλο του P αν ικανοποιεί όλες τις προτάσεις του P .

Στον επόμενο ορισμό εισάγονται συμβολισμοί για κάθε υποσύνολο μίας ερμηνείας, το οποίο σχετίζεται με μία ορισμένη λογική τιμή ή με μία ορισμένη τάξη.

Ορισμός 5.5. Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα, I μία απειρότιμη ερμηνεία του P και $v \in V$ μία λογική τιμή. Τότε $I \parallel v = \{p \in B_P : I(p) = v\}$.

Επίσης, αν $n < \omega$, τότε $I \# n = \{(p, v) \in I : \text{order}(v) = n\}$.

Όπως αναφέρθηκε, η απειρότιμη σημασιολογία είναι μία σημασιολογία ελαχιστικών μοντέλων, συνεπώς απαιτείται ο ορισμός μίας σχέσης διάταξης για απειρότιμες ερμηνείες. Οι επόμενοι ορισμοί περιγράφουν ακριβώς μία τέτοια σχέση μερικής διάταξης.

Ορισμός 5.6. Έστω I, J δύο απειρότιμες ερμηνείες και $n < \omega$. Γράφουμε $I =_n J$, αν για κάθε $k \leq n$, $I \parallel T_k = J \parallel T_k$, και $I \parallel F_k = J \parallel F_k$.

Ορισμός 5.7. Έστω I, J δύο απειρότιμες ερμηνείες και $n < \omega$. Γράφουμε $I \sqsubseteq_n J$, αν για κάθε $k < n$, $I =_k J$ και είτε $I \parallel T_n \subset J \parallel T_n$ και $I \parallel F_n \supseteq J \parallel F_n$, είτε $I \parallel T_n \subseteq J \parallel T_n$ και $I \parallel F_n \supset J \parallel F_n$. Γράφουμε $I \sqsubseteq_n J$ αν $I =_n J$ ή $I \sqsubseteq_n J$.

Ορισμός 5.8. Έστω I, J δύο απειρότιμες ερμηνείες. Γράφουμε $I \sqsubseteq_\infty J$, αν υπάρχει $n < \omega$ (το οποίο εξαρτάται από τις I και J) τέτοιο ώστε $I \sqsubseteq_n J$. Γράφουμε $I \sqsubseteq_\infty J$ αν $I = J$ ή $I \sqsubseteq_\infty J$.

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, όταν συγκρίνουμε δύο απειρότιμες ερμηνείες, αρχικά λαμβάνουμε υπόψιν μόνο τα άτομα εκείνα, τα οποία έχουν τιμή T_0 ή F_0 (τις κλασι-

κές τιμές αληθείας) ως προς μία τουλάχιστον από τις δύο ερμηνείες. Εξετάζοντας τις δύο συνθήκες του ορισμού 5.7 αποφαινόμεστε αν οι δύο ερμηνείες είναι μη συγκρίσιμες (αν ισχύουν και οι δύο συνθήκες), συνδέονται με την σχέση μερικής διάταξης $\sqsubseteq_\infty$ (αν ισχύει ακριβώς μία από τις δύο συνθήκες), ή είναι ίσες μεταξύ τους σε επίπεδο κλασσικών τιμών αληθείας (δεν ισχύει καμία από τις συνθήκες). Στην τελευταία περίπτωση πρέπει να εξετάσουμε τα άτομα που έχουν τιμή T_1 ή F_1 , κατόπιν την τιμή T_2 ή F_2 κ.ο.κ., μέχρις ότου να καταλήξουμε σε οριστικό συμπέρασμα.

Οι έννοιες του ελαχιστικού και του ελάχιστου απειρότιμου μοντέλου ορίζονται με τον συνηθισμένο τρόπο, με βάση την σχέση μερικής διάταξης $\sqsubseteq_\infty$. Το σύνολο των ελαχιστικών μοντέλων ενός προγράμματος εκφράζει το νόημά του, σύμφωνα με την απειρότιμη σημασιολογία.

Παράδειγμα 5.1. Έστω το πρόγραμμα:

$$b \vee I \leftarrow \text{not } p$$

$$I \vee p \leftarrow$$

Τα ελαχιστικά απειρότιμα μοντέλα του παραπάνω προγράμματος είναι τα:

$$\{(I, T_0), (p, F_0), (b, F_0)\}$$

$$\{(I, F_0), (p, T_0), (b, F_1)\}$$

$$\{(I, F_1), (p, T_0), (b, F_0)\}.$$

5.2 Ιδιότητες των Απειρότιμων Μοντέλων

Κρίσιμο αποτέλεσμα της θεωρίας των απειρότιμων μοντέλων, αποτελεί η ύπαρξη τους για κάθε λογικό πρόγραμμα. Για τα προγράμματα χωρίς διαζεύξεις, αποδεικνύεται ότι διαθέτουν μοναδικό ελάχιστο απειρότιμο μοντέλο.

Στο [27] δίνεται ένας χαρακτηρισμός της απειρότιμης σημασιολογίας για προγράμματα χωρίς διαζεύξεις, με όρους ελάχιστου σταθερού σημείου. Ο σχετικός τελεστής περιγράφεται στον επόμενο ορισμό, μέσω της λογικής τιμής που αποδίδει σε κάθε άτομο $p \in B_P$, δεδομένης μιας απειρότιμης ερμηνείας I .

Ορισμός 5.9. Έστω P ένα γενικό πρόγραμμα χωρίς διαζεύξεις και I μία απειρότιμη ερμηνεία του P . Ο τελεστής T_P ορίζεται ως εξής:

$$T_P(I)(p) = \text{lub}\{I(I_1, \dots, I_n) : p \leftarrow I_1, \dots, I_n \in P\}$$

Ο T_P ονομάζεται τελεστής άμεσου επακόλουθου του P .

Ο τελεστής T_P είναι καλά ορισμένος, αφού κάθε υποσύνολο του συνόλου V των τιμών αληθείας έχει ελάχιστο άνω φράγμα (lub). Μέσω του T_P μπορεί να κατασκευαστεί (η διαδικασία περιγράφεται στο [27]) μία απειρότιμη ερμηνεία M_P , για την οποία αποδεικνύεται ότι είναι μοντέλο του προγράμματος, καθώς και τα ακόλουθα δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 5.1. Το απειρότιμο μοντέλο M_P είναι το ελάχιστο (ως προς την σχέση $\sqsubseteq_\infty$) μεταξύ

όλων των απειρότιμων μοντέλων του P .

Θεώρημα 5.2. Το απειρότιμο μοντέλο M_P είναι το ελάχιστο (ως προς την σχέση $\sqsubseteq_\infty$) μεταξύ όλων των σταθερών σημείων του T_P .

Ένα ακόμη σημαντικό αποτέλεσμα από το [27] αφορά την σχέση που συνδέει την απειρότιμη σημασιολογία με την σημασιολογία καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου για τα προγράμματα χωρίς διαζεύξεις. Όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα, η πρώτη επεκτείνει την δεύτερη και η διαφοροποίησή της εντοπίζεται μόνον στην χρήση των αποδυναμωμένων τιμών αληθείας.

Θεώρημα 5.3. Έστω N_P η απειρότιμη ερμηνεία, η οποία προκύπτει από το M_P αν αντικαταστήσουμε όλες τις αληθείς τιμές με *true* και όλες τις ψευδείς τιμές με *false*. Τότε, το N_P είναι το καλώς-θεμελιωμένο μοντέλο του P .

Σε συμμετρία με την περίπτωση των προγραμμάτων χωρίς άρνηση, τα γενικά διαζευκτικά προγράμματα δεν διαθέτουν απαραίτητα μοναδικό ελάχιστο απειρότιμο μοντέλο, αποδεικνύεται όμως ότι διαθέτουν τουλάχιστον ένα ελαχιστικό. Το σύνολο των ελαχιστικών μοντέλων του προγράμματος αποδίδει το νόημά του.

Θεώρημα 5.4. Κάθε γενικό διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα διαθέτει ένα μη κενό σύνολο ελαχιστικών απειρότιμων μοντέλων.

Επιπλέον, τα ελαχιστικά απειρότιμα μοντέλα ενός προγράμματος χωρίς άρνηση περιλαμβάνουν μόνο τις τιμές T_0, F_0 : ουσιαστικά είναι κλασσικά (δίτιμα) μοντέλα. Μάλιστα ταυτίζονται με τα ελαχιστικά κλασσικά μοντέλα του προγράμματος.

Θεώρημα 5.5. Έστω P ένα διαζευκτικό πρόγραμμα χωρίς άρνηση. Τότε

1. Αν M είναι ένα κλασσικό ελαχιστικό μοντέλο του P , τότε το M είναι επίσης ένα ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο του P .
2. Αν M είναι ένα ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο του P τότε το M αποδίδει σε κάθε άτομο μία λογική τιμή τάξης 0 και είναι ένα ελαχιστικό κλασσικό μοντέλο του P .

Για τις αποδείξεις των δύο προηγούμενων θεωρημάτων παραπέμπουμε στο [10].

Το σύνολο των ελαχιστικών απειρότιμων μοντέλων ενός προγράμματος είναι πεπερασμένο, καθώς η μέγιστη τάξη των τιμών αληθείας, που εμφανίζονται σε ένα ελαχιστικό μοντέλο, περιορίζεται όπως αποδεικνύεται από τον αριθμό των ατόμων² που περιέχει το πρόγραμμα.

Ορισμός 5.10. Έστω P ένα διαζευκτικό πρόγραμμα και M ένα απειρότιμο μοντέλο του P . Λέμε ότι το M περιέχει ένα χάσμα (*gar*) στην τάξη $\delta \in \omega$, αν

1. Για κάθε $n < \delta$, υπάρχει ένα άτομο p στο P με $\text{order}(M(p)) = n$.
2. Δεν υπάρχει κάποιο άτομο p στο P με $\text{order}(M(p)) = \delta$.
3. Υπάρχει ένα άτομο p στο P τέτοιο ώστε $\delta < \text{order}(M(p)) < \infty$.

²Υπενθυμίζουμε ότι ταυτίζουμε το πρόγραμμα με το βασικό του ανάπτυγμα, το οποίο θεωρήσαμε πεπερασμένο. Έπεται ότι το πλήθος των ατόμων είναι πεπερασμένο.

Θεώρημα 5.6. Έστω P ένα διαζευκτικό πρόγραμμα, B_P η βάση Herbrand του P και M ένα ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο του P . Τότε, για κάθε άτομο $p \in B_P$, $M(p) \in \{0, F_0, T_0, \dots, F_{|B_P|-1}, T_{|B_P|-1}\}$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ένα ελαχιστικό μοντέλο του P δεν μπορεί να περιέχει χάσματα, συνεπώς αποδίδει αναγκαστικά τιμές από το σύνολο που προσδιορίζεται από το θεώρημα.

Υποθέτουμε ότι το M περιέχει ένα χάσμα στην τάξη $\delta \in \omega$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο, κατασκευάζοντας ένα μοντέλο M^* του P , τέτοιο ώστε $M^* \sqsubset_\infty M$. Έστω $m > \delta$ ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο $M \# m \neq \emptyset$. Θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

1. Υπάρχει κάποιο άτομο p τέτοιο ώστε $(M \# m)(p) = T_m$. Ορίζουμε την ερμηνεία M^* ως εξής:

$$M^*(p) = \begin{cases} T_{m+1}, & \text{αν } M(p) = T_m \\ M(p), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

2. Δεν υπάρχει κάποιο άτομο p τέτοιο ώστε $(M \# m)(p) = T_m$. Ορίζουμε την ερμηνεία M^* ως εξής:

$$M^*(p) = \begin{cases} T_{n-1}, & \text{αν } M(p) = T_n \text{ και } n > \delta \\ F_{n-1}, & \text{αν } M(p) = F_n \text{ και } n > \delta \\ M(p), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Προφανώς $M^* \sqsubset_\infty M$ και στις δύο περιπτώσεις. Επιπλέον αποδεικνύεται εύκολα, με απλή εξέταση των πιθανών τιμών που η M^* αποδίδει στην κεφαλή και το σώμα μίας τυχαίας πρότασης του P , ότι και στις δύο περιπτώσεις η M^* ικανοποιεί την πρόταση και άρα είναι μοντέλο του P . Συνεπώς, αν ένα μοντέλο του P περιέχει χάσμα, δεν μπορεί να είναι ελαχιστικό. $\square$

5.3 Χαρακτηριστικά

Η Απειρότιμη Σημασιολογία αποδίδει το νόημα του προγράμματος μέσα από ένα σύνολο (απειρότιμων) μοντέλων.

Στο [10] δεν γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην φύση της σχέσης της Απειρότιμης σημασιολογίας με τους διάφορους κανόνες ερμηνείας της άρνησης.

Αποδεικνύεται όμως, ότι επεκτείνει τόσο την σημασιολογία ελαχιστικών μοντέλων των προγραμμάτων χωρίς άρνηση, όσο και την σημασιολογία καλώς-θεμελιωμένου μοντέλου των προγραμμάτων χωρίς διαζεύξεις. Αντίθετα, δεν διερευνάται η σχέση της με την σημασιολογία τέλει μοντέλου των διαζευκτικών προγραμμάτων.

Επίσης, η σχέση της Απειρότιμης σημασιολογίας με τις υπόλοιπες επεκτάσεις της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας ανιχνεύεται μέσα από μερικά ενδεικτικά παραδείγματα. Συγκεκριμένα, δείχνεται διαφορετική αλλά όχι ασθενέστερη από την Στατική σημασιολογία

του Przymusiński, την D-WFS των Brass, Dix και την WFDS του Wang. Επίσης, φαίνεται ότι διαφέρει και από την WFS_d .

Υπενθυμίζεται ότι η Στατική σημασιολογία και η D-WFS έχουν αποδειχθεί ασθενέστερες από την σημασιολογία τέλειου μοντέλου. Θα είχε συνεπώς ενδιαφέρον να ενισχυθούν τα παραπάνω αποτελέσματα, ενδεχομένως αποδεικνύοντας την Απειρότιμη Σημασιολογία αυστηρά ισχυρότερη από τις δύο προαναφερθείσες.

6. ΑΠΕΙΡΟΤΙΜΗ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα κύρια αποτελέσματα της παρούσας εργασίας. Συγκεκριμένα, μελετάμε την σχέση μεταξύ της δομής των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων με την δομή των ελαχιστικών απειρότιμων μοντέλων τους.

Εξ ορισμού, οποιοδήποτε μοντέλο ενός λογικού προγράμματος είναι επίσης μοντέλο κάθε υποσυνόλου του. Δείχνουμε ότι τα απειρότιμα μοντέλα διατηρούν επιπλέον την ιδιότητα της ελαχιστικότητας, σε κάθε υποσύνολο που ορίζεται από την τοπική στρωματοποίηση του προγράμματος.

Επιπλέον, δείχνουμε ότι η μέγιστη δυνατή τάξη της τιμής αληθείας, που το ελαχιστικό μοντέλο μπορεί να αποδώσει σε ένα άτομο, καθορίζεται από τον αριθμό του στρώματος στο οποίο τοποθετείται το άτομο. Κατ' επέκταση, προκύπτει το βασικό συμπέρασμά μας, ότι το πλήθος των στρωμάτων του προγράμματος αποτελεί άνω φράγμα για την τάξη των τιμών αληθείας που μπορεί να περιλαμβάνονται σε ένα ελαχιστικό μοντέλο του. Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται ανεξάρτητα από κάποια συγκεκριμένη τοπική στρωματοποίηση, συνεπώς μπορούμε να υποθέτουμε μία στρωματοποίηση με ελάχιστο αριθμό στρωμάτων. Θεωρούμε ότι αυτό αποτελεί σημαντική βελτίωση του φράγματος που τέθηκε από το θεώρημα 5.6, αφού στην μέση περίπτωση το πλήθος των στρωμάτων ενός προγράμματος αναμένεται να είναι υποπολλαπλάσιο του πλήθους των ατόμων.

Στην συνέχεια κάνουμε τις ίδιες παραδοχές όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή ταυτίζουμε το πρόγραμμα με το βασικό του ανάπτυγμα και περιοριζόμαστε σε πεπερασμένα προγράμματα. Σε αυτά τα πλαίσια, μπορούμε να ταυτίσουμε επίσης τις έννοιες της στρωματοποίησης και της τοπικής στρωματοποίησης. Επίσης, είναι προφανές ότι κάθε (τοπική) στρωματοποίηση ενός πεπερασμένου προγράμματος είναι επίσης πεπερασμένη.

Ο επόμενος ορισμός εισάγει μερικούς συμβολισμούς που θα διευκολύνουν την διατύπωση των σχετικών αποδείξεων.

Ορισμός 6.1. Έστω P ένα στρωματοποιημένο διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα, $\{S_0, \dots, S_r\}$ μία στρωματοποίηση του P και I μια οποιαδήποτε απειρότιμη ερμηνεία του P . Ορίζουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

- Με P_i ($0 \leq i \leq r$) θα συμβολίζεται το σύνολο των προτάσεων του P , που η κεφαλή τους αποτελείται άτομα του S_i και με P^i το σύνολο $\bigcup_{k=0}^i P_k$.
- Με HB_i ($0 \leq i \leq r$) θα συμβολίζεται το σύνολο των ατόμων, τα οποία εμφανίζονται στις προτάσεις του P_i , και με HB^i το σύνολο $\bigcup_{k=0}^i HB_k$.
- Με I^i θα συμβολίζεται το υποσύνολο της I , που αποδίδει λογικές τιμές μόνο στα άτομα του HB^i .
- Με $S(X)$ θα συμβολίζεται ο αριθμός του στρώματος στο οποίο ανήκει το άτομο X , δηλαδή $S(X) = n$, αν $X \in S_n$.

6.1 Διατήρηση της Ιδιότητας της Ελαχιστικότητας

Από τον ορισμό της στρωματοποίησης, τα άτομα της κεφαλής κάθε πρότασης πρέπει να ανήκουν στο ίδιο μεταξύ τους στρώμα, ενώ τα άτομα του σώματος στο ίδιο ή σε κατώτερο από αυτό των ατόμων της κεφαλής. Συνεπώς, αν επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε στρώμα i ενός προγράμματος, μέσα στις προτάσεις του συνόλου P^i , όπως ορίστηκε προηγουμένως, δεν εμφανίζεται κανένα από τα άτομα των στρωμάτων με αριθμό μεγαλύτερο από i . Κατά αυτήν την έννοια, θα λέγαμε ότι το σύνολο P^i ορίζει ένα "αυτοτελές" υποσύνολο του προγράμματος, για το οποίο το σύνολο HB^i αποτελεί τη βάση Herbrand και το I^i είναι μία έγκυρη απειρότιμη ερμηνεία του. Με άλλα λόγια, μία στρωματοποίηση των ατόμων του προγράμματος ορίζει ταυτόχρονα μία "στρωματοποίηση" των προτάσεων του και κάθε σύνολο P^i αντιστοιχεί στα πρώτα (κατώτερα) i στρώματά του.

Με τα δύο λήμματα που ακολουθούν αποδεικνύουμε, ότι κάθε ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο ενός προγράμματος είναι επίσης ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο κάθε τέτοιου υποσυνόλου του.

Λήμμα 6.1. Έστω P ένα στρωματοποιημένο διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα, $\{S_0, \dots, S_r\}$ μία στρωματοποίηση του P και M μία απειρότιμη ερμηνεία του P . Για κάθε n με $1 \leq n \leq r$, αν το M^n είναι ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο του P^n τότε το M^{n-1} είναι ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο του P^{n-1} .

Απόδειξη.

- Αφού, εξ ορισμού, το M^n και το M^{n-1} αποδίδουν τις ίδιες τιμές αληθείας σε όλα τα άτομα του HB^{n-1} , ικανοποιούν τις ίδιες προτάσεις και άρα το M^{n-1} είναι μοντέλο του P^{n-1} .
- Έστω ότι το M^{n-1} δεν είναι ελαχιστικό μοντέλο του P^{n-1} . Τότε θα υπάρχει μοντέλο N^{n-1} του P^{n-1} , τέτοιο ώστε $N^{n-1} \sqsubset_\infty M^{n-1}$.
Έστω, πιο συγκεκριμένα, ότι $N^{n-1} \sqsubset_k M^{n-1}$, δηλαδή

$$\begin{aligned} N^{n-1} \parallel T_k &\subseteq M^{n-1} \parallel T_k & \text{και} & & N^{n-1} \parallel F_k &\supset M^{n-1} \parallel F_k \\ \text{ή} & & & & & \\ N^{n-1} \parallel T_k &\subset M^{n-1} \parallel T_k & \text{και} & & N^{n-1} \parallel F_k &\supseteq M^{n-1} \parallel F_k \end{aligned}$$

Θα υπάρχει λοιπόν κάποιο άτομο X τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} X &\in N^{n-1} \parallel F_k & \text{και} & & X &\notin M^{n-1} \parallel F_k \\ \text{ή} & & & & & \\ X &\in M^{n-1} \parallel T_k & \text{και} & & X &\notin N^{n-1} \parallel T_k \end{aligned} \tag{1}$$

Ορίζουμε την επέκταση στο P^n του N^{n-1} (συμβολίζουμε με N^n), ως εξής:

$$\text{Για κάθε άτομο } A \in HB^n$$

$$N^n(A) = \begin{cases} N^{n-1}(A) & \text{αν } A \in S_x, x < n \\ M^n(A) & \text{αν } A \in S_n \text{ και } \text{order}(M^n(A)) \leq k \\ T_{k+1} & \text{αν } A \in S_n \text{ και } \text{order}(M^n(A)) > k \end{cases}$$

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι

- i. $N^n \sqsubseteq_k M^n$ και
- ii. το N^n είναι μοντέλο του P^n

Προφανώς τα i. και ii. αντιφάσκουν με την υπόθεσή μας ότι το M^n είναι ελαχιστικό μοντέλο του P^n .

- Για ένα οποιοδήποτε άτομο A , ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$- \text{Av } S(A) < n$$

$$\text{order}(M^n(A)) < k \Rightarrow M^n(A) = N^n(A) \quad (2)$$

$$M^n(A) = F_k \Rightarrow N^n(A) = F_k \quad (\neq) \quad (3)$$

$$N^n(A) = T_k \Rightarrow M^n(A) = T_k \quad (\neq) \quad (4)$$

$$\text{order}(M^n(A)) > k \Rightarrow N^n(A) = F_k \text{ ή } \text{order}(N^n(A)) > k \quad (5)$$

$$- \text{Av } S(A) = n$$

$$\text{order}(M^n(A)) \leq k \Rightarrow M^n(A) = N^n(A) \quad (6)$$

$$\text{order}(M^n(A)) > k \Rightarrow N^n(A) = T_{k+1} \quad (7)$$

- Πρώτα θα δείξουμε το i.:

$$\text{Έχουμε } N^{n-1} \sqsubseteq_k M^{n-1} \Rightarrow N^{n-1} =_{k-1} M^{n-1}.$$

Από την κατασκευή του N^n , ισχύει ότι $\forall A \in HB^{n-1}$, $N^n(A) = N^{n-1}(A)$ και ότι $\forall A \in S_n$ με $\text{order}(M^n(A)) \leq k$, $N^n(A) = M^n(A)$.

Συνεπώς, $N^n =_{k-1} M^n$, ενώ για τάξη k , οι δύο ερμηνείες διαφέρουν ακριβώς σε όσα άτομα διαφέρουν και οι N^{n-1} και M^{n-1} . Δηλαδή, για τα X της σχέσης 1 (τα οποία ανήκουν όλα στην HB^{n-1}), ισχύει επίσης ότι

$$\begin{aligned} X \in N^n \parallel F_k & \quad \text{και} \quad X \notin M^n \parallel F_k \\ \text{ή} \\ X \in M^n \parallel T_k & \quad \text{και} \quad X \notin N^n \parallel T_k \end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε ότι $N^n \sqsubseteq_k M^n$.

- Στην συνέχεια δείχνουμε το ii.:

Αφού υποθέσαμε ότι το N^{n-1} είναι μοντέλο του P^{n-1} , αρκεί να δείξουμε ότι το N^n ικανοποιεί επιπλέον όλες τις προτάσεις του P_n , δηλαδή εκείνες, που οι κεφαλές τους αποτελούνται από άτομα του S_n .

Κάθε πρόταση Π του P_n έχει την μορφή:

$$A_1 \vee \dots \vee A_a \rightarrow B_1, \dots, B_b, \text{not } C_1, \dots, \text{not } C_c$$

όπου για $i = 1 \dots a$, $S(A_i) = n$, για $i = 1 \dots b$, $S(B_i) \leq n$ και για $i = 1 \dots c$, $S(C_i) < n$. Θα εξετάσουμε μία αυθαίρετη πρόταση Π και τις τιμές αληθείας, που οι ερμηνείες M^n και N^n αποδίδουν στα άτομα αυτής, και θα δείξουμε ότι η N^n ικανοποιεί την πρόταση σε κάθε περίπτωση.

Έστω, ότι μεταξύ των ατόμων της κεφαλής της πρότασης, η M^n αποδίδει την μέγιστη τιμή αληθείας σε κάποιο A_j . Για το σώμα, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Α'. Μεταξύ των λεκτικών του σώματος της πρότασης, η M^n αποδίδει την ελάχιστη τιμή αληθείας σε κάποιο $\text{not } C_i$

Α'.1. Αν $\text{order}(M^n(C_i)) < k$, τότε από το 2 έχουμε:

$$\begin{aligned} N^n(C_i) = M^n(C_i) &= V_x, \quad 0 \leq x \leq k-1 \Rightarrow \\ N^n(\text{not } C_i) &= \bar{V}_{x+1} \end{aligned}$$

Α'.1.1. Αν $M^n(\text{not } C_i) = N^n(\text{not } C_i) = T_{x+1}$, $0 \leq x \leq k-1$:

επειδή η M^n ικανοποιεί την πρόταση Π , έχουμε ότι $M^n(A_j) \geq T_{x+1}$. Τότε από 6 $\Rightarrow N^n(A_j) = M^n(A_j) \Rightarrow N^n(A_j) \geq T_{x+1} = N^n(\text{not } C_i)$. Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει ότι η N^n ικανοποιεί την πρόταση Π , ανεξάρτητα από τα λεκτικά στα οποία αυτή αποδίδει την μέγιστη, για την κεφαλή, και την ελάχιστη, για το σώμα, λογική τιμή, αφού

$$\begin{aligned} \max(N^n(A_1), \dots, N^n(A_a)) &\geq \\ N^n(A_j) &\geq \\ N^n(\text{not } C_i) &\geq \\ \min(N^n(B_1), \dots, N^n(B_b), N^n(\text{not } C_1), \dots, N^n(\text{not } C_c)) & \end{aligned}$$

Ομοίως, σε όλες τις περιπτώσεις που θα εξετάσουμε στα πλαίσια της απόδειξης αυτής, θα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα λεκτικό στο σώμα της πρότασης, στο οποίο η N^n αποδίδει λογική τιμή μικρότερη ή ίση της τιμής $N^n(A_j)$.

A'.1.2. Αν $M^n(not C_i) = N^n(not C_i) = F_{x+1}$, $0 \leq x \leq k-1$:

έχουμε $M^n(A_j) \geq F_{x+1}$. Τότε

$$N^n(A_j) = \begin{cases} M^n(A_j) & \text{αν } M^n(A_j) \leq F_k \text{ ή } M^n(A_j) \geq T_k \\ & \text{(από 6)} \\ T_{k+1} & \text{αν } F_{k+1} \leq M^n(A_j) \leq T_{k+1} \text{ (από 7)} \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση, $N^n(A_j) \geq N^n(not C_i)$

A'.2. Αν $order(M^n(C_i)) = k$:

A'.2.1. Αν $M^n(C_i) = F_k \Rightarrow N^n(C_i) = F_k$ από 3. Συνεπώς $M^n(not C_i) = N^n(not C_i) = T_{k+1} \Rightarrow M^n(A_j) \geq T_{k+1}$, που από 6, 7 μας δίνει $N^n(A_j) = M^n(A_j) \geq T_{k+1}$

A'.2.2. Αν $M^n(C_i) = T_k$, τότε

$$\begin{aligned} M^n(not C_i) &= F_{k+1} \Rightarrow \\ M^n(A_j) &\geq F_{k+1} \Rightarrow \\ N^n(A_j) &\geq T_{k+1} \text{ (από 6, 7)} \end{aligned}$$

Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση, το $N^n(C_i)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή με τάξη $\geq k$, αφού το C_i μπορεί να διατηρεί την τιμή T_k στην N^n ($N^n \parallel T_k \subseteq M^n \parallel T_k$), ή να παίρνει την τιμή F_k ($M^n \parallel F_k \subseteq N^n \parallel F_k$) ή ακόμα και να παίρνει οποιαδήποτε άλλη τιμή με τάξη $> k$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} N^n(C_i) &= V_x, k \leq x < \infty \\ \text{ή } N^n(C_i) &= 0 \\ \Rightarrow N^n(not C_i) &= \bar{V}_{x+1} \\ \text{ή } N^n(not C_i) &= 0 \end{aligned}$$

Για όλα αυτά τα x , ισχύει $\bar{V}_{x+1} \leq T_{k+1} \leq N^n(A_j)$. Ομοίως, $0 < T_{k+1} \leq N^n(A_j)$.

A'.3. Αν $k < order(M^n(C_i)) < \infty$ τότε

$$\begin{aligned} M^n(C_i) &= V_x, k < x < \infty \Rightarrow \\ M^n(not C_i) &= \bar{V}_{x+1} \Rightarrow \\ M^n(A_j) &\geq \bar{V}_{x+1} \Rightarrow \\ N^n(A_j) &\geq T_{k+1} \text{ (από 6, 7)} \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}
 N^n(C_i) &= F_k \\
 \text{ή } N^n(C_i) &= V_x, k < x < \infty \\
 \text{ή } N^n(C_i) &= 0 \text{ (από 5)} \\
 \Rightarrow N^n(\text{not } C_i) &= T_{k+1} \\
 \text{ή } N^n(\text{not } C_i) &= \bar{V}_{x+1}, k < x < \infty \\
 \text{ή } N^n(\text{not } C_i) &= 0
 \end{aligned}$$

Όλες οι παραπάνω πιθανές τιμές του $N^n(\text{not } C_i)$ είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής T_{k+1} και κατά συνέπεια της $N^n(A_j)$.

A'.4. Αν $\text{order}(M^n(C_i)) = \infty$ τότε

$$\begin{aligned}
 M^n(C_i) &= 0 \Rightarrow \\
 M^n(\text{not } C_i) &= 0 \Rightarrow \\
 M^n(A_j) &\geq 0 \Rightarrow \\
 N^n(A_j) &\geq T_{k+1} \text{ (από 6, 7)}
 \end{aligned}$$

Για την τιμή $N^n(\text{not } C_i)$ ισχύουν τα επιχειρήματα που παραθέσαμε στην προηγούμενη υπο-περίπτωση. Δηλαδή, εφαρμόζοντας την σχέση 5, καταλήγουμε όπως και πριν ότι $N^n(\text{not } C_i) \leq N^n(A_j)$

B'. Μεταξύ των λεκτικών του σώματος της πρότασης, η M^n αποδίδει την ελάχιστη τιμή αληθείας σε κάποιο B_i

B'.1. Αν $\text{order}(M^n(B_i)) < k$

B'.1.1. Αν $M^n(B_i) = T_x, x < k$ τότε

$$\begin{aligned}
 M^n(A_j) &\geq T_x \Rightarrow \\
 N^n(A_j) &= M^n(A_j) \text{ (από 6)} \Rightarrow \\
 N^n(A_j) &\geq T_x
 \end{aligned}$$

Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση, από 2, $6 \Rightarrow N^n(B_i) = M^n(B_i) = T_x \leq N^n(A_j)$.

B'.1.2. Αν $M^n(B_i) = F_x, x < k$ τότε

$$\begin{aligned}
 M^n(A_j) &\geq F_x \Rightarrow \\
 N^n(A_j) &= M^n(A_j) \text{ ή } T_{k+1} \text{ (από 6, 7)} \Rightarrow \\
 N^n(A_j) &\geq F_x
 \end{aligned}$$

Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση, από 2, 6 $\Rightarrow N^n(B_i) = M^n(B_i) = F_x \leq N^n(A_j)$

B'.2. Αν $order(M^n(B_i)) = k$

B'.2.1. Αν $M^n(B_i) = T_k$ τότε

$$\begin{aligned} M^n(A_j) &\geq T_k \Rightarrow \\ N^n(A_j) &= M^n(A_j) \text{ (από 6)} \Rightarrow \\ N^n(A_j) &\geq T_k \end{aligned}$$

Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση, το $N^n(B_i)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή με τάξη $\geq k$, αφού το B_i μπορεί να διατηρεί την τιμή T_k στην N^n ($N^n \parallel T_k \subseteq M^n \parallel T_k$), ή να παίρνει την τιμή F_k ($M^n \parallel F_k \subseteq N^n \parallel F_k$) ή ακόμα και να παίρνει οποιαδήποτε άλλη τιμή με τάξη $> k$. Συνεπώς έχουμε $N^n(B_i) = V_x, x \in \{k, \dots, \infty\}$ και βέβαια για αυτά τα x έχουμε $V_x \leq T_k \leq N^n(A_j)$.

B'.2.2. Αν $M^n(B_i) = F_k$ τότε

$$\begin{aligned} M^n(A_j) &\geq F_k \Rightarrow \\ N^n(A_j) &= M^n(A_j) \text{ ή } T_{k+1} \text{ (από 6, 7)} \Rightarrow \\ N^n(A_j) &\geq F_k \end{aligned}$$

Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση, από 3, 6 $\Rightarrow N^n(B_i) = M^n(B_i) = F_k \leq N^n(A_j)$

B'.3. Αν $order(M^n(B_i)) > k$

$$\begin{aligned} M^n(A_j) &\geq V_x, x > k \Rightarrow \\ M^n(A_j) &\geq F_{k+1} \Rightarrow \\ N^n(A_j) &\geq T_{k+1} \text{ (από 6, 7)} \end{aligned}$$

Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση, από 5, 7 $\Rightarrow N^n(B_i) = F_k$ ή $V_x, x \in \{k+1, \dots, \infty\}$. Όλες αυτές οι τιμές είναι μικρότερες ή ίσες του T_{k+1}

□

Είναι εμφανές, ότι η σχέση μεταξύ δύο διαδοχικών στρωμάτων του προγράμματος που αποδείξαμε με το προηγούμενο λήμμα, γενικεύεται άμεσα στο σύνολο των στρωμάτων του.

Λήμμα 6.2. Έστω P ένα στρωματοποιημένο διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα και $\{S_0, \dots, S_r\}$ μία στρωματοποίηση του P . Για οποιαδήποτε απειρότιμη ερμηνεία M , αν η M είναι ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο του P τότε η M^i είναι ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο του P^i , $\forall i \in$

$\{0, \dots, r\}$.

Απόδειξη. Άμεση από το γεγονός ότι $P \equiv P'$, $M \equiv M'$ και το Λήμμα 6.1. □

6.2 Τάξη Τιμών Στρωματοποιημένων Προγραμμάτων

Σε κάθε πρόταση ενός στρωματοποιημένου προγράμματος, τα άτομα που εμφανίζονται αρνητικά στο σώμα της πρέπει να ανήκουν σε στρώμα κατώτερο από αυτά της κεφαλής της. Για το λόγο αυτό, οι προτάσεις των οποίων οι κεφαλές ανήκουν στο πρώτο στρώμα S_0 μίας στρωματοποίησης δεν μπορούν να περιέχουν αρνητικά λεκτικά στο σώμα τους. Με άλλα λόγια, το υποσύνολο P^0 ενός στρωματοποιημένου προγράμματος είναι πάντα ένα κλασσικό λογικό πρόγραμμα χωρίς άρνηση.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, δείξαμε με το θεώρημα 5.5 ότι κάθε ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο ενός τέτοιου προγράμματος είναι ουσιαστικά δίτιμο, αφού αποδίδει σε όλα τα άτομα μία από τις τιμές F_0, T_0 , που ταυτίζονται με τις κλασσικές λογικές τιμές *false, true*.

Συνεπώς τα άτομα του στρώματος 0 ενός προγράμματος έχουν πάντα τιμές τάξης 0 μέσα σε όλα τα ελαχιστικά απειρότιμα μοντέλα του. Το επόμενο θεώρημα, που αποτελεί και το κύριο αποτέλεσμα της παρούσας εργασίας, αποδεικνύει ότι η σχέση αυτή επεκτείνεται σε κάθε στρώμα του προγράμματος. Δηλαδή για κάθε στρώμα S_i , η τάξη των τιμών που μπορούν να πάρουν τα άτομα του S_i είναι το πολύ i . Έτσι, ο αριθμός των στρωμάτων ενός προγράμματος αποτελεί άνω φράγμα της τάξης των λογικών τιμών που αποδίδονται στα άτομά του, από οποιοδήποτε ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο του.

Καθώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα αυτό σε οποιαδήποτε στρωματοποίηση ενός προγράμματος, προκύπτει ότι η τάξη των τιμών φράσσεται ουσιαστικά από τον ελάχιστο δυνατό αριθμό στρωμάτων.

Υπενθυμίζουμε, ότι η τιμή αληθείας 0 (*unknown*) εξαιρείται από το φράγμα που ορίζει το θεώρημα 5.6, δηλαδή περιλαμβάνεται στις πιθανές τιμές που μπορεί να αποδώσει ένα ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο, παρόλο που η τάξη της είναι $+\infty$. Αντίθετα, δεν συμβαίνει το ίδιο στην περίπτωση των στρωματοποιημένων προγραμμάτων και του θεωρήματος 6.1. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε, ότι αυτό συνάδει με την θεωρία της σημασιολογίας τέλειου μοντέλου.

Θεώρημα 6.1. Έστω P ένα στρωματοποιημένο διαζευκτικό λογικό πρόγραμμα, $\{S_0, \dots, S_r\}$ μία στρωματοποίηση του P και M ένα ελαχιστικό απειρότιμο μοντέλο του P . Για οποιοδήποτε άτομο A στην βάση Herbrand B_P του P , $M(A) \in \{F_0, T_0, \dots, F_r, T_r\}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στον αριθμό του στρώματος:

Βασικό Βήμα: Για S_0 , το P^0 είναι ένα λογικό πρόγραμμα χωρίς άρνηση και το M^0 είναι (από Λήμμα 6.2) ένα ελαχιστικό μοντέλο αυτού. Άρα, από το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος 5.5, για κάθε $A \in HB^0$, $MM^0(A) \in \{F_0, T_0\}$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι, αν για κάποιο n , τα άτομα της HB^{n-1} παίρνουν τι-

μέσ στο $\{F_0, T_0, \dots, F_{n-1}, T_{n-1}\}$ μέσω του M^{n-1} , τότε τα άτομα της HB^n , αντίστοιχα, παίρνουν τιμές στο $\{F_0, T_0, \dots, F_n, T_n\}$ μέσω του M^n .

Έστω ότι υπάρχει $X \in HB^n$, με $order(M^n(X)) = k$, για κάποιο $k > n$. Αφού υποθέσαμε ότι $\forall A \in HB^{n-1}$, $M^{n-1}(A) \in \{F_0, T_0, \dots, F_{n-1}, T_{n-1}\}$, συμπεραίνουμε ότι $X \in S_n$. Κατ' επέκταση, κανένα άτομο που εμφανίζεται αρνητικά στο σώμα οποιασδήποτε πρότασης του P^n , δεν μπορεί να έχει τιμή με τάξη μεγαλύτερη από n , αφού δεν μπορεί να ανήκει στο S_n .

Κατασκευάζουμε μία ερμηνεία N^n ως εξής:

$$N^n(A) = \begin{cases} F_n & \text{αν } order(M^n(A)) > n \\ M^n(A) & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Προφανώς $N^n \sqsubseteq_n M^n$. Επίσης, θα δείξουμε ότι το N^n είναι μοντέλο του P^n , που είναι άτοπο, αφού από το Λήμμα 6.2 το M^n είναι ελαχιστικό μοντέλο του P^n . Έτσι θα καταρρίψουμε την υπόθεσή μας για την ύπαρξη ατόμων, στα οποία το M^n αποδίδει τιμές τάξης μεγαλύτερης από n :

Κάθε πρόταση Π του P^n έχει την μορφή:

$$A_1 \vee \dots \vee A_a \rightarrow B_1, \dots, B_b, not C_1, \dots, not C_c$$

όπου για $i = 1 \dots c$, $S(C_i) < n$. Θα εξετάσουμε μία αυθαίρετη πρόταση Π και τις τιμές αληθείας, που οι ερμηνείες M^n και N^n αποδίδουν στα άτομα αυτής, και θα δείξουμε ότι η N^n ικανοποιεί την πρόταση σε κάθε περίπτωση.

Έστω, ότι μεταξύ των ατόμων της κεφαλής της πρότασης, η M^n αποδίδει την μέγιστη τιμή αληθείας σε κάποιο A_j . Για το σώμα, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Α'. Μεταξύ των λεκτικών του σώματος της πρότασης, η M^n αποδίδει την ελάχιστη τιμή αληθείας σε κάποιο $not C_i$:

$$\begin{aligned} S(C_i) &< n \Rightarrow \\ order(M^n(C_i)) &< n \Rightarrow \\ N^n(C_i) = M^n(C_i) = V_x, x &< n \end{aligned} \quad (8)$$

Εφόσον η M^n είναι μοντέλο, πρέπει να ικανοποιεί την πρόταση Π , άρα πρέπει

$$M^n(A_j) \geq M^n(not C_i) \quad (9)$$

A'.1. Αν $M^n(C_i) = F_x \Rightarrow M^n(not C_i) = T_{x+1}$:

$$M^n(A_j) \geq M^n(not C_i) \Rightarrow$$

$$M^n(A_j) \geq T_{x+1} \Rightarrow$$

$$N^n(A_j) = M^n(A_j)$$

αφού $x + 1 \leq n$. Η τελευταία σχέση, σε συνδυασμό με την 8 και την 9, μας δίνει τελικά ότι $N^n(A_j) \geq N^n(not C_i)$

A'.2. Αν $M^n(C_i) = T_x \Rightarrow M^n(not C_i) = F_{x+1}$:

$$M^n(A_j) \geq M^n(not C_i) \Rightarrow$$

$$M^n(A_j) \geq F_{x+1} \Rightarrow$$

$$N^n(A_j) = \begin{cases} F_n, & \text{αν } F_n < M^n(A_j) < T_n \\ M^n(A_j), & \text{αν } M^n(A_j) \leq F_n \text{ ή } M^n(A_j) \geq T_n \end{cases}$$

αφού $x + 1 \leq n$. Η τελευταία σχέση, σε συνδυασμό με την 8 και το ότι $F_{x+1} \leq F_n$, μας δίνει τελικά ότι $N^n(A_j) \geq N^n(not C_i)$

B'. Μεταξύ των λεκτικών του σώματος της πρότασης, η M^n αποδίδει την ελάχιστη τιμή αληθείας σε κάποιο B_i :

Εφόσον η M^n είναι μοντέλο, πρέπει να ικανοποιεί την πρόταση Π, άρα πρέπει $M^n(A_j) \geq M^n(B_i)$

B'.1. Αν $M^n(B_i) = 0$

$$M^n(A_j) \geq M^n(B_i) \Rightarrow$$

$$M^n(A_j) \geq 0 \Rightarrow$$

$$N^n(A_j) = \begin{cases} F_n, & \text{αν } 0 \leq M^n(A_j) < T_n \\ M^n(A_j), & \text{αν } M^n(A_j) \geq T_n \end{cases}$$

Επίσης, έχουμε $N^n(B_i) = F_n$, άρα και στις δύο περιπτώσεις $N^n(A_j) \geq N^n(B_i) = F_n$.

B'.2. Αν $M^n(B_i) = T_x$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

B'.2.1. Αν $x \leq n$:

$$M^n(A_j) \geq M^n(B_i) \Rightarrow$$

$$M^n(A_j) \geq T_x \Rightarrow$$

$$N^n(A_j) = M^n(A_j)$$

Επίσης, για αυτά τα x , έχουμε $N^n(B_i) = M^n(B_i)$, άρα διατηρείται η σχέση

$$N^n(A_j) \geq N^n(B_i) = T_x.$$

B'.2.2. Αν $x > n$:

$$\begin{aligned} M^n(A_j) &\geq M^n(B_i) \Rightarrow \\ M^n(A_j) &\geq T_x \Rightarrow \\ N^n(A_j) &= \begin{cases} F_n, & \text{αν } T_x \leq M^n(A_j) < T_n \\ M^n(A_j), & \text{αν } M^n(A_j) \geq T_n \end{cases} \end{aligned}$$

Επίσης, για αυτά τα x , έχουμε $N^n(B_i) = F_n$, άρα και στις δύο περιπτώσεις $N^n(A_j) \geq N^n(B_i) = F_n$.

B'.3. Αν $M^n(B_i) = F_x$, διακρίνουμε πάλι δύο περιπτώσεις::

i. Αν $x \leq n$:

$$\begin{aligned} M^n(A_j) &\geq M^n(B_i) \Rightarrow \\ M^n(A_j) &\geq F_x \Rightarrow \\ N^n(A_j) &= \begin{cases} F_n, & \text{αν } F_n < M^n(A_j) < T_n \\ M^n(A_j), & \text{αν } M^n(A_j) \leq F_n \text{ ή } M^n(A_j) \geq T_n \end{cases} \end{aligned}$$

Επίσης, για αυτά τα x , έχουμε $N^n(B_i) = M^n(B_i) = F_x$, δηλαδή $N^n(A_j) \geq N^n(B_i)$.

ii. Αν $x > n$:

$$\begin{aligned} M^n(A_j) &\geq M^n(B_i) \Rightarrow \\ M^n(A_j) &\geq F_x \Rightarrow \\ N^n(A_j) &= \begin{cases} F_n, & \text{αν } F_x \leq M^n(A_j) < T_n \\ M^n(A_j), & \text{αν } M^n(A_j) \geq T_n \end{cases} \end{aligned}$$

Επίσης, για αυτά τα x , έχουμε $N^n(B_i) = F_n$, άρα και στις δύο περιπτώσεις $N^n(A_j) \geq N^n(B_i)$.

□

7. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

7.1 Συμπεράσματα

Σε αυτήν την εργασία ερευνήσαμε και συγκρίναμε τις προταθείσες επεκτάσεις της Καλώς-Θεμελιωμένης σημασιολογίας στην κλάση των διαζευκτικών προγραμμάτων. Τα συμπεράσματα αυτής της έρευνας παρουσιάζονται συγκεντρωμένα στους δυο πίνακες της ακόλουθης ενότητας.

Κυρίως όμως, επικεντρωθήκαμε στην σημασιολογία των απειρότιμων μοντέλων, την οποία μελετήσαμε στην περίπτωση των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων, και αποδείξαμε δύο ενδιαφέρουσες ιδιότητές της.

Η πρώτη από αυτές, συνδέει την δομή των ελαχιστικών απειρότιμων μοντέλων με την στρωματοποίηση του προγράμματος. Συγκεκριμένα, για κάθε υποσύνολο του προγράμματος, που αντιστοιχεί σε ένα πλήθος από τα κατώτερα στρώματα, το αντίστοιχο υποσύνολο οποιουδήποτε ελαχιστικού μοντέλου παραμένει ελαχιστικό μοντέλο.

Η δεύτερη ιδιότητα συνδέει το στρώμα στο οποίο ανήκει ένα άτομο, με την μέγιστη τάξη της λογικής τιμής που μπορεί να του αποδοθεί μέσα σε ένα ελαχιστικό μοντέλο. Συνεπώς, δείχνει τον αριθμό των στρωμάτων του προγράμματος ως άνω φράγμα για την τάξη, και κατ' επέκταση για το πλήθος, των τιμών αληθείας που μπορούν να εμφανίζονται στα ελαχιστικά απειρότιμα μοντέλα του. Όπως προαναφέραμε, μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε τοπική στρωματοποίηση του προγράμματος, συμπεριλαμβανομένων αυτών με τον ελάχιστο αριθμό στρωμάτων.

Θεωρούμε ότι αυτό αποτελεί σημαντική βελτίωση σε σχέση με το καλύτερο γνωστό φράγμα για μη στρωματοποιημένα προγράμματα, που τέθηκε με το θεώρημα 5.6 [10], το οποίο ορίζεται από τον πληθικό αριθμό της βάσης Herbrand του προγράμματος.

Παράλληλα, η παρατήρηση ότι η άγνωστη τιμή αληθείας δεν περιλαμβάνεται στα ελαχιστικά μοντέλα των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων αφήνει ανοικτή την πιθανότητα η απειρότιμη σημασιολογία να επεκτείνει την σημασιολογία τέλειου μοντέλου. Επισημαίνουμε ότι δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιο παρόμοιο αποτέλεσμα για καμία άλλη από τις επεκτάσεις της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας που μελετήσαμε. Μάλιστα, για αρκετές από αυτές, αποδεικνύεται ακριβώς το αντίθετο.

Τα αποτελέσματά μας έχουν και πρακτική αξία, καθώς οι δυο ιδιότητες σε συνδυασμό μπορούν να οδηγήσουν σε έναν αλγόριθμο υπολογισμού των ελαχιστικών απειρότιμων μοντέλων των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων.

7.2 Σύγκριση προσεγγίσεων

Παρουσιάζοντας τις διάφορες προσπάθειες επέκτασης της Καλώς-Θεμελιωμένης σημασιολογίας, απαριθμήσαμε ορισμένα χαρακτηριστικά κάθε μίας. Για να διευκολυνθεί η συγκριτική τους μελέτη, αυτά παρουσιάζονται συγκεντρωμένα στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 1: Αντιπαραβολή χαρακτηριστικών των επεκτάσεων της Καλώς-Θεμελιωμένης σημασιολογίας

Σημασιολογία	Συγγραφείς	Μορφή Μοντέλου	Κανόνας Άρνησης	Επεκτείνει Τέλεια Μοντέλα	Διαδικαστικός Χαρακτηρισμός
Ισχυρή	Ross	Διαζεύξεις, Άρνήσεις διαζεύξεων	Δεν επεκτείνει την GCWA	Όχι	Από πάνω προς τα κάτω
DWFS	Baral	Διαζεύξεις λεκτικών	GNAF ₀ . Επεκτείνει την GCWA	Άγνωστο	Από κάτω προς τα πάνω
D-WFS	Brass, Dix	Θετικές διαζεύξεις, Άρνητικά λεκτικά	Επεκτείνει την GCWA	Όχι (αυστηρά ασθενέστερη)	Από κάτω προς τα πάνω
Στατική	Przymusiński	Αυθαίρετοι τύποι	Επεκτείνει την GCWA	Όχι (ασθενέστερη)	Από κάτω προς τα πάνω
WFDS	Wang	Καθαρές διαζεύξεις	Επεκτείνει την EGCWA	Άγνωστο (δεν εξετάζεται)	Από κάτω προς τα πάνω
WFS _d	Alcântara, Damásio, Pereira	Τρίτιμα μοντέλα	Επεκτείνει την EGCWA	Όχι	Από κάτω προς τα πάνω
Απειρότιμη	Cabalar, Pearce, Ροντογιάννης, Wadge	Απειρότιμα μοντέλα	Άγνωστο	Άγνωστο (δεν εξετάζεται)	Όχι

Λόγω των μεγάλων διαφορών στην μορφή και τον τρόπο ορισμού των παραπάνω προσεγγίσεων, οι συγκριτικές μελέτες που εντοπίζονται στην βιβλιογραφία είναι συνήθως επιφανειακές και περιορίζονται στην εξέταση παραδειγμάτων. Μία άλλη τάση είναι να συγκρίνονται παραλλαγές, διαφορετικές κάθε φορά, των σημασιολογιών αυτών, πράγμα που περιπλέκει περαιτέρω το ζήτημα.

Στον παρακάτω πίνακα συγκεντρώνονται μερικά σχετικά συμπεράσματα. Με το σύμβολο $>$ δηλώνεται ότι η σημασιολογία που ορίζει την γραμμή του πίνακα είναι ισχυρότερη από την σημασιολογία που ορίζει την στήλη. Ομοίως τα σύμβολα $\nless$, $\nless$ δηλώνουν ότι η πρώτη δεν είναι ισχυρότερη ή δεν είναι ασθενέστερη, αντίστοιχα, από την δεύτερη. Τέλος το $=$ δηλώνει ότι ταυτίζονται, ενώ το $\neq$ ότι διαφέρουν, χωρίς να υπάρχουν περισσότερα στοιχεία για την ακριβή τους σχέση.

Πίνακας 2: Συσχετίσεις μεταξύ επεκτάσεων της Καλώς-Θεμελιωμένης σημασιολογίας

Σημασιολογία	Strong	DWFS	D-WFS	Static	WFDS	WFS _d	Infinite-Valued
Strong							
DWFS	$\neq$						
D-WFS	$\neq$						
Static			$>, =^*$				
WFDS	$\neq$		$>$	$\nless$			
WFS _d	$\neq$		$>$		$\neq$		
Infinite-Valued			$\nless$	$\nless$	$\nless$	$\neq$	

*Η ισότητα ισχύει, αν τα αποτελέσματα των δύο σημασιολογιών περιοριστούν σε μία κοινή γλώσσα.

7.3 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Πολλά ενδιαφέροντα ερωτήματα παραμένουν ανοικτά, όσον αφορά τόσο την σημασιολογία απειρότιμων μοντέλων καθεαυτή, όσο και την σχέση της με την σημασιολογία τέλειου μοντέλου ειδικότερα.

Το κυριότερο από αυτά τα ερωτήματα εξακολουθεί να είναι το αν τα απειρότιμα μοντέλα των τοπικά στρωματοποιημένων προγραμμάτων επεκτείνουν πράγματι τα τέλεια μοντέλα ή όχι. Η διερεύνησή του θα βοηθούσε στην καλύτερη κατανόηση της φύσης και της θέσης της Απειρότιμης Σημασιολογίας ως επέκτασης της Καλώς-Θεμελιωμένης Σημασιολογίας.

Η αναζήτηση ενός τελεστή, για τον υπολογισμό των απειρότιμων μοντέλων, είναι επίσης μία ενδιαφέρουσα ερευνητική κατεύθυνση. Εκτός από την δεδομένη αυτοτελή αξία, που θα είχε ένα τέτοιο αποτέλεσμα, θα μπορούσε να συμβάλλει δραστικά και στην συγκριτική μελέτη με άλλες σημασιολογίες που διαθέτουν χαρακτηρισμούς σταθερού σημείου. Μεταξύ αυτών άλλωστε λογίζεται και η σημασιολογία τέλειου μοντέλου, για την οποία ένας τέτοιος χαρακτηρισμός, στην διαζευκτική περίπτωση, δίνεται στο [11], από τους Fernández και Minker.

Σε μία πιο πρακτική κατεύθυνση, θεωρούμε πιθανό να υπάρχει περιθώριο βελτίωσης του φράγματος του θεωρήματος 5.6. Υπενθυμίζουμε ότι η τάξη της λογικής τιμής ενός ατόμου εκφράζει το βαθμό αβεβαιότητας που προκύπτει από την χρήση της άρνησης και οι αρνητικές εξαρτήσεις μεταξύ των ατόμων λαμβάνονται έμμεσα υπόψιν από το θεώρημα 6.1, αφού από αυτές καθορίζεται η στρωματοποίηση του προγράμματος. Αντίθετα, δεν παίζουν ουσιαστικό ρόλο στο θεώρημα 5.6. Η μελέτη του γράφου εξαρτήσεων (dependency graph) του προγράμματος, δηλαδή του γράφου που απεικονίζει τα άτομα και τις μεταξύ τους θετικές και αρνητικές εξαρτήσεις, ενδεχομένως να παράσχει σχετικά αποτελέσματα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

Ακολουθεί ελληνοαγγλικός πίνακας ορολογίας της εργασίας. Οι όροι οι οποίοι απαντώνται (μεταφρασμένοι) στην ελληνική βιβλιογραφία [1] δεν έχουν συμπεριληφθεί, εκτός αν αποτελούν ριζικό όρο, υπό τον οποίο εμφωλεύονται πρωτοεμφανιζόμενοι όροι.

Ακολουθία ισχυρής παραγωγής	strong derivation sequence
ενεργή (·)	active (·)
Ανάθεση μεταβλητών	variable assignment
Ανάθεση όρων	term assignment
Ανώτατο στοιχείο	top element
Απαγωγή βάσει επιχειρηματολογίας	argumentation-based abduction
Απαραιτήτως Αληθές	necessarily true
Απαραιτήτως Ψευδές	necessarily false
Απειρότιμη Σημασιολογία	Infinite-Valued Semantics
Άρνηση Μέσω Αποτυχίας	Negation As Failure
Γενικευμένη (·)	Generalized (·)
Ασθενής Γενικευμένη Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου	Weak Generalized Closed World Assumption
Ασυνεπές (σύνολο τύπων)	inconsistent
Άτομο	atom
GCWA-αρνητικό (·)	GCWA-negated (·)
αντικειμενικό (·)	objective (·)
βασικό (·)	ground (·)
(·) πεπτοίθησης	belief (·)
Βάση (βασικής διάζευξης)	basis
Βάση Herbrand	Herbrand base
αρνητική (·)	negative (·)
γενική (·)	general (·)
διαζευκτική (·)	disjunctive (·)
Βασικό ανάπτυγμα	ground instantiation
Βασικό στιγμιότυπο	ground instance
Βασικός (όρος, άτομο κ.α.)	ground
Γεγονός	fact
Γενικευμένη Άρνηση μέσω Αποτυχίας	Generalized Negation as Failure
Γενικευμένη Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου	Generalized Closed World Assumption
Γράφος εξαρτήσεων	dependency graph
Δέντρο παραγωγής	drivation trees
Δεξιά Αποδυνάμωση	right weakening

Διαζευκτική Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία	Disjunctive Well-Founded Semantics
Διαζευκτικός	disjunctive
Διαίρεση του προγράμματος	program division
Διατακτικός αριθμός	ordinal
επόμενος (·)	successor (·)
μετρήσιμος (·)	countable (·)
οριακός (·)	limit (·)
Ελαχιστικός	minimal
Επέκταση	expansion
στατική (·)	static (·)
Επεκτεταμένη Γενικευμένη Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου	Extended Generalized Closed World Assumption
Επεκτεταμένη Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου	Extended Closed World Assumption
Ερμηνεία (Herbrand)	(Herbrand) interpretation
απειρότιμη (·)	infinite-valued (·)
δίτιμη (·)	two-valued (·)
μερική (·)	partial (·)
πλήρης (·)	total (·)
συνεπής (·)	consistent (·)
τρίτιμη (·)	three-valued (·)
Θεωρία πεποίθησης	belief theory
Ισχυρά παραγόμενο σύνολο	strongly derived set
Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία	Strong Well-Founded Semantics
Ισχυρό καθολικό δέντρο	strong global tree
Καθαρή διάζευξη	pure disjunction
Καλώς-Θεμελιωμένη Διαζευκτική Σημασιολογία	Well-Founded Disjunctive Semantics
Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία	Well-Founded Semantics
Καλώς-Θεμελιωμένη Σημασιολογία με Διάζευξη	Well-Founded Semantics with Disjunction
Κανονική μορφή	canonical form
Κατά παραδοχή άρνηση	default negation
Κατάσταση (Herbrand)	(Herbrand) state
γ-(·)	g-(·)
γενική (·)	general (·)
διαζευκτική καλώς-θεμελιωμένη (·)	disjunctive well-founded (·)

επεκτεταμένη (·)	expanded (·)
(·)-μοντέλο	model-(·)
Κατευθυνόμενο σύνολο	directed set
Κατώτατο στοιχείο	bottom element
Λεκτικό	literal
αρνητικό (·)	negative (·)
βασικό (·)	ground (·)
θετικό (·)	positive (·)
Λογικά ισοδύναμος	logically equivalent
Μετρήσιμος διατακτικός αριθμός	(βλ. Διατακτικός αριθμός)
Μοντέλο (Herbrand)	(Herbrand) model
απειρότιμο (·)	infinite-valued (·)
δίτιμο (·)	two-valued (·)
ελαχιστικό (·)	minimal (·)
ελάχιστο (·)	least (·)
καλώς-θεμελιωμένο (·)	well-founded (·)
μερικό (·)	partial (·)
πλήρες (·)	total (·)
προτιμότερο (·)	preferable (·)
τέλειο (·)	perfect (·)
τρίτιμο (·)	three-valued (·)
Όρος	term
βασικός (·)	ground (·)
Παράγωγο	derivate
Πεδίο	domain
Πλαίσιο απαγωγής	abduction framework
Πλήρες πλέγμα	complete lattice
Προ-ερμηνεία	pre-interpretation
Πρόγραμμα	program
γενικό λογικό (·)	general ή normal logic (·)
διαζευκτικό (·)	disjunctive (·)
λογικό (·)	logic (·)
οριστικό (·)	definite (·)
Πρόταση	clause
βασική (·)	ground (·)
γενική λογική (·)	general ή normal logic (·)
διαζευκτική (·)	disjunctive (·)
Σημασιολογία	semantics
Απειρότιμη (·)	Infinite-Valued (·)

ασθενέστερη (·)	weaker (·)
ασθενέστατη (·)	weakest (·)
Διαζευκτική Καλώς-Θεμελιωμένη (·)	Disjunctive Well-Founded (·)
ισχυρή (·)	strong (·)
Ισχυρή Καλώς-Θεμελιωμένη (·)	Strong Well-Founded (·)
Καλώς-Θεμελιωμένη (·)	Well-Founded (·)
Καλώς-Θεμελιωμένη Διαζευκτική (·)	Well-Founded Disjunctive (·)
Καλώς-Θεμελιωμένη (·) με Διάζευξη	Well-Founded (·) with Disjunction
Στατική (·)	Static (·)
(·) Τέλειου Μοντέλου	Perfect Model (·)
Σημασιολογία Τέλειου Μοντέλου	Perfect Model Semantics
Σημασιολογικός τελεστής	semantic operator
Σταθερή Σημασιολογία	Stable Semantics
Σταθερό μοντέλο	stable model
Σταθερό σημείο (τελεστή)	fixpoint
ελάχιστο (·)	least (·)
επαναλαμβανόμενα ελάχιστα (·)	iterated least (·)
Στατική επέκταση	static expansion
Στατική ολοκλήρωση	static completion
Στατική Σημασιολογία	Static Semantics
Στρώμα (Στρώματα)	stratum (strata)
Στρωματοποιημένο	stratified
τοπικά (·)	locally (·)
Στρωματοποίηση	stratification
τοπική (·)	local (·)
Συνεπές (σύνολο τύπων)	consistent
Τάξη (τιμής αληθείας)	order
Τελεστής άμεσου επακόλουθου	immediate consequence operator
Τελεστής πεποίθησης	belief operator
Τύπος	formula
αντικειμενικός (·)	objective (·)
ατομικός (·)	atomic (·)
βασικός (·)	ground (·)
καλοσχηματισμένος (·)	well-formed (·)
Υπόθεση του Κλειστού Κόσμου	Closed World Assumption
Ασθενής Γενικευμένη (·)	Weak Generalized (·)
Γενικευμένη (·)	Generalized (·)
Επεκτεταμένη (·)	Extended (·)
Επεκτεταμένη Γενικευμένη (·)	Extended Generalized (·)

Υποπρόταση	subclause
γνήσια (·)	proper (·)
Υποστόχος	subgoal
Χάσμα	gap

ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ, ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ ΚΑΙ ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

γ-κατάσταση	γενική κατάσταση Herbrand
CWA	Closed World Assumption
D-WFS	(Brass & Dix's) Disjunctive Well-Founded Semantics
DWFS	(Baral's) Disjunctive Well-Founded Semantics
EGCWA	Extended Generalized Closed World Assumption
GCWA	Generalized Closed World Assumption
GNAF	Generalized Negation as Failure
NAF	Negation As Failure
WFDS	Well-Founded Disjunctive Semantics
WFS	Well-Founded Semantics
WFS_d	Well-Founded Semantics with Disjunction

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Παναγιώτης Σταματόπουλος. *Σημειώσεις Λογικού Προγραμματισμού*. Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών Ε.Κ.Π., 2003.
- [2] João Alcântara, Carlos Viegas Damásio, and Luís Moniz Pereira. A well-founded semantics with disjunction. In Maurizio Gabbrielli and Gopal Gupta, editors, *ICLP*, volume 3668 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 341–355. Springer, 2005.
- [3] Krzysztof R. Apt, Howard A. Blair, and Adrian Walker. Towards a theory of declarative knowledge. In *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming.*, pages 89–148. Morgan Kaufmann, 1988.
- [4] Chitta Baral. Generalized negation as failure and semantics of normal disjunctive logic programs. In Andrei Voronkov, editor, *LPAR*, volume 624 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 309–319. Springer, 1992.
- [5] Chitta Baral, Jorge Lobo, and Jack Minker. Generalized disjunctive well-founded semantics for logic programs. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 5(2-4):89–131, 1992.
- [6] Stefan Brass and Jürgen Dix. A disjunctive semantics bases on unfolding and bottom-up evaluation. In *GI Jahrestagung*, pages 83–91, 1994.
- [7] Stefan Brass and Jürgen Dix. Disjunctive semantics based upon partial and bottom-up evaluation. In *ICLP*, pages 199–213, 1995.
- [8] Stefan Brass and Jürgen Dix. Characterizations of the disjunctive well-founded semantics: Confluent calculi and iterated gcwa. *J. Autom. Reasoning*, 20(1):143–165, 1998.
- [9] Stefan Brass, Jürgen Dix, Ilkka Niemelä, and Teodor C. Przymusiński. On the equivalence of the static and disjunctive well-founded semantics and its computation. *Theor. Comput. Sci.*, 258(1-2):523–553, 2001.
- [10] Pedro Cabalar, David Pearce, Panos Rondogiannis, and William W. Wadge. A purely model-theoretic semantics for disjunctive logic programs with negation. In Chitta Baral, Gerhard Brewka, and John S. Schlipf, editors, *LPNMR*, volume 4483 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 44–57. Springer, 2007.
- [11] José Alberto Fernández and Jack Minker. Bottom-up computation of perfect models for disjunctive theories. *J. Log. Program.*, 25(1):33–51, 1995.
- [12] Allen Van Gelder. Negation as failure using tight derivations for general logic programs. In *SLP*, pages 127–138, 1986.
- [13] Allen Van Gelder, Kenneth A. Ross, and John S. Schlipf. Unfounded sets and well-founded semantics for general logic programs. In Chris Edmondson-Yurkanan and Mihalis Yannakakis, editors, *PODS*, pages 221–230. ACM, 1988.
- [14] Allen Van Gelder, Kenneth A. Ross, and John S. Schlipf. The well-founded semantics

- for general logic programs. *J. ACM*, 38(3):620–650, 1991.
- [15] Michael Gelfond and Vladimir Lifschitz. The stable model semantics for logic programming. In *ICLP/SLP*, pages 1070–1080, 1988.
- [16] Michael Gelfond, Halina Przymusinska, and Teodor C. Przymusinski. On the relationship between circumscription and negation as failure. *Artif. Intell.*, 38(1):75–94, 1989.
- [17] Matthias Knorr. A comparative study of disjunctive well-founded semantics. Master’s thesis, Universidade Nova de Lisboa, Departamento de Informática, 2006.
- [18] John W. Lloyd. *Foundations of Logic Programming*. Springer, 1984.
- [19] Jorge Lobo, Jack Minker, and Arcot Rajasekar. *Foundations of Disjunctive Logic Programming*. Logic Programming. MIT Press, 1992.
- [20] Jack Minker. On indefinite databases and the closed world assumption. In Donald W. Loveland, editor, *CADE*, volume 138 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 292–308. Springer, 1982.
- [21] Halina Przymusinska and Teodor Przymusinski. Semantic issues in deductive databases and logic programs. In *Formal Techniques in Artificial Intelligence*, pages 321–367. North-Holland, 1990.
- [22] Teodor C. Przymusinski. On the declarative semantics of deductive databases and logic programs. In *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*., pages 193–216. Morgan Kaufmann, 1988.
- [23] Teodor C. Przymusinski. Every logic program has a natural stratification and an iterated least fixed point model. In Silberschatz [30], pages 11–21.
- [24] Teodor C. Przymusinski. Stable semantics for disjunctive programs. *New Generation Comput.*, 9(3/4):401–424, 1991.
- [25] Teodor C. Przymusinski. Static semantics for normal and disjunctive logic programs. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 14(2-4):323–357, 1995.
- [26] Arcot Rajasekar, Jorge Lobo, and Jack Minker. Weak generalized closed world assumption. *J. Autom. Reasoning*, 5(3):293–307, 1989.
- [27] Panos Rondogiannis and William W. Wadge. Minimum model semantics for logic programs with negation-as-failure. *ACM Trans. Comput. Log.*, 6(2):441–467, 2005.
- [28] Kenneth A. Ross. A procedural semantics for well founded negation in logic programs. In Avi Silberschatz, editor, *PODS*, pages 22–33. ACM Press, 1989.
- [29] Kenneth A. Ross. The well founded semantics for disjunctive logic programs. In *DOOD*, pages 385–402, 1989.
- [30] Avi Silberschatz, editor. *Proceedings of the Eighth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART*

Symposium on Principles of Database Systems, March 29-31, 1989, Philadelphia, Pennsylvania, USA. ACM Press, 1989.

- [31] Maarten H. van Emden and Robert A. Kowalski. The semantics of predicate logic as a programming language. *J. ACM*, 23(4):733–742, 1976.
- [32] Kewen Wang. Argumentation-based abduction in disjunctive logic programming. *J. Log. Program.*, 45(1-3):105–141, 2000.
- [33] Kewen Wang. A comparative study of well-founded semantics for disjunctive logic programs. In Thomas Eiter, Wolfgang Faber, and Miroslaw Truszczyński, editors, *LPNMR*, volume 2173 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 133–146. Springer, 2001.
- [34] Adnan H. Yahya and Lawrence J. Henschen. Deduction in non-horn databases. *J. Autom. Reasoning*, 1(2):141–160, 1985.