

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γκανής Ιωάννης

Αριθμητικές Μέθοδοι για Νόμους Διατήρησης υπερβολικού τύπου

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Αθήνα, Νοέμβριος 2015

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας,θα ήθελα να ευχαριστήσω:

- Τον καθηγητή κ. Β. Δουγαλή,επιβλέποντα της παρούσας εργασίας,για την πολύ καλή συνεργασία μας,την καθοδήγηση καθώς επίσης και την επιμέλεια του κειμένου.
- Τα μέλη ΔΕΠ του τμήματος Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.,κυρίους Μ.Δρακόπουλο και Σ.Νοτάρη για την τιμή που μου έκαναν με την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή μου.

Ευχαριστώ επίσης την οικογένειά μου για την αμέριστη βοήθειά της.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
2	Η Μέθοδος Upwind για την Εξίσωση Μεταφοράς	5
2.1	Νόμοι Διατήρησης	5
2.2	Εξίσωση Μεταφοράς	5
2.2.1	Περιοδικές Αρχικές συνθήκες	7
2.2.2	Αρχικές συνθήκες-Συνοριακές συνθήκες	8
2.3	Η Μέθοδος Upwind	11
2.3.1	Συνθήκη CFL	13
2.3.2	Μέθοδος Upwind για $c < 0$ και η γενική μορφή της συνθήκης CFL	13
2.3.3	Διατύπωση της μεθόδου Upwind για Περιοδικές Αρχι- κές συνθήκες	14
2.3.4	Διατύπωση της μεθόδου Upwind για Αρχικές συνθήκες- Συνοριακές συνθήκες	14
2.4	Σύγκλιση της μεθόδου Upwind στην l^2 νόρμα	14
2.4.1	Σύγκλιση σε προβλήματα με Περιοδικές Αρχικές συνθήκες	15
2.4.2	Σύγκλιση σε προβλήματα με Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες	20
2.5	Αριθμητικά παραδείγματα της μεθόδου Upwind	26
2.5.1	Αριθμητικό παράδειγμα με Περιοδική Αρχική συνθήκη με $c > 0$	27
2.5.2	Αριθμητικά παραδείγματα με Αρχικές-Συνοριακές συν- θήκες με $c > 0$	30
2.5.3	Σφάλματα πλάτους και σφάλματα φάσης	34
3	Η Μέθοδος Lax-Wendroff για την Εξίσωση Μεταφοράς	37
3.1	Περιοδικές Αρχικές συνθήκες	37
3.1.1	Διατύπωση της μεθόδου Lax-Wendroff με Περιοδικές Αρχικές συνθήκες.	39
3.1.2	Σύγκλιση της μεθόδου Lax-Wendroff με Περιοδικές Αρχικές συνθήκες.	40
3.2	Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες.	50
3.2.1	Διατύπωση της μεθόδου Lax-Wendroff με αρχικές-συνορι- ακές συνθήκες.	50
3.2.2	Τεχνητή συνοριακή συνθήκη	50
3.2.3	Ευστάθεια της μεθόδου Lax-Wendroff με Αρχικές-Συνορι- ακές συνθήκες	52

3.3	Αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου Lax-Wendroff	59
3.3.1	Περιοδικές Αρχικές συνθήκες	59
3.3.2	Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες.	61
4	Αριθμητική επίλυση βαθμωτών Νόμων	
	Διατήρησης	67
4.1	Εξίσωση Burgers χωρίς ιξώδες.	68
4.2	Ασθενείς λύσεις	69
4.2.1	Συνθήκη Rankine-Hugoniot.	69
4.3	Πρόβλημα Riemann	70
4.4	Συντηρητικές μέθοδοι	71
4.5	Η μέθοδος Upwind για Νόμους Διατήρησης.	72
4.5.1	Διατύπωση της μεθόδου Upwind.	73
4.5.2	Παραδείγματα υλοποίησης αριθμητικής λύσης της μεθόδου Upwind	74
4.6	Η μέθοδος Lax-Wendroff για Νόμους Διατήρησης.	80
4.6.1	Διατύπωση της μεθόδου Lax-Wendroff	82
4.6.2	Παραδείγματα από την υλοποίηση της μεθόδου Lax- Wendroff	83
4.7	Η μέθοδος Godunov	89
4.7.1	Παραδείγματα από την υλοποίηση της μεθόδου Godunov	91
5	Εξισώσεις Ρηχών Υδάτων σε μία χωρική διάσταση	95
5.1	Γραμμικά Συστήματα ΜΔΕ πρώτης τάξης σε μία διάσταση . .	95
5.2	Μη Γραμμικά Συστήματα ΜΔΕ πρώτης τάξης σε μία χωρική διάσταση	95
5.3	Οι εξισώσεις Ρηχών Υδάτων	96
5.4	Αριθμητική επίλυση του συστήματος Ρηχών Υδάτων	97
5.4.1	Η Μέθοδος Lax-Wendroff	98
5.4.2	Μέθοδος Godunov	107
5.4.3	Ένα πείραμα με μη σταθερό πυθμένα	117

1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την εργασία θα μελετήσουμε αριθμητικές μεθόδους για νόμους διατήρησης υπερβολικού τύπου σε μία διάσταση.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την μέθοδο Upwind για την γραμμική εξίσωση μεταφοράς

$$u_t + cu_x = 0.$$

Αρχικά κάνοντας μία εισαγωγή θα μελετήσουμε την εξίσωση μεταφοράς για περιοδικές και για αρχικές-συνοριακές συνθήκες. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε την μέθοδο Upwind για την εξίσωση μεταφοράς και θα εξετάσουμε την ευστάθεια και την τάξη σύγκλισης αυτής πρώτα στην περίπτωση των περιοδικών συνθηκών και ακολούθως στην περίπτωση των αρχικών-συνοριακών συνθηκών. Στο τέλος του κεφαλαίου θα δώσουμε κάποια αριθμητικά παραδείγματα μελετώντας πειραματικά τα σφάλματα της μεθόδου, την τάξη σύγκλισης αυτής καθώς επίσης και τα σφάλματα πλάτους και φάσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την μέθοδο Lax-Wendroff για την εξίσωση μεταφοράς. Συγκεκριμένα θα διατυπώσουμε την μέθοδο Lax-Wendroff για περιοδικές συνθήκες και θα εξετάσουμε την ευστάθεια και την τάξη σύγκλισης αυτής. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε την μέθοδο Lax-Wendroff για αρχικές-συνοριακές συνθήκες διατυπώνοντας την μαζί με μία τεχνητή συνοριακή συνθήκη ενώ ακολούθως θα εξετάσουμε την ευστάθεια της μεθόδου σε αυτήν την περίπτωση. Στο τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα εξετάζοντας αριθμητικά τα σφάλματα και την τάξη σύγκλισης. Στην περίπτωση των αρχικών-συνοριακών συνθηκών θα εξετάσουμε την τάξη σύγκλισης για διάφορες τεχνητές συνοριακές συνθήκες.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση του προβλήματος του βαθμωτού νόμου διατήρησης

$$u_t + F(u)_x = 0$$

σε μία διάσταση.

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αναφερόμαστε εν συντομία σε βασικούς ορισμούς και θεωρήματα όπως ο ορισμός της ασθενούς λύσης του νόμου διατήρησης, το θεώρημα της συνθήκης Rankine-Hugoniot και το θεώρημα Lax-Wendroff. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου θα εξετάσουμε τις αριθμητικές μεθόδους Upwind, Lax-Wendroff καθώς και Godunov δείχνοντας επιπρόσθετα για κάθε μία από αυτές αριθμητικά παραδείγματα.

Στο πέμπτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε αριθμητικές μεθόδους για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων σε μία διάσταση με σταθερό πυθμένα. Θα εφαρμόσουμε τις μεθόδους αρχικά στη μορφή του συστήματος ρηχών υδάτων με μεταβλητές την απόκλιση της ελεύθερης επιφάνειας από την στάθμη ηρεμίας και την ταχύτητα και εν συνεχεία στην μορφή με μεταβλητές το ύψος της στάθμης από τον πυθμένα και την ορμή. Η πρώτη μέθοδος που θα μελετήσουμε είναι η Lax-Wendroff για την οποία και θα παρουσιάσουμε ορισμένα αριθμητικά παραδείγματα. Η δεύτερη μέθοδος που θα δούμε είναι η μέθοδος Godunov. Αφού περιγράψουμε την μέθοδο θα μελετήσουμε την πρακτική της υλοποίηση μέσω του επιλυτή Riemann του Roe, με την χρήση του οποίου θα παρουσιάσουμε αριθμητικά πειράματα.

2 Η Μέθοδος Upwind για την Εξίσωση Μεταφοράς

2.1 Νόμοι Διατήρησης

Η Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξης της μορφής

$$u_t + F(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (2.1.1)$$

όπου F και u αρκετά ομαλές συναρτήσεις, ονομάζεται νόμος διατήρησης για τον εξής λόγο. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.2.1) από το $x = a$ έως το $x = b$ έχουμε

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx + \int_a^b F(u)_x dx = 0$$

και από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = F(u(a, t)) - F(u(b, t)). \quad (2.1.2)$$

Εάν u είναι μία φυσική ποσότητα ανά μονάδα μήκους τότε το αριστερό μέλος της (2.1.2), παριστάνει το ρυθμό μεταβολής αυτής της ποσότητας ως προς τον χρόνο t στο διάστημα $[a, b]$. Επιπλέον αν η F παριστάνει την συνάρτηση ροής, δηλαδή το ποσό της u το οποίο διέρχεται από το σημείο x ανά μονάδα χρόνου, τότε τελικά η εξίσωση (2.1.2) μας δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής ποσότητας u στο $[a, b]$ είναι ίσος με την συνάρτηση ροής στο σημείο a μείον την ροή στο σημείο b . Με άλλα λόγια φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι η (2.1.2) και κατ'επέκταση η (2.1.1) αποτελεί μία έκφραση διατήρησης της ποσότητας u .

2.2 Εξίσωση Μεταφοράς

Ειδικότερα στην περίπτωση που θέσουμε $F(u) = cu$ όπου c σταθερά τότε λαμβάνουμε την εξίσωση μεταφοράς σε μία διάσταση

$$u_t + cu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.2.1)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης (2.2.1) χρειάζεται να εργαστούμε ως ακολούθως. Η οικογένεια καμπυλών $x(t) = ct + \xi$ όπου ξ σταθερά παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο στο πρόβλημα. Εάν κατά μήκος αυτών των καμπυλών υπολογίσουμε την

παράγωγο κατά κατεύθυνση του u έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(x(t), t) &= u_x(x(t), t) \frac{dx}{dt} + u_t(x(t), t) = \quad (\text{αφου } \frac{dx}{dt} = c) \\ &= u_x(x(t), t)c + u_t(x(t), t) = 0 \quad \text{από την (2.2.1)}\end{aligned}$$

Ερχόμαστε στο συμπέρασμα ότι η u είναι σταθερή κατά μήκος των ευθειών $x(t) = ct + \xi$ οι οποίες αποτελούν την οικογένεια των χαρακτηριστικών καμπυλών. Έχοντας τα παραπάνω κατά νου, υπολογίζουμε αν $x = x(t) = ct + \xi$

$$u(x, t) = u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u(\xi, 0) = u(x - ct, 0).$$

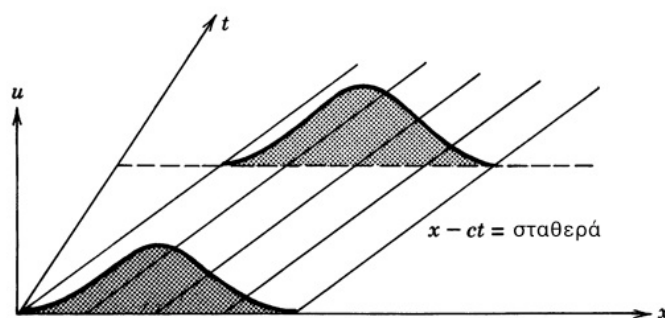
Εάν επιβάλουμε την αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2.2)$$

τότε η λύση του προβλήματος (2.2.1) με αρχική συνθήκη την (2.2.2) είναι η

$$u(x, t) = \phi(x - ct). \quad (2.2.3)$$

Γίνεται τώρα αντιληπτό γιατί η (2.2.1) ονομάζεται εξίσωση μεταφοράς. Η λύση (2.2.3) είναι η αρχική συνθήκη η οποία διαδίδεται χωρίς αλλαγή σχήματος κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών με ταχύτητα c όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1: Χαρακτηριστικές καμπύλες ($c > 0$)

2.2.1 Περιοδικές Αρχικές συνθήκες

Στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες είναι περιοδικές τότε μπορούμε να εξαγάγουμε ορισμένα ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρούμε 1-περιοδικές αρχικές συνθήκες. Διατυπώνουμε λοιπόν το πρόβλημα αρχικών τιμών της (2.2.1) με περιοδική αρχική συνθήκη για $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

όπου $\phi(x, t)$ 1-περιοδική για σταθερό t και $x \in \mathbb{R}$. Αρχικά αναφέρουμε ότι η λύση ενός τέτοιου προβλήματος αρχικών τιμών θα είναι για σταθερό t επίσης 1-περιοδική αφού θα έχουμε

$$u(x, t) = \phi(x - ct) .$$

Επιπλέον αν $\phi \in C^\kappa$ τότε θα ισχύει

$$\begin{aligned} \partial_x^j u &\in C, & 0 \leq j \leq \kappa, \\ \partial_t^j u &\in C, & 0 \leq j \leq \kappa. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι αφού η ϕ είναι περιοδική τότε

$$\partial_x^j \phi \text{ περιοδική για } 0 \leq j \leq \kappa. \quad (2.2.6)$$

Στην συνέχεια κάνουμε μία εκτίμηση για το maximum της λύσης, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα. Παρατηρούμε ότι αρκεί να βρούμε το maximum στο διάστημα $[0, 1]$ αφού η $u(\cdot, t)$ είναι 1-περιοδική για σταθερό t όπως ειπώθηκε πιο πάνω

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| = \max_{ct \leq y \leq ct+1} |u(y, t)| = \max_{ct \leq y \leq ct+1} |\phi(y - ct)| = \max_{0 \leq z \leq 1} |\phi(z)| .$$

Ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό στη συνέχεια και λόγω των (2.2.5) - (2.2.6) μπορούμε να κάνουμε μία εκτίμηση των maximum των παραγώγων της λύσης u

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} |\partial_x^j u(x, t)| &= \max_{0 \leq x \leq 1} |\phi^{(j)}(x)| \\ \max_{0 \leq x \leq 1} |\partial_t^j u(x, t)| &= |c|^j \max_{0 \leq x \leq 1} |\phi^{(j)}(x)| \end{aligned}$$

για $\phi \in C^\kappa, 0 \leq j \leq \kappa$.

Για την νόρμα L^2 της λύσης στο διάστημα $[0, 1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|u(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)}^2 &= \int_0^1 u^2(x, t) dx = \int_{ct}^{ct+1} u^2(y, t) dy = \int_{ct}^{ct+1} \phi^2(y - ct) dy \\ &= \int_0^1 \phi^2(z) dz = \|\phi\|_{L^2(0,1)}^2 \Rightarrow \|u(x, t)\|_{L^2(0,1)} = \|\phi\|_{L^2(0,1)}\end{aligned}$$

για κάθε $t > 0$.

Ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό και λόγω της (2.2.5) παίρνουμε

$$\|\partial_x^j u(x, t)\|_{L^2(0,1)} = \|\phi^{(j)}\|_{L^2(0,1)}, 0 \leq j \leq \kappa,$$

για $\phi \in C^\kappa$.

2.2.2 Αρχικές συνθήκες-Συνοριακές συνθήκες

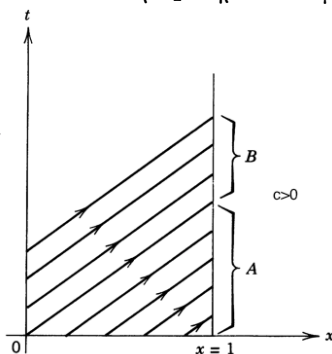
Συνεχίζοντας τη μελέτη για την λύση προβλημάτων αρχικών τιμών της εξίσωσης μεταφοράς, ερχόμαστε στο ερώτημα για το τι αλλάζει όταν το χωρίο στο οποίο διατυπώνουμε το πρόβλημα είναι φραγμένο. Η απάντηση για την περίπτωση αυτή είναι ότι θα χρειαστεί να εισαγάγουμε στο πρόβλημα συνοριακές τιμές.

Διατυπώνουμε λοιπόν το πρόβλημα, χωρίς βλάβη της γενικότητας στο διάστημα $[0, 1]$, ως εξής

$$\begin{aligned}u_t + cu_x &= 0, & 0 \leq x \leq 1, & \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= g(t), & t \geq 0,\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

για $c > 0$.

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες του προβλήματος φαίνονται στην παρακάτω εικόνα

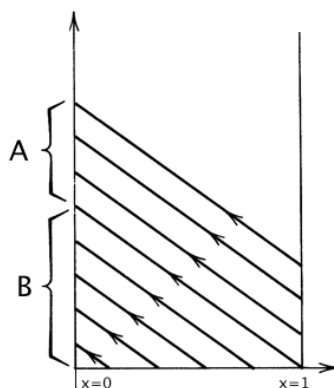


Σχήμα 2: Χαρακτηριστικές καμπύλες για $0 \leq x \leq 1$ και $c > 0$

Επιβάλλουμε λοιπόν συνοριακές τιμές στο σύνορο $x = 0$, οι οποίες διαδίδονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών που τέμνουν τον άξονα των t . Επιπλέον παρατηρούμε, ότι είναι αναγκαίο να μην επιβάλλουμε συνοριακές συνθήκες στο σύνορο $x = 1$.

Αντίστοιχα για $c < 0$ το παρακάτω πρόβλημα είναι καλώς τοποθετημένο:

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, & 0 \leq x \leq 1, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(1, t) &= g(t), & t > 0, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$



Σχήμα 3: Χαρακτηριστικές καμπύλες για $0 \leq x \leq 1$ και $c < 0$

δίνοντας με άλλα λόγια συνοριακές τιμές μόνο στο σύνορο $x = 1$. Για το πρόβλημα (2.2.7) όταν $ct \leq x \leq 1$ (θεωρώντας δηλαδή τις χαρακτηριστικές οι οποίες τέμνουν τον άξονα των x στο $[0, 1]$) η λύση του με αρχικές συνθήκες $u(x, 0) = f(x)$ είναι

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

Στην περίπτωση όμως όπου $0 \leq x \leq ct$ τα πράγματα είναι διαφορετικά. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες, για τις οποίες ισχύει $x \leq ct$, τέμνουν τον άξονα των t για $t \geq 0$ και όχι τον άξονα των x στο $[0, 1]$ (εκτός από την οριακή περίπτωση $x = ct$ όπου η χαρακτηριστική συναντά την αρχή των αξόνων). Εργαζόμαστε λοιπόν για την εύρεση λύσης ως εξής

$$\text{για } x = 0, t = t_0$$

$$x = ct + \xi \Rightarrow \xi = -ct_0$$

άρα οι χαρακτηριστικές αυτές έχουν τον τύπο

$$x = ct - ct_0.$$

Λύνοντας ως προς t_0 έχουμε

$$t_0 = t - \frac{x}{c}$$

οπότε η λύση του προβλήματος γίνεται

$$u(x, t) = u(x(t), t) = u(0, t_0) = g(t_0) = g\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Τελικά η λύση του προβλήματος (2.2.7) είναι

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x - ct), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \\ g\left(t - \frac{x}{c}\right), & 0 \leq x \leq 1, \quad t > \frac{x}{c} \end{cases}$$

ενώ για το πρόβλημα (2.2.8) υλοποιώντας την ίδια διαδικασία με την διαφορά ότι οι συνοριακές τιμές δίνονται στο σύνορο $x = 1$ παίρνουμε

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x - ct), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{x-1}{c} \\ g\left(t + \frac{1-x}{c}\right), & 0 \leq x \leq 1, \quad t > \frac{x-1}{c}. \end{cases}$$

Γίνεται όμως φανερό από τα παραπάνω ότι χρειαζόμαστε συνέχεια στην διαχωριστική χαρακτηριστική $x = ct$ για κάθε ένα από τα προβλήματα (2.2.7) και (2.2.8) έτσι ώστε η λύση να ορίζεται μονοσήμαντα και να είναι συνεχής. Θα εργαστούμε μόνο για το πρόβλημα (2.2.7) καθώς για το πρόβλημα (2.2.8) εργαζόμαστε αντίστοιχα με τον ίδιο τρόπο για την χαρακτηριστική $x = ct + 1$ ($c < 0$). Επομένως, για το (2.2.7) είναι αναγκαίο να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(0, t) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) \Rightarrow f(0) = g(0).$$

Η ισότητα αυτή είναι γνωστή ως *συνθήκη συμβιβαστού*. Παράλληλα όμως χρειαζόμαστε για κλασσικές λύσεις του (2.2.7) και οι μερικές παράγωγοι $\partial_x u$ και $\partial_t u$ να είναι συνεχείς στην ίδια χαρακτηριστική. Για να είναι δυνατό αυτό όμως, είναι απαραίτητο κατ'αρχάς να ισχύει $f \in C^1$ καθώς και $g \in C^1$. Κατά δεύτερον θεωρώντας πρώτα την $\partial_x u$ θέλουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow ct^+} \partial_x u(x, t) &= \lim_{x \rightarrow ct^-} \partial_x u(x, t) \Rightarrow -\frac{1}{c} g'(0) = f'(0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(0) + \frac{1}{c} g'(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Χρειαζόμαστε λοιπόν μαζί με την συνθήκη συμβιβαστού και την (2.2.9). Παρατηρούμε επιπλέον ότι για την συνέχεια της $\partial_t u$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow ct^+} \partial_t u(x, t) &= \lim_{x \rightarrow ct^-} \partial_t u(x, t) \Rightarrow g'(0) = -cf'(0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(0) + \frac{1}{c}g'(0) = 0. \end{aligned}$$

αρκεί πάλι να ισχύει η ισότητα (2.2.9).

2.3 Η Μέθοδος Upwind

Σε αυτήν την ενότητα θα πραγματοποιήσουμε την μελέτη της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών Upwind, μέσω της οποίας έχουμε τη δυνατότητα να λύσουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών της εξίσωσης μεταφοράς.

Ξεκινώντας θα θεωρήσουμε δύο ομοιόμορφους διαμερισμούς έναν για τον άξονα x και έναν για τον άξονα t στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[0, T]$ αντίστοιχα ως εξής

$$\begin{aligned} x_j &= jh \quad \text{όπου} \quad h = \frac{1}{J} = \Delta x = (x_{j+1} - x_j) \quad \text{για } j = 0, \dots, J \\ t^n &= nk \quad \text{όπου} \quad k = \frac{T}{M} = \Delta t = (t^{n+1} - t^n) \quad \text{για } n = 0, \dots, M \\ &\quad \text{με } J, M \quad \text{το πλήθος των υποδιαστημάτων.} \end{aligned}$$

Έχοντας υπ'όψιν μας την εξίσωση (2.2.1) και $c > 0$ θα προσεγγίσουμε τις παραγώγους $\partial_x u$ και $\partial_t u$ με αναπτύγματα Taylor έτσι ώστε να καταλήξουμε στη μέθοδο Upwind. Για $j = 1, \dots, J$ και με h μικρό, το προς τα πίσω ανάπτυγμα Taylor της u κοντά στο x_j για σταθερό t είναι

$$\begin{aligned} u(x_j - h, t) &= u(x_j, t) - hu_x(x_j, t) + O(h^2) \Rightarrow \\ u_x(x_j, t) &\simeq \frac{u(x_j, t) - u(x_j - h, t)}{h} = \frac{u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t)}{h}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Αντίστοιχα για $n = 1, \dots, M - 1$ με k μικρό το προς τα εμπρός ανάπτυγμα Taylor της u κοντά στο t^n για σταθερό x είναι

$$\begin{aligned} u(x, t^n + k) &= u(x, t^n) + ku_t(x, t^n) + O(k^2) \Rightarrow \\ u_t(x, t^n) &\simeq \frac{u(x, t^n + k) - u(x, t^n)}{k} = \frac{u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)}{k}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Από τις (2.2.1), (2.3.1) και (2.3.2) παίρνουμε

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{k} + c \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{h} \simeq 0$$

Συνεχίζοντας αντικαθιστώντας τις ακριβείς τιμές με προσεγγίσεις

$$u(x_j, t^n) \simeq U_j^n$$

καταλήγουμε στη μέθοδο upwind για $c > 0$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + c \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = 0 \quad \text{με} \quad 1 \leq j \leq J, \quad 0 \leq n \leq M-1.$$

Η σχέση αυτή μπορεί ύστερα από πράξεις μπορεί να πάρει τη μορφή

$$U_j^{n+1} = (1 - r)U_j^n + rU_{j-1}^n \quad (2.3.3)$$

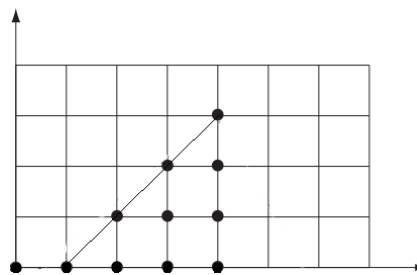
όπου $r = \frac{ck}{h}$, ο λεγόμενος αριθμός του *Courant*.

Στο πρώτο βήμα υλοποίησης της μεθόδου για $n = 0$ εισάγουμε την αρχική συνθήκη του προβλήματος ως ακολούθως

$$U_j^0 = \phi(x_j) \quad \text{για} \quad j = 0, \dots, J.$$

Σε κάθε βήμα υλοποίησης της μεθόδου η άγνωστη προσέγγιση είναι η U_j^{n+1} η οποία και για να υπολογιστεί γίνεται η χρήση(από τη μέθοδο) των προσεγγίσεων U_j^n και U_{j-1}^n , οι οποίες υπολογίζονται σε προηγούμενο βήμα της μεθόδου.

Για ένα τυχαίο σημείο (x_j, t^{n+1}) η προσέγγιση U_j^{n+1} εξαρτάται από τις τιμές στους κόμβους που βρίσκονται μέσα στο τρίγωνο με κορυφές (x_j, t^{n+1}) , $(x_j, 0)$ και $(x_{j-n-1}, 0)$. Ως παράδειγμα παραθέτουμε το ακόλουθο σχήμα θεωρώντας $j = 4$ και $n = 2$



Σχήμα 4: Χωρίο εξάρτησης

Το τρίγωνο αυτό ονομάζεται *χωρίο εξάρτησης* της προσέγγισης U_j^{n+1} ενός συγκεκριμένου προβλήματος.

2.3.1 Συνθήκη CFL

Η χαρακτηριστική καμπύλη ενός προβλήματος η οποία διέρχεται από το σημείο (x_j, t^{n+1}) , είναι απαραίτητο να βρίσκεται εντός του χωρίου εξάρτησης. Για να εξηγήσουμε το λόγο της ύπαρξης αυτού του περιορισμού ας υποθέσουμε ότι πραγματοποιούμε μία 'μικρή' μεταβολή στην τιμή της u στο σημείο που η χαρακτηριστική τέμνει τον άξονα των x ενώ η τελευταία δε βρίσκεται εντός του χωρίου εξάρτησης. Σε αυτήν την περίπτωση η μέθοδος upwind δε θα μπορέσει ποτέ να καταγράψει την καινούργια πληροφορία. Η τιμή της u στο σημείο (x_j, t^{n+1}) θα αλλάξει αλλά της προσεγγιστικής λύσης όχι. Επομένως η μέθοδος γενικά θα είναι ασταθής.

Για να εξασφαλίσουμε ότι οι χαρακτηριστικές θα βρίσκονται εντός του χωρίου εξάρτησης θα πρέπει να ισχύει

$$r = c \frac{k}{h} \leq 1 \quad \text{για} \quad c > 0.$$

Η ανισότητα αυτή ονομάζεται *συνθήκη Courant-Friedrichs-Lewy* ή αλλιώς εν συντομία *συνθήκη CFL*.

2.3.2 Μέθοδος Upwind για $c < 0$ και η γενική μορφή της συνθήκης CFL

Προκύπτει όμως το ερώτημα για το τι θα αλλάζει από τα παραπάνω όταν ο συντελεστής της παραγώγου $\partial_x u$ της εξίσωσης (2.2.1) c είναι αρνητικός, δεδομένου επίσης του γεγονότος ότι η συνθήκη CFL δεν είναι ικανή σε αυτήν την περίπτωση να εξασφαλίσει ότι οι χαρακτηριστικές θα βρίσκονται εντός του χωρίου εξάρτησης.

Είναι αναγκαίο λοιπόν για αυτήν την περίπτωση, να προσεγγίσουμε την παράγωγο $\partial_x u$ με προς τα εμπρός ανάπτυγμα Taylor και άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} u(x_j + h, t) &= u(x_j, t) + \frac{1}{h} u_x(x_j, t) + O(h^2) \Rightarrow \\ u_x(x_j, t) &\simeq \frac{u(x_j + h, t) - u(x_j, t)}{h} = \frac{u(x_{j+1}, t) - u(x_j, t)}{h}. \end{aligned}$$

Με αυτόν τον τρόπο η μέθοδος upwind για $(c < 0)$ θα είναι η

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + c \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} &= 0 \\ \text{για} \quad j &= 0, \dots, J-1 \quad \text{και} \quad n = 0, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Επιπρόσθετα το χωρίο εξάρτησης για ένα τυχαίο σημείο (x_j, t^{n+1}) θα είναι το χωρίο που καταλαμβάνει το τρίγωνο με κορυφές (x_j, t^{n+1}) , (x_j, t_0) και (x_{j+n+1}, t_0) . Άρα τελικά ερχόμαστε στο συμπέρασμα ότι η γενική μορφή της συνθήκης CFL είναι η

$$r = |c| \frac{k}{h} \leq 1.$$

2.3.3 Διατύπωση της μεθόδου Upwind για Περιοδικές Αρχικές συνθήκες

Όταν οι αρχική συνθήκη του προβλήματος f είναι 1-περιοδική τότε η μέθοδος Upwind υλοποιείται (π.χ. για $c > 0$) στο πρώτο βήμα για $j = 0, \dots, J$

$$U_j^0 = f(x_j) \quad (2.3.4a)$$

και για $n = 0, \dots, M - 1$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + c \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = 0 \quad (2.3.4b)$$

για $j = 0, \dots, J$ με

$$U_{-1}^n = U_{J-1}^n. \quad (2.3.4c)$$

2.3.4 Διατύπωση της μεθόδου Upwind για Αρχικές συνοριακές συνθήκες

Όταν το πρόβλημα είναι διατυπωμένο σε πεπερασμένο χωρίο και υπάρχει συνοριακή συνθήκη g η μέθοδος Upwind υλοποιείται (π.χ. $c > 0$) στο πρώτο βήμα για $j = 0, \dots, J$

$$U_j^0 = f(x_j) \quad (2.3.5a)$$

και για $n = 0, \dots, M - 1$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + c \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = 0 \quad (2.3.5b)$$

για $j = 1, \dots, J$ με

$$U_0^{n+1} = g(t^{n+1}). \quad (2.3.5c)$$

2.4 Σύγκλιση της μεθόδου Upwind στην l^2 νόρμα

Συνεχίζοντας, θα αποδείξουμε τη σύγκλιση της μεθόδου Upwind στην ακριβή λύση του προβλήματος (2.2.1) με περιοδικές αρχικές συνθήκες αλλά και με αρχικές-συνοριακές συνθήκες στην l^2 διακριτή νόρμα. Για να το πετύχουμε

όμως αυτό θα πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι η μέθοδος Upwind είναι ευσταθής και συνεπής. Θα δείξουμε σύγκλιση για την περίπτωση όπου $c > 0$.

2.4.1 Σύγκλιση σε προβλήματα με Περιοδικές Αρχικές συνθήκες

Για τα προβλήματα με περιοδικές αρχικές συνθήκες έχουμε ότι η l^2 διακριτή νόρμα δίνεται από

$$\|U^n\|_h = \left(h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ευστάθεια της μεθόδου Upwind με Περιοδικές Αρχικές συνθήκες

Θεώρημα 2.1. Έστω U_j^n η προσεγγιστική λύση που λαμβάνουμε από τις (2.3.4a) – (2.3.4c) για το πρόβλημα (2.2.4). Αν $r \leq 1$ τότε ισχύει

$$\|U^n\|_h \leq \|U^0\|_h \quad \text{για } n = 0, \dots, M. \quad (2.4.1)$$

Απόδειξη

Για $0 \leq j \leq J-1$ έχουμε

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= (1-r)U_j^n + rU_{j-1}^n \Rightarrow (U_j^{n+1})^2 = ((1-r)U_j^n + rU_{j-1}^n)^2 \Rightarrow \\ (U_j^{n+1})^2 &= (1-r)^2(U_j^n)^2 + r^2(U_{j-1}^n)^2 + 2(1-r)rU_j^n U_{j-1}^n. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζω με h και αθροίζω ως προς $j, 0 \leq j \leq J-1$, και έχω

$$h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^{n+1})^2 = (1-r)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^n)^2 + r^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 + 2(1-r)r h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n.$$

Από την ανισότητα *Cauchy – Schwarz*, την υπόθεση ότι

$$r \leq 1 \quad \text{και το γεγονός ότι} \quad h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 = \|U^n\|_h^2 \quad \text{λόγω της (2.3.4c), έχουμε}$$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq (1-r)^2 \|U^n\|_h^2 + r^2 \|U^n\|_h^2 + 2(1-r)r h \left(\sum_{j=0}^{J-1} (U_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq (1-r)^2 \|U^n\|_h^2 + r^2 \|U^n\|_h^2 + 2(1-r)r \|U^n\|_h^2 \Rightarrow$$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq ((1-r)^2 + r^2 + 2(1-r)r) \|U^n\|_h^2 \Rightarrow$$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq (1-2r+r^2+r^2+2r-2r^2) \|U^n\|_h^2 \Rightarrow$$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq \|U^n\|_h^2 \Rightarrow \|U^{n+1}\|_h \leq \|U^n\|_h,$$

από όπου η (2.4.1) προκύπτει επαγωγικά.

□

Παρατήρηση 1. Αν $r = 1$ τότε η (2.4.1) ισχύει σαν ισότητα.

Συνέπεια της μεθόδου Upwind με Περιοδικές Αρχικές συνθήκες

Θεώρημα 2.2. Έστω $D = (0, 1) \times (0, T)$ και $u(x, t)$ η λύση του προβλήματος (2.2.4) τέτοια ώστε $u \in C^2(\bar{D})$. Έστω επίσης U_j^n η προσεγγιστική λύση που λαμβάνουμε από τις (2.3.4a) – (2.3.4c). Αν τ_j^n είναι το τοπικό σφάλμα στο σημείο (x_j, t^n) που ορίζεται ως

$$\tau_j^n = \tau(x_j, t^n) := u(x_j, t^{n+1}) - [(1 - r)u(x_j, t^n) + ru(x_{j-1}, t^n)],$$

τότε ισχύει

$$\begin{aligned} \|\tau^n\|_h &\leq \frac{1}{2}C_1(u)k(k + ch) \\ \text{όπου } C_1(u) &= \max(c^2, 1) \max_{x,t \in \bar{D}} |\partial_x^2 u|. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Απόδειξη

Σταθεροποιούμε j και n και στη συνέχεια αναπτύσσουμε σε σειρές Taylor τα $u(x_j, t^{n+1})$ και $u(x_{j-1}, t^n)$ ως προς (x_j, t^n) . Έχουμε

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) + ku_t(x_j, t^n) + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n)$$

$$\text{με } t^n \leq \theta_j^n \leq t^{n+1}$$

$$u(x_{j-1}, t^n) = u(x_j, t^n) - hu_x(x_j, t^n) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n)$$

$$\text{με } x_{j-1} \leq \mu_j^n \leq x_j.$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \tau(x_j, t^n) &= u(x_j, t^{n+1}) + ku_t(x_j, t^n) + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - \\ &\quad - [(1 - r)u(x_j, t^n) + r(u(x_j, t^n) - hu_x(x_j, t^n) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n))] \Rightarrow \\ \tau(x_j, t^n) &= u(x_j, t^{n+1}) + ku_t(x_j, t^n) + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - \\ &\quad - u(x_j, t^n) + ru(x_j, t^n) - ru(x_j, t^n) + rhu_x(x_j, t^n) - r\frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n) \Rightarrow \\ \tau(x_j, t^n) &= k(u_t(x_j, t^n) + cu_x(x_j, t^n)) + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - ck\frac{h}{2}\partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n) \end{aligned}$$

Από την εξίσωση (2.2.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\tau(x_j, t^n) &= \frac{k^2}{2} \partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - ck \frac{h}{2} \partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n) \Rightarrow \\ \tau(x_j, t^n) &= \frac{1}{2} k (k \partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - ch \partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n)) \Rightarrow \\ |\tau(x_j, t^n)| &= \left| \frac{1}{2} k (k \partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - ch \partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n)) \right| \Rightarrow \\ |\tau(x_j, t^n)| &\leq \left| \frac{1}{2} k (k \partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n)) \right| + |ch \partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n)|.\end{aligned}$$

Όμως από την (2.2.1) έχουμε

$$u_t = -cu_x$$

και παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε

$$\partial_t^2 u = -cu_{xt} = -cu_{tx} = -c(-cu_x)_x = c^2 \partial_x^2 u \Rightarrow$$

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u. \quad (2.4.3)$$

Τελικά παίρνουμε

$$\begin{aligned}|\tau(x_j, t^n)| &\leq \left| \frac{1}{2} k (kc^2 \partial_x^2 u(x_j, \theta_j^n)) \right| + |ch \partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n)| \Rightarrow \\ |\tau(x_j, t^n)| &\leq \frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch)\end{aligned}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, προσθέτοντας ως προς $j, 0 \leq j \leq J-1$, και πολλαπλασιάζοντας με h παίρνουμε

$$\begin{aligned}h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau(x_j, t^n))^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} \left(\frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch) \right)^2 \Rightarrow \\ \|\tau^n\|_h^2 &\leq h \left(\frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch) \right)^2 \sum_{j=0}^{J-1} 1 \Rightarrow \\ \|\tau^n\|_h^2 &\leq Jh \left(\frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch) \right)^2 \Rightarrow \\ \|\tau^n\|_h^2 &\leq \left(\frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch) \right)^2 \Rightarrow \\ \|\tau^n\|_h &\leq \frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch)\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2. Αν $r = 1$ τότε $\tau_j^n = 0$ εφόσον $\tau_j^n = u(x_j, t^{n+1}) - u(x_{j-1}, t^n) = 0$ λόγω του γεγονότος ότι η u είναι σταθερή πάνω στις χαρακτηριστικές καμπύλες.

Σύγκλιση της μεθόδου upwind με Περιοδικές Αρχικές συνθήκες

Θεώρημα 2.3. Έστω $D = (0, 1) \times (0, T)$ και $u(x, t)$ η λύση του προβλήματος (2.2.4) τέτοια ώστε $u \in C^2(\overline{D})$. Έστω επίσης U_j^n η προσεγγιστική λύση που λαμβάνουμε από τις (2.3.4a) – (2.3.4c). Αν $r \leq 1$ τότε ισχύει

$$\max_{j,n} \|U_j^n - u(x_j, t^n)\|_h \leq \frac{1}{2} TC_1(u)(k + ch) \quad (2.4.4)$$

όπου $C_1(u)$ όπως στη (2.4.2).

Απόδειξη

Θέτουμε $e_j^n = U_j^n - u(x_j, t^n)$ για το σφάλμα της μεθόδου upwind στο σημείο (x_j, t^n) . Είναι προφανές ότι ισχύει $e_j^0 = 0$ για $j = 0, \dots, J-1$ καθώς και $e_{-1}^n = e_{J-1}^n$.

Για $0 \leq j \leq J-1, 0 \leq n \leq M-1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &= U_j^{n+1} - u(x_j, t^{n+1}) = (1-r)U_j^n + rU_{j-1}^n - u(x_j, t^{n+1}) = \\ &= (1-r)U_j^n + rU_{j-1}^n - u(x_j, t^{n+1}) + (1-r)u(x_j, t^n) + ru(x_{j-1}, t^n) - \\ &\quad - (1-r)u(x_j, t^n) - ru(x_{j-1}, t^n) = \\ &= (1-r)(U_j^n - u(x_j, t^n)) + r(U_{j-1}^n - u(x_{j-1}, t^n)) - \\ &\quad - (u(x_j, t^{n+1}) - ((1-r)u(x_j, t^n) + ru(x_{j-1}, t^n))) = \\ &= (1-r)(U_j^n - u(x_j, t^n)) + r(U_{j-1}^n - u(x_{j-1}, t^n)) - \tau(x_j, t^n) \end{aligned}$$

Άρα

$$e_j^{n+1} = (1-r)(e_j^n) + r(e_{j-1}^n) - \tau(x_j, t^n)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, προσθέτοντας ως προς $j, 0 \leq j \leq J-1$, και πολλαπλασιάζοντας με h παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &= h \sum_{j=0}^{J-1} ((1-r)(e_j^n) + r(e_{j-1}^n) - \tau(x_j, t^n))^2 \Rightarrow \\
 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &= (1-r)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + r^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau(x_j, t^n))^2 + \\
 + 2h(1-r)r \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j-1}^n - 2(1-r)h \sum_{j=0}^{J-1} \tau(x_j, t^n) e_j^n - 2rh \sum_{j=0}^{J-1} \tau(x_j, t^n) e_{j-1}^n &\Rightarrow
 \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, την υπόθεση ότι $r \leq 1$ (υπόθεση ευστάθειας) και το γεγονός ότι $e_{-1}^n = e_{J-1}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq (1-r)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + r^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau(x_j, t^n))^2 + \\
 + 2h(1-r)r \left(\sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &+ \\
 + 2(1-r)h \left(\sum_{j=0}^{J-1} \tau^2(x_j, t^n) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &+ \\
 + 2rh \left(\sum_{j=0}^{J-1} \tau^2(x_j, t^n) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|e^{n+1}\|_h^2 &\leq (1-2r+r^2)\|e^n\|_h^2 + r^2\|e^n\|_h^2 + \|\tau^n\|_h^2 + 2(1-r)r\|e^n\|_h^2 + \\
 &\quad + 2(1-r)\|e^n\|_h\|\tau^n\|_h + 2r\|e^n\|_h\|\tau^n\|_h
 \end{aligned}$$

$$\|e^{n+1}\|_h^2 \leq \|e^n\|_h^2 + 2\|e^n\|_h\|\tau^n\|_h + \|\tau^n\|_h^2 = (\|e^n\|_h + \|\tau^n\|_h)^2 \Rightarrow$$

$$\|e^{n+1}\|_h \leq \|e^n\|_h + \|\tau^n\|_h$$

$$\Rightarrow \|e^{n+1}\|_h \leq \|e^n\|_h + \frac{1}{2}kC_1(u)(k+ch),$$

όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε την (2.4.2).

Αν $n = 0$ τότε

$$\|e^1\|_h \leq \|e^0\|_h + \frac{1}{2}kC_1(u)(k+ch) \Rightarrow \|e^1\|_h \leq \frac{1}{2}kC_1(u)(k+ch)$$

Άρα για $n = 1$

$$\|e^2\|_h \leq 2\frac{1}{2}kC_1(u)(k + ch)$$

Άρα γενικά έχουμε

$$\begin{aligned} \|e^n\|_h &\leq n\frac{1}{2}kC_1(u)(k + ch) \Rightarrow \|e^n\|_h \leq t^n\frac{1}{2}C_1(u)(k + ch) \Rightarrow \\ \|e^n\|_h &\leq \frac{1}{2}TC_1(u)(k + ch). \end{aligned}$$

□

Από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι

$$\max_{j,n} \|U_j^n - u(x_j, t^n)\|_h \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad h, k \rightarrow 0 \quad \text{με} \quad r = c\frac{k}{h} \leq 1 \text{ σταθερό,}$$

λόγω ευστάθειας και συνέπειας. Επίσης γίνεται αντιληπτό ότι η τάξη σύγκλισης ως προς τις μεταβλητές x και t είναι 1.

Παρατήρηση 3. Αν $r = 1$ τότε η μέθοδος Upwind έχει μηδενικό σφάλμα.

2.4.2 Σύγκλιση σε προβλήματα με Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες

Έστω το πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= g(t), \quad t > 0 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

για $c > 0$ και έστω επίσης ότι ισχύει η συνθήκη συμβιβαστού, η (2.2.8) και η $g''(0) = c^2 f''(0)$ έτσι ώστε η λύση του (2.4.5) να είναι $u \in C^2([0, 1] \times [0, T])$. Θυμίζουμε σε αυτό το σημείο, ότι η διατύπωση της μεθόδου Upwind για το πρόβλημα (2.4.5), δίνεται από τις (2.3.5a) – (2.3.5c) ενώ επιπρόσθετα θεωρούμε ότι η l^2 διακριτή νόρμα για τα προβλήματα με αρχικές-περιοδικές συνθήκες δίνεται από

$$\|U^n\|_h = \left(h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ευστάθεια της μεθόδου upwind με Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες

Θεώρημα 2.4. Έστω $D = (0, 1) \times (0, T)$ και $u(x, t)$ η λύση του προβλήματος (2.4.5). Έστω U_j^n η λύση των (2.3.5a) – (2.3.5c). Αν $r \leq 1$ τότε ισχύει

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq \|U^0\|_h^2 + ck \sum_{j=0}^n (g(t^j))^2 \quad (2.4.6)$$

Απόδειξη

$$U_j^{n+1} = (1-r)U_j^n + rU_{j-1}^n \Rightarrow (U_j^{n+1})^2 = ((1-r)U_j^n + rU_{j-1}^n)^2 \Rightarrow$$

$$(U_j^{n+1})^2 = (1-r)^2(U_j^n)^2 + r^2(U_{j-1}^n)^2 + 2(1-r)rU_j^n U_{j-1}^n$$

πολλαπλασιάζω με h και αθροίζω από $j = 1, \dots, J$ και έχω

$$\sum_{j=1}^J h(U_j^{n+1})^2 = (1-r)^2 h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 +$$

$$+ r^2 h \sum_{j=1}^J (U_{j-1}^n)^2 + 2(1-r)r h \sum_{j=1}^J U_j^n U_{j-1}^n$$

από την ανισότητα *Cauchy – Schwarz* και την υπόθεση ότι $r \leq 1$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq (1-r)^2 \|U^n\|_h^2 + r^2 (\|U^n\|_h^2 + hg^2(t^n)) +$$

$$+ 2(1-r)r h \left(\sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^J (U_{j-1}^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq (1-r)^2 \|U^n\|_h^2 + r^2 \|U^n\|_h^2 + r^2 hg^2(t^n) +$$

$$+ 2(1-r)r \left(h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(h \sum_{j=1}^J (U_{j-1}^n)^2 + hg^2(t^n) \right)^{\frac{1}{2}}$$

άρα έχουμε

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq (1-r)^2 \|U^n\|_h^2 + r^2 \|U^n\|_h^2 + r^2 hg^2(t^n) +$$

$$+ 2(1-r)r \|U^n\|_h (\|U^n\|_h^2 + hg^2(t^n))^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq (1-r)^2 \|U^n\|_h^2 + r^2 \|U^n\|_h^2 + r^2 hg^2(t^n) +$$

$$+ (1-r)r (\|U^n\|_h^2 + \|U^n\|_h^2 + hg^2(t^n)) \Rightarrow$$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq (1-2r+r^2+r^2+2r-2r^2) \|U^n\|_h^2 + hr g^2(t^n) \Rightarrow$$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq \|U^n\|_h^2 + ck g^2(t^n)$$

από όπου η (2.4.6) προκύπτει επαγωγικά.

□

Συνέπεια της μεθόδου Upwind με Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες

Θεώρημα 2.5. Έστω $D = (0, 1) \times (0, T)$ και $u(x, t)$ η λύση του προβλήματος (2.4.5) τέτοια ώστε $u \in C^2(\overline{D})$. Έστω επίσης U_j^n η λύση των (2.3.5a) – (2.3.5c). Αν τ_j^n είναι το τοπικό σφάλμα στο σημείο (x_j, t^n) που ορίζεται ως

$$\tau_j^n = \tau(x_j, t^n) = u(x_j, t^{n+1}) - [(1-r)u(x_j, t^n) + ru(x_{j-1}, t^n)]$$

τότε ισχύει

$$\|\tau^n\|_h \leq \frac{1}{2}C_1(u)k(k+ch) \quad (2.4.7)$$

όπου $C_1(u) = \max(c^2, 1) \max_{x,t \in \overline{D}} |\partial_x^2 u|$.

Απόδειξη

Σταθεροποιούμε τα j και n και αναπτύσσουμε σε σειρές Taylor τα $u(x_j, t^{n+1})$ και $u(x_{j-1}, t^n)$

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) + ku_t(x_j, t^n) + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n)$$

$$\text{με } t^n \leq \theta_j^n \leq t^{n+1}$$

$$u(x_{j-1}, t^n) = u(x_j, t^n) - hu_x(x_j, t^n) + \frac{h^2}{2(\mu_j^n, t^n)}\partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n)$$

$$\text{με } x_{j-1} \leq \mu_j^n \leq x_j$$

για $j = 1 \dots J$ και $n = 0 \dots M-1$.

Παρατήρηση 4. Το $u(x_{j-1}, t^n)$ για $j = 1$ γίνεται $u(x_0, t^n) = u(0, t^n) = g(t^n) = u(x_j, t^n) - hu_x(x_j, t^n) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n)$.

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \tau(x_j, t^n) &= u(x_j, t^n) + ku_t(x_j, t^n) + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - \\ &\quad - [(1-r)u(x_j, t^n) + r(u(x_j, t^n) - hu_x(x_j, t^n) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n))] \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau(x_j, t^n) &= u(x_j, t^n) + ku_t(x_j, t^n) + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - \\ &\quad - u(x_j, t^n) + ru(x_j, t^n) - ru(x_j, t^n) + rhu_x(x_j, t^n) - r\frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau(x_j, t^n) &= k(u_t(x_j, t^n) + cu_x(x_j, t^n)) + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - ck\frac{h}{2}\partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n) \end{aligned}$$

Από την εξίσωση (2.2.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\tau(x_j, t^n) &= \frac{k^2}{2} \partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - ck \frac{h}{2} \partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n) \Rightarrow \\ \tau(x_j, t^n) &= \frac{1}{2} k (k \partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - ch \partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n)) \Rightarrow \\ |\tau(x_j, t^n)| &= \left| \frac{1}{2} k (k \partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - ch \partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n)) \right|\end{aligned}\quad (2.4.8)$$

Όμως από την (2.4.3) θα έχουμε

$$\begin{aligned}|\tau(x_j, t^n)| &\leq \left| \frac{1}{2} k (k \partial_t^2 u(x_j, \theta_j^n) - ch \partial_x^2 u(\mu_j^n, t^n)) \right| \Rightarrow \\ |\tau(x_j, t^n)| &\leq \frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch)\end{aligned}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, προσθέτοντας ως προς $j, 0 \leq j \leq J-1$ και πολλαπλασιάζοντας με h παίρνουμε

$$\begin{aligned}h \sum_{j=1}^J (\tau(x_j, t^n))^2 &\leq h \sum_{j=1}^J \left(\frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch) \right)^2 \Rightarrow \\ \|\tau^n\|_h^2 &\leq h \left(\frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch) \right)^2 \sum_{j=1}^J 1 \Rightarrow \\ \|\tau^n\|_h^2 &\leq Jh \left(\frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch) \right)^2 \Rightarrow \\ \|\tau^n\|_h^2 &\leq \left(\frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch) \right)^2 \Rightarrow \\ \|\tau^n\|_h &\leq \frac{1}{2} k C_1(u) (k + ch).\end{aligned}$$

□

Σύγκλιση της μεθόδου Upwind με Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες

Θεώρημα 2.6. Έστω $D = (0, 1) \times (0, T)$ και $u(x, t)$ η λύση του προβλήματος (2.4.5) τέτοια ώστε $u \in C^2(\bar{D})$. Έστω επίσης U_j^n η λύση που τις (2.3.5a)-(2.3.5c). Αν $r \leq 1$ τότε ισχύει

$$\begin{aligned}\max_{j,n} \|U^n - u(x_j, t^n)\|_h &\leq \frac{1}{2} T C_1(u) (k + ch) \\ \text{όπου } C_1(u) &\text{όπως στη (2.4.7).}\end{aligned}\quad (2.4.9)$$

Απόδειξη

Θέτουμε $e_j^n = U_j^n - u(x_j, t^n)$ για το σφάλμα της μεθόδου upwind στο σημείο (x_j, t^n) . Γνωρίζουμε επίσης ότι ισχύει $e_j^0 = 0$ για $j = 1, \dots, J$ και $e_0^n = 0$ για $n = 0 \dots M - 1$.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &= U_j^{n+1} - u(x_j, t^{n+1}) = (1-r)U_j^n + rU_{j-1}^n - u(x_j, t^{n+1}) = \\ &= (1-r)U_j^n + rU_{j-1}^n - u(x_j, t^{n+1}) + (1-r)u(x_j, t^n) + ru(x_{j-1}, t^n) - \\ &\quad - (1-r)u(x_j, t^n) - ru(x_{j-1}, t^n) = \\ &= (1-r)(U_j^n - u(x_j, t^n)) + r(U_{j-1}^n - u(x_{j-1}, t^n)) - \\ &\quad - (u(x_j, t^{n+1}) - ((1-r)u(x_j, t^n) + ru(x_{j-1}, t^n))) = \\ &= (1-r)(U_j^n - u(x_j, t^n)) + r(U_{j-1}^n - u(x_{j-1}, t^n)) - \tau(x_j, t^n) \end{aligned}$$

Άρα

$$e_j^{n+1} = (1-r)(e_j^n) + r(e_{j-1}^n) - \tau(x_j, t^n)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, προσθέτοντας ως προς $j, 0 \leq j \leq J-1$, και πολλαπλασιάζοντας με h παίρνουμε

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^J (e_j^{n+1})^2 &= h \sum_{j=1}^J ((1-r)(e_j^n) + r(e_{j-1}^n) - \tau(x_j, t^n))^2 \Rightarrow \\ h \sum_{j=1}^J (e_j^{n+1})^2 &= (1-r)^2 h \sum_{j=1}^J (e_j^n)^2 + r^2 h \sum_{j=1}^J (e_{j-1}^n)^2 + h \sum_{j=1}^J (\tau(x_j, t^n))^2 + \\ &+ 2h(1-r)r \sum_{j=1}^J e_j^n e_{j-1}^n - 2(1-r)h \sum_{j=1}^J \tau(x_j, t^n) e_j^n - 2rh \sum_{j=1}^J \tau(x_j, t^n) e_{j-1}^n \end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την υπόθεση ότι $r \leq 1$ (υπόθεση ευστάθειας) έχουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=1}^J (e_j^{n+1})^2 &\leq (1-r)^2 h \sum_{j=1}^J (e_j^n)^2 + r^2 h \sum_{j=1}^J (e_{j-1}^n)^2 + h \sum_{j=1}^J (\tau(x_j, t^n))^2 + \\
&\quad + 2h(1-r)r \left(\sum_{j=1}^J (e_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^J (e_{j-1}^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + 2(1-r)h \left(\sum_{j=1}^J \tau^2(x_j, t^n) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^J (e_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + 2rh \left(\sum_{j=1}^J \tau^2(x_j, t^n) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^J (e_{j-1}^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\
h \sum_{j=1}^J (e_j^{n+1})^2 &\leq (1-r)^2 h \sum_{j=1}^J (e_j^n)^2 + r^2 h \sum_{j=1}^{J+1} (e_{j-1}^n)^2 + h \sum_{j=1}^J (\tau(x_j, t^n))^2 + \\
&\quad + 2h(1-r)r \left(\sum_{j=1}^J (e_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{J+1} (e_{j-1}^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + 2(1-r)h \left(\sum_{j=1}^J \tau^2(x_j, t^n) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^J (e_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + 2rh \left(\sum_{j=1}^J \tau^2(x_j, t^n) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{J+1} (e_{j-1}^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|e^{n+1}\|_h^2 &\leq (1-2r+r^2)\|e^n\|^2 + r^2\|e^n\|^2 + \|\tau^n\|^2 + 2(1-r)r\|e^n\|^2 + \\
&\quad + 2(1-r)\|e^n\|\|\tau^n\| + 2r\|e^n\|\|\tau^n\| \Rightarrow \\
\|e^{n+1}\|_h^2 &\leq \|e^n\|_h^2 + 2\|e^n\|_h\|\tau^n\|_h + \|\tau^n\|_h^2 = (\|e^n\|_h + \|\tau^n\|_h)^2 \Rightarrow \\
\|e^{n+1}\|_h &\leq (\|e^n\|_h + \|\tau^n\|_h) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\|e^{n+1}\|_h \leq \|e^n\|_h + \frac{1}{2}kC_1(u)(k+ch)$$

όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε την συνέπεια της μεθόδου.

Αν $n = 0$ τότε

$$\|e^1\|_h \leq \|e^0\|_h + \frac{1}{2}kC_1(u)(k+ch) \Rightarrow \|e^1\|_h \leq \frac{1}{2}kC_1(u)(k+ch)$$

Άρα για $n = 1$

$$\|e^2\|_h \leq 2\frac{1}{2}kC_1(u)(k+ch)$$

Άρα γενικά έχουμε

$$\begin{aligned} \|e^n\|_h &\leq n \frac{1}{2} k C_1(u)(k + ch) \Rightarrow \|e^n\|_h \leq t^n \frac{1}{2} C_1(u)(k + ch) \Rightarrow \\ \|e^n\|_h &\leq \frac{1}{2} T C_1(u)(k + ch) \end{aligned}$$

□

Από το προηγούμενο θεώρημα ερχόμαστε στο συμπέρασμα ότι

$$\max_{j,n} \|U_j^n - u(x_j, t^n)\|_h \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad h, k \rightarrow 0 \quad \text{με} \quad r = c \frac{k}{h} \leq 1 \text{ σταθερό,}$$

λόγω ευστάθειας και συνέπειας. Επίσης γίνεται αντιληπτό ότι η τάξη σύγκλισης ως προς τις μεταβλητές x και t είναι 1.

Παρατήρηση 5. Αν $r = 1$ τότε η μέθοδος Upwind έχει μηδενικό σφάλμα.

2.5 Αριθμητικά παραδείγματα της μεθόδου Upwind

Για όλα τα αριθμητικά παραδείγματα αυτής της εργασίας εξετάζουμε τα σφάλματα των προσεγγιστικών λύσεων καθώς και την τάξη σύγκλισης στη διακριτή $\max$ νόρμα

$$\|u\|_\infty = \max_i |u_i|$$

και στη διακριτή νόρμα l^2

$$\|u\|_h = \left(h \sum_i u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Την τάξη σύγκλισης των σφαλμάτων την υπολογίζουμε ως ακολούθως. Έστω $\varepsilon(N_1)$ και $\varepsilon(N_2)$ τα σφάλματα μίας αριθμητικής μεθόδου (π.χ Upwind) ,σε κάποια από τις δύο παραπάνω νόρμες, για δύο διαδοχικές ομοιόμορφες διαμερίσεις με πλήθος υποδιαστημάτων N_1 και N_2 αντίστοιχα. Έστω επίσης h_1 και h_2 τα μήκη των υποδιαστημάτων των διαμερίσεων αυτών. Τότε η τάξη ακρίβειας της αριθμητικής μεθόδου δίνεται από

$$\text{τάξη ακρίβειας} \simeq \frac{\log\left(\frac{\varepsilon(N_1)}{\varepsilon(N_2)}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}.$$

Λάβαμε υπ'όψιν το γεγονός ότι με $r = \frac{ck}{h}$ σταθερό, τότε $k = O(h)$ οπότε το σφάλμα έχει φράγμα που εξαρτάται μόνο από το h .

2.5.1 Αριθμητικό παράδειγμα με Περιοδική Αρχική συνθήκη με $c > 0$

Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα από την επίλυση του Π.Α.Τ

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x, & u(0, t) = u(1, t). \end{cases} \quad (2.5.1)$$

με την μέθοδο Upwind (2.3.4a)-(2.3.4c) για $t = 1$ και καθώς ο αριθμός Courant τείνει στον αριθμό 1. Το πρόβλημα αυτό έχει λύση όπως έχουμε δει

$$u(x, t) = \sin 2\pi(x - t).$$

Θυμίζουμε ότι με βάση το θεώρημα 2.3 περιμένουμε την τάξη σύγκλισης των σφαλμάτων της l^2 νόρμας να είναι 1.

$$r = \frac{1}{3}$$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
25	73	4.2E-02	0.1E-01	0.4228E+00	-	0.2990E+00	-
49	145	2.1E-02	0.7E-02	0.2399E+00	0.817	0.1696E+00	0.817
97	289	1.0E-02	0.3E-02	0.1281E+00	0.904	0.9059E-01	0.905
193	577	5.2E-03	0.2E-02	0.6624E-01	0.951	0.4684E-01	0.951
385	1153	2.6E-03	0.9E-03	0.3369E-01	0.975	0.2382E-01	0.975
769	2305	1.3E-03	0.4E-03	0.1699E-01	0.987	0.1201E-01	0.987
1537	4609	6.5E-04	0.2E-03	0.8531E-02	0.993	0.6032E-02	0.993

$$r = \frac{3}{4}$$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
25	33	4.2E-02	0.3E-01	0.1860E+00	-	0.1316E+00	-
49	65	2.1E-02	0.2E-01	0.9772E-01	0.928	0.6911E-01	0.929
97	129	1.0E-02	0.8E-02	0.5011E-01	0.963	0.3543E-01	0.963
193	257	5.2E-03	0.4E-02	0.2537E-01	0.981	0.1794E-01	0.981
385	513	2.6E-03	0.2E-02	0.1277E-01	0.990	0.9029E-02	0.990
769	1025	1.3E-03	0.1E-02	0.6405E-02	0.995	0.4529E-02	0.995
1537	2049	6.5E-04	0.5E-03	0.3208E-02	0.997	0.2268E-02	0.997

$$r = 0.96$$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
25	26	4.1E-02	4.0E-02	0.3223E-01	-	0.2287E-01	-
49	51	2.0E-02	2.0E-02	0.1630E-01	0.983	0.1153E-01	0.987
97	101	1.0E-02	1.0E-02	0.8189E-02	0.992	0.5791E-02	0.993
193	201	5.2E-03	5.0E-03	0.4104E-02	0.996	0.2902E-02	0.996
385	401	2.6E-03	2.5E-03	0.2054E-02	0.998	0.1452E-02	0.998
769	801	1.3E-03	1.2E-03	0.1028E-02	0.999	0.7266E-03	0.999
1537	1601	6.5E-04	6.2E-04	0.5139E-03	0.999	0.3634E-03	0.999

Τα παραπάνω αποτελέσματα λοιπόν επαληθεύουν το θεώρημα 2.3 εφόσον παρατηρούμε ότι όσο πιο λεπτή είναι η διαμέριση τόσο πιο μικρό είναι το σφάλμα που παίρνουμε για την l^2 νόρμα με την τάξη ακρίβειας να πλησιάζει την τιμή 1. Επιπρόσθετα όμως συμπεραίνουμε με την βοήθεια του παραδείγματος ότι το σφάλμα στην $\max$ νόρμα έχει την ίδια συμπεριφορά. Ακόμα βλέπουμε ότι καθώς ο αριθμός *Courant* πλησιάζει την τιμή 1 τότε τα σφάλματα τόσο της $\max$ όσο και της l^2 νόρμας μικραίνουν.

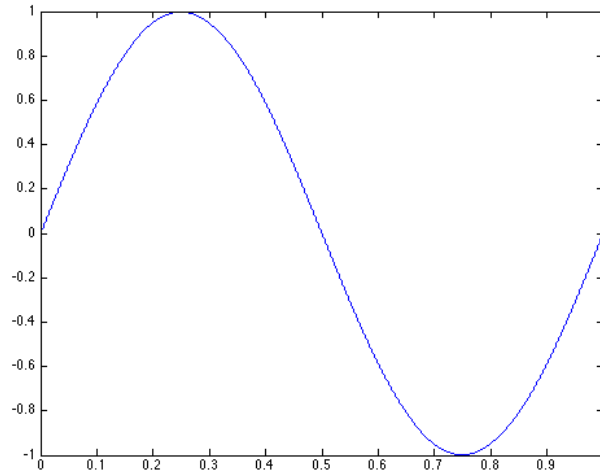
Στη συνέχεια ο πίνακας που ακολουθεί περιέχει τα αποτελέσματα στην περίπτωση όπου $r = 1$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
25	25	4.1E-02	4.1E-02	0	-	0	-
49	49	2.0E-02	2.0E-02	0	-	0	-
97	97	1.0E-02	1.0E-02	0	-	0	-
193	193	5.2E-03	5.2E-03	0	-	0	-
385	385	2.6E-03	2.6E-03	0	-	0	-
769	769	1.3E-03	1.3E-03	0	-	0	-
1537	1537	6.5E-04	6.5E-04	0	-	0	-

Όπως γίνεται φανερό τα αποτελέσματα αυτά επαληθεύουν ότι προβλέπεται από το θεώρημα 2.3 για την l^2 νόρμα δηλαδή ότι το σφάλμα είναι 0 ενώ το ίδιο ισχύει και για την $\max$ νόρμα. Τέλος ο επόμενος πίνακας περιέχει τα αποτελέσματα στην περίπτωση όπου $r = 1,09$ δηλαδή όταν δεν ικανοποιείται η συνθήκη *CFL*.

J	N	Δx	Δt	$\sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \cdot\ _{\infty}$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _{\infty}$	$\sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
25	23	4.1E-02	4.5E-02	0.7688E-01	-	0.5470E-01	-
49	45	2.0E-02	2.2E-02	0.3800E-01	1.016	0.2691E-01	1.023
97	89	1.0E-02	1.1E-02	0.1886E-01	1.010	0.1334E-01	1.012
193	177	5.2E-03	5.6E-03	0.1010E-01	0.960	0.6652E-02	1.004
385	353	2.6E-03	2.8E-03	0.9192E+10	-39	0.1739E+10	-37
769	705	1.3E-03	1.4E-03	0.2054E+36	-84	0.3861E+35	-84

Επαληθεύουμε λοιπόν πειραματικά ότι η μέθοδος είναι ασταθής όταν δεν ικανοποιείται η συνθήκη CFL .



Σχήμα 5: Προσεγγιστική λύση του προβλήματος (2.5.1) για $t = 1$, $h = \frac{1}{1600}$ και $r = 0.96$.

2.5.2 Αριθμητικά παραδείγματα με Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες με $c > 0$

Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα από την επίλυση με την μέθοδο Upwind (2.3.5a) – (2.3.5c) του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 0) &= x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= \lambda t^2, & 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

για διαφορετικές τιμές του λ και τον αριθμό Courant $r = \frac{4}{5}$. Η λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$u(x, t) = \begin{cases} (x - t)^2, & 0 \leq t \leq x \\ \lambda(t - x)^2, & x < t < 1. \end{cases}$$

Ισχύει ότι αν $\lambda = 1$ τότε οι παράγωγοι $\partial_{xx}u$ και $\partial_{tt}u$ είναι συνεχείς. Ο επόμενος πίνακας περιέχει τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος (2.5.2) με την μέθοδο (2.3.5a) – (2.3.5c) όταν $\lambda = 1$ με $\partial_{xx}u$ και $\partial_{tt}u$ συνεχείς.

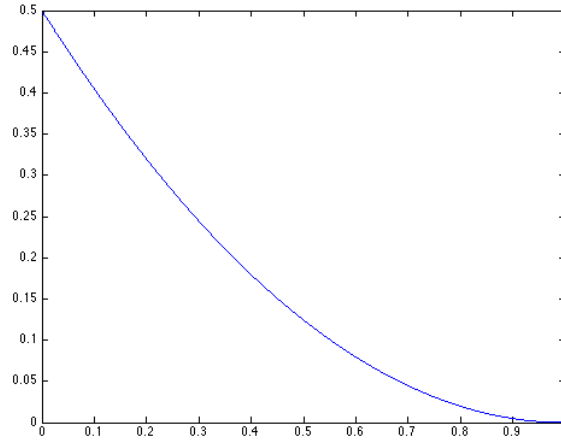
Σύμφωνα με το θεώρημα 2.6 περιμένουμε την τάξη ακρίβειας των σφαλμάτων της l^2 νόρμας να είναι 1.

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
41	51	2.5E-02	0.2E-01	0.4860E-02	-	0.2927E-02	-
121	151	8.3E-03	0.7E-02	0.1640E-02	0.989	0.9669E-03	1.008
361	451	2.8E-03	0.2E-02	0.5503E-03	0.993	0.3213E-03	1.002
1081	1351	9.3E-04	0.7E-03	0.1842E-03	0.996	0.1070E-03	1.000
3241	4051	3.1E-04	0.2E-03	0.6153E-04	0.997	0.3565E-04	1.000
9721	12151	1.0E-04	0.8E-04	0.2054E-04	0.998	0.1188E-04	1.000

Το θεώρημα 2.6 λοιπόν επαληθεύεται εφόσον παρατηρούμε ότι όσο πιο λεπτή είναι η διαμέριση τόσο πιο μικρό είναι το σφάλμα που παίρνουμε για την l^2 νόρμα με την τάξη ακρίβειας να πλησιάζει την τιμή 1. Επιπρόσθετα ερχόμαστε στο συμπέρασμα με την βοήθεια του παραδείγματος ότι το σφάλμα στην max νόρμα έχει την ίδια συμπεριφορά. Στην συνέχεια ο επόμενος πίνακας περιέχει τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος (2.5.2) με την μέθοδο (2.3.5a) – (2.3.5c) όταν $\lambda = \frac{1}{2}$. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως οι παράγωγοι $\partial_{xx}u$ και $\partial_{tt}u$ δεν θα είναι συνεχείς αλλά οι παράγωγοι $\partial_x u$ και $\partial_t u$ θα είναι συνεχείς.

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
41	51	2.5E-02	0.2E-01	0.3751E-02	-	0.1595E-02	-
121	151	8.3E-03	0.7E-02	0.1250E-02	1.000	0.5056E-03	1.045
361	451	2.8E-03	0.2E-02	0.4167E-03	1.000	0.1645E-03	1.021
1081	1351	9.3E-04	0.7E-03	0.1389E-03	1.000	0.5420E-04	1.010
3241	4051	3.1E-04	0.2E-03	0.4630E-04	1.000	0.1796E-04	1.005
9721	12151	1.0E-04	0.8E-04	0.1543E-04	1.000	0.5965E-05	1.003

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι υπάρχει η περίπτωση να έχουμε τάξη ακρίβειας 1 για την $\max$ και την l^2 νόρμα παρά το γεγονός ότι η λύση δεν είναι C^2 . Αυτό είναι κάτι το οποίο δεν προβλέπεται από την θεωρία μας.



Σχήμα 6: Προσεγγιστική λύση του προβλήματος (2.5.2) για $t = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ και $h = \frac{1}{9720}$

Έστω τώρα το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned}
 u_t + u_x &= 0, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \\
 u(x, 0) &= x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\
 u(0, t) &= t, & 0 \leq t \leq 1
 \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

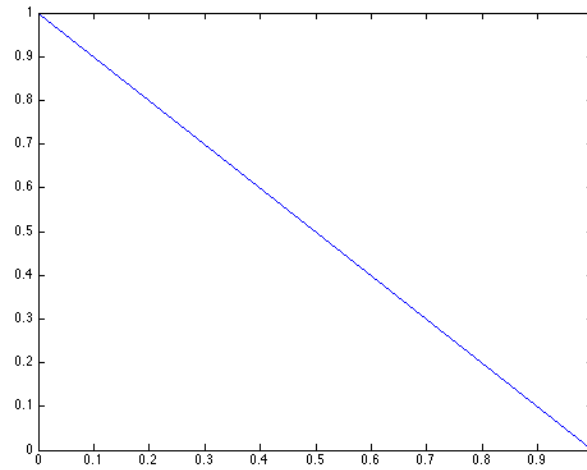
του οποίου η λύση είναι

$$u(x, t) = \begin{cases} (x - t)^2, & 0 \leq t \leq x \\ (t - x), & x < t < 1. \end{cases}$$

Εδώ οι παράγωγοι $\partial_x u$ και $\partial_t u$ δεν είναι συνεχείς. Παρακάτω ακολουθεί ο πίνακας με τα αποτελέσματα από την αριθμητική επίλυση του προβλήματος με την μέθοδο (2.3.5a)-(2.3.5c) και με τον αριθμό $Courant$ $r = \frac{4}{5}$.

J	N	Δx	Δt	$\sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \cdot\ _{\infty}$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _{\infty}$	$\sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
41	51	2.5E-02	0.2E-01	0.3061E-01	-	0.6068E-02	-
121	151	8.3E-03	0.7E-02	0.1710E-01	0.529	0.2347E-02	0.864
361	451	2.8E-03	0.2E-02	0.9677E-02	0.518	0.9522E-03	0.821
1081	1351	9.3E-04	0.7E-03	0.5521E-02	0.510	0.3985E-03	0.792
3241	4051	3.1E-04	0.2E-03	0.3165E-02	0.506	0.1700E-03	0.775

Φαίνεται λοιπόν γι' αυτό το παράδειγμα ότι η τάξη σύγκλισης είναι μικρότερη του 1.



Σχήμα 7: Προσεγγιστική λύση του προβλήματος (2.5.3) για $t = 1$ και $h = \frac{1}{3240}$

Στη συνέχεια έστω το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

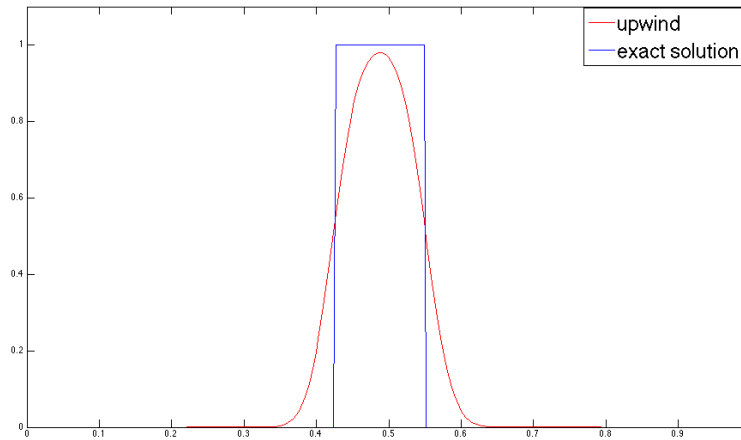
$$\begin{aligned}
 u_t + 0,3u_x &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \\
 u(x, 0) &= \begin{cases} 1, & \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \\
 u(0, t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Η λύση του προβλήματος αυτού δεν είναι συνεχής.

Παρακάτω ακολουθεί ο πίνακας με τα αποτελέσματα από την αριθμητική επίλυση του προβλήματος με την μέθοδο Upwind (2.3.5a)-(2.3.5c) με τον αριθμό Courant $r = 0.252631$ καθώς και τις τιμές $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{8}$ να είναι σημεία του διαμερισμού.

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
33	39	3.1E-02	0.3E-01	0.4760E+00	0.2115E+00	-
97	115	1.0E-02	0.9E-02	0.5146E+00	0.1547E+00	0.284
289	343	3.5E-03	0.3E-02	0.5091E+00	0.1145E+00	0.273
865	1027	1.2E-03	0.1E-02	0.5110E+00	0.8689E-01	0.251

Παρατηρούμε ότι η τάξη ακρίβειας της l^2 νόρμας σε αυτό το πείραμα είναι περίπου 0.25.

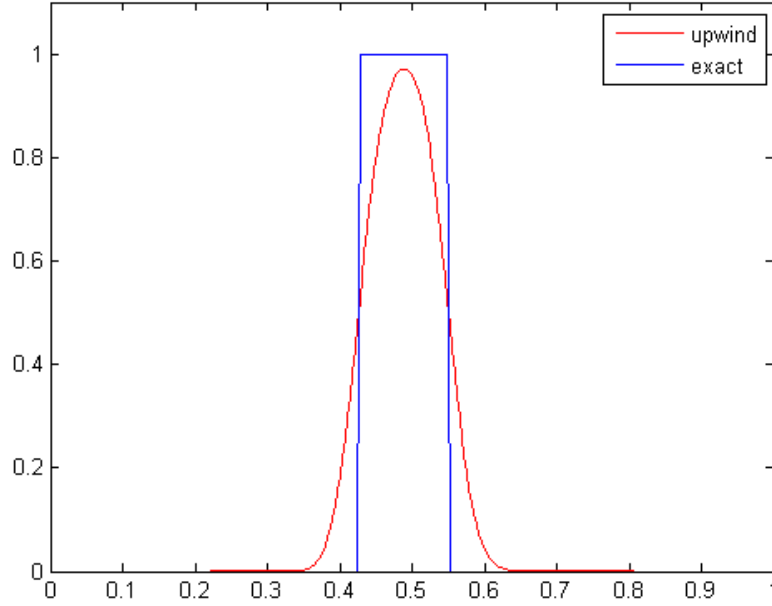


Σχήμα 8: Προσεγγιστική λύση του προβλήματος (2.5.4) για $t = 1$, $h = \frac{1}{288}$ και $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ είναι σημεία του διαμερισμού.

Συνεχίζοντας παραθέτουμε και τον πίνακα με τα αποτελέσματα από το παραπάνω πρόβλημα με την διαφορά ότι τα $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ δεν είναι σημεία του διαμερισμού και $r = 0.194117$.

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
12	18	9.1E-02	0.6E-01	0.7957E+00	0.3411E+00	-
34	52	3.0E-02	0.2E-01	0.5624E+00	0.2191E+00	0.402
100	154	1.0E-02	0.7E-02	0.5020E+00	0.1585E+00	0.294
298	460	3.4E-03	0.2E-02	0.4766E+00	0.1155E+00	0.288

Η τάξη ακρίβειας της l^2 νόρμας σε αυτό το πείραμα είναι περίπου 0.28. Πρακτικά είναι ίση με την τάξη σύγκλισης του προηγούμενου πειράματος. Βλέπουμε όμως ότι αν τα $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ είναι σημεία του διαμερισμού τότε το σφάλμα στην l^2 νόρμα είναι πιο μικρό.



Σχήμα 9: Προσεγγιστική λύση του προβλήματος (2.5.4) για $t = 1$, $h = \frac{1}{297}$ και $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ δεν είναι σημεία του διαμερισμού.

2.5.3 Σφάλματα πλάτους και σφάλματα φάσης

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε τους υπολογισμούς για τα σφάλματα πλάτους και φάσης για το Π.Α.Τ (2.5.1) με αριθμό Courant $r = \frac{1}{3}$. Για την διατύπωση των σφαλμάτων πλάτους και φάσης σκεφτόμαστε ως εξής. Η λύση του (2.5.1) έχει μέγιστη τιμή 1 άρα το σφάλμα πλάτους για μία χρονική στιγμή t^n δίνεται από

$$\text{σφάλμα πλάτους} = |1 - \max_{1 \leq j \leq J} U_j^n|.$$

Το σημείο x_{max} όπου η λύση του (2.5.1) παίρνει μέγιστο σε συνάρτηση με τον χρόνο t βρίσκεται ως ακολούθως

$$\sin 2\pi(x_{max} - t) = 1 \Rightarrow 2\pi(x_{max} - t) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_{max} = t + \frac{1}{4}.$$

Άρα το σφάλμα φάσης για μία χρονική στιγμή t^n υπολογίζεται από

$$\text{σφάλμα φάσης} = |x_{max} - x_{\kappa}|$$

όπου κ είναι ο δείκτης για τον οποίο ισχύει $U_{\kappa}^n = \max_{1 \leq j \leq J} U_j^n$.

$t = 0.138$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα πλάτους	τάξη συγκ. σφάλματος πλάτους	σφάλμα φάσης	τάξη συγκ. σφάλματος φάσης
25	73	4.2E-02	0.1E-01	0.7681E-01	-	0.1389E-01	-
49	145	2.1E-02	0.7E-02	0.3832E-01	1.003	0.6944E-02	1.000
97	289	1.0E-02	0.3E-02	0.1909E-01	1.005	0.3472E-02	1.000
193	577	5.2E-03	0.2E-02	0.9534E-02	1.002	0.1736E-02	1.000
385	1153	2.6E-03	0.9E-03	0.4763E-02	1.001	0.8681E-03	1.000
769	2305	1.3E-03	0.4E-03	0.2381E-02	1.001	0.4340E-03	1.000
1537	4609	6.5E-04	0.2E-03	0.1190E-02	1.000	0.2170E-03	1.000

$t = 0.388$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα πλάτους	τάξη συγκ. σφάλματος πλάτους	σφάλμα φάσης	τάξη συγκ. σφάλματος φάσης
25	73	4.2E-02	0.1E-01	0.1950E+00	-	0.1389E-01	-
49	145	2.1E-02	0.7E-02	0.1021E+00	0.934	0.6944E-02	1.000
97	289	1.0E-02	0.3E-02	0.5214E-01	0.970	0.3472E-02	1.000
193	577	5.2E-03	0.2E-02	0.2636E-01	0.984	0.1736E-02	1.000
385	1153	2.6E-03	0.9E-03	0.1325E-01	0.992	0.8681E-03	1.000
769	2305	1.3E-03	0.4E-03	0.6645E-02	0.996	0.4340E-03	1.000
1537	4609	6.5E-04	0.2E-03	0.3327E-02	0.998	0.2170E-03	1.000

$t = 0.513$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα πλάτους	τάξη συγκ. σφάλματος πλάτους	σφάλμα φάσης	τάξη συγκ. σφάλματος φάσης
25	73	4.2E-02	0.1E-01	0.2483E+00	-	0.1389E-01	-
49	145	2.1E-02	0.7E-02	0.1324E+00	0.908	0.6944E-02	1.000
97	289	1.0E-02	0.3E-02	0.6824E-01	0.956	0.3472E-02	1.000
193	577	5.2E-03	0.2E-02	0.3467E-01	0.977	0.1736E-02	1.000
385	1153	2.6E-03	0.9E-03	0.1747E-01	0.989	0.8681E-03	1.000
769	2305	1.3E-03	0.4E-03	0.8770E-02	0.994	0.4340E-03	1.000
1537	4609	6.5E-04	0.2E-03	0.4394E-02	0.997	0.2170E-03	1.000

$t = 0.861$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα πλάτους	τάξη συγκ. σφάλματος πλάτους	σφάλμα φάσης	τάξη συγκ. σφάλματος φάσης
25	73	4.2E-02	0.1E-01	0.3801E+00	-	0.1389E-01	-
49	145	2.1E-02	0.7E-02	0.2110E+00	0.849	0.6944E-02	1.000
97	289	1.0E-02	0.3E-02	0.1116E+00	0.919	0.3472E-02	1.000
193	577	5.2E-03	0.2E-02	0.5737E-01	0.960	0.1736E-02	1.000
385	1153	2.6E-03	0.9E-03	0.2909E-01	0.980	0.8681E-03	1.000
769	2305	1.3E-03	0.4E-03	0.1465E-01	0.990	0.4340E-03	1.000
1537	4609	6.5E-04	0.2E-03	0.7351E-02	0.995	0.2170E-03	1.000

 $t = 0.986$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα πλάτους	τάξη συγκ. σφάλματος πλάτους	σφάλμα φάσης	τάξη συγκ. σφάλματος φάσης
25	73	4.2E-02	0.1E-01	0.4213E+00	-	0.1389E-01	-
49	145	2.1E-02	0.7E-02	0.2376E+00	0.827	0.6944E-02	1.000
97	289	1.0E-02	0.3E-02	0.1267E+00	0.907	0.3472E-02	1.000
193	577	5.2E-03	0.2E-02	0.6541E-01	0.954	0.1736E-02	1.000
385	1153	2.6E-03	0.9E-03	0.3324E-01	0.976	0.8681E-03	1.000
769	2305	1.3E-03	0.4E-03	0.1676E-01	0.988	0.4340E-03	1.000
1537	4609	6.5E-04	0.2E-03	0.8414E-02	0.994	0.2170E-03	1.000

Συμπεραίνουμε ότι το σφάλμα πλάτους γίνεται μεγαλύτερο καθώς το t πλησιάζει την τιμή 1. Σε αντίθεση με αυτό η τάξη ακρίβειας του σφάλματος πλάτους μένει πρακτικά σταθερή. Τέλος το σφάλμα φάσης παραμένει αναλλοίωτο.

3 Η Μέθοδος Lax-Wendroff για την Εξίσωση Μεταφοράς

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε την μέθοδο Upwind για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (2.2.1) με περιοδικές αρχικές συνθήκες καθώς και με αρχικές-συνοριακές συνθήκες, ενώ είδαμε ότι η τάξη σύγκλισης της είναι 1. Όπως όμως είναι φυσικό, θέλουμε να μελετήσουμε μεθόδους με μεγαλύτερη τάξη σύγκλισης, όπως είναι η Lax-Wendroff.

3.1 Περιοδικές Αρχικές συνθήκες

Αρχίζοντας θα θεωρήσουμε δύο ομοιόμορφους διαμερισμούς έναν για τον άξονα x και έναν για τον άξονα t στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[0, T]$ όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Θα οδηγηθούμε στη μέθοδο Lax-Wendroff για το πρόβλημα (2.2.4) προσεγγίζοντας τις u_x και $\partial_x^2 u$ κατάλληλα με αναπτύγματα Taylor.

Θεωρούμε ότι u είναι αρκετά ομαλή για $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$. Για $j = 0, \dots, J-1$ και με $Jh = 1$, το προς τα πίσω ανάπτυγμα Taylor της u περί το x_j για σταθερό t είναι

$$u(x_j - h, t) = u(x_j, t) - hu_x(x_j, t) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(x_j, t) - \frac{h^3}{3!}\partial_x^3 u(x_j, t) + O(h^4) \quad (3.1.1)$$

ενώ το προς τα μπροστά ανάπτυγμα Taylor της u κοντά στο x_j είναι

$$u(x_j + h, t) = u(x_j, t) + hu_x(x_j, t) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(x_j, t) + \frac{h^3}{3!}\partial_x^3 u(x_j, t) + O(h^4). \quad (3.1.2)$$

Αφαιρώντας την (3.1.1) από την (3.1.2) έχουμε

$$\begin{aligned} u(x_j + h, t) - u(x_j - h, t) &= 2hu_x(x_j, t) + O(h^3) \Rightarrow \\ u_x(x_j, t) &= \frac{u(x_j + h, t) - u(x_j - h, t)}{2h} + O(h^2). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Προσθέτοντας την (3.1.1) και την (3.1.2) έχουμε

$$\begin{aligned} u(x_j + h, t) + u(x_j - h, t) &= 2u(x_j, t) + h^2 \partial_x^2 u(x_j, t) + O(h^4) \Rightarrow \\ \partial_x^2 u(x_j, t) &= \frac{u(x_j + h, t) - 2u(x_j, t) + u(x_j - h, t)}{h^2} + O(h^2). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Στη συνέχεια το μπρος τα εμπρός ανάπτυγμα Taylor της u κοντά στο t^n με σταθερό x και k μικρό είναι

$$u(x, t^n + k) = u(x, t^n) + ku_t(x, t^n) + \frac{k^2}{2!} \partial_t^2 u(x, t^n) + O(k^3) \quad (3.1.5)$$

για $n = 0, \dots, M-1$, όταν $nk = T$, με $t^n = nk$. Όμως από την εξίσωση (2.2.1) έχουμε

$$u_t = -cu_x. \quad (3.1.6)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.1.6) και (2.4.3) στην (3.1.5) έχουμε

$$u(x, t^n + k) = u(x, t^n) - ck u_x(x, t^n) + \frac{k^2}{2!} c^2 \partial_x^2 u(x, t^n) + O(k^3). \quad (3.1.7)$$

Τελικά με αντικατάσταση των (3.1.3) και (3.1.4) στην (3.1.7) έχουμε για $j = 0, \dots, J-1$

$$\begin{aligned} u(x_j, t^{n+1}) &= u(x, t^n) - ck \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2h} + \\ &+ \frac{k^2}{2!} c^2 \frac{u(x_{j+1}, t) - 2u(x_j, t) + u(x_{j-1}, t)}{h^2} + O(k^3) + O(kh^2). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Συνεχίζοντας αντικαθιστάμε τις ακριβείς τιμές με κατάλληλες προσεγγίσεις

$$u(x_j, t^n) \simeq U_j^n$$

και καταλήγουμε από την (3.1.8) στη μέθοδο Lax-Wendroff για το πρόβλημα (2.2.4)

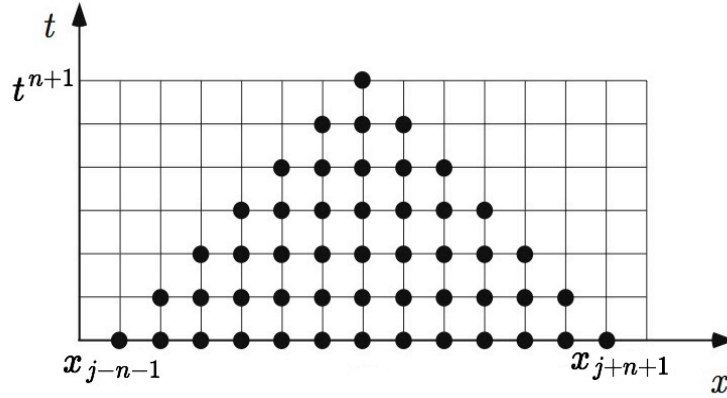
$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{ck}{h} \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{ck}{h} \right)^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \\ \text{με } 0 \leq j \leq J-1, \quad 0 \leq n \leq M-1. \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή μπορεί ύστερα από πράξεις μπορεί να πάρει τη μορφή

$$U_j^{n+1} = (1 - r^2)U_j^n + \frac{r(r-1)}{2}U_{j+1}^n + \frac{r(r+1)}{2}U_{j-1}^n$$

όπου $r = \frac{ck}{h}$ ο αριθμός του Courant ενώ θα ισχύει $U_{-1}^n = U_{J-1}^n, U_0^n = U_J^n$ λόγω περιοδικών αρχικών συνθηκών.

Για ένα τυχαίο σημείο (x_j, t^{n+1}) η προσέγγιση U_j^{n+1} εξαρτάται από τις τιμές στους κόμβους που βρίσκονται μέσα στο τρίγωνο με κορυφές (x_j, t^{n+1}) , $(x_{j+n+1}, 0)$ και $(x_{j-n-1}, 0)$. Ως παράδειγμα παραθέτουμε το ακόλουθο σχήμα



3.1.1 Διατύπωση της μεθόδου Lax-Wendroff με Περιοδικές Αρχικές συνθήκες.

Η μέθοδος Lax-Wendroff για την επίλυση του προβλήματος (2.2.4) υλοποιείται ως ακολούθως. Στο πρώτο βήμα της μεθόδου για $n = 0$ εισάγουμε την αρχική συνθήκη του προβλήματος

$$U_j^0 = \phi(x_j) \quad \text{για } j = 0, \dots, J-1. \quad (3.1.10a)$$

Στη συνέχεια για $0 \leq n \leq M-1$ υπολογίζουμε

$$U_j^{n+1} = (1 - r^2)U_j^n + \frac{r(r-1)}{2}U_{j+1}^n + \frac{r(r+1)}{2}U_{j-1}^n \quad (3.1.10b)$$

για $j = 0, \dots, J-1$

$$\text{με } U_{-1}^n = U_{J-1}^n, U_0^n = U_J^n. \quad (3.1.10c)$$

3.1.2 Σύγκλιση της μεθόδου Lax-Wendroff με Περιοδικές Αρχικές συνθήκες.

Ευστάθεια της μεθόδου Lax-Wendroff

Θεώρημα 3.1. Έστω $D = (0, 1) \times (0, T)$ και $u(x, t)$ η λύση του προβλήματος (2.2.4). Έστω επίσης U_j^n η λύση που λαμβάνουμε από τις (3.1.10a) – (3.1.10c). Αν $|r| \leq 1$ τότε ισχύει

$$\|U^n\|_h \leq \|U^0\|_h \quad \text{για } n = 0, \dots, M. \quad (3.1.11)$$

Απόδειξη

Για $0 \leq j \leq J-1$ έχουμε

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= (1-r^2)U_j^n + \frac{r(r-1)}{2}U_{j+1}^n + \frac{r(r+1)}{2}U_{j-1}^n \Rightarrow \\ (U_j^{n+1})^2 &= \left((1-r^2)U_j^n + \frac{r(r-1)}{2}U_{j+1}^n + \frac{r(r+1)}{2}U_{j-1}^n \right)^2 \Rightarrow \\ (U_j^{n+1})^2 &= (1-r^2)^2(U_j^n)^2 + \left(\frac{r(r-1)}{2} \right)^2 (U_{j+1}^n)^2 + \left(\frac{r(r+1)}{2} \right)^2 (U_{j-1}^n)^2 + \\ &+ r(r-1)(1-r^2)U_j^n U_{j+1}^n + r(r+1)(1-r^2)U_j^n U_{j-1}^n + \frac{r^2(r+1)(r-1)}{2}U_{j+1}^n U_{j-1}^n \end{aligned}$$

Αθροίζουμε ως προς $j = 0, \dots, J-1$ πολλαπλασιάζουμε με h και έχουμε

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^{n+1})^2 &= (1-r^2)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^n)^2 + \left(\frac{r(r-1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j+1}^n)^2 + \\ &+ \left(\frac{r(r+1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 + r(r-1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j+1}^n + \\ &+ r(r+1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n + \frac{r^2(r+1)(r-1)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} U_{j+1}^n U_{j-1}^n \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Για $|r| \leq 1$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{4}(r^2 - r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)^2 \geq 0. \quad (3.1.13)$$

Επομένως μπορούμε να προσθέσουμε την (3.1.13) στο δεύτερο μέλος της (3.1.12) και θα έχουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^{n+1})^2 &\leq (1-r^2)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^n)^2 + \left(\frac{r(r-1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j+1}^n)^2 + \\
&+ \left(\frac{r(r+1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 + r(r-1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j+1}^n + \\
&+ r(r+1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n + \frac{r^2(r+1)(r-1)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} U_{j+1}^n U_{j-1}^n + \\
&+ (r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^n)^2 + \frac{1}{4} (r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j+1}^n)^2 + \\
&+ \frac{1}{4} (r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 - (r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j+1}^n - \\
&- (r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n + \frac{1}{2} (r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} U_{j-1}^n U_{j+1}^n.
\end{aligned}$$

Κάνοντας πράξεις θα έχουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^{n+1})^2 &\leq \frac{r^2(1-r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j+1}^n)^2 + (1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^n)^2 + \\
&+ \frac{r^2(1+r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 + (r^3-r) h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j+1}^n + \quad (3.1.14) \\
&+ (r-r^3) h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n.
\end{aligned}$$

Ισχύει όμως λόγω των περιοδικών συνθηκών ότι

$$h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n = h \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n U_{j+1}^n.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^{n+1})^2 &\leq \frac{r^2(1-r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j+1}^n)^2 + (1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^n)^2 + \\
 &\quad + \frac{r^2(1+r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 \Rightarrow \\
 h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^{n+1})^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} (U_j^n)^2 \Rightarrow \|U^{n+1}\|_h^2 \leq \|U^n\|_h^2 \Rightarrow \\
 \|U^{n+1}\|_h &\leq \|U^n\|_h
 \end{aligned}$$

από όπου η (3.1.11) προκύπτει επαγωγικά.

□

Συνέπεια της μεθόδου Lax-Wendroff

Θεώρημα 3.2. Έστω $D = (0, 1) \times (0, T)$ και $u(x, t)$ η λύση του προβλήματος (2.2.4) τέτοια ώστε $u \in C^4(\bar{D})$. Αν τ_j^n είναι το τοπικό σφάλμα στο σημείο (x_j, t^n) που ορίζεται ως

$$\begin{aligned}
 \tau_j^n = \tau(x_j, t^n) &:= u(x_j, t^{n+1}) - [(1-r^2)u(t^n, x_j) + \\
 &\quad + \frac{r(r-1)}{2}u(t^n, x_{j+1}) + \frac{r(r+1)}{2}u(t^n, x_{j-1})]
 \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

τότε ισχύει

$$\|\tau^n\|_h \leq \tilde{C} N k (k^2 + ch^2) \tag{3.1.16}$$

$$\text{όπου } N = \max(c^3, c) \max\{\max_{x,t \in \bar{D}} |\partial_x^3 u|, \max_{x,t \in \bar{D}} |\partial_x^4 u|\}$$

και $\tilde{C}$ αριθμητική σταθερά.

Απόδειξη

Η (3.1.15) μπορεί να πάρει την μορφή

$$\begin{aligned}
 \tau(x_j, t^n) &= u(x_j, t^{n+1}) - \left[u(t^n, x_j) + ck \left(\frac{u(t^n, x_{j-1}) - u(t^n, x_{j+1})}{2h} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + c^2 k^2 \left(\frac{u(t^n, x_{j+1}) - 2u(t^n, x_j) + u(t^n, x_{j-1})}{2h^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Σταθεροποιώντας τα j και n και αναπτύσσοντας σε σειρές Taylor γύρω από το σημείο (t^n, x_j) τα $u(x_j, t^{n+1})$, $u(t^n, x_{j-1})$ και $u(t^n, x_{j+1})$ έχουμε

$$\begin{aligned} \tau(x_j, t^n) = & u(t^n, x_j) + ku_t(t^n, x_j) + \frac{k^2}{2!} \partial_t^2 u(t^n, x_j) + \frac{k^3}{3!} \partial_t^3 u(t^n, x_j) - u(t^n, x_j) - \\ & - ck \frac{u(t^n, x_j) - hu_x(t^n, x_j) + \frac{h^2}{2!} \partial_x^2 u(t^n, x_j) - \frac{h^3}{3!} \partial_x^3 u(t^n, \mu_j^n)}{2h} + \\ & + ck \frac{u(t^n, x_j) + hu_x(t^n, x_j) + \frac{h^2}{2!} \partial_x^2 u(t^n, x_j) + \frac{h^3}{3!} \partial_x^3 u(t^n, \psi_j^n)}{2h} - \\ & - c^2 k^2 \frac{u(t^n, x_j) + hu_x(t^n, x_j) + \frac{h^2}{2!} \partial_x^2 u(t^n, x_j) + \frac{h^3}{3!} \partial_x^3 u(t^n, x_j) + \frac{h^4}{4!} \partial_x^4 u(t^n, \tilde{\psi}_j^n)}{2h^2} - \\ & - c^2 k^2 \frac{u(t^n, x_j) - hu_x(t^n, x_j) + \frac{h^2}{2!} \partial_x^2 u(t^n, x_j) - \frac{h^3}{3!} \partial_x^3 u(t^n, x_j) + \frac{h^4}{4!} \partial_x^4 u(t^n, \tilde{\mu}_j^n)}{2h^2} - \\ & - c^2 k^2 \frac{-2u(t^n, x_j)}{2h^2} \end{aligned}$$

με $t^n \leq \theta_j^n \leq t^{n+1}$, $x_{j-1} \leq \mu_j^n \leq x_j$, $x_j \leq \psi_j^n \leq x_{j+1}$, $x_j \leq \tilde{\psi}_j^n \leq x_{j+1}$, $x_{j-1} \leq \tilde{\mu}_j^n \leq x_j$.

Από τις (3.1.6) και (3.1.7), το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών και το γεγονός ότι

$$\partial_t^3 u = -c^3 \partial_x^3 u \quad (3.1.17)$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} \tau(x_j, t^n) = & \frac{k^3}{3!} \partial_t^3 u(\theta_j^n, x_j) + ck \frac{h^2}{3!} \frac{1}{2} \partial_x^3 u(t^n, \mu_j^n) + ck \frac{h^2}{3!} \frac{1}{2} \partial_x^3 u(t^n, \psi_j^n) - \\ & - c^2 k^2 \frac{1}{2} \frac{h^2}{4} \partial_x^4 u(t^n, \tilde{\psi}_j^n) - c^2 k^2 \frac{1}{2} \frac{h^2}{4!} \partial_x^4 u(t^n, \tilde{\mu}_j^n) \Rightarrow \\ \tau(x_j, t^n) = & \frac{k^3}{3!} \partial_t^3 u(\theta_j^n, x_j) + ck \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 u(t^n, \zeta_j^n) - c^2 k^2 \frac{h^2}{4!} \partial_x^4 u(t^n, \tilde{\zeta}_j^n) \end{aligned}$$

με $\mu_j^n \leq \zeta_j^n \leq \psi_j^n$ και $\tilde{\mu}_j^n \leq \tilde{\zeta}_j^n \leq \tilde{\psi}_j^n$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} |\tau(x_j, t^n)| & \leq \frac{k^3}{3!} |\partial_t^3 u(\theta_j^n, x_j)| + ck \frac{h^2}{3!} |\partial_x^3 u(t^n, \zeta_j^n)| + c^2 k^2 \frac{h^2}{4!} |\partial_x^4 u(t^n, \tilde{\zeta}_j^n)| \Rightarrow \\ |\tau(x_j, t^n)| & \leq \frac{k^3}{3!} c^3 |\partial_x^3 u(\theta_j^n, x_j)| + ck \frac{h^2}{3!} |\partial_x^3 u(t^n, \zeta_j^n)| + c^2 k^2 \frac{h^2}{4!} |\partial_x^4 u(t^n, \tilde{\zeta}_j^n)| \Rightarrow \\ |\tau(x_j, t^n)| & \leq \frac{1}{3!} kN(k^2 + h^2 + kh^2). \end{aligned}$$

Όμως αν θεωρήσουμε $k \leq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\tau(x_j, t^n)| & \leq \frac{1}{3!} kN(k^2 + 2h^2) \Rightarrow \\ |\tau(x_j, t^n)| & \leq \tilde{C} Nk(k^2 + h^2) \end{aligned}$$

με $\tilde{C} = \frac{2}{3!}$ σταθερά.

Αθροίζοντας για $j = 0 \dots J-1$ και πολλαπλασιάζοντας με h παίρνουμε

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^{J-1} |\tau(x_j, t^n)|^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} \left(\tilde{C} N(k^2 + h^2) \right)^2 = \\ &= \left(\tilde{C} N k(k^2 + h^2) \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} 1 = \\ &= \left(\tilde{C} N k(k^2 + h^2) \right)^2 h J = \\ &= \left(\tilde{C} N k(k^2 + h^2) \right)^2 \end{aligned}$$

Άρα

$$\|\tau^n\|_h \leq \tilde{C} N k(k^2 + h^2).$$

□

Σύγκλιση της μεθόδου Lax-Wendroff

Θεώρημα 3.3. Έστω $D = (0, 1) \times (0, T)$ και $u(x, t)$ η λύση του προβλήματος (2.2.4) τέτοια ώστε $u \in C^4(\overline{D})$. Έστω επίσης U_j^n η λύση που λαμβάνουμε από τις (3.1.10a) – (3.1.10c). Αν $|r| \leq 1$ τότε ισχύει

$$\max_{j,n} \|U_j^n - u(x_j, t^n)\|_h \leq \tilde{C} N T(k^2 + h^2)$$

όπου $\tilde{C}$ και N όπως στην (3.1.16).

Απόδειξη

Θέτουμε $e_j^n = U_j^n - u(x_j, t^n)$ για το σφάλμα των (3.1.10a) – (3.1.10c) στο σημείο (x_j, t^n) για $j = 0 \dots J$. Είναι προφανές επίσης ότι ισχύει $e_j^0 = 0$ για $j = 0, \dots, J$.

Έχουμε με τη βοήθεια της (3.1.15) ότι

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &= U_j^{n+1} - u(x_j, t^{n+1}) \Rightarrow \\ e_j^{n+1} &= (1 - r^2)U_j^n + \frac{r(r-1)}{2}U_{j+1}^n + \frac{r(r+1)}{2}U_{j-1}^n - \\ &\quad - \left[(1 - r^2)u(t^n, x_j) + \frac{r(r-1)}{2}u(t^n, x_{j+1}) + \frac{r(r+1)}{2}u(t^n, x_{j-1}) - \tau_j^n \right] \Rightarrow \\ e_j^{n+1} &= (1 - r^2)e_j^n + \frac{r(r-1)}{2}e_{j+1}^n + \frac{r(r+1)}{2}e_{j-1}^n - \tau_j^n \end{aligned}$$

για $j = 0, \dots, J-1$.

Υψώνοντας στο τετράγωνο, αθροίζοντας ως προς $j, 0 \leq j \leq J-1$ και πολλαπλασιάζοντας με h παίρνουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &= h \sum_{j=0}^{J-1} \left((1-r^2)e_j^n + \frac{r(r-1)}{2}e_{j+1}^n + \frac{r(r+1)}{2}e_{j-1}^n - \tau_j^n \right)^2 = \\
&= (1-r^2)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + \left(\frac{r(r-1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n)^2 + \\
&+ \left(\frac{r(r+1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + r(r-1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j+1}^n + \\
&+ r(r+1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j-1}^n + \frac{r^2(r+1)(r-1)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j+1}^n e_{j-1}^n + \\
&+ h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 - 2(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n \tau_j^n - r(r-1) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j+1}^n \tau_j^n - \\
&- r(r+1) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j-1}^n \tau_j^n
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Για $|r| \leq 1$ (συνθήκη ευστάθειας) ισχύει ότι η ποσότητα

$$\frac{1}{4}(r^2 - r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n)^2 \geq 0. \tag{3.1.19}$$

Επομένως μπορούμε να προσθέσουμε την (3.1.19) στο δεύτερο μέλος της (3.1.18) και θα έχουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq (1-r^2)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + \left(\frac{r(r-1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n)^2 + \\
&+ \left(\frac{r(r+1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + r(r-1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j+1}^n + \\
&+ r(r+1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j-1}^n + \frac{r^2(r+1)(r-1)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j+1}^n e_{j-1}^n + \\
&+ (r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + \frac{1}{4}(r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n)^2 + \\
&+ \frac{1}{4}(r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + (r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j+1}^n + \\
&+ (r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j-1}^n + \frac{1}{2}(r^2-r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j-1}^n e_{j+1}^n + \\
&+ h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 - 2(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n \tau_j^n - r(r-1) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j+1}^n \tau_j^n - \\
&- r(r+1) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j-1}^n \tau_j^n.
\end{aligned}$$

Κάνοντας πράξεις θα έχουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq \frac{r^2(1-r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n)^2 + (1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + \\
&+ \frac{r^2(1+r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + (r^3-r) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j+1}^n + (r-r^3) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j-1}^n + \\
&+ h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 - 2(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n \tau_j^n - r(r-1) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j+1}^n \tau_j^n - r(r+1) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j-1}^n \tau_j^n
\end{aligned}$$

Ισχύει όμως λόγω των περιοδικών συνθηκών

$$h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j-1}^n = h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j+1}^n \quad (3.1.20)$$

άρα

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq \frac{r^2(1-r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n)^2 + (1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + \\
&+ \frac{r^2(1+r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 - 2(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n \tau_j^n - \\
&- r(r-1) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j+1}^n \tau_j^n - r(r+1) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j-1}^n \tau_j^n \Rightarrow \\
h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 - 2(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n \tau_j^n - \\
&- r(r-1) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j+1}^n \tau_j^n - r(r+1) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j-1}^n \tau_j^n \Rightarrow \\
h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 - \\
&- 2 \left(h \sum_{j=0}^{J-1} \tau_j^n \left((1-r^2)e_j^n + \frac{r(r-1)}{2} e_{j+1}^n + \frac{r(r+1)}{2} e_{j-1}^n \right) \right).
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 + \\
&+ 2 \left(h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(h \sum_{j=0}^{J-1} \left((1-r^2)e_j^n + \frac{r(r-1)}{2} e_{j+1}^n + \frac{r(r+1)}{2} e_{j-1}^n \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 + \\
&+ 2 \left(h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left((1-r^2)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + \left(\frac{r(r-1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n)^2 + \right. \\
&+ \left(\frac{r(r+1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + r(r-1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j+1}^n + \\
&\left. + r(r+1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j-1}^n + \frac{r^2(r+1)(r-1)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j+1}^n e_{j-1}^n \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε την (3.1.19) στην δεύτερη παρένθεση και θα έχουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 + \\
&+ 2 \left(h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left((1-r^2)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + \left(\frac{r(r-1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n)^2 + \right. \\
&+ \left(\frac{r(r+1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + r(r-1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j+1}^n + \\
&+ r(r+1)(1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j-1}^n + \frac{r^2(r+1)(r-1)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j+1}^n e_{j-1}^n + \\
&+ (r^2 - r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + \frac{1}{4} (r^2 - r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n)^2 + \\
&+ \frac{1}{4} (r^2 - r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + (r^2 - r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j+1}^n + \\
&\left. + (r^2 - r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j-1}^n + \frac{1}{2} (r^2 - r^4) h \sum_{j=0}^{J-1} e_{j-1}^n e_{j+1}^n \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Κάνοντας πράξεις θα έχουμε

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 + \\ &+ 2 \left(h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r^2(1-r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n)^2 + (1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{r^2(1+r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 + (r^3-r) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j+1}^n + (r-r^3) h \sum_{j=0}^{J-1} e_j^n e_{j-1}^n \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Όμως λόγω της (3.1.20)

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 + 2 \left(h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r^2(1-r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j+1}^n)^2 + \right. \\ &\left. + (1-r^2) h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + \frac{r^2(1+r)}{2} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_{j-1}^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^{n+1})^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 + h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 + 2 \left(h \sum_{j=0}^{J-1} (\tau_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(h \sum_{j=0}^{J-1} (e_j^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ \|e^{n+1}\|_2^2 &\leq (\|e^n\|_h + \|\tau^n\|_h)^2 \end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε

$$\|e^{n+1}\|_h \leq \|e^n\|_h + \|\tau^n\|_h.$$

Αλλά από την (3.1.16)

$$\|e^{n+1}\|_h \leq \|e^n\|_h + \tilde{C} N k (k^2 + h^2)$$

Αν $n = 0$ τότε

$$\begin{aligned} \|e^1\|_h &\leq \|e^0\|_h + \tilde{C} N k (k^2 + h^2) \Rightarrow \\ \|e^1\|_h &\leq \tilde{C} N k (k^2 + h^2) \end{aligned}$$

Αν $n = 1$ τότε

$$\begin{aligned} \|e^2\|_h &\leq \|e^1\|_h + \tilde{C} N k (k^2 + h^2) \Rightarrow \\ \|e^2\|_h &\leq 2\tilde{C} N k (k^2 + h^2) \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι γενικά θα ισχύει

$$\begin{aligned}\|e^n\|_h &\leq n\tilde{C}Nk(k^2 + h^2) \Rightarrow \\ \|e^n\|_h &\leq \tilde{C}Nt^n(k^2 + h^2) \Rightarrow \\ \|e^n\|_h &\leq \tilde{C}NT(k^2 + h^2).\end{aligned}$$

Από το προηγούμενο θεώρημα βλέπουμε ότι

$$\max_{j,n} \|U_j^n - u(x_j, t^n)\|_h \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad h, k \rightarrow 0 \quad \text{με} \quad |r| = |c| \frac{k}{h} \leq 1 \quad \text{σταθερό}$$

λόγω ευστάθειας και συνέπειας. Η τάξη σύγκλισης ως προς τις μεταβλητές x και t είναι 2.

Παρατήρηση 6. Αν $r = 1$ τότε η μέθοδος Lax-Wendroff έχει μηδενικό σφάλμα.

3.2 Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες.

3.2.1 Διατύπωση της μεθόδου Lax-Wendroff με αρχικές-συνοριακές συνθήκες.

Θεωρούμε το πρόβλημα εξίσωσης μεταφοράς με αρχικές συνοριακές συνθήκες (2.2.7) για $c > 0$. Η μέθοδος Lax-Wendroff για την επίλυση αυτού του προβλήματος είναι για $0 \leq n \leq M - 1$

$$\begin{aligned}\text{για } 0 \leq j \leq J - 1 \\ U_j^0 &= f(x_j)\end{aligned}\tag{3.2.1a}$$

$$\begin{aligned}\text{για } j = 0 \\ U_0^{n+1} &= g(t^{n+1})\end{aligned}\tag{3.2.1b}$$

$$\begin{aligned}\text{για } 1 \leq j \leq J - 1 \\ U_j^{n+1} &= (1 - r^2)U_j^n + \frac{r(r - 1)}{2}U_{j+1}^n + \frac{r(r + 1)}{2}U_{j-1}^n\end{aligned}\tag{3.2.1c}$$

$$\begin{aligned}\text{για } j = J \\ U_J^{n+1} &= rU_{J-1}^n + (1 - r)U_J^n.\end{aligned}\tag{3.2.1d}$$

3.2.2 Τεχνητή συνοριακή συνθήκη

Η (3.2.1d) αποτελεί μία σχέση η οποία είναι απαραίτητη για να ορισθεί πλήρως η αριθμητική μέθοδος. Σημειώνουμε ότι η επιλογή αυτής της συνθήκης δεν

είναι μοναδική και επηρεάζει την τάξη σύγκλισης της μεθόδου. Αυτό θα γίνει φανερό στα αριθμητικά αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε. Εξηγούμε στη συνέχεια την παραγωγή της τεχνητής συνοριακής συνθήκης (3.2.1d) .

Η γραμμική παρεμβάλλουσα συνάρτηση ως προς x στις τιμές U_{J-1}^n, U_J^n είναι

$$b(x) = \frac{x_J - x}{x_J - x_{J-1}} U_{J-1}^n + \frac{x - x_{J-1}}{x_J - x_{J-1}} U_J^n. \quad (3.2.2)$$

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες (ευθείες) του προβλήματος είναι της μορφής

$$x = ct + \xi.$$

Ως γνωστόν, πάνω στις χαρακτηριστικές, η λύση της $u_t + cu_x = 0$ είναι σταθερή. Για την χαρακτηριστική καμπύλη που παίρνει από το σημείο $x_J = 1$ την χρονική στιγμή t^{n+1} ισχύει

$$1 = ct^{n+1} + \xi \Rightarrow \xi = 1 - ct^{n+1}$$

άρα έχει την μορφή

$$x = ct + 1 - ct^{n+1} = 1 - c(t^{n+1} - t).$$

Την χρονική στιγμή t^n η χαρακτηριστική αυτή καμπύλη παίρνει την τιμή

$$x = 1 - c(t^{n+1} - t^n) = 1 - ck.$$

Θέτουμε λοιπόν, σε αναλογία με την ιδιότητα της λύσης $u(x, t)$,

$$\begin{aligned} U_J^{n+1} &= b(1 - ck) = \frac{x_J - (1 - ck)}{x_J - x_{J-1}} U_{J-1}^n + \frac{(1 - ck) - x_{J-1}}{x_J - x_{J-1}} U_J^n \Rightarrow \\ U_J^{n+1} &= \frac{ck}{h} U_{J-1}^n + \frac{h - ck}{h} U_J^n \Rightarrow \\ U_J^{n+1} &= r U_{J-1}^n + (1 - r) U_J^n. \end{aligned}$$

Όπως γίνεται λοιπόν κατανοητό, η τεχνητή συνοριακή συνθήκη εκχωρεί ως τιμή στην προσέγγιση U_J^{n+1} την τιμή της συνάρτησης που παρεμβάλλεται γραμμικά στις τιμές U_{J-1}^n και U_J^n , στο σημείο εκείνο όπου η χαρακτηριστική καμπύλη του προβλήματος που καταλήγει στον κόμβο x_J την χρονική στιγμή t^{n+1} , τέμνει την ευθεία $t = t^n$.

Παρατήρηση 7. Η χαρακτηριστική καμπύλη, η οποία τη χρονική στιγμή t^{n+1} καταλήγει στον κόμβο x_J , τέμνει την ευθεία $t = t^n$ στο διάστημα $[x_{J-1}, x_J]$. Αυτό προκύπτει εύκολα από την συνθήκη CFL ($0 < r \leq 1$)

3.2.3 Ευστάθεια της μεθόδου Lax-Wendroff με Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες

Θα δείξουμε στη συνέχεια ευστάθεια της αριθμητικής μεθόδου (3.2.1a) – (3.2.1d).

Θεώρημα 3.4. Έστω $u(x, t)$ η λύση του προβλήματος (2.2.7) για $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$. Έστω U_j^n η λύση που λαμβάνουμε από τις (3.2.1a) – (3.2.1d). Αν $0 < r \leq 1$ τότε ισχύει

- αν $0 < r \leq \frac{1}{2}$

$$\|U^n\|_h^2 \leq e^{G'T} \|U^0\|_h^2 + e^{G'(T-k)} Gk \sum_{j=0}^{n-1} (g(t^j))^2$$

- αν $\frac{1}{2} < r \leq 1$

$$\|U^n\|_h^2 \leq e^{GT} \|U^0\|_h^2 + e^{G(T-k)} Gk \sum_{j=0}^{n-1} (g(t^j))^2$$

όπου G, G' σταθερές.

Απόδειξη

Υψώνοντας την (3.2.1c) στο τετράγωνο υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (U_j^{n+1})^2 &= \left((1-r^2)U_j^n + \frac{r(r-1)}{2}U_{j+1}^n + \frac{r(r+1)}{2}U_{j-1}^n \right)^2 \Rightarrow \\ (U_j^{n+1})^2 &= (1-r^2)^2(U_j^n)^2 + \left(\frac{r(r-1)}{2} \right)^2 (U_{j+1}^n)^2 + \left(\frac{r(r+1)}{2} \right)^2 (U_{j-1}^n)^2 + \\ &+ r(r-1)(1-r^2)U_j^n U_{j+1}^n + r(r+1)(1-r^2)U_j^n U_{j-1}^n + \frac{r^2(r+1)(r-1)}{2} U_{j+1}^n U_{j-1}^n. \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για $1 < j \leq J-1$.

Αθροίζοντας από $j = 1$ έως $J - 1$ και πολλαπλασιάζοντας με h παίρνουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^{n+1})^2 &= (1-r^2)^2 h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n)^2 + \left(\frac{r(r-1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j+1}^n)^2 + \\
&+ \left(\frac{r(r+1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 + r(r-1)(1-r^2) h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n U_{j+1}^n + \\
&+ r(r+1)(1-r^2) h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n + \frac{r^2(r+1)(r-1)}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} U_{j+1}^n U_{j-1}^n
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Για $0 < r \leq 1$ ισχύει ότι η ποσότητα

$$\frac{1}{4}(r^2 - r^4)h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)^2 \geq 0. \tag{3.2.4}$$

Επομένως μπορούμε να προσθέσουμε την (3.2.4) στο δεύτερο μέλος της (3.2.3) και θα έχουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^{n+1})^2 &\leq (1-r^2)^2 h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n)^2 + \left(\frac{r(r-1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j+1}^n)^2 + \\
&+ \left(\frac{r(r+1)}{2} \right)^2 h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 + r(r-1)(1-r^2) h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n U_{j+1}^n + \\
&+ r(r+1)(1-r^2) h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n + \frac{r^2(r+1)(r-1)}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} U_{j+1}^n U_{j-1}^n + \\
&+ (r^2 - r^4)h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n)^2 + \frac{1}{4}(r^2 - r^4)h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j+1}^n)^2 + \\
&+ \frac{1}{4}(r^2 - r^4)h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 - (r^2 - r^4)h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n U_{j+1}^n + \\
&- (r^2 - r^4)h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n + \frac{1}{2}(r^2 - r^4)h \sum_{j=1}^{J-1} U_{j-1}^n U_{j+1}^n
\end{aligned}$$

Κάνοντας πράξεις θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^{n+1})^2 &\leq \frac{r^2(1-r)}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j+1}^n)^2 + (1-r^2) h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n)^2 + \\
 &+ \frac{r^2(1+r)}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 + (r^3-r) h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n U_{j+1}^n + \quad (3.2.5) \\
 &+ (r-r^3) h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n.
 \end{aligned}$$

Επιπρόσθετα υψώνοντας την (3.2.1d) στο τετράγωνο έχουμε

$$(U_J^{n+1})^2 = r^2(U_{J-1}^n)^2 + 2r(1-r)U_{J-1}^n U_J^n + (1-r)^2(U_J^n)^2 \quad (3.2.6)$$

Τελικά αν προσθέσουμε την (3.2.6) στην (3.2.5) πολλαπλασιασμένη με h και κάνοντας πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 &\leq \frac{r^2(1-r)}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j+1}^n)^2 + (1-r^2) h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n)^2 + \\
 &+ \frac{r^2(1+r)}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} (U_{j-1}^n)^2 + (r^3-r) h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n U_{j+1}^n + \\
 &+ (r-r^3) h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n U_{j-1}^n + \\
 &+ h r^2 (U_{J-1}^n)^2 + h 2r(1-r) U_{J-1}^n U_J^n + h(1-r)^2 (U_J^n)^2 \Rightarrow \\
 h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 &\leq h \frac{r^2}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_1^n)^2 + h r^2 \sum_{j=1}^{J-3} (U_{j+1}^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_{J-1}^n)^2 + \\
 &+ h \frac{r^2}{2} (U_J^n)^2 + h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n)^2 - h r^2 \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n)^2 + h \frac{r^3}{2} (U_0^n)^2 + \\
 &+ h \frac{r^3}{2} (U_1^n)^2 - h \frac{r^3}{2} (U_{J-1}^n)^2 - h \frac{r^3}{2} (U_J^n)^2 + h(r-r^3) U_0^n U_1^n + \\
 &+ h(r^3-r) U_{J-1}^n U_J^n + h r^2 (U_{J-1}^n)^2 + h (U_J^n)^2 - h 2r (U_J^n)^2 + \\
 &+ h r^2 (U_J^n)^2 + h 2(r-r^2) U_{J-1}^n U_J^n \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 &\leq h \frac{r^2}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_1^n)^2 - hr^2 (U_1^n)^2 - hr^2 (U_{J-1}^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_{J-1}^n)^2 + \\
 &+ h \frac{r^2}{2} (U_J^n)^2 + h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 + h \frac{r^3}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{r^3}{2} (U_1^n)^2 - h \frac{r^3}{2} (U_{J-1}^n)^2 - \\
 &- h \frac{r^3}{2} (U_J^n)^2 + h(r - r^3) U_0^n U_1^n + h(r^3 - r) U_{J-1}^n U_J^n + hr^2 (U_{J-1}^n)^2 - \\
 &- h2r (U_J^n)^2 + hr^2 (U_J^n)^2 + h2(r - r^2) U_{J-1}^n U_J^n \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 &\leq h \frac{r^2}{2} (U_0^n)^2 - h \frac{r^2}{2} (U_1^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_{J-1}^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_J^n)^2 + \\
 &+ h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 + h \frac{r^3}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{r^3}{2} (U_1^n)^2 - h \frac{r^3}{2} (U_{J-1}^n)^2 - \\
 &- h \frac{r^3}{2} (U_J^n)^2 + h(r - r^3) U_0^n U_1^n + hr^3 U_{J-1}^n U_J^n - \\
 &- h2r (U_J^n)^2 + hr^2 (U_J^n)^2 + h(r - 2r^2) U_{J-1}^n U_J^n.
 \end{aligned}$$

Έχοντας κατά νου ότι $0 < r \leq 1$ αλλά και από την ανισότητα του Cauchy

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 &\leq h \frac{r^2}{2} (U_0^n)^2 - h \frac{r^2}{2} (U_1^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_{J-1}^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_J^n)^2 + \\
 &+ h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 + h \frac{r^3}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{r^3}{2} (U_1^n)^2 - h \frac{r^3}{2} (U_{J-1}^n)^2 - \\
 &- h \frac{r^3}{2} (U_J^n)^2 + h \frac{r}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{r}{2} (U_1^n)^2 - h \frac{r^3}{2} (U_0^n)^2 - \\
 &- h \frac{r^3}{2} (U_1^n)^2 + h \frac{r^3}{2} (U_{J-1}^n)^2 + h \frac{r^3}{2} (U_J^n)^2 + \\
 &+ hr^2 (U_J^n)^2 + h(r - 2r^2) U_{J-1}^n U_J^n - h2r (U_J^n)^2
 \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε την ευστάθεια για τις περιπτώσεις όπου η ποσότητα $(r - 2r^2)$ είναι θετική (δηλαδή για $0 < r \leq \frac{1}{2}$) και αρνητική (δηλαδή για $\frac{1}{2} < r \leq 1$) στο διάστημα $(0, 1]$.

Για $0 < r \leq \frac{1}{2}$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 &\leq h \frac{(r+r^2)}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{(r-r^2)}{2} (U_1^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_{J-1}^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_J^n)^2 + \\
&\quad + h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 + hr^2 (U_J^n)^2 + h \frac{r}{2} (U_{J-1}^n)^2 + h \frac{r}{2} (U_J^n)^2 - \\
&\quad - hr^2 (U_{J-1}^n)^2 - hr^2 (U_J^n)^2 - h2r (U_J^n)^2 \Rightarrow \\
h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 &\leq h \frac{(r+r^2)}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{(r-r^2)}{2} (U_1^n)^2 + h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 + \\
&\quad + h \frac{(r-r^2)}{2} (U_{J-1}^n)^2 \Rightarrow \\
h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 &\leq h \frac{(r+r^2)}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{(r-r^2)}{2} \sum_{j=1}^n (U_j^n)^2 + h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2
\end{aligned}$$

Άρα γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|U^{n+1}\|_h^2 &\leq h \frac{(r+r^2)}{2} g(t^n)^2 + h \frac{(r-r^2)}{2} \|U^n\|_h^2 + \|U^n\|_h^2 \Rightarrow \\
\|U^{n+1}\|_h^2 &\leq ck \frac{(1+r)}{2} g(t^n)^2 + ck \frac{(1-r)}{2} \|U^n\|_h^2 + \|U^n\|_h^2
\end{aligned}$$

Θέτοντας τις σταθερές $c \frac{(1+r)}{2} = G$ και $c \frac{(1-r)}{2} = G'$ έχουμε

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq Gk(g(t^n))^2 + G'k\|U^n\|_h^2 + \|U^n\|_h^2 \Rightarrow$$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq (G'k + 1)\|U^n\|_h^2 + Gk(g(t^n))^2$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(1+x) \leq e^x$$

επομένως έχουμε

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq e^{G'k} \|U^n\|_h^2 + Gk(g(t^n))^2 \quad (3.2.7)$$

Συνεχίζοντας εφαρμόζοντας την (3.2.7) αναδρομικά παίρνουμε

$$n = 0 \quad \|U^1\|_h^2 \leq e^{G'k} \|U^0\|_h^2 + Gk(g(t^0))^2$$

$$\begin{aligned} n = 1 \quad \|U^2\|_h^2 &\leq (e^{G'k}\|U^0\|_h^2 + Gk(g(t^0))^2)e^{G'k} + Gk(g(t^1))^2 \Rightarrow \\ \|U^2\|_h^2 &\leq (e^{G'k}\|U^0\|_h^2 + Gk(g(t^0))^2)e^{G'k} + e^{G'k}Gk(g(t^1))^2 \Rightarrow \\ \|U^2\|_h^2 &\leq e^{2G'k}\|U^0\|_h^2 + e^{G'k}Gk((g(t^0))^2 + (g(t^1))^2) \end{aligned}$$

όπου επιπρόσθετα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $Gk \leq e^{G'k}Gk$ εφόσον $G'k \geq 0$ και άρα $e^{G'k} \geq 1$. Ερχόμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για τυχαίο $n > 0$ θα ισχύει

$$\|U^n\|_h^2 \leq e^{G'T}\|U^0\|_h^2 + e^{G'(T-k)}Gk \sum_{j=0}^{n-1} (g(t^j))^2$$

για $0 < r \leq \frac{1}{2}$.

Για $\frac{1}{2} < r \leq 1$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 &\leq h \frac{(r+r^2)}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{(r-r^2)}{2} (U_1^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_{J-1}^n)^2 + h \frac{r^2}{2} (U_J^n)^2 + \\ &+ h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 + hr^2 (U_J^n)^2 - h \frac{r}{2} (U_{J-1}^n)^2 - h \frac{r}{2} (U_J^n)^2 + \\ &+ hr^2 (U_{J-1}^n)^2 + hr^2 (U_J^n)^2 - h2r (U_J^n)^2 \Rightarrow \\ h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 &\leq h \frac{(r+r^2)}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{(r-r^2)}{2} (U_1^n)^2 + h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2 + \\ &+ h \frac{(3r^2-r)}{2} (U_{J-1}^n)^2 \end{aligned}$$

Για $0 < r \leq 1$ ισχύει ότι $\frac{(r-r^2)}{2} < \frac{(3r^2-r)}{2} < \frac{(r+r^2)}{2}$ επομένως

$$h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1})^2 \leq h \frac{(r+r^2)}{2} (U_0^n)^2 + h \frac{(r+r^2)}{2} \sum_{j=1}^n (U_j^n)^2 + h \sum_{j=1}^J (U_j^n)^2$$

Άρα γράφουμε

$$\begin{aligned} \|U^{n+1}\|_h^2 &\leq h \frac{(r+r^2)}{2} g(t^n)^2 + h \frac{(r+r^2)}{2} \|U^n\|_h^2 + \|U^n\|_h^2 \Rightarrow \\ \|U^{n+1}\|_h^2 &\leq ck \frac{(1+r)}{2} g(t^n)^2 + ck \frac{(1+r)}{2} \|U^n\|_h^2 + \|U^n\|_h^2 \end{aligned}$$

Θέτοντας την σταθερά $c\frac{(1+r)}{2} = G$ γράφουμε

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq Gk(g(t^n))^2 + Gk\|U^n\|_h^2 + \|U^n\|_h^2 \Rightarrow$$

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq (Gk + 1)\|U^n\|_h^2 + Gk(g(t^n))^2$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(1 + x) \leq e^x$$

επομένως έχουμε

$$\|U^{n+1}\|_h^2 \leq e^{Gk}\|U^n\|_h^2 + Gk(g(t^n))^2 \quad (3.2.8)$$

Συνεχίζοντας εφαρμόζοντας την (3.2.8) αναδρομικά παίρνουμε

$$n = 0 \quad \|U^1\|_h^2 \leq e^{Gk}\|U^0\|_h^2 + Gk(g(t^0))^2$$

$$\begin{aligned} n = 1 \quad \|U^2\|_h^2 &\leq (e^{Gk}\|U^0\|_h^2 + Gk(g(t^0))^2)e^{Gk} + Gk(g(t^1))^2 \Rightarrow \\ \|U^2\|_h^2 &\leq (e^{Gk}\|U^0\|_h^2 + Gk(g(t^0))^2)e^{Gk} + e^{Gk}Gk(g(t^1))^2 \Rightarrow \\ \|U^2\|_h^2 &\leq e^{2Gk}\|U^0\|_h^2 + e^{Gk}Gk((g(t^0))^2 + (g(t^1))^2) \end{aligned}$$

όπου επιπρόσθετα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $Gk \leq e^{Gk}Gk$ εφόσον $Gk \geq 0$ και άρα $e^{Gk} \geq 1$. Ερχόμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για τυχαίο $n > 0$ θα ισχύει

$$\|U^n\|_h^2 \leq e^{GT}\|U^0\|_h^2 + e^{G(T-k)}Gk \sum_{j=0}^{n-1} (g(t^j))^2 \quad (3.2.9)$$

για $\frac{1}{2} < r \leq 1$ όπου $G = \frac{(r+r^2)}{2}$.

Παρατήρηση 8. Αν $r = 1$ τότε θα έχουμε

$$\|U^n\|_h^2 \leq \|U^0\|_h^2 + ck \sum_{j=0}^{n-1} (g(t^j))^2.$$

Λόγω του γεγονότος $\frac{(r-r^2)}{2} < \frac{(r+r^2)}{2}$ στο $(0, 1]$ η (3.2.9) αποτελεί μία έκφραση ευστάθειας της μεθόδου Lax-Wendroff για όλο το διάστημα $(0, 1]$.

3.3 Αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου Lax-Wendroff

3.3.1 Περιοδικές Αρχικές συνθήκες

Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα από την επίλυση του Π.Α.Τ (2.5.1) με την μέθοδο Lax-Wendroff (3.1.10a)-(3.1.10c) για $t = 1$ και καθώς ο αριθμός *Courant* τείνει στον αριθμό 1. Με βάση το θεώρημα 3.3 περιμένουμε την τάξη σύγκλισης των σφαλμάτων της l^2 νόρμας να είναι 2.

$$r = \frac{1}{3}$$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
5	13	2.5E-01	8.3E-02	0.1212E+01	-	0.9572E+00	-
9	25	1.2E-01	4.2E-02	0.4946E+00	1.293	0.4055E+00	1.239
17	49	6.2E-02	2.1E-02	0.1394E+00	1.827	0.1058E+00	1.938
33	97	3.1E-02	1.0E-02	0.3570E-01	1.965	0.2608E-01	2.021
65	193	1.6E-02	5.2E-03	0.8962E-02	1.994	0.6438E-02	2.018
129	385	7.8E-03	2.6E-03	0.2242E-02	1.999	0.1598E-02	2.010

$$r = \frac{1}{2}$$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
5	9	2.5E-01	1.2E-01	0.1004E+01	-	0.8038E+00	-
9	17	1.2E-01	6.2E-02	0.4197E+00	1.258	0.3377E+00	1.251
17	33	6.2E-02	3.1E-02	0.1169E+00	1.844	0.8906E-01	1.923
33	65	3.1E-02	1.6E-02	0.3006E-01	1.959	0.2199E-01	2.018
65	129	1.6E-02	7.8E-03	0.7559E-02	1.992	0.5432E-02	2.018
129	257	7.8E-03	3.9E-03	0.1892E-02	1.998	0.1348E-02	2.010

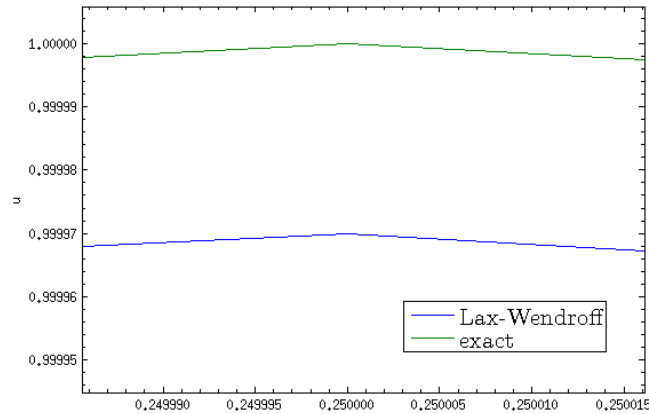
$$r = \frac{3}{4}$$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
4	5	3.3E-01	2.5E-01	0.8456E+00	-	0.6417E+00	-
7	9	1.7E-01	1.2E-01	0.4011E+00	1.076	0.3213E+00	0.998
13	17	8.3E-02	6.2E-02	0.1196E+00	1.746	0.9197E-01	1.805
25	33	4.2E-02	3.1E-02	0.3105E-01	1.946	0.2294E-01	2.003
49	65	2.1E-02	1.6E-02	0.7829E-02	1.988	0.5657E-02	2.020
97	129	1.0E-02	7.8E-03	0.1961E-02	1.997	0.1402E-02	2.013

$$r = \frac{7}{8}$$

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
8	9	1.4E-01	1.2E-01	0.1755E+00	-	0.1377E+00	-
15	17	7.1E-02	6.2E-02	0.4805E-01	1.869	0.3642E-01	1.919
29	33	3.6E-02	3.1E-02	0.1228E-01	1.969	0.9002E-02	2.016
57	65	1.8E-02	1.6E-02	0.3085E-02	1.993	0.2221E-02	2.019
113	129	8.9E-03	7.8E-03	0.7721E-03	1.998	0.5509E-03	2.011
225	257	4.5E-03	3.9E-03	0.1931E-03	2.000	0.1371E-03	2.006

Τα παραπάνω αποτελέσματα λοιπόν επαληθεύουν το θεώρημα 3.3 εφόσον παρατηρούμε ότι όσο πιο λεπτή είναι η διαμέριση τόσο πιο μικρό είναι το σφάλμα που παίρνουμε για την l^2 νόρμα με την τάξη ακρίβειας να πλησιάζει την τιμή 2. Επιπρόσθετα όμως συμπεραίνουμε με την βοήθεια του παραδείγματος ότι το σφάλμα στην $\max$ νόρμα έχει την ίδια συμπεριφορά. Ακόμα βλέπουμε ότι καθώς ο αριθμός *Courant* πλησιάζει την τιμή 1 τότε τα σφάλματα τόσο της $\max$ όσο και της l^2 νόρμας μικραίνουν. Στην περίπτωση που $r = 1$ τα σφάλματα από την υλοποίηση των (3.1.10a) – (3.1.10c) είναι 0.



Σχήμα 10: Προσεγγιστική και ακριβής λύση για $t = 1$ και $J = 129$ γύρω από το σημείο $x = 0.25$ στο οποίο οι δύο λύσεις παίρνουν την μέγιστη τιμή τους.

3.3.2 Αρχικές-Συνοριακές συνθήκες.

Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα από την επίλυση του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{2}u_x &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq 5 \\ u(x, 0) &= \sin(6\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi t\right), \quad 0 < t \leq 5 \end{aligned}$$

με την μέθοδο Lax-Wendroff (3.2.1a) – (3.2.1d) για $t = 5$ και $r = 0.83$. Εδώ οι συνθήκες συμβιβαστού πληρώνονται. Η ακριβής λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$u(x, t) = \sin(6\pi x - 3\pi t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 5$$

η οποία είναι C^∞ . Θα δοκιμάσουμε 3 τεχνητές συνοριακές συνθήκες:

(i) την (3.2.1d) που αναλύσαμε

(ii) την απλή συνοριακή συνθήκη

$$U_J^{n+1} = U_{J-1}^{n+1} \quad (3.3.1)$$

η οποία είναι επέκταση της τιμής U_J^{n+1} με σταθερά

(iii) την συνοριακή συνθήκη

$$U_J^{n+1} = 2U_{J-1}^{n+1} - U_{J-2}^{n+1} \quad (3.3.2)$$

η οποία αποτελεί υπολογισμό της τιμής U_J^{n+1} με γραμμική προέκταση των τιμών U_{J-1}^{n+1} και U_{J-2}^{n+1} .

Συνοριακή συνθήκη (3.2.1d)

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
21	61	5.0E-02	8.3E-02	0.6471E+00	-	0.3043E+00	-
41	121	2.5E-02	4.2E-02	0.2056E+00	1.654	0.9092E-01	1.743
81	241	1.3E-02	2.1E-02	0.5275E-01	1.962	0.2249E-01	2.015
161	481	6.3E-03	1.0E-02	0.1326E-01	1.992	0.5538E-02	2.022
321	961	3.1E-03	5.2E-03	0.3323E-02	1.997	0.1373E-02	2.012
641	1921	1.6E-03	2.6E-03	0.8317E-03	1.998	0.3420E-03	2.006
1281	3841	7.8E-04	1.3E-03	0.2081E-03	1.999	0.8533E-04	2.003
2561	7681	3.9E-04	6.5E-04	0.5203E-04	2.000	0.2131E-04	2.001

Συνοριακή συνθήκη (3.3.1)

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
21	61	5.0E-02	8.3E-02	0.6642E+00	-	0.2992E+00	-
41	121	2.5E-02	4.2E-02	0.2383E+00	1.479	0.9454E-01	1.662
81	241	1.3E-02	2.1E-02	0.1616E+00	0.561	0.2876E-01	1.717
161	481	6.3E-03	1.0E-02	0.9450E-01	0.774	0.9354E-02	1.620
321	961	3.1E-03	5.2E-03	0.5064E-01	0.900	0.3168E-02	1.562
641	1921	1.6E-03	2.6E-03	0.2616E-01	0.953	0.1096E-02	1.532
1281	3841	7.8E-04	1.3E-03	0.1329E-01	0.977	0.3831E-03	1.516
2561	7681	3.9E-04	6.5E-04	0.6697E-02	0.989	0.1347E-03	1.508

Συνοριακή συνθήκη (3.3.2)

J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
21	61	5.0E-02	8.3E-02	0.6214E+00	-	0.2962E+00	-
41	121	2.5E-02	4.2E-02	0.2020E+00	1.621	0.8855E-01	1.742
81	241	1.3E-02	2.1E-02	0.5251E-01	1.944	0.2225E-01	1.993
161	481	6.3E-03	1.0E-02	0.1325E-01	1.987	0.5519E-02	2.011
321	961	3.1E-03	5.2E-03	0.3322E-02	1.995	0.1372E-02	2.008
641	1921	1.6E-03	2.6E-03	0.8317E-03	1.998	0.3419E-03	2.005
1281	3841	7.8E-04	1.3E-03	0.2080E-03	1.999	0.8532E-04	2.003
2561	7681	3.9E-04	6.5E-04	0.5203E-04	2.000	0.2131E-04	2.001

Παρατηρούμε λοιπόν σε αυτό το παράδειγμα πως η διαφορετική επιλογή τεχνητών συνοριακών συνθηκών επηρεάζει την τάξη σύγκλισης. Πρακτικά η τάξη σύγκλισης για τις συνθήκες (3.2.1d) και (3.3.2) είναι 2 και για τις δύο νόρμες. Για την συνθήκη (3.3.1) όμως η τάξη σύγκλιση για την $\max$ νόρμα φαίνεται να είναι 1 και για την l^2 1.5 .

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα από την επίλυση του προβλήματος

$$\begin{aligned}
 u_t + \frac{1}{2}u_x &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq 3 \\
 u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\
 u(0, t) &= \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + 2 \right)^3, & 0 < t \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \left(1 + 3 \left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + 1 \right) + 3 \left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + 1 \right)^2 - 3 \left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + 1 \right)^3 \right), & \frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \left(1 + 3 \left(1 - \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \right) + 3 \left(1 - \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \right)^2 - 3 \left(1 - \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \right)^3 \right), & \frac{1}{2} < t \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \left(2 - \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \right)^3, & \frac{1}{4} < t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

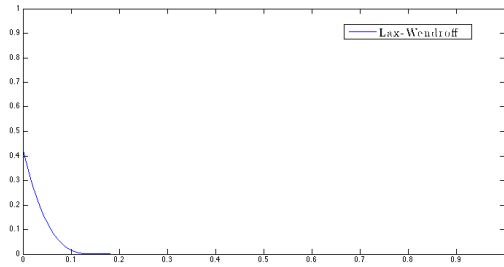
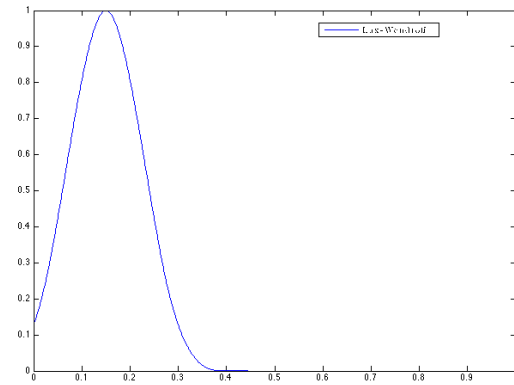
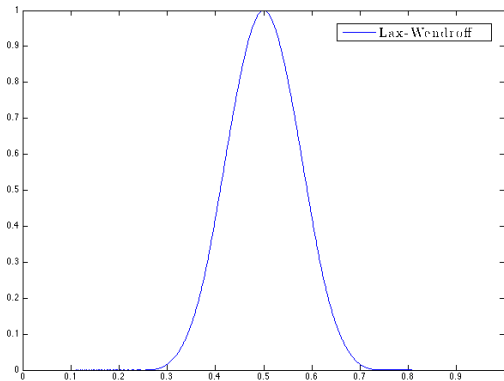
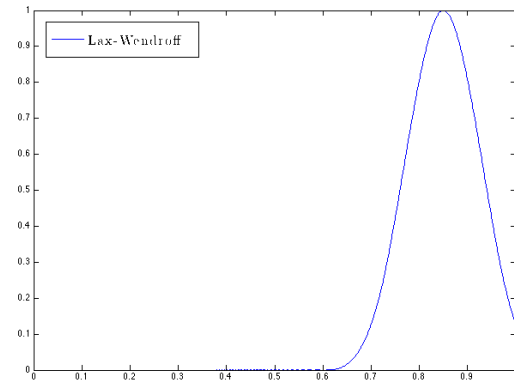
με την μέθοδο Lax-Wendroff (3.2.1a)-(3.2.1d) για $t = 3$ και $r = 0.33$. Εδώ η συνοριακή συνθήκη είναι μία κυβική spline και οι συνθήκες συμβιβαστού πληρώνονται.

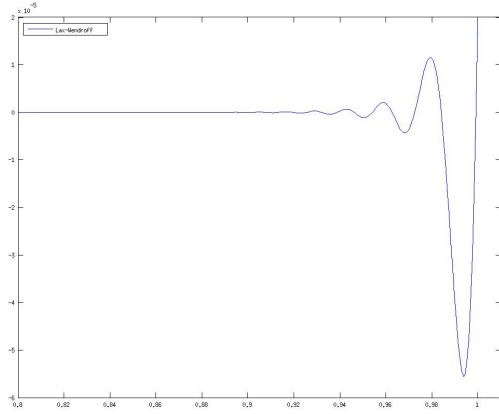
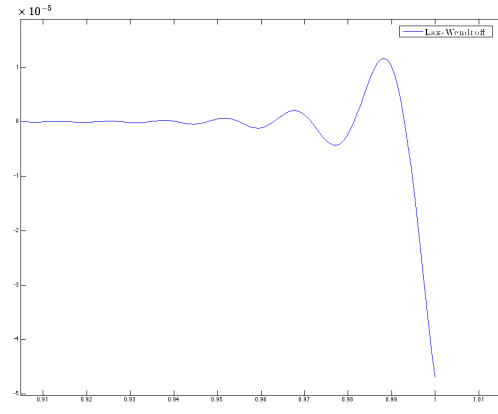
Η ακριβής λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2x \\ \frac{1}{4} \left(\frac{t-2x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + 2 \right)^3, & 0 < t-2x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \left(1 + 3 \left(\frac{t-2x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + 1 \right) + 3 \left(\frac{t-2x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + 1 \right)^2 - \right. \\ \quad \left. - 3 \left(\frac{t-2x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + 1 \right)^3 \right), & \frac{1}{4} < t-2x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \left(1 + 3 \left(1 - \frac{t-2x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \right) + 3 \left(1 - \frac{t-2x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \right)^2 - \right. \\ \quad \left. - 3 \left(1 - \frac{t-2x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \right)^3 \right), & \frac{1}{2} < t-2x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \left(2 - \frac{t-2x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \right)^3, & \frac{1}{4} < t-2x \leq 1 \\ 0, & 0 < t-2x \leq 3. \end{cases}$$

Συνοριακή συνθήκη (3.2.1d)

J	N	Δx	Δt	$\sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \cdot\ _{\infty}$	$\tau\acute{\alpha}\xi\eta\ \sigma\upsilon\gamma\chi.\ \cdot\ _{\infty}$	$\sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \cdot\ _h$	$\tau\acute{\alpha}\xi\eta\ \sigma\upsilon\gamma\chi.\ \cdot\ _h$
21	91	5.0E-02	3.3E-02	0.2081E+00	-	0.7019E-01	-
41	181	2.5E-02	1.7E-02	0.1199E+00	0.796	0.2744E-01	1.355
81	361	1.3E-02	8.3E-03	0.1185E-01	3.338	0.1632E-02	4.071
161	721	6.3E-03	4.2E-03	0.3317E-02	1.838	0.4244E-03	1.943
321	1441	3.1E-03	2.1E-03	0.7893E-03	2.071	0.7315E-04	2.537
641	2881	1.6E-03	1.0E-03	0.1897E-03	2.057	0.1356E-04	2.432
1281	5761	7.8E-04	5.2E-04	0.4694E-04	2.015	0.2629E-05	2.367

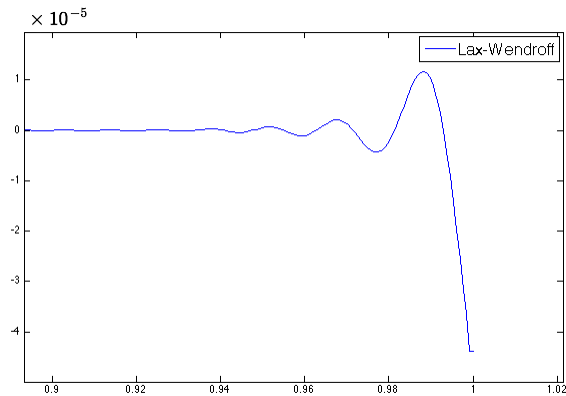
(a) $t = 0.3$ (b) $t = 0.8$ (c) $t = 1.4$ (d) $t = 2.2$

(e) $t = 2.98$ (f) $t = 3$

Σχήμα 11: Αριθμητική λύση του προβλήματος (3.3.3) με $J = 1281$ και συνοριακή συνθήκη την (3.2.1d).

Συνοριακή συνθήκη (3.3.1)

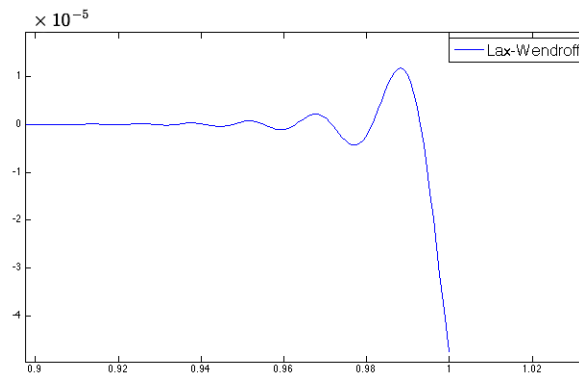
J	N	Δx	Δt	σφάλμα $\ \cdot\ _\infty$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _\infty$	σφάλμα $\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
21	91	5.0E-02	3.3E-02	0.2421E+00	-	0.6811E-01	-
41	181	2.5E-02	1.7E-02	0.1008E+00	1.264	0.2549E-01	1.418
81	361	1.3E-02	8.3E-03	0.8513E-02	3.566	0.1449E-02	4.137
161	721	6.3E-03	4.2E-03	0.2982E-02	1.514	0.4117E-03	1.815
321	1441	3.1E-03	2.1E-03	0.7085E-03	2.073	0.7121E-04	2.531
641	2881	1.6E-03	1.0E-03	0.1733E-03	2.031	0.1331E-04	2.420
1281	5761	7.8E-04	5.2E-04	0.4378E-04	1.985	0.2599E-05	2.357

(a) $t = 3$

Σχήμα 12: Αριθμητική λύση του προβλήματος (3.3.3) για $t = 3$ με $J = 1281$ και συνοριακή συνθήκη την (3.3.1).

Συνοριακή συνθήκη (3.3.2)

J	N	Δx	Δt	$\sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \cdot\ _{\infty}$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _{\infty}$	$\sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \cdot\ _h$	τάξη συγκ. $\ \cdot\ _h$
21	91	5.0E-02	3.3E-02	0.2032E+00	-	0.6595E-01	-
41	181	2.5E-02	1.7E-02	0.1333E+00	0.608	0.2803E-01	1.234
81	361	1.3E-02	8.3E-03	0.1133E-01	3.557	0.1586E-02	4.144
161	721	6.3E-03	4.2E-03	0.3465E-02	1.709	0.4287E-03	1.887
321	1441	3.1E-03	2.1E-03	0.8068E-03	2.103	0.7349E-04	2.544
641	2881	1.6E-03	1.0E-03	0.1920E-03	2.072	0.1358E-04	2.436
1281	5761	7.8E-04	5.2E-04	0.4730E-04	2.021	0.2632E-05	2.368

(a) $t = 3$

Σχήμα 13: Αριθμητική λύση του προβλήματος (3.3.3) για $t = 3$ με $J = 1281$ και συνοριακή συνθήκη την (3.3.2).

Παρατηρούμε σε αυτό το παράδειγμα ότι η τάξη ακρίβειας της $\max$ νόρμας είναι πρακτικά 2 ενώ της l^2 νόρμας 2.3 ανεξαρτήτως επιλογής τεχνητής συνοριακής συνθήκης. Ακόμα ξέρουμε ότι για $t = 3$ η λύση που θα έπρεπε να λαμβάνουμε από την αριθμητική μέθοδο είναι η μηδενική. Ωστόσο αν και ο παλμός πρακτικά εξέρχεται την χρονική στιγμή $t = 3$ παρατηρούμε μικρές ταλαντώσεις στο σημείο $x = 1$ σε όλα τα σχήματα. Αυτές οι ταλαντώσεις οφείλονται στις τεχνητές συνοριακές συνθήκες.

4 Αριθμητική επίλυση βαθμωτών Νόμων Διατήρησης

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με την αριθμητική επίλυση προβλημάτων με αρχικές συνθήκες του νόμου διατήρησης

$$u_t + F(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (4.0.1)$$

όπου F είναι μία C^1 συνάρτηση, στον οποίο αναφερθήκαμε στην αρχή της εργασίας αυτής. Η (4.0.1) είναι μία μη γραμμική πρώτης τάξης μερική διαφορική εξίσωση η οποία μπορεί να γραφεί στην μορφή της εξίσωσης μεταφοράς ως

$$u_t + \alpha u_x = 0 \quad (4.0.2)$$

όπου

$$\alpha = \alpha(u) = \frac{\partial F(u)}{\partial u}.$$

Για την επίλυση της (4.0.1) εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση της γραμμικής εξίσωσης μεταφοράς. Η οικογένεια καμπυλών για την οποία ισχύει

$$x'(t) = \alpha(u)$$

αποτελεί την οικογένεια χαρακτηριστικών καμπυλών του προβλήματος. Κατά μήκος αυτών η λύση της (4.0.1) είναι σταθερή αφού

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(x(t), t) &= u_x(x(t), t) \frac{dx}{dt} + u_t(x(t), t) \\ &= u_x(x(t), t) \alpha(u) + u_t(x(t), t) = 0 \end{aligned}$$

από την (4.0.2). Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες επειδή

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \alpha(u(x, t)) = \alpha'(u) \frac{du}{dt}(x(t)) = 0$$

όπως συμβαίνει και στην περίπτωση γραμμικής της εξίσωσης μεταφοράς. Οι ευθείες όμως αυτές δεν είναι κατ'ανάγκη παράλληλες μεταξύ τους γιατί η κλίση τους εξαρτάται από την u . Υπολογίζουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες ως ακολούθως:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(u(x, t), t) = \alpha(u(\xi, 0)).$$

Εάν επιβάλουμε την αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.0.3)$$

έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(\phi(\xi)) \Rightarrow x = \alpha(\phi(\xi))t + \xi. \quad (4.0.4)$$

Η λύση του προβλήματος (4.0.1) με αρχική συνθήκη την (4.0.2) είναι

$$u(x, t) = \phi(\xi) \quad (4.0.5)$$

όπου το ξ προσδιορίζεται από την (4.0.4) δεδομένων των x και t .

4.1 Εξίσωση Burgers χωρίς ιξώδες.

Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα της εξίσωσης (4.0.1) αποτελεί η λεγόμενη εξίσωση Burgers χωρίς ιξώδες όπου $F(u) = \frac{1}{2}u^2$, οπότε η (4.0.1) γίνεται

$$u_t + uu_x = 0. \quad (4.1.1)$$

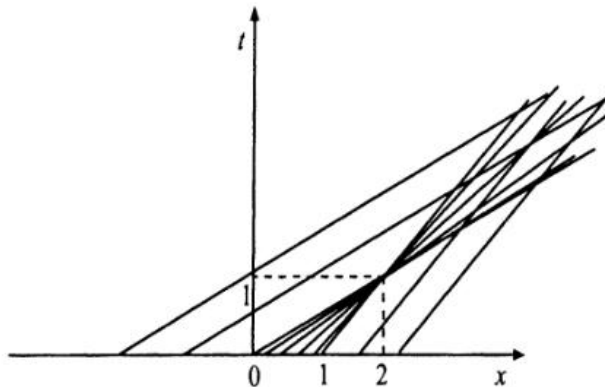
Αν επιβάλουμε π.χ. την αρχική συνθήκη

$$\phi(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 2 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

η λύση του προβλήματος (4.1.1)-(4.1.2) για $t < 1$ είναι

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x < 2t \\ \frac{2-x}{1-t}, & 2t \leq x \leq t+1 \\ 1, & x > t+1. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Παρουσιάζουμε στην συνέχεια τις χαρακτηριστικές καμπύλες της (4.1.1) με αρχική συνθήκη την (4.1.2) (βλέπε σχήμα 14).



Σχήμα 14: Οικογένεια χαρακτηριστικών καμπυλών της εξίσωσης (4.1.1) με αρχική συνθήκη την (4.1.2).

Βλέπουμε αμέσως ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες, κατά μήκος των οποίων η λύση είναι σταθερή, τέμνονται για πρώτη φορά στο σημείο $(2,1)$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το πρόβλημα (4.1.1)-(4.1.2) να μην έχει κλασική λύση για $t \geq 1$ γιατί δημιουργείται ασυνέχεια. Ως εκ τούτου το πρόβλημα επιδέχεται μόνο ασθενή λύση για $t \geq 1$.

4.2 Ασθενείς λύσεις

Ορισμός 4.1. Καλούμε μία συνάρτηση u ασθενή λύση του προβλήματος (4.0.1)-(4.0.3) αν πληροί

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [uv_t + F(u)v_x] dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)v(x,0) dx = 0 \quad (4.2.1)$$

$\forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$.

Είναι φανερό αμέσως ότι μία ασθενής λύση του προβλήματος (4.0.1)-(4.0.3) δεν χρειάζεται να είναι ούτε παραγωγίσιμη αλλά ούτε και συνεχής. Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι μας επιτρέπει να βρούμε λύσεις σε προβλήματα όπως το (4.1.1)-(4.1.2) στα οποία οι χαρακτηριστικές καμπύλες τέμνονται και ως εκ τούτου δημιουργούνται ασυνέχειες.

4.2.1 Συνθήκη Rankine-Hugoniot.

Θεώρημα 4.1. Εάν η u είναι ασθενής λύση του προβλήματος (4.0.1)-(4.0.3), η οποία είναι ασυνεχής κατά μήκος μίας καμπύλης $x = h(t)$ και αρκετά ομαλή δεξιά και αριστερά αυτής τότε ισχύει

$$s(t) = h'(t) = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-} \quad (4.2.2)$$

όπου $s(t)$ η "ταχύτητα διάδοσης" της ασυνέχειας ενώ u^+ και u^- αποτελούν τα όρια της u δεξιά και αριστερά της καμπύλης $h(t)$ αντίστοιχα, καθώς $x \rightarrow s(t)^+$ και $x \rightarrow s(t)^-$.

Η (4.2.2) είναι γνωστή ως συνθήκη *Rankine-Hugoniot*. Η συνθήκη αυτή στην περίπτωση της (4.1.1) γίνεται

$$s(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}. \quad (4.2.3)$$

4.3 Πρόβλημα Riemann

Το πρόβλημα αρχικών τιμών της εξίσωσης (4.0.1) με αρχική συνθήκη τμηματικά σταθερή συνάρτηση η οποία έχει ένα σημείο ασυνέχειας, είναι γνωστό ως πρόβλημα Riemann. Ως παράδειγμα αναφέρουμε την (4.1.1) με αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = \phi(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x > 0. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Η μορφή της λύσης του προβλήματος (4.1.1)-(4.3.1) εξαρτάται από την σχέση μεταξύ των u_l και u_r .

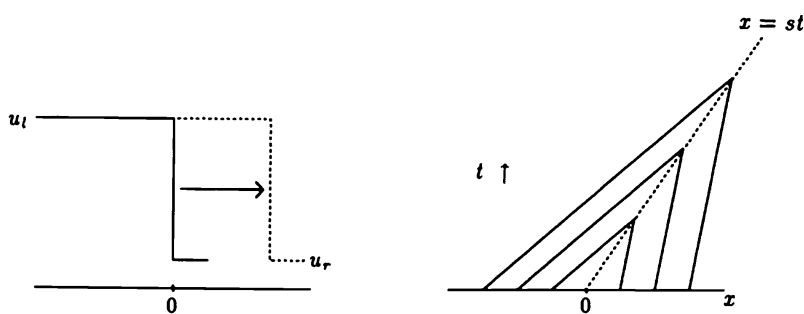
- $u_l > u_r$

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μοναδική ασθενής λύση

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < st \\ u_r, & x > st \end{cases} \quad (4.3.2)$$

όπου

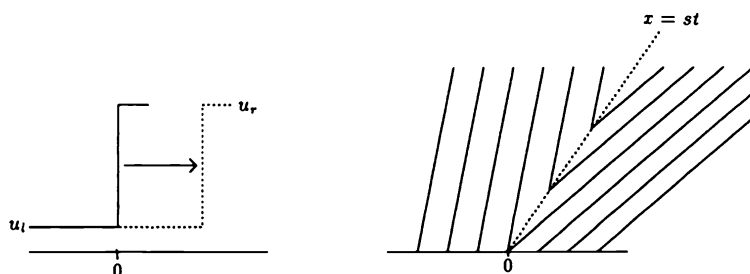
$$s = \frac{u_l + u_r}{2}. \quad (4.3.3)$$



Σχήμα 15: Λύση του προβλήματος (4.1.1)-(4.3.1) όταν $u_l > u_r$.

- $u_l < u_r$

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν άπειρες ασθενείς λύσεις. Μία από αυτές είναι η (4.3.2)-(4.3.3).

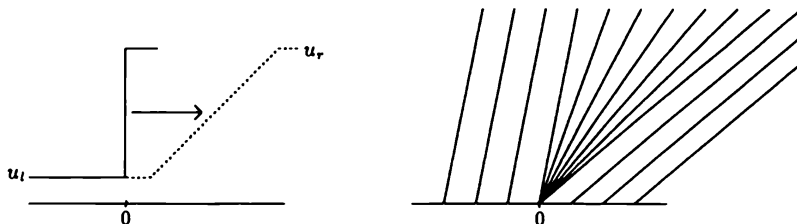


Σχήμα 16: Λύση (4.3.2) όταν $u_l < u_r$.

Μία διαφορετική ασθενής λύση είναι η

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < u_l t \\ \frac{x}{t}, & u_l t \leq x \leq u_r t \\ u_r, & x > u_r t \end{cases} \quad (4.3.4)$$

γνωστή ως λύση κύματος αραίωσης.



Σχήμα 17: Λύση (4.3.4)

Είναι όμως λογικό να αναρωτηθούμε αν είναι δυνατόν να επιλέξουμε μία από τις παραπάνω λύσεις ως πιο ρεαλιστική. Η απάντηση είναι ότι επιλέγουμε την λύση (4.3.4) γιατί πληροί την "συνθήκη εντροπίας"

$$F'(u_l) > s > F'(u_r) \quad (4.3.5)$$

(βλέπε [Kröner \[1\]](#)).

4.4 Συντηρητικές μέθοδοι

Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη συγκεκριμένων μεθόδων για την αριθμητική επίλυση της (4.0.1) είναι λογικό να αναρωτηθούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις μία αριθμητική μέθοδος είναι δυνατόν να συγκλίνει σε κάποια ασθενή λύση και αν η τελευταία ικανοποιεί την συνθήκη εντροπίας. Πριν αναζητήσουμε απαντήσεις χρειάζεται να δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 4.2. Μία αριθμητική μέθοδος ονομάζεται συντηρητική αν μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} [\tilde{F}(U_j^n, U_{j+1}^n) - \tilde{F}(U_{j-1}^n, U_j^n)], \quad (4.4.1)$$

όπου $\tilde{F}$ η λεγόμενη *αριθμητική ροή*.

Ορισμός 4.3. Η μέθοδος (4.4.1) ονομάζεται συνεπής εάν

$$\tilde{F}(\hat{v}, \hat{v}) = F(\hat{v}) \quad (4.4.2)$$

Θεώρημα 4.2. (Lax-Wendroff) Έστω U η αριθμητική προσεγγίση που λαμβάνουμε από μία συντηρητική και συνεπή μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος (4.0.1)-(4.0.3). Έστω επίσης ότι η U συγκλίνει σε μία συνάρτηση u καθώς $h, k \rightarrow 0$. Τότε η u αποτελεί ασθενή λύση για το πρόβλημα (4.0.1)-(4.0.3).

Παρατήρηση 9. Το θεώρημα Lax-Wendroff δεν μας εξασφαλίζει αν η ασθενής λύση στην οποία συγκλίνει η μέθοδος αποτελεί επιπρόσθετα και λύση εντροπίας.

4.5 Η μέθοδος Upwind για Νόμους Διατήρησης.

Συνεχίζοντας θα μελετήσουμε την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών Upwind για να λύσουμε αριθμητικά την εξίσωση (4.0.1). Αρχίζοντας θα θεωρήσουμε δύο ομοιόμορφους διαμερισμούς έναν για τον άξονα x και έναν για τον άξονα t στα διαστήματα $(-\infty, +\infty)$ και $[0, T]$ αντίστοιχα ως εξής

$$x_j = jh \quad \text{για } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$t^n = nk \quad \text{όπου } k = \frac{T}{M} = \Delta t = (t^{n+1} - t^n) \quad \text{για } n = 0, \dots, M$$

με M το πλήθος των υποδιαστημάτων στον άξονα των t .

Θα στηριχτούμε στην (4.0.2) για να κατασκευάσουμε την μέθοδο Upwind λόγω της ομοιότητάς της με την (2.2.1). Έτσι για $(x, t) \in (\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ αν $\alpha(u(x, t)) > 0$ τότε θα προσεγγίσουμε την $F(u)_x$ με προς τα πίσω ανάπτυγμα Taylor ενώ αν $\alpha(u(x, t)) < 0$ με προς τα εμπρός ανάπτυγμα Taylor όπως έχουμε ήδη πράξει με παρόμοιο τρόπο στο κεφάλαιο 2 για την (2.2.1).

Επομένως για $\alpha(u(x, t)) > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} F(u(x-h, t)) &= F(u(x, t)) - h \frac{\partial F(u(x, t))}{\partial x} + O(h^2) \Rightarrow \\ \frac{\partial F(u(x, t))}{\partial x} &\approx \frac{F(u(x, t)) - F(u(x-h, t))}{h} \end{aligned}$$

Με την προϋπόθεση ότι προσεγγίζουμε την χρονική παράγωγο με προς τα εμπρός ανάπτυγμα Taylor θα έχουμε

$$\frac{u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)}{k} + \frac{F(u(x, t^n)) - F(u(x - h, t^n))}{h} \approx 0$$

Αντικαθιστώντας την ακριβή λύση με την προσεγγιστική παίρνουμε

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}(F_j^n - F_{j-1}^n) \quad (4.5.1)$$

όπου $F_j^n = F(U_j^n)$ για $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $n = 0, \dots, M - 1$.

Ανάλογα αν $\alpha(u(x, t)) < 0$ τότε

$$\begin{aligned} F(u(x + h, t)) &= F(u(x, t)) + h \frac{\partial F(u(x, t))}{\partial x} + O(h^2) \Rightarrow \\ \frac{\partial F(u(x, t))}{\partial x} &\approx \frac{F(u(x + h, t)) - F(u(x, t))}{h} \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)}{k} + \frac{F(u(x + h, t^n)) - F(u(x, t^n))}{h} \approx 0$$

Αντικαθιστώντας τις ακριβείς τιμές με προσεγγίσεις έχουμε

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}(F_{j+1}^n - F_j^n) \quad (4.5.2)$$

όπου $F_j^n = F(U_j^n)$ για $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $n = 0, \dots, M - 1$.

4.5.1 Διατύπωση της μεθόδου Upwind.

Έχουμε καταλήξει στην εξής μέθοδο. Στο πρώτο βήμα έχουμε

$$U_j^0 = \phi(x_j)$$

για $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ενώ σε κάθε βήμα της μεθόδου για $n = 0, \dots, M - 1$ αν $\alpha(u(x_j, t^n)) > 0$ επιλέγουμε τον τύπο (4.5.1), αλλιώς, αν $\alpha(u(x_j, t^n)) < 0$, επιλέγουμε τον τύπο (4.5.2) για $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Η μέθοδος μπορεί να γραφεί σε πιο συμπαγή μορφή ως

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} \left\{ \left[1 - \operatorname{sgn} A_{j+\frac{1}{2}}^n \right] (F_{j+1}^n - F_j^n) \right. \\ \left. + \left[1 - \operatorname{sgn} A_{j-\frac{1}{2}}^n \right] (F_j^n - F_{j-1}^n) \right\} \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

όπου $A_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{F_{j+1}^n - F_j^n}{U_{j+1}^n - U_j^n}$ και $A_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{F_j^n - F_{j-1}^n}{U_j^n - U_{j-1}^n}$ ενώ στην περίπτωση όπου $U_{j\pm 1}^n = U_j^n$ τότε $A_{j\pm\frac{1}{2}}^n = \alpha(U_j^n)$.

Παρατήρηση 10. Είναι φανερό ότι η μέθοδος Upwind ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος *Lax – Wendroff*, 4.2. Αν λοιπόν συγκλίνει, θα συγκλίνει σε ασθενή λύση.

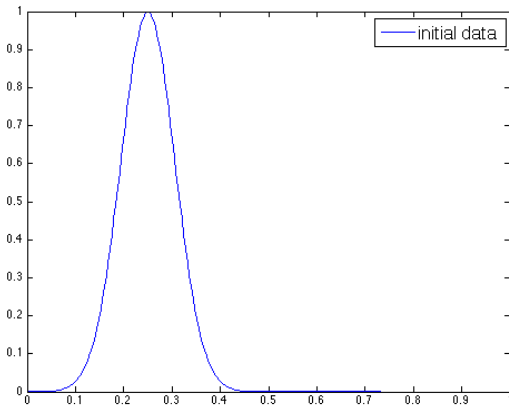
Παρατήρηση 11. Φυσικά στην πράξη δεν μπορούμε να υλοποιήσουμε την μέθοδο Upwind για όλα τα j μέχρι το άπειρο. Αντ'αυτού δίνουμε κάθε φορά κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ή επιβάλουμε περιοδικές συνθήκες.

4.5.2 Παραδείγματα υλοποίησης αριθμητικής λύσης της μεθόδου Upwind

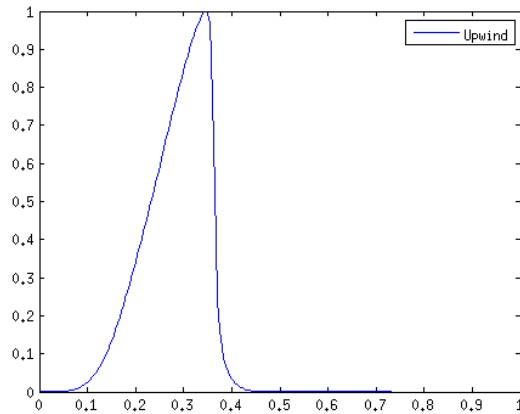
Παρουσιάζουμε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης (4.1.1) με αρχική συνθήκη

$$u_0 = e^{-10(4x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.5.4)$$

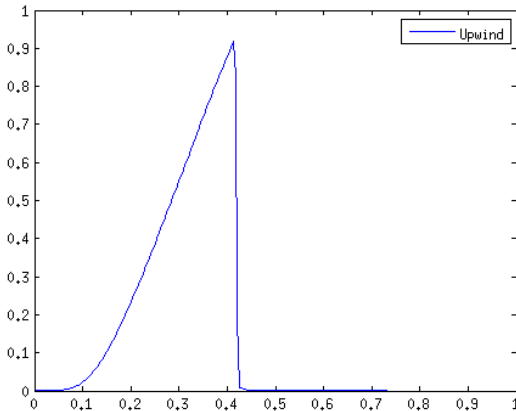
λυμένη με τη μέθοδο Upwind για $0 < t < 2$.



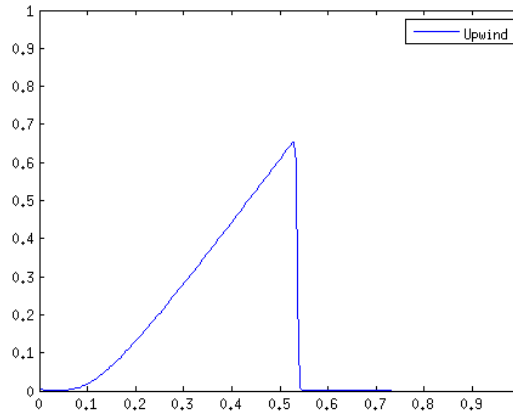
(a) $t = 0$



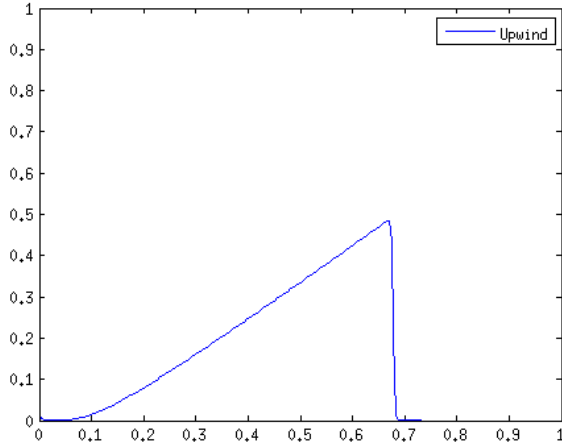
(b) $t = 9.58E - 002$



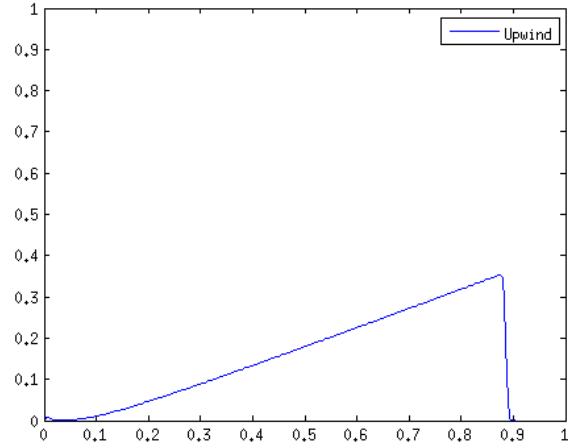
(c) $t = 0.2$



(d) $t = 0.5$



(e) $t = 1$



(f) $t = 2$

Σχήμα 18: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.4) για $t = 0, t = 9.5E - 002, t = 0.2, t = 0.5, t = 1, t = 2, h = 4.1E - 003$ και $\frac{k}{h} = 0.5$.

Βλέπουμε πως για χρόνο $t = 0.2$ περίπου έχει δημιουργηθεί ασυνέχεια στη λύση. Η αριθμητική λύση θα συγκριθεί στη συνέχεια με αριθμητικές λύσεις που προέρχονται από άλλες αριθμητικές μεθόδους (Lax-Wendroff, Godunov).

Παραδείγματα για προβλήματα Riemann.

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών της εξίσωσης (4.1.1) με αρχική συνθήκη

$$\phi(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad (4.5.5)$$

για $0 \leq t \leq 1$. Η λύση εντροπίας γι' αυτό το πρόβλημα είναι

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & x < -t + 1 \\ \frac{x-1}{t}, & -t + 1 \leq x \leq t + 1 \\ 1, & x > t + 1. \end{cases} \quad (4.5.6)$$

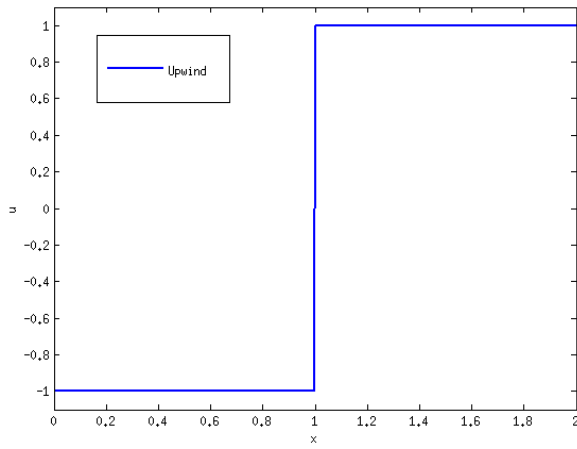
Όμως η

$$u(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad (4.5.7)$$

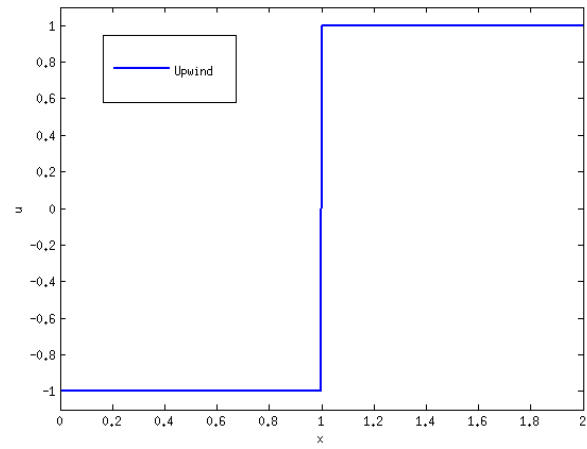
για $0 \leq t \leq 1$ είναι επίσης μία ασθενής λύση του προβλήματος η οποία δεν ικανοποιεί την συνθήκη εντροπίας. Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται η

προσεγγιστική λύση που λαμβάνουμε με την μέθοδο Upwind με αρχική συνθήκη

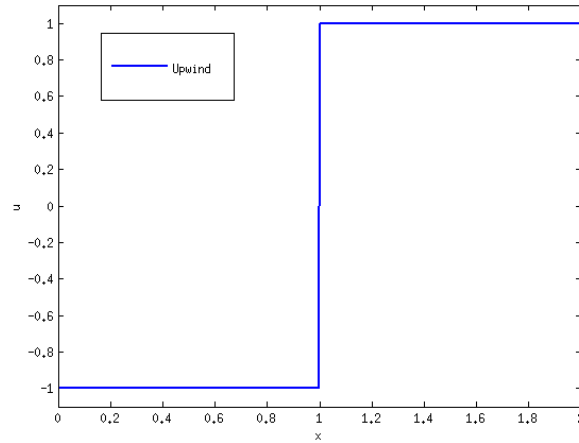
$$U_j^0 = \begin{cases} -1, & x_j < 1 \\ 1, & x_j > 1. \end{cases} \quad (\star)$$



(a) $t = 0$



(b) $t = \frac{1}{2}$



(c) $t = 1$

Σχήμα 19: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.5) για $t = 0, t = \frac{1}{2}, t = 1, h = 1.56E - 002$ και $\frac{k}{h} = 0.25$.

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος προσεγγίζει την ασθενή λύση (4.5.7) και όχι την (4.5.6). Αυτό συμβαίνει διότι για $n = 1$ έχουμε ότι

για κάθε $x_j < 1$ ισχύει

$$U_j^1 = U_j^0 - \frac{k}{h} \left(\frac{1}{2} ((U_j^0)^2 - (U_{j-1}^0)^2) \right) = U_j^0 = -1$$

και για κάθε $x_j > 1$ ισχύει

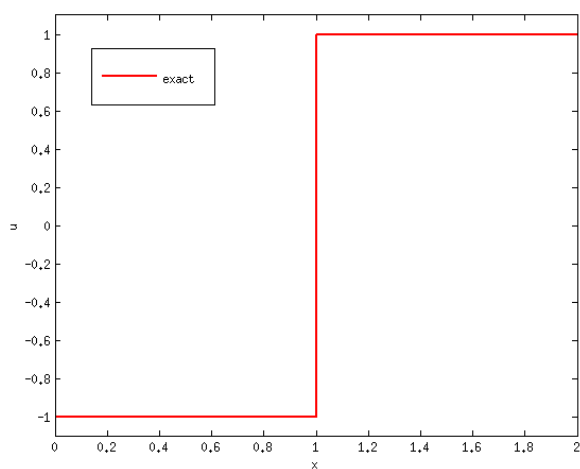
$$U_j^1 = U_j^0 - \frac{k}{h} \left(\frac{1}{2} ((U_j^0)^2 - (U_{j-1}^0)^2) \right) = U_j^0 = 1$$

πράγμα που σημαίνει ότι η λύση της Upwind με αρχική συνθήκη την (*) είναι η (*).

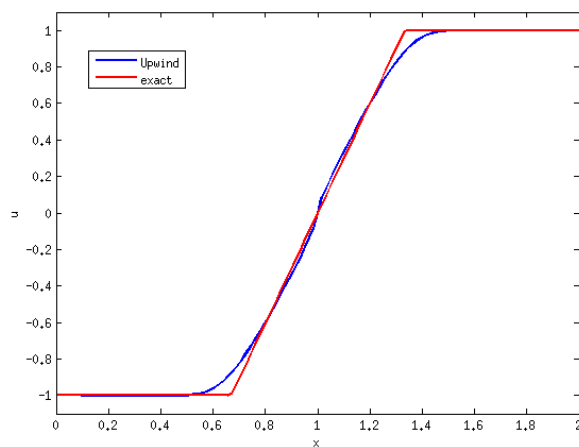
Στο ίδιο πείραμα όμως αν πάρουμε σαν αρχική συνθήκη για την Upwind

$$U_j^0 = \begin{cases} -1, & x_j < 1 \\ 0, & x_j = 1 \\ 1, & x_j > 1 \end{cases} \quad (4.5.8)$$

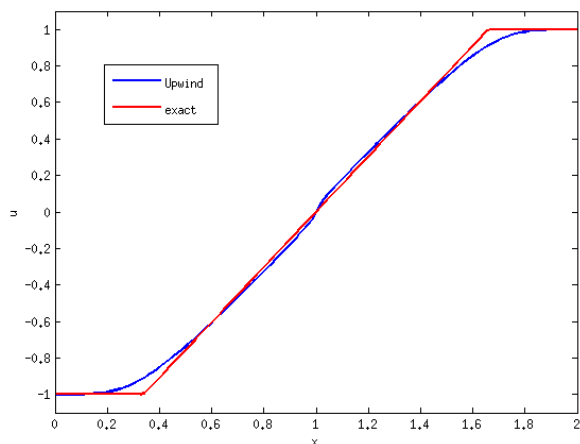
τότε η λύση που λαμβάνουμε από την (4.5.3) προσεγγίζει τη λύση εντροπίας όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



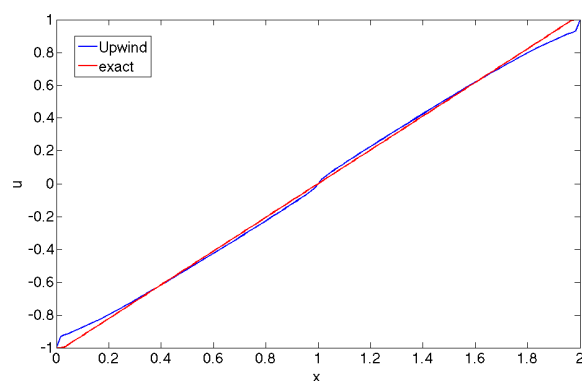
(a) $t = 0$



(b) $t = 0,32$



(c) $t = 0,65$



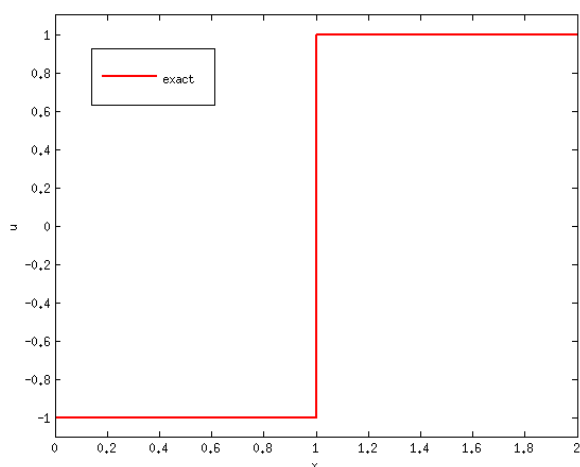
(d) $t = 1$

Σχήμα 20: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.5) με U_j^0 την (4.5.8) για $t = 0, t = 0,32, t = 0,65, t = 1, h = 1.56E - 002$ και $\frac{k}{h} = 0.25$.

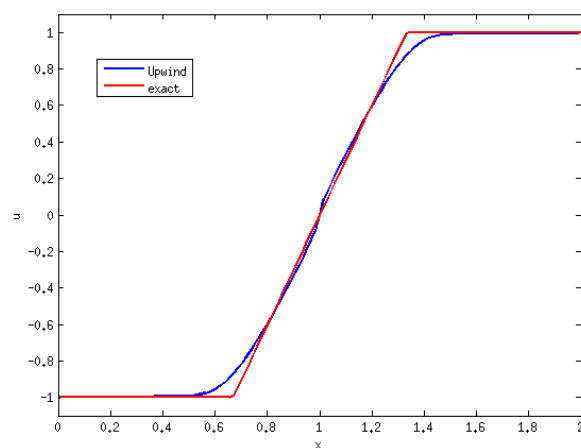
Εκτός όμως από την (4.5.8) αν πάρουμε σαν αρχικό διάνυσμα στην μέθοδο

$$U_j^0 = \frac{635}{1000} \arctan(1000(x_j - 1)) \quad (4.5.9)$$

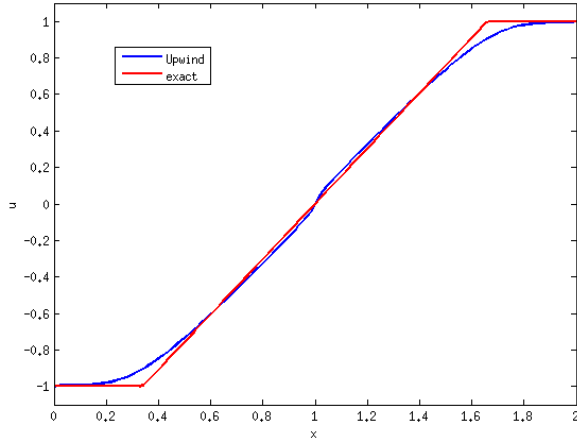
τότε πάλι η (4.5.3) προσεγγίζει αρκετά καλά τη λύση (4.5.6).



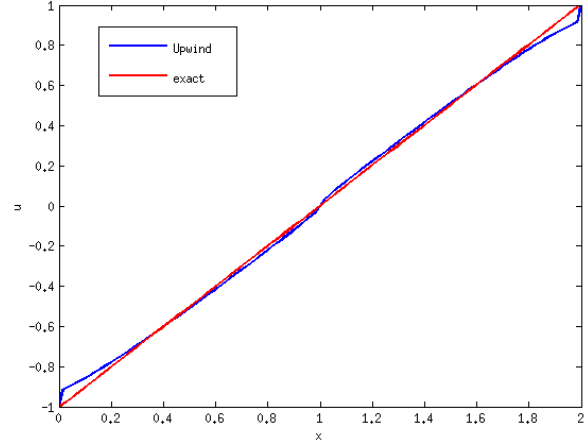
(a) $t = 0$



(b) $t = 0,32$



(c) $t = 0,65$



(d) $t = 1$

Σχήμα 21: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.5) με U_j^0 την (4.5.9) για $t = 0, t = 0,32, t = 0,65, t = 1, h = 1.56E - 002$ και $\frac{k}{h} = 0.25$.

Έστω τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών της εξίσωσης (4.1.1) με αρχικές συνθήκες

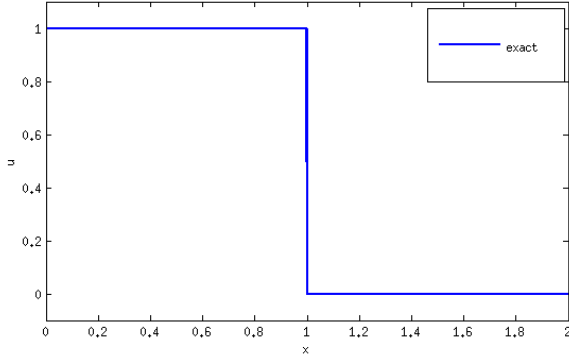
$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad (4.5.10)$$

για $0 \leq t \leq 1$. Η ακριβής λύση του προβλήματος αυτού είναι

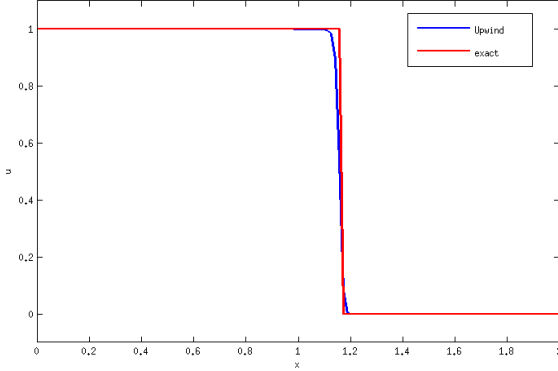
$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2}t + 1 \\ 0, & x > \frac{1}{2}t + 1. \end{cases} \quad (4.5.11)$$

Παρακάτω είναι η γραφική παράσταση της λύσης που λαμβάνουμε από την μέθοδο Upwind καθώς και της λύσης (4.5.11) με αρχική συνθήκη

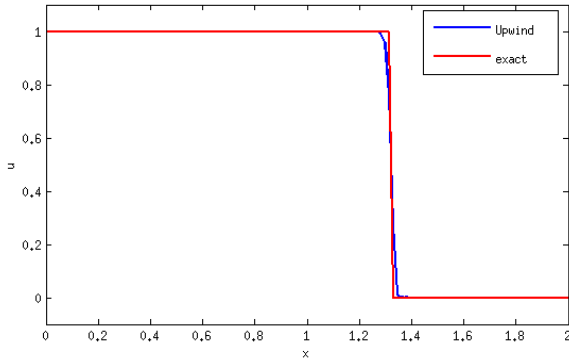
$$U_j^0 = \begin{cases} 1, & x_j < 1 \\ 0, & x_j > 1. \end{cases}$$



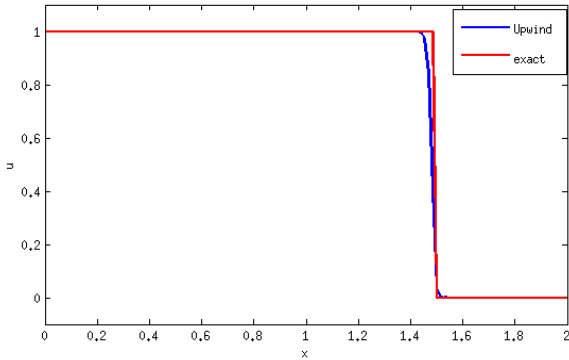
(a) $t = 0$



(b) $t = 0,32$



(c) $t = 0,65$



(d) $t = 1$

Σχήμα 22: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.10) για $t = 0, t = 0,32, t = 0,65, t = 1, h = 1.56E - 002$ και $\frac{k}{h} = 0.25$.

Σε αυτό το πείραμα συμπεραίνουμε ότι η Upwind προσεγγίζει αρκετά καλά την ασθενή λύση του προβλήματος και το αριθμητικό shock φαίνεται να έχει την σωστή ταχύτητα και δεν παρατηρούνται ταλαντώσεις. Βεβαίως παρατηρείται το φαινόμενο ότι η Upwind εξομαλύνει την λύση, δηλαδή παρουσιάζει φαινόμενα απόσβεσης.

4.6 Η μέθοδος Lax-Wendroff για Νόμους Διατήρησης.

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε την μέθοδο Lax-Wendroff για την επίλυση του προβλήματος (4.0.1)-(4.0.2). Αρχίζοντας θα θεωρήσουμε τους διαμερισμούς της παραγράφου 4.5. Από την εξίσωση (4.0.1) έχουμε για αρκετά

ομαλές λύσεις

$$u_t = -F(u)_x \quad (4.6.1a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u &= -(F(u)_x)_t \Rightarrow \partial_t^2 u = -(F(u)_t)_x \Rightarrow \partial_t^2 u = -(\alpha(u)u_t)_x \Rightarrow \\ \partial_t^2 u &= (\alpha(u)F(u)_x)_x. \end{aligned} \quad (4.6.1b)$$

Κάνοντας αντικατάσταση τις (4.6.1a) και (4.6.1b) στην (3.1.5) έχουμε

$$u(x, t^n + k) = u(x, t^n) - kF(u)_x + \frac{k^2}{2!}(\alpha(u)F(u)_x)_x + O(k^3). \quad (4.6.2)$$

Για ευκολία ορίζουμε τους παρακάτω τελεστές

$$\begin{aligned} \Delta_x F(u(x, t)) &:= \frac{1}{2}(F(u(x + h, t)) - F(u(x - h, t))) \\ \delta_x F(u(x, t)) &:= F(u(x + \frac{1}{2}h, t)) - F(u(x - \frac{1}{2}h, t)). \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Προσεγγίζουμε στη συνέχεια τις παραγώγους της (4.6.2) ως εξής

$$\begin{aligned} F(u)_x &\simeq \frac{\Delta_x F(u)}{h} \\ (\alpha(u)F(u)_x)_x &\simeq \frac{\delta_x(\alpha(u)\delta_x F(u))}{h^2}. \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_x F(u)}{h} &= \frac{\frac{1}{2}(F(u(x + h, t)) - F(u(x - h, t)))}{h} \\ \frac{\delta_x(\alpha(u)\delta_x F(u))}{h^2} &= \frac{\frac{\alpha(u(x + \frac{1}{2}h, t))\delta_x F(u(x + \frac{1}{2}h, t))}{h^2} - \frac{\alpha(u(x - \frac{1}{2}h, t))\delta_x F(u(x - \frac{1}{2}h, t))}{h^2}}{h^2} \Rightarrow \\ \frac{\delta_x(\alpha(u)\delta_x F(u))}{h^2} &= \frac{\alpha(u(x + \frac{1}{2}h, t))(F(u(x + h, t)) - F(u(x, t)))}{h^2} \\ &\quad - \frac{\alpha(u(x - \frac{1}{2}h, t))(F(u(x, t)) - F(u(x - \frac{1}{2}h, t)))}{h^2}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις ακριβείς τιμές με προσεγγίσεις και απαλείφοντας τους όρους $O(k^3)$ στην (4.6.2) έχουμε

$$U_j^{n+1} = U_j^n - k \frac{\Delta_x F(U_j^n)}{h} + \frac{k^2}{2} \frac{\delta_x(\alpha(U_j^n) \delta_x F(U_j^n))}{h^2} \Rightarrow$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - k \frac{(F(U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n))}{2h} + \frac{k^2}{2} \left(\frac{\alpha(U_{j+1/2}^n)(F(U_{j+1}^n) - F(U_j^n))}{h^2} - \frac{\alpha(U_{j-1/2}^n)(F(U_j^n) - F(U_{j-1}^n))}{h^2} \right)$$

όπου $U_{j\pm 1/2}^n = \frac{1}{2}(U_{j\pm 1}^n + U_j^n)$.

4.6.1 Διατύπωση της μεθόδου Lax-Wendroff

Για το πρόβλημα (4.0.1)-(4.0.2) η μέθοδος Lax-Wendroff υλοποιείται ως εξής. Στο πρώτο βήμα έχουμε

$$U_j^0 = \phi(x_j)$$

για $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ενώ σε κάθε καινούργιο βήμα της μεθόδου για $n = 0, \dots, M-1$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - k \frac{\Delta_x F(U_j^n)}{h} + \frac{k^2}{2} \frac{\delta_x(\alpha(U_j^n) \delta_x F(U_j^n))}{h^2} \quad (4.6.5)$$

για $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Παρατήρηση 12. Η μέθοδος Lax - Wendroff ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Lax - Wendroff.

Παρατήρηση 13. Φυσικά στην πράξη δεν μπορούμε να υλοποιήσουμε την μέθοδο Lax-Wendroff για όλα τα j μέχρι το άπειρο. Γι'αυτόν το λόγο δίνουμε κάθε φορά κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ή περιοδικές συνθήκες.

Διβηματική Lax-Wendroff

Κατά την υλοποίηση της (4.6.5) παρατηρούμε ότι είμαστε αναγκασμένοι σε κάθε βήμα να υπολογίσουμε τους όρους $\alpha(U_{j+\frac{1}{2}}^n)$ και $\alpha(U_{j-\frac{1}{2}}^n)$. Αυτό μπορούμε να το αποφύγουμε υλοποιώντας την "διβηματική" Lax-Wendroff (βλέπε [Morton&Mayers \[2\]](#)). Σε αυτήν την μέθοδο κάθε βήμα αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος υπολογίζουμε τις προσεγγίσεις της u στα σημεία $(x_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$ και $(x_{j-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$ ως εξής

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} (F(U_{j+1}^n) - F(U_j^n))$$

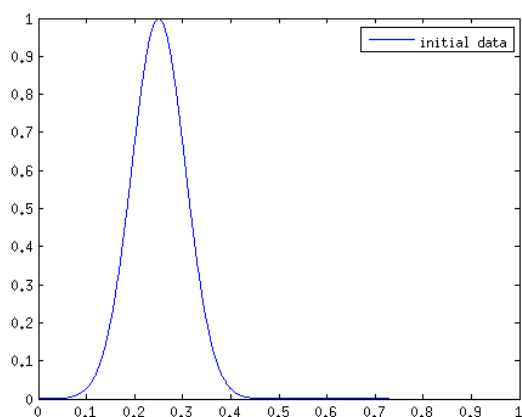
$$U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} (F(U_j^n) - F(U_{j-1}^n)). \quad (4.6.6)$$

Στο δεύτερο τελικά υπολογίζουμε την προσέγγιση της u στο σημείο (x_j, t^{n+1})

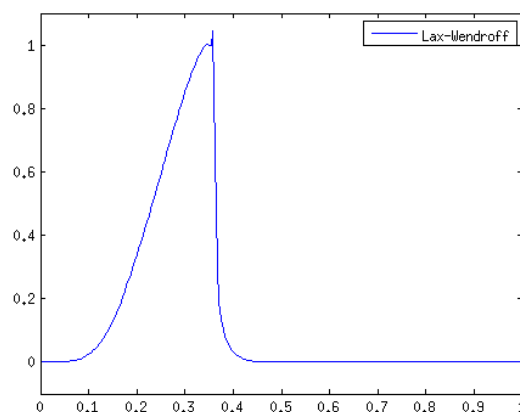
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} \left(F(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - F(U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \right). \quad (4.6.7)$$

4.6.2 Παραδείγματα από την υλοποίηση της μεθόδου Lax-Wendroff

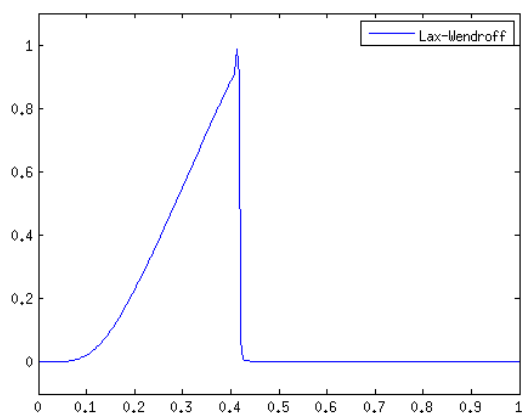
Παρουσιάζουμε τώρα τη γραφική παράσταση της αριθμητικής λύσης της εξίσωσης (4.1.1) με αρχική συνθήκη την (4.5.4) με τη μέθοδο (4.6.5) για $0 \leq t \leq 1$.



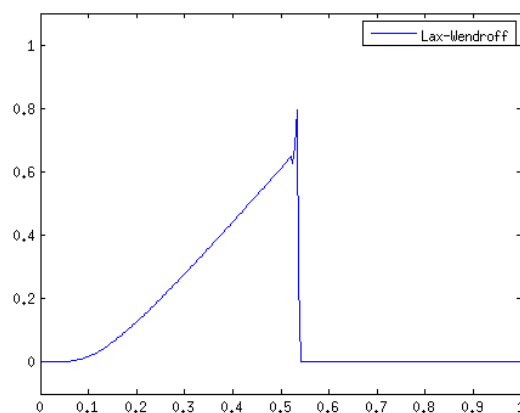
(a) $t = 0$



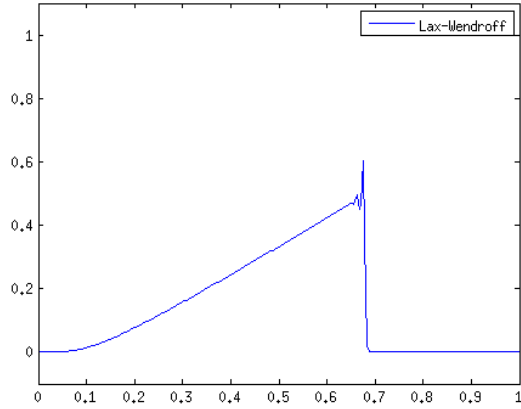
(b) $t = 9.5E - 002$



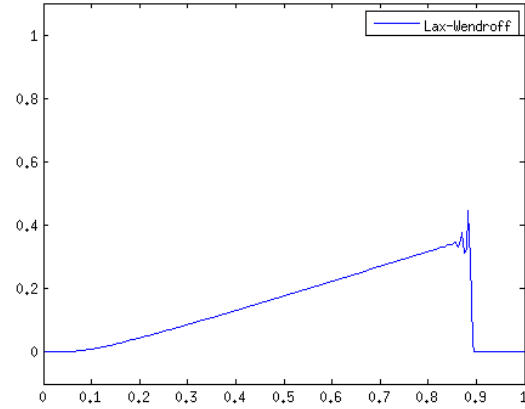
(c) $t = 0.2$



(d) $t = 0.5$



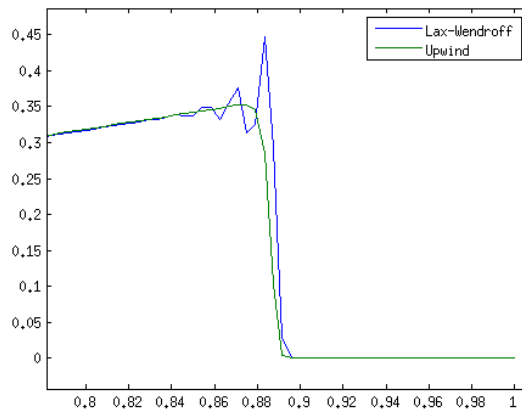
(e) $t = 1$



(f) $t = 2$

Σχήμα 23: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.4) για $t = 0, t = 9.5E - 002, t = 0.2, t = 0.5, t = 1, t = 2, h = 4.1E - 003$ και $\frac{k}{h} = 0.5$.

Από το σχήμα 23 βλέπουμε ότι η μέθοδος (4.6.5) παρουσιάζει ταλαντώσεις καθώς προσεγγίζουμε το σημείο ασυνέχειας. Αφού δημιουργηθεί η ασυνέχεια η μέθοδος φαίνεται να προσεγγίζει την λύση με σωστή ταχύτητα αλλά με ταλαντώσεις, οι οποίες όμως παραμένουν φραγμένες. Συγκρίνοντας την (4.6.5) με την μέθοδο Upwind (βλέπε σχήμα 18) μπορούμε να πούμε ότι οι ταχύτητες των δύο λύσεων είναι πρακτικά ίδιες στα δύο σχήματα. Η μέθοδος Upwind δεν παρουσιάζει ταλαντώσεις ωστόσο παρατηρούμε σε αυτήν μεγαλύτερη απόσβεση.



(a) $t = 2$

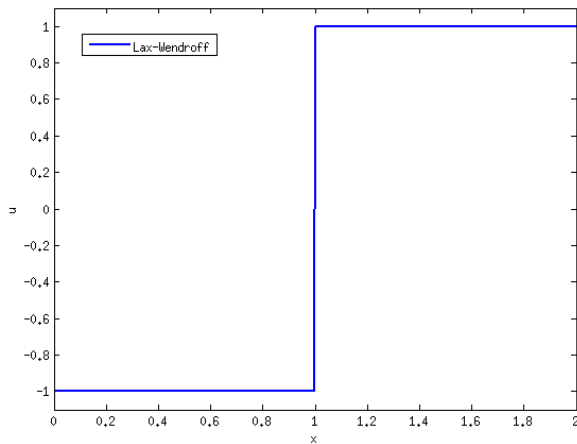
Σχήμα 24: Λύση του (4.1.1)-(4.5.4) για $t = 2, h = 4.1E - 003$ και $\frac{k}{h} = 0.5$ με τις μεθόδους Upwind και Lax-Wendroff.

Παραδείγματα για προβλήματα Riemann.

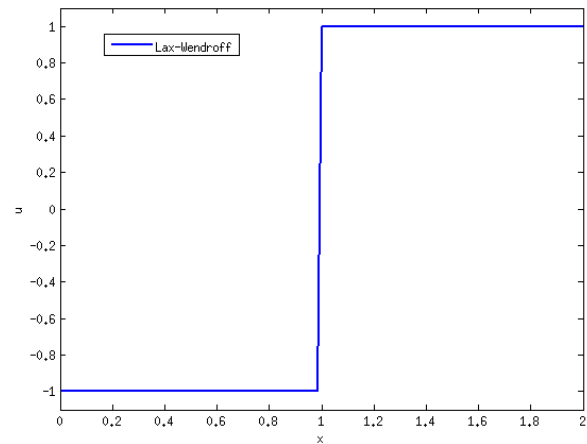
Έστω στη συνέχεια το πρόβλημα της εξίσωσης (4.1.1) με αρχική συνθήκη την (4.5.5) για $0 \leq t \leq 1$. Η λύση που λαμβάνουμε από την (4.6.5) με

$$U_j^0 = \begin{cases} -1, & x_j < 1 \\ 1, & x_j > 1. \end{cases} \quad (*)$$

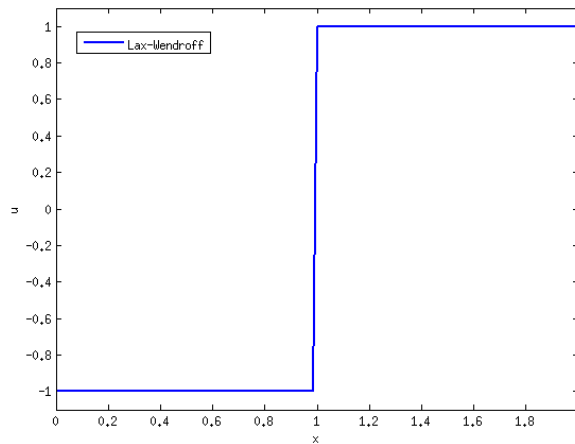
γι' αυτό το πρόβλημα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(a) $t = 0$



(b) $t = 0.32$



(c) $t = 1$

Σχήμα 25: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.5) για $t = 0, t = 0.32, t = 1, h = 1.5E - 002$ και $\frac{k}{h} = 0.25$.

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος προσεγγίζει την ασθενή λύση (4.5.7) και όχι την (4.5.6). Αυτό δεν είναι δύσκολο να το δείξουμε. Για $n = 1$ έχουμε ότι

για κάθε $x_j < 1$ ισχύει

$$U_j^1 = U_j^0 - k \frac{\frac{1}{2}((U_{j+1}^0)^2 - (U_{j-1}^0)^2)}{2h} + \frac{k^2}{2} \left(\frac{\alpha(U_{j+1/2}^0)^{\frac{1}{2}}((U_{j+1}^0)^2 - (U_j^0)^2)}{h^2} - \frac{\alpha(U_{j-1/2}^0)^{\frac{1}{2}}((U_j^0)^2 - (U_{j-1}^0)^2)}{h^2} \right) = -1$$

και για κάθε $x_j > 1$ ισχύει

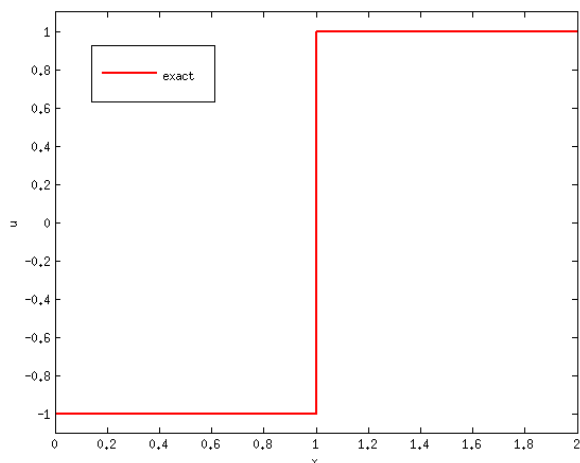
$$U_j^1 = U_j^0 - k \frac{\frac{1}{2}((U_{j+1}^0)^2 - (U_{j-1}^0)^2)}{2h} + \frac{k^2}{2} \left(\frac{\alpha(U_{j+1/2}^0)^{\frac{1}{2}}((U_{j+1}^0)^2 - (U_j^0)^2)}{h^2} - \frac{\alpha(U_{j-1/2}^0)^{\frac{1}{2}}((U_j^0)^2 - (U_{j-1}^0)^2)}{h^2} \right) = 1$$

που σημαίνει ότι η λύση που λαμβάνουμε από την (4.6.5) με αρχική συνθήκη την $(\star)$ είναι η $(\star)$.

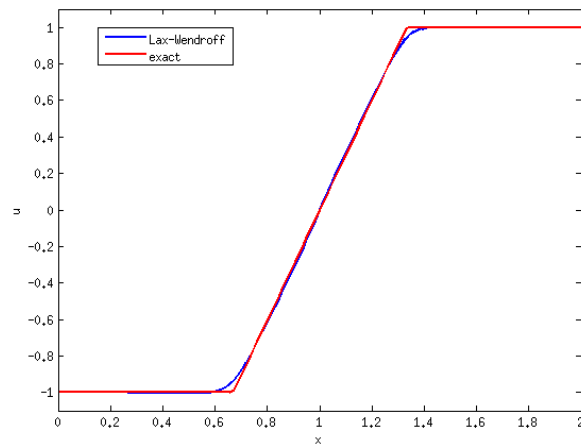
Στο ίδιο πείραμα όμως όπως και στην περίπτωση της Upwind, αν πάρουμε σαν αρχική συνθήκη για την (4.6.5) την (4.5.8)

$$U_j^0 = \begin{cases} -1, & x_j < 1 \\ 0, & x_j = 1 \\ 1, & x_j > 1 \end{cases} \quad (4.6.8)$$

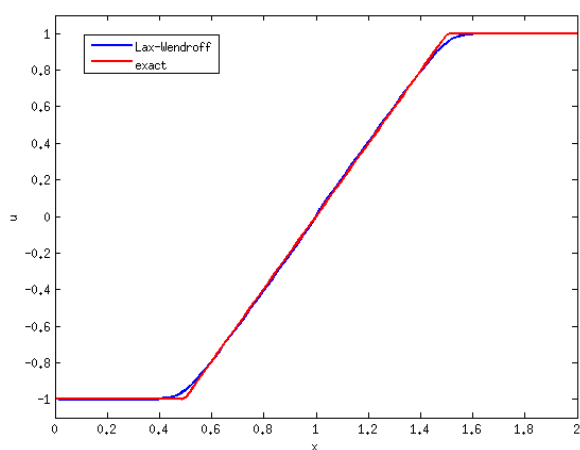
τότε η αριθμητική λύση που λαμβάνουμε προσεγγίζει την λύση εντροπίας όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



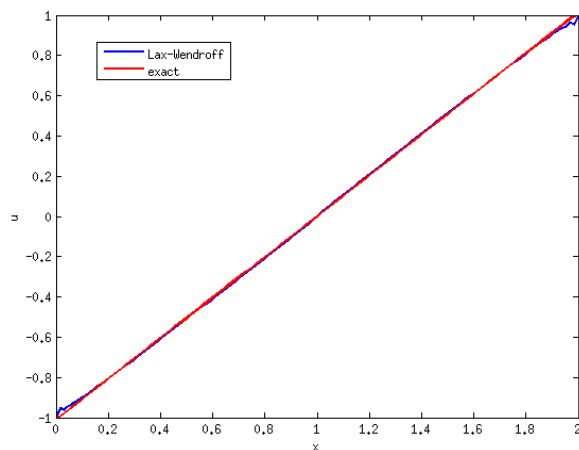
(a) $t = 0$



(b) $t = 0.32$



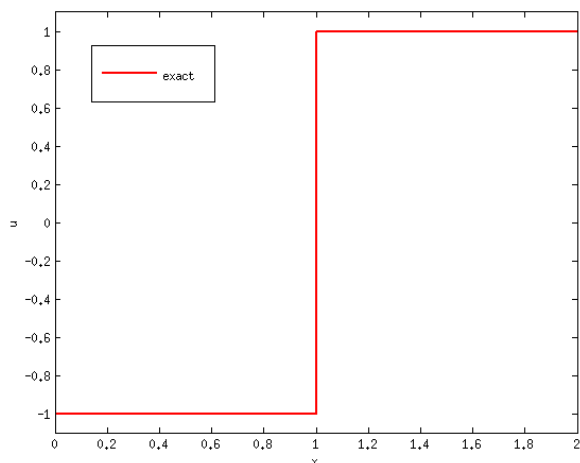
(c) $t = 0.5$



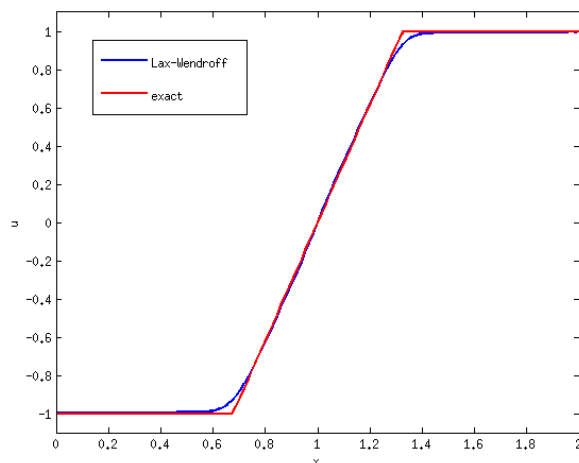
(d) $t = 1$

Σχήμα 26: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.5) με U_j^0 την (4.5.8) για $t = 0, t = 0.32, t = 0.5, t = 1, h = 1.5E - 002$ και $\frac{k}{h} = 0.25$.

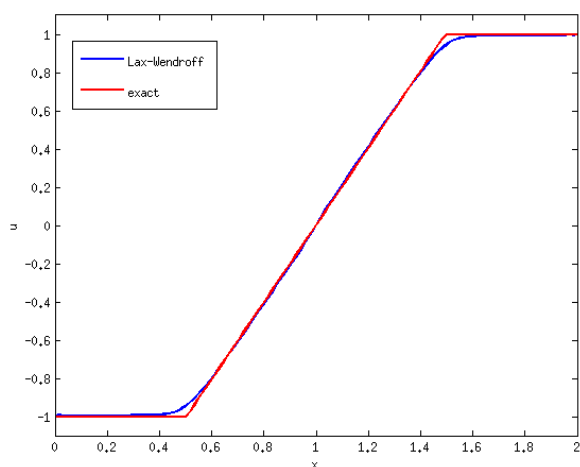
Εκτός όμως από την (4.5.8) αν πάρουμε σαν αρχική συνθήκη στην μέθοδο την (4.5.9) τότε πάλι η (4.6.5) συγκλίνει στη λύση (4.5.6).



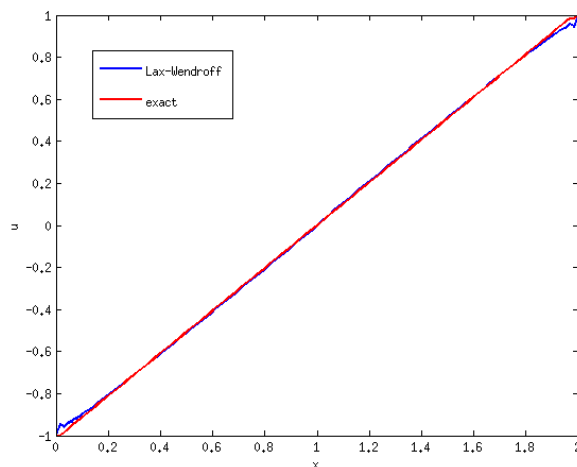
(a) $t = 0$



(b) $t = 0.32$



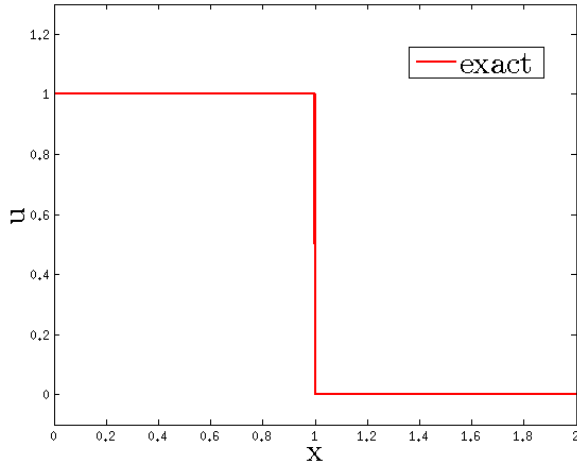
(c) $t = 0.5$



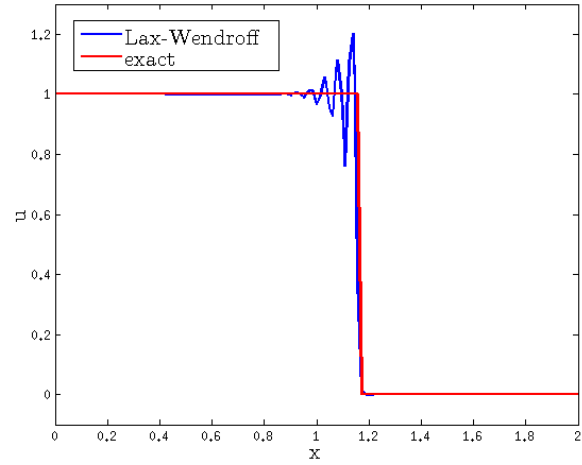
(d) $t = 1$

Σχήμα 27: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.5) με U_j^0 την (4.5.9) για $t = 0, t = 0.32, t = 0.5, t = 1, h = 1.5E - 002$ και $\frac{k}{h} = 0.25$.

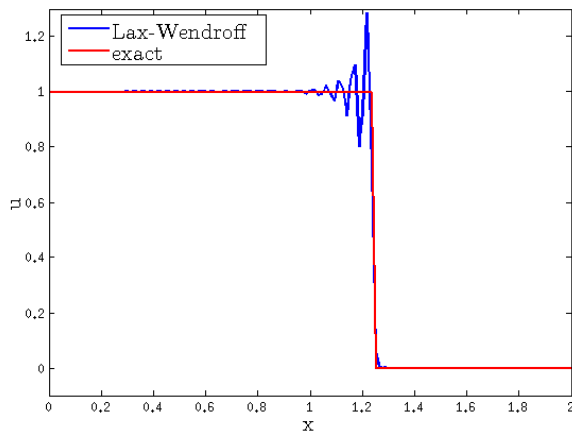
Έστω τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών (4.1.1)-(4.5.10) για $0 \leq t \leq 1$. Παρακάτω είναι η γραφική παράσταση της λύσης που λαμβάνουμε από την (4.6.5).



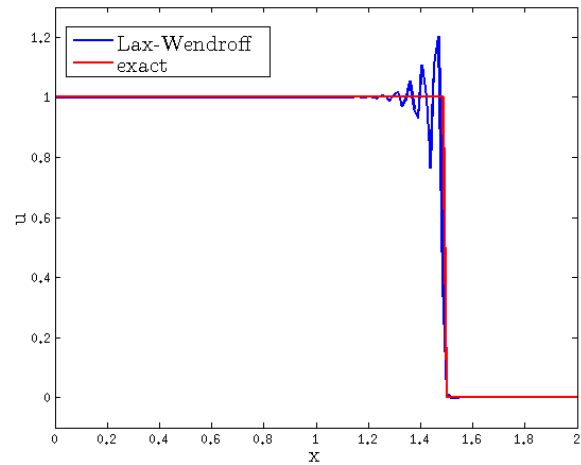
(a) $t = 0$



(b) $t = 0.32$



(c) $t = 0.5$



(d) $t = 1$

Σχήμα 28: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.5) με U_j^0 την (4.5.9) για $t = 0, t = 0.32, t = 0.5, t = 1, h = 1.5E - 002$ και $\frac{k}{h} = 0.25$.

Σε αυτό το πείραμα είναι συμπεραίνουμε ότι η Lax-Wendroff δίνει λύση όπου κινείται με την ίδια περίπου ταχύτητα όπως η ασυνεχής λύση αλλά παρουσιάζει φραγμένες ταλαντώσεις πίσω από την ασυνέχεια.

4.7 Η μέθοδος Godunov

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την μέθοδο Godunov (βλέπε [3] σελ.138). Η μέθοδος Godunov σε αντίθεση με τη μέθοδο Upwind και την μέθοδο

Lax-Wendroff έχει το πλεονέκτημα ότι συγκλίνει πάντα στην λύση εντροπίας της εξίσωσης (4.0.1). Επεξηγούμε στη συνέχεια την μέθοδο Godunov.

Θεωρούμε τις διαμερίσεις των αξόνων x και t όπως στην ενότητα 4.5. Θα περιγράψουμε την λειτουργία της μεθόδου για κάποιο τυχαίο βήμα n . Έστω λοιπόν U^n η λύση που έχουμε υπολογίσει στο χρόνο t^n . Ορίζουμε μία τμηματικά σταθερή συνάρτηση $\tilde{u}^n(x, t^n)$ με τιμή U_j^n για $x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}}$. Συνεπώς η $\tilde{u}^n(x, t^n)$ είναι λόγω κατασκευής μία τμηματικά σταθερή συνάρτηση με ασυνέχειες στα $x_{j+1/2}$ με $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ορίζουμε στη συνέχεια σε κάθε διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ το πρόβλημα της επίλυσης της (4.0.1) με αρχική συνθήκη την τιμή της $\tilde{u}^n(x, t^n)$ στο διάστημα αυτό για $t^n \leq t \leq t^{n+1}$. Βλέπουμε αμέσως πως το πρόβλημα που ορίσαμε σε κάθε ένα από τα διαστήματα είναι ένα πρόβλημα Riemann το οποίο έχουμε τη δυνατότητα να το λύσουμε ακριβώς. Έστω $\tilde{u}^n(x, t)$ η συνάρτηση η οποία σε κάθε διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ είναι η ακριβής λύση του προβλήματος Riemann. Τότε ορίζουμε την προσεγγιστική U_j^{n+1} t^{n+1} ως την μέση τιμή

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \tilde{u}(x, t^{n+1}) dx. \quad (4.7.1)$$

Συνεπώς η $\tilde{u}^n(x, t)$ είναι σε κάθε διάστημα η ακριβής λύση του προβλήματος Riemann και μέσω της ολοκληρωτικής μορφής του νόμου διατήρησης (βλέπε [3]) ή (4.7.1) μπορεί να γραφεί στην μορφή (4.4.1) με την αριθμητική ροή να είναι

$$\tilde{F}(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(\tilde{u}(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (4.7.2)$$

Αυτό μας δίνει πως η μέθοδος Godunov μπορεί να γραφεί στην μορφή συντηρητικής μεθόδου. Παρατηρούμε επιπρόσθετα ότι το ολοκλήρωμα στην (4.7.2) μπορεί να υπολογιστεί εύκολα καθώς η συνάρτηση $\tilde{u}(x_{j+\frac{1}{2}}, t)$ παραμένει σταθερή στο διάστημα $[t^n, t^{n+1}]$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ακριβής λύση του προβλήματος Riemann $\tilde{u}^n(x, t)$ είναι σταθερή κατά μήκος της γραμμής $x = x_{j+\frac{1}{2}}$ και εξαρτάται μόνο από τις τιμές U_j^n και U_{j+1}^n . Ορίζοντας $\tilde{u}(x_{j+\frac{1}{2}}, t) := u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)$ η αριθμητική ροή από την (4.7.2) γίνεται

$$\tilde{F}(U_j^n, U_{j+1}^n) = F(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)). \quad (4.7.3)$$

Στην περίπτωση όπου $U_j^n = U_{j+1}^n = \bar{u}$ τότε $u^*(U_j^n, U_{j+1}^n) = \bar{u}$. Συνεπώς η αριθμητική ροή $\tilde{F}$ είναι συνεπής. Η μέθοδος Godunov παίρνει την μορφή

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} (F(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)) - F(u^*(U_j^n, U_{j-1}^n))). \quad (4.7.4)$$

Επομένως για την υλοποίηση της (4.7.4) είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των $u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)$ για $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $n = 0, \dots, M - 1$.

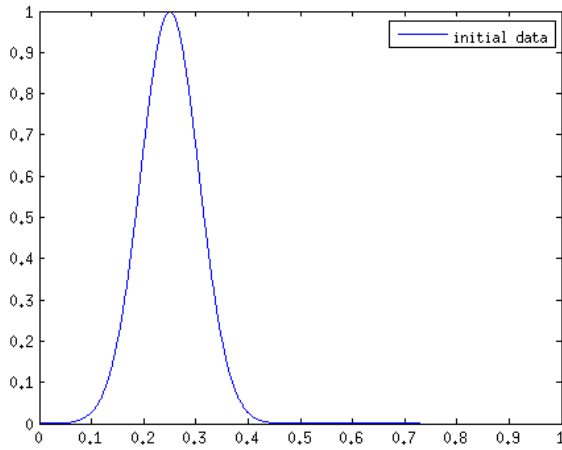
Μπορεί ναδειχθεί ότι για την περίπτωση του βαθμωτού προβλήματος η (4.7.3) μπορεί να πάρει την μορφή

$$\tilde{F}(U_j^n, U_{j+1}^n) = \begin{cases} \min_{U_j^n \leq u \leq U_{j+1}^n} F(u) & \text{αν } U_j^n \leq U_{j+1}^n \\ \max_{U_j^n \geq u \geq U_{j+1}^n} F(u) & \text{αν } U_j^n > U_{j+1}^n \end{cases} \quad (4.7.5)$$

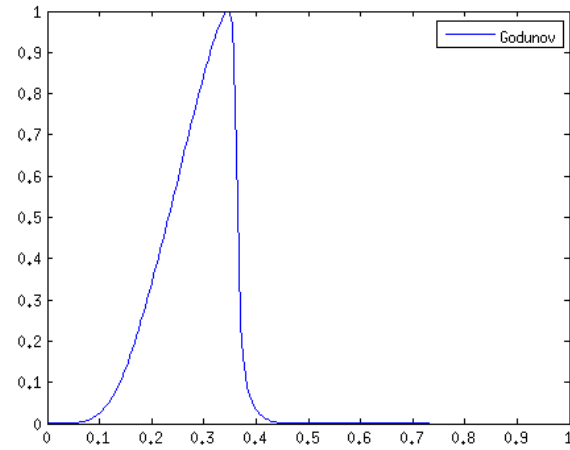
(βλέπε ^{Leveque}[3] σελ.143-145).

4.7.1 Παραδείγματα από την υλοποίηση της μεθόδου Godunov

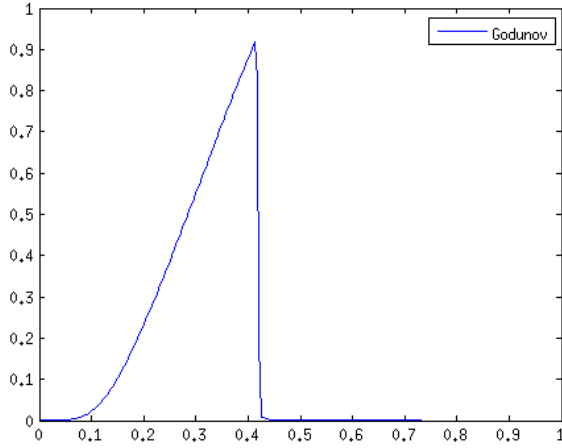
Παρουσιάζουμε τώρα τη γραφική παράσταση της αριθμητικής λύσης της εξίσωσης (4.1.1) με αρχική συνθήκη την (4.5.4) με τη μέθοδο Godunov για $0 \leq t \leq 2$.



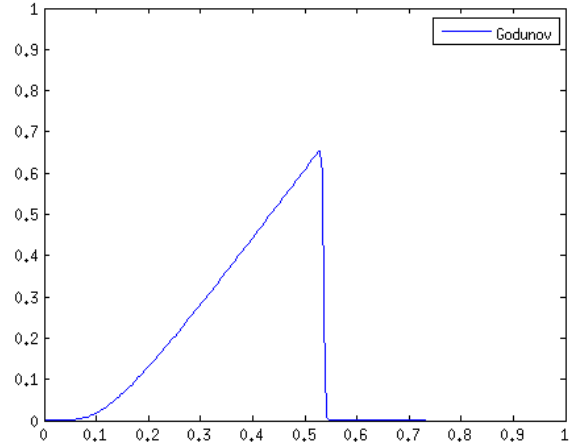
(a) $t = 0$



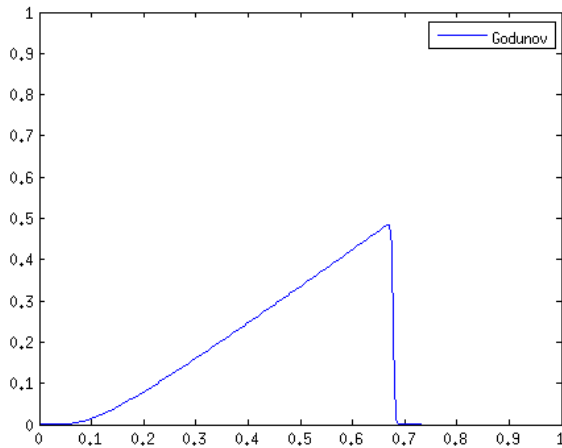
(b) $t = 9.5E - 002$



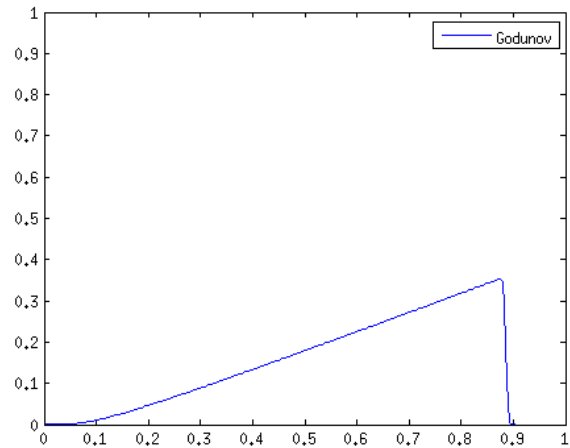
(c) $t = 0.2$



(d) $t = 0.5$



(e) $t = 1$

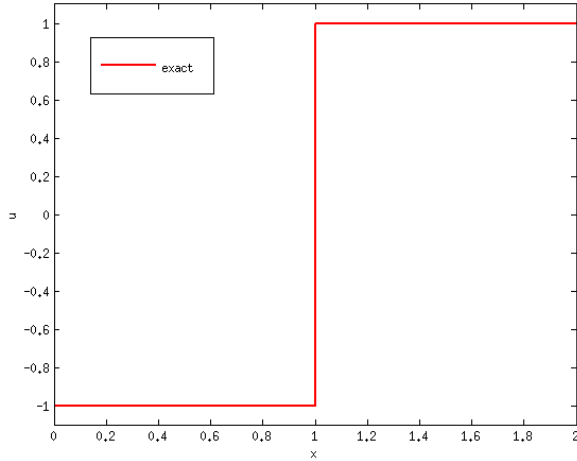


(f) $t = 2$

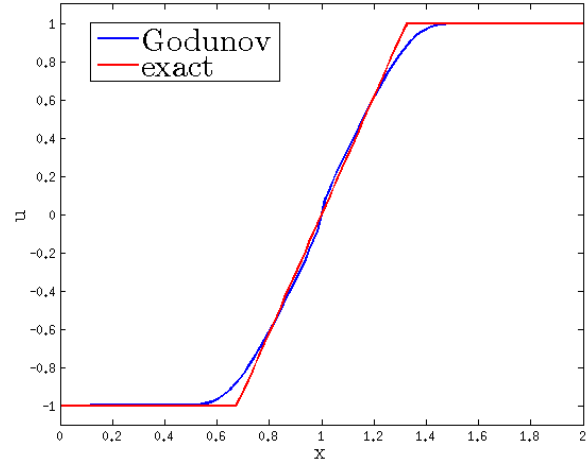
Σχήμα 29: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.4) για $t = 0, t = 9.5E - 002, t = 0.2, t = 0.5, t = 1, t = 2, h = 4.1E - 003$ και $\frac{k}{h} = 0.5$.

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος φαίνεται να προσεγγίζει αρκετά καλά την ασθενή λύση της εξίσωσης χωρίς ταλαντώσεις. Συγκρίνοντας με την λύση Urwind του ίδιου προβλήματος έχουμε να πούμε πως τα γραφήματα των λύσεων των δύο μεθόδων είναι πανομοιότυπα.

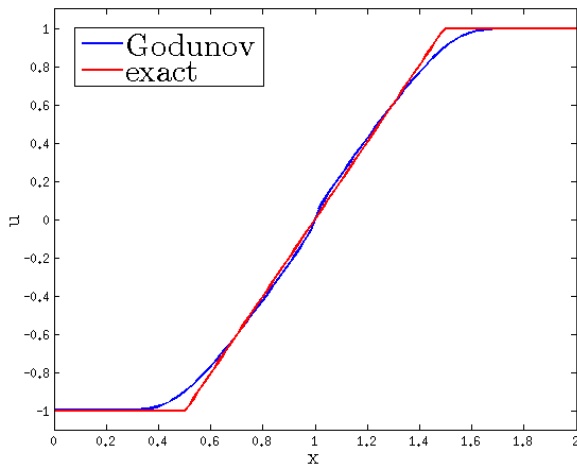
Έστω στη συνέχεια το πρόβλημα αρχικών τιμών της εξίσωσης (4.1.1) με αρχική συνθήκη την (4.5.5) για $0 \leq t \leq 1$. Η λύση που λαμβάνουμε από την μέθοδο Godunov γι' αυτό το πρόβλημα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



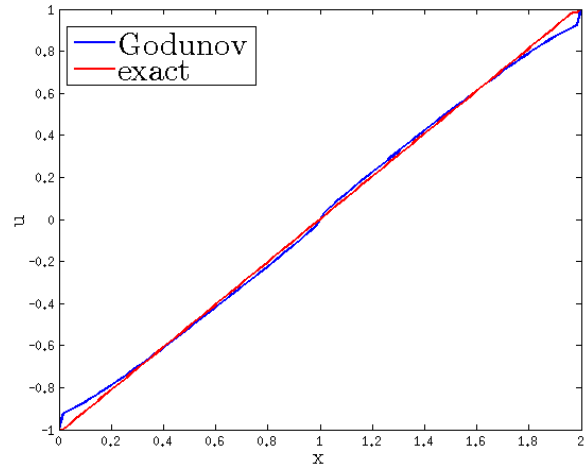
(a) $t = 0$



(b) $t = 0.32$



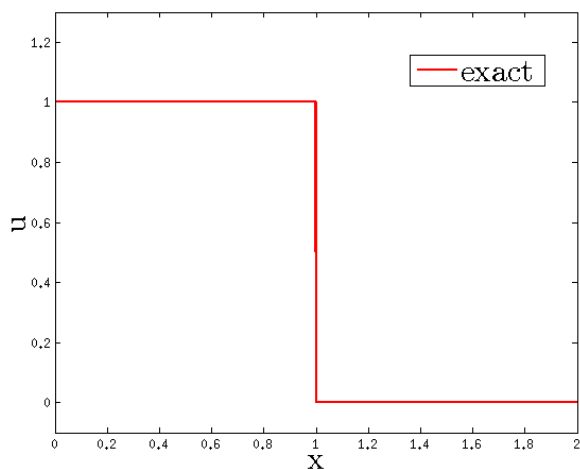
(c) $t = 0.5$



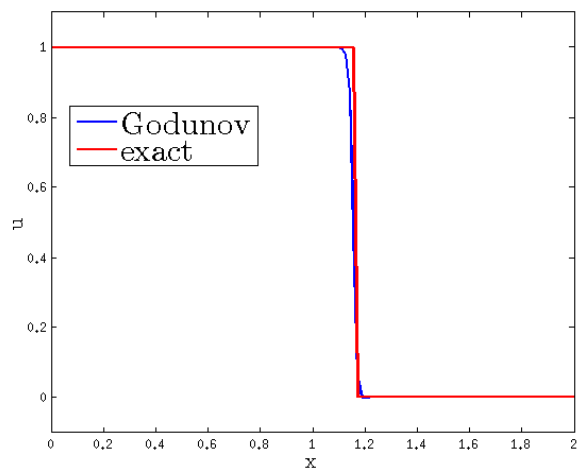
(d) $t = 1$

Σχήμα 30: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.4) για $t = 0, t = 0.32, t = 0.5, t = 1, h = 1.5E - 002$ και $\frac{k}{h} = 0.25$.

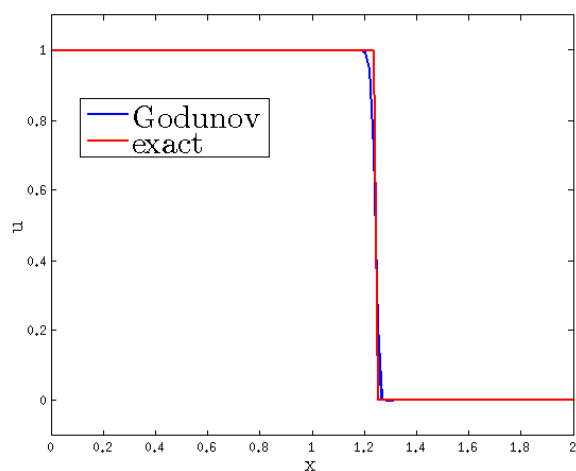
Παρατηρούμε από αυτό το πείραμα ότι σε αντίθεση με τις μεθόδους Upwind και Lax-Wendroff η μέθοδος Godunov συγκλίνει στην λύση εντροπίας. Επιπλέον έστω το πρόβλημα (4.1.1)-(4.5.10) για $0 \leq t \leq 1$. Παρακάτω είναι η γραφική παράσταση της αριθμητικής λύσης που λαμβάνουμε από την μέθοδο Godunov.



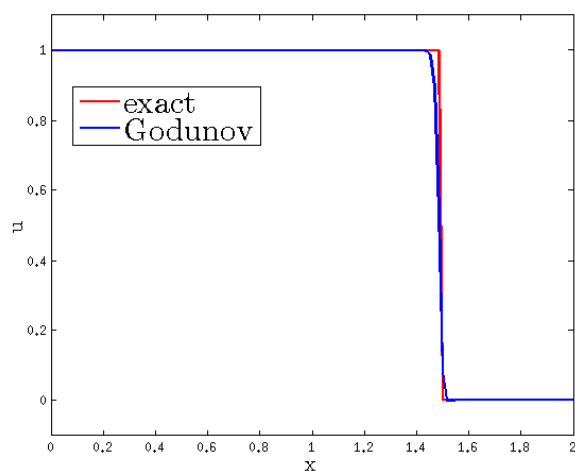
(a) $t = 0$



(b) $t = 0.32$



(c) $t = 0.5$



(d) $t = 1$

Σχήμα 31: Αρχική συνθήκη και λύση του (4.1.1)-(4.5.4) για $t = 0, t = 0.32, t = 0.5, t = 1, h = 1.5E - 002$ και $\frac{k}{h} = 0.25$.

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα της αριθμητικής λύσης προσεγγίζει καλά την ταχύτητα της ασυνεχούς λύσης χωρίς ταλαντώσεις.

5 Εξισώσεις Ρηχών Υδάτων σε μία χωρική διάσταση

Στόχος μας στο κεφάλαιο αυτό είναι η μελέτη καθώς και η αριθμητική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων ρηχών υδάτων για την περιγραφή της κίνησης ενός ρευστού σε ελεύθερη επιφάνεια σε μια χωρική διάσταση με σταθερό πυθμένα. Αρχίζοντας δείχνουμε τι μορφή έχουν τα συστήματα ΜΔΕ.

5.1 Γραμμικά Συστήματα ΜΔΕ πρώτης τάξης σε μία διάσταση

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + A\mathbf{u}_x &= 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x) \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

όπου $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ σταθερός πίνακας. Η πρώτη εξίσωση της (5.1.1) αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα ΜΔΕ πρώτης τάξης με μία χωρική διάσταση. Καλούμε το σύστημα υπερβολικό εάν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές (δηλ.) έτσι ώστε να μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$A = R\Lambda R^{-1}$$

όπου $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ο διαγώνιος πίνακας των πραγματικών ιδιοτιμών και

$R = [r_1 | \dots | r_m]$ ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .

5.2 Μη Γραμμικά Συστήματα ΜΔΕ πρώτης τάξης σε μία χωρική διάσταση

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x &= 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x). \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

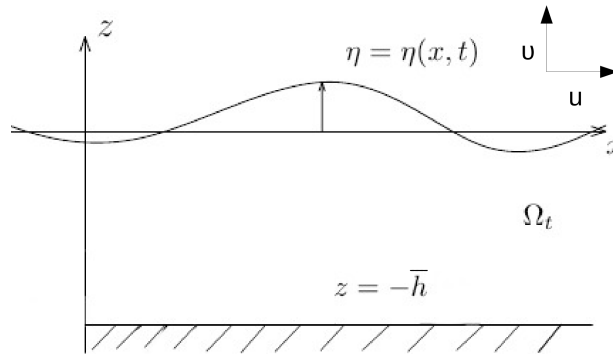
όπου $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Η πρώτη εξίσωση της (5.2.1) είναι ένα μη γραμμικό σύστημα ΜΔΕ σε μία χωρική διάσταση. Το (5.2.1) γράφεται και στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + A(\mathbf{u})\mathbf{u}_x &= 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x) \end{aligned}$$

όπου $A(\mathbf{u}) = \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της f . Όπως και στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων έτσι και εδώ το σύστημα καλείται υπερβολικό εάν ο πίνακας $A(\mathbf{u})$ είναι διαγωνοποιήσιμος και έχει πραγματικές ιδιοτιμές $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$.

5.3 Οι εξισώσεις Ρηχών Υδάτων

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια τις εξισώσεις ρηχών υδάτων σε μία χωρική διάσταση. Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της κίνησης ενός ρευστού με ελεύθερη επιφάνεια και με το βάθος του πυθμένα μικρό σε σχέση με τα μήκη των κυμάτων που δημιουργούνται στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Για την παραγωγή των εξισώσεων ρηχών υδάτων υποθέτουμε ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, αστρόβιλο με μηδενικό ιξώδες. Η γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 32: Κύματα επιφάνειας 2D

όπου $\eta(t)$ η απόκλιση της ελεύθερης επιφάνειας από την στάθμη ηρεμίας $z = 0$, $\bar{h}$ το βάθος του σταθερού πυθμένα από την στάθμη ηρεμίας $z = 0$, u και v οι συνιστώσες της ταχύτητας στον οριζόντιο και κάθετο καρτεσιανό άξονα αντίστοιχα και $\Omega_t = \{(x, z) : -\infty < x < \infty, -\bar{h} < z < \eta(x, t)\}$ το χωρίο που λαμβάνει κάθε στιγμή για $t \geq 0$ το ρευστό. Οι εξισώσεις των ρηχών υδάτων με σταθερό πυθμένα ως προς διαστατικές μεταβλητές είναι

$$\eta_t + [(\eta + \bar{h})u]_x = 0 \quad (5.3.1)$$

$$u_t + g\eta_x + uu_x = 0. \quad (5.3.2)$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας (βλέπε [\[Logan, Dougalis 4, 5\]](#).)

Επαναλαμβάνουμε ότι το σύστημα (5.3.1)–(5.3.2) αποτελεί μία καλή προσέγγιση των εξισώσεων Euler των κυμάτων ελεύθερης επιφάνειας μόνο στην περίπτωση

όπου το βάθος του πυθμένα είναι αρκετά μικρό σε σχέση με το μήκος κύματος των κυμάτων επιφάνειας.

Το σύστημα (5.3.1) – (5.3.2) είναι δυνατόν να εκφραστεί σε μία διαφορετική μορφή με μεταβλητές ύψος και ορμή. Η μεταβλητή ύψους ορίζεται ως

$$H(x, t) = \bar{h} + \eta(x, t).$$

Αν με $U = Hu$ συμβολίζουμε την ορμή τότε από την εξίσωση (5.3.1) έχουμε

$$\begin{aligned} \eta_t + [(\eta + \bar{h})u]_x &= 0 \Rightarrow (H - \bar{h})_t + (Hu)_x = 0 \Rightarrow \\ H_t + U_x &= 0. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας στη συνέχεια την εξίσωση (5.3.2) με H και έχοντας υπόψιν την (5.3.1) έχουμε

$$\begin{aligned} u_t + g\eta_x + uu_x &= 0 \Rightarrow \\ Hu_t + H_t u - H_t u + gH(H - \bar{h})_x + Huu_x &= 0 \Rightarrow \\ (Hu)_t - H_t u + gH(H - \bar{h})_x + Huu_x &= 0 \Rightarrow \\ U_t - U_x \frac{U}{H} + gHH_x + H \frac{U}{H} \left(\frac{U}{H} \right)_x &\Rightarrow \\ U_t + \left(\frac{U^2}{H} \right)_x + \frac{g}{2}(H^2)_x &= 0. \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα ρηχών υδάτων με σταθερό πυθμένα για τις μεταβλητές ύψους και ορμής γράφεται ως

$$H_t + U_x = 0 \quad (5.3.3)$$

$$U_t + \left(\frac{U^2}{H} \right)_x + \frac{g}{2}(H^2)_x = 0. \quad (5.3.4)$$

5.4 Αριθμητική επίλυση του συστήματος Ρηχών Υδάτων

Σε αυτήν την υποενότητα θα προχωρήσουμε στην μελέτη μεθόδων για την αριθμητική επίλυση του συστήματος ρηχών υδάτων στην περίπτωση περιοδικών αρχικών συνθηκών. Επιπλέον θα υλοποιήσουμε αριθμητικά πειράματα τόσο για την πρώτη μορφή (5.3.1) – (5.3.2) όσο και για την δεύτερη μορφή (5.3.3) – (5.3.4) του συστήματος ρηχών υδάτων.

5.4.1 Η Μέθοδος Lax-Wendroff

Η πρώτη μέθοδος που θα μελετήσουμε είναι η μέθοδος *Lax – Wendroff*. Αρχικά θα θεωρήσουμε όπως και στο κεφάλαιο 4 δύο ομοιόμορφους διαμερισμούς, έναν για τον άξονα x και έναν για τον άξονα t , στα διαστήματα $(-\infty, +\infty)$ και $[0, T]$ αντίστοιχα ως εξής

$$x_j = jh \quad \text{για } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$t^n = nk \quad \text{όπου } k = \frac{T}{M} = \Delta t = (t^{n+1} - t^n) \quad \text{για } n = 0, \dots, M$$

με M το πλήθος των υποδιαστημάτων στον άξονα των t .

Η μέθοδος *Lax – Wendroff* για το σύστημα (5.2.1) (βλέπε ^{Morton&Mayers}[2] σελ.100-105) είναι η

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{k}{2h}(\mathbf{f}(\mathbf{W}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{W}_{j-1}^n)) + \frac{k^2}{2h^2}[A_{j+\frac{1}{2}}(\mathbf{f}(\mathbf{W}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{W}_j^n)) - \\ - A_{j-\frac{1}{2}}(\mathbf{f}(\mathbf{W}_j^n) - \mathbf{f}(\mathbf{W}_{j-1}^n))] \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

για $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $n = 0, \dots, M-1$

όπου $\mathbf{W}_j^n \in \mathbb{R}^m$ η προσεγγιστική λύση, $\mathbf{f}$ η συνάρτηση ροής και $A_{j\pm\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ η Ιακωβιανή του συστήματος (5.2.1) υπολογισμένη στο $\frac{1}{2}(\mathbf{W}_j^n + \mathbf{W}_{j\pm 1}^n)$.

Η μέθοδος (5.4.1) δεν αποτελεί τίποτα άλλο παρά την γενίκευση της μεθόδου (4.6.5) για μη γραμμικά συστήματα.

Είναι επίσης σημαντικό σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε και το εξής. Οι ορισμοί (4.1), (4.2) καθώς και το θεώρημα (4.2) ισχύουν και στην περίπτωση για την αριθμητική επίλυση συστημάτων της μορφής (5.1.1) και (5.2.1) με την διαφορά ότι $\mathbf{W}_j^n \in \mathbb{R}^m$ ενώ και η αριθμητική ροή $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^m$ όπου m ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος.

Η μέθοδος (5.4.1) λοιπόν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος (4.2) αν πάρουμε ως αριθμητική ροή την

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{W}_{j+1}^n, \mathbf{W}_j^n) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{W}_{j+1}^n) + \mathbf{f}(\mathbf{W}_j^n)) - \frac{k}{2h}(A_{j+\frac{1}{2}}(\mathbf{f}(\mathbf{W}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{W}_j^n))).$$

Διβηματική Lax-Wendroff

Ένα μειονέκτημα της μεθόδου (5.4.1) κατά την υλοποίησή της είναι το γεγονός ότι είμαστε αναγκασμένοι να υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα $A_{j\pm\frac{1}{2}}$. Ο

τρόπος για να το αποφύγουμε αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε την διβηματική *Lax–Wendroff* όπως στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης των βαθμωτών νόμων διατήρησης στο κεφάλαιο 4 (βλέπε [2] σελ.110). Η μέθοδος αυτή υλοποιείται σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε τις προσεγγίσεις της u στα σημεία $(x_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$ και $(x_{j-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$ ως εξής

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{W}_j^n + \mathbf{W}_{j+1}^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} (\mathbf{f}(\mathbf{W}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{W}_j^n)) \\ \mathbf{W}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{W}_j^n + \mathbf{W}_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} (\mathbf{f}(\mathbf{W}_j^n) - \mathbf{f}(\mathbf{W}_{j-1}^n)).\end{aligned}$$

Στο δεύτερο τελικά υπολογίζουμε την προσέγγιση της u στο σημείο (x_j, t^{n+1})

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{k}{h} \left(\mathbf{f}(\mathbf{W}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - \mathbf{f}(\mathbf{W}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \right).$$

Διατύπωση της διβηματικής μεθόδου Lax–Wendroff για το σύστημα Ρηχών Υδάτων με περιοδικές συνθήκες

Διατυπώνουμε τώρα την διβηματική *Lax–Wendroff* για το σύστημα (5.3.1)–(5.3.2) με αρχική συνθήκη και περιοδικές συνθήκες. Έστω $\mathbf{W}_j^n = (H_j^n, V_j^n)$ με H_j^n, V_j^n οι προσεγγίσεις των h και u αντίστοιχα και

$$\mathbf{f}(\mathbf{W}_j^n) = \begin{pmatrix} (H_j^n + \bar{h})V_j^n \\ gH_j^n + \frac{1}{2}(V_j^n)^2 \end{pmatrix}.$$

Με δεδομένα H_j^0 και V_j^0 για $j = 0, \pm 1, \dots$ έχουμε

για $n = 0, \dots, M-1$

$$\begin{aligned}H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(H_j^n + H_{j+1}^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} ((H_{j+1}^n + \bar{h})V_{j+1}^n - (H_j^n + \bar{h})V_j^n) \\ V_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(V_{j+1}^n + V_j^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} \left(gH_{j+1}^n + \frac{(V_{j+1}^n)^2}{2} - gH_j^n - \frac{(V_j^n)^2}{2} \right) \\ H_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(H_j^n + H_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} ((H_j^n + \bar{h})V_j^n - (H_{j-1}^n + \bar{h})V_{j-1}^n) \\ V_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(V_j^n + V_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} \left(gH_j^n + \frac{(V_j^n)^2}{2} - gH_{j-1}^n - \frac{(V_{j-1}^n)^2}{2} \right) \\ H_j^{n+1} &= H_j^n - \frac{k}{h} ((H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{h})V_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - ((H_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{h})V_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})) \\ V_j^{n+1} &= V_j^n - \frac{k}{h} \left(gH_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{(V_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})^2}{2} - gH_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{(V_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})^2}{2} \right)\end{aligned}\tag{5.4.2}$$

για $j = 0, \pm 1, \dots$

όπου

$$\mathbf{W}_{-1}^n = \mathbf{W}_{J-1}^n \text{ και } \mathbf{W}_2^n = \mathbf{W}_{J+1}^n$$

οι περιοδικές συνθήκες.

Διατυπώνουμε στη συνέχεια την διβηματική *Lax-Wendroff* για το σύστημα (5.3.3) – (5.3.4) με αρχική συνθήκη και περιοδικές συνθήκες. Έστω $\mathbf{W}_j^n = (S_j^n, M_j^n)$ με S_j^n, M_j^n οι προσεγγίσεις των H και U αντίστοιχα και

$$\mathbf{f}(\mathbf{W}_j^n) = \begin{pmatrix} M_j^n \\ \frac{(M_j^n)^2}{S_j^n} + \frac{g}{2}(S_j^n)^2 \end{pmatrix}.$$

Με δεδομένα S_j^0 και M_j^0 για $j = 0, \pm 1, \dots$ έχουμε

για $n = 0, \dots, M-1$

$$\begin{aligned} S_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(S_j^n + S_{j+1}^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} (M_{j+1}^n - M_j^n) \\ M_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(M_{j+1}^n + M_j^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} \left(\frac{(M_{j+1}^n)^2}{S_{j+1}^n} + \frac{g}{2}(S_{j+1}^n)^2 - \frac{(M_j^n)^2}{S_j^n} - \frac{g}{2}(S_j^n)^2 \right) \\ S_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(S_j^n + S_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} (M_j^n - M_{j-1}^n) \\ M_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(M_j^n + M_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{k}{h} \left(\frac{(M_j^n)^2}{S_j^n} + \frac{g}{2}(S_j^n)^2 - \frac{(M_{j-1}^n)^2}{S_{j-1}^n} - \frac{g}{2}(S_{j-1}^n)^2 \right) \\ S_j^{n+1} &= S_j^n - \frac{k}{h} (M_{j+1/2}^{n+1/2} - M_{j-1/2}^{n+1/2}) \\ M_j^{n+1} &= M_j^n - \frac{k}{h} \left(\frac{(M_{j+1/2}^{n+1/2})^2}{S_{j+1/2}^{n+1/2}} + \frac{g}{2}(S_{j+1/2}^{n+1/2})^2 - \frac{(M_{j-1/2}^{n+1/2})^2}{S_{j-1/2}^{n+1/2}} - \frac{g}{2}(S_{j-1/2}^{n+1/2})^2 \right) \end{aligned}$$

για $j = 0, \pm 1, \dots$

(5.4.3)

όπου

$$\mathbf{W}_{-1}^n = \mathbf{W}_{J-1}^n \text{ και } \mathbf{W}_2^n = \mathbf{W}_{J+1}^n$$

οι περιοδικές συνθήκες.

Αποτελέσματα από την εφαρμογή της διβηματικής μεθόδου Lax-Wendroff

Συνεχίζοντας θεωρούμε την διαμέριση του διαστήματος $[0, 10]$

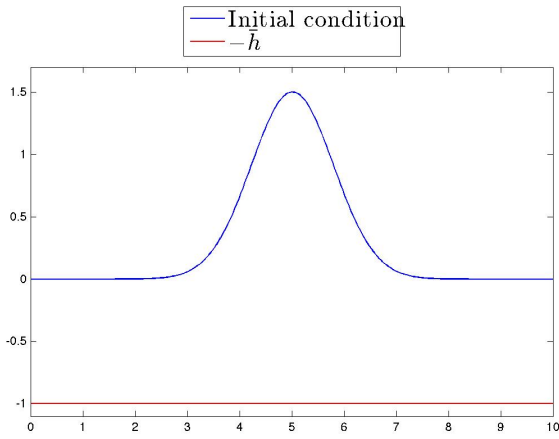
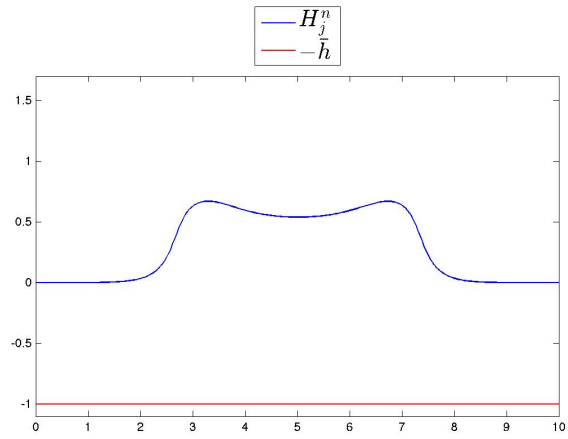
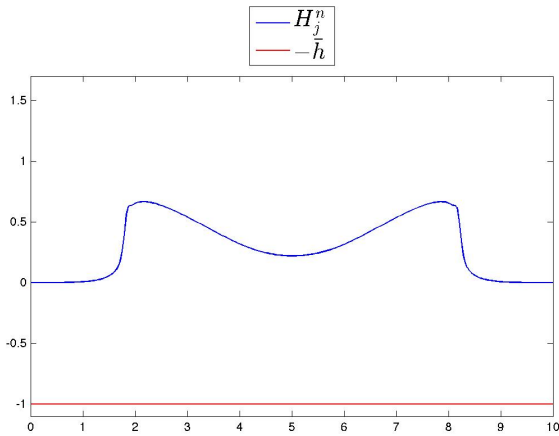
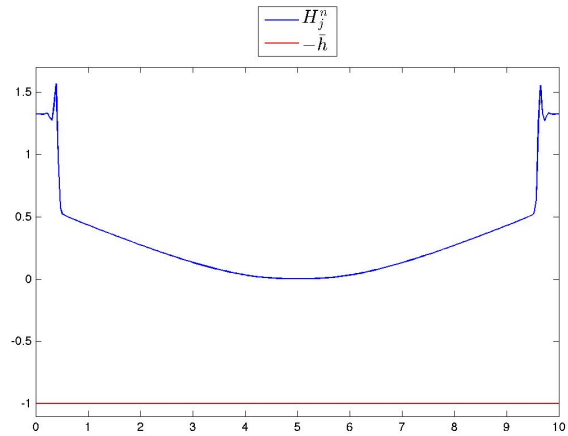
$$x_j = jh \quad \text{όπου} \quad h = \frac{1}{J} = \Delta x = (x_{j+1} - x_j) \quad \text{για } j = 0, \dots, J$$

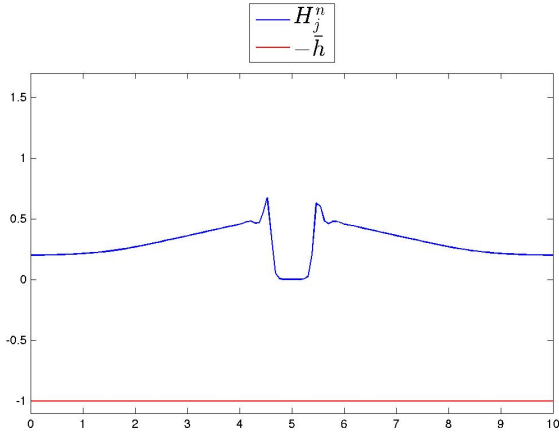
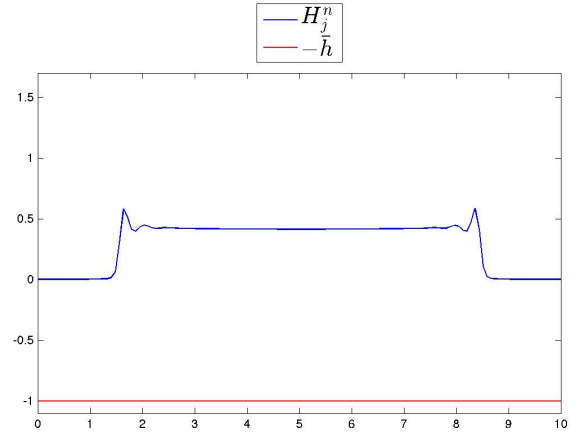
με J το πλήθος των υποδιαστημάτων. Παρουσιάζουμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των προσεγγιστικών λύσεων H_j^n και V_j^n που λαμβάνουμε εφαρμόζοντας την μέθοδο (5.4.2) για την αριθμητική επίλυση του συστήματος (5.3.1)–(5.3.2) στο διάστημα $[0, 10]$ με αρχικές συνθήκες

$$\eta(x, 0) = 1.5e^{(-0.05(4(x-\frac{1}{4})-19)^2)} \quad (5.4.4)$$

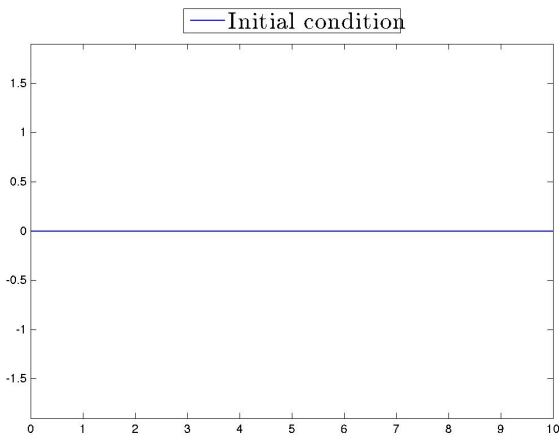
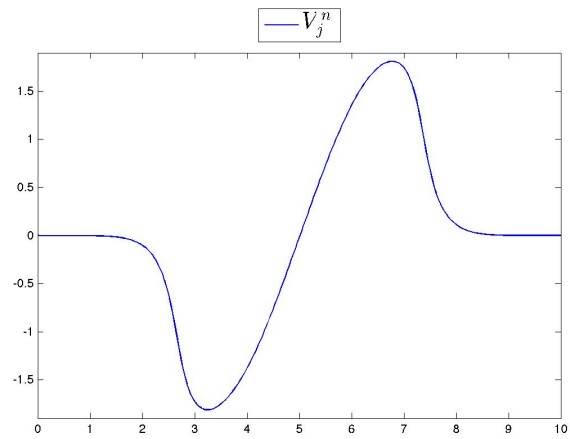
$$u(x, 0) = 0 \quad (5.4.5)$$

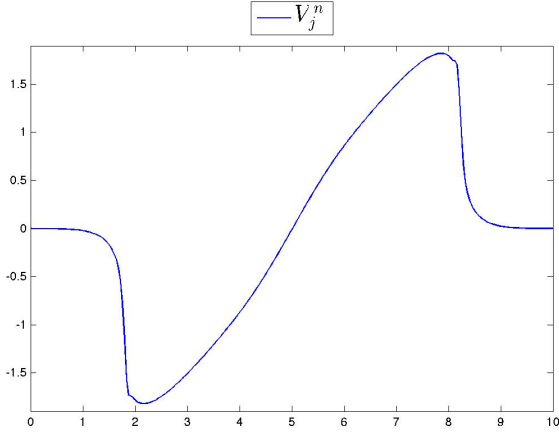
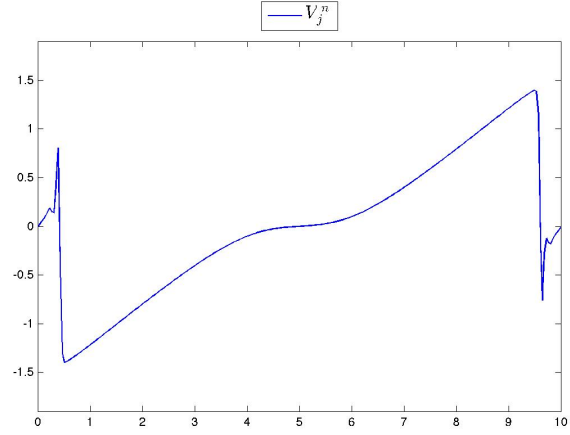
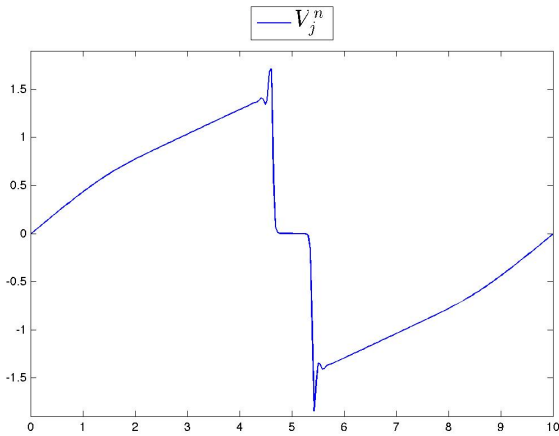
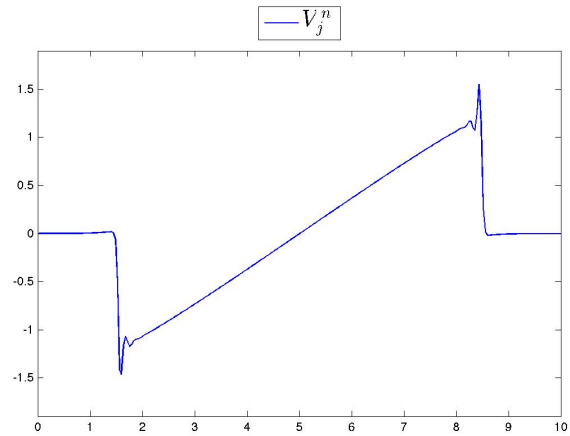
για $0 \leq t \leq 3, g = 9.81$ και βάθος πυθμένα $\bar{h} = 1$. Επίσης στα άκρα εφαρμόζουμε περιοδικές συνθήκες.

(a) $t = 0$ (b) $t = 0, 3$ (c) $t = 1/2$ (d) $t = 1$

(e) $t = 2$ (f) $t = 3$

Σχήμα 33: Γραφική παράσταση της αρχικής συνθήκης (5.4.4) και της προσέγγισης H_j^n που παίρνουμε εφαρμόζοντας την μέθοδο (5.4.2) για την αριθμητική λύση του συστήματος (5.3.1) – (5.3.2) για $t = 0, t = 0.3, t = 1/2, t = 1, t = 2, t = 3, h = 3.9E - 002, \bar{h} = 1$ και $g = 9.81$.

(a) $t = 0$ (b) $t = 0, 3$

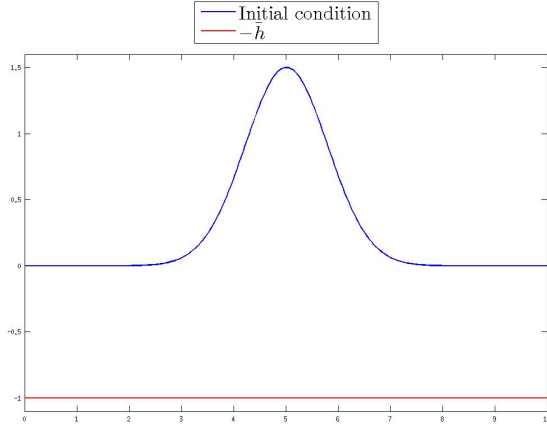
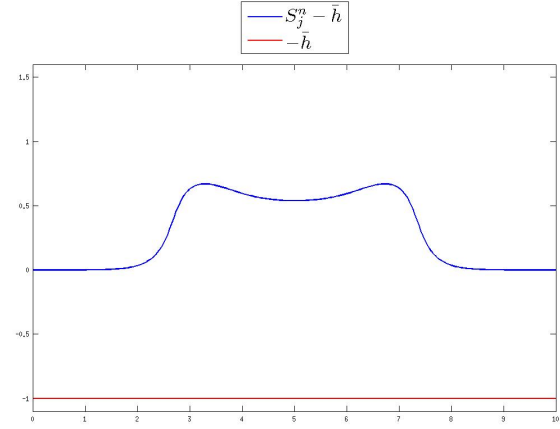
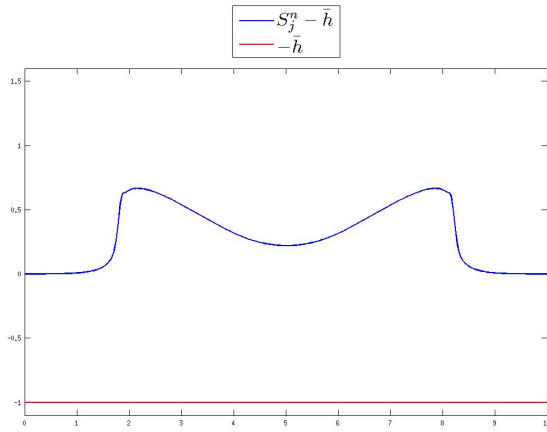
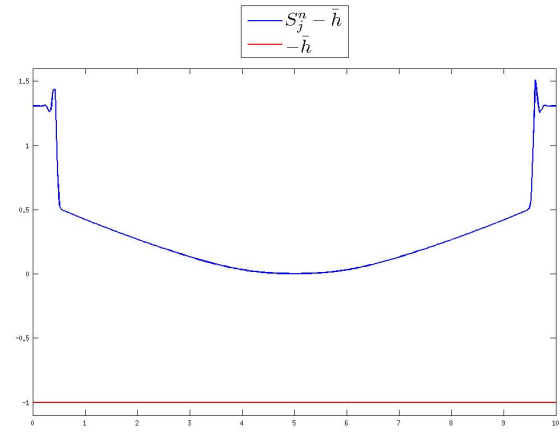
(c) $t = 1/2$ (d) $t = 1$ (e) $t = 2$ (f) $t = 3$

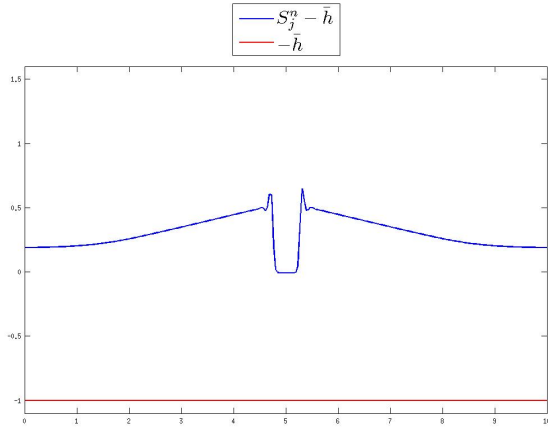
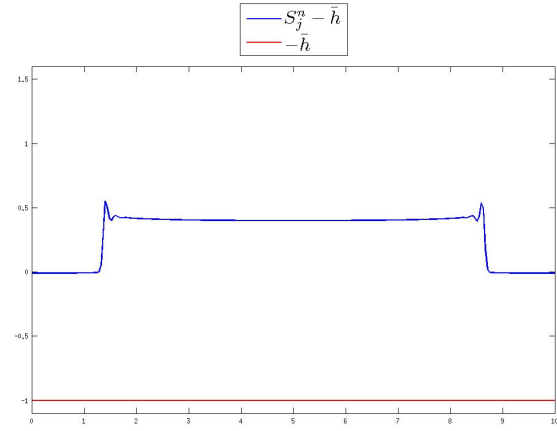
Σχήμα 34: Γραφική παράσταση της αρχικής συνθήκης (5.4.5) και της προσέγγισης V_j^n που παίρνουμε εφαρμόζοντας την μέθοδο (5.4.2) για την αριθμητική λύση του συστήματος (5.3.1) – (5.3.2) για $t = 0, t = 0.3, t = 1/2, t = 1, t = 2, t = 3, h = 3.9E - 002, \bar{h} = 1$ και $g = 9.81$.

Από τα σχήματα 33 και 34 βλέπουμε ότι η μέθοδος (5.4.2) παράγει ταλαντώσεις καθώς πλησιάζουμε τις χρονικές στιγμές που δημιουργούνται ασυνέχειες. Αφού δημιουργηθούν οι ασυνέχειες η μέθοδος φαίνεται να προσεγγίζει την λύση με σωστή ταχύτητα, αλλά με ταλαντώσεις οι οποίες παραμένουν φραγμένες.

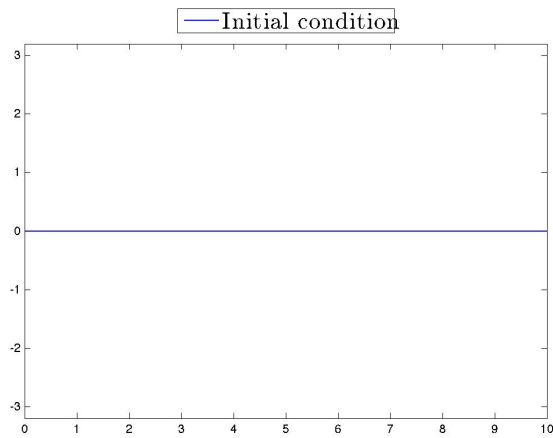
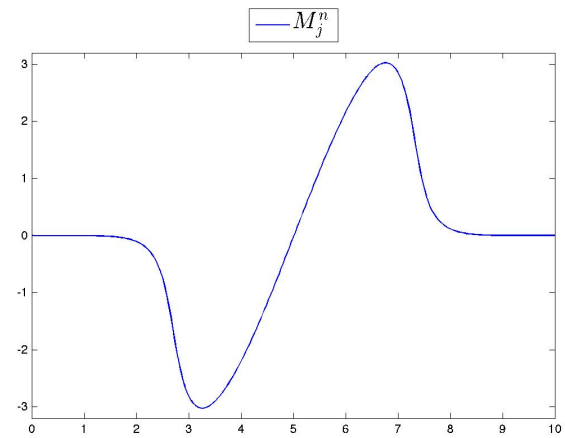
Παρουσιάζουμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των προσεγγιστικών λύσεων S_j^n και M_j^n που λαμβάνουμε εφαρμόζοντας την μέθοδο (5.4.3) για την αριθμητι-

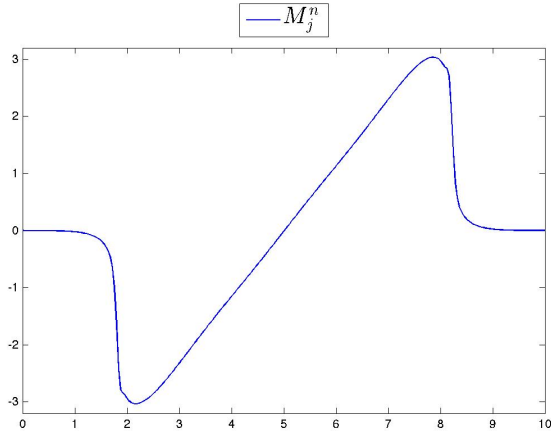
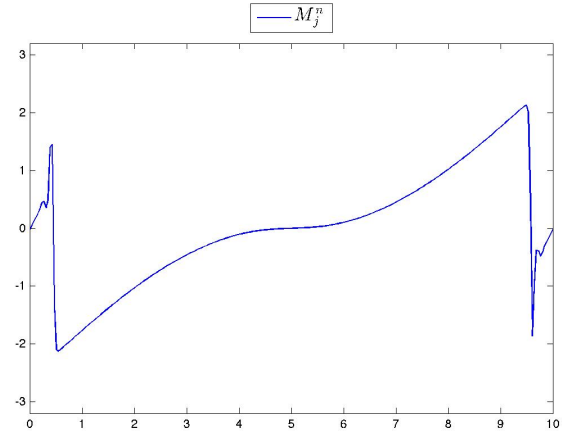
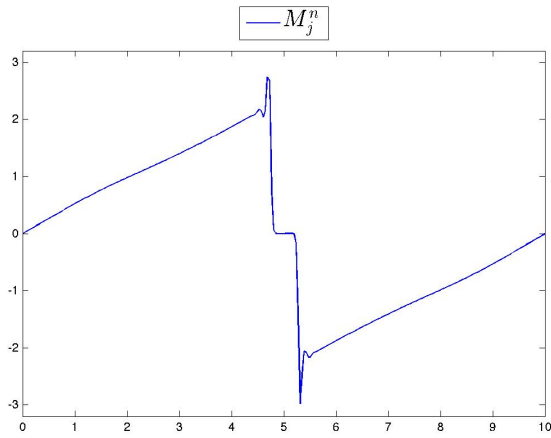
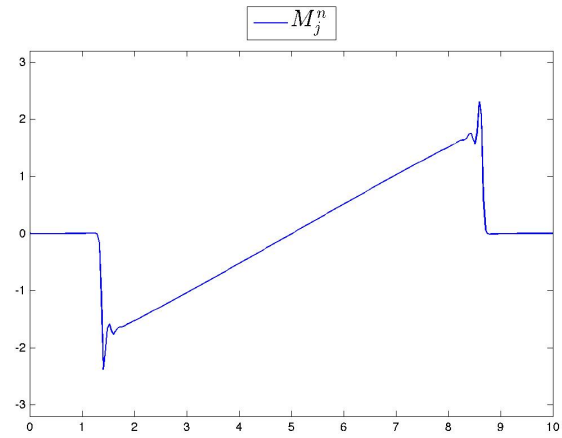
κή επίλυση του συστήματος (5.3.3) – (5.3.4) στο διάστημα $[0, 10]$ με αρχικές συνθήκες τις (5.4.4) και (5.4.5) για $0 \leq t \leq 3, g = 9.81$ και βάθος πυθμένα $\bar{h} = 1$. Επίσης στα άκρα εφαρμόζουμε περιοδικές συνθήκες.

(a) $t = 0$ (b) $t = 0,3$ (c) $t = 1/2$ (d) $t = 1$

(e) $t = 2$ (f) $t = 3$

Σχήμα 35: Γραφική παράσταση της αρχικής συνθήκης (5.4.4) και της προσέγγισης S_j^n που παίρνουμε εφαρμόζοντας την μέθοδο (5.4.3) για την αριθμητική λύση του συστήματος (5.3.3) – (5.3.4) μειωμένη κατά $\bar{h}$ για $t = 0, t = 0.3, t = 1/2, t = 1, t = 2, t = 3, h = 3.9E - 002, \bar{h} = 1$ και $g = 9.81$.

(a) $t = 0$ (b) $t = 0, 3$

(c) $t = 1/2$ (d) $t = 1$ (e) $t = 2$ (f) $t = 3$

Σχήμα 36: Γραφική παράσταση της αρχικής συνθήκης (5.4.5) και της προσέγγισης M_j^n που παίρνουμε εφαρμόζοντας την μέθοδο (5.4.3) για την αριθμητική λύση του συστήματος (5.3.3) – (5.3.4) για $t = 0, t = 0.3, t = 1/2, t = 1, t = 2, t = 3, h = 3.9E - 002, \bar{h} = 1$ και $g = 9.81$.

5.4.2 Μέθοδος Godunov

Η μέθοδος Godunov για συστήματα της μορφής (5.2.1) έχει την μορφή

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{k}{h} (\mathbf{f}(\mathbf{u}^*(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}^*(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j-1}^n))) \quad (5.4.6)$$

για $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $n = 0, \dots, M - 1$ με την αριθμητική ροή να είναι $\mathbf{F}(\mathbf{W}_{j+1}^n, \mathbf{W}_j^n) = \mathbf{f}(\mathbf{u}^*(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n))$ όπου $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση ροής του προβλήματος (5.2.1). Η (5.4.6) αποτελεί γενίκευση του αριθμητικού σχήματος (4.7.4). Ωστόσο η συνάρτηση αριθμητικής ροής δεν δίνεται από κάποιου είδους γενίκευση της (4.7.5). Παρ'όλο που θεωρητικά μπορούμε να υλοποιήσουμε την μέθοδο (5.4.6) για την αριθμητική επίλυση του συστήματος (5.2.1) βρίσκοντας τα $\mathbf{u}^*(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n)$ μέσω της επίλυσης ενός προβλήματος Riemann σε κάθε διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ όπως έχουμε ήδη περιγράψει σε προηγούμενο κεφάλαιο, ωστόσο στην πράξη κάτι τέτοιο συνήθως δεν το υλοποιούμε για τον λόγο ότι αυτό απαιτεί πολλούς υπολογισμούς.

Επιλυτές Riemann

Αυτό το οποίο υλοποιούμε στην πράξη είναι το εξής. Αντί σε κάθε μας βήμα να βρίσκουμε την ακριβή λύση του προβλήματος Riemann υπολογίζουμε μία προσεγγιστική λύση αυτού. Οι διαφορετικοί τρόποι που έχουμε την δυνατότητα να επιλέξουμε για να προσεγγίσουμε την ακριβή λύση του προβλήματος Riemann καθορίζουν κάθε φορά και μία διαφορετική μέθοδο για την αριθμητική επίλυση του συστήματος (5.2.1). Τα αριθμητικά σχήματα αυτά είναι γνωστά στην βιβλιογραφία ως επιλυτές Riemann.

Εάν ορίσουμε $\hat{\mathbf{u}}^n(x, t)$ να είναι μία αυθαίρετη προσέγγιση της ακριβούς λύσης του προβλήματος Riemann σε κάθε διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ για $t^n < t < t^{n+1}$ τότε ορίζουμε

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \hat{\mathbf{u}}(x, t^{n+1}) dx.$$

Η συνάρτηση $\hat{\mathbf{u}}^n(x, t)$ ως προσέγγιση της ακριβούς λύσης προβλήματος Riemann θεωρούμε ότι είναι ^{leveque} συνάρτηση μόνο του $\frac{x}{t}$ όπως δηλαδή συμβαίνει και με την ακριβή λύση (βλέπε [3] σελ. 65 – 81). Γράφουμε ως εκ τούτου $\hat{\mathbf{u}}^n(x, t) = \hat{\mathbf{w}}^n(x/t) = \hat{\mathbf{w}}^n(\xi)$. Το γεγονός όμως ότι η $\hat{\mathbf{u}}^n(x, t)$ δεν είναι η ακριβής λύση του προβλήματος Riemann σε κάθε διάστημα σημαίνει ότι η μέθοδος που θα προκύψει δεν είναι κατ'ανάγκη της μορφής (5.4.6). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ολοκληρωτική μορφή

του νόμου διατήρησης στο ορθογώνιο $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (t^n, t^{n+1})$ έτσι ώστε να οδηγηθούμε σε ένα αριθμητικό σχήμα της μορφής (5.4.6). Επιπρόσθετα η μέθοδος μπορεί να μην είναι καν συντηρητική.

Γενικότερα για να εξασφαλίσουμε ότι μία παραγώμενη μέθοδος την οποία λαμβάνουμε μέσω της προσεγγιστικής λύσης $\hat{\mathbf{w}}(x/t) = \hat{\mathbf{w}}(\xi)$ είναι συντηρητική αρκεί για το πρόβλημα (5.2.1) με αρχική συνθήκη

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x < 0 \\ \mathbf{u}_r, & x > 0 \end{cases} \quad (5.4.7)$$

να ισχύει

$$\int_{-L}^L \hat{\mathbf{w}}(\xi) d\xi = L(\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_l) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) \quad (5.4.8)$$

για επαρκώς μεγάλο L . Αυτό συμβαίνει επειδή

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r) &= \int_{-L}^0 \mathbf{u}(x, 0) dx + \int_0^L \mathbf{u}(x, 0) dx = \int_{-L}^L \mathbf{u}(x, 0) dx, \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_l) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) &= \int_0^1 \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}}(-L, t)) dt - \int_0^1 \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}}(L, t)) dt. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\int_{-L}^L \hat{\mathbf{w}}(\xi) d\xi = \int_{-L}^L \mathbf{u}(x, 0) dx + \int_0^1 \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}}(-L, t)) dt - \int_0^1 \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}}(L, t)) dt.$$

άρα ως εκ τούτου η μέθοδος μπορεί να γραφεί σε συντηρητική μορφή. Εάν στην συνέχεια ολοκληρώσουμε το $\hat{\mathbf{w}}(\xi)$ από 0 έως L για επαρκώς μεγάλο L λόγω της (5.4.8) και του γεγονότος ότι η αριθμητική ροή $\mathbf{F}$ είναι απαραίτητο να είναι συνεπής περιμένουμε να έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^L \hat{\mathbf{w}}(\xi) d\xi &= L\mathbf{u}_r + \mathbf{F}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) \Rightarrow \\ \mathbf{F}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - L\mathbf{u}_r + \int_0^L \hat{\mathbf{w}}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Τροποποιημένοι Νόμοι Διατήρησης

Είναι όμως λογικό να αναρωτηθούμε με ποιο τρόπο και κάτω από ποιές προϋποθέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε την προσεγγιστική λύση $\hat{\mathbf{u}}(x, t)$. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι να υπολογίσουμε ακριβώς την λύση ενός τροποποιημένου νόμου διατήρησης

$$\hat{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{u}})_x = 0, \quad (5.4.10)$$

όπου εδώ η συνάρτηση ροής $\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{u}})$ καθιστά το πρόβλημα εύκολα επιλύσιμο. Εφόσον η $\hat{\mathbf{u}}(x, t)$ είναι η ακριβής λύση του προβλήματος (5.4.10) – (5.4.7) εφαρμόζοντας την ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης στο $[-L, L] \times [0, 1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \hat{\mathbf{u}}(x, 1) dx &= \int_{-L}^L \mathbf{u}(x, 0) dx + \int_0^1 \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_r) dt - \int_0^1 \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_l) dt \Rightarrow \\ \int_{-L}^L \hat{\mathbf{u}}(x, 1) dx &= L(\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r) + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_r) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_l), \end{aligned}$$

συνεπώς για την συνάρτηση ροής $\hat{\mathbf{f}}$ πρέπει να ισχύει

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_r) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_l) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_l) \quad (5.4.11)$$

έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση (5.4.8).

Με βάση τον ίδιο συλλογισμό που μας οδήγησε στην (5.4.9) έχουμε λόγω της (5.4.11)

$$\int_0^L \hat{\mathbf{w}}(\xi) d\xi = L\mathbf{u}_r + \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{u}}(0, t)) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_r) \quad (5.4.12)$$

ενώ κάνοντας αντικατάσταση την (5.4.12) στην (5.4.9) παίρνουμε

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{u}}(0, t)) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_r). \quad (5.4.13)$$

Επιλυτής Riemann του Roe

Ένας από τους πιο γνωστούς επιλυτές Riemann είναι αυτός του Roe. Η ιδέα είναι η εξής. Για να βρούμε την προσεγγιστική λύση $\hat{\mathbf{u}}(x, t)$ λύνουμε ένα τροποποιημένο νόμο διατήρησης της μορφής (5.4.10) όπου η συνάρτηση ροής δίνεται από

$$\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{u}}) = \hat{A}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)\hat{\mathbf{u}} \quad (5.4.14)$$

για κατάλληλο πίνακα $\hat{A}$ ο οποίος εξαρτάται από τα $\mathbf{u}_l$ και $\mathbf{u}_r$. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι

$$\hat{\mathbf{u}}_t + \hat{A}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)\hat{\mathbf{u}}_x = 0 \quad (5.4.15)$$

Ουσιαστικά όπως παρατηρούμε, για να υλοποιήσουμε τον επιλυτή Roe κάνουμε μία γραμμικοποίηση στο αρχικό πρόβλημα (5.2.1) – (5.4.7).

Η λύση του προβλήματος (5.4.15) – (5.4.7) δίνεται από

$$\hat{\mathbf{u}}(x, t) = \hat{\mathbf{w}}\left(\frac{x}{t}\right) = \mathbf{u}_r - \sum_{\hat{\lambda}_p > \frac{x}{t}} \alpha_p \hat{\mathbf{r}}_p \quad (5.4.16)$$

όπου το άθροισμα είναι για όλα τα p για τα οποία ισχύει $\hat{\lambda}_p > \frac{x}{t}$ με $\hat{\lambda}_p$ και $\hat{\mathbf{r}}_p$ οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\hat{A}$ ενώ α_p είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l$ ως προς την βάση των ιδιοδιανυσμάτων $\hat{\mathbf{r}}_p$ δηλαδή

$$\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l = \sum_p \alpha_p \hat{\mathbf{r}}_p$$

(βλέπε ^{leveque}[3] σελ.64-66,149).

Οστόσο το κλειδί για την υλοποίηση του επιλυτή Riemann του Roe είναι η εύρεση του πίνακα $\hat{A}$. Σύμφωνα με τον Roe ο πίνακας αυτός πρέπει να υπόκειται σε τρεις προϋποθέσεις οι οποίες είναι

$$\begin{aligned} i) & \hat{A}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_l) \\ ii) & \hat{A}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) \text{ διαγωνοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές} \\ iii) & \hat{A}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) \rightarrow \mathbf{f}'(\bar{\mathbf{u}}) \text{ ομαλά καθώς } \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r \rightarrow \bar{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Η προϋπόθεση (5.4.17i) επιβάλλεται από την σχέση (5.4.11) και άρα μας εξασφαλίζει ότι η σχέση (5.4.8) ισχύει συνεπώς η παραγόμενη μέθοδος θα είναι συντηρητική. Επιπρόσθετα μας εγγυάται ότι στην περίπτωση ενός μεμονωμένου κρουστικού κύματος η $\hat{\mathbf{u}}(x, t)$ συμπίπτει με την ακριβή λύση του προβλήματος (βλέπε ^{leveque}[3] σελ.64-66). Η προϋπόθεση (5.4.17ii) μας εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα (5.4.15) – (5.4.7) είναι υπερβολικό και επιλύσιμο. Η προϋπόθεση (5.4.17iii) μας εγγυάται συνέπεια με τον ακριβή Ιακωβιανό πίνακα.

Αριθμητική Ροή του Roe

Σε ένα πρόβλημα εφόσον βρούμε τον κατάλληλο πίνακα $\hat{A}$ για αυτό, το μόνο που απομένει να υπολογίσουμε είναι η αριθμητική ροή του Roe. Από τις σχέσεις (5.4.13), (5.4.14) και (5.4.16) έχουμε

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) &= \hat{A}\hat{\mathbf{u}}(0, t) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \hat{A}\mathbf{u}_r \Rightarrow \\
 \mathbf{F}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) + \hat{A}\mathbf{u}_r - \hat{A}\mathbf{u}_r - \hat{A} \sum_{\hat{\lambda}_p > 0} \alpha_p \hat{\mathbf{r}}_p \Rightarrow \\
 \mathbf{F}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \sum_{\hat{\lambda}_p > 0} \alpha_p \hat{A} \hat{\mathbf{r}}_p \Rightarrow \\
 \mathbf{F}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \sum_{p=1}^m \hat{\lambda}_p^+ \alpha_p \hat{\mathbf{r}}_p
 \end{aligned} \tag{5.4.18}$$

όπου $\hat{\lambda}_p^+ = \max(\hat{\lambda}_p, 0)$.

Επιλυτής Riemann του Roe για το σύστημα Πηχών Υδάτων

Για το σύστημα (5.3.1) – (5.3.2) ο πίνακας $\hat{A}$ που επιλέγουμε για τα πειράματα αυτής της εργασίας είναι

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_l + u_r) & \frac{1}{2}(\eta_l + \eta_r) + \bar{h} \\ g & \frac{1}{2}(u_l + u_r) \end{pmatrix} \tag{5.4.19}$$

με ιδιοτιμές

$$\hat{\lambda}_{1,2} = \frac{u_l + u_r}{2} \pm \sqrt{\frac{g(\eta_l + \eta_r)}{2} + \bar{h}g}$$

και ιδιοδιανύσματα

$$\hat{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}(\eta_l + \eta_r) + \bar{h}}{\sqrt{\frac{g(\eta_l + \eta_r)}{2} + \bar{h}g}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{1}{2}(\eta_l + \eta_r) + \bar{h}}{\sqrt{\frac{g(\eta_l + \eta_r)}{2} + \bar{h}g}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Για το σύστημα (5.3.3) – (5.3.4) ο πίνακας $\hat{A}$ που επιλέγουμε είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g\frac{1}{2}(H_l + H_r) - \left(\frac{\frac{u_l}{\sqrt{H_l}} + \frac{u_r}{\sqrt{H_r}}}{\sqrt{H_r} + \sqrt{H_l}}\right)^2 & 2\left(\frac{\frac{u_l}{\sqrt{H_l}} + \frac{u_r}{\sqrt{H_r}}}{\sqrt{H_r} + \sqrt{H_l}}\right) \end{pmatrix} \tag{5.4.20}$$

με ιδιοτιμές

$$\hat{\lambda}_{1,2} = \frac{\frac{U_l}{\sqrt{H_l}} + \frac{U_r}{\sqrt{H_r}}}{\sqrt{H_r} + \sqrt{H_l}} \pm \sqrt{g \frac{1}{2} (H_l + H_r)}$$

και ιδιοδιανύσματα

$$\hat{r}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\lambda}_1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{r}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\lambda}_2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

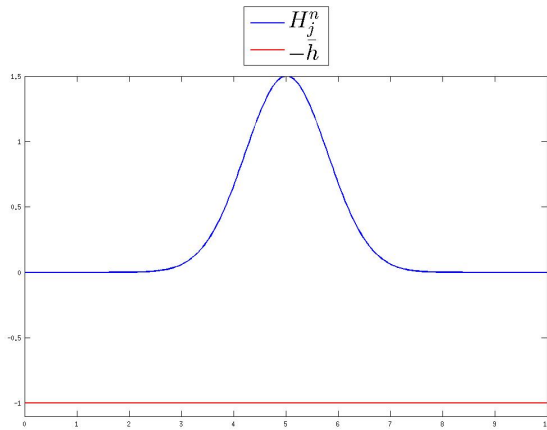
Ο πίνακας (5.4.19) και (5.4.20) πληρούν τα κριτήρια (5.4.17).

Αποτελέσματα από την εφαρμογή του επιλυτή Riemann του Roe

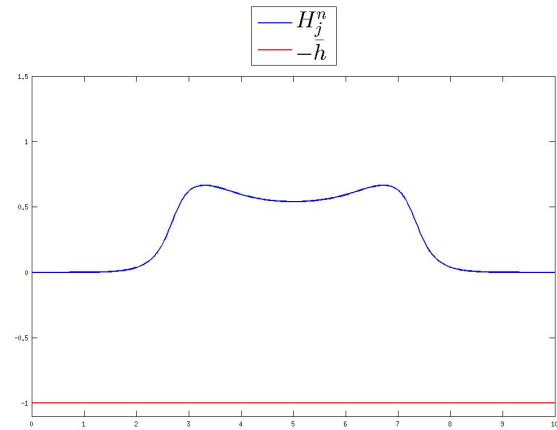
Συνεχίζοντας θεωρούμε την διαμέριση του διαστήματος $[0, 10]$

$$x_j = jh \quad \text{όπου} \quad h = \frac{1}{J} = \Delta x = (x_{j+1} - x_j) \quad \text{για} \quad j = 0, \dots, J$$

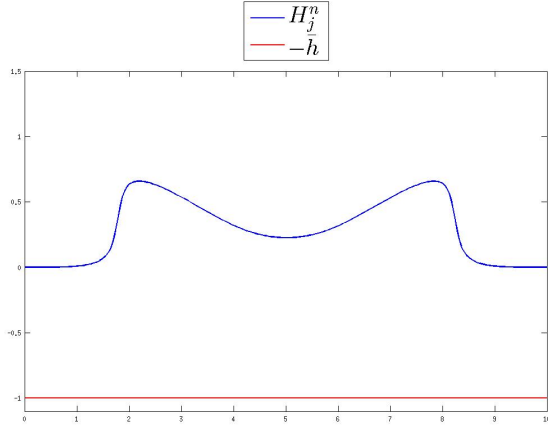
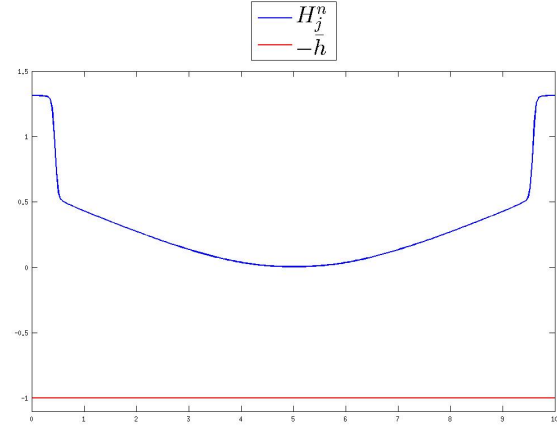
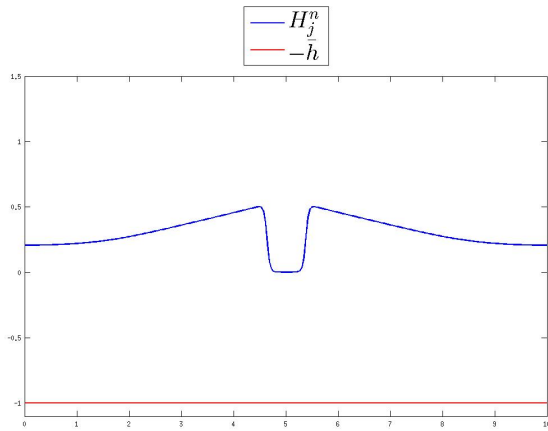
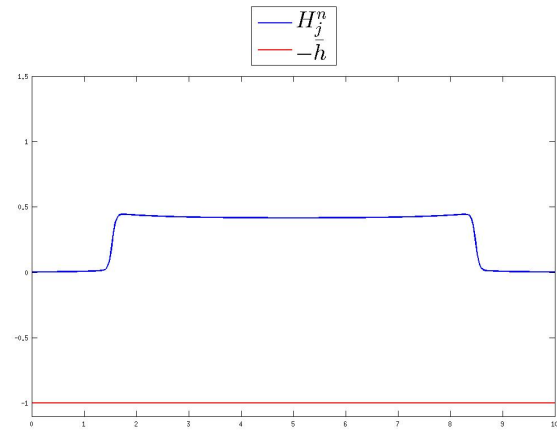
με J το πλήθος των υποδιαστημάτων. Έστω επίσης $\mathbf{W}_j^n = (H_j^n, V_j^n)$ με H_j^n, V_j^n οι προσεγγίσεις των η και u αντίστοιχα που λαμβάνουμε από την αριθμητική επίλυση του συστήματος (5.3.1) – (5.3.2) με τον επιλυτή Riemann του Roe. Παρουσιάζουμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των προσεγγίσεων H_j^n και V_j^n από την επίλυση του συστήματος στο διάστημα $[0, 10]$ με αρχικές συνθήκες τις (5.4.4) και (5.4.5) για $0 \leq t \leq 3$, $g = 9.81$ και βάθος πυθμένα $\bar{h} = 1$ εφαρμόζοντας παράλληλα στα άκρα περιοδικές συνθήκες.



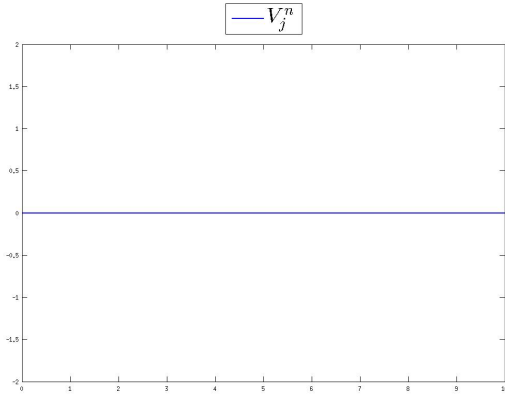
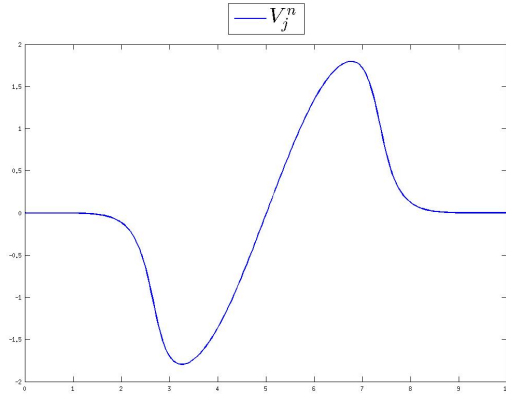
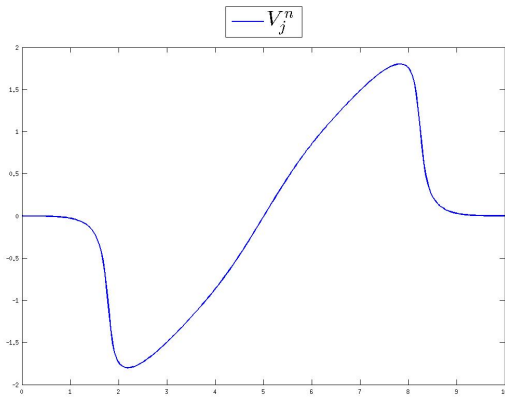
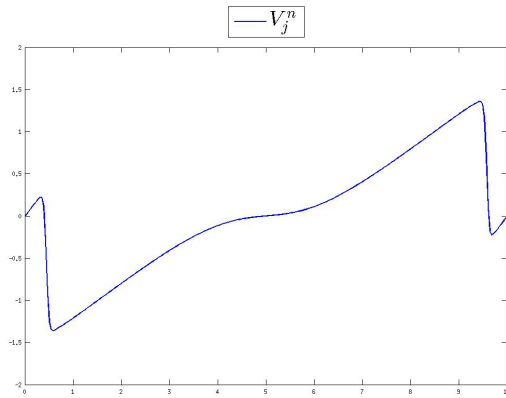
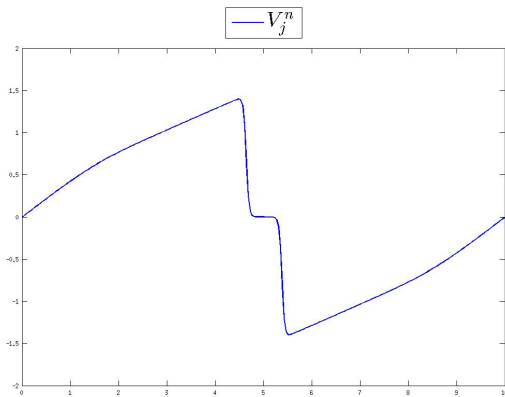
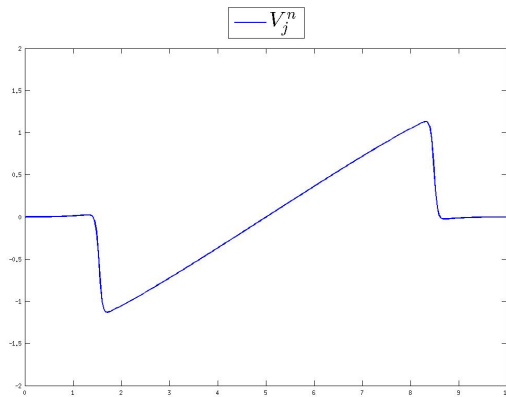
(a) $t = 0$



(b) $t = 0, 3$

(c) $t = 1/2$ (d) $t = 1$ (e) $t = 2$ (f) $t = 3$

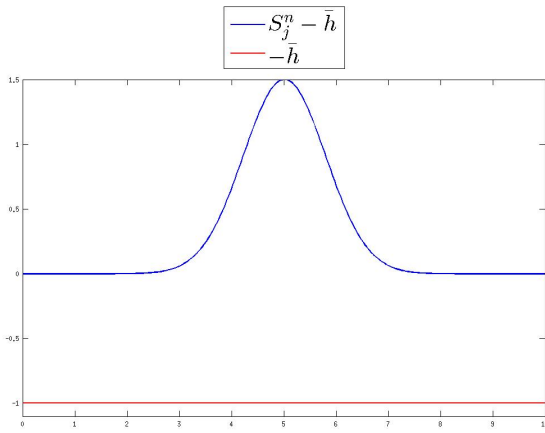
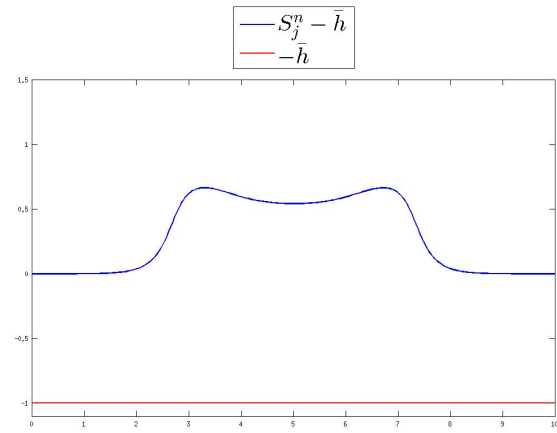
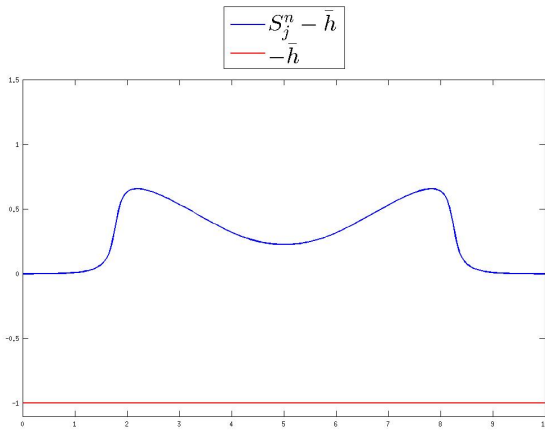
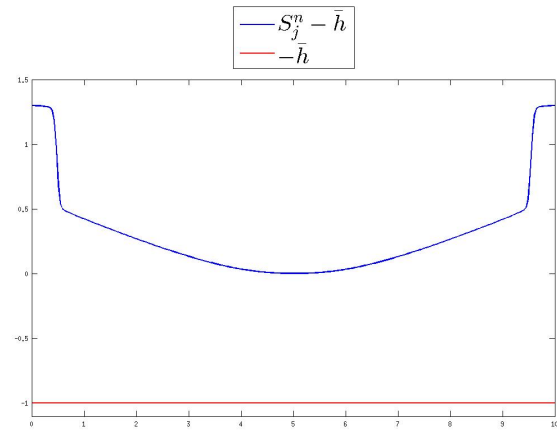
Σχήμα 37: Αρχική συνθήκη (5.4.4) και προσεγγιστική λύση H_j^n που παίρνουμε με τον επιλυτή Riemann του Roe από την επίλυση του συστήματος (5.3.1) – (5.3.2) για $t = 0, t = 0.3, t = 1/2, t = 1, t = 2, t = 3, h = 3.9E - 002, \bar{h} = 1$ και $g = 9.81$.

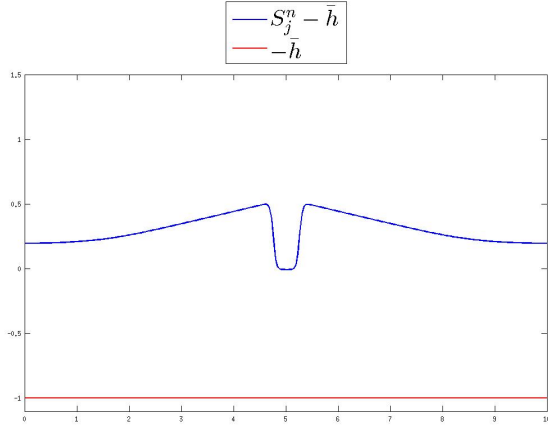
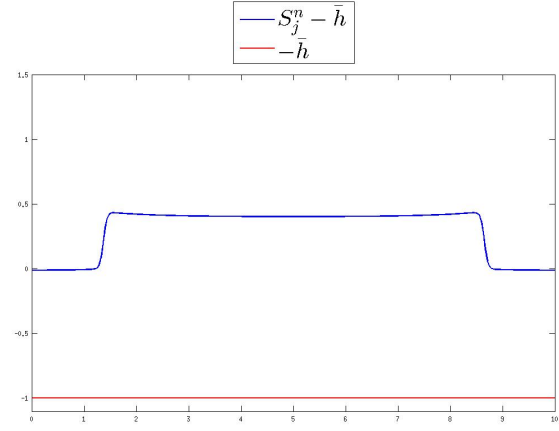
(a) $t = 0$ (b) $t = 0,3$ (c) $t = 1/2$ (d) $t = 1$ (e) $t = 2$ (f) $t = 3$

Σχήμα 38: Αρχική συνθήκη (5.4.5) και προσεγγιστική λύση V_j^n που παίρνουμε με τον επιλυτή Riemann του Roe από την επίλυση του συστήματος (5.3.1) – (5.3.2) για $t = 0, t = 0.3, t = 1/2, t = 1, t = 2, t = 3, h = 3.9E - 002, \bar{h} = 1$ και $g = 9.81$.

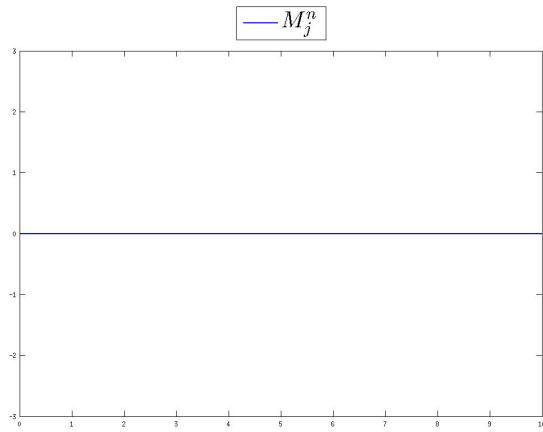
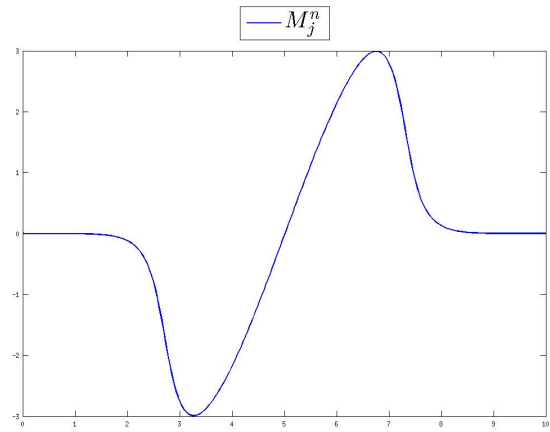
Παρατηρούμε ότι η αριθμητική λύση που λαμβάνουμε δεν παρουσιάζει ταλαντώσεις σε αντίθεση με την μέθοδο Lax-Wendroff. Βλέπουμε όμως πως παρουσιάζει απόσβεση.

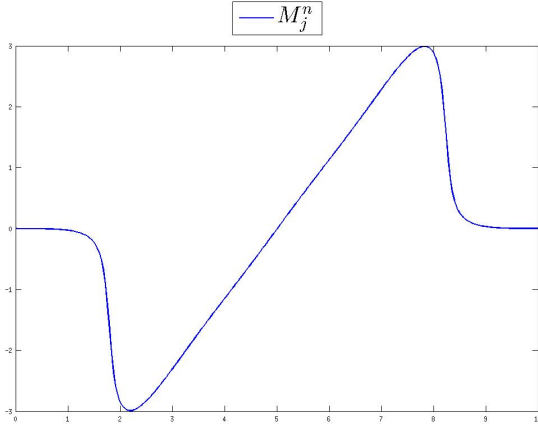
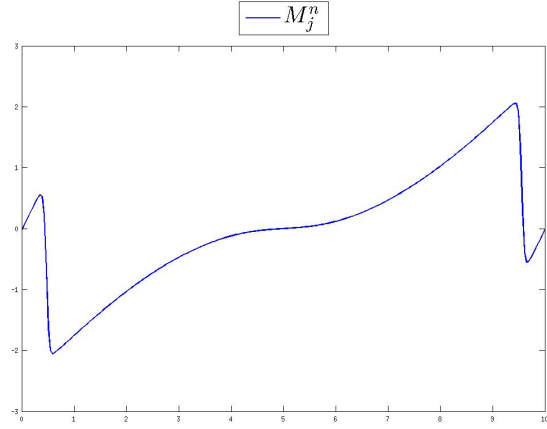
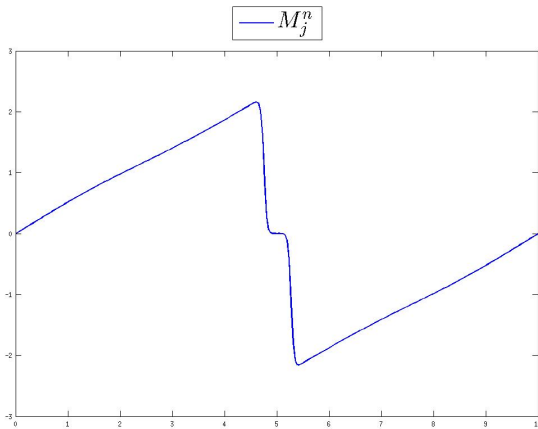
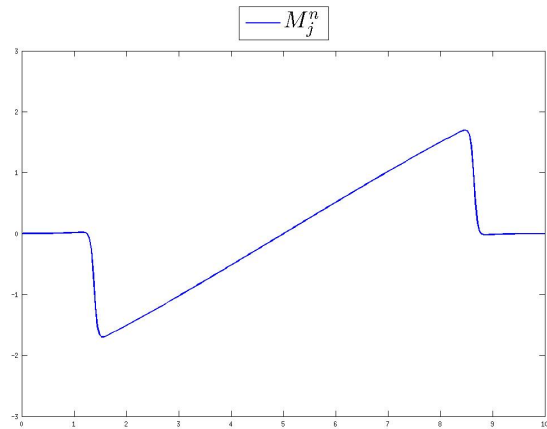
Δείχνουμε στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των προσεγγιστικών λύσεων S_j^n και M_j^n που λαμβάνουμε από την εφαρμογή του επιλυτή Riemann του Roe για την επίλυση του συστήματος (5.3.3) – (5.3.4) στο διάστημα $[0, 10]$ με αρχικές συνθήκες τις (5.4.4) και (5.4.5) για $0 \leq t \leq 3, g = 9.81$ και βάθος πυθμένα $\bar{h} = 1$. Επίσης στα άκρα εφαρμόζουμε περιοδικές συνθήκες.

(a) $t = 0$ (b) $t = 0,3$ (c) $t = 1/2$ (d) $t = 1$

(e) $t = 2$ (f) $t = 3$

Σχήμα 39: Γραφική παράσταση της αρχικής συνθήκης (5.4.4) και της προσέγγισης S_j^n που παίρνουμε εφαρμόζοντας τον επιλυτή Riemann του Roe για τη λύση του συστήματος (5.3.3) – (5.3.4), μειωμένη κατά $\bar{h}$ για $t = 0, t = 0.3, t = 1/2, t = 1, t = 2, t = 3, h = 3.9E - 002, \bar{h} = 1$ και $g = 9.81$.

(a) $t = 0$ (b) $t = 0, 3$

(c) $t = 1/2$ (d) $t = 1$ (e) $t = 2$ (f) $t = 3$

Σχήμα 40: Γραφική παράσταση της αρχικής συνθήκης (5.4.5) και της προσέγγισης M_j^n που παίρνουμε εφαρμόζοντας τον επιλυτή Riemann του Roe για τη λύση του συστήματος (5.3.3) – (5.3.4) για $t = 0, t = 0.3, t = 1/2, t = 1, t = 2, t = 3, h = 3.9E - 002, \bar{h} = 1$ και $g = 9.81$.

5.4.3 Ένα πείραμα με μη σταθερό πυθμένα

Σε αυτήν την υποενότητα παρουσιάζουμε την γραφική παράσταση από την αριθμητική λύση του συστήματος ρηχών υδάτων με τον επιλυτή Riemann του Roe για μη σταθερό πυθμένα. Το σύστημα (5.3.1) – (5.3.2) για μη σταθερό πυθμένα είναι

$$\eta_t + [(\eta + \bar{h}(x))u]_x = 0 \quad (5.4.21)$$

$$u_t + g\eta_x + uu_x = 0 \quad (5.4.22)$$

όπου $\bar{h}(x)$ η συνάρτηση που περιγράφει την τοπογραφία του πυθμένα.

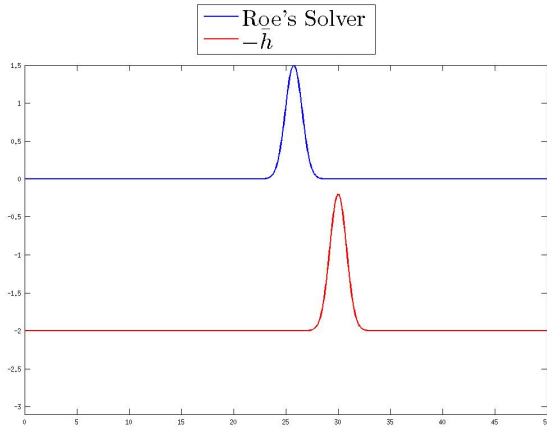
Δείχνουμε την γραφική παράσταση της προσεγγιστικής λύσης της $\eta(x, t)$ που παίρνουμε από την εφαρμογή του επιλυτή Riemann του Roe για την λύση του συστήματος (5.4.21) – (5.4.22) στο διάστημα $[0, 50]$, με αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} \eta(x, 0) &= 1.5e^{(-0.05(4(x+1.5)-109)^2)} \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

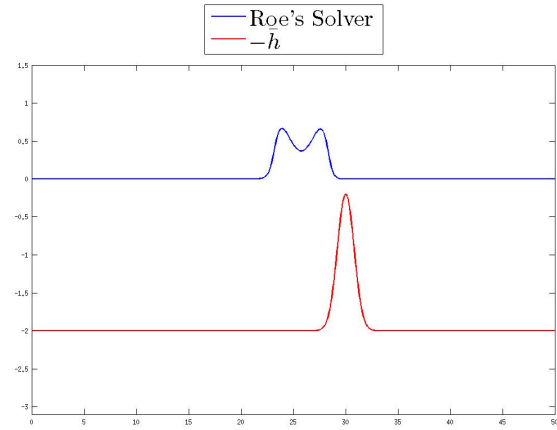
για $0 \leq t \leq 3, g = 9.81$ και με την συνάρτηση τοπογραφίας του πυθμένα να είναι

$$\bar{h}(x) = 1.8e^{(-0.05(4(x-\frac{1}{4})-119)^2)} - 2 \quad (5.4.24)$$

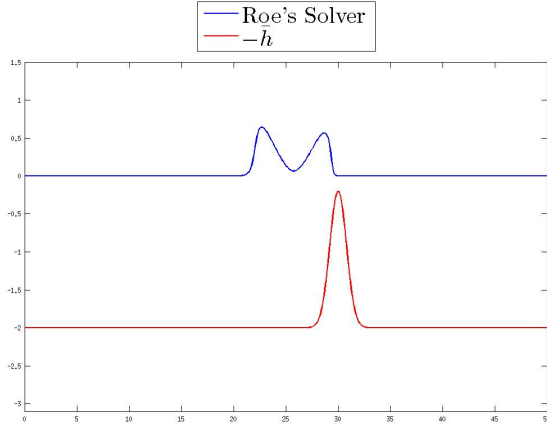
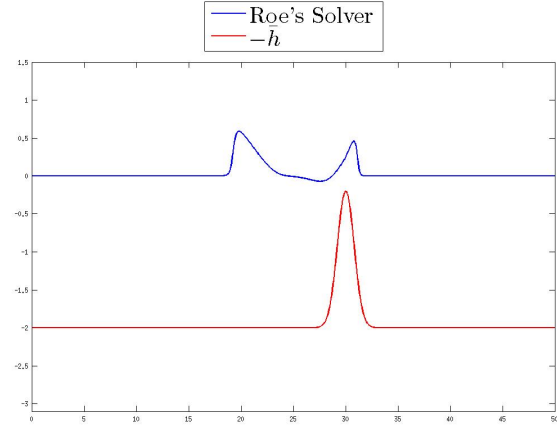
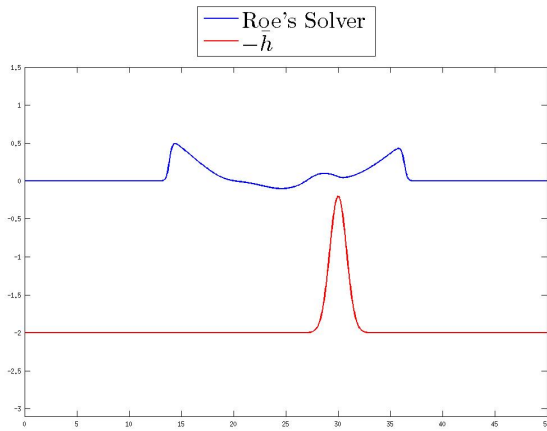
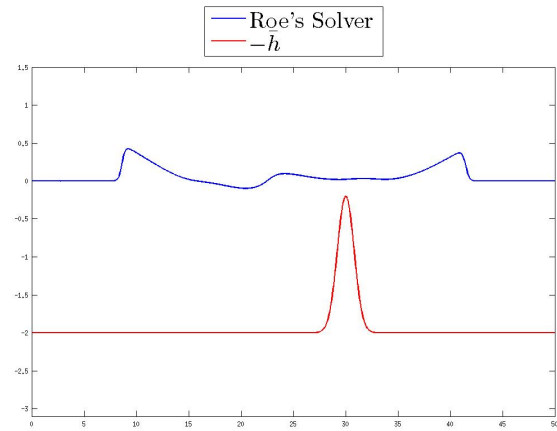
εφαρμόζοντας παράλληλα στα άκρα περιοδικές συνθήκες.



(a) $t = 0$



(b) $t = 0, 3$

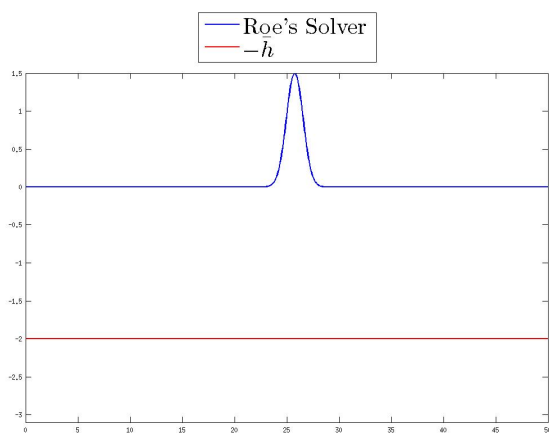
(c) $t = 1/2$ (d) $t = 1$ (e) $t = 2$ (f) $t = 3$

Σχήμα 41: Αρχικές συνθήκες (5.4.23) και προσεγγιστική λύση της $\eta(x, t)$ που παίρνουμε από την εφαρμογή του επιλυτή Riemann του Roe για $t = 0, t = 0.3, t = 1/2, t = 1, t = 2, t = 3, h = 6.25E - 002, g = 9.81$ και με συνάρτηση τοπογραφίας του πυθμένα την (5.4.24).

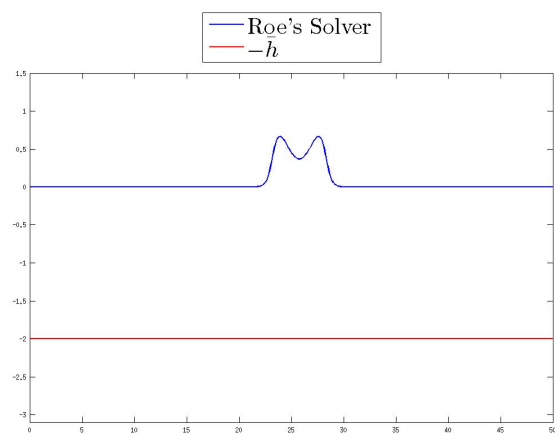
Η γραφική παράσταση του ίδιου προβλήματος για σταθερό βάθος πυθμένα

$$\bar{h}(x) = 2 \quad (5.4.25)$$

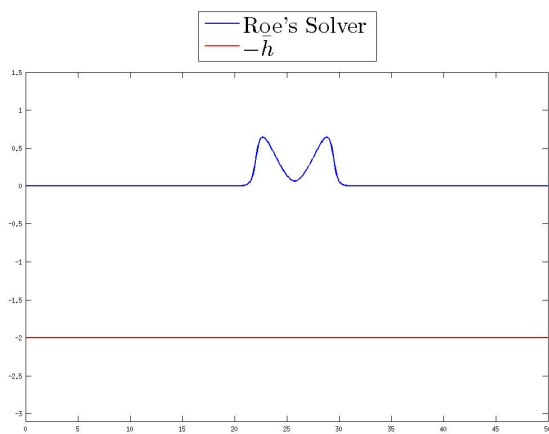
είναι



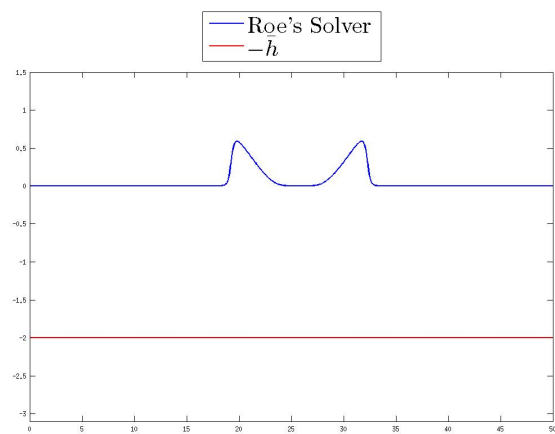
(a) $t = 0$



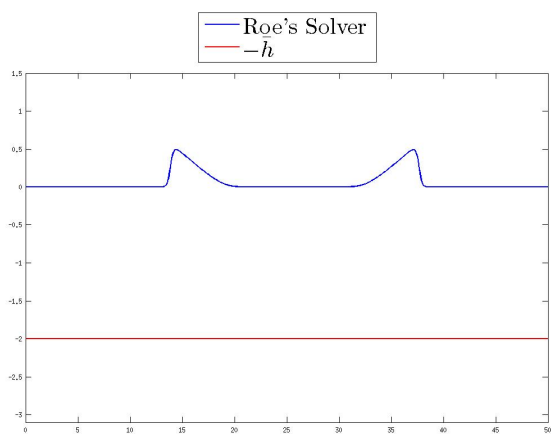
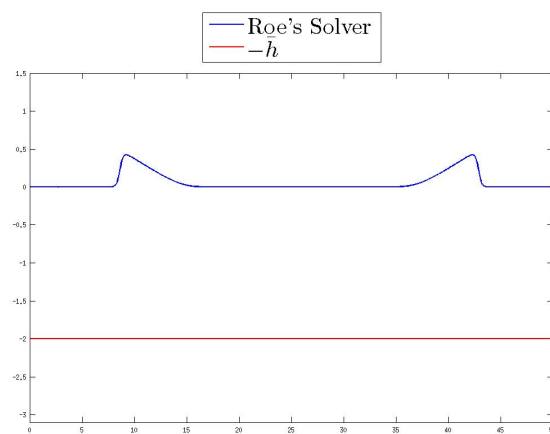
(b) $t = 0,3$



(c) $t = 1/2$



(d) $t = 1$

(e) $t = 2$ (f) $t = 3$

Σχήμα 42: Αρχικές συνθήκες (5.4.23) και προσεγγιστική λύση της $\eta(x, t)$ που παίρνουμε από την εφαρμογή του επιλυτή Riemann του Roe για $t = 0, t = 0.3, t = 1/2, t = 1, t = 2, t = 3, h = 6.25E - 002, g = 9.81$ και με συνάρτηση τοπογραφίας του πυθμένα την (5.4.25).

Βιβλιογραφία

Kröner

[1] Dietmar Kröner. Numerical schemes for conservation laws. 1997.

Morton&Mayers

[2] K.W.Morton and D.F.Mayers. Numerical solution of partial differential equations. 2005.

leveque

[3] Randall J. Leveque. Numerical methods for conservation laws. 1992.

logan

[4] J.David Logan. Applied mathematics. 1992.

Dougalis

[5] Βασίλειος Α. Δουγαλής. Κύματα Επιφάνειας στο Νερό:Μαθηματικά Μοντέλα,Μοναχικά Κύματα,Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο. 2014.