

Αριθμητικές πρόοδοι σε θετικής πυκνότητας υποσύνολα των φυσικών αριθμών

Κωνσταντίνος Σ. Σταυρόπουλος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα - Σεπτέμβριος 2011

Επιβλέπων Καθηγητής: Αθανάσιος Τσαρπαλιάς

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στ.....

.....
που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών
του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου
Αθηνών.

Εγκρίθηκε τηναπό Εξεταστική Επιτροπή
αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
.....(επιβλέπων Καθηγητής)		
.....		
.....		

Η διπλωματική αυτή γράφτηκε με την βοήθεια του προγράμματος στοι-
χειοθεσίας L^AT_EX

Αφιερώνεται στην οικογένεια μου,
το μεγαλύτερο στυλοβάτη μου.

Πρόλογος

Η πορεία μου μέσα στον κόσμο των Μαθηματικών ξεκινάει από τα πολύ παιδικά μου χρόνια και χαρακτηρίζεται από μεγάλες διακυμάνσεις ως προς το χρόνο που αφιέρωνα σε αυτά. Έχοντας ξεκινήσει τα μαθητικά μου χρόνια σαν μαθητής του οποίου ένας από τους βασικούς του στόχους ήταν η συμμετοχή σε μαθηματικούς διαγωνισμούς, η ενασχόληση μου με τα Μαθηματικά ήταν ιδιαίτερα εντατική τότε, σε αντίθεση με τα πρώτα μου φοιτητικά χρόνια, που την μερίδα του Λέοντος είχε κερδίσει το Βόλει, περιορίζοντας με σε μια βαθμοθηρική και επιφανειακή αντιμετώπιση των Μαθηματικών. Η κατάσταση αντιστράφηκε και πάλι με την εισαγωγή μου στην κατεύθυνση των Θεωρητικών Μαθηματικών του Μεταπτυχιακού Προγράμματος του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, όπου το ενδιαφέρον μου μετατράπηκε και πάλι, από τυπικό σε αυθεντικό.

Τελικό αποτέλεσμα της φοίτησης μου στο Πρόγραμμα των Θεωρητικών Μαθηματικών είναι η παρούσα Διπλωματική Εργασία, για την εκπόνηση της οποίας θέλω και πρέπει να ευχαριστήσω:

- τον καθηγητή μου και επιβλέποντα της παρούσας εργασίας, κ. Τσαρπαλιά Αθανάσιο, για την ουσιαστική καθοδήγηση του όλα τα φοιτητικά μου χρόνια και για την συνδρομή του στην Μαθηματική μου πρόοδο.
- τον καθηγητή μου κ. Θηλυκό Δημήτριο, για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπο μου μέχρι να ολοκληρώσουμε μαζί την πρώτη μου συνεργασία που έχει ως αποτέλεσμα μια μαθηματική δημοσίευση και για την πολύτιμη συμβολή του στην πορεία μου.
- τον καθηγητή μου κ. Απόστολο Γιαννόπουλο, που εκτός από μέλος της τριμελούς επιτροπής, στάθηκε αρωγός μου σε ό,τι χρειάστηκα μέσα στα πλαίσια του μεταπτυχιακού, αλλά και για το επόμενο βήμα μου.
- όλους τους καθηγητές μου του Τμήματος Μαθηματικών.

- τους συμφοιτητές μου, που έδωσαν μια ευχάριστη, ουσιαστική και ανθρώπινη διάσταση στη φοίτηση μου.
- όλους τους φίλους μου και τους ανθρώπους που έχουν περάσει από την ζωή μου, για την παρουσία τους εκεί με οποιονδήποτε τρόπο.
- την οικογένεια μου, ξεχωριστά το κάθε μέλος της και συνολικά, στην οποία οφείλω όλα όσα είμαι.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	9
2	Το Λήμμα Κανονικότητας του Szemerédi	13
3	Δομές Αριθμητικών Προόδων (Configurations)	27
3.1	Κεκορεσμένες και Τέλειες Δομές	31
3.2	Πλήρεις Δομές	51
3.3	Ιδεώδεις Δομές	57
4	Μερικά Λήμματα στις Αριθμητικές Προόδους και η επιλογή των t_m	59
4.1	Μερικά Λήμματα στις Αριθμητικές Προόδους	59
4.2	Η επιλογή των t_m	61
5	Το γράφημα $I(X, i, s)$, Ομογενείς Δομές και Καλά-Κεκορεσμένες Ομογενείς Δομές	65
5.1	Το γράφημα $I(X, i, s)$ και Ομογενείς Δομές	65
5.2	Καλά-Κεκορεσμένες Ομογενείς Δομές	70
6	Από τις Ομογενείς Δομές στις Ιδεώδεις	81
7	Το Θεώρημα του Szemerédi	91
7.1	Διαιρέτες Δομών και Σύγκριση Θέσεων	91
7.2	Το Θεώρημα	95
7.3	Σχόλια	100

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το 1927 ο van der Waerden [1] απέδειξε το εξής αναπάντεχο για την εποχή θεώρημα:

Θεώρημα (van der Waerden). Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $C_1, \dots, C_k$ διαμέριση του $\mathbb{N}$. Τότε υπάρχει i με $1 \leq i \leq k$ τέτοιο ώστε το C_i να περιέχει αυθαίρετου μήκους αριθμητική πρόοδος.

δηλαδή για κάθε $l \in \mathbb{N}$, υπάρχει αριθμητική πρόοδος μήκους l με στοιχεία μόνο από την συγκεκριμένη κλάση.

Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα έδωσε νέα ώθηση στον κλάδο της *Θεωρίας Ramsey* (και πιο συγκεκριμένα της *Προσθετικής Θεωρίας Ramsey*), η οποία ασχολείται με μια συγκεκριμένη κλάση Θεωρημάτων, όπου ένα αρκούντως μεγάλο αντικείμενο χρωματίζεται με κάποιο τρόπο με πεπερασμένου πλήθους χρώματα (έχοντας έλεγχο στο πλήθος των χρωμάτων και μόνο), μέσα στο οποίο μπορεί να βρεθεί χρώμα το οποίο να περιέχει μια συγκεκριμένη δομή (αποδεικνύοντας συνήθως, όμως, μόνο την ύπαρξη ενός τέτοιου χρώματος, χωρίς τη δυνατότητα να γνωρίζουμε ακριβώς ποιο είναι αυτό το χρώμα). Φυσικά, το πρωταρχικό τέτοιο αποτέλεσμα είναι η *αρχή του Περιστερεώνα*. Στην *Προσθετική Θεωρία Ramsey*, οι δομές αυτές είναι αριθμητικές πρόοδοι σε προσθετικές ομάδες.

Ας δούμε και την πεπερασμένη μορφή του Θεωρήματος van der Waerden.

Θεώρημα (Πεπερασμένη μορφή Θεωρήματος van der Waerden). Για κάθε $k, l \in \mathbb{N}$, υπάρχει θετικός ακέραιος $w(k, l)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n > w(k, l)$ και κάθε διαμέριση του $\{0, 1, \dots, n\}$ σε k κλάσεις $C_1, \dots, C_k$, να υπάρχει i με $1 \leq i \leq k$ τέτοιο ώστε το C_i περιέχει αυθαίρετου μήκους αριθμητική πρόοδος.

Ο Szemerédi [2] γενίκευσε το αποτέλεσμα του van der Waerden αποδεικνύοντας την εικασία των *Erdős και Turán* (1936), δηλαδή, το αντίστοιχο συμπέρασμα για σύνολα *θετικής άνω πυκνότητας* (χοντρικά, υποσύνολα με μέγεθος "θετικού ποσοστού" των φυσικών), παίζοντας καταλυτικό ρόλο στην *Προσθετική Θεωρία Αριθμών*. Την απόδειξη αυτή θα μελετήσουμε στην συγκεκριμένη εργασία, η οποία, μάλιστα, χρησιμοποιεί το Θεώρημα van der Waerden. Πριν ξεκινήσουμε, ορίζουμε την *άνω πυκνότητα* ενός υποσυνόλου των φυσικών αριθμών.

Ορισμός 1. Έστω $R \subseteq \mathbb{N}$. Ορίζουμε σαν *άνω πυκνότητα* του R το όριο

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|[0, n) \cap R|}{n}.$$

Θεώρημα (Szemerédi, 1975). *Κάθε σύνολο $R \subseteq \mathbb{N}$ με θετική άνω πυκνότητα περιέχει αυθαίρετα μεγάλη αριθμητική πρόοδο.*

Η απόδειξη του Szemerédi, αν και πολύπλοκη, εισήγαγε αρκετά σημαντικά εργαλεία, με πιο σημαντικό το παρακάτω:

Το Λήμμα Κανονικότητας του Szemerédi για γραφήματα (του οποίου η βελτιωμένη μορφή αποδείχτηκε το 1978 από τον Szemerédi), που περιλαμβάνεται στην απόδειξη, είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο των Διακριτών Μαθηματικών, με πληθώρα εφαρμογών στην *Αλγοριθμική Θεωρία Γραφημάτων* και την *Ακραία Θεωρία Γραφημάτων*, και φυσικά οι πιο γνωστές του εφαρμογές είναι στην *Προσθετική Θεωρία Αριθμών*.

Αργότερα, χρησιμοποιώντας *Εργοδική Θεωρία*, το Θεώρημα του Szemerédi αποδείχθηκε από τον Furstenberg [3] και χρησιμοποιώντας *Ανάλυση Fourier*, από τον Gowers [4], αποτελώντας τις πιο γνωστές εναλλακτικές αποδείξεις του Θεωρήματος (ακολούθησαν και άλλες, π.χ. χρησιμοποιώντας υπερ-γραφήματα).

Το Θεώρημα έχει πλέον γενικευθεί και βελτιωθεί προς πολλές διαφορετικές κατευθύνσεις. Το πιο γνωστό αποτέλεσμα συναφές με το Θεώρημα, είναι το αποτέλεσμα των Green και Tao [5], που αποδεικνύουν ύπαρξη αυθαίρετα μεγάλων αριθμητικών προόδων μέσα στους πρώτους αριθμούς (που, από το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών, είναι σύνολο άνω θετικής πυκνότητας 0 κι άρα το αποτέλεσμα δεν προκύπτει από το Θεώρημα του Szemerédi) και σε θετικής πυκνότητας υποσύνολα αυτών. Στην απόδειξη του Θεωρήματος των Green και Tao φαίνεται για άλλη μια φορά η σημασία του Θεωρήματος του Szemerédi, το οποίο παίζει κρίσιμο ρόλο, συνδυασμένο με ένα είδος *Αρχής Μεταφοράς*.

Οι συμβολισμοί που θα ακολουθήσουμε, για λόγους εύκολης σύγκρισης, θα είναι κυρίως εκείνοι που χρησιμοποίησε ο Szemerédi [2] στην απόδειξη του. Δηλαδή, συνήθως (αν δεν γίνεται σαφές διαφορετικά):

- Με μικρά ελληνικά γράμματα θα συμβολίζουμε πραγματικούς αριθμούς μεταξύ 0 και 1.
- Με μικρούς αγγλικούς χαρακτήρες θα συμβολίζουμε μη-αρνητικούς ακέραιους.
- Με κεφαλαία αγγλικά γράμματα θα συμβολίζουμε σύνολα.

Κεφάλαιο 2

Το Λήμμα Κανονικότητας του Szemerédi

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε μια πρώιμη μορφή του Λήμματος Κανονικότητας του Szemerédi για διμερή γραφήματα, που θα παίξει καθοριστικό ρόλο στη συνέχεια της απόδειξης. Η συγκεκριμένη μορφή του Λήμματος ήταν το πρώτο αποτέλεσμα προς αυτήν την κατεύθυνση κι ήταν ουσιαστικά το πρώτο βήμα για την απόδειξη της τελικής (και ισχυρότερης) μορφής του Λήμματος από τον ίδιο το Szemerédi 3 χρόνια αργότερα. Εδώ θα αποδείξουμε μόνο την αρχική του μορφή για διμερή γραφήματα, και διότι αυτή είναι αρκετή για το υπόλοιπο της απόδειξης, αλλά κυρίως επειδή η συγκεκριμένη μορφή ταιριάζει περισσότερο με τον ειρμό σκέψης της απόδειξης και αναδεικνύει καλύτερα τον τρόπο σύλληψης της, που έτσι κι αλλιώς είναι αρκετά πολύπλοκη.

Το Λήμμα Κανονικότητας ουσιαστικά λέει ότι οποιοδήποτε αρκετά μεγάλο διμερές γράφημα μπορεί να διαμεριστεί σε σχεδόν κανονικά διμερή υπογραφήματα. Η απόδειξη του θα γίνει σε 3 βήματα, που εκτός από απαραίτητα, το κάνουν σταδιακά να φαίνεται και πιο λογικό. Αρχικά, χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς πάνω στα γραφήματα:

Ορισμός 2. Έστω γράφημα G . Θα συμβολίζουμε με $v(G)$ το σύνολο των κορυφών του και με $e(G)$ το σύνολο των ακμών του.

Ορισμός 3. Ένα γράφημα G θα λέγεται διμερές, αν οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν σε δύο μη κενά σύνολα A και B τέτοια ώστε κάθε ακμή του G να έχει το ένα άκρο της στο A και το άλλο στο B . Το σύνολο των ακμών του G θα συμβολίζεται και με $e(A, B)$.

Θα συμβολίζουμε το πλήρες διμερές γράφημα μεταξύ δύο συνόλων κορυφών A και B με $[A, B]$.

Ορισμός 4. Έστω διμερές γράφημα $G = A \cup B$ και έστω $x \in v(A)$, $X \subseteq v(A)$ και $Y \subseteq B$.

- Θα λέμε γειτονιά της κορυφής x μέσα στο B το σύνολο

$$N_B(x) = \{y \in v(B) : \{x, y\} \in e(G)\}.$$

Θα συμβολίζουμε με $d(x) = |N_B(x)|$ τον πληθάριθμο της γειτονιάς του x , δηλαδή το βαθμό της κορυφής x .

- Θα λέμε γειτονιά του X μέσα στο Y (ομοίως γειτονιά του Y μέσα στο X) το σύνολο

$$N_Y(X) = \{y \in v(Y) : \{x, y\} \in e(G)\}.$$

Θα συμβολίζουμε με $d_Y(X) = |N_Y(X)| = |N_X(Y)|$ τον πληθάριθμο της γειτονιάς του X μέσα στο Y , δηλαδή πλήθος των ακμών με το ένα ακρο στο X και το άλλο στο Y .

- Ορίζουμε σαν πυκνότητα του υπογραφήματος $X \cup Y$ την ποσότητα

$$\beta(X, Y) = \frac{d(X, Y)}{|X||Y|}.$$

- Ένα γράφημα θα λέγεται κανονικό αν κάθε κορυφή του έχει τον ίδιο βαθμό.

Στο πρώτο προκαταρκτικό βήμα αποδεικνύουμε ουσιαστικά ότι σε κάθε διμερές γράφημα, υπάρχει αρκετά μεγάλο υπογράφημα, η πυκνότητα του οποίου είναι σχεδόν ομοιόμορφα κατανεμημένη ανάμεσα στα αρκετά μεγάλα υπογραφήματά του.

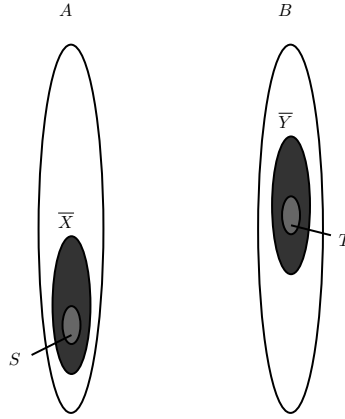
Λήμμα 1. Έστω $G = A \cup B$ μη κένο διμερές γράφημα με $|A| = m$ και $|B| = n$. Τότε για κάθε $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta$ υπάρχουν $\bar{X} \subseteq A$, $\bar{Y} \subseteq B$ και φυσικός $r > 0$ τέτοιοι ώστε:

$$(\alpha') \quad r \leq \frac{1}{\delta},$$

$$(\beta') \quad |\bar{X}| > \varepsilon_1^r |A|, |\bar{Y}| > \varepsilon_2^r |B|,$$

$$(\gamma') \quad \text{Για κάθε } S \subseteq \bar{X}, T \subseteq \bar{Y} \text{ με } |S| > \varepsilon_1^r |\bar{X}| \text{ και } |T| > \varepsilon_2^r |\bar{Y}|, \text{ έχουμε ότι}$$

$$\beta(S, T) > \beta(\bar{X}, \bar{Y}) - \delta$$



Σχήμα 2.1: Λήμμα 1

Απόδειξη. Η ιδέα της απόδειξης είναι ότι δεν μπορούμε να "μικραίνουμε" ένα διμερές γράφημα όσο θέλουμε και να συνεχίσει να έχει όσο μεγάλη αποκλίση πυκνότητας θέλουμε.

Έχουμε υποθέσει ότι $0 < \delta < 1$, άρα υπάρχει θετικός ακέραιος r που να ικανοποιεί τη ιδιότητα (α). Επίσης, θέτοντας $\bar{X} = A$, $\bar{Y} = B$ υπάρχουν $\bar{X}$, $\bar{Y}$ που να ικανοποιούν την ιδιότητα (β).

Επιπροσθέτως για κάθε $\bar{X} \subseteq A$, $\bar{Y} \subseteq B$ που δεν ικανοποιούν την ιδιότητα (γ), θα υπάρχουν $X' \subseteq \bar{X}$, $Y' \subseteq \bar{Y}$ με $|X'| > \varepsilon_1 |\bar{X}|$, $|Y'| > \varepsilon_2 |\bar{Y}|$ τέτοια ώστε $\beta(X', Y') \leq \beta(\bar{X}, \bar{Y}) - \delta$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά τις ακολουθίες συνόλων X_t και Y_t ως εξής:

- $X_0 = A$, $Y_0 = B$
- Για κάθε $t \geq 0$, $X_{t+1} = X'_t$, $Y_{t+1} = Y'_t$ όπως και παραπάνω, δεδομένου ότι τα X'_t, Y'_t δεν ικανοποιούν την ιδιότητα (γ).

Επομένως,

$$\begin{aligned} |X'_t| &> \varepsilon_1 |X'_{t-1}| > \varepsilon_1^2 |X'_{t-2}| > \dots > \varepsilon_1^t |X_0| = \varepsilon_1^t |A|, \\ |Y'_t| &> \varepsilon_2 |Y'_{t-1}| > \varepsilon_2^2 |Y'_{t-2}| > \dots > \varepsilon_2^t |Y_0| = \varepsilon_2^t |B| \end{aligned}$$

Όμως, αν υποθέσουμε ότι έχουν οριστεί τα πρώτα t ζεύγη συνόλων έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta(X_t, Y_t) &\leq \beta(X_{t-1}, Y_{t-1}) - \delta \\ &\leq \beta(X_{t-2}, Y_{t-2}) - 2\delta \\ &\vdots \\ &\leq \beta(X_0, Y_0) - t\delta \\ &= \beta(A, B) - t\delta \\ &\leq 1 - t\delta \end{aligned}$$

Επομένως, αν για κάποιο t τα X_t και Y_t μπορούν να οριστούν, πρέπει $t \leq \frac{1}{\delta}$. Αλλά, αν για κάθε $s \leq \frac{1}{\delta}$, τα X_s και Y_s όντως ορίζονται και δεν ικανοποιούν την ιδιότητα $(*)$, τότε μπορούν να οριστούν και τα $X_{[\frac{1}{\delta}]+1}$ και $Y_{[\frac{1}{\delta}]+1}$, άτοπο διότι $[\frac{1}{\delta}] + 1 > \frac{1}{\delta}$.

Συνεπώς, υπάρχει δείκτης $r \leq \frac{1}{\delta}$, τέτοιος ώστε τα X_r και Y_r να ορίζονται και να ικανοποιούν την ιδιότητα $(*)$. Θέτοντας $\bar{X} = X_r$, $\bar{Y} = Y_r$, έχουμε

$$|\bar{X}| = |X_r| > \varepsilon_1^r |A|, |\bar{Y}| = |Y_r| > \varepsilon_2^r |B|$$

■

Στο επόμενο βήμα, ουσιαστικά βελτιώνουμε το προηγούμενο λήμμα, όπου αποδεικνύουμε ότι σε κάθε διμερές γράφημα, υπάρχει αρκετά μεγάλο υπογράφημα, η πυκνότητα του οποίου είναι σχεδόν ομοιόμορφα κατανεμημένη ανάμεσα στα αρκετά μεγάλα υπογραφήματά του, το οποίο είναι και σχεδόν κανονικό στο ένα μέρος, αρκεί το αρχικό διμερές γράφημα να είναι αρκετά μεγάλο.

Λήμμα 2. Έστω $G = A \cup B$ μη κένο διμερές γράφημα με $|A| = m$ και $|B| = n$. Τότε για κάθε $\varepsilon_1, 0 < \varepsilon_1 < 1/2$, ε_2, δ υπάρχουν θετικοί ακέραιοι M, N τέτοιοι ώστε αν $|A| = m > M$ και $|B| = n > N$, υπάρχουν $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ και φυσικός $r > 0$ τέτοιοι ώστε:

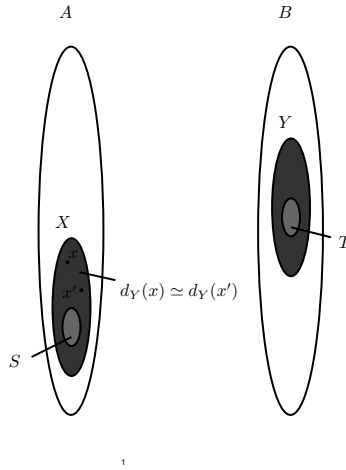
$$(\alpha') \quad r \leq \frac{1}{\delta},$$

$$(\beta') \quad |X| > \frac{1}{2} \varepsilon_1^r |A|, |Y| > \varepsilon_2^r |B|,$$

$$(\gamma') \quad \text{Για κάθε } S \subseteq X, T \subseteq Y \text{ με } |S| > 2\varepsilon_1^r |X| \text{ και } |T| > \varepsilon_2^r |Y|, \text{ έχουμε ότι}$$

$$\beta(S, T) > \beta(X, Y) - \delta$$

$$(\delta') \quad \text{Για κάθε κορυφή } x \in X, |d_Y(x)| \leq (\beta(X, Y) + \delta)|Y|.$$



Σχήμα 2.2: Λήμμα 2

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1, υπάρχουν $\bar{X} \subseteq A$, $\bar{Y} \subseteq B$ και $r > 0$ τέτοια ώστε οι τρεις ιδιότητες του Λήμματος να ισχύουν. Για λόγους συντομίας θέτουμε $\beta = \beta(\bar{X}, \bar{Y})$ και έστω

$$Z = \{x \in \bar{X} : \|d_{\bar{Y}}(x) > (\beta + \delta)|\bar{Y}|\}.$$

Το σύνολο Z είναι ουσιαστικά οι "κακές" κορυφές, δηλαδή οι κορυφές των οποίων ο βαθμός εμφανίζουν μεγαλύτερη απόκλιση από αυτή που θέλουμε. Θα δείξουμε ότι $|Z| \leq \frac{1}{2}|\bar{X}|$.

Πράγματι, έστω ότι ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή $|Z| > \frac{1}{2}|\bar{X}|$. Τότε υπάρχει $Z' \subseteq Z$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2}|\bar{X}| < |Z'| \leq \frac{1}{2}|\bar{X}| + 1.$$

Όμως,

$$d(\bar{X}, \bar{Y}) = d(Z', \bar{Y}) + d(\bar{X} \setminus Z', \bar{Y})$$

Άρα

$$\frac{d(\bar{X}, \bar{Y})}{|\bar{X}||\bar{Y}|} = \frac{|Z'|}{|\bar{X}|} \frac{d(Z', \bar{Y})}{|Z'|\bar{Y}|} + \frac{|\bar{X} \setminus Z'|}{|\bar{X}|} \frac{d(\bar{X} \setminus Z', \bar{Y})}{|\bar{X} \setminus Z'|\bar{Y}|}$$

Οπότε, θέτοντας $\alpha = \frac{|Z'|}{|\bar{X}|}$ έχουμε

$$\beta = \alpha\beta(Z', \bar{Y}) + (1 - \alpha)\beta(\bar{X} \setminus Z', \bar{Y}). \quad (2.1)$$

Από τον ορισμό του συνόλου Z , έχουμε ότι για κάθε κορυφή $x \in Z$ ισχύει ότι $|d_{\bar{Y}}(x)| > (\beta + \delta)|\bar{Y}|$. Επομένως, $d(Z', \bar{Y}) = \sum_{x \in Z'} |d_{\bar{Y}}(x)| > (\beta + \delta)|Z'|\bar{Y}|$ και άρα

$$\beta(Z', \bar{Y}) > \beta + \delta.$$

Επίσης, από την $|Z'| \leq \frac{1}{2}|\bar{X}| + 1$ έχουμε

$$|\bar{X} \setminus Z'| = |\bar{X}| - |Z'| \geq |\bar{X}| - (\frac{1}{2}|\bar{X}| + 1) = \frac{1}{2}|\bar{X}| - 1$$

Θέλουμε $\frac{1}{2}|\bar{X}| - 1 > \varepsilon_1|X|$ (για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Λήμματος 1), η οποία είναι ισοδύναμη με την $|\bar{X}| > \frac{1}{(\frac{1}{2} - \varepsilon_1)}$, οπότε επιλέγοντας το M τέτοιο ώστε $M > \frac{1}{\varepsilon_1^{1/\delta}(\frac{1}{2} - \varepsilon_1)}$ έχουμε πράγματι ότι

$$|\bar{X}| > \varepsilon_1^r|A| \geq \varepsilon_1^{1/\delta}|A| > \varepsilon_1^{1/\delta}|M| > \varepsilon_1^{1/\delta} \frac{1}{(\varepsilon_1^{1/\delta}(\frac{1}{2} - \varepsilon_1))} = \frac{1}{(\frac{1}{2} - \varepsilon_1)}$$

Συνεπώς $|\bar{X} \setminus Z'| > \varepsilon_1|X|$, οπότε από την ιδιότητα (γ) συνεπάγεται ότι

$$\beta(\bar{X} \setminus Z', \bar{Y}) > \beta - \delta.$$

Επομένως, η 2.1 γίνεται

$$\beta \geq \alpha(\beta + \delta) + (1 - \alpha)(\beta - \delta) = \beta + (2\alpha - 1)\delta.$$

Όμως, από τον όρισμό του Z' ,

$$\alpha = \frac{|Z'|}{|\bar{X}|} > \frac{1}{2}$$

κι άρα $\beta \geq \beta + (2\alpha - 1)\delta > \beta$, άτοπο. Επομένως, πρέπει $|Z| \leq \frac{1}{2}|\bar{X}|$. Τέλος, θέτοντας $X = \bar{X} \setminus Z$, $Y = \bar{Y}$ έχουμε ότι

$$|X| = |\bar{X} \setminus Z| = |\bar{X}| - |Z| \geq \frac{1}{2}|\bar{X}| > \frac{1}{2}\varepsilon_1^r|A|.$$

Επίσης, από τον ορισμό του Z , έχουμε ότι

$$x \in X \Rightarrow |d_Y(x)| \leq (\beta(X, Y) + \delta)|Y|$$

δηλαδή το X ικανοποιεί την ιδιότητα (δ) της σχεδόν κανονικότητας, ενώ η ιδιότητα (γ) έπεται άμεσα από την ιδιότητα (γ) του Λήμματος 1 και το γεγονός ότι $|X| \geq \frac{1}{2}|\bar{X}|$. ■

Χρησιμοποιώντας πολλές φορές διαδοχικά το Λήμμα 2, μπορούμε να διαμερίσουμε σχεδόν ολόκληρο ένα αρκετά μεγάλο διμερές γράφημα σε υπογραφήματα σχεδόν κανονικά στο ένα μέρος τους, τα οποία έχουν την πυκνότητά τους σχεδόν ομοιόμορφα κατανεμημένη ανάμεσα στα αρκετά μεγάλα υπογραφήματά τους.

Πρόταση 1. (Λήμμα Κανονικότητας Szemerédi για διμερή γραφήματα) Έστω $G = A \cup B$ μη κένο διμερές γράφημα με $|A| = m$ και $|B| = n$. Τότε για κάθε $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta, \rho, \sigma$, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι m_0, n_0, M, N τέτοιοι ώστε αν $|A| = m > M, |B| = n > N$, θα υπάρχουν ξένα ανά δύο $C_i \subseteq A, i < m_0$, και για καθένα $i < m_0$, ξένα ανά δύο $C_{i,j} \subseteq B, j < n_0$, τέτοια ώστε:

$$(\alpha') \quad |C'| = |A \setminus \bigcup_{i < m_0} C_i| < \rho m, |C''| = |B \setminus \bigcup_{j < n_0} C_{i,j}| < \sigma n \text{ για κάθε } i < m_0,$$

$$(\beta') \quad \text{Για κάθε } i < m_0, j < n_0, S \subseteq C_i, T \subseteq C_{i,j}, \text{ με } |S| > \varepsilon_1 |C_i|, |T| > \varepsilon_2 |C_{i,j}|, \text{ έχουμε}$$

$$\beta(S, T) \geq \beta(C_i, C_{i,j}) - \delta,$$

$$(\gamma') \quad \text{Για κάθε } i < m_0, j < n_0 \text{ και } x \in C_i,$$

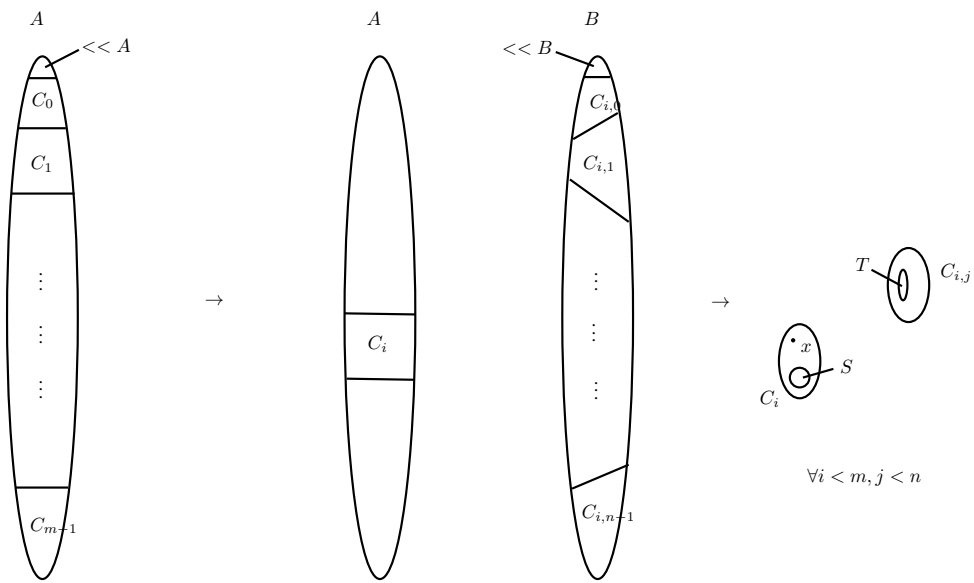
$$|d_{C_{i,j}}(x)| \leq (\beta(C_i, C_{i,j}) + \delta) |C_{i,j}|.$$

Απόδειξη. Η ιδέα της απόδειξης είναι ότι μπορούμε να διαμερίζουμε σταδιακά το χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενα το Λήμμα 2 όσο χρειάζεται μέχρι το "κακό" κομμάτι του γραφήματος να γίνει όσο μικρό θέλουμε. Κατι τέτοιο είναι εφικτό διότι μπορούμε να μεγαλώσουμε το γράφημα όσο χρειάζεται, εξασφαλίζοντας πάντα τις προϋποθέσεις του Λήμματος. Ξεκινάμε ορίζοντας τους ποσοδείκτες που θα χρησιμοποιούμε σε κάθε βήμα που θα χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2, όπου στην πορεία της απόδειξης θα γίνει ξεκάθαρος ο λόγος που ορίζονται έτσι.

Θέτουμε $r = 2\lceil \frac{1}{\delta} \rceil + 1$. Μπορούμε να επιλέξουμε το n_0 τέτοιο ώστε $(1 - \varepsilon_2^n)_0^n < \sigma$. Ορίζουμε, επίσης, την ακολουθία $\varepsilon(t)$ για $0 \leq t \leq n_0 + 1$ ως εξής:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_1, \varepsilon(t+1) = \varepsilon_1 \prod_{i=0}^t \left(\frac{\varepsilon(i)}{4} \right)^r, 0 \leq t \leq n_0.$$

Σχήμα 2.3: Πρόταση 1



Τέλος, επιλέγουμε το m_0 τόσο μεγάλο ώστε

$$(1 - \varepsilon(n_0 + 1))_0^m < \rho.$$

Είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό, ο οποίος ουσιαστικά περιγράφει το επαναλαμβανόμενο βήμα μέχρι να διαμερίσουμε αρκετά καλά το A :

Ισχυρισμός. Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι M, N τέτοιοι ώστε αν $m > M$, $n > N$ και $A' \subseteq A$ με $|A'| \geq \rho m$, τότε υπάρχουν $C \subseteq A'$, $\overline{C}_j \subseteq B$ για κάθε $j < n_0$, τέτοια ώστε $|C| > \varepsilon(n_0 + 1)|A'|$ και το C και τα $\overline{C}_j$, $j < n_0$ ικανοποιούν τις συνθήκες της Πρότασης αν επιλέξουμε $C_i = C$ και $C_{i,j} = \overline{C}_j$, $j < n_0$.

Απόδειξη. Ορίζουμε επαγωγικά τις ακολουθίες συνόλων $\overline{C}_j \subseteq B$, $Z_j \subseteq A'$ για $-1 \leq j \leq n_0$ ως εξής:

$$Z_{-1} = A', C_{-1} = \emptyset.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $j \leq n_0$ τα Z_v , $\overline{C}_v$ έχουν οριστεί για $-1 \leq v \leq j$. Υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις:

(i) Αν $|B \setminus \bigcup_{v < j} \overline{C}_v| \geq \sigma n$, θέτουμε $Z_j = Z_{j-1}$, $C_j = \emptyset$.

(ii) Αν $|B \setminus \bigcup_{v < j} \overline{C}_v| \geq \sigma n$, τότε εφαρμόζουμε το Λήμμα 2 με $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon(n_0 - j)$,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2, \delta = \frac{\delta}{2}, A = Z_{j-1} \text{ και } B = B \setminus \bigcup_{v < j} \overline{C}_v. \text{ Θα γίνει σαφές ότι το}$$

$|Z_{j-1}|$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλο, επιλέγοντας κατάλληλο M , επομένως θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Λήμματος 2.

Από την υπόθεση του (ii), $|B \setminus \bigcup_{v < j} \overline{C}_v| \geq \sigma n \geq \sigma N$, άρα το $|B \setminus \bigcup_{v < j} \overline{C}_v|$ είναι αυθαίρετα μεγάλο για N αρκετά μεγάλο. Επομένως, όντως, οι προϋποθέσεις του Λήμματος 2 ισχύουν.

Συνεπώς, υπάρχουν $X \subseteq Z_{j-1}$, $Y \subseteq B \setminus \bigcup_{v < j} \overline{C}_v$ και $r' > 0$ που να ικανοποιούν τα συμπεράσματα του Λήμματος 2. Θέτουμε $Z_j = X$, $\overline{C}_j = Y$. Από τη σχέση (α) του Λήμματος 2, $r' \geq \frac{2}{\delta} < \left[\frac{2}{\delta}\right] + 1 = r$.

Επίσης, έχουμε, από τις υπόλοιπες σχέσεις Λήμματος 2

$$(\beta') \quad |Z_j| > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \varepsilon(n_0 - j) \right)^r |Z_j| > \left(\frac{\varepsilon(n_0 - j)}{4} \right)^r,$$

$$|\overline{C}_j| > \varepsilon_2^r |B \setminus \bigcup_{v < j} \overline{C}_v|,$$

(γ') Για κάθε $S \subseteq Z_j$, $T \subseteq \overline{C}_j$ με $|S| > \varepsilon(n_0 - j)|Z_j|$, $|T| > \varepsilon_2|\overline{C}_j|$, έχουμε

$$\beta(S, T) > \beta(Z_j, \overline{C}_j) - \frac{\delta}{2},$$

(δ') Για κάθε $x \in Z_j$,

$$|d_{\overline{C}_j}(x)| \leq (\beta(Z_j, \overline{C}_j) + \frac{\delta}{2})|\overline{C}_j|.$$

Παρατηρούμε ότι από τη στιγμή που θα χρειαστεί να χρησιμοποιηθεί η περίπτωση (i) σε κάποιο βήμα στον ορισμό των Z_j και $\overline{C}_j$, τότε αναγκαστικά θα χρησιμοποιείται και για όλα τα υπόλοιπα βήματα μέχρι να οριστούν τα Z_{n_0} , $\overline{C}_{n_0}$. Έστω j_0 ο μέγιστος δείκτης $j < n_0$ για τον οποίο χρησιμοποιήθηκε η περίπτωση (ii) στον ορισμό των Z_j και $\overline{C}_j$. Από τη (β) έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} |C_0| > \varepsilon_2^r|B| &\Rightarrow |B \setminus \overline{C}_0| < (1 - \varepsilon_2^r)|B|, \\ |C_1| > \varepsilon_2^r|B \setminus \overline{C}_0| &\Rightarrow |B \setminus \bigcup_{v < 2} \overline{C}_v| = |B \setminus \overline{C}_0| - |C_1| < \\ &< (1 - \varepsilon_2^r)|B \setminus \overline{C}_0| < (1 - \varepsilon_2^r)^2|B|, \\ &\vdots \\ |C_{j_0-1}| > \varepsilon_2^r|B \setminus \bigcup_{v < j_0-1} \overline{C}_v| &\Rightarrow |B \setminus \bigcup_{v < j_0} \overline{C}_v| < (1 - \varepsilon_2^r)^{j_0}|B|, \\ |C_{j_0}| > \varepsilon_2^r|B \setminus \bigcup_{v < j_0} \overline{C}_v| &\Rightarrow |B \setminus \bigcup_{v < j_0+1} \overline{C}_v| < (1 - \varepsilon_2^r)^{j_0+1}|B|. \end{aligned}$$

- Αν $j_0 = n_0 - 1$, τότε ακριβώς από τον ορισμό του n_0 έχουμε

$$|B \setminus \bigcup_{v < n_0} \overline{C}_v| < (1 - \varepsilon_2^r)^{j_0+1}|B| < \sigma n.$$

- Αν $j_0 < n_0 - 1$, τότε αναγκαστικά χρησιμοποιήθηκε και η περίπτωση (i) στον ορισμό των Z_j και $\overline{C}_j$, άρα

$$|B \setminus \bigcup_{v < n_0} \overline{C}_v| < \sigma n.$$

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση

$$|B \setminus \bigcup_{v < n_0} \overline{C}_v| < \sigma n.$$

Επίσης, από την εφαρμογή του Λήμματος 2 για κάθε βήμα του ορισμού των Z_j και $\overline{C}_j$ έπεται

$$\begin{aligned} |Z_{n_0}| &> \left(\frac{\varepsilon(0)}{4}\right)^r |Z_{n_0-1}| \\ &> \left(\frac{\varepsilon(0)}{4}\right)^r \left(\frac{\varepsilon(1)}{4}\right)^r |Z_{n_0-2}| \\ &\quad \vdots \\ &> \prod_{v=j+1}^{n_0} \left(\frac{\varepsilon(n_0-v)}{4}\right)^r |Z_j| = \prod_{i=0}^{n_0-j-1} \left(\frac{\varepsilon(i)}{4}\right)^r |Z_j| \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας είτε την ιδιότητα (β) είτε την $Z_j = Z_{j-1}$ όπου χρειάζεται. Επομένως, από τον ορισμό του $\varepsilon(n_0 - j)$,

$$\varepsilon_1 |Z_{n_0}| > \varepsilon(n_0 - j) |Z_j|, \text{ για κάθε } -1 < j < n_0.$$

Θέτουμε $C = Z_{n_0}$. Τότε

$$|C| = |Z_{n_0}| > \varepsilon p(n_0 + 1) |Z_{-1}| = \varepsilon p(n_0 + 1) |A|.$$

Τώρα, αν $S \subseteq C$, $T \subseteq \overline{C}_j$ με $|S| > \varepsilon_1 |C|$, $|T| > \varepsilon_2 |\overline{C}_j|$, τότε

$$|S| > \varepsilon_1 |Z_{n_0}| > \varepsilon(n_0 - j) |Z_j|.$$

Οπότε, από τη σχέση (γ) έχουμε

$$\beta(S, T) > \beta(Z_j, \overline{C}_j) - \frac{\delta}{2}.$$

Όμως, από τη σχέση (δ) έχουμε ότι για κάθε $x \in C$,

$$|d_{\overline{C}_j}(x)| \leq (\beta(Z_j, \overline{C}_j) + \frac{\delta}{2}) |\overline{C}_j|.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \beta(C, \overline{C}_j) &= \frac{e((C, \overline{C}_j))}{|C| |\overline{C}_j|} = \frac{\sum_{x \in C} |d_{\overline{C}_j}(x)|}{|C| |\overline{C}_j|} \\ &\leq \frac{|C| (\beta(Z_j, \overline{C}_j) + \frac{\delta}{2}) |\overline{C}_j|}{|C| |\overline{C}_j|} \\ &= \beta(Z_j, \overline{C}_j) + \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Αρα $\beta(S, T) > \beta(Z_j, \overline{C}_j) - \frac{\delta}{2} > \beta(C, \overline{C}_j) - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = \beta(C, \overline{C}_j) - \delta$,
που είναι η σχέση (β) του Πρότασης με $C_i = C$ και $C_{i,j} = \overline{C}_j$. Εφ' όσον
 $|Z_{n_0}| > \frac{\varepsilon(n_0-j)}{\varepsilon_1}|Z_j| > \varepsilon(n_0-j)|Z_j|$, από την σχέση (γ) με $S = Z_{n_0} = C$, $T = \overline{C}_j$
έχουμε

$$\beta(C, \overline{C}_j) > (\beta(Z_j, \overline{C}_j) - \frac{\delta}{2}).$$

Αρα, από την (δ), για κάθε $x \in C = Z_0 \in Z_j$ ισχύει ότι

$$|d_{\overline{C}_j}(x)| \leq (\beta(Z_j, \overline{C}_j) + \frac{\delta}{2})|\overline{C}_j| < \beta(C, \overline{C}_j) + \frac{\delta}{2})|\overline{C}_j|.$$

η οποία είναι ακριβώς η ιδιότητα (γ) της Πρότασης. ■

Έχοντας αποδείξει τον Ισχυρισμό, μπορούμε τώρα να τον χρησιμοποιήσουμε αναδρομικά για να αποδείξουμε την Πρόταση.

Αρχικά, θέτουμε $A_0 = A$, οπότε και $|A_0| = m > \rho m$. Από τον Ισχυρισμό, υπάρχει $C_0 \subseteq A_0$ με $|C_0| > \varepsilon(n_0 + 1)|A_0|$, τέτοιο ώστε να ισχύουν τα συμπεράσματα του Ισχυρισμού. Έστω $A_1 = A_0 \setminus C_0$. Τότε

$$|A_1| < (1 - \varepsilon(n_0 + 1))|A_0|.$$

Τώρα, αν $|A_1| < \rho m$, τότε έχουμε τελειώσει. Διαφορετικά, αν $|A_1| \geq \rho m$ συνεχίζουμε, βρίσκοντας ένα $C_1 \subseteq A_1$ με $|C_1| > \varepsilon(n_0 + 1)|A_1|$ τέτοιο ώστε να ισχύουν τα συμπεράσματα του Ισχυρισμού. Έστω, πάλι, $A_1 = A_0 \setminus C_0$. Τότε,

$$|A_1| < (1 - \varepsilon(n_0 + 1))|A_1| < (1 - \varepsilon(n_0 + 1))^2|A_0|.$$

Η χειρότερη περίπτωση θα είναι να φτάσουμε στο A_{m_0} , όπου θα έχουμε $A_{m_0} = A_{m_0-1} \setminus C_{m_0-1}$ και

$$|A_{m_0}| < (1 - \varepsilon(n_0 + 1))^{m_0}|A_0| < \rho m.$$

Δηλαδή, το $\overline{C}_j$ χρειάζεται να οριστεί το πολύ για $j < m_0$. Η απόδειξη της Πρότασης είναι, έτσι, πλήρης. ■

Παρατήρηση 1. Από την ιδιότητα (γ) της Πρότασης μπορούμε να αποδείξουμε και το άνω φράγμα για την ιδιότητα (β) για $T = C_{i,j}$. Πράγματι

$$\begin{aligned} \beta(S, C_{i,j}) &= \frac{e((S, C_{i,j}))}{|S||C_{i,j}|} = \frac{\sum_{x \in S} |d_{C_{i,j}}(x)|}{|S||C_{i,j}|} \\ &\leq \frac{|S|(\beta(C_i, C_{i,j}) + \delta)|C_{i,j}|}{|S||C_{i,j}|} \\ &= \beta(S, C_{i,j}) + \delta. \end{aligned}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την Πρόταση 1 στο συμπληρωματικό γράφημα του G , αποδεικνύεται παρόμοια η Πρόταση 1 με ανάποδα φράγματα, δηλαδή:

Πρόταση 2. Έστω $G = A \cup B$ μη κένο διμερές γράφημα με $|A| = m$ και $|B| = n$. Τότε για κάθε $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta, \rho, \sigma$, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι m_0, n_0, M, N τέτοιοι ώστε αν $|A| = m > M, |B| = n > N$, θα υπάρχουν ξένα ανά δύο $\overline{C}_i \subseteq A, i < m_0$, και για καθένα $i < m_0$, ξένα ανά δύο $\overline{C}_{i,j} \subseteq B, j < n_0$, τέτοια ώστε:

$$(\alpha') \quad |\overline{C}'| = |A \setminus \bigcup_{i < m_0} \overline{C}_i| < \rho m, |\overline{C}''_i| = |B \setminus \bigcup_{j < n_0} \overline{C}_{i,j}| < \sigma n \text{ για κάθε } i < m_0,$$

(β') Για κάθε $i < m_0, j < n_0, S \subseteq \overline{C}_i, T \subseteq \overline{C}_{i,j}$, με $|S| > \varepsilon_1 |C_i|, |T| > \varepsilon_2 |C_{i,j}|$, έχουμε

$$\beta(S, T) \leq \beta(\overline{C}_i, \overline{C}_{i,j}) - \delta,$$

(γ') Για κάθε $i < m_0, j < n_0$ και $x \in C_i$,

$$|d_{\overline{C}_{i,j}}(x)| \geq (\beta(\overline{C}_i, \overline{C}_{i,j}) + \delta)|\overline{C}_{i,j}|.$$

Κεφάλαιο 3

Δομές Αριθμητικών Προόδων (Configurations)

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε συγκεκριμένα υποσύνολα των φυσικών, που θα λέγονται Δομές Αριθμητικών Προόδων (για λόγους συντομίας θα τα λέμε απλά δομές για το υπόλοιπο της απόδειξης), και θα είναι ουσιαστικά το θεμελιώδες εργαλείο με το οποίο θα δουλέψουμε. Λόγω της καλής δομής τους, είναι ιδανικά για να μπορέσουμε να ανιχνεύσουμε αριθμητικές προόδους μέσα σε ένα συγκεκριμένο σύνολο. Ξεκινάμε από τις βασικές δομές, από τις οποίες σιγά σιγά θα προκύψουν πιο συγκεκριμένες δομές που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια.

Ορισμός 5. (Βασικές Δομές) Έστω $l_1, l_2, \dots, l_m, m \geq 0$, θετικοί ακέραιοι. Ορίζουμε τις βασικές δομές $B(l_1, l_2, \dots, l_m)$ ως εξής:

- $B(\emptyset) = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$.
- Για κάθε $m \geq 1$,

$$B(l_1, l_2, \dots, l_m) = \{X \subseteq \mathbb{N} : X = \bigcup_{i < l_m} X_i, \text{ όπου για κάποιο } Y \in B(l_1, l_2, \dots, l_{m-1}) \text{ και κάποιο θετικό ακέραιο } d > 0 \text{ ισχύει ότι } X_i = Y + di, 0 \leq i < l_m \text{ και } X_0 < X_1 < \dots < X_{l_m-1}\},$$

η οποία θα λέγεται *κλάση βασικών δομών m διαστάσεων*, ενώ τα σύνολα X_i θα λέγονται *κανονική διαμέριση* του X .

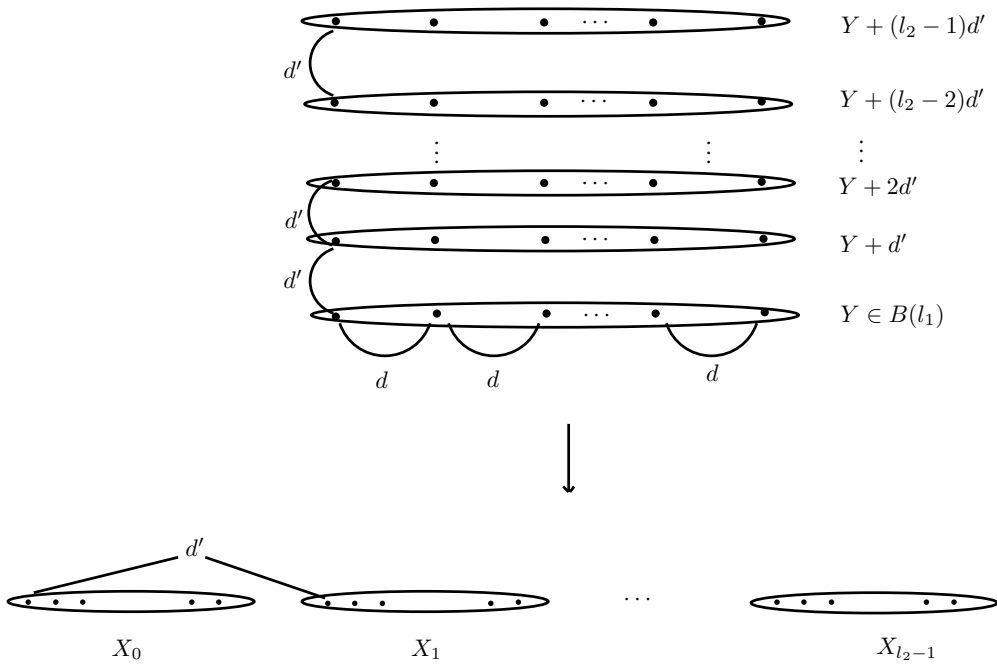
Προφανώς $Y + di = \{y + di : y \in Y\}$ και $X < X'$ σημαίνει ότι $x < x'$, για κάθε $x \in X, x' \in X'$, ενώ μια ακολουθία συνόλων $X_0 < X_1 < \dots < X_{l_m-1}$ θα λέγεται ακολουθία που έχει την *block* ιδιότητα. Για να γίνουν περισσότερα

κατανοητές οι συγκεκριμένες δομές, ας αναλύσουμε λίγο περισσότερο τον παραπάνω ορισμό:

- $B(l_1) = \{\{n\} + di : d \text{ θετικός ακέραιος}, 0 \leq i < l_1\}$,
δηλαδή η μονοδιάστατη βασική δομή $B(l_1)$ είναι το σύνολο όλων των αριθμητικών προόδων μήκους l_1 .
- $B(l_1, l_2) = \{X \subseteq \mathbb{N} : X = \bigcup_{i < l_m} X_i, \text{ όπου για } Y \in B(l_1) \text{ και } d \text{ κατάλληλο θετικό ακέραιο, ώστε τα } X_i = Y + di, 0 \leq i < l_m \text{ να είναι block-ακολουθία συνόλων}\}$,
δηλαδή για τη διδιάστατη βασική δομή $B(l_1, l_2)$ (που είναι απο τις πιο ενδεικτικές για τη γενική δομή των στοιχείων των βασικών δομών) μπορούμε να πούμε τα εξής:
 - Είναι το σύνολο των μη επικαλυπτόμενων αριθμητικών προόδων μήκους l_1 , οι οποίες ισαπέχουν κατά l_2 ,
 - Είναι ένα σύνολο των *αριθμητικών προόδων αριθμητικών προόδων*,
 - Είναι ένα σύνολο *αριθμητικών προόδων μονοδιάστατων βασικών δομών*
- $B(l_1, l_2, \dots, l_m) = \{X \subseteq \mathbb{N} : X = \bigcup_{i < l_m} X_i, \text{ όπου για κάποιο } Y \in B(l_1, l_2, \dots, l_{m-1}) \text{ και κάποιο θετικό ακέραιο } d > 0 \text{ ισχύει ότι } X_i = Y + di, 0 \leq i < l_m \text{ και } X_0 < X_1 < \dots < X_{l_m-1}\}$,
δηλαδή η m -διάστατη βασική δομή $B(l_1, l_2, \dots, l_m)$ ένα σύνολο *αριθμητικών προόδων $(m-1)$ -διάστατων μη επικαλυπτόμενων βασικών δομών*.

Παρατήρηση 2. Για κάθε $X \in B(l_1, l_2, \dots, l_m)$ ισχύει ότι $|X| = l_1 l_2 \dots l_m$.

Σχήμα 3.1: Διδιάστατη δομή της $B(l_1, l_2)$



Σχήμα 3.2: Η 2η Κανονική Διαμέριση μιας $(m+1)$ -διάστατης δομής $X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 X = & X_0 & \cup & X_1 & \cup & \cdots & X_i & \cdots & \cup & X_{K-1} \\
 & \parallel & & \parallel & & & \parallel & & & \parallel \\
 & X_{0,0} & & X_{1,0} & & & X_{i,0} & & & X_{K-1,0} \\
 & \cup & & & & & & & & \\
 & X_{0,1} & & X_{1,1} & & & X_{i,1} & & & X_{K-1,1} \\
 & \cup & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & \\
 & X_{0,j} & & X_{1,j} & & & X_{i,j} & & & X_{K-1,j} \\
 & \vdots & & & & & & & & \\
 & \cup & & & & & & & & \\
 & X_{0,t_m-1} & & X_{1,t_m-1} & & & X_{i,t_m-1} & & & X_{K-1,t_m-1}
 \end{array}$$

3.1 Κεκορεσμένες και Τέλειες Δομές

Ο τελικός στόχος είναι να αποδείξουμε ότι σε κάθε σύνολο R θετικής άνω πυκνότητας υπάρχει αριθμητική πρόοδος μήκους k , όπου k αυθαίρετος θετικός ακέραιος. Στη συνέχεια θα ορίσουμε συγκεκριμένες υποκλάσεις των βασικών δομών, ακριβώς για να κινηθούμε προς την κατεύθυνση αυτή. Αυτές θα είναι οι *Κεκορεσμένες Δομές* οι οποίες θα συμβολίζονται με $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$, και οι *Τέλειες δομές* οι οποίες θα συμβολίζονται με $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$, η οποία είναι υποκλάση των κεκορεσμένων. Ξεκινάμε με τον ορισμό μιας θεμελιώδους σχέσης ισοδυναμίας ανάμεσα σε δύο δομές της ίδιας βασικής κλάσης, όπου κάθε κλάση της ισοδυναμίας ουσιαστικά καθορίζει τη μορφή της τομής του συνόλου R με τις δομές της κλάσης.

Ορισμός 6. (R -ισοδυναμία) Έστω $X, Y \in B(l_1, l_2, \dots, l_m)$ (και άρα θα έχουν και τον ίδιο πληθάρημο). Θα λέμε ότι τα X και Y είναι R -ισοδύναμα αν για κάθε δυο στοιχεία $x \in X, y \in Y$ σε αντίστοιχες θέσεις, ισχύει ότι $x \in R$ αν και μόνο αν $y \in R$.

Προφανώς η R -ισοδυναμία είναι όντως ισοδυναμία, δηλαδή ισχύει η ανακλάστική, η συμμετρική και η μεταβατική ιδιότητα.

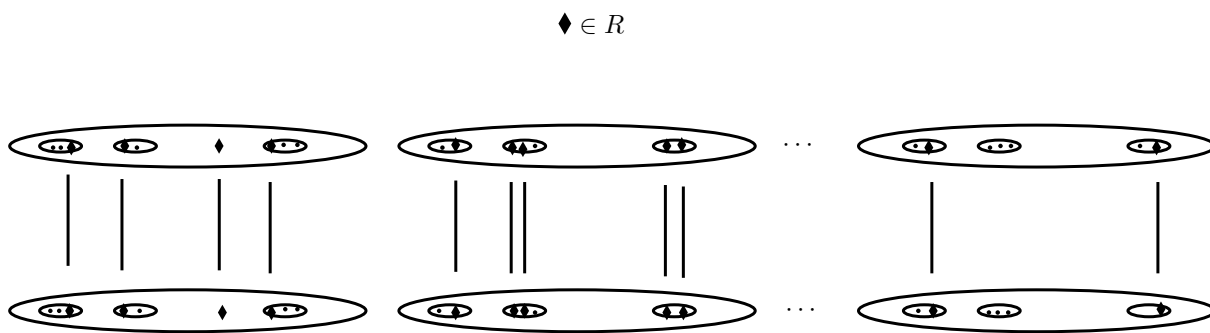
Στη συνέχεια ξεκινάμε τον αναδρομικό ορισμό των κεκορεσμένων και των τέλειων δομών. Διαισθητικά, οι κεκορεσμένες δομές είναι κατασκευασμένες έτσι ώστε να περιέχουν αρκετά στοιχεία του R και αρκετές από τις υποδομές τους να είναι R -ισοδύναμες (έχουν δηλαδή μια αρκετά καλή μορφή), ενώ οι τέλειες δομές είναι υποκλάση των κεκορεσμένων με την επιπρόσθετη ιδιότητα ότι όλες είναι R -ισοδύναμες μεταξύ τους. Πιο αναλυτικά:

Ορισμός 7. Έστω ότι έχουν οριστεί οι κλάσεις $S(t_1, t_2, \dots, t_m), P(t_1, t_2, \dots, t_m)$ και έστω $X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$. Ορίζουμε τις ποσότητες

- $s^m(X) = |\{i < l : X_i \in S(t_1, t_2, \dots, t_m)\}|$, που θα λέγεται *κορεσμός* του X ,
- $p^m(X) = |\{i < l : X_i \in P(t_1, t_2, \dots, t_m)\}|$, που θα λέγεται *τελειότητα* του X .

Δηλαδή, ο κορεσμός και η τελειότητα μιας δομής μετράνε στην κανονική της διαμέριση τον αριθμό των υποδομών της που ανήκουν στην προηγούμενη κεκορεσμένη και τέλεια κλάση, αντίστοιχα.

Σχήμα 3.3: Δύο R-ισοδύναμες δομές



- Κεκορεσμένες και Τέλειες Δομές Μηδενικής Διάστασης

Θέτουμε $S(\emptyset) = B(\emptyset) = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$, $P(\emptyset) = \{\{n\} : n \in \mathbb{R}\}$.

- Κεκορεσμένες και Τέλειες Δομές Μίας Διάστασης

Έστω, τώρα,

$$f_1(l) = \max\{|X \cap R| : X \in B(l)\} = \max\{p^1(X) : X \in B(l)\},$$

αφού η $p^1(X)$ μετράει πόσες από τις υποδομές της κανονικής διαμέρισης του X (που είναι προφανώς μονοσύνολα) ανήκουν στην $P(\emptyset)$, δηλαδή πόσες είναι στοιχεία του R . Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f_1(l_1 + l_2) &= \max\{|X \cap R| : X \in B(l_1 + l_2)\} \\ &\leq \max\{|X \cap R| : X \in B(l_1)\} + \max\{|X \cap R| : X \in B(l_2)\} \\ &= f_1(l_1) + f_1(l_2) \end{aligned}$$

δηλαδή η ακολουθία $f_1(l)$ είναι υποπροσθετική, άρα από το Λήμμα 3 που ακολουθεί, υπάρχει το όριο

$$\alpha_1 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{f_1(l)}{l}.$$

Λήμμα 3. Έστω ακολουθία $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_n \geq 0$ και

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

Τότε το $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ υπάρχει και είναι ίσο με $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $I = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του I , υπάρχει $K \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_K}{K} < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επίσης, υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $r < K$,

$$\frac{a_r}{rM} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $N = KM$. Τώρα, έστω $n \geq N$, για το οποίο θεωρούμε την Ευκλείδεια διαίρεση του με το K , δηλαδή

$$n = sK + r, \quad r < K.$$

Επομένως $s \geq M$. Τότε, από την υποπροσθετική ιδιότητα, έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \frac{a_{sK+r}}{sK+r} \leq \frac{a_{sK} + a_r}{sK+r} \leq \frac{sa_K}{sK+r} + \frac{a_r}{sK+r} \\ &\leq \frac{sa_K}{sK} + \frac{a_r}{KM} = \frac{a_K}{K} + \frac{a_r}{KM} \\ &< I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = I + \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ ισχύει $\frac{a_n}{n} \leq I + \varepsilon$. Συνεπώς,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = I = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$

■

Παρατήρηση 3. $\alpha_1 > 0$.

Απόδειξη. Προφανώς $[0, 1) \in B(1)$, άρα

$$|[0, 1) \cap \mathbb{R}| < \max\{|X \cap \mathbb{R}| : X \in B(1)\} = f_1(1),$$

επομένως

$$\alpha_1 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{f_1(l)}{l} = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{f_1(l)}{l} \geq \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{|[0, 1) \cap \mathbb{R}|}{l} > 0$$

αφού το $\mathbb{R}$ είναι θετικής άνω πυκνότητας.

■

Επιπροσθέτως, έστω

$$\varepsilon_1(l) = |\alpha_1 - \frac{f_1(l)}{l}|.$$

– Θέτουμε $S(t_1) = \{X \in B(t_1) : p^1(X) > (\alpha_1 - \varepsilon_1(t_1)^{\frac{1}{4}})t_1\}$.

Προφανώς, $\lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_1(l) = 0$, αφού στα όρια που πάνε στο 0 τα απόλυτα δεν παίζουν ρόλο. Επομένως, το $\varepsilon_1(l)$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό για αρκετά μεγάλο l . Συνεπώς, για αρκετά μεγάλο l_1 ,

$$\varepsilon_1(l_1)^{\frac{1}{4}} < \alpha_1.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι από τον ορισμό του α_1 , για το $\varepsilon_1(l_1)^{\frac{1}{4}}$ υπάρχει l_0 , τέτοιο ώστε για κάθε $l > l_0$ να ισχύει

$$|\frac{f_1(l)}{l} - \alpha_1| < \varepsilon_1(l_1)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \max\{p^1(X) : X \in B(l)\} = f_1(l) > (\alpha_1 - \varepsilon_1(l_1)^{\frac{1}{4}})l,$$

άρα για αρκετά μεγάλο $t_1 > \max\{l_0, l_1\}$ κι από το γεγονός ότι $\varepsilon_1(l_1)^{\frac{1}{4}} > \varepsilon_1(t_1)^{\frac{1}{4}}$ τελικά για $t_1 > l_1$, η $S(t_1)$ είναι καλά ορισμένη (δηλαδή μη κενή).

Δηλαδή, η $S(t_1)$ είναι η κλάση εκείνων των μονοδιάστατων δομών (δηλαδή των αριθμητικών προόδων μήκους t_1), των οποίων οι υποδομές της κανονικής τους διαμέρισης που ανήκουν στην $P(\emptyset)$ είναι κοντά στο αναμενόμενο μέγιστο ποσοστό α_1 , δηλαδή είναι οι αριθμητικές πρόοδοι μήκους t_1 που σχεδόν $\alpha_1 t_1$ στοιχεία τους ανήκουν στο R .

Συνεχίζουμε με ορισμούς ανάλογους των ποσοτήτων $f_1, \alpha_1, \varepsilon_1$ για το επόμενο επίπεδο. Έστω

$$g_2(l) = \max\{s^2(X) : X \in B(t_1, l)\}, \beta_2 = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{g_2(l)}{l}, \mu_2(l) = |\beta_2 - \frac{g_2(l)}{l}|.$$

Τώρα, η R -ισοδυναμία διαμερίζει την $S(t_1)$ το πολύ σε 2^{t_1} κλάσεις ισοδυναμίας. Έστω $X = \bigcup_{i < l} X_i \in B(t_1, l)$. Θέτουμε με $\bar{p}^2(X)$ τον μέγιστο αριθμό υποδομών $X_i \in S(t_1)$ που να ανήκουν στην ίδια κλάση R -ισοδυναμίας της $S(t_1)$. Ορίζουμε

$$\bar{f}_2(l) = \max\{\bar{p}^2(X) : X \in B(t_1, l) \text{ και } s^2(X) \geq (\beta_2 - \sqrt{\mu_2(l)})l\},$$

$$\alpha_2 = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_2(l)}{l}$$

Όπως και στον ορισμό της $S(t_1)$, από τον ορισμό του β_2 η $\bar{f}_2(l)$ είναι καλά ορισμένη, ενώ από τον ορισμό του α_2 , υπάρχει ακολουθία l_n τέτοια ώστε

$$\alpha_2 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_2(l_n)}{l_n}$$

Επομένως, υπάρχουν $X^{(n)} \in B(t_1, l_n)$ με $\bar{f}_2(l_n) = \bar{p}^2(X^{(n)})$ κι άρα

$$s^2(X^{(n)}) \geq (\beta_2 - \sqrt{\mu_2(l_n)})l_n \text{ και } \alpha_2 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}^2(X^{(n)})}{l_n}.$$

Λόγω του πεπερασμένου πλήθους των κλάσεων R-ισοδυναμίας, θα υπάρχει κλάση η οποία θα εμφανίζεται για άπειρα n στον ορισμό των $\bar{p}^2(X^{(n)})$, την οποία ονομάζουμε $P(t_1)$, οπότε θα είναι και $P(t_1) \subseteq S(t_1)$.

Δηλαδή, η $P(t_1)$ είναι μια κλάση R-ισοδυναμίας της $S(t_1)$, επιλεγμένη έτσι ώστε να υπάρχουν για άπειρα επίπεδα αντίστοιχες διδιάστατες βασικές δομές X , τέτοιες ώστε το πόσοστο των υποδομών της X που ανήκουν στην $S(t_1)$ να είναι σχεδόν β_2 (που είναι το αναμενόμενο μέγιστο ποσοστό) και το πόσοστο των υποδομών της X που ανήκουν στην $P(t_1)$ να είναι σχεδόν α_2 (που, επίσης, είναι το αναμενόμενο μέγιστο ποσοστό).

Τέλος, έστω

$$f_2(l) = \max\{p^2(X) : X \in B(t_1, l) \text{ και } s^2(X) \geq (\beta_2 - \sqrt{\mu_2(l)})l\},$$

και

$$\varepsilon_2(l) = \left| \alpha_2 - \frac{f_2(l)}{l} \right|.$$

οπότε από την $\bar{p}^2(X^{(n)}) \leq f_2(l)$ έχουμε

$$\alpha_2 = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{f_2(l)}{l}$$

Όπως θα αποδείξουμε αργότερα για τη γενική περίπτωση, ισχύει ότι

$$\beta_2 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{g_2(l)}{l}, \alpha_2 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{f_2(l)}{l}.$$

Σημειώνουμε ότι επιλέγωντας το t_2 αρκετά μεγάλο, τα $\varepsilon_2(t_2)$, $\mu_2(t_2)$ γίνονται όσο μικρά θέλουμε.

• Κεκορεσμένες και Τέλειες Δομές m-Διαστάσεων

Υποθέτουμε, τώρα, ότι έχουν οριστεί οι

$$P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}) \subseteq S(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}) \subseteq B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}),$$

και οι $g_m(l), f_m(l), \alpha_m, \beta_m, \varepsilon_m(l), \mu_m(l)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$g_m(l) = \max\{s^m(X) : X \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, l)\},$$

$$\beta_m = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{g_m(l)}{l}, \mu_m(l) = |\beta_m - \frac{g_m(l)}{l}|,$$

$$f_2(X) = \max\{p^m(X) : X \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, l) \text{ και } s^m(X) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(l)})l\},$$

$$\alpha_m = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{f_m(l)}{l}, \varepsilon_m(l) = |\alpha_m - \frac{f_m(l)}{l}|.$$

και το t_m να είναι αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε τα $\varepsilon_m(t_m), \mu_m(t_m)$ να είναι αρκετά μικρά.

$$\begin{aligned} - \text{Θέτουμε } S(t_1, t_2, \dots, t_m) &= \{X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m) : s^m(X) \geq \\ &(\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m \text{ και } p^m(X) \geq (\alpha_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m}\}, \end{aligned}$$

και

$$g_{m+1}(l) = \max\{s^{m+1}(X) : X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, l)\}.$$

Όπως και πριν, ορίζουμε

$$\beta_{m+1} = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{g_{m+1}(l)}{l}.$$

Λήμμα 4. (i) Για κάθε l και m ,

$$\beta_{m+1} \leq \frac{g_{m+1}(l)}{l}.$$

(ii)

$$\beta_{m+1} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{g_{m+1}(l)}{l}.$$

Απόδειξη. (i) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο m .

- Για $m = 0$, είναι

$$g_1(l) = \max\{s^1(X) : X \in B(\emptyset)\} = l,$$

για κάθε l , επομένως

$$\beta_{m+1} \leq 1 = \frac{g_1(l)}{l}.$$

- Έστω ότι το (i) ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο το πολύ m . Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $m+1$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και l τυχαίος. Τότε, αφού $\beta_{m+1} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{g_{m+1}(l)}{l}$, για άπειρους αρκετά μεγάλους θετικούς ακέραιους L , ισχύει ότι

$$\frac{g_{m+1}(L)}{L} > \beta_{m+1} - \varepsilon.$$

Εφ' όσον $g_{m+1}(L) = \max\{s^{m+1}(X) : X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, L)\}$, θα υπάρχει $Y \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, L)$, τέτοιο ώστε

$$s^{m+1}(Y) = g_{m+1}(L) > (\beta_{m+1} - \varepsilon)L.$$

Επομένως, αν

$$Y = \bigcup_{i < L} Y_i, \quad Y_i \in B(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

είναι η κανονική διαμέριση του Y σε L υποδομές διάστασης m , τότε τουλάχιστον $s^{m+1}(Y) = g_{m+1}(L)$ από αυτές θα ανήκουν στην $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$. Θεωρούμε την Ευκλείδεια Διαίρεση του L με το l . Τότε $L = lv + r$, όπου $0 \leq r < l$. Τότε, εξαιρώντας τις τελευταίες r υποδομές από την επιλογή μας, τουλάχιστον $g_{m+1}(L) - r$ από τις υποδομές $Y_0, Y_1, \dots, Y_{lv-1}$ που απομένουν, θα ανήκουν στην $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$. Όμως, από τον ορισμό των βασικών δομών, έχουμε ότι όλα τα v σύνολα $\bigcup_{j < l} Y_{li+j}$, $i < v$, ανήκουν στην

$B(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$ (αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίον δεν μας ενδιαφέρουν οι τελευταίες r υποδομές, δηλαδή δεν φτάνουν για να φτιάξουμε δομή που να ανήκει στην $B(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$). Άρα, τουλάχιστον μία από αυτές τις v δομές της $B(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$ (έστω

η $\bigcup_{j < l} Y_{li_0+j}$ θα πρέπει να έχει τουλάχιστον $\frac{1}{v}(g_{m+1}(L) - r)$ από τις l υποδομές της Y_i μέσα στην $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$ (διαφορετικά θα ήταν

$$s^{m+1}(\bigcup_{i < lv-1} Y_i) = \sum_{i < v} s^{m+1}(\bigcup_{j < l} Y_{li_0+j}) < (g_{m+1}(L) - r),$$

άτοπο). Άρα,

$$\begin{aligned} g_{m+1}(l) &\geq s^{m+1}(\bigcup_{j < l} Y_{li_0+j}) \geq \frac{1}{v}(g_{m+1}(L) - r) \\ &> \frac{1}{v}((\beta_{m+1} - \varepsilon)L - r) \\ &\geq \frac{1}{v}((\beta_{m+1} - \varepsilon)lv - l) \end{aligned}$$

κι άρα

$$\frac{g_{m+1}(l)}{l} > \beta_{m+1} - \varepsilon - \frac{1}{v}.$$

Παρατηρούμε, όμως, επιλέγοντας αρκετά μεγάλο L , μπορούμε να κάνουμε το $\varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό και το $v > \frac{L}{l} - 1$ οσοδήποτε μεγάλο, επομένως πρέπει

$$\frac{g_{m+1}(l)}{l} \geq \beta_{m+1}.$$

(ii) Από το (i),

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{g_{m+1}(l)}{l} \geq \beta_{m+1} = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{g_{m+1}(l)}{l},$$

επομένως

$$\beta_{m+1} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{g_{m+1}(l)}{l}.$$

■

Εύκολη συνέπεια του Λήμματος 4 είναι ότι οι κεκορεσμένες δομές περιέχουν στοιχεία του R (και στην πραγματικότητα είναι πολλά αυτά):

Πόρισμα. Έστω $Y \in S(t_1, t_2, \dots, t_r)$, $1 \leq r \leq m$. Τότε $Y \cap R \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο r .

- Για $r = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} S(t_1) &= \{X \in B(t_1) : p^1(X) > (\alpha_1 - \varepsilon_1(t_1)^{\frac{1}{4}})t_1\} \\ &= \{X \in B(t_1) : |X \cap R| > (\alpha_1 - \varepsilon_1(t_1)^{\frac{1}{4}})t_1\}, \end{aligned}$$

άρα, εφ' όσον $Y \in S(t_1)$,

$$|Y \cap R| > (\alpha_1 - \varepsilon_1(t_1)^{\frac{1}{4}})t_1 > 0.$$

Επομένως, $Y \cap R \neq \emptyset$.

- Έστω ότι το συμπέρασμα ισχύει για $r < m$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $r + 1$. Πράγματι, έστω $Y \in S(t_1, t_2, \dots, t_{r+1})$. Από το Λήμμα 4, έπεται προφανώς ότι $\lim_{l \rightarrow \infty} \mu_{r+1}(l) = 0$ κι άρα το t_{r+1} μπορεί να έχει επιλεγεί τόσο μεγάλο ώστε $\beta_{r+1} - \sqrt{\mu_{r+1}(t_{r+1})} > 0$. ($\beta_m > 0$ για κάθε m , από το Πόρισμα του Λήμματος 7, που θα αποδείξουμε στη συνέχεια). Επομένως, από τον ορισμό της $S(t_1, t_2, \dots, t_{r+1})$,

$$s^{r+1}(Y) > (\beta_{r+1} - \sqrt{\mu_{r+1}(t_{r+1})})t_{r+1} > 0.$$

Επομένως, υπάρχει υποδομή Y_i της κανονικής διαμέρισης του Y με $Y_i \in S(t_1, t_2, \dots, t_r)$. Από την επαγωγική υπόθεση,

$$Y_i \cap R \neq \emptyset$$

κι άρα

$$Y \cap R \neq \emptyset.$$

■

Προφανώς, μόλις ολοκληρωθεί ο επαγωγικός ορισμός των κεκορεσμένων και τέλειων δομών, το Πόρισμα θα ισχύει για κάθε m .

Λήμμα 5. Αν $\beta_m = 1$ για κάποιο $m \geq 2$, τότε το R περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους.

Απόδειξη. Έστω ότι $\beta_m = 1$ για κάποιο $m \geq 2$. Από το Λήμμα 4, έχουμε ότι $g_m(l) \geq l\beta_m = l$ κι άρα για κάθε l ,

$$g_m(l) = l.$$

Επομένως, υπάρχει

$$X = \bigcup_{i < l} X_i \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, l)$$

τέτοιο ώστε $X_i \in S(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})$ για κάθε $i < l$. Τώρα, η σχέση της R-ισοδυναμίας διαμερίζει την κλάση $S(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})$ σε $2^{t_1 \dots t_{m-1}}$ το πολύ κλάσεις ισοδυναμίας. Θεωρούμε διαμέριση του διαστήματος $[0, l)$ σε $2^{t_1 \dots t_{m-1}}$ το πολύ κλάσεις ως εξής:

οι i και j ανήκουν στην ίδια κλάση αν και μόνο αν τα X_i και X_j είναι R-ισοδύναμα.

Από την πεπερασμένη μορφή του Θεωρήματος van der Waerden, για l αρκετά μεγάλο, θα υπάρχει κάποια κλάση της διαμέρισης του $[0, l)$, η οποία να περιέχει αριθμητική πρόοδο $a, a + d, \dots, a + (k-1)d$ μήκους k . Αυτό σημαίνει ότι τα $X_a, X_{a+d}, \dots, X_{a+(k-1)d}$ είναι όλα R-ισοδύναμα. Όμως, από το Πόρισμα του Λήμματος 4, $X_a \cap R \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $x \in X_a \cap R$. Επομένως, από τους ορισμούς της R-ισοδυναμίας και της πρώτης κανονικής διαμέρισης του X , έχουμε

$$x + d'i \in X_{a+di} \cap R, \quad i < k$$

όπου d' ο θετικός ακέραιος για τον οποίο $i = X_0 + d'i$. Δηλαδή το R περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k , όπου k αυθαίρετος. Συνεπώς, το R περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους. ■

Συνεχίζοντας τους ορισμούς όπως και στις προηγούμενες διαστάσεις, θέτουμε

$$\begin{aligned} \mu_{m+1}(l) &= \left| \beta_{m+1} - \frac{g_{m+1}(l)}{l} \right| \\ &= \frac{g_{m+1}(l)}{l} - \beta_{m+1}, \end{aligned}$$

από το Λήμμα 4.

Έστω $X = \bigcup_{i < l} X_i \in B(t_1, t_2, \dots, t_m)$. Όπως και στην περίπτωση για $m = 1$, η R-ισοδυναμία διαμερίζει την $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$ το πολύ σε $2^{t_1 t_2 \dots t_m}$ κλάσεις ισοδυναμίας. Έστω $X = \bigcup_{i < l} X_i \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$. Θέτουμε με $\bar{p}^{m+1}(X)$ τον μέγιστο αριθμό υποδομών $X_i \in S(t_1, t_2, \dots, t_m)$ που να ανήκουν στην ίδια κλάση R-ισοδυναμίας της $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \bar{f}_{m+1}(l) &= \max\{\bar{p}^{m+1}(X) : X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, l) \text{ και} \\ &\quad s^{m+1}(X) \geq (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)})l\}, \\ \alpha_{m+1} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_{m+1}(l)}{l} \end{aligned}$$

Όπως και στον ορισμό της $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$, από τον ορισμό του β_{m+1} η $\bar{f}^{m+1}(X)$ είναι καλά ορισμένη, ενώ από τον ορισμό του α_{m+1} , υπάρχει ακολουθία l_n τέτοια ώστε

$$\alpha_{m+1} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_{m+1}(l_n)}{l_n}$$

Επομένως, υπάρχουν $X^{(n)} \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, l_n)$ με $\bar{f}_2(l_n) = \bar{p}^{m+1}(X^{(n)})$ κι άρα

$$s^{m+1}(X^{(n)}) \geq (\beta_2 - \sqrt{\mu_{m+1}(l_n)})l_n \text{ και } \alpha_{m+1} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}^{m+1}(X^{(n)})}{l_n}.$$

Λόγω του πεπερασμένου πλήθους των κλάσεων R-ισοδυναμίας, θα υπάρχει πάλι κλάση η οποία θα εμφανίζεται για άπειρα n στον ορισμό των $\bar{p}^{m+1}(X^{(n)})$, την οποία ονομάζουμε $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$, οπότε θα είναι και $P(t_1, t_2, \dots, t_m) \subseteq S(t_1, t_2, \dots, t_m)$. Δηλαδή, η $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$ είναι μια κλάση R-ισοδυναμίας της $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$ η οποία είναι επιλεγμένη έτσι ώστε αν ορίσουμε

$$\begin{aligned} f_{m+1}(l) &= \max\{p^{m+1}(X) : X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, l) \text{ και} \\ &\quad s^{m+1}(X) \geq (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)})l\}, \\ \varepsilon_{m+1}(l) &= |\alpha_{m+1} - \frac{f_{m+1}(l)}{l}|. \end{aligned}$$

να είναι

$$\alpha_{m+1} = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{f_{m+1}(l)}{l}.$$

Λήμμα 6.

$$\alpha_{m+1} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{f_{m+1}(l)}{l}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη παρουσιάζει ομοιότητες με τη απόδειξη του Λήμματος 4. Έστω $\varepsilon > 0$ και l τυχαίος. Τότε, αφού $\alpha_{m+1} = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{f_{m+1}(l)}{l}$, για άπειρους αρκετά μεγάλους θετικούς ακέραιους L , ισχύει ότι

$$\frac{f_{m+1}(L)}{L} > \alpha_{m+1} - \varepsilon.$$

Εφ' όσον

$$f_{m+1}(L) = \max\{p^{m+1}(X) : X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, L) \text{ και } s^{m+1}(X) \geq (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(L)})L\},$$

θα υπάρχει $X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, L)$, τέτοιο ώστε

$$p^{m+1}(X) = g_{m+1}(L) > (\beta_{m+1} - \varepsilon)L$$

και

$$s^{m+1}(X) \geq (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(L)})L.$$

Θεωρούμε την Ευκλείδεια Διαίρεση του L με το l . Τότε $L = lv + r$, όπου $0 \leq r < l$. Θεωρούμε, επίσης, την κανονική διαμέριση του X ,

$$X = \bigcup_{i < L} X_i, \quad X_i \in B(t_1, t_2, \dots, t_m).$$

Για $0 \leq i < v$, θέτουμε

$$Y_i = \bigcup_{j < l} X_{li+j}$$

κι έστω

$$X' = \bigcup_{j < vl} X_j = \bigcup_{i < n} Y_i.$$

Έστω

$$T = \{j < v : s^{m+1}(Y_j) < (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)})l\}, \quad |T| = al.$$

Από τον ορισμό του μ_{m+1} συνεπάγεται πως για όλα τα $j < l$ ισχύει

$$s^{m+1}(Y_j) \leq (\beta_{m+1} + \mu_{m+1}(l))l.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \sum_{j < v} s^{m+1}(Y_j) &= \sum_{j \in T} s^{m+1}(Y_j) + \sum_{j \notin T} s^{m+1}(Y_j) \\ &\leq (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)})lan + (\beta_{m+1} + \mu_{m+1}(l))l(1-a)v. \end{aligned}$$

Όμως ισχύει ότι

$$\sum_{j < v} s^{m+1}(Y_j) = s^{m+1}(X') \geq s^{m+1}(X) - l \geq (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(L)})L - l.$$

Άρα,

$$(\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(L)})L - l \leq (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)})lan + (\beta_{m+1} + \mu_{m+1}(l))l(1-a)v,$$

οπότε μετά από τις πράξεις καταλήγουμε

$$\alpha(\sqrt{\mu_{m+1}(l)} + \mu_{m+1}(l)) \leq \mu_{m+1}(l) + \frac{1}{v} + \sqrt{\mu_{m+1}(L)}. \quad (3.1)$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι αν υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu_{m+1}(l) = 0$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$,

$$\mu_{m+1}(n) = 0.$$

Πράγματι, από το (i) του Λήμματος 4, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$,

$$\frac{g_{m+1}(n)}{n} \leq \frac{g_{m+1}(l)}{l}.$$

Οπότε,

$$\frac{g_{m+1}(n)}{n} - \beta_{m+1} \leq \frac{g_{m+1}(l)}{l} - \beta_{m+1} \Rightarrow \mu_{m+1}(n) \leq \mu_{m+1}(l) = 0.$$

Άρα,

$$\mu_{m+1}(n) = 0.$$

Επομένως, υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις:

(i) Αν $\mu_{m+1}(l') = 0$ τελικά για κάθε l' , τότε από τον ορισμό του μ_{m+1} ,

$$\frac{g_{m+1}(l')}{l'} = \beta_{m+1}$$

τελικά για κάθε l' . Όμως, ο $g_{m+1}(l')$ είναι ακέραιος μεταξύ 0 και l' , άρα πρέπει είτε $\beta_{m+1} = 0$ ή $\beta_{m+1} = 1$. Από το Λήμμα 5, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\beta_{m+1} = 0$. Τότε και $\alpha = 0$.

(ii) Αν $\mu_{m+1}(l') > 0$ τελικά για κάθε l' , τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το l είναι επιλεγμένο έτσι ώστε $\mu_{m+1}(l) > 0$. Από την 3.1 και το γεγονός ότι $\lim_{l \rightarrow \infty} \mu_{m+1}(l) = 0$, για αρκετά μεγάλο L (δηλαδή και αρκετά μεγάλο v), έχουμε

$$\alpha(\sqrt{\mu_{m+1}(l)} + \mu_{m+1}(l)) \leq \mu_{m+1}(l) + \frac{1}{v} + \sqrt{\mu_{m+1}(L)} < 2\mu_{m+1}(l).$$

Επομένως,

$$\alpha < \frac{2\mu_{m+1}(l)}{(\sqrt{\mu_{m+1}(l)} + \mu_{m+1}(l))} < 2\sqrt{\mu_{m+1}(l)}.$$

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση

$$\alpha \leq 2\sqrt{\mu_{m+1}(l)}.$$

Τώρα, έστω ότι για κάθε $j < v$, είτε

$$s^{m+1}(Y_j) < (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)})l$$

ή

$$p^{m+1}(Y_j) \leq (\alpha_{m+1} - 2\varepsilon)l.$$

Από τον ορισμό του α , υπάρχουν ακριβώς αn δείκτες j , που να ικανοποιούν την $s^{m+1}(Y_j) < (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)})l$. Επομένως, για τουλάχιστον $(1 - \alpha)n$ δείκτες πρέπει $p^{m+1}(Y_j) \leq (\alpha_{m+1} - 2\varepsilon)l$. Παρ' όλα αυτά, για τους αn δείκτες του T ισχύει ότι

$$p^{m+1}(Y_j) \leq s^{m+1}(Y_j) < (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)})l,$$

αφού $P(t_1, t_2, \dots, t_m) \subseteq S(t_1, t_2, \dots, t_m)$.

Άρα,

$$\begin{aligned} \sum_{j < v} p^{m+1}(Y_j) &= \sum_{j \in T} p^{m+1}(Y_j) + \sum_{j \notin T} p^{m+1}(Y_j) \\ &< (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)})l \alpha n + (\alpha_{m+1} - 2\varepsilon)l(1 - \alpha)n. \end{aligned}$$

Όμως ισχύει κι ότι

$$\sum_{j < v} p^{m+1}(Y_j) = p^{m+1}(X') \geq p^{m+1}(X) - l \geq (\alpha_{m+1} - \varepsilon)L - l.$$

Οπότε, συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες,

$$(\alpha_{m+1} - \varepsilon)L - l < (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)})l \alpha n + (\alpha_{m+1} - 2\varepsilon)l(1 - \alpha)n,$$

κι άρα διαιρώντας με ln έχουμε

$$\alpha_{m+1} - \varepsilon - \frac{1}{v} < \alpha(\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)}) + (1 - \alpha)(\alpha_{m+1} - 2\varepsilon). \quad (3.2)$$

Το δεξιό μέλος της 3.2 είναι ένας κυρτός συνδυασμός των $\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)}$ και $\alpha_{m+1} - 2\varepsilon$. Παρατηρούμε ότι καθώς $l \rightarrow \infty$,

$$\alpha \leq 2\sqrt{\mu_{m+1}(l)} \rightarrow 0$$

κι άρα

$$1 - \geq 1 - 2\sqrt{\mu_{m+1}(l)} \rightarrow 1.$$

Επομένως, αφού $\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)}$ φραγμένο, και για αρκετά μεγάλο L σε σχέση με το l (π.χ. $L > l^2$), $l \rightarrow \infty$ σημαίνει $n \rightarrow \infty$, έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} - \varepsilon - \frac{1}{n} &< a(\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)}) + (1 - a)(\alpha_{m+1} - 2\varepsilon) \rightarrow \alpha_{m+1} - 2\varepsilon \\ &\downarrow \\ \alpha_{m+1} - \varepsilon \end{aligned}$$

άτοπο.

Επομένως, υπάρχει δείκτης $j < n$ τέτοιος ώστε

$$s^{m+1}(Y_j) \geq (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_{m+1}(l)}) \text{ και } p^{m+1}(Y_j) > (\alpha_{m+1} - 2\varepsilon)l.$$

Άρα, από τον ορισμό του f_{m+1} ,

$$\frac{f_{m+1}(l)}{l} > \alpha_{m+1} - 2\varepsilon$$

για κάθε αρκετά μεγάλο l . Όμως, $\varepsilon > 0$ τυχαίο. Συνεπώς,

$$\alpha_{m+1} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{f_{m+1}(l)}{l}.$$

■

Η επόμενη ανισότητα είναι αρκετά σημαντική.

Λήμμα 7. Για κάθε $m \geq 1$,

$$\beta_{m+1} \geq 1 - 2(\sqrt{\mu_m(t_m)} + \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}}). \quad (3.3)$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε το δεξιό μέλος της 3.3 με $\varphi(t_m)$. Σημειώνουμε ότι όταν $\alpha_1 = 1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$f_1(l) = \max\{|X \cap B| : X \in B(l)\} > (1 - \varepsilon)l$$

για αρκούντως μεγάλες τιμές του l . Από αυτό συνεπάγεται άμεσα ότι το R περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha_1 < 1$. Φυσικά, από την Παρατήρηση 3 ξέρουμε ότι $\alpha_1 > 0$. Ακριβώς όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 6 έτσι κι εδώ καταλήγουμε στο ότι δεν μπορεί να ισχύει $\varepsilon_1(l) = 0$ για όλα αυτά τα l . Έτσι,

θα καθορίσουμε (αργότερα) ένα τέτοιο t_1 ώστε να ισχύει $\varepsilon_1(t_1) > 0$.

Εξ ορισμού των ε_m και α_m , για κάθε l υπάρχει $X \in B(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m l)$ τέτοιο ώστε

$$s^m(X) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m l)})t_m l \text{ και } p^m(X) \geq (\alpha_m - \varepsilon_m(t_m l))t_m l.$$

Γράφουμε

$$X = \bigcup_{i < t_m l} X_i, \quad X_i \in B(t_1, \dots, t_{m-1})$$

όπως συνήθως, ενώ για κάθε $j < l$, θέτουμε

$$Y_j = \bigcup_{i < t_m} X_{j t_m + i} \in B(t_1, \dots, t_m).$$

Συμβολίζουμε το X με Y όταν πρόκειται για ένα στοιχείο του $B(t_1, \dots, t_m, l)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$s^{m+1}(Y) \geq \varphi(t_m)l$$

για μεγάλο l . Αυτό αρκεί για την απόδειξη του Λήμματος 7 καθώς σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$g_{m+1}(l) \geq s^{m+1}(Y) \geq \varphi(t)l,$$

$$\frac{g_{m+1}(l)}{l} \geq \varphi(t_m) \text{ για αρκετά μεγάλα } l,$$

ώστε

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{g_{m+1}(l)}{l} = \beta_{m+1} \geq \varphi(t_m)$$

όπως απαιτείται. Το βασικό επιχείρημα θα είναι στην ουσία το ίδιο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο Λήμμα 6 μόνο που εδώ θα τον εφαρμόσουμε δύο φορές, μία για το s^m και μία για το p^m . Έστω

$$T_1 = \{j < l : s^m(Y_j) < (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m\}, \quad |T_1| = al.$$

Από τον ορισμό του μ_m συνεπάγεται πως για όλα τα $j < l$ ισχύει

$$s^m(Y_j) \leq (\beta_m + \mu_m(t_m))t_m.$$

Οπότε,

$$\sum_{j < l} s^m(Y_j) \leq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m \alpha l + (\beta_m + \mu_m(t_m))t_m(1 - \alpha)l.$$

Όμως ισχύει ότι

$$\sum_{j < l} s^m(Y_j) = s^m(X) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m l)})t_m l.$$

Άρα,

$$(\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m l \leq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m \alpha l + (\beta_m + \mu_m(t_m))t_m(1 - \alpha)l,$$

και

$$\alpha(\sqrt{\mu_m(t_m)} + \mu_m(t_m)) \leq \mu_m(t_m) + \sqrt{\mu_m(t_m l)}. \quad (3.4)$$

Εάν $m = 1$ τότε $\mu_m(l') = \mu_1(l') = 0$ για κάθε l' , οπότε αφού $s^1(Y_j) = t_1$ για κάθε $j < l$, έχουμε ότι $T_1 = \emptyset$, δηλ. $\alpha = 0$. Συνεπώς, η ανισότητα

$$\alpha \leq 2\sqrt{\mu_m(t_m)} \quad (3.5)$$

ισχύει τετριμμένα.

Έστω $m > 1$. Αν $\mu_m(l') = 0$ για όλα τα αρκούντως μεγάλα l' , τότε ο ισχυρισμός της απόδειξης του Λήμματος 6 μας οδηγεί στο ότι πρέπει να έχουμε $\beta_m = 0$. Άρα, από τον ορισμό του T_1 έπεται $\alpha = 0$ και η 3.5 ισχύει. Αν τώρα $\mu_m(l') > 0$ για άπειρα l' , μπορούμε να βρούμε τέτοιο t_m ώστε να ισχύει $\mu_m(t_m) > 0$. Σε αυτή την περίπτωση, για μεγάλο l παίρνουμε από την 3.4

$$\alpha \leq \frac{2\mu_m(t_m)}{\sqrt{\mu_m(t_m)} + \mu_m(t_m)} < 2\sqrt{\mu_m(t_m)}.$$

Άρα η 3.5 ισχύει σε κάθε περίπτωση.

Τώρα, ας είναι

$$T_2 = \{j < l : s^m(Y_j) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m\}$$

και

$$p^m(Y_j) < (a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}})t_m\},$$

$$|T_2| = bl.$$

Αν $j \notin T_1$, τότε $s^m(Y_j) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m$ κι άρα

$$Y_j \in \{X \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, t_m) : s^m(Y_j) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m\},$$

Επομένως, από τον ορισμό των f_m και ε_m έχουμε

$$p^m(Y_j) \leq f_m(t_m) \leq (a_m + \varepsilon_m(t_m))t_m.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{j < l} p^m(Y_j) = \sum_{j \in T_1} p^m(Y_j) + \sum_{j \in T_2} p^m(Y_j) + \sum_{j \notin T_1 \cup T_2} p^m(Y_j)$$

$$a_l t_m + (a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}})t_m b l + (1 - a - b)l(a_m + \varepsilon_m(t_m))t_m$$

$$\leq 2t_m l \sqrt{\mu_m(t_m)} + (a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}})t_m b l + (1 - b)(a_m + \varepsilon_m(t_m))t_m l$$

για αρκούντως μεγάλο l . Όμως

$$\sum_{j < l} p^m(Y_j) = p^m(X) \geq (a_m - \varepsilon_m(t_m)l)t_m l.$$

Έτσι,

$$a_m - \varepsilon_m(t_m l) \geq 2\sqrt{\mu_m(t_m)} + a_m + \varepsilon_m(t_m) - b(\sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)} + \varepsilon_m(t_m)}).$$

Άρα,

$$b(\sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)} + \varepsilon_m(t_m)}) \geq 2\sqrt{\mu_m(t_m)} + \varepsilon_m(t_m) + \varepsilon_m(t_m l). \quad (3.6)$$

- Αν $m = 1$ τότε από την επιλογή του t_1 , έχουμε $\varepsilon_m(t_m) > 0$, και άρα $\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)} > 0$.
- Αν $m > 1$, τότε από επαγωγή (για ένα κατάλληλα μεγάλο t_m) και από το Λήμμα 5 παίρνουμε $0 < \beta_m < 1$. Από αυτό συνεπάγεται πως μπορούμε να διαλέξουμε το t_m τέτοιο ώστε $\mu_m(t_m) > 0$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση

$$\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)} > 0.$$

Έτσι, αφού για αρκούντως μεγάλο l ,

$$\varepsilon_m(t_m l) \leq \varepsilon_m(t_m) < \sqrt{\varepsilon_m(t_m)},$$

τότε από την 3.6 παίρνουμε

$$b \leq 2\sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}}.$$

Όμως για $j \notin T_1 \cup T_2$,

$$Y_j \in S(t_1, \dots, t_m).$$

Συνεπώς

$$s^{m+1}(Y) \geq (1 - a - b)l \geq \varphi(t_m)l$$

και η απόδειξη του Λήμματος είναι πλήρης. ■

Πόρισμα. (i) $\beta_{m+1} > 0$.

(ii) $S(t_1, t_2, \dots, t_m), P(t_1, t_2, \dots, t_m) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. (i) Προφανώς, από το Λήμμα 7, το β_{m+1} είναι πολύ κοντά στο 1.

(ii) Έστω $Y \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$ με $g_{m+1}(l) = s^{m+1}(Y)$, τότε, από το (i),

$$s^{m+1}(Y) = g_{m+1}(l) \geq \beta_{m+1}l > 0,$$

άρα υπάρχει $Y_i \in S(t_1, t_2, \dots, t_m)$, επομένως $S(t_1, t_2, \dots, t_m) \neq \emptyset$.

Επίσης, εφ' όσον η $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$ είναι κλάση R-ισοδυναμίας της $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$, από τον ορισμό του $f_{m+1}(l)$, είναι

$$f_{m+1}(l) \geq g_{m+1}(l)2^{-t_1 \dots t_m}$$

κι άρα

$$\alpha_{m+1} \geq \beta_{m+1}2^{-t_1 \dots t_m} > 0.$$

Άρα, $P(t_1, t_2, \dots, t_m) \neq \emptyset$. ■

Στην Παράγραφο 4.2 θα επιλέξουμε το t_{m+1} τόσο μεγάλο ώστε να ισχύουν όλα τα παραπάνω.

3.2 Πλήρεις Δομές

Συνεχίζουμε με τον ορισμό των *Πλήρων Δομών*, που είναι οι δομές εκείνες των οποίων κάθε υποδομή τους στην κανονική τους διαμέριση ανήκει στην προηγούμενη κεκορεσμένη δομή.

Ορισμός 8. Θα λέμε *κλάσεις Πλήρων Δομών* $(m+1)$ -*διαστάσεων* τα σύνολα

$$C(t_1, t_2, \dots, t_m, l) = \{X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, l) : s^{m+1}(X) = l\}$$

Δηλαδή, αν $X = \bigcup_{i < l} X_i \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$, τότε για κάθε $i < l$ είναι $X_i \in S(t_1, t_2, \dots, t_m)$.

Το επόμενο Λήμμα μας εξασφαλίζει ότι πράγματι υπάρχουν τέτοιες κλάσεις πλήρων δομών.

Λήμμα 8. Αν $\beta_{m+1} > 1 - \frac{1}{l}$, τότε $C(t_1, t_2, \dots, t_m, l) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4, αν $\beta_{m+1} > 1 - \frac{1}{l}$, τότε

$$l \geq g_{m+1}(l) \geq l\beta_{m+1} > l(1 - \frac{1}{l}) = l - 1$$

επομένως $g_{m+1}(l) = l$. Συνεπώς, από τον ορισμό του $g_{m+1}(l)$ υπάρχει

$$X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, l) \text{ με } s^{m+1}(X) = l.$$

Άρα

$$C(t_1, t_2, \dots, t_m, l) \neq \emptyset.$$

■

Από τον ορισμό της $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$, αν $Y \in S(t_1, t_2, \dots, t_m)$, τότε

$$s^m(Y) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m$$

και

$$p^m(Y) \geq (\alpha_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}})t_m,$$

δηλαδή τα Y_i στην κανονική διαμέριση του Y που ανήκουν την προηγούμενη τέλεια κλάση είναι κοντά στο αναμενόμενο μέγιστο ποσοστό α_m , όπου το i κινείται σε όλο το διάστημα $[0, t_m)$.

Το παραπάνω σχόλιο μπορεί να βελτιωθεί στις πλήρεις κλάσεις, εξετάζοντας τη συμπεριφορά των υποδομών της κανονικής διαμέρισης, όχι σε όλο το διάστημα $[0, t_m)$, αλλά σε αρκετά μεγάλα υποσύνολά του. Δηλαδή, αν $X \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$, όλα τα X_i στην κανονική διαμέριση του X ανήκουν στην $S(t_1, t_2, \dots, t_m)$, κι άρα λόγω της καλής συμπεριφοράς συνολικά όλων των X_i σε αρκετά μεγάλο υποσύνολο C του $[0, t_m)$, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα X_i με πολλές απο τις υποδομές του με δείκτη από το C να ανήκουν στην προηγούμενη τέλεια κλάση (είναι η ίδια λογική με επιχειρήματα του τύπου "μεγάλος μέσος όρος σημαίνει ότι σίγουρα παρουσιάζονται τιμές τουλάχιστον όσο ο μέσος όρος). Χρειαζόμαστε πρώτα τον εξής ορισμό:

Ορισμός 9. Έστω $X = \bigcup_{i < l} X_i \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, l)$ και $C \subseteq [0, t_m)$. Ορίζουμε

$$s_C^m(X) = |\{i < l : i \in C, X_i \in S(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})\}|$$

$$p_C^m(X) = |\{i < l : i \in C, X_i \in P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})\}|$$

Πρόταση 3. Για κάθε δ και τ , υπάρχει l τέτοιο ώστε αν

$$X \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, l), \quad C \subseteq [0, t_m) \text{ με } |C| \geq \tau t_m,$$

και t_m αρκετά μεγάλο συναρτήσει του l , τότε υπάρχει i και i' τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} p_C^m(X_i) &> (\alpha_m - \delta)|C| \\ p_C^m(X_{i'}) &< (\alpha_m + \delta)|C| \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη παρουσιάζει ομοιότητες με την απόδειξη του Λήμματος 7. Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 6, από το γεγονός ότι έχουμε υποθέσει ότι $\beta_m < 1$ και την ανισότητα του Λήμματος 7, υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλα l για τα οποία $\mu_m(l) > 0$. Επιλέγουμε ένα τέτοιο l . Θεωρούμε την δεύτερη κανονική διαμέριση του X ,

$$X_i = \bigcup_{j < t_m} X_{i,j}, \quad i < l.$$

Θέτουμε

$$Y_j = \bigcup_{i < l} X_{i,j}, \quad j < t_m.$$

Τότε, προφανώς $Y_j \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, l)$. Επίσης, $X \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$, οπότε για κάθε $i < l$,

$$X_i \in S(t_1, t_2, \dots, t_m).$$

Επομένως,

$$s^m(X_i) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m \text{ και } p^m(X_i) > \left(\alpha_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}} \right) t_m$$

για κάθε $i < l$. Άρα,

$$\sum_{i < l} s^m(X_i) = \sum_{j < t_m} s^m(Y_j) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m l.$$

Όπως και σε προηγούμενες αποδείξεις, θέτουμε

$$T'_1 = \{j < t_m : s^m(Y_j) < (\beta_m - \sqrt{\mu_m(l)})l\}, \quad |T'_1| = a't_m.$$

Από τον ορισμό του μ_m , έχουμε

$$s^m(Y_j) \leq (\beta_m + \mu_m(l))l$$

για κάθε $j < t_m$. Άρα,

$$\begin{aligned} \sum_{j < t_m} s^m(Y_j) &= \sum_{j \in T'_1} s^m(Y_j) + \sum_{j \notin T'_1} s^m(Y_j) \\ &\leq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(l)})a't_m l + (\beta_m + \mu_m(l))(1 - a')t_m l. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$(\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_m)})t_m l \leq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(l)})a't_m l + (\beta_m + \mu_m(l))(1 - a')t_m l.$$

Οπότε, μετά από τις πράξεις παίρνουμε

$$a'(\sqrt{\mu_m(l)} + \mu_m(l))\sqrt{\mu_m(t_m)} + \mu_m(l),$$

ενώ για αρκετά μεγάλο t_m σε σχέση με το l είναι $\sqrt{\mu_m(t_m)} < \mu_m(l)$ κι άρα

$$a' \leq \frac{2\mu_m(l)}{\sqrt{\mu_m(l)} + \mu_m(l)} < 2\sqrt{\mu_m(l)}.$$

Τώρα, ας είναι

$$T'_2 = \{j < t_m : s^m(Y_j) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(l)})l \text{ και } p^m(Y_j) < (a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(l)} + \sqrt{\mu_m(l)}})l\},$$

$$|T'_2| = b't_m.$$

Αν $j \notin T'_1$, τότε $s^m(Y_j) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(l)})l$ κι άρα

$$Y_j \in \{X \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, l) : s^m(Y_j) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(l)})l\},$$

Επομένως, από τον ορισμό των f_m και ε_m έχουμε

$$p^m(Y_j) \leq f_m(l) \leq (a_m + \varepsilon_m(l))l, \quad j \notin T'_1 \quad (3.7)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \sum_{j < t_m} p^m(Y_j) &= \sum_{j \in T'_1} p^m(Y_j) + \sum_{j \in T'_2} p^m(Y_j) + \sum_{j \notin T'_1 \cup T'_2} p^m(Y_j) \\ &\leq a'lt_m + (a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(l)} + \sqrt{\mu_m(l)}})t_m b'l + (1 - a' - b')l(a_m + \varepsilon_m(l))t_m \\ &\leq 2t_m l \sqrt{\mu_m(l)} + (a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(l)} + \sqrt{\mu_m(l)}})t_m b'l + (1 - a' - b')(a_m + \varepsilon_m(l))t_m l \end{aligned}$$

για αρκούντως μεγάλο t_m σε σχέση με το l . Όμως

$$\begin{aligned} \sum_{j < t_m} p^m(Y_j) &= \sum_{j < l} p^m(X_i) \geq (a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(l)} + \sqrt{\mu_m(l)}}) t_m l \\ &\geq (a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}}) t_m l. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} &(a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}}) t_m l \\ &\leq 2t_m l \sqrt{\mu_m(l)} + (a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(l)} + \sqrt{\mu_m(l)}}) t_m b' l + (1 - a' - b')(a_m + \varepsilon_m(l)) t_m l \end{aligned}$$

κι ύστερα από τις πράξεις,

$$b'(\sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}} + \varepsilon_m(t_m)) \geq 2\sqrt{\mu_m(t_m)} + \varepsilon_m(t_m) + \varepsilon_m(t_m l).$$

Εύκολα καταλήγουμε ότι

$$b' \leq 2\sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(t_m)} + \sqrt{\mu_m(t_m)}}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} &|[0, t_m] \setminus (T'_1 \cup T'_2)| \\ &= |\{j < t_m : s^m(Y_j) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(l)})l \text{ και } p^m(Y_j) \geq (a_m - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(l)} + \sqrt{\mu_m(l)}})l\}| \\ &\geq (1 - a' - b') t_m \\ &\geq (1 - 2(\sqrt{\mu_m(l)} + \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(l)} + \sqrt{\mu_m(l)}})) t_m \end{aligned} \tag{3.8}$$

Επίσης, για αρκετά μεγάλο l ισχύουν ότι:

- $\sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(l)} + \sqrt{\mu_m(l)}} < \frac{\delta}{2}$
- $\varepsilon_m(l) < \frac{\delta}{2}$
- $2(\sqrt{\mu_m(l)} + \sqrt{\sqrt{\varepsilon_m(l)} + \sqrt{\mu_m(l)}}) < \frac{\tau\delta}{4}$

Επομένως, από την 3.7, η 3.8 γίνεται

$$\left| \left\{ j < t_m : \left(\alpha_m - \frac{\delta}{2} \right) < p^m(Y_j) < \left(\alpha_m + \frac{\delta}{2} \right) \right\} \right| > \left(1 - \frac{\tau\delta}{4} \right) t_m.$$

Τώρα, έστω

$$p^m(X_i, C) \leq (\alpha_m - \delta)|C|$$

για κάθε $i < l$. Τότε

$$\sum_{j \in C} p^m(Y_j) = \sum_{i < l} p^m(X_i, C) \leq (\alpha_m - \delta)|C|l.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in C} p^m(Y_j) &\geq \sum_{j \in C \setminus (T'_1 \cup T'_2)} p^m(Y_j) \\ &\leq \left(\alpha_m - \frac{\delta}{2} \right) |C \setminus (T'_1 \cup T'_2)| \\ &\geq \left(\alpha_m - \frac{\delta}{2} \right) l \left(|C| - \frac{\tau\delta}{4} t_m \right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \left(\alpha_m - \frac{\delta}{2} \right) \left(|C| - \frac{\tau\delta}{4} t_m \right) &\leq (\alpha_m - \delta)|C| \\ \Rightarrow \frac{\delta}{2}|C| &\leq \left(\alpha_m - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\tau\delta}{4} t_m < \frac{\tau\delta}{4} t_m, \end{aligned}$$

άτοπο, γιατί $|C| \geq \tau t_m$. Επομένως, υπάρχει i τέτοιο ώστε

$$p_C^m(X_i) > (\alpha_m - \delta)|C|.$$

Τέλος, έστω ότι

$$p^m(X_i, C) \leq (\alpha_m + \delta)|C|$$

για κάθε $i < l$. Τότε

$$\sum_{j \in C} p^m(Y_j) = \sum_{i < l} p^m(X_i, C) \geq (\alpha_m + \delta)|C|l.$$

Όμως, από την 3.7,

$$|\{j < t_m : p^m(Y_j) \leq (a_m + \varepsilon_m(l))l\}| \leq |T'_1| = a't_m \leq 2\sqrt{\mu_m(l)}t_m.$$

Άρα,

$$\sum_{j \in C} p^m(Y_j) = \sum_{j \in C \cap T'_1} p^m(Y_j) + \sum_{j \in C \setminus T'_1} p^m(Y_j) \leq 2\sqrt{\mu_m(l)}t_m l + (a_m + \varepsilon_m(l))|C|l.$$

Επομένως, συγκρίνοντας τις δύο ανισότητες, έχουμε

$$\begin{aligned} (a_m + \delta)|C|l &\leq 2\sqrt{\mu_m(l)}t_m l + (a_m + \varepsilon_m(l))|C|l \\ \Rightarrow |C| &\leq \frac{\sqrt{\mu_m(l)}}{\delta - \varepsilon_m(l)} t_m. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\frac{\sqrt{\mu_m(l)}}{\delta - \varepsilon_m(l)} \rightarrow 0, \text{ καθώς } l \rightarrow \infty,$$

άτοπο, αφού $|C| \geq \tau t_m$ κι άρα υπάρχει i' τέτοιο ώστε

$$p_C^m(X_{i'}) > (a_m + \delta)|C|.$$

■

3.3 Ιδεώδεις Δομές

Οι κλάσεις *Ιδεωδών Δομών* είναι ουσιαστικά οι κλάσεις εκείνων των δομών, που από εξ ορισμού, ανιχνεύουν μέσα στο $\mathbb{R}$ αριθμητικές προόδους μήκους i , επαγωγικά για κάθε $i \leq K$ (άρα και αριθμητικές προόδους μήκους K), όπου K αυθαίρετος φυσικός.

Ορισμός 10. Έστω $i < K$, όπου θετικός ακέραιος. Ορίζουμε

- $D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = \{X \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, K) : X = \bigcup_{j < K} X_j \text{ και } X_j \in P(t_1, t_2, \dots, t_m) \text{ για κάθε } j < K\},$
- $D^{*i}(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = \{X \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, K) : X = \bigcup_{j < K} X_j \text{ και } X_j \in P(t_1, t_2, \dots, t_m) \text{ για κάθε } j < K\},$

οι οποίες θα λέγονται *κλάσεις Ιδεωδών Δομών* και *μη πλήρεις κλάσεις Ιδεωδών Δομών* αντίστοιχα, $m+1$ -διαστάσεων και τάξης i .

Παρατήρηση 4. Από τον Ορισμό 10 προκύπτει άμεσα ότι:

- $D^0(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = C(t_1, t_2, \dots, t_m, K),$
- $D^{*0}(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = B(t_1, t_2, \dots, t_m, K).$

Παρατήρηση 5. Αν $D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \neq \emptyset$, τότε το R περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους i .

Η βασική ιδέα όλης της απόδειξης είναι να δείξουμε με επαγωγή στο i ότι $D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \neq \emptyset$, για κάθε m , δεδομένου ότι έχουμε επιλέξει τα t_m αρκετά μεγάλα ώστε να ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες. Τότε, αν η $D^K(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \neq \emptyset$, θα έχουμε σίγουρα βρει αριθμητική πρόοδο μήκους μέσα στο R , λόγω του ορισμού της $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$ σαν υποσύνολο της ίδιας κλάσης R -ισοδυναμίας.

Κεφάλαιο 4

Μερικά Λήμματα στις Αριθμητικές Προόδους και η επιλογή των t_m

4.1 Μερικά Λήμματα στις Αριθμητικές Προόδους

Ορισμός 11. Θέτουμε

- $E(t, K) = \{(j_0, \dots, j_{k-1}) : j_i < t \text{ για κάθε } i < K, \text{ όπου } j_0, \dots, j_{k-1} \text{ αριθμητική πρόοδος}\}$
- Για $i < K, j < t$, $E(t, K, j, i) = \{(j_0, \dots, j_{k-1}) \in E(t, K) : j_i = j\}$
- Για $i < K, j < t$, $e(t, K, j, i) = |E(t, K, j, i)|$

όπου η $j_0, \dots, j_{k-1}$ μπορεί να είναι αύξουσα, φθίνουσα ή και σταθερή αριθμητική πρόοδος.

Λήμμα 9. Έστω $X = \bigcup_{i < K} X_i \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ και περαιτέρω

$$X_i = \bigcup_{j < t_m} X_{i,j} \in B(t_1, t_2, \dots, t_m), \text{ όπου } X_{i,j} \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}).$$

Τότε

$$(j_0, \dots, j_{k-1}) \in E(t, K) \text{ αν και μόνο αν } \bigcup_{i < K} X_{i,j} \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, K).$$

Απόδειξη. Έχουμε $X_i = \bigcup_{j < t_m} X_{i,j} \in B(t_1, t_2, \dots, t_m)$, οπότε

$$X_{i,j} = X_{0,j} + d'j, j < t_m, \text{ για κάποιο θετικό ακέραιο } d'.$$

Όμως $X = \bigcup_{i < K} X_i \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$, άρα

$$X_i = X_0 + di, i < K, \text{ για κάποιο θετικό ακέραιο } d,$$

επομένως $X_{i,j} = X_{0,j} + di, j < t_m$ κι άρα

$$X_{i,j_i} = X_{0,j_i} + dj_i = (X_{0,0} + d'j_i) + dj_i = X_{0,0} + (d' + d)j_i.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i < K} X_{i,j} \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, K) \\ \Leftrightarrow & (d' + d)j_i, i < K \text{ αριθμητική πρόοδος μήκους } K \text{ φραγμένη από } t_m \\ \Leftrightarrow & j_0, \dots, j_{K-1} \text{ αριθμητική πρόοδος μήκους } K \text{ φραγμένη από } < t_m \\ \Leftrightarrow & (j_0, \dots, j_{K-1}) \in E(t, K) \end{aligned}$$

■

Λήμμα 10. Ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $e(t, K, j, i) \leq t,$

(ii) Για $\frac{t}{4} < j < \frac{3t}{4}, K \geq 2$ και $t \geq 4$

$$e(t, K, j, i) \geq \frac{t}{K^2}.$$

Απόδειξη. (i) Αν $(j_0, \dots, j_{K-1}) \in E(t, K, j, i)$ τότε $j_s < t$ για κάθε $s < K$, και $j_i = j$. Επομένως, αν $K > 1$ (η περίπτωση $K = 1$ είναι τετριμμένη), η επιλογή του j_{i+1} (ή του j_{i-1} αν $i = K - 1$) καθορίζει πλήρως όλη την υπόλοιπη αριθμητική πρόοδο. Όμως υπάρχουν το πολύ t δυνατές επιλογές για το j_{i+1} (ή το j_{i-1} αν $i = K - 1$), οπότε $e(t, K, j, i) \leq t$

(ii) Έστω, πάλι, $(j_0, \dots, j_{K-1}) \in E(t, K, j, i)$. Παρατηρούμε ότι όσο πιο πολύ απέχει το j από το $[\frac{t}{2}]$, τόσο περισσότερες επιλογές έχουμε για τον δεύτερο όρο της προόδου που θα καθορίσει και ολόκληρη την πρόοδο, κάνοντας φθίνουσα την πρόοδο αν $j > [\frac{t}{2}]$ και αύξουσα αν $j < [\frac{t}{2}]$.

Άρα η χειρότερη περίπτωση συμβαίνει όταν $j = [\frac{t}{2}]$ και $i = K - 1$. Προφανώς, για να είναι $(\alpha, \alpha + d, \dots, \alpha + (K - 1)d) \in E(t, K, [\frac{t}{2}], K - 1)$, με $\alpha \geq 0, d \geq 0$, πρέπει

$$\begin{aligned} \alpha + (K - 1)d = [\frac{t}{2}] & \Rightarrow 0 \leq d = \frac{[\frac{t}{2}] - \alpha}{K - 1} \\ & \leq \frac{[\frac{t}{2}]}{K - 1} \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε τουλάχιστον $\frac{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}{K-1}$ επιλογές για το d κι επειδή $\frac{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}{K-1} \geq \frac{t}{K^2}$, έχουμε

$$e(t, K, j, i) \geq \frac{t}{K^2}.$$

■

Λήμμα 11. Έστω $t > l^3 > 1$ και $L \subseteq [0, t)$ με $|L| > (1 - \frac{1}{l})t$. Τότε το L περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους l .

Απόδειξη. Έστω $t = t'l + r$, όπου $0 \leq r < l$. Θεωρούμε τη διαμέριση του $[0, t'l)$ στα $I_j = [jl, (j+1)l)$, $j < t'$. Επειδή $|L| > (1 - \frac{1}{l})t$, είναι

$$|[0, t) \setminus L| = |[0, t)| - |L| < \frac{t}{l} = \frac{t'l+r}{l} \leq t' + 1, \text{ δηλαδή, } |[0, t) \setminus L| \leq t'.$$

Επομένως, $|[0, t'l) \setminus L| \leq |[0, t) \setminus L| \leq t'$. Άρα $|[0, t'l) \cap L| \geq t'(l-1)$. Είναι $|I_j \cap L| \geq l$.

- Αν υπάρχει $j < t'$ ώστε $|I_j \cap L| = l$, τότε προφανώς έχουμε εντοπίσει αριθμητική πρόοδο μήκους l .
- Αν υπάρχει $j < t'$ ώστε $|I_j \cap L| = l$, τότε λόγω της $|[0, t'l) \cap L| \geq t'(l-1)$, θα υπάρχει και $j' < t'$ ώστε $|I_{j'} \cap L| = l$, οπότε πάλι έχουμε βρει αριθμητική πρόοδο μήκους l .

Άρα, για κάθε $j < t'$ πρέπει $|I_j \cap L| = l-1$. Θέτουμε $k_j + jl$ το στοιχείο που λείπει από το $|I_j \cap L|$. Τότε πρέπει $k_j \geq k_{j+1}$, διαφορετικά το $I_j \cup I_{j+1}$ περιέχει l διαδοχικούς ακέραιους. Όμως $t' > l^2$, οπότε ορίζεται η ακολουθία

$$l > k_1 \geq \dots \geq k_{l^2} \geq 0$$

και περιέχει l^2 ακέραιους στο διάστημα $[0, l)$, επομένως τουλάχιστον l διαδοχικοί όροι $k_j, \dots, k_{j+l-1}$ θα είναι ίσοι. Τότε, όμως, οι $k_j + jl, \dots, k_{j+l-1} + (j+l-1)l$ αποτελούν αριθμητική πρόοδο μήκους l . ■

4.2 Η επιλογή των t_m

Μέχρι στιγμής, έχουμε ήδη αναφέρει πολλές φορές στους ορισμούς και στις διατυπώσεις και αποδείξεις των διάφορων Λημμάτων και Προτάσεων τη φράση "για αρκετά μεγάλο t_m ". Θα γίνουμε, τώρα, πιο συγκεκριμένοι στο πως προκύπτει η επιλογή των t_m .

Ξεκινάμε, πάλι, με έναν θετικό ακέραιο K και υποθέτουμε ότι οι

$$P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}) \subseteq S(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}) \subseteq B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}),$$

και οι $g_m(l), f_m(l), \alpha_m, \beta_m, \varepsilon_m(l), \mu_m(l)$ έχουν ήδη οριστεί.

1. Επιλέγουμε τις σταθερές $\varepsilon_1^{(m)}, \varepsilon_2^{(m)}, \delta^{(m)}, \rho^{(m)}, \sigma^{(m)}$ ως εξής:

$$(i) \varepsilon_1^{(m)} = \alpha_m(1 - \beta_m),$$

$$(ii) \varepsilon_2^{(m)} = \frac{\alpha_m}{2},$$

$$(iii) \delta^{(m)} = \frac{1}{10} \frac{\alpha_m^K}{2^K K^2},$$

$$(iv) \rho^{(m)} = \alpha_m(1 - \beta_m),$$

$$(v) \sigma^{(m)} = \frac{1}{10} \frac{\alpha_m}{2^K K^2},$$

2. Θέτουμε $m_0^{(m)}, n_0^{(m)}, M^{(m)}, N^{(m)}$ τους θετικούς ακέραιους που προκύπτουν από την εφαρμογή της Πρότασης 1 για τις σταθερές του βήματος 1.

3. Για την επιλογή του t_m θέλουμε να ισχύουν τα παρακάτω:

(Α') Έστω $t_m > 2M^{(m)}, t_m > N^{(m)}$.

(Β') Θέτοντας $\tau^{(m)} = \frac{\sigma^{(m)}}{\delta^{(m)}}$ και $l'_m > t_{m-1}$ αρκετά μεγάλο, έστω t_m αρκετά μεγάλο συναρτήσει του l'_m , τέτοιο ώστε να ισχύει η Πρόταση 3 για $\delta = \delta^{(m)}$ και $\tau = \tau^{(m)}$.

(Γ') Επιλέγουμε l_m τέτοιο ώστε $l_m^{2^-} > w(l'_m, 4Km_0^{(0)}n_0^{(0)})$, όπου $w(i, j)$ όπως στην Πεπερασμένη μορφή του Θεωρήματος van der Waerden (θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη της Πρότασης 5). Επίσης, από το Λήμμα 7, είναι

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_m}} \rightarrow \infty, \text{ καθώς } t_m \rightarrow \infty,$$

άρα μπορούμε να επιλέξουμε το t_m τόσο μεγάλο ώστε

$$K^3 2^{2K} l_m \leq \frac{1}{2\sqrt{1 - \beta_{m+1}}}$$

(το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη της Πρότασης 6).

(Δ') Από τις παραπάνω επιλογές, θα είναι και $t_m \geq 4$ (έτσι ώστε να ισχύει το Λήμμα 10).

(Ε') Έστω $t_m > 4l_{m-1}$ για $m \geq 2$ (για να εξασφαλιστεί σε ένα συγκεκριμένο σημείο η εφαρμογή του Λήμματος 11).

(ΣΤ') Έστω t_m αρκετά μεγάλο ώστε $\sqrt{\mu_m(t_m)} < \min\{\beta_m, 1 - \beta_m\}$ (που είναι δυνατόν, αφού λόγω του Λήμματος 5 έχουμε υποθέσει ότι $0 < \beta_m < 1$).

(Z') Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 6, υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλα l ώστε $\varepsilon_1(l) > 0$, και για $m > 1$, $\mu_m(l) > 0$. Έστω t_m επιλεγμένο ώστε $\varepsilon_1(t_m) > 0$, και για $m > 1$, $\mu_m(t_m) > 0$.

Σε ότι ακολουθεί, το t_m θα είναι ένας σταθεροποιημένος θετικός ακέραιος επιλεγμένος έτσι ώστε να ικανοποιεί όλα τα παραπάνω, πάντα συναρτήσει του αυθαίρετου K .

Κεφάλαιο 5

Το γράφημα $I(X, i, s)$, Ομογενείς Δομές και Καλά-Κεκορεσμένες Ομογενείς Δομές

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε τα εργαλεία που θα μας επιτρέψουν να αποδείξουμε το επαγωγικό βήμα για να επαληθεύσουμε την Παρατήρηση 5, όπου θα ενωθεί ουσιαστικά η Πρόταση 1 του Κεφαλαίου 2 με το υπόλοιπο της απόδειξης. Η μορφή του γραφήματος που θα ορίσουμε σε μια συγκεκριμένη δομή έρχεται με φυσικό τρόπο, λόγω του ότι ψάχνουμε τέλειες υποδομές της δομής, που εξ ορισμού θα μας επιτρέψουν να βρούμε την αριθμητική πρόοδο μέσα στο R , ενώ οι ομογενείς δομές είναι εκείνες ακριβώς οι δομές που έχουν αντίστοιχο γράφημα με καλές ιδιότητες και είναι αυτές που θα μας επιτρέψουν να ανέβουμε τάξη στο επαγωγικό βήμα.

5.1 Το γράφημα $I(X, i, s)$ και Ομογενείς Δομές

Είπαμε ότι στο επαγωγικό βήμα για την Παρατήρηση 5 θέλουμε να πάμε από κάποια D^i σε κάποια D^{i+1} . Από τον ορισμό της D^i , αν $X \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$, τότε $X_j \in P(t_1, t_2, \dots, t_m)$ για κάθε $j < i$, οπότε είναι λογικό να κοιτάξουμε μήπως και το $X_{i+1} \in P(t_1, t_2, \dots, t_m)$ ώστε $X \in D^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$. Έχοντας όμως μόνο μία επιλογή στο που να κοιτάξουμε, είναι λογικό κάποιος να σκεφτεί ότι κατεβαίνοντας μια διάσταση και περνώντας στα $X_{i',j} \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})$ έχουμε πάρα πολλές επιλογές για να πετύχουμε ένα $X_{i,j_i} \in P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})$, οπότε και να περάσουμε στην $D^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})$. Πρέπει όμως και $\bigcup_{i' < t_m} X_{i',j_{i'}} \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, K)$,

οπότε από το Λήμμα 9 αρκεί να κοιτάξουμε για αριθμητικές προόδους

$$(j_0, \dots, j_{k-1}) \in E(t_m, K)$$

τέτοιες ώστε το $X_{i,j_i} \in P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})$. Οδηγούμαστε, έτσι, στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 12. Έστω $X = \bigcup_{i' < K} X_{i'} \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ και ως συνήθως

$$X_{i'} = \bigcup_{j < t_m} X_{i',j} \in B(t_1, t_2, \dots, t_m), \text{ όπου } X_{i',j} \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})$$

και έστω $0 \leq i \leq s < K$.

Ορίζουμε το διμερές γράφημα $I(X, i, s) = A \cup B$ ως εξής:

(i) $v(A) = v(B) = [0, t_m)$,

(ii) $\{j, j'\} \in e(I(X, i, s))$, με $j \in A, j' \in B$, αν και μόνο αν για την αριθμητική πρόοδο $(j_0, \dots, j_{k-1}) \in E(t_m, K)$ που ορίζεται θέτοντας $j_s = j'$ και $j_i = j$ ισχύει ότι

$$\bigcup_{i' < t_m} X_{i',j_{i'}} \in D^{*i}(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, K).$$

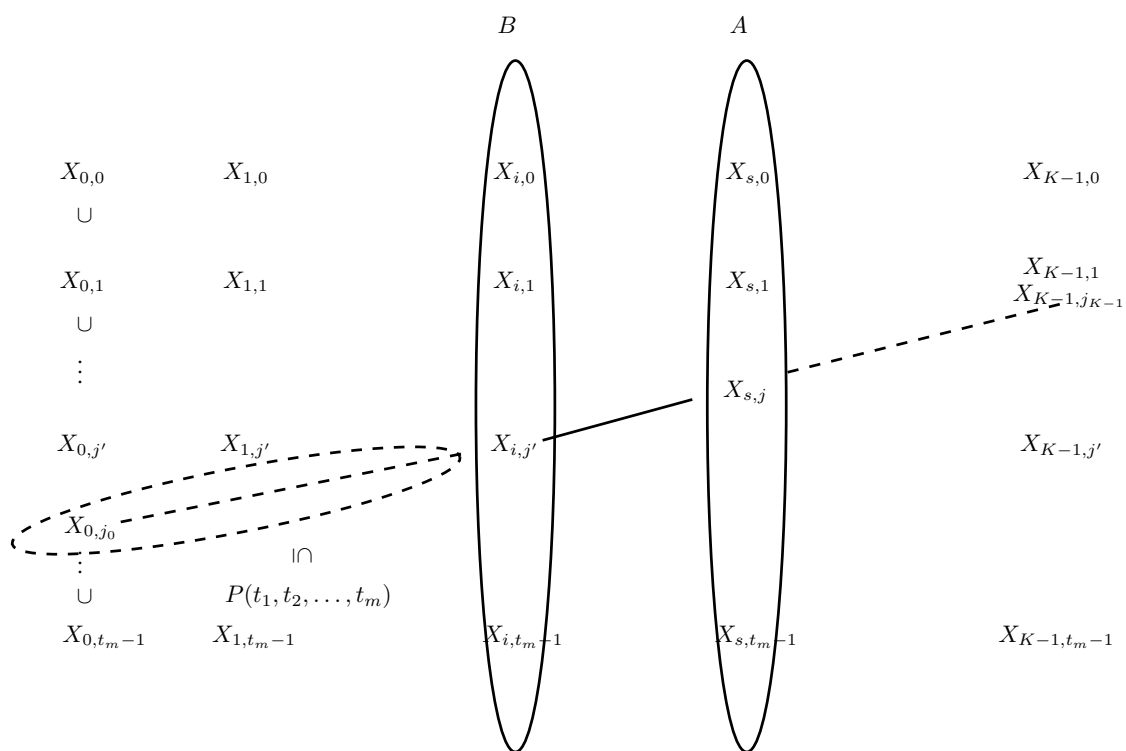
Δηλαδή, ουσιαστικά, το μέρος του $I(X, i, s)$ αντιστοιχεί στους δείκτες j των $X_{s,j}$, $j < t_m$, το μέρος B αντιστοιχεί στους δείκτες j' των $X_{i,j'}$, $j' < t_m$ και το ζευγάρι $\{j, j'\}$ είναι ακμή αν και μόνο αν η αριθμητική πρόοδος $j_0, \dots, j_{k-1}$ που ορίζεται θέτοντας $j_s = j$ και $j_i = j'$ έχει όλους τους όρους της στο $[0, t_m)$ και $X_{i',j_{i'}} \in P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})$ για κάθε $i' < i$.

Η καλή κατανόηση της κατασκευής του γραφήματος $I(X, i, s)$ είναι κρίσιμη για το υπόλοιπο της απόδειξης, κάτι που φανερώνει και τη σημασία του.

Ορισμός 13. Θέτουμε

- $F(X, j, i, s) = \{(j_0, \dots, j_{k-1}) \in E(t_m, K, j, s) : \bigcup_{i' < t_m} X_{i',j_{i'}} \in D^{*i}(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, K)\},$
- $f(X, j, i, s) = |F(X, i, j, s)|.$

Σχήμα 5.1: Το γράφημα $I(X, i, s)$



Παρατήρηση 6. Το (ii) του Ορισμού 12 μπορούμε να το επαναδιατυπώσουμε ως εξής:

$$\{j, j'\} \in e(I(X, i, s)) \text{ με } j \in A, j \in B \Leftrightarrow (j_0, \dots, j_{k-1}) \in F(X, j, i, s) \text{ και } j = j'.$$

Παρατήρηση 7. Από τον ορισμό του $F(X, j, i, s)$ είναι φανερό ότι για κάθε $j \in A$:

$$(i) \quad N_B(j) = F(X, j, i, s)$$

$$(ii) \quad d_B(j) = f(X, j, i, s).$$

Ένα από τα πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα του $I(X, i, s)$ είναι ότι έχει ακριβώς την ίδια μορφή για δύο δομές της ίδιας βασικής κλάσης, που έχουν τις πρώτες i υποδομές τους R -ισοδύναμες.

Παρατήρηση 8. Έστω $X, Y \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ τέτοια ώστε $X_{i'}, Y_{i'}$ R -ισοδύναμα για κάθε $i' < i$. Τότε, για κάθε $i \leq s < K$,

$$I(X, i, s) = I(Y, i, s).$$

Απόδειξη. Αφού $X, Y \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$, προφανώς τα $I(X, i, s), I(Y, i, s)$ έχουν το ίδιο σύνολο κορυφών. Επίσης, από τον ορισμό της $P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})$ (ως συγκεκριμένης κλάσης R -ισοδυναμίας) και την R -ισοδυναμία των $X_{i'}, Y_{i'}$ για $i' < i$, θα είναι

$$X_{i',j} \in P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}) \Leftrightarrow Y_{i',j} \in P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}), \text{ για κάθε } i' < i.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} & \{j, j'\} \in e(I(X, i, s)) \\ \Leftrightarrow & \text{για την } (j_0, \dots, j_{k-1}) \in E(t_m, K) \text{ που ορίζεται θέτοντας } j_s = j' \text{ και} \\ & j_i = j \text{ ισχύει ότι } X_{i',j_{i'}} \in P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}) \text{ για κάθε } i' < i \\ \Leftrightarrow & \text{για την } (j_0, \dots, j_{k-1}) \in E(t_m, K) \text{ που ορίζεται θέτοντας } j_s = j' \text{ και} \\ & j_i = j \text{ ισχύει ότι } Y_{i',j_{i'}} \in P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}) \text{ για κάθε } i' < i \\ \Leftrightarrow & \{j, j'\} \in e(I(Y, i, s)) \end{aligned}$$

δηλαδή τα $I(X, i, s), I(Y, i, s)$ έχουν και τις ίδιες ακμές. Επομένως,

$$I(X, i, s) = I(Y, i, s).$$



Η ορισμός της επόμενης κλάσης δομών είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την όλη φιλοσοφία του γραφήματος $I(X, i, s)$.

Ορισμός 14. Θα λέμε *κλάση Ομογενών Δομών $(m+1)$ -διαστάσεων και τάξης i* την υποκλάση της $C(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ που ορίζεται ως εξής:

$$G^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = \{X \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, K) : \text{για κάθε } s \text{ με } i \leq s < K \text{ η δομή } X \text{ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες}\}.$$

- (i) Η συνθήκη $f(X, j, i, s) \leq 2^i \alpha_m^i t_m$
δεν ισχύει για το πολύ $2i \alpha_m^i (1 - \beta_m) t_m$ δείκτες $j < t_m$.
- (ii) Η συνθήκη $f(X, j, i, s) \geq \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_m^i t_m$
δεν ισχύει για το πολύ $2i \alpha_m^i (1 - \beta_m) t_m$ δείκτες j με $\frac{t_m}{4} < j < \frac{3t_m}{4}$.

Ο ορισμός της κλάσης $G^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ φαίνεται αρκετά περίπλοκος στην αρχή, αλλά από την Παρατήρηση 7 μπορεί κανείς να δει ότι οι ομογενείς δομές είναι ουσιαστικά οι πλήρεις δομές X , οι οποίες για κάθε s με $i \leq s < K$ έχουν αντίστοιχο γράφημα $I(X, i, s)$ με καλές ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα, το γράφημα $I(X, i, s)$ μιας ομογενούς δομής X παρουσιάζει μια "σχεδόν" κανονικότητα στου βαθμούς του, μιας και οι ιδιότητες (i) και (ii) στον Ορισμό 14 σημαίνουν ότι βαθμοί των περισσότερων κορυφών του ενός μέρους του γραφήματος είναι άνω και κάτω φραγμένοι. Η ύπαρξη ομογενών δομών θα αποδειχθεί επαγωγικά στη συνέχεια.

Παρατήρηση 9. $G^0(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = C(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες (i) και (ii) του ορισμού για $i = 0$ γίνονται:

- (i) Η συνθήκη $f(X, j, 0, s) \leq t_m$ ισχύει για όλους τους δείκτες $j < t_m$.
- (ii) Η συνθήκη $f(X, j, 0, s) \geq \frac{1}{K^2} t_m$ ισχύει για όλους τους δείκτες j με $\frac{t_m}{4} < j < \frac{3t_m}{4}$.

Από την Παρατήρηση 4 και τον ορισμό του $F(X, j, i, s)$ έχουμε ότι $F(X, j, i, s) = E(t_m, K, j, s)$, δηλαδή $f(X, j, i, s) = e(t_m, K, j, s)$, άρα από το Λήμμα 10 έπεται ότι κάθε $X \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ ικανοποιεί τις (i) και (ii). Επομένως

$$G^0(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = C(t_1, t_2, \dots, t_m, K).$$



5.2 Καλά-Κεκορεσμένες Ομογενείς Δομές

Για να μπορέσουμε να ανέβουμε τάξη i σε μια δομή, το να είναι απλά ομογενής δεν φτάνει. Οδηγούμαστε έτσι στον ορισμό των *Καλά-Κεκορεσμένων Ομογενών Δομών*.

Ορισμός 15. Έστω $X \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ με $0 \leq i < K-1$ και για $i+1 \leq s < K$, έστω ότι τα σύνολα $C_\mu(X, s)$, $\mu < m_0^{(m)}$ και $C_{\mu, \nu}(X, s)$, $\mu < m_0^{(m)}$, $\nu < n_0^{(m)}$ ικανοποιούν την Πρόταση 1 για το διμερές γράφημα $I(X, i, s)$ και την επιλογή των σταθερών όπως στο βήμα 1 της Παραγράφου 4.2. Ομοίως, για $i+1 \leq s < K$, έστω ότι τα σύνολα $\bar{C}_\mu(X, s)$, $\mu < m_0^{(m)}$ και $\bar{C}_{\mu, \nu}(X, s)$, $\mu < m_0^{(m)}$, $\nu < n_0^{(m)}$ ικανοποιούν την Πρόταση 2 για το γράφημα $I(X, i, s)$ και την επιλογή των σταθερών όπως στο βήμα 1 της Παραγράφου 4.2. Γράφοντας, ως συνήθως, το X σαν

$$X = \bigcup_{i' < K} X_{i'}, \quad X_{i'} = \bigcup_{j < t_m} X_{i', j} \in B(t_1, t_2, \dots, t_m), \quad \text{όπου } X_{i', j} \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}),$$

θα λέμε ότι η δομή X είναι *καλά-κεκορεσμένη* αν για κάθε s με $i+1 \leq s < K$,

$$|p^m(X_i, C_{\mu, \nu}(X, s)) - \alpha_m |C_{\mu, \nu}(X, s)|| \leq \delta^{(m)} |C_{\mu, \nu}(X, s)|, \quad \frac{t_m}{4} < j < \frac{3t_m}{4}$$

και

$$|p^m(X_i, \bar{C}_{\mu, \nu}(X, s)) - \alpha_m |\bar{C}_{\mu, \nu}(X, s)|| \leq \delta^{(m)} |\bar{C}_{\mu, \nu}(X, s)|, \quad 0 \leq j < t_m,$$

οποτεδήποτε $|C_{\mu, \nu}(X, s)| \geq \tau^m t_m$, $|\bar{C}_{\mu, \nu}(X, s)| \geq \tau^m t_m$ για $\mu < m_0^{(m)}$, $\nu < n_0^{(m)}$.

Δηλαδή οι καλά-κεκορεσμένες δομές X είναι εκείνες οι δομές που στην δεύτερη κανονική τους διαμέριση, σε κάθε αρκετά μεγάλο $C_{\mu, \nu}(X, s)$, οι δείκτες j για τους οποίους τα $X_{i, j}$ είναι τέλειες δομές, είναι πάλι κοντά στο αναμενόμενο μέγιστο ποσοστό. Από τον ορισμό τους, οι ιδεώδεις δομές i τάξης είναι εκείνες οι δομές, των οποίων οι πρώτες i υποδομές (δηλαδή από 0 μέχρι $i-1$) στην κανονική τους διαμέριση είναι τέλειες. Για να ανέβουμε τάξη στην $i+1$, πρέπει να κοιτάξουμε αν είναι τέλεια και η i -οστή υποδομή και οι καλά-κεκορεσμένες ομογενείς δομές, εξασφαλίζοντας πολλές τέλειες i -οστές υποδομές της δεύτερης κανονικής διαμέρισης, δείχνουν να είναι ικανές να πετύχουν αυτό το σκοπό, αρκεί να βρούμε κατάλληλες αριθμητικές πρόοδους $(j_0, \dots, j_{k-1}) \in E(t, K)$ (τις οποίες θα μελετήσουμε

μέσω του $I(X, i, s)$ ώστε X_{i,j_i} να είναι τέλειο.

Πράγματι,

Πρόταση 4. Αν $X \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ με $i + 1 < K$, τότε

$$X \in G^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_m, K).$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα σταθερό s με $i + 1 \leq s < K$. Πρέπει να δείξουμε ότι

- (i) Η συνθήκη $f(X, j, i + 1, s) \leq 2^{i+1} \alpha_m^{i+1} t_m$
δεν ισχύει για το πολύ $2(i + 1) \alpha_m^{i+1} (1 - \beta_m) t_m$ δείκτες $j < t_m$.
- (ii) Η συνθήκη $f(X, j, i + 1, s) \geq \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^{i+1}} \alpha_m^{i+1} t_m$
δεν ισχύει για το πολύ $2(i + 1) \alpha_m^{i+1} (1 - \beta_m) t_m$ δείκτες j με $\frac{t_m}{4} < j < \frac{3t_m}{4}$.

Ξεκινάμε αποδεικνύοντας το (ii). Για λόγους συντομίας θέτουμε

$$\begin{aligned} C_\mu &= C_\mu(X, s), C_{\mu,\nu} = C_{\mu,\nu}(X, s), \\ \overline{C}_\mu &= \overline{C}_\mu(X, s), \overline{C}_{\mu,\nu} = \overline{C}_{\mu,\nu}(X, s), \\ I &= I(X, i, s) \end{aligned}$$

Θεωρούμε το σύνολο $Z \subseteq A$ ορίζεται ως εξής:

$$Z = \{j : \frac{t_m}{4} < j < \frac{3t_m}{4}, j \in \bigcup_{\mu < m_0^{(m)}} C_\mu \text{ και}$$

$$f(X, j, i + 1, s) \leq \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^{i+1}} \alpha_m^{i+1} t_m \text{ και } f(X, j, i, s) \geq \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_m^i t_m\},$$

δηλαδή το Z είναι το σύνολο των κορυφών που είναι "καλές" για το $I(X, i, s)$, αλλά όχι για το $I(X, i + 1, s)$. Υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις.

1. Έστω ότι $|Z| \leq \alpha_m (1 - \beta_m) t_m$ (δηλαδή το Z είναι μικρό). Από την Πρόταση 1 για το I έχουμε ότι

$$|A \setminus \bigcup_{\mu < m_0^{(m)}} C_\mu| < \rho^{(m)} |A| = \rho^{(m)} t_m = \alpha_m (1 - \beta_m) t_m.$$

Επίσης, από το (ii) του ορισμού της $G^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$, υπάρχουν το πολύ $2i \alpha_m^i (1 - \beta_m) t_m$ δείκτες j με $f(X, j, i, s) < \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_m^i t_m$. Άρα

$$\begin{aligned}
 & |\{j : \frac{t_m}{4} < j < \frac{3t_m}{4}, f(X, j, i, s) \leq \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_m^i t_m\}| \\
 &= \left| Z \cup (A \setminus \bigcup_{\mu < m_0^{(m)}} C_\mu) \cup \{j : f(X, j, i, s) < \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_m^i t_m\} \right| \\
 &\leq \alpha_m(1 - \beta_m)t_m + \alpha_m(1 - \beta_m)t_m + 2i\alpha_m^i(1 - \beta_m)t_m \\
 &= 2(i+1)\alpha_m^{i+1}(1 - \beta_m)t_m
 \end{aligned}$$

που είναι ακριβώς το (ii).

2. Έστω ότι $|Z| > \alpha_m(1 - \beta_m)t_m$. Αν

$$|Z \cap C_\mu| \leq \alpha_m(1 - \beta_m)|C_\mu| \text{ για κάθε } \mu < m_0^{(m)}$$

τότε, εφ' όσον τα C_μ είναι ξένα ανά δύο

$$\begin{aligned}
 |Z| &= |Z \cap \bigcup_{\mu < m_0^{(m)}} C_\mu| = \sum_{\mu < m_0^{(m)}} |Z \cap C_\mu| \\
 &\leq \alpha_m(1 - \beta_m) \sum_{\mu < m_0^{(m)}} |C_\mu| \leq \alpha_m(1 - \beta_m)|A| \\
 &= \alpha_m(1 - \beta_m)t_m
 \end{aligned}$$

που είναι άτοπο.

Άρα, υπάρχει $\mu < m_0^{(m)}$ τέτοιο ώστε

$$|Z \cap C_\mu| \leq \alpha_m(1 - \beta_m)|C_\mu| = \varepsilon_1^{(m)}|C_\mu|$$

(δηλαδή αν το Z είναι μεγάλο, θα έχει αναγκαστικά μεγάλη τομή με κάποιο από τα C_μ , οπότε θα μπορούμε στη συνέχεια να εφαρμόσουμε την ιδιότητα (β') της Πρότασης 1).

Θέτουμε $Z' = Z \cap C_\mu$. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι η γειτονιά του Z' στο B δεν είναι πολύ μεγάλη.

Από την Πρόταση 1, έχουμε διαδοχικά

$$|B'| = |B \setminus \bigcup_{\nu < n_0^{(m)}} C_{\mu, \nu}| < \sigma^{(m)}t_m$$

και για $x \in C_\mu$ (όπως και στην Παρατήρηση 1)

$$d_{C_{\mu,\nu}}(x) \leq (\beta(C_{\mu}, C_{\mu,\nu}) + \delta^{(m)})|C_{\mu,\nu}|$$

κι άρα

$$d_{C_{\mu,\nu}}(Z') = \sum_{x \in C_{\mu}} d_{C_{\mu,\nu}}(x) \leq (\beta(C_{\mu}, C_{\mu,\nu}) + \delta^{(m)})|C_{\mu,\nu}||Z'|.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} d_B(Z') &= \sum_{\nu < n_0^{(m)}} d_{C_{\mu,\nu}}(Z') + d_{B'}(Z') \\ &\leq \sum_{\nu < n_0^{(m)}} (\beta(C_{\mu}, C_{\mu,\nu}) + \delta^{(m)})|C_{\mu,\nu}||Z'| + |Z'||B'| \\ &\leq \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(C_{\mu}, C_{\mu,\nu})|C_{\mu,\nu}||Z'| + \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \delta^{(m)}|C_{\mu,\nu}||Z'| + \sigma^{(m)}|Z'|t_m \\ &\leq \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(C_{\mu}, C_{\mu,\nu})|C_{\mu,\nu}||Z'| + (\delta^{(m)} + \sigma^{(m)})|C_{\mu,\nu}||Z'| \end{aligned} \quad (5.1)$$

Στη συνέχεια, θέτουμε

$$L = \{j : j < t_m \text{ και } X_{i,j} \in P(t_1, t_2, \dots, t_{m-1})\} \subseteq B.$$

(δηλαδή, $|L| = p^m(X_i)$). Τότε, από την Παρατήρηση 7 κι εφόσον μέσα στο L η i -οστή υποδομή είναι τέλεια (άρα οι $i + 1$ πρώτες υποδομές θα είναι τέλειες), για κάθε $j \in L$ θα είναι

$$d_L(j) = f(X, j, i + 1, s). \quad (5.2)$$

Όμως το X είναι καλά-κεκορεσμένο, άρα το L θα είναι μεγάλο μέσα στα αρκετά μεγάλα $C_{\mu,\nu}$, δηλαδή για $|C_{\mu,\nu}| \geq \tau^{(m)}t_m$ έχουμε

$$|L \cap C_{\mu,\nu}| = p^m(X_i, C_{\mu,\nu}) \geq (\alpha_m - \delta_m)|C_{\mu,\nu}| > \frac{\alpha_m}{2}|C_{\mu,\nu}| = \varepsilon_2^{(m)}|C_{\mu,\nu}|$$

αφού $\delta^{(m)} = \frac{1}{10} \frac{\alpha_m}{2K^2} < \frac{\alpha_m}{2}$.

Όμως, έχουμε ήδη αποδείξει ότι $|Z'| > \varepsilon_1^{(m)}|C_{\mu}|$. Οπότε, από την ιδιότητα (β') της Πρότασης 1 έχουμε

$$\beta(Z', L \cap C_{\mu,\nu}) \geq \beta(C_{\mu}, C_{\mu,\nu}) - \delta^{(m)}$$

για κάθε v τέτοιο ώστε $|C_{\mu,v}| \geq \tau^{(m)} t_m$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 d_L(Z') &\geq \sum_{v < n_0^{(m)}} d_{C_{\mu,v} \cap L}(Z') = \sum_{v < n_0^{(m)}} \beta(Z', C_{\mu,v} \cap L) |C_{\mu,v} \cap L| |Z'| \\
 &\geq \sum_{\substack{v < n_0^{(m)} \\ |C_{\mu,v}| \geq \tau^{(m)} t_m}} \beta(Z', C_{\mu,v} \cap L) |C_{\mu,v} \cap L| |Z'| \\
 &\geq \sum_{\substack{v < n_0^{(m)} \\ |C_{\mu,v}| \geq \tau^{(m)} t_m}} (\beta(C_\mu, C_{\mu,v}) - \delta^{(m)}) |C_{\mu,v} \cap L| |Z'| \\
 &= \left(\sum_{v < n_0^{(m)}} - \sum_{\substack{v < n_0^{(m)} \\ |C_{\mu,v}| < \tau^{(m)} t_m}} \right) (\beta(C_\mu, C_{\mu,v}) - \delta^{(m)}) |C_{\mu,v} \cap L| |Z'| \\
 &\geq \sum_{v < n_0^{(m)}} \beta(C_\mu, C_{\mu,v}) |C_{\mu,v} \cap L| |Z'| - \delta^{(m)} |Z'| \sum_{v < n_0^{(m)}} |C_{\mu,v} \cap L| \\
 &\quad - \sum_{\substack{v < n_0^{(m)} \\ |C_{\mu,v}| < \tau^{(m)} t_m}} 1 \cdot |C_{\mu,v} \cap L| |Z'| \\
 &\geq \sum_{v < n_0^{(m)}} \beta(C_\mu, C_{\mu,v}) |C_{\mu,v} \cap L| |Z'| - \delta^{(m)} |Z'| t_m - n_0^{(m)} \tau^{(m)} t_m |Z'| \\
 &\geq \sum_{v < n_0^{(m)}} \beta(C_\mu, C_{\mu,v}) |C_{\mu,v} \cap L| |Z'| - 2\delta^{(m)} |Z'| t_m \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

αφού $\tau^{(m)} = \frac{\sigma^{(m)}}{\delta^{(m)}} = \frac{\delta^{(m)}}{\delta^{(m)}}$.

Όμως

$$|L \cap C_{\mu,v}| = p^m(X_i, C_{\mu,v})$$

άρα, όπως και προηγουμένως, από το γεγονός ότι το X είναι καλά κεκορεσμένο έπεται

$$|L \cap C_{\mu,v}| = p^m(X_i, C_{\mu,v}) \geq (\alpha_m - \delta_m) |C_{\mu,v}|$$

δεδομένου ότι $|C_{\mu,v}| \geq \tau^{(m)} t_m$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(C_\mu, C_{\mu,\nu}) |C_{\mu,\nu} \cap L| |Z'| &\geq \sum_{\substack{\nu < n_0^{(m)} \\ |C_{\mu,\nu}| \geq \tau^{(m)} t_m}} \beta(C_\mu, C_{\mu,\nu}) |C_{\mu,\nu} \cap L| |Z'| \\
&\geq \sum_{\substack{\nu < n_0^{(m)} \\ |C_{\mu,\nu}| \geq \tau^{(m)} t_m}} \beta(C_\mu, C_{\mu,\nu}) (\alpha_m - \delta_m) |C_{\mu,\nu}| |Z'| \\
&= \left(\sum_{\nu < n_0^{(m)}} - \sum_{\substack{\nu < n_0^{(m)} \\ |C_{\mu,\nu}| < \tau^{(m)} t_m}} \right) \beta(C_\mu, C_{\mu,\nu}) (\alpha_m - \delta_m) |C_{\mu,\nu}| |Z'| \\
&\geq \alpha_m \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(C_\mu, C_{\mu,\nu}) |C_{\mu,\nu}| |Z'| - \delta_m |Z'| \sum_{\nu < n_0^{(m)}} |C_{\mu,\nu}| \\
&\quad - \sum_{\substack{\nu < n_0^{(m)} \\ |C_{\mu,\nu}| < \tau^{(m)} t_m}} 1 \cdot |C_{\mu,\nu}| |Z'| \\
&\geq \alpha_m \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(C_\mu, C_{\mu,\nu}) |C_{\mu,\nu}| |Z'| - \delta_m |Z'| t_m - n_0^{(m)} \tau^{(m)} t_m |Z'| \\
&= \alpha_m \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(C_\mu, C_{\mu,\nu}) |C_{\mu,\nu}| |Z'| - 2\delta_m |Z'| t_m
\end{aligned}$$

όπως και στην 5.3.

Επομένως, η 5.3 γίνεται

$$d_L(Z') \geq \alpha_m \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(C_\mu, C_{\mu,\nu}) |C_{\mu,\nu}| |Z'| - 4\delta_m |Z'| t_m. \quad (5.4)$$

Εφ' όσον $\sigma^{(m)} = \delta^{(m)}$, πολλαπλασιάζοντας την 5.1 με α_m έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha_m d_B(Z') &\leq \alpha_m \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(C_\mu, C_{\mu,\nu}) |C_{\mu,\nu}| |Z'| + 2\delta^{(m)} \alpha_m |C_{\mu,\nu}| |Z'| \Rightarrow \\
\alpha_m \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(C_\mu, C_{\mu,\nu}) |C_{\mu,\nu}| |Z'| &\geq \alpha_m d_B(Z') - 2\delta^{(m)} \alpha_m |C_{\mu,\nu}| |Z'| \\
&\geq \alpha_m d_B(Z') - 2\delta^{(m)} |C_{\mu,\nu}| |Z'|.
\end{aligned}$$

Οπότε, η 5.4 γίνεται

$$d_L(Z') \geq \alpha_m d_B(Z') - 6\delta^{(m)} |C_{\mu, \nu}| |Z'|. \quad (5.5)$$

Αλλά, από τον ορισμό του Z' , για κάθε $j \in Z'$ ισχύει ότι

$$f(X, j, i, s) \geq \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_m^i t_m$$

και

$$f(X, j, i+1, s) \leq \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^{i+1}} \alpha_m^{i+1} t_m.$$

Συνεπώς, από τις 5.2 και 5.5 έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^{i+1}} \alpha_m^{i+1} t_m |Z'| &\geq \sum_{j \in Z'} f(X, j, i+1, s) \\ &= \sum_{j \in Z'} d_L(j) = d_L(Z') \\ &\geq \alpha_m d_B(Z') - 6\delta^{(m)} |C_{\mu, \nu}| |Z'| \\ &= \alpha_m \sum_{j \in Z'} f(X, j, i, s) - 6\delta^{(m)} |C_{\mu, \nu}| |Z'| \\ &\geq \alpha_m \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_m^i t_m |Z'| - 6\delta^{(m)} |C_{\mu, \nu}| |Z'| \\ &= \frac{2}{K^2} \frac{1}{2^{i+1}} \alpha_m^{i+1} t_m |Z'| - 6\delta^{(m)} |C_{\mu, \nu}| |Z'|. \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\frac{1}{K^2} \frac{1}{2^{i+1}} \alpha_m^{i+1} \leq 6\delta^{(m)}$$

που είναι άτοπο, αφού από την επίλογη του $\delta^{(m)}$ στην Παράγραφο 4.2 είναι

$$\delta^{(m)} = \frac{1}{10} \frac{\alpha_m^K}{2^{K^2}} < \frac{1}{6} \frac{\alpha_m^{i+1}}{2^{i+1} K^2} \text{ για } i+1 < K.$$

Έτσι, αποδείχτηκε το (ii).

Η απόδειξη του (i) είναι παρόμοια με την απόδειξη του (ii). Θέτουμε

$$\bar{Z} = \{j : j \in \bigcup_{\mu < m_0^{(m)}} \bar{C}_\mu \text{ και } f(X, j, i+1, s) \geq 2^{i+1} \alpha_m^{i+1} t_m \text{ και } f(X, j, i, s) \leq 2^i \alpha_m^i t_m\}.$$

Όπως και στην απόδειξη του (ii), αν $|\bar{Z}| \leq \alpha_m(1 - \beta_m)t_m$, τότε το (i) αποδεικνύεται εύκολα παρόμοια. Γι' αυτό, υποθέτουμε ότι $|\bar{Z}| \geq \alpha_m(1 - \beta_m)t_m$. Τότε, όπως και στην απόδειξη του (ii), επειδή το $\bar{Z}$ είναι μεγάλο, θα έχει αναγκαστικά μεγάλη τομή με κάποιο από τα $\bar{C}_\mu$, δηλαδή θα υπάρχει $\mu < m_0^{(m)}$ τέτοιο ώστε

$$|\bar{Z} \cap \bar{C}_\mu| \leq \alpha_m(1 - \beta_m)|\bar{C}_\mu| = \varepsilon_1^{(m)}|\bar{C}_\mu|$$

Θέτουμε $\bar{Z}' = \bar{Z} \cap \bar{C}_\mu$. Τότε $|\bar{Z}'| > \varepsilon_1^{(m)}|\bar{C}_\mu|$. Από την Πρόταση 2, έχουμε διαδοχικά

$$|B''| = |B \setminus \bigcup_{\nu < n_0^{(m)}} \bar{C}_{\mu, \nu}| < \sigma^{(m)} t_m$$

και για $x \in \bar{C}_\mu$ (όπως και στην Παρατήρηση 1) έχουμε

$$d_{\bar{C}_{\mu, \nu}}(x) \leq (\beta(\bar{C}_\mu, \bar{C}_{\mu, \nu}) - \delta^{(m)})|\bar{C}_{\mu, \nu}|$$

κι άρα

$$d_{\bar{C}_{\mu, \nu}}(\bar{Z}') = \sum_{x \in \bar{C}_\mu} d_{\bar{C}_{\mu, \nu}}(x) \leq (\beta(\bar{C}_\mu, \bar{C}_{\mu, \nu}) - \delta^{(m)})|\bar{C}_{\mu, \nu}||\bar{Z}'|.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} d_B(\bar{Z}') &\geq \sum_{\nu < n_0^{(m)}} d_{\bar{C}_{\mu, \nu}}(\bar{Z}') \\ &\geq \sum_{\nu < n_0^{(m)}} (\beta(\bar{C}_\mu, \bar{C}_{\mu, \nu}) - \delta^{(m)})|\bar{C}_{\mu, \nu}||\bar{Z}'| \\ &\geq \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(\bar{C}_\mu, \bar{C}_{\mu, \nu})|\bar{C}_{\mu, \nu}||\bar{Z}'| - \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \delta^{(m)}|\bar{C}_{\mu, \nu}||\bar{Z}'| \\ &\geq \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(\bar{C}_\mu, \bar{C}_{\mu, \nu})|\bar{C}_{\mu, \nu}||\bar{Z}'| - \delta^{(m)}|\bar{Z}'|t_m. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 d_L(\bar{Z}') &= \sum_{\nu < n_0^{(m)}} d_{\bar{C}_{\mu, \nu} \cap L}(\bar{Z}') + d_{B'' \cap L}(\bar{Z}') \\
 &\leq \sum_{\nu < n_0^{(m)}} d_{\bar{C}_{\mu, \nu} \cap L}(\bar{Z}') + \sigma^{(m)} |\bar{Z}'| t_m \\
 &= \sum_{\nu < n_0^{(m)}} \beta(\bar{Z}', \bar{C}_{\mu, \nu} \cap L) |\bar{C}_{\mu, \nu} \cap L| |\bar{Z}'| + \sigma^{(m)} |\bar{Z}'| t_m \\
 &= \left(\sum_{\substack{\nu < n_0^{(m)} \\ |\bar{C}_{\mu, \nu}| \geq \tau^{(m)} t_m}} + \sum_{\substack{\nu < n_0^{(m)} \\ |\bar{C}_{\mu, \nu}| < \tau^{(m)} t_m}} \right) \beta(\bar{Z}', \bar{C}_{\mu, \nu} \cap L) |\bar{C}_{\mu, \nu} \cap L| |\bar{Z}'| + \sigma^{(m)} |\bar{Z}'| t_m
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Όμως το X είναι καλά-κεκορεσμένο, δηλαδή για $|\bar{C}_{\mu, \nu}| \geq \tau^{(m)} t_m$ έχουμε

$$|L \cap \bar{C}_{\mu, \nu}| = p^m(X_i, \bar{C}_{\mu, \nu}) \leq (\alpha_m + \delta_m) |\bar{C}_{\mu, \nu}|$$

και

$$|L \cap \bar{C}_{\mu, \nu}| = p^m(X_i, \bar{C}_{\mu, \nu}) \geq (\alpha_m - \delta_m) |\bar{C}_{\mu, \nu}| > \frac{\alpha_m}{2} |\bar{C}_{\mu, \nu}| = \varepsilon_2^{(m)} |\bar{C}_{\mu, \nu}|$$

αφού $\delta^{(m)} = \frac{1}{10} \frac{\alpha_m^K}{2^K K^2} < \frac{\alpha_m}{2}$.

Οπότε, από την ιδιότητα (β') της Πρότασης 2 έχουμε

$$\beta(\bar{Z}', L \cap \bar{C}_{\mu, \nu}) \leq \beta(\bar{C}_{\mu}, \bar{C}_{\mu, \nu}) + \delta^{(m)}$$

για κάθε ν τέτοιο ώστε $|\bar{C}_{\mu, \nu}| \geq \tau^{(m)} t_m$.

Άρα, η 5.7 γίνεται

$$\begin{aligned}
d_L(\bar{Z}') &\leq \sum_{\substack{v < n_0^{(m)} \\ |\bar{C}_{\mu,v}| \geq \tau^{(m)} t_m}} (\beta(\bar{C}_{\mu}, \bar{C}_{\mu,v}) + \delta^{(m)}) |\bar{C}_{\mu,v} \cap L| |\bar{Z}'| + \tau^{(m)} t_m |\bar{Z}'| n_0^{(m)} + \sigma^{(m)} |\bar{Z}'| t_m \\
&\leq \sum_{\substack{v < n_0^{(m)} \\ |\bar{C}_{\mu,v}| \geq \tau^{(m)} t_m}} \beta(\bar{C}_{\mu}, \bar{C}_{\mu,v}) |\bar{C}_{\mu,v} \cap L| |\bar{Z}'| + \sum_{\substack{v < n_0^{(m)} \\ |\bar{C}_{\mu,v}| \geq \tau^{(m)} t_m}} \delta^{(m)} |\bar{C}_{\mu,v} \cap L| |\bar{Z}'| + 2\delta^{(m)} |\bar{Z}'| t_m \\
&\leq \sum_{\substack{v < n_0^{(m)} \\ |\bar{C}_{\mu,v}| \geq \tau^{(m)} t_m}} \beta(\bar{C}_{\mu}, \bar{C}_{\mu,v}) (\alpha_m + \delta_m) |\bar{C}_{\mu,v}| |\bar{Z}'| + 3\delta^{(m)} |\bar{Z}'| t_m \\
&\leq \sum_{\substack{v < n_0^{(m)} \\ |\bar{C}_{\mu,v}| \geq \tau^{(m)} t_m}} \beta(\bar{C}_{\mu}, \bar{C}_{\mu,v}) (\alpha_m + \delta_m) |\bar{C}_{\mu,v}| |\bar{Z}'| + 3\delta^{(m)} |\bar{Z}'| t_m \\
&\leq \alpha_m \sum_{\substack{v < n_0^{(m)} \\ |\bar{C}_{\mu,v}| \geq \tau^{(m)} t_m}} \beta(\bar{C}_{\mu}, \bar{C}_{\mu,v}) |\bar{C}_{\mu,v}| |\bar{Z}'| + 4\delta^{(m)} |\bar{Z}'| t_m
\end{aligned}$$

κι έτσι, από την 5.6 έχουμε

$$d_L(\bar{Z}') \leq \alpha_m \sum_{v < n_0^{(m)}} \beta(\bar{C}_{\mu}, \bar{C}_{\mu,v}) |\bar{C}_{\mu,v}| |\bar{Z}'| + 5\delta_m |\bar{Z}'| t_m.$$

Αλλά, από τον ορισμό του $\bar{Z}'$, για κάθε $j \in \bar{Z}'$ ισχύει ότι

$$f(X, j, i, s) \leq 2^i \alpha_m^i t_m$$

και

$$f(X, j, i+1, s) \geq 2^{i+1} \alpha_m^{i+1} t_m.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
2^{i+1} \alpha_m^{i+1} t_m t_m |\bar{Z}'| &\leq \sum_{j \in \bar{Z}'} f(X, j, i+1, s) \\
&= \sum_{j \in \bar{Z}'} d_L(j) = d_L(\bar{Z}') \\
&\leq \alpha_m d_B |\bar{Z}'| + 5\delta^{(m)} |\bar{Z}'| \\
&= \alpha_m \sum_{j \in \bar{Z}'} f(X, j, i, s) + 5\delta^{(m)} |\bar{Z}'| \\
&\leq \alpha_m 2^i \alpha_m^i t_m t_m |\bar{Z}'| + 5\delta^{(m)} |\bar{Z}'| \\
&= 2^i \alpha_m^{i+1} t_m t_m |\bar{Z}'| + 5\delta^{(m)} |\bar{Z}'|.
\end{aligned}$$

Οπότε,

$$2^i \alpha_m^{i+1} \leq 5\delta^{(m)}$$

που είναι άτοπο, αφού από την επίλογη του $\delta^{(m)}$ είναι

$$\delta^{(m)} = \frac{1}{10} \frac{\alpha_m^K}{2^K K^2} < \frac{1}{5} \alpha_m^{i+1} 2^i \text{ για } i+1 < K.$$

Συνεπώς, η απόδειξη της Πρότασης 4 είναι πλήρης. ■

Κεφάλαιο 6

Από τις Ομογενείς Δομές στις Ιδεώδεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι για να μπορέσουμε να ανέβουμε τάξη στην δομή μας, χρειάστηκε να ορίσουμε ακόμα καλύτερες δομές από τις ιδεώδεις, τις ομογενείς. Εδώ θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε *καλά-κεκορεσμένη δομή* μέσα από μια οικογένεια ομογενών, που θα μας επιτρέψει να ανέβουμε τάξη στη δομή.

Επίσης, κάθε τέτοια δομή χαρακτηρίζεται από δύο συνιστώσες: την διάστασή της και την τάξη της. Έτσι, θυσιάζοντας μερικές από τις διαστάσεις μιας οικογένειας ομογενών δομών μπορούμε να περάσουμε ξανά σε ιδεώδεις.

Στις αποδείξεις των Προτάσεων που ακολουθούν είναι αξιοσημείωτη η ευελιξία με την οποία χρειάζεται να κινηθούμε μέσα στις διαστάσεις των δομών.

Πρόταση 5. Έστω ότι για κάποιο i με $0 \leq i < K - 1$ και για κάθε $\xi < l$ είναι

$$X^{(\xi)} \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K), \text{ όπου } l \geq l_m^{2-K}.$$

Έστω, επίσης, ότι

$$X = \bigcup_{\xi < l} X_i^{(\xi)} \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$$

κι ότι για κάθε $j < i$, τα $X_j^{(\xi)}$ και $X_j^{(\eta)}$ είναι R-ισοδύναμα για κάθε $\xi, \eta < l$. Τότε υπάρχει $\pi < l$ τέτοιο ώστε

$$X^{(\pi)} \in G^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_m, K).$$

Σχήμα 6.1: Πρόταση 5

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & X \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, l) & & \\
 & & & & \vdots & & \\
 X^{(0)} & = & X_0^{(0)} & X_1^{(0)} & X_i^{(0)} & & X_{K-1}^{(0)} \\
 X^{(1)} & = & X_0^{(1)} & X_1^{(1)} & X_i^{(1)} & & X_{K-1}^{(1)} \\
 \vdots & & & & & & \\
 X^{(\xi)} & = & X_0^{(\xi)} & X_1^{(\xi)} & X_i^{(\xi)} & & X_{K-1}^{(\xi)} \\
 G^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \ni \begin{array}{c} \tilde{X} \\ \vdots \end{array} & & & & & & \\
 X^{(l-1)} & = & X_0^{(l-1)} & X_1^{(l-1)} & X_i^{(l-1)} & & X_{K-1}^{(l-1)}
 \end{array}$$

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 8 και την υπόθεση ότι για κάθε $j < i$, τα $X_j^{(\xi)}$ και $X_j^{(\eta)}$ είναι R-ισοδύναμα, έπεται ότι

$$I(X^{(\xi)}, i, s) = I(X^{(\eta)}, i, s), \text{ για } i \leq s < K, \xi, \eta < l.$$

Επομένως, μπορούμε να θέσουμε

$$\begin{aligned} C_\mu(X^{(\xi)}, s) &= C_\mu(X^{(\eta)}, s) = C_\mu(s), \\ C_{\mu,\nu}(X^{(\xi)}, s) &= C_{\mu,\nu}(X^{(\eta)}, s) = C_{\mu,\nu}(s), \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \overline{C}_\mu(X^{(\xi)}, s) &= \overline{C}_\mu(X^{(\eta)}, s) = \overline{C}_\mu(s), \\ \overline{C}_{\mu,\nu}(X^{(\xi)}, s) &= \overline{C}_{\mu,\nu}(X^{(\eta)}, s) = \overline{C}_{\mu,\nu}(s). \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 4, αρκεί να υπάρξει $\pi < l$ τέτοιο ώστε το $X^{(\pi)}$ να είναι καλά-κεκορεσμένο. Η ιδέα είναι ότι αν όλα τα $X^{(\xi)}$ δεν είναι καλά κεκορεσμένα, τότε τα $X^{(\xi)}$ δεν θα έχουν "καλή" τελειότητα στην i -οστή υποδομή τους μέσα σε κάποιο $C_{\mu,\nu}(s)$. Αν καταφέρουμε να βρούμε αριθμητική πρόοδο μέσα στα $\xi < l$ ώστε τα μ, ν και s που εμφανίζονται στο $C_{\mu,\nu}(s)$ να είναι τα ίδια για όλα τα $\xi < l$ της προόδου, τότε, από την υπόθεση για το X , ενώνοντας τα $X_i^{(\xi)}$ για τα $\xi < l$ της προόδου θα μπορέσουμε να φτιάξουμε μια πλήρη δομή της οποίας όλες οι υποδομές δεν θα έχουν "καλή" τελειότητα μέσα στο κοινό $C_{\mu,\nu}(s)$, που από την Πρόταση 3 καταλήγει απευθείας σε άτοπο.

Πράγματι, πιο αναλυτικά, έστω ότι για κάθε $\xi < l$ τα $X^{(\xi)}$ δεν είναι καλά κεκορεσμένα, δηλαδή για κάθε $\xi < l$ υπάρχουν μ, ν και s τέτοια ώστε είτε

- (i) $|C_{\mu,\nu}(s)| \geq \tau^m t_m$ και $|p^m(X_i^{(\xi)}, C_{\mu,\nu}(s)) - \alpha_m|C_{\mu,\nu}(s)|| > \delta^m |C_{\mu,\nu}(s)|$, ή
- (ii) $|\overline{C}_{\mu,\nu}(s)| \geq \tau^m t_m$ και $|p^m(X_i^{(\xi)}, \overline{C}_{\mu,\nu}(s)) - \alpha_m|\overline{C}_{\mu,\nu}(s)|| \leq \delta^m |\overline{C}_{\mu,\nu}(s)|$.

Υπάρχουν τέσσερις δυνατότητες για να αφαιρεθούν τα απόλυτα από τα ζευγάρια των παραπάνω σχέσεων, τις οποίες ονομάζουμε d_1, d_2, d_3, d_4 . Θεωρούμε τις κλάσεις

$$W(d_i, \mu, \nu, s) = \{\xi < l : \text{τα } \mu, \nu \text{ και } s \text{ αντιστοιχούν στο } \xi \text{ ώστε να ισχύουν οι ανισότητες (i) και (ii), για τις οποίες ισχύει η } d_i \text{ περίπτωση}\}$$

οι οποίες διαμερίζουν το $[0, l)$ και έχουν προφανώς πλήθος $4m_0^{(m)}n_0^{(m)}K$ (όσες και οι επιλογές για τα d_i, μ, ν, s).

Αλλά, τα l και l_m έχουν επιλεγεί στην παράγραφο 4.2 έτσι ώστε

$$l \geq l_m > w(l'_m, 4m_0^{(m)}n_0^{(m)}K).$$

Επομένως, από την πεπερασμένη μορφή του Θεωρήματος van der Waerden, υπάρχει αριθμητική πρόοδος $\xi_0, \dots, \xi_{l'_m-1}$ μήκους l'_m , η οποία ανήκει στην ίδια κλάση $W(d_{i_0}, \mu, \nu, s)$ κι αν υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η d_{i_0} είναι η περίπτωση στην οποία

$$p^m(X_i^{(\xi_j)}, C_{\mu, \nu}(s)) - \alpha_m |C_{\mu, \nu}(s)| > \delta^m |C_{\mu, \nu}(s)|. \quad (6.1)$$

για κάθε $j < l'_m$. Επίσης, από την υπόθεση,

$$X = \bigcup_{\xi < l} X_i^{(\xi)} \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$$

δηλαδή $X_i^{(\xi)} \in S(t_1, t_2, \dots, t_m)$ για κάθε $\xi < l$ και άρα

$$\bigcup_{\xi < l} X_i^{(\xi_j)} \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, l'_m)$$

Αλλά, τα μ, ν και s έχουν επιλεγεί έτσι ώστε $|C_{\mu, \nu}(s)| \geq \tau^m t_m$, οπότε από την Πρόταση 3 για το $\bigcup_{\xi < l} X_i^{(\xi_j)}$, θα υπάρχει $j < l'_m$ τέτοιο ώστε

$$p^m(X_i^{(\xi_j)}, C_{\mu, \nu}(s)) - \alpha_m |C_{\mu, \nu}(s)| < \delta^m |C_{\mu, \nu}(s)|.$$

άτοπο, από την 6.1. Έτσι, η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Πρόταση 6. Έστω $l > 0, m > 0$ και i με $0 \leq i < K - 1$ και

$$X^{(\xi)} = \bigcup_{i' < K} X_{i'}^{(\xi)} \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K),$$

για κάθε $\xi < l \leq l_m$. Έστω, επίσης, ότι για κάθε $j < i$, τα $X_j^{(\xi)}$ και $X_j^{(\eta)}$ είναι R -ισοδύναμα για κάθε $\xi, \eta < l$. Θεωρούμε τη δεύτερη κανονική διαμέριση των $X^{(\xi)}$, δηλαδή

$$X_{i'}^{(\xi)} = \bigcup_{j < t_{m+1}} X_{i', j}^{(\xi)} \text{ για κάθε } i' < K.$$

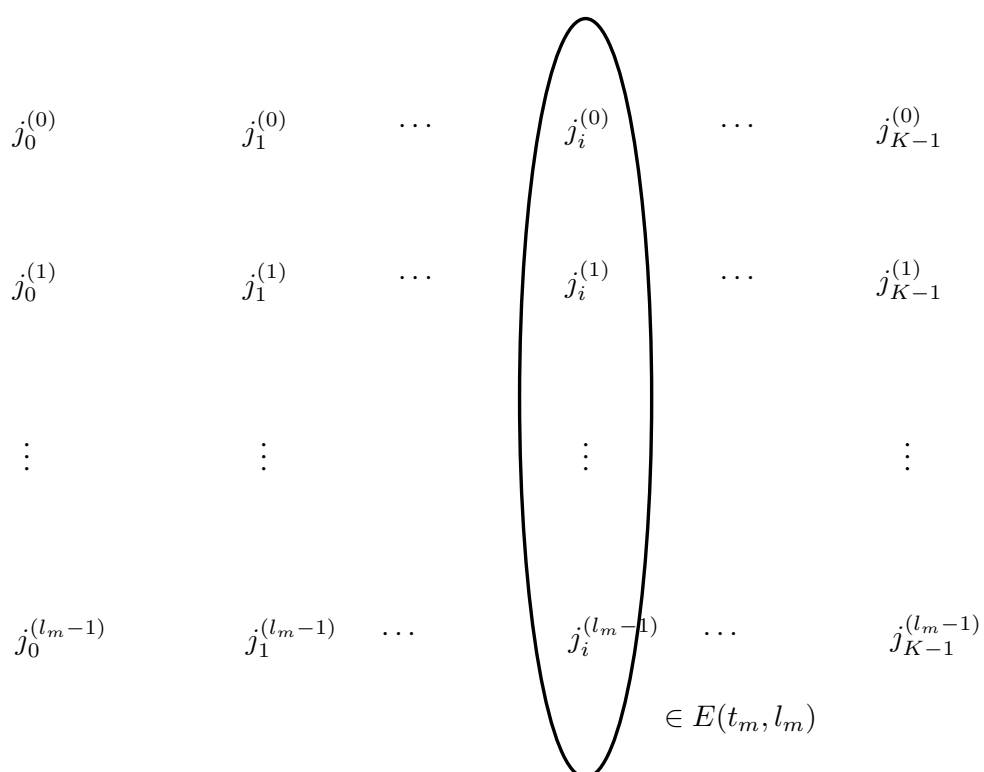
Τότε υπάρχει ακολουθία l_m αριθμητικών προόδων

$$(j_0^{(\zeta)}, \dots, j_{k-1}^{(\zeta)}) \in E(t_{m+1}, K), \quad \zeta < l_m,$$

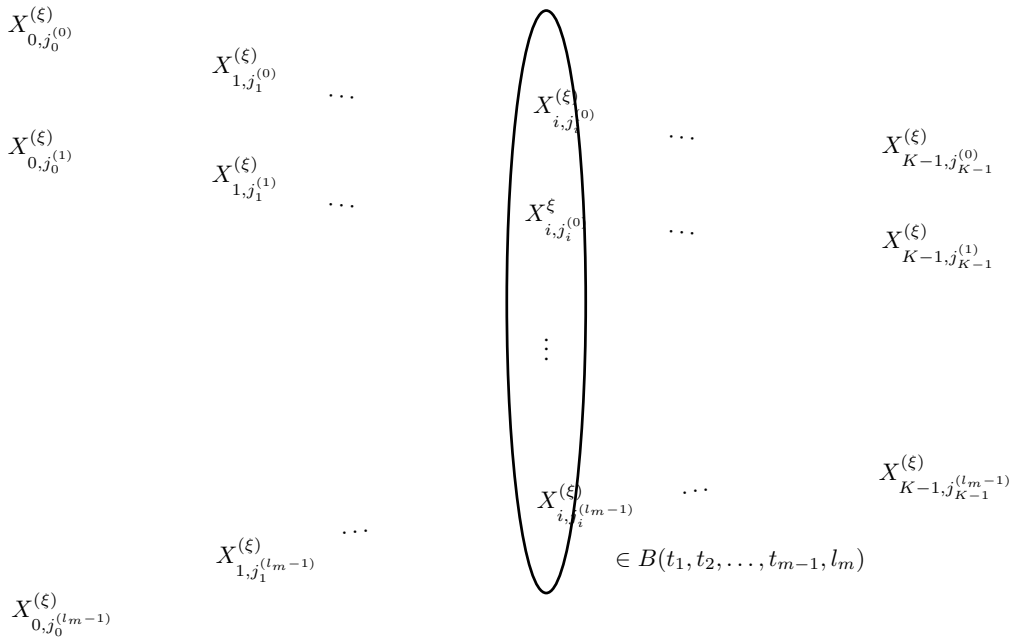
έτσι ώστε η $(j_i^{(0)}, \dots, j_i^{(l_m-1)})$ να είναι αριθμητική πρόοδος μήκους l_m και για κάθε $\xi < l$ και $\zeta < l_m$ να είναι

$$\bigcup_{i' < K} X_{i', j_i^{(\zeta)}}^{(\xi)} \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K).$$

Σχήμα 6.2: Οι ακολουθίες της Πρότασης 6



Σχήμα 6.3: Οι Δομές της Πρότασης 6



Απόδειξη. Όπως και στη απόδειξη της Πρότασης 5, από την Παρατήρηση 8 και την υπόθεση ότι για κάθε $j < i$, τα $X_j^{(\xi)}$ και $X_j^{(\eta)}$ είναι R-ισοδύναμα, έπεται ότι

$$I(X^{(\xi)}, i, s) = I(X^{(\eta)}, i, s), \text{ για } i \leq s < K, \xi, \eta < l.$$

κι άρα

$$f(X^{(\xi)}, j, i, s) = f(X^{(\eta)}, j, i, s)$$

για κάθε $\xi, \eta < l, i \leq s < K, j < t_{m+1}$. Ξανά, για λόγους συντομίας θέτουμε

$$F(X^{(\xi)}, j, i, s) = F(j, i, s), f(X^{(\xi)}, j, i, s) = f(j, i, s).$$

Από τον ορισμό της $G^i(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K)$, για κάθε s με $i \leq s < K$ υπάρχουν $Z_s, \bar{Z}_s \in [0, t_m + 1)$ τέτοια ώστε

$$|Z_s|, |\bar{Z}_s| \leq 2i\alpha_{m+1}^i(1 - \beta_{m+1})t_{m+1} \leq 2K\alpha_{m+1}^K(1 - \beta_{m+1})t_{m+1}$$

και

$$(\alpha') \quad f(j, i, s) \leq 2i\alpha_{m+1}^i t_{m+1} \text{ όταν } j \notin Z_s, j < t_{m+1},$$

$$(\beta') \quad f(j, i, s) \geq \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_{m+1}^i t_{m+1}, \text{ όταν } j \notin \bar{Z}_s, \frac{t_{m+1}}{4} < j < \frac{3t_{m+1}}{4}.$$

Τώρα, θέτουμε

$$Z = \{j : \frac{t_{m+1}}{4} < j < \frac{3t_{m+1}}{4} \text{ και δεν υπάρχει } (j_0, \dots, j_{k-1}) \in F(j, i, i)\}$$

τέτοια ώστε $\bigcup_{i' < K} X_{i', j_{i'}}^{(\xi)} \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ για κάθε $\xi < l$.

Με άλλα λόγια, το Z είναι το σύνολο των δεικτών με $\frac{t_{m+1}}{4} < j < \frac{3t_{m+1}}{4}$ για τους οποίους για κάθε αριθμητική πρόοδο $(j_0, \dots, j_{k-1}) \in F(j, i, i)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi < l$ τέτοιο ώστε

$$\bigcup_{i' < K} X_{i', j_{i'}}^{(\xi)} \notin D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K), \quad (6.2)$$

δηλαδή είναι οι δείκτες για τους οποίους δεν μπορούμε να βρούμε αριθμητικές προόδους για τις οποίες να ισχύει το συμπέρασμα της Πρότασης. Όπως είναι λογικό, θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι το Z δεν είναι πολύ μεγάλο. Θέτουμε, επίσης,

$$P = \bigcup_{j \in Z} F(j, i, i), \quad p = |P|.$$

Από τον ορισμό του $F(j, i, i)$ έχουμε

$$X_{i', j_{i'}}^{(\xi)} \in P(t_1, t_2, \dots, t_m) \subseteq S(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

για κάθε $i' < i$. Οπότε, από την 6.2 και τον ορισμό της $D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ έπεται ότι υπάρχει i' με $i \leq i' < K$, τέτοιο ώστε

$$X_{i', j_{i'}}^{(\xi)} \notin S(t_1, t_2, \dots, t_m).$$

Δηλαδή,

$$Z = \{j : \frac{t_{m+1}}{4} < j < \frac{3t_{m+1}}{4} \text{ και για κάθε } (j_0, \dots, j_{k-1}) \in F(j, i, i) \text{ υπάρχει } \xi < l \text{ τέτοιο ώστε } X_{i', j_{i'}}^{(\xi)} \notin S(t_1, t_2, \dots, t_m), \text{ για κάποιο } i' \text{ με } i \leq i' < K\}.$$

(6.3)

Από το (β) έχουμε

$$f(j, i, i) \geq \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_{m+1}^i t_{m+1}, \text{ όταν } j \notin \bar{Z}_i, \frac{t_{m+1}}{4} < j < \frac{3t_{m+1}}{4}.$$

Άρα, για κάθε $j \in Z \setminus \bar{Z}_i$,

$$f(j, i, i) = |F(j, i, i)| \geq \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_{m+1}^i t_{m+1}.$$

Αλλά, από τον ορισμό τους, τα $F(j, i, i)$, $F(j', i, i)$ είναι ξένα μεταξύ τους για $j \neq j'$. Άρα, εφ' όσον

$$|\bar{Z}| \leq 2i\alpha_{m+1}^i(1 - \beta_{m+1})t_{m+1} \leq 2K\alpha_{m+1}^i(1 - \beta_{m+1})t_{m+1},$$

θα είναι

$$p = |P| = \left| \bigcup_{j \in Z} F(j, i, i) \right| \geq (|Z| - 2i\alpha_{m+1}^i(1 - \beta_{m+1})t_{m+1}) \geq (|Z| - 2K\alpha_{m+1}^K(1 - \beta_{m+1})t_{m+1}) \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_{m+1}^i$$

Από την άλλη, από την 6.3 έχουμε

$$Z \subseteq \{j : j < t_{m+1} \text{ και } X_{s,j}^{(\xi)} \notin S(t_1, t_2, \dots, t_m) \text{ για κάθε } \xi < l, i \leq s < K\}$$

κι άρα

$$\begin{aligned}
 P &= \bigcup_{j \in Z} F(j, i, i) \\
 &\subseteq \bigcup_{i \leq s < K} \bigcup_{\xi < l} \bigcup_{\substack{j < t_{m+1} \\ X_{s,j}^{(\xi)} \notin S(t_1, t_2, \dots, t_m)}} F(j, i, s) \\
 &= \bigcup_{i \leq s < K} \bigcup_{\xi < l} \left(\bigcup_{\substack{j < t_{m+1} \\ X_{s,j}^{(\xi)} \notin S(t_1, t_2, \dots, t_m) \\ j \in Z_s}} F(j, i, s) \cup \bigcup_{\substack{j < t_{m+1} \\ X_{s,j}^{(\xi)} \notin S(t_1, t_2, \dots, t_m) \\ j \notin Z_s}} F(j, i, s) \right)
 \end{aligned}$$

οπότε, από το εύρος που κινούνται οι δείκτες στις ενώσεις, το μέγεθος του Z_s και την 6.2 έχουμε

$$\begin{aligned}
 p = |P| &\leq K \cdot l \cdot 2K\alpha_{m+1}^K (1 - \beta_{m+1}) t_{m+1} \cdot t_{m+1} + \\
 &\quad + K \cdot l \cdot 2^i \alpha_{m+1}^i t_{m+1} \max_{s, \xi} |\{j : X_{s,j}^{(\xi)} \notin S(t_1, t_2, \dots, t_m) \text{ και } j \notin Z_s\}| \\
 &\leq K \cdot l \cdot 2K\alpha_{m+1}^K (1 - \beta_{m+1}) t_{m+1}^2 + \\
 &\quad + K \cdot l \cdot 2^K \alpha_{m+1}^K t_{m+1} \max_{s, \xi} |\{j : X_{s,j}^{(\xi)} \notin S(t_1, t_2, \dots, t_m)\}|.
 \end{aligned}$$

Αλλά, από την υπόθεση,

$$X^{(\xi)} \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K) \subseteq C(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K).$$

Επομένως, για κάθε $s < K$, $\xi < l$, έχουμε $X_s^{(\xi)} \in S(t_1, t_2, \dots, t_{m+1})$. Άρα,

$$s^{m+1}(X_s^{(\xi)}) \geq (\beta_m - \sqrt{\mu_m(t_{m+1})}) t_{m+1}$$

οπότε, από την επιλογή των t_m στην Παράγραφο 4.2

$$\begin{aligned}
 \max_{s, \xi} |\{j : X_{s,j}^{(\xi)} \notin S(t_1, t_2, \dots, t_m)\}| &\leq (1 - \beta_m + \sqrt{\mu_m(t_{m+1})}) t_{m+1} \\
 &\leq 2(1 - \beta_m) t_{m+1}
 \end{aligned}$$

Άρα,

$$p \leq Kl\alpha_{m+1}^K (1 - \beta_{m+1}) t_{m+1}^2 (2K + 2^{K+1}).$$

Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες για το p παίρνουμε

$$(|Z| - 2K\alpha_{m+1}^K (1 - \beta_{m+1}) t_{m+1}) \frac{1}{K^2} \frac{1}{2^i} \alpha_{m+1}^i t_{m+1} \leq Kl\alpha_{m+1}^K (1 - \beta_{m+1}) t_{m+1}^2 (2K + 2^{K+1})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |Z| &\leq 2K\alpha_{m+1}^K(1 - \beta_{m+1})t_{m+1} + K^3\alpha_{m+1}^K(1 - \beta_{m+1})t_{m+1}^2(2K + 2^{K+1}) \\
&\leq (1 - \beta_{m+1})2K^3\alpha_{m+1}^K t_{m+1} \leq (1 - \beta_{m+1})2K^3\alpha_{m+1}^K t_{m+1} \\
&\leq \sqrt{1 - \beta_{m+1}} t_{m+1},
\end{aligned}$$

αρκεί να ισχύει ότι $K^3\alpha_{m+1}^K \leq \frac{1}{2\sqrt{1-\beta_{m+1}}}$, που όμως ικανοποιείται από την επιλογή των t_m .

Τέλος, $X^{(0)} \in C(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K)$, άρα $X_i^{(0)} \in S(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K)$. Επομένως,

$$s^{m+1}(X_i^{(0)}) \geq (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_m(t_{m+1})})t_{m+1}$$

κι άρα

$$\begin{aligned}
&s^{m+1}(X_i^{(0)}, (\frac{t_{m+1}}{4}, \frac{3t_{m+1}}{4}) \setminus Z) \\
&\geq (\beta_{m+1} - \sqrt{\mu_m(t_{m+1})})t_{m+1} - \frac{t_{m+1}}{2} - \sqrt{1 - \beta_{m+1}} t_{m+1} \\
&\geq (\beta_{m+1} - \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \beta_{m+1}})t_{m+1}, \text{ από την επιλογή των } t_m \\
&> \frac{1}{2}(1 - \alpha_m^{-1})t_{m+1}
\end{aligned}$$

δεδομένου ότι

$$(\beta_{m+1} - \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \beta_{m+1}}) > \frac{1}{2}(1 - \alpha_m^{-1}),$$

που όμως κι αυτή η ανισότητα ισχύει από την επιλογή των t_m . Επομένως, από το Λήμμα 11, το $(\frac{t_{m+1}}{4}, \frac{3t_{m+1}}{4}) \setminus Z$ περιέχει αριθμητική πρόοδος $(j^{(0)}, \dots, j^{(l_m-1)})$ μήκους l_m , συνεπώς, από τον ορισμό του Z , για κάθε $\zeta < l_m$, υπάρχει αριθμητική πρόοδος $(j_0^{(\zeta)}, \dots, j_{k-1}^{(\zeta)}) \in F(j^{(\zeta)}, i, i)$ τέτοια ώστε για κάθε $\xi < l$ να είναι

$$\bigcup_{i' < K} X_{i', j_{i'}^{(\zeta)}}^{(\xi)} \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K).$$

Όμως, από τον ορισμό του $F(j^{(\zeta)}, i, i)$ έπεται ότι $j_i^{(\zeta)} = j^{(\zeta)}$, δηλαδή

$$(j^{(0)}, \dots, j^{(l_m-1)}) = (j_i^{(0)}, \dots, j_i^{(l_m-1)})$$

κι άρα η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Κεφάλαιο 7

Το Θεώρημα του Szemerédi

7.1 Διαιρέτες Δομών και Σύγκριση Θέσεων

Ορισμός 16. Έστω $m < m'$ και

$$X \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K), \quad Y \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, K).$$

Θα λέμε ότι το Y *διαιρεί* το X και θα γράφουμε $Y|X$, αν για κάθε $i < K$, η υποδομή Y_i του Y είναι υποδομή διάστασης m της υποδομής X_i του X .

Αν

$$X, X' \in B(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K), \quad Y, Y' \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$$

με $Y|X, Y'|X'$, τότε θα λέμε ότι τα Y, Y' *έχουν την ίδια θέση* μέσα στα X, X' αντίστοιχα, αν για κάθε $i < K$, ισχύει ότι

η Y_i είναι η j_i -οστή υποδομή του $X_i \Leftrightarrow$ η Y'_i είναι η j_i -οστή υποδομή του X'_i .

Παρατήρηση 10. Από τον Ορισμό 16 έπονται άμεσα τα εξής:

- (i) Αν X, X' είναι R-ισοδύναμα και $Y|X, Y'|X'$ έτσι ώστε τα Y, Y' να έχουν την ίδια θέση μέσα στα X, X' , τότε Y, Y' είναι R-ισοδύναμα.
- (ii)
 - Αν $Z|Y$ και $Y|X$, τότε $Z|X$.
 - Αν $Z|Y, Z'|Y'$ και $Y'|X', Y'|X'$, τέτοια ώστε τα Z, Z' να έχουν την ίδια θέση μέσα στα Y, Y' και τα Y, Y' να έχουν την ίδια θέση μέσα στα X, X' , τότε $Z|X, Z'|X'$ και τα Z, Z' έχουν την ίδια θέση μέσα στα X, X' .

Πρόταση 7. Για κάθε $m > 0$ και κάθε i με $0 \leq i < K$, υπάρχει θετικός ακέραιος $h(m, i)$ τέτοιος ώστε αν $m' > h(m, i)$ και

$$X^{(\xi)} \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K), \quad \xi < l < l_m^{2-i},$$

τότε υπάρχουν

$$Y^{(\xi)} \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K), \quad \xi < l,$$

τέτοια ώστε $Y^{(\xi)}|X^{(\xi)}$ και για κάθε $\xi < l$, οι θέσεις των $Y^{(\xi)}$ μέσα στα $X^{(\xi)}$ είναι ίδιες.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο i .

$i = 0$: Από τις Παρατηρήσεις 4 και 9 έχουμε

$$D^0(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = C(t_1, t_2, \dots, t_m, K),$$

$$G^0(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = C(t_1, t_2, \dots, t_m, K).$$

Θα δείξουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε $h(m, 0) = m$.

Πράγματι, έστω

$$X^{(\xi)} \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K) = C(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K), \quad \xi < l < l_m^{-i}, \quad m' > m.$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν

$$Y^{(\xi)} \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = C(t_1, t_2, \dots, t_m, K), \quad \xi < l,$$

τέτοια ώστε $Y^{(\xi)}|X^{(\xi)}$ και για κάθε $\xi < l$, οι θέσεις των $Y^{(\xi)}$ μέσα στα $X^{(\xi)}$ είναι ίδιες.

- Αν $m' = m$, μπορούμε απλά να πάρουμε $Y^{(\xi)} = X^{(\xi)}$, $\xi < l$ και το συμπέρασμα ισχύει.
- Έστω ότι $m' > m$ κι ότι το συμπέρασμα ισχύει για $m' - 1$. Αφού $i = 0$, η υπόθεση της R-ισοδυναμίας στην Πρόταση 6 ισχύει τετριμμένα. Επομένως, από την Πρόταση 6, υπάρχει αριθμητική πρόοδος $(j_0^{(0)}, \dots, j_{k-1}^{(0)}) \in E(t_{m'}, K)$ (δεν χρειάζεται καν να χρησιμοποιήσουμε όλο το συμπέρασμα της Πρότασης 6, αφού μια αριθμητική πρόοδος αρκεί) τέτοια ώστε

$$Z^{(\xi)} = \bigcup_{i' < l} X_{i', j_{i'}^{(0)}}^{(\xi)} \in C(t_1, t_2, \dots, t_{m'-1}, K).$$

Δηλαδή, $Z^{(\xi)} = X_{i', j_{i'}^{(0)}}^{(\xi)}$, άρα $Z^{(\xi)}|X^{(\xi)}$ και όλα τα $Z^{(\xi)}$ έχουν την ίδια θέση μέσα στα $X^{(\xi)}$.

Όμως, $Z^{(\xi)} = \bigcup_{i' < i} X_{i', j_{i'}^{(0)}}^{(\xi)} \in C(t_1, t_2, \dots, t_{m'-1}, K)$, άρα από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε $\xi < l$ υπάρχουν $Y^{(\xi)} \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ τέτοια ώστε $Y^{(\xi)} | Z^{(\xi)}$ και όλα τα $Y^{(\xi)}$ να έχουν την ίδια θέση μέσα στα $Z^{(\xi)}$. Από την Παρατήρηση 10, $Y^{(\xi)} | X^{(\xi)}$ και οι θέσεις των $Y^{(\xi)}$ μέσα στα $X^{(\xi)}$ είναι ίδιες.

$i \geq 0$: Έστω ότι το συμπέρασμα της Πρότασης 7 ισχύει για $i \geq 0$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $i + 1$. Θέτουμε $m^* = h(m, i) + 1$. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε $h(m, i + 1) = h(m^*, i)$.

Πράγματι, έστω $m' \leq h(m^*, i)$ και

$$X^{(\xi)} \in D^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K), \quad \xi < l < l_m^{2^{-(i+1)}}.$$

Τότε, προφανώς είναι και $X^{(\xi)} \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K)$. Εφ' όσον $l_m^{2^{-(i+1)}} \leq l_m^{2^{-i}}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση στα $X^{(\xi)}$, από την οποία παίρνουμε ότι για κάθε $\xi < l$ υπάρχουν $Y^{(\xi)} \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_{m^*}, K)$ τέτοια ώστε $Y^{(\xi)} | X^{(\xi)}$ και όλα τα $Y^{(\xi)}$ να έχουν την ίδια θέση μέσα στα $X^{(\xi)}$. Όμως, $X^{(\xi)} \in D^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K)$ κι άρα $X_j^{(\xi)} \in P(t_1, t_2, \dots, t_{m'}),$ για κάθε $j \leq i$. Επομένως, από τον ορισμό της $P(t_1, t_2, \dots, t_{m'})$ (ως μια συγκεκριμένη κλάση R-ισοδυναμίας της $S(t_1, t_2, \dots, t_{m'})$), όλα τα $X_j^{(\xi)}$ με $j \leq i$ είναι R-ισοδύναμα. Οπότε, εφ' όσον όλα τα $Y^{(\xi)}$ έχουν την ίδια θέση μέσα στα $X^{(\xi)}$, από την Παρατήρηση 10 όλα τα $Y_j^{(\xi)}$ με $j \leq i$ είναι R-ισοδύναμα.

Επίσης, προφανώς $h(m, i) > m$ κι άρα $l_{h(m, i)} \geq l_m$, συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 6 για τα $Y^{(\xi)}$, $\xi < l$. Δηλαδή, υπάρχει ακολουθία $l_{h(m, i)}$ αριθμητικών προόδων

$$(j_0^{(\zeta)}, \dots, j_{k-1}^{(\zeta)}) \in E(t_{h(m, i)+1}, K), \quad \zeta < l_{h(m, i)},$$

τέτοια ώστε για κάθε $\xi < l$ και κάθε $\zeta < l_{h(m, i)}$ έχουμε

$$\bigcup_{i' < i} Y_{i', j_{i'}^{(\zeta)}}^{(\xi)} \in D(i(t_1, t_2, \dots, t_{h(m, i)}, K),$$

κι έτσι ώστε η $j_i^{(0)}, \dots, j_i^{(h(m, i)-1)}$ να είναι αριθμητική πρόοδος μήκους $l_{h(m, i)}$. Θέτουμε $\bigcup_{i' < i} Y_{i', j_{i'}^{(\zeta)}}^{(\xi)} = Y(\xi, \zeta)$. Δηλαδή, τα $Y(\xi, \zeta)$ ορίζονται για

κάθε $\xi < l, \zeta < l_{h(m, i)}$ κι αφού $h(m, i) > m$, θα είναι $l_{h(m, i)} \geq l_m > l_m^{2^{-i}}$, άρα τα $Y(\xi, \zeta)$ ορίζονται και για κάθε $\xi < l, \zeta < l_m^{2^i}$. Άρα, έχουμε

$$Y(\xi, \zeta) \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_{h(m, i)}, K), \quad \xi < l, \zeta < l_m^{2^{-i}}$$

κι επομένως, τα $Y(\xi, \zeta)$ έχουν πλήθος το πολύ

$$l \cdot l_m^{2^{-i}} \leq l_m^{2^{-i}} \cdot l_m^{2^{-i}} = l_m^{2^{-(i+1)}}$$

(λόγω του εύρους στα οποία κινούνται τα ξ και ζ).

Οπότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση για τα $Y(\xi, \zeta)$, από τη οποία έχουμε ότι υπάρχουν

$$Z(\xi, \zeta) \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$$

τέτοια ώστε $Z(\xi, \zeta) \mid Y(\xi, \zeta)$ και όλα τα $Z(\xi, \zeta)$ να έχουν την ίδια θέση μέσα στα $Y(\xi, \zeta)$. Επίσης, από τον ορισμό τους, τα $Y(\xi, \zeta)$ έχουν την ίδια θέση μέσα στα $X^{(\xi)}$ για το ίδιο ζ . Επομένως, πάλι από την Παρατήρηση 10, τα $Z(\xi, \zeta)$ έχουν την ίδια θέση μέσα στα $X^{(\xi)}$ για το ίδιο ζ . Όμως, τα $X_j^{(\xi)}$ με $j \leq i$ είναι R-ισοδύναμα, άρα και όλα τα $Z(\xi, \zeta)_j$, $\xi < l, \zeta < l_m^{2^{-i}}$ με $j \leq i$ είναι R-ισοδύναμα. Επίσης,

- (1) εφ' όσον $l \leq l_m^{2^{-i}}$, τα $Z(\xi, \zeta)$ ορίζονται για $\xi, \zeta < l$,
- (2) η $j_i^{(0)}, \dots, j_i^{(l-1)}$ είναι αριθμητική πρόοδος μήκους l , ως οι πρώτοι l όροι της αριθμητικής προόδου $j_i^{(0)}, \dots, j_i^{(h(m,i)-1)}$,
- (3) τα $Z(\xi, \zeta)$ έχουν την ίδια θέση μέσα στα $Y(\xi, \zeta)$, άρα τα $Z(\xi, \zeta)_i$ αποτελούν τις ίδιες υποδομές μικρότερης διάστασης μέσα στα $Y(\xi, \zeta)_i$.

Άρα, από τις (1), (2) και (3), μπορούμε να ορίσουμε τη δομή

$$Z = \bigcup_{j < l} Z(\xi, \zeta)_i \in B(t_1, t_2, \dots, t_m, l), \quad \xi < l.$$

Όμως, κάθε $Z(\xi, \zeta) \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$, οπότε κάθε $Z(\xi, \zeta)_i \in S(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$.

Άρα, $Z = \bigcup_{j < l} Z(\xi, \zeta)_i \in C(t_1, t_2, \dots, t_m, l)$. Επίσης, έχουμε διαδοχικά:

- $Y(\xi, \zeta) \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_{h(m,i)}, K)$, άρα για κάθε $j < i$, $Y(\xi, \zeta)_j \in P(t_1, t_2, \dots, t_{h(m,i)})$. Οπότε, για κάθε $j < i$, $\zeta < l_m^{2^{-i}}$ τα $Y(0, \zeta)_j$ είναι R-ισοδύναμα.
- Για $\zeta < l_m^{2^{-(i+1)}}$, η θέση των $Z(0, \zeta)$ μέσα στα $Y(0, \zeta)$ είναι η ίδια. Άρα, για κάθε $j < i$, $\zeta < l_m^{2^{-(i+1)}}$, τα $Z(0, \zeta)_j$ είναι R-ισοδύναμα.

Επομένως, αφού $l_m^{2^{-K}} \leq l_m^{2^{-(i+1)}}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 5 στις δομές $Z(0, \zeta)$, $\zeta < l_m^{2^{-K}}$, από την οποία έχουμε ότι υπάρχει $\zeta^* < l_m^{2^{-K}}$ τέτοιο ώστε

$$Z(0, \zeta^*) \in G^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$$

(μπορέσαμε, έτσι, να ανέβουμε τάξη). Όμως, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, για κάθε $\xi < l$, η θέση των $Z(\xi, \zeta^*)$ μέσα στα $X^{(\xi)}$ είναι η ίδια με τη θέση του $Z(0, \zeta^*)$ μέσα στο $X^{(0)}$. Περαιτέρω, όλα τα $X_j^{(\xi)}$ με $j < i$, $\xi < l$ ανήκουν στην $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$, επομένως είναι R-ισοδύναμα. Οπότε, λόγω της ίδιας θέσης τους μέσα στα $X_j^{(\xi)}$, για κάθε $j < i$, όλα τα $Z(\xi, \zeta^*)_j$ με $\xi < l$ είναι R-ισοδύναμα με το $Z(0, \zeta^*)_j$. Συνεπώς, για $\xi < l$,

$$Z(\xi, \zeta^*) \in G^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$$

. Τελικά, συγκεντρώνοντας όλα τα παραπάνω, για κάθε $\xi < l$ είναι

$Z(\xi, \zeta^*)|Y(\xi, \zeta^*)|X^{(\xi)}$ και τα $Z(\xi, \zeta^*) \in G^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$ έχουν την ίδια θέση μέσα στα $X^{(\xi)}$.

Έτσι, αποδείχθηκε το επαγωγικό βήμα κι άρα η απόδειξη είναι πλήρης.

■

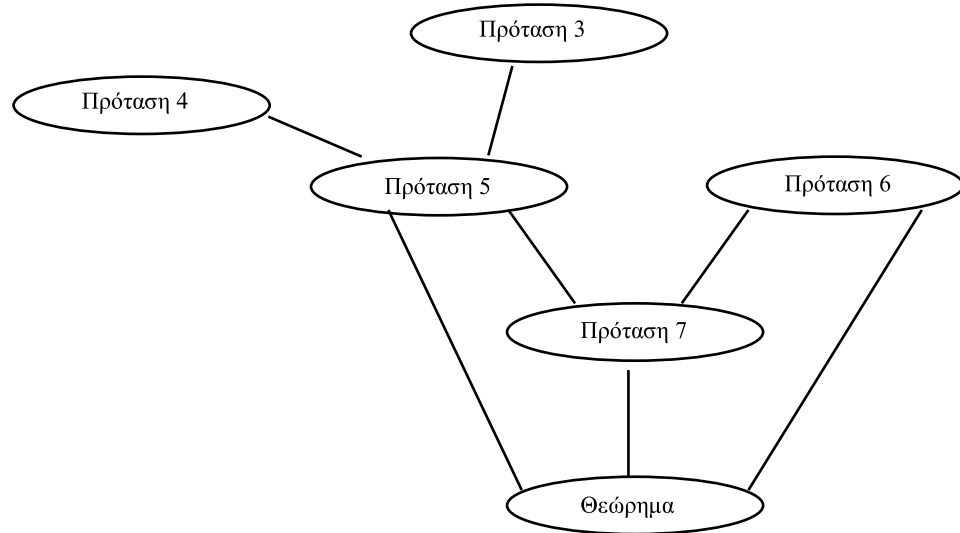
7.2 Το Θεώρημα

Μέχρι στιγμής είδαμε τα παρακάτω (διατυπωμένα κάπως πιο διαισθητικά τώρα):

- Η Πρόταση 5 (που αποδεικνύεται μέσω της Πρότασης 4) μας δίνει την δυνατότητα να ανέβουμε τάξη στις ομογενείς δομές.
- Η Πρόταση 6 μας δίνει τη δυνατότητα να περάσουμε από ομογενείς δομές σε ιδεώδεις, θυσιάζοντας μια διάσταση.
- Η Πρόταση 7 μας δίνει τη δυνατότητα να περάσουμε από ιδεώδεις δομές σε ομογενείς, θυσιάζοντας περισσότερες διαστάσεις.

Είμαστε έτοιμοι, λοιπόν, να αποδείξουμε το Θεώρημα.

Σχήμα 7.1: Μια συνολική εικόνα της πορείας της απόδειξης.



Θεώρημα (Szemerédi , 1975). Κάθε σύνολο $R \subseteq \mathbb{N}$ με θετική άνω πυκνότητα περιέχει αυθαίρετα μεγάλη αριθμητική πρόοδο.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $m \geq 0$ και $0 \leq i < K$,

$$D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \neq \emptyset,$$

με επαγωγή στο i . Πράγματι,

$i = 0$: Από την Παρατήρηση 4 έχουμε

$$D^0(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = C(t_1, t_2, \dots, t_m, K).$$

- Για $m = 0$, από τον ορισμό της $C(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K)$ και το γεγονός ότι $S(\emptyset) = B(\emptyset)$ έχουμε

$$\begin{aligned} C(K) &= \{X \in B(K) : s^1(X) = K\} \\ &= \{X \in B(K) : \text{για κάθε } i < K, X_i \in S(\emptyset)\} \\ &= \{X \in B(K) : \text{για κάθε } i < K, X_i \in B(\emptyset)\} \\ &= B(K), \end{aligned}$$

άρα προφανώς $D^0(K) = C(K) = B(K) \neq \emptyset$.

– Για $m > 0$, το t_m έχει επιλεγεί στην Παράγραφο 4.2 τέτοιο ώστε

$$1 - \beta_{m+1} \leq \frac{1}{(2K^3 l_m 2^{2K})^2} < \frac{1}{K},$$

επομένως από το Λήμμα 8,

$$D^0(t_1, t_2, \dots, t_m, K) = C(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \neq \emptyset.$$

$i > 0$: Έστω ότι $D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \neq \emptyset$ για $i < K - 1$ και για κάθε $m \geq 0$. Θα δείξουμε ότι $D^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \neq \emptyset$ για κάθε $m \geq 0$. Πράγματι, θέτουμε

$$m' = h(m + 1, i) \quad \text{και} \quad m'' = h(m' + 1, i).$$

Αφού $D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \neq \emptyset$, υπάρχει $X \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K)$. Από τον ορισμό του $h(m' + 1, i) = m''$ και την Πρόταση 7, υπάρχει $Y \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_{m'+1}, K)$ τέτοιο ώστε $Y|X$. Από την Πρόταση 6 για $l = 1$ (δηλαδή για το $Y \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_{m'+1}, K)$), έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία l_m αριθμητικών προόδων

$$(j_0^{(\zeta)}, \dots, j_{K-1}^{(\zeta)}) \in E(t_{m'+1}, K), \quad \zeta < l_{m'},$$

έτσι ώστε η

$$(j_i^{(0)}, \dots, j_i^{(l_{m'}-1)})$$

να είναι αριθμητική πρόοδος μήκους $l_{m'}$ και για κάθε $\zeta < l_{m'}$ να είναι

$$\bigcup_{i' < K} Y_{i', j_{i'}^{(\zeta)}} \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K).$$

Θέτουμε

$$Y^{(\zeta)} = \bigcup_{i' < K} Y_{i', j_{i'}^{(\zeta)}}.$$

Δηλαδή, $Y^{(\zeta)} \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K)$. Επίσης, $m + 1 \leq m'$ κι άρα $l_m^{2^{-i}} \leq l_{m'}$. Οπότε, πάλι από τον ορισμό του $h(m + 1, i) = m'$ και την Πρόταση 7 για τα $Y^{(\zeta)}$, $l_m^{2^{-i}}$, έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία δομών $Z^{(\zeta)} \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K)$, $l_m^{2^{-i}}$, τέτοια ώστε $Z^{(\zeta)}|Y^{(\zeta)}$ και η θέση των $Z^{(\zeta)}$ μέσα στα $Y^{(\zeta)}$ είναι η ίδια. Όμως, αφού $Z^{(\zeta)} \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K)$, τότε $Z_i^{(\zeta)} \in S(t_1, t_2, \dots, t_{m+1})$. Θέτουμε $l = l_{m+1}^{2^{-(i+1)}}$. Τότε, εφ' όσον $(j_i^{(0)}, \dots, j_i^{(l-1)})$ αριθμητική πρόοδος, θα είναι

$$\bigcup_{\zeta < l} Z_i^{(\zeta)} \in C(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K)$$

. Τώρα, έχουμε διαδοχικά:

- $Y^{(\zeta)} \in D^i(t_1, t_2, \dots, t_{m'}, K)$, οπότε κάθε $Y_j^{(\zeta)}$ με $j < i$ ανήκει στην $P(t_1, t_2, \dots, t_{m'})$ κι επομένως όλα τα $Y_j^{(\zeta)}$ με $j < i$, $\zeta < l$ είναι R-ισοδύναμα.
- Η θέση των $Z^{(\zeta)}$ μέσα στα $Y^{(\zeta)}$ είναι η ίδια.

Άρα, για κάθε $j < i$, τα $Z_j^{(\zeta)}$ είναι R-ισοδύναμα για κάθε $\zeta < l$. Όμως $i + 1 < K$, οπότε $l = l_{m+1}^{2^{-(i+1)}} \geq l_{m+1}^{2^{-K}}$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 5 στην ακολουθία δομών $Z^{(\zeta)}$, $\zeta < l$, από την οποία έχουμε ότι υπάρχει $\xi^* < l$ τέτοιο ώστε

$$Z^{(\xi^*)} \in G^i(t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, K).$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την Πρόταση 6 στη δομή $Z^{(\xi^*)}$, παίρνουμε άμεσα ότι

$$D^{i+1}(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \neq \emptyset.$$

Συνεπώς, αποδείχθηκε το επαγωγικό βήμα κι άρα για κάθε $m \geq 0$ και $0 \leq i < K$,

$$D^i(t_1, t_2, \dots, t_m, K) \neq \emptyset.$$

Απομένει να δείξουμε ότι το R πράγματι περιέχει αυθαίρετα μεγάλες αριθμητικές προόδους. Είναι

$$D^{K-1}(K) \neq \emptyset,$$

άρα υπάρχει $X \in D^{K-1}(K)$. Άρα $X \in B(K)$, δηλαδή το X είναι αριθμητική πρόοδος μήκους K . Όμως από τον ορισμό του $D^{K-1}(K)$, κάθε X_i , $i < K - 1$ (δηλαδή κάθε στοιχείο της προόδου) ανήκει στην $P(\emptyset) = R$, επομένως το R περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους $K - 1$. Εφ' όσον το K είναι αυθαίρετο, το R περιέχει αυθαίρετα μεγάλη περιέχει αριθμητική πρόοδο. ■

Σαν συνέπεια του Θεωρήματος του Szemerédi, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε και την πεπερασμένη μορφή του.

Πόρισμα. . Για κάθε $\varepsilon < 0$ και $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει θετικός ακέραιος $N(k, \varepsilon)$ τέτοιος ώστε αν $n > N(k, \varepsilon)$ και $R \subseteq [0, n)$ με $|R| > \varepsilon n$, τότε το R περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k .

Απόδειξη. Έστω ότι το πόρισμα δεν ισχύει. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{n_i\}_{i \geq 1}$ και $R_i \subseteq [0, n_i)$ με $|R_i| > \varepsilon n_i$, $i \geq 1$, τέτοια ώστε τα R_i δεν περιέχουν αριθμητική πρόοδο μήκους k . Θεωρούμε $\{n_i'\}$ υπακολουθία της

$\{n_i\}$, τέτοια ώστε $n'_{i+1} \geq 3n'_i$ (έτσι ώστε $\sum_{j<i} n'_j < n'_i$) για κάθε $i \geq 1$. Ορίζουμε το σύνολο

$$R' = \bigcup_{i \geq 1} (R_{n'_i} + d_i),$$

όπου $d_i = \sum_{j<i} n'_j$. Τότε, θέτοντας $n'_0 = 0$, είναι

$$[0, n) \supseteq \bigcup_{\substack{j>0 \\ n'_j \leq n}} [n'_{j-1}, n'_j),$$

επομένως, εφ' όσον $|R_{n'_i}| > \varepsilon n'_i$, θα είναι

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|R' \cap [0, n)|}{n} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\bigcup_{j \geq 1} (R_{n'_j} + d_j) \cap \bigcup_{\substack{j>0 \\ d_j \leq n}} [n'_{j-1}, n'_j)|}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bigcup_{\substack{j>0 \\ n'_j \leq n}} |(R_{n'_j} + d_j) \cap [n'_{j-1}, n'_j)|}{n} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \max_{d_j \leq n} \{d_j\}}{n} \\ &\geq \varepsilon, \end{aligned}$$

αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{d_j \leq n} \{d_j\}}{n} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\max_{d_j \leq d_i} \{d_j\}}{d_i} = 1$. Οπότε, από το Θεώρημα, το R' θα περιέχει αριθμητική πρόοδος

$$A = \{a + di : 0 \leq i < 3k\}$$

μήκους $3k$. Θεωρούμε l τέτοιο ώστε

$$d_l \leq a + (3k - 1)d < d_{l+1}.$$

Το $R_{n'_l} + d_l$ μπορεί να περιέχει το πολύ $K - 1$ όρους της K κι άρα πρέπει $a + 2kd < d_l$ (διαφορετικά η $a + 2kd, \dots, a + (3k - 1)d$ θα ήταν αριθμητική πρόοδος μέσα στο $R_{n'_l} + d_l$ μήκους k). Αλλά, από τον ορισμό των n'_i και d_i έπεται εύκολα ότι $d_l \geq 3d_{l-1}$ κι άρα

$$a + kd \geq \frac{1}{3}(a + (3k - 1)d) > \frac{1}{3}d_l \geq d_{l-1}.$$

Επομένως,

$$|A \cap (R_{n'_{l-1}} + d_{l-1})| > k,$$

δηλαδή το $R_{n'_{l-1}} + d_{l-1}$ περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k , άτοπο. ■

7.3 Σχόλια

Η συγκεκριμένη απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, παρότι στοιχειώδης, χαρακτηρίζεται από μεγάλη πολυπλοκότητα, αλλά χρειάζεται και τη βαθιά και ουσιαστική κατανόηση των εργαλείων που χρησιμοποιεί. Μετά από κάποια τριβή με τις έννοιες, μπορεί κάποιος να διακρίνει ισχυρές και ξεκάθαρες ιδέες και να εκτιμήσει την συνδυαστική τους ομορφιά, παρά το ότι η πολυπλοκότητα με την οποία χρειάζεται να διατυπωθούν στη μαθηματική τους γραφή τις κάνει αρχικά αρκετά δυσδιάκριτες.

Το Λήμμα Κανονικότητας για διμερή γραφήματα αποτελεί ένα πολύ δυνατό εργαλείο, το οποίο βελτίωσε 3 χρόνια αργότερα ο ίδιος ο Szemerédi κι ουσιαστικά ξεκίνησε ολόκληρο κλάδο στη Θεωρία Γραφημάτων.

Η επιστράτευση πολυδιάστατων εργαλείων για να επιλυθεί ένα πρόβλημα μονοδιάστατο, δίνει μια ισχυρή μέθοδο για το πως μπορούν να αντιμετωπιστούν τέτοιου είδους προβλήματα.

Το πιο σημαντικό στοιχείο της απόδειξης, όμως, είναι μάλλον ότι η άνω θετική πυκνότητα του συνόλου R ουσιαστικά χρησιμοποιείται μόνο στο πόσο καλά ορισμένες είναι οι *κεκορεσμένες* και *τέλειες δομές*, και κατά συνέπεια, όλες οι δομές που ορίσαμε. Αν είναι δυνατόν να οριστούν δομές αντίστοιχες για κάποιο άλλο σύνολο με διαφορετικές ιδιότητες, οι οποίες να έχουν την ίδια συμπεριφορά με τις δομές που ορίσαμε, τότε ισχύουν αυτόματα οι Προτάσεις 4, 5, 6, 7 κι άρα και το Θεώρημα.

Βιβλιογραφία

- [1] van der Waerden, B. L. (1927). "Beweis einer Baudetschen Vermutung". *Nieuw. Arch. Wisk.* 15: 212–216.
- [2] Szemerédi, E. "On Sets of Integers Containing No k Elements in Arithmetic Progression." *Acta Arith.* 27, 199-245, 1975a.
- [3] Fürstenberg, H. "Ergodic Behavior of Diagonal Measures and a Theorem of Szemerédi on Arithmetic Progressions." *J. Analyse Math.* 31, 204-256, 1977.
- [4] Gowers, W. T. "A New Proof of Szemerédi's Theorem." *Geom. Funct. Anal.* 11, 465-588, 2001.
- [5] Green, Ben; Tao, Terence (2008), "The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions", *Annals of Mathematics* 167 (2): 481–547, [arXiv:math.NT/0404188](https://arxiv.org/abs/math.NT/0404188), [doi:10.4007/annals.2008.167.481](https://doi.org/10.4007/annals.2008.167.481)