Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Δ.Π.Μ.Σ.

Λογική και θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού

Διπλωματική εργασία

Ατέρμονες αναγωγές στον λ-λογισμό.

Ξουράφης Γεώργιος

ΑΜ: 200807

Επιβλέπων: Κολέτσος Γ., Καθηγητής ΣΗΜΜΥ, ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2012

Τριμελής Επιτροπή

1. Κολέτσος Γ. Καθηγητής
2. Δημητρακόπουλος Κ. Καθηγητής
3. Ρήγας Ν. Διδάκτωρ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ευκαιρία της ολοκλήρωσης της εργασίας αυτής και μαζί και της φοίτησής μου στο ΜΠΛΑ, θέλω να ευχαριστήσω ειλικρινά τον επιβλέποντα της εργασίας κύριο Κολέτσο για την υποστήριξη και τη συνεχή παρότρυνση, καθώς και τους Γιώργο Σταυρινό και Νίκο Ρήγα που παρακολούθησαν από κοντά την εκπόνηση της εργασίας. Επίσης ευχαριστώ όλους τους καθηγητές του ΜΠΛΑ, που με μεγάλη αγάπη για το αντικείμενό τους και σεβασμό στον φοιτητή, διδάσκουν τα θαυμαστά επιτεύγματα της Μαθηματικής Λογικής και της Θεωρητικής Πληροφορικής.

Περίληψη

Οι ατέρμονες στρατηγικές είναι ένα εργαλείο που βοήθησε στην απόδειξη και κατανόηση κάποιων ιδιοτήτων της β-αναγωγής (και όχι μόνο). Μια σημαντική εφαρμογή αυτού του εργαλείου αφορά την απόδειξη του θεωρήματος του Sorensen, ενώ μια άλλη σχετίζεται με τον χαρακτηρισμό των ατέρμονων redexes ενός λ-όρου, δηλαδή ποια redexes πρέπει να συστείλουμε προκειμένου να διαιωνίσουμε μια β-αναγωγή. Ένας εναλλακτικός τρόπος εξαγωγής αυτών των αποτελεσμάτων είναι η μέθοδος της τυποποίησης, που μελετάμε στο τελευταίο κεφάλαιο αυτής της εργασίας.

Abstract

Perpetual strategies are a tool which has contributed to the comprehension of some properties of β-reduction. An important application of this tool concerns the proof of Sorensen's theorem whereas another one is about the characterisation of the perpetual redexes of a λ-term, i.e. the redexes we have to contract in order to perpetuate a β-reduction from this term. An alternative way of proving these results is the method of assigning types to terms, which we study in the last chapter of this theses.

Λέξεις κλειδιά: β-αναγωγές, στρατηγικές, ατέρμονες, τυποποίηση, θεώρημα Sorensen

Keywords: reductions, strategies, perpetual, type assignment, Sorensen's theorem

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Ορισμός 1.0.1. Μια ακολουθία $M_0 \to M_1 \to \cdots$ λέγεται μονοπάτι αναγωγής από τον όρο M_0. Αν το μονοπάτι είναι πεπερασμένο και καταλήγει στον όρο M_n, λέμε ότι έχει μήκος n και γράφουμε $M_0 \to_*^n M_n$. Αν είναι άπειρο, έχει μήκος ∞.

Παρακάτω δίνουμε ορισμούς σε κάποια σύνολα λ-όρων με κριτήριο τι μονοπάτια β-αναγωγών μπορούν να ξεκινήσουν από αυτούς.

Ορισμός 1.0.2. :

- $\infty_\beta = \{M : \exists \{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}\ (M = M_0 \to M_1 \to M_2 \cdots)\}$. Πρόκειται για τους λ- όρους από τους οποίους μπορεί να ξεκινήσει ένα άπειρο μονοπάτι.
- $n_\beta = \{M : \forall i \leq n \exists M_i\ (M = M_0 \to M_1 \to M_2 \cdots\ M_n)\}$. Είναι οι όροι από τους οποίους μπορούμε να βρούμε ένα μονοπάτι μήκους n.
- $NF_\beta = \{M : \nexists N\ s.t.\ M \to N\}$ δηλ. το σύνολο των κανονικών μορφών
- $SN_\beta = \Lambda_K \setminus \infty_\beta$, δηλαδή οι λ-όροι που οποιαδήποτε β-αναγωγή ξεκινήσει από αυτούς είναι πεπερασμένη, δηλαδή μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων οδηγεί σε κανονική μορφή. Τους όρους αυτούς τους ονομάζουμε ισχυρά κανονικοποιήσιμους.
- $WN_\beta = \{M : \exists N \in NF_\beta\ s.t.\ M \to_* N\}$ δηλαδή οι όροι για τους οποίους μπορούμε να βρούμε μια πεπερασμένη αναγωγή που να οδηγεί σε κανονική μορφή. Τους όρους αυτούς τους ονομάζουμε κανονικοποιήσιμους.

Από τους παραπάνω ορισμούς είναι προφανές ότι $SN_\beta \subseteq WN_\beta$.

Γνωρίζουμε ότι η β-αναγωγή έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης διακλάδωσης (FB) και την ιδιότητα $Church - Rosser$ (CR). Η πρώτη σημαίνει ότι κάθε όρος μπορεί να συσταλεί μόνο σε πεπερασμένο πλήθος όρων (που είναι ίσο ή και μικρότερο από το πλήθος των redex που περιέχει). Από την άλλη η ιδιότητα CR σημαίνει ότι αν $M \to_* M_1$ και $M \to_* M_2$, τότε υπάρχει όρος N τ.ω. $M_1 \to_* N$ και $M_2 \to_* N$.

Λήμμα 1.0.1. $M \in \infty_\beta \iff \forall n \in \mathbb{N}: \ M \in \ n_\beta$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι ένας τυχαίος όρος του ∞_β ανήκει στο m_β, παίρνουμε ένα άπειρο μονοπάτι του και το περιορίζουμε στις πρώτες m συστολές του.

Το αντίστροφο οφείλεται στην ιδιότητα της πεπερασμένης διακλάδωσης και στο λήμμα του König.

Ορίζουμε τα μήκη της συντομότερης και της μακρύτερης πεπερασμένης αναγωγής από έναν όρο M ως εξής:

Ορισμός 1.0.3. $i)\ \ s(M) = min\{n : \exists N \in NF_\beta \ s.t. \ M \to^n_* N\}$
$ii)\ l(M) = max\{n : \exists N \in NF_\beta \ s.t. \ M \to^n_* N\}$

Παρατηρούμε ότι το $s(M)$ απειρίζεται όταν ο όρος M δεν είναι κανονικοποιήσιμος. Επίσης το $l(M)$ απειρίζεται όταν ο M δεν είναι κανονικοποιήσιμος αλλά και όταν δεν υπάρχει άνω φράγμα στα μήκη των πεπερασμένων αναγωγών από τον M. Έτσι έχουμε το επόμενο:

Λήμμα 1.0.2. $i)\ \ M \in WN_\beta \iff s(M) < \infty$
$ii)\ M \in \infty_\beta \iff l(M) = \infty$

Απόδειξη.
$i)$ Αν ο M είναι κανονικοποιήσιμος τότε $M \to^n_* N \in NF$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, επομένως $s(M) \leq n < \infty$.
Αντιστρόφως, αν $s(M) < \infty$, έστω $s(M) = n$, τότε $M \to^n_* N \in NF$, άρα M κανονικοποιήσιμος.
$ii)$ Υποθέτουμε ότι $M \in \infty_\beta$. Αν ο M δεν είναι κανονικοποιήσιμος, τότε $l(M) = \infty$ από την προηγούμενη παρατήρηση. Αν όμως ο M είναι κανονικοποιήσιμος, τότε υπάρχει N$\in NF$ τ.ω. $M \to_* N$. Επειδή $M \in \infty_\beta$, για κάθε n υπάρχει όρος K τ.ω. $M \to^n_* K$. Από την ιδιότητα CR και αφού N κανονική μορφή, $K \to_* N$ ώστε $M \to^m_* N, \ m \geq n$. Επομένως για κάθε n υπάρχει $m \geq n$ τ.ω. $M \to^m_* N$. Άρα $l(M) = \infty$.
Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $l(M) = \infty$. Σύμφωνα με την παρατήρηση πριν το λήμμα, είτε ο M δεν θα είναι κανονικοποιήσιμος, επομένως πράγματι $M \in \infty_\beta$, είτε το σύνολο $\{n : \exists N \in NF_\beta \ s.t. \ M \to^n_* N\}$ δεν έχει άνω φράγμα, επομένως για κάθε n υπάρχει $N \in NF$ τ.ω. $M \to^n_* N$. Τότε $M \in \infty_\beta$ λόγω του λήμματος 1.0.1.

Παρατήρηση. Μια ισοδύναμη διατύπωση της πρότασης $M \in \infty_\beta \iff l(M) = \infty$ είναι το $M \in SN_\beta \iff l(M) < \infty$.

Στη συνέχεια ορίζουμε και ταξινομούμε τις στρατηγικές β-αναγωγής.

Ορισμός 1.0.4. Στρατηγική β-αναγωγής είναι μια απεικόνιση $F : S \to \Lambda_K$ (όπου $S \subseteq \Lambda_K$) τ.ω. $M \to F(M)$ αν $M \notin NF$, αλλιώς $F(M) = M$.

Ορισμός 1.0.5. Έστω F στρατηγική β-αναγωγής.
Ορίζουμε $L_F(M) = min\{n : F^n(M) \in NF\}$.
Επίσης λέμε ότι το $F-$ μονοπάτι του όρου M είναι το μονοπάτι $M \to F(M) \to F^2(M) \to \cdots$ και έχει μήκος $L_F(M)$.

Ορισμός 1.0.6. Δίνεται μια στρατηγική F.

1. Η F λέγεται maximal, αν $L_F(M) = l(M)$. Αυτό σημαίνει ότι η F καθυστερεί όσο γίνεται την εμφάνιση κανονικής μορφής.

2. Η F λέγεται minimal αν $L_F(M) = s(M)$, δηλαδή αν οδηγεί σε κανονική μορφή όσο πιο σύντομα γίνεται.

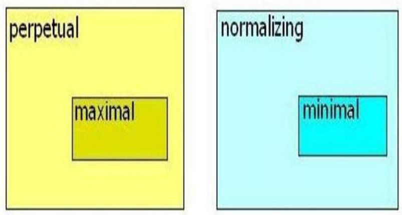
3. Η F λέγεται perpetual αν για κάθε $M \in \infty_\beta$ ισχύει $L_F(M) = \infty$, δηλαδή αν για κάθε όρο με ατέρμονα μονοπάτια, το $M \to F(M) \to F^2(M) \to \cdots$ είναι ένα από αυτά. Επομένως αν η F μπορεί να καθυστερήσει επ'άπειρο την εμφάνιση κανονικής μορφής, θα το κάνει. Από αυτό καταλαβαίνουμε ότι αν η F είναι maximal, τότε είναι και perpetual.

4. Η F λέγεται normalizing αν για κάθε $M \in WN_\beta$ ισχύει $L_F(M) < \infty$, δηλαδή αν για κάθε όρο M που έχει κανονική μορφή, το $F-$ μονοπάτι του M οδηγεί σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων στην κανονική αυτή μορφή. Από αυτό καταλαβαίνουμε ότι αν η F είναι minimal, τότε είναι και normalizing.

Παρατήρηση. Ο όρος $M_1 = (\lambda x.y)(\lambda z.z)y$ έχει τα εξής μονοπάτια αναγωγής:
$(\lambda x.y)(\lambda z.z)y \to y$ όπου συστείλαμε πρώτα το αριστερό redex και
$(\lambda x.y)(\lambda z.z)y \to (\lambda x.y)y \to y$, όπου συστείλαμε πρώτα το δεξί.
Επομένως $s(M_1) = 1$ και $l(M_1) = 2$. Άρα αν F_1 είναι μια minimal στρατηγική, $F_1(M_1) = y$, ενώ αν F_2 είναι μια maximal στρατηγική, $F_2(M_1) = (\lambda x.y)y$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μια maximal στρατηγική δεν μπορεί να είναι και minimal. Μπορούμε να προχωρήσουμε ακόμα περισσότερο.

Έστω ο όρος $M_2 = (\lambda x.y)(\Omega)y$. Μια στρατηγική θα πρέπει να συστείλει είτε το αριστερό redex είτε το redex του Ω. Δηλαδή είτε $F(M_2) = y$ είτε $F(M_2) = M_2$. Άρα το $F-$ μονοπάτι του M_2 είναι είτε το $M_2 \to y \to y \to \cdots$ είτε το $M_2 \to M_2 \to \cdots$ Άρα αν F είναι μια normalizing στρατηγική θα πρέπει $F(M_2) = y$, ενώ αν είναι μια perpetual στρατηγική θα πρέπει $F(M_2) = M_2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μια perpetual στρατηγική δεν μπορεί να είναι και normalizing.

Επομένως για τις στρατηγικές έχουμε την εικόνα του σχήματος 1.1.



Σχήμα 1.1: Ταξινόμηση στρατηγικών

Με τα εργαλεία που έχουμε παρουσιάσει μέχρι στιγμής δεν είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι μια στρατηγική ανήκει στη μια κατηγορία ή στην άλλη, γιατί θα πρέπει να επαληθεύσουμε τις συνθήκες του ορισμού για όλους τους λ-όρους. Μπορούμε όμως να βρούμε αντιπαραδείγματα για να δείξουμε ότι μια στρατηγική **δεν** ανήκει σε κάποια κατηγορία.
Π.χ. η στρατηγική F_{normal} που σε κάθε λ-όρο συστέλλει το αριστερότερο redex δεν είναι perpetual, όπως φαίνεται και από τα προηγούμενα παραδείγματα. Στην πραγματικότητα είναι normalizing, χωρίς να είναι minimal όπως φαίνεται από τον όρο $M_3 = (\lambda x.xx)(\lambda x.x)y$ δηλαδή $M_3 = (\omega)(I)y$:

$$M_3 \to_{F_{normal}} (Iy)(I)y \to_{F_{normal}} (y)(I)y \to_{F_{normal}} yy,$$

άρα $L_{F_{normal}}(M_3) = 3$, ενώ $s(M_3) = 2$.

Για να χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω ορισμούς πρέπει να εξετάσουμε την επίδραση που έχει μια στρατηγική F σε ολόκληρο το $F-$ μονοπάτι του τυχαίου λ-όρου. Οι ισοδύναμοι ορισμοί που ακολουθούν επικεντρώνονται σε ένα μόνο βήμα αναγωγής.

Λήμμα 1.0.3. Μια στρατηγική F είναι minimal ανν για κάθε όρο $M \notin NF$: $s(M) = s(F(M)) + 1$

Απόδειξη. $" \Rightarrow "$ Αν η F είναι minimal τότε

$$\begin{aligned} s(M) &= L_F(M) \\ &= min\{n : F^n(M) \in NF\} \\ &= min\{n : F^{n+1}(M) \in NF\} + 1 \\ &= min\{n : F^n(F(M)) \in NF\} + 1 \\ &= L_F(F(M)) \\ &= s(F(M)) + 1 \end{aligned}$$

$" \Leftarrow "$ Υποθέτουμε ότι για κάθε όρο $M \notin NF: \ s(M) = s(F(M)) + 1$. Αν $s(M) = \infty$, τότε ο M δεν κανονικοποιείται, άρα $L_F(M) = \infty$. Μένει λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση $s(M) < \infty$. Θα δείξουμε με επαγωγή στον φυσικό $s(M)$ ότι $s(M) = L_F(M)$.
- Αν $s(M) = 0$, τότε ο M είναι κανονική μορφή, άρα $L_F(M) = 0$.
- Αλλιώς $M \notin NF$. Τότε:

$$\begin{aligned} s(M) &= s(F(M)) + 1 \\ &=^{EY} L_F(F(M)) + 1 \\ &= L_F(M) \end{aligned}$$

Λήμμα 1.0.4. Μια στρατηγική F είναι maximal ανν για κάθε όρο $M \notin NF$: $l(M) = l(F(M)) + 1$.

Απόδειξη. $" \Rightarrow "$ Αν η F είναι maximal τότε

$$\begin{aligned} l(M) &= L_F(M) \\ &= min\{n : F^n(M) \in NF\} \\ &= min\{n : F^{n+1}(M) \in NF\} + 1 \\ &= min\{n : F^n(F(M)) \in NF\} + 1 \\ &= L_F(F(M)) \\ &= l(F(M)) + 1 \end{aligned}$$

$" \Leftarrow "$ Υποθέτουμε ότι για κάθε όρο $M \notin NF: \ l(M) = l(F(M)) + 1$. Αν $L_F(M) = \infty$, τότε ο M έχει ένα άπειρο μονοπάτι, δηλαδή $M \in \infty_\beta$ άρα από λήμμα 1.0.1ii $l(M) = \infty$. Μένει λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση $L_F(M) < \infty$. Θα δείξουμε με επαγωγή στον φυσικό $L_F(M)$ ότι $L_F(M) = l(M)$.

- Αν $L_F(M) = 0$, τότε ο M είναι κανονική μορφή, άρα $l(M) = 0$.
- Αλλιώς $M \notin NF$. Τότε:

$$\begin{aligned} L_F(M) &= L_F(F(M)) + 1 \\ &=^{EY} l(F(M)) + 1 \\ &= l(M) \end{aligned}$$

Λήμμα 1.0.5. Η στρατηγική F είναι perpetual ανν $\forall M \in \infty_\beta : F(M) \in \infty_\beta$.

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ " Αν η F είναι perpetual και M$\in \infty_\beta$, τότε από perpetuality της F, έχουμε ότι $L_F(M) = \infty$.
Δηλαδή το $M \to F(M) \to F^2(M) \to \cdots$ είναι άπειρο.
Τότε όμως και το $F(M) \to F^2(M) \to \cdots$ είναι άπειρο.
Άρα υπάρχει ένα άπειρο μονοπάτι από τον $F(M)$, το $F-$ μονοπάτι του $F(M)$.
Επομένως $F(M) \in \infty_\beta$.

" $\Leftarrow$ " Υποθέτουμε ότι για κάθε M ισχύει η συνεπαγωγή
$M \in \infty_\beta \Rightarrow F(M) \in \infty_\beta$. $(*)$
Έστω τώρα κάποιος M$\in \infty_\beta$. Τότε $F(M) \in \infty_\beta$.
Τότε όμως πάλι από την (*) παίρνουμε ότι $F^2(M) \in \infty_\beta$ κ.ο.κ.
Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $F^n(M) \in \infty_\beta$,
κατά μείζονα λόγω $F^n(M) \notin NF$.
Άρα $L_F(M) = \infty$. Επειδή ο M ήταν τυχαίος, η F είναι perpetual.

Λήμμα 1.0.6. Μια στρατηγική F είναι maximal ανν για κάθε όρο M και κάθε $n \geq 1 :\ M \in n_\beta \Rightarrow F(M) \in (n-1)_\beta$.

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ " Έστω F maximal στρατηγική και M$\in n_\beta$.
Τότε υπάρχει K τ.ω. $M \to_*^n K$.
Θα δείξουμε πρώτα ότι $n \leq l(M)$.

Αν $l(M) = \infty$ είναι προφανές.
Αν όμως είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχει κανονική μορφή N τ.ω.
$M \to_*^{l(M)} N$.
Από CR, $K \to_*^m N$.
Άρα $M \to_*^n K \to_*^m N$.
$\Rightarrow \quad M \to_*^{n+m} N$
Και επειδή $l(M) = max\{n : \exists U \in NF\ s.t.\ M \to_*^n U\}$
παίρνουμε ότι $m + n \leq l(M)$
$\Rightarrow \quad n \leq l(M)$.

Από maximality της F έχουμε $l(M) = L_F(M)$.
Άρα $n \leq L_F(M)$.
$\Rightarrow \ M \to F(M) \to F^2(M) \to \cdots \ \to F^n(M)$
$\Rightarrow \ F(M) \in (n-1)_\beta$

" $\Leftarrow$ " Υποθέτουμε ότι για κάθε M ισχύει η συνεπαγωγή
$M \in n_\beta \Rightarrow F(M) \in (n-1)_\beta$. $(**)$
Αν $L_F(M) = \infty$, τότε από λήμμα 1.0.2 $l(M) = \infty$ κι έτσι $L_F(M) = l(M)$.
Αν $L_F(M)$ πεπερασμένο, τότε θα δείξουμε επαγωγικά ότι $L_F(M) = l(M)$.

Ισχυριζόμαστε ότι: $l(F(M)) + 1 = l(M)$, για $M \notin NF$.
Έστω $l(M) = k$, όπου $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Τότε $M \in k_\beta$
$\Rightarrow^{Y\pi} \ F(M) \in (k-1)_\beta$
$\Rightarrow \ l(F(M)) \geq k-1$
$\Rightarrow \ l(F(M)) + 1 \geq k$
και αφού προφανώς $l(F(M)) + 1 \leq k$ έχουμε $l(F(M)) + 1 = l(M)$
Τέλος έστω $l(M) = \infty$
Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $M \in k_\beta$
$\Rightarrow^{Y\pi}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ $F(M) \in (k-1)_\beta$
$\Rightarrow$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ $l(F(M)) \geq k-1$
$\Rightarrow \ l(F(M) = \infty$

Τώρα που δείξαμε τον ισχυρισμό ξεκινάμε την επαγωγή.
Αν $L_F(M) = 0$ τότε $M \in NF$, άρα και $l(M) = 0$.
Στο επαγωγικό βήμα με $L_F(M) > 0$ έχουμε $M \notin NF$. Επομένως:

$$\begin{aligned} L_F(M) &= \quad L_F(F(M)) + 1 \\ &=^{EY} \ l(F(M)) + 1 \\ &=^{I\sigma\chi} \ l(M) \end{aligned}$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση για τον τυχαίο M, $L_F(M) = l(M)$.
Δηλαδή F maximal.

Ορισμός 1.0.7. Μια μερική perpetual στρατηγική είναι μια απεικόνιση $F : \infty_\beta \to \infty_\beta$ τέτοια ώστε για κάθε $M \in \infty_\beta$ ισχύει $M \to F(M)$.

Ακολούθως ταξινομούμε τα redex.
Σε αντιστοιχία με τον ορισμό των Bergstra - Klop για την μεγιστικότητα των στρατηγικών και τον ορισμό του Regnier για την perpetuality των στρατηγικών, έχουμε τους εξής ορισμούς για την μεγιστικότητα και την perpetuality των redex.

Ορισμός 1.0.8. Έστω ένα redex Δ με contractum Δ'.
α) Το Δ λέγεται $R-$perpetual ανν $\forall C$ context ισχύει

$$C[\Delta] \in \infty_R \Rightarrow C[\Delta'] \in \infty_R$$

β) Το Δ λέγεται $R-$maximal ανν $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall C$ context ισχύει

$$C[\Delta] \in n_R \Rightarrow C[\Delta'] \in (n-1)_R$$

Επίσης σε αντιστοιχία με τα λήμματα 1.0.3 και 1.0.4 μπορούμε να πάρουμε τους εξής ορισμούς για τα redex.

Ορισμός 1.0.9. Έστω ένα redex Δ με contractum Δ'.
α) Το Δ λέγεται $R-$minimal ανν $\forall C$ context ισχύει

$$s_R(C[\Delta]) = s_R(C[\Delta']) + 1$$

β) Το Δ λέγεται $R-$maximal ανν $\forall C$ context ισχύει

$$l_R(C[\Delta]) = l_R(C[\Delta']) + 1$$

Παράδειγμα 1.0.1. Το redex Ω $(= (\lambda x.xx)\lambda x.xx)$ είναι β-perpetual. Πράγματι, το contractum του Ω είναι ο εαυτός του, και για κάθε C έχουμε $C[\Omega] \in \infty_\beta$ λόγω του μονοπατιού

$$C[\Omega] \to C[\Omega] \to \cdots$$

Το ίδιο μονοπάτι πιστοποιεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C[\Omega] \in (n-1)_\beta$. Άρα το Ω είναι και β-maximal.

Παράδειγμα 1.0.2. Στον Λ_K λογισμό δεν υπάρχει β-minimal redex. Έστω ότι το Δ είναι β-minimal.
Ας πάρουμε το context $(\lambda x.y)[\ ]$.
Παρατηρούμε ότι $s((\lambda x.y)\Delta) = 1$ και $s((\lambda x.y)\Delta') = 1$.
Άρα δεν ισχύει το $s(C[\Delta]) = s(C[\Delta']) + 1$

Από την αντιστοιχία της ταξινόμησης των redex με την ταξινόμηση των στρατηγικών συμπεραίνουμε εύκολα ότι μια στρατηγική που συστέλλει πάντα perpetual(maximal,minimal) redex είναι perpetual(maximal,minimal). Το αντίστροφο δεν ισχύει με την έννοια ότι μια perpetual στρατηγική μπορεί να συστέλλει και redex που δεν είναι perpetual, κάτι που θα φανεί όταν ορίσουμε συγκεκριμένες στρατηγικές. Ο λόγος είναι ότι η στρατηγική λαμβάνει υπόψιν (δέχεται ως όρισμα) ολόκληρο τον λ-όρο και όχι μόνο το redex. Δηλαδή μπορεί να ισχύει

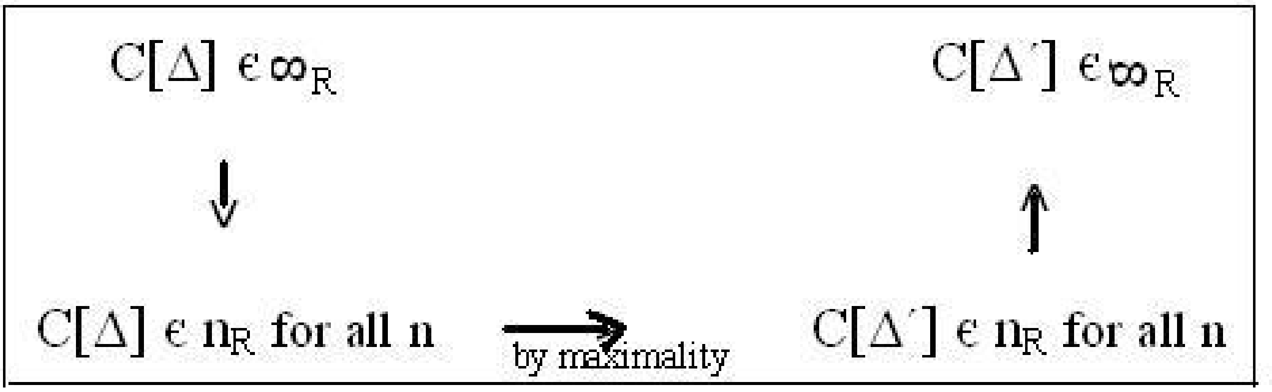
$$\infty_\beta \ni M \to^{\Delta} F(M) \in \infty_\beta$$

χωρίς να ισχύει ότι

$$\infty_\beta \ni C[\Delta] \to C[\Delta'] \in \infty_\beta \ \forall \mathbf{C\ context}.$$

Πρόταση 1.0.1. Έστω διμελής σχέση R που ικανοποιεί την FB. Αν το Δ είναι R-maximal, τότε είναι και R-perpetual.

Απόδειξη. Έστω Δ' το contractum του Δ και υποθέτουμε ότι $C[\Delta] \in \infty_R$. Τότε $C[\Delta] \in n_R$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρα και $C[\Delta] \in (n+1)_R$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε από μεγιστικότητα του Δ έχουμε $C[\Delta'] \in n_R$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από FB_R $C[\Delta'] \in \infty_R$.
Σχηματικά η απόδειξη φαίνεται στο σχήμα 1.2:



Σχήμα 1.2: Απόδειξη πρότασης 1.0.1

Παρατήρηση. Υπάρχουν β-perpetual redex που δεν είναι β-maximal. Π.χ. όπως θα διαπιστώσουμε στο προτελευταίο κεφάλαιο, το $(\lambda x.x)y$.

Κεφάλαιο 2

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΛΗΜΜΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΤΕΡΜΟΝΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Λήμμα 2.0.7. (Fundamental Lemma of Perpetuality - FLP)
Υποθέτουμε ότι $M_1 \in SN_\beta$ αν $x \notin FV(M_0)$. Τότε για κάθε $n \geq 1$

$$M_0[M_1/x]M_2 \ldots M_n \in SN_\beta \Rightarrow (\lambda x.M_0)M_1 \ldots M_n \in SN_\beta \qquad (2.1)$$

Απόδειξη. Έστω $M_0[M_1/x]M_2 \ldots M_n \in SN_\beta$. Τότε οι όροι $M_0, M_2, M_3 \ldots M_n \in SN_\beta$. Επίσης $M_1 \in SN_\beta$. Αν $x \notin FV(M_0)$ αυτό προκύπτει από την υπόθεση.
Αν πάλι $x \in FV(M_0)$, τότε ο M_1 είναι υποόρος του $M_0[M_1/x]M_2 \ldots M_n \in SN_\beta$, άρα πάλι $M_1 \in SN_\beta$.
Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι $(\lambda x.M_0)M_1 \ldots M_n \in \infty_\beta$. Τότε κάθε ατέρμονη αναγωγή από αυτόν πρέπει να έχει την μορφή:

$$\begin{array}{rcl} (\lambda x.M_0)M_1 \ldots M_n & \to_* & (\lambda x.M_0')M_1' \ldots M_n' \\ & \to & M_0'[M_1'/x]M_2' \ldots M_n' \\ & \to & \ldots \end{array}$$

Τότε όμως υπάρχει μια άπειρη αναγωγή

$$\begin{array}{rcl} M_0[M_1/x]M_2 \ldots M_n & \to_* & M_0'[M_1'/x]M_2' \ldots M_n' \\ & \to & \ldots \end{array}$$

που αντικρούει στην ισχυρή κανονικοποιησιμότητα του $M_0[M_1/x]M_2 \ldots M_n$.

Πόρισμα 2.0.1. Υποθέτουμε ότι $M_1 \in SN_\beta$. Τότε για κάθε $n \geq 1$

$$M_0[M_1/x]M_2 \ldots M_n \in SN_\beta \Rightarrow (\lambda x.M_0)M_1 \ldots M_n \in SN_\beta$$

Παρατήρηση. Η αντιθετοαναστροφή της συνεπαγωγής 2.1 δίνει

$$(\lambda x.M_0)M_1 \ldots M_n \in \infty_\beta \Rightarrow M_0[M_1/x]M_2 \ldots M_n \in \infty_\beta \tag{2.2}$$

Επομένως το FLP και το πόρισμά του μας δίνουν προϋποθέσεις υπό τις οποίες η επιλογή του redex κεφαλής αποτελεί perpetual στρατηγική. Η ιδέα αυτή εφαρμόζεται στην στρατηγική F_1 των Bergstra - Klop και στην F_2 του Sorensen, που θα ορίσουμε αργότερα και είναι και οι δύο perpetual.

*** Χαρακτηρισμός του SN_β από v.Raamsdonk και Severi . ***

Ορίσαμε το σύνολο των ισχυρά κανονικοποιήσιμων όρων για την R-αναγωγή ως το σύνολο $\Lambda_K \setminus \infty_R$. Η πρόταση που ακολουθεί και οφείλεται στους van Raamsdonk και Severi δίνει έναν ισοδύναμο επαγωγικό ορισμό του συνόλου SN_β.

Ορισμός 2.0.10. Ορίζουμε ως X το μικρότερο σύνολο λ-όρων που είναι κλειστό ως προς τους παρακάτω κανόνες σχηματισμού λ-όρων.

1. $M_1, \ldots, M_n \in X \Rightarrow (x)M_1 \ldots M_n \in X$

2. $M \in X \Rightarrow \lambda x.M \in X$

3. $M_1 \in X$ και $M_0[M_1/x]M_2 \ldots M_n \in X \Rightarrow (\lambda x.M_0)M_1 \ldots M_n \in X$

Πρόταση 2.0.2. $SN_\beta = X$

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι $M \in SN_\beta \Rightarrow M \in X$. Παρατηρούμε αν ένας λ-όρος δεν είναι μεταβλητή τότε είναι είτε λ-αφαίρεση (περίπτωση 2) είτε εφαρμογή με τον 1ο όρο μεταβλητή δηλ. κανονική μορφή κεφαλής (περίπτωση 1) είτε εφαρμογή με τον πρώτο όρο λ-αφαίρεση (περίπτωση 3).

Επομένως με επαγωγή στο λεξικογραφικά διατεταγμένο ζεύγος $< l_\beta(M), ||M|| >$ έχουμε:

- Περίπτωση 0. $\mathbf{M} = \mathbf{x}$ μεταβλητή. Τότε εξ ορισμού $M \in X$.

- Περίπτωση 1. $\mathbf{M} = (\mathbf{x})\mathbf{P_1}\dots\mathbf{P_n} \in SN_\beta$. Τότε για κάθε i, $P_i \in SN_\beta$. Εξάλλου για κάθε i, $l_\beta(P_i) \leq l_\beta(M)$. Αλλά ακόμα και αν για κάποιο i έχουμε ισότητα, ισχύει ότι $||P_i|| < ||M||$. Άρα από Επ.Υπ. $P_1, P_2, \dots, P_n \in X$, αρα από κανόνα 1, $M \in X$.

- Περίπτωση 2. $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{x}.\mathbf{P}$. Τότε $l_\beta(P) = l_\beta(M)$, αλλά $||P|| < ||M||$. Άρα από Επ.Υπ. αφού $P \in SN_\beta$ έχουμε ότι $P \in X$, άρα από κανόνα 2 $M \in X$.

- Περίπτωση 3. $\mathbf{M} = (\lambda\mathbf{x}.\mathbf{P_0})\mathbf{P_1}\dots\mathbf{P_n} \in SN_\beta$. Τότε $P_1 \in SN_\beta$ και ο $M' = P_0[P_1/x]P_2\dots P_n \in SN_\beta$. Ισχύει $l_\beta(P_1) < l_\beta(M)$, άρα από Επ.Υπ. $P_1 \in X$.
  Εξάλλου $l_\beta(M') \leq l_\beta(M) - 1$, άρα $l_\beta(M') < l_\beta(M)$ κι έτσι από Επ.Υπ $P_0[P_1/x]P_2\dots P_n \in X$.
  Άρα λόγω του κανόνα 3 $M \in X$.

Αντιστρόφως για να δείξουμε ότι $M \in X \Rightarrow M \in SN_\beta$, θα χρισιμοποιήσουμε επαγωγή στον κανόνα σχηματισμού του $M \in X$.

- Περίπτωση 0. $\mathbf{M} = \mathbf{x}$ μεταβλητή. Τότε $M \in SN_\beta$.

- Περίπτωση 1. $\mathbf{M} = (\mathbf{x})\mathbf{P_1}\dots\mathbf{P_n}$, όπου $P_i \in X$. Από Επ.Υπ. $P_i \in SN_\beta$, άρα $M \in SN_\beta$.

- Περίπτωση 2. $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{x}.\mathbf{P}$, όπου $P \in X$. Από Επ.Υπ. $P \in SN_\beta$, άρα $M \in SN_\beta$.

- Περίπτωση 3. $\mathbf{M} = (\lambda\mathbf{x}.\mathbf{P_0})\mathbf{P_1}\dots\mathbf{P_n}$ όπου $P_1 \in X$ και $P_0[P_1/x]P_2\dots P_n \in X$. Τότε από Ε.Υπ. έχουμε $P_1 \in SN_\beta$ και $P_0[P_1/x]P_2\dots P_n \in SN_\beta$. Και από FLP έχουμε ότι $M \in SN_\beta$.

Παρατήρηση. Πλέον, για να δείξουμε ότι μια ιδιότητα P ικανοποιείται από κάθε ισχυρά κανονικοποιήσιμο όρο, αρκεί να χρησιμοποιούμε επαγωγή στου κανόνες σχηματισμού του συνόλου X των van Raamsdonk και Severi . Δηλαδή θα δείχνουμε ότι $P(x)$, για κάθε μεταβλητή x και στη συνέχεια ότι:

1. $P(M_1), \dots, P(M_n) \Rightarrow P((x)M_1\dots M_n)$
2. $P(M) \Rightarrow P(\lambda x.M)$
3. $P(M_1)$ και $P(M_0[M_1/x]M_2\dots M_n) \Rightarrow P((\lambda x.M_0)M_1\dots M_n)$

και αυτό επίσης αποτελεί μια σπουδαία εφαρμογή του FLP.

*** **Χαρακτηρισμός του SN_β από τον Xi .** ***

Ορίζουμε την στρατηγική F_l που αντιστοιχεί στην **αριστερότερη αναγωγή**, δηλαδή συστέλλει πάντα το αριστερότερο και πιο εξωτερικό redex ενός μη κανονικού όρου, δηλαδή συστέλλει το αριστερότερο λ που αντιστοιχεί σε redex.

Ορισμός 2.0.11. Ορίζουμε τη στρατηγική $F_l : \Lambda_K \to \Lambda_K$ ως εξής. Για $M \in NF_\beta$ σύμφωνα με τον ορισμό των στρατηγικών $F_l(M) = M$. Αλλιώς:

1. $F_l(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = x\mathbf{P}F_l(Q)\mathbf{R}$ αν $P \in NF_\beta,\ Q \notin NF_\beta$
2. $F_l(\lambda x.P) = \lambda x.F_l(P)$
3. $F_l((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = P[Q/x]\mathbf{R}$

Αν $M \notin NF_\beta$ και $F_l(M) = N$ γράφουμε $M \to_l N$. Επίσης, αν $L_{Fl}(M) = \infty$, γράφουμε $M \in \infty_l$. Είναι φανερό ότι $\infty_l \subseteq \infty_\beta$.

Η F_l δεν είναι perpetual στρατηγική. Π.χ.

$$(\lambda x.y)\Omega \to_l y \in NF$$

Αντιθέτως είναι normalizing στρατηγική.

Ο Xi χρησιμοποιήσε την F_l για να δώσει ακόμα έναν χαρακτηρισμό των ισχυρά κανονικοποιήσιμων όρων.

Ορισμός 2.0.12. Ορίζουμε ως $\sqsupset$ τη μικρότερη σχέση που είναι κλειστή ως προς τους κανόνες

$$\lambda x.M \sqsupset M \qquad M_1M_2 \sqsupset M_1 \qquad M_1M_2 \sqsupset M_2$$

Η $\sqsupset$ δεν είναι αυτοπαθής (και δεν χρειάζεται να είναι μεταβατική)

Τώρα ορίζουμε τη σχέση $\rhd = \sqsupset \cup \to_l$. Δηλαδή αν $M \rhd N$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις.

- $M \to_l N$
- $M = \lambda x.N$ για κάποια μεταβλητή x
- $M = (N)U$ για κάποιον όρο U
- $M = (U)N$ για κάποιον όρο U

Παρατήρηση. Μπορούμε να ορίσουμε τους λ-όρους σαν ρίζες δένδρων που τα φύλλα τους είναι μεταβλητές και κάθε κόμβος είτε θα είναι της μορφής $\lambda x.M$ και θα έχει ως παιδι έναν κόμβο M, οπότε θα έχει ετικέτα λx, είτε θα είναι της μορφής $(M)N$ και θα έχει παιδιά τους κόμβους M και N, οπότε θα έχει ετικέτα (). Από την σύμβαση για τις δεσμευμένες μεταβλητές, δεν επιτρέπεται ένας κόμβος να έχει ίδια ετικέτα λx με κάποιον απόγονό του, έτσι ώστε στο σώμα μιας λ-αφαίρεσης να μην υπάρχει κι άλλη λ-αφαίρεση με ίδια δεσμευμένη μεταβλητή.

Όταν έχουμε ορίσει με τον τρόπο αυτόν τους λ-όρους, έτσι ώστε κάθε λ-όρος που δεν είναι μεταβλητή να έχει 1 ή 2 παιδιά, είναι εύκολο να δούμε πως η σχέση $\sqsupset$ είναι σχέση πατέρα - παιδιού.

Επειδή κάθε δέντρο λ-όρου έχει πεπερασμένο βάθος, δεν υπάρχει άπειρη $\sqsupset -$ αλυσίδα, άρα η μεταβατική κλειστότητα της $\sqsupset$ είναι καλή διάταξη στο Λ_K. Αν όμως επεκετείνουμε τη σχέση $\sqsupset$ σε $\rhd$ ώστε να περιλαμβάνει και την $\to_l$, τότε είναι δυνατό να υπάρξει άπειρη $\rhd-$αλυσίδα.

Ο χαρακτηρισμός που δίνει ο Xi έχει ως συνέπεια (όπως θα αποδείξουμε μετά την παρουσίασή του) το ότι οι ισχυρά κανονικοποιήσιμοι όροι είναι ακριβώς αυτοί από τους οποίους δεν είναι δυνατόν να ξεκινήσει μια τέτοια άπειρη αλυσίδα.

Ορισμός 2.0.13. Ορίζουμε $\mathcal{H}(M_0) = max\{n : M_0 \rhd M_1 \rhd \cdots \rhd M_n\}$

Πρόταση 2.0.3. (Xi) $SN_\beta = \{M \in \Lambda_K : \mathcal{H}(M) < \infty\}$

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ " Έστω $M \in SN_\beta$.
Με επαγωγή στα λεξικογραφικά διατεταγμένα ζεύγη $< l_\beta(M), ||M|| >$ (αφού σύμφωνα με το λήμμα $1.0.2ii, l_\beta(M) < \infty$) θα δείξουμε ότι $\mathcal{H}(M) < \infty$.

1. Αν $M = x$ τότε $\mathcal{H}(M) = 0$.

2. Αν $M = PQ$. Τότε $P, Q \in SN_\beta$. Όμως $l_\beta(P), l_\beta(Q) \le l_\beta(M)$ και $||P||, ||Q|| < ||M||$. Άρα από επαγωγική υπόθεση $\mathcal{H}(P), \mathcal{H}(Q) < \infty$.
   Επιπλέον, αν $M \to_l M'$, τότε πάλι $M' \in SN_\beta$ και από Επ.Υπ. (αφού $l_\beta(M_1) < l_\beta(M)$) έχουμε $\mathcal{H}(M') < \infty$.
   Επομένως $\mathcal{H}(M) = max\{\mathcal{H}(P), \mathcal{H}(Q), \mathcal{H}(M')\} + 1 < \infty$.

3. Αν $M = \lambda x.P$. Τότε $P \in SN_\beta$. Όμως $l_\beta(P) \le l_\beta(M)$ και $||P|| < ||M||$.
   Άρα από επαγωγική υπόθεση $\mathcal{H}(P), < \infty$.
   Επιπλέον, αν $M \to_l M'$, τότε όπως πριν $\mathcal{H}(M') < \infty$.
   Επομένως $\mathcal{H}(M) = max\{\mathcal{H}(P), \mathcal{H}(M')\} + 1 < \infty$.

" $\Leftarrow$ " Έστω $\mathcal{H}(M) < \infty$.

Με επαγωγή στο $\mathcal{H}(M)$ θα δείξουμε ότι $M \in SN_\beta$.

Για $\mathcal{H}(M) = 0$, τότε ο M είναι κάποια μεταβλητή και τότε προφανώς $M \in SN_\beta$.

1. $M = xP_1P_2 \ldots P_n$. Τότε $\mathcal{H}(P_1), \ldots \mathcal{H}(P_n) < \infty$ και μάλιστα $\mathcal{H}(P_1), \ldots \mathcal{H}(P_n) < (H)(M)$, άρα από Επ.Υπ. $P_1, \ldots, P_n \in SN_\beta$.
   Άρα $M \in SN_\beta$.

2. $M = \lambda x.P$. Τότε $\mathcal{H}(P) < \infty$ και μάλιστα $\mathcal{H}(P) < \mathcal{H}(M)$, άρα από Επ.Υπ. $P \in SN_\beta$.
   Άρα $M \in SN_\beta$.

3. $M = (\lambda x.P_0)P_1 \ldots P_n$.
   Τότε $\mathcal{H}(P_0[P_1/x]P_2 \ldots P_n) < \infty$ και $\mathcal{H}(P_1) < \infty$.
   Από Επ.Υπ. $P_0[P_1/x]P_2 \ldots P_n \in SN_\beta$ και $P_1 <\in SN_\beta$.
   Άρα από FLP $M \in SN_\beta$.

Πριν τον ορισμό και την πρόταση ισχυριστήκαμε ότι οι ισχυρά κανονικοποιήσιμοι όροι είναι ακριβώς αυτοί από τους οποίους δεν είναι δυνατόν να ξεκινήσει μια άπειρη $\triangleright-$αλυσίδα. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτόν, δεν μένει παρά να αποδείξουμε ότι

$$\{M \in \Lambda_K : \mathcal{H}(M) < \infty\} = \{M \in \Lambda_K : \nexists (M_i)_{i \in \mathbb{N}}\ s.t. M \triangleright M_1 \triangleright \ldots\}$$

δηλαδή ότι

$$max\{n : M \triangleright M_1 \ldots \triangleright M_n\} < \infty \ \Leftrightarrow\ \nexists (M_i)_{i \in \mathbb{N}}\ s.t. M \triangleright M_1 \triangleright \ldots$$

δηλαδή

$$max\{n : M \triangleright M_1 \ldots \triangleright M_n\} = \infty \ \Leftrightarrow\ \exists (M_i)_{i \in \mathbb{N}}\ s.t. M \triangleright M_1 \triangleright \ldots$$

Το τελευταίο όμως προκύπτει από το λήμμα του König, το οποίο μπορούμε να το επικαλεστούμε λόγω της $FB_{\triangleright}$.

* * *

Κεφάλαιο 3

ΑΤΕΡΜΟΝΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Ένας όρος M του ∞_β έχει μια από τις ακόλουθες μορφές.

- $\lambda x.P$, όπου $P \in \infty_\beta$ Στην περίπτωση αυτή οποιαδήποτε αναγωγή, πρέπει να γίνει στο σώμα της αφαίρεσης, άρα για κάθε στρατηγική
$$F(\lambda x.P) = \lambda x.F(P). \tag{3.1}$$

- $x\mathbf{P}Q\mathbf{R}$, όπου $P_1, P_2, ..P_n \in SN_\beta, \quad Q \in \infty_\beta$. Στην περίπτωση αυτή, μια ατέρμονη στρατηγική F μπορεί να συστείλει κάποιον από τους $P_1, ..., P_n$, αλλά επειδή αυτοί είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμοι, από κάποιο βήμα και μετά θα πρέπει η F να συστέλλει τον Q (ή κάποιον από τους $R_1, ..., R_k$ εφόσον είναι στο ∞_β). Άρα μια εύκολη επιλογή για κάθε ατέρμονη στρατηγική F είναι η εξής:
$$F(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = x\mathbf{P}F(Q)\mathbf{R} \tag{3.2}$$

- $(\lambda x.P)Q\mathbf{R}$, δηλαδή αν ο M δεν είναι λ-αφαίρεση και δεν έχει κανονική μορφή κεφαλής, τότε πρέπει να ξεκινά με ένα redex κεφαλής. Αν θέλουμε να ξεκινήσουμε μια αναγωγή από έναν τέτοιο όρο, μπορούμε είτε να συστείλουμε αυτό το redex κεφαλής είτε να συστείλουμε κάποιον υποόρο που ανήκει στο ∞_β. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τις λύσεις που πρότειναν στο πρόβλημα αυτό οι Bergstra και Klop και ο Sorensen αντίστοιχα.

Η ατέρμονη στρατηγική των Bergstra και Klop (1982)

Στο άρθρο "Strong normalization and perpetual reductions in the lambda - calculus" του 1982 οι Bergstra και Klop ορίζουν την στρατηγική F_1. Στις λ-αφαιρέσεις και στις κανονικές μορφές κεφαλής, η F_1 δρα όπως προαναφέραμε. Στις μορφές $(\lambda x.P)Q\mathbf{R}$ η F_1 συστέλλει τον υποόρο Q αν ανήκει στο ∞_β, αλλιώς συστέλλει το redex κεφαλής. Τυπικά ο ορισμός της F_1 ως συνάρτησης από το ∞_β στο Λ_K είναι:

1. $F_1(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = x\mathbf{P}F_1(Q)\mathbf{R}, \quad \mathbf{P} \in SN_\beta,\ Q \notin SN_\beta$

2. $F_1(\lambda x.P) = \lambda x.F_1(P)$

3. $F_1((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = P[Q/x]\mathbf{R}, \quad$ αν $Q \in SN_\beta$

4. $F_1((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = (\lambda x.P)F_1(Q)\mathbf{R}, \quad$ αν $Q \notin SN_\beta$

Ο ορισμός της F_1 είναι αναδρομικός, γι'αυτό και η απόδειξη ότι είναι ατέρμονη στρατηγική (δηλαδή ότι $M \in \infty_\beta \Rightarrow F_1(M) \in \infty_\beta$) γίνεται με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του όρου M.

Στις περιπτώσεις 1,2 και 4 του ορισμού αυτό είναι τετριμμένο. Π.χ. στην περίπτωση 1, αν $M = x\mathbf{P}Q\mathbf{R}$ με $Q \notin SN_\beta$, τότε $Q \in \infty_\beta$ και από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $F_1(Q) \in \infty_\beta$, άρα και $x\mathbf{P}F_1(Q)\mathbf{R} \in \infty_\beta$.

Η μόνη μη τετριμμένη περίπτωση είναι η 3, όπου το ζητούμενο μας το εξασφαλίζει το FLP.

Θα δούμε παρακάτω πώς δρα η F_1 σε μερικούς όρους στο ∞_β. Οι αριθμοί πάνω από τις ισότητες δείχνουν ποιον κανόνα χρησιμοποιούμε κάθε φορά από τον ορισμό της F_1.

1. $M = \Omega = (\lambda x.xx)\lambda x.xx$
   $F_1(\Omega) = F_1(\ (\lambda x.xx)\lambda x.xx\ ) =^3 (\lambda x.xx)\lambda x.xx = \Omega$

   Άρα η F_1 δίνει την αναγωγή $\Omega \to \Omega \to \Omega \to \cdots$

2. $M = (\lambda x.y)\Omega$
   $F_1(\ (\lambda x.y)\Omega\ ) =^4 (\lambda x.y)F_1(\Omega) = (\lambda x.y)\Omega$

   Άρα η F_1 δίνει την αναγωγή $(\lambda x.y)\Omega \to (\lambda x.y)\Omega \to (\lambda x.y)\Omega \to \cdots$

3. $M = (\lambda x.\lambda y.x)z\Omega$
   $F_1(\ (\lambda x.\lambda y.x)z\Omega\ ) =^3 (\lambda y.z)\Omega$
   και όπως είδαμε προηγουμένως $F_1(\ (\lambda y.z)\Omega\ ) = (\lambda y.z)\Omega$

   Άρα η F_1 δίνει την αναγωγή $(\lambda x.\lambda y.x)z\Omega \to (\lambda y.z)\Omega \to (\lambda y.z)\Omega \to \cdots$

4. Ορίζω $N = (\lambda x.xxy)\lambda x.xxy$.
   Τότε $N \to Ny \to Nyy \to \cdots$
   δηλαδή $N \in \infty_\beta$.
   Ορίζω $M = (\lambda x.N)N$
   $F_1(\ (\lambda x.N)N\ ) = (\lambda x.N)(N)y$
   $F_1(\ (\lambda x.N)(N)y\ ) = (\lambda x.N)((N)y)y$ κ.ο.κ.

   Άρα η F_1 δίνει την αναγωγή
   $(\lambda x.N)N \to (\lambda x.N)(N)y \to (\lambda x.N)((N)y)y \to \cdots$

Ορισμός 3.0.14. Ένα άπειρο μονοπάτι αναγωγής λέγεται constricting αν έχει την μορφή

$$C_1[M_1] \to C_1[C_2[M_2]] \to C_1[C_2[C_3[M_3]]] \cdots$$

όπου M_i ίναι ο ελάχιστος ∞_β υπερόρος του redex που συνεστάλη στο βήμα $C_1[\cdots C_i \cdots] \to C_1[\cdots C_i[C_{i+1}[]M_{i+1}]] \cdots$

Ουσιαστικά, για να φτιάξουμε ένα constricting, μονοπάτι από τον $M \in \infty_\beta$, ακολουθούμε τα εξής βήματα.

1. Στο πρώτο βήμα αναγωγής βρίσκουμε ποιο redex συστέλλεται και το ονομάζουμε r_1.

2. Βρίσκουμε τον ελάχιστο υπερόρο του r_1, που να ανήκει στο ∞_β και τον ονομάζουμε M_1. Ο M_1 μπορεί να είναι από το ίδιο το r_1 μέχρι και ολόκληρος ο M.

3. Ο όρος M έχει την μορφή $C_1[M_1]$, όπου C_1 ένα context.Αυτό το context θα πρέπει να παραμείνει αμετάβλητο σε όλη την διάρκεια της αναγωγής (δηλαδή για πάντα!) Όταν λοιπόν επιλέξουμε το επόμενο redex που θα συστείλουμε, θα πρέπει να είναι τέτοιο που να μην επηρεάσει το C_1. Άρα θα πρέπει είτε να βρίσκεται εντός του M_1 είτε να είναι το ίδιο το Ω του οποίου η συστολή έτσι κι αλλιώς δεν επιφέρει καμία αλλαγή στον όρο.

4. Το redex αυτό το ονομάζουμε r_2 και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Με αυτόν τον τρόπο, το σταθερό μέρος συνεχώς μεγαλώνει όσο προχωρούν τα βήματα της αναγωγής.

Παράδειγμα 3.0.3. Τα παρακάτω μονοπάτια είναι constricting.
$(\lambda x.N)N \to N \to Ny \to Nyy \to \cdots$

$$(\lambda x.N)N \to (\lambda x.N)(N)y \to (\lambda x.N)((N)y)y \to \cdots$$

$$(\lambda x.N)N \to (\lambda x.Ny)N \to (\lambda x.Nyy)N \to \cdots$$

Πρόταση 3.0.4. Η F_1 δεν είναι constricting.

Απόδειξη. Αρκεί να φέρουμε ένα αντιπαράδειγμα.
Μια αναγωγή σύμφωνη με την F_1 είναι η εξής:

$$((\lambda x.\lambda y.(\Omega)x)I)(I)\Omega \to (\lambda y.(\Omega)I)(I)\Omega \to (\lambda y.(\Omega)I)(I)\Omega$$

Στην αναγωγή αυτή έχουμε
$r_1 = M_1 = (\lambda x.\lambda y.(\Omega)x)I$
$r_2 = M_2 = \Omega$ (το δεξιότερο Ω)
$r_3 = M_3 = \Omega$ (το δεξιότερο Ω)
Άρα $C_1 = [\ \ ](I)\Omega$ ενώ από τον δεύτερο όρο της αναγωγής θα έπρεπε να είναι $C_1[C_2] = (\lambda y.(\Omega)I)(I)[\ \ ]$.

Η ατέρμονη στρατηγική F_2 του Sorensen

Η διαφορά της F_2 από την F_1 είναι ότι στον όρο της μορφής $M = (\lambda x.P)Q\mathbf{R}$ η F_2 εξετάζει πρώτα αν ο υποόρος P είναι ατέρμων και αν πράγματι είναι συστέλλει αυτόν.

Τυπικά ο ορισμός της F_2 ως συνάρτησης από το ∞_β στο Λ_K είναι:

1. $F_2(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = x\mathbf{P}F_2(Q)\mathbf{R}, \quad \mathbf{P} \in SN_\beta,\ Q \notin SN_\beta$
2. $F_2(\lambda x.P) = \lambda x.F_2(P)$
3. $F_2((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = P[Q/x]\mathbf{R}, \quad$ αν $P \in SN_\beta, \quad Q \in SN_\beta$
4. $F_2((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = (\lambda x.F_2(P))Q\mathbf{R}, \quad$ αν $P \notin SN_\beta$
5. $F_2((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = (\lambda x.P)F_2(Q)\mathbf{R}, \quad$ αν $P \in SN_\beta, \quad Q \notin SN_\beta$

Όπως και για την F_1 έτσι και για την F_2 αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι $M \in \infty_\beta \Rightarrow F_2(M) \in \infty_\beta$. Και εδώ η μόνη μη τετριμμένη περίπτωση είναι η 3 η οποία προκύπτει άμεσα από το FLP.

Στα παραδείγματα 1,2 και 3 που αφορούσαν την F_1, η F_2 λειτουργεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Όμως στον όρο του παραδείγματος 4, ενώ η F_1 δίνει

$$(\lambda x.N)N \to (\lambda x.N)(N)y \to (\lambda x.N)((N)y)y \to \cdots$$

η F_2 δίνει

$$(\lambda x.N)N \to (\lambda x.(N)y)N \to (\lambda x.((N)y)y)N \to \cdots$$

Σαν τελευταίο παράδειγμα μελετάμε τον όρο $((\lambda x.\lambda y.(\Omega)x)I)(I)\Omega$.
Η F_1 είδαμε ότι δίνει την αναγωγή

$$((\lambda x.\lambda y.(\Omega)x)I)(I)\Omega \to (\lambda y.(\Omega)I)(I)\Omega \to (\lambda y.(\Omega)I)(I)\Omega$$

με την οποία αποδείξαμε ότι η F_1 δεν είναι constricting.
Αντίθετα η F_2 δίνει την αναγωγή

$$((\lambda x.\lambda y.(\Omega)x)I)(I)\Omega \ \to ((\lambda x.\lambda y.(\Omega)x)I)(I)\Omega \ \to ((\lambda x.\lambda y.(\Omega)x)I)(I)\Omega \cdots$$

Εδώ συστέλλεται συνέχεια το αριστερό Ω, έτσι $C_1 = ((\lambda x.\lambda y.([\ \ ])x)I)(I)\Omega$, ενώ $C_2 = C_3 = \cdots = [\ \ ]$.

Πρόταση 3.0.5. Η F_2 είναι constricting στρατηγική.

Απόδειξη. Με επαγωγή στους φυσικούς, θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό n, αν $u \in \infty_\beta$, τότε τα πρώτα $n-1$ βήματα της F_2 αναγωγής του u, θα έχουν τη μορφή

$$u = C_1[M_1] \to^{r_1} C_1[C_2[M_2]] \to^{r_2} \cdots \to^{r_{n-1}} C_1[C_2[\cdots C_n[M_n]\cdots]]$$

όπου M_i ο ελάχιστος ατέρμων υπερόρος του r_i.

Για $n = 1$ ισχύει.
Τώρα αν ισχύει για τον $n-1$, θα δείξουμε ότι ισχύει για n, δηλαδή
αν $u = C_1[M_1] \to^{r_1} C_1[C_2[M_2]] \to^{r_2} \cdots \to^{r_{n-1}} C_1[C_2[\cdot C_n[M_n]\cdot]] \to^{r_n} F_2^n(u)$,
τότε $F_2^n(u) = C_1[C_2[\cdots C_n[C_{n+1}[M_{n+1}]\cdots]]]$

Εδώ θα ακολουθήσουμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του όρου u.
Παρακάτω για απλοποίηση του συμβολισμού θα γράφουμε F αντί για F_2.

Η επαγωγική βάση είναι τετριμμένη, γιατί οι μεταβλητές δεν ανήκουν στο ∞_β.

Στο επαγωγικό βήμα ορίζουμε $C^*[\ \ ] = C_1[C_2[\cdots C_n[\ \ ]\cdots]]$ και πρέπει να δείξουμε ότι $F(C^*[M_n]) = C^*[C_{n+1}[M_{n+1}]$, για κάποιο context C_{n+1}.

Για τον ατέρμονα όρο $F^{n-1}(u) = C^*[M_n]$ με βάση τον ορισμό της F_2 έχουμε τις παρακάτω 5 περιπτώσεις.

1. $C^*[M_n] = x\mathbf{P}Q\mathbf{R}, \quad \mathbf{P} \in SN_\beta,\ Q \notin SN_\beta$
   Τότε $r_n \subseteq M_n \subseteq Q$, δηλαδή $Q = D_1[M_n]$, για κάποιο context D_1.
   Από επαγωγική υπόθεση για τον ατέρμονα Q έχουμε
   $F(Q) = D_1[M_n] = D_1[D_2[M_{n+1}]]$, για κάποιο context D_2.

   $$\begin{aligned}\text{Επομένως } F^n(u) = F(C^*[M_n]) &= F(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) \\ &= x\mathbf{P}F(Q)\mathbf{R} \\ &= x\mathbf{P}F(D_1[M_n])\mathbf{R} \\ &= x\mathbf{P}D_1[D_2[M_{n+1}]\mathbf{R}] \\ &= C^*[D_2[M_{n+1}]]\end{aligned}$$

2. $C^*[M_n] = \lambda x.P, \quad P \in \infty_\beta$
   Αποδεικνύεται το ζητούμενο όπως και στην περίπτωση 1.
   (Εδώ η επαγωγική υπόθεση θα εφαρμοστεί στον υποόρο P.)

3. $C^*[M_n] = (\lambda x.P)QR_1 \ldots R_m,\ P \in SN_\beta, \quad Q \in SN_\beta$
   Τότε $F(C^*[M_n]) = P[Q/x]\mathbf{R}$, δλδ. $r_n = (\lambda x.P)Q$ και
   $M_n = (\lambda x.P)Q$ ή $M_n = (\lambda x.P)QR_1 \ldots R_k,\ k \leq m$,
   όπου R_k ο πρώτος ατέρμων R_i.

   Εξάλλου τότε $C^*[] = []R_{k+1} \ldots R_n$

   Διακρίνουμε 2 υποπεριπτώσεις.

   (α′) $(\lambda \mathbf{x}.\mathbf{P})\mathbf{Q} \in \infty_\beta$
   Τότε $M_n = (\lambda x.P)Q$ και $C^*[] = []R_1 \ldots R_n$
   Τότε από FLP αφού $Q \in SN_\beta$ έχουμε $P[Q/x] \in \infty_\beta$
   Άρα το $P[Q/x]$ μπορεί να έχει μια από τις ακόλουθες μορφές.

   - $P[Q/x] = \lambda z.P', \quad P' \in \infty_\beta$
     Τότε $F(F(C^*[M_n])) = F((\lambda z.P')\mathbf{R})$
     $= (\lambda z.F(P'))\mathbf{R}$

     Όμως $P' \in \infty_\beta$, άρα $r_{n+1} \subseteq M_{n+1} \subseteq P'$
     $\Rightarrow \ P' = D[M_{n+1}]$

     Τελικά έχουμε $F(C^*[M_n]) = (\lambda z.P')\mathbf{R}$
     $= (\lambda z.D[M_{n+1}])\mathbf{R}$
     $= C^*[\lambda z.D[M_{n+1}]]$
     $= C^*[C_{n+1}[M_{n+1}]]$

   - $P[Q/x] = (\lambda z.P_1)P_2 \ldots P_m, \quad P_1, P_2 \in SN_\beta.$
     Τότε $F(F(C^*[M_n])) = F((\lambda z P_1)P_2 \ldots P_m\mathbf{R})$
     $= P_1[P_2/z]P_3 \ldots P_m\mathbf{R}$
     Άρα $r_{n+1} = (\lambda z.P_1)P_2$ και $M_{n+1} \subseteq (\lambda z.P_1)P_2 \ldots P_m.$
     $\Rightarrow \ (\lambda z.P_1)P_2 \ldots P_m = D[M_{n+1}]$

     Τελικά έχουμε $F(C^*M_n) = (\lambda z P_1)P_2 \ldots P_m\mathbf{R}$
     $= C^*[(\lambda z P_1)P_2 \ldots P_m]$
     $= C^*[(\lambda z P_1)P_2 \ldots D[M_{n+1}]]$
     $= C^*[C_{n+1}[M_{n+1}]]$

- $P[Q/x] = (\lambda z.P_1)P_2 \ldots P_m, \quad P_1 \notin SN_\beta.$
  Τότε $F(F(C^*[M_n])) = F((\lambda z P_1)P_2 \ldots P_m\mathbf{R})$
  $= (\lambda z F(P_1))P_2 \ldots P_m\mathbf{R}$
  Άρα $r_{n+1} \subseteq P_1$ και $M_{n+1} \subseteq P_1$, αφού $P_1 \in \infty_\beta$.
  $\Rightarrow \; P_1 = D[M_{n+1}]$

  Τελικά έχουμε $F(C^*M_n) = (\lambda z.P_1)P_2 \ldots P_m\mathbf{R}$
  $= C^*[(\lambda z.P_1)P_2 \ldots P_m]$
  $= C^*[(\lambda z.D[M_{n+1}])P_2 \ldots P_m]$
  $= C^*[C_{n+1}[M_{n+1}]]$

- $P[Q/x] = (\lambda z.P_1)P_2 \ldots P_m, \quad P_1 \in SN_\beta, P_2 \notin SN_\beta.$
  Τότε $F(F(C^*[M_n])) = F((\lambda z.P_1)P_2 \ldots P_m\mathbf{R})$
  $= (\lambda z.P_1)F(P_2)P_3 \ldots P_m\mathbf{R}$

  Άρα $r_{n+1} \subseteq P_2$ και $M_{n+1} \subseteq P_2$, αφού $P_2 \in \infty_\beta$.
  $\Rightarrow \; P_2 = D[M_{n+1}]$

  Τελικά έχουμε $F(C^*M_n) = (\lambda z.P_1)P_2 \ldots P_m\mathbf{R}$
  $= C^*[(\lambda z.P_1)P_2P_3 \ldots P_m]$
  $= C^*[(\lambda z.P_1)D[M_{n+1}]P_3 \ldots P_m]$
  $= C^*[C_{n+1}[M_{n+1}]]$

- $P[Q/x] = (z)P_1P_2 \ldots P_m$, με τον P_x να είναι ο 1ος ατέρμων
  Τότε $F(F(C^*[M_n])) = F(\; (z)P_1P_2 \ldots P_m\mathbf{R}\;)$
  $= (z)P_1P_2 \ldots F(P_x)P_{x+1} \ldots P_m\mathbf{R}$

  Άρα $r_{n+1} \subseteq P_x$ και $M_{n+1} \subseteq P_x$, αφού $P_x \in \infty_\beta$.
  $\Rightarrow \; P_x = D[M_{n+1}]$

  Τελικά έχουμε $F(C^*M_n) = (z)P_1P_2 \ldots P_m\mathbf{R}$
  $= C^*[(z)P_1P_2P_3 \ldots P_m]$
  $= C^*[(z)P_1P_2 \ldots P_{x-1}D[M_{n+1}]P_{x+1} \ldots P_m]$
  $= C^*[C_{n+1}[M_{n+1}]]$

(β′) $(\lambda \mathbf{x}.\mathbf{P})\mathbf{Q} \notin \infty_\beta$

Τότε $r_n = (\lambda x.P)Q$
και επειδή $(\lambda x.P)Q \notin \infty_\beta$, έχουμε $P[Q/x] \notin \infty_\beta$
Άρα το $P[Q/x]$ μπορεί να έχει μια από τις ακόλουθες μορφές.
(Παρακάτω με R_x συμβολίζεται ο πρώτος ατέρμων R_i.)

- $P[Q/x] = \lambda z.P'$.
  Αν $R_1 \in SN_\beta$, τότε $r_{n+1} = (\lambda z.P')R_1$.
  Αν $M_n = (\lambda x.P)QR_1 \ldots R_x$,
  τότε $M_{n+1} = (\lambda z.P')R_1 \ldots R_x$.
  Αν $M_n = (\lambda x.P)QR_1 \ldots R_y, \ \ 1 \leq y < x$,
  τότε $M_{n+1} = (\lambda z.P')R_1 \ldots R_y$.
  Σε κάθε περίπτωση $F(\ C^*[M_n]\ ) \ = C^*[M_{n+1}]$.
  Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε $C_{n+1}[\ \ ] = [\ \ ]$.

  Αν $R_1 \notin SN_\beta$, τότε $r_{n+1} \subseteq M_{n+1} \subseteq R_1$.
  Επιπλέον θα έχουμε $M_n = (\lambda x.P)QR_1$, άρα $C^*[\ ] = [\ ]R_2 \ldots R_n$.
  $$\begin{aligned}\text{Τότε } F(C^*[M_n]) &= (\lambda z.P')R_1R_2 \ldots R_n \\ &= C^*[(\lambda z.P')R_1] \\ &= C^*[(\lambda z.P')D[M_{n+1}]] \\ &= C^*[C_{n+1}[M_{n+1}]]\end{aligned}$$

- $P[Q/x] = (\lambda z.P')Q'$, με $P', Q' \in SN_\beta$, αφού $P[Q/x] \in SN_\beta$.
  Τότε $F(C^*[M_n]) = (\lambda z.P')Q'R_1 \ldots R_x \ldots R_n$
  και $r_{n+1} = (\lambda z.P')Q'$.
  Αν $M_n = (\lambda x.P)QR_1 \ldots R_x$,
  τότε $M_{n+1} = (\lambda z.P')Q'R_1 \ldots R_x$.
  Αν $M_n = (\lambda x.P)QR_1 \ldots R_y, \ \ 1 \leq y < x$,
  τότε $M_{n+1} = (\lambda z.P')Q'R_1 \ldots R_y$.
  Σε κάθε περίπτωση $F(\ C^*[M_n]\ ) \ = C^*[M_{n+1}]$.
  Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε $C_{n+1}[\ \ ] = [\ \ ]$.

- $P[Q/x] = (z)P'_1 \ldots P'_k$. με $P'_1, P'_2, \ldots P'_k \in SN_\beta$.
  Τότε $M_n = (\lambda x.P)QR_1 \ldots R_x$ και $C^*[\ \ ] = [\ \ ]R_{x+1} \ldots R_n$.
  Επιπλέον $F(C^*[M_n]) = (z)P'_1 \ldots P'_k R_1 R_2 \ldots R_n$.
  Τότε όμως $r_{n+1} \subseteq M_{n+1} \subseteq R_x$, έστω $R_x = D[M_{n+1}]$.
  $$\begin{aligned}\text{Οπότε } F(C^*[M_n]) &= (z)P'_1 \ldots P'_k R_1 R_2 \ldots R_n \\ &= C^*[(z)P'_1 \ldots P'kR_1 \ldots R_x] \\ &= C^*[(z)P'_1 \ldots P'kR_1 \ldots D[M_{n+1}]] \\ &= C^*[C_{n+1}[M_{n+1}]]\end{aligned}$$

4. $C^*[M_n] = (\lambda x.P)Q\mathbf{R},\ P \notin SN_\beta$

5. $C^*[M_n] = (\lambda x.P)Q\mathbf{R},\ P \in SN_\beta,\quad Q \notin SN_\beta$
Οι δύο τελευταίες περιπτώσεις είναι πάλι όμοιες με την περίπτωση 1.

Η ατέρμονη στρατηγική F_3 του Sorensen (1996)

Ορισμός 3.0.15. Μια στρατηγική λέγεται zoom in, αν συστέλλει πάντα το αριστερότερο redex ενός ελαχιστικού ατέρμονος υποόρου.

Παραδείγματα

- Στον όρο $M = ((\lambda x.x)z.)(\lambda y.yy)\lambda y.yy$ ο ελάχιστος ατέρμων υποόρος είναι ο Ω (ο άλλος ατέρμων υποόρος είναι ο ίδιος ο M). Άρα μια zoom in στρατηγική F πρέπει να συστείλει το redex του Ω δηλαδή $F(M) = M$. Αντίθετα η F_2 λόγω του κανόνα 3 δίνει $F_2(M) = (z)\Omega$. Άρα η F_2 δεν είναι zoom in.

- Η στρατηγική της αριστερότερης αναγωγής F_l δεν είναι zoom in, αφού στον παραπάνω όρο M θα δρούσε όπως και η F_2.

- Η στρατηγική F_1 δεν είναι zoom in, αφού στον παραπάνω όρο M θα δρούσε όπως και η F_2.

- Η παρακάτω στρατηγική του Sorensen είναι zoom in.

  1. $F_3(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = x\mathbf{P}F_3(Q)\mathbf{R},\quad \mathbf{P} \in SN_\beta,\ Q \notin SN_\beta$
  2. $F_3(\lambda x.P) = \lambda x.F_3(P)$
  3. $F_3((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = P[Q/x]\mathbf{R},\quad$ αν $P, Q, \mathbf{R} \in SN_\beta$
  4. $F_3((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = (\lambda x.F_3(P))Q\mathbf{R},\quad$ αν $P \notin SN_\beta$
  5. $F_3((\lambda x.P)\mathbf{R}\mathbf{S}) = (\lambda x.P)\mathbf{R}F_3(Q)\mathbf{S},\quad$ αν $P, \mathbf{R} \in SN_\beta,\quad Q \notin SN_\beta$

Η ατέρμονη στρατηγική F_∞ του Barendregt (1976 ή 84)

Οι ατέρμονες στρατηγικές που παρουσιάσαμε (F_1, F_2, F_3) είναι ορισμένες μόνο στο σύνολο ∞_β. Για τον λόγο αυτό λέγονται μερικές (partial). Οι συγκεκριμένες όμως στρατηγικές δεν αποτελούν αναδρομικές συναρτήσεις, δηλαδή δεν είναι υπολογίσιμες. Ο λόγος είναι ότι για να αποδόσουν μια τιμή σε κάποιον όρο μπορεί να χρειαστεί να αποφανθούν αν κάποιος συγκεκριμένος υποόρος είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος ή όχι, πράγμα που δεν είναι υπολογίσιμο.

Αντιθέτως, η παρακάτω στρατηγική F_∞ είναι υπολογίσιμη συνάρτηση, αφού το κατηγόρημα $M \in NF_\beta$ υπολογίσιμο (και μάλιστα σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μήκος του M).

Ορισμός 3.0.16.

1. $F_\infty(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = x\mathbf{P}F_\infty(Q)\mathbf{R}, \quad \mathbf{P} \in NF_\beta, Q \notin NF_\beta$
2. $F_\infty(\lambda x.P) = \lambda x.F_\infty(P)$
3. $F_\infty((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = P[Q/x]\mathbf{R}$, αν $x \in FV(P)$ ή $Q \in NF_\beta$
4. $F_\infty((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = (\lambda x.P)F_\infty(Q)\mathbf{R}$, αν $x \notin FV(P)$ και $Q \notin NF_\beta$

Η F_∞, αντίθετα από τις F_1, F_2, F_3, ορίζεται σε όλο το Λ_K και αποδεικνύεται ότι είναι όχι μόνο ατέρμονη αλλά και maximal.

Η λειτουργία των 2 πρώτων κανόνων της F_∞ είναι προφανής.

Στην περίπτωση 4, όπου $M = (\lambda x.P)Q\mathbf{R}$, αν $x \notin FV(P)$ και $Q \notin NF_\beta$, δεν μας συμφέρει να συστείλουμε το αριστερότερο redex, γιατί έτσι εξαφανίζεται ο υποόρος Q και χάνουμε τα redex του. Δηλαδή χάνουμε $l_\beta(Q)$ βήματα από την αναγωγή του M. Αντίθετα, μας συμφέρει να συστέλλουμε τον Q έως ότου καταλήξει σε κανονική μορφή (εάν καταλήξει ποτέ). Οπότε φτάνουμε στην περίπτωση 3.

Στην περίπτωση 3, αν το Q είναι κανονική μορφή δεν χάνουμε τίποτα συστέλλοντας το αριστερότερο redex , ενώ αν $x \in FV(P)$, τότε η συστολή του αριστερότερου redex θα αυξήσει την πολυπλοκότητα του M, πράγμα που διαισθητικά διατηρεί την μεγιστικότητα του μονοπατιού.

Κεφάλαιο 4

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ SORENSEN

Το θεώρημα του Sorensen δίνει μια αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας όρος ατέρμων. Συγκεκριμένα, κάθε ατέρμων όρος πρέπει να περιέχει τον όρο $\Omega = (\lambda x.xx)\lambda x.xx$ ως substring . Πρώτα θα ορίσουμε τυπικά την έννοια του substring, θα ορίσουμε το σύνολο Λ_Ω των όρων που δεν περιέχουν τον Ω και τέλος θα αποδείξουμε ότι το Λ_Ω είναι υποσύνολο του SN_β.

Ορισμός 4.0.17. Ορίζουμε την διμελή σχέση $M \trianglelefteq N$ (M *substring* N) ως την μικρότερη σχέση που είναι κλειστή κάτω από τους εξής κανόνες.

- $x \trianglelefteq x$
- $P \trianglelefteq Q \;\Rightarrow\; P \trianglelefteq \lambda x.Q$, όπου $x \notin FV(P)$
- $P \trianglelefteq Q \;\Rightarrow\; P \trianglelefteq QZ$
- $P \trianglelefteq Q \;\Rightarrow\; P \trianglelefteq ZQ$
- $P \trianglelefteq Q \;\Rightarrow\; \lambda x.P \trianglelefteq \lambda x.Q$
- $P_1 \trianglelefteq Q_1,\; P_2 \trianglelefteq Q_2 \;\Rightarrow\; P_1P_2 \trianglelefteq Q_1Q_2$

Ορισμός 4.0.18. Το σύνολο Λ_ω ορίζεται ως εξής.

- $x \in \Lambda_\omega$
- $P \in \Lambda_\omega$ και $||P||_x \leq 1 \;\Rightarrow\; \lambda x.P \in \Lambda_\omega$
- $P, Q \in \Lambda_\omega \;\Rightarrow\; (P)Q \in \Lambda_\omega$

Ορισμός 4.0.19. Για κάθε όρο $M \in \Lambda_K$ ορίζουμε το $||M||_\omega$ ως εξής.

- $||x||_\omega = 0$
- $||\lambda x.P||_\omega = ||P||_\omega, \;$ αν $||P||_x \leq 1$
- $||\lambda x.P||_\omega = 1 + ||P||_\omega, \;$ αν $||P||_x > 1$
- $||PQ||_\omega = ||P||_\omega + ||Q||_\omega$

Ουσιαστικά, το μέτρο $||\cdot||_\omega$ μετρά πόσες φορές εμφανίζεται το substring ω σε έναν όρο. (Είναι ενδιαφέρον το ότι μπορεί ένα substring ω να περιπλέκεται με ένα άλλο π.χ. στον όρο $\lambda x.\lambda y.xyyx$).
Θα αποδείξουμε ότι $||M||\omega = 0 \Leftrightarrow M \in \Lambda_\omega \;\Leftrightarrow\; \omega \ntrianglelefteq M$.

Πρόταση 4.0.6. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.
1. $||M||\omega = 0$
2. $M \in \Lambda_\omega$
3. $\omega \ntrianglelefteq M$

Απόδειξη. $\mathbf{1 \to 2}$ Πρώτα δείχνουμε ότι $||M||\omega = 0 \Rightarrow M \in \Lambda_\omega$ με επαγωγή στον M.

- Για $M = x$ προφανές.
- $M = \lambda x.P$ όπου $||P||_\omega = 0$ και $||P||_x \leq 1$.
  Τότε από Ε.Υ. $P \in \Lambda_\omega$ και αφού $||P||_x \leq 1$, έχουμε $\lambda x.P \in \Lambda_\omega$.
- $M = PQ$ με $||P||_\omega = ||Q||_\omega = 0$.
  Από Ε.Υ. $P \in \Lambda_\omega$ και $Q \in \Lambda_\omega$, άρα $PQ \in \Lambda_\omega$.

$\mathbf{2 \to 3}$ Τώρα θα δείξουμε ότι $M \in \Lambda_\omega \Rightarrow \omega \ntrianglelefteq M$ με επαγωγή στον ορισμό του Λ_ω.

- Για $M = x$ προφανές.
- $M = \lambda x.P$ όπου $P \in \Lambda_\omega$ και $||P||_x \leq 1$.
  Από Ε.Υ. $\omega \ntrianglelefteq P$ και αφού $||P||_x \leq 1$, έχουμε $\omega \ntrianglelefteq M$.

- $M = PQ$ με $P, Q \in \Lambda_\omega$.
  Από Ε.Υ. $\omega \ntrianglelefteq P$ και $\omega \ntrianglelefteq Q$, άρα $\omega \ntrianglelefteq PQ$.

3 → 1 Τέλος θα δείξουμε ότι $\omega \ntrianglelefteq M \Rightarrow ||M||\omega = 0$ δείχνοντας το αντιθετοαντίστροφο, δηλαδή ότι $||M||\omega > 0 \Rightarrow \omega \trianglelefteq M$ με επαγωγή στον M.

- $M \neq x$.

- $M = PQ$ όπου είτε $||P||_\omega > 0$ είτε $||P||_\omega > 0$.
  Από Ε.Υ. είτε $\omega \trianglelefteq P$ είτε $\omega \trianglelefteq Q$, άρα σε κάθε περίπτωση $\omega \trianglelefteq M$.

- $M = \lambda x.P$. Εδώ υπάρχουν 2 περιπτώσεις.
  - $||P||_\omega > 0$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει από την Ε.Υ.
  - $||P||_\omega = 0$, αλλά $||P||_x > 1$.
    Τότε $xx \trianglelefteq P$, άρα $\lambda x.xx \trianglelefteq \lambda x.P$, δηλαδή $\omega \trianglelefteq M$.

Πρόταση 4.0.7. $M \in \Lambda_\omega$ και $M \to N \;\Rightarrow\; ||M||_x \geq ||N||_x$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στον M.

- Για $M = x$ τετριμμένο.

- $M = \lambda y.P$ και $N = \lambda y.P'$, όπου $P \to P'$.
  Τότε $||M||_x = ||P||_x \geq^{E.Y.} ||P'||_x = ||N||_x$.

- $M = PQ$ και έστω $N = P'Q$ με $P \to P'$.
  Τότε $||M||_x = ||P||_x + ||Q||_x \geq^{E.Y.} ||P'||_x + ||Q||_x = ||N||_x$.
  Ομοίως για $N = PQ'$.

- $M = (\lambda y.P)Q$ και $N = P[Q/y]$.
  Επειδή $M \in \Lambda_\omega$ έχουμε $||P||_y \leq 1$, άρα $||M||_x = ||P||_x + ||Q||_x \geq ||N||_x$.

Η παραπάνω πρόταση έχει ως πορίσματα δυο ιδιότητες του Λ_ω.

Πόρισμα 4.0.2. Αν $M \in \Lambda_\omega$ και $M \to N$ τότε $N \in \Lambda_\omega$.

Πράγματι, αν $M = C[\lambda y.D[(\lambda x.P)Q]]$ και $N = C[\lambda y.D[P[Q/x]]]$
τότε $||(\lambda x.P)Q||_y \geq ||P[Q/x]||_y$
άρα $\omega \ntrianglelefteq \lambda y.D[(\lambda x.P)Q] \Rightarrow \omega \ntrianglelefteq \lambda y.D[P[Q/x]]$.

Πόρισμα 4.0.3. Αν $M \in \Lambda_\omega$ και $M \to N$ τότε $||M|| > ||N||$.

Πράγματι αν $(\lambda x.P)Q \in \Lambda_\omega$, τότε έχουμε 2 περιπτώσεις.

- $||P||_x = 1$. Τότε το redex έχει την μορφή $(\lambda x.C[x])Q$ οπότε το contractum είναι το $C[Q]$ που έχει μικρότερη πολυπλοκότητα.

- $||P||_x = 0$. Τότε το contractum είναι το P που πάλι έχει μικρότερη πολυπλοκότητα.

Από αυτά τα πορίσματα συμπεραίνουμε ότι οι όροι του Λ_ω είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμοι, αφού μια ατέρμονη αναγωγή $M \to M_1 \to M_2 \to \cdots$ από τον $M \in \Lambda_\omega$ θα έδινε την άπειρη φθίνουσα ακολουθία φυσικών $||M|| > ||M_1|| > ||M_2|| > \cdots$ που είναι αδύνατο.
Άρα $\Lambda_\omega \subseteq SN_\beta$.

Τώρα θα ασχοληθούμε με το σύνολο των όρων που δεν περιέχουν το substring $(\lambda x.xx)\lambda x.xx$, δηλαδή το substring Ω. Για να αποδεικνύουμε με επαγωγή τις ιδιότητες αυτού του συνόλου χρειαζόμαστε έναν αναδρομικό ορισμό, τον οποίο και θα αποδείξουμε ισοδύναμο.

Ορισμός 4.0.20. Ορίζουμε το σύνολο Λ_Ω ως εξής.

- $x \in \Lambda_\Omega$
- $M \in \Lambda_\Omega \;\Rightarrow\; \lambda x.M \in \Lambda_\Omega$
- $M \in \Lambda_\Omega, N \in \Lambda_\omega \;\Rightarrow\; MN \in \Lambda_\Omega$
- $M \in \Lambda_\omega, N \in \Lambda_\Omega \;\Rightarrow\; MN \in \Lambda_\Omega$

Πρόταση 4.0.8. $M \in \Lambda_\Omega \;\Leftrightarrow\; \Omega \ntrianglelefteq M$

Απόδειξη. Έστω $M \in \Lambda_\Omega$.

- $M = x$, προφανές.
- $M = \lambda x.P$, όπου $P \in \Lambda_\Omega$.
  Από Ε.Υ. $\Omega \ntrianglelefteq P$, άρα $\omega\omega \ntrianglelefteq P$, άρα $\Omega \ntrianglelefteq \lambda x.P$.
- $M = PQ$ με $P \in \Lambda_\Omega$ και $Q \in \Lambda_\omega$.
  Αν είχαμε $\Omega \trianglelefteq PQ$, τότε θα είχαμε:
  - είτε $\Omega \trianglelefteq P$, που αντιβαίνει στην Ε.Υ.
  - είτε $\Omega \trianglelefteq Q$, που συνεπάγεται $\omega \trianglelefteq Q$,
    άρα από προηγούμενη απόδεξη $Q \notin \Lambda_\omega$ άτοπο
  - είτε $\omega \trianglelefteq P$ και $\omega \trianglelefteq Q$, εκ των οποίων το δεύτερο είναι πάλι άτοπο.

Στην αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $M \notin \Lambda_\Omega$. Έχουμε 4 περιπτώσεις.

- $M = \lambda x.P$ με $P \notin \Lambda_\Omega$.
  Από Ε.Υ. $\Omega \trianglelefteq P$, άρα $\Omega \trianglelefteq M$.

- $M = PQ$, με $P \notin \Lambda_\Omega$.
  Από Ε.Υ. $\Omega \trianglelefteq P$, άρα $\Omega \trianglelefteq PQ$.

- $M = PQ$ με $Q \notin \Lambda_\Omega$.
  Ομοίως.

- $M = PQ$ με $P, Q \notin \Lambda_\omega$.
  Τότε από προηγούμενη πρόταση, $\omega \trianglelefteq P$ και $\omega \trianglelefteq Q$.
  Άρα $\omega\omega \trianglelefteq PQ$
  $\Rightarrow \Omega \trianglelefteq M$.

Πρόταση 4.0.9. $\Lambda_\omega \subset \Lambda_\Omega$

Απόδειξη. $M \in \Lambda_\omega \Rightarrow \ \omega \ntrianglelefteq M \ \Rightarrow \ \Omega \ntrianglelefteq M \ \Rightarrow M \in \Lambda_\Omega$

Λήμμα 4.0.8. Αν $M \in \Lambda_\Omega$ και $M \to N$ τότε $N \in \Lambda_\Omega$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε 4 βήματα.

Βήμα 1.

$$\frac{\mathbf{M} \in \boldsymbol{\Lambda}_\omega \qquad \mathbf{N} \in \boldsymbol{\Lambda}_\omega}{\mathbf{M}[\mathbf{N}/\mathbf{x}] \in \boldsymbol{\Lambda}_\omega}$$

Με επαγωγή στον Μ.

- $M = x$, τότε $M[N/x] = N$, προφανές.
- $M = y$, τότε $M[N/x] = M$, προφανές.
- $M = \lambda y.P$, όπου $P \in \Lambda_\omega$ και $||P||_y \leq 1$.
  Τότε $M[N/x] = \lambda y.P[N/x]$,
  όπου από Ε.Υ. $P[N/x] \in \Lambda_\omega$ και $||P[N/x]||_y \leq 1$,
  αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δεσμευμένη μεταβλητή y του όρου M δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον N.
  Άρα $M[N/x] \in \Lambda_\omega$.
- $M = PQ$, όπου $P \in \Lambda_\omega,\ Q \in \Lambda_\omega$.
  Από Ε.Υ. $P[n/x] \in \Lambda_\omega,\ Q[N/x] \in \Lambda_\omega$
  $\Rightarrow\ (P[N/x])Q[N/x] \in \Lambda_\omega$
  $\Rightarrow\ ((P)Q)[N/x] \in \Lambda_\omega$
  $\Rightarrow\ M[N/x] \in \Lambda_\omega$

Βήμα 2.

$$\frac{\mathbf{M} \in \boldsymbol{\Lambda}_{\omega} \qquad ||\mathbf{M}||_{\mathbf{x}} \leq \mathbf{1} \qquad \mathbf{N} \in \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\Omega}}}{\mathbf{M}[\mathbf{N}/\mathbf{x}] \in \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\Omega}}}$$

Με επαγωγή στον M.

- $M = x$, τότε $M[N/x] = N \in \Lambda_\Omega$.
- $M = y$, τότε $M[N/x] = M \in \Lambda_\omega \subseteq \Lambda_\Omega$.
- $M = \lambda y.P$, με $||P||_y \leq 1$ και $y \in \Lambda_\omega$.
  Επίσης $||P||_x \leq ||M||_x \leq 1$.
  Άρα ισχύει η Ε.Υ.
  $\Rightarrow\ P[N/x] \in \Lambda_\Omega$
  $\Rightarrow\ \lambda y.P[N/x] \in \Lambda_\Omega$
  $\Rightarrow\ M[N/x] \in \Lambda_\Omega$

- $M = PQ$ με $P, Q \in \Lambda_\omega$.
  Από Ε.Υ. $P[N/x] \in \Lambda_\Omega, Q[N/x] \in \Lambda_\Omega$.
  Όμως $||M||_x \leq 1$.
  Επομένως τουλάχιστον ένα από τα P, Q δεν εμφανίζει την x. Έστω $||P||_x = 0$.
  Τότε $P[N/x] = P \in \Lambda_\omega$.
  Από $P[N/x] \in \Lambda_\omega Q[N/x] \in \Lambda_\Omega$ έχουμε $M \in \Lambda_\Omega$.

Βήμα 3.

$$\frac{\mathbf{M} \in \mathbf{\Lambda_\Omega} \qquad \mathbf{N} \in \mathbf{\Lambda}_\omega}{\mathbf{M[N/x]} \in \mathbf{\Lambda_\Omega}}$$

Με επαγωγή στον ορισμό του $M \in \Lambda_\Omega$.

- Για $M = x$ ή $M = y$ προφανές.
- $M = \lambda y.P$ με $P \in \Lambda_{Omega.}$
  Από Ε.Υ. $P[N/x] \in \Lambda_\Omega$
  $\Rightarrow \lambda y.P[N/x] \in \Lambda_\Omega$
  $\Rightarrow M[N/x] \in \Lambda_\Omega$
- $M = PQ$ με $P \in \Lambda_\Omega, Q \in \Lambda_\omega$. Ισχύουν
  1. $P[N/x] \in \Lambda_\Omega$ από Ε.Υ.
  2. $Q[N/x] \in \Lambda_\omega$ από Βήμα 1.

  Άρα $M[N/x] \in \Lambda_\Omega$
- $M = PQ$ με $P \in \Lambda_\omega, Q \in \Lambda_\Omega$.
  Ομοίως.

Βήμα 4.

$$\frac{\mathbf{C[(\lambda x.M)N]} \in \mathbf{\Lambda_\Omega} \qquad \mathbf{C[(\lambda x.M)N]} \to \mathbf{C[M[N/x]]}}{\mathbf{C[M[N/x]]} \in \mathbf{\Lambda_\Omega}}$$

1η περίπτωση $N \in \Lambda_\Omega$ και $\lambda x.M \in \Lambda_\omega$ (άρα $M \in \Lambda_\omega$ και $||M||_x \leq 1$) Τότε από Βήμα 2 $M[N/x] \in \Lambda_\Omega$

2η περίπτωση $N \in \Lambda_\omega$ και $\lambda x.M \in \Lambda_\Omega$ (άρα $M \in \Lambda_\Omega$. Τότε από Βήμα 3 $M[N/x] \in \Lambda_\Omega$.

Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, αν ένα redex δεν περιέχει το substring Ω, τότε ούτε το contractum του το περιέχει.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το Λ_Ω διατηρεί την β-αναγωγή.

Για να δείξουμε ότι $\Lambda_\omega \subseteq SN_\beta$ χρησιμοποιήσαμε ότι σε μια άπειρη αναγωγή $\Lambda_\omega \ni M \to M_1 \to M_2 \to \cdots$ θα είχαμε μια άπειρη φθίνουσα ακολουθία φυσικών $||M|| > ||M_1|| > ||M_2|| > \cdots$ που είναι άτοπο.

Για $M \in \Lambda_\Omega$ δεν ισχύει το ίδιο. Συγκεκριμένα δεν ισχύει για $M \in \Lambda_\Omega \setminus \Lambda_\omega$. Π.χ. η αναγωγή $(\lambda x.xx)(y)(y)y \to ((y)(y)y)(y)(y)y$ αυξάνει την πολυπλοκότητα του όρου.

Για να καταλήξουμε σε άτοπο στην περίπτωση του Λ_Ω θα βρούμε ένα άλλο μέτρο που να φθίνει γνησίως σε μια β-αναγωγή που ξεκινά από όρο του Λ_Ω.

Αυτό το μέτρο δεν μπορεί να είναι ούτε το $< ||\cdot||_\omega,\ ||\cdot|| >$, καθώς υπάρχουν όροι του Λ_Ω τέτοιοι ώστε $M \to N$ και $||M||_\omega < ||N||_\omega$. Π.χ.

$$\lambda y.\lambda z.(\omega)(y)z \to \lambda y.\lambda z.(yz)(y)z \tag{4.1}$$

Βλέπουμε δηλαδή, ότι ένας όρος τού Λ_Ω, ακόμα και αν περιέχει μία μοναδική duplicating λ-αφαίρεση, όταν αυτή η λ-αφαίρεση βρίσκεται στο σώμα μιας άλλης λ-αφαίρεσης, είναι δυνατόν να καταστήσει την τελευταία επίσης duplicating.

Στην πραγματικότητα, αυτή η νέα duplicating αφαίρεση δεν πρόκειται να δημιουργήσει άπειρο μονοπάτι στον όρο M. Ο λόγος είναι ότι αυτή η λ-αφαίρεση δεν θα επιλεγεί ποτέ από την F_2 (ή από οποιαδήποτε άλλη contricting στρατηγική) αφού έχει επιλεγεί ήδη μια λ-αφαίρεση που βρίσκεται στο σώμα της.

Μας ενδιαφέρουν, λοιπόν, μόνο οι λ-αφαιρέσεις που βρίσκονται στον υποόρο όπου θα δρα στο μέλλον η F_2. Αυτόν τον υποόρο του M θα τον ορίσουμε ως $V(M)$ και θα αποδείξουμε ότι μέσα σε αυτόν, ο αριθμός των substring ω πράγματι φθίνει.

Ορισμός 4.0.21. Ορίζουμε $V\ :\ \infty_\beta\ \to\ \Lambda_K$

- $V(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = V(Q)$, όπου $\mathbf{P} \in SN_\beta,\ Q \notin SN_\beta$
- $V(\lambda x.P) = V(P)$
- $V((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = P[Q/x]\mathbf{R}$, αν $P \in SN_\beta,\ \ Q \in SN_\beta$
- $V((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = V(P)$, αν $P \notin SN_\beta$
- $V((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = V(Q)$, αν $P \in SN_\beta,\ \ Q \notin SN_\beta$

Με επαγωγή στον M βλέπουμε εύκολα ότι $V(M) \subseteq M$.
Π.χ. $V(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = V(Q) \subseteq^{E.Y.} Q \subseteq x\mathbf{P}Q\mathbf{R}$

Λήμμα 4.0.9. Για κάθε $M \in \infty_\beta,\ \ V(M) = (\lambda y.K)L\mathbf{N}$, για κάποια $K, L, \mathbf{N}$ τέτοια ώστε $V(F_2(M)) \subseteq K[L/y]\mathbf{N}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στον M.

- $M = x\mathbf{P}Q\mathbf{R}$, όπου $\mathbf{P} \in SN_\beta,\ Q \notin SN_\beta$.
  Από Ε.Υ. για τον Q έχουμε $V(M) = V(Q) = (\lambda y.K)L\mathbf{N}$ και επιπλέον $V(F_2(Q)) \subseteq K[L/y]\mathbf{N}$.
  Από perptetuality της F_2, $F_2(M) \in \infty_\beta$,
  άρα $V(F_2(M)) = V(x\mathbf{P}F_2(Q)\mathbf{R}) = V(F_2(Q)) \subseteq K[L/y]\mathbf{N}$.

- $M = \lambda x.P$ με $P \notin SN_\beta$.
  $V(M) = V(P) =^{E.U.} (\lambda y.K)L\mathbf{N}$
  όπου $V(F_2(M)) = V(\lambda x.F_2(P)) = V(F_2(P)) \subseteq^{E.U.} K[L/y]\mathbf{N}$

- $M = (\lambda x.P)Q\mathbf{R}$ με $P, Q \in SN_\beta$.
  Τότε εξ ορισμού $V(M) = (\lambda x.P)Q\mathbf{R}$
  και $V(F_2(M)) = V(P[Q/x]\mathbf{R}) \subseteq P[Q/x]\mathbf{R}$

- $M = (\lambda x.P)Q\mathbf{R}$ με $P \notin SN_\beta$
  $V(M) = V(P) =^{E.U.} = (\lambda y.K)L\mathbf{N}$
  με $V(F_2(M)) = V(\lambda x.F_2(P))Q\mathbf{R}) = V(F_2(P)) \subseteq^{E.U.} K[L/y]\mathbf{N}$

- $M = (\lambda x.P)Q\mathbf{R}$ με $P \in SN_\beta, Q \notin SN_\beta$
  $V(M) = V(Q) =^{E.U.} = (\lambda y.K)L\mathbf{N}$
  με $V(F_2(M)) = V(\lambda x.P)F_2(Q)\mathbf{R}) = V(F_2(Q)) \subseteq^{E.U.} K[L/y]\mathbf{N}$

Λήμμα 4.0.10. $||P[Q/x]||_\omega = ||P||_\omega + ||P||_x||Q||_\omega$

Απόδειξη. Με επαγωγή στον M.

- $P = x$. Τότε $P[Q/x] = Q$, άρα $||P[Q/x]||_\omega = ||Q||_\omega$.
  Επιπλέον $||P||_\omega = 0$ και $||P||_x = 1$. Άρα η ισότητα ισχύει.

- $P = y$. Τότε $P[Q/x] = P$, άρα $||P[Q/x]||_\omega = ||P||_\omega$.
  Επιπλέον $||P||_x = 0$ άρα η ισότητα ισχύει.

- $P = \lambda y.R$
  Αν $||R||_y \leq 1$ τότε
  $$\begin{aligned} ||P[Q/x]||_\omega &= ||R[Q/x]||_\omega \\ &=^{E.Y.} ||R||_\omega + ||R||_x||Q||_\omega \\ &= ||P||_\omega + ||P||_x||Q||_\omega \end{aligned}$$

  Αν $||R||_y > 1$ τότε
  $$\begin{aligned} ||P[Q/x]||_\omega &= ||R[Q/x]||_\omega + 1 \\ &=^{E.Y.} ||R||_\omega + ||R||_x||Q||_\omega + 1 \\ &=^{E.Y.} (||R||_\omega + 1) + ||R||_x||Q||_\omega \\ &= ||P||_\omega + ||P||_x||Q||_\omega \end{aligned}$$

- $P = MN$

$$\begin{aligned}
||P[Q/x]||_\omega &= ||M[Q/x]||_\omega + ||N[Q/x]||_\omega \\
&=^{E.Y.} ||M||_\omega + ||M||_x ||Q||_\omega + ||N||_\omega + ||N||_x ||Q||_\omega \\
&= (||M||_\omega + ||N||_\omega) + (||M||_x + ||N||_x)||Q||_\omega \\
&= ||MN||_\omega + ||MN||_x ||Q||_\omega \\
&= ||P||_\omega + ||P||_x ||Q||_\omega
\end{aligned}$$

Πρόταση 4.0.10. $M \in \Lambda_\Omega \Rightarrow M \in SN_\beta$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\Lambda_\Omega \ni M_i \to M_{i+1}$, τότε $< ||V(M_i)||_\omega,\ ||V(M_i)|| > \ > \ < ||V(M_{i+1})||_\omega,\ ||V(M_{i+1})|| >$, γιατί έτσι, δεδομένης μιας άπειρης αναγωγής από έναν όρο του Λ_Ω, θα έχουμε δημιουργήσει μια άπειρη φθίνουσα ακολουθία στο $\mathbf{N}^2$.

Έχουμε αποδείξει ότι $V(M_i) = (\lambda y.K)L\mathbf{N}$ και $V(M_{i+1})) \subseteq K[L/y]\mathbf{N}$. Επίσης, $(\lambda y.K)L\mathbf{N} \subseteq M_i$, άρα $(\lambda y.K)L\mathbf{N} \in \Lambda_\Omega$.

1η περίπτωση
$||K||_y > 1$. Τότε $\lambda y.K \in \Lambda_\Omega \setminus \Lambda_\omega$, άρα $L \in \Lambda_\omega$ και

$$\begin{array}{rcl} ||V(M_{i+1})||_\omega & \leq & ||K[L/y]\mathbf{N}||_\omega \\ & = & ||K||_\omega + ||K||_y \cdot ||L||_\omega + ||N_1||_\omega + \cdots + ||N_n||_\omega \\ & = & ||K||_\omega + ||N_1||_\omega + \cdots + ||N_n||_\omega \\ & < & ||\lambda y.K||_\omega + ||N_1||_\omega + \cdots + ||N_n||_\omega \\ & = & ||(\lambda y.K)L\mathbf{N}||_\omega \\ & = & |V(M_i)||_\omega \end{array}$$

Το $<$ οφείλεται στο ότι $||K||_y > 1$, άρα $||K||_\omega = ||\lambda y.K||_\omega - 1$

2η περίπτωση
$||K||_y \leq 1$.
Τότε

$$\begin{array}{rcl} ||V(M_{i+1})||_\omega & \leq & ||K[L/y]\mathbf{N}||_\omega \\ & = & ||K||_\omega + ||K||_y \cdot ||L||_\omega + ||N_1||_\omega + \cdots + ||N_n||_\omega \\ & \leq & ||K||_\omega + ||L||_\omega + ||N_1||_\omega + \cdots + ||N_n||_\omega \\ & = & ||(\lambda y.K)L\mathbf{N}||_\omega \\ & = & |V(M_i)||_\omega \end{array}$$

Στην περίπτωση αυτή, είναι πιθανή η ισότητα $||V(M_{i+1})||_\omega = ||V(M_i)||_\omega$, αλλά ακόμα και τότε θα είναι

$$\begin{array}{rcl} ||V(M_{i+1})|| & \leq & ||K[L/y]\mathbf{N}|| \\ & = & ||K|| + ||K||_y \cdot (||L|| - 1) + ||N_1|| + \cdots + ||N_n|| + n \\ & < & ||K|| + ||L|| + 2 + ||N_1|| + \cdots + ||N_n|| \\ & = & ||(\lambda y.K)L\mathbf{N}| \\ & = & |V(M_i)|| \end{array}$$

Κεφάλαιο 5

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ **FLP** ΣΤΟΝ λ-ΛΟΓΙΣΜΟ ΜΕ ΤΥΠΟΥΣ

Είναι γνωστό ότι οι όροι οι οποίοι μπορούν να τυποποιηθούν στο απλό σύστημα τυποποίησης του λ-λογισμού είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμοι. Οι Van Raamsdonk και Severi το απέδειξαν χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό που εισήγαγαν για το SN_β όπως τον παρουσιάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Ομοίως και ο Xi χρησιμοποίησε τον δικό του χαρακτηρισμό για το SN_β. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε εδώ χρησιμοποιεί το θεμελιώδες λήμμα των ατέρμονων αναγωγών.

Πρώτα δίνουμε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 5.0.22. Θεωρούμε ένα σύνολο T_0 από σταθερές που τις ονομάζουμε μεταβλητές τύπων (ή βασικές μεταβλητές). Το σύνολο T των απλών τύπων είναι το μικρότερο σύνολο που περιέχει τις μεταβλητές τύπων και για κάθε $A, B \in T$ ισχύει $A \to B \in T$.
Επίσης, για έναν τύπο A ορίζουμε $||A||$ να είναι ο αριθμός των $'' \to ''$ στον A.

Το σύστημα τυποποίησης με το οποίο θα ασχοληθούμε ορίζεται ως εξής. Για να τυποποιήσουμε έναν όρο, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε μεταβλητή του σε έναν μοναδικό τύπο και να συνεχίσουμε ακολουθώντας τους κανόνες:

$$\frac{x : A \qquad M : B}{\lambda x.M : A \to B}\ (\to i) \qquad\qquad \frac{M : A \to B \quad N : A}{MN : B}\ (\to e)$$

Ορισμός 5.0.23. Το σύνολο των μεταβλητών στις οποίες αποδίδουμε τον τύπο A ονομάζεται V_A.
Επίσης το σύνολο των όρων στους οποίους αποδίδουμε τον τύπο A ονομάζεται Λ_A και αναδρομικά μπορούμε να το ορίσουμε ως εξής.

- $x \in V_A \;\Rightarrow\; x \in \Lambda_A$
- $x \in V_A \;\&\; M \in \Lambda_B \;\Rightarrow\; \lambda x.M \in \Lambda_{A\to B}$
- $M \in \Lambda_{B\to A} \;\&\; N \in \Lambda_B \;\Rightarrow\; MN \in \Lambda_A$

Τέλος, το σύνολο των απλώς τυποποιήσιμων όρων ορίζεται ως

$$\Lambda^{\to} = \bigcup_{A\in T} \Lambda_A \tag{5.1}$$

Λήμμα 5.0.11. (Λήμμα αντικατάστασης)
Αν $P \in \Lambda_B$ και $x \in \Lambda_A$ και $N \in \Lambda_A$, τότε $P[N/x] \in \Lambda_B$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στους κανόνες τυποποίησης του P.

Λήμμα 5.0.12. (Ιδιότητα μοναδικότητας του τύπου)
Αν $P \in \Lambda_A$ και $P \in \Lambda_B$, τότε $A = B$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στους κανόνες τυποποίησης του P, όπου η επαγωγική βάση (για $P \in Var$) οφείλεται στη μοναδικότητα του τύπου για τις μεταβλητές.

Λήμμα 5.0.13. (Αντιστροφής.)
Αν $M \in \Lambda_A$, τότε ισχύει ένα από τα παρακάτω.

- $M = x$
- $M = \lambda x.P$, όπου $x \in \Lambda_B,\; P \in \Lambda_C$ και $A = B \to C$
- $M = PQ$, όπου $P \in \Lambda_{B\to A}$ & $Q \in \Lambda_B$, για κάποιον $B \in T$

Με τον συμβολισμό που έχουμε εισαγάγει θέλουμε να δείξουμε ότι $\Lambda^{\to} \subseteq SN_\beta$. Αν προσπαθήσουμε να δείξουμε με επαγωγή στην τυποποίηση του M ότι $M \in \Lambda^{\to} \Rightarrow M \in SN_\beta$, έχουμε πρόβλημα στην περίπτωση $M = PQ$, γιατί από Ε.Υ. $P \in SN_\beta$ και $Q \in SN_\beta$, αλλά αυτό δεν συνεπάγεται ότι $PQ \in SN_\beta$. Στην πραγματικότητα, μια ικανή συνθήκη για να ισχύσει η συνεπαγωγή είναι ο P να τυποποιείται με τον τύπο $B \to A$, όπου ο Q να τυποποιείται με τον τύπο B. Αυτό ακριβώς θα αποδείξουμε στο κεφάλαιο αυτό, δηλαδή ότι

$$\underline{P, Q \in SN_\beta,\; P \in \Lambda_{B\to A}\;\; Q \in \Lambda_B} \tag{5.2}$$

$$(P)Q \in SN_\beta \tag{5.3}$$

Ορισμός 5.0.24. Για $A \in T$ ορίζουμε $SN_A = SN_\beta \cap \Lambda_A$.
Επιπλέον $SN^{\rightarrow} = \bigcup_{A \in T} SN_A$.

Ορισμός 5.0.25. Για $X, Y \subseteq \Lambda_K$ ορίζουμε

$$X \rightarrow Y = \{M \in \Lambda_K | \ \forall N \in X \ : \ MN \in Y\} \tag{5.4}$$

Παραδείγματα.
$\Lambda_\Omega \rightarrow \Lambda_\Omega = \Lambda_\omega$
$\Lambda_\omega \rightarrow \Lambda_\Omega = \Lambda_\Omega$
$\Lambda_\Omega \rightarrow \Lambda_\omega = \emptyset$
$\Lambda_\omega \rightarrow \Lambda_\omega = \Lambda_\omega$

Λήμμα 5.0.14. $\Lambda_{A \rightarrow B} = \ \Lambda_A \ \rightarrow \ \Lambda_B$

Απόδειξη. Έστω $M \in \Lambda_{A \rightarrow B}$. Για κάθε $N \in \Lambda_A$, έχουμε $MN \in \Lambda_B$. Οπότε από τον παραπάνω ορισμό, $M \in \ \Lambda_A \ \rightarrow \ \Lambda_B$.
Αντιστρόφως, έστω $M \in \ \Lambda_A \ \rightarrow \ \Lambda_B$. Για τυχαίο $N \in \Lambda_A$, έχουμε $MN \in \Lambda_B$, οπότε από λήμμα αντιστροφής, $M \in \Lambda_{C \rightarrow B}$, έτσι ώστε $N \in \Lambda_C$. Όμως επιλέξαμε $N \in \Lambda_A$, οπότε από μοναδικότητα τύπου θα είναι $C = A$.
Άρα $M \in \Lambda_{A \rightarrow B}$.

Λήμμα 5.0.15. $SN_{A \rightarrow B} \supseteq \ SN_A \ \rightarrow \ SN_B$

Απόδειξη. Έστω $M \in SN_A \rightarrow SN_B$. Για τυχαίο $N \in SN_A$ έχουμε $MN \in SN_B$. Ειδικότερα, $MN \in SN_\beta$, άρα $M \in SN_\beta$. (1)
Από την άλλη, $MN \in \Lambda_B$ οπότε από λήμμα αντιστροφής, $M \in \Lambda_{C \rightarrow B}$, έτσι ώστε $N \in \Lambda_C$. Όμως επιλέξαμε $N \in \Lambda_A$, οπότε από μοναδικότητα τύπου θα είναι $C = A$.
Άρα $M \in \Lambda_{A \rightarrow B}$ (2)
Από (1) και (2) $M \in SN_{A \rightarrow B}$.

Το αντίστροφο του λήμματος αυτού είναι το ουσιαστικό μέρος της απόδειξης του θεωρήματος. Όπως αναφέραμε πιο πριν, στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η 5.2 συνεπάγεται 5.3, δηλαδή να δείξουμε ότι

$$(M \in SN_{A \rightarrow B} \wedge \ N \in SN_A) \ \Rightarrow \ MN \in SN_B. \tag{5.5}$$

Αν λοιπόν δείξουμε ότι στην παραπάνω υπόθεση μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $<< M \in SN_{A \rightarrow B} >>$ με $<< M \in SN_A \rightarrow SN_B >>$, τότε το ζητούμενο θα προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του $X \rightarrow Y$.

Η απόδειξη του αντιστρόφου θα γίνει για τις διάφορες μορφές που μπορεί να πάρει ο ισχυρά κανονικοποιήσιμος M. Για την περίπτωση της λ-αφαίρεσης χρειαζόμαστε ακόμα ένα λήμμα.

Λήμμα 5.0.16. Αν $P \in SN_B$, $x \in \Lambda_{A_1 \to \cdots A_m}$ και $N \in SN_{A_1} \to \cdots SN_{A_m}$, όπου A_m μεταβλητή τύπου, τότε $P[N/x] \in SN_\beta$.

Απόδειξη. Για έναν όρο L συμβολίζουμε με L^* τον όρο $L[N/x]$.
Θα ακολουθήσουμε διπλή επαγωγή στο $< l_\beta(P), ||P|| >$.

- Αν $P = yP_1P_2 \ldots P_n$ ή $P = xP_1P_2 \ldots P_n$.
  Τότε y (αντίστοιχα x) $\in \Lambda_{B_1 \to \ldots B_n \to B}$ και $P_i \in \Lambda_{B_i}$
  $\Rightarrow P_i \in SN_{B_i}$
  $\Rightarrow^{EY} P_1^*, \ldots, P_n^* \in SN_\beta$
  - Αν $P = yP_1P_2 \ldots P_n$, τότε $P^* = yP_1^*P_2^* \ldots P_n^* \in SN_\beta$
  - Αν $P = xP_1P_2 \ldots P_n$, τότε $B_1 = A_1, \ldots, B_n = A_n$
    και $B = A_{n+1} \to A_m$.
    Όμως έχουμε δείξει ότι $SN_{A_{n+1}} \to \cdots \to SN_{A_m} \subseteq SN_B$
    $\Rightarrow SN_{A_1} \to \cdots \to SN_{A_m} \subseteq SN_{A_1} \to \cdots \to SN_{A_n} \to SN_B$
    $\Rightarrow \; N \in SN_{A_1} \to \cdots \to SN_{A_n} \to SN_B$.
    Από το λήμμα αντικατάστασης $P_i^* \in \Lambda_{B_i}$
    $\Rightarrow P_i^* \in \Lambda_{A_i}$ και επειδή από Ε.Υ. είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμοι
    $P_i^* \in SN_{B_i}$
    $\Rightarrow NP_1^*P_2^* \cdots P_n^* \in SN_B$,
    $\Rightarrow P^* \in SN_B$.

- Αν $P = \lambda y.P_0$ με $P_0 \in SN_\beta$.
  Τότε $B = B_1 \to B_0$, όπου $P_0 \in \Lambda_{B_0}$, άρα $P_0 \in SN_{B_0}$.
  $\Rightarrow^{EY} \; P_0^* \in SN_\beta$
  $\Rightarrow \lambda y.P_0^* \in SN_\beta$
  $\Rightarrow P^* \in SN_\beta$

- $P = (\lambda y.P_0)P_1 \ldots P_n$.
  Τότε $P_0[P_1/y]P_2 \ldots P_n \in SN_\beta$ και $P_1 \in SN_\beta$.
  Εξάλλου, από λήμμα αντιστροφής $P_1 \in \Lambda_{B_1}, \cdots, P_n \in \Lambda_{B_n}, y \in \Lambda_{B_1}$ και $P_0 \in \Lambda_{B_2 \to \ldots \to B_n \to B}$.
  $\Rightarrow^{EY} (P_0[P_1/y]P_2 \cdots P_n)^* \in SN_\beta$ και $P_1^* \in SN_\beta$
  $\Rightarrow P_0^*[P_1^*/y]P_2^* \cdots P_n^* \in SN_\beta$ και $P_1^* \in SN_\beta$
  $\Rightarrow^{FLP} (\lambda y.P_0^*)P_1^*P_2^* \ldots P_n^* \in SN_\beta$
  $\Rightarrow ((\lambda y.P_0)P_1P_2 \ldots P_n)^* \in SN_\beta$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το:

Λήμμα 5.0.17. $SN_{A \to B} \subseteq \; SN_A \; \to \; SN_B$

Απόδειξη. Έστω $M \in SN_{A\to B}$. Για τυχαίο $N \in SN_A$, θα δείξουμε ότι $MN \in SN_\beta$. (Το ότι $MN \in \Lambda_B$ είναι προφανές).
Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $< ||A||, l_\beta(M) >$.

1. $M = yP_0P_1\cdots P_n$. Τότε $P_i \in SN_\beta$ και επειδή $N \in SN_\beta$
   $yP_0\cdots P_nN \in SN_\beta$
   $\Rightarrow MN \in SN_\beta$

2. $M = \lambda x.P$. Αυτή είναι και η ενδιαφέρουσα περίπτωση, γιατί όταν εφαρμόσουμε αυτόν τον όρο σε έναν N, θα προκύψει ένα νέο redex.
   Έχουμε, λοιπόν, $P \in SN_\beta$.
   Επειδή $A = A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_m$, για κάποια μεταβλητή τύπου A_m, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

   $$N \in SN_A \;\Rightarrow\; N \in SN_{A_1} \to SN_{A_2} \to \cdots \to SN_{A_m} \tag{5.6}$$

   Άρα από το λήμμα 5.0.16 έχουμε $P[N/x] \in SN_\beta$
   $\Rightarrow^{FLP}\; (\lambda x.P)N \in SN_\beta$
   $\Rightarrow MN \in SN_\beta$

3. $M = (\lambda y.P_0)P_1\cdots P_n$. Τότε $P_0[P_1/y]P_2\cdots P_n \in SN_\beta$ και $P_1 \in SN_\beta$.
   Από λήμμα αντικατάστασης $P_0[P_1/y]P_2\cdots P_n \in \Lambda_{A\to B}$.
   Οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση και να πάρουμε $P_0[P_1/y]P_2\cdots P_nN \in SN_\beta$

   $\Rightarrow^{FLP}\; MN = (\lambda y.P_0)P_1\cdots P_nN \in SN_\beta$

Θεώρημα 5.0.1. Αν $M \in \Lambda_A$, τότε $M \in SN_\beta$.

Απόδειξη.

1. $M = x$. Τότε $M \in SN_\beta$.

2. $M = \lambda x.P$. Τότε από λήμμα αντιστροφής $A = A_0 \to A_1$ και $P \in \Lambda_{A_1}$.
   Από Ε.Υ. $P \in SN_\beta$, άρα $\lambda x.P \in SN_\beta$.

3. $M = PQ$. Τότε από λήμμα αντιστροφής $P \in \Lambda_{B\to A}$ και $Q \in \Lambda_B$.
   Από Ε.Υ. $P \in SN_{B\to A}$ και $Q \in SN_B$.
   Τότε από λήμμα 5.0.17 $P \in SN_B \to SN_A$
   $\Rightarrow PQ \in SN_A \subseteq SN_\beta$.

Κεφάλαιο 6

DEVELOPMENTS

Αν σε έναν όρο μαρκάρουμε κάποια redexes υπογραμμίζοντας τα λαμβδα τους και συστέλλουμε μόνο υπογραμμισμένα λάμβδα, τότε λέμε ότι έχουμε μία development. Οι developments, αν και δεν μπορούν να αναπαραστήσουν μεγάλο αριθμό συναρτήσεων, είναι χρήσιμες στην απόδειξη ιδιοτήτων του λ-λογισμού. Κι αυτό γιατί, όπως θα δείξουμε στο κεφάλαιο αυτό, οι developments πάντα τερματίζουν και μάλιστα σε μία μοναδική κανονική μορφή. Μια εφαρμογή του θεωρήματος αυτού, θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο της εργασίας.

Ορισμός 6.0.26. Ορίζουμε το σύνολο $\underline{\Lambda}_K$ των υπογραμμισμένων λ-όρων ως εξής

- $x \in \underline{\Lambda}_K$
- $P \in \underline{\Lambda}_K \;\Rightarrow\; \lambda x.P \in \underline{\Lambda}_K$
- $P, Q \in \underline{\Lambda}_K \;\Rightarrow\; PQ \in \underline{\Lambda}_K$
- $P, Q \in \underline{\Lambda}_K \;\Rightarrow\; (\underline{\lambda} x.P)Q \in \underline{\Lambda}_K$

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι δεν ορίζεται όρος $\underline{\lambda} x.P$. Επίσης το $\underline{\lambda} x.P$ δεν είναι υποόρος του $(\underline{\lambda} x.P)Q$. Οι μοναδικοί υποόροι του $M = (\underline{\lambda} x.P)Q$ είναι οι υποόροι του P, οι υποόροι του Q και ο ίδιος ο M.

Ένα redex της μορφής $(\underline{\lambda} x.P)Q$ λέγεται υπογραμμισμένο.

Ορισμός 6.0.27. Στο $\underline{\Lambda}_K$ ορίζουμε τις αναγωγές

- $(\underline{\lambda} x.P)Q \;\underline{\beta}\; P[Q/x]$
- $(\lambda x.P)Q \;\beta\; P[Q/x]$
- $\beta^* = \beta \cup \underline{\beta}$

Επιπλέον θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $M = (\lambda^* x.P)Q$ αν $M = (\lambda x.P)Q$ ή $M = (\underline{\lambda} x.P)Q$.

Για να ορίσουμε την έννοια της development, πρέπει να αποδείξουμε ότι το $\underline{\Lambda}_K$ είναι κλειστό ως προς την β^* αναγωγή.

Λήμμα 6.0.18. $M \in \underline{\Lambda}_K$ & $M \rightarrow_{\beta^*} N \; \Rightarrow \; N \in \underline{\Lambda}_K$

Απόδειξη. Με επαγωγή στην $M \rightarrow_{\beta^*} N$.

Οι περιπτώσεις

- $M = PQ \rightarrow_{\beta^*} P'Q = N$
- $M = PQ \;\; \rightarrow_{\beta^*} PQ' = N$
- $M = \lambda x.P \rightarrow_{\beta^*} \lambda x.P = N$

προκύπτουν εύκολα από την επαγωγική υπόθεση. Στην κρίσιμη περίπτωση όπου

- $M = (\lambda^* x.P)Q \rightarrow_{\beta^*} \; P[Q/x] = N$
  χρειαζόμαστε το:

  Υπολήμμα 6.0.1. Αν $M, N \in \underline{\Lambda}_K$, τότε $M[N/x] \in \underline{\Lambda}_K$

  Απόδειξη. Με επαγωγή στον M.

Ορισμός 6.0.28. Μια **development** από τον M είναι ένα μονοπάτι $\underline{\beta}$ αναγωγής από τον M. Μια development λέγεται πλήρης, αν καταλήγει σε μια κανονική μορφή για την $\underline{\beta}$ αναγωγή.

Σε αντιστοιχία με το FLP για την β αναγωγή, έχουμε το παρακάτω θεμελιώδες λήμμα για την $\underline{\beta}$ αναγωγή.

Λήμμα 6.0.19. Υποθέτουμε ότι $M_1 \in SN_{\underline{\beta}}$ αν $x \notin FV(M_0)$.
Τότε για κάθε $n \geq 1$

$$M_0[M_1/x]M_2 \ldots M_n \in SN_{\underline{\beta}} \Rightarrow (\lambda x.M_0)M_1 \ldots M_n \in SN_{\underline{\beta}} \tag{6.1}$$

Απόδειξη. Πανομοιότυπη με την απόδειξη του FLP για την β-αναγωγή.

Πόρισμα 6.0.4. Υποθέτουμε ότι $M_1 \in SN_{\underline{\beta}}$. Τότε για κάθε $n \geq 1$

$$M_0[M_1/x]M_2 \ldots M_n \in SN_{\underline{\beta}} \Rightarrow (\lambda x.M_0)M_1 \ldots M_n \in SN_{\underline{\beta}}$$

Αντίστοιχα με τους χαρακτηρισμούς για το SN_β, οι van Raamsdonk - Severi από την μια και ο Xi από την άλλη έδωσαν τους παρακάτω χαρακτηρισμούς για το $SN_{\underline{\beta}}$

- Το $SN_{\underline{\beta}}$ είναι το μικρότερο σύνολο X λ-όρων που είναι κλειστό ως προς τους παρακάτω κανόνες σχηματισμού λ-όρων.
    1. $x \in X$
    2. $M \in X \Rightarrow \lambda x.M \in X$
    3. $M, N \in X \Rightarrow (M)N \in X$
    4. $M_1 \in X$ και $M_0[M_1/x]M_2 \dots M_n \in X \Rightarrow (\underline{\lambda} x.M_0)M_1 \dots M_n \in X$
- Το $SN_{\underline{\beta}}$ είναι το σύνολο $\{M \in \underline{\Lambda}_K \mid \underline{\mathcal{H}}(M) < \infty\}$, όπου το μέτρο $\underline{\mathcal{H}}(\cdot)$ ορίζεται αντίστοιχα με το $\mathcal{H}(\cdot)$.

Παρατήρηση. Ο κανόνας (3) του πρώτου χαρακτηρισμού έχει καθοριστική σημασία για την ισχυρή κανονικοποιησιμότητα του $\underline{\Lambda}_K$ ως προς την $\underline{\beta}$. Για το SN_β δεν ισχύει ο αντίστοιχος κανόνας.

Π.χ. $\lambda x.xx$ και $\lambda y.yy \in SN_\beta$ αλλά $(\lambda x.xx)\lambda y.yy \notin SN_\beta$.

Διαισθητικά, ο λόγος είναι ότι δεν υπάρχει όρος που να είναι $\underline{\lambda}-$ αφαίρεση, κι έτσι η εφαρμογή $(M)N$ δεν μπορεί να δημιουργήσει νέο υπογραμμισμένο redex, παρά μόνο αυτά που υπήρχαν στον M ή στον N.

Χρειαζόμαστε ένα λήμμα πριν δείξουμε την ισχυρή κανονικοποιησιμότητα του $\underline{\Lambda}_K$ ως προς την $\underline{\beta}$.

Λήμμα 6.0.20. $M, N \in SN_{\underline{\beta}} \;\Rightarrow\; M[N/x] \in SN_{\underline{\beta}}$

Απόδειξη. Με διπλή επαγωγή στο $< l_{\underline{\beta}}(M), ||M|| >$.
Συμβολίζουμε $L^* = L[N/x]$.

1. $M = x$
2. $M = y$
3. $M = \lambda x.P$
4. $M = PQ$
5. $M = (\underline{\lambda} y.P)Q$

Οι περιπτώσεις 1 και 2 είναι προφανείς.
Οι περιπτώσεις 3 και 4 προκύπτουν άμεσα από την επαγωγική υπόθεση.
Για την 5, έχουμε $P[Q/y] \in SN_\beta$ και $Q \in SN_{\underline{\beta}}$.
Από Ε.Υ. $(P[Q/y])^* = P^*[Q^*/y] \in SN_{\underline{\beta}}$ και $Q^* \in SN_{\underline{\beta}}$
Από FLP $(\underline{\lambda} y.P^*)Q^* \in SN_{\underline{\beta}}$
$\Rightarrow\; ((\underline{\lambda} y.P)Q)^* \in SN_{\underline{\beta}}$

Θεώρημα 6.0.2. (Τερματισμός των developments) $M \in \underline{\Lambda}_K \;\Rightarrow\; M \in SN_{\underline{\beta}}$

Απόδειξη. Με επαγωγή στον M.

- $M = x$. Τότε $M \in SN_{\underline{\beta}}$
- $M = \lambda x.P$. Από Ε.Υ., $P \in SN_{\underline{\beta}}$, άρα $M \in SN_{\underline{\beta}}$.
- $M = PQ$. Από Ε.Υ. $P, Q \in SN_{\underline{\beta}}$, άρα $PQ \in SN_{\underline{\beta}}$.
- $M = (\underline{\lambda} x.P)Q$
  Από Ε.Υ. $P, Q \in SN_{\underline{\beta}}$
  $\Rightarrow\; P[Q/x] \in SN_{\underline{\beta}}$
  $\Rightarrow^*\; FLP\ (\underline{\lambda} x.P)Q \in SN_{\underline{\beta}}$

Παρατήρηση. Σε ένα μονοπάτι β^*- αναγωγής μπορεί να υπάρχουν άπειρες $\underline{\beta}$ συστολές εφόσον βέβαια εναλλάσσονται με κάποιες $\beta-$ συστολές. Π.χ. έστω ένα $\underline{\beta}-$ redex Δ με contractum Δ' και έστω ο όρος $T = (\lambda x.xx\Delta)\lambda x.xx\Delta$. Τότε έχουμε το μονοπάτι

$$T \to_\beta T\Delta \to_{\underline{\beta}} T\Delta' \to_\beta T\Delta\Delta' \to_{\underline{\beta}} T\Delta'\Delta' \to_\beta T\Delta\Delta'\Delta' \cdots \tag{6.2}$$

Κεφάλαιο 7

ΑΤΕΡΜΟΝΑ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΙΚΑ REDEXES

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε χαρακτηρισμούς για τα ατέρμονα redexes ενός όρου. Επειδή συστέλλοντας ένα ατέρμον redex, διατηρείς την δυνατότητα κατασκευής ατέρμονος μονοπατιού, τέτοια αποτελέσματα έχουν καθιερωθεί ως Conservation theorems. Στα θεωρήματα που θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο αυτό, χρησιμοποιούμε και την $\underline{\beta}-$ αναγωγή, γι'αυτό πρώτα θα δείξουμε κάποια λήμματα που αφορούν το $\underline{\Lambda}_K$ και την $\underline{\beta}$.

Ορισμός 7.0.29. Ορίζουμε τον τελεστή $|\cdot| : \underline{\Lambda}_K \to \Lambda_K$:

- $|x| = x$
- $|\lambda x.P| = \lambda x.|P|$
- $|PQ| = |P||Q|$
- $|(\underline{\lambda} x.P)Q| = (\lambda x.|P|)|Q|$

Στην ουσία αυτό που κάνει ο τελεστής $|\cdot|$ είναι να σβήνει από έναν όρο όλες τις υπογραμμίσεις.

Λήμμα 7.0.21. (Προβολής) $M \to_{\beta^*} N \;\Rightarrow\; |M| \to_\beta |N|$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $M \to_{\beta^*} N$.
Στην περίπτωση $M = (\lambda^* x.P)Q \to_{\beta^*} P[Q/x] = N$, έχουμε $|M| = |(\lambda^* x.P)Q| = (\lambda x.|P|)|Q| \to_\beta |P|(|Q|/x)$.
Μένει να δείξουμε ότι αυτός ο όρος είναι ο $|N|$.
Χρειαζόμαστε λοιπόν το :

Υπολήμμα 7.0.2. $|M|(|N|/x) = |M(N/x)|$

Απόδειξη. Με επαγωγή στον M.

Λήμμα 7.0.22. (Lifting)
Αν $|M| \to_\beta K$, τότε $K = |N|$, για κάποιο $N \in \underline{\Lambda}_K$ με $M \to_{\beta^*} N$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην $|M| \to_\beta K$.
Στην κρίσιμη περίπτωση $|M| = (\lambda x.P)Q \to_\beta P[Q/x] = K$.
Τότε $M = (\lambda^* x.P')Q'$, όπου $|P'| = P$ και $|Q'| = Q$
και ο όρος $N = P'[Q'/x]$ είναι τέτοιος ώστε $M \to_{\beta^*} N$ και $|N| = K$.

Πόρισμα 7.0.5. Για κάθε $M \in \underline{\Lambda}_K$:
$i)$ $M \in SN_{\beta^*} \Leftrightarrow |M| \in SN_\beta$
$ii)$ $M \in NF_{\beta^*} \Leftrightarrow |M| \in NF_\beta$

Ένας άλλος τελεστής που απεικονίζει το $\underline{\Lambda}_K$ στο Λ_K είναι ο εξής.

Ορισμός 7.0.30. $\phi : \underline{\Lambda}_K \to \Lambda_K$

- $\phi(x) = x$
- $\phi(\lambda x.Q) = \lambda x.\phi(Q)$
- $\phi((\underline{\lambda} x.P)Q) = \phi(P)[\phi(Q)/x]$
- $\phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q)$

Ο τελεστής ϕ υπολογίζει μια πλήρη development και επιστρέφει μια $\underline{\beta}-$ κανονική μορφή του αρχικού όρου. (Αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο την ισχυρή κανονικοποίηση της $\underline{\beta}-$ αναγωγής. Αποδεικνύεται επίσης ότι η $\underline{\beta}-$ κανονική μορφή ενός όρου είναι μοναδική.)

Λήμμα 7.0.23. Για κάθε $M, N \in \underline{\Lambda_K}$:

1. $\phi(M[N/x]) = \phi(M)[\phi(N)/x]$
2. Αν $M \to_{\underline{\beta}} N$, τότε $\phi(M) = \phi(N)$.
3. Αν $M \to_\beta N$, τότε $\phi(M) \twoheadrightarrow_\beta \phi(N)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρώτης ιδιότητας γίνεται με επαγωγή στον M. Π.χ. για $M = (\underline{\lambda} y.P)Q$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\phi(M[N/x]) &= \phi((\underline{\lambda} y.P[N/x])Q[N/x])\\ &= \phi(P[N/x])[\phi(Q[N/x])/y]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=^{EY} \phi(P)[\phi(N)/x][\phi(Q)[\phi(N)/x]/y] \\
&= \phi(P)[\phi(Q)/y][\phi(N)/x] \\
&= \phi(M)[\phi(N)/x]
\end{aligned}
$$

Η δεύτερη ιδιότητα αποδεικνύεται με επαγωγή στο $M \rightarrow_{\underline{\beta}} N$. Στην κρίσιμη περίπτωση έχουμε $M = (\underline{\lambda}x.P)Q \rightarrow_{\underline{\beta}} P[Q/x] = N$.
Τότε $\phi(M) = \phi((\underline{\lambda}x.P)Q) = \phi(P)[\phi(Q)/x]$ που από την πρώτη ιδιότητα ταυτίζεται με τον $\phi(P[Q/x])$, δηλαδή με τον $\phi(N)$.

Η τρίτη ιδιότητα αποδεικνύεται με επαγωγή στο $M \rightarrow_{\beta} N$.

- $M = xP_1 \dots P_k \dots P_n \rightarrow_{\beta} xP_1 \dots P_k' \dots P_n = N$
- $M = \lambda x.P \rightarrow_{\beta} \lambda x.P' = N$
- $M = (\lambda x.P)Q \rightarrow_{\beta} P[Q/x] = N$
- $M = (\underline{\lambda}x.P)Q \rightarrow_{\beta} (\underline{\lambda}x.P)Q' = N$

  Στην τρίτη περίπτωση χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\phi(P[Q/x]) = \phi(P)[\phi(Q)/x]$.
  Η πιο ενδιαφέρουσα είναι η τελευταία περίπτωση, καθώς αυτή εξηγεί το $\twoheadrightarrow_{\beta}$ αντί του $\rightarrow_{\beta}$. Συγκεκριμένα:
  $$
  \begin{aligned}
  \phi(M) &= \phi((\underline{\lambda}x.P)Q) \\
  &= \phi(P)[\phi(Q)/x] \\
  &\twoheadrightarrow_{\beta} \phi(P)[\phi(Q')/x] \\
  &= \phi(N)
  \end{aligned}
  $$
  Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ο αριθμός των βημάτων β-αναγωγής από τον $\phi(M)$ στον $\phi(N)$ εξαρτάται από τον αριθμό των εμφανίσεων του x στον $\phi(P)$.
  Π.χ. για $M = (\underline{\lambda}x.y)(I)y$ και $N = (\underline{\lambda}x.y)y$
  έχουμε $M \rightarrow_{\beta} N$ αλλά $\phi(M) = \phi(N) = y$.

Παρατήρηση. Είμαστε πλέον έτοιμοι να αναζητήσουμε ικανές συνθήκες υπο τις οποίες η συστολή του redex r ενός όρου M διατηρεί την δυνατότητα άπειρης αναγωγής, εφόσον υπήρχε τέτοια δυνατότητα. Για τον σκοπό αυτόν, χρειάζεται να μαρκάρουμε το υπό εξέταση redex, (μετατρέποντας έτσι τον όρο M σε όρο L του $\underline{\Lambda}_K$) και να μελετήσουμε ένα άπειρο μονοπάτι β^*- αναγωγής από τον L. Είναι δε προφανές και εύκολα αποδείξιμο ότι για τον όρο N που προκύπτει από τον M με συστολή του r ισχύει $\phi(L) = N$.
Δηλαδή αν $M = C[(\lambda x.P)Q]$, $L = C[(\underline{\lambda}x.P)Q]$ και $N = C[P[Q/x]]$, τότε ισχύει $\phi(L) = N$.
Επιπλέον, από ισχυρή κανονικοποίηση των developments έχουμε ότι για κάθε άπειρο μονοπάτι $L \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow \dots$ β^*- αναγωγής από τον L και για κάθε i, υπάρχει $j > i$ τέτοιο ώστε $L_j \rightarrow_{\beta} L_{j+1}$.

Αν λοιπόν βρούμε ένα τέτοιο μονοπάτι $L \to L_1 \to L_2 \to \ldots$ β^*- αναγωγής από τον L τέτοιο που $L_i \to_\beta L_{i+1} \;\Rightarrow\; \phi(L_i) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(L_{i+1})$, τότε θα έχουμε κατασκευάσει ένα άπειρο μονοπάτι β-αναγωγής από τον N. Άρα θα έχουμε δείξει ότι $N \in \infty_\beta$.

Πρόταση 7.0.11. Έστω $M \in \Lambda_K$ και $M \to_\beta N$.
Τότε $M \in \infty_\beta \Rightarrow\; N \in \infty_\beta$,
αν υπάρχει σύνολο $S \subseteq \underline{\Lambda}_K$ και ατέρμονη β^*-στρατηγική F^* τέτοια ώστε

1. $M = C[(\lambda x.P)Q]$, $N = C[P[Q/x]]$ και $L = C[(\underline{\lambda} x.P)Q] \in S$, για κάποια C, P, Q
2. $U \in S \Rightarrow\; F^*(U) \in S$
3. για κάθε $U \in S :\; U \to_\beta U' \;\Rightarrow\; \phi(U) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(U')$

Απόδειξη. $M \in \infty_\beta \Rightarrow\; L \in \infty_{\beta^*}$.
Επειδή F^* ατέρμονη, επειδή το S είναι κλειστό ως προς την F^* και επειδή $L \in S$, έχουμε το άπειρο μονοπάτι $L \to L_1 \to L_2 \to \ldots$
β^*- αναγωγής.
Από την υπόθεση και τα προηγούμενα λήμματα έχουμε ότι

- $L_i \to_\beta L_{i+1} \;\Rightarrow\; N_i = \phi(L_i) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(L_{i+1}) = N_{i+1}$
- $L_i \to_{\underline{\beta}} L_{i+1} \;\Rightarrow\; N_i = \phi(L_i) \equiv \phi(L_{i+1}) = N_{i+1}$

Άρα σύμφωνα με την παρατήρηση που προηγήθηκε του λήμματος για κάθε i υπάρχει $j > i$ τέτοιο ώστε $N_i \to_\beta N_j$. Άρα $N \in \infty_\beta$.

– –

Βασισμένοι στην πρόταση (7.0.11) θα αποδείξουμε κάποιες ικανές συνθήκες για την συνεπαγωγή $C[(\lambda x.P)Q] \in \infty_\beta \;\Rightarrow\; C[P[Q/x]] \in \infty_\beta$. Για τον σκοπό αυτόν, αρκεί να επιλέγουμε κάθε φορά κατάλληλα S και F^* και να αποδεικνύουμε ότι ικανοποιούν τις υποθέσεις της (7.0.11).
– –

Το θεώρημα διατήρησης στον λI λογισμό.

Το θεώρημα διατήρησης στον λI λογισμό αποδείχτηκε αρχικά από τους Church και Rosser. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε εδώ βασίζεται σε μια τεχνική που εισήγαγε ο Barendregt και χρησιμοποιεί την πρόταση 7.0.11. Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε β^*- στρατηγική στη θέση της F^* και να πάρουμε ως S ολόκληρο το $\underline{\Lambda}_I$. Θα δείξουμε λοιπόν τα επόμενα λήμματα τα οποία εξασφαλίζουν ότι οποιαδήποτε β^*- στρατηγική F^* ικανοποιεί τις υποθέσεις της πρότασης 7.0.11 για $S = \underline{\Lambda}_I$.

Λήμμα 7.0.24. Για κάθε $M \in \underline{\Lambda}_I : \ M \to_{\beta^*} N \ \Rightarrow \ N \in \underline{\Lambda}_I$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην αναγωγή $M \to_{\beta^*} N$.

- $M = PQ \to P'Q = N$
  Τότε $P, Q \in \underline{\Lambda}_I$,
  $\Rightarrow^{EY} P' \in \underline{\Lambda}_I$, άρα $P'Q \in \underline{\Lambda}_I$.
- $M = PQ \to PQ' = N$ Ομοίως
- $M = \lambda x.P \ \to \ \lambda x.P' = N$
  Τότε $P \in \underline{\Lambda}_I$ και $x \in FV(P)$
  Από Ε.Υ. $P' \in \underline{\Lambda}_I$.
  Αν επιπλέον $x \in FV(P')$, θα έχουμε $\lambda x.P' \in \underline{\Lambda}_I$.
  Με επαγωγή στον P θα δείξουμε ότι πράγματι:

  Υπολήμμα 7.0.3. $x \in FV(P) \Rightarrow \ x \in FV(P')$

  Απόδειξη. Αν:

  - $P = R_1R_2 \to R_1'R_2 = P'$, τότε
    $FV(P) = FV(R_1) \cup FV(R_2) \subseteq^{EY} FV(R_1') \cup FV(R_2) = FV(P')$
  - $P = R_1R_2 \to R_1R_2' = P'$, ομοίως
  - $P = \lambda x.R \to \lambda x.R'$, τότε
    $FV(P) = FV(R) \setminus \{x\} \ \subseteq^{EY} \ FV(R') \setminus \{x\} = FV(P')$
  - $P = (\lambda^* x.Q)R \to Q[R/x] = P'$, τότε
    $FV(P) = FV(R) \cup (FV(Q) \setminus \{x\}) = FV(P')$, αφού $x \in FV(P)$.
  - $P = (\lambda^* x.Q)R \to \lambda^* x.Q)R' = P'$, τότε
    $$\begin{aligned} FV(P) &= (FV(Q) \setminus \{x\}) \cup FV(R) \\ &\subseteq^{EY} \ (FV(Q) \setminus \{x\}) \cup FV(R') \\ &= FV(P') \end{aligned}$$

- $P = (\lambda^* x.Q)R \to \lambda^* x.Q')R = P'$, τότε
  $FV(P) = (FV(Q) \setminus \{x\}) \cup FV(R)$
  $\subseteq^{EY} \ (FV(Q') \setminus \{x\}) \cup FV(R)$
  $= FV(P')$

- $M = (\lambda^* x.P)Q \ \to \ P[Q/x] = N$
  Τότε $P, Q \in \underline{\Lambda}_I$ και $x \in FV(P)$.
  Θα δείξουμε με επαγωγή στον P ότι $P[Q/x] \in \underline{\Lambda}_I$.

  - $P = x$ ή $P = y$ προφανές.
  - $P = \lambda y.R$, τότε $y \in FV(R)$ και από Ε.Υ. $R[Q/x] \in \underline{\Lambda}_I$
    και αφού $y \in FV(R[Q/x])$ έχουμε
    $\lambda y.R[Q/x] \in \underline{\Lambda}_I$
  - $P = (\lambda^* y.R_1)R_2$, τότε $y \in FV(R_1)$ και από Ε.Υ. $R_i[Q/x] \in \underline{\Lambda}_I$
    $\Rightarrow \ (\lambda^* y.R_1[Q/x])R_2[Q/x] \in \underline{\Lambda}_I$

Εδώ ολοκληρώνεται το πρώτο λήμμα, με το οποίο δείξαμε ότι το σύνολο $\underline{\Lambda}_I$ είναι κλειστό για την β^*- αναγωγή.

Λήμμα 7.0.25. Για κάθε $M \in \underline{\Lambda}_I : \ M \to_\beta N \ \Rightarrow \ \phi(M) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(N)$

Απόδειξη. Με επαγωγή στην αναγωγή $M \to_\beta N$.

- $M = PQ \to_\beta P'Q = N$
  Τότε $P \in \underline{\Lambda}_I$ και από Ε.Υ. $\phi(P) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(P')$
  Άρα $\phi(P)\phi(Q) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(P')\phi(Q)$,
  δηλαδή $\phi(M) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(N)$

- $M = PQ \to_\beta PQ' = N$. Ομοίως.

- $M = \lambda x.P \to_\beta \lambda x.P' = N$.
  Τότε $P \in \underline{\Lambda}_I$ και από Ε.Υ. $\phi(P) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(P')$
  Άρα $\lambda x.\phi(P) \twoheadrightarrow_\beta^+ \lambda x.\phi(P')$,
  δηλαδή $\phi(M) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(N)$

- $M = (\lambda x.P)Q \to_\beta P[Q/x] = N$.
  Τότε $\phi(M) = \phi((\lambda x.P)Q)$
  $= (\lambda x.\phi(P))\phi(Q)$
  $\to_\beta \ \phi(P)[\phi(Q)/x]$
  $= \phi(P[Q/x])$, από ιδιότητες του τελεστή ϕ.

- $M = (\underline{\lambda} x.P)Q \to_\beta (\underline{\lambda} x.P')Q = N$
  Εδώ έχουμε $\phi(M) = \phi(P)[\phi(Q)/x] \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(P')[\phi(Q)/x] = \phi(N)$,
  αφού από Ε.Υ. $\phi(P) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(P')$

- $M = (\underline{\lambda} x.P)Q \to_\beta (\underline{\lambda} x.P)Q' = N$
  Εδώ έχουμε $\phi(M) = \phi(P)[\phi(Q)/x]$ και $\phi(N) = \phi(P)[\phi(Q')/x]$.
  Είναι προφανές ότι $\phi(M) \twoheadrightarrow_\beta \phi(N)$.
  Για να εξασφαλίσουμε όμως ότι $\phi(M) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(N)$ πρέπει να δείξουμε ότι $x \in FV(\phi(P))$.
  Άρα χρειαζόμαστε το:

  Υπολήμμα 7.0.4. $FV(P) \subseteq FV(\phi(P))$

  Απόδειξη. Με επαγωγή στον P.

  - $P = \lambda x.Q$
    Τότε $$FV(P) = FV(Q) \setminus \{x\} \subseteq FV(\phi(Q)) \setminus \{x\} = FV(\lambda x.\phi(Q)) \\ = FV(\phi(P))$$

  - $P = (\underline{\lambda} x.Q)R$
    Τότε $$\begin{aligned} FV(P) &= (FV(Q) \setminus \{x\}) \cup FV(R) \\ &\subseteq (FV(\phi(Q)) \setminus \{x\}) \cup FV(\phi(R)) \\ &= FV(\phi(Q)[\phi(R)/x]) \\ &= FV(\phi(P)) \end{aligned}$$
  - $P = QR$
    Τότε $$\begin{aligned} FV(P) &= FV(Q) \cup FV(R) \subseteq \ FV(\phi(Q)) \cup FV(\phi(R)) \\ &= FV((\phi(Q))\phi(R)) \\ &= FV(\phi(P)) \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω λήμματα και την πρόταση 7.0.11 προκύπτει το:

Θεώρημα 7.0.3. Αν $M \in \Lambda_I$ και $M \to_\beta N$
τότε $M \in \infty_\beta \ \Rightarrow \ N \in \infty_\beta$.

Από το θεώρημα διατήρησης στον λI λογισμό, συμπεραίνουμε ότι στον λογισμό αυτόν όλα τα redexes και οι στρατηγικές είναι ατέρμονες.

Πόρισμα 7.0.6. Για κάθε $M \in \Lambda_I$:

- $M \in WN_\beta \Rightarrow M \in SN_\beta$
- $M \in WN_\beta$ και $N \subseteq M \ \ \Rightarrow \ N \in WN_\beta$

Απόδειξη. Για το πρώτο, αφού M ασθενώς κανονικοποιήσιμος έστω N κανονική μορφή του M. Έστω προς άτοπο ότι $M \in \infty_\beta$. Τότε από θεώρημα διατήρησης $N \in \infty_\beta$. Άτοπο. Άρα $M \in SN_\beta$.

Για το δεύτερο, λόγω του πρώτου έχουμε ότι $M \in SN_\beta$, άρα και για τον N ως υποόρο του M ισχύει $N \in SN_\beta$. Άρα $N \in WN_\beta$.
– –

Το θεώρημα διατήρησης στον λK λογισμό.

Το θεώρημα διατήρησης στον λK λογισμό αποδείχτηκε από τον Barendregt. Σύμφωνα με αυτό, αν συστείλουμε ένα I redex διατηρούμε την δυνατότητα άπειρης αναγωγής. Θα το αποδείξουμε με την ίδια μέθοδο με την οποία αποδείξαμε το αντίστοιχο θεώρημα για τον λI λογισμό. Θα χρησιμοποιήσουμε την ατέρμονη στρατηγική F_1^* και το σύνολο $S = \underline{\Lambda}^I$.

Ορισμός 7.0.31. Έστω το redex $(\lambda x.P)Q$. Αν $X \in FV(P)$ θα λέμε ότι έχουμε ένα I redex. Αλλιώς θα λέμε ότι έχουμε ένα K redex.
Στη δεύτερη περίπτωση θα συμβολίζουμε

- $\mathbf{K}PQ = (\lambda x.P)Q$
- $\underline{\mathbf{K}}PQ = (\underline{\lambda} x.P)Q$

Ορισμός 7.0.32. $\underline{\Lambda}^I = \{M \in \underline{\Lambda_K} : (\underline{\lambda} x.P)Q \subseteq M \;\Rightarrow\; x \in FV(P)\}$,
δηλαδή το $\underline{\Lambda}^I$ αποτελείται από τους υπογραμμισμένους όρους στους οποίους όλα τα υπογραμμισμένα redexes είναι $I-$ redexes.

Ορισμός 7.0.33. Ορίζουμε την στρατηγική $F_1^* : \infty_{\beta^*} \to \underline{\Lambda}_K$ με:

1. $F_1^*(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = x\mathbf{P}F_1^*(Q)\mathbf{R}, \;\; \mathbf{P} \in SN_{\beta^*},\; Q \notin SN_{\beta^*}$
2. $F_1^*(\lambda x.P) = \lambda x.F_1^*(P)$
3. $F_1^*((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = P[Q/x]\mathbf{R}, \quad$ αν $Q \in SN_{\beta^*}$
4. $F_1^*((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = (\lambda x.P)F_1^*(Q)\mathbf{R}, \quad$ αν $Q \notin SN_{\beta^*}$

Παρατηρούμε ότι η στρατηγική αυτή προκύπτει από την στρατηγική F_1 των Bergstra και Klop. Συγκεκριμένα για κάθε $M \in \infty_{\beta^*}$ έχουμε

$$|F_1^*(M)| = F_1^*(|M|)$$

Άρα εύκολα προκύπτει το παρακάτω λήμμα που διασφαλίζει ότι η F_1^* είναι ατέρμονη στρατηγική.

Λήμμα 7.0.26. $M \in \infty_{\beta^*} \;\Rightarrow\; F_1^*(M) \in \infty_{\beta^*}$

Απόδειξη. $\begin{aligned} M \in \infty_{\beta^*} &\Rightarrow |M| \in \infty_\beta \\ &\Rightarrow F_1(|M|) \in \infty_\beta \\ &\Rightarrow |F_1^*(M)| \in \infty_\beta \\ &\Rightarrow F_1^*(M) \in \infty_{\beta^*} \end{aligned}$
από ιδιότητες του τελεστή $|\cdot|$ και την παραπάνω παρατήρηση.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η F_1^* και τι $\underline{\Lambda}^I$ ικανοποιούν τις υποθέσεις της πρότασης 7.0.11.

Λήμμα 7.0.27. Για κάθε $M \in \underline{\Lambda}^I \cap \infty_{\beta^*}$: $F_1^*(M) \in \underline{\Lambda}^I$

Απόδειξη. Με επαγωγή στον υπογραμμισμένο όρο M.

- $M = x\mathbf{P}Q\mathbf{R}$ $\mathbf{P} \in SN_{\beta^*}$, $Q \notin SN_{\beta^*}$
  Τότε $P_i, Q, R_i \in \underline{\Lambda}^I$.
  Από Ε.Υ. $F_1^*(Q) \in \underline{\Lambda}^I$, άρα $x\mathbf{P}F_1^*(Q)\mathbf{R} \in \underline{\Lambda}^I$
  $\Rightarrow F_1^*(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) \in \underline{\Lambda}^I$

- $M = \lambda x.P$ Ομοίως.

- $M = PQ$ Ομοίως.

- $M = (\underline{\lambda} x.P)Q\mathbf{R}$ με $Q \notin SN_{\beta^*}$.
  Τότε $P, Q, \mathbf{R} \in \underline{\Lambda}^I$ και $x \in FV(P)$.
  Από Ε.Υ. $F_1^*(Q) \in \underline{\Lambda}^I$, άρα $(\underline{\lambda} x.P)F_1^*(Q) \in \underline{\Lambda}^I$
  $\Rightarrow F_1^*((\underline{\lambda} x.P)Q) \in \underline{\Lambda}^I$

- $M = (\underline{\lambda} x.P)Q$ με $Q \in SN_{\beta^*}$.
  Τότε $P, Q, \mathbf{R} \in \underline{\Lambda}^I$.
  Για να δείξουμε ότι $P[Q/x]\mathbf{R} \in \underline{\Lambda}^I$, χρειαζόμαστε μόνο το:

  Υπολήμμα 7.0.5. $P, Q \in \underline{\Lambda}^I \Rightarrow P[Q/x] \in \underline{\Lambda}^I$

  Απόδειξη. Με επαγωγή στον P.

  - $P = x$ ή y
  - $P = \lambda x.R$ Από Ε.Υ.
  - $P = R_1R_2$ Από Ε.Υ.
  - $P = (\underline{\lambda} y.R_1)R_2$
    Από Ε.Υ. $R_i[Q/x] \in \underline{\Lambda}^I$.
    Επιπλέον $y \in FV(R_1) \Rightarrow y \in FV(R_1[Q/x])$
    $\Rightarrow (\underline{\lambda} y.R_1[Q/x])R_2[Q/x] \in \underline{\Lambda}^I$
    $\Rightarrow P[Q/x] \in \underline{\Lambda}^I$

Λήμμα 7.0.28. Για κάθε $M \in \underline{\Lambda}^I$:
$M \to_\beta F_1^*(M) \Rightarrow \phi(M) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(F_1^*(M))$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στον M.

- $M = x\mathbf{P}Q\mathbf{R},\ \mathbf{P} \in SN_{\beta^*},\ Q \notin SN_{\beta^*}$
  Τότε από Ε.Υ. $\phi(Q) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(F_1^*(Q))$
  Τότε $\phi(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(x\mathbf{P}F_1^*(Q)\mathbf{R}) = \phi(F_1^*(M))$

- $M = \lambda x.P$ Ομοίως.

- $M = (\lambda x.P)Q\mathbf{R}$ με $Q \in SN_{\beta^*}$
  Τότε $\phi(M) = \phi((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = (\lambda x.\phi(P))\phi(Q)\phi(\mathbf{R})$
  $\rightarrow_\beta \phi(P)[\phi(Q)/x]\phi(\mathbf{R})$
  $= \phi(P[Q/x])\phi(\mathbf{R})$
  $= \phi(F_1^*(M))$

- $M = (\lambda x.P)Q\mathbf{R}$ με $Q \notin SN_{\beta^*}$
  Από επαγωγική υπόθεση στον Q.

- $M = (\underline{\lambda} x.P)Q\mathbf{R}$ με $Q \notin SN_{\beta^*}$
  Τότε $\phi(M) = \phi((\underline{\lambda} x.P)Q\mathbf{R})$
  $= \phi(P)[\phi(Q)/x]\phi(\mathbf{R})$
  $\twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(P)[\phi(F_1^*(Q))/x]\phi(\mathbf{R})$
  $= \phi(P[F_1^*(Q)/x])\phi(\mathbf{R})$
  $= \phi(P[F_1^*(Q)/x]\mathbf{R})$
  $= \phi((\underline{\lambda} x.P)F_1^*(Q)\mathbf{R})$
  $= \phi(F_1^*(M))$

  Το $\twoheadrightarrow_\beta^+$ στην τελευταία περίπτωση προκύπτει από την Ε.Υ., σε συνδυασμό με το $x \in FV(\phi(P))$ που οφείλεται στο:

  Υπολήμμα 7.0.6. Για κάθε $P \in \underline{\Lambda}^I :\ FV(P) \subseteq FV(F_1^*(P))$

  Απόδειξη. Ακριβώς όπως το αντίστοιχο υπολήμμα για το $\underline{\Lambda}_I$.

Θεώρημα 7.0.4. Αν $M \rightarrow_\beta N$ με συστολή ενός I-redex, τότε ισχύει:

$$M \in \infty_\beta \ \Rightarrow N \in \infty_\beta \tag{7.1}$$

Απόδειξη. Από τα παραπάνω λήμματα και την πρόταση 7.0.11.

Πόρισμα 7.0.7. Κάθε I-redex είναι ατέρμον.

_ _

Ατέρμονα K-redexes.

Στην παράγραφο αυτή θα χαρακτηρίσουμε τα ατέρμονα K-redexes. Για τον χαρακτηρισμό αυτόν, που απέδειξαν οι Bergstra και Klop, χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 7.0.34. $\underline{\Lambda}^K = \{M \in \underline{\Lambda}_K : (\underline{\lambda}x.P)Q \subseteq M \;\Rightarrow\; x \notin FV(P)\}$, δηλαδή το $\underline{\Lambda}^K$ αποτελείται από τους υπογραμμισμένους όρους στους οποίους όλα τα υπογραμμισμένα redexes είναι $K-$ redexes.

Ορισμός 7.0.35. Μια αντικατάσταση σ θα λέγεται ισχυρά κανονικοποιήσιμη για την β-αναγωγή (SN_β αντικατάσταση), αν για κάθε μεταβλητή x ισχύει $x\sigma \in SN_\beta$.
Επίσης για δυο όρους $P, Q \in \Lambda_K$, ορίζουμε τη διμελή σχέση
$P \geq^\beta_\infty Q \Leftrightarrow^{def}$ για κάθε σ SN_β αντικατάσταση

$$P\sigma \in \infty_\beta \Leftarrow Q\sigma \in \infty_\beta \tag{7.2}$$

Αντίστοιχα ορίζεται η SN_{β^*} αντικατάσταση και η σχέση $P \geq^{\beta*}_\infty Q$

Λήμμα 7.0.29. Για κάθε $P, Q \in \Lambda_K$: $P \geq^\beta_\infty Q \Leftrightarrow P \geq^{\beta*}_\infty Q$

Απόδειξη. Έστω $P \geq^{\beta*}_\infty Q$ και έστω SN_β αντικατάσταση σ με $Q\sigma \in \infty_\beta$
Τότε $Q\sigma \in \infty_{\beta^*}$
$\Rightarrow P\sigma \in \infty_{\beta^*}$
$\Rightarrow P\sigma \in \infty_\beta$ λόγω της ισχυρής κανονικοποίησης των developments.
Άρα $P \geq^\beta_\infty Q$.

Αντιστρόφως, έστω $P \geq^\beta_\infty Q$ και έστω SN_{β^*} αντικατάσταση με $Q\sigma \in \infty_{\beta^*}$
Τότε $Q|\sigma| \in \infty_\beta$ από λήμμα προβολής
$\Rightarrow P|\sigma| \in \infty_\beta$
$\Rightarrow P\sigma \in \infty_{\beta^*}$
Άρα $P \geq^{\beta^*}_\infty Q$.

Το θεώρημα που θα αποδείξουμε εξασφαλίζει ότι αν $P \geq^\beta_\infty Q$, τότε το redex $\mathbf{K}PQ$ είναι ατέρμον. Μια διαισθητική εξήγηση είναι η εξής.

Έστω ένας ατέρμων όρος M που περιέχει το $K-$ redex $\mathbf{K}PQ$.
Καθώς ο M είναι ατέρμων, έχει ένα άπειρο F_2- μονοπάτι.
Το $\mathbf{K}PQ$ ενδέχεται να βρίσκεται στο σώμα μιας λ-αφαίρεσης και έστω τότε $z_1, z_2, \ldots$ οι μεταβλητές που η F_2 επιλέγει να αντικαταστήσει προτού συστείλει κάποιο redex μέσα στο $\mathbf{K}PQ$ (ή το ίδιο το $\mathbf{K}PQ$). Δηλαδή έχουμε

$$
\begin{aligned}
M = C[(\lambda\overrightarrow{z}.D[\mathbf{K}PQ])\overrightarrow{R}] &\rightarrow^n_\beta C_1[(\lambda\overrightarrow{z}.D_1[\mathbf{K}PQ])\overrightarrow{R}']\\
&\twoheadrightarrow^+_\beta C_2[D_2[\mathbf{K}P[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]Q[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]]]
\end{aligned}
$$

1. Αν στη συνέχεια η F_2 συστείλει το $\mathbf{K}PQ$ είναι προφανές ότι αυτό θα μπορούσε να είχε γίνει από την αρχή χωρίς να χαθεί η perpetuality του όρου.

2. Αν συστείλει κάποιο redex μέσα στο $P[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]$, αυτό θα γίνει μόνο αν ο $P[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]$ είναι ατέρμων και τότε όλες οι συστολές θα γίνονται επ' άπειρο στον υποόρο αυτόν. Τότε το μονοπάτι θα είναι

$$
\begin{aligned}
M = C[(\lambda\overrightarrow{z}.D[\mathbf{K}PQ])\overrightarrow{R}] &\rightarrow^n_\beta C_1[(\lambda\overrightarrow{z}.D_1[\mathbf{K}PQ])\overrightarrow{R}']\\
&\twoheadrightarrow^+_\beta C_2[D_2[\mathbf{K}P[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]Q[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]]]\\
&\rightarrow C_2[D_2[\mathbf{K}P[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]^*Q[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]]]\\
&\rightarrow C_2[D_2[\mathbf{K}P[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]^{**}Q[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]]]\\
&\rightarrow \ldots
\end{aligned}
$$

αλλά τότε το $K-$ redex μας είναι ατέρμον, γιατί

$$
\begin{aligned}
C[(\lambda\overrightarrow{z}.D[\mathbf{K}PQ])\overrightarrow{R}] &\rightarrow C[(\lambda\overrightarrow{z}.D[P])\overrightarrow{R}]\\
&\rightarrow_n C_1[(\lambda\overrightarrow{z}.D_1[P])\overrightarrow{R}]\\
&\twoheadrightarrow^+_\beta C_2[D_2[P[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]^{**}]]\\
&\rightarrow \ldots
\end{aligned}
$$

3. Η μόνη περίπτωση που κινδυνεύει να χαθεί η perpetuality του όρου με συστολή του $\mathbf{K}PQ$ είναι αν η F_2 επιλέξει να συστείλει το $Q[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]$. Αυτό όμως, εξ ορισμού της F_2 θα συμβεί μόνο αν ο υποόρος $Q[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]$ είναι ατέρμων και ο $P[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}]$ δεν είναι.

   Για να αποκλείσουμε, λοιπόν, αυτήν την "κακή" περίπτωση αρκεί να απαιτήσουμε την συνεπαγωγή $P[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}] \in \infty_\beta \Leftarrow Q[\overrightarrow{R}/\overrightarrow{z}] \in \infty_\beta$.

   Και για να χαλαρώσουμε και αυτήν την απαίτηση, αρκεί να απαιτήσουμε να ισχύει η συνεπαγωγή αυτή για ισχυρά κανονικοποιήσιμα $R_1R_2\ldots$. (Γιατί αν το $\overrightarrow{R}$ έχει άπειρη αναγωγή, τότε προφανώς έχει άπειρη αναγωγή και ο $C[(\lambda\overrightarrow{z}.D[P])\overrightarrow{R}]$!)

   Επομένως αρκεί $P \geq^\infty_\beta Q$.

Τώρα θα αποδείξουμε τυπικά το θεώρημα. Για τον σκοπό αυτόν είναι απαραίτητοι μερικοί ακόμα ορισμοί.

Ορισμός 7.0.36. Έστω X ένα σύνολο μεταβλητών.

1. Μια $SN_{\beta*}$ αντικατάσταση σ λέγεται $X - neutral$, αν $x\sigma = x$, για κάθε $x \in X$.

2. Ο όρος M λέγεται $X - good$, αν για κάθε $\mathbf{K}AB \subseteq M$ και κάθε $X - neutral$ αντικατάσταση σ, ισχύει $A\sigma \in \infty_{\beta*} \Leftarrow B\sigma \in \infty_{\beta*}$.

3. Το σύνολο X σέβεται τον όρο J αν $FV(J) \subseteq X$ και $X \cap BV(J) = \emptyset$.

Παρατήρηση.

1. (Σχετικά με το $X - neutral$) Μια αντικατάσταση είναι $X - neutral$, αν δεν επηρεάζει καμιά μεταβλητή που ανήκει στο σύνολο X. Π.χ. η αντικατάσταση $[R_1/x][R_2/y]$ είναι $\{z\} - neutral$. Αυτή την έννοια θα την χρειαστούμε, γιατί όταν θα κάνουμε διερεύνηση του F_2- μονοπατιού του όρου M, θα γνωρίζουμε κάποιες μεταβλητές που δεν θα αντικατασταθούν ποτέ, είτε γιατί είναι ελεύθερες στον υποόρο στον οποίο δρα η F_2, είτε γιατί δεσμεύονται από ένα redex που δεν πρόκειται ποτέ να συστείλει η F_2. Άρα οι αντικαταστάσεις που θα εξετάσουμε μπορούν να είναι $neutral$ ως προς τις μεταβλητές αυτές.

2. (Σχετικά με το $X - good$) Όπως είδαμε και στα θεωρήματα διατήρησης που αποδείξαμε έως τώρα, η ουσία της μεθόδου είναι να βρούμε ένα άπειρο μονοπάτι β^*- αναγωγής $L_0, L_1, L_2 \ldots$ όπου $L_0 = C[(\underline{\lambda}x.P)Q]$ με την ιδιότητα
$L_i \to_\beta L_{i+1} \;\Rightarrow\; \phi(L_i) \twoheadrightarrow^+_\beta \phi(L_{i+1})$.

   Αν θελήσουμε να δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε i και κάθε U ατέρμονα υποόρο του L_i που περιέχει το $\underline{K}AB$ ισχύει $\phi(U) \twoheadrightarrow^+_\beta \phi(F_2^*(U))$, η μόνη περίπτωση που θα μας δημιουργήσει πρόβλημα είναι η

$$U = \underline{K}AB, \quad A \in SN_{\beta*},\; B \notin SN_{\beta*}, \tag{7.3}$$

   γιατί τότε $\phi(U) = \phi(F_2^*(U))$. Πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι αυτή η περίπτωση δεν υφίσταται. Οι υποθέσεις του θεωρήματος εξασφαλίζουν ρητώς ότι αυτή η περίπτωση δεν υπάρχει για τον L_0, δηλαδή όταν $A = P$ και $B = Q$, γιατί αυτό θα προσέκρουε στο $P \geq^\infty_\beta Q$. Πώς όμως θα το επεκτείνουμε αυτό και στους υπόλοιπους L_i;

   Οι Bergstra και Klop στην απόδειξή τους χρησιμοποιούν την έννοια του απογόνου, που διαισθητικά είναι εύκολα κατανοητή, αλλά ο ορισμός και η απόδειξη των ιδιοτήτων της είναι περίπλοκη. Στο πρόβλημά μας, οι υποόροι A, B είναι απόγονοι αντίστοιχα των υποόρων P και Q του L_0

και οι ιδιότητες του απογόνου εξασφαλίζουν ότι η περίπτωση 7.3 δεν υπάρχει.

Οι Sorensen κλπ, αποφεύγουν την έννοια του απογόνου. Αντί αυτής, βρίσκουν ένα (περίπλοκα οριζόμενο) σύνολο S που να αποκλείει στα μέλη του την περίπτωση 7.3 και αποδεικνύουν ότι όλοι οι L_i παραμένουν μέσα στο σύνολο αυτό. Εδώ είναι απαραίτητη η έννοια του $X-good$. Θέλουμε οι όροι που θα περιλαμβάνονται στο S να είναι '$good$,' δηλαδή για τα $\underline{K}AB$ που θα περιέχουν να ισχύει $A\sigma \in \infty_{\beta*} \Leftarrow B\sigma \in \infty_{\beta*}$. Βέβαια, όπως αναφέραμε και παραπάνω, αυτό δεν είναι απαραίτητο να ισχύει για όλες τις αντικαταστάσεις σ. Μπορούμε να απαλλάξουμε από τον έλεγχο αυτές που δεν θα αντικατασταθούν ποτέ από την F_2^* και που θα τις συλλέξουμε σε ένα σύνολο X. Αν λοιπόν η ζητούμενη συνεπαγωγή ισχύει στον τυχαίο όρο L για όλες τις αντικαταστάσεις που δεν απαλλάσσονται από τον έλεγχο, τότε ο L είναι $X-good$ και θα μπορεί να περιληφθεί στο σύνολο S (εφόσον βέβαια είναι ατέρμων και πληροί και κάποιες προϋποθέσεις σχετικά με τις μεταβλητές του).

3. (Σχετικά με το $respects$) Οι όροι $L_0, L_1, \ldots$ προκύπτουν από τον M με υπογράμμιση και β^*- αναγωγές. Επομένως είναι προφανές ότι $FV(L_i) \subseteq FV(M)$ και $FV(M) \cap BV(L_i) = \emptyset$, άρα

$$FV(M) \ \ respects \ L_i \tag{7.4}$$

Ορισμός 7.0.37. Επεκτείνουμε την F_2 σε $F_2^* \; : \; \infty_{\beta*} \; \to \; \underline{\Lambda}_K$

- $F_2^*(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = x\mathbf{P}F_2^*(Q)\mathbf{R}, \quad \mathbf{P} \in SN_{\beta*}, \; Q \notin SN_{\beta*}$
- $F_2^*(\lambda x.P) = \lambda x.F_2^*(P)$
- $F_2^*((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = P[Q/x]\mathbf{R}, \quad$ αν $P \in SN_{\beta^*}, \;\; Q \in SN_{\beta^*}$
- $F_2^*((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = (\lambda x.F_2^*(P))Q\mathbf{R}, \quad$ αν $P \notin SN_{\beta*}$
- $F_2^*((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = (\lambda x.P)F_2^*(Q)\mathbf{R}, \quad$ αν $P \in SN_{\beta*}, \;\; Q \notin SN_{\beta*}$

Λήμμα 7.0.30. Η F_2^* είναι ατέρμονη.

Απόδειξη. Προκύπτει όπως ακριβώς και για την F_1^*.

Στη συνέχεια πρέπει να δούμε ποιες δεσμευμένες μεταβλητές του M δεν θα αντικαταστήσει ποτέ η F_2^*.

Ορισμός 7.0.38. Για $M \in \infty_{\beta*}$ ορίζουμε το σύνολο μεταβλητών $V(M)$ επαγωγικά.

- $V(x\mathbf{P}Q\mathbf{R}) = V(Q)$, όπου $\mathbf{P} \in SN_{\beta*}$, $Q \notin SN_{\beta*}$
- $V(\lambda x.P) = \{x\} \cup V(P)$
- $V((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = \emptyset$, αν $P \in SN_{\beta*}$, $Q \in SN_{\beta*}$
- $V((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = \{x\} \cup V(P)$, αν $P \notin SN_{\beta*}$
- $V((\lambda x.P)Q\mathbf{R}) = V(Q)$, αν $P \in SN_{\beta*}$, $Q \notin SN_{\beta*}$

Παράδειγμα 7.0.4. Έστω ο όρος $M = \lambda y.((K(y))(yyy)\Omega)$.
Έχουμε $y <_\beta^\infty yyy$, π.χ. λόγω της αντικατάστασης $\sigma = [\omega/y]$. Ωστόσο η συστολή του $K-$redex διατηρεί την perpetuality, αφού $y \in V(M)$.

Ομοίως στον όρο $M = ((K(y))(yyy)\Omega)$. Εδώ η y δεν θα αντικατασταθεί ποτέ αφού είναι ελεύθερη στον M, άρα δεν μας ενοχλεί το ότι $y <_\beta^\infty yyy$.

Λήμμα 7.0.31. Για κάθε $M \in \infty_{\beta*}$: $V(M) \subseteq V(F_2^*(M))$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στον M.

Παρατήρηση. Γενικά δεν ισχύει $V(M) = V(F_2^*(M))$.
Π.χ. για $M = ((\lambda x.y)z)(\lambda v.\Omega)$ και $F_2^*(M) = (y)(\lambda v.\Omega)$
έχουμε $V(M) = \emptyset$, ενώ $V(F_2^*(M)) = \{v\}$.

Πλέον έχουμε σαφή εικόνα για το σύνολο που θα παίξει το ρόλο του S της πρότασης 7.0.11. Θα είναι το

$$S = \{J \in \underline{\Lambda}_K \cap \infty_{\beta*} |\ J\ is\ FV(M) \cup V(J)-good\ \&\ FV(M)\ respects\ J\}. \quad (7.5)$$

Πέπει όμως να αποδείξουμε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες *ii* και *iii* της πρότασης 7.0.11.

Λήμμα 7.0.32. Έστω $M \in \infty_{\beta^*} \cap \underline{\Lambda}_K$, τέτοιος ώστε να είναι $X \cup V(M) - good$ και το σύνολο X να σέβεται τον M. Τότε ο όρος $F_2^*(M)$ είναι $X \cup V(F_2^*(M)) - good$ και το X σέβεται τον $F_2^*(M)$.

Απόδειξη. Από τον εγκλεισμό $FV(M) \supseteq FV(M')$ για $M \to M'$ και από σύμβαση για τις δεσμευμένες μεταβλητές, είναι σαφές ότι το X σέβεται τον $F_2^*(M)$.

Για να δείξουμε ότι ο $F_2^*(M)$ είναι $X \cup V(F_2^*(M)) - good$ όταν ο M είναι $X \cup V(M) - good$, ακολουθούμε επαγωγή στον M. Θεωρούμε $\mathbf{K}AB \subseteq F_2^*(M)$ και σ μια SN_{β^*} αντικατάσταση που είναι $X \cup V(F_2^*(M)) - neutral$. Πρέπει να δείξουμε ότι $A\sigma \in \infty_{\beta^*} \Leftarrow B\sigma \in \infty_{\beta^*}$.

1. $M = x\mathbf{P}Q\mathbf{R}$, με $\mathbf{P} \in SN_{\beta^*}, Q \notin SN_{\beta^*}$. Τότε $F_2^*(M) = x\mathbf{P}F_2^*(Q)\mathbf{R}$. Εδώ πρέπει να διακρίνουμε 2 περιπτώσεις ανάλογα με το που βρίσκεται το redex $\mathbf{K}AB$.

   (α′) $\mathbf{K}AB \subseteq P_i$ ή $\mathbf{K}AB \subseteq R_i$. Επειδή $V(M) \subseteq V(F_2^*(M))$ η αντικατάσταση σ είναι $X \cup V(M) - neutral$. Και επειδή ο M είναι $X \cup V(M) - good$, έχουμε τη ζητούμενη συνεπαγωγή $A\sigma \in \infty_{\beta^*} \Leftarrow B\sigma \in \infty_{\beta^*}$.

   (β′) $\mathbf{K}AB \subseteq F_2^*(Q)$.
   Έχουμε $V(M) = V(Q)$ και ο Q ως υποόρος του M είναι $X \cup V(M) - good$
   $\Rightarrow$ ο Q είναι $X \cup V(Q) - good$
   $\Rightarrow^{EY}$ ο $F_2^*(Q)$ είναι $X \cup V(F_2^*(Q)) - good$
   $\Rightarrow$ ο $F_2^*(Q)$ είναι $X \cup V(F_2^*(M)) - good$
   αφού $V(F_2^*(M)) = V(F_2^*(Q))$.
   Άρα πάλι έχουμε $A\sigma \in \infty_{\beta^*} \Leftarrow B\sigma \in \infty_{\beta^*}$.

2. $M = \lambda x.P$. Τότε $F_2^*(M) = \lambda x.F_2^*(P)$.
   Επίσης έχουμε τις ισότητες $V(M) = \{x\} \cup V(P)$ και
   $V(F_2^*(M)) = \{x\} \cup V(F_2^*(P))$.
   Ως υποόρος του M, ο P είναι $X \cup V(M) - good$
   $\Rightarrow P = X \cup \{x\} \cup V(P) - good$
   Εφαρμόζοντας την Ε.Υ. για τον P με $X' = X \cup \{x\}$ έχουμε
   $F_2^*(P) = X \cup \{x\} \cup V(F_2^*(P)) - good$
   $\Rightarrow$ $F_2^*(P) = X \cup V(F_2^*(M)) - good$ και επειδή η σ είναι $X \cup V(F_2^*(M)) - neutral$, έχουμε το ζητούμενο.

3. $M = (\lambda^* x.P)Q\mathbf{R}$.

   (α′) Αν $P \in \infty_{\beta *}$, τότε $F_2^*(M) = (\lambda^* x.F_2^*(P))Q\mathbf{R}$.
   Αν το $\mathbf{K}AB$ είναι υποόρος του Q ή του R_i, άρα υπήρχε και στον M αυτούσιο, το συμπέρασμα προκύπτει όπως και στην περίπτωση 1.1.
   Αν είναι υποόρος του $F_2^*(P)$, τότε το συμπέρασμα προκύπτει όπως και στην περίπτωση 2.
   Τέλος, αν είναι ο ίδιος ο $F_2^*(M)$, τότε το συμπέρασμα προκύπτει τετριμμένα από την perpetuality του P.

   (β′) Αν $P \in SN_{\beta^*}, Q \notin SN_{\beta^*}$.
   Εδώ η μόνη ενδιαφέρουσα υποπερίπτωση είναι όταν το $\mathbf{K}AB$ είναι ο ίδιος ο $F_2^*(M)$, πράγμα που τώρα είναι αδύνατον, αφού ο M είναι $X \cup V(M) - good$, άρα δεν μπορώ να έχω $Al \notin \infty_{\beta *}$ και $Bl \notin \infty_{\beta *}$ (όπου l η ταυτοτική αντικατάσταση.)

(γ′) Αν $P, Q \in SN_{\beta^*}$, τότε $F_2^*(M) = P[Q/x]\mathbf{R}$.
Πάλι, αν $\mathbf{K}AB$ υποόρος του R_i ή του P ή του Q, τότε εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση 1.1.
Αλλιώς $\mathbf{K}AB = \mathbf{K}I[Q/x]J[Q/x]$, όπου $\mathbf{K}AB \subseteq P$. Επειδή η σ είναι $FV(Q)-neutral$, έχουμε ότι $\mathbf{K}A\sigma B\sigma = \mathbf{K}I\sigma' J\sigma'$, όπου $\sigma' = \sigma + \{Q/x\}$
Επιπλέον, από $V(M) \subseteq V(F_2^*(M)$ έχουμε ότι η σ είναι $X \cup V(M) - neutral$.
Όμως $x \notin V(M)$ και $x \in BV(M)$, άρα $x \notin X$.
Άρα και η σ' είναι $X \cup V(M) - neutral$.
Και επειδή ο M είναι $X \cup V(M) - neutral$, έχουμε την συνεπαγωγή
$I\sigma' \in \infty_{\beta*} \Leftarrow J\sigma' \in \infty_{\beta*}$
Άρα $A\sigma \in \infty_{\beta*} \Leftarrow B\sigma \in \infty_{\beta*}$

Λήμμα 7.0.33. Έστω $M \in \infty_{\beta^*} \cap \underline{\Lambda}_K$, τέτοιος ώστε να είναι $X \cup V(M) - good$ και το σύνολο X να σέβεται τον M. Τότε ισχύει η συνεπαγωγή:

$$M \to_\beta F_2^*(M) \;\Rightarrow\; \phi(M) \twoheadrightarrow_\beta^+ \phi(F_2^*(M)) \tag{7.6}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στον M.

Θεώρημα 7.0.5. (Διατήρηση των $K-$redexes)
Έστω $M = C[\mathbf{K}PQ]$ και $N = C[P]$ όπου $P \geq_\beta^\infty Q$. Τότε
$M \in \infty_\beta \;\Rightarrow\; N \in \infty_\beta$.

Απόδειξη. Από πρόταση 7.0.11 με:
$F = F_2^*$ και
$S = \{J \in \underline{\Lambda}_K \cap \infty_{\beta*} |\ J\ is\ FV(M) \cup V(J) - good\ \&\ FV(M)\ respects\ J\}$.

Πόρισμα 7.0.8. Αν $P \geq_\beta^\infty Q$ τότε το redex $\mathbf{K}PQ$ είναι ατέρμον.

Πόρισμα 7.0.9. Αν $P \in \infty_\beta$ ή $Q \in SN_\beta$ & $FV(Q) = \emptyset$, τότε το redex $\mathbf{K}PQ$ είναι ατέρμον.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι και στις 2 περιπτώσεις ισχύει η συνθήκη $P \geq_\beta^\infty Q$. Άρα $\mathbf{K}PQ$ ατέρμον.

Πόρισμα 7.0.10. Το redex $(\lambda x.P)Q$ είναι ατέρμον αν για κάθε σ $SN_\beta-$ αντικατάσταση ισχύει η συνεπαγωγή
$P\sigma[Q\sigma/x] \in \infty_\beta \;\Leftarrow\; Q\sigma \in \infty_\beta$

Απόδειξη. Αν το redex αυτό είναι $I-$ redex, τότε από από θεώρημα διατήρησης των $I-$redexes είναι ατέρμον. Αν είναι K-redex, τότε η συνθήκη είναι ισοδύναμη με την συνεπαγωγή $P\sigma \in \infty_\beta \;\Leftarrow\; Q\sigma \in \infty_\beta$. Άρα πάλι το redex είναι ατέρμον.

Τώρα θα αποδείξουμε το αντίστροφο του θεωρήματος 7.0.5, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι τα redexes που περιγράφονται στο 7.0.5 είναι τα μοναδικά perpetual.

Πρόταση 7.0.12. Έστω ότι $\mathbf{K}PQ$ perpetual redex, δηλαδή για κάθε C, $C[\mathbf{K}PQ] \in \infty_\beta \;\Rightarrow\; C[P] \in \infty_\beta$.
Τότε $P \geq^\beta_\infty Q$.

Απόδειξη. Έστω μια SN αντικατάσταση $[\mathbf{R}/\mathbf{x}]$ τέτοια ώστε $Q[\mathbf{R}/\mathbf{x}] \in \infty_\beta$.
Θέτουμε $C = (\lambda \mathbf{x}.[\;\;])\mathbf{R}$
Εύκολα επαληθεύουμε ότι ο όρος $C[\mathbf{K}PQ]$ είναι ατέρμων, άρα από υπόθεση και ο $C[P]$ είναι ατέρμων,
δηλαδή $(\lambda \mathbf{x}.P)\mathbf{R} \in \infty_\beta$.
Επειδή $\mathbf{R} \in SN_\beta$, το F_1-μονοπάτι του $C[P]$ θα περάσει από τον όρο $P[\mathbf{R}/\mathbf{x}]$ και από perpetuality της F_1, θα έχουμε ότι $P[\mathbf{R}/\mathbf{x}] \in \infty_\beta$.

Όπως προαναφέραμε, ένα maximal redex είναι και perpetual. Τώρα θα δώσουμε έναν χαρακτηρισμό για τα maximal redexes.

Πρόταση 7.0.13. Έστω redex Δ με contractum Δ'.
Τότε Δ *maximal* $\Leftrightarrow\; \Delta' \in \infty_\beta$.

Απόδειξη.

- Για το αντίστροφο, έστω $C[\Delta] \in (n)_\beta$. Έχουμε $\Delta' \in \infty_\beta$, άρα και $\Delta' \in (n-1)_\beta$.
- Για το ευθές, θα αποδειξουμε το αντιθετοαντίστροφο, δηλαδή $\Delta' \in SN_\beta \;\Rightarrow\; \Delta \neq maximal$.

  Όπως δείξαμε στο πρώτο κεφάλαιο χρησιμοποιώντας την FB, αφού $\Delta' \in SN_\beta$, έχουμε $l_\beta(\Delta') < \infty$.
  Υπάρχει, λοιπόν, φυσικός m τέτοιος ώστε $\Delta' \in (m-1)_\beta$ και $\Delta' \notin (m)_\beta$.
  Τότε $\Delta \in (m)_\beta$.
  Αν πάρουμε $C = (\lambda x.\lambda y.yxx)[\;\;]$, τότε αν δεν ξεκινήσουμε με συστολή του Δ έχουμε
  $$C[\Delta] \to \lambda y.y\Delta\Delta \twoheadrightarrow^{2m} \lambda y.y.QQ, \tag{7.7}$$
  άρα $C[\Delta] \in (2m+1)_\beta$.

Αν όμως συστείλουμε πρώτα το Δ, τότε κάθε αναγωγή θα έχει τη μορφή

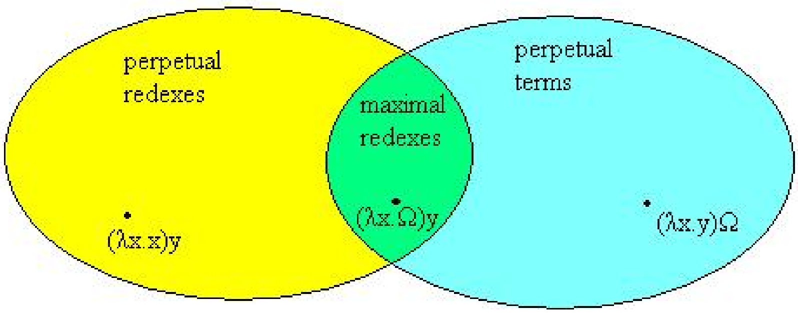
$$C[\Delta'] \twoheadrightarrow^{k} C[Q'] \rightarrow \lambda y.yQ'Q' \twoheadrightarrow^{2l} \lambda y.yQ''Q'', \tag{7.8}$$

όπου $k + l \leq m - 1$ (αφού $\Delta' \notin (m)_\beta$) και $l < m$.
Άρα $k + 1 + 2l < 2m$ και έτσι $C[\Delta'] \notin (2m)_\beta$.
Αποδείχτηκε, λοιπόν, με αυτό το context, ότι το Δ δεν είναι maximal.

Παρατήρηση. Για τα perpetual και τα maximal redexes έχουμε συγκεντρώσει τις εξής πληροφορίες.

- Υπάρχουν redexes που είναι perpetual αλλά όχι maximal, π.χ. το $(\lambda x.x)y$.
- Υπάρχει redex που ως όρος είναι ατέρμων αλλά το contractum του δεν είναι ατέρμον, άρα το ίδιο ως redex δεν είναι perpetual. Π.χ. το $(\lambda x.y)\Omega$.
- Έστω redex Δ με contractum Δ'.
  Όπως έχουμε αποδείξει, αν Δ maximal, τότε είναι και perpetual. Επιπλέον, από την τελευταία πρόταση $\Delta' \in \infty_\beta$.
  Άρα και $\Delta \in \infty_\beta$.
  Τελικά, τα maximal redexes βρίσκονται στην τομή του ∞_β με το σύνολο των perpetual redexes.
- Τα maximal redexes καταλαμβάνουν ολόκληρη την τομή του ∞_β με το σύνολο των perpetual redexes.
  Γιατί έστω Δ στην τομή αυτή. $\Delta \in \infty_\beta$, αλλά επειδή είναι perpetual, θα ε΄χουμε και $\Delta' \in \infty_\beta$.
  Άρα από την τελευταία πρόταση Δ maximal.

Άρα έχουμε την εικόνα που φαίνεται στο σχήμα.



– –

Το θεώρημα της κανονικοποίησης.

Με την ίδια μέθοδο μπορούμε να δείξουμε το θεώρημα της κανονικοποίησης (normalization theorem).

Θεώρημα 7.0.6. (Κανονικοποίησης). Για κάθε κανονικοποιήσιμο όρο M η αριστερότερη αναγωγή του τερματίζει.

Αρκεί να δείξουμε το αντιθετοαντίστροφο, δηλαδή το:

Θεώρημα 7.0.7. Αν $M \in \infty_l$ και $M \to_\beta N$, τότε $N \in \infty_l$.

Απόδειξη.

- Ορίζουμε την στρατηγική F_l^* που συστέλλει πάντα το αριστερότερο redex ενός αρτέρμονος όρου. Η αναγωγή $\to_{\underline{l}}$ ορίζεται ανάλογα με την $\to_{\underline{\beta}}$.
- Με $M = C[(\lambda x.P)Q]$ και $N = C[P[Q/x]]$, θέτουμε $L_0 = C[(\underline{\lambda} x.P)Q]$.
- Επειδή $|F_l^*(U)| = F_l(|U|)$ και $M \in \infty_l$, έχουμε $L_0 \in \infty_{l^*}$.
  Υπάρχει λοιπόν μια άπειρη αναγωγή $L_0 \to_{l^*} L_1 \to_{l^*} L_2 \to_{l^*} \cdots$
- Ανάλογα με τις προηγούμενες παραγράφους έχουμε:
  - Αν $L_i \to_{\underline{l}} L_{i+1}$, τότε $\phi(L_i) = \phi(L_{i+1})$.
  - Αν $L_i \to_l L_{i+1}$, τότε $\phi(L_i) \twoheadrightarrow \phi(L_{i+1})$
    (και μάλιστα $\phi(L_i) \to_l \phi(L_{i+1})$)

  Από το θεώρημα τερματισμού των developments έχουμε ότι για άπειρα i, $L_i \to_l L_{i+1}$, άρα υπάρχει μια ατέρμονη αριστερότερη αναγωγή από τον $\phi(L_0)$, δηλαδή από τον N.

Ανάλογα αποδεικνύεται και το:

Θεώρημα 7.0.8. (Κανονικοποίηση της σχεδόν αριστερότερης αναγωγής) Αν $M \in WN_\beta$ και $M \to M_1 \to M_2 \to \cdots$ σχεδόν αριστερότερη αναγωγή, τότε η αναγωγή αυτή τερματίζει.

μέσω του

Θεώρημα 7.0.9. Αν ο M έχει μια ατέρμονη σχεδόν αριστερότερη αναγωγή και $M \to_\beta N$, τότε και ο N έχει μια σχεδόν αριστερότερη αναγωγή.

Απόδειξη. Παρόμοια. Εδώ στην αναγωγή $L_0 \to L_1 \to \cdots$ έχουμε ότι:

- Αν $L_i \to_{\underline{\beta}} L_{i+1}$, τότε $\phi(L_i) = \phi(L_{i+1})$.

- Αν $L_i \to_\beta L_{i+1}$, τότε είτε $\phi(L_i) = \phi(L_{i+1})$ είτε $\phi(L_i) \twoheadrightarrow_\beta \phi(L_{i+1})$.
- Αν $L_i \to_{\underline{l}} L_{i+1}$, τότε $\phi(L_i) = \phi(L_{i+1})$.
- Αν $L_i \to_l L_{i+1}$, τότε $\phi(L_i) \twoheadrightarrow \phi(L_{i+1})$
(και μάλιστα $\phi(L_i) \to_l \phi(L_{i+1})$)

Για κάθε j, υπάρχει $i > j$ τέτοιος ώστε $L_i \to_{\underline{l}} L_{i+1}$ ή $L_i \to_l L_{i+1}$ και από θεώρημα τερματισμού των developments έχουμε ότι για άπειρα i, $\phi(L_i) \to_l \phi(L_{i+1})$. Άρα έχουμε μια ατέρμονη σχεδόν αριστερότερη αναγωγή από τον $\phi(L_0)$, δηλαδή από τον N.

Κεφάλαιο 8

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗΣ

Στα 1980 οι Barendegt, Coppo και Dezani-Ciancaglini εισήγαγαν τα συστήματα τυποποίησης με τομή (BCD-systems).Ένα από αυτά είναι το σύστημα D το οποίο αποδείχτηκε ότι τυποποιεί όλους τους ισχυρά κανονικοποιήσιμους όρους και μόνο αυτούς. Δηλαδή:

Θεώρημα 8.0.10. $M \in SN_\beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash_D M$, για κάποιο περιβάλλον Γ.

Υπάρχουν αρκετές διαφορετικές αποδείξεις στη βιβλιογραφία, π.χ. Krivine, <<LC,types et modèles,1990>>

Τα σημαντικά θεωρήματα που παρουσιάσαμε έως τώρα στην εργασία αυτή (θ. Sorensen, διατήρηση των I-redexes, διατήρηση K-redexes,) έχουν τη μορφή:
<<Αν .... και $M \to_R N$ και $M \in \infty_R$, τότε $N \in \infty_R$. >>
Οι αποδείξεις που παρουσιάσαμε χρησιμοποίησαν ατέρμονες στρατηγικές.

Τα αντιστροφοαντίθετα αυτών των θεωρημάτων έχουν την μορφή:
<<Αν .... και $M \to_R N$ και $N \in SN_R$, τότε $M \in SN_R$. >>

Επομένως μπορούν να αποδειχτούν με τη μέθοδο της τυποποίησης, δηλαδή μέσω του:
<<Αν .... και $M \to_R N$ και N τυποποιείται στο D, τότε M τυπο-

ποιείται στο $D >>$.

Με τη μέθοδο αυτή αποδεικνύονται στο [3] το θεώρημα διατήρησης των I-redexes και το θεώρημα του Sorensen.

Πρώτα παρουσιάζουμε συνοπτικά το σύστημα D και κάποιες βασικές ιδιότητές του.

Ορισμός 8.0.39. Το σύστημα τυποποίησης D ορίζεται από τους παρακάτω κανόνες τυποποίησης. (Αντί για το $\Gamma \vdash_D M : \sigma$ θα γράφουμε $\Gamma \vdash M : \sigma$.)

1. Για x μεταβλητή, $\Gamma, x : \sigma \vdash \ x : \sigma$.
2. $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau \Rightarrow \ \Gamma \vdash \ \lambda x.M : \sigma \to \tau \ \ (\to -intro)$
3. $\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau$ και $\Gamma \vdash N : \sigma \Rightarrow \ \Gamma \vdash MN : \tau \ \ (\to -el)$
4. $\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau \Rightarrow \ \Gamma \vdash M : \sigma$ και $\Gamma \vdash M : \tau \ \ (\wedge - el)$
5. $\Gamma \vdash M : \sigma$ και $\Gamma \vdash M : \tau \ \Rightarrow \Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau \ \ (\wedge - intro)$

Λήμμα 8.0.34. (εξασθένισης) Αν $\Gamma \vdash M : \sigma$ και $x \notin \Gamma$, τότε $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$.

Λήμμα 8.0.35. (ενοποίησης των contexts) Αν $\Gamma_0 \vdash M : \sigma$ και $\Gamma_1 \vdash : N : \tau$, τότε υπάρχει Γ context τέτοιο ώστε $\Gamma \vdash M : \sigma$ και $\Gamma \vdash : N : \tau$.

Απόδειξη. Αν μια μεταβλητή x δηλώνεται μόνο σε ένα από τα Γ_0, Γ_1 και ο τύπος που της αποδίδεται είναι ο ρ, τότε στο Γ περιλαμβάνουμε την δήλωση $x : \rho$. Αν η x δηλώνεται στο Γ_0 με τύπο ρ και στο Γ_1 με τύπο ϕ, τότε στο Γ περιλαμβάνουμε την δήλωση $x : \rho \wedge \phi$.

Με επαγωγή στην τυποποίηση $\Gamma_0 \vdash M : \sigma$ μπορούμε να δείξουμε ότι $\Gamma \vdash M : \sigma$ και με επαγωγή στην τυποποίηση $\Gamma_1 \vdash N : \tau$ μπορούμε να δείξουμε ότι $\Gamma \vdash N : \tau$.

Το Γ που προκύπτει με τον τρόπο αυτόν θα το συμβολίζουμε με $\Gamma_0 \wedge \Gamma_1$.

Ορισμός 8.0.40. Ένας τύπος θα λέγεται πρώτος, αν δεν είναι τομή τύπων, άρα όταν είναι είτε μεταβλητή τύπου είτε τύπος συνεπαγωγής.
Αν $\sigma = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$, τότε οι σ_i λέγονται πρώτοι παράγοντες του τύπου σ.

Λήμμα 8.0.36. (generation lemma-GL) Έστω $\Gamma \vdash M : \sigma$, όπου σ πρώτος. Τότε

1. Αν $M = x$, τότε στο Γ περιλαμβάνεται η δήλωση $x : \sigma'$, όπου σ είναι πρώτος παράγοντας του σ'.

2. Αν $M = \lambda x.N$, τότε $\sigma = \tau \to \rho$ και $\Gamma, x : \tau \vdash N : \rho$.

3. Αν $M = NP$, τότε για κάποιον τύπο τ, $\Gamma \vdash P : \tau$ και $\Gamma \vdash N : \tau \to \sigma'$, όπου σ είναι πρώτος παράγοντας του σ'.

Απόδειξη. Στο δέντρο της τυποποίησης του M επιλέγουμε τον ψηλότερο κόμβο $\Gamma \vdash M : \sigma'$, όπου σ πρώτος παράγοντας του σ'. Αυτός ο κόμβος δεν μπορεί να έχει παραχθεί από τους κανόνες 4 και 5, άρα μένουν μόνο οι κανόνες 1,2,3 και η αντιστοίχιση είναι προφανής.

Πρόταση 8.0.14. Έστω $x_1, \ldots, x_k$ μεταβλητές που δεν είναι δηλωμένες στο Γ και για κάθε i, $x_i \in FV(M)$.
Αν $x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \tau$ και $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i$,
τότε $\Gamma \vdash M[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \tau$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην τυποποίηση $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \cdots, x_k : \sigma_k \vdash M : \tau$.
Π.χ. αν ο τελευταίος κανόνας που χρησιμοποιήθηκε στην τυποποίηση αυτή ήταν ο 3, τότε $M = PQ$ και για κάποιον τύπο ϕ έχουμε
$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \cdots, x_k : \sigma_k \vdash P : \phi \to \tau$ και $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \cdots, x_k : \sigma_k \vdash Q : \phi$.

Από Ε.Υ. $\Gamma \vdash P[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \phi \to \tau$
και $\Gamma \vdash Q[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \phi$,
άρα με εφαρμογή πάλι του κανόνα 3 έχουμε $\Gamma \vdash (PQ)[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \tau$,
δηλαδή $\Gamma \vdash M[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \tau$.

Διατήρηση των I-redexes

Πρόταση 8.0.15. Έστω ότι οι μεταβλητές $x_1, \ldots, x_k$ δεν δηλώνονται στο Γ και έστω $\Gamma \vdash M[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \tau$.

1. Αν οι $N_1, \ldots, N_k$ τυποποιήσιμοι στο Γ τότε υπάρχουν τύποι $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ τέτοιοι ώστε $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i$ και $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \tau$.

2. Αν $x_i \in FV(M)$, τότε N_i τυποποιήσιμος στο context Γ.

Απόδειξη. Με διπλή επαγωγή στο $< ||M||, ||\tau|| >$.

Αν $\tau = \tau' \wedge \tau''$, τότε $\Gamma \vdash M[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \tau'$ και $\Gamma \vdash M[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \tau''$.
Από Ε.Υ. $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i'$ και $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i''$ και
$\Gamma, x_i : \sigma_i' \vdash M : \tau'$ και $\Gamma, x_i : \sigma_i'' \vdash M : \tau''$.

Με $\sigma = \sigma' \wedge \sigma''$ έχουμε
$\Gamma \vdash N_i : \sigma_i$ και $\Gamma, x_i : \sigma_i \vdash M : \tau$.
Επίσης, από Ε.Υ. για τον τ', έχουμε ότι αν $x_i \in FV(M)$, τότε N_i τυποποιήσιμος στο Γ.
Μένει λοιπόν να αποδείξουμε την πρόταση για την περίπτωση που ο τ είναι πρώτος τύπος.

- $M = x_i$. Τότε $M[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] = N_i$, άρα από υπόθεση $\Gamma \vdash N_i : \tau$.
  Τότε μπορούμε να επιλέξουμε $\sigma_i = \tau$ και για $j \neq i$, οποιοδήποτε σ_j που αποδίδει το Γ στο N_j (από υπόθεση υπάρχει ένας τέτοιος σ_j).
  Με αυτά τα $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ έχουμε τα επιθυμητά $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i$ και
  $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \tau$.
  Επιπλέον, αν $x \in FV(M)$, τότε $x = x_i$, οπότε η πρόταση 2 ισχύει, αφού N_i τυποποιήσιμος στο Γ.

- $M = x \neq x_1, x_2, \ldots, x_k$. Τότε $M[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] = M$.
  Άρα $\Gamma \vdash M : \tau$.
  Πάλι παίρνοντας για σ_i οποιονδήποτε τύπο του N_i στο Γ έχουμε από εξασθένιση $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \tau$.
  Η πρόταση 2 ισχύει τετριμμένα, καθώς για κάθε i, $x_i \notin FV(M)$.

- $M = \lambda y.P$.
  Τότε $\Gamma \vdash \lambda y.P[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \tau$, όπου τ πρώτος.
  Από G.L. $\tau = \rho \to \phi$ και $\Gamma, y : \rho \vdash P[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \phi$.
  Από Ε.Υ. υπάρχουν σ_i τέτοια ώστε $\Gamma, y : \rho \vdash N_i : \sigma_i$ και
  $\Gamma, y : \rho, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash P : \phi$.

  Επειδή $y \notin FV(N_i)$ έχουμε $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i$ και $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash \lambda y.P : \rho \to \phi$, δηλαδή $\Gamma, x_i : \sigma_i \vdash M : \tau$.

  Επιπλέον, αν $x_i \in FV(M)$, τότε $x_i \in FV(P)$ και $x_i \neq y$.

  Η Ε.Υ. στο $\Gamma, y : \rho \vdash P[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k]$ δίνει
  $\Gamma, y : \rho \vdash N_i : \sigma_i$, για κάποιον τύπο σ_i
  και επειδή $y \notin FV(N_i)$ έχουμε $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i$.

- $M = PQ$. Τότε
  $\Gamma \vdash Q[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \rho$ και $\Gamma \vdash P[N_1/x_1, \ldots, N_k : x_k] : \rho \to \tau'$,
  όπου τ' πρώτος παράγοντας του τ.

  Από Ε.Υ. υπάρχουν σ_i', σ_i'' τέτοια ώστε
  $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i'$ και $\Gamma, x_1 : \sigma_1', \ldots, x_k : \sigma_k' \vdash Q : \rho$
  $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i''$ και $\Gamma, x_1 : \sigma_1'', \ldots, x_k : \sigma_k'' \vdash P : \rho \to \tau'$

  Θέτουμε $\sigma_i = \sigma_i' \wedge \sigma_i''$.
  Τότε $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i$ και $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash PQ : \tau'$
  και με τον κανόνα $(\wedge - intro)$ $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash PQ : \tau$.

  Επιπλέον, για $x \in FV(M)$ είτε $x \in FV(P)$ είτε $x \in FV(Q)$.
  Σε κάθε περίπτωση από Ε.Υ. N_i τυποποιήσιμος στο Γ.

Θεώρημα 8.0.11. Αν $M \to_{\beta_I} N$ και $\Gamma \vdash N : \sigma$, τότε $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $< ||M||, ||\sigma|| >$.
(Θεωρούμε ότι σ πρώτος τύπος. Αλλιώς $\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2$.
Τότε $\Gamma \vdash N : \sigma_1$ και $\Gamma \vdash N : \sigma_2$.
Από Ε.Υ. $\Gamma \vdash M : \sigma_1$ και $\Gamma \vdash M : \sigma_2$
$\Rightarrow \; \Gamma \vdash M : \sigma_1 \wedge \sigma_2$
$\Rightarrow \Gamma \vdash M : \sigma$)

- $M = \lambda x.P \to \lambda x.P' = N$.
  Από G.L. $\sigma = \rho \to \tau$ και $\Gamma, x : \rho \vdash P' : \tau$.
  Από Ε.Υ. $\Gamma, x : \rho \vdash P : \tau$
  $\Rightarrow \; \Gamma \vdash \lambda x.P : \rho \to \tau$
  $\Rightarrow \Gamma \vdash M : \sigma$.
- $M = PQ \to P'Q = N$. Πάλι με χρήση του G.L. και της Ε.Υ.
- $M = PQ \to PQ' = N$. Ομοίως.
- $M = (\lambda x.W)Q \to W[Q/x] = N$.
  Έχουμε λοιπόν $\Gamma \vdash W[Q/x] : \sigma$ και $x \in FV(W)$.
  Αρα από πρόταση 8.0.15 έχουμε $\Gamma \vdash Q : \tau$ και $\Gamma, x : \tau \vdash W : \sigma$
  $\Rightarrow \Gamma \vdash Q : \tau$ και $\Gamma \vdash \lambda x.W : \tau \to \sigma$
  $\Rightarrow \Gamma \vdash (\lambda x.W)Q : \sigma$
  $\Rightarrow \Gamma \vdash M : \sigma$.

Πόρισμα 8.0.11. Τα $I - redexes$ είναι perpetual.

Θεώρημα του Sorensen

Για να δείξουμε το θεώρημα του Sorensen με χρήση της ταύτισης του SN_β με το σύνολο των $D-$ τυποποιήσιμων όρων, αρκεί να δείξουμε το:

Θεώρημα 8.0.12. $M \in \Lambda_\Omega \;\Rightarrow\; M$ τυποποιήσιμος στο D.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $< ||M||_\omega, ||M|| >$.

- $M = x$. Προφανές.
- $M = \lambda x.N$.
  Επειδή $M \in \Lambda_\Omega$, έχουμε $N \in \Lambda_\Omega$, άρα από Ε.Υ. $\Gamma' \vdash N : \sigma$.
  - Αν x δηλώνεται στο Γ', τότε $\Gamma, x : \tau \vdash N : \sigma$
    $\Rightarrow\; \Gamma \vdash \lambda x.N : \tau \to \sigma$.
  - Αν x δεν δηλώνεται στο Γ', τότε με εξασθένιση $\Gamma', x : \tau \vdash N : \sigma$
    $\Rightarrow\; \Gamma' \vdash \lambda x.N : \tau \to \sigma$.
- $M = (\lambda x.P)QM_1 \ldots M_k$.

  Από το λήμμα 4.0.10 ($||P[Q/x]||_\omega = ||P||_\omega + ||P||_x||Q||_\omega$) προκύπτουν εύκολα τα παρακάτω λήμματα.

  Λήμμα 8.0.37. Αν $||P||_x \leq 1$, τότε $||P[Q/x]||_\omega \leq ||(\lambda x.P)Q||_\omega$

  Λήμμα 8.0.38. Αν $||P||_x > 1$ και $||Q||_\omega = 0$,
  τότε $||P[Q/x]||_\omega < ||(\lambda x.P)Q||_\omega$

  Έτσι σε κάθε περίπτωση ισχύει για τον $P[Q/x]M_1 \cdots M_k$ η επαγωγική υπόθεση (για την πρώτη περίπτωση πρέπει επιπλέον να παρατηρήσουμε ότι $||P[Q/x]|| < ||(\lambda x.P)Q||$).

  Επομένως από Ε.Υ. $\Gamma' \vdash P[Q/x]M_1 \cdots M_k : \sigma'$.
  Με k διαδοχικές εφαρμογές του $G.L.$ έχουμε
  $\Gamma' \vdash P[Q/x] : \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_k \to \sigma$ και $\Gamma' \vdash M_i : \sigma_i$. $(*)$

  Από την άλλη η Ε.Υ. ισχύει για τον Q, άρα $\Gamma'' \vdash Q : \rho$. $(**)$

  Με $\Gamma = \Gamma' \wedge \Gamma''$ έχουμε από (*) και (**) ότι:
  $\Gamma \vdash P[Q/x] : \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_k \to \sigma$ και $\Gamma \vdash M_i : \sigma_i$ και Q τυποποιήσιμος στο Γ.

  Αυτό λόγω της πρότασης 8.0.15 δίνει ότι υπάρχει τύπος τ τέτοιος ώστε $\Gamma, x : \tau \vdash P : \sigma_1 \to \cdots \to \sigma_k \to \sigma$ και $\Gamma \vdash Q : \tau$

$\Rightarrow \Gamma \vdash \lambda x.P : \tau \to \sigma_1 \to \cdots \to \sigma_k \to \sigma$ και $\Gamma \vdash Q : \tau$
$\Rightarrow \ \Gamma \vdash (\lambda x.P)Q : \sigma_1 \to \cdots \to \sigma_k \to \sigma$
$\Rightarrow \ \Gamma \vdash (\lambda x.P)QM_1 \cdots M_n : \sigma.$

Πόρισμα 8.0.12. $M \in \infty_\beta \ \Rightarrow \ M \notin \Lambda_\Omega.$

Βιβλιογραφία

1. F.van Raamsdonk, P.Severi, M.H.Sørensen and H.Xi. Perpetual Reductions in $\lambda-$Calculus. Information and Computation 149, pp. 173-225 (1999).

2. J.A.Bergstra and J.W.Klop Strong normalization and perpetual reductions in $\lambda-$calculus. J.Inform. Process. Cybernet. 18, 403-417. (1982)

3. G.Koletsos. Intersection types and termination properties. Fundamenta Informaticae XX (2010) 1-18.

4. J.Krivine. $\lambda-$calculus. Types and models (1990)