ΑΛΓΕΒΡΕΣ ΤΕΛΕΣΤΩΝ
ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Διπλωματική Εργασία

Αλέξανδρος Μπατσής

Επιβλέπων: Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2016

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η σχέση των αλγεβρών τελεστών με την εργοδική θεωρία είναι γνωστή από την εποχή του von Neumann. Δημιουργήθηκε η θεωρία των crossed products η οποία είχε εφαρμογές στην ταξινόμηση των factors. Το crossed product είναι μια άλγεβρα von Neumann που ορίζεται για μια δοσμένη δράση μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας σε μια άλγεβρα von Neumann. Μπορεί να δει κανείς την κατασκευή του crossed product ως έναν τρόπο να κωδικοποιηθεί η δομή ενός δυναμικού συστήματος σε μια άλγεβρα von Neumann. Ένα παράδειγμα των Hoare και Parry [11] έδειξε ότι υπάρχουν δύο μη συζυγή τοπολογικά δυναμικά συστήματα με ισόμορφα crossed products. Το 1967 δημοσιεύθηκε μια εργασία του W. Arveson στην οποία κατασκεύασε για κάθε εργοδικό αυτομορφισμό του $[0, 1]$ μια μη αυτοσυζυγή άλγεβρα τελεστών και έδειξε ότι δύο τέτοιοι αυτομορφισμοί είναι συζυγείς αν και μόνο αν οι αντίστοιχες άλγεβρες είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες. Το 1969 οι W. Arveson και K. Josephson εφάρμοσαν αυτή τη θεωρία σε μια συγκεκριμένη κλάση τοπολογικών δυναμικών συστημάτων χωρίς περιοδικά σημεία που επιδέχονται αναλλοίωτα μέτρα πιθανότητας. Για κάθε τέτοιο σύστημα κατασκευάστηκε μία μη αυτοσυζυγής άλγεβρα τελεστών και δείχθηκε ότι δύο τοπολογικά συστήματα αυτού του τύπου είναι συζυγή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες άλγεβρες είναι ισόμορφες. Από αυτές τις ιδέες προέκυψε αργότερα η θεωρία των semi-crossed products και αποδείχθηκαν θεωρήματα που βελτίωσαν σημαντικά τα αποτελέσματα στα οποία αναφερθήκαμε παραπάνω (δείτε [12]). Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε ακριβώς με αυτά τα πρώτα αποτελέσματα των W. Arveson και K. Josephson.

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενα

1.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Ορισμός 1.1.1. *Έστω μεταθετική C^*-άλγεβρα A. Μία μη μηδενική πολλαπλασιαστική γραμμική απεικόνιση $h : A \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται χαρακτήρας της A. Το σύνολο των χαρακτήρων της A συμβολίζεται με $\Omega(A)$. Το $\Omega(A)$ θα θεωρείται εφοδιασμένο με την weak* σχετική τοπολογία που κληρονομεί ως υποσύνολο του δυϊκού χώρου Banach της A.*

Παρατήρηση 1.1.2. *Το παραπάνω έχει νόημα επειδή προκύπτει ότι αν $h \in \Omega(A)$ τότε το h είναι φραγμένο. Μάλιστα κάθε $h \in \Omega(A)$ είναι ένας *-ομομορφισμός νόρμας 1.*

Λήμμα 1.1.3. *Έστω μεταθετική C^*-άλγεβρα A. Το $\Omega(A)$ είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff. Ο $\Omega(A)$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν η A έχει μονάδα.*

Θεώρημα 1.1.4. *(Gelfand) Έστω μεταθετική C^*-άλγεβρα A. Η σχέση*

$$F(a)(h) = h(a) \qquad (a, h) \in A \times \Omega(A)$$

*ορίζει απεικόνιση $F : A \longrightarrow C_0(\Omega(A))$ η οποία είναι *-ισομορφισμός επί της $C_0(\Omega(A))$.*

Η απεικόνιση F του παραπάνω θεωρήματος λέγεται απεικόνιση του Gelfand και συνήθως, αν δεν δημιουργείται σύγχυση, για $a \in A$ το $F(a)$ συμβολίζεται απλά με $\widehat{a}$.

Πρόταση 1.1.5. *Έστω C^*-άλγεβρες A, B και *-ομομορφισμός $\phi : A \longrightarrow B$. Ισχύει ότι $\forall a \in A : ||\phi(a)|| \leq ||a||$ ενώ αν ο ϕ είναι ένα προς ένα ισχύει ότι $\forall a \in A : ||\phi(a)|| = ||a||$*

Ορισμός 1.1.6. *Μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ C^*-αλγεβρών λέγεται θετική αν απεικονίζει θετικά στοιχεία σε θετικά στοιχεία.*

Πρόταση 1.1.7. *Έστω C^*-άλγεβρα A με μονάδα και γραμμικό συναρτησοειδές $\rho : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Το ρ είναι θετικό αν και μόνο αν $\rho(1) = ||\rho||$.*

Ορισμός 1.1.8. *Ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές νόρμας 1 λέγεται state.*

Πρόταση 1.1.9. *Έστω A μη μηδενική C^*-άλγεβρα και a φυσιολογικό στοιχείο της A. Υπάρχει state $\rho : A \longrightarrow \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $|\rho(a)| = ||a||$.*

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $\langle \cdot, \cdot \rangle_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_2$ τα εσωτερικά τους γινόμενα αντίστοιχα. Αν συμβολίσουμε με $\otimes'$ το τανυστικό γινόμενο διανυσματικών χώρων τότε θέτοντας

$$\left\langle \xi_1 \otimes' \xi_2, h_1 \otimes' h_2 \right\rangle = \langle \xi_1, h_1 \rangle_1 \langle \xi_2, h_2 \rangle_2$$

και επεκτείνοντας γραμμικά ορίζεται εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον $H_1 \otimes' H_2$. Η πλήρωση του $(H_1 \otimes' H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ λέγεται τανυστικό γινόμενο των χώρων Hilbert H_1, H_2 και συμβολίζεται με $H_1 \otimes H_2$. Αν $(A_1, A_2) \in B(H_1) \times B(H_2)$ τότε με $A_1 \otimes A_2$ συμβολίζεται ο μοναδικός τελεστής στην $B(H_1 \otimes H_2)$ που ικανοποιεί την σχέση

$$(A_1 \otimes A_2)(\xi_1 \otimes \xi_2) = A_1(\xi_1) \otimes A_2(\xi_2) \qquad (\xi_1, \xi_2) \in H_1 \times H_2.$$

Σημειώνουμε ότι αν $(H_i)_{i \in I}$ είναι είναι μια οικογένεια χώρων Hilbert τότε το

$$\left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} H_i : \sum_{i \in I} ||x_i||^2 < \infty \right\}$$

είναι χώρος Hilbert ο οποίος ονομάζεται ευθύ άθροισμα της οικογένειας $(H_i)_{i \in I}$ και συμβολίζεται με $\oplus_{i \in I} H_i$.

Ορισμός 1.1.10. *Έστω C^*-άλγεβρα A. Ένα ζεύγος (H, ϕ) λέγεται αναπαράσταση της C^*-άλγεβρας A αν το ϕ είναι $*$-ομομορφισμός από την A στην $B(H)$. Η αναπαράσταση (H, ϕ) λέγεται faithful αν ο ϕ είναι ένα προς ένα.*

Ορισμός 1.1.11. *Έστω C^*-άλγεβρα A. Έστω $(H_i, \phi_i)_{i \in I}$ οικογένεια από αναπαραστάσεις της A. Ευθύ άθροισμα της οικογένειας $(H_i, \phi_i)_{i \in I}$ λέγεται η αναπαράσταση $(\oplus_{i \in I} H_i, \phi)$ όπου $\phi : A \longrightarrow B(\oplus_{i \in I} H_i)$ με $\phi(T)((x_i)_{i \in I}) = (\phi_i(T)(x_i))_{i \in I}$ για κάθε $T \in A$ και $(x_i)_{i \in I} \in \oplus_{i \in I} H_i$.*

Για C^*-άλγεβρα A και θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $\rho : A \longrightarrow \mathbb{C}$ θα συμβολίζουμε με N_ρ το σύνολο $\{x \in A : \rho(x^* x) = 0\}$.

Πρόταση 1.1.12. *Έστω C^*-άλγεβρα A και θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $\rho : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Τότε το N_ρ είναι κλειστό αριστερό ιδεώδες της A ενώ η σχέση*

$$\langle a + N_\rho, b + N_\rho \rangle = \rho(b^* a) \qquad a, b \in A$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον χώρο A/N_ρ.

Στο πλαίσιο της παραπάνω πρότασης η πλήρωση του χώρου A/N_ρ ως προς το εσωτερικό γινόμενο που του δόθηκε θα συμβολίζεται ως H_ρ. Να σημειώσουμε ακόμη ότι όταν δεν δημιουργείται σύγχυση και είναι σαφές σε ποιο ρ αναφερόμαστε το $a+N_\rho$ θα συμβολίζεται απλά με $[a]$.

Πρόταση 1.1.13. *Έστω C^*-άλγεβρα A και θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $\rho : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Η σχέση*

$$\phi_\rho(a)(b+N_\rho) = ab + N_\rho \qquad a, b \in A$$

ορίζει $*$-ομομορφισμό $\phi_\rho : A \longrightarrow B(H_\rho)$.

Ορισμός 1.1.14. *Έστω C^*-άλγεβρα A και θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $\rho : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Η αναπαράσταση (H_ρ, ϕ_ρ) λέγεται GNS αναπαράσταση που επάγει το ρ.*

Θεώρημα 1.1.15. *GNS: Έστω C^*-άλγεβρα A. Το ευθύ άθροισμα της οικογένειας αναπαραστάσεων $(H_i, \phi_i)_{i\in I}$, όπου I το σύνολο των states της A, είναι faithful αναπαράσταση.*

Ορισμός 1.1.16. *Έστω C^*-άλγεβρα A. Ένα αύξων δίκτυο $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ από θετικά στοιχεία της A λέγεται προσεγγιστική μονάδα αν $\forall\lambda \in \Lambda : ||a_\lambda|| \leq 1$ και $\forall b \in A : \lim_\lambda a_\lambda b = b$ το οποίο είναι ισοδύναμο με $\forall b \in A : \lim_\lambda b a_\lambda = b$.*

Πρόταση 1.1.17. *Κάθε C^*-άλγεβρα A επιδέχεται προσεγγιστική μονάδα.*

Ορισμός 1.1.18. *Έστω H χώρος Hilbert και A μία C^*-υπάλγεβρα της $B(H)$. Το $\xi \in H$ λέγεται κυκλικό ως προς την A αν το span$\{T\xi \in H : T \in A\}$ είναι πυκνό στον H.*

Πρόταση 1.1.19. *Έστω C^*-άλγεβρα A και θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $\rho : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Αν το δίκτυο $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα της A τότε το δίκτυο $(a_\lambda+N_\rho)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στον H_ρ σε ένα κυκλικό (ως προς την A) διάνυσμα ξ_ρ το οποίο δεν εξαρτάται από την επιλογή του $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.*

Ορισμός 1.1.20. *Έστω C^*-άλγεβρα A και θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $\rho : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Το ξ_ρ που περιγράφεται στην παραπάνω πρόταση λέγεται το κανονικό κυκλικό διάνυσμα που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση (H_ρ, ϕ_ρ).*

Ορισμός 1.1.21. *Έστω H χώρος Hilbert και X συμπαγής χώρος Hausdorff. Μία απεικόνιση E από το σύνολο των Borel συνόλων του X στο σύνολο των προβολών της $B(H)$ λέγεται φασματικό μέτρο του (X, H) αν ισχύουν τα παρακάτω*

i) $E(\emptyset) = 0$ *και* $E(X) = I$

ii) *Αν A, B Borel σύνολα του X τότε $E(A \cap B) = E(A)E(B)$*

iii) Αν $x, y \in H$ τότε η απεικόνιση $A \mapsto \langle E(A)x, y\rangle$ είναι κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel στον X.

Θεώρημα 1.1.22. *Έστω H χώρος Hilbert, X συμπαγής χώρος Hausdorff και $\phi : C(X) \longrightarrow B(H)$ ένας $*$-ομομορφισμός που σέβεται τη μονάδα. Τότε υπάρχει μοναδικό φασματικό μέτρο E του (X, H) τέτοιο ώστε*

$$\langle \phi(f)x, y\rangle = \int_X f dE_{x,y} \qquad \forall (f, x, y) \in C(X) \times H \times H$$

όπου $E_{x,y}$ το μιγαδικό μέτρο Borel $A \mapsto \langle E(A)x, y\rangle$ στον X.

Αν Ω μετρήσιμος χώρος τότε το σύνολο των μετρήσιμων φραγμένων μιγαδικών συναρτήσεων που ορίζονται στον Ω θα συμβολίζεται με $B_\infty(\Omega)$.

Θεώρημα 1.1.23. *Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε υπάρχει μοναδικό φασματικό μέτρο του $(\sigma(T), H)$ τέτοιο ώστε*

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{\sigma(T)} z dE_{x,y}(z) \qquad \forall x, y \in H$$

όπου $E_{x,y}$ το μιγαδικό μέτρο Borel $A \mapsto \langle E(A)x, y\rangle$ στον $\sigma(T)$.

Ορισμός 1.1.24. *Στο πλαίσιο του παραπάνω θεωρήματος ορίζεται ο $*$-ομομορφισμός $F : B_\infty(\sigma(T)) \longrightarrow B(H)$ που ικανοποιεί την*

$$\langle F(f)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f dE_{x,y} \qquad \forall (f, x, y) \in B_\infty(\sigma(T)) \times H \times H$$

Η απεικόνιση F ονομάζεται Borel συναρτησιακός λογισμός στον T ενώ για $f \in B_\infty(\sigma(T))$ το $F(f)$ συμβολίζεται με $f(T)$.

Θεώρημα 1.1.25. *Έστω H χώρος Hilbert, $T \in B(H)$ φυσιολογικός τελεστής, $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχής και $f \in B_\infty(\sigma(T))$. Τότε $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.*

Ορισμός 1.1.26. *Έστω H χώρος Hilbert και A υπάλγεβρα της $B(H)$. Θα λέμε ότι η A έχει τετριμμένο πυρήνα αν $\{x \in H | \forall M \in A : Mx = 0\} = \{0\}$.*

Λήμμα 1.1.27. *Το σύνολο των unitary στοιχείων μιας C^*-άλγεβρας με μονάδα την παράγει ως διανυσματικό χώρο.*

Πρόταση 1.1.28. *Έστω $*$-ομομορφισμός $\phi : A \longrightarrow B$ όπου A, B είναι C^*-άλγεβρες. Τότε το $\phi(A)$ είναι C^*-υπάλγεβρα της B.*

Λήμμα 1.1.29. *Έστω A, B μεταθετικές C^*-άλγεβρες και $h : A \longrightarrow B$ ομομορφισμός τέτοια ώστε η B να είναι η C^*-άλγεβρα που παράγει το $h(A)$. Αν $\tau \in \Omega(B)$ τότε $\tau \circ h \in \Omega(A)$.*

Απόδειξη. Η $\tau \circ h$ είναι προφανώς μια πολλαπλασιαστική γραμμική απεικόνιση οπότε αρκεί να δείξουμε ότι είναι μη μηδενική. Υποθέτουμε έτσι, στοχεύοντας σε άτοπο, ότι $\tau \circ h = 0$. Το σύνολο

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} h(x_i) + h(y_i)^* \in B : n \in \mathbb{N} \text{ και } x_i, y_i \in A \text{ για } i \in \{1, ..., n\} \right\}$$

είναι πυκνό ενώ αν $n \in \mathbb{N}$ και $x_i, y_i \in A$ για $i \in \{1, ..., n\}$ τότε

$$\tau \left(\sum_{i=1}^{n} h(x_i) + h(y_i)^* \right) = \sum_{i=1}^{n} \tau(h(x_i)) + \tau(h(y_i)^*) = \sum_{i=1}^{n} \tau \circ h(x_i) + \overline{\tau \circ h(y_i)} = 0$$

άρα $\tau = 0$ το οποίο είναι άτοπο από $\tau \in \Omega(B)$. □

Λήμμα 1.1.30. *Έστω A, B μεταθετικές C^*-άλγεβρες και $h : A \longrightarrow B$ ομομορφισμός. Τότε ο h είναι $*$-ομομορφισμός.*

Απόδειξη. Μπορώ να υποθέσω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η B είναι η C^*-άλγεβρα που παράγει το $h(A)$. Έστω $g : \Omega(B) \longrightarrow \Omega(A)$ με $g(\tau) = \tau \circ h$. Η g είναι καλά ορισμένη από το λήμμα 1.1.29. Για $a \in A$ και $\tau \in \Omega(B)$ ισχύει ότι

$$(\widehat{a} \circ g)(\tau) = \widehat{a}(g(\tau)) = \widehat{a}(\tau \circ h) = \tau \circ h(a) = \tau(h(a)) = \widehat{h(a)}(\tau)$$

δηλαδή ισχύει ότι $\widehat{a} \circ g = \widehat{h(a)}$ για κάθε $a \in A$. Έτσι τελικά αν $a \in A$ έχουμε ότι

$$\widehat{h(a^*)} = \widehat{a^*} \circ g = \overline{\widehat{a}} \circ g = \overline{\widehat{a} \circ g} = \overline{\widehat{h(a)}} = \widehat{h(a)^*} \Rightarrow h(a^*) = h(a)^*$$

□

Ορισμός 1.1.31. *Μία Banach άλγεβρα με μονάδα λέγεται ημιαπλή αν η τομή των μεγιστικών αριστερών ιδεωδών της είναι το $\{0\}$.*

Λήμμα 1.1.32. *Μία Banach άλγεβρα A με μονάδα είναι ημιαπλή αν και μόνο αν $\forall a \in A \backslash \{0\} : \exists b \in A : \sigma(ba) \neq \{0\}$.*

Λήμμα 1.1.33. *Έστω A μεταθετική Banach άλγεβρα με μονάδα, B ημιαπλή Banach άλγεβρα με μονάδα και $\phi : A \longrightarrow B$ ομομορφισμός που σέβεται τη μονάδα. Τότε ο ϕ είναι φραγμένος.*

1.2 Τοπολογίες στην $B(H)$

Για τα παρακάτω σταθεροποιούμε έναν χώρο Hilbert H.

Ορισμός 1.2.1. *Η τοπολογία που έχει ως βάση την οικογένεια των συνόλων της μορφής*

$$\left\{ B \in B(H) : \sum_{i=1}^{n} ||(A-B)x_i|| < \varepsilon \right\}$$

όπου $A \in B(H)$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ και $x_i \in H$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, λέγεται strong operator topology. Αν $S \subseteq B(H)$ η κλειστή θήκη του S ως προς την strong operator topology θα συμβολίζεται με $\overline{S}^{SOT}$.

Πρόταση 1.2.2. *Αν $A_\lambda \in B(H)$ δίκτυο και $A \in B(H)$ τότε $A_\lambda \xrightarrow{SOT} A$ αν και μόνο αν $\forall x \in H : \lim_\lambda A_\lambda x = Ax$.*

Ορισμός 1.2.3. *Η τοπολογία που έχει ως βάση την οικογένεια των συνόλων της μορφής*

$$\left\{ B \in B(H) : \left| \sum_{i=1}^{n} \langle (A-B)x_i, y_i \rangle \right| < \varepsilon \right\}$$

όπου $A \in B(H)$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ και $x_i, y_i \in H$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, λέγεται weak operator topology. Αν $S \subseteq B(H)$ η κλειστή θήκη του S ως προς την weak operator topology θα συμβολίζεται με $\overline{S}^{WOT}$.

Πρόταση 1.2.4. *Αν $A_\lambda \in B(H)$ δίκτυο και $A \in B(H)$ τότε $A_\lambda \xrightarrow{WOT} A$ αν και μόνο αν $\forall x, y \in H : \lim_\lambda \langle A_\lambda x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle$.*

Ορισμός 1.2.5. *Η τοπολογία που έχει ως βάση την οικογένεια των συνόλων της μορφής*

$$\left\{ B \in B(H) : \left| \sum_{i=1}^{\infty} \langle (A-B)x_i, y_i \rangle \right| < \varepsilon \right\}$$

όπου $A \in B(H)$, $\varepsilon > 0$ και $x_i, y_i \in H$ για κάθε $i \in \{1, ...\}$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||^2 < \infty$ και $\sum_{i=1}^{\infty} ||y_i||^2 < \infty$, λέγεται ultraweak τοπολογία. Αν $S \subseteq B(H)$ η κλειστή θήκη του S ως προς την ultraweak τοπολογία θα συμβολίζεται με $\overline{S}^{u.w.}$.

Παρατήρηση 1.2.6. *Έστω $B_*(H)$ η norm κλειστή θήκη του συνόλου*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} w_{x_i, y_i} \in B(H)^* : n \in \mathbb{N} \text{ και } x_i, y_i \in H \text{ για } i \in \{1, ..., n\} \right\}$$

όπου $w_{x,y} : B(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ με $w_{x,y}(T) = \langle Tx, y \rangle$ για $x, y \in H$. Ο χώρος $B_*(H)$ ονομάζεται προδυϊκός. Η ultraweak τοπολογία λέγεται και weak και είναι η ασθενέστερη τοπολογία για την οποία κάθε στοιχείο του $B_*(H)$ είναι συνεχής.*

Πρόταση 1.2.7. *Ο πολλαπλασιασμός επί σταθερό τελεστή είναι συνεχής ως προς τις παραπάνω τοπολογίες.*

Πρόταση 1.2.8. *Ο πολλαπλασιασμός τελεστών είναι συνεχής στις μπάλες ως προς την strong operator topology.*

Πρόταση 1.2.9. *Αν $A_\lambda \in B(H)$ δίκτυο και $A \in B(B)$ τέτοια ώστε $||A_\lambda|| \leq 1$ και $A_\lambda \xrightarrow{SOT} A$ τότε $A_\lambda \xrightarrow{u.w.} A$.*

Πρόταση 1.2.10. *Το σύνολο των συνεχών, ως προς την strong operator topology, συναρτησοειδών από την $B(H)$ στο $\mathbb{C}$ είναι το ίδιο με το αντίστοιχο σύνολο για την weak operator topology και είναι το σύνολο των συναρτησοειδών της μορφής*

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} \langle Ax_i, y_i \rangle$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $x_i, y_i \in H$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$.

Από την πρόταση αυτή και τα διαχωριστικά θεωρήματα Hahn-Banach εύκολα προκύπτει το παρακάτω.

Πρόταση 1.2.11. *Αν $S \subseteq B(H)$ κυρτό τότε $\overline{S}^{WOT} = \overline{S}^{SOT}$.*

Ορισμός 1.2.12. *Μία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $B(H)$ λέγεται von Neumann άλγεβρα αν περιέχει τη μονάδα και είναι WOT-κλειστή.*

Ορισμός 1.2.13. *Αν $S \subseteq B(H)$ τότε ο μεταθέτης του S, ο οποίος συμβολίζεται με S', ορίζεται να είναι το σύνολο $S' = \{A \in B(H) | \forall B \in S : AB = BA\}$. Το $(S')'$ συμβολίζεται με S''.*

Πρόταση 1.2.14. *Έστω $A \subseteq B \subseteq B(H)$ τότε ισχύουν τα εξής*

i) *Το A' είναι μία WOT κλειστή υπάλγεβρα της $B(H)$ που περιέχει τη μονάδα*

ii) $(A'')' = A'$

iii) $A \subseteq A''$

iv) $A'' \subseteq B''$

Θεώρημα 1.2.15. *(Διπλού μεταθέτη) Αν A είναι μια αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $B(H)$ με τετριμμένο πυρήνα τότε $A'' = \overline{A}^{WOT} = \overline{A}^{SOT} = \overline{A}^{u.w.}$.*

Θεώρημα 1.2.16. *(Kaplansky) Αν A είναι μια C^* υπάλγεβρα της $B(H)$ με τετριμμένο πυρήνα τότε για κάθε $i \in \{1, 2, 3\}$ ισχύει ότι το $B_1 \cap M_i$ είναι SOT-πυκνό στο $B_2 \cap M_i$ όπου* *i)* $B_1 = \{T \in A : ||T|| \leq 1\}$, $B_2 = \{T \in A'' : ||T|| \leq 1\}$ *και* $M_1 = B(H)$

ii) $M_2 = \{T \in B(H) :$ *Ο* T *είναι αυτοσυζυγής.*$\}$

iii) $M_3 = \{T \in B(H) :$ *Ο* T *είναι θετκός.*$\}$

Λήμμα 1.2.17. *Έστω* H *χώρος Hilbert,* P *προβολή στην* $B(H)$ *και* $A \in B(H)$. *Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

i) $PA = AP$

ii) $A(P(H)) \subseteq P(H)$ *και* $A(P(H)^{\perp}) \subseteq P(H)^{\perp}$

iii) $A(P(H)) \subseteq P(H)$ *και* $A^*(P(H)) \subseteq P(H)$

Απόδειξη. i)⇒ii): Έστω $h \in P(H)^{\perp}$ τότε για κάθε $x \in H$ ισχύει $Px \in P(H) \Rightarrow A^*Px \in P(H)$ οπότε έχουμε $\forall x \in H : \langle Ah, Px\rangle = \langle h, A^*Px\rangle = 0 \Rightarrow Ah \in E(H)^{\perp}$. Δείξαμε επομένως ότι $A(E(H)^{\perp}) \subseteq E(H)^{\perp}$.

ii)⇒iii): Για κάθε $\xi \in H$ έχουμε ότι $AP\xi \in P(H)$ και $AP\restriction_{P(H)^{\perp}} \xi \in P(H)^{\perp}$ οπότε

$$PA\xi = PA(P\xi + P\restriction_{P(H)^{\perp}} \xi) = PAP\xi + PAP\restriction_{P(H)^{\perp}} \xi = AP\xi$$
$$AP\xi = AP(P\xi + P\restriction_{P(H)^{\perp}} \xi) = AP\xi + APP\restriction_{P(H)^{\perp}} \xi = AP\xi$$

άρα $PA = AP$.

iii)⇒i): Από $PA = AP \Rightarrow A^*P = PA^*$ παίρνουμε ότι $A(P(H)) = AP(H) = PA(H) \subseteq P(H)$ και $A^*(P(H)) = A^*P(H) = PA^*(H) \subseteq P(H)$. □

Λήμμα 1.2.18. *Έστω χώρος Hilbert* H *και* $A \in B(H)$ *τότε* $P_{\overline{A(H)}} \in \{A\}''$.

Απόδειξη. Έστω τυχόν $T \in B(H)$ τέτοιο ώστε $AT = TA$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $P = P_{\overline{A(H)}}$ μετατίθεται με τον T. Πράγματι για κάθε $\xi \in H$ ισχύει $TA\xi = AT\xi \in A(H)$ οπότε από $P(H) = \overline{A(H)}$ έχουμε $T(P(H)) \subseteq P(H)$. Ακόμη αν $h \in P(H)^{\perp}$ τότε $\forall x \in H : \langle Th, Ax\rangle = \langle h, T^*Ax\rangle = \langle h, AT^*x\rangle = 0$ όποτε πάλι από $\overline{A(H)} = P(H)$ έχουμε ότι $T(P(H)^{\perp}) \subseteq P(H)^{\perp}$. Έτσι το ζητούμενο προκύπτει από το λήμμα 1.2.17. □

Ορισμός 1.2.19. *Το* $V \in B(H)$ *θα λέγεται μερική ισομετρία αν* $VV^*V = V$.

Ορισμός 1.2.20. *Έστω* A *μία* C^**-υπάλγεβρα της* $B(H)$. *Αν* $P, Q \in A$ *προβολές τότε θα λέμε ότι η* P *είναι ισοδύναμη με την* Q *στην* A *και θα γράφουμε* $P \sim Q$ *αν υπάρχει μερική ισομετρία* $V \in A$ *τέτοια ώστε* $V^*V = P$ *και* $VV^* = Q$.

Παρατηρήστε ότι η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 1.2.21. *Μία von Neumann άλγεβρα $R \subseteq B(H)$ θα λέγεται finite αν η μόνη προβολή ισοδύναμη (στην R) με τη μονάδα είναι η μονάδα.*

Ορισμός 1.2.22. *Αν H_1, H_2 χώροι Hilbert και V_1, V_2 διανυσματικοί υπόχωροι των $B(H_1)$, $B(H_2)$ αντίστοιχα τότε μια γραμμική απεικόνιση $F : V_1 \longrightarrow V_2$ λέγεται normal αν είναι ultraweakly συνεχής.*

Παρατήρηση: Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα και στην περίπτωση που ο V_2 είναι το $\mathbb{C}$ ταυτίζοντας τον μιγαδικό αριθμό c με τον τελεστή του $B(\mathbb{C})$ ο οποίος απεικόνιζει κάθε $z \in \mathbb{C}$ στον cz.

Ορισμός 1.2.23. *'Ενα state $\rho : B(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται vector state αν υπάρχει $\xi \in H$ τέτοιο ώστε $\forall A \in B(H) : \rho(A) = \langle T\xi, \xi \rangle$.*

Παρατήρηση: Κάθε vector state $\rho : B(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι normal.

Ορισμός 1.2.24. *'Ενα θετικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\rho : B(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται trace αν $\forall A, B \in B(H) : \rho(AB) = \rho(BA)$.*

Κεφάλαιο 2

Μη-αυτοσυζυγείς άλγεβρες τελεστών και δυναμικά συστήματα

2.1 Αυτομορφισμοί που διατηρούν το μέτρο

Ο χώρος πιθανότητας $([0,1],\mathcal{U},m)$, όπου $\mathcal{U}$ είναι η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $[0,1]$ και m το μέτρο Lebesgue, θα συμβολίζεται απλά με $[0,1]$ χωρίς σύγχυση. Θέτουμε $H = L^2([0,1])$ και $\mathcal{M} = \{L_f \in B(H) : f \in L^\infty([0,1])\}$. Αν $P \in \mathcal{M}$ προβολή θα συμβολίζουμε με $m(P)$ το $m(A)$ όπου A Borel υποσύνολο του $[0,1]$ τέτοιο ώστε $P = L_{\chi_A}$. Ένας $*$-αυτομορφισμός $a : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ θα λέγεται ότι διατηρεί το μέτρο αν $m(a(P)) = m(P)$ για κάθε προβολή $P \in \mathcal{M}$. Ένας $*$-αυτομορφισμός $a : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ που διατηρεί το μέτρο θα λέγεται εργοδικός αν $a(P) = P \Rightarrow P \in \{0,1\}$ για κάθε προβολή $P \in \mathcal{M}$.

Έστω $\mathcal{S}$ η Boolean σ-άλγεβρα $\mathcal{U}/I$ όπου $I = \{A \in \mathcal{U} : m(A) = 0\}$. Σημειώνουμε ότι το m και οι συνολοθεωρητικές πράξεις ορίζονται με φυσικό τρόπο στην $\mathcal{S}$. Μια απεικόνιση από την $\mathcal{S}$ στον εαυτό της λέγεται σ-αυτομορφισμός αν είναι ένα προς ένα, επί, διατηρεί το συμπλήρωμα και διατηρεί τις αριθμήσιμες ενώσεις. Ένας σ-αυτομορφισμός $\phi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ που διατηρεί το μέτρο λέγεται εργοδικός αν $\phi(A) = A \Rightarrow A \in \{\emptyset, [0,1]\}$ για κάθε $A \in \mathcal{S}$.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω $\phi, \psi, g : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ σ-αυτομορφισμοί τέτοιοι ώστε*

i) Ο ϕ είναι εργοδικός σ-αυτομορφισμός που διατηρεί το μέτρο

ii) Ο ψ διατηρεί το μέτρο

iii) $\psi \circ g = g \circ \phi$

Τότε ο g διατηρεί το μέτρο.

Απόδειξη. Έστω, στοχεύοντας σε άτοπο, ότι ο υπάρχει $F \in \mathcal{S}$ τέτοιο ώστε $m(g(F)) \neq m(F)$. Υποθέτουμε ότι $m(g(F)) > m(F)$ και όμοια αντιμετωπίζεται η περίπτωση όπου $m(g(F)) < m(F)$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $E \in \mathcal{S}\backslash\{\emptyset\}$ υπάρχει $E' \subseteq E$ τέτοιο ώστε $m(g(E')) > m(E')$. Έστω λοιπόν τυχόν $E \in \mathcal{S}\backslash\{\emptyset\}$. Αν $A_n = \phi^n(E)$ για $n \in \{0, 1, ...\}$ τότε

$$\phi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

αλλά $m\left(\phi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)\right) = m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$ επομένως

$$\phi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

άρα $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = [0,1]$. Συνεπώς θέτοντας $C_n = \left(A_n \backslash \bigcup_{\kappa=1}^{n-1} A_\kappa\right) \cap F$ για $n \in \{0, 1, ...\}$ έχουμε ότι $(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n = F) \wedge (\forall n, m\{0, 1, ...\} : n \neq m \to C_n \cap C_m = \emptyset)$ και κατά συνέπεια ότι $(\bigcup_{n=0}^{\infty} g(C_n) = g(F)) \wedge (\forall n, m\{0, 1, ...\} : n \neq m \to g(C_n) \cap g(C_m) = \emptyset)$. Έτσι ισχύει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(g(C_n)) = m(g(F)) > m(F) = \sum_{n=0}^{\infty} m(C_n)$$

άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m(g(C_{n_0})) > m(C_{n_0})$ επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} m(C_{n_0}) < m(g(C_{n_0})) &\Leftrightarrow m(\phi^{-n_0}(C_{n_0})) < m(\psi^{-n_0} \circ g(C_{n_0})) \\ &\Leftrightarrow m(\phi^{-n_0}(C_{n_0})) < m(g(\phi^{-n_0}(C_{n_0})) \end{aligned}$$

και $C_{n_0} \subseteq A_{n_0} = \phi^{n_0}(E) \Rightarrow \phi^{-n_0}(C_{n_0}) \subseteq E$. Έτσι δείξαμε τον ισχυρισμό ο οποίος με μια εφαρμογή του λήμματος του Zorn μας δίνει ότι υπάρχει διαμέριση $\Delta \subseteq \mathcal{S}$ του $[0,1]$ τέτοια ώστε $A \in \Delta \Rightarrow m(g(A)) > m(A)$ το οποίο είναι άτοπο. □

Αν $h : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ $*$-αυτομορφισμός τότε η σχέση

$$L_{\chi_{\overline{h}(A)}} = h\left(L_{\chi_A}\right) \qquad A \in \mathcal{S}$$

ορίζει σ-αυτομορφισμό $\overline{h} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$. O $\overline{h}$ διατηρεί τις αριθμήσιμες ενώσεις γιατί ο h ως *-αυτομορφισμός διατηρεί την διάταξη και άρα το supremum των προβολών. Από αυτό και την πρόταση 2.1.1 αποδεικνύεται η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $\phi, \psi, g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ $*$-αυτομορφισμοί τέτοιοι ώστε*

i) O ϕ είναι εργοδικός $*$-αυτομορφισμός που διατηρεί το μέτρο *ii) Ο ψ διατηρεί το μέτρο*

iii) $\psi \circ g = g \circ \phi$

Τότε ο g διατηρεί το μέτρο.

Πρόταση 2.1.3. *Η $\mathcal{M}$ είναι maximal abelian στην $B(H)$.*

Απόδειξη. Έστω $A \in B(H)$ ώστε $L_f A = AL_f$ για κάθε $f \in L^\infty[0,1]$. Αρκεί να δείξω ότι $A \in \mathcal{M}$. Πράγματι $\forall f \in L^\infty[0,1]$

$$AL_f 1 = L_f A1 \Rightarrow Af = (A1)f \tag{2.1.1}$$

αλλά για $\gamma = \{x \in [0,1] : (A1)(x) \geq ||A|| + 1\}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{m(\gamma)}||A|| =&||A|| \cdot ||\chi_\gamma||_2 \geq ||A(\chi_\gamma)||_2 = ||A1 \cdot \chi_\gamma||_2 = \left(\int_0^1 (A1(t) \cdot \chi_\gamma(t))^2 dt\right)^{1/2} \\ &\geq \left(\int_0^1 ((||A|| + 1) \cdot \chi_\gamma(t))^2 \, dt\right)^{1/2} = \sqrt{m(\gamma)}(||A|| + 1)\end{aligned}$$

άρα $m(\gamma) = 0$ δηλαδή $A1 \in L^\infty[0,1]$ και έτσι η σχέση 2.1.1 γράφεται ως

$$Af = L_{A1}f, \qquad \forall f \in L^\infty$$

και άρα, εφόσον ο $L^\infty[0,1]$ είναι πυκνός στον H, $A = L_{A1} \in \mathcal{M}$. □

Σταθεροποιούμε έναν $a : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ εργοδικό $*$-αυτομορφισμό που διατηρεί το μέτρο.

Πρόταση 2.1.4. *Υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U \in B(H)$ τέτοιος ώστε $\forall A \in \mathcal{M}$: $UAU^{-1} = \alpha(A)$.*

Απόδειξη. Έστω ρ το state της $\mathcal{M}$ με $\rho(A) = \langle A1, 1\rangle$. Αν P προβολή της $\mathcal{M}$ τότε $\rho \circ \alpha(P) = \langle \alpha(P)1, 1\rangle = \langle \alpha(P)1, \alpha(P)1\rangle = ||\alpha(P)1||_2^2 = m(\alpha(P))^2 = m(P)^2 = \langle P1, P1\rangle = \langle P1, 1\rangle = \rho(P)$. Εφόσον οι προβολές της $\mathcal{M}$ την παράγουν ως χώρο Banach έχουμε ότι $\rho \circ \alpha(A) = \rho(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$ και επομένως $||\alpha(A)1||_2^2 = \langle \alpha(A)1, \alpha(A)1\rangle = \langle \alpha(A)^*\alpha(A)1, 1\rangle = \langle \alpha(A^*A)1, 1\rangle = \rho \circ \alpha(A^*A) = \rho(A^*A) = \langle A^*A1, 1\rangle = ||\alpha(A)1||_2^2$. Άρα η απεικόνιση $A1 \mapsto \alpha(A)1$ ορίζει ισομετρία από τον $\overline{\mathcal{M}1} = H$ επί του $\overline{\alpha(\mathcal{M})1} = \overline{\mathcal{M}1} = H$ δηλαδή ορθομοναδιαίο $U \in B(H)$. Έστω $A \in \mathcal{M}$ τότε $\forall B \in \mathcal{M}$ έχουμε $UAB1 = \alpha(AB)1 = \alpha(A)\alpha(B)1 = \alpha(A)UB1$ άρα $\forall f \in \mathcal{M}1 : UAf = \alpha(A)Uf$ άρα ο U είναι ο ζητούμενος. □

Θα λέμε ότι ένας τέτοιος U επάγει τον α. Ας σημειωθεί ότι στην απόδειξη της πρότασης 2.1.4 δεν χρησιμοποιήθηκε η εργοδικότητα του α. Ακόμη παρατηρούμε ότι αν ο ορθομοναδιαίος $U \in B(H)$ επάγει τον α τότε για κάθε $A \in \mathcal{M}$ ισχύουν οι σχέσεις $UA = \alpha(A)U$ και $AU = U\alpha^{-1}(A)$ τις οποίες στο εξής θα χρησιμοποιούμε συχνά.

Πρόταση 2.1.5. *Αν U_1 και U_2 ορθομοναδιαίοι στην $B(H)$ που επάγουν τον α τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος W στην $\mathcal{M}$ τέτοιος ώστε $U_1 = U_2 W$*

Απόδειξη. Για κάθε A στην $\mathcal{M}$ έχουμε

$$U_2^{-1}U_1AU_1^{-1}U_2 = \alpha^{-1} \circ \alpha(A) = A \Rightarrow AU_1^{-1}U_2 = U_1^{-1}U_2A \tag{2.1.2}$$

άρα από πρόταση 2.1.3 $U_1^{-1}U_2 \in \mathcal{M}$ δηλαδή ο ζητούμενος W είναι ο $U_1^{-1}U_2$. □

Για τα επόμενα σταθεροποιούμε εναν ορθομοναδιαίο U στην $B(H)$ που επάγει τον α. Από την παραπάνω πρόταση και την σχέση $UA = \alpha(A)U$ συμπεραίνουμε ότι τα

$$\mathcal{B}_0(\alpha) = \left\{ \sum_{i=-n}^{n} A_i U^i : n \in \mathbb{N} \text{ και } A_i \in \mathcal{M} \text{ για } i \in \{-n, ..., n\} \right\} \tag{2.1.3}$$

$$\mathcal{A}_0(\alpha) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} A_i U^i : n \in \mathbb{N} \text{ και } A_i \in \mathcal{M} \text{ για } i \in \{0, ..., n\} \right\} \tag{2.1.4}$$

είναι άλγεβρες οι οποίες είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του U και εξαρτώνται μόνο από τον α. Ακόμη η $\mathcal{B}_0(\alpha)$ είναι αυτοσυζυγής. Έστω $\mathcal{A}(\alpha)$ και $\mathcal{B}(\alpha)$ οι norm κλειστές θήκες των $\mathcal{A}_0(\alpha)$ και $\mathcal{B}_0(\alpha)$ αντίστοιχα. Φυσικά η $\mathcal{B}(\alpha)$ είναι C^*-άλγεβρα.

Ορισμός 2.1.6. *Έστω M von Neumann άλγεβρα. Ένας $*$-αυτομορφισμός $\alpha : M \longrightarrow M$ θα λέμε ότι δρα ελεύθερα αν για κάθε προβολή $p \in M \backslash \{0\}$ υπάρχει προβολή $q \in M \backslash \{0\}$ έτσι ώστε $q \leq p$ και $\alpha(q) \perp q$.*

Από το λήμμα 1.20 στο [1] προκύπτει το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.1.7. *Έστω (W, Σ, μ) χώρος πιθανότητας και ϕ ένας αυτομορφισμός του W τέτοιος ώστε $\forall A \in \Sigma : \mu(\phi(A)) = \mu(A)$. Έστω g ο $*$-αυτομορφισμός του $L^\infty(W)$ που ικανοποιεί το $\forall f \in L^\infty(W) : g(f) = f \circ \phi$. Ο g δρα ελεύθερα αν και μόνο αν $\mu(\{x \in W : \phi(x) = x\}) = 0$.*

Στο ([7], σ. 125) δείχνεται ότι αν ο α είναι εργοδικός *-αυτομορφισμός της $\mathcal{M}$ που διατηρεί το μέτρο τότε ο α^n δρα ελεύθερα $\forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Από αυτό μπορούμε να δείξουμε την παρακάτω πρόταση που θα φανεί πολύ χρήσιμη στα επόμενα.

Πρόταση 2.1.8. *Αν ο $\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ είναι εργοδικός $*$-αυτομορφισμός που διατηρεί το μέτρο τότε για κάθε πεπερασμένο $I \subseteq \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ και προβολή $p \in \mathcal{M} \backslash \{0\}$ υπάρχει μη μηδενική προβολή $q \leq p$ για την οποία ισχύει $\alpha^n(q) \perp q$ για κάθε $n \in I$.*

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με επαγωγή στον πληθάριθμο n του I. Για $n = 0$ είναι προφανές. Έστω λοιπόν ότι ισχύει για n. Έστω $I \cup \{\kappa\}$ με $|I| = n$ και $\kappa \in \mathbb{Z} \backslash (\{0\} \cup I)$ τότε από επαγωγική υπόθεση υπάρχει $0 \neq q' \leq p$ στην $\mathcal{M}$ ώστε $\alpha^i(q') \perp q' \quad \forall i \in I$. Αλλά ο α^κ δρα ελεύθερα άρα υπάρχει $0 \neq q \leq q'$ στην $\mathcal{M}$ τέτοιος ώστε $\alpha^\kappa(q) \perp q$. Από αυτά προκύπτει ότι $\alpha^i(q) \perp q \quad \forall i \in I \cup \{\kappa\}$ ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα. □

Πρόταση 2.1.9. *Αν $A_{-n}, ..., A_n \in \mathcal{M}$ για $n \in \mathbb{N}$ τότε*

$$\sum_{i=-n}^{n} A_i U^i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{-n, ..., n\} : A_i = 0 \tag{2.1.5}$$

Απόδειξη. Έστω, στοχεύοντας σε άτοπο, $\kappa \in \{-n, ..., n\}$ και $A_\kappa = L_f \neq 0$ για $f \in L^\infty[0, 1]$. Έστω $S = \{x \in [0, 1] : f(x) \neq 0\}$ τότε για κάθε υποπροβολή $Q \neq 0$ της L_{χ_S} έχουμε $A_\kappa Q \neq 0$. Έστω, από πρόταση 2.1.8, προβολή $0 \neq Q \leq L_{\chi_S}$ τέτοια ώστε $Q \perp \alpha^i(Q)$ για $i \in \{-n - \kappa, ..., n - \kappa\} \backslash \{0\}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=-n}^{n} A_i U^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=-n}^{n} A_i U^{i-\kappa} = 0 \Rightarrow Q \left(\sum_{i=-n}^{n} A_i U^{i-\kappa} \right) Q = 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=-n}^{n} A_i Q \alpha^{i-k}(Q) U^{i-\kappa} = 0 \Rightarrow A_\kappa Q = 0 \end{aligned}$$

άτοπο από την επιλογή του Q. □

Από την πρόταση 2.1.9 ο παρακάτω τύπος ορίζει γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{B}_0(\alpha) \longrightarrow \mathcal{M}$

$$\Phi \left(\sum_{i=-n}^{n} A_i U^i \right) = A_0 \qquad A_{-n}, ..., A_n \in \mathcal{M}$$

η οποία προφανώς δεν εξαρτάται από την επιλογή του U.

Θεώρημα 2.1.10. *Για κάθε $T \in \mathcal{B}_0(\alpha)$ ισχύει $||\Phi(T)|| \leq ||T||$.*

Απόδειξη. Έστω, στοχεύοντας σε άτοπο, κάποιο $T \in \mathcal{B}_0(\alpha)$ τέτοιο ώστε $||\Phi(T)|| > ||T||$. Η ιδέα είναι να βρεθεί ένα state που να *ανιχνεύει τη νόρμα του σταθερού όρου $\Phi(T)$ του T. Αυτό θα γίνει μέσω μιας κατάλληλης προβολής P, συγκεκριμένα (ταυτίζοντας την $\mathcal{M}$ με την $L^\infty[0, 1]$ συμπεραίνουμε ότι) υπάρχει ορθομοναδιαίο $W \in \mathcal{M}$ και προβολή $P \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε*

$$\Phi(T)W \geq \frac{||\Phi(T)|| + ||T||}{2} P$$

Πράγματι αν $\Phi(T) = L_g$ για $g \in L^\infty[0, 1]$ τότε θέτω $W = L_{g/|g|}$ και $P = L_{\chi_A}$ για $A = \{x \in [0, 1] : |g(x)| \geq (||\Phi(T)|| + ||T||)/2\}$. Τώρα για να πετύχω άτοπο αρκεί να βρω *state ρ της $\mathcal{B}(\alpha)$ τέτοιο ώστε $\rho \circ \Phi(TW) = \rho(TW)$ και $\rho(P) = 1$ γιατί τότε*

$$|\rho(TW)| \leq ||TW|| \leq ||T|| \qquad \text{και}$$

$$|\rho(TW)| = |\rho\left(\Phi(TW)\right)| \overset{W\in\mathcal{M}}{=} |\rho\left(\Phi(T)W\right)| \geq \left|\rho\left(\frac{||\Phi(T)|| + ||T||}{2}P\right)\right| = \frac{||\Phi(T)|| + ||T||}{2}$$
$$> ||T||.$$

Έστω ότι $TW = \sum_{i=-n}^{n} A_i U^i$ για $A_{-n}, ..., A_n$ τότε από την ελεύθερη δράση του α υπάρχει προβολή $Q \in \mathcal{M}$ με $0 \neq Q \leq P$ τέτοια ώστε $\alpha^i(Q) \perp Q$ για $i \in \{-n, ..., n\}\backslash\{0\}$. Το ζητούμενο state είναι το $\rho(K) = \langle Kf, f\rangle$ όπου $f \in Q(H)$ με $||f||_2 = 1$. Πράγματι έχουμε $\rho(P) = \langle Pf, f\rangle = \langle f, f\rangle = 1$ και $\forall i \in \{-n, ..., n\}\backslash\{0\}$

$$\rho(A_iU^i) = \langle A_iU^if, f\rangle = \langle A_iU^iQf, Qf\rangle = \langle QA_iU^iQf, f\rangle = \langle Q\alpha^i(Q)A_iU^if, f\rangle = 0$$

επομένως

$$\rho(TW) = \rho\left(\sum_{i=-n}^{n} A_iU^i\right) = \rho(A_0) = \rho\left(\Phi(TW)\right)$$

□

Λόγω του θεωρήματος 2.1.10 η Φ επεκτείνεται σε μια απεικόνιση $\mathcal{B}(\alpha) \longrightarrow \mathcal{M}$.

Θεώρημα 2.1.11. *Η Φ είναι θετική.*

Απόδειξη. Από $\Phi(I) = I$ και το θεώρημα 2.1.10 ισχύει ότι $||\Phi|| = 1$. Έστω, για κάθε $f \in H$, το συναρτησοειδές $\rho_f : \mathcal{B}(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ με $\rho_f(A) = \langle \Phi(A)f, f\rangle$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(a)$. Από $\rho_f(I) = ||f||_2^2$ και $|\rho_f(A)| = |\langle\Phi(A)f, f\rangle| \leq ||\Phi|| \cdot ||f||_2^2 = ||f||_2^2$ έχουμε ότι $||\rho_f|| = ||f||_2^2$. Ακόμη ισχύει ότι $\rho_f(I) = ||f||_2^2$, δηλαδή $\rho_f(I) = ||\rho_f||$, άρα από 1.1.7 έχουμε ότι ρ_f θετικό. Επομένως αν $A \in \mathcal{B}(a)$ θετικός τότε για κάθε $f \in H$ ισχύει ότι $\langle\Phi(A)f, f\rangle = \rho_f(A) \geq 0$ άρα $\Phi(A)$ θετικός. □

Το παρακάτω θεώρημα θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη των δύο βασικών λημμάτων στα οποία θα στηριχτεί το βασικό θεώρημα της ενότητας αυτής.

Θεώρημα 2.1.12. *Η Φ είναι faithful.*

Απόδειξη. Αρκεί να βρεθούν C^*-άλγεβρα C, faithful θετική γραμμική απεικόνιση $\omega : C \longrightarrow \mathcal{M}$ και $*$-ομομορφισμός π από την C επί της $\mathcal{B}(\alpha)$ τέτοια ώστε $\Phi \circ \pi = \omega$. Πράγματι τότε κάθε $x \in \mathcal{B}(\alpha)$ είναι $\pi(y)$ για κάποιο $y \in C$ άρα

$$\Phi(x^*x) = 0 \Rightarrow \Phi(\pi(y)^*\pi(y)) = 0 \Rightarrow \Phi(\pi(y^*y)) = 0 \Rightarrow \Phi \circ \pi(y^*y) = 0 \Rightarrow \omega(y^*y) = 0$$
$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

Έστω C_1 το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $\mathbb{T} \longrightarrow (B(H), ||\cdot||)$ όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, C_0 το σύνολο των συναρτήσεων στην C_1 της μορφής $z \mapsto A_{-n}U^{-n}z^{-n} + ... + A_nU^nz^n$ όπου $A_{-n}, ..., A_n \in \mathcal{M}$ και C η norm κλειστή θήκη του C_0. Εύκολα ελέγχει κανείς ότι το C_1 με τις κατά σημείο πράξεις, κατά σημείο involution και την supremum νόρμα είναι C^*-άλγεβρα [1] και ότι το C_0 είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της C_1 και άρα το C είναι C^*-άλγεβρα. Έστω ο $*$-ομομορφισμός $\pi : C \longrightarrow B(H)$ με $\pi(F) = F(1)$ και $\omega : C \longrightarrow B(H)$ η απεικόνιση που ορίζει η σχέση

$$\langle \omega(F)f, g\rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(e^{i\theta})f, g\rangle d\theta \qquad f, g \in H$$

εφόσον το δεξί μέλος είναι φραγμένη sesquilinear μορφή ως προς (f, g). Ακόμη από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η ω είναι μια φραγμένη θετική γραμμική απεικόνιση. Έστω $F \in C$ και $\omega(F^*F) = 0$ τότε από

$$\begin{aligned} 0 =& \langle \omega(F^*F)f, f\rangle = \int_0^{2\pi} \langle F^*F(e^{i\theta})f, f\rangle d\theta = \int_0^{2\pi} \langle F(e^{i\theta})f, F(e^{i\theta})f\rangle d\theta \\ =& \int_0^{2\pi} ||F(e^{i\theta})f||_2^2 d\theta \end{aligned}$$

και την συνέχεια της $\theta \mapsto ||F(e^{i\theta})f||_2^2$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $f \in H$ και $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει $F(e^{i\theta})f = 0$ δηλαδή ότι $F = 0$ άρα η ω είναι faithful. Έστω $T \in C_0$ τότε $\forall z \in \mathbb{T} : T(z) = A_{-n}U^{-n}z^{-n} + ... + A_nU^nz^n$ για κάποια $A_{-n}, ..., A_n \in \mathcal{M}$ και $\forall f, g \in H$:

$$\begin{aligned} \langle \omega(T)f, g\rangle =& \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\sum_{\kappa=-n}^{n} A_\kappa U^\kappa e^{i\kappa\theta} \right) f, g \right\rangle d\theta = \sum_{\kappa=-n}^{n} \int_0^{2\pi} \left\langle A_\kappa U^\kappa e^{i\kappa\theta} f, g \right\rangle d\theta \\ =& \sum_{\kappa=-n}^{n} \int_0^{2\pi} e^{i\kappa\theta} \langle A_\kappa U^\kappa f, g\rangle d\theta = \sum_{\kappa=-n}^{n} \left[\langle A_\kappa U^\kappa f, g\rangle \int_0^{2\pi} e^{i\kappa\theta} d\theta \right] = \langle A_0 f, g\rangle \end{aligned}$$

δηλαδή $\omega(T) = A_0$ άρα $\Phi \circ \pi = \omega$ στο C_0 το οποίο είναι πυκνό στο C άρα $\Phi \circ \pi = \omega$. Ακόμη από το $\omega(C_0) = \mathcal{M}$ προκύπτει $\omega(C) = \mathcal{M}$ έτσι από το $\pi(C_0) = \mathcal{B}_0(\alpha)$ και το γεγονός ότι το σύνολο τιμών ενός $*$-ομομορφισμού μιας C^*-άλγεβρας είναι πλήρες (1.1.28) προκύπτει ότι $\pi(C) = \mathcal{B}(\alpha)$. Έτσι τα C, π και ω είναι όπως τα ζητήσαμε και άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε □

Λήμμα 2.1.13. *i) Η Φ είναι πολλαπλασιαστική στην $\mathcal{A}(\alpha)$.*

ii) $\mathcal{A}(\alpha) \cap \mathcal{A}(\alpha)^* = \mathcal{M}$.

[1] Αν $(X, \rho), (Y, d)$ μετρικοί χώροι, X συμπαγής και Y πλήρης τότε το $\{f \in Y^X : f$ συνεχής $\}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς την μετρική $s(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \in \mathbb{R} : x \in X\}$.

Απόδειξη. Για το i) παρατηρούμε ότι η Φ είναι πολλαπλασιαστική στην $\mathcal{A}_0(\alpha)$ οπότε είναι και στη norm κλειστή θήκη της, $\mathcal{A}(\alpha)$. Έστω T αυτοσυζυγές στοιχείο της $\mathcal{A}(\alpha) \cap \mathcal{A}(\alpha)^*$ τότε και το $\Phi(T)$ είναι αυτοσυζυγές άρα

$$\begin{aligned}\Phi((T-\Phi(T))^*(T-\Phi(T))) =&\Phi((T-\Phi(T))(T-\Phi(T))) = \Phi((T-\Phi(T))\Phi((T-\Phi(T))\\ =&0\end{aligned}$$

οπότε από το ότι η Φ είναι faithful έχουμε $T = \Phi(T) \in \mathcal{M}$. Έτσι, δείξαμε ότι, τα αυτοσυζυγή της C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}(\alpha) \cap \mathcal{A}(\alpha)^*$ ανήκουν στην $\mathcal{M}$ και εφόσον τα αυτοσυζυγή στοιχεία μιας C^*-άλγεβρας την παράγουν ως μιγαδικό διανυσματικό χώρο έχουμε το ii). □

Λήμμα 2.1.14. *Έστω ορθομοναδιαίοι $V_1, V_2 \in \mathcal{A}(\alpha)$ τέτοιοι ώστε*

i) Για κάθε $i \in \{1,2\}$ ισχύει $V_i\mathcal{M} = \mathcal{M}V_i$ και ο $*$-αυτομορφισμός $A \mapsto V_iAV_i^*$ δρα ελεύθερα.

ii) Ο V_1 ανήκει στην Banach άλγεβρα που παράγει το $\mathcal{M} \cup \{V_2\}$.

Τότε $V_1V_2^* \in \mathcal{A}(\alpha)$.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξω ότι $\Phi(V_i) = 0$ για $i = 1,2$. Έστω, στοχεύοντας σε άτοπο, κάποιο $i \in \{1,2\}$ και $f \in L^\infty[0,1]$ ώστε $\Phi(V_i) = L_f \neq 0$. Έστω $A = \{x \in [0,1] : f(x) \neq 0\}$ και $0 \neq Q \leq L_{\chi_A}$ τέτοιο ώστε $Q \perp V_iQV_i^* = 0$ το οποίο υπάρχει από i). Έτσι έχουμε $\Phi(V_i)Q \neq 0$ αλλά

$$\Phi(V_i)Q = Q\Phi(V_i)Q = Q\Phi(V_iQ) = Q\Phi(V_iQV_i^*V_i) = 0$$

το οποίο είναι άτοπο. Δείξαμε έτσι ότι $\Phi(V_i) = 0$ για $i \in \{0,1\}$. Από $V_2\mathcal{M} = \mathcal{M}V_2$ έχουμε ότι το

$$\Gamma = \left\{\sum_{i=0}^{n} A_iV_2^i : n \in \mathbb{N} \text{ και } A_i \in \mathcal{M} \text{ για } i \in \{0,...,n\}\right\}$$

είναι πυκνή υπάλγεβρα της Banach άλγεβρας που παράγει το $\{V_2\} \cup \mathcal{M}$. Έτσι έχουμε από ii) ότι υπάρχει ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του Γ τέτοια ώστε $T_n \to V_1$. Έστω $T_n' = T_n - \Phi(T_n)$ οπότε $T_n' \to V_1 - \Phi(V_1) = V_1$. Έστω ένα τυχόν $n \in \mathbb{N}$ τότε αν $T_n' = \sum_{i=0}^{\kappa} A_iV_2^i$, λόγω λήμματος 2.1.13, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}0 =&\Phi(T_n - \Phi(T_n)) = \Phi(T_n') = \Phi\left(\sum_{i=0}^{\kappa} A_iV_2^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{\kappa} A_i\Phi(V_2^i)\right)\\ =&A_0 + \left(\sum_{i=1}^{\kappa} A_i\Phi(V_2)^i\right) = A_0\end{aligned}$$

άρα

$$T'_n = \sum_{i=1}^{\kappa} A_i V_2^i = \left(\sum_{i=1}^{\kappa} A_i V_2^{i-1} \right) V_2$$

Έτσι δείξαμε ότι υπάρχει ακολουθία $(T''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του Γ έτσι ώστε $T'_n = T''_n V_2$ οπότε έχουμε $T'_n \to V_1 \Rightarrow T'_n V_2^* \to V_1 V_2^* \Rightarrow T''_n V_2 V_2^* \to V_1 V_2^* \Rightarrow T''_n \to V_1 V_2^*$ από το οποίο προκύπτει ότι $V_1 V_2^* \in \mathcal{A}(\alpha)$ αφού $\forall n \in \mathbb{N} : T''_n \in \mathcal{A}(\alpha)$. $\square$

Πόρισμα 2.1.15. *Αν $V \in \mathcal{A}(\alpha)$ ορθομοναδιαίος τέτοιος ώστε*

i) $V\mathcal{M} = \mathcal{M}V$ και ο $*$-αυτόμορφισμός $A \mapsto VAV^*$ δρα ελεύθερα

ii) Το $\mathcal{M} \cup \{V\}$ παράγει την $\mathcal{A}(\alpha)$ ως Banach άλγεβρα.

Τότε ο V επάγει τον α.

Απόδειξη. Ο $A \mapsto VAV^*$ δρα ελεύθερα και ανήκει στην $\mathcal{A}(\alpha)$ δηλαδή στην Banach άλγεβρα που παράγει το $\mathcal{M} \cup \{U\}$ άρα από λήμμα 2.1.14 $VU^* \in \mathcal{A}(\alpha)$. Ο α δρα ελεύθερα και από ii) ο U ανήκει στην Banach άλγεβρα που παράγει το $\mathcal{M} \cup \{V\}$ άρα από λήμμα 2.1.14 $(VU^*)^* = UV^* \in \mathcal{A}(\alpha) \Rightarrow VU^* \in \mathcal{A}^*(\alpha)$. Άρα $VU^* \in \mathcal{A}(\alpha) \cap \mathcal{A}(\alpha)^* = \mathcal{M}$ δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος $W \in \mathcal{M}$ τέτοιος ώστε $V = WU$ οπότε $VAV^* = WUA(WU)^* = U\alpha^{-1}(W)A(U\alpha^{-1}(W))^* = U\alpha^{-1}(W)A(\alpha^{-1}(W))^*U^* = U\alpha^{-1}(W)(\alpha^{-1}(W))^*AU^* = UAU^* = \alpha(A)$. $\square$

Ας σημειώσουμε ότι τα παραπάνω αναφέρονται στον τυχόντα εργοδικό $*$-αυτομορφισμό α που διατηρεί το μέτρο. Έτσι οι παραπάνω ορισμοί έχουν νόημα και τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν για κάθε τέτοιον α.

Θεώρημα 2.1.16. *Έστω α, β εργοδικοί $*$-αυτομορφισμοί της $\mathcal{M}$ που διατηρούν το μέτρο. Υπάρχει $*$-αυτομορφισμός τ της $\mathcal{M}$ που διατηρεί το μέτρο τέτοιος ώστε $\tau \circ \alpha = \beta \circ \tau$ αν και μόνο αν υπάρχει ορθομοναδιαίος $T \in B(H)$ τέτοιος ώστε $T\mathcal{A}(\alpha)T^* = \mathcal{A}(\beta)$.*

Απόδειξη. Για το ευθύ θεωρώ $U_1 \in \mathcal{A}(\alpha), U_2 \in \mathcal{A}(\beta)$ ορθομοναδιαίους τελεστές που επάγουν τους α και β αντίστοιχα. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που αποδείχθηκε η πρόταση 2.1.4 αποδεικνύεται ότι υπάρχει ορθομοναδιαίος $T \in B(H)$ που επάγει τον τ. Έτσι από $\tau \circ \alpha = \beta \circ \tau$ έχουμε

$$TU_1AU_1^*T^* = U_2TAT^*U_2^* \qquad \forall A \in \mathcal{M}$$

άρα

$$T^*U_2^*TU_1A = AT^*U_2^*TU_1 \qquad \forall A \in \mathcal{M}$$

άρα από πρόταση 2.1.3 υπάρχει ορθομοναδιαίο $W \in \mathcal{M}$ τέτοιο ώστε $T^*U_2^*TU_1 = W \Rightarrow TU_1 = U_2TW \Rightarrow TU_1T^* = U_2TWT^*$. Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι ο TU_1T^* ανήκει στην $\mathcal{A}(\beta)$, επάγει τον β και άρα παράγει μαζί με την $\mathcal{M}$ την $\mathcal{A}(\beta)$ ως Banach άλγεβρα. Εφόσον όμως και το $\mathcal{M} \cup \{U_1\}$ παράγει την $\mathcal{A}(\alpha)$ ως Banach άλγεβρα προκύπτει ότι $T\mathcal{A}(\alpha)T^* = \mathcal{A}(\beta)$.

Για το αντίστροφο παρατηρούμε ότι $TMT^* = T(\mathcal{A}(\alpha) \cap \mathcal{A}(\alpha)^*)T^* = T\mathcal{A}(\alpha)T^* \cap T\mathcal{A}(\alpha)^*T^* = \mathcal{A}(\beta) \cap \mathcal{A}(\beta)^* = \mathcal{M}$ οπότε ορίζεται ο $*$-αυτομορφισμός $\tau : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ με $\tau(A) = TAT^*$. Έστω ότι οι ορθομοναδιαίοι $U_1 \in \mathcal{A}(\alpha), U_2 \in \mathcal{A}(\beta)$ επάγουν τους α και β αντίστοιχα. Αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι το $\tau \circ \alpha = \beta \circ \tau$ (τότε ο τ θα διατηρεί το μέτρο από την πρόταση 2.1.1) το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$TU_1AU_1^*T^* = U_2TAT^*U_2^* \qquad \forall A \in \mathcal{M}$$

Έτσι αρκεί να δείξω ότι μπορώ να επιλέξω το U_2 έτσι ώστε $U_2 = TU_1T^*$ δηλαδή να δείξω ότι αν το U_1 επάγει τον α τότε το TU_1T^* επάγει τον β. Εφόσον $T\mathcal{A}(\alpha)T^* = \mathcal{A}(\beta)$ και η $\mathcal{A}(\alpha)$ παράγεται ως Banach άλγεβρα από το $\mathcal{M} \cup \{U_1\}$ έχουμε ότι το $\mathcal{M} \cup \{TU_1T^*\}$ παράγει την $\mathcal{A}(\beta)$ οπότε από το πόρισμα 2.1.15 αρκεί να δείξω ότι ο $A \mapsto TU_1T^*ATU_1^*T^*$ δρα ελεύθερα. Πράγματι, έστω προβολή $P \in \mathcal{M}\backslash\{0\}$ τότε από την ελεύθερη δράση του α υπάρχει προβολή $Q \in \mathcal{M}\backslash\{0\}$ τέτοια ώστε $Q \leq T^*PT$ και $QU_1QU_1^* = 0$ αλλά $Q \leq T^*PT \Rightarrow TQT^* \leq P$ και $QU_1QU_1^* = 0 \Rightarrow TQT^*TU_1T^*TQT^*TU_1^*T^* = 0$ δηλαδή $0 \neq TQT^* \leq P$ και $TQT^* \perp TU_1T^*TQT^*(TU_1T^*)^*$. Έτσι δείξαμε την ελεύθερη δράση του $A \mapsto TU_1T^*ATU_1^*T^*$ που ήταν το ζητούμενο.

□

2.2 Γενικεύσεις

Σε αυτήν την ενότητα αντί να έχουμε έναν εργοδικό $*$-αυτομορφισμό της $\mathcal{M}$ που διατηρεί το μέτρο θα θεωρήσουμε μια (διακριτή) ομάδα G και έναν a_x $*$-αυτομορφισμό της $\mathcal{M}$ που διατηρεί το μέτρο και δρα ελεύθερα για κάθε $x \in G$ τέτοια ώστε $\forall x, y \in G : a_x \circ a_y = a_{xy}$. Θα μελετήσουμε κατά πόσο η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στην ενότητα 2.1 μπορεί να γενικευτεί στο παραπάνω πλαίσιο. Συγκεκριμένα, από την πρόταση 2.1.4, ξέρουμε ότι για κάθε $x \in G$ υπάρχει ορθομοναδιαίος $U_x \in B(H)$ που επάγει τον a_x. Μάλιστα η επιλογή του U_x μπορεί να γίνει έτσι ώστε

i) $\forall x, y \in G : U_xU_y = U_{xy}$

ii) $\forall x \in G : U_x1 = 1$

Ένας τρόπος να γίνει αυτή η επιλογή είναι να θεωρηθούν οι ορθομοναδιαίοι U_x που περιγράφονται στην απόδειξη της πρότασης 2.1.4, όπως δείχνουν οι σχέσεις $1 \mapsto a_x(1)1 = 1$ και $A1 \mapsto a_{xy}(A)1 = a_x \circ a_y(A)1 = a_y(a_x(A))1$ για κάθε $x, y \in G$ και $A \in \mathcal{M}$. Για τα επόμενα θα σταθεροποιήσουμε κάποιους ορθομοναδιαίους $U_x \in B(H)$ που επάγουν τους a_x αντίστοιχα και ικανοποιούν τις σχέσεις i) και ii) από πιο πάνω. Θα συμβολίζουμε με $C_{00}(G, \mathcal{M})$ το σύνολο των συναρτήσεων $A : x \mapsto A_x$, από την G στην $\mathcal{M}$, με πεπερασμένο φορέα. Από τις σχέσεις $U_x A = a_x(A) U_x$ για κάθε $x \in G$ και $A \in \mathcal{M}$ συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \sum_{x \in G} A_x U_x : A \in C_{00}(G, \mathcal{M}) \right\}$$

είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $B(H)$. Όπως και στην ενότητα 2.1, εφαρμόζοντας την πρόταση 2.1.5 για κάθε a_x με x στο G, παρατηρούμε ότι η $\mathcal{B}_0$ δεν εξαρτάται από την επιλογή των U_x αλλά μόνο από τους a_x. Έστω $\mathcal{B}$ η norm κλειστή θήκη της $\mathcal{B}_0$. Η αποδείξεις των παρακάτω δύο θεωρημάτων είναι όμοιες με τις αντίστοιχες αποδείξεις στην ενότητα 2.1.

Θεώρημα 2.2.1. *Αν $A \in C_{00}(G, \mathcal{M})$ και $\sum_{x \in G} A_x U_x = 0$ τότε $\forall x \in G : A_x = 0$.*

Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε πάλι μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{M}$ τέτοια ώστε

$$\Phi\left(\sum_{x \in G} A_x U_x \right) = A_e$$

Θεώρημα 2.2.2. *Για κάθε $T \in \mathcal{B}_0$ ισχύει ότι $||\Phi(T)|| \leq ||T||$ και άρα η Φ επεκτείνεται σε μια απεικόνιση $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{M}$. Ακόμη αυτή η απεικόνιση είναι θετική*

Μια διακριτή ομάδα G λέγεται amenable αν υπάρχει πεπερασμένα προσθετικό μέτρο πιθανότητας μ, ορισμένο στο δυναμοσύνολο της G, τέτοιο ώστε $\mu(E) = \mu(xE)$ για κάθε $x \in G$ και $E \subseteq G$. Ένας τέτοιος μ λέγεται μέσος. Στα [8] και [9] αποδεικνύεται ότι μια ομάδα G είναι amenable αν και μόνο αν για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq G$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο $E \subseteq G$ τέτοιο ώστε $\forall x \in F : |(\#(xE \cap E)/\#(E)) - 1| < \varepsilon$ (Συνθήκη του Følner).

Έστω $C_{00}(G) = \{h : G \longrightarrow \mathbb{C} \quad | \text{ Η } h \text{ έχει πεπερασμένο φορέα}\}$ και $l_x \in B(l^2(G))$ για κάθε $x \in G$ με $\forall \xi \in l^2(G) : \forall y \in G : l_x(\xi)(y) = \xi(x^{-1}y)$. Θα λέμε ότι ένα $h \in C_{00}(G)$ είναι θετικού τύπου αν ο τελεστής $\sum_{x \in G} h(x) l_x$ είναι θετικός.

Λήμμα 2.2.3. *Το $\chi_{\{e\}}$ είναι διαχωρίζον διάνυσμα της von Neumann άλγεβρας L που παράγει το $\{l_x : x \in G\}$.*

Απόδειξη. Αν $x \in G$ έστω $r_x \in B(l^2(G))$ τέτοιο ώστε $\forall \xi \in l^2(G) : \forall y \in G : r_x\xi(y) = \xi(yx)$. Για κάθε $y \in G$ ισχύει ότι $r_x l_y = l_y r_x$ άρα το r_x μετατίθεται με κάθε $T \in L$. Έτσι αν $T \in L$ είναι τέτοιο ώστε $T\left(\chi_{\{e\}}\right) = 0$ τότε $r_x T\left(\chi_{\{e\}}\right) = 0 \Rightarrow Tr_x\left(\chi_{\{e\}}\right) = 0 \Rightarrow T\left(\chi_{\{x\}}\right) = 0$. Το ζητούμενο έπεται από το ότι το $\left\{\chi_{\{x\}} \in l^2(G) : x \in G\right\}$ είναι τοπολογική βάση του $l^2(G)$. □

Θεώρημα 2.2.4. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

i) Η G είναι amenable.

ii) Για κάθε $h \in C_{00}(G)$ θετικού τύπου ισχύει $\sum_{x\in G} h(x) \geq 0$.

ii) Για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq G$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\xi \in l^2(G)$ με $||\xi||_2 = 1$ τέτοιο ώστε $\forall x \in F : |\langle l_x\xi, \xi\rangle - 1| < \varepsilon$.

Απόδειξη. i)⇒ii): Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $h \in C_{00}(G)\backslash\{0\}$ θετικού τύπου και τυχόν $\varepsilon > 0$. Έστω F ο φορέας της H. Εφόσον η G είναι amenable υπάρχει $E \subseteq G$ έτσι ώστε $\forall x \in F : |(|xE \cap E|/|E|) - 1| < \varepsilon/\sum_{t\in G}|h(t)|$. Έστω $\xi \in l^2(G)$ με $\forall y \in G : \xi(y) = |E|^{-1/2}\chi_E(y)$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle l_x\xi, \xi\rangle =& \sum_{y\in G} |E|^{-1/2}\chi_E(x^{-1}y)|E|^{-1/2}\overline{\chi_E(y)} \overset{\chi_E(y)\in\mathbb{R}}{=} \sum_{y\in G} |E|^{-1}\chi_E(x^{-1}y)\chi_E(y)\\ =&|xE \cap E|/|E|\end{aligned}$$

άρα

$$\forall x \in F : |\langle l_x\xi, \xi\rangle - 1| < \frac{\varepsilon}{\sum_{t\in G}|h(t)|}$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{x\in G} h(x) - \sum_{x\in G} h(x)\langle l_x\xi, \xi\rangle\right| =& \left|\sum_{x\in G} h(x)(1 - \langle l_x\xi, \xi\rangle)\right| \leq \sum_{x\in G} |h(x)|\,|(1 - \langle l_x\xi, \xi\rangle)|\\ &\leq \sum_{x\in G}\left(|h(x)|\frac{\varepsilon}{\sum_{t\in G}|h(t)|}\right) = \frac{\varepsilon}{\sum_{t\in G}|h(t)|}\sum_{x\in G}|h(x)| = \varepsilon\end{aligned}$$

Ακόμη ισχύει

$$\sum_{x\in G} h(x)\langle l_x\xi, \xi\rangle = \left\langle \left(\sum_{x\in G} h(x) l_x\right)\xi, \xi\right\rangle \geq 0$$

διότι ο τελεστής $\sum_{x\in G} h(x)l_x$ είναι θετικός. Εφόσον το ε ήταν τυχαίος θετικός αριθμός δείξαμε ότι οσοδήποτε κοντά στο $\sum_{x\in G} h(x)$ υπάρχουν μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί άρα $\sum_{x\in G} h(x) \geq 0$

ii)$\Rightarrow$iii): Έστω, στοχεύοντας σε άτοπο, $\varepsilon > 0$ και $x_1, ..., x_n \in G$ τέτοια ώστε για κάθε $\xi \in l^2(G)$ με $||\xi||_2 = 1$ υπάρχει $i \in \{1, ..., n\}$ με $|\langle l_{x_i}\xi, \xi\rangle - 1| \geq \varepsilon$. Από λήμμα 2.2.3 και το ([5], σ. 222) προκύπτει ότι κάθε normal state της von Neumann άλγεβρας L που παράγει το $\{l_x : x \in G\}$ είναι vector state. Από αυτό έχουμε ότι το σύνολο των vector states της L είναι κυρτό και άρα το $K = \{(l_{x_1}\xi, ..., l_{x_n}\xi) \in \mathbb{C}^n : \xi \in l^2(G)$ και $||\xi||_2 = 1\}$ είναι κυρτό. Ακόμη παρατηρούμε ότι από την επιλογή των $x_1, ..., x_n$ ισχύει ότι $(1, 1, ..., 1) \notin K$. Από τα παραπάνω και τα διαχωριστικά θεωρήματα Hahn-Banach, έχουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ και $r \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $ReF(1, 1, ..., 1) < r$ και $ReF(z) \geq r$ για κάθε $z \in K$. Έστω $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ ο πίνακας της F ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{C}^n$ Έστω τυχόν $\xi \in l^2(G)$ με $||\xi||_2 = 1$ τότε από την επιλογή της F ισχύει

$$
\begin{aligned}
Re(F(\langle l_{x_1}\xi, \xi\rangle, ..., \langle l_{x_n}\xi, \xi\rangle)) \geq r \Leftrightarrow & Re\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle l_{x_i}\xi, \xi\rangle\right) \geq r \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle l_{x_i}\xi, \xi\rangle + \overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle l_{x_i}\xi, \xi\rangle}\right) \geq r \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} [\alpha_i \langle l_{x_i}\xi, \xi\rangle + \overline{\alpha_i} \langle \xi, l_{x_i}\xi\rangle]\right) \geq r \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i \langle l_{x_i}\xi, \xi\rangle + \overline{\alpha_i} \left\langle l_{x_i^{-1}}\xi, \xi\right\rangle\right]\right) \geq r \langle \xi, \xi\rangle \\
\Leftrightarrow & \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_i}{2} l_{x_i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{2} l_{x_i^{-1}} - rI\right]\right)\xi, \xi \right\rangle \geq 0
\end{aligned}
$$

και εφόσον το ξ ήταν τυχόν μοναδιαίο διανίσμα του $l^2(G)$ ο $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\alpha_i}{2} l_{x_i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{2} l_{x_i^{-1}} - rI\right]$ είναι θετικός. Όμως $ReF(1, 1, ..., 1) < r \Leftrightarrow Re\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) - r < 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i/2 + \overline{\alpha_i}/2]$ $-r < 0$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση (Για $h = \left(\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i\chi_{\{x_i\}} + \overline{\alpha_i}\chi_{\{x_i^{-1}\}}]\right)/2$ $-r\chi_{\{e\}}$).

iii)$\Rightarrow$i): Για κάθε $x_1, ..., x_n \in G$ και $\varepsilon > 0$ θέτω $K_{\varepsilon, x_1, ..., x_n}$ το σύνολο των πεπερασμένα προσθετικών μέτρων μ τα οποία είναι ορισμένα στο δυναμοσύνολο της G και ικανοποιούν $\forall E \subseteq G : \forall i \in \{1, ..., n\} : |\mu(x_iE) - \mu(E)| < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι το $[0, 1]^{\mathbb{P}(G)}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης κάνει το $K_{\varepsilon, x_1, ..., x_n}$ συμπαγές για κάθε $x_1, ..., x_n \in G$ και $\varepsilon > 0$. Το ζητούμενο θα προκύψει δείχνοντας ότι

$$\bigcap \{K_{\varepsilon, x_1, ..., x_n} : x_1, ..., x_n \in G \quad \text{και} \quad \varepsilon > 0\} \neq 0$$

Από τη συμπάγεια των $K_{\varepsilon, x_1, ..., x_n}$ όμως, αρκεί να δείξω ότι για τυχόν $x_1, ..., x_n \in G$ και $\varepsilon > 0$ το $K_{\varepsilon, x_1, ..., x_n}$ είναι μη κενό. Από την υπόθεση υπάρχει $\xi \in l^2(G)$ με $||\xi||_2 = 1$ τέτοιο ώστε $\forall i \in \{1, ..., n\} : |\langle l_{x_i^{-1}}\xi, \xi\rangle - 1| < \varepsilon^2/8$. Έστω $\mu(E) = \sum_{x\in E} |\xi(x)|^2$ για κάθε $E \subseteq G$. Το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ και $E \subseteq G$ ισχύει

$$\begin{aligned}
|\mu(E) - \mu(x_iE)| &= \left|\sum_{t\in G} \chi_E(x)\xi(t)\overline{\xi(t)} - \sum_{t\in G} \chi_E(x)\xi(x_it)\overline{\xi(x_it)}\right| \\
&= \left|\langle \chi_E \cdot \xi, \xi\rangle - \langle \chi_E \cdot l_{x_i^{-1}}\xi, l_{x_i^{-1}}\xi\rangle\right| \\
&= \left|\langle \chi_E \cdot \xi, \xi\rangle - \langle \chi_E \cdot \xi, l_{x_i^{-1}}\xi\rangle + \langle \chi_E \cdot \xi, l_{x_i^{-1}}\xi\rangle - \langle \chi_E \cdot l_{x_i^{-1}}\xi, l_{x_i^{-1}}\xi\rangle\right| \\
&= \left|\langle \chi_E \cdot \xi, \xi - l_{x_i^{-1}}\xi\rangle + \langle \chi_E \cdot \xi - \chi_E \cdot l_{x_i^{-1}}\xi, l_{x_i^{-1}}\xi\rangle\right| \\
&\leq \left| ||\chi_E \cdot \xi||_2 \cdot ||\xi - l_{x_i^{-1}}\xi||_2 + ||l_{x_i^{-1}}\xi||_2 \cdot ||\chi_E(\xi - l_{x_i^{-1}}\xi)||_2\right| \leq 2||\xi - l_{x_i^{-1}}\xi||_2 \\
&=2\left(\left\langle \xi - l_{x_i^{-1}}\xi, \xi - l_{x_i^{-1}}\xi\right\rangle\right)^{1/2} \\
&=2\left(||\xi||_2^2 - \left\langle \xi, l_{x_i^{-1}}\xi\right\rangle - \left\langle l_{x_i^{-1}}\xi, \xi\right\rangle + ||l_{x_i^{-1}}\xi||_2^2\right)^{1/2} \\
&=2\left(2 - \overline{\left\langle l_{x_i^{-1}}\xi, \xi\right\rangle} - \left\langle l_{x_i^{-1}}\xi, \xi\right\rangle\right)^{1/2} = 2\left(2 - 2Re\left\langle l_{x_i^{-1}}\xi, \xi\right\rangle\right)^{1/2} \\
&=2\left(2\left(1 - Re\left\langle l_{x_i^{-1}}\xi, \xi\right\rangle\right)\right)^{1/2} \leq 2\left(2\left|1 - \left\langle l_{x_i^{-1}}\xi, \xi\right\rangle\right|\right)^{1/2} < 2\left(2(\varepsilon^2/8)\right)^{1/2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

άρα $\mu \in K_{\varepsilon,x_1,...,x_n} \Rightarrow K_{\varepsilon,x_1,...,x_n} \neq \emptyset$.

□

Ας σημειωθεί ότι το 'πεπερασμένα προσθετικό' στην οριστική συνθήκη με την οποία ορίσαμε τα $K_{\varepsilon,x_1,...,x_n}$ είναι αυτό που τα κάνει συμπαγή. Έτσι παρόλο που το μ που κατασκευάστηκε στην απόδειξη είναι μέτρο πιθανότητας αποδείξαμε μόνο την ύπαρξη πεπερασμένα προσθετικού αναλλοίωτου μέτρου πιθανότητας.

Προσπαθώντας να δείξουμε ότι η Φ είναι faithful θέλουμε να ορίσουμε, όπως και στην απόδειξη της πρότασης 2.1.12, μια C^*-άλγεβρα C, μια faithful θετική γραμμική απεικόνιση $\omega : C \longrightarrow \mathcal{M}$ και έναν $*$-ομομορφισμό π από την C επί της $\mathcal{B}$ τέτοια ώστε $\Phi \circ \pi = \omega$. Θα δούμε ότι έχοντας ορίσει τα C και ω θα ορίσουμε έναν $*$-ομομορφισμό π_0 από μια πυκνή υπάλγεβρα της C στην $\mathcal{B}$ ο οποίος τελικά επεκτείνεται στην $\mathcal{B}$ αν και μόνο αν η G είναι amenable.

Παρατηρώντας ότι για κάθε $x, y \in G$ και $A, B \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}
&(AU_x \otimes l_x)(BU_y \otimes l_y) = (AU_xBU_y \otimes l_{xy}) = (Aa_x(B)U_{xy} \otimes l_{xy}) \\
\text{και} \quad &(AU_x \otimes l_x)^* = (U_{x^{-1}}A^* \otimes l_{x^{-1}}) = (a_{x^{-1}}(A^*)U_{x^{-1}} \otimes l_{x^{-1}})
\end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$C_0 = \left\{ \sum_{x \in G} A_x U_x \otimes l_x \in B(H \otimes l^2(G)) : A \in C_{00}(G, \mathcal{M}) \right\}$$

είναι $*$-υπάλγεβρα της $B(H \otimes l^2(G))$. Έστω C η norm κλειστή θήκη της C_0 , η οποία είναι C^*-άλγεβρα. Ακόμη για κάθε $T \in C$ η σχέση

$$\langle \omega(T) f, g \rangle = \left\langle T(f \otimes \chi_{\{e\}}), g \otimes \chi_{\{e\}} \right\rangle \qquad f, g \in H$$

ορίζει τελεστή $\omega(T) \in B(H)$ αφού το δεξί μέλος είναι φραγμένη sesquilinear μορφή ως προς (f, g). Πράγματι

$$\left| \left\langle T(f \otimes \chi_{\{e\}}), g \otimes \chi_{\{e\}} \right\rangle \right| \leq ||T|| \cdot ||f||_2 \cdot ||g||_2$$

Προκύπτει άμεσα ότι η ω είναι θετική γραμμική απεικόνιση από την C στην $B(H)$ και $\forall T \in C : ||\omega(T)|| \leq ||T||$.

Θεώρημα 2.2.5. *Η ω είναι faithful και $\omega(\sum_{x \in G} A_x U_x \otimes l_x) = A_e$ για κάθε $A \in C_{00}(G, \mathcal{M})$.*

Απόδειξη. Αν $x \in G$ έστω $r_x \in B(l^2(G))$ τέτοιο ώστε $\forall \xi \in l^2(G) : \forall y \in G : r_x \xi(y) = \xi(yx)$. Για κάθε $y \in G$ και $A \in M$ ισχύει $(AU_y \otimes l_y)(I \otimes r_x) = (I \otimes r_x)(AU_y \otimes l_y)$ άρα ο $I \otimes r_x$ μετατίθεται με τα στοιχεία της C_0 και άρα της C. Έστω $T \in C$ με $\omega(T^*T) = 0$, τότε $\left\| T(f \otimes \chi_{\{e\}}) \right\|^2 = \left\langle T(f \otimes \chi_{\{e\}}), T(f \otimes \chi_{\{e\}}) \right\rangle = \left\langle T^*T(f \otimes \chi_{\{e\}}), f \otimes \chi_{\{e\}} \right\rangle = \langle \omega(T^*T) f, f \rangle = 0$ και άρα $T(f \otimes r_x \chi_{\{e\}}) = T(I \otimes r_x)(f \otimes \chi_{\{e\}}) = (I \otimes r_x) T(f \otimes \chi_{\{e\}}) = 0$ και εφόσον το $\{f \otimes r_x \chi_{\{e\}} \in H \otimes l^2(G) : f \in H \quad \text{και} \quad x \in G\}$ παράγει τον $H \otimes l^2(G)$ ως χώρο Hilbert έχουμε ότι $T = 0$. Έτσι δείξαμε ότι η ω είναι faithful. Τέλος, αν $A \in C_{00}(G, M)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\langle \omega\left(\sum_{x \in G} A_x U_x \otimes l_x \right) f, g \right\rangle &= \left\langle \left(\sum_{x \in G} A_x U_x \otimes l_x \right) f \otimes \chi_{\{e\}}, g \otimes \chi_{\{e\}} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{x \in G} \left[(A_x U_x \otimes l_x) \left(f \otimes \chi_{\{e\}} \right) \right], g \otimes \chi_{\{e\}} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{x \in G} A_x U_x f \otimes l_x \chi_{\{e\}}, g \otimes \chi_{\{e\}} \right\rangle \\
&= \sum_{x \in G} \left\langle A_x U_x f \otimes l_x \chi_{\{e\}}, g \otimes \chi_{\{e\}} \right\rangle \\
&= \sum_{x \in G} \left(\langle A_x U_x f, g \rangle \left\langle l_x \chi_{\{e\}}, \chi_{\{e\}} \right\rangle \right) = \langle A_e f, g \rangle
\end{aligned}$$

για κάθε $f, g \in H$ ($x \neq e \Rightarrow l_x \chi_{\{e\}} \perp \chi_{\{e\}}$). Άρα $\omega\left(\sum_{x \in G} A_x U_x \otimes l_x \right) = A_e$. □

Λήμμα 2.2.6. *Αν $A \in C_{00}(G, \mathcal{M})$ και $\sum_{x \in G} A_x U_x \otimes l_x = 0$ τότε $A_x = 0$ για κάθε $x \in G$.*

Απόδειξη. Έστω τυχόν $x_0 \in G$, θέλουμε να δείξουμε ότι $A_{x_0} = 0$. Πράγματι

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in G} A_x U_x \otimes l_x = 0 \Rightarrow & (U_{x_0^{-1}} \otimes l_{x_0^{-1}}) \sum_{x \in G} A_x U_x \otimes l_x = 0 \Rightarrow \sum_{x \in G} U_{x_0^{-1}} A_x U_x \otimes l_{x_0^{-1} x} = 0 \\
\Rightarrow & \sum_{x \in G} a_{x_0^{-1}}(A_x) U_{x_0^{-1} x} \otimes l_{x_0^{-1} x} = 0 \\
\Rightarrow & \omega \left(\sum_{x \in G} a_{x_0^{-1}}(A_x) U_{x_0^{-1} x} \otimes l_{x_0^{-1} x} \right) = 0 \Rightarrow a_{x_0^{-1}}(A_{x_0}) = 0 \Rightarrow A_{x_0} = 0
\end{aligned}$$

□

Το λήμμα αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε τον $*$-ομομορφισμό $\pi_0 : C_0 \longrightarrow \mathcal{B}$ με $\pi_0 \left(\sum_{x \in G} A_x U_x \otimes l_x \right) = \sum_{x \in G} A_x U_x$ για κάθε $A \in C_{00}(G, \mathcal{M})$. Παρατηρούμε ότι $\pi_0(C_0) = \mathcal{B}_0$ και ότι $\Phi \circ \pi_0 = \omega \restriction_{C_0}$.

Θεώρημα 2.2.7. *Ο π_0 είναι φραγμένος αν και μόνο αν η Φ είναι faithful.*

Απόδειξη. Αν ο π_0 είναι φραγμένος τότε επεκτείνεται σε έναν επί $*$-ομομορφισμό $\pi : C \longrightarrow \mathcal{B}$ και η Φ αποδεικνύεται faithful όπως και στην πρόταση 2.1.12. Για το αντίστροφο, στοχεύοντας σε άτοπο, θεωρώ $T \in C_0$ τέτοιο ώστε $\|T\| \leq 1$ και $\|\pi_0(T)\| > 1$. Τότε $1 < \|\pi_0(T)\|^2 = \|\pi_0(T)^* \pi_0(T)\| = \|\pi_0(T^* T)\|$ και $\pi_0(T^* T) \geq 0$. Θέτουμε $D = T^* T$. Από το θεώρημα του Gelfand μπορώ να ταυτίσω την C^*-άλγεβρα που παράγει το $\{\pi_0(D), I\}$ με την $C(X)$ για κάποιον συμπαγή τοπολογικό χώρο X. Έστω λοιπόν ότι ο $\pi_0(D)$ είναι μια $f \in C(X)$. Έστω $r = (||f||_\infty + 1)/2$ οπότε από $||f||_\infty > 1$ έχουμε $r > 1$ και $\{x \in X : f(x) > r\} \neq \emptyset$. Από το λήμμα του Urysohn υπάρχει $g \in C(X)$ τέτοια ώστε $g(x_0) = 1$ για κάποιο $x_0 \in \{x \in X : f(x) > r\}$, $g(x) = 0$ για κάθε $x \in X \backslash \{x \in X : f(x) > r\}$ και $0 \leq g(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$. Παρατηρούμε ακόμη ότι $\forall n \in \{1, ...\} : g(x) f^n(x) \geq r^n g(x)$. Συνοψίζοντας τα παραπάνω και θέτοντας $A \in \mathcal{B}$ τον τελεστή που αντιστοιχεί στην g έχουμε ότι $A \neq 0$, $0 \leq A \leq 1$, $A \pi_0(D) = \pi_0(D) A$ και $A \pi_0(D)^n \geq r^n A$ για κάθε $n \in \{1, ...\}$. Εφόσον από υπόθεση η Φ είναι faithful έχουμε $\Phi(A) \neq 0$ και άρα από 1.1.9 υπάρχει ρ_1 state της $\mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $\rho_1 (\Phi(A)) \neq 0$. Έστω ρ το state $\rho_1 \circ \Phi$ (η Φ είναι θετική και $\Phi(I) = I$) για το οποίο ισχύει $\rho \circ \Phi = \rho$. Έτσι έχουμε $A \pi_0(D)^n \leq r^n A \Rightarrow \rho(A \pi_0(D)^n) \leq r^n \rho(A)$, $A^2 \leq I \Rightarrow \rho(A^2) \leq 1$ και $D^{2n} \leq I \Rightarrow \rho \circ \omega(D^{2n}) \leq \rho \circ \omega(I) = 1$ για κάθε $n \in \{1, ..., \}$ οπότε από ανισότητα Cauchy-Schwarz για states έχουμε

$$\begin{aligned}
r^{2n} \rho(A)^2 \leq & \rho \left(A \pi_0(D)^n \right)^2 \leq \rho(A^2) \rho \left(\pi_0(D)^{2n} \right) \leq \rho \left(\pi_0 \left(D^{2n} \right) \right) = \rho \circ \Phi \circ \pi_0(D^{2n}) \\
= & \rho \circ \omega(D^{2n}) \leq 1
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \{1, ...\}$. Το οποίο είναι άτοπο εφόσον $r > 1$ και $\rho(A) > 0$. □

Έστω Λ_1, Λ_2 οι C^*-άλγεβρες που παράγονται από τα $\{U_x \otimes l_x \in B(H \otimes l^2(G)) : x \in G\}$ και $\{l_x \in B(l^2(G)) : x \in G\}$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.2.8. *Υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\sigma : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ τέτοιος ώστε $\sigma(\sum_{x\in G} h(x)U_x \otimes l_x) = \sum_{x\in G} h(x)l_x$ για κάθε $h \in C_{00}(G)$.*

Απόδειξη. Έστω $\sigma : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση

$$\langle \sigma(T)\xi, h\rangle = \langle T(1 \otimes \xi), 1 \otimes h\rangle \qquad \xi, h \in l^2(G)$$

δεδομένου ότι $|\langle T(1 \otimes \xi), 1 \otimes h\rangle| \leq ||T|| \cdot ||1 \otimes \xi|| \cdot ||1 \otimes h|| = ||T|| \cdot ||\xi|| \cdot ||h||$. Έστω $s \in C_{00}(G)$ τότε για κάθε $\xi, h \in l^2(G)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left\langle \sigma\left(\sum_{x\in G} s(x)U_x \otimes l_x\right)\xi, h\right\rangle &= \left\langle \left(\sum_{x\in G} s(x)U_x \otimes l_x\right)(1 \otimes \xi), 1 \otimes h\right\rangle \\ &\overset{U_x 1=1}{=} \left\langle \sum_{x\in G} s(x)(1 \otimes l_x\xi), 1 \otimes h\right\rangle = \sum_{x\in G} s(x)\langle 1 \otimes l_x\xi, 1 \otimes h\rangle \\ &= \sum_{x\in G} s(x)\langle l_x\xi, h\rangle = \left\langle \left(\sum_{x\in G} s(x)l_x\right)\xi, h\right\rangle\end{aligned}$$

άρα $\sigma\left(\sum_{x\in G} s(x)U_x \otimes l_x\right) = \sum_{x\in G} s(x)l_x$ για κάθε τέτοιο s. Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι ο σ, περιορισμένος στην $*$-άλγεβρα των τελεστών της μορφής $\sum_{x\in G} s(x)U_x \otimes l_x$ για $s \in C_{00}(G)$, είναι $*$-ομομορφισμός. Έτσι, εφόσον αυτή η $*$-άλγεβρα είναι πυκνή στην Λ_1 και η εικόνα της μέσο του σ πυκνή στην Λ_2, ο $\sigma : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ είναι $*$-ομομορφισμός επί της Λ_2.

Μένει να δειχθεί ότι ο σ είναι ένα προς ένα. Έστω το συναρτησοειδές $\rho : \Lambda_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ με $\rho(T) = \langle T\chi_{\{e\}}, \chi_{\{e\}}\rangle$ για κάθε $T \in \Lambda_2$. Τότε

$$\omega(U_x \otimes l_x) = \begin{cases} I & \text{αν } x = e \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$\rho \circ \sigma(U_x \otimes l_x)I = \left\langle l_x\chi_{\{e\}}, \chi_{\{e\}}\right\rangle I = \begin{cases} I & \text{αν } x = e \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

δηλαδή $\omega(U_x \otimes l_x) = \rho \circ \sigma(U_x \otimes l_x)I$ για κάθε $x \in G$ και το $\{U_x \otimes l_x \in B(H \otimes l^2(G)) : x \in G\}$ παράγει την Λ_1 ως C^*-άλγεβρα άρα $\omega(T) = \rho \circ \sigma(T)I$ για κάθε $T \in \Lambda_1$. Έτσι τελικά, από το ότι η ω είναι faithful, έχουμε ότι $\sigma(T) = 0 \Rightarrow \omega(T^*T) = \rho \circ \sigma(T^*T)I = \rho(\sigma(T^*T))I = \rho(\sigma(T)^*\sigma(T))I = 0 \Rightarrow T = 0$ □

Θεώρημα 2.2.9. *Η G είναι amenable αν και μόνο αν η Φ είναι faithful.*

Απόδειξη. Έστω ότι η G είναι amenable. Από θεώρημα 2.2.7 αρκεί να δείξω ότι ο π_0 είναι φραγμένος. Έστω $A \in C_{00}(G, M)$ με φορέα $F \subseteq G$ και τυχόν $\varepsilon > 0$ οπότε από το ότι η G είναι amenable υπάρχει $\xi \in l^2(G)$ με $||\xi||_2 = 1$ και $\forall x \in F : |\langle l_x\xi, \xi\rangle - 1| < \varepsilon$. Έτσι αν, $f, g \in H$, έχουμε

$$\left|\left\langle \left(\sum_{x\in G} A_xU_x \otimes l_x\right)(f \otimes \xi), g \otimes \xi\right\rangle - \left\langle \left(\sum_{x\in G} A_xU_x\right) f, g\right\rangle\right| =$$
$$\left|\left\langle \sum_{x\in G} A_xU_xf \otimes l_x\xi, g \otimes \xi\right\rangle - \left\langle \sum_{x\in G} A_xU_xf, g\right\rangle\right| =$$
$$\left|\sum_{x\in G} \langle A_xU_xf \otimes l_x\xi, g \otimes \xi\rangle - \sum_{x\in G} \langle A_xU_xf, g\rangle\right| =$$
$$\left|\sum_{x\in G} \langle A_xU_xf, g\rangle \langle l_x\xi, \xi\rangle - \sum_{x\in G} \langle A_xU_xf, g\rangle\right| = \left|\sum_{x\in G} \langle A_xU_xf, g\rangle (\langle l_x\xi, \xi\rangle - 1)\right| \leq$$
$$\sum_{x\in G} |\langle A_xU_xf, g\rangle| \, |\langle l_x\xi, \xi\rangle - 1| \leq \varepsilon \sum_{x\in G} |\langle A_xU_xf, g\rangle|$$

άρα

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \left(\sum_{x\in G} A_xU_x\right) f, g\right\rangle\right| &\leq \left|\left\langle \left(\sum_{x\in G} A_xU_x \otimes l_x\right)(f \otimes \xi), g \otimes \xi\right\rangle\right| + \varepsilon \sum_{x\in G} |\langle A_xU_xf, g\rangle| \\ &\leq \left\|\sum_{x\in G} A_xU_x \otimes l_x\right\| + \varepsilon \sum_{x\in G} |\langle A_xU_xf, g\rangle|\end{aligned}$$

Έτσι, εφόσον το ε ήταν τυχών θετικός, έχουμε

$$\left|\left\langle \left(\sum_{x\in G} A_xU_x\right) f, g\right\rangle\right| \leq \left\|\sum_{x\in G} A_xU_x \otimes l_x\right\|$$

άρα

$$\left\|\sum_{x\in G} A_xU_x\right\| = \sup\left\{\left|\left\langle \left(\sum_{x\in G} A_xU_x\right) f, g\right\rangle\right| \in \mathbb{R} : f, g \in H\right\} \leq \left\|\sum_{x\in G} A_xU_x \otimes l_x\right\|$$

επομένως ο π_0 είναι φραγμένος.

Έστω τώρα ότι η Φ είναι faithful. Από θεώρημα 2.2.7 ο π_0 είναι φραγμένος και άρα επεκτείνετε σε έναν $*$-ομομορφισμό $\pi : C \longrightarrow \mathcal{B}$. Έστω τυχόν $h \in C_{00}(G)$ θετικού τύπου, τότε

$$\begin{aligned}\sum_{x\in G} h(x)l_x \geq 0 \Rightarrow & \pi\circ\sigma^{-1}\left(\sum_{x\in G} h(x)l_x\right) \geq 0 \Rightarrow \pi\left(\sum_{x\in G} h(x)U_x\otimes l_x\right)\geq 0\\ &\Rightarrow \sum_{x\in G} h(x)U_x \geq 0 \Rightarrow \left\langle\left(\sum_{x\in G} h(x)U_x\right)1,1\right\rangle \geq 0\\ &\overset{U_x1=1}{\Rightarrow} \left\langle\sum_{x\in G} h(x)1,1\right\rangle \geq 0 \Rightarrow \sum_{x\in G} h(x)\geq 0\end{aligned}$$

όπου σ όπως στο θεώρημα 2.2.8. Έτσι από το θεώρημα 2.2.4 η G είναι amenable. $\square$

2.3 Τοπολογικά δυναμικά συστήματα

Σε αυτήν την ενότητα θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ένα θεώρημα παρόμοιο με το 2.1.16 αλλά αυτή τη φορά για μια ιδιαίτερη κλάση τοπολογικών δυναμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα, αν X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και ϕ ομοιομορφισμός του X επί του X, θα λέμε ότι το (X, ϕ) είναι τοπολογικό δυναμικό σύστημα τύπου 1 αν υπάρχει μη ατομικό κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας m τέτοιο ώστε ο $L^2(m)$ να είναι διαχωρίσιμος και

i) $m\circ\phi = m$

ii) $m(U) > 0$ για κάθε ανοικτό U

iii) $m\left(\{\, x\in X \mid \exists n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\} : \phi^n(x) = x \,\}\right) = 0$

Σε αυτή την ενότητα θα λέμε ότι ένα τέτοιο m είναι συμβατό με το (X, ϕ). Το m μετατρέπει τον X σε έναν χώρο μέτρου ο οποίος από το ([10], πορ. 10) είναι ισόμορφος με το $[0, 1]$ εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue. Για τον λόγο αυτό θα θεωρούμε δεδομένο ότι οι ορισμοί και τα θεωρήματα που αναπτύχθηκαν στις ενότητες 2.1 και 2.2 έχουν νόημα και ισχύουν για τον X εφοδιασμένο με το m. Σταθεροποιώντας ένα τέτοιο m μπορούμε να ορίσουμε την C^*-άλγεβρα $\mathcal{D} = \{L_f \in B(L^2(m)) : f \in C_0(X)\}$. Παρατηρήστε ότι το **ii)** από τις παραπάνω συνθήκες εξασφαλίζει ότι ο $f \mapsto L_f$ είναι $*$-ισομορφισμός από την $C_0(X)$ στην $\mathcal{D}$. Το **i)** από τις παραπάνω συνθήκες μας επιτρέπει να ορίσουμε τον ορθομοναδιαίο $U \in B(L^2(m))$ με

$$Uf = f\circ\phi \qquad f\in L^2(m)$$

Πράγματι για κάθε $f \in L^2(m)$

$$||f||_2^2 = \int_X |f|^2 dm \overset{m\circ\phi=m}{=} \int_X |f\circ\phi|^2 dm = ||Uf||_2^2$$

Θα συμβολίζουμε με $P(X,\phi,m)$ την Banach άλγεβρα που παράγει το $\{DU^n \in B(L^2(m)) : n \in \{0,1,...\}$ και $D \in \mathcal{D}\}$ για την οποία θα δείξουμε σε λίγο ότι είναι μέχρις ισομορφισμού ανεξάρτητη από το m. Ο ϕ ορίζει τον $*$-αυτομορφισμό a' της $\{L_f \in B(L^2(m)) : f \in L^\infty(m)\}$ με $a'(L_f) = L_{f\circ\phi}$ για κάθε $f \in L^\infty(m)$, του οποίου οι δυνάμεις δρουν ελεύθερα από το iii) στις παραπάνω συνθήκες και το λήμμα 2.1.7. Επίσης για κάθε $f \in L^\infty(m)$ ισχύει

$$\forall g \in L^2(m) : UL_fU^{-1}g = U(f\cdot(g\circ\phi^{-1})) = (f\cdot(g\circ\phi^{-1}))\circ\phi = (f\circ\phi)\cdot g = L_{f\circ\phi}g$$

δηλαδή $UL_fU^{-1} = L_{f\circ\phi}$ οπότε ο U επάγει τον a' όπως στην ενότητα 2.1. Από τη σύνδεση αυτή ορίζεται η Φ από την C^*-άλγεβρα που παράγει το $\{L_f \in B(L^2(m)) : f \in L^\infty(m)\} \cup U$ στην $\{L_f \in B(L^2(m)) : f \in L^\infty(m)\}$ της ενότητας 2.2 (όπου $G = \mathbb{Z}$ η οποία είναι amenable, $a_n = a'^n$ και $U_n = U^n$) οπότε και ισχύει

$$\Phi\left(\sum_{i=-n}^{n} A_iU^i\right) = A_0 \qquad A_{-n},...,A_n \in \{L_f \in B(L^2(m)) : f \in L^\infty(m)\}$$

Θα συμβολίζουμε με $B(X,\phi,m)$ την C^*-άλγεβρα που παράγει η $P(X,\phi,m)$. Παρατηρήστε ότι ο περιορισμός της Φ στην $B(X,\phi,m)$ έχει σύνολο τιμών την $\mathcal{D}$.

Λήμμα 2.3.1. $P(X,\phi,m) \cap P^*(X,\phi,m) = \mathcal{D}$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι $P(X,\phi,m) \cap P^*(X,\phi,m) \subseteq \mathcal{D}$. Έστω $A \in P(X,\phi,m) \cap P^*(X,\phi,m)$. Από το λήμμα 2.1.13 προκύπτει ότι $A \in \{L_f \in B(L^2(m)) : f \in L^\infty(m)\}$ και άρα $\Phi(A) = A$ οπότε από το $\Phi(P(X,\phi,m)) = \mathcal{D}$ έχουμε ότι $A \in \mathcal{D}$. Δείξαμε έτσι ότι $P(X,\phi,m) \cap P^*(X,\phi,m) \subseteq \mathcal{D}$. □

Ακόμη σημειώνουμε ότι το μέτρο m ορίζει faithful state $\rho' : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ με

$$\rho'(L_f) = \int_X f dm \qquad f \in C_0(X)$$

Θέτουμε $\rho = \rho' \circ \Phi : B(X,\phi,m) \longrightarrow \mathbb{C}$ το οποίο είναι επίσης faithful εφόσον τέτοια είναι και τα ρ', Φ. Παρατηρήστε ότι, εφόσον ο ϕ είναι ομοιομορφισμός, ο $a = a' \restriction_{\mathcal{D}}$ είναι $*$-αυτομορφισμός της $\mathcal{D}$. Για δοσμένο m συμβατό με το (X,ϕ) αν $\mathcal{D}, a, U, \Phi, \rho$ είναι όπως πιο πάνω θα λέμε ότι το (X,ϕ,m) επάγει τα $\mathcal{D}, a, U, \Phi, \rho$ αντίστοιχα. Προχωράμε στο επόμενο θεώρημα του οποίου πόρισμα θα είναι η ανεξαρτησία της $P(X,\phi,m)$ από το m αφού πρώτα αναφέρουμε το εξής λήμμα χωρίς απόδειξη ([4], πρ. 2.5).

Λήμμα 2.3.2. *Έστω A_1, A_2 C^*-άλγεβρες και ρ_1, ρ_2 θετικά faithful συναρτησοειδή ορισμένα στις A_1, A_2 αντίστοιχα. Έστω M_1, M_2 πυκνές $*$-υπάλγεβρες των A_1, A_2 αντίστοιχα και $\tau : M_1 \longrightarrow M_2$ $*$-ομομορφισμός τέτοιος ώστε $\rho_2 \circ \tau = \rho_1 \restriction_{M_1}$. Τότε ο τ επεκτείνετε μοναδικά σε έναν $*$-ισομορφισμό από την A_1 στην A_2.*

Θεώρημα 2.3.3. *Έστω $(X_1, \phi_1), (X_2, \phi_2)$ τοπολογικά δυναμικά συστήματα τύπου 1 και m_1, m_2 συμβατά μέτρα αντίστοιχα. Έστω ακόμη $\mathcal{D}_1$,$\mathcal{D}_2$ οι C^*-άλγεβρες, U_1, U_2 οι ορθομοναδιαίοι τελεστές και a_1, a_2 οι $*$-αυτομορφισμοί που επάγουν τα $(X_1, \phi_1, m_1), (X_2, \phi_2, m_2)$ αντίστοιχα. Αν $\lambda : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$ είναι $*$-ισομορφισμός τέτοιος ώστε $\lambda \circ a_1 = a_2 \circ \lambda$ τότε υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\tau : B(X_1, \phi_1, m_1) \longrightarrow B(X_2, \phi_2, m_2)$ τέτοιος ώστε να ικανοποιεί*

$$\tau\left(\sum_{i=-n}^{n} A_i U_1^i\right) = \sum_{i=-n}^{n} \lambda(A_i) U_2^i \qquad A_{-n}, ..., A_n \in \mathcal{D}_1$$

και να απεικονίζει την $P(X_1, \phi_1, m_1)$ ισομετρικά επί της $P(X_2, \phi_2, m_2)$.

Απόδειξη. Έστω, για $i \in \{1, 2\}$

$$\Lambda_i = \left\{ \sum_{\kappa=-n}^{n} A_\kappa U_i^\kappa \in B(X_i, \phi_i, m_i) : n \in \mathbb{N} \text{ και } A_{-n}, ..., A_n \in \mathcal{D}_i \right\}$$

τότε, από την κατασκευή της $B(X_i, \phi_i, m_i)$ και την σχέση $U_i \mathcal{D}_i U_i^{-1} = \mathcal{D}_i$, προκύπτει ότι το Λ_i είναι πυκνή $*$-υπάλγεβρα της $B(X_i, \phi_i, m_i)$. Έστω $\Phi_1 : B(X_1, \phi_1, m_1) \longrightarrow \mathcal{D}_1$ η faithful γραμμική απεικόνιση που επάγει το (X_1, ϕ_1, m_1) και ρ_2 το faithful state που επάγεται από το (X_2, ϕ_2, m_2). Για κάθε $A_{-n}, ..., A_n \in \mathcal{D}_1$ και $\kappa \in \{-n, .., n\}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{i=-n}^{n} A_i U_1^i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=-n}^{n} A_i U_1^i\right) U^{-\kappa} = 0 \Rightarrow \sum_{i=-n}^{n} A_i U_1^{i-\kappa} = 0 \\ \Rightarrow \Phi_1\left(\sum_{i=-n}^{n} A_i U_1^{i-\kappa}\right) = 0 \Rightarrow A_k = 0 \end{aligned}$$

Άρα ο παρακάτω τύπος ορίζει γραμμική απεικόνιση τ_0 από το Λ_1 επί του Λ_2.

$$\tau_0\left(\sum_{i=-n}^{n} A_i U_1^i\right) = \sum_{i=-n}^{n} \lambda(A_i) U_2^i$$

Από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \tau_0(AU_1^\kappa BU_1^m) =& \tau_0(Aa_1^\kappa(B)U_1^{\kappa+m}) = \lambda(A)\lambda \circ a_1^\kappa(B)U_2^{\kappa+m} = \lambda(A)a_2^\kappa(\lambda(B))U_2^{\kappa+m} \\ =& \lambda(A)U_2^\kappa \lambda(B)U_2^m = \tau_0(AU_1^\kappa)\tau_0(BU_1^m) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\tau_0(AU_1^\kappa)^* =&(\lambda(A)U_2^\kappa)^* = U_2^{-\kappa}\lambda(A^*) = a_2^{-\kappa}\circ\lambda(A^*)U_2^{-\kappa} = \lambda(a_1^{-\kappa}(A^*))U_2^{-\kappa}\\ =&\tau_0(a_1^{-\kappa}(A^*)U_1^{-\kappa}) = \tau_0(U_1^{-\kappa}A^*) = \tau_0((AU_1^\kappa)^*)\end{aligned}$$

όπου $A, B \in \mathcal{D}_1$ και $m, \kappa \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι ο τ_0 είναι $*$-ομομορφισμός. Έστω $\sigma : B(X_1, \phi_1, m_1) \longrightarrow \mathbb{C}$ το γραμμικό συναρτησοειδές $\sigma = \rho_2 \circ \lambda \circ \Phi_1$ το οποίο είναι θετικό και faithful εφόσον τέτοια είναι και τα ρ_2, λ, Φ_1. Έτσι για κάθε $A_{-n}, ..., A_n \in \mathcal{D}_1$ έχουμε

$$\sigma\left(\sum_{i=-n}^{n} A_iU_1^i\right) = \rho_2\circ\lambda\circ\Phi_1\left(\sum_{i=-n}^{n} A_iU_1^i\right) = \rho_2\circ\lambda(A_0)$$

και

$$\begin{aligned}\rho_2\circ\tau_0\left(\sum_{i=-n}^{n} A_iU_1^i\right) \overset{\rho_2=\rho_2\circ\Phi_2}{=} \rho_2\circ\Phi_2\circ\tau_0\left(\sum_{i=-n}^{n} A_iU_1^i\right) = \rho_2\circ\Phi_2\left(\sum_{i=-n}^{n} \lambda(A_i)U_2^i\right)\\ = \rho_2\circ\lambda(A_0)\end{aligned}$$

δηλαδή $\rho_2 \circ \tau_0 = \sigma \restriction_{\Lambda_1}$. Από τα παραπάνω και το λήμμα 2.3.2 προκύπτει ότι ο τ_0 επεκτείνεται σε έναν $*$-ισομορφισμό τ από την $B(X_1, \phi_1, m_1)$ επί της $B(X_2, \phi_2, m_2)$. Ο τ είναι ισομετρία ως $*$-ισομορφισμός C^*-αλγεβρών οπότε από το $\tau \restriction_{\Lambda_1} = \tau_0$ και τον τύπο που ορίζει τον τ_0 προκύπτει ότι ο $\tau \restriction_{P(X_1,\phi_1,m_1)}$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός από την $P(X_1, \phi_1, m_1)$ επί της $P(X_2, \phi_2, m_2)$. □

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.3.3 για $(X_1, \phi_1) = (X_2, \phi_2) = (X, \phi)$ και λ την ταύτιση $\mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$ που προκύπτει ταυτίζοντας τις $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ με την $C_0(X)$ παρατηρούμε τα εξής. Όχι μόνο οι άλγεβρες $P(X, \phi, m)$ και $B(X, \phi, m)$ είναι ανεξάρτητες, μέχρις ισομορφισμού, από το μέτρο m (Θέτουμε $P(X, \phi, m) = P(X, \phi)$ και $B(X, \phi, m) = B(X, \phi)$) αλλά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $P(X, \phi) \subseteq B(X, \phi)$ και στο αφηρημένο επίπεδο. όπου δεν έχουμε επιλέξει συγκεκριμένο μέτρο m. Έτσι έχει νόημα να κάνουμε λόγο και για την $\mathcal{D} = P(X, \phi) \cap P(X, \phi)^* \subseteq P(X, \phi)$ ανεξάρτητα από το μέτρο m. Τέλος, εφόσον $\tau \restriction_{\mathcal{D}_1} = \lambda$ και $\lambda \circ a_1 = a_2 \circ \lambda$, ο τ σέβεται τους a_1, a_2 οπότε ταυτίζονται(μέσω του τ) στο αφηρημένο επίπεδο ορίζοντας έναν $*$-αυτομορφισμό $a(X, \phi)$ της $\mathcal{D} = P(X, \phi) \cap P(X, \phi)^*$.

Πόρισμα 2.3.4. *Έστω (X_1, ϕ_1) και (X_2, ϕ_2) τοπολογικά δυναμικά συστήματα τύπου 1 τέτοια ώστε να υπάρχει ομοιομορφισμός $h : X_1 \longrightarrow X_2$ που να ικανοποιεί την $h\circ\phi_2 = \phi_1\circ h$. Τότε η $P(X_1, \phi_1)$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με την $P(X_2, \phi_2)$.*

Απόδειξη. Έστω h όπως πάνω και για $i = 1, 2$ τα $\mathcal{D}_i, a_i, U_i, \Phi_i, \rho_i$ να είναι αυτά που επάγει το (X_i, ϕ_i, m_i) όπου τα m_i επιλέχθηκαν συμβατά με τα (X_i, ϕ_i). Εφαρμόζουμε το θεώρημα 2.3.3 για $\lambda : L_f \mapsto L_{f\circ h}$. □

Το βασικό θεώρημα που θέλουμε να δείξουμε σε αυτήν την ενότητα είναι χοντρικά ότι στην περίπτωση που τα $(X_1, \phi_1), (X_2, \phi_2)$ επιδέχονται συμβατά εργοδικά μέτρα οι άλγεβρες $P(X_1, \phi_1), P(X_2, \phi_2)$ είναι ισόμορφες αν και μόνο αν τα $(X_1, \phi_1), (X_2, \phi_2)$ είναι συζυγή. Παρατηρήστε ότι την αντίστροφη κατεύθυνση την καλύπτει το πόρισμα 2.3.4. Για τεχνικούς λόγους θα χρειαστεί να αναπαραστήσουμε την $P(X, \phi)$ κατάλληλα σε κάποια άλγεβρα τελεστών έτσι ώστε η von Neumann άλγεβρα που παράγει να είναι finite. Αυτό θα το κάνουμε για να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία των subdiagonal algebras στην οποία θα αναφερθούμε παρακάτω. Συγκεκριμένα σε αυτήν την ενότητα θα λέμε ότι ένας $\tau : P(X, \phi) \longrightarrow B(H)$ είναι αναπαράσταση σε finite von Neumann algebra αν ο τ είναι ένας ένα προς ένα ομομορφισμός, ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, το $P_2 = \tau(P(X, \phi))$ είναι norm κλειστό και υπάρχουν $\mathcal{D}_2 \subseteq P_2$ αβελιανή C^*-άλγεβρα και $U_2 \in B(H)$ ορθομοναδιαίος τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής

i) Η $\mathcal{D}_2$ έχει τετριμμένο πυρήνα.

ii) $U_2 \mathcal{D}_2 U_2^{-1} = \mathcal{D}_2$ και οι μη μηδενικές δυνάμεις του $a_2 : T \mapsto U_2 T U_2^{-1}$ είναι εργοδικοί $*$-αυτομορφισμοί που δρουν ελεύθερα.

iii) Η Banach άλγεβρα που παράγει το $\{DU_2^n \in B(H) : n \in \{0, 1, ...\}$ και $D \in \mathcal{D}_2\}$ είναι η P_2.

iv) Η von Naumann άλγεβρα που παράγει η P_2 είναι πεπερασμένη.

Αν $\tau, H, \mathcal{D}_2, U_2$ όπως πιο πάνω θα λέμε ότι το $(\tau, H, \mathcal{D}_2, U_2)$ είναι ένα σύστημα για τον τ. Έστω m μέτρο συμβατό με το (X, ϕ), $\mathcal{D}$ η C^*-άλγεβρα που επάγεται από το (X, ϕ, m) και $a : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ ο $*$-αυτομορφισμός που επάγει το (X, ϕ, m). Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι να θεωρηθεί μία τυχούσα αναπαράσταση σε finite von Neumann algebra $\tau : P(X, \phi) \longrightarrow B(H)$ και να δειχθεί ότι τα $(\mathcal{D}_2, a_2), (\mathcal{D}, a)$ είναι συζυγή και ύστερα να δειχθεί ότι υπάρχει πάντα μια τέτοια τ. Έτσι τα δύο βασικά θεωρήματα στα οποία θα στηριχθεί η απόδειξη (του κεντρικού θεωρήματος της ενότητας αυτής) είναι τα παρακάτω.

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω (X, ϕ) τοπολογικό δυναμικό σύστημα τύπου 1, m συμβατό με το (X, ϕ) μέτρο, $\mathcal{D}$ η C^*-άλγεβρα και $a : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ ο $*$-αυτομορφισμός της $\mathcal{D}$ που επάγονται από το (X, ϕ, m). Ακόμη έστω $\tau : P(X, \phi) \longrightarrow B(H)$ αναπαράσταση σε finite von Neumann algebra και $\mathcal{D}_2, a_2$ όπως πιο πάνω. Τότε υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\lambda : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_2$ τέτοιος ώστε $\lambda \circ a = a_2 \circ \lambda$.*

Θεώρημα 2.3.6. *Έστω (X, ϕ) τοπολογικό δυναμικό σύστημα τύπου 1. Υπάρχει αναπαράσταση $\tau : P(X, \phi) \longrightarrow B(H)$ σε finite von Neumann algebra.*

Στις επόμενες παραγράφους θα κατευθυνθούμε προς την απόδειξη του θεωρήματος 2.3.5. Έστω λοιπόν (X, ϕ) τοπολογικό δυναμικό σύστημα τύπου 1 και m συμβατό με το (X, ϕ) μέτρο. Έτσι θα θεωρήσουμε μια αναπαράσταση σε finite von Neumann algebra $\tau : P(X, \phi) \longrightarrow B(H)$. Θα σταθεροποιήσουμε $P_2 = \tau(P(X, \phi))$ και κάποια $H, \mathcal{D}_2, U_2, a_2$ όπως στον ορισμό της αναπαράστασης σε finite von Neumann algebra. Ακόμη $\mathcal{D}, a, U, \Phi, \rho$ θα είναι αυτά που επάγονται από το (X, ϕ, m). Τέλος, έστω R η πεπερασμένη von Neumann άλγεβρα που παράγει η P_2. Τώρα, χωρίς να επεκταθούμε πολύ θα αναφέρουμε κάποια στοιχεία από την θεωρία των subdiagonal algebras τα οποία είναι απαραίτητα για να φτάσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 2.3.5. Αρχικά αναφέρουμε ότι από ([5], σ.98), δεδομένου ότι η R είναι πεπερασμένη και ο H διαχωρίσιμος, υπάρχει faithful normal trace $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{C}$ με $\varphi(I) = 1$.

Ορισμός 2.3.7. *Έστω M von Neumann άλγεβρα και N von Neumann υπάλγεβρα της M. Τότε μια θετική γραμμική απεικόνιση $E : M \longrightarrow N$ λέγεται expectation αν $E(I) = I$ και $E(AX) = AE(X)$ για κάθε $(A, X) \in N \times M$.*

Από το παράδειγμα 3 του 6.1.3 στο [3] υπάρχει faithful normal expectation $\Phi_2 : R \longrightarrow \mathcal{D}_2''$ τέτοια ώστε $\varphi(\Phi_2(T)D) = \varphi(TD)$ για κάθε $(T, D) \in R \times \mathcal{D}_2''$.

Ορισμός 2.3.8. *Έστω M von Neumann άλγεβρα, N von Neumann υπάλγεβρα της M και $E : M \longrightarrow N$ faithful normal exectation. Τότε μια υπάλγεβρα Γ της M θα λέγεται subdiagonal (ως προς την E) αν*

i) Η $\Gamma \cap \Gamma^*$ έχει τετριμμένο πυρήνα

ii) Το $\Gamma + \Gamma^*$ είναι πυκνό στην R ως προς την ultraweak τοπολογία.

iii) Η $E \restriction_\Gamma$ είναι ομομορφισμός από την Γ στην $\Gamma \cap \Gamma^*$

Στο ([3], θ. 2.2.1) αναφέρεται ότι κάθε subdiagonal άλγεβρα M της R περιέχεται σε μία μεγιστική (στην R) subdiagonal άλγεβρα και ότι αυτή είναι η μεγαλύτερη υπάλγεβρα της R που περιέχει την M και στην οποία αν περιοριστεί η Φ_2 είναι πολλαπλασιαστική. Πριν προχωρήσουμε να αναφέρουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ισχύει $\Phi_2(U_2^n) = 0$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $\Phi_2(U_2^n) \neq 0$ στοχεύοντας σε άτοπο. Έστω $P \in \mathcal{D}_2''$ (λήμμα 1.2.18) η προβολή στην κλειστή θήκη του συνόλου τιμών του $\Phi_2(U_2^n)$ και $0 \neq Q \leq P$ προβολή τέτοια ώστε $U_2^n Q U_2^{-n} \perp Q$ που μας παρέχει η ελεύθερη δράση του $A \mapsto U_2^n A U_2^{-n}$. Τότε

$$\begin{aligned} Q\Phi_2(U_2^n) =& Q^2\Phi_2(U_2^n) = Q\Phi_2(U_2^n)Q = Q\Phi_2(U_2^n Q) = Q\Phi_2(U_2^n Q U_2^{-n} U_2^n) \\ =& Q U_2^n Q U_2^{-n} \Phi_2(U_2^n) = 0 \end{aligned}$$

άρα $Q\Phi_2(U_2^n)H = \{0\}$ αλλά $QH \subseteq PH = \overline{\Phi_2(U_2^n)H}$ άρα $QH = QQH \subseteq Q\overline{\Phi_2(U_2^n)H} = \{0\}$ το οποίο είναι άτοπο από $Q \neq 0$.

Από το θεώρημα 5.1.2 του [3] προκύπτει το εξής.

Πρόταση 2.3.9. *Η P_2 είναι subdiagonal υπάλγεβρα της R ως προς την Φ_2. Η $\overline{P_2}^{u.w.}$ είναι maximal subdiagonal υπάλγεβρα της R ως προς την Φ_2.*

Παρατήρηση: Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι από το ([3], πορ. 2.1.5) ισχύει ότι $\overline{P_2}^{u.w.} \cap (\overline{P_2}^{u.w.})^* = \mathcal{D}_2''$.

Θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω τεχνικό λήμμα που προκύπτει από το ([4], θ. 2.4).

Λήμμα 2.3.10. *Έστω G μια διακριτή amenable ομάδα και $x \mapsto T_x$ μια ομοιόμορφα φραγμένη αναπαράσταση της G στην R. Τότε υπάρχει υπάρχει αντιστρέψιμο στοιχείο A της $B(H)$ τέτοιο ώστε $A, A^{-1} \in \overline{P_2}^{u.w.}$ και η $x \mapsto AT_xA^{-1}$ είναι ορθομοναδιαία αναπαράσταση της G.*

Πόρισμα 2.3.11. *Έστω G μια διακριτή amenable ομάδα και $x \mapsto T_x$ μια ομοιόμορφα φραγμένη αναπαράσταση της G στην R. Τότε υπάρχει $A \in \overline{P_2}^{u.w.} \cap (\overline{P_2}^{u.w.})^{-1}$ τέτοιο ώστε η $x \mapsto AT_xA^{-1}$ να είναι ορθομοναδιαία αναπαράσταση στην $\mathcal{D}_2''$.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \overline{P_2}^{u.w.} \cap (\overline{P_2}^{u.w.})^{-1}$ τέτοιο ώστε ο AT_xA^{-1} να είναι ορθομοναδιαίος για κάθε $x \in G$. Για κάθε $x \in G$ ισχύει ότι $AT_xA^{-1} \in \overline{P_2}^{u.w.}$ και, εφόσον ο AT_xA^{-1} είναι ορθομοναδιαίος, ότι $(AT_xA^{-1})^* = (AT_xA^{-1})^{-1} = AT_{x^{-1}}A^{-1} \in \overline{P_2}^{u.w.}$ άρα $AT_xA^{-1} \in \overline{P_2}^{u.w.} \cap (\overline{P_2}^{u.w.})^* = \mathcal{D}_2''$. □

Πρόταση 2.3.12. *Έστω $\mathcal{F}_n = \{f \in C_0(X) : 0 \leq f \leq 1 \text{ και } f \cdot (f \circ \phi^n) = 0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Ισχύει ότι $\overline{\text{span}\mathcal{F}_n} = C_0(X)$.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Παρατηρήστε ότι η συνθήκη $f \cdot (f \circ \phi^n) = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\phi^{-n}(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) \cap \{x \in X : f(x) \neq 0\} = \emptyset$. Για κάθε πραγματική $f \in C_0(X)$ θέτουμε $f_+, f_- \in C_0(X)$ με

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι $f_+, f_- \in C_0(X)$. Το span$\mathcal{F}_n$ είναι ιδεώδες και άρα υπάλγεβρα της $C_0(X)$. Πράγματι αν $f \in C_0(X)\backslash\{0\}$ και $(r_1, h_1), ..., (r_m, h_m) \in \mathbb{C} \times \mathcal{F}_n$ τότε

$$\begin{aligned}
f\sum_{\kappa=0}^{m} r_\kappa h_\kappa &= (Re(f)_+ + Re(f)_- + Im(f)_+ i + Im(f)_- i)\sum_{\kappa=0}^{m} r_\kappa h_\kappa \\
&= Re(f)_+ \sum_{\kappa=0}^{m} r_\kappa h_\kappa + Re(f)_- \sum_{\kappa=0}^{m} r_\kappa h_\kappa + Im(f)_+ i \sum_{\kappa=0}^{m} r_\kappa h_\kappa + Im(f)_- i \sum_{\kappa=0}^{m} r_\kappa h_\kappa \\
&= \sum_{\kappa=0}^{m} ||f||_\infty r_\kappa \left(\frac{h_\kappa Re(f)_+}{||f||_\infty}\right) + \sum_{\kappa=0}^{m} -||f||_\infty r_\kappa \left(\frac{-h_\kappa Re(f)_-}{||f||_\infty}\right) \\
&\quad + \sum_{\kappa=0}^{m} i||f||_\infty r_\kappa \left(\frac{h_\kappa Im(f)_+}{||f||_\infty}\right) + \sum_{\kappa=0}^{m} -i||f||_\infty r_\kappa \left(\frac{-h_\kappa Im(f)_-}{||f||_\infty}\right)
\end{aligned}$$

το οποίο ανήκει στο span$\mathcal{F}_n$ γιατί οι συναρτήσεις $h_\kappa Re(f)_+/||f||_\infty$, $-h_\kappa Re(f)_-/||f||_\infty$, $h_\kappa Im(f)_+/||f||_\infty$ και $-h_\kappa Im(f)_-/||f||_\infty$ ανήκουν στο $\mathcal{F}_n$. Η άλγεβρα span$\mathcal{F}_n$ είναι προφανώς αυτοσυζυγής. Έτσι το ζητούμενο θα προκύψει από το θεώρημα Stone-Weierstrass εφόσον δείξουμε ότι η span$\mathcal{F}_n$ διαχωρίζει τα σημεία και δεν μηδενίζεται πουθενά. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή γειτονιά V του x τέτοια ώστε $\phi^{-n}(V) \cap V = \emptyset$ και $\overline{V}$ συμπαγές. Έστω U ανοικτή γειτονιά του $\phi^{-n}(x)$ τέτοια ώστε $x \notin \overline{U}$ και $\overline{U}$ συμπαγές. Τέτοιο U υπάρχει γιατί, από το iii) του ορισμού του τοπολογικού δυναμικού συστήματος τύπου 1, ισχύει $\phi^{-n}(x) \neq x$. Έστω $V = \phi(U)\backslash\overline{U}$ τότε από $x \notin \overline{U}$ και $\phi^{-n}(x) \in U$ έχουμε ότι $x \in \phi^n(U)\backslash\overline{U} = V$ και $\phi^{-n}(V) \cap V = \phi^{-n}(\phi^n(U)\backslash\overline{U}) \cap (\phi^n(U)\backslash\overline{U}) = (U\backslash\phi^{-n}(\overline{U})) \cap (\phi^n(U)\backslash\overline{U}) = \emptyset$ ενώ τέλος $V = \phi^n(U)\backslash\overline{U} \subseteq \phi^n(\overline{U})\backslash\overline{U} \subseteq \phi^n(\overline{U})$ το οποίο είναι συμπαγές άρα $\overline{V}$ συμπαγές. Έτσι η V είναι όπως ζητήθηκε. Αν x και V όπως πάνω από το λήμμα του Uryshon υπάρχει $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $0 \leq f \leq 1$,$f(x) = 1$ και $f(X\backslash V) = \{0\}$ άρα $f \in C_0(X)$ επομένως η span$\mathcal{F}_n$ δεν μηδενίζεται πουθενά. Τώρα αν $x \neq y$ μπορούμε να επιλέξουμε μια γειτονιά V του x τέτοια ώστε $y \notin V$ παίρνοντας τομή με μια οποιαδήποτε ανοικτή γειτονιά U του x με $y \notin V$ οπότε αν f είναι η συνάρτηση που μας δίνει το λήμμα του Uryshon όπως πιο πάνω τότε $1 = f(x) \neq f(y) = 0$ άρα η span$\mathcal{F}_n$ διαχωρίζει τα σημεία. □

Πρόταση 2.3.13. *Η $\mathcal{D}$ είναι maximal abelian στην $P(X, \phi)$.*

Απόδειξη. Έστω $T \in P(X, \phi) \cap \mathcal{D}'$. Αρκεί να δείξω ότι $T = \Phi(T)$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ και $f \in \mathcal{F}_n$ παρατηρούμε ότι $\sqrt{f} \in \mathcal{F}_n$ και άρα

$$\begin{aligned}
\Phi(TU^n)L_f =& \Phi\left(TU^n L_{\sqrt{f}}\right) L_{\sqrt{f}} = \Phi\left(TL_{\sqrt{f}\circ\phi^n} U^n\right) L_{\sqrt{f}} = L_{\sqrt{f}\circ\phi^n} \Phi\left(TU^n\right) L_{\sqrt{f}} \\
=& \Phi\left(TU^n\right) L_{\sqrt{f}\circ\phi^n} L_{\sqrt{f}} = 0
\end{aligned}$$

Έτσι από πρόταση 2.3.12 έχουμε $\Phi(TU^n)L_g = 0$ για κάθε $g \in C_0(X)$ οπότε διαλέγοντας g τέτοιο ώστε $L_g = \Phi(TU^n)^*$ παίρνουμε ότι $\Phi(TU^n) = 0$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν $A_{-n}, ..., A_n \in \mathcal{D}$ τότε

$$\Phi\left((T-\Phi(T))\sum_{i=-n}^{n} A_i U^i\right) = \Phi\left(\sum_{i=-n}^{n}(T-\Phi(T))A_i U^i\right) = \sum_{i=-n}^{n}\Phi\left((T-\Phi(T))A_i U^i\right)$$
$$= \sum_{i=-n}^{n}\Phi\left((T-\Phi(T))U^i\right)a^{-i}(A_i) = \sum_{i=-n}^{n}\left(\Phi(TU^i)-\Phi(\Phi(T)U^i)\right)a^{-i}(A_i)$$
$$= \sum_{i=-n}^{n}\left(\Phi(TU^i)-\Phi(T)\Phi(U^i)\right)a^{-i}(A_i) = 0$$

και άρα $\Phi((T-\Phi(T))S) = 0$ για κάθε $S \in B(X, \phi)$ οπότε $\Phi((T-\Phi(T))(T-\Phi(T))^*) = 0 \Rightarrow T = \Phi(T)$. □

Λήμμα 2.3.14. *Έστω H χώρος Hilbert και $M \subseteq B(H)$ αυτοσυζυγής υπάλγεβρα με τετριμμένο πυρήνα. Αν $e \in B(H)$ με $\forall A \in M : Ae = eA = A$ τότε $e = I$.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι ο κλειστός υπόχωρος που παράγει το $K = \{A\xi \in H : A \in M \text{ και } \xi \in H\}$ είναι ο H. Έστω, στοχεύοντας σε άτοπο, ότι $K \neq H$ οπότε υπάρχει $\xi \in H \backslash \{0\}$ με $\xi \perp K$ άρα εφόσον η M είναι αυτοσυζυγής ισχύει

$$\forall A \in M : \forall h \in H : \langle \xi, A^* h\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall A \in M : \forall h \in H : \langle A\xi, h\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall A \in M : A\xi = 0$$

το οποίο είναι άτοπο εφόσον η M έχει τετριμμένο πυρήνα άρα $K = H$. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη παρατηρώντας ότι από τον ορισμό του K και το $\forall (A, \xi) \in M \times H : eA\xi = A\xi$ προκύπτει ότι $\forall \xi \in K : e\xi = \xi$ οπότε από το $K = H$ έχουμε ότι $e = I$. □

Λήμμα 2.3.15. *Αν H χώρος Hilbert και $M \subseteq B(H)$ Banach άλγεβρα (C^*-άλγεβρα) τότε ο διανυσματικός χώρος $M + \{\lambda I\}$ όπου $\{\lambda I\} = \{\lambda I \in B(H) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ είναι Banach άλγεβρα (C^*-άλγεβρα).*

Απόδειξη. Αν $I \in M$ τότε $M + \{\lambda I\} = M$. Έστω $I \notin M$. Ελέγχεται εύκολα ότι το $M + \{\lambda\}$ είναι (αυτοσυζυγής) υπάλγεβρα της $B(H)$ και η πληρότητα έπεται από το ότι ο M είναι πλήρης υπόχωρος του $M + \{\lambda I\}$ συνδιάστασης ένα. □

Παρατήρηση: Αν M όπως στο πάνω λήμμα και $I \notin M$ τότε κάθε $T \in M + \{\lambda I\}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $A + \lambda I$ όπου $A \in M$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Πρόταση 2.3.16. *Υπάρχει $C \in \overline{P_2}^{u.w.}$ τέτοιος ώστε $C^{-1} \in \overline{P_2}^{u.w.}$ και $C\tau(\mathcal{D})C^{-1} \subseteq \mathcal{D}_2''$.*

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι η C^*-άλγεβρα $\mathcal{D} + \{\lambda I\}$ περιέχεται και είναι maximal abelian στην $P(X,\phi) + \{\lambda I\}$. Πράγματι αν $(T,\lambda) \in P(X,\phi) \times \mathbb{C}$ και $T + \lambda I \in (\mathcal{D} + \lambda I)'$ τότε για κάθε $A \in \mathcal{D}$ ισχύει

$$(T + \lambda I)A = A(T + \lambda I) \Rightarrow TA + \lambda A = AT + \lambda A \Rightarrow TA = AT$$

άρα $T \in \mathcal{D}' \cap P(X,\phi)$ οπότε από πρόταση 2.3.13 $T \in \mathcal{D} \Rightarrow T + \lambda I \in \mathcal{D} + \{\lambda I\}$. Αν $I \notin P(X,\phi)$ τότε από την παραπάνω παρατήρηση κάθε στοιχείο της $P(X,\phi) + \{\lambda I\}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $A + \lambda I$ με $(A,\lambda) \in P(X,\phi) \times \mathbb{C}$ έτσι ορίζεται η απεικόνιση $\overline{\tau} : P(X,\phi) + \{\lambda I\} \longrightarrow B(H)$ με

$$\overline{\tau}(A + \lambda I) = \tau(A) + \lambda I \qquad \forall (A,\lambda) \in P(X,\phi) \times \mathbb{C}$$

Αν $I \in P(X,\phi)$ τότε θέτω $\overline{\tau} = \tau$. Σε κάθε περίπτωση ορίσαμε $\overline{\tau} : P(X,\phi) + \{\lambda I\} \longrightarrow B(H)$ και ισχύει $\overline{\tau}(A + \lambda I) = \tau(A) + \lambda I$ για κάθε $(A,\lambda) \in P(X,\phi) \times \mathbb{C}$. Ελέγχεται εύκολα ότι ο $\overline{\tau}$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών και θα αποδείξουμε ότι είναι ένα προς ένα. Έστω $(A,\lambda), (B,\mu) \in P(X,\phi) \times \mathbb{C}$ και

$$\overline{\tau}(A + \lambda I) = \tau(A) + \lambda I = \tau(B) + \mu I = \overline{\tau}(B + \mu I)$$

Αν $\lambda = \mu$ τότε $A + \lambda I = B + \mu I$ επειδή ο τ είναι ένα προς ένα. Έστω λοιπόν ότι $\lambda \neq \mu$ οπότε

$$\begin{aligned}
\tau(A) + \lambda I = \tau(B) + \mu I \Rightarrow & \tau\left(\frac{A - B}{\mu - \lambda}\right) = I \\
& \Rightarrow \forall\, \Gamma \in \mathcal{D} : \tau(\Gamma)\tau\left(\frac{A - B}{\mu - \lambda}\right) = \tau\left(\frac{A - B}{\mu - \lambda}\right)\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma) \\
& \Rightarrow \forall\, \Gamma \in \mathcal{D} : \tau\left(\Gamma\frac{A - B}{\mu - \lambda}\right) = \tau\left(\frac{A - B}{\mu - \lambda}\Gamma\right) = \tau(\Gamma) \\
& \Rightarrow \forall\, \Gamma \in \mathcal{D} : \Gamma\frac{A - B}{\mu - \lambda} = \frac{A - B}{\mu - \lambda}\Gamma = \Gamma
\end{aligned}$$

οπότε από λήμμα 2.3.14 $I = (A - B)/(\mu - \lambda) \in P(X,\phi)$ άρα $\overline{\tau} = \tau$ οπότε ο $\overline{\tau}$ είναι ένα προς ένα. Έτσι έχουμε ότι η $\overline{\tau}(\mathcal{D} + \{\lambda I\})$ είναι maximal abelian στην $\overline{\tau}(P(X,\phi) + \{\lambda I\}) = P_2 + \{\lambda I\}$ οπότε η $\overline{\tau}(\mathcal{D} + \{\lambda I\})$ είναι norm κλειστή. Ακόμη η $\mathcal{D} + \{\lambda I\}$ είναι ημιαπλή ως μεταθετική C^*-άλγεβρα οπότε και η $\overline{\tau}(\mathcal{D} + \{\lambda I\})$ είναι ημιαπλή άρα, από λήμμα 1.1.33 ο $\overline{\tau}$ είναι φραγμένος. Έστω G η ομάδα των ορθομοναδιαίων τελεστών της $\mathcal{D} + \{\lambda I\}$. Από $I \in \mathcal{D}_2'' \subseteq \overline{P_2}^{u.w.}$ έχουμε ότι $\overline{\tau}(P(X,\phi) + \{\lambda I\}) = P_2 + \{\lambda I\} \subseteq \overline{P_2}^{u.w.}$ άρα ο $\overline{\tau} \restriction_G$ είναι μια φραγμένη αναπαράσταση της G στην $\overline{P_2}^{u.w.}$ άρα από πόρισμα 2.3.11 υπάρχει $C \in \overline{P_2}^{u.w.}$ με $C^{-1} \in \overline{P_2}^{u.w.}$ τέτοιος ώστε $C\overline{\tau}(G)C^{-1} \subseteq \overline{P_2}^{u.w.} \cap (\overline{P_2}^{u.w.})^* = \mathcal{D}_2''$ αλλά από 1.1.27 η G παράγει την $\mathcal{D} + \{\lambda I\}$ ως διανυσματικό χώρο και άρα $C\overline{\tau}(\mathcal{D} + \{\lambda I\})C^{-1} \subseteq \mathcal{D}_2''$ οπότε $C\tau(\mathcal{D})C^{-1} \subseteq \mathcal{D}_2''$. □

Σταθεροποιούμε C όπως στην πρόταση 2.3.16. Από δω και στο εξής θα ονομάζουμε σ τον ομομορφισμό αλγεβρών $\sigma : P(X,\phi) \longrightarrow B(H)$ με $\forall T \in P(X,\phi) : \sigma(T) = C\tau(T)C^{-1}$. Παρατηρήστε ότι $\sigma(P(X,\phi)) \subseteq \overline{P_2}^{u.w.}$ και φυσικά από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}_2''$.

Λήμμα 2.3.17. *i) Έστω $T \in P(X,\phi)$ τέτοιο ώστε $\Phi(TU^{-i}) = 0$ για κάθε $i \in \{0,...,\kappa-1\}$. Τότε $T \in P(X,\phi)U^\kappa \cap U^\kappa P(X,\phi)$.*

ii) Έστω $T \in \overline{P_2}^{u.w.}$ τέτοιο ώστε $\Phi_2(TU_2^{-i}) = 0$ για κάθε $i \in \{0,...,\kappa-1\}$. Τότε $T \in U_2^\kappa \overline{P_2}^{u.w.} \cap \overline{P_2}^{u.w.} U_2^\kappa$.

iii) $\overline{P_2}^{u.w.} U_2 = U_2 \overline{P_2}^{u.w.}$

Απόδειξη. i) Έστω

$$P_n \in \left\{ \sum_{i=0}^{m} A_i U^i \in B(L^2(m)) : A_0,...,A_m \in \mathcal{D} \right\}$$

με $P_n \to T$ οπότε $P_n - \sum_{i=0}^{\kappa-1} \Phi(P_n U^{-i})U^i \to T - \sum_{i=0}^{\kappa-1} \Phi(TU^{-i})U^i = T$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $A_0,...,A_m \in \mathcal{D}$ (υποθέτουμε ότι $m \geq \kappa - 1$) τέτοια ώστε

$$P_n = \sum_{i=0}^{m} A_i U^i$$

άρα

$$P_n - \sum_{i=0}^{\kappa-1} \Phi(P_n U^{-i})U^i = \sum_{i=0}^{m} A_i U^i - \sum_{i=0}^{\kappa-1} A_i U^i = \sum_{i=\kappa}^{m} A_i U^i = \left(\sum_{i=0}^{m-\kappa} A_{i+\kappa} U^i \right) U^\kappa$$

και

$$P_n - \sum_{i=0}^{\kappa-1} \Phi(P_n U^{-i})U^i = \sum_{i=\kappa}^{m} A_i U^i = \sum_{i=\kappa}^{m} U^i a^{-i}(A_i) = U^\kappa \left(\sum_{i=0}^{m-\kappa} U^i a^{-i-\kappa}(A_{i+\kappa}) \right)$$

ισότητες από τις οποίες προκύπτει ότι $P_n - \Phi(P_n) \in P(X,\phi)U^\kappa \cap U^\kappa P(X,\phi)$ και άρα, εφόσον το σύνολο αυτό είναι norm-κλειστό, $T \in P(X,\phi)U^\kappa \cap U^\kappa P(X,\phi)$.

ii) Η απόδειξη είναι ίδια με αυτή του i) δεδομένου ότι $\Phi_2(U_2) = 0$, η Φ_2 είναι normal και του ότι το $U_2^\kappa \overline{P_2}^{u.w.} \cap \overline{P_2}^{u.w.} U_2^\kappa$ είναι κλειστό ως προς την ultraweak τοπολογία.

iii) Εφόσον η Φ_2 είναι πολλαπλασιαστική στην $\overline{P_2}^{u.w.}$ και $\Phi_2(U_2) = 0$ έχουμε ότι

$$T \in \overline{P_2}^{u.w.} U_2 \Leftrightarrow \Phi_2(T) = 0 \Leftrightarrow T \in U_2 \overline{P_2}^{u.w.}$$

δηλαδή ότι $\overline{P_2}^{u.w.} U_2 = U_2 \overline{P_2}^{u.w.}$. □

Από δω και στο εξής η σχέση $\overline{P_2}^{u.w.}U_2 = U_2\overline{P_2}^{u.w.}$ θα θεωρείται δεδομένη και θα χρησιμοποιείται σιωπηλά.

Λήμμα 2.3.18.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_2^n\overline{P_2}^{u.w.} = \{0\}$$

Απόδειξη. Έστω $S \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_2^n\overline{P_2}^{u.w.} = \{0\}$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $S_n \in \overline{P_2}^{u.w.}$ τέτοιο ώστε $S = U_2^n S_n$ άρα, εφόσον η Φ_2 είναι πολλαπλασιαστική στην $\overline{P_2}^{u.w.}$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\Phi_2(U_2^\kappa S) = \Phi_2\left(U_2^\kappa U_2^{|\kappa|+1}S_{|\kappa|+1}\right) = \Phi_2\left(U_2^{\kappa+|\kappa|+1}S_{|\kappa|+1}\right) = \Phi_2(U_2)^{\kappa+|\kappa|+1}\Phi_2(S_{|\kappa|+1}) = 0$$

άρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $A_{-m}, ..., A_m \in \mathcal{D}_2$

$$\Phi_2\left(\left(\sum_{i=-m}^{m} A_iU_2^i\right)S\right) = \sum_{i=-m}^{m}\Phi_2(A_iU_2^iS) = \sum_{i=-m}^{m}A_i\Phi_2(U_2^iS) = 0$$

Εφόσον το $\{DU_2^n \in B(H) : n \in \{0, 1, ...\}$ και $D \in \mathcal{D}_2\}$ παράγει την P_2 ως Banach άλγεβρα και $U_2\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2U_2$ όμοια όπως στην ενότητα 2.1 ισχύει ότι το

$$\left\{\sum_{i=0}^{m} A_iU_2^i \in B(H) : m \in \mathbb{N} \text{ και } A_0, ..., A_m \in \mathcal{D}_2\right\}$$

είναι norm πυκνό στην P_2 και άρα το

$$\left\{\sum_{i=-m}^{m} A_iU_2^i \in B(H) : m \in \mathbb{N} \text{ και } A_0, ..., A_m \in \mathcal{D}_2\right\}$$

είναι SOT πυκνό στην R εφόσον αυτή είναι η von Neumann άλγεβρα που παράγει η P_2. Έτσι από το θεώρημα πυκνότητας του Kaplansky και την πρόταση 1.2.9 το παραπάνω σύνολο είναι πυκνό στην R ως προς την ultraweak τοπολογία. Από τα παραπάνω και το γεγονός ότι η Φ_2 είναι normal προκύπτει ότι η για κάθε $Y \in R$ ισχύει $\Phi_2(YS) = 0$ άρα $\Phi_2(S^*S) = 0$ άρα, εφόσον η Φ_2 είναι faithful, $S = 0$. □

Θεώρημα 2.3.19. *Έστω $\mathcal{P} = \{D \in \mathcal{D} : 0 \leq D \leq 1$ και $a(D)D = 0\}$. Ο κλειστός διανυσματικός υπόχωρος που παράγει το $\cup\{\sigma(D)(H) \subseteq H : D \in \mathcal{P}\}$ είναι ο H.*

Απόδειξη. Έστω $E \in B(H)$ η προβολή στον κλειστό υπόχωρο του H που παράγεται από το $\cup\{\sigma(D)(H) \subseteq H : D \in \mathcal{P}\}$. Θέλοντας να δείξω ότι $E \in \sigma(\mathcal{D})''$ Θεωρώ τυχόν $T \in \sigma(\mathcal{D})'$ ώστε να δείξω ότι $ET = TE$. Εφόσον από 1.2.18 για κάθε $D \in \mathcal{D}$ υπάρχει $P_D \in \sigma(\mathcal{D})''$ έτσι ώστε $P_D(H) = \overline{\sigma(D)(H)}$ κάθε $h \in E(H)$ προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα από διανύσματα της μορφής $\sum_{i=0}^{n} P_i\xi_i$ όπου $P_i \in \sigma(\mathcal{D})''$ και $\xi_i \in H$ για κάθε $i \in \{0, ..., n\}$ οπότε από

$$T\left(\sum_{i=0}^{n} P_i\xi_i\right) = \sum_{i=0}^{n} P_i T\xi_i \in E(H)$$

συμπεραίνουμε ότι $T(E(H)) \subseteq E(H)$.

Έστω $h \in E(H)^{\perp}$ και για κάθε $D \in \mathcal{P}$ έστω $P_D \in \sigma(\mathcal{D})''$ όπως πιο πάνω, τότε $\forall D \in \mathcal{P} : P_D Th = TP_D h = T0 = 0 \Rightarrow \forall D \in \mathcal{P} : Th \in P_D(H)^{\perp} = \overline{\sigma(D)(H)}^{\perp}$ άρα $Th \in E(H)^{\perp}$. Έτσι δείξαμε ότι $T(E(H)^{\perp}) \subseteq E(H)^{\perp}$ άρα από αυτό, το $T(E(H)) \subseteq E(H)$ που δείχθηκε πιο πάνω και το λήμμα 1.2.17 έχουμε ότι $ET = TE$ όπως θέλαμε. Έτσι εφόσον $\sigma(\mathcal{D})'' \subseteq \mathcal{D}_2''$ η E είναι προβολή της $\mathcal{D}_2''$ και άρα από την εργοδικότητα του a_2 αν $U_2E = EU_2 \Rightarrow E = U_2EU_2^{-1}$ τότε $E = I$ το οποίο, από την κατασκευή του E, είναι το ζητούμενο.

Έστω $S \in \overline{P_2}^{u.w.}$, δίκτυο T_λ στοιχείων της $P(X, \phi)$, με $\tau(T_\lambda) \to C^{-1}SC \in \overline{P_2}^{u.w.}$ ως προς την ultraweak τοπολογία και $\Delta \in \sigma(P(X, \phi))'$ τότε εφόσον ο πολλαπλασιασμός με σταθερό τελεστή στην ultraweak τοπολογία είναι συνεχής ισχύει

$$\tau(T_\lambda) \to C^{-1}SC \Rightarrow C\tau(T_\lambda)C^{-1} \to S \Rightarrow \sigma(T_\lambda) \to S$$

και

$$\Delta S = \lim_{\lambda} \Delta\sigma(T_\lambda) = \lim_{\lambda} \sigma(T_\lambda)\Delta = S\Delta$$

όπου τα παραπάνω όρια είναι στην ultraweak τοπολογία. Τα παραπάνω δείχνουν ότι αν ένας τελεστής ανήκει στο $\sigma(P(X, \phi))'$ τότε ανήκει και στο $(\overline{P_2}^{u.w.})'$ και ιδιαίτερα μετατίθεται με το $U_2 \in \overline{P_2}^{u.w.}$. Έτσι τελικά αρκεί να δείξουμε ότι $E \in \sigma(P(X, \phi))'$. Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας ότι η E μετατίθεται με κάθε στοιχείο της μορφής $\sigma(AU^n)$ όπου $A \in \mathcal{D}$ και $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $D \in \mathcal{P}$ ισχύει

$$\sigma(AU^n)\sigma(D) = \sigma(AU^nD) = \sigma(a^n(D)AU^n) = \sigma \circ a^n(D)\sigma(AU^n)$$

όμως $a^n(D) \in \mathcal{P}$ άρα από την κατασκευή του E η σχέση αυτή μας δίνει ότι $\sigma(AU^n)(E(H)) \subseteq E(H)$. Αν πάρουμε το συζυγές της παραπάνω σχέσης, εφαρμόσουμε το λήμμα 1.1.30, και αντικαταστήσουμε το D με $a^{-n}(D) \in \mathcal{P}$ τότε έχουμε ότι για κάθε D ισχύει

$$\sigma \circ a^{-n}(D)\sigma(AU^n)^* = \sigma(AU^n)^*\sigma(D)$$

από το οποίο όπως πιο πάνω προκύπτει ότι $\sigma(AU^n)^*(E(H)) \subseteq E(H)$. Εφαρμόζοντας τώρα το λήμμα 1.2.17 έχουμε ότι $\sigma(AU^n)E = E\sigma(AU^n)$. Έστω τώρα $T \in P(X, \phi)$. Θέτουμε

$R_n = T - \sum_{i=0}^{n} \Phi(TU^{-i})U^i$ και παρατηρούμε ότι $R_n \in P(X,\phi)$, για κάθε $\kappa \in \{1,...,n\}$ $\Phi(R_nU^{-\kappa}) = \Phi(TU^{-\kappa}) - \Phi\left(\sum_{i=0}^{n} \Phi(TU^{-i})U^{i-\kappa}\right) = \Phi(TU^{-\kappa}) - \Phi(TU^{-\kappa}) = 0$ και $T = \sum_{i=0}^{n} \Phi(TU^{-i})U^i + R_n$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} E\sigma(T) - \sigma(T)E =& \sum_{i=0}^{n} E\sigma\left(\Phi(TU^{-i})U^i\right) + E\sigma(R_n) - \sum_{i=0}^{n} \sigma\left(\Phi(TU^{-i})U^i\right)E - \sigma(R_n)E \\ =& \sum_{i=0}^{n} \left[E\sigma\left(\Phi(TU^{-i})U^i\right) - \sigma\left(\Phi(TU^{-i})U^i\right)E\right] + E\sigma(R_n) - \sigma(R_n)E \\ =& E\sigma(R_n) - \sigma(R_n)E \end{aligned}$$

Από το i) του λήμματος 2.3.17 βλέπουμε ότι $R_n \in U^nP(X,\phi)$ ενώ αν δείξουμε ότι $E\sigma(R_n), \sigma(R_n)E \in U_2^n\overline{P_2}^{u.w.}$ τότε από το λήμμα 2.3.18 θα έχουμε ότι $E\sigma(T) - \sigma(T)E = 0 \Rightarrow E\sigma(T) = \sigma(T)E$ και η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί. θα δείξουμε επομένως ότι για κάθε $T' \in P(X,\phi)$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $E\sigma(U^nT'), \sigma(U^nT')E \in U_2^n\overline{P_2}^{u.w.}$. Θα δείξουμε ότι $E\sigma(U^nT') \in U_2^n\overline{P_2}^{u.w.}$ και όμοια αποδεικνύεται ότι $\sigma(U^nT')E \in U_2^n\overline{P_2}^{u.w.}$.

Εφόσον από το λήμμα 1.1.30 ο $\sigma\restriction_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_2''$ είναι $*$-ομομορφισμός η $\sigma(\mathcal{D})$ είναι C^*-άλγεβρα. Ακόμη για κάθε $D \in \mathcal{P}$ ισχύει $h \in E(H)^{\perp} \Rightarrow \forall x \in H : \langle h, \sigma(D)x\rangle = 0 \Rightarrow \forall x \in H : \langle \sigma(D)h, x\rangle = 0 \Rightarrow \sigma(D)h = 0$ και εφόσον από το λήμμα 2.3.12 ισχύει $\overline{\text{span}\mathcal{P}} = \mathcal{D}$ που σημαίνει ότι $\overline{\text{span}\sigma(\mathcal{P})} = \sigma(\mathcal{D})$ έχουμε ότι $\forall A \in \sigma(\mathcal{D}) : A(E(H)^{\perp}) = \{0\}$. Ακόμη από το $\overline{\text{span}\sigma(\mathcal{P})} = \sigma(\mathcal{D})$ συμπεραίνουμε ότι $\forall A \in \sigma(\mathcal{D}) : A(E(H)) \subseteq E(H)$. Από τα παραπάνω μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο $A \mapsto A\restriction_{E(H)}$ για $A \in \sigma(\mathcal{D})$ είναι ένας $*$-ισομορφισμός σε μια C^*-υπάλγεβρα της $B(E(H))$ η οποία έχει τετριμμένο πυρήνα. Επομένως ξέρουμε, από το θεώρημα πυκνότητας του kaplansky, ότι υπάρχει δίκτυο $D_\lambda \in \mathcal{D}$ με $\sigma(D_\lambda)\restriction_{E(H)} \xrightarrow{\text{SOT}} I_{E(H)}$ και $||\sigma(D_\lambda)\restriction_{E(H)}|| \leq 1$. Έτσι ισχύει ότι για κάθε $\xi \in H$

$$\begin{aligned} \sigma(D_\lambda)\xi =& \sigma(D_\lambda)(P_{E(H)}\xi + P_{E(H)^{\perp}}\xi) = \sigma(D_\lambda)\restriction_{E(H)}(P_{E(H)}\xi) + 0 \to I_{E(H)}(P_{E(H)}\xi) \\ =& P_{E(H)}\xi = E\xi \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} ||\sigma(D_\lambda)\xi|| =& ||\sigma(D_\lambda)(P_{E(H)}\xi + P_{E(H)^{\perp}}\xi)|| = ||\sigma(D_\lambda)\restriction_{E(H)}(P_{E(H)}\xi)|| \\ \leq& ||\sigma(D_\lambda)\restriction_{E(H)}|| \cdot ||P_{E(H)}|| \cdot ||\xi|| \leq ||\xi|| \end{aligned}$$

δηλαδή ότι $\sigma(D_\lambda) \xrightarrow{\text{SOT}} E$ και $||\sigma(D_\lambda)|| \leq 1$. Έτσι εφόσον ο πολλαπλασιασμός είναι SOT συνεχής στις μπάλες έχουμε ότι $\sigma(D_\lambda^n) = \sigma(D_\lambda)^n \xrightarrow{\text{SOT}} E^n = E$ και εφόσον $||\sigma(D_\lambda^n)|| \leq ||\sigma(D_\lambda)||^n \leq 1$ από λήμμα 1.2.9 ισχύει ότι $\sigma(D_\lambda^n) \xrightarrow{\text{u.w.}} E$ και άρα $E\sigma(D_\lambda^nU^nT') = E\sigma(D_\lambda^n)\sigma(U^nT') \xrightarrow{\text{u.w.}} EE^n\sigma(U^nT') = E\sigma(U^nT')$. Έτσι, δεδομένου ότι το $U^n\overline{P_2}^{u.w.}$ είναι κλειστό ως προς την ultraweak τοπολογία, αρκεί να δείξω ότι $E\sigma(D_\lambda^n U^n T') \in U^n \overline{P_2}^{u.w.}$ για το οποίο αρκεί να δείξω ότι $E\sigma(D_\lambda^n U^n) \in U^n \overline{P_2}^{u.w.}$.

$$\begin{aligned} E\sigma(D_\lambda^n U^n) &= E^n \sigma\left(D_\lambda U(U^{-1}D_\lambda U)U(U^{-2}D_\lambda U^2)U(U^{-3}D_\lambda U^3)U...U(U^{-n+1}D_\lambda U^{n-1})U\right) \\ &= E\sigma\left(D_\lambda U\right) E\sigma\left((U^{-1}D_\lambda U)U\right) E\sigma\left((U^{-2}D_\lambda U^2)U\right)...E\sigma\left((U^{-n+1}D_\lambda U^{n-1})U\right) \end{aligned}$$

Έτσι, παρατηρώντας ότι $\forall i \in \{0,...,n-1\} : U^{-i}D_\lambda U^i \in \mathcal{D}$, αρκεί να δείξω ότι $E\sigma(AU) \in U_2\overline{P_2}^{u.w.}$ για κάθε $A \in \mathcal{D}$. Πράγματι αν $D \in \mathcal{P}$ τότε $D^{1/2} \in \mathcal{P}$ και, εφόσον η Φ_2 είναι πολλαπλασιαστική στην $\overline{P_2}^{u.w.}$, ισχύει

$$\begin{aligned} \Phi_2 \circ \sigma(AU)\sigma(D) =& \Phi_2 \circ \sigma(AU)\sigma(D^{1/2})\sigma(D^{1/2}) = \Phi_2 \circ \sigma(AU)\Phi_2\left(\sigma(D^{1/2})\right)\sigma(D^{1/2}) \\ =& \Phi_2 \circ \sigma(AUD^{1/2})\sigma(D^{1/2}) = \sigma\left(a(D^{1/2})\right)\Phi_2 \circ \sigma(AU)\sigma(D^{1/2}) \\ =& \Phi_2 \circ \sigma(AU)\sigma\left(a(D^{1/2})D^{1/2}\right) = 0 \end{aligned}$$

οπότε $\Phi_2 \circ \sigma(AU)E = 0$. Έτσι έχουμε ότι

$$\Phi_2(E\sigma(AU)) = \Phi_2(E)\Phi_2 \circ \sigma(AU) = \Phi_2 \circ \sigma(AU)E = 0$$

άρα από το ii) του λήμματος 2.3.17 ισχύει ότι $E\sigma(AU) \in U_2\overline{P_2}^{u.w.}$. $\square$

Παρατηρήσεις: Στην παραπάνω απόδειξη δείχθηκε ότι $\Phi_2(\sigma(AU))E = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{P}$ και ότι $E = I$ άρα τελικά για $A \in \mathcal{D}$ ισχύει ότι $\Phi_2 \circ \sigma(AU) = 0$ και συνεπώς $\sigma(AU) \in \overline{P_2}^{u.w.}U_2$ από το ii) του λήμματος 2.3.17. Από το γεγονός ότι η Φ_2 είναι πολλαπλασιαστική στην $\overline{P_2}^{u.w.}$ προκύπτει ότι για κάθε $T \in P(X,\phi)$

$$\begin{aligned} \Phi_2 \circ \sigma(T) =& \Phi_2\left(C\tau(T)C^{-1}\right) = \Phi_2(C)\Phi_2 \circ \tau(T)\Phi_2(C^{-1}) = \Phi_2(C)\Phi_2(C^{-1})\Phi_2 \circ \tau(T) \\ =& \Phi_2(CC^{-1})\Phi_2 \circ \tau(T) = \Phi_2 \circ \tau(T) \end{aligned}$$

δηλαδή ότι $\Phi_2 \circ \sigma = \Phi_2 \circ \tau$. Τέλος εφόσον το

$$\left\{\sum_{i=0}^{m} A_i U_2^i \in B(H) : m \in \mathbb{N} \text{ και } A_0,...,A_m \in \mathcal{D}_2\right\}$$

είναι πυκνό στην P_2, όπως είπαμε και στην απόδειξη του λήμματος 2.3.18, και $\Phi_2(AU_2^n) = 0$ για κάθε $(n, A) \in \mathbb{N} \times \mathcal{D}_2$ ισχύει ότι $\Phi_2(P_2) \subseteq \mathcal{D}_2$ και φυσικά ισχύει $\Phi_2(P_2) \supseteq \mathcal{D}_2$ άρα $\Phi_2(P_2) = \mathcal{D}_2$. Έχοντας υπόψη τις παρατηρήσεις αυτές μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 2.3.20. *i) Για κάθε* $T \in P(X,\phi)$ *ισχύει* $\Phi_2 \circ \sigma(TU) = 0$

ii) $\Phi_2 \circ \sigma = \sigma \circ \Phi$

iii) $\sigma(\mathcal{D})=\mathcal{D}_2$

Απόδειξη. i) Έστω $D\in\mathcal{P}$ τότε

$$\begin{aligned}\Phi_2\circ\sigma(TU)\sigma(D)=&\Phi_2\circ\sigma(TU)\Phi_2(\sigma(D))=\Phi_2\left(\sigma(Ta(D)U)\right)=\Phi_2\left(\sigma(T)\sigma\left(a(D)U\right)\right)\\=&\Phi_2\left(\sigma(T)\sigma\left(a(D)U\right)\right)=\Phi_2\circ\sigma(T)\Phi_2\circ\sigma\left(a(D)U\right)=0\end{aligned}$$

άρα από θεώρημα 2.3.19 $\Phi_2\circ\sigma(TU)=0$

ii) Έστω $T\in P(X,\phi)$ τότε $\Phi(T-\Phi(T))=0$ άρα από το i) του λήμματος 2.3.17 υπάρχει $T'\in P(X,\phi)$ ώστε $T-\Phi(T)=T'U\Leftrightarrow T=\Phi(T)+T'U$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi_2\circ\sigma(T)=&\Phi_2\circ\sigma(\Phi(T)+T'U)=\Phi_2\circ\sigma(\Phi(T))+\Phi_2\circ\sigma(T'U)\overset{\text{i)}}{=}\Phi_2\circ\sigma(\Phi(T))\\ \overset{\sigma(\Phi(T))\in\mathcal{D}_2''}{=}&\sigma(\Phi(T))=\sigma\circ\Phi(T)\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{D})=&\sigma(\Phi(P(X,\phi)))=\sigma\circ\Phi(P(X,\phi))\overset{\text{ii)}}{=}\Phi_2\circ\sigma(P(X,\phi))=\Phi_2\circ\tau(P(X,\phi))\\=&\Phi_2(\tau(P(X,\phi)))=\Phi_2(P_2)=\mathcal{D}_2\end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.3.21. *Η $\mathcal{D}_2''$ είναι maximal abelian στην R.*

Απόδειξη. Έστω $T\in(\mathcal{D}_2'')'\cap R$. Αρκεί να δείξω ότι $\Phi_2(T)=T$. Αρχικά θα δείξω, με απαγωγή σε άτοπο, ότι αν $n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ τότε $\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2^n)=0$ οπότε υποθέτω ότι $\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2^n)\neq 0$. Έστω $P\in\mathcal{D}_2''$ (λήμμα 1.2.18) η προβολή στον $\overline{\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2^n)(H)}$ και $0\neq Q\leq P$ προβολή τέτοια ώστε $U_2^{-n}QU_2^n\perp Q$ που μας παρέχει η ελεύθερη δράση του $A\mapsto U_2^{-n}AU_2^n$ οπότε δεδομένου ότι $T\in(\mathcal{D}_2'')'\Rightarrow T-\Phi_2(T)\in(\mathcal{D}_2'')'$ και $Q\in\mathcal{D}_2''$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}Q\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2^n)=&Q^2\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2^n)=Q\Phi_2(Q(T-\Phi_2(T))U_2^n)\\=&Q\Phi_2((T-\Phi_2(T))QU_2^n)=Q\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2U_2^{-n}QU_2^n)\\=&Q\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2)U_2^{-n}QU_2^n=QU_2^{-n}QU_2^n\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2)\\=&0\end{aligned}$$

άρα $Q\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2^n)H=\{0\}$ αλλά $QH\subseteq PH=\overline{\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2^n)H}$ άρα $QH=QQH\subseteq Q\overline{\Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2^n)H}=\{0\}$ το οποίο είναι άτοπο από $Q\neq 0$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι αν $A_{-n},...,A_n \in \mathcal{D}_2''$ τότε

$$\begin{aligned}\Phi_2\left((T-\Phi_2(T))\left(\sum_{i=-n}^{n} A_i U_2^i\right)\right) &= \sum_{i=-n}^{n} \Phi_2((T-\Phi_2(T))A_i U_2^i) \\ &= \sum_{i=-n}^{n} A_i \Phi_2((T-\Phi_2(T))U_2^i) = 0\end{aligned}$$

αλλά όπως έχουμε αναφέρει και στην απόδειξη του λήμματος 2.3.18 το σύνολο

$$\left\{\sum_{i=-m}^{m} A_i U_2^i \in B(H) : m \in \mathbb{N} \text{ και } A_0,...,A_m \in \mathcal{D}_2\right\}$$

είναι πυκνό στην R ως προς την ultraweak τοπολογία οπότε, εφόσον η Φ_2 είναι normal, ισχύει ότι

$$\Phi_2((T-\Phi_2(T))S) = 0 \qquad \forall S \in R$$

Έτσι το ζητούμενο προκύπτει από το ότι η Φ_2 είναι failthful θέτοντας $S = (T-\Phi_2(T))^*$ στην παραπάνω σχέση. □

Λήμμα 2.3.22. *i)* $U_2 \in \overline{\sigma(P(X,\phi)U)}^{u.w.}$

ii) $\sigma(\mathcal{D}U) \subseteq \mathcal{D}_2''U_2$

Απόδειξη. i) Όπως έχουμε δει και στην απόδειξη του θεωρήματος 2.3.19 υπάρχει δίκτυο $T_\lambda \in P(X,\phi)$ τέτοιο ώστε $\sigma(T_\lambda) \to U_2$ ως προς την ultraweak τοπολογία και άρα δεδομένου ότι η Φ_2 είναι normal από $\sigma \circ \Phi = \Phi_2 \circ \sigma$ έχουμε

$$\sigma(T_\lambda - \Phi(T_\lambda)) = \sigma(T_\lambda) - \sigma \circ \Phi(T_\lambda) = \sigma(T_\lambda) - \Phi_2 \circ \sigma(T_\lambda) \to U_2 - \Phi_2(U_2) = U_2$$

όπου η σύγκλιση είναι στην ultraweak τοπολογία. Οπότε το ζητούμενο ισχύει εφόσον από το i) του λήμματος 2.3.17 $\Phi(T_\lambda - \Phi(T_\lambda)) = 0 \Rightarrow T_\lambda - \Phi(T_\lambda) \in P(X,\phi)U$.

ii) Έστω $D \in \mathcal{D}$. θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}\sigma(DU) \in \mathcal{D}_2''U_2 = U_2\mathcal{D}_2'' &\Leftrightarrow U_2^*\sigma(DU) \in \mathcal{D}_2'' = \overline{P_2}^{u.w.} \cap \left(\overline{P_2}^{u.w.}\right)^* \\ &\Leftrightarrow U_2^*\sigma(DU) \in \overline{P_2}^{u.w.} \text{ και } U_2^*\sigma(DU) \in \left(\overline{P_2}^{u.w.}\right)^* \\ &\Leftrightarrow \sigma(DU) \in \overline{P_2}^{u.w.}U_2 \text{ και } \sigma(DU)^*U_2 \in \overline{P_2}^{u.w.}\end{aligned}$$

Το $\sigma(DU) \in \overline{P_2}^{u.w.}U_2$ έχει καλυφθεί από τις παρατηρήσεις που ακολουθούν το θεώρημα 2.3.19 οπότε αρκεί να δείξω ότι $\sigma(DU)^*U_2 \in \overline{P_2}^{u.w.}$. Εφόσον τα θετικά στοιχεία της $\mathcal{D}$ την παράγουν ως διανυσματικό χώρο μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι ο D είναι θετικός και να θέσω $D^{1/2}$ την θετική του ρίζα. Από το i) υπάρχει δίκτυο $T_\lambda \in P(X,\phi)$ τέτοιο ώστε $\sigma(UT_\lambda) \to U_2$ ως προς την ultraweak τοπολογία. Έτσι έχουμε ότι $\sigma(DU)\sigma(UT_\lambda) \to \sigma(DU)U_2$ ως προς την ultraweak τοπολογία και

$$\begin{aligned}\sigma(DU)^*\sigma(UT_\lambda) =& \left(\sigma(D^{1/2})\sigma(D^{1/2}U)\right)^* \sigma(UT_\lambda)\\ =&\sigma(D^{1/2}U)^*\sigma(D^{1/2})\sigma(UT_\lambda) \qquad\qquad (\text{Τα } \sigma \text{ και } D \text{ είναι s.a.})\\ =&\sigma(D^{1/2}U)^*\sigma(D^{1/2}U)\sigma(T_\lambda)\end{aligned}$$

Οπότε αν $\sigma(D^{1/2})^*\sigma(D^{1/2}) \in \mathcal{D}_2''$ τότε $\sigma(DU)^*\sigma(UT_\lambda) \in \overline{P_2}^{u.w.}$ και εφόσον το $\overline{P_2}^{u.w.}$ είναι ultraweak κλειστό θα έχουμε ότι $\sigma(DU)^*U_2 \in \overline{P_2}^{u.w.}$ όπως ζητήσαμε. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι $\sigma(D^{1/2}U)^*\sigma(D^{1/2}U) \in \mathcal{D}_2''$. Έστω $\Delta = D^{1/2}$ τότε

$$\sigma(\Delta U)\sigma(E) = \sigma \circ a(E)\sigma(\Delta U) \qquad \forall E \in \mathcal{D}$$

οπότε παίρνοντας το συζυγές και αντικαθιστώντας το E με $a^{-1}(E^*)$ έχουμε

$$\sigma \circ a^{-1}(E)\sigma(\Delta U)^* = \sigma(\Delta U)^*\sigma(E) \qquad \forall E \in \mathcal{D}$$

από αυτές τις δύο σχέσεις έχουμε ότι

$$\sigma(\Delta U)^*\sigma(\Delta U)\sigma(E) = \sigma(E)\sigma(\Delta U)^*\sigma(\Delta U) \qquad \forall E \in \mathcal{D}$$

άρα από $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_2$ έχουμε ότι $\sigma(\Delta U)^*\sigma(\Delta U) \in \mathcal{D}_2' \cap R = (\mathcal{D}_2'')' \cap R$ άρα από πρόταση 2.3.21 ισχύει ότι $\sigma(\Delta U)^*\sigma(\Delta U) \in \mathcal{D}_2''$. □

Απόδειξη του θεωρήματος 2.3.5. Ξέρουμε ήδη ότι ο $\sigma \restriction_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_2$ είναι ένας $*$-ισομορφισμός C^*-αλγεβρών άρα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $E \in \mathcal{D}$ ισχύει $\sigma \circ a(E) - U_2\sigma(E)U_2^{-1} = 0$. Έστω τυχόν $D \in \mathcal{D}$ τότε από το ii) του λήμματος 2.3.22 υπάρχει $S \in \mathcal{D}_2''$ τέτοιο ώστε $\sigma(DU) = U_2S$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\sigma \circ a(E) - U_2\sigma(E)U_2^{-1}\right)\sigma(DU) =&\sigma(a(E)DU) - U_2\sigma(E)U_2^{-1}U_2S\\ =&\sigma(DUE) - U_2S\sigma(E) = \sigma(DU)\sigma(E) - \sigma(DU)\sigma(E)\\ =&0\end{aligned}$$

άρα αν $T_\lambda \in P(X,\phi)$ είναι δίκτυο τέτοιο ώστε $\sigma(UT_\lambda) \to U_2$ ως προς την ultraweak τοπολογία όπως μας παρέχει το i) του λήμματος 2.3.22 τότε

$$\begin{aligned}0 &= \left(\sigma \circ a(E) - U_2\sigma(E)U_2^{-1}\right)\sigma(DU)\sigma(T_\lambda)U_2^{-1}\\ &= \left(\sigma \circ a(E) - U_2\sigma(E)U_2^{-1}\right)\sigma(D)\sigma(UT_\lambda)U_2^{-1}\\ &\to \left(\sigma \circ a(E) - U_2\sigma(E)U_2^{-1}\right)\sigma(D)U_2U_2^{-1}\\ &= \left(\sigma \circ a(E) - U_2\sigma(E)U_2^{-1}\right)\sigma(D)\end{aligned}$$

όπου το όριο είναι στην ultraweak τοπολογία και άρα

$$\left(\sigma \circ a(E) - U_2 \sigma(E) U_2^{-1}\right) \sigma(D) = 0$$

Έτσι, εφόσον ο D ήταν τυχόντας τελεστής στην $\mathcal{D}$, από θεώρημα 2.3.19 έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 2.3.23. *Αν (X,ϕ) τοπολογικό δυναμικό σύστημα τύπου 1, m συμβατό με το (X,ϕ) μέτρο πιθανότητας και $\mathcal{D}, a, U, \Phi, \rho$ αυτά που επάγει το (X,ϕ,m) τότε ισχύει ότι $\forall A, B \in B(X,\phi) : \rho(AB) = \rho(BA)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι αν $f_{-n},...,f_n, g_{-n},...,g_n \in C(X)$ τότε

$$\rho\left(\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{f_i} U^i\right)\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{g_i} U^i\right)\right) = \rho\left(\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{g_i} U^i\right)\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{f_i} U^i\right)\right)$$

Πράγματι

$$\Phi\left(\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{f_i} U^i\right)\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{g_i} U^i\right)\right) = \sum_{i=-n}^{n} L_{f_i} a^i(L_{g_{-i}}) = \sum_{i=-n}^{n} L_{f_i \cdot (g_{-i} \circ \phi^i)}$$

και

$$\begin{aligned}\Phi\left(\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{g_i} U^i\right)\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{f_i} U^i\right)\right) &= \sum_{i=-n}^{n} L_{g_i} a^i(L_{f_{-i}}) = \sum_{i=-n}^{n} a^{-i}(L_{f_i}) L_{g_{-i}} \\ &= \sum_{i=-n}^{n} a^{-i}(L_{f_i} a^i(L_{g_{-i}})) = \sum_{i=-n}^{n} L_{(f_i \cdot (g_{-i} \circ \phi^i)) \circ \phi^{-i}}\end{aligned}$$

αλλά

$$\int_X \sum_{i=-n}^{n} f_i \cdot (g_{-i} \circ \phi^i) dm = \int_X \sum_{i=-n}^{n} (f_i \cdot (g_{-i} \circ \phi^i)) \circ \phi^{-i} dm$$

οπότε από την κατασκευή του ρ έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 2.3.24. *Έστω H χώρος Hilbert και M αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $B(H)$ τέτοια ώστε το span$\{Ah \in H : A \in M$ και $h \in H\}$ να είναι πυκνό στον H. Τότε η M έχει τετριμμένο πυρήνα.*

Απόδειξη. Έστω $\xi \in H$ τέτοιο ώστε $\forall A \in M : A\xi = 0$. Αρκεί να δείξω ότι $\xi = 0$. Έστω $(A_1,h_1),...,(A_n,h_n) \in M \times H$ τότε

$$\left\langle \xi, \sum_{i=1}^{n} A_i h_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \xi, A_i h_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle A_i^* \xi, h_i \rangle = 0$$

έτσι εφόσον το span$\{Ah \in H : A \in M$ και $h \in H\}$ είναι πυκνό στον H έχουμε ότι $\xi = 0$. □

Απόδειξη του θεωρήματος 2.3.6. Έστω m μέτρο πιθανότητας συμβατό με το (X,ϕ) και D, a, U, Φ, ρ αυτά που επάγονται από το (X,ϕ,m). Έστω $\pi : B(X,\phi) \longrightarrow B(H)$ η GNS αναπαράσταση που επάγεται από το ρ και $\xi \in H$ το αντίστοιχο κανονικό κυκλικό διάνυσμα. Σταθεροποιούμε μία προσεγγιστική μονάδα $A_\lambda \in B(X,\phi)$ οπότε έχουμε ότι $[A_\lambda] \to \xi$. Από το

$$\begin{aligned}\pi(S) = 0 \Rightarrow & \pi(S)[A_\lambda] = 0 \Rightarrow [SA_\lambda] = 0 \Rightarrow \lim_\lambda \rho((SA_\lambda)^*(SA_\lambda)) = 0 \\ \Rightarrow & \rho(S^*S) = 0 \overset{\rho \text{ faithful}}{\Rightarrow} S = 0\end{aligned}$$

όπου $S \in B(X,\phi)$, έχουμε ότι η π είναι ένα προς ένα και άρα είναι ισομετρία. Από αυτό έπεται ότι το $\pi(P(X,\phi))$ είναι norm κλειστό. Έστω R η von Neumann άλγεβρα που παράγει η $\pi(B(X,\phi))$ και $\omega : R \longrightarrow \mathbb{C}$ το state $T \mapsto \langle T\xi, \xi\rangle$. Από το ([6], σ. 129, πρ. 6.8.3) προκύπτει ότι το ξ είναι διαχορίζων διάνυσμα και άρα το ω είναι faithful. Ακόμη από το λήμμα 2.3.23 προκύπτει ότι αν $S \in R$ τότε

$$\begin{aligned}\langle (S^*S - SS^*)\xi, \xi\rangle = & \lim_\lambda \langle (S^*S - SS^*)[A_\lambda], [A_\lambda]\rangle = \lim_\lambda \rho(A_\lambda^*(S^*S - SS^*)A_\lambda) \\ = & \rho(S^*S - SS^*) = 0\end{aligned}$$

δηλαδή ότι το ω είναι trace. Για να δείξω ότι η R είναι finite υποθέτω ότι $P \in R$ είναι προβολή και $V \in R$ μερική ισομετρία τέτοια ώστε $V^*V = I$ και $VV^* = P$ και δείχνω ότι $P = I$. Πράγματι εφόσον το ω είναι faithful trace και $I - P \geq 0$ έχουμε ότι $\omega(V^*V - V^*V) = 0 \Rightarrow \omega(I-P) = 0 \Rightarrow I - P = 0$. Για να δείξουμε ότι ο H είναι διαχωρίσιμος σταθεροποιούμε πυκνό αριθμήσιμο $\Delta \subseteq L^2(m)$. Έστω τυχόν $[S] \in H$ και $\varepsilon > 0$. Εφόσον η $T \mapsto \rho(T^*T)$ είναι norm συνεχής μπορούμε να βρούμε $f_{-n}, ..., f_n \in L^2(m)$ τέτοια ώστε

$$\left\| \left[\sum_{i=-n}^{n} L_{f_i} U^i \right] - [S] \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Έστω τώρα $g_{-n}, ..., g_n \in \Delta$ τέτοια ώστε $\forall i \in \{-n, ..., n\} : ||f_i - g_i||_2 < \varepsilon/(2\sqrt{2n+1})$. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left[\sum_{i=-n}^{n} L_{f_i}U^i\right] - \left[\sum_{i=-n}^{n} L_{g_i}U^i\right]\right|\right|^2 &= \left|\left|\left[\sum_{i=-n}^{n} L_{f_i-g_i}U^i\right]\right|\right|^2 \\
&\overset{\rho=\rho\circ\Phi}{=} \left|\rho\circ\Phi\left(\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{f_i-g_i}U^i\right)^*\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{f_i-g_i}U^i\right)\right)\right| \\
&= \left|\rho\left(\sum_{i=-n}^{n} L_{(f_i-g_i)(f_{-i}-g_{-i})}\right)\right| \\
&= \left|\int_X \sum_{i=-n}^{n}(f_i-g_i)(f_{-i}-g_{-i})dm\right| \\
&\leq \sum_{i=-n}^{n}\sqrt{\int_X |f_i-g_i|^2 dm}\sqrt{\int_X |f_{-i}-g_{-i}|^2 dm} \\
&< \sum_{i=-n}^{n}\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2n+1}} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

οπότε τελικά έχουμε ότι

$$\left|\left|\left[\sum_{i=-n}^{n} L_{g_i}U^i\right] - [S]\right|\right| < \varepsilon$$

Έτσι δείξαμε ότι το σύνολο

$$\left\{\left[\sum_{i=-n}^{n} L_{g_i}U^i\right] \in H : g_i \in \Delta \quad \forall i \in \{-n, ..., n\}\right\}$$

είναι πυκνό και εφόσον είναι και αριθμήσιμο δείξαμε ότι ο H είναι διαχωρίσιμος. Παρατηρήστε ότι, εφόσον αν $S \in B(X, \phi)$ τότε $||[US]||^2 = \rho(S^*U^*US) = \rho(S^*S) = ||[S]||^2$, οι σχέση $U_2[S] = [US]$ ορίζει ορθομοναδιαίο τελεστή στον H. Από την κατασκευή του U_2 παρατηρούμε $\pi(UA) = U_2\pi(A)$ άρα $\forall n \in \{0, 1, ...\} : \pi(U^nA) = U_2^n\pi(A)$ θέτοντας όμως όπου A το $U^{-n}A$ η παραπάνω σχέση ισχύει για $n \in \mathbb{Z}$ ενώ παίρνοντας συζυγίες καταλήγουμε στο $\forall n \in \mathbb{Z} : \pi(U^nA) = U_2^n\pi(A) \wedge \pi(AU^n) = \pi(A)U_2^n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} : \pi(U^nAU^{-n}) = U_2^n\pi(A)U_2^{-n}$. Θα δείξουμε ότι η $\pi(\mathcal{D})$ έχει τετριμμένο πυρήνα. Έστω

$$\Gamma = \left\{\sum_{i=-n}^{n} A_iU^i \in L^2(m) : n \in \mathbb{N} \text{ και } A_{-n}, ..., A_n \in \mathcal{D}\right\}$$

Εφόσον το Γ είναι πυκνό στην $B(X,\phi)$ και ο π είναι φραγμένος από την κυκλικότητα του ξ έχουμε ότι το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(S_i)\xi \qquad S_1,...S_n\in\Gamma$$

είναι πυκνό στον H. Έτσι από τα παραπάνω και παρατηρώντας ότι αν $S=\sum_{i=-n}^{n}A_iU^i$ για $A_{-n},...,A_n\in\mathcal{D}$ τότε

$$\pi(S)\xi=\pi(\sum_{i=-n}^{n}A_iU^i)\xi=\sum_{i=-n}^{n}\pi(A_i)U_2^i\xi\in\mathrm{span}\left\{\pi(D)h\in H: D\in\mathcal{D} \text{ και } h\in H\right\}$$

έχουμε ότι το $\mathrm{span}\left\{\pi(D)h\in H: D\in\mathcal{D} \text{ και } h\in H\right\}$ είναι πυκνό στον H το οποίο από το λήμμα 2.3.24 μας δίνει ότι η $\pi(\mathcal{D})$ έχει τετριμμένο πυρήνα. Μπορούμε να επεκτείνουμε το $\rho\restriction_{\mathcal{D}}$ σε faithful state $\rho_0:\mathcal{D}''\longrightarrow\mathbb{C}$ με τον τύπο

$$\rho_0\left(L_f\right)=\int_X fdm \qquad f\in L^\infty(m)$$

ενώ θέτοντας

$$x(n)(t)=y(n)(t)=\begin{cases}1 & \text{αν } (n,t)\in\{1\}\times X\\ 0 & \text{αν } (n,t)\in\{2,3,...\}\times X\end{cases}$$

έχουμε ότι

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\langle L_f x(i),y(i)\rangle\right|<\varepsilon\Rightarrow|\langle L_f(1),1\rangle|<\varepsilon\Rightarrow\left|\int_X fdm\right|<\varepsilon\Rightarrow|\rho_0(L_f)|<\varepsilon$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι το ρ_0 είναι normal. Ξέρουμε ήδη ότι το ω είναι faithful ενώ ως vector state είναι normal. Ακόμη αν $D\in\mathcal{D}$ τότε $\omega\circ\pi(D)=\langle\pi(D)\xi,\xi\rangle=\lim_\lambda\langle\pi(D)[A_\lambda],[A_\lambda]\rangle=\lim_\lambda\rho(A_\lambda^*DA_\lambda)=\rho(D)$. Από τα παραπάνω το επιχείρημα στην παρατήρηση 5.4.1 στο ([3], σ. 626) μας παρέχει έναν $*$-ισομορφισμό $\sigma:\mathcal{D}''\longrightarrow\pi(\mathcal{D})''$ ο οποίος είναι επέκταση της $\pi\restriction_{\mathcal{D}}$. Για κάθε $D\in\mathcal{D}$ ισχύει ότι

$$\sigma(a(D))=\sigma(UDU^{-1})=\pi(UDU^{-1})=U_2\pi(D)U_2^{-1}=U_2\sigma(D)U_2^{-1}$$

άρα εφόσον ο σ και η $D\mapsto UDU^{-1}$ είναι ultraweak συνεχής ενώ η $\mathcal{D}$ είναι ultraweak πυκνή στην $\mathcal{D}''$ έχουμε ότι $\sigma(a(D))=U_2\sigma(D)U_2^{-1}$ για κάθε $D\in\mathcal{D}''$. Από το τελευταίο έχουμε ότι $U_2\pi(\mathcal{D})''U_2^{-1}=\pi(\mathcal{D})''$ και ότι οι μη μηδενικές δυνάμεις του $T\mapsto U_2TU_2^{-1}$(για $T\in\pi(D)''$) δρουν ελεύθερα. Εφόσον ο π είναι φραγμένος έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\pi\left(P(X,\phi)\right)&=\pi\overline{\left(\left\{\sum_{i=0}^{n}A_iU^i\in L^2(m): n\in\mathbb{N} \text{ και } A_{-n},...,A_n\in\mathcal{D}\right\}\right)}\\ &=\overline{\left\{\sum_{i=0}^{n}\pi(A_i)U_2^i\in L^2(m): n\in\mathbb{N} \text{ και } A_{-n},...,A_n\in\mathcal{D}\right\}}\end{aligned}$$

αλλά από $U_2\pi(D) = U_2\pi(D)U_2^{-1}U_2 = \pi(UDU^{-1})U_2 = \pi(a(D))U_2$ για κάθε $D \in \mathcal{D}$ το τελευταίο σύνολο είναι η Banach άλγεβρα που παράγει το $\{\pi(D)U_2^n \in B(H) : n \in \{0,1,...\}$ και $D \in \mathcal{D}\}$. $\square$

Θεώρημα 2.3.25. *Έστω $(X_1,\phi_1),(X_2,\phi_2)$ τοπολογικά δυναμικά συστήματα τύπου 1 τέτοια ώστε οι $P(X_1,\phi_1),P(X_2,\phi_2)$ να είναι ισόμορφες ως άλγεβρες. Υπάρχει $*$-αυτομορφισμός $h : P(X_1,\phi_1)\cap P(X_1,\phi_1)^* \longrightarrow P(X_2,\phi_2)\cap P(X_2,\phi_2)^*$ τέτοιος ώστε $a(X_2,\phi_2)\circ h = h\circ a(X_1,\phi_1)$.*

Απόδειξη. Έστω $g : P(X_1,\phi_1) \longrightarrow P(X_2,\phi_2)$ ισομορφισμός αλγεβρών. Έστω $\mathcal{D}_i = P(X_i,\phi_i)\cap P(X_i,\phi_i)^*$ για $i \in \{0,1\}$. Από το θεώρημα 2.3.6 υπάρχει αναπαράσταση σε finite von Neumann algebra $\tau : P(X_2,\phi_2) \longrightarrow B(H)$. Θέτουμε $a : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ την απεικόνιση $T \mapsto UTU^{-1}$. Έστω $(\tau, H, \mathcal{D}, U)$ σύστημα για τον τ. Από το θεώρημα 2.3.5 υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\lambda_2 : \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathcal{D}$ τέτοιος ώστε $a\circ\lambda_2 = \lambda_2\circ a(X_2,\phi_2)$. Παρατηρούμε ότι, εφόσον ο g είναι ισομορφισμός, ο $\tau\circ g : P(X_1,\phi_1) \longrightarrow B(H)$ είναι αναπαράσταση σε finite von Neumann algebra και ότι το $(\tau\circ g, H, \mathcal{D}, U)$ είναι σύστημα για τον $\tau\circ g$. Έτσι από 2.3.5 υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\lambda_1 : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}$ τέτοιος ώστε $a\circ\lambda_1 = \lambda_1\circ a(X_1,\phi_1)$. Το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας $h = \lambda_2^{-1}\circ\lambda_1$. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Claire Anantharaman-Delaroche. Ergodic Theory and von Neumann Algebras: an Introduction. The 5th ILJU School of Mathematics (Banach Spaces and Related Topics, Gyeongju, Korea, 2012).

[2] William B. Arveson. Operator algebras and measure preserving automorphisms. *Acta Math.*, 118:95–109, 1967.

[3] William B. Arveson. Analyticity in Operator Algebras. *American Journal of Mathematics*, 89, No. 3(3):578–642, 1967.

[4] William B. Arveson and Keith B. Josephson. Operator algebras and measure preserving automorphisms II. *Journal of Functional Analysis*, 4(1):100–134, August 1969.

[5] Jacques Dixmier. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996. Reprint of the second (1969) edition.

[6] Jacques Dixmier. *Les C^*-algèbres et leurs représentations*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996. Reprint of the second (1969) edition.

[7] Henry A. Dye. On Groups of Measure Preserving Transformations. I. *American Journal of Mathematics*, 81(1):119–159, 1959.

[8] Erling Følner. On groups with full Banach mean value. *Math. Scand.*, 3:243–254, 1955.

[9] Isaac Namioka. Folner's conditions for amenable semi-groups. *Math. Scand.*, 15:18–28, 1964.

[10] Robert Zink. On the structure of measure spaces. *Acta Mathematica*, 107(1):53–71, 1962.

[11] Howard Hoare and William Perry. Affine transformations with quasi-discrete spectrum I. *J. London Math. Soc.*, 41:88–96, 1966.

[12] Kenneth R. Davidson, Adam H. Fuller and Evgenios T.A. Kakariadis. Semicrossed Products of Operator Algebras: A Survey. *eprint arXiv:1404.1907*, 2014.