

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN

Νίκος Δικαιοσυνόπουλος

25 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Δημήτρη Χελιώτη, για τη μέγιστη συνεισφορά του στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα και τον κ. Νίκο Παπαδάτο, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή αλλά και για το ρόλο που έπαιξαν σε όλη την ακαδημαϊκή μου διαδρομή.

Κεφάλαιο 1

Κατασκευή και ιδιότητες της κίνησης Brown

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε στη μονοδιάστατη κίνηση Brown (linear Brownian motion). Θα ξεκινήσουμε με την κατασκευή της κίνησης Brown που προτάθηκε από τον Paul Lévy και θα συζητήσουμε δύο θεμελιώδεις ιδιότητες των μονοπατιών της, τη συνέχεια και τη μη διαφορισιμότητα.

1.1 Η κατασκευή της κίνησης Brown

1.1.1 Ορισμός της κίνησης Brown

Η κίνηση Brown συνδέεται στενά με την κανονική κατανομή. Μια τυχαία μεταβλητή X είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 εάν

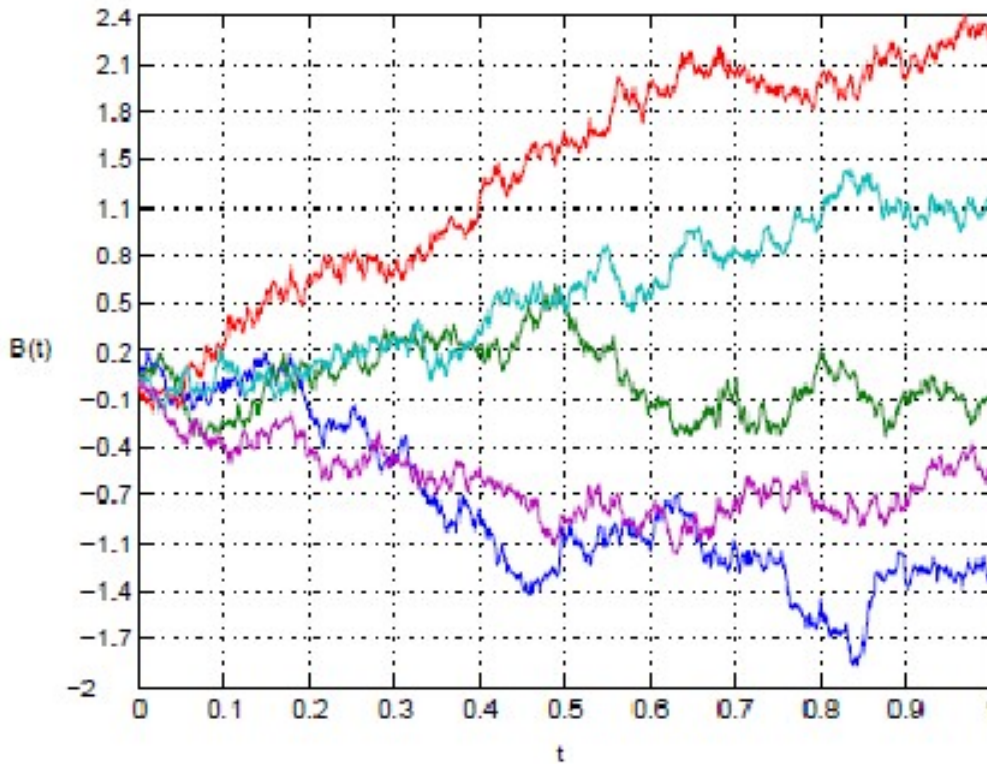
$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^\infty e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μια στοχαστική διαδικασία $\{B(t) : t \geq 0\}$ ονομάζεται (μονοδιάστατη) κίνηση *Brown* με σημείο εκκίνησης το $x \in \mathbb{R}$ εάν ισχύουν τα επόμενα

- $B(0) = x$
- η διαδικασία έχει ανεξάρτητες προσανυζήσεις, δηλαδή για κάθε $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \dots, B(t_2) - B(t_1)$ είναι ανεξάρτητες
- για κάθε $t \geq 0$ και $h > 0$, οι μεταβολές $B(t+h) - B(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένες με μέση τιμή 0 και διασπορά h

- σχεδόν βέβαια, η συνάρτηση $t \mapsto B(t)$ είναι συνεχής.

Όταν $x = 0$, η διαδικασία $\{B(t) : t \geq 0\}$ ονομάζεται **τυπική κίνηση Brown**. Ορίσαμε την κίνηση Brown ως μια στοχαστική διαδικασία $\{B(t) : t \geq 0\}$ η οποία είναι μια οικογένεια (υπεραριθμήσιμη το πλήθος) τυχαίων μεταβλητών $\omega \mapsto B(t, \omega)$ ορισμένες σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ταυτόχρονα μια στοχαστική διαδικασία μπορεί να ερμηνευθεί και ως μια τυχαία συνάρτηση $t \mapsto B(t, \omega)$. Οι ιδιότητες των μονοπατιών μιας στοχαστικής διαδικασίας είναι ακριβώς οι ιδιότητες αυτών των τυχαίων συναρτήσεων.



Γραφήματα πέντε μονοπατιών της κίνησης Brown

Με τον όρο κατανομές πεπερασμένης διάστασης μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{B(t) : t \geq 0\}$ εννοούμε τους νόμους όλων των τυχαίων διανυσμάτων $(B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n))$, πεπερασμένης διάστασης, για κάθε $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. Για να περιγράψουμε αυτές τις από κοινού κατανομές, αρκεί να γνωρίζουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B(0)$ και του διανύσματος $(B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1}))$ για κάθε $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$.

1.1.2 Κατασκευή της κίνησης Brown του Paul Lévy

Ένα από τα πλέον ουσιώδη ζητήματα είναι εάν οι συνθήκες που έχουμε θεωρήσει για τις κατανομές πεπερασμένης διάστασης στον ορισμό της κίνησης Brown επιτρέπουν στη διαδικασία να έχει συνεχή μονοπάτια. Το παρακάτω θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τέτοιας διαδικασίας.

Θεώρημα 1 (Wiener 1923). *Η τυπική κίνηση Brown υπάρχει.*

Θα κατασκευάσουμε την κίνηση Brown ως το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων ώστε να εξασφαλίσουμε τη συνέχεια της οριακής συνάρτησης, δηλαδή τη συνέχεια των μονοπατιών της. Αρκεί αυτό να γίνει για την τυπική κίνηση Brown $\{B(t) : t \geq 0\}$ καθώς η $X(t) = x + B(t)$ είναι μια κίνηση Brown με σημείο εκκίνησης το x . Η απόδειξη αξιοποιεί ιδιότητες των κανονικών τυχαίων διανυσμάτων τα οποία είναι τα πολυδιάστατο ανάλογο της κανονικής κατανομής.

Ορισμός 1. Ένα τυχαίο διάνυσμα $X^t = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ονομάζεται κανονικό τυχαίο διάνυσμα εάν υπάρχει ένας $n \times m$ πίνακας A και ένα n -διάστατο διάνυσμα b έτσι ώστε $X = AY + b$ όπου Y ένα m -διάστατο διάνυσμα με συντεταγμένες ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές.

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε αρχικά την κίνηση Brown στο διάστημα $[0, 1]$ ως ένα στοιχείο του χώρου $C[0, 1]$ των συνεχών συναρτήσεων του $[0, 1]$. Η ιδέα είναι να κατασκευάσουμε την κατάλληλη από κοινού κατανομή της κίνησης Brown στα πεπερασμένα σύνολα

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^n \right\}$$

των δυαδικών σημείων. Κατόπιν ενώνουμε γραμμικά τις τιμές στο $\mathcal{D}_n$ και αποδεικνύουμε ότι το ομοιόμορφο όριο αυτών των συναρτήσεων υπάρχει και είναι ακριβώς η κίνηση Brown. Θεωρούμε $\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$ και ένα σύνολο $\{Z_t : t \in \mathcal{D}\}$ από ανεξάρτητες, τυπικές και κανονικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Έστω $B(0) := 0$ και $B(1) := Z_1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $B(d)$, $d \in \mathcal{D}_n$ τέτοιες ώστε

1. για κάθε $r < s < t$ στο $\mathcal{D}_n$ η τυχαία μεταβλητή $B(t) - B(s)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 0 και διασπορά $t - s$ και ανεξάρτητη της $B(s) - B(r)$,
2. τα διανύσματα $(B(d) : d \in \mathcal{D}_n)$ και $(Z_t : t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n)$ είναι ανεξάρτητα.

Για το $\mathcal{D}_0 = \{0, 1\}$, αυτό έχει ήδη γίνει. Επαγωγικά υποθέτουμε ότι το έχουμε κάνει για $n - 1$.

Ορίζουμε τώρα $B(d)$ για τα $\mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$, ως

$$B(d) = \frac{B(d - 2^{-n}) + B(d + 2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}.$$

Ο πρώτος προσθεταίος είναι η γραμμική παρεμβολή των τιμών της B στις γειτονικές θέσεις του d στο $\mathcal{D}_{n-1}$. Οπότε $B(d)$ είναι ανεξάρτητη του $(Z_t : t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n)$ και επομένως η δεύτερη ιδιότητα ικανοποιείται. Επιπλέον, καθώς η τυχαία μεταβλητή $\frac{B(d+2^{-n}) - B(d-2^{-n})}{2}$ εξαρτάται μόνο από το $(Z_t : t \in \mathcal{D}_{n-1})$ είναι ανεξάρτητη της $\frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}$. Από την επαγωγική υπόθεση και οι δυο όροι είναι κανονικά κατανοημένοι με μέση τιμή μηδέν και διασπορά $2^{-(n+1)}$. Άρα το άθροισμα

$B(d) - B(d-2^{-n})$ και η διαφορά $B(d+2^{-n}) - B(d)$ είναι ανεξάρτητες και κανονικά κατανοημένες με μέση τιμή μηδέν και διασπορά 2^{-n} . Πράγματι οι μεταβολές $B(d) - B(d-2^{-n})$ για τα $d \in \mathcal{D}_n \setminus \{0\}$ είναι ανεξάρτητες. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητες καθώς το διάνυσμα αυτών των μεταβολών είναι κανονικό. Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι τα ζεύγη $B(d) - B(d-2^{-n})$, $B(d+2^{-n}) - B(d)$ με $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$ είναι ανεξάρτητα. Η άλλη περίπτωση είναι να θεωρήσουμε τις μεταβολές στα διαστήματα για τα οποία παρεμβάλλεται κάποιο $d \in \mathcal{D}_{n-1}$. Επιλέγουμε $d \in \mathcal{D}_j$ με αυτή την ιδιότητα και για την ελάχιστη τιμή j ώστε τα δύο διαστήματα να περιέχονται στα $[d-2^{-j}, d]$ και $[d, d+2^{-j}]$ αντίστοιχα. Επαγωγικά, οι μεταβολές σε αυτά τα δύο διαστήματα μήκους 2^{-j} είναι ανεξάρτητες, και εκείνες στα διαστήματα μήκους 2^{-n} κατασκευάζονται από τις ανεξάρτητες μεταβολές $B(d) - B(d-2^{-j})$, $B(d+2^{-j}) - B(d)$ χρησιμοποιώντας ένα ξένο σύνολο μεταβλητών $(Z_t : t \in \mathcal{D}_n)$. Οπότε είναι ανεξάρτητες, και αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Έχοντας κατασκευάσει τις τιμές της διαδικασίας σε όλα τα δυαδικά σημεία, τις ενώνουμε γραμμικά μεταξύ τους. Ορίζουμε

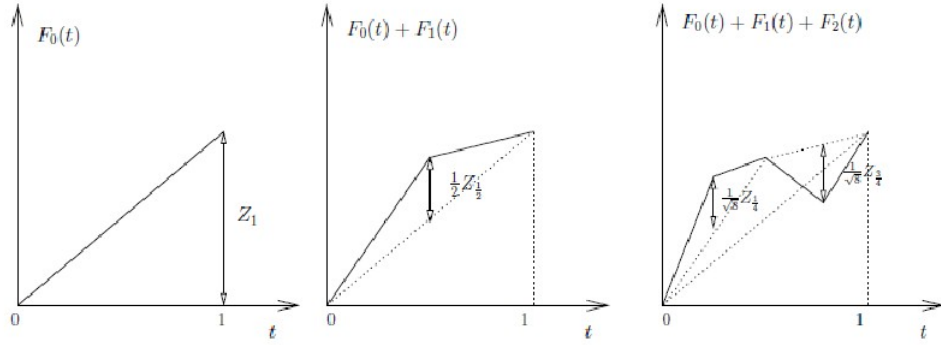
$$F_0(t) = \begin{cases} Z_1 & \text{για } t = 1 \\ 0 & \text{για } t = 0 \\ \text{γραμμική ενδιάμεσα} & \end{cases}$$

και για κάθε $n \geq 1$

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-(n+1)/2} Z_t & \text{για } t \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1} \\ 0 & \text{για } t \in \mathcal{D}_{n-1} \\ \text{γραμμική ανάμεσα σε διαδοχικά σημεία του } \mathcal{D}_n & \end{cases}$$

Αυτές οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $[0, 1]$, και για κάθε n και $d \in \mathcal{D}_n$,

$$B(d) = \sum_{i=0}^n F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d) \quad (1.1)$$



Τα τρία πρώτα βήματα της κατασκευής της κίνησης Brown

Η τελευταία σχέση μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή. Ισχύει για $n = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n - 1$. Έστω $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$. Εφόσον για $0 \leq i \leq n - 1$ η συνάρτηση F_i είναι γραμμική στο $[d - 2^{-n}, d + 2^{-n}]$ έχουμε

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_i(d) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_i(d - 2^{-n}) + F_i(d + 2^{-n})}{2} = \frac{B(d - 2^{-n}) + B(d + 2^{-n})}{2}.$$

Επειδή $F_n(d) = 2^{-(n+1)/2} Z_d$ αυτό δίνει την (1).

Από το Λήμμα 2 και από τον ορισμό της Z_d , για $c > 1$ και μεγάλο n ,

$$\mathbb{P}(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) \leq \exp\left(\frac{-c^2 n}{2}\right).$$

Άρα η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\text{υπάρχει } d \in \mathcal{D}_n \text{ με } |Z_d| \geq c\sqrt{n}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mathbb{P}(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1) \exp\left(\frac{-c^2 n}{2}\right)$$

συγκλίνει τουλάχιστον για εκείνα τα $c > \sqrt{2 \log 2}$. Επιλέγουμε ένα τέτοιο c . Από το λήμμα Borel-Cantelli, υπάρχει τυχαίο (αλλά σχεδόν βέβαια πεπερασμένο) N τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ και $d \in \mathcal{D}_n$ έχουμε $|Z_d| < c\sqrt{n}$. Άρα για κάθε $n \geq N$,

$$\|F_n\|_{\infty} < c\sqrt{n} 2^{-n/2}. \quad (1.2)$$

Από αυτό το άνω φράγμα συνεπάγεται ότι σχεδόν βέβαια η σειρά

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$$

είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο $[0, 1]$. Συμβολίζουμε το όριο αυτό με $\{B(t) : t \in [0, 1]\}$. Απομένει να ελέγξουμε ότι οι προσανξήσεις αυτής της διαδικασίας έχουν τις κατάλληλες

κατανομές πεπερασμένης διάστασης. Κάτι τέτοιο προκύπτει από τις ιδιότητες της B στο πυκνό σύνολο $\mathcal{D} \subset [0, 1]$ και τη συνέχεια των μονοπατιών. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ είναι στο $[0, 1]$. Μπορούμε τώρα να βρούμε $t_{1,k} \leq t_{2,k} \leq \dots \leq t_{n,k}$ στο $\mathcal{D}$ με $\lim_{k \uparrow \infty} t_{i,k} = t_i$ και συμπεραίνουμε από τη συνέχεια της B ότι για $1 \leq i \leq n-1$

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) = \lim_{k \uparrow \infty} B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}).$$

Καθώς

$$\lim_{k \uparrow \infty} \mathbb{E}[B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k})] = 0$$

και

$$\lim_{k \uparrow \infty} \text{Cov}[B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}), B(t_{j+1,k}) - B(t_{j,k})] = \lim_{k \uparrow \infty} \mathbf{1}_{\{i=j\}}(t_{i+1,k} - t_{i,k}) = \mathbf{1}_{\{i=j\}}(t_{i+1} - t_i),$$

προκύπτει ότι οι προσαυζήσεις $B(t_{i+1}) - B(t_i)$ είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και διασπορά $t_{i+1} - t_i$ όπως απαιτείται.

Με αυτό τον τρόπο κατασκευάσαμε μια συνεχή διαδικασία $B : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ίδιες κατανομές πεπερασμένης διάστασης όπως της κίνησης Brown. Θεωρούμε ακολουθία $B_0, B_1, \dots$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών στο $\mathbf{C}[0, 1]$ με την κατανομή αυτής της διαδικασίας, και ορίζουμε $\{B(t) : t \geq 0\}$ ενώνοντας τα μέρη ή πιο συγκεκριμένα

$$B(t) = B_{[t]}(t - [t]) + \sum_{i=0}^{[t]-1} B_i(1)$$

για κάθε $t \geq 0$.

Η τελευταία σχέση ορίζει μια συνεχή τυχαία συνάρτηση $B : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι κίνηση Brown. $\square$

Σημείωση 1. Μια στοχαστική διαδικασία $\{Y(t) : t \geq 0\}$ λέγεται διαδικασία Gauss αν για κάθε $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ το διάνυσμα $((Y(t_1), \dots, Y(t_n)))$ είναι κανονικό τυχαίο διάνυσμα. Η κίνηση Brown με σημείο εκκίνησης $x \in \mathbb{R}$ είναι μια διαδικασία Gauss.

1.1.3 Ιδιότητες αναλλοίωτου της κίνησης Brown

Πολλά από τα σύνολα που απορρέουν από τα μονοπάτια της κίνησης Brown είναι υπό μια έννοια τυχαία fractal. Μια διαισθητική προσέγγιση των fractal είναι πως πρόκειται για σύνολα με ενδιαφέρουσα γεωμετρική δομή σε όλες τις κλίμακες. Ρόλο κλειδί σε αυτή τη συμπεριφορά παίζει η ιδιότητα της αυτοομοιότητας της κίνησης Brown (scaling invariance property), την οποία διατυπώνουμε στα παρακάτω.

Λήμμα 1 (Αλλαγή κλίμακας). *Ας υποθέσουμε ότι $\{B(t) : t \geq 0\}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown και $a > 0$. Τότε η διαδικασία $\{X(t) : t \geq 0\}$ με $X(t) = \frac{1}{a}B(a^2t)$ είναι επίσης τυπική κίνηση Brown.*

Απόδειξη. Η συνέχεια των μονοπατιών, η ανεξαρτησία, και η στασιμότητα των προσαυξήσεων παραμένουν αμετάβλητες κάτω από αλλαγές της κλίμακας. Τέλος παρατηρούμε ότι $X(t) - X(s) = \frac{1}{a}(B(a^2t) - B(a^2s))$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή μηδέν και διασπορά $(1/a^2)(a^2t - a^2s) = t - s$. $\square$

Σημείωση 2. *Μια συνέπεια του αναλλοίωτου της αλλαγής κλίμακας. Θεωρούμε $a < 0 < b$ και ορίζουμε $T(a, b) = \inf \{t \geq 0 : B(t) = a \text{ ή } B(t) = b\}$ την πρώτη χρονική στιγμή εξόδου της μονοδιάστατης κίνησης Brown από το διάστημα $[a, b]$. Τότε για $X(t) = \frac{1}{a}B(a^2t)$ έχουμε $\mathbb{E}T(a, b) = \mathbb{E} \{\inf \{t \geq 0 : B(t) = a \text{ ή } B(t) = b\}\}$ και αλλάζουμε το t με το a^2t . Τότε έχουμε*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \inf \{a^2t \geq 0 : B(a^2t) = a \text{ ή } B(a^2t) = b\} \right\} &= a^2 \mathbb{E} \left\{ \inf \left\{ t \geq 0 : \frac{1}{a}B(a^2t) = 1 \text{ ή } \frac{1}{a}B(a^2t) = \frac{b}{a} \right\} \right\} \\ &= a^2 \mathbb{E} \left\{ \inf \left\{ t \geq 0 : X(t) = 1 \text{ ή } X(t) = \frac{b}{a} \right\} \right\} \\ &= a^2 \mathbb{E}T \left(1, \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

Άρα $\mathbb{E}T(-b, b)$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο του b^2 . Επίσης

$\mathbb{P} \{ \{B(t) : t \geq 0\} \text{ να εξέλθει του διαστήματος } [a, b] \text{ από το } a \} =$

$\mathbb{P} \{ \{X(t) : t \geq 0\} \text{ να εξέλθει του διαστήματος } [1, \frac{b}{a}] \text{ από το } 1 \}$ είναι συνάρτηση του λόγου b/a .

Η ιδιότητα αλλαγής κλίμακας θα χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα στα επόμενα κεφάλαια.

Θεώρημα 2 (Αναστροφή χρόνου). *Ας υποθέσουμε ότι $\{B(t) : t \geq 0\}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown. Τότε η διαδικασία $\{X(t) : t \geq 0\}$ με*

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t = 0, \\ tB(1/t) & \text{για } t > 0, \end{cases}$$

είναι επίσης μια τυπική κίνηση Brown.

Απόδειξη. Οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης της κίνησης Brown $(B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n))$, είναι κανονικά τυχαία διανύσματα, και κατά συνέπεια έχουν $\mathbb{E}(B(t_i)) = 0$ και $\text{Cov}(B(t_i), B(t_j)) = t_i$ για $0 \leq t_i \leq t_j$. Προφανώς η $\{X(t) : t \geq 0\}$ είναι μια διαδικασία Gauss, και τα διανύσματα $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ έχουν αναμενόμενη τιμή μηδέν. Οι συνδιακυμάνσεις για $t > 0$ και $h \geq 0$ δίνονται από $\text{Cov}(X(t+h), X(t)) = (t+h)t \text{Cov}(B(1/(t+h)), B(1/t)) = t(t+h) \frac{1}{t+h} = t$. Οπότε οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$

για $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, είναι οι ίδιες με εκείνες της κίνησης Brown. Τα μονοπάτια $t \mapsto X(t)$ είναι ξεκάθαρα συνεχή για $t > 0$. Για $t = 0$ επιχειρηματολογούμε ως εξής: Αρχικά, καθώς το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο, η κατανομή της $\{X(t) : t \geq 0, t \in \mathbb{Q}\}$ είναι η ίδια με εκείνη της κίνησης Brown, άρα

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{Q}}} X(t) = 0 \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

Επιπλέον $\mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ είναι πυκνό στο $(0, +\infty)$ και $\{X(t) : t \geq 0\}$ είναι σχεδόν βέβαια συνεχής στο $(0, +\infty)$ ώστε

$$0 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{Q}}} X(t) = \lim_{t \rightarrow 0} X(t) \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

Άρα η $\{X(t) : t \geq 0\}$ έχει σχεδόν βέβαια συνεχή μονοπάτια, και είναι κίνηση Brown. $\square$

Σημείωση 3. Η αναστροφή χρόνου είναι ένα χρήσιμο εργαλείο που συσχετίζει ιδιότητες της κίνησης Brown σε μια γειτονιά του $t = 0$ με εκείνες στο άπειρο. Άμεση εφαρμογή είναι το παρακάτω.

Πόρισμα 1. Σχεδόν βέβαια $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} = 0$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την $\{X(t) : t \geq 0\}$ όπως και στο θεώρημα (2). Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα βλέπουμε πως $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} X(1/t) = X(0) = 0$ σχεδόν βέβαια. $\square$

1.2 Ιδιότητες συνέχειας της κίνησης Brown

Ο ορισμός της κίνησης Brown απαιτεί τα μονοπάτια της (δειγματικές συναρτήσεις), να είναι συνεχείς σχεδόν βέβαια. Αυτό συνεπάγεται ότι στο διάστημα $[0, 1]$ (ή οποιοδήποτε άλλο συμπαγές διάστημα) τα μονοπάτια είναι ομοιόμορφα συνεχή, δηλαδή υπάρχει μια (τυχαία) συνάρτηση φ με $\lim_{h \downarrow 0} \varphi(h) = 0$, που ονομάζεται μέτρο συνέχειας της συνάρτησης $B : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{\varphi(h)} \leq 1. \quad (1.3)$$

Το ερώτημα είναι αν υπάρχει τέτοιο φράγμα για κάποια ντετερμινιστική συνάρτηση φ , δηλαδή αν υπάρχει μη τυχαίο μέτρο συνέχειας για την κίνηση Brown. Το παρακάτω απαντάει στο ερώτημα.

Θεώρημα 3. Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, σχεδόν βέβαια, για κάθε αρκούντως μικρό $h > 0$ και για κάθε $0 \leq t \leq 1 - h$,

$$|B(t+h) - B(t)| \leq C\sqrt{h \log(1/h)}. \quad (1.4)$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από την κατασκευή της κίνησης Brown. Είχαμε αναπαραστήσει την κίνηση Brown ως

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$$

όπου κάθε F_n είναι κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση. Η παράγωγος της F_n υπάρχει σχεδόν παντού, και από ορισμό και τη (2), για κάθε $c > \sqrt{2 \log 2}$ υπάρχει (τυχαίο) $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n > N$,

$$\|F'_n\|_{\infty} \leq \frac{2\|F_n\|_{\infty}}{2^{-n}} \leq 2c\sqrt{n}2^{n/2}.$$

Τώρα για κάθε $t, t+h \in [0, 1]$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής,

$$|B(t+h) - B(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |F_n(t+h) - F_n(t)| \leq \sum_{n=0}^l h\|F'_n\|_{\infty} + \sum_{n=l+1}^{\infty} 2\|F_n\|_{\infty}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι την (2) παίρνουμε ότι για κάθε $l > N$ αυτό είναι φραγμένο από

$$h \sum_{n=0}^N \|F'_n\|_{\infty} + 2ch \sum_{n=N}^l \sqrt{n}2^{n/2} + 2c \sum_{n=l+1}^{\infty} \sqrt{n}2^{-n/2}.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι το h (πάλι τυχαίο και) αρκετά μικρό ώστε ο πρώτος προσθεταίος να είναι μικρότερος του $\sqrt{h \log(1/h)}$ και ότι το l που ορίζεται ως $2^{-l} < h < 2^{-l+1}$ υπερβαίνει το N . Για αυτή την επιλογή του l ο δεύτερος και ο τρίτος προσθεταίος είναι επίσης φραγμένοι από σταθερό πολλαπλάσιο του $\sqrt{h \log(1/h)}$. Λαμβάνουμε λοιπόν την (3) με τη ντετερμινιστική συνάρτηση $\varphi(h) = C\sqrt{h \log(1/h)}$. $\square$

Αυτό το άνω φράγμα είναι αρκετά κοντά στο βέλτιστο αποτέλεσμα. Το ακόλουθο κάτω φράγμα επιβεβαιώνει ότι αυτό που λείπει είναι η ακριβής τιμή της σταθεράς.

Θεώρημα 4. Για κάθε σταθερά $c < \sqrt{2}$, σχεδόν βέβαια, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $0 < h < \varepsilon$ και $t \in [0, 1-h]$ με $|B(t+h) - B(t)| \geq c\sqrt{h \log(1/h)}$.

Απόδειξη. Έστω $c < \sqrt{2}$, και για τους ακέραιους $k, n \geq 0$ ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$A_{k,n} = \{B((k+1)e^{-n}) - B(ke^{-n}) > c\sqrt{n}e^{-n/2}\}.$$

Τότε για $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(A_{k,n}) = \mathbb{P}(B(e^{-n}) > c\sqrt{n}e^{-n/2}) = \mathbb{P}(B(1) > c\sqrt{n}) \geq \frac{c\sqrt{n}}{c^2n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2n/2}, \text{ όπου η}$$

τελευταία ανισότητα λαμβάνεται από το Λήμμα 1, που αναφέρεται στα επόμενα. Από τις υποθέσεις μας για το c έχουμε ότι $e^n \mathbb{P}(A_{k,n}) \rightarrow \infty$ καθώς $n \uparrow \infty$. Επειδή επιπλέον $1 - x \leq e^{-x}$ για κάθε x ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{\lfloor e^n - 1 \rfloor} A_{k,n}^c\right) = (1 - \mathbb{P}(A_{0,n}))^{e^n} \leq \exp(-e^n \mathbb{P}(A_{0,n})) \rightarrow 0.$$

Θέτοντας $h = e^{-n}$ μπορούμε να δούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$

$\mathbb{P}\left\{|B(t+h) - B(t)| \leq c\sqrt{h \log(1/h)} \quad \forall h \in (0, \varepsilon), t \in [0, 1-h]\right\} \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{\lfloor e^n - 1 \rfloor} A_{k,n}^c\right)$ για κάθε $n \geq 0$. Για $n \rightarrow \infty$, παίρνουμε ότι το πρώτο μέλος της τελευταίας ανισότητας ισούται με μηδέν. $\square$

Μπορεί κανείς να καθορίσει τη σταθερά c με ακρίβεια. Αποδεικνύεται ότι για $c = \sqrt{2}$ έχουμε βέλτιστο αποτέλεσμα που οφείλεται στον Paul Lévy.

Θεώρημα 5. *Σχεδόν βέβαια,*

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = 1.$$

Ορισμός 2. *Μια συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται τοπικά α -Hölder συνεχής στο $x \geq 0$ αν υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $c > 0$ τέτοια ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|^\alpha,$$

για κάθε $y \geq 0$ με $|x - y| < \varepsilon$.

Το α λέγεται **εκθέτης - Hölder** και το $c > 0$ **σταθερά - Hölder**. Η α -Hölder συνέχεια γίνεται ισχυρότερη όσο το α αυξάνει. Οι εώς τώρα ενδείξεις που έχουμε για την κίνηση Brown μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η μετάβαση από μονοπάτια που είναι α -Hölder συνεχή σε εκείνα που αποτυγχάνουν, συμβαίνει όταν $\alpha = 1/2$.

Πόρισμα 2. *Αν $\alpha < 1/2$ τότε, σχεδόν βέβαια, η κίνηση Brown είναι παντού τοπικά α -Hölder συνεχής.*

Στην απόδειξη των Θεωρημάτων 1 και 4 χρησιμοποιήσαμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 2. Υποθέτουμε ότι η X είναι μια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή. Τότε για κάθε $x > 0$,

$$\frac{x}{x^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}\{X > x\} \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Απόδειξη. Η δεύτερη ανισότητα λαμβάνεται από τον υπολογισμό

$$\mathbb{P}\{X > x\} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{u}{x} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Για την πρώτη, ορίζουμε

$$f(x) = x e^{-x^2/2} - (x^2 + 1) \int_x^\infty e^{-u^2/2} du.$$

Παρατηρούμε ότι $f(0) < 0$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Επιπλέον,

$$f'(x) = (1 - x^2 + x^2 + 1) e^{-x^2/2} - 2x \int_x^\infty e^{-u^2/2} du = -2x \left(\int_x^\infty e^{-u^2/2} du - \frac{e^{-x^2/2}}{x} \right),$$

το οποίο είναι θετικό για $x > 0$, από τον πρώτο υπολογισμό. Οπότε $f(x) \leq 0$, και έχουμε το λήμμα. $\square$

1.3 Μη διαφορισιμότητα της κίνησης Brown

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι τα μονοπάτια της κίνησης Brown έχουν ορισμένη κανονικότητα, δηλαδή είναι συνεχή. Τα ίδια μονοπάτια όμως αποτυγχάνουν στο να είναι διαφορίσιμα σε κάποια χρονική στιγμή. Η ιδιότητα που κληροδοτεί αυτή την ανωμαλία στα μονοπάτια της κίνησης είναι η ανεξαρτησία των προσauζήσεων.

Θεώρημα 6. Σχεδόν βέβαια, για κάθε $0 < a < b < \infty$ η κίνηση Brown δεν είναι μονότονη στο διάστημα $[a, b]$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα μη τετριμμένο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή ένα διάστημα με θετικό μήκος. Αν αυτό είναι διάστημα μονοτονίας δηλαδή $B(s) \leq B(t)$ για κάθε $a \leq s \leq t \leq b$ τότε επιλέγουμε αριθμούς $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1} = b$ και διαιρούμε το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα $[a_i, a_{i+1}]$. Κάθε προσauζηση πρέπει να έχει το ίδιο πρόσημο. Καθώς οι προσauζήσεις είναι ανεξάρτητες, αυτό έχει πιθανότητα $2 \cdot 2^{-n}$ και λαμβάνοντας $n \rightarrow \infty$ αποδεικνύουμε ότι η πιθανότητα το $[a, b]$ είναι διάστημα μονοτονίας είναι μηδέν. Θεωρώντας μια αριθμήσιμη ένωση έχουμε ότι, σχεδόν βέβαια, δεν υπάρχει μη τετριμμένο διάστημα μονοτονίας με ρητά άκρα, όμως κάθε μη τετριμμένο διάστημα περιέχει ένα μη τετριμμένο διάστημα με ρητά άκρα. $\square$

Για να συζητήσουμε τη (μη) διαφορισιμότητα της κίνησης Brown χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της αναστροφής του χρόνου η οποία μας επιτρέπει να συσχετίσουμε τη διαφορισιμότητα στο $t = 0$ με τη διαφορισιμότητα σε οποιοδήποτε t . Αυτή η ιδιότητα συμπληρώνει το νόμο των μεγάλων αριθμών: Ενώ το Πρόγραμμα 1 μας διαβεβαιώνει ότι η κίνηση Brown αναπτύσσεται βραδύτερα από γραμμικά η επόμενη πρόταση αποδεικνύει ότι η κατά $\limsup$ αύξηση του $B(t)$ είναι ταχύτερη από εκείνη του $\sqrt{t}$.

Πρόταση 1. Σχεδόν βέβαια,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = +\infty, \text{ και } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = -\infty.$$

Για την απόδειξη της πρότασης, χρειαζόμαστε το 0-1 Νόμο των Hewitt-Savage για ανταλλάξιμα ενδεχόμενα, τον οποίο και αναφέρουμε.

Ορισμός 3. Θεωρούμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots$ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και ένα σύνολο A ακολουθιών τέτοιο ώστε $\{(X_1, X_2, \dots) \in A\} \in \mathcal{F}$. Το ενδεχόμενο $\{(X_1, X_2, \dots) \in A\}$ λέγεται ανταλλάξιμο αν

$$\{(X_1, X_2, \dots) \in A\} \subset \{(X_{\sigma_1}, X_{\sigma_2}, \dots) \in A\}$$

για κάθε πεπερασμένη μετάθεση $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Σημειώνεται ότι η $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ καλείται πεπερασμένη μετάθεση αν είναι 1-1 και επί και αν $\sigma_n = n$ για κάθε $n \geq n_0$ για κάποιο n_0 .

Λήμμα 3 (0-1 Νόμος των Hewitt-Savage). Αν E είναι ένα ανταλλάξιμο ενδεχόμενο μιας ανεξάρτητης και ισόνομης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών, τότε $\mathbb{P}(E) = 0$ ή $\mathbb{P}(E) = 1$.

Απόδειξη Πρότασης 1. Από το λήμμα Fatou έχουμε ότι

$$\mathbb{P}\{B(n) > c\sqrt{n} \text{ απείρως συχνά}\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{B(n) > c\sqrt{n}\}.$$

Από την αλλαγή κλίμακας η ποσότητα στο $\limsup$ ισούται με $\mathbb{P}\{B(1) > c\}$ το οποίο είναι θετικό. Θέτουμε $X_n = B(n) - B(n-1)$, και παρατηρούμε πως

$$\{B(n) > c\sqrt{n} \text{ απείρως συχνά}\} = \left\{ \sum_{j=1}^n X_j > c\sqrt{n} \text{ απείρως συχνά} \right\}$$

είναι ανταλλάξιμο ενδεχόμενο. Από το 0-1 Νόμο των Hewitt-Savage, έχουμε ότι με πιθανότητα 1, $B(n) > c\sqrt{n}$ απείρως συχνά. Θεωρώντας την τομή πάνω σε όλους τους θετικούς ακέραιους c έχουμε το πρώτο από τα ζητούμενα της πρότασης 1. Με όμοιο τρόπο προκύπτει και το δεύτερο. $\square$

Ορισμός 4. Ορίζουμε την άνω και κάτω δεξιά παράγωγο μιας συνάρτησης f ως

$$D^*f(t) = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \text{ και}$$

$$D_*f(t) = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

αντίστοιχα.

Τώρα θα δείξουμε ότι για κάθε σταθερό t , σχεδόν βέβαια, η κίνηση Brown δεν είναι διαφορίσιμη σε αυτό το t .

Θεώρημα 7. Έστω $t \geq 0$. Τότε, σχεδόν βέβαια, η κίνηση Brown δεν είναι διαφορίσιμη στο t . Επιπλέον $D^*B(t) = +\infty$ και $D_*B(t) = -\infty$.

Απόδειξη. Έστω μια τυπική κίνηση Brown. Κατασκευάζουμε μέσω της ιδιότητας αναστροφής του χρόνου την κίνηση Brown X . Τότε

$$D^*X(0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X(\frac{1}{n}) - X(0)}{\frac{1}{n}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}X(\frac{1}{n}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}},$$

όπου το τελευταίο είναι άπειρο από την Πρόταση 1. Με όμοιο τρόπο $D_*X(0) = -\infty$ οπότε η X δεν είναι διαφορίσιμη στο μηδέν. Ας θεωρήσουμε τώρα $t > 0$ αυθαίρετο και μια κίνηση Brown $\{B(t) : t \geq 0\}$. Τότε η $X(s) = B(t+s) - B(t)$ ορίζει μια τυπική κίνηση Brown και η διαφορισιμότητα της X στο μηδέν είναι ισοδύναμη με τη διαφορισιμότητα της B στο t . $\square$

Ενώ η προηγούμενη απόδειξη δείχνει ότι κάθε t είναι σχεδόν βέβαια σημείο μη διαφορισιμότητας για την κίνηση Brown, αυτό δε συνεπάγεται ότι σχεδόν βέβαια κάθε t είναι σημείο μη διαφορισιμότητας για την κίνηση Brown. Η σειρά των εννοιών για κάθε t και σχεδόν βέβαια σε αποτελέσματα όπως το προηγούμενο θεώρημα είναι μεγάλης σημασίας. Εδώ το παραπάνω θεώρημα ισχύει για όλα τα μονοπάτια της κίνησης Brown εκτός από ένα σύνολο με πιθανότητα μηδέν, το οποίο μπορεί να εξαρτάται από το t , και η ένωση όλων αυτών των συνόλων πιθανότητας μηδέν δεν είναι απαραίτητα σύνολο πιθανότητας μηδέν. Για να εξηγήσουμε τα προηγούμενα, θεωρούμε το εξής παράδειγμα: Το επιχείρημα στην απόδειξη του Θεωρήματος 7 αποδεικνύει ότι η κίνηση Brown X χτυπάει το μηδέν για αυθαίρετα μικρές τιμές του $s > 0$. Ορίζουμε το σύνολο $Z(t) = \{s > 0 : X(s) = X(t)\}$. Κάθε t είναι σχεδόν βέβαια σημείο συσσώρευσης από δεξιά για τη $Z(t)$. Δεν ισχύει όμως ότι σχεδόν βέβαια

κάθε σημείο $t \in [0, 1]$ είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά για τη $Z(t)$. Για παράδειγμα το τελευταίο μηδενικό της διαδικασίας $\{X(t) : t \geq 0\}$ πριν τη στιγμή 1 δεν είναι, από ορισμό, ποτέ σημείο συσσώρευσης από δεξιά για το $Z(t)$. Αυτό το παράδειγμα μας λέει ότι μπορεί να υπάρχουν τυχαίοι ξεχωριστοί χρόνοι στους οποίους η κίνηση Brown επιδεικνύει μη τυπική συμπεριφορά. Αυτοί οι χρόνοι είναι τόσο σπάνιοι που κάθε σταθερή (μη τυχαία) χρονική στιγμή είναι σχεδόν βέβαια όχι τέτοιου είδους.

Σημείωση 4. Η συμπεριφορά της κίνησης Brown σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές $t > 0$ αντανakλά τη συμπεριφορά σε τυπικές χρονικές στιγμές υπό την παρακάτω έννοια : Έστω $\mathfrak{X}$ ένα μετρήσιμο ενδεχόμενο (ένα σύνολο μονοπατιών) τέτοιο ώστε $\{B(t) : t \geq 0\} \in \mathfrak{X}$ σχεδόν βέβαια. Από τη στασιμότητα των μεταβολών συνεπάγεται ότι $\mathbb{P}\{\{B(t+s) - B(s) : s \geq 0\} \in \mathfrak{X}\} = 1$ για κάθε σταθερό $t \geq 0$. Επιπλέον το σύνολο των ξεχωριστών χρόνων $\{t : \{B(t+s) - B(t) : s \geq 0\} \notin \mathfrak{X}\}$ έχει μέτρο-Lebesgue μηδέν. Πράγματι

$$\mathbb{E} \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{t : \{B(t+s) - B(s) : s \geq 0\} \notin \mathfrak{X}\}} dt = \int_0^\infty \mathbb{P}\{\{B(s) : s \geq 0\} \notin \mathfrak{X}\} dt = 0.$$

Συνδυάζοντας αυτή την παρατήρηση με το Θεώρημα 7 παίρνουμε ότι, σχεδόν βέβαια, το μονοπάτι της κίνησης Brown δεν είναι διαφορίσιμο σε σχεδόν όλες τις χρονικές στιγμές t .

Θεώρημα 8 (Wiener 1933). Σχεδόν βέβαια, η κίνηση Brown είναι πουθενά διαφορίσιμη. Επιπλέον, σχεδόν βέβαια, για κάθε t ,

$$\text{είτε } D^*B(t) = +\infty \text{ είτε } D_*B(t) = -\infty \text{ ή και τα δύο.}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πως υπάρχει $t_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $-\infty < D_*B(t) < D^*B(t) < +\infty$. Τότε

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{|B(t_0 + h) - B(t_0)|}{h} < \infty,$$

και δεδομένου ότι η κίνηση Brown είναι φραγμένη στο διάστημα $[0, 2]$ έχουμε πως για πεπερασμένη σταθερά M υπάρχει t_0 με

$$\sup_{h \in (0, 1]} \frac{|B(t_0 + h) - B(t_0)|}{h} \leq M.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το ενδεχόμενο αυτό έχει πιθανότητα μηδέν για κάθε M . Σταθεροποιούμε κάποιο M . Αν το t_0 περιέχεται στο δυαδικό διάστημα $[(k-1)/2^n, k/2^n]$ για $n > 2$, τότε για κάθε $1 \leq j \leq 2^n - k$ η τριγωνική ανισότητα δίνει

$$\begin{aligned} |B((k+j)/2^n) - B((k+j-1)/2^n)| &\leq |B((k+j)/2^n) - B(t_0)| + |B(t_0) - B((k+j-1)/2^n)| \\ &\leq M(2j+1)/2^n. \end{aligned}$$

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$\Omega_{n,k} := \{| B((k+j)/2^n) - B((k+j-1)/2^n) | \leq M(2j+1)/2^n \text{ για } j = 1, 2, 3\}.$$

Από την ανεξαρτησία των μεταβολών και την αλλαγή κλίμακας, για $1 \leq k \leq 2^n - 3$,

$$\mathbb{P}(\Omega_{n,k}) \leq \prod_{j=1}^3 \mathbb{P}\{| B((k+j)/2^n) - B((k+j-1)/2^n) | \leq M(2j+1)/2^n\} \leq \mathbb{P}\{| B(1) | \leq 7M/\sqrt{2^n}\}^3.$$

Η τελευταία ποσότητα είναι το πολύ $(7M/2^{-n/2})^3$ επειδή η πυκνότητα της κανονικής είναι φραγμένη από το $1/2$. Άρα

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-3} \Omega_{n,k}\right) \leq 2^n (7M/2^{-n/2})^3 = (7M)^3 2^{-n/2}.$$

Το άθροισμα της τελευταίας ποσότητας είναι πεπερασμένο. Από το λήμμα *Borel – Cantelli*,

$$\mathbb{P}\left(\text{υπάρχει } t_0 \in [0, 1] \text{ με } \sup_{h \in [0,1]} \frac{|B(t_0+h) - B(t_0)|}{h} \leq M\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-3} \Omega_{n,k} \text{ για άπειρα } n\right) = 0.$$

□

Σημείωση 5. Η απόδειξη του Θεωρήματος 8 μπορεί να ισχυροποιηθεί με αποτέλεσμα να ισχύει πως, για κάθε $\alpha > \frac{1}{2}$, τα μονοπάτια της κίνησης Brown είναι, σχεδόν βέβαια, πουθενά τοπικά α -Hölder συνεχή.

Παρατηρήσεις και σχόλια

Η πρώτη μαθηματική μελέτη της κίνησης Brown οφείλεται στον Bachelier, και σχετίζεται με τη μοντελοποίηση αυξομειώσεων τιμών χρεογράφων. Η παρατήρηση του φυσικού φαινομένου αποδίδεται στο Σκωτσέζο βοτανολόγο Robert Brown, και η εξήγησή του στον Albert Einstein. Η εξήγηση αυτή θεωρείται σταθμός στη διατύπωση της ατομικής θεωρίας. Την πρώτη αυστηρή μαθηματική κατασκευή της κίνησης Brown πέτυχε ο Wiener, και προς τιμή του, η διαδικασία, ορισμένες φορές, αναφέρεται και ως διαδικασία Wiener. Υπάρχει ποικιλία κατασκευών της κίνησης Brown στη βιβλιογραφία. Η προσέγγιση που ακολουθήσαμε είναι εκείνη του Paul Lévy, ενός εκ των πρωτεργατών της συγκεκριμένης κίνησης. Η κατασκευή του Lévy έχει το πλεονέκτημα ότι οι ιδιότητες συνεχείας της κίνησης Brown λαμβάνονται από την κατασκευή.

1.4 Η κίνηση Brown ως μια ισχυρή Μαρκοβιανή διαδικασία

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov της κίνησης Brown. Επιπλέον θα συζητήσουμε συνοπτικά και γενικά για Μαρκοβιανές διαδικασίες, και θα αποδείξουμε ότι ορισμένες από αυτές που παράγονται από την κίνηση Brown είναι επίσης Μαρκοβιανές διαδικασίες. Κατόπιν, εκμεταλλευόμαστε αυτό το γεγονός για να πετύχουμε περισσότερο εκλεπτυσμένες ιδιότητες των μονοπατιών της.

Η ιδιότητα Markov και ο 0-1 νόμος του Blumenthal

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε την πολυδιάστατη κίνηση Brown, η οποία ορίζεται εύκολα αρκεί να απαιτήσουμε ανεξαρτησία για κάθε συντεταγμένη, και βεβαίως τα χαρακτηριστικά της τυπικής κίνησης για κάθε μια από αυτές.

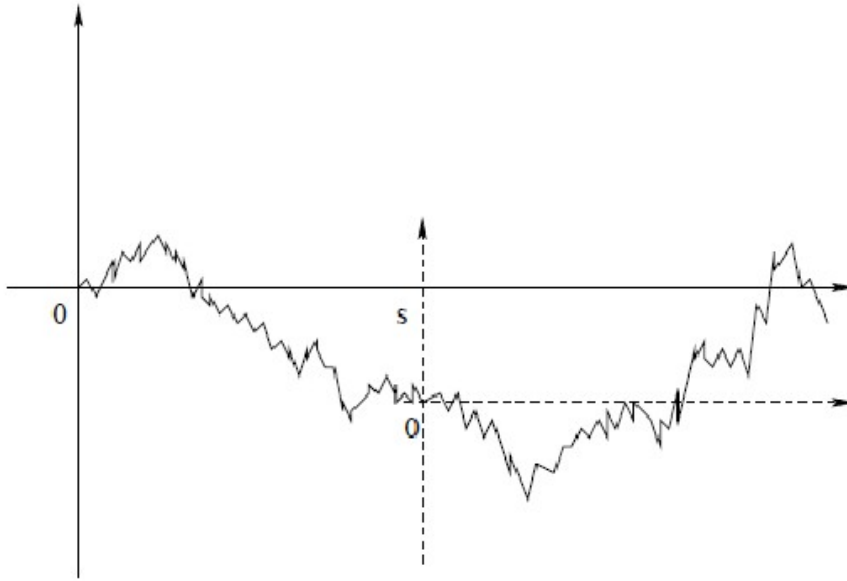
Ορισμός 5. Εάν $B_1, B_2, \dots, B_d$ είναι ανεξάρτητες τυπικές κινήσεις Brown με σημεία εκκίνησης $x_1, x_2, \dots, x_d$, αντίστοιχα, τότε η στοχαστική διαδικασία $\{B(t) : t \geq 0\}$ που ορίζεται ως

$$B(t) = (B_1(t), \dots, B_d(t))^T$$

για κάθε $t \in [0, \infty)$ ονομάζεται d -διάστατη κίνηση Brown με σημείο εκκίνησης το $(x_1, \dots, x_d)^T$. Η d -διάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει από το 0 ονομάζεται επίσης τυπική κίνηση Brown. Η μονοδιάστατη κίνηση Brown αναφέρεται και ως γραμμική (linear) και η διδιάστατη ως επίπεδη (planar).

Επισήμανση. Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{P}_x$ το μέτρο πιθανότητας που καθιστά τη d -διάστατη διαδικασία $\{B(t) : t \geq 0\}$ κίνηση Brown με σημείο εκκίνησης το $x \in \mathbb{R}^d$, και με $\mathbb{E}_x$ την αντίστοιχη αναμενόμενη τιμή.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\{X(t) : t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία. Διαισθητικά, η ιδιότητα Markov λέει ότι αν γνωρίζουμε τη διαδικασία $\{X(t) : t \geq 0\}$ στο διάστημα $[0, s]$, τότε για την καλύτερη πρόβλεψη της διαδικασίας αρκεί να γνωρίζουμε τη θέση της τη χρονική στιγμή s , δηλαδή το $X(s)$. Επιπλέον μια διαδικασία ονομάζεται **διαδικασία Markov** εάν για κάθε σταθερό s ξεκινάει από την αρχή. Πιο συγκεκριμένα αυτό σημαίνει ότι, υποθέτοντας πως μπορεί να ξεκινήσει από κάθε σημείο $X(0) = x \in \mathbb{R}^d$, η μετατοπισμένη διαδικασία $\{X(s+t) : t \geq 0\}$ έχει την ίδια κατανομή με εκείνη που ξεκινάει από το $X(s) \in \mathbb{R}^d$.



Η κίνηση Brown ξεκινάει εκ νέου σε κάθε σταθερή (μη τυχαία) χρονική στιγμή

Οι στοχαστικές διαδικασίες $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{Y(t) : t \geq 0\}$ λέγονται **ανεξάρτητες**, αν για κάθε χρονικές στιγμές $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$ και $s_1, s_2, \dots, s_m \geq 0$ τα διανύσματα $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ και $(Y(s_1), \dots, Y(s_m))$ είναι ανεξάρτητα.

Θεώρημα 9. Υποθέτουμε ότι η $\{B(t) : t \geq 0\}$ είναι μια κίνηση Brown με σημείο εκκίνησης το $x \in \mathbb{R}^d$. Έστω $s > 0$, τότε η διαδικασία $\{B(t+s) - B(s) : t \geq 0\}$ είναι επίσης κίνηση Brown με σημείο εκκίνησης το 0 και ανεξάρτητη της $\{B(t) : 0 \leq t \leq s\}$.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι η διαδικασία $\{B(t+s) - B(s) : t \geq 0\}$ ικανοποιεί τον ορισμό της d -διάστατης κίνησης Brown. Η ανεξαρτησία έπεται από την ανεξαρτησία των μεταβολών (προσαυξήσεων) της κίνησης Brown. $\square$

Θα βελτιώσουμε κάπως αυτό το αποτέλεσμα αφού πρώτα παρουσιάσουμε ορισμένη χρησιμη ορολογία.

Ορισμός 6. (α) Φίλτρο ή διήθηση σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ είναι μια οικογένεια $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$ από σ -άλγεβρες τέτοια ώστε $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F}$ για κάθε $s < t$.

(β) Ένας χώρος πιθανότητας με διήθηση ονομάζεται φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας.

(γ) Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t) : t \geq 0\}$ ορισμένη σε ένα φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας με διήθηση την $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$ λέγεται προσαρμοσμένη εάν η $X(t)$ είναι $\mathcal{F}(t)$ -μετρήσιμη για κάθε $t \geq 0$.

Η σ -άλγεβρα $\mathcal{F}(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι τη χρονική στιγμή t .

Μια διήθηση μπορεί να θεωρηθεί και ως μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια κίνηση Brown $\{B(t) : t \geq 0\}$ ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας. Μπορούμε να ορίσουμε τη διήθηση $(\mathcal{F}^0(t) : t \geq 0)$ με

$$\mathcal{F}^0(t) = \sigma(B(s) : 0 \leq s \leq t)$$

για κάθε $t \geq 0$. Δηλαδή $\mathcal{F}^0(t)$ είναι η σ -άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές $B(s)$, για $0 \leq s \leq t$. Η κίνηση Brown είναι προσαρμοσμένη σε αυτή τη διήθηση.

Από το Θεώρημα 10, η διαδικασία $\{B(t+s) - B(s) : t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}^0(s)$. Σε πρώτη φάση, βελτιώνουμε ελαφρώς αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας μια λίγο μεγαλύτερη (προσαυξημένη) σ -άλγεβρα $\mathcal{F}^+(s)$ που ορίζεται ως

$$\mathcal{F}^+(s) = \bigcap_{t>s} \mathcal{F}^0(t).$$

Είναι φανερό ότι η οικογένεια $(\mathcal{F}^+(t) : t \geq 0)$ συνεχίζει να είναι διήθηση και $\mathcal{F}^+(s) \supset \mathcal{F}^0(s)$. Διαισθητικά όμως η $\mathcal{F}^+(s)$ είναι λίγο μεγαλύτερη από την $\mathcal{F}^0(s)$, επιτρέποντας μια πρόσθετη απειροστή ματιά στο μέλλον.

Θεώρημα 10. Για κάθε $s \geq 0$, η διαδικασία $\{B(t+s) - B(s) : t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας $\mathcal{F}^+(s)$.

Απόδειξη. Από ιδιότητα συνεχείας έχουμε ότι $B(t+s) - B(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(s_n + t) - B(s_n)$ για μια αυστηρά φθίνουσα ακολουθία $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ που συγκλίνει στο s . Από το Θεώρημα 9, για κάθε $t_1, \dots, t_m \geq 0$, το διάνυσμα $(B(t_1+s) - B(s), \dots, B(t_m+s) - B(s)) = \lim_{j \rightarrow \infty} (B(t_1+s_j) - B(s_j), \dots, B(t_m+s_j) - B(s_j))$ είναι ανεξάρτητο της $\mathcal{F}^+(s)$ και κατά συνέπεια και η διαδικασία $\{B(t+s) - B(s) : t \geq 0\}$. $\square$

Σημείωση 6. Ένας εναλλακτικός τρόπος για να διατυπώσουμε το παραπάνω είναι να πούμε ότι δεσμεύοντας ως προς $\mathcal{F}^+(s)$, τότε η διαδικασία $\{B(t+s) : t \geq 0\}$ είναι μια κίνηση Brown με σημείο εκκίνησης το $B(s)$.

Τώρα θα δούμε τη σ -άλγεβρα $\mathcal{F}^+(0)$ η οποία περιλαμβάνει όλα τα ενδεχόμενα της κίνησης Brown σε ένα απειροστό διάστημα δεξιά του σημείου εκκίνησης.

Θεώρημα 11 (Νόμος 0-1 του Blumenthal). Υποθέτουμε ότι $x \in \mathbb{R}^d$ και $A \in \mathcal{F}^+(0)$. Τότε $\mathbb{P}_x(A) \in \{0, 1\}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 10 για $s = 0$ βλέπουμε ότι οποιοδήποτε $A \in \sigma(B(t) : t \geq 0)$ είναι ανεξάρτητο της $\mathcal{F}^+(0)$. Μια ιδιαίτερη εφαρμογή αυτού είναι όταν $A \in \mathcal{F}^+(0)$, οπότε το A είναι ανεξάρτητο από τον εαυτό του, και ως εκ τούτου έχει πιθανότητα εμφάνισης μηδέν ή ένα. $\square$

Μια πρώτη εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος είναι το γεγονός ότι η τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown λαμβάνει θετικές και αρνητικές τιμές (άρα και μηδενικά) σε κάθε οσοδήποτε μικρό διάστημα δεξιά του 0.

Θεώρημα 12. Υποθέτουμε ότι $\{B(t) : t \geq 0\}$ είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown. Ορίζουμε $\tau = \inf\{t > 0 : B(t) > 0\}$ και $\sigma = \inf\{t > 0 : B(t) = 0\}$. Τότε

$$\mathbb{P}_0(\tau = 0) = \mathbb{P}_0(\sigma = 0) = 1.$$

Απόδειξη. Το ενδεχόμενο

$$\{\tau = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\text{υπάρχει } 0 < \varepsilon < 1/n \text{ τέτοιο ώστε } B(\varepsilon) > 0\}$$

ανήκει στην $\mathcal{F}^+(0)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αυτό το ενδεχόμενο έχει θετική πιθανότητα. Αυτό προκύπτει από το ότι $\mathbb{P}_0\{\tau \leq t\} \geq \mathbb{P}_0\{B(t) > 0\} = 1/2$ για $t > 0$. Άρα $\mathbb{P}_0\{\tau = 0\} \geq 1/2$, και αποδείξαμε την πρώτη ισότητα. Το ίδιο επιχείρημα λειτουργεί αλλάζοντας το $B(t) > 0$ με το $B(t) < 0$ και από αυτά τα δύο προκύπτει ότι $\mathbb{P}_0(\sigma = 0) = 1$ από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για συνεχείς συναρτήσεις. $\square$

Μια ακόμη εφαρμογή είναι ένας 0-1 νόμος για την **τελική σ -άλγεβρα** της κίνησης Brown. Ορίζουμε $\mathcal{G}(t) = \sigma(B(s) : s \geq t)$. Τότε θεωρούμε την $\mathcal{T} = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{G}(t)$ η οποία είναι η σ -άλγεβρα που αποτελείται από τα **τελικά ενδεχόμενα**.

Θεώρημα 13 (Νόμος 0 – 1 για ενδεχόμενα της τελικής σ -άλγεβρας). Έστω $x \in \mathbb{R}^d$ και $A \in \mathcal{T}$ ένα τελικό ενδεχόμενο. Τότε $\mathbb{P}_x(A) \in \{0, 1\}$.

Απόδειξη. Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση που $x = 0$. Από την ιδιότητα αναστροφής χρόνου της κίνησης Brown, η τελική σ -άλγεβρα απεικονίζεται στην $\mathcal{F}^+(0)$, η οποία περιέχει μόνο ενδεχόμενα που έχουν πιθανότητα μηδέν ή ένα από το νόμο 0 – 1 του Blumenthal. $\square$

Σε αυτό το σημείο θα εκμεταλλευτούμε την ιδιότητα Markov για να μελετήσουμε τα τοπικά και ολικά μέγιστα της μονοδιάστατης κίνησης Brown.

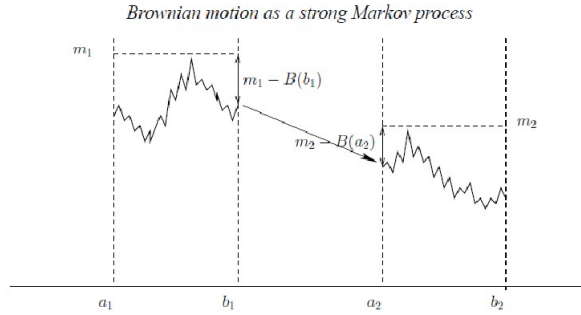
Θεώρημα 14. Για τη μονοδιάστατη κίνηση Brown $\{B(t) : 0 \leq t \leq 1\}$, σχεδόν βέβαια,

(a) Κάθε τοπικό μέγιστο είναι αυστηρά τοπικό.

(β) Το σύνολο των χρόνων που επιτυγχάνεται το τοπικό μέγιστο είναι αριθμήσιμο και πυκνό.

(γ) Το ολικό μέγιστο επιτυγχάνεται σε μοναδική χρονική στιγμή.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι, δεδομένων δύο μη επικαλυπτόμενων κλειστών χρονικών διαστημάτων, τα μέγιστα της κίνησης Brown σε κάθε ένα από αυτά είναι διαφορετικά, σχεδόν βέβαια.



Οι τυχαίες μεταβλητές $m_1 - B(b_1)$ και $m_2 - B(b_2)$ είναι ανεξάρτητες της προσαύξησης $B(a_2) - B(b_1)$.

Έστω $[a_1, b_1]$ και $[a_2, b_2]$ δύο σταθερά διαστήματα με $b_1 \leq a_2$. Με m_1 και m_2 συμβολίζουμε τα μέγιστα της κίνησης Brown σε αυτά τα δύο διαστήματα. Παρατηρούμε ότι, από την ιδιότητα Markov σε συνδυασμό με το Θεώρημα 12, σχεδόν βέβαια $B(a_2) < m_2$. Κατά συνέπεια το μέγιστο λαμβάνεται σε ένα από τα διαστήματα $[a_2 - \frac{1}{n}, b_2]$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και λόγω αυτού μπορούμε να υποθέσουμε στην απόδειξη ότι $b_1 < a_2$.

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα Markov τη χρονική στιγμή b_1 , βλέπουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $B(a_2) - B(b_1)$ είναι ανεξάρτητη της $m_1 - B(b_1)$. Από την ιδιότητα Markov τη χρονική στιγμή a_2 , βλέπουμε ότι $m_2 - B(a_2)$ είναι ανεξάρτητη και από τις δύο προηγούμενες τυχαίες μεταβλητές. Το ενδεχόμενο $m_1 = m_2$ μπορεί τότε να γραφτεί ως

$$B(a_2) - B(b_1) = m_1 - B(b_1) - (m_2 - B(a_2))$$

Δεσμεύοντας στις τιμές των τυχαίων μεταβλητών $m_1 - B(b_1)$ και $m_2 - B(b_2)$, το αριστερό μέλος είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή και το δεξιό μια σταθερά, οπότε έχει πιθανότητα μηδέν.

- (α) Από τον ισχυρισμό που μόλις αποδείξαμε, σχεδόν βέβαια, όλα τα μη επικαλυπτόμενα ζεύγη μη εκφυλισμένων συμπαγών διαστημάτων με ρητά άκρα έχουν διαφορετικά μέγιστα. Αν η κίνηση Brown δεν έχει αυστηρά τοπικό μέγιστο, τότε θα υπάρχουν δύο τέτοια διαστήματα όπου η κίνηση Brown θα έχει το ίδιο μέγιστο.
- (β) Συνέπεια της προηγούμενης παρατήρησης είναι ότι, σχεδόν βέβαια, το μέγιστο σε κάθε μη εκφυλισμένο συμπαγές διάστημα με ρητά άκρα δεν επιτυγχάνεται στα άκρα αυτά.

Οπότε κάθε τέτοιο διάστημα περιέχει τοπικό μέγιστο, και το σύνολο των χρόνων των τοπικών μεγίστων είναι πυκνό. Καθώς κάθε τοπικό μέγιστο είναι αυστηρά τοπικό, αυτό το σύνολο είναι το πολύ αριθμήσιμο.

- (γ) Σχεδόν βέβαια, για κάθε ρητό $q \in [0, 1]$ τα μέγιστα στο $[0, q]$ και στο $[q, 1]$ είναι διαφορετικά. Παρατηρούμε επίσης ότι αν το ολικό μέγιστο επιτυγχάνεται σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές $t_1 < t_2$ τότε θα υπάρχει ρητός τέτοιος ώστε $t_1 < q < t_2$, και το μέγιστο στο $[0, q]$ και στο $[q, 1]$ συμπίπτουν.

□

1.5 Η ισχυρή ιδιότητα Markov και η αρχή της ανάκλασης

Η ιδιότητα Markov της κίνησης Brown μας πληροφορεί ότι, για κάθε σταθερή χρονική στιγμή, μπορούμε να θεωρήσουμε πως ξεκινάει από την αρχή. Μια σπουδαία ιδιότητα της κίνησης Brown είναι το γεγονός ότι το παραπάνω ισχύει και για μια συγκεκριμένη κλάση τυχαίων χρόνων. Οι τυχαίοι αυτοί χρόνοι ονομάζονται *χρόνοι τερματισμού* (stopping times). Η βασική ιδέα είναι ότι ο τυχαίος χρόνος T είναι χρόνος τερματισμού εάν η τιμή του μπορεί να καθοριστεί από τη γνώση του μονοπατιού μέχρι το παρόν χωρίς να απαιτείται πληροφορία από το μέλλον. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ένας χρόνος τερματισμού είναι η πρώτη φορά που θα συμβεί ένα γεγονός.

Ορισμός 7. Μια τυχαία μεταβλητή T με τιμές στο $[0, \infty]$, ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας με διήθηση $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$ λέγεται *χρόνος τερματισμού ως προς αυτή τη διήθηση* εάν $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ για κάθε $t \geq 0$.

Σημείωση 7. Έχουμε:

- (α) Κάθε αιτιοκρατικός χρόνος $t \geq 0$ είναι χρόνος στάσης ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$.
- (β) Εάν $(T_n : n = 1, 2, \dots)$ είναι μια αύξουσα ακολουθία χρόνων στάσης ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$ και $T_n \uparrow T$, τότε ο T είναι επίσης χρόνος τερματισμού ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$. Αυτό φαίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}(t).$$

Η ιδιότητα που διακρίνει την $(\mathcal{F}^+(t) : t \geq 0)$ από την $(\mathcal{F}^0(t) : t \geq 0)$ είναι η *δεξιά συνέχεια*, δηλαδή

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}^+(t + \varepsilon) = \mathcal{F}^+(t)$$

κάτι που είναι φανερό από τη σχέση

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}^+(t+\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}(t+1/n+1/k) = \mathcal{F}^+(t).$$

Πρόταση 2. Υποθέτουμε ότι για την τυχαία μεταβλητή T με τιμές στο $[0, \infty]$ ισχύει $\{T < t\} \in \mathcal{F}(t)$, για κάθε $t \geq 0$ και ότι $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$ είναι δεξιά συνεχής, τότε T είναι χρόνος στάσης ως προς την $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η T ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος. Τότε

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{T < t+1/k\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(t+1/n) = \mathcal{F}(t),$$

χρησιμοποιώντας τη δεξιά συνέχεια της $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$ στο τελευταίο βήμα.

Ορίζουμε τώρα, για κάθε χρόνο στάσης T , τη σ -άλγεβρα

$$\mathcal{F}^+(t) = \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}^+(t) \text{ για κάθε } t \geq 0\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το μέρος του ενδεχομένου A που τέμνει την $\{T \leq t\}$ είναι μετρήσιμο ως προς την πληροφορία που είναι διαθέσιμη μέχρι τη χρονική στιγμή t . Η παραπάνω συλλογή αποτελείται από ενδεχόμενα που συνέβησαν πριν τη χρονική στιγμή T . Πιο συγκεκριμένα είναι εύκολο να διαπιστώσουμε πως το μονοπάτι $\{B(t) : t \leq T\}$ είναι $\mathcal{F}^+(T)$ -μετρήσιμο. Όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος μπορούμε να πούμε ότι για δεξιά συνεχείς διηθήσεις όπως η $(\mathcal{F}^+(t) : t \geq 0)$ το ενδεχόμενο $\{T < t\}$ μπορεί να αντικαταστήσει το $\{T \leq t\}$ χωρίς να επηρεάζεται ο ορισμός. $\square$

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε την ισχυρή ιδιότητα *Markov* για την κίνηση Brown.

Θεώρημα 15 (Ισχυρή ιδιότητα Markov). Για κάθε σχεδόν βέβαια πεπερασμένο χρόνο τερματισμού T , η διαδικασία

$$\{B(T+t) - B(T) : t \geq 0\}$$

είναι μια τυπική κίνηση Brown ανεξάρτητη της $\mathcal{F}^+(T)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι αρκετά τεχνική και παραλείπεται. $\square$

1.5.1 Η αρχή της ανάκλασης

Η ισχυρή ιδιότητα Markov έχει πολλές εφαρμογές. Μια σημαντική εφαρμογή της εμφανίζεται στην απόδειξη της αρχής της ανάκλασης. Η αρχή της ανάκλασης δηλώνει ότι μια κίνηση Brown ανακλώμενη σε ένα χρόνο τερματισμού T συνεχίζει να είναι κίνηση Brown.

Θεώρημα 16 (Η αρχή της ανάκλασης). *Εάν T είναι χρόνος τερματισμού και $\{B(t) : t \geq 0\}$ είναι τυπική κίνηση Brown, τότε η διαδικασία $\{B^*(t) : t \geq 0\}$ που ονομάζεται κίνηση Brown ανακλώμενη στο χρόνο T και ορίζεται ως*

$$B^*(t) = B(t)\mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + (2B(T) - B(t))\mathbf{1}_{\{t > T\}}$$

είναι επίσης τυπική κίνηση Brown.

Απόδειξη. Έστω $B(t)$ μια τυπική κίνηση Brown. Θεωρούμε τις βοηθητικές στοχαστικές διαδικασίες

$$Y(t) = B(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

και την

$$Z(t) = B(t + T) - B(T).$$

Εφόσον ο τυχαίος χρόνος T είναι χρόνος τερματισμού, από το Θεώρημα 15, η διαδικασία $Z(t)$ θα είναι μια κίνηση Brown ανεξάρτητη της $\mathcal{F}^+(T)$, και κατά συνέπεια ανεξάρτητη της στοχαστικής διαδικασίας $Y(t)$. Άρα, από τις ιδιότητες της κίνησης Brown, και η $-Z(t)$ είναι μια κίνηση Brown ανεξάρτητη της $Y(t)$. Επομένως οι διαδικασίες (Y, Z) και $(Y, -Z)$ θα έχουν την ίδια κατανομή. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi : (Y, Z) \rightarrow (Y\mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + (Y(t) + Z(t - T))\mathbf{1}_{\{t > T\}}),$$

από τη μετρησιμότητα της απεικόνισης ϕ και του ότι οι διαδικασίες (Y, Z) και $(Y, -Z)$ έχουν την ίδια κατανομή, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και οι διαδικασίες $\phi(Y, Z)$ και $\phi(Y, -Z)$ θα έχουν την ίδια κατανομή. Όμως

$$\begin{aligned} \phi(Y, Z) &= B(t)\mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + (B(T) + B(t + T - T) - B(T))\mathbf{1}_{\{t > T\}} \\ &= B(t)\mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + B(t)\mathbf{1}_{\{t > T\}} \\ &= B(t) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \phi(Y, -Z) &= B(t)\mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + (B(T) - (B(t + T - T) - B(T)))\mathbf{1}_{\{t > T\}} \\ &= B(t)\mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + (2B(T) - B(t))\mathbf{1}_{\{t > T\}} \\ &= B^*(t) \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, οι $B(t)$ και $B^*(t)$ έχουν την ίδια κατανομή, και άρα η $B^*(t)$ είναι μια κίνηση Brown. $\square$

Τώρα θα εφαρμόσουμε την αρχή της ανάκλασης στην περίπτωση της τυπικής κίνησης Brown. Θεωρούμε τη διαδικασία $M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} B(s)$. Η κατανομή της συγκεκριμένης τυχαίας μεταβλητής δεν είναι a priori ξεκάθαρη, μπορούμε όμως να την προσδιορίσουμε με τη βοήθεια της αρχής της ανάκλασης.

Θεώρημα 17. Εάν $\alpha > 0$, τότε $\mathbb{P}_0 \{M(t) > \alpha\} = 2\mathbb{P}_0 \{B(t) > \alpha\} = \mathbb{P}_0 \{|B(t)| > \alpha\}$.

Απόδειξη. Έστω $T = \inf\{t \geq 0 : B(t) = \alpha\}$, και $\{B^*(t) : t \geq 0\}$ η ανακλώμενη στον χρόνο στάσης T κίνηση Brown. Τότε

$$\{M(t) > \alpha\} = \{B(t) > \alpha\} \cup \{M(t) > \alpha, B(t) \leq \alpha\}.$$

Η παραπάνω είναι ένωση ξένων ενδεχομένων όπου το δεύτερο σύνολο συμπίπτει με το ενδεχόμενο $\{B^*(t) : t \geq \alpha\}$. Το αποτέλεσμα έπεται από την αρχή της ανάκλασης. $\square$

Σημείωση 8. Το Λήμμα 2, σε συνδυασμό με το Θεώρημα 16, δίνει χρήσιμα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, για κάθε $\alpha > 0$, έχουμε το άνω φράγμα

$$\mathbb{P}_0\{M(t) > \alpha\} \leq \frac{\sqrt{2t}}{\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2t}\right\}.$$

1.5.2 Το εμβαδόν της διδιάστατης (επίπεδης) κίνησης Brown

Οι συνεχείς καμπύλες στο επίπεδο μπορεί να έχουν ακραία συμπεριφορά. Οι καμπύλες γεμίζουν τον χώρο, την πρώτη εκ των οποίων κατασκεύασε ο Peano, μπορούν να απεικονίσουν το διάστημα $[0, 1]$ με συνεχή τρόπο σε σύνολα με θετική επιφάνεια. Θα δείξουμε τώρα ότι η εικόνα της επίπεδης κίνησης Brown καταλαμβάνει μηδενική επιφάνεια. Η ιδιότητα Markov και η αρχή της ανάκλασης παίζουν σημαντικό ρόλο στην απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η $\{B(t) : t \geq 0\}$ είναι μια επίπεδη κίνηση Brown. Συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$ με $\mathcal{L}_d$, και χρησιμοποιούμε το σύμβολο $f * g$ για να συμβολίσουμε τη **συνέλιξη** των συναρτήσεων f και g , η οποία ορίζεται ως

$$f * g(x) := \int f(y)g(x-y)dy,$$

όποτε το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει. Για ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^d$, και για $x \in \mathbb{R}^d$ γράφουμε $A+x := \{\alpha+x : \alpha \in A\}$.

Θεώρημα 18. Εάν $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$ είναι σύνολα Borel με θετικό εμβαδό, τότε

$$\mathcal{L}_2(\{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{L}_2(A_1 \cap (A_2+x)) > 0\}) > 0.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A_1, A_2 είναι φραγμένα. Από το θεώρημα Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{A_1} * \mathbf{1}_{A_2}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{A_1}(w) \mathbf{1}_{A_2}(w-x) dw dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{A_1}(w) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{A_2}(w-x) dx \right) dw \\ &= \mathcal{L}_2(A_1) \mathcal{L}_2(A_2) > 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς $\mathbf{1}_{A_1} * \mathbf{1}_{-A_2}(x) > 0$ για ένα σύνολο με θετικό εμβαδό. Όμως,

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A_1} * \mathbf{1}_{-A_2}(x) &= \int \mathbf{1}_{A_1}(y) \mathbf{1}_{-A_2}(x-y) dy = \int \mathbf{1}_{A_1}(y) \mathbf{1}_{A_2+x}(y) dy \\ &= \mathcal{L}_2(A_1 \cap (A_2 + x)),\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το λήμμα. $\square$

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα του Lévy για το εμβαδό της επίπεδης κίνησης Brown.

Θεώρημα 19 (Lévy 1940). *Σχεδόν βέβαια, $\mathcal{L}_2(B[0, 1]) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $X = \mathcal{L}_2(B[0, 1])$ το εμβαδό της κίνησης Brown στο $[0, 1]$. Αρχικά θα δείξουμε ότι $\mathbb{E}[X] < \infty$. Παρατηρούμε ότι $X > \alpha$ μόνο εάν η κίνηση Brown εγκαταλείπει το τετράγωνο που έχει κέντρο το σημείο εκκίνησης και πλευρά $\sqrt{\alpha}$. Από το Λήμμα 1 και το Θεώρημα 17 έχουμε

$$\mathbb{P}\{X > \alpha\} \leq 2\mathbb{P}\left\{\max_{t \in [0, 1]} |W(t)| > \sqrt{\alpha}/2\right\} = 4\mathbb{P}\{W(1) > \sqrt{\alpha}/2\} \leq 4e^{-\alpha/8},$$

για $\alpha > 1$, όπου $\{W(t) : t \geq 0\}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown. Άρα

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}\{X > \alpha\} d\alpha \leq 4 \int_1^\infty e^{-\alpha/8} d\alpha + 1 < \infty.$$

Παρατηρούμε ότι η $B(3t)$ και η $\sqrt{3}B(t)$ έχουν την ίδια κατανομή, άρα

$$\mathbb{E}\mathcal{L}_2(B[0, 3]) = 3\mathbb{E}\mathcal{L}_2(B[0, 1]) = 3\mathbb{E}[X].$$

Ισχύει ότι $\mathcal{L}_2(B[0, 3]) \leq \sum_{j=0}^2 \mathcal{L}_2(B[j, j+1])$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν για $0 \leq i < j \leq 2$ έχουμε $\mathcal{L}_2(B[i, i+1] \cap B[j, j+1]) = 0$. Από την άλλη, για $j = 0, 1, 2$ έχουμε $\mathbb{E}\mathcal{L}_2(B[j, j+1]) = \mathbb{E}[X]$ και

$$3\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\mathcal{L}_2(B[0, 3]) \leq \sum_{j=0}^2 \mathbb{E}\mathcal{L}_2(B[j, j+1]) = 3\mathbb{E}[X],$$

απ' όπου προκύπτει ότι η τομή δύο οποιονδήποτε εκ των $B[j, j+1]$ έχει μέτρο μηδέν. Συγκεκριμένα $\mathcal{L}_2(B[0, 1] \cap B[2, 3]) = 0$, σχεδόν βέβαια.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα Markov και θα ορίσουμε τις κινήσεις Brown, $\{B_1(t) : t \in [0, 1]\}$ με $B_1(t) = B(t)$ και $\{B_2(t) : t \in [0, 1]\}$ με $B_2(t) = B(t+2) - B(2) + B(1)$. Η τυχαία μεταβλητή $Y := B(2) - B(1)$ είναι ανεξάρτητη και των δύο παραπάνω κινήσεων

Brown. Για $x \in \mathbb{R}^2$, ονομάζουμε $R(x)$ το εμβαδό του συνόλου $B_1[0, 1] \cap (x + B_2[0, 1])$ και σημειώνουμε ότι η $\{R(x) : x \in \mathbb{R}^2\}$ είναι ανεξάρτητη της Y . Τότε

$$0 = \mathbb{E}[\mathcal{L}_2(B[0, 1] \cap B[2, 3])] = \mathbb{E}[R(Y)] = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2/2} \mathbb{E}[R(x)] dx,$$

και ολοκληρώσαμε ως προς την κανονική κατανομή της $B(2) - B(1)$. Άρα για $\mathcal{L}_2$ σχεδόν όλα τα x , έχουμε ότι $R(x) = 0$ σχεδόν βέβαια, και από θεώρημα Fubini,

$$\mathcal{L}_2(\{x \in \mathbb{R}^2 : R(x) > 0\}) = 0, \quad \text{σχεδόν βέβαια.}$$

Από το Λήμμα 2.20 έχουμε ότι, σχεδόν βέβαια, $\mathcal{L}_2(B[0, 1]) = 0$ ή $\mathcal{L}_2(B[2, 3]) = 0$. Η παρατήρηση ότι οι $\mathcal{L}_2(B[0, 1])$ και $\mathcal{L}_2(B[2, 3])$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες ολοκληρώνει την απόδειξη ότι $\mathcal{L}_2(B[0, 1]) = 0$ σχεδόν βέβαια. $\square$

Σημείωση 9. Πόσο μεγάλο είναι το μονοπάτι της επίπεδης κίνησης Brown; Μόλις είδαμε ότι σχεδόν βέβαια έχει μέτρο Lebesgue ίσο με μηδέν, αλλά μια πιο διαφωτιστική απάντηση απαιτεί την ιδέα της διάστασης Hausdorff, την οποία θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

1.5.3 Το σύνολο των μηδενικών της κίνησης Brown

Μια ακόμη εφαρμογή της ισχυρής ιδιότητας Markov βρίσκεται στη μελέτη του συνόλου $\{t \geq 0 : B(t) = 0\}$ των μηδενικών της μονοδιάστατης κίνησης Brown. Θα δείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι κλειστό χωρίς μεμονωμένα σημεία (τέλειο σύνολο). Αυτό είναι κάπως απροσδόκητο από τη στιγμή που, σχεδόν βέβαια, η κίνηση Brown έχει μεμονωμένα σημεία μηδενισμού από αριστερά, όπως για παράδειγμα το πρώτο μηδενικό μετά το $1/2$, ή από δεξιά, όπως το τελευταίο μηδενικό πριν το $1/2$.

Θεώρημα 20. Ας θεωρήσουμε τη μονοδιάστατη κίνηση Brown $\{B(t) : t \geq 0\}$ και

$$\text{Zeros} = \{t \geq 0 : B(t) = 0\}$$

το σύνολο μηδενισμού αυτής. Τότε, σχεδόν βέβαια, το Zeros είναι ένα κλειστό σύνολο χωρίς μεμονωμένα σημεία.

Απόδειξη. Με πιθανότητα ένα, το Zeros είναι κλειστό εφόσον η κίνηση Brown είναι συνεχής σχεδόν βέβαια. Για να δείξουμε ότι κανένα σημείο του Zeros δεν είναι μεμονωμένο, θεωρούμε την κατασκευή: Για κάθε ρητό $q \in [0, \infty)$, σημειώνουμε το πρώτο μηδενικό μετά το q δηλαδή

$$\tau_q = \inf\{t \geq q : B(t) = 0\}.$$

Λόγω της Πρότασης 1, το τ_q είναι σχεδόν βέβαια πεπερασμένος χρόνος τερματισμού. Δεδομένου ότι το σύνολο Zeros είναι κλειστό, το $\inf$ θα είναι σχεδόν βέβαια minimum. Από

την ισχυρή ιδιότητα Markov στο τ_q , έχουμε ότι για κάθε q , σχεδόν βέβαια το τ_q δεν είναι μεμονωμένο μηδενικό από δεξιά. Λόγω της αριθμησιμότητας των ρητών συμπεραίνουμε ότι, σχεδόν βέβαια, για όλους τους ρητούς q , το μηδενικό τ_q δεν είναι μεμονωμένο από δεξιά.

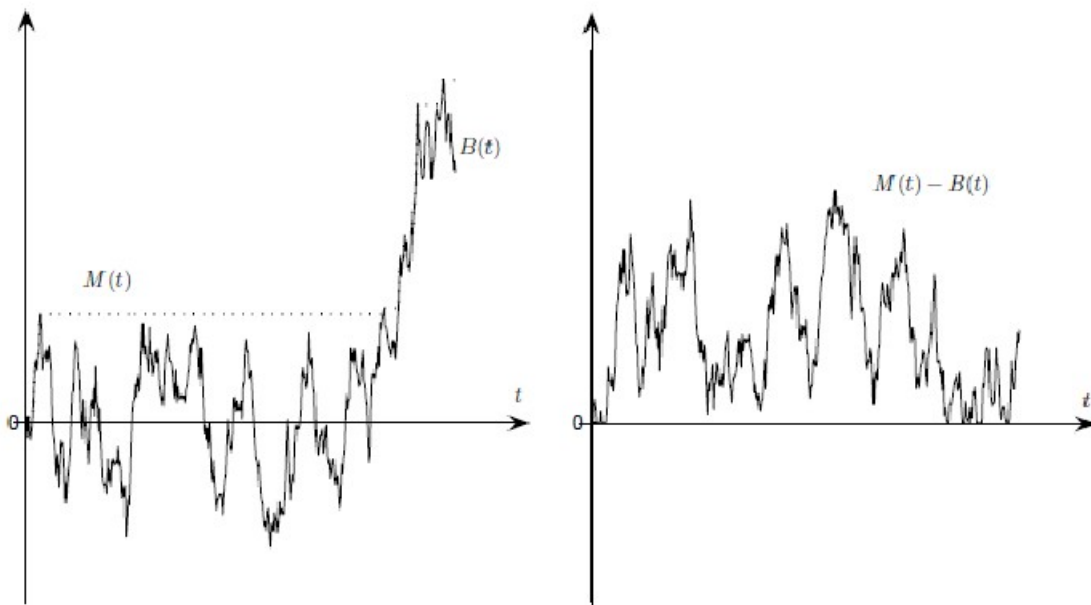
Απομένει να δείξουμε ότι τα υπόλοιπα σημεία του Zeros δεν είναι μεμονωμένα από αριστερά. Ο ισχυρισμός εδώ είναι ότι κάθε $0 < t \in \text{Zeros}$ με $t \neq \tau_q$ για κάθε ρητό q δεν είναι μεμονωμένο σημείο από αριστερά. Θεωρούμε μια ακολουθία $q_n \uparrow t$, $q_n \in \mathbb{Q}$. Ορίζουμε $t_n = \tau_{q_n}$. Είναι $q_n \leq t_n < t$, επομένως $t_n \uparrow t$. Άρα το t δεν είναι μεμονωμένο σημείο από αριστερά. $\square$

Στο επόμενο Θεώρημα διατυπώνουμε ένα αποτέλεσμα που θα χρειαστούμε αργότερα. Η απόδειξή του είναι αρκετά τεχνική, και για αυτήν παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [1], Θεώρημα 2.34.

Θεώρημα 21 (Lévy 1948). Έστω $\{M(t) : t \geq 0\}$ η διαδικασία μεγίστου της μονοδιάστατης κίνησης Brown $\{B(t) : t \geq 0\}$, δηλαδή η διαδικασία που ορίζεται ως

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} B(s).$$

Τότε η διαδικασία $\{Y(t) : t \geq 0\}$ που ορίζεται ως $Y(t) = M(t) - B(t)$ είναι μια ανακλώμενη κίνηση Brown.



Αριστερά η διαδικασία $\{B(t) : t \geq 0\}$ και η σχετιζόμενη με αυτή διαδικασία μεγίστου $\{M(t) : t \geq 0\}$ (διακεκομμένη καμπύλη). Δεξιά η διαδικασία $\{M(t) - B(t) : t \geq 0\}$

Κεφάλαιο 2

Διάσταση Hausdorff

Η διάσταση είναι το εργαλείο εκείνο που μετράει το μέγεθος των μαθηματικών αντικειμένων με έναν όχι και τόσο λεπτομερή τρόπο. Για παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα της κλασικής γεωμετρίας (αντικείμενο διάστασης ένα) είναι μικρότερο από την επιφάνεια ενός κυκλικού δίσκου (αντικείμενο διάστασης δύο), χωρίς όμως να υπάρχει διάκριση ανάμεσα σε ευθύγραμμα τμήματα διαφορετικού μήκους. Στα παρακάτω θα διαπιστώσουμε ότι, παρά αυτό το μειονέκτημα, η διάσταση είναι σε θέση να διακρίνει το μέγεθος πολλών αντικειμένων της θεωρίας πιθανοτήτων. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εισάγουμε μια γενίκευση της ιδέας της διάστασης, τη διάσταση Hausdorff. Κατόπιν, θα περιγράψουμε ορισμένες γενικές τεχνικές υπολογισμού της διάστασης Hausdorff αυθαίρετων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, και θα εφαρμόσουμε τις τεχνικές αυτές για τον υπολογισμό της διάστασης του γραφήματος, του συνόλου Zeros της γραμμικής κίνησης Brown και της εικόνας της πολυδιάστατης κίνησης Brown.

2.1 Η διάσταση Minkowski

Σε αυτό το κεφάλαιο θα θεωρούμε τον $\mathbb{R}^d$, καθώς και κάθε υποσύνολό του, ως μετρικό χώρο με μετρική την ευκλείδεια, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2}$ με $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Για $A \subset \mathbb{R}^d$ ορίζουμε την διάμετρο του ως $|A| := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$. Ο ορισμός της διάστασης Minkowski ενός φραγμένου συνόλου $E \subset \mathbb{R}^d$ βασίζεται στην ιδέα της κάλυψης του E . Μια **κάλυψη** του E είναι μια πεπερασμένη ή αριθμήσιμη συλλογή συνόλων

$$E_1, E_2, E_3, \dots \text{ με } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Ορίζουμε, για $\varepsilon > 0$,

$$M(E, \varepsilon) := \min \left\{ k \geq 1 : \begin{array}{l} \text{υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη } E_1, \dots, E_k \text{ του } E \\ \text{με } |E_i| \leq \varepsilon \text{ για } i = 1, \dots, k \end{array} \right\}.$$

Διαισθητικά, όταν το E έχει διάσταση s , τότε ο αριθμός $M(E, \varepsilon)$ είναι της τάξης του ε^{-s} . Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί σε απλές περιπτώσεις όπως το ευθύγραμμο τμήμα, τα τετράγωνα στο επίπεδο κλπ. Εδώ βρίσκεται το κίνητρο για τον ορισμό της διάστασης Minkowski.

Ορισμός 8. Για ένα φραγμένο $E \subset \mathbb{R}^d$, ορίζουμε την κατώτερη διάσταση Minkowski ως

$$\underline{\dim}_M E := \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\log M(E, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

και την ανώτερη διάσταση Minkowski ως

$$\overline{\dim}_M E := \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\log M(E, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Πάντοτε ισχύει ότι $\underline{\dim}_M E \leq \overline{\dim}_M E$. Στην περίπτωση που έχουμε ισότητα, γράφουμε

$$\dim_M(\varepsilon) := \underline{\dim}_M E = \overline{\dim}_M E.$$

Σημείωση 10. Η διάσταση Minkowski έχει ένα δυσάρεστο περιορισμό: Παρατηρούμε ότι τα σύνολα $S = \{x\}$ έχουν διάσταση Minkowski ίση με μηδέν, όμως θα δείξουμε στο παρακάτω παράδειγμα ότι το σύνολο

$$E := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

έχει θετική διάσταση, και ως εκ τούτου η διάσταση Minkowski δε διαθέτει την ιδιότητα αριθμήςιμης ευστάθειας

$$\dim \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \sup \{ \dim E_k : k \geq 1 \}.$$

Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε για την αποφυγή αυτού του προβλήματος στηρίζεται στην ιδέα του να λάβουμε υπόψη το μέγεθος των συνόλων της κάλυψης. Κάτι τέτοιο θα εμπεριέχει περισσότερη πληροφορία για τα υπό εξέταση σύνολα, και οδηγεί στον ορισμό της διάστασης Hausdorff.

Παράδειγμα. Θα δείξουμε ότι, για το σύνολο E που ορίσαμε παραπάνω, ισχύει $\dim_M(E) = \frac{1}{2} > 0$. Δεδομένου $\varepsilon \in (0, 1)$, βρίσκουμε τον ακέραιο n τέτοιο ώστε $1/(n+1)^2 \leq \varepsilon < 1/n^2$. Τότε τα σημεία του συνόλου $\{1/k : k > n\} \cup \{0\}$ μπορούν να καλυφθούν από $n+1$ διαστήματα διαμέτρου ε , και n επιπλέον σφαίρες αρκούν για την κάλυψη των n εναπομείναντων σημείων. Άρα

$$M(E, \varepsilon) \leq 2n + 1 \leq \frac{2n+1}{n} (1/\varepsilon)^{1/2},$$

δηλαδή $\overline{\dim}_M(E) \leq 1/2$. Από την άλλη, καθώς η απόσταση για γειτονικά σημεία είναι

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)^2},$$

πάντα θα χρειαζόμαστε τουλάχιστον $n-1$ σύνολα διαμέτρου ε για να καλύψουμε το E που σημαίνει

$$M(E, \varepsilon) \geq n-1 \geq \frac{n-1}{n+1}(1/\varepsilon)^{1/2}$$

δηλαδή $\underline{\dim}_M(E) \geq 1/2$.

2.2 Η διάσταση Hausdorff

Η διάσταση Hausdorff και το μέτρο Hausdorff εισήχθηκαν από τον Felix Hausdorff το 1919. Όπως και η διάσταση Minkowski, η διάσταση Hausdorff βασίζεται στην ιδέα της κάλυψης ενός μετρικού χώρου E . Στον ορισμό της διάστασης Minkowski απλά μετρήσαμε το πλήθος των συνόλων της κάλυψης. Τώρα επιτρέπουμε το πλήθος των συνόλων της κάλυψης να γίνει άπειρο και συνυπολογίζουμε το μέγεθος των συνόλων αυτών, με βάση τη διάμετρό τους.

Επιστρέφοντας στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε να δούμε ότι το σύνολο $E := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ μπορεί να καλυφθεί πιο αποτελεσματικά αν ελαττώσουμε το μέγεθος των σφαιρών καθώς κινούμαστε από τα δεξιά προς τα αριστερά. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα υπάρχει μεγάλη απόκλιση μεταξύ υπολογισμών όταν στην κάλυψη χρησιμοποιούμε μικρά σύνολα από εκείνους στους οποίους απλά μετράμε το πλήθος των συνόλων της κάλυψης.

Κάτι που θα χρειαστούμε στα επόμενα είναι η α -τιμή της κάλυψης. Για κάθε $\alpha \geq 0$ και κάλυψη $E_1, E_2, \dots$, ονομάζουμε α -τιμή της κάλυψης την ποσότητα

$$\sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^\alpha.$$

Ορισμός 9. Για κάθε $\alpha \geq 0$ το α -Hausdorff περιεχόμενο ενός $E \subset \mathbb{R}^d$ ορίζεται ως

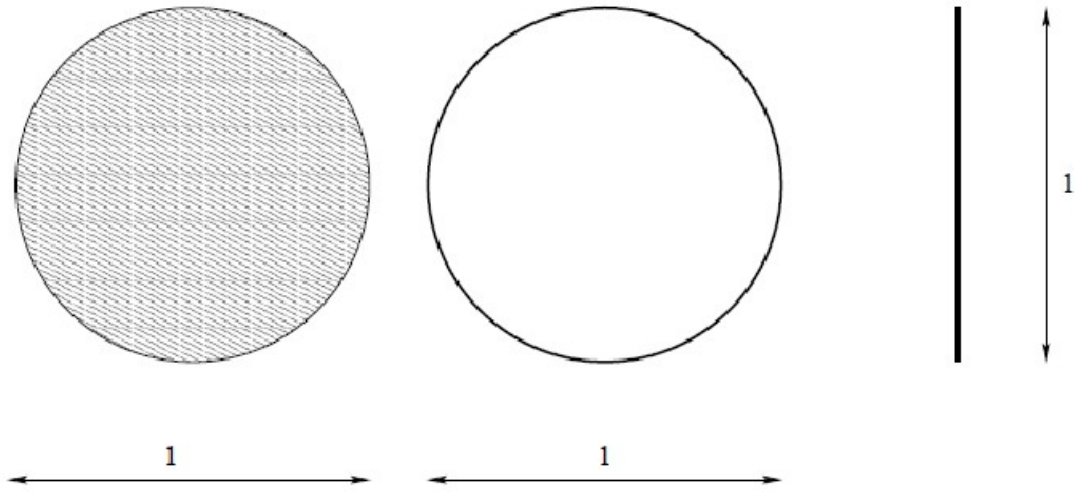
$$\mathcal{H}_\infty^\alpha(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^\alpha : E_1, E_2, \dots \text{ μια κάλυψη του } E \right\}$$

δηλαδή η α -τιμή της πιο αποτελεσματικής κάλυψης. Εάν $0 \leq \alpha \leq \beta$ και $\mathcal{H}_\infty^\alpha(E) = 0$, τότε $\mathcal{H}_\infty^\beta(E) = 0$ επίσης. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε

$$\dim E = \inf \{ \alpha \geq 0 : \mathcal{H}_\infty^\alpha(E) = 0 \} = \sup \{ \alpha \geq 0 : \mathcal{H}_\infty^\alpha(E) > 0 \},$$

τη διάσταση Hausdorff του συνόλου E .

Σημείωση 11. Η διάσταση Hausdorff μπορεί να γίνει και άπειρη. Είναι όμως εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ έχουν διάσταση Hausdorff όχι μεγαλύτερη από d . Επιπλέον, θα δείξουμε ότι σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, η διάσταση Hausdorff φράσσεται άνω από την κατώτερη διάσταση Minkowski. Η ιδέα του α -Hausdorff περιεχομένου παίζει σημαντικό ρόλο στον ορισμό της διάστασης Hausdorff. Εν τούτοις δε χρησιμεύει στη διάκριση των μεγεθών συνόλων της ίδιας διάστασης.



Ο δίσκος, η σφαίρα, και το ευθύγραμμο τμήμα έχουν όλα 1-Hausdorff περιεχόμενο ίσο με ένα.

Για παράδειγμα, ο κυκλικός δίσκος και η σφαίρα διαμέτρου 1 το κάθε ένα μπορούν να καλυφθούν από μια σφαίρα διαμέτρου 1, οπότε το 1-Hausdorff περιεχόμενό τους θα είναι το πολύ 1. Ένα ευθύγραμμο τμήμα δεν επιτρέπει αποτελεσματικότερη κάλυψη, και το 1-Hausdorff περιεχόμενό του είναι επίσης 1. Για το λόγο αυτό, θα χρειαστούμε την πιο εκλεπτυσμένη έννοια του μέτρου Hausdorff. Εδώ η ιδέα είναι να θεωρήσουμε καλύψεις αποτελούμενες από μικρά σύνολα.

Ορισμός 10. Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$. Για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\delta > 0$, ορίζουμε

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^\alpha : E_1, E_2, E_3, \dots \text{ καλύπτουν το } E \text{ και } |E_i| \leq \delta \right\},$$

δηλαδή στην κάλυψη έχουμε σύνολα διαμέτρου το πολύ δ . Η $\mathcal{H}_\delta^\alpha(E)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του δ , άρα το όριό της για $\delta \rightarrow 0$ συμπίπτει με το $\sup$ για $\delta > 0$. Τότε

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(E) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(E)$$

είναι το α -Hausdorff μέτρο του συνόλου E .

Σημείωση 12. Το α -Hausdorff μέτρο διαθέτει δύο προφανείς ιδιότητες οι οποίες μαζί με την $\mathcal{H}^\alpha(\emptyset) = 0$ το καθιστούν εξωτερικό μέτρο. Αυτές είναι η αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα,

$$\mathcal{H}^\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^\alpha(E_i) \text{ για κάθε ακολουθία } E_1, E_2, E_3, \dots \subset \mathbb{R}^d,$$

και η μονοτονία

$$\mathcal{H}^\alpha(E) \leq \mathcal{H}^\alpha(D), \quad \text{εάν } E \subset D \subset \mathbb{R}^d.$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τη διάσταση Hausdorff με τη βοήθεια του μέτρου Hausdorff.

Πρόταση 3. Για κάθε $E \subset \mathbb{R}^d$ ισχύει

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}_\infty^\alpha(E) = 0,$$

και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \dim E &= \inf\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\} = \inf\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) < \infty\} \\ &= \sup\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) > 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = \infty\}. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mathcal{H}_\infty^\alpha(E) = c > 0$, κάτι που δηλώνει ότι $\mathcal{H}_\delta^\alpha(E) \geq c$ για κάθε $\delta > 0$. Άρα $\mathcal{H}^\alpha(E) \geq c > 0$. Αντίστροφα, εάν $\mathcal{H}_\infty^\alpha(E) = 0$, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει κάλυψη από σύνολα $E_1, E_2, E_3, \dots$ με $\sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^\alpha < \delta$. Αυτά τα σύνολα έχουν διάμετρο μικρότερη από $\delta^{1/\alpha}$ οπότε $\mathcal{H}_{\delta^{1/\alpha}}^\alpha(E) < \delta$ και παίρνοντας $\delta \downarrow 0$ έχουμε $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$, δηλαδή τον ισχυρισμό. Είναι επίσης άμεσο το ότι $\dim E = \inf\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) > 0\}$. Για να επιβεβαιώσουμε τις εναλλακτικές εκφράσεις αρκεί να δείξουμε ότι εάν $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$ τότε $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$ για κάθε $\beta > \alpha$. Θεωρούμε λοιπόν $\mathcal{H}^\alpha(E) = C < \infty$. Δεδομένου $\delta > 0$, υπάρχει κάλυψη από σύνολα $E_1, E_2, E_3, \dots$ διαμέτρου μικρότερη από δ και α -τιμή όχι μεγαλύτερη από $C + 1$ για την οποία $\mathcal{H}_\delta^\alpha(E) \leq C + 1$. Ισχύει ότι $\mathcal{H}_\delta^\beta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha} \mathcal{H}_\delta^\alpha(E) \leq \delta^{\beta-\alpha}(C + 1)$. Για $\delta \downarrow 0$, έχουμε $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$.

□

Σημείωση 13. Καθώς οι απεικονίσεις *Lipschitz* πολλαπλασιάζουν τη διάμετρο των συνόλων κατά το πολύ μια σταθερά, η εικόνα κάθε συνόλου $A \subset E$ κάτω από μια απεικόνιση *Lipschitz* έχει το πολύ τη διάσταση Hausdorff του A . Αυτή η παρατήρηση είναι ιδιαίτερος χρήσιμη για προβολές.

Μια γενίκευση της τελευταίας παρατήρησης προκύπτει όταν παρατηρούμε την επίδραση των συνεχών Hölder απεικονίσεων πάνω στη διάσταση Hausdorff.

Ορισμός 11. Θεωρούμε $0 < \alpha \leq 1$. Μια συνάρτηση $f : (E_1, d_1) \rightarrow (E_2, d_2)$ ανάμεσα σε δύο μετρικούς χώρους λέγεται α -Hölder συνεχής εάν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y)^\alpha \quad \text{για κάθε } x, y \in E_1.$$

Η παραπάνω σταθερά ορισμένες φορές λέγεται και σταθερά Hölder.

Σημείωση 14. Οι συνεχείς Hölder απεικονίσεις επιτρέπουν κάποιο έλεγχο στο Hausdorff μέτρο των εικόνων. Παραθέτουμε σχετικά την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4. Έστω $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$, με $F \subset \mathbb{R}^d$, α -Hölder συνεχής με σταθερά C . Τότε για κάθε $s \geq 0$, ισχύει

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F),$$

και άρα $\dim f(F) \leq (1/\alpha) \dim F$.

Απόδειξη. Έστω $U_1, U_2, U_3, \dots$ μια κάλυψη του συνόλου F με $|U_i| \leq \delta$ τότε δεδομένου ότι $|f(F \cap U_i)| \leq C|F \cap U_i|^\alpha \leq C|U_i|^\alpha$ έχουμε ότι $f(F \cap U_1), f(F \cap U_2), f(F \cap U_3), \dots$ είναι μια κάλυψη του συνόλου $f(F)$ με $|f(F \cap U_i)| \leq \varepsilon$ όπου $\varepsilon = C\delta^\alpha$. Τότε $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq C^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s$, και κατά συνέπεια $\mathcal{H}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Λαμβάνοντας $\delta \rightarrow 0$, οπότε και $\varepsilon \rightarrow 0$, παίρνουμε την αποδεικτέα. Τώρα θεωρούμε $s > \dim F$, άρα $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) = 0$ που σημαίνει $\dim f(F) \leq s/\alpha$ για κάθε $s > \dim F$, άρα και για το $\inf$ των s , δηλαδή για $s = \dim F$. $\square$

2.3 Άνω φράγματα για τη διάσταση Hausdorff

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε γενικά άνω φράγματα για τη διάσταση του γραφήματος και της εικόνας συναρτήσεων που είναι Hölder συνεχείς.

Ορισμός 12. Για μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}^d$, με $A \subset [0, \infty)$ ορίζουμε ως γράφημα το σύνολο

$$\text{Graph}_f(A) := \{(t, f(t)) : t \in A\} \subset \mathbb{R}^{d+1},$$

και ως εικόνα το

$$\text{Range}_f(A) := f(A) = \{f(t) : t \in A\} \subset \mathbb{R}^d$$

Πρόταση 5. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ α -Hölder συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$(a) \dim(\text{Graph}_f[0, 1]) \leq 1 + (1 - \alpha)(d \wedge \frac{1}{\alpha}),$$

$$(\beta) \text{ και για κάθε } A \subset [0, 1], \text{ έχουμε } \dim(\text{Range}_f[0, 1]) \leq \frac{\dim A}{\alpha}.$$

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι α -Hölder συνεχής, υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε, αν $s, t \in [0, 1]$ με $|t - s| \leq \varepsilon$, τότε $|f(t) - f(s)| \leq C\varepsilon^\alpha$. Καλύπτουμε το $[0, 1]$ με όχι περισσότερα από $\lceil 1/\varepsilon \rceil$ διαστήματα μήκους ε . Η εικόνα καθενός από αυτά τα διαστήματα περιέχεται σε μια σφαίρα διαμέτρου $2C\varepsilon^\alpha$. Τώρα μπορούμε

- είτε να καλύψουμε κάθε μια από τις σφαίρες αυτές με όχι περισσότερες από ένα σταθερό πολλαπλάσιο του $\varepsilon^{d\alpha-d}$ σφαίρες διαμέτρου ε ,
- ή να εκμεταλλευτούμε το ότι υποδιαστήματα μήκους $(\varepsilon/C)^{1/\alpha}$ στο $[0, 1]$ απεικονίζονται σε σφαίρες διαμέτρου ε , και καλύπτουμε την εικόνα σε κάθε μια από αυτές τις σφαίρες με ένα σταθερό πολλαπλάσιο του $\varepsilon^{1-1/\alpha}$ σφαιρών ακτίνας ε .

Καί στις δύο περιπτώσεις, η κάλυψη του γραφήματος αποτελείται από το γινόμενο των διαστημάτων επί το πλήθος των σφαιρών της κάλυψης που χρησιμοποιούνται κάθε φορά και έχουν διάμετρο ε . Η πρώτη κατασκευή απαιτεί σταθερό πολλαπλάσιο του $\varepsilon^{d\alpha-d-1}$, ενώ στη δεύτερη σταθερό πολλαπλάσιο του $\varepsilon^{1-1/\alpha}$, και όλα με διάμετρο τάξης ε . Αυτό δίνει το άνω φράγμα για το (α), ενώ το (β) προκύπτει από την Πρόταση 2. $\square$

Σημείωση 15. Από την ιδιότητα της αριθμήσιμης ευστάθειας της διάστασης Hausdorff, τα αποτελέσματα της προηγούμενης πρότασης ισχύουν ακόμη και όταν η $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ είναι μόνο τοπικά α -Hölder συνεχής.

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε τις ιδιότητες της διάστασης της κίνησης Brown, και θα συγκεντρώσουμε όλα τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα που έχουμε συζητήσει. Έχουμε αποδείξει στο πρώτο κεφάλαιο ότι η μονοδιάστατη κίνηση Brown είναι παντού τοπικά α -Hölder συνεχής για κάθε $\alpha < 1/2$, σχεδόν βέβαια. Αυτό επεκτείνεται και στη d -διάστατη κίνηση Brown, και κάτι τέτοιο μας επιτρέπει να υπολογίσουμε άνω φράγμα για το γράφημα και για την εικόνα της. Για ευκολία, όταν αναφερόμαστε στην κίνηση Brown, δε θα γράφουμε το δείκτη στις ποσότητες $\text{Graph}_f(A)$ και $\text{Range}_f(A)$.

Πόρισμα 3. Για κάθε σύνολο $A \subset [0, \infty)$, το γράφημα μιας d -διάστατης κίνησης Brown ικανοποιεί, σχεδόν βέβαια,

$$\dim(\text{Graph}(A)) \leq \begin{cases} 3/2 & \text{εάν } d = 1 \\ 2 & \text{εάν } d \geq 2 \end{cases}$$

και η εικόνα της, σχεδόν βέβαια,

$$\dim \text{Range}(A) \leq (2 \dim A) \wedge d$$

.

Σημείωση 16. Τα αντίστοιχα κάτω φράγματα της διάστασης Hausdorff για το $\text{Graph}(A)$ και το $\text{Range}(A)$ θα συζητηθούν αργότερα όταν και θα έχουμε τα πλέον κατάλληλα εργαλεία στη διάθεσή μας.

Το τελευταίο πόρισμα δεν κάνει κάποιο σχόλιο για το 2-Hausdorff μέτρο της εικόνας, και αυτό επειδή μια τέτοια δήλωση απαιτεί περισσότερη πληροφορία απ' ό τι μπορεί να προσφέρει η σταθερά α . Πάντως είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι, για $d \geq 2$,

$$\mathcal{H}^2(B([0, 1])) < \infty$$

σχεδόν βέβαια. Πράγματι, για $n \in \mathbb{N}$, καλύπτουμε το $B([0, 1])$ με τις κλειστές σφαίρες

$$\mathcal{B}\left(B\left(\frac{k}{n}\right), \max_{\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}} |B(t) - B\left(\frac{k}{n}\right)|\right), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Από την ομοιόμορφη συνέχεια της κίνησης Brown στο μοναδιαίο διάστημα, η μέγιστη διάμετρος των συνόλων της κάλυψης συγκλίνει στο 0, καθώς $n \rightarrow \infty$. Επιπλέον έχουμε

$$\mathbb{E}\left[\left(\max_{\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}} |B(t) - B\left(\frac{k}{n}\right)|\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\max_{0 \leq t \leq \frac{1}{n}} |B(t)|\right)^2\right] = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\left(\max_{0 \leq t \leq 1} |B(t)|\right)^2\right]$$

από χρήση της ιδιότητας αλλαγής κλίμακας. Η αναμενόμενη τιμή στο τελευταίο μέλος είναι πεπερασμένη (από μεγιστική ανισότητα Doob). Ός εκ τούτου, η μέση τιμή της 2-τιμής της πιο πάνω κάλυψης είναι φραγμένη από

$$4\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\max_{\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}} |B(t) - B\left(\frac{k}{n}\right)|\right)^2\right] = 4\mathbb{E}\left[\left(\max_{0 \leq t \leq 1} |B(t)|\right)^2\right],$$

η οποία λόγω του λήμματος Fatou δίνει

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\max_{\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}} |B(t) - B\left(\frac{k}{n}\right)|\right)^2\right] < \infty,$$

δηλαδή το $\liminf$ είναι πεπερασμένο σχεδόν βέβαια, κάτι που αποδεικνύει ότι $\mathcal{H}^2(B([0, 1])) < \infty$ σχεδόν βέβαια.

2.4 Η αρχή Κατανομής της Μάζας

Από τον ορισμό της διάστασης Hausdorff, είναι γενικά εύκολο να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για τη διάσταση: Απλά βρίσκουμε μια κάλυψη του συνόλου και κατόπιν ένα άνω φράγμα για την α -τιμή του. Όταν όμως πρέπει να βρούμε κάτω φράγμα, τότε είμαστε υποχρεωμένοι να υπολογίσουμε α -τιμές πάνω σε όλες τις καλύψεις του συνόλου. Η αρχή της κατανομής της μάζας είναι ένας τρόπος για να παρακάμψουμε αυτό το πρόβλημα, και βασίζεται στην ύπαρξη ενός μη μηδενικού μέτρου πάνω στο σύνολο. Η βασική ιδέα είναι το μέτρο αυτό να κατανέμει θετική και πεπερασμένη μάζα στο σύνολο του οποίου τη διάσταση θέλουμε να υπολογίσουμε. Για το λόγο αυτό, ένα μέτρο μ πάνω στα Borel σύνολα ενός μετρικού χώρου θα το ονομάζουμε **κατανομή μάζας** στο E εάν

$$0 < \mu(E) < \infty.$$

Θεώρημα 22 (Αρχή κατανομής της μάζας). Υποθέτουμε ότι $E \subset \mathbb{R}^d$ και $\alpha \geq 0$. Εάν υπάρχει μια κατανομή μάζας μ στο E και σταθερές $C > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιες ώστε

$$\mu(V) \leq C|V|^\alpha$$

για όλα τα κλειστά στο E σύνολα V διαμέτρου $|V| \leq \delta$, τότε

$$\mathcal{H}^\alpha(E) \geq \frac{\mu(E)}{C} > 0,$$

οπότε $\dim E \geq \alpha$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $U_1, U_2, \dots$ είναι μια κάλυψη του E από αυθαίρετα επιλεγμένα σύνολα με $|U_i| \leq \delta$. Εστω $V_i = \overline{U_i} \cap E$, και παρατηρούμε ότι $|V_i| \leq |U_i|$. Έχουμε λοιπόν,

$$0 < \mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) \leq C \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^\alpha.$$

Παίρνοντας $\inf$ πάνω σε όλες τις καλύψεις και $\delta \downarrow 0$, έχουμε το αποτέλεσμα. $\square$

Τώρα θα εφαρμόσουμε αυτή την τεχνική για να βρούμε τη διάσταση Hausdorff του συνόλου των μηδενικών της μονοδιάστατης κίνησης Brown. Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο αυτό είναι υπεραριθμήσιμο χωρίς μεμονωμένα σημεία. Εκ πρώτης όψεως, δεν είναι προφανές ποιο μέτρο θα ήταν κατάλληλο για την εφαρμογή της αρχής κατανομής μάζας. Εδώ ακριβώς μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα του Lévy που αναφέρεται στη διαδικασία μεγίστου μιας μονοδιάστατης κίνησης Brown. Η διαδικασία αυτή ορίστηκε στο Θεώρημα 21.

Ορισμός 13. Έστω μια μονοδιάστατη κίνηση Brown $\{B(t) : t \geq 0\}$, και η σχετιζόμενη με αυτή διαδικασία μεγίστου $\{M(t) : t \geq 0\}$. Μια χρονική στιγμή $t \geq 0$ λέγεται *record time* για την κίνηση Brown εάν $M(t) = B(t)$ και το σύνολο αυτό συμβολίζεται με Rec .

Παρατηρούμε ότι τα record times είναι τα μηδενικά της διαδικασίας $\{Y(t) : t \geq 0\}$ που δίνεται από την

$$Y(t) = M(t) - B(t).$$

Η τελευταία αυτή διαδικασία, με βάση το Θεώρημα 21, είναι μια ανακλώμενη κίνηση Brown, οπότε το σύνολο των μηδενικών της και το σύνολο των μηδενικών της $\{B(t) : t \geq 0\}$ έχουν την ίδια κατανομή. Ένα μέτρο πάνω στο Rec δίνεται από τη συνάρτηση κατανομής της $\{M(t) : t \geq 0\}$, που μας δίνει κάτω φράγμα στην διάσταση Hausdorff του συνόλου Rec μέσω της αρχής κατανομής της μάζας.

Λήμμα 4. Σχεδόν βέβαια, $\dim(\text{Rec} \cap [0, 1]) \geq 1/2$, και κατά συνέπεια $\dim(\text{Zeros} \cap [0, 1]) \geq 1/2$.

Απόδειξη. Εφόσον $t \mapsto M(t)$ είναι μια μη φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως συνάρτηση κατανομής του μέτρου μ με $\mu(a, b] = M(b) - M(a)$. Το μέτρο αυτό έχει στήριγμα στο (κλειστό) σύνολο Rec. Γνωρίζουμε ότι, με πιθανότητα ένα, η B είναι τοπικά Hölder συνεχής για κάθε εκθέτη $\alpha < 1/2$. Άρα υπάρχει μια τυχαία σταθερά C_α , τέτοια ώστε, σχεδόν βέβαια,

$$M(b) - M(a) \leq \max_{0 \leq h \leq b-a} B(a+h) - B(a) \leq C_\alpha (b-a)^\alpha,$$

για κάθε $a, b \in [0, 1]$. Από την αρχή της κατανομής μάζας έχουμε, σχεδόν βέβαια,

$$\dim(\text{Rec} \cap [0, 1]) \geq \alpha.$$

Για $\alpha \uparrow \frac{1}{2}$ έχουμε την αποδεικτέα. □

Για το άνω φράγμα της διάστασης Hausdorff του συνόλου των μηδενικών (Zeros) θεωρούμε μια κάλυψη αποτελούμενη από διαστήματα. Ορίζουμε τη συλλογή $\mathcal{D}_k$ των διαστημάτων $[j 2^{-k}, (j+1) 2^{-k}]$ για $j = 0, \dots, 2^k - 1$, και θέτουμε $Z(I) = 1$ εάν υπάρχει $t \in I$ με $B(t) = 0$ και $Z(I) = 0$ διαφορετικά. Για να υπολογίσουμε τη διάσταση του συνόλου των μηδενικών, χρειαζόμαστε μια εκτίμηση της πιθανότητας ότι ένα δεδομένο διάστημα περιέχει μηδενικό της κίνησης Brown.

Λήμμα 5. Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά C , τέτοια ώστε, για κάθε $a, \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\{\text{υπάρχει } t \in (a, a + \varepsilon) \text{ με } B(t) = 0\} \leq C \sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το ενδεχόμενο $A = \{|B(a+\varepsilon)| \leq \sqrt{\varepsilon}\}$. Από την ιδιότητα της αλλαγής κλίμακας της κίνησης Brown, παίρνουμε το άνω φράγμα

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left\{|B(1)| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}}\right\} \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}}.$$

Το γεγονός ότι η κίνηση Brown έχει μηδενικό στο διάστημα $(a, a+\varepsilon)$ καθιστά το ενδεχόμενο A αρκετά πιθανό. Πράγματι, εφαρμόζοντας την ισχυρή ιδιότητα Markov στον χρόνο στάσης $T = \inf\{t \geq a : B(t) = 0\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &\geq \mathbb{P}(A \cap \{0 \in B[a, a+\varepsilon]\}) \\ &\geq \mathbb{P}[T \leq a+\varepsilon] \min_{a \leq t \leq a+\varepsilon} \mathbb{P}[|B(a+\varepsilon)| \leq \sqrt{\varepsilon} \mid B(t) = 0]. \end{aligned}$$

Το $\min$ λαμβάνεται στο $t = a$, και εφαρμόζοντας την ιδιότητα αλλαγής κλίμακας της κίνησης Brown, έχουμε $\mathbb{P}[|B(a+\varepsilon)| \leq \sqrt{\varepsilon} \mid B(a) = 0] = \mathbb{P}[|B(1)| \leq 1] =: c > 0$. Άρα

$$\mathbb{P}\{T \leq a+\varepsilon\} \leq \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}}.$$

□

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για αρκετά μεγάλο ακέραιο k , έχουμε

$$\mathbb{E}[Z(I)] \leq c_1 2^{-k/2}, \quad \text{για κάθε } I \in \mathcal{D}_k \text{ με } I \subset (\varepsilon, 1-\varepsilon),$$

για κάποια σταθερά $c_1 > 0$. Οπότε το κάλυμμα του συνόλου $\{t \in (\varepsilon, 1-\varepsilon) : B(t) = 0\}$ με τα $I \in \mathcal{D}_k$ που έχουν $I \cap (\varepsilon, 1-\varepsilon) \neq \emptyset$ και $Z(I) = 1$ έχει αναμενόμενη $\frac{1}{2}$ -τιμή

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_k \\ I \cap (\varepsilon, 1-\varepsilon) \neq \emptyset}} Z(I) 2^{-k/2} \right] = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_k \\ I \cap (\varepsilon, 1-\varepsilon) \neq \emptyset}} \mathbb{E}[Z(I)] 2^{-k/2} \leq c_1 2^k 2^{-k/2} 2^{-k/2} = c_1.$$

Τελικά από το λήμμα Fatou έχουμε,

$$\mathbb{E} \left[\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \cap (\varepsilon, 1-\varepsilon) \neq \emptyset}} Z(I) 2^{-k/2} \right] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \cap (\varepsilon, 1-\varepsilon) \neq \emptyset}} Z(I) 2^{-k/2} \right] \leq c_1.$$

Το τελευταίο σημαίνει ότι το $\liminf$ είναι πεπερασμένο σχεδόν βέβαια, δηλαδή υπάρχει μια οικογένεια καλύψεων με μέγιστη διάμετρο να συγκλίνει στο 0 και φραγμένη $\frac{1}{2}$ τιμή. Σχεδόν βέβαια λοιπόν,

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}\{t \in (\varepsilon, 1-\varepsilon) : B(t) = 0\} < \infty,$$

και πιο συγκεκριμένα $\dim(\text{Zeros} \cap (\varepsilon, 1-\varepsilon)) \leq \frac{1}{2}$. Καθώς το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετα επιλεγμένο, πετυχαίνουμε το ίδιο άνω φράγμα για ολόκληρο το σύνολο των μηδενικών (Zeros). Δεδομένου και του κάτω φράγματος, έχουμε το παρακάτω βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 23. Έστω $\{B(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ μια μονοδιάστατη κίνηση Brown. Τότε, με πιθανότητα ένα, έχουμε

$$\dim(\text{Zeros} \cap [0, 1]) = \dim(\text{Rec} \cap [0, 1]) = \frac{1}{2}.$$

2.5 Η μέθοδος της ενέργειας

Η μέθοδος της ενέργειας (energy method) είναι μια τεχνική υπολογισμού κάτω φράγματος για τη διάσταση Hausdorff με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις εφαρμογές της πάνω σε τυχαία fractals. Αντικαθιστά τη συνθήκη ύπαρξης μάζας για όλα τα κλειστά σύνολα στην αρχή της κατανομής μάζας με την ύπαρξη πεπερασμένης ενέργειας. Στα ακόλουθα θεωρούμε $E \subset \mathbb{R}^d$ και ρ η ευκλείδεια μετρική.

Ορισμός 14. Έστω μ μια κατανομή μάζας σε ένα $E \subset \mathbb{R}^d$ και $\alpha \geq 0$. Τότε ως α -δυναμικό ενός σημείου $x \in E$ ως προς το μ ορίζουμε

$$\phi_\alpha(x) := \int \frac{1}{\rho(x, y)^\alpha} d\mu(y).$$

Στην ειδική περίπτωση που $E = \mathbb{R}^3$ και $\alpha = 1$, έχουμε το βαρυτικό δυναμικό της μάζας μ . Η α -ενέργεια του μ είναι

$$I_\alpha(\mu) = \int \phi_\alpha(x) d\mu(x) = \int \int \frac{1}{\rho(x, y)^\alpha} d\mu(x) d\mu(y).$$

Θεώρημα 24 (Μέθοδος της ενέργειας). Έστω $\alpha \geq 0$ και μ μια κατανομή μάζας στο $E \subset \mathbb{R}^d$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E) \geq \frac{\mu(E)^2}{\int \int_{\rho(x, y) < \varepsilon} \frac{1}{\rho(x, y)^\alpha} d\mu(x) d\mu(y)}.$$

Εάν $I_\alpha(\mu) < \infty$, τότε $\mathcal{H}^\alpha(E) = \infty$, και κατά συνέπεια $\dim E \geq \alpha$.

Σημείωση 17. Για να λάβουμε κάτω φράγμα για τη διάσταση με αυτή τη μέθοδο, αρκεί ένα συγκεκριμένο ολοκλήρωμα να αποδειχτεί πεπερασμένο. Συγκεκριμένα, για να δείξουμε για ένα τυχαίο σύνολο E ότι $\dim E \geq \alpha$ σχεδόν βέβαια, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{E} I_\alpha(\mu) < \infty$ για κάποιο (τυχαίο) μέτρο στο E .

Απόδειξη. Έστω $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ κατά ζεύγη ξένα σύνολα διαμέτρου $< \varepsilon$ που καλύπτουν το E . Τότε

$$\int \int_{\rho(x, y) < \varepsilon} \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{\rho(x, y)^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int \int_{A_n \times A_n} \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{\rho(x, y)^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A_n)^2}{|A_n|^\alpha},$$

και επιπλέον

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\mu(A_n)}{|A_n|^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Για $\delta > 0$, επιλέγουμε μια κάλυψη όπως παραπάνω, τέτοια ώστε επιπρόσθετα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\alpha \leq \mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E) + \delta.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε

$$\mu(E)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A_n)^2}{|A_n|^\alpha} \leq \left(\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E) + \delta \right) \int \int_{\rho(x,y) < \varepsilon} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(x,y)^\alpha}.$$

Αν τώρα αφήσουμε το $\delta \downarrow 0$ και διαιρέσουμε τα δύο μέλη με το ολοκλήρωμα, έχουμε την ανισότητα του θεωρήματος.

Τώρα η $I_\alpha(\mu) < \infty$ δίνει ότι $(\mu \times \mu)(\Delta) = 0$ όπου $\Delta = \{(x, x) : x \in E\}$ είναι η διαγώνιος του $E \times E$. Άρα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, με κυριαρχούσα συνάρτηση την $\frac{1}{\rho(x,y)^\alpha}$, βρίσκουμε ότι το όριο του ολοκληρώματος καθώς $\varepsilon \downarrow 0$ ισούται με $\infty \cdot \mu(\Delta) = 0$, οπότε το $\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E)$ αποκλίνει στο άπειρο. $\square$

Τώρα θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της ενέργειας για να επιλύσουμε προβλήματα που έχουν μείνει ανοικτά από το προηγούμενο κεφάλαιο όπως τα κατώτερα φράγματα για τη διάσταση Hausdorff του γραφήματος και της τροχιάς της κίνησης Brown.

Θεώρημα 25 (Taylor 1953). Έστω $\{B(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ μια d -διάστατη κίνηση Brown.

(α) Εάν $d = 1$, τότε $\dim \text{Graph}[0, 1] = 3/2$ σχεδόν βέβαια.

(β) Εάν $d \geq 2$, τότε $\dim \text{Range}[0, 1] = \dim \text{Graph}[0, 1] = 2$ σχεδόν βέβαια.

Απόδειξη.

(β) Ένα φυσικό μέτρο στο $\text{Range}[0, 1]$ είναι το μέτρο κατάληψης μ , που ορίζεται ως $\mu(A) = \mathcal{L}(B^{-1}(A) \cap [0, 1])$, πάνω σε όλα τα Borel σύνολα $A \subset \mathbb{R}^d$, ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x) = \int_0^1 f(B(t)) dt \quad (2.1)$$

για όλες τις φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις f . Θέλουμε να δείξουμε ότι για $0 < \alpha < 2$,

$$\mathbb{E} \int \int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} = \mathbb{E} \int_0^1 \int_0^1 \frac{ds dt}{|B(t) - B(s)|^\alpha} < \infty.$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει από την (5). Θα υπολογίσουμε αρχικά την παρακάτω αναμενόμενη τιμή

$$\mathbb{E}|B(t) - B(s)|^{-\alpha} = \mathbb{E}[|t-s|^{1/2}|B(1)|^{-\alpha}] = |t-s|^{-\alpha/2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{c_d}{|z|^\alpha} e^{-|z|^2/2} dz.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με πολικές συντεταγμένες

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{c_d}{|z|^\alpha} e^{-|z|^2/2} dz = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{|z|} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dS(x) dr = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{2}} dS(z) dr$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{2}} c r^{d-1} dr = c \int_0^\infty r^{d-2} e^{-\frac{r^2}{2}} < \infty.$$

Τελικά

$$\mathbb{E}I_\alpha(\mu) = c \int_0^1 \int_0^1 \frac{dsdt}{|t-s|^{\alpha/2}} \leq 2c \int_0^1 \frac{du}{u^{\alpha/2}} < \infty.$$

Κατά συνέπεια $I_\alpha(\mu) < \infty$, οπότε $\dim \text{Range}[0, 1] > \alpha$ σχεδόν βέβαια. Το κάτω φράγμα επιτυγχάνεται αφήνοντας $\alpha \uparrow 2$. Έχουμε επίσης κάτω φράγμα για τη διάσταση του γραφήματος: Καθώς το γράφημα μιας συνάρτησης μπορεί να προβληθεί στο μονοπάτι της, η διάσταση του γραφήματος είναι τουλάχιστον η διάσταση του μονοπατιού από τη Σημείωση 14. Επομένως $\dim \text{Graph}[0, 1] \geq 2$.

(α) Θα εφαρμόσουμε και πάλι τη μέθοδο της ενέργειας. Γνωρίζουμε ήδη πως $\dim \text{Graph}[0, 1] \leq 3/2$. Έστω $\alpha < 3/2$ και ένα μέτρο μ πάνω στο γράφημα, που ορίζεται με τον εξής τρόπο

$$\mu(A) = \mathcal{L}_1(\{0 \leq t \leq 1 : (t, B(t)) \in A\}) \text{ για } A \subset [0, 1] \times \mathbb{R} \text{ Borel.}$$

Με αλλαγή μεταβλητών η α -ενέργεια του μ μπορεί να γραφεί ως

$$\int \int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dsdt}{(|t-s|^2 + |B(t)-B(s)|^2)^{\alpha/2}}.$$

Φράσσοντας την ολοκληρωτέα ποσότητα, παίρνοντας μέση τιμή, και εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini, έχουμε

$$\mathbb{E}I_\alpha(\mu) \leq 2 \int_0^1 \mathbb{E}((t^2 + B(t)^2)^{-\alpha/2}) dt.$$

Έστω $\wp(z) = \sqrt{2\pi}^{-1} \exp(-z^2/2)$ η πυκνότητα της τυπικής κανονικής. Βασιζόμενοι στην αλλαγή κλίμακας, η παραπάνω αναμενόμενη τιμή μπορεί να γραφεί

$$2 \int_0^{+\infty} (t^2 + tz^2)^{-\alpha/2} \wp(z) dz.$$

Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη στο $\sqrt{t}$, και κατόπιν, το φράσσουμε από

$$\int_0^{\sqrt{t}} (t^2)^{-\alpha/2} dz + \int_{\sqrt{t}}^\infty (tz^2)^{-\alpha/2} \wp(z) dz = t^{\frac{1}{2}-\alpha} + t^{-\alpha/2} \int_{\sqrt{t}}^\infty z^{-\alpha} \wp(z) dz.$$

Χωρίζουμε επιπλέον το τελευταίο ολοκλήρωμα στο 1, και έχουμε

$$\int_{\sqrt{t}}^\infty z^{-\alpha} \wp(z) dz \leq 1 + \int_{\sqrt{t}}^1 z^{-\alpha} dz,$$

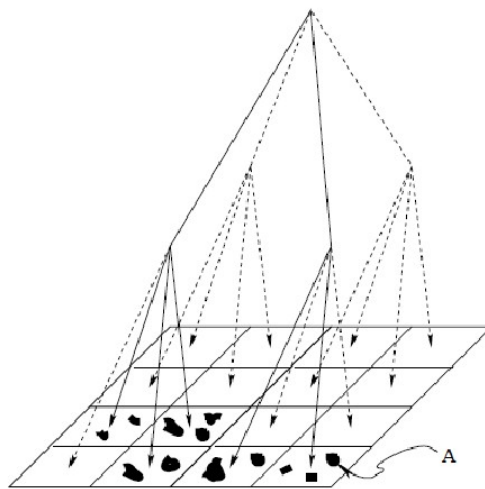
όπου η ποσότητα στο δεξί μέλος είναι της τάξης $t^{(1-\alpha)/2}$. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι, για $\alpha < 3/2$, η αναμενόμενη ενέργεια είναι πεπερασμένη. Ο ισχυρισμός είναι άμεσο αποτέλεσμα της μεθόδου της ενέργειας. $\square$

2.6 Το λήμμα του Frostman και η χωρητικότητα

Σε αυτή την παράγραφο θα διατυπώσουμε το αντίστροφο της αρχής κατανομής της μάζας. Έχοντας δηλαδή ένα κάτω φράγμα της διάστασης Hausdorff, θα κατασκευάσουμε μια κατανομή μάζας για ένα σύνολο. Κάτι τέτοιο είναι χρήσιμο όταν, για παράδειγμα, θέλουμε να συσχετίσουμε τη διάσταση Hausdorff ενός συνόλου και της εικόνας του κάτω από κάποιο μετασχηματισμό.

Θεώρημα 26 (Λήμμα του Frostman). *Εάν $A \subset \mathbb{R}^d$ κλειστό, τέτοιο ώστε $\mathcal{H}^{\alpha}(A) > 0$, τότε υπάρχει ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ με στήριγμα στο A και σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε $\mu(D) \leq C|D|^{\alpha}$ για όλα τα Borel σύνολα $D \subset \mathbb{R}^d$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $A \subset [0, 1]^d$. Κάθε συμπαγής κύβος του $\mathbb{R}^d$ πλευράς μήκους s μπορεί να χωριστεί σε 2^d μη επικαλυπτόμενους συμπαγείς κύβους με πλευρά μήκους $s/2$. Κατασκευάζουμε ένα δέντρο τη ρίζα του οποίου τη συσχετίζουμε με τον κύβο $[0, 1]^d$. Κάθε κόμβος του δέντρου διαθέτει 2^d ακμές που πηγάζουν από αυτόν, καθένας εκ των οποίων οδηγεί σε 2^d υποκύβους που έχουν μήκος πλευράς το μισό του αρχικού. Κατόπιν διαγράφουμε τις ακμές που καταλήγουν σε κόμβους που σχετίζονται με υποκύβους οι οποίοι δεν τέμνουν το A . Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε ένα δέντρο $T = (V, E)$. Σε αυτό το δέντρο, **ακτίνα** ονομάζουμε κάθε άπειρο μονοπάτι που δεν τέμνει τον εαυτό του και ξεκινάει από τη ρίζα. Το σύνολο των μονοπατιών το συμβολίζουμε με ∂T . Επίσης, σύνολο τομής λέμε κάθε υποσύνολο ακμών που περιέχει τουλάχιστον μια ακμή από κάθε ακτίνα του T . Προφανώς οι ακτίνες του T αντιστοιχούν σε ακολουθίες συμπαγών κύβων οι διάμετροι των οποίων συγκλίνουν στο μηδέν.



Τα πρώτα δύο στάδια της κατασκευής του δέντρου που σχετίζεται με το σύνολο $A \subset [0, 1]^2$. Οι διακεκομμένες ακμές του δέντρου έχουν διαγραφεί.

Υπάρχει μια απεικόνιση $\Phi : \partial T \rightarrow A$, η οποία απεικονίζει ακολουθίες κύβων με διάμετρο που συγκλίνει στο μηδέν, στην τομή τους. Σημειώνουμε εδώ ότι αν $x \in A$, τότε υπάρχει ένα άπειρο μονοπάτι που πηγάζει από τη ρίζα, όλοι οι κόμβοι του οποίου σχετίζονται με κύβους που περιέχουν το x , και άρα τέμνουν το A . Επομένως η Φ είναι επί. Για κάθε ακμή e στο επίπεδο n , ορίζουμε τη χωρητικότητά της ως $C(e) = (d^{\frac{1}{2}}2^{-n})^\alpha$. Κάθε σύνολο τομής του δέντρου ορίζει μια κάλυψη του A , που αποτελείται από εκείνους τους κύβους που προέρχονται από τους αρχικούς κόμβους των ακμών του συνόλου τομής. Για να δείξουμε ότι η συγκεκριμένη συλλογή κύβων αποτελεί πράγματι κάλυψη του A , θεωρούμε μια ακτίνα ξ . Καθώς το Π είναι σύνολο τομής, περιέχει μια από τις ακμές της ακτίνας αυτής, και ο κύβος που σχετίζεται με τον αρχικό κόμβο αυτής της ακμής περιέχει το σημείο $\Phi(\xi)$. Άρα πράγματι καλύπτουμε ολόκληρο το σύνολο $\Phi(\partial T) = A$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\inf \left\{ \sum_{e \in \Pi} C(e) : \Pi \text{ σύνολο τομής} \right\} \geq \inf \left\{ \sum_j |A_j|^\alpha : A \subset \bigcup_j A_j \right\},$$

και καθώς $\mathcal{H}_\infty^\alpha(A) > 0$, το δεύτερο μέλος της ανισότητας είναι θετικό. Από το θεώρημα μέγιστης ροής - ελάχιστης τομής, υπάρχει θετική ροή $\theta : E \rightarrow [0, \infty)$ τέτοια ώστε $\theta(E) \leq C(e)$ για κάθε ακμή $e \in E$. Τώρα θα ορίσουμε ένα κατάλληλο μέτρο στο χώρο των άπειρων μονοπατιών. Δεδομένης μιας ακμής $e \in E$ θεωρούμε το σύνολο των ακτίνων $T(e) \subset \partial T$ που περιέχουν την ακμή e . Ορίζουμε

$$\tilde{\nu}(T(e)) = \theta(e).$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η συλλογή $\mathcal{C}(\partial T)$ υποσυνόλων $T(u) \subset \partial T$ για κάθε $u \in E$ είναι μια ημι-άλγεβρα στον ∂T . Αυτό σημαίνει ότι αν $A, B \in \mathcal{C}(\partial T)$, τότε $A \cap B \in \mathcal{C}(\partial T)$, και ότι το A^c εκφράζεται ως πεπερασμένη ξένη ένωση συνόλων της $\mathcal{C}(\partial T)$. Επειδή η ροή σε κάθε κόμβο διατηρείται, το $\tilde{\nu}$ είναι αριθμήσιμα προσθετικό. Χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο θεώρημα επέκτασης μέτρου μπορούμε να επεκτείνουμε το $\tilde{\nu}$ σε ένα μέτρο ν πάνω στη σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{C}(\partial T)$. Τώρα ορίζουμε ένα Borel μέτρο $\mu = \nu \circ \Phi^{-1}$ στο A το οποίο ικανοποιεί $\mu(C) = \theta(e)$, όπου C είναι ο κύβος που σχετίζεται με τον αρχικό κόμβο της ακμής e . Υποθέτουμε τώρα ότι το D είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, και n ο ακέραιος εκείνος για τον οποίο $2^{-n} < |D \cap [0, 1]^d| \leq 2^{-(n-1)}$. Τότε το $D \cap [0, 1]^d$ μπορεί να καλυφθεί από 3^d κύβους της παραπάνω κατασκευής, πλευράς μήκους 2^{-n} ή διαμέτρου $d^{\frac{1}{2}}2^{-n}$. Λόγω αυτού του φράγματος, έχουμε

$$\mu(D) \leq d^{\frac{\alpha}{2}} 3^d 2^{-n\alpha} \leq d^{\frac{\alpha}{2}} 3^d |D|^\alpha,$$

οπότε έχουμε ένα πεπερασμένο μέτρο μ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του λήμματος.

Κανονικοποιώντας το μ , έχουμε μέτρο πιθανότητας. □

Ορισμός 15. Ορίζουμε την α -χωρητικότητα του Riesz, ή απλά την α -χωρητικότητα ενός συνόλου $E \subset \mathbb{R}^d$ ως

$$Cap_\alpha(E) := \sup \{I_\alpha(\mu)^{-1} : \text{όπου } \mu \text{ μια κατανομή μάζας στο } E \text{ ώστε } \mu(E) = 1\}.$$

Στην ειδική περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου $E = \mathbb{R}^d$ με $d \geq 3$ και $\alpha = d - 2$, η α -χωρητικότητα του Riesz είναι γνωστή ως χωρητικότητα Newton.

Το Θεώρημα 7 δηλώνει ότι ένα σύνολο με θετική α -χωρητικότητα έχει διάσταση τουλάχιστον α . Τώρα θα δείξουμε ότι, κάτω από αυτή τη διατύπωση, η συγκεκριμένη μέθοδος λειτουργεί με ακρίβεια. Η απόδειξή μας θα βασιστεί στο λήμμα του Frostman, και άρα στα κλειστά υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου.

Θεώρημα 27. Για κάθε κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^d$,

$$\dim A = \sup \{\alpha : Cap_\alpha(A) > 0\}.$$

Απόδειξη. Για τα α για τα οποία $Cap_\alpha(A) > 0$ έχουμε ότι $\dim A \geq \alpha$. Άρα $\dim A \geq \sup \{\alpha : Cap_\alpha(A) > 0\}$. Αυτό που απομένει είναι να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, δηλαδή ότι $\dim A \leq \sup \{\alpha : Cap_\alpha(A) > 0\}$, οπότε αρκεί να δείξουμε πως αν $\dim A > \alpha$, τότε υπάρχει Borel μέτρο πιθανότητας μ στο A τέτοιο ώστε

$$I_\alpha(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Από υπόθεση, για αρκετά μικρό $\beta > \alpha$, έχουμε $\mathcal{H}^\beta(A) > 0$. Από το λήμμα του Frostman, υπάρχει μη μηδενικό Borel μέτρο πιθανότητας μ στο A και σταθερά C έτσι ώστε $\mu(D) \leq C|D|^\beta$ για όλα τα Borel σύνολα D . Περιορίζοντας το μ , αν είναι απαραίτητο, σε ένα μικρότερο σύνολο, μπορούμε να πετύχουμε το στήριγμα του μ να έχει διάμετρο μικρότερη του 1. Σταθεροποιούμε κάποιο $x \in A$, και για $k \geq 1$ θέτουμε $S_k(x) = \{y : \frac{1}{2^k} < |x-y| \leq \frac{1}{2^{k-1}}\}$. Εφόσον το μ δεν έχει άτομα (δηλαδή σημεία $z \in A$ με $\mu(\{z\}) > 0$) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_k(x)} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k(x))2^{k\alpha},$$

όπου η ισότητα προκύπτει από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και η ανισότητα από τον ορισμό των S_k . Επίσης

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k(x))2^{k\alpha} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |2^{2-k}|^\beta 2^{k\alpha} = C' \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-\beta)}$$

όπου $C' = 2^{2\beta}C$. Επειδή $\beta > \alpha$, έχουμε

$$I_\alpha(\mu) \leq C' \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-\beta)} < \infty,$$

οπότε έχουμε το θεώρημα.

□

Στο Πρόρισμα 3 είδαμε ότι η εικόνα ενός συνόλου $A \subset [0, \infty)$ κάτω από την κίνηση Brown έχει το πολύ τη διπλάσια διάσταση Hausdorff από εκείνη του A . Το αποτέλεσμα του McKean που ακολουθεί αποδεικνύει ότι, για $d \geq 2$, αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Στην περίπτωση $d = 1$, η ισότητα ισχύει για εκείνα τα A με $\dim A \leq 1/2$.

Θεώρημα 28 (McKean 1955). Έστω $A \subset [0, \infty)$ κλειστό και $\{B(t) : t \geq 0\}$ μια d -διάστατη κίνηση Brown. Τότε, σχεδόν βέβαια,

$$\dim B(A) = (2 \dim A) \wedge d.$$

Απόδειξη. Από το Πρόρισμα 3 έχουμε $\dim \text{Range}(A) \leq (2 \dim A) \wedge d$. Για το κάτω φράγμα, θεωρούμε $\alpha < \dim A \wedge (d/2)$. Από το Θεώρημα 10, υπάρχει Borel μέτρο πιθανότητας μ στο A τέτοιο ώστε $I_\alpha(\mu) < \infty$. Συμβολίζουμε με $\tilde{\mu}$ το μέτρο στον $\mathbb{R}^d$ που ορίζεται ως

$$\tilde{\mu}(D) = \mu(\{t \geq 0 : B(t) \in D\})$$

για όλα τα Borel σύνολα $D \subset \mathbb{R}^d$. Τότε

$$\mathbb{E}\{I_{2\alpha}(\tilde{\mu})\} = \mathbb{E}\left\{\int \int \frac{d\tilde{\mu}(x)d\tilde{\mu}}{|x-y|^{2\alpha}}\right\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\mu(t)d\mu(s)}{|B(t)-B(s)|^{2\alpha}}\right\},$$

με τη δεύτερη ισότητα να προκύπτει με αλλαγή μεταβλητών. Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής στο δεύτερο μέλος έχει την κατανομή της $|t-s|^\alpha |Z|^{2\alpha}$, όπου Z μια d -διάστατη τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή. Εφόσον $2\alpha < d$, έχουμε

$$\mathbb{E}[|Z|^{-2\alpha}] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |y|^{-2\alpha} e^{-|y|^2/2} dy < \infty.$$

Από θεώρημα Fubini,

$$\mathbb{E}[I_{2\alpha}(\tilde{\mu})] = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{E}[|Z|^{-2\alpha}] \frac{d\mu(t)d\mu(s)}{|t-s|^\alpha} \leq \mathbb{E}[|Z|^{-2\alpha}] I_\alpha(\mu) < \infty.$$

Για το λόγο αυτό $\mathbb{E}[I_{2\alpha}(\tilde{\mu})] < \infty$, άρα $I_{2\alpha}(\tilde{\mu}) < \infty$ σχεδόν βέβαια. Επιπλέον το $\tilde{\mu}$ έχει στήριγμα το $B(A)$ επειδή το μ έχει στήριγμα το A . Από τη μέθοδο της ενέργειας, έχουμε ότι $\dim B(A) \geq 2\alpha$ σχεδόν βέβαια. Αφήνοντας το $\alpha \uparrow \dim(A) \wedge d/2$, βλέπουμε ότι $\dim(B(A)) \geq (2 \dim(A)) \wedge d$ σχεδόν βέβαια. □

Βιβλιογραφία

- [1] Peter Mörters, Yuval Peres *Brownian Motion*
- [2] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry*, second edition 2003
- [3] Νικόλαος Δ. Παπαδάτος, *Θεωρία Πιθανοτήτων, Αθήνα 2006*
- [4] Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα, *ΣΤΟΙΧΕΙΑ FRACTAL ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, 2000*
- [5] Α. Ν. Γιαννακόπουλος *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Φεβρουάριος 2003*