Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Κ Α Ι   Κ Α Π Ο Δ Ι Σ Τ Ρ Ι Α Κ Ο
Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Α Θ Η Ν Ω Ν
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΔΙΑΣΤΑΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ ΜΕ ΝΟΡΜΑ - ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ **ELTON - ODELL**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΥΤΥΧΙΟΥ ΓΛΑΚΟΥΣΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Σ. ΜΕΡΚΟΥΡΑΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ , 2012

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Κ Α Ι   Κ Α Π Ο Δ Ι Σ Τ Ρ Ι Α Κ Ο
Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Α Θ Η Ν Ω Ν
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΔΙΑΣΤΑΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ ΜΕ ΝΟΡΜΑ - ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ **ELTON - ODELL**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΥΤΥΧΙΟΥ ΓΛΑΚΟΥΣΑΚΗ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Σ. ΜΕΡΚΟΥΡΑΚΗΣ, Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α. (**Επιβλέπων**)

Γ. ΚΟΥΜΟΥΛΛΗΣ, Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Α. ΤΣΑΡΠΑΛΙΑΣ, Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

ΑΘΗΝΑ , 2012

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια απόκτησης του μεταπτυχιακού μου τίτλου ειδίκευσης και το περιεχόμενο της βασίζεται στη μελέτη των χώρων Banach, χώροι που συναντώνται τόσο στη Συναρτησιακή και Πραγματική Ανάλυση όσο και γενικότερα, στη Θεωρία Τελεστών. Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η συμβολή του Επιβλέποντος κ. Σοφοκλή Μερκουράκη, Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Η καθοδήγησή του συνέβαλε καθοριστικά στην αρτιότερη παρουσίαση και επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας αυτής και γι' αυτόν το λόγο τον ευχαριστώ θερμά.

Εκφράζω τις ευχαριστίες μου και προς τους Καθηγητές του τμήματος Μαθηματικών τη σχολής Θετικών Επιστημών, κ. Γεώργιο Κουμουλλή και κ. Αθανάσιο Τσαρπαλιά, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή.

Ευτύχιος Γλακουσάκης.

Περιεχόμενα

Πρόλογος **1**

0 Προκαταρκτικά **4**

0.1 Συνδυαστική 4

0.2 Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης 6

1 Διαχωρισμένες Ακολουθίες **13**

1.1 Διαχωρισμένες Ακολουθίες 13

1.2 $(1+\varepsilon)$ - Διαχωρισμένες Ακολουθίες 23

2 Το Θεώρημα Elton-Odell **34**

2.1 Χώροι Banachπου περιέχουν τον c_0 34

2.2 Το Θεώρημα Elton-Odell 43

3 Unconditional Spreading Models **53**

3.1 Spreading models 53

3.2 1-Unconditional Spreading Models 63

Βιβλιογραφία **96**

Πρόλογος

Το αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι η ύπαρξη διαχωρισμένων ακολουθιών και spreading models με κατάλληλες ιδιότητες σε απειροδιάστατους χώρους Banach. Μια ακολουθία (x_n) σε έναν χώρο Banach X λέγεται δ-**διαχωρισμένη** $(\delta > 0)$ αν $\|x_n - x_m\| \geq \delta$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$. Είναι εύκολο να αποδείξουμε (συνέπεια του γνωστού Λήμματος Riesz) οτι αν X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε υπάρχει μια ακολουθία $(x_n) \subseteq X$, η οποία είναι κανονικοποιημένη ($\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$) και 1-διαχωρισμένη.

Στα δύο πρώτα κεφάλαια της εργασίας εξετάζουμε κατά πόσο αυτό το αποτέλεσμα είναι δυνατόν να ισχυροποιηθεί. Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζουμε ένα αποτέλεσμα του Rosenthal, το οποίο έχει να κάνει με την ύπαρξη unconditional spreading models. Τα αποδεικτικά εργαλεία για την απόδειξη των παραπάνω αποτελεσμάτων προέρχονται από τη Θεωρία Ramsey. Με περισσότερη ακρίβεια πρόκειται για το κλασικό Θεώρημα Ramsey, καθώς και την επέκταση του σε κατάλληλες διαμερίσεις του συνόλου $[\mathbb{N}]^\omega$ (: το σύνολο των απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$) που είναι το Θεώρημα Galvin-Prikry.

Έτσι στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αποδεικνύουμε το Θεώρημα του Kottman (Θεώρημα 1.1.5): *Κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει μια κανονικοποιημένη ακολουθία* (x_n) *ώστε* $\|x_n - x_m\| > 1$ *για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *με* $n \neq m$. Για το θεώρημα αυτό παραθέτουμε τρεις αποδείξεις, η πλέον ενδιαφέρουσα των οποίων είναι η αρχική απόδειξη του Kottman η οποία χρησιμοποιεί το Θεώρημα Ramsey καθώς και την ύπαρξη ενός συστήματος Auerbach στον X. Το ερώτημα που προκύπτει φυσιολογικά μετά το Θεώρημα του Kottman (αποδείχθηκε στα μέσα της δεκαετίας του 70) είναι αν κάθε απειροδιάστατος χώρος περιέχει μια $1+\varepsilon$-διαχωρισμένη και κανονικοποιημένη ακολουθία. Το ερώτημα αυτό αποδείχθηκε (στις αρχές της δεκαετίας του 80) από τους Elton και Odell (Θεώρημα 2.2.2) με ουσιαστική χρήση του Θεωρήματος Galvin-Prikry και τη βοήθεια της θεωρίας των Schauder βάσεων. Μια αισθητά απλούστερη απόδειξη του Θεωρήματος Elton-Odell στην ειδική περίπτωση που ο χώρος X δεν είναι αυτοπαθής, δόθηκε (είκοσι χρόνια αργότερα) από τους Kryczka και Prus με χρήση της θεωρίας των spreading models. Το αποτέλεσμα αυτό (Θεώρημα 1.2.8) αποδεικνύεται στη δεύτερη παράγραφο του κεφαλαίου 1.

Πριν συζητήσουμε το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου 3 και για να γίνει καλύτερα κατανοητό το περιεχόμενο του θα πούμε λίγα λόγια για την έννοια του spreading model, η οποία έχει κεντρική θέση στη σύγχρονη θεωρία των χώρων Banach. Μια ακολουθία σε ένα χώρο Banach X λέγεται οτι είναι **spreading** αν για κάθε ακολουθία θετικών ακεραίων $k_1 < \ldots < k_n$ και κάθε ακολουθία πραγματικών $a_1, \ldots, a_n$ ισχύει οτι: $\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \| = \| \sum_{j=1}^{n} a_j x_{k_j} \|$. Με την βοήθεια του κλασικού Θεωρήματος Ramsey, οι Brunel και Sucheston [2] απέδειξαν το ακόλουθο αποτέλεσμα (Θεώρημα 0.2.21). Έστω X ένας χώρος Banach και (x_n) μια φραγμένη ακολουθία στον X η οποία δεν έχει norm συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε υπάρχουν μια υπακολουθία (y_n) της (x_n), ένας χώρος Banach Y και μια ακολουθία (e_n) στον Y η οποία είναι spreading και παράγει τον Y ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} a_i e_i = \lim_{\substack{n_1 < \ldots < n_k \\ n_1 \to \infty}} \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i} \|$$

Ο χώρος Y ονομάζεται ένα spreading model του χώρου X. Περαιτέρω δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί οτι μπορούμε να επιτύχουμε ένα spreading model Y για τον χώρο X ώστε η ακολουθία (e_n) να είναι unconditional βάση του Y με suppression σταθερά $k_s = 1$ (Πρβλ [1] σελ. 279 καθώς και Θεώρημα 3.2.2). Το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου 3, το οποίο όπως προαναφέραμε οφείλεται στον Rosenthal, είναι οτι μπορούμε να επιτύχουμε ένα spreading model Y για τον χώρο X ώστε η ακολουθία (e_n) να είναι 1-unconditional βάση του Y, δηλαδή με unconditional σταθερά $k_u = 1$ (Θεώρημα 3.2.25). Επιπλέον σαν συνέπεια του Θεωρήματος του Rosenthal παίρνουμε οτι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει πεπερασμένες σχεδόν 1-unconditional βασικές ακολουθίες οσοδήποτε μεγάλου μήκους (Θεώρημα 3.2.26). Η απόδειξη του Rosenthal χρησιμοποιεί τρία βασικά εργαλεία: το κλασικό «αντιποδικό Θεώρημα των Borsuk και Ulam της τοπολογίας, την έννοια του «τύπου» των Kririne και Maurey καθώς και μια κατάλληλη για τους σκοπούς μας μορφή του Θεωρήματος Ramsey (Θεώρημα 3.2.3).

Κεφάλαιο 0

Προκαταρκτικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μερικές βασικές έννοιες από τη Συνδυαστική και τη Συναρτησιακή Ανάλυση. Για τα αποτελέσματα που θα αναφερθούν παραπέμπουμε στα [1], [3] [4], [7] και [11].

0.1 Συνδυαστική

Ανοίγουμε την παράγραφο αυτή με μερικούς χρήσιμους συμβολισμούς. Για $A \subseteq \mathbb{N}$ με $|A|$ συμβολίζουμε τον πληθάριθμο του συνόλου A. Επίσης θέτουμε $|\mathbb{N}| = \omega$. Έτσι αν A είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ με n στοιχεία έχουμε οτι $|A| = n$, ενώ αν το A είναι άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, τότε $|A| = \omega$. Έστω M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Για $r \in \mathbb{N}$ με $[M]^r$ συμβολίζουμε το σύνολο των υποσυνόλων του M που έχουν πληθάριθμο r. Με $[M]^{<\omega}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του M, ενώ με $[M]^\omega$ το σύνολο των απείρων υποσυνόλων του M.

Αν A και B είναι υποσύνολα του $\mathbb{N}$, τότε λέμε οτι το A είναι **αρχικό τμήμα** του B και γράφουμε $A \sqsubseteq B$, αν είτε $A = B$ ή υπάρχει $n \in B$ ώστε $A = \{m \in B : m < n\}$.

Έστω τώρα $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ και $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ με $(A, M)^\omega$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των απείρων υποσυνόλων του $A \bigcup M$ για τα οποία ισχύει οτι το A είναι αρχικό τους τμήμα, δηλαδή $(A, M)^\omega = \{L \in [\mathbb{N}]^\omega : A \sqsubseteq L \text{ και } L \setminus A \subseteq M\}$.

Σε οτι ακολουθήσει όταν λέμε οτι το σύνολο M είναι ένα **διαγώνιο σύνολο μιας φθίνουσας ακολουθίας** (M_i) απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ θα εννοούμε οτι το σύνολο M είναι της μορφής $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$, όπου $m_i \in M_i$ και $m_i < m_{i+1}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 0.1.1. (Θεώρημα Ramsey) *Έστω $r, k \geq 1$ και μια συνάρτηση $f : [\mathbb{N}]^r \to \{1, \ldots, k\}$, τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε η f περιορισμένη στο $[M]^r$ να είναι σταθερή.*

Στο κεφάλαιο 4 θα δώσουμε μια απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος.

Ορισμός 0.1.2. Έστω Y ένα υποσύνολο του $[\mathbb{N}]^\omega$.

(i) Το Y λέγεται **Ramsey** αν υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε είτε $[M]^\omega \subseteq Y$ ή $[M]^\omega \subseteq Y^c = [\mathbb{N}]^\omega \setminus Y$.

(ii) Το Y λέγεται **πλήρως Ramsey** (completely Ramsey) αν για κάθε $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ και $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ υπάρχει $L \in [M]^\omega$ ώστε είτε $(A, L)^\omega \subseteq Y$ ή $(A, L)^\omega \subseteq Y^c$.

Παρατήρηση 0.1.1. Αν Y είναι ένα πλήρως Ramsey υποσύνολο του $[\mathbb{N}]^\omega$, τότε το Y είναι Ramsey υποσύνολο του $[\mathbb{N}]^\omega$. Πράγματι, αφού το Y είναι πλήρως Ramsey για $A = \emptyset$ και $M = \mathbb{N}$ έπεται οτι υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε είτε $[L]^\omega = (\emptyset, L)^\omega \subseteq Y$ ή $[L]^\omega \subseteq Y^c$.

Είναι γνωστό οτι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ του $\mathbb{N}$ μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο Cantor $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ μέσω της απεικόνισης

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni A \to \chi_A \in \Delta,$$

όπου

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ & \\ 0, & n \notin A. \end{cases} \qquad \text{(χαρακτηριστική συνάρτηση του } A\text{)}$$

Επειδή το σύνολο Cantor Δ με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο (καρτεσιανή τοπολογία[1]) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ μπορεί και αυτό να θεωρηθεί ως συμπαγής μετρικός χώρος μέσω της παραπάνω ταύτισης. Σημειώνουμε

[1] $\Delta = \prod_{n=1}^{\infty} T_n$, όπου $T_n = \{0,1\}$, το T_n έχει τη διακριτή τοπολογία και το Δ την καρτεσιανή τοπολογία.

οτι τότε το $[\mathbb{N}]^\omega$ είναι ένα G_δ υποσύνολο του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ και άρα πλήρως μετρικοποιήσιμος διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος. Είναι εύκολο να δούμε οτι αν $M \in [\mathbb{N}]^\omega$, τότε η οικογένεια υποσυνόλων του $[\mathbb{N}]^\omega$, $\mathcal{B}_M = \{(A, \mathbb{N})^\omega : A \in [M]^{<\omega}\}$ είναι μια βάση περιοχών του M στον $[\mathbb{N}]^\omega$ από βασικά ανοικτά.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα των Galvin και Prikry, το οποίο γενικεύει το κλασικό θεώρημα του Ramsey και το οποίο διατυπώνουμε εδώ σε ασθενέστερη μορφή.

Θεώρημα 0.1.3. (Galvin-Prikry) *Αν Y είναι ένα Borel υποσύνολο του $[\mathbb{N}]^\omega$, τότε το Y είναι πλήρως Ramsey. Ιδιαίτερα, το Y είναι Ramsey.*

0.2 Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

Στην εργασία αυτή όταν αναφερόμαστε σε ένα χώρο με νόρμα X θα εννοούμε οτι ο X είναι ένας απειροδιάστατος διανυσματικός χώρος ορισμένος επί του σώματος των πραγματικών αριθμών. Για ένα χώρο με νόρμα X θα συμβολίζουμε τα σύνολα $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ και $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ με B_X και S_X, αντίστοιχα. Αν τώρα (x_n) είναι μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία σε έναν χώρο με νόρμα X, τότε ο κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X που παράγει η (x_n) συμβολίζεται με $[x_n]_{n=1}^k$, αν η ακολουθία (x_n) είναι πεπερασμένη μήκους k και με $[x_n]$, αν η ακολουθία (x_n) είναι άπειρη. Επίσης, όταν λέμε οτι ένας χώρος Banach X περιέχει έναν χώρο Banach Y θα εννοούμε οτι ο X περιέχει μια ισομορφική εικόνα του Y.

Μια ακολουθία (x_n) σε έναν χώρο με νόρμα X θα λέγεται **κανονικοποιημένη** αν $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και **ημικανονικοποιημένη** αν υπάρχουν $M, m > 0$ ώστε $m \leq \|x_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τέλος, συχνή αναφορά θα γίνεται στους κλασικούς χώρους Banach c_0 και l_p, $1 \leq p < \infty$, καθώς και στον χώρο c_{00}. Ο c_0 ορίζεται να είναι ο διανυσματικός χώρος $\{(x_n) \subseteq \mathbb{R} : \lim_n x_n = 0\}$ εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, όπου $\|(x_n)\|_\infty = \max_n |x_n|$, ενώ για $1 \leq p < \infty$ ο χώρος l_p είναι ο διανυσματικός χώρος $\{(x_n) \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_p$, όπου $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Τέλος ο χώρος c_{00} ορίζεται να είναι ο διανυσματικός χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Η συνήθης ή κανονική βάση των παραπάνω χώρων ορίζεται να είναι η ακολουθία (e_n), όπου $e_n =$

$(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \dots)$ για κάθε $n \geq 1$.

Τα αποτελέσματα στα οποία θα αναφερθούμε στην παράγραφο αυτή, με εξαίρεση το Θεώρημα 0.2.11 μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε από τα [4], [7], [8] και [11].

Ορισμός 0.2.1. Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Μια ακολουθία (e_i) στον X λέγεται **Schauder βάση** ή απλά **βάση** του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_i) που λέγονται συντεταγμένες του x, ώστε

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, \quad \text{δηλαδή } (x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i e_i).$$

Αν (e_i) είναι μια βάση ενός χώρου με νόρμα X, τότε ορίζονται οι κανονικές προβολές ως προς τη βάση e_i, $P_n : X \to X$ για $n \in \mathbb{N}$ με

$$P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

Πρόταση 0.2.2. *Έστω (e_i) μια βάση του χώρου νε νόρμα X. Οι κανονικές προβολές της (e_i) ικανοποιούν τα εξής:*

(i) $\dim(P_n(X)) = n$

(ii) $P_n P_m = P_m P_n = P_{\min\{m,n\}}$

(iii) $P_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ *για κάθε* $x \in X$.

Αντιστρόφως, αν P_n είναι μια ακολουθία φραγμένων γραμμικών προβολών σε έναν χώρο με νόρμα X που ικανοποιούν τις $(i)-(iii)$, τότε οι P_n είναι κανονικές προβολές ως προς κάποια βάση (e_i) του X.

Πρόταση 0.2.3. *Έστω (e_i) μια βάση ενός χώρου με νόρμα X. Αν η ακολουθία των κανονικών προβολών (P_n) της (e_i) είναι ομοιόμορφα φραγμένη ($\sup_n \|P_n\| < \infty$), τότε η (e_i) είναι επίσης βάση της πλήρωσης του X.*

Πρόταση 0.2.4. *Έστω (e_i) μια βάση ενός χώρου Banach X. Οι κανονικές προβολές P_n της (e_i) είναι ομοιόμορφα φραγμένες.*

Ορισμός 0.2.5. Έστω (e_i) μια βάση ενός χώρου Banach X. Η ποσότητα $bc\{e_i\} = \sup_n \|P_n\|$ ονομάζεται **σταθερά** της βάσης (e_i).

Θεωρώντας τα διανύσματα e_n, εύκολα βλέπουμε οτι $\|P_n\| \geq 1$, ειδικότερα $bc\{e_i\} \geq 1$.

Ορισμός 0.2.6. Μια βάση ενός χώρου Banach X, e_i λέγεται **μονότονη** αν $\sup_n \|P_n\| \leq 1$.

Έστω (e_i) μια βάση ενός χώρου Banach X. Για $j \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την $e_j^* : X \to \mathbb{R}$ με $e_j^*(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i) = a_j$. Είναι άμεσο οτι η e_j^* είναι γραμμική στον X. Ακόμη έχουμε οτι

$$\left\|e_j^*(x)e_j\right\| = \|P_j(x) - P_{j-1}(x)\| \leq \|P_j(x)\| + \|P_{j-1}(x)\| \leq 2\sup_n \|P_n\| \|x\| .$$

Έτσι

$$\left|e_j^*(x)\right| \leq \frac{2\sup_n \|P_n\|}{\|e_j\|} \|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

Επομένως, $e_j^* \in X^*$ και $\left\|e_j^*\right\| \leq 2\sup_n \|P_n\| \cdot \left\|e_j^*\right\|^{-1}$ για κάθε j. Τα συναρτησοειδή e_j^* λέγονται **διορθογώνια συναρτησοειδή** ως προς τη βάση (e_i) και ισχύει οτι $x = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x)e_i$ για κάθε $x \in X$.

Είναι εύκολο να δούμε οτι τα (e_i^*) είναι τα μοναδικά συναρτησοειδή του X^* ώστε $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ για $i, j \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 0.2.7. Μια ακολουθία (e_i) σε έναν χώρο Banach X λέγεται **βασική** ακολουθία αν η (e_i) είναι βάση του $[e_i]$.

Πρόταση 0.2.8. *Έστω (e_i) μια ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων ενός χώρου Banach X. Η (e_i) είναι βασική ακολουθία στον X αν και μόνο αν υπάρχει $K > 0$ ώστε για κάθε $n \leq m$ και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ να ισχύει*

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| \leq K \|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\|.$$

Στην παραπάνω περίπτωση είναι φανερό οτι $\sup_n \|P_n\| \leq K$.

Ορισμός 0.2.9. Έστω (e_i) μια βασική ακολουθία σε έναν χώρο Banach X και (x_i) μια βασική ακολουθία σε έναν χώρο Banach Y. Λέμε οτι οι ακολουθίες (e_i) και (x_i) είναι **ισοδύναμες** και γράφουμε $(e_i) \sim (x_i)$ αν για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_i), $\sum a_i e_i$ συγκλίνει στον X αν και μόνο αν $\sum a_i x_i$ συγκλίνει στον Y.

Πρόταση 0.2.10. *Έστω (e_i) μια βασική ακολουθία σε έναν χώρο Banach X και (x_i) μια βασική ακολουθία σε έναν χώρο Banach Y. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η (x_i) είναι βασική ακολουθία ισοδύναμη της (e_i).*

(ii) *Υπάρχει ένας ισομορφισμός του $[e_i]$ επί του $[x_i]$ ώστε $T(e_i) = x_i$ για κάθε i.*

(iii) *Υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ ώστε για κάθε $a_1, \ldots, a_n$ να ισχύει οτι*
$$\frac{1}{c_1}\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| \leq c_2\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|.$$

Ένας άμεσος υπολογισμός δίνει οτι αν $K = bc\{e_i\}$, τότε $bc\{x_i\} \leq Kc_1c_2$.

Για την ύπαρξη βασικών ακολουθιών σε χώρους Banach έχουμε τα ακόλουθα δύο Θεωρημάτα.

Θεώρημα 0.2.11. (Day [3]) *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Τότε υπάρχουν μια ακολουθία (x_n) στη S_X και μια ακολουθία (x_n^*) στη S_{X^*} ώστε $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Αν μάλιστα ο X είναι ένας χώρος Banach και (c_n) μια ακολουθία θετικών αριθμών, τότε η ακολουθία (x_n) είναι επιπλέον βασική ακολουθία στον X και ισχύει οτι $\|P_n\| \leq 1 + c_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Ένα σύστημα $\{(x_n, x_n^*) : \|x_n\| = \|x_n^*\| = 1,$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}\}$ σε έναν χώρο με νόρμα X ονομάζεται **Auerbach σύστημα** του X.

Θεώρημα 0.2.12. *Έστω X ένας χώρος Banach. Αν μια ακολουθία (x_n) στον X ικανοποιεί τις:*

(i) *$x_n \xrightarrow{w} 0$ και*

(ii) *$\|x_n\| \nrightarrow 0$,*

τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) ώστε η (x_{n_k}) να είναι βασική και $bc\{x_{n_k}\} \leq 1 + \varepsilon$.

Ορισμός 0.2.13. Έστω (x_n) μια ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Για ένα $x \in X$ με $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, με supp$x$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$. Μια ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων στον X, (u_j) της μορφής $u_j = \sum_{n=p_j}^{q_j} a_n x_n$, όπου $a_n \in \mathbb{R}$ για κάθε n και $p_j < q_j < p_{j+1}$ για κάθε j λέγεται **block** ακολουθία της (x_n).

Πρόταση 0.2.14. *Έστω (e_i) μια βασική ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Αν (u_j) είναι μια block ακολουθία της (e_i), τότε η (u_j) είναι βασική στον X και $bc\{u_j\} \leq bc\{e_i\}$.*

Παραδείγματα χώρων Banach με βάση είναι ο c_0 και οι l_p, $1 \leq p < \infty$. Μάλιστα τα μοναδιαία διανύσματα $e_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$, $n \geq 1$ συνιστούν μια κανονικοποιημένη και μονότονη βάση σε καθέναν από τους χώρους c_0 και l_p, $1 \leq p < \infty$. Η ακολουθία (e_n) αναφέρεται και ως **συνήθης βάση** του χώρου X, όπου $X = c_0$ ή $X = l_p$, $1 \leq p < \infty$.

Πρόταση 0.2.15. *Έστω X να είναι ο c_0 ή κάποιος l_p για $p \in [1, \infty)$. Αν (u_j) είναι μια κανονικοποιημένη block ακολουθία της συνήθους βάσης του X, τότε οι ακολουθίες (u_i) και (e_i) είναι ισοδύναμες και ο χώρος Banach $[u_i]$ είναι ισομετρικός με τον X.*

Ορισμός 0.2.16. Έστω $\sum x_i$ μια σειρά σε έναν χώρο Banach X. Η σειρά $\sum x_i$ λέγεται **unconditionally συγκλίνουσα** στον X αν ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες.

(i) Υπάρχει $x \in X$ ώστε για κάθε μετάθεση των φυσικών αριθμών $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ισχύει οτι $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)} = x$.

(ii) Η σειρά $\sum x_{n_i}$ συγκλίνει για κάθε γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (n_i).

(iii) Η σειρά $\sum \varepsilon_i x_i$ συγκλίνει για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_i = \pm 1$.

(Σε όλους τους ισχυρισμούς αναφερόμαστε φυσικά στη σύγκλιση της σειράς ως προς τη νόρμα του X.)

Ορισμός 0.2.17. Μια βάση (e_i) ενός χώρου Banach X λέμε οτι είναι **unconditional βάση** του X αν για κάθε $x \in X$ η αντίστοιχη σειρά $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ συγκλίνει unconditionally. Μια ακολουθία (e_i) σε έναν χώρο Banach X λέγεται **unconditional βασική** ακολουθία αν είναι unconditional βάση του $[e_i]$.

Πρόταση 0.2.18. *Έστω (e_i) μια ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων σε έναν χώρο Banach X. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η (e_i) είναι unconditional βασική.*

(ii) *Υπάρχει* $K>0$ *ώστε για κάθε* $m\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ *και* $\varepsilon_i=\pm1$ *να ισχύει*

$$\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i a_i e_i\|\leq K\|\sum_{i=1}^{m}a_i e_i\|.$$

(iii) *Υπάρχει* $L>0$ *ώστε για κάθε* $m\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ *και* F *υποσύνολο του* $\{1,\dots,m\}$ *να ισχύει*

$$\|\sum_{i\in F}a_i e_i\|\leq L\|\sum_{i=1}^{m}a_i e_i\|.$$

Η μικρότερη σταθερά που ικανοποιεί την (ii) στην παραπάνω πρόταση λέγεται **unconditional σταθερά** της βάσης (e_i) και συμβολίζεται με $ubc\{e_i\}$. Η αντίστοιχη μικρότερη σταθερά που ικανοποιεί την (iii) λέγεται **suppression σταθερά** της βάσης (e_i) και συμβολίζεται με $sbc\{e_i\}$. Επίσης, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

(i) $bc\{e_i\}\leq sbc\{e_i\}\leq ubc\{e_i\}$ και

(ii) $ubc\{e_i\}\leq 2sbc\{e_i\}$.

Πρόταση 0.2.19. *Έστω* (e_i) *μια unconditional βασική ακολουθία σε έναν χώρο Banach* X*. Έστω ακόμη* (a_i) *μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και* $m,M>0$ *ώστε* $m\leq|a_i|\leq M$ *για κάθε* i*. Τότε έχουμε οτι* $(e_i)\sim(a_ie_i)$*.*

Η συνήθης βάση (e_n) των χώρων c_0 και l_p, $1\leq p<\infty$ είναι, όπως εύκολα ελέγχεται unconditional. Ένα παράδειγμα conditional (δηλαδή όχι unconditional) βάσης είναι η αθροιστική (summing) βάση του χώρου c_0, η οποία ορίζεται ως $x_n=e_1+\ldots+e_n$, $n\geq1$.

Πριν κλείσουμε υο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στην έννοια του spreading model για ένα χώρο Banach, η οποία οφείλεται στους Brunel και Sucheston [2].

Ορισμός 0.2.20. Έστω $M\in[\mathbb{N}]^\omega$ και μια συνάρτηση $f:[\mathbb{N}]^r\to\mathbb{R}$. Όταν γράφουμε

$$\lim_{A\in[M]^r}f(A)=a \quad \text{ή} \quad \lim_{n_1<\ldots n_r\in M}f(n_1,\dots,n_r)=a$$

θα εννοούμε οτι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε αν $A\in[M]^r$ (αντ. $n_1<\ldots<n_r\in M$) και $A\subseteq[N,\infty)$ (αντ. $N\leq n_1$), τότε $|f(A)-a|<\varepsilon$ (αντ. $|f(n_1,\dots,n_r)-a|<\varepsilon$).

Θεώρημα 0.2.21. *Έστω X ένας χώρος Banach και (x_n) μια ημικανονικοποιημένη ακολουθία στον X ώστε η (x_n) να μην έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσες υπακολουθίες. Τότε*

(i) *Υπάρχει μια υπακολουθία (y_n) της (x_n) ώστε το όριο*

$$\lim_{n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\|$$

να υπάρχει για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$(1-\varepsilon) \lim_{n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\| \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{m_i}\| \leq (1+\varepsilon) \lim_{n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\|,$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ και $N \leq m_1 < \ldots < m_k$.

(iii) *Η $|||\cdot||| : c_{00} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:*

$$|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| = \lim_{n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\|,$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, είναι μια καλά ορισμένη νόρμα στον c_{00}. Επιπλέον, ισχύει οτι

$$|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| = |||\sum_{i=1}^{k} a_i e_{n_i}||| \tag{0.1}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_k$ στο $\mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 0.2.22. *Έστω X ένας χώρος Banach και (x_n) μια ημικανονικοποιημένη βασική ακολουθία στον X. Τότε ισχύουν τα (i)-(iii) του Θεωρήματος 0.2.21 και μάλιστα η ακολουθία (e_i) είναι βάση της πλήρωσης του $(c_{00}, |||\cdot|||)$, με $bc\{e_i\} \leq bc\{x_n\}$.*

Ορισμός 0.2.23. Έστω X ένας χώρος Banach και (x_n) μια ημικανονικοποιημένη ακολουθία στον X που δεν έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσες υπακολουθίες. Ο χώρος c_{00} εφοδιασμένος με μια νόρμα $|||\cdot|||$, όπως αυτή ορίστηκε στο Θεώρημα 0.2.21(iii) λέγεται ένα **spreading model** του X παραγόμενο από τη (x_n).

Κεφάλαιο 1

Διαχωρισμένες Ακολουθίες

Πριν ξεκινήσουμε το κεφάλαιο αυτό υπενθυμίζουμε οτι όλοι οι χώροι με νόρμα (Banach) που θεωρούμε, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, είναι απειροδιάστατοι.

1.1 Διαχωρισμένες Ακολουθίες

Ορισμός 1.1.1. Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $\delta > 0$. Μια ακολουθία (x_n) στον X λέγεται δ-**διαχωρισμένη** αν $\|x_n - x_m\| \geq \delta$ για κάθε $n \neq m$.

Λήμμα 1.1.2. *Έστω ένας X χώρος με νόρμα. Αν $M, \theta, \delta > 0$ και $x \neq y \in X$ ώστε*

(1) $\|x - y\| > \theta$,

(2) $M - \delta \leq \|x\|, \quad \|y\| \leq M + \delta$ *και*

(3) $\theta - (\frac{M+\delta}{M-\delta} - 1)(M + \delta) \geq 0$.

τότε

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| > \frac{\theta}{M+\delta} - \frac{2\delta}{M-\delta}.$$

Απόδειξη. Καταρχάς μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\|y\| \leq \|x\|$ και έστω $a \geq 1$

ώστε $\|x\| = a\|y\|$. Έχουμε οτι

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| &= \left\|\frac{x}{a\|y\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \\
&= \frac{1}{\|y\|}\left\|\frac{x}{a} - y\right\| \\
&= \frac{1}{\|y\|}\left\|\frac{x}{a} \pm x - y\right\| \\
&\geq \frac{1}{\|y\|}\left(\|x-y\| - \left\|\frac{x}{a} - x\right\|\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|y\|}\left(\|x-y\| - \|x\|\left|\frac{1}{a} - 1\right|\right) \\
&= \frac{1}{\|y\|}\left(\|x-y\| - \|x\|\left|\frac{1-a}{a}\right|\right).
\end{aligned}$$

Επειδή $a \geq 1$

$$\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \geq \frac{1}{\|y\|}(\|x-y\| - (a-1)\|x\|)$$

από τις (1), (2) και (3) έπεται οτι

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| &> \frac{1}{M+\delta}\left(\theta - \left(\frac{M+\delta}{M-\delta} - 1\right)(M+\delta)\right) \\
&= \frac{1}{M+\delta}\left(\theta - \left(\frac{M+\delta}{M-\delta} - \frac{M-\delta}{M-\delta}\right)(M+\delta)\right) \\
&= \frac{\theta}{M+\delta} - \frac{2\delta}{M-\delta}.
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.1.3. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα και (x_n) μια θ-διαχωρισμένη ακολουθία στον X με $\|x_n\| \leq 1$ για κάθε n. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ο X περιέχει μια κανονικοποιημένη $(\theta - \varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία.*

Απόδειξη. Έχουμε οτι η ακολουθία $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και έτσι μπορούμε να βρούμε ένα $0 \leq M \leq 1$ και μια υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) ώστε $\|x_{n_k}\| \to M$. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\|x_n\| \to M$. Βλέπουμε τώρα οτι το M δεν μπορεί να είναι μηδέν, διαφορετικά θα είχαμε οτι $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$, ενώ η (x_n) είναι διαχωρισμένη, άτοπο. Δεδομένου οτι $0 < M \leq 1$, για $\varepsilon > 0$ με $\theta - \varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ ώστε $\theta - (\frac{M+\delta}{M-\delta} - 1)(M+\delta) \geq 0$ και $\frac{\theta}{M+\delta} - \frac{2\delta}{M-\delta} > \theta - \varepsilon$. Επειδή τώρα

$\|x_n\| \to M$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $M - \delta \leq \|x_n\| \leq M + \delta$ για κάθε $n \geq N$. Από το προηγούμενο Λήμμα είναι τώρα άμεσο οτι για $m \neq n \geq N$

$$\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| > \theta - \varepsilon.$$

□

Θεώρημα 1.1.4. (Riesz) *Έστω X ένας χώρος με νόρμα.*

(i) *Αν Y είναι ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X, τότε υπάρχει $x \in S_X$ ώστε $d(x, Y) \geq 1$.*

(ii) *Ο X περιέχει μια κανονικοποιημένη 1-διαχωρισμένη ακολουθία.*

Απόδειξη. (i) Έστω Y ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $d(x_0, Y) > 0$. Έστω τώρα $d = d(x_0, Y)$ και μια ακολουθία (y_n) στον Y ώστε $\|x_0 - y_n\| \to d$.

Είναι άμεσο οτι η ακολουθία (y_n) είναι φραγμένη και αφού ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης έπεται οτι θα υπάρχει μια συκλίνουσα υπακολουθία (y_{n_k}) της (y_n). Έστω οτι $y_{n_k} \to y_0$, τότε

$$\|x_0 - y_0\| = \lim_k \|x_0 - y_{n_k}\| = \lim_n \|x_0 - y_n\| = d.$$

Θέτουμε $x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$. Για $y \in Y$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} \|x - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| &= \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \|x_0 - y_0 - y\|x_0 - y_0\|\| \\ &= \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \|x_0 - (y_0 + y\|x_0 - y_0\|)\|. \end{aligned}$$

Αφού $y_0 + y\|x_0 - y_0\| \in Y$ για κάθε $y \in Y$ έπεται οτι $\|x - y\| \geq \frac{d}{d} = 1$ για κάθε $y \in Y$ και άρα $d(x, Y) \geq 1$.

(ii) Η κατασκευή της ζητούμενης ακολουθίας θα γίνει επαγωγικά. Επιλέγουμε ένα $x_1 \in S_X$ και θέτουμε $X_1 = [x_1]$. Από το (i) έπεται οτι υπάρχει $x_2 \in S_X$ ώστε $d(x_2, X_1) \geq 1$ και άρα $\|x_2 - x_1\| \geq d(x_2, X_1) \geq 1$. Υποθέτουμε τώρα οτι για $n \geq 1$ έχουμε επιλέξει $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ώστε $\|x_i - x_j\| \geq 1$ για $1 \leq i, j \leq n$ και θέτουμε $X_n = [x_i]_{i=1}^n$. Πάλι από το (i) έπεται οτι υπάρχει $x_{n+1} \in S_X$ ώστε $d(x_{n+1}, X_n) \geq 1$ και άρα $\|x_{n+1} - x_i\| \geq 1$ για $1 \leq i \leq n$. □

Παρακάτω θα δώσουμε τρεις διαφορετικές αποδείξεις της εξής ισχυροποίησης του Θεωρήματος του Riesz:

Κάθε χώρος με νόρμα περιέχει μια κανονικοποιημένη ακολουθία (x_n) *ώστε* $\|x_n - x_m\| > 1$ *για κάθε* $n \neq m \in \mathbb{N}$.

Το προαναφερθέν αποτέλεσμα οφείλεται στον C. A. Kottman [9]. Οι δυο πρώτες αποδείξεις του αποτελέσματος αυτού που θα δώσουμε είναι μεταγενέστερες της απόδειξης του Kottman, η οποία είναι η τρίτη κατά σειρά.

Θεώρημα 1.1.5. (Kottman) *Κάθε χώρος με νόρμα περιέχει μια κανονικοποιημένη ακολουθία* (x_n) *ώστε* $\|x_n - x_m\| > 1$ *για κάθε* $n \neq m \in \mathbb{N}$.

Η πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος του Kottman:

Απόδειξη. Η κατασκευή της ζητούμενης ακολουθίας θα γίνει επαγωγικά.
Έστω $x_1 \in S_X$ και X_2 ένας δύο διαστάσεων υπόχωρος του X με $x_1 \in X_2$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach έπεται οτι υπάρχουν $f \in S_{X_2^*}$ και $g \in X_2^*$ ώστε $f(x_1) = 0$ και $g(x_1) = 1$. Δεδομένου οτι το σύνολο $K = \{x \in S_{X_2} : f(x) = 1\}$ είναι συμπαγές και μη κενό μπορούμε να επιλέξουμε $x_2 \in K$ ώστε $g(x_2) = \min\{g(x) : x \in K\}$. Τώρα τα x_1 και x_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 1$. Επίσης παρατηρούμε οτι $\|x_2 - x_1\| \geq 1$. Πράγματι,

$$\|x_2 - x_1\| = \|f\| \, \|x_2 - x_1\| \geq |f(x_2 - x_1)| = |f(x_2)| = 1.$$

Αν υποθέσουμε οτι $\|x_2 - x_1\| = 1$, τότε αφού $f(x_2 - x_1) = f(x_2) = 1$ έπεται οτι $x_2 - x_1 \in K$ και άρα

$$g(x_2) \leq g(x_2 - x_1) = g(x_2) - 1 < g(x_2),$$

άτοπο.

Έστω τώρα $n \geq 2$ και ας υποθέσουμε οτι έχουμε επιλέξει $x_1, \ldots, x_{n-1} \in S_X$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ώστε $\|x_i - x_j\| > 1$ για $1 \leq i \neq j \leq n-1$. Θεωρούμε έναν n διαστάσεων υπόχωρο X_n του X ώστε $x_i \in X$ για κάθε $1 \leq i \leq n_1$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach έπεται πάλι οτι υπάρχουν $f \in S_{X_n^*}$ και $g \in X_n^*$ ώστε $f(x_i) = 0$ και $g(x_i) = 1$ όταν $1 \leq i \leq n-1$. Θεωρούμε τώρα το συμπαγές σύνολο $K = \{x \in S_{X_n} : f(x) = 1\}$ και επιλέγουμε $x_{n+1} \in K$ ώστε $g(x_{n+1}) = \min\{g(x) : x \in K\}$. Όπως στην περίπτωση $n = 2$ δείχνουμε οτι τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και οτι $\|x_{n+1} - x_i\| > 1$, όταν $1 \leq i \leq n-1$ και έχουμε τελειώσει. □

Η προηγούμενη απόδειξη περιγράφεται στην άσκηση 1.54 του [8].

Λήμμα 1.1.6. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα, $k \geq 1$ και $x_1^*, \ldots, x_k^*$ γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του X^*. Τότε υπάρχει $y \in X$ ώστε $x_i^*(y) < 0$ για $1 \leq i \leq k$.*

Απόδειξη. Προχωρούμε με επαγωγή στο πλήθος k των συναρτησοειδών. Για $k = 1$ προφανώς το συμπέρασμα ισχύει αφού $x_1^* \neq 0$. Έστω $k \geq 2$, υποθέτουμε οτι το συμπέρασμα ισχύει για κάθε k το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα συναρτησοειδή. Έστω $x_1^*, \ldots, x_{k+1}^*$ γραμμικά ανεξάρτητα συναρτησοειδή. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $z \in X$ ώστε $x_i^*(z) < 0$ για $1 \leq i \leq k$. Από γνωστό αποτέλεσμα της Γραμμικής Άλγεβρας ισχύει οτι

$$\bigcap_{i=1}^{k} \ker x_i^* \not\subseteq \ker x_{k+1}^*.$$

Έτσι υπάρχει $u \in X$ με $x_i^*(u) = 0$ για $1 \leq i \leq k$ και $x_{k+1}^*(u) < 0$.
<u>Περίπτωση I.</u> $x_{k+1}^*(z) \leq 0$:

Θέτουμε $y = z + u$ και είναι άμεσο οτι $x_i^*(y) < 0$ για $1 \leq i \leq k+1$.
<u>Περίπτωση II.</u> $x_{k+1}^*(z) > 0$:

Επιλέγουμε $\lambda > 0$ ώστε

$$\lambda \left| x_{k+1}^*(z) \right| < \left| x_{k+1}^*(u) \right|. \tag{1.1}$$

Επειδή $u \in \bigcap_{i=1}^{k} \ker x_i^*$ και $\lambda > 0$ έχουμε οτι $x_i^*(\lambda z + u) = \lambda x_i^*(z) < 0$ για $1 \leq i \leq k$. Επίσης, από την (1.1) παίρνουμε οτι

$$x_{k+1}^*(\lambda z + u) = \lambda x_{k+1}^*(z) + x_{k+1}^*(u) < 0.$$

□

<u>Η δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος του Kottman ([4]):</u>

Απόδειξη. Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Η κατασκευή της ζητούμενης ακολουθίας θα γίνει επαγωγικά. Επιλέγουμε $x_1 \in S_X$ και $x_1^* \in S_{X^*}$ με $x_1^*(x_1) = \|x_1\| = 1$. Έστω $k \geq 1$ και ας υποθέσουμε οτι έχουν επιλεγεί $x_1, \ldots, x_k \in S_X$ και γραμμικά ανεξάρτητα $x_1^*, \ldots, x_k^* \in S_{X^*}$ ώστε να ισχύουν οι:

(1) $\|x_i - x_j\| > 1$, για $1 \leq i \neq j \leq k$ και

(2) $x_i^*(x_i) = \|x_i\| = 1$.

Από το Λήμμα 1.1.6 μπορούμε να επιλέξουμε $y \in X$ με $x_i^*(y) < 0$ για $1 \leq i \leq k$. Ακόμη έχουμε οτι

$$\bigcap_{i=1}^{k} \ker x_i^* \neq 0 \qquad (\text{ο } X \text{ είναι απειροδιάστατος}).$$

Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε $x \in \left(\bigcap_{i=1}^{k} \ker x_i^*\right) \setminus \{0\}$ και $K > 0$ ώστε $\|y\| < \|y + Kx\|$. Τότε για κάθε μη τετριμμένο γραμμικό συνδυασμό $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i^*$ παίρνουμε οτι

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i^*(y + Kx)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i^*(y)\right| \\ &\leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i^*\| \, \|y\| \\ &< \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i^*\| \, \|y + Kx\| \,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Θέτουμε τώρα $x_{k+1} = \frac{y+Kx}{\|y+Kx\|}$ και επιλέγουμε

$$x_{k+1}^* \in S_{X^*} \text{ με } x_{k+1}^*(x_{k+1}) = \|x_{k+1}\| = 1. \tag{1.3}$$

Ας υποθέσουμε οτι $x_{k+1}^* \in [x_i^*]_{i=1}^k$ και άρα το x_{k+1}^* είναι ένας μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $x_1^*, \ldots, x_k^*$, $x_{k+1}^* = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i^*$.

Από τις (1.2) και (1.3) παίρνουμε οτι

$$\begin{aligned} \|y + Kx\| = \left|x_{k+1}^*(y + Kx)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i^*(y + Kx)\right| \\ &< \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i^*\| \, \|y + Kx\| \\ &= \left\|x_{k+1}^*\right\| \, \|y + Kx\| \\ &= \|y + Kx\| \end{aligned}$$

άτοπο.

Μένει να δείξουμε οτι $\|x_{k+1} - x_i\| > 1$ για $1 \leq i \leq k$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}-x_i\| &= \|x_i^*\|\,\|x_{k+1}-x_i\| \\ &\geq |x_i^*(x_{k+1})-x_i^*(x_i)| \\ &= \left|x_i^*(\frac{y+Kx}{\|y+Kx\|})-x_i^*(x_i)\right| \\ &= \left|x_i^*(\frac{y}{\|y+Kx\|})-x_i^*(x_i)\right|.\end{aligned}$$

Από την επιλογή του y έχουμε οτι $x_i^*(y)<0$, $1\leq i\leq k$. Άρα

$$\|x_{k+1}-x_i\| \geq \|x_i\| + \frac{|x_i^*(y)|}{\|y+Kx\|} > 1.$$

□

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την αρχική απόδειξη του Θεωρήματος του Kottman, η οποία είναι συνδυαστικού τύπου και βρίσκεται πιο κοντά στο πνεύμα της απόδειξης του Θεωρήματος Elton-Odell.

Ορισμός 1.1.7. Θέτουμε U να είναι το σύνολο $\{x=(x_n)\in c_{00} : x_n\in\{-1,0,1\}$ για κάθε $n\}$. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του U, $x\in A$ και $n_0=\max\mathrm{supp}x$.

(i) Αν υπάρχουν y και z στο A με $y_n=x_n=z_n$ για κάθε $n\leq n_0$ και για κάποιο $k>n_0$, $y_k=1$, $z_k=-1$ γράφουμε $x<^z y$ και λέμε οτι (το z **βεβαιώνει στη συντεταγμένη** k οτι) το y **επεκτείνει** το x. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε και τον παρακάτω συμβολισμό $x<y$ και θα εννοούμε οτι υπάρχει $z\in A$ που βεβαιώνει οτι το y επεκτείνει το x.

(ii) Μια **αλυσίδα** στο A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο πεπερασμένο ή άπειρο $\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$ ώστε $x_i<x_{i+1}$ για κάθε $i\geq 1$.

(iii) Ένα $x\in A$ θα λέγεται **maximal** αν δεν υπάρχει $y\in A$ με $x<y$.

Παρατήρηση 1.1.1. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του U.

(i) Είναι άμεσο οτι αν $x,y\in A$ με $x<y$, τότε $\mathrm{supp}x<\mathrm{supp}y$.

(ii) Έστω $x_1,x_2,x_3\in A$ με $x_1<^{y_1}x_2$ και $x_2<^{y_2}x_3$, τότε $x_1<^{y_2}x_3$. Πράγματι, έστω $n_i=\max\mathrm{supp}x_i$, $i=1,2$. Έχουμε τώρα οτι $x_1<^{y_1}x_2$, έτσι $x_1(n)=$

$x_2(n) = y_1(n)$ για $n \leq n_1$ και υπάρχει $k_1 > n_1$ ώστε $x_2(k_1) = 1$ και $y_1(k_1) = -1$. Βέβαια $k_1 \leq n_2$ και όπως πριν $x_2(n) = x_3(n) = y_2(n)$ για $n \leq n_2$ και υπάρχει $k_2 > n_2$ με $x_3(k_2) = 1$, $y_2(k_2) = -1$. Τέλος, από τα παραπάνω έπεται οτι $n_1 < k_2$, $x_1(n) = x_2(n) = x_3(n) = y_2(n)$, για $n \leq n_1$ και $x_3(k_2) = 1$, $y_3(k_2) = -1$. Άρα

$$x_1 <^{y_2} x_3.$$

(iii) Έστω πάλι $x_1, x_2, x_3 \in A$ με $x_1 <^{y_1} x_2$ και $x_2 <^{y_2} x_3$, τότε $y_1 - y_2 \notin A$. Μάλιστα $y_1 - y_2 \notin U$. Όπως στην παρατήρηση (ii) μπορούμε να βρούμε ένα $k \in \mathbb{N}$ με $x_2(k) = 1$ και $y_1(k) = -1$. Μιας και $k \leq \max \operatorname{supp} x_2$ έχουμε οτι $y_2(k) = 1$. Άρα $\|y_1 - y_2\|_\infty \geq 2$ και είναι εύκολο να δούμε οτι αν $x \in U$, τότε είτε $x \neq 0$ και $\|x\|_\infty = 1$ ή $x = 0$.

Λήμμα 1.1.8. *Δεν υπάρχει υποσύνολο A του U που να ικανοποιεί τα εξής:*

(1) *$e_i \in A$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, όπου $e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0, \ldots)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.*

(2) *Το A είναι συμμετρικό, δηλαδή αν $x \in A$, τότε $-x \in A$.*

(3) *Για κάθε άπειρο υποσύνολο B του A υπάρχουν $x \neq y \in B$ με $x - y \in A$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι υπάρχει μη κενό υποσύνολο A του U που ικανοποιεί τις (1)-(3). Έστω τώρα $\{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ μια αλυσίδα στο A και έστω ακόμη οτι $x_i <^{y_i} x_{i+1}$ για $i \geq 1$. Αν υποθέσουμε οτι το σύνολο $\{x_i : i \geq 1\}$ είναι άπειρο, το ίδιο ισχύει και για το σύνολο $\{y_i : i \geq 1\}$. Τώρα το σύνολο $\{y_i : i \geq 1\}$ είναι άπειρο υποσύνολο του A και άρα από την (3) υπάρχουν $i \neq j$ ώστε $x_i - x_j \in A$. Η Παρατήρηση 1.1.1(iii) μας πληροφορεί οτι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβαίνει. Έτσι κάθε αλυσίδα στο A είναι πεπερασμένη και ιδιαίτερα ισχύει οτι για κάθε $x \in A$ είτε x είναι maximal ή υπάρχει $y \in A$ με y maximal ώστε $x < y$.

Τώρα θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια ακολουθία από maximal στοιχεία του A. Αρχικά θεωρούμε το στοιχείο $e_1 \in A$. Θέτουμε $w_1 = e_1$, αν το e_1 είναι maximal στο A, διαφορετικά επιλέγουμε ένα maximal στοιχείο του A, w_1, ώστε $e_1 < w_1$.

Έστω $k \geq 1$ και ας υποθέσουμε οτι έχουν επιλεγεί $w_1, \ldots, w_k$ maximal στοιχεία του A. Παίρνουμε $p > \max \operatorname{supp} w_k$ και θεωρούμε το $e_p \in A$. Τέλος, θέτουμε $w_{k+1} = e_p$, αν το e_p είναι maximal στο A, διαφορετικά επιλέγουμε w_{k+1} maximal στο A με $e_p < w_{k+1}$. Η μέθοδος επιλογής των w_k μας δίνει οτι

$$\max \mathrm{supp} w_k < \min \mathrm{supp} w_{k+1}, \text{ για } \text{ κάθε } k \tag{1.4}$$

και ιδιαίτερα τα $(w_i)_{i\geq 1}$ είναι διαφορετικά ανά δύο.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $f : [\mathbb{N}]^2 \to \{1,2\}$ με

$$f(\{i,j\}) = \begin{cases} 1, & w_i - w_j \in A \\ 2, & w_i - w_j \notin A. \end{cases}$$

Επειδή το A είναι συμμετρικό, έπεται οτι η f είναι καλά ορισμένη. Από το Θεώρημα Ramsey 0.1.1 παίρνουμε οτι υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε η $f|_M$ να είναι σταθερή.

Μιας και από την (1.4) το σύνολο $\{w_i : i \in M\}$ είναι άπειρο υποσύνολο του A από την (3) έχουμε οτι υπάρχουν $i \neq j$ με $w_i - w_j \in A$. Άρα $w_i - w_j \in A$ για κάθε $i \neq j \in M$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε οτι $M = \mathbb{N}$ και άρα

$$w_i - w_j \in A \text{ για } \text{ κάθε } i \neq j. \tag{1.5}$$

Από τις (1.4) και (1.5) παίρνουμε οτι η ακολουθία $(w_i - w_{i+1})_{i\geq 1}$ είναι ακολουθία διαφορετικών ανά δύο όρων του A. Στη συνέχεια από τις (2) και (3) παίρνουμε οτι υπάρχουν $i < j$ με $(w_i - w_{i+1}) - (w_j - w_{j+1}) \in A$, δηλαδή $w_i - w_{i+1} - w_j + w_{j+1} \in A$. Η (1.5) δίνει οτι $w_i - w_{j+1} \in A$ και τελικά από την (1.4) έχουμε οτι το $w_i - w_{j+1}$ βεβαιώνει οτι το $w_i - w_{i+1} - w_j + w_{j+1}$ επεκτείνει το w_i, άτοπο, αφού το w_i είναι maximal στοιχείο του A. □

<u>Η τρίτη απόδειξη του Θεωρήματος του Kottman:</u>

Απόδειξη. Θεωρούμε οτι ο χώρος c_{00} είναι εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|_\infty$.

Έστω X ένας χώρος με νόρμα, από το Θεώρημα (Day) 0.2.11 μπορούμε να θεωρήσουμε ακολουθίες (x_i) στον X και (x_i^*) στον X^* με $\|x_i\| = \|x_i^*\| = 1$ για κάθε i και $x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$ για κάθε i και j. Θεωρούμε τώρα τον υπόχωρο του X, $Y = \mathrm{span}\,\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ και την απεικόνιση $T : Y \to c_{00}$, $T(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$.

Η γραμμικότητα της απεικόνισης T είναι άμεση. Επίσης έχουμε οτι για $x \in Y$

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_\infty &= \|\sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)e_i\|_\infty \\
&= \max_{1\leq i\leq n} |x_i^*(x)| \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} \|x_i^*\| \, \|x\| = \|x\| \, .
\end{aligned}$$

Άρα ο $T : Y \to c_{00}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με

$$\|T\| \leq 1. \tag{1.6}$$

Εύκολα δείχνουμε οτι επιπλέον ο T είναι 1-1 και επί.

Θεωρούμε το σύνολο

$$E = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \|x\| = 1 \text{ και } a_i \in \{-1, 0, 1\} \text{ για κάθε } i \right\}$$

Από τον ορισμό του E έπεται οτι $x_i \in E$ για κάθε i. Επίσης είναι άμεσο οτι το E είναι συμμετρικό σύνολο. Από το 1-1 και τη γραμμικότητα του T έπεται οτι το $T(E)$ είναι άπειρο και συμμετρικό υποσύνολο του U. Ακόμη αν $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ είναι στοιχεία του E με $\|x - y\| \leq 1$, από την (1.6) παίρνουμε οτι

$$\max_{1\leq i\leq n} |a_i - \beta_i| \leq \|T(x) - T(y)\|_\infty \leq \|x - y\| \leq 1.$$

Επειδή $a_i, \beta_i \in \{-1, 0, 1\}$ για κάθε i έπεται οτι είτε $x = y$ ή $x - y \in E$.

Υποθέτουμε τώρα οτι για κάθε B άπειρο υποσύνολο του E υπάρχουν $x \neq y \in B$ ώστε $\|x - y\| \leq 1$. Όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως αφού $x \neq y$, έπεται οτι $x - y \in E$ και άρα $T(x) - T(y) = T(x - y) \in T(E)$. Έτσι έχουμε οτι για κάθε άπειρο υποσύνολο C του $T(E)$ υπάρχουν $c_1 \neq c_2 \in C$ με $c_1 - c_2 \in T(E)$. Επειδή τώρα $T(E)$ είναι συμμετρικό υποσύνολο του U με $e_i \in T(E)$ για κάθε i έχουμε οτι το προηγούμενο συμπέρασμα αντιφάσκει με το Λήμμα 1.1.8. □

Παρατήρηση 1.1.2. (i) Το Θεώρημα 1.1.4(ii) συνάγεται και από το Θεώρημα του Day 0.2.11. Πράγματι, αν X είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε από το Θεώρημα του Day ο X περιέχει ένα άπειρο Auerbach σύστημα $\{(x_n, x_n^*) : n \in \mathbb{N}\}$ και όπως δείξαμε στην προηγούμενη απόδειξη έπεται οτι $\|x_n - x_m\| \geq 1$ για κάθε $n \neq m \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω X ένας χώρος με νόρμα και ας θεωρήσουμε το σύνολο E της προηγούμενης απόδειξης. Είναι σαφές οτι το σύνολο E είναι αριθμήσιμο και έστω $E = (y_n)$. Επίσης, έχουμε δείξει οτι αν $x \neq y \in E$, τότε $\|x - y\| \geq 1$. Περαιτέρω παρατηρούμε οτι μια απλή εφαρμογή του Θεωρήματος του Ramsey έπεται οτι υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε είτε

$$\|y_n - y_m\| = 1, \text{ για κάθε } n \neq m \in M \text{ ή} \tag{1.7}$$

$$\|y_n - y_m\| > 1, \text{ για κάθε } n \neq m \in M \tag{1.8}$$

Το θεώρημα του Kottman 1.1.5 μας λέει οτι η περίπτωση (1.8) ισχύει πάντα. Ένα υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα που ικανοποιεί την (1.7) ονομάζεται **ισοπλευρικό (equilateral) σύνολο**. Δεν ισχύει οτι κάθε χώρος με νόρμα περιέχει ένα άπειρο ισοπλευρικό σύνολο, μάλιστα υπάρχει ισοδύναμη νόρμα στον l_1 η οποία δε δέχεται άπειρο ισοπλευρικό σύνολο [14]. Από την άλλη μεριά, αν ένας χώρος Banach X περιέχει τον c_0, τότε σύμφωνα με ένα πρόσφατο αποτέλεσμα, ο X περιέχει άπειρο ισοπλευρικό σύνολο [12].

1.2 $(1+\varepsilon)$ - Διαχωρισμένες Ακολουθίες

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε ειδικές περιπτώσεις χώρων με νόρμα που περιέχουν κανονικοποιημένες $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένες ακολουθίες. Η γενική περίπτωση οτι κάθε χώρος με νόρμα περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία οφείλεται στους J. Elton και E. Odell και θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Πρόταση 1.2.1. *Έστω X χώρος με νόρμα ώστε η πλήρωση αυτού $\tilde{X}$ να περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία. Τότε για κάθε $0 < \delta < \varepsilon$ ο X περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1+\delta)$-διαχωρισμένη ακολουθία.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε αρχικά οτι η S_X είναι πυκνό υποσύνολο της $S_{\tilde{X}}$. Πράγματι, έστω $x \in \tilde{X}$ με $\|x\| = 1$ και (y_n) μια ακολουθία στον X ώστε $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Ιδιαίτερα, έπεται οτι $\|y_n\| \to 1$ και άρα $\frac{y_n}{\|y_n\|} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Επειδή τώρα η $(\frac{y_n}{\|y_n\|})$ είναι ακολουθία στοιχείων της S_X έχουμε τελειώσει.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ και (x_n) μια κανονικοποιημένη $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία στον $\tilde{X}$. Έστω ακόμη $0 < \delta < \varepsilon$ και $\theta = \varepsilon - \delta > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε

$y_n \in S_X$ με $\|y_n - x_n\| < \frac{\theta}{2}$. Τότε για $n \neq m$

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\| &= \|y_n \pm x_n \pm x_m - y_m\| \\
&\geq \|x_n - x_m\| - \|y_n - x_n\| - \|y_m - x_m\| \\
&> 1 + \varepsilon - 2\frac{\theta}{2} \\
&= 1 + \delta.
\end{aligned}$$

□

Η προηγούμενη πρόταση μας πληροφορεί οτι για να δείξουμε οτι ένας χώρος με νόρμα X περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία αρκεί να δείξουμε οτι η πλήρωση του X, $\tilde{X}$ περιέχει μια τέτοια ακολουθία. Στο εξής λοιπόν θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη κανονικοποιημένων $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένων ακολουθιών σε χώρους Banach. Είναι εύκολο να δούμε οτι στους l_p, $1 \leq p < \infty$ η ακολουθία (e_n) είναι κανονικοποιημένη και $2^{\frac{1}{p}}$-διαχωρισμένη. Επίσης η ακολουθία (x_n) στον c_0 με $x_1 = e_1$ και $x_n = e_n - \sum_{k=1}^{n-1} e_k$, $n \geq 2$, είναι κανονικοποιημένη 2-διαχωρισμένη. Παρακάτω θα δείξουμε οτι αν ο X είναι ένας χώρος Banach που περιέχει κάποιον από τους χώρους c_0 ή l_p, $1 \leq p < \infty$, τότε ο X περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία.

Λήμμα 1.2.2. *Εστω $(X, \|\cdot\|)$ ο χώρος c_0 ή l_p, $1 \leq p < \infty$ με τη συνήθη του νόρμα. Έστω ακόμη $|||\cdot|||$ μια ισοδύναμη νόρμα στον X. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια (x_k) block βασική ακολουθία της (e_i) με $|||x_k||| < 1$ για κάθε k ώστε ο χώρος $[x_k]$ να είναι ισόμορφος με τον $(X, \|\cdot\|)$ και για κάθε $(a_k) \in X$*

$$|||\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k||| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \|(a_k)\| .$$

Απόδειξη. Έστω $m, M > 0$ ώστε $m\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\lambda_n = \inf\{|||x||| : \|x\| = 1 \text{ και } P_n(x) = 0\}$. Είναι άμεσο οτι $m \leq \lambda_n \leq M$ για κάθε n. Επίσης παρατηρούμε οτι η ακολουθία (λ_n) είναι αύξουσα. Πράγματι, έστω $n < m$ και $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $P_m(x) = 0$. Αφού $P_m(x) = 0$ έπεται οτι και $P_n(x) = 0$. Έτσι $\{|||x||| : \|x\| = 1 \text{ και } P_m(x) = 0\} \subseteq \{|||x||| : \|x\| = 1 \text{ και } P_n(x) = 0\}$ από όπου έπεται το συμπέρασμα. Από τα προηγούμενα έπεται οτι υπάρχει $m \leq \lambda \leq M$ ώστε $\lambda_n \nearrow \lambda$.

Έστω $\delta > 0$ με $(1+\delta)^2 < 1 + \varepsilon$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\lambda_{n_0} > \frac{\lambda}{1+\delta}$ (1). Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια (y_k) block βασική ακολουθία της (e_i) ώστε

(2) $P_{n_0}(y_k) = 0$

(3) $\|y_k\| = 1$

(4) $|||y_k||| < \lambda(1+\delta)$

για κάθε k.

Έστω $p \geq n_0$. Από τον ορισμό του λ_p και το γεγονός οτι $\lambda_n \nearrow \lambda$ υπάρχει $z \in X$ με $\|z\| = 1$, $P_p(z) = 0$ και $|||z||| < \lambda(1+\delta)$. Επειδή οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $|||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες, $P_n(z) \to z$ και ως προς τις δυο νόρμες. Ακόμη έχουμε οτι $\|z\| = 1$ και άρα $\|P_n(z)\| \to 1$. Έτσι παίρνουμε οτι $\frac{P_n(z)}{\|P_n(z)\|} \to z$ και ως προς τις δυο νόρμες. Μιας και $|||z||| < \lambda(1+\delta)$ μπορούμε να επιλέξουμε $q > p$ ώστε $\left|\left|\left|\frac{P_q(z)}{\|P_q(z)\|}\right|\right|\right| < \lambda(1+\delta)$.

Θέτουμε τώρα $y = \frac{P_q(z)}{\|P_q(z)\|}$, τότε $\|y\| = 1$ και $|||y||| < \lambda(1+\delta)$. Επιπλέον έχουμε οτι $P_p(z) = 0$ και $p \geq n_0$, άρα $P_{n_0}(y) = 0$ και $\text{supp} y \subseteq [p+1, q]$. Την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να την εφαρμόσουμε για κάθε $p \geq n_0$ και έτσι παίρνουμε τη ζητούμενη ακολουθία.

Από την ισοδυναμία των νορμών $\|\cdot\|$ και $|||\cdot|||$ έπεται οτι $([y_k], |||\cdot|||) \simeq ([y_k], \|\cdot\|)$. Από την (3) και την Πρόταση 0.2.15 ο $([y_k], \|\cdot\|)$ είναι ισομετρικός με τον $(X, \|\cdot\|)$. Άρα οι $([y_k], |||\cdot|||)$ και $(X, \|\cdot\|)$ είναι ισόμορφοι. Από την (2) για κάθε $(a_k) \in X$ έχουμε οτι

$$P_{n_0}(\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k) = 0.$$

Από τον ορισμό των λ_n παίρνουμε οτι

$$\left|\left|\left|\frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k}{\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\|}\right|\right|\right| \geq \lambda_{n_0} > \frac{\lambda}{1+\delta} \text{ για κάθε } (a_k) \in X.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} |||\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k||| &> \frac{\lambda}{1+\delta} \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\| \\ &= \frac{\lambda}{1+\delta} \|(a_k)\| \text{ για κάθε } (a_k) \in X. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Για $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε $x_k = \frac{y_k}{\lambda(1+\delta)}$.

Από την ισοδυναμία των ακολουθιών $((y_k), |||\cdot|||)$ και $((e_i), \|\cdot\|)$, την unconditionality της βάσης (e_i) και την Πρόταση 0.2.19 έχουμε οτι οι ακολουθίες

$((x_k), |||\cdot|||)$, $([y_k], |||\cdot|||)$, $([y_k], \|\cdot\|)$ και $((e_i), \|\cdot\|)$ είναι ισοδύναμες. Ιδιαίτερα ισχύει οτι $([x_k], |||\cdot|||) \simeq (X, \|\cdot\|)$. Από την (4) είναι άμεσο οτι $|||x_k||| < 1$ για κάθε k. Τέλος, για $(a_k) \in X$ από την (1.9) έχουμε

$$\begin{aligned}
|||\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k||| &= |||\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{y_k}{\lambda(1+\delta)}||| \\
&= \frac{1}{\lambda(1+\delta)}|||\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k||| \\
&> \frac{1}{\lambda(1+\delta)} \frac{\lambda}{(1+\delta)} \|(a_k)\| \\
&= \frac{1}{(1+\delta)^2} \|(a_k)\| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \|(a_k)\| .
\end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.2.3. Έστω X και Y δύο ισόμορφοι χώροι Banach. Ορίζουμε τη **Banach-Mazur απόσταση** των X και Y

$$d(X,Y) = \inf\left\{\left\|T^{-1}\right\| \|T\| : T : X \to Y \text{ ισομορφισμός και επί}\right\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε οτι

(i) $d(X,Y) = d(Y,X)$

(ii) $d(X,Y) \geq 1$

(iii) αν X, Y και Z αμοιβαία ισόμορφοι χώροι Banach, τότε $d(X,Y) \leq d(X,Z)d(Z,Y)$.

Με τη βοήθεια του Λήμματος 1.2.2 μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το εξής πολυ γνωστό Θεώρημα του James.

Θεώρημα 1.2.4. (James) *Έστω X ένας χώρος Banach που περιέχει τον l_1. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος Y του X με $d(Y, l_1) < 1+\varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $T : l_1 \to X$ ένας ισομορφισμός του l_1 μέσα στον X. Ορίζουμε τη $|||\cdot||| : l_1 \to \mathbb{R}$, $|||x||| = \|T(x)\|$ για $x \in l_1$, όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα του χώρου X. Τώρα είναι εύκολο να δούμε οτι η $|||\cdot|||$ είναι μια νόρμα στον l_1 ισοδύναμη της $\|\cdot\|_1$ και οτι ο $(l_1, |||\cdot|||)$ είναι ισομετρικός με τον $(T(l_1), \|\cdot\|)$ που είναι κλειστός υπόχωρος του X. Για $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε μια (x_k) block βασική ακολουθία της (e_i), όπως στο Λήμμα 1.2.2. Από το Λήμμα 1.2.2 παίρνουμε οτι

$$|||\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k||| > \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \tag{1.10}$$

για κάθε $(a_k) \in l_1$. Επιπλέον, πάλι από το Λήμμα 1.2.2 $|||x_k||| < 1$ για κάθε k. Έτσι

$$|||\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k||| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \tag{1.11}$$

για κάθε $(a_k) \in l_1$. Από τις (1.10) και (1.11) έπεται οτι

$$d(([x_k], ||| \cdot |||), l_1) < 1 + \varepsilon.$$

Τέλος, επειδή οι χώροι $([x_k], ||| \cdot |||)$ και $([T(x_k)], \|\cdot\|)$ είναι ισομετρικοί έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.2.5. (James) *Έστω X ένας χώρος Banach που περιέχει τον c_0. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος Y του X με $d(Y, c_0) < 1+\varepsilon$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι παρόμοια με την περίπτωση του l_1 και για αυτό το λόγο θα παρουσιάσουμε μόνο τα βασικά της σημεία. Αρκεί να δείξουμε το συμπέρασμα στην περίπτωση του $X = c_0$ και οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισοδύναμες. Ορίζουμε

$$\lambda_n = \inf \{\|x\|_\infty : \|x\| = 1 \text{ και } P_n(x) = 0\}$$

για $n \in \mathbb{N}$. Για κάποιο $\lambda > 0$ παίρνουμε οτι υπάρχει μια (y_k) block βασική ακολουθία της (e_i) ώστε $\|y_k\| = 1$, $\|y_k\|_\infty < \lambda(1+\varepsilon)$, για κάθε k και

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\| \leq (1+\varepsilon)^2 \max_k |a_k|, \tag{1.12}$$

για κάθε $(a_k) \in c_0$. Τώρα έστω $|a_{k_0}| = \max_k |a_k|$, τότε

$$\begin{aligned} \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\| &= \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k \pm 2a_{k_0} y_{k_0}\| \\ &\geq \|2a_{k_0} y_{k_0}\| - \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k - 2a_{k_0} y_{k_0}\|. \end{aligned}$$

Από την (1.12) τώρα

$$\begin{aligned} \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\| &\geq 2\,|a_{k_0}| - (1+\varepsilon)^2 \max_k |a_k| \\ &= (1-2\varepsilon-\varepsilon^2) \max_k |a_k|\,. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Από τις (1.12) και (1.13) έπεται το συμπέρασμα. □

Τα δύο προηγούμενα Θεωρήματα του James μας λένε οτι αν ένας χώρος Banach X περιέχει μια ισομορφική εικόνα του l_1 ή του c_0, τότε αντίστοιχα περιέχει μια σχεδόν ισομετρική εικόνα του l_1 ή του c_0.

Θεώρημα 1.2.6. (Kottman [9]) *Έστω X χώρος Banach. Αν ο X περιέχει τον c_0 ή κάποιον l_p, για $1 \leq p < \infty$, τότε ο X περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία.*

Απόδειξη. Καταρχάς να παρατηρήσουμε οτι αρκεί να δειχθεί το συμπέρασμα για $X = c_0$ ή l_p, $1 \leq p < \infty$ και $\|\cdot\|$ μια ισοδύναμη νόρμα της συνήθους στον X. Για $X = l_p$ και $\varepsilon > 0$ από το Λήμμα 1.2.2 μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία (x_k) στον X ώστε

$$\|x_k\| < 1, \quad \text{για κάθε } k$$

και

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\| > \frac{1}{1+\varepsilon}(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Έτσι για $n \neq k$

$$\|x_n - x_k\| > \frac{2^{\frac{1}{p}}}{1+\varepsilon}.$$

Αφού $\|x_k\| < 1$ για κάθε k από Πρόταση 1.1.3 έπεται οτι για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε μια $(\frac{2^{\frac{1}{p}}}{1+\varepsilon} - \delta)$-διαχωρισμένη ακολουθία στον $(X, \|\cdot\|)$. Έστω $X = c_0$. Για $\varepsilon > 0$ από το Θεώρημα 1.2.5 έπεται οτι υπάρχει κλειστός υπόχωρος Y του X ώστε $d((Y, \|\cdot\|), c_0) < \frac{1}{1-\varepsilon}$. Έστω τώρα T ένας ισομορφισμός του c_0 επί του Y ώστε

$$(1-\varepsilon)\,\|x\|_\infty \leq \|T(x)\| \leq \|x\|_\infty \ \text{ για } x \in c_0. \tag{1.14}$$

Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) στον c_0 με $x_1 = e_1$ και $x_n = e_n - \sum_{k=1}^{n-1} e_k$ για $n \geq 2$. Επίσης θεωρούμε την ακολουθία (y_n) στον Y με $y_n = T(x_n)$ για $n \in \mathbb{N}$. Τότε από την (1.14) παίρνουμε οτι

$$\|y_n\| \leq 1 \ \text{ για κάθε } n \text{ και}$$

$$\|y_n - y_m\| \geq 2(1-\varepsilon) \text{ για κάθε } n \neq m.$$

Τώρα η Πρόταση 1.1.3 δίνει οτι για κάθε $\delta > 0$ ο X περιέχει μια κανονικοποιημένη $(2(1-\varepsilon)-\delta)$-διαχωρισμένη ακολουθία. Για $\varepsilon, \delta \to 0$ παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Πριν κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε οτι κάθε μη αυτοπαθής χώρος Banach περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία. Στην απόδειξη αυτή θα μας χρειαστούν η έννοια του spreading model για ένα χώρο Banach που αναφέρθηκε στην παράγραφο 0.2 και το παρακάτω Θεώρημα του James[1]

Θεώρημα 1.2.7. (James) *Έστω X χώρος Banach. Τότε ο X είναι μη αυτοπαθής αν και μόνο αν για κάθε θ με $0 < \theta < 1$ υπάρχουν ακολουθίες (x_n) στη S_X και (x_n^*) στη S_{X^*} ώστε*

$$x_k^*(x_i) = \begin{cases} \theta, & k \leq i \\ 0, & k > i \end{cases}$$

Θεώρημα 1.2.8. (Kryczka-Prus) *Έστω X ένας μη αυτοπαθής χώρος Banach. Τότε ο X περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία.*

Απόδειξη. Αφού ο X είναι μη αυτοπαθής από το Θεώρημα του James για $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχουν (x_n) στη S_X και (x_n^*) στη S_{X^*} ώστε

$$x_k^*(x_i) = \begin{cases} 1-\varepsilon, & k \leq i \\ 0, & k > i \end{cases} \tag{1.15}$$

Να παρατηρήσουμε εδώ οτι η ακολουθία (x_n) δεν έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσες υπακολουθίες. Πράγματι, έστω $n < m$, τότε

$$\|x_n - x_m\| = \|x_m^*\| \, \|x_n - x_m\| \geq |x_m^*(x_n) - x_m^*(x_m)|$$

και άρα από την (1.15)

$$\|x_n - x_m\| \geq 1 - \varepsilon.$$

Δεδομένου οτι $\|x_n\| = 1$ για κάθε n από το Θεώρημα 0.2.21 μπορούμε να πάρουμε ένα spreading model παραγόμενο από τη (x_n). Δηλαδή παίρνουμε μια υπακολουθία (z_n) της (x_n) και μια νόρμα $|||\cdot|||$ στον c_{00} ώστε

$$|||\sum_{k=1}^{l} a_k e_k||| = \lim_{n_1 < \ldots < n_l} \|\sum_{k=1}^{l} a_k z_{n_k}\|.$$

[1] Σημειώνουμε οτι το αποτέλεσμα είναι μεταγενέστερο (αποδείχθηκε περίπου το 2000) από το Θεώρημα Elton-Odell (που αποδείχθηκε περίπου το 1980).

Μάλιστα για $l = 8$ μπορούμε να επιλέξουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(1-\varepsilon)|||\sum_{k=1}^{l} a_k e_k||| \leq \|\sum_{k=1}^{l} a_k z_{n_k}\| \leq (1+\varepsilon)|||\sum_{k=1}^{l} a_k e_k|||$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$ και $N \leq n_1 < \ldots < n_l$ στο $\mathbb{N}$.
Θέτουμε τώρα $y_n = z_{N+n}$ για $n \in \mathbb{N}$. Τότε για $l = 8$

$$(1-\varepsilon)|||\sum_{k=1}^{l} a_k e_k||| \leq \|\sum_{k=1}^{l} a_k y_{n_k}\| \leq (1+\varepsilon)|||\sum_{k=1}^{l} a_k e_k||| \tag{1.16}$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$ και $n_1 < \ldots < n_l$ στο $\mathbb{N}$.
Για $i = 1$ θέτουμε $\varepsilon_1^1 = 1$ και $\varepsilon_2^1 = -1$, ενώ για $i = 2, 3, 4$ θέτουμε

$$\varepsilon_j^i = \begin{cases} (-1)^i, & 1 \leq j < i \text{ ή } j = 2i \\ (-1)^{i+1}, & i \leq j < 2i \end{cases} \tag{1.17}$$

Για $1 \leq i \leq 4$ θέτουμε επίσης $\lambda_i = |||\sum_{j=1}^{2i} \varepsilon_j^i \varepsilon_i|||$. Έχουμε οτι $\varepsilon_j^i \in \{-1, 1\}$ για κάθε i και j, άρα από το Θεώρημα 0.2.21 παίρνουμε οτι $\lambda_i > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, 4$. Επίσης, από την (1.16) έχουμε οτι

$$(1-\varepsilon)\lambda_i \leq \|\sum_{j=1}^{2i} \varepsilon_j^i y_{n_j}\| \leq (1+\varepsilon)\lambda_i, \tag{1.18}$$

για $n_1 < \ldots < n_{2i}$ στο $\mathbb{N}$ και $i = 1, 2, 3, 4$. Για $i = 1, \ldots, 4$ ορίζουμε τα αθροίσματα τύπου i της (y_n) να είναι:

- Αθροίσματα τύπου 1

$$c\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j^1 y_{n_j} = c(y_{n_1} - y_{n_2})$$

- Αθροίσματα τύπου 2

$$c\sum_{j=1}^{4} \varepsilon_j^2 y_{n_j} = c(y_{n_1} - y_{n_2} - y_{n_3} + y_{n_4})$$

- Αθροίσματα τύπου 3

$$c\sum_{j=1}^{6} \varepsilon_j^3 y_{n_j} = c(-y_{n_1} - y_{n_2} + y_{n_3} + y_{n_4} + y_{n_5} - y_{n_6})$$

- Αθροίσματα τύπου 4

$$c\sum_{j=1}^{8}\varepsilon_j^4 y_{n_j} = c(y_{n_1}+y_{n_2}+y_{n_3}-y_{n_4}-y_{n_5}-y_{n_6}-y_{n_7}+y_{n_8})$$

για $n_1 < \ldots < n_8$ στο $\mathbb{N}$ και $c \in \mathbb{R}$.
Ορίζουμε τώρα τις ακολουθίες του X ως εξής:
Για $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
y_n^0 &= y_n \\
y_n^1 &= \frac{1}{(1+\varepsilon)\lambda_1}(y_{2n-1}-y_{2n}) \\
y_n^2 &= \frac{1}{(1+\varepsilon)\lambda_2}(y_1-y_{3n-1}-y_{3n}+y_{3n+1}) \\
y_n^3 &= \frac{1}{(1+\varepsilon)\lambda_3}(-y_1-y_2+y_{4n-1}+y_{4n}+y_{4n+1}-y_{4n+2}) \\
y_n^4 &= \frac{1}{(1+\varepsilon)\lambda_4}(y_1+y_2+y_3-y_{5n-1}-y_{5n}-y_{5n+1}-y_{5n+2}+y_{5n+3})
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι η ακολουθία (y_n^i) είναι άθροισμα τύπου i της (y_n) για $i=1,2,3,4$ και άρα από την (1.18) έπεται $\|y_n^i\| \leq 1$ για κάθε n και $i=1,2,3,4$. Βέβαια $\|y_n^0\|=1$ για κάθε n. Άρα

$$\left\|y_n^i\right\| \leq 1 \text{ για κάθε } n \text{ και } i=0,1,2,3,4. \tag{1.19}$$

Παρατηρούμε οτι αν $n<m$, τότε

(I) το $y_n - y_m$ είναι άθροισμα τύπου 1 της (y_n). Έτσι από την (1.18)

$$\inf_{n\neq m}\left\|y_n^0-y_m^0\right\| \geq (1-\varepsilon)\lambda_1.$$

(II) $2m-1>2n$ και άρα $y_n^1-y_m^1$ είναι άθροισμα τύπου 2 της (y_n). Πάλι από την (1.18) έπεται

$$\inf_{n\neq m}\left\|y_n^1-y_m^1\right\| \geq \frac{(1-\varepsilon)\lambda_2}{(1+\varepsilon)\lambda_1}.$$

(III) $3m-1>3n+1$ και

$$\begin{aligned}
y_n^2-y_m^2 &= \frac{1}{(1+\varepsilon)\lambda_2}(y_1-y_{3n-1}-y_{3n}+y_{3n+1}-(y_1-y_{3m-1}-y_{3m}+y_{3m+1})) \\
&= \frac{1}{(1+\varepsilon)\lambda_2}(-y_{3n-1}-y_{3n}+y_{3n+1}+y_{3m-1}+y_{3m}-y_{3m+1}))
\end{aligned}$$

με $3n-1<3n<3n+1<3m-1<3m<3m+1$. Άρα $y_n^2 - y_m^2$ άθροισμα τύπου 3 της (y_n). Έτσι η (1.18) δίνει

$$\inf_{n\neq m} \left\| y_n^2 - y_m^2 \right\| \geq \frac{(1-\varepsilon)\lambda_3}{(1+\varepsilon)\lambda_2}$$

(IV) Όμοια $4m-1>4n+2$ το $y_n^3 - y_m^3$ είναι άθροισμα τύπου 4 της (y_n) και

$$\inf_{n\neq m} \left\| y_n^3 - y_m^3 \right\| \geq \frac{(1-\varepsilon)\lambda_4}{(1+\varepsilon)\lambda_3}$$

(V) $5m-1>5n+3$ και

$$\begin{aligned} y_n^4 - y_m^4 = \frac{1}{(1+\varepsilon)\lambda_4}(&-y_{5n-1} - y_{5n} - y_{5n+1} - y_{5n+2} + y_{5n+3} + y_{5m-1} \\ &+ y_{5m} + y_{5m+1} + y_{5m+2} - y_{5m+3}) \end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \left\| y_n^4 - y_m^4 \right\| &= \left\| x_{5n+3}^* \right\| \left\| y_n^4 - y_m^4 \right\| \\ &\geq \left| x_{5n+3}^*(y_n^4 - y_m^4) \right| \\ &\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)\lambda_4} \left| (1-\varepsilon) + 4(1-\varepsilon) - (1-\varepsilon) \right| \quad \text{από την (1.15)} \\ &= \frac{4(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\lambda_4} \end{aligned}$$

Άρα

$$\inf_{n\neq m} \left\| y_n^4 - y_m^4 \right\| \geq \frac{4(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\lambda_4}.$$

Θέτουμε τώρα

$$\beta(B_X) = \sup\left\{ \inf_{n\neq m} \|x_n - x_m\| : (x_n) \subseteq B_X \right\}.$$

Από την (1.18) παίρνουμε οτι

$$\begin{aligned} \beta(B_X) &\geq \max\left\{ \inf_{n\neq m} \left\| y_n^i - y_m^i \right\| : i = 0,1,2,3,4 \right\} \\ &\geq \max\left\{ (1-\varepsilon)\lambda_1, \frac{(1-\varepsilon)\lambda_2}{(1+\varepsilon)\lambda_1}, \frac{(1-\varepsilon)\lambda_3}{(1+\varepsilon)\lambda_2}, \frac{(1-\varepsilon)\lambda_4}{(1+\varepsilon)\lambda_3}, \frac{4(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\lambda_4} \right\} \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τους όρους μέσα στις αγκύλες παίρνουμε οτι

$$\beta(B_X)^5 \geq \frac{4(1-\varepsilon)^5}{(1+\varepsilon)^4}$$

Άρα
$$\beta(B_X) \geq \frac{\sqrt[5]{4}(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^{\frac{4}{5}}}$$
Επειδή το ε ήταν τυχόν έχουμε οτι $\beta(B_X) \geq \sqrt[5]{4} > 1$.

Ειδικότερα τώρα έπεται οτι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει (x_n) στη B_X ώστε η (x_n) είναι $(\sqrt[5]{4}-\delta)$-διαχωρισμένη. Από την Πρόταση 1.1.3 παίρνουμε τώρα οτι για κάθε $\delta > 0$ ο X περιέχει μια κανονικοποιημένη $(\sqrt[5]{4}-\delta)$-διαχωρισμένη ακολουθία. $\square$

Τελειώνοντας το κεφάλαιο αυτό ας παρατηρήσουμε οτι αν $1 < c < \sqrt[5]{4}$ και X μη αυτοπαθής χώρος Banach η προηγούμενη απόδειξη μας εξασφαλίζει οτι υπάρχει (x_n) στη S_X c-διαχωρισμένη. Από την τελευταία παρατήρηση που κάναμε έπεται οτι αν X μη αυτοπαθής χώρος Banach ώστε κάθε κλειστός και απειροδιάστατος υπόχωρος του να είναι μη αυτοπαθής, τότε ο X είναι ένα παράδειγμα χώρου Banach που απαντά καταφατικά στο εξής ερώτημα:

Έστω X χώρος Banach. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε κάθε απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του X να περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία;

Η ύπαρξη απειροδιάστατων χώρων Banach, πέραν των κλασικών c_0 ή l_1, που έχουν την ιδιότητα κάθε απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος τους να είναι μη αυτοπαθής απέχει πολύ από το να είναι προφανής.

Κεφάλαιο 2

Το Θεώρημα Elton-Odell

2.1 Χώροι Banach που περιέχουν τον c_0

Ορισμός 2.1.1. Μια σειρά $\sum_n x_n$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται **ασθενώς unconditionally συγκλίνουσα** αν για κάθε $x^* \in X^*$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty.$$

Για να δηλώσουμε το γεγονός οτι μια σειρά είναι ασθενώς unconditionally συγκλίνουσα θα χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία WUC.

Έστω τώρα $\sum_n x_n$ μια WUC σειρά σε έναν χώρο Banach X. Είναι άμεσο από τον Ορισμό 2.1.1 οτι για την αντίστοιχη ακολουθία έχουμε οτι $x_n \xrightarrow{w} 0$. Επίσης η σειρά $\sum_n x_n$ δεν είναι υποχρεωτικό να είναι $\|\cdot\|$ ή w-συγκλίνουσα. Πράγματι ας θεωρήσουμε την ακολουθία (e_n) στον c_0. Γνωρίζουμε οτι $c_0^* = l_1$. Έστω λοιπόν $f = (f_n) \in l_1$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \|f\|_1 < \infty$$

και έτσι η $\sum_n e_n$ είναι WUC στον c_0. Θα δείξουμε τώρα οτι η $\sum_n e_n$ δεν είναι w-συγκλίνουσα και άρα ούτε $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα. Έστω λοιπόν $x = (x_n) \in c_0$ με

$$\sum_{k=1}^{n} e_k \xrightarrow{w} x,$$

τότε $e_j^*(\sum_{k=1}^{n} e_k) \to e_j^*(x)$ για κάθε j. Άρα $x_j = 1$ για κάθε j. Όμως $x = (x_n) \in c_0$, δηλαδή $x_n \to 0$, $n \to \infty$ άτοπο.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $\sum_n x_n$ μια σειρά σε έναν χώρο Banach X. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η σειρά $\sum_n x_n$ είναι WUC.*

(ii) *Υπάρχει $C_1 > 0$ ώστε $\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \| \leq C_1 \max_n |\xi_n|$ για κάθε $(\xi_n) \in c_{00}$.*

(iii) *Υπάρχει $C_2 > 0$ ώστε $\| \sum_{n \in F} x_n \| \leq C_2$ για κάθε $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$.*

(iv) *Υπάρχει $C_3 > 0$ ώστε $\| \sum_{n \in F} \varepsilon_n x_n \| \leq C_3$ για κάθε $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ και $(\varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^F$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το χώρο c_{00} με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ και θέτουμε

$$S = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n : (\xi_n) \in S_{c_{00}} \right\}.$$

Μιας και $|\mathrm{supp}(\xi_n)| < \infty$ για κάθε $(\xi_n) \in c_{00}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ είναι στοιχείο του X για κάθε $(\xi_n) \in c_{00}$. Για $x^* \in X^*$ και $(\xi_n) \in S_{c_{00}}$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n(x^*) \right| &= \left| x^*(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n) \right| && (2.1)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \, |x^*(x_n)| && (2.2)\\
&\leq \max_n |\xi_n| \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| && (2.3)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty. && (2.4)
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει $M_{x^*} > 0$ ώστε $|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n(x^*)| \leq M_{x^*}$ για κάθε $(\xi_n) \in S_{c_{00}}$.

Τώρα από την Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος έπεται οτι υπάρχει $C_1 > 0$ ώστε

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \| \leq C_1 \ \text{για} \ \text{κάθε} \ (\xi_n) \in S_{c_{00}}. \quad (2.5)$$

Έστω τώρα $(\xi_n) \in c_{00}$. Αν $(\xi_n) = 0$, τότε βέβαια

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \| = 0 = C_1 \max_n |\xi_n| .$$

Έστω λοιπόν $(\xi_n) \neq 0$ και $\lambda = \max_n |\xi_n|$, τότε $\lambda > 0$ και από την (2.5) έπεται οτι

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\lambda} x_n\| \leq C_1.$$

Άρα

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n\| \leq C_1 \lambda = C_1 \max_n |\xi_n| .$$

(ii)⇒(iii) Άμεσο.

(iii)⇒(iv) Έστω $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ και $(\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^F$, τότε

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n\in F} \varepsilon_n x_n\| &= \|\sum_{\substack{n\in F\\ \varepsilon_n=1}} \varepsilon_n x_n + \sum_{\substack{n\in F\\ \varepsilon_n=-1}} \varepsilon_n x_n\| \\
&\leq \|\sum_{\substack{n\in F\\ \varepsilon_n=1}} \varepsilon_n x_n\| + \|\sum_{\substack{n\in F\\ \varepsilon_n=-1}} \varepsilon_n x_n\| \\
&= \|\sum_{\substack{n\in F\\ \varepsilon_n=1}} x_n\| + \|\sum_{\substack{n\in F\\ \varepsilon_n=-1}} x_n\| \\
&\leq 2C_2.
\end{aligned}$$

(iv)⇒(i) Έστω $x^* \in X^*$, για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & x^*(x_n) \geq 0 \\ -1, & x^*(x_n) < 0 \end{cases}$$

Τότε για $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} |x^*(x_n)| &= \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n x^*(x_n) \\
&= x^*(\sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n x_n) \\
&\leq \left| x^*(\sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n x_n) \right| \\
&\leq \|x^*\| \, \|\sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n x_n\| \\
&\leq C_3 \|x^*\|
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.1.3. *Έστω X ένας χώρος Banach.*

(i) *Αν (x_n) είναι μια ημικανονικοποιημένη βασική ακολουθία του X ώστε η αντίστοιχη σειρά να είναι WUC, τότε ο c_0 περιέχεται στον X. Ιδιαίτερα, έχουμε οτι η (x_n) είναι ισοδύναμη της συνήθους βάσης του c_0.*

(ii) *Αν (x_n) είναι μια ημικανονικοποιημένη ακολουθία του X ώστε η αντίστοιχη σειρά να είναι WUC, τότε ο c_0 περιέχεται στον X. Ιδιαίτερα υπάρχει μια υπακολουθία x_{n_k} της (x_n) που είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0.*

Απόδειξη. (i) Έστω $\varepsilon \leq \|x_n\| \leq M$ για κάθε n και $K = bc\{x_n\}$. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Δεδομένου οτι η σειρά $\sum_n x_n$ είναι WUC από το (iii) της προηγούμενης πρότασης παίρνουμε οτι

$$\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\| \leq C \max_{1\leq n\leq m} |a_n| \,. \tag{2.6}$$

Επίσης έχουμε οτι για $1 \leq i \leq m$

$$\begin{aligned} \|a_i x_i\| &= \|(P_i - P_{i-1})(\sum_{n=1}^{m} a_n x_n)\| \\ &\leq \|P_i - P_{i-1}\| \, \|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\| \\ &\leq 2K\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\| \end{aligned}$$

Άρα

$$|a_i| \leq \frac{2K}{\|x_i\|}\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\| \leq \frac{2K}{\varepsilon}\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\|.$$

Έτσι

$$\max_{1\leq n\leq m} |a_n| \leq \frac{2K}{\varepsilon}\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\|.$$

Δηλαδή

$$\frac{\varepsilon}{2K}\max_{1\leq n\leq m} |a_n| \leq \|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\| \tag{2.7}$$

Από τις (2.6) και (2.7) και την Πρόταση 0.2.10 έπεται το συμπέρασμα.

(ii) Έχουμε τώρα οτι η ακολουθία (x_n) είναι ημικανονικοποιημένη και η $\sum_n x_n$ είναι WUC. Τότε $x_n \xrightarrow{w} 0$ και από το Θεώρημα 0.2.12 υπάρχει μια υπακολουθία

(x_{n_k}) της (x_n) ώστε η (x_{n_k}) να είναι βασική. Πάλι επειδή η $\sum_n x_n$ είναι WUC έχουμε

$$\sum_{nk=1}^{\infty} |x^*(x_{n_k})| = \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty \text{ για κάθε } x^* \in X^*$$

Τώρα το συμπέρασμα έπεται από το (i). □

Πόρισμα 2.1.4. *Έστω X ένας χώρος Banach. Αν ο X περιέχει μια ακολουθία (x_n) της οποίας η αντίστοιχη σειρά $\sum_n x_n$ είναι WUC και αποκλίνει ως προς τη νόρμα του X, τότε ο X περιέχει τον c_0.*

Απόδειξη. Έστω λοιπόν $\sum_n x_n$ μια WUC σειρά στον X ώστε η $\sum_n x_n$ αποκλίνει ως προς τη νόρμα του X. Τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και γνήσια αύξουσες ακολουθίες φυσικών αριθμών (p_j) και (q_j) με $p_j < q_j < p_{j+1}$ για κάθε j ώστε $\| \sum_{n=p_j}^{q_j} x_n \| \geq \varepsilon$ για κάθε j. Θέτουμε τώρα $y_j = \sum_{n=p_j}^{q_j} x_n$ για $j \in \mathbb{N}$.

Από την επιλογή των ακολουθιών (p_j) και (q_j) για $x^* \in X^*$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |x^*(y_j)| &= \sum_{j=1}^{\infty} |x^*(\sum_{n=p_j}^{q_j} x_n)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=p_j}^{q_j} |x^*(x_n)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty. \end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία (y_j) είναι ημικανονικοποιημένη και η αντίστοιχη σειρά είναι WUC. Το συμπέρασμα τώρα είναι άμεσο από το (ii) του Πορίσματος 2.1.3. □

Ορισμός 2.1.5. Έστω (e_n) μια βασική ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Για $n \leq m$ θέτουμε $T_{nm} = P_m - P_n$. Η βασική ακολουθία (e_n) λέγεται **bimonotone** αν $\|T_{nm}\| = 1$ για κάθε $n \leq m$.

Πρόταση 2.1.6. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach και (e_n) μια βάση του X. Τότε υπάρχει μια νόρμα $|||\cdot|||$ στον X ισοδύναμη της $\|\cdot\|$ ώστε η ακολουθία (e_n) να είναι bimonotone.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε μόνο τα βασικά σημεία της απόδειξης. Η νόρμα $|||\cdot|||$ ορίζεται ως εξής:

$$|||x||| = \sup_{n \leq m} \|T_{nm}(x)\|, \ x \in X$$

και ισχύει οτι

$$\|x\| \leq |||x||| \text{ για κάθε } x \in X. \tag{2.8}$$

Για $n \leq m$ και $x \in X$

$$\begin{aligned} |||T_{nm}(x)||| &= \sup_{i\leq j} \|T_{ij}(T_{nm}(x))\| \\ &\leq \sup_{i\leq j} \|T_{ij}(x)\| = |||x||| \end{aligned} \tag{2.9}$$

Έτσι $|||P_n||| < 1$ για κάθε n και άρα η (e_n) είναι βάση της πλήρωσης του $(X, |||\cdot|||)$, $\tilde{X}$.

Έστω τώρα $x \in X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Τότε έχουμε οτι η σειρά $\sum_n a_n e_n$ είναι $|||\cdot|||$-Cauchy, άρα από την (2.8) η $\sum_n a_n e_n$ είναι $\|\cdot\|$-Cauchy. Έστω $x' \in X$ με $\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x'$, δηλαδή $x' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Επειδή (e_n) είναι βάση του X έπεται οτι

$$P_n(x') = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k = P_n(x).$$

Άρα $x = x'$. Έτσι $X = \tilde{X}$ και από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης και την (2.8) έπεται $(X, \|\cdot\|) \simeq (X, |||\cdot|||)$. Η (2.9) τώρα δίνει το τελικό συμπέρασμα. □

Παρακάτω όταν αναφερόμαστε σε ανοικτά, κλειστά ή Borel υποσύνολα του $[\mathbb{N}]^{\omega}$ θα εννοούμε οτι είναι ανοικτά, κλειστά ή Borel ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.

Λήμμα 2.1.7. *Έστω X ένας χώρος Banach και (x_n) μια ακολουθία στον X. Τότε για $K > 0$ το σύνολο $\mathcal{B}_k = \{M = (m_i) \in [\mathbb{N}]^{\omega} : \sup_n \|\sum_{i=1}^{n} x_{m_i}\| \leq K\}$ είναι κλειστό στο $[\mathbb{N}]^{\omega}$.*

Απόδειξη. Έστω $K > 0$ αρκεί βέβαια να δείξουμε οτι $[\mathbb{N}]^{\omega} \setminus \mathcal{B}_k$ είναι άνοικτό σύνολο. Έστω $M = (m_i) \in [\mathbb{N}]^{\omega} \setminus \mathcal{B}_k$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|\sum_{i=1}^{n_0} x_{m_i}\| > K.$$

Θέτουμε $A = \{m_1, \ldots, m_{n_0}\}$ και θεωρούμε το σύνολο $(A, \mathbb{N})^{\omega}$ για το οποίο ισχύει οτι είναι ανοικτό και οτι περιέχει το στοιχείο M. Τέλος, για $L = (l_i) \in (A, \mathbb{N})^{\omega}$ έχουμε

$$\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} x_{l_i}\| \geq \|\sum_{i=1}^{n_0} x_{l_i}\| = \|\sum_{i=1}^{n_0} x_{m_i}\| > K$$

και άρα $(A, \mathbb{N})^{\omega} \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega} \setminus \mathcal{B}_k$. □

Λήμμα 2.1.8. *Έστω X χώρος Banach και (x_n) μια βασική ακολουθία στον X. Αν υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε $[M]^\omega \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k$, τότε υπάρχουν $M' \in [M]^\omega$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $[M']^\omega \subseteq \mathcal{B}_{k_0}$. Όπου τα σύνολα $\mathcal{B}_k$, $k \in \mathbb{N}$ είναι όπως στο Λήμμα 2.1.7.*

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε οτι η (x_n) είναι bimonotone βασική ακολουθία. Για $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\mathcal{B}'_k = \mathcal{B}_k \bigcap [M]^\omega$. Τότε το σύνολο $\mathcal{B}'_k$ είναι σχετικά κλειστό στο $[M]^\omega$ για $k \in \mathbb{N}$ και $[M]^\omega = \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}'_k$.

Έστω $L = (l_i) \in [\mathbb{N}]^\omega \setminus [M]^\omega$, τότε υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $l_{i_0} \notin M$. Θέτουμε $A = \{l_1, \ldots, l_{i_0}\}$ και θεωρούμε το σύνολο $(A, \mathbb{N})^\omega$ για το οποίο ισχύει οτι είναι ανοικτό και οτι $L \in (A, \mathbb{N})^\omega$. Από την επιλογή του συνόλου A είναι άμεσο οτι $(A, \mathbb{N})^\omega \subseteq [\mathbb{N}]^\omega \setminus [M]^\omega$. Επειδή το L ήταν τυχόν στοιχείο του $[\mathbb{N}]^\omega \setminus [M]^\omega$ έπεται οτι το $[\mathbb{N}]^\omega \setminus [M]^\omega$ είναι ανοικτό και άρα το $[M]^\omega$ κλειστό.

Επειδή ο $[\mathbb{N}]^\omega$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος έπεται οτι και ο $[M]^\omega$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Έτσι από το Θεώρημα Baire υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathring{\mathcal{B}'}_{k_0} \neq \emptyset$. Άρα υπάρχει $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ ώστε

$$\emptyset \neq (A, \mathbb{N})^\omega \bigcap [M]^\omega \subseteq \mathring{\mathcal{B}'}_{k_0}. \tag{2.10}$$

Αφού $(A, \mathbb{N})^\omega \bigcap [M]^\omega \neq \emptyset$ έπεται οτι $A \subseteq M$ και η (2.10) γίνεται

$$(A, M)^\omega \subseteq \mathring{\mathcal{B}'}_{k_0}. \tag{2.11}$$

Έστω $a = \max A$ και ας θέσουμε $M' = \{m \in M : m > a\}$. Για $L = (l_i) \in [M']^\omega$ και $n \in \mathbb{N}$ από τη bimonotonicity της (x_n) έχουμε

$$\| \sum_{i=1}^n x_{l_i} \| \leq \| \sum_{m \in A} x_m + \sum_{i=1}^n x_{l_i} \| \leq k_0,$$

αφού $\max A < \min L$. Άρα $[M']^\omega \subseteq \mathring{\mathcal{B}'}_{k_0}$.

Έστω (x_n) τυχούσα βασική ακολουθία στον X. Τότε από την Πρόταση 2.1.6 υπάρχει μια ισοδύναμη νόρμα $||| \cdot |||$ στον $[x_n]$ ώστε η (x_n) να είναι bimonotone βασική. Έστω τώρα $C > 0$ ώστε

$$\frac{1}{C} |||x||| \leq \|x\| \leq |||x|||, \text{ για κάθε } x \in [x_n].$$

Από την ανισότητα $\frac{1}{C}|||x||| \leq \|x\|$, $x \in X$ παίρνουμε οτι $[M]^\omega \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k$ και για τη νόρμα $||| \cdot |||$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης έπεται οτι υπάρχουν

$M' \in [M]^\omega$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $[M]^\omega \subseteq \mathcal{B}_{k_0}$ ως προς τη νόρμα $|||\cdot|||$. Τέλος, η ανισότητα $\|x\| \leq |||x|||$, $x \in [x_n]$ δίνει το συμπέρασμα. $\square$

Θεώρημα 2.1.9. (Johnson) *Έστω X χώρος Banach και (x_n) μια ημικανονικοποιημένη ακολουθία στον X ώστε κάθε υπακολουθία της να έχει μια περαιτέρω υπακολουθία (y_n) για την οποία ισχύει οτι*

$$\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} y_i\| < \infty.$$

Τότε ο X περιέχει τον c_0. Ιδιαίτερα η (x_n) έχει μια υπακολουθία ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0.

Απόδειξη. Θα δείξουμε αρχικά οτι $x_n \xrightarrow{w} 0$. Ας υποθέσουμε οτι αυτόδε συμβαίνει, τότε θα υπάρχουν $x^* \in S_{X^*}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $|x^*(x_n)| \geq \varepsilon$ για άπειρα n. Επιλέγοντας αν είναι αναγκαίο το $-x^*$ μπορούμε να υποθέσουμε οτι $x^*(x_n) \geq \varepsilon$ για άπειρα n και έστω $N = \{n \in \mathbb{N} : x^*(x_n) \geq \varepsilon\}$. Τότε για $L = (l_i) \in [\mathbb{N}]^\omega$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^{n} x_{l_i}\| &= \|x^*\| \, \|\sum_{i=1}^{n} x_{l_i}\| \\ &\geq |\sum_{i=1}^{n} x^*(x_{l_i})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} x^*(x_{l_i}) \geq n\varepsilon \to \infty, \, n \to \infty, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση μας. Επιπλέον η ακολουθία (x_n) είναι ημικανονικοποιημένη και άρα από το Θεώρημα 0.2.11 μπορούμε να υποθέσουμε οτι η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X.

Θεωρούμε τώρα τα υποσύνολα του $[\mathbb{N}]^\omega$, $\mathcal{B}_k$ για $k \in \mathbb{N}$, όπως αυτά ορίστηκαν στο Λήμμα 2.1.7. Από το προαναφερθέν Λήμμα έπεται οτι $\mathcal{B}_k$ είναι κλειστό για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έτσι το σύνολο $\bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k$ είναι F_σ-σύνολο του $[\mathbb{N}]^\omega$ και άρα από το Θεώρημα 0.1.3 το σύνολο $\bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k$ είναι πλήρως Ramsey. Επομένως, υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε είτε $[M]^\omega \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k$ ή $[M]^\omega \subseteq (\bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k)^c = \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k^c$. Έστω λοιπόν οτι $[M]^\omega \subseteq \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k^c$, τότε για κάθε $L = (l_i) \in [M]^\omega$ $\sup_n \|\sum_{i=1}^n x_{l_i}\| = \infty$, άτοπο. Άρα $[M]^\omega \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k$. Τώρα το Λήμμα 2.1.8 μας δίνει οτι υπάρχουν $M' \in [M]^\omega$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $[M']^\omega \subseteq \mathcal{B}_{k_0}$. Έστω τώρα $M' = (m_i)$ και $y_i = x_{m_i}$

για $i \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία (y_i) είναι ημικανονικοποιημένη και βασική στον X. Επιπλέον, έχουμε οτι για κάθε $L = (L_i) \in [\mathbb{N}]^\omega$ $\sup_n \| \sum_{i=1}^n y_{l_i} \| \leq k_0$. Ιδιαίτερα έχουμε οτι για κάθε $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, $\| \sum_{i \in F} y_i \| \leq k_0$ δηλαδή η σειρά $\sum_i y_i$ είναι WUC. Από τα προηγούμενα και το (i) του Πορίσματος 2.1.3 έπεται οτι η ακολουθία (y_i) είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0. □

Ανάλογα των Λημμάτων 4.1.7 και 4.1.8. είναι τα παρακάτω.

Λήμμα 2.1.10. *Έστω X ένας χώρος Banach και (x_n) μια ακολουθία στον X. Τότε για $K > 0$ το σύνολο $A_k = \{M = (m_i) \in [\mathbb{N}]^\omega : \sup_n \| \sum_{i=1}^n (-1)^i x_{m_i} \| \leq K\}$ είναι κλειστό στο $[\mathbb{N}]^\omega$.*

Απόδειξη. Όμοια με το Λήμμα 2.1.7. □

Λήμμα 2.1.11. *Έστω X χώρος Banach και (x_n) μια βασική ακολουθία στον X. Αν υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε $[M]^\omega \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, τότε υπάρχουν $M' \in [M]^\omega$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$[M]^\omega \subseteq A_{k_0}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτήν του Λήμματος 2.1.8 με μια μικρή διαφοροποίηση στο εξής σημείο. Έστω λοιπόν $A \in [M]^{<\omega}$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $(A, M)^\omega \subseteq A_{k_0}$. Θέτουμε πάλι $M' = \{m \in M : m > \max A\}$. Δεδομένου οτι το σύνολο A είναι της μορφής $\{m_1, \ldots, m_N\}$ από τη bimonotonicity της (x_n) έχουμε οτι για $L = (l_i) \in [M']^\omega$ και $n \in \mathbb{N}$, αν N άρτιος

$$\| \sum_{i=1}^n (-1)^i x_{k_i} \| \leq \| \sum_{i=1}^N (-1)^i x_{m_i} + \sum_{i=1}^n (-1)^i x_{l_i} \| \leq k_0,$$

ενώ αν N περιττός

$$\begin{aligned} \| \sum_{i=1}^n (-1)^i x_{l_i} \| = \| \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_{l_i} \| &\leq \| \sum_{i=1}^N (-1)^i x_{m_i} + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_{l_i} \| \\ &\leq k_0. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.1.12. (Johnson) *Έστω X χώρος Banach και (x_n) μια ημικανονικοποιημένη βασική ακολουθία στον X. Αν κάθε υπακολουθία της (x_n) έχει μια περαιτέρω υπακολουθία (y_n) ώστε*

$$\sup_n \| \sum_{i=1}^n (-1)^i y_i \| < \infty,$$

τότε ο X περιέχει τον c_0.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.1.10 έπεται οτι τα σύνολα A_k για $k \in \mathbb{N}$ είναι κλειστά στο $[\mathbb{N}]^\omega$. Κατά συνέπεια το σύνολο $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$ είναι F_σ σύνολο του $[\mathbb{N}]^\omega$ και άρα από το Θεώρημα 0.1.3 πλήρως Ramsey. Έτσι υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε είτε $[M]^\omega \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ ή $[M]^\omega \subseteq (\bigcup_{k=1}^\infty A_k)^c \subseteq \bigcap_{k=1}^\infty A_k^c$. Έστω λοιπόν οτι $[M]^\omega \subseteq \bigcap_{k=1}^\infty A_k^c$, τότε για $L = (l_i) \in [M]^\omega$, $\sup_n \| \sum_{i=1}^n (-1)^i x_{l_i} \| = \infty$, άτοπο. Άρα $[M]^\omega \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Από το Λήμμα 2.1.11 παίρνουμε οτι υπάρχουν $M' \in [M]^\omega$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ με $[M']^\omega \subseteq A_{k_0}$. Έστω $M' = (m_n)$ και $y_n = x_{m_{2n}} - x_{m_{2n-1}}$ για $n \geq 1$. Τότε για $n \geq 1$

$$\frac{\|x_{2n-1}\|}{bc\{x_n\}} \leq \left\| x_{m_{2n}} - x_{m_{2n-1}} \right\| \leq \|x_{m_{2n}}\| + \left\| x_{m_{2n-1}} \right\|.$$

Από την προηγούμενη σχέση και το γεγονός οτι η (x_n) είναι ημικανονικοποιημένη έπεται οτι η (y_n) είναι ημικανονικοποιημένη. Ακόμη η ακολουθία (y_n) ως block ακολουθία της (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X. Για $L = (l_i) \in [\mathbb{N}]^\omega$ έχουμε οτι

$$\| \sum_{i=1}^n y_{l_i} \| = \| \sum_{i=1}^n (x_{m_{2l_i}} - x_{m_{2l_i - 1}}) \| \leq k_0.$$

Τώρα το συμπέρασμα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 2.1.9 ή μπορούμε να παρατηρήσουμε οτι η σειρά $\sum_n y_n$ είναι WUC και να πάρουμε το συμπέρασμα από το Πόρισμα 2.1.3. □

2.2 Το Θεώρημα Elton-Odell

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε το Θεώρημα Elton-Odell, δηλαδή οτι κάθε χώρος Banach περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1+\varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία. Πρώτα θα εισαγάγουμε δύο συμβολισμούς που θα μας διευκολύνουν στη συνέχεια.

Έστω X ένας χώρος Banach και (x_n) μια ακολουθία στον X.

Αν $(b_i)_{i=1}^k$ είναι μια πεπερασμένη block ακολουθία της (x_n) θα γράφουμε $n < b_1 < \ldots < b_k$ αν $n < \min \mathrm{supp} b_1$ και $\max \mathrm{supp} b_i < \min \mathrm{supp} b_{i+1}$ για $1 \leq i \leq k-1$. Επίσης, αν x είναι ένα block στοιχείο της (x_n) με $x = \sum_{i=1}^l a_i x_{n_i}$, όπου $n_1 < \ldots < n_l$ και $a_i \neq 0$ για $1 \leq i \leq l$ για $k \leq l$ με $(x)_{-k}$ θα συμβολίζουμε το στοιχείο $\sum_{i=1}^{l-k} a_i x_{n_i}$.

Λήμμα 2.2.1. *Έστω $\delta_j = 20^{-j}$ για $j \geq 0$. Τότε*

(i) $\delta_j + \delta_{j+1} < 2\delta_j$

(ii) $(1+\delta_{j+1})(1+3\delta_{j+1}) < 1+\delta_j$

(iii) $\frac{1-\delta_{j+1}}{1+\delta_{j+1}} > 1-\delta_j$.

Απόδειξη. (i) Είναι άμεσο, αφού η ακολουθία $(\delta_j)_{j\geq 0}$ είναι γνήσια φθίνουσα.
(ii)

$$(1+\delta_{j+1})(1+3\delta_{j+1}) = 1+3\delta_{j+1}+\delta_{j+1}+3\delta_{j+1}^2$$

Επειδή $\delta_j \leq 1$, για κάθε $j \geq 0$

$$\begin{aligned}(1+\delta_{j+1})(1+3\delta_{j+1}) &\leq 1+7\delta_{j+1}\\ &< 1+20\delta_{j+1}\\ &= 1+\delta_j.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\frac{1-\delta_{j+1}}{1+\delta_{j+1}} > 1-\delta_j &\Leftrightarrow 1-\delta_{j+1} > 1-\delta_j+\delta_{j+1}+\delta_{j+1}\delta_j\\ &\Leftrightarrow \delta_j > 2\delta_{j+1}+\delta_{j+1}\delta_j\end{aligned}$$

Πάλι επειδή $\delta_j \leq 1$ για κάθε $j \geq 0$ αρκεί να ισχύει οτι

$$\delta_j > 2\delta_{j+1}+\delta_{j+1},$$

δηλαδή αρκεί

$$20\delta_{j+1} > 3\delta_{j+1},$$

που ισχύει. □

Το Θεώρημα 1.2.6 μας πληροφορεί οτι κάθε χώρος Banach X που περιέχει τον c_0 ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Elton-Odell. Έτσι για να αποδείξουμε το Θεώρημα Elton-Odell αρκεί να περιοριστούμε σε χώρους Banach που δεν περιέχουν τον c_0. Από το Θεώρημα (Day) 0.2.11 έπεται οτι σε κάθε χώρο Banach X μπορούμε να βρούμε μια κανονικοποιημένη βασική ακολουθία που ικανοποιεί την

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq (1+20^{-n})\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| \tag{2.12}$$

για κάθε $n \leq m$ και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$.

Αν τώρα ο χώρος Banach X δεν περιέχει τον c_0, από το Θεώρημα (Johnson) 2.1.12 θα υπάρχει μια υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) ώστε για κάθε $L = (l_i) \in [\mathbb{N}]^\omega$

$$\sup_m \| \sum_{i=1}^{m} (-1)^i x_{n_{l_i}} \| = \infty. \tag{2.13}$$

Βέβαια η ακολουθία (x_{n_k}) είναι κανονικοποιημένη και βασική στον X. Ακόμη αν $x_m = x_{n_k}$, τότε έχουμε οτι $m \geq k$ και για $k \leq l$

$$\begin{aligned} \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \| &\leq (1 + 20^{-m}) \| \sum_{i=1}^{l} a_i x_{n_i} \| \\ &\leq (1 + 20^{-k}) \| \sum_{i=1}^{l} a_i x_{n_i} \| \end{aligned} \tag{2.14}$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$. Επίσης, είναι προφανές οτι αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα Elton-Odell για τον χώρο Banach $[x_{n_k}]$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε οτι το Θεώρημα Elton-Odell αρκεί να δειχθεί στην περίπτωση που ο X είναι ένας χώρος Banach με μια κανονικοποιημένη βάση (x_n) η οποία ικανοποιεί τα εξής

$$\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \| \leq (1 - 20^{-n}) \| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \|$$

για κάθε $n \leq m$ και $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$ και

$$\sup_n \| \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_{m_i} \| = \infty$$

για κάθε $M = (m_i) \in [\mathbb{N}]^\omega$.

Θεώρημα 2.2.2. (Elton-Odell [4], [6]) *Κάθε χώρος Banach X περιέχει μια κανονικοποιημένη $(1 + \varepsilon)$-διαχωρισμένη ακολουθία.*

Απόδειξη. Συνεχίζουμε από εκεί που είχαμε μείνει πριν τη διατύπωση του Θεωρήματος. Έστω λοιπόν ένας χώρος Banach X με μια κανονικοποιημένη βάση (x_n) που ικανοποιεί τις

$$\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \| \leq (1 + 20^{-n}) \| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \| \tag{2.15}$$

για κάθε $n \leq m$ και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ και

$$\sup_n \| \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_{m_i} \| = \infty \tag{2.16}$$

για κάθε $M = (m_i) \in [\mathbb{N}]^\omega$.

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(x_n - x_{n+1} + x_{n+2})_{n \geq 1}$ για την οποία ισχύει οτι

$$\frac{1}{1 + 20^{-n}} = \frac{\|x_n\|}{1 + 20^{-n}} \leq \|x_n - x_{n+1} + x_{n+2}\| \leq 3.$$

Έτσι αν α είναι ένα σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $(\|x_n - x_{n+1} + x_{n+2}\|^{-1})_{n \geq 1}$ έχουμε οτι $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1$. Επιλέγουμε ένα τέτοιο α.

Για $\delta > 0$ ένα $b \in X$ λέγεται δ-block αν

(i) $\|b\| = 1$

(ii) το στοιχείο b είναι της μορφής

$$b = \beta \sum_{i=1}^{l} (-1)^{i+1} x_{m_i}, \tag{2.17}$$

όπου $m_1 < \ldots < m_l$ και l ένας περιττός αριθμός με $l \geq 3$ και

(iii) $\left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right| < \delta$.

Είναι άμεσο οτι αν $b \in X$ είναι ένα δ-block, τότε $\beta = \| \sum_{i=1}^{l} (-1)^{i+1} x_{m_i} \|^{-1}$.

Η επιλογή του α μας εξασφαλίζει οτι για κάθε $\delta > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα δ-block b ώστε $n < b$. Πράγματι, επιλέγοντας ένα $n \in \mathbb{N}$ αφού το α είναι σημείο συσσώρευσης της $(\|x_n - x_{n+1} + x_{n+2}\|^{-1})_{n \geq 1}$ θα υπάρχει $m > n$ ώστε $\left| \frac{\alpha}{\|x_m - x_{m+1} + x_{m+2}\|^{-1}} - 1 \right| < \delta$. Θέτουμε τώρα $\beta = \|x_m - x_{m+1} + x_{m+2}\|^{-1}$ και $b = \beta(x_m - x_{m+1} + x_{m+2}) = \beta(\sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} x_{(m-1)+i})$. Είναι άμεσο οτι το b είναι δ-block με $n < b$.

Παρατηρούμε τώρα οτι ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής:

(*) Για κάθε $\delta > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν δ-blocks $b_1, \ldots, b_k$ με $n < b_1 < \ldots < b_k$ ώστε για κάθε δ-block b με $b_k < b$ να υπάρχει $i \in \{1, \ldots, k\}$ ώστε $\|b - b_i\| \leq 1 + \delta$.

(**) Υπάρχουν $\delta > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε επιλογή δ-blocks $b_1, \ldots, b_k$ με $n < b_1 < \ldots < b_k$ υπάρχει ένα δ-block b με $b_k < b$ ώστε $\|b - b_i\| > 1 + \delta$ για κάθε $1 \leq i \leq k$.

Θα δείξουμε οτι αν ισχύει η (**), τότε έχουμε το συμπέρασμα. Πράγματι, έστω $\delta > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, όπως στη (**). Όπως αναφέραμε νωρίτερα μπορούμε να βρούμε ένα δ-block b_1 με $n < b_1$. Ακολούθως από την (**) επιλέγουμε ένα δ-block b_2 με $b_1 < b_2$ και $\|b_2 - b_1\| > 1 + \delta$. Έστω τώρα $k \geq 1$ και ας υποθέσουμε οτι έχουμε επιλέξει δ-blocks $b_1, \ldots, b_k$ με $n < b_1 < \ldots < b_k$ και $\|b_i - b_j\| > 1 + \delta$ για κάθε $1 \leq i \leq k$. Πάλι από την (**) μπορούμε να επιλέξουμε ένα δ-block b_{k+1} με $b_k < b_{k+1}$ και $\|b_{k+1} - b_i\| > i + \delta$ για κάθε $1 \leq i \leq k$. Έτσι μπορούμε να βρούμε μια άπειρα ακολουθία από δ-blocks (b_k) με $n < b_1 < \ldots < b_k < \ldots$ ώστε $\|b_i - b_j\| > 1 + \delta$ για $i + j$ και έχουμε τελειώσει.

Μένει να δειχθεί οτι η (*) δεν μπορεί να ισχύει. Ας υποθέσουμε λοιπόν οτι η (*) ισχύει και ας θέσουμε $\delta_j = 20^{-j}$ για $j \geq 0$. Τότε για κάθε j μπορούμε να επιλέξουμε δ_j-blocks $b_1^j, \ldots, b_{k_j}^j$ ώστε

(i)
$$b_1^1 < \ldots < b_{k_1}^1 < \ldots < b_1^j < \ldots < b_{k_j}^j < \ldots \tag{2.18}$$

και

(ii) αν b είναι ένα δ_j-block με $b_{k_j}^j < b$, τότε υπάρχει $1 \leq i \leq k_j$ με $\left\|b_i^j - b\right\| < 1 + \delta_j$.

Για $j \geq 0$ και $1 \leq i \leq k_j$ θέτουμε $d_i^j = \frac{\alpha}{\beta_i^j} b_i^j$, δηλαδή αν $b_i^j = \beta_i^j \sum_{k=1}^{l_{j,i}} (-1)^{k+1} x_{m_k^{j,i}}$, τότε $d_i^j = \alpha \sum_{k=1}^{l_{j,i}} (-1)^{k+1} x_{m_k}^{j,i}$.

Για $j = 2$ επιλέγουμε ένα $1 \leq i_2 \leq k_2$. Τότε το $b_{i_2}^2$ είναι ένα δ_2-block και άρα δ_1-block με $b_{k_1}^1 < b_{i_2}^2$. Από την (2.18) έπεται οτι υπάρχει $1 \leq i_1 \leq k_1$ ώστε $\left\|b_{i_1}^1 - b_{i_2}^2\right\| < 1 + \delta_1$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|(d_{i_1}^1 - d_{i_2}^2) - (b_{i_1}^1 - b_{i_2}^2)\right\| &\leq \left\|d_{i_1}^1 - b_{i_1}^1\right\| + \left\|d_{i_2}^2 - b_{i_2}^2\right\| \\
&\leq \left\|\frac{\alpha}{\beta_{i_1}^1} b_{i_1}^1 - b_{i_1}^1\right\| + \left\|\frac{\alpha}{\beta_{i_2}^2} b_{i_2}^2 - b_{i_2}^2\right\| \\
&= \left|\frac{\alpha}{\beta_{i_1}^1} - 1\right| + \left|\frac{\alpha}{\beta_{i_2}^2} - 1\right| \\
&< \delta_1 + \delta_2 < 2\delta_1.
\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|d^1_{i_1}-d^2_{i_2}\right\|-\left\|b^1_{i_1}-b^2_{i_2}\right\| &\le \left|\left\|d^1_{i_1}-d^2_{i_2}\right\|-\left\|b^1_{i_1}-b^2_{i_2}\right\|\right|\\ &\le \left\|(d^1_{i_1}-d^2_{i_2})-(b^1_{i_1}-b^2_{i_2})\right\|\\ &< 2\delta_1.\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\left\|d^1_{i_1}-d^2_{i_2}\right\| &< 2\delta_1+\left\|b^1_{i_1}-b^2_{i_2}\right\|\\ &< 1+3\delta_1.\end{aligned}$$

Έχουμε τώρα οτι $\operatorname{supp}(d^1_{i_1}-d^2_{i_2})\ge 6$ και έτσι από την (2.15)

$$\left\|(d^1_{i_1}-d^2_{i_2})_{-1}\right\|\le(1+\delta_1)\left\|d^1_{i_1}-d^2_{i_2}\right\|<(1+\delta_1)(1+3\delta_1)<1+\delta_0.$$

Επειδή $b^1_{i_1}<b^2_{i_2}$ έπεται οτι $d^1_{i_1}<d^2_{i_2}$. Επίσης έχουμε οτι $\operatorname{supp} d^2_{i_2}\ge 3$. Πάλι από την (2.15) παίρνουμε οτι

$$\left\|d^1_{i_1}\right\|\le(1+\delta_1)\left\|(d^1_{i_1}-d^2_{i_2})_{-1}\right\|<(1+\delta_1)(1+\delta_0).$$

Για $j=4$ ας επιλέξουμε ένα $1\le i_4\le k_4$. Τότε το $b^4_{i_4}$ είναι δ_4-block και άρα δ_3-block με $b^3_{k_3}<b^4_{i_4}$. Πάλι από την (2.18) παίρνουμε οτι υπάρχει ένα $1\le i_3\le k_3$ ώστε $\left\|b^4_{i_4}-b^3_{i_3}\right\|<1+\delta_3$. Όμοια με την περίπτωση $j=2$ παίρνουμε οτι $\left\|(d^3_{i_3}-d^4_{i_4})_{-1}\right\|<1+\delta_2$. Επειδή $d^3_{i_3}<d^4_{i_4}$ και $\left|\operatorname{supp} d^4_{i_4}\right|\ge 3$

$$\begin{aligned}\left\|(d^3_{i_3}-d^4_{i_4})_{-1}\right\| &\ge \frac{\left\|d^3_{i_3}\right\|}{1+\delta_3} \quad \text{από την (2.15)}\\ &= \frac{\left\|\frac{\alpha}{\beta^3_{i_3}}b^3_{i_3}\right\|}{1+\delta_3}\\ &= \frac{\left|\frac{\alpha}{\beta^3_{i_3}}\right|}{1+\delta_3}\\ &> \frac{1-\delta_3}{1+\delta_3},\quad \text{αφού το } b^3_{i_3} \text{ είναι } \delta_3-\text{block}\\ &> 1-\delta_2.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι το $\left|\operatorname{supp}(d^3_{i_3}-d^4_{i_4})_{-1}\right|$ είναι περιττός αριθμός μεγαλύτερος του

3. Επίσης

$$
\begin{aligned}
(d^3_{i_3} - d^4_{i_4})_{-1} &= \alpha \sum_{k=1}^{l_{3,i_3}} (-1)^{k+1} x_{m_k^{3,i_3}} - \alpha \sum_{k=1}^{l_{4,i_4}-1} (-1)^{k+1} x_{m_k^{4,i_4}} \\
&= \alpha \left(\sum_{k=1}^{l_{3,i_3}} (-1)^{k+1} x_{m_k^{3,i_3}} - \sum_{k=1}^{l_{4,i_4}-1} (-1)^{k+1} x_{m_k^{4,i_4}} \right)
\end{aligned}
$$

Επειδή ο l_{3,i_3} είναι περιττός έπεται οτι το $(d^3_{i_3} - d^4_{i_4})_{-1}$ είναι της μορφής (2.17). Θέτουμε $z_1 = (d^3_{i_3} - d^4_{i_4})_{-1}$, τότε $1 - \delta_2 < \|z_1\| < 1 + \delta_2$.

Βλέπουμε τώρα οτι το στοιχείο $\frac{z_1}{\|z_1\|}$ είναι της μορφής (2.17) με $\beta = \frac{\alpha}{\|z_1\|}$. Ακόμη

$$
\left| \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\|z_1\|}} - 1 \right| = |\|z_1\| - 1| < \delta_2.
$$

Αφού τώρα $\min \mathrm{supp} z_1 = \min \mathrm{supp} d^1_{i_1}$, το $\frac{z_1}{\|z_1\|}$ είναι ένα δ_2-block με $b^2_{k_2} < \frac{z_1}{\|z_1\|}$. Πάλι μπορούμε να επιλέξουμε ένα $1 \leq i_2 \leq k_2$ με $\left| b^2_{i_2} - \frac{z_1}{\|z_1\|} \right| < 1 + \delta_2$.
Τώρα

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{j=2}^{4} (-1)^j d^j_{i_j} \right)_{-1} - (b^2_{i_2} - \frac{z_1}{\|z_1\|}) \right\| &= \left\| (d^2_{i_2} - b^2_{i_2}) - ((d^3_{i_3} - d^4_{i_4})_{-1} - \frac{z_1}{\|z_1\|}) \right\| \\
&\leq \|d^2_{i_2} - b^2_{i_2}\| + \left\| z_1 - \frac{z_1}{\|z_1\|} \right\| \\
&= \left| \frac{\alpha}{\beta^2_{i_2}} - 1 \right| + \|z_1\| \left| 1 - \frac{1}{\|z_1\|} \right| \\
&< \delta_2 + \|z_1\| \left| \frac{\|z_1\| - 1}{\|z_1\|} \right| \\
&= \delta_2 + |\|z_1\| - 1| \\
&< 2\delta_2.
\end{aligned}
$$

Έτσι

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{j=2}^{4} (-1)^j d^j_{i_j} \right)_{-1} \right\| &< 2\delta_2 + \left\| b^2_{i_2} - \frac{z_1}{\|z_1\|} \right\| \\
&< 1 + 3\delta_2
\end{aligned}
$$

Από την (2.15) τώρα

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{j=2}^{4}(-1)^j d_{i_j}^j\right)_{-2}\right\| &\leq (1+\delta_2)\left\|\left(\sum_{j=1}^{4}(-1)^j d_{i_j}^j\right)_{-1}\right\| \\ &< (1+\delta_2)(1+3\delta_2) \\ &< 1+\delta_1.\end{aligned}$$

Έχουμε τώρα οτι $d_{i_2}^2 < d_{i_3}^3 < d_{i_4}^4$ και οτι $\left|\mathrm{supp}(d_{i_3}^3 - d_{i_4}^4)_{-2}\right| \geq 4$. Πάλι από την (2.15)

$$\begin{aligned}\left|(\sum_{j=2}^{4}(-1)^j d_{i_j}^j)_{-2}\right| &\geq \frac{\left\|d_{i_2}^2\right\|}{1+\delta_2} \\ &= \frac{\left|\frac{\alpha}{\beta_{i_2}^2}\right|}{1+\delta_2} \\ &> \frac{1-\delta_2}{1+\delta_2}, \text{ αφού το } b_{i_2}^2 \text{ είναι } \delta_2-\text{block} \\ &> 1-\delta_1.\end{aligned}$$

Θέτοντας $z_2 = \left(\sum_{j=2}^4(-1)^j d_{i_j}^j\right)_{-2}$ μπορούμε να αποδείξουμε όπως κάναμε στην περίπτωση του z_1 οτι το $\frac{z_2}{\|z_2\|}$ είναι ένα δ_1-block με $b_{k_1}^1 < \frac{z_2}{\|z_2\|}$. Επιλέγουμε τώρα ένα $1 \leq i_1 \leq k_1$ με $\left\|b_{i_1}^1 - \frac{z_2}{\|z_2\|}\right\| < 1+\delta_1$. Έχουμε οτι

$$\begin{aligned}\|(\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1} d_{i_j}^j)_{-2} - (b_{i_1}^1 - \frac{z_2}{\|z_2\|})\| &\leq \left\|(d_{i_1}^1 - b_{i_1}^1) - ((\sum_{j=2}^{4}(-1)^j d_{i_j}^j)_{-2} - \frac{z_2}{\|z_2\|})\right\| \\ &\leq \left\|d_{i_1}^1 - b_{i_1}^1\right\| + \left\|z_2 - \frac{z_2}{\|z_2\|}\right\| \\ &= \left|\frac{\alpha}{\beta_{i_1}^1} - 1\right| + |\|z_2\| - 1| \\ &< 2\delta_1.\end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{aligned}\|(\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1} d_{i_j}^j)_{-2}\| &< 2\delta_1 + \left\|b_{i_1}^1 - \frac{z_2}{\|z_2\|}\right\| \\ &< 1+3\delta_1\end{aligned}$$

Έχουμε τώρα οτι $d_{i_1}^1 < \ldots < d_{i_4}^4$ και $\left|\mathrm{supp}\left(\sum_{j=2}^4(-1)^{j+1} d_{i_j}^j\right)_{-2}\right| \geq 7$. Από την

(2.15) τώρα παίρνουμε οτι

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}d^j_{i_j}\right)_{-3}\right\| &\leq (1+\delta_1)\left\|\left(\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}d^j_{i_j}\right)_{-2}\right\| \\ &< (1+\delta_1)(1+3\delta_1) \\ &< 1+\delta_0\end{aligned}$$

και επίσης οτι

$$\left\|d^1_{i_1}-d^2_{i_2}\right\| \leq (1+\delta_1)\left\|(\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}d^j_{i_j})_{-3}\right\| < (1+\delta_1)(1+\delta_0)$$

Επαγωγικά τώρα για κάθε m άρτιο μπορούμε να επιλέξουμε $i_1,\ldots,i_{m/2}$ με $1 \leq i_j \leq k_j$ για $1 \leq j \leq \frac{m}{2}$ ώστε

$$\|\sum_{j=1}^{m/2}(-1)^{j+1}d^j_{i_j}\| < (1+\delta_1)(1+\delta_0). \tag{2.19}$$

Για κάθε m άρτιο σταθεροποιούμε $i_{m,1},\ldots,i_{m,m/2}$ ώστε να ικανοποιείται η (2.19). Ας θέσουμε τώρα $A=\{m\in\mathbb{N} : m \text{ άρτιος}\}$, τότε υπάρχει $A_1\in[A]^\omega$ και $1\leq i_1\leq k_1$ ώστε $i_{m,1}=i_1$ για κάθε $m\in A_1$. Επαγωγικά μπορούμε να επιλέξουμε μια φθίνουσα ακολουθία απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, (A_j) και μια ακολουθία φυσικών αριθμών (i_j) ώστε αν $m\in A_n$, τότε $i_{m,j}=i_j$ για $1\leq j\leq n$. Από τα παραπάνω έπεται οτι αν $m\in A_n$, τότε $m\geq 2n$.

Έστω τώρα $n\in\mathbb{N}$ και $m\in A_n$, τότε

$$\begin{aligned}\|\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}d^j_{i_j}\| &\leq (1+\delta_0)\|\sum_{j=1}^{m/2}(-1)^{j+1}d^j_{i_{m,j}}\| \\ &< (1+\delta_0)^2(1+\delta_1)\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\sup_n\|\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}d^j_{i_j}\| < \infty$$

Δεδομένου οτι $d^1_{i_1}<\ldots<d^j_{i_j}$ και οτι $\left|\text{supp}d^j_{i_j}\right|$ είναι περιττός αριθμός για κάθε j είναι εύκολο να δούμε οτι το παραπάνω άθροισμα είναι της μορφής

$$\alpha\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}x_{m_i}\|.$$

Άρα υπάρχει $M = (m_i) \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\sup_n \| \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_{m_i} \| < \infty$$

άτοπο από τη (2.16). $\square$

Κεφάλαιο 3

Unconditional Spreading Models

Το ερώτημα αν κάθε χώρος Banach περιέχει μια unconditional βασική ακολουθία ήταν ανοιχτό για πολλά χρόνια και τελικά απαντήθηκε αρνητικά από τους Gowers και Maurey (Πρβλ. τα βιβλία [1], [7] και [8] και τη βιβλιογραφία που παρατίθεται εκεί). Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε οτι κάθε χώρος Banach έχει ένα spreading model με unconditional βάση και με τη βοήθεια αυτού οτι κάθε χώρος Banach περιέχει οσοδήποτε μεγάλου (πεπερασμένου) μήκους $(1+\varepsilon)$-unconditional βασικές ακολουθίες.

3.1 Spreading models

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 0.2.21 και 0.2.22. Σημειώνουμε οτι η μέθοδος των αποδείξεων των Λημμάτων 3.1.2 και 3.1.3 θα χρειαστεί και παρακάτω.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ουσιαστικά μια ισοδύναμη διατύπωση του κλασικού θεωρήματος του Ramsey (Θεώρημα 0.1.1).

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $r \in \mathbb{N}$ και $f : [\mathbb{N}]^r \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση, τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε να υπάρχει το όριο*

$$\lim_{A \in [M]^r} f(A).$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο r. Η περίπτωση $r = 1$ είναι άμεση από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

Υποθέτουμε οτι το συμπέρασμα ισχύει για $r \geq 1$. Έστω τώρα μια φραγμένη συνάρτηση $f : [\mathbb{N}]^{r+1} \to \mathbb{R}$ και $(A_i)_{i\geq 1}$ μια αρίθμηση του $[\mathbb{N}]^{r+1}$. Για $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με

$$f_i(n) = \begin{cases} f(A_i \bigcup \{n\}), & n \notin A_i \\ 0, & n \in A_i \end{cases}$$

Είναι άμεσο οτι για κάθε i η συνάρτηση f_i είναι φραγμένη. Από την περίπτωση $r = 1$ έχουμε οτι υπάρχει $L_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{n\in L_1} f_1(n)$. Περιορίζοντας την f_2 στο L_1, πάλι από την περίπτωση $r = 1$ έπεται οτι υπάρχει $L_2 \in [L_1]$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{n\in L_2} f_2(n)$. Επαγωγικά τώρα μπορούμε να επιλέξουμε μια φθίνουσα ακολουθία απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, (L_i) ώστε για κάθε i να υπάρχει το όριο $\lim_{n\in L_i} f_i(n)$ και έστω $\lim_{n\in L_i} f_i(n) = a_i$ για κάθε i. Τώρα μπορούμε να επιλέξουμε μια γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (n_i) με $n_i \in L_i$ για κάθε i και θέτουμε $L = \{n_i : i \in \mathbb{N}\}$. Ισχυριζόμαστε οτι $\lim_{n\in L} f_i(n) = a_i$ για κάθε i. Πράγματι, έστω ένα $i \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$, από τα προηγούμενα έπεται οτι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \in L_i$ και $n \geq N$, τότε $|f_i(n) - a_i| < \varepsilon$. Μιας και η ακολουθία (L_i) είναι φθίνουσα, από την επιλογή της (n_i) έχουμε οτι αν $n \in L$ με $n \geq \max\{N, n_i\}$ τότε $|f_i(n) - a_i| < \varepsilon$.

Θέτουμε τώρα $g : [\mathbb{N}]^r \to \mathbb{R}$ με

$$g(A_i) = \lim_{n\in L} f_i(n).$$

Από το επαγωγικό βήμα έπεται οτι υπάρχει $L' \in [L]^\omega$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{A\in[L']^r} g(A)$ και έστω $\lim_{A\in[L']^r} g(A) = a$. Παρατηρούμε οτι αν $A \in [L']^r$ και $\varepsilon > 0$, τότε θα υπάρχει $N(A, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ με $N(A, \varepsilon) > \max A$ ώστε αν $n \geq N(A, \varepsilon)$ τότε

$$|f(A \cup \{n\})| < \varepsilon.$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε $m_1, \ldots, m_r \in L'$ με $m_1 < \ldots < m_r$.

Υποθέτουμε οτι έχουμε επιλέξει $m_1 < \ldots < m_n$ στο L' με $n \geq r$. Τώρα μπορούμε να επιλέξουμε $m_{n+1} > \max_{A\in[\{m_1,\ldots,m_n\}]^r} N(A, \frac{1}{n+1})$ και θέτουμε $M = \{m_j : j \in \mathbb{N}\}$, βέβαια $M \in [L']^r$.

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε $n > r$ ώστε από τη μία αν $A \in [M]^r$ με $A \subseteq [m_n, \infty)$, τότε $|g(A) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ και από την άλλη $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Έστω τώρα $B \in [M]^{r+1}$ με $B \subseteq [m_n, \infty)$ και $m_k = \max B$. Θέτοντας $A = B \setminus \{m_k\}$ από τα προηγούμενα έχουμε οτι $|g(A) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ακόμη έχουμε οτι

$$|f(B) - g(A)| = |f(A \cup \{m_k\}) - g(A)| < \frac{1}{k} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έτσι $|f(B) - a| < \varepsilon$ για κάθε $B \in [M]^r$ με $B \subseteq [m_n, \infty)$. $\square$

Παρατήρηση 3.1.1. Άμεση συνέπεια του προηγούμενου Θεωρήματος είναι το Θεώρημα Ramsey (Θεώρημα 0.1.1). Για την ακρίβεια το Θεώρημα 3.1.1 και το Θεώρημα Ramsey είναι ισοδύναμα, είναι γνωστό οτι το Θεώρημα Ramsey για $r = 2$ και βέβαια η πληρότητα των πραγματικών αριθμών, έπεται το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, που δίνει την περίπτωση $r = 1$ στο Θεώρημα 3.1.1.

Λήμμα 3.1.2. *Έστω X ένας χώρος Banach, (x_n) μια ημικανονικοποιημένη ακολουθία στον X και $r \geq 1$. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^w$ ώστε για κάθε $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ να υπάρχει το όριο*

$$\lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M} \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \|.$$

Απόδειξη. Έστω $c, c > 0$ ώστε $c \leq \|x_n\| \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το χώρο Banach $l_\infty^r = (\mathbb{R}^r, \|\cdot\|_\infty)$. Ας παρατηρήσουμε οτι για κάθε $(a_1, \ldots, a_r) \in B_{l_\infty^r}$ και $n_1 < \ldots < n_r \in \mathbb{N}$ ισχύει οτι

$$\| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \| \leq rC \tag{3.1}$$

Έστω τώρα $\left((a_1^j, \ldots, a_r^j)\right)_{j \in \mathbb{N}}$ μια $\|\cdot\|_\infty$-πυκνή ακολουθία στη $B_{l_\infty^r}$. Για $j \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_j : [\mathbb{N}]^r \to \mathbb{R}$ με

$$f_j(n_1 < \ldots < n_r) = \| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{n_i} \|.$$

Από την (3.1) τώρα παίρνουμε οτι οι συναρτήσεις f_j, $j \in \mathbb{N}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Για $j = 1$ το Θεώρημα 3.1.1 μας πληροφορεί οτι υπάρχει $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M_1} \| \sum_{i=1}^{r} a_i^1 x_{n_i} \|.$$

Όμοια τώρα μπορούμε να βρούμε ένα $M_2 \in [M_1]^\omega$ ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M_2} \| \sum_{i=1}^{r} a_i^2 x_{n_i} \|.$$

Έτσι επαγωγικά μπορούμε να θεωρήσουμε μια φθίνουσα ακολουθία (M_j) απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε το όριο

$$\lim_{n_1<\ldots<n_r\in M_j} \| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{n_i} \|.$$

να υπάρχει για κάθε j.

Στη συνέχεια θεωρώντας ένα διαγώνιο σύνολο M της (M_j) είναι εύκολο να δείξουμε οτι το όριο

$$\lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{n_i} \|.$$

υπάρχει για κάθε j, και έστω $\lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{n_i} \| = \beta_j$ για $j \in \mathbb{N}$.
Θα δείξουμε οτι το $\lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \|$ υπάρχει για κάθε $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathcal{B}_{l_\infty^r}$.
Έστω λοιπόν $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathcal{B}_{l_\infty^r}$. Επιλέγουμε μια υπακολουθία της $\big((a_1^j, \ldots, a_r^j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$, $\big((a_1^{j_k}, \ldots, a_r^{j_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $(a_1^{j_k}, \ldots, a_r^{j_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} (a_1, \ldots, a_r)$. Από την (3.1) η αντίστοιχη ακολουθία (β_{j_k}) είναι φραγμένη και άρα έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι η (β_{j_k}) συγκλίνει σε κάποιο $\beta \in \mathbb{R}$. Τώρα για $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε να ικανοποιούνται οι

$$|\beta_{j_k} - \beta| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και} \tag{3.2}$$

$$\max_{1\le i\le r} \left|a_i - a_i^{j_k}\right| < \frac{\varepsilon}{3rC}. \tag{3.3}$$

Επίσης, επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n_1, \ldots, n_r \in M$ με $N \le n_1 < \ldots < n_r$ να ισχύει οτι

$$\left| \| \sum_{i=1}^{r} a_i^{j_k} x_{n_i} \| - \beta_{j_k} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.4}$$

Για $N \le n_1 < \ldots < n_r$ στο $\mathbb{N}$ έχουμε οτ

$$\begin{aligned} \left| \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \| - \beta \right| &= \left| \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \| \pm \| \sum_{i=1}^{r} a_i^{j_k} x_{n_i} \| \pm \beta_{j_k} - \beta \right| \\ &\le \left| \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \| - \| \sum_{i=1}^{r} a_i^{j_k} x_{n_i} \| \right| + \left| \| \sum_{i=1}^{r} a_i^{j_k} x_{n_i} \| - \beta_{j_k} \right| + |\beta_{j_k} - \beta| . \end{aligned}$$

Από τις (3.2) και (3.4) παίρνουμε οτι

$$\begin{aligned} \left| \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \| - \beta \right| &< \left| \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \| - \| \sum_{i=1}^{r} a_i^{j_k} x_{n_i} \| \right| + \frac{2\varepsilon}{3} \\ &\leq \| \sum_{i=1}^{r} (a_i - a_i^{j_k}) x_{n_i} \| + \frac{2\varepsilon}{3} \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} \left| a_i - a_i^{j_k} \right| \| x_{n_i} \| + \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Η (3.3) τώρα μας δίνει οτι

$$\left| \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \| - \beta \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Μένει να δείξουμε οτι το όριο

$$\lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M} \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \|$$

υπάρχει για κάθε $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r \setminus B_{l_\infty^r}$. Έστω λοιπόν $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r \setminus B_{l_\infty^r}$, τότε $\lambda = \max_{1 \leq i \leq r} |a_i| > 0$ και $(\frac{a_1}{\lambda}, \ldots, \frac{a_r}{\lambda}) \in B_{l_\infty^r}$. Έστω τώρα $\beta = \lim_{n_1 < \ldots < n_r} \| \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{\lambda} x_{n_i} \|$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} \lambda\beta = \lambda \lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M} \| \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{\lambda} x_{n_i} \| &= \lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M} \lambda \| \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{\lambda} x_{n_i} \| \\ &= \lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M} \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \|. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 3.1.3. *Έστω X χώρος Banach, (x_n) μια ημικανονικοποιημένη ακολουθία στον X και $r \geq 1$. Έστω ακόμη ένα $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε το όριο*

$$\lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M} \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \|$$

να υπάρχει για κάθε $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$(1 - \varepsilon) \lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M} \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \| \leq \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{m_i} \| \leq (1 + \varepsilon) \lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M} \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \|$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ και $N \leq m_1 < \ldots < m_r$ στο M.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι ισχύει το εξής:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(1-\varepsilon) \lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \|\sum_{i=1}^r a_i x_{n_i}\| \leq \|\sum_{i=1}^r a_i x_{m_i}\| \leq (1+\varepsilon) \lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \|\sum_{i=1}^r a_i x_{n_i}\| \tag{3.5}$$

για κάθε $(a_1,\ldots,a_r) \in B_{l_\infty^r}$ και $N \leq m_1 < \ldots < m_r$ στο M.
Τότε αν $(a_1,\ldots,a_r) \in \mathbb{R}^r \setminus B_{l_\infty^r}$ και $\lambda = \max_{1\leq i\leq r}|a_i|$ έχουμε οτι

$$\lambda(1-\varepsilon) \lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \|\sum_{i=1}^r \frac{a_i}{\lambda} x_{n_i}\| \leq \lambda\|\sum_{i=1}^r \frac{a_i}{\lambda} x_{m_i}\| \leq \lambda(1+\varepsilon) \lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \|\sum_{i=1}^r \frac{a_i}{\lambda} x_{n_i}\|$$

για $N \leq m_1 < \ldots < m_r$ στο M. Άρα

$$(1-\varepsilon) \lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \|\sum_{i=1}^r a_i x_{n_i}\| \leq \|\sum_{i=1}^r a_i x_{m_i}\| \leq (1+\varepsilon) \lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \|\sum_{i=1}^r a_i x_{n_i}\|$$

για $N \leq m_1 < \ldots < m_r$ στο M. Επομένως, αρκεί να δειχθεί η (3.5). Προς τούτο παρατηρούμε οτι αρκεί να δειχθεί οτι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left| \|\sum_{i=1}^r a_i x_{m_i}\| - \lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \|\sum_{i=1}^r a_i x_{n_i}\| \right| < \delta \tag{3.6}$$

για κάθε $(a_1,\ldots,a_r) \in B_{l_\infty^r}$ και $m_1,\ldots,m_r \in M$ με $N \leq m_1 < \ldots < m_r$.

Έστω $c, C > 0$ με $c \leq \|x_n\| \leq C$ για κάθε n. Έστω ακόμη $\delta > 0$. Επιλέγουμε $\left((a_1^j,\ldots,a_r^j)\right)_{j=1}^k$ στην $B_{l_\infty^r}$ ώστε αν $(a_1,\ldots,a_r) \in B_{l_\infty^r}$, τότε υπάρχει $j \in \{1,\ldots,k\}$ με

$$\max_{1\leq i\leq r} \left|a_i - a_i^j\right| < \frac{\delta}{9rC}. \tag{3.7}$$

Για $1 \leq j \leq k$ υπάρχουν N_j ώστε

$$\left| \|\sum_{i=1}^r a_i^j x_{m_i}\| - \lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \|\sum_{i=1}^r a_i^j x_{n_i}\| \right| < \frac{\delta}{3} \tag{3.8}$$

για $N_j \leq m_1 < \ldots < m_r$ στο M.

Θέτοντας $N = \max_{1\leq j\leq k} N_j$ παίρνουμε οτι η (3.8) ισχύει για κάθε $j \in \{1,\ldots,k\}$ και $N \leq m_1 < \ldots < m_r$ στο M. Θέτουμε τώρα $\beta_j = \lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \|\sum_{i=1}^r a_i^j x_{n_i}\|$, για $1 \leq j \leq k$.
Έστω $(a_1,\ldots,a_r) \in B_{l_\infty^r}$ και $\beta = \lim_{n_1<\ldots<n_r\in M} \|\sum_{i=1}^r a_i x_{n_i}\|$. Από την (3.7) μπορούμε να επιλέξουμε $j \in \{1,\ldots,k\}$ ώστε

$$\max_{1\leq i\leq r} \left|a_i - a_i^j\right| < \frac{\delta}{9rC}. \tag{3.9}$$

Ας επιλέξουμε επίσης ένα $K \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left|\| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{m_i} \| - \beta\right|, \left|\| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{m_i} \| - \beta_j\right| < \frac{\delta}{9} \tag{3.10}$$

για $K \leq m_1 < \ldots < m_r$ στο M.

Έχουμε οτι για $K \leq m_1 < \ldots < m_r \in M$

$$\begin{aligned} |\beta - \beta_j| &= \left|\beta \pm \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{m_i} \| \pm \| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{m_i} \| - \beta_j\right| \\ &\leq \left|\| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{m_i} \| - \| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{m_i} \|\right| + \left|\beta - \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{m_i} \|\right| + \left|\| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{m_i} \| - \beta_j\right|. \end{aligned}$$

Από την (3.10) παίρνουμε οτι

$$\begin{aligned} |\beta - \beta_j| &< \left|\| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{m_i} \| - \| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{m_i} \|\right| + \frac{2\delta}{9} \\ &\leq \| \sum_{i=1}^{r} (a_i - a_i^j) x_{m_i} \| + \frac{2\delta}{9} \end{aligned}$$

και από την (3.9) καταλήγουμε

$$|\beta - \beta_j| \leq \frac{\delta}{9} + \frac{2\delta}{9} = \frac{\delta}{3}. \tag{3.11}$$

Τέλος, έχουμε οτι για $N \leq m_1 < \ldots < m_r$ στο M

$$\left|\| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{m_i} \| - \beta\right| = \left|\| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{m_i} \| \pm \| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{m_i} \| \pm \beta_j - \beta\right|.$$

Όπως προηγουμένως παίρνουμε οτι

$$\begin{aligned} \left|\| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{m_i} \| - \beta\right| &\leq \| \sum_{i=1}^{r} (a_i - a_i^j) x_{m_i} \| + \left|\| \sum_{i=1}^{r} a_i^j x_{m_i} \| - \beta_j\right| + |\beta_j - \beta| \\ &< \frac{3\delta}{3} = \delta, \end{aligned}$$

από τις (3.8), (3.9) και (3.11). □

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω X ένας χώρος Banach και (x_n) μια ημικανονικοποιημένη ακολουθία στον X. Έστω ακόμη (ε_k) μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\varepsilon_k \searrow 0$. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε αφενός το όριο*

$$\lim_{n_1 < \ldots < n_r \in M} \| \sum_{i=1}^{r} a_i x_{n_i} \|$$

να υπάρχει για κάθε $r \geq 1$ και $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ και αφετέρου για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $N_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(1-\varepsilon_k) \lim_{n_1<\ldots<n_k \in M} \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \| \leq \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i} \| \leq (1+\varepsilon_k) \lim_{n_1<\ldots<n_k \in M} \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \|$$

για κάθε $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ και $N_k \leq m_1 < \ldots < m_k$ στο M.

Απόδειξη. Με επαναληπτική χρήση των Λημμάτων 2.3.1 και 2.3.2 παίρνουμε μια (M_k) φθίνουσα ακολουθία απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε

(1) το όριο $\lim_{n_1<\ldots<n_k \in M_k} \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \|$ να υπάρχει για κάθε $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ και

(2) για κάθε k υπάρχει $N_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(1-\varepsilon_k) \lim_{n_1<\ldots<n_k \in M_k} \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \| \leq \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i} \| \leq (1+\varepsilon_k) \lim_{n_1<\ldots<n_k \in M_k} \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \|$$

για $N_k \leq m_1 < \ldots < m_k$ στο M_k.

Θεωρώντας ένα διαγώνιο σύνολο M της (M_k), από τις (1) και (2) έπεται οτι το M ικανοποιεί το συμπέρασμα. □

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 0.2.21 και 0.2.22, τα οποία για την ευκολία του αναγνώστη επαναδιατυπώνουμε εδώ.

Θεώρημα 3.1.5. *Έστω X ένας χώρος Banach και (x_n) μια ημικανονικοποιημένη ακολουθία στον X ώστε η (x_n) να μην έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσες υπακολουθίες. Τότε*

(i) *Υπάρχει μια υπακολουθία (y_n) της (x_n) ώστε το όριο*

$$\lim_{n_1<\ldots<n_k} \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i} \|$$

να υπάρχει για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$.

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$(1-\varepsilon) \lim_{n_1<\ldots<n_k} \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i} \| \leq \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{m_i} \| \leq (1+\varepsilon) \lim_{n_1<\ldots<n_k} \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i} \|,$$

για κάθε $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ και $N \leq m_1 < \ldots < m_k$ στο $\mathbb{N}$.

(iii) *Η* $|||\cdot|||: c_{00} \to \mathbb{R}$ *που ορίζεται ως εξής:*

$$|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| = \lim_{n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\|,$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *και* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$*, είναι μια καλά ορισμένη νόρμα στον* c_{00}*. Επιπλέον, ισχύει οτι*

$$|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| = |||\sum_{i=1}^{k} a_i e_{n_i}||| \tag{3.12}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *και* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *και* $n_1 < \ldots < n_k$ *στο* $\mathbb{N}$*. (Η ιδιότητα αυτή αναφέρεται και ως ιδιότητα 'spreading' της ακολουθίας* $(e_i)_i$*).*

Απόδειξη. Τα (i) και (ii) έπονται από το προηγούμενο θεώρημα. Για την απόδειξη του (iii) πρώτα παρατηρούμε οτι από τον ορισμό της $|||\cdot|||$ η (3.12) είναι άμεση. Επίσης, είναι εύκολο να δειχθεί οτι η $|||\cdot|||$ ικανοποιεί την απόλυτη ομογένεια και την τριγωνική ανισότητα. Μένει να δείξουμε οτι αν $|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| = 0$, τότε $a_i = 0$, όταν $1 \leq i \leq k$.

Έστω λοιπόν οτι $|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| = 0$ και οτι $a_k \neq 0$. Από την (3.12) παίρνουμε οτι

$$|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| = |||\sum_{i=1}^{k-1} a_i e_i + a_k e_{k+1}|||.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} |a_k|\, |||e_k - e_{k+1}||| &= |||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i - \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i e_i + a_k e_{k+1}\right)||| \\ &\leq |||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| + |||\sum_{i=1}^{k-1} a_i e_i + a_k e_{k+1}||| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, $|||e_k - e_{k+1}||| = 0$, που με τη σειρά του δίνει $|||e_1 - e_2||| = 0$ και άρα $\lim_{n<m} \|y_n - y_m\| = 0$, δηλαδή η ακολουθία (y_n) είναι Cauchy και συνεπώς συγκλίνει, άτοπο. $\square$

Θεώρημα 3.1.6. *Έστω* X *ένας χώρος Banach και* (x_n) *μια ημικανονικοποιημένη βασική ακολουθία στον* X*. Τότε ισχύουν τα (i)-(iii) του Θεωρήματος 0.2.21 και μάλιστα η ακολουθία* (e_i) *είναι βάση της πλήρωσης του* $(c_{00}, |||\cdot|||)$*, με* $bc\{e_i\} \leq bc\{x_n\}$*.*

Απόδειξη. Για το γεγονός οτι ισχύουν τα (i)-(iii) του Θεωρήματος 0.2.21, αρκεί να δειχθεί οτι η (x_n) δεν έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσες υπακολουθίες. Έστω λοιπόν μια υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) και $x \in X$ ώστε $x_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Βέβαια έχουμε οτι $x \in [x_n]$. Επειδή η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X έπεται οτι υπάρχει μοναδική (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Επίσης, έχουμε οτι $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ και άρα

$$x_m^*(x) = \lim_{k\to\infty} x_m^*(x_{n_k}) = 0, \quad \text{για} \quad \text{κάθε } m \in \mathbb{N},$$

ενώ $x_m^*(x) = a_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Άρα $x = 0$, το οποίο είνα άτοπο, αφού η (x_n) είναι ημικανονικοποιημένη.

Για το δεύτερο σκέλος της απόδειξης από την Πρόταση 2.2.3 αρκεί να δείξουμε οτι για την ακολουθία γραμμικών προβολών του c_{00}, (P_n) με

$$P_n(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

ισχύει οτι $\|P_n\| \leq bc\{x_n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω λοιπόν (y_j) μια υπακολουθία της (x_{n_k}) ώστε να ισχύει οτι

$$|||\sum_{i=1}^{n} a_i e_i||| = \lim_{j_1<\ldots<j_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{j_i}\|,$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Είναι άμεσο τώρα οτι η (y_j) είναι βασική ακολουθία στον X με $bc\{y_j\} \leq bc\{x_n\}$. Τέλος, για $n \leq m$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned}
|||\sum_{i=1}^{n} a_i e_i||| &= \lim_{j_1<\ldots<j_n} \|\sum_{i=1}^{n} a_i y_{j_i}\| \\
&\leq \lim_{j_1<\ldots<j_m} bc\{y_j\}\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_{j_i}\| \\
&= bc\{y_j\}|||\sum_{i=1}^{m} a_i e_i||| \\
&\leq bc\{x_n\}|||\sum_{i=1}^{m} a_i e_i|||.
\end{aligned}$$

□

3.2 1-Unconditional Spreading Models

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε την έννοια των 1-unconditional spreading models και θα αποδείξουμε οτι κάθε χώρος Banach έχει ένα 1-unconditional spreading model. Με εξαίρεση το Θεώρημα 3.2.2, το οποίο υπάρχει στο [1], στην παράγραφο αυτή θα ακολουθήσουμε τον H. Rosenthal στο άρθρο του [13].

Ορισμός 3.2.1. Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένα spreading model του X. Ο χώρος Banach Y λέγεται **unconditional spreading model** του X αν η αντίστοιχη ακολουθία (e_i) είναι unconditional βάση του Y. Ένα unconditional spreading model του X λέμε οτι είναι **1-unconditional spreading model** του X αν $ubc\{e_i\} = 1$.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω X ένας χώρος Banach και (x_n) μια ημικανονικοποιημένη ακολουθία στον X. Αν $x_n \xrightarrow{w} 0$, τότε οποιοδήποτε spreading model παραγόμενο από τη (x_n) είναι unconditional spreading model του X και $sbc\{e_i\} = 1$.*

Απόδειξη. Ας παρατηρήσουμε οτι η ακολουθία (x_n) δεν έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσες υπακολουθίες. Πράγματι, έστω μια $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Αφού $x_n \xrightarrow{w} 0$ έπεται οτι $x_{n_k} \xrightarrow{w} 0$ και άρα $x_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$, άτοπο, αφού η ακολουθία (x_n) είναι ημικανονικοποιημένη.

Από το Θεώρημα 3.1.5 υπάρχουν μια υπακολουθία (y_n) της (x_n) και μια νόρμα $|||\cdot|||$ στον c_{00} ώστε

$$|||\sum_{i=1}^{N} a_i e_i||| = \lim_{n_1<\ldots<n_N} \|\sum_{i=1}^{N} a_i y_{n_i}\| \tag{3.13}$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$.
Επιπλέον, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(1-\varepsilon)|||\sum_{i=1}^{N} a_i e_i||| \leq \|\sum_{i=1}^{N} a_i y_{n_i}\| \leq (1+\varepsilon)|||\sum_{i=1}^{N} a_i e_i||| \tag{3.14}$$

για κάθε $K \leq n_1 < \ldots < n_N$ και $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε τώρα οτι αρκεί να δειχθεί οτι για κάθε $N \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ και $1 \leq i_0 \leq N$

$$|||\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N} a_i e_i||| \leq |||\sum_{i=1}^{N} a_i e_i|||.$$

Έστω τώρα $N \in \mathbb{N}$ και $1 \leq i_0 \leq N$ από την (3.14) για $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $K \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left| ||| \sum_{i=1}^{N} a_i e_i ||| - ||| \sum_{i=1}^{N} a_i y_{n_i} ||| \right| < \varepsilon$$

και

$$\left| ||| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N} a_i e_i ||| - ||| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N} a_i y_{n_i} ||| \right| < \varepsilon \tag{3.15}$$

για κάθε $K \leq n_1 < \ldots < n_N$ και $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ με $\max_{1 \leq i \leq N} |a_i| \leq 1$.

Έστω λοιπόν $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ με $\max_{1 \leq i \leq N} |a_i| \leq 1$ και $a_{i_0} \neq 0$ και $K \neq n_1 < \ldots < n_N$.

Έχουμε οτι $y_n \xrightarrow{w} 0$. Από το Θεώρημα (Mazur) έπεται οτι υπάρχουν $k_1 < \ldots < k_l \in \mathbb{N}$ με $n_N < k_1$ και $(\lambda_j)_{j=1}^{l} \subseteq [0, 1]$ με $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1$ ώστε

$$\| \sum_{j=1}^{l} \lambda_j y_{k_j} \| < \frac{\varepsilon}{|a_{i_0}|}.$$

Θέτουμε $z = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j y_{k_j}$. Επιλέγουμε τώρα $m_{i_0+1} < \ldots < m_N$ στο $\mathbb{N}$ με $k_l < m_{i_0+1}$. Από την (3.15) παίρνουμε οτι

$$||| \sum_{i=1}^{N} a_i e_i ||| \geq \| \sum_{i=1}^{i_0-1} a_i y_{n_i} + a_{i_0} y_{k_j} + \sum_{i=i_0+1}^{N} a_i y_{m_i} \| - \varepsilon$$

για $1 \leq j \leq l$.

Επειδή $\lambda_j \geq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l} \lambda_j ||| \sum_{i=1}^{N} a_i e_i ||| &\geq \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \| \sum_{i=1}^{i_0-1} a_i y_{n_i} + a_{i_0} y_{k_j} + \sum_{i=i_0+1}^{N} a_i y_{m_i} \| - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \varepsilon \\ &\geq \| \sum_{j=1}^{l} (\sum_{i=1}^{i_0-1} a_i y_{n_i} + a_{i_0} y_{k_j} + \sum_{i=i_0+1}^{N} a_i y_{m_i}) \| - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \varepsilon. \end{aligned}$$

Ακόμη ισχύει οτι $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1$ και έτσι

$$\begin{aligned}
|||\sum_{i=1}^{N} a_i e_i||| &\geq \|\sum_{i=1}^{i_0-1} a_i y_{n_i} + a_{i_0}\sum_{j=1}^{l}\lambda_j y_{k_j} + \sum_{i=i_0+1}^{N} a_i y_{m_i}\| - \varepsilon \\
&\geq \|\sum_{i=1}^{i_0-1} a_i y_{n_i} + \sum_{i=i_0+1}^{N} a_i y_{m_i}\| - |a_{i_0}|\,\|\sum_{j=1}^{l}\lambda_j y_{k_j}\| - \varepsilon \\
&= \|\sum_{i=1}^{i_0-1} a_i y_{n_i} + \sum_{i=i_0+1}^{N} a_i y_{m_i}\| - |a_{i_0}|\,\|z\| - \varepsilon \\
&\geq \|\sum_{i=1}^{i_0-1} a_i y_{n_i} + \sum_{i=i_0+1}^{N} a_i y_{m_i}\| - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Τώρα πάλι από την (3.15) παίρνουμε οτι

$$|||\sum_{i=1}^{N} a_i e_i||| \geq |||\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{N} a_i e_i||| - 3\varepsilon.$$

Άρα

$$|||\sum_{i=1}^{N} a_i e_i||| \geq |||\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{N} a_i e_i||| \tag{3.16}$$

για κάθε $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ με $\max_{1\leq i\leq n}|a_i| \leq 1$. Τέλος, αν $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ με $\max_{1\leq i\leq n}|a_i| = M > 1$ από την (3.16) έπεται οτι

$$|||\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{M} e_i||| \geq |||\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{N} \frac{a_i}{M} e_i|||$$

έτσι

$$M|||\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{M} e_i||| \geq M|||\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{N} \frac{a_i}{M} e_i|||$$

δηλαδή

$$|||\sum_{i=1}^{N} a_i e_i||| \geq |||\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{N} a_i e_i|||.$$

□

Έστω $\left\{a_{n_1} \ldots a_{n_k} : (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k\right\}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ μια (αριθμήσιμη) οικογένεια πραγματικών αριθμών. Όταν γράφουμε

$$\lim_{n_k \to \infty} \ldots \lim_{n_1 \to \infty} a_{n_1 \ldots n_k} = a$$

για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ θα εννοούμε οτι:

(1) Τα όρια $\lim_{n_1 \to \infty} a_{n_1 n_2 \ldots n_k} = a_{1 n_2 \ldots n_k}$ υπάρχουν για κάθε $n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

(2) Τα όρια $\lim_{n_2 \to \infty} a_{1 n_2 n_3 \ldots n_k} = a_{12 n_3 \ldots n_k}$ υπάρχουν για κάθε $n_3, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

($\vdots$) . . .

(κ) Το όριο $\lim_{n_k \to \infty} a_{12 \ldots k-1 n_k} = a_{1 \ldots k}$ υπάρχει και επιπλέον $a = a_{12 \ldots k}$.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(n_1, \ldots, n_k) = a_{n_1 \ldots n_k}$, $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ τότε το παραπάνω όριο είναι το (διαδοχικό) όριο

$$\lim_{n_k \to \infty} [\ldots [\lim_{n_1 \to \infty} f(n_1, \ldots, n_k)]]$$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα ονομάζεται από τον H. Rosenthal «Αρχή του Ramsey για αναλύστες».

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω $k \geq 1$, $a_{n_1 \ldots n_k} \in \mathbb{R}$ με $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ και $a \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε οτι*

$$\lim_{n_k \to \infty} \ldots \lim_{n_1 \to \infty} a_{n_1 \ldots n_k} = a,$$

τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{n_1 \ldots n_k} - a| < \varepsilon$ για κάθε $n_1, \ldots, n_k \in M$ με $N \leq n_k < \ldots < n_1$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο k. Για $k = 1$ το συμπέρασμα είναι άμεσο.

Για $k = 2$. Έστω λοιπόν οτι $\lim_{n_2 \to \infty} \lim_{n_1 \to \infty} a_{n_1 n_2} = a$. Για $n_2 \in \mathbb{N}$ θέτουμε $b_{n_2} = \lim_{n_1 \to \infty} a_{n_1 n_2}$ και προφανώς έχουμε οτι $\lim_{n_2 \to \infty} b_{n_2} = a$. Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε ένα $n_2^1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|b_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$ για $n_2 \geq n_2^1$. Στη συνέχεια επιλέγουμε $n_1^1 \in \mathbb{N}$ με $n_1^1 > n_2^1$ ώστε $\left|a_{n_1 n_2^1} - b_{n_2^1}\right| < \frac{1}{2}$ για $n_1 \geq n_1^1$. Έστω τώρα $i \geq 1$ και ας υποθέσουμε οτι έχουν επιλεγεί $n_2^1 < n_1^1 < \ldots < n_2^i < n_1^i$ ώστε

$$|b_{n_2} - a| < \frac{1}{2j}, \quad \text{για} \quad n_2 \geq n_2^j \quad \text{και} \tag{3.17}$$

$$\left|a_{n_1 n_2^j} - b_{n_2^j}\right| < \frac{1}{2j}, \quad \text{για} \quad n_1 \geq n_1^j, \tag{3.18}$$

όταν $1 \leq j \leq i$.

Πάλι μπορούμε να επιλέξουμε ένα $n_2^{i+1} \in \mathbb{N}$ με $n_2^{i+1} > n_1^i$ ώστε

$$|b_{n_2} - a| < \frac{1}{2(i+1)}, \quad \text{όταν} \quad n_2 \geq n_2^{i+1} \quad \text{και}$$

$n_1^{i+1} \in \mathbb{N}$ με $n_1^{i+1} > n_2^{i+1}$ ώστε

$$\left|a_{n_1 n_2^{i+1}} - b_{n_2^{i+1}}\right| < \frac{1}{2(i+1)}, \quad \text{όταν} \quad n_1 \geq n_1^{i+1}.$$

Θέτουμε $M = \{n_2^i : i \geq 1\}$. Έχουμε οτι για $i < j$

$$\left|a_{n_2^j n_2^i} - a\right| \leq \left|a_{n_2^j n_2^i} - b_{n_2^i}\right| + \left|b_{n_2^i} - a\right|.$$

Επειδή $n_2^j > n_1^i$, έπεται οτι $\left|a_{n_2^j n_2^i} - b_{n_2^i}\right| < \frac{1}{2i}$. Έτσι $\left|a_{n_2^j n_2^i} - a\right| < \frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} = \frac{1}{i}$.

Υποθέτουμε τώρα οτι το συμπέρασμα ισχύει για κάποιο $k \geq 2$ και θα δείξουμε οτι επίσης ισχύει για $k+1$. Έστω λοιπόν οτι $\lim_{n_{k+1}\to\infty} \ldots \lim_{n_1\to\infty} a_{n_1\ldots n_{k+1}} = a$. Για $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ θέτουμε $b_{n_{k+1}} = \lim_{n_k\to\infty} \ldots \lim_{n_1\to\infty} a_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$. Πάλι έχουμε οτι $\lim_{n_{k+1}\to\infty} b_{n_{k+1}} = a$.

Για $n_{k+1} = 1$ από το επαγωγικό βήμα έχουμε οτι υπάρχει $L_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε $b_1 = \lim_{n_k<\ldots<n_1\in L_1} a_{n_1\ldots n_k 1}$. Επειδή

$$b_2 = \lim_{n_k\in L_1} \ldots \lim_{n_1\in L_1} a_{n_1\ldots n_k 2}$$

πάλι από το επαγωγικό βήμα έχουμε οτι υπάρχει $L_2 \in [L_1]^\omega$ ώστε

$$b_2 = \lim_{n_k<\ldots<n_1\in L_2} a_{n_1\ldots n_k 2}.$$

Επαγωγικά έπεται οτι υπάρχει μια φθίνουσα ακολουθία (L_i) απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε

$$b_i = \lim_{n_k<\ldots<n_1\in L_i} a_{n_1\ldots n_k i}.$$

Θεωρώντας τώρα ένα διαγώνιο L σύνολο της (L_i) παίρνουμε οτι

$$b_i = \lim_{n_k<\ldots<n_1\in L} a_{n_1\ldots n_k i} \quad \text{για κάθε } i. \tag{3.19}$$

Μιας και $L \in [\mathbb{N}]^\omega$ μπορούμε να επιλέξουμε n_{k+1}^1 στο L ώστε $\left|b_{n_{k+1}} - a\right| < \frac{1}{2}$ όταν $n_{k+1} > n_{k+1}^1$. Από την (3.19) τώρα έπεται οτι υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}$ με $N_1 > n_{k+1}^1$ ώστε αν $n_1, \ldots, n_k \in L$ με $N_1 < n_k < \ldots < n_1$ να ισχύει

$$\left|a_{n_1 \ldots n_{k+1}^1} - b_{n_{k+1}^1}\right| < \frac{1}{2}.$$

Υποθέτουμε οτι $i \geq 1$ και οτι έχουν επιλεγεί $(n_{k+1}^j)_{j=1}^i$ και $(N_j)_{j=1}^i$ στο L με

$$n_{k+1}^1 < N_1 < \ldots < n_{k+1}^i < N_i$$

ώστε να ισχύουν οι

$$\left|b_{n_{k+1}} - a\right| < \frac{1}{2j}, \text{ όταν } n_{k+1} > n_{k+1}^j \text{ και} \tag{3.20}$$

$$\left|a_{n_1 \ldots n_{k+1}^j} - b_{n_{k+1}^j}\right| < \frac{1}{2j}, \text{ όταν } n_1, \ldots, n_k \in M \tag{3.21}$$

με $N_j < n_k < \ldots < n_1$ για $1 \leq j \leq i$.

Όπως νωρίτερα, μπορούμε να επιλέξουμε n_{k+1}^{i+1} και N_{i+1} στο L με $N_i < n_{k+1}^{i+1} < N_{i+1}$ ώστε

$$\left|b_{n_{k+1}} - a\right| < \frac{1}{2(i+1)}, \text{ όταν } n_{k+1} > n_{k+1}^{i+1} \text{ και}$$

$$\left|a_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}^{i+1}} - b_{n_{k+1}^{i+1}}\right| < \frac{1}{2(i+1)}, \text{ όταν } n_1, \ldots, n_k \in L$$

με $N_{i+1} < n_k < \ldots < n_1$.

Τέλος, θέτουμε $M = \left\{n_{k+1}^i : i \geq 1\right\}$, τότε βέβαια $M \in [L]^\omega$ και για $j_1 > \ldots > j_{k+1}$ έχουμε οτι

$$\left|a_{n_{k+1}^{j_1} \ldots n_{k+1}^{j_{k+1}}} - a\right| \leq \left|a_{n_{k+1}^{j_1} \ldots n_{k+1}^{j_{k+1}}} - b_{n_{k+1}^{j_{k+1}}}\right| + \left|b_{n_{k+1}^{j_{k+1}}} - a\right|$$

Από τις (3.20) και (3.21) και την επιλογή των n_{k+1}^i, $i \in \mathbb{N}$ παίρνουμε οτι

$$\left|a_{n_1^{j_1} \ldots n_{k+1}^{j_{k+1}}} - a\right| < \frac{1}{j_{k+1}}$$

και έχουμε τελειώσει. □

Εδώ θα κάνουμε μια παύση για να αποδείξουμε οτι το Θεώρημα 3.2.3 έπεται το Θεώρημα 3.1.1 και επομένως το Θεώρημα Ramsey. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο γενικεύει το κλασικό θεώρημα των Bolzano-Weierstrass.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω $k \geq 1$ και μια φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε να υπάρχει το διαδοχικό όριο*

$$\lim_{n_k \in M} \dots \lim_{n_1 \in M} f(n_1, \dots, n_k).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο k.
Για $k = 1$ το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

Έστω τώρα $k = 2$ και $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση με $|f(i, j)| \leq c$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$. Για $j \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f_j(i) = f(i, j)$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$. Είναι φανερό οτι $|f_j(i)| \leq c$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$. Για $j = 1$ από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass έπεται οτι υπάρχει $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{i \in M_1} f_1(i)$. Θέτουμε τώρα $\lim_{i \in M_1} f_1(i) = a_1$ και παρατηρούμε οτι $|a_1| \leq c$.

Για $j = 2$ έχουμε οτι $|f_2(i)| \leq c$, $i \in M_1$. Όπως πριν τώρα έπεται οτι υπάρχει $M_2 \in [M_1]^\omega$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{i \in M_2} f_2(i)$ και θέτοντας $\lim_{i \in M_2} f_2(i) = a_2$ παίρνουμε οτι $|a_2| \leq c$.

Επαγωγικά μπορούμε να επιλέξουμε μια φθίνουσα ακολουθία (M_j) απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε

$$\lim_{i \in M_j} f_j(i) = a_j, \ \ |a_j| \leq c$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Θεωρώντας ένα διαγώνιο σύνολο L της (M_j) θα έχουμε οτι

$$\lim_{i \in L} f_j(i) = a_j$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Επειδή $|a_j| \leq c$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, πάλι από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass έπεται οτι υπάρχει $M \in [L]^\omega$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{j \in M} a_j$. Είναι τώρα σαφές οτι υπάρχει το όριο $\lim_{j \in M} \lim_{i \in M} f(i, j)$.

Ας υποθέσουμε τώρα οτι το συμπέρασμα ισχύει για $k - 1$ και ας θεωρήσουμε μια φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ με $|f(n_1, \dots, n_k)| \leq c$ για κάθε $n_k \in \mathbb{N}$. Για $n_k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη φραγμένη συνάρτηση $f_{n_k} : \mathbb{N}^{k-1} \to \mathbb{R}$, $f_{n_k}(n_1, \dots, n_{k-1}) = f(n_1, \dots, n_k)$. Τότε από το επαγωγικό βήμα για κάθε $n_k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $M_{n_k} \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε να υπάρχει το διαδοχικό όριο $\lim_{n_{k-1} \in M_{n_k}} \dots \lim_{n_1 \in M_{n_k}} f_{n_k}(n_1, \dots, n_{k-1})$. Μάλιστα από το επαγωγικό βήμα μπορούμε να υποθέσουμε οτι η ακολουθία (M_{n_k}) είναι φθίνουσα. Θέτοντας $a_{n_k} = \lim_{n_{k-1} \in M_{n_k}} \dots \lim_{n_1 \in M_{n_k}} f_{n_k}(n_1, \dots, n_{k-1})$ και θεωρώντας ένα διαγώνιο σύνολο L της (M_{n_k}) έχουμε οτι

$$\lim_{n_{k-1} \in L} \dots \lim_{n_1 \in L} f_{n_k}(n_1, \dots, n_{k-1}) = a_{n_k}$$

για κάθε $n_k \in \mathbb{N}$.

Είναι άμεσο οτι $|a_{n_k}| \leq c$ για κάθε $n_k \in \mathbb{N}$. Τώρα πάλι από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass έπεται οτι υπάρχει $M \in [L]^\omega$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{n_k \in M} a_{n_k}$. Τέλος, είναι φανερό οτι υπάρχει το όριο $\lim_{n_k \in M} \ldots \lim_{n_1 \in M} f(n_1, \ldots, n_k)$.

$\square$

<u>Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1.</u>

Έστω τώρα μια φραγμένη συνάρτηση $f : [\mathbb{N}]^k \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ με

$$g(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} f(\{n_1, \ldots, n_k\}), & \text{αν } n_1, \ldots, n_k \text{ διαφορετικά ανα 2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Είναι φανερό οτι η g είναι φραγμένη και άρα από την προηγούμενη Πρόταση υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε να υπάρχει το διαδοχικό όριο $\lim_{n_k \in L} \ldots \lim_{n_1 \in L} g(n_1, \ldots, n_k)$.

Από το Θεώρημα 3.2.3 παίρνουμε τώρα οτι υπάρχει $M \in [L]^\omega$ ώστε

$$\lim_{n_k < \ldots < n_1 \in M} g(n_1, \ldots, n_k) = \lim_{n_k \in L} \ldots \lim_{n_1 \in L} g(n_1, \ldots, n_k),$$

δηλαδή

$$\lim_{n_k < \ldots < n_1 \in M} f(\{n_1, \ldots, n_k\}) = \lim_{n_k \in L} \ldots \lim_{n_1 \in L} g(n_1, \ldots, n_k),$$

και αποδείξαμε το Θεώρημα 3.1.1.

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου (και αυτού του κεφαλαίου) είναι οτι κάθε χώρος Banach έχει ένα 1-unconditional spreading model (Θεώρημα 3.2.25). Είναι φανερό οτι αρκεί να περιοριστούμε για την απόδειξη σε διαχωρίσιμους χώρους Banach. Στο εξής, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, κάθε χώρος Banach θα είναι διαχωρίσιμος και κάθε υπόχωρος αυτού θα είναι απειροδιάστατος.

Βασικό συστατικό της απόδειξης του κύριου αποτελέσματος είναι εκτός του Θεωρήματος Ramsey (στη μορφή του Θεωρήματος 3.2.3) και ένα σημαντικό αποτέλεσμα της τοπολογίας του χώρου $\mathbb{R}^n$, το αντιποδικό θεώρημα των Borsuk και Ulam [5]. Επίσης η έννοια του «τύπου» η οποία οφείλεται στους Kririne και Maurey θα παίξει κύριο ρόλο στην απόδειξη αυτή.

Ορισμός 3.2.5. Έστω $k \geq 1$ και μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^{k+1}$. Θέτουμε $S_k = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : \|x\| = 1\}$. Μια συνάρτηση $\phi : S_k \to \mathbb{R}^k$ λέγεται **αντιποδική** αν $\phi(-x) = -\phi(x)$ για κάθε $x \in S_k$.

Θεώρημα 3.2.6. (Borsuk-Ulam) *Έστω $k \geq 1$, μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^{k+1}$ και μια συνεχής και αντιποδική συνάρτηση $\phi : S_k \to \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $x \in S_k$ ώστε $\phi(x) = 0$.*

Παρατήρηση 3.2.1. Θα πρέπει να αναφερθεί οτι το κλασικό θεώρημα (Borsuk-Ulam) διατυπώνεται για τη $\|\cdot\|_2$ στον $\mathbb{R}^{k+1}$. Θα αποδείξουμε οτι το Θεώρημα (Borsuk-Ulam) ισχύει ακόμη και αν ο $(\mathbb{R}^{k+1}, \|\cdot\|_2)$ αντικατασταθεί από οποιοδήποτε χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ με $\dim X = k + 1$. Έστω λοιπόν $\phi : S_X \to \mathbb{R}^k$ συνεχής και αντιποδική συνάρτηση. Ταυτίζουμε όπως μπορούμε τον X με τον $\mathbb{R}^{k+1}$, έχουμε οτι η S_X είναι ομοιομορφική με την $S_k = \left\{x \in \mathbb{R}^{k+1} : \|x\|_2 = 1\right\}$. Πράγματι η απεικόνιση $h : S_k \to S_X$, $h(x) = \frac{x}{\|x\|}$, $x \in S_k$ είναι Lipschitz ομοιομορφισμός της S_k επί της S_X. Μάλιστα ισχύει οτι $h(-x) = -h(x)$, $x \in S_k$. Έστω $\psi = \phi \circ h : S_k \to \mathbb{R}^k$. Τότε η ψ είναι συνεχής και

$$\psi(-x) = (\phi \circ h)(-x) = \phi(h(-x)) = \phi(-h(x)) = -\phi(h(x)) = -\psi(x)$$

για κάθε $x \in S_k$. Άρα η $\psi : S_k \to \mathbb{R}^k$ είναι συνεχής και αντιποδική συνάρτηση και από το (κλασικό) Θεώρημα (Borsuk-Ulam) υπάρχει $x \in S_k$ ώστε $\psi(x) = 0$ ή $\phi(h(x)) = 0$. Θέτοντας $y = h(x) \in S$ έχουμε το συμπέρασμα.

Ορισμός 3.2.7. Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X.

(i) Μια συνάρτηση $\tau : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **τύπος στον X παραγόμενος από τον Y** αν υπάρχει μια ακολουθία (y_n) στον Y ώστε $\tau(x) = \lim_n \|x + y_n\|$ για κάθε $x \in X$. Λέμε οτι η ακολουθία (y_n) δίνει τον τύπο τ.

(ii) Ένας τύπος τ στον X λέγεται **τετριμμένος** αν υπάρχει $x_0 \in X$ με $\tau(x) = \|x + x_0\|$ για κάθε $x \in X$. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε τον τύπο τ με τ_{x_0}.

(iii) Συμβολίζουμε με $T(X, Y)$ το σύνολο όλων των τύπων του X που παράγονται από τον Y και με $T(X)$ το σύνολο όλων των τύπων του X.

Παρατήρηση 3.2.2. Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X.

(i) $T(Y, X) \subseteq T(X)$.

(ii) Έστω τ ένας τύπος στον X, τότε ο τ είναι μη τετριμμένος τύπος αν και μόνο αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X που δίνει τον τ δεν έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσες υπακολουθίες. Για την κατεύθυνση ($\Rightarrow$) ας πάρουμε μια ακολουθία (x_n) στον X που δίνει τον τ και ας υποθέσουμε οτι η (x_n) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{n_k}) και έστω $x_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$. Τότε είναι άμεσο οτι για $x \in X$

$$\tau(x) = \lim_n \|x + x_n\| = \lim_k \|x + x_{n_k}\| = \|x + x_0\| .$$

Άτοπο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση ας πάρουμε μια (x_n) που δίνει τον τ και ας υποθέσουμε οτι ο τ είναι τετριμμένος τύπος με $\tau = \tau_{x_0}$. Τότε

$$0 = \|-x_0 + x_0\| = \tau_{x_0}(-x_0) = \lim_n \|-x_0 + x_n\|$$

και άρα $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$, άτοπο.

(iii) Κάθε τύπος τ στον X είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά Lipschitz 1. Πράγματι, έστω $\tau \in T(X)$ και (x_n) μια ακολουθία στον X που δίνει τον τ. Έχουμε οτι για $n \in \mathbb{N}$ και $x, y \in X$

$$|\,\|x + x_n\| - \|y + x_n\|\,| \leq \|x - y\| .$$

Άρα

$$|\tau(x) - \tau(y)| = \lim_n |\|x + x_n\| - \|y + x_n\|| \leq \|x - y\| .$$

(iv) Αν τ είναι ένας τύπος στον X δεν έπεται οτι υπάρχει μοναδική ακολουθία (x_n) στον X που δίνει τον τ. Αυτό είναι άμεσο, αφού αν η (x_n) δίνει τον τ, τότε και κάθε υπακολουθία x_{n_k} της (x_n) δίνει τον τ.

Πρόταση 3.2.8. *Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας κλειστός υπόχωρος του X και $D = (d_i)$ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X.*

(i) *Αν (y_n) είναι μια ακολουθία στον Y που δίνει έναν τύπο στον X, τότε η (y_n) είναι φραγμένη.*

(ii) *Έστω (y_n) μια φραγμένη ακολουθία στον Y για την οποία ισχύει οτι υπάρχει το όριο $\lim_n \|d_i + y_n\|$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε η (y_n) δίνει έναν τύπο στον X.*

(iii) *Έστω (y_n) μια φραγμένη ακολουθία στον Y. Τότε υπάρχει μια υπακολουθία (y_{n_k}) της (y_n) που δίνει έναν τύπο στον X.*

Απόδειξη. (i) Άμεσο.

(ii) Έστω λοιπόν $K > 0$ με $\|y_n\| \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_i = \lim_n \|d_i + y_n\|$ για $i \in \mathbb{N}$. Έστω $x \in X$ και (d_{i_k}) μια ακολουθία στο D ώστε $d_{i_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Επειδή οι ακολουθίες (d_{i_k}) και (y_n) είναι φραγμένες έπεται οτι και η (a_{i_k}) είναι φραγμένη. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε οτι $a_{i_k} \to a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$.

Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{i_k} - a| < \frac{\varepsilon}{3}$ και $\|x - d_{i_k}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επίσης, επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|\|d_{i_k} + y_n\| - a_{i_k}| < \frac{\varepsilon}{3}$ για $n \geq N$. Τότε για $n \geq N$

$$\begin{aligned} |\|x + y_n\| - a| &= |\|x + y_n\| \pm \|d_{i_k} + y_n\| \pm a_{i_k} - a| \\ &\leq |\|x + y_n\| - \|d_{i_k} + y_n\|| + |\|d_{i_k} + y_n\| - a_{i_k}| + |a_{i_k} - a| \\ &< \|x - d_{i_k}\| + 2\frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

(iii) Έστω (y_n) μια φραγμένη ακολουθία στον Y. Μιας και για κάθε $i \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(\|d_i + y_n\|)_n$ είναι φραγμένη μπορούμε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ να επιλέξουμε $M_i \in [\mathbb{N}]^\omega$ και άρα $a_i \in \mathbb{R}$ με $\lim_{n \in M_i} \|d_i + y_n\| = a_i$. Η ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, (M_i) μπορεί να επιλεγεί να είναι φθίνουσα και περνώντας σε ένα διαγώνιο σύνολο M της (M_i) θα έχουμε

$$\lim_{n \in M} \|d_i + y_n\| = a_i$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Το συμπέρασμα τώρα είναι άμεσο από το (ii). $\square$

Ορισμός 3.2.9. Έστω X ένας χώρος Banach.

(i) Η νόρμα ενός τύπου τ στον X ορίζεται να είναι $\|\tau\| = \tau(0)$.

(ii) Ένας τύπος τ στον X λέγεται **κανονικοποιημένος** αν $\|\tau\| = 1$.

(iii) Για έναν τύπο τ στον X και $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τον τύπο στον X, $a \cdot \tau$ με

$$(a \cdot \tau)(x) = \begin{cases} |a|\, \tau(\frac{x}{a}), & a \neq 0 \\ \|x\|, & a = 0 \end{cases}$$

(iv) Ένας τύπος τ στον X λέγεται **συμμετρικός** αν $\tau(x) = \tau(-x)$ για κάθε $x \in X$.

(v) Μια φραγμένη ακολουθία (x_n) στον X λέγεται **συμμετρική** επί του X αν

$$\lim_n |\|x + x_n\| - \|x - x_n\|| = 0$$

για κάθε $x \in X$.

Είναι εύκολο να δούμε οτι αν τ είναι ένας τύπος στον X που δίνεται από μια ακολουθία (x_n) και $a \in \mathbb{R}$, τότε ο τύπος $(a \cdot \tau)$ δίνεται από την ακολουθία $(a \cdot x_n)$. Πράγματι, η περίπτωση $a = 0$ είναι άμεση. Για $a \neq 0$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned}
(a \cdot \tau)(x) = |a|\,\tau(\frac{x}{a}) &= |a| \lim_n \left\| \frac{x}{a} + x_n \right\| \\
&= |a| \lim_n \frac{1}{|a|} \|x + a x_n\| \\
&= \lim_n \|x + a x_n\|
\end{aligned}$$

Πρόταση 3.2.10. *Έστω X ένας χώρος Banach και τ ένας τύπος στον X.*

(i) *Ο τ είναι συμμετρικός αν και μόνο αν κάθε ακολουθία (x_n) που δίνει τον τ είναι συμμετρική επί του X.*

(ii) *Ο τ είναι τετριμμένος και συμμετρικός αν και μόνο αν $\tau = \tau_0$.*

(iii) *Αν ο τ είναι συμμετρικός και $\|\tau\| > 0$, τότε ο τ είναι μη τετριμμένος.*

Απόδειξη. (i) Έστω (x_n) μια ακολουθία που δίνει τον τ, τότε

$$\begin{aligned}
\tau(x) = \tau(-x) &\Leftrightarrow \lim_n \|x + x_n\| = \lim_n \|-x + x_n\| \\
&\Leftrightarrow \lim_n |\|x + x_n\| - \|-x + x_n\|| = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_n |\|x + x_n\| - \|x - x_n\|| = 0
\end{aligned}$$

(ii) ($\Rightarrow$) Έστω τ ένας τετριμμένος και συμμετρικός τύπος στον X με $\tau = \tau_{x_0}$. Τότε

$$0 = \|-x_0 + x_0\| = \tau_{x_0}(-x_0) = \tau_{x_0}(x_0) = \|2x_0\|$$

και άρα $x_0 = 0$.
($\Leftarrow$) Είναι άμεσο οτι ο τ_0 είναι συμμετρικός τύπος στον X.
(iii) Άμεσο από το (ii). $\square$

Θεώρημα 3.2.11. *Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Τότε υπάρχει μια κανονικοποιημένη και συμμετρική επί του X ακολουθία (y_n) στον Y. Ιδιαίτερα υπάρχει ένας μη τετριμμένος, κανονικοποιημένος και συμμετρικός τύπος στον X, παραγόμενος από τον Y.*

Απόδειξη. Έστω $D = (d_i)$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια κανονικοποιημένη ακολουθία (y_n) ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\|d_i + y_n\| = \|d_i - y_n\|$ για $i \leq n$. Για $i = 1$ επιλέγουμε E έναν υπόχωρο του Y με $\dim E = 2$ και θέτουμε $\phi : S_E \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(s) = \|d_1 + s\| - \|d_1 - s\| \quad \text{για } s \in S_E.$$

Είναι άμεσο οτι η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής και αντιποδική. Από το Θεώρημα (Borsuk-Ulam) 3.2.6 έπεται οτι υπάρχει $y_1 \in S_E$ με $\phi(y_1) = 0$. Έστω τώρα $k \geq 1$ και ας υποθέσουμε οτι έχουμε επιλέξει $y_1, \dots, y_k$ στοιχεία νόρμας 1 του Y ώστε για $1 \leq j \leq k$ $\|d_i + y_j\| = \|d_i - y_j\|$ για $1 \leq i \leq j$. Επιλέγουμε τώρα έναν υπόχωρο E του Y $\dim E = k + 2$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : S_E \to \mathbb{R}^{k+1}$ με

$$\phi(s)_i = \|d_i + s\| - \|d_i - s\|$$

για $s \in S_E$ και $1 \leq i \leq k + 1$.

Πάλι είναι άμεσο οτι η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής και αντιποδική και έτσι πάλι από το Θεώρημα 3.2.6 μπορούμε να επιλέξουμε $y_{k+1} \in S_E$ ώστε $\phi(y_{k+1}) = 0$.

Για μια υπακολουθία (y_{n_k}) της (y_n) είναι άμεσο να διαπιστώσουμε οτι ισχύει

$$\|d_i + y_{n_k}\| = \|d_i - y_{n_k}\|, \quad \text{για } i \leq n_k.$$

Ακόμη έχουμε οτι η (y_n) είναι κανονικοποιημένη και άρα από το (iii) της Πρότασης 3.2.8 έπεται οτι υπάρχει μια υπακολουθία της (y_n) που δίνει έναν τύπο στον X. Από τα παραπάνω έπεται οτι μπορούμε να υποθέσουμε οτι η (y_n) δίνει έναν τύπο τ στον X. Είναι φανερό οτι ο τύπος τ είναι κανονικοποιημένος. Τώρα από τη Πρόταση 3.2.10 αρκεί να δειχθεί οτι ο τύπος τ είναι επίσης συμμετρικός. Πράγματι, έχουμε οτι για $i \in \mathbb{N}$

$$\tau(d_i) = \tau(-d_i).$$

Έτσι αν $x \in X$ και (d_{i_k}) μια ακολουθία στο D με $d_{i_k} \to x$ από τη συνέχεια του τ παίρνουμε οτι

$$\tau(x) = \lim_k \tau(d_{i_k}) = \lim_k \tau(-d_{i_k}) = \tau(-x).$$

$\square$

Ορισμός 3.2.12. Έστω X ένας χώρος Banach. Ένας χώρος Banach Z θα λέγεται **πεπερασμένης διάστασης επέκταση** του X αν υπάρχει $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ ώστε $Z = X \oplus [e_i]_{i \in F}$ και $\|\cdot\|_Z / X = \|\cdot\|_X$, όπου η (e_n) είναι η συνήθης βάση του c_{00}. Μια πεπερασμένης διάστασης επέκταση του X θα λέγεται k-**διάστατη επέκταση** του X αν $\dim Z/X = k$.

Έστω τώρα X ένας χώρος Banach και τ ένας τύπος στον X. Θεωρούμε την περίπτωση που ο τ είναι μη τετριμμένος και ας θεωρήσουμε τον διανυσματικό χώρο $X_\tau = X \oplus [e_1]$ και θέτουμε $e_\tau = e_1$. Επίσης ορίζουμε τη $|||\cdot||| : X_\tau \to \mathbb{R}$ με

$$|||x + \lambda e_\tau||| = (\lambda \cdot \tau)(x).$$

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς οτι η $|||\cdot|||$ είναι μια καλά ορισμένη νόρμα στον X_τ. Επίσης για $\lambda = 0$ έχουμε οτι $|||x||| = (0 \cdot \tau)(x) = \|x\|$ και άρα $|||\cdot|||/X = \|\cdot\|$. Επειδή οι X και X_τ/X είναι χώροι Banach έπεται οτι και ο X_τ είναι χώρος Banach. Επομένως, ο X_τ είναι μια μονοδιάστατη επέκταση του X.

Έστω τώρα οτι ο τ είναι ένας τετριμμένος τύπος στον X και $\tau = \tau_{x_0}$. Μπορούμε τώρα να επιλέξουμε έναν κλειστό υπόχωρο Y του X ώστε $Y \oplus [x_0] = X$ και ορίζουμε πάλι τη νόρμα $|||\cdot|||$ στον X,

$$|||\cdot||| : X \to \mathbb{R}, \ |||y + \lambda x_0||| = (\lambda \cdot \tau)(y).$$

Θέτουμε $X_\tau = X$ και παρατηρούμε οτι για $x \in X$ με $x = y + \lambda x_0$

$$|||x||| = (\lambda \cdot \tau)(y) = \|y + \lambda x_0\| = \|x\|.$$

Ορισμός 3.2.13. Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X.

(i) Για $k = 1$ θέτουμε ${}^1T(Y, X) = T(Y, X)$.
Υποθέτουμε τώρα οτι $k \geq 1$ και οτι έχει οριστεί το σύνολο ${}^kT(Y, X)$ ώστε για κάθε $\tau \in {}^kT(Y, X)$ να υπάρχει μια πεπερασμένης διάστασης επέκταση του X με $\dim X_\tau/X \leq k$. Ένα γ λέγεται $k+1$-**τύπος στον** X **παραγόμενος από τον** Y αν υπάρχουν $\tau \in {}^kT(Y, X)$ και $\beta \in T(Y, X_\tau)$ ώστε $\gamma = (\tau, \beta)$. Για έναν $(k+1)$-τύπο στον X, $\gamma = (\tau, \beta)$ θεωρούμε το χώρο Banach $X_\gamma = (X_\tau)_\beta$.

(ii) Έστω $k \geq 1$, για $\tau \in {}^kT(Y,X)$ γράφουμε $\tau = (\tau_i)_{i=1}^k$, όταν $\tau_i \in T(Y, X_{(\tau_0,\dots,\tau_{i-1})})$ και $X_\tau = X_{\tau_1,\dots,\tau_k}$, όπου $X_{\tau_0} = X$.

(iii) Λέμε οτι ένας k-τύπος $\tau = (\tau_i)_{i=1}^k$ στον X είναι **μη τετριμμένος** (αντ. **συμμετρικός**) αν ο i-τύπος τ_i είναι μη τετριμμένος (αντ. συμμετρικός) για κάθε $1 \leq i \leq k$.

Έστω τώρα $\tau = (\tau)_{i=1}^k$ ένας k-τύπος στον X και (x_n^i), $1 \leq i \leq k$ ακολουθίες στον X που δίνουν τους τύπους $\tau_1, \dots, \tau_k$, αντίστοιχα. Τότε για $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|x + \sum_{i=1}^k c_i e_{\tau_i}\| &= \|x + \sum_{i=1}^{k-1} c_i e_{\tau_i} + c_k e_{\tau_k}\| \\ &= \lim_{n_k} \|x + \sum_{i=1}^k c_i e_{\tau_i} + c_k x_{n_k}^k\|. \end{aligned}$$

Επειδή η $(c_k x_n^k)$ είναι ακολουθία στον X παίρνουμε οτι

$$\|x + \sum_{i=1}^k c_i e_{\tau_i}\| = \lim_{n_k} \lim_{n_{k-1}} \|x + \sum_{i=1}^{k-2} c_i e_{\tau_i} + c_{k-1} x_{n_{k-1}}^{k-1} + c_k x_{n_k}^k\|.$$

Επαγωγικά τώρα έπεται οτι

$$\|x + \sum_{i=1}^k c_i e_{\tau_i}\| = \lim_{n_k} \dots \lim_{n_1} \|x + \sum_{i=1}^k c_i x_{n_i}^i\|.$$

Αν μάλιστα ο τύπος $\tau = (\tau_i)_{i=1}^k$ είναι συμμετρικός έπεται οτι για $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}^k$

$$\begin{aligned} \|x + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i c_i e_{\tau_i}\| &= \lim_{n_k} \dots \lim_{n_1} \|x + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i c_i x_{n_i}^i\| \\ &= \lim_{n_k} \dots \lim_{n_1} \|x + \sum_{i=2}^k \varepsilon_i c_i x_{n_i}^i + c_1 x_{n_1}^1\| \end{aligned}$$

από τη συμμετρικότητα του τύπου τ_1.
Έτσι

$$\|x + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i c_i e_{\tau_i}\| = \lim_{n_k} \dots \lim_{n_2} \|x + \sum_{i=2}^k \varepsilon_i c_i x_{n_i}^i + c_1 e_{\tau_1}\|.$$

Επαγωγικά πάλι έπεται οτι

$$\|x + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i c_i e_{\tau_i}\| = \|x + \sum_{i=1}^k c_i e_{\tau_i}\|.$$

Πρόταση 3.2.14. (Lemma 1.5 (Rosenthal)([13], σελ. 23)) *Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας κλειστός υπόχωρος του X και $k \geq 1$.*

(i) *Έστω $(y_n^1), \dots, (y_n^k)$ ακολουθίες στον Y ώστε για κάθε $x \in X$ και $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ να υπάρχει το όριο*

$$I_{(x,c_1,\dots,c_k)} = \lim_{n_k} \dots \lim_{n_1} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j y_{n_j}^j\|.$$

Τότε υπάρχει μοναδικός k-τύπος $\tau = (\tau_j)_{j=1}^k$ στον X παραγόμενος από τον Y ώστε

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| = I_{(x,c_1,\dots,c_k)}$$

για κάθε $x \in X$ και $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.

Ακόμη ο παραπάνω τύπος τ είναι μη τετριμμένος αν και μόνο αν οι ακολουθίες (y_n^j), $1 \leq j \leq k$ δεν έχουν $\|\cdot\|$-συγκλίνουσες υπακολουθίες.

(ii) *Αν $\tau = (\tau_j)_{j=1}^k$ είναι ένας k-τύπος στον X παραγόμενος από τον Y, τότε υπάρχουν $(y_n^1), \dots, (y_n^k)$ ακολουθίες στον Y ώστε*

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| = \lim_{n_k < \dots < n_1} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j y_{n_j}^j\|$$

για κάθε $x \in X$ και $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. (i) Είναι άμεσο από τις παρατηρήσεις και τους ορισμούς που έχουν προηγηθεί. Παρόλα αυτά θα αποδείξουμε την περίπτωση $k = 2$. Θέτουμε $c_1 = 1$ και $c_2 = 0$, τότε υπάρχει το όριο $I_{(x,1,0)} = \lim_{n_1} \left\|x + y_{n_1}^1\right\|$ για κάθε $x \in X$. Άρα ορίζεται ο τύπος στον X $\tau_1 : X \to \mathbb{R}$ με $\tau_1(x) = \lim_{n_1} \left\|x + y_{n_1}^1\right\|$. Θεωρώντας τον χώρο Banach X_{τ_1} έχουμε οτι

$$\|x + c_1 e_{\tau_1}\| = \lim_{n_1} \left\|x + c_1 y_{n_1}^1\right\|$$

για κάθε $x \in X$ και $c_1 \in \mathbb{R}$. Τώρα για $x \in X$, $c_1 \in \mathbb{R}$ και $c_2 = 1$ υπάρχει το όριο

$$\begin{aligned} I_{(x,c_1,1)} &= \lim_{n_2} \lim_{n_1} \left\|x + c_1 y_{n_1}^1 + y_{n_2}^2\right\| \\ &= \lim_{n_2} \left\|x + c_1 e_{\tau_1} + y_{n_2}^2\right\| \end{aligned}$$

Άρα ορίζεται ο τύπος τ_2 στον X_{τ_1} με

$$\tau_2(x + c_1 e_{\tau_1}) = \lim_{n_2} \left\| x + c_1 e_{\tau_1} + y^2_{n_2} \right\| = I_{(x,c_1,1)}.$$

Είναι φανερό οτι ο $\tau = (\tau_j)_{j=1}^2$ είναι ένας 2-τύπος στον X.
(ii) Έστω λοιπόν $\tau = (\tau_j)_{j=1}^k$ ένας k-τύπος στον X και (x^j_n), $1 \le j \le k$ ακολουθίες στον Y που δίνουν τους τύπους $\tau_1, \ldots, \tau_k$, αντίστοιχα. Έστω ακόμη $D = (d_i)$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X.

Ισχυρισμός 1

Έστω $x \in X$ και $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\|x + \sum_{j=1}^{n} c_j e_{\tau_j}\| = \lim_{n_k < \ldots < n_1 \in M} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\|.$$

Απόδειξη.

Έχουμε οτι

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| = \lim_{n_k} \ldots \lim_{n_1} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\|.$$

Τώρα από το Θεώρημα 3.2.3 έπεται το συμπέρασμα.

Ισχυρισμός 2.

Έστω $x \in X$, τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\|c_0 x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| = \lim_{n_k < \ldots < n_1 \in M} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\|$$

για κάθε $c_0, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.

Δεδομένου του Ισχυρισμού 1 η απόδειξη είναι ανάλογη του Λήμματος 3.1.2.

Ισχυρισμός 3.

Υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\|c_0 d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| = \lim_{n_k < \ldots < n_1 \in M} \|c_0 d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\|$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $c_0, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.
Απόδειξη.

Από τον Ισχυρισμό 2 μπορούμε να επιλέξουμε μια φθίνουσα ακολουθία (M_i) απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε

$$\|c_0 d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| = \lim_{n_k < \ldots < n_1 \in M_i} \|c_0 d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j x_{n_j}^j\|$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $c_0, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Περνώντας τώρα σε ένα διαγώνιο σύνολο M της (M_i) έχουμε το συμπέρασμα.

Ισχυρισμός 4.

Υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| = \lim_{n_k < \ldots < n_1 \in M} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j x_{n_j}^j\|$$

για κάθε $x \in X$ και $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.
Απόδειξη.

Επιλέγουμε M όπως στον Ισχυρισμό 3. Έστω τώρα $x \in X$, $\varepsilon > 0$ και $d_i \in D$ με $\|x - d_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Από τον Ισχυρισμό 3 επίσης μπορούμε να επιλέξουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε αν $N \leq n_k < \ldots < n_1$ στο M, τότε

$$\left| \|d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| - \|d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j x_{n_j}^j\| \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έτσι για $N \leq n_k < \ldots < n_1$ στο M έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| - \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\| \right| &= \left| \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| \pm \|d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| \pm \right. \\
&\pm \left. \|d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\| - \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\| \right| \\
&\leq \left| \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| - \|d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| \right| + \\
&+ \left| \|d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| - \|d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\| \right| + \\
&+ \left| \|d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\| - \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\| \right| \\
&\leq 2\|x - d_i\| + \left| \|d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| - \|d_i + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j_{n_j}\| \right| \\
&< 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Τέλος επιλέγουμε ένα M όπως στο Ισχυρισμό 4, θέτουμε $(y^j_n) = (x^j_n)_{n \in M}$ και έχουμε τελειώσει. □

Στο [13] ο Rosenthal μετά την Πρόταση 3.2.14 (Lemma 1.5, σελ. 23) στις σελίδες 24-25 αποδεικνύει το Θεώρημα 3.2.26 (Theorem 1.1 σελ. 17), δηλαδή την ύπαρξη πεπερασμένης $(1+\varepsilon)$-unconditional βασικής ακολουθίας μεγάλου μήκους. Εμείς προτιμήσαμε να πάρουμε το Θεώρημα 3.2.26 ως συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.25 (ύπαρξη 1-unconditional spreading model). Θα πρέπει να τονίσουμε οτι η απόδειξη που παρουσιάζουμε εδώ και αυτή του [13] είναι ουσιαστικά ίδιες, όμως θεωρούμε οτι η επιλογή μας βοηθάει περισσότερο στην οικονομία του κειμένου.

Πόρισμα 3.2.15. *Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας κλειστός υπόχωρος του X και $\tau = (\tau_j)_{j=1}^k$ ένας k-τύπος στον X παραγόμενος από τον Y. Τότε για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $y_1, \ldots, y_k \in Y$ ώστε*

$$(1-\varepsilon)\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| \leq \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j y_j\| \leq (1+\varepsilon)\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\|.$$

Απόδειξη. Δεδομένης της Πρότασης 3.2.14, η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής του Λήμματος 3.1.3. □

Αμέσως παρακάτω δίνουμε έναν εναλλακτικό ορισμό των spreading model ενός χώρου Banach που θα μας φανεί χρήσιμος στη συνέχεια.

Ορισμός 3.2.16. Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Ένας χώρος Banach Z λέγεται **spreading model** του X παραγόμενο από τον Y αν ισχύουν οι

(i) ο X είναι υπόχωρος του Z με $\|\cdot\|_Z /X = \|\cdot\|_X$ και υπάρχει μια ακολουθία (z_j) στον Z ώστε ο Z να είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $X \bigcup \{z_j : j \in \mathbb{N}\}$

και

(ii) υπάρχει μια ακολουθία (y_n) στον Y, η οποία δεν έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσες υπακολουθίες ώστε

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j z_j\| = \lim_{n_1} \dots \lim_{n_k} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j y_{n_j}\|.$$

Είναι λογικό να αναρωτηθεί κανείς αν ο προηγούμενος ορισμός ενός spreading model ταυτίζεται με αυτόν της παραγράφου 0.2. Έστω λοιπόν $k \geq 1$, έχουμε αποδείξει νωρίτερα οτι υπάρχει $M_k \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j z_j\| = \lim_{n_1 < \dots < n_k \in M_k} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j y_{n_j}\|$$

για κάθε $x \in X$ και $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Τώρα όπως έχουμε ξανακάνει νωρίτερα μπορούμε να επιλέξουμε ένα $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j z_j\| = \lim_{n_1 < \dots < n_k \in M} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j y_{n_j}\|$$

για κάθε $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$ και $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.

Ακόμη για $x \in X$ και $k \in \mathbb{N}$ σταθερά, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(1 - \varepsilon)\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j z_j\| \leq \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j y_{n_j}\| \leq (1 + \varepsilon)\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j z_j\|$$

για κάθε $N \leq n_1 < \dots < n_k$ στο M και $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.

Έχουμε οτι

(i) $z_j \notin X$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$

(ii) το σύνολο $\{z_j : j \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του Z.

Για το (i) ας υποθέσουμε οτι $z_j \in X$ και άρα υπάρχει $x \in X$ με $\|x - z_j\| = 0$, τότε όμως $\lim_n \|x - y_n\| = 0$, δηλαδή $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, άτοπο.

Για το (ii) ας υποθέσουμε οτι υπάρχουν $k \geq 1$ και $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ με $c_k \neq 0$ ώστε $\sum_{j=1}^k c_j z_j = 0$. Εύκολα μπορούμε να δούμε οτι

$$\|\sum_{j=1}^n c_j z_j\| = \|\sum_{j=1}^n c_j z_{i_j}\|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ και $i_1 < \ldots < i_j$ στο $\mathbb{N}$.

Έτσι

$$0 = \|\sum_{j=1}^k c_j z_j\| = \|\sum_{j=1}^{k-1} c_j z_j + c_k z_{k+1}\|.$$

Άρα

$$\begin{aligned} |c_k|\,\|z_{k+1} - z_k\| &= \|c_k(z_{k+1} - z_k)\| \\ &= \|(\sum_{j=1}^{k-1} c_j z_j + c_k z_{k+1}) - (\sum_{j=1}^{k} c_j z_j)\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

και επειδή $c_k \neq 0$

$$\lim_{n_k < n_{k+1} \in M} \left\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\right\| = 0$$

Ισοδύναμα

$$\lim_{n_1 < n_2 \in M} \|y_{n_1} - y_{n_2}\| = 0.$$

Επομένως, η ακολουθία $(y_n)_{n \in M}$ είναι Cauchy, άτοπο. Θεωρώντας τώρα τη $|||\cdot||| : c_{00} \to \mathbb{R}$ με

$$|||\sum_{j=1}^k c_j e_j||| = \|\sum_{j=1}^k c_j z_k\|$$

από τα προηγούμενα έπεται οτι ο $(c_{00}, |||\cdot|||)$ είναι ένα spreading model του X, όπως αυτό ορίστηκε στην παράγραφο 0.2.

Ορισμός 3.2.17. Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X.

(i) Ένας ∞-**τύπος** στον X είναι μια ακολουθία $(\tau_j)_{j=1}^{\infty}$ ώστε το $\tau^k = (\tau_j)_{j=1}^{k}$ να είναι k-τύπος στον X για κάθε $k \geq 1$.

(ii) Ένας ∞-τύπος τ στον X λέμε οτι **παράγεται από τον** Y αν ο τύπος τ_j παράγεται από τον Y για κάθε $j \geq 1$.

(iii) Ένας ∞-τύπος $\tau = (\tau_j)$ στον X λέμε οτι είναι **μη τετριμμένος** (αντ. **συμμετρικός**) αν ο τύπος τ_j είναι μη τετριμμένος (αντ. συμμετρικός) για κάθε j.

(iv) Για έναν ∞-τύπο $\tau = (\tau_j)$ θεωρούμε τους χώρους Banach X_{τ^k}, $k \geq 1$. Θέτουμε X_τ να είναι η **πλήρωση** του χώρου με νόρμα $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_{\tau^k}$.

Είναι εύκολο να δούμε οτι αν τ είναι ένας μη τετριμμένος ∞-τύπος, τότε ο χώρος Banach X_τ είναι πλήρωση του $(X \oplus c_{00}, ||| \cdot |||)$, όπου $||| \cdot |||/X = \|\cdot\|_X$.

Ορισμός 3.2.18. Έστω τ ένας μη τετριμμένος ∞-τύπος σε έναν χώρο Banach X. Ο τ λέγεται **indiscernible** αν

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| = \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_{i_j}}\|$$

για κάθε $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$, $i_1 < \ldots < i_k \in \mathbb{N}$ και $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Αν τ είναι ένας indiscernible ∞-τύπος στον X, τότε ο χώρος Banach X_τ λέγεται **αντίστροφο spreading model** του X.

Πρόταση 3.2.19. *Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Έστω ακόμη $\tau = (\tau_j)$ ένας μη τετριμμένος ∞-τύπος στον X παραγόμενος από τον Y. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο X_τ είναι ένα αντίστροφο spreading model του X.*

(ii) *Υπάρχει μια ακολουθία (y_n) στον Y η οποία για κάθε j δίνει τον τύπο τ_j.*

(iii) *$\tau_j = \tau_{j+1}/X_{\tau^{j-1}}$ για κάθε j.*

Απόδειξη. (i)⇒(iii) Έστω $k \geq 1$ και $c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$. Αφού ο X_τ είναι ένα αντίστροφο spreading model του X έχουμε οτι

$$\tau_k(x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j}) = \|x + \sum_{j=1}^{k-2} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\|$$

Άρα

$$\tau_k(x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j}) = \tau_{k+1}(x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j}).$$

(iii)⇒(ii)

Ας θεωρήσουμε ακολουθίες (y_n^j) στον Y ώστε για κάθε j η ακολουθία (y_n^j) να δίνει τον τύπο τ_j. Από το (iii) έχουμε οτι $\tau_k = \tau_{k+1}/X_{\tau^{k-1}}$ για κάθε k. Έτσι για $k \geq 1$, $x \in X$ και $c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| &= \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_m}\| \\ &= \lim_n \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\| \end{aligned}$$

για κάθε $m \geq k$.

Άρα

$$\|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| = \lim_m \lim_n \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\| \tag{3.22}$$

για κάθε $x \in X$, $k \geq 1$ και $c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$.

<u>Ισχυρισμός 1</u>

Έστω $x \in X$ και $k \geq 1$. Τότε υπάρχει $M_k \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| = \lim_{m<n \in M_k} \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\|$$

για κάθε $c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.

Δεδομένων της σχέσης (3.22) και του Θεωρήματος 3.2.3 η απόδειξη είναι ανάλογη του Λήμματος 3.1.2

Ισχυρισμός 2

Έστω $x \in X$, τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| = \lim_{m<n\in M} \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\|$$

για κάθε $k \geq 1$ και $c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.

Από τον Ισχυρισμό 1 μπορούμε να επιλέξουμε μια φθίνουσα ακολουθία (M_k) απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε

$$\|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| = \lim_{m<n\in M_k} \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\|$$

για κάθε $k \geq 1$ και $c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$. Αν τώρα M είναι ένα διαγώνιο σύνολο της ακολουθίας (M_k) παίρνουμε το συμπέρασμα.

Έστω τώρα $D = (d_i)$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X.

Ισχυρισμός 3

Υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\|d_i + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| = \lim_{m<n\in M} \|d_i + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\|$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ και $c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.

Έπεται από τον Ισχυρισμό 2, όπως αυτός έπεται από τον Ισχυρισμό 1.

Ισχυρισμός 4

Υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| = \lim_{m<n\in M} \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\|$$

για κάθε $x \in X$, $k \geq 1$ και $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.

Επιλέγουμε $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ όπως στον Ισχυρισμό 3. Έστω τώρα $x \in X$, $k \geq 1$, $c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Από την πυκνότητα του D στον X μπορούμε να επιλέξουμε d_i ώστε $\|x - d_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επίσης από τον Ισχυρισμό 3 υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left| \|d_i + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| - \|d_i + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\| \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

για $N \leq m < n$ στο M.

Τώρα για $N \leq m < n$ στο M

$$\begin{aligned}
\left| \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| - \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\| \right| &= \Bigg| \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| \pm \\
&\pm \|d_i + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| \pm \|d_i + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\| - \|x + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\| \Bigg| \\
&\leq 2\|x - d_i\| + \left| \|d_i + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + e_{\tau_k}\| - \|d_i + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e_{\tau_j} + y_n^m\| \right| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Τέλος, επιλέγουμε ένα $M \in [\mathbb{N}]^\omega$, όπως στον Ισχυρισμό 4 και έστω $M = (m_n)$. Θέτουμε τώρα $y_n = y_{m_{n+1}}^{m_n}$ για κάθε n. Από τον Ισχυρισμό 4 είναι φανερό οτι η (y_n) ικανοποιεί το συμπέρασμα.

(ii)$\Rightarrow$(i)

Έστω λοιπόν μια ακολουθία (y_n) στον Y που δίνει τον τύπο τ_j για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Για $x \in X$, $k \geq 1$, $i_1 < \ldots < i_k \in \mathbb{N}$ και $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned}
\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_{i_j}}\| &= \lim_{n_{i_k}} \ldots \lim_{n_{i_1}} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j y_{n_{i_j}}\| \\
&= \lim_{n_k} \ldots \lim_{n_1} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j y_{n_j}\| \\
&= \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\|
\end{aligned}$$

□

Έστω τώρα $\tau = (\tau_j)$ ένας indiscernible τύπος στον X και (x_n) μια ακολουθία στον X με

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\| = \lim_{n_k} \ldots \lim_{n_1} \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j x_{n_j}\|$$

για κάθε $x \in X$, $k \geq 1$ και $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη νόρμα $|\|\cdot\||$ στον $X \oplus c_{00}$ με

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_j\| = \|x + \sum_{j=1}^{k} c_{k-j+1} e_{\tau_j}\|$$

Είναι άμεσο οτι $|\|\cdot\||/X = \|\cdot\|$. Ακόμη έχουμε οτι

$$\begin{aligned}
|\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_j\|| &= \|x + \sum_{j=1}^{k} c_{k-j+1} e_{\tau_j}\| \\
&= \lim_{n_k} \ldots \lim_{n_1} \|x + c_k x_{n_1} + \ldots + c_1 x_{n_k}\| \\
&= \lim_{n_k} \ldots \lim_{n_1} \|x + c_1 x_{n_k} + \ldots + c_k x_{n_1}\| .
\end{aligned}$$

Άρα κάθε αντίστροφο spreading model του X ορίζει ένα spreading model του X.

Ας υποθέσουμε επιπλέον οτι ο $\tau = (\tau_j)$ είναι συμμετρικός. Τότε όπως έχουμε παρατηρήσει νωρίτερα για κάθε $x \in X$, $k \geq 1$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ και $(\varepsilon_j) \in \{-1, 1\}^k$

$$\|x + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j c_j e_{\tau_j}\| = \|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_{\tau_j}\|.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
|\|x + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j c_j e_j\|| &= \|x + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{k-j+1} c_{k-j+1} e_{\tau_j}\| \\
&= \|x + \sum_{j=1}^{k} c_{k-j+1} e_{\tau_j}\| \\
&= |\|x + \sum_{j=1}^{k} c_j e_j\||
\end{aligned}$$

Συνάγεται τώρα οτι για να δείξουμε οτι ένας χώρος Banach X έχει ένα 1-unconditional spreading model αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός indiscernible και συμμετρικού τύπου στον X.

Ορίζουμε τα σύνολα

$$T^1(Y,X) = \{\tau \in T(Y,X) : \|\tau\| = 1\}$$

$$T_S(Y,X) = \{\tau \in T(Y,X) : \tau \text{ συμμετρικός}\}$$

$$T_S^1(Y,X) = \{\tau \in T_S(Y,X) : \|\tau\| = 1\}$$

Πρόταση 3.2.20. *Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας κλειστός υπόχωρος του X και $D = (d_i)$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X. Εφοδιάζουμε επίσης το σύνολο $T(Y,X)$ και τον χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης*[1].

(i) *Η συνάρτηση $\phi : T(Y,X) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(\tau(x))_{x\in X} \to \phi(\tau) = (\tau(d_i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ένας ομοιομορφισμός των τοπολογικών χώρων $T(Y,X)$ και $\phi(T(Y,X))$. Ιδιαίτερα ο τοπολογικός χώρος $T(Y,X)$ είναι μετρικοποιήσιμος.*

(ii) *Το σύνολο $T(Y,X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

(iii) *Το σύνολο $T^1(Y,X)$ είναι συμπαγές.*

(iv) *Το σύνολο $T_S^1(Y,X)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. (i) Είναι φανερό οτι η συνάρτηση $\phi : T(Y,X) \to \phi(T(Y,X))$ είναι συνεχής και επί. Επίσης επειδή το D είναι πυκνό υποσύνολο του X έπεται οτι η ϕ είναι 1-1. Μένει να δείξουμε οτι η ϕ^{-1} είναι συνεχής. Έστω λοιπόν μια ακολουθία (τ_n) στο $T(Y,X)$ και $\tau \in T(Y,X)$ ώστε $\tau_n(d_i) \to \tau(d_i)$ για κάθε i. Γνωρίζουμε τώρα οτι οι τύποι είναι 1-Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις στον X (Παρατήρηση 3.2.2(iii)), έτσι για $x \in X$

$$\begin{aligned} |\tau(x) - \tau_n(x)| &\leq |\tau(x) - \tau(d_i)| + |\tau(d_i) - \tau_n(d_i)| + |\tau_n(d_i) - \tau_n(x)| \\ &\leq 2\|x - d_i\| + |\tau(d_i) - \tau_n(d_i)| \end{aligned} \tag{3.23}$$

Τώρα για $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $i \in \mathbb{N}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x - d_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$ και $\|\tau(d_i) - \tau_n(d_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ για $n \geq n_0$.

Για $n \geq n_0$ η σχέση (3.23) μας δίνει $|\tau(x) - \tau_n(x)| < \varepsilon$.

(ii) Από το (i) μπορούμε να θεωρούμε οτι ο τοπολογικός χώρος $T(Y,X)$ είναι τοπολογικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Έστω τώρα μια ακολουθία (τ_n) στο $T(Y,X)$ και

[1] Το σύνολο $T(Y,X)$ περιέχεται στον χώρο $\mathbb{R}^X$, ο οποίος θεωρείται εφοδιασμένος με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης (καρτεσιανή τοπολογία)

$f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με $\tau_n \to f$. Έστω ακόμη οτι οι ακολουθίες (y_k^n) του Y δίνουν τους τύπους τ_n. Τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$

$$f(d_i) = \lim_n \tau_n(d_i) = \lim_n \lim_k \|d_i + y_k^n\| .$$

Κατά τα γνωστά τώρα μπορούμε να επιλέξουμε μια φθίνουσα ακολουθία (M_i) απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε

$$f(d_i) = \lim_{n<k\in M_i} \|d_i + y_k^n\|$$

για κάθε i. Περνώντας σε ένα διαγώνιο υποσύνολο M της (M_i) θα έχουμε οτι

$$f(d_i) = \lim_{n<k\in M} \|d_i + y_k^n\|$$

για κάθε i. Έστω τώρα οτι $M = (m_j)$. Θέτοντας $(y_j) = (y_{m_{j+1}}^{m_j})$ παίρνουμε οτι

$$f(d_i) = \lim_j \|d_i + y_j\|$$

Από το (ii) της Πρότασης 3.2.8 έπεται οτι η (y_j) δίνει έναν τύπο τ στον X. Επειδή τώρα $\tau_n(d_i) \to \tau(d_i)$ για κάθε i έπεται οτι $\tau_n \to \tau$.
(iii) Έστω $\tau \in T^1(Y,X)$ και (y_k) μια ακολουθία στον Y που δίνει τον τ. Τότε $1 = \tau(0) = \lim_k \|y_k\|$.

Έτσι για κάθε $x \in X$ επειδή $\|x + y_k\| \leq \|x\| + \|y_k\|$ για κάθε k έχουμε οτι $\tau(x) \leq \|x\| + 1$ και άρα $\tau \in \prod_{x\in X}[0, \|x\|+1]$. Από το Θεώρημα Tychonoff έπεται οτι το σύνολο $\prod_{x\in X}[0, \|x\| + 1]$ είναι συμπαγές και έτσι αρκεί να δείξουμε οτι το $T^1(Y,X)$ είναι κλειστό. Έστω λοιπόν (τ_n) στο $T^1(Y,X)$ και $\tau \in T(Y,X)$ με $\tau_n \to \tau$. Έστω ακόμη (y_k^n) ακολουθίες στον Y που δίνουν τους τύπους (τ_n). Από την απόδειξη του (ii) υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\tau(x) = \lim_{n<k\in M} \|x + y_k^n\|$$

για κάθε $x \in X$. Μιας και $\|\tau_n\| = 1$ για κάθε n έπεται οτι $\lim_k \|y_k^n\| = 1$ για κάθε n. Θέτουμε $n_1 = \min M$ και επιλέγουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ με $k_1 > n_1$ ώστε $|\|y_k^{n_1}\| - 1| < 1$ για κάθε $k \geq k_1$. Έστω τώρα $i \geq 1$ και ας υποθέσουμε οτι έχουμε επιλέξει $n_1 < k_1 < \ldots < n_i < k_i$ ώστε $n_1, \ldots, n_i \in M$ και

$$|\|y_k^{n_j}\| - 1| < \frac{1}{j}$$

για κάθε $k \geq k_j$ και $1 \leq j \leq i$.

Επιλέγουμε τώρα $n_{i+1} \in M$ με $n_{i+1} > k_i$, τότε μπορούμε να βρούμε $k_{i+1} > n_{i+1}$ ώστε

$$||\|y_k^{n_{i+1}}\| - 1| < \frac{1}{i+1}$$

για κάθε $k \geq k_{i+1}$. Θεωρώντας τώρα την ακολουθία $(y_i) = (y_{n_{i+1}}^{n_i})$ έχουμε οτι $\tau(x) = \lim_i \|x + y_i\|$ και οτι $\lim_i \|y_i\| = 1$.

(iv) Αρκεί να δείξουμε οτι το $T_S^1(Y, X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς συνόλου $T^1(Y, X)$. Έστω λοιπόν μια ακολουθία (τ_n) στο $T_S^1(Y, X)$ και $\tau \in T(Y, X)$ με $\tau_n \to \tau$. Έστω ακόμη ακολουθίες (y_k^n) στον Y που δίνουν τους τύπους (τ_n) και από την απόδειξη του (ii) υπάρχει ένα $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε

$$\tau(x) = \lim_{n<k\in M} \|x + y_k^n\|$$

για κάθε $x \in X$. Από τη συμμετρικότητα των τύπων (τ_n) έχουμε οτι

$$\lim_k |\|x + y_k^n\| - \|x - y_k^n\|| = 0 \tag{3.24}$$

για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Έτσι για $i = 1$ και $n_1 = \min M$ μπορούμε να βρούμε $k_1 > n_1$ ώστε $|\|d_1 + y_k^{n_1}\| - \|d_1 - y_k^{n_1}\|| < 1$ για $k \geq k_1$.

Ας υποθέσουμε τώρα οτι $i \geq 1$ και οτι έχουμε επιλέξει $n_1 < k_1 \ldots < n_i < k_i$ με $n_1, \ldots, n_i \in M$ ώστε

$$\left|\|d_m + y_k^{n_j}\| - \|d_m - y_k^{n_j}\|\right| < \frac{1}{j}$$

για κάθε $1 \leq m \leq j$, $k \geq k_j$ και κάθε $1 \leq j \leq i$. Επιλέγουμε τώρα $n_{i+1} \in M$ με $n_{i+1} > k_i$. Από τη σχέση (3.24) μπορούμε να βρούμε $k_{i+1} \in \mathbb{N}$ με $k_{i+1} > n_{i+1}$ ώστε

$$|\|d_m + y_k^{n_{i+1}}\| - \|d_m - y_k^{n_{i+1}}\|| < \frac{1}{i+1}$$

για κάθε $1 \leq m \leq i+1$ και $k \geq k_{i+1}$. Θεωρώντας την ακολουθία $(y_i) = (y_{n_{i+1}}^{n_i})$ στον Y εύκολα βλέπουμε οτι

$$\tau(x) = \lim_i \|x + y_i\|$$

και

$$\lim_i = |\|d_j + y_i\| - \|d_j - y_i\|| = 0$$

για κάθε j.

Άρα ο τ είναι συμμετρικός τύπος στον X και έχουμε τελειώσει. □

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ την αναλογία μεταξύ του ισχυρισμού (iii) της Πρότασης 3.2.20 και του Θεωρήματος Alaoglou.

Ορισμός 3.2.21. Έστω X χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Ένας τύπος τ στον X που παράγεται από τον Y λέγεται **καθολικά συμμετρικός** αν ο τ είναι συμμετρικός και για κάθε πεπερασμένης διάστασης επέκταση Z του X υπάρχει $\beta \in T_S(Y,Z)$ ώστε $\beta/X = \tau$.

Συμβολίζουμε με $T_{us}(Y,X)$ το σύνολο όλων των καθολικά συμμετρικών τύπων στον X που παράγονται από τον Y.

Ορίζουμε επίσης το σύνολο $T^1_{us}(Y,X) = \{\tau \in T_{us}(Y,X) : \|\tau\| = 1\}$.

Έστω τώρα X χώρος Banach, Y ένας κλειστός υπόχωρος του X και X_1, X_2 δύο πεπερασμένης διάστασης επεκτάσεις του X με $X_1 = X \oplus [e_{n_i}]_{i=1}^k$, $X_2 = X \oplus [e_{m_i}]_{i=1}^k$ ώστε $n_1 < \ldots < n_k$, $m_1 < \ldots < m_k$ και η $T : X_1 \to X_2$ με

$$T(x + \sum_{i=1}^{k} a_i e_{n_i}) = x + \sum_{i=1}^{k} a_i e_{m_i}$$

να είναι ισομετρία. Είναι εύκολο να δούμε οτι αν $\tau \in T_S(Y, X_1)$ και δίνεται από την (y_n), τότε ο $\tau' : X_2 \to \mathbb{R}$ με

$$\tau'(x + \sum_{i=1}^{k} a_i e_{m_i}) = \lim_n \|x + \sum_{i=1}^{k} a_i e_{m_i} + y_n\|$$

είναι στοιχείο του $T_S(Y, X_2)$.

Λήμμα 3.2.22. *Έστω X χώρος Banach και $X_1, \ldots, X_k$ πεπερασμένης διάστασης επεκτάσεις του X. Τότε υπάρχουν μια πεπερασμένης διάστασης επέκταση Z του X και γραμμικές ισομετρίες $T_i : X_i \to Z$ για $1 \le i \le k$ ώστε*

$$I_X = T_i/X$$

για κάθε $1 \le i \le k$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το χώρο Banach $V = (\bigoplus_{i=1}^k X_i, \|\cdot\|_1)$, τον κλειστό υπόχωρο του V, $W = \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in V : x_i \in X, 1 \le i \le k \text{ και } \sum_{i=1}^k x_i = 0\right\}$ και το χώρο πηλίκο V/W. Για $1 \le i \le k$ θεωρούμε τις εμφυτεύσεις $I_i : X_i \to V$ και $S_i = \pi \circ I_i$, όπου π η κανονική προβολή του V επί του V/W.

Δείχνουμε τώρα οτι $S_1/X = S_i$ για $1 \le i \le k$. Έστω λοιπόν $x \in X$ και $1 \le i \le k$, τότε

$$\begin{aligned} S_1(x) = S_i(x) &\Leftrightarrow (x, 0, \ldots, 0) + W = (0, \ldots, x, \ldots, 0) + W \\ &\Leftrightarrow (x, 0, \ldots, -x, \ldots, 0) \in W \\ &\Leftrightarrow x \in X \quad \text{και} \quad x - x = 0, \end{aligned}$$

που ισχύει.

Για $1 \le i \le k$ έχουμε οτι $\|I_i\| = 1$. Επίσης είναι γνωστό οτι $\|\pi\| = 1$. Έτσι για $1 \le i \le k$, $\|S_i\| \le 1$ δηλαδή αν $y \in X_i$, τότε $\|S_i(y)\| \le \|y\|$. Για την απόδειξη της αντίστροφης ανισότητας επιλέγουμε $1 \le i \le k$ και $y \in X_i$. Τότε

$$\|S_i(x)\| = \inf \left\{ \|(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_k)\|_1 : (x_1, \ldots, x_k) \in W \right\}.$$

Τώρα για $(x_1, \ldots, x_k) \in W$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} \|(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_k)\|_1 &= \|x_i + y\| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{k} \|x_j\| \\ &\ge \left\| y + \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|, \ \text{αφού} \ x_i \in X, 1 \le i \le k \\ &= \|y\| \end{aligned}$$

αφού $\sum_{i=1}^{k} x_i = 0$, $1 \le i \le k$. Έτσι $\|S_i(y)\| \ge \|y\|$.

Θέτουμε τώρα $\tilde{X} = S_1(X)$ και $\tilde{X}_i = S_i(X_i)$, $1 \le i \le k$. Είναι άμεσο οτι $(\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X_{i-1}} + \tilde{X_{i+1}} + \ldots + \tilde{X}_k) \bigcap \tilde{X}_i = \tilde{X}$ για κάθε $1 \le i \le k$.

Θεωρούμε τώρα τον υπόχωρο του V/W, $Q = \tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_k$ από το προηγούμενο έπεται

$$\dim Q/\tilde{X} = \sum_{i=1}^{k} \dim \tilde{X}_i/\tilde{X} < \infty.$$

Επομένως ο Q είναι χώρος Banach. Για $1 \le i, j \le k$ θέτοντας $n_i = \dim \tilde{X}_i/\tilde{X}$ και

$$N_j = \sum_{i=1}^{j} n_i$$

έχουμε οτι υπάρχουν $x_i \in X_j$, $N_{j-1} + 1 \le i \le N_j$ και $1 \le j \le k$ ώστε

$$\tilde{X}_j = \tilde{X} \oplus [x_i]_{i=N_{j-1}+1}^{N_j}$$

και
$$Q = \tilde{X} \oplus (\oplus_{j=1}^{k} [x_i]_{i=N_{j-1}+1}^{N_j}).$$
Θεωρούμε τώρα τη νόρμα $|||\cdot||| : X \oplus [e_i]_{i=1}^{N_k}$ με
$$|||x + \sum_{i=1}^{N_k} a_i e_i||| = \|x + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=N_{j-1}+1}^{N_j} a_i x_i\|.$$
Θέτουμε $Z = X \oplus [e_i]_{i=1}^{N_k}$ και παρατηρούμε οτι η $T : Q \to Z$ με
$$T(x + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=N_{j-1}+1}^{N_j} a_i x_i) = x + \sum_{i=1}^{N_k} a_i e_i$$
είναι μια επί γραμμική ισομετρία. Τέλος, είναι φανερό οτι οι $T = T \circ S_i$, $1 \leq i \leq k$ ικανοποιούν το συμπέρασμα. □

Πρόταση 3.2.23. *Έστω X χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Τότε $T_{us}^1(X, Y) \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Έστω Z μια πεπερασμένης διάστασης επέκταση του X. Θεωρούμε το σύνολο $K_Z = \{\beta/X : \beta \in T_S^1(Y, Z)\}$. Είναι φανερό οτι αρκεί να δείξουμε οτι
$$\bigcap \{K_Z : Z \text{ πεπερασμένης διάστασης επέκταση του } X\} \neq \emptyset.$$
Παρατηρούμε οτι για Z όπως παραπάνω το K_Z είναι συμπαγές υποσύνολο του $T_S^1(Y, X)$. Πράγματι, έστω (τ_n) μια ακολουθία στο K_Z και (β_n) μια ακολουθία στο $T_S^1(Y, Z)$ ώστε $\beta_n/X = \tau_n$ για κάθε n. Από τη συμπάγεια του συνόλου $T_S^1(Y, Z)$ έπεται οτι υπάρχουν υπακολουθία (β_{n_k}) της (β_n) και $\beta \in T_S^1(Y, Z)$ με $\beta_{n_k} \to \beta$ κατά σημείο. Θέτοντας τώρα $\tau = \beta/X$ είναι άμεσο οτι $\tau_{n_k} \to \tau$ κατά σημείο. Έτσι αρκεί να δείξουμε οτι η οικογένεια υποσυνόλων του $T_S^1(Y, X)$, $\{K_Z : Z$ πεπερασμένης διάστασης επέκταση του $X\}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών.

Έστω λοιπόν $Z_1, \ldots, Z_k$ πεπερασμένης διάστασης επεκτάσεις του X. Από το προηγούμενο Λήμμα έπεται οτι υπάρχουν μια πεπερασμένης διάστασης επέκταση Z του X και γραμμικές ισομετρίες $T_i : Z_i \to Z$ ώστε $I_X = T_i/X$ για $1 \leq i \leq k$. Από το Θεώρημα 3.2.11 μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\beta \in T_S^1(Y, Z)$ και έστω μια ακολουθία (y_n) στον Y που δίνει τον β. Θέτουμε τώρα $\tau = \beta/X$ και $\beta_i : Z_i \to \mathbb{R}$ με
$$\beta_i(x) = \lim_n \|x + y_n\|.$$

Είναι άμεσο οτι $\tau \in T^1_S(Y,X)$. Επίσης επειδή $T_i/X = I_X$ για $1 \leq i \leq k$ έχουμε

$$\beta_i(x) = \lim_n \|x + y_n\| = \lim_n \|T_i(x) + y_n\| = \beta(T_i(x))$$

για κάθε $x \in Z_i$. Από τη γραμμικότητα των T_i έπεται οτι $\beta_i \in T^1_S(Y, Z_i)$, $1 \leq i \leq k$. Τέλος εύκολα βλέπουμε οτι $\beta_i/X = \tau$ για κάθε $1 \leq i \leq k$ και άρα $\tau \in \bigcap_{i=1}^k K_{Z_i}$. □

Πρόταση 3.2.24. *Έστω X χώρος Banach, Y ένας κλειστός υπόχωρος του X και V μια πεπερασμένης διάστασης επέκταση του X. Τότε για κάθε $\tau \in T^1_{us}(Y,X)$ υπάρχει $\beta \in T^1_{us}(Y,V)$ ώστε $\beta/X = \tau$.*

Απόδειξη. Έστω $\tau \in T^1_{us}(Y,X)$. Η απόδειξη είναι ανάλογη της προηγούμενης πρότασης. Εύκολα δείχνουμε οτι για μια πεπερασμένης διάστασης επέκταση Z του V το σύνολο

$$K_Z = \left\{\beta/V : \beta \in T^1_S(Y,Z) \text{ και } \beta/X = \tau\right\}$$

είναι συμπαγές υποσύνολο του $T^1_S(Y,V)$. Πάλι αρκεί να δείξουμε οτι η οικογένεια υποσυνόλων του $T^1_S(Y,V)$, $\{K_Z : Z$ πεπερασμένης διάστασης επέκταση του $V\}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών.

Έστω λοιπόν $Z_1, \ldots, Z_k$ πεπερασμένης διάστασης επεκτάσεις του V. Από το Λήμμα 3.2.22 θα υπάρχουν μια πεπερασμένης διάστασης επέκταση Z του V και γραμμικές ισομετρίες $T_i : Z_i \to Z$ με $I_V = T_i/V$ για $1 \leq i \leq k$. Όπως στην προηγούμενη πρόταση αρκεί να υπάρχει ένας τύπος $\beta \in T^1_S(Y,Z)$ με $\beta/X = \tau$. Τώρα ο V σαν πεπερασμένης διάστασης επέκτασης του X είναι της μορφής $X \oplus [e_i]_{i=1}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αν τώρα $\dim Z/V = k$ από τη συζήτηση που προηγήθηκε του Λήμματος 3.2.22 μπορούμε να υποθέσουμε οτι ο Z είναι της μορφής $X \oplus [e_i]_{i=1}^n \oplus [e_i]_{i=n+1}^{n+k}$. Έτσι ο Z είναι πεπερασμένης διάστασης επέκταση του X και επειδή $\tau \in T^1_{us}(Y,X)$ υπάρχει $\beta \in T^1_S(Y,Z)$ ώστε $\beta/X = \tau$. □

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 3.2.25. *Έστω X χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Τότε ο X έχει ένα 1-unconditional spreading model παραγόμενο από τον Y.*

Απόδειξη. Όπως έχουμε παρατηρήσει νωρίτερα αρκεί να δείξουμε οτι υπάρχει ένας indiscernible και συμμετρικός τύπος στον X παραγόμενος από τον Y.

Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά έναν τύπο στον X με τις παραπάνω ιδιότητες. Από την Πρόταση 3.2.23 μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\tau_1 \in T^1_{us}(Y,X)$. Επειδή τώρα ο χώρος Banach X_{τ_1} είναι πεπερασμένης διάστασης επέκταση του X από την Πρόταση 3.2.24 υπάρχει $\tau_2 \in T^1_{us}(Y, X_{\tau_1})$ ώστε $\tau_2/X_{\tau_0} = \tau_1$. Έστω τώρα $k \geq 1$ και ας υποθέσουμε οτι έχουμε επιλέξει $\tau_1, \ldots, \tau_k$ με $\tau_j \in T^1_{us}(Y, X_{\tau^{j-1}})$ ($X_{\tau^{j-1}} = X_{(\tau_1,\ldots,\tau_{j-1})}$), $1 \leq j \leq k$ ώστε $\tau_{j+1}/X_{\tau^{j-1}} = \tau_j$, $1 \leq j \leq k$. Αφού τώρα ο X_{τ^k} είναι πεπερασμένης διάστασης επέκταση του $X_{\tau^{k-1}}$ και $\tau_k \in T^1_{us}(Y, X_{\tau^{k-1}})$ πάλι από την Πρόταση 3.2.24 έπεται οτι υπάρχει $\tau_{k+1} \in T^1_{us}(Y, X_{\tau^k})$ ώστε $\tau_{k+1}/X_{\tau^{k-1}} = \tau_k$. Τώρα από την Πρόταση 3.2.19 έπεται το συμπέρασμα. □

Θεώρημα 3.2.26. *Έστω X ένας χώρος Banach και $\varepsilon > 0$. Τότε κάθε κλειστός υπόχωρος Y του X περιέχει οσοδήποτε μεγάλου (πεπερασμένου) μήκους κανονικοποιημένες $(1+\varepsilon)$-unconditional βασικές ακολουθίες.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο Θεώρημα μπορούμε να θεωρήσουμε ένα 1-unconditional spreading model του X παραγόμενο από τον Y, $((e_i), |||\cdot|||)$ και έστω (y_n) μια κανονικοποιημένη ακολουθία στον Y ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\delta > 0$ να υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$(1-\delta)|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\| \leq (1+\delta)|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| \qquad (3.25)$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ και $N \leq n_1 < \ldots < n_k$ στο $\mathbb{N}$. Έστω οτι δίνεται ένας θετικός ακέραιος k, επιλέγουμε $\delta > 0$ με $\frac{1+\delta}{1-\delta} < 1+\varepsilon$ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει η (3.25). Έστω ακόμη $N \leq n_1 < \ldots < n_k$ στο $\mathbb{N}$ και $\varepsilon_i = \pm 1$ για $1 \leq i \leq k$. Από την 1-unconditionality του spreading model και την (3.25) έχουμε οτι

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i y_{n_i}\| &\leq (1+\delta)|||\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i e_i||| \\
&\leq (1+\delta)|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| \\
&\leq \frac{1+\delta}{1-\delta}\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\| < (1+\varepsilon)\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\|.
\end{aligned}$$

□

Βιβλιογραφία

[1] F. Albiac and N.J. Kalton, Topics in Banach space theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 233, Springer, New York, 2006.

[2] A. Brunel and L. Sucheston, On J-convexity and ergodic super-properties of Banach spaces, T.A.M.S. 204 (1975), p. 79-90.

[3] M.M. Day, On the basis problem in normed spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 13 (1962), p. 655-658.

[4] J. Diestel, Sequences and Series in Banach spaces, Graduate Texts in Mathematics, vol. 92, Springer-Verlag, New York, 1984.

[5] J. Dugundji, Topology, Boston, Allyn and Bacon, 1966.

[6] J. Elton and E. Odell, The unit ball of every infinite-dimensional normed linear space contains a $(1+\varepsilon)$-separated sequence, Colloquium Mathematicum XLIV (1981), p.105-109.

[7] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant and V. Zizler, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, CMS Books in Mathematics 8, Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler, Banach Space Theory. The basis for Linear and NONlinear Analysis, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2011.

[9] C. Kottman, Subsets of the unit ball that are separated more than one, Studia Mathematica 53 (1975), p.15-27.

[10] A. Kryczka and S. Prus, Separated sequences in nonreflexive Banach spaces, Proc. Am. Math. Soc. 129 (2000), p.155-163.

[11] J. Lindestrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces I, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Sequence Spaces.

[12] S.K. Mercourakis and G. Vassiliadis, Equilateral stes in infinite dimensional Banach spaces, υπό δημοσίευση στο Proc. Math. Soc.

[13] H.P. Rosenthal, Some remarks concerning unconditional basic sequences, Longhorn Notes, The University of Texas, Texas Functional Analysis Seminar (1982-1983), p.15-47.

[14] P. Terenzi, Succesioni regolari negli spaci di Banach, Milan J. of Mathematics, 57, no.1 (1987), 275-285.