

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών στα
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
Διπλωματική Εργασία

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΚΑΣΤΑΝΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ

Δεκέμβριος 2012

Αφιερωμένη,
στον αδελφό μου Μιχάλη.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ.Ι.Στρατή, μέλος ΔΕΠ του τμήματος μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α. για τη άριστη συνεργασία μας, την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και τις πολύτιμες συμβουλές και παρατηρήσεις του, καθόλη τη διάρκεια της μελέτης και συγγραφής της εργασίας.

Επίσης τα μέλη ΔΕΠ του τμήματος μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α. κυρίους Χ.Αθανασιάδη και Γ.Μπαρμπάτη για την τιμή που μου έκαναν, με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή μου.

Τον κύριο Γ.Κουνάδη για την πολύτιμη βοήθεια του.

Τέλος όλους τους καθηγητές μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα για τις γνώσεις που μου μετέδωσαν καθώς και τους συμφοιτητές μου για τη συνεργασία τους.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	5
2	Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων.	12
2.1	Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα	12
3	Μέθοδος του <i>Tartar</i> των ταλαντευόμενων συναρτήσεων δοκιμής.	18
3.1	Σύγκλιση της ενέργειας	19
3.2	Διορθωτές	20
3.2.1	Μερικά συγκριτικά αποτελέσματα	21
4	Ομογενοποίηση της εξίσωσης της θερμότητας	23
4.1	Το αποτέλεσμα της ομογενοποίησης	31
4.2	Σύγκλιση της ενέργειας	35
4.3	Διορθωτές	37
5	Μέθοδος σύγκλισης 2 κλιμάκων	42
5.1	Διορθωτές	44
6	Ορισμοί και θεωρήματα	45
6.0.1	Χώροι <i>Sobolev</i>	49

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο στόχος αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει μια εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία της ομογενοποίησης. Αυτή η θεωρία έχει εισαχθεί προκειμένου να περιγράψει τη συμπεριφορά των σύνθετων υλικών.

Τα σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι περιέχουν 2 ή περισσότερα μικτά συστατικά. Αυτά χρησιμοποιούνται ευρέως στις μέρες μας στη βιομηχανία λόγω των χαρακτηριστικών τους ιδιοτήτων. Πράγματι σε γενικές γραμμές έχουν μια καλύτερη συμπεριφορά από το μέσο όρο συμπεριφορών των ατομικών τους συστατικών. Γνωστά παραδείγματα είναι αυτά των υπεραγωγίων πολυνηματικών σύνθετων τα οποία χρησιμοποιούνται στην κατασκευή οπτικών ινών.

Σε γενικές γραμμές, σε ένα σύνθετο υλικό οι ετερογένειες είναι μικρές σε σύγκριση με την ολική διασταση του. Έτσι αυτό το υλικό χαρακτηρίζεται από 2 κλίμακες, τη μικροσκοπική που περιγράφει τις ετερογένειες και την μακροσκοπική που περιγράφει την ολική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού. Από τη μακροσκοπική άποψη, το σύνθετο μοιάζει σαν ομογενές υλικό. Ο στόχος της ομογενοποίησης είναι ακριβώς να δώσει μακροσκοπικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού λαμβανοντας υπόψη τις ιδιότητες από την μικροσκοπική δομή του.

Χαρακτηριστική περίπτωση που αξίζει την προσοχή μας είναι το πρόβλημα της σταθερής θερμικής αγωγιμότητας σε ένα ισότροπο σύνθετο υλικό.

Εξετάζουμε πρώτα ένα ομογενές σώμα που καταλαμβάνει το Ω με θερμική αγωγιμότητα γ . Για απλότητα υποθέτουμε ότι το υλικό είναι ισότροπο, το οποίο σημαίνει ότι το γ είναι βαθμωτό. Ας υποθέσουμε ότι το f αντιπροσωπεύει την πηγή της θερμότητας και το g αντιπροσωπεύει την θερμοκρασία στην επιφάνεια $\partial\Omega$ του σώματος, την οποία μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι ίση με μηδέν.

Τότε η θερμοκρασία $u = u(x)$ στο σημείο $x \in \Omega$ ικανοποιεί το παρακάτω ομογενές πρόβλημα του *Dirichlet* :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\gamma \nabla u(x)) = f(x) & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

όπου ∇u υποδηλώνει την κλίση (*gradient*) του u που ορίζεται ως $\nabla u = gradu = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$. Δεδομένου ότι το γ είναι σταθερά το παραπάνω μπορεί να ξαναγραφεί στην μορφή:

$$\begin{cases} -\gamma \Delta u = f & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

όπου $\Delta u = \text{div}(gradu)$.

Η ροή της θερμοκρασίας ορίζεται από $q = \gamma gradu$. Αυτό είναι ένα κλασσικό ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών. Γι'αυτό το πρόβλημα είναι γνωστό ότι αν η f είναι αρκετά λεία τότε δέχεται μια μοναδική λύση u η οποία είναι 2 φορές διαφορίσιμη οπότε και το προηγούμενο σύστημα έχει λύση για κάθε $x \in \Omega$.

Εάν τώρα θεωρήσουμε το ετερογενές υλικό που καταλαμβάνεται μέσα στο Ω τότε η θερμική αγωγιμότητα παίρνει διαφορετικές τιμές σε κάθε συστατικό του σύνθετου υλικού. Ως εκ τούτου το γ τώρα είναι μια συνάρτηση, η οποία είναι ασυνεχής στο Ω , δεδομένου ότι κάνει άλματα πάνω στις επιφάνειες που διαχωρίζουν τα συστατικά. Για απλοποίηση ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μείγμα το οποίο καταλαμβάνει το (υπο)πεδίο ορισμού Ω_1 και ένα δεύτερο το (υπο)πεδίο ορισμού Ω_2 όπου $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ και $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2)$.

Ας υποθέσουμε επίσης ότι η θερμική αγωγιμότητα του σώματος που καταλαμβάνει το Ω_1 είναι γ_1 και ότι του σώματος που καταλαμβάνει το Ω_2 είναι γ_2 , δηλαδή:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1, & x \in \Omega_1 \\ \gamma_2, & x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

Στη συνέχεια η θερμοκρασία και η ροή της θερμοκρασίας σε ένα σημείο $x \in \Omega$ του σύνθετου υλικού λαμβάνουν τιμές:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1 \\ u_2(x), & x \in \Omega_2 \end{cases} \quad \text{και} \quad q = \begin{cases} q_1 = \gamma_1 gradu_1, & \Omega_1 \\ q_2 = \gamma_2 gradu_2, & \Omega_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

Οι συνήθεις φυσικές υποθέσεις είναι η συνέχεια της θερμοκρασίας u και της ροής q στο σημείο διεπαφής των 2 υλικών δηλαδή:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 & \text{στο } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \\ q_1 n_1 = q_2 n_2 & \text{στο } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (1.5)$$

όπου n_i είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2$ και $n_1 = -n_2$ στο $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Συνεπώς η θερμοκρασία u είναι η λύση του στατικού θερμικού προβλήματος. Τότε το αντίστοιχο σύστημα (1.1) δίνει:

$$\begin{cases} -\text{div}(\gamma(x)gradu(x)) = f(x), & \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \\ u_1 = u_2 & \text{στο } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \\ q_1 n_1 = q_2 n_2 & \text{στο } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (1.6)$$

Τυπικά μπορούμε να γράψουμε αυτό το σύστημα στη μορφή :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

Απο την (1.5) συνεπάγεται ότι η κλίση του u είναι ασυνεχής. Επιπλέον γενικώς η ροή δεν είναι διαφορίσιμη.

Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις ασυνέχειες οι ερωτήσεις που προκύπτουν είναι, ποιά είναι η κατάλληλη μαθηματική διατύπωση αυτού του προβλήματος και σε ποιούς συναρτησιακούς χώρους μπορεί να έχει λύση.

Οι απαντήσεις σε αυτές τις ερωτήσεις μπορεί να δοθούν εισάγοντας την έννοια της ασθενούς λύσης. Είναι δομημένη πάνω στην έννοια της ασθενούς παραγώγου, η λεγόμενη παράγωγος με την έννοια των κατανομών. Αυτό θα το ορίσουμε στην παράγραφο "θεωρήματα και ορισμοί" όπου επίσης θα εισάγουμε και τους χώρους *Sobolev* που αποτελούν το φυσικό συναρτησιακό πλαίσιο για την ασθενή λύση.

Στον ορισμό της ασθενούς λύσης, το πρόβλημα (1.7) αντικαθίσταται από τη μεταβολική διατύπωση του δηλαδή, βρίσκω $u \in H$ όπου :

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \gamma(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H. \quad (1.8)$$

όπου H είναι ο κατάλληλος χώρος *Sobolev* λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες για την u . Στην (1.8) οι παράγωγοι λαμβάνονται με την έννοια των κατανομών.

Φυσικά αν η u είναι επαρκώς λεία τότε οι (1.7), (1.8) θα ήταν ισοδύναμες. Όπως φαίνεται παραπάνω, αυτό δεν ισχύει για ένα σύνθετο υλικό, έτσι το νόημα που πρέπει να αποδοθεί στην (1.7) είναι μόνο ότι η u λύνει το (1.8). Ας επισημάνουμε ότι η εξίσωση (1.8) επαληθεύεται για κάθε v που ανήκει στον χώρο H . Αυτός είναι ο λόγος που η v ονομάζεται συνήθως συνάρτηση δοκιμής. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της ασθενούς λύσης του (1.8) θα αναφερθεί παρακάτω.

Ας γυρίσουμε πίσω στο ζήτημα της μακροσκοπικής συμπεριφοράς του σύνθετου υλικού που καταλαμβάνει το Ω . Ας υποθέσουμε ότι οι ετερογένειες είναι πολύ μικρές σε σχέση με το μέγεθος του συνόλου Ω και ότι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Αυτή είναι μια ρεαλιστική υπόθεση για μια μεγάλη κατηγορία εφαρμογών.

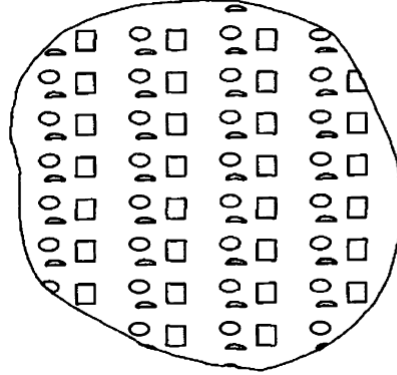
Από μαθηματικής αποψη, μπορεί κανείς να μοντελοποιήσει αυτήν την κατανομή υποθέτοντας ότι είναι περιοδική. Αυτή η περιοδικότητα μπορεί να αναπαρασταθεί από μια παράμετρο "ε". Έτσι ο συντελεστής γ στην (1.8) εξαρτάται από το ε και η (1.8) γίνεται:

$$\begin{cases} \text{Ευρεση } u^\varepsilon \in H \text{ όπου :} \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \gamma^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H \end{cases} \quad (1.9)$$

Ενας φυσικός τρόπος να εισάγουμε την περιοδικότητα του γ^ε στην (1.9) είναι να υποθέσουμε ότι έχει την μορφή:

$$\gamma^\varepsilon(x) = \gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (1.10)$$

στον $\mathbb{R}^N$, όπου γ είναι μια δοσμένη περιοδική συνάρτηση της περιόδου Y . Αυτό σημαίνει ότι μας δίνεται μια περίοδος αναφοράς Y (στην οποία δίνονται οι ετερογένειες αναφοράς). Από τον ορισμό (1.10) οι ετερογένειες στο Ω είναι περιοδικές με περίοδο εY και το μέγεθος



τους είναι της τάξης του ε .

Το πρόβλημα (1.9) μπορεί να γραφεί:

ΣΧΗΜΑ 1

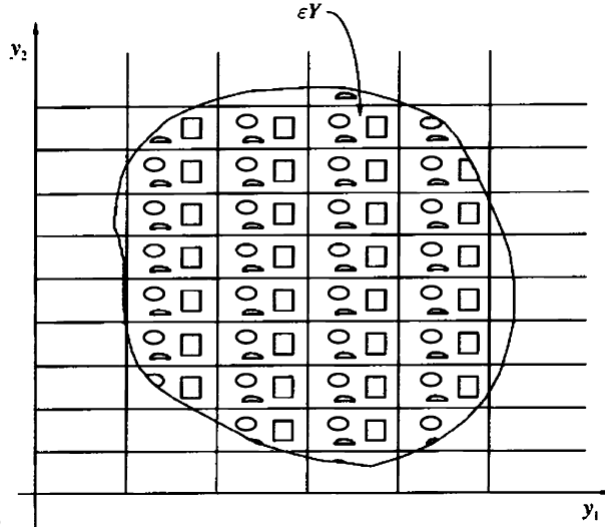
$$\begin{cases} \text{Ευρεση } u^\varepsilon \in H \text{ όπου :} \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H \end{cases} \quad (1.11)$$

Παρατηρούμε ότι οι 2 κλίμακες χαρακτηρίζουν το πρόβλημα (1.11), η μακροσκοπική κλίμακα x και η μικροσκοπική κλίμακα $\frac{x}{\varepsilon}$ που περιγράφει τις μικρές ταλαντώσεις.

Οι ασυνέχειες αυτού του προβλήματος κάνουν αυτό το μοντέλο πολύ δύσκολο στη μεταχείριση, ιδίως από αριθμητική άποψη. Επίσης η σημειακή γνώση των χαρακτηριστικών του υλικού δεν παρέχει με απλό τρόπο όλες τις πληροφορίες σχετικά με την ολική συμπεριφορά. Παρατηρούμε επίσης ότι κάνοντας τις ετερογένειες ολο και πιο μικρές αυτό σημαίνει ότι ομογενοποιούμε το μείγμα και από μαθηματικής άποψης αυτό σημαίνει ότι το $\varepsilon \rightarrow 0$. Παίρνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$ είναι η μαθηματική ομογενοποίηση του προβλήματος (1.11).

Φυσικά υπάρχουν πολλά ερωτήματα που προκύπτουν όπως:

- 1) η θερμοκρασία u^ε συγκλίνει σε ορισμένο όριο-συνάρτηση u^0 ;
- 2) εάν αυτό ισχύει, το u^0 επιλύει κάποιο πρόβλημα συνοριακών τιμών;
- 3) είναι οι συντελεστές του οριακού προβλήματος σταθεροί;
- 4) τελικά το u^0 αποτελεί μια καλή προσέγγιση του u^ε ;



ΣΧΗΜΑ 2

Η απάντηση σε αυτές τις ερωτήσεις είναι ο στόχος της μαθηματικής θεωρίας της ομογενοποίησης. Αυτές οι ερωτήσεις είναι πολύ σημαντικές στις εφαρμογές, εαν σε κάποια απο τις παραπάνω μπορεί να δοθεί θετική απάντηση. Τότε το όριο των συντελεστών που είναι επίσης γνωστό απο μηχανικούς και φυσικούς, αποτελούν καλές προσεγγίσεις των γενικών χαρακτηριστικών του σύνθετου υλικού εαν θεωρηθεί σαν ομογενές. Επιπλέον, αντικαθιστώντας το πρόβλημα απο το όριο μας επιτρέπει να κάνουμε εύκολα αριθμητικούς υπολογισμούς. Η πρώτη παρατήρηση είναι οτι η συνάρτηση γ^ε συγκλίνει με ασθενή τρόπο στη μέση τιμή του γ δηλαδή

$$\int_{\Omega} \gamma^\varepsilon(x) v(x) dx \longrightarrow \int_{\Omega} M_y(\gamma) v(x) dx \quad (1.12)$$

για οποιαδήποτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση v , εδώ η μέση τιμή ορίζεται ως $M_y(\gamma) = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} \gamma(y) dy$. Αυτό το αποτέλεσμα της σύγκλισης της περιοδικής συνάρτησης καθώς και η έννοια της ασθενούς σύγκλισης και των συναφών ιδιοτήτων θα παρουσιαστούν παρακάτω στην εργασία. Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε οτι η u^ε συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση u^0 και οτι ∇u^ε συγκλίνει ασθενώς στο ∇u^0 .

Η ερώτηση είναι πότε αυτές οι συγκλίσεις και η σύγκλιση (1.12) είναι επαρκείς για την ομογενοποίηση του προβλήματος (1.11). Για να γίνει αυτό ,πρέπει κανείς να περάσει το όριο στο γινόμενο $\gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$. Αυτή μάλιστα είναι η κύρια δυσκολία στην θεωρία της ομογενοποίησης. Στην πραγματικότητα,σε γενικές γραμμές το γινόμενο δυο ασθενώς συγκλινουσών ακολουθιών δεν συγκλίνει στο γινόμενο των ασθενών ορίων. Παρακάτω θα δείξουμε οτι υπάρχει διανυσματική συνάρτηση ξ , ασθενές όριο του γινομένου $\gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$ και ικανοποιεί την εξίσωση

$$-\operatorname{div} \xi = f \quad (1.13)$$

αλλά $\xi \neq M_y(\gamma) \nabla u^0$, δεν μπορεί εύκολα κανείς να συναγάγει μια εξίσωση που να ικανοποιείται απο το u^0 . Αυτό ήδη συμβαίνει στη μονοδιάστατη περίπτωση όπου Ω είναι κάποιο

διάστημα $[d_1, d_2]$. Έχω $\xi = \frac{1}{M_y(\gamma)} \frac{du^0}{dx}$. Επιπλέον, u^0 είναι η μοναδική λύση του ομογενούς προβλήματος:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{M_y(\frac{1}{\gamma})} \frac{du^0}{dx} \right) = f & \text{στο } [d_1, d_2] \\ u^0(d_1) = u^0(d_2) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Σαφώς $\xi \neq M_y(\gamma) \nabla u^0$, δεδομένου ότι $\frac{1}{M_y(\frac{1}{\gamma})} \neq M_y(\gamma)$. Ακόμα και για τη μονοδιάστατη περίπτωση αυτό το αποτέλεσμα ομογενοποίησης δεν είναι τετριμμένο. Αυτή η κατάσταση είναι φυσικά πιο περίπλοκη στην γενική N-διάστατη περίπτωση. Το μονοδιάστατο αποτέλεσμα θα μπορούσε να προτείνει ότι στην N-διάστατη περίπτωση το οριακό πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί από την άποψη της μέσης τιμής του γ^{-1} . Αυτό δεν είναι αλήθεια στην περίπτωση όπου έχουμε στρώματα υλικών όπου το γ εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή την x_1 . Σε αυτή τη περίπτωση το ομογενοποιημένο πρόβλημα του (1.11) είναι:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f & \text{στο } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.15)$$

όπου ο ομογενοποιημένος πίνακας A^0 είναι σταθερός, διαγώνιος και δίνεται από:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_y(\gamma^{-1})} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M_y(\gamma) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & M_y(\gamma) \end{bmatrix}$$

Επισημαίνουμε εδώ ότι το ομογενοποιημένο υλικό δεν είναι πλέον ιστροπικό από τη στιγμή όπου το A^0 δεν είναι στη μορφή $a^0 I$. Παρατηρούμε επίσης ότι σε αυτά τα ιδιαίτερα παραδείγματα της μονοδιάστατης περίπτωσης και των υλικών σε στρώσεις, οι ομογενοποιημένοι συντελεστές είναι αλγεβρικοί τύποι που αφορούν το γ . Για τη γενική N-διάστατη περίπτωση το ομογενές πρόβλημα είναι ακόμη στην μορφή (1.15). Οι συντελεστές του A^0 ορίζονται με τη βοήθεια κάποιων περιοδικών συναρτήσεων που είναι οι λύσεις μερικών προβλημάτων συνοριακών τιμών του ίδιου τύπου με αυτού του (1.11) που διατυπώνονταν στο Υ κελί αναφοράς. Οι συντελεστές a_{ij}^0 του πίνακα A^0 ορίζονται από:

$$a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y \gamma \delta_{ij} dy - \frac{1}{|Y|} \int_Y \gamma \frac{\partial \chi_j}{\partial y_i} dy \quad \forall i, j = 1, \dots, N. \quad (1.16)$$

όπου δ_{ij} είναι το σύμβολο του *Kronecker*. Η συνάρτηση χ_j για $j = 1, \dots, N$ είναι η λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\gamma(y) \nabla \chi_j) = -\frac{\partial \gamma}{\partial y_j} & \text{στο } Y \\ \chi_j & \text{περιοδική} \\ M_y(\chi_j) = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Αυτό το αποτέλεσμα θ'αποδειχθεί στην εργασία με διάφορους τρόπους. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, η οποία συνίσταται στην αναζήτηση του u^ε

με την μορφή:

$$u^\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \quad (1.18)$$

όπου $u_j = u_j(x, y)$ είναι Y -περιοδική ως προς τη δεύτερη μεταβλητή y . Η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων είναι μια κλασσική μέθοδος όπου χρησιμοποιείται ευρέως απο μηχανικούς και φυσικούς για προβλήματα που περιέχουν πολλές μικρές παραμέτρους περιγράφοντας διαφορετικές κλίμακες. Το ενδιαφέρον της μεθόδου είναι οτι σε γενικές γραμμές μας επιτρέπει να έχουμε το ομογενοποιημένο πρόβλημα.

Μια άλλη μέθοδος είναι η μέθοδος των ταλαντευόμενων δοκιμαστικών συναρτήσεων που έχει εισαχθεί απο τον *L.Tartar*. Όπως έχουμε δει παραπάνω στο πρόβλημα (1.11) η συνάρτηση u^ε είναι συνεχής στην επιφάνεια $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, αλλά η κλίση της συμπεριφέρεται κατα τέτοιο τρόπο ώστε η ροή $\gamma \nabla u^\varepsilon$ να παραμένει ίδια. Η ιδέα της μεθόδου του *Tartar* είναι να κατασκευάσουμε δοκιμαστικές συναρτήσεις $v = \omega_j^\varepsilon \varphi$ για την (1.11) έχοντας το ίδιο είδος ασυνέχειας του u^ε και έχοντας ενα γνωστό όριο.

Για το παράδειγμα μας έχουμε: $\omega_j^\varepsilon(x) = -\chi_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + x_j$ $j = 1, \dots, N$. και φ είναι μια λεία συνάρτηση στο $\partial\Omega$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις συναρτήσεις δοκιμής στη μεταβολική διατύπωση (1.11) μπορούμε να πάρουμε το όριο και να ταυτίσουμε το ξ με τους όρους u^0 . Στην πραγματικότητα βρίσκουμε ενα ξ με την μορφή: $\xi = A^0 \nabla u^0$. Αυτή μαζί με την (1.14) δίνει το ομογενοποιημένο πρόβλημα. Θα δούμε επίσης σε αυτήν την εργασία ενα καλύτερο αποτέλεσμα που αφορά το πρόβλημα (1.11) γ'αυτο θα εισάγουμε τον πίνακα διόρθωσης $C^\varepsilon = C_{ij}^\varepsilon$ $i, j = 1, \dots, N$ που ορίζονται απο: $C_{ij}^\varepsilon(x) = \frac{\partial \omega_j}{\partial y_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ όπου ω_j έχει οριστεί πιο πριν. Τότε $\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0 \rightarrow 0$ σε μια συνηθισμένη ισχυρή σύγκλιση. Επιπλέον παρατηρούμε οτι οταν εφαρμόζουμε την μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων έχουμε:

$$u_1(x, y) = \sum_{j=1}^N \chi_j(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \nabla u^\varepsilon(x) &= \nabla u^0(x) - \sum_{k=1}^N \nabla_y \chi_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(x) - \varepsilon \sum_{k=1}^N \hat{\chi}_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)(x) + \dots \\ &= C^\varepsilon(x) \nabla u^0(x) - \varepsilon \sum_{k=1}^N \chi_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)(x) + \dots \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου $C^\varepsilon(x) \nabla u^0(x)$ είναι ο πρώτος όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος (1.18) του ∇u^ε . Ένας 3ος τρόπος είναι η μέθοδος της διπλής κλίμακας η οποία λαμβάνει υπόψη τη "two-scale convergence". Αυτή η σύγκλιση είναι δοκιμασμένη σε συναρτήσεις της μορφής $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$. Ενα απο τα πιο ενδιαφέροντα στοιχεία αυτής της μεθόδου είναι οτι δικαιολογεί μαθηματικώς το ασυμπτωτικο ανάπτυγμα.

Κεφάλαιο 2

Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων.

Εστω u^ε η λύση του προβλήματος :

$$\begin{cases} A_\varepsilon u^\varepsilon = f & \text{στο } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

όπου A_ε ορίζεται απο

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla) = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (2.2)$$

με $\alpha_{ij}^\varepsilon(x) = \alpha_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})$ στον $\mathbb{R}^N \quad \forall i, j = 1, \dots, N$, και

$$\begin{cases} \alpha_{ij} & Y - \text{περιοδική} \quad \forall i, j = 1, \dots, N, \\ A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in M(\alpha, \beta, Y), \end{cases} \quad (2.3)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $0 < \alpha < \beta$ και $M(\alpha, \beta, Y)$ όπως έχει οριστεί στα θεωρήματα. Το Y ορίζει το κελί αναφοράς που δίνεται ως $Y = [0, l_1] \times \dots \times [0, l_N]$, όπου $l_1, \dots, l_N$ είναι δοσμένοι θετικοί αριθμοί.

2.1 Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

Όπως προαναφέρθηκε στην εισαγωγή, 2 κλίμακες περιγράφουν το πρόβλημα: η μεταβλητή x απο την μακροσκοπική πλευρά και η $\frac{x}{\varepsilon}$ που περιγράφει την μικροσκοπική πλευρά. Πράγματι εαν $x \in \Omega$, απο τον ορισμό του Y , υπάρχει μια σταθερά $k \in \mathbb{Z}^N$ τέτοια ώστε $\frac{x}{\varepsilon} = (k_l + y)$ με $y \in Y$ και όπου $k_l = (k_1 l_1, \dots, k_N l_N)$. Έτσι το x δίνει τη θέση του σημείου στο πεδίο ορισμού Ω ενώ το y δίνει τη θέση του στο κελί αναφοράς Y .

$$u^\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \quad (2.4)$$

με $u_j(x, y)$ για $j = 1, 2, \dots$ τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} u_j(x, y) & \text{ορίζεται για } x \in \Omega \text{ και } y \in Y \\ u_j(\cdot, y) & \text{είναι } U \text{ περιοδική} \end{cases} \quad (2.5)$$

Εστω $\Psi = \Psi(x, y)$ μια συνάρτηση εξαρτώμενη απο τις δυο μεταβλητές στον $\mathbb{R}^N$ και ορίζεται απο την Ψ_ε ακόλουθη σχέση:

$\Psi_\varepsilon(x) = \Psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ η οποία εξαρτάται απο μια μόνο μεταβλητή. Σημειώνουμε οτι:

$$\frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Ετσι μπορούμε να γράψουμε το $A_\varepsilon \Psi_\varepsilon$ ως εξής:

$$A_\varepsilon \Psi_\varepsilon(x) = [(\varepsilon^{-2} A_0 + \varepsilon^{-1} A_1 + A_2) \Psi]\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (2.6)$$

όπου

$$\begin{cases} A_0 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ A_1 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ A_2 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \end{cases} \quad (2.7)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στο αρχικό πρόβλημα προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} A_0 u_0 = 0 & \text{στο } Y \\ u_0 & Y\text{-περιοδική στο } y, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} A_0 u_1 = -A_1 u_0 & \text{στο } Y \\ u_1 & Y\text{-περιοδική στο } y, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} A_0 u_2 = f - A_1 u_1 - A_2 u_0 & \text{στο } Y \\ u_2 & Y\text{-περιοδική στο } y, \end{cases} \quad (2.10)$$

και

$$\begin{cases} A_0 u_{s+2} = -A_1 u_{s+1} - A_2 u_s & \text{στο } Y \\ u_{s+2} & Y\text{-περιοδική στο } y, \end{cases} \quad (2.11)$$

για $s \geq 1$.

Σημείωση 1 Ας παρατηρήσουμε την κατασκευή αυτού του συστήματος. Οι άγνωστοι u_j μπορούν να προσδιοριστούν επιτυχώς. Πράγματι η πρώτη εξίσωση περιλαμβάνει μονο τον άγνωστο u_0 . Αν το u_0 είναι γνωστό τότε η δεύτερη εξίσωση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το u_1 . Όμοια απο την τρίτη εξίσωση μπορούμε να προσδιορίσουμε το u_2 απο τους όρους u_0 και u_1 .

Σημείωση 2 Σημειώνουμε επίσης ότι ο τελεστής A_0 ο οποίος εμφανίζεται σε κάθε εξίσωση έχει την ίδια μορφή του A_ε με το $\frac{x}{\varepsilon}$ να αντικατασταθεί από το y . Είναι δεύτερης τάξης τελεστής ως προς το y και σε κάθε εξίσωση το x παίζει το ρόλο της παραμέτρου.

Ξεκινάμε με το σύστημα 2.8 του οποίου η μεταβολική διατύπωση είναι:

$$\begin{cases} \text{Έυρεση } u_0 \in W_{per}(Y) \text{ τέτοιου ώστε} \\ \dot{\alpha}_Y(u_0, v) = 0 \\ \forall v \in W_{per}(Y). \end{cases} \quad (2.12)$$

όπου

$$\dot{\alpha}_Y(u, v) = \int_Y A \nabla u \nabla v dy, \quad \forall u \in u, \forall v \in v, \forall u, \forall v \in W_{per}(Y) \quad (2.13)$$

και $W_{per}(Y) = H_{per}^1(Y)/\mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι $W_{per}(Y)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς τη σχέση: $u \sim v \Leftrightarrow u - v$ είναι σταθερό $\forall u, v \in H_{per}^1(Y)$, από το θεώρημα 10 του βου κεφαλαίου συμπεραίνουμε ότι $u_0 = 0$ στο $W_{per}(Y)$ ως τη μοναδική λύση. Υπενθυμίζουμε ότι από τον ορισμό

$$u_0(x, y) = u_0(x) \quad (2.14)$$

για κάθε $u_0 \in u_0$.

Σημείωση 3 Στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα το πρώτο στοιχείο u_0 είναι μια εκ των προτέρων ταλαντευόμενη συνάρτηση που εξαρτάται από το $\frac{x}{\varepsilon}$. Από την σχέση 2.13 έχουμε ότι το u_0 στην πραγματικότητα εξαρτάται μόνο από το x και όχι από το ε και έτσι δεν ταλαντεύεται με $\frac{x}{\varepsilon}$. Αυτό συμβαίνει γιατί αναμένεται το u_0 να είναι η ομογενής λύση. Παραμένει να βρούμε εάν υπάρχει μια εξίσωση στο Ω που ικανοποιείται από το u_0 , στην περίπτωση αυτή θα έχουμε βρεί και την ομογενοποιημένη εξίσωση επίσης.

Επιστρέφουμε τώρα στην εξίσωση 2.9, χρησιμοποιώντας τις 2.7 και 2.14 μπορούμε να την γράψουμε ως εξής:

$$\begin{cases} A_0 u_1 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \text{ στο } Y \\ u_1 \text{ } \Psi\text{-περιοδική στο } y. \end{cases} \quad (2.15)$$

Η μεταβολική διατύπωση είναι:

$$\begin{cases} \text{Έυρεση } u_1 \in W_{per}(Y) \text{ τέτοιου ώστε} \\ \dot{\alpha}_Y(u_1, v) = \langle F, v \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)} \\ \forall v \in W_{per}(Y). \end{cases} \quad (2.16)$$

όπου το $\dot{\alpha}_Y$ δίνεται από την 2.13 και F ορίζεται από :

$$\langle F, \psi \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)} = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \int_Y \alpha_{ij}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy. \quad \forall \psi \in \psi, \psi \in W_{per}(Y). \quad (2.17)$$

Παρατηρούμε οτι εαν $\psi_1, \psi_2 \in \dot{W}$ τότε $\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y_i}$ και ετσι

$$\langle F, \psi_1 \rangle_{(H_{per}^1(Y))', H_{per}^1(Y)} = \langle F, \psi_2 \rangle_{(H_{per}^1(Y))', H_{per}^1(Y)}.$$

Αυτό μαζί με την πρόταση 17 του 6ου κεφαλαίου ορίζει το F ως ένα στοιχείο του $(W_{per}(Y))'$ και έτσι η παραπάνω εξίσωση έχει νόημα. Το θεώρημα 11 του 6ου κεφαλαίου δίνει μοναδική λύση $u_1 \in W_{per}(Y)$ της 2.16. Η γραμμικότητα του 2.15 όπου το A_0 περιλαμβάνει τη μεταβλητή y μόνο, μαζί με το αποτέλεσμα οτι το $\frac{\partial u_0}{\partial x_j}$ είναι ανεξάρτητη του y , για να γίνει αυτό το u_1 το γράφουμε στην εξής μορφή:

$$u_1(x, y) = - \sum_{j=1}^N \hat{\chi}_j(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \quad \text{στο} \quad W_{per}(Y) \quad (2.18)$$

όπου το $\hat{\chi}$ ικανοποιεί:

$$\begin{cases} A_0 \hat{\chi}_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial y_i} & \text{στο } Y \\ \hat{\chi}_j & Y - \text{περιοδική} \end{cases} \quad (2.19)$$

για $i, j = 1, \dots, N$. Είναι εύκολο να δούμε οτι το θεώρημα 11 του 6ου κεφαλαίου μαζί με την πρόταση 18 του 6ου κεφαλαίου δίνει μοναδική λύση $\hat{\chi}_j \in W_{per}(Y)$ αυτού του προβλήματος. Επιπλέον μπορούμε να επιλέξουμε ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείο του $\hat{\chi}_j$ που ικανοποιεί την μεταβολική διατύπωση του θεωρήματος 11 του 6ου κεφαλαίου. Ετσι το θεώρημα 11 του 6ου κεφαλαίου δίνει την ύπαρξη και την μοναδικότητα του $\hat{\chi}_j \in \hat{\chi}_j$ της λύσης του:

$$\begin{cases} \text{Έυρεση } \hat{\chi}_j \in W_{per}(Y) \text{ τέτοιο ώστε} \\ \alpha_Y(\hat{\chi}_j, \psi) = \sum_{i=1}^N \int_Y \alpha_{ij}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy \\ \forall \psi \in W_{per}(Y). \end{cases} \quad (2.20)$$

όπου $W_{per}(Y) = \{v \in H_{per}^1(Y); M_Y(v) = 0\}$.

Απο την άλλη, απο την 2.17 μπορούμε να δούμε οτι κάθε λύση $u_1(x, y)$ του 2.9 έχει τη μορφή:

$$u_1(x, y) = - \sum_{j=1}^N \hat{\chi}_j(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} + \tilde{u}_1(x) \quad \text{με} \quad u_1 \in \dot{u}_1 \quad (2.21)$$

όπου $\tilde{u}_1$ είναι ανεξάρτητο του y δηλαδή $\tilde{u}_1(x) \in \dot{0}$ στο $W_{per}(Y)$.

Τώρα θα σχοληθούμε με την εξίσωση 2.10. Εαν κάνουμε τους υπολογισμούς απο τις 2.14, 2.21 έχουμε :

$$f - A_1 u_1 - A_2 u_0 = f + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\alpha_{ij}(y) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_{ij}(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right). \quad (2.22)$$

Η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος 2.10 είναι:

$$\begin{cases} \text{Έυρεση } u_2 \in W_{per}(Y) \text{ τέτοιου ώστε} \\ \alpha_Y(u_2, v) = \langle F_1, v \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)} \\ \forall v \in W_{per}(Y). \end{cases} \quad (2.23)$$

όπου $\dot{\alpha}_Y$ έχει οριστεί πιο πάνω και το F_1 ορίζεται απο

$$\langle F_1, \dot{\psi} \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)} = \int_Y f \psi dy - \sum_{i,j=1}^N \int_Y \alpha_{ij}(y) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy + \sum_{i,j=1}^N \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_{ij}(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right) \psi dy \quad \forall \psi \in \dot{W}_{per}(Y).$$

Αυτο το πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο εαν το F_1 είναι στοιχείο του $(W_{per}(Y))'$ δηλαδή εαν $\langle F_1, 1 \rangle_{(H_{per}^1(Y))', H_{per}^1(Y)} = 0$, το οποίο είναι

$$- \sum_{i,j=1}^N \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_{ij}(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right) dy = \int_Y f dy.$$

Αυτή η σχέση είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συμπεραίνουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα του u_2 της λύσης του 2.23 που δίνεται απο το θεώρημα 11 του 6ου κεφαλαίου. Αντικαθιστώντας το u_1 απο τον τύπο 2.18 και απο την $f = f(x)$ συμπεραίνουμε οτι το u_0 ικανοποιεί:

$$- \sum_{i,j=1}^N \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_{ij}(y) \left(- \frac{\partial \hat{\chi}_k}{\partial y_j} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right) dy = |Y|f$$

ή ισοδύναμα απο την 2.14 και την $\alpha_{ij}^0 = M_Y(\alpha_{ij}) - M_Y \left(\sum_{k=1}^N \alpha_{ik} \frac{\partial \hat{\chi}_j}{\partial y_k} \right) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \alpha_{ij} dy - \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1}^N \int_Y \alpha_{ik} \frac{\partial \hat{\chi}_j}{\partial y_k} dy$.
 $\forall i, j = 1, \dots, N$.
 έχουμε:

$$\sum_{j=1}^N \int_Y \left(\alpha_{ik} - \alpha_{ij} \frac{\partial \hat{\chi}_k}{\partial y_j} \right) dy = |Y| \alpha_{ik}^0 \quad \forall i, k = 1, \dots, N.$$

Τελικά έχουμε:

$$- \sum_{i,k}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_{ik=1}^0 \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) = f \quad \text{στο } \Omega.$$

Αυτή η εξίσωση είναι ακριβώς το ομογενοποιημένο πρόβλημα του θεωρήματος 1 που θα δουμε και θα αποδείξουμε στην παρακάτω παράγραφο. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα του $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ προκύπτει απο το θεώρημα του *Lax – Milgram* δηλαδή $u_0 = u^0$ με το u^0 να δίνεται απο το θεώρημα 1.

Σημείωση:

Παρατηρούμε επίσης οτι με αυτή τη μέθοδο το πρόβλημα αποκτά τον ομογενοποιημένο πίνακα A^0 της μορφής $A^0 \lambda = M_Y(tA \nabla \hat{\omega}_\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathcal{R}^N$ ή ισοδύναμα της μορφής $\alpha_{ij}^0 = M_Y(\alpha_{ij}) - M_Y \left(\sum_{k=1}^N \alpha_{ik} \frac{\partial \hat{\chi}_j}{\partial y_k} \right) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \alpha_{ij} dy - \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1}^N \int_Y \alpha_{ik} \frac{\partial \hat{\chi}_j}{\partial y_k} dy, \forall i, j = 1, \dots, N$. που δηλώνει τον πίνακα A

και τα προβλήματα

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(y) \nabla \hat{\chi}_\lambda) = -\operatorname{div}(A(y)\lambda) & \text{στο } Y \\ \hat{\chi}_\lambda & \Psi\text{-περιοδικός} \\ M_y(\hat{\chi}_\lambda) = 0 \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(y) \nabla \hat{\omega}_\lambda) = 0 & \text{στο } Y \\ \hat{\omega}_\lambda - \lambda y & Y\text{-περιοδικός} \\ M_U(\hat{\omega}_\lambda - \lambda y) = 0 \end{cases}$$

Αυτή είναι και η ουσία αυτής της μεθόδου.

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος του *Tartar* των ταλαντευόμενων συναρτήσεων δοκιμής.

Ας θυμηθούμε το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f & \text{στο } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

όπου f δίνεται στο $H^{-1}(\Omega)$ και ο πίνακας A^ε είναι Y -περιοδικός που ορίζεται απο:
 $a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ στον $\mathbb{R}^N$, $\forall i, j = 1, \dots, N$. και $A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq N}$ στον $\mathbb{R}^N$ όπου

$$\begin{cases} a_{ij} & \text{είναι } Y\text{-περιοδικός } \forall i, j = 1, \dots, N \\ A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} & \in M(\alpha, \beta, Y) \end{cases} \quad (3.2)$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $0 < \alpha < \beta$ και $M(\alpha, \beta, Y)$ έχει οριστεί στο κεφάλαιο ορισμοί και θεωρήματα.

Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην κατασκευή μιας κατηγορίας ταλαντευόμενων δοκιμαστικών συναρτησεων που λαμβάνονται απο περιοδοποιήση τη λύση του προβλήματος στο κελί αναφοράς. Βασικό σημείο αυτής της μεθόδου αποτελεί ο συζυγής τελεστής $-\operatorname{div}({}^t A(\psi) \nabla)$. Πράγματι όταν προσπαθούμε να προσδιορίσουμε το όριο αυτό, το σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι μας επιτρέπει να εξαλείψουμε όλους τους όρους που περιέχουν το γινόμενο δύο ασθενώς συγκλινουσών ακολουθιών. Με αυτή τη μέθοδο θα λάβουμε τον ομογενοποιημένο πίνακα A^0 υπο τη μορφή ${}^t A^0 \lambda = M_y({}^t A \nabla \omega_\lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^N$ η οποία περιλαμβάνει τον πίνακα ${}^t A$ και τα προβλήματα:

$$\begin{cases} \text{Ευρεση } x_i \in W_{per}(Y) \text{ τέτοιου ώστε} \\ \alpha_Y^*(x_i, v) = \int_Y A e_i \nabla v dy \\ \forall v \in W_{per}(Y) \end{cases} \quad (3.3)$$

και

$$\begin{cases} \text{Ευρεση } \omega_i \text{ τέτοιου ώστε } \omega_i - y_i \in W_{per}(Y) \text{ και} \\ \alpha_Y^*(\omega_i, \nu) = 0 \\ \forall \nu \in W_{per}(Y) \end{cases} \quad (3.4)$$

Αυτό είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου του Tartar.

Θεώρημα 1 Εστω $f \in H^{-1}(\Omega)$ και u^ε μια λύση του παραπάνω προβλήματος, τότε:

$$\begin{cases} i) u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \text{ ασθενώς στο } H_0^1(\Omega) \\ ii) A^\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 \text{ ασθενώς στο } (L^2(\Omega))^N \end{cases} \quad (3.5)$$

όπου u^0 η μοναδική λύση στο $H_0^1(\Omega)$ του ομογενοποιημένου προβλήματος:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^0 \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \right) = f & \text{στο } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

ο πίνακας $A^0 = (a_{ij}^0)_{1 \leq i,j \leq N}$ είναι σταθερός, ελλειπτικός και δίνεται από: $A^0 \lambda = M_Y(A \nabla \hat{\omega}_\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N$ ή ισοδύναμα από ${}^t A^0 \lambda = M_Y({}^t A \nabla \hat{\omega}_\lambda)$ όπου $\hat{\omega}_\lambda$ και ω_λ ορίζονται από:

$$\begin{cases} \text{Ευρεση } \hat{\omega}_\lambda \text{ τέτοιου ώστε } \hat{\omega}_\lambda - \lambda \cdot \psi \in W_{per}(Y) \text{ και} \\ \alpha_Y(\hat{\omega}_\lambda, \nu) = 0 \quad \forall \nu \in W_{per}(Y) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} -\text{div}({}^t A(y) \nabla \omega_\lambda) = 0 & \text{στο } Y \\ \omega_\lambda - \lambda \cdot y & Y\text{-περιοδική} \\ M_y(\omega_\lambda - \lambda y) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

3.1 Σύγκλιση της ενέργειας

Η ενέργεια ορίζεται από τον εξής τύπο: $E^\varepsilon(u^\varepsilon) = \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx$

Πρόταση 1 Εστω u_ε η λύση του προβλήματος, τότε: $E^\varepsilon(u^\varepsilon) \longrightarrow E^0(u^0) = \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla u^0 dx$ όπου u^0 και A^0 δίνονται από το παραπάνω θεώρημα.

(η απόδειξη είναι στο βιβλίο 4 σελ 142)

Πρόταση 2 Εστω u_ε η λύση του προβλήματος τότε ισχύει η παρακάτω σύγκλιση: $A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \longrightarrow A^0 \nabla u^0 \nabla u^0$ στο $D'(\Omega)$ όπου u^0 και A^0 έχουν οριστεί πιο πάνω.

(η απόδειξη είναι στο βιβλίο 4 σελ 143)

Πρόταση 3 Έχουμε ότι $A^0 \in M(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega)$.

(η απόδειξη είναι στο βιβλίο 4 σελ 144)

3.2 Διορθωτές

Εστω u^ε η λύση του προβλήματος (19) και u^0 η λύση του αντίστοιχου ομογενούς. Απο το θεώρημα 1 προκύπτει η παρακάτω σύγκλιση:

$$\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0 \rightharpoonup 0 \text{ ασθενώς στον } (L^2(\Omega))^N. \quad (3.9)$$

Σημείωση 4 Γενικά η παραπάνω σύγκλιση δεν μπορεί να βελτιωθεί . Πράγματι εαν η παραπάνω σύγκλιση ήταν ισχυρή τότε θα είχαμε:

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\alpha^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha^\varepsilon \right) \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{du^\varepsilon}{dx} \right)$, το οποίο δεν ισχύει. Αυτή η παρατήρηση δείχνει οτι αυτή η σύγκλιση δεν είναι γενικά ισχυρή. Παρολ' αυτά θα αποδείξουμε οτι τροποποιώντας τον όρο ∇u^0 τότε θα έχουμε την ισχυρή σύγκλιση.

Για να γίνει αυτό θα εισάγουμε τον πίνακα διορθωτή $C^\varepsilon = (C_{ij}^\varepsilon)_{1 \leq i, j \leq N}$ που ορίζεται απο:

$$\begin{cases} C_{ij}^\varepsilon(x) = C_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{στο } \Omega \\ C_{ij}(y) = \delta_{ij} - \frac{\partial \chi_j}{\partial y_i}(y) = \frac{\partial \omega_j}{\partial y_i}(y) & \text{στο } Y. \end{cases} \quad (3.10)$$

Πρόταση 4 Εστω C^ε που ορίζεται απο την παραπάνω εξίσωση, τότε:

$$\begin{cases} i) C^\varepsilon \rightharpoonup I & \text{ασθενώς στο } (L^2(\Omega))^{N \times N} \\ ii) A^\varepsilon C^\varepsilon \rightharpoonup A^0 & \text{ασθενώς στο } (L^2(\Omega))^N \end{cases} \quad (3.11)$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας $N \times N$.

Το αποτέλεσμα απο την παραπάνω πρόταση και απο την σύγκλιση (3.9) είναι:

$$\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0 \rightharpoonup 0 \text{ ασθενώς στο } (L^2(\Omega))^N. \quad (3.12)$$

Πράγματι, $C^\varepsilon \nabla u^0 \in L^1(\Omega)$ και για κάθε $\phi \in L^\infty(\Omega)$ απο την πρόταση την προηγούμενη έχουμε: $\int_\Omega C^\varepsilon \nabla u^0 \phi dx \rightarrow \int_\Omega \nabla u^0 \phi dx$. Το ενδιαφέρον για τον πίνακα διορθωτή C^ε είναι οτι η σύγκλιση (3.12) στην πραγματικότητα είναι ισχυρή. Στην πραγματικότητα αυτό το αποτέλεσμα ισχύει και για την μη περιοδική περίπτωση που αποδείχθηκε απο τους *Murat, Tartar*.

Θεώρημα 2 Εστω u^ε η λύση του προβλήματος μας και u^0, A^0 τα οποία δίνονται απο το θεώρημα 1, τότε:

$$\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0 \rightarrow 0 \text{ ισχυρά στον } L^1((\Omega))^N. \quad (3.13)$$

Επιπλέον εάν $C \in (L^r(Y))^{N \times N}$ για κάποιο r τέτοιο ώστε $2 \leq r \leq \infty$, τότε $\nabla u^0 \in (L^s(\Omega))^N$ για κάποιο s τέτοιο ώστε $2 \leq s < \infty$ τότε $\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0 \rightarrow 0$ ισχυρά στον $(L^t(\Omega))^N$, όπου $t = \min\{2, \frac{rs}{r+s}\}$.

Πρόταση 5 Εστω u^ε να είναι η λύση του προβλήματος 1 και u^0, A^0 να δίνονται απο το θεώρημα 1. Τότε υπάρχει μια θετική σταθερά σταθερά c ανεξάρτητη του ε τέτοια ώστε για κάθε $\Phi \in (D(\Omega))^N$ έχουμε:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \Phi\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u^0 - \Phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

(η απόδειξη είναι στο βιβλίο 4 σελ 149)

Σημείωση 5 Απο τα αποτελέσματα του Meyers έχουμε οτι υπάρχει μια σταθερά $r > 2$ που εξαρτάται απο τα α, β, N τέτοιο ώστε $C \in (L^r(Y))^{N \times N}$. Επιπλέον αν το $\partial\Omega$ είναι επαρκώς ομαλό αυτό συνεπάγεται ιδίως οτι $\nabla u^0 \in (L^s(\Omega))^N$ για κάποιο $s > 2$. Ετσι, το αποτέλεσμα του θεωρήματος 2 ισχύει και για αυτα τα r, s .

Σημείωση 6 Απο τον ορισμό του πίνακα διορθωτή και το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα μπορούμε να γράφουμε τον όρο ∇u^0 στην μορφή:

$$\begin{aligned} \nabla u^\varepsilon(x) &= \nabla u^0(x) - \sum_{k=1}^N \nabla_y \hat{\chi}_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(x) - \varepsilon \sum_{k=1}^N \hat{\chi}_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)(x) + \dots \\ &= C^\varepsilon(x) \nabla u^0(x) - \varepsilon \sum_{k=1}^N \hat{\chi}_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_k}\right)(x) + \dots \end{aligned}$$

(βλ.θεώρημα 3.6 στο βιβλίο 4)

3.2.1 Μερικά συγκριτικά αποτελέσματα

Ο στόχος αυτής της παραγράφου είναι να δείξει πως μια σύγκριση ιδιοτήτων δυο πινάκων στο $M(\alpha, \beta, Y)$ διατηρείται έπειτα απο την διαδικασία της ομογενοποίησης. Πρώτος απέδειξε ο Tartar οτι υπο τις κατάλληλες προϋποθέσεις, εαν 2 πίνακες έχουν δοθεί με συγκεκριμενη διάταξη, τότε αυτή η διάταξη περνώντας στο όριο διατηρείται. Ας επισημάνουμε οτι ολα τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ ισχύουν γενικά και για την μη περιοδική περίπτωση.

Ορισμός 1 Εστω B και D , $2 \times N \times N$ πίνακες. Λέμε οτι ο B είναι μικρότερος απο ή ίσος με τον D με την έννοια των πινάκων αν και μονο αν :

$$(B\lambda, \lambda) \leq (D\lambda, \lambda) \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}^N.$$

Θεώρημα 3 Εστω B και D δυο περιοδικοί πίνακες $N \times N$ στον $M(\alpha, \beta, Y)$ τέτοιοι ώστε: $B \leq D$. Επίπλεον υποθέτουμε οτι ο B είναι συμμετρικός, τότε: $B^0 \leq D^0$, όπου B^0 και D^0 είναι οι αντίστοιχοι ομογενοποιημένοι πίνακες που δίνονται απο το θεώρημα 1.

(η απόδειξη είναι στο βιβλίο 4 σελ 153)

Πόρισμα 1 Υποθέτουμε οτι ο πίνακας A είναι συμμετρικός και έστω ο πίνακας A^0 να δίνεται απο το θεώρημα 1. Τότε $A^0 \in M(\alpha, \beta, \Omega)$.

(η απόδειξη είναι στο βιβλίο 4 σελ 155)

Θεώρημα 4 *Εστω B και D δυο περιοδικοί πίνακες $N \times N$ στον $M(\alpha, \beta, Y)$ και B^0 και D^0 οι αντίστοιχοι ομογενοποιημένοι πίνακες που δίνονται από το θεώρημα 1. Τότε υπάρχει μια σταθερά c και μια $q \in \mathbb{R}_+$ που εξαρτώνται από τα α, β, N και Y τέτοια ώστε: $|b_{ij}^0 - d_{ij}^0| \leq c \left(\int_{\Omega} |a_{ij} - b_{ij}| dy \right)^{\frac{1}{q}}$.*

(η απόδειξη είναι στο βιβλίο 4 σελ 156)

Κεφάλαιο 4

Ομογενοποίηση της εξίσωσης της θερμότητας

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την ασυμπτωτική συμπεριφορά όταν το $\varepsilon \rightarrow 0$ της λύσης του εξής προβλήματος:

$$\begin{cases} u'_\varepsilon - \operatorname{div}(A^\varepsilon u_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{στο } \Omega \times [0, T] \\ u_\varepsilon = 0 & \text{στο } \partial\Omega \times [0, T] \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{στο } \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

όπου div και ∇ λαμβάνονται σε σχέση με τις χωρικές μεταβλητές με το x να ανήκει στο Ω και ∇ δηλώνει την παράγωγο σε σχέση με την μεταβλητή του χρόνου t όπου $t \in [0, T]$ με $T > 0$.

Υποθετούμε ότι μας δίνεται ο όρος πηγή f_ε και η αρχική κατάσταση u_ε . Εδώ ο πίνακας A^ε είναι Υ -περιοδικός και ορίζεται ως:

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{στον } \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

$$\text{και } A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = (a_{ij}^\varepsilon(x))_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^N. \quad (4.3)$$

όπου

$$\begin{cases} a_{ij} \text{ είναι } \Upsilon\text{-περιοδικός} \\ A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq N \in M(a, b, \Upsilon) \end{cases} \quad (4.4)$$

με $a, b \in \mathbb{R}$ όπου $0 < a < b$ και $M(a, b, \Upsilon)$ που ορίζεται στο κεφάλαιο με τα προαπαιτούμενα. Το παραπάνω πρόβλημα είναι γνωστό ως η εξίσωση της θερμότητας επειδή μοντελοποιεί τη μεταφορά θερμότητας σε σύνθετα υλικά όταν η θερμοκρασία u_ε είναι χρονοεξαρτώμενη. Αν οι u_ε και ο όρος πηγής f_ε είναι ανεξάρτητες του χρόνου τότε το παραπάνω πρόβλημα συνάγεται σε πρόβλημα του *Dirichlet* που μοντελοποιεί τη στάσιμη διάχυση της θερμότητας.

Το πρόβλημα είναι μια ειδική περίπτωση μιας μεγάλης κατηγορίας μερικών διαφορικών εξισώσεων που καλούνται παραβολικές.

Παρακάτω θα αποδείξουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα της λύσης με του προβλήματος σε μεταβολικό πλαίσιο όπου f_ε είναι στο $L^2(\Omega \times [0, T])$ και u_ε^0 στον $L^2(\Omega)$.

Έστω Ω ένα φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα:

$$\begin{cases} u' - \operatorname{div}(B \nabla u) = f & \text{στο } \Omega \times [0, T] \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{στο } \Omega \end{cases} \quad (4.5)$$

κάτω απο τις ακόλουθες παραδοχές:

$$\begin{cases} i) B \in M(a, \beta, \Omega) \\ ii) f \in L^2(\Omega \times [0, T]) \\ iii) u^0 \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.6)$$

Ορίζουμε

$$W = \{v/v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), v' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\} \quad (4.7)$$

το οποίο είναι χώρος *Banach* σε σχέση με τη νόρμα του γραφήματος δηλαδή:

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|v'\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}.$$

Έτσι η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος πολλαπλασιάζοντας με v και ολοκληρώνοντας είναι:

$$\begin{cases} \langle u'(t), v \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} B(x) \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx & \text{στο } D'(0, T) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(x, 0) = u^0(x) \end{cases} \quad (4.8)$$

Σημείωση 7 Η αρχική συνθήκη πρέπει να θεωρηθεί στον $L^2(\Omega)$ λόγω του θεωρήματος 1 το $u \in C([0, T]; L^2)$.

Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(x, t)\|_{L^2(\Omega)} = \|u^0\|_{L^2(\Omega)}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα λύσεων του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο *Faedo – Galerkin*. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στο γεγονός ότι ο χώρος *Hilbert* H_1^0 μπορεί να προσεγγιστεί απο μία ακολουθία πεπερασμένων διαστάσεων υπόχωρων V_m καθώς το $m \rightarrow \infty$. Η απόδειξη αποτελείται απο αρκετά βήματα.

1ο βήμα: Κατασκευή των υπόχωρων V_m .

2ο βήμα: $\forall m \in \mathbb{N}$ διαπιστώνουμε μια προσέγγιση του 4.8

3ο βήμα: δίνουμε την εκ των προτέρων εκτίμηση του u_m ανεξάρτητα του m .

4ο βήμα: Παίρνουμε το όριο όταν το $m \rightarrow \infty$ και δείχνουμε ότι το u_m συγκλίνει στο u όπου u η λύση του προβλήματος 4.8 με $u \in W$

5ο βήμα: βρίσκουμε την εκ των προτέρων εκτίμηση του u .

6ο βήμα: αποδεικνύουμε την μοναδικότητα της λύσης.

Θεώρημα 5 Υπο τις προϋποθέσεις (4.6) το πρόβλημα (4.8) έχει μοναδική λύση $u \in W$. Επιπλέον υπάρχει μια σταθερά c εξαρτώμενη από α, β, Ω και T τέτοια ώστε:

$$\|u\|_W + \|u\|_{L^\infty_{(0,T;L^2(\Omega))}} \leq c(\|f\|_{L^2(\Omega \times [0,T])} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)}) \quad (4.9)$$

Απόδειξη

1ο βήμα/

Για να κατασκευάσουμε τους υπόχωρους V_m θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 16 του 6ου κεφαλαίου. Εστω w_i μια ορθοκανόνικη βάση στον $L^2(\Omega)$ που δίνεται από το (iii) της πρότασης 16 του 6ου κεφαλαίου και της σημείωσης 3 του 6ου κεφαλαίου για την επιλογή $B = I$ του προβλήματος 1. Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής B είναι ο $-\Delta$.

Επιπλέον από τον ορισμό του συνόλου (W_l) έχουμε ότι είναι ορθογώνιο στο $H_1^0(\Omega)$

Συμβολίζουμε με V_m τον m διάστασης υπόχωρο του $H_1^0(\Omega)$ που παράγεται από τα $\omega_1, \dots, \omega_m$.

Θα εισάγουμε επίσης τον τελεστή προβολής P_m από τον L_2 στον V_m που ορίζεται ως:

$$P_m v = \sum_{i=1}^m (v, w_i)_{L^2(\Omega)} w_i \quad \forall v \in L^2(\Omega) \quad (4.10)$$

Από τα κλασσικά αποτελέσματα σχετικά με τους χώρους *Hilbert* ισχύει ότι:

$$P_m v \rightarrow v \quad (4.11)$$

στον $L^2(\Omega)$ $\forall v \in L^2(\Omega)$ και επιπλέον

$$\|P_m v\| \leq \|v\|$$

$$\|P_m\| \|v\| \leq \|v\|$$

$$\|P_m\| \leq 1, \quad \text{δηλαδή } \|P_m\|_{L^2(\Omega), (L^2(\Omega))} \leq 1.$$

Επιπλέον ο περιορισμός του P_m στο $H_1^0(\Omega)$ δηλαδή

$$P_m v = \sum_{i=1}^m (v, w_i), \quad \forall v \in H_1^0(\Omega)$$

είναι στον $L(H_1^0(\Omega), H_1^0(\Omega))$ και ικανοποιεί την σχέση

$$\|P_m\|_{L(H_1^0(\Omega), H_1^0(\Omega))} \leq 1 \quad (4.12)$$

Πράγματι:

$$\|P_m v\|_{H_1^0(\Omega)}^2 = \left\| \sum_{i=1}^m (v, w_i)_{L^2(\Omega)} w_i \right\|_{H_1^0(\Omega)}^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m (v, w_i)_{L^2(\Omega)}^2 \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=1}^m (v, w_i)_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^m (v, w_i)_{L^2(\Omega)}^2 \left(\sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \stackrel{\Theta, 2}{=} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Επιπλέον όπως πριν

$$P_m v \rightarrow v \quad \text{ισχυρά στο } H_0^1(\Omega) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.13)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι το P_m μπορεί να επεκταθεί στο $H^{-1}(\Omega)$ θέτοντας $P_m v = \sum_{i=1}^m \langle v, w_i \rangle_{(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))} w_i$, $\forall v \in H^{-1}(\Omega)$. Ας δείξουμε ότι εξακολουθεί να ισχύει ότι

$$\|P_m\|_{L(H^{-1}(\Omega), H^{-1}(\Omega))} \leq 1 \quad (4.14)$$

Πράγματι $\forall z \in H_0^1(\Omega)$ από την σημείωση 4 του 6ου κεφαλαίου έχουμε:

$$\begin{aligned}
&| \langle P_m v, z \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} | = \\
&= | \langle \sum_{i=1}^m \langle v, w_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} w_i, z \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} | = \\
&= | \sum_{i=1}^m \langle v, w_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \int_{\Omega} w_i z dx | \\
&= | \langle v, \sum_{i=1}^m (z, w_i)_{L^2(\Omega)} w_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} | = \\
&= | \langle v, P_m z \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} | \leq \|v\|_{H^{-1}(\Omega)} \|P_m z\|_{H_0^1(\Omega)} = \|v\|_{H^{-1}(\Omega)} \|z\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

2ο βήμα/

Από την παραδοχή (4.6) έχω ότι $u^0 \in L^2(\Omega)$, εάν θέσουμε $u_m^0 = P_m u^0$ και από την (10) έχουμε

$$u_m^0 \rightarrow u^0 \quad (4.15)$$

ισχυρά στον $L^2(\Omega)$.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, εισάγουμε το πεπερασμένης διάστασης προσεγγιστικό πρόβλημα

$$\begin{cases} \text{Ευρεση } u_m = \sum_{j=1}^m g_j^m(t) w_j \quad V_m \quad \text{τέτοιων ώστε} \\ \int_{\Omega} u'_m(x, t) w_k dx + \int_{\Omega} B \nabla u_m(x, t) w_k dx = \int_{\Omega} f(x, t) w_k dx, D'(0, T) \quad \forall k = 1, \dots, m. \\ u_m(x, 0) = u_m^0(x) \quad \text{στο } \Omega. \end{cases} \quad (4.16)$$

Απο την (4.10) η αρχική συνθήκη αυτού του προβλήματος γίνεται:

$$u_m(x, 0) = \sum_{j=1}^m g_j^m(0)w_j = u_m^0 = \sum_{j=1}^m (u^0, w_j)_{L^2(\Omega)} w_j$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $g_j^m(0) = (u^0, w_j)_{L^2(\Omega)}$ όπου $w_1, \dots, w_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς το πρόβλημα (4.16) είναι ένα σύστημα m γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με αγνώστους $g_1^m, \dots, g_m^m$ το οποίο είναι:

$$\begin{cases} \frac{dg_k^m}{dt} + \sum_{j=1}^m g_j^m(t) \int_{\Omega} B \nabla w_j \nabla w_k dx = \int_{\Omega} f(x, t) w_k dx \\ g_k^m(0) = (u^0, w_k) \end{cases}$$

για κάθε $k = 1, \dots, m$.

Το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί μια προσέγγιση του (4.8).

3ο βήμα/

Εδώ θα αποδείξουμε ότι το u_m ικανοποιεί μερικές εκ των προτέρων εκτιμήσεις. Για να γίνει αυτό ας πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (4.16) με g_k^m και να αθροίσουμε για $k = 1, \dots, m$. Έχουμε:

$$\int_{\Omega} u'_m(x, t) u_m(x, t) dx + \int_{\Omega} B \nabla u_m(x, t) \nabla u_m(x, t) dx = \int_{\Omega} f(x, t) u_m(x, t) dx$$

Υπενθυμίζοντας την υπόθεση ελλειπτικότητας του πίνακα B και εφαρμόζοντας την ανισότητα *Cauchy – Schwarz* και την ανισότητα *Poincare* στην δεξιά πλευρά έχουμε:

$$\int_{\Omega} f(x, t) u_m(x, t) dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_m\|_{L^2(\Omega)} \text{ οπότε}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2}^2 + a \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} C_{\Omega} \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)} C_{\Omega} \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\frac{C_{\Omega}}{\sqrt{a}} \|f\|_{L^2} \right) (\sqrt{a} \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}) \leq \frac{C_{\Omega}^2}{2a} \|f\|_{L^2}^2 + \frac{a}{2} \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

όπου C_{Ω} είναι η σταθερά *Poincare* η οποία είναι προφανώς ανεξάρτητη του m . Ολοκληρώνοντας στο $[0, T]$ με $t \in [0, T]$ έχουμε:

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a \int_0^t \|u_m(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\tau \leq \frac{C_{\Omega}^2}{a} \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \|u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Το παραπάνω σημαίνει μαζί με την (4.15) ότι: $u_m \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ με

$$\|u_m\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))} + \|u_m\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C_0 (\|u_m^0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2}) \leq C_1 \quad (4.17)$$

όπου C_0, C_1 ανεξάρτητες του m .

Τώρα θα δώσουμε μια εκ των προτέρων εκτίμηση του u'_m . Προκειμένου να γίνει αυτό, παρατηρούμε πρώτα ότι η εξίσωση (4.16) συνεπάγεται ότι:

$(u'_m(t), v)_{L^2(\Omega)} = (-\operatorname{div}(B\nabla)u_m(t) + f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V_m.$
 Αυτό σημαίνει ότι $u'_m(t) = -[P_m(-\operatorname{div}(B\nabla)u_m + f)](t)$

$$u'_m(t) = -[P_m(F(u_m) + f)](t) \quad (4.18)$$

όπου $F = -\operatorname{div}(B\nabla)$ και όπου

$$P_m v = \sum_{i=1}^m (v, w_i)_{L^2(\Omega)} w_i.$$

Δεδομένου ότι το B επαληθεύει την (4.6)(i) δηλαδή $B \in M(a, \beta, \Omega)$, εύκολα φαίνεται ότι $F \in L(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$.
 Επομένως για κάθε $u_m \in V_m$ έχουμε:

$$\|F(u_m)(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \beta \|u_m(t)\|_{H_1^0(\Omega)}$$

Ως εκ τούτου $F(u_m) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ και από την (4.17) έχουμε:

$\|F(u_m)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq \beta \|u_m(t)\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C_2(\|u_m^0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0, T))})$ όπου C_2 σταθερά ανεξάρτητη του m . Έπειτα χρησιμοποιώντας την (4.14) συμπεραίνουμε από την (4.18) την ακόλουθη εκ των προτέρων εκτίμηση :

$$\begin{aligned} \|u'_m\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} &= \|P_m(F(u_m) + f)(t)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \\ &\leq \|P_m\|_{L^2}(\|F(u_m)\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}) \\ &\leq C_2(\|u_m^0\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}) \\ &\leq C_3(\|u_m^0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0, T))}) \leq C_4 \end{aligned}$$

όπου C_3, C_4 ανεξάρτητες του m .

4ο βήμα/

Χρησιμοποιώντας την εκ των προτέρων εκτίμηση στο 3ο βήμα, παίρνουμε το όριο στην (4.16) όταν το $m \rightarrow \infty$.

Χάρη στις εκτιμήσεις (4.17) και την παραπάνω ανίσωση, μπορούμε να εξάγουμε μια υποκολουθία τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u & \text{ασθενώς* στο } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ u_m \rightharpoonup u & \text{ασθενώς στο } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u'_m \rightharpoonup u' & \text{ασθενώς στο } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{cases} \quad (4.19)$$

Όντως, η πρώτη σύγκλιση προκύπτει από το θεώρημα 4 του 6ου κεφαλαίου και από την πρόταση 14 του 6ου κεφαλαίου έχουμε $[L^1(0, T; L^2(\Omega))] = L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ και από την πρόταση 13 του 6ου κεφαλαίου ξέρουμε ότι ο χώρος $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ είναι διαχωρίσιμος.

Οι άλλες συγκλίσεις προκύπτουν απο την προταση 13 του βου κεφαλαίου και απο το θεώρημα 2 του βου κεφαλαίου υπενθυμίζοντας οτι οι χώροι $H_0^1(\Omega)$ και $H^{-1}(\Omega)$ είναι αυτοπαθείς.

Έστω ψ δοθέν στο $D(0, T)$ και $v \in H_0^1(\Omega)$. Θα πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (4.16) με $(v, w_k)_{L^2(\Omega)} \psi$ και αθροίζουμε για $k = 1, \dots, m$.

$$\int_{\Omega} u'_m(x, t) \psi(t) (v, w_k) w_k dx + \int_B B \nabla u_m(x, t) w_k (v, w_k) \psi(t) dx = \int_{\Omega} f(x, t) w_k (v, w_k) \psi(t) dx$$

Αθροίζουμε και έχουμε :

$$\int_{\Omega} u'_m(x, t) \psi(t) \sum_{k=1}^m (v, w_k) w_k dx + \int_B B(x) \nabla u_m(x, t) \psi(t) \sum_{k=1}^m (v, w_k) w_k dx = \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) \sum_{k=1}^m (v, w_k) w_k dx.$$

Όμως $P_m v = \sum_{k=1}^m (v, w_k) w_k$ οπότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\int_0^T \int_{\Omega} u'_m(x, t) \psi(t) P_m v dx dt + \int_0^T \int_B B(x) \nabla u_m(x, t) \psi(t) P_m v dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) P_m v(x) dx dt \quad (4.20)$$

Τώρα παίρνουμε το $m \rightarrow \infty$.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} u'_m(x, t) \psi(t) P_m v dx dt + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_B B(x) \nabla u_m(x, t) \psi(t) P_m v dx dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) P_m v(x) dx dt$$

Όμως $u'_m \rightarrow u'$ ασθενώς στον L^2 και $P_m v \rightarrow v$ ασθενώς στον L^2 οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u'(x, t) \psi(t) v dx dt + \int_0^T \int_B B(x) \nabla u(x, t) \psi(t) \nabla v(x) dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) v(x) dx dt \\ \int_0^T \langle u'(x, t), \psi(t) v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_{\Omega} B(x) \nabla u(x, t) \psi(t) \nabla v(x) dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) v(x) dx dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

το παραπάνω αποτελεί ακριβώς την μεταβολική διατύπωση του προβλήματος (4.8) δεδομένου οτι ψ και v είναι αυθαίρετα αντίστοιχα στο $D(0, T)$ και $H_0^1(\Omega)$.

Μένει να δείξουμε οτι το u ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = u^0(x)$. Για να γίνει αυτό παρατηρούμε οτι απο το $u_m \in W$ η εξίσωση (4.20) εξακολουθεί να ισχύει εάν $y \in C^\infty([0, T])$.

Επιλέγουμε ένα ψ τέτοιο ώστε $y(0) = 1$ και $y(T) = 0$.

Έπειτα, ολοκληρώνοντας κατά μέλη στην (4.20) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u_m(x, t) \psi(t) (P_m v)(x)]_0^T dx - \int_0^T \int_{\Omega} u_m(x, t) \psi'(t) (P_m v)(x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} B(x) \nabla u_m(x, t) \psi(t) \nabla (P_m v)(x) dx dt &= \\ \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) (P_m v)(x) dx &\Leftrightarrow \int_{\Omega} u_m(x, \tau) \psi(\tau) (P_m v)(x) dx - \int_{\Omega} u_m(x, 0) \psi(0) P_m v(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\Omega} u_m(x, t) \psi'(t) (P_m v) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} B(x) \nabla u_m(x, t) \psi(t) \nabla (P_m v)(x) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) (P_m v)(x) dx \\
& \Leftrightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} u_m(x, t) \psi'(t) (P_m v)(x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} B(x) \nabla u_m(x, t) \psi(t) \nabla (P_m v)(x) dx dt \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) (P_m v)(x) dx dt + \int_{\Omega} u_m^0 (P_m v)(x) dx.
\end{aligned}$$

(αφου $u_m(x, 0) = u_m^0(x)$)

Περνάμε τώρα στο όριο με το ίδιο επιχείρημα όπως παραπάνω χρησιμοποιώντας την ι-σχυρή σύγκλιση: $u_m^0 \rightarrow u^0$ στον L^2 (ισχυρά)

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} \left(- \int_0^T \int_{\Omega} u_m(x, t) \psi'(t) (P_m v)(x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} B(x) \nabla u_m(x, t) \psi(t) \nabla (P_m v) dx dt \right) \\
& = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) (P_m v)(x) dx dt + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m^0 (P_m v)(x) dx
\end{aligned}$$

Όμως $P_m v \rightarrow v$ ισχυρά στον $H_0^1(\Omega)$ οπότε:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\Omega} u(x, t) \psi'(t) v(x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} B(x) \nabla u(x, t) \psi(t) \nabla v dx dt = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi'(t) v(x) dx dt + \int_{\Omega} u^0 v(x) dx
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε για το 1ο μέλος σε αυτήν την ταυτότητα, απο το θεώρημα 1(iii) έχουμε:

$$\int_{\Omega} u(x, t) \psi'(t) v(x) dx = \langle u(t), \psi'(t) v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = - \langle u'(t), \psi(t) v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) \psi(t) v(x) dx$$

Αφού $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \int \langle u'(t), \psi(t) v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dx + \int_{\Omega} u(x, 0) v dx + \int_0^T \int_{\Omega} B(x) \nabla u(x, t) \psi(t) \nabla v(x) dx dt = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) v(x) dx dt + \int_{\Omega} u^0(x) v(x) dx
\end{aligned}$$

Παρατηρώντας την (4.21) η οποία εξακολουθεί να ισχύει για $\psi \in C^\infty([0, T])$ συμπεραίνουμε οτι:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\Omega} B(x) \nabla u(x, t) \psi(t) \nabla v(x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) v(x) dx dt + \int_{\Omega} u(x, 0) v(x) dx + \int_{\Omega} u(x, 0) v(x) dx \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} B(x) \nabla u(x, t) \psi(t) \nabla v(x) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \psi(t) v(x) dx dt + \int_{\Omega} u^0(x) v(x) dx
\end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } \int_{\Omega} u^0(x)v(x)dx = \int_{\Omega} u(x, 0)v(x)dx$$

όπου απο το θεώρημα 6 του 6ου κεφαλαίου συμπεραίνουμε την ζητούμενη ισότητα $u^0(x) = u(x, 0)$.

5ο βήμα/

Τώρα θα αποδείξουμε την εκτίμηση (4.9). Αυτό θα πραγματοποιηθεί για τη λύση u που λαμβάνεται στα προηγούμενα βήματα. Η εκτίμηση (4.9) για την λύση που δίνεται απο την (4.19) είναι μια απλή συνέπεια των εκτιμήσεων (4.17) και την εκτίμηση του τρίτου βήματος. Χρησιμοποιώντας ξανά τις συγκλίσεις (4.15) και (4.19) και την κάτω ημισυνέχεια της νόρμας απο τις προτάσεις (2.ii) του 6ου κεφαλαίου και (5.ii) έχουμε απο την (4.17):

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \\ & \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ & \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} (\|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}) + \|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ & \leq C_0 \lim_{m \rightarrow \infty} (\|u_m^0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega \times [0,T])}) \end{aligned}$$

Ομοίως απο την εκτίμηση του τρίτου βήματος έχουμε: $\|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C_3(\|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0,T))})$

Αυτές οι εκτιμήσεις συνεπάγονται την απαιτούμενη σχέση

$$\|u\|_w + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega \times [0,T])} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)})$$

6ο βήμα/

Έστω u_1 και u_2 να είναι οι 2 λύσεις που αντιστοιχούν στο ίδιο πρόβλημα.

Τότε η διαφορα τους ικανοποιεί την (7) με $f \equiv 0$ $u^0 = 0$,

$$\langle u_1' - u_2', v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} B(x) \nabla (u_1 - u_2)(x, t) \nabla v(x) dx = 0 \text{ στο } D'(0, T) \quad (u_1 - u_2)(x, 0) = 0 \text{ στο } \Omega.$$

Θέτουμε $v = u_1 - u_2$ και χρησιμοποιούμε το θεώρημα 1. Απο την ελλειπτικότητα του πίνακα B και την ανισότητα *Cauchy - Schwarz* (πρόταση 8) έχουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Ολοκληρώνοντας στο $[0, T]$ με $t \in [0, T]$ είναι:

$$\|(u_1 - u_2)(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \int_0^T \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\tau \leq 0.$$

Όποτε αναγκαστικά $u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. Αρα έχω μοναδικότητα της λύσης. Σημείωση:

Ας αναφέρουμε οτι μπορεί να λάβει κανείς $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ στο πρόβλημα (4.5). Το θεώρημα 1 μπορεί να προσαρμοστεί σε αυτήν την περίπτωση. Για λόγους απλότητας, έχουμε περιοριστεί σε αυτήν την περίπτωση.

4.1 Το αποτέλεσμα της ομογενοποίησης

Ας γυρίσουμε πίσω στο πρόβλημα (4.1) με $f_\varepsilon \in L^2(\Omega) \times [0, T]$ και $u_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$. Η μεταβολική διατύπωση είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Έυρεση } u_\varepsilon \in W \text{ τέτοιου ώστε :} \\ \langle u'_\varepsilon(t), v \rangle_{(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))} + \int_\Omega A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon(x, t) \nabla v(x) dx = \int_\Omega f_\varepsilon(x, t) v(x) dx \quad \text{στο } D'(0, T) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0(x) \quad \text{στο } \Omega \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα του u_ε δίνεται απο το θεώρημα 1. Θα μελετήσουμε τώρα τι συμβαίνει όταν το $\varepsilon \rightarrow 0$.

Σημαντικό είναι οτι οι ταλαντώσεις στην (4.22) οφείλονται μόνο στη μεταβλητη x . Όπως βλέπουμε παρακάτω, στην διαδικασία της ομογενοποιήσης, η μεταβλητη t παίζει το ρόλο της παραμέτρου και κατα συνέπεια, ο ομογενοποιημένος πίνακας είναι οτι και στην ελλειπτική περίπτωση. Στην πραγματικότητα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 6 Έστω $f_\varepsilon \in L^2(\Omega \times [0, T])$, $u_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$ και έστω u_ε η λύση του (1) με A^ε να ορίζεται απο τις (4.2)-(4.4).

Υποθέτουμε οτι

$$\left\{ \begin{array}{l} i) u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{ασθενώς στο } L^2(\Omega) \\ ii) f_\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{ασθενώς στο } L^2(\Omega \times [0, T]) \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Τότε η u_ε ικανοποιεί:

$$\left\{ \begin{array}{l} i) u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{ασθενώς στο } W \\ ii) A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 \quad \text{ασθενώς στο } L^2(\Omega \times [0, T]) \end{array} \right. \quad (4.24)$$

όπου u είναι η λύση του παρακάτω οριακού προβλήματος :

$$\left\{ \begin{array}{l} u' - \operatorname{div}(A^0 \nabla u) = f \quad \text{στο } \Omega \times [0, T] \\ u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u^0(x) \quad \text{στο } \Omega \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Όπου, A^0 είναι ο ομογενοποιημένος πίνακας που δίνεται απο το θεώρημα 1 και απο την σχέση $A^0 \lambda = M_Y(A \nabla \hat{\omega}_\lambda)$

Απόδειξη:

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του *Tartar* για ταλαντευόμενες συναρτήσεις δοκιμής. Θα χρησιμοποιήσουμε τα βήματα της απόδειξης της παραγραφου του τρίτου κεφαλαιου για την ελλειπτική περίπτωση. Παρατηρούμε πρώτα οτι απο τον $A^\varepsilon \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ χρησιμοποιώντας την υπόθεση (4.24), την πρόταση 10 και την 4.9 η οποία είναι:

$$\|u_\varepsilon\|_w + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C(\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times [0, T])} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^0) \leq C_1 \quad (4.26)$$

όπου C και C_1 σταθερές ανεξάρτητες του ε .

Επιπλέον αν εισάγουμε το διάνυσμα ξ^ε που ορίζεται απο

$$\xi^\varepsilon(x, t) = (\xi_1^\varepsilon(x, t), \xi_2^\varepsilon(x, t), \dots, \xi_N^\varepsilon(x, t)) = A_\varepsilon(t) \nabla u_\varepsilon(x, t) \quad (4.27)$$

απο την (4.26) και απο την υπόθεση του A^ε έχουμε : $\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times [0, T])^N} \leq \beta C_1$. Κατά συνέπεια υπάρχει μια υπακολουθία που εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με ε τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} i) u_\varepsilon \rightharpoonup u & \text{ασθενώς* στο } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ ii) u_\varepsilon \rightharpoonup u & \text{ασθενώς στο } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ iii) u_\varepsilon \rightarrow u & \text{ισχυρά στο } L^2(\Omega \times [0, T]) \\ iv) u'_\varepsilon \rightharpoonup u' & \text{ασθενώς στο } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ v) \xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi^0 & \text{ασθενώς στο } L^2(\Omega \times [0, T])^N \end{cases} \quad (4.28)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη συμπαγή εμφύτευση: $W \subseteq L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(\Omega \times [0, T])$. Έπειτα η σύγκλιση (4.24)(i) ισχύει και για την υπακολουθία. Απο τον ορισμό (4.27) και το πρόβλημα (4.22) είναι εύκολο να δούμε οτι το ξ^ε ικανοποιεί:

$$\langle u'_\varepsilon(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega \xi^\varepsilon(x, t) \nabla v(x) dx = \int_\Omega f_\varepsilon(x, t) v(x) dx.$$

Ολοκληρώνω στο $[0, T]$ και έχω:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u'_\varepsilon(t), v \rangle \varphi(t) dt + \int_0^T \int_\Omega \xi^\varepsilon(x, t) \nabla v(x) \varphi(t) dx dt &= \int_0^T \int_\Omega f_\varepsilon(x, t) v(x) \varphi(t) dx dt \\ \Leftrightarrow \int_0^T \int_\Omega \xi^\varepsilon(x, t) \nabla v(x) \varphi(t) dx dt &= \int_0^T \int_\Omega f_\varepsilon(x, t) \nabla v(x) \varphi(t) dx dt - \langle u'_\varepsilon, v_\varphi \rangle_{L^2(a, b, H^{-1}(\Omega)), L^2(a, b, H_0^1(\Omega))} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Όπου μπορούμε να περάσουμε στο όριο λόγω των συγκλίσεων που δίνονται απο την (4.28). Συμπεραίνουμε τότε οτι το ξ^0 ικανοποιεί:

$$\langle u'(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega \xi^0(x, t) \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, t) v(x) dx \quad \text{στο } D'(0, T) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.30)$$

Σε αυτό το σημείο, όπως στην ελλειπτική περίπτωση, έχουμε μόνο να αποδείξουμε οτι:

$$\xi^0 = A^0 \nabla u. \quad (4.31)$$

Θα κάνουμε χρήση όπως πριν των ταλαντευόμενων συναρτήσεων δοκιμής $\omega_\lambda^\varepsilon$ που ορίζονται απο την:

$$\omega_\lambda^\varepsilon(x) = \varepsilon \omega_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \lambda x - \varepsilon x_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{όπου } \omega_\lambda \text{ ορίζεται ως:}$$

$$\begin{cases} \text{Ευρεση } \omega_\lambda \in W_{per}(Y) & \text{τέτοιο ώστε} \\ \alpha_Y^*(\omega_i, v) = \int_Y A e_i \nabla v dy \\ \forall v \in W_{per}(Y) \end{cases} \quad (4.32)$$

Ας θυμηθούμε τις ακόλουθες συγκλίσεις:

$$\begin{cases} i) \omega_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \lambda x & \text{ασθενώς στο } H_0^1(\Omega) \\ ii) \omega_\lambda^\varepsilon \rightarrow \lambda x & \text{ισχυρά στον } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (4.33)$$

Εισάγουμε επίσης την διανυσματική συνάρτηση: $\eta_\lambda^\varepsilon = {}^t A^\varepsilon \nabla \omega_\lambda^\varepsilon$ η οποία ικανοποιεί την σύγκλιση:

$$\eta_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup M_\Gamma({}^t A^\varepsilon \nabla \omega_\lambda) = {}^t A^0 \lambda \quad \text{ασθενώς στον } (L^2(\Omega))^N. \quad (4.34)$$

και την εξίσωση: $\int_\Omega \eta_\lambda^\varepsilon \nabla v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$

Παίρνω $\psi \in D(\Omega)$ και $\varphi \in D(0, T)$.

Επιλέγοντας $v = \psi u_\varepsilon \varphi$ και ολοκληρώνοντας στο $[0, T]$ έχουμε:

$$\int_0^T \int_\Omega \eta_\lambda^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(x, t) \psi(x) \varphi(t) dx dt + \int_0^T \int_\Omega \eta_\lambda^\varepsilon \nabla \psi(x) u_\varepsilon(x, t) \varphi(t) dx dt = 0 \quad (4.35)$$

Επιλέγουμε τώρα $v = \psi \omega_\lambda^\varepsilon$ στην (4.29) και είναι:

$$\int_0^T \int_\Omega \xi^\varepsilon(x, t) \nabla \psi(x) \omega_\lambda^\varepsilon \varphi(t) dx dt = \int_0^T \int_\Omega f_\varepsilon(x, t) \psi(x) \omega_\lambda^\varepsilon(x) \varphi(t) dx dt - \langle u'_\varepsilon, \psi(x) \omega_\lambda^\varepsilon(x) \varphi \rangle_{L^2(\alpha, b; H^{-1}(\Omega)), L^2(\alpha, b; H_0^1(\Omega))}$$

Αφαιρώντας απο την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε οτι :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \xi^\varepsilon(x, t) \nabla \psi(x) \omega_\lambda^\varepsilon \varphi(t) dx dt - \int_0^T \int_\Omega \eta_\lambda^\varepsilon \nabla \psi(x) u_\varepsilon(x, t) \varphi(t) dx dt = \\ & = \int_0^T \int_\Omega f_\varepsilon(x, t) \psi(x) \omega_\lambda^\varepsilon \varphi(t) dx dt - \langle u'_\varepsilon, \psi(x) \omega_\lambda^\varepsilon(x) \varphi \rangle_{L^2(\alpha, b; H^{-1}(\Omega)), L^2(\alpha, b; H_0^1(\Omega))} \end{aligned}$$

Παίρνουμε το όριο και απο τις συγκλίσεις (4.23), (4.28), (4.31) και (4.33) έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \xi^0(x, t) \nabla \psi(x) (\lambda x) \varphi(t) dx dt - \int_0^T \int_\Omega A^0 \lambda \nabla \psi(x) u(x, t) \varphi(t) dx dt = \\ & = \int_0^T \int_\Omega f(x, t) v(x) (\lambda x) \varphi(t) dx dt - \langle u', \psi(x) (\lambda x) \varphi \rangle_{L^2(\alpha, b; H^{-1}(\Omega)), L^2(\alpha, b; H_0^1(\Omega))} \end{aligned}$$

Απο την εξίσωση (4.30) με τους ίδιους υπολογισμούς θα συμπεράνουμε την (4.31).

Για να τελειώσει η απόδειξη, πρέπει να αποδείξουμε οτι το u ικανοποιεί την αρχική συνθήκη (4.25) δηλαδή $u(x, 0) = u^0(x)$. Για να γίνει αυτό επιλέγουμε $\varphi \in C^\infty([0, T])$ τέτοια ώστε $\varphi(0) = 1$ και $\varphi(T) = 0$ και $v \in D(\Omega)$ τη (4.29). Έπειτα απο το θεώρημα 18 έχουμε:

$$\int_0^T \int_\Omega \xi^\varepsilon(x, t) \nabla v(x) \varphi(t) dx dt = \int_0^T \int_\Omega f_\varepsilon(x, t) v(x) \varphi(t) dx dt + \int_0^T \langle u_\varepsilon(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \varphi'(t) dt + \int_\Omega u_\varepsilon^0 v dx.$$

Παίρνουμε το $\varepsilon \rightarrow 0$ και απο τις συγκλίσεις (4.23) και (4.28) έχουμε:

$$\int_0^T \int_\Omega \xi^0(x, t) \nabla v(x) \varphi(t) dx dt = \int_0^T \int_\Omega f(x, t) v(x) \varphi(t) dx dt + \int_0^T \langle u(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \varphi'(t) dt + \int_\Omega u^0(x) v dx.$$

Απο την (4.30) έχουμε:

$$\int_0^T \int_\Omega \xi^0(x, t) \nabla v(x) \varphi(t) dx dt = \int_0^T \int_\Omega f(x, t) v(x) \varphi(t) dx dt - \int_0^T \langle u'(t), v \rangle \varphi(t) dt$$

και αντικαθιστώντας στην πιο πάνω σχέση παίρνουμε:

$$\int_0^T \int_\Omega f(x, t) v(x) \varphi(t) dx dt - \int_0^T \langle u'(t), v \rangle \varphi(t) dt = \int_0^T \int_\Omega f(x, t) v(x) \varphi(t) dx dt + \int_0^T \langle u(t), v \rangle$$

$$\varphi'(t)dt + \int u^0(x)v dx.$$

Οπότε $\int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = - \int_0^T \langle u(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \varphi'(t)dt + \int_{\Omega} u'(x)v dx$, όμως

απο το θεώρημα 1(iii):

$$\langle u'(t), \varphi(t)v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle u(t), \varphi'(t)v \rangle = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t)\varphi(t)v(x)dx.$$

Έτσι αντικαθιστώντας στην πιο πάνω σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u(x, t)\varphi(t)v(x)]_0^T &= \int_{\Omega} u^0(x)v(x)dx \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} [u(x, T)\varphi(T)v(x) - u(x, 0)\varphi(0)v(x)]dx &= \int_{\Omega} u^0(x)v(x)dx \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} u(x, 0)v(x)dx &= \int_{\Omega} u^0(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

ΑΡΑ $u(x, 0) = u^0(x)$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι ο πίνακας A^0 είναι ελλείπτικός. Το θεώρημα 5 υποδηλώνει την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος. Συμπερασματικά όλες οι ακολουθίες της σχέσης (4.28) συγκλίνουν.

4.2 Σύγκλιση της ενέργειας

Έστω u_{ε} η λύση του προβλήματος (1), του οποίου η μεταβολική διατύπωση είναι η (4.22):

$$\begin{cases} \text{Ευρεση } u_{\varepsilon} \in W \text{ τέτοιου ώστε:} \\ \langle u'_{\varepsilon}(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} A^{\varepsilon}(x)u_{\varepsilon}(x, t) \nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, t)v(x)dx \text{ στο } D'(0, T) \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_{\varepsilon}(x, 0) = u^0(x) \text{ στο } \Omega. \end{cases} \quad (4.36)$$

Έστω u η λύση του ομογενοποιημένου προβλήματος (4.25) του οποίου η μεταβολική διατύπωση είναι:

$$\begin{cases} \text{Ευρεση } u_{\varepsilon} \in W \text{ τέτοιου ώστε:} \\ \langle u'(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} A^0(x)u(x, t) \nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x)dx \text{ στο } D'(0, T) \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(x, 0) = u^0(x) \text{ στο } \Omega. \end{cases} \quad (4.37)$$

Εισάγουμε τώρα τις ενέργειες που σχετίζονται με αυτά τα προβλήματα:

$$i) E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon})(t) = \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon}(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} A^{\varepsilon}(x) \nabla u_{\varepsilon}(x, \tau) \nabla u_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau$$

$$ii) E(u)(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x, \tau) \nabla u(x, \tau) dx d\tau$$

Επιλέγοντας $v = u_{\varepsilon}$ στην (4.22) και $v = u$ στην (4.37) έχουμε:

$$\langle u'_{\varepsilon}(t), u_{\varepsilon}(t) \rangle + \int_{\Omega} A^{\varepsilon}(x) \nabla u_{\varepsilon}(x, t) \nabla u_{\varepsilon}(x, t) dx = \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, t)u_{\varepsilon}(x, t) dx \text{ και}$$

$$\langle u'(t), u(t) \rangle + \int_{\Omega} A^0(x) \nabla u(x, t) \nabla u(x, t) dx = \int_{\Omega} f(x, t) u(x) dx$$

Όμως απο το θεώρημα 1(iii) έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) u(x, t) dx = \langle u'(t), u(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle u'(t), u(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \text{ και}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x, t) u_{\varepsilon}(x, t) dx = \langle u'_{\varepsilon}(t), u_{\varepsilon}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle u'_{\varepsilon}(t), u_{\varepsilon}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \text{ οπότε:}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2(x, t) = 2 \langle u'_{\varepsilon}(t), u_{\varepsilon}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

και

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2(x, t) = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Τελικά αφού $E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = \int_{\Omega} A^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon} dx$ είναι:

$$\begin{cases} i) E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon})(t) = \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \tau) u_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau \\ ii) E(u)(t) = \frac{1}{2} \|u^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} f(x, \tau) u_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau \end{cases} \quad (4.38)$$

Πρόταση 6 Έστω $f_{\varepsilon} \in L^2(\Omega \times [0, T])$, $u_{\varepsilon}^0 \in L^2(\Omega)$ και έστω u_{ε} η λύση του (1) με A^{ε} να ορίζεται απο τις (4.2)-(4.4).

Υποθέτουμε οτι:

$$\begin{cases} i) u_{\varepsilon}^0 \rightarrow u^0, \text{ ισχυρά στον } L^2(\Omega) \\ ii) f_{\varepsilon} \rightharpoonup f, \text{ ασθενώς στον } L^2(\Omega \times [0, T]) \end{cases} \quad (4.39)$$

Τότε $E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \rightarrow E(u)$ στο $C[0, T]$

Απόδειξη:

Πρώτα θα αποδείξουμε οτι το $E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon})$ ανήκει στο συμπαγές σύνολο $C([0, T])$. Απο το θεώρημα *Ascoli – Arzela* είναι απαραίτητο ν' αποδείξουμε τις 2 παρακάτω προϋποθέσεις:

$$\begin{cases} i) |E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon})(t)| \leq C \quad \forall t \in [0, T] \\ ii) |E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon})(t+h) - E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon})(t)| \leq \theta(h) \end{cases} \quad (4.40)$$

ομοιόμορφα σε σχέση με το $\varepsilon \quad \forall t \in [0, T-h], \forall h > 0$ όπου το θ τείνει στο 0 καθώς το ε πάει στο 0. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του *Holder* στην (4.38) και χρησιμοποιώντας την εκτίμηση (4.26) και τις παραδοχές (4.4) και (4.39) συμπεραίνουμε την (i).

Για τον 2ο ισχυρισμό παρατηρούμε οτι η (4.38)(i) με την ανισότητα του *Holder* την εκτίμηση (4.38) και την παραδοχή (4.39)(ii) έχουμε:

$$|E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon})(t+h) - E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon})(t)| = \left| \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon}^0\|_{L^2}^2 + \int_0^{t+h} \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \tau) u_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau - \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon}^0\|_{L^2}^2 - \int_0^t \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \tau) u_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau \right| =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{t+h} \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \tau) u_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \tau) u_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau \right| = \\
& = \left| - \left(\int_{t+h}^0 \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \tau) u_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau \right) \right| \\
& = \left| - \int_{t+h}^t \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \tau) u_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau \right| = \left| \int_t^{t+h} \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \tau) u_{\varepsilon}(x, \tau) dx d\tau \right| \\
& \leq \int_t^{t+h} \int_{\Omega} |f_{\varepsilon}(x, \tau) u_{\varepsilon}(x, \tau)| dx d\tau \leq \int_t^{t+h} \|f_{\varepsilon}(x, \tau)\|_{L^2(\Omega \times [0, T])} \|u_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))} d\tau = \\
& = h^{\frac{1}{2}} \|u_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))} \|f_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega \times [0, T])} \leq C_1 h^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Οπότε υπάρχει μια υπακολουθία και κάποιο $\zeta \in C([0, T])$ τέτοιο ώστε

$$E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \rightarrow \zeta \quad \text{στο} \quad C([0, T]). \quad (4.41)$$

Τώρα θα δείξουμε ότι $\zeta = E(u)$. Απο τις παραδοχές (4.39) της πρότασης (6) και τις συγκλίσεις (4.28)(iii) μπορούμε να περάσουμε το όριο στην (4.27)(i) οπότε έχουμε:

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E^{\varepsilon}(u_{\varepsilon})(t) = E(u)(t), \quad \forall t \in [0, T]$. Αυτό αποδεικνύει την σχέση (4.41) και με αυτό τελειώνει η απόδειξη.

4.3 Διορθωτές

Θα αποδείξουμε εδώ ένα διορθωτή του αποτελέσματος. Όπως στην ελλειπτική περίπτωση, η σύγκλιση της ενέργειας κατέχει σημαντικό ρόλο. Ο πίνακας διορθωτής είναι ίδιος όπως και στην ελλειπτική περίπτωση, συμβολίζεται $C^{\varepsilon} = (c_{ij}^{\varepsilon})_{1 \leq i, j \leq N}$ που ορίζεται απο:

$C_{ij}^{\varepsilon}(x) = c_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})$ στο Ω

$c_{ij}(\psi) = \delta_{ij} - \frac{\partial \hat{\chi}_j}{\partial \psi_i}(\psi) = \frac{\partial \hat{\omega}_j}{\partial \psi_i}(\psi)$ στον Y , όπου $\hat{\chi}_j$ και $\hat{\omega}_j$ ορίζονται απο τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \text{Έυρεση } \hat{\chi}_i \in W_{per}(Y) \text{ τέτοιο ώστε} \\ \alpha_Y(\hat{\chi}_i, v) = \int_Y A e_i \nabla v dy \\ \forall v \in W_{per}(Y). \end{cases} \quad (4.42)$$

και

$$\begin{cases} \text{Έυρεση } \hat{\omega}_i \text{ τέτοιο ώστε } \hat{\omega}_i - y_i \in W_{per}(Y) \text{ και} \\ \alpha_Y(\hat{\omega}_i, v) = 0 \\ \forall v \in W_{per}(Y). \end{cases} \quad (4.43)$$

Θεώρημα 7 Έστω u_{ε} η λύση του προβλήματος (1) και έστω u και A^0 τα οποία δίνονται απο το θεώρημα 4. Υπο τις υποθέσεις (4.39) είναι:

$$\begin{cases} i) u_{\varepsilon} \rightarrow u \text{ ισχυρά στο } C([0, T]; L^2(\Omega)) \\ ii) \nabla u_{\varepsilon} - C^{\varepsilon} \nabla u \rightarrow 0 \text{ ισχυρά στο } (L^2(0, T; L^1(\Omega)))^N \end{cases} \quad (4.44)$$

Επιπλέον εαν $C \in (L^r(Y))^{N \times N}$ για κάποιο r , τέτοιο ώστε $2 \leq r \leq \infty$ και $\nabla u \in (L^s(\Omega))^N$ για κάποιο s , τέτοιο ώστε $2 \leq s \leq \infty$ ΤΟΤΕ:

$\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u \rightarrow 0$ ισχυρά στον $(L^2(0, T; L^t(\Omega)))^N$, όπου $t = \min\{2, \frac{rs}{r+s}\}$

Για να γίνει απόδειξη του θεωρήματος θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω πρόταση οπου θα την αποδείξουμε κιόλας.

Πρόταση 7 Υποθέτουμε ότι πληρούνται οι παραδοχές του παραπάνω θεωρήματος. Ορίζουμε για οποιοδήποτε $\Phi \in C^\infty([0, T]; D(\Omega))$

$$p_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(t) - \Phi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega A^\varepsilon(x) (\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla \Phi)(x, t) (\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla \Phi)(x, \tau) dx d\tau.$$

Έπειτα $p_\varepsilon \rightarrow p$ ισχυρά στο $C([0, T])$, όπου,

$$p(t) = \frac{1}{2} \|u(t) - \Phi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega A^0(x) (\nabla u - \nabla \Phi)(x, \tau) (\nabla u - \nabla \Phi)(x, \tau) dx d\tau$$

Απόδειξη:

Σημειώνουμε οτι το p_ε μπορεί να γραφεί όπως παρακάτω:

$$p_\varepsilon = p_\varepsilon^1 + p_\varepsilon^2 + p_\varepsilon^3, \text{ όπου}$$

$$\begin{cases} p_\varepsilon^1 = \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx d\tau \\ p_\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \|\Phi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega A^\varepsilon (C^\varepsilon \nabla \Phi) (C^\varepsilon \nabla \Phi) dx d\tau \\ p_\varepsilon^3 = \int_\Omega u_\varepsilon \Phi dx + \int_0^t \int_\Omega A^\varepsilon (C^\varepsilon \nabla \Phi) \nabla u_\varepsilon dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon (C^\varepsilon \nabla \Phi) dx d\tau \end{cases} \quad (4.45)$$

Τώρα θα αποδείξουμε την σύγκλιση στο $C([0, T])$ του κάθε όρου απο αυτήν την ανάλυση.

1ος όρος: Σημειώνουμε οτι το p_ε^1 δεν είναι τίποτε άλλο απο την ενέργεια $E^\varepsilon(u_\varepsilon)$. Έτσι απο την πρόταση 6 έχουμε:

$$p_\varepsilon^1 \rightarrow E(u) = \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega A^0(x) \nabla u(x, \tau) \nabla u(x, \tau) dx d\tau \text{ στο } C([0, T]). \quad (4.46)$$

2ος όρος: Παίρνουμε πρώτα τη σημειακή σύγκλιση του 2ου όρου p_ε^2 . Για να γίνει αυτό χρησιμοποιούμε τις σχέσεις 8.32 και 8.35 και κάνουμε τους παρακάτω υπολογισμούς όπου το t παίζει το ρόλο της παραμέτρου.

$$\text{Έχουμε } p_\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \|\Phi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega A^\varepsilon (C^\varepsilon \nabla \Phi) (C^\varepsilon \nabla \Phi) dx d\tau$$

Όμως

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega A^\varepsilon (C^\varepsilon \nabla \Phi) (C^\varepsilon \nabla \Phi) dx = \sum_{i,j=1}^N \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega A^\varepsilon \nabla \hat{\omega}_i^\varepsilon \nabla \hat{\omega}_j^\varepsilon \nabla \Phi_i \nabla \Phi_j dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^N \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \hat{\eta}_i^{\varepsilon} \nabla (\nabla \Phi_i \nabla \Phi_j \hat{\omega}_j^{\varepsilon}) dx - \int_{\Omega} \hat{\eta}_i^{\varepsilon} \nabla (\nabla \Phi_i \nabla \Phi_j) \hat{\omega}_j^{\varepsilon} dx \right) = \\
&= - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} A^0 e_i \nabla (\nabla \Phi_i \nabla \Phi_j) x_j dx = \int_{\Omega} A^0 \nabla \Phi \nabla \Phi dx.
\end{aligned}$$

Οπότε:

$$p_{\varepsilon}^2 \rightarrow \frac{1}{2} \|\Phi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} A^0(x) \nabla \Phi(x, \tau) \nabla \Phi(x, \tau) dx d\tau \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.47)$$

Μένει να δείξουμε ότι το p_{ε}^2 είναι συμπαγές στο $C([0, T])$. Λόγω της συμπαγείας $W^{1,\infty}(0, T) \subset C([0, T])$ (βλέπε θεώρημα 7 του βου κεφαλαίου) αρκεί να δείξουμε ότι το p_{ε}^2 είναι φραγμένο στο $W^{1,\infty}(0, T)$ δηλαδή ότι υπάρχει μια σταθερά C ανεξάρτητη του ε , τέτοια ώστε $\|p_{\varepsilon}^2\|_{L^{\infty}(0, T)} + \|(p_{\varepsilon}^2)'\|_{L^{\infty}(0, T)} \leq C$.

Σαφώς έχουμε μόνο να ελέγξουμε αυτήν την εκτίμηση για τον 2ο όρο που ορίζεται από τις παραπάνω ισότητες, όπου Φ είναι κανονικό και ανεξάρτητο του ε . Αυτή η εκτίμηση είναι συνέπεια της Πρότασης 4 του βου κεφαλαίου και των υποθέσεων του A, οπότε:

$$\|p_{\varepsilon}^2\|_{L^{\infty}(0, T)} + \|(p_{\varepsilon}^2)'\|_{L^{\infty}(0, T)} \leq c_1(T+1)\beta\|C^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \Phi\|_{L^{\infty}(\Omega \times [0, T])}^2 \leq c.$$

Αυτό μαζί με την (4.44) δίνει:

$$p_{\varepsilon}^2 \rightarrow \frac{1}{2} \|\Phi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} A^0(x, t) \nabla \Phi(x, \tau) \nabla \Phi(x, \tau) dx d\tau \quad \text{στο } C([0, T]). \quad (4.48)$$

3ος όρος: Θα προχωρήσουμε όπως στην προηγούμενη περίπτωση. Σημειώνουμε πρώτα την σημειακή σύγκλιση:

$$p_{\varepsilon}^3 \rightarrow \int_{\Omega} u \Phi dx + \int_0^t \int_{\Omega} A^0 \nabla \Phi \nabla u dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} A^0 \nabla u \nabla \Phi dx d\tau, \quad \forall t \in [0, T]$$

η οποία προκύπτει απλά χρησιμοποιώντας τους παρακάτω υπολογισμούς:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon} (C^{\varepsilon} \nabla \Phi) dx &= \sum_{i=1}^N \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f, \nabla \Phi_i \hat{\omega}_i^{\varepsilon} \rangle_{H_0^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon} \nabla (\nabla \Phi_i) \hat{\omega}_i^{\varepsilon} dx \right) = \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\langle f, \nabla \Phi_i x_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} A^0 \nabla u^0 \nabla (\nabla \Phi_i) x_i dx \right).
\end{aligned}$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την $\nabla(\nabla \Phi_i) x_i$ σαν συνάρτηση δοκιμής έχουμε:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon} (C^{\varepsilon} \nabla \Phi) dx = \int_{\Omega} A^0 \nabla u^0 \nabla \Phi dx.$$

Επίσης:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{\varepsilon} (C^{\varepsilon} \nabla \Phi) \nabla u^{\varepsilon} dx = \sum_{i=1}^N \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{\varepsilon} \nabla \hat{\omega}_i^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon} \Phi_i dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \hat{\eta}_i^{\varepsilon} \nabla (\nabla \Phi_i u^{\varepsilon}) dx - \int_{\Omega} \hat{\eta}_i^{\varepsilon} \nabla (\nabla \Phi_i) u^{\varepsilon} dx \right) = \\
&= \sum_{i=1}^N \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \hat{\eta}_i^{\varepsilon} \nabla (\nabla \Phi_i) u^{\varepsilon} dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} A^0 e_i \nabla (\nabla \Phi_i) u^0 dx = \int_{\Omega} A^0 \nabla \Phi \nabla u^0 dx.
\end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε τώρα ότι p_{ε}^3 είναι συμπαγή στο $C([0, T])$. Λόγω όμως της συμπαγείας $W^{1,\infty}(0, T) \subset C([0, T])$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι p_{ε}^3 είναι φραγμένο στο $H'(0, T)$ δηλαδή: $\|p_{\varepsilon}^3\|_{L^{\infty}(0, T)} + \|(p_{\varepsilon}^3)'\|_{L^2(0, T)} \leq C_2$

Απο την εκτίμηση (4.26) για το u_{ε} και την πρόταση 8.30 έχουμε κατευθείαν ότι το $\|p_{\varepsilon}^3\|_{L^{\infty}(0, T)}$ είναι φραγμένο.

$$(p_{\varepsilon}^3)'(t) = \langle u'_{\varepsilon}(t), \Phi(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega)H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x, t) \phi'(x, t) dx + \int_{\Omega} A^{\varepsilon} (C^{\varepsilon} \nabla \Phi) \nabla u_{\varepsilon} dx + \int_{\Omega} A^{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} (C^{\varepsilon} \nabla \Phi) dx.$$

Οπότε και εδώ όπως πριν έχουμε ότι $\|(p_{\varepsilon}^3)'\|_{L^2(0, T)}$ είναι φραγμένο. Επειτα απο τη συμπαγεία $H^1(0, T) \subset C([0, T])$ έχουμε την σύγκλιση:

$$p_{\varepsilon}^3 \rightarrow \int_{\Omega} u \Phi dx + \int_0^t \int_{\Omega} A^0 \nabla \Phi \nabla u dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} A^0 \nabla u \nabla \Phi dx d\tau \quad \text{στο } C([0, T]). \quad (4.49)$$

Υπενθυμίζοντας ότι $p_{\varepsilon} = r_{\varepsilon}^1 + r_{\varepsilon}^2 + r_{\varepsilon}^3$, απο τον ορισμό (4.47) και τις συγκλίσεις (4.49), (4.50) και (4.51) έχουμε την ισχυρή σύγκλιση.

Απόδειξη του θεωρήματος 7:

θα αποδείξουμε τώρα τις συγκλίσεις που δίνονται απο την (4.48). Εστω $\delta > 0$. Απο την πρόταση υπάρχει ένα $\Phi_{\delta} \in C^{\infty}([0, T]; D(\Omega))$ τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} i) \|u - \Phi_{\delta}\|_{C([0, T], L^2(\Omega))}^2 \leq \delta \\ ii) \|\nabla u - \nabla \Phi_{\delta}\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}^2 \leq \delta \end{cases} \quad (4.50)$$

Μπορούμε να γράψουμε $u_{\varepsilon} - u = (u_{\varepsilon} - \Phi_{\delta}) + (\Phi_{\delta} - u)$ οπότε:

$$\begin{aligned}
\|u_{\varepsilon} - u\|_{C([0, T], L^2(\Omega))}^2 &= \|(u_{\varepsilon} - \Phi_{\delta}) + (\Phi_{\delta} - u)\|_{C([0, T], L^2(\Omega))}^2 \leq \\
2\left(\|u_{\varepsilon} - \Phi_{\delta}\|_{C([0, T], L^2(\Omega))}^2 + \|\Phi_{\delta} - u\|_{C([0, T], L^2(\Omega))}^2\right) &\leq 2\|u_{\varepsilon} - \Phi_{\delta}\|_{C([0, T], L^2(\Omega))}^2 + 2\delta
\end{aligned}$$

Θα βρούμε τώρα μια εκτίμηση του όρου $\|u_{\varepsilon} - \Phi_{\delta}\|_{C([0, T], L^2(\Omega))}^2$, για να γίνει αυτό θέτουμε:

$$p_{\varepsilon}^{\delta} = \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon}(t) - \Phi_{\delta}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} A^{\varepsilon}(x) \left(\nabla u_{\varepsilon} - C^{\varepsilon} \nabla \Phi_{\delta} \right)(x, \tau) \left(\nabla u_{\varepsilon} - C^{\varepsilon} \nabla \Phi_{\delta} \right)(x, \tau) dx d\tau \quad (4.51)$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη ελλειπτικότητας του A^{ε} , έχουμε:

$$p_{\varepsilon}^{\delta}(t) \geq \frac{1}{2} \alpha \|u_{\varepsilon}(t) - \Phi_{\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^t \|\nabla u_{\varepsilon} - C^{\varepsilon} \nabla \Phi_{\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.52)$$

Ετσι απο την προταση 7 έχουμε:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(t) - \Phi_\delta\|_{L^2}^2 \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p_\varepsilon^\delta\|_{C([0,T])} = \|p^\delta\|_{C([0,T])} \quad (4.53)$$

όπου

$$p^\delta(t) = \frac{1}{2} \|u(t) - \Phi_\delta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega A^0(x)(\nabla u - \nabla \Phi_\delta)(x, \tau)(\nabla u - \nabla \Phi_\delta)(x, \tau) dx d\tau \quad (4.54)$$

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 3 και (4.50) έχουμε:

$$\|p^\delta\|_{C([0,T])} \leq \frac{1}{2} \delta + \frac{\beta^2}{\alpha} \delta \|\nabla u - \nabla \Phi_\delta\|_{L^2(\Omega \times [0,T])}^2 \leq \frac{1}{2} \delta + \frac{\beta^2}{\alpha} \delta = \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) \delta \quad (4.55)$$

Επειτα απο την (4.51) έχουμε: $\|u_\varepsilon - u\|_{(C[0,T]; L^2(\Omega))}^2 \leq 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) \delta$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_{(C[0,T]; L^2(\Omega))}^2 \leq \left(1 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\right) \delta.$$

Οπότε αυτό μας δείχνει απο την (4.44)(i) δηλαδή $u_\varepsilon \rightarrow u$ ισχυρά στο $C([0,T])$ όπου δ αυθαίρετο.

Για να αποδείξουμε την (4.44)(ii) θα γράψουμε το $\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u = \left(\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla \Phi_\delta\right) + \left(C^\varepsilon \nabla \Phi_\delta + C^\varepsilon \nabla u\right).$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του *Holder* και την (4.50) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla u_\varepsilon(t) - C^\varepsilon \nabla u(t)\|_{L^1(\Omega)}^2 dt &\leq 2 \int_0^T \|\nabla u_\varepsilon(t) - C^\varepsilon \nabla \Phi_\delta(t)\|_{L^1(\Omega)}^2 dt + 2 \int_0^T \|C^\varepsilon \nabla \Phi_\delta(t) - C^\varepsilon \nabla u(t)\|_{L^1(\Omega)}^2 dt \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|\nabla u_\varepsilon(t) - C^\varepsilon \nabla u(t)\|_{L^1(\Omega)}^2 dt \\ &\leq 2 \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|\nabla u_\varepsilon(t) - C^\varepsilon \nabla \Phi_\delta(t)\|_{L^1}^2 dt + 2 \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} C_1 \int_0^T \|\nabla u_\varepsilon(t) - C^\varepsilon \nabla \Phi_\delta(t)\|_{L^2}^2 dt + C_2 \delta \quad (4.56) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.52) και βάζοντας όπου t, T τότε απο (4.51), (4.54) και την πρόταση 7 έχουμε:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla \Phi_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon^\delta(\tau) = \frac{1}{2} p^\delta \tau.$$

Ετσι το παραπάνω μαζί με την (4.55) μας δίνει: $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla \Phi_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) \delta.$

Ετσι απο την (4.56) έχουμε: $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) \delta.$

Οπότε έχουμε οτι $\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u \rightarrow 0$, ισχυρά στον $L^2(0, T; L^1(\Omega))^N$

Κεφάλαιο 5

Μέθοδος σύγκλισης 2 κλιμάκων

Η έννοια της μεθόδου σύγκλισης 2 κλιμάκων έχει εισαχθεί απο τον *Ngsuetseng*(1989) και έχει αναπτυχθεί απο τον *Allaire*(1994). Ασχολείται με τη σύγκλιση ολοκληρωμάτων της μορφής: $\int_{\Omega} v^{\varepsilon}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx$ όπου $\{v^{\varepsilon}\}$ είναι μια ακολουθία φραγμένη στον $L^2(\Omega)$ και $\psi = \psi(x, \varepsilon)$ είναι μια λεία συνάρτηση ως προς το ψ . Σημειώνουμε οτι έχουμε ήδη συναντήσει αυτό το είδος ολοκληρωμάτων απο τη μέθοδο του *Tartar*. Με τη μέθοδο σύγκλισης 2 κλιμάκων θα ομογενοποιήσουμε μια κατηγορία γραμμικών παραβολικών εξισώσεων και θα αποδείξουμε μερικά τύπου διορθωτή αποτελέσματα.

Λήμμα 1 *i) Εστω $\phi \in L^p(\Omega; C_{per}(Y))$ με $1 \leq p < \infty$. Τότε $\phi(\cdot, \cdot/\varepsilon) \in L^p(\Omega)$ με $\|\phi(\cdot, \cdot/\varepsilon)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\phi(\cdot, \cdot)\|_{L^p(\Omega; C_{per}(Y))}$ και $\phi(\cdot, \cdot/\varepsilon) \rightarrow \frac{1}{|Y|} \int_Y \phi(\cdot, y) dy$ ασθενώς στον $L^p(\Omega)$. Ειδικά εαν $\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ τότε*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})]^2 dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y [\phi(x, y)]^2 dy dx. \quad (5.1)$$

ii) Εστω οτι $\phi(x, y) = \phi_1(x, y)\phi_2(x, y)$, $\phi_1 \in L^s(\Omega)$, $\phi_2 \in L^r_{per}(Y)$ με $1 \leq r, s < \infty$ και τέτοιο ώστε $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$. Τότε $\phi(\cdot, \cdot/\varepsilon) \in L^p(\Omega)$ και $\phi(\cdot, \cdot/\varepsilon) \rightarrow \frac{\phi_1(\cdot)}{|Y|} \int_Y \phi_2(y) dy$ ασθενώς στον $L^p(\Omega)$.

Ορισμός 2 *Εστω $\{v^{\varepsilon}\}$ μια φραγμένη ακολουθία στον $L^2(\Omega)$. Λέμε οτι n $\{v^{\varepsilon}\}$ συγκλίνει με 2 κλίμακες στο $v_0 = v_0(x, y)$ όπου το $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ εαν για κάθε συνάρτηση $\psi = \psi(x, y) \in D(\Omega, C_{per}^{\infty}(Y))$ έχουμε:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\varepsilon}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \psi(x, y) dy dx \quad (5.2)$$

Σημείωση 8 *Λόγω των ιδιοτήτων πυκνότητας, είναι εύκολο να δούμε οτι αν $\{v^{\varepsilon}\}$ συγκλίνει με 2 κλίμακες στο v_0 τότε η σύγκλιση (5.1) ισχύει και για κάθε $\psi \in L^2_{per}(Y : \overline{C(\Omega)})$ καθώς και για οποιαδήποτε ψ της μορφής $\psi(x, y) = \psi_1(y)\psi_2(x, y)$ με $\psi_1 \in L^{\infty}(Y)$ και $\psi_2 \in L^2_{per}(Y : \overline{C(\Omega)})$.*

Σημείωση 9 Είναι κατανοητό ότι η μέθοδος σύγκλισης 2-κλιμάκων συνεπάγεται την ασθενή σύγκλιση. Έτσι από τον παραπάνω ορισμό παίρνουμε το ψ ανεξάρτητο του y , οπότε από την 5.1 έχουμε την ακόλουθη ασθενή σύγκλιση:

$$v^\varepsilon \rightharpoonup V^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y v_0(\cdot, y) dy \quad \text{ασθενώς στον } L^2(\Omega) \quad (5.3)$$

Δηλαδή εάν το όριο 2-κλιμάκων v_0 είναι ανεξάρτητο του y είναι $V^0 = v_0$ και έτσι το ασθενές και το 2-κλιμάκων όριο συμπίπτουν. Παρατηρούμε επίσης ότι αν η ακολουθία $\{v^\varepsilon\}$ 2-κλιμάκων συγκλίνει τότε είναι φραγμένη στον $L^2(\Omega)$.

Σημείωση 10 Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{u_\varepsilon\}$ ικανοποιεί το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα: $v^\varepsilon(x) = v_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots$ όπου $v_0, v_1, \dots$ είναι Y -περιοδικές λείες συναρτήσεις. Έτσι από το λήμμα 1 το $v^\varepsilon(\cdot)\psi(\cdot, \cdot/\varepsilon)$ με ψ λεία συνάρτηση έχουμε ότι $\{v^\varepsilon\}$ συγκλίνει με 2 κλίμακες στο $v_0 = v_0(x, y)$ δηλαδή στον πρώτο όρο του αναπτύγματος.

Θεώρημα 8 Εστω $\{u^\varepsilon\}$ μια φραγμένη ακολουθία στον $L^2(\Omega)$, τότε υπάρχει μια υπακολουθία της $\{v^\varepsilon\}$ και μια συνάρτηση $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ τέτοια ώστε η υπακολουθία $\{v^\varepsilon\}$ να συγκλίνει με δυο κλίμακες στο u_0 .

Θεώρημα 9 Εστω $\{u^\varepsilon\}$ μια ακολουθία στον $L^2(\Omega)$ η οποία συγκλίνει με 2-κλίμακες στο $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$. Υποθέτουμε επίσης ότι,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega [v^\varepsilon(x)]^2 dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y [v_0(x, y)]^2 dx dy \quad (5.4)$$

Τότε για κάθε ακολουθία $\{w^\varepsilon\}$ όπου συγκλίνει στο 2-κλιμάκων όριο $w_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, έχουμε

$$v^\varepsilon w^\varepsilon \rightarrow \frac{1}{|Y|} \int_Y v_0(\cdot, y) w_0(\cdot, y) dy \quad \text{στο } D'(\Omega). \quad (5.5)$$

Θεώρημα 10 Εστω u^ε μια ακολουθία συναρτήσεων στο $H^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v_0 \quad \text{ασθενώς στο } H^1(\Omega) \quad (5.6)$$

.Τότε $\{v^\varepsilon\}$ συγκλίνει στο 2-κλιμάκων όριο v_0 και υπάρχει μια υπακολουθία ε' και $v_1 = v_1(x, y)$ στον $L^2(\Omega : W_{per}(Y))$ τέτοια ώστε $\nabla v^{\varepsilon'}$ συγκλίνει με 2-κλίμακες στο $\nabla_x v_0 + \nabla_y v_1$.

Σημείωση 11 Από την 5.6 διαπιστώνουμε ότι ολόκληρη η ακολουθία $\{v^\varepsilon\}$ συγκλίνει ασθενώς στο ∇v_0 . Η ερώτηση είναι αν συνεπάγεται το ίδιο όταν ολόκληρη η ακολουθία συγκλίνει με 2 κλίμακες. Η απάντηση είναι αρνητική, αφού η συνάρτηση V και συνεπώς η $\nabla_y v_1$ δεν μπορούν να προσδιοριστούν με μοναδικό τρόπο. Πράγματι από την υπόθεση 5.6 και την σημείωση 9 έχουμε ότι $\nabla v_0(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y V(x, y) dy$ η οποία δεν αρκεί για την εξασφάλιση της μοναδικότητας του V .

5.1 Διορθωτές

Πρόταση 8 Εστω u_1 που δίνεται απο την $u_1(x, y) = - \sum_{j=1}^N \hat{x}_j(y) \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_j} + u_1(x)$ και υποθέτουμε οτι $\nabla_y \hat{x}_i \in (L^r(Y))^N, i = 1, \dots, N$ και $\nabla u^0 \in (L^s(\Omega))^N$ με $1 \leq r, s < \infty$ και τέτοιο ώστε $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$.

Τότε $\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0 - \nabla_y u_1(., \frac{\cdot}{\varepsilon}) \rightarrow 0$ ισχυρά στον $(L^2(\Omega))^N$.

(η απόδειξη είναι στο βιβλίο 4 σελ 186)

Κεφάλαιο 6

Ορισμοί και θεωρήματα

Ορισμός 1 Η απεικόνιση $\|\cdot\| : x \in E \mapsto \|x\| \in \mathfrak{R}_+$ καλείται νόρμα στον διανυσματικό χώρο E αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \|x\| = 0 \iff x = 0 \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathfrak{R}, x \in E \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E \end{cases} \quad (6.1)$$

Ετσι ο χώρος E καλείται χώρος με νόρμα και η νόρμα συμβολίζεται με $\|\cdot\|_E$. Επιπλέον ο χώρος E καλείται χώρος Banach αν και μόνο αν είναι πλήρης.

Ορισμός 2 Εστω H ένας γραμμικός χώρος. Η αντιστοιχία $(\cdot, \cdot)_H : (q, y) \in H \times H \mapsto (x, y)_H \in \mathfrak{R}$ καλείται εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν

$$\begin{cases} (x, x)_H > 0 \iff x \neq 0 \\ (x, y)_H = (y, x)_H, \forall x, y \in H \\ (\lambda x + \mu y, z)_H = \lambda(x, z)_H + \mu(y, z)_H \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \quad x, y, z \in H \end{cases} \quad (6.2)$$

Επιπλέον αν ο χώρος Banach H με $\|x\|_H = (x, x)_H^{\frac{1}{2}}$ τότε ο χώρος H καλείται χώρος Hilbert.

Ορισμός 3 Εστω $\Lambda : E \mapsto F$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε Λ είναι φραγμένο αν και μόνο αν $\sup_{x \in E} \frac{\|\Lambda(x)\|_F}{\|x\|_E} < \infty$

Πρόταση 1 Η ποσότητα $\|\Lambda\|_{L(E, F)} = \sup_{x \in E} \frac{\|\Lambda(x)\|_F}{\|x\|_E}$ ορίζει τη νόρμα $L(E, F)$ που είναι χώρος Banach με αυτή τη νόρμα.

Τότε έχουμε $\|\Lambda(x)\|_F \leq \|\Lambda\|_{L(E, F)} \|x\|_E \quad \forall x \in E$ όπου $\|\Lambda\|_{L(E, F)}$ είναι ο μικρότερος αριθμός για την οποία ισχύει η προηγούμενη σχέση.

Επιπλέον η γραμμικότητα δηλώνει ότι:

$$\|\Lambda\|_{L(E, F)} = \sup_{x \in E / 0 \neq x, \|x\|_E \leq 1} \frac{\|\Lambda(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E / \|x\|_E = 1} \|\Lambda(x)\|_F$$

για $\Lambda \in L(E, F)$.

Θεώρημα 1 Έστω Λ μια γραμμική απεικόνιση από το E στο F . Τότε οι παρακάτω 3 προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i) Λ είναι φραγμένη

ii) Λ είναι συνεχής

iii) Λ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $u_0 \in E$

Ορισμός 4 Εάν E είναι χώρος Banach το σύνολο των γραμμικών και συνεχών απεικονίσεων από το E στο $\mathbb{R}$ καλείται δυϊκός χώρος του E και συμβολίζεται με E' . Εάν $x' \in E'$ η εικόνα $x'(x)$ του $x \in E$ συμβολίζεται με $\langle x', x \rangle_{E', E}$.

Η αγκύλη $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$ καλείται δυϊκός συνδυασμός των E' και E .

Ορισμός 5 Μια ακολουθία x_n στο E λέμε ότι συγκλίνει ασθενώς στο x αν και μόνο αν $\forall x' \in E', \langle x', x_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle x', x \rangle_{E', E}$. Αυτή η ασθενής σύγκλιση συμβολίζεται:

$x_n \rightharpoonup x$ ασθενώς στο E .

Πρόταση 2 Έστω x_n μια ακολουθία που συγκλίνει ασθενώς στο x στο E . Τότε

a) x_n είναι μια φραγμένη ακολουθία στο E δηλαδή υπάρχει μια σταθερά C ανεξάρτητη του n τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\|_E \leq C$

β) η νόρμα στο E είναι κάτω ημισυνεχής ως προς την ασθενή σύγκλιση δηλαδή: $\|x_n\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E$

Ορισμός 6 Λέμε ότι ο χώρος Banach E είναι ομοιόμορφα κυρτός εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(x, \psi \in E, \|x\|_E \leq 1, \|\psi\|_E \leq 1, \|x - \psi\|_E > \varepsilon) \Rightarrow \left(\left\| \frac{x + \psi}{2} \right\|_E < 1 - \delta \right)$$

Πρόταση 3 Έστω x_n μια ακολουθία στο E τότε έχουμε:

$$(a) x_n \rightarrow x \text{ ισχυρά στο } E \Rightarrow (b) \begin{cases} i) x_n \rightharpoonup x \text{ ασθενώς στο } E \\ ii) \|x_n\|_E \rightarrow \|x\|_E \end{cases}$$

Επιπλέον εάν E είναι ομαλώς κυρτή τότε $a \Leftrightarrow b$

Θεώρημα 2 (Eberlein – Smuljan) Υποθέτουμε ότι E είναι αυτοπαθής δηλαδή $f(E) = E''$ και έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία στο E . Τότε:

i) Υπάρχει μια υπακολουθία x_{n_k} της x_n και $x \in E$ τέτοιο ώστε όταν $k \rightarrow \infty, x_{n_k} \rightharpoonup x$ ασθενώς στο E .

ii) εάν κάθε ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της x_n έχει το ίδιο όριο x , τότε ολόκληρη η ακολουθία x_n συγκλίνει ασθενώς στο x δηλαδή $x_n \rightharpoonup x$ ασθενώς στο E .

Θεώρημα 3 Εάν $f \in L^1_{loc}(Q)$ τέτοια ώστε $\int_Q f(x)\phi(x)dx = 0, \forall \phi \in D(Q)$ τότε $f = 0$ στο Q .

Ορισμός 7 Εστω F ένας χώρος Banach και έστω το σύνολο $E = F'$.

Μια ακολουθία x_n στο E λέμε ότι συγκλίνει ασθενώς* στο x αν και μόνο αν

$$\langle x_n, x' \rangle_{F', F} \rightarrow \langle x, x' \rangle_{F', F} \quad \forall x' \in F.$$

Αυτή η ασθενής* σύγκλιση συμβολίζεται ως έξης:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ ασθενώς* στο } E.$$

Πρόταση 4 Εστω F να είναι ένας χώρος Banach και $E = F'$. Επειτα κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία στο E είναι επίσης ασθενώς* συγκλίνουσα.

Πρόταση 5 Εστω x_n μια ασθενώς* συγκλίνουσα ακολουθία στο x στο $E = F'$ όπου F είναι χώρος Banach. Τότε:

i) x_n είναι μια φραγμένη ακολουθία στο E δηλαδή υπάρχει μια σταθερά ανεξάρτητη του n τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\|_E \leq C$.

ii) Η νόρμα είναι κάτω ημισυνεχής ως προς την ασθενή* σύγκλιση δηλαδή:

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E.$$

Ορισμός 8 Λέμε ότι ένας χώρος Banach F είναι διαχωρίσιμος αν υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του το οποίο είναι πυκνό στο F .

Θεώρημα 4 Εστω F διαχωρίσιμος χώρος Banach και έστω $E = F'$.

Εστω x_n μια φραγμένη ακολουθία στο E τότε:

i) υπάρχει μια υπακολουθία x_{n_k} του x_n και $x \in E$ τέτοιο ώστε όταν το $k \rightarrow \infty$, $x_{n_k} \rightharpoonup x$ ασθενώς* στο E .

ii) εαν κάθε ασθενώς* συγκλίνουσα υπακολουθία του x_n έχει το ίδιο όριο x , τότε η ακολουθία x_n συγκλίνει ασθενώς στο x δηλαδή: $x_n \rightharpoonup x$ ασθενώς* στο E .

Πρόταση 6 Εστω x_n μια ακολουθία στο $E = F'$ όπου F είναι χώρος Banach και ψ_n μια ακολουθία στο E' τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \psi_n \rightarrow \psi \text{ ισχυρά στο } F \\ x_n \rightharpoonup x \text{ ασθενώς* στο } E \end{cases}$$

$$\text{Τότε } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, \psi_n \rangle_{F, F'} = \langle x, \psi \rangle_{F, F'}$$

Ορισμός 9 Εστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε:

$$L^p(Q) = \{f/f : Q \mapsto \mathbb{R}, f \text{ μετρήσιμη και τέτοια ώστε } \int_Q |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

$$L^\infty(Q) = \{f/f : Q \mapsto \mathbb{R}, f \text{ μετρήσιμη και τέτοια ώστε να υπάρχει ένα } C \in \mathbb{R} \text{ με } |f| \leq C \text{ στο } Q\}.$$

$$\text{Ορίζουμε επίσης } L^p_{loc}(Q) = \{f/f \in L^p(\omega) \text{ για κάθε ανοιχτό φραγμένο σύνολο } \omega \text{ με } \bar{\omega} \subset Q\}$$

Πρόταση 7 Εστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < +\infty$. Το σύνολο $L^p(Q)$ είναι χώρος Banach με τη νόρμα:

$$\|f\|_{L^p(Q)}$$

$$\begin{cases} \left[\int_Q |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \text{ εαν } p < +\infty \\ \inf\{C, |f| \leq C \text{ στο } Q\} \text{ εαν } p = +\infty \end{cases} \quad (6.3)$$

Εαν $p = 2$ ο χώρος $L^2(Q)$ είναι χώρος Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο $(f, g)_{L^2(Q)} = \int_Q f(x)g(x)dx$. Ο χώρος $L^2(Q)$ είναι διαχωρίσιμος για $1 \leq p < +\infty$, και ομοιόμορφα κυρτός για $1 < p < +\infty$.

Πρόταση 8 *Ανισότητα του Holder.*

Εστω $1 \leq p < +\infty$ και p' να είναι το συζυγές του δηλαδή:

$$\begin{cases} \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} & \text{εαν } 1 < p < +\infty \\ p' = 1 & \text{εαν } p = +\infty \\ p' = +\infty & \text{εαν } p = 1. \end{cases} \quad (6.4)$$

Τότε $\int_Q |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(Q)} \|g\|_{L^{p'}(Q)}$ για κάθε $f \in L^p(Q)$ και $g \in L^{p'}(Q)$.

Για $p = 2$ η παραπάνω ανισότητα λέγεται ανισότητα Cauchy – Schwarz.

Πόρισμα 2 Εστω $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Τότε $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ με $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^q(\Omega)}$, όπου η σταθερά c εξαρτάται από τα $|\Omega|$, p και q .

Θεώρημα 5 *Θεώρημα αναπαράστασης*

Εστω $1 \leq p < +\infty$ και p' το συζυγές του. Εστω $f \in [L^p(Q)]'$, τότε υπάρχει μοναδική $g \in L^{p'}(Q)$ τέτοια ώστε: $\langle f, \phi \rangle_{[L^p(Q)]', [L^p(Q)]} = \int_Q g(x)\phi(x)dx$, $\forall \phi \in L^p(Q)$.

Επιπλέον $\|g\|_{L^{p'}(Q)} = \|f\|_{[L^p(Q)]'}$.

Θεώρημα 6 Εαν $f \in L^1_{loc}(Q)$ τέτοια ώστε $\int_Q f(x)g(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in D(Q)$ τότε $f = 0$ στο Q .

Πρόταση 9 Εστω $1 < p < \infty$ και u_n μια ακολουθία στον $L^p(\Omega)$. Τότε ισχύει η επόμενη ισοδυναμία:

$$(a) u'_n \rightharpoonup u \text{ ασθενώς στον } L^p(\Omega) \Leftrightarrow (b) \begin{cases} i) \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C \text{ ανεξάρτητο του } n \\ ii) \int_I u_n dx \rightarrow \int_I u dx \text{ για κάθε διάστημα } I \subset \Omega. \end{cases} \quad (6.5)$$

Πρόταση 10 Εστω u_n μια ακολουθία στον $L^\infty(\Omega)$. Τότε έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία:

$$(a) u_n \rightharpoonup u \text{ ασθενώς}^* \text{ στο } L^\infty(\Omega) \Leftrightarrow (b) \begin{cases} i) \|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \text{ ανεξάρτητη του } n \\ ii) \int_I u_n dx \rightarrow \int_I u dx \text{ για κάθε διάστημα } I \subset \Omega. \end{cases} \quad (6.6)$$

Ορισμός 10 Εστω Ω ένα ανοιχτό φραγμένο σύνολο του $\mathbb{R}^n$ και f μια συνάρτηση στο $L^1(\Omega)$. Η μέση τιμή της f στο Ω είναι ο πραγματικός αριθμός $M_\Omega(f)$ που δίνεται από $M_\Omega(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(\psi)d\psi$.

6.0.1 Χώροι Sobolev

Εστω $\mathcal{D}(O)$ το σύνολο των απειριόριστα διαφορισίμων συναρτήσεων των οποίων ο φορέας είναι ένα πλήρες σύνολο του $\mathbb{R}^n$ στο O που είναι ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 11 Εστω ϕ_n μια ακολουθία στο $\mathcal{D}(O)$. Λέμε ότι η ϕ_n συγκλίνει σε ένα στοιχείο $\phi \in \mathcal{D}(O)$ αν και μόνο αν

- i) υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο $K \subset O$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\text{supp} \phi_n \subset K$,
- ii) για κάθε $\alpha \in \mathbb{N}^N$ $\partial^\alpha \phi_n$ συγκλίνει ομαλώς στο $\partial^\alpha \phi$ στο K .

Ορισμός 12 Μια απεικόνιση $T : \mathcal{D}(O) \mapsto \mathbb{R}$ καλείται κατανομή στο O αν και μόνο αν

- i) Τείναι γραμμική δηλαδή $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(O), T(\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2) = \lambda_1 T(\phi_1) + \lambda_2 T(\phi_2)$,
- ii) Τείναι συνεχής δηλαδή $(\phi_n \rightarrow \phi \text{ στο } \mathcal{D}(O)) \Rightarrow (T(\phi_n) \rightarrow T(\phi))$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}'(O)$ το σύνολο των κατανομών στο O .

Ορισμός 13 Μια ακολουθία T_n στο $\mathcal{D}'(O)$ λέμε ότι συγκλίνει (με την έννοια των κατανομών) σε ένα στοιχείο του $\mathcal{D}'(O)$ αν και μόνο αν

$$\langle T_n, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(O), \mathcal{D}(O)} \longrightarrow \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(O), \mathcal{D}(O)} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(O).$$

Συμβολίζουμε αυτή τη σύγκλιση με: $T_n \longrightarrow T$ στο $\mathcal{D}'(O)$.

Ορισμός 14 Παράγωγος με την έννοια των κατανομών

Εστω $T \in \mathcal{D}'(O)$. Για κάθε $i = 1, \dots, N$ η παράγωγος $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ του T ως προς x_i ορίζεται απο:

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(O), \mathcal{D}(O)} = -\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle_{\mathcal{D}'(O), \mathcal{D}(O)} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(O).$$

Σημείωση 1 Εστω $f \in L^1(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι η παράγωγος με την έννοια των κατανομών $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ είναι στον $L^1(\Omega)$. Έχουμε $\int_O f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_O f \frac{\partial f}{\partial x_i} \phi dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(O)$. Εάν η συνάρτηση είναι στο $C^1(O)$, η παραγωγός της με την έννοια των κατανομών συμπίπτει με την συνήθη μερική παράγωγο δηλαδή δεν είναι τίποτε άλλο απο τον τύπο του Green.

Ορισμός 15 Εστω $1 \leq p < \infty$. Ο χώρος Sobolev $W_{1,p}(Q)$ ορίζεται απο

$$W_{1,p}(Q) = \left\{ u | u \in L^p(Q), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(Q), i = 1, \dots, N \right\}.$$

$$\text{Για } p = 2 \text{ έχουμε } W^{1,2}(Q) = H^1(Q) \text{ δηλαδή } H^1(Q) = \left\{ u | u \in L^2(Q), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(Q), i = 1, \dots, N \right\}$$

Πρόταση 11 i) Ο χώρος $W^{1,p}(Q)$ είναι χώρος Banach με τη νόρμα:

$$\|u\|_{W^{1,p}(Q)} = \|u\|_{L^p(Q)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q)},$$

$1 \leq p < \infty$ η νόρμα αυτή είναι ισοδύναμη με την:

$$\|u\|_{W^{1,p}(Q)} = \left(\|u\|_{L^p(Q)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(Q)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

όπου $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ και

$$\|\nabla u\|_{L^p(Q)} = \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ii) Ο χώρος $W^{1,p}(Q)$ είναι διαχωρίσιμος για $1 < p \leq +\infty$ και αυτοπαθής για $1 < p \leq +\infty$

iii) Ο χώρος $H^1(Q)$ είναι χώρος Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο:

$$(u, w)_{H^1(Q)} = (u, w)_{L^2(Q)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)_{L^2(Q)} \quad \forall u, w \in H^1(Q)$$

Ορισμός 16 Για κάθε $1 \leq p < \infty$ ο χώρος Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως η θήκη του $D(\Omega)$ ως προς τη νόρμα του $W^{1,p}(\Omega)$. Ορίζουμε $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Είναι φανερό ότι $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ και έτσι ο χώρος $H_0^1(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο που δίνεται πιο πάνω.

Θεώρημα 7 Ισχύουν τα ακόλουθα:

i) εαν $1 \leq p < N$, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ με

-συμπαγή εμφύτευση για $q \in [1, p^*]$ όπου $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

-συνεχρή εμφύτευση για $q = p^*$,

ii) εαν $p = N$, $W_0^{1,N}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ με συμπαγή εμφύτευση εαν $q \in [1, +\infty]$

iii) εαν $p > N$, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ με συμπαγή εμφύτευση.

Πρόταση 12 Ανισότητα του Poincare

Υπάρχει μια σταθερά C_Ω τέτοια ώστε $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$, όπου η σταθερά C_Ω είναι σταθερά ανεξάρτητη της διαμέτρου του Ω .

Σημείωση 2 Οι παρακάτω εμφυτεύσεις είναι συμπαγείς: $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$. Σημειώνουμε επίσης ότι εαν $u \in H_0^1(\Omega)$ και $v \in L^2(\Omega)$ τότε απο το θεώρημα αναπαράστασης έχουμε:

$$\langle u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx.$$

$$\text{Όμοια εαν } u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \text{ και } v \in L^2(\partial\Omega) \text{ έχουμε: } \langle u, v \rangle_{(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))', H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} uv ds.$$

Ορισμός 17 Εστω $C_{per}^1(Y)$ ένα υποσύνολο του $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ των Y -περιοδικών συναρτήσεων. Ορίζουμε με $H_{per}^1(Y)$ τη θήκη του $C_{per}^\infty(Y)$ με την H^1 νόρμα.

Θεώρημα 8 Ας ορίσουμε τους παρακάτω χώρους Banach:

$$W = \left\{ v | v \in L^2(a, b; H_0^1(\Omega)), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(a, b; H^{-1}(\Omega)) \right\}$$

$$W_1 = \left\{ v | v \in L^2(a, b; L^2(\Omega)), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(a, b; H^{-1}(\Omega)) \right\}$$

εφοδιασμένους με τη νόρμα του γραφήματος. Ισχύουν τα ακόλουθα:

i) οι εμφυτεύσεις $W \subset L^2(a, b; L^2(\Omega))$, $W_1 \subset L^2(a, b; H^{-1}(\Omega))$ είναι συμπαγείς.

ii) $W \subset C([a, b]; L^2(\Omega))$, $W_1 \subset C([a, b]; H^{-1}(\Omega))$ όπου, για $X = L^2(\Omega)$ ή $Q = H^{-1}(\Omega)$ που συμβολίζεται ως $C([a, b]; X)$ ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων στο $\Omega \times [a, b]$ τέτοιοι ώστε $u(\cdot, t) \in X$ για κάθε $t \in [a, b]$ η αντιστοιχία $t \in [a, b] \mapsto u(\cdot, t) \in X$ είναι συνεχής.

iii) Για κάθε $u, v \in W$ έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) v(x, t) dx = \langle u'(\cdot, t), v(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle v'(\cdot, t), u(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

Πρόταση 13 Η παρακάτω ισότητα: $\|u\|_{L^p(\Omega; X)} = \left\{ \int_{\Omega} \|u(x)\|_X^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$ ορίζει νόρμα στον $L^p(\Omega; X)$ που είναι χώρος Banach.

Εάν X είναι αυτοπαθής και $1 < p < \infty$, ο χώρος $L^p(\Omega; X)$ είναι αυτοπαθής επίσης. Επιπλέον αν X είναι διαχωρίσιμος και $1 \leq p < \infty$, τότε ο χώρος $L^p(\Omega; X)$ είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση 14 Έστω H ένας χώρος Hilbert και $1 \leq p < \infty$. Τότε έχουμε την ακόλουθη ταυτοποίηση:

$$[L^p(\alpha, \beta; H)]' = L^p(\alpha, \beta; H'), \text{ όπου } p' \text{ είναι το συζυγές του } p.$$

Συγκεκριμένα, $[L^2(\alpha, \beta; H_0^1(\Omega))] = L^2(\alpha, \beta; H^{-1}(\Omega))$ και εάν $f \in L^2(\alpha, \beta; H^{-1}(\Omega))$, έχουμε:

$$\langle f, u \rangle_{L^2(\alpha, \beta; H^{-1}(\Omega)), L^2(\alpha, \beta; H_0^1(\Omega))} = \int_{\alpha}^{\beta} \langle f(t), u(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt$$

για κάθε $u \in L^2(\alpha, \beta; H_0^1(\Omega))$.

Πρόταση 15 Εστω $u \in L^2(a, b; H_0^1(\Omega)) \cap C([a, b]; L^2(\Omega))$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\Phi \in C^{\infty}([a, b]; D(\Omega))$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} i) \|u - \Phi\|_{C([a, b]; L^2(\Omega))} \leq \delta \\ ii) \|\nabla u - \nabla \Phi\|_{L^2(\Omega \times [a, b])} \leq \delta, \end{cases} \quad (6.7)$$

όπου $C^{\infty}([a, b]; D(\Omega))$ είναι χώρος μετρήσιμων συναρτήσεων στο $\Omega \times [a, b]$ τέτοιο ώστε $(\cdot, t) \in D(\Omega)$ για κάθε $t \in [a, b]$ και τέτοιο ώστε η αντιστοιχία $t \in [a, b] \mapsto u(\cdot, t) \in D(\Omega)$ είναι α-περιόριστα ολοκληρώσιμη.

Επιπλέον εάν $u' \in C([a, b]; L^2(\Omega))$ τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\Phi \in C^{\infty}([a, b]; D(\Omega))$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} i) \|u' - \Phi'\|_{C([a, b]; L^2(\Omega))} \leq \delta \\ ii) \|\nabla u - \nabla \Phi\|_{L^2(\Omega \times [a, b])} \leq \delta \end{cases} \quad (6.8)$$

Ορισμός 18 Υποθέτουμε ότι ο πίνακας B είναι $N \times N$ συμμετρικός στο $M(\alpha, \beta, \Omega)$. Η σταθερά λ είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή $\mathcal{B} = -\text{div}(B \nabla)$ με συνοριακές συνθήκες Dirichlet, εάν

υπάρχει $u \neq 0$, η λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} \mathcal{B}u = \lambda u & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.9)$$

Η συνάρτηση u καλείται ιδιοσυνάρτηση του $\mathcal{B}$, συσχετισμένη με την ιδιοτιμή λ . Το σύνολο των ιδιοτιμών καλείται φάσμα του $\mathcal{B}$. Ο διανυσματικός χώρος των λύσεων του παραπάνω προβλήματος για κάθε σταθερό λ στο φάσμα του $\mathcal{B}$ συμβολίζεται με $\mathcal{E}(\lambda)$ και καλείται ιδιόχωρος συνδεδεμένος με την ιδιοτιμή λ . Επιπλέον μια ιδιοτιμή καλείται απλή αν ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι μιας διάστασης. Εύκολα παρατηρούμε ότι η υπόθεση της συμμετρίας δηλώνει ότι οι ιδιοτιμές λ αν υπάρχουν είναι πραγματικές. Συμπερασματικά η μεταβολική διατύπωση του παραπάνω πρόβληματος είναι:

$$\begin{cases} \text{Εύρεση } (u, \lambda) \in [H_0^1(\Omega)/\{0\}] \times \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε} \\ \int_{\Omega} B \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (6.10)$$

Πρόταση 16 Υποθέτουμε ότι ο πίνακας B είναι συμμετρικός στο $M(\alpha, \beta, \Omega)$. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- i) Το φάσμα του $\mathcal{B}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}_+^*$ όπου μοναδικό σημείο συσσώρευσης είναι το ∞ .
- ii) Για κάθε ιδιοτιμή λ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος $\mathcal{E}(\lambda)$ είναι πεπερασμένης διάστασης.
- iii) Ο χώρος $L^2(\Omega)$ είναι Hilbert άθροισμα όλων των ιδιόχωρων του $\mathcal{B}$.

Σημείωση 3 Απο την προηγούμενη πρόταση 16, μπορούμε να περιγράψουμε το φάσμα του B ως μια αύξουσα ακολουθία $\{\lambda_n\}$ με $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, όπου κάθε ιδιοτιμή επαναλαμβάνεται τόσες φορές όσες η διάσταση του αντίστοιχου ιδιόχωρου. Τότε, απο την (iii) της πρότασης 16 υπάρχει η αντίστοιχη ακολουθία των ιδιοσυναρτήσεων $\{u_n\}$ που αποτελεί ορθοκανονική βάση στον $L_2(\Omega)$. Αυτό σημαίνει ότι $\int_{\Omega} u_i u_j dx = \delta_{ij}$, όπου δ_{ij} είναι το σύμβολο του Kronecker και $v = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} v u_k \right) u_k \quad \forall v \in L^2(\Omega)$.

Θεώρημα 9 Ομογενες πρόβλημα Dirichlet

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A ανήκει στο $M(\alpha, \beta, \Omega)$. Τότε για κάθε $f \in H^{-1}(\Omega)$, υπάρχει μια μοναδική λύση $u \in H_0^1(\Omega)$ του προβλήματος Dirichlet. Επιπλέον $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$ όπου $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

Εάν $f \in L^2(\Omega)$, η λύση ικανοποιεί την εκτίμηση $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_{\Omega}}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}$, όπου C_{Ω} είναι η σταθερά της ανισότητας του Poincare.

Θεώρημα 10 Περιοδική συνοριακή συνθήκη

Εστω πίνακας A στον $M(\alpha, \beta, Y)$ με Y -περιοδικούς συντελεστές και Τότε το πρόβλημα

$$\begin{cases} \text{Εύρεση } u \in W_{per}(Y) \text{ τέτοιο ώστε} \\ \hat{\alpha}_Y(\dot{u}, \dot{v}) = \langle f, \dot{v} \rangle_{(W_{per}(Y))^Y, W_{per}(Y)} \\ \forall \dot{v} \in W_{per}(Y). \end{cases} \quad (6.11)$$

έχει μοναδική λύση, όπου $\dot{\alpha}_Y(\dot{u}, \dot{v}) = \int_Y A \nabla u \nabla v dy \quad \forall u \in \dot{u}, \forall v \in \dot{v}$.
Επιπλέον $\|\dot{u}\|_{W_{per}(Y)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{(W_{per}(Y))'}$.

Θεώρημα 11 Έστω A ο πίνακας στον $M(\alpha, \beta, Y)$ με Y -περιοδικούς συντελεστές και $f \in (W_{per}(Y))'$. Τότε το πρόβλημα

$$\begin{cases} \text{Ευρεση } \dot{u} \in W_{per}(Y) \text{ τέτοιου ώστε} \\ \int_Y A \nabla u \nabla v dy = \langle f, v \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)} \\ \forall v \in W_{per}(Y). \end{cases} \quad (6.12)$$

έχει μοναδική λύση.

Επιπλέον $\|u\|_{W_{per}(Y)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{(W_{per}(Y))'}$.

Πρόταση 17 Η παρακάτω ισότητα $\|\dot{\alpha}\|_{W_{per}(Y)} = \|\nabla u\|_{L^2(Y)}$, $\forall u \in \dot{u}, \dot{u} \in W_{per}(Y)$, ορίζει μια νόρμα στον $W_{per}(Y)$.

Επιπλέον, ο δυικός χώρος $(W_{per}(Y))'$ μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο $\{F \in (H_{per}^1(Y))' \mid F(c) = 0, \forall c \in \mathfrak{R}\}$ με $\langle F, \dot{u} \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)} = \langle F, u \rangle_{(H_{per}^1(Y))', H_{per}^1(Y)} \quad \forall u \in \dot{u}, \forall \dot{u} \in W_{per}(Y)$.

Πρόταση 18 Έστω A^0 πίνακας που ορίζεται από $A^0 \lambda = M_Y(A \nabla \hat{\omega}_\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathfrak{R}^N$. Τότε υπάρχει ένας θετικός αριθμός α_0 τέτοιος ώστε

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}^0 \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 \|\xi\|^2, \forall \xi \in \mathfrak{R}^N.$$

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- (1)G.Allaire, *Homogenization and two scale convergence*,1992.
- (2)Asymptotic analysis for periodic structures, A.Bensoussan ,J.L.Lions, G.Papanicolaou.
- (3)H.Brezis,*Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.
- (4)*An Introduction to Homogenization*, D.Cioranescu, P.Donato, Oxford U.P.1999.
- (5)G.Nguetseng.A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization,1989.
- (6)L.Tartar, *The general theory of homogenization* ,Springer,2009.