Εκτιμήσεις για μεγιστικούς τελεστές που ορίζονται από κυρτά σώματα

Διπλωματική Εργασία

Νικόλαος Παναγιωτάκος

Επιβλέπων: Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα – 2016

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood

Ο μεγιστικός τελεστής ορίστηκε από τους Hardy-Littlewood [9] για συναρτήσεις μιας μεταβλητής και γενικεύτηκε από τον Wiener [20] για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Για κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$ η μεγιστική συνάρτηση Mf ορίζεται από την

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|D_r|} \int_{D_r} |f(x-y)|\, dy \tag{1.1.1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, όπου D_r είναι η Ευκλείδεια μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα r (και $|A|$ είναι το n-διάστατο μέτρο Lebesgue ενός συνόλου Borel στον $\mathbb{R}^n$).

Το κλασικό θεώρημα των Hardy-Littlewood για τον μεγιστικό τελεστή ισχυρίζεται ότι ο υπογραμμικός τελεστής $f \mapsto Mf$ είναι ισχυρού τύπου (p,p) αν $1 < p \leqslant \infty$ και ασθενούς τύπου $(1,1)$. Δηλαδή, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω $n \geqslant 1$. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει η ανισότητα ασθενούς τύπου $(1,1)$*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : (Mf)(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1, \tag{1.1.2}$$

όπου η σταθερά C_n εξαρτάται μόνο από τη διάσταση n.

Για κάθε $1 < p \leqslant \infty$ υπάρχει σταθερά $C_{n,p} > 0$, η οποία εξαρτάται μόνο από τη διάσταση n και το p, τέτοια ώστε: για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ισχύει η ανισότητα ισχυρού τύπου (p,p)

$$\|Mf\|_p \leqslant C_{n,p} \|f\|_p. \tag{1.1.3}$$

Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι η μεγιστική συνάρτηση Mf μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f δεν είναι ολοκληρώσιμη, εκτός αν $f = 0$ σχεδόν παντού. Συνεπώς, δεν μπορεί κανείς να ελπίζει σε μια ανισότητα ισχυρού τύπου $(1, 1)$ για τον μεγιστικό τελεστή. Όμως, η ανισότητα (1.1.2) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η (1.1.3) ισχύει τετριμμένα στην περίπτωση $p = \infty$ και με το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz, μας εξασφαλίζουν την (1.1.3) για $1 < p < \infty$.

Περιγράφουμε την κλασική απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1 στην Παράγραφο 3.1. Η απόδειξη αυτή χρησιμοποιεί το λήμμα κάλυψης του Vitali (η αρχική απόδειξη των Hardy-Littlewood για τη μονοδιάστατη περίπτωση χρησιμοποιούσε την έννοια της φθίνουσας αναδιάταξης μιας συνάρτησης). Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz, το οποίο χρησιμοποιείται στην απόδειξη της (1.1.3), παρουσιάζεται στην Παράγραφο 2.8. Γενικά, στο Κεφάλαιο 2 συγκεντρώνουμε διάφορα εργαλεία και αποτελέσματα της Αρμονικής Ανάλυσης τα οποία χρησιμοποιούνται για την απόδειξη των αποτελεσμάτων που θα παρουσιάσουμε.

Οι σταθερές C_n και $C_{n,p}$ στο Θεώρημα 1.1.1 είναι εκθετικές ως προς τη διάσταση n: η απόδειξη δίνει

$$C_{n,p} \leqslant \frac{c_1 p}{p-1} c_2^{n/p} \tag{1.1.4}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές, και το ερώτημα που προκύπτει είναι να βρεθεί η καλύτερη ασυμπτωτική συμπεριφορά, καθώς το $n \to \infty$, που μπορεί να πετύχει κανείς. Ο Stein [16] απέδειξε ότι για κάθε $p > 1$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε την σταθερά $C_{n,p}$ της (1.1.4) με μια σταθερά $A_p > 0$ που εξαρτάται μόνο από το p.

Θεώρημα 1.1.2 (Stein). *Για κάθε $1 < p \leqslant \infty$ υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|Mf\|_p \leqslant A_p \|f\|_p. \tag{1.1.5}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.2, η οποία παρουσιάζεται στην Παράγραφο 3.2, βασίζεται σε ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα που παρουσιάζει, ανεξάρτητα, ενδιαφέρον. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_k$ τον σφαιρικό μεγιστικό τελεστή στον $\mathbb{R}^k$, ο οποίος για κάθε $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$\mathcal{M}_k(f)(x) = \sup_{\rho>0} \int_{S^{k-1}} |f(x-\rho\theta)| \, d\sigma(\theta), \tag{1.1.6}$$

όπου σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{k-1}. Ο Stein [15] απέδειξε το εξής φράγμα για τον τελεστή $\mathcal{M}_k$:

Θεώρημα 1.1.3. *Έστω $k \geqslant 3$ και $p > k/(k-1)$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^k)$ ισχύει*

$$\|\mathcal{M}_k(f)\|_p \leqslant A_{k,p}\|f\|_p, \tag{1.1.7}$$

όπου $A_{k,p}$ είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα k και p.

Περιγράφουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.3 στην Παράγραφο 3.3, ακολουθώντας τον Rubio de Francia [13]. Στην Παράγραφο 3.4 συζητάμε την απόδειξη της ασθενούς ανισότητας τύπου $(1,1)$ των Stein και Stromberg [18], πάντα για τον κλασικό μεγιστικό τελεστή. Όπως θα δούμε βελτιώνουν την σταθερά $C_n = 3^n$ του Θεωρήματος 1.1.1 σε $C_n = O(n)$:

Θεώρημα 1.1.4 (Stein-Stromberg). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει*

$$|\{x : Mf(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{Cn}{\lambda}\|f\|_1. \tag{1.1.8}$$

Η απόδειξη χρησιμοποιεί το μεγιστικό θεώρημα Hopf-Dunford-Schwartz και εκμεταλλεύεται τη σχέση των μέσων τιμών μιας συνάρτησης σε μπάλες με την ημιομάδα της θερμότητας. Στην ίδια εργασία, οι Stein και Stromberg αποδεικνύουν μία ακόμα ανισότητα ισχυρού τύπου (p,p) για τον μεγιστικό τελεστή.

Θεώρημα 1.1.5 (Stein-Stromberg). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $p > 1$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ισχύει*

$$\|M(f)\|_p \leqslant C\sqrt{n}\frac{p}{p-1}\|f\|_p. \tag{1.1.9}$$

Αν κρατήσουμε το $p > 1$ σταθερό και κοιτάξουμε την εξάρτηση από τη διάσταση τότε το Θεώρημα 1.1.5 είναι ασθενέστερο από το Θεώρημα 1.1.2. Μας δίνει όμως τη σωστή εξάρτηση από το p όταν $p \to 1^+$.

1.2 Μεγιστικοί τελεστές που ορίζονται από κυρτά σώματα

Έστω B ένα ανοικτό, φραγμένο, συμμετρικό κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $r > 0$ συμβολίζουμε με B^r το σύνολο

$$B^r := rB = \{x \in \mathbb{R}^n : r^{-1}x \in B\}. \tag{1.2.1}$$

Για κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε την μεγιστική συνάρτηση $M_B(f)$ της f:

$$M_B(f)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B^r|}\int_{B^r}|f(x-y)|\,dy. \tag{1.2.2}$$

Οι Stein και Stromberg [18] απέδειξαν μια ανισότητα ασθενούς τύπου $(1,1)$ για τον μεγιστικό τελεστή $f \mapsto M_B(f)$, με σταθερά που φράσσεται από $cn\log n$, όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά, δηλαδή η σταθερά είναι ανεξάρτητη από το B.

Θεώρημα 1.2.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n\in\mathbb{N}$, για κάθε ανοικτό, φραγμένο, συμμετρικό κυρτό σύνολο B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ισχύει*

$$|\{x : M_B(f)(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{Cn\log(n+1)}{\lambda}\|f\|_1, \qquad \lambda > 0. \tag{1.2.3}$$

Στην ίδια εργασία απέδειξαν L_p εκτιμήσεις για την M_B, πάντα στο γενικό πλαίσιο ενός ανοικτού, φραγμένου, συμμετρικού κυρτού συνόλου B. Ακόμα πιο γενικά, υποθέτουμε εδώ ότι το B είναι ένα ανοικτό, φραγμένο, ακτινικό σύνολο. Δηλαδή,

$$B = \{x : x = t\theta, 0 \leqslant t < \rho(\theta), \theta \in S^{n-1}\},$$

όπου S^{n-1} είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$, και ρ είναι μια θετική, φραγμένη συνάρτηση στην S^{n-1}. Το θεώρημα των Stein και Stromberg δίνει μια εκτίμηση καλύτερη από αυτή που θα προέκυπτε αν συνδυάζαμε το θεώρημα Marcinkiewicz με το Θεώρημα 1.2.1. Επίσης, όπως το Θεώρημα 1.1.5, επιτυγχάνει τη σωστή εξάρτηση από το p καθώς το $p \to 1^+$.

Θεώρημα 1.2.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n\in\mathbb{N}$, για κάθε ανοικτό, φραγμένο, ακτινικό σύνολο σύνολο B στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $p>1$ και για κάθε $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ ισχύει*

$$\|M_B(f)\|_p \leqslant Cn\frac{p}{p-1}\|f\|_p. \tag{1.2.4}$$

Παρουσιάζουμε τα δύο αυτά αποτελέσματα στο Κεφάλαιο 4. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1 χρησιμοποιεί ένα τεχνικό και πολύπλοκο λήμμα κάλυψης τύπου Vitali. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.2 χρησιμοποιεί τη μέθοδο των στροφών και είναι αρκετά απλή.

Στο Κεφάλαιο 5 περιγράφουμε τη δουλειά του Bourgain, ο οποίος στα [3] και [4] απέδειξε L^p-εκτιμήσεις για τον μεγιστικό τελεστή M_B, με σταθερές ανεξάρτητες από την διάσταση και από το σώμα B. Αρχικά, ο Bourgain απέδειξε στο [3] την εξής L^2-εκτίμηση.

Θεώρημα 1.2.3. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n\in\mathbb{N}$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B στον $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, η μεγιστική συνάρτηση*

$$M_B(f)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B^r|}\int_{B^r}|f(x-y)|\,dy \tag{1.2.5}$$

ικανοποιεί την

(1.2.6) $$\|M_B(f)\|_2 \leqslant C\,\|f\|_2.$$

Η απόδειξη χρησιμοποιεί εργαλεία της κυρτής γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, την «ισοτροπική θέση» ενός κυρτού σώματος και τις ιδιότητές της, τις οποίες αποδεικνύουμε στην Παράγραφο 5.2. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.3 δίνεται στην Παράγραφο 5.3.

Η L^2-εκτίμηση του Bourgain επεκτάθηκε από τον Carbery [6] και από τον Bourgain στο [4], για κάθε $p > 3/2$. Στην Παράγραφο 4.4 περιγράφουμε τη μέθοδο που ακολούθησε ο Carbery. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω $p > 3/2$. Υπάρχει σταθερά $C_p > 0$, η οποία εξαρτάται μόνο από το p, τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ο μεγιστικός τελεστής*

(1.2.7) $$M_B(f)(x) = \sup_{t>0} t^{-n} \int_{tB} |f(x-y)|\,dy$$

ικανοποιεί την

(1.2.8) $$\|M_B(f)\|_p \leqslant C_p\,\|f\|_p.$$

Επίσης, αν συμβολίσουμε με $\tilde{M}_B$ τον μεγιστικό τελεστή

(1.2.9) $$\tilde{M}_B f(x) = \sup_k\, 2^{-kn} \int_{2^k B} |f(x-y)|\,dy,$$

τότε για κάθε $p > 1$ υπάρχει σταθερά $D_p > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B στον $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

(1.2.10) $$\|\tilde{M}_B(f)\|_p \leqslant D_p\,\|f\|_p.$$

Στο Κεφάλαιο 6 περιγράφουμε τη δουλειά του Muller. Έστω B ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.5 ο Bourgain χρησιμοποίησε το γεγονός ότι υπάρχουν γραμμικός μετασχηματισμός $S \in GL(n)$ και μια σταθερά $L_B > 0$ τέτοια ώστε

(1.2.11) $$|S(B)| = 1 \quad \text{και} \quad \int_{S(B)} |\langle x, \xi\rangle|^2 dx = L_B^2$$

για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $x \in S^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi|^2 = \sum_j |\xi_j|^2 = 1\}$. Η σταθερά L_B προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την (1.2.11) και ο S είναι μοναδικός modulo πολλαπλασιασμό με ορθογώνιο μετασχηματισμό από τα αριστερά.

Για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ ορίζουμε

$$\varphi(u) := \varphi_\xi(u) = |\{x \in S(B) : \langle x, \xi\rangle = u\}|, \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{1.2.12}$$

Επίσης, συμβολίζουμε με π_ξ την ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στο υπερεπίπεδο $\xi^\perp$ που είναι κάθετο στο ξ. Οι σταθερές

$$\frac{1}{\sigma(B)} := \max\{\varphi_\xi(0) : \xi \in S^{n-1}\} \tag{1.2.13}$$

και

$$Q(B) := \max\{|\pi_\xi(S(B))| : \xi \in S^{n-1}\} \tag{1.2.14}$$

είναι γραμμικές αναλλοίωτες του B, δηλαδή $\sigma(T(B)) = \sigma(B)$ και $Q(T(B)) = Q(B)$ για κάθε $T \in GL(n)$.

Αφού η νόρμα $\|M_B\|_p$ είναι επίσης γραμμική αναλλοίωτη του B, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $S(B) = B$. Τότε,

$$\sigma(K) \simeq L_K. \tag{1.2.15}$$

Ο Muller απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω $p > 1$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|M_B f\|_p \leqslant C(p, \sigma(B), Q(B))\, \|f\|_p, \tag{1.2.16}$$

όπου η σταθερά $C = C(p, \sigma, Q)$ είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση n και αύξουσα ως προς σ και Q.

Εκτιμώντας τις παραμέτρους $\sigma(B_q^n)$ και $Q(B_q^n)$, όπου B_q^n είναι η μοναδιαία μπάλα του ℓ_q^n, ο Muller πήρε σαν εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2.5 το εξής.

Θεώρημα 1.2.6. *Έστω $1 \leqslant q < \infty$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|M_{B_q^n} f\|_p \leqslant C(p, q)\, \|f\|_p, \qquad 1 < p \leqslant \infty \tag{1.2.17}$$

όπου $C(p, q)$ είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη από το n.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι τι συμβαίνει στην περίπτωση $q = \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση, ένα απλό γεωμετρικό επιχείρημα δείχνει ότι

$$|\pi_\xi(\widetilde{B}_\infty^n)| = \sum_F |F|\, \langle \xi, n(F)\rangle \tag{1.2.18}$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$, όπου η άθροιση είναι πάνω από όλες τις έδρες F του κύβου $\widetilde{B}_\infty^n$ που το εξωτερικό τους κάθετο διάνυσμα $n(F)$ ικανοποιεί την $\langle \xi, n(F)\rangle \geqslant 0$. Έτσι, αν επιλέξουμε το

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\dots,1)$$

παίρνουμε

$$|\pi_\xi(\widetilde{B}_\infty^n)| = \sum_{j=1}^n \xi_j = \sqrt{n}. \tag{1.2.19}$$

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι $|\pi_\eta(\widetilde{B}_\infty^n)| \leqslant \sqrt{n}$ για κάθε $\eta \in S^{n-1}$, άρα

$$Q(B_\infty^n) = \sqrt{n}. \tag{1.2.20}$$

Έτσι, το βασικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου δίνει ένα φράγμα για τη νόρμα $\|M_{B_\infty^n}\|_{p\to p}$ που αυξάνει με την διάσταση n.

Αργότερα, οι Aldaz [1] και Aubrun [2] απέδειξαν ότι δεν είναι δυνατόν να πετύχουμε ασθενή $(1,1)$ ανισότητα για το μεγιστικό τελεστή του κύβου με σταθερά ανεξάρτητη από τη διάσταση. Πρόσφατα, όμως, ο Bourgain απέδειξε ότι, για κάθε $p>1$, η νόρμα $\|M_{B_\infty^n}\|_{p\to p}$ φράσσεται από μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

Θεώρημα 1.2.7. *Έστω $p>1$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|M_{B_\infty^n} f\|_p \leqslant C_p \, \|f\|_p, \tag{1.2.21}$$

όπου C_p είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη από το n.

Περιγράφουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.7 στο Κεφάλαιο 7.

Κεφάλαιο 2

Εργαλεία από την Αρμονική Ανάλυση και την Θεωρία Πιθανοτήτων

Σε αυτό το κεφάλαιο έχουμε συγκεντρώσει διάφορα εργαλεία από την Αρμονική Ανάλυση και την Θεωρία Πιθανοτήτων, τα οποία χρησιμοποιούνται από τους Stein, Stromberg, Bourgain, Carbery και Muller στις εργασίες που συζητάμε στα επόμενα κεφάλαια. Τα αποτελέσματα αυτά είναι κλασικά και τεχνικά, και μπορούν να βρεθούν διάσπαρτα σε διάφορες πηγές. Ακολουθούμε την παρουσίαση των Deleaval, Guédon και Maurey από το άρθρο επισκόπησης [7], το οποίο εμφανίστηκε, εντελώς συμπτωματικά, ενώ η παρούσα εργασία ήταν σε εξέλιξη και μας προσέφερε σημαντική βοήθεια.

2.1 Η μεγιστική ανισότητα του Doob

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Τυχαία μεταβλητή είναι μια $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ή $f : \Omega \to \mathbb{C}$). Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε η μέση τιμή της f δίνεται από την

$$\mathbb{E}(f) = \int_\Omega f(\omega) dP(\omega).$$

Η κατανομή της f είναι το μέτρο μ το οποίο ορίζεται στην Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{C}$ αντίστοιχα) μέσω της $\mu(B) = P(\{\omega : f(\omega) \in B\})$.

Έστω $\mathcal{G}$ μια σ-υποάλγεβρα της $\mathcal{F}$. Για κάθε $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ η συνάρτηση

$$\phi(A) = \int_A f dP, \quad A \in \mathcal{G}$$

ορίζει ένα μέτρο στην $\mathcal{G}$, το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το $P|_{\mathcal{G}}$. Από το θεώρημα Radon–Nikodym υπάρχει μοναδική $h \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ με την ιδιότητα

$$\int_A h dP = \int_A f dP$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Η συνάρτηση h είναι η *δεσμευμένη μέση τιμή* της f ως προς την $\mathcal{G}$ και συμβολίζεται με $h = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$. Αν $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ τότε η $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι η ορθογώνια προβολή της f στον κλειστό υπόχωρο του $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ που αποτελείται από τις $\mathcal{G}$-μετρήσιμες και τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Οι βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι οι ακόλουθες.

(α) Ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός, γραμμικός και έχει νόρμα 1 σε κάθε L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$: για κάθε $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ισχύει

$$\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_p \leqslant \|f\|_p.$$

(β) Αν $\mathcal{G}_1$ είναι μια σ-υποάλγεβρα της $\mathcal{G}$, τότε $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}_1)$.

(γ) Αν $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$ τότε $\mathbb{E}(f \cdot g|\mathcal{G}) = g \cdot \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.

(δ) Αν $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα, τότε η $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι σταθερή και ίση με τη μέση τιμη της f:

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f) = \int f dP.$$

Ένα martingale (διακριτού χρόνου) στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ αποτελείται από μια *διήθηση*, δηλαδή μια αύξουσα ακολουθία $(\mathcal{F}_k)_{k\in I}$ από σ-υποάλγεβρες της $\mathcal{F}$, με δείκτες από ένα $I \subset \mathbb{Z}$, και από μια ακολουθία $(U_k)_{k\in I}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με την εξής ιδιότητα: αν $k, \ell \in I$ και $k \leqslant \ell$, τότε

$$U_k = \mathbb{E}(U_\ell|\mathcal{F}_k).$$

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο martingale $(U_k)_{k=0}^N$ στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ως προς την διήθηση $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^N$. Οι U_k μπορεί να παίρνουν πραγματικές ή μιγαδικές τιμές (ή ακόμα και τιμές σε έναν χώρο με νόρμα). Ορίζουμε την *μεγιστική ανέλιξη*

$$U_k^* = \max_{0\leqslant j\leqslant k} |U_k|, \qquad k = 0, 1, \dots, N.$$

Στην περίπτωση που οι U_k παίρνουν τιμές σε έναν χώρο με νόρμα, θεωρούμε την $\|U_k\|$ αντί της $|U_k|$.

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω $(U_k)_{k=0}^N$ ένα martingale. Για κάθε $t > 0$ ισχύει ότι*

$$t\, P(U_N^* > t) \leqslant \int_{\{U_N^* > t\}} |U_N|\, dP.$$

Επιπλέον, για κάθε $1 < p \leqslant \infty$, *αν* $U_N \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *τότε*

$$\|U_N^*\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|U_N\|_p. \tag{2.1.1}$$

Απόδειξη. Χωρίζουμε το σύνολο $\{U_N^* > t\}$ σε ξένα υποσύνολα $A_0, A_1, \dots, A_N$, που αντιστοιχούν στην πρώτη χρονική στιγμή k για την οποία $|U_k| > t$: ορίζουμε $A_0 = \{|U_0| > t\}$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant N$ θέτουμε A_k να είναι το σύνολο των $\omega \in \Omega$ για τα οποία $U_{k-1}^*(\omega) \leqslant t$ και $|U_k(\omega)| > t$.

Παρατηρήστε ότι $|U_k(\omega)| > t$ για κάθε $\omega \in A_k$, και το σύνολο A_k ανήκει στην σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}_k$ διότι οι $|U_k|$ και U_{k-1}^* είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες, άρα

$$\begin{aligned} tP(A_k) &\leqslant \int_{A_k} |U_k|\, dP = \int_{A_k} |\mathbb{E}(U_N|\mathcal{F}_k)|\, dP \leqslant \int_{A_k} \mathbb{E}(|U_N|\,|\mathcal{F}_k)\, dP \\ &= \int_{A_k} |U_N|\, dP. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι $\{U_N^* > t\} = \bigcup_{k=0}^N A_k$, και τα σύνολα A_k είναι ξένα ανά δύο, άρα

$$tP(U_N^* > t) = \sum_{k=0}^N tP(A_k) \leqslant \sum_{k=0}^N \int_{A_k} |U_N|\, dP = \int_{\{U_N^* > t\}} |U_N|\, dP. \tag{2.1.2}$$

Τότε, για κάθε $1 < p < \infty$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(U_N^*)^p\right] &= \mathbb{E}\left(\int_0^{U_N^*} pt^{p-1} dt\right) = \int_0^\infty pt^{p-1} P(U_N^* > t)\, dt \\ &\leqslant \int_0^\infty pt^{p-2}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{U_N^* > t\}}|U_N|)\, dt \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{p}{p-1}(U_N^*)^{p-1}|U_N|\right) \\ &\leqslant \frac{p}{p-1}\Big(\mathbb{E}[(U_N^*)^p]\Big)^{1-1/p}\Big(\mathbb{E}|U_N|^p\Big)^{1/p}, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (2.1.2). Έπεται ότι

$$\|U_N^*\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\, \|U_N\|_p.$$

Η περίπτωση $p = \infty$ είναι πολύ απλούστερη. □

2.2 Η μεγιστική ανισότητα του Hopf

Θεωρούμε τώρα έναν χώρο μέτρου (X, Σ, μ) και έναν γραμμικό τελεστή $T : L^1(X, \Sigma, \mu) \to L^1(X, \Sigma, \mu)$. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο και ότι ο T είναι θετικός και έχει νόρμα $\leqslant 1$: δηλαδή, αν $g \in L^1$ και $g \geqslant 0$ τότε $Tg \geqslant 0$ και $\int_X Tg\, d\mu \leqslant \int_X g\, d\mu$.

Έστω $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$. Για κάθε $k \geqslant 0$ θέτουμε

$$S_k(f) = f + Tf + T^2 f + \cdots + T^k f,$$

και για κάθε $N \geqslant 0$ ορίζουμε

$$S_N^*(f) = \max\{S_j(f) : 0 \leqslant j \leqslant N\}.$$

Λήμμα 2.2.1 (Garsia). *Για κάθε $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ ισχύει*

$$\int_{\{S_N^*(f) > 0\}} f \, d\mu \geqslant 0.$$

Απόδειξη. Για απλότητα γράφουμε S_k αντί για $S_k(f)$ και S^* αντί για $S_N^*(f)$. Από τον ορισμό έχουμε $S_k \leqslant S^*$ για κάθε $k \leqslant N$. Αφού ο T είναι γραμμικός και θετικός, έπεται ότι

$$TS_k \leqslant TS^* \quad \text{και} \quad S_{k+1} = f + TS_k \leqslant f + TS^*.$$

Για να πάρουμε μια αντίστοιχη ανισότητα για την $S_0 = f$, αντικαθιστούμε την S^* με το μη αρνητικό της μέρος $(S^*)^+ = \max\{S^*, 0\} \geqslant S^*$. Από την θετικότητα του T έχουμε

$$S_0 = f \leqslant f + T((S^*)^+) \quad \text{και} \quad S_{k+1} \leqslant f + TS^* \leqslant f + T((S^*)^+).$$

Παίρνοντας το maximum των S_k για $0 \leqslant k \leqslant N$, έχουμε την βασική ανισότητα

$$S^* \leqslant f + T((S^*)^+), \quad \text{δηλαδή} \;\; f \geqslant S^* - T((S^*)^+). \tag{2.2.1}$$

Αφού ο T είναι θετικός και έχει νόρμα $\leqslant 1$ στον $L^1(X, \Sigma, \mu)$,

$$\int_{\{S^* > 0\}} S^* d\mu = \int_X (S^*)^+ d\mu \geqslant \int_X T((S^*)^+) d\mu \geqslant \int_{\{S^* > 0\}} T((S^*)^+) d\mu,$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από την (2.2.1), διότι

$$\int_{\{S^* > 0\}} f \, d\mu \geqslant \int_{\{S^* > 0\}} (S^* - T((S^*)^+)) \, d\mu.$$

□

Παρατηρήστε ότι για κάθε $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ ισχύει η ισότητα

$$\{S_N^*(f) > 0\} = \left\{ \max_{0 \leqslant k \leqslant N} S_k(f) > 0 \right\} = \left\{ \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \frac{S_k(f)}{k+1} > 0 \right\}.$$

Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θέτοντας $F = f + t$ έχουμε

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant N} \frac{f + Tf + \cdots + T^k f}{k+1} = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \frac{F + TF + \cdots + T^k F}{k+1} - t.$$

Ορίζουμε

$$E_t^{(N)}(F) = \left\{ \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \frac{F + TF + \cdots + T^k F}{k+1} < t \right\} = \{S_N^*(f) > 0\}.$$

Τότε,

$$\int_{E_t^{(N)}(F)} (F - t)\, d\mu = \int_{\{S_N^*(f) > 0\}} f\, d\mu \geqslant 0$$

από το Λήμμα 2.2.1. Άρα,

$$\int_{E_t^{(N)}(F)} F\, d\mu \geqslant t\, \mu(E_t^{(N)}(F)) \tag{2.2.2}$$

για κάθε $N \geqslant 0$. Αφού ο T είναι θετικός έχουμε $|T^j F| \leqslant T^j |F|$ για καθε $j = 1, \ldots, k$, άρα για κάθε $F \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ έχουμε ότι: για κάθε $t > 0$,

$$t\mu \left(\left\{ \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \frac{|F + TF + \cdots + T^k F|}{k+1} > t \right\} \right) \leqslant \int_{E_t^{(N)}(|F|)} |F|\, d\mu.$$

Από αυτήν την ανισότητα, ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1, βλέπουμε ότι:

Θεώρημα 2.2.2. *Αν $1 < p < \infty$ τότε για κάθε $F \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ ισχύει*

$$\left\| \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \frac{|F + TF + \cdots + T^k F|}{k+1} \right\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} \|F\|_p. \tag{2.2.3}$$

Έστω τώρα $(T_t)_{t \geqslant 0}$ μια ημιομάδα γραμμικών τελεστών στον $L^1(X, \Sigma, \mu)$. Αυτό σημαίνει ότι οι τελεστές T_t ικανοποιούν την

$$T_0 = \mathrm{Id} \quad \text{και} \quad T_{t_1 + t_2} = T_{t_1} \circ T_{t_2} \tag{2.2.4}$$

για κάθε $t_1, t_2 \geqslant 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι κάθε T_t είναι θετικός και έχει νόρμα $\leqslant 1$, και ότι $T_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ για κάθε $t \geqslant 0$. Έπεται ότι κάθε T_t είναι φραγμένος τελεστής από τον L^∞ στον L^∞, με νόρμα 1. Χρησιμοποιώντας παρεμβολή συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

$$\|T_t : L^p \to L^p\| \leqslant 1.$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η ημιομάδα $(T_t)_{t \geqslant 0}$ είναι *ισχυρά συνεχής* στον L^1, δηλαδή για κάθε $f \in L^1$ έχουμε

$$\lim_{t \to 0^+} \|T^t f - f\|_1 = 0. \tag{2.2.5}$$

Συνδυάζοντας όλες αυτές τις υποθέσεις βλέπουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και για κάθε $f \in L^p$, η απεικόνιση
$$t \mapsto T_t(f)$$
είναι συνεχής από το $[0, \infty)$ στον L^p. Αν $1 < p < \infty$ τότε, κάνοντας αναγωγή στα αθροίσματα Riemann, από την (2.2.3) παίρνουμε την ακόλουθη L^p-ανισότητα.

Θεώρημα 2.2.3. *Αν $1 < p < \infty$ τότε για κάθε $F \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ ισχύει*

$$\left\| \sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t T_s(F)\, ds \right\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} \|F\|_p. \tag{2.2.6}$$

Πράγματι, αν ψ είναι μια συνεχής συνάρτηση από το $[0, 1]$ στο $\mathbb{R}$ ή σε κάποιον χώρο με νόρμα E, όπως ο L^p, τότε
$$\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k+1} \left\| \sum_{j=0}^{n} \psi\Big(\frac{j}{n}\Big) \right\|_E \longrightarrow \left\| \sup_{0<t\leqslant 1} \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s)\, ds \right\|_E$$
καθώς το $n \to \infty$.

Για μια ακριβέστερη αιτιολόγηση, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη συνέχεια της ψ να βρούμε n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $0 < t \leqslant 1$, αν θεωρήσουμε το $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ για το οποίο $k/n < t \leqslant (k+1)/n$ τότε

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s) ds - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \psi\Big(\frac{j}{n}\Big) \right\|_E < \varepsilon. \tag{2.2.7}$$

Αν ο T_t είναι θετικός και $T_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, τότε η περίπτωση $p = \infty$ στην (2.2.6) είναι απλή. Για την ανισότητα ασθενούς τύπου $(1, 1)$, βάζοντας κατάλληλες υποθέσεις συνέχειας για την ημιομάδα, παίρνουμε για κάθε σταθερό $t > 0$, με $k \to \infty$ και $(k+1)h = t$, ότι

$$\frac{F + TF + \cdots + T_{kh}F}{k+1} \longrightarrow \frac{1}{t} \int_0^t T_s F\, ds. \tag{2.2.8}$$

Όταν $h \to 0$ και $Nh \to \infty$, βλέπουμε ότι
$$\max_{0 \leqslant k \leqslant N} \frac{F + TF + \cdots + T_{kh}F}{k+1} \to \Theta^* F := \sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t T_s F\, ds,$$
και εφαρμόζοντας την (2.2.2) για τον $T = T_h$ παίρνουμε την *μεγιστική ανισότητα του Hopf* στην εξής μορφή:

Θεώρημα 2.2.4. *Αν $F \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ και*
$$\Theta^* F := \sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t T_s F\, ds,$$
τότε, για κάθε $\lambda > 0$,
$$\lambda\, \mu(\{\Theta^* F > \lambda\}) \leqslant \int_{\{\Theta^* F > \lambda\}} F.$$

2.3 Martingales και ημιομάδες

Έστω $X_0, \ldots, X_N$ μια *συμμετρική* αλυσίδα Markov με πίνακα μετάβασης P. Υποθέτουμε για απλότητα ότι ο χώρος καταστάσεων $\mathcal{E}$ είναι πεπερασμένος, με πληθάριθμο Z. Για κάθε ακέραιο k με $0 \leqslant k < N$ και για $e_0, e_1 \in \mathcal{E}$, η πιθανότητα να έχουμε $X_{k+1} = e_1$ γνωρίζοντας ότι $X_k = e_0$ δίνεται από τη συντεταγμένη $P(e_0, e_1)$ του πίνακα P, και

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} P(e_0, e) = 1.$$

Για κάθε ακεραιο $j \geqslant 2$, η δύναμη P^j του P περιγραφει τις κινήσεις σε j διαδοχικά βήματα: η συντεταγμένη $P^j(e_0, e)$ δίνει την πιθανότητα να κινηθούμε από το e_0 στο e σε ακριβώς j βήματα.

Για κάθε πίνακα μετάβασης Q και κάθε $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$(Qf)(x) = \sum_{y \in \mathcal{E}} Q(x, y) f(y), \qquad x \in \mathcal{E}.$$

Ο συμβολισμός $P^j f$ αντιστοιχεί στο συμβολισμό $P_t f$ των ημιομάδων (ο $j \in \mathbb{N}$ αντικαθιστά τον $t \geqslant 0$). Αν ο πίνακας Q είναι συμμετρικός τότε, από κυρτότητα, για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$ έχουμε

$$\|Qf\|_p \leqslant \|f\|_p$$

ως προς το ομοιόμορφο μέτρο στο $\mathcal{E}$. Έστω f μια συνάρτηση στο $\mathcal{E}$ και έστω j, k μη αρνητικοί ακέραιοι με $j + k \leqslant N$. Αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $x_0 \in \mathcal{E}$, ο μέσος των τιμών $f(y)$ όταν η αλυσίδα κάνει j βήματα από την θέση x_0 τη χρονική στιγμή k στη θέση y τη χρονική στιγμή $k + j$, ισούται με $(P^j f)(x_0)$.

Ένα απλό, αλλά σημαντικό, συμμετρικό παράδειγμα μας δίνει ο *τυχαίος περίπατος Bernoulli* στο $\mathbb{Z}$: για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$ έχουμε $P(x, y) = \frac{1}{2}$ αν $|x - y| = 1$ και $P(x, y) = 0$ αλλιώς. Το παράδειγμα αυτό δεν είναι πεπερασμένο, μπορούμε όμως να το «προσεγγίσουμε» θεωρώντας το πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{E}_N = \{-N, \ldots, N\}$ για N μεγάλο, και τον τροποποιημένο πίνακα P_N για τον οποίο έχουμε πάλι $P_N(x, y) = \frac{1}{2}$ αν $x, y \in \mathcal{E}_N$ με $|x - y| = 1$ αλλά, επίσης, $P_N(N, N) = P_N(-N, -N) = \frac{1}{2}$. Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τον τυχαίο περίπατο Bernoulli στο $\mathbb{Z}^n$, όπου $P(x, y) = \frac{1}{2^n}$ αν $|x_i - y_i| = 1$ για όλες τις συντεταγμένες x_i, y_i των $x, y \in \mathbb{Z}^n$.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή της αρχικής θέσης X_0 είναι ομοιόμορφη, δηλαδή, $P(X_0 =$

$e_0) = 1/Z$ για κάθε $e_0 \in \mathcal{E}$. Τότε, για κάθε $e_1 \in \mathcal{E}$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(X_1 = e_1) &= \sum_{e\in\mathcal{E}} P(X_0 = e \ \text{ και } \ X_1 = e_1) = \sum_{e\in\mathcal{E}} \frac{1}{Z} P(e, e_1) \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{e\in\mathcal{E}} P(e_1, e) = \frac{1}{Z}, \end{aligned}$$

διότι ο P είναι συμμετρικός. Η κατανομή της θέσης X_1 της αλυσίδας κατά την χρονική στιγμή $i = 1$ παραμένει ομοιόμορφη, και το ίδιο ισχύει για την κατανομή των $X_2, \ldots, X_N$. Η ομοιόμορφη κατανομή είναι *αναλλοίωτη* ως προς την δράση του P. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Markov και θέτοντας

$$A_{N-1} := P(X_0 = e_0 \ \text{ και } \ X_1 = e_1 \ \text{ και } \ \cdots \ \text{ και } \ X_{N-1} = e_{N-1}\}$$

βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} E &:= P(X_0 = e_0 \ \text{ και } \ X_1 = e_1 \ \text{ και } \ \cdots \ \text{ και } \ X_N = e_N\} \\ &= P(A_{N-1} \ \text{ και } \ X_{N-1} = e_{N-1}\} = P(A_{N-1})\, P(X_N = e_N \,|\, A_{N-1}) \\ &= P(A_{N-1})\, P(X_N = e_N \,|\, X_{N-1} = e_{N-1}) = P(A_{N-1}\, P(e_{N-1}, e_N). \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, και χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του πίνακα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{Z} P(e_0, e_1) P(e_1, e_2) \cdots P(e_{N-2}, e_{N-1}) P(e_{N-1}, e_N) \\ &= \frac{1}{Z} P(e_N, e_{N-1}) P(e_{N-1}, e_{N-2}) \cdots P(e_2, e_1) P(e_1, e_0) \\ &= P(X_N = e_0 \ \text{ και } \ X_{N-1} = e_1 \ \text{ και } \ \cdots \ \text{ και } \ X_0 = e_N\}. \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η «αντεστραμμένη» αλυσίδα έχει την ίδια συμπεριφορά με αυτήν της αρχικής αλυσίδας. Αφού ο πίνακας είναι συμμετρικός, όποια κι αν είναι η κατανομή της X_0 έχουμε ότι η πιθανότητα να φτάσουμε σε κάποιο σταθερό y_0 τη χρονική στιγμή N, ξεκινώντας από το τυχόν σημείο x την χρονική στιγμή $k = N - j$, είναι ίση με

$$P^j(x, y_0) = P^j(y_0, x),$$

δηλαδή ίση με την πιθανότητα να φτάσουμε στο x τη χρονική στιγμή j ξεκινώντας από το y_0 την χρονική στιγμή 0. Με την υπόθεση ότι η κατανομή είναι αναλλοίωτη, μπορούμε να πούμε πολύ περισσότερα: αν g είναι μια συνάρτηση στο $\mathcal{E}$ τότε ο *μέσος* των τιμών $g(x)$ πάνω από όλες τις τροχιές που ξεκινούν από το x την χρονική στιγμή k και φτάνουν στο y_0 την χρονική στιγμή N είναι ίσος με $(P^j g)(y_0)$. Παρακάτω περιγράφουμε αυτήν την κατάσταση πιο τυπικά.

Έστω $\Omega = \mathcal{E}^{N+1}$ ο χώρος όλων των πιθανών τροχιών $(e_0, e_1, \ldots, e_N) \in \mathcal{E}^{N+1}$ της αλυσίδας. Για κάθε $k = 0, \ldots, N$ ορίζουμε

$$X_k(\omega) = \omega_k \in \mathcal{E}, \qquad \omega = (\omega_0, \ldots, \omega_N) \in \mathcal{E}^{N+1}.$$

Το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον Ω που αντιστοιχεί στη συμπεριφορά της αλυσίδας κάτω από την ομοιόμορφη κατανομή δίνει μάζα

$$\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{Z} P(\omega_0, \omega_1) P(\omega_1, \omega_2) \cdots P(\omega_{N-1}, \omega_N)$$

σε κάθε μονοσύνολο $\{\omega\}$, όπου $\omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_N) \in \mathcal{E}^{N+1}$.

Γράφουμε $\mathcal{F}_k$ για την πεπερασμένη άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που έχει ως άτομα τα σύνολα της παρακάτω μορφής: για σταθερά $e_0, \ldots, e_k \in \mathcal{E}$,

$$A = A(e_0, \ldots, e_k) = \{\omega = (\omega_0, \cdots, \omega_N) : \omega_j = e_j, 0 \leqslant j \leqslant k\}.$$

Η $\mathcal{F}_k$ είναι η άλγεβρα των «παρελθόντων ενδεχομένων» τη χρονική στιγμή k, και αυξάνει με το k. Συμβολίζουμε με $\mathcal{G}_k$ την άλγεβρα των ενδεχομένων που συμβαίνουν ακριβώς τη χρονική στιγμή k. Η $\mathcal{G}_k$ έχει ως άτομα τα σύνολα της μορφής

$$B = \{\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_N) : \omega_k = e_k\}.$$

Παρατηρήστε ότι $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{F}_k$. Μια συνάρτηση στο Ω είναι $\mathcal{G}_k$-μετρήσιμη αν εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη ω_k, άρα είναι της μορφής $g(X_k)$, όπου g είναι μια συνάρτηση στο $\mathcal{E}$.

Αν f είναι μια συνάρτηση στο $\mathcal{E}$ τότε από την ιδιότητα Markov βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}(f(X_n)|\mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(f(X_N)|\mathcal{G}_k) = g(X_k),$$

όπου $g(x) = (P^{N-k}f)(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{E}$. Έχουμε λοιπόν

$$(P^{N-k}f)(X_k) = \mathbb{E}(f(X_N)|\mathcal{F}_k) \quad \text{και} \quad (P^{N-k}g)(X_N) = \mathbb{E}(g(X_k)|\mathcal{G}_N). \tag{2.3.1}$$

Ορίζουμε το «κανονικό» martingale U_i που αντιστοιχεί στην f ως εξής:

$$U_i = (P^{N-i}f)(X_i) = \mathbb{E}(f(X_N)|\mathcal{F}_i), \qquad 0 \leqslant i \leqslant N. \tag{2.3.2}$$

Στην πρώτη ισότητα της (2.3.1) η παρουσία της P^{N-k} σχετίζεται με τη μέση τιμή, την χρονική στιγμή $k < N$, των μελλοντικών θέσεων $f(X_N)$, ενώ στην δεύτερη με τη μέση τιμή, την χρονική στιγμή N, των προηγούμενων θέσεων $g(X_k)$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ισότητες (παίρνοντας $g = P^j f$ και $j = N - k$), συμπεραίνουμε ότι

$$(P^{2j}f)(X_N) = \mathbb{E}(U_{N-j}|\mathcal{G}_N). \tag{2.3.3}$$

Αφού ο τελεστής δεσμευμένης τιμής ως προς $\mathcal{G}_N$ είναι θετικός, βλέπουμε ότι για κάθε $j = N - k = 0, \ldots, N$ ισχύει η ανισότητα

$$\sup_{0\leqslant j\leqslant N} |(P^{2j}f)(X_N)| = \sup_{0\leqslant j\leqslant N} |\mathbb{E}(U_{N-j}|\mathcal{G}_N)| \leqslant \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leqslant i\leqslant N} |U_i| \,|\, \mathcal{G}_N\Big).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Doob (Θεώρημα 2.1.1) και το γεγονός ότι ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ έχει νόρμα 1 σε κάθε L^p παίρνουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.3.1. *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$\begin{aligned}(2.3.4)\qquad \Big\|\sup_{0\leqslant j\leqslant N} |(P^{2j}f)(X_N)|\Big\|_p &\leqslant \Big\|\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leqslant i\leqslant N} |U_i| \,|\, \mathcal{G}_N\Big)\Big\|_p \\ &\leqslant \Big\|\sup_{0\leqslant i\leqslant N} |U_i|\Big\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|U_N\|_p = \frac{p}{p-1}\|f(X_N)\|_p.\end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.3.2. Μπορούμε να αποδείξουμε αντίστοιχες ανισότητες για τους περιττούς δείκτες $2j+1$ εφαρμόζοντας την τελευταία ανισότητα στην Pf αντί για την f, και χρησιμοποιώντας την $\|Pf\|_p \leqslant \|f\|_p$. Θα χρειαστεί να πολλαπλασιάσουμε τη σταθερά $\frac{p}{p-1}$ επί 2.

Μπορούμε επίσης να δείξουμε ανισότητες για άλλες κυρτές συναρτήσεις εκτός από τη συνάρτηση supremum στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Για παράδειγμα, ξεκινώντας από την ανισότητα

$$\left(\sum_{0\leqslant i\leqslant N} |\mathbb{E}(f_i|\mathcal{G})|^2\right)^{1/2} \leqslant \mathbb{E}\left(\Big(\sum_{0\leqslant i\leqslant N} |f_i|^2\Big)^{1/2} \Big|\, \mathcal{G}\right)$$

και χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Burkholder-Gundy που θα δούμε παρακάτω, βλέπουμε ότι αν $0 \leqslant j_0 < j_1 < \cdots j_r \leqslant N$, $1 < p < \infty$ και μ είναι το αναλλοίωτο μέτρο, τότε

$$(2.3.5)\qquad \left\|\Big(\sum_{k=1}^{r} |(P^{2j_k}f - P^{2j_{k-1}}f)|^2\Big)^{1/2}\right\|_{L^p(\mu)} \leqslant c_p\|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Πράγματι, από την (2.3.3) η $(P^{2j_k}f)(X_N)$ είναι η προβολή της $U_{N-j_k} = \mathbb{E}(f(X_N)\,|\,\mathcal{F}_{N-j_k})$ στην $\mathcal{G}_N$, όπου $(U_j)_{j=0}^N$ είναι το martingale στην (2.3.2). Τότε, το $L_i = U_{N-j_{r-i}}$, $i = 0, 1, \ldots, r$ είναι επίσης martingale, και η

$$(P^{2j_{k-1}}f)(X_N) - (P^{2j_k}f)(X_N) = \mathbb{E}\left(U_{N-j_{k-1}} - U_{N-j_k} \,|\, \mathcal{G}_N\right)$$

είναι η προβολή στην $\mathcal{G}_N$ της *διαφοράς* $d_{r-k+1} = L_{r-k+1} - L_{r-k}$ (βλέπε παρακάτω) όπου $1 \leqslant k \leqslant r$. Με βάση αυτήν την αρχή μπορούμε να φράξουμε διάφορες κυρτές συναρτήσεις μιας ημιομάδας, θεωρώντας τις ως προβολές των αντίστοιχων συναρτήσεων ενός martingale για το οποίο διαθέτουμε μια L^p ανισότητα.

Επιστρέφουμε στο Θεώρημα 2.3.1. Αφού η κατανομή της X_N είναι ομοιόμορφη, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την ανισότητα (2.3.4), για κάθε $1 < p \leqslant \infty$, ως εξής:

$$\left(\frac{1}{Z}\sum_{x\in\mathcal{E}}\sup_{0\leqslant j\leqslant N}|(P^{2j}f)(x)|^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}\left(\frac{1}{Z}\sum_{x\in\mathcal{E}}|f(x)|^p\right)^{1/p}.$$

Αλλάζοντας την κανονικοποίηση και αφήνοντας το $N\to\infty$, παίρνουμε

$$\left(\sum_{x\in\mathcal{E}}\sup_{j\geqslant 0}|(P^{2j}f)(x)|^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}\left(\sum_{x\in\mathcal{E}}|f(x)|^p\right)^{1/p}. \tag{2.3.6}$$

Επίσης, συνυπολογίζοντας τους περιττούς δείκτες και διπλασιάζοντας τη σταθερά όπως αναφέραμε, έχουμε

$$\left(\sum_{x\in\mathcal{E}}\sup_{j\geqslant 0}|(P^{j}f)(x)|^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{2p}{p-1}\left(\sum_{x\in\mathcal{E}}|f(x)|^p\right)^{1/p}. \tag{2.3.7}$$

2.3.1 Gaussian τυχαίες μεταβλητές

Συμβολίζουμε με $|x|$ την Ευκλείδεια νόρμα του $x\in\mathbb{R}^n$. Για κάθε μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης $\int_{\mathbb{R}^n}|x|\,d\mu(x)<\infty$, ορίζουμε το *βαρύκεντρο* του μ θέτοντας

$$\mathrm{bar}(\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} x\,d\mu(x)\in\mathbb{R}^n.$$

Αν το μ έχει πεπερασμένη ροπή δεύτερης τάξης $\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2d\mu(x)<\infty$, θεωρούμε την τετραγωνική μορφή

$$Q_\mu(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\langle x-\mathrm{bar}(\mu),\xi\rangle^2d\mu(x).$$

Ο πίνακας Σ της Q_μ είναι ο *πίνακας συνδιακυμάνσεων* του μ. Η τετραγωνική μορφή Q_μ είναι θετικά ορισμένη αν το μ δεν φέρεται από κάποιο υπερεπίπεδο, για παράδειγμα αν το μ είναι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας σε κάποιο κυρτό σώμα. Λέμε ότι το μ είναι κεντραρισμένο αν $\mathrm{bar}(\mu)=0$.

Αν f είναι μια πυκνότητα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πεπερασμένη ροπή δεύτερης τάξης, τότε η *διασπορά* σ^2 του $f(x)dx$ ορίζεται από την

$$\sigma^2=\int_{\mathbb{R}}\left(x-\int_{\mathbb{R}}yf(y)dy\right)^2f(x)dx.$$

Αν η f είναι κεντραρισμένη τότε

$$\sigma^2=\int_{\mathbb{R}}x^2f(x)\,dx.$$

Μια Gaussian τυχαία μεταβλητή με κατανομή $N(0, \mathrm{Id}_n)$ παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^n$, η κατανομή της γ_n είναι το n-διάστατο μέτρο του Gauss

$$d\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2} dx \tag{2.3.8}$$

και αυτή η κατανομή έχει πίνακα συνδιακυμάνσεων τον Id_n. Αν F είναι ένας n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος, συμβολίζουμε με γ_F την εικόνα του γ_n μέσω οποιασδήποτε ισομετρίας από τον $\mathbb{R}^n$ επί του F. Αν η X είναι $N(0, \mathrm{Id}_n)$ Gaussian τυχαία μεταβλητή τότε για κάθε $\sigma > 0$ η σX έχει κατανομή

$$d\gamma_{n,\sigma}(x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}} dx,$$

τη λεγόμενη $N(0, \sigma^2 \mathrm{Id}_n)$ κατανομή, με πίνακα συνδιακυμάνσεων τον $\sigma^2 \mathrm{Id}_n$. Το *μέτρο πιθανότητας Dirac* δ_0 στην αρχή των αξόνων του $\mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί στην κατανομή $N(0, \mathbf{0}_n)$.

Οι ροπές της μονοδιάστατης κατανομής γ_1 υπολογίζονται ακριβώς μέσω της συνάρτησης Γάμμα. Για κάθε $p > -1$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p d\gamma_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x|^p e^{-x^2/2} = \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Από τον τύπο του Stirling έπεται ότι, όταν $p \to \infty$,

$$g_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^p d\gamma_1(x) \right)^{1/p} \simeq \sqrt{p/e}.$$

Μια n-διάστατη *κίνηση Brown* $(B_t)_{t \geqslant 0}$ με αρχή το x_0 στον $\mathbb{R}^n$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, ορισμένη σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, τέτοια ώστε $B_0 = x_0$, και τέτοια ώστε για κάθε $0 \leqslant s \leqslant t$ η $B_t - B_s$ να είναι Gaussian τυχαία μεταβλητή με κατανομή $N(0, (t-s)\mathrm{Id}_n)$, η οποία επίσης έχει *ανεξάρτητες προσαυξήσεις*: για κάθε ακέραιο $k \geqslant 1$ και $0 \leqslant t_0 < \cdots < t_k$, οι

$$B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

είναι ανεξάρτητες. Η κίνηση Brown είναι ένα martingale με συνεχή παράμετρο χρόνου $t \geqslant 0$, ως προς μια συνεχή διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, όπου η $\mathcal{F}_t$ παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές B_s, $0 \leqslant s \leqslant t$. Μπορούμε να επιλέξουμε *παντού ορισμένες* μετρήσιμες συναρτήσεις $(B_t)_{t \geqslant 0}$ που ικανοποιούν τα παραπάνω με τέτοιον τρόπο που οι τροχιές $t \mapsto B_t(\omega)$, τα λεγόμενα *τυχαία μονοπάτια*, να είναι συνεχείς σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$.

Είναι γνωστό ότι η κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^n$ είναι το όριο κατάλληλων τυχαίων περιπάτων Bernoulli, και αυτοί οι τυχαίοι περίπατοι είναι αλυσίδες Markov με συμμετρικό πίνακα μεταβάσεων. Αν $(B_t)_{t\geqslant 0}$ είναι η κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^n$ που ξεκινάει από το 0, και αν θεωρήσουμε την Gaussian ημιομάδα $(G_s)_{s\geqslant 0}$ που ορίζεται, για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, από την

$$(G_sf)(x)=\mathbb{E}f(x+B_s)=\frac{1}{(2\pi s)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x+y)e^{-\frac{|y|^2}{2s}}dy,\qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{2.3.9}$$

μπορούμε να δείξουμε μια ανισότητα ανάλογη με την (2.3.6).

Θεώρημα 2.3.3. *Για κάθε $1<p\leqslant\infty$ και για κάθε $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ ισχύει η παρακάτω μεγιστική ανισότητα για την Gaussian ημιομάδα:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{s>0}|(G_sf)(x)|^pdx\right)^{1/p}\leqslant\frac{p}{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^pdx\right)^{1/p}. \tag{2.3.10}$$

Απόδειξη. Θα σκιαγραφήσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες την απόδειξη στην περίπτωση $n=1$. Έστω $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli που παίρνουν τις τιμές ±1 με πιθανότητα $1/2$. Η αντίστοιχη ημιομάδα (P_j), $j\in\mathbb{N}$, ορίζεται από την

$$(P_jg)(i)=\mathbb{E}\,g\Big(i+\sum_{1\leqslant k\leqslant j}\varepsilon_k\Big),\qquad j\geqslant 0, i\in\mathbb{Z},$$

και ικανοποιεί την (2.3.6). Από το θεώρημα de Moivre-Laplace, γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα $P\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\varepsilon_k<x\right\}\right)$ συγκλίνει στο $\gamma_1((-\infty,x))$ όταν $N\to\infty$, ομοιόμορφα ως προς x. Έπεται ότι

$$\mathbb{E}\,f\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\Big)\to\int_{\mathbb{R}}f(y)d\gamma_1(y)$$

ομοιόμορφα ως προς Lipschitz συναρτήσεις που μηδενίζονται στο άπειρο και έχουν σταθερά Lipschitz που φράσσεται από κάποιο σταθερό $C>0$. Αν η f είναι Lipschitz και έχει συμπαγή φορέα, τότε

$$\mathbb{E}\,f\Big(x+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\Big)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int_{\mathbb{R}}f(x+y)d\gamma_1(y)$$

όταν $N\to\infty$, ομοιόμορφα ως προς $x\in\mathbb{R}$ και $s\in[t_0,t_1]$, όπου τα $0<t_0\leqslant t_1$ είναι σταθερά. Έπεται ότι, για κάθε $\varepsilon>0$ και N αρκετά μεγάλο, αν θέσουμε $g_N(i)=f(i/\sqrt{N})$ για $i\in\mathbb{Z}$ και υποθέσουμε ότι $sN-1\leqslant j_N\leqslant sN$, έχουμε

$$|P_{jN}g_N(i)-(G_sf)(i/\sqrt{N})|<\varepsilon,\qquad i\in\mathbb{Z},$$

για κάθε $s\in[t_0,t_1]$. Εφαρμόζοντας την (2.3.6) για την g_N βλέπουμε ότι, για κάθε $a>0$ και $s_0<s_1<\cdots<s_k$,

$$\int_{-a}^{a}\max_{0\leqslant j\leqslant k}|(G_{s_j}f)(x)|^pdx\leqslant\eta^p(\varepsilon)+\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|f\Big(\frac{i}{\sqrt{N}}\Big)\right|^p,$$

όπου $\eta(\varepsilon) \to 0$ όταν $\varepsilon \to 0$. Αφήνοντας τα $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$ και $a \to \infty$ και θεωρώντας μια ακολουθία $\{s_j\}_{j\geqslant 0}$ πυκνή στο $(0, \infty)$, παίρνουμε την (2.3.10).

Το ίδιο επιχείρημα περνάει στον $\mathbb{R}^n$: εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι το μέτρο Bernoulli και το μέτρο του Gauss είναι μέτρα γινόμενα και το γεγονός ότι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από τις συναρτήσεις γινόμενα $f(x_1, \dots x_n) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$ είναι ομοιόμορφα πυκνός στο χώρο των Lipschitz συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^n$. $\square$

2.3.2 Οι ανισότητες Burkholder-Gundy

Έστω $(U_k)_{k=0}^N$ ένα martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^N$. Ορίζουμε την *ακολουθία διαφορών* $(d_k)_{k=0}^N$ θέτοντας $d_0 = M_0$ και

$$d_k = U_k - U_{k-1}, \qquad 0 < k \leqslant N.$$

Παρατηρήστε ότι η d_k είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη για κάθε $0 \leqslant k \leqslant N$ και ότι

$$\mathbb{E}(d_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0, \qquad k > 0.$$

Αντίστροφα, για κάθε ακολουθία $(d_k)_{k=0}^N$ που έχει αυτές τις δύο ιδιότητες μπορούμε να ορίσουμε ένα martingale θέτοντας $U_k = \sum_{j=0}^k d_j$ για κάθε $0 \leqslant k \leqslant N$.

Για κάθε martingale $(U_k)_{k=0}^N$ ορίζουμε την *ανέλιξη τετραγωνικών συναρτήσεων* $(S_k)_{k=0}^N$ του martingale ως εξής:

$$S_k = \left(\sum_{j=0}^k |d_j|^2 \right)^{1/2}, \qquad k = 0, 1, \dots, N.$$

Για κάθε πραγματικό ή μιγαδικό martingale στον L^2, οι διαφορές d_k και d_ℓ είναι ορθογώνιες αν $k \neq \ell$. Αν $k < \ell$ τότε η d_k και η μιγαδική συζυγής $\overline{d_k}$ της d_k είναι $\mathcal{F}_{\ell-1}$-μετρήσιμες, άρα

$$\mathbb{E}(\overline{d_k} \cdot d_\ell) = \mathbb{E}(\overline{d_k} \cdot \mathbb{E}(d_\ell|\mathcal{F}_{\ell-1})) = 0.$$

Έπεται ότι

$$\mathbb{E}\,|U_N|^2 = \sum_{k=0}^N \mathbb{E}\,|d_k|^2 = \mathbb{E}\,|S_N|^2. \tag{2.3.11}$$

Η ισότητα

$$\|U_N\|_2 = \|S_N\|_2$$

είναι ειδική περίπτωση του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 2.3.4 (Burkholder-Gundy). *Για κάθε $1 < p < \infty$ υπάρχει σταθερά $c_p \geqslant 1$ τέτοια ώστε: για κάθε ακέραιο $N \geqslant 1$ και για κάθε πραγματικό ή μιγαδικό martingale $(U_k)_{k=0}^N$ ισχύει*

$$c_p^{-1}\|U_N\|_p \leqslant \|S_N\|_p \leqslant c_p\|U_N\|_p. \tag{2.3.12}$$

Σε αυτήν την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε μόνο ειδικές περιπτώσεις του Θεωρήματος 2.3.4, οι οποίες μάλιστα προκύπτουν και από τα αποτελέσματα που έχουμε ήδη συζητήσει. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα είναι το Θεώρημα 2.3.5 παρακάτω, που είναι μια απλή περίπτωση ενός θεωρήματος του Burgess Davis.

Εισάγουμε πρώτα κάποια ορολογία. Λέμε ότι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(m_k)_{k=0}^N$ είναι *προβλέψιμη* αν η m_0 είναι $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη και η m_k είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμη για κάθε $0 < k \leqslant N$. Αν η $(m_k)_{k=0}^N$ παίρνει πραγματικές ή μιγαδικές τιμές και είναι προβλέψιμη, και αν η $(d_k)_{k=0}^N$ είναι μια ακολουθία διαφορών martingale τότε η $(m_k d_k)_{k=0}^N$ είναι επίσης ακολουθία διαφορών martingale διότι

$$\mathbb{E}\left(m_k d_k|\mathcal{F}_{k-1}\right) = m_k\mathbb{E}\left(d_k|\mathcal{F}_{k-1}\right) = 0.$$

Λέμε ότι το νέο martingale $(L_k)_{k=0}^N$ που ορίζεται από την $L_k = \sum_{j=0}^k m_j d_j$ προκύπτει ως *μετασχηματισμός martingale*.

Θεωρούμε μια δυαδική διήθηση $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ που παράγεται από μια ακολουθία $(\varepsilon_k)_{k=1}^N$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli ε_k στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Η $\mathcal{F}_0$ είναι η τετριμμένη άλγεβρα με στοιχεία το $\emptyset$ και το Ω, και η $\mathcal{F}_k$ είναι η άλγεβρα που έχει 2^k άτομα της μορφής

$$A = \{\omega \in \Omega : \varepsilon_j(\omega) = u_j,\ j = 1, \dots, k\}, \tag{2.3.13}$$

όπου $u_j = \pm 1$. Παρατηρήστε ότι για κάθε $1 \leqslant k \leqslant N$, κάθε πολλαπλάσιο $a_k\varepsilon_k$ της ε_k είναι μια ακολουθία διαφορών για το martingale $U_N = \sum_{k=1}^N a_k\varepsilon_k$.

Παρατηρήστε ότι κάθε άτομο A της $\mathcal{F}_k$, όπως αυτά ορίστηκαν στην (2.3.13), έχει πιθανότητα 2^{-k} και χωρίζεται σε δύο άτομα $A_\pm$ της $\mathcal{F}_{k+1}$, τα $A_\pm := A \cap \{\varepsilon_{k+1} = \pm 1\}$, ανάλογα με την τιμή της ε_{k+1}. Θεωρούμε την διαφορά d_{k+1} που αντιστοιχεί σε αυτές τις δυαδικές άλγεβρες. Η συνάρτηση d_{k+1} πρέπει να έχει μέσο 0 στο άτομο A της $\mathcal{F}_k$ και να είναι σταθερή σε καθένα από τα δύο άτομα $A_\pm$ της $\mathcal{F}_{k+1}$ που περιέχονται στο A και έχουν το ίδιο μέτρο $P(A)/2$. Άρα, η d_{k+1} πρέπει να παίρνει δύο αντίθετες τιμές $\pm v$ στο A. Έπεται ότι η $|d_{k+1}|$ είναι σταθερή στο A, άρα η $|d_{k+1}|$ είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη, το οποίο σημαίνει ότι η $(|d_k|)_{k=0}^N$ είναι προβλέψιμη. Ονομάζουμε *Bernoulli martingale* κάθε martingale $(U_k)_{k=0}^N$ ως προς την δυαδική διήθηση $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^N$.

Θεώρημα 2.3.5. *Για κάθε $1 \leqslant p \leqslant 2$ και για κάθε πραγματικό ή μιγαδικό Bernoulli martingale $(U_k)_{k=0}^N$ έχουμε*

$$\frac{1}{6}\|U_N^*\|_p \leqslant \|S_N\|_p \leqslant 6\|U_N^*\|_p.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την περίπτωση $p = 1$. Θα προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε το πρόβλημα στον L^2, όπου $\|S_N\|_2 = \|U_N\|_2$ από την (2.3.11), και για το σκοπό αυτό ουσιαστικά διαιρούμε την $f = U_N \in L^1$ με ένα «γονέα» της $\sqrt{|f|}$ για να πάρουμε μια συνάρτηση «όμοια» με την $\sqrt{|f|}$ στον L^2. Στη συνέχεα εφαρμόζουμε γνωστά αποτελέσματα στον L^2, και τελικά επιστρέφουμε στον L^1 πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλη L^2 συνάρτηση.

Έστω $(U_k)_{k=0}^N$ ένα Bernoulli martingale. Γνωρίζουμε ότι η $(|d_k|)_{k=0}^n$ είναι προβλέψιμη, όπως και η $(S_k)_{k=0}^N$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό martingale $L_k = \sum_{j=0}^k S_j^{-1/2} d_j$. Στον L^2 γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}|L_N|^2 = \sum_{j=0}^N \mathbb{E}(S_j^{-1}|d_j|^2)$. Επίσης, $S_0^{-1}|d_0|^2 = S_0$ και $S_j^{-1}|d_j|^2 \leqslant 2(S_j - S_{j-1})$ για κάθε $j \geqslant 1$, διότι αν θέσουμε $t = S_{j-1}^2$ και $h = |d_j|^2$ έχουμε

$$2(\sqrt{t+h} - \sqrt{t}) = \int_t^{t+h} u^{-1/2} du \geqslant h(t+h)^{-1/2}.$$

Έπεται ότι

$$\mathbb{E}|L_N|^2 \leqslant 2\mathbb{E}(S_N). \tag{2.3.14}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\Big|\sum_{j=0}^{s} S_j^{-1/2} d_j\Big| = |L_s| \leqslant L_N^*$$

και

$$\Big|\sum_{j=r+1}^{s} S_j^{-1/2} d_j\Big| = |L_s - L_r| \leqslant 2L_N^*$$

για κάθε $0 \leqslant r < s \leqslant N$. Πολλαπλασιαζοντας όρο προς όρο την ακολουθία $(S_k^{-1/2} d_k)_{k=0}^N$ με την αύξουσα ακολουθία $(S_k^{1/2})_{k=0}^N$ και χρησιμοποιώντας άθροιση κατά μέρη βλέπουμε ότι για κάθε $s \leqslant N$ ισχύει

$$|U_s| = \Big|\sum_{j=0}^{s} d_j\Big| \leqslant S_s^{1/2} \sup_{0 \leqslant r \leqslant s} \Big|\sum_{j=r}^{s} S_j^{-1/2} d_j\Big| \leqslant 2S_N^{1/2} L_N^*,$$

και $U_N^* \leqslant 2S_N^{1/2} L_N^*$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, την ανισότητα του Doob με $p = 2$ και την (2.3.14) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}U_N^* \leqslant 2(\mathbb{E}S_N)^{1/2}\|L_N^*\|_2 \leqslant 2^2(\mathbb{E}S_N)^{1/2}\|L_N\|_2 \leqslant 2^{5/2}\mathbb{E}S_N \leqslant 6\mathbb{E}S_N.$$

Για την περίπτωση $1 < p < 2$ χρησιμοποιούμε το ίδιο περίπου επιχείρημα.

Για την δεξιά ανισότητα, χρησιμοποιούμε παρόμοια μέθοδο, θεωρώντας την αύξουσα προβλέψιμη ακολουθία $(A_k)_{k=0}^N$ που ορίζεται από τις $A_0 = |d_0| = |U_0|$ και

$$A_k = \max(A_{k-1}, U_{k-1}^* + |d_k|) \geqslant |U_k|, \qquad k = 1, \dots, N,$$

και τον μετασχηματισμό martingale $L_k = \sum_{j=0}^k A_j^{-1/2} d_j$, $k = 0, \dots, N$. Παρατηρούμε ότι $|d_k| \leqslant |U_k| + |U_{k-1}| \leqslant 2U_N^*$, άρα $A_N \leqslant 3U_N^*$. Θέτοντας $d_k = U_k - U_{k-1}$ και χρησιμοποιώντας άθροιση κατά μέρη παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|L_N| &= \Big| A_N^{-1/2} U_N + \sum_{k=0}^{N-1} U_k (A_k^{-1/2} - A_{k+1}^{-1/2}) \Big| \\
&\leqslant A_N^{1/2} + \sum_{k=0}^{N-1} A_k (A_k^{-1/2} - A_{k+1}^{-1/2}) \\
&\leqslant A_N^{1/2} + \sum_{k=0}^{N-1} (\sqrt{A_{k+1}} - \sqrt{A_k}) \leqslant 2A_N^{1/2},
\end{aligned}$$

αν λάβουμε υπόψη την στοιχειώδη ανισότητα $u^2(u^{-1} - v^{-1}) \leqslant v - u$ για $0 < u \leqslant v$. Γνωρίζουμε ότι

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^N A_k^{-1} |d_k|^2 \Big) = \mathbb{E}|L_N|^2 \leqslant 4\mathbb{E}\, A_N,$$

και μπορούμε να επιστρέψουμε στον L^1 συνδυάζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz με την απλή ανισότητα $\sum_{k=0}^N |d_k|^2 \leqslant A_N \sum_{k=0}^N A_k^{-1} |d_k|^2$. Έτσι, παίρνουμε

$$\mathbb{E}S_N = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^N |d_k|^2 \Big)^{1/2} \leqslant (\mathbb{E}A_N)^{1/2} \|L_N\|_2 = 2\mathbb{E}A_N \leqslant 6\|U_N^*\|_1,$$

και η απόδειξη (στην περίπτωση $p = 1$) είναι πλήρης. □

2.3.3 Αρχή της ανάκλασης

Έστω $(B_s)_{s\geqslant 0}$ μια κίνηση Brown στο $\mathbb{R}$, ορισμένη στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, με διήθηση την $(\mathcal{F}_s)_{s\geqslant 0}$. Υποθέτουμε ότι $B_0 = 0$, σταθεροποιούμε έναν πραγματικό αριθμό $v > 0$ και συμβολίζουμε με $S_v(\omega)$ την πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία η τροχιά $s \mapsto B_s(\omega)$, η οποία είναι συνεχής σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$, φτάνει στο σημείο v. Είναι φανερό ότι αν μας δοθεί κάποιο $s_0 > 0$ τότε $\{B_{s_0} \geqslant v\} \subset \{S_v \leqslant s_0\}$, άρα

$$P(S_v \leqslant s_0) \geqslant P(B_{s_0} \geqslant v) = P(B_1 \geqslant v/\sqrt{s_0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{v/\sqrt{s_0}}^\infty e^{-y^2/2} dy.$$

Θα δείξουμε ότι, στην πραγματικότητα,

$$P(S_v \leqslant s_0) = 2P(B_{s_0} \geqslant v) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{v/\sqrt{s_0}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

Αυτό αποδεικνύει, μεταξύ άλλων, ότι η S_v είναι πεπερασμένη σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$, διότι

$$P(S_v < \infty) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 1.$$

Η απόδειξη του ισχυρισμού χρησιμοποιεί την αρχή της ανάκλασης της κίνησης Brown μετά από έναν χρόνο διακοπής τ. Ο *χρόνος διακοπής* είναι μια τυχαία μεταβλητή τ με τιμές στο $[0, \infty]$, τέτοια ώστε για κάθε $t \geqslant 0$ το ενδεχόμενο $\{\tau \leqslant t\}$ να ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ του παρελθόντος της χρονικής στιγμής t. Διαισθητικά, ένας χρόνος διακοπής αντιστοιχεί στην απόφαση να εγκαταλείψει την χρονική στιγμή $\tau(\omega)$, που μπορεί να πάρει ένας παρατηρητής που ακολουθεί ένα μονοπάτι $t \mapsto X_t(\omega)$ της στοχαστικής ανέλιξης $(X_t)_{t \geqslant 0}$ από την χρονική στιγμή $t = 0$, γνωρίζοντας μόνο τι έχει συμβεί στη διαδρομή του από την χρονική στιγμή 0 μέχρι την παρούσα χρονική στιγμή. Ο τυχαίος χρόνος S_v δίνει ένα ωραίο παράδειγμα χρόνου διακοπής, ο οποίος ακολουθεί έναν πολύ απλό κανόνα: διακόπτουμε όταν φτάσουμε στο σημείο $v > 0$.

Η κίνηση Brown ανακλάται μετά από την τυχαία χρονική στιγμή τ, αλλάζει την κατεύθυνσή της, και η τροχιά της είναι η συμμετρική της αρχικής τροχιάς ως προς το σημείο $(B_\tau)(\omega) := B_{\tau(\omega)}(\omega)$ στο οποίο είχε φτάσει την χρονική στιγμή $\tau(\omega)$. Συμβολίζουμε με $(B_s^\tau)_{s \geqslant 0}$ την «ανακλασθείσα» κίνηση Brown

$$B_s^\tau(\omega) = B_s(\omega) \ \text{αν} \ 0 \leqslant s \leqslant \tau(\omega), \qquad \frac{B_s^\tau(\omega) + B_s(\omega)}{2} = B_{\tau(\omega)}(\omega) \ \text{αν} \ s \geqslant \tau(\omega).$$

Η B^τ είναι κι αυτή κίνηση Brown. Πράγματι, ας θεωρήσουμε πρώτα τον απλούστερο χρόνο διακοπής και την απλούστερη ανάκλαση, επιλέγοντας ένα σύνολο A_1 στην $\mathcal{F}_{s_1}$. Ορίζουμε έναν χρόνο διακοπής τ_1 ίσο με s_1 το A_1 και ίσο με ∞ αλλιώς. Η αντίστοιχη ανάκλαση δίνεται από τις

$$B_s^{\tau_1}(\omega) = B_s(\omega) \ \text{αν} \ 0 \leqslant s \leqslant s_1 \ \text{ή} \ \omega \notin A_1$$

και

$$\frac{B_s^{\tau_1}(\omega) + B_s(\omega)}{2} = B_{s_1}(\omega) \ \text{αν;} \ s \geqslant s_1 \ \text{και} \ \omega \in A_1.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $(B_s^{\tau_1})_{s \geqslant 0}$ είναι κίνηση Brown. Εαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία μπορούμε να φτάσουμε σε διακριτούς χρόνους διακοπής και περνώντας στο όριο να μελετήσουμε γενικούς χρόνους διακοπής. Πράγματι, κάθε χρόνος διακοπής τ προσεγγίζεται από τον πρώτο χρόνο $\tau_k > \tau$ για τον οποίο ο $2^k \tau_k$ είναι ακέραιος, δηλαδή τον $\tau_k = \frac{\lfloor 2^k \tau \rfloor + 1}{2^k}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα που μπορούμε να ελέγξουμε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία είναι η εξής: αν τ είναι ένας σχεδόν βεβαίως πεπερασμένος χρόνος διακοπής, τότε η ανέλιξη «που ξαναρχίζει την χρονική στιγμή τ», η οποία ορίζεται από την $X_s = B_{\tau+s} - B_\tau$, δηλαδή $X_s(\omega) = B_{\tau(\omega)+s}(\omega) - B_{\tau(\omega)}(\omega)$, είναι κίνηση Brown.

Θεωρούμε την ανακλασθείσα κίνηση Brown μετά από τον χρόνο διακοπής S_v, όπου $v > 0$. Αφού τα μονοπάτια της κίνησης Brown είναι συνεχή και $B_0 = 0$, έχουμε $B_{S_v(\omega)}(\omega) = v$ και για κάθε $s_0 > 0$ το ενδεχόμενο $\{B_{s_0} > v\}$ περιέχεται στο $\{S_v < s_0\}$. Επίσης, το ενδεχόμενο $\{B_{s_0}^{S_v} > v\}$ περιέχεται στο $\{S_v < s_0\}$ και είναι ξένο προς το $\{B_{s_0} > v\}$. Μάλιστα, αφού στο σύνολο $\{S_v < s_0\}$ έχουμε $B_{s_0}^{S_v} + B_{s_0} = 2v$, συμπεραίνουμε ότι

$$\{S_v < s_0\} \setminus \{B_{s_0} \geqslant v\} = \{B_{s_0}^{S_v} > v\}.$$

Το ενδεχόμενο $\{B_{s_0}^{S_v} > v\}$ έχει την ίδια πιθανότητα με το $\{B_{s_0} > v\}$, διότι η $(B_s^{S_v})_{s\geqslant 0}$ είναι κίνηση Brown, και $P(S_v = s_0) \leqslant P(B_{s_0} = v) = 0$. Συνεπώς,

$$P(S_v \leqslant s_0) = P(S_v < s_0) = 2P(B_{s_0} > v) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2s_0}} du.$$

Έπεται ότι, για κάθε $s > 0$,

$$P(S_v \leqslant s) = P\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant s} B_u > v\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{v/\sqrt{s}}^\infty e^{-y^2/2} dy.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η πυκνότητα h_v της κατανομής της S_v είναι η

$$h_v(s) = \mathbf{1}_{s\geqslant 0} \frac{v s^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2s}}, \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{2.3.15}$$

2.4 Η ημιομάδα Poisson

Υπενθυμίζουμε ότι η *κλάση του Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ αποτελείται από όλες τις C^∞ συναρτήσεις φ για τις οποίες η $(1 + |x|^k)\varphi^\ell(x)$ είναι φραγμένη στον $\mathbb{R}^n$ για όλους τους ακεραίους $k, \ell \geqslant 0$. Συμβολίζουμε με $(P_t)_{t\geqslant 0}$ την ημιομάδα Poisson στον $\mathbb{R}^n$, η οποία ορίζεται για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ από την

$$(P_t f)(x) = u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant 0, \tag{2.4.1}$$

όπου $u(x,t)$ είναι η *αρμονική επέκταση* της f στον άνω ημίχωρο

$$H = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0\}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $u(x,0) = f(x)$, $\Delta u(x,t) = 0$ όταν $t > 0$, και η u είναι συνεχής στον H^+. Η ιδιότητα της ημιομάδας $P_{t+s} = P_t P_s$ δικαιολογείται από το γεγονός ότι η αρμονική επέκταση της $f_s(x) = u(x,s)$ είναι η συνάρτηση $v(x,t) = u(x,t+s)$.

Η ημιομάδα Poisson συνδέεται στενά με την κίνηση Brown $(B_s)_{s\geqslant 0}$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Αν η $(B_s)_{s\geqslant 0}$ ξεκινάει την χρονική στιγμή $s=0$ από το σημείο (x_0,t_0), όπου $x_0\in\mathbb{R}^n$ και $t_0>0$, γνωρίζουμε ότι σχεδόν όλα τα μονοπάτια $s\mapsto B_s(\omega)$ θα χτυπήσουν το υπερεπίπεδο $H_0=\{t=0\}$ κάποια χρονική στιγμή $\tau_{t_0}(\omega)<\infty$. Αν αναλύσουμε την B_s στη μορφή (x_0+X_s,t_0+T_s), τότε η T_s είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown η οποία ξεκινάει από το 0 τη χρονική στιγμή 0, και η X_s είναι μια n-διάστατη κίνηση Brown η οποία ξεκινάει από το 0 στον $\mathbb{R}^n$ και είναι ανεξάρτητη από την T_s. Ο χρόνος τ_{t_0} είναι η πρώτη χρονική στιγμή $s>0$ για την οποία $Ts=-t_0$. Αν η f είναι συνεχής και φραγμένη στον $\mathbb{R}^n$ τότε μπορούμε να δούμε ότι η αρμονική επέκταση u της f στον άνω ημίχωρο δίνεται από την

$$u(x_0,t_0)=\mathbb{E}\,F(B_{\tau_{t_0}})=\mathbb{E}\,f(x_0+X_{\tau_{t_0}})=\int_\Omega f(x_0+X_{\tau_{t_0}(\omega)}(\omega))\,dP(\omega),$$

όπου η F ορίζεται στο υπερεπίπεδο H_0 του $\mathbb{R}^{n+1}$ από τη σχέση $F(x,0)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Το μέτρο πιθανότητας Poisson $P_{t_0}(x)dx$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι η κατανομή της $X_{\tau_{t_0}}$, της κίνησης Brown (X_s) που ξεκινάει από το $0\in\mathbb{R}^n$ και σταματάει τη στιγμή τ_{t_0}, όταν η B_s φτάνει στο H_0. Χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο P_t για την ημιομάδα, για την κατανομή Poisson στον $\mathbb{R}^n$ και για την πυκνότητά της, $P_t(x)$. Ο τελεστής P_t είναι η συνέλιξη με το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας, επομένως δρα στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Η κατανομή της τ_{t_0} είναι η ίδια με την κατανομή της πρώτης χρονικής στιγμής S_{t_0} κατά την οποία η μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει από το 0 φτάνει στο $t_0>0$, και από την (2.3.15) γνωρίζουμε την πυκνότητα h_t της κατανομής της S_t. Η κατανομή Poisson P_t στον $\mathbb{R}^n$ προκύπτει ως συνδυασμός των Gaussian κατανομών X_s στον $\mathbb{R}^n$ σύμφωνα με την κατανομή της S_t. Στο χωρίο του Ω όπου $s_0\leqslant\tau_t\leqslant s_0+\delta s$, η x-συντεταγμένη του σημείου $B_s=(X_s,t+T_s)$ την χρονική στιγμή τ_t είναι περίπου ίση με X_{s_0}, με πιθανότητα της τάξης της $h_t(s_0)\delta s$, και η $(X_s)_{s\geqslant 0}$ είναι ανεξάρτητη από την τ_t. Αυτό το σημείο $x=X_{s_0}$ είναι το σημείο στο οποίο η B_s αγγίζει το υπερεπίπεδο H_0, γνωρίζοντας ότι $\tau_t\sim s_0$. Αυτό έχει σαν συνέπεια το ότι η μεγιστική συνάρτηση της ημιομάδας Poisson κυριαρχείται από αυτήν της Gaussian ημιομάδας $(G_s)_{s\geqslant 0}$ στον $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, από την (2.3.15) βλέπουμε ότι η P_t είναι «στην κλειστή κυρτή θήκη» της Gaussian ημιομάδας, αφού

$$P_t=\int_0^\infty G_s\frac{ts^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2s}}ds. \tag{2.4.2}$$

Έπεται ότι

$$|P_t*f|\leqslant\int_0^\infty|G_s*f|\,\frac{ts^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2s}}ds\leqslant\sup_{u\geqslant 0}|G_u*f|.$$

Παίρνουμε έτσι, από την αντίστοιχη Gaussian εκτίμηση (2.3.10), μια εκτίμηση για τη μεγιστική συνάρτηση της ημιομάδας Poisson, η οποία είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση:

Θεώρημα 2.4.1. *Για κάθε* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *ισχύει*

$$\left\| \sup_{t>0} |P_t f| \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{p}{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{2.4.3}$$

Παρατηρήσεις 2.4.2. (α) Ο Stein απέδειξε το Θεώρημα 2.4.1 με διαφορετικές σταθερές και με έναν λίγο διαφορετικό τρόπο. Δεν χρησιμοποιούσε την Gaussian μεγιστική συνάρτηση, αλλά εφάρμοζε τη μεγιστική ανισότητα του Hopf (Θεώρημα 2.2.3) στην Gaussian ημιομάδα, αφού είχε προηγουμένως αποδείξει ότι η Poisson μεγιστική συνάρτηση $P^*f = \sup_{t>0} |P_t f|$ φράσσεται από ένα μέσο όρο παραστάσεων της μορφής $\frac{1}{t}\int_0^t (G_s f) ds$ τις οποίες μπορούσε να ελέγξει μέσω της ανισότητας του Hopf.

(β) Η ταυτότητα (2.4.2) δείχνει ότι οι περιθώριες κατανομές της P_t είναι επίσης κατανομές Poisson: πράγματι, αυτό προκύπτει αν παρατηρήσουμε ότι η κατανομή ανάμειξης, η οποία έχει πυκνότητα την h_t, δεν εξαρτάται από τη διάσταση n και οποιαδήποτε ορθογώνια προβολή μιας Gaussian κατανομής $N(0, \sigma^2 \mathrm{Id}_n)$ είναι επίσης Gaussian κατανομή, με την ίδια διασπορά.

(γ) Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την πυκνότητα της κατανομής P_t για κάθε $t > 0$, γράφοντας

$$\begin{aligned} P_t(x) &= \int_0^\infty e^{-\frac{|x|^2}{2s}} (2\pi s)^{-n/2} \frac{t s^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2s}} ds \\ &= t \int_0^\infty (2\pi s)^{-n/2-1/2} e^{-\frac{t^2+|x|^2}{2s}} \frac{ds}{s}, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Θέτοντας $u = s/(t^2+|x|^2)$ και στη συνέχεια $v = 1/(2u)$, παίρνουμε

$$P_t(x) = t\big(\pi(t^2+|x|^2)\big)^{-(n+1)/2} \int_0^\infty e^{-v} v^{(n+1)/2} \frac{dv}{v}.$$

Ο *πυρήνας του Poisson* P_t δίνεται λοιπόν από τον τύπο

$$P_t(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0. \tag{2.4.4}$$

Για $n = 1$, ο πυρήνας του Poisson είναι ο *πυρήνας του Cauchy*, ο οποίος είναι ίσος με

$$P_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2+x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{2.4.5}$$

2.5 Συναρτήσεις Littlewood-Paley, πολλαπλασιαστές Fourier, μετασχηματισμός Riesz

Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx.$$

Αντίστοιχα, αν μ είναι ένα φραγμένο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} d\mu(x).$$

Από το θεώρημα του Plancherel η απεικόνιση $f \mapsto \widehat{f}$ από τον $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ επεκτείνεται σε έναν ορθομοναδιαίο τελεστή $\mathcal{F}$ του $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ο αντίστροφος τελεστής $\mathcal{F}^{-1}$ απεικονίζει την $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ στην $x \mapsto (\mathcal{F}g)(-x)$. Θα γράφουμε $g^{\vee} := \mathcal{F}^{-1}(g)$.

Το θεώρημα Plancherel-Parseval επεκτείνεται σε συναρτήσεις f που παίρνουν τιμές σε έναν Ευκλείδειο χώρο F, δίνοντας μια ισομετρία από τον $L^2(\mathbb{R}^n, F)$ στον εαυτό του. Για την απόδειξη αρκεί να κοιτάξουμε τις συντεταγμένες σε μια ορθοκανονική βάση του F.

Με αυτήν την κανονικοποίηση του μετασχηματισμού Fourier έχουμε

$$\widehat{\gamma_n}(\xi) = e^{-2\pi^2|\xi|^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

και ο μετασχηματισμός Fourier του πυρήνα του Poisson P_t στον $\mathbb{R}^n$ ισούται με $e^{-2\pi t|\xi|}$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$. Πράγματι, αφού οι περιθώριες κατονομές της P_t στο $\mathbb{R}$ είναι κατανομές Cauchy με την ίδια παράμετρο t, από το θεώρημα υπολοίπων βλέπουμε ότι

$$\widehat{P_t}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{te^{-2\pi is|\xi|}}{\pi(t^2+s^2)} ds = e^{-2\pi t|\xi|}.$$

Γνωρίζοντας τον μετασχηματισμό Fourier $\widehat{P_t}$ έχουμε άλλον έναν τρόπο να επαληθεύσουμε την ιδιότητα ημιομάδας $P_s * P_t = P_{s+t}$ για τις κατανομές Poisson. Από τον τύπο αντιστροφής του Fourier βλέπουμε επίσης ότι η αρμονική επέκταση $u(x,t) = (P_t f)(x)$ μιας $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, την οποία θεωρήσαμε στην (2.4.1), γράφεται στη μορφή

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{2.5.1}$$

2.5.1 Συναρτήσεις Littlewood-Paley

Η συνάρτηση Littlewood-Paley $g(f)$ η οποία αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ από την

$$g(f)(x) = \left(\int_0^\infty |t\nabla u(x,t)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2},$$

όπου u είναι η αρμονική επέκταση της f στον άνω ημίχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$, και ∇u είναι η κλίση της u στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ ισχύει

$$\frac{1}{c_p}\|f\|_p \leqslant \|g(f)\|_p \leqslant c_p\|f\|_p, \tag{2.5.2}$$

όπου $c_p > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p. Θα χρειαστούμε μια παραλλαγή της συνάρτησης Littlewood-Paley $g(f)$, η οποία ορίζεται από την

(2.5.3) $$g_1(f)^2 = \int_0^\infty \left| t\frac{\partial}{\partial t}P_t f\right|^2 \frac{dt}{t}.$$

Αφού η $\frac{\partial}{\partial t}(P_t f)$ είναι μία από τις συντεταγμένες του διανύσματος ∇u, είναι φανερό ότι $g_1(f) \leqslant g(f)$. Γενικότερα, ο Stein [14] θεωρεί, για κάθε $k \geqslant 1$, την

$$g_k(f)^2 = \int_0^\infty \left| t^k\frac{\partial^k}{\partial t^k}P_t f\right|^2 \frac{dt}{t}.$$

Για κάθε $j \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε $Q_j = P_{2^j} - P_{2^{j+1}}$. Από την

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t}P_t f\right) dt\right|^2$$

και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f|^2 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\frac{\partial}{\partial t}P_t f\right|^2 dt \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\frac{\partial}{\partial t}P_t f\right|^2 t\,dt = g_1(f)^2.$$

Από την (2.5.2) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $1 < p < \infty$ υπάρχει σταθερά b_p, ανεξάρτητη από την διάσταση n, τέτοια ώστε

(2.5.4) $$\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant b_p \|f\|_p$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Το ίδιο επιχείρημα δίνει παρόμοια ανισότητα, με διαφορετική σταθερά που εξαρτάται από τον $c > 1$, για διαφορές της μορφής $\tilde{Q}_j = P_{t_j} - P_{t_{j-1}}$, όπου $(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την $t_{j+1} \leqslant ct_j$ για κάθε j. Επίσης, ανισότητα αντίστοιχη με την (2.5.4) ισχύει για την Gaussian ημιομάδα $(G_t)_{t\geqslant 0}$ (αυτήν χρησιμοποιεί, ουσιαστικά, ο Bourgain στη δουλειά του για τον κύβο).

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\xi \neq 0$, ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{P}_{2^j} = e^{-2^{j+1}\pi|\xi|}$ τείνει στο 1 όταν $j \to -\infty$ και στο 0 όταν $j \to +\infty$. Άρα,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{Q}_j(\xi) = 1$$

και οι τελεστές συνέλιξης, τους οποίους συμβολίζουμε επίσης με Q_j, ικανοποιούν την

(2.5.5) $$\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j = \mathrm{Id}.$$

Η σχέση των συναρτήσεων Littlewood-Paley με τους μεγιστικούς τελεστές. Ο Stein εξηγεί πώς μπορούμε να πάρουμε L^p εκτιμήσεις για διάφορες μεγιστικές συναρτήσεις, που σχετίζονται με κάποια ημιομάδα, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις Littlewood-Paley. Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση φ ορισμένη στην ημιευθεία $[0,\infty)$, παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$, και συμβολίζουμε με Φ την παράγουσά της για την οποία $\Phi(0)=0$. Για κάθε $t>0$ έχουμε

$$t\varphi(t)=\int_0^t (s\varphi(s))'ds=\int_0^t \varphi(s)\,ds+\int_0^t s\varphi'(s)\,ds=\Phi(t)+\int_0^t s\varphi'(s)\,ds.$$

Συγκρίνοντας την L^1 με την L^2 νόρμα, έχουμε

$$\int_0^t |s\varphi'(s)|\,\frac{ds}{t}\leqslant\left(\int_0^t |s\varphi'(s)|^2\frac{ds}{t}\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_0^t |s\varphi'(s)|^2\frac{ds}{s}\right)^{1/2}.$$

Έπεται ότι

$$|\varphi(t)|\leqslant\frac{|\Phi(t)|}{t}+\left(\int_0^\infty |s\varphi'(s)|^2\frac{ds}{s}\right)^{1/2},\qquad t>0.$$

Συνεπώς,

$$\sup_{t>0}|\varphi(t)|\leqslant\sup_{t>0}\frac{|\Phi(t)|}{t}+\left(\int_0^\infty |s\varphi'(s)|^2\frac{ds}{s}\right)^{1/2},\qquad t>0.$$

Αν $\varphi(s)=(P_sf)(x)$ για κάποιο $x\in\mathbb{R}^n$, το άνω φράγμα παίρνει τη μορφή

$$\sup_{t>0}|(P_tf)(x)|\leqslant\sup_{t>0}\frac{1}{t}\left|\int_0^t (P_sf)(x)\,ds\right|+g_1(f)(x).$$

Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε την L^p-νόρμα, για $1<p<\infty$, της μεγιστικής συνάρτησης της ημιομάδας Poisson, χρησιμοποιώντας τη μεγιστική ανισότητα του Hopf και την εκτίμηση για τη συνάρτηση Littlewood-Paley. Αυτό γίνεται εύκολα στον L^2, ειδικά αν ο L^2 έχει μια ορθοκανονική βάση (f_j) τέτοια ώστε $P_tf_j=e^{-t\lambda_j}f_j$ για κάθε j, όπου $\lambda_j\geqslant 0$, κάτι που π.χ. συμβαίνει για την Λαπλασιανή σε ένα φραγμένο χωρίο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Αν $f=\sum_j a_jf_j$ στον $L^2(\Omega)$, τότε έχουμε $P_tf=\sum_j a_je^{-\lambda_jt}f_j$, και

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_1(f)(x)^2dx&=\int_0^\infty\int_\Omega\left|\sum_j a_jt\lambda_je^{-t\lambda_j}f_j(x)\right|^2dx\,\frac{dt}{t}\\&=\int_0^\infty\left(\sum_j |a_j|^2t^2\lambda_j^2e^{-2t\lambda_j}\right)\frac{dt}{t}\\&=\sum_j |a_j|^2\int_0^\infty t^2\lambda_j^2e^{-2t\lambda_j}\frac{dt}{t}\\&=\left(\int_0^\infty u^2e^{-2u}\frac{du}{u}\right)\sum_{\lambda_j>0}|a_j|^2\\&\leqslant\frac{1}{4}\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Για τις άλλες συναρτήσεις Littlewood-Paley $g_k(f)$, με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_k(f)(x)^2dx &= \int_0^\infty \int_\Omega \left|\sum_j a_j t^k \lambda_j^k e^{-t\lambda_j} f_j(x)\right|^2 dx\,\frac{dt}{t}\\ &= \sum_j |a_j|^2 \int_0^\infty t^{2k}\lambda_j^{2k} e^{-2t\lambda_j}\frac{dt}{t}\\ &\leqslant \frac{\Gamma(2k)}{4^k}\,\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Στην περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}^n$, μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα γράφοντας

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k(f)(x)^2dx = (2\pi)^{2k}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)t^k|\xi|^k e^{-2\pi t|\xi|}|^2 d\xi\,\frac{dt}{t} = \frac{\Gamma(2k)}{4^k}\,\|f\|_2^2.$$

2.5.2 Πολλαπλασιαστές Fourier

Για κάθε $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ορίζουμε

(2.5.6) $$g_{(\lambda)}(x) = \lambda^{-n} g(\lambda^{-1}x) \quad \text{και} \quad g_{[\lambda]}(x) = g(\lambda x).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι αν η g είναι ολοκληρώσιμη και η h είναι φραγμένη, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_{(\lambda)}(x)h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)h_{[\lambda]}(y)dy$$

και

$$\widehat{g_{(\lambda)}}(\xi) = \widehat{g}(\lambda\xi)$$

για κάθε ξ, δηλαδή $\widehat{g_{(\lambda)}} = \widehat{g}_{[\lambda]}$.

Αν μ είναι ένα μέτρο, τότε για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε το μέτρο $\mu_{(\lambda)}$ μέσω της

(2.5.7) $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu_{(\lambda)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x)\,d\mu(x)$$

για κάθε συνεχή f με συμπαγή φορέα. Στην περίπτωση που $d\mu(x) = g(x)dx$, έχουμε $d\mu_{(\lambda)}(x) = g_{(\lambda)}(x)dx$.

Έστω m μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Από την ταυτότητα Plancherel-Parseval, για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ έχουμε $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Επίσης, η $\xi \mapsto m(\xi)\widehat{f}(\xi)$ ανήκει στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, άρα είναι ο μετασχηματισμός Fourier κάποιας συνάρτησης $T_mf \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ορίζεται έτσι ένας τελεστής T_m στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ αν ορίσουμε την T_mf μέσω του μετασχηματισμού Fourier της:

(2.5.8) $$\widehat{T_mf}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Έστω P_m ο τελεστής πολλαπλασιασμού με την P_m, δηλαδή $P_m\varphi = m\varphi$. Ο τελεστής $T_m = \mathcal{F}^{-1}P_m\mathcal{F}$ είναι φραγμένος στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ διότι, από την ταυτότητα Parseval έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(T_mf)(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \leqslant \|m\|_\infty^2\|f\|_2^2. \tag{2.5.9}$$

Λέμε ότι ο T_m είναι ο τελεστής που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστή m.

Ο πολλαπλασιαστής m και οι $m_{[\lambda]}(\xi) = m(\lambda\xi)$ ορίζουν τελεστές της ίδιας νόρμας στον L^p. Παρατηρούμε ότι

$$\big(T_{m_{[\lambda]}}f_{(\lambda)}\big)\widehat{\ }(\xi) = m(\lambda\xi)\widehat{f}(\lambda\xi),$$

άρα

$$T_{m_{[\lambda]}}f_{(\lambda)} = (T_mf)_{(\lambda)}.$$

Θεωρούμε τον τελεστή $S_\lambda(f) = f_{(\lambda)}$. Για κάθε $p \geqslant 1$ έχουμε ότι ο $S_{\lambda,p} := \lambda^{n/q}S_\lambda$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, είναι ισομετρική εμφύτευση του $L^p(\mathbb{R}^n)$ στον εαυτό του. Η $S_\lambda \circ T_m = T_{m_{[\lambda]}} \circ S_\lambda$ γράφεται στη μορφή

$$T_{m_{[\lambda]}} = S_{\lambda,p}T_mS_{\lambda,p}^{-1} \tag{2.5.10}$$

και αυτό δείχνει ότι οι T_m και $T_{m_{[\lambda]}}$ έχουν την ίδια νόρμα στον L^p. Γενικότερα, αν $\mathcal{M} = (m^{(j)})_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια πολλαπλασιαστών και αν $T_{\mathcal{M}}f = \sup_{j\in J}|T_{m^{(j)}}f|$, θέτοντας $\mathcal{M}_{[\lambda]} = (m_{[\lambda]}^{(j)})_{j\in J}$ έχουμε πάλι

$$T_{\mathcal{M}_{[\lambda]}} = S_{\lambda,p}T_{\mathcal{M}}S_{\lambda,p}^{-1} \tag{2.5.11}$$

διότι ο S_λ αντιμετατίθεται με τον $f \mapsto |f|$ και $S_\lambda\left(\sup_{j\in J} f_j\right) = \sup_{j\in J} S_\lambda f_j$. Έπεται ότι οι $T_{\mathcal{M}}$ και $T_{\mathcal{M}_{[\lambda]}}$ έχουν την ίδια νόρμα στον L^p.

Για κάθε πολλαπλασιαστή m συμφωνούμε να γράφουμε

$$\|m\|_{p\to p} := \|T_m\|_{p\to p}.$$

Το επόμενο λήμμα είναι άμεση συνέπεια της $\|m_{[\lambda]}\|_{p\to p} = \|m\|_{p\to p}$:

Λήμμα 2.5.1. *Έστω $1 \leqslant p \leqslant \infty$ και έστω $m(\xi)$ ένας L^p-πολλαπλασιαστής. Αν ψ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $(0,\infty)$, τότε ο πολλαπλασιαστής N που ορίζεται από την*

$$N(\xi) = \int_0^\infty \psi(\lambda)m(\lambda\xi)d\lambda, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

είναι L^p-πολλαπλασιαστής, και

$$\|N\|_{p\to p} \leqslant \|\psi\|_{L^1(0,\infty)}\|m\|_{p\to p}.$$

Παρατηρήστε ότι οι πολλαπλασιαστικοί τελεστές αντιμετατίθενται μεταξύ τους, καθώς και με τις μεταφορές και τις παραγωγίσεις. Θα χρησιμοποιούμε συχνά την (2.5.9) στη μορφή

(2.5.12) $$\|m\|_{2\to 2} = \|T_m\|_{2\to 2} \leqslant \|m\|_\infty.$$

Στην πραγματικότητα αυτή η ανισότητα είναι ισότητα διότι, από την ταυτότητα Parseval, η νόρμα του T_m στον L^2 είναι ίση με αυτήν του P_m, του τελεστή πολλαπλασιασμού με την m.

Αν K είναι ένας ολοκληρώσιμος πυρήνας στον $\mathbb{R}^n$, ο K δρα μέσω της συνέλιξης στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$, και από την κυρτότητα της L^p-νόρμας βλέπουμε εύκολα ότι

(2.5.13) $$\|K * f\|_p \leqslant \|K\|_1 \|f\|_p.$$

Αφού η συνέλιξη της f με την K αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό της $\widehat{f}$ με την $\widehat{K}$, έχουμε έτσι ένα απλό παράδειγμα τελεστή που αντιστοιχεί σε έναν πολλαπλασιαστή: ο μετασχηματισμός Fourier $m = \widehat{K}$ του K είναι πολλαπλασιαστής σε όλους τους χώρους $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Έχουμε

$$m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x) e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Έστω $\xi \neq 0$, $\theta = \xi/|\xi|$, και ας γράψουμε $x = y + s\theta$, όπου $y \in \theta^\perp$ και $s \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα Fubini, για κάθε $u \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$m(u\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\theta^\perp} K(y + s\theta) dy \right) e^{-2\pi i s u |\xi|} ds.$$

Ορίζοντας

(2.5.14) $$\varphi_{\theta,K}(s) = \int_{\theta^\perp} K(y + s\theta) dy,$$

παίρνουμε

(2.5.15) $$m(u\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\theta,K}(s) e^{-2\pi i s u |\xi|} ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\xi|} \varphi_{\theta,K}\left(\frac{v}{|\xi|}\right) e^{-2\pi i v u} dv.$$

Η συνάρτηση $u \mapsto m(u\theta)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier, στο $\mathbb{R}$, της $\varphi_{\theta,K}$.

Πολλαπλασιαστές τύπου Laplace. Έστω $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία αναπαρίσταται στη μορφή

(2.5.16) $$F(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} a(t)\, dt,$$

όπου a είναι μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στο $(0,\infty)$. Ο πολλαπλασιαστής *τύπου Laplace* $m(\xi)$ που αντιστοιχεί στην F ορίζεται από την

$$m(\xi) = F(|\xi|).$$

Παρατηρήστε ότι $\|F\|_\infty \leqslant \|a\|_\infty$, οπότε η (2.5.12) δείχνει ότι ο πολλαπλασιαστής m τύπου Laplace που αντιστοιχεί στην F είναι φραγμένος στον L^2 και $\|m\|_{2\to 2} \leqslant \|a\|_\infty$. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον L^p οφείλεται στον Stein.

Θεώρημα 2.5.2. *Έστω F η συνάρτηση της* (2.5.16), *όπου a είναι φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στο $(0,\infty)$, και έστω m ο πολλαπλασιαστής που ορίζεται από την $m(\xi) = F(|\xi|)$. Ο τελεστής T_m που αντιστοιχεί στον m είναι φραγμένος στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, και*

$$\|T_m\|_{p\to p} \leqslant \lambda_p \|a\|_\infty,$$

όπου $\lambda_p > 0$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από τη διάσταση n.

Η απόδειξη του Stein χρησιμοποιεί τις L^p ανισότητες για τις συναρτήσεις Littlewood-Paley $g_1(f)$ και $g_2(f)$, και μια εκτίμηση της μορφής $g_1(T_m f) \leqslant C g_2(f)$.

Από το Θεώρημα 2.5.2 προκύπτει ότι οι φανταστικές δυνάμεις του $(-\Delta)^{1/2}$ δρουν στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, με νόρμες φραγμένες ανεξάρτητα από τη διάσταση n. Πράγματι, ισχύει ο τύπος

$$\lambda^{ib} = \frac{1}{\Gamma(1-ib)} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{-ib} dt, \tag{2.5.17}$$

και για τη συνάρτηση $a(t) = t^{-ib}/\Gamma(1-ib)$ έχουμε

$$\|a\|_\infty = \left| \frac{1}{\Gamma(1-ib)} \right| = \left(\frac{\sinh(\pi b)}{\pi b} \right)^{1/2} \leqslant \frac{e^{\pi|b|/2}}{\sqrt{1+b^2}},$$

οπότε το Θεώρημα 2.5.2 μας δίνει, για κάθε $b\in\mathbb{R}$,

$$\left\| \, |\xi|^{ib} \right\|_{p\to p} \leqslant \lambda_p (1+b^2)^{-1/2} e^{\pi|b|/2} \tag{2.5.18}$$

για κάθε $1<p<\infty$.

2.5.3 Μετασχηματισμός Riesz

Ο μετασχηματισμός Riesz $\mathcal{R}$ στη μονοδιάστατη περίπτωση είναι ο *μετασχηματισμός Hilbert* H. Για κάθε $f\in L^2(\mathbb{R})$ ορίζεται από την

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\xi) = \widehat{Hf}(\xi) = -\frac{i\xi}{|\xi|} \widehat{f}(\xi), \qquad \xi \neq 0.$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{R}$ ορίζεται από έναν πολλαπλασιαστή που έχει σταθερό μέτρο ίσο με 1, συνεπώς είναι ισομετρικός και αντιστρέψιμος στον $L^2(\mathbb{R})$ από την ταυτότητα Parseval. Πιο συγκεκριμένα, ο H είναι ορθομοναδιαίος τελεστής στον $L^2(\mathbb{R})$, με αντίστροφο τον $H^{-1} = -H$. Αν $\tilde{u}(x,t)$ είναι η αρμονική επέκταση της Hf στο άνω ημιεπίπεδο, η $u(x,t)+i\tilde{u}(x,t)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $z = x+it$, διότι ο μετασχηματισμός Fourier της μηδενίζεται όταν $\xi < 0$, το οποίο συνεπάγεται, με αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier, ότι η $u(x,t)$ αναπαρίσταται σαν ολοκλήρωμα ως προς $\xi > 0$ της ολόμορφης συνάρτησης $e^{-2\pi|\xi|t}e^{2\pi i\xi(x+it)}$. Από ένα κλασικό θεώρημα του M. Riesz γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Hilbert είναι φραγμένος στον $L^p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 < p < \infty$.

Στις n διαστάσεις υπάρχουν n μετασχηματισμοί Riesz $\mathcal{R}_j$, οι οποίοι ορίζονται στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ μέσω της

$$\widehat{\mathcal{R}_j f}(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi), \qquad j = 1,\dots,n.$$

Χρησιμοποιώντας την $\left\| \Big(\sum_{j=1}^n |\mathcal{R}_j f|^2\Big)^{1/2} \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \|\mathcal{R}_j f\|_2^2$ και την ταυτότητα Parseval βλέπουμε ότι

$$\left\| \Big(\sum_{j=1}^n |\mathcal{R}_j f|^2\Big)^{1/2} \right\|_2 = \|f\|_2. \tag{2.5.19}$$

Οι μετασχηματισμοί Riesz είναι «ομαδικώς» φραγμένοι στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ (το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στον Stein, και μια άλλη απόδειξη δόθηκε από τους Duoandikoextea και Rubio de Francia).

Θεώρημα 2.5.3. *Για κάθε $2 < p < \infty$ υπάρχει σταθερά $c_p > 0$ τέτοια ώστε*

$$\left\| \Big(\sum_{j=1}^n |\mathcal{R}_j f|^2\Big)^{1/2} \right\|_p \leqslant c_p \|f\|_p \tag{2.5.20}$$

για κάθε n και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ το μετασχηματισμό Hilbert *στη διεύθυνση του* u, θέτοντας

$$\widehat{H_u f}(\xi) = -\frac{i\langle u,\xi\rangle}{|\langle u,\xi\rangle|}\widehat{f}(\xi) = -i\,\mathrm{sign}(\langle u,\xi\rangle)\widehat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Από τη μονοδιάστατη περίπτωση βλέπουμε εύκολα ότι ο H_u δρα στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ με νόρμα αυτήν του H στον $L^p(\mathbb{R})$. Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση που $u = e_1$. Γράφοντας τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ στη μορφή $x=(t,y)$, όπου $t\in\mathbb{R}$ και $y\in\mathbb{R}^{n-1}$, και θέτοντας $f_y(t)=f(t,y)$ για κάθε f στην κλάση Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, βλέπουμε ότι $(H_{e_1}f)(t,y)=(Hf_y)(t)$. Από το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned}\iint |(H_{e_1}f)(t,y)|^p dt\,dy &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}|(Hf_y)(t)|^p dt\right)dy\\ &\leqslant \|H\|_{p\to p}^p\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_y(t)|^p dt\right)dy\\ &= \|H\|_{p\to p}^p\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Μπορούμε να δούμε τον $\mathcal{R}f=(\mathcal{R}_1f,\ldots,\mathcal{R}_nf)$ ως τον τελεστή που αντιστοιχεί στον διανυσματικό πολλαπλασιαστή

$$\mathcal{M}(\xi)=-i|\xi|^{-1}\xi,\qquad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

δηλαδή τον τελεστή που στέλνει μια $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ στη συνάρτηση $T_{\mathcal{M}}f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier (με τιμές στον $\mathbb{R}^n$) ισούται με $\widehat{f}(\xi)\mathcal{M}(\xi)$. Για κάθε $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$(\mathcal{H}f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(H_uf)(x)u\,d\gamma_n(x),\qquad x\in\mathbb{R}^n$$

με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, όπου γ_n είναι το n-διάστατο μέτρο του Gauss. Ο τελεστής $\mathcal{H}$ αντιστοιχεί στον «διανυσματικό» πολλαπλασιαστή που ορίζεται, για $\xi\neq 0$, από την

$$-i\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{sign}(\langle u,\xi\rangle)u\,d\gamma_(x)=-i\left(\int_{\mathbb{R}}|v|\,d\gamma_1(v)\right)|\xi|^{-1}\xi=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}|\xi|^{-1}\xi.$$

Αυτό προκύπτει αν ολοκληρώσουμε στα υπερεπίπεδα που είναι κάθετα στο ξ. Το «κανονικοποιημένο» μερικό ολοκλήρωμα στο υπερεπίπεδο $\xi^{\perp}+v|\xi|^{-1}\xi$, όπου $v\in\mathbb{R}$, ισούται με

$$\int_{\xi^{\perp}}\mathrm{sign}(v)(w+v|\xi|^{-1}\xi)\,s\gamma_{\xi^{\perp}}(w)=|v|\cdot|\xi|^{-1}\xi.$$

Έπεται ότι

$$\mathcal{R}f=\mathcal{H}f.$$

Αν σταθεροποιήσουμε το x, η νόρμα του $(\mathcal{H}f)(x)$ είναι το supremum των εσωτερικών γινομένων με μοναδιαία διανύσματα $\theta\in S^{n-1}$, και αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p παίρνουμε

$$\begin{aligned}|(\mathcal{H}f)(x)| &\leqslant \sup_{\theta\in S^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle\theta,u\rangle|\,|(U_uf)(x)|\,d\gamma_n(x)\\ &\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}}|v|^q d\gamma_1(v)\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|(H_uf)(x)|^p d\gamma_n(x)\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Θέτοντας

$$g_q := \left(\int_{\mathbb{R}} |v|^q d\gamma_1(v)\right)^{1/q},$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{R}f)(x)|^p dx\right)^{1/p} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{H}f)(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &\leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} g_q \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |(H_u f)(x)|^p d\gamma_n(u)\, dx\right)^{1/p} \\ &\leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} g_q \|H\|_{p\to p}\|f\|_p.\end{aligned}$$

Έχουμε έτσι αποδείξει το θεώρημα, με

$$c_p \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} g_q \|H\|_{p\to p}.$$

Όταν $p = 2$, το επιχείρημα που δώσαμε δίνει $c_2 \leqslant \sqrt{\pi/2}$, ενώ η σωστή τιμή της σταθεράς είναι $c_2 = 1$ λόγω της (2.5.19). Για $p \to 1^+$ έχουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{R}f)(x)|^p dx\right)^{1/p} \; sc\sqrt{q}\|H\|_{p\to p}\|f\|_p,$$

διότι $g_q \simeq \sqrt{q/e}$. □

2.6 Εκτιμήσεις για τη συνάρτηση Γάμμα

Σε αυτήν την παράγραφο συγκεντρώνουμε διάφορες χρήσιμες εκτιμήσεις για τη συνάρτηση Γάμμα. Από τον τύπο του Euler

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}),$$

παίρνουμε την αναπαράσταση της $1/\Gamma$ σε απειρογινόμενο:

(2.6.1)
$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left((1+z/n)e^{-z/n}\right),$$

όπου γ είναι η σταθερά Euler-Mascheroni. Άρα, η $1/\Gamma$ είναι ακέραια συνάρτηση με απλές ρίζες στα $z = 0, -1, -2, \ldots$. Για τα επιχειρήματα παρεμβολής που χρησιμοποιούμε, χρειαζόμαστε άνω φράγματα για το μέτρο του $1/\Gamma(\sigma + i\tau)$, όπου $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Από την (2.6.1) και από την $\Gamma(\overline{z}) = \overline{\Gamma(z)}$ βλέπουμε ότι

(2.6.2)
$$\left|\frac{1}{\Gamma(1+i\tau)}\right|^2 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\tau^2}{n^2}\right) = \frac{\sinh(\pi\tau)}{\pi\tau}, \qquad \tau \in \mathbb{R},$$

χρησιμοποιώντας και τον τύπο του Euler

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{2.6.3}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\frac{\sinh(\pi x)}{\pi x} \leqslant \frac{e^{\pi|x|}}{1+\pi|x|} \leqslant \frac{e^{\pi x|}}{(1+x^2)^{1/2}}. \tag{2.6.4}$$

Η δεξιά ανισότητα είναι προφανής, ενώ η αριστερή ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $(1+y)\sinh(y) \leqslant ye^y$ για $y \geqslant 0$, ή ισοδύναμα με την $h(y) := (y-1)e^{2y} + y + 1 \geqslant 0$, η οποία ισχύει διότι $h(0) = h'(0) = 0$ και $h''(y) = 4ye^{2y} \geqslant 0$ για $y \geqslant 0$. Από τις (2.6.2) και (2.6.4) βλέπουμε ότι

$$\left|\frac{1}{\Gamma(1+i\tau)}\right| \leqslant (1+\tau^2)^{-1/4} e^{\pi|\tau|/2} \tag{2.6.5}$$

για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$. Γενικεύοντας την (2.6.2), για κάθε $\sigma \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\Gamma(1+\sigma+i\tau)}\right|^2 &= e^{2\gamma\sigma}\prod_{n=1}^{\infty}\left([(1+\sigma/n)^2 + (\tau/n)^2]e^{-2\sigma/n}\right)\\
&= e^{2\gamma\sigma}\prod_{n=1}^{\infty}\left((1+\sigma/n)^2 e^{-2\sigma/n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\tau}{n+\sigma}\right)^2\right)\\
&= \Gamma(1+\sigma)^{-2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\tau}{n+\sigma}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Από την κυρτότητα της $x \mapsto \ln(1+x^{-2})$, $x>0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\tau}{n+\sigma}\right)^2\right) &\leqslant \left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\tau}{n}\right)^2\right)\right)^{1-\sigma}\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\tau}{n+1}\right)^2\right)\right)^{\sigma}\\
&= (1+\tau^2)^{-\sigma}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\tau}{n}\right)^2\right)\\
&= (1+\tau^2)^{-\sigma}\frac{\sinh(\pi\tau)}{\pi\tau}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\left|\frac{1}{\Gamma(1+\sigma+i\tau)}\right|^2 \leqslant \Gamma(1+\sigma)^{-2}(1+\tau^2)^{-\sigma}\frac{\sinh(\pi\tau)}{\pi\tau},$$

και χρησιμοποιώντας την (2.6.4) παίρνουμε

$$\left|\frac{1}{\Gamma(1+\sigma+i\tau)}\right| \leqslant \Gamma(1+\sigma)^{-1}(\sqrt{1+\tau^2})^{\frac{1}{2}-1-\sigma}e^{\pi|\tau|/2}. \tag{2.6.6}$$

Επεκτείνουμε αυτό το φράγμα χρησιμοποιώντας τη σχέση $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$. Αν $z = k+1+\sigma+i\tau$, όπου $k \geqslant 1$ είναι ένας ακέραιος, τότε

$$\left|\frac{1}{\Gamma(k+1+\sigma+i\tau)}\right| = \left(\prod_{j=1}^{k}\Big((j+\sigma)^2+\tau^2)^{-1/2}\Big)\right)\left|\frac{1}{\Gamma(1+\sigma+i\tau)}\right| \leqslant (\sqrt{1+\tau^2})^{-k}\left|\frac{1}{\Gamma(1+\sigma+i\tau)}\right|. \tag{2.6.7}$$

Παίρνοντας υπόψη την

$$\Gamma(1+\sigma) = \int_0^\infty u^\sigma e^{-u}du \geqslant \int_0^\infty \min\{u,1\}\cdot e^{-u}du = \int_0^1 e^{-u}du = 1-e^{-1} > 1/2,$$

από τις (2.6.6) και (2.6.7) βλέπουμε ότι

$$\left|\frac{1}{\Gamma(k+1+\sigma+i\tau)}\right| \leqslant 2(\sqrt{1+\tau^2})^{\frac{1}{2}-k-1-\sigma}e^{\pi|\tau|/2}. \tag{2.6.8}$$

Αν $z = -k+\sigma+i\tau$, όπου $k \geqslant 0$ είναι ένας ακέραιος, έχουμε

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| = \left|\frac{1}{\Gamma(1+\sigma+i\tau)}\right|\prod_{j=-k}^{0}\left((j+\sigma)^2+\tau^2\right)^{1/2}.$$

Για $j = 0, -1$, οι παράγοντες του γινομένου φράσσονται από $(1+\tau^2)^{1/2}$, και όταν $j \leqslant -2$ έχουμε $\left((j+\sigma)^2+\tau^2\right)^{1/2} \leqslant (|j|-\sigma)(1+\tau^2)^{1/2}$. Έπεται ότι, για $z = -k+\sigma+i\tau$,

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \leqslant (k-\sigma)(k-1-\sigma)\cdots(2-\sigma)(1+\tau^2)^{\frac{k+1}{2}}\left|\frac{1}{\Gamma(1+\sigma+i\tau)}\right|. \tag{2.6.9}$$

Από την $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ και το γεγονός ότι η Γ είναι λογαριθμικά κυρτή, έχουμε

$$\begin{aligned}\Gamma(1+\sigma)^{-1}&(k-\sigma)(k-1-\sigma)\cdots(2-\sigma)\\ &= \frac{\Gamma(k+1-\sigma)}{\Gamma(2-\sigma)\Gamma(1+\sigma)} \leqslant \frac{\Gamma(k+1-\sigma)}{\Gamma(3/2)}\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma(k+1-\sigma) < 2\Gamma(k+1-\sigma).\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην (2.6.9) και χρησιμοποιώντας την (2.6.6) συμπεραίνουμε ότι

$$\left|\frac{1}{\Gamma(-k+\sigma+i\tau)}\right| \leqslant 2\Gamma(k-\sigma+1)(\sqrt{1+\tau^2})^{\frac{1}{2}+k-\sigma}e^{\pi|\tau|/2}. \tag{2.6.10}$$

Αν $\mathrm{Re}(z) \geqslant 1$, από την (2.6.8) έπεται ότι

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \leqslant 2(\sqrt{1+(\mathrm{Im}(z))^2})^{\frac{1}{2}-\mathrm{Re}(z)}e^{\pi|\mathrm{Im}(z)|/2},$$

άρα, σε κάθε ημιεπίπεδο της μορφής $\mathrm{Re}(z) \geqslant a$, από την (2.6.10) παίρνουμε το άνω φράγμα

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \leqslant \beta_a\left(\sqrt{1+(\mathrm{Im}(z))^2}\right)^{\frac{1}{2}-a} e^{\pi|\mathrm{Im}(z)|/2}, \tag{2.6.11}$$

με $\beta_a = 2\Gamma(|a|+1)$ όταν $a \leqslant -1$ και $\beta_a = 2$ αλλιώς.

2.7 Μιγαδική παρεμβολή

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε συνοπτικά κάποια χρήσιμα θεωρήματα παρεμβολής για ολόμορφες οικογένειες γραμμικών τελεστών, ξεκινώντας από το κλασικό *λήμμα των τριών ευθειών*.

Λήμμα 2.7.1. *Έστω S η λωρίδα $\{z : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ στο μιγαδικό επίπεδο. Έστω f μια συνάρτηση ολόμορφη στην S και συνεχής στην κλειστή θήκη της S. Υποθέτουμε ότι η f είναι φραγμένη στην S και ότι*

$$|f(0+i\tau)| \leqslant C_0, \qquad |f(1+i\tau)| \leqslant C_1$$

για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $\theta \in (0,1)$ ισχύει

$$|f(\theta)| \leqslant C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}.$$

Στη συνέχεια θα χρειαστεί να χειριστούμε καταστάσεις όπου η συνάρτηση f δεν είναι, με κάποιο φυσιολογικό τρόπο, φραγμένη στις δύο ευθείες που ορίζουν την S, αυξάνει όμως με ρυθμό που είναι εκθετικός ως προς το $|\tau| = |\mathrm{Im}(z)|$. Λέμε ότι μια συνάρτηση f που ορίζεται σε μια κατακόρυφη λωρίδα S έχει *επιτρεπτή αυξητικότητα* στη λωρίδα αν υπάρχει σταθερά $\kappa > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leqslant \kappa e^{\kappa|\mathrm{Im}(z)|}$$

για κάθε $z \in S$. Το επόμενο λήμμα γενικεύει το λήμμα των τριών ευθειών κάτω από αυτές τις υποθέσεις.

Λήμμα 2.7.2. *Έστω f μια συνάρτηση ολόμορφη στη λωρίδα $S = \{z : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$, με επιτρεπτή αυξητικότητα στην S και συνεχής στην κλειστή θήκη της S. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_0, a_1 \geqslant 0$ και b_0, b_1 τέτοιοι ώστε*

$$|f(0+i\tau)| \leqslant e^{a_0|\tau|+b_0}, \qquad |f(1+i\tau)| \leqslant e^{a_1|\tau|+b_1}$$

για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $\theta \in (0,1)$ ισχύει

$$|f(\theta)| \leqslant \exp\left(\sqrt{\theta(1-\theta)}\sqrt{(1-\theta)a_0^2+\theta a_1^2} + (1-\theta)b_0 + \theta b_1\right).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ολόμορφη συνάρτηση $g(z) := e^{cz^2/2+dz}$, όπου $c > 0$ και $d \in \mathbb{R}$. Αν $z = \sigma + i\tau$, έχουμε

$$|g(z)| = e^{c(\sigma^2-\tau^2)+d\sigma}.$$

Από την υπόθεση $|f(z)| \leqslant \kappa e^{\kappa|\mathrm{Im}(z)|} = \kappa e^{\kappa|\tau|}$ έπεται ότι το γινόμενο $f(z)g(z)$ τείνει στο 0 όταν το z τείνει στο άπειρο μέσα από την S.

Σταθεροποιούμε $\theta \in (0,1)$. Αν $f(\theta) \neq 0$ τότε υπάρχει $\tau_0 > 0$ τέτοιος ώστε $|f(z)g(z)| < |f(\theta)g(\theta)|$ όταν $|\mathrm{Im}(z)| \geqslant \tau_0$. Από την αρχή μεγίστου για το συμπαγές ορθογώνιο $R = \{0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1, |\mathrm{Im}(z)| \leqslant \tau_0\}$ γνωρίζουμε ότι το μέγιστο της $|f(z)g(z)|$ πιάνεται στο σύνορο του R, αλλά δεν μπορεί να είναι στις οριζόντιες πλευρές $|\mathrm{Im}(z)| = \tau_0$. Στην κατακόρυφη πλευρά $\mathrm{Re}(z) = 0$ έχουμε

$$|f(i\tau)g(i\tau)| \leqslant e^{a_0|\tau|+b_0-c\tau^2/2} \leqslant e^{a_0^2/(2c)+b_0} =: E_0,$$

και όταν $\mathrm{Re}(z) = 1$ έχουμε

$$|f(1+i\tau)g(1+i\tau)| \leqslant e^{a_1|\tau|+b_1-c\tau^2/2+c/2+d} \leqslant e^{a_1^2/(2c)+b_1+c/2+d} =: E_1.$$

Επιλέγουμε τον d έτσι ώστε $E_0 = E_1$, δηλαδή $d = (a_0^2 - a_1^2)/(2c) + b_0 - b_1 - c/2$. Από την αρχή μεγίστου έχουμε $|f(\theta)g(\theta)| \leqslant E_0 = E_1$, άρα

$$\begin{aligned}|f(\theta)| &\leqslant e^{-c\theta^2/2-d\theta}E_0 = \exp\left(\frac{(1-\theta)a_0^2+\theta a_1^2}{2c} + (1-\theta)b_0 + \theta b_1 + \frac{c\theta(1-\theta)}{2}\right)\\ &\leqslant \exp\left(\sqrt{\theta(1-\theta)}\sqrt{(1-\theta)a_0^2+\theta a_1^2} + (1-\theta)b_0 + \theta b_1\right),\end{aligned}$$

αν επιλέξουμε τη βέλτιστη τιμή για το c. □

Πόρισμα 2.7.3. *Έστω f μια συνάρτηση ολόμορφη στη λωρίδα $S = \{z : \alpha_0 < \mathrm{Re}(z) < \alpha_1\}$, με επιτρεπτή αυξητικότητα στην S και συνεχής στην κλειστή θήκη της S. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $u_0, u_1 \geqslant 0$ και v_0, v_1 τέτοιοι ώστε*

$$|f(\alpha_0+i\tau)| \leqslant e^{u_0|\tau|+v_0}, \qquad |f(\alpha_1+i\tau)| \leqslant e^{u_1|\tau|+v_1}$$

για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$. Έστω $\theta \in [0,1]$. Ορίζουμε $\alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $u_\theta = (1-\theta)u_0 + \theta u_1$ και $v_\theta = (1-\theta)v_0 + \theta v_1$. Τότε, για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(\alpha_\theta + i\tau)| \leqslant E_{w,\theta}(u_0,u_1)e^{u_\theta|\tau|+v_\theta},$$

όπου $w = \alpha_1 - \alpha_0$ είναι το πλάτος της λωρίδας S, και

$$E_{w,\theta}(u_0,u_1) := \exp\left(w\sqrt{\theta(1-\theta)}\sqrt{(1-\theta)u_0^2+\theta u_1^2}\right).$$

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι $\sqrt{\theta(1-\theta)} \leqslant 1/2$ για κάθε $\theta \in [0,1]$. Αν $u_0 = u_1 = u$ μπορούμε πάντα να χρησιμοποιούμε το απλούστερο φράγμα $E_{w,\theta}(u_0,u_1) \leqslant e^{wu/2}$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με την $S_1 := \{0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1\}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.7.2 μπορούμε να φράξουμε το μέτρο της $f(\theta+i\tau_0)$ για κάθε $\tau_0 \in \mathbb{R}$, κάνοντας μια κατακόρυφη μεταφορά στην f. Η συνάρτηση $F(z) = f(z+i\tau_0)$ ικανοποιεί τις $|F(j+i\tau)| \leqslant e^{u_j|\tau|+(u_j|\tau|+v_j)}$, $j=0,1$, και το φράγμα που δίνει το Λήμμα 2.7.2 για το $|F(\theta)|$ μας δίνει

$$|f(\theta+i\tau_0)| \leqslant E_{1,\theta}(u_0,u_1)e^{u_\theta|\tau_0|+v_\theta}, \qquad \tau_0 \in \mathbb{R}.$$

Μπορούμε μετά να περάσουμε στην $S = \{\alpha_0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \alpha_1\}$ χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό που αντικαθιστά την $f(z)$, ορισμένη για $z \in S$, με την $F(Z) = f(\alpha_0 + Zw)$, ορισμένη για $Z \in S_1$. Αν $|f(\alpha_j+i\tau)| \leqslant e^{u_j|\tau|+v_j}$, $j=0,1$, τότε $|F(j+i\tau)| \leqslant e^{wu_j|\tau|+v_j}$, άρα

$$|f(\alpha_\theta+i\tau_0)| = |F(\theta+i\tau_0/w)| \leqslant E_{w,\theta}(u_0,u_1)e^{u_\theta|\tau|+v_\theta}.$$

□

Παρατήρηση 2.7.4. Συχνά χρειάζεται να ασχοληθούμε με την περίπτωση που τα φράγματα στις ευθείες που ορίζουν τη λωρίδα $S_w = \{z \in \mathbb{C} : \alpha_0 < \mathrm{Re}(z) < \alpha_1\}$, $w = \alpha_1 - \alpha_0$, έχουν τη μορφή

$$|f(\alpha_j+i\tau)| \leqslant (1+\tau^2)^c e^{u_j|\tau|+v_j}, \qquad u_j \geqslant 0,\ j=0,1,$$

για κάποιον $c > 0$.

Με ένα πιο προσεκτικό επιχείρημα, παρόμοιο με αυτό της απόδειξης του Λήμματος 2.7.2, μπορεί κανείς να αποδείξει το φράγμα

$$|f(\alpha_\theta+i\tau)| \leqslant (1+w^2/4)^c E_{w,\theta}(u_0,u_1)(1+\tau^2)^c e^{u_\theta|\tau+v_\theta}. \tag{2.7.1}$$

Υπενθυμίζουμε τώρα την κλασική μέθοδο μιγαδικής παρεμβολής για να φράξουμε τη νόρμα στον $L^p(X,\Sigma,\mu)$, όπου $1 < p < \infty$, ενός γραμμικού τελεστή T_α, ο οποίος ανήκει σε μια ολόμορφη οικογένεια τελεστών (T_z), με το z σε μια κατακόρυφη λωρίδα που περιέχει τον α.

Θεωρούμε έναν γραμμικό χώρο $\mathcal{E}$ ο οποίος είναι κοινός υπόχωρος όλων των $L^r(X,\Sigma,\mu)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, και ο οποίος είναι πυκνός στον $L^r(X,\Sigma,\mu)$ όταν $1 \leqslant r < \infty$. Ένας τέτοιος $\mathcal{E}$ μπορεί να είναι ο χώρος όλων των απλών Σ-μετρήσιμων και μ-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, ή για τους $L^r(\mathbb{R}^n)$ μπορεί να είναι ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ή ο χώρος $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα. Θεωρούμε μια κλειστή λωρίδα $\{z : \alpha_0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \alpha_1\}$ στο $\mathbb{C}$, με $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$. Υποθέτουμε ότι κάθε T_z, για z σε αυτήν τη κλειστή λωρίδα, είναι γραμμικός τελεστής ορισμένος στον $\mathcal{E}$ με τιμές στον $L^1(X,\Sigma,\mu)+L^\infty(X,\Sigma,\mu)$. Λέγοντας ότι η οικογένεια (T_z) είναι ολόμορφη εννοούμε ότι αν $f,g\in\mathcal{E}$, τότε η συνάρτηση

$$z\mapsto \langle T_zf,g\rangle=\int_X (T_zf)\cdot g\,d\mu$$

είναι ολόμορφη στην ανοικτή λωρίδα $\{z:\alpha_0<\mathrm{Re}(z)<\alpha_1\}$, υποθέτουμε όμως επίσης ότι επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στην κλειστή λωρίδα.

Θεωρούμε $1\leqslant p_0<p_1\leqslant\infty$ και p ανάμεσα στους p_1 και p_2, οπότε $1<p<\infty$. Υποθέτουμε ότι αν $\mathrm{Re}(z)=\alpha_j$, $j=0,1$, οι T_z είναι ομοιόμορφα φραγμένοι, θεωρούμενοι ως τελεστές από τον $\mathcal{E}$ εφοδιασμένο με την L^{p_j}-νορμα στον $L^{p_j}(X,\Sigma,\mu)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο T_α είναι φραγμένος, θεωρούμενος ως τελεστής από τον $\mathcal{E}$ εφοδιασμένο με την L^p-νόρμα στον $L^p(X,\Sigma,\mu)$. Τότε, από την πυκνότητα του $\mathcal{E}$, μπορούμε να επεκτείνουμε φραγμένα τον T_α στον $L^p(X,\Sigma,\mu)$.

Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να φράξουμε το $\langle T_\alpha f,g\rangle$ ομοιόμορφα ως προς f στην τομή του $\mathcal{E}$ με τη μοναδιαία μπάλα του $L^p(X,\Sigma,\mu)$ και g στη μοναδιαία μπάλα του δυϊκού χώρου $L^q(X,\Sigma,\mu)$, όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\theta\in(0,1)$ έχουμε ταυτόχρονα

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}\quad\text{και}\quad \alpha=(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1.$$

Συμβολίζουμε με q_0 το συζυγή εκθέτη του p_0 και με q_1 το συζυγή εκθέτη του p_1. Παρατηρήστε ότι ισχύει και η $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$. Γράφουμε $f(x)=u(x)|f(x)|$ και $g(x)=v(x)|g(x)|$, $x\in X$, όπου $|u(x)|=|v(x)|=1$. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ορίζουμε

$$f_z(x)=u(x)|f(x)|^{p(sz+t)}\quad\text{και}\quad g_z(x)=v(x)|g(x)|^{q(1-sz-t)},\tag{2.7.2}$$

όπου οι s,t είναι πραγματικοί αριθμοί που έχουν επιλεγεί έτσι ώστε $s\alpha_0+t=1/p_0$ και $s\alpha_1+t=1/p_1$, άρα $s\alpha+t=1/p$. Έχουμε $f_\alpha=f$, $g_\alpha=g$, και οι εκθέτες έχουν επιλεγεί έτσι ώστε, αν $\|f\|_p\leqslant 1$ και $\|g\|_q\leqslant 1$, τότε

$$\|f_{\alpha_0+i\tau}\|_{p_0}\leqslant 1,\quad \|f_{\alpha_1+i\tau}\|_{p_1}\leqslant 1,\quad \|g_{\alpha_0+i\tau}\|_{q_0},\quad \|g_{\alpha_1+i\tau}\|_{q_1}\leqslant 1$$

για κάθε $\tau\in\mathbb{R}$. Σημειώνουμε ότι αν οι $|f|$ και $|g|$ φράσσονται από M στο X, τότε

$$|f_z|\leqslant\max\{M^{p/p_0},M^{p/p_1}\},\qquad |g_z|\leqslant\max\{M^{q/q_0},M^{q/q_1}\}\tag{2.7.3}$$

όταν $\alpha_0\leqslant\mathrm{Re}(z)\leqslant\alpha_1$, διότι το $\mathrm{Re}(sz+t)$ βρίσκεται ανάμεσα στους $1/p_0$ και $1/p_1$, και το $\mathrm{Re}(1-sz-t)$ ανάμεσα στους $1/q_0$ και $1/q_1$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το λήμμα των τριών ευθειών (Λήμμα 2.7.1) για να φράξουμε την τιμή $H(\alpha)=\langle T_\alpha f,g\rangle$ της ολόμορφης συνάρτησης H που ορίζεται στην S από την

$$H(z)=\langle T_zf_z,g_z\rangle,\tag{2.7.4}$$

χρησιμοποιώντας τα φράγματα στις ευθείες $\mathrm{Re}(z) = \alpha_0$ και $\mathrm{Re}(z) = \alpha_1$. Όταν $\mathrm{Re}(z) = \alpha_j$ έχουμε

$$|H(z)| = |\langle T_z f_z, g_z\rangle| \leqslant \|T_z\|_{p\to p}\|f_z\|_{p_j}\|g_z\|_{q_j} \leqslant \|T_z\|_{p_j\to p_j},$$

για $j = 0, 1$. Επιπλέον, η ολόμορφη συνάρτηση H πρέπει να είναι φραγμένη στη λωρίδα. Τότε, από το Λήμμα 2.7.2 γνωρίζουμε ότι

$$|H(\alpha)| = |\langle T_\alpha f, g\rangle| \leqslant \left(\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|T_{\alpha_0+i\tau}\|_{p_0\to p_0}\right)^{1-\theta} \left(\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|T_{\alpha_1+i\tau}\|_{p_1\to p_1}\right)^{\theta},$$

και παίρνοντας supremum ως προς f και g, παίρνουμε

$$\|T_\alpha\|_{p\to p} \leqslant \left(\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|T_{\alpha_0+i\tau}\|_{p_0\to p_0}\right)^{1-\theta} \left(\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|T_{\alpha_1+i\tau}\|_{p_1\to p_1}\right)^{\theta}. \tag{2.7.5}$$

Τέλος, μπορούμε να επεκτείνουμε τον T_α από τον πυκνό υπόχωρο $\mathcal{E}$ στον $L^p(X, \Sigma, \mu)$.

Σε αρκετές περιπτώσεις, οι νόρμες των τελεστών $(T_z)_{z\in S}$ δεν είναι *ομοιόμορφα* φραγμένες στις ευθείες του συνόρου της λωρίδας, ικανοποιούν όμως, για κάποιον $\lambda > 0$, εκτιμήσεις της μορφής

$$\|T_{\alpha_0+i\tau}\|_{p_0\to p_0} \leqslant C_0 e^{\lambda|\tau|}, \quad \|T_{\alpha_1+i\tau}\|_{p_1\to p_1} \leqslant C_1 e^{\lambda|\tau|}, \qquad \tau\in\mathbb{R}.$$

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.7.3 μπορούμε να χειριστούμε αυτήν την περίπτωση. Πρέπει απλώς να ελέγξουμε ότι η συνάρτηση $H(z) = H_{f,g}(z)$ της (2.7.4) έχει επιτρεπτή αυξητικότητα στη λωρίδα. Είναι ακόμα πιο βολικό να βρούμε ένα *ad hoc* επιχείρημα που να εξασφαλίζει μια τέτοια αυξητικότητα για όλες τις επιλογές των f και g σε κατάλληλα πυκνά υποσύνολα, αυξητικότητα που να εξαρτάται από τις f και g, παρά να προσπαθήσουμε να φράξουμε τη νόρμα $\|T_z\|_{p_z\to p_z}$ για $z\in S$, με το p_z να δίνεται από την $w/p_z = (\alpha_1 - \mathrm{Re}(z))/p_0 + (\mathrm{Re}(z) - \alpha_0)/p_1$, όπου $w = \alpha_1 - \alpha_0$ είναι το πλάτος της S. Αν κάθε συνάρτηση $H_{f,g}$ έχει επιτρεπτή αυξητικότητα στην S, παίρνουμε τελικά

$$\|T_\alpha\|_{p\to p} \leqslant C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} e^{\lambda w\sqrt{\theta(1-\theta)}}.$$

Αν υπάρχει κάποιος πρόσθετος πολυωνυμικός παράγοντας στο φράγμα που έχουμε εξασφαλίσει για τις $\|T_{\alpha_j+i\tau}\|_{p_j\to p_j}$, $j = 0, 1$, τότε χρησιμοποιούμε την εκτίμηση της Παρατήρησης 2.7.4.

2.8 Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz

Ορισμός 2.8.1. Έστω (X, Σ, μ) χώρος μέτρου. Ένας τελεστής $f \mapsto Tf$ λέγεται υπογραμμικός αν για κάθε f_1 και f_2 για τις οποίες οι Tf_1 και Tf_2 ορίζονται καλά, οι $T(f_1 + f_2)$

και $T(af_1)$ ορίζονται καλά και ικανοποιούν τις

$$|T(f_1+f_2)(x)| \leqslant |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)| \ \text{σχεδόν παντού.} \tag{2.8.1}$$

και

$$|T(af_1)(x)| \leqslant |a|\,|Tf_1(x)| \ \text{σχεδόν παντού} \tag{2.8.2}$$

Λέμε ότι ένας υπογραμμικός τελεστής είναι (ισχυρού) τύπου (p,p) για κάποιο $1 \leqslant p \leqslant \infty$ αν ορίζεται καλά σαν τελεστής από τον $L^p(\mu)$ στον $L^p(\mu)$ και υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε

$$\|Tf\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \tag{2.8.3}$$

για κάθε $f \in L^p(\mu)$. Όμοια, λέμε ένας υπογραμμικός τελεστής είναι ασθενούς τύπου (p,p) για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$ αν ορίζεται καλά για κάθε $f \in L^p(\mu)$ και υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε

$$\lambda^p |\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leqslant A_p^p \|f\|_p^p \tag{2.8.4}$$

για κάθε $f \in L^p(\mu)$ και για κάθε $\lambda > 0$.

Συνήθως, θα θεωρούμε τελεστές T οι οποίοι ορίζονται φυσιολογικά σε ένα ζεύγος χώρων $L^{p_0}(\mu)$ και $L^{p_1}(\mu)$. Είναι βολικό να θεωρήσουμε τον χώρο $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ όλων των συναρτήσεων f οι οποίες γράφονται στη μορφή $f = f_0 + f_1$ για κάποιες $f_0 \in L^{p_0}(\mu)$ και $f_1 \in L^{p_1}(\mu)$. Ο $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L^{p_0}+L^{p_1}} = \inf\{\|f_0\|_{p_0} + \|f_1\|_{p_1} : f_i \in L^{p_i}, f = f_0 + f_1\}. \tag{2.8.5}$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz. Με $L(\mu)$ συμβολίζουμε τις μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 2.8.2 (Marcinkiewicz). *Έστω $0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty$ και έστω $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L(\mu)$ υπογραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι ασθενούς τύπου (p_0,p_0) με σταθερά A_0 και ισχυρού τύπου (p_1,p_1) με σταθερά A_1. Τότε, για κάθε $p_0 < p < p_1$ ο T είναι ισχυρού τύπου (p,p) με σταθερά*

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\right)^{1/p} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}}$$

αν $p_1 < \infty$, και

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-p_0}\right)^{1/p} A_0^{\frac{p_0}{p}} A_1^{1-\frac{p_0}{p}}$$

αν $p_1 = \infty$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις $p_1 < \infty$ και $p_1 = \infty$.

(α) **Η περίπτωση** $0 < p_0 < p < p_1 < \infty$. Έστω $f \in L^p(\mu)$ και $\delta > 0$ το οποίο θα επιλεγεί αργότερα. Για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε

$$f_0^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| > \delta\lambda \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$f_1^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| \leqslant \delta\lambda \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f_0^\lambda \in L^{p_0}(\mu)$, $f_1^\lambda \in L^{p_1}(\mu)$ και $f = f_1 + f_2$. Για τον πρώτο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι $p_0 - p < 0$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f_0^\lambda\|_{p_0}^{p_0} &= \int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_0-p} d\mu \leqslant (\delta\lambda)^{p_0-p} \int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^p d\mu \\ &\leqslant (\delta\lambda)^{p_0-p} \|f\|_p^p < \infty. \end{aligned} \tag{2.8.6}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, αφού $p_1 - p > 0$, έχουμε

(2.8.7)
$$\begin{aligned} \|f_1^\lambda\|_{p_1}^{p_1} &= \int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_1-p} dx \leqslant (\delta\lambda)^{p_1-p} \{x : |f(x)| \leqslant \delta\lambda\} |f(x)|^p d\mu \\ &\leqslant (\delta\lambda)^{p_1-p} \|f\|_p^p < \infty. \end{aligned}$$

Τέλος, από τον ορισμό των f_0^λ και f_1^λ είναι φανερό ότι $f = f_0^\lambda + f_1^\lambda$.

Στη συνέχεια, για ευκολία στον συμβολισμό θέτουμε $m_g(s) = |\{x : |g(x)| > s\}|$. Από την υπογραμμικότητα του T έχουμε $|Tf| \leqslant |Tf_0^\lambda| + |Tf_1^\lambda|$ σχεδόν παντού, άρα

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\},$$

και αυτό μας δίνει

$$m_{Tf}(\lambda) \leqslant m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) + m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2). \tag{2.8.8}$$

Από τις υποθέσεις μας έχουμε

$$m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_0^{p_0} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_0} \int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_0} dx \tag{2.8.9}$$

και

$$m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_1^{p_1} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_1} \|f_1^\lambda\|_{p_1}^{p_1} = A_1^{p_1} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_1} \int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_1} dx. \tag{2.8.10}$$

Τώρα, γράφουμε

(2.8.11)
$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf}(\lambda)\, d\lambda \\ &\leqslant \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\, d\lambda + \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2)\, d\lambda,\end{aligned}$$

και χρησιμοποιούμε τις (2.8.8) και (2.8.9) για να φράξουμε τα δύο ολοκληρώματα. Έχουμε

(2.8.12)
$$\begin{aligned}\int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\, d\lambda &\leqslant p(2A_0)^{p_0} \int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_0} \int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_0} dx \\ &= p(2A_0)^{p_0} \int |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f(x)|/\delta} \lambda^{p-p_0-1} d\lambda\, dx \\ &= \frac{p}{p-p_0}\, \frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}} \int |f(x)|^p dx \\ &= \frac{p}{p-p_0}\, \frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\, \|f\|_p^p\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2)\, d\lambda &\leqslant p(2A_1)^{p_1} \int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_1} \int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_1} dx \\ &= p(2A_1)^{p_1} \int |f(x)|^{p_1} \int_{|f(x)|/\delta}^\infty \lambda^{p-p_1-1} d\lambda\, dx \\ &= \frac{p}{p_1-p}\, \frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}} \int |f(x)|^p dx \\ &= \frac{p}{p_1-p}\, \frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\, \|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

(2.8.13)
$$\|Tf\|_p \leqslant \left(\frac{p}{p-p_0}\, \frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}} + \frac{p}{p_1-p}\, \frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\right)^{1/p} \|f\|_p$$

για κάθε $\delta > 0$. Επιλέγουμε το δ να ικανοποιεί την

$$\delta^{p_1-p_0} = \frac{(2A_0)^{p_0}}{(2A_1)^{p_1}},$$

και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχουμε το συμπέρασμα.

(β) **Η περίπτωση** $1 \leqslant p_0 < p < p_1 = \infty$. Έστω $f \in L^p(\mu)$. Επιλέγουμε από την αρχή $\delta = \frac{1}{2A_1}$. Για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε τις f_0^λ και f_1^λ όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Παρατηρήστε ότι

(2.8.14)
$$\|Tf_1^\lambda\|_\infty \leqslant A_1 \|f_1^\lambda\|_\infty \leqslant A_1\delta\lambda = \lambda/2.$$

Συνεπώς, από την

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\},$$

παίρνουμε

$$m_{Tf}(\lambda) \leqslant m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) + m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2) = m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2). \tag{2.8.15}$$

Από τις υποθέσεις μας έχουμε

$$m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_0^{p_0}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_0}\int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_0}dx. \tag{2.8.16}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την $2A_1 = 1/\delta$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\leqslant \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda \\ &\leqslant p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_0}\int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_0}dx \\ &= p(2A_0)^{p_0}\int |f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)|/\delta} \lambda^{p-p_0-1}d\lambda\,dx \\ &= \frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\int |f(x)|^p dx \\ &= \frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\,\|f\|_p^p \\ &= \frac{p}{p-p_0}\,(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\,\|f\|_p^p. \end{aligned} \tag{2.8.17}$$

Έπεται ότι

$$\|Tf\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-p_0}\right)^{1/p} A_0^{\frac{p_0}{p}} A_1^{1-\frac{p_0}{p}}\,\|f\|_p.$$

Δηλαδή, ο T είναι (ισχυρού) τύπου (p,p). □

Ειδικότερα, στην περίπτωση $p_0 = 1$ και $p_1 = \infty$ το Θεώρημα 2.8.2 παίρνει την εξής απλούστερη μορφή.

Θεώρημα 2.8.3. *Έστω $T : L^1(\mu) + L^\infty(\mu) \to L(\mu)$ υπογραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$ με σταθερά A και ισχυρού τύπου (∞,∞) με σταθερά B. Τότε, για κάθε $1 < p < \infty$ ο T είναι ισχυρού τύπου (p,p) με σταθερά*

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} A^{\frac{1}{p}}B^{1-\frac{1}{p}}.$$

Κεφάλαιο 3

Φράγματα για τον κλασικό μεγιστικό τελεστή

3.1 Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy και Littlewood

Ορισμός 3.1.1 (μεγιστική συνάρτηση)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε τη μεγιστική συνάρτηση Mf της f ως εξής:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{|y|<r} |f(x-y)|\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1.1}$$

όπου ω_n είναι ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, παίρνουμε το supremum των μέσων τιμών της $|f|$ πάνω στις μπάλες με κέντρο το x.

Οι βασικές ιδιότητες της Mf δίνονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε:*

(i) *Η Mf είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Ισχύει $Mf(x) < \infty$ σχεδόν παντού.*

(iii) *Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}| \leqslant \frac{C_n}{\alpha} \|f\|_1, \tag{3.1.2}$$

όπου $C_n = 3^n$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η Mf είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε την $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ με

$$F(x,r) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{|y|<r} |f(x-y)|\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n, r > 0.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η F είναι συνεχής. Συνεπώς, η

$$Mf(x) = \sup_{r>0} F(x,r) = \sup_{q>0, q\in\mathbb{Q}} F(x,q)$$

είναι μετρήσιμη ως supremum αριθμήσιμου πλήθους μετρήσιμων συναρτήσεων.

Ο ισχυρισμός (ii) είναι συνέπεια του ισχυρισμού (iii). Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\{x : Mf(x) = \infty\} \subseteq \{x : Mf(x) > \alpha\},$$

άρα

$$|\{x : Mf(x) = \infty\}| \leqslant |\{x : Mf(x) > \alpha\}| \leqslant \frac{C_n}{\alpha}\|f\|_1.$$

Αφήνοντας το $\alpha \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $|\{x : Mf(x) = \infty\}| = 0$.

Παρατήρηση 3.1.3. Η βασική ανισότητα (3.1.2) είναι μια *ασθενούς τύπου* ανισότητα, με την έννοια ότι υπολείπεται του ισχυρισμού ότι $\|Mf\|_1 \leqslant C_n\|f\|_1$. Πράγματι, αν είχαμε κάτι τέτοιο τότε, από την ανισότητα Markov, για κάθε $\alpha > 0$ θα γράφαμε

$$|\{x : Mf(x) > \alpha\}| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|Mf\|_1 \leqslant \frac{C_n}{\alpha}\|f\|_1.$$

Στην πραγματικότητα, η Mf δεν είναι (σχεδόν ποτέ) ολοκληρώσιμη. Αυτό ελέγχεται εύκολα, αφού αν η f δεν είναι σχεδόν παντού 0, μπορούμε να βρούμε $C > 0$ ώστε

$$\int_{|z|<C} |f(z)|\,dz = I > 0.$$

Συνεπώς για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $|x-y| < C$ θα ισχύει $|y| < |x| + C$ και άρα

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geqslant \frac{1}{\omega_n(|x|+C)^n}\int_{|y|<|x|+C} |f(x-y)|\,dy \\ &\geqslant \frac{1}{\omega_n(|x|+C)^n}\int_{|x-y|<C} |f(x-y)|\,dy \\ &= \frac{1}{\omega_n(|x|+C)^n}\int_{|z|<C} |f(z)|\,dz = \frac{I}{\omega_n(|x|+C)^n}, \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι η Mf δεν είναι ολοκληρώσιμη. Έτσι, η (3.1.2) είναι η καλύτερη πληροφορία που θα μπορούσαμε να πάρουμε για την κατανομή της Mf συναρτήσει της $\|f\|_1$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού (iii) θα χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα κάλυψης του Vitali.

Λήμμα 3.1.4. *Έστω $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια από ανοικτές μπάλες στον $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant N$ ώστε οι μπάλες $D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}$ να είναι ξένες ανά δύο και να ισχύει*

$$\left|\bigcup_{\ell=1}^{N} D_\ell\right| \leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} |D_{i_j}|. \tag{3.1.3}$$

Απόδειξη. Η επιλογή των D_{i_j} γίνεται με τον πιο φυσιολογικό τρόπο. Στο πρώτο βήμα, επιλέγουμε μία από τις μπάλες, την D_{i_1}, έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Κατόπιν, την αφαιρούμε από την $\mathcal{D}$ μαζί με όλες τις μπάλες της $\mathcal{D}$ που την τέμνουν. Οι υπόλοιπες μπάλες σχηματίζουν μια υποοικογένεια $\mathcal{D}'$ της $\mathcal{D}$ στην οποία επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Επιλέγουμε μία από τις μπάλες της $\mathcal{D}'$, την D_{i_2}, έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Κατόπιν, την αφαιρούμε από την $\mathcal{D}'$ μαζί με όλες τις μπάλες της $\mathcal{D}'$ που την τέμνουν. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μετά από N το πολύ βήματα, έχουμε επιλέξει κάποιες (ξένες) μπάλες $D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}$ και η διαδικασία τερματίζεται.

Για την απόδειξη της (3.1.3) θα χρησιμοποιήσουμε την εξής παρατήρηση: αν D και D' είναι δύο ανοικτές μπάλες με $D \cap D' \neq \emptyset$ και αν η ακτίνα $r(D)$ της D είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ακτίνα $r(D')$ της D', τότε η D' περιέχεται στην μπάλα $\tilde{D}$ που έχει το ίδιο κέντρο με την D και ακτίνα $r(\tilde{D}) = 3r(D)$. Η απόδειξη είναι απλή συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας.

Συμβολίζοντας με $\tilde{D}_{i_j}$ τη μπάλα που έχει το ίδιο κέντρο με την D_{i_j} και ακτίνα $r(\tilde{D}_{i_j}) = 3r(D_{i_j})$, και παρατηρώντας ότι κάθε $D_\ell \in \mathcal{D}$ τέμνει κάποια D_{i_j} για την οποία $r(D_\ell) \leqslant r(D_{i_j})$, συμπεραίνουμε ότι

$$\bigcup_{\ell=1}^{N} D_\ell \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \tilde{D}_{i_j}.$$

Άρα,

$$\left|\bigcup_{\ell=1}^{N} D_\ell\right| \leqslant \left|\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{D}_{i_j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\tilde{D}_{i_j}| = 3^n \sum_{j=1}^{k} |D_{i_j}|.$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει την (3.1.3). □

Απόδειξη του ισχυρισμού (iii). Έστω $\alpha > 0$. Ορίζουμε $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$ και για κάθε $x \in E_\alpha$ επιλέγουμε ανοικτή μπάλα D_x με κέντρο το x και

$$\frac{1}{|D_x|} \int_{D_x} |f(y)|\, dy > \alpha.$$

Ισοδύναμα,

$$|D_x| < \frac{1}{\alpha} \int_{D_x} |f(y)|\, dy. \tag{3.1.4}$$

Θεωρούμε τυχόν συμπαγές $K \subseteq E_\alpha$. Έχουμε $K \subseteq \bigcup_{x\in K} D_x$, άρα υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{D} = \{D_{x_1}, \dots, D_{x_N}\}$ ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{N} D_{x_\ell}.$$

Από το λήμμα του Vitali μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant N$ ώστε οι μπάλες $D_{x_{i_j}}$, $j = 1, \dots, k$, να είναι ξένες, και

$$\left|\bigcup_{\ell=1}^{N} D_{x_\ell}\right| \leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} |D_{x_{i_j}}|. \tag{3.1.5}$$

Αφού οι $D_{x_{i_1}}, \dots, D_{x_{i_k}}$ είναι ξένες, συνδυάζοντας τις (3.1.4) και (3.1.5) γράφουμε

$$\begin{aligned}
|K| &\leqslant \left|\bigcup_{\ell=1}^{N} D_{x_\ell}\right| \leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} |D_{x_{i_j}}| \\
&\leqslant \frac{3^n}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{D_{x_{i_j}}} |f(y)|\, dy = \frac{3^n}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^{k} D_{x_{i_j}}} |f(y)|\, dy \\
&\leqslant \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy = \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Αφού $|E_\alpha| = \sup\{|K| : K$ συμπαγές υποσύνολο του $E_\alpha\}$, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο μεγιστικός τελεστής $f \mapsto Mf$ απεικονίζει τον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι, για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{|y|<r} |f(x-y)|\, dy \leqslant \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{|y|<r} \|f\|_\infty dy = \|f\|_\infty,$$

συνεπώς

$$|Mf(x)| = \sup_{r>0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{|y|<r} |f(x-y)|\, dy \leqslant \|f\|_\infty. \tag{3.1.6}$$

Έπεται ότι

$$\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty. \tag{3.1.7}$$

Από το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz (Θεώρημα 2.8.3), αν $T : L^1(\mu) + L^\infty(\mu) \to L(\mu)$ είναι ένας υπογραμμικός τελεστής ο οποίος είναι ασθενούς τύπου 1 με σταθερά A και ισχυρού τύπου ∞ με σταθερά B, τότε για κάθε $1 < p < \infty$ ο T είναι ισχυρού τύπου (p,p) με σταθερά

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} A^{\frac{1}{p}} B^{1-\frac{1}{p}}.$$

Το θεώρημα (σε αυτή τη μορφή) εφαρμόζεται για τον μεγιστικό τελεστή $f \mapsto Mf$. Από το Θεώρημα 3.1.2 ο M είναι ασθενούς τύπου 1 με σταθερά 3^n και από την (3.1.7) είναι ισχυρού τύπου ∞ με σταθερά 1. Από τον ορισμό του M βλέπουμε εύκολα ότι είναι υπογραμμικός τελεστής. Συνεπώς, παίρνουμε αμέσως το εξής.

Θεώρημα 3.1.5. *Έστω $1 < p < \infty$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ έχουμε $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|Mf\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} C_n^{\frac{1}{p}}\|f\|_p,$$

όπου $C_n = 3^n$.

Παρατηρήστε ότι

$$2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} C_n^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{p-1}\right)$$

καθώς το $p \to 1+$.

3.2 Φράγματα ανεξάρτητα από την διάσταση

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ο Stein [16] απέδειξε ότι ο μεγιστικός τελεστής $f \mapsto Mf$ είναι φραγμένος στον L^p για κάθε $p > 1$, και ότι η νόρμα του φράσσεται από μια σταθερά $A_p > 0$ ανεξάρτητη από την διάσταση n.

Θεώρημα 3.2.1. *Για κάθε $1 < p \leqslant \infty$ υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|Mf\|_p \leqslant A_p\|f\|_p. \tag{3.2.1}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1 βασίζεται σε μια σειρά από ενδιάμεσα αποτελέσματα που παρουσιάζουν ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_k$ τον σφαιρικό μεγιστικό τελεστή στον $\mathbb{R}^k$. Δηλαδή για κάθε $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{M}_k(f)(x) = \sup_{\rho>0}\int_{S^{k-1}} |f(x-\rho\theta)|\, d\sigma(\theta), \tag{3.2.2}$$

όπου σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{k-1}. Ο Stein [15] απέδειξε το εξής φράγμα για τον τελεστή $\mathcal{M}_k$:

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω $k \geqslant 3$ και $k > p/(p-1)$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^k)$ έχουμε*

$$\|\mathcal{M}_k(f)\|_p \leqslant A_{k,p}\|f\|_p, \tag{3.2.3}$$

όπου $A_{k,p}$ είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα k και p.

Η απόδειξη χρησιμοποιεί αρκετά εργαλεία από την Αρμονική Ανάλυση και θα την περιγράψουμε στην επόμενη παράγραφο.

Στη συνέχεια, για κάθε $m \geqslant 0$ ορίζουμε τον σταθμισμένο μεγιστικό τελεστή $M_{k,m}$ στον $\mathbb{R}^k$, θέτοντας

$$M_{k,m}(f)(x) = \sup_{r>0} \left\{ \frac{\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y)|\,|y|^m\,dy}{\int_{|y|\leqslant r} |y|^m\,dy} \right\}. \tag{3.2.4}$$

Πρόταση 3.2.3. *Έστω $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \geqslant 1$ και $m \geqslant 0$ ισχύει*

$$M_{k,m}(f)(x) \leqslant \mathcal{M}_k(f)(x). \tag{3.2.5}$$

Απόδειξη. Έστω $r > 0$. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\int_{|y|\leqslant r} |y|^m\,dy = k\omega_k \int_{S^{k-1}} \int_0^r \rho^{m+k-1} d\rho\, d\sigma(\theta) = k\omega_k \frac{r^{m+k}}{m+k} \tag{3.2.6}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{|y|\leqslant r} |f(x-y)|\,|y|^m\,dy &= k\omega_k \int_{S^{k-1}} \int_0^r |f(x-\rho\theta)|\rho^{m+k-1} d\rho\, d\sigma(\theta) \\ &= k\omega_k \int_0^r \rho^{m+k-1} \left(\int_{S^{k-1}} |f(x-\rho\theta)|\, d\sigma(\theta) \right) d\rho \\ &\leqslant k\omega_k \int_0^r \rho^{m+k-1} \mathcal{M}_k(f)(x)\, d\rho \\ &= k\omega_k \frac{r^{m+k}}{m+k}\, \mathcal{M}_k(f)(x). \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Συνεπώς,

$$\frac{\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y)|\,|y|^m\,dy}{\int_{|y|\leqslant r} |y|^m\,dy} \leqslant \mathcal{M}_k(f)(x). \tag{3.2.8}$$

Παίρνοντας supremum ως προς r έχουμε το ζητούμενο. □

Συνδυάζοντας την Πρόταση 3.2.3 με το Θεώρημα 3.2.2 έχουμε το εξής.

Πρόταση 3.2.4. *Αν $k \geqslant 3$ και $k > p/(p-1)$ τότε*

$$\|M_{k,m}(f)\|_p \leqslant A_{k,p} \|f\|_p \tag{3.2.9}$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^k)$, όπου η σταθερά $A_{k,p}$ δεν εξαρτάται από το m.

Θεωρούμε τώρα τον $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, και τον γράφουμε σαν γινόμενο $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Γράφουμε κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ στη μορφή $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, όπου $x_1, y_1 \in \mathbb{R}^k$ και $x_2, y_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$. Για κάθε $\tau \in O(n)$ (ορθογώνιο μετασχηματισμό του $\mathbb{R}^n$) ορίζουμε τον τελεστή M_k^τ, ο οποίος δρά σε συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$(M_k^\tau f)(x) = \sup_{r>0} \frac{\int_{|y_1|\leqslant r} |f(x - \tau(y_1, 0))|\, |y_1|^m \, dy_1}{\int_{|y_1|\leqslant r} |y_1|^m \, dy_1}, \tag{3.2.10}$$

όπου $m = n - k$.

Πρόταση 3.2.5. *Αν $k \geqslant 3$ και $k > p/(p-1)$ τότε*

$$\|M_k^\tau(f)\|_p \leqslant A_{k,p}\|f\|_p \tag{3.2.11}$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, όπου η σταθερά $A_{k,p}$ δεν εξαρτάται από το m.

Απόδειξη. Αν γράψουμε $f(x - \tau(y_1, 0)) = f(\tau(\tau^{-1}(x) - (y_1, 0)))$ παρατηρούμε ότι

$$(M_k^\tau f)(x) = (M_k^{\mathrm{Id}} g)(\tau^{-1}(x)),$$

όπου $g(x) = f(\tau(x))$ και άρα, από το αναλλοίωτο του ολοκληρώματος Lebesgue ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, αρκεί να δείξουμε την πρόταση στην περίπτωση που ο τ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Σταθεροποιούμε τώρα ένα $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$ και ορίζουμε $g_{x_2} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ με $g_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$. Εν γένει η g_{x_2} ενδέχεται για κάποια x_2 να μην είναι στον $L^p(\mathbb{R}^k)$, αλλά αφού $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, θα ισχύει $\int(\int |g_{x_2}(x_1)|^p \, dx_1) dx_2 = \int\int |f(x_1, x_2)|^p \, dx_1 dx_2 = \|f\|_p^p < \infty$. Οπότε $\int |g_{x_2}(x_1)|^p \, dx_1 < \infty$ σχεδόν για κάθε x_2. Συνεπώς, εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.2.4 για αυτές τις g_{x_2} και υψώνοντας στην p έχουμε

$$\int \left(\sup_{r>0} \left\{ \frac{\int_{|y_1|\leqslant r} |f((x_1, x_2) - (y_1, 0))|\, |y_1|^m \, dy_1}{\int_{|y_1|\leqslant r} |y_1|^m \, dy_1} \right\} \right)^p dx_1 \leqslant A_{k,p}^p \|g_{x_2}\|_p^p.$$

Τέλος, ολοκληρώνουμε ως προς x_2 και υψώνοντας στην $1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.2.6. *Έστω ν το μέτρο Haar στην $O(n)$. Τότε,*

$$\sup_{r>0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{|y|\leqslant r} |f(x-y)| \, dy \leqslant \int_{O(n)} M_k^\tau(f)(x) \, d\nu(\tau). \tag{3.2.12}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\frac{\int_{|y|\leqslant r} f(y) \, dy}{\int_{|y|\leqslant r} dy} = \frac{\int_{O(n)} \int_{|y_1|\leqslant r} f(\tau(y_1, 0)) |y_1|^{n-k} dy_1 \, d\nu(\tau)}{\int_{|y_1|\leqslant r} |y_1|^{n-k} dy_1}, \tag{3.2.13}$$

η οποία ισχύει για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $r > 0$. Για την απόδειξη της (3.2.13) αρκεί να θεωρήσουμε συναρτήσεις f της μορφής $f(y) = f_0(|y|)f_1(\theta_y)$, όπου $y = |y|\theta_y$ (οι γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των συναρτήσεων είναι πυκνοί).

Για να γίνει κατανοητός ο ισχυρισμός αυτός, γνωρίζουμε ότι αν $f : D \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, όπου $D = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leqslant r\}$, τότε η f προσεγγίζεται ως προς την 1-νόρμα από μια συνεχή $g : D \to \mathbb{R}$. Επιπλέον, από το θεώρημα Stone-Weierstrass (η κλειστή μπάλα D είναι συμπαγής) η g προσεγγίζεται ως προς την ∞-νόρμα από ενα πολυώνυμο $p : D \to \mathbb{R}$. Όμως το p γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής $h(y) = y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n}$, όπου $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και $k_i \in \mathbb{N}$ για $i = 1, \dots, n$. Τέλος, παρατηρούμε ότι η h γράφεται στη μορφή $h(y) = h_0(|y|)h_1(\theta_y)$, για

$$h_0(|y|) = |y|^{\sum_{i=1}^n k_i} \quad \text{και} \quad h_1(\theta_y) = \left(\frac{y_1}{|y|}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{y_n}{|y|}\right)^{k_n},$$

όπου $\theta_y = \frac{y}{|y|} = (\frac{y_1}{|y|}, \dots, \frac{y_n}{|y|}) \in S^{n-1}$. Συνεπώς, οι γραμμικοί συδυασμοί αυτών των συναρτήσεων προσεγγίζουν κάθε μετρήσιμη συνάρτηση στην κλειστή μπάλα D ως προς την 1-νόρμα.

Για κάθε συνάρτηση f της παραπάνω μορφής, χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι το αριστερό μέλος της (3.2.13) είναι ίσο με

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_0^r f_0(t) t^{n-1} dt \cdot \left(n\omega_n \int_{S^{n-1}} f_1(\theta) d\sigma(\theta) \right). \tag{3.2.14}$$

Για να υπολογίσουμε το δεξιό μέλος γράφουμε $y_1 = |y_1|\theta_{y_1}$, όπου $\theta_{y_1} \in S^{k-1}$. Τότε, $\tau(y_1, 0) = |y_1|\tau(\theta_{y_1}, 0)$ και αφού ο τ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός έχουμε $\tau(\theta_{y_1}, 0) \in S^{n-1}$. Άρα,

$$f(\tau(y_1, 0)) = f_0(|y_1|) f_1(\tau(\theta_{y_1}, 0)),$$

και το πηλίκο στο δεξιό μέλος της (3.2.13) ισούται με

$$\frac{n}{k\omega_k r^n} \int_0^r f_0(t) t^{n-1} dt \cdot \left(k\omega_k \int_{O(n)} \int_{S^{k-1}} f_1(\tau(\theta_{y_1}, 0)) d\sigma(\theta_{y_1}) d\nu(\tau) \right). \tag{3.2.15}$$

Άρα, συγκρίνοντας τις (3.2.14)και (3.2.15) μένει να ελέγξουμε την

$$\int_{S^{n-1}} f_1(\theta) d\sigma(\theta) = \int_{O(n)} \int_{S^{k-1}} f_1(\tau(\theta_{y_1}, 0)) d\sigma(\theta_{y_1}) d\nu(\tau). \tag{3.2.16}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι το μέτρο $\sigma \times \nu$ στην $S^{k-1} \times O(n)$ επάγει ένα αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετσχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}, το οποίο υποχρεωτικά συμπίπτει με το σ από τη μοναδικότητα του μέτρου Haar. Έχοντας αποδείξει την (3.2.13) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{|y|\leqslant r}|f(x-y)|\,dy &= \frac{\int_{O(n)}\int_{|y_1|\leqslant r}|f(x-\tau(y_1,0))|\,|y|^{n-k}dy_1\,d\nu(\tau)}{\int_{|y_1|\leqslant r}|y_1|^{n-k}dy_1} \\ &\leqslant \int_{O(n)} M_k^\tau(f)(x)\,d\nu(\tau)\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

με $m=n-k$, και παίρνοντας supremum ως προς r έχουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Έστω $1<p\leqslant\infty$. Αν $n\leqslant p/(p-1)$ ή $n\leqslant 2$ τότε χρησιμοποιούμε την κλασική εκτίμηση του Θεωρήματος 3.1.5 για να πάρουμε την (3.2.1) με μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p. Αν $n>p/(p-1)$ και $n\geqslant 3$ τότε γράφουμε τον n σαν άθροισμα $n=k+m$, όπου k είναι ο μικρότερος φυσικός που είναι μεγαλύτερος από τον $p/(p-1)$ και τον 2. Η Πρόταση 3.2.6 μας λέει ότι

$$Mf(x)\leqslant\int_{O(n)} M_k^\tau(f)(x)\,d\nu(\tau)\quad\text{για κάθε}\quad x\in\mathbb{R}^n \tag{3.2.18}$$

και από την Πρόταση 3.2.5 έχουμε ότι για κάθε $\tau\in O(n)$

$$|M_k^\tau(f)\|_p\leqslant A_{k,p}\|f\|_p,$$

όπου τώρα η σταθερά $A_{k,p}=A_p$ εξαρτάται μόνο απο το p καθώς το k, πλέον, ορίζεται μονοσήμαντα από το p. Συνεπώς, από την (3.2.18) έχουμε

$$\|Mf\|_p\leqslant\int_{O(n)}\|M_k^\tau(f)\|_p\,d\nu(\tau)\leqslant\int_{O(n)}A_p\|f\|_p\,d\nu(\tau)=A_p\|f\|_p$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

3.3 Η ανισότητα του Stein για τον σφαιρικό μεγιστικό τελεστή

Αποδεικνύουμε εδώ το Θεώρημα 3.2.2: Αν $k\geqslant 3$ και $p>k/(k-1)$ τότε για κάθε $f\in L^p(\mathbb{R}^k)$ έχουμε

$$\|\mathcal{M}_k(f)\|_p\leqslant A_{k,p}\|f\|_p, \tag{3.3.1}$$

όπου $A_{k,p}$ είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα k και p. Σταθεροποιούμε το k και για συντομία θα γράφουμε

$$\mathcal{M}f:=\mathcal{M}_k(f).$$

Μπορούμε να γράψουμε την $\mathcal{M}f$ στη μορφή

$$(\mathcal{M}f)(x) = \sup_{r>0} |[\widehat{\sigma}(r\cdot)\widehat{f}(\cdot)]^{\vee}(x)| = \sup_{r>0} |(\sigma_{(r)} * f)(x)|, \tag{3.3.2}$$

όπου $h^{\vee}(x) = \widehat{h}(-x)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της h και $\sigma_{(r)}$ είναι το μέτρο πιθανότητας που ορίζεται από την

$$\int_{S^{k-1}} f(\theta) d\sigma_{(r)}(\theta) = \int_{S^{k-1}} f(r\theta) d\sigma(x). \tag{3.3.3}$$

Μπορούμε να δούμε ότι

$$\widehat{\sigma}(\xi) = \int_{S^{k-1}} e^{2\pi i|\xi|x_1} d\sigma(x) = (2\pi|\xi|)^{-\frac{k-2}{2}} J_{(k-2)/2}(2\pi|\xi|), \tag{3.3.4}$$

όπου J_ν είναι η συνάρτηση Bessel τάξης ν. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι οι συναρτήσεις

$$t \mapsto t^{-\frac{k-2}{2}} J_{(k-2)/2}(t)$$

και (γραφοντας $x = (x_1, y)$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini)

$$\begin{aligned} t \mapsto F(t) &= \int_{S^{k-1}} e^{itx_1} d\sigma(x) \\ &= \frac{1}{\kappa_{k-1}} \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-s^2})^{k-2} \kappa_{k-2} \left(\int_{(\sqrt{1-s^2})S^{k-2}} e^{ist} d\sigma(y) \right) ds \\ &= \frac{\kappa_{k-2}}{\kappa_{k-1}} \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-s^2})^{k-2} \frac{e^{ist}}{\sqrt{1-s^2}} ds \\ &= \frac{\kappa_{k-2}}{\kappa_{k-1}} \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{k-3}{2}} (\cos(st) + i\sin(st)) ds \\ &= \frac{2\kappa_{k-2}}{\kappa_{k-1}} \int_{0}^{1} (1-s^2)^{\frac{k-3}{2}} \cos(st)\, ds \end{aligned}$$

είναι ακέραιες συναρτήσεις και ικανοποιούν τις $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$ και

$$t^2(g''(t) + g(t)) = -(k-1)tg'(t)$$

(με κ_s συμβολίζουμε την επιφάνεια $s\omega_s$ της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^s$).

Θεωρούμε μια λεία σφαιρικά συμμετρική συνάρτηση φ_0 στον $\mathbb{R}^k$ η οποία παίρνει την τιμή $\varphi_0(\xi) = 1$ αν $|\xi| \leqslant 1$ και $\varphi_0(\xi) = 0$ αν $|\xi| \geqslant 2$. Στη συνέχεια, θέτουμε $\psi(\xi) = \varphi_0(\xi) - \varphi_0(2\xi)$ (οπότε, ο φορέας της ψ περιέχεται στον δακτύλιο $\{1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$) και για κάθε $\ell \geqslant 1$ ορίζουμε

$$\varphi_\ell(\xi) = \varphi_0(2^{-\ell}\xi) - \varphi_0(2^{1-\ell}\xi) = \psi_{[2^{-\ell}]}(\xi).$$

Τέλος, για κάθε $\ell \geqslant 0$ θεωρούμε την $m_\ell = \varphi_\ell \widehat{\sigma}$. Παρατηρούμε ότι $\sum_{\ell=0}^{\infty} \varphi_\ell = 1$, άρα $\widehat{\sigma} = \sum_{\ell=0}^{\infty} m_\ell$.

Για κάθε $\ell \geqslant 0$ ορίζουμε

$$(\mathcal{M}_{m_\ell} f)(x) = \sup_{r>0} |[m_\ell(r\cdot)\widehat{f}(\cdot)]^\vee(x)| = \sup_{r>0} |[(\varphi_\ell^\vee)_{(r)} * \sigma_{(r)} * f](x)|.$$

Ειδικότερα, έχουμε

$$\mathcal{M}_{m_0} f = \sup_{r>0} |(\varphi_0^\vee)_{(r)} * \sigma_{(r)} * f|$$

και

$$\mathcal{M}_{m_\ell} f = \sup_{r>0} |(\psi^\vee)_{(2^{-\ell}r)} * \sigma_{(r)} * f|, \qquad \ell \geqslant 1.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ ισχύει η ανισότητα

$$(\mathcal{M} f)(x) \leqslant \sum_{\ell=0}^{\infty} (\mathcal{M}_{m_\ell} f)(x). \tag{3.3.5}$$

Θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα για πολλαπλασιαστές αυτής της μορφής και για τις τετραγωνικές συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε αυτούς. Έστω $m(\xi)$ ένας πολλαπλασιαστής που είναι συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^k$, μηδενίζεται στο 0 και ικανοποιεί την $|m(\xi)| = O(|\xi|)$ σε μια περιοχή του 0. Για κάθε f στην κλάση Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ ορίζουμε

$$\begin{aligned}(g_m f)(x) &= \left(\int_0^\infty |(T_{m_{[u]}} f)(x)|^2 \, \frac{du}{u} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^\infty \left| \int_{\mathbb{R}^k} m(u\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi \right|^2 \frac{du}{u} \right)^{1/2},\end{aligned}$$

όπου T_m είναι ο τελεστής που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστή m, ο οποίος ορίστηκε στην (2.5.8). Στην περίπτωση που $m(\xi) = 2\pi|\xi| e^{-2\pi|\xi|}$ παίρνουμε την συνάρτηση Littlewood-Paley $g_1(f)$.

Λήμμα 3.3.1. *Αν ο πολλαπλασιαστής $m(\xi)$ είναι φραγμένος και ο φορέας του περιέχεται σε έναν δακτύλιο της μορφής $\{a \leqslant |\xi| \leqslant \rho a\}$, όπου $a > 0$ και $\rho > 1$, τότε για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ έχουμε*

$$\|g_m f\|_2 \leqslant \sqrt{\ln \rho}\, \|m\|_\infty \|f\|_2.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά το θεώρημα Fubini, την ταυτότητα του Parseval, το θεώρημα Fubini, και θέτοντας $v = u|\xi|$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k} |(g_m f)(x)|^2 dx &= \int_0^\infty \|T_{m_{[u]}} f\|_2^2 \, \frac{du}{u} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^k} |m(u\xi)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, \frac{du}{u} \, d\xi \\ &\leqslant \|m\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_a^{\rho a} \frac{dv}{v} \right) |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \|m\|_\infty^2 (\ln \rho) \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

Για κάθε $t \geqslant 0$ και για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ θέτουμε

$$(g_{m,t}f)(x) = (T_{m_{[t]}}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^k} m(t\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi.$$

Λήμμα 3.3.2. *Έστω m φραγμένη C^1-συνάρτηση στον $\mathbb{R}^k$ η οποία μηδενίζεται έξω από ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Τότε, για κάθε $t > 0$ και για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$,*

$$|(g_{m,t}f)(x)|^2 \leqslant 2|(g_m f)(x)|\,|(g_{m^*}f)(x)|,$$

όπου

$$m^*(\xi) = \langle \xi, \nabla m(\xi)\rangle, \qquad \xi \in \mathbb{R}^k.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$s\frac{d}{ds}(g_{m,s}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \langle s\xi, \nabla m(s\xi)\rangle \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \int_{\mathbb{R}^k} m^*(s\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi,$$

δηλαδή

$$s\frac{d}{ds}(g_{m,s}f)(x) = (g_{m^*,s}f)(x).$$

Αφού η m μηδενίζεται σε μια περιοχή του 0, έχουμε $(g_{m,0}f)(x) = 0$, άρα

$$\begin{aligned}|(g_{m,t}f)(x)|^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds}|(g_{m,s}f)(x)|^2 ds = 2\mathrm{Re}\int_0^t \overline{(g_{m,s}f)(x)}s\,\frac{d}{ds}(g_{m,s}f)(x)\,\frac{ds}{s} \\ &= 2\mathrm{Re}\int_0^t \overline{(g_{m,s}f)(x)}(g_{m^*,s}f)(x)\,\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz συμπεραίνουμε ότι

$$|(g_{m,t}f)(x)|^2 \leqslant 2\left(\int_0^\infty |(g_{m,s}f)(x)|^2\,\frac{ds}{s}\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty |(g_{m^*,s}f)(x)|^2\,\frac{ds}{s}\right)^{1/2},$$

και έπεται το λήμμα. □

Έστω $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ σφαιρικά συμμετρική συνάρτηση. Θεωρούμε τον μεγιστικό τελεστή M_ω που ορίζεται από την

$$(M_\omega f)(x) = \sup_{r>0}|[\omega(r\cdot)\widehat{f}(\cdot)]^\vee(x)| = \sup_{r>0}|[(\omega^\vee)_{(r)} * f](x)|,$$

αρχικά για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$.

Πρόταση 3.3.3. *Για κάθε $1 < p \leqslant \infty$ ο μεγιστικός τελεστής M_ω επεκτείνεται στον $L^p(\mathbb{R}^k)$ και είναι φραγμένος τελεστής.*

Απόδειξη. Η $\omega^\vee$ είναι ακτινική συνάρτηση στην κλάση του Schwartz, άρα μπορούμε να βρούμε μια ολοκληρώσιμη ακτινική, φθίνουσα ακτινικά, συνάρτηση Ω τέτοια ώστε $|\omega^\vee| \leqslant \Omega$. Έπεται ότι

$$\sup_{r>0} |[(\omega^\vee)_{(r)} * f](x)| \leqslant \sup_{r>0} (\Omega_{(r)} * |f|)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$, και όπως θα δούμε παρακάτω έχουμε

$$\sup_{r>0} (\Omega_{(r)} * |f|)(x) \leqslant \|\Omega\|_1 (Mf)(x) \tag{3.3.6}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$. Από το κλασικό θεώρημα για τον μεγιστικό τελεστή M έχουμε το συμπέρασμα.

Για να αποδείξουμε την (3.3.6) αρκεί να δείξουμε ότι

$$|(\Omega * f)(x)| \leqslant \|\Omega\|_1 (Mf)(x) \tag{3.3.7}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε για απλότητα ότι $\Omega \leqslant 1$ και για κάθε ακέραιο $s \geqslant 1$ θεωρούμε το σύνολο

$$A_s = \{x \in \mathbb{R}^k : \Omega(x) > 2^{-s}\}.$$

Το A_s είναι μια Ευκλείδεια μπάλα, και αν ορίσουμε $g = \sum_{s=1}^\infty 2^{-s} \mathbf{1}_{A_s}$ μπορούμε να ελέγξουμε ότι $g/2 \leqslant \Omega \leqslant g$. Ξαναγράφουμε την g στη μορφή

$$g = \sum_{s=1}^\infty a_s \frac{\mathbf{1}_{A_s}}{|A_s|},$$

όπου $a_s > 0$ για κάθε $s \geqslant 1$. Αφού η Ω είναι ολοκληρώσιμη, η g είναι επίσης ολοκληρώσιμη και

$$\sum_{s=0}^\infty a_s = \int_{\mathbb{R}^k} g(x)\, dx \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^k} \Omega(x)\, dx = 2\|\Omega\|_1.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ έχουμε

$$\begin{aligned} |(\Omega * f)(x)| &\leqslant (g * |f|)(x) \leqslant \sum_{s=1}^\infty \frac{a_s}{|A_s|} \int_{x+A_s} |f(y)|\, dy \\ &\leqslant \left(\sum_{s=0}^\infty a_s \right) (Mf)(x) \leqslant 2\|\Omega\|_1 (Mf)(x). \end{aligned}$$

Μπορούμε να πάρουμε την ίδια ανισότητα με σταθερά 1 αν εκλεπτύνουμε την διαμέριση, αντικαθιστώντας τις τιμές 2^{-s} με $(1+\epsilon)^{-s}$, όπου $\epsilon > 0$ και $\epsilon \to 0^+$. $\square$

Στον ακτινικό πολλαπλασιαστή ω αντιστοιχίζουμε την τετραγωνική συνάρτηση g_ω που ορίζεται, για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ ως εξής:

$$(g_\omega f)(x) = \left(\int_0^\infty |[\omega(t\cdot)\widehat{f}(\cdot)]^\vee(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty |[(\omega^\vee)_{(t)} * f](x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

Στην περίπτωση που η ω είναι φραγμένη και ο φορέας της περιέχεται σε ένα δακτύλιο της μορφής $\{x \in \mathbb{R}^k : r \leqslant |x| \leqslant \rho r\}$, όπου $r > 0$ και $\rho > 1$, το Λήμμα 3.3.1 μας εξασφαλίζει ότι

$$\|g_\omega f\|_2 \leqslant \sqrt{\ln \rho}\, \|\omega\|_\infty \|f\|_2$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^k)$.

Θα δείξουμε ότι ο $\mathcal{M}_{m_\ell}$, $\ell \geqslant 1$, είναι ισχυρού τύπου 2.

Πρόταση 3.3.4. *Για κάθε ακέραιο $\ell \geqslant 1$ και για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^k)$ ισχύει*

$$\|\mathcal{M}_{m_\ell} f\|_2 \leqslant C(k) 2^{-\ell(k-2)/2} \|f\|_2,$$

όπου $C(k) > 0$ είναι μια σταθερά που δεν εξαρτάται από τον ℓ.

Απόδειξη. Για κάθε $\ell \geqslant 1$, ο πολλαπλασιαστής m_ℓ έχει συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Θέτοντας $m_\ell^*(\xi) = \langle \xi, \nabla m_\ell(\xi) \rangle$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.2, για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$|[(m_\ell^\vee)_{(r)} * f](x)|^2 = |(g_{m_\ell, r} f)(x)|^2 \leqslant 2 (g_{m_\ell} f)(x) (g_{m_\ell^*} f)(x).$$

Παίρνοντας supremum ως προς $r > 0$ βλέπουμε ότι

$$(\mathcal{M}_{m_\ell} f)(x)^2 \leqslant 2 (g_{m_\ell} f)(x) (g_{m_\ell^*} f)(x).$$

Ολοκληρώνοντας στον $\mathbb{R}^k$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz καταλήγουμε στην

$$\|\mathcal{M}_{m_\ell} f\|_2^2 \leqslant 2 \|g_{m_\ell} f\|_2 \|g_{m_\ell^*} f\|_2.$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.3.1 και τις ανισότητες

$$\|m_\ell\|_\infty \leqslant C_1(k) 2^{-\ell(k-1)/2}, \quad \|m_\ell^*\|_\infty \leqslant C_2(k) 2^{-\ell(k-3)/2}, \tag{3.3.8}$$

τις οποίες θα εξηγήσουμε παρακάτω. Αφού

$$\mathrm{supp}(m_\ell),\ \mathrm{supp}(m_\ell^*) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^k : 2^{\ell-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{\ell+1}\},$$

από το Λήμμα 3.3.1 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_{m_\ell} f\|_2^2 &\leqslant 2 \left(\frac{C_1(k)\sqrt{\ln 4}}{2^{\ell(k-1)/2}} \|f\|_2 \right) \left(\frac{C_2(k)\sqrt{\ln 4}}{2^{\ell(k-3)/2}} \|f\|_2 \right) \\ &= C(k)^2 2^{-\ell(k-2)} \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Μένει να εξηγήσουμε τις (3.3.8). Είναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις Bessel ικανοποιούν τις

$$\sup_{t\geqslant 0} t^{1/2}|J_\alpha(t)| < \infty \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt}J_\alpha(t) = \frac{1}{2}(J_{\alpha-1}(t) - J_{\alpha+1}(t)).$$

[Η πρώτη ιδιότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η $u_\alpha(t) = \sqrt{t}J_\alpha(t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $u_\alpha''(t) + (1 + c_\alpha t^{-2})u_\alpha(t) = 0$ για $t > 0$ (όπου c_α θετική σταθερά), άρα η $v_\alpha(t) := (u_\alpha(t)^2 + u_\alpha'(t)^2)/2$ ικανοποιεί την $v_\alpha'(t) = -c_\alpha t^{-2}u_\alpha(t)u_\alpha'(t) \leqslant |c_\alpha|t^{-2}v_\alpha(t)$, απ' όπου παίρνουμε $v_\alpha(t) \leqslant e^{|c_\alpha|}v_\alpha(1)$ για κάθε $t > 1$. Η δεύτερη ιδιότητα ελέγχεται στους συντελεστές της δυναμοσειράς $\sum_{m=0}^\infty (-1)^m(m!\Gamma(m+\alpha-1))^{-1}(t/2)^{2m}$ της συνάρτησης $t^{-\alpha}J_\alpha(t)$, και όταν $\alpha = k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να την ελέγξουμε ακόμα πιο απλά από την ολοκληρωτική αναπαράσταση $2\pi J_k(t) = \int_0^{2\pi} e^{i(ks - t\sin s)}ds$.]

Μπορούμε λοιπόν, για κάθε $\xi \neq 0$, χρησιμοποιώντας την (3.3.4) να γράψουμε

$$|m_\ell(\xi)| \leqslant C_1(k)|\xi|^{-(k-1)/2} \quad \text{και} \quad |m_\ell^*(\xi)| \leqslant C_2(k)|\xi|^{-(k-3)/2}.$$

Οι (3.3.8) προκύπτουν τώρα από το γεγονός ότι ο φορέας των m_ℓ και m_ℓ^* περιέχεται στο δακτύλιο $\{\xi : 2^{\ell-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{\ell+1}\}$. □

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια ανισότητα ασθενούς τύπου για τον $\mathcal{M}_{m_\ell}$:

Πρόταση 3.3.5. *Έστω $\ell \geqslant 1$. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ και για κάθε $\lambda > 0$, έχουμε*

$$|\{x \in \mathbb{R}^k : (\mathcal{M}_{m_\ell}f)(x) > \lambda\}| \leqslant C(k)\frac{2^\ell}{\lambda}\,\|f\|_1,$$

όπου $C(k) > 0$ είναι μια σταθερά που δεν εξαρτάται από τον ℓ.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\ell \geqslant 1$ ισχύει

$$|m_\ell^\vee(x)| \leqslant C(k)\frac{2^\ell}{(1+|x|)^{k+1}} \tag{3.3.9}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$. Πράγματι, κατόπιν, αφού η $(1+|x|)^{-k-1}$ είναι ακτινική, ακτινικά φθίνουσα και ολοκληρώσιμη, όπως στην (3.3.7) βλέπουμε ότι

$$\sup_{r>0} |[(m_\ell^\vee)_{(r)} * f](x)| \leqslant \tilde{C}(k)2^\ell(Mf)(x)$$

και το ζητούμενο προκύπτει από την κλασική ασθενή ανισότητα για τον μεγιστικό τελεστή.

Μένει λοιπόν να δείξουμε την (3.3.9). Θέλουμε να φράξουμε την $m_\ell^\vee = \varphi_\ell^\vee * \sigma$, για κάθε $\ell \geqslant 1$, όπου σ είναι το ομοιόμορφο μετρο πιθανότητας στην S^{k-1} και $\varphi_\ell^\vee = (\psi^\vee)_{(2^{-\ell})}$.

Αφού η $\psi^\vee$ ανήκει στην κλάση του Schwartz, μπορούμε να φράξουμε την $|\psi^\vee|$ από ένα πολλαπλάσιο $c_k g$ της ακτινικής και ακτινικά φθίνουσας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $g(x) = (1+|x|)^{-k-1}$. Για να φράξουμε την $m_\ell^\vee$ θα δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} c_k^{-1}|m_\ell^\vee(x)| &\leqslant (g_{(2^{-\ell})} * \sigma)(x) = \int_{S^{n-1}} g_{(2^{-\ell})}(x-z)d\sigma(x) \\ &\leqslant C(k)2^\ell(1+|x|)^{-k-1}. \end{aligned}$$

Αν $|x| > 2$ τότε για κάθε $z \in S^{k-1}$ έχουμε $|x-z| \geqslant |x|-1 \geqslant |x|/2$ και $1+|x| \leqslant 2|x|$, οπότε γράφοντας $g_{(2^{-\ell})}(y) = 2^{k\ell}g(2^\ell y)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} G_\ell(x) := (g_{(2^{-\ell})} * \sigma)(x) &\leqslant \max_{z\in S^{k-1}} g_{(2^{-\ell})}(x-z) \leqslant 2^{k\ell}(1+2^\ell|x|/2)^{-k-1} \\ &\leqslant 2^{k\ell}2^{-(\ell-1)(k+1)}|x|^{-k-1} \leqslant 2^{k+1}|x|^{-k-1} \leqslant 2^{2k+2}(1+|x|)^{-k-1}, \end{aligned}$$

και έπεται το ζητούμενο. Έστω ότι $|x| \leqslant 2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $G_\ell(x) \leqslant C(k)2^\ell$, γιατί έχουμε $1+|x| \leqslant 3$ και θα προκύψει ότι $C(k)2^\ell \leqslant [C(k)3^{k+1}]2^\ell(1+|x|)^{-k-1}$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^k$ γράφουμε $y = (v,t)$, όπου $v \in \mathbb{R}^{k-1}$ και $t \in \mathbb{R}$. Από το αναλλοίωτο ως προς στροφές, μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο σημεία της μορφής $x = (0,s)$, $s \geqslant 0$. Γράφουμε κάθε $z \in S^{k-1}$ στη μορφή $z = (v,t)$, οπότε $x - z = (-v, s-t)$. Έστω π_0 η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^k$ στο υπερεπίπεδο $\{(w,0) : w \in \mathbb{R}^{k-1}\}$. Αφού η $g_{(2^{-\ell})}$ είναι ακτινική και ακτινικά φθίνουσα, έχουμε

$$g_{(2^{-\ell})}(x-z) \leqslant g_{(2^{-\ell})}(\pi_0(x-z)) = g_{(2^{-\ell})}(-v,0).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} G_\ell(x) = G_\ell(0,s) &= \int_{S^{k-1}} g_{(2^{-\ell})}(x-z)d\sigma(z) \leqslant \int_{S^{k-1}} g_{(2^{-\ell})}(\pi_0(x-z))d\sigma(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} g_{(2^{-\ell})}(-v,0)d\nu(v), \end{aligned}$$

όπου ν είναι η προβολή του σ στον $\mathbb{R}^{k-1}$. Έχουμε

$$d\nu(v) = \frac{2}{k_{k-1}}\frac{\mathbf{1}_{\{|v|<1\}}}{\sqrt{1-|v|^2}}dv = C(k)\frac{\mathbf{1}_{\{|v|<1\}}}{\sqrt{1-|v|^2}}dv,$$

όπου k_{k-1} είναι η επιφάνεια της S^{k-1}. Χωρίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα σε δύο μέρη, ανάλογα με το αν $|v| < 1/2$ ή όχι. Στο ολοκλήρωμα E_1 που αντιστοιχεί στην $|v| < 1/2$, έχουμε $1-|v|^2 \geqslant 3/4$, άρα

$$E_1 \leqslant \sqrt{\frac{4}{3}}C(k)\int_{\{|v|<1/2\}} g_{(2^{-\ell})}(v,0)\,dv \leqslant 2C(k)\int_{\mathbb{R}^{k-1}} g_{(2^{-\ell})}(v,0)\,dv.$$

Με αλλαγή μεταβλητής παίρνουμε

$$E_1 \leqslant 2C(k)2^\ell 2^{(k-1)\ell} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} g(2^\ell v, 0)\, dv = 2C(k)2^\ell \int_{\mathbb{R}^{k-1}} g(u,0)\, du,$$

το οποίο είναι φράγμα της μορφής που ζητάμε. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε $|v| > 1/2$ και

$$g_{(2^{-\ell})}(v,0) = 2^{k\ell}(1+2^\ell|v|)^{-k-1} \leqslant 2^{k\ell}2^{-(\ell-1)(k+1)} \leqslant 2^{k+1}.$$

Έπεται ότι το ολοκλήρωμα E_2 που αντιστοιχεί στην $|v| > 1/2$, ως προς το μέτρο ν, φράσσεται από κάποια συνάρτηση του k. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2. Έστω $1 < p \leqslant 2$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz, από τις Προτάσεις 3.3.4 και 3.3.5 βλέπουμε ότι, για κάθε $\ell \geqslant 1$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^k)$ ισχύει

$$\|\mathcal{M}_{m_\ell} f\|_p \leqslant c(1,2,p)C(k)(2^\ell)^{-1+2/p}(2^{-\ell(k-2)/2})^{2-2/p}\|f\|_p,$$

όπου $c(1,2,p)$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από τα k και ℓ. Έπεται ότι

$$\|\mathcal{M}_{m_\ell} f\|_p \leqslant C'(k)2^{\ell(k/p-(k-1))}\|f\|_p.$$

Αν υποθέσουμε ότι $p > k/(k-1)$ τότε η σειρά $\sum_{\ell=1}^\infty 2^{\ell(k/p-(k-1))}$ συγκλίνει. Επιπλέον, από την Πρόταση 3.3.3 γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{M}_{m_0}$ απεικονίζει τον $L^p(\mathbb{R}^k)$ στον εαυτό του για κάθε $1 < p < \infty$. Από την (3.3.5) συμπεραίνουμε ότι ο $\mathcal{M}$ είναι φραγμένος τελεστής στον $L^p(\mathbb{R}^k)$ αν υποθέσουμε ότι $k/(k-1) < p \leqslant 2$. Στην περίπτωση $p > 2$, εφαρμόζουμε το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz μεταξύ του $L^2(\mathbb{R}^k)$ και του $L^\infty(\mathbb{R}^k)$ για τον οποίο έχουμε τετριμμένα ότι ο $\mathcal{M}$ είναι φραγμένος. □

3.4 Άλλα αποτελέσματα

Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε με D τη μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 3.4.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ ισχύει*

$$|\{x : Mf(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{Cn}{\lambda}\|f\|_1, \qquad t > 0. \tag{3.4.1}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη θεωρούμε την ημιομάδα τελεστών $(T^t)_{t>0}$ στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την

$$T^t(f) := f * h_t,$$

όπου

$$h_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}$$

είναι ο πυρήνας της θερμότητας. Παρατηρούμε ότι:

(i) $\|T^t f\|_1 \leqslant \|f\|_1$,

(ii) $\|T^t f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$,

(iii) $T^t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$,

(iv) $T^t f \geqslant 0$ αν $f \geqslant 0$.

Από τη μεγιστική ανισότητα του Hopf (Θεώρημα 2.2.4) έχουμε ότι

$$\left| \left\{ x : \sup_{s>0} \frac{1}{s} \int_0^s (T^t f)(x)\, dt > \lambda \right\} \right| \leqslant \frac{1}{\lambda} \|f\|_1, \qquad \lambda > 0.$$

Θεωρούμε $f \geqslant 0$ και θα αποδείξουμε το θεώρημα συγκρίνοντας την $Mf(x)$ με το

$$a_n \cdot \sup_{s>0} \frac{1}{s} \int_0^s (T^t f)(x)\, dt$$

για κατάλληλη σταθερά a_n. Για το σκοπό αυτό αρκεί να βρούμε κατάλληλο s_0 τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{\omega_n} \mathbf{1}_D(x) \leqslant a_n \cdot \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} h_t(x)\, dt. \tag{3.4.2}$$

Έχοντας πετύχει κάτι τέτοιο, για κάθε $r > 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega_n r^n} \mathbf{1}_{rD}(x) &= \frac{1}{\omega_n r^n} \mathbf{1}_D \left(\frac{x}{r} \right) \\
&\leqslant \frac{1}{r^n} a_n \cdot \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} h_t \left(\frac{x}{r} \right) dt \\
&= a_n \cdot \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} \frac{1}{(4\pi r^2 t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4r^2 t}\, dt \\
&= a_n \cdot \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} h_{r^2 t}(x)\, dt \\
&= a_n \cdot \frac{1}{s_0} \int_0^{r^2 s_0} h_t(x) \frac{dt}{r^2} = a_n \cdot \frac{1}{s_r} \int_0^{s_r} h_t(x)\, dt,
\end{aligned}$$

όπου $s_r = r^2 s_0$, και άρα

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int \mathbf{1}_{rD}(y) f(x-y)\,dy \\ &\leqslant \sup_{r>0} \int \left(a_n \cdot \frac{1}{s_r} \int_0^{s_r} h_t(y)\,dt \right) f(x-y)\,dy \\ &= a_n \cdot \sup_{s>0} \frac{1}{s} \int_0^s \int f(x-y) h_t(y)\,dy\,dt \\ &= a_n \cdot \sup_{s>0} \frac{1}{s} \int_0^s T^t f(x)\,dt. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η (3.4.2) είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{1}{\omega_n} \leqslant a_n \cdot \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} h_t(x)\,dt, \qquad \text{όταν} \qquad |x| \leqslant 1 \tag{3.4.3}$$

και επειδή η $h_t(x)$ είναι φθίνουσα συναρτήση του $|x|$ έχουμε ισοδύναμα την

$$\frac{1}{\omega_n} \leqslant a_n \cdot \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} h_t\,dt, \tag{3.4.4}$$

όπου $h_t = (4\pi t)^{-n/2} e^{-1/4t}$. Προκύπτει ότι η βέλτιστη επιλογή για την (3.4.4) είναι να πάρουμε το s_0 λίγο μεγαλύτερο από $1/(2n)$. Για να απλουστεύσουμε τον υπολογισμό, μας αρκεί να επιλέξουμε $s_0 = 1/n$. Τότε, εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβλητής $u = 1/(4t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h_t\,dt &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^\infty (4t)^{-n/2} e^{-1/4t} dt = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^\infty u^{n/2} e^{-u} \frac{du}{4u^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^{n/2}} \int_0^\infty u^{n/2-2} e^{-u} du = \frac{1}{4\pi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right). \end{aligned}$$

Για να εκτιμήσουμε τώρα το $\int_{s_0}^\infty h_t dt$ θεωρούμε την συνάρτηση $g(u) = u^{n/2-2} e^{-u}$ και άρα $g'(u) = \left(\frac{n}{2} - 2 - u\right) u^{n/2-3} e^{-u}$. Οπότε για αρκετά μεγάλο n (συγκεκριμένα για $n \geqslant 8$) η g θα είναι αύξουσα στο $[0, n/4]$. Συνεπώς υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^\infty h_t dt &= \frac{1}{4\pi^{n/2}} \int_0^{1/(4s_0)} u^{n/2-2} e^{-u} du = \frac{1}{4\pi^{n/2}} \int_0^{n/4} g(u) du \\ &\leqslant \frac{1}{4\pi^{n/2}} (n/4) g(n/4) = \frac{n}{16\pi^{n/2}} \left(\frac{n}{4}\right)^{n/2-2} e^{-n/4} \\ &= e^{-n/4} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} n^{n/2-1} \end{aligned}$$

αν το n είναι αρκετά μεγάλο. Η τελευταία ποσότητα είναι $o\left(\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right)$ καθώς $n \to \infty$, αφού από τον τύπο του Stirling

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\frac{n}{2} - 1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{n}{2}} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2} = \frac{4\sqrt{\pi}}{2^{n/2}} e^{-n/2} n^{n/2-3/2}$$

και άρα

$$\begin{aligned}\frac{e^{-n/4}\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}n^{n/2-1}}{\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} &= \frac{e^{-n/4}n^{n/2-1}}{2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-n/4}n^{n/2-1}}{2^{n/2}e^{-n/2}n^{n/2-3/2}}\\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}n^{1/2}\left(\frac{e}{4}\right)^{n/4} \to 0,\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$ αφού $e/4 < 1$. Συνεπώς,

$$\int_0^{s_0} h_t dt = \int_0^{\infty} h_t dt - \int_{s_0}^{\infty} h_t dt \geqslant \frac{c}{\pi^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right),$$

για κάποια σταθερά $c > 0$. Χρησιμοποιώντας και την

$$\frac{1}{\omega_n} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{n/2}} = \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\pi^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) < \frac{n^2}{4}\frac{1}{\pi^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

βλέπουμε ότι η (3.4.4) ικανοποιείται με $a_n = Cn$, όπου $C = \frac{1}{4c}$, και το συμπέρασμα του θεωρήματος έπεται. □

Θεώρημα 3.4.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $p > 1$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ισχύει*

$$\|Mf\|_p \leqslant C\sqrt{n}\frac{p}{p-1}\|f\|_p. \tag{3.4.5}$$

Το θεώρημα αυτό δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αν το $p > 1$ είναι σταθερό (το Θεώρημα 3.2.1 είναι ισχυρότερο). Μας δίνει όμως την σωστή εξάρτηση από το p όταν $p \to 1^+$. Έχουμε βέβαια το κόστος του όρου $\sqrt{n}$, όμως η εξάρτηση από το n είναι καλύτερη από εκείνην στο γενικότερο Θεώρημα 4.2.1, που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Είναι επίσης καλύτερη από αυτήν που θα προέκυπτε αν συνδυάζαμε το Θεώρημα 3.4.1 με το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.4.1 έχουμε

$$\left\|\sup_{t>0} T^t f\right\|_p \leqslant A_p\|f\|_p$$

για κάθε $p > 1$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, με σταθερά $A_p \leqslant \frac{p}{p-1}$. Συνεχίζοντας όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, αρκεί να βρούμε κατάλληλες σταθερές b_n και t_0 για τις οποίες

$$\frac{1}{\omega_n}\mathbf{1}_D(x) \leqslant b_n h_{t_0}(x), \tag{3.4.6}$$

και αυτή η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{1}{\omega_n} \leqslant b_n(4\pi t_0)^{-n/2}e^{-1/(4t_0)}. \tag{3.4.7}$$

Επιλέγουμε $t_0 = 1/(2n)$. Τότε, το δεξιό μέλος της (3.4.7) είναι ίσο με $b_n(2\pi/n)^{-n/2}e^{-n/2}$, ενώ το αριστερό μέλος είναι ίσο με

$$\pi^{-n/2}\Gamma(n/2+1) \sim \pi^{-n/2}\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2} = \sqrt{\pi n}(2\pi/n)^{-n/2}e^{-n/2},$$

από τον τύπο του Stirling. Οπότε παίρνουμε την (3.4.7) αν επιλέξουμε $b_n = c\sqrt{n}$ για κάποια, αρκετά μεγάλη, απόλυτη θετική σταθερά c. Έτσι, έχουμε αποδείξει το θεώρημα. $\square$

Κεφάλαιο 4

Μεγιστικοί τελεστές που ορίζονται από κυρτά σώματα

4.1 Ασθενής ανισότητα

Έστω B ένα ανοικτό, φραγμένο, συμμετρικό κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Θα συμβολίζουμε με B^r το σύνολο

$$B^r := rB = \{x \in \mathbb{R}^n : r^{-1}x \in B\}. \tag{4.1.1}$$

Για κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε τη μεγιστική συνάρτηση $M_B f$ της f:

$$M_B f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B^r|} \int_{B^r} |f(x-y)|\, dy. \tag{4.1.2}$$

Θεώρημα 4.1.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε ανοικτό, φραγμένο, συμμετρικό κυρτό σύνολο B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ ισχύει*

$$|\{x : M_B f(x) > t\}| \leqslant \frac{Cn\log(n+1)}{t}\|f\|_1, \qquad t > 0. \tag{4.1.3}$$

Θα συμβολίζουμε με $\|x\|_B$ τη νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το B. Δηλαδή,

$$\|x\|_B = \min\{t \geqslant 0 : x \in tB\}. \tag{4.1.4}$$

Γενικεύοντας την (4.1.1), για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$ γράφουμε

$$B^r(x_0) = x_0 + B^r = \{x : x - x_0 \in B^r\}. \tag{4.1.5}$$

Αν $\tilde{B}$ είναι οποιοδήποτε σώμα της μορφής $B^r(x_0)$, συμβολίζουμε με $\tilde{B}^*$ το σώμα $B^{nr}(x_0)$ που έχει το ίδιο κέντρο και ακτίνα nr. Συμβολίζουμε επίσης με $\tilde{B}^{**}$ και $\tilde{B}^{***}$ τα σώματα $B^{(n+1)r}(x_0)$ και $B^{(n+2)r}(x_0)$ αντίστοιχα.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 θα βασιστεί στο εξής λήμμα.

Λήμμα 4.1.2. *Έστω $\{\tilde{B}_\alpha : \alpha \in A\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια από σώματα της μορφής $B^r(x)$. Μπορούμε να βρούμε υποοικογένεια $\{\tilde{B}_{\alpha_1}, \dots, \tilde{B}_{\alpha_N}\}$ με τις εξής ιδιότητες:*

$$\left|\bigcup_{\alpha\in A} \tilde{B}_\alpha\right| \leqslant c_1 \left|\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{B}_{\alpha_j}\right| \tag{4.1.6}$$

και

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}} \leqslant c_2 n\log(n+1), \tag{4.1.7}$$

όπου $I_1 = \tilde{B}_{\alpha_1}, I_j = \tilde{B}_{\alpha_j} \setminus (\tilde{B}_{\alpha_1} \cup \dots \cup \tilde{B}_{\alpha_{j-1}})$ για κάθε $j = 2, \dots, N$, και c_1, c_2 είναι απόλυτες θετικές σταθερές.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f παίρνει μη αρνητικές τιμές. Ορίζουμε

$$\tilde{M}_B(f)(x) = \sup_{x\in\tilde{B}} \frac{1}{|\tilde{B}^*|}\int_{\tilde{B}^*} f(y)\,dy. \tag{4.1.8}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$M_B f(x) \leqslant \tilde{M}_B(f)(x) \leqslant eM_B f(x). \tag{4.1.9}$$

Πράγματι, η πρώτη ανισότητα είναι προφανής, ενώ για τη δεύτερη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι: Αν $\tilde{B}$ είναι ένα σώμα με κέντρο x_0 και ακτίνα r τέτοιο ώστε $x \in \tilde{B}$ τότε, από την τριγωνική ανισότητα θα έχουμε ότι $\tilde{B}^* \subseteq B^{(n+1)r}(x)$. Συνεπώς,

$$\int_{\tilde{B}^*} f(y)\,dy \leqslant \int_{B^{(n+1)r}} f(x-y)\,dy$$

και άρα

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\tilde{B}^*|}\int_{\tilde{B}^*} f(y)\,dy &\leqslant \frac{|B^{(n+1)r}|}{|\tilde{B}^*|}\frac{1}{|B^{(n+1)r}|}\int_{B^{(n+1)r}} f(x-y)\,dy\\ &= \frac{((n+1)r)^n|B|}{(nr)^n|B|}\frac{1}{|B^{(n+1)r}|}\int_{B^{(n+1)r}} f(x-y)\,dy\\ &= (1+1/n)^n\frac{1}{|B^{(n+1)r}|}\int_{B^{(n+1)r}} f(x-y)\,dy\\ &\leqslant eM_B f(x).\end{aligned}$$

Οπότε παίρνοντας supremum ως προς τα $\tilde{B}$, βλέπουμε ότι $\tilde{M}_B(f)(x) \leqslant eM_B f(x)$.

Για κάθε $t > 0$ θεωρούμε το σύνολο $E_t := \{x : \tilde{M}_B(f)(x) > t\}$. Έστω C τυχόν συμπαγές υποσύνολο του E_t. Για κάθε $x \in C$ υπάρχει $B(x)$ με $x \in B(x)$, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{|B^*(x)|}\int_{B^*(x)} f(y)\,dy > t. \tag{4.1.10}$$

Αφού το C είναι συμπαγές, μπορούμε να επιλέξουμε μια πεπερασμένη οικογένεια $\{\tilde{B}_\alpha : \alpha \in A\}$ από σώματα $B(x)$ που η ένωσή τους καλύπτει το C. Θεωρούμε την υποοικογένεια $\tilde{B}_{\alpha_1}, \dots, \tilde{B}_{\alpha_N}$ που μας εξασφαλίζει το Λήμμα 4.1.2. Τότε,

$$|C| \leqslant \left|\bigcup_{\alpha\in A} \tilde{B}_\alpha\right| \leqslant c_1 \left|\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{B}_{\alpha_j}\right| \tag{4.1.11}$$

από την ιδιότητα (4.1.6) του λήμματος και, ταυτόχρονα,

$$\left|\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{B}_{\alpha_j}\right| = \left|\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right| = \sum_{j=1}^{N} |I_j| \tag{4.1.12}$$

διότι τα $I_1, I_2, \dots, I_N$ είναι ξένα ανά δύο. Επιπλέον,

$$|I_j| = \frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\,|\tilde{B}^*_{\alpha_j}| \tag{4.1.13}$$

και αφού το $\tilde{B}_{\alpha_j}$ είναι κάποιο από τα $B(x)$, θα ισχύει λόγω της (4.1.10):

$$|\tilde{B}^*_{\alpha_j}| < \frac{1}{t}\int_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}} f(y)\,dy = \frac{1}{t}\int \mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(y) f(y)\,dy. \tag{4.1.14}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{N} |I_j| \leqslant \frac{1}{t}\int \sum_{j=1}^{N} \frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(y) f(y)\,dy \leqslant \frac{c_2}{t} n\log(n+1)\int f(y)\,dy, \tag{4.1.15}$$

από την ιδιότητα (4.1.7) του λήμματος. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$|C| \leqslant \frac{c_3}{t} n\log(n+1)\,\|f\|_1,$$

με $c_3 = c_1 c_2$. Παίρνοντας supremum ως προς όλα τα συμπαγή $C \subseteq E_t$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Λήμματος 4.1.2. Επιλέγουμε επαγωγικά τα $\tilde{B}_{\alpha_1}, \dots, \tilde{B}_{\alpha_N}$. Παίρνουμε αρχικά το $\tilde{B}_{\alpha_1}$ να έχει τη μέγιστη δυνατή ακτίνα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα $\tilde{B}_{\alpha_1}, \dots, \tilde{B}_{\alpha_{k-1}}$ (και έτσι έχουν οριστεί τα $I_1, \dots, I_{k-1}$).

Παίρνουμε σαν $\tilde{B}_{\alpha_k}$ εκείνο το $\tilde{B}_\alpha$ που έχει τη μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα ανάμεσα σε εκείνα που τα κέντρα τους y_k ικανοποιούν την

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|} \mathbf{1}_{\tilde{B}^{**}_{\alpha_j}}(y_k) \leqslant 1. \tag{4.1.16}$$

Αποδεικνύουμε πρώτα την (4.1.6). Υπενθυμίζουμε ότι $\tilde{B}^{**}_{\alpha_j}$ είναι το $(n+1)$-πολλαπλάσιο και $\tilde{B}^{***}_{\alpha_j}$ είναι το $(n+2)$-πολλαπλάσιο του $\tilde{B}_{\alpha_j}$ (που έχουν το ίδιο κέντρο με αυτό).

Έστω ότι το $\tilde{B}_\alpha$ δεν έχει επιλεγεί κατά την διαδικασία. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|} \mathbf{1}_{\tilde{B}^{***}_{\alpha_j}}(x) > 1 \tag{4.1.17}$$

για κάθε $x \in \tilde{B}_\alpha$. Πράγματι, αν r_α είναι η ακτίνα και y_α είναι το κέντρο του $\tilde{B}_\alpha$, θεωρούμε εκείνα τα $\tilde{B}_{\alpha_j}$ (με ακτίνα r_j και κέντρο y_j) για τα οποία $r_j \geqslant r_\alpha$. Αφού το $\tilde{B}_\alpha$ δεν είχε επιλεγεί, έχουμε

$$\sum_{r_j \geqslant r_\alpha} \frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|} \mathbf{1}_{\tilde{B}^{**}_{\alpha_j}}(y_\alpha) > 1. \tag{4.1.18}$$

Παρατηρούμε ότι αν $y_\alpha \in \tilde{B}^{**}_{\alpha_j}$ και $x \in \tilde{B}_\alpha$ τότε $x \in \tilde{B}^{***}_{\alpha_j}$ (διότι, από τις $\|y_\alpha - y_j\|_B < (n+1)r_j$ και $\|x - y_\alpha\|_B < r_\alpha \leqslant r_j$ έχουμε $\|x - y_j\|_B < (n+2)r_j$). Αυτό σημαίνει ότι $\mathbf{1}_{\tilde{B}^{***}_{\alpha_j}}(x) \geqslant \mathbf{1}_{\tilde{B}^{**}_{\alpha_j}}(y_\alpha)$ και άρα

$$\sum_{r_j \geqslant r_\alpha} \frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|} \mathbf{1}_{\tilde{B}^{***}_{\alpha_j}}(x) > 1 \tag{4.1.19}$$

για κάθε $x \in \tilde{B}_\alpha$, το οποίο αποδεικνύει την (4.1.17). Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της (4.1.17) πάνω στην ένωση των $\tilde{B}_\alpha$ που δεν επιλέχτηκαν (την ονομάζουμε $E = \bigcup_{\alpha \notin \{\alpha_1,\dots,\alpha_N\}} \tilde{B}_\alpha$), παίρνουμε

$$\begin{aligned} |E| &\leqslant \sum_{j=1}^{N} |I_j| \frac{|\tilde{B}^{***}_{\alpha_j} \cap E|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|} \leqslant \sum_{j=1}^{N} |I_j| \frac{|\tilde{B}^{***}_{\alpha_j}|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|} \\ &= \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \sum_{j=1}^{N} |I_j| \leqslant e^2 \sum_{j=1}^{N} |I_j| = e^2 \left|\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right| \\ &= e^2 \left|\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{B}_{\alpha_j}\right|. \end{aligned}$$

Οπότε, αν γράψουμε

$$\bigcup_{\alpha\in A}\tilde{B}_\alpha=\left(\bigcup_{j=1}^{N}\tilde{B}_{\alpha_j}\right)\cup\left(\bigcup_{\alpha\notin\{\alpha_1,\dots,\alpha_N\}}\tilde{B}_\alpha\right),$$

προκύπτει η (4.1.6) με $c_1=e^2+1$.

Αποδεικνύουμε τώρα την (4.1.7). Έστω $x\in\mathbb{R}^n$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(x)>0.$$

Επιλέγουμε $k\in\{1,\dots,N\}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_k}}(x)>0$ (δηλαδή $x\in\tilde{B}^*_{\alpha_k}$) και η ακτίνα r_k να είναι η μικρότερη δυνατή. Μπορούμε (κάνοντας κατάλληλη μεταφορά και ομοιοθεσία και αφού η ποσότητα στην (4.1.7) είναι αναλοίωτη ως προς τις μεταφορές και ομοιοθεσίες) να υποθέσουμε ότι $x=0$ και $r_k=1$. Άρα, $r_j\geqslant 1$ για όλα τα j που μας ενδιαφέρουν (για τα υπόλοιπα j, από την επιλογή του k, θα ισχύει $\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(0)=0$ και άρα δεν επηρεάζουν το άθροισμα) και ισχύουν τα εξής :

(i) $0\in\tilde{B}^*_{\alpha_k}$, δηλαδή $\|y_k\|_B<n$.

(ii) $y_k\in\tilde{B}^{**}_{\alpha_j}$ αν και μόνο αν $\|y_k-y_j\|_B<(n+1)r_j$.

(iii) $0\in\tilde{B}^*_{\alpha_j}$ αν και μόνο αν $\|y_j\|_B<nr_j$.

Γράφουμε

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(0)=I+II,$$

όπου

$$I:=\sum_{r_j\geqslant n}\frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(0)\quad\text{και}\quad II:=\sum_{r_j<n}\frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(0).$$

Παρατηρούμε ότι ο j-οστός όρος στο άθροισμα I είναι μη μηδενικός μόνο αν $0\in\tilde{B}^*_{\alpha_j}$, και τότε $y_k\in\tilde{B}^{**}_{\alpha_j}$. Πράγματι, $\|y_k-y_j\|_B\leqslant\|y_k\|_B+\|y_j\|_B<n+nr_j\leqslant(n+1)r_j$ διότι $r_j\geqslant n$. Αφού το $\tilde{B}_{\alpha_k}$ έχει επιλεγεί, έχουμε

$$\sum_{r_j\geqslant 1}\frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\mathbf{1}_{\tilde{B}^{**}_{\alpha_j}}(y_k)\leqslant 1$$

άρα

$$I:=\sum_{r_j\geqslant n}\frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(0)\leqslant 1.\tag{4.1.20}$$

Στη συνέχεια φράσσουμε το

$$\sum_{a\leqslant r_j<b}\frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(0), \tag{4.1.21}$$

όπου $1\leqslant a<b$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε όρο σε αυτό στο άθροισμα έχουμε $|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|=|B|(nr_j)^n\geqslant |B|(na)^n$. Επίσης, τα σύνολα I_j είναι ξένα ανά δύο και καθένα από αυτά περιέχεται σε ένα πολλαπλάσιο του B ακτίνας $r_j<b$, με κέντρο y_j και ισχύει $\|y_j\|_B<nr_j<nb$ για όλα τα j για τα οποία $\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(0)>0$, λόγω της (iii). Άρα, η ένωσή τους περιέχεται σε ένα πολλαπλάσιο του B ακτίνας $<(n+1)b$, με κέντρο την αρχή των αξόνων. Συνεπώς,

$$\sum_{r_j<b}|I_j|\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(0)\leqslant |B|((n+1)b)^n.$$

Έτσι, στην (4.1.21) παίρνουμε σαν άνω φράγμα το $(1+1/n)^n(b/a)^n\leqslant e(b/a)^n$. Τέλος, γράφουμε

$$II=\sum_{r_j<n}\frac{|I_j|}{|\tilde{B}^*_{\alpha_j}|}\mathbf{1}_{\tilde{B}^*_{\alpha_j}}(0)=\sum_{\ell=1}^{m}II_\ell,$$

όπου II_ℓ είναι το υποάθροισμα του II που παίρνεται πάνω από εκείνες τις r_j για τις οποίες $(1+1/n)^{\ell-1}\leqslant r_j<(1+1/n)^\ell$. Χρησιμοποιώντας το φράγμα που δείξαμε με $a=(1+1/n)^{\ell-1}$ και $b=(1+1/n)^\ell$, παίρνουμε

$$II_\ell\leqslant e(1+1/n)^n\leqslant e^2.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του λήμματος παρατηρούμε ότι για κατάλληλη σταθερά $c_0>0$ ισχύει η ανισότητα $(1+1/n)^{c_0n\log n}\geqslant n$ (για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε $c_0=2$ οπότε θα ισχύει $(1+1/n)^n\geqslant 2\Rightarrow(1+1/n)^{2n\log n}\geqslant 2^{2\log n}>e^{\log n}=n$), και έτσι, θέτοντας $m=c_0n\log n$ έχουμε

$$II=\sum_{\ell=1}^{m}II_\ell\leqslant e^2c_0n\log n.$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα, και μαζί το Θεώρημα 4.1.1. □

4.2 L_p-εκτιμήσεις

Περνάμε τώρα σε L_p εκτιμήσεις για την M_B στο γενικό πλαίσιο ενός ανοικτού, φραγμένου, συμμετρικού κυρτού συνόλου B. Ακόμα πιο γενικά, υποθέτουμε εδώ ότι το B είναι ένα ανοικτό, φραγμένο, ακτινικό σύνολο. Δηλαδή,

$$B=\{x:x=t\theta,0\leqslant t<\rho(\theta),\theta\in S^{n-1}\},$$

όπου S^{n-1} είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$, και ρ είναι μια θετική, φραγμένη συνάρτηση στην S^{n-1}.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μια εκτίμηση καλύτερη από αυτή που θα προέκυπτε αν συνδυάζαμε το θεώρημα Marcinkiewicz με το Θεώρημα 4.1.1. Επίσης, όπως το Θεώρημα 3.4.2, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όταν $p \to 1^+$.

Θεώρημα 4.2.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε ανοικτό, φραγμένο, ακτινικό σύνολο σύνολο B στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $p > 1$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ισχύει*

$$\|M_B f\|_p \leqslant Cn\frac{p}{p-1}\|f\|_p. \tag{4.2.1}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τη μεθοδο των στροφών. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ θεωρούμε τη μεγιστική συνάρτηση $\mathcal{M}^\theta$ στη διεύθυνση του θ, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{M}^\theta(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{\int_0^r |f(x-t\theta)|t^{n-1}dt}{\int_0^r t^{n-1}dt}. \tag{4.2.2}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f παίρνει μη αρνητικές τιμές. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{B^r} f(x-y)\,dy &= \int_{S^{n-1}}\int_0^{r\rho(\theta)} f(x-t\theta)t^{n-1}dt\,d\theta \\
&\leqslant \int_{S^{n-1}}\left(\mathcal{M}^\theta(f)(x)\int_0^{r\rho(\theta)} t^{n-1}dt\right)d\theta \\
&= r^n\int_{S^{n-1}}\left(\mathcal{M}^\theta(f)(x)\int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1}dt\right)d\theta.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sup_{r>0}\frac{1}{|B^r|}\int_{B^r} f(x-y)\,dy \leqslant \frac{1}{|B|}\int_{S^{n-1}}\left(\mathcal{M}^\theta(f)(x)\int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1}dt\right)d\theta. \tag{4.2.3}$$

Χρησιμοποιώντας το μονοδιάστατο θεώρημα για τη μεγιστική συνάρτηση και παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\int_0^T f(x-t)t^{n-1}dt}{\int_0^T t^{n-1}dt} &= \frac{\int_0^T f(x-t)t^{n-1}dt}{\frac{T^n}{n}} = \frac{n}{T}\int_0^T f(x-t)\frac{t^{n-1}}{T^{n-1}}dt \\
&\leqslant \frac{n}{T}\int_0^T f(x-t)dt,
\end{aligned}$$

και άρα

$$\sup_{T>0}\frac{\int_0^T f(x-t)t^{n-1}dt}{\int_0^T t^{n-1}dt} \leqslant n\sup_{T>0}\frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)\,dt, \tag{4.2.4}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\|\mathcal{M}^\theta(f)\|_p \leqslant cn\frac{p}{p-1}\|f\|_p. \tag{4.2.5}$$

Έπεται ότι

$$\|M_B f\|_p \leqslant cn\frac{p}{p-1}\|f\|_p \cdot \frac{1}{|B|}\int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1}dt\,d\theta, \tag{4.2.6}$$

και από την

$$\int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1}dt\,d\theta = |B| \tag{4.2.7}$$

έχουμε το συμπέρασμα του θεωρήματος. □

Κεφάλαιο 5

Οι L_p-εκτιμήσεις των Bourgain και Carbery

5.1 Τα αποτελέσματατα των Bourgain και Carbery

Όπως αναφέραμε στην Εισαγωγή, πρώτος ο Bourgain [3] απέδειξε L^2-εκτιμήσεις για τον μεγιστικό τελεστή M_B, με σταθερές ανεξάρτητες από τη διάσταση και από το σώμα B.

Θεώρημα 5.1.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B στον $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, η μεγιστική συνάρτηση*

$$M_B f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B^r|} \int_{B^r} |f(x-y)|\, dy. \tag{5.1.1}$$

ικανοποιεί την

$$\|M_B f\|_2 \leqslant C\, \|f\|_2. \tag{5.1.2}$$

Περιγράφουμε την απόδειξη στην Παράγραφο 5.3. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1 ο Bourgain εισήγαγε την «ισοτροπική θέση» ενός κυρτού σώματος, τις ιδιότητες της οποίας αποδεικνύουμε στην Παράγραφο 5.2.

Η L^2-εκτίμηση του Bourgain επεκτάθηκε από τον Carbery [6] και από τον Bourgain στο [4], για κάθε $p > 3/2$. Στην Παράγραφο 5.4 περιγράφουμε τη μέθοδο που ακολούθησε ο Carbery. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω $p > 3/2$. Υπάρχει σταθερά $C_p > 0$, η οποία εξαρτάται μόνο από το p, τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ο μεγιστικός τελεστής*

$$M_B f(x) = \sup_{t>0} t^{-n} \int_{tB} |f(x-y)|\, dy \tag{5.1.3}$$

ικανοποιεί την

(5.1.4) $$\|M_B f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p.$$

Επίσης, αν συμβολίσουμε με $\tilde{M}_B$ τον μεγιστικό τελεστή

(5.1.5) $$\tilde{M}_B f(x) = \sup_k 2^{-kn} \int_{2^k B} |f(x-y)|\, dy,$$

τότε για κάθε $p > 1$ υπάρχει σταθερά $D_p > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

(5.1.6) $$\|\tilde{M}_B f\|_p \leqslant D_p \|f\|_p.$$

5.2 Ισοτροπικά κυρτά σώματα

Ορισμός 5.2.1. Ένα συμμετρικό κυρτό σώμα B στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο $|B| = 1$ και υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ ώστε

(5.2.1) $$\int_B \langle x, y\rangle^2 dx = \alpha^2 |y|^2$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι αν το B ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη (5.2.1) τότε
$$\int_B |x|^2 dx = \sum_{i=1}^n \int \langle x, e_i\rangle^2 dx = n\alpha^2,$$
όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι αν B είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε το $U(B)$ είναι επίσης ισοτροπικό για κάθε $U \in O(n)$.

Παρατήρηση 5.2.2. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι η *ισοτροπική συνθήκη* (5.2.1) είναι ισοδύναμη με καθεμία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Για κάθε $i, j = 1, \dots, n$,

(5.2.2) $$\int_B x_i x_j dx = \alpha^2 \delta_{ij},$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$,

(5.2.3) $$\int_B \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2 (\mathrm{tr} T).$$

Για να το δούμε, υποθέτουμε πρώτα ότι το B είναι ισοτροπικό, και θέτοντας $y = e_i$, $y = e_j$ και $y = e_i + e_j$ στην (5.2.1) παίρνουμε την (5.2.2). Παρατηρώντας ότι αν $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ τότε $\langle x, T(x)\rangle = \sum_{i,j=1}^n t_{ij}x_ix_j$, βλέπουμε αμέσως ότι η (5.2.2) συνεπάγεται την (5.2.3). Τέλος, παρατηρήστε ότι αν εφαρμόσουμε την (5.2.3) για την $T(x) = \langle x, y\rangle y$ παίρνουμε την ισοτροπική συνθήκη (5.2.1).

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα έχει μια γραμμική εικόνα που ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη.

Πρόταση 5.2.3. *Έστω B ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το $T(B)$ να είναι ισοτροπικό.*

Απόδειξη. Ο τελεστής A που ορίζεται μέσω της $A(y) = \int_B \langle x, y\rangle x dx$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Συνεπώς, έχει μια συμμετρική και θετική τετραγωνική ρίζα S. Θεωρούμε την γραμμική εικόνα $\tilde{B} = S^{-1}(B)$ του B. Τότε, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{B}} \langle x, y\rangle^2 dx &= |\mathrm{det} S|^{-1} \int_B \langle S^{-1}x, y\rangle^2 dx \\ &= |\mathrm{det} S|^{-1} \int_B \langle x, S^{-1}y\rangle^2 dx \\ &= |\mathrm{det} S|^{-1} \Big\langle \int_B \langle x, S^{-1}y\rangle x dx, S^{-1}y \Big\rangle \\ &= |\mathrm{det} S|^{-1} \langle AS^{-1}y, S^{-1}y\rangle = |\mathrm{det} S|^{-1} |y|^2.\end{aligned}$$

Κανονικοποιώντας τον όγκο του $\tilde{B}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Η Πρόταση 5.2.3 δείχνει ότι κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια γραμμική εικόνα $\tilde{B}$ που είναι ισοτροπική. Λέμε ότι το $\tilde{B}$ είναι μια *ισοτροπική θέση* του B. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος είναι μονοσήμαντα ορισμένη (modulo ορθογώνιους μετασχηματισμούς) και ότι προκύπτει σαν λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω B ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$\delta(B) = \inf \left\{ \int_{TB} |x|^2 dx : T \in SL(n) \right\}. \tag{5.2.4}$$

Τότε, μια γραμμική εικόνα B_1 όγκου 1 του B είναι ισοτροπική αν και μόνο αν

$$\int_{B_1} |x|^2 dx = \delta(B). \tag{5.2.5}$$

Αν B_1 και B_2 είναι δύο ισοτροπικές θέσεις του B τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε $B_2 = U(B_1)$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια ισοτροπική θέση B_1 του B. Η παρατήρηση 5.2.2 δείχνει ότι υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_{B_1} \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2(\mathrm{tr}T)$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για κάθε $T \in SL(n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{TB_1} |x|^2 dx &= \int_{B_1} |Tx|^2 dx = \int_{B_1} \langle x, T^*Tx\rangle dx \\ &= \alpha^2 \mathrm{tr}(T^*T) \geqslant n\alpha^2 = \int_{B_1} |x|^2 dx,\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην μορφή

$$\mathrm{tr}(T^*T) \geqslant n[\det(T^*T)]^{1/n}.$$

Αυτό δείχνει ότι το B_1 ικανοποιεί την (5.2.5). Ειδικότερα, το infimum στην (5.2.4) είναι minimum.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν έχουμε ισότητα στην (5.2.6) τότε $T^*T = I$, άρα $T \in O(n)$. Αυτό δείχνει ότι κάθε άλλη θέση $\tilde{B}$ του B που ικανοποιεί την (5.2.5) είναι ορθογώνια εικόνα του B_1, άρα είναι ισοτροπική.

Τέλος, αν B_2 είναι κάποια άλλη ισοτροπική θέση του B τότε το πρώτο μέρος της απόδειξης δείχνει ότι το B_2 ικανοποιεί την (5.2.5). Από το προηγούμενο βήμα πρέπει να έχουμε $B_2 = U(B_1)$ για κάποιον $U \in O(n)$. □

Η προηγούμενη συζήτηση δείχνει ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B στον $\mathbb{R}^n$, η σταθερά

$$L_B^2 = \frac{1}{n}\min\left\{ \frac{1}{|TB|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{TB} |x|^2 dx \ \Big|\ T \in GL(n) \right\}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από την γραμμική κλάση του B. Επίσης, αν το B είναι ισοτροπικό τότε για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_B \langle x, \xi\rangle^2 dx = L_B^2.$$

Η σταθερά L_B ονομάζεται *ισοτροπική σταθερά* του B. Η βασική ιδιότητα των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων που χρησιμοποιεί ο Bourgain είναι η εξής.

Θεώρημα 5.2.5. *Έστω B ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\frac{c_1}{L_B} \leqslant |B \cap \xi^\perp| \leqslant \frac{c_2}{L_B},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Το θεώρημα προκύπτει από μια σειρά παρατηρήσεων.

Πρόταση 5.2.6. *Έστω B συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε $\xi \in S^{n-1}$ και την συνάρτηση*

$$\varphi(t) = \varphi_{B,\xi}(t) = |B \cap (\xi^\perp + t\xi)|, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Τότε,

$$\|\varphi\|_\infty = |B \cap \xi^\perp|.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $\varphi^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη συνάρτηση στον φορέα της. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\xi = e_n$, οπότε ταυτίζουμε φυσιολογικά τον $\xi^\perp$ με τον $\mathbb{R}^{n-1}$. Για κάθε t ορίζουμε

$$B(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,t) \in B\}.$$

Εστω $I = \{t : B(t) \neq \emptyset\}$. Για κάθε $t \in I$, το $B(t)$ είναι κυρτό, και αν $t, s \in I$, $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\lambda B(t) + (1-\lambda)B(s) \subseteq B(\lambda t + (1-\lambda)s).$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski στον $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$|B(\lambda t + (1-\lambda)s)|^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \lambda |B(t)|^{\frac{1}{n-1}} + (1-\lambda)|B(s)|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Όμως $\varphi(t) = |B \cap (\xi^\perp + t\xi)| = |B(t)|$, κι αυτό δίνει το ζητούμενο. Τώρα, από την συμμετρία του B βλέπουμε ότι $B(-t) = -B(t)$ για κάθε $t \in I$. Έπεται ότι η $\varphi^{\frac{1}{n-1}}$ είναι άρτια (και κοίλη) συνάρτηση, άρα παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο 0. $\square$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ ο όγκος της $(n-1)$-διάστατης τομής $|B \cap \xi^\perp|$ του B συνδέεται στενά με τις L_p-νόρμες

$$\|\langle \cdot, \xi \rangle\|_p := \|\langle \cdot, \xi \rangle\|_{L^p(B)} = \left(\int_B |\langle x, \xi \rangle|^p dx \right)^{1/p}$$

του γραμμικού συναρτησοειδούς $x \mapsto \langle x, \xi \rangle$. Η σύνδεση γίνεται φανερή αν γράψουμε την $\|\langle \cdot, \xi \rangle\|_p^p$ στην μορφή

$$\int_B |\langle x, \xi \rangle|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |t|^p \varphi(t) dt.$$

Πρόταση 5.2.7. *Έστω B ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ και $p \geqslant 1$,*

$$\left(\int_B |\langle x, \xi \rangle|^p dx \right)^{1/p} \geqslant \frac{1}{2(p+1)^{1/p}} \frac{1}{|B \cap \xi^\perp|}. \tag{5.2.7}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 5.2.8 (Hardy). *Εστω $f, g : [0, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_0^b f(t)dt = \int_0^b g(t)dt$ και για κάθε $s \in [0, b]$*

$$\int_0^s g(t)dt \geqslant \int_0^s f(t)dt.$$

Τότε, για κάθε $h : [0, b] \to \mathbb{R}^+$ αύξουσα και μετρήσιμη, έχουμε

$$\int_0^b h(t)g(t)dt \leqslant \int_0^b h(t)f(t)dt.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $\phi(t) = h(b) - h(t)$. Η ϕ είναι φθίνουσα, μη αρνητική, και υπάρχει αύξουσα ακολουθία φθινουσών απλών ϕ_n με $\phi_n \to \phi$ σχεδόν παντού. Παίρνοντας υπόψη το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, αρκεί να δείξουμε οτι

$$\int_0^b \phi_n(t)g(t)dt \geqslant \int_0^b \phi_n(t)f(t)dt.$$

Γιατί τότε,

$$\begin{aligned}
\int_0^b h(t)g(t)dt &= h(b)\int_0^b g(t)dt - \int_0^b \phi(t)g(t)dt \\
&= h(b)\int_0^b f(t)dt - \lim_{n\to\infty}\int_0^b \phi_n(t)g(t)dt \\
&\leqslant h(b)\int_0^b f(t)dt - \lim_{n\to\infty}\int_0^b \phi_n(t)f(t)dt \\
&= h(b)\int_0^b f(t)dt - \int_0^b \phi(t)f(t)dt \\
&= \int_0^b h(t)f(t)dt.
\end{aligned}$$

Υπάρχουν $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ και $a_1 > \cdots > a_n \geqslant 0$ τέτοιοι ώστε

$$\phi_n(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{1}_{I_i}(t),$$

όπου $I_i = [t_{i-1}, t_i)$. Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε

$$\phi_n(t) = \sum_{i=1}^{N} b_i \mathbf{1}_{[0,t_i)}(t),$$

όπου $b_i = a_i - a_{i+1} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, και $b_N = a_N$. Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^b \phi_n(t)g(t)dt &= \sum_{i=1}^N b_i \int_0^{t_i} g(t)dt \geqslant \sum_{i=1}^N b_i \int_0^{t_i} f(t)dt \\ &= \int_0^b \phi_n(t)f(t)dt.\end{aligned}$$

□

Απόδειξη της Πρότασης 5.2.7. Θέτουμε $\varphi(t) = |B \cap (\xi^{\perp} + t\xi)|$, και ορίζουμε

$$g(t) = \|\varphi\|_\infty \mathbf{1}_{[0,1/(2\|\varphi\|_\infty)]}(t).$$

Τότε, οι φ και g ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος (έχουν και οι δύο φορέα κάποιο διάστημα της μορφής $[0, b]$), και παίρνοντας σαν αύξουσα συνάρτηση την $h(t) = t^p$ στο $[0, b]$ έχουμε

$$\int_0^\infty t^p \varphi(t)dt \geqslant \int_0^{1/(2\|\varphi\|_\infty)} t^p \|\varphi\|_\infty dt = \frac{1}{2^{p+1}(p+1)\|\varphi\|_\infty^p}.$$

Αρα,

$$\left(\int_B |\langle x, \xi\rangle|^p dx\right)^{1/p} = \left(2\int_0^\infty t^p \varphi(t)dt\right)^{1/p} \geqslant \frac{1}{2(p+1)^{1/p}} \frac{1}{\|\varphi\|_\infty},$$

και το αποτέλεσμα έπεται από την Πρόταση 5.2.6. □

Για την αντίστροφη ανισότητα αποδεικνύουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.2.9. *Έστω B ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ και $p \geqslant 1$,*

$$\left(\int_B |\langle x, \xi\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \frac{cp}{|B \cap \xi^{\perp}|}, \tag{5.2.8}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Πρώτη, αν υπάρχει $s > 0$ με την ιδιότητα $\varphi(s) = \varphi(0)/2$. Αυτό για παράδειγμα συμβαίνει οπωσδήποτε αν το B είναι γνήσια κυρτό. Παρατηρούμε οτι

$$\frac{1}{2} = \int_0^\infty \varphi(t)dt \geqslant \int_0^s \varphi(t)dt \geqslant s\varphi(s) = s\varphi(0)/2,$$

δηλαδή

$$\|\varphi\|_\infty = \varphi(0) \leqslant 1/s,$$

γιατί από το γεγονός οτι η φ είναι λογαριθμικά κοίλη έπεται εύκολα οτι $\varphi(t) \geqslant \varphi(s)$ στο $[0, s]$. Από την άλλη πλευρά, αν $t > s$, τότε γράφοντας $s = (1 - \frac{s}{t})0 + \frac{s}{t}t$ παίρνουμε

$$\varphi(s) \geqslant [\varphi(0)]^{1-\frac{s}{t}}[\varphi(t)]^{\frac{s}{t}},$$

το οποίο σημαίνει οτι $\varphi(t) \leqslant \varphi(0)2^{-t/s}$. Δηλαδή, από το σημείο s και πέρα, η φ φθίνει εκθετικά ως προς t. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^p\varphi(t)dt &= \int_0^s t^p\varphi(t)dt + \int_s^\infty t^p\varphi(t)dt \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_0^s t^p dt + \int_s^\infty t^p\varphi(0)2^{-t/s}dt \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty \left(\frac{s^{p+1}}{p+1} + s^{p+1}\int_1^\infty u^p 2^{-u}du\right) \leqslant (cp)^p\|\varphi\|_\infty s^{p+1} \\ &\leqslant (cp)^p\|\varphi\|_\infty \frac{1}{\|\varphi\|_\infty^{p+1}} = (cp)^p\frac{1}{\|\varphi\|_\infty^p}.\end{aligned}$$

Αν τώρα για κάθε $s > 0$ στον φορέα της φ ισχύει $\varphi(s) > \varphi(0)/2$, τότε τον ρόλο του s παίζει το $s_0 = \max\{s > 0 : \varphi(s) > 0\}$. Είναι $1/2 \geqslant \varphi(0)s_0/2$ και

$$\int_0^\infty t^p\varphi(t)dt = \int_0^{s_0} t^p\varphi(t)dt \leqslant \varphi(0)s_0^{p+1}/(p+1),$$

και συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε την ίδια περίπου εκτίμηση όπως πριν (και μάλιστα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η $\log\varphi$ είναι κοίλη).

Έπεται ότι

$$\int_B |\langle x,\xi\rangle|^p dx = 2\int_0^\infty t^p\varphi(t)dt \leqslant \left(\frac{cp}{\|\varphi\|_\infty}\right)^p.$$

□

Υποθέτουμε ότι το B είναι ισοτροπικό. Τότε, οι Προτάσεις 5.2.7 και 5.2.9 μας δίνουν το Θεώρημα 5.2.5.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.5. Έστω B ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ έχουμε $\|\langle\cdot,\xi\rangle\|_2 = L_B$. Από τις (5.2.7) και (5.2.8) βλέπουμε ότι

$$\frac{c_1}{L_B} \leqslant |B \cap \xi^\perp| \leqslant \frac{c_2}{L_B},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. □

Στενά συνδεδεμένη με τα προηγούμενα είναι η παρατήρηση ότι η συνάρτηση $\varphi(t) = |B \cap (\xi^\perp + t\xi)|$ φθίνει εκθετικά καθώς το $t \to \infty$.

Πρόταση 5.2.10. *Έστω B ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $\xi \in S^{n-1}$ και $\varphi(t) = |B \cap (\xi^\perp + t\xi)|$. Για κάθε $t > 0$,*

$$\varphi(t) \leqslant A\varphi(0)e^{-a\varphi(0)t}, \tag{5.2.9}$$

όπου $A, a > 0$ είναι δύο απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\varphi(t) \leqslant \varphi(0)$ για κάθε $t \geqslant 0$, άρα η ανισότητα ισχύει (με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς A) αν $\varphi(0)t \leqslant 10$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\varphi(0)t > 10$. Επίσης, για κάθε $t > 0$ για το οποίο $\varphi(t) > 0$ έχουμε

$$1 = |B| \geqslant \frac{\varphi(0)t}{n}, \tag{5.2.10}$$

άρα $e^{-\varphi(0)t} \geqslant e^{-n}$. Αν λοιπόν $\varphi(t) < \varphi(0)e^{-n}$ τότε πάλι η ζητούμενη ανισότητα ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\varphi(t) \geqslant \varphi(0)e^{-n}$.

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski έχουμε ότι αν $0 \leqslant \epsilon \leqslant \frac{1}{2}$ τότε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon t} \geqslant \varphi(\epsilon t) &\geqslant \left((1-\epsilon)\varphi(0)^{\frac{1}{n-1}} + \epsilon\varphi(t)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} \\ &\geqslant \varphi(0)\left((1-\epsilon) + \epsilon\exp\left(\frac{\log\alpha}{n} - 1\right)\right)^{n-1}, \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

όπου $\alpha = \varphi(t)/\varphi(0)$. Έχουμε υποθέσει ότι $\log\alpha \geqslant -n$, και από την $e^x \geqslant 1+x$ παίρνουμε

$$1 \geqslant \epsilon t\varphi(0)\left(1 + \frac{\epsilon}{n-1}\alpha\right)^{n-1} \geqslant \epsilon t\varphi(0)\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}\right)^{Ct}. \tag{5.2.12}$$

Επιλέγοντας $\epsilon = \frac{e}{\varphi(0)t}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

5.3 Η L^2-ανισότητα του Bourgain

Αρχικά παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε το θεώρημα για ισοτροπικά κυρτά σώματα. Πράγματι, τότε για οποιοδήποτε συμμετρικό κυρτό σώμα B, από την Πρόταση 5.2.3 υπάρχει $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ ώστε το $T(B)$ να είναι ισοτροπικό, οπότε γράφοντας για $r > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|rB|}\int_{rB} |f(x-y)|dy &= \frac{1}{r^n|B|}\frac{1}{|\det T|}\int_{T(rB)} |f(x - T^{-1}(y))|dy \\ &= \frac{1}{|rT(B)|}\int_{rT(B)} |(f\circ T)(T^{-1}(x) - y)|dy \end{aligned}$$

και παίρνοντας supremum ως προς $r > 0$ έχουμε

$$M_B(f)(x) = M_{T(B)}(f\circ T)(T^{-1}(x)).$$

Τότε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.1 για το ισοτροπικό $T(B)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|M_Bf\|_2^2 = \int |M_Bf(x)|^2dx &= \int |M_{T(B)}(f\circ T)(T^{-1}(x))|^2dx \\ &= |\det T|\cdot\int |M_{T(B)}(f\circ T)(x)|^2dx = \det T\|M_{T(B)}(f\circ T)\|_2^2 \\ &\leqslant C^2|\det T|\cdot\|f\circ T\|_2^2 = C^2|\det T|\cdot\int |f(T(x))|^2dx = C^2\|f\|_2^2 \end{aligned}$$

και άρα το θεώρημα ισχύει με την ίδια σταθερά για το B.

Για κάθε f στην κλάση του Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ συμβολίζουμε με $\widehat{f}$ το μετασχηματισμό Fourier της f:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} dx.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ και $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$. Αν $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και $t > 0$, τότε θέτουμε

$$K_{(t)}(x) = t^{-n} K(t^{-1}x).$$

Από τον τύπο αντιστροφής του Fourier έχουμε

$$(f * K_{(t)})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{K}(t\xi) e^{2\pi i \langle x,\xi\rangle} d\xi. \tag{5.3.1}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.3.1. *Έστω $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε η $\widehat{K}$ να είναι διαφορίσιμη. Για κάθε $j \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε*

$$\alpha_j = \sup_{2^j \leqslant |\xi| < 2^{j+2}} |\widehat{K}(\xi)|$$

και

$$\beta_j = \sup_{2^j \leqslant |\xi| < 2^{j+2}} |\langle \nabla \widehat{K}(\xi), \xi\rangle|.$$

Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\left\| \sup_{t>0} |f * K_{(t)}| \right\|_2 \leqslant C\,\Gamma(K) \|f\|_2,$$

όπου

$$\Gamma(K) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sqrt{\alpha_j}\,(\sqrt{\alpha_j} + \sqrt{\beta_j}), \tag{5.3.2}$$

και $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια διαμέριση της μονάδας $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ του $[0,\infty)$, η οποία ικανοποιεί τα εξής:

$$\mathrm{supp}(\eta_j) \subset [2^j, 2^{j+2}], \qquad 0 \leqslant \eta_j \leqslant 1, \qquad |\eta_j'| < C2^{-j}. \tag{5.3.3}$$

Μια τέτοια διαμέριση μπορούμε να την πετύχουμε παίρνοντας

$$\eta_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^j}x - 1, & \text{αν } x \in [2^j, 2^{j+1}] \\ -\frac{1}{2^{j+1}}x + 2, & \text{αν } x \in [2^{j+1}, 2^{j+2}] \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αν θέσουμε $\widehat{K_j}(\xi) = \widehat{K}(\xi)\eta_j(|\xi|)$, τότε $\widehat{K} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{K_j}$ και άρα $K = \sum_{j\in\mathbb{Z}} K_j$, οπότε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα βλέπουμε ότι

$$\left\| \sup_{t>0} |f * K_{(t)}| \right\|_2 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\| \sup_{t>0} |f * (K_j)_{(t)}| \right\|_2 . \tag{5.3.4}$$

Σταθεροποιούμε $j \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$$\sup_{t>0} |f * (K_j)_{(t)}| \leqslant \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sup_{2^\nu \leqslant t < 2^{\nu+1}} |f * (K_j)_{(t)}|^2 \right)^{1/2}, \tag{5.3.5}$$

όπου, από την (5.3.1), αν $2^\nu \leqslant t < 2^{\nu+1}$ έχουμε

$$f * (K_j)_{(t)} = \int \widehat{f}(\xi)\widehat{K_j}(t\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \int \widehat{f}_{j-\nu}(\xi)\widehat{K_j}(t\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi, \tag{5.3.6}$$

όπου

$$\widehat{f}_m := \widehat{f} \cdot \mathbf{1}_{[2^{m-2}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{m+2}]}, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή όταν $\widehat{K_j}(t\xi) \neq 0$, δηλαδή $2^j \leqslant |t\xi| \leqslant 2^{j+2}$, τότε για $2^\nu \leqslant t < 2^{\nu+1}$ θα ισχύει $2^{j-\nu-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j-\nu+2}$ και άρα $\widehat{f}_{j-\nu}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$.

Σταθεροποιούμε έναν ακέραιο $A_j \geqslant 1$ και για σταθερό ν θεωρούμε ένα $(2^\nu A_j^{-1})$-δίκτυο $\{t_\tau\}_{\tau\leqslant A_j}$ στο διάστημα $[2^\nu, 2^{\nu+1}]$. Τότε, για $2^\nu \leqslant t \leqslant 2^{\nu+1}$ θα ισχύει $t_\tau \leqslant t < t_{\tau+1}$ για κάποιο τ, και γράφουμε

$$\begin{aligned} &\int \widehat{f}_{j-\nu}(\xi)\widehat{K_j}(t\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi \\ &= \int \widehat{f}_{j-\nu}(\xi)\widehat{K_j}(t_\tau\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi + \int_{t_\tau}^{t} \left(\int \widehat{f}_{j-\nu}(\xi)\langle\nabla\widehat{K_j}(s\xi),\xi\rangle e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi \right) ds. \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση (το maximum πάνω από όλα τα τ αντικαθίσταται από την ισχυρότερη ℓ^2-νόρμα):

$$\begin{aligned} \left| \int \widehat{f}_{j-\nu}(\xi)\widehat{K_j}(t\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi \right|^2 \leqslant \sum_\tau \Big[&\Big| \int \widehat{f}_{j-\nu}(\xi)\widehat{K_j}(t_\tau\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi \Big|^2 \\ &+ \Big(\int_{t_\tau}^{t_{\tau+1}} \Big| \int \widehat{f}_{j-\nu}(\xi)\langle\nabla\widehat{K_j}(s\xi),\xi\rangle e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi \Big| ds \Big)^2 \Big], \end{aligned}$$

όπου το δεξιό μέλος έχει A_j το πλήθος όρους και δεν εξαρτάται από το t. Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε $\|\widehat{f}_{j-\nu}\|_2 = \|f_{j-\nu}\|_2$, άρα

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{2^\nu\leqslant t\leqslant 2^{\nu+1}} |f * (K_j)_{(t)}| \right\|_2 &\leqslant \sqrt{A_j} \left[\|\widehat{K_j}\|_\infty \|f_{j-\nu}\|_2 + 2^\nu A_j^{-1} \sup_{s\sim 2^\nu} \|\langle\nabla\widehat{K_j}(s\xi),\xi\rangle\|_\infty \|f_{j-\nu}\|_2 \right] \\ &\leqslant \big(\sqrt{A_j}\|\widehat{K_j}\|_\infty + \sqrt{A_j^{-1}}\|\langle\nabla\widehat{K_j}(\xi),\xi\rangle\|_\infty \big) \|f_{j-\nu}\|_2. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας ως προς $\nu \in \mathbb{Z}$ και χρησιμοποιώντας την (5.3.5) έχουμε

$$\Big\|\sup_{t>0}|f*(K_j)_{(t)}|\Big\|_2 \leqslant \big(\sqrt{A_j}\|\widehat{K_j}\|_\infty + \sqrt{A_j^{-1}}\|\langle\nabla\widehat{K_j}(\xi),\xi\rangle\|_\infty\big)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\|f_{j-\nu}\|_2$$

και από τον ορισμό της $\widehat{f_m}$ και την ταυτότητα του Parseval έχουμε ότι για κάθε j ισχύει

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\|f_{j-\nu}\|_2 = 4\|f\|_2.$$

Άρα,

$$\Big\|\sup_{t>0}|f*(K_j)_{(t)}|\Big\|_2 \leqslant 4\big(\sqrt{A_j}\|\widehat{K_j}\|_\infty + \sqrt{A_j^{-1}}\|\langle\nabla\widehat{K_j}(\xi),\xi\rangle\|_\infty\big)\|f\|_2$$

Επίσης, αφού $\mathrm{supp}(\eta_j) \subset [2^j, 2^{j+2}]$ έχουμε $\|\widehat{K_j}\|_\infty \leqslant \alpha_j$, και

$$\langle\nabla\widehat{K_j}(\xi),\xi\rangle = \langle\nabla\widehat{K}(\xi),\xi\rangle\eta_j(|\xi|) + \widehat{K}(\xi)\eta_j'(|\xi|)|\xi|,$$

άρα

$$\|\langle\nabla\widehat{K_j}(\xi),\xi\rangle\|_\infty \leqslant C(\alpha_j+\beta_j).$$

Αν επιλέξουμε τον A_j να είναι περίπου το ακέραιο μέρος του $C(\alpha_j+\beta_j)/\alpha_j$ βλέπουμε ότι

$$\Big\|\sup_{t>0}|f*(K_j)_{(t)}|\Big\|_2 \leqslant C\sqrt{\alpha_j}\sqrt{\alpha_j+\beta_j}\|f\|_2.$$

Από την (5.3.4) και αφού $\sqrt{\alpha_j+\beta_j} \leqslant \sqrt{\alpha_j}+\sqrt{\beta_j}$ έπεται το λήμμα. $\square$

Για να πετύχουμε να ισχύει η $\widehat{K}(\xi) \to 0$ όταν $|\xi| \to 0$, χρησιμοποιούμε τον πυρήνα του Poisson στον $\mathbb{R}^n$, που ορίζεται από την

$$\widehat{P_t}(\xi) = e^{-t|\xi|}, \qquad t>0.$$

Από το Θεώρημα 2.4.1 γνωρίζουμε ότι

$$\Big\|\sup_{t>0}|f*P_t|\Big\|_2 \leqslant C\|f\|_2 \tag{5.3.7}$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, όπου $C>0$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από την διάσταση n.

Έστω B ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα. Παρατηρούμε ότι με τον προηγούμενο συμβολισμό έχουμε

$$M_B f = \sup_{t>0}|f*(\mathbf{1}_B)_{(t)}|,$$

οπότε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|M_B f\|_2 \leqslant \left\| \sup_{t>0} |f * K_{(t)}| \right\|_2 + \left\| \sup_{t>0} |f * P_t| \right\|_2,$$

όπου $K = \mathbf{1}_B - P_L$, και $L = L_B$. Ο πρώτος όρος φράσσεται από το Λήμμα 5.3.1 ενώ ο δεύτερος από την (5.3.7), άρα το μόνο που μένει για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του θεωρήματος είναι να δείξουμε ότι η $\Gamma(K)$ φράσσεται από σταθερά.

Σταθεροποιούμε $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και θέτουμε $\zeta = \xi/|\xi| \in S^{n-1}$. Τότε, χρησιμοποιώντας την $\varphi(u) = \varphi_\zeta(u) = |B \cap (\zeta^\perp + u\zeta)|$ έχουμε

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{1}}_B(\xi) &= \int_B e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} dx = \int_B e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} dx = \int \varphi(u) e^{2\pi i|\xi|u} du = \\ &= \int \varphi(u)\cos(2\pi|\xi|u)du + i\int \varphi(u)\sin(2\pi|\xi|u)du \\ &= \int \varphi(u)\cos(2\pi|\xi|u)du \end{aligned}$$

αφού το B είναι συμμετρικό και άρα η φ άρτια, δηλαδή η $\varphi(u)\sin(2\pi|\xi|u)$ είναι περιττή. Επίσης, $\varphi(u) = 0$ όταν $|u| \to \infty$, άρα μπορούμε να γράψουμε, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες,

$$\widehat{\mathbf{1}}_B(\xi) = -\int \varphi'(u)\frac{\sin(2\pi|\xi|u)}{2\pi|\xi|}du = -\frac{1}{\pi|\xi|}\int_0^\infty \varphi'(u)\sin(2\pi|\xi|u)du,$$

αφού η $\phi'(u)\sin(2\pi|\xi|u)$ είναι άρτια. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.5 παίρνουμε

$$|\widehat{\mathbf{1}}_B(\xi)| \leqslant \frac{1}{\pi|\xi|}\int_0^\infty |\varphi'(u)|du = \frac{1}{\pi|\xi|}\varphi(0) \leqslant C|\xi|^{-1}L_B^{-1}. \tag{5.3.8}$$

Επίσης, αν $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ γράφουμε

$$\widehat{\mathbf{1}}_B(\xi) = \int_B e^{2\pi i\sum x_i\xi_i} dx$$

οπότε

$$\nabla\widehat{\mathbf{1}}_B(\xi) = \left(\int_B 2\pi i x_1 e^{2\pi i\sum x_i\xi_i}dx, \dots, \int_B 2\pi i x_n e^{2\pi i\sum x_i\xi_i}dx\right)$$

και άρα

$$\begin{aligned} \langle\nabla\widehat{\mathbf{1}}_B(\xi), \xi\rangle &= 2\pi i\int_B \langle x,\xi\rangle e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx = 2\pi i\int u|\xi|\varphi(u)e^{2\pi i|\xi|u}du \\ &= 2\pi i|\xi|\left(\int u\varphi(u)\cos(2\pi|\xi|u)du + i\int u\varphi(u)\sin(2\pi|\xi|u)du\right) \\ &= -2\pi|\xi|\int u\varphi(u)\sin(2\pi|\xi|u)du = -\int (u\varphi(u))'\cos(2\pi|\xi|u)du. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$|\langle \nabla \widehat{\mathbf{1}}_B(\xi), \xi\rangle| \leqslant \int |(u\varphi(u))'|du \leqslant \int \varphi(u)du + \int |u\varphi'(u)|du \tag{5.3.9}$$
$$= |B| + \int (-u\varphi'(u))du = 1 + \int \varphi(u)du = 2.$$

Τέλος,

$$1 - \widehat{\mathbf{1}}_B(\xi) = \int_B (1 - e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle})dx = \int \varphi(u)[1 - \cos(2\pi u|\xi|)]du,$$

και χρησιμοποιώντας την $1 - \cos(2\pi t) \leqslant C|t|$, $t \in \mathbb{R}$, για κάποια σταθερά $C > 0$, έχουμε

$$|1 - \widehat{\mathbf{1}}_B(\xi)| \leqslant C \int \varphi(u)|u|\,|\xi|du = C|\xi| \int_B |\langle x, \zeta\rangle|dx \tag{5.3.10}$$
$$\leqslant C|\xi| \left(\int_B |\langle x, \zeta\rangle|^2 dx\right)^{1/2} = C|\xi|L_B,$$

όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της ισοτροπικής σταθεράς L_B.

Παρατηρούμε ότι $|\langle \nabla \widehat{P}_L(\xi), \xi\rangle| \leqslant C$, και από την (5.3.9) συμπεραίνουμε ότι

$$\beta_j \leqslant C_0, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Αν $2^j \leqslant L_B^{-1}$, χρησιμοποιώντας την (5.3.10) γράφουμε

$$\alpha_j = \sup_{2^j \leqslant |\xi| < 2^{j+2}} |\widehat{K}(\xi)| \leqslant \sup_{2^j \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+2}} (|1 - \widehat{\mathbf{1}}_B(\xi)| + |1 - \widehat{P}_L(\xi)|)$$
$$\leqslant C2^j L_B + (1 - e^{-2^{j+2}L_B}) \leqslant C2^j L_B.$$

Αν $2^j \geqslant L_B^{-1}$, χρησιμοποιώντας την (5.3.8) γράφουμε

$$\alpha_j \leqslant \sup_{2^j \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+2}} (|\widehat{\mathbf{1}}_B(\xi)| + |\widehat{P}_L(\xi)|) \leqslant C(2^j L_B)^{-1} + e^{-2^j L_B} \leqslant C(2^j L_B)^{-1}.$$

Έστω j_0 ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $2^{j_0} L_B \leqslant 1$. Τότε $2^{j_0} L_B \geqslant \frac{1}{2}$, άρα

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \alpha_j \leqslant \frac{C}{L_B} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{C}{2^{j_0} L_B} \leqslant 2C$$

και

$$\sum_{-\infty}^{j_0} \alpha_j \leqslant CL_B \sum_{-\infty}^{j_0} 2^j = CL_B \sum_{s=-j_0}^{\infty} 2^{-s} = CL_B 2^{j_0+1} \leqslant 2C.$$

Συνεπώς,

$$\sum_j \alpha_j \leqslant 4C.$$

Με παρόμοιο τρόπο ελέγχουμε ότι

$$\sum_j \sqrt{\alpha_j} \leqslant C',$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στην

$$\sum_j \sqrt{\alpha_j}\sqrt{\beta_j} \leqslant C''.$$

Τελικά, $\Gamma(K) \leqslant C$ και αυτό αποδεικνύει το θεώρημα.

5.4 Οι εκτιμήσεις των Carbery και Bourgain για $p > 3/2$

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε, πολύ συνοπτικά, την επέκταση της L^2-εκτίμησης του Bourgain από τον Carbery [6] για κάθε $p > 3/2$. Το ίδιο αποτέλεσμα αποδείχτηκε και από τον Bourgain στο [4]. Μια πλήρης ανάλυση αυτού του αποτελέσματος δίνεται στο Κεφάλαιο 6 του άρθρου επισκόπησης [7] των Deleaval, Guédon και Maurey.

Θεώρημα 5.4.1. *Έστω $p > 3/2$. Υπάρχει σταθερά $C_p > 0$, η οποία εξαρτάται μόνο από το p, τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ο μεγιστικός τελεστής*

$$M_B f(x) = \sup_{t>0} t^{-n} \int_{tB} |f(x-y)|\, dy \tag{5.4.1}$$

ικανοποιεί την

$$\|M_B f\|_p \leqslant C_p\, \|f\|_p. \tag{5.4.2}$$

Επίσης, αν συμβολίσουμε με $\tilde{M}_B$ τον μεγιστικό τελεστή

$$\tilde{M}_B f(x) = \sup_k\, 2^{-kn} \int_{2^k B} |f(x-y)|\, dy, \tag{5.4.3}$$

τότε για κάθε $p > 1$ υπάρχει σταθερά $D_p > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\tilde{M}_B f\|_p \leqslant D_p\, \|f\|_p. \tag{5.4.4}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.1 ο Carbery χρησιμοποιεί μια «αρχή σχεδόν-ορθογωνιότητας». Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς. Έστω T_{jv}, με $j \in \mathbb{Z}$ και $v \in S$ όπου S είναι ένα σύνολο δεικτών, μια οικογένεια γραμμικών τελεστών (στη συνέχεια θα είναι κάποιοι τελεστές πολλαπλασιαστών). Θεωρούμε επίσης κάποιους γραμμικούς τελεστές R_j, $j \in \mathbb{Z}$, τέτοιους ώστε $\mathrm{Id} = \sum_j R_j$. Τέλος, ορίζουμε τον μεγιστικό τελεστή

$$T_* f(x) = \sup_{j,v} |T_{jv} f(x)|.$$

Ορισμός 5.4.2. (α) Λέμε ότι ο T_* είναι ασθενώς φραγμένος ως προς R_j στον L^q αν υπάρχει $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\sup_k \left\| \sup_{j,v} |T_{jv} R_{j+k} f| \right\|_q \leqslant C \|f\|_q$$

για κάθε $f \in L^q$.

(β) Λέμε ότι ο T_* είναι ισχυρά φραγμένος στον L^q αν υπάρχει μια ακολουθία (a_k) μη αρνητικών πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί την $\sum_k a_k^t < \infty$ για κάθε $t > 0$, τέτοια ώστε

$$\left\| \sup_{j,v} |T_{jv} R_{j+k} f| \right\|_q \leqslant a_k \|f\|_q$$

για κάθε k και για κάθε $f \in L^q$.

Παρατηρήστε ότι αν οι τελεστές R_j είναι ομοιόμορφα φραγμένοι στον L^q τότε: αν ο T_* είναι ισχυρά φραγμένος έπεται ότι είναι φραγμένος στον L^q και τότε είναι ασθενώς φραγμένος στον L^q. Πράγματι, έχουμε

$$|T_{jv} f| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_{jv} R_{j+k} f \right| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} |T_{jv} R_{j+k} f| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_v |T_{jv} R_{j+k} f|,$$

άρα

$$\sup_v |T_{jv} f| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_v |T_{jv} R_{j+k} f|$$

και έπεται ότι

$$|T_* f| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{j,v} |T_{jv} R_{j+k} f|,$$

άρα

$$\|T_* f\|_q \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \sup_{j,v} |T_{jv} R_{j+k} f| \right\|_q \leqslant \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \right) \|f\|_q.$$

Επίσης, αν ο T_* είναι ισχυρά φραγμένος σε κάποιον L^{q_0} και ασθενώς φραγμένος σε κάποιον L^{q_1} τότε εφαρμόζοντας μιγαδική παρεμβολή μπορούμε να δούμε ότι είναι φραγμένος στον L^q για κάθε q που είναι (γνήσια) ανάμεσα στους q_0 και q_1.

Ορισμός 5.4.3. Λέμε ότι μια οικογένεια (T_{jv}) γραμμικών τελεστών είναι ουσιαστικά θετική αν υπάρχουν γραμμικοί τελεστές S_{jv} και U_{jv} τέτοιοι ώστε: $S_{jv} \geqslant 0$, $U_{jv} \geqslant 0$, ο S_* είναι φραγμένος στον L^r, $1 < r \leqslant \infty$, και

$$T_{jv} = U_{jv} - S_{jv}.$$

Με αυτούς τους ορισμούς, ο Carbery αποδεικνύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.4.4. *Έστω $1 < p \leqslant 2$ και έστω (T_{jv}) μια ουσιαστικά θετική οικογένεια γραμμικών τελεστών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $q > p$ τέτοιος ώστε ο T_* να είναι ισχυρά φραγμένος στον L^q, και ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε*

$$\sup_j \Big\| \sup_v |T_{jv} f| \Big\|_r \leqslant C_r \|f\|_r$$

και

$$\Bigg\| \Big(\sum_j |R_j f|^2 \Big)^{1/2} \Bigg\|_r \leqslant C_r \|f\|_r$$

για κάθε $r \in (p, p+\varepsilon)$. Τότε, ο T_* είναι φραγμένος στον L^r για κάθε $r \in (p, q]$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι: για όλα εκτός από N το πλήθος από τα j, ισχύει $T_{jv} = 0$ για κάθε v. Θα αποδείξουμε ένα φράγμα για τον T_* το οποίο δεν θα εξαρτάται από το N.

Σταθεροποιούμε r με $p < r < q$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $A_N > 0$ ώστε

$$\|T_* f\|_r \leqslant A_N \|f\|_r, \qquad f \in L^r.$$

Θεωρούμε πρώτα ανισότητες της μορφής

$$\Big\| \, \| \sup_v |T_{jv} g_j| \, \|_{\ell^s} \Big\|_{L^t} \leqslant C_{s,t} \Big\| \, \|g_j\|_{\ell^s} \Big\|_{L^t}. \tag{5.4.5}$$

Από την υπόθεση, η (5.4.5) ισχύει για $s = t$ στο $(p, p+\varepsilon)$. Ισχύει επίσης αν $t = r$ και $s = \infty$, με μια σταθερά B_N η οποία εξαρτάται από την A_N, διότι οι U_{jv} και S_{jv} είναι θετικοί. Χρησιμοποιώντας παρεμβολή, βρίσκουμε r_1 με $p < r_1 < r$ τέτοιο ώστε η (5.4.5) να ισχύει για $t = r_1$ και $s = 2$. Τότε,

$$\begin{aligned} \Big\| \sup_{j,v} |T_{jv} R_{j+k} f| \Big\|_{r_1} &\leqslant \Bigg\| \Big(\sum_j \sup_v |T_{jv} R_{j+k} f|^2 \Big)^{1/2} \Bigg\|_{r_1} \\ &\leqslant D_N \Bigg\| \Big(\sum_j |R_{j+k} f|^2 \Big)^{1/2} \Bigg\|_{r_1} \\ &\leqslant C_r D_N \|f\|_{r_1}. \end{aligned}$$

Άρα, ο T_* είναι ασθενώς φραγμένος στον L^{r_1} και, όπως είπαμε, έπεται ότι είναι φραγμένος στον L^r με σταθερά E_N. Προσέχοντας τις σταθερές βλέπουμε ότι υπάρχουν $0 < t < 1$ και $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε $E_N \leqslant a + b A_N^t$. Συνεπώς,

$$A_N \leqslant c$$

για κάποια σταθερά c που δεν εξαρτάται από το N, και αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. $\square$

Στη συνέχεια θεωρούμε τελεστές της μορφής

$$\widehat{T_{jt}f}(\xi) = m(2^j t\xi)\widehat{f}(\xi), \qquad j \in \mathbb{Z},\ 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

Θα θέλαμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.4.4 με $q = 2$, χρειαζόμαστε λοιπόν απλά κριτήρια τα οποία να μας λένε πότε ένας μεγιστικός τελεστής είναι φραγμένος στον L^2 και πότε ένας μεγιστικός τελεστής της μορφής $\sup_{1\leqslant t\leqslant 2} |K_{(t)} * f|$ είναι φραγμένος στον L^p.

Στην επόμενη πρόταση, συμβολίζουμε με $(d/du)^\rho$ τον τελεστή κλασματικής παραγώγισης, και

$$(\xi, \nabla)^\rho m(\xi) = (d/du)^\rho m(u\xi)|_{u=1} = \int (2\pi i\langle x, \xi\rangle)^\rho K(x) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} dx.$$

Πρόταση 5.4.5. *Έστω ότι $\widehat{K} = m \in L^\infty$. Τότε,*

(α) *Αν για κάποιον $\rho > 1/2$ έχουμε*

$$\sup_{w\in S^{n-1}} \left(\int_0^\infty |u^{\rho+1}(d/du)^\rho[u^{-1}m(uw)]|^2 \frac{du}{u} \right)^{1/2} < \infty$$

έπεται ότι

$$\left\| \sup_{0<t<\infty} |K_{(t)} * f| \right\|_2 \leqslant C\|f\|_2.$$

(β) *Αν για κάποιον $\rho > 1/p$, ή $\rho = 1$ αν $p = 1$, οι m και $(\xi, \nabla)^\rho m$ είναι και οι δύο L^p-πολλαπλασιαστές, τότε*

$$\left\| \sup_{1\leqslant t<\leqslant 2} |K_{(t)} * f| \right\|_p \leqslant C\|f\|_p.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\frac{m(t\xi)}{t} = C_\rho \int_0^\infty (u-t)_+^{\rho-1}(d/du)^\rho[m(u\xi)/u]du.$$

Άρα,

$$|K_{(t)} * f| \leqslant C_\rho \int_0^\infty (1 - t/u)_+^{\rho-1} \frac{t}{u} |P_u^\rho f| \frac{du}{u},$$

όπου

$$\widehat{P_u^\rho f}(\xi) = u^{\rho+1}(d/du)^\rho[m(u\xi)/u]\widehat{f}(\xi).$$

Συνεπώς, αν $p = 2$ και $\rho > 1/2$ τότε

$$\sup_{0<t<\infty} |K_{(t)} * f| \leqslant C_\rho \left(\int_0^\infty |P_u^\rho f|^2 \frac{du}{u} \right)^{1/2},$$

και αν ικανοποιείται η υπόθεση του (α) συμπεραίνουμε ότι

$$\left\| \sup_{0<t<\infty} |K_{(t)} * f| \right\|_2 \leqslant C_\rho \|f\|_2.$$

Αν $p \neq 2$ και $t \geqslant 1$, τότε

$$\begin{aligned} |K_{(t)} * f| &\leqslant C_\rho \left(\int_1^\infty |(1-t/u)_+^{\rho-1} t/u|^q du \right)^{1/q} \left(\int_1^\infty |P_u^\rho f|^p \frac{du}{u^p} \right)^{1/p} \\ &\leqslant C_\rho t^{1/q} \left(\int_1^\infty |P_u^\rho f|^p \frac{du}{u^p} \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

αν $1/p + 1/q = 1$ και $\rho > 1/p$. Άρα,

$$\left\| \sup_{1 \leqslant t \leqslant 2} |K_{(t)} * f| \right\|_p \leqslant C_\rho \left(\int_1^\infty \|P_u^\rho f\|_p^p \frac{du}{u^p} \right)^{1/p}.$$

Όμως, η $\|P_u^\rho : L^p \to L^p\|$ φράσσεται από τις L^p-νόρμες των τελεστών των πολλαπλασιαστών m και $(\xi, \nabla)^\rho m$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.1. Υποθέτουμε ότι το B είναι ισοτροπικό και θεωρούμε την $K = \mathbf{1}_B$. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύουν τα εξής:

(α) $|\widehat{K}(\xi)| \leqslant \frac{C}{|\xi| L_B}$,

(β) $|\widehat{K}(\xi) - 1| \leqslant C|\xi| L_B$,

(γ) $|\langle \xi, \nabla \widehat{K}(\xi) \rangle| \leqslant C$,

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα ορίσουμε μια διάσπαση Littlewood-Paley του $\mathbb{R}^n$,

$$I = \sum_j R_j,$$

τέτοια ώστε

$$\left\| \left(\sum_j |R_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$$

για κάθε $1 \leqslant p \leqslant 2$, όπου $C_p > 0$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από το n. Μετά, παρατηρούμε ότι η ουσιαστικά θετική οικογένεια τελεστών $(K - P_{L_B})_{t>0}$ έχει μεγιστική συνάρτηση ισχυρά φραγμένη στον L^2 ως προς αυτήν την διάσπαση, με σταθερά ανεξάρτητη από το B, το n και το p. Εδώ, P είναι ο πυρήνας του Poisson. Γνωρίζουμε ότι ο P_* είναι φραγμένος στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leqslant \infty$, με σταθερά ανεξάρτητη από το n. Τέλος, δείχνουμε ότι

$$\left\| \sup_{1 \leqslant t \leqslant 2} |K_{(t)} * f| \right\|_p \leqslant C_p \|f\|_p,$$

με την σταθερά C_p ανεξάρτητη από το B και το n αν $p > 3/2$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη λόγω του Θεωρήματος 5.4.4. Στην περίπτωση του $\tilde{M}_B$ το τρίτο βήμα δεν είναι απαραίτητο, διότι $\|K\|_1 = 1$.

Για το πρώτο βήμα ορίζουμε $R_j = P_{2^{j+1}} - P_{2^j}$. Τότε,

$$\left(\sum_j |R_j f|^2 \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\log 2}\, g_1(f)(x),$$

όπου $g_1(f)$ είναι η κλασική συνάρτηση Littlewood-Paley. Κατόπιν, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για κάθε $1 \leqslant p \leqslant 2$ ισχύει

$$\|g_1(f)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p,$$

όπου $C_p > 0$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από το n.

Για το δεύτερο βήμα εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.4.5 (α) για καθέναν από τους τελεστές $(K - P_{L_B})R_k$, $k \in \mathbb{Z}$ σε συνδυασμό με τις τρεις ιδιότητες (α)-(γ) της $\widehat{K}$, και παίρνουμε

$$\| \, [(K - P_{L_B})R_k]_* \|_2 \leqslant C a_k \|f\|_2,$$

για κάποιους a_k με $\sum_k a_k^t < \infty$, $0 < t \leqslant 1$. Αυτό υπολείπεται κάπως από το να δείξουμε ότι έχουμε ισχυρά φραγμένο τελεστή στον L^2, μπορούμε όμως να πετύχουμε αυτό που θέλουμε με μια μικρή τροποποίηση αυτού του επιχειρήματος.

Τέλος, παρατηρούμε ότι η $\widehat{K}$ έχει νόρμα L^1-πολλαπλασιαστή ίση με 1, και παράλληλα από την ιδιότητα (γ) η $(\xi, \nabla)\widehat{K}$ έχει νόρμα L^2-πολλαπλασιαστή φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά. Χρησιμοποιώντας μιγαδική παρεμβολή βλέπουμε ότι η $(\xi, \nabla)^\rho \widehat{K}$ έχει νόρμα L^p-πολλαπλασιαστή φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά αν $\rho < 2/p'$, $0 < \rho < 1$, $1 < p < 2$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.4.5 παίρνουμε

$$\left\| \sup_{1 \leqslant t \leqslant 2} |K_{(t)} * f| \right\|_p \leqslant C_p \|f\|_p,$$

με μια σταθερά C_p που εξαρτάται μόνο από το p, αν $1/p < 2/p'$, το οποίο συμβαίνει αν $p > 3/2$. $\square$

Κεφάλαιο 6

Οι εκτιμήσεις του Muller

6.1 Το κύριο αποτέλεσμα

Έστω B ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι υπάρχουν γραμμικός μετασχηματισμός $S \in GL(n)$ και μια σταθερά $L_B > 0$ τέτοια ώστε

(6.1.1) $$|S(B)| = 1 \quad \text{και} \quad \int_{S(B)} |\langle x, \xi\rangle|^2 dx = L_B^2$$

για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\xi \in S^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi|^2 = \sum_j |\xi_j|^2 = 1\}$. Η σταθερά L_B προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την (6.1.1) και ο S είναι μοναδικός modulo πολλαπλασιασμό με ορθογώνιο μετασχηματισμό από τα αριστερά.

Για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ ορίζουμε

(6.1.2) $$\varphi(u) := \varphi_\xi(u) = |\{x \in S(B) : \langle x, \xi\rangle = u\}|, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, συμβολίζουμε με π_ξ την ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στο υπερεπίπεδο $\xi^\perp$ που είναι κάθετο στο ξ. Παρατηρήστε ότι οι σταθερές

(6.1.3) $$\frac{1}{\sigma(B)} := \max\{\varphi_\xi(0) : \xi \in S^{n-1}\}$$

και

(6.1.4) $$Q(B) := \max\{|\pi_\xi(S(B))| : \xi \in S^{n-1}\}$$

είναι γραμμικές αναλλοίωτες του B, δηλαδή $\sigma(T(B)) = \sigma(B)$ και $Q(T(B)) = Q(B)$ για κάθε $T \in GL(n)$.

Αφού η νόρμα $\|M_B\|_p$ είναι επίσης γραμμική αναλλοίωτη του B, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $S(B) = B$. Τότε, όπως είδαμε στην Παράγραφο 4.2, για κάθε $u \in \mathbb{R}$ ισχύει

(6.1.5) $$\varphi(u) \leqslant A\varphi(0)e^{-a\varphi(0)|u|}$$

όπου $0 < a, A < \infty$ είναι δύο απόλυτες σταθερές. Επίσης, για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ ισχύει

(6.1.6)
$$\frac{1}{a_1} \leqslant L_K \varphi_\xi(0) \leqslant a_1,$$

όπου $a_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

(6.1.7)
$$\sigma(K) \simeq L_K.$$

Ο Muller [10] απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.1.1. *Έστω $p > 1$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*

(6.1.8)
$$\|M_B f\|_p \leqslant C(p, \sigma(B), Q(B))\, \|f\|_p,$$

όπου η σταθερά $C = C(p, \sigma, Q)$ είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση n και αύξουσα ως προς σ και Q.

Τα αποτελέσματα των Bourgain και Carbery που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δείχνουν ότι αν $p > 3/2$ τότε η σταθερά C μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητη και από τις σ και Q.

Στα επόμενα χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό. Γράφουμε m για τον πολλαπλασιαστή

(6.1.9)
$$m(\xi) = \widehat{\mathbf{1}}_B(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} dx$$

που αντιστοιχεί στην $\mathbf{1}_B$. Για κάθε πολλαπλασιαστή $w \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε τον τελεστή T_w ως εξής:

(6.1.10)
$$T_w(f) = \mathcal{F}^{-1}(wf),$$

όπου $\mathcal{F}^{-1}$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier.

Για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$ με $\rho > 1/2$, ορίζουμε την ρ-οστή κλασματική παράγωγο $(\xi \cdot \nabla)^\rho m$ της m, θέτοντας

(6.1.11)
$$\begin{aligned}(\xi \cdot \nabla)^\rho m(\xi) &= \left(\frac{d}{dr}\right)^\rho \Big|_{r=1} m(r\xi) \\ &= \int (-2\pi i \langle x, \xi\rangle)^\rho B(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi\rangle} dx,\end{aligned}$$

όπου $B = \mathbf{1}_B$. Με βάση το Θεώρημα 5.4.4 και την Πρόταση 5.4.5 (β) του Carbery, το Θεώρημα 6.1.1 θα προκύψει άμεσα από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.1.2. *Έστω $1/2 < \rho < 1$. Για κάθε $1 < p < \infty$ και $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|T_{(\xi\cdot\nabla)^\rho m} f\|_p \leqslant C_\rho(p, \sigma(B), Q(B))\, \|f\|_p, \tag{6.1.12}$$

όπου η σταθερά C_p είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση n.

Η πρόταση αυτή συνδέεται στενά με το ερώτημα του Carbery αν μπορούμε να βρούμε φράγμα για τον $T_{(\xi\cdot\nabla)m}$ το οποίο να είναι ανεξάρτητο από το n.

Για την απόδειξη της Πρότασης 6.1.2 θα χρησιμοποιήσουμε μιγαδική παρεμβολή. Ορίζουμε μια οικογένεια τελεστών $T_\alpha = T_{m_\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, θέτοντας

$$m_\alpha(\xi) = (1 + |\xi|)^{1-\alpha}[I^{-\alpha} m(r\xi)]\,\Big|_{r=1}, \qquad \xi \neq 0, \tag{6.1.13}$$

όπου $I^{-\alpha}$ είναι η α-οστή κλασματική παράγωγος Riesz με βάση το 2, δηλαδή

$$I^{-\alpha} f(r) = \frac{-1}{\Gamma(-\alpha)} \int_r^2 (s - r)^{-\alpha-1} f(s)\, ds, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) < 0 \tag{6.1.14}$$

για κάθε $f \in C^\infty(0, 2]$.

Είναι γνωστό ότι η $I^{-\alpha}$ επεκτείνεται αναλυτικά σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, και ότι $I^{-k} = (d/dr)^k$ είναι η συνήθης k-οστή παράγωγος αν $k = 0, 1, \ldots$. Παρατηρήστε ότι η $I^{-\alpha}$ δεν συμφωνεί με την $(d/dr)^\alpha$, όπως αυτή ορίστηκε στην (6.1.11). Όπως όμως θα δούμε, η διαφορά τους δεν είναι σημαντική για το πρόβλημά μας.

Ορίζουμε επίσης $T_\alpha^\varepsilon = T_{m_\alpha^\varepsilon}$, όπου

$$m_\alpha^\varepsilon(\xi) = (1 + |\xi|)^{-\varepsilon} m_\alpha(\xi), \qquad \varepsilon > 0. \tag{6.1.15}$$

Τα βασικά λήμματα για την απόδειξη της Πρότασης 6.1.2 είναι το Λήμμα 6.1.4 και το Λήμμα 6.1.6 τα οποία θα εξασφαλίσουν τις δύο ακραίες περιπτώσεις με βάση τις οποίες θα κάνουμε παρεμβολή. Τα Λήμματα 6.1.3 και 6.1.5 είναι περισσότερο τεχνικής φύσεως.

Λήμμα 6.1.3. *Έστω $0 \leqslant \mathrm{Re}(\alpha) < 1$ και $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $u > 1$,*

$$\left| \int_0^u \frac{s^{-\alpha}}{(1 + s/u)^k} e^{-2\pi i s} ds - \frac{e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}}{i} \Gamma(1 - \alpha) \right| \leqslant C_k e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha)|} u^{-\mathrm{Re}(\alpha)}. \tag{6.1.16}$$

Για την απόδειξη του Λήμματος 6.1.3 χρησιμοποιούμε το ολοκληρωτικό θεώρημα του Cauchy και αλλάζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης από $[0, u]$ σε $-i[0, u]$, συνδέοντάς τα με τεταρτοκύκλια ακτίνας u και ε, όπου $\varepsilon \to 0$.

Λήμμα 6.1.4. *Για κάθε $N > 0$ και $0 < \varepsilon < 1/2$ έχουμε:*

(i) $\|m_\alpha\|_\infty \leqslant C_N(\sigma(B), Q(B)) e^{2\pi|\mathrm{Im}(\alpha)|}$ *αν* $0 \leqslant \mathrm{Re}(\alpha) < N$.

(ii) $\|m_\alpha^\varepsilon\|_\infty \leqslant C_N(\sigma(B), Q(B))e^{2\pi|\mathrm{Im}(\alpha)|}$ *αν* $-\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(\alpha) \leqslant N$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{Re}(\alpha) \geqslant -\varepsilon$ και θέτουμε $k = \lfloor \mathrm{Re}(\alpha) \rfloor$, το ακέραιο μέρος του $\mathrm{Re}(\alpha)$. Από την (6.1.13) με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

(6.1.17)
$$m_\alpha(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{\Gamma(j+1-\alpha)}(1+|\xi|)^{1-\alpha}\left(\frac{d}{dr}\right)^j m(r\xi)\Big|_{r=2} + \frac{(-1)^k(1+|\xi|)^{1-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\int_1^2 (s-1)^{k-\alpha}\left(\frac{d}{ds}\right)^{k+1} m(s\xi)\,ds.$$

Εφαρμόζοντας την (6.1.1) για την $\varphi = \varphi_{\xi/|\xi|}$ έχουμε

(6.1.18)
$$m(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\xi|u|}\varphi(u)\,du,$$

άρα

(6.1.19)
$$\left(\frac{d}{dr}\right)^j m(r\xi)\Big|_{r=2} = (-2\pi i|\xi|)^j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi i|\xi|u}u^j\varphi(u)\,du.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

(6.1.20)
$$\left(\frac{d}{dr}\right)^j m(r\xi)\Big|_{r=2} = \frac{1}{2}(-2\pi i|\xi|)^{j-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi i|\xi|u}(u^j\varphi)'(u)\,du.$$

Από τις (6.1.2) και (6.1.19) παίρνουμε, για κάθε $0 \leqslant j \leqslant N$,

(6.1.21)
$$\left|\left(\frac{d}{dr}\right)^j m(r\xi)\Big|_{r=2}\right| \leqslant C_N|\xi|^j \int_0^\infty u^j\varphi(0)e^{-a\varphi(0)u}du \leqslant C_N\varphi(0)^{-j}|\xi|^j \leqslant C_N\sigma(B)^j|\xi|^j.$$

Επιπλέον, αφού $(u^j\varphi)'(u) = ju^{j-1}\varphi(u) + u^j\varphi'(u)$, και αφού η $\varphi'(u)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για $u \geqslant 0$ και $u \leqslant 0$ αντίστοιχα, από τις (6.1.20) και (6.1.5) παίρνουμε

(6.1.22)
$$\left|\left(\frac{d}{dr}\right)^j m(r\xi)\Big|_{r=2}\right| \leqslant C_N\varphi(0)^{-(j-1)}|\xi|^{j-1} \leqslant C_N\sigma(B)^{j-1}|\xi|^{j-1}.$$

Συνδυάζονας τα παραπάνω έχουμε

(6.1.23)
$$\left|\left(\frac{d}{dr}\right)^j m(r\xi)\Big|_{r=2}\right| \leqslant \frac{C_N(\sigma(B))|\xi|^j}{1+|\xi|},$$

τουλάχιστον όταν $j \geqslant 1$. Όμως, όταν $j = 0$, από τις (6.1.19) και (6.1.20) εύκολα βλέπουμε ότι

(6.1.24)
$$|m(\xi)| \leqslant \frac{C(1+\varphi(0))}{1+|\xi|} \leqslant \frac{C\cdot Q(B)}{1+|\xi|}.$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\left|\left(\frac{d}{dr}\right)^j m(r\xi)\big|_{r=2}\right| \leqslant C_N(\sigma(B), Q(B))\frac{|\xi|^j}{1+|\xi|}, \qquad 0 \leqslant j < N. \tag{6.1.25}$$

Άρα, για κάθε $j = 0, \ldots, k$,

$$\left|\frac{(1+|\xi|)^{\alpha-1}}{\Gamma(j+1-\alpha)}\left(\frac{d}{dr}\right)^j m(r\xi)\big|_{r=2}\right| \leqslant C_N(\sigma, Q)e^{\pi|\mathrm{Im}(\alpha)|}, \tag{6.1.26}$$

αν πάρουμε υπόψη μας την ασυμπτωτική σχέση

$$|\Gamma(x+iy)| \sim \sqrt{2\pi}e^{-\pi|y|/2}|y|^{x-\frac{1}{2}}, \qquad |y| \to \infty. \tag{6.1.27}$$

Απομένει να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα στην (6.1.17), το οποίο, αν ξεχάσουμε το πρόσημο, δίνεται από την

$$J(\xi) = \frac{(1+|\xi|)^{1-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}(-2\pi i|\xi|)^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty} F(|\xi|u)u^{k+1}\varphi(u)\,du, \tag{6.1.28}$$

όπου

$$F(t) = \int_1^2 (s-1)^{k-\alpha}e^{-2\pi its}ds. \tag{6.1.29}$$

Η εκτίμηση του $J(\xi)$ βασίζεται ουσιαστικά στην (6.1.5). Θέτουμε

$$G(u) = \int_0^u t^{k+1}F(t)\,dt, \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{6.1.30}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} F(|\xi|u)u^{k+1}\varphi(u)\,du &= |\xi|^{-k-2}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)u^{k+1}\varphi(u/|\xi|)\,du \\ &= -|\xi|^{-k-3}\int_{-\infty}^{\infty} G(u)\varphi'(u/|\xi|)\,du,\end{aligned} \tag{6.1.31}$$

άρα

$$|J(\xi)| \leqslant C_N|\xi|^{-2}(1+|\xi|)^{1-\mathrm{Re}(\alpha)}\left|\frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty} G(u)\varphi'(u/|\xi|)\,du\right|. \tag{6.1.32}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}\int_0^u t^{k+1}e^{-2\pi its}dt = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{k+1}\Big[&(-1)^{k+1}(k+1)!s^{-k-2}(e^{-2\pi ius}-1) \\ &+ \sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(-1)^j j!(-2\pi i)^{k-j}s^{-j-1}u^{k+1-j}e^{-2\pi ius}\Big].\end{aligned} \tag{6.1.33}$$

Θέτουμε

$$G_j(u) = u^{k+1-j} \int_1^2 (s-1)^{k-\alpha} s^{-j-1} e^{-2\pi i u s} ds, \qquad j = 0, 1, \ldots, k+1, \tag{6.1.34}$$

και

$$G_{k+2}(u) = G_{k+2} = \int_1^2 (s-1)^{k-\alpha} s^{-k-2} ds = \int_0^1 \frac{s^{k-\alpha}}{(s+1)^{k+2}}\, ds, \tag{6.1.35}$$

και, για $j = 0, 1, \ldots, k+2$, ορίζουμε

$$J_j(\xi) = \frac{(1+|\xi|)^{1-\mathrm{Re}(\alpha)}}{|\xi|^2} \left| \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} G_j(u) \varphi'(u/|\xi|)\, du \right|. \tag{6.1.36}$$

Από την (6.1.33) η G είναι γραμμικός συνδυασμος των G_j, άρα αρκεί να δείξουμε ότι όλες οι συναρτήσεις J_j ικανοποιούν το φράγμα που θέλουμε.

Για κάθε $j = 0, 1, \ldots, k+1$ έχουμε

$$G_j(u) = u^{\alpha-j} e^{-2\pi i u} \int_0^u \frac{s^{k-\alpha}}{(1+s/u)^{j+1}} e^{-2\pi i s} ds, \tag{6.1.37}$$

άρα το Λήμμα 6.1.3 μας δίνει

$$G_j(u) = \pm i e^{\frac{\pi}{2}(\alpha-k)i} \Gamma(k+1-\alpha) u^{\alpha-j} e^{-2\pi i u} + O(e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha)|} |u|^{k-j}) \tag{6.1.38}$$

αν $|u| > 1$. Από την άλλη πλευρά, αν $|u| \leqslant 1$, τότε

$$G_j(u) = u^{\alpha-j} \frac{e^{-2\pi i u}}{k+1-\alpha} \Big[\frac{u^{k+1-\alpha}}{2^{j+1}} e^{-2\pi i u} - \int_0^u s^{k+1-\alpha} \frac{d}{ds} \Big[\frac{e^{-2\pi i s}}{(1+s/u)^{j+1}} \Big] ds \Big], \tag{6.1.39}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$|G_j(u)| \leqslant C_N \frac{|u|^{k+1-j}}{|k+1-\alpha|}, \qquad |u| \leqslant 1. \tag{6.1.40}$$

Από τις (6.1.38) και (6.1.40) έχουμε

$$\begin{aligned} |J_j(\xi)| \leqslant -C_N \frac{(1+|\xi|)^{1-\mathrm{Re}(\alpha)}}{|\xi|^2} \cdot \Big[\frac{1}{|\Gamma(k+2-\alpha)|} \int_0^1 u^{k+1-j} \varphi'(u/|\xi|) du \\ + e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha)|} \int_1^{\infty} \Big[u^{\mathrm{Re}(\alpha)-j} + \frac{u^{k-j}}{|\Gamma(k+1-\alpha)|} \Big] \varphi'(u/|\xi|)\, du \Big]. \end{aligned} \tag{6.1.41}$$

Παρατηρούμε ότι αν $j \leqslant k+1$ τότε

$$\left| \int_0^1 u^{k+1-j} \varphi'(u/|\xi|) du \right| \leqslant - \int_0^1 \varphi'(u/|\xi|) du \leqslant 2\varphi(0)|\xi|, \tag{6.1.42}$$

και όμοια, από την (6.1.5),

$$\begin{aligned}(6.1.43)\qquad &\left|\int_1^\infty u^{\mathrm{Re}(\alpha)-j}\varphi'(u/|\xi|)du\right| \\ &= -|\xi|^{1+\mathrm{Re}(\alpha)-j}\int_{1/|\xi|}^\infty u^{\mathrm{Re}(\alpha)-j}\varphi'(u)\,du \\ &\leqslant |\xi|^{1+\mathrm{Re}(\alpha)-j}\Big[|\xi|^{j-\mathrm{Re}(\alpha)}\varphi(1/|\xi|) + |\mathrm{Re}(\alpha)-j|\varphi(0)\int_{1/|\xi|}^1 u^{\mathrm{Re}(\alpha)-j-1}du \\ &+ |\mathrm{Re}(\alpha)-j|\int_1^\infty u^{\mathrm{Re}(\alpha)-j}\varphi(u)\,du\Big] \\ &\leqslant C_N(\sigma,Q)|\xi|^{1+\mathrm{Re}(\alpha)-j}(1+|\xi|^{j-\mathrm{Re}(\alpha)}),\end{aligned}$$

άρα

$$(6.1.44)\qquad \left|\int_1^\infty u^{\mathrm{Re}(\alpha)-j}\varphi'(u/|\xi|)\,du\right| \leqslant C_N(\sigma,Q)|\xi|^{1+\mathrm{Re}(\alpha)} \ \text{αν } j\leqslant k$$

και

$$(6.1.45)\qquad \left|\int_1^\infty u^{\mathrm{Re}(\alpha)-j}\varphi'(u/|\xi|)\,du\right| \leqslant C_N(\sigma,Q)|\xi| \ \text{αν } j=k+1.$$

Το ολοκλήρωμα

$$\left|\int_1^\infty u^{k-j}\varphi'(u/|\xi|)\,du\right|$$

ικανοποιεί κι αυτό το ίδιο φράγμα. Από τις (6.1.41), (6.1.42) και (6.1.44) έχουμε, για $|\xi|\geqslant 1$,

$$(6.1.46)\qquad |J_j(\xi)| \leqslant C_N(\sigma,Q)e^{2\pi|\mathrm{Im}(\alpha)|}(1+|\xi|^{-\mathrm{Re}(\alpha)}),\qquad j=0,1,\dots,k+1.$$

Επιπλέον, αφού προφανώς έχουμε $|G_{k+2}|\leqslant C_N/|k+1-\alpha|$, παίρνουμε

(6.1.47)

$$|J_{k+2}(\xi)| \leqslant C_N|\xi|^{-1-\mathrm{Re}(\alpha)}\frac{-1}{|\Gamma(k+2-\alpha)|}\int_0^\infty \varphi'(u/|\xi|)\,du \leqslant C_N(\sigma)e^{\pi|\mathrm{Im}(\alpha)|}|\xi|^{-\mathrm{Re}(\alpha)}$$

για $|\xi|\geqslant 1$. Οι τελευταίες δύο ανισότητες μας δίνουν το ζητούμενο ομοιόμορφο φράγμα για τις $m_\alpha(\xi)$ και $m_\alpha^\varepsilon(\xi)$ όταν $|\xi|\geqslant 1$.

Απομένει η περίπτωση $|\xi|<1$, η οποία είναι απλή. Με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

(6.1.48)

$$J(\xi) = \frac{(1+|\xi|)^{1-\alpha}}{\Gamma(k+2-\alpha)}\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^{k+1} m(s\xi)\Big|_{s=2} - \int_1^2 (s-1)^{k+1-\alpha}\left(\frac{d}{ds}\right)^{k+2} m(s\xi)\,ds\right],$$

και σε συνδυασμό με τις (6.1.19) και (6.1.2) παίρνουμε

$$(6.1.49)\qquad |J(\xi)| \leqslant C_N(\sigma,Q)e^{\pi|\mathrm{Im}(\alpha)|}|\xi|^{k+1},$$

το οποίο μας καλύπτει στην περίπτωση $|\xi|<1$. □

Λήμμα 6.1.5. *Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα* $\eta \in S^{n-1}$ *ορίζουμε μια κατανομή* $\mu_\eta = \partial \mathbf{1}_B/\partial_\eta = (\eta\cdot\nabla)\mathbf{1}_B$. *Τότε, η* μ_η *είναι φραγμένο μέτρο, και*

$$\|\mu_\eta\|_{M(\mathbb{R}^n)} = 2|\pi_\eta(B)|. \tag{6.1.50}$$

Απόδειξη. Έστω $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ με $\|\varphi\|_\infty = 1$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι το η είναι το διάνυσμα της n-οστής συντεταγμένης. Γράφοντας $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ και τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ στη μορφή (x,u) έχουμε

$$\langle \mu_\eta, \varphi\rangle = -\int_B \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\int_{\pi_\eta(B)}\int_{B_x}\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x,u)\,du\,dx, \tag{6.1.51}$$

όπου B_x είναι το διάστημα $B_x = \{u\in\mathbb{R} : (x,u)\in B\}$, με άκρα $a(x)\leqslant b(x)$ εκτός αν $B_x=\emptyset$. Τότε,

$$|\langle\mu_\eta,\varphi\rangle| = \left|\int_{\pi_\eta(B)}[\varphi(b(x))-\varphi(a(x))]\,dx\right| \leqslant 2|\pi_\eta(B)|, \tag{6.1.52}$$

άρα

$$\|\mu_\eta\|_M \leqslant 2|\pi_\eta(B)|. \tag{6.1.53}$$

Επιλέγοντας την φ να είναι γραμμική σε κάθε τομή B_x και να ικανοποιεί τις $\varphi(b(x))=1$ και $\varphi(a(x))=-1$, βλέπουμε ότι ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα $\|\mu_\eta\|_M \geqslant 2|\pi_\eta(B)|$. $\square$

Λήμμα 6.1.6. *Έστω* $0<\varepsilon<1/2$. *Τότε,*

$$\|T^\varepsilon_{-\varepsilon+i\nu}f\|_p \leqslant C_\varepsilon(p,\sigma(B),Q(B))e^{\frac{\pi}{2}|\nu|}\|f\|_p \tag{6.1.54}$$

για κάθε $1<p<\infty$ *και για κάθε* $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\alpha = -\varepsilon+i\nu$. Αφού

$$m^\varepsilon_\alpha(\xi) = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_1^2 (s-1)^{-\alpha-1}(1+|\xi|)^{1-\varepsilon-\alpha}m(s\xi)\,ds, \tag{6.1.55}$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι ο πολλαπλασιαστής που αντιστοιχεί στην $(1+|\xi|)^{1-\varepsilon-\alpha}m(s\xi)$ ικανοποιεί την (6.1.54) ομοιόμορφα για $1\leqslant s\leqslant 2$.

Θεωρούμε τον πολλαπλασιαστή $M_\nu(\xi) = (1+|\xi|)^{-i\nu}$. Ο πολλαπλασιαστής αυτός είναι «τύπου μετασχηματισμού Laplace» (βλέπε Παράγραφο 2.5.2). Αυτό προκύπτει από την

$$(1+\lambda)^{-i\nu} = \lambda\int_0^\infty a(t)e^{-\lambda t}dt, \qquad \lambda\geqslant 0, \tag{6.1.56}$$

όπου

$$a(t) = \frac{1}{\Gamma(1+i\nu)}\left[t^{i\nu}e^{-t} + \int_0^t s^{i\nu}e^{-s}ds\right]. \tag{6.1.57}$$

Αφού $\|a\|_\infty \leqslant Ce^{\frac{\pi}{2}|\nu|}$, από το Θεώρημα 2.5.2 έχουμε

$$\|T_{M_\nu}f\|_p \leqslant C_p e^{\frac{\pi}{2}|\nu|}\|f\|_p, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^n) \tag{6.1.58}$$

για κάθε $1 < p < \infty$, όπου C_p είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

Αφού

$$(1+|\xi|)^{1-\varepsilon-\alpha}m(s\xi) = (1+|\xi|)^{-i\nu}(1+|\xi|)m(s\xi) \tag{6.1.59}$$

και αφού

$$\|T_{m(s\cdot)}\|_{p\to p} = \|T_m\|_{p\to p} \leqslant |B| = 1 \tag{6.1.60}$$

για κάθε p, από την (6.1.58) έπεται ότι για την απόδειξη της (6.1.54) αρκεί να εκτιμήσουμε τον πολλαπλασιαστή που αντιστοιχεί στην

$$m_0(\xi) = -2\pi|\xi|m(\xi). \tag{6.1.61}$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ θεωρούμε το μέτρο μ_j με $\mu_j = \partial\mathbf{1}_B/\partial x_j$. Αφού

$$m_0(\xi) = \sum_{j=1}^n \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)(-2\pi i\xi_j m(\xi)), \tag{6.1.62}$$

έχουμε

$$T_{m_0}f = \sum_{j=1}^n \mathcal{R}_j(\mu_j * f), \tag{6.1.63}$$

όπου $\mathcal{R}_j$ είναι ο j-οστός μετασχηματισμός Riesz. Από το Θεώρημα 2.5.3 γνωρίζουμε ότι

$$\left\|\Big(\sum_{j=1}^n |\mathcal{R}_j f|^2\Big)^{1/2}\right\|_p \leqslant A_p\|f\|_p, \qquad 1 < p < \infty, \tag{6.1.64}$$

όπου η σταθερά A_p είναι ανεξάρτητη από το n. Χρησιμοποιώντας ένα απλό επιχείρημα δυϊσμού, από τις (6.1.63) και (6.1.64) παίρνουμε

$$\|T_{m_0}f\|_p \leqslant A_{p'}\left\|\Big(\sum_{j=1}^n |\mu_j * f|^2\Big)^{1/2}\right\|_p, \qquad 1 < p < \infty, \tag{6.1.65}$$

όπου p' είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Θέτουμε

$$g(f)^2(x) = \sum_{j=1}^{n} |(\mu_j * f)(x)|^2.$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε την L^p-νόρμα του υπογραμμικού τελεστή g. Αν $p=2$ τότε από την (6.1.26) παίρνουμε

$$\|g(f)\|_2 = \|T_{m_0} f\|_2 \leqslant \|m_0\|_\infty \|f\|_2 \leqslant C(\sigma, Q)\|f\|_2. \tag{6.1.66}$$

Για $p=\infty$ παρατηρούμε ότι

$$|g(f)(x)| = |(\nabla \mathbf{1}_B) * f(x)| = \sup_{\eta \in S^{n-1}} |\mu_\eta * f(x)|, \tag{6.1.67}$$

όπου το μ_η είναι αυτό του Λήμματος 6.1.5. Σε συνδυασμό με το Λήμμα 6.1.5 παίρνουμε

$$\|g(f)\|_\infty \leqslant \sup_\eta \|\mu_\eta\|_M \|f\|_\infty = 2Q(B)\|f\|_\infty. \tag{6.1.68}$$

Παρεμβολή μεταξύ των (6.1.66) και (6.1.68) δίνει

$$\|g(f)\|_p \leqslant C(p,\sigma,Q)\|f\|_p, \qquad 2 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{6.1.69}$$

άρα, από την (6.1.65), και

$$\|T_{m_0} f\|_p \leqslant C(p,\sigma,Q)\|f\|_p, \tag{6.1.70}$$

τουλάχιστον όταν $2 \leqslant p < \infty$. Περνώντας στο συζυγή τελεστή $T^*_{m_0}$ παίρνουμε την (6.1.70) και για το διάστημα $1<p<2$. Έτσι, η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης. □

Απόδειξη της Πρότασης 6.1.2. Θέτουμε $\rho = 1-\varepsilon \in (1/2, 1)$. Από το Λήμμα (6.1.4) (ii) και την (6.1.17) βλέπουμε ότι η οικογένεια $\{T^\varepsilon_\alpha\}$ είναι επιτρεπτή με την έννοια της Παραγράφου 2.7 σε κάθε λωρίδα $-\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(\alpha) \leqslant N$, $N>0$. Επιλέγοντας το N αρκετά μεγάλο και κάνοντας παρεμβολή των εκτιμήσεων του Λήμματος 6.1.4 και του Λήμματος 6.1.6 μεταξύ $\mathrm{Re}(\alpha) = -\varepsilon$ και $\mathrm{Re}(\alpha) = N$, έχουμε

$$\|T^\varepsilon_{1-\varepsilon} f\|_p \leqslant C_\varepsilon(p, \sigma(B), Q(B))\|f\|_p \tag{6.1.71}$$

για κάθε $1<p\leqslant 2$, άρα, λόγω δυϊσμού, για κάθε $1<p<\infty$. Όμως,

$$m^\varepsilon_{1-\varepsilon}(\xi) = [I^{-\rho} m(r\xi)]\big|_{r=1} = -\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} m(\xi) + \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_1^2 (s-1)^{-\rho} \frac{dm(s\xi)}{ds}\, ds. \tag{6.1.72}$$

Επιπλέον,

(6.1.73)
$$(\xi\cdot\nabla)^\alpha m(\xi) = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_1^\infty (s-1)^{-\alpha-1} m(s\xi)\,ds$$

αν $-1<\alpha<0$. Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

(6.1.74)
$$(\xi\cdot\nabla)^\alpha m(\xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_1^\infty (s-1)^{-\alpha} \frac{dm(s\xi)}{ds}\,ds$$

αν $0<\alpha<1$. Συγκρίνοντας με την (6.1.72) έχουμε

(6.1.75)
$$\begin{aligned}(\xi\cdot\nabla)^\alpha m(\xi) &= m_{1-\varepsilon}^{\varepsilon}(\xi) + \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} m(\xi) + \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_2^\infty (s-1)^{-\rho}\frac{dm(s\xi)}{ds}\,ds \\ &= m_{1-\varepsilon}^{\varepsilon}(\xi) - \frac{1}{\Gamma(-\rho)}\int_2^\infty (s-1)^{-\rho-1} m(s\xi)\,ds.\end{aligned}$$

Αφού
$$\int_2^\infty (s-1)^{-\rho-1} ds < \infty,$$
η τελευταία σχέση μαζί με την (6.1.71) μας δίνουν

(6.1.76)
$$\|T_{(\xi\cdot\nabla)^\rho} f\|_p \leqslant C_\rho(p,\sigma,Q)\,\|f\|_p.$$

□

6.2 Εφαρμογή: οι ℓ_q^n-μπάλες

Σε αυτήν την παράγραφο σταθεροποιούμε $1\leqslant q\leqslant\infty$ και θέτουμε

(6.2.1)
$$B_q = B_q^n = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_q \leqslant 1\},$$

τη μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$ ως προς την ℓ_q-νόρμα

(6.2.2)
$$\|x\|_q = \Big(\sum_{j=1}^n |x_j|^q\Big)^{1/q}, \qquad 1\leqslant q<\infty$$

και, στην περίπτωση $q=\infty$,

(6.2.3)
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_j| : 1\leqslant j\leqslant n\}.$$

Ο όγκος $\kappa_q(n)$ της B_q^n υπολογίζεται με διάφορους τρόπους (για παράδειγμα, με επαγωγή ως προς n) και είναι ίσος με

(6.2.4)
$$\kappa_q(n) = \frac{2^n\Gamma\left(\frac{1}{q}+1\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{q}+1\right)}.$$

Αν επιλέξουμε $d = d_q(n) > 0$ έτσι ώστε το σώμα $\widetilde{B}_q = dB_q$ να έχει όγκο 1 τότε από την (6.2.4) βλέπουμε ότι $d_q(n) \simeq n^{1/q}$. Στην περίπτωση $q = \infty$ έχουμε $\kappa_\infty(n) = 2^n$ και $d_\infty(n) = \frac{1}{2}$.

Το σώμα $\widetilde{B}_q$ είναι ισοτροπικό και μπορούμε να προσδιορίσουμε την ισοτροπική του σταθερά L_{B_q} με απευθείας υπολογισμό: για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ έχουμε

(6.2.5)
$$\int_{\widetilde{B}_q} \langle \xi, x\rangle^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_{\widetilde{B}_q} \xi_j^2 x_j^2 dx = \Big(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\Big) \int_{\widetilde{B}_q} x_n^2 dx = \int_{\widetilde{B}_q} x_n^2 dx.$$

Άρα,

(6.2.6)
$$L_{B_q}^2 = \int_{\widetilde{B}_q} x^2 dx = 2\int_0^{d_q(n)} x_n^2 (d_q^2(n) - |x_n|^q)^{\frac{n-1}{q}} \kappa_q(n-1) dx_n = 2d_q^{n+2}(n)\kappa_q(n-1) B\Big(\frac{3}{q}, \frac{n-1}{q}+1\Big),$$

όπου B είναι η συνάρτηση Βήτα. Παρατηρώντας ότι $\kappa_q(n) d_q^n(n) = 1$ βλέπουμε ότι

(6.2.7)
$$L_{B_q}^2 = 2d_q^2(n) \frac{\kappa_q(n-1)}{\kappa_q(n)} B\Big(\frac{3}{q}, \frac{n-1}{q}+1\Big) = A_{q,n} \simeq 1$$

από τον τύπο του Stirling, άρα

(6.2.8)
$$\frac{1}{a_1} \leqslant \sigma(B_q^n) \leqslant a_1$$

όπου $a_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση $q = \infty$: μάλιστα, έχουμε $L_{B_\infty} = 1/\sqrt{12}$, άρα $\sigma(B_\infty^n) \simeq (2\sqrt{3})^{-1}$).

Για να εκτιμήσουμε την παράμετρο $Q(\widetilde{B}_q^n)$, $q < \infty$, θεωρούμε μια ομαλή συνάρτηση $\tau : [0, \infty) \to [0, 1]$ που ικανοποιεί τις συνθήκες

(6.2.9)
$$\tau \equiv 1 \ \text{ στο } [0, d_q^q(n)],$$

(6.2.10)
$$\tau \equiv 0 \ \text{ στο } [d_q^q(n) + 1, \infty),$$

(6.2.11)
$$-2 \leqslant \tau' \leqslant 0,$$

και θέτουμε

(6.2.12)
$$K(x) = \tau\Big(\sum_{j=1}^n |x_j|^q\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Από την (6.2.9) έχουμε $\mathbf{1}_{\widetilde{B}_q} \leqslant K$, και από την (6.2.10)

$$(d_q^q(n)+1)^{1/q} B_q^n \subset \Big(1+\frac{q}{n}\Big)\widetilde{B}_q^n = \overline{B}_q^n, \tag{6.2.13}$$

άρα $\|K\|_1 \leqslant C$. Επίσης, έχουμε

$$|\pi_\xi(\widetilde{B}_q^n)| = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial K}{\partial \xi}\right\| \tag{6.2.14}$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$. Η τελευταία σχέση ισχύει μάλιστα για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B και κάθε συνάρτηση K που είναι ίση με 1 στο B και φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης από το B, αν η $\partial K/\partial\xi$ είναι ολοκληρώσιμη.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\xi = e_n$. Με το συμβολισμό του Λήμματος 6.1.6 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{B_x}\left|\frac{\partial K}{\partial \xi}(x,t)\right| dt &= \int_{b(x)}^{\infty}\left|\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\right| dt + \int_{-\infty}^{a(x)}\left|\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\right| dt \\ &= K(x,b(x)) + K(x,a(x)) = 2,\end{aligned} \tag{6.2.15}$$

άρα

$$\left\|\frac{\partial K}{\partial \xi}\right\|_1 = 2|\pi_\xi(B)|. \tag{6.2.16}$$

Για να εκτιμήσουμε την $\|\partial K/\partial\xi\|_1$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial K}{\partial \xi} = q\tau'\Big(\sum_{j=1}^n |x_j|^q\Big)\sum_{j=1}^n \xi_j \mathrm{sign}(x_j)|x_j|^{q-1}, \tag{6.2.17}$$

άρα

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial K}{\partial \xi}\right\|_1 &\leqslant 2q\int_{\overline{B}_q^n}\left|\sum_{j=1}^n \xi_j \mathrm{sign}(x_j)|x_j|^{q-1}\right| dx \\ &= \frac{2q}{2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\int_{\overline{B}_q^n}\left|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j\xi_j \mathrm{sign}(x_j)|x_j|^{q-1}\right| dx.\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\left|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j\alpha_j\right| \leqslant \Big(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\Big)^{1/2} \tag{6.2.19}$$

για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, άρα

$$\left\| \frac{\partial K}{\partial \xi} \right\|_1 \leqslant 2q \int_{\overline{B}_q^n} \Big[\sum_{j=1}^n \xi_j^2 |x_j|^{2(q-1)} \Big]^{1/2} dx \qquad (6.2.20)$$

$$\leqslant Cq \left[\int_{\overline{B}_q^n} \sum_{j=1}^n \xi_j^2 |x_j|^{2(q-1)} \, dx \right]^{1/2},$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το γεγονός ότι $|\overline{B}_q^n| = \big(1 + \frac{c}{n}\big)^n \leqslant e^c$. Λόγω της συμμετρίας του $\overline{B}_q^n$ έχουμε τελικά

$$\left\| \frac{\partial K}{\partial \xi} \right\|_1 \leqslant Cq \left[\int_{\overline{B}_q^n} |x_n|^{2(q-1)} \, dx \right]^{1/2}, \qquad (6.2.21)$$

και από τις (6.1.5), (6.1.6), (6.2.8) και (6.2.14) συμπεραίνουμε ότι

$$Q(B_q^n) \leqslant C_q, \qquad 1 \leqslant q < \infty \qquad (6.2.22)$$

με την σταθερά C_q ανεξάρτητη από το n. Τώρα, το Θεώρημα 6.1.1 μας δίνει το εξής.

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω $1 \leqslant q < \infty$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|M_{B_q^n} f\|_p \leqslant C(p,q)\, \|f\|_p, \qquad 1 < p \leqslant \infty \qquad (6.2.23)$$

όπου $C(p,q)$ είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη από το n.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι τι συμβαίνει στην περίπτωση $q = \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση, ένα απλό γεωμετρικό επιχείρημα δείχνει ότι

$$|\pi_\xi(\widetilde{B}_\infty^n)| = \sum_F |F| \, \langle \xi, n(F) \rangle \qquad (6.2.24)$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$, όπου η άθροιση είναι πάνω από όλες τις έδρες F του κύβου $\widetilde{B}_\infty^n$ που το εξωτερικό τους κάθετο διάνυσμα $n(F)$ ικανοποιεί την $\langle \xi, n(F) \rangle \geqslant 0$. Έτσι, αν επιλέξουμε το

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1)$$

παίρνουμε

$$|\pi_\xi(\widetilde{B}_\infty^n)| = \sum_{j=1}^n \xi_j = \sqrt{n}. \qquad (6.2.25)$$

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι $|\pi_\eta(\widetilde{B}_\infty^n)| \leqslant \sqrt{n}$ για κάθε $\eta \in S^{n-1}$, άρα

$$Q(B_\infty^n) = \sqrt{n}. \qquad (6.2.26)$$

Έτσι, το βασικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου δίνει ένα φράγμα για τη νόρμα $\|M_{B_\infty^n}\|_{p \to p}$ που αυξάνει με την διάσταση n.

Κεφάλαιο 7

Ο μεγιστικός τελεστής για τον κύβο

7.1 Εισαγωγή

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να περιγράψουμε την απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος του Bourgain.

Θεώρημα 7.1.1. *Έστω $p > 1$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|M_{B_\infty^n} f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p, \tag{7.1.1}$$

όπου C_p είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη από το n.

Συμβολίζουμε με B τον κύβο $B_\infty^n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Ο μετασχηματισμός Fourier της $\mathbf{1}_B$ δίνεται από την

$$m(\xi) = \widehat{\mathbf{1}}_B(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \pi\xi_j}{\pi\xi_j}. \tag{7.1.2}$$

Τότε, αν γράψουμε $e(y) = e^{2\pi i y}$, έχουμε

$$\int_B f(x+ty)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)m(t\xi)e(\langle x, y\rangle)d\xi, \tag{7.1.3}$$

άρα η μελέτη του προβλήματος ανάγεται στη μελέτη του πολλαπλασιαστή $m(\xi)$. Γι' αυτόν γνωρίζουμε ότι

$$|m(\xi)| \leqslant \frac{C}{|\xi|} \text{ όταν } |\xi| \to \infty \tag{7.1.4}$$

και

$$|\langle \nabla m(\xi), \xi\rangle| \leqslant C. \tag{7.1.5}$$

Μάλιστα, οι (7.1.4) και (7.1.5) ισχύουν γενικά για ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα B όγκου $|B|=1$, αρκεί να αντικαταστήσουμε την (7.1.4) με την

$$|\widehat{\mathbf{1}}_B(\xi)| \leqslant \frac{C}{L_B|\xi|}. \tag{7.1.6}$$

Οι βασικές εκτιμήσεις (7.1.4) και (7.1.5) μας επιτρέπουν να φράξουμε την $\|M_B\|_p$ μόνο αν θεωρήσουμε $p>\frac{3}{2}$. Αν εξασφαλίζαμε στην (7.1.4) ένα φράγμα το οποίο να φθίνει ταχύτερα όταν $|\xi|\to\infty$ τότε θα μπορούσαμε να φράξουμε την $\|M_B\|_p$ για μικρότερες τιμές του p. Εξετάζοντας την (7.1.2) βλέπουμε ότι στις περισσότερες διευθύνσεις η $m(\xi)$ φθίνει πολύ γρηγορότερα και η (7.1.4) μας δίνει την χειρότερη περίπτωση, η οποία εμφανίζεται όταν το ξ περιορίζεται σε στενά κωνικά χωρία κοντά στους άξονες συντεταγμένων. Αυτό που θα προσπαθήσουμε είναι να κάνουμε κατάλληλη τοπικοποίηση στον χώρο Fourier και να μελετήσουμε αυτές τις περιοχές χρησιμοποιώντας διαφορετικά επιχειρήματα.

Για μια συνάρτηση $\Omega\in L^1(\mathbb{R}^n)$ και για $t>0$ θεωρούμε την $\Omega_{(t)}(x)=\frac{1}{t^n}\Omega\left(\frac{x}{t}\right)$, η οποία ικανοποιεί την $\widehat{\Omega_{(t)}}(\xi)=\widehat{\Omega}(t\xi)$. Συμβολίζουμε με G την κανονική κατανομή στον $\mathbb{R}^n$, με $\widehat{G}(\xi)=e^{-|\xi|^2}$. Γράφουμε

$$\mathbf{1}_B=(\mathbf{1}_B*G)+\sum_{s=1}^{\infty}\Omega^{(s)}, \tag{7.1.7}$$

όπου

$$\Omega^{(s)}=\mathbf{1}_B*G_{2^{-s}}-\mathbf{1}_B*G_{2^{-s+1}},$$

και θεωρούμε την μεγιστική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε $\Omega^{(s)}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την L^2-εκτίμηση που δίνει το Λήμμα 5.3.1 (από την προηγούμενη δουλειά του Bourgain).

Λήμμα 7.1.2 (Λήμμα 5.3.1). *Έστω $K\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ενας πυρήνας. Θεωρούμε τις ποσότητες*

$$\alpha_j=\max_{|\xi|\sim 2^j}|\widehat{K}(\xi)| \quad \textit{και} \quad \beta_j=\max_{|\xi|\sim 2^j}|\langle\nabla\widehat{K}(\xi),\xi\rangle|, \qquad j\in\mathbb{Z}. \tag{7.1.8}$$

Τότε,

$$\left\|\sup_{t>0}|f*K_{(t)}|\right\|_2 \leqslant C\Gamma(K)\|f\|_2, \tag{7.1.9}$$

όπου

$$\Gamma(K)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sqrt{\alpha_j}\,\sqrt{\alpha_j+\beta_j}. \tag{7.1.10}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, αφού

$$|\widehat{\Omega^{(s)}}(\xi)| = |m(\xi)|\,|e^{-4^{-s}|\xi|^2} - e^{-4^{-s+1}|\xi|^2}|, \tag{7.1.11}$$

έχουμε

$$\Big\| \sup_{t>0} |f * (\Omega^{(s)})_t| \Big\|_2 \leqslant C 2^{-s/2} \|f\|_2. \tag{7.1.12}$$

Παίρνοντας $1 < p < 2$, ο στόχος μας είναι να κάνουμε παρεμβολή ανάμεσα στην (7.1.12) και μια ανισότητα της μορφής

$$\Big\| \sup_{t>0} |f * (\Omega^{(s)})_t| \Big\|_p \leqslant A(p,s) \|f\|_p \tag{7.1.13}$$

ή

$$\Big\| \sup_{t>0} |f * (\mathbf{1}_B * G_{2^{-s}})_t| \Big\|_p \leqslant A(p,s) \|f\|_p. \tag{7.1.14}$$

Για να αποδείξουμε την (7.1.14) ακολουθούμε την προσέγγιση του Muller.

Λήμμα 7.1.3. *Υποθέτουμε ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής με πολλαπλασιαστή*

$$|\xi| m(\xi) e^{-4^{-s}|\xi|^2} \tag{7.1.15}$$

δρα στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ με νόρμα φραγμένη από $A(p,s)$. Τότε, η (7.1.14) ισχύει με ανάλογη σταθερά.

Το Λήμμα 7.1.3 προκύπτει από το επιχείρημα του Muller, το οποίο είδαμε ότι βασίζεται σε μιγαδική παρεμβολή και κατάλληλη επιτρεπτή οικογενεια τελεστών πολλαπλασιαστών Fourier.

Στην περίπτωσή μας, αντί να θεωρήσουμε την $K = \mathbf{1}_B$ στην (7.1.3) όπως ο Muller, θεωρούμε την $K = \mathbf{1}_B * G_{2^{-s}}$. Υπενθυμίζουμε ότι στο ανάλογο του Muller για το Λήμμα 7.1.3 παίζει ρόλο μόνο το φράγμα για την παράμετρο L_B και όχι εκείνο για την $Q(B)$ (το οποίο εμφανίζεται σε επόμενο στάδιο). Ακριβέστερα, αυτό που χρειάζεται κανείς είναι φράγματα για τις ποσότητες

$$\sup_{|\xi|=1} \int_B |\langle x, \xi\rangle|^k dx \tag{7.1.16}$$

για κάθε δεδομένο $k \geqslant 1$. Στο δικό μας πλαίσιο χρειαζόμαστε φράγματα για το

$$\int |\langle x, \xi\rangle|^k (\mathbf{1}_{B_\infty} * G_{2^{-s}})(x) dx. \tag{7.1.17}$$

Επειδή η κατανομή $\mathbf{1}_{B_\infty} * G_{2^{-s}}$ είναι συμμετρική ως προς κάθε συντεταγμένη x_i, εφαρμόζοντας την ανισότητα του Khintchine παίρνουμε, για κάθε $|\xi| = 1$,

$$\begin{aligned}
(7.1.18)\qquad & \int |\langle x, \xi\rangle|^k (\mathbf{1}_{B_\infty} * G_{2^{-s}})(x)dx \\
& \leqslant C_k \int \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\xi_i^2\right)^{\frac{k}{2}} (\mathbf{1}_{B_\infty} * G_{2^{-s}})(x)dx \\
& \leqslant C_k \iint \left[\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + |\xi|\right]^k \mathbf{1}_{B_\infty}(y) G_{2^{-s}}(x-y)dx\,dy \\
& \leqslant C_k + C_k \int \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\xi_i^2\right)^{\frac{k}{2}} G_{2^{-s}}(x)dx \\
& = C_k + C_k 2^{-sk} \int \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\xi_i^2\right)^{\frac{k}{2}} G(x)dx \\
& \leqslant C_k
\end{aligned}$$

για κάθε $s \geqslant 0$.

Επιστρέφοντας στην (7.1.15) και ακολουθώντας τον Muller, γράφουμε

$$|\xi| m(\xi) e^{-4^{-s}|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) = \sum_{i=1}^n \widehat{\mathcal{R}_i f}(\xi)\widehat{\mu_i}(\xi), \tag{7.1.19}$$

όπου $\mathcal{R}_i$ είναι ο i-οστός μετασχηματισμός Riesz και $\mu_i = \partial_{x_i}(\mathbf{1}_B * G_{2^{-s}})$.

Εφαρμόζουμε δυϊσμό: θεωρούμε $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, με $\|g\|_{p'} \leqslant 1$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
(7.1.20)\qquad & \int |\xi| m(\xi) e^{-4^{-s}|\xi|^2} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{R}_i f, g * \mu_i\rangle \\
& \leqslant \left\| \left(\sum |\mathcal{R}_i f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \left\| \left(\sum |g * \mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{p'}.
\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της (7.1.20) χρησιμοποιούμε το (ανεξάρτητο από τη διάσταση) φράγμα του Stein για το μετασχηματισμό Riesz:

$$\left\| \left(\sum |\mathcal{R}_i f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \ \text{ για } 1 < p < \infty. \tag{7.1.21}$$

Έτσι, μένει να φράξουμε την

$$\left\| \left(\sum |g * \mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \tag{7.1.22}$$

για $2 \leqslant p < \infty$.

Από την (7.1.4) έχουμε

$$\left(\sum_i |\widehat{\mu_i}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant |\xi|\,|m(\xi')| < C, \tag{7.1.23}$$

άρα

$$\left\|\left(\sum |g * \mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \leqslant C\|g\|_2. \tag{7.1.24}$$

Το φράγμα της (7.1.22) για $p = \infty$ αντιστοιχεί στο να εκτιμήσουμε το

$$\sup_{|\eta|=1}\left\|\sum_{i=1}^n \eta_i\mu_i\right\|_1 = \left\|\nabla_\eta(\mathbf{1}_B * G_{2^{-s}})\right\|_1. \tag{7.1.25}$$

Έχουμε

$$\left\|\nabla_\eta(\mathbf{1}_B * G_{2^{-s}})\right\|_1 \leqslant \left\|\nabla_\eta(G_{2^{-s}})\right\|_1 = 2^s\|\langle\nabla G, \eta\rangle\|_1 \precsim 2^s \tag{7.1.26}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\left\|\left(\sum |g * \mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty \leqslant C2^s\|g\|_\infty \tag{7.1.27}$$

και

$$\left\|\left(\sum |g * \mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leqslant C2^{s\left(1-\frac{2}{p}\right)}\|g\|_p \ \text{ για } 2 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{7.1.28}$$

Ειδικότερα, η (7.1.14) ισχύει με $A(p,s) \leqslant C_p 2^s$ και κάνοντας παρεμβολή με την (7.1.12) έχουμε το αποτέλεσμα για $p > \frac{3}{2}$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα χρειαστούμε την επόμενη ανισότητα.

Λήμμα 7.1.4. *Αν $R > 1$ και $\mu_i = \partial_i(\mathbf{1}_{B_\infty} * G_{\frac{1}{R}})$, τότε*

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^n |f * \mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leqslant C_p(\varepsilon)R^{-\varepsilon}\|f\|_p \tag{7.1.29}$$

για κάθε $2 \leqslant p < \infty$ και $\varepsilon > 0$.

Η απόδειξη του Λήμματος 7.1.4 είναι ο σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο. Η απόδειξη χρησιμοποιεί ουσιαστικά την πολύ συγκεκριμένη μορφή της συνάρτησης $m(\xi)$. Στην επόμενη παράγραφο εισάγουμε μια οικογένεια τελεστών πολλαπλασιαστών Fourier που θα μας επιτρέψει να κάνουμε τοπικοποίηση στο χώρο Fourier. Για την απόδειξη της (7.1.29) θα χρειαστεί να αναλύσουμε την ποσότητα

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|f*\mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

σε καθένα από τα χωρία που θα προκύψουν.

7.2 Τοπικοποίηση στον χώρο Fourier

Το επόμενο λήμμα είναι ειδική περίπτωση ενός θεωρήματος του Pisier. Έστω $(E_j)_{j=1}^{n}$ μια οικογένεια από προβολές νόρμας 1 στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ οι οποίες αντιμετατίθενται. Μπρούμε τότε να θεωρήσουμε την ημιομάδα

$$S_t := \prod_{j=1}^{n}(E_j + e^{-t}(I - E_j)), \qquad t \geqslant 0.$$

Αν θέσουμε $z = e^{-t}$ και αναπτύξουμε το γινόμενο, μπορούμε να το γράψουμε σαν πολυώνυμο με ομογενείς όρους $z^k H_k$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\begin{aligned} S_t &= \sum_{k=0}^{n} z^k \left(\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots n\}\\ |S|=k}} \left(\prod_{j\notin S} E_j\right)\prod_{j\in S}(I-E_j)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} z^k H_k = \sum_{k=0}^{n} e^{-kt} H_k. \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Θεώρημα 7.2.1 (Pisier). *Έστω $(E_j)_{j=1}^{n}$ είναι μια οικογένεια από προβολές νόρμας 1 στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ οι οποίες αντιμετατίθενται. Τότε, η ημιομάδα*

$$S_t = \prod_{j=1}^{n}\big(E_j + e^{-t}(I - E_j)\big), \qquad t \geqslant 0 \tag{7.2.2}$$

είναι αναλυτική στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ και επιδέχεται ολόμορφη επέκταση σε ένα χωρίο

$$\Omega_\phi = \{z = re^{i\theta} : r > 0, |\theta| < \phi\}$$

στο $\mathbb{C}$ με γωνία $\phi \geqslant \phi_p > 0$, όπου η ϕ_p εξαρτάται μόνο από το p. Έπεται ότι, για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n$, ο τελεστής

$$H_k = \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots n\}\\ |S|=k}} \left(\prod_{j\notin S} \mathbb{E}_j\right)\prod_{j\in S}(I-\mathbb{E}_j) \tag{7.2.3}$$

δρα στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ με νόρμα φραγμένη από C_p^k, όπου C_p είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

Έστω $(E_{j,s})_{j=1}^n$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, μια οικογένεια από προβολές όπως παραπάνω, και ας υποθέσουμε ότι οι $E_{j,s}$ και $E_{k,t}$ αντιμετατίθενται για κάθε $j \neq k$ και για κάθε $s, t \in [0,1]$. Αν ορίσουμε

$$U_j = \int_0^1 E_{j,s}\, ds, \qquad j = 1, \dots n$$

βλέπουμε ότι

$$Q_t = \prod_{j=1}^n (e^{-t} I + (1-e^{-t})U_j) = \int_{[0,1]^n} S_{t,s_1,\dots,s_n}\, ds_1 \cdots ds_n,$$

όπου κάθε ημιομάδα

$$S_{t,s_1,\dots,s_n} = \prod_{j=1}^n (e^{-t} I + (1-e^{-t})E_{j,s_j}$$

είναι όπως στο θεώρημα. Επίσης, οι αντίστοιχοι ομογενείς όροι είναι της μορφής

$$\tilde{H}_k = \int_{[0,1]^n} \sum_{\substack{S \subset \{1,\dots n\} \\ |S|=k}} \left(\prod_{j \notin S} \mathbb{E}_{j,s_j} \right) \prod_{j \in S} (I - \mathbb{E}_{js_j})\, ds_1 \cdots ds_n,$$

δηλαδή είναι μεσοι όροι των $H_k(s_1, \dots, s_n)$ οι οποίοι φράσσονται από C_p^k. Έτσι, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 7.2.1 γενικεύεται, λόγω κυρτότητας, σε οικογένειες τελεστών τύπου $(U_j)_{j=1}^n$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.2.1 για τους τελεστές μέσης τιμής $\mathbb{E}_j$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, όπου κάθε $\mathbb{E}_j$ δρα στην x_j-μεταβλητή, $j = 1, \dots, n$. Στην περίπτωση $n = 1$, για δεδομένο $s_0 \in \mathbb{R}$, σε κάθε $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ αντιστοιχίζουμε τους μέσους της στα διαστήματα $I_r = [s_0+r, s_0+r+1)$, $r \in \mathbb{Z}$, δηλαδή θέτουμε

$$(\mathbb{E}_{s_0} f)(v) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left(\int_{I_r} f(s)\, ds \right) \mathbf{1}_{I_r}(v), \qquad v \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια, για κάθε $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε τελεστές $\mathbb{E}_{j,s_0}$, $j = 1, \dots, n$, που δρουν στην x_j-μεταβλητή, με τον ανάλογο τρόπο. Για παράδειγμα,

$$(\mathbb{E}_{1,s_0} f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left(\int_{I_r} f(s, x_2, \dots, x_n)\, ds \right) \mathbf{1}_{I_r}(x_1).$$

Παίρνοντας μέσους όρους ως προς s_0, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους $\mathbb{E}_j$ με τελεστές συνέλιξης με πυκνότητες πιθανότητας χ στο $\mathbb{R}$, της μορφής

$$\chi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[s,s+1]}(x)\, d\nu(s), \tag{7.2.4}$$

όπου ν είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Έχουμε $\chi(x) = F(x) - F(x-1)$, όπου $F(x) = \nu((-\infty, x))$. Μπορούμε επίσης να κάνουμε αλλαγές στην κλίμακα. Παίρνουμε έτσι το εξής:

Λήμμα 7.2.2. *Έστω χ μια πυκνότητα πιθανότητας με συμπαγή φορέα, της μορφής* (7.2.4). *Συμβολίζουμε με T_j τον τελεστή συνέλιξης με την $\chi_{(t_j)}$ στην j-οστή μεταβλητή. Τότε, για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n$, ο τελεστής*

$$\sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |S|=k}} \prod_{j \notin S} T_j \prod_{i \in S} (1 - T_j) \tag{7.2.5}$$

δρα στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, με νόρμα φραγμένη από C_p^k.

Ειδικότερα, θα θεωρήσουμε την $\eta = \mathbf{1}_{[0,1)} * \mathbf{1}_{[0,1)}$, δηλαδή την

$$\eta(x) = (1 - |x|)_+. \tag{7.2.6}$$

Σε αυτήν την περίπτωση το Λήμμα 7.2.2 παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Λήμμα 7.2.3. *Έστω η η συνάρτηση της* (7.2.6) *και έστω $(t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ θετικοί αριθμοί. Συμβολίζουμε με T_j τον τελεστή συνέλιξης με την $\eta_{(t_j)}$ στην j-οστή μεταβλητή. Τότε, για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n$, ο τελεστής*

$$\sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |S|=k}} \prod_{j \notin S} T_j \prod_{i \in S} (1 - T_j) \tag{7.2.7}$$

δρα στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, με νόρμα φραγμένη από C_p^k.

Επιστρέφοντας στο Λήμμα 7.1.4, θέτουμε $t_j = t = R^{-\varepsilon}$ για κάθε $j = 1, \dots, n$, όπου $\varepsilon > 0$ είναι μια μικρή θετική σταθερά. Συμβολίζουμε με A_k τον αντίστοιχο τελεστή συνέλιξης (7.2.7), ο οποίος ικανοποιεί την

$$\|A_k\|_p < C_p^k \ \text{ για κάθε } 1 < p < \infty. \tag{7.2.8}$$

Θεωρούμε $K = K(\varepsilon, p) \in \mathbb{Z}^+$ και γράφουμε την f στη μορφή

$$f = (A_0 + \cdots + A_K) f + g. \tag{7.2.9}$$

Επιστρέφοντας στην L^2-ανισότητα (7.1.24), από την ταυτότητα Parseval παίρνουμε

$$\left\| \left[\sum_{i=1}^n |g * \mu_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \leqslant \rho \|f\|_2, \tag{7.2.10}$$

όπου ρ είναι ένα άνω φράγμα για την

$$\begin{aligned}(7.2.11)\qquad &|m(\xi)|e^{-4^{-s}|\xi|^2}|1-\widehat{A}_0(\xi)-\cdots-\widehat{A}_K(\xi)|\\ &=\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{\sin\pi\xi_j}{\pi\xi_j}\right|e^{-4^{-s}|\xi|^2}\sum_{|S|>K}\prod_{j\notin S}\widehat{\eta}(t\xi_j)\prod_{i\in S}(1-\widehat{\eta}(t\xi_j)).\end{aligned}$$

Λήμμα 7.2.4. *Για κάθε $\delta>0$ και $k\geqslant 1$,*

$$(7.2.12)\qquad |m(\xi)|<C_k\left(1+\sum_{|\xi_j|<R^\delta}\xi_j^2\right)^{-\frac{k}{2}}R^{\delta k}.$$

Απόδειξη. Αν θέσουμε $I_0=\{j:|\xi_j|>1\}$ τότε

$$(7.2.13)\qquad \prod_{j\notin I_0}\left|\frac{\sin\pi\xi_j}{\pi\xi_j}\right|<e^{-c\sum_{j\notin I_0}\xi_j^2},$$

ενώ

$$(7.2.14)\qquad \prod_{j\in I_0}\left|\frac{\sin\pi\xi_j}{\pi\xi_j}\right|<e^{-c|I_0|}.$$

Αφού

$$(7.2.15)\qquad \sum_{|\xi_j|<R^\delta}\xi_j^2<R^{2\delta}|I_0|+\sum_{j\notin I_0}\xi_j^2,$$

έπεται η (7.2.12). □

Επιστρέφοντας στην (7.2.11), θέτουμε $I_1=\{j:|\xi_j|>R^{\frac{\varepsilon}{5}}\}$. Αν $|I_1|>\frac{K}{2}$ τότε η ποσότητα στην (7.2.11) φράσσεται από

$$(7.2.16)\qquad |m(\xi)|\leqslant R^{-\frac{\varepsilon K}{10}}.$$

Υποθέτουμε ότι $|I_1| \leqslant \frac{K}{2}$ και φράσσουμε την ποσότητα στην (7.2.11) από

$$\begin{aligned} |m(\xi)| & \left[\sum_{\substack{S\cap I_1=\emptyset \\ |S|\geqslant \frac{K}{2}}} \prod_{j\notin S} \widehat{\eta}(t\xi_j) \prod_{i\in S} (1-\widehat{\eta}(t\xi_j)) \right] \\ &= |m(\xi)| \left| \partial_r^{(\lceil \frac{K}{2} \rceil)} \left[\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\notin I_1}} (\widehat{\eta}(t\xi_j) + r(1-\widehat{\eta}(t\xi_j))) \right] \Big|_{r=1} \right| \\ &\leqslant |m(\xi)| \left[\sum_{j\notin I_1} (1-\widehat{\eta}(t\xi_j)) \right]^{\lceil \frac{K}{2} \rceil} \\ &\precsim |m(\xi)| t^{2\lceil \frac{K}{2} \rceil} \left[\sum_{j\notin I_1} \xi_j^2 \right]^{\lceil \frac{K}{2} \rceil} \\ &\precsim R^{-2\varepsilon \lceil \frac{K}{2} \rceil} R^{\frac{2}{5}\varepsilon \lceil \frac{K}{2} \rceil} \precsim R^{-\varepsilon \lceil \frac{K}{2} \rceil}. \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

Αφού $t = R^{-\varepsilon}$ έχουμε $1 - \widehat{\eta}(x) < cx^2$ για $|x| < 1$ και την (7.2.12).

Συνδυάζοντας τις (7.2.16) και (7.2.17) βλέπουμε ότι μπορούμε να πάρουμε $\rho = R^{-\frac{\varepsilon K}{10}}$ στην (7.2.10).

Από την (7.1.28) έχουμε

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |g * \mu_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant C_p R \|f\|_p \;\; \text{για } 1 < p < \infty, \tag{7.2.18}$$

άρα παρεμβολή μεταξύ των (7.2.10) και (7.2.18) μας δίνει ότι

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |g * \mu_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant \|f\|_p, \tag{7.2.19}$$

αρκεί να επιλέξουμε το $K = K(\varepsilon, p)$ κατάλληλα.

Έτσι, μας μένει να εκτιμήσουμε την (7.1.22) για $g = A_k f$, $k \leqslant K$, κάτι που θα κάνουμε χρησιμοποιώντας διαφορετικά επιχειρήματα.

Γράφουμε

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|A_kf*\mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{\substack{|S|=k\\ i\notin S}}\Gamma_Sf*\mu_i\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}}\tag{7.2.20}$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{\substack{|S|=k\\ i\in S}}\Gamma_Sf*\mu_i\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}},\tag{7.2.21}$$

όπου

$$\Gamma_S=\prod_{j\in S}(1-T_j)\prod_{i\notin S}T_j\tag{7.2.22}$$

και T_j είναι η συνέλιξη με την $\eta_{(t)}$ στη συντεταγμένη x_j.

Για να απλοποιήσουμε αυτήν την ποσότητα διαχωρίζουμε τις μεταβλητές στην (7.2.20). Έστω $(\gamma_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\{0,1\}$ και μέση τιμή $\frac{1}{k}$. Για $S\subseteq\{1,\dots,n\}$ με $|S|=k$ και $i\notin S$, θέτουμε

$$\sigma_{S,i}=\gamma_i\prod_{j\in S}(1-\gamma_j).\tag{7.2.23}$$

Από την κατασκευή,

$$\mathbb{E}_\omega[\sigma_{S,i}]=\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^k=c_k.\tag{7.2.24}$$

Λόγω κυρτότητας έχουμε

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{\substack{|S|=k\\ i\notin S}}\Gamma_Sf*\mu_i\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant c_k^{-1}\mathbb{E}_\omega\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{|S|=k,i\notin S}\sigma_{S,i}(\omega)(\Gamma_Sf*\mu_i)\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right],\end{aligned}\tag{7.2.25}$$

άρα

$$\begin{aligned}&\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{\substack{|S|=k\\ i\notin S}}\Gamma_Sf*\mu_i\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\\ &\leqslant c_k^{-1}\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{|S|=k,i\notin S}\sigma_{S,i}(\omega)(\Gamma_Sf*\mu_i)\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\end{aligned}\tag{7.2.26}$$

για κάποιο ω. Θέτοντας $I = \{i : \gamma_i(\omega) = 1\}$ μπορούμε να ξαναγράψουμε το φράγμα της (7.2.26) στη μορφή

$$\left\| \Big(\sum_{i\in I} \Big| \Big(\sum_{|S|=k, S\cap I=\emptyset} \Gamma_S f \Big) * \mu_i \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_p . \tag{7.2.27}$$

Θέτουμε

$$F = \sum_{|S|=k, S\cap I=\emptyset} \prod_{j\in S} (1-T_j) \prod_{j\notin I\cup S} T_j . \tag{7.2.28}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.2.3 για την μεταβλητή $(x_j)_{j\notin I}$ βλέπουμε ότι η F ικανοποιεί την

$$\|F\|_p \leqslant C_p^k \|f\|_p \tag{7.2.29}$$

και η ποσότητα στην (7.2.27) ισούται με

$$\left\| \Big(\sum_{i\in I} \Big| \Big(\prod_{i\in I} T_i \Big) F * \mu_i \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_p . \tag{7.2.30}$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την ανισότητα

$$\left\| \Big(\sum_{i\in I} \Big| \Big(\prod_{i\in I} T_i \Big) g * \mu_i \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\bigotimes_{i\in I} dx_i)} \leqslant b_0 \|g\|_{L^p(\bigotimes_{i\in I} dx_i)} \tag{7.2.31}$$

για $g \in L^p(\bigotimes_{i\in I} dx_i)$. Τότε, από την (7.2.29) μπορούμε να φράξουμε την ποσότητα στην (7.2.27) από $b_0 C_p^k \|f\|_p$.

Για την (7.2.21) προχωράμε με τον ίδιο τρόπο, παίρνοντας $S = \{i\} \cup S'$, $|S'| = k-1$. Αντί για την (7.2.27), παίρνουμε

$$\left\| \Big(\sum_{i\in I} \Big| \Big(\sum_{|S'|=k-1, S'\cap I=\emptyset} \Gamma_{\{i\}\cup S'} f \Big) * \mu_i \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_p . \tag{7.2.32}$$

Θεωρούμε την

$$F = \sum_{|S'|=k-1, S'\cap I=\emptyset} \prod_{j\in S'} (1-T_j) \prod_{j\notin I\cup S'} T_j , \tag{7.2.33}$$

η οποία ικανοποιεί, από το Λήμμα 7.2.3, την

$$\|F\|_p \leqslant C_p^{k-1} \|f\|_p . \tag{7.2.34}$$

Τότε, η ποσότητα της (7.2.32) ισούται με

$$\left\| \Big(\sum_{i\in I} |\Gamma_i F * \mu_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \tag{7.2.35}$$

όπου $\Gamma_i = (1 - T_i)\left(\prod_{j\in I\setminus\{i\}} T_j\right)$. Αν μπορούσαμε να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής

$$\left\| \Big(\sum_{i\in I} |\Gamma_i F * \mu_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p\left(\underset{i\in I}{\otimes} dx_i\right)} \leqslant b_1 \|g\|_{L^p\left(\underset{i\in I}{\otimes} dx_i\right)} \tag{7.2.36}$$

θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι η (7.2.32) φράσσεται από $b_1 C_p^{k-1} \|f\|_p$.

Για να συνοψίσουμε, με βάση τις (7.2.31) και (7.2.36), αυτό που μας μένει είναι να αποδείξουμε τις ανισότητες

$$\left\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |A_0 f * \mu_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant b_0 \|f\|_p \tag{7.2.37}$$

και

$$\left\| \Big(\sum_{i\in I} |\Gamma_i f * \mu_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant b_1 \|f\|_p \tag{7.2.38}$$

με $\Gamma_i = (1 - T_i)\left(\prod_{j\neq i} T_j\right)$, για κατάλληλες σταθερές $b_0 = b_0(R)$ και $b_1 = b_1(R)$. Αυτό θα μας επιτρέψει να αποδείξουμε την

$$\left\| \Big(\sum |\mu_i * f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant A_p(R) \|f\|_p \tag{7.2.39}$$

με

$$A_p(R) < C(p, K)(1 + b_0(R) + b_1(R)) = C(p, \varepsilon)(1 + b_0 + b_1). \tag{7.2.40}$$

Στις επόμενες παραγράφους θα δώσουμε φράγματα για τις b_0 και b_1.

7.3 Μια βοηθητική κλάση τελεστών

Η κρίσιμη ανισότητα είναι η (7.2.38) και θα την αποδείξουμε χρησιμοποιώντας κλασικές τεχνικές από την θεωρία των martingales. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστεί να ορίσουμε κάποιους πρόσθετους τελεστές συνέλιξης οι οποίοι είναι κατά προσέγγιση ευσταθείς ως προς μικρές μεταφορές (παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $\eta(x) = (1 - |x|)_+$ η οποία εμφανίστηκε νωρίτερα δεν έχει αυτήν την ιδιότητα).

Θεωρούμε την

$$\varphi(x) = \frac{c}{1+x^4} \text{ κανονικοποιημένη έτσι ώστε } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1. \tag{7.3.1}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\varphi \precsim \varphi * \varphi \precsim \varphi \tag{7.3.2}$$

και ισχύουν οι

$$|\widehat{\varphi}(\lambda)| = O(e^{-c|\lambda|}) \text{ όταν } |\lambda| \to \infty \tag{7.3.3}$$

και

$$|1 - \widehat{\varphi}(\lambda)| < O(\lambda^2). \tag{7.3.4}$$

Έστω $0 < t_0 \ll t = R^{-\varepsilon}$ μια άλλη παράμετρος (που θα οριστεί κατάλληλα) και έστω L_j η συνέλιξη ως προς x_j με την $\varphi_{(t_0)}$, όπου $\varphi_{(t_0)}(x) = \frac{1}{t_0}\varphi\left(\frac{x}{t_0}\right)$. Οι $\{L_j\}$ είναι συστολές στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Λήμμα 7.3.1. *Έστω $q \in \mathbb{Z}^+$ μια δύναμη του 2 και έστω $f_1, \dots, f_n \in L^q(\mathbb{R}^n)$ θετικές συναρτήσεις. Τότε,*

$$\begin{aligned} &\|L_2 \cdots L_n f_1 + \cdots + L_1 \cdots L_{n-1} f_n\|_q \\ &\leqslant C_q \Big[\|(L_1 \cdots L_n)(f_1 + \cdots + f_n)\|_q + \|(L_1 \cdots L_n)(f_1^2 + \cdots + f_n^2)\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &+ \cdots + (\|f_1\|_q^q + \cdots + \|f_n\|_q^q)^{\frac{1}{q}} \Big] \\ &\leqslant C_q \|f_1 + \cdots + f_n\|_q. \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

Απόδειξη. Το λήμμα ισχύει προφανώς αν $q = 1$.

Γενικά, υπολογίζουμε απευθείας το

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_j L^{(j)} f_j \right)^q \sim \sum_{j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_q} \int (L^{(j_1)} f_{j_1}) \cdots (L^{(j_q)} f_{j_q}), \tag{7.3.6}$$

όπου $L^{(j)} = L_j \cdots L_{\hat{j}} \cdots L_n$.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder βλέπουμε ότι η συνεισφορά των όρων όπου $j_1 = j_2$ στην (7.3.6) φράσσεται από

$$\int \left[\sum_j (L^{(j)} f_j)^2 \right] \left[\sum_j L^{(j)} f_j \right]^{q-2} \leqslant \left\| \sum_j L^{(j)} f_j^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \left\| \sum_j L^{(j)} f_j \right\|_q^{q-2}, \tag{7.3.7}$$

κι αυτό κατεβάζει τον εκθέτη q σε $\frac{q}{2}$. Για τη συνεισφορά των όρων όπου $j_1 < j_2$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $j_1 = 1$ και ξαναγράφουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (7.3.6) ως

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_1(L_1 g_2)\cdots(L_1 g_q) \tag{7.3.8}$$

με $g_1 = L^{(1)} f_1$ κλπ. Ολοκληρώνοντας ως προς x_1 παίρνουμε

$$\int g_1(x_1)g_2(x_1-y_2)\cdots g_q(x_1-y_q)\varphi_{(t_0)}(y_2)\cdots\varphi_{(t_0)}(y_q)dx_1dy_2\cdots dy_q. \tag{7.3.9}$$

Κάνουμε μια μεταφορά $x_1 \mapsto x_1 + \tau$ με $|\tau| < t_0$ και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα ότι $\varphi_{(t_0)}(y+\tau) \sim \varphi_{(t_0)}(y)$ για $|\tau| \leqslant t_0$. Έτσι παίρνουμε ότι το ολοκλήρωμα της (7.3.9) είναι

$$\sim \int g_1(x_1+\tau)g_2(x_1-y_2)\cdots g_q(x_1-y_q)\varphi_{(t_0)}(y_2)\cdots\varphi_{(t_0)}(y_q)dx_1dy_2\cdots dy_q, \tag{7.3.10}$$

και παίρνοντας μέσο όρο ως προς $|\tau| \leqslant t_0$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_1(L_1g_2)\cdots(L_1g_q) \precsim \int_{\mathbb{R}^n}(L_1g_1)(L_1g_2)\cdots(L_1g_q). \tag{7.3.11}$$

Άρα, η συνεισφορά των όρων όπου $j_1 < j_2$ στην (7.3.6) φράσσεται από

$$\begin{aligned}\int (L_1\cdots L_n)\left(\sum_j f_j\right)\left(\sum L^{(j)}f_j\right)^{q-1} \\ \precsim \left\|(L_1\cdots L_n)\left(\sum f_j\right)\right\|_q \left\|\sum L^{(j)}f_j\right\|_q^{q-1},\end{aligned} \tag{7.3.12}$$

το οποίο αποδεικνύει το λήμμα. □

Υπενθυμίζουμε ότι $\mu_i = \partial_{x_i}(\mathbf{1}_B * G_{\frac{1}{R}})$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.3.1 αποδεικνύουμε το ακόλουθο.

Λήμμα 7.3.2. *Έστω q όπως στο προηγούμενο λήμμα και έστω $f_1, \ldots, f_n \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Τότε,*

$$\left\|\left[\sum_{i=1}^n |(\partial_{x_i}\mathbf{1}_B) * L^{(i)}f_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_q \leqslant c_q R^{8\varepsilon}\left\|\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q. \tag{7.3.13}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$|\partial_i \mathbf{1}_B| \leqslant (\delta_{\frac{1}{2}} + \delta_{-\frac{1}{2}})(x_i)\cdot \mathbf{1}_{B^{(i)}}, \tag{7.3.14}$$

όπου

$$B^{(i)} = \prod_{j\neq i}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

Άρα,

$$\sum_i |\partial_i \mathbf{1}_B * L^{(i)} f_i|^2 \leqslant \sum_i L^{(i)} \tau_i (|f_i|^2 * \mathbf{1}_{B^{(i)}}), \tag{7.3.15}$$

όπου τ_i είναι η μεταφορά $x_i \mapsto x_i \pm \frac{1}{2}$ και υπολογίζουμε την $L^{\frac{q}{2}}$-νόρμα εφαρμόζοντας την (7.3.5). Έτσι παίρνουμε τις παραστάσεις

$$\Big\| \sum_i (L_1 \cdots L_n)[\tau_i(|f_i|^2 * \mathbf{1}_{B^{(i)}})]^{2^s} \Big\|_{\frac{q}{2^{s+1}}} \tag{7.3.16}$$

με $1 \leqslant 2^s \leqslant \frac{q}{2}$ και

$$\Big\| \sum_i (L_1 \cdots L_n)[\tau_i(|f_i|^2 * \mathbf{1}_{B^{(i)}})]^{2^s} \Big\|_{\frac{q}{2^{s+1}}} \leqslant \Big\| \sum_i L_1 \cdots L_n \tau_i (* \mathbf{1}_{B^{(i)}})(|f_i|^{2^{s+1}}) \Big\|_{\frac{q}{2^{s+1}}} \tag{7.3.17}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι αφού $\varphi_{(t_0)}(x+\tau) \leqslant C t_0^{-4} \varphi_{(t_0)}(x)$ έχουμε

$$L_i \tau_i < C R^{4\varepsilon} L_i < C R^{8\varepsilon} L_i (* \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}) \tag{7.3.18}$$

με τη συνέλιξη ως προς την x_i-μεταβλητή. Άρα,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_i L_1 \cdots L_n \tau_i (* \mathbf{1}_{B^{(i)}})(|f_i|^{2^{s+1}}) \Big\|_{\frac{q}{2^{s+1}}} &\leqslant C R^{8\varepsilon} \Big\| \sum_i (L_1 \cdots L_n)(|f_i|^{2^{s+1}} * \mathbf{1}_B) \Big\|_{\frac{q}{2^{s+1}}} \\ &\leqslant C R^{8\varepsilon} \Big\| \Big(\sum |f_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q , \end{aligned} \tag{7.3.19}$$

και αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Σαν πόρισμα έχουμε το

Λήμμα 7.3.3. *Έστω q όπως στο προηγούμενο λήμμα και έστω $f_1, \ldots, f_n \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Τότε,*

$$\Big\| \Big(\sum_{i=1}^n |\mu_i * L^{(i)} f_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q \leqslant C_q R^{8\varepsilon} \Big\| \Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q . \tag{7.3.20}$$

7.4 Απόδειξη του θεωρήματος

Επιστρέφουμε στις ανισότητες (7.2.37) και (7.2.38). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο p είναι δύναμη του 2. Θέτουμε

$$t_0 = R^{-3\varepsilon} \tag{7.4.1}$$

και θεωρούμε τους τελεστές $\{L_j\}$ και $\{L^{(i)}\}$ που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ξεκινώντας από την (7.2.37) έχουμε

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\sum_i |A_0 f * \mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p &\leqslant \Big\|\Big(\sum_i |A_0 f * G_{t_0} * \mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \\ &\quad + \Big\|\Big(\sum_i |A_0(1-G_{t_0}) f * \mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p .\end{aligned} \tag{7.4.2}$$

Αφού $G_{t_0} * \mu_i = \partial_i G_{t_0} * G_{\frac{1}{R}} * \mathbf{1}_B$, έχουμε

$$\Big\|\Big(\sum_i |A_0 f * G_{t_0} * \mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \leqslant \Big\|\Big(\sum_i |\partial_i G_{t_0} * \mathbf{1}_B * f|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \leqslant C t_0^{-1}\|f\|_p, \tag{7.4.3}$$

κάνοντας παρεμβολή μεταξύ $p=2$ και $p=\infty$, και παίρνοντας υπόψιν τις (7.1.24)–(7.1.28).

Από τον ορισμό της A_p στην (7.2.39) έπεται ότι

$$\Big\|\Big(\sum_i |A_0(1-G_{t_0}) f * \mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \leqslant A_p \|A_0(1-G_{t_0})f\|_p \tag{7.4.4}$$

και μπορούμε να εκτιμήσουμε την $\|A_0(1-G_{t_0})\|_p$ με παρεμβολή.

Έχουμε

$$\|A_0(1-G_{t_0})\|_\infty \precsim \|A_0\|_\infty (1+\|G_{t_0}\|_\infty) = 2 \tag{7.4.5}$$

ενώ για $p=2$ πρέπει να εκτιμήσουμε τον πολλαπλασιαστή

$$\prod_{i=1}^n \widehat{\eta}(t\xi_i)(1-e^{-t_0^2|\xi|^2}). \tag{7.4.6}$$

Αφού $|\widehat{\eta}(\lambda)| \leqslant C\lambda^{-2}$, έχουμε

$$\prod_{i=1}^n \widehat{\eta}(t\xi_i)(1-e^{-t_0^2|\xi|^2}) \leqslant CR^{2\varepsilon}(\max|\xi_i|)^{-2} \leqslant CR^{-\varepsilon}, \tag{7.4.7}$$

εκτός αν $\max|\xi_i| \leqslant R^{2\varepsilon}$.

Επίσης, $|\widehat{\eta}(\lambda)| \leqslant e^{-C\lambda^2}$ όταν $|\lambda| < 1$, άρα

$$\prod_{i=1}^{n} |\widehat{\eta}(t\xi_i)| \leqslant e^{-ct^2\left(\sum_{|\xi_i|<R^{\varepsilon}} \xi_i^2\right) - c|I_1|}, \tag{7.4.8}$$

όπου $I_1 = \{i \leqslant n : |\xi_i| \geqslant R^{\varepsilon}\}$. Άρα,

$$\prod_{i=1}^{n} \widehat{\eta}(t\xi_i)(1 - e^{-t_0^2|\xi|^2}) \leqslant CR^{-\varepsilon}, \tag{7.4.9}$$

εκτός αν

$$\sum_{|\xi_i|<R^{\varepsilon}} \xi_i^2 \leqslant CR^{2\varepsilon}\log R \quad \text{και} \quad |I_1| < C\log R, \tag{7.4.10}$$

και μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$|\xi|^2 < CR^{2\varepsilon}\log R + |I_1|R^{4\varepsilon} < CR^{4\varepsilon}\log R. \tag{7.4.11}$$

Όμως τότε

$$1 - e^{-t_0^2|\xi|^2} \precsim t_0^2 R^{4\varepsilon}\log R < R^{-\varepsilon} \tag{7.4.12}$$

από την (7.4.1). Συνεπώς,

$$\prod_{i=1}^{n} \widehat{\eta}(t\xi_i)(1 - e^{-t_0^2|\xi|^2}) < CR^{-\varepsilon}, \tag{7.4.13}$$

άρα

$$\|A_0(1 - G_{t_0})\|_2 \leqslant CR^{-\varepsilon}. \tag{7.4.14}$$

Κάνοντας παρεμβολή με το $p = \infty$ παίρνουμε

$$\|A_0(1 - G_{t_0})\|_p \leqslant CR^{-\frac{2\varepsilon}{p}} \tag{7.4.15}$$

και

$$\left\| \left(\sum_i |A_0(1 - G_{t_0})f * \mu_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant A_p \|A_0(1 - G_{t_0})f\|_p \leqslant CA_p R^{-\frac{2\varepsilon}{p}} \|f\|_p. \tag{7.4.16}$$

Από τις (7.4.3) και (7.4.16) βλέπουμε ότι

$$b_0 \leqslant CR^{3\varepsilon} + CA_p R^{-\frac{2\varepsilon}{p}}. \tag{7.4.17}$$

Εξετάζουμε τώρα την (7.2.38) και γράφουμε

$$\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i f*\mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leqslant \left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i L^{(i)} f*\mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p + \left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i (1-L^{(i)}) f*\mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p. \tag{7.4.18}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.3.3 με $f_i=\Gamma_i f$ παίρνουμε

$$\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i L^{(i)} f*\mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leqslant CR^{8\varepsilon}\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i f|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p. \tag{7.4.19}$$

Παρατηρήστε ότι αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 7.2.3 σε ένα υποσύνολο των συντεταγμένων παίρνουμε, για κάθε $I\subseteq\{1,\dots,n\}$,

$$\left\|\sum_{i\in I}\Gamma_i f\right\|_p \leqslant C_p\|f\|_p, \qquad 1<p<\infty. \tag{7.4.20}$$

Άρα,

$$\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i f|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leqslant C_p\|f\|_p \tag{7.4.21}$$

και

$$\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i L^{(i)} f*\mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leqslant C_pR^{8\varepsilon}. \tag{7.4.22}$$

Γράφουμε

$$\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i (1-L^{(i)}) f*\mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leqslant \mathbb{E}_\varepsilon\left[\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|F_\varepsilon*\mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\right] \tag{7.4.23}$$

όπου $\varepsilon\in\{-1,1\}^n$ και $F_\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Gamma_i(1-L^{(i)})f$.

Από την (7.2.39) έχουμε

$$\mathbb{E}_\varepsilon\left[\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|F_\varepsilon*\mu_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\right] \leqslant A_p\mathbb{E}_\varepsilon[\,\|F_\varepsilon\|_p] \leqslant C_pA_p\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i (1-L^{(i)}) f|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_p. \tag{7.4.24}$$

Από την (7.4.21) και την (7.3.5) έπεται ότι

(7.4.25)
$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n|\Gamma_i(1-L^{(i)})f|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p\\ &\leqslant \Big\|\Big(\sum_{i=1}^n|\Gamma_i f|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p+\Big\|\sum_{i=1}^n L^{(i)}|\Gamma_i f|^2\Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac12}\\ &\leqslant C_p\|f\|_p,\end{aligned}$$

και κάνουμε πάλι παρεμβολή με L^2-φράγμα. Αυτό προκύπτει αν φράξουμε τον πολλαπλασιαστή

(7.4.26)
$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n|\widehat{\Gamma}_i(\xi)|^2\,|1-\widehat{L^{(i)}}(\xi)|^2\\ &=\sum_{i=1}^n|1-\widehat{\eta}(t\xi_i)|^2\prod_{j\neq i}|\widehat{\eta}(t\xi_j)|^2\,\Big|1-\prod_{j\neq i}\widehat{\varphi}(t_0\xi_j)\Big|^2\\ &\leqslant \max_i\prod_{j\neq i}\widehat{\eta}(t\xi_j)\,\Big|1-\prod_{j\neq i}\widehat{\varphi}(t_0\xi_j)\Big|.\end{aligned}$$

Από την (7.3.4) έχουμε $|1-\widehat{\varphi}(\lambda)|\leqslant C\lambda^2$, άρα μπορούμε να φράξουμε την τελική ποσότητα της (7.4.26) όπως στην (7.4.6), και έχουμε

(7.4.27)
$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n|\Gamma_i(1-L^{(i)})f|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_2\leqslant CR^{-\varepsilon}\|f\|_2$$

και

(7.4.28)
$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n|\Gamma_i(1-L^{(i)})f|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p\leqslant CR^{-\varepsilon\frac{2}{p}}\|f\|_p.$$

Οι (7.4.22) και (7.4.28) δείχνουν ότι μπορούμε να επιλέξουμε

(7.4.29)
$$b_1<C_pR^{8\varepsilon}+C_pA_pR^{-\frac{2}{p}\varepsilon}.$$

Τέλος, από τις (7.2.40), (7.4.17) και (7.4.29) συμπεραίνουμε ότι

(7.4.30)
$$\begin{aligned}&A_p(R)<C(p,\varepsilon)(R^{8\varepsilon}+A_pR^{-\varepsilon\frac{2}{p}})\\ &A_p(R)<C_p(\varepsilon)R^{8\varepsilon}.\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Λήμματος 7.1.4 και την απόδειξη του Θεωρήματος.

Βιβλιογραφία

[1] J. M. Aldaz, *The weak type* $(1,1)$ *bounds for the maximal function associated to cubes grow to infinity with the dimension*, Annals of Math. **173** (2011), 1013-1023.

[2] G. Aubrun, *Maximal inequality for high-dimensional cubes*, Confluentes Math. **1** (2009), no. 2, 169-179.

[3] J. Bourgain, *On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. **108** (1986), 1467-1476.

[4] J. Bourgain, *On the* L^p*-bounds for maximal functions associated to convex bodies in* $\mathbb{R}^n$, Israel J. Math. **54** (1986), 257-265.

[5] A. Carbery, *Radial Fourier multipliers and associated maximal functions*, Recent progress in Fourier analysis (El Escorial, 1983) North-Holland Math. Stud., vol. 111, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 49-56.

[6] A. Carbery, *An almost-orthogonality principle with applications to maximal functions associated to convex bodies*, Bull. Amer. Math. Soc. **14** (1986), 269-273.

[7] L. Deleaval, O. Guédon and B. Maurey, *Dimension free bounds for the Hardy-Littlewood maximal operator associated to convex sets*, Preprint (`arXiv:1602.02015v1`).

[8] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, New York.

[9] G. H. Gardy and J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930), 81-116.

[10] D. Muller, *A geometric bound for maximal functions associated to convex bodies*, Pacific J. Math. **142** (1990), 297-312.

[11] A. Naor and T. Tao, *Random martingales and localization of maximal inequalities*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 731-779.

[12] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Annals of Math. **115** (1982), 375-392.

[13] J.-L. Rubio de Francia, *Maximal functions and Fourier transforms*, Duke Math. J. **53** (1986), 395-404.

[14] E. M. Stein, *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory*, Annals of Mathematics Studies **63** Princeton University Press, Princeton, N. J. (1971).

[15] E. M. Stein, *Maximal functions: Spherical means*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **73** (1976), 2174-2175.

[16] E. M. Stein, *The development of square functions in the work of A. Zygmund*, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 359-376.

[17] E. M. Stein, *Three variations on the theme of maximal functions*, Recent progress in Fourier analysis (El Escorial, 1983) North-Holland Math. Stud., vol. 111, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 49-56.

[18] E. M. Stein and J.-O. Stromberg, *Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n*, Ark. Mat. **21** (1983), 259-269.

[19] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1971).

[20] N. Wiener, *The ergodic theorem*, Duke Math. J. **5** (1939), 1-18.