

Δ. Β. ΠΑΡΡΗΣ

# **Εναλλασσόμενα συστήματα και συνήθεις τετραγωνικές Lyapunov συναρτήσεις**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2015



# Πρόλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζουμε το πρόβλημα ύπαρξης συνήθους τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης για «οικογένειες» γραμμικών συστημάτων, των οποίων οι πίνακες δεν μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Στην ουσία, μελετάμε την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ύπαρξη συνήθους τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης με την ασυμπτωτική ευστάθεια ενός γραμμικού εναλλασσόμενου συστήματος.

Παρατηρούμε ότι παρόλο που τα υποσυστήματα ενός εναλλασσόμενου συστήματος είναι ευσταθή, αυτό δεν εγγυάται και την ευστάθεια όλου του συστήματος έπειτα από αυθαίρετες εναλλαγές των υποσυστημάτων. Έτσι, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί σε αβεβαιότητα.

Στόχος της εργασίας αυτής είναι να βρούμε κάτω από ποιες συνθήκες «οικογένειες» υποσυστημάτων μπορούν να αποκλείσουν τέτοιου είδους αλλαγή στην συμπεριφορά του συστήματος και κατ'αυτόν τον τρόπο να εξασφαλίσουν την σταθερότητα ανεξάρτητα από την οποιαδήποτε πιθανή μεταγωγή.

Θεωρώ χρέος μου να ευχαριστήσω τους καθηγητές του μεταπτυχιακού των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και τον κ. Γ. Χαλικιά για την βοήθεια, τις συμβουλές και τις γνώσεις που μου μετέδωσαν. Ευχαριστώ, ακόμη, τα αγαπημένα μου πρόσωπα για την αμέριστη βοήθεια τους.

# Περιεχόμενα

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <a href="#"><u>Πρόλογος</u></a>                                                          | 3  |
| <a href="#"><u>Σύμβολα και συντομογραφίες</u></a>                                        | 5  |
| <b>1</b> <a href="#"><u>Εισαγωγή και περίληψη</u></a>                                    | 7  |
| 1.1 <a href="#"><u>Περίληψη</u></a>                                                      | 7  |
| 1.2 <a href="#"><u>Εισαγωγικές Παρατηρήσεις</u></a>                                      | 8  |
| <b>2</b> <a href="#"><u>Ευστάθεια γραμμικών εναλλασσόμενων συστημάτων</u></a>            | 10 |
| 2.1 <a href="#"><u>Γραμμικά εναλλασσόμενα συστήματα – ορισμοί</u></a>                    | 10 |
| 2.2 <a href="#"><u>Ευστάθεια γραμμικών εναλλασσόμενων συστημάτων</u></a>                 | 14 |
| 2.2.1 <a href="#"><u>Ορισμοί ευστάθειας</u></a>                                          | 14 |
| 2.2.2 <a href="#"><u>Προβλήματα ευστάθειας για γραμμικά εναλλασσόμενα συστήματα</u></a>  | 16 |
| 2.3 <a href="#"><u>Γραμμικά εναλλασσόμενα συστήματα και Lyapunov συναρτήσεις</u></a>     | 20 |
| 2.3.1 <a href="#"><u>Lyapunov συναρτήσεις</u></a>                                        | 20 |
| 2.3.2 <a href="#"><u>Συνήθεις τετραγωνικές Lyapunov συναρτήσεις</u></a>                  | 24 |
| <b>3</b> <a href="#"><u>Συνήθης τετραγωνική Lyapunov συνάρτηση: πρόβλημα ύπαρξης</u></a> | 27 |
| 3.1 <a href="#"><u>Υπόβαθρο του προβλήματος ύπαρξης CQLF</u></a>                         | 27 |
| 3.2 <a href="#"><u>Απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες για την ύπαρξη CQLF</u></a>         | 34 |
| 3.3 <a href="#"><u>Επαρκείς συνθήκες για την ύπαρξη CQLF</u></a>                         | 43 |
| <b>4</b> <a href="#"><u>Συστήματα δεύτερης τάξης</u></a>                                 | 49 |
| 4.1 <a href="#"><u>Δεύτερης τάξης γραμμικά εναλλασσόμενα ζεύγη συστημάτων</u></a>        | 49 |
| 4.2 <a href="#"><u>Το 45<sup>ο</sup> κριτήριο</u></a>                                    | 54 |
| <b>5</b> <a href="#"><u>Ζεύγη συστημάτων που η τάξη τους διαφέρει κατά ένα</u></a>       | 60 |
| <a href="#"><u>Βιβλιογραφία</u></a>                                                      | 66 |

# Σύμβολα και συντομογραφίες

## Σύμβολο

## Ερμηνεία

|                           |                                                                          |
|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $a_{ij}$                  | το στοιχείο στην θέση $(i, j)$ του πίνακα $A$                            |
| $A^t$                     | ο ανάστροφος του πίνακα $A$                                              |
| $A^{-1}$                  | ο αντίστροφος του πίνακα $A$                                             |
| $A^{-t}$                  | συντομογραφία του $(A^{-1})^t$                                           |
| $P > 0$ ( $P < 0$ )       | ο πίνακας $P$ είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένος                          |
| $P \geq 0$ ( $P \leq 0$ ) | ο $P$ είναι θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος                               |
| $\det(A),  A $            | η ορίζουσα του πίνακα $A$                                                |
| $\mathcal{L}_A$           | ο Lyapunov τελεστής του πίνακα $A$                                       |
| $\mathcal{P}_A$           | ο κώνος $\{P = P^t > 0 : A^t P + P A < 0\}$                              |
| $\Sigma_A$                | το συνεχούς χρόνου σύστημα $\dot{x} = Ax, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ |
| $\sigma(A)$               | το φάσμα των ιδιοτιμών του πίνακα $A$                                    |
| $Sym(n, \mathbb{R})$      | ο χώρος των συμμετρικών πινάκων στο $\mathbb{R}^{n \times n}$            |
| $rank(A)$                 | η τάξη του πίνακα $A$                                                    |
| $\langle A, B \rangle$    | το εσωτερικό γινόμενο $trace(A^t B)$                                     |
| $\nabla V$                | το ανάδελτα της συνάρτησης $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$      |
| $\otimes$                 | γινόμενο Kronecker                                                       |
| $vec(A)$                  | το διάνυσμα $[a_{11}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}]^t$    |

# Συντομογραφίες

LTI : linear time-invariant (γραμμικό ανεξάρτητο του χρόνου)

CQLF : common quadratic Lyapunov function (συνήθης τετραγωνική Lyapunov συνάρτηση)

BIBO : bounded-input bounded-output (φραγμένης-εισόδου φραγμένης-εξόδου)

SISO : single-input single-output (μοναδικής εισόδου-εξόδου)

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή και Περίληψη

### 1.1 Περίληψη

Στην παρούσα εργασία, μελετάμε την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ύπαρξη συνήθους τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης με την ασυμπτωτική ευστάθεια ενός γραμμικού εναλλασσόμενου συστήματος.

Αρχικά, γίνεται αναφορά στην θεωρία των εναλλασσόμενων συστημάτων, ενώ στην συνέχεια ασχολούμαστε με τα προβλήματα ευστάθειας αυτών των συστημάτων. Εισάγοντας την έννοια της συνήθους τετραγωνικής Lyapunov συναρτήσεως, παρατηρούμε ότι κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες η ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης μας εξασφαλίζει ότι το εναλλασσόμενο σύστημα δεν θα οδηγηθεί σε αστάθεια.

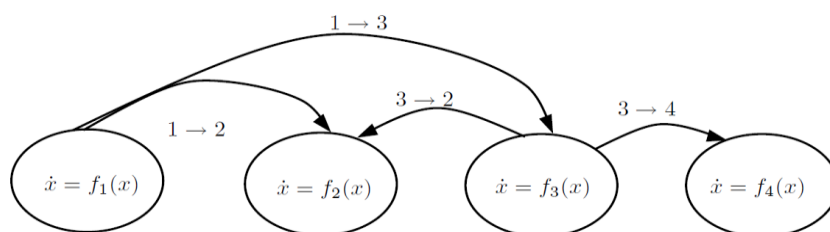
Στην συνέχεια, το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε συστήματα δεύτερης τάξεως, τα οποία επιδέχονται συνήθη τετραγωνική Lyapunov συνάρτηση. Κλείνοντας, διατυπώνονται τα σχετικά αποτελέσματα για ζεύγη συστημάτων, των οποίων η τάξη διαφέρει κατά ένα.

### 1.2 Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Η θεωρία των εναλλασσόμενων συστημάτων, σήμερα, είναι συνυφασμένη με την επιστήμη των Μαθηματικών, της Μηχανολογίας και της Πληροφορικής. Ένα εναλλασσόμενο σύστημα συνδυάζει ένα δυναμικό σύστημα με έναν μεταγωγέα. Ο μεταγωγέας αυτός καθορίζει πότε ο τρόπος λειτουργίας του συστήματος θα αλλάξει. Η αλλαγή θα γίνει με αιφνίδιο τρόπο σε αρκετές στιγμές κατά την διάρκεια που χρησιμοποιείται το δοθέν δυναμικό μοντέλο.

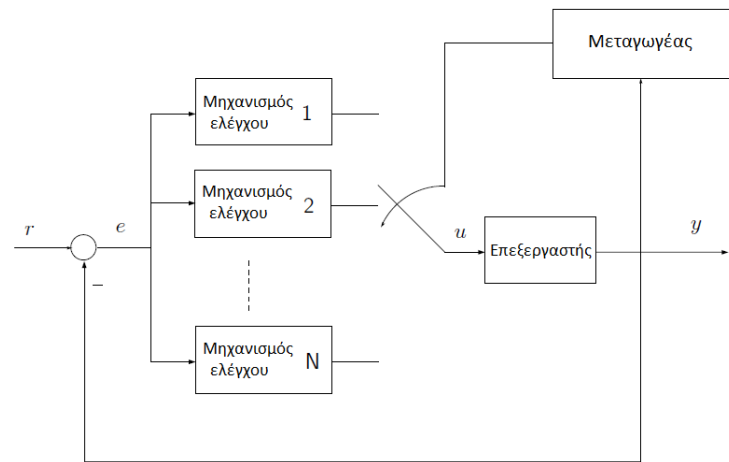
Ο στόχος της θεωρίας μας είναι να εισάγει τα κριτήρια, βάση των οποίων τα υποσυστήματα του ολικού συστήματος θα του παρέχουν μεγαλύτερη απόδοση και ασφάλεια. Τέτοιου είδους προβλήματα που βασίζονται στον έλεγχο ενός δυναμικού μοντέλου έχουν ποικίλες εφαρμογές στην καθημερινή ζωή.

Από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα συστήματα ελέγχου αεροπλάνων, οι σηματοδότες στους δρόμους, διάφορα κλειστά κυκλώματα και ποικιλόμορφα δυναμικά συστήματα. Το πιο σύνηθες παράδειγμα, που συναντάμε στην καθημερινότητα, είναι το κιβώτιο ταχυτήτων των αυτοκινήτων, το οποίο σαφώς λειτουργεί σαν δυναμικό μοντέλο με υποσυστήματα. Πιο συγκεκριμένα, η αλλαγή της ταχύτητας αποτελεί ένα εναλλασσόμενο σύστημα, όπου η κάθε ταχύτητα που είναι στο κιβώτιο περιγράφει ένα υποσύστημά του (βλ. Σχεδιάγραμμα 1.1).



**Σχεδιάγραμμα 1.1 :** Το τεσσάρων ταχυτήτων κιβώτιο ενός αυτοκινήτου αποτελεί ένα εναλλασσόμενο σύστημα.

Τα εναλλασσόμενα συστήματα περιγράφονται από ένα σύνολο διαφορικών υποσυστημάτων, τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους αλλά αναπτύσσονται κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό τους είναι πως τα υποσυστήματα δεν εξελίσσονται ταυτόχρονα, αλλά σε διαφορετικό χρόνο μεταξύ τους. Ένα κατατοπιστικό παράδειγμα είναι το κλειστό κύκλωμα που περιγράφεται στο σχεδιάγραμμα 1.2. Σε αυτό, έχουμε ένα εναλλασσόμενο σύστημα ελέγχου, στο οποίο παρατηρούμε ότι μόνο ένας μηχανισμός ελέγχου μπορεί να είναι συνδεδεμένος με τον επεξεργαστή. Σε αυτό το κλειστό κύκλωμα, ο μεταγωγέας καθορίζει ποιος μηχανισμός ελέγχου θα τεθεί σε λειτουργία. Έτσι, ο επεξεργαστής του συστήματος είναι συνεχώς ενεργός, αλλά εκτελώντας διαφορετικές εντολές κατά την διάρκεια εφαρμογής του συστήματος.



**Σχεδιάγραμμα 1.2 :** Κατασκευή ενός εναλλασσόμενου συστήματος ελέγχου.

Η μελέτη των εναλλασσόμενων συστημάτων επικεντρώνεται στην απότομη αλλαγή ενός πλήθους ξεχωριστών ευσταθών υποσυστημάτων. Η αλλαγή αυτή μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε αβεβαιότητα. Ουσιαστικά, η αλληλεπίδραση του μηχανισμού απότομης αλλαγής με το δυναμικό μας σύστημα μας οδηγεί στην αστάθεια.

Στόχος της μελέτης μας είναι να βρούμε, κάτω από ποιες συνθήκες, «οικογένειες» υποσυστημάτων μπορούν να αποκλείσουν τέτοιου είδους αλλαγή στην συμπεριφορά του συστήματος και κατ'αυτόν τον τρόπο να εξασφαλίσουν την σταθερότητα ανεξάρτητα από τα διάφορα σήματα μετατροπής.

## Κεφάλαιο 2

# Ευστάθεια γραμμικών εναλλασσόμενων συστημάτων

### 2.1 Γραμμικά εναλλασσόμενα συστήματα – ορισμοί

Το εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών συστημάτων, όπου οι πίνακες που τους αντιστοιχούν δεν εξαρτώνται από τον χρόνο (Linear time-invariant - LTI συστήματα), της μορφής:

$$\Sigma_{A_i}: \dot{x}(t) = A_i x(t), \quad A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad i \in \mathfrak{T} = \{1, \dots, N\}. \quad (2.1)$$

Το σύνολο των  $i$  συμβολίζεται  $\mathfrak{T}$ , ενώ το σύνολο των πινάκων  $A_i$  στο εξής θα το συμβολίζουμε με  $\mathcal{A}$ .

Το  $\Sigma_{A_i}$  είναι ένα υποσύστημα του εναλλασσόμενου συστήματός μας. Κάθε υποσύστημα είναι μοναδικό και ορίζεται από τον πίνακά του,  $A_i$ . Σε κάθε στιγμή του χρονικού διαστήματος που λειτουργεί το σύστημα, η λύση περιγράφεται από ένα μόνο υποσύστημα. Δηλαδή, τα υποσυστήματα διαδέχονται το ένα το άλλο έπειτα από συγκεκριμένα σήματα μετατροπής.

**Ορισμός 2.1.1 :** Το σήμα μετατροπής  $\sigma(t)$  είναι μία τμηματικά σταθερή συνάρτηση  $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathfrak{T}$  με τις εξής ιδιότητες:

1. Οι στιγμές εναλλαγής των υποσυστημάτων είναι σε αντιστοιχία με τους αριθμούς  $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ .
2. Υπάρχει ένα κάτω φράγμα  $\tau_{min} > 0$  για την παύση ανάμεσα σε δύο σημεία συνεχόμενα σημεία ασυνέχειας  $t_k, t_{k+1}$  τέτοια ώστε  $t_{k+1} - t_k > \tau_{min}$  για όλα τα  $k$ .
3. η  $\sigma(\cdot)$  είναι συνεχής «από δεξιά», δηλαδή  $\sigma(t) = i_k$  για  $t_k \leq t < t_{k+1}$ .

Επιπλέον, μπορούμε να σχηματίσουμε την ακολουθία των εξής ζευγαριών

$$(t_0, i_0), (t_1, i_1), \dots, (t_k, i_k), \dots$$

όπου  $t_k \in [t_0, +\infty)$ ,  $i_k \in \{1, \dots, N\}$  για όλα τα  $k \geq 0$  και

$$A(t) = A_{i_k} \text{ για } t_k \leq t < t_{k+1};$$

$$A(t_{k+1}) \neq A(t_k) \text{ για όλα τα } k \geq 0.$$

Οι στιγμές  $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$  ονομάζονται στιγμές μετατροπής.

**Ορισμός 2.1.2 :** Θεωρώ  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  να είναι το πεπερασμένο σύνολο συστημάτων πινάκων που ορίζουν μία οικογένεια γραμμικών ανεξάρτητων του χρόνου συστημάτων  $\Sigma_{A_i}$ ,  $i \in \mathfrak{T} = \{1, \dots, N\}$  και  $\mathcal{S}$  το σύνολο των αποδεκτών τμηματικά σταθερών σημάτων μετατροπής  $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathfrak{T}$ . Τότε, το εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα ορίζεται από την σχέση

$$\Sigma_{\mathcal{A}, \mathcal{S}}: \dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (2.2)$$

όπου  $A(t) \in \mathcal{A}$  και  $A(t) \equiv A_{\sigma(t)}$ ,  $\sigma(t) \in \mathfrak{T}$  για όλα τα  $t \in \mathbb{R}^+$  και όλα τα  $\sigma(\cdot) \in \mathcal{S}$ .

Το σύστημά μας έχει συνεχώς τμηματικές  $C^1$  λύσεις  $x(\cdot)$  για όλες τις αρχικές καταστάσεις  $x_0 = x(t_0)$  και  $t_0$ . Στην πραγματικότητα, υπάρχει μία λύση για κάθε  $A(\cdot) \in \mathcal{A}$ . Ανάμεσα σε δύο στιγμές μετατροπής, το σύστημα (2.2) εξελίσσεται σαν LTI σύστημα. Δηλαδή, καθώς οι στιγμές μετατροπής είναι  $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ , το σύστημα (2.2) εξελίσσεται σαν LTI σύστημα της μορφής  $\Sigma_{A(t_k)}$  για  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Έτσι, συνδυάζοντας κατάλληλα την μετάβαση των πινάκων των  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ , προκύπτει ότι, για κάθε  $t > t_0$ , η μοναδική λύση που αντιστοιχεί στον  $A(\cdot) \in \mathcal{A}$  είναι:

$$x(t, t_0, x_0, \sigma) = [e^{A(t_k)(t-t_k)} e^{A(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})} \dots e^{A(t_1)(t_2-t_1)} e^{A(t_0)(t_1-t_0)}] x(t_0),$$

όπου  $t_k$  είναι η τελευταία στιγμή μετατροπής πριν το  $t$ .

Η λύση  $x(t, t_0, x_0, \sigma)$  «κατασκευάζεται» συνδυάζοντας επαγωγικά τις επιμέρους λύσεις των υποσυστημάτων  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ . Η λύση, για  $t_k$  όπως το ορίσαμε προηγουμένως, θα είναι

$$x(t) = e^{A(t_k)(t-t_k)} x(t_k).$$

Εφόσον η  $x(t_k)$  είναι η τελευταία κατάσταση για το προηγούμενο μεσοδιάστημα και η  $x(t_{k-1})$  η πρώτη, θα έχουμε ότι για  $t_{k-1} \leq t < t_k$

$$x(t_k) = e^{A(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})} x(t_{k-1}).$$

Όμοια,

$$x(t_{k-1}) = e^{A(t_{k-2})(t_{k-1}-t_{k-2})} x(t_{k-2})$$

⋮

$$x(t_1) = e^{A(t_0)(t_1-t_0)} x(t_0).$$

Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα μετάβασης  $\Phi_\sigma(t, t_0)$  για το εναλλασσόμενο σύστημα (2.2) με σήμα μετατροπής  $\sigma(\cdot)$  ως

$$\Phi_\sigma(t, t_0) = e^{A(t_k)(t-t_k)} \prod_{l=0}^{k-1} e^{A(t_l)(t_{l+1}-t_l)}$$

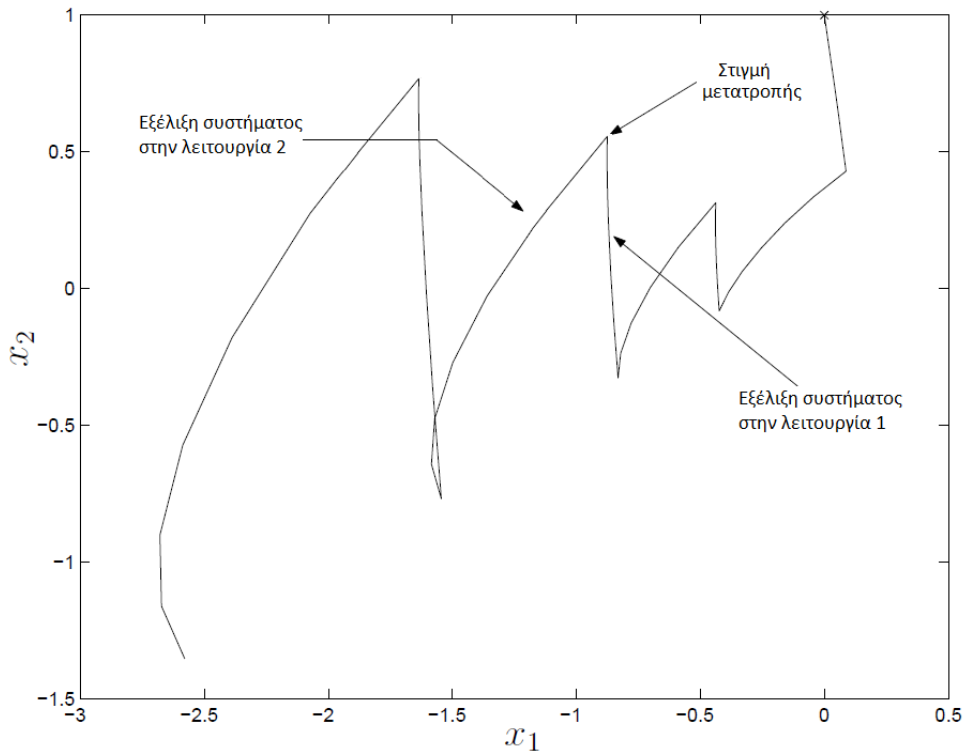
και έτσι η λύση του (2.2) μπορεί να γραφτεί και ως

$$x(t, t_0, x_0, \sigma) = \Phi_\sigma(t, t_0)x(t_0).$$

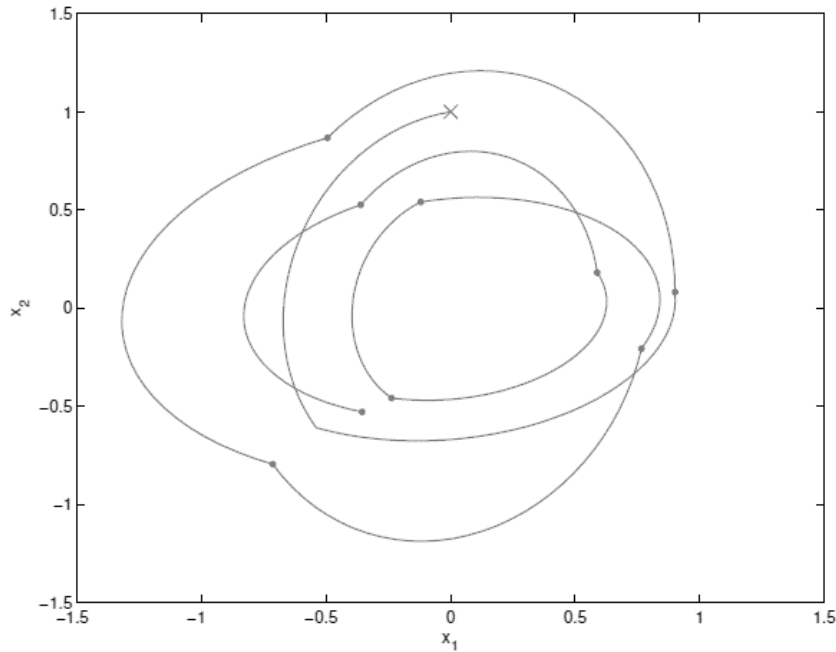
Για να γίνει κατανοητό πως λειτουργεί ένα σύστημα της μορφής (2.2), υποθέτουμε πως το δυναμικό μας σύστημα δίνεται από την σχέση  $\dot{x}(t) = A_i x(t)$  για κάποιο συγκεκριμένο διάστημα  $[t_k, t_{k+1})$ , όπου  $A_i$  ένας πίνακας του συνόλου  $\mathcal{A}$ . Την στιγμή  $t_{k+1}$  το σύστημα αλλάζει και μεταβάλλεται για το χρονικό διάστημα  $[t_{k+1}, t_{k+2})$  στο σύστημα  $\dot{x}(t) = A_j x(t)$  με  $j \neq i$ . Την στιγμή της μετατροπής  $t_{k+1}$ , όπου είναι η τελευταία για το σύστημα  $\dot{x}(t) = A_i x(t)$  και η αρχική στιγμή για το σύστημα  $\dot{x}(t) = A_j x(t)$ , το διάνυσμα  $x(t)$  δεν μεταβαίνει από την μία κατάσταση στην άλλη ασυνεχώς,

$$x(t_{k+1}) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}, t < t_{k+1}} x(t).$$

Η διαδικασία που εκτυλίσσεται από ένα εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα, όπως το ορίσαμε παραπάνω, περιγράφεται από τα σχεδιαγράμματα 2.1 και 2.2. Σε κάθε στιγμή μόνο ένα υποσύστημα  $\Sigma_{A_i}$  εκτελείται. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η τροχιά της λύσης  $x(t)$  του συστήματός μας τις στιγμές μετατροπής δεν είναι λεία, παρόλα αυτά είναι παντού συνεχής. Βέβαια, είναι εμφανές ότι τις στιγμές μετατροπής η παράγωγος της λύσης  $x(t)$  παρουσιάζει ασυνέχειες.



**Σχεδιάγραμμα 2.1 :** Παράδειγμα τροχιάς ενός δευτέρου βαθμού εναλλασσόμενου γραμμικού συστήματος με  $x(0) = (0,1)^T$ .



**Σχεδιάγραμμα 2.2 :** Αναπαράσταση της λύσης ενός δευτέρου βαθμού εναλλασσόμενου γραμμικού συστήματος με αρχική κατάσταση στο (0,1). Στην τροχιά της λύσης οι τελείες υποδεικνύουν τις στιγμές μετατροπής.

**Ορισμός 2.1.3 :** Μη-αυτόνομα συστήματα ονομάζονται τα συστήματα που είναι της μορφής:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (2.3\alpha)$$

$$y(t) = C_i x(t), \quad \forall i \in \mathfrak{I} \quad (2.3\beta)$$

όπου το  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  υποδηλώνει την τροφοδοσία του συστήματος, ενώ το  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  υποδηλώνει την παραγωγή του. Στο μη-αυτόνομο σύστημά μας οι διαστάσεις των πινάκων  $B_i$  και  $C_i$  είναι σε συμφωνία.

Τα συστήματα της μορφής (2.3) ονομάζονται και *input-output* συστήματα. Στην περίπτωση όπου  $r = p = 1$  το σύστημα (2.3) ονομάζεται *single-input single-output* (SISO) σύστημα.

Συμπεριλαμβανομένου του σήματος μετατροπής  $\sigma(\cdot) \in \mathcal{S}$  το μη-αυτόνομο εναλλασσόμενο σύστημα έχει την εξής μορφή :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.4\alpha)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (2.4\beta)$$

όπου  $A(t) \equiv A_{\sigma(t)}$ ,  $B(t) \equiv B_{\sigma(t)}$ ,  $C(t) \equiv C_{\sigma(t)}$  για όλα τα  $t \in \mathbb{R}^+$  και  $\sigma(t) \in \mathcal{S}$ .

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι πίνακες  $A(t), B(t), C(t)$  υποβάλλονται σε μετατροπή ακριβώς στις ίδιες χρονικές στιγμές  $t_k$ . Έτσι, το μη-αυτόνομο εναλλασσόμενο σύστημα ορίζεται από την «οικογένεια» των input-output συστημάτων  $\{(A_i, B_i, C_i)\}, i \in \mathcal{I}$  και το σύνολο των αποδεκτών σημάτων μετατροπής  $\sigma(t) \in \mathcal{S}$ .

## 2.2 Ευστάθεια γραμμικών εναλλασσόμενων συστημάτων

### 2.2.1 Ορισμοί ευστάθειας

**Ορισμός 2.2.1:** Ένα σημείο  $p \in \mathbb{R}^n$  ονομάζεται *σημείο ισορροπίας* για το σύστημα (2.2) αν ισχύει  $A_i p = 0$  για  $i = 1, \dots, k$ . Στην συγκεκριμένη περίπτωση, η αρχή είναι πάντα ένα σημείο ισορροπίας για το σύστημα (2.2).

Στους παρακάτω ορισμούς, για ένα σημείο  $x \in \mathbb{R}^n$ , η νόρμα  $\|x\|$  υποδηλώνει την συνήθη Ευκλείδεια νόρμα του  $x$ , που δίνεται από την σχέση  $\|x\|^2 = x^t x$ .

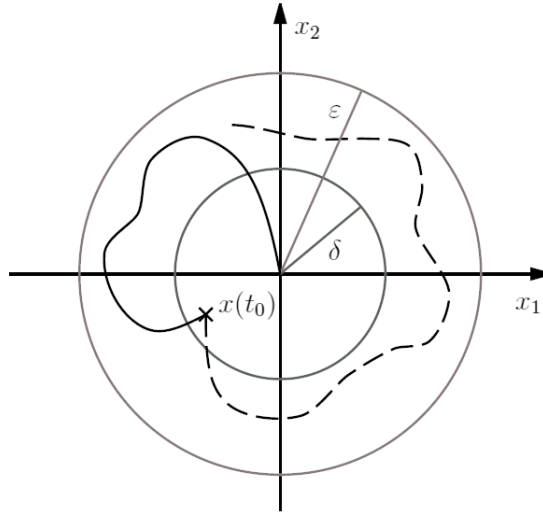
**Ορισμός 2.2.2:** Η αρχή των αξόνων είναι *ομοιόμορφα ευσταθές σημείο ισορροπίας* για το σύστημα (2.2), αν για οποιοδήποτε δοθέν  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta(\varepsilon) > 0$ , τέτοιο ώστε  $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$  να ικανοποιεί την ανισότητα  $\|x(t, t_0, x_0, \sigma)\| < \varepsilon$  για όλα τα  $t \geq t_0$  και όλα τα σήματα μετατροπής  $\sigma$ . Η επιλογή του  $\delta$  δεν εξαρτάται από το  $t_0$  ή το  $\sigma$ .

Εάν υπάρχει μία περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων, τέτοια ώστε όλες οι τροχιές που ξεκινάνε από αυτήν την περιοχή να συγκλίνουν στην αρχή των αξόνων, τότε έχουμε μία ελκυστική αρχή.

**Ορισμός 2.2.3:** Η αρχή των αξόνων είναι *ομοιόμορφα ελκυστικό σημείο ισορροπίας* για το σύστημα (2.2) αν υπάρχει  $\delta_\alpha > 0$  τέτοιο ώστε:  $\|x_0\| < \delta_\alpha \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0, \sigma)\| < 0$  καθώς το  $t \rightarrow \infty \quad \forall t_0 \geq 0, \forall \sigma(\cdot) \in \mathcal{S}$ .

Συνδυάζοντας τις συνθήκες του ορισμού 2.2.2 και του ορισμού 2.2.3, έχουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια.

**Ορισμός 2.2.4:** Η αρχή των αξόνων είναι *ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας* αν είναι ομοιόμορφα ευσταθές και ομοιόμορφα ελκυστικό.



**Σχεδιάγραμμα 2.3 : Παράδειγμα ορισμών ευστάθειας**

Η διακεκομμένη γραμμή παραμένει εντός της μπάλας με ακτίνα  $\epsilon$ , αλλά δεν συγκλίνει προς την αρχή των αξόνων. Συστήματα με τέτοιες τροχιές ονομάζονται ευσταθή. Η μη-διακεκομμένη γραμμή παραμένει εντός της μπάλας με ακτίνα  $\epsilon$  και συγκλίνει στην αρχή των αξόνων. Συνεπώς, αντιστοιχεί σε ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα.

Μία ακόμα πιο ισχυρή ιδιότητα είναι η εκθετική ευστάθεια.

**Ορισμός 2.2.5 :** Η αρχή των αξόνων είναι *ομοιόμορφα εκθετικά ευσταθές* σημείο ισορροπίας αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $a, b > 0$ , τέτοιοι ώστε όλες οι λύσεις του συστήματος (2.2) να ικανοποιούν την σχέση

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < a\|x_0\|e^{-bt} \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \sigma(\cdot) \in \mathcal{S}.$$

Στους προηγούμενους ορισμούς ευστάθειας αναφερθήκαμε σε περιπτώσεις αυτόνομων συστημάτων και περιγράψαμε την συμπεριφορά της τροχιάς της λύσης για αρχική συνθήκη διαφορετική του μηδενός. Σε αντίθεση με αυτά τα συστήματα, η input-output ευστάθεια αντιστοιχεί σε μη-αυτόνομα συστήματα με αρχική συνθήκη  $x_0 = 0$  και συσχετίζει την συμπεριφορά του παραγόμενου σήματος με την συμπεριφορά του φραγμένου εισαγόμενου σήματος. Σε αυτήν την περίπτωση, εάν όλα τα φραγμένα εισαγόμενα σήματα  $u(\cdot)$  έχουν ως αποτέλεσμα τα παραγόμενα σήματα  $y(\cdot)$ , που τους αντιστοιχούν, να είναι φραγμένα, τότε έχουμε φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου (BIBO: bounded-input bounded-output) ευστάθεια.

**Ορισμός 2.2.6 :** Το input-output σύστημα (2.4) είναι *BIBO ευσταθές* αν υπάρχει θετική σταθερά  $\gamma > 0$ , τέτοια ώστε για κάθε αρχική τιμή  $t_0$ , κάθε σήμα μετατροπής  $\sigma(\cdot) \in \mathcal{S}$  και κάθε φραγμένο εισαγόμενο σήμα  $u(\cdot)$ , το παραγόμενο σήμα  $y(\cdot)$  που του αντιστοιχεί να ικανοποιεί την σχέση

$$\sup_{t \geq t_0} \|y(t)\| \leq \gamma \sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|.$$

Ουσιαστικά, η BIBO ευστάθεια υποδεικνύει ότι το εισαγόμενο σήμα δεν μπορεί να ενισχυθεί περισσότερο από ένα συντελεστή καλύτερο από κάποια πεπερασμένη σταθερά  $\gamma$ .

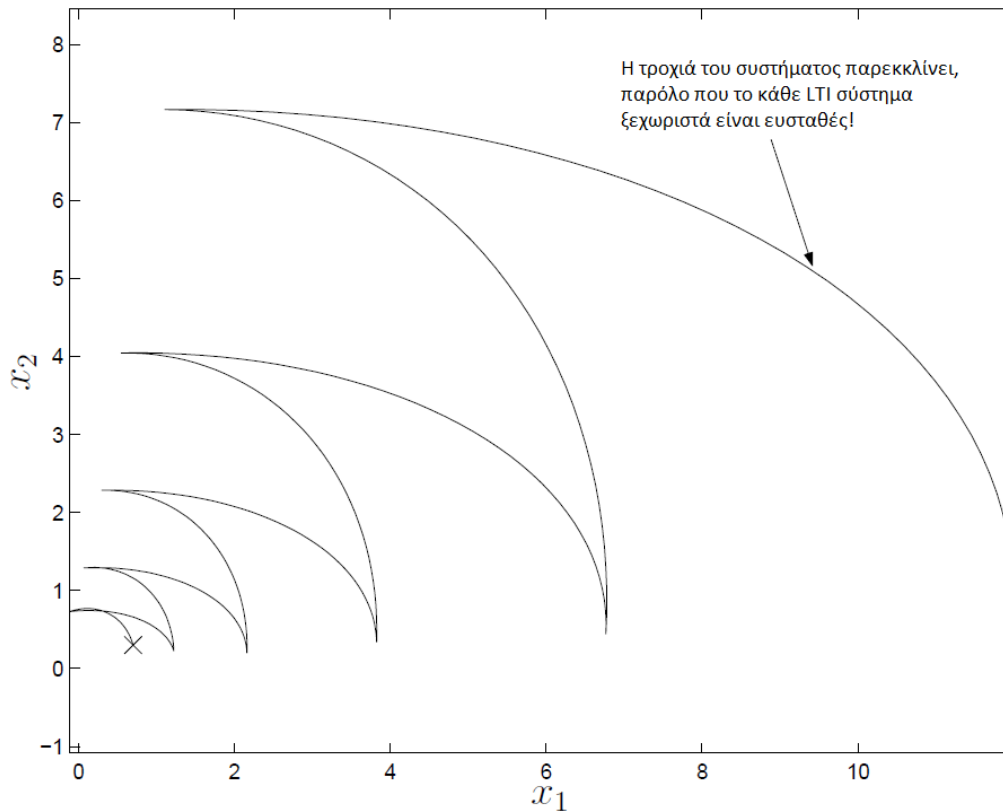
## 2.2.2 Προβλήματα ευστάθειας για γραμμικά εναλλασσόμενα συστήματα

Το LTI σύστημα  $\Sigma_A : \dot{x}(t) = Ax(t)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Πίνακες με αυτά τα χαρακτηριστικά ονομάζονται *Hurwitz* πίνακες. Δυστυχώς, όμως, για τα εναλλασσόμενα γραμμικά συστήματα της μορφής  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $t \geq t_0 > 0$ ,  $x(t_0) = x_0$ , η κατάσταση είναι αρκετά πιο περίπλοκη. Πιο συγκεκριμένα, η ασυμπτωτική ευστάθεια του καθενός εκ των LTI συστημάτων  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$  δεν είναι επαρκής, ώστε να εξάγουμε το αποτέλεσμα ότι ολόκληρο το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για αυθαίρετα σήματα μετατροπής. Το παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε να το εξάγουμε από διάφορα παραδείγματα. Αξίζει να παραθέσουμε δύο σχετικά παραδείγματα, ώστε να γίνει αντιληπτό.

**Παράδειγμα 2.2.1:** Θεωρούμε τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , όπου

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4.4908 & -35.1122 \\ 41.8926 & -6.2049 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -5.3169 & 64.9156 \\ -22.0802 & 4.0163 \end{pmatrix}.$$

Με το υπολογιστικό πρόγραμμα wolfram alpha υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές των δύο πινάκων και παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $A_1$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} \approx -0.85705 \pm 37.9782i$  και ο πίνακας  $A_2$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} \approx -0.6503 \pm 37.5709i$ . Άρα, και δύο πίνακες είναι Hurwitz, οπότε συμπεραίνουμε ότι το σύστημα  $\Sigma_{A_1}$ , όπως και το σύστημα  $\Sigma_{A_2}$ , είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Ωστόσο, εάν «τρέξουμε» την προσομοίωση του συστήματος  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $A(t) \in \{A_1, A_2\}$ , ξεκινώντας την στιγμή  $t = 0$  με  $A(0) = A_1$  με αρχική συνθήκη  $x(0) = (0.7, 0.3)^T$  και εναλλάσσοντας τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  κάθε  $\pi/80$ , παρατηρούμε τα αποτελέσματα στο παρακάτω σχεδιάγραμμα.



**Σχεδιάγραμμα 2.4 :** Η εναλλαγή μεταξύ ευσταθών συστημάτων μπορεί να οδηγήσει στην αστάθεια.

Είναι σαφές ότι καθώς το σήμα μετατροπής αλλάζει το σύστημα κάθε  $\pi/80$ , καθιστά το εναλλασσόμενο σύστημα ασταθές, αφού η τροχιά του συστήματος παρεκκλίνει όλο και περισσότερο με την πάροδο του χρόνου. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι παρόλο που τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  είναι ευσταθή, το εναλλασσόμενο σύστημα δεν είναι.

■

Στο εξής κάθε απαραίτητος μαθηματικός υπολογισμός πραγματοποιείται μέσω του υπολογιστικού πακέτου wolfram alpha.

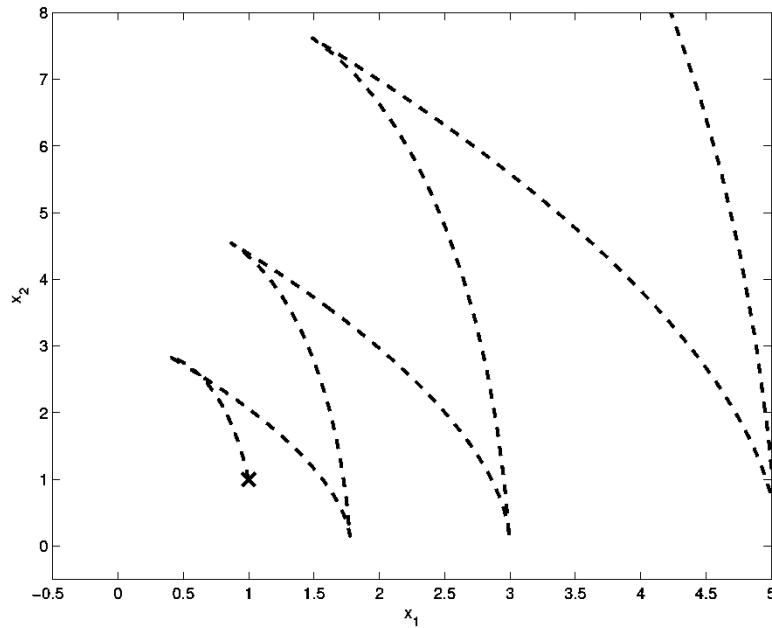
**Παράδειγμα 2.2.2 :** Θεωρούμε τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , όπου

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ 15 & -1.5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας  $A_1$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} \approx -1 \pm 3.84057i$  και ο πίνακας  $A_2$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} \approx -0.5 \pm 0.866025i$ . Οπότε, και οι δύο πίνακες είναι Hurwitz και τα αντίστοιχα συστήματα ασυμπτωτικά ευσταθή.

Επιλέγουμε περιοδικό σήμα μετατροπής, όπου το σύστημα  $\Sigma_{A_1}$  θα εξελίσσεται για  $\frac{2\pi}{25}$ , ενώ το  $\Sigma_{A_2}$  για  $\frac{8\pi}{25}$ . Δηλαδή, θα ξεκινήσουμε με το  $\Sigma_{A_1}$  στο χρονικό διάστημα  $[0, \frac{2\pi}{25})$ , στην συνέχεια, στο διάστημα  $[\frac{2\pi}{25}, \frac{10\pi}{25})$  θα εξελίσσεται το  $\Sigma_{A_2}$ , μετά πάλι το  $\Sigma_{A_1}$  και ούτω καθεξής. Η τροχιά του εναλλασσόμενου συστήματος

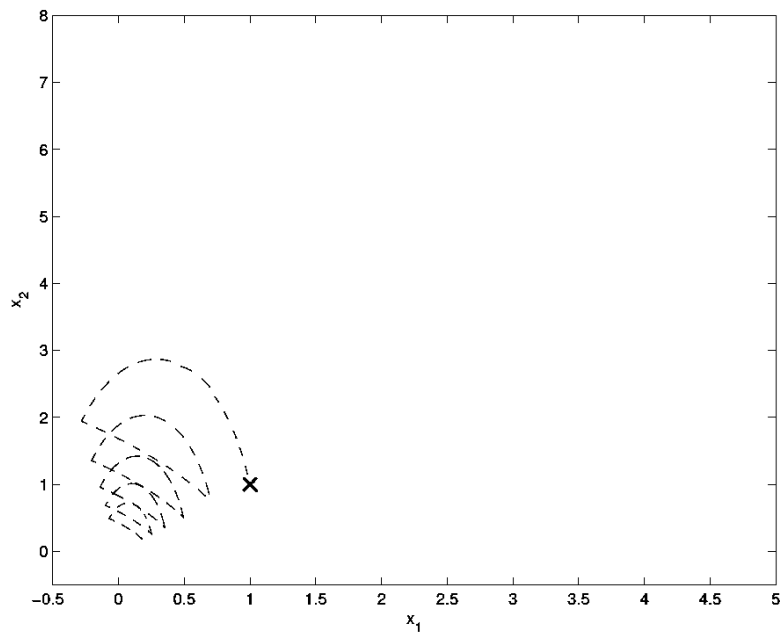
$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$  για αυτό το σήμα μετατροπής με αρχική συνθήκη  $(1,1)^t$  περιγράφεται από το σχεδιάγραμμα 2.5.



**Σχεδιάγραμμα 2.5 :** Η ασταθής τροχιά του εναλλασσόμενου συστήματος του παραδείγματος 2.2.2.

Είναι εμφανές πως για το συγκεκριμένο σήμα μετατροπής, το εναλλασσόμενο σύστημα οδηγείται σε αστάθεια.

Παρόλ'αυτά, αν διαλέξουμε ένα διαφορετικό σήμα μετατροπής, όπου το  $\Sigma_{A_1}$  θα εξελίσσεται σε διπλάσιο χρόνο από ότι είχαμε αρχικά επιλέξει και το  $\Sigma_{A_2}$  λιγότερο, θα έχουμε διαφορετικό αποτέλεσμα στην συμπεριφορά του εναλλασσόμενου συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, με το νέο σήμα μετατροπής που επιλέγουμε, το  $\Sigma_{A_1}$  θα εξελίσσεται για  $\frac{4\pi}{25}$  και, στην συνέχεια, το  $\Sigma_{A_2}$  για  $\frac{6\pi}{25}$ . Δηλαδή, θα ξεκινήσουμε με το  $\Sigma_{A_1}$  στο χρονικό διάστημα  $[0, \frac{4\pi}{25})$ , στην συνέχεια, στο διάστημα  $[\frac{4\pi}{25}, \frac{10\pi}{25})$  θα εξελίσσεται το  $\Sigma_{A_2}$ , και θα εναλλάσσονται διαδοχικά. Αξίζει να παρατηρήσουμε στο σχεδιάγραμμα 2.6 την νέα τροχιά του συστήματος πάλι με αρχική συνθήκη  $(1,1)^t$ .



**Σχεδιάγραμμα 2.6 :** Η ευσταθής τροχιά του του εναλλασσόμενου συστήματος του παραδείγματος 2.2.2 μετά την αλλαγή της συχνότητας των σημάτων μετατροπής.

Από το παραπάνω σχεδιάγραμμα, παρατηρούμε ότι, μετά την αλλαγή της συχνότητας των σημάτων μετατροπής, η τροχιά συγκλίνει στην αρχική συνθήκη και καθιστά το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές.

■

Από τα παραπάνω παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι παρόλο που και στις δύο περιπτώσεις οι πίνακες  $A_1$  και  $A_2$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς, κάτω από την επίδραση συγκεκριμένων σημάτων μετατροπής, το εναλλασσόμενο σύστημα

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in \{A_1, A_2\}$$

μπορεί να οδηγηθεί σε αστάθεια.

Το επόμενο θεώρημα, το οποίο παρουσιάζεται στο [22], περιγράφει μία απλή περίπτωση «οικογένειας» ασυμπτωτικά ευσταθών υποσυστημάτων, για τα οποία υπάρχει σήμα μετατροπής που αποσταθεροποιεί το αντίστοιχο εναλλασσόμενο σύστημα (όπως στα παραδείγματα 2.2.1 και 2.2.2).

**Θεώρημα 2.2.1 :** Θεωρώ τους Hurwitz πίνακες  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , για τους οποίους τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθή. Υποθέτω ότι υπάρχουν μη αρνητικοί αριθμοί  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε ο πίνακας  $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$  να έχει μία ιδιοτιμή  $\lambda$  με μη αρνητικό πραγματικό μέρος. Τότε, το σχετικό εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα (2.2) δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για αυθαίρετα σήματα μετατροπής. Επιπρόσθετα, αν ο πίνακας  $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$  έχει μία ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος, τότε θα υπάρχει ένα σήμα μετατροπής, για το οποίο η τροχιά της λύσης να παρεκκλίνει.

Από το θεώρημα [2.2.1](#) διαπιστώνουμε ότι αν ο πίνακας  $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$  να έχει μία ιδιοτιμή στο δεξί ημιεπίπεδο, τότε είναι πιθανό να πάρουμε μία μη φραγμένη λύση του εναλλασσόμενου συστήματος για κατάλληλα επιλεγμένο σήμα μετατροπής.

Έτσι, από τα παραπάνω της ενότητας αυτής, οδηγούμαστε στο ερώτημα ποια εναλλασσόμενα συστήματα είναι ευσταθή για αυθαίρετα σήματα μετατροπής. Αυτό θα το ελέγξουμε στην συνέχεια, βασιζόμενοι στην ύπαρξη τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης, αφού πρώτα κάνουμε μια εισαγωγή στις Lyapunov συναρτήσεις σε σχέση με τα γραμμικά εναλλασσόμενα συστήματα.

## 2.3 Γραμμικά εναλλασσόμενα συστήματα και Lyapunov συναρτήσεις

### 2.3.1 Lyapunov συναρτήσεις

**Θεώρημα 2.3.1 (Ευστάθεια Lyapunov) :** Το σημείο ισορροπίας  $x = 0$  του εναλλασσόμενου συστήματος [\(2.2\)](#) είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές εάν υπάρχει μία συνεχής, διαφορίσιμη και (ακτινικά) μη φραγμένη συνάρτηση  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  με

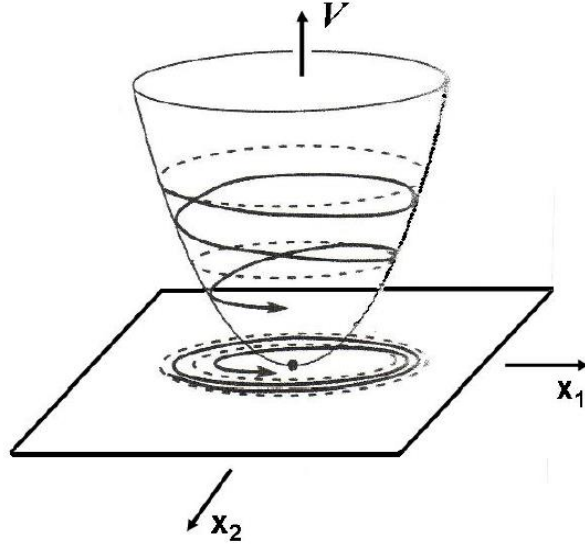
$$V(x) > 0, \text{ παντού, εκτός του } x = 0, \text{ και}$$

$$V(0) = 0 \text{ να είναι το μοναδικό ελάχιστο,}$$

έτσι ώστε η παράγωγός της να είναι αρνητική κατά μήκος των λύσεων  $x(t, t_0, x_0, \sigma)$  του [\(2.2\)](#), δηλαδή να ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x(t, t_0, x_0, \sigma)) < 0 \quad \forall x_0 \neq 0, t \neq t_k \quad (2.5)$$

για όλες τις αρχικές τιμές  $t_0$  και όλα τα σήματα μετατροπής  $\sigma(\cdot) \in \mathcal{S}$ . Το  $t_k$  υποδηλώνει τις στιγμές μετατροπής.



**Σχεδιάγραμμα 2.7 :** Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος 2.3.1 για το σύστημα  $\Sigma_{\mathcal{A},\mathcal{S}}: \dot{x}(t) = A(t)x(t)$ .

Όταν μία συνάρτηση  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής, διαφορίσιμη και μη φραγμένη με μοναδικό ελάχιστο στο  $x = 0$  με  $V(0) = 0$  και παντού, εκτός του  $x = 0$ , να ισχύει  $V(x) > 0$ , τότε ονομάζεται *υποψήφια συνάρτηση Lyapunov*.

Εάν η  $V(x)$  είναι Lyapunov συνάρτηση για το εναλλασσόμενο σύστημα (2.2) με αυθαίρετα σήματα μετατροπής, τότε είναι Lyapunov συνάρτηση και για το κάθε υποσύστημα  $\Sigma_{A_i}: \dot{x}(t) = A_i x(t)$ . Συναρτήσεις που είναι υποψήφιες συναρτήσεις Lyapunov και ικανοποιούν την (2.5) ονομάζονται *συνήθεις Lyapunov συναρτήσεις*.

**Ορισμός 2.3.1 :** Η συνάρτηση  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται *συνήθης Lyapunov συνάρτηση* για την «οικογένεια» των LTI συστημάτων  $\Sigma_{A_i}$  με  $A_i \in \mathcal{A}$ , εάν η  $V(x)$  είναι υποψήφια συνάρτηση Lyapunov ικανοποιεί την σχέση:

$$\nabla V(x) A_i x < 0 \quad \forall A_i \in \mathcal{A}, x \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

Η ύπαρξη συνήθους Lyapunov συνάρτησης είναι αρκετή για να εξασφαλίσει την ασυμπτωτική ευστάθεια του εναλλασσόμενου συστήματος (2.2) με υποσυστήματα που ανήκουν στο  $\mathcal{A}$ . Ανάμεσα σε δύο διαδοχικές στιγμές μετατροπής  $t_k, t_{k+1}$ , το εναλλασσόμενο σύστημα αναπτύσσεται σύμφωνα με το  $\Sigma_{A_{i_k}}$ , για το οποίο θέλουμε να ισχύει  $\nabla V(x) A_{i_k} x < 0$ , έτσι ώστε να μην οδηγηθεί το σύστημα σε αβεβαιότητα. Σε κάθε στιγμή μετατροπής η παράγωγος της  $V$  παραμένει συνεχής και, κατόπιν της μετατροπής, πάλι θα πρέπει να ισχύει  $\nabla V(x) A_{i_{k+1}} x < 0$ .

**Θεώρημα 2.3.2 :** Το σύστημα (2.2) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για αυθαίρετα σήματα μετατροπής  $\sigma(\cdot) \in \mathcal{S}$ , εάν υπάρχει συνήθης Lyapunov συνάρτηση  $V(x)$  για τα LTI υποσυστήματα  $\Sigma_{A_i}$ ,  $i \in \mathcal{I}$ .

Οι συνήθεις Lyapunov συναρτήσεις παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον, διότι συμβάλλουν στην εξακρίβωση της ευστάθειας του εναλλασσόμενου συστήματος με αυθαίρετα σήματα μετατροπής και έτσι είναι σκόπιμο να αναφερθούμε σε κάποιες ιδιότητές τους μέσα από τα παρακάτω λήμματα.

**Λήμμα 2.3.1 :** Έστω η  $V(x)$  να είναι συνήθης Lyapunov συνάρτηση για τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_i}$  με  $A_i \in \mathcal{A}$  και θεωρώ τον μετασχηματισμό  $\tilde{x} = Sx$ , με τον πίνακα  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  να είναι μη ιδιάζων. Τότε, η  $V(S^{-1}\tilde{x})$  είναι συνήθης Lyapunov συνάρτηση για τα μετασχηματισμένα συστήματα  $\Sigma_{\tilde{A}_i}$  με  $\tilde{A}_i = SA_iS^{-1}$ .

*Απόδειξη:* Υποθέτω ότι η  $V(S^{-1}\tilde{x})$  είναι συνήθης Lyapunov συνάρτηση για τα συστήματα  $\Sigma_{\tilde{A}_i}$ . Η  $V(S^{-1}\tilde{x})$ , όμως, είναι Lyapunov συνάρτηση για τα  $\Sigma_{\tilde{A}_i}$  αν και μόνο αν  $\nabla V(S^{-1}\tilde{x})\tilde{A}_i\tilde{x} < 0$ . Το ανάδελτα του  $V(S^{-1}\tilde{x})$  ως προς το  $\tilde{x}$  είναι  $V(S^{-1}\tilde{x})S^{-1}$ . Έτσι, θα έχουμε  $\nabla V(S^{-1}\tilde{x})S^{-1}\tilde{A}_i\tilde{x} < 0$ . Θέτοντας  $\tilde{A}_i = SA_iS^{-1}$  και  $\tilde{x} = Sx$ , προκύπτει ότι  $\nabla V(x)A_ix < 0$ . Η τελευταία ανίσωση ισχύει βάση της υπόθεσης ότι η  $V(x)$  είναι Lyapunov συνάρτηση. Άρα, ισχύει και η αρχική μας υπόθεση και, έτσι, έπεται το ζητούμενο. ■

**Λήμμα 2.3.2 :** Έστω η  $V(x)$  να είναι συνήθης Lyapunov συνάρτηση για τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_i}$  με  $A_i \in \mathcal{A}$ . Τότε, η  $V(x)$  είναι επίσης Lyapunov συνάρτηση για τα LTI συστήματα  $\Sigma_{\bar{A}}$  με  $\bar{A} = \sum_{i=1}^n a_i A_i$  με  $a_i \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1$ .

*Απόδειξη:* Η  $V(x)$  είναι Lyapunov συνάρτηση για τα LTI συστήματα  $\Sigma_{\bar{A}}$  αν και μόνο αν  $\nabla V(x) \sum_{i=1}^n a_i A_i x < 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \nabla V(x) A_i x < 0$ . Εφόσον, η  $V(x)$  είναι Lyapunov συνάρτηση για τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_i}$ , θα ισχύει  $\nabla V(x) A_i x < 0 \forall A_i \in \mathcal{A}$ . Επίσης, ο κυρτός συνδυασμός αρνητικών αριθμών είναι και αυτός αρνητικός αριθμός. Οπότε, η ανισότητα  $\nabla V(x) \sum_{i=1}^n a_i A_i x < 0$  ισχύει και η  $V(x)$  είναι Lyapunov συνάρτηση για τα  $\Sigma_{\bar{A}}$ . ■

Πριν παραθέσουμε το επόμενο θεώρημα, είναι σημαντικό να επισημάνουμε δύο στοιχεία για την συνάρτηση  $V(x)$ . Πρώτον, η συνάρτηση  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ομογενής βαθμού  $p$  αν  $V(ax) = a^p V(x)$  για κάθε  $a > 0$  και  $x \in \mathbb{R}^n$ . Δεύτερον, η συνήθης παράγωγος της  $V(x)$  έχει την μορφή

$$u(x) = \max_{i \in \mathfrak{T}} \frac{\partial V(x)}{\partial \xi_i},$$

όπου  $\xi_i = A_i x$  είναι η κατεύθυνση της τροχιάς στο σημείο  $x$  για το σύστημα  $\Sigma_{A_i}$  και

$$\frac{\partial V(x)}{\partial \xi} = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{V(x + \Delta \xi) - V(x)}{\Delta}$$

είναι η «από δεξιά» παράγωγος. Τότε, το  $u(x)$  είναι το μέγιστο όλων των «εκ δεξιών» παραγώγων της  $V(x)$  στο σημείο  $x \in \mathbb{R}^n$  για τις κατευθύνσεις του  $\xi_i = A_i x$ .

**Θεώρημα 2.3.3 :** Η αρχή των αξόνων για το εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα (2.2) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν υπάρχει μία αυστηρά κυρτή, ομογενής βαθμού 2 Lyapunov συνάρτηση  $V(x)$  της μορφής

$$V(x) = x^t \mathcal{L}(x)x, \quad \mathcal{L}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\text{με } \mathcal{L}(x)^t = \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\alpha x), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$V(0) = 0$$

τέτοια ώστε η παράγωγος  $u(t)$  να είναι αρνητική για όλες τις λύσεις  $x(t)$ , δηλαδή

$$\max_{\xi_i=A_i x} \frac{\partial V(x)}{\partial \xi_i} \leq -\gamma \|x\|^2, \quad \gamma > 0. \quad (2.7)$$

Η συνάρτηση  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κυρτή, αλλά όχι συνεχώς διαφορίσιμη. Επίσης, σε κάθε σημείο  $x$ , ο πίνακας  $\mathcal{L}(x)$  είναι συμμετρικός. Εάν ο πίνακας  $\mathcal{L}(x)$  είναι σταθερός πάντα, τότε η  $V(x)$  είναι μία συνήθης τετραγωνική Lyapunov συνάρτηση [2].

Καθώς η Lyapunov συνάρτηση που παρουσιάζεται στο θεώρημα 2.3.3 δεν είναι απαραίτητο να είναι λεία, ένα παρόμοιο αποτέλεσμα, χάρη στους W. Dayawansa και C. Martin που το απέδειξαν στο [21], δείχνει ότι αν το σύστημα (2.2) είναι ομοιόμορφα εκθετικά ευσταθές, τότε υπάρχει λεία συνήθης Lyapunov συνάρτηση για τα υποσυστήματά του.

**Θεώρημα 2.3.4 :** Για το εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα (2.2) τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- i. Η αρχή των αξόνων είναι ένα ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για αυθαίρετα σήματα μετατροπής.
- ii. Η αρχή των αξόνων είναι ένα ομοιόμορφα εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για αυθαίρετα σήματα μετατροπής
- iii. Υπάρχει μία  $C^1$  θετικά ορισμένη συνάρτηση  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ομογενής βαθμού 2, τέτοια ώστε η  $\nabla V(x)A_i x$  να είναι μία αρνητικά ορισμένη συνάρτηση του  $x$  για όλα τα  $A_i \in \mathcal{A}$ .
- iv. Υπάρχει μία  $C^\infty$  θετικά ορισμένη συνάρτηση  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε η  $\nabla V(x)A_i x$  να είναι μία αρνητικά ορισμένη συνάρτηση του  $x$  για όλα τα  $A_i \in \mathcal{A}$ .

Τα παραπάνω θεωρήματα αποδεικνύουν ότι η ύπαρξη συνήθους Lyapunov συναρτήσεως για τα υποσυστήματα ενός εναλλασσόμενου συστήματος είναι επαρκής για την ομοιόμορφα ασυμπτωτική του ευστάθεια. Ένα πιο σημαντικό αποτέλεσμα, όμως, είναι ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι εάν το εναλλασσόμενο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε τα υποσυστήματά του επιδέχονται συνήθη Lyapunov συνάρτηση. Για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα χρειάζεται να προσδιορίσουμε Lyapunov συναρτήσεις, που θα μας βοηθήσουν να αναλύσουμε την ευστάθεια εναλλασσόμενων συστημάτων.

### 2.3.2 Συνήθεις τετραγωνικές Lyapunov συναρτήσεις

Για να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας χρειάζεται να προσδιορίσουμε Lyapunov συναρτήσεις, ώστε να εξάγουμε ακριβή αποτελέσματα για την ευστάθεια εναλλασσόμενων συστημάτων. Φυσικά, η έρευνά μας δεν είναι εφικτό να επεκταθεί σε ολόκληρο το σύνολο των πιθανών Lyapunov συναρτήσεων και για αυτόν τον λόγο θα περιοριστούμε να ερευνήσουμε Lyapunov συναρτήσεις με συγκεκριμένη μορφή.

Η πιο συνηθισμένη μορφή Lyapunov συνάρτησης είναι η τετραγωνική μορφή  $V(x) = x^t P x$ . Η ανάλυση της ευστάθειας των LTI συστημάτων αποτελείται από ένα σύνολο συναρτήσεων για τις οποίες η ύπαρξη τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος [15]. Για τα εναλλασσόμενα συστήματα της μορφής (2.2), σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.2, προκύπτει ότι υπάρχει μία συνήθης τετραγωνική Lyapunov συνάρτηση (CQLF: common quadratic Lyapunov function),  $V(x) = x^t P x$ , για τα υποσυστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ , η οποία καθιστά ολόκληρο το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές για αυθαίρετα σήματα μετατροπής, κατά την διάρκεια που εξελίσσεται το σύστημα.

Η παραπάνω παρατήρηση μπορεί να γραφτεί σε μια απλή αλγεβρική μορφή για το σύστημα. Πιο συγκεκριμένα [11], η συνάρτηση  $V(x) = x^t P x$  είναι CQLF για τα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$  αν και μόνο αν :

$$P = P^t > 0 \text{ και } A_i^t P + P A_i < 0 \text{ για } 1 \leq i \leq k \quad (2.8)$$

Αυτό ισχύει διότι, έχοντας το LTI σύστημα  $\Sigma_{A_i} : \dot{x}(t) = A_i x(t)$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , επιλέγω  $V(x) = x^t P x$ , με  $P = P^t > 0$  να είναι μία υποψήφια Lyapunov συνάρτηση. Έτσι,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^t P x + x^t P \dot{x} \\ &= x^t (A_i^t P + P A_i) x. \end{aligned}$$

Εάν  $A_i^t P + P A_i = Q_i$  με  $Q_i < 0$ , τότε:

$$\dot{V} = x^t Q_i x < 0 \quad (x \neq 0).$$

Απαραίτητη συνθήκη για ασυμπτωτική ευστάθεια ενός εναλλασσόμενου συστήματος της μορφής (2.2) με αυθαίρετα σήματα μετατροπής, είναι τα LTI υποσυστήματα  $\Sigma_{A_i}$  για  $i \in \mathcal{I}$  να είναι ασυμπτωτικά ευσταθή, δηλαδή οι αντίστοιχοι πίνακες  $A_i$  να είναι Hurwitz. Μία επαρκής, αλλά όχι εν γένει απαραίτητη συνθήκη, για την ασυμπτωτική ευστάθεια των LTI υποσυστημάτων είναι η ύπαρξη συνήθους τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης. Όμως, η ύπαρξη μιας τέτοιας Lyapunov συνάρτησης επιβεβαιώνει την ασυμπτωτική ευστάθεια του εναλλασσόμενου συστήματος.

**Παράδειγμα 2.3.1 :** Θεωρώ τα LTI συστήματα δεύτερης τάξης  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , όπου

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 5 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας  $A_1$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = -2$  και ο πίνακας  $A_2$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm \sqrt{5}i$ . Άρα, και οι δύο πίνακες είναι Hurwitz και τα συστήματα που τους αντιστοιχούν ασυμπτωτικά ευσταθή. Στόχος μας είναι να βρούμε έναν συμμετρικό πίνακα  $P$ , θετικά ορισμένο, τέτοιο ώστε οι πίνακες  $A_1^t P + P A_1$  και  $A_2^t P + P A_2$  να είναι αρνητικά ορισμένοι, και έτσι το εναλλασσόμενο σύστημα  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $A(t) \in \{A_1, A_2\}$  να έχει CQLF.

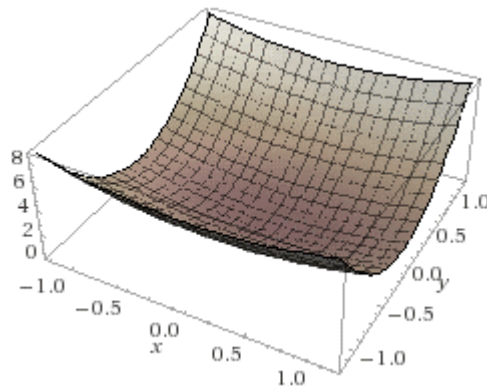
Αν επιλέξουμε  $P = I$ , τότε ο πίνακας  $I$  είναι πράγματι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ο πίνακας  $A_1^t I + I A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  είναι αρνητικά ορισμένος, διότι έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -4.41$ ,  $\lambda_2 \approx -1.58$ . Όμως, ο πίνακας  $A_2^t I + I A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  δεν είναι αρνητικά ορισμένος, διότι οι ιδιοτιμές του είναι  $\lambda_1 = -5$  και  $\lambda_2 = 3$ . Άρα, η Ευκλείδεια νόρμα  $x^t x$  δεν μπορεί να είναι CQLF για το συγκεκριμένο ζεύγος συστημάτων. Συνεπώς, απαιτείται να βρούμε έναν πίνακα  $P$ , που να ικανοποιεί την ανίσωση (2.8), ώστε να εξασφαλίσουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια του εναλλασσόμενου συστήματος.

Έτσι, κάνοντας μία πιο προσεκτική επιλογή του ζητούμενου πίνακα  $P$ , καταλήγουμε στον συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ . Τότε, οι πίνακες

$$A_1^t P + P A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ και } A_2^t P + P A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

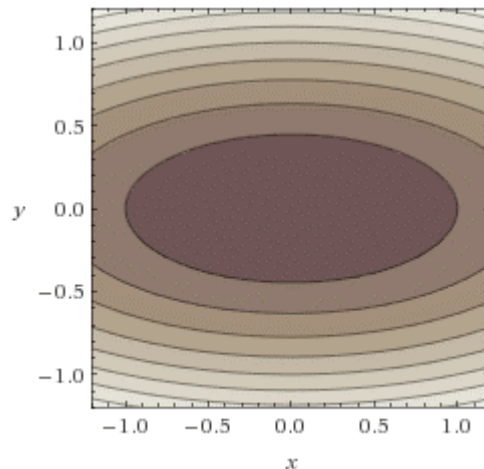
είναι αρνητικά ορισμένοι (με ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -12.831$ ,  $\lambda_2 \approx -1.16905$  και  $\lambda_1 = -0.5$ ,  $\lambda_2 = -2.5$  αντίστοιχα). Άρα, η συνάρτηση  $V(x) = x^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x$  είναι συνήθης τετραγωνική Lyapunov συνάρτηση (CQLF) για το εναλλασσόμενο σύστημα.

Φυσικά, ο συγκεκριμένος πίνακας  $P$ , που βρήκαμε, δεν είναι ο μοναδικός που επαληθεύει την ανίσωση (2.8) (οι Lyapunov συναρτήσεις δεν είναι απαραίτητα μοναδικές). Η ύπαρξη της  $V(x) = x^t P x$  με  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  διασφαλίζει ότι το εναλλασσόμενο σύστημα δεν θα οδηγηθεί σε αβεβαιότητα. Στο σχεδιάγραμμα παρακάτω απεικονίζεται η τετραγωνική αυτή Lyapunov συνάρτηση.



**Σχεδιάγραμμα 2.8 :** Η συνήθης τετραγωνική Lyapunov συνάρτηση για το παράδειγμα 2.3.1.

Στο σχεδιάγραμμα 2.9 παρουσιάζονται τα επίπεδα της τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης που βρήκαμε, τα οποία παρατηρούμε ότι είναι ελλειψοειδείς καμπύλες. Όταν μία τροχιά του εναλλασσόμενου συστήματος εισέλθει σε μία από αυτές τις ελλειψοειδείς καμπύλες, τότε δεν μπορεί να εξέλθει ποτέ, αλλά θα συγκλίνει στην αρχή των αξόνων. Αυτή η ιδιότητα της συνήθους τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης είναι που καθιστά ολόκληρο το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές.



**Σχεδιάγραμμα 2.9 :** Επίπεδα τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης του παραδείγματος 2.3.1.

■

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι η ύπαρξη τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης για κάθε υποσύστημα ενός εναλλασσόμενου συστήματος με αυθαίρετα σήματα μετατροπής καθιστά ολόκληρο το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές. Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στο ερώτημα κάτω από ποιες συνθήκες το σύνολο των LTI υποσυστημάτων ενός εναλλασσόμενου συστήματος επιδέχεται CQLF, το οποίο θα το μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

## Κεφάλαιο 3

# Συνήθης τετραγωνική Lyapunov συνάρτηση: πρόβλημα ύπαρξης

### 3.1 Υπόβαθρο του προβλήματος ύπαρξης CQLF

Το πρόβλημα της ύπαρξης CQLF στηρίζεται στην εξής ιδέα. Δοθέντων των Hurwitz πινάκων  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , οι οποίοι αντιστοιχούν στα ασυμπτωτικά ευσταθή υποσυστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ , ορίζουμε τον θετικά ορισμένο πίνακα  $P = P^t > 0$ , ώστε να ισχύει:

$$A_i^t P + P A_i < 0, \text{ για } 1 \leq i \leq k.$$

Εάν τέτοιος πίνακας  $P$  υπάρχει, τότε η  $V(x) = x^t P x$  είναι CQLF για τα LTI υποσυστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ .

Αντίθετα, όπως παρουσιάζεται στο [20], στην περίπτωση που δεν υπάρχει CQLF για τα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ , είναι εφικτό να κατασκευάσουμε συμμετρικούς πίνακες  $R_1, \dots, R_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , για τους οποίους ισχύει

$$\sum_{i=1}^k (A_i^t R_i + R_i A_i) > 0, \quad R_i > 0. \quad (3.1)$$

Μέχρι σήμερα, πολλές μελέτες έχουν επικεντρωθεί στο πρόβλημα ύπαρξης CQLF για «οικογένειες» LTI συστημάτων και έτσι αρκετά σχετικά θεωρητικά αποτελέσματα είναι πλέον διαθέσιμα [1,11,14]. Πρωτού όμως ασχοληθούμε εκτενώς με το πρόβλημα ύπαρξης CQLF είναι σημαντικό να αναφερθούμε σε μια σειρά παραδοχών, πορισμάτων και παρατηρήσεων που θα μας βοηθήσουν στην συνέχεια.

#### ***Lyapunov ισότητα και πίνακας Hurwitz:***

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα στην περιοχή της Θεωρίας Ελέγχου που εξετάζουμε είναι το επόμενο θεώρημα [14,18], το οποίο συσχετίζει την περιοχή που βρίσκεται το φάσμα των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$  με την ύπαρξη μιας θετικά ορισμένης λύσης που θα ικανοποιεί την ανισότητα (2.8).

**Θεώρημα 3.1.1 :** Δίνονται οι πίνακες  $A, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Τότε, υπάρχει πίνακας  $P = P^t > 0$  στο  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , τέτοιος ώστε

$$A^t P + P A = Q \quad (3.2)$$

με  $Q < 0$  αν και μόνο αν ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz. Επιπλέον, αν ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz, τότε υπάρχει μοναδική λύση της (3.2)  $P$  με  $P = P^t$  για κάθε επιλογή συμμετρικού πίνακα  $Q$  και ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν ο  $Q$  είναι αρνητικά ορισμένος.

Η ισότητα (3.2) ονομάζεται *Lyapunov ισότητα* και είναι μια ειδική περίπτωση μιας πιο γενικής ισότητας πινάκων, γνωστή ως *Sylvester ισότητα*, η οποία δίνεται από την σχέση

$$AX + XB = Q, \quad (3.3)$$

όπου δίνονται οι πίνακες  $A, B, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και ο  $X$  είναι άγνωστος. Η ισότητα (3.3) έχει μοναδική λύση  $X$  για κάθε  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  αν και μόνο αν καμία ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  δεν συμπίπτει με ιδιοτιμή του πίνακα  $-B$ . Αυτός ο ισχυρισμός προκύπτει ως εξής. Η Sylvester ισότητα είναι ισοδύναμη με την ισότητα<sup>1</sup>

$$((I_n \otimes A) + (B^t \otimes I_n)) \text{vec}(X) = \text{vec}(Q).$$

Έτσι, η Sylvester ισότητα θα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ο πίνακας

$$M := (I_n \otimes A) + (B^t \otimes I_n)$$

είναι αντιστρέψιμος.

Δηλαδή, αν και μόνο αν  $0 \notin \sigma(M) = \sigma((I_n \otimes A) + (B^t \otimes I_n)) = \{\lambda_i + \mu_k | \lambda_i \in \sigma(A), \mu_k \in \sigma(B)\} \Leftrightarrow \sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset$ .

*Παρατηρήσεις:*

1. Θέτοντας  $B = A^t$  στην ισότητα (3.3) προκύπτει ότι η Lyapunov ισότητα θα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του  $A$  δεν συμπίπτουν με αυτές του  $-A^t$ , δηλαδή  $\sigma(A) \cap \sigma(-A^t) = \emptyset$ . Εάν ο πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , τότε ο πίνακας  $-A^t$  θα έχει ιδιοτιμές  $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ . Έτσι, μία επαρκής συνθήκη που εγγυάται ότι οι πίνακες  $A$  και  $-A^t$  δεν θα έχουν κοινές ιδιοτιμές είναι ο πίνακας  $A$  να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Εάν ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz, οι ιδιοτιμές του,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, ενώ οι ιδιοτιμές του  $-A^t$  θα έχει θετικό πραγματικό μέρος και έτσι  $\sigma(A) \cap \sigma(-A^t) = \emptyset$ .
2. Δοθέντος ενός Hurwitz πίνακα  $A$  και ενός συμμετρικού πίνακα  $Q$ , η μοναδική λύση  $P$  της Lyapunov ισότητας (3.2) είναι η εξής:

$$P = - \int_0^\infty e^{A^t t} Q e^{A t} dt.$$

<sup>1</sup> Το γινόμενο Kronecker υποδηλώνεται με το σύμβολο  $\otimes$  και το γινόμενο Kronecker ενός πίνακα

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  με το  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$  είναι  $A \otimes B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \cdots & \alpha_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}B & \cdots & \alpha_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$ .

Για να δείξουμε ότι το  $P$  είναι λύση της (3.2), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} A^t P + P A &= - \int_0^\infty A^t e^{A^t t} Q e^{A t} dt - \int_0^\infty e^{A^t t} Q e^{A t} A dt \\ &= - \int_0^\infty A^t e^{A^t t} Q e^{A t} + e^{A^t t} Q e^{A t} A dt \\ &= - \int_0^\infty \frac{d}{dt} [e^{A^t t} Q e^{A t}] dt \\ &= - [e^{A^t t} Q e^{A t}]_0^\infty = -(-Q) = Q. \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι αυτή η λύση είναι μοναδική, υποθέτουμε ότι το  $P'$  είναι επίσης μία λύση. Έτσι, θα ισχύει  $A^t P' + P' A = Q$ . Αφαιρώντας την ισότητα (3.2) από την τελευταία προκύπτει

$$A^t (P' - P) + (P' - P) A = 0.$$

Αλλά αυτό συνεπάγεται ότι

$$e^{A^t t} A^t (P' - P) e^{A t} + e^{A^t t} (P' - P) A e^{A t} = 0, t \geq 0,$$

από το οποίο έχουμε

$$\frac{d}{dt} [e^{A^t t} (P' - P) e^{A t}] = 0, t \geq 0.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη από το 0 ως το  $\infty$  προκύπτει το  $e^{A^t t} (P' - P) e^{A t}$  είναι σταθερό και έτσι εξάγουμε το αποτέλεσμα ότι για όλες τις τιμές του  $t$  θα έχει την ίδια τιμή.

Για  $t = 0$ :  $e^{A^t t} (P' - P) e^{A t} = P' - P$ . Παίρνοντας όρια στην τελευταία σχέση για  $t \rightarrow +\infty$ , θα έχουμε ότι  $P' - P = 0$ .

Άρα,  $P' = P$ .

Στο επόμενο λήμμα, γίνεται σαφής η εξάρτηση του πίνακα  $P$  από την Lyapunov ισότητα.

**Λήμμα 3.1.1 :** Εάν ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz και για κάθε πίνακα  $P$  ικανοποιείται η ισότητα  $A^t P + P A = Q$  με  $Q < 0$ , τότε αναγκαστικά ο πίνακας  $P$  θα είναι θετικά ορισμένος.

*Απόδειξη:* Υποθέτω ότι ο πίνακας  $P$ , που ικανοποιεί την ισότητα  $A^t P + P A = Q$  με  $Q < 0$ , είναι αρνητικά ορισμένος. Έτσι, θα υπάρχει  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x} \neq 0$ , τέτοιο ώστε  $\bar{x}^t P \bar{x} \leq 0$ . Ας εκτιμήσουμε την Lyapunov συνάρτηση,  $V(x) = x^t P x$ , για το σύστημα  $\dot{x} = A x$ , ξεκινώντας από την αρχική συνθήκη  $\bar{x}$ . Τότε, η τιμή της Lyapunov συνάρτησής μας δεν είναι θετική και, επίσης, θα πρέπει συνεχώς να μειώνεται (αφού  $A^t P + P A = Q < 0$ ). Όμως, αφού ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz, το σύστημα θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Έτσι, οδηγούμαστε στην αντίφαση, αφού η Lyapunov συνάρτηση  $V(x) = x^t P x$  δεν μπορεί να τείνει στο μηδέν, αφού συνεχώς θα μειώνεται υπό το μηδέν. Άρα, αναγκαστικά ο πίνακας  $P$  θα πρέπει να είναι θετικά ορισμένος.

■

### Ο Lyapunov τελεστής $\mathcal{L}_A$ :

Ο Lyapunov τελεστής  $\mathcal{L}_A$  ορίζεται στον χώρο  $Sym(n, \mathbb{R})$  από την σχέση:  
 $\mathcal{L}_A(H) = A^t H + H A$  για όλους τους πίνακες  $H$  που ανήκουν στο  $Sym(n, \mathbb{R})$ .

Επί της ουσίας, ο Lyapunov τελεστής  $\mathcal{L}_A$  απεικονίζει τον χώρο των συμμετρικών πινάκων στον εαυτό του και είναι γραμμικός τελεστής που ορίζεται σε έναν διανυσματικό χώρο διάστασης  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Θεωρούμε ότι το  $Sym(n, \mathbb{R})$  είναι εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^t B) \quad (3.4)$$

Ας αναφερθούμε σε κάποια σημαντικά συμπεράσματα για τελεστές  $\mathcal{L}_A$ .

1. Εάν ο πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , τότε οι ιδιοτιμές του  $\mathcal{L}_A$  θα είναι  $\lambda_i + \lambda_j$  για  $1 \leq i \leq j \leq n$  (το οποίο προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση 1. για την ισότητα Lyapunov). Επίσης, ο  $\mathcal{L}_A$  είναι αντιστρέψιμος (στην πραγματικότητα όλες οι ιδιοτιμές του περιλαμβάνονται στο ανοικτό αριστερό ημιεπίπεδο) εάν ο  $A$  είναι Hurwitz, εφόσον  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ .
2. Ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας  $P = P^t > 0$  στο  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , τέτοιος ώστε  $\mathcal{L}_A(P) < 0$ , σύμφωνα με το θεώρημα 3.3.1. Σε αυτήν την περίπτωση, η  $x^t P x$  είναι CQLF για το σύστημα  $\dot{x}(t) = A x(t)$ .
3. Θεωρώ τα διανύσματα  $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ , τα οποία ανήκουν στο  $\mathbb{R}^n$ . Τότε, οι συμμετρικοί πίνακες

$$E_{ii} = e_i e_i^t, \quad 1 \leq i \leq n$$
$$E_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_i e_j^t + e_j e_i^t), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

σχηματίζουν μία ορθογώνια βάση στο  $Sym(n, \mathbb{R})$ , η οποία σέβεται το εσωτερικό γινόμενο (3.4). Επομένως, [1] είναι εφικτό να αναπαραστήσουμε τους τελεστές  $\mathcal{L}_A$  για αυτήν την βάση, παίρνοντας έτσι ένα πίνακα διάστασης  $\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$ .

4. Για τον προηγούμενο πίνακα, ισχύει ότι  $\mathcal{L}_{A^t} = \mathcal{L}_A^t$ .

### Το σύνολο $\mathcal{P}_A$ των λύσεων της Lyapunov ανισότητας:

Από το θεώρημα 3.1.1 συμπεραίνουμε ότι εάν ο πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι Hurwitz, τότε υπάρχει ένας θετικά ορισμένος πίνακας  $P$ , τέτοιος ώστε να ισχύει η ανισότητα Lyapunov  $A^t P + P A < 0$ . Στην πραγματικότητα, το σύνολο όλων των θετικά ορισμένων πινάκων  $P$ , που ικανοποιούν αυτήν την ανισότητα

Lyapunov που αντιστοιχεί στον πίνακα  $A$ , ορίζει ένα κυρτό κώνο στον χώρο των συμμετρικών πινάκων  $Sym(n, \mathbb{R})$ . Έτσι, ορίζοντας  $\mathcal{P}_A$  ως:

$$\mathcal{P}_A = \{P = P^t > 0 : A^t P + P A < 0\} = \{P = P^t > 0 : \mathcal{L}_A(P) < 0\} \quad (3.5)$$

τότε εξάγουμε τα εξής δύο συμπεράσματα για αυτό το σύνολο.

Πρώτον, ο  $\mathcal{P}_A$  είναι ένας (ανοιχτός) κυρτός κώνος. Πιο συγκεκριμένα, δοθέντων δύο πινάκων  $P_1, P_2$  να ανήκουν στο  $\mathcal{P}_A$  και έχοντας δύο θετικούς πραγματικούς αριθμούς  $\lambda, \mu$ , τότε ο πίνακας  $\lambda P_1 + \mu P_2$  ανήκει και αυτός στο  $\mathcal{P}_A$ . Δεύτερον, το κλειστό σύνολο του  $\mathcal{P}_A$  συμβολίζεται  $\overline{\mathcal{P}_A}$  και είναι το σύνολο  $\{P = P^t \geq 0 : A^t P + P A \leq 0\}$ , το οποίο ανήκει και αυτό στο  $Sym(n, \mathbb{R})$ .

*Παρατήρηση:* Από το θεώρημα 3.3.1 έπεται ότι ο κώνος  $\mathcal{P}_A$  είναι μη κενός αν και μόνο αν ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz.

Το επόμενο θεώρημα, το οποίο προέρχεται από τον R. Loewy [24], αναφέρεται σε ένα ζεύγος Hurwitz πινάκων  $A, B$  που ανήκουν στο  $\mathbb{R}^{n \times n}$  για τους οποίους ισχύει  $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_B$ .

**Θεώρημα 3.1.2 :** Έστω οι Hurwitz πίνακες  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Τότε,  $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_B$  αν και μόνο αν  $B = \mu A$  ή  $B = \lambda A^{-1}$  με  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Από το θεώρημα 3.1.2, γίνεται αντιληπτό ότι για έναν Hurwitz πίνακα  $A$ , οι κώνοι  $\mathcal{P}_A$  και  $\mathcal{P}_{A^{-1}}$  ταυτίζονται. Έτσι, προκύπτει ότι ένα αποτέλεσμα ύπαρξης CQLF για την «οικογένεια» LTI συστημάτων  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ , θα ισχύει για κάθε «οικογένεια» LTI συστημάτων, όπου οι πίνακες  $A_i$  θα έχουν αντικατασταθεί από τους αντίστροφους τους,  $A_i^{-1}$ .

**Ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  και ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$ :**

Βασιζόμενοι στην μαθηματική σημειογραφία των [11, 14], δοθέντων δύο πινάκων  $A_1, A_2$  στο  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , ορίζουμε τον πίνακα  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  ως εξής:

$$\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2] = \{A_1 + \gamma A_2 : \gamma > 0\}.$$

Λέμε ότι ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  είναι μη ιδιάζων (Hurwitz) αν ο πίνακας  $A_1 + \gamma A_2$  είναι μη ιδιάζων (Hurwitz) για όλα τα θετικά  $\gamma$ .

**Λήμμα 3.1.2 :** Θεωρώ τους Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Τότε, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  είναι ιδιάζων αν και μόνο αν ο πίνακας  $A_1 A_2^{-1}$  έχει μία πραγματική ιδιοτιμή.

*Απόδειξη:* Αν ο  $A$  είναι Hurwitz, τότε ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  για  $\gamma = 0$  δεν είναι ιδιάζων. Τώρα, εάν,  $\gamma > 0$ , τότε

$$\begin{aligned} \det(A_1 + \gamma A_2) = 0 &\Leftrightarrow (\det(A_1 A_2^{-1} + \gamma I))(\det A_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A_1 A_2^{-1} + \gamma I) = 0. \end{aligned}$$

Έτσι, ο πίνακας  $A_1 + \gamma A_2$  είναι ιδιάζων αν και μόνο αν ο πίνακας  $A_1 A_2^{-1}$  έχει μία πραγματική ιδιοτιμή  $-\gamma$ .

■

Χρειάζεται, επίσης, να επισημάνουμε ότι αν ο πίνακας  $A_1$  είναι μη ιδιάζων, τότε ο  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  είναι μη ιδιάζων αν και μόνο αν ο πίνακας  $A_1^{-1} A_2$  δεν έχει καμία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή. Στην περίπτωση που και ο πίνακας  $A_1$  και ο πίνακας  $A_2$  είναι μη ιδιάζοντες, τότε ο πίνακας  $A_1^{-1} A_2$  δεν θα έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές αν και μόνο αν ο πίνακας  $A_1 A_2^{-1}$  δεν έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές. Επίσης, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2^{-1}]$  είναι μη ιδιάζων αν και μόνο αν ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1^{-1}, A_2]$  είναι μη ιδιάζων.

Σύμφωνα με το [2], ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  είναι ο κυρτός συνδυασμός των πινάκων  $A_1, A_2$  και δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_\alpha[A_1, A_2] = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Για τους Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  είναι μη ιδιάζων (Hurwitz) αν και μόνο αν ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  είναι μη ιδιάζων (Hurwitz) για κάθε  $\alpha \in [0, 1]$ .

Οι ιδιοτιμές των πινάκων  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  και  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  έχουν συνεχή εξάρτηση από τις εισόδους των πινάκων και μεταβάλλονται διαρκώς για τις διάφορες τιμές του  $\gamma \in (0, +\infty)$  και του  $\alpha \in [0, 1]$ .

Επίσης, από το λήμμα 2.3.2 συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $V(x)$  είναι Lyapunov συνάρτηση για τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  αν και μόνο αν είναι Lyapunov συνάρτηση για όλα τα LTI συστήματα  $\Sigma_{\bar{A}}$  με  $\bar{A} = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2$  για  $\alpha \in [0, 1]$ .

### Θετικά LTI συστήματα και Metzler πίνακες :

Μία υποκατηγορία LTI συστημάτων που θα μελετήσουμε είναι τα θετικά LTI υποσυστήματα [12, 16]. Στόχος μας είναι να εξετάσουμε τα κριτήρια ευστάθειας για εναλλασσόμενα συστήματα, τα οποία προκύπτουν από την εναλλαγή μεταξύ ευσταθών θετικών LTI συστημάτων. Για αυτό το λόγο, θα ασχοληθούμε με LTI συστήματα, των οποίων οι πίνακες να είναι Hurwitz και Metzler. Έτσι, είναι σκόπιμο σε αυτήν την υποενότητα να αναφερθούμε στο απαιτούμενο υπόβαθρο, για να περάσουμε στην θεωρία αυτών των εναλλασσόμενων συστημάτων στο επόμενο κεφάλαιο.

**Ορισμός 3.1.1 :** Το LTI σύστημα  $\Sigma_A : \dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0$  είναι θετικό αν  $x_0 \geq 0 \Rightarrow x(t) \geq 0$  για κάθε  $t \geq t_0$ .

**Ορισμός 3.1.2 :** Ο πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ονομάζεται *Metzler* πίνακας αν και μόνο αν  $a_{ij} \geq 0$ , για  $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ .

*Παρατήρηση :* Ο πίνακας  $A$  είναι Metzler πίνακας αν και μόνο αν και ο αντίστροφός του είναι Metzler.

**Λήμμα 3.1.3 :** [4] Το LTI σύστημα  $\Sigma_A : \dot{x}(t) = Ax(t)$  είναι θετικό αν και μόνο αν ο πίνακας  $A$  είναι Metzler.

**Θεώρημα 3.1.3 :** Θεωρώ τον Metzler πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Τότε, τα εξής είναι ισοδύναμα:

- Ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz.
- Υπάρχει θετικό διάνυσμα  $v \in \mathbb{R}^n$ , τέτοιο ώστε να ισχύει  $-Av > 0$ .
- Ο πίνακας  $-A^{-1}$  είναι μη αρνητικός.
- Υπάρχει θετικά ορισμένος πίνακας  $D$ , τέτοιος ώστε να ισχύει η ανισότητα  $A^t D + PD < 0$ . Επιπλέον, αν υπάρχουν διανύσματα  $v, w \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ώστε
  - $v, w > 0$
  - $-Av > 0, -A^t w > 0$

τότε, ο θετικά ορισμένος πίνακας  $D, D = \text{diag}\{w_1/v_1, w_2/v_2, \dots, w_n/v_n\}$ , ικανοποιεί την ανίσωση  $A^t D + PD < 0$ .

Από το b. του προηγούμενου θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι για κάθε πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ο οποίος είναι Hurwitz και Metzler, υπάρχει διάνυσμα  $v$  στο θετικό  $n$ -μόριο του  $\mathbb{R}^n$ , τέτοιο ώστε το  $-Av$  να ανήκει, επίσης, στο θετικό  $n$ -μόριο. Πίνακες με αυτήν την ιδιότητα είναι θετικά ημιορισμένοι πίνακες [6]. Έτσι, καταλήγουμε ότι ο Metzler πίνακας  $A$  είναι Hurwitz αν και μόνο αν ο πίνακας  $-A$  είναι θετικά ημιορισμένος.

### Όμοιοι πίνακες :

Το επόμενο λήμμα παραθέτει ένα σημαντικό δεδομένο για την επίδραση ενός μετασχηματισμού ομοιότητας στις λύσεις της Lyapunov ανισότητας.

**Λήμμα 3.1.4 :** Έστω ο πίνακας Hurwitz  $A$  στο  $\mathbb{R}^{n \times n}$  και ένας μη-ιδιάζων πίνακας  $T$  στο  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Θεωρώ τον πίνακα  $\tilde{A} = T^{-1}AT$ . Τότε, θα ισχύει η εξής συνεπαγωγή :

$$A^t P + PA < 0 \Leftrightarrow \tilde{A}^t (T^t P T) + (T^t P T) \tilde{A} < 0$$

Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο  $P$  ανήκει στο  $\mathcal{P}_A$  αν και μόνο αν ο πίνακας  $T^t P T$  ανήκει στο  $\mathcal{P}_{\tilde{A}}$ .

Μία άμεση συνέπεια του λήμματος 3.1.4 είναι ότι τα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$  έχουν CQLF αν και μόνο αν τα  $\Sigma_{\tilde{A}_1}, \dots, \Sigma_{\tilde{A}_k}$  έχουν CQLF, όπου  $\tilde{A}_i = T^{-1}A_i T, 1 \leq i \leq k$  και ο πίνακας  $T$  μη ιδιάζων.

### 3.2 Απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες για την ύπαρξη CQLF

#### Το σύνολο $\mathcal{P}_A$ :

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, ο κυρτός κώνος  $\mathcal{P}_A$  ορίζεται ως  $\mathcal{P}_A = \{P = P^t > 0 : A^t P + P A < 0\}$ .

Δοθέντων των Hurwitz πινάκων  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , υπάρχει CQLF για τα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ , εάν η τομή των κώνων  $\mathcal{P}_{A_1}, \dots, \mathcal{P}_{A_k}$  είναι μη κενή.



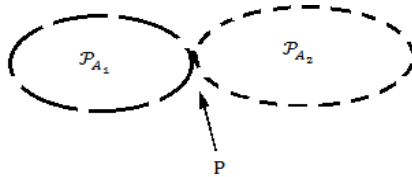
**Σχεδιάγραμμα 3.1:** Για τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  υπάρχει CQLF, αφού  $\mathcal{P}_{A_1} \cap \mathcal{P}_{A_2} \neq \emptyset$ .

Από την άλλη, εάν οι κώνοι  $\mathcal{P}_{A_1}, \dots, \mathcal{P}_{A_k}$  δεν συμπίπτουν, τότε δεν υπάρχει CQLF για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ . Αυτή η περίπτωση δύο συστημάτων περιγράφεται στο σχεδιάγραμμα 3.2.



**Σχεδιάγραμμα 3.2:** Δεν υπάρχει CQLF για τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , αφού  $\mathcal{P}_{A_1} \cap \mathcal{P}_{A_2} = \emptyset$ .

Υπάρχει, όμως, και η οριακή περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτήν την περίπτωση οι κλειστές θήκες των  $\mathcal{P}_{A_1}, \dots, \mathcal{P}_{A_k}$  «διασταυρώνονται» σε ένα μη μηδενικό στοιχείο, αλλά παρόλ' αυτά τα σύνολα θα είναι διαχωρίσιμα. Η κατάσταση αυτή, για δύο κώνους, απεικονίζεται στο σχεδιάγραμμα 3.3 και περιγράφεται ως εξής.



**Σχεδιάγραμμα 3.3:** Οριακή περίπτωση ύπαρξης CQLF για τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ .

Δεν υπάρχει CQLF για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , αλλά υπάρχει ένας μη μηδενικός θετικά ημιορισμένος πίνακας  $P = P^t \geq 0$ , τέτοιος ώστε  $A^t P + P A \leq 0$  για  $i \in \{1,2\}$ .

### Ζεύγη συστημάτων:

Το επόμενο σημαντικό λήμμα [11,14] παρουσιάζει μία απλή, αλλά απαραίτητη συνθήκη για την ύπαρξη συνήθους Lyapunov συνάρτησης για ένα ζεύγος LTI συστημάτων.

**Λήμμα 3.2.1:** Έστω οι πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  να είναι Hurwitz. Υποθέτω ότι τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF. Τότε, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  και ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2^{-1}]$  είναι Hurwitz και, έτσι, μη ιδιάζων. Επίσης, οι πίνακες  $A_1 A_2$  και  $A_1 A_2^{-1}$  δεν έχουν αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές.

*Απόδειξη:* Από την υπόθεση ισχύει ότι τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF, την συνάρτηση  $V(x) = x^t P x$ . Τότε, από το θεώρημα 3.1.2 θα έχουμε ότι  $A_1^t P + P A_1 < 0$ ,  $A_2^t P + P A_2 < 0$ ,  $A_2^{-t} P + P A_2^{-1} < 0$ . Αλλά τότε για κάθε  $\gamma$  θετικό, προκύπτει ότι  $(A_1 + \gamma A_2)^t P + P(A_1 + \gamma A_2) < 0$  και  $(A_1 + \gamma A_2^{-1})^t P + P(A_1 + \gamma A_2^{-1}) < 0$  και έτσι, από το θεώρημα 3.1.1 εξάγουμε το συμπέρασμα ότι οι πίνακες  $A_1 + \gamma A_2$  και  $A_1 + \gamma A_2^{-1}$  είναι Hurwitz για κάθε  $\gamma$  θετικό.

Ο πίνακας  $A_1 + \gamma A_2$  είναι μη-ιδιάζων για  $\gamma > 0$  αν και μόνο αν  $\det(A_1 + \gamma A_2) = \det(A_1 A_2^{-1} + \gamma I) \det(A_2) \neq 0$ . Ο πίνακας  $A_2$  είναι Hurwitz (από υπόθεση), άρα είναι μη-ιδιάζων. Επομένως, θα ισχύει  $\det(A_1 A_2^{-1} + \gamma I) \neq 0$  για όλα τα  $\gamma > 0$ , που ισοδυναμεί με τον ισχυρισμό ότι ο  $A_1 A_2^{-1}$  δεν έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές. Οπότε δείξαμε ότι ο πίνακας  $A_1 + \gamma A_2^{-1}$  είναι μη ιδιάζων  $\forall \gamma > 0$  αν και μόνο αν ο πίνακας  $A_1 A_2$  δεν έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές. Άποπο. ■

Το παραπάνω λήμμα είναι άμεσα συνδεδεμένο με το θεώρημα 2.2.1. Στην πραγματικότητα, από το θεώρημα 2.2.1 προκύπτει ότι αν ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  δεν είναι Hurwitz, τότε το εναλλασσόμενο σύστημα, με υποσυστήματα το  $\Sigma_{A_1}$  και το  $\Sigma_{A_2}$ , δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για αυθαίρετα σήματα μετατροπής και, κατά συνέπεια, δεν μπορεί να υπάρχει CQLF για αυτό το ζεύγος LTI συστημάτων ή για το συσχετιζόμενο, το  $\Sigma_{A_1}$  με το  $\Sigma_{A_2^{-1}}$ .

**Λήμμα 3.2.2:** Έστω οι πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  να είναι Hurwitz. Υποθέτω ότι δεν υπάρχει CQLF για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ . Θέτω  $B = A_2 - A_1$ . Τότε:

- Για  $\alpha > 0$  επαρκώς μεγάλο, τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_2 - \alpha I}$  έχουν CQLF.
- Υπάρχει  $k \in (0,1)$ , τέτοιο ώστε τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_1 + kB}$  να έχουν CQLF.

Απόδειξη:

- i. Επιλέγω τον πίνακα  $P = P^t > 0$ , έτσι ώστε να ισχύει  $A_1^t P + P A_1 < 0$  και θεωρώ τον πίνακα  $Q_2 = A_2^t P + P A_2$ . Έστω  $\lambda_{max}$ , η μεγαλύτερη (πραγματική) ιδιοτιμή του πίνακα  $Q_2$  και  $\mu_{min}$  η μικρότερη πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα  $P$ . Τότε, από υπόθεση,  $\mu_{min} > 0$  και  $\lambda_{max} \geq 0$ .

Προκύπτει, λοιπόν, ότι για κάθε  $\alpha > \frac{\lambda_{max}}{\mu_{min}}$ , έχουμε

$$(A_2 - \alpha I)^t P + P(A_2 - \alpha I) < 0.$$

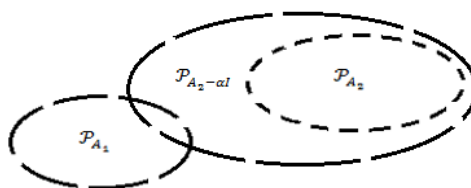
Οπότε, για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_2 - \alpha I}$  η  $V(x) = x^t P x$  είναι CQLF. Το i. αποδείχθηκε.

- ii. Όπως στο i. επιλέγουμε τον πίνακα  $P = P^t > 0$ , έτσι ώστε  $A_1^t P + P A_1 < 0$ . Ισχυριζόμαστε ότι βασιζόμενοι στην συνεχή εξάρτηση των ιδιοτιμών του πίνακα από τις εισόδους του, υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε για  $0 < k < \delta$ , να ισχύει  $(A_1 + kB)^t P + P(A_1 + kB) < 0$ . Έτσι, για δοθέν  $k \in (0, \delta)$ , υπάρχει CQLF για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_1 + kB}$ .

■

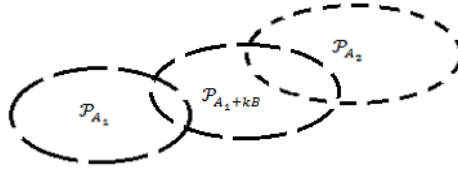
Το λήμμα 3.2.2 επί της ουσίας μας υποδεικνύει ότι αν μας δίνονται δύο συστήματα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_2}$ , τα οποία δεν έχουν CQLF (όπως στο σχεδιάγραμμα 3.2), είναι εφικτό να κατασκευάσουμε συσχετιζόμενα συστήματα που να έχουν CQLF (όπως στο σχεδιάγραμμα 3.1) είτε «μετακινώντας» επαρκώς μακριά στο αριστερό ημιεπίπεδο τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A_2$ , είτε αντικαθιστώντας τον πίνακα  $A_2$  με έναν κατάλληλο κυρτό συνδυασμό του  $A_1$  και του  $A_2$ .

Και τις δύο αυτές περιπτώσεις μπορούμε να τις ερμηνεύσουμε γεωμετρικά βασιζόμενοι στους κώνους  $\mathcal{P}_{A_1}, \mathcal{P}_{A_2}$ . Στην πρώτη περίπτωση, αυξάνοντας το  $\alpha$ , οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A_2 - \alpha I$  μετακινούνται πιο «μακριά» στο αριστερό ημιεπίπεδο και αυτό έχει ως αποτέλεσμα το  $\mathcal{P}_{A_2 - \alpha I}$  να γίνεται μεγαλύτερο μέχρι τελικά να «διασταυρωθεί» με το  $\mathcal{P}_{A_1}$  (βλ. σχεδιάγραμμα 3.4).



**Σχεδιάγραμμα 3.4:** Αύξηση μεγέθους του κώνου  $\mathcal{P}_{A_2 - \alpha I}$ , ώστε διασταυρωθεί με το  $\mathcal{P}_{A_1}$ .

Στην άλλη περίπτωση, επιλέγοντας μικρότερες τιμές για το  $k > 0$ , στην ουσία μετακινούμε τον κώνο  $\mathcal{P}_{A_1 + kB}$  πιο κοντά στον  $\mathcal{P}_{A_1}$ , έως ότου διασταυρωθούν (βλ. σχεδιάγραμμα 3.5).



**Σχεδιάγραμμα 3.5:** Μετακίνηση του  $\mathcal{P}_{A_1+kB}$  πλησιέστερα του  $\mathcal{P}_{A_1}$ .

Στην συνέχεια, θεωρούμε ένα ζεύγος LTI συστημάτων  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  συνεχούς χρόνου για τα οποία δεν υπάρχει CQLF, αλλά υπάρχει μη μηδενικός θετικά ημιορισμένος πίνακας  $P = P^t \geq 0$ , ώστε  $A_i^t P + P A_i = Q_i \leq 0, \text{rank}(Q_i) = n - 1, i \in \{1, 2\}$ . Πιο συγκεκριμένα, το θεώρημα [3.2.1](#) [[8,14](#)] περιγράφει την κατάσταση κατά την οποία ένα ζεύγος LTI συστημάτων τείνουν να έχουν CQLF, παρόλο που τουλάχιστον ένα εξ αυτών δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

**Θεώρημα 3.2.1:** Έστω  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Hurwitz πίνακες και τα αντίστοιχα συστήματά τους,  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , δεν έχουν CQLF. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για κάποιο πίνακα  $P = P^t \geq 0$  ισχύει η εξής ανισότητα:

$$A_i^t P + P A_i = Q_i \leq 0, i \in \{1, 2\} \quad (3.6)$$

για κάποιους αρνητικά ημιορισμένους πίνακες  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με  $\text{rank}(Q_1) = \text{rank}(Q_2) = n - 1$ . Υπό αυτές τις συνθήκες, τουλάχιστον ένας από τους πίνακες  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  και  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2^{-1}]$  είναι ιδιάζων. Ισοδύναμα, τουλάχιστον ένας από τους πίνακες  $A_1 A_2$  και  $A_1 A_2^{-1}$  έχει μία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι στην κατάσταση που περιγράφεται στο σχεδιάγραμμα 3.3, μπορούν γενικά να υπάρχουν πολλοί πίνακες  $P$ , που να βρίσκονται στην τομή των κώνων  $\mathcal{P}_{A_1}$  και  $\mathcal{P}_{A_2}$ . Ωστόσο, οι υποθέσεις του θεωρήματος [3.2.1](#) επιτάσσουν την ύπαρξη ενός μόνο θετικά ημιορισμένου πίνακα  $P$  σε αυτήν την τομή, για τον οποίο οι πίνακες  $A_1^t P + P A_1, A_2^t P + P A_2$  θα έχουν τάξη  $n - 1$ .

Καθώς οι υποθέσεις του θεωρήματος [3.2.1](#) ικανοποιούνται, συμπεραίνουμε ότι ένας από τους πίνακες  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2], \sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2^{-1}]$  έχει μία ιδιοτιμή στο κλειστό δεξί ημιεπίπεδο. Το θεώρημα [2.2.1](#) συσχετίζει αυτού του είδους τις συνθήκες (ιδιοτιμή στο δεξί ημιεπίπεδο) με την αστάθεια ενός ζεύγους συστημάτων

$$\dot{x} = A(t)x, A(t) \in \{A_1, A_2\},$$

$$\dot{x} = A(t)x, A(t) \in \{A_1, A_2^{-1}\}.$$

Στην πραγματικότητα, από το θεώρημα [2.2.1](#) προκύπτει ότι κάθε ζεύγος συστημάτων που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος [3.2.1](#) είναι, από την μία, στο όριο να έχουν αυτά τα ζεύγη συστημάτων CQLF, καθώς την ίδια στιγμή, ένα από τα προηγούμενα εναλλασσόμενα συστήματα δεν θα είναι

ασυμπτωτικά ευσταθές κατά την διάρκεια αυθαίρετων αλλαγών του σήματος μετατροπής.

Το παραπάνω θεώρημα φαίνεται αρκετά θεωρητικό, όμως, στο παράδειγμα [3.2.1](#) που ακολουθεί, γίνεται αντιληπτή η «οριακή» κατάσταση που περιγράφει. Το επεξηγηματικό αυτό παράδειγμα κατασκευάστηκε από τον Oliver Mason στο [\[1\]](#).

**Παράδειγμα 3.2.1 :** Θεωρώ τους πίνακες  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με:

$$A = \begin{pmatrix} 4.3876 & -13.3912 & 40.4673 \\ -4.3483 & -85.7644 & -47.3620 \\ -12.6313 & 37.5234 & -87.6206 \end{pmatrix},$$

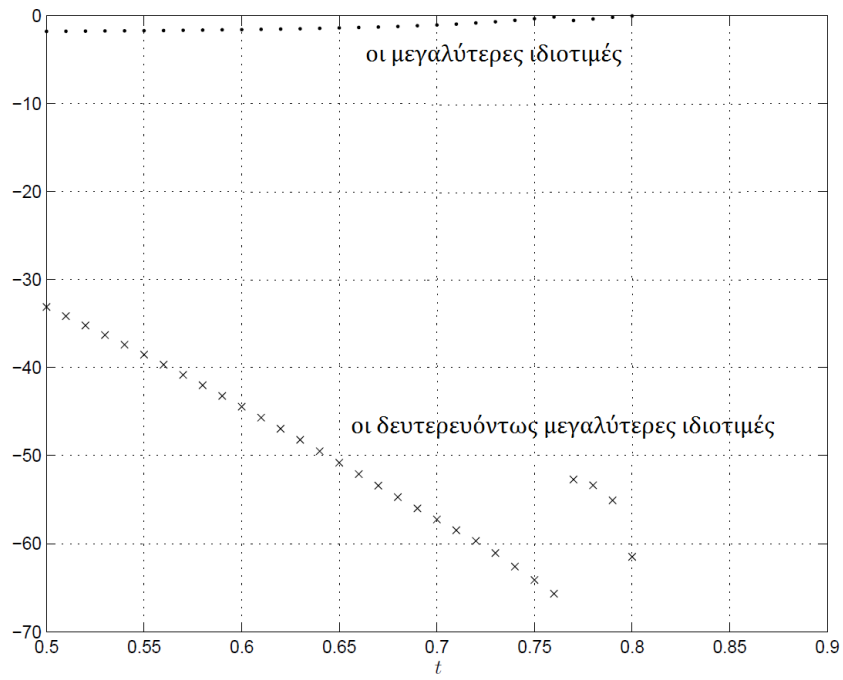
$$B = \begin{pmatrix} -44.6189 & 17.8573 & 8.9612 \\ -15.3243 & 46.7799 & 92.4943 \\ 7.9629 & 11.5449 & 66.3210 \end{pmatrix}$$

Και για  $t > 0$  ορίζω τον πίνακα  $C(t) = A + tB$ .

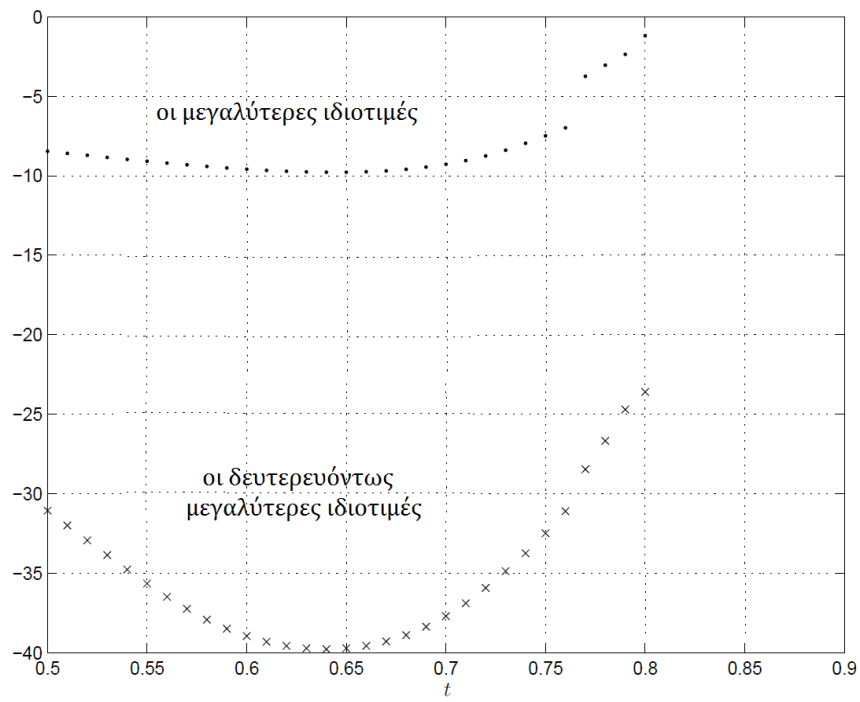
Τα συστήματα  $\Sigma_A$  και  $\Sigma_{C(t)}$  έχουν CQLF έως ότου το  $t$  φτάσει την τιμή 0.808. Από την στιγμή  $t = 0.808$ , δεν υπάρχει CQLF για τα συστήματα αυτά. Έτσι, στο χρονικό διάστημα μεταξύ  $t = 0.807$  και  $t = 0.808$  έχουμε την οριακή κατάσταση που περιγράψαμε παραπάνω (σχεδιάγραμμα 3.3).

Καθώς το  $t$  «πλησιάζει» το 0.808, θεωρούμε τον θετικά ορισμένο πίνακα  $P_t$ , για τον οποίον τα  $\Sigma_A$  και  $\Sigma_{C(t)}$  έχουν CQLF, την  $V(x) = x^t P_t x$ .

Στα σχεδιαγράμματα 3.6 και 3.7 απεικονίζονται οι μεγαλύτερες ιδιοτιμές και οι δευτερευόντως μεγαλύτερες ιδιοτιμές των συμμετρικών πινάκων  $A^t P_t + P_t A$  και  $C(t)^t P_t + P_t C(t)$ .



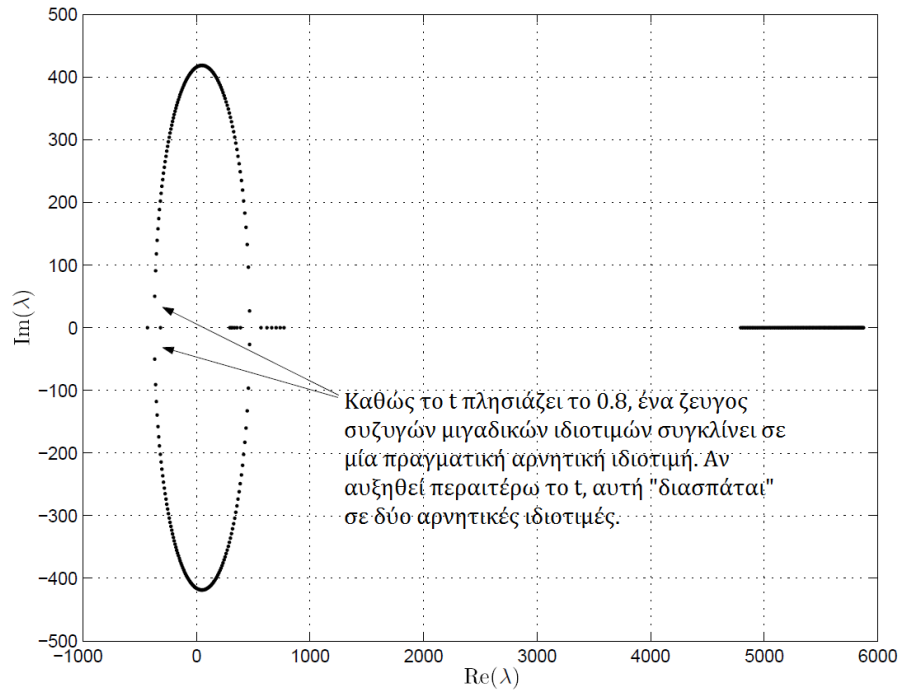
**Σχεδιάγραμμα 3.6:** Οι μεγαλύτερες και οι δευτερευόντως μεγαλύτερες ιδιοτιμές του πίνακα  $A^t P_t + P_t A$ .



**Σχεδιάγραμμα 3.7:** Οι μεγαλύτερες και οι δευτερευόντως μεγαλύτερες ιδιοτιμές του πίνακα  $C(t)^t P_t + P_t C(t)$ .

Παρατηρούμε ότι οι μεγαλύτερες ιδιοτιμές του  $A^t P_t + P_t A$  και του  $C(t)^t P_t + P_t C(t)$  «πλησιάζουν» το μηδέν, καθώς το  $t$  αυξάνεται, αλλά οι δευτερευόντως μεγαλύτερες ιδιοτιμές δεν το «πλησιάζουν». Έτσι, τα συστήματα  $\Sigma_A$  και  $\Sigma_{C(t)}$  τείνουν στην κατάσταση που περιγράφεται στο θεώρημα [3.2.1](#).

Τώρα, σχεδιάζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των ιδιοτιμών του πίνακα  $AC(t)$  καθώς το  $t$  πλησιάζει το 0.808, έχουμε το σχεδιάγραμμα 3.8.



**Σχεδιάγραμμα 3.8:** Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $AC(t)$  καθώς το  $t$  τείνει στο 0.8.

Φυσικά, κατά την διάρκεια που τα συστήματα  $\Sigma_A$  και  $\Sigma_{C(t)}$  έχουν CQLF, ο πίνακας  $AC(t)$  δεν θα έχει καμία αρνητική ιδιοτιμή (λήμμα [3.2.1](#)). Εντούτοις, γίνεται αντιληπτό στο σχεδιάγραμμα 3.8 ότι, καθώς το  $t$  πλησιάζει το 0.808, ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών συγκλίνει σε μία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα δύο. Από την στιγμή  $t = 0.808$ , εφόσον ο πίνακας  $AC(t)$  έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές, το εναλλασσόμενο σύστημα με υποσυστήματα τα  $\Sigma_A$  και  $\Sigma_{C(t)}$  παύει να έχει CQLF. Το παραπάνω σχεδιάγραμμα περιγράφει την κατάσταση στην οποία τα συστήματα  $\Sigma_A$  και  $\Sigma_{C(t)}$  «πλησιάζουν» το θεώρημα [3.2.1](#).

■

### Συστήματα για τα οποία η Ευκλείδεια νόρμα ορίζει μία CQLF:

Αρχικά, αξίζει να σημειώσουμε ότι η Ευκλείδεια νόρμα  $V(x) = x^t x$  θα είναι CQLF για τα εκθετικά ευσταθή LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$  αν και μόνο αν

$$A_i^t + A_i < 0 \text{ για όλα τα } i \in \{1, \dots, k\}. \quad (3.7)$$

Ορισμένοι πίνακες που αντιστοιχούν σε αυτήν την περίπτωση είναι οι παρακάτω:

- i. Για τις «οικογένειες» πινάκων  $A_1, \dots, A_k$  που ανήκουν στο  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , όπου οι πίνακες έχουν την μορφή

$$A_i = \begin{pmatrix} -\mu_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\mu_i \end{pmatrix}, \mu_i > 0, 1 \leq i \leq k, \quad (3.8)$$

η συνθήκη (3.6) ικανοποιείται, διότι:

$$A_i + A_i^t = \begin{pmatrix} -\mu_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\mu_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_i & -\omega_i \\ \omega_i & -\mu_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu_i & 0 \\ 0 & -2\mu_i \end{pmatrix} < 0, \forall \mu_i > 0, \\ 1 \leq i \leq k.$$

Έτσι, η  $V(x) = x^t x$  είναι CQLF για τα δευτέρας τάξεως LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ .

- ii. Εάν για κάθε  $i \in \{1, \dots, k\}$ , ο πίνακας  $A_i$  είναι συμμετρικός και Hurwitz, τότε ο  $A_i$  είναι αρνητικά ορισμένος για κάθε  $i$  και, έτσι, έπεται ότι ο πίνακας  $A_i^t + A_i = 2A_i$  θα είναι και αυτός αρνητικά ορισμένος για  $1 \leq i \leq k$ . Άρα,  $A_i^t + A_i = 2A_i < 0$ .
- iii. Εάν για κάθε  $i \in \{1, \dots, k\}$ , ο πίνακας  $A_i$  ικανοποιεί την ανίσωση (3.7) και ο πίνακας  $S_i$  είναι αντισυμμετρικός (δηλαδή  $S_i^t = -S_i$ ), τότε ο πίνακας  $A_i + S_i$  ικανοποιεί την (3.7), αφού
- $$A_i + S_i + (A_i + S_i)^t = A_i + S_i + A_i^t + S_i^t = A_i + S_i + A_i^t - S_i = A_i + A_i^t < 0.$$
- iv. Ένας πίνακας ονομάζεται κανονικός εάν ισχύει  $AA^t = A^t A$ . Από θεμελιώδες θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας γνωρίζουμε ότι εάν ο  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι κανονικός και Hurwitz, τότε υπάρχει πραγματικός ορθογώνιος πίνακας  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , τέτοιος ώστε ο  $TAT^t$  να έχει την μορφή:

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & B_p \end{pmatrix},$$

όπου ο  $B_i$  είναι είτε ένας αρνητικός αριθμός  $b_i \in \mathbb{R}^-$ , είτε ένας  $2 \times 2$  πίνακας της μορφής (3.8). Συνεπώς, προκύπτει ότι  $T(A + A^t)T^t < 0$  και κατά συνέπεια θα ισχύει και η ανισότητα  $A + A^t < 0$ . Οπότε, για κάθε «οικογένεια» κανονικών Hurwitz πινάκων  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ικανοποιείται η συνθήκη (3.7).

■

### Τριγωνικά συστήματα:

Στο [9], οι R. Shorten και K. Narendra ανέλυσαν την ευστάθεια εναλλασσόμενων γραμμικών συστημάτων με υποσυστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ , των οποίων οι πίνακες  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι άνω τριγωνικοί και Hurwitz.

Όπως έχουμε δει σε προηγούμενη ενότητα εάν οι πίνακες  $A_1, \dots, A_k$  είναι όλοι Hurwitz, τότε τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ , έχουν CQLF,  $V(x) = x^t P x$  (με τον πίνακα  $P$  να είναι  $n \times n$  διαστάσεων). Εάν οι πίνακες  $A_1, \dots, A_k$  είναι επιπλέον άνω τριγωνικοί, τότε τον πίνακα  $P$  τον επιλέγουμε να είναι διαγώνιος και θετικά ορισμένος και θα έχει την μορφή

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & p_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

**Θεώρημα 3.2.2 :** Έστω οι πίνακες  $A_i, i = 1, \dots, k$ , στο  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , να είναι Hurwitz και άνω τριγωνικοί. Τότε, τα συστήματα  $\Sigma_{A_i}: \dot{x} = A_i x, i = 1, \dots, k$  έχουν CQLF, την  $V(x) = x^t P x$ , όπου ο πίνακας  $P$  έχει την μορφή που δίνεται στην σχέση (3.9).

Το αποτέλεσμα αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι εάν οι πίνακες  $A_1, \dots, A_k$  μπορούν να μετασχηματιστούν σε άνω τριγωνικούς πίνακες, τότε τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$  έχουν CQLF.

*Παρατήρηση :* Τα αποτελέσματα που ισχύουν για τους άνω τριγωνικούς πίνακες  $A_1, \dots, A_k$ , ισχύουν και για κάτω τριγωνικούς.

**Θεώρημα 3.2.3 :** Έστω οι πίνακες  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  να είναι Hurwitz. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιος μη ιδιάζων πίνακας  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , τέτοιος ώστε ο  $T^{-1} A_i T$  να είναι άνω (κάτω) τριγωνικός για  $1 \leq i \leq k$ . Τότε, τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$  που αντιστοιχούν στους παραπάνω πίνακες έχουν CQLF.

Το παραπάνω θεώρημα είναι αρκετά περιοριστικό δεδομένης της υπόθεσης να υπάρχει ο πίνακας  $T$ , ο οποίος καθορίζει αν ο πίνακας  $T^{-1} A_i T$  θα ναι άνω (κάτω) τριγωνικός για  $1 \leq i \leq k$ .

### 3.3 Επαρκείς συνθήκες για την ύπαρξη CQLF

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ελέγξαμε συγκεκριμένες κλάσεις συστημάτων, για τις οποίες είναι εφικτό να βρούμε επαρκείς και αναγκαίες συνθήκες που θα μας οδηγήσουν στην ύπαρξη CQLF για «οικογένειες» LTI συστημάτων. Επειδή, όμως, δεν είναι δυνατό να εξάγουμε μία γενική συνθήκη, που να είναι επαληθεύσιμη για όλες τις «οικογένειες» LTI συστημάτων, θα επικεντρωθούμε σε κάποιες συγκεκριμένες κλάσεις συστημάτων, για τα οποία μπορούν να υπάρξουν επαρκείς συνθήκες, ώστε να επιδέχεται το σύνολο των συστημάτων αυτών CQLF.

#### Αντιμεταθετικοί πίνακες:

Το ακόλουθο θεώρημα αναφέρεται στην ύπαρξη CQLF για συστήματα με πίνακες που αντιμετατίθενται και διατυπώθηκε από τους K. Narendra και J. Balakrishnan στο [7].

**Θεώρημα 3.3.1 :** Θεωρώ τους Hurwitz πίνακες  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , για τους οποίους ισχύει η σχέση  $A_i A_j = A_j A_i$  για  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Τότε, τα αντίστοιχα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$  έχουν CQLF.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα της Γραμμικής Άλγεβρας επισημαίνει ότι εάν οι πίνακες  $A_1, \dots, A_k$  αντιμετατίθενται κατά ζεύγη, τότε υπάρχει ένας μοναδικός μοναδιαίος  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , τέτοιος ώστε ο πίνακας  $U^* A_i U$  να έχει άνω τριγωνική μορφή για  $1 \leq i \leq k$ . Έτσι, το σύνολο των LTI συστημάτων που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.3.1 είναι υποσύνολο των συστημάτων, των οποίων οι πίνακες μπορούν να γραφτούν και σε τριγωνική μορφή. Οπότε αυτό το αποτέλεσμα θεωρείται ειδική περίπτωση του θεωρήματος 3.2.3.

#### Lyapunov τελεστής:

Δύο απλές επαρκείς συνθήκες για την ύπαρξη CQLF ενός ζεύγους ευσταθών LTI συστημάτων  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , οι οποίες βασίζονται στον Lyapunov τελεστή, δημοσιεύτηκαν από τους T. Ooba και Y. Funahashi στο [23].

**Θεώρημα 3.3.2:** Θεωρώ τους πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  να είναι Hurwitz και έστω ότι ισχύει η εξής ανισότητα

$$\mathcal{L}_{A_2 - A_1}^t \mathcal{L}_{A_2 - A_1} - (\mathcal{L}_{A_1}^t \mathcal{L}_{A_1} + \mathcal{L}_{A_2}^t \mathcal{L}_{A_2}) < 0. \quad (3.10)$$

Τότε, τα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_2}$  επιδέχονται CQLF.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση (3.9) είναι ισοδύναμη με την ανισότητα

$$\mathcal{L}_{A_1}^t \mathcal{L}_{A_2} + \mathcal{L}_{A_2}^t \mathcal{L}_{A_1} < 0.$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε πως οι παραπάνω συνθήκες είναι μόνο επαρκείς για την εξασφάλιση ύπαρξης CQLF και μπορούμε να τις λάβουμε υπόψιν μόνο για δύο συστήματα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_2}$  και όχι για παραπάνω.

Για το επόμενο πόρισμα, χρειάζεται να αναφέρουμε ότι για έναν γραμμικό τελεστή  $L$ , που ανήκει στο  $Sym(n, \mathbb{R})$ , η νόρμα  $\|L\|_s$  ορίζεται ως

$$\|L\|_s = \sup_{\|A\|=1} \|L(A)\|.$$

**Πόρισμα 3.3.1 :** Έστω οι Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  για τους οποίους ισχύει η εξής ανισότητα

$$\|A_1 A_2 - A_2 A_1\| < \frac{1}{2 \|\mathcal{L}_{A_1}^{-1}\|_s \|\mathcal{L}_{A_2}^{-1}\|_s}. \quad (3.11)$$

Τότε, τα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF.

Στην συνέχεια, αξίζει να αναφέρουμε έναν διαφορετικό τύπο επαρκούς συνθήκης που βασίζεται στον Lyapunov τελεστή, αλλά αυτή την φορά δεν είναι μόνο για δύο συστήματα, αλλά για μια «οικογένεια» LTI συστημάτων  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ .

Δοθέντων των πινάκων  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , για κάθε  $1 \leq i, j \leq k$ , ορίζουμε τον αριθμό  $\mu_{ij}$  να είναι:

$$\mu_{ij} = \lambda_{\min}(\mathcal{L}_{A_i} \mathcal{L}_{A_j}^{-1}(I_n)), \quad (3.12)$$

όπου  $\lambda_{\min}(A)$  είναι η μικρότερη ιδιοτιμή ενός συμμετρικού πίνακα  $A$ .

**Θεώρημα 3.3.3:** Έστω οι Hurwitz πίνακες  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ορίζουμε τον πίνακα  $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$  ως:

$$M = [\mu_{ij}]_{1 \leq i, j \leq k}, \quad (3.13)$$

Όπου τα στοιχεία  $\mu_{ij}$  δίνονται από την σχέση (3.12). Εάν ο πίνακας  $M$  είναι θετικά ημιορισμένος, τότε τα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$  έχουν CQLF.

### **Metzler πίνακας, M-πίνακας:**

Στην παρούσα υποενότητα, εξετάζουμε ποιες είναι οι επαρκείς συνθήκες για να έχει CQLF ένα εναλλασσόμενο σύστημα με ευσταθή LTI υποσυστήματα, καθώς οι πίνακες που αντιστοιχούν στα υποσυστήματα αυτά είναι Metzler και M-πίνακες. Αρχικά, αναφερόμαστε σε εναλλασσόμενα σύστημα με θετικά υποσυστήματα και στην συνέχεια, αφού ορίσουμε τον M-πίνακα, προχωράμε στα σχετικά αποτελέσματα.

**Λήμμα 3.3.1 :** Έστω οι πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , να είναι Metzler και Hurwitz. Τότε, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  είναι Hurwitz αν και μόνο αν είναι μη ιδιάζων. Ισοδύναμα, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  είναι Hurwitz αν και μόνο αν ο πίνακας  $A_1 A_2^{-1}$  δεν έχει καμία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή.

*Απόδειξη :* Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας  $A_1 + \gamma A_2$  δεν είναι Hurwitz για κάθε  $\gamma > 0$ . Τότε, για τις θετικές τιμές του  $\gamma$ , θα ισχύει  $\mu(A_1 + \gamma A_2) \geq 0$ . Επίσης, θα υπάρχει κάποιο  $\gamma_0 > 0$ , για το οποίο θα ισχύει  $\mu(A_1 + \gamma_0 A_2) = 0$  και, έτσι, εφόσον ο πίνακας  $A_1 + \gamma_0 A_2$  είναι Metzler και είναι το μηδέν ιδιοτιμή του, καταλήγουμε ότι ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  είναι ιδιάζων. Άρα, πράγματι, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  είναι Hurwitz αν και μόνο αν είναι μη ιδιάζων. ■

**Θεώρημα 3.3.4 :** Θεωρώ τους πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , οι οποίοι υποθέτω να είναι Metzler και Hurwitz. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- a) Ο πίνακας  $A_1 A_2^{-1}$  δεν έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές.
- b) Τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF.
- c) Το θετικό εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$$

είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές για αυθαίρετα σήματα μετατροπής.

*Απόδειξη :* a)  $\Rightarrow$  b) Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι ο πίνακας  $A_1 A_2$  δεν μπορεί να έχει αρνητική πραγματική ιδιοτιμή και τότε για αυτόν μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα [3.2.1](#). Επειδή και οι δύο πίνακες,  $A_1, A_2$ , έχουν μορφή πρόσημων  $\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$ , αφού είναι Metzler,

το γινόμενό τους θα έχει μορφή πρόσημων  $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$ .

Δηλαδή αν θέσουμε  $B = A_1 A_2$ , τότε  $b_{ij} \leq 0$  για  $i \neq j$  και  $b_{ij} > 0$  για  $i, j = 1, 2$ . Επιπλέον, οι πίνακες  $A_1$  και  $A_2$  είναι Hurwitz και οι ορίζουσές τους είναι θετικές. Επίσης, θα έχουμε ότι  $\text{trace}(A_1 A_2) > 0$  και  $\det(A_1 A_2) > 0$ . Εάν ο πίνακας  $A_1 A_2$  έχει μία ιδιοτιμή αρνητική, επειδή η ορίζουσά του είναι θετική, τότε και οι δύο ιδιοτιμές του θα ναι αναγκαστικά αρνητικές. Όμως, αυτό έρχεται σε αντίφαση με το δεδομένο ότι το ίχνος του πίνακα  $A_1 A_2$  είναι και αυτό θετικό. Έτσι, δεν γίνεται να έχει μία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή.

Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας  $A_1 A_2^{-1}$  δεν έχει καμία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή. Τότε, βασιζόμενοι στον προηγούμενο ισχυρισμό προκύπτει πως ούτε αυτός ο πίνακας θα έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές. Οπότε, αφού ούτε ο πίνακας  $A_1 A_2^{-1}$  έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές, ούτε ο πίνακας  $A_1 A_2$ , το λήμμα [3.2.1](#) μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει CQLF για το ζεύγος συστημάτων  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_2}$ .

b)  $\Rightarrow$  c) Έπεται άμεσα από το θεώρημα [2.3.2](#).

c)⇒a) Εάν το θετικό εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$  είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές, από το θεώρημα [2.2.1](#) προκύπτει ότι ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  πρέπει να είναι Hurwitz. Συνεπώς, από το λήμμα [3.3.1](#) καταλήγουμε ότι ο πίνακας  $A_1 A_2^{-1}$  δεν έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές.

■

**Παράδειγμα 3.3.1 :** Θεωρώ τους πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , όπου

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1.0655 & 0.4398 \\ 0.9943 & -0.8963 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.4131 & 0.5915 \\ 0.3932 & -0.6585 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας  $A_1$ , όπως και ο πίνακας  $A_2$ , είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι είναι Metzler, αφού τα στοιχεία εκτός διαγωνίου των δύο πινάκων είναι θετικά. Επίσης, και οι δύο πίνακες είναι Hurwitz, αφού ο πρώτος έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = -1.64757, \lambda_2 = -0.314229$  και ο δεύτερος  $\lambda_1 = -1.03343, \lambda_2 = -0.0381725$ . Ο πίνακας

$$A_1 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 13.4023 & 11.3708 \\ -7.66366 & -5.52277 \end{pmatrix}$$

έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 5.48819, \lambda_2 = 2.39134$ . Οπότε, από το θεώρημα 3.3.4 προκύπτει ότι τα θετικά LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF.

■

Η υπόθεση του θεωρήματος [3.3.4](#), δυστυχώς, είναι αρκετά περιοριστική, αφού έχει εφαρμογή μόνο για δευτέρας τάξεως συστήματα. Για να επιβεβαιώσουμε ότι το θεώρημα [3.3.4](#) δεν επαληθεύεται για μεγαλύτερης τάξης συστήματα, θα δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα.

**Παράδειγμα 3.3.2 :** Θεωρώ τους δύο πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  με

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.5302 & 0.0012 & 0.0873 \\ 0.2185 & -0.7494 & 0.5411 \\ 0.737 & 0.1543 & -0.3606 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.5136 & 0.4419 & 0.3689 \\ 0.184 & -0.3951 & 0.008 \\ 0.3163 & 0.6099 & -1.0056 \end{pmatrix}.$$

Είναι σαφές ότι και οι δύο πίνακες είναι Metzler, αφού τα στοιχεία εκτός διαγωνίου του  $A_1$ , όπως και του  $A_2$  είναι θετικά. Ο πίνακας  $A_1$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -0.932387, \lambda_2 \approx -0.626933, \lambda_3 \approx -0.0808796$ , ενώ ο πίνακας  $A_2$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -1.13001, \lambda_2 \approx -0.747383, \lambda_3 \approx -0.036908$ . Άρα, τόσο ο πίνακας  $A_1$ , όσο και ο  $A_2$ , είναι Hurwitz. Ο αντίστροφος του πίνακα  $A_2$ , είναι ο

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -12.5898 & -21.4743 & -4.78937 \\ -6.01723 & -12.826 & -2.30943 \\ -7.60946 & -14.5335 & -3.90155 \end{pmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα  $A_1$  με τον  $A_2^{-1}$ , θα έχουμε

$$A_1 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -7.00799 & -1.67989 & -5.24042 \\ 3.16523 & 0.991985 & 2.23265 \\ 5.05451 & 0.0295134 & 4.0566 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A_1 A_2^{-1}$  είναι  $\lambda_{1,2} \approx -1.20456 \pm 0.1223328i$  και  $\lambda_3 \approx 0.449717$ . Παρόλ'αυτά, τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  δεν έχουν CQLF, διότι, σύμφωνα με το [20], υπάρχουν θετικά ημιορισμένοι συμμετρικοί πίνακες  $P_1, P_2$ , οι οποίοι ικανοποιούν την ανίσωση

$$A_1^t P_1 + P_1 A_1 + A_2^t P_2 + P_2 A_2 > 0.$$

Έτσι από την σχέση (3.1) προκύπτει ότι, πράγματι, τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  δεν έχουν CQLF.

Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι η συνθήκη ο πίνακας  $A_1 A_2^{-1}$  να μην έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές δεν είναι επαρκής για την ύπαρξη CQLF.

■

Για συστήματα τρίτης τάξεως ένα αποτέλεσμα που μπορούμε να εξάγουμε είναι το παρακάτω θεώρημα, χωρίς ωστόσο να μπορούμε να εξασφαλίσουμε μία επαρκή συνθήκη για ύπαρξη CQLF σε συστήματα τρίτης τάξεως.

**Θεώρημα 3.3.5 :** Θεωρώ τους πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , οι οποίοι είναι Metzler και Hurwitz. Τότε, ο πίνακας  $A_1 A_2$  έχει μη πραγματικές αρνητικές ιδιοτιμές και, ισοδύναμα, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2^{-1}]$  είναι μη ιδιάζων.

Στην συνέχεια, θα ασχοληθούμε με συστήματα, τα οποία δεν είναι θετικά.

**Ορισμός 3.3.1 :** Ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ονομάζεται *M-πίνακας* [6,18] εάν

- i. Τα εκτός διαγωνίου στοιχεία του  $A$  είναι αρνητικά ή μηδέν, δηλαδή  $a_{ij} \leq 0$  για  $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ .
- ii. Όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  βρίσκονται στο ανοικτό δεξί ημιεπίπεδο. (συνεπώς, ο  $-A$  να είναι Hurwitz)

*Παρατήρηση:* Γίνεται αντιληπτό ότι ο πίνακας  $A$  είναι M-πίνακας αν και μόνο αν ο  $-A$  είναι Metzler.

Οι Y. Mori, T. Mori, Y. Kuroe απέδειξαν στο [13] ότι η «οικογένεια» συστημάτων  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$  θα έχει CQLF, αν οι συσχετιζόμενοι πίνακες  $A_1, \dots, A_k$  ικανοποιούν μία συγκεκριμένη συνθήκη βασισμένη στους M-πίνακες. Δοθείσας της «οικογένειας» πινάκων  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , το  $a_{pq}^{(i)}$  συμβολίζει το στοιχείο στην θέση  $(p, q)$  του πίνακα  $A_i, 1 \leq i \leq k$ .

**Θεώρημα 3.3.6 :** Έστω οι Hurwitz πίνακες  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Υποθέτω ότι υπάρχει μη-ιδιάζων πίνακας  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , για τον οποίο ισχύει ότι  $\tilde{A}_i = T^{-1} A_i T$  για  $1 \leq i \leq k$  και έχουμε ότι ο πίνακας  $B$ , του οποίου τα στοιχεία δίνονται από τις σχέσεις

$$b_{pp} = -\max_i \operatorname{Re}(\tilde{a}_{pp}^{(i)}) \quad 1 \leq p \leq n$$

$$b_{pq} = -\max_i |\tilde{a}_{pq}^{(i)}| \quad 1 \leq p, q \leq n, \quad p \neq q$$

είναι M-πίνακας. Τότε, υπάρχει CQLF για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_k}$ .

Αν οι πίνακες  $A_1, \dots, A_k$  μπορούν ταυτόχρονα να γραφτούν σε τριγωνική μορφή, τότε οι συνθήκες του θεωρήματος [3.3.6](#) ικανοποιούνται. Έτσι, το σύνολο των συστημάτων για τα οποία ισχύει το θεώρημα [3.3.6](#) είναι υπερσύνολο των συστημάτων που ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος [3.2.3](#).

# Κεφάλαιο 4

## Συστήματα δεύτερης τάξης

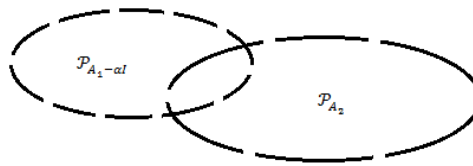
### 4.1 Δεύτερης τάξης γραμμικά εναλλασσόμενα ζεύγη συστημάτων

Τα γραμμικά εναλλασσόμενα συστήματα δεύτερης τάξης είναι μια ειδική κατηγορία συστημάτων, τα οποία μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για τα οποία υπάρχει ένα πλήθος θεωρημάτων [\[8,14\]](#), εκ των οποίων καλούμαστε να εξάγουμε τα κατάλληλα αποτελέσματα.

Αρχικά, είναι σκόπιμο να αναφέρουμε δύο σημαντικά δεδομένα.

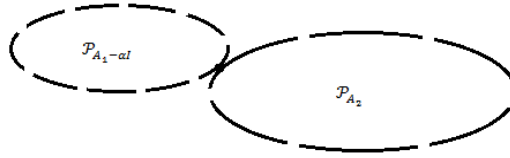
- i. Από το λήμμα [3.2.1](#) έπεται ότι εάν τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF, τότε οι πίνακες  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  και  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2^{-1}]$  είναι Hurwitz, συνεπώς, μη ιδιάζοντες. Προκύπτει, επομένως, ότι οι πίνακες  $A_1 A_2$  και  $A_1 A_2^{-1}$  δεν έχουν καθόλου αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές.
- ii. Από την άλλη, εάν τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  δεν έχουν CQLF, τότε από το λήμμα [3.2.2](#) προκύπτει ότι θα υπάρχει  $\alpha > 0$ , τέτοιο ώστε τα συστήματα  $\Sigma_{A_1 - \alpha I}, \Sigma_{A_2}$  να έχουν CQLF.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  δεν έχουν CQLF. Τότε, από το ii. Θα έχουμε ότι υπάρχει  $\alpha > 0$ , τέτοιο ώστε τα συστήματα  $\Sigma_{A_1 - \alpha I}, \Sigma_{A_2}$  να έχουν CQLF (βλ. σχεδιάγραμμα 4.1).



**Σχεδιάγραμμα 4.1:** Για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1 - \alpha I}, \Sigma_{A_2}$  υπάρχει CQLF.

Εάν όμως αρχίσουμε να μειώνουμε την τιμή του  $\alpha$ , τότε αρχίζει να μειώνεται και το μέγεθος του κώνου  $\mathcal{P}_{A_1 - \alpha I}$  και έτσι μειώνεται και η τομή  $\mathcal{P}_{A_1 - \alpha I} \cap \mathcal{P}_{A_2}$ , έως ότου φθάσουμε στην οριακή κατάσταση που περιγράφεται στο σχεδιάγραμμα 4.2.



**Σχεδιάγραμμα 4.2:** Αυξάνοντας την τιμή του  $\alpha$ , φτάνουμε σε αυτήν την οριακή περίπτωση.

Έτσι, ορίζουμε  $\alpha_0 = \inf\{\alpha > 0: \text{τα } \Sigma_{A_1 - \alpha I}, \Sigma_{A_2} \text{ να έχουν CQLF}\}$ .

Οπότε προκύπτει ότι  $\alpha_0 \geq 0$  και ότι τα συστήματα  $\Sigma_{A_1 - \alpha I}, \Sigma_{A_2}$  ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.2.1. Από το θεώρημα αυτό, γνωρίζουμε ότι ο  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1 - \alpha_0 I, A_2]$  ή ο  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1 - \alpha_0 I, A_2^{-1}]$  είναι ιδιάζων. Στην πρώτη περίπτωση, εάν ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1 - \alpha_0 I, A_2]$  είναι ιδιάζων, θα υπάρχει  $\gamma > 0$  και κάποιο διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$ , τέτοιο ώστε να ισχύει  $(A_1 - \alpha_0 I + \gamma A_2)x = 0 \Leftrightarrow (A_1 + \gamma A_2)x = \alpha_0 x$ . Έτσι, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  δεν είναι Hurwitz σε αυτή την περίπτωση (αφού  $\alpha_0 \geq 0$ ). Στην δεύτερη περίπτωση, θα υπάρχει  $\gamma > 0$  και κάποιο διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$ , τέτοιο ώστε να ισχύει  $(A_1 - \alpha_0 I + \gamma A_2^{-1})x = 0 \Leftrightarrow (A_1 + \gamma A_2^{-1})x = \alpha_0 x$ , οπότε, ομοίως με πριν, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2^{-1}]$  δεν είναι Hurwitz.

Συμπερασματικά, καταλήγουμε ότι αν τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF, τότε οι πίνακες  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  και  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2^{-1}]$  είναι Hurwitz, ενώ αν δεν έχουν, τότε τουλάχιστον ένας από τους πίνακες δεν είναι Hurwitz. Έτσι, οδηγούμαστε στο παρακάτω πόρισμα και θεώρημα [11].

**Πόρισμα 4.1.1:** Έστω οι πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  να είναι Hurwitz. Τότε, τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF αν και μόνο αν οι πίνακες  $A_1 A_2$  και  $A_1 A_2^{-1}$  δεν έχουν καμία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή.

**Θεώρημα 4.1.1 :** Θεωρώ τους πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  να είναι Hurwitz. Τότε, τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF αν και μόνο αν οι πίνακες  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  και  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2^{-1}]$  να είναι Hurwitz.

Απόρροια του θεωρήματος 4.1.1 είναι ότι εάν δεν υπάρχει CQLF για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , τότε οι ιδιοτιμές είτε του πίνακα  $A_1 + \gamma A_2$ , είτε του πίνακα  $A_1 + \gamma A_2^{-1}$  βρίσκονται στο δεξί μισό επίπεδο για τις θετικές τιμές του  $\gamma$ . Στην περίπτωση που οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A_1 + \gamma A_2$  βρίσκονται στο δεξί μισό επίπεδο για  $\gamma > 0$ , τότε από το θεώρημα 2.2.1 το γραμμικό εναλλασσόμενο σύστημα  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $A(t) \in \{A_1, A_2^{-1}\}$  δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για αυθαίρετα σήματα μετατροπής. Όμοια, στην περίπτωση όπου ο πίνακας  $A_1 + \gamma A_2^{-1}$  έχει ιδιοτιμές στο δεξί μισό επίπεδο, το εναλλασσόμενο σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για αυθαίρετα σήματα μετατροπής.

Στην συνέχεια, συσχετίζουμε την ύπαρξη CQLF για ένα ζεύγος συστημάτων δεύτερης τάξης με το φάσμα των ιδιοτιμών του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$ .

**Λήμμα 4.1.1 :** Έστω οι πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  να είναι Hurwitz. Τότε, ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  είναι Hurwitz για όλα τα  $\alpha \in [0,1]$  αν και μόνο αν ο πίνακας  $A_2^{-1}A_1$  δεν έχει καμία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή.

*Απόδειξη:* Σύμφωνα με την υπόθεση οι πίνακες  $A_1, A_2$  είναι Hurwitz. Έτσι, θα ισχύει  $\text{tr}(\sigma_\alpha[A_1, A_2]) = a \text{tr}A_1 + (1-a)\text{tr}A_2 < 0$  για όλα τα  $\alpha \in [0,1]$  και προκύπτει ότι ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  δεν μπορεί να έχει αυστηρά μιγαδικές ιδιοτιμές. Οπότε, ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  δεν είναι Hurwitz αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο  $a_0 \in (0,1)$ , ώστε ο πίνακας  $\sigma_{a_0}[A_1, A_2]$  να είναι ιδιάζων. Τότε,

$$(a_0 A_1 + (1 - a_0) A_2) v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left( A_2^{-1} A_1 + \frac{1 - a_0}{a_0} I_n \right) v = 0 \Leftrightarrow$$

$$A_2^{-1} A_1 v = -\frac{1 - a_0}{a_0} v.$$

Συνεπώς, ο πίνακας  $A_2^{-1}A_1$  έχει μία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή  $\lambda = -\frac{1-a_0}{a_0}$  αν και μόνο αν ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  δεν είναι Hurwitz.

■

**Λήμμα 4.1.2 :** Έστω οι Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  με αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές και ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  έχει μιγαδικές ιδιοτιμές για κάθε  $\alpha \in [0,1]$ . Τότε, ο πίνακας  $A_2^{-1}A_1$  έχει διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές.

**Θεώρημα 4.1.2 :** Έστω οι Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  με πραγματικές ιδιοτιμές. Επαρκής συνθήκη για την ύπαρξη CQLF για τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  είναι ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  να έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές για κάθε  $\alpha \in [0,1]$ .

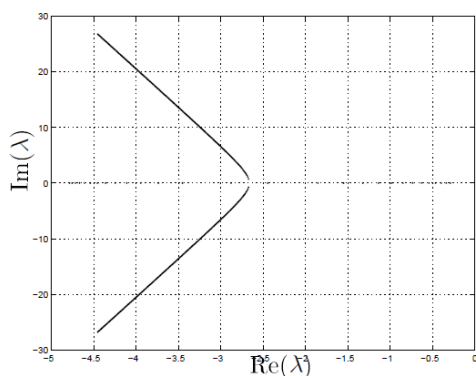
**Θεώρημα 4.1.3 :** Έστω οι Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Απαραίτητη και επαρκής συνθήκη για την ύπαρξη CQLF για τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_2}$  είναι οι πίνακες  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  και  $\sigma_\alpha[A_1, A_2^{-1}]$  να έχουν ιδιοτιμές στο ανοικτό αριστερό μισό του μιγαδικού επιπέδου για όλα τα  $\alpha \in [0,1]$ .

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας υποδεικνύουν κυρίως δύο τρόπους, ώστε να συμπεράνουμε αν τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF ή όχι. Αρχικά, μπορούμε να σχεδιάσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$  και του πίνακα  $(1 - \alpha)A_1 + \gamma A_2^{-1}$  για τις διάφορες τιμές του  $\alpha$  μεταξύ του μηδέν και του ένα. Εναλλακτικά, βασιζόμενοι στο λήμμα [4.1.1](#) θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές των πινάκων  $A_1 A_2$  και  $A_1 A_2^{-1}$ , ελέγχοντας αν υπάρχει έστω και μία ιδιοτιμή να είναι (πραγματική) αρνητική.

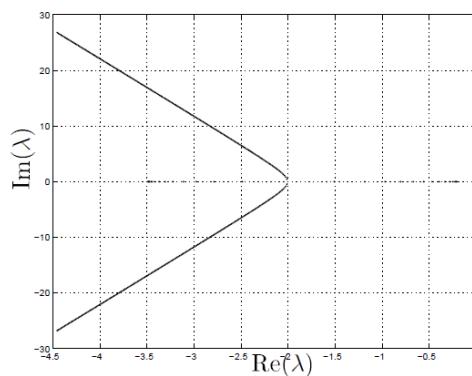
**Παράδειγμα 4.1.1 :** Θεωρώ τα LTI συστήματα δεύτερης τάξης  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , όπου

$$A_1 = \begin{pmatrix} 16.5603 & -31.8756 \\ 36.299 & -25.4635 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1.1144 & -3.1126 \\ -0.9722 & -3.9614 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας  $A_1$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} = -4.4516 \pm 26.7498i$  και ο πίνακας  $A_2$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -4.78566$  και  $\lambda_2 \approx -0.290141$ , οπότε είναι και οι δύο Hurwitz πίνακες. Ο χώρος που κινούνται οι ιδιοτιμές των πινάκων  $\sigma_\alpha[A_1, A_2] = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$  και  $\sigma_\alpha[A_1, A_2^{-1}] = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2^{-1}$  για  $0 \leq \alpha \leq 1$  δίνεται από τα σχεδιαγράμματα 4.3 και 4.4 παρακάτω.



**Σχεδιάγραμμα 4.3 :** Χώρος ιδιοτιμών του  $(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$



**Σχεδιάγραμμα 4.4 :** Χώρος ιδιοτιμών του  $(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2^{-1}$

Από τα δύο σχεδιαγράμματα, είναι σαφές πως οι ιδιοτιμές των  $(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$  και  $(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2^{-1}$  κινούνται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα [4.1.3](#), υπάρχει CQLF για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_2}$ .

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές των πινάκων

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 12.5347 & 74.7264 \\ 15.696 & -12.1132 \end{pmatrix}$$

και

$$A_1 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -69.5646 & 62.7057 \\ -121.389 & 101.807 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, διαπιστώνουμε ότι

$$\sigma(A_1 A_2) \approx \{0.21075 + 31.9535i, 0.21075 - 31.9535i\}$$

$$\sigma(A_1 A_2^{-1}) \approx \{16.1212 + 16.4233i, 16.1212 - 16.4233i\}$$

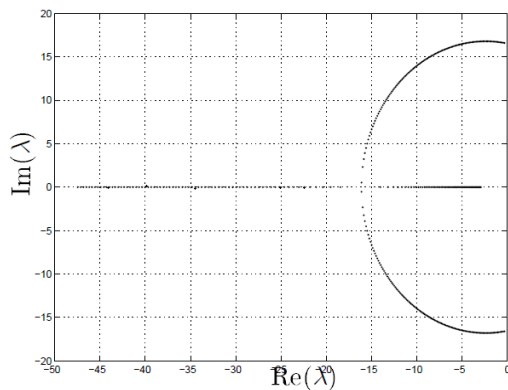
Εφόσον και των δύο πινάκων οι ιδιοτιμές δεν είναι αρνητικές πραγματικές, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει CQLF για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ .

■

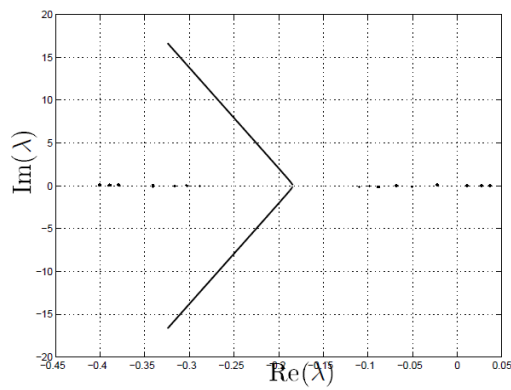
**Παράδειγμα 4.1.2 :** Θεωρώ τα LTI συστήματα δεύτερης τάξης  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , όπου

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8.2012 & 21.5591 \\ -16.1443 & -8.8490 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -48.8335 & 7.6504 \\ -8.2792 & -1.5512 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας  $A_1$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} \approx -0.3239 \pm 16.5946i$  και ο πίνακας  $A_2$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -47.4536$  και  $\lambda_2 \approx -2.53107$ . Συνεπώς, και οι δύο πίνακες είναι Hurwitz και τα συστήματα που τους αντιστοιχούν ασυμπτωτικά ευσταθή. Ο χώρος που κινούνται οι ιδιοτιμές των πινάκων  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  και  $\sigma_\alpha[A_1, A_2^{-1}]$  για  $0 \leq \alpha \leq 1$  δίνεται από τα σχεδιαγράμματα 4.5 και 4.6 παρακάτω.



**Σχεδιάγραμμα 4.5 :** Χώρος ιδιοτιμών του  $(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$



**Σχεδιάγραμμα 4.6 :** Χώρος ιδιοτιμών του  $(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2^{-1}$

Ενώ παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  είναι στο αριστερό μισό του επιπέδου, οι ιδιοτιμές του  $\sigma_\alpha[A_1, A_2^{-1}]$  δεν είναι όλες σε αυτό. Από το σχεδιάγραμμα 4.6 γίνεται αντιληπτό ότι ο πίνακας  $(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2^{-1}$  έχει ιδιοτιμές και στο δεξί ημιεπίπεδο. Έτσι, από το θεώρημα [4.1.3](#) έπεται ότι τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  δεν επιδέχονται CQLF.

Διαφορετικά, μπορούμε να υπολογίσουμε και τις ιδιοτιμές των πινάκων

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} -0.00286514 & -0.000764675 \\ -0.0224873 & -0.0151104 \end{pmatrix}$$

και

$$A_1 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1.19182 & -8.02036 \\ -0.34668 & 3.99482 \end{pmatrix}$$

και διαπιστώνουμε ότι

$$\sigma(A_1 A_2) \approx \{-0.016352, -0.00162351\},$$

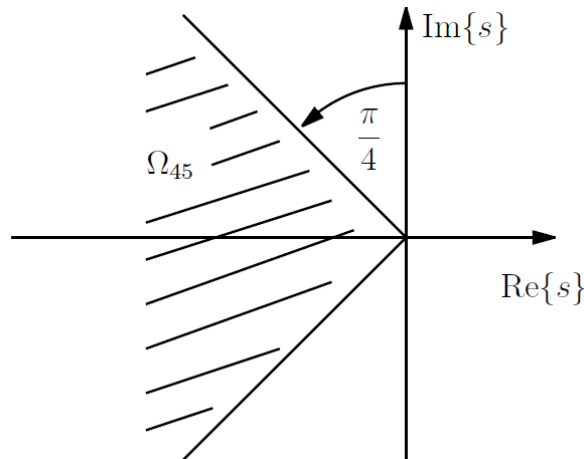
$$\sigma(A_1 A_2^{-1}) \approx \{4.77155, 0.415087\}.$$

Εφόσον οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A_1 A_2$  είναι αρνητικές πραγματικές, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει CQLF για τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ .

■

## 4.2 Το $45^\circ$ κριτήριο

**Ορισμός 4.2.1:**  $45^\circ$ -περιοχή ονομάζεται το ανοικτό υποσύνολο  $\Omega_{45}$  του επιπέδου που ορίζεται από την σχέση  $\Omega_{45} = \{s \mid \operatorname{Re}\{s\} < -|\operatorname{Im}\{s\}|\}_{\mathbb{C}}$ .



**Σχεδιάγραμμα 4.7 :** Η  $45^\circ$ -περιοχή αποτελείται από το σκιαγραφημένο επίπεδο.

**Θεώρημα 4.2.1 ( $45^\circ$  κριτήριο) :** **A)** Θεωρώ τους Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  με πραγματικές ιδιοτιμές και ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  έχει ιδιοτιμές, οι οποίες δεν περικλείονται στην  $45^\circ$ -περιοχή. Τότε, δεν υπάρχει CQLF για τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ .

**B)** Έστω το εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα :  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$  με τους  $A_1, A_2$  να έχουν μη πραγματικές ιδιοτιμές, οι οποίες βρίσκονται εντός της  $45^\circ$ -περιοχής. Τότε τα  $\Sigma_{A_1}$  και  $\Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF αν και μόνο αν η περιοχή των ιδιοτιμών του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  περικλείεται πλήρως στην  $45^\circ$ -περιοχή.

**Γ)** Έστω το εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα :  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$  με τους  $A_1, A_2$  να έχουν ο ένας πραγματικές ιδιοτιμές και ο άλλος μιγαδικές. Εάν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  περικλείονται στην  $45^\circ$ -περιοχή τότε ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- i. ο πίνακας  $A_1 A_2$  και  $A_1^{-1} A_2$  έχει μη πραγματικές, αρνητικές ιδιοτιμές.
- ii. ο πίνακας  $A_1^{-1} A_2$  έχει διακριτές, θετικές πραγματικές ιδιοτιμές.

Το παραπάνω θεώρημα το παρουσίασε και το απέδειξε ο Kai Wulff στο [2].

*Παρατήρηση:* Το ζεύγος συστημάτων  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  δύναται να έχει CQLF, ενώ ταυτόχρονα οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  βρίσκονται εκτός της  $45^\circ$ -

περιοχής. Αυτό γίνεται πληρέστερα σαφές στο παράδειγμα [4.2.2](#).

**Λήμμα 4.2.1 :** Ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  με  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  έχει μία ιδιοτιμή η οποία είναι πραγματική, μιγαδική ή περικλείεται στην  $45^\circ$ -περιοχή αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A_2$  ή του  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$  για όλα τα  $\gamma$  έχουν την ίδια ιδιότητα αντιστοίχως.

*Απόδειξη:* Ισχύει ότι  $\sigma_\alpha[A_1, A_2] = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2 = \alpha(A_1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}A_2)$ ,  $\forall \alpha \neq 0$ .

Ορίζω την συνάρτηση  $f : (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  με  $f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha} = \gamma$ . Τότε, θα έχουμε

$$\sigma_\alpha[A_1, A_2] = \frac{1}{\gamma+1}(A_1 + \gamma A_2) = \frac{1}{\gamma+1}\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2].$$

Η θετική ποσότητα  $\frac{1}{\gamma+1}$  δεν επηρεάζει την ζητούμενη ιδιότητα των ιδιοτιμών (αν θα είναι πραγματικές, μιγαδικές ή περικλείονται στην  $45^\circ$ -περιοχή) και έτσι μπορεί να παραλειφθεί. Επομένως, από την τελευταία εξίσωση γίνεται αντιληπτό ότι τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  θα έχει την ίδια ιδιότητα με τις ιδιοτιμές του  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2]$ . Τα σημεία ανωμαλίας  $\gamma = -1$  και  $\alpha = 0$  δεν είναι στο εξεταζόμενο διάστημα.

Για  $\alpha = 0$ :  $\sigma_\alpha[A_1, A_2] = A_2$ . Οπότε, σε αυτήν την περίπτωση, οι ιδιοτιμές του  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  είναι ίδιες με αυτές του πίνακα  $A_2$ .

■

Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του εναλλασσόμενου συστήματος, όταν το φάσμα των ιδιοτιμών του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  κείται στην  $45^\circ$ -περιοχή.

**Θεώρημα 4.2.2 :** Θεωρώ τους Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Το εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα :  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2] = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$  περικλείονται στην  $45^\circ$ -περιοχή  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

Στην συνέχεια, αξιοποιούμε τα παραπάνω αποτελέσματα σε μερικά παραδείγματα.

**Παράδειγμα 4.2.1 :** Θεωρώ τους πίνακες:

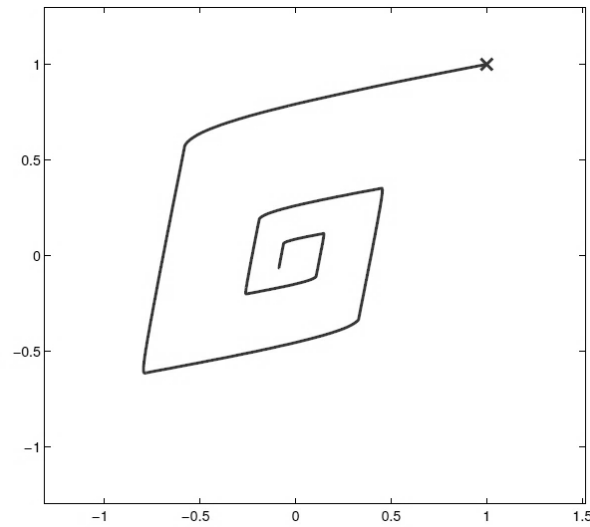
$$A_1 = \begin{pmatrix} -4.3 & -4.6 \\ -0.6 & -1.1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1.8 & -2.4 \\ 9.3 & -11.9 \end{pmatrix},$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στα LTI συστήματα:

$$\Sigma_{A_1}: \dot{x}(t) = A_1(t)x(t) \quad \text{και} \quad \Sigma_{A_2}: \dot{x}(t) = A_2(t)x(t).$$

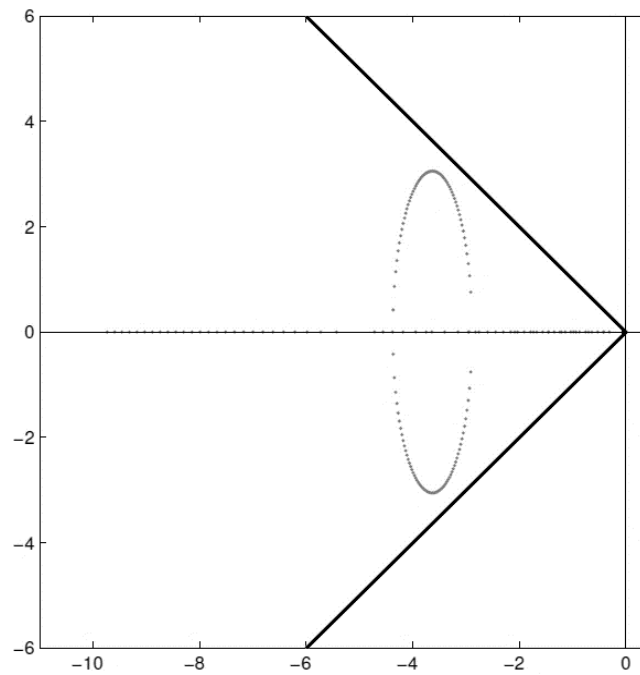
Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A_1$  είναι κατά προσέγγιση  $-5$  και  $-0.4$ , ενώ ο πίνακας  $A_2$  έχει ιδιοτιμές  $-10$  και  $-0.1$ . Οπότε, είναι σαφές πως και τα δύο συστήματα είναι ασυμπτωτικά ευσταθή και επιδέχονται CQLF (ξεχωριστά το καθένα). Μία τροχιά του εναλλασσόμενου συστήματος που περιγράφεται από την σχέση  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$  δίνεται στο σχεδιάγραμμα 4.8,

όπου η μετατροπή γίνεται κάθε  $\pi/5$  και η αρχική συνθήκη είναι  $x(0) = (1,1)^t$ .



**Σχεδιάγραμμα 4.8 :** Τυχαία τροχιά του εναλλασσόμενου συστήματος του παραδείγματος 4.2.1

Για να μελετήσουμε την ύπαρξη ή μη CQLF για το εναλλασσόμενο σύστημα με υποσυστήματα το  $\Sigma_{A_1}$  και το  $\Sigma_{A_2}$  θα χρειαστεί να παρατηρήσουμε στο σχεδιάγραμμα 4.9 τον χώρο που κινούνται οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$ .



**Σχεδιάγραμμα 4.9 :** Χώρος ιδιοτιμών του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$ . Οι τελείες αναπαριστούν τις ιδιοτιμές του  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in [0,1]$ .

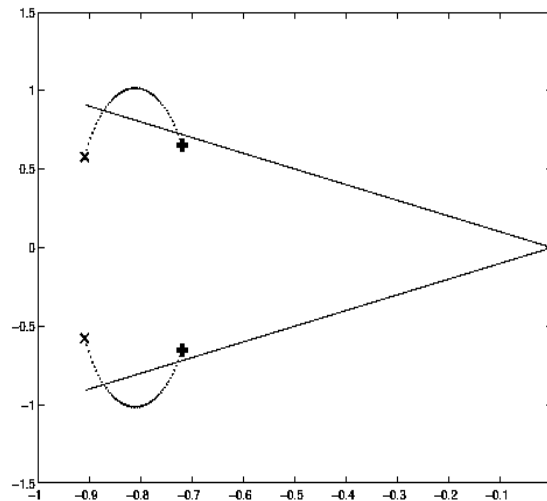
Είναι σαφές ότι ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  έχει μιγαδικές ιδιοτιμές. Εφόσον οι πίνακες  $A_1$  και  $A_2$  έχουν πραγματικές ιδιοτιμές, μπορούμε να αξιοποιήσουμε το θεώρημα 4.1.2 και, έτσι, συμπεραίνουμε ότι το εναλλασσόμενο σύστημά μας δεν επιδέχεται CQLF. Τέλος, παρατηρούμε ότι ενώ οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  κείται στην  $45^\circ$ -περιοχή, δεν έχουμε ύπαρξη CQLF!

■

**Παράδειγμα 4.2.2:** Θεωρώ το εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα :  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$  με:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1.67 & -0.83 \\ 1.6 & 0.23 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.51 & -1.45 \\ 0.34 & -1.31 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας  $A_1$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} \approx -0.72 \pm 0.652304i$  και ο πίνακας  $A_2$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} \approx 0.91 \pm 0.577i$ , οπότε είναι και οι δύο Hurwitz πίνακες. Επίσης, και ο πίνακας  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  είναι Hurwitz και οι ιδιοτιμές του δεν περικλείονται πλήρως εντός της  $45^\circ$ -περιοχής, όπως φαίνεται στο σχεδιάγραμμα 4.10.



**Σχεδιάγραμμα 4.10 :** Χώρος ιδιοτιμών του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$ . Οι τελείες αναπαριστούν τις ιδιοτιμές του  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in [0, 1]$ .

Παρόλ'αυτά, τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF, αφού ο πίνακας

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} -2.39178 & -3.20157 \\ 0.673198 & 0.519635 \end{pmatrix}$$

έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} \approx -0.936 \pm 0.1902i$  και ο πίνακας

$$A_1 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2.112721 & -1.72096 \\ -1.87253 & 1.89709 \end{pmatrix}$$

έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx 3.81098, \lambda_2 = 0.21332$ .

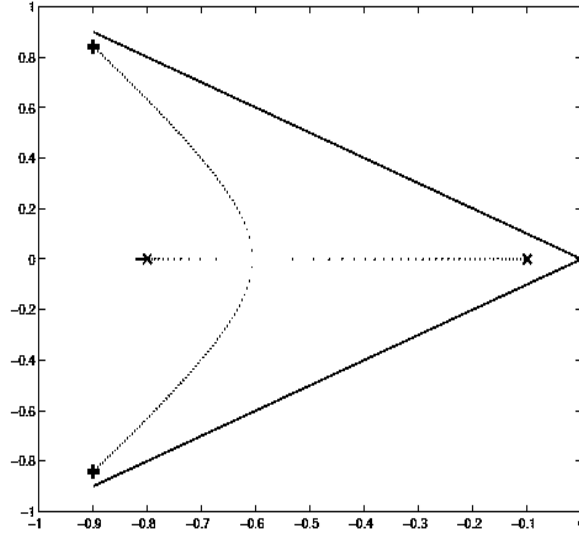
■

Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι το  $45^\circ$  κριτήριο δεν είναι απαραίτητο να ισχύει στην περίπτωση όπου οι δοθέντες πίνακες έχουν μιγαδικές ιδιοτιμές. Στην συνέχεια, αξίζει να παραθέσουμε και ένα παράδειγμα στο οποίο ο ένας πίνακας έχει πραγματικές και ο άλλος μιγαδικές ιδιοτιμές.

**Παράδειγμα 4.2.3:** Θεωρώ το εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα :  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$  με:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.4 & -0.4 \\ 2.4 & -1.4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ 0.5 & -0.8 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας  $A_1$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} \approx 0.5 \pm 0.3872i$ , ενώ ο  $A_2$  έχει  $\lambda_1 = -0.8, \lambda_2 = -0.1$ . Συνεπώς, και οι δύο πίνακες είναι Hurwitz. Επίσης παρατηρούμε στο σχεδιάγραμμα 4.11 ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$  είναι εντός της  $45^\circ$ -περιοχής.



**Σχεδιάγραμμα 4.11 :** Περιοχή ιδιοτιμών του πίνακα  $\sigma_\alpha[A_1, A_2]$ .

Έτσι, από το θεώρημα [4.2.2](#) συμπεραίνουμε ότι το δοθέν εναλλασσόμενο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Επιπλέον, ο πίνακας

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.32 \\ 0.46 & -1.12 \end{pmatrix}$$

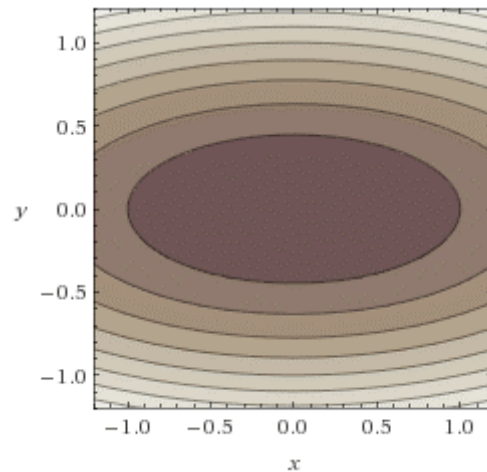
έχει πραγματικές θετικές ιδιοτιμές (τις  $\lambda_1 \approx 0.815$  και  $\lambda_2 \approx 0.144$ ), όπως επίσης θετικές πραγματικές ιδιοτιμές έχει και ο πίνακας

$$A_1 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 6.5 & 0.5 \\ -32.75 & -1.75 \end{pmatrix}$$

(με  $\lambda_1 \approx 3.175$  και  $\lambda_2 \approx 1.57$ ). Έπεται, λοιπόν, πως υπάρχει CQLF για το σύστημα μας.

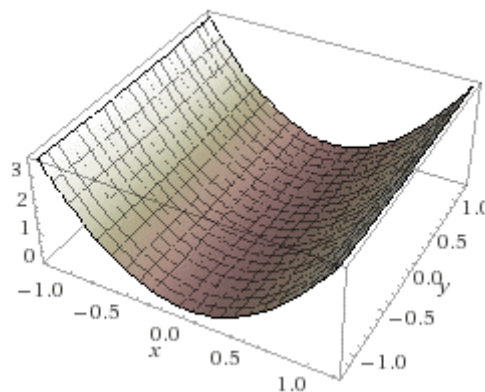
Στο σχεδιάγραμμα 4.12 παρουσιάζονται μερικά επίπεδα, ελλειψοειδούς σχήματος, της τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης  $V(x) = x^t P x$  με

$$P = \begin{pmatrix} 2.3552 & 0.0582 \\ 0.0582 & 0.6033 \end{pmatrix}.$$



**Σχεδιάγραμμα 4.12 :** Επίπεδα της τετραγωνικής Lyapunov συνάρτησης για το εναλλασσόμενο σύστημα του παραδείγματος 4.2.3.

Ολόκληρη η  $V(x) = x^t \begin{pmatrix} 2.3552 & 0.0582 \\ 0.0582 & 0.6033 \end{pmatrix} x$  απεικονίζεται στο σχεδιάγραμμα 4.13.



**Σχεδιάγραμμα 4.13 :** Συνήθης τετραγωνική Lyapunov συνάρτηση για το εναλλασσόμενο σύστημα του παραδείγματος 4.2.3

■

## Κεφάλαιο 5

### Ζεύγη συστημάτων που η τάξη τους διαφέρει κατά ένα

Στο κεφάλαιο αυτό, εξετάζουμε εναλλασσόμενα συστήματα με δύο υποσυστήματα, των οποίων η τάξη διαφέρει κατά ένα. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, έτσι και στα ζεύγη συστημάτων με διαφορά τάξης ένα, γίνεται αντιληπτό πως μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για ύπαρξη CQLF και κατ' επέκταση ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος είναι το γινόμενο των πινάκων που αντιστοιχούν στα υποσυστήματα να μην έχει αρνητικές ιδιοτιμές [10].

**Θεώρημα 5.1.1 :** Θεωρώ τους Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με  $\text{rank}(A_2 - A_1) = 1$ . Τότε, τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF αν και μόνο αν ο πίνακας  $A_1 A_2$  δεν έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές ή, ισοδύναμα, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_2^{-1}]$  είναι μη ιδιάζων.

**Πόρισμα 5.1.1 :** Έστω οι Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με  $\text{rank}(A_2 - A_1^{-1}) = 1$ . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- i. Ο πίνακας  $A_1^{-1} A_2$  έχει μη αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές.
- ii. Το εναλλασσόμενο γραμμικό σύστημα  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για αυθαίρετα σήματα μετατροπής.
- iii. Τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF.

*Απόδειξη:* i.  $\Leftrightarrow$  iii. Από το θεώρημα 3.1.2 συμπεραίνουμε ότι τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF αν και μόνο αν τα  $\Sigma_{A_1^{-1}}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF και έτσι από το θεώρημα 5.1.1 αν και μόνο αν ο πίνακας  $A_1^{-1} A_2$  έχει μη αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές.

ii.  $\Leftrightarrow$  iii. Προφανώς, από το iii. συνεπάγεται άμεσα το ii. . Για την άλλη κατεύθυνση, αν δεν υπάρχει CQLF για τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , τότε από το παραπάνω επιχείρημα προκύπτει ότι ο πίνακας  $A_1^{-1} A_2$  έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές. Οπότε, υπάρχει  $\gamma > 0$ , τέτοιο ώστε ο πίνακας  $A_1 + \gamma A_2$  να έχει μία ιδιοτιμή στο κλειστό δεξί ημιεπίπεδο. Από το θεώρημα 2.2.1, επομένως, το γραμμικό εναλλασσόμενο σύστημα  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$  δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Έτσι, ολοκληρώθηκε η απόδειξη. ■

Στο παράδειγμα που ακολουθεί εφαρμόζουμε το θεώρημα 5.1.1 για ένα τρίτης τάξεως ζεύγος συστημάτων, που η τάξη των αντίστοιχων πινάκων διαφέρει κατά ένα.

**Παράδειγμα 5.1.1 :** Θεωρώ τα τρίτης τάξεως LTI συστήματα  $\Sigma_A, \Sigma_{A-bc^t}$ , όπου

$$A = \begin{pmatrix} -47.3992 & 33.3965 & 7.7548 \\ -18.7324 & 10.5304 & -35.5976 \\ 15.3888 & 30.8884 & -22.9334 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0.4608 \\ 0.4574 \\ 0.4507 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0.4122 \\ 0.9016 \\ 0.0056 \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες  $A$  και  $A - bc^t$  διαφέρουν στην τάξη τους κατά ένα. Επίσης, ο πίνακας  $A$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -51.6428, \lambda_{2,3} \approx -4.07968 \pm 38.9126i$ , ενώ ο πίνακας

$$A - bc^t = \begin{pmatrix} -47.589142 & 32.981043 & 7.75221952 \\ -18.92094 & 10.118008 & -35.60016144 \\ 15.203021 & 30.482069 & -22.93592392 \end{pmatrix}$$

έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -51.6697, \lambda_{2,3} \approx -4.36867 \pm 38.7134$ . Έπεται ότι και οι δύο πίνακες είναι Hurwitz. Αν υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A(A - bc^t) = \begin{pmatrix} 1741.69 & -988.987 & -1734.23 \\ 151.023 & -1596.36 & 296.362 \\ -1665.43 & 121.01 & -454.336 \end{pmatrix}$$

θα δούμε ότι έχει  $\lambda_1 \approx -1488.68 + 327.656i, \lambda_2 \approx -1488.68 - 327.656i, \lambda_3 \approx 2668.36$ . Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα [5.1.1](#) τα  $\Sigma_A, \Sigma_{A-bc^t}$  έχουν CQLF. ■

Το αποτέλεσμα του θεωρήματος [5.1.1](#) μπορεί να επεκταθεί σε μία μεγαλύτερη κλάση συστημάτων σε αυτήν την κατεύθυνση. Αυτό επιτυγχάνεται στο παρακάτω πόρισμα βάσει της παρατήρησης ότι τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF αν και μόνο αν τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{cA_2}$  έχουν CQLF για θετική σταθερά  $c$ .

**Πόρισμα 5.1.2 :** Θεωρώ τους Hurwitz πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Υποθέτω ότι υπάρχει  $c > 0$ , τέτοιο ώστε  $\text{rank}(A_2 - cA_1) = 1$ . Τότε, μία απαραίτητη και επαρκής συνθήκη για να έχουν CQLF τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  είναι ο πίνακας  $A_1A_2$  να μην έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές.

*Απόδειξη:* Η επάρκεια προκύπτει άμεσα από το λήμμα [3.2.1](#). Ας υποθέσουμε, ότι ο πίνακας  $A_1A_2$  δεν έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές. Τότε, κάθε ιδιοτιμή του πίνακα  $(cA_1)A_2$  είναι αρνητική και  $\text{rank}(A_2 - cA_1) = 1$ . Οπότε, από το θεώρημα [5.1.1](#) τα  $\Sigma_{cA_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF, άρα και τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  θα έχουν. ■

Το τελευταίο πόρισμα μας δίνει άλλη μία περίπτωση κλάσης συστημάτων για τα οποία υπάρχει CQLF και ελέγχουμε περαιτέρω ιδιότητες των συστημάτων. Στο πόρισμα αυτό η δυσκολία είναι να βρεθεί η θετική σταθερά  $c$ , για την οποία θα ισχύει  $\text{rank}(A_2 - cA_1) = 1$ . Ένας τρόπος να ελέγξουμε αν υπάρχει τέτοια σταθερά είναι να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A_1^{-1}A_2$ . Εάν ο πίνακας αυτός έχει μία θετική πραγματική ιδιοτιμή γεωμετρικής πολλαπλότητας  $n - 1$ , τότε θα υπάρχει η ζητούμενη σταθερά και το πόρισμα [5.1.2](#) μπορεί να εφαρμοστεί [[1](#)].

*Παρατήρηση:* Από τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχει  $c > 0$ , τέτοιο ώστε  $\text{rank}(A_2 - cA_1) = 1$  αν και μόνο αν για αυτό το  $c$  ο πίνακας  $A_1^{-1}A_2 - cI$

έχει τάξη ένα. Τότε, αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι το  $c$  ιδιοτιμή γεωμετρικής πολλαπλότητας  $n - 1$  του πίνακα  $A_1^{-1}A_2$ .

**Παράδειγμα 5.1.2 :** Θεωρώ τα τρίτης τάξεως LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  με

$$A_1 = \begin{pmatrix} -31.0609 & -6.0655 & -1.1295 \\ 2.7560 & -43.4734 & -19.0071 \\ -9.7284 & -22.8422 & -12.3802 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -62.1219 & -12.1310 & -2.2590 \\ 5.5120 & -86.9469 & -38.0142 \\ -18.9567 & -44.9843 & -24.8604 \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες  $A_1$  και  $A_2$  έχουν ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -54.309, \lambda_2 \approx -30.1562, \lambda_3 \approx -2.44937$  και  $\lambda_1 \approx -108.342, \lambda_2 \approx -60.362, \lambda_3 \approx -5.22468$  αντίστοιχα και είναι Hurwitz. Στην περίπτωση των δύο αυτών πινάκων, ισχύει ότι  $\text{rank}(A_2 - A_1) = 3$ . Παρόλ'αυτά, οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A_1^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} 1.99175 & -0.0113374 & 0.00164756 \\ 0.0739904 & 2.10358 & -0.0148004 \\ -0.170455 & -0.238594 & 2.03408 \end{pmatrix}$$

είναι  $\lambda_1 \approx 2.1294, \lambda_{2,3} \approx 2$  (η πολλαπλότητα ιδιοτιμής  $\lambda_{2,3}$  είναι δύο). Έτσι, από την προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει ότι υπάρχει κάποια σταθερά  $c$ , τέτοια ώστε  $\text{rank}(A_2 - cA_1) = 1$ . Για την ακρίβεια, αυτή η σταθερά στην περίπτωση μας έχει την τιμή 2,

$$A_2 - 2A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.7 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, μπορούμε να εφαρμόσουμε το πόρισμα [5.1.2](#) για να ελέγξουμε την ύπαρξη CQLF.

Ο πίνακας

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 1917.54 & 954.986 & 328.822 \\ -50.5214 & 4601.47 & 2118.9 \\ 713.128 & 2660.99 & 1198.08 \end{pmatrix}$$

έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx 12.8, \lambda_2 \approx 1820.2, \lambda_3 \approx 5884$ , οπότε από το πόρισμα [5.1.2](#) έπεται ότι τα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF. ■

**Λήμμα 5.1.1:** Θεωρώ τους πίνακες  $A_1, A_2 = A_1 - bc^t$  να είναι Hurwitz πίνακες στο  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ( $\text{rank}(A_2 - A_1) = 1$ ). Τότε, ο πίνακας  $A_1^{-1}(A_1 - bc^t)$  δεν θα έχει καμία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή. Ισοδύναμα, ο πίνακας  $\sigma_{\gamma \in [0, \infty)}[A_1, A_1 - bc^t]$  είναι μη ιδιάζων.

Στην συνέχεια, εξετάζουμε ζεύγη θετικών συστημάτων δεύτερης και τρίτης τάξεως, των οποίων η τάξη διαφέρει κατά ένα.

**Πόρισμα 5.1.3 :** Έστω οι Hurwitz και Metzler πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  με  $\text{rank}(A_2 - A_1) = 1$ . Τότε, τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF.

*Απόδειξη:* Εφόσον,  $\text{rank}(A_2 - A_1) = 1$ , από το λήμμα 5.1.1 θα έχουμε ότι ο πίνακας  $A_1 A_2^{-1}$  δεν θα έχει καμία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή και από το θεώρημα 3.3.4 άμεσα συμπεραίνουμε ότι τα συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF. ■

**Θεώρημα 5.1.3 :** Έστω οι Hurwitz και Metzler πίνακες  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  με  $\text{rank}(A_2 - A_1) = 1$ . Τότε, τα LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  έχουν CQLF και το αντίστοιχο γραμμικό εναλλασσόμενο σύστημα  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για αυθαίρετα σήματα μετατροπής.

**Παράδειγμα 5.1.3 :** Θεωρώ τους πίνακες  $A_1, A_2 = A_1 + bc^t$  που ανήκουν στο  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ , όπου

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1.9545 & 0.2644 & 0.2379 \\ 0.8699 & -2.2528 & 0.6458 \\ 0.9342 & 0.8729 & -1.4462 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -0.2349 \\ -0.1873 \\ 0.1539 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0.3340 \\ 0.3444 \\ 0.3089 \end{pmatrix}$$

Είναι σαφές πως και ο πίνακας  $A_1$  και ο πίνακας

$$A_2 = A_1 + bc^t = \begin{pmatrix} -1.8760434 & 0.3452996 & 0.3104606 \\ 0.9324582 & -2.1882939 & 0.703657 \\ 0.8827974 & 0.8198968 & -1.4937397 \end{pmatrix}$$

είναι Metzler, αφού τα στοιχεία εκτός διαγωνίου των δύο πινάκων είναι μη αρνητικά. Επίσης, ο πίνακας  $A_1$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -2.75277, \lambda_2 \approx -2.23577, \lambda_3 \approx -0.664953$  και ο πίνακας  $A_2$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -2.74466, \lambda_2 \approx -2.24174, \lambda_3 \approx -0.571674$ . Συνεπώς, είναι και οι δυο Hurwitz πίνακες.

Ισχύει ότι  $\text{rank}(A_2 - A_1) = \text{rank}(A_1 + bc^t - A_1) = \text{rank}(bc^t) = 1$  και, έτσι, το παραπάνω θεώρημα μας εγγυάται την ύπαρξη CQLF για τα θετικά LTI συστήματα  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  και ότι το γραμμικό εναλλασσόμενο σύστημα  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Επίσης, από το θεώρημα 3.3.5 έχουμε ότι ο πίνακας

$$A_1(A_1 + bc^t) = \begin{pmatrix} 4.12329 & -1.05842 & -0.776109 \\ -3.1625 & 5.75965 & -2.27979 \\ -2.21536 & -2.77332 & 3.0645 \end{pmatrix}$$

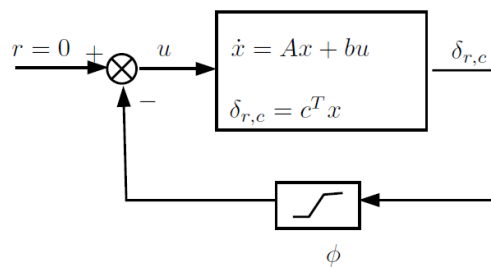
έχει μη αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές. Πράγματι, οι ιδιοτιμές του είναι  $\lambda_1 \approx 0.380128, \lambda_2 \approx 5.01254, \lambda_3 \approx 7.55478$ . ■

Κλείνοντας αξίζει να αναφερθούμε και σε μία πρακτική εφαρμογή των παραπάνω, της οποίας το αποτέλεσμα δημοσιεύτηκε στο [17].

**Εφαρμογή 5.1.1 :** Στην παρούσα εφαρμογή μελετάμε την ανθεκτικότητα ενός συστήματος ελέγχου σε ένα τεσσάρων κινούμενων και περιστρεφόμενων τροχών όχημα. Σε αυτό ο χειριστής μπορεί να χειρίζεται τις μπροστά και πίσω

γωνίες περιστροφής των τροχών, προσέχοντας, όμως, τόσο την ταχύτητα εκτροπής των τροχών, αλλά και την πλευρική γωνία ολίσθησής τους. Σημαντικό ρόλο, ώστε να μην χαθεί η ευστάθεια, επιτελεί η γωνία περιστροφής των πίσω τροχών, η οποία έχει κατασκευαστεί με μικρό εύρος περιστροφής.

Το κλειστό κύκλωμα του συστήματος αυτού περιγράφεται στο σχεδιάγραμμα 5.1. Για να βεβαιωθούμε ότι το input-output σύστημα είναι ευσταθές, χρειάζεται να ελέγξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια του κλειστού αυτού κυκλώματος.



**Σχεδιάγραμμα 5.1 :** Το κλειστό κύκλωμα του συστήματος της εφαρμογής 5.1.1.

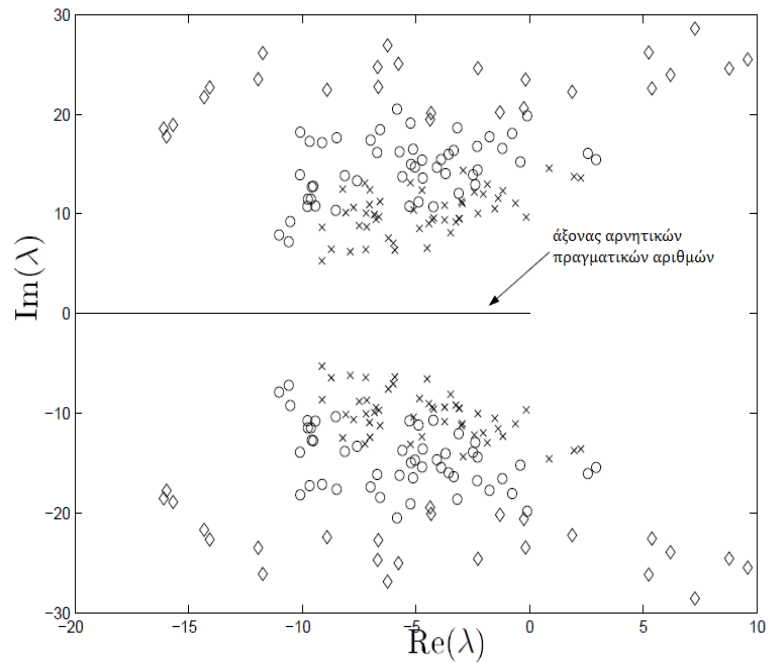
Τα στοιχεία του πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{11 \times 11}$  και τα διανύσματα  $b, c \in \mathbb{R}^{11 \times 1}$  καθορίζονται από ποικίλες φυσικές παραμέτρους συσχετιζόμενες με το όχημα. Πρέπει να σημειώσουμε ότι κάποια από τα στοιχεία του πίνακα  $A$  βασίζονται στην ταχύτητα του οχήματος και ότι αυτές οι φυσικές παράμετροι δεν είναι συγκεκριμένες, αλλά διαφέρουν κάθε φορά. Το παραγόμενο  $\delta_{r,c}$  είναι η γωνία περιστροφής των πίσω τροχών, η οποία ζητείται από τον χειριστή. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, αυτή η γωνία είναι μικρή και αυτό γίνεται αντιληπτό από την «ένταση» του μη γραμμικού  $\phi$  στην ανατροφοδότηση του συστήματος.

Η καταστατική εξίσωση του κλειστού κυκλώματος του σχεδιαγράμματος 5.1 μπορεί να γραφτεί στην εξής μορφή:

$$\dot{x} = (A - k(x)bc^t)x, \quad (5.1)$$

όπου  $k(x)$  είναι μία μη γραμμική συνάρτηση που ικανοποιεί την  $0 < k(x) \leq 1$  για όλα τα  $x$ . Γνωρίζουμε ότι η ύπαρξη CQLF για τα δύο φραγμένα LTI συστήματα  $\Sigma_A, \Sigma_{A-bc^t}$ , μπορεί να εξασφαλίσει την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος (5.1). Από το θεώρημα 5.1.1, αν οι πίνακες  $A$  και  $A - bc^t$  είναι Hurwitz, τότε υπάρχει CQLF για τα συστήματα  $\Sigma_A, \Sigma_{A-bc^t}$  αν και μόνο αν ο πίνακας  $A(A - bc^t)$  δεν έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές.

Έτσι, αξίζει να μελετήσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A(A - bc^t)$  για τρεις διαφορετικές ταχύτητες. Πριν από αυτό, όμως, επιβεβαιώσαμε ότι, για ένα μεγάλο αριθμό διαφορετικών παραμέτρων, οι πίνακες  $A$  και  $A - bc^t$  είναι Hurwitz.



**Σχεδιάγραμμα 5.2 :** Με τα σύμβολα  $\diamond$ ,  $\circ$ ,  $\times$  συμβολίζονται οι ιδιοτιμές του  $A(A - bc^t)$  για τρεις διαφορετικές ταχύτητες αντίστοιχα.

Από το σχεδιάγραμμα 5.2 γίνεται αντιληπτό πως και στις τρεις περιπτώσεις καμία ιδιοτιμή δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα των αρνητικών πραγματικών αριθμών. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σύστημα που περιγράφεται από την σχέση (5.1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

■

# Βιβλιογραφία

- [1] Oliver Mason. Switched systems, convex cones and common Lyapunov functions, Maynooth. (2004)
- [2] Kai Wulff. Quadratic and non-quadratic stability criteria for switched linear systems. National University of Ireland, Maynooth. (2004)
- [3] Zhendong Sun, Shuzhi S. Ge. Switched linear systems, control and design. London - Springer Verlag. (2005)
- [4] D. G. Luenberger. Introduction to Dynamics Systems. John Wiley & Sons, New York. (1979)
- [5] Zhendong Sun, Shuzhi S. Ge. Switched linear systems, control and design. London - Springer Verlag. (2005)
- [6] A. Berman and R. J. Plemmon. Non-negative matrices in the mathematical sciences. SIAM classics in applied mathematics. (1994)
- [7] K. Narendra, J. Balakrishman. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices. IEEE Transactions on Automatic Control. (1994)
- [8] R. Shorten, K. Narendra, Ol. Mason. On common quadratic Lyapunov functions. In Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas. (2002)
- [9] R. Shorten, K. Narendra. On the stability and existence of common Lyapunov functions for linear switching systems. Technical Report 9805, Center for Systems Science, Yale University. (1998)
- [10] Christopher King, Michael Nathanson. On the existence of a common Quadratic Lyapunov function for a rank one difference. Northeastern University, Boston. (2004)
- [11] R. Shorten, K. Narendra. Necessary and sufficient conditions for existence of a common quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear time-invariant systems. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. (2003)
- [12] Oliver Mason and Robert Shorten. Quadratic and Copositive Lyapunov Functions and the Stability of Positive Switched Linear Systems. American Control Conference. (2007)
- [13] Y. Mori, T. Mori, Y. Kuroe. Some new subclasses of systems having a common quadratic Lyapunov function and comparison of known subclasses. In Proceedings of 40<sup>th</sup> Conference on decision and

Control, Orlando, Florida. (2001)

- [14] Ol. Mason, R. Shorten, K. Narendra. A result on common quadratic Lyapunov functions. IEEE Transactions on Automatic Control. (2003)
- [15] Wilson J. Rugh. Linear System Theory. Prentice Hall. (1996)
- [16] Vahid Samadi Bokharaie, under supervision of Dr. Ol. Mason. Stability Analysis of Positive Systems. NUI Maynooth. (2012)
- [17] M. Vilaplana, Ol. Mason, D. Leith, W. Leithead. Proceedings of workshop on multi-agent control held. NUI Maynooth. (2003)
- [18] R. Horn, C. Johnson. Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press. (1991)
- [19] Amir Ali Ahmadi. Non-monotonic functions for stability of non-linear and switched systems: Theory and Computation, University of Maryland. (2008)
- [20] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, Philadelphia. (1994)
- [21] W. P. Dayawansa, C. F. Martin. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. IEEE Transactions on Automatic Control. (1999)
- [22] R. Shorten, F. O Cairbre, P. Curran. On the dynamic instability of a class of switching systems. In proceedings of IFAC conference on Artificial Intelligence in Real Time Control. (2000)
- [23] T. Ooba, Y. Funahashi. Two conditions concerning common quadratic Lyapunov functions for linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control. (1997)
- [24] R. Loewy. On ranges of real Lyapunov transformations. Linear Algebra and its applications. (1976)
- [25] N. Rouche, P. Habets and M. Laloy. Stability Theory by Lyapunov's direct method. New York: Verlag. (1977)

