

ANNA-ΕΛΕΝΗ ΓΕΩΡΓΙΚΟΥ

**ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ LAGRANGE ΓΙΑ
ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΣΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Επιβλέπουσα: Α. Πούλκου, Επίκουρη Καθηγήτρια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ-ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2012

ANNA-ΕΛΕΝΗ ΓΕΩΡΓΙΚΟΥ

**ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ LAGRANGE ΓΙΑ
ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΣΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Επιβλέπουσα: Α. Πούλκου, Επίκουρη Καθηγήτρια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ-ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2012

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Ανθήππη Πούλκου, Επίκουρη Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών, για την υπόδειξη του θέματος, την καθοδήγησή της και την πολύτιμη συμβολή της κατά τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή τον κ. Αθανάσιο Τσαρπαλιά, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών και την κ. Ευαγγελία Κόττα-Αθανασιάδου, Λέκτορα του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Ευχαριστώ όλους τους δικούς μου ανθρώπους και φίλους μου για την ηθική τους υποστήριξη, μα πάνω απ' όλα είμαι ευγνώμων στους γονείς μου και την αδερφή μου για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	ii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ I ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ, ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	
1.1 Χώροι με νόρμα	1
1.2 Τελεστές	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ II ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ	
2.1 Εισαγωγή	18
2.2 Προβλήματα ιδιοτιμών	21
2.3 Θεωρήματα επέκτασης και πληρότητας	23
ΚΕΦΑΛΑΙΟ III ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ G.K.N ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ	
3.1 Το G.K.N. Θεώρημα	25
3.2 Διατύπωση σημαντικών Λημμάτων	26
ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ	
4.1 Δειγματοληψία	29
4.2 Προβλήματα συνοριακών τιμών	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ LAGRANGE ΚΑΙ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ	
5.1 Παρεμβολή και δειγματοληψία	36
5.2 Σύνολο δειγματοληπτικών ισαπεχόντων σημείων	38
5.3 Δειγματοληπτικά σημεία με άνισες αποστάσεις	39
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ KRAMER ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ	
6.1 Συμβολισμοί	42
6.2 Προκαταρκτικά θεωρίας δειγματοληψίας και παρεμβολής	42
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΚΑΙ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ	
7.1 Αυτοσυζυγείς διαφορικές εξισώσεις	46
7.2 Διαφορικοί τελεστές	47
7.3 GKN συνοριακές συνθήκες	48
7.4 Φασματικές ιδιότητες	50
7.5 Προσδιορισμός αναλυτικών πυρήνων Kramer	51
7.6 Αναλυτικές συναρτήσεις παρεμβολής και κύρια αποτελέσματα	52
7.7 Παραδείγματα αποτελεσμάτων παρεμβολής	58
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	63

Ιστορική ανασκόπηση

Η βασική αρχή της δειγματοληπτικής θεωρίας είναι η ισοδυναμία μεταξύ μιας συνάρτησης (συνεχής πηγή πληροφορίας) και μιας κατάλληλης συλλογής δειγμάτων (διακριτή πηγή πληροφορίας). Στις εφαρμογές προκύπτει κάποια μορφή μοντελοποίησης σήματος καθώς η πληροφορία σε ένα συνεχές μεταβαλλόμενο σήμα είναι ίδια με την πληροφορία που περιέχεται στα δείγματά του ξεχωριστά, εάν το περιεχόμενο συχνοτήτων της συνάρτησης (σήμα) είναι φραγμένο.

Από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα έγινε φανερό (λ.χ. από τον *J. M. Whittaker* το 1935, βλ. [31]) ότι υπάρχουν ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί με πυρήνες που έχουν την ακόλουθη ιδιότητα : όταν ένα όρισμα του πυρήνα υπολογίζεται σε κάποια ακολουθία σημείων τότε το σύνολο συναρτήσεων που προκύπτει αποτελεί ένα ορθογώνιο σύνολο σε ένα ορισμένο διάστημα. Επιπλέον προέκυψε και κάποιο θεώρημα δειγματοληψίας. Ο *Whittaker* πρότεινε ως πυρήνα τον πυρήνα του μετασχηματισμού *Hankel* τάξης μηδέν. Ωστόσο δεν έδωσε κάποια απόδειξη ή κάποια αναλυτική μορφή της δειγματοληπτικής σειράς.

Η κατάσταση αυτή επιλύθηκε από τον *H. P. Kramer* (βλ. [23]) σε ένα λήμμα το οποίο αναβαθμίστηκε από κάποιους συγγραφείς τα τελευταία χρόνια σε θεώρημα. Αυτό συνέβη λόγω της μεγάλης εκτίμησης που δόθηκε στη σημαντικότητά του. Ο *Kramer* ασχολείται με την περίπτωση *Bessel*, για συναρτήσεις *Bessel* ακεραίας τάξης, ως μια ειδική περίπτωση μιας σχετικά τυπικής κατασκευής, που αφορά πυρήνες οι οποίοι προκύπτουν από αυτοσυζυγείς διαφορικούς τελεστές σε προβλήματα συνοριακών τιμών. Είναι αξιοσημείωτο γεγονός ότι αυτή η φαινομενικά απλοϊκή κατασκευή, που περιέχεται στο Θεώρημα του *Kramer*, καταφέρνει να συλλάβει το πνεύμα μιας μεγάλης και ποικίλης κλάσης θεωρημάτων δειγματοληψίας.

Σήμερα υπάρχουν πολλές παραλλαγές του βασικού δειγματοληπτικού θέματος, το πεδίο είναι ευρύ και περιέχει πολλούς μικρότερους τομείς. Έχει πραγματικά αληθινό μαθηματικό ενδιαφέρον και μεγάλη σημασία για εφαρμογές στη φυσική και στη μηχανική.

Η δειγματοληπτική θεωρία αναπτύχθηκε σποραδικά κατά το μέσο του 20^{ου} αιώνα, αλλά από τότε η εξέλιξη της ήταν συνεχής και ραγδαία.

Το 1941 ο *Hardy* παρατήρησε ότι οι πληθικές σειρές είναι ένα ορθοκανονικό ανάπτυγμα. Αυτή ήταν η αρχή μιας σημαντικής εξέλιξης στην οποία η δειγματοληψία και η αναπαράσταση συναρτήσεων φαίνονται σε όρους των αναπτυγμάτων τους σε διάφορες βάσεις χώρων *Hilbert* και *Banach*, βλ. [19].

Από θεωρητική σκοπιά, οι μέθοδοι της δειγματοληπτικής θεωρίας αλληλεπιδρούν με πεδία όπως των θεωριών παρεμβολής και προσέγγισης με ειδικές συναρτήσεις και με αναπτύγματα ειδικών συναρτήσεων σε σειρές, αναπτύγματα σχετικά με προβλήματα ιδιοτιμών, θεωρία αναπαράστασης συναρτήσεων, ακέραιες συναρτήσεις και θεωρία *Paley – Wiener*, αριθμητική ανάλυση και αρμονική ανάλυση, βλ. [20].

Μια πολύ βασική εφαρμογή της δειγματοληπτικής θεωρίας είναι και η ανάλυση σημάτων, βλ. [3]. Εδώ, μας παρέχεται η θεωρητική βάση για μοντέρνα επικοινωνιακά συστήματα συντονισμού κωδικών παλμών, που καθιερώθηκαν από τους *Kotel'nikov* το 1933 και *Shannon* το 1949, βλ. [2], [19], [27]. Η χρησιμότητα της θεωρίας αυτής

απορρέει από το γεγονός ότι σε πολλές περιπτώσεις η πληροφορία που περιέχεται σε ένα συνεχές μεταβαλλόμενο σήμα είναι η ίδια με αυτή που περιέχεται στα δείγματα του ξεχωριστά. Δηλαδή αν εξετάσουμε την κατάσταση αυτή με έναν λίγο διαφορετικό τρόπο, κάποιες συναρτήσεις των οποίων το περιεχόμενο συχνοτήτων είναι φραγμένο, είναι ισοδύναμες με μια πηγή πληροφορίας διακριτού χρόνου.

Για να δώσουμε τώρα την έννοια της παρεμβολής σε σχέση με τη δειγματοληψία χρειαζόμαστε μια έννοια δεικνότητας η οποία φαίνεται στο πολύ απλό παράδειγμα της ευθείας γραμμής. Όπως μια ευθεία γραμμή καθορίζει οποιαδήποτε δύο σημεία της, έτσι και δύο σημεία καθορίζουν μια ευθεία γραμμή. Αυτό μας οδηγεί σε μια πρακτική θεώρηση. Όσο το δυνατόν πιο κοντά είναι αυτά τα δύο σημεία, τόσο λιγότερο βέβαιοι μπορούμε να είμαστε για το ποια ευθεία γραμμή καθορίζεται. Είναι πράγματι μια καλή ιδέα να κρατήσουμε τα δειγματοληπτικά σημεία του δείγματος όσο το δυνατόν καλύτερα διαχωρισμένα.

Ας επεκταθούμε λίγο στην έννοια της δεικνότητας που μόλις αναφέραμε στο πολύ απλό παράδειγμά μας. Πραγματικά αντιμετωπίσαμε δύο στενά συνδεδεμένα προβλήματα εδώ. Ένα από αυτά είναι το εξής. Υποθέτουμε ότι μας δίνεται μια συγκεκριμένη κλάση συναρτήσεων οι οποίες έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Μπορούμε να βρούμε ένα διακριτό υποσύνολο A αυτού του πεδίου ορισμού, τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο της κλάσης να ορίζεται μοναδικά από μια συλλογή τιμών που παίρνει στο A ; Κι αν είναι αυτή η περίπτωση, πώς μπορούμε να ανακτήσουμε μια τέτοια συνάρτηση χρησιμοποιώντας μόνο αυτά τα δειγματοληπτικά σημεία; Αυτό είναι το πρόβλημα της *δειγματοληψίας και της ανοικοδόμησης*.

Το δεικν πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα *παρεμβολής*. Μας δίνεται ξανά μια κλάση συναρτήσεων που ορίζονται σε ένα συγκεκριμένο πεδίο ορισμού, αλλά αυτή τη φορά είναι γνωστό ένα σύνολο σημείων παρεμβολής που ανήκουν στο πεδίο ορισμού που προαναφέρθηκε μαζί με την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης στα σημεία αυτά της παρεμβολής. Αναρωτιόμαστε αν υπάρχει ένα στοιχείο, πιθανότατα μοναδικό, της δοσμένης κλάσης συναρτήσεων που παίρνει την αντίστοιχη τιμή παρεμβολής σε κάθε σημείο παρεμβολής, και αν ναι, πώς μπορεί να κατασκευαστεί.

Όταν περιλαμβάνονται μόνο πεπερασμένα σημεία, δεν υπάρχει παρά ελάχιστη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο προβλημάτων. Αλλά όταν περνάμε στην περίπτωση των απείρων πολλών σημείων, υπάρχει μια σημαντική διαφορά. Όταν η δειγματοληπτική σειρά είναι μία άπειρη σειρά, τότε τα προβλήματα έχουν περισσότερο ενδιαφέρον.

Η παρεμβολή προέκυψε από την ανάγκη υπολογισμού των τιμών μιας δοσμένης συνάρτησης που είναι ενδιάμεσες συγκεκριμένων τιμών. Χρησιμοποιώντας τιμές οι οποίες έχουν ήδη υπολογιστεί θα μειωθεί κάπως η εργασία κατά τον υπολογισμό όλων των τιμών από την αρχή. Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι από τον *Briggs*, χρησιμοποιώντας διαδοχικές και τροποποιημένες διαφορές. Αυτές δημοσιεύτηκαν στο Λονδίνο το 1624 στο *Arithmetica Logarithmica* και φαίνεται ότι είναι η πρώτη συμβολή στο θέμα.

Οι ιδέες που πρότεινε ο *Wallis* είχαν κάποια επιρροή το 1650, και σε αυτόν οφείλεται η εισαγωγή της λέξης «παρεμβολή». Αλλά πρώτοι οι *Gregory* και *Newton* αναγνώρισαν την πολυωνυμική φύση της παρεμβάλλουσας συνάρτησης που βασίζεται σε διαδοχικές διαφορές. Πράγματι, σε μια επιστολή προς τον *Collins* στις 23 Νοεμβρίου 1670, ο *Gregory* έδωσε την πρώτη σειρά παρεμβολής. Το ίδιο έτος, ο *Newton* εισήγαγε κατανεμημένες διαφορές και προσαρμοσμένες

κατανεμημένες διαφορές και ενέταξε όλους τους γνωστούς κατά το χρόνο τύπους παρεμβολής κάτω από έναν ενιαίο κανόνα. Οι μέθοδοι τόσο αυτού όσο και του Gregory απορρέουν από τη λήψη του πολυωνύμου σαν μια στενή προσέγγιση της συνεχούς συνάρτησης να «παρεμβληθεί».

Ο τύπος του *Lagrange* εμφανίζεται σε μια σειρά διαλέξεων από στοιχειώδη μαθηματικά που έδωσε ο *Lagrange* στην *Ecole Normale* στο Παρίσι το 1795. Ωστόσο είχε ήδη ανακαλυφθεί από τον *Waring* (1779), σκοπός του οποίου ήταν να κατασκευάσει το πολυώνυμο παρεμβολής «χωρίς να έχει προσφύγει στην εύρεση διαδοχικών διαφορών». Αυτή είναι μια σημαντική εξέλιξη διότι ο τύπος *Lagrange* δίνει το πολυώνυμο παρεμβολής απευθείας από την άποψη των δειγμάτων και παίρνει τη μορφή της δειγματοληπτικής σειράς.

Μία πεπερασμένη δειγματοληπτική σειρά δόθηκε από τον *Cauchy* το 1841, αν και υπάρχουν και παλιότερες μορφές στο έργο του *Gauss*, πηγαίνοντας πίσω περίπου στο 1805. Μια πιο γενική μορφή μπορεί να βρεθεί στους *Dodson* και *Silva* (1985).

Κατά τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα είχε γίνει το πέρασμα από την περίπτωση των πεπερασμένα πολλών σημείων στην πολύ πιο γενική περίπτωση των απείρως πολλών σημείων $\{\lambda_n\}$ (χωρίς πεπερασμένο σημείο συσσώρευσης), στον τύπο του *Lagrange*.

Πριν φύγουμε από τον 19^ο αιώνα, πρέπει να επισημάνουμε ότι μία άλλη πιο εκτεταμένη μορφή της παρεμβολής *Lagrange* σε απείρως πολλά σημεία είχε επίσης αναπτυχθεί και είχε εμφανιστεί στο έργο του *Guichard* από το 1884. Το ευρύ φάσμα της δειγματοληπτικής θεωρίας και της παρεμβολής καθώς και οι εφαρμογές τους συνεχίζουν να μας παρέχουν ενεργές περιοχές έρευνας μέχρι σήμερα.

Περιγραφή εργασίας

Στην παρούσα εργασία αρχικά αναφέρουμε ορισμένους βασικούς ορισμούς και θεωρήματα από τη Συναρτησιακή Ανάλυση και Θεωρία Τελεστών. Μετά ασχολούμαστε με αυτοσυζυγή προβλήματα ιδιοτιμών καθώς και με τη γενικευμένη θεωρία G.K.N. για διαφορικούς τελεστές. Κατόπιν αναφερόμαστε στη σχέση της θεωρίας της Δειγματοληψίας με τα προβλήματα συνοριακών τιμών οπότε ακολουθεί και η Θεωρία Παρεμβολής ως δυική της Δειγματοληψίας. Επίσης αναφερόμαστε και στην αναλυτική μορφή του Θεωρήματος *Kramer*. Ο *Kramer* με το βασικό του θεώρημα, επεκτείνει την εκδοχή της δειγματοληψίας που δίνεται σαν αναγκαία προϋπόθεση για την αναπαράσταση μιας συνάρτησης με τη μορφή ενός αποκομμένου ολοκληρώματος *Fourier*. Δηλαδή πετυχαίνει τη σύνδεση της δειγματοληψίας με τα συνοριακά προβλήματα διαφορικών εξισώσεων, όπου οι ιδιοτιμές είναι τα δειγματοληπτικά σημεία και οι πυρήνες *Kramer* αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις. Τέλος, στην παρούσα εργασία γίνεται μια έκθεση των αποτελεσμάτων σε σχέση με τις συναρτήσεις παρεμβολής που προκύπτουν και περιγράφονται αντίστοιχες εφαρμογές και παραδείγματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ, ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1.1 Χώροι με νόρμα

Ορισμός 1.1 : Μια ακολουθία $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in X$, όπου X χώρος με νόρμα, λέμε ότι συγκλίνει στο $\varphi \in X$ αν $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$ για $n \rightarrow \infty$ και γράφουμε $\varphi_n \rightarrow \varphi$.

Αν Y είναι ένας άλλος χώρος με νόρμα, μια συνάρτηση $A : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής στο $\varphi \in X$ αν για $\varphi_n \rightarrow \varphi$ έχουμε ότι $A\varphi_n \rightarrow A\varphi$. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι **συνεχής**. Ένα υποσύνολο $U \subset X$ είναι **κλειστό** αν περιέχει όλα τα όρια των συγκλινουσών ακολουθιών του U . Η **κλειστότητα** $\bar{U}$ του U είναι το σύνολο όλων των ορίων των συγκλινουσών ακολουθιών του U . Ένα σύνολο U καλείται **πυκνό** στον X αν ισχύει $\bar{U} = X$. Μια ακολουθία $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in X$ καλείται **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος $N = N(\varepsilon)$ έτσι ώστε $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq N$. Καλούμε **πλήρες** ένα υποσύνολο $U \subset X$ του X αν κάθε ακολουθία Cauchy στο U συγκλίνει σε ένα στοιχείο του U .

Θεωρούμε ότι ο X είναι ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικά ολοκληρωσίμων συναρτήσεων (Lebesgue ολοκληρωσίμων) συναρτήσεων στο $[a, b]$. Εύκολα αποδεικνύεται, [1], ότι η

$$\|\varphi\| := \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2 \right)^{1/2},$$

ορίζει μια νόρμα στον X και συμβολίζουμε το χώρο των τετραγωνικά ολοκληρωσίμων συναρτήσεων εφοδιασμένο με την παραπάνω νόρμα με $L^2[a, b]$.

Ορισμός 1.2 : Θεωρούμε ότι ο X είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Μια συνάρτηση $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε να ισχύουν

1. $(\varphi, \varphi) \geq 0$,
2. $(\varphi, \varphi) = 0$ αν και μόνο αν $\varphi = 0$,
3. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$,
4. $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi) + \beta(\psi, \chi)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

για κάθε $\varphi, \psi, \chi \in X$ καλείται **εσωτερικό γινόμενο** πάνω στο διανυσματικό χώρο X . Σε αυτή την περίπτωση ο X καλείται **χώρος με εσωτερικό γινόμενο**.

Ένα εσωτερικό γινόμενο στον $L^2[a, b]$ δίνεται από τη σχέση

$$(\varphi, \psi) := \int_a^b \varphi \bar{\psi} dx, \quad \varphi, \psi \in L^2[a, b]. \quad (1.1)$$

Εύκολα αποδεικνύεται, [23], ότι ισχύει η ακόλουθη ανισότητα, γνωστή ως **ανισότητα Cauchy-Schwartz**.

Θεώρημα 1.3 : Ένα εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την ανισότητα

$$|(\varphi, \psi)|^2 \leq (\varphi, \varphi)(\psi, \psi) \text{ για κάθε } \varphi, \psi \in X,$$

με την ανισότητα να ισχύει αν φ, ψ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Έστω τώρα, X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε η $\|\varphi\| := (\varphi, \varphi)^{1/2}$ ορίζει μια νόρμα στον X . Αν ο X είναι πλήρης ως προς την παραπάνω νόρμα, τότε ο X καλείται **χώρος Hilbert** και τον συμβολίζουμε με $\mathcal{H}$. Ένας υπόχωρος U του χώρου με εσωτερικό γινόμενο X είναι διανυσματικός υπόχωρος του X , με τη νόρμα του X περιορισμένη στο $U \times U$. Με το εσωτερικό γινόμενο (1.1) ο $L^2[a, b]$ γίνεται χώρος Hilbert.

Δύο στοιχεία φ και ψ ενός χώρου Hilbert καλούνται **ορθογώνια** αν $(\varphi, \psi) = 0$ και γράφουμε $\varphi \perp \psi$. Ένα υποσύνολο $U \subset X$ καλείται **ορθογώνιο σύστημα** αν $(\varphi, \psi) = 0$ για κάθε $\varphi, \psi \in U$ με $\varphi \neq \psi$. Ένα ορθογώνιο σύστημα U είναι **ορθοκανονικό σύστημα** αν $\|\varphi\|=1$ για κάθε $\varphi \in U$. Το σύνολο $X - U := \{\psi \in X : \psi \perp U\}$ καλείται το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του υποσυνόλου U .

Αν U είναι ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X , τότε το σύνολο που παράγεται από όλους τους πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων του U συμβολίζεται με $\text{span}U$ και καλείται **γραμμική θήκη** του U . Ένα σύνολο $\{\varphi_n\}$ σε ένα χώρο Hilbert X τέτοιο ώστε το $\text{span}\{\varphi_n\}$ να είναι πυκνό στο X καλείται **πλήρες σύνολο**.

Θεώρημα 1.4 : Έστω $\{\varphi_n\}_1^\infty$ ένα ορθοκανονικό σύστημα σε ένα χώρο Hilbert X . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

- α. Το σύνολο των $\{\varphi_n\}_1^\infty$ είναι πλήρες.
- β. Κάθε $\varphi \in X$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier, όπου (φ, φ_n) λέγεται **Fourier συνιστώσα** του φ ως προς φ_n .
- γ. Για κάθε $\varphi \in X$ ισχύει η ισότητα του Parseval $\|\varphi\|^2 = \sum_1^\infty |\varphi, \varphi_n|^2$.
- δ. Το στοιχείο $\varphi = 0$ είναι το μοναδικό στον X για το οποίο ισχύει $(\varphi, \varphi_n) = 0$ για κάθε ακέραιο n .

Ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα σε ένα χώρο Hilbert X αποτελεί **ορθοκανονική βάση** του X .

1.2 Τελεστές

Ένας τελεστής $A : X \rightarrow Y$ που απεικονίζει ένα διανυσματικό χώρο X σε ένα διανυσματικό χώρο Y καλείται **γραμμικός** αν

$$A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A\varphi + \beta A\psi, \quad (1.2)$$

για κάθε $\varphi, \psi \in X$ και για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Θεώρημα 1.5 : Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα και $A : X \rightarrow Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τότε ο A είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε ένα σημείο.

Ένας γραμμικός τελεστής $A : X \rightarrow Y$ από έναν χώρο X με νόρμα σε ένα χώρο Y με νόρμα καλείται **κλειστός** αν για οποιαδήποτε ακολουθία $\{f_n, n = 1, 2, \dots\}$ τέτοια ώστε $f_n \in D(A)$ ($n = 1, 2, \dots$), $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ (με την έννοια της νόρμας), $\lim_{n \rightarrow \infty} Af_n = g$ τότε $f \in D(A)$ και $Af = g$.

Ένας γραμμικός τελεστής $A : X \rightarrow Y$ από έναν χώρο X με νόρμα σε ένα χώρο Y με νόρμα καλείται **φραγμένος** αν υπάρχει θετική σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\|A\varphi\| \leq C\|\varphi\|, \quad \text{για κάθε } \varphi \in X. \quad (1.3)$$

Η νόρμα του τελεστή A είναι

$$\|A\| := \sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\|, \quad \varphi \in X. \quad (1.4)$$

Αν $Y = \mathbb{C}$, τότε ο A καλείται γραμμικό φραγμένο **συναρτησιακό**. Ο χώρος X^* των γραμμικών φραγμένων συναρτησιακών σε ένα χώρο X με νόρμα καλείται **δualικός χώρος** του X .

Θεώρημα 1.6 : Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα και $A : X \rightarrow Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τότε ο A είναι συνεχής τότε και μόνο τότε, όταν είναι φραγμένος.

Παράδειγμα φραγμένου γραμμικού τελεστή αποτελεί ο $A : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$ με

$$(A\varphi)(x) := \int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy, \quad (1.5)$$

όπου $K(x, y)$ είναι συνεχής επί του $[a, b] \times [a, b]$.

Ένα υποσύνολο U ενός χώρου X με νόρμα καλείται **συμπαγές** αν κάθε ακολουθία στοιχείων του U περιέχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε ένα στοιχείο του U . Το U θα καλείται **σχετικώς συμπαγές** αν η κλειστότητα του είναι συμπαγής. Ένας γραμμικός τελεστής $A : X \rightarrow Y$ από ένα χώρο X με νόρμα σε ένα χώρο Y με νόρμα

είναι **συμπαγής τελεστής** αν απεικονίζει κάθε φραγμένο σύνολο του X σε σχετικώς συμπαγές σύνολο του Y . Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι ο $A : X \rightarrow Y$ είναι συμπαγής τελεστής αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{\varphi_n\}$ στον X η ακολουθία $A\{\varphi_n\}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο Y . Σημειώνουμε ότι κάθε συμπαγής τελεστής είναι και φραγμένος, οι γραμμικοί συνδυασμοί συμπαγών τελεστών είναι συμπαγείς και το γινόμενο συμπαγούς τελεστή με φραγμένο τελεστή είναι επίσης συμπαγής τελεστής.

Συζυγείς τελεστές

Ένα σύνολο $S \subset \mathcal{H}$ λέγεται ότι είναι **πυκνό** εάν η κλειστότητα του $\bar{S}$ ταυτίζεται με τον $\mathcal{H}$.

Θεώρημα 1.7 : Ένας υπόχωρος S είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$ εάν και μόνο εάν δεν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα στον $\mathcal{H}$ το οποίο να είναι ορθογώνιο του S .

Θεωρούμε έναν τυχαίο γραμμικό τελεστή A του οποίου το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}_A$ είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$. Ίσως να υπάρχουν κάποια διανύσματα y ώστε η σχέση

$$(Ax, y) = (x, z)$$

να ισχύει για $z \in \mathcal{H}$ και για κάθε $x \in \mathcal{D}_A$. Συμβολίζουμε το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων με $\mathcal{D}^*$ και ορίζουμε έναν τελεστή A^* με πεδίο ορισμού $\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}^*$ θέτοντας

$$A^*y = z \text{ για κάθε } y \in \mathcal{D}^*.$$

Ο τελεστής A^* καλείται **συζυγής τελεστής** του τελεστή A .

Παρατηρήσεις :

- ο τελεστής A^* είναι πάντα κλειστός και γραμμικός
- εάν $A = A^*$ και το $\mathcal{D}_A$ είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$ τότε ο A είναι **αυτοσυζυγής**
- ένας αυτοσυζυγής τελεστής είναι πάντα κλειστός
- ένας τελεστής A καλείται **Ερμιτιανός** εάν $(Ax, y) = (x, Ay)$ για κάθε $x, y \in \mathcal{D}_A$
- ένας Ερμιτιανός τελεστής με πυκνό πεδίο ορισμού στον $\mathcal{H}$ καλείται **συμμετρικός**.

Περιγραφή του φάσματος ενός αυτοσυζυγούς τελεστή

Ένας μιγαδικός αριθμός λ καλείται **κανονικό σημείο** του τελεστή A εάν υπάρχει ο αντίστροφος $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ και αναπαριστά ένα φραγμένο τελεστή, που ορίζεται σε όλο το χώρο $\mathcal{H}$. Ο τελεστής R_λ καλείται **επιλύων τελεστής** του τελεστή A .

Όλα τα μη κανονικά σημεία λ καλούνται σημεία του φάσματος του τελεστή A . Είναι προφανές ότι οι ιδιοτιμές λ ενός τελεστή ανήκουν στο φάσμα του, αφού ο τελεστής $(A - \lambda I)^{-1}$ δεν υπάρχει για τέτοια σημεία. Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών καλείται **διακριτό φάσμα** του τελεστή, όλα τα άλλα σημεία του φάσματος (εάν υπάρχουν) καλούνται **σημεία του συνεχούς φάσματος** και όλα μαζί καλούνται **συνεχές φάσμα** του τελεστή. Δύο ιδιοδιανύσματα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι αμοιβαίως ορθογώνια. Συνεπώς κάθε σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή σχηματίζει ένα αριθμήσιμο άπειρο ορθογώνιο σύστημα με μοναδική προϋπόθεση το σύνολο των αντιστοιχών ιδιοτιμών να αποτελείται από διαφορετικούς αριθμούς. Άρα:

Το διακριτό φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή είναι ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Επιπλέον είναι φανερό ότι για κάθε αυτοσυζυγή τελεστή A , κάθε μη πραγματικός αριθμός είναι κανονικό σημείο.

Πυρήνας Hilbert-Schmidt

Μια μιγαδική συνάρτηση $K(s, t)$, $a < s, t < b$, δύο μεταβλητών καλείται **πυρήνας Hilbert-Schmidt** εάν

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt < +\infty \quad (1.6)$$

Εδώ το διάστημα (a, b) μπορεί να είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο.

Αν ο $K(s, t)$ είναι ένας πυρήνας Hilbert-Schmidt τότε ο ολοκληρωτικός τελεστής $g(s)$, που ορίζεται στο χώρο $L^2(a, b)$ ως

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)f(t) dt \quad \text{με} \quad f(s) \in L^2(a, b), \quad (1.7)$$

είναι συμπαγής.

Φάσμα Ερμιτιανού συμπαγούς τελεστή

Θεώρημα 1.8 : Τα μη μηδενικά στοιχεία του φάσματος ενός Ερμιτιανού συμπαγούς τελεστή είναι ιδιοτιμές πεπερασμένης πολλαπλότητας και μπορούν να συσσωρευτούν μόνο στο $\lambda = 0$. Αντιστρόφως, ένας Ερμιτιανός τελεστής ο οποίος έχει αυτές τις ιδιότητες είναι συμπαγής.

Επέκταση Συμμετρικού Τελεστή

Ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα στη θεωρία συμμετρικών τελεστών είναι η κατασκευή όλων αυτών των επεκτάσεων ενός συμμετρικού τελεστή A οι οποίες είναι συμμετρικοί τελεστές. Μια ειδική περίπτωση του παραπάνω είναι το πρόβλημα

εύρεσης καταλλήλων συνθηκών με τις οποίες ένας τελεστής θα έχει αυτοσυζυγή επέκταση και η κατασκευή όλων των αυτοσυζυγών επεκτάσεων όταν αυτές οι συνθήκες ισχύουν.

Εάν B είναι μια συμμετρική επέκταση ενός συμμετρικού τελεστή A , τότε $A \subset B$ και άρα $B^* \subset A^*$. Αλλά ο B είναι συμμετρικός τελεστής, δηλ. $B \subset B^*$ οπότε έχουμε

$$A \subset B \subset B^* \subset A^* , \quad (1.8)$$

δηλαδή κάθε συμμετρική επέκταση ενός τελεστή A είναι ένας περιορισμός του τελεστή A^* .

Ένας συμμετρικός τελεστής A λέγεται **μεγιστικός** εάν δεν έχει συμμετρική επέκταση.

Κάθε αυτοσυζυγής τελεστής A είναι μεγιστικός συμμετρικός τελεστής. Στην περίπτωση αυτή $A = A^*$ και η σχέση (1.8) τους δίνει ότι $B = A$, δηλ. κάθε συμμετρική επέκταση B του A συμπίπτει με τον A .

Χώροι Έλλειψης του συμμετρικού τελεστή

Έστω A συμμετρικός τελεστής και λ τυχαίος μη πραγματικός αριθμός. Ορίζουμε ως $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ και $\mathfrak{R}_{\lambda}$ τα πεδία τιμών των τελεστών $(A - \bar{\lambda}I)$ και $(A - \lambda I)$ αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι τα $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ και $\mathfrak{R}_{\lambda}$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{H}$, όχι απαραίτητα κλειστοί. Θα ονομάσουμε τους $(\mathcal{H} - \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}})$ και $(\mathcal{H} - \mathfrak{R}_{\lambda})$, οι οποίοι είναι τα ορθογώνια συμπληρώματά τους, **χώρους έλλειψης** του τελεστή A και θα τους συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ και $\mathcal{N}_{\lambda}$ αντίστοιχα :

$$\mathcal{N}_{\lambda} = \mathcal{H} - \mathfrak{R}_{\lambda} , \quad \mathcal{N}_{\bar{\lambda}} = \mathcal{H} - \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}} . \quad (1.9)$$

Οι χώροι έλλειψης $\mathcal{N}_{\lambda}$ και $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ είναι οι χώροι των λύσεων του τελεστή A^* που ανήκουν στις ιδιοτιμές $\bar{\lambda}$ και λ αντίστοιχα ($A^*x = \bar{\lambda}x$, $A^*x = \lambda x$).

Θεώρημα 1.9 : Εάν A είναι ένας κλειστός συμμετρικός τελεστής τότε οι υπόχωροι $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{N}_{\lambda}$ και $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και το ευθύ άθροισμά τους συμπίπτει με τον $\mathcal{D}_{A^*}$.

$$\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_A + \mathcal{N}_{\bar{\lambda}} + \mathcal{N}_{\lambda} .$$

Πόρισμα 1.10 : Ένας κλειστός συμμετρικός τελεστής είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν οι δύο χώροι έλλειψης του είναι ίσοι με $\{0\}$.

Θεώρημα 1.11 : Για κάθε μιγαδικό αριθμό λ του πάνω ημιεπιπέδου ισχύει :

$$\dim \mathcal{N}_{\bar{\lambda}} = \dim \mathcal{N}_{-i} , \quad \dim \mathcal{N}_{\lambda} = \dim \mathcal{N}_i .$$

Δείκτες Έλλειψης

$$\text{Θέτουμε} \quad m = \dim \mathcal{N}_i \quad \text{και} \quad n = \dim \mathcal{N}_{-i} . \quad (1.10)$$

Οι αριθμοί m και n καλούνται **δείκτες έλλειψης** του τελεστή A .

Από το Θεώρημα 1.11 έχουμε

$$m = \dim \mathcal{N}_\lambda, \quad n = \dim \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}, \quad \text{αν } \operatorname{Im} \lambda > 0. \quad (1.11)$$

Από το Πόρισμα 1.10 έπεται ότι :

Ένας κλειστός συμμετρικός τελεστής είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν οι δείκτες έλλειψης του είναι $m=0$ και $n=0$.

Θεώρημα 1.12 : Κάθε κλειστή συμμετρική επέκταση A' ενός δοσμένου κλειστού συμμετρικού τελεστή A καθορίζεται από έναν συγκεκριμένο συμμετρικό τελεστή U του οποίου το πεδίο ορισμού $\mathcal{P}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ και το πεδίο ορισμού $\mathcal{Q}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{N}_\lambda$: $\mathcal{P} \subset \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ και $\mathcal{Q} \subset \mathcal{N}_\lambda$.

Θεώρημα 1.13 : Μία επέκταση A' είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν το πεδίο ορισμού του τελεστή U συμπίπτει με τον υπόχωρο $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ και το πεδίο τιμών του με το $\mathcal{N}_\lambda$.

Ένας τελεστής A έχει μια αυτοσυζυγή επέκταση αν και μόνο αν οι χώροι έλλειψης του $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ και $\mathcal{N}_\lambda$ έχουν την ίδια διάσταση, λ.χ. αν οι δείκτες έλλειψης είναι μεταξύ τους ίσοι.

Πόρισμα 1.14 : Ένας κλειστός συμμετρικός τελεστής A είναι μεγιστικός αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας χώρος έλλειψης του είναι ίσος με $\{0\}$, λ.χ. οι δείκτες έλλειψης να είναι $(0, n)$ ή $(n, 0)$.

Ειδικότερα, μια επέκταση A' είναι **μεγιστική** εάν και μόνο εάν μία ή και οι δύο από τις σχέσεις $\mathcal{P} = \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ και $\mathcal{Q} = \mathcal{N}_\lambda$ ισχύουν.

Επίσης αν οι χώροι έλλειψης $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ και $\mathcal{N}_\lambda$ είναι πεπερασμένης διάστασης και ισοδιάστατοι τότε κάθε μεγιστική επέκταση είναι αυτοσυζυγής.

Θεώρημα 1.15 : Όλες οι αυτοσυζυγείς επεκτάσεις ενός κλειστού και συμμετρικού τελεστή, ο οποίος έχει ίσους και πεπερασμένους δείκτες έλλειψης, έχουν ένα και μοναδικό συνεχές φάσμα.

Θεώρημα 1.16 : Στην επέκταση ενός κλειστού και συμμετρικού τελεστή, ο οποίος έχει ίσους και πεπερασμένους δείκτες έλλειψης (m, m) , σε έναν αυτοσυζυγή τελεστή, η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του μπορεί να αυξηθεί m μονάδες το πολύ. Ειδικότερα, οι νέες ιδιοτιμές έχουν πολλαπλότητα το πολύ m .

Παράδειγμα 1.17 :

Θεωρούμε τους τελεστές T και T^* , όπου

$$T := i \frac{d}{dx} \quad \text{στον } D \quad \text{και} \quad T^* := i \frac{d}{dx} \quad \text{στον } D^* \quad (1.12)$$

και

$$D := \{f \in AC([a, b]) | f' \in L^2([a, b]), f(a) = 0 = f(b)\}, \quad (1.13)$$

$$D^* := \{g \in AC([a, b]) | g' \in L^2([a, b])\}, \quad (1.14)$$

οι οποίοι ορίζονται στον χώρο $\mathbb{H} = L^2([a, b])$ με $-\infty < a < b < +\infty$. Ο τελεστής T^* είναι ο συζυγής του T . Επειδή $T \not\subseteq T^*$, ο τελεστής T είναι συμμετρικός, αλλά όχι αυτοσυζυγής.

Ορίζουμε έναν νέο διαφορικό τελεστή με μια περιοδική συνοριακή συνθήκη:

$$T_p := i \frac{d}{dx} \quad \text{στον } D_p := \{\varphi \in AC([a, b]) | \varphi' \in L^2([a, b]), \varphi(a) = \varphi(b)\}. \quad (1.15)$$

Το πεδίο ορισμού D_p είναι ο περιορισμός του D^* επιβάλλοντας την περιοδική συνοριακή συνθήκη $\varphi(a) = \varphi(b)$. Σημειώνουμε ότι $T \subset T_p \subset T^*$ καθώς $D \subset D_p \subset D^*$.

Από τη σχέση $T \subset T_p$ συνεπάγεται $T_p^* \subset T^*$. Έτσι για κάθε $g \in D(T_p^*)$, η g πρέπει να είναι απόλυτα συνεχής και να ισχύει

$$T_p^* g = T^* g = i \frac{d}{dx} g \in L^2([a, b]).$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός και ολοκληρώνοντας κατά μέρη, για κάθε $g \in D(T_p^*)$ και $\forall f \in D(T_p)$,

$$\begin{aligned} \langle g, T_p f \rangle &= \int_a^b g(x) \overline{if'(x)} dx \\ &= (-i)(g(b)\overline{f(b)} - g(a)\overline{f(a)}) + \int_a^b (ig'(x)) \overline{f(x)} dx \\ &= (-i)(g(b) - g(a))\overline{f(a)} + \langle T_p^* g, f \rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Επειδή $\langle g, T_p f \rangle = \langle T_p^* g, f \rangle$, προκύπτει ότι

$$f(a)(g(b) - g(a)) = 0 \quad \forall f \in D(T_p). \quad (1.17)$$

Καθώς η $f(a)$ μπορεί να επιλεγθεί αυθαίρετα, η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $g(a) = g(b)$. Οπότε $g \in D(T_p)$ και $T_p^* \subset T_p$.

Αν υποθέσουμε ότι η g βρίσκεται στον $D(T_p)$ αντί του $D(T_p^*)$, ο υπολογισμός στην ισότητα (1.16) δείχνει ότι

$$\langle g, T_p f \rangle = \langle T_p g, f \rangle \quad \forall f, g \in D(T_p).$$

Ο τελεστής T_p είναι συμμετρικός, $T_p \subset T_p^*$. Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι $T_p = T_p^*$, ο τελεστής T_p είναι αυτοσυζυγής. Επομένως, $T \subset T_p = T_p^* \subset T^*$, ο νέος τελεστής T_p είναι μια αυτοσυζυγής επέκταση του μη φραγμένου συμμετρικού τελεστή T .

Φάσμα κλειστών τελεστών

Στη συναρτησιακή ανάλυση, η έννοια του φάσματος ενός τελεστή είναι μια γενίκευση της έννοιας των ιδιοτιμών για . Το φάσμα ενός τελεστή σε έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο είναι ακριβώς το σύνολο των ιδιοτιμών. Επομένως, ένας τελεστής σε έναν χώρο άπειρης διάστασης μπορεί να έχει πρόσθετα στοιχεία στο φάσμα του και να μην έχει καθόλου ιδιοτιμές.

Ας υποθέσουμε ότι ο A είναι ένας πυκνά ορισμένος κλειστός τελεστής στον $\mathbb{H}$. Το **φάσμα** του A , που συμβολίζεται ως $\sigma(A)$, έχει ορισθεί ως το σύνολο όλων των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο $(A - \lambda I)$ δεν έχει έναν αντίστροφο ορισμένο σε όλο τον $\mathbb{H}$. Ο τελεστής I συμβολίζει τον ταυτοτικό τελεστή.

Το επιλύον σύνολο του A περιέχει τα σημεία τα οποία δε βρίσκονται μέσα στο φάσμα του A και συμβολίζεται ως $\rho(A)$. Αν $\lambda \in \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, τότε η επιλύουσα συνάρτηση

$$R_A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} \quad (1.18)$$

είναι ένας καλά ορισμένος, φραγμένος τελεστής στον $\mathbb{H}$. Ένα σημείο $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ένα κανονικό σημείο του A αν $A - \lambda I$ είναι κάτω φραγμένος .

Το φάσμα του τελεστή A μπορεί να διαιρεθεί σε τρία μέρη, ανάλογα με το πως η επιλύουσα συνάρτηση στη σχέση (1.18) αποτυγχάνει να είναι καλά ορισμένη και φραγμένη.

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A). \quad (1.19)$$

Ας υποθέσουμε ότι $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ και $\sigma_r(A)$ συμβολίζουν το σημειακό, το συνεχές και το επιλύον φάσμα του A αντίστοιχα. Το **σημειακό φάσμα** $\sigma_p(A)$ ορίζεται ως το σύνολο όλων των **ιδιοτιμών** του A , δηλαδή, υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα φ στον $\mathbb{H}$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda I)\varphi = 0$. Ο τελεστής $A - \lambda I$ δεν είναι μονοσήμαντος, οπότε δεν έχει αντίστροφο.

Το συνεχές φάσμα $\sigma_c(A)$ ορίζεται ως το σύνολο όλων των λ τέτοιων ώστε το $R(A - \lambda I)$ δεν είναι κλειστό.

Το επιλύον φάσμα $\sigma_r(A)$ ορίζεται ως το σύνολο όλων των λ τέτοιων ώστε $\lambda \notin \sigma_p(A)$ και το $R(A - \lambda I)$ δεν είναι πυκνό. Για παράδειγμα, στην κβαντική φυσική, ο Χαμιλτονιανός τελεστής έχει σημειακό φάσμα του $\left\{ \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}_{n=0}^{+\infty}$, και η θέση ή ο τελεστής ορμής έχει σαν καθαρά συνεχές φάσμα το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές κατέχουν πάντα ένα καθαρά πραγματικό φάσμα. Αυτό περιλαμβάνει ιδιοτιμές. Οι συμμετρικοί τελεστές μπορεί να έχουν ή και να μην έχουν ιδιοτιμές. Αν έχουν, οι ιδιοτιμές τους πρέπει να είναι πραγματικές.

Οι μοναδιαίοι τελεστές έχουν πάντα ένα μη μηδενικό φάσμα το οποίο βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου. Οι ισομετρικοί τελεστές μπορεί να έχουν ή να μην έχουν ένα μη μηδενικό φάσμα. Αν έχουν, αυτό πρέπει να είναι πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

Ο μετασχηματισμός Cayley και οι δείκτες έλλειψης

Ο μετασχηματισμός Cayley είναι ένα σημαντικό εργαλείο για να επεκτείνουμε συμμετρικούς τελεστές. Οι δείκτες έλλειψης παίζουν κρίσιμο ρόλο για να χαρακτηρισθούν τα είδη των επεκτάσεων ενός συμμετρικού τελεστή. Σε αυτή την ενότητα, θα εισαγάγουμε τον μετασχηματισμό Cayley. Με βάση αυτόν τον μετασχηματισμό θα ορίσουμε τους δείκτες έλλειψης για συμμετρικούς τελεστές.

Ένας συμμετρικός τελεστής και η κλειστότητά του έχουν τις ίδιες κλειστές συμμετρικές επεκτάσεις. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε μόνο κλειστούς συμμετρικούς τελεστές. Το ίδιο ισχύει και για ισομετρικούς τελεστές.

Ο μετασχηματισμός Cayley, ορισμένος ως

$$T \mapsto U := (T - i)(T + i)^{-1}, \quad (1.20)$$

$$(T \pm i = T \pm i I, I \text{ ο ταυτοτικός τελεστής})$$

απεικονίζει τους μη φραγμένους συμμετρικούς τελεστές σε φραγμένους ισομετρικούς τελεστές. Ο μετασχηματισμός Cayley είναι ανάλογος του μετασχηματισμού Moebius για μιγαδικούς αριθμούς. Ο μετασχηματισμός Moebius, ορίζεται ως

$$z \mapsto w := \frac{z - i}{z + i}. \quad (1.21)$$

Ο μετασχηματισμός Moebius απεικονίζει τους πραγματικούς αριθμούς z στους μιγαδικούς αριθμούς w πάνω στον μοναδιαίο κύκλο (εκτός από το σημείο $w=1$), $|w|=1$.

Υπενθυμίζουμε ότι το φάσμα ενός συμμετρικού τελεστή βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα (αν αυτό υπάρχει), και ότι το φάσμα ενός ισομετρικού τελεστή βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου. Επομένως, αν ο μετασχηματισμός Cayley είναι μια επέκταση του μετασχηματισμού Moebius σε

γραμμικούς τελεστές, κάποιος θα περίμενε ο μετασχηματισμός Cayley στη σχέση (1.20) να απεικονίζει έναν συμμετρικό τελεστή T σε έναν ισομετρικό τελεστή U .

Ο μετασχηματισμός Cayley ενός συμμετρικού τελεστή T , που συμβολίζεται με U , έχει πεδίο ορισμού $D(U) = R(T + i)$ και εικόνα $R(U) = R(T - i)$. Ο μετασχηματισμός Cayley U απεικονίζει το $(T + i)\varphi$ στο $(T - i)\varphi$, δηλαδή,

$$U((T + i)\varphi) = (T - i)\varphi \quad \forall \varphi \in D(T). \quad (1.22)$$

Ο τελεστής U είναι ισομετρικός καθώς

$$\|T\varphi + i\varphi\|^2 = \|T\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 = \|T\varphi - i\varphi\|^2.$$

Ορισμός 1.18 : Έστω ότι ο T είναι ένας συμμετρικός τελεστής στον $\mathbb{H}$. Τότε ο τελεστής U που ορίζεται ως

$$T \mapsto U := (T - i)(T + i)^{-1}, \quad (1.23)$$

με πεδίο ορισμού $D(U) = R(T + i)$ ονομάζεται **μετασχηματισμός Cayley** του T .

Έστω ότι ο U είναι ένας ισομετρικός τελεστής στον $\mathbb{H}$ με $I - U$ αμφιμονοσήμαντο. Τότε ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Cayley** του U ορίζεται ως

$$U \mapsto T := i(I + U)(I - U)^{-1} \quad (1.24)$$

με πεδίο ορισμού $D(T) = R(I - U)$.

Ο μετασχηματισμός Cayley ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ συμμετρικών και ισομετρικών τελεστών. Το επόμενο θεώρημα δίνει τα κύρια χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού Cayley.

Θεώρημα 1.19: Έστω ότι ο U είναι ο μετασχηματισμός Cayley ενός συμμετρικού τελεστή T στον $\mathbb{H}$. Τότε

- ο U είναι ισομετρικός
- ο U είναι κλειστός αν και μόνο αν ο T είναι κλειστός
- ο U είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν ο T είναι αυτοσυζυγής

Αντίστροφα, αν ο U είναι ένας ισομετρικός τελεστής στον $\mathbb{H}$ και ο $I - U$ αμφιμονοσήμαντος, τότε ο U είναι ο μετασχηματισμός Cayley κάποιου συμμετρικού τελεστή T στον $\mathbb{H}$ και ο T δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Cayley του U στη σχέση (1.24).

Υπενθυμίζουμε ότι τα ορθογώνια συμπληρώματα του πεδίου ορισμού και η εικόνα ενός ισομετρικού τελεστή U παίζουν κρίσιμο ρόλο στον καθορισμό ισομετρικών επεκτάσεων του U . Αν ο U είναι ο μετασχηματισμός Cayley ενός συμμετρικού τελεστή T , τότε $D(U) = R(T + i)$ και $R(U) = R(T - i)$. Αυτό υποδεικνύει τον ορισμό των δεικτών έλλειψης ενός συμμετρικού τελεστή σαν τις διαστάσεις των

$$\mathbb{H} \ominus D(U) = \mathbb{H} \ominus R(T + i) \quad \text{και} \quad \mathbb{H} \ominus R(U) = \mathbb{H} \ominus R(T - i) .$$

Τέτοιου είδους ορισμός των δεικτών έλλειψης συμμετρικών τελεστών συμφωνεί με τον αντίστοιχο ορισμό για τους ισομετρικούς τελεστές μέσω του μετασχηματισμού Cayley. Υπενθυμίζουμε τον ακόλουθο ορισμό και την επόμενη πρόταση:

Ορισμός 1.20 : Έστω ότι ο T είναι ένας γραμμικός τελεστής μέσα στον $\mathbb{H}$. Ο πυρήνας του T , που συμβολίζεται με $K(T)$, είναι το σύνολο των διανυσμάτων που απεικονίζονται στο 0 υπό τον T , δηλαδή,

$$K(T) = \{\varphi \in \mathbb{H} | T\varphi = 0\}.$$

Πρόταση 1.21 : Έστω ότι ο A είναι ένας πυκνά ορισμένος τελεστής. Ο πυρήνας του συζυγούς του A ισούται με το ορθογώνιο συμπλήρωμα της εικόνας του A , δηλαδή,

$$K(A^*) = \mathbb{H} \ominus \overline{R(A)}.$$

Για την απόδειξη βλ. [2]. Αυτό οδηγεί στον ορισμό των χώρων έλλειψης και των δεικτών των συμμετρικών τελεστών.

Ορισμός 1.22 : Έστω ότι ο T είναι ένας συμμετρικός τελεστής. Ορίζουμε

$$K_+ = \mathbb{H} \ominus R(T + i) = K(T^* - i), \quad n_+ = \dim(K_+), \quad (1.25a)$$

$$K_- = \mathbb{H} \ominus R(T - i) = K(T^* + i), \quad n_- = \dim(K_-). \quad (1.25b)$$

Οι υπόχωροι (K_+, K_-) ονομάζονται **χώροι έλλειψης** του T και οι διαστάσεις τους (n_+, n_-) ονομάζονται **δείκτες έλλειψης** του T (βλ. σχέσεις (1.9), (1.10)).

Κατασκευή συμμετρικών επεκτάσεων ενός συμμετρικού τελεστή

Δοθέντος ενός μη φραγμένου συμμετρικού τελεστή T , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Cayley για να βρούμε μια συμμετρική επέκταση του T . Υποθέτουμε ότι $\tilde{T}$ είναι μια συμμετρική επέκταση του T και ότι U και $\tilde{U}$ αντίστοιχα είναι ο Cayley μετασχηματισμός. Τότε οι U και $\tilde{U}$ είναι ισομετρικοί. Ο τελεστής $\tilde{U}$ είναι μια επέκταση του U .

Επομένως, για να βρούμε μια συμμετρική επέκταση $\tilde{T}$ του T , πρώτα πρέπει να βρούμε μια ισομετρική επέκταση $\tilde{U}$ του U . Ο τελεστής U είναι ο Cayley μετασχηματισμός του T , που είναι φραγμένος. Η επέκτασή του, $\tilde{U}$, επιτυγχάνεται προσθέτοντας στον U τις ισομετρικές απεικονίσεις μεταξύ των χώρων έλλειψης K_+ και K_- . Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Cayley δίνει τη συμμετρική επέκταση $\tilde{T}$. Με αυτό τον τρόπο, το πρόβλημα επέκτασης μη φραγμένων τελεστών μετατρέπεται σε πρόβλημα των φραγμένων τελεστών.

Αν οι δύο χώροι έλλειψης έχουν την ίδια διάσταση, δηλαδή, $n_+ = n_-$, τότε μπορούμε να εξαντλήσουμε τους (K_+, K_-) παρόμοια έτσι ώστε να επιτευχθεί μια

μοναδιαία επέκταση $\tilde{U}$ του U . Ο αντίστροφος Cayley μετασχηματισμός, $\tilde{T}$, είναι όντως μια αυτοσυζυγής επέκταση του T .

Φυσικά, αν $n_+ = 0 = n_-$, τότε $K_+ = \emptyset = K_-$, που σημαίνει ότι το πεδίο ορισμού και η εικόνα του U είναι όλος ο χώρος Hilbert. Ο μετασχηματισμός Cayley U είναι μοναδιαίος και επομένως ο συμμετρικός τελεστής T είναι αυτοσυζυγής.

Ωστόσο, όταν ένας από τους K_+ και K_- έχει μικρότερη διάσταση, τότε ο μικρότερος χώρος έλλειψης θα εξαντληθεί πρώτος. Αυτό δίνει μία μέγιστη ισομετρική επέκταση $\tilde{U}$ του U . Οπότε, δεν υπάρχει μοναδιαία επέκταση του U , και κατά συνέπεια, ούτε και αυτοσυζυγής επέκταση του T .

Οι δείκτες έλλειψης, (n_+, n_-) είναι σημαντικοί για να χαρακτηρίζουν τις συμμετρικές επεκτάσεις ενός δοσμένου συμμετρικού τελεστή T . Συμπεραίνουμε ότι

- ο T έχει μη τετριμμένες αυτοσυζυγείς επεκτάσεις αν και μόνο αν $n_+ = n_- \neq 0$
- ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $n_+ = 0 = n_-$
- ο T είναι μεγιστικός αν και μόνο αν $n_+ = 0 \neq n_-$ ή $n_+ \neq 0 = n_-$

Τα ακόλουθα είναι τρία παραδείγματα που αποδεικνύουν και τις τρεις περιπτώσεις.

Παράδειγμα 1.23 :

Θεωρούμε τους τελεστές T και T^* (βλ. Παράδειγμα 1.17) με πεδία ορισμού D και D^* αντίστοιχα στον $\mathbb{H} = L^2([a, b])$, όπου $[a, b]$ είναι ένα πεπερασμένο διάστημα, $-\infty < a < b < +\infty$.

Το πεδίο ορισμού D^* είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος στον οποίο $i \frac{d}{dx}$ μπορεί να ορισθεί, και ο D είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $D(T^*)$ στον οποίο η μηδενική συνοριακή συνθήκη $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$. Υπενθυμίζουμε έναν βασικό υπολογισμό:

$$\begin{aligned} \langle g, i \frac{d}{dx} f \rangle &= \int_a^b g(x) i f'(x) dx \\ &= -i(g(b)\overline{f(b)} - g(a)\overline{f(a)}) + \int_a^b (i g'(x)) \overline{f(x)} dx \quad (1.26) \\ &= -i(g(b)\overline{f(b)} - g(a)\overline{f(a)}) + \langle i \frac{d}{dx} g, f \rangle \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι το f είναι ένα αυθαίρετο διάνυσμα στο $D(T)$ με συνοριακή συνθήκη $f(a) = 0 = f(b)$, τότε έχουμε

$$(g(b)\overline{f(b)} - g(a)\overline{f(a)}) = 0. \quad (1.27)$$

Τότε από τη σχέση (1.26) συνεπάγεται ότι για κάθε $f \in D$

$$\langle g, i \frac{d}{dx} f \rangle = \langle i \frac{d}{dx} g, f \rangle.$$

Έστω ότι η g είναι μια συνάρτηση στο D , τότε το παραπάνω δείχνει ότι ο T είναι συμμετρικός. Έστω ότι η g είναι μια συνάρτηση στο D^* , το παραπάνω δείχνει ότι ο T^* είναι ο συζυγής του T . Καθώς $D \subsetneq D^*$, ο T δεν είναι αυτοσυζυγής.

Ο τελεστής T έχει μη τετριμμένες αυτοσυζυγείς επεκτάσεις. Στο παράδειγμα 1.17 δείξαμε ότι ο τελεστής T_p με πεδίο ορισμού D_p όπως ορίσθηκε στη σχέση (1.15) είναι μία μη τετριμμένη αυτοσυζυγής επέκταση του T . Οι συναρτήσεις στο D_p την περιοδική συνοριακή συνθήκη $f(a) = f(b)$. Για τις συναρτήσεις f και g στο D_p , η σχέση (1.27) εφαρμόζεται.

Τώρα ας ελέγξουμε τους χώρους και δείκτες έλλειψης χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.25) στην οποία $K_{\pm} = K(T^* \mp i)$. Παρατηρούμε ότι είναι ο αυτοσυζυγής τελεστής T^* που χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε τα διανύσματα έλλειψης του T . Οι συναρτήσεις έλλειψης δεν ικανοποιούν τις μηδενικές συνοριακές συνθήκες όπως οι συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού του T .

Για κάθε $f \in K_+ = K(T^* - i)$,

$$(T^* - i)f(x) = \left(i \frac{d}{dx} - i\right)f(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x), \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow f(x) = C_1 e^x, \text{ όπου } C_1 \text{ είναι σταθερο.}$$

Ομοίως, για κάθε $g \in K_- = K(T^* + i)$,

$$\frac{d}{dx}g(x) = -g(x) \Rightarrow g(x) = C_2 e^{-x}, \quad (1.29)$$

όπου C_2 είναι σταθερο.

Επομένως,

$$K_+ = \text{span}\{e^x\} \text{ και } K_- = \text{span}\{e^{-x}\}.$$

Ο τελεστής T έχει δείκτες έλλειψης $(1,1)$. Αυτό συμφωνεί με το γεγονός ότι ο T είναι συμμετρικός και έχει μη τετριμμένες αυτοσυζυγείς επεκτάσεις. Ο τελεστής T_p είναι μία από τις αυτοσυζυγείς του επεκτάσεις.

Σημειώνουμε ότι ο παραπάνω υπολογισμός ισχύει επίσης για $a = -\infty$ ή $b = +\infty$ ή και για τα δύο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, $f(-\infty)$ και $f(+\infty)$ σημαίνει ότι

$$f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{και} \quad f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Παράδειγμα 1.24 :

Θεωρούμε L^2 συναρτήσεις σε όλη τη γραμμή των πραγματικών $\mathbb{R}$ με $a = -\infty$ και $b = +\infty$. Στον χώρο Hilbert $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{R}) = L^2((-\infty, +\infty))$, ορίζουμε

$$T_{\pm\infty} := i \frac{d}{dx} \quad \text{στο } \{f \in AC(\mathbb{R}) | f' \in L^2(\mathbb{R})\}. \quad (1.30)$$

Επειδή οι f και f' είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στο $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x). \quad (1.31)$$

Αντικαθιστώντας $a = -\infty$ και $b = +\infty$, η μηδενική συνοριακή συνθήκη $f(a) = 0 = f(b)$ εφαρμόζεται αυτόματα. Αν ο τελεστής T είναι αυτός του Παραδείγματος 1.23 με $[a, b] = (-\infty, +\infty)$, τότε $T = T_{\pm\infty} = T^* = T_{\pm\infty}^*$. Ο τελεστής $T_{\pm\infty}$ είναι αυτοσυζυγής. Σημειώνουμε ότι η σχέση (1.27) ισχύει για κάθε f και g στο $D(T_{\pm\infty})$.

Ας ελέγξουμε τους χώρους και τους δείκτες έλλειψής του. Ακολουθώντας τον ίδιο υπολογισμό όπως στις εξισώσεις (1.28) και (1.29), για κάθε $f \in K_+$, $g \in K_-$,

$$f(x) = C_1 e^x,$$

$$g(x) = C_2 e^{-x}, \quad \text{όπου } C_1, C_2 \text{ είναι σταθερά,}$$

αλλά

$$\int_{+\infty}^{-\infty} |e^{\pm x}|^2 dx = +\infty.$$

Επομένως $C_1 e^x$ και $C_2 e^{-x}$ δεν είναι στον $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{R})$ εκτός και αν τα C_1 και C_2 είναι και τα δύο μηδέν. Επομένως

$$K_+ = \text{span}\{0\} \quad \text{και} \quad K_- = \text{span}\{0\}.$$

Ο συμμετρικός τελεστής $T_{\pm\infty}$ έχει δείκτες έλλειψης $(0,0)$, που συμφωνεί με το γεγονός ότι ο $T_{\pm\infty}$ είναι αυτοσυζυγής στον $L^2(\mathbb{R})$.

Παράδειγμα 1.25 :

Θεωρούμε L^2 -συναρτήσεις στα υποδιαστήματα $(-\infty, b]$ και $[a, +\infty)$.

Πρώτα, θεωρούμε το διάστημα $[a, b] = (-\infty, b]$ όπου b . Στον χώρο Hilbert $\mathbb{H} = L^2((-\infty, b])$, ορίζουμε έναν τελεστή

$$T_{-\infty} := i \frac{d}{dx} \quad \text{στον } \{f \in AC((-\infty, b]) | f' \in L^2((-\infty, b]), \varphi(b) = 0\}.$$

Με $a = -\infty$, το διάστημα είναι μη φραγμένο κάτω. Για $f \in L^2((-\infty, b])$, επειδή οι f και f' είναι και οι δύο τετραγωνικά ολοκληρώσιμες,

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Η συνοριακή συνθήκη $f(a) = 0$ εφαρμόζεται αυτόματα. Με $a = -\infty$, ο τελεστής $T_{-\infty}$ είναι ο τελεστής T στο Παράδειγμα 1.23. Η σχέση (1.27) ισχύει $\forall f, g \in D(T_{-\infty})$, οπότε ο $T_{-\infty}$ είναι συμμετρικός. Ο συζυγής του $T_{-\infty}^* = T^*$ δρα πάνω στο πεδίο ορισμού όπου εξαιρείται η συνοριακή συνθήκη $\varphi(b) = 0$. Επομένως ο $T_{-\infty}$ δεν είναι αυτοσυζυγής. Επίσης, ο τελεστής $T_{-\infty}$ δεν έχει αυτοσυζυγείς επεκτάσεις. Επειδή στην εξίσωση (1.26), $g(a)\overline{f(a)} = 0$, η εξίσωση (1.27) ισχύει αν και μόνο αν $g(b)\overline{f(b)} = 0$, όπου συνεπάγεται ότι τουλάχιστον ένα από τα $g(b)$ και $f(b)$ ισούται με 0, δηλαδή μία τουλάχιστον από τις f και g είναι στο $D(T_{-\infty})$. Επομένως, δεν υπάρχει πεδίο ορισμού $\tilde{D}$ τέτοιο ώστε

$$D(T_{-\infty}) \subsetneq \tilde{D} \subsetneq D(T_{-\infty}^*) \text{ και } \langle g, T_{-\infty}^* f \rangle = \langle T_{-\infty} f, g \rangle \quad \forall f, g \in \tilde{D}.$$

Επομένως, ο συμμετρικός τελεστής $T_{-\infty}$ είναι μέγιστος.

Ας ελέγξουμε τους χώρους και τους δείκτες έλλειψής του $T_{-\infty}$. Ομοίως με το Παράδειγμα 1.24, από τις σχέσεις (1.28) και (1.29) και το γεγονός ότι το $(-\infty, b]$ είναι άνω φραγμένο,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b |e^x|^2 dx &< +\infty, & \int_{-\infty}^b |e^{-x}|^2 dx &= +\infty \\ \Rightarrow e^x &\in L^2((-\infty, b]), & \text{αλλά } e^{-x} &\notin L^2((-\infty, b]) \\ \Rightarrow K_+ &= \text{span}\{e^x\} & \text{και } K_- &= \{0\}. \end{aligned}$$

Αρα, ο συμμετρικός τελεστής $T_{-\infty}$ έχει δείκτες έλλειψης $(1, 0)$, που συμφωνεί με το γεγονός ότι ο $T_{\pm\infty}$ είναι μέγιστος στον $L^2((-\infty, b])$.

Ομοίως, θεωρούμε το διάστημα $[a, b] = [a, +\infty)$ όπου a είναι φραγμένο. Στον χώρο Hilbert $\mathbb{H} = L^2([a, +\infty))$, ορίζουμε

$$T_{+\infty} := i \frac{d}{dx} \text{ στον } \{\varphi \in AC([a, +\infty)) \mid \varphi' \in L^2([a, +\infty)), \varphi(a) = 0\}.$$

Ένας παρόμοιος υπολογισμός δείχνει ότι ο τελεστής $T_{+\infty}$ έχει χώρους έλλειψης

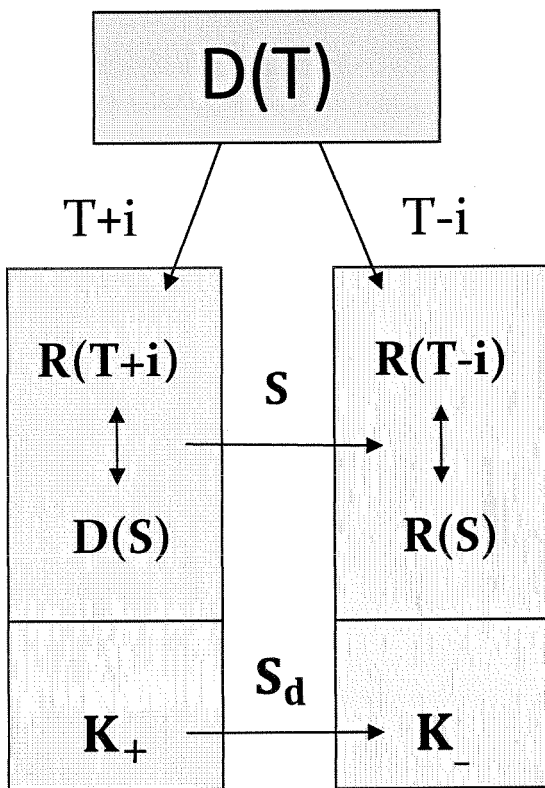
$$K_+ = \{0\} \text{ και } K_- = \text{span}\{e^x\}.$$

Αρα, ο $T_{+\infty}$ έχει δείκτες έλλειψης $(0, 1)$. Μπορεί ναδειχθεί ότι ο $T_{+\infty}$ είναι επίσης ένας μέγιστος συμμετρικός τελεστής.

Αυτοσυζυγείς επεκτάσεις συμμετρικών τελεστών

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε πως ο μετασχηματισμός Cayley μας βοηθάει να επεκτείνουμε έναν συμμετρικό τελεστή. Εν συντομία, ο μετασχηματισμός Cayley μετατρέπει το πρόβλημα αυτοσυζυγών επεκτάσεων συμμετρικών τελεστών σε πρόβλημα ενιαίων επεκτάσεων ισομετρικών τελεστών.

Ας υποθέσουμε ότι ο T είναι ένας κλειστός πυκνά ορισμένος μη φραγμένος τελεστής και S είναι ο Cayley μετασχηματισμός του. Το παρακάτω σχήμα 1.1 επεξηγεί πως μπορούμε να επεκτείνουμε τον συμμετρικό τελεστή T επεκτείνοντας τον Cayley μετασχηματισμό του, που είναι μια ισομετρία.



Σχήμα 1.1 : Χρησιμοποιώντας τον Cayley μετασχηματισμό για την επέκταση ενός συμμετρικού τελεστή T .

Μια επέκταση του φραγμένου ισομετρικού τελεστή S μπορεί να επιτευχθεί παραθέτοντας μια ισομετρία μεταξύ K_+ και K_- στο S . Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι ο S_d συμβολίζει έναν ισομετρικό τελεστή που απεικονίζεται από $D(S_d) \subseteq K_+$ στο $R(S_d) \subseteq K_-$, τότε το ευθύ άθροισμα $S \oplus S_d$ είναι μια επέκταση του S : έχει μεγαλύτερο πεδίο ορισμού $D(S) \cup D(S_d)$ και έχει την ίδια δράση όπως ο S στο μικρότερο πεδίο ορισμού $D(S)$. Καθώς ο $S \oplus S_d$ είναι ισομετρικός, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Cayley του $S \oplus S_d$ είναι συμμετρικός και είναι μια επέκταση του T .

Η επέκταση του $S \oplus S_d$ είναι μοναδιαία αν και μόνο αν $D(S_d) = K_+$ και $R(S_d) = K_-$. Για να εξαντλήσει πλήρως ο S_d τους K_+ και K_- ταυτόχρονα, οι K_+ και K_- πρέπει να έχουν την ίδια διάσταση, δηλαδή, ο T να έχει ίσους δείκτες έλλειψης, $n_+ = D = n_-$, όπου D μπορεί να είναι ∞ , οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος ή άπειρο.

Για περισσότερες πληροφορίες επί του κεφαλαίου βλ. [25].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Η λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών για γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις μπορεί να μετατραπεί σε λύση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων που περιέχουν μια παράμετρο και υπόκεινται σε ορισμένες συνοριακές συνθήκες.

Ένα απλό παράδειγμα για αυτή την κατάσταση είναι το πρόβλημα να βρεθεί η λύση της

$$\begin{aligned} Lx = -x'' = lx & \quad \left(' = \frac{d}{dt} \right) \\ x(0) = x(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

στο διάστημα $0 \leq t \leq 1$. Εδώ το l είναι μια μιγαδική παράμετρος και το x είναι ένα βαθμωτό. Οι λύσεις της $-x'' = lx$ που ικανοποιούν την $x(0) = 0$ είναι $c \sin l^{\frac{1}{2}} t$, όπου c είναι μία σταθερά. Έτσι η (2.1) μπορεί να έχει μία μη τετριμμένη λύση, δηλαδή μία που δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, αν και μόνο αν $\sin l^{\frac{1}{2}} = 0$ και μόνο αν $l = \pi^2 k^2$, όπου $k = 1, 2, \dots$. Αυτές οι τιμές του l είναι **ιδιοτιμές**. Αντίστοιχες λύσεις είναι οι

$$x_k(t) = \sqrt{2} \sin k\pi t \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

και είναι **ιδιοσυναρτήσεις**. Εύκολα φαίνεται ότι

$$\int_0^1 x_j x_k dt = \delta_{jk} \quad (2.3)$$

όπου δ_{jk} είναι μηδέν αν $j \neq k$ και μόνο αν $j = k$. Είναι ένα σημαντικό γεγονός, ότι μια ευρεία τάξη συναρτήσεων μπορεί να αντιπροσωπεύεται από μια σειρά των x_k . Πράγματι, αυτή είναι η σειρά Fourier ημιτόνου.

Ένα ακόμα πιο απλό παράδειγμα δίνεται από

$$\begin{aligned} Lx = ix' = lx \\ x(0) - x(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Εδώ φαίνεται εύκολα ότι οι ιδιοτιμές είναι $l = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, και ότι $x_k(t) = e^{-2\pi i k t}$. Το ανάλογο της (2.3) τώρα είναι

$$\int_0^1 x_j \bar{x}_k dt = \delta_{jk} \quad (2.5)$$

όπου $\bar{x}_k$ είναι ο συζυγής μιγαδικός του x . Φαίνεται από την (2.3) ότι οι συναρτήσεις (2.2) ικανοποιούν επίσης την (2.5). Μία ακολουθία συναρτήσεων $\{x_k\}$ που ικανοποιεί την (2.5) είναι **ορθοκανονική** στο $[0,1]$.

Τα κύρια αποτελέσματα σχετικά με τα προβλήματα (2.1) και (2.4) ισχύουν για όλες τις συναρτήσεις στο $\mathcal{L}^2(0,1)$, δηλαδή το σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων f στο $0 \leq t \leq 1$ οι οποίες είναι Lebesgue μετρήσιμες εκεί και για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^1 |f|^2 dt < \infty ,$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα Lebesgue. Δεδομένου ότι αυτή η τάξη των συναρτήσεων περιλαμβάνει όλες τις συνεχείς, ή ακόμα και τις τμηματικά συνεχείς, συναρτήσεις στο $0 \leq t \leq 1$, τα αποτελέσματα ισχύουν φυσικά για αυτές. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις που εξετάζουμε είναι συνεχείς ή τμηματικά συνεχείς.

Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(0,1)$, έστω

$$(f, g) = \int_0^1 f \bar{g} dt \quad \|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$$

Τότε, αν $f \in \mathcal{L}^2(0,1)$, δηλαδή

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^m (f, x_k) x_k \right\| = 0 \quad (2.6)$$

τότε τα x_k που είναι λύσεις της (2.4) ικανοποιούν την (2.6) αν το άθροισμα στη (2.6) είναι από $-m$ έως m . Οι αριθμοί (f, x_k) είναι οι **συντελεστές Fourier** της f ως προς την ακολουθία $\{x_k\}$. Λέμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, x_k) x_k$$

συγκλίνει στην f ως προς τη νόρμα του $\mathcal{L}^2(0,1)$ αν η (2.6) ισχύει. Το αποτέλεσμα (2.6) εύκολα φαίνεται να είναι ισοδύναμο με το

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, x_k)|^2 \quad (2.7)$$

με το 1 να αντικαθίσταται με $-\infty$ στην περίπτωση της (2.4). Η ισότητα (2.7) είναι γνωστή ως η **ισότητα Parseval**.

Εξετάζουμε τώρα ένα γενικότερο πρόβλημα από αυτό στη (2.4), δηλαδή,

$$\begin{aligned} Lx &= ix' = lx \\ x(1) &= ax(0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

όπου a είναι μία σταθερά. Έστω ότι $\{\lambda_j\}$ είναι οι ιδιοτιμές και $\{x_j\}$ οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις, οι οποίες υπάρχουν αλλά δε χρειάζεται για τους παρόντες σκοπούς να υπολογιστούν ακριβώς. Προφανώς

$$(Lx_j, x_k) = \lambda_j(x_j, x_k)$$

και

$$(x_j, Lx_k) = \bar{\lambda}_k(x_j, x_k)$$

Επίσης από τη (2.8)

$$\begin{aligned} (Lx_j, x_k) - (x_j, Lx_k) &= i \int_0^1 (x'_j \bar{x}_k + x_j \bar{x}'_k) dt = i x_j \bar{x}_k \Big|_0^1 \\ &= i(a\bar{a} - 1)x_j(0)\bar{x}_k(0) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Έτσι

$$(\lambda_j - \bar{\lambda}_k)(x_j, x_k) = i(a\bar{a} - 1)x_j(0)\bar{x}_k(0)$$

και αν $a\bar{a} = 1$, έπεται, αν $j = k$ ότι λ_k είναι πραγματικές και αν $j \neq k$ ότι $(x_j, x_k) = 0$.

Έτσι, αν $a\bar{a} = 1$, οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ένα ορθοκανονικό σύνολο. Ωστόσο, αν $a\bar{a} \neq 1$, εύκολα φαίνεται ότι οι ιδιοτιμές δε χρειάζεται να είναι πραγματικές και ότι $(x_j, x_k) \neq 0$.

Εάν το δεξιό μέλος της (2.9) μηδενιστεί, τότε οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ορθοκανονικές. Έτσι, αν το πρόβλημα (2.8) είναι τέτοιο ώστε οποιεσδήποτε δύο συναρτήσεις u και v της τάξης C^1 στο $[0,1]$ οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες ικανοποιούν επίσης και την

$$(Lu, v) - (u, Lv) = 0 \quad (2.10)$$

τότε οι ιδιοσυναρτήσεις της (2.8) σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύνολο και οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές. Η συνθήκη (2.10) είναι κεντρικής σημασίας και είναι γνωστή ως *συνθήκη αυτοσυζυγίας*.

Εύκολα επαληθεύεται ότι αν u και v είναι της τάξης C^2 στο $[0,1]$ και ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες της (2.1), τότε $(Lu, v) = (u, Lv)$ δηλαδή το (2.1) είναι αυτοσυζυγές πρόβλημα. Επίσης, εύκολα επαληθεύεται ότι με τις συνοριακές συνθήκες $x(0) = x(1)$, $x'(0) = 2x'(1)$ το πρόβλημα $-x'' = lx$ δεν είναι αυτοσυζυγές πρόβλημα.

2.2 Προβλήματα ιδιοτιμών

Ας υποθέσουμε ότι ο L είναι ένας n -τάξης τελεστής που δίνεται από

$$Lx = p_0 x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \dots + p_n x$$

όπου τα p_j είναι μιγαδικές συναρτήσεις της τάξης C^{n-i} στο κλειστό $a \leq t \leq b$ και $p_0(t) \neq 0$ στο $[a, b]$. Έστω

$$U_j x = \sum_{k=1}^n (M_{jk} x^{(k-1)}(a) + N_{jk} x^{(k-1)}(b)) \quad (j = 1, \dots, n)$$

όπου τα M_{jk} και N_{jk} είναι σταθερές. Δηλώνουμε τις σχέσεις $U_j x = 0$, $j = 1, \dots, n$, με $Ux = 0$. Το πρόβλημα

$$\pi: \quad Lx = \lambda x \quad Ux = 0$$

είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Αυτό λέγεται ότι είναι αυτοσυζυγές αν

$$(Lu, v) = (u, Lv) \quad (2.11)$$

για όλες τις $u, v \in C^n$ στο $[a, b]$, που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες

$$Uu = Uv = 0$$

Εδώ, αν $f, g \in L^2(a, b)$,

$$(f, g) = \int_a^b f \bar{g} dt \quad \|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$$

Ο αριθμός (f, g) είναι το **εσωτερικό γινόμενο** των f και g , και $\|f\|$ είναι η **νόρμα** της f στο $L^2(a, b)$. Αν $(f, g) = 0$, τότε οι f και g είναι **ορθογώνιες**.

Η τάξη των αυτοσυζυγών προβλημάτων δεν είναι μηδέν.

Στον L αντιστοιχεί ένας συζυγής L^+ , όπου

$$L^+ x = (-1)^n (\bar{p}_0 x)^{(n)} + (-1)^{n-1} (\bar{p}_1 x)^{(n-1)} + \dots + \bar{p}_n x$$

τέτοιος ώστε για κάθε $u, v \in C^n$ στο $[a, b]$

$$(Lu, v) - (u, L^+ v) = [uv](b) - [uv](a)$$

Σαφώς αν $L^+ = L$ και U είναι τέτοιος ώστε $U_u = U_v = 0$ τότε συνεπάγεται

$$[uv](b) - [uv](a) = 0$$

κα το πρόβλημα π θα είναι αυτοσυζυγές.

Το πρόβλημα π έχει πάντα την τετριμμένη λύση της ταυτοτικά μηδενικής συνάρτησης. Αν l είναι τέτοιο ώστε το π να έχει μία μη τετριμμένη λύση, τότε l είναι μία ιδιοτιμή του π και οι μη τετριμμένες λύσεις του π για αυτή την l είναι ιδιοσυναρτήσεις. Οι ιδιοτιμές πάντα υπάρχουν για ένα αυτοσυζυγές πρόβλημα.

Θεώρημα 2.1 : Έστω ότι το πρόβλημα π είναι αυτοσυζυγές. Τότε οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και αποτελούν ένα το πολύ απείρως αριθμήσιμο σύνολο χωρίς πεπερασμένο σημείο συσσώρευσης. Ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες.

Απόδειξη : Έστω ότι $l = \lambda$ είναι μια ιδιοτιμή με x μία ιδιοσυνάρτηση του π . Τότε επειδή $Lx = \lambda x$, η σχέση (2.11) δίνει $(\lambda - \bar{\lambda})(x, x) = 0$. Επειδή $(x, x) > 0$, προκύπτει ότι $\lambda = \bar{\lambda}$ και ότι μια ιδιοτιμή πρέπει να είναι πραγματική. Αν λ_1 και λ_2 είναι διακεκριμένες ιδιοτιμές με ιδιοσυναρτήσεις x_1 και x_2 , αντίστοιχα, τότε

$$(Lx_1, x_2) - (x_1, Lx_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2)$$

και από την (2.11) αυτό σημαίνει ότι $(x_1, x_2) = 0$.

Έστω ότι οι $\varphi_j = \varphi_j(t, l)$, $j = 1, \dots, n$ είναι λύσεις του $Lx = lx$ που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες

$$\varphi_j^{(k-1)}(c, l) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, n) \quad (2.12)$$

για κάποια c στο διάστημα $[a, b]$. Οι συναρτήσεις $\varphi_j^{(k-1)}$ είναι συνεχείς στο (t, l) για $t \in [a, b]$ και όλα τα l , και για σταθερά t είναι αναλυτικές συναρτήσεις του l . Άρα, αφού οι φ_j είναι γραμμικά ανεξάρτητες, το πρόβλημα π έχει το l σαν ιδιοτιμή αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές c_j , όχι όλες μηδενικές, έτσι ώστε το

$$x = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$$

να ικανοποιεί την $Ux = 0$. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν το σύστημα

$$\sum_{j=1}^n c_j U_k \varphi_j = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

έχει μια μη τετριμμένη λύση. Αλλά αυτό το σύστημα των n εξισώσεων ως προς τα c_j έχει μια μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν η ορίζουσα Δ του πίνακα με τα $U_k \varphi_j$ στην k -γραμμή και την j -στήλη να είναι μηδέν. Επειδή οι $\varphi_j^{(k-1)}$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις του l για σταθερά t , ειδικά για $t = a$ και $t = b$, προκύπτει ότι Δ είναι μια αναλυτική συνάρτηση του l . Αυτή η συνάρτηση μπορεί να έχει μόνο πραγματικές

ρίζες επειδή το π δεν έχει μη πραγματικές ιδιοτιμές. Έτσι η Δ είναι μια αναλυτική συνάρτηση του l η οποία δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Οι ρίζες της, που είναι οι ιδιοτιμές του π , μπορούν επομένως να συσσωρευτούν μόνο στο $l = \infty$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

2.3 Θεωρήματα επέκτασης και πληρότητας

Η ύπαρξη των ιδιοσυναρτήσεων του π μιας συνάρτησης $f \in C^n$ στο $[a, b]$ που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $Ux = 0$ θα αποδειχθεί τώρα. Από αυτό θα προκύψουν εύκολα η ισότητα Parseval και η επέκταση αυτών των αποτελεσμάτων σε κάθε συνάρτηση $f \in L^2(a, b)$. Πρώτα, θα πρέπει να συναχθεί μια σημαντική ανισότητα.

Λήμμα 2.2 : Αν $f \in L^2(a, b)$ και $\{x_k\}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία για το π , τότε η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(f, x_k)|^2$$

είναι συγκλίνουσα, και

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(f, x_k)|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{ανισότητα Bessel}$$

Απόδειξη : Για κάθε πεπερασμένο $m \geq 0$

$$0 \leq \left\| f - \sum_{k=0}^m (f, x_k) x_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m |(f, x_k)|^2$$

που αποδεικνύει τη σύγκλιση της σειράς υπό εξέταση, και της ανισότητας Bessel.

Ο αριθμός (f, x_k) είναι ο k -οστός συντελεστής Fourier του f ως προς το ορθοκανονικό σύνολο $\{x_k\}$.

Θεώρημα 2.3 : Έστω $f \in C^n$ στο $[a, b]$ και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $Uf = 0$. Τότε στο $[a, b]$

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, x_k) x_k \quad (2.13)$$

όπου η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Πολλαπλασιάζοντας την (2.13) με το $\bar{f}$ και ολοκληρώνοντας, προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

Πόρισμα 2.4 : Έστω ότι για την f ισχύει ότι και στο Θεώρημα 2.4, τότε

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(f, x_k)|^2 \quad \text{ισότητα Parseval}$$

Αυτό επίσης είναι **σχέση πληρότητας**.

Θεώρημα 2.5 : Αν $f \in L^2(a, b)$, τότε

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, x_k) x_k$$

όπου η ισότητα είναι υπό την έννοια

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^m (f, x_k) x_k \right\| = 0 \quad (2.14)$$

Περαιτέρω, ισχύει η ισότητα Parseval:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(f, x_k)|^2$$

Για περισσότερες πληροφορίες βλ. [6].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ G.K.N ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

3.1 Το GKN Θεώρημα

Αυτό το θεώρημα είναι ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα στη θεωρία των γραμμικών συνήθων διαφορικών τελεστών, ειδικά για το γεγονός ότι οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες είναι ικανές και αναγκαίες για να ισχύει το αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.1 : Έστω $n \in \mathbb{N}$, M_n είναι μια Lagrange συμμετρική διαφορική έκφραση τάξης n στο ανοιχτό διάστημα (a, b) και w μια συνάρτηση βάρους δοσμένη στο (a, b) . Θεωρούμε τον χώρο $L^2((a, b); w)$ και έχουμε ότι οι δείκτες έλλειψης $\{d_n^+, d_n^-\}$ του ελαχιστικού κλειστού συμμετρικού τελεστή $T_{\min}$ στον $L^2((a, b); w)$ ικανοποιούν τη συνθήκη

$$d_n^+ = d_n^- = d \quad (3.1)$$

με $0 \leq d \leq n$. Τότε ισχύουν τα εξής αποτελέσματα:

(1) Έστω ένα γραμμικό συναρτησοειδές $D \subset L^2((a, b); w)$ που καθορίζεται από ένα σύνολο συναρτήσεων

$$\{\varphi_s : s = 1, 2, \dots, d\}$$

με τις ιδιότητες

- (i) $\varphi_s \in D(T_{\max})$ ($s = 1, 2, \dots, d$)
- (ii) το σύνολο $\{\varphi_s : s = 1, 2, \dots, d\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο $D(T_{\max}) \text{ modulo } D(T_{\min})$
- (iii) το σύνολο $\{\varphi_s : s = 1, 2, \dots, d\}$ ικανοποιεί τις συνθήκες συμμετρίας (αυτοσυζυγείς)

$$[\varphi_s, \varphi_t]_n(b) - [\varphi_s, \varphi_t]_n(a) = 0 \quad (s, t = 1, 2, \dots, d) \quad (3.2)$$

Ορίζουμε

$$D := \{f \in D(T_{\max}) : [f, \varphi_s]_n(b) - [f, \varphi_s]_n(a) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, d)\} \quad (3.3)$$

Τότε ο τελεστής $S : D(S) \subseteq L^2((a, b); w) \rightarrow L^2((a, b); w)$ που καθορίζεται

$$D(S) := D \quad \text{και} \quad Sf := w^{-1}M_n[f] \quad (f \in D(S)) \quad (3.4)$$

είναι μια αυτοσυζυγής επέκταση του τελεστή T_{min} .

(2) Αντιστρόφως, αν S είναι μια αυτοσυζυγής επέκταση του T_{min} τότε υπάρχει ένα σύνολο $\{\varphi_s : s = 1, 2, \dots, d\}$, με τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) που δίνονται παραπάνω, έτσι ώστε $D(S)$ και S να καθορίζονται από τις σχέσεις (3.3) και (3.4).

Απόδειξη: Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 παραπέμπουμε στην εργασία [8].

Παρατήρηση 3.2 :

1. Ονομάζουμε το σύνολο $\{\varphi_s : s = 1, 2, \dots, d\}$ GKN σύνολο για το ζευγάρι τελεστών $\{T_{min}, T_{max}\}$.
2. Αν ο κοινός δείκτης $d = 0$ τότε $T_{min}^* = T_{max} = T_{min}$ και T_{min} είναι αυτοσυζυγής. Σ' αυτή την περίπτωση T_{min} είναι ο μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής που παράγεται από το ζευγάρι $\{M_n, w\}$ στον $L^2((a, b): w)$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις το ζευγάρι $\{M_n, w\}$ παράγει ένα συνεχές από αυτοσυζυγείς τελεστές στον $L^2((a, b): w)$.

3.2 Διατύπωση σημαντικών Λημμάτων

Λήμμα 3.3 : Έστω ότι κατέχουμε όλες τις απαιτούμενες προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.1. Τότε η γραμμική θήκη D' του $L^2((a, b): w)$ είναι το πεδίο ορισμού μιας αυτοσυζυγούς επέκτασης του T_{min} αν και μόνο αν

$$(i) \quad D(T_{min}) \subseteq D' \subseteq D(T_{max})$$

$$(ii) \quad [f, g]_n(b) - [f, g]_n(a) = 0 \quad (f, g) \in D'$$

$$(iii) \quad \text{αν } f \in D(T_{max}) \text{ και } [f, g]_n(b) - [f, g]_n(a) = 0 \quad (g \in D') \text{ τότε } f \in D'$$

Παρατήρηση 3.4 :

Ο χώρος πηλίκου $D(T_{max})/D(T_{min})$, που είναι γραμμικά ισομορφικός με τον $N_i + N_{-i}$ όπως στον τύπο του Neumann, μπορεί με τον τύπο $[\cdot, \cdot]_n(b) - [\cdot, \cdot]_n(a)$, να ορίσει έναν χώρο S διάστασης $2d$. Τότε το Λήμμα 3.3 ισχυρίζεται ότι κάθε αυτοσυζυγής επέκταση S του T_{min} έχει πεδίο ορισμού $D(S) \subseteq D(T_{max})$ που καθορίζεται από ένα Λαγκρανζιανό υπόχωρο $L = D(S)/D(T_{min}) \subseteq S$, υπό την προϋπόθεση ότι L (ή $D(S)$) έχει τη μέγιστη ιδιότητα (iii) παραπάνω. Ισχύει και το αντίστροφο. Σημειώνουμε ότι η απόδειξη του Λήμματος 3.3 εξαρτάται μόνο από βασικές ιδιότητες των κλειστών συμμετρικών τελεστών και των συζυγών τους στον χώρο Hilbert $L^2((a, b): w)$.

Τα υπόλοιπα ακόλουθα λήμματα, Λήμμα 3.5 και Λήμμα 3.6 που περιλαμβάνονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 δείχνουν ότι ο Λαγκρανζιανός χώρος $L \subseteq S$ έχει διάσταση d αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη (iii) παραπάνω, στην οποία περίπτωση ένα σύνολο $\text{GKN} \{\varphi_s : s = 1, 2, \dots, d\} \pmod{D(T_{\min})}$ αποτελεί μία βάση για τον L . Οι μέθοδοι που δίνονται εδώ εξαρτώνται από τις μοναδιαίες απεικονίσεις του Neumann του N_i επί του N_{-i} . Αυτές οι μέθοδοι μπορούν να συγκριθούν με αλγεβρική θεωρία.

Οι υπόχωροι έλλειψης $N_{\pm i}$ του κλειστού συμμετρικού τελεστή $T_{\min}$ ορίζονται ως

$$N_{\pm i} := \{f \in D(T_{\max}) : T_{\max} f = \pm i f\}.$$

Από τον ορισμό του $T_{\max}$ προκύπτει ότι

$$N_{\pm i} = \{y \in D(M_n) \cap L^2((a, b); w) : M_n[y] = \pm i w y\}.$$

Δεδομένου ότι έχουμε $d_n^+ = d_n^- = d$ υπάρχουν μοναδιαίες απεικονίσεις U με τις ιδιότητες

$$U : N_i \xrightarrow{\text{επί}} N_{-i} \quad \text{και} \quad U^* = U^{-1} : N_{-i} \xrightarrow{\text{επί}} N_i. \quad (3.5)$$

Από τον κλασσικό τύπο του Neumann, το πεδίο ορισμού $D(T_{\max})$ μπορεί να εκφραστεί με τον τύπο του ευθέως αθροίσματος

$$D(T_{\max}) \equiv D(T_{\min}^*) = D(T_{\min}) \dot{+} N_i \dot{+} N_{-i} \quad (3.6)$$

όπου τα τρία γραμμικά συναρτησοειδή στη δεξιά μεριά είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $L^2((a, b); w)$. Ένας τελεστής S είναι μια αυτοσυζυγής επέκταση του $T_{\min}$ αν και μόνο αν το πεδίο ορισμού $D(S)$ καθορίζεται από κάποια μοναδιαία απεικόνιση U με τις ιδιότητες (3.5), δηλαδή

$$D(S) = \{f \in D(T_{\max}) : f = h + \psi + U\psi \quad (h \in D(T_{\min}) \text{ και } \psi \in N_i)\}. \quad (3.7)$$

Έστω ότι $\{\psi_r : r = 1, 2, \dots, d\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για τον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο N_i του $L^2((a, b); w)$. Τότε $\{U\psi_r : 1, 2, \dots, d\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του N_{-i} .

Λήμμα 3.5 : Έστω ότι S είναι μια αυτοσυζυγής επέκταση του $T_{\min}$ με $D(S)$ που ορίζεται από τη σχέση (3.7) για κάποια μοναδιαία απεικόνιση U . Έστω ότι $\{\psi_r\}$ και $\{U\psi_r\}$ είναι ορθοκανονικές βάσεις του N_i και N_{-i} αντίστοιχα όπως περιγράφεται παραπάνω. Τότε το πεδίο ορισμού $D(S)$ μπορεί επίσης να περιγραφεί σαν

$$\begin{aligned} D(S) &= \{f \in D(T_{\max}) : f = \\ &= h + \sum_{r=1}^d a_r \tilde{\psi}_r \quad (h \in D(T_{\min}) \text{ και } a_r \in \mathbb{C} (r = 1, 2, \dots, d))\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

όπου

$$\tilde{\psi}_r := \psi_r + U\psi_r \quad (r = 1, 2, \dots, d). \quad (3.9)$$

Λήμμα 3.6 : Έστω S μια αυτοσυζυγής επέκταση του T_{min} . Έστω ακόμη ότι $D(S)$ δίνεται από τις σχέσεις (3.8) και (3.9). Τότε το $D(S)$ μπορεί επίσης να γραφεί και ως

$$D(S) = \left\{ f \in D(T_{max}) : [f, \tilde{\psi}_r]_n(b) - [f, \tilde{\psi}_r]_n(a) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, d) \right\} \quad (3.10)$$

Από το παραπάνω Λήμμα προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα

Πόρισμα 3.7 : Έστω U μια μοναδιαία απεικόνιση με τις ιδιότητες (3.5) και το σύνολο $\{\tilde{\psi}_r : r = 1, 2, \dots, d\}$ να ορίζεται από τη σχέση (3.9) για κάποιο ορθοκανονικό σύνολο $\{\psi_r : r = 1, 2, \dots, d\}$ του N_i . Τότε

- (i) $\tilde{\psi}_r \in D(T_{max}) \quad (r = 1, 2, \dots, d)$
- (ii) το σύνολο $\{\tilde{\psi}_r\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον χώρο $D(T_{max}) \text{ modulo } D(T_{min})$
- (iii) $[\tilde{\psi}_r, \tilde{\psi}_s]_n(b) - [\tilde{\psi}_r, \tilde{\psi}_s]_n(a) = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, d)$ και $\{\tilde{\psi}_r\}$ είναι ένα GKN σύνολο για το ζεύγος $\{T_{min}, T_{max}\}$.

Παρατήρηση 3.8 :

Αυτό το Πόρισμα δείχνει ότι η συλλογή των GKN συνόλων για κάθε ζεύγος $\{T_{min}, T_{max}\}$ δεν είναι κενό σύνολο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

4.1 Δειγματοληψία

Ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση f ορίζεται σε κάθε σημείο ενός χωρίου D και έχει σειρά αναπαράστασης της μορφής

$$f(t) = \sum_n f(\lambda_n) S_n(t) ,$$

στην οποία η $\{\lambda_n\}$ είναι μια συλλογή σημείων του D και $\{S_n\}$ είναι ένα σύνολο κατάλληλων συναρτήσεων. Μια τέτοια αναπαράσταση καλείται **δειγματοληπτική σειρά**. Η ιδιότητα που της δίνει την ονομασία αυτή είναι ότι η f ανακατασκευάζεται πλήρως από κάποιες τιμές της, τα δείγματά της, οι οποίες αποτελούν ένα διακριτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

Δε θα μπορούσαμε να βρούμε ένα απλούστερο παράδειγμα δειγματοληπτικής σειράς από το να πάρουμε μια γραμμική συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, έστω $f(t) = at + b$ και δύο σημεία, έστω για ευκολία $\lambda_0 = 0$ και $\lambda_1 = 1$. Επειδή $at + b = b(1 - t) + (a + b)t$ η δειγματοληπτική σειρά γίνεται

$$f(t) = f(0)(1 - t) + f(1)t .$$

Εδώ παρουσιάζονται, ακόμα και σε αυτό το ακραία πολύ παράδειγμα, χαρακτηριστικά τα οποία προέρχονται από δειγματοληπτικές σειρές. Ένα από αυτά είναι το χαρακτηριστικό της καθολικότητας. Κάθε μέλος της προτεινόμενης σειράς, στην περίπτωση αυτή των πολυωνύμων πρώτου βαθμού, αναπαρίσταται στη δειγματοληπτική σειρά. Επίσης παρουσιάζεται το χαρακτηριστικό ότι οι συναρτήσεις επέκτασης $S_0(t) = 1 - t$ και $S_1(t) = t$ είναι ανεξάρτητες της f . Αυτό το είδος καθολικότητας είναι πολύ επιθυμητό στα θεωρήματα δειγματοληψίας.

Το γεγονός ότι οι δειγματοληπτικές σειρές είναι φυσικό να προκύπτουν σε ένα περιβάλλον Ανάλυσης Fourier φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω g μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π και έστω ότι παράγει μια τυπική σειρά Fourier, οπότε έχουμε

$$g(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-inx} . \quad (4.1)$$

Υπενθυμίζουμε ότι για τον συντελεστή Fourier d_n μιας μιγαδικής και περιοδικής συνάρτησης f με περίοδο $2\pi w$, όπου έχουμε το ανάπτυγμα

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-inx/w} , \quad \text{τότε} \quad d_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \int_{-\pi w}^{\pi w} f(x) e^{inx/w} dx .$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (4.1) με $e^{ixt}/\sqrt{2\pi}$ και ολοκληρώνουμε στο $[-\pi, \pi]$. Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξί μέλος είναι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(t-n)} dx = \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)},$$

οπότε το δεξί μέλος γίνεται

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}.$$

Το αριστερό μέλος

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{ixt} dx. \quad (4.2)$$

Αυτή η συνάρτηση, την οποία μπορούμε να καλούμε $f(t)$, εμφανίζεται να είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης η οποία συμπίπτει με την g στο $[-\pi, \pi]$ και είναι μηδέν οπουδήποτε αλλού. Επομένως μπορούμε να σκεφτούμε την f σαν μια συνάρτηση που περιέχει όρους χαμηλής συχνότητας μέχρι ενός εσχάτου ορίου μέσα στο πεδίο συχνοτήτων της και από εκεί και πέρα δεν περιέχει καμία υψηλότερη συχνότητα. Με τον όρο «πεδίο συχνοτήτων» εννοούμε τον φορέα του μετασχηματισμού Fourier της f , όπου ο μετασχηματισμός Fourier θα χρειαστεί μια κατάλληλη ερμηνεία. Μια τέτοια συνάρτηση καλείται συχνά **low-pass signal**.

Γενικότερα έχουμε :

Ορισμός 4.1 : Κάθε συνάρτηση με περιορισμένο πεδίο συχνοτήτων σε ένα φραγμένο σύνολο B (το οποίο δεν είναι απαραίτητα ένα διάστημα αλλά μια ένωση διάφορων υποσυνόλων, ακόμα και σε ανώτερες διαστάσεις) καλείται **band-limited** στο B . Αναφερόμαστε στο B ως **band region**.

Ορισμός 4.2 : Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\sin cv := \begin{cases} \frac{\sin \pi v}{\pi v}, & v \neq 0 \\ 1, & v = 0 \end{cases}.$$

Ο όρος «sinc» είναι συνήθης στη μηχανική και θα μας φανεί πολύ χρήσιμος σε αυτό το κεφάλαιο.

Το αποτέλεσμα της μελέτης που έχουμε κάνει ως τώρα μπορεί να συγκεντρωθεί στα εξής. Εάν

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{ixt} dx. \quad (4.3)$$

τότε, με τη λογική της τυπικής ισότητας,

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \sin c(t-n). \quad (4.4)$$

Τις παραπάνω σειρές τις καλούμε πληθικές. Εδώ, $\{d_n\}$ είναι οι συντελεστές Fourier της g που λαμβάνονται από την (4.3) αν θέσουμε στο δεξί μέλος $t = n$, οπότε από το αριστερό μέλος έχουμε $d_n = f(n)$.

Υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος να αναγνωρίσουμε τους συντελεστές d_n ως δείγματα της f . Από τον ορισμό 4.2 έπεται ότι αν $m, n \in \mathbb{Z}$, $\text{sinc}(m - n) = \delta_{mn}$ (αυτή καλείται παρεμβολική ιδιότητα της συνάρτησης $\text{sinc}(t - n)$), ώστε αν η (4.4) συγκλίνει σημειακά τότε όταν θέσουμε $t = m$ κάθε όρος της σειράς μηδενίζεται, εκτός του m -όρου που είναι $f(m)$.

Επομένως μπορούμε να γράψουμε την σειρά (4.4) σε δειγματοληπτική μορφή

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \text{sinc}(t - n).$$

Το δειγματοληπτικό θεώρημα W.S.K

Αυτό το δειγματοληπτικό θεώρημα οφείλει την εμφάνιση του στο *Whittaker* το 1915. Το ίδιο αποτέλεσμα προέκυψε αργότερα και ανεξάρτητα από τον *Kotel'nikov* το 1933 και από τον *Shannon* το 1949. Έτσι έμεινε γνωστό ως το θεώρημα W.S.K (βλ. [22], [27], [30]). Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο [27].

Θεώρημα 4.3: Εάν ένα σήμα (συνάρτηση) $f(t)$ δεν περιέχει συχνότητες υψηλότερες από $W/2$ κύκλους το δευτερόλεπτο, οπότε είναι *band limited* στο $[-\pi W, \pi W]$ που σημαίνει ότι η $f(t)$ είναι της μορφής

$$f(t) = \int_{-\pi W}^{\pi W} g(x) e^{ixt} dx, \quad (4.5)$$

τότε η $f(t)$ είναι πλήρως ορισμένη αν δώσουμε τις τεταγμένες της σε μια ακολουθία σημείων, στην οποία κάθε στοιχείο βρίσκεται σε απόσταση $1/W$ από το προηγούμενο του και η $f(t)$ είναι το άθροισμα της «κλιμακωτής» σειράς

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{W}\right) \frac{\sin \pi(Wt - n)}{\pi(Wt - n)}. \quad (4.6)$$

Παρατήρηση 4.4 : Αυτό είναι το πρώτο από τα αποτελέσματα της δειγματοληπτικής θεωρίας. Το σήμα f δεν μπορεί να αλλάξει σημαντικά σε χρόνο μικρότερο από μισό κύκλο της υψηλότερης συχνότητάς του, $W/2$ κύκλους το δευτερόλεπτο. Επιπλέον η συλλογή των δειγμάτων $\{f(n/W) : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ καθορίζει την g μέσω της Fourier σειράς της, αφού ο γενικός συντελεστής Fourier της g (στην (4.5)) είναι $f(n/W)$ και η g καθορίζει την f μέσω της (4.5). Οπότε αν η f μπορούσε να «μετρηθεί» στα σημεία δειγματοληψίας $\{n/W : n \in \mathbb{Z}\}$, τα οποία είναι κατανεμημένα

σε ίσες αποστάσεις πάνω στη γραμμή των πραγματικών αριθμών, τότε η f μπορεί να ανακατασκευαστεί μοναδικά σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$. Η αρχή της εφαρμοσμένης μηχανικής που εδραιώθηκε σε αυτή την κατεύθυνση οδηγεί στον ισχυρισμό ότι ορισμένες συναρτήσεις, των οποίων το περιεχόμενο συχνότητων είναι φραγμένο, είναι ισοδύναμες με μια πηγή πληροφορίας διακριτού χρόνου. Αυτό έχει μεγάλη εφαρμογή στην ανάλυση σημάτων και γενικότερα έχει αποκτήσει μεγάλη αναγνώριση στο ευρύ φάσμα της δειγματοληπτικής θεωρίας. Για περισσότερα βλ. λ.χ. [2], [3], [4], [18], [20], [21], [24].

4.2 Προβλήματα συννοριακών τιμών

Έστω $\mathcal{L}$ ένας διαφορικός τελεστής στον χώρο L^2 και μια κατάλληλη λύση $Y(x, \lambda)$ της εξίσωσης ιδιοτιμών $\mathcal{L}y = \lambda y$ επιλεγμένη έτσι ώστε $\{Y(x, \lambda_n)\}$ να είναι οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}$. Εάν υπάρχει μια θεωρία ανάπτυγματος που να συσχετίζεται με αυτές τις συναρτήσεις, τότε κάτω από κατάλληλες συνθήκες υπάρχει ένα συνοδεύον ανάπτυγμα που έχει τη φύση των δειγματοληπτικών σειρών. Αυτή είναι η κατεύθυνση στην οποία ο *Kramer* πρότεινε να αναπτυχθεί το Λήμμα του.

Ευθύ πρόβλημα Sturm-Liouville

Υποθέτουμε ότι ο διαφορικός τελεστής $\mathcal{L}$ που αναφέραμε προηγουμένως είναι δεύτερης τάξης και της μορφής $\mathcal{L}y := -y'' + q(x)y$, όπου q είναι μια πραγματική συνάρτηση συνεχής σε ένα φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Έστω ακόμη ότι οι συννοριακές συνθήκες είναι χωριζόμενες, δηλαδή B_1 να είναι η συνθήκη στο ένα άκρο του $[a, b]$ και B_2 η συνθήκη στο άλλο.

Αυτού του είδους το πρόβλημα καλείται κανονικό πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville και μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{cases} \mathcal{L}y := -y'' + q(x)y = \lambda y & (4.7) \\ \cos \alpha y(a) + \sin \alpha y'(a) = 0 & (4.8) \\ \cos \beta y(b) + \sin \beta y'(b) = 0 & (4.9) \end{cases}$$

Χρειαζόμαστε τα ακόλουθα σημαντικά δεδομένα. Το πρόβλημα Sturm-Liouville ορίζει ένα διαφορετικό τελεστή ο οποίος είναι αυτοσυζυγής και έχει φάσμα από απλά σημεία [6, σ.201&189]. Συνεπώς οι ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}, n \in \mathbb{N}_0$ είναι πραγματικές και επιπλέον είναι απλές, αριθμήσιμα άπειρες το πλήθος, δεν έχουν πεπερασμένο σημείο συσσώρευσης και είναι κάτω φραγμένες [29, σ.12&19]. Οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθογώνιες και σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο οπότε αποτελούν μια ορθογώνια βάση του $L^2(a, b)$ [6, σ.198].

Από τον χώρο λύσεων της (4.7) μπορούμε να επιλέξουμε μια ξεχωριστή λύση $\varphi(x, \lambda)$ η οποία είναι μια ακέραια συνάρτηση του λ , πραγματική όταν $\lambda \in \mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\varphi(a, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'(a, \lambda) = -\cos \alpha \quad (4.10)$$

και άλλη μία, $\psi(x, \lambda)$, η οποία ικανοποιεί

$$\psi(b, \lambda) = \sin \beta, \quad \psi'(b, \lambda) = -\cos \beta \quad (4.11)$$

(βλ. [29, σ.6-7]). Είναι εμφανές ότι η $\varphi(x, \lambda)$ ικανοποιεί την πρώτη συνοριακή συνθήκη (4.8) και ότι οι ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}$ είναι απλά εκείνες οι τιμές του για τις οποίες η $\varphi(x, \lambda)$ ικανοποιεί και τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη (4.9). Άρα οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Sturm-Liouville, εκτός ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα, είναι οι $\{\varphi(x, \lambda_n)\}$ και είναι πραγματικές.

Η ορίζουσα Wronski των φ και ψ ορίζεται ως

$$W(\varphi, \psi) := \begin{vmatrix} \varphi(x, \lambda) & \psi(x, \lambda) \\ \varphi'(x, \lambda) & \psi'(x, \lambda) \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

και έχει τις ακόλουθες σημαντικές ιδιότητες.

Λήμμα 4.5: Η $W(\varphi, \psi)$ είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x , είναι ακέραια συνάρτηση του λ , τάξης $\frac{1}{2}$ και έχει απλές ρίζες οι οποίες βρίσκονται στο $\{\lambda_n\}$ και μόνον εκεί.

Για k μεγάλο έχουμε

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{b-a} + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (4.13)$$

Επίσης έχουμε

$$W(\lambda) := W(\varphi, \psi) = -\cos \beta \varphi(b, \lambda) - \sin \beta \varphi'(b, \lambda). \quad (4.14)$$

Για την απόδειξη της (4.13) βλ. [29, σ.7-11&19]. Η (4.14) προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε στην (4.12) την ψ με την ψ' από την (4.11), αφού η $W(\varphi, \psi)$ είναι ανεξάρτητη του x .

Θεώρημα 4.6 : Έστω ότι ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις σχετικά με τα κανονικά προβλήματα Sturm-Liouville που παρατέθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο και έστω

$$f(\lambda) = \int_a^b u(x) \varphi(x, \lambda) dx, \quad (4.15)$$

όπου $u \in L^2(a, b)$. Τότε έχουμε την δειγματοληπτική σειρά

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n) v_n^{-1} \left\{ \int_a^b \varphi(x, \lambda) \varphi(x, \lambda_n) dx \right\}, \quad (4.16)$$

όπου ο παράγοντας κανονικοποίησης δίνεται από

$$v_n = \int_a^b |\varphi(x, \lambda_n)|^2 dx . \quad (4.17)$$

Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 4.7 : Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y , & (4.18) \\ y'(0) = 0 , & (4.19) \\ y'(\pi) = 0 . & (4.20) \end{cases}$$

Ένα θεμελιώδες σύστημα για την (4.18) είναι $\{\sin x\sqrt{\lambda}, \cos x\sqrt{\lambda}\}$, για το οποίο επιλέγουμε $\varphi(x, \lambda) = \cos x\sqrt{\lambda}$ ώστε να ικανοποιούνται οι (4.18) και (4.19). Για να ικανοποιείται η (4.20), το λ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\sqrt{\lambda} \sin x\sqrt{\lambda} = 0 .$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ένας περαιτέρω υπολογισμός δίνει

$$\int_0^\pi \cos x\sqrt{\lambda} \cos xn \, dx = \frac{(-1)^n \sqrt{\lambda} \sin \pi\sqrt{\lambda}}{(\lambda - n^2)} .$$

Επίσης έχουμε $v_0 = \pi$ και $v_n = \pi/2$. Άρα από το Θεώρημα 4.6 βρίσκουμε ότι αν

$$f(\lambda) = \int_0^\pi u(x) \cos x\sqrt{\lambda} \, dx , \quad (4.21)$$

τότε

$$f(\lambda) = f(0) \frac{\sin \pi\sqrt{\lambda}}{\pi\sqrt{\lambda}} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(n^2) \frac{(-1)^n \sqrt{\lambda} \sin \pi\sqrt{\lambda}}{(\lambda - n^2)} . \quad (4.22)$$

Είναι εμφανές από την (4.21) ότι η $f(\lambda)$ εξαρτάται άμεσα μόνο από το $\sqrt{\lambda}$ και κατά κάποιο τρόπο είναι λογικότερο να ξαναγράψουμε την σχέση θέτοντας $\lambda = t^2$. Έστω

$$g(t) = \int_0^\pi u(x) \cos xt \, dx ,$$

για κάποια $u \in L^2(a, b)$. Τότε όπως στην (4.4)

$$g(t) = g(0) \frac{\sin \pi t}{\pi t} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \frac{(-1)^n t \sin \pi t}{(t^2 - n^2)}$$

Έτσι καταλήγουμε σε μια αναπαράσταση συνάρτησης με δειγματοληπτική σειρά στη μορφή της πληθικής σειράς του τύπου (4.4).

Αντίστροφο πρόβλημα Sturm-Liouville

Μέχρι τώρα, έχοντας υποθέσει ότι ένα πρόβλημα Sturm-Liouville μας έχει δοθεί *a priori*, είδαμε ότι οι ιδιοτιμές του καθορίζουν τα σημεία δειγματοληψίας στη σχετική δειγματοληπτική σειρά. Ωστόσο, ίσως είναι επιθυμητό να δουλέψουμε με βάση ένα δοσμένο σύνολο δειγματοληπτικών σημείων. Σε αυτή την περίπτωση χρειάζεται να εξετάσουμε το αντίστροφο πρόβλημα Sturm-Liouville. Αυτό έγκειται στην εύρεση των απαιτούμενων συνθηκών κάτω από τις οποίες μια ακολουθία πραγματικών τιμών (λ_n) είναι ακολουθία ιδιοτιμών $\{\lambda_n\}$ ενός κανονικού προβλήματος ιδιοτιμών Sturm-Liouville. Όταν το πρόβλημα αυτό έχει λύση (για το κανονικό πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville) το Θεώρημα 4.6 μας δείχνει πώς να κατασκευάσουμε μια δειγματοληπτική σειρά με σημεία δειγματοληψίας $\{\lambda_n\}$. Αυτή η διαδικασία μας δίνει κάποια ελευθερία στην επιλογή των δειγματοληπτικών σημείων, όμως πρέπει να σημειωθεί ότι εφ' όσον η επιλογή έχει γίνει δεν υπάρχει επιπλέον ελευθερία, διότι η κλάση των συναρτήσεων στην οποία η σειρά εφαρμόζεται είναι καθορισμένη από το αποτέλεσμα του προβλήματος Sturm-Liouville.

Η μέθοδος στηρίζεται στο ακόλουθο θεώρημα των Levitan και Gasymov, για επιπλέον λεπτομέρειες βλ. [32].

Θεώρημα 4.8 : Έστω $(\lambda_n), n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία από διακεκριμένους πραγματικούς αριθμούς και έστω $(\tau_n), (\rho_n)$ με $n \in \mathbb{N}$ και ανήκουν στον L^2 . Έστω a, b και c σταθερές και έστω επιπλέον ότι

$$\lambda_n = \frac{n}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{\tau_n}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N},$$

και στην ακολουθία

$$r_n = \frac{1}{\pi} + \frac{c}{n^2} + \frac{\rho_n}{n^3},$$

κάθε r_n είναι θετικός αριθμός. Τότε υπάρχει ένα κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville με ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}$, για τις οποίες οι $\{\tau_n\}$ είναι οι παράγοντες κανονικοποίησης για τις ιδιοσυναρτήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ LAGRANGE ΚΑΙ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

5.1 Παρεμβολή και δειγματοληψία

Το δυικό πρόβλημα της δειγματοληψίας είναι ένα πρόβλημα παρεμβολής. Μας δίνεται ξανά μια κλάση συναρτήσεων που ορίζονται σε ένα συγκεκριμένο πεδίο ορισμού, αλλά αυτή τη φορά είναι γνωστό ένα σύνολο σημείων παρεμβολής που ανήκουν στο πεδίο ορισμού που προαναφέρθηκε μαζί με την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης στα σημεία αυτά της παρεμβολής. Αναρωτιόμαστε αν υπάρχει ένα στοιχείο, πιθανότατα μοναδικό, της δοσμένης κλάσης συναρτήσεων που παίρνει την αντίστοιχη τιμή παρεμβολής σε κάθε σημείο παρεμβολής, και αν ναι, πώς μπορεί να κατασκευαστεί.

Όταν περιλαμβάνονται μόνο πεπερασμένα σημεία, δεν υπάρχει παρά ελάχιστη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο προβλημάτων. Αλλά όταν περνάμε στην περίπτωση των απείρως πολλών σημείων, υπάρχει μια σημαντική διαφορά.

Όταν η σειρά

$$f(t) = \sum_n f(\lambda_n) S_n(t) , \quad (5.1)$$

είναι μια άπειρη σειρά, τα προβλήματα έχουν περισσότερο ενδιαφέρον.

Τα δυικά προβλήματα της ανακατασκευής και της παρεμβολής δε διαφέρουν σημαντικά όταν εμπλέκονται μόνο πεπερασμένα πολλά σημεία. Αυτή η περίπτωση προέκυψε για πρώτη φορά ιστορικά τον 17^ο αιώνα, και έχει ενδιαφέρον να επιστρέψουμε στις αρχές του 17^{ου} αιώνα έστω και πολύ σύντομα, για να εντοπίσουμε τα θέματα αυτά στις ρίζες τους.

Η παρεμβολή προέκυψε από την ανάγκη υπολογισμού των τιμών μιας δοσμένης συνάρτησης που είναι ενδιάμεσες συγκεκριμένων τιμών. Χρησιμοποιώντας τιμές οι οποίες έχουν ήδη υπολογιστεί θα μειωθεί κάπως η εργασία κατά τον υπολογισμό όλων των τιμών από την αρχή.

Μία πρώτη σειρά παρεμβολής πήρε τη μορφή

$$f(0) + t\Delta f(0) + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f(0) + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 f(0) + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-M+1)}{M!} \Delta^M f(0),$$

όπου

$$\Delta f(0) = f(1) - f(0)$$

$$\Delta^2 f(0) = \Delta f(1) - \Delta f(0) = f(2) - 2f(1) + f(0)$$

...

Αυτός ο τύπος δίνει τη λύση στο πεπερασμένο πρόβλημα παρεμβολής της εύρεσης ενός πολυωνύμου βαθμού M , ή μικρότερου, που λαμβάνει τη δεδομένη τιμή $f(0)$ όταν $t = 0$, την τιμή $f(1)$ όταν $t = 1$, κ.λ.π., και την τιμή $f(M)$ όταν $t = M$.

Ας εξετάσουμε τώρα την ταυτότητα

$$\begin{aligned} f(\lambda_0) + (t - \lambda_0)f(\lambda_0, \lambda_1) + \dots + (t - \lambda_0) \dots (t - \lambda_{M-1})f(\lambda_0, \dots, \lambda_M) \\ \equiv \sum_{j=0}^M f(\lambda_j) \frac{G_M(t)}{G'_M(\lambda_j)(t - \lambda_j)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

στην οποία

$$f(\lambda_0, \lambda_1) = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_0)}{\lambda_1 - \lambda_0}$$

$$f(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{f(\lambda_1, \lambda_2) - f(\lambda_0, \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_0}$$

...,

και

$$G_M(t) = \prod_{j=0}^M \left(1 - \frac{t}{\lambda_j}\right).$$

Οι δύο πλευρές της σχέσης (5.2) είναι πανομοιότυπες καθώς και τα δύο είναι πολυώνυμα βαθμού M παίρνοντας την τιμή $f(\lambda_0)$ όταν $t = \lambda_0$, $f(\lambda_1)$ όταν $t = \lambda_1$, κ.λ.π., και $f(\lambda_M)$ όταν $t = \lambda_M$.

Εδώ τα σημεία παρεμβολής δεν είναι πλέον ακέραιοι αλλά αποτελούνται από αυθαίρετους πραγματικούς αριθμούς $\{\lambda_j\}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Η αριστερή πλευρά αυτής της ταυτότητας είναι γνωστή ως τύπος του Newton για κατανεμημένες διαφορές, και σαφώς μειώνει τον τύπο του Gregory όταν $\lambda_j = j$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Η δεξιά πλευρά της (5.2) είναι γνωστή σήμερα ως τύπος του Lagrange. Ο τύπος του Lagrange δίνει το πολυώνυμο παρεμβολής απευθείας από την άποψη των δειγμάτων και παίρνει τη μορφή της δειγματοληπτικής σειράς (5.1).

Για περισσότερες πληροφορίες βλ. [19].

5.2 Σύνολο δειγματοληπτικών ισαπεχόντων σημείων

Αν ανατρέξουμε στον Ορισμό 4.2 μπορούμε να δούμε πώς η ανακατασκευή του πυρήνα sinc στο κλασσικό θεώρημα δειγματοληψίας προκύπτει ως το όριο της παρεμβολής Lagrange σε μια σειρά σημείων ίσης απόστασης μεταξύ τους. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του κλασσικού θεωρήματος δειγματοληψίας, η ανακατασκευή του πυρήνα sinc

$$G(t, t_n) = \text{sinc}(2\Omega(t - t_n))$$

μπορεί να ξαναγραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$G(t, t_n) = \frac{H(t)}{H'(t_n)(t - t_n)} \quad (5.3)$$

όπου

$$H(t) = \frac{\text{sinc}(2\pi\Omega t)}{2\pi\Omega} \quad (5.4)$$

Για να δούμε γιατί αυτό είναι αληθές σε ένα σύνολο σημείων με ίσες αποστάσεις $\{t_n = \frac{n}{2\Omega}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $\sin(n\pi) = 0$ και $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

$$\begin{aligned} \frac{H(t)}{H'(t_n)} &= \frac{\left(\frac{\sin(2\pi\Omega t)}{2\pi\Omega}\right)}{\cos(2\pi\Omega t_n)} = \frac{1}{2\pi\Omega} \frac{\sin(2\pi\Omega t)}{\cos(n\pi)} = \frac{1}{2\pi\Omega} \frac{\sin(2\pi\Omega t)}{(-1)^n} \\ &= \frac{1}{2\pi\Omega} (\sin(2\pi\Omega t)(-1)^n) = \frac{1}{2\pi\Omega} (\sin(2\pi\Omega t)(-1)^n - \cos(2\pi\Omega t)0) \\ &= \frac{1}{2\pi\Omega} (\sin(2\pi\Omega t)\cos(n\pi) - \cos(2\pi\Omega t)\sin(n\pi)) \\ &= \frac{1}{2\pi\Omega} (\sin(2\pi\Omega t)\cos(2\pi\Omega t_n) - \cos(2\pi\Omega t)\sin(2\pi\Omega t_n)) \\ &= \frac{1}{2\pi\Omega} \sin(2\pi\Omega(t - t_n)). \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου,

$$\frac{H(t)}{H'(t_n)(t - t_n)} = \frac{\sin(2\pi\Omega(t - t_n))}{2\pi\Omega(t - t_n)} = \text{sinc}(2\Omega(t - t_n)) = G(t, t_n).$$

Τότε χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler με $z = 2\Omega t$

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

μπορεί να προκύψει η συνάρτηση $H(t)$ ως το όριο στον τύπο του Lagrange για το απειροσύνολο των σημείων $\left\{t_n = \frac{n}{2\Omega}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, το οποίο είναι η δεξιά μεριά της ακόλουθης εξίσωσης:

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{\sin(2\pi\Omega t)}{2\pi\Omega} = t \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{(2\Omega t)^2}{k^2}\right) = t \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{(k/(2\Omega))^2}\right) \\ &= t \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{t_k^2}\right) = (t - t_0) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right) \left(1 + \frac{t}{t_k}\right) \\ &= (t - t_0) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right) \left(1 - \frac{t}{t_{-k}}\right) = (t - t_0) \prod_{k \neq 0} \left(\frac{t - t_k}{t_0 - t_k}\right). \end{aligned}$$

Η γενικευμένη ανακατασκευή του πυρήνα $G(t, t_n)$ θα μπορούσε επίσης να γραφτεί στη μορφή της εξίσωσης (5.3).

5.3 Δειγματοληπτικά σημεία με άνισες αποστάσεις

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $\{t_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ αποτελεί ένα άπειρο σύνολο δειγματοληπτικών σημείων χωρίς ίσες αποστάσεις μεταξύ τους με παραγώγους $\{t'_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Για κάθε πραγματικό αριθμό t στο $[t_n, t_{n+1}]$, $n \in \mathbb{Z}$, υποθέτουμε ότι

$$H(t) = (-1)^n \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{t'_m}{(t - t_m)^2} \right]^{-1/2}.$$

Τότε

$$H'(t) = (-1)^n \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{t'_m}{(t - t_m)^2} \right]^{-3/2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{t'_m}{(t - t_m)^3} \right] (-2)$$

$$= (-1)^n \frac{\sum_m \frac{t'_m}{(t - t_m)^3}}{\left[\sum_m \frac{t'_m}{(t - t_m)^2} \right]^{3/2}}.$$

Όταν ο όρος $H'(t)$ για $t = t_n$, οι n -οστοί όροι στα αθροίσματα και στον αριθμητή και τον παρονομαστή αποκλίνουν. Στο όριο $t \rightarrow t_n$, ο n -οστός όρος τους άλλους όρους και στα δύο αθροίσματα. Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} H'(t_n) &= \lim_{t \rightarrow t_n} H'(t) = (-1)^n \lim_{t \rightarrow t_n} \frac{\frac{t'_n}{(t - t_n)^3}}{\left(\frac{t'_n}{(t - t_n)^2} \right)^{3/2}} = \\ &= (-1)^n \lim_{t \rightarrow t_n} \frac{\frac{t'_n}{(t - t_n)^3}}{\frac{(t'_n)^{3/2}}{(t - t_n)^3}} = (-1)^n \lim_{t \rightarrow t_n} (t'_n)^{-1/2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{t'_n}} \end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε t στο $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} G(t, t_n) &= \frac{H(t)}{H'(t_n)(t - t_n)} = \frac{(-1)^k \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{t'_m}{(t - t_m)^2} \right]^{-1/2}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{t'_n}} (t - t_n)} \\ &= (-1)^{k-n} \frac{\sqrt{t'_n}}{(t - t_n)} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{t'_m}{(t - t_m)^2} \right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Για περισσότερες πληροφορίες για τις παραγράφους (5.2), (5.3) παραπέμπουμε στο [17].

Σχόλια :

Αν προτιμούμε μια περιοδική παρεμβάλλουσα αντί μιας πολυωνυμικής, ή, στο πνεύμα της δαικότητας που αναφέρθηκε παραπάνω, αν επιθυμούμε την αντιπροσώπευση μιας περιοδικής συνάρτησης της μορφής $p(t) = \sum_{j=-M}^M c_j e^{ijt}$ από μια πεπερασμένη δειγματοληπτική σειρά, τότε ένας κατάλληλος τύπος είναι

$$p(t) = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=0}^{2M} p\left(\frac{2\pi j}{2M+1}\right) \frac{\sin\left[\left(\frac{2M+1}{2}\right)\left(t - \frac{2\pi j}{2M+1}\right)\right]}{\sin\frac{1}{2}\left(t - \frac{2\pi j}{2M+1}\right)}.$$

Αυτή η πεπερασμένη δειγματοληπτική σειρά δόθηκε από τον Cauchy το 1841, αν και υπάρχουν και παλιότερες μορφές στο έργο του Gauss, πηγαίνοντας πίσω περίπου στο 1805. Μια πιο γενική μορφή μπορεί να βρεθεί στους Dodson και Silva (1985).

Κατά τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα γίνεται το πέρασμα από την περίπτωση των πεπερασμένα πολλών σημείων στην πολύ πιο γενική περίπτωση των απείρως πολλών σημείων $\{\lambda_n\}$ (χωρίς πεπερασμένο σημείο συσσώρευσης), στον τύπο του Lagrange. Αυτός ο τύπος, για μια συνάρτηση f που παίρνει την τιμή a_n στο λ_n , μπορεί τυπικά να γραφεί στη μορφή

$$f(z) = \sum_n a_n \frac{\varphi(z)}{\varphi'(\lambda_n)(z - \lambda_n)}$$

όπου φ είναι τώρα μια συνάρτηση με απλές ρίζες το σύνολο $\{\lambda_n\}$. Ένας πιο γενικός τύπος είναι

$$\sum_n a_n \left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{s_n} \frac{\varphi(z)}{\varphi'(\lambda_n)(z - \lambda_n)},$$

όπου (s_n) είναι μια ακολουθία ακεραίων που έχουν επιλεχθεί να διασφαλίσουν τη σύγκλιση (βλ. για παράδειγμα, J.M. Whittaker 1935).

Μια άλλη σημαντική συμβολή, από τον Borel το 1897, ήταν να παρατηρήσουμε ότι αν $f(t)$ είναι κάθε συνάρτηση της μορφής,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{ixt} dx$$

με έναν ήπιο περιορισμό στο g , τότε οι δειγματοληπτικές τιμές $f(n), n \in \mathbb{Z}$, ορίζουν την f μοναδικά.

Στο σύνολό τους αυτές οι δύο εισφορές του Borel είναι πραγματικά ένα ισχυρό πρώτο βήμα προς τις αρχές της δειγματοληψίας όπως τις έχουμε γνωρίσει στα νεότερα χρόνια.

Για περισσότερες πληροφορίες βλ. [19].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ KRAMER ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

6.1 Συμβολισμοί

Το σύμβολο $H(U)$ αντιπροσωπεύει την κλάση των αναλυτικών συναρτήσεων Cauchy οι οποίες είναι ολόμορφες (αναλυτικές και κανονικές) στο ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$. Το σύμβολο $I = (a, b)$ υποδηλώνει ένα τυχαίο ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$, και η έκφραση «τοπικά» περιορίζει την ιδιότητα των συναρτήσεων στα συμπαγή υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$. Όλες οι συναρτήσεις $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ λαμβάνονται ως Lebesgue μετρήσιμες στο (a, b) και όλα τα ολοκληρώματα θεωρούνται Lebesgue.

Αν w είναι μια συνάρτηση βάρους στο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, δηλαδή ισχύει $w(x) > 0$ για όλα σχεδόν τα $x \in I$, τότε ο συναρτησιακός χώρος Hilbert $L^2(I; w)$ είναι το σύνολο όλων των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, έτσι ώστε

$\int_a^b w |f|^2 \equiv \int_a^b w(x) |f(x)|^2 dx < +\infty$. Στη συνέχεια ως προς τις κλάσεις ισοδυναμίας, η νόρμα και το εσωτερικό γινόμενο δίνονται από

$$\|f\|_w^2 := \int_I w |f|^2 \quad \text{και} \quad (f, g)_w := \int_a^b w(x) f(x) \bar{g}(x) dx.$$

6.2 Προκαταρκτικά θεωρίας δειγματοληψίας και παρεμβολής

Παραδείγματα των αρχικών πυρήνων Kramer μπορούν να βρεθούν στα άρθρα [23] και [5].

Εδώ, θα περιορίσουμε την προσοχή μας στη σχέση μεταξύ της αναλυτικής μορφής του θεωρήματος δειγματοληψίας Kramer και μιας μορφής του τύπου παρεμβολής Lagrange.

Για πληροφορίες σχετικά με τους αναλυτικούς πυρήνες Kramer βλ. [9]. Τα αποτελέσματα της παρεμβολής Lagrange φαίνονται καλύτερα στο [16].

Η αναλυτική μορφή του θεωρήματος Kramer δίνεται από το ακόλουθο Θεώρημα :

Θεώρημα 6.1 : Έστω $I = (a, b)$ ένα τυχαίο ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ και w μια συνάρτηση βάρους στο I . Έστω η απεικόνιση $K: I \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$1. K(\cdot; \lambda) \in L^2(I; w) \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

2. $K(x, \cdot) \in H(\mathbb{C})$ ($x \in (a, b)$).

3. Υπάρχει μία ακολουθία $\{\lambda_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\}$ η οποία ικανοποιεί

(i) $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}$),

(ii) $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \lambda_n = \pm\infty$

(iii) Η ακολουθία συναρτήσεων $\{K(\cdot, \lambda_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ αποτελεί ένα τοπικά γραμμικά ανεξάρτητο και πλήρως ορθογώνιο σύνολο στον χώρο Hilbert $L^2(I; w)$.

4. Η απεικόνιση $\lambda \mapsto \int_a^b w(x) |K(x, \lambda)|^2 dx$ είναι τοπικά φραγμένο στο $\mathbb{C}$.

Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων $\{K\}$ σαν το σύνολο όλων των συναρτήσεων $F: L^2(I; w) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ που ορίζονται ως

$$F(f; \lambda) \equiv F(\lambda) := \int_a^b w(x) K(x, \lambda) f(x) dx \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (6.1)$$

Τότε για όλες τις $F \in \{K\}$ ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα

(α) $F(f, \cdot) \in H(\mathbb{C})$ ($f \in L^2(I; w)$).

(β) Αν $S_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$ από

$$S_n(\lambda) := \|K(\cdot, \lambda_n)\|_w^{-2} \int_a^b w(x) K(x, \lambda) \bar{K}(x, \lambda_n) dx \quad (\lambda \in \mathbb{C}), \quad (6.2)$$

τότε $S_n \in H(\mathbb{C})$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(γ) Για όλες τις $F \in \{K\}$ ισχύει

$$F(f, \lambda) \equiv F(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\lambda_n) S_n(\lambda) \quad (6.3)$$

όπου η σειρά είναι απόλυτα συγκλίνουσα για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ και τοπικά ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη : Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος παραπέμπουμε στο [12, Θεώρημα 2 και Πρόσμα 1], η ιδέα για αυτά τα αποτελέσματα προήλθε από τα [7] και [16, Θεώρημα 1.1].

Αν και δεν αναφέρεται στο [23], υπάρχει ένα Πρόσμα του Θεωρήματος 6.1, το οποίο αυξάνει την αξία της δειγματοληπτικής μορφής του αρχικού αποτελέσματος Kramer [23]. Παραπέμπουμε επίσης στο [16, Πρόσμα 1.2].

Πόρισμα 6.2 : Ας υποθέσουμε ότι έχουμε όλα τα σύμβολα και τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 6.1 και έστω ότι η $\{c_n: n \in \mathbb{Z}\}$ είναι μια δεδομένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών που πληροί την προϋπόθεση εκτίμησης

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|c_n|^2}{\|K(\cdot, \lambda_n)\|_w^2} < +\infty. \quad (6.4)$$

Τότε υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $F \in \{K\}$ τέτοιο ώστε

$$F(\lambda_n) = c_n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Απόδειξη : Βλ. [16].

Το παραπάνω Πόρισμα εκφράζει το αποτέλεσμα το οποίο παρεμβάλλει στο σύνολο των σημείων $\{\lambda_n: n \in \mathbb{Z}\}$, το σύνολο των τιμών $\{c_n: n \in \mathbb{Z}\}$ της F , με την προϋπόθεση της συνθήκης εκτίμησης (6.4), όπου η συνάρτηση F είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$. Επιπλέον, σε ορισμένες περιπτώσεις (δείτε για παράδειγμα [16] και [32]), το Θεώρημα 6.1 επιτρέπει την εισαγωγή μιας αναλυτικής συνάρτησης παρεμβολής G που σχετίζεται με έναν αναλυτικό πυρήνα Kramer K . Η συνάρτηση G παίζει τον ίδιο ρόλο με τη συνάρτηση παρεμβολής στον τύπο του Lagrange, αλλά τώρα έχουμε τη γενική περίπτωση του απειροσυνόλου μιγαδικών αριθμών $\{\lambda_n \in \mathbb{C}: n \in \mathbb{Z}\}$ έτσι ώστε απείρως πολλά σημεία στον τύπο του Lagrange για πολυώνυμα πρέπει τώρα να χρησιμοποιηθούν.

Το παραπάνω σχόλιο για τη συνάρτηση G οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 6.3 : Έστω K ένας αναλυτικός πυρήνας Kramer με την έννοια του Θεωρήματος 6.1, στο διάστημα I , με συνάρτηση βάρους w και η ακολουθία $\{\lambda_n: n \in \mathbb{Z}\}$. Τότε λέμε ότι ο K έχει μια αναλυτική συνάρτηση παρεμβολής αν υπάρχει $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $G \in H(\mathbb{C})$.

(ii) $G(\lambda) = 0$, αν και μόνο αν, $\lambda \in \{\lambda_n: n \in \mathbb{Z}\}$.

(iii) $G'(\lambda_n) \neq 0$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(iv) Με την ακολουθία συναρτήσεων $\{S_n(\cdot): n \in \mathbb{Z}\}$ ορισμένη όπως στην (6.2), τότε

$$S_n(\lambda) = \frac{G(\lambda)}{G'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (\lambda \in \mathbb{C} \text{ και } n \in \mathbb{Z}). \quad (6.5)$$

Παρατήρηση 6.4 :

Αν ο K έχει μια αναλυτική συνάρτηση παρεμβολής G , τότε η δειγματοληπτική σειρά (6.3) λαμβάνει την κλασσική μορφή μιας σειράς παρεμβολής Lagrange

$$F(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\lambda_n) \frac{G(\lambda)}{G'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (6.6)$$

με τις ίδιες ιδιότητες σύγκλισης της άπειρης σειράς (6.3).

Ο παραπάνω τύπος (6.6) είναι μια αριθμήσιμα άπειρη επέκταση του κλασσικού τύπου παρεμβολής Lagrange για πολυώνυμα.

Παρατήρηση 6.5 :

Σημειώνουμε ότι τόσο η ακολουθία συναρτήσεων $\{S_n: n \in \mathbb{Z}\}$ όσο και η αναλυτική συνάρτηση παρεμβολής G εξαρτώνται από την επιλογή του αναλυτικού πυρήνα Kramer, αλλά όχι από την επιλογή του στοιχείου F στην άπειρη σειρά (6.3) και (6.6).

Παρατήρηση 6.6 :

Για την ύπαρξη αναλυτικών συναρτήσεων παρεμβολής G για αναλυτικούς πυρήνες Kramer που παράγονται από γραμμικά προβλήματα συνοριακών τιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, όπου η G εμφανίζεται φυσικά από τις ιδιότητες των διαφορικών εξισώσεων και των συνοριακών συνθηκών, αναφερόμαστε στα [10], [11] και [16]. Για τη διαδικασία κατασκευής της G από μια αναλυτική συνάρτηση, με τις ιδιοτιμές των προβλημάτων συνοριακών τιμών σαν απλές ρίζες αυτής, χρησιμοποιώντας τη γενική θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων (βλέπε [28]), αναφερόμαστε στο [33]. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι δεν είναι γνωστό αν υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση παρεμβολής για κάθε αναλυτικό πυρήνα Kramer. Αυτό είναι ένα ανοιχτό πρόβλημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΚΑΙ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό, το κύριο μέλημά μας είναι να επιτύχουμε ένα αποτέλεσμα παρεμβολής Lagrange. Έτσι, εδώ εισάγουμε αναλυτικές συναρτήσεις παρεμβολής οι οποίες σχετίζονται με τους κατασκευασμένους αναλυτικούς πυρήνες Kramer. Αποδεικνύουμε ότι όταν έχουμε επιτύχει συνθήκες όπως στο [14], τότε οι αντίστοιχες αναλυτικές συναρτήσεις παρεμβολής μπορούν να ορισθούν με τις απαιτούμενες ιδιότητες ώστε να δώσουν τη σειρά παρεμβολής Lagrange.

7.1 Αυτοσυζυγείς διαφορικές εξισώσεις

Τα αυτοσυζυγή προβλήματα συνοριακών τιμών που μελετούνται σε αυτό το κεφάλαιο προέρχονται από τη γενική πρώτης τάξης συμμετρική Lagrange ή αλλιώς αυτοσυζυγή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$i\rho(x)y'(x) + \frac{1}{2}i\rho'(x)y(x) + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x), \quad x \in (a, b) \quad (7.1)$$

όπου $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι η φασματική παράμετρος και οι συντελεστές ρ, q και w ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{cases} (i) & \rho, q, w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \\ (ii) & \rho \in AC_{loc}(a, b) \text{ και } \rho(x) > 0 \text{ για όλα τα } x \in (a, b) \\ (iii) & q, w \in L^1_{loc}(a, b) \\ (iv) & w(x) > 0 \text{ για όλα σχεδόν τα } x \in (a, b) \end{cases} \quad (7.2)$$

όπου AC υποδηλώνει απόλυτη συνέχεια ως προς το μέτρο Lebesgue.

Λόγω των συνθηκών (7.2) η διαφορική εξίσωση (7.1) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες αρχικών τιμών. Έστω $c \in (a, b)$ και $\gamma \in \mathbb{C}$, τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση $y: (a, b) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$\begin{cases} (i) & y(\cdot, \lambda) \in AC_{loc}(a, b) \text{ για όλα τα } \lambda \in \mathbb{C} \\ (ii) & y(x, \cdot) \in \mathbf{H} \text{ για όλα τα } x \in (a, b) \\ (iii) & y(c, \lambda) = \gamma \text{ για όλα τα } \lambda \in \mathbb{C} \\ (iv) & y(\cdot, \lambda) \text{ ικανοποιεί τη σχέση (7.1)} \\ & \text{για όλα σχεδόν τα } x \in (a, b), \text{ και όλα τα } \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Ωστόσο μια απευθείας συνηθισμένη ολοκλήρωση δείχνει ότι η ζητούμενη λύση y δίνεται από τον τύπο

$$y(x, \lambda) = \gamma \sqrt{\frac{\rho(c)}{\rho(x)}} \exp \left(\int_c^x \frac{(\lambda w(t) - q(t))}{i\rho(t)} dt \right) \quad (7.3)$$

για όλα τα $x \in (a, b)$ και για όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$

Από αυτή τη μορφή (7.3) της y και τις συνθήκες (7.2) συμπεραίνουμε ότι όλες οι παραπάνω ιδιότητες αρχικών τιμών ικανοποιούνται.

Πρόταση 7.1 : (βλέπε [14, Λήμμα 2.1])

Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να εξασφαλίσουμε ότι η λύση $y(\cdot, \lambda) \in L^2((a, b); w)$ για όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$, είναι

$$\int_a^b \frac{w(t)}{\rho(t)} dt < +\infty \quad (7.4)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τη διαφορική έκφραση $M: D(M) \subseteq AC_{loc}(a, b) \rightarrow L^1_{loc}(a, b)$ ως

$$D(M) := \{f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}: f \in AC_{loc}(a, b) \quad (7.5)$$

και

$$M[f](x) := i\rho(x)f'(x) + \frac{1}{2}i\rho'(x)f(x) + q(x)f(x) \quad (7.6)$$

για όλα τα $x \in (a, b)$ και για όλα τα $f \in D(M)$. Έτσι, για κάθε λύση $y(\cdot, \lambda)$ της (7.1) έχουμε $y(\cdot, \lambda) \in D(M)$ και, για όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$, η διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$M[y(\cdot, \lambda)] = \lambda w y(\cdot, \lambda) \text{ στο } (a, b). \quad (7.7)$$

7.2 Διαφορικοί τελεστές

Ορίζουμε στην παράγραφο αυτή κατάλληλους για τη θεωρία μας αυτοσυζυγείς διαφορικούς τελεστές. Εντός του συναρτησιακού χώρου Hilbert $L^2((a, b); w)$ που εμπλέκεται στην ανάλυσή μας, η $w^{-1}M[\cdot]$ παράγει τους πλέον κλασσικούς ελαχιστικούς και μεγιστικούς τελεστές T_0 και T_1 , όπου ο T_0 είναι κλειστός και συμμετρικός και ο T_1 είναι κλειστός, επίσης στον $L^2((a, b); w)$. Αυτοί οι τελεστές ικανοποιούν τις $T_0^* = T_1$ και $T_1^* = T_0$. Από τη γενική θεωρία (βλέπε [25, Κεφάλαιο IV]) αυτοσυζυγείς επεκτάσεις T του T_0 υπάρχουν αν και μόνο αν ο T_0 έχει ίσους δείκτες έλλειψης. Στην περίπτωση αυτή ισχύει $T_0 \subseteq T \subseteq T_1$. Οι δείκτες έλλειψης $d^\pm(T_0)$ ικανοποιούν την $0 \leq d^\pm(T_0) \leq 1$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις όπου οι

δείκτες είναι ίσοι, η μία είναι όταν $d^- = d^+ = 0$ και η άλλη όταν $d^- = d^+ = 1$. Για την πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση (7.1) αυτές οι δύο περιπτώσεις μπορούν να μετατραπούν σε περιπτώσεις που εξαρτώνται μόνο από τους συντελεστές ρ και w . Ανάλογα, έχουμε την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 7.2 : Έχουμε

- (i) $d^- = d^+ = 0$ αν και μόνο αν για κάποια $c \in (a, b)$, $w/\rho \notin L^1(a, c]$ και $w/\rho \notin L^1[c, b)$.
- (ii) $d^- = d^+ = 1$ αν και μόνο αν $w/\rho \in L^1(a, b)$.

Απόδειξη : Τα αποτελέσματα αυτά έπονται από την Πρόταση 7.1.

Παρατήρηση 7.3.

Στην περίπτωση (i) της Πρότασης 7.2 η αυτοσυζυγής επέκταση T είναι μοναδική και $T_0 = T = T^* = T_1$.

Παρατήρηση 7.4 :

Στην περίπτωση (ii) της Πρότασης 7.2, η οποία καλύπτει όλες τις κανονικές περιπτώσεις της (7.1) και όλες τις ιδιάζουσες περιπτώσεις όπου η συνθήκη (7.4) ικανοποιείται, υπάρχει ένα συνεχές των αυτοσυζυγών επεκτάσεων T με $T_0 \subset T = T^* \subset T_1$. Αυτές οι επεκτάσεις θεωρούνται ως περιορισμοί του τελεστή T_1 και οι εν λόγω περιορισμοί καθορίζονται με τη χρήση της γενικευμένης μεθόδου GKN της εφαρμογής συνοριακών συνθηκών στα σημεία a και b του διαστήματος (a, b) (βλέπε [8, Ενότητα 4, Θεώρημα 1]).

7.3 GKN συνοριακές συνθήκες

Θεωρούμε τώρα τη διαφορική έκφραση M που ορίζεται από τις (7.5) και (7.6). Βλέπουμε ότι η M είναι Lagrange συμμετρική και έχει τον ακόλουθο τύπο του Green, για όλα τα συμπαγή διαστήματα $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{\bar{g}M[f] - f\overline{M[g]}\} = [f, g](x) \Big|_{\alpha}^{\beta} \quad \text{για όλες τις } f, g \in D(M) \quad (7.8)$$

όπου η συμπλεκτική μορφή $[\cdot, \cdot](\cdot) : (a, b) \times D(M) \times D(M) \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται από

$$[f, g](x) := i\rho(x)f(x)\bar{g}(x) \quad \text{για όλα τα } x \in (a, b) \quad (7.9)$$

Το πεδίο ορισμού του μεγιστικού τελεστή $D(T_1)$ ορίζεται από

$$D(T_1) := \{f \in D(M) : f, w^{-1}M[f] \in L^2((a, b) : w)\}$$

Σημειώνουμε ότι, από τον τύπο του Green (7.8), τα όρια

$$[f, g](a^+) := \lim_{x \rightarrow a^+} [f, g](x), \quad [f, g](b^-) := \lim_{x \rightarrow b^-} [f, g](x), \quad (7.10)$$

υπάρχουν και τα δύο στο $\mathbb{C}$ και είναι πεπερασμένα για $f, g \in D(T_1)$. Επομένως ορίζουμε

$$[f, g] := [f, g](b^-) - [f, g](a^+), \quad (7.11)$$

και το πεδίο ορισμού του ελαχιστικού τελεστή $D(T_0)$ ορίζεται από

$$D(T_0) := \{f \in D(T_1) : [f, g] = 0 \text{ για όλες τις } g \in D(T_1)\}$$

Είμαστε τώρα σε θέση να ενεργήσουμε σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.4 ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι $d^\pm(T_0) = 1$. Προκειμένου να περιοριστεί το πεδίο ορισμού $D(T_1)$ στο πεδίο ορισμού $D(T)$ ενός αυτοσυζυγή τελεστή T (βλέπε [8, Ενότητα 4, (4.2) και (4.3)]) επιλέγουμε ένα στοιχείο $\beta \in D(T_1)$ ως ένα μη μηδενικό στοιχείο του χώρου πηλίκου $D(T_1) / D(T_0)$, με τη συμμετρική ιδιότητα

$$[\beta, \beta](b^-) - [\beta, \beta](a^+) = 0. \quad (7.12)$$

Παρατήρηση 7.5 :

Δίνουμε τώρα ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης συνοριακών συνθηκών β ορίζοντας για κάποια $\mu \in \mathbb{R}$

$$\beta(x) := \frac{1}{\rho(x)} \exp\left(\int_c^x \frac{\mu w - q}{i\rho}\right) \quad \text{για όλα τα } x \in (a, b). \quad (7.13)$$

Τότε από τη σχέση (7.9) προκύπτει ότι

$$[\beta, \beta](x) = i \quad \text{για όλα τα } x \in (a, b). \quad (7.14)$$

Όπως φαίνεται στο [14, Παρατήρηση 5.1] όλες οι συνοριακές συναρτήσεις συμμετρικών συνοριακών συνθηκών β μπορούν να καθοριστούν από τη σχέση (7.13).

Με αυτή τη συνάρτηση β το πεδίο ορισμού $D(T)$ ορίζεται από

$$D(T) := \{f \in D(T_1) : [f, \beta](b^-) - [f, \beta](a^+) = 0\} \quad (7.15)$$

και ο αυτοσυζυγής τελεστής δίνεται από

$$Tf := w^{-1}M[f] \quad \text{για όλες τις } f \in D(T). \quad (7.16)$$

Σε αυτή την περίπτωση το αυτοσυζυγές πρόβλημα συνοριακών τιμών επικεντρώνεται στην πιθανότητα εύρεσης μη τετριμμένων λύσεων $y(\cdot, \lambda)$ της διαφορικής εξίσωσης (7.7) με την ιδιότητα $y(\cdot, \lambda) \in L^2((a, b); w)$, που να ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη

$$[y(\cdot, \lambda), \beta](b^-) - [y(\cdot, \lambda), \beta](a^+) = 0. \quad (7.17)$$

Η λύση αυτού του προβλήματος εξαρτάται από τη φύση του φάσματος $\sigma(T)$ του αυτοσυζυγούς τελεστή T που καθορίζεται από την επιλογή της συνοριακής συνάρτησης συνοριακών συνθηκών β .

7.4 Φασματικές ιδιότητες

Σε αυτή την παράγραφο δίνονται οι φασματικές ιδιότητες του αυτοσυζυγούς τελεστή T . Συμβολίζουμε με $\sigma(T)$ το φάσμα των αυτοσυζυγών επεκτάσεων T του ελαχιστικού τελεστή T_0 . Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις 7.3 και 7.4 πρέπει να εξετασθούν οι ακόλουθες περιπτώσεις.

Παρατήρηση 7.6 :

Έστω $d^- = d^+ = 0$. Το φάσμα $\sigma(T)$ του μοναδικού αυτοσυζυγούς τελεστή T στον $L^2((a, b); w)$ είναι αμιγώς συνεχές και καταλαμβάνει όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $\sigma(T) = \mathbb{R}$. Αυτή η περίπτωση δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον για τη δειγματοληπτική θεωρία και τη θεωρία παρεμβολής.

Παρατήρηση 7.7 :

(βλέπε [14, Λήμμα 5.1 και Θεώρημα 5.1]). Έστω $d^- = d^+ = 1$. Το φάσμα $\sigma(T)$ του αυτοσυζυγούς τελεστή T στον $L^2((a, b); w)$ που καθορίζεται από μια δοσμένη συνοριακή συνάρτηση συνοριακών συνθηκών β όπως στις σχέσεις (7.12), (7.15) και (7.16), έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Το φάσμα $\sigma(T)$ είναι απλό και διακριτό
- (ii) Το φάσμα $\sigma(T)$ δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένο στο $\mathbb{R}$ οπότε μπορεί να γραφεί ως

$$\sigma(T) = \{\lambda_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\} \quad (7.18)$$

με $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \lambda_n = \pm\infty$.

- (iii) Αυτό το διακριτό φάσμα είναι περιοδικό, δηλαδή

$$\lambda_n = \lambda_0 + nk \text{ για όλα τα } n \in \mathbb{Z},$$

όπου

$$k := 2\pi \left(\int_a^b \frac{w}{\rho} \right)^{-1} > 0$$

και $0 \leq \lambda_0 < k$.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{\psi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (7.1), (βλέπε (7.3)). Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις (ορθογώνιες αλλά όχι κανονικοποιημένες) στον $L^2((a, b); w)$ δίνονται για μερικά $c \in (a, b)$ από τη σχέση

$$\psi_n(x) := \sqrt{\frac{\rho(c)}{\rho(x)}} \exp \left(\int_c^x \frac{(\lambda_n w(t) - q(t))}{i\rho(t)} dt \right) \quad (7.19)$$

($x \in (a, b), n \in \mathbb{Z}$) και είναι οι λύσεις των αυτοσυζυγών προβλημάτων συνοριακών τιμών (7.7) και (7.17).

Αυτή η περίπτωση μπορεί να δώσει παραδείγματα της δειγματοληπτικής θεωρίας και της θεωρίας παρεμβολής όπως μπορούμε να δούμε στην επόμενη ενότητα.

7.5 Προσδιορισμός αναλυτικών πυρήνων Kramer

Εδώ περιγράφονται όλοι οι αναλυτικοί πυρήνες Kramer, με τις αναγκαίες ιδιότητες όπως δίνονται στο Θεώρημα 6.1. Αυτοί προκύπτουν από τα συμμετρικά προβλήματα συνοριακών τιμών που συσχετίζονται με την 1^ης τάξης Lagrange συμμετρική γραμμική διαφορική εξίσωση

$$i\rho(x)y'(x) + \frac{1}{2}i\rho'(x)y(x) + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x) \quad \text{για κάθε } x \in (a, b)$$

Οι πυρήνες αυτοί μπορούν να καθοριστούν από το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 7.8 : Έστω ότι δίδεται η διαφορική εξίσωση (7.1) ικανοποιώντας τις συνθήκες (7.2) και την επιπλέον συνθήκη (7.4) που δίνει ίσους δείκτες έλλειψης $d^- = d^+ = 1$ του ελαχιστικού τελεστή T_0 . Έστω ότι ο αυτοσυζυγής τελεστής T καθορίζεται επιβάλλοντας ένα ζεύγος συνοριακών συνθηκών (7.15) στο πεδίο ορισμού $D(T_1)$ του μεγιστικού τελεστή T_1 , χρησιμοποιώντας μια συνοριακή συνάρτηση συμμετρικών συνοριακών συνθηκών β . Θεωρούμε το φάσμα $\sigma(T)$ του T , $\sigma(T) = \{\lambda_n; n \in \mathbb{Z}\}$ με ιδιότητες όπως στην Παρατήρηση (7.7). Ορίζουμε την απεικόνιση $K: (a, b) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ως

$$K(x, \lambda) := \frac{1}{\rho(x)} \exp \left(\int_c^x \frac{\lambda w(t) - q(t)}{i\rho(t)} dt \right) \quad \forall x \in (a, b), \lambda \in \mathbb{C} \quad (7.20)$$

όπου $c \in (a, b)$ σταθερά.

Τότε ο πυρήνας K , μαζί με το σύνολο $\{\lambda_n: n \in \mathbb{Z}\}$, ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες του Θεωρήματος 6.1 οπότε ο K είναι ένας αναλυτικός πυρήνας στον χώρο Hilbert $L^2((a, b); w)$.

Απόδειξη : Βλέπε [14, Θεώρημα 6.1].

7.6 Αναλυτικές συναρτήσεις παρεμβολής και κύρια αποτελέσματα

Σε αυτή την ενότητα, καταρχάς καθορίζουμε την ολομορφία των συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται από παραμετρικά ολοκληρώματα σε Lebesgue χώρους ολοκλήρωσης. Στη συνέχεια, ορίζουμε σύμφωνα με τα προηγούμενα αποτελέσματα, αναλυτικές συναρτήσεις παρεμβολής που σχετίζονται με τους αναλυτικούς πυρήνες Kramer όπως αυτοί έχουν ορισθεί στο Θεώρημα 7.8.

Αναλυτικές ιδιότητες

Αναφέρουμε τις αναλυτικές ιδιότητες των συναρτήσεων που ορίζονται από παραμετρικά ολοκληρώματα τα οποία προκύπτουν από τα αυτοσυζυγή προβλήματα συνοριακών τιμών που σχετίζονται με την πρώτης τάξης γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση (7.1) σύμφωνα με τις συνθήκες (7.2).

Έχουμε:

Ορισμός 7.9 : Με τη χρήση της σχέσης (7.11) ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi_\beta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ως

$$\varphi_\beta(\lambda) := [y(\cdot, \lambda), \beta(\cdot)] \text{ για όλα τα } \lambda \in \mathbb{C} \quad (7.21)$$

όπου $y(\cdot, \lambda)$ είναι η μη τετριμμένη λύση στον χώρο $L^2((a, b); w)$, του προβλήματος συνοριακών τιμών (7.7) και (7.17), η οποία προσδιορίζεται από την επιλογή της συνάρτησης συνοριακής συνθήκης β (βλέπε (7.13)).

Ένα αποτέλεσμα του παραπάνω ορισμού είναι

Λήμμα 7.10 : Από τον Ορισμό 7.9 προκύπτει ότι $\varphi_\beta \in H(\mathbb{C})$.

Απόδειξη : Από τον τύπο του Green (7.8) και τα αποτελέσματα (7.10) και (7.11) παίρνουμε, για όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$, την ακόλουθη αναπαράσταση

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(\lambda) &= \int_a^b \left\{ \bar{\beta}(x) M[y(x, \lambda)] - y(x, \lambda) \overline{M[\beta]}(x) \right\} dx \\ &= \int_a^b w(x) \left\{ \bar{\beta}(x) w(x)^{-1} M[y(x, \lambda)] - y(x, \lambda) w(x)^{-1} \overline{M[\beta]}(x) \right\} dx \end{aligned}$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει. Επομένως, εξαιτίας της σχέσης (7.7) έχουμε ότι

$$\varphi_\beta(\lambda) = \int_a^b w(x) \left\{ \bar{\beta}(x) \lambda y(x, \lambda) - y(x, \lambda) w(x)^{-1} \overline{M[\beta]}(x) \right\} dx$$

Τώρα, οι $y(\cdot, \lambda)$, β και $w^{-1}M[\beta]$ ανήκουν όλες στον χώρο $L^2((a, b); w)$ και $y(x, \cdot) \in H(\mathbb{C})$ για όλα τα $x \in (a, b)$. Επίσης, από την άμεση εξέταση της λύσης y όπως δίνεται από τον τύπο (7.3) προκύπτει η ιδιότητα ότι δεδομένου ενός τυχαίου συμπαγούς συνόλου C του μιγαδικού $\mathbb{C}$, υπάρχει ένας θετικός αριθμός $L \equiv L(C)$, ο οποίος εξαρτάται από το C , τέτοιος ώστε

$$\int_a^b w(x) |y(x, \lambda)|^2 dx \leq L(C) \quad (\lambda \in C).$$

Δηλαδή η απεικόνιση

$$\lambda \rightarrow \int_a^b w(x) |y(x, \lambda)|^2 dx$$

είναι τοπικά φραγμένη στο $\mathbb{C}$. Επομένως, από τα αποτελέσματα στο [7], βλέπε επίσης [28, Ενότητα 2.83 ως 2.85], προκύπτει ότι $\varphi_\beta \in H(\mathbb{C})$.

Ένα πόρισμα από το προηγούμενο Λήμμα είναι

Πόρισμα 7.11 : Με τον αναλυτικό πυρήνα *Kramer* K όπως ορίζεται στο Θεώρημα 7.8, ορίζουμε την απεικόνιση $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, κάνοντας χρήση του τύπου (7.11), ως

$$G(\lambda) := [K(\cdot, \lambda), \beta(\cdot)] \quad \text{για όλα τα } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7.22)$$

Τότε $G \in H(\mathbb{C})$.

Απόδειξη : Ακολουθούμε τον τρόπο της απόδειξης του Λήμματος 7.10 αντικαθιστώντας y με K , καθώς K είναι μία μη τετριμμένη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (7.7) και (7.17) (σύγκρινε (7.3) με (7.20)).

Τώρα δίνουμε τον εξής ορισμό

Ορισμός 7.12 : Έστω ότι ο K είναι ένας αναλυτικός πυρήνας *Kramer* όπως στο Θεώρημα 7.8. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{G_n : n \in \mathbb{Z}\}$, με $G_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ως

$$G_n(\lambda) := [K(\cdot, \lambda), K(\cdot, \lambda_n)] \quad \text{για όλα τα } \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7.23)$$

όπου $\{\lambda_n\}$ είναι οι ιδιοτιμές του συναρτησιακού προβλήματος (7.7) και (7.17).

Έχουμε την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 7.13 : Αν G_n ορίζεται από τη σχέση (7.23) τότε $G_n \in H(\mathbb{C})$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη : Από τους τύπους (7.8), (7.10) και (7.11) και καθώς $K(\cdot, \lambda)$ είναι μία μη τετριμμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης (7.7) παίρνουμε ότι

$$G_n = [K(\cdot, \lambda), K(\cdot, \lambda_n)] = (\lambda - \lambda_n) \int_a^b w(x) K(x, \lambda) \bar{K}(x, \lambda_n) dx \quad (\lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}) \quad (7.24)$$

Καθορίζουμε τώρα το n και χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες (1), (2) και (4) του K από το Θεώρημα 7.8, αφού K είναι ένας αναλυτικός πυρήνας Kramer (βλέπε επίσης Θεώρημα 6.1). Με βάση τα αποτελέσματα στο [7], συμπεραίνουμε ότι $G_n \in H(\mathbb{C})$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$.

Αποτελέσματα παρεμβολής

Εδώ, αναζητούμε μια αναλυτική συνάρτηση G με απλές ρίζες στα σημεία $\{\lambda_n: n \in \mathbb{Z}\}$ και ιδιότητες όπως στον Ορισμό 6.3, έτσι ώστε να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη αναλυτική συνάρτηση παρεμβολής για τον αναλυτικό πυρήνα Kramer K .

Επομένως έχουμε τα ακόλουθα:

Λήμμα 7.14 : Έστω φ_β όπως στον Ορισμό 7.9. Τότε όλες οι ρίζες της φ_β είναι πραγματικές.

Απόδειξη : Σύμφωνα με την ανάλυση που ακολουθείται στην παράγραφο 7.3 παρατηρούμε ότι αν μπορούμε να βρούμε ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε να ικανοποιείται τόσο η (7.7) όσο και η (7.17), τότε λ είναι μια ιδιοτιμή του προβλήματος συνοριακών τιμών και η λύση $y(\cdot, \lambda)$ είναι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Το σημείο λ είναι τότε μια ιδιοτιμή του αυτοσυζυγούς τελεστή T που αντιπροσωπεύει τις (7.7) και (7.17) και καθορίζεται από την επιλογή του συνοριακού στοιχείου β . Έτσι $\lambda \in \mathbb{R}$. Όμως από (7.21), παρατηρούμε ότι λ είναι μια ιδιοτιμή του T αν και μόνο αν η φ_β έχει ρίζα στο λ . Αυτό προκύπτει από τις GKN συνοριακές συνθήκες όπου η $y(\cdot, \lambda)$ με λ μια ιδιοτιμή εξαρτώμενη από την επιλογή του β , πρέπει να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη (7.17). Ως εκ τούτου, όλες οι ρίζες της φ_β είναι πραγματικές.

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα [16, σελ.113], έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 7.15 : Υποθέτουμε ότι οι G και G_n ορίζονται από τις σχέσεις (7.22) και (7.23) αντίστοιχα. Τότε έχουμε την ακόλουθη σχέση

$$G_n(\lambda) = r_n G(\lambda), \quad \text{για όλα τα } \lambda \in \mathbb{C}, \quad (7.25)$$

όπου $r_n \in \mathbb{C}$, $r_n \neq 0$ και είναι ανεξάρτητο του λ .

Απόδειξη : Ακολουθώντας την ανάλυση του [16, Ενότητα 9] , παίρνουμε την ταυτότητα Plücker για τη μορφή $[\cdot, \cdot]$. Για πληροφορίες βλέπε [16, Ενότητα 4].

Έστω ότι $\{f_r, g_r: r = 1, 2\}$ είναι οποιεσδήποτε τέσσερις συναρτήσεις που ανήκουν στο μέγιστο πεδίο ορισμού $D(T_1)$ όπως αυτό ορίζεται στην Ενότητα 6. Τότε η ταυτότητα Plücker δηλώνει ότι ο 2×2 – πίνακας $[[f_r, g_s](x)]$ είναι ιδιάζων για όλα τα $x \in (a, b)$ δηλαδή

$$\det[[f_r, g_s](x)] = 0, \quad r, s = 1, 2, \quad x \in (a, b). \quad (7.26)$$

Αντικαθιστούμε στην (7.26) ως εξής: Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_n \in \sigma(T)$ (βλέπε (7.18)) και

$$f_1, f_2 \rightarrow K(\cdot, \lambda), \beta \quad g_1, g_2 \rightarrow K(\cdot, \lambda_n), \beta$$

τότε από (7.26) καθώς K και β είναι μέγιστα ορισμένες συναρτήσεις και λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (7.8) και (7.9) ισχύει

$$\begin{vmatrix} [K(\cdot, \lambda), K(\cdot, \lambda_n)](x) & [K(\cdot, \lambda), \beta(\cdot)](x) \\ [\beta(\cdot), K(\cdot, \lambda_n)](x) & [\beta(\cdot), \beta(\cdot)](x) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{για όλα τα } x \in (a, b).$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την (7.14) (και λαμβάνοντας υπόψιν ότι όλες οι συνοριακές συναρτήσεις συμμετρικών συνοριακών συνθηκών β μπορούν να οριστούν από τη σχέση (7.13)), καταλήγουμε στη σχέση

$$i[K(\cdot, \lambda), K(\cdot, \lambda_n)](x) = [K(\cdot, \lambda), \beta(\cdot)](x)[\beta(\cdot), K(\cdot, \lambda_n)](x). \quad (7.27)$$

Η μορφή $[f, g](\cdot)$ ορίζεται γενικά στο ανοιχτό διάστημα (a, b) για όλες τις f, g που ικανοποιούν την $f, g \in D(M)$ (βλέπε (7.5)), δηλαδή $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ και $f, g \in AC_{loc}(a, b)$. Ωστόσο, αν περιορίσουμε τις f, g να ανήκουν στο μέγιστο πεδίο ορισμού $D(T_1)$ (που είναι γραμμική θήκη του χώρου $L^2((a, b); w)$), δηλαδή αν ζητήσουμε επιπλέον $f, w^{-1}M[f] \in L^2((a, b); w)$ και ομοίως και για τη g , τότε από τον τύπο του Green (7.8) μπορούμε να ορίσουμε τη μορφή $[\cdot, \cdot](\cdot)$ στα συνοριακά σημεία a^+ (το ανοιχτό σύνορο $(a, \dots)$ αντικαθίσταται από το συμπαγές $[a, \dots)$ και ομοίως στο b^- , επειδή τα όρια στην (7.10) υπάρχουν στο $\mathbb{C}$ και είναι πεπερασμένα για όλες τις $f, g \in D(T_1)$). Έτσι μπορούμε να καθορίσουμε τις συνδυαστικές συμμετρικές GKN συνοριακές συνθήκες όπως στην (7.15). Τώρα θεωρούμε ότι το x τείνει στο b^- και μετά στο a^+ στην (7.28) και κάνοντας χρήση της (4.11) βλέπουμε ότι

$$i[K(\cdot, \lambda), K(\cdot, \lambda_n)] = [\beta, K(\cdot, \lambda_n)](b)\{[K(\cdot, \lambda), \beta(\cdot)](b) - [K(\cdot, \lambda), \beta(\cdot)](a)\}$$

καθώς $K(\cdot, \lambda)$ για $\lambda = \lambda_n$ είναι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Ως εκ τούτου από τις (7.22) και (7.23) βρίσκουμε ότι

$$G_n(\lambda) = -i[\beta(\cdot), K(\cdot, \lambda_n)](b)G(\lambda) \quad \text{για όλα τα } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7.28)$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι

$$[\beta(\cdot), K(\cdot, \lambda_n)](b) \neq 0 \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (7.29)$$

Ας υποθέσουμε, για το αντίθετο, ότι για κάποια $s \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$[\beta(\cdot)K(\cdot, \lambda_s)](b) = 0. \quad (7.30)$$

Τότε από τις (7.29) και (7.25) προκύπτει ότι

$$G_s(\lambda) = (\lambda - \lambda_s) \int_a^b w(x)K(x, \lambda)\bar{K}(x, \lambda_s) dx = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}). \quad (7.31)$$

Επομένως, καθώς η (7.31) ισχύει για όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$, οπότε και για $\lambda \neq \lambda_s$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b w(x)K(x, \lambda)\bar{K}(x, \lambda_s) dx = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq \lambda_s),$$

πράγμα που σημαίνει ότι

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \int_a^b w(x)K(x, \lambda)\bar{K}(x, \lambda_s) dx = 0.$$

Αλλά το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μια ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε το όριο εντός του συμβόλου ολοκλήρωσης και να λάβουμε

$$\int_a^b w(x)|K(x, \lambda_s)|^2 dx = 0.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με το

$$\int_a^b w(x)|K(x, \lambda_s)|^2 dx > 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

το οποίο ισχύει, καθώς K είναι μια μη τετριμμένη λύση στον χώρο $L^2((a, b); w)$ του προβλήματος συνοριακών τιμών (7.7) και (7.17). Επομένως η (7.30) δεν ευσταθεί και ισχύει η (7.29). Ως εκ τούτου, η σχέση (7.25) προκύπτει από τη σχέση (7.28), δεδομένου ότι οι όροι με $r_n = -i[\beta(\cdot), K(\cdot, \lambda_n)](b)$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$, είναι ανεξάρτητοι του λ .

Η επόμενη ιδιότητα της παραγώγου της G_n είναι χρήσιμη για τους υπολογισμούς μας.

Λήμμα 7.16 : Αν η G_n είναι δεδομένη όπως στον ορισμό 7.12 τότε η παράγωγος της G_n στα σημεία του φάσματος του αυτοσυζυγή τελεστή T που αντιπροσωπεύει τις σχέσεις (7.7) και (7.17) ικανοποιεί την ιδιότητα

$$G'_n(\lambda_n) \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7.32)$$

Απόδειξη : Από την Πρόταση 7.13 μπορούμε να εξετάσουμε την παράγωγο της G_n . Επομένως υπολογίζουμε (βλέπε (7.23) και (7.24))

$$\begin{aligned} G'_n(\lambda) &= \int_a^b w(x) K(x, \lambda) \bar{K}(x, \lambda_n) dx \\ &\quad + (\lambda - \lambda_n) \frac{d}{d\lambda} \int_a^b w(x) K(x, \lambda) \bar{K}(x, \lambda_n) dx \end{aligned} \quad (7.33)$$

όπου τα ολοκληρώματα δεξιά της σχέσης (7.34) είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $\mathbb{C}$ (βλέπε Πρόταση (7.13)), οπότε η παράγωγος υπάρχει και είναι πεπερασμένη.

Τώρα έστω $\lambda \rightarrow \lambda_n$. Τότε

$$G'_n(\lambda_n) = \int_a^b w(x) |K(x, \lambda_n)|^2 dx > 0 \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (7.34)$$

όπου K είναι μια μη τετριμμένη λύση των (7.7) και (7.17). Επομένως η (7.32) ισχύει.

Ο προηγούμενος τρόπος εργασίας μας δίνει τη δυνατότητα να παραθέσουμε τώρα τα κύρια αποτελέσματα συγκεντρωμένα στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 7.17 : Ας υποθέσουμε ότι ισχύουν όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος 7.8 και η $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται από τη σχέση (7.23), δηλαδή ισχύει $G(\lambda) := [K(\cdot, \lambda), \beta(\cdot)]$ για όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$, όπου K είναι ένας αναλυτικός πυρήνας *Kramer* που δίνεται από τον τύπο (7.20) και β η αντίστοιχη συνάρτηση συνοριακών συνθηκών. Τότε η συνάρτηση G έχει όλες τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) και (iv) που απαιτούνται από τον Ορισμό 6.3 που ορίζει την G σαν μια αναλυτική συνάρτηση παρεμβολής για τον αναλυτικό πυρήνα *Kramer* K .

Απόδειξη : Η ιδιότητα (i) για τη G δίνεται στο Πρόσχημα 7.11.

Η ιδιότητα (ii) προκύπτει από το Λήμμα 7.14 και από το επιχείρημα ότι η G διαφέρει από τη φ_β που ορίζεται από την (7.22) μόνο σε έναν αριθμό $\mu \neq 0$ που είναι ανεξάρτητος του λ , δηλαδή

$$G(\lambda) = \mu \varphi_\beta(\lambda). \quad (7.35)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε τη σχέση (7.35) από τους ορισμούς (7.10) και (7.9) των συναρτήσεων G και φ αντίστοιχα, και χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

(α) Τόσο η y όσο και η K είναι λύσεις των προβλημάτων συνοριακών τιμών (7.7) και (7.17) που ορίζονται από τη β , δηλαδή ιδιοσυναρτήσεις (βλέπε (7.19)) ή αν

θεωρηθούν στοιχεία του $L^2((a, b); w)$ ιδιοδιανύσματα του αυτοσυζυγή τελεστή T που αντιπροσωπεύει τις σχέσεις (7.7) και (7.17) που καθορίζονται από τη β . Τώρα, από την Παρατήρηση 7.7, αυτά τα ιδιοδιανύσματα αποτελούν ένα πλήρες, ορθογώνιο σύνολο στον χώρο $L^2((a, b); w)$.

(b) Η διάσταση κάθε ιδιόχωρου οποιασδήποτε ιδιοτιμής του T είναι 1.

Επομένως, από τις σχέσεις (7.21) και (7.22) προκύπτει η (7.35). Ως εκ τούτου, $G(\lambda)=0$ αν και μόνο αν $\lambda \in \{\lambda_n: n \in \mathbb{Z}\}$.

Η ιδιότητα (iii) προκύπτει από έναν συνδυασμό των σχέσεων (7.25) και (7.32). Σημειώνουμε ότι η απόδειξη αυτής της ιδιότητας (iii), ότι όλες οι ρίζες του G είναι απλές, δηλαδή $G'(\lambda_n) \neq 0$ ($n \in \mathbb{Z}$), δεν προκύπτει από τη γνωστή ιδιότητα ότι ο τελεστής T έχει ένα απλό φάσμα, αλλά απαιτεί τη μελέτη των αναλυτικών ιδιοτήτων των αποτελεσμάτων στο [14] και επίσης στο [16], και την απόδειξη του Λήμματος 7.16 παραπάνω.

Η ιδιότητα (iv) προκύπτει από την (6.2), όπου η ακολουθία $\{S_n: n \in \mathbb{Z}\}$ για τον πυρήνα K δίνεται από

$$S_n(\lambda) = \frac{\int_a^b w(x) K(x, \lambda) \bar{K}(x, \lambda_n) dx}{\int_a^b w(x) |K(x, \lambda_n)|^2 dx}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε πάνω και κάτω επί τον συντελεστή $(\lambda - \lambda_n) \neq 0$, τότε, από τις (7.24) και (7.34) έχουμε

$$S_n(\lambda) = \frac{G_n(\lambda)}{G'_n(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (\lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}).$$

Τότε από τη σχέση (7.25) συμπεραίνουμε ότι η (6.5) ισχύει, δηλαδή

$$S_n(\lambda) = \frac{G(\lambda)}{G'_n(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (\lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

7.7 Παραδείγματα αποτελεσμάτων παρεμβολής

Εδώ δίνουμε ένα παράδειγμα ενός 1^{ης} τάξης προβλήματος συνοριακών τιμών και τη θεωρία παρεμβολής του παρουσιάζοντας την αντίστοιχη αναλυτική συνάρτηση παρεμβολής. Αυτό είναι απλό αλλά σημαντικό για το σκοπό της αποσαφήνισης της προηγούμενης ανάλυσης.

Έστω $\sigma > 0$. Θεωρούμε το 1^{ης} τάξης, αυτοσυζυγές, πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$iy'(x) = \lambda y(x) \quad (x \in [-\sigma, \sigma]), \quad (7.36)$$

$$y(-\sigma) = y(\sigma) \quad (7.37)$$

με $d^\pm = 1$. Επίσης, για την συνοριακή συνθήκη, με σκοπό να παράγουμε έναν αυτοσυζυγή τελεστή T στον $L^2(-\sigma, \sigma)$, παίρνουμε $\beta(x) = 1$ για όλα τα $x \in [-\sigma, \sigma]$, και σε αυτή την περίπτωση η γενική συνοριακή συνθήκη είναι η ισοδύναμη κατά σημείο συνθήκη (7.37). Τότε οι (7.36) και (7.37) αποτελούν ένα συμμετρικό πρόβλημα στον $L^2(-\sigma, \sigma)$. Το πρόβλημα αυτό έχει αυτοσυζυγή αναπαράσταση με τον τελεστή T , όπου ο T ορίζεται από (βλέπε (7.12), (7.15) και (7.16))

$$D(T) := \{f \in [-\sigma, \sigma] \rightarrow \mathbb{C} : f \in AC[-\sigma, \sigma], f' \in L^2(-\sigma, \sigma), \\ [f, 1](+\sigma) - [f, 1](-\sigma) = 0\},$$

$$Tf := if' \text{ για όλα τα } f \in D(T)$$

Το φάσμα του T είναι

$$\sigma(T) = \{\lambda_n = \frac{n\pi}{\sigma} : n \in \mathbb{Z}\}$$

και οι ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$\psi_n(x) = \exp\left(-\frac{in\pi x}{\sigma}\right),$$

όπου $n \in \mathbb{Z}$ και $x \in [-\sigma, \sigma]$.

Αν για $x \in [-\sigma, \sigma]$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ ορίσουμε $K(x, \lambda) := \exp(-ix\lambda)$, τότε ο K είναι ένας αναλυτικός πυρήνας Kramer με (βλέπε (6.2)) την ακολουθία $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\}$, όπου $S_n(\cdot)$ δίνονται από

$$S_n(\lambda) = \frac{\sin(\sigma\lambda - n\pi)}{\sigma\lambda - n\pi}, \quad \text{για όλα τα } n \in \mathbb{Z} \text{ και } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Υπενθυμίζοντας την (7.22), για αυτόν τον πυρήνα K υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση παρεμβολής $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από $G(\lambda) = \sin(\sigma\lambda)$.

Φαίνεται καθαρά ότι η G ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες (i) έως (iv) του Ορισμού (6.3), έτσι ώστε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.4, η δειγματοληπτική σειρά (6.3) παίρνει την κλασσική μορφή της σειράς παρεμβολής Lagrange (6.6) και τηρείται η σημαντική ειδική περίπτωση της επέκτασης παρεμβολής που ονομάζεται τύπος παρεμβολής *Shannon – Whittaker* (βλέπε [3], [27], [30] και [14, Θεώρημα 7.1]).

Για περαιτέρω σχόλια για το παράδειγμα αναφερόμαστε στο [9, Ενότητα 5.1].

Ένα επιπλέον παράδειγμα της θεωρίας παρεμβολής είναι το ακόλουθο.

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση, για την οποία

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad w(x) = (1+x)^{-2} \text{ για όλα τα } x \in [0, \infty),$$

$$iy'(x) = \lambda \frac{1}{(1+x)^2} y(x) , \text{ για όλα τα } x \in [0, \infty).$$

Για αυτή την εξίσωση

$$[f, g](x) = if(x)\bar{g}(x) \quad \text{για όλα τα } x \in [0, \infty).$$

Για αυτό το παράδειγμα,

$$\int_0^\infty \frac{w(x)}{p(x)} dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx = 1 < \infty.$$

Ένας υπολογισμός δείχνει ότι η λύση y για μερικά $\gamma \in \mathbb{C}$ έχει τη μορφή

$$y(x, \lambda) = \gamma \exp\left(\frac{\lambda}{i} \frac{x}{1+x}\right).$$

Για μια συνοριακή συνθήκη συνάρτηση β μπορούμε να πάρουμε πάλι $\beta(x) = 1$ για όλα τα $x \in [0, \infty)$. Αυτή η συνοριακή συνθήκη οδηγεί στις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις που δίνονται από τις σχέσεις

$$\lambda_n = 2n\pi$$

και

$$\psi_n(x) = \exp\left(\frac{2n\pi}{i} \frac{x}{1+x}\right)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$ και $x \in [0, \infty)$.

Ο αναλυτικός πυρήνας Kramer και η συνάρτηση παρεμβολής για όλα τα $x \in [0, \infty)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$K(x, \lambda) = \exp\left(\frac{\lambda}{i} \frac{x}{1+x}\right)$$

και

$$G(\lambda) = i(\exp(-i\lambda) - 1)$$

Αυτά τα αποτελέσματα δίνουν τον τύπο παρεμβολής

$$F(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(2n\pi) \frac{i(\exp(-i\lambda) - 1)}{\lambda - 2n\pi} \quad \text{για όλα τα } \lambda \in \mathbb{C},$$

και ισχύει για όλα τα $F \in \{K\}$ όπου, για όλα τα $f \in L^2([0, \infty); (1+x)^{-2})$ και όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\{K\} = \left\{ F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} \exp\left(\frac{\lambda}{i} \frac{x}{1+x}\right) f(x) dx \right\}.$$

Για περισσότερες πληροφορίες βλ. [13], [14], [15], [26].

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*. Vol. I, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 9, Pitman, Massachusetts, 1981.
- [2] P. L. Butzer, A survey of the Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extensions, *J. Math. Res. Exposition* **3** (1983), no. 1, 185-212.
- [3] P. L. Butzer, W. Splettstößer and R. L. Stens, *The sampling theorem and linear prediction in signal analysis*, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **90** (1988), no. I, 1-70.
- [4] P. L. Butzer and R. L. Stens, *Sampling theory for not necessarily band-limited functions: a historical overview*, *SIAM Rev.* **34** (1992), no I, 40-53.
- [5] L. L. Campbell, *A comparison of the sampling theorems of Kramer and Whittaker*, *J. SIAM* **12** (1964), 117-130.
- [6] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Craw-Hill, New York, 1955.
- [7] W. N. Everitt, W. K. Hayman and G. Nasri-Roudsari, *On the representation of holomorphic functions by integrals*, *Appl. Anal.* **65** (1997), 95-102.
- [8] W. N. Everitt and L. Markus, *The Glazman-Krein-Naimark theorem for ordinary differential operators*, *New Results in Operator Theory and Its Applications*, *Oper. Theory Adv. Appl.*, vol. 98, Birkhauser, Basel, 1997, pp. 118-130.
- [9] W. N. Everitt and G. Nasri-Roudsari, *Interpolation and sampling theories, and linear boundary problems*, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis, Advanced Topics*, vol. 5, Oxford University Press, Oxford, 1999, 96-129.
- [10] W. N. Everitt and G. Nasri-Roudsari, *Sturm Liouville problems with coupled boundary conditions and Lagrange interpolation series*, *J. Comput. Anal. Appl.* (7) **1** (1999), no 4, 319-347.
- [11] W. N. Everitt and G. Nasri-Roudsari, *Sturm Liouville problems with coupled boundary conditions and Lagrange interpolation series II*, *Rend. de Mat.* VII (2000), no. 20, 199-238.
- [12] W. N. Everitt and G. Nasri-Roudsari and J. Rehberg, *A note on the analytic form of the Kramer sampling theorem*, *Results Math* **34** (1998), no. 3-4, 310-319.
- [13] W. N. Everitt and A. Poulkou, *Some observations and remarks on differential operators generated by first-order boundary problems*, *J. Comput. Appl. Math.* **153** (2001), 201-211.
- [14] W. N. Everitt and A. Poulkou, *Kramer analytic kernels and first-order boundary value problems*, *J. Comput. Appl. Math.* **148** (2002), no. 1, 29-47.
- [15] W. N. Everitt and A. Poulkou, *Interpolation theory and first-order boundary value problems*, *Math. Nahr.* **269-270** (2004), 116-128.
- [16] W. N. Everitt and G. Schottler and P. L. Butzer, *Sturm-Liouville boundary value problems and Lagrange interpolation series*, *Rend. Math. Appl.* (7) **14** (1994), 87-126.
- [17] Y. Hao, *Generalizing Sampling Theory for Time-Varying Nyquist Rates using Self-Adjoint Extensions of Symmetric Operators with Deficiency Indices (1.1) in Hilbert Spaces* Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, 2011
- [18] J. R. Higgins, *Five short stories about the cardinal series*, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S)* **12** (1985), no. 1, 45-89.
- [19] J. R. Higgins, *Sampling theory in Fourier and Signal Analysis*, *Foundations*, Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [20] J. R. Higgins and R. Stens, *Sampling theory in Fourier and Signal Analysis*, *Advanced Topics*, vol. 2, Oxford University Press, Oxford, 1999.

- [21] A. J. Jerry, *The Shannon sampling theorem – its various extensions and applications: A tutorial review*, Proc. IEEE (1977), no. 11, 1565-1596.
- [22] V. A. Kotel'nikov, *On the carrying capacity of the ether and wire in telecommunications*, Material for the First All- Union Conference on Questions of Communication, Izd. Red. Upr. Syvazi RKKA, Moscow, 1933 (Russian).
- [23] H. P. Kramer, *A generalized sampling theorem*, J. Math. Phys. **38** (1959), 68-72.
- [24] R. J. Marks II, *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Springer Texts in Electrical Engineering, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [25] M. A. Naimark, *Linear Differential Operators. Part II: Linear Differential Operators in Hilbert Space*, Frederick Ungar, New York, 1968, with additional material by the author, and a supplement by V. E. Ljance. Translated from the Russian by E. R. Dawson. English translation edited by W. N. Everitt.
- [26] A. Poulkou, *On sampling expansions of Kramer type*, Abs. and Appl. Anal., 2004, 371-385.
- [27] C. E. Shannon, *Communication in the presence of noise*, Proc. IRE **37** (1949), 10-21.
- [28] E. C. Titchmarsh, *The theory of Functions*, Oxford University Press, 1939.
- [29] E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations. Part I*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford University Press, 1962.
- [30] E. T. Whittaker, *On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **35** (1915), 181-194.
- [31] J. M. Whittaker, *Interpolatory function theory*, Cambridge University Press, 1935.
- [32] A. I. Zayed, G. Hinsen, and P. L. Butzer, *On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm-Liouville problems*, SIAM J. Appl. Math. **50** (1990), no. 3, 893-909.
- [33] A. I. Zayed, *On Kramer's sampling theorem associated with general Sturm-Liouville problems and Lagrange interpolation*, SIAM J. Appl. Math. **51** (1991), 575-604.