

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΤΕΡΟΚΛΙΝΕΙΣ ΤΡΟΧΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
 $(|u_x|^{p-2}u_x)_x - \frac{1}{q}W_u(u) = 0$ ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΣΥΝΔΕΟΥΝ
ΟΛΙΚΑ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ W .

Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία

ΚΑΡΑΝΤΖΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Επιβλέπων Καθηγητής:
ΑΛΙΚΑΚΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2013

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικόλαο Αλικάκο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του, τον καθηγητή κ. Χριστόδουλο Αθανασιάδη και την επ. καθηγήτρια κα. Γεωργία Καραλή για την τιμή που μου έκαναν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή, τον διδάκτορα κ. Απόστολο Δάμιαλη για την αμέριστη βοήθειά του και τέλος την οικογένειά μου για τη συνεχή στήριξη και συμπαράστασή της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	1
2. Το πρόβλημα και βασικές παρατηρήσεις	2
3. Το περιορισμένο μεταβολικό πρόβλημα	4
3.1. Ύπαρξη λύσης για το περιορισμένο πρόβλημα	5
3.2. Αφαίρεση των περιορισμών	7
3.3. Ένας μεταβολικός χαρακτηρισμός για τη συνδέουσα τροχιά	11
4. Μελέτη του προβλήματος ύπαρξης ετεροκλινούς τροχιάς στο μυγαδικό επίπεδο	12
5. Βιβλιογραφία	20

**ΕΤΕΡΟΚΛΙΝΕΙΣ ΤΡΟΧΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ $(|u_x|^{p-2}u_x)_x - \frac{1}{q}W_u(u) = 0$
ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΣΥΝΔΕΟΥΝ ΟΛΙΚΑ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ W .**

1. Εισαγωγή

Το πρόβλημα που μελετάμε είναι η ύπαρξη ετεροκλινών τροχιών για το σύστημα $(|u_x|^{p-2}u_x)_x - \frac{1}{q}W_u(u) = 0$, όπου $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \in \mathbb{R}^N$ και W είναι μία ομαλή συνάρτηση δυναμικού με πεπερασμένο πλήθος ολικών ελαχίστων. Στόχος μας είναι η γενίκευση της θεωρίας που έχει παρουσιαστεί στις εργασίες των [AF] και [ABC] για το σύστημα $2u_{xx} - \nabla W_u(u) = 0$, για την περίπτωση δηλαδή όπου $p = q = 2$. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση δύο ολικών ελαχίστων, υποθέτοντας μία ασθενή συνθήκη μη εκφυλισμού στο δυναμικό και μέσω της αρχής του *Hamilton*, αποδεικνύουμε ότι το συναρτησιακό της δράσης έχει ελαχιστοποιητή στο σύνολο των απεικονίσεων που συνδέουν τα δύο ελάχιστα του δυναμικού. Στη συνέχεια, θεωρώντας δυναμικά με περισσότερα από δύο ολικά ελάχιστα περιοριζόμαστε στο μιγαδικό επίπεδο και μέσω της αρχής του *Jacobi* κατασκευάζουμε ετεροκλινείς τροχιές σε κλειστή μορφή ενώ μελετάμε συγκεκριμένα παραδείγματα και φαινόμενα μη ύπαρξης και μη μοναδικότητας. Τα αποτελέσματα που εξάγονται υποδεικνύουν ότι η θεωρία γενικεύεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο $p > 1$.

Η επεξεργασία του παρόντος κειμένου έγινε με το σύστημα προετοιμασίας εγγράφων $\text{\LaTeX}$. Καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής χρησιμοποιήθηκε λογισμικό ανοιχτού κώδικα.

2. Το πρόβλημα και βασικές παρατηρήσεις

Έστω Ω ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και έστω $W : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση δυναμικού τέτοια, ώστε $W > 0$ στο $\mathbb{R}^N \setminus A$ και $W = 0$ στο $A = \{a^+, a^-\}$. Θεωρούμε το σύστημα των N συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$(1) \quad (|u_x|^{p-2}u_x)_x - \frac{1}{q}W_u(u) = 0 \text{ στο } \mathbb{R}, \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = a^\pm$$

όπου $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ είναι μία διανυσματική συνάρτηση, $W_u = (\partial W / \partial u_1, \dots, \partial W / \partial u_N)$ και $p, q > 1$ είναι Hölder συζυγείς, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Οι εξισώσεις (1) αντιπροσωπεύουν την κίνηση N υλικών σημείων με ίδια μάζα υπό την επίδραση του δυναμικού $-W(u)$, με το x και το u να δηλώνουν το χρόνο και τη θέση αντίστοιχα. Εναλλακτικά, σύμφωνα με την αρχή ελαχιστοποίησης της δράσης του Hamilton, η εξίσωση κίνησης από το ένα ελάχιστο του δυναμικού στο άλλο αποτελεί κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού δράσης $A_p : W^{1,p}([t_1, t_2], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$(2) \quad A_p(u, (t_1, t_2)) := \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{|u_x|^p}{p} + \frac{W(u)}{q} \right) dx.$$

Επομένως, οι εξισώσεις (1) είναι οι αντίστοιχες Euler-Lagrange εξισώσεις με $t_1 = -\infty$ και $t_2 = +\infty$.

Ένας άλλος τρόπος να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα, είναι μέσω της αρχής του Jacobi, η οποία αφορά σε καμπύλες και ανιχνεύει γεωδαισιακές. Πιο συγκεκριμένα, επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό μήκους

$$(3) \quad L_p(u) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt[q]{W(u)} |u_x| dx,$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο παραμετρήσεων και επομένως μπορεί να γραφεί ως

$$L_p(\Gamma) = \int_{\Gamma} \sqrt[q]{W(\Gamma)} d\Gamma.$$

Παρατηρούμε ότι το συναρτησιακό A_p είναι ορισμένο σε σύνολο συναρτήσεων, ενώ το L_p είναι ορισμένο σε σύνολο καμπυλών. Η σχέση μεταξύ των δύο είναι ότι τα κρίσιμα σημεία του L_p , παραμετρικοποιημένα με παράμετρο ισοκατανομής (θα οριστεί παρακάτω), δίνουν κρίσιμα σημεία του A_p .

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ορισμένες ιδιότητες που έχουν οι λύσεις του συστήματος (1). Για να γίνει αυτό, αρχικά ορίζουμε ως τροχιά μίας συνάρτησης $u : t \in (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$ να είναι το σύνολο $u((a, b)) := \{u(t) : t \in (a, b)\}$. Επιπροσθέτως, έστω γ μία ομαλή καμπύλη στο $\Omega^0 := \Omega \setminus A$ και έστω ότι μία παραμετρικοποίηση της γ είναι μία συνάρτηση $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$ τέτοια, ώστε $|u_t| > 0$ στο (a, b) με $\gamma = u((a, b))$. Θα λέμε ότι η παράμετρος t είναι *παράμετρος ισοκατανομής*, αν $|u_t|^p = W(u)$ για $t \in (a, b)$, ενώ θα λέμε ότι είναι *παράμετρος μήκους τόξου*, αν $\sqrt[q]{W(u)} |u_t| = 1$. Επίσης παρατηρούμε ότι τα a και b μπορούν να είναι $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχως.

Μία σημαντική ιδιότητα των λύσεων του (1) παρουσιάζεται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.1. Για οποιαδήποτε συνδέουσα τροχιά u που επιλύει το σύστημα (1) και έχει πεπερασμένη δράση, ισχύει ότι

$$(4) \quad |u_x|^p = W(u) \quad \text{στο } \mathbb{R},$$

$$(5) \quad A_p(u) = L_p(u) = L_p(\Gamma(u)),$$

όπου $\Gamma(u) = \{u(x) : x \in \mathbb{R}\}$ είναι η τροχιά της u .

Απόδειξη. Έστω u μία λύση του (1). Τότε

$$(6) \quad \begin{aligned} (|u_x|^p - W(u))_x &= p|u_x|^{p-2}u_x u_{xx} - W_u(u)u_x \\ &= (p|u_x|^{p-2}u_{xx} - W_u(u))u_x. \end{aligned}$$

Επιπλέον, από την εξίσωση

$$q(|u_x|^{p-2}u_x)_x = q(p-1)|u_x|^{p-2}u_{xx}$$

και το γεγονός ότι οι p και q είναι Hölder συζυγείς συνάγουμε ότι, μέσω της (1), η εξίσωση (6) παίρνει τη μορφή

$$(|u_x|^p - W(u))_x = (q(|u_x|^{p-2}u_x)_x - W_u(u))u_x = 0.$$

Άρα, η συνάρτηση $|u_x|^p - W(u)$ είναι σταθερή, δηλαδή $|u_x|^p - W(u) = C$ για κάποια πεπερασμένη σταθερά C . Επομένως, χρησιμοποιώντας το όριο της u καθώς το $x \rightarrow +\infty$, έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|u_x|^p - W(u)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |u_x|^p = C.$$

Από αυτό και το γεγονός ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |u_x|^p dx < +\infty,$$

συμπεραίνουμε ότι $C = 0$ κι έτσι προκύπτει η σχέση (4). Τέλος, πάλι από την (4), συνάγουμε ότι

$$\frac{1}{p}|u_x|^p + \frac{1}{q}W(u) = \sqrt[q]{W(u)}|u_x|,$$

και κατ' επέκτασιν την εξίσωση (5). $\square$

Πρόταση 2.1. Κάθε ομαλή καμπύλη γ στο Ω^0 επιδέχεται παραμετρικοποίηση ισοκατανομής καθώς και παραμετρικοποίηση μήκους τόξου.

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η γ είναι ομαλή σημαίνει ότι μπορεί να παραμετρικοποιηθεί μέσω μίας ομαλής συνάρτησης $u : t \in (a, b) \rightarrow \Omega^0$. Σταθεροποιούμε ένα $c \in (a, b)$ και ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$x(t) = \int_c^t \frac{|u_t(\tau)|}{\sqrt[p]{W(u(\tau))}} d\tau, \quad s(t) = \int_c^t \sqrt[q]{W(u(\tau))} |u_t(\tau)| d\tau.$$

Παρατηρούμε ότι $dx/dt > 0$ και $ds/dt > 0$, έτσι οι $t \mapsto x(t)$ και $t \mapsto s(t)$ είναι ολικά αντιστρέψιμες. Άρα

$$\left| \frac{du}{dx} \right|^p = \left| \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} \right|^p = \left| \frac{du}{dt} \right|^p \frac{(\sqrt[q]{W})^p}{|u_t|^p} = W(u)$$

και

$$\sqrt[q]{W(u)} |u_s| = \sqrt[q]{W(u)} \left| \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \sqrt[q]{W(u)} |u_t| \frac{1}{\sqrt[q]{W(u)} |u_t|} = 1,$$

που σημαίνει ότι το x είναι παράμετρος ισοκατανομής και το s παράμετρος μήκους τόξου. $\square$

Σημείωση 1. Από την ανισότητα του Young λαμβάνουμε ότι

$$\sqrt[q]{W(u)} |u_x| \leq \frac{1}{p} |u_x|^p + \frac{1}{q} W(u),$$

άρα η Πρόταση 2.1 υποδεικνύει ότι για κάθε γ στο Ω^0 υπάρχει μία παραμετρικοποίηση u της γ τέτοια, ώστε $\gamma = \Gamma(u)$, για την οποία, από το Λήμμα 2.1 συνάγουμε ότι $A_p(u) = L_p(u) = L_p(\gamma)$.

3. Το περιορισμένο μεταβολικό πρόβλημα

Στόχος μας είναι να βρούμε λύση στο πρόβλημα (1) ελαχιστοποιώντας τη δράση A_p σε όλη την πραγματική ευθεία. Η βασική δυσκολία είναι η έλλειψη συμπαγείας, αφού η δράση A_p είναι ανεξάρτητη μεταφορών, δηλαδή ισχύει ότι $A_p(u(\cdot + \tau)) = A_p(u)$ για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, ενδέχεται μία ελαχιστοποιούσα ακολουθία $\{u_k\}_k$ τέτοια, ώστε $u_k(\pm\infty) = a^\pm$, αντί να συγκλίνει σε έναν ελαχιστοποιητή που συνδέει τα ελάχιστα a^- και a^+ , να συγκλίνει σε ένα εκ των δύο ολικών ελαχίστων $a^\pm$. Στην εργασία των [AF] για την περίπτωση $p = 2$, η παθογένεια αυτή αντιμετωπίζεται αρχικά με την εισαγωγή τεχνητών περιορισμών και εν συνεχεία υποθέτοντας την παρακάτω συνθήκη μη εκφυλισμού των ακροτάτων $a = a^\pm$:

Υπόθεση (h). Θεωρούμε ότι υπάρχει $R > 0$ τέτοιο, ώστε η απεικόνιση $r \mapsto W(a + r\xi)$ έχει γνησίως θετική παράγωγο για κάθε $r \in (0, R)$ και για κάθε $\xi \in S^{N-1} := \{u \in \mathbb{R}^N : |u| = 1\}$, όπου $R < |a^+ - a^-|$.

Σε αυτήν την εργασία γενικεύουμε τη μεθοδό τους για αυθαίρετο πεπερασμένο $p > 1$. Πιο συγκεκριμένα, για σταθεροποιημένο $M > 0$, θεωρούμε διανυσματικές συναρτήσεις με γραφήματα στους κυλίνδρους

$$X_M^+ = \{u \in W_{\text{loc}}^{1,p} : |u(x) - a^+| \leq \frac{R}{2}, \text{ για } x \geq +M\},$$

$$X_M^- = \{u \in W_{\text{loc}}^{1,p} : |u(x) - a^-| \leq \frac{R}{2}, \text{ για } x \leq -M\}.$$

Επιπλέον, δεδομένης μίας $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, γράφουμε τη συνάρτηση $u(x) - a^\pm$ σε πολική μορφή, δηλαδή

$$u(x) - a^\pm = |u(x) - a^\pm| \frac{u(x) - a^\pm}{|u(x) - a^\pm|} =: \rho^\pm(x) n^\pm(x),$$

όπου $\rho^\pm : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ και $n^\pm : \mathbb{R} \rightarrow S^{N-1}$. Έτσι, αν $u \in X_M^+$, έπεται ότι

$$u(x) = a^+ + \rho^+(x) n^+(x) \quad \text{με } \rho^+(x) \leq R/2 \text{ για κάθε } x \in [M, +\infty),$$

και ομοίως αν $u \in X_M^-$. Παρατηρούμε ότι η πολική μορφή είναι καλώς ορισμένη για $\rho^\pm(x) \neq 0$, διότι το σύνολο αυτό είναι ανοικτό και $W_{\text{loc}}^{1,p} \hookrightarrow C$. Επιπλέον για γενική $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}$ ισχύει ότι $\rho n \in W_{\text{loc}}^{1,p}$ και επιπλέον ότι

$$|u_x|^p = (|u_x|^2)^{\frac{p}{2}} = (\rho_x^2 + \rho^2 |n_x|^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Αλλά και στο σύνολο $u(x) = a^\pm$ ισχύει ότι $|u_x| = 0$ σχεδόν παντού (για Sobolev συναρτήσεις βλ. [EG]). Επομένως, για κάθε διάστημα $S \subset \mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι

$$\int_S |u_x|^p dx = \int_{S \cap \{\rho > 0\}} (\rho_x^2 + \rho^2 |n_x|^2)^{\frac{p}{2}} dx.$$

Η παραπάνω έκφραση θα μας βοηθήσει από δω και στο εξής να αντιμετωπίσουμε ολοκληρώματα σαν αυτό στο αριστερό μέλος.

Στη συνέχεια θεωρούμε το μεταβολικό πρόβλημα

$$(7) \quad \min_{X_M^- \cap X_M^+} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|u_x|^p}{p} + \frac{W(u)}{q} \right) dx.$$

Στην κλάση των συναρτήσεων με γραφήματα μέσα στους παραπάνω κυλίνδρους, είναι εφικτές μόνο φραγμένες μεταφορές και έτσι το πρόβλημα της έλ-λειψης συμπάγειας αντιμετωπίζεται. Παρ' όλα αυτά, η ύπαρξη ενός ελαχιστοποιητή U για το περιορισμένο πρόβλημα, δεν συνεπάγεται απευθείας ύπαρξη λύσης για το πρόβλημα (1). Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι ένας τέτοιος ελαχιστοποιητής δεν «πιάνει» τους περιορισμούς. Το κομβικό σημείο, για να το επιτύχουμε αυτό, είναι να δείξουμε ότι λόγω της υπόθεσης (h) , για αρκετά μεγάλο, το σύνολο $\{\rho^\pm(x) \leq R/2\}$ παίρνει τη μορφή $\{(-\infty, x^-], [x^+, +\infty)\}$ για κάποια $x^-, x^+ \in \mathbb{R}$, ενώ η απόσταση $|x^+ - x^-|$ ικανοποιεί ένα a priori φράγμα ανεξάρτητο του M και ότι η απεικόνιση $\rho^\pm$, περιορισμένη στο διάστημα $\{(-\infty, x^-], [x^+, +\infty)\}$, είναι αφ' ενός γνησίως μονότονη και αφ' ετέρου συγκλίνει στο μηδέν, καθώς $|x| \rightarrow \infty$. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι $\rho^\pm(x) \geq R/2$ για κάθε $x \in [x^-, x^+]$. Όλα τα παραπάνω είναι βασικά για να απομακρύνουμε τους περιορισμούς.

3.1. Ύπαρξη λύσης για το περιορισμένο πρόβλημα.

Πρόταση 3.1. Έστω $W : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ένα μη αρνητικό δυναμικό και έστω $M > 1$ αυθαίρετο και σταθεροποιημένο. Τότε το περιορισμένο πρόβλημα (7) έχει λύση U , τέτοια, ώστε

$$A_p(U) = \inf_{u \in X_M^- \cap X_M^+} A_p(u)$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} a^- & \text{για } x \leq -1 \\ \frac{1-x}{2}a^- + \frac{1+x}{2}a^+ & \text{για } -1 \leq x \leq 1 \\ a^+ & \text{για } x \geq +1 \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι $f \in X_M^- \cap X_M^+$ και ότι $A_p(f) < \infty$. Άρα, από το γεγονός ότι $W \geq 0$, συνάγουμε ότι

$$0 \leq \inf_{u \in X_M^- \cap X_M^+} A_p(u) < A_p(f) < \infty,$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε γνήσια ανισότητα. Έστω λοιπόν ότι η $\{u_n\}_n$ είναι μία ελαχιστοποιούσα ακολουθία τέτοια, ώστε

$$A_p(u_n) \rightarrow \inf_{u \in X_M^- \cap X_M^+} A_p(u).$$

Τότε από την πολική μορφή, μέσω της τριγωνικής ανισότητας, συνεπάγεται ότι

$$|u_n(M)| \leq |a^+| + R/2,$$

ενώ, επειδή $W \geq 0$, εξάγουμε ότι

$$(9) \quad \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}} |\dot{u}_n|^p dx \leq A_p(u_n) \leq A_p(f) < \infty$$

για αρκετά μεγάλο n . Επίσης από την ανισότητα Hölder συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned} |u_n(x_1) - u_n(x_2)| &\leq |x_1 - x_2|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\dot{u}_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |x_1 - x_2|^{\frac{1}{q}} \sqrt[p]{p A_p(f)}, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $\{u_n\}_n$ είναι ισοσυνεχής. Ακόμα

$$|u_n(x)| \leq \max\{|a^+|, |a^-|\} + \frac{R}{2}$$

για κάθε $x \in (-\infty, -M] \cup [M, +\infty)$ και

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq |u_n(-M)| + \int_{-M}^x |\dot{u}_n(t)| dt \\ &\leq \max\{|a^+|, |a^-|\} + \frac{R}{2} + |x + M|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\dot{u}_n|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \max\{|a^+|, |a^-|\} + \frac{R}{2} + |x + M|^{\frac{1}{q}} \sqrt[p]{p A_p(f)} \\ &\leq \max\{|a^+|, |a^-|\} + \frac{R}{2} + \sqrt[q]{2M} \sqrt[p]{p A_p(f)} \end{aligned}$$

για κάθε $x \in [-M, M]$, δηλαδή η $\{u_n\}_n$ είναι και ολικά φραγμένη. Άρα, η ακολουθία $\{u_n\}_n$ είναι σχετικά συμπαγής στο $C[-K, K]$, για κάθε πεπερασμένο διάστημα $[-K, K]$, ως αποτέλεσμα του θεωρήματος Ascoli-Arzelà. Επομένως, με ένα διαγώνιο επιχείρημα, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία υπακολουθία $\{u_{n_k}\}$ τέτοια, ώστε

$$u_{n_k} \rightarrow U \in C(\mathbb{R}) \text{ στο } (L^\infty(I))^N \text{ για κάθε } I \subset \subset \mathbb{R},$$

και αφού $\|\cdot\|_{(L^p(I))^N} \leq \mu(I)^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_{(L^\infty(I))^N}$ μπορούμε να δούμε ότι

$$u_{n_k} \rightarrow U \text{ στο } (L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}))^N.$$

Επιπλέον, από την (9) συνεπάγεται η ύπαρξη μίας συνάρτησης $V \in (L^p(\mathbb{R}))^N$ τέτοιας, ώστε

$$\dot{u}_{n_k} \rightharpoonup V \text{ στο } (L^p(\mathbb{R}))^N.$$

Έτσι, θέτοντας $(u_{n_k}, \dot{u}_{n_k}) \rightharpoonup (U, V)$ στο $(L^p(I))^N \times (L^p(I))^N$ μπορούμε να δείξουμε ότι $\dot{U} = V$. Συμπερασματικά, από την ασθενή κάτω ημισυνέχεια στον L^p λαμβάνουμε ότι

$$\liminf_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\dot{u}_{n_k}|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}} |\dot{U}|^p dx$$

ενώ από το λήμμα Fatou, μέσω της σημειακής σύγκλισης $u_{n_k}(x) \rightarrow U(x)$ στο $\mathbb{R}$, συνάγουμε ότι

$$\liminf_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} W(u_{n_k}) dx \geq \int_{\mathbb{R}} W(U) dx.$$

Άρα εξάγουμε ότι $A_p(U) \leq \lim_{n_k \rightarrow \infty} A_p(u_{n_k}) = \inf_{u \in X_M^- \cap X_M^+} A_p(u)$, που είναι και το ζητούμενο. $\square$

3.2. Αφαίρεση των περιορισμών. Στο σημείο αυτό, έχοντας ήδη κατοχυρώσει την ύπαρξη ενός ελαχιστοποιητή U για το πρόβλημα (7), στρέφουμε την προσοχή μας στο να αποδείξουμε ότι για αρκετά μεγάλο M και για πεπερασμένο x , ο ελαχιστοποιητής αυτός δεν «πιάνει» τους περιορισμούς, δηλαδή βρίσκεται στο εσωτερικό των κυλίνδρων X_M^+, X_M^- .

Λήμμα 3.1. Έστω a ένα από τα ελάχιστα του W και έστω ότι η υπόθεση (h) ισχύει. Έστω ακόμα $U \in W^{1,p}([c, d], \mathbb{R}^N)$, $c < d \in \mathbb{R}$ και $r \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$0 < \rho(c) = \rho(d) = r \leq R \quad (\text{βλέπε (h)}),$$

$$r \leq \rho(x) \leq R \quad \text{για κάθε } x \in (c, d).$$

Τότε υπάρχει συνάρτηση $\bar{U} \in W^{1,p}([c, d], \mathbb{R}^N)$ με τις εξής ιδιότητες:

$$\bar{U}(c) = U(c), \quad \bar{U}(d) = U(d),$$

$$\bar{\rho}(x) < r, \quad \text{για κάθε } x \in (c, d),$$

$$A_p(\bar{U}, (c, d)) < A_p(U, (c, d)),$$

όπου $\bar{\rho} = |\bar{U} - a|$.

Απόδειξη. Έστω $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία ομαλή συνάρτηση τέτοια, ώστε $s(0) = s(1) = 0$, $s(t) > 0$, για κάθε $t \in (0, 1)$. Για μικρό $\varepsilon \geq 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\bar{U}^\varepsilon(x) := a + \left(1 - \varepsilon s\left(\frac{x-c}{d-c}\right)\right) rn(x), \quad \text{για } x \in [c, d].$$

Παρατηρούμε ότι αφού $n \in W^{1,p}$, έπεται και ότι $\bar{U}^\varepsilon \in W^{1,p}$. Τότε

$$\begin{aligned} A_p(\bar{U}^\varepsilon, (c, d)) &= \frac{1}{p} \int_c^d \left(r^2 |n_x|^2 (1 - 2\varepsilon s) + \varepsilon^2 r^2 \left(\frac{s_x^2}{(d-c)^2} + s^2 |n_x|^2 \right) \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{q} \int_c^d W(a + (1 - \varepsilon s)rn), \end{aligned}$$

ενώ για $\varepsilon = 0$,

$$A_p(\bar{U}^0, (c, d)) = \int_c^d \frac{1}{p} (r^2 |n_x|^2)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{q} W(a + rn).$$

Επίσης από την υπόθεση (h) έπεται ότι

$$(10) \quad W(a + (1 - \varepsilon s)rn) < W(a + rn),$$

ενώ για $\varepsilon \ll 1$ έπεται ότι

$$(11) \quad r^2 |n_x|^2 (1 - 2\varepsilon s) + \varepsilon^2 r^2 \left(\frac{s_x^2}{(d-c)^2} + s^2 |n_x|^2 \right) < r^2 |n_x|^2.$$

Άρα, από τις (10) και (11) έπεται ότι

$$A_p(\bar{U}^\varepsilon, (c, d)) < A_p(\bar{U}^0, (c, d)).$$

Τέλος εξάγουμε ότι

$$A_p(U, (c, d)) = \int_c^d \frac{1}{p} (\rho_x^2 + \rho^2 |n_x|^2)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{q} W(a + \rho n),$$

ενώ η υπόθεση (h) και το γεγονός ότι $r \leq \rho(x) \leq R$ για $x \in (c, d)$ μας οδηγούν στο ότι

$$(12) \quad W(a + rn) \leq W(a + \rho n)$$

και

$$(13) \quad r^2 |n_x|^2 \leq \rho_x^2 + \rho^2 |n_x|^2.$$

Επομένως, από τις (12) και (13), έπεται ότι $A_p(\bar{U}^0, (c, d)) \leq A_p(U, (c, d))$, που σημαίνει ότι για $\varepsilon \ll 1$ συνεπάγεται ότι $A_p(\bar{U}^\varepsilon, (c, d)) < A_p(U, (c, d))$. Οι ισότητες $\bar{U}^\varepsilon(c) = U(c)$ και $\bar{U}^\varepsilon(d) = U(d)$ είναι εύκολο να επαληθευθούν από τον ορισμό της $\bar{U}$. $\square$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι το Λήμμα 3.1 είναι «τοπικού» χαρακτήρα, δηλαδή περιορίζοντας a priori το ρ , παίρνουμε μία συνάρτηση που παίρνει τις ίδιες τιμές με τη U στα άκρα ενός διαστήματος, αλλά στο εσωτερικό είναι πιο αποτελεσματική με την έννοια ότι έχει μικρότερη δράση από τη U . Αντίθετα το λήμμα που ακολουθεί είναι «ολικού» χαρακτήρα.

Λήμμα 3.2. Έστω a ένα από τα ελάχιστα του W και έστω ότι η υπόθεση (h) ισχύει. Έστω επίσης $U \in W^{1,p}([c, d], \mathbb{R}^N)$, $c < d \in \mathbb{R}$ και $r \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$0 < \rho(c) = \rho(d) = r \leq \frac{R}{2},$$

$$\rho(x_0) \geq r \quad \text{για κάποιο } x_0 \in (c, d).$$

Τότε το ίδιο συμπέρασμα με εκείνο του λήμματος 3.1 είναι αληθές.

Απόδειξη. Έστω $\rho_{\max} := \max_{x \in (c, d)} \rho(x)$. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\rho(x_0) = \rho_{\max}$. Αρχικά αναλύουμε την περίπτωση όπου $\rho(x_0) = \rho_{\max} = r$. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $\rho(x) < r$ για κάποιο $x \in (c, x_0)$ ($x \in (x_0, d)$) αφού διαφορετικά, από το Λήμμα 3.1, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη U με μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη αυτή και έχει μικρότερη δράση. Από αυτό και τη συνέχεια της U συνάγεται ότι υπάρχουν $\hat{c} \in (c, x_0)$, $\hat{d} \in (x_0, d)$ και $\hat{r} < r$, τέτοια, ώστε

$$\rho(\hat{c}) = \rho(\hat{d}) = \hat{r} \text{ και } \hat{r} < \rho(x) \leq r, \text{ για κάθε } x \in (\hat{c}, \hat{d}).$$

Επομένως, πάλι από το Λήμμα 3.1 συμπεραίνουμε το ζητούμενο αν $\rho_{\max} = r$. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\rho_{\max} > r$.

Αν $r < \rho_{\max} \leq R$, τότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.1 στη συνεκτική συνιστώσα I_0 του συνόλου $\{x \in (c, d) : \rho(x) > r\}$ που περιέχει το x_0 , εξάγουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Απομένει να αναλύσουμε την περίπτωση όπου $\rho_{\max} > R$. Εδώ, μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το διάστημα (c, d) ταυτίζεται με τη συνεκτική συνιστώσα I_0 . Ορίζουμε τις $H : [r, R] \rightarrow \mathbb{R}$ και $V \in W^{1,p}([c, d], \mathbb{R}^N)$ ως εξής:

$$H(s) := \frac{R-s}{R-r} \quad \text{για } r \leq s \leq R,$$

$$V(x) = \begin{cases} a + rH(\rho(x))n(x) & \text{για κάθε } x \in [c, d] \text{ τέτοιο ώστε } \rho(x) \in [r, R] \\ a & \text{για κάθε } x \in [c, d] \text{ τέτοιο ώστε } \rho(x) \geq R. \end{cases}$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι $V \in W_{\text{loc}}^{1,p}$ και βασιζόμενοι στην υπόθεση (h) και το γεγονός ότι $0 \leq H(s) < 1$ για κάθε $s \in (r, R]$ συνάγουμε ότι

$$(14) \quad \int_c^d W(V) < \int_c^d W(U),$$

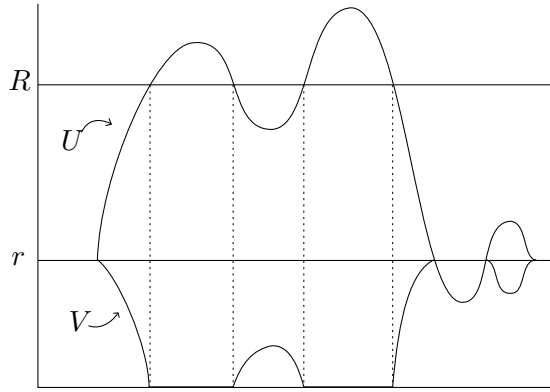
ενώ από τις $0 \leq H(s) \leq 1$ και $|H_s| = 1/(R-r) \leq 1/r$ έπεται ότι

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{1}{p} \int_c^d |V_x|^p &= \frac{1}{p} \int_c^d ((rH_x \rho_x n)^2 + (rH|n_x|^2)^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{2}} \\ &\leq \frac{1}{p} \int_c^d (\rho_x^2 + \rho^2 |n_x|^2)^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{p} \int_c^d |U_x|^p. \end{aligned}$$

Άρα, από τις (14) και (15) καταλήγουμε στο ότι

$$A_p(V, (c, d)) < A_p(U, (c, d))$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$



Σχήμα 1. Η αντικατάσταση της συνάρτησης U από τη V

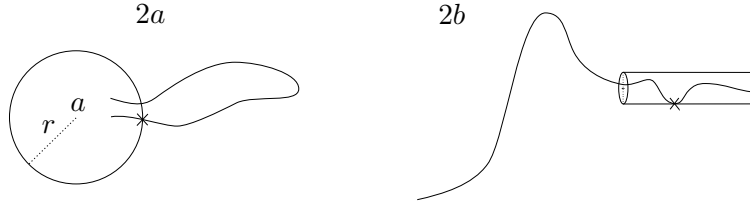
Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι εν αντιθέσει με το Λήμμα 3.1, στο Λήμμα 3.2 δεν απαιτείται κάποιο a priori φράγμα για το $\rho_{\max}$. Η σημασία του λήμματος 3.2 έγκειται στο ότι, αν μία συνάρτηση ξεκινά και επανέρχεται εντός της περιοχής $r \leq R/2$, ανεξαρτήτως της δομής του W , είναι πιο αποτελεσματική αν μείνει εντός αυτής της περιοχής, παρά αν εξέλθει από αυτήν.

Λήμμα 3.3. Έστω $W \geq 0$ και $W(a^\pm) = 0$. Έστω ακόμα ότι $\liminf_{|u| \rightarrow \infty} W(u) > 0$ και ότι η υπόθεση (h) ισχύει. Αν U είναι ένας ελαχιστοποιητής του περιορισμένου προβλήματος και $\rho_U^\pm = |U - a^\pm|$, τότε αν

$$(16) \quad \rho_U^+(x_0) = r \leq \frac{R}{2}, \text{ εξάγουμε ότι } \rho_U^+(x) < r \text{ για κάθε } x > x_0,$$

και ομοίως για το ρ_U^- .

Απόδειξη. Η υπόθεση $\liminf_{|u| \rightarrow \infty} W(u) > 0$ και το γεγονός ότι $A_p(U) < +\infty$ εξασφαλίζουν την ύπαρξη μίας ακολουθίας $\{x_n\}_n$ με $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ τέτοιας, ώστε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_U^+(x_n) = 0$. Αν η (16) δεν ισχύει, έπεται ότι $\rho_U^+(\hat{x}) = r$ για κάποιο $\hat{x} > x_0$. Τότε από το Λήμμα 3.2 προκύπτει ότι $\rho_U^+(x) < r$ για κάθε $x \in (x_0, \hat{x})$. Άρα, δεδομένου ότι $c \in (x_0, \hat{x})$, υπάρχει $d > \hat{x}$ τέτοιο ώστε $\rho_U^+(c) = \rho_U^+(d) < \rho_U^+(\hat{x}) = r$. Αυτό αντιβαίνει στο συμπέρασμα του λήμματος 3.2 και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$



Σχήμα 2. Στο σχήμα 2a, μία λύση δεν μπορεί να επανέλθει εντός της μπάλας $B(a, r)$ αφού εξήλθε από αυτήν. Στο σχήμα 2b, ο περιορισμός δεν μπορεί να «πιάνεται» παρά μόνο στο χείλος κάποιου κυλίνδρου.

Συνέπεια του παραπάνω λήμματος είναι ότι, αν και εφόσον οι περιορισμοί «πιάνονται», τότε αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στο χείλος των κυλίνδρων. Ακόμα πιο σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι, αν $r \leq R/2$, η U δεν μπορεί να επανέλθει εντός της μπάλας με κέντρο a και ακτίνα r , αφού εξέλθει αυτής. Επομένως οι περιπτώσεις που περιγράφονται από τα σχήματα 2a και 2b παραπάνω είναι αδύνατον να συμβούν.

Στο σημείο αυτό βρισκόμαστε σε θέση να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. Έστω $W : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ένα μη αρνητικό C^2 δυναμικό και έστω $a^- \neq a^+ \in \mathbb{R}^N$ τέτοια, ώστε $W(a^\pm) = 0$.

Υποθέτουμε επίσης ότι $\liminf_{|u| \rightarrow \infty} W(u) > 0$ και ότι η υπόθεση (h) ισχύει. Τότε υπάρχει συνδέουσα τροχιά U μεταξύ των a^- και a^+ .

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι $W(u) > 0$ για κάθε $u \neq a^\pm$ και από την υπόθεση ότι $\liminf_{|u| \rightarrow \infty} W(u) > 0$ έπεται η ύπαρξη μίας σταθεράς $C > 0$ τέτοιας, ώστε

$$(17) \quad W(u) > C, \quad \text{για κάθε } u \in \mathbb{R}^N \setminus \left(B\left(a^-, \frac{R}{2}\right) \cup B\left(a^+, \frac{R}{2}\right) \right).$$

Ορίζουμε

$$(18) \quad M^* := \frac{A_p(f)}{2C}$$

όπου f είναι η συνάρτηση που ορίστηκε στην απόδειξη της πρότασης 3.1. Τότε το Λήμμα 3.3 και η υπόθεση (h) υποδεικνύουν ότι η εξίσωση $\rho_U^+(x) = R/2$ έχει ακριβώς μία λύση x^+ και ότι $x^+ \in (-M^*, M^*]$, ενώ για κάθε $x > x^+$ συνάγεται ότι $\rho_U^+(x) < R/2$. Με το ίδιο επιχείρημα συνάγουμε ότι η εξίσωση $\rho_U^-(x) = R/2$ έχει ακριβώς μία λύση x^- και ότι $x^- \in [-M^*, M^*)$, ενώ για $x < x^-$ έπεται ότι $\rho_U^-(x) < R/2$. Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι

$$U(x) \in \mathbb{R}^N \setminus \left(B\left(a^-, \frac{R}{2}\right) \cup B\left(a^+, \frac{R}{2}\right) \right), \quad \text{για κάθε } x \in [x^-, x^+].$$

Από την τελευταία σχέση, καθώς και τις (17) και (18), προκύπτει ότι

$$C(x^+ - x^-) \leq \int_{\mathbb{R}} W(U) < A_p(f) = 2CM^*,$$

δηλαδή $x^+ - x^- < 2M^*$. Άρα, συμπεραίνουμε ότι είτε η U είτε μία μικρή μεταφορά της $U(\cdot + \delta)$, ικανοποιεί γνησίως τους περιορισμούς και έτσι αποτελεί μη περιορισμένο κρίσιμο σημείο της δράσης A_p . Η απόδειξη του θεωρήματος και κατ' επέκτασιν της ύπαρξης λύσης για το πρόβλημα (1) είναι πλήρης. $\square$

3.3. Ένας μεταβολικός χαρακτηρισμός για τη συνδέουσα τροχιά.

Θεώρημα 3.2. Έστω U ο ελαχιστοποιητής του περιορισμένου προβλήματος που δίνεται από το Θεώρημα 3.1 και έστω $R > 0$ τέτοιο, ώστε η υπόθεση (h) ισχύει. Έστω ακόμα $\mathcal{A}$ το σύνολο που αποτελείται από τις συναρτήσεις $u \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$, για τις οποίες υπάρχουν $x_u^- < x_u^+$ (εξαρτώμενα από τη u) και είναι τέτοιες, ώστε

$$\begin{cases} |u(x) - a^-| \leq R/2 & \text{για κάθε } x \leq x_u^- \text{ και} \\ |u(x) - a^+| \leq R/2 & \text{για κάθε } x \geq x_u^+. \end{cases}$$

Τότε

$$A_p(U) = \inf_{u \in \mathcal{A}} A_p(u)$$

Απόδειξη. Αρχικά ισχυριζόμαστε ότι $\inf_{u \in \mathcal{A}} A_p(u) = \inf_{u \in \mathcal{B}} A_p(u)$ όπου $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{A} : x_u^+ - x_u^- \leq 2M^*\}$ και το M^* είναι όπως στην (18). Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό, πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\inf_{u \in \mathcal{A}} A_p(u) = \inf_{\{u \in \mathcal{A} : A_p(u) < A_p(f)\}} A_p(u).$$

Επίσης, αφού τα σύνολα $I_u^\pm = \{x \in \mathbb{R} : |u(x) - a^\pm| > R/2\}$ είναι ανοικτά και μη κενά, αν το I_u^+ ή το I_u^- έχει μία φραγμένη συνιστώσα (c, d) , τότε από το Λήμμα 3.2 μπορούμε να την «εξουδετερώσουμε» και να μειώσουμε τη δράση. Άρα

$$\inf_{u \in \mathcal{A}} A_p(u) = \inf_{u \in \mathcal{C}} A_p(u)$$

όπου

$$\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{A} : A_p(u) < A_p(f), I_u^\pm \text{ χωρίς φραγμένη συνιστώσα}\}.$$

Επομένως, εξάγουμε ότι

$$I_u^- = (x_u^-, +\infty), \quad I_u^+ = (-\infty, x_u^+),$$

ενώ από την (17) συνεπάγεται ότι

$$(x_u^+ - x_u^-)C < \int_{\mathbb{R}} W(U) \leq A_p(U) < A_p(f) = 2CM^*$$

και έτσι ο ισχυρισμός είναι αληθής. Τέλος, επειδή η δράση A_p είναι αναλλοίωτη κάτω από μεταφορές, έπεται ότι

$$\inf_{u \in \mathcal{B}} A_p(u) = \inf_{u \in X_{M^*}^- \cap X_{M^*}^+} A_p(u).$$

$\square$

4. Μελέτη του προβλήματος ύπαρξης ετεροκλινούς τροχιάς στο μιγαδικό επίπεδο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου $N = 2$, οπότε ταυτίζουμε το $\mathbb{R}^2$ με το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Χρησιμοποιώντας την αρχή Jacobi μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα (1) και επιπλέον να παρουσιάσουμε λύσεις σε κλειστή μορφή για μία κλάση δυναμικών. Στην περίπτωση αυτή μελετάμε το σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$(|u_x|^{p-2}u_x)_x - \frac{1}{q} \frac{\partial W(u^1, u^2)}{\partial u^i} = 0 \quad \text{για } i = 1, 2,$$

όπου $u = (u^1, u^2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ταυτίζουμε τη $u = (u^1, u^2)$ με το μιγαδικό αριθμό $z = u^1 + iu^2$, και ομοίως γράφουμε το $W(u)$ ως $W(z)$. Δεδομένου ότι το $W(\cdot)$ είναι μη αρνητικό, θα θεωρήσουμε ότι $W(z) = |f(z)|^q$ για κάποια αναλυτική συνάρτηση f , έχοντας σαν πρότυπο τη μορφή $f(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$. Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι οι εξισώσεις (1) είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις

$$(|z_x|^{p-2}z_x)_x = (f\bar{f})^{\frac{q-2}{2}} f\bar{f}',$$

όπου f' είναι η μιγαδική παράγωγος. Τέλος, κλείνοντας την εισαγωγή αυτή, θα σκιαγραφήσουμε τη μέθοδο για το δυναμικό $W(z) = |z^3 - 1|^q$, τα ελάχιστα του οποίου βρίσκονται στα σημεία $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}$ και $e^{-\frac{2\pi i}{3}}$. Συγκεκριμένα θα κατασκευάσουμε τη συνδέουσα τροχιά μεταξύ των σημείων $a = 1$ και $b = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, θεωρώντας το μεταβολικό πρόβλημα $\min L_p(u)$. Δεδομένου ότι το συναρτησιακό L_p είναι ανεξάρτητο παραμετροποιήσεων, επιλέγουμε $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $u(0) = a, u(1) = b$, και θέτουμε $z(t) = u^1(t) + u^2(t)$. Τότε

$$L_p(u) = \int_0^1 |z'(\tau)| |z^3(\tau) - 1| d\tau = \int_0^1 \left| \frac{d}{d\tau} g(z(\tau)) \right| d\tau = \int_0^1 |w'(\tau)| d\tau,$$

όπου $w = g(z) = z - z^4/4$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ελαχιστοποίηση του L_p ανάμεσα στις καμπύλες που συνδέουν τα a και b ανάγεται στο απλούστερο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού του μήκους στο w -επίπεδο, ανάμεσα στις καμπύλες που συνδέουν τα $g(a) = 3/4$ και $g(b) = 3e^{\frac{2\pi i}{3}}/4$. Προφανώς η ελαχιστοποίηση του τελευταίου επιτυγχάνεται από το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις παραπάνω εικόνες. Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι στη γενική περίπτωση ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} d(a, b) &:= \inf_{z(0^+) = a, z(1^-) = b} L_p(z) \\ &= \inf \left\{ \int |w'(\tau)| d\tau : w(\tau) = g(z(\tau)), z(0^+) = a, z(1^-) = b \right\} \\ &\geq \min \left\{ \int |w'(\tau)| d\tau : w(0^+) = g(a), w(1^-) = g(b) \right\} \\ &= |g(b) - g(a)| \end{aligned}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $w = g(z)$ ως το μετασχηματισμό από το z -επίπεδο στο w -επίπεδο. Το minimum παραπάνω εξετάζεται ανάμεσα σε όλες τις καμπύλες $w(\tau)$ που συνδέουν τις εικόνες $g(a)$ και $g(b)$ και προφανώς επιτυγχάνεται από το ευθύγραμμο τμήμα $|g(a), g(b)|$. Το infimum όμως εξετάζεται ανάμεσα σε

όλες τις καμπύλες $w(\tau)$ που μπορούν να είναι εικόνες μέσω της g των καμπυλών $z(\tau)$ που συνδέουν τα a και b . Γενικά η ανισότητα παραπάνω είναι γνήσια αφού το σύνολο των $w(\tau)$ που είναι εικόνες των $z(\tau)$ μπορεί να μην περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα. Θα δείξουμε παρακάτω ότι υπάρχει συνδέουσα τροχιά μεταξύ των a και b αν και μόνο αν ισχύει η ισότητα μεταξύ των δύο. Συνεχίζοντας το παράδειγμα και επιλέγοντας την παρακάτω παραμετρικοποίηση για το ευθύγραμμο τμήμα

$$g(z(\tau)) = \tau g(a) + (1 - \tau)g(b) = \frac{3}{4}(\tau + (1 - \tau)e^{\frac{2\pi i}{3}}) \quad \text{για } 0 \leq \tau \leq 1,$$

μπορούμε να δείξουμε ότι η καμπύλη $z(\tau) = r(\tau)e^{i\theta(\tau)}$ ικανοποιεί τη μη παραμετρική εξίσωση

$$4r \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = r^4 \cos(4\theta - \frac{\pi}{3}) + 3 \cos \frac{\pi}{3} \quad \text{για } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ και } 0 < r < 1,$$

που είναι ακριβώς η ίδια εξίσωση με εκείνη που παρουσιάζεται στην εργασία των [ABC] για $p = 2$. Η εξάρτηση από το p φαίνεται μέσω της παραμετρικοποίησης

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt[p]{W(z(t))}}{|z'(t)|}, \quad t(0) = \frac{1}{2}$$

η οποία οδηγεί στη λύση $u(x) = z(t(x))$. Επομένως, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η θεωρία που παρουσιάζεται στην εργασία των [ABC] γενικεύεται πλήρως για οποιοδήποτε $p > 1$. Η υπόθεση αυτή είναι αληθής, αλλά κατά τη διάρκεια της απόδειξης συναντάμε μεγαλύτερες αλγεβρικές δυσκολίες.

Θεώρημα 4.1. Έστω $W(u_1, u_2) = |f(z)|^q$, όπου $f = g'$ είναι μία ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$ και ταυτίζουμε το σημείο (u_1, u_2) με το μιγαδικό αριθμό $z(x) = u_1(x) + iu_2(x)$. Έστω ακόμα $\gamma = \{u(x) : x \in (a, b)\}$ μία ομαλή καμπύλη στο D και x παράμετρος ισοκατανομής, δηλαδή $|u_x|^p = W(u)$. Επίσης θέτουμε $\alpha = u(a)$ και $\beta = u(b)$. Τότε η u είναι λύση του προβλήματος

$$(19) \quad (|u_x|^{p-2}u_x)_x - \frac{1}{q}W_u(u) = 0 \quad \text{στο } (a, b)$$

αν και μόνο αν

$$(20) \quad \operatorname{Im} \left(\frac{g(z) - g(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} \right) = 0 \quad \text{για κάθε } z \in \gamma.$$

Απόδειξη. Έστω $u = (u_1, u_2) : (a, b) \rightarrow D$ μία λύση του προβλήματος (19) με $|u_x|^p = W(u)$. Έστω επίσης L το ολικό μήκος τόξου και s η παράμετρος μήκους τόξου που δίνονται από τις σχέσεις

$$L = \int_a^b |u_x| \sqrt[p]{W(u)} dx, \quad s = \int_a^x |u_x(y)| \sqrt[p]{W(u(y))} dy.$$

Θα δείξουμε ότι η εικόνα $g(\gamma)$ ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα $[g(\alpha), g(\beta)]$. Για να το επιτύχουμε αυτό, αρχικά παρατηρούμε ότι η σχέση ισοκατανομής γράφεται ως

$$(21) \quad |z_x|^p = W(u) = (f\bar{f})^{\frac{q}{2}}$$

και ότι δεδομένου ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u_1} &= (|f(z)|^q)_{u_1} = [(f\bar{f})^{\frac{q}{2}}]_{u_1} = \frac{q}{2}(f\bar{f})^{\frac{q-2}{2}}(f'\bar{f} + f\bar{f}'), \\ \frac{\partial W}{\partial u_2} &= (|f(z)|^q)_{u_2} = \frac{q}{2}(f\bar{f})^{\frac{q-2}{2}}(if'\bar{f} - if\bar{f}'),\end{aligned}$$

ισχύει ότι

$$(22) \quad \frac{\partial W}{\partial u_1} + i\frac{\partial W}{\partial u_2} = \frac{q}{2}(f\bar{f})^{\frac{q-2}{2}}(f'\bar{f} + f\bar{f}' - f'\bar{f} + f\bar{f}') = q(f\bar{f})^{\frac{q-2}{2}}f\bar{f}'.$$

Αρα, από την (22), η εξίσωση (19) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}0 &= (|u_x|^{p-2}u_x)_x - \frac{1}{q}W_u(u) \\ &= \frac{p}{2}|z_x|^{p-2}z_{xx} + \left(\frac{p}{2} - 1\right)|z_x|^{p-4}z_x^2\overline{z_{xx}} - (f\bar{f})^{\frac{q-2}{2}}f\bar{f}'.\end{aligned}$$

Εν συνεχεία, πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με $|z_x|^{4-p}$ και μετά από απλοποιήσεις, συνάγουμε ότι η εξίσωση (19) είναι ισοδύναμη με την

$$(23) \quad p|z_x|^2z_{xx} + (p-2)z_x^2\overline{z_{xx}} - 2|z_x|^{2(3-p)}f\bar{f}' = 0.$$

Επιπλέον, παραγωγίζοντας τη σχέση ισοκατανομής $|z_x|^p = (f\bar{f})^{\frac{q}{2}}$, συνάγουμε ότι

$$p|z_x|^{p-2}(z_{xx}\overline{z_x} + z_x\overline{z_{xx}}) = q(f\bar{f})^{\frac{q-2}{2}}(f'\bar{f}z_x + f\bar{f}'\overline{z_x})$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$(24) \quad (p-1)|z_x|^{2(p-2)}(z_{xx}\overline{z_x} + z_x\overline{z_{xx}}) = f'\bar{f}z_x + f\bar{f}'\overline{z_x}.$$

Τέλος, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση g , προκύπτει ότι

$$\frac{dg(z)}{ds} = \frac{g'(z)z_x}{(f\bar{f})^{\frac{q}{2}}} = \frac{fz_x}{(f\bar{f})^{\frac{q}{2}}} = \frac{z_x}{f^{\frac{q}{2}-1}\bar{f}^{\frac{q}{2}}} = \frac{z_x}{f^{\frac{q-2}{2}}\bar{f}^{\frac{q}{2}}}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{d^2g(z)}{ds^2} &= \frac{f\bar{f}z_{xx} + \frac{2-q}{2}\bar{f}f'z_x^2 - \frac{q}{2}|z_x|^2f\bar{f}'}{f^q\bar{f}^{q+1}} \\ &= \frac{f\bar{f}z_{xx} + \frac{p-2}{2(p-1)}\bar{f}f'z_x^2 - \frac{p}{2(p-1)}|z_x|^2f\bar{f}'}{f^q\bar{f}^{q+1}} \\ &= \frac{2(p-1)f\bar{f}z_{xx} + (p-2)\bar{f}f'z_x^2 - p|z_x|^2f\bar{f}'}{2(p-1)f^q\bar{f}^{q+1}} \\ &= \frac{2(p-1)f\bar{f}z_{xx} + z_x((p-2)\bar{f}f'z_x - p\overline{z_x}f\bar{f}')}{2(p-1)f^q\bar{f}^{q+1}} \\ (25) \quad &= \frac{2(p-1)f\bar{f}z_{xx} + z_x((p-2)(\bar{f}f'z_x + \overline{z_x}f\bar{f}') - 2(p-1)\overline{z_x}f\bar{f}')}{2(p-1)f^q\bar{f}^{q+1}}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (24), η εξίσωση (25) γίνεται

$$(26) \quad \frac{2f\bar{f}z_{xx} + (p-2)|z_x|^2|z_x|^{2p-4}z_{xx} + (p-2)|z_x|^{2(p-2)}z_x^2\overline{z_{xx}} - 2|z_x|^2f\bar{f}'}{2f^q\bar{f}^{q+1}}$$

και από την (21), η (26) γίνεται

$$\frac{2|z_x|^{2(p-1)}z_{xx} + (p-2)|z_x|^{2(p-1)}z_{xx} + (p-2)|z_x|^{2(p-2)}z_x^2\overline{z_{xx}} - 2|z_x|^2f\overline{f'}}{2f^q\overline{f}^{q+1}},$$

η οποία μετά από πράξεις γράφεται ως

$$\begin{aligned} & \frac{p|z_x|^{2(p-1)}z_{xx} + (p-2)|z_x|^{2(p-2)}z_x^2\overline{z_{xx}} - 2|z_x|^2f\overline{f'}}{2f^q\overline{f}^{q+1}} \\ &= \frac{p|z_x|^2z_{xx} + (p-2)z_x^2\overline{z_{xx}} - 2|z_x|^{2(3-p)}f\overline{f'}}{2f^q\overline{f}^{q+1}|z_x|^{2(2-p)}} = 0 \end{aligned}$$

από την (23). Άρα η $dg(z)/ds = C$ είναι σταθερά. Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση και θέτοντας $s = L$, συνάγουμε ότι $g(z) = g(\alpha) + Cs$ και $Cs = g(\beta) - g(\alpha)$. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\left| \frac{dg(z)}{ds} \right| = \left| \frac{z_x}{f^{\frac{q-2}{2}}\overline{f}^{\frac{q}{2}}} \right| = \frac{|z_x||z_x|^{\frac{p}{q}}}{|z_x|^p} = \frac{|z_x||z_x|^{p-1}}{|z_x|^p} = 1 = |C|,$$

άρα $L = |g(\beta) - g(\alpha)|$ και $C = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{|g(\beta) - g(\alpha)|}$, που σημαίνει ότι

$$g(z(s)) = \frac{L-s}{L}g(\alpha) + \frac{s}{L}g(\beta).$$

Επομένως η g είναι το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι η καμπύλη $\gamma = u((a, b))$ ικανοποιεί την (20) και ότι το x είναι παράμετρος ισοκατανομής. Τότε η εξίσωση (20) μπορεί να γραφεί ως

$$g(z) - g(\alpha) = s(x)(g(\beta) - g(\alpha))$$

όπου $s(x)$ είναι μία συνάρτηση που παίρνει πραγματικές τιμές. Παραγωγίζοντας την τελευταία λαμβάνουμε ότι

$$s_x(g(\beta) - g(\alpha)) = g'(z)z_x = f(z)z_x.$$

Αυτή η εξίσωση μας οδηγεί στο ότι

$$|s_x| = \frac{|f(z)||z_x|}{|g(\beta) - g(\alpha)|} = \frac{|f(z)|^q}{|g(\beta) - g(\alpha)|} > 0$$

και αφού $s(x) \in \mathbb{R}$, $s(a) = 0$, $s(b) = 1$, θα πρέπει να ισχύει ότι $s_x(x) > 0$. Άρα

$$s_x(x) = \frac{|f(z)|^q}{|g(\beta) - g(\alpha)|}.$$

Επομένως,

$$(27) \quad z_x = \frac{s_x(g(\beta) - g(\alpha))}{f(z)} = C \frac{(f\overline{f})^{\frac{q}{2}}}{f}$$

όπου $C = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{|g(\beta) - g(\alpha)|}$. Τέλος, χρησιμοποιώντας την (27), κατασκευάζουμε τη διαφορική εξίσωση (23) ως εξής:

Αρχικά θεωρούμε ότι

$$\begin{aligned} |z_x|^2 &= (f\bar{f})^{q-1}, \\ z_{xx} &= \frac{q-2}{2}C^2 f^{q-3}\bar{f}^q f' + \frac{q}{2}f^{q-1}\bar{f}^{q-2}\bar{f}', \\ z_x^2 &= C^2 f^{q-2}\bar{f}^q, \\ \overline{z_{xx}} &= \frac{q-2}{2}\overline{C}^2 \bar{f}^{q-3} f^q \bar{f}' + \frac{q}{2}\bar{f}^{q-1} f^{q-2} f', \end{aligned}$$

έτσι από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$$(28) \quad p|z_x|^2 z_{xx} = \frac{pq-2p}{2}C^2 f^{2q-4}\bar{f}^{2q-1} f' + \frac{pq}{2}f^{2q-2}\bar{f}^{2q-3}\bar{f}'$$

$$(29) \quad (p-2)z_x^2 \overline{z_{xx}} = \frac{pq-2p-2q+4}{2}f^{2q-2}\bar{f}^{2q-3}\bar{f}' + \frac{pq-2q}{2}C^2 f^{2q-4}\bar{f}^{2q-1} f'.$$

Προσθέτοντας τις (28) και (29) προκύπτει ότι

$$(30) \quad p|z_x|^2 z_{xx} + (p-2)z_x^2 \overline{z_{xx}} = (pq-p-q)C^2 f^{2q-4}\bar{f}^{2q-1} f' + (pq-p-q+2)f^{2q-2}\bar{f}^{2q-3}\bar{f}'$$

και από το γεγονός ότι $|z_x|^{2(3-p)} = (f\bar{f})^{2q-3}$, η εξίσωση (30) γίνεται

$$p|z_x|^2 z_{xx} + (p-2)z_x^2 \overline{z_{xx}} = 2(f\bar{f})^{2q-3} f\bar{f}' = 2|z_x|^{2(3-p)} f\bar{f}'.$$

Η τελευταία είναι ισοδύναμη με το ότι η συνάρτηση u είναι λύση της

$$q(|u_x|^{p-2}u_x)_x = W_u(u).$$

□

Σημείωση 2. Το παραπάνω θεώρημα υποδεικνύει ότι στην περίπτωση που η u είναι λύση, το σύνολο $g(\gamma) = \{g(z) : z \in \gamma\}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $g(\alpha)$ και $g(\beta)$ και ότι η ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \int_a^y \left(\frac{|u_x|^p}{p} + \frac{W(u)}{q} \right) dx &= \int_a^y |u_x| \sqrt[q]{W(u)} dx \\ &= \int_a^y \left| \frac{d}{dx} g(u) \right| dx \\ &= |g(u(y)) - g(u(a))| \quad \text{για κάθε } y \in (a, b]. \end{aligned}$$

Σημείωση 3. Από την απόδειξη φαίνεται ότι η (1) είναι ισοδύναμη με τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$(31) \quad z_x = C \frac{(f\bar{f})^{\frac{q}{2}}}{f}, \quad C \in \mathbb{C}, \quad |C| = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (31) με $\frac{f(z)}{C}$ λαμβάνουμε ότι

$$\frac{d}{dx} \frac{g(z)}{C} = |f(z)|^q = W > 0$$

και ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση εξαγάγουμε ότι

$$\operatorname{Im} \left(\frac{g(z) - g(\alpha)}{C} \right) = 0$$

και

$$\frac{g(z) - g(\alpha)}{C} = \int_a^x W(z(t))dt = s.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η απεικόνιση $x \mapsto g(z(x))$ είναι μία $1 - 1$ απεικόνιση.

Τέλος, θα μελετήσουμε δύο δυναμικά και την ύπαρξη συνδέουσας τροχιάς μεταξύ κάθε ζεύγους των ελαχίστων τους. Πιο συγκεκριμένα θα δούμε ότι, στο πρώτο παράδειγμα, όλες οι πιθανές τροχιές είναι εφικτές, ενώ στο δεύτερο, μία τροχιά είναι αδύνατον να υπάρξει.

Παράδειγμα 1. Έστω $W(z) = |(1 - z^2)(z^2 + \varepsilon^2)|^q$ με $0 < \varepsilon < \infty$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να επιλέξουμε

$$f(z) = (1 - z^2)(z^2 + \varepsilon^2),$$

έτσι συνεπάγεται ότι

$$g(z) = \int_0^z f(\zeta)d\zeta = -\frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{3}(1 - \varepsilon^2)z^3 + \varepsilon^2z \quad \text{και}$$

$$g(\pm 1) = \pm\left(\frac{2}{3}\varepsilon^2 + \frac{2}{15}\right), \quad g(\pm i\varepsilon) = \pm i\varepsilon^3\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{15}\varepsilon^2\right).$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι για $t \in [-1, 1]$, η $g(t)$ είναι μονότονη. Άρα $g([-1, 1]) = [g(-1), g(1)]$ και $g^{-1}([g(-1), g(1)]) = [-1, 1]$, που σημαίνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[-1, 1]$ είναι η τροχιά της (1) που συνδέει τα -1 και 1 . Επίσης αφού η $ig(it)$ για $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ είναι μονότονη, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $-i\varepsilon$ και $i\varepsilon$ είναι η τροχιά της (1) που συνδέει τα $-i\varepsilon$ και $i\varepsilon$. Τέλος, ελέγχοντας τη συμπεριφορά της g στο σύνορο του τετραγώνου $\Omega = [0, 1] \times [0, \varepsilon]$, μπορούμε να δούμε ότι η g είναι $1 - 1$ απεικόνιση στο Ω , που σημαίνει ότι υπάρχει τροχιά μεταξύ των 1 και $i\varepsilon$ και βρίσκεται ολόκληρη εντός του Ω . Λόγω συμμετρίας, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ύπαρξη για όλες τις τροχιές μεταξύ των ± 1 και $\pm i\varepsilon$. Τελικά συμπεραίνουμε ότι μεταξύ κάθε ζεύγους ελαχίστων του W υπάρχει μοναδική συνδέουσα τροχιά.

Παράδειγμα 2. Έστω $W(z) = |(1 - z^2)(z - i\varepsilon)|^q$ με $0 \leq \varepsilon < \infty$. Στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε

$$f(z) = i(1 - z^2)(z - i\varepsilon),$$

άρα

$$g(z) = \varepsilon z\left(1 - \frac{1}{3}z^2\right) - \frac{1}{4}i(z^2 - 1)^2 \quad \text{και}$$

$$g(\pm 1) = \pm \frac{2}{3}\varepsilon, \quad g(i\varepsilon) = \frac{i}{12}(\varepsilon^4 + 6\varepsilon^2 - 3).$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει τροχιά μεταξύ των ± 1 και $i\varepsilon$ όπως και στο παραπάνω παράδειγμα. Παρ' όλα αυτά, τα πράγματα αλλάζουν, όταν προσπαθήσουμε να εξετάσουμε την ύπαρξη τροχιάς μεταξύ των -1 και 1 .

Από την ενέργεια που δόθηκε στη Σημείωση 2 και από μία απλή σύγκριση των $|g(1) - g(-1)|$ και $|g(1) - g(i\varepsilon)|$, αναμένεται ότι δεν υπάρχει τροχιά μεταξύ των -1 και 1 , όταν το ε είναι μικρό και αντιθέτως υπάρχει, όταν το ε είναι μεγάλο. Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι για μικρό $\varepsilon > 0$,

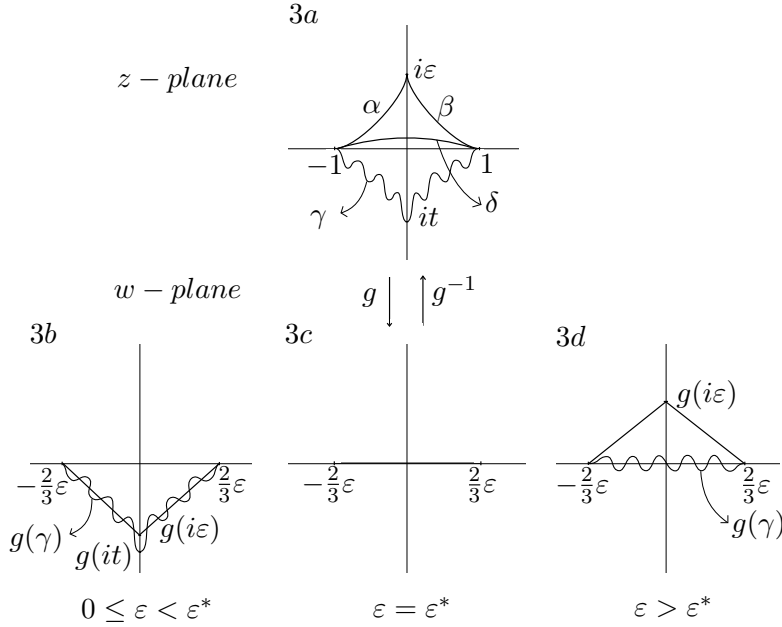
$$|g(1) - g(-1)| = \frac{4\varepsilon}{3} \quad \text{και} \quad |g(1) - g(i\varepsilon)| \sim \frac{1}{4}$$

που σημαίνει ότι η ενέργεια αυτή δεν είναι «αρκετή» για να υπάρξει τροχιά μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται σε μια φιξαρισμένη απόσταση το ένα από το άλλο, αν το ε είναι πολύ μικρό. Θα θέλαμε λοιπόν να βρούμε την κρίσιμη εκείνη τιμή για το ε . Το πρόβλημα σε αυτό το παράδειγμα, όπως θα δούμε, είναι η μη αντιστρεψιμότητα της συνάρτησης g .

Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει τροχιά γ μεταξύ των -1 και 1 . Τότε η γ θα πρέπει να τέμνει τον φανταστικό άξονα, έστω στο σημείο it όπου $t \in \mathbb{R}$. Δεδομένου ότι η εικόνα $g(\gamma)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[-\frac{2}{3}\varepsilon, \frac{2}{3}\varepsilon]$, η εικόνα $g(it) = i(\varepsilon t(1 + \frac{1}{3}t^2) - \frac{1}{4}i(t^2 + 1)^2)$ πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός. Άρα,

$$\varepsilon t(1 + \frac{1}{3}t^2) - \frac{1}{4}i(t^2 + 1)^2 = 0.$$

Το αριστερό μέλος, ως συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής t , έχει μέγιστο στο σημείο $t = \varepsilon$ με τιμή $\frac{1}{12}(\varepsilon^4 + 6\varepsilon^2 - 3)$. Επομένως, όταν αυτή η ποσότητα είναι μη θετική, δηλαδή όταν $\varepsilon^2 \leq (\varepsilon^*)^2 = 2\sqrt{3} - 3$, δεν είναι δυνατή η ύπαρξη τροχιάς μεταξύ των -1 και 1 . Αντίθετα, όταν $\varepsilon^2 > (\varepsilon^*)^2 = 2\sqrt{3} - 3$, η εξίσωση $g(it) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές λύσεις t_1, t_2 με $0 < t_1 < \varepsilon < t_2$. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να δείξουμε ότι η αντίστροφη εικόνα μέσω της συνάρτησης g του τμήματος $[-\frac{2}{3}\varepsilon, \frac{2}{3}\varepsilon]$ περιέχει μία ομαλή καμπύλη που συνδέει τα -1 και 1 και διέρχεται από το σημείο it_1 . Η καμπύλη αυτή είναι και η ζητούμενη. Το σχήμα [3] παρακάτω δείχνει τη γεωμετρική σημασία της κρίσιμης τιμής ε^* και το πώς αυτή επηρεάζει την ύπαρξη της ζητούμενης τροχιάς.



Σχήμα 3. Έστω γ μία καμπύλη με άκρα τα σημεία -1 και 1 . Τότε αν $\epsilon < \epsilon^*$, η γ απεικονίζεται μέσω της g όπως στο σχήμα 3b. Άρα, ελαχιστοποιώντας στο σύνολο των καμπυλών με άκρα τα σημεία $g(\pm 1)$ και $g(i\epsilon)$ καταλήγουμε στα ευθύγραμμο τμήματα $[g(\pm 1), g(i\epsilon)]$, που απεικονίζονται με τη σειρά τους μέσω της g^{-1} στις καμπύλες α και β αντιστοίχως. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά μεταξύ των -1 και 1 υπάρχει μέσω της καμπύλης $\alpha \cup \beta$ και όχι απευθείας από το -1 στο 1 . Αντίθετα, αν $\epsilon > \epsilon^*$, η καμπύλη γ απεικονίζεται μέσω της συνάρτησης g όπως στο σχήμα 3d. Με το ίδιο επιχείρημα καταλήγουμε στο ευθύγραμμο τμήμα $[g(-1), g(1)]$, το οποίο απεικονίζεται μέσω της g^{-1} στην καμπύλη δ . Η τελευταία είναι και η ζητούμενη τροχιά που συνδέει τα σημεία ± 1 .

5. Βιβλιογραφία

- [A] G. Acerbi, Variational models for phase transitions, an approach via Gamma convergence in *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, L. Ambrosio and N. Dancer, Springer 1998.
- [ABG] S. Alama, L. Bronsard, C. Gui, Stationary layered solutions in $\mathbb{R}^2$ for an Allen-Cahn system with multiple well potential, *Calc. Var.*, (1997), no. 5, 359-390.
- [ABC] N.D. Alikakos, S. Betelu, X. Chen, Explicit stationary solutions in multiple well dynamics, and non-uniqueness of interfacial energy densities, *Euro. J. Appl. Math.*
- [AF] N.D. Alikakos, G. Fusco, On the connection problem for potentials with several global minima, *Indiana Univ. Math. J.* 57 no. 4 (2008) pp. 1871-1906.
- [BrGS] L. Bronsard, C. Gui, M. Schatzman, A three layered minimizer in $\mathbb{R}^2$ for a variational problem with a symmetric three well potential, *Comm. Pure Appl. Math.*, 49, (1996), 677-715.
- [BrR] L. Bronsard, F. Reitich, On the three-phase boundary motion and the singular limit of a vector valued Ginzburg-Landau equation, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 124, (1993), 355-379.
- [EG] L.C Evans, R.E Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, studies in advanced Mathematics, CRC 1992.
- [GH] M. Giaginta, S. Hildebrandt, *Calculus of variations*, Vol I, Springer, 1996.
- [L] P. Lindqvist, Notes on the p-Laplace equation.
- [M] A.I. Markushevich, *theory of functions of a complex variable*, Vol I, Translated by R.A. Silverman, Prentice-Hall inc., 1965.
- [St] P. Sternberg, Vector valued local minimizers of nonconvex variational problems, *Rocky Mountain J. of Math.*, 21, (1991), no. 2, 799-807.
- [StZ] P. Sternberg, W. Ziemer, Local minimizers of a three-phase transition problem with multiple triple junctions, *Proceedings of the Royal Soc. of Edinburgh*, 124 A, (1994), 1059-1073.