

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟ-
ΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕ-
ΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑ-
ΤΙΚΩΝ

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΠΟΛΛΑ- ΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ ΣΕ ΤΟΠΟΛΟ- ΓΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ ΜΕ ΕΝΕΛΙ- ΞΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΖΙΡΩΝΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Α-
ΘΗΝΑ 2011

b

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ Α-
ΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΖΙΡΩΝΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ - 283301

ΤΙΤΛΟΣ

**Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ
ΣΕ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ ΜΕ ΕΝΕΛΙΞΗ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τριμελής Επιτροπή

1. Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: κα Μαρίνα Χαραλαμπίδου
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Αθήνα, 2011.
2. Μέλος επιτροπής: κος Ιωάννης Τσέρτος, Αναπληρωτής
Καθηγητής, Αθήνα, 2011.
3. Μέλος επιτροπής: κα Ζωή Νταουλτζή-Μαλάμου, Λέκτο-
ρας, Αθήνα, 2011.

d

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της απόκτησης, του μεταπτυχιακού διπλώματος με ειδίκευση στα θεωρητικά μαθηματικά, με τίτλο **«Η Άλγεβρα των Πολλαπλασιαστών σε Τοπολογικές Άλγεβρες με Ενέλιξη»**.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω την κυρία Μαρίνα Χαραλαμπίδου, η οποία ως επιβλέπουσα καθηγήτρια, μου υπέδειξε το θέμα της διπλωματικής εργασίας και με βοήθησε με την επιστημονική της καθοδήγηση, τις εύστοχες υποδείξεις και τις διδακτικές της παρατηρήσεις καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Ευχαριστώ, επίσης, τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής τον κ. Ιωάννη Τσέρτο και την κ. Ζωή Νταουλτζή-Μαλάμου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, για την στήριξη που μου πρόσφερε και την υπομονή που έδειξε, για άλλη μία φορά, όλο αυτό το χρονικό διάστημα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτήν την εργασία μελετάμε τους αριστερούς, τους δεξιούς και τους δίπλευρους πολλαπλασιαστές μίας μιγαδικής (τοπολογικής) άλγεβρας. Για μία γνήσια μεταθετική *τοπολογική άλγεβρα* (χωριστά συνεχής πολλαπλασιασμός) δίνουμε μία σχέση μεταξύ των πολλαπλασιαστών της, και του συνόλου των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του ολικού φάσματός της. Επίσης, αναφερόμαστε σε συνθήκες, μέσω των οποίων, ένας συμπαγής πολλαπλασιαστής μίας πλήρους μετريκοποιήσιμης τοπικά κυρτής άλγεβρας είναι κατ' ανάγκη ο τετριμμένος. Περαιτέρω, μελετάμε τους διπλούς πολλαπλασιαστές μιας τοπολογικής άλγεβρας καθώς και τις αλγεβρικές ιδιότητές τους. Λαμβάνοντας την άλγεβρα $M_{cd}(A)$ των συνεχών διπλών πολλαπλασιαστών μίας τοπικά C^* -άλγεβρας A , την εφοδιάζουμε με μία ενέλιξη και δύο τοπολογίες (*την τοπολογία των ημινορμών και την αυστηρή τοπολογία*, αντίστοιχα). Ως προς την πρώτη τοπολογία, τα φραγμένα στοιχεία της $M_{cd}(A)$ ταυτίζονται (αλγεβρικά) με την άλγεβρα όλων των συνεχών διπλών πολλαπλασιαστών, που ορίζονται στην άλγεβρα $b(A)$, των φραγμένων στοιχείων της αρχικής άλγεβρας A . Τέλος, ασχολούμαστε με τοπικά m -κυρτές $*$ -άλγεβρες (A, τ) με συνεχή ενέλιξη, οι οποίες είναι *τέλειες τοπολογικές άλγεβρες*. Σε αυτό το πλαίσιο, περιγράφουμε την άλγεβρα των πολλαπλασιαστών, όταν η A όπως και πριν, είναι μια τοπικά C^* -άλγεβρα, ως προς μια ασθενέστερη τοπολογία από ότι η τ . Το ίδιο εφαρμόζεται στην περίπτωση που η A είναι μία ειδική τοπικά κυρτή H^* -άλγεβρα.

Λέξεις και φράσεις κλειδιά. Τοπικά C^* -άλγεβρα, (αριστερός, δεξιός) πολλαπλασιαστής, άλγεβρα πολλαπλασιαστών, Ανάλυση Arens-Michael.

ABSTRACT

In this work, we study left, right, and two-sided multipliers of a complex (topological) algebra. For a proper commutative *topological algebra* (separately continuous multiplication) we give a relation between the multipliers of it, and the set of all continuous complex functions on its global spectrum. We also refer to conditions, under which, a compact multiplier of a complete metrizable locally convex algebra turns to be the trivial one. Further, we study double multipliers of a topological algebra along with algebraic properties of them. Taking the algebra $M_{cd}(A)$ of the continuous double multipliers of a locally C^* -algebra A , we endow it with an involution and two topologies (called *the topology of seminorms* and *the strict topology*, respectively). Under the first topology, the bounded elements of $M_{cd}(A)$ is (algebraically) identical with the algebra of all continuous double multipliers, defined on the algebra $b(A)$ of the bounded elements of the initial algebra. Finally, we deal with locally m -convex $*$ -algebras (A, τ) with continuous involution, which are *perfect topological algebras*. In this context, we describe the algebra of multipliers, when A as before, is a locally C^* -algebra, under a weaker topology than τ . The same is applied in case A is a certain locally convex H^* -algebra.

Key words and phrases. Locally C^* -algebra, (left, right) multiplier, multiplier algebra, Arens-Michael decomposition.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το 1956 ο S. Helgason [*] ασχολήθηκε με τη θεωρία αναπαραστάσεων μεταθετικών άλγεβρων Banach με ειδική αναφορά στην αρμονική ανάλυση. Σε αυτήν βρίσκονται και οι αρχές της έννοιας ενός πολλαπλασιαστή. Συγκεκριμένα ο Helgason για να προσεγγίσει το παραπάνω πρόβλημα όρισε, σε αυτό το πλαίσιο, την άλγεβρα των πολλαπλασιαστών. Η εν λόγω άλγεβρα αποτελείται από ειδικές γραμμικές απεικονίσεις, που ονομάζονται πολλαπλασιαστές. Η γενική θεωρία των πολλαπλασιαστών βρίσκεται για παράδειγμα, στα [20, 29] και [30].

Ο ρόλος των πολλαπλασιαστών είναι ουσιαστικός σε διάφορες περιοχές των μαθηματικών όπου εμφανίζεται μία αλγεβρική δομή.

Οι μη-νορμαρισμένες τοπολογικές άλγεβρες με ενέλιξη έχουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές και σε άλλα πεδία, όπως για παράδειγμα, στη Μαθηματική Φυσική, στη Κβαντική Μηχανική και στην *K-θεωρία*. Έτσι, η θεώρηση της άλγεβρας των πολλαπλασιαστών για κάποιες τοπικά κυρτές $*$ -άλγεβρες είναι ιδιαίτερης σημασίας.

Η εργασία αυτή αποτελείται κυρίως από δύο μέρη. Στο πρώτο (§ 2.1, 2.2, 3.1) μελετάμε την άλγεβρα των πολλαπλασιαστών (τοπολογικών) άλγεβρων και στο δεύτερο (§ 3.2, 4.1), η μελέτη επικεντρώνεται στο πλαίσιο των τοπολογικών άλγεβρων με ενέλιξη. Το 1^ο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό και περιλαμβάνει βασικές έννοιες των τοπολογικών άλγεβρων.

Στη πρώτη παράγραφο του 2ου κεφαλαίου μελετάμε τους αριστερούς, τους δεξιούς και τους δίπλευρους πολλαπλασιαστές μιας άλγεβρας. Ιδιαίτερα, δίνουμε μία σχέση μεταξύ των πολλαπλασιαστών μιας γνήσιας μεταθετικής τοπολογικής άλγεβρας, και του συνόλου των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του ολικού φάσματός της. Στη δεύτερη παράγραφο δίνονται συνθήκες, ώστε ο μοναδικός συμπαγής πολλαπλασιαστής μιας πλήρους μετρικοποιήσιμης τοπικά κυρτής άλγεβρας να είναι ο τετριμμένος.

[*] Helgason S., *Multipliers of Banach algebras*, Ann. of Math. **64**(1956), 240-254.

Στο 3^ο κεφάλαιο ορίζονται οι διπλοί πολλαπλασιαστές $M_d(A)$ μιας τοπολογικής άλγεβρας A και παρουσιάζονται ορισμένες αλγεβρικές ιδιότητές τους.

Στη δεύτερη παράγραφο η άλγεβρα $M_{cd}(A)$ μιας τοπικά C^* -άλγεβρας A εφοδιάζεται με μία ενέλιξη και με δύο τοπολογίες, την τοπολογία των ημινόρμων και την αυστηρή τοπολογία. Χρησιμοποιώντας την πρώτη από αυτές, επιτυγχάνουμε την (αλγεβρική) ταύτιση των φραγμένων στοιχείων της $M_{cd}(A)$ με την άλγεβρα των συνεχών διπλών πολλαπλασιαστών επί της άλγεβρας $b(A)$, των φραγμένων στοιχείων της A .

Στο 4^ο κεφάλαιο θεωρούμε μία τοπικά m -κυρτή $*$ -άλγεβρα A με συνεχή ενέλιξη, η οποία είναι τέλεια τοπολογική άλγεβρα. Περιγράφουμε την άλγεβρα των πολλαπλασιαστών της A , ως προς μια ασθενέστερη τοπολογία, η οποία, την κάνει μία τοπικά C^* -άλγεβρα. Το ίδιο εφαρμόζεται στην περίπτωση ορισμένων τοπικά κυρτών H^* -άλγεβρών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελ.
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	i
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	iii
ABSTRACT.....	v
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	vii

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1. Άλγεβρες –Τοπολογικές Άλγεβρες.....	1
1.2. Καρτεσιανά γινόμενα τοπικά m-κυρτών αλγεβρών.....	8
1.3. Ανάλυση Arens-Michael.....	9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1. Πολλαπλασιαστές τοπολογικών αλγεβρών.....	25
2.2. Συμπαγείς πολλαπλασιαστές τοπολογικών αλγεβρών..	40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1. Διπλοί πολλαπλασιαστές (τοπολογικών) αλγεβρών.....	49
3.2 Πολλαπλασιαστές τοπικά C^*-αλγεβρών.....	56

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4.1. Πολλαπλασιαστές τοπικά $*$-αλγεβρών.....	73
4.2. Η άλγεβρα των πολλαπλασιαστών μιας τοπικά m-κυρτής H^*-άλγεβρας	80
Βιβλιογραφία.....	85
Πίνακας Συμβόλων.....	89
Πίνακας Εννοιών.....	93

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1. Άλγεβρες –Τοπολογικές Άλγεβρες

1.1.1 Ορισμός. Μία C -άλγεβρα A (υπεράνω του σώματος C των μιγαδικών αριθμών) είναι ένας διανυσματικός χώρος A πάνω στο C , εφοδιασμένος με μία διμελή εσωτερική πράξη (πολλαπλασιασμός δακτυλίου)

$$A \times A \rightarrow A : (x, y) \mapsto xy,$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

- (1) $x(yz) = (xy)z$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- (2) $x(y+z) = xy + yz$ και $(y+z)x = yx + zx$ (επιμεριστική ιδιότητα)
- (3) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$

για κάθε $x, y, z \in A, \lambda \in C$

Στα επόμενα όλοι οι διανυσματικοί χώροι και οι άλγεβρες που θεωρούμε είναι υπεράνω του σώματος C των μιγαδικών αριθμών.

- Αν ισχύει $xy = yx$ για κάθε $x, y \in A$, τότε η άλγεβρα καλείται *μεταθετική*.
- Αν υπάρχει e με $e \neq 0$ έτσι ώστε να ισχύει: $xe = ex = x$ για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η άλγεβρα έχει μονάδα. Το e με την παραπάνω ιδιότητα είναι μοναδικό (αν υπάρχει) και καλείται *η μονάδα της A* .
- Κάθε διανυσματικός χώρος μπορεί να θεωρηθεί ως άλγεβρα με τον τετριμμένο πολλαπλασιασμό: $xy = 0$ για κάθε $x, y \in A$.

1.1.2 Ορισμός. Υπό-άλγεβρα μίας άλγεβρας A καλείται κάθε μη κενό υποσύνολο F της A , που είναι κλειστό ως προς τις τρεις αλγεβρικές πράξεις, δηλαδή

$$x + y \in F,$$

$$\lambda x \in F \text{ και } xy \in F$$

για κάθε $x, y \in F, \lambda \in C$.

Κάθε υπό-άλγεβρα είναι άλγεβρα από μόνη της.

1.1.3 Ορισμός. Ένα υποσύνολο u μίας άλγεβρας A που είναι απορροφούν, ισορροπημένο, κυρτό και *πολλαπλασιαστικό* ($:uu \subseteq u$) ονομάζεται *α-κύλινδρος*.

1.1.4 Ορισμός. Ένας *μορφισμός αλγεβρών* είναι μία απεικόνιση $\varphi: A \rightarrow B$ μεταξύ δύο αλγεβρών A και B , η οποία διατηρεί τις αλγεβρικές πράξεις, δηλαδή για κάθε $x, y \in A$ και $\lambda \in C$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \quad \text{και} \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Αν οι άλγεβρες έχουν μονάδες e, e' αντίστοιχα, τότε υποθέτουμε ότι ο αλγεβρικός μορφισμός φ τις διατηρεί με την έννοια ότι $\varphi(e) = e'$.

Επίσης, αν ένας μορφισμός αλγεβρών είναι “1-1” λέγεται *μονομορφισμός*, αν είναι επί λέγεται *επιμορφισμός*, και αν είναι “1-1” και *επί* λέγεται *ισομορφισμός*.

1.1.5 Ορισμός. Έστω A μία άλγεβρα. Ένα υποσύνολο I της A καλείται *αριστερό* (αντ. *δεξιό*) *ιδεώδες* της A , αν το I είναι ένας γραμμικός υπόχωρος της A , έτσι ώστε $AI \subseteq I$ (αντ. $IA \subseteq I$), δηλαδή $xi \in I$ (αντ. $ix \in I$) για κάθε $x \in A$ και $i \in I$. Ένα υποσύνολο I της A καλείται *δίπλευρο ιδεώδες* της (ή απλώς *ιδεώδες*), αν είναι αριστερό και δεξιό ιδεώδες. Ένα (αριστερό, δεξιό, δίπλευρο) ιδεώδες I της A καλείται *γνήσιο*, αν $I \neq A$ και ένα γνήσιο (αριστερό, δεξιό, δίπλευρο) ιδεώδες της A καλείται *μέγιστο*, αν δεν περιέχεται γνήσιως σε κανένα γνήσιο ιδεώδες της A του ίδιου τύπου. Τέλος, ένα μη μηδενικό (αριστερό, δεξιό, δίπλευρο) ιδεώδες I της A καλείται *ελάχιστο* αν δεν περιέχει γνήσιως (μη μηδενικά) ιδεώδη του ίδιου τύπου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι:

- Κάθε ιδεώδες μίας άλγεβρας A είναι, ιδιαίτερα, υπάλγεβρά της.
- Σε μία μεταθετική άλγεβρα όλα τα ιδεώδη της είναι βεβαίως, δίπλευρα.
- Μία άλγεβρα A καλείται *απλή*, αν δεν έχει μη τετριμμένα ιδεώδη, δηλαδή τα μόνα ιδεώδη της είναι το $\{0\}$ και η A .

1.1.6. Ορισμός. Μία άλγεβρα A καλείται *άλγεβρα με ενέλιξη* ή *ενελικτική άλγεβρα* ή ακόμη **-άλγεβρα*, αν είναι εφοδιασμένη με μία ενδοαπεικόνιση

$$*: A \rightarrow A: x \mapsto x^*,$$

έτσι ώστε, για κάθε $x, y \in A$ και $\lambda \in \mathbf{C}$, να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

$$(x + y)^* = x^* + y^*$$

$$(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$$

$$x^{**} = x$$

$$(xy)^* = y^* x^*$$

Η απεικόνιση $*$, όπως παραπάνω καλείται *ενέλιξη* επί της A . Με άλλα λόγια, μία ενέλιξη πάνω σε μία μιγαδική άλγεβρα είναι ένας αντιγραμμικός (: συζυγώς γραμμικός) αντιστομορφισμός με περίοδο 2. Το στοιχείο x^* της A καλείται *συζυγές* του x . Αν $x^* = x$, τότε το x καλείται *αυτοσυζυγές* ή *ερμιτιανό*. Ένα στοιχείο $x \in A$ καλείται *κανονικό* (: *normal*), αν $x^* x = x x^*$.

1.1.7 Ορισμός. Έστω A, B $*$ -άλγεβρες. Ένας $*$ -μορφισμός *αλγεβρών* της A στη B είναι ένας μορφισμός $\varphi: A \rightarrow B$ έτσι ώστε $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ για κάθε $x \in A$.

Η φ καλείται $*$ -ισομορφισμός, αν επιπλέον, είναι “1-1” και επί.

1.1.8 Ορισμός. Έστω A μία $*$ -άλγεβρα και I ένα $*$ -ιδεώδες της. Δηλαδή το I είναι ιδεώδες της A με $I^* = I$ όπου $I^* = \{\alpha^* : \alpha \in I\}$. Τότε η άλγεβρα πηλίκου A/I γίνεται ενελκτική, ορίζοντας

$$(x + I)^* = x^* + I \text{ για κάθε } x + I \in A/I.$$

Η προκύπτουσα άλγεβρα καλείται $*$ -άλγεβρα πηλίκου της A modulo I .

1.1.9 Ορισμός. Μία άλγεβρα A καλείται *νορμαρισμένη άλγεβρα*, αν ο υποκείμενος γραμμικός χώρος είναι νορμαρισμένος ως προς μία *διανυσματική νόρμα*, δηλαδή η A είναι εφοδιασμένη με μία απεικόνιση

$$(1.1.1) \quad \|\cdot\|: A \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto \|x\|$$

Η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$(1.1.2) \quad \|x\| \geq 0 \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (θετικά ορισμένη).}$$

(1.1.3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in A$ (υποπροσθετική ή τριγωνική ιδιότητα).

(1.1.4) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}, x \in A$ (απόλυτη ομογένεια).

Επιπλέον, η (1.1.1) είναι υποπολλαπλασιαστική, δηλαδή

(1.1.5) $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ για κάθε $x, y \in A$.

Με άλλα λόγια, ένας νορμαρισμένος γραμμικός χώρος $(A, \|\cdot\|)$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{C}$ καλείται νορμαρισμένη άλγεβρα, αν ο A είναι άλγεβρα και ικανοποιείται η σχέση (1.1.5).

Μία διανυσματική νόρμα πάνω σε μία άλγεβρα A , που επιπλέον, ικανοποιεί την (1.1.5), καλείται *αλγεβρική νόρμα*.

Μία νορμαρισμένη άλγεβρα $(A, \|\cdot\|)$ καλείται *άλγεβρα Banach*, αν ο υποκείμενος νορμαρισμένος γραμμικός χώρος είναι πλήρης, δηλαδή χώρος Banach.

Αν μία νορμαρισμένη άλγεβρα $(A, \|\cdot\|)$ έχει μονάδα e , τότε θέτουμε εξ' ορισμού $\|e\| = 1$ (δηλαδή η μονάδα είναι κανονική). Το εξ' ορισμού δικαιολογείται με την έννοια ότι, ακόμη και στο πλαίσιο, των τοπικά m -κυρτών αλγεβρών $(A, (p_a)_{a \in I})$ ορίζεται ισοδύναμη οικογένεια $(q_a)_{a \in I}$ υποπολλαπλασιαστικών ημινορμών έτσι ώστε $q_a(e) = 1$ για κάθε $a \in I$. (Βλ. [3, σελ 51, Θεώρημα 2.2.11]).

Εξάλλου, η $\|\cdot\|$ (βλ. (1.1.1)) καλείται *αλγεβρική ημινόρμα* ή *υποπολλαπλασιαστική ημινόρμα*, αν ικανοποιεί τις (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5) καθώς και τη σχέση $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in A$.

Μία *ημिनορμαρισμένη άλγεβρα* είναι μία άλγεβρα A εφοδιασμένη με μία υποπολλαπλασιαστική ημινόρμα, έστω p , και συμβολίζεται με (A, p)

Κάθε νόρμα είναι προφανώς ημινόρμα.

1.1.10 Ορισμός. Μία *τοπολογική άλγεβρα* είναι μία άλγεβρα A , η οποία είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος, έτσι ώστε ο πολλαπλασιασμός δακτυλίου της A να είναι χωριστά συνεχής (δηλαδή συνεχής ως προς κάθε μία μεταβλητή).

Στο εξής, κάθε τοπολογική άλγεβρα A θα θεωρείται Hausdorff, (ο υποκείμενος τοπολογικός διανυσματικός χώρος είναι Hausdorff) δηλαδή η άλγεβρα A θεωρεί-

ται εφοδιασμένη με μία τοπολογία, τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ υπάρχουν U, V ανοιχτά (στοιχεία της τοπολογίας) με $x \in U$ και $y \in V$, ώστε

$U \cap V = \emptyset$ ή (επειδή A διανυσματικός χώρος) ισοδύναμα για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει περιοχή U του 0 με $x \notin U$).

Έστω A ένας διανυσματικός χώρος και S ένα υποσύνολο του A . Η *δείκτρια συνάρτηση* ή το *συναρτησοειδές Minkowski* g_S του S είναι η ακόλουθη απεικόνιση:

$$(1.1.6) \quad g_S : A \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$$

με $g_S(x) := \inf \{ \lambda : \lambda > 0, x \in \lambda S \}$, αν υπάρχει $\lambda > 0$ με $x \in \lambda S$, ενώ

$g_S(x) := +\infty$, αν $x \notin \lambda S$ για όλα τα $\lambda > 0$.

Σχετικά ισχύουν τα εξής:

(i) $g_S(x) < +\infty$, αν το σύνολο S είναι *απορροφούν* (: για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\kappa > 0$, έτσι ώστε $x \in \lambda S$ για κάθε βαθμωτό λ με $|\lambda| \geq \kappa$).

(ii) Η συνάρτηση g_S είναι *υποπροσθετική*, αν το S είναι *κυρτό* (: αν $x, y \in S$ και $0 \leq \lambda \leq 1$, τότε $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$).

(iii) Αν το S είναι *ισορροπημένο* (: για κάθε βαθμωτό λ με $|\lambda| \leq 1$, $\lambda S \subseteq S$), τότε η g_S είναι *απόλυτα ομογενής*, δηλαδή

$$g_S(\lambda x) = |\lambda| g_S(x) \text{ για κάθε } x \in A, \lambda \in \mathbf{C}.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει η πρόταση.

1.1.11 Πρόταση. Σε κάθε διανυσματικό χώρο η δείκτρια συνάρτηση ενός απορροφούντος, ισορροπημένου και κυρτού συνόλου είναι ημινόρμα.

Έστω τώρα μία νορμαρισμένη άλγεβρα (A, p) . Θεωρούμε την *κλειστή μοναδιαία ψευδοσφαίρα* της A , που αντιστοιχεί στην p , δηλαδή το σύνολο

$$(1.1.7) \quad U \equiv U_p(1) = \{x \in A : p(x) \leq 1\}.$$

Λόγω του ορισμού του, το σύνολο U είναι κυρτό, ισορροπημένο, απορροφούν και πολλαπλασιαστικό. Τότε ισχύει η σχέση

$$g_U = p$$

Ένας κλειστός a -κύλινδρος μίας τοπολογικής άλγεβρας A καλείται m -κύλινδρος.

1.1.12 Ορισμός. Μία τοπολογική άλγεβρα A καλείται *τοπικά κυρτή*, αν ο υποκείμενος τοπολογικός διανυσματικός χώρος A είναι τοπικά κυρτός, δηλαδή κάθε περιοχή οποιουδήποτε $x \in A$ περιέχει μια κυρτή περιοχή του x .

Ιδιαίτερα, μία τοπολογική άλγεβρα A καλείται *τοπικά m -κυρτή*, αν η τοπολογία της ορίζεται από μια τοπική βάση αποτελούμενη από m -κυρτά σύνολα (: κυρτά και πολλαπλασιαστικά).

Μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα A , της οποίας η τοπολογία ορίζεται από μία οικογένεια $(p_a)_{a \in I}$ από υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες, θα συμβολίζεται στο εξής από το ζεύγος $(A, (p_a)_{a \in I})$. Η οικογένεια $(p_a)_{a \in I}$, όπως προηγουμένως, θα καλείται *θεμελιώδης*, αν ικανοποιεί την επόμενη συνθήκη:

Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του I υπάρχει $a \in I$ και

$$(*) \quad \varepsilon > 0, \text{ έτσι ώστε } \varepsilon p_i(x) \leq p_a(x) \text{ για κάθε } i \in F \text{ και } x \in A.$$

Ισοδύναμα, η οικογένεια

$$B_0 = \{ \varepsilon \mathcal{U}_{p_a}(1) = \mathcal{U}_{p_a}(\varepsilon) : a \in I, 0 < \varepsilon \leq 1 \}$$

είναι μία τοπική βάση της A . Σχετικά ισχύει το ακόλουθο.

Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Τότε υπάρχει μία άλλη οικογένεια από υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες (που ορίζονται μέσω των $p_a, a \in I$) επί της A , η οποία ικανοποιεί την (*). Επιπλέον, η οικογένεια αυτή ορίζει επί της A την ίδια (τοπικά m -κυρτή) τοπολογία όπως και η $(p_a)_{a \in I}$ (βλ. [3, σελ. 45, Παρατήρηση]).

1.1.13 Ορισμός. Έστω A μία άλγεβρα. Ένας *χαρακτήρας* f της A είναι ένας μη μηδενικός (αλγεβρικός) μορφισμός $f : A \rightarrow \mathbb{C}$.

1.1.14 Ορισμός. Ονομάζουμε *αλγεβρικό φάσμα* (ή *ολικό φάσμα*) μιας άλγεβρας A και το συμβολίζουμε $\mathfrak{M}^a(A)$ το σύνολο των χαρακτήρων της.

Αν (A, τ) είναι μία τοπολογική άλγεβρα τότε το σύνολο των συνεχών χαρακτήρων της το συμβολίζουμε με $\mathfrak{M}(A)$ δηλαδή

$$\mathfrak{M}(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{C}, f \neq 0 \text{ γραμμική συνεχής και } f(xy) = f(x)f(y) \forall x, y \in A\}.$$

Το $\mathfrak{M}(A)$ καλούμε επίσης ολικό φάσμα της τοπολογικής άλγεβρας A .

Ορισμένες φορές για το ολικό φάσμα χρησιμοποιείται και ο όρος *χώρος μέγιστων ιδεωδών*.

Ασθενής τοπολογία

Έστω (A, τ) μία τοπολογική άλγεβρα και

$$A^* = \{f, f : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ γραμμική απεικόνιση}\} \text{ (ο δυϊκός χώρος της } A),$$

$A' = \{f \in A^* : f \text{ συνεχής}\}$. Το σύνολο A' είναι ο *τοπολογικός συζυγής* της A . Για κάθε $x \in A$, η συνάρτηση

$$\begin{aligned} q_x : A' &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x' &\mapsto q_x(x') := |x'(x)| \end{aligned}$$

είναι μία ημινόρμα επί του A' .

Ο A' εφοδιασμένος με την τοπολογία που ορίζουν σ' αυτόν οι ημινόρμες q_x , $x \in A$ γίνεται ένας *τοπικά κυρτός (διανυσματικός) χώρος* με βάση περιοχών του

$$0 \in A' \text{ την οικογένεια } \mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_{q_{x_i}}(\varepsilon), \varepsilon > 0, x_i \in A, 1 \leq i \leq n \right\} \text{ όπου}$$

$$\mathcal{U}_{q_{x_i}}(\varepsilon) = \{x' \in A' : q_{x_i}(x') < \varepsilon\} = \{x' \in A' : |x'(x_i)| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0, x_i \in A.$$

Η τοπολογία επί του A' , όπως ορίστηκε παραπάνω, καλείται *ασθενής τοπολογία* ή *τοπολογία της απλής σύγκλισης* και συμβολίζεται με s . Δηλαδή το s συμβολίζει την ασθενή *-τοπολογία $\sigma(A', A)$ επί της A' . Το ζεύγος $(A', s) \equiv A'_s$ καλείται *ασθενής τοπολογικός συζυγής* του A .

Το $\mathfrak{M}(A)$ εφοδιασμένο με τη σχετική τοπολογία από τον A'_s γίνεται τοπολογικός χώρος Hausdorff (επειδή η τοπολογία s είναι Hausdorff). Ο τοπολογικός χώρος που προκύπτει συμβολίζεται με

$$\left(\mathfrak{M}(A), s|_{\mathfrak{M}(A)}\right) \equiv \mathfrak{M}(A)$$

και καλείται το (ολικό τοπολογικό) φάσμα της A ή ακόμη χώρος *Gel'fand*.

1.2. Καρτεσιανά γινόμενα τοπικά m -κυρτών αλγεβρών

Έστω $(A_a)_{a \in I}$ μία οικογένεια τοπολογικών αλγεβρών. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $F = \prod_{a \in I} A_a$. Το F γίνεται άλγεβρα με πράξεις κατά συντεταγμένες. Χρησιμοποιώντας τις απεικονίσεις προβολές

$$(1.2.1) \quad \pi_a : F \rightarrow A_a : x = (x_a) \mapsto \pi_a(x) = \pi_a((x_a)) := x_a, \quad a \in I,$$

ορίζουμε επί της F την αρχική τοπολογία, δηλαδή την τοπολογία (καρτεσιανό) γινόμενο. Προφανώς, οι π_a , $a \in I$, είναι αλγεβρικοί μορφισμοί και συνεπώς η F γίνεται τελικά, μία τοπολογική άλγεβρα. Επιπλέον, η F έχει συνεχή πολλαπλασιασμό, αν αυτό ισχύει για τους παράγοντες A_a , $a \in I$.

Στο πλαίσιο αυτό, μία τοπική βάση για την τοπολογική άλγεβρα F αποτελείται από σύνολα της μορφής

$$(1.2.2) \quad \bigcap_{i=1}^n \pi_{a_i}^{-1}(u_{a_i}),$$

όπου τα u_{a_i} λαμβάνονται από τοπικές βάσεις των τοπολογικών αλγεβρών

A_a , $a \in I$. Ισοδύναμα, θεωρούμε τα σύνολα της μορφής

$$(1.2.3) \quad \prod_{a \in I} u_a$$

με $u_a = A_a$, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος δεικτών για τους οποίους τα u_a είναι στοιχεία τοπικών βάσεων των παραγόντων A_a , $a \in I$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το καρτεσιανό γινόμενο F τοπικά κυρτών αλγεβρών (ειδικότερα, τοπικά m -κυρτών αλγεβρών) είναι μία τοπολογική άλγεβρα

του ίδιου τύπου με τους παράγοντες. Εξάλλου, η F είναι Hausdorff, αν και μόνο αν η A_α , $\alpha \in I$, είναι Hausdorff. Τέλος, η F είναι πλήρης, αν και μόνο αν οι παράγοντες του καρτεσιανού γινομένου είναι πλήρεις χώροι.

1.3. Ανάλυση Arens-Michael

Έστω $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ μία οικογένεια αλγεβρών, όπου το I είναι εφοδιασμένο με μία μερική διάταξη “ $\leq$ ”, η οποία είναι προς τα άνω κατευθυνόμενη (: για κάθε $\alpha, \beta \in I$ υπάρχει $\gamma \in I$ με $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$). Επιπλέον, έστω $f_{\alpha\beta}$ μία οικογένεια αλγεβρικών μορφισμών (που καλούνται συνδέουσες απεικονίσεις), έτσι ώστε

$$(1.3.1) \quad f_{\alpha\beta} : A_\beta \rightarrow A_\alpha, \alpha, \beta \in I \text{ με } \alpha \leq \beta.$$

Ειδικά,

$$(1.3.2) \quad f_{\alpha\alpha} = id_{A_\alpha}, \alpha \in I$$

είναι ο ταυτοτικός μορφισμός της άλγεβρας A_α .

1.3.1 Ορισμός. Ένα προβολικό (ή αντίστροφο) σύστημα αλγεβρών είναι μία οικογένεια ζευγών $\{(A_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$, όπου $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ είναι μία οικογένεια αλγεβρών και οι $f_{\alpha\beta}, \alpha \leq \beta$ στο I είναι αλγεβρικοί μορφισμοί, που ικανοποιούν τις (1.3.1) και (1.3.2). Επιπλέον,

$$(1.3.3) \quad f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} \text{ για κάθε } \alpha, \beta, \gamma \in I \text{ με } \alpha \leq \beta \leq \gamma.$$

Θεωρούμε την άλγεβρα καρτεσιανό γινόμενο $F = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ των $A_\alpha, \alpha \in I$ και το ακόλουθο υποσύνολό της

$$(1.3.4) \quad A = \{x = (x_\alpha) \in F : x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta), \text{ αν } \alpha \leq \beta \text{ στο } I\}.$$

Εύκολα ελέγχεται ότι το A είναι μία υπάλγεβρα της F . Ενδέχεται να είναι $A = \{0\}$. Αν οι άλγεβρες $A_\alpha, \alpha \in I$, έχουν μονάδα, έστω $e_\alpha, \alpha \in I$, τότε υποθέτουμε ότι οι συνδέουσες απεικονίσεις τις διατηρούν (δηλαδή, $f_{\alpha\beta}(e_\beta) = e_\alpha, \alpha \leq \beta$), οπότε το στοιχείο $e = (e_\alpha) \in F$ είναι στοιχείο της A (και μονάδα της).

1.3.2 Ορισμός. Έστω $\{(A_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$ ένα προβολικό σύστημα αλγεβρών. Η

υπόαλγεβρα A της F , όπως στη σχέση (1.3.4), καλείται *άλγεβρα προβολικό* (ή *αντίστροφο*) *όριο* του δοθέντος προβολικού συστήματος και συμβολίζεται με

$$(1.3.5) \quad A = \varprojlim_{\alpha} (A_\alpha, f_{\alpha\beta}) \equiv \varprojlim_{\alpha} A_\alpha \equiv \varprojlim_{\alpha} A_\alpha.$$

Αν $\{(A_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$ είναι ένα προβολικό σύστημα αλγεβρών, ορίζουμε μία οικογένεια $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ αλγεβρικών μορφισμών επί της άλγεβρας προβολικό όριο A ως εξής:

$$(1.3.6) \quad f_\alpha = \pi_\alpha|_A : A \rightarrow A_\alpha, \alpha \in I,$$

δηλαδή κάθε f_α είναι ο περιορισμός της απεικόνισης προβολής $\pi_\alpha, \alpha \in I$, επί της A . Η απεικόνιση f_α , δεν είναι γενικά επί (υπάρχουν όμως περιπτώσεις που οι f_α είναι επί όπως για παράδειγμα στο πλαίσιο των τοπικά m -κυρτών αλγεβρών Frechet (πρβλ [16, σελ. 199, Lemma 2.8]).

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$(1.3.7) \quad f_\alpha = f_{\alpha\beta} \circ f_\beta, \alpha, \beta \in I \text{ με } \alpha \leq \beta.$$

1.3.3 Ορισμός. Ένα προβολικό σύστημα τοπολογικών αλγεβρών είναι ένα προβολικό σύστημα αλγεβρών $\{(A_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$, όπου οι άλγεβρες $A_\alpha, \alpha \in I$ είναι τοπολογικές και οι απεικονίσεις $f_{\alpha\beta}$ με $\alpha \leq \beta$ στο I είναι συνεχείς (αλγεβρικοί) μορφισμοί.

Η άλγεβρα προβολικό όριο $A = \varprojlim_{\alpha} A_\alpha$, εφοδιασμένη με την αρχική τοπολογία

α , που ορίζεται μέσω των $f_\alpha, \alpha \in I$ γίνεται τοπολογική και καλείται *τοπολογική άλγεβρα προβολικό* (ή *αντίστροφο*) *όριο* (του προβολικού συστήματος $\{(A_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$).

Από τα προηγούμενα και τα σχόλια στο τέλος της §1.2 προκύπτει το ακόλουθο.

1.3.4 Πρόσβαση. Το προβολικό όριο τοπικά m -κυρτών αλγεβρών είναι (ως προς την αρχική τοπολογία) μία τοπολογική άλγεβρα του ίδιου τύπου.

Σε σχέση με το προηγούμενο αποτέλεσμα, στην περίπτωση που οι δοθείσες άλγεβρες είναι πλήρεις, ισχύει και το αντίστροφο.

1.3.5 Πρόταση. Κάθε τοπολογική άλγεβρα προβολικό όριο $A = \varprojlim A_\alpha$ είναι κλειστή υπάλγεβρα της τοπολογικής άλγεβρας γινόμενο F . Ειδικά, η A είναι πλήρης, αν αυτό συμβαίνει για κάθε παράγοντα A_α .

Απόδειξη.

Από τη συνέχεια των συνδεουσών απεικονίσεων και τους ορισμούς, προκύπτει ότι η υπάλγεβρα A της F είναι (ως προς τη σχετική τοπολογία) κλειστή. Αν $A_\alpha, \alpha \in I$ είναι πλήρης χώρος, τότε και ο χώρος καρτεσιανό γινόμενο είναι επίσης πλήρης. Έτσι, η A , ως κλειστός υπόχωρος του πλήρους χώρου F , είναι πλήρης και αυτό συμπληρώνει την απόδειξη. $\square$

Στη συνέχεια θα δώσουμε μία παράσταση μιας πλήρους τοπικά m -κυρτής άλγεβρας μέσω ενός προβολικού ορίου αλγεβρών Banach. Η παράσταση αυτή θεωρείται κλειδί στη μελέτη των τοπολογικών αλγεβρών, καθώς βασικά αποτελέσματα των τοπικά m -κυρτών αλγεβρών μπορούν να προκύψουν από αντίστοιχα των παραγόντων που είναι άλγεβρες Banach αλλά και αντίστροφα, η μελέτη των τοπικά m -κυρτών αλγεβρών συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση των αλγεβρών Banach.

Έστω A μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $\mathfrak{B}_0 = (\mathbf{U}_\alpha)_{\alpha \in I}$ μία τοπική βάση της A αποτελούμενη από m -κυλίνδρους. Θεωρούμε τις δείκτριες συναρτήσεις $g_{u_\alpha} \equiv p_\alpha$ των $\mathbf{U}_\alpha, \alpha \in I$. Έτσι, παίρνουμε μία οικογένεια $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$, από συνεχείς υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες που ορίζουν την τοπολογία της A .

Εξάλλου, για κάθε $\alpha \in I$ το ζεύγος (A, p_α) είναι μία ημινορμαρισμένη άλγεβρα. Θεωρούμε την άλγεβρα πηλίκου

$$(1.3.8) \quad A / \ker(p_\alpha)$$

όπου $\ker(p_\alpha) = p_\alpha^{-1}(0) = \{x \in A : p_\alpha(x) = 0\} \equiv N_\alpha$ είναι ένα κλειστό δίπλευρο ιδεώδες της A . Εδώ, η αντίστοιχη νόρμα δίνεται από τη σχέση

$$p_\alpha(x + \ker(p_\alpha)) = p_\alpha(x).$$

Έτσι η πλήρωση $A_\alpha = \overline{A/N_\alpha}$ της A/N_α , $\alpha \in I$ είναι μία άλγεβρα Banach.

Επιπλέον θεωρούμε την αντίστοιχη (κανονική) απεικόνιση πηλίκου

$$(1.3.9) \quad \varrho_\alpha : A \rightarrow A/N_\alpha, \alpha \in I \text{ όπου } x \mapsto \varrho_\alpha(x) := x + N_\alpha$$

η οποία είναι ένας αλγεβρικός επιμορφισμός. Θεωρούμε τώρα το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} A/N_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & A_\alpha \\ & \searrow \varrho_\alpha & \uparrow i_\alpha \circ \varrho_\alpha = \overline{\varrho_\alpha} \\ & & A \end{array}$$

(όπου i_α είναι η κανονική εμφύτευση της A/N_α στην πλήρωσή της A_α), τότε η

$\overline{\varrho_\alpha}$ είναι επίσης μορφισμός αλγεβρών. Βάσει των (1.3.2) και (1.3.3), ορίζουμε τώ-

ρα στο I μία μερική διάταξη $\leq$ ως εξής: Έστω $\alpha, \beta \in I$. Τότε $\alpha \leq \beta$, αν

$U_\beta \subseteq U_\alpha$ ισοδύναμα $p_\alpha(x) \leq p_\beta(x)$ για κάθε $x \in A$.

Το I εφοδιασμένο με την πιο πάνω μερική διάταξη γίνεται (άνω) κατευθυνόμενο σύνολο. Έτσι, αν $\alpha \leq \beta$ στο I , τότε $p_\alpha \leq p_\beta$ (κατά σημείο επί του A).

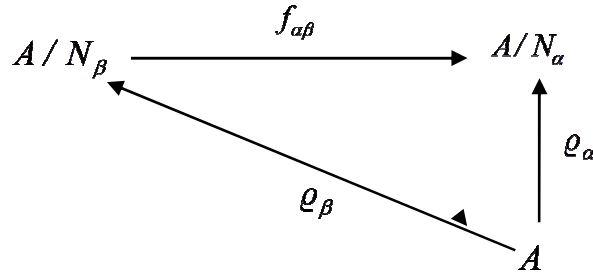
Άρα επειδή

$$N_\beta \equiv \ker p_\beta \subseteq \ker p_\alpha \equiv N_\alpha$$

η απεικόνιση

$$f_{\alpha\beta} : A/N_\beta \rightarrow A/N_\alpha : f_{\alpha\beta}(x + N_\beta) = x + N_\alpha$$

είναι ένας καλά ορισμένος αλγεβρικός επιμορφισμός. Επιπλέον το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:



δηλαδή $\varrho_\alpha = f_{\alpha\beta} \circ \varrho_\beta$ για κάθε $\alpha \leq \beta$ στο I . Επομένως οι απεικονίσεις $f_{\alpha\beta}$ με $\alpha \leq \beta$ είναι συνεχείς. Εξάλλου, $f_{\alpha\alpha} = id_{A/N_\alpha}$ και $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η οικογένεια $\{(A/N_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$ ορίζει ένα προβολικό σύστημα αλγεβρών, που αντιστοιχεί στην τοπική βάση $\mathfrak{B}_0 = (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in I}$ της A . Εξάλλου, θεωρώντας τις συνεχείς επεκτάσεις $\overline{f_{\alpha\beta}}$ των απεικονίσεων $f_{\alpha\beta}$, λαμβάνουμε ένα προβολικό σύστημα αλγεβρών Banach:

$$\{(A_\alpha, \overline{f_{\alpha\beta}})\}_{\alpha \in I}, \text{ όπου } \overline{\varrho_\alpha} = \overline{f_{\alpha\beta}} \circ \overline{\varrho_\beta}.$$

Οπότε, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το αντίστροφο όριο $\varprojlim_\alpha A / \ker(p_\alpha)$ (αντ.

$\varprojlim_\alpha A_\alpha$) είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, (αντ. πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγε-

βρα).

Προβολικά συστήματα απεικονίσεων. Απεικόνιση προβολικό όριο

Με ένα προβολικό σύστημα συνόλων εννοούμε μία οικογένεια $\{(E_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$ με I ένα άνω κατευθυνόμενο σύνολο δεικτών. E_α , $\alpha \in I$ είναι (μη κενά) σύνολα και για $\alpha \leq \beta$ ορίζονται οι απεικονίσεις $f_{\alpha\beta} : E_\beta \rightarrow E_\alpha$, έτσι ώστε

- i) $f_{\alpha\alpha} = id_{E_\alpha}$, $\alpha \in I$.
- ii) $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}$, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Θεωρούμε το σύνολο προβολικό (ή αντίστροφο) όριο

$$E = \lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha = \left\{ x = (x_\alpha) \in F = \prod_{\alpha} E_\alpha : x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta), \text{ αν } \alpha \leq \beta \text{ στο } I \right\}$$

και για κάθε $\alpha \in I$, θεωρούμε την κανονική απεικόνιση

$$f_\alpha = \pi_\alpha|_E : \lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha \rightarrow E_\alpha, \alpha \in I.$$

Ως εφαρμογή των προηγούμενων έχουμε την ακόλουθη.

1.3.6 Πρόταση. Έστω E ένα (μη κενό) σύνολο, $(I, \leq)$ ένα (μερικά διατεταγμένο) άνω κατευθυνόμενο σύνολο δεικτών και μία οικογένεια συνόλων $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ με $E_\alpha = E$ για κάθε $\alpha \in I$. Για $\alpha \leq \beta$ στο I , θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$f_{\alpha\beta} \equiv id_E : E_\beta (= E) \rightarrow E_\alpha (= E).$$

Τότε το προβολικό όριο $\lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha$ είναι η διαγώνιος Δ του γινομένου

$$\prod E_\alpha \equiv \prod E = E^I, \text{ δηλαδή το σύνολο}$$

$$\Delta = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in I} \text{ με } x_\alpha = x \in E \text{ για } \alpha \in I \right\}.$$

Απόδειξη.

Έστω $x = (x_\alpha) \in \Delta$. Τότε για $\alpha \leq \beta$, $f_{\alpha\beta}(x_\beta) = id_E(x_\beta) = x_\beta = x_\alpha$, δηλαδή $x \in \lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha$, και συνεπώς $\Delta \subseteq \lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha$.

Αντίστροφα, έστω $(x_\alpha) \equiv x \in \lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha$, τότε $x \in \Delta$, αν για τυχαίο ζεύγος

$(\alpha, \beta) \in I \times I$, $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$, δηλαδή το x έχει τις ίδιες προβολές. Πράγματι, αφού το I είναι άνω κατευθυνόμενο, υπάρχει $\gamma \in I$ με $\alpha \leq \gamma$ και $\beta \leq \gamma$.

Επομένως

$$x_\alpha = f_\alpha(x) = (f_{\alpha\gamma} \circ f_\gamma)(x) = f_{\alpha\gamma}(f_\gamma(x)) = id_E(f_\gamma(x)) = f_\gamma(x) = x_\gamma$$

και

$$x_\beta = f_\beta(x) = (f_{\beta\gamma} \circ f_\gamma)(x) = f_{\beta\gamma}(f_\gamma(x)) = id_E(f_\gamma(x)) = f_\gamma(x) = x_\gamma.$$

Από τα προηγούμενα έχουμε $x_\alpha = x_\beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in I$ και συνεπώς

$$\lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha \subseteq \Delta. \text{ Έτσι, έχουμε τελικά, } \lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha = \Delta.$$

□

1.3.7 Πρόταση. Έστω $\{(E_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$ ένα προβολικό σύστημα συνόλων, S σύνολο και $\varphi_\alpha : S \rightarrow E_\alpha, \alpha \in I$ απεικονίσεις έτσι ώστε

$$(1.3.10) \quad f_{\alpha\beta} \circ \varphi_\beta = \varphi_\alpha, \alpha \leq \beta. \text{ Τότε ισχύουν τα εξής:}$$

i) Υπάρχει μία απεικόνιση

$$\varphi : S \rightarrow E = \lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha \text{ έτσι ώστε } \varphi_\alpha = f_\alpha \circ \varphi \text{ για κάθε } \alpha \in I.$$

ii) Η φ είναι “1-1”, αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in S$ με $x \neq y$, υπάρχει $\alpha \in I$, έτσι ώστε $\varphi_\alpha(x) \neq \varphi_\alpha(y)$.

Απόδειξη.

i) Ορίζουμε μία απεικόνιση $\varphi : S \rightarrow E = \lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha$ ως εξής:

$$\varphi(x) := (\varphi_\alpha(x))_{\alpha \in I}. \text{ Λόγω της (1.3.10), για } \alpha \leq \beta, \text{ στο } I, \text{ έχουμε}$$

$$f_{\alpha\beta}(\varphi_\beta(x)) = \varphi_\alpha(x) \text{ για κάθε } x \in S.$$

Επομένως $(\varphi_\alpha(x))_{\alpha \in I} \in \lim_{\leftarrow \alpha} E_\alpha$ που σημαίνει ότι η φ είναι καλά ορισμένη.

Εξάλλου, για κάθε $x \in S$, έχουμε (βλ. και (1.3.6)),

$$(f_\alpha \circ \varphi)(x) = f_\alpha(\varphi(x)) = f_\alpha((\varphi_\alpha(x))) = \pi_\alpha|_E(\varphi_\alpha(x)) = \varphi_\alpha(x).$$

Επομένως $f_\alpha \circ \varphi = \varphi_\alpha$ για κάθε $\alpha \in I$.

ii) Έστω ότι η φ είναι “1-1”. Αν $x, y \in S$ με $x \neq y$, θα δείξουμε ότι

$$\varphi_\alpha(x) \neq \varphi_\alpha(y) \text{ για κάποιο } \alpha \in I. \text{ Διαφορετικά, η σχέση } \varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(y) \text{ για}$$

$$\text{κάθε } \alpha \in I, \text{ συνεπάγεται } (\varphi_\alpha(x)) = (\varphi_\alpha(y)), \text{ αν και μόνο αν } \varphi(x) = \varphi(y),$$

οπότε $x = y$, το οποίο είναι άτοπο.

Ανάλογα αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

□

1.3.8 Πρόταση. Έστω $\{(E_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$, $\{(H_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$ δύο προβολικά συστήματα συνόλων με το ίδιο σύνολο δεικτών I . Θεωρούμε τα αντίστοιχα προβολικά όρια $E = \varprojlim_\alpha E_\alpha$ και $H = \varprojlim_\alpha H_\alpha$ καθώς και τις κανονικές απεικονίσεις

$$f_\alpha = \pi_\alpha|_E : E \rightarrow E_\alpha \text{ και } g_\alpha = \pi_\alpha|_H : H \rightarrow H_\alpha, \alpha \in I.$$

Υποθέτουμε ότι οι $\varphi_\alpha : E_\alpha \rightarrow H_\alpha$, $\alpha \in I$ είναι απεικονίσεις, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} E_\beta & \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} & E_\alpha \\ \varphi_\beta \downarrow & & \downarrow \varphi_\alpha \\ H_\beta & \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} & H_\alpha \end{array}$$

δηλαδή

$$(1.3.11) \quad g_{\alpha\beta} \circ \varphi_\beta = \varphi_\alpha \circ f_{\alpha\beta}, \alpha \leq \beta \text{ στο } I$$

Τότε υπάρχει μία μονοσήμαντα ορισμένη απεικόνιση

$$\varphi : \varprojlim_\alpha E_\alpha \rightarrow \varprojlim_\alpha H_\alpha,$$

έτσι ώστε για κάθε $\alpha \in I$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & H \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow g_\alpha \\ E_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & H_\alpha \end{array}$$

δηλαδή $\varphi_\alpha \circ f_\alpha = g_\alpha \circ \varphi$.

Απόδειξη.

Για την απόδειξη της πρότασης δημιουργούμε τις προϋποθέσεις της πρότασης 1.3.7.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$u_\alpha := \varphi_\alpha \circ f_\alpha : E \rightarrow H_\alpha, \alpha \in I.$$

Τότε (πρβλ. και τη σχέση (1.3.11)) έχουμε

$$g_{\alpha\beta} \circ u_\beta = g_{\alpha\beta} \circ (\varphi_\beta \circ f_\beta) = (g_{\alpha\beta} \circ \varphi_\beta) \circ f_\beta = (\varphi_\alpha \circ f_{\alpha\beta}) \circ f_\beta = \varphi_\alpha \circ f_\alpha = u_\alpha$$

Επομένως ικανοποιείται η (1.3.10), οπότε από την πρόταση 1.3.7, υπάρχει μία απεικόνιση

$$\varphi : E \rightarrow H = \varprojlim_\alpha H_\alpha \text{ με } u_\alpha = g_\alpha \circ \varphi.$$

Επομένως $\varphi_\alpha \circ f_\alpha = g_\alpha \circ \varphi$. Απομένει να δείξουμε ότι η φ είναι μοναδική.

Έστω λοιπόν, ότι υπάρχει και μία άλλη απεικόνιση

$$\varphi' : E \rightarrow H = \varprojlim_\alpha H_\alpha \text{ με } u_\alpha = g_\alpha \circ \varphi'.$$

Τότε $g_\alpha \circ \varphi = g_\alpha \circ \varphi', \alpha \in I$. Ισχυριζόμαστε ότι $\varphi(x) = \varphi'(x)$ για κάθε $x \in E$, οπότε $\varphi = \varphi'$. Διαφορετικά, υπάρχει $y \in E$ με $\varphi'(y) \equiv (s_\alpha) \in H$. Έτσι, αν $\varphi(y) \equiv (y_\alpha) \in H$ και $\varphi'(y) \equiv (s_\alpha) \in H$, υπάρχει $\alpha_0 \in I$ με $y_{\alpha_0} \neq s_{\alpha_0}$. Όμως επειδή $y_{\alpha_0} = g_{\alpha_0}((y_\alpha)) = g_{\alpha_0}(\varphi(y)) = (g_{\alpha_0} \circ \varphi)(y)$ και

$$s_{\alpha_0} = g_{\alpha_0}((s_\alpha)) = g_{\alpha_0}(\varphi(s)) = (g_{\alpha_0} \circ \varphi)(s), \text{ θα είχαμε}$$

$$(g_{\alpha_0} \circ \varphi)(y) = (g_{\alpha_0} \circ \varphi')(y) \text{ για κάποιο } y \in E \text{ που είναι άτοπο.}$$

□

Βασίζόμενοι στην προηγούμενη πρόταση δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

1.3.9 Ορισμός. Έστω $\{(E_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}, \{(H_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$ δύο προβολικά συστήμα-

τα συνόλων με το ίδιο σύνολο δεικτών I και $E = \varprojlim_\alpha E_\alpha, H = \varprojlim_\alpha H_\alpha$ τα αντί-

στοιχα προβολικά τους όρια. Έστω

$$\varphi_\alpha : E_\alpha \rightarrow H_\alpha, \alpha \in I$$

μία οικογένεια απεικονίσεων, έτσι ώστε

$$g_{\alpha\beta} \circ \varphi_\beta = \varphi_\alpha \circ f_{\alpha\beta}, \alpha \leq \beta \text{ στο } I.$$

Τότε η οικογένεια $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ καλείται ένα *προβολικό σύστημα απεικονίσεων* των δοθέντων προβολικών συστημάτων.

Η μονοσήμαντα ορισμένη απεικόνιση

$$\varphi: E \rightarrow H \text{ με } \varphi_\alpha \circ f_\alpha = g_\alpha \circ \varphi, \alpha \in I$$

καλείται *απεικόνιση προβολικό όριο* της οικογένειας $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ και συμβολίζεται με $\varphi = \lim_{\leftarrow} \varphi_\alpha$.

Δίνουμε τώρα χωρίς απόδειξη την ακόλουθη πρόταση.

1.3.10 Πρόταση. Έστω $\{(E_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$, $\{(H_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$, $\{(S_\alpha, s_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$ προβολικά συστήματα συνόλων και οι απεικονίσεις

$$\begin{array}{ccc} H_\alpha & \xrightarrow{u_\alpha} & S_\alpha \\ & \searrow \varphi_\alpha & \uparrow u_\alpha \circ \varphi_\alpha \\ & & E_\alpha \end{array}$$

Όπου $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ είναι προβολικά συστήματα απεικονίσεων. Θεωρούμε τις κανονικές απεικονίσεις

$$f_\alpha: E = \lim_{\leftarrow} E_\alpha \rightarrow E_\alpha, \quad g_\alpha: H = \lim_{\leftarrow} H_\alpha \rightarrow H_\alpha, \quad s_\alpha: S = \lim_{\leftarrow} S_\alpha \rightarrow S_\alpha.$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

Η οικογένεια

i) $u_\alpha \circ \varphi_\alpha: E_\alpha \rightarrow S_\alpha, \alpha \in I$ είναι ένα προβολικό σύστημα απεικονίσεων.

$$ii) \lim_{\leftarrow} (u_\alpha \circ \varphi_\alpha) = \left(\lim_{\leftarrow} u_\alpha \right) \circ \left(\lim_{\leftarrow} \varphi_\alpha \right)$$

Τα επόμενα λήμματα θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του βασικού θεωρήματος 1.3.13

1.3.11 Λήμμα. Έστω $A = \varprojlim (A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ μία τοπολογική άλγεβρα προβολικό ό-

ριο. Αν $\mathfrak{B}_\alpha$ είναι μία τοπική βάση της άλγεβρας A_α , $\alpha \in I$, τότε η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{f_\alpha^{-1}(u_\alpha) : u_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha, \alpha \in I\}$$

είναι μία τοπική βάση της A .

Απόδειξη.

Από την (1.2.2) και τον ορισμό της σχετικής τοπολογίας, η οικογένεια

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(u_{\alpha_i}) \right\},$$

όπου τα u_{α_i} είναι στοιχεία τοπικών βάσεων, $\mathfrak{B}_\alpha, \alpha \in I$, των αλγεβρών A_α ,

είναι μία τοπική βάση για την A . Ισχυριζόμαστε ότι το $\bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(u_{\alpha_i})$ είναι της

μορφής $f_\alpha^{-1}(u_\alpha)$ για κάποιο $u_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha, \alpha \in I$. Πράγματι, επειδή το σύνολο δεικτών I είναι (άνω) κατευθυνόμενο, υπάρχει $\alpha \in I$ με $\alpha_i \leq \alpha$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.

Επειδή $f_{\alpha_i} = f_{\alpha_i\alpha} \circ f_\alpha$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(u_{\alpha_i}) &= \bigcap_{i=1}^n f_\alpha^{-1}(f_{\alpha_i\alpha}^{-1}(u_{\alpha_i})) \\ &= f_\alpha^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i\alpha}^{-1}(u_{\alpha_i})\right) = f_\alpha^{-1}(v_\alpha), \end{aligned}$$

Όπου το $v_\alpha = \bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i\alpha}^{-1}(u_{\alpha_i})$ είναι μία περιοχή του $0 \in A_\alpha$. Άρα, υπάρχει

$u_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha$ με $u_\alpha \subseteq v_\alpha$.

□

1.3.12 Λήμμα. Έστω $A = \varprojlim (A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ μία τοπολογική άλγεβρα προβολικό ό-

ριο και E ένας διανυσματικός υπόχωρος της A . Τότε (βλ. και (1.3.6))

$$(1.3.12) \quad \overline{E} = \bigcap_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(E)}) = \varprojlim \overline{f_\alpha(E)}.$$

Αν ο E είναι κλειστός, τότε

$$(1.3.13) \quad E = \lim_{\leftarrow \alpha} f_{\alpha}(E) = \lim_{\leftarrow \alpha} \overline{f_{\alpha}(E)}.$$

Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια των απεικονίσεων $f_{\alpha\beta}$ και τη σχέση

$f_{\alpha} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta}$, $\alpha \leq \beta$ στο I έχουμε ότι η οικογένεια

$$(1.3.14) \quad \left\{ \left(f_{\alpha}(E), f_{\alpha\beta} \upharpoonright_{f_{\beta}(E)} \right) \right\}, \alpha \in I$$

είναι ένα προβολικό σύστημα τοπολογικών διανυσματικών χώρων.

Εξάλλου,

$$f_{\alpha\beta} \left(\overline{f_{\beta}(E)} \right) \subseteq \overline{f_{\alpha\beta} \left(f_{\beta}(E) \right)} = \overline{f_{\alpha}(E)} \text{ για κάθε } \alpha \leq \beta$$

και άρα, σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα των Bourbaki, έχουμε ότι η οικογένεια

$$(1.3.15) \quad \left\{ \left(\overline{f_{\alpha}(E)}, f_{\alpha\beta} \upharpoonright_{\overline{f_{\beta}(E)}} \right) \right\}, \alpha \in I$$

είναι ένα προβολικό σύστημα τοπολογικών (διανυσματικών) χώρων. Συνεπώς, τα

$\lim_{\leftarrow \alpha} f_{\alpha}(E)$ και $\lim_{\leftarrow \alpha} \overline{f_{\alpha}(E)}$ ορίζονται. Προφανώς

$$(1.3.16) \quad \overline{E} \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} f_{\alpha}^{-1} \left(\overline{f_{\alpha}(E)} \right).$$

Έστω τώρα $x \equiv (x_{\alpha}) \in \bigcap_{\alpha \in I} f_{\alpha}^{-1} \left(\overline{f_{\alpha}(E)} \right)$, τότε

$$(1.3.17) \quad f_{\alpha}(x) \equiv x_{\alpha} \in \overline{f_{\alpha}(E)} \text{ για κάθε } \alpha \in I.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$U_{\alpha} \cap f_{\alpha}(E) \neq \emptyset \text{ για κάθε βασική (ανοιχτή) περιοχή } U_{\alpha} \text{ του } x_{\alpha} \text{ στην } A_{\alpha}.$$

Ισοδύναμα, υπάρχει $y \in U_{\alpha}$ και $y \in f_{\alpha}(E)$, $\alpha \in I$ με $f_{\alpha}^{-1}(y) \in f_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) \cap E$, δηλαδή $f_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) \cap E \neq \emptyset$. Βεβαίως, το $f_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha})$ είναι μία βασική (ανοιχτή) περιοχή του $x \in A$ (βλ. Λήμμα 1.3.11) και συνεπώς $x \in \overline{E}$, δηλαδή

$$\bigcap_{\alpha \in I} f_{\alpha}^{-1} \left(\overline{f_{\alpha}(E)} \right) \subseteq \overline{E},$$

η οποία σε συνδυασμό με τη σχέση (1.3.16) δίνει την πρώτη ισότητα της (1.3.12).

Η δεύτερη ισότητα της (1.3.12) είναι άμεση από τους ορισμούς.

Για την (1.3.13) έχουμε:

$$E \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} f_{\alpha}^{-1}(f_{\alpha}(E)) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} f_{\alpha}^{-1}(\overline{f_{\alpha}(E)})$$

οπότε από τα επαγωγικά συστήματα (1.3.14) (1.3.15) και την κλειστότητα του E έχουμε (βλ. και (1.3.12))

$$E \subseteq \varprojlim_{\alpha} f_{\alpha}(E) = \varprojlim_{\alpha} \overline{f_{\alpha}(E)} = E = \bar{E}. \quad \square$$

Διατυπώνουμε τώρα ένα θεώρημα κλειδί, χρήσιμο σε επόμενα κεφάλαια.

1.3.13 Θεώρημα. (Arens-Michael). Έστω A μία Hausdorff τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, $\mathcal{B}_0 = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ μία τοπική βάση της A από m -κυλίνδρους και A/N_{α} (αντ. A_{α}), $\alpha \in I$ οι νορμαρισμένες (αντ. Banach) άλγεβρες, που αντιστοιχούν στην $\mathcal{B}_0$. Αν $\tilde{A}$ είναι η πλήρωση της A , τότε

$$A \subset \varprojlim_{\alpha} A/N_{\alpha} \subset \varprojlim_{\alpha} A_{\alpha} = \tilde{A} \quad (\text{εμφύτευση Arens-Michael})$$

ως προς τοπολογικούς αλγεβρικούς ισομορφισμούς.

Ιδιαίτερα, για κάθε Hausdorff πλήρη τοπικά m -κυρτή άλγεβρα A με $\mathcal{B}_0$ όπως προηγουμένως, ισχύει

$$A = \varprojlim_{\alpha} A/N_{\alpha} = \varprojlim_{\alpha} A_{\alpha} \quad (\text{ανάλυση Arens-Michael})$$

ως προς τοπολογικούς αλγεβρικούς ισομορφισμούς.

Απόδειξη.

Πρβλ., για παράδειγμα, [3, σελ. 78] ή και [31, σελ 88, Theorem 3.1]. □

Δίνουμε τώρα δύο παραδείγματα ανάλυσης Arens-Michael.

Παράδειγμα I^0 . Θεωρούμε το σύνολο $C^{\infty}[0,1]$ των μιγαδικών συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα $[0,1]$. Το σύνολο αυτό, εφοδισμένο με τις κατά σημείο οριζόμενες αλγεβρικές πράξεις, γίνεται μια μεταθετική

άλγεβρα με μονάδα. Επί της άλγεβρας $C^\infty[0,1]$ θεωρούμε την αριθμήσιμη οικογένεια $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ υποπολλαπλασιαστικών νορμών που ορίζονται από τη σχέση

$$p_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sup \left\{ |f^{(k)}(t)| : t \in [0,1] \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Όπου $f^{(k)}$ είναι η k -τάξης παράγωγος της $f \in C^\infty[0,1]$ ενώ θέτουμε εξ'ορισμού, $f^{(0)} = f$. Η τοπολογία που ορίζει η οικογένεια $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ επί της άλγεβρας $C^\infty[0,1]$ καλείται C^∞ -τοπολογία ή τοπολογία της ομαλής σύγκλισης, ως προς όλες τις παραγώγους. Η τοπολογική άλγεβρα τώρα $C^\infty[0,1]$ είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα Fréchet. Θεωρούμε τώρα τις νορμαρισμένες άλγεβρες

$$(C^\infty[0,1], p_n) / \ker(p_n) \equiv (C^\infty[0,1], p_n) / N_n$$

καθώς και τις αντίστοιχες πληρώσεις $(\widetilde{C^\infty[0,1]}, p_n)$. Τότε από την ανάλυση

Arens-Michael, έχουμε

$$(C^\infty[0,1], (p_n)_{n \in \mathbb{N}}) \equiv C^\infty[0,1] = \varprojlim (\widetilde{C^\infty[0,1]}, p_n)$$

Επιπλέον,

$$(\widetilde{C^\infty[0,1]}, p_n) = C^{(k)}[0,1]$$

Όπου $C^{(k)}[0,1]$ είναι η άλγεβρα Banach των $C^{(k)}$ -διαφορίσιμων μιγαδικών συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους μέχρι k τουλάχιστον τάξης επί του $[0,1]$. Η $C^{(k)}[0,1]$ γίνεται άλγεβρα Banach με νόρμα που ορίζεται από τη σχέση

$$\|f\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \sum_{s=0}^k \frac{|f^{(s)}(t)|}{s!}$$

Επομένως

$$C^\infty[0,1] = \varprojlim_{k \geq 0} C^{(k)}[0,1]$$

ως προς έναν τοπολογικό ισομορφισμό.

Παράδειγμα 2°. Η άλγεβρα $\mathcal{O}(\mathbf{C}) = \{f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, f \text{ αναλυτική επί του } \mathbf{C}\}$ των ολόμορφων συναρτήσεων σε ολόκληρο το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbf{C}$ είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα Fréchet. Η προηγούμενη άλγεβρα, ως πλήρης δέχεται μία ανάλυση Arens-Michael. Δηλαδή αν θεωρήσουμε τις νορμαρισμένες άλγεβρες $\mathcal{O}(\mathbf{C})/N_n \equiv \mathcal{O}(\mathbf{C})/ker(p_n)$ και τις πληρώσεις τους (άλγεβρες Banach) $\overline{\mathcal{O}(\mathbf{C})/N_n} \equiv \mathcal{O}(\mathbf{C})_n$, τότε έχουμε

$$\mathcal{O}(\mathbf{C}) \equiv \lim_{\leftarrow n} \mathcal{O}(\mathbf{C})/ker(p_n) = \lim_{\leftarrow n} \mathcal{O}(\mathbf{C})_n.$$

Θεωρούμε τώρα την άλγεβρα του n -δίσκου $\mathbf{D}_n = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq n\}$:

$$A(\mathbf{D}_n) = \left\{ f \in C(\mathbf{D}_n, \mathbf{C}) : \eta \text{ } f \text{ είναι αναλυτική (ολόμορφη) στο } \overset{\circ}{\mathbf{D}}_n \right\},$$

όπου $\overset{\circ}{\mathbf{D}}_n = \{z \in \mathbf{C} : |z| < n\}$ είναι το εσωτερικό του n -δίσκου. Το $A(\mathbf{D}_n)$ εφοδιασμένο με την ομαλή νόρμα (νόρμα supremum), δηλαδή την

$$\|\cdot\|_{n,\infty} : A(\mathbf{D}_n) \rightarrow \mathbf{R}$$

με

$$\|f\|_{n,\infty} := \sup \{|f(z)| : z \in \mathbf{D}_n\}, n \in \mathbf{N},$$

γίνεται μία άλγεβρα Banach. Η απεικόνιση $i_n : \mathcal{O}(\mathbf{C})/N_n \rightarrow A(\mathbf{D}_n)$ με

$i_n(f + N_n) = f|_{\mathbf{D}_n}, n \in \mathbf{N}$ είναι μία ισομετρία. Επιπλέον, επειδή $f \in A(\mathbf{D}_n)$, έχουμε την έκφραση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n, \lambda_n \in \mathbf{C}, z \in \overset{\circ}{\mathbf{D}}_n.$$

Αποδεικνύεται ότι η νορμαρισμένη άλγεβρα $(\mathcal{O}(\mathbf{C}), p_n)$ είναι πυκνή στην

$$A(\mathbf{D}_n), n \in \mathbf{N}, \text{ δηλαδή } \overline{(\mathcal{O}(\mathbf{C}), p_n)} = A(\mathbf{D}_n) \equiv (A(\mathbf{D}_n), \|\cdot\|_{n,\infty})$$

οπότε από την ανάλυση Arens-Michael, έχουμε

$$(\mathcal{O}(\mathbf{C}), \mathcal{T}_{\{p_n\}}) \equiv \mathcal{O}(\mathbf{C}) \equiv \lim_{\leftarrow n} A(\mathbf{D}_n)$$

ως προς έναν αλγεβρικό-τοπολογικό ισομορφισμό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στη πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου μελετάμε τους αριστερούς, τους δεξιούς και τους δίπλευρους πολλαπλασιαστές μιας άλγεβρας. Ιδιαίτερα, δίνουμε μία σχέση για μια γνήσια μεταθετική και τοπολογική άλγεβρα, μεταξύ των πολλαπλασιαστών της και του συνόλου των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του ολικού φάσματός της. (Θεώρημα 2.1.12).

Στη δεύτερη παράγραφο δίνονται συνθήκες ώστε ο μοναδικός συμπαγής πολλαπλασιαστής μιας πλήρους μετριοποιήσιμης τοπικά κυρτής άλγεβρας να είναι ο τετριμμένος.

2.1. Πολλαπλασιαστές τοπολογικών αλγεβρών

Αρχικά με τον όρο (μιγαδική) άλγεβρα A θα εννοούμε μια προσεταιριστική άλγεβρα υπεράνω του σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Αργότερα η A θα είναι εφοδιασμένη και με μία τοπολογία (τοπολογική άλγεβρα).

Μία άλγεβρα A είναι *γνήσια* αν $Ax = 0$, $x \in A$ τότε $x = 0$. Όμως για τοπικά m -κυρτές H^* -άλγεβρες (βλ. κεφάλαιο 4) ισχύει η σχέση $Ax = xA$ για κάθε $x \in A$. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε στη συνέχεια, τον όρο "γνήσια" όπως στον ορισμό που ακολουθεί.

2.1.1 Ορισμός. Μία άλγεβρα A καλείται *γνήσια* (*proper*) αν για κάθε $x \in A$, $xA = Ax = \{0\} \Rightarrow x = 0$ (Δηλαδή αν $xa = ax = 0$ για κάθε $a \in A \Rightarrow x = 0$).

Σχόλια. 1) Αν η A έχει μονάδα τότε η A είναι γνήσια.

(Πράγματι: για κάθε $x \in A$ με $xA = Ax = \{0\}$ και εφόσον $e \in A$ είναι

$$x = xe = ex \in \{0\} \Rightarrow x = 0)$$

2) Ένα δίκτυο $(e_\delta)_{\delta \in \Delta}$ μιας τοπολογικής άλγεβρας A καλείται *αριστερή* (δεξιά, *δίπλευρη*) *προσεγγιστική μονάδα*, αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $\lim_{\delta \in \Delta} (e_\delta x) = x$ (αντίστοιχα $\lim_{\delta \in \Delta} (xe_\delta) = x$, $\lim_{\delta \in \Delta} (e_\delta x) = \lim_{\delta \in \Delta} (xe_\delta) = x$). Αν η A έχει αριστερή (δεξιά,

δίπλευρη) προσεγγιστική μονάδα τότε είναι γνήσια. Πράγματι, έστω $(e_\delta)_{\delta \in \Delta}$ αριστερή προσεγγιστική μονάδα της A , τότε για κάθε $x \in A$ ισχύει $\lim_{\delta \in \Delta} (e_\delta x) = x$.

Έστω $xA = Ax = \{0\}$ οπότε και $e_\delta x = 0$ για κάθε $\delta \in \Delta$, άρα $\lim_{\delta \in \Delta} (e_\delta x) = 0$ συνεπώς $x = 0$ αφού $\lim_{\delta \in \Delta} (e_\delta x) = x$. Έτσι η A είναι γνήσια. Ανάλογα εργαζόμαστε και όταν $(e_\delta)_{\delta \in \Delta}$ είναι δεξιά προσεγγιστική μονάδα της A .

3) Μία οικογένεια $\{x_i\}_{i \in I}$ μη μηδενικών στοιχείων μιας (τοπολογικής) άλγεβρας A καλείται ορθογώνια βάση αν

- $x_i^2 = x_i$ για κάθε $i \in I$
- $x_i x_j = 0$ για κάθε $i, j \in I$ με $i \neq j$ και
- για κάθε $x \in A$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ και $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_n} \in \mathbb{C}$

$$\text{ώστε } x = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} x_{i_k}.$$

Ισχύει ότι, κάθε (τοπολογική) άλγεβρα με μια ορθογώνια βάση, είναι γνήσια.

Πράγματι: Έστω A (τοπολογική) άλγεβρα και $\{x_i\}_{i \in I}$ ορθογώνια βάση της. Θεωρούμε στοιχείο $x \in A$ με $xA = Ax = \{0\}$ θα δείξουμε ότι $x = 0$. Αφού $\{x_i\}_{i \in I}$ ορθογώνια βάση της A θα υπάρχουν $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_n} \in \mathbb{C}$ ώστε $x = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} x_{i_k}$. Από το

γεγονός ότι $x_i^2 = x_i$ για κάθε $i \in I$ και $x_i x_j = 0$ για κάθε $i, j \in I$ με $i \neq j$ προκύπτει ότι $xx_{i_\mu} = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} (x_{i_k} x_{i_\mu}) = \lambda_{i_\mu} x_{i_\mu}$, για κάποιο $\mu \in \{1, 2, \dots, n\}$. Αλλά

$xx_{i_\mu} \in xA = \{0\}$ συνεπώς $xx_{i_\mu} = 0$. Έτσι παίρνουμε: $\lambda_{i_\mu} x_{i_\mu} = 0$, και επειδή $x_{i_\mu} \neq 0$

παίρνουμε $\lambda_{i_\mu} = 0$. Συνεπώς $\lambda_{i_\mu} = 0$ για κάθε $\mu \in \{1, 2, \dots, n\}$. Επομένως

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} x_{i_k} = \sum_{k=1}^n 0 x_{i_k} = 0.$$

2.1.2 Ορισμός. Αν A μία άλγεβρα, μια απεικόνιση $T : A \rightarrow A$ καλείται αριστερός (αντίστοιχα δεξιός) πολλαπλασιαστής αν $T(xy) = T(x)y$ (αντίστοιχα $T(xy) = xT(y)$) για κάθε $x, y \in A$.

Η T καλείται δίπλευρος πολλαπλασιαστής ή απλά πολλαπλασιαστής στην A αν ισχύει $T(x)y = xT(y)$ για κάθε $x, y \in A$ και αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα γράφουμε $Txy = xTy$.

2.1.3 Λήμμα. Έστω A μία γνήσια άλγεβρα. Τότε κάθε πολλαπλασιαστής T της A είναι γραμμική απεικόνιση.

Απόδειξη.

Για κάθε $x, y \in A$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ είναι

$$\begin{aligned} [T(\alpha x + \beta y) - \alpha Tx - \beta Ty]z &= T(\alpha x + \beta y)z - \alpha(Tx)z - \beta(Ty)z = \\ &= (\alpha x + \beta y)Tz - \alpha xTz - \beta yTz = \alpha xTz + \beta yTz - \alpha xTz - \beta yTz = 0 \text{ για κάθε } \\ &z \in A \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } T(\alpha x + \beta y) - \alpha Tx - \beta Ty = 0$$

$$(\text{αφού η } A \text{ είναι γνήσια) συνεπώς } T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

□

Θεωρούμε τώρα τα σύνολα

$$M_l(A) = \{T : A \rightarrow A / T \text{ αριστερός πολλαπλασιαστής}\}$$

$$M_r(A) = \{T : A \rightarrow A / T \text{ δεξιός πολλαπλασιαστής}\}$$

$$M(A) = \{T : A \rightarrow A / T \text{ πολλαπλασιαστής}\} \text{ όπου } A \text{ μία άλγεβρα.}$$

Είναι φανερό ότι $M_l(A) \cap M_r(A) \subseteq M(A)$. Πράγματι, έστω

$T \in M_l(A) \cap M_r(A)$ τότε $T \in M_l(A)$ και $T \in M_r(A)$, έτσι για κάθε $x, y \in A$ έχουμε $T(xy) = T(x)y$ και $T(xy) = xT(y)$ άρα $T(x)y = xT(y)$ που σημαίνει ότι $T \in M(A)$. Επομένως $M_l(A) \cap M_r(A) \subseteq M(A)$.

Επιπλέον αν η άλγεβρα A είναι γνήσια ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός, δηλαδή $M(A) \subseteq M_l(A) \cap M_r(A)$. Πράγματι. Έστω $T \in M(A)$ τότε ισχύει

$T(x)y = xT(y)$ για κάθε $x, y \in A$ (1). Για κάθε $z \in A$ είναι

$$\begin{aligned} [T(xy) - T(x)y]z &= T(xy) \cdot z - [T(x)y]z \stackrel{(1)}{=} \\ &= (xy)T(z) - [xT(y)]z \stackrel{(1)}{=} (xy)T(z) - x[T(y)z] \stackrel{(1)}{=} \\ &= (xy)T(z) - x[yT(z)] = (xy)T(z) - (xy)T(z) = 0 \end{aligned}$$

και επειδή η A είναι γνήσια προκύπτει ότι $T(xy) - T(x)y = 0$ για κάθε $x, y \in A$ συνεπώς $T(xy) = T(x)y$ για κάθε $x, y \in A$, δηλαδή $T \in M_l(A)$. Επίσης αφού $T(x)y = xT(y)$ για κάθε $x, y \in A$ θα είναι και $T(xy) = xT(y)$ για κάθε $x, y \in A$ δηλαδή $T \in M_r(A)$. Τελικά $T \in M_l(A) \cap M_r(A)$. Άρα $M(A) \subseteq M_l(A) \cap M_r(A)$.

Έτσι, όταν η άλγεβρα A είναι γνήσια μπορούμε να γράφουμε

$$M(A) = M_l(A) \cap M_r(A)$$

2.1.4 Πρόταση. Έστω A μία άλγεβρα τότε το σύνολο $M_r(A)$ είναι μία άλγεβρα με μονάδα την ταυτοτική απεικόνιση επί του A .

Απόδειξη.

Θεωρούμε γνωστό ότι στο σύνολο των απεικονίσεων

$F = \{f / f : A \rightarrow A, \text{ όπου } f \text{ απεικόνιση}\}$. Οι πράξεις “+” (πρόσθεση)

$(f, g) \rightarrow f + g$, “ $\cdot$ ” (σύνθεση) $(f, g) \rightarrow f \cdot g (= fg)$ με

$(fg)(x) = f(g(x))$ και βαθμωτός πολλαπλασιασμός $(\lambda, f) \rightarrow \lambda f, \lambda \in C$ είναι καλά ορισμένες.

Με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο F είναι μία μιγαδική άλγεβρα με μονάδα την ταυτοτική απεικόνιση επί του A . Δηλαδή το F εφοδιασμένο με τις κατά σημείο διανυσματικές πράξεις και πολλαπλασιασμό τη σύνθεση απεικονίσεων, γίνεται μία (προσεταιριστική) άλγεβρα με μονάδα την ταυτοτική απεικόνιση id_A . Αποδεικνύουμε ότι το $M_r(A)$ είναι υπάλγεβρα της F .

Ισχυρισμός:

Ισχύουν:

1. $T + T' \in M_r(A)$ για κάθε $T, T' \in M_r(A)$
2. $\lambda T \in M_r(A)$ για κάθε $\lambda \in \mathbf{C}$, για κάθε $T \in M_r(A)$
3. $TT' (= T \circ T') \in M_r(A)$ για κάθε $T, T' \in M_r(A)$ και
4. $id_A \in M_r(A)$

Απόδειξη ισχυρισμού:

Έστω $T, T' \in M_r(A)$ και $\lambda \in \mathbf{C}$,

είναι:

$$1. (T + T')(xy) = T(xy) + T'(xy) = xTy + xT'y =$$

$$x(Ty + T'y) = x(T + T')(y) \text{ για κάθε } x, y \in A$$

$$\text{Άρα } T + T' \in M_r(A).$$

$$2. (\lambda T)(xy) = \lambda T(xy) = \lambda(xTy) = (\lambda x)Ty =$$

$$x(\lambda Ty) = x[(\lambda T)(y)] = x(\lambda T)(y)$$

$$\text{για κάθε } x, y \in A \text{ άρα } \lambda T \in M_r(A).$$

$$3. (TT')(xy) = T(T'(xy)) = T(xT'y) =$$

$$xT(T'y) = x(TT')y \text{ για κάθε } x, y \in A \text{ άρα } TT' \in M_r(A).$$

$$4. id_A(xy) = xy = xid_A(y) \text{ για κάθε } x, y \in A \text{ άρα } id_A \in M_r(A). \text{ Επομένως το}$$

σύνολο $M_r(A)$ ως υπάλγεβρα της $\mathbf{F}$ είναι άλγεβρα με μονάδα την ταυτοτική

απεικόνιση επί του A . □

2.1.5 Πρόταση. Έστω A μία άλγεβρα, τότε το σύνολο $M_l(A)$ είναι μία άλγεβρα με μονάδα την ταυτοτική απεικόνιση επί του A .

Απόδειξη.

Η απόδειξη είναι ανάλογη με εκείνη της πρότασης 2.1.4. Ενδεικτικά αποδεικνύουμε ότι $TT' (= T \circ T') \in M_l(A)$ για κάθε $T, T' \in M_l(A)$. Έστω $T, T' \in M_l(A)$

και $x, y \in A$, είναι $(TT')(xy) = T(T'(xy)) = T((T'x)y) =$

$$(T(T'x))y = [(TT')x]y. \text{ Άρα } TT' \in M_l(A). \quad \square$$

2.1.6 Πρόσμη. Το σύνολο $M(A)$ μιας γνήσιας άλγεβρας A είναι μία άλγεβρα με μονάδα την ταυτοτική απεικόνιση επί του A .

Απόδειξη.

Από τις προτάσεις 2.1.4 και 2.1.5 κάθε ένα από τα $M_r(A)$, $M_l(A)$ είναι μία άλγεβρα με μονάδα την ταυτοτική απεικόνιση επί του A , οπότε και το $M_l(A) \cap M_r(A)$ είναι μία άλγεβρα με μονάδα την ταυτοτική απεικόνιση επί του A . Όμως $M_l(A) \cap M_r(A) = M(A)$ αφού η A είναι γνήσια. Συνεπώς το σύνολο $M(A)$ είναι μία άλγεβρα με μονάδα την ταυτοτική απεικόνιση επί του A . $\square$

2.1.7 Πρόταση. Έστω A μία μεταθετική άλγεβρα με μονάδα e . Τότε η $M(A)$ είναι αλγεβρικά ισομορφική με την A .

Απόδειξη.

Για κάθε $x \in A$, αν θεωρήσουμε $L_x(y) = xy$ για κάθε $y \in A$ τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι $L_x \in M(A)$.

(Πράγματι: Από τη μεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα έχουμε:

$$\text{Για κάθε } y, z \in A, L_x(yz) = x(yz) = (xy)z = (L_x y)z$$

$$\text{και } L_x(yz) = x(yz) = (xy)z = (yx)z = y(xz) = yL_x z)$$

Η απεικόνιση $\phi: A \rightarrow M(A)$

$$x \xrightarrow{\phi} L_x \text{ είναι αμφιμονοσήμαντη διότι, υποθέτοντας ότι}$$

$$\phi(x) = \phi(y) \text{ έχουμε } L_x = L_y \Rightarrow (L_x(\omega) = L_y(\omega) \text{ για κάθε } \omega \in A) \Rightarrow$$

($x\omega = y\omega$ για κάθε $\omega \in A$) και για $\omega = e$ η τελευταία δίνει $x = y$.

$$\text{Ακόμα } \phi(x+y) = L_{x+y} = L_x + L_y = \phi(x) + \phi(y).$$

Πράγματι για κάθε $z \in A$ είναι

$$\begin{aligned}\phi(x+y)z &= L_{x+y}z = (x+y)z = xy + xz = \\ &L_xz + L_yz = \phi(x)z + \phi(y)z = (\phi(x) + \phi(y))z\end{aligned}$$

Άρα $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, για κάθε $x, y \in A$.

$$\text{Επίσης } \phi(\lambda x) = L_{\lambda x} = \lambda L_x = \lambda \phi(x)$$

Πράγματι για κάθε $z \in A$ είναι

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x)z &= L_{\lambda x}z = (\lambda x)z = \lambda(xz) = \lambda(L_xz) = \lambda[\phi(x)z] = [\lambda\phi(x)](z) \text{ για κάθε } \\ &z \in A.\end{aligned}$$

Άρα $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbf{C}, x \in A$.

$$\text{Επιπλέον } \phi(xy) = L_{xy} = L_x \cdot L_y = \phi(x) \cdot \phi(y).$$

Πράγματι για κάθε $z \in A$ είναι:

$$\begin{aligned}\phi(xy)z &= L_{xy}(z) = (xy)z = x(yz) = x(L_yz) = \\ &L_x(L_yz) = (L_x \cdot L_y)z = (\phi(x) \cdot \phi(y))z.\end{aligned}$$

Άρα η ϕ είναι και ομομορφισμός αλγεβρών.

Υποθέτουμε τώρα ότι $T \in M(A)$. Θέτουμε $T(e) = x_0$ τότε $\phi(x_0)(:= L_{x_0}) = T$.

Πράγματι $z \in A$ είναι $\phi(x_0)z = L_{x_0}z = x_0z = zx_0$ (A -μεταθετική) = $zTe = Tze = Tz$.

Άρα η ϕ είναι και επί.

Επομένως η $\phi: A \rightarrow M(A)$ είναι ισομορφισμός αλγεβρών. □

Υπενθυμίζουμε ότι αν A είναι μία τοπολογική άλγεβρα και B ένα μη κενό υποσύνολό της, το B θα λέγεται φραγμένο, αν για κάθε περιοχή $\mathcal{U}$ του μηδενός υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $\kappa \in \mathbf{C}$ με $|\kappa| > \lambda$ να ισχύει $B \subseteq \kappa\mathcal{U}$.

Έστω A μία τοπολογική άλγεβρα και έστω $L_c(A)$ το σύνολο όλων των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων από την A στην A . Τότε το $L_c(A)$ είναι μία άλγεβρα, ως προς τη σύνθεση με μοναδιαίο στοιχείο την ταυτοτική απεικόνιση id_A . Εφοδιάζουμε την $L_c(A)$ με την παρακάτω τοπολογία. Έστω $\{U\}$ η οικογένεια όλων των κλειστών ισορροπημένων περιοχών του $0 \in A$. Έστω β η οικογένεια όλων των φραγμένων υποσυνόλων της A . Για κάθε $B \in \beta$ και $U \in \{U\}$ θεωρούμε το εξής υποσύνολο του $L_c(A)$: $T(B, U) = \{T \in L_c(A) : T(B) \subseteq U\}$. Αν το B διατρέχει το β και το U διατρέχει το $\{U\}$, η οικογένεια $T(B, U)$ ορίζει μία τοπολογία πάνω στο $L_c(A)$ η οποία καλείται *ισχυρή τοπολογία*. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το $L_c(A)$ είναι ένας Hausdorff τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

Επιπλέον για κάθε δοσμένη $T(B, U)$ περιοχή του 0 στο $L_c(A)$ και για κάθε σταθερό $T_0 \in L_c(A)$ αν επιλέξουμε $V \in \{U\}$ έτσι ώστε $T_0(V) \subseteq U$ τότε για κάθε $S \in T(B, V)$ είναι $T_0(S(B)) \subseteq T_0(V) \subseteq U$ το οποίο δείχνει ότι η απεικόνιση: $(T, S) \rightarrow TS$ είναι χωριστά συνεχής. Με άλλα λόγια το $L_c(A)$ γίνεται με την ισχυρή τοπολογία μια τοπολογική άλγεβρα.

Αν A είναι μια πλήρης μετριοποιήσιμη τοπολογική άλγεβρα, τότε και η $L_c(A)$ είναι πλήρης ως προς την ισχυρή τοπολογία (πρβλ. [30, σελ. 122]).

2.1.8 Ορισμός. Μία τοπολογική άλγεβρα *Fréchet* είναι μία τοπολογική άλγεβρα, της οποίας ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος είναι *Fréchet* δηλαδή πλήρης και μετριοποιήσιμος.

Ιδιαίτερα, χρησιμοποιούμε και την εξής ορολογία: μία πλήρης μετριοποιήσιμη τοπικά κυρτή άλγεβρα καλείται *B_0 -άλγεβρα*, ενώ για μία πλήρη μετριοποιήσιμη τοπικά m -κυρτή άλγεβρα θα χρησιμοποιούμε τον όρο *Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα*.

Έτσι αν A είναι μία B_0 -άλγεβρα (πλήρης μετριοποιήσιμη τοπικά κυρτή άλγεβρα) ή μία Frechet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα (πλήρης μετριοποιήσιμη τοπικά m -κυρτή άλγεβρα), τότε η $L_C(A)$ είναι μια πλήρης τοπολογική άλγεβρα.

2.1.9 Θεώρημα. Αν A είναι μία γνήσια τοπολογική άλγεβρα τότε κάθε πολλαπλασιαστής της έχει κλειστό γράφημα.

Απόδειξη.

Έστω T ένας πολλαπλασιαστής της A .

Έστω $\{x_\delta\}$ ένα δίκτυο στην A τέτοιο ώστε $x_\delta \rightarrow x$ και $T(x_\delta) \rightarrow y$ όπου $y \in A$.

Θεωρούμε z τυχαίο στοιχείο της A . Από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού θα έχουμε $x_\delta z \rightarrow xz$ και $T(z)x_\delta \rightarrow T(z)x$.

Αφού ο T είναι πολλαπλασιαστής θα ισχύει $T(zx_\delta) = T(z)x_\delta = zTx_\delta$.

Έχουμε $\lim_\delta (zTx_\delta) = \lim_\delta (T(z)x_\delta) = T(z)x = zTx$ (1)

και $\lim_\delta (zTx_\delta) = zy$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $zTx = zy \Rightarrow z(Tx - y) = 0$ για κάθε $z \in A$,

άρα $A(Tx - y) = \{0\}$ και εφόσον η A είναι γνήσια συμπεραίνουμε ότι $Tx = y$ το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

2.1.10 Πρόρισμα. Κάθε πολλαπλασιαστής μιας γνήσιας, πλήρους μετριοποιήσιμης άλγεβρας A , ιδιαίτερα B_0 -άλγεβρας ή Fréchet τοπικά m -κυρτής ή Banach είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Προκύπτει άμεσα από το θεώρημα του κλειστού γραφήματος (πβλ. [19]) και από το θεώρημα 2.1.9. $\square$

2.1.11 Θεώρημα. Έστω A μια γνήσια πλήρης μετριοποιήσιμη τοπολογική άλγεβρα, τότε η $M(A) = \{T : A \rightarrow A, T \text{ πολλαπλασιαστής}\}$ είναι κλειστή υπάλγεβρα της $L_c(A)$ ως προς την ισχυρή τοπολογία. (Όπου $L_c(A)$, το σύνολο όλων των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων από την A στην A).

Απόδειξη.

Αφού η A είναι γνήσια, κάθε $T \in M(A)$ είναι γραμμική και από το πόρισμα 2.1.10 προκύπτει ότι $M(A) \subseteq L_c(A)$ (επειδή κάθε πολλαπλασιαστής της A είναι γραμμική και συνεχής απεικόνιση). Επίσης από την πρόταση 2.1.6 η $M(A)$ είναι μία άλγεβρα.

Για να αποδείξουμε ότι το $M(A)$ είναι κλειστό, θεωρούμε ένα δίκτυο T_δ στο $M(A)$ έτσι ώστε $T_\delta \rightarrow T \in \overline{M(A)} \subseteq \overline{L_c(A)} = L_c(A)$. Σημειώνουμε εδώ ότι η $L_c(A)$ είναι πλήρης (αφού η A είναι πλήρης και μετριοποιήσιμη (πρβλ. [30])). Έτσι για κάθε $x, y \in A$ έχουμε $T_\delta(x)y = xT_\delta(y)$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } T(x)y &= \lim_{\delta} [T_\delta(x)]y = \lim_{\delta} [T_\delta(x)y] \stackrel{(1)}{=} \lim_{\delta} [xT_\delta(y)] = \\ &= x \lim_{\delta} [T_\delta(y)] = xT(y). \end{aligned}$$

Δηλαδή $T(x)y = xT(y)$ ή $Txy = xTy$ για κάθε $x, y \in A$ που σημαίνει ότι

$T \in M(A)$. □

Έστω A μία γνήσια μεταθετική τοπολογική άλγεβρα, και $M(A)$ η άλγεβρα των πολλαπλασιαστών της.

Θεωρούμε το ολικό φάσμα $\mathfrak{M}(A)$ της A δηλαδή το σύνολο

$$\mathfrak{M}(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{C}, f \neq 0 \text{ γραμμική συνεχής και } f(xy) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in A\}$$

το οποίο υποθέτουμε ότι είναι διάφορο του κενού, τότε κάθε γραμμικός πολλα-

πλασιαστής $T \in M(A)$ μπορεί να αναπαρασταθεί από μία συνεχή απεικόνιση επί

του $\mathfrak{M}(A)$ (βλ. Θεώρημα 2.1.12).

Συμβολίζουμε με $M^l(A)$ το υποσύνολο της (άλγεβρας) $M(A)$ που αποτελείται από τους γραμμικούς πολλαπλασιαστές της A . Επειδή η A είναι γνήσια βάση του λήμματος 2.1.3 έχουμε $M^l(A) = M(A)$.

Για κάθε $x \in A$, θέτουμε $\hat{x}(f) = f(x)$, $f \in \mathfrak{M}(A)$ ($\hat{x}: \mathfrak{M}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ μετασχηματισμός Gel'fand του x).

Στο προηγούμενο πλαίσιο έχουμε το ακόλουθο.

2.1.12 Θεώρημα. Κάθε $T \in M^l(A)$ αντιστοιχεί σε μία συνεχή απεικόνιση

$$\mu^T: \mathfrak{M}(A) \rightarrow \mathbb{C} \text{ τέτοια ώστε } \widehat{Tx} = \mu^T \cdot \hat{x} \text{ όπου } Tx = T(x) \text{ για κάθε } x \in A$$

Απόδειξη.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\mu^T: \mathfrak{M}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ όπου

$$f \xrightarrow{\mu^T} \mu^T(f) := (f \circ T)(x)$$

με $x \in A$, τέτοιο ώστε $f(x) = 1$.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η μ^T είναι καλά ορισμένη. Πράγματι υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) = 1$ τότε:

$$\begin{aligned} (f \circ T)(x_1 x_2) &= f(T(x_1 x_2)) = f(x_1 T x_2) \text{ (αφού } T \text{ πολλαπλασιαστής)} \\ &= f(x_1) f(T x_2) = f(T x_2) \quad (1) \end{aligned}$$

και $(f \circ T)(x_1 x_2) = (f \circ T)(x_2 x_1)$ (A μεταθετική)

$$= f(T(x_2 x_1)) = f(x_2 T x_1) = f(x_2) f(T x_1) = f(T x_1) \quad (2)$$

Από (1) και (2) έπεται ότι $f(T x_1) = f(T x_2)$ και επομένως η μ^T είναι καλά ορισμένη.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in \mathfrak{M}(A)$ και $x \in A$ είναι

$$\begin{aligned} \mu^T(f) f(x) &= (f \circ T)(x_1) f(x) \text{ (με } f(x_1) = 1) \\ &= f(T x_1) f(x) = f((T x_1) x) = f(T x_1 x) = f(x_1 T x) \\ &= f(x_1) f(T(x)) = 1 \cdot (f \circ T)(x) = (f \circ T)(x). \end{aligned}$$

Άρα $(f \circ T)(x) = \mu^T(f) \cdot f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Για $x \in A$ και $f \in \mathfrak{M}(A)$ έχουμε

$$(\mu^T \cdot \hat{x})(f) = \mu^T(f) \cdot \hat{x}(f) = \mu^T(f) \cdot f(x) =$$

$$(f \circ T)(x) = f(T(x)) = f(Tx) = \widehat{Tx}(f)$$

Δηλαδή $(\mu^T \cdot \hat{x})(f) = \widehat{Tx}(f)$ για κάθε $f \in \mathfrak{M}(A)$. Άρα $\mu^T \cdot \hat{x} = \widehat{Tx}$ για κάθε

$x \in A$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η μ^T είναι συνεχής σε κάποιο $f_0 \in \mathfrak{M}(A)$ (τυχαίο).

Υπάρχει $x_0 \in A$ με $f_0(x_0) = 1$ (για παράδειγμα αν $f_0(x_1) \neq 0$ τότε $x_0 = \frac{x_1}{f_0(x_1)}$).

Έστω $\varepsilon > 0$ (τυχαίος θετικός πραγματικός αριθμός) τότε υπάρχει $0 < \varepsilon_1 < 1$ τέτοιο

ώστε $\varepsilon_1 \frac{1 + |f_0(Tx_0)|}{1 - \varepsilon_1} \leq \varepsilon$ (ως ε_1 θα μπορούσαμε να πάρουμε και τον αριθμό

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1 + |f_0(Tx_0)|}).$$

Έστω U' το σύνολο όλων των $f \in \mathfrak{M}(A)$ με $|f(Tx_0) - f_0(Tx_0)| < \varepsilon_1$ και

$|f(x_0) - f_0(x_0)| < \varepsilon_1$ τότε το U' είναι μια ασθενής *-περιοχή της f_0 στην

$\mathfrak{M}(A)$. Η $|f(x_0) - f_0(x_0)| < \varepsilon_1$ γράφεται $|f(x_0) - 1| < \varepsilon_1$ επειδή όμως

$1 - |f(x_0)| \leq |f(x_0) - 1|$ παίρνουμε $1 - |f(x_0)| \leq \varepsilon_1$ οπότε $0 < 1 - \varepsilon_1 \leq |f(x_0)|$ και

$|f(x_0)| = |f(x_0) - 1 + 1| \leq |f(x_0) - 1| + 1 < \varepsilon_1 + 1$ άρα $0 < 1 - \varepsilon_1 \leq |f(x_0)| < 1 + \varepsilon_1$ οπό-

τε $0 < \frac{1}{1 + \varepsilon_1} < \frac{1}{|f(x_0)|} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon_1}$.

Για κάθε $f \in U'$ έχουμε

$$\begin{aligned}
& \left| \mu^T(f) - \mu^T(f_0) \right| = \left| \mu^T(f) f(x_0) \frac{1}{f(x_0)} - \mu^T(f_0) f_0(x_0) \frac{1}{f_0(x_0)} \right| = \\
& \left| \mu^T(f) \widehat{x_0}(f) \frac{1}{f(x_0)} - \mu^T(f_0) \widehat{x_0}(f_0) \frac{1}{f_0(x_0)} \right| = \\
& \left| \widehat{Tx_0}(f) \frac{1}{f(x_0)} - \widehat{Tx_0}(f_0) \frac{1}{f_0(x_0)} \right| = \left| f(Tx_0) \frac{1}{f(x_0)} - f_0(Tx_0) \frac{1}{f_0(x_0)} \right| = \\
& \left| f(Tx_0) \frac{1}{f(x_0)} - f_0(Tx_0) \right| = (\text{αφού } |f_0(x_0)| = 1) \\
& \left| (f(Tx_0) - f_0(Tx_0)) \left(\frac{1}{f(x_0)} - 1 \right) + f_0(Tx_0) \left(\frac{1}{f(x_0)} - 1 \right) + (f(Tx_0) - f_0(Tx_0)) \right| \leq \\
& |f(Tx_0) - f_0(Tx_0)| \left| \frac{1}{f(x_0)} - 1 \right| + |f_0(Tx_0)| \left| \frac{1}{f(x_0)} - 1 \right| + |f(Tx_0) - f_0(Tx_0)| < \\
& \varepsilon_1 \frac{|1 - f(x_0)|}{|f(x_0)|} + |f_0(Tx_0)| \frac{|1 - f(x_0)|}{|f(x_0)|} + \varepsilon_1 < \\
& \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_1}{|f(x_0)|} + |f_0(Tx_0)| \frac{\varepsilon_1}{|f(x_0)|} + \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \left(\frac{\varepsilon_1 + |f_0(Tx_0)|}{|f(x_0)|} + 1 \right) \leq \\
& \varepsilon_1 \left(\frac{\varepsilon_1 + |f_0(Tx_0)|}{1 - \varepsilon_1} + 1 \right) = \varepsilon_1 \frac{|f_0(Tx_0)| + 1}{1 - \varepsilon_1} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

και έτσι η μ^T είναι συνεχής. □

2.1.13 Πρόταση. Έστω A μία γνήσια μεταθετική τοπολογική άλγεβρα.

Τότε η απεικόνιση $\psi : M(A) \rightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{M}(A))$ με $T \xrightarrow{\psi} \mu^T (:= \psi(T))$ είναι αλγεβρικός μορφισμός.

Απόδειξη.

Έστω $T, S \in M^l(A)$ τότε είναι φανερό ότι $aT + bS \in M^l(A)$ και $TS \in M^l(A)$

αφού $M^l(A) = M(A)$ και η $M(A)$ είναι άλγεβρα με τις κατά σημείο διανυσματικές πράξεις και πολλαπλασιασμό τη σύνθεση απεικονίσεων.

Είναι $\psi(aT + bS) = \mu^{aT+bS} : \mathfrak{M}(A) \rightarrow \mathcal{C}$

με $\mu^{aT+bS}(f) = (f \circ (aT + bS))(x)$ όπου $f(x) = 1$ και $f \in \mathfrak{M}(A)$.

Έτσι $\mu^{aT+bS}(f) = (f \circ (aT + bS))(x) = f[(aT + bS)(x)] =$

$$f[aT(x) + bS(x)] = f(aT(x)) + f(bS(x)) = af(T(x)) + bf(S(x)) =$$

$$a(f \circ T)(x) + b(f \circ S)(x) = a\mu^T(f) + b\mu^S(f) = (a\mu^T + b\mu^S)(f)$$

αφού $f(x) = 1$. Δηλαδή

$$\mu^{aT+bS}(f) = (a\mu^T + b\mu^S)(f), \text{ για κάθε } f \in \mathfrak{M}(A) \text{ άρα } \mu^{aT+bS} = a\mu^T + b\mu^S$$

που σημαίνει ότι $\psi(aT + bS) = a\psi(T) + b\psi(S)$ για κάθε

$T, S \in M^l(A) = M(A)$ και για κάθε $a, b \in \mathcal{C}$.

$$\psi(TS)(f) = \mu^{TS}(f) = (f \circ TS)(x) = \quad (\text{με } f(x) = 1)$$

$$f(T(S(x))) = (f \circ T)S(x) = (f \circ T \circ S)(x) \quad (1)$$

$$[\psi(T)\psi(S)](f) = (\mu^T \mu^S)(f) = \mu^T(f) \mu^S(f) =$$

$$(f \circ T)(x)(f \circ S)(x) = f(T(x))f(S(x)) = f(T(x)S(x)) \quad (\text{αφού}$$

$$f \in \mathfrak{M}(A))$$

$$= f(xT(S(x))) \quad (\text{αφού } T \in M(A))$$

$$= f(x)f(T(S(x))) = 1 \cdot f((T \circ S)(x))$$

$$= (f \circ T \circ S)(x) \quad (2) \quad (\text{αφού } f(x) = 1)$$

Από (1) και (2) έχουμε $\psi(TS)(f) = [\psi(T)\psi(S)](f)$ για κάθε $f \in \mathfrak{M}(A)$

Άρα $\psi(TS) = [\psi(T)\psi(S)]$ για κάθε $T, S \in M^l(A) = M(A)$ και αυτό ολο-

κληρώνει την απόδειξη. □

Υπενθυμίζουμε ότι μία άλγεβρα A καλείται *ημιαπλή* όταν ισχύει $R(A) = \{0\}$

όπου $R(A)$ το ριζικό Jacobson της άλγεβρας (πβλ. [3, σελ 104]).

2.1.14 Θεώρημα. Αν A είναι μία ημιαπλή μεταθετική άλγεβρα Banach, τότε για κάθε $T \in M(A)$, η μ^T είναι φραγμένη συνάρτηση στο $\mathfrak{M}(A)$.

Απόδειξη.

Ως γνωστόν κάθε ημιαπλή άλγεβρα είναι γνήσια. (Βλ. [17, σελ. 142, Lemma 1.1]).

Από το πόρισμα 2.1.10 και το λήμμα 2.1.3 κάθε $T \in M(A)$ είναι συνεχής και γραμμική απεικόνιση, άρα είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής πάνω στην A και εφόσον αυτή είναι Banach θα ισχύει $\|T\| < \infty$. (όπου

$$\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : x \in A, \|x\| = 1 \} = \sup \{ \|T(x)\| : x \in A, \|x\| \leq 1 \})$$

Επίσης για κάθε $f \in \mathfrak{M}(A)$, ισχύει $\|f\|_\infty \leq 1$ (πρβλ. [2, σελ. 91 πρόταση 4.1.4]).

Για κάθε $f \in \mathfrak{M}(A)$, έστω $\alpha_f = \|f\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leq 1$.

Από τον ορισμό, $f(x) \cdot \mu^T(f) = (f \circ T)(x) = f(T(x))$ για κάθε $x \in A$, έχουμε

$$|f(x) \cdot \mu^T(f)| = |f(x)| \cdot |\mu^T(f)| = |(f \circ T)(x)| = |f(T(x))| \leq \|f\|_\infty \|T(x)\| \leq \alpha_f \|T\| \|x\|$$

Επομένως για την $f \in \mathfrak{M}(A)$ είναι $|\mu^T(f)| \leq \frac{\alpha_f \|T\| \|x\|}{|f(x)|}$ (αν $f(x) \neq 0$)

$$\text{άρα } |\mu^T(f)| \leq \inf_{\|x\|=1} \frac{\alpha_f \|T\| \|x\|}{|f(x)|} = \inf_{\|x\|=1} \frac{\alpha_f \|T\|}{|f(x)|} = \frac{\alpha_f \|T\|}{\sup_{\|x\|=1} |f(x)|} = \frac{\alpha_f \|T\|}{\alpha_f} = \|T\| < \infty.$$

Επομένως η μ^T είναι και φραγμένη. □

2.2. Συμπαγείς πολλαπλασιαστές τοπολογικών άλγεβρων

Στο πλαίσιο των άλγεβρων Banach ο H. Kamowitz, (1981) [26] απέδειξε ότι αν το φάσμα, (χώρος μέγιστων ιδεωδών) μιας μεταθετικής ημιαπλής άλγεβρας Banach δεν περιέχει μεμονωμένα (isolated) σημεία, τότε κάθε συμπαγής πολλαπλασιαστής είναι ο τετριμμένος. Με το τετριμμένο των συμπαγών τελεστών είχαν ασχοληθεί και οι M. Dutta με τον B. Tewari (1978) [9] για Segal άλγεβρες, και ο S. H. Friedberg, [11] ένα χρόνο αργότερα. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις το αποτέλεσμα βασίστηκε σε επιπλέον συνθήκες. Ένα γενικότερο αποτέλεσμα οφείλεται στον H. Kamowitz στο πλαίσιο των πλήρων μετρικοποιήσιμων τοπικά κυρτών άλγεβρων

Στην παράγραφο αυτή δίνονται συνθήκες ώστε κάθε συμπαγής πολλαπλασιαστής μιας πλήρους μετρικοποιήσιμης τοπικά κυρτής (ιδιαίτερα Fréchet τοπικά m -κυρτής) άλγεβρας να είναι ο τετριμμένος.

Υπενθυμίζουμε μερικές βασικές έννοιες και συμβολισμούς.

Έστω A μια ημιαπλή μεταθετική B_0 -άλγεβρα. Σημειώνουμε ότι κάθε πολλαπλασιαστής επί της A είναι συνεχής και γραμμική απεικόνιση (Λήμμα 2.1.3 και πόρισμα 2.1.10) και ότι ένας πολλαπλασιαστής T επί της A είναι συμπαγής αν απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή σύνολα. Δηλαδή αν B φραγμένο υποσύνολο της A τότε το $\overline{T(B)}$ είναι συμπαγές.

Στο εξής θα θεωρούμε δεδομένο ότι το $\mathfrak{M}(A)$ είναι μη κενό και ότι διαχωρίζει τα στοιχεία της A . Δηλαδή $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$ και για $x \neq y$, $x, y \in A$, υπάρχει $f \in \mathfrak{M}(A)$ με $f(x) \neq f(y)$. Έχουμε εφοδιάσει το $\mathfrak{M}(A)$ με την τοπολογία Gel'fand, δηλαδή την επαγόμενη από την ασθενή *-τοπολογία $\sigma(A', A)$ επί της A' (όπου A' είναι ο τοπολογικός συζυγής της A). (Πρβλ. Ασθενής τοπολογία κεφ 1^ο).

2.2.1 Ορισμός. Έστω X, Y χώροι Banach,

$$X' = \{f, f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ συνεχής, γραμμική απεικόνιση} \},$$

$Y' = \{f, f : Y \rightarrow C \text{ συνεχής, γραμμική απεικόνιση}\}$. Αν $T : X \rightarrow Y$, γραμμική συνεχής απεικόνιση, ορίζουμε ως δυική της T , την $T^* : Y' \rightarrow X'$ ώστε $f \mapsto T^*(f)$ για κάθε $f \in Y'$ τέτοια που να ισχύει: $T^*(f)(x) = f(Tx)$ για κάθε $x \in X$.

Ιδιαίτερα έστω A μία πλήρης μετρικοποιήσιμη τοπολογική άλγεβρα και $A' = \{f / f : A \rightarrow C \text{ συνεχής γραμμική απεικόνιση}\}$ ο τοπολογικός συζυγής της A . Αν $T : A \rightarrow A$ γραμμική απεικόνιση τότε ορίζεται η $T^* : A' \rightarrow A'$ ώστε $f \mapsto T^*(f)$ για κάθε $f \in A'$ τέτοια που να ισχύει: $T^*(f)(x) = f(Tx)$ για κάθε $x \in A$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν A είναι μία άλγεβρα με μονάδα e και $x \in A$, καλούμε *φάσμα* του x (*σημειακό φάσμα*) το ακόλουθο υποσύνολο του C :

$\{\lambda \in C : \text{το } \lambda e - x \text{ δεν αντιστρέφεται (στην } A)\}$ το οποίο συμβολίζεται με $Sp_A(x)$ ή πιο απλά με $Sp(x)$. Αν η A δεν έχει μονάδα, τότε το *σημειακό φάσμα* του $x \in A$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$Sp_A(x) = \left\{ \lambda \in C \setminus \{0\} : \text{το } \frac{x}{\lambda} \text{ δεν ψευδοαντιστρέφεται} \right\} \cup \{0\}.$$

2.2.2 Θεώρημα. Έστω A μια ημιαπλή μεταθετική B_0 -άλγεβρα και T ένας συμπαγής πολλαπλασιαστής επί της A . Αν το $\mathfrak{M}(A)$ δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία τότε ο T είναι ο τετριμμένος δηλαδή ο ταυτοτικά μηδενικός.

Απόδειξη.

Όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα 2.1.12) για κάθε $T \in M(A)$ υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $\mu^T : \mathfrak{M}(A) \rightarrow C$ τέτοια ώστε $\widehat{T}x = \mu^T \cdot \hat{x}$ δηλαδή

$$\widehat{T}x(f) = \mu^T(f) \hat{x}(f) \text{ για κάθε } f \in \mathfrak{M}(A) \text{ και για κάθε } x \in A, \text{ έτσι ώστε}$$

$$\mu^T(f) = (f \circ T)(x_1) \text{ με } x_1 \in A \text{ τέτοιο ώστε } f(x_1) = 1.$$

Ισχυρισμός: για κάθε $f \in \mathfrak{M}(A)$, η $\mu^T(f)$ είναι ιδιοτιμή του συζυγούς T^* του T . Πράγματι. Για $f \in \mathfrak{M}(A)$, έστω μ_f το γραμμικό συναρτησοειδές της A' τέτοιο ώστε $\mu_f(x) = \hat{x}(f) := f(x)$. Τότε για κάθε $x \in A$, έχουμε:

$$(T^*(\mu_f))(x) = \mu_f(Tx) = \widehat{Tx}(f) = \mu^T(f)\hat{x}(f) = \mu^T(f)\mu_f(x).$$

Έτσι $T^*\mu_f = \mu^T(f) \cdot \mu_f$, το οποίο και αποδεικνύει ότι η $\mu^T(f)$ είναι ιδιοτιμή της T^* .

Αν υποθέσουμε ότι ο T είναι συμπαγής τότε και ο T^* είναι συμπαγής (πρβλ. [36, σελ. 152]).

Επιπλέον, επειδή ο T^* είναι συμπαγής το φάσμα $Sp(T^*)$ είναι είτε πεπερασμένο σύνολο ή μία ακολουθία η οποία συγκλίνει στο 0. (Πρβλ. [36, σελ. 150, Proposition 3]).

Ακόμα κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $0 \neq \lambda \in Sp(T^*)$ είναι ιδιοτιμή του, πεπερασμένης πολλαπλότητας ($\dim(\ker(\lambda I - T^*)) < \infty$). Έστω f_0 τυχαίο στοιχείο του $\mathfrak{M}(A)$ το οποίο από την υπόθεση δεν είναι μεμονωμένο.

Ισχυρισμός: $\mu^T(f_0) = 0$. Για την απόδειξη του ισχυρισμού υποθέτουμε ότι $\mu^T(f_0) \neq 0$. Υπάρχει τότε $x_0 \in A$ με $f_0(x_0) = 1$. Εφόσον η μ^T είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathfrak{M}(A)$ και το f_0 είναι ένα οριακό σημείο της $\mathfrak{M}(A)$ (αφού δεν είναι μεμονωμένο), για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει $f_n \in \mathfrak{M}(A)$ με $f_n \neq f_0$ και $|\mu^T(f_n) - \mu^T(f_0)| < \frac{1}{n}$. Εφόσον κάθε μη μηδενική πεπερασμένη ιδιοτιμή της

T^* είναι πεπερασμένης πολλαπλότητας συμπεραίνουμε ότι η ισότητα

$\mu^T(f_n) = \mu^T(f_0)$ ισχύει μόνο για πεπερασμένο πλήθος θετικών ακεραίων n . Ε-

πομένως το $\mu^T(f_0)$ είναι οριακό σημείο της ακολουθίας $\{\mu^T(f_n)\} \subseteq Sp(T^*)$.

Αλλά έχουμε δει προηγουμένως ότι το μοναδικό πιθανό οριακό σημείο του

$Sp(T^*)$ είναι το 0, το οποίο οδηγεί σε αντίφαση (άτοπο). Επομένως $\mu^T(f_0) = 0$.

Από υπόθεση όμως δεν υπάρχει στοιχείο του $\mathfrak{M}(A)$ το οποίο να είναι μεμονωμέ-

νο, έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\mu^T(f) = 0$ για κάθε $f \in \mathfrak{M}(A)$.

Συνεπώς $\widehat{T}x(f) = \mu^T(f)\hat{x}(f) = \mu^T(f)f(x) = 0$ για όλα τα $x \in A$. Έτσι

$Tx \in \bigcap_{f \in \mathfrak{M}(A)} \ker(f) = R(A)$ (ριζικό Jacobson) και από το γεγονός ότι η A είναι

ημιαπλή προκύπτει ότι $Tx = 0$ για κάθε $x \in A$ δηλαδή, ο T είναι ο τετριμμένος. $\square$

2.2.3 Πρόρισμα. Έστω A μια ημιαπλή μεταθετική *Fréchet* τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και T ένας συμπαγής πολλαπλασιαστής επί της A . Αν ο $\mathfrak{M}(A)$ δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία τότε ο T είναι ο τετριμμένος δηλαδή ταυτοτικά ο μηδενικός.

Απόδειξη.

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 2.2.2 αφού κάθε *Fréchet* τοπικά m -κυρτή άλγεβρα είναι B_0 -άλγεβρα. $\square$

Επιπλέον, ως άμεσες συνέπειες του θεωρήματος 2.2.2 στην ιδιαίτερη περίπτωση των Banach αλγεβρών έχουμε τα παρακάτω. (Πρβλ. [26]).

2.2.4 Πρόρισμα. Έστω A μια ημιαπλή μεταθετική Banach άλγεβρα και T ένας συμπαγής πολλαπλασιαστής επί της A . Αν ο χώρος $\mathfrak{M}(A)$ δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία, τότε ο T είναι ο τετριμμένος.

Απόδειξη.

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 2.2.2, αφού κάθε Banach άλγεβρα είναι B_0 -άλγεβρα. □

Παρατήρηση. Υπενθυμίζουμε το ακόλουθο θεώρημα shilov.

Θεώρημα (shilov idempotent theorem). Έστω A μία μεταθετική άλγεβρα Banach και έστω C ένα συμπαγές ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{M}(A)$. Τότε, υπάρχει ένα ταυτοδύναμο (idempotent) στοιχείο $a \in A$ ($a^2 = a$) τέτοιο ώστε ο $\hat{a}$ ισούται με την χαρακτηριστική του C . Δηλαδή $\mathcal{X}_c = \hat{a}$. (Πρβλ. [6, σελ. 109, Theorem 5]).

Αν ο $\mathcal{M}(A)$ έχει μεμονωμένα σημεία, τότε υπάρχει μη μηδενικός συμπαγής πολλαπλασιαστής επί της A . Για να το δούμε αυτό, έστω f_0 μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{M}(A)$. Από το θεώρημα, ταυτοδυναμίας shilov υπάρχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο e της A που ικανοποιεί την σχέση $\hat{e}(f) = 1$ αν και μόνο αν $f = f_0$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τον τελεστή T που ορίζεται από τη σχέση $Tx = ex$.

Ισχυρισμός : Ισχύει $ex = \hat{x}(f_0)e$ για κάθε $x \in A$

Απόδειξη ισχυρισμού.

Θεωρούμε τα σύνολα $eA = \{ex : x \in A\}$ και $(1-e)A \equiv \{x-ex : x \in A\}$ για τα οποία προφανώς ισχύουν $eA \subseteq A$ και $(1-e)A \subseteq A$. Επειδή $e^2 = e$ θα είναι $A = eA \oplus (1-e)A$ (ανάλυση Peirce). Πράγματι, για κάθε $x \in A$ είναι $x = ex + (x-ex) \in eA + (1-e)A$, άρα $A \subseteq eA + (1-e)A$ όμως είναι και $eA + (1-e)A \subseteq A$ επομένως $A = eA + (1-e)A$.

Έστω τώρα $z \in eA \cap (1-e)A$ τότε υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $z = ex = y - ey$.

Είναι $ez = e(ex) = e^2x = ex = z$ και $ez = e(y - ey) = ey - e^2y = ey - ey = 0$ δηλαδή $z = 0$, που σημαίνει ότι το άθροισμα $eA + (1-e)A$ είναι ευθύ, άρα $A = eA \oplus (1-e)A$. Επιπλέον, για κάθε $z \in eA$, αποδείχθηκε ότι $z = ez$ δηλαδή $Tz = z$ και για κάθε $z \in (1-e)A$ αποδείχθηκε ότι $ez = 0$ δηλαδή $Tz = 0$.

Έστω $x \in eA$ και $f \in \mathfrak{M}(A)$ με $f \neq f_0$, από την ισότητα $x = ex$ προκύπτει,
 $f(x) = f(ex) \Leftrightarrow f(x) - f(e)f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)[1 - f(e)] = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ αφού
 $f \neq f_0$. Επίσης αν $x \in eA$ τότε $x - f_0(x)e = ex - e(f_0(x)e) = e[x - f_0(x)e] \in eA$
 άρα $f(x - f_0(x)e) = 0$ με $f \neq f_0$, αλλά και για $f = f_0$ έχουμε
 $f_0(x - f_0(x)e) = f_0(x) - f_0(x)f_0(e) = 0$, αφού $f_0(e) = 1$. Άρα
 $x - f_0(x)e \in \bigcap_{f \in \mathfrak{M}(A)} \ker f = R(A)$ και εφόσον η A είναι ημιαπλή θα είναι
 $R(A) = \{0\}$ επομένως $x - f_0(x)e = 0$ ή $x = f_0(x)e$. Άρα, για κάθε $x \in eA$, είναι
 $Tx = ex = x = f_0(x)e = \hat{x}(f_0)e$. Έστω τώρα $x \in A$, τότε $x = ex + (x - ex)$ και
 $Tx = T(ex + (x - ex)) = T(ex) + T(x - ex) = f_0(ex)e + e(x - ex) =$
 $f_0(e)f_0(x)e + ex - e^2x = f_0(x)e = \hat{x}(f_0)e$.
 Άρα $Tx = ex = \hat{x}(f_0)e$ για κάθε $x \in A$

Είναι φανερό τώρα ότι ο T είναι μη μηδενικός πολλαπλασιαστής ο οποίος είναι
 συμπαγής δεδομένου ότι το σύνολο τιμών του (ως υπόχωρος) έχει διάσταση 1.

Δίνουμε τώρα δύο παραδείγματα αλγεβρών όπου το ολικό φάσμα $\mathfrak{M}(A)$ περιέχει μεμονωμένα σημεία. Σε καθένα από αυτά τα παραδείγματα περιγράφουμε έναν μη μηδενικό συμπαγή πολλαπλασιαστή.

Παράδειγμα 1 Συμβολίζουμε με S το σύνολο όλων των μιγαδικών ακολουθιών με πράξεις κατά συντεταγμένες. Το S είναι μία μεταθετική άλγεβρα με μονάδα την ακολουθία $\{I_i \equiv 1\}_{i \in \mathbb{N}}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$p_n : S \rightarrow \mathbf{R}, \text{ όπου } \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \text{ δηλαδή } p_n(\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}) = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \text{ η οποία}$$

είναι καλά ορισμένη και πολλαπλασιαστική ημινόρμα της άλγεβρας S . Τότε το S εφοδιασμένο με την τοπολογία που ορίζουν οι ημινόρμες $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία ημιαπλή Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, η οποία έχει μία ορθογώνια βάση, την $\{e_n : n \geq 1\}$. Όπου $e_n = \{\delta_{ni}\}_{i \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ και δ_{ni} το δέλτα του Kronecker. (Πρβλ.

[21, Chapter II, Example 3.4]). Κάθε $x \in S$ μπορεί να εκφραστεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\sum \lambda_n(x) e_n$, όπου κάθε συναρτησοειδές λ_n είναι γραμμικό συνεχές και πολλαπλασιαστικό. Επιπλέον, $\mathfrak{M}(A) = \{\lambda_n\}$ το οποίο είναι ομοιομορφικό με τον διακριτό χώρο N των φυσικών αριθμών. Πράγματι: κάθε I γνήσιο κλειστό ιδεώδες της A περιέχεται σε κάποιο

$M_n = \ker \lambda_n = \lambda_n^{-1}(\{0\}) = \{x \in A / \lambda_n(x) = 0\}$. Διαφορετικά, υπάρχει $x \in I$ τέτοιο ώστε $\lambda_n(x) \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$. Αλλά, $xe_n = \lambda_n(x) e_n$, οπότε

$e_n = (\lambda_n(x))^{-1} xe_n \in I$ (αφού I ιδεώδες). Δηλαδή $e_n \in I$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $I = A$ (αφού το I περιέχει την βάση του A), το οποίο είναι άτοπο επειδή το I είναι γνήσιο ιδεώδες της A . Επειδή τώρα το $\mathfrak{M}(A)$ είναι ισόμορφο με το χώρο των μέγιστων κλειστών ιδεωδών της A έχουμε ότι $\mathfrak{M}(A) = \{\lambda_n\}$. Για να δείξουμε τώρα ότι το $\mathfrak{M}(A) = \{\lambda_n\}$ είναι ομομορφικό με τον διακριτό χώρο N των φυσικών αριθμών για τυχαίο $\lambda_i \in \mathfrak{M}(A)$ θεωρούμε την υποβασική περιοχή του, $V = \{\lambda_n : |\lambda_n(e_i) - \lambda_i(e_i)| < 1\}$ η οποία περιέχει μόνο το λ_i αφού $\lambda_i(e_i) = 1$ και $\lambda_n(e_i) = 0$ για $n \neq i$. Έτσι το $\mathfrak{M}(A) = \{\lambda_n\}$ είναι ένας αριθμήσιμος διακριτός χώρος και επομένως ομοιομορφικός με τον διακριτό χώρο των φυσικών αριθμών.

(Πρβλ. [21, Chapter III, theorem 3.1]). Σημειώνουμε ότι από τον ορισμό της ορθογώνιας βάσης θα έχουμε ότι κάθε e_n είναι ταυτοδύναμο και $xe_n = \lambda_n(x) e_n$.

Επίσης $\widehat{e_n}(\lambda_n) = \lambda_n(e_n) = 1$ για κάθε $n \in N$. Για κάποιο σταθερό στοιχείο $e_m \in S$, ορίζουμε τον τελεστή T από τις ισότητες $Tx = xe_m = \lambda_m(x) e_m = \widehat{x}(\lambda_m) e_m$. Τότε είναι φανερό ότι ο T είναι ένας μη μηδενικός συμπαγής πολλαπλασιαστής.

Από την προηγούμενη απόδειξη, είναι φανερό πως το εν λόγω παράδειγμα, είναι μια *Krull (τοπολογική) άλγεβρα*. Δηλαδή κάθε γνήσιο κλειστό ιδεώδες, περιέχεται σε ένα μέγιστο κλειστό (κανονικό) ιδεώδες.

Παράδειγμα 2 Έστω $H(D)$ το σύνολο όλων των ολόμορφων συναρτήσεων που ορίζονται πάνω στον ανοιχτό δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Το $H(D)$ εφοδιασμένο με τις κατά σημείο πράξεις, πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό, καθώς επίσης με πολλαπλασιασμό κατά Cauchy-Hadamard και εφοδιασμένο με την συμπαγή ανοιχτή τοπολογία, είναι μια ημιαπλή μεταθετική B_0 -άλγεβρα με μονάδα το $1 \in H(D)$ όπου $1(z) = 1$ για κάθε $z \in D$. Υπενθυμίζουμε τον πολλαπλασιασμό (γινόμενο) κατά Cauchy-Hadamard. Αν $f, g \in H(D)$ με $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

και $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ τότε ορίζουμε ως γινόμενο Cauchy-Hadamard την $f * g$ με

$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$. Επαληθεύεται ότι το παραπάνω γινόμενο δίνεται και από

την συνέλιξη: $(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=r} f(zx^{-1}) g(x) x^{-1} dx$ με $|z| < r < 1$.

Η άλγεβρα $H(D)$ έχει ως ορθογώνια βάση το σύνολο $\{e_n : n > 0\}$ όπου $e_n(z) = z^n$ για κάθε $z \in D$. (Πρβλ. [21, Chapter III, σελ. 97]).

Με παρόμοια επιχειρήματα όπως στο παράδειγμα 1, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν μη μηδενικό συμπαγή πολλαπλασιαστική πάνω στο $H(D)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στην πρώτη παράγραφο ορίζονται οι διπλοί πολλαπλασιαστές $M_d(A)$ μιας τοπολογικής άλγεβρας A , και παρουσιάζονται ορισμένες αλγεβρικές ιδιότητές τους. (Θεώρημα 3.1.2). Στην περίπτωση που η A είναι γνήσια αποδεικνύεται, ότι αυτή «ταυτίζεται» με ένα δίπλευρο ιδεώδες της $M_{cd}(A)$. (Θεώρημα 3.1.3).

Στη δεύτερη παράγραφο η άλγεβρα $M_{cd}(A)$ μιας τοπικά C^* -άλγεβρας A εφοδιάζεται με μία ενέλιξη και με δύο τοπολογίες, την τοπολογία των ημινόρμων και την αυστηρή τοπολογία. Χρησιμοποιώντας την πρώτη από αυτές τις τοπολογίες, επιτυγχάνουμε (αλγεβρικά) την ταύτιση των φραγμένων στοιχείων της $M_{cd}(A)$ με την άλγεβρα των συνεχών διπλών πολλαπλασιαστών, επί της άλγεβρας $b(A)$ των φραγμένων στοιχείων της A . (Θεώρημα 3.2.14).

3.1. Διπλοί πολλαπλασιαστές (τοπολογικών) αλγεβρών

3.1.1. Ορισμός. Έστω A μία άλγεβρα και δύο απεικονίσεις $S, T : A \rightarrow A$. Το ζεύγος (S, T) θα καλείται διπλός πολλαπλασιαστής της A (ή επί της A) αν ισχύει $xS(y) = T(x)y$ για κάθε $x, y \in A$.

Στο εξής θα συμβολίζουμε με $M_d(A)$ το σύνολο των διπλών πολλαπλασιαστών επί της A και με $M(A)$ το σύνολο των (δίπλευρων) πολλαπλασιαστών επί της A .

Δηλαδή $M(A) = \{T : A \rightarrow A, T \text{ πολλαπλασιαστής}\}$ και

$$M_d(A) = \{(S, T) : (S, T) \text{ διπλός πολλαπλασιαστής της } A\}.$$

3.1.2. Θεώρημα. Έστω A μία γνήσια άλγεβρα. Τότε ισχύουν τα εξής:

α) Αν $(L, R) \in M_d(A)$, τότε ο L είναι αριστερός και ο R δεξιός πολλαπλασιαστής επί της A .

β) Αν $(L, R) \in M_d(A)$ τότε οι L, R είναι γραμμικές απεικονίσεις.

γ) Το $M_d(A)$ αποκτά τη δομή της (μιγαδικής) άλγεβρας με τις εξής πράξεις

$$(L, R) + (L_1, R_1) = (L + L_1, R + R_1), \quad \lambda(L, R) = (\lambda L, \lambda R)$$

$$(L, R)(L_1, R_1) = (LL_1, R_1R) \text{ για κάθε } (L, R), (L_1, R_1) \in M_d(A)$$

και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

Επιπλέον, η άλγεβρα $M_d(A)$ είναι μοναδιαία με μονάδα το (I, I) όπου $I = id_A$.

δ) Αν η A είναι και μεταθετική, τότε και η $M_d(A)$ είναι μεταθετική και μάλιστα

για κάθε $(L, R) \in M_d(A) \Rightarrow L = R$ δηλαδή

$M_d(A) = \{(T, T) : T \text{ πολλαπλασιαστής της } A\}$ υπό αυτήν την έννοια μπορούμε να

γράψουμε $M_d(A) \equiv M(A)$ (ως προς έναν ισομορφισμό αλγεβρών).

Απόδειξη.

α) Έστω $(L, R) \in M_d(A)$ και $x, y \in A$ τότε $xL(y) = R(x)y$ (1).

Για κάθε $z \in A$ έχουμε $z(L(xy) - L(x)y) = zL(xy) - [zL(x)]y =$

$$R(z)(xy) - [R(z)x]y = R(z)(xy) - R(z)(xy) = 0$$

Και επειδή η A είναι γνήσια προκύπτει ότι $L(xy) - L(x)y = 0$, δηλαδή

$L(xy) = L(x)y$ για κάθε $x, y \in A$ άρα ο L είναι αριστερός πολλαπλασιαστής.

Επίσης για κάθε $z \in A$ έχουμε $(R(xy) - xR(y))z = R(xy)z - [xR(y)]z =$

$$(xy)L(z) - x[R(y)z] = (xy)L(z) - x[yL(z)] =$$

$$(xy)L(z) - (xy)L(z) = 0$$

Και επειδή η A είναι γνήσια προκύπτει ότι $R(xy) - xR(y) = 0$, δηλαδή

$R(xy) = xR(y)$ για κάθε $x, y \in A$ άρα ο R είναι δεξιός πολλαπλασιαστής της A .

β) Έστω $(L, R) \in M_d(A)$ και $x, y \in A, a, b \in C$

$$\begin{aligned}
 \text{Για κάθε } z \in A \text{ έχουμε } z[L(ax+by) - aL(x) - bL(y)] &= \\
 zL(ax+by) - z[aL(x)] - z[bL(y)] &= \\
 R(z)(ax+by) - a[zL(x)] - b[zL(y)] &= \\
 R(z)(ax) + R(z)(by) - a[R(z)x] - b[R(z)y] &= \\
 R(z)(ax) + R(z)(by) - R(z)(ax) - R(z)(by) &= 0
 \end{aligned}$$

και επειδή η A είναι γνήσια θα έχουμε $L(ax+by) = aL(x) + bL(y)$ για κάθε $x, y \in A, a, b \in C$. Συνεπώς η L είναι γραμμική.

Ανάλογα προκύπτει ότι $R(ax+by) = aR(x) + bR(y)$ για κάθε $x, y \in A, a, b \in C$, επομένως και η R είναι γραμμική.

γ) Αρχικά οι πράξεις όπως ορίστηκαν είναι καλά ορισμένες.

Πράγματι: Έστω $(L, R), (L_1, R_1) \in M_d(A), \lambda \in C$ τότε οι $L+L_1, R+R_1, \lambda L, \lambda R, LL_1 (:= L \circ L_1), R_1 R (:= R_1 \circ R)$ είναι απεικονίσεις από την A στην A και για κάθε $x, y \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad x(L+L_1)(y) &= x(L(y) + L_1(y)) = xL(y) + xL_1(y) = \\
 R(x)y + R_1(x)y &= [R(x) + R_1(x)]y = [(R+R_1)(x)]y
 \end{aligned}$$

άρα $(L+L_1, R+R_1) \in M_d(A)$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad x(\lambda L)(y) &= x[\lambda L(y)] = \lambda[xL(y)] = \\
 \lambda[R(x)y] &= [\lambda R(x)]y = (\lambda R)(x)y.
 \end{aligned}$$

Άρα $(\lambda L, \lambda R) \in M_d(A)$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad x(LL_1)(y) &= xL(L_1(y)) = R(x)L_1(y) = \\
 R_1(R(x))y &= (R_1 R)(x)y
 \end{aligned}$$

άρα $(LL_1, R_1 R) \in M_d(A)$.

Οι ιδιότητες που απαιτούνται να ικανοποιηθούν, ώστε η $M_d(A)$ με τις παραπάνω πράξεις να είναι άλγεβρα, αποδεικνύονται χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

Έστω $(L, R) \in M_d(A)$ και έστω $I = id_A$. Για κάθε $x, y \in A$ είναι

$$\bullet xI(y) = xid_A(y) = xy = id_A(x)y = I(x)y, \text{ άρα } (I, I) \in M_d(A).$$

Επιπλέον, $(L, R)(I, I) = (LI, IR) = (L, R)$ και

$$(I, I)(L, R) = (IL, RI) = (L, R).$$

Επομένως το (I, I) είναι το μοναδιαίο στοιχείο της άλγεβρας $M_d(A)$.

δ) Έστω $(L, R), (L_1, R_1) \in M_d(A)$ θα αποδείξουμε ότι

$$(L, R)(L_1, R_1) = (L_1, R_1)(L, R), \text{ δηλαδή } LL_1 = L_1L \text{ και } R_1R = RR_1.$$

Πράγματι: Έστω $x \in A$. Για κάθε $z_1, z_2 \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned} z_1[z_2(LL_1)(x) - z_2(L_1L)(x)] &= z_1z_2(LL_1)(x) - z_1z_2(L_1L)(x) = \\ z_1[z_2(LL_1)(x)] - z_2[z_1(L_1L)(x)] &= z_1[z_2(L(L_1(x)))] - z_2[z_1(L_1(L(x)))] = \\ z_1[R(z_2)L_1(x)] - z_2[R_1(z_1)L(x)] &= [z_1L_1(x)]R(z_2) - [z_2L(x)]R_1(z_1) = \\ [R_1(z_1)x]R(z_2) - [R(z_2)x]R_1(z_1) &= xR_1(z_1)R(z_2) - xR_1(z_1)R(z_2) = 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή για κάθε $z_1 \in A$ είναι $z_1[z_2(LL_1)(x) - z_2(L_1L)(x)] = 0$ και επειδή η

A είναι γνήσια, έπεται ότι για κάθε $z_2 \in A$ θα ισχύει

$$z_2(LL_1)(x) - z_2(L_1L)(x) = 0. \text{ Που σημαίνει ότι } z_2[(LL_1)(x) - (L_1L)(x)] = 0,$$

επικαλούμενοι ξανά τη γνησιότητα της A προκύπτει ότι

$$(LL_1)(x) - (L_1L)(x) = 0 \text{ και έτσι } (LL_1)(x) = (L_1L)(x) \text{ για κάθε } x \in A, \text{ επομέ-}$$

νως $LL_1 = L_1L$.

Ανάλογα θα είναι και $R_1R = RR_1$. Συνεπώς $(L, R)(L_1, R_1) = (L_1, R_1)(L, R)$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την *αλγεβρική ταύτιση* των αλγεβρών $M_d(A)$ και

$$M(A).$$

Έστω $(L, R) \in M_d(A)$ και $x \in A$. Για κάθε $z, z_1 \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned}
z[z_1(L(x) - R(x))] &= (zz_1)(L(x) - R(x)) = (zz_1)L(x) - (zz_1)R(x) = \\
z[z_1L(x)] - (z_1z)R(x) &= z[R(z_1)x] - z_1[zR(x)] = \\
[zR(z_1)]x - z_1[zR(x)] &= [L(z)z_1]x - z_1[zR(x)] = \\
L(z)(z_1x) - z_1[zR(x)] &= L(z)(xz_1) - z_1[zR(x)] = \\
[L(z)x]z_1 - (z_1z)R(x) &= [zR(x)]z_1 - (zz_1)R(x) = \\
[R(x)z]z_1 - R(x)(zz_1) &= R(x)(zz_1) - R(x)(zz_1) = 0, \text{ επειδή η } A \text{ είναι γνήσια} \\
\text{έχουμε διαδοχικά } z_1(L(x) - R(x)) &= 0 \text{ για κάθε } z_1 \in A. \text{ Άρα } L(x) - R(x) = 0 \\
\text{δηλαδή } L(x) = R(x) \text{ για κάθε } x \in A \text{ που σημαίνει ότι } L &= R.
\end{aligned}$$

Τελικά $M_d(A) = \{(T, T) : T \text{ πολλαπλασιαστής της } A\}$. □

Έστω A τοπολογική άλγεβρα και $M_{cd}(A) = \{(L, R) : (L, R) \in M_d(A) \text{ και } L, R \text{ συνεχείς}\}$. Τότε $(I, I) \in M_{cd}(A)$ και άρα $\emptyset \neq M_{cd}(A) \subseteq M_d(A)$.

Για κάθε $a \in A$ θεωρούμε τις απεικονίσεις $L_a, R_a : A \rightarrow A$ όπου $a \mapsto ax, a \mapsto xa$ αντίστοιχα. Δηλαδή $L_a(x) = ax$ και $R_a(x) = xa$, για κάθε $x \in A$. Είναι σαφές πως οι L_a, R_a είναι καλά ορισμένες και λόγω της χωριστής συνέχειας του πολλαπλασιασμού της A , είναι συνεχείς. Τέλος, για κάθε $x, y \in A$, έχουμε $xL_a(y) = x(ay) = (xa)y = R_a(x)y$. Επομένως $(L_a, R_a) \in M_{cd}(A)$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η απεικόνιση

$$(1) \mu : A \rightarrow M_{cd}(A) \text{ με } \mu(a) = (L_a, R_a)$$

είναι καλά ορισμένη.

Επιπλέον, αν η A είναι και γνήσια, για κάθε $a \in A$ και $(S, T) \in M_d(A)$ ισχύουν (3.1.1) $(L_a, R_a)(S, T) = (L_{T(a)}, R_{T(a)})$ και $(S, T)(L_a, R_a) = (L_{S(a)}, R_{S(a)})$.

Πράγματι: Για κάθε $x \in A$ είναι

$$(L_a S)(x) = L_a(S(x)) = aS(x) = T(a)x = L_{T(a)}(x). \text{ Άρα } L_a S = L_{T(a)}.$$

$$(TR_a)(x) = T(R_a(x)) = T(xa) = xT(a) = R_{T(a)}(x). \text{ Άρα } TR_a = R_{T(a)}, \text{ και έτσι}$$

$$(L_a, R_a)(S, T) = (L_a S, TR_a) = (L_{T(a)}, R_{T(a)}).$$

$$\text{Επίσης } (SL_a)(x) = S(L_a(x)) = S(ax) = S(a)x = L_{S(a)}(x), \text{ οπότε } SL_a = L_{S(a)}.$$

$$(R_a T)(x) = R_a(T(x)) = T(x)a = xS(a) = R_{S(a)}(x), \text{ οπότε } R_a T = R_{S(a)}.$$

$$\text{Άρα } (S, T)(L_a, R_a) = (SL_a, R_a T) = (L_{S(a)}, R_{S(a)})$$

3.1.3. Θεώρημα. Έστω A μία (Hausdorff) τοπολογική άλγεβρα. Θεωρούμε την απεικόνιση μ που ορίζεται από την (1). Τότε ισχύουν τα εξής:

α) Η μ είναι μορφισμός αλγεβρών.

β) Η μ είναι “1-1” αν και μόνο αν η A είναι γνήσια.

γ) Η μ είναι επί αν και μόνο αν η A έχει μονάδα.

δ) Αν η A είναι γνήσια, τότε το $\mu(A)$ είναι δίπλευρο ιδεώδες της $M_{cd}(A)$.

Απόδειξη.

$$\alpha) \text{ Έστω } a, b \in A \text{ και } \kappa, \lambda \in \mathbb{C} \text{ τότε } \mu(\kappa a + \lambda b) = (L_{\kappa a + \lambda b}, R_{\kappa a + \lambda b}) \quad (1).$$

$$\text{Αλλά } L_{\kappa a + \lambda b}(x) = (\kappa a + \lambda b)x = (\kappa a)x + (\lambda b)x =$$

$$(\kappa a)x + (\lambda b)x = \kappa(ax) + \lambda(bx) = \kappa L_a(x) + \lambda L_b(x) =$$

$$(\kappa L_a + \lambda L_b)(x) \text{ για κάθε } x \in A, \text{ δηλαδή } L_{\kappa a + \lambda b} = \kappa L_a + \lambda L_b. \text{ Ανάλογα έ-}$$

$$\text{χουμε } R_{\kappa a + \lambda b}(x) = x(\kappa a + \lambda b) = \kappa(xa) + \lambda(xb) =$$

$$\kappa R_a(x) + \lambda R_b(x) = (\kappa R_a)(x) + (\lambda R_b)(x) =$$

$$(\kappa R_a + \lambda R_b)(x) \text{ για κάθε } x \in A, \text{ δηλαδή } R_{\kappa a + \lambda b} = \kappa R_a + \lambda R_b.$$

$$\text{Η (1) τώρα γράφεται } \mu(\kappa a + \lambda b) = (\kappa L_a + \lambda L_b, \kappa R_a + \lambda R_b) =$$

$$(\kappa L_a, \kappa R_a) + (\lambda L_b, \lambda R_b) = \kappa(L_a, R_a) + \lambda(L_b, R_b) =$$

$\kappa\mu(a) + \lambda\mu(b)$. Δηλαδή $\mu(\kappa a + \lambda b) = \kappa\mu(a) + \lambda\mu(b)$ για κάθε $a, b \in A$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$.

Επίσης για κάθε $a, b \in A$ και για κάθε $x \in A$ είναι

$$(L_a L_b)(x) = L_a(L_b(x)) = L_a(bx) = abx = (ab)x = L_{ab}(x), \text{ άρα } L_a L_b = L_{ab} \text{ και } \\ (R_b R_a)(x) = R_b(R_a(x)) = R_b(xa) = (xa)b = x(ab) = R_{ab}(x), \text{ άρα } R_b R_a = R_{ab}.$$

$$\text{Είναι } \mu(ab) = (L_{ab}, R_{ab}) = (L_a L_b, R_b R_a) = (L_a, R_a)(L_b, R_b) = \mu(a)\mu(b)$$

Ισχυρισμός. Η απεικόνιση μ είναι συνεχής.

Πράγματι. Έστω $a_0 \in A$ και $(a_\delta)_{\delta \in \Delta}$ δίκτυο στην A με $\lim_\delta a_\delta = a_0$ τότε για

$$\text{κάθε } x \in A \text{ είναι } L_{a_0}(x) = a_0 x = \left(\lim_\delta a_\delta\right)x = \lim_\delta (a_\delta x) = \lim_\delta (L_{a_\delta}(x)), \text{ άρα}$$

$$\lim_\delta (L_{a_\delta}) = L_{a_0}. \text{ Ανάλογα θα είναι και } \lim_\delta (R_{a_\delta}) = R_{a_0}. \text{ Επομένως}$$

$$\lim_\delta (L_{a_\delta}, R_{a_\delta}) = (L_{a_0}, R_{a_0}) \text{ δηλαδή } \lim_\delta \mu_{a_\delta} = \mu_{a_0}, \text{ συνεπώς η } \mu \text{ είναι συνεχής.}$$

β) Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση μ είναι “1-1”. Τότε για κάθε $a, b \in A$ ισχύει $(\mu(a) = \mu(b) \Rightarrow a = b)$ δηλαδή,

$$((L_a, R_a) = (L_b, R_b) \Rightarrow a = b) \Leftrightarrow ((L_a = L_b \text{ και } R_a = R_b) \Rightarrow a = b). \text{ Δηλαδή, αν για}$$

κάθε $x \in A$ ισχύει $ax = bx$ και $xa = xb$ τότε $a = b$ (2).

Έστω $x \in A$ με $xA = Ax = \{0\}$ τότε $xa = 0$ και $ax = 0$ για κάθε $a \in A \Leftrightarrow$

$$xa = 0a \text{ και } ax = a0 \text{ για κάθε } a \in A$$

και λόγω της (2) προκύπτει ότι $x = 0$, άρα η A είναι γνήσια.

Αντίστροφα. Έστω ότι η άλγεβρα A είναι γνήσια και $a, b \in A$ με

$$\mu(a) = \mu(b) \text{ τότε έχουμε διαδοχικά}$$

$$(L_a, R_a) = (L_b, R_b) \Leftrightarrow (L_a = L_b \text{ και } R_a = R_b) \Leftrightarrow$$

$$L_a(x) = L_b(x) \text{ και } R_a(x) = R_b(x) \text{ για κάθε } x \in A \Leftrightarrow$$

$$ax = bx \text{ και } xa = xb \text{ για κάθε } x \in A \Leftrightarrow$$

$$(a-b)x = 0 \text{ και } x(a-b) = 0 \text{ για κάθε } x \in A \Leftrightarrow$$

$(a-b)A = A(a-b) = \{0\}$ και επειδή η A είναι γνήσια συμπεραίνουμε ότι $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$. Οπότε η μ είναι “1-1”.

γ) Έστω ότι η μ είναι επί. Επειδή $(I, I) \in M_{cd}(A) = \mu(A)$ θα υπάρξει $e \in A$ τέτοιο ώστε $\mu(e) = (I, I)$ δηλαδή $(L_e, R_e) = (I, I)$. Διαδοχικά έχουμε:

$$L_e = I \text{ και } R_e = I \Leftrightarrow L_e(x) = I(x) \text{ και } R(x)_e = I(x) \text{ για κάθε } x \in A \Leftrightarrow$$

$ex = x$ και $xe = x$ για κάθε $x \in A$. Αυτό σημαίνει ότι το e είναι το μοναδιαίο στοιχείο της A .

Αντίστροφα. Έστω ότι η άλγεβρα A έχει μοναδιαίο στοιχείο e . Τότε

$$\mu(e) = (L_e, R_e) = (I, I) \text{ αφού } L_e(x) = ex = x = I(x) \text{ και}$$

$$R_e(x) = xe = x = I(x) \text{ για κάθε } x \in A.$$

Έστω (S, T) τυχαίο στοιχείο της $M_{cd}(A)$. Τότε (βλ και (3.1.1))

$$(S, T) = (SI, IT) = (S, T)(I, I) = (S, T)(L_e, R_e) = (L_{S(e)}, R_{S(e)}) = \mu(S(e)). \text{ Εδώ}$$

χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η A είναι γνήσια ως άλγεβρα με μονάδα.

Άρα $(S, T) = \mu(S(e))$, επομένως η μ είναι επί.

δ) Έστω ότι η άλγεβρα A είναι γνήσια, τότε για κάθε $(S, T) \in M_{cd}(A)$ και για κάθε $a \in A$ έχουμε $(S, T)(L_a, R_a) = (L_{S(a)}, R_{S(a)}) \in \mu(A)$ άρα $M_{cd}(A)\mu(A) \subseteq \mu(A)$. Ακόμα είναι $(L_a, R_a)(S, T) = (L_{T(a)}, R_{T(a)}) \in \mu(A)$ άρα $\mu(A)M_{cd}(A) \subseteq \mu(A)$. Αν λάβουμε υπόψη ότι η μ είναι και αλγεβρικός μορφισμός, τότε το $\mu(A)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος και άρα τελικά, δίπλευρο ι-δεώδες της $M_{cd}(A)$. □

3.2 Πολλαπλασιαστές τοπικά C*-αλγεβρών

3.2.1 Ορισμός. Έστω (A, p) μία ημινόρμαρισμένη άλγεβρα με ενέλιξη $*$.

Αν $p(xx^*) = p(x)^2$ για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η p έχει τη C^* -ιδιότητα ή απλά η p είναι C^* -ημινόρμα και η A καλείται C^* -ημινόρμαρισμένη άλγεβρα.

Αν η p είναι ιδιαίτερα, νόρμα, τότε η A καλείται C^* -νορμαρισμένη άλγεβρα και αν είναι πλήρης καλείται C^* -άλγεβρα.

Δηλαδή μία C^* -άλγεβρα είναι μία πλήρης νορμαρισμένη άλγεβρα $(A, \|\cdot\|)$ με ενέλιξη $*$ και η $\|\cdot\|$ (νόρμα) έχει τη C^* -ιδιότητα, δηλαδή είναι μία C^* -νόρμα.

3.2.2 Λήμμα. Έστω (A, p) μία C^* -ημινόρμαρισμένη άλγεβρα. Τότε ισχύουν τα εξής: $p(x^*) = p(x)$ για κάθε $x \in A$ (άρα η ενέλιξη είναι συνεχής) και $p(x^*x) = p(x^*)p(x)$ για κάθε $x \in A$.

Απόδειξη.

Έστω $x \in A$ τότε $p(x)^2 = p(x^*x) \leq p(x^*)p(x)$ οπότε αφού $p(x) \geq 0$ προκύπτει ότι $p(x) \leq p(x^*)$. Δηλαδή $p(x) \leq p(x^*)$ για κάθε $x \in A$ και για x το x^* παίρνουμε $p(x^*) \leq p(x)$ επομένως $p(x^*) = p(x)$. □

3.2.3 Ορισμός. Μία τοπικά m -κυρτή C^* -άλγεβρα είναι μία ενελκτική τοπικά m -κυρτή άλγεβρα $(A, (p_a)_{a \in I})$ της οποίας κάθε ημινόρμα p_a είναι C^* -ημινόρμα. Μία πλήρης τοπικά m -κυρτή C^* -άλγεβρα θα καλείται συντόμως τοπικά C^* -άλγεβρα. (Ο όρος αυτός οφείλεται στον A. Inoue).

Υπενθυμίζουμε ότι

- Ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X , καλείται *πλήρως κανονικός* (completely regular) όταν για κάθε κλειστό υποσύνολο Y και κάθε $x \notin Y$, υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f: X \rightarrow [0,1]$ με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$, για $y \in Y$.

- Ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X , καλείται κ -χώρος, αν ένα υποσύνολο Y του X είναι κλειστό (αντ. ανοιχτό) όταν το $Y \cap K$ είναι κλειστό (αντ. ανοιχτό) για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X .

Ένα **παράδειγμα τοπικά C^* -άλγεβρας** είναι το εξής. Θεωρούμε έναν πλήρως κανονικό κ -χώρο X και το σύνολο $\mathcal{C}_c(X)$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του X . Το $\mathcal{C}_c(X)$ εφοδιασμένο με τις κατά σημείο πράξεις γίνεται άλγεβρα.

Έστω $\mathcal{K}(X)$ το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων του X .

Η απεικόνιση $p_K : \mathcal{C}_c(X) \rightarrow \mathbf{R}$ με $p_K(f) := \sup \{ |f(x)|, x \in K \in \mathcal{K}(X) \}$ είναι ημινόρμα επί της $\mathcal{C}_c(X)$. Έτσι, η $\mathcal{C}_c(X)$ εφοδιασμένη με την τοπολογία που ορίζουν σε αυτήν οι ημινόρμες $p_K, K \in \mathcal{K}(X)$ είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα.

Θεωρούμε την απεικόνιση $*$: $\mathcal{C}_c(X) \rightarrow \mathcal{C}_c(X)$ $f \mapsto f^*$, όπου $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Η απεικόνιση αυτή είναι μία ενέλιξη επί της $\mathcal{C}_c(X)$.

Έστω $K \in \mathcal{K}(X)$ τότε η ημινόρμα p_K έχει τη C^* -ιδιότητα. Πράγματι, παίρνοντας

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}_c(X) \text{ έχουμε } p_K(ff^*) &= \sup \{ |f(x)f^*(x)|, x \in K \in \mathcal{K}(X) \} = \\ &= \sup \{ |f(x)| |f^*(x)|, x \in K \in \mathcal{K}(X) \} = \sup \{ |f(x)| |\overline{f(x)}|, x \in K \in \mathcal{K}(X) \} = \\ &= \sup \{ |f(x)|^2, x \in K \in \mathcal{K}(X) \} = \left(\sup \{ |f(x)|, x \in K \in \mathcal{K}(X) \} \right)^2 = (p_K(f))^2 \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι συνεχής και το K συμπαγές. Επιπλέον, επειδή ο X είναι κ -χώρος ο $\mathcal{C}_c(X)$ είναι πλήρης (πβλ. [27, σελ. 230]). Επομένως η $\mathcal{C}_c(X)$ είναι τοπικά C^* -άλγεβρα.

Έστω τώρα μία τοπικά C^* -άλγεβρα $(A, (p_a)_{a \in I})$. Με $b(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο των φραγμένων στοιχείων της A , δηλαδή $b(A) = \{ x \in A : \|x\|_\infty = \sup \{ p_a(x) : a \in I \} < \infty \}$ που βεβαίως είναι μία υπάλγεβρα της A . Ιδιαίτερα ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

3.2.4 Πρόταση. Αν A είναι μία τοπικά C^* -άλγεβρα, τότε η άλγεβρα $b(A)$ είναι μία C^* -ημινормαρισμένη άλγεβρα ως προς την $\|\cdot\|_\infty$. Επιπλέον, το $b(A)$ είναι πυκνό στην A .

Απόδειξη.

(Πρβλ. [35, Proposition 1.11]). □

Ακόμα, μία προσεγγιστική μονάδα της A είναι ένα αύξον δίκτυο $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ από θετικά στοιχεία της A έτσι ώστε $\|e_\lambda\|_\infty \leq 1$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και για κάθε $x \in A$ έχουμε $e_\lambda x \rightarrow x$ και $x e_\lambda \rightarrow x$. Εδώ ένα στοιχείο $y \in A$ λέγεται θετικό, αν έχει τη μορφή $y = z^* z$ με $z \in A$. (Βλ. και αυτόθι σελ. 177, Proposition 3.11)

Κάθε προσεγγιστική μονάδα για την $b(A)$ είναι και προσεγγιστική μονάδα για την A (αφού το $b(A)$ είναι πυκνό στην A). (Βλ. και αυτόθι σελ. 177, Definition 3.10).

Κάθε τοπικά C^* -άλγεβρα A έχει μια προσεγγιστική μονάδα και άρα είναι γνήσια (πρβλ. και το Σχόλιο 2 της § 2.1). Επιπλέον η προσεγγιστική μονάδα της A είναι και προσεγγιστική μονάδα για την υπάλγεβρά της $b(A)$. (Πρβλ. [22, σελ 208, Theorem 2.6]).

Και για την παράγραφο αυτή αν A είναι μία τοπικά C^* -άλγεβρα, τότε ως άλγεβρα των πολλαπλασιαστών της, θεωρούμε το σύνολο $M_{cd}(A)$ των διπλών πολλαπλασιαστών, το οποίο αποτελείται από όλα τα ζεύγη της μορφής (L, R) , όπου L και R συνεχείς απεικονίσεις από την A στην A , τέτοιες ώστε να ισχύει $xL(y) = R(x)y$, για κάθε $x, y \in A$. Ένα τέτοιο ζεύγος στο εξής θα καλείται πολλαπλασιαστής επί της A .

3.2.5 Πρόταση. Έστω A μία άλγεβρα με ενέλιξη $*$. Θεωρούμε την άλγεβρα $M_d(A)$ των διπλών πολλαπλασιαστών της A με τις κατά σημείο πράξεις και πολλαπλασιασμό: $(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$. Τότε η $M_d(A)$ γίνεται ενελικτική άλγεβρα, με ενέλιξη την απεικόνιση $*$: $M_d(A) \rightarrow M_d(A)$ όπου

$$(L, R) \mapsto (L, R)^* (:= (R^*, L^*)) \text{ με}$$

$$(3.2.1) \quad L^*(x) = (L(x^*))^* \text{ και } R^*(x) = (R(x^*))^* \text{ για κάθε } x \in A.$$

Απόδειξη.

Έστω $(L_1, R_1), (L_2, R_2), (L, R) \in M_d(A)$ και $\lambda \in C$. Αρχικά οι L^*, R^* είναι καλά ορισμένες.

Έστω $x, y \in A$ τότε,

$$xR^*(y) = x(R(y^*))^* = (x^*)^*(R(y^*))^* = (R(y^*)x^*)^* =$$

$$(y^*L(x^*))^* = (L(x^*))^*(y^*)^* = L^*(x)y. \text{ Άρα } (L, R)^* (:= (R^*, L^*)) \in M_d(A).$$

Θα δείξουμε ότι $(L_1 + L_2)^* = L_1^* + L_2^*$ και $(R_1 + R_2)^* = R_1^* + R_2^*$. Για αυτό έστω

$$x \in A, \text{ τότε έχουμε } (L_1 + L_2)^*(x) = ((L_1 + L_2)(x^*))^* = (L_1(x^*) + L_2(x^*))^* =$$

$$(L_1(x^*))^* + (L_2(x^*))^* = L_1^*(x) + L_2^*(x) = (L_1^* + L_2^*)(x).$$

Άρα $(L_1 + L_2)^* = L_1^* + L_2^*$ και ομοίως $(R_1 + R_2)^* = R_1^* + R_2^*$. Οπότε

$$((L_1, R_1) + (L_2, R_2))^* = ((L_1 + L_2, R_1 + R_2))^* = ((R_1 + R_2)^*, (L_1 + L_2)^*) =$$

$$(R_1^* + R_2^*, L_1^* + L_2^*) = (R_1^*, L_1^*) + (R_2^*, L_2^*) = (L_1, R_1)^* + (L_2, R_2)^*.$$

Θα δείξουμε ότι $(\lambda L)^* = \bar{\lambda} L^*$ και $(\lambda R)^* = \bar{\lambda} R^*$. Για αυτό έστω $x \in A$, τότε έχουμε,

$$(\lambda L)^*(x) = ((\lambda L)(x^*))^* = (\lambda L(x^*))^* = \bar{\lambda} (L(x^*))^* = \bar{\lambda} L^*(x)$$

άρα $(\lambda L)^* = \bar{\lambda} L^*$ ομοίως και $(\lambda R)^* = \bar{\lambda} R^*$, οπότε

$$(\lambda(L, R))^* = (\lambda L, \lambda R)^* = ((\lambda R)^*, (\lambda L)^*) =$$

$$(\bar{\lambda} R^*, \bar{\lambda} L^*) = \bar{\lambda} (R^*, L^*) = \bar{\lambda} ((L, R))^*. \text{ Δηλαδή } (\lambda(L, R))^* = \bar{\lambda} ((L, R))^*$$

Θα δείξουμε ότι $L^{**} = L$ και $R^{**} = R$. Έστω λοιπόν $x \in A$, τότε

$$L^{**}(x) = (L^*(x^*))^* = \left(\left(L \left((x^*)^* \right) \right)^* \right)^* = (L(x^{**}))^* = L(x). \text{ Άρα } L^{**} = L \text{ και ο-}$$

μοίως $R^{**} = R$, οπότε $(L, R)^{**} = (R^*, L^*)^* = ((L^*)^*, (R^*)^*) = (L^{**}, R^{**}) = (L, R)$.

Δηλαδή $(L, R)^{**} = (L, R)$.

Θα δείξουμε ότι $(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$ και $(R_1 R_2)^* = R_1^* R_2^*$. Για αυτό έστω $x \in A$ έ-

χουμε, $(L_1 L_2)^*(x) = ((L_1 L_2)(x^*))^* = (L_1(L_2(x^*)))^* = (L_1(L_2(x^*)))^{**} =$

$$\left(L_1 \left((L_2(x^*))^* \right)^* \right)^* = (L_1(L_2^*(x)))^* = L_1^*(L_2^*(x)) = (L_1^* L_2^*)(x). \text{ Άρα}$$

$(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$ και $(R_1 R_2)^* = R_1^* R_2^*$, οπότε

$$((L_1, R_1)(L_2, R_2))^* = (L_1 L_2, R_2 R_1)^* = ((R_2 R_1)^*, (L_1 L_2)^*) = (R_2^* R_1^*, L_1^* L_2^*) =$$

$(R_2^*, L_2^*)(R_1^*, L_1^*) = (L_2, R_2)^*(L_1, R_1)^*$. Άρα $((L_1, R_1)(L_2, R_2))^* = (L_2, R_2)^*(L_1, R_1)^*$. $\square$

Τονίζουμε ότι στη σχέση (3.1), οι $*$ δεν υποδηλώνουν ενέλιξη, αλλά βεβαίως (βλ. και την προηγούμενη απόδειξη) είναι αντιγραμμικοί (:συζυγώς γραμμικοί) μορφισμοί με περίοδο δύο.

3.2.6 Πρόρισμα. Η άλγεβρα $M_{cd}(A)$ μιας τοπικά C^* -άλγεβρας A γίνεται άλγεβρα με ενέλιξη.

Απόδειξη.

Από την προηγούμενη πρόταση η $M_d(A)$ είναι ενελκτική, επειδή η A είναι ενελκτική. Επιπλέον, αν $(L, R) \in M_{cd}(A)$, τότε οι L, R είναι συνεχείς και δεδομένου ότι και η ενέλιξη της A είναι συνεχής, προκύπτει ότι και οι L^*, R^* είναι συ-

$\square$

νεχείς. Επομένως $(R^*, L^*) \in M_{cd}(A)$ δηλαδή $(L, R)^* \in M_{cd}(A)$. Άρα, ο περιορισμός της ενέλιξης της άλγεβρας $M_d(A)$ στην $M_{cd}(A)$ καθιστά την τελευταία, ενελικτική άλγεβρα.

Έστω μία τοπικά C^* -άλγεβρα $(A, (p_a)_{a \in I})$. Η άλγεβρα $M_{cd}(A)$ εφοδιάζεται με τις ακόλουθες δύο τοπολογίες.

(i) Θεωρούμε $p_a \in (p_a)_{a \in I}$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|_a : M_{cd}(A) \rightarrow \mathbf{R}$ με $\|(L, R)\|_a = \sup \{p_a(L(x)) : p_a(x) \leq 1\}$ είναι μία C^* -ημινόρμα στην $M_{cd}(A)$.

Η τοπολογία που ορίζουν οι εν λόγω ημινόρμες, στην $M_{cd}(A)$ καλείται η τοπολογία των ημινόρμων.

(ii) Για κάθε $p_a \in (p_a)_{a \in I}$ και για κάθε $x \in A$ η απεικόνιση $\|(L, R)\|_{a,x} = p_a(L(x)) + p_a(R(x))$ ορίζει στην $M_{cd}(A)$ μία ημινόρμα.

Η τοπολογία που παράγεται από τις ημινόρμες $\|\cdot\|_{a,x}$ για $a \in I$ και για $x \in A$, καλείται η αυστηρή (strict) τοπολογία στην $M_{cd}(A)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα προβολικό σύστημα $\{(A_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$ τοπολογικών αλγεβρών καλείται τέλει (perfect), αν οι περιορισμοί $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in I} A_\alpha \rightarrow A_\alpha, \alpha \in I$ στην άλγεβρα προβολικό όριο $\lim_{\leftarrow \alpha} A_\alpha$, δηλαδή οι (συνεχείς αλγεβρικοί) μορφισμοί

$f_\alpha = \pi_\alpha|_{A = \lim_{\leftarrow \alpha} A_\alpha} : A \rightarrow A_\alpha, \alpha \in I$ είναι επί απεικονίσεις. Η προκύπτουσα άλγεβρα

προβολικό όριο $A = \lim_{\leftarrow \alpha} A_\alpha$ καλείται τέλεια (τοπολογική) άλγεβρα (perfect).

(Πρβλ. [15 σελ. 199, Definition 2.7]).

Επιπλέον ισχύει ότι κάθε τοπικά m-κυρτή άλγεβρα Fréchet $(A, (p_n)_{n \in \mathbf{N}})$ δίνει ένα τέλει προβολικό σύστημα νορμαρισμένων αλγεβρών. (Πρβλ. [3, σελ. 80 Πρόταση 2.6.16])

3.2.7 Θεώρημα. Έστω A μία τοπικά C^* -άλγεβρα και $A \cong \varprojlim_{\alpha} A_{\alpha}$, $\alpha \in I$ η α -

ντίστοιχη ανάλυση Arens-Michael. Υποθέτουμε ότι οι απεικονίσεις $f_{\alpha}: A \rightarrow A_{\alpha}$ είναι όλες επί (τέλειο προβολικό σύστημα). Τότε ισχύουν τα εξής:

(1) Η $M_{cd}(A)$ με την τοπολογία ημινόρμας είναι ισόμορφη με το

$$\varprojlim_{\alpha} M_{cd}(A_{\alpha}) \text{ όπου } \alpha \in I$$

(2) Ο ισομορφισμός του (1) ταυτίζει την αυστηρή τοπολογία επί της $M_{cd}(A)$ με την τοπολογία επί του $\varprojlim_{\alpha} M_{cd}(A_{\alpha})$ που προκύπτει από τις αυστηρές τοπολογίες των παραγόντων $M_{cd}(A_{\alpha})$, $\alpha \in I$.

(3) Η $M_{cd}(A)$ είναι μία τοπικά C^* -άλγεβρα με την τοπολογία της ημινόρμας.

(4) Η $M_{cd}(A)$ είναι πλήρης με την αυστηρή τοπολογία.

(5) Η απεικόνιση $x \mapsto (L_x, R_x)$ είναι ένας ομοιομορφισμός της A επί ενός κλειστού (ως προς την τοπολογία ημινόρμας) ιδεώδους της $M_{cd}(A)$, όπου $L_x(y) = xy$, $R_x(y) = yx$ με $x, y \in A$.

(6) Η εικόνα της A με την απεικόνιση του (5) είναι πυκνό σύνολο στην $M_{cd}(A)$ για την αυστηρή τοπολογία.

Απόδειξη.

(1) Έστω $N_{\alpha} = \ker p_{\alpha}$, $\alpha \in I$ και $A_{\alpha} = \widehat{A/N_{\alpha}}$ η πλήρωση της A/N_{α} .

Από το ότι η $f_{\alpha}: A \rightarrow A_{\alpha}$ είναι επί για όλα τα $\alpha \in I$, οι απεικονίσεις $f_{\alpha\beta}: A_{\beta} \rightarrow A_{\alpha}$ είναι όλες επί (εφόσον $f_{\alpha} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta}$ και A_{α} είναι C^* -άλγεβρα).

Ως εκ τούτου έχουμε επεκτάσεις σε επιμορφισμούς μεταξύ των αντίστοιχων πολλαπλασιαστών αλγεβρών $(M_{cd}(A_{\beta}) \rightarrow M_{cd}(A_{\alpha}))$ που ορίζονται όπως στο θεώρημα 4.2 του [4]. Δηλαδή η $F_{\alpha\beta}: M_{cd}(A_{\beta}) \rightarrow M_{cd}(A_{\alpha})$ είναι επιμορφισμός για κάθε $\alpha, \beta \in I$ με $\alpha \leq \beta$ και επομένως ορίζεται το $\varprojlim_{\alpha} M_{cd}(A_{\alpha})$ όπου $\alpha \in I$.

Είναι σαφές ότι κάθε στοιχείο του $\varprojlim_{\alpha} M_{cd}(A_{\alpha})$ ορίζει έναν πολλαπλασιαστική

της A , και ότι η προκύπτουσα απεικόνιση στο $M_{cd}(A)$ είναι ένας ομομορφισμός επί του συνόλου των στοιχείων $(L, R) \in M_{cd}(A)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$\|(L, R)\|_{\alpha} < \infty$ για κάθε $\alpha \in I$. Πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε ότι αν

$(L, R) \in M_{cd}(A)$ τότε $\|(L, R)\|_{\alpha} < \infty$ δηλαδή $\sup\{p_{\alpha}(L(x)) : p_{\alpha}(x) \leq 1\} < \infty$.

Αυτό θα ακολουθήσει αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι το (L, R) ορίζει ένα πολλαπλασιαστική στην A_{α} , δεδομένου ότι οι πολλαπλασιαστές των C^* -άλγεβρών είναι αυτομάτως φραγμένοι (πρβλ. [33, 3.12.2]).

Για τούτο έστω $x \in \ker(p_{\alpha})$ θα δείξουμε ότι $L(x), R(x) \in \ker(p_{\alpha})$.

Δεδομένου ότι το $\ker(p_{\alpha})$ είναι κλειστή υπάλγεβρα της A , θα είναι μία τοπικά C^* -άλγεβρα και συνεπώς έχει μία προσεγγιστική μονάδα $\{e_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Επιπλέον, εφόσον η A είναι μία τοπικά C^* -άλγεβρα θα έχει μία προσεγγιστική μονάδα και άρα, θα είναι γνήσια, συνεπώς για το $(L, R) \in M_{cd}(A)$ προκύπτει ότι ο L είναι αριστερός πολλαπλασιαστής της A και ο R είναι δεξιός.

Τότε $R(x) = \lim_{\lambda} R(e_{\lambda}x) = \lim_{\lambda} e_{\lambda}R(x) \in \ker(p_{\alpha})$ αφού $\{e_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda} \in \ker p_{\alpha}$ και R συνεχής. Ας μη ξεχνάμε βέβαια πώς το $\ker(p_{\alpha})$ είναι ιδεώδες και κλειστή υπάλγεβρα της A . Ομοίως $L(x) \in \ker(p_{\alpha})$.

Επομένως (L, R) ορίζει ένα στοιχείο της $M_{cd}(A_{\alpha})$.

(2) Για το ίδιο λόγο όπως και στο (1), αρκεί να λάβει κανείς υπόψη το συγκεκριμένο αντίστροφο σύστημα $(A_{\alpha}, f_{\alpha\beta})_{\alpha \in I}$. (Υπενθυμίζουμε ότι: Αν $B \rightarrow C$ είναι μία επί απεικόνιση μεταξύ C^* -άλγεβρών, τότε η αντίστοιχη επέκταση $M_{cd}(B) \rightarrow M_{cd}(C)$ είναι συνεχής ως προς την αυστηρή τοπολογία.) Οπότε το α -ποδεικτέο είναι πλέον άμεσο.

(3) Προκύπτει άμεσα από το (1).

(4) Η άλγεβρα πολλαπλασιαστών $M_{cd}(A_\alpha)$ είναι πλήρης, ως προς την αυστηρή τοπολογία (πρβλ. [8, σελ. 83, Proposition 3.6]). Εξάλλου, κάθε αντίστροφο όριο πλήρων χώρων είναι πλήρης χώρος, και άρα ο ισχυρισμός προκύπτει από το (2).

(5) Ισχυρισμός: $\|(L_x, R_x)\|_\alpha = p_\alpha(x)$ για κάθε $x \in A$ και $\alpha \in I$.

Απόδειξη του ισχυρισμού:

Έστω $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ μία προσεγγιστική μονάδα για την A (τέτοια υπάρχει αφού η A είναι τοπικά C^* -άλγεβρα). Έστω $x \in A$ και $\alpha \in I$. Για κάθε $y \in A$ με

$$p_\alpha(y) \leq 1 \text{ έχουμε } p_\alpha(xy) \leq p_\alpha(x)p_\alpha(y) \leq p_\alpha(x) \cdot 1 = p_\alpha(x). \text{ Άρα}$$

$$\|(L_x, R_x)\|_\alpha = \sup\{p_\alpha(L_x(y)) : p_\alpha(y) \leq 1\} = \sup\{p_\alpha(xy) : p_\alpha(y) \leq 1\} \leq p_\alpha(x)$$

δηλαδή $\|(L_x, R_x)\|_\alpha \leq p_\alpha(x)$ (1). Από την άλλη επειδή $\|e_\lambda\|_\infty \leq 1$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$

και για κάθε $x \in A$ είναι $e_\lambda x \rightarrow x$ και $xe_\lambda \rightarrow x$, έχουμε

$$p_\alpha(x) = p_\alpha\left(\lim_\lambda e_\lambda x\right) = \lim_\lambda p_\alpha(e_\lambda x) \leq \sup\{p_\alpha(e_\lambda x) : \lambda \in \Lambda\} \leq \sup\{p_\alpha(xy) : p_\alpha(y) \leq 1\}$$

επειδή $p_\alpha(e_\lambda) \leq \|e_\lambda\|_\infty \leq 1$ και εφόσον $\|(L_x, R_x)\|_\alpha = \sup\{p_\alpha(xy) : p_\alpha(y) \leq 1\}$ έπεται ότι $p_\alpha(x) \leq \|(L_x, R_x)\|_\alpha$ (2). Από (1) και (2) θα είναι $p_\alpha(x) = \|(L_x, R_x)\|_\alpha$.

και το ζητούμενο προκύπτει πλέον άμεσα.

(6) Έστω $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ η προσεγγιστική μονάδα για την A (βλ. και την απόδειξη του

(5)) και έστω $(L, R) \in M_{cd}(A)$.

Ισχυρισμός $(L_{R(e_\lambda)}, R_{R(e_\lambda)}) \xrightarrow{\lambda} (L, R)$ ως προς την αυστηρή τοπολογία.

Απόδειξη του ισχυρισμού:

Από τις αλγεβρικές ιδιότητες των πολλαπλασιαστών και τον ορισμό της $\|\cdot\|_{\alpha, x}$, έχουμε:

$$\|(L, R) - (L_{R(e_\lambda)}, R_{R(e_\lambda)})\|_{\alpha, x} =$$

$$\begin{aligned}
& p_\alpha \left[\left(L - L_{R(e_\lambda)} \right) (x) \right] + p_\alpha \left[\left(R - R_{R(e_\lambda)} \right) (x) \right] = \\
& p_\alpha \left(L(x) - L_{R(e_\lambda)}(x) \right) + p_\alpha \left(R(x) - R_{R(e_\lambda)}(x) \right) = \\
& p_\alpha \left(L(x) - R(e_\lambda)x \right) + p_\alpha \left(R(x) - xR(e_\lambda) \right) = \\
& p_\alpha \left(L(x) - e_\lambda L(x) \right) + p_\alpha \left(R(x) - R(xe_\lambda) \right)
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι $xL(y) = R(x)y$ για κάθε $x, y \in A$.

$$\text{Άρα } \left\| (L, R) - (L_{R(e_\lambda)}, R_{R(e_\lambda)}) \right\|_{\alpha, x} = p_\alpha \left(L(x) - e_\lambda L(x) \right) + p_\alpha \left(R(x) - R(xe_\lambda) \right).$$

Από το γεγονός ότι το $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ είναι μία προσεγγιστική μονάδα και οι p_α, R είναι συνεχείς, προκύπτει και οι δύο όροι στο τελευταίο μέλος συγκλίνουν στο μηδέν.

Δηλαδή $\left\| (L, R) - (L_{R(e_\lambda)}, R_{R(e_\lambda)}) \right\|_{\alpha, x} \xrightarrow{\lambda} 0$ για κάθε $\alpha \in I$ και $x \in A$. Επομένως $(L_{R(e_\lambda)}, R_{R(e_\lambda)}) \xrightarrow{\lambda} (L, R)$, που σημαίνει ότι η εικόνα του A μέσω της απεικόνισης $x \mapsto (L_x, R_x)$, είναι πυκνό στην $M_{cd}(A)$ ως προς την αυστηρή τοπολογία. $\square$

Παρακάτω η πρόταση 3.2.8 και το θεώρημα 3.2.9 θα χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη του θεωρήματος 3.2.10

3.2.8 Πρόταση. Αν $(A, (p_a)_{a \in I})$ τοπικά C^* -άλγεβρα τότε η νορμαρισμένη άλγεβρα A_a είναι πλήρης για κάθε $a \in I$.

Απόδειξη.

Πρβλ [5, σελ 32. Theorem 2.4] $\square$

Στο επόμενο θεώρημα με A^* συμβολίζουμε τον δυϊκό χώρο της άλγεβρας A , δηλαδή $A^* = \{f : A \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ γραμμική}\}$.

3.2.9 Θεώρημα. Έστω A μία C^* -άλγεβρα και έστω A^* η δυική της A . Τότε

$$A^* = \{a \cdot f : a \in A \text{ και } f \in A^*\} = \{f \cdot a : a \in A \text{ και } f \in A^*\} \text{ όπου}$$

$$(a \cdot f)(b) = f(ba) \text{ και } (f \cdot a)(b) = f(ab) \text{ για κάθε } b \in A.$$

Απόδειξη.

Πρβλ. [37, σελ. 634 Theorem 2.1]. □

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι χρήσιμο στα επόμενα για επεκτάσεις συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών σε συνεχή συναρτησοειδή πάνω στην άλγεβρα των συνεχών διπλών πολλαπλασιαστών.

3.2.10 Θεώρημα. Έστω A μία τοπικά C^* -άλγεβρα και $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ μία συνεχής γραμμική απεικόνιση. Τότε η f είναι συνεχής ως προς την αυστηρή τοπολογία επί της A .

Απόδειξη.

Επειδή η f είναι συνεχής, υπάρχει $M > 0$ και $a \in I$, έτσι ώστε

$$|f(x)| \leq M p_a(x) \text{ για κάθε } x \in A. \text{ Αλλά από την πρόταση 3.2.8 η}$$

$A_a (\equiv A / \ker p_a)$ είναι μία C^* -άλγεβρα ως προς τη νόρμα $\dot{p}_a$ που ορίζεται από τη

σχέση $\dot{p}_a(x + \ker p_a) = p_a(x)$. Εξάλλου υπάρχει μοναδική συνεχής γραμμική α-

πεικόνιση f_{p_a} πάνω στη C^* -άλγεβρα A_a έτσι ώστε $f = f_{p_a} \circ \pi_a$ όπου π_a είναι η

κανονική απεικόνιση πηλίκου από την A στην A_a . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα

3.2.9, υπάρχουν $\pi_a(x), \pi_a(y) \in A_a$ και συνεχείς γραμμικές απεικονίσεις ν_{p_a} και

$$\mu_{p_a} (: A_a \rightarrow \mathbb{C}) \text{ (αντίστοιχα), έτσι ώστε } f_{p_a}(\cdot) = \nu_{p_a}(\pi_a(x) \cdot) = \mu_{p_a}(\cdot \pi_a(y)).$$

Τότε

$$f(z) = (f_{p_a} \circ \pi_a)(z) = f_{p_a}(z + \ker p_a) = \nu_{p_a}(\pi_a(x)(z + \ker p_a)) =$$

$$\nu_{p_a}((x + \ker p_a)(z + \ker p_a)) = \nu_{p_a}(xz + \ker p_a) = \nu_{p_a}(\pi_a(xz)) \text{ και ανάλογα}$$

$$f(z) = \mu_{p_a}(\pi_a(z)) \text{ για κάθε } z \in A.$$

Έστω $\nu = \nu_{p_a} \circ \pi_a$ και $\mu = \mu_{p_a} \circ \pi_a$ είναι φανερό ότι οι ν και μ είναι συνεχείς γραμμικές απεικονίσεις στην A και $f(\cdot) = \nu(x \cdot) = \mu(\cdot y)$, από αυτό προκύπτει ότι η f είναι συνεχής ως προς την αυστηρή τοπολογία περιορισμένη στην A . $\square$

3.2.11 Πρόρισμα. Κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές πάνω σε μία τοπικά C^* -άλγεβρα A επεκτείνεται μονοσήμαντα σε ένα γραμμικό συναρτησοειδές επί της $M_{cd}(A)$, το οποίο είναι συνεχές ως προς την αυστηρή τοπολογία.

Απόδειξη.

Έστω $f : A \rightarrow C$ ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές.

Θεωρούμε την απεικόνιση $i : A \rightarrow M_{cd}(A)$ με $i(a) = (L_a, R_a)$, $a \in A$ και την απεικόνιση $F : i(A) \rightarrow C$ με $F((L_a, R_a)) = f(a)$ δηλαδή $F \circ i = f$. Άρα από το θεώρημα 3.2.10, η F είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές επί της $i(A)$, ως προς την αυστηρή τοπολογία. Επειδή το $i(A)$ είναι πυκνό στην $M_{cd}(A)$, υπάρχει μοναδικό συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{F} : M_{cd}(A) \rightarrow C$ με $\tilde{F} / i(A) = F$. $\square$

3.2.12 Ορισμός. Μία τοπικά C^* -άλγεβρα θα ονομάζεται *ισχυρά φασματικά φραγμένη* (*s.s.b strong spectrally bounded*) τοπικά C^* -άλγεβρα εάν $b(A) = A$ ως σύνολα. (όπου $b(A) = \{x \in A : \|x\|_\infty = \sup\{p_a(x) : a \in I\} < \infty\}$ (πρβλ. [10 Definition 7.3])).

Παράδειγμα (Weidner) ισχυρά φασματικά φραγμένης τοπικά C^* -άλγεβρας. (Πρβλ. [35, Exercises (Weidner) 2.11]).

Έστω F το σύνολο των αριθμήσιμων κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$ όπου το καθένα έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων συσσώρευσης (cluster point). Το $C([0,1])$ με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης (uniform convergence) για τα μέλη (στοιχεία) του F είναι μία τοπικά C^* -άλγεβρα. Είναι φανερό ότι

$b(C([0,1])) = C([0,1])$ συνολοθεωρητικά. Επιπλέον, η ταυτοτική απεικόνιση από την τοπικά C^* -άλγεβρα $C([0,1])$ στην C^* -άλγεβρα $C([0,1])$ (με τη συνήθη τοπολογία) είναι ένας ασυνεχής επί “1-1” *-μορφισμός από μία τοπικά C^* -άλγεβρα σε μία C^* -άλγεβρα

Αποδεικνύεται παρακάτω ότι η ιδιότητα “ισχυρά φασματικά φραγμένη” κληρονομείται στην άλγεβρα των συνεχών διπλών πολλαπλασιαστών (βλ. πόρισμα 3.2.15).

3.2.13 Πρόταση. Κάθε διπλός πολλαπλασιαστής μιας $s.s.b$ τοπικά C^* -άλγεβρας A είναι συνεχής. Δηλαδή $M_d(A) = M_{cd}(A)$.

Απόδειξη.

Έστω $(L, R) \in M_d(A)$ δηλαδή $L, R : A \rightarrow A$ γραμμικές απεικονίσεις έτσι ώστε $xL(y) = R(x)y$ για κάθε $x, y \in A$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η A είναι $s.s.b$ τοπικά C^* -άλγεβρα συμπεραίνουμε ότι $(L, R) \in M_d(b(A))$ εφόσον $b(A) = A$.

Έστω $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subseteq A$ δίκτυο με $p_a(x_\delta) \rightarrow 0$ για κάθε (p_a) ($a \in I$) και $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq b(A)$ μία προσεγγιστική μονάδα για την $b(A)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} p_a(L(x_\delta)) &= p_a(L(x_\delta - e_\lambda x_\delta + e_\lambda x_\delta)) = \\ p_a(L(x_\delta - e_\lambda x_\delta) + L(e_\lambda x_\delta)) &\leq \\ \leq p_a(L(x_\delta - e_\lambda x_\delta)) + p_a(L(e_\lambda x_\delta)) &= \\ p_a(L(x_\delta - e_\lambda x_\delta)) + p_a(L(e_\lambda)x_\delta) &\leq \\ \|L(x_\delta - e_\lambda x_\delta)\|_\infty + \|L(e_\lambda)\|_\infty p_a(x_\delta). \end{aligned}$$

Αλλά κάθε αριστερός (αντίστοιχα δεξιός) πολλαπλασιαστής επί μιας C^* -άλγεβρας είναι φραγμένος. (Βλ. [33, σελ. 79, Lemma 3.12.2]). Οπότε έχουμε

$$p_a(L(x_\delta)) \leq \|L(x_\delta - e_\lambda x_\delta)\|_\infty + \|L(e_\lambda)\|_\infty p_a(x_\delta) \leq M \|x_\delta - e_\lambda x_\delta\|_\infty + Mp_a(x_\delta) \text{ για}$$

κάθε $\delta \in \Delta$, $\lambda \in \Lambda$ και για κάθε ημινόρμα p_a ($a \in I$). Επομένως η απεικόνιση L είναι συνεχής

Κατά τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι και η απεικόνιση R είναι συνεχής. $\square$

(Πρβλ. [24, Theorem 3.5]).

3.2.14 Θεώρημα. Έστω A μία τοπικά C^* -άλγεβρα. Τότε οι C^* -άλγεβρες $b(M_{cd}(A))$ και $M_{cd}(b(A))$ είναι ισομορφικές.

Απόδειξη.

Έστω $(L, R) \in b(M_{cd}(A))$ θα δείξουμε ότι $(L|_{b(A)}, R|_{b(A)}) \in M_{cd}(b(A))$. Για αυτό είναι αρκετό να δείξουμε ότι η $b(A)$ είναι L και R -αναλλοίωτοι. Δηλαδή $L(b(A)) \subseteq b(A)$ και $R(b(A)) \subseteq b(A)$.

Έστω $x \in b(A)$ τότε έχουμε ότι

$$\sup \{ p_a(L(x)) : a \in I \} = \|x\|_\infty \sup \left\{ p_a \left(L \left(\frac{x}{\|x\|_\infty} \right) \right) : a \in I \right\} \leq$$

$$\|x\|_\infty \sup \{ \|(L, R)\|_a : a \in I \} < \infty \text{ και ως εκ' τούτου } L(b(A)) \subseteq b(A). \text{ Κατά τον}$$

ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $R(b(A)) \subseteq b(A)$.

Έτσι, η απεικόνιση $\Psi : b(M_{cd}(A)) \rightarrow M_{cd}(b(A))$ με

$\Psi((L, R)) = (L|_{b(A)}, R|_{b(A)})$ είναι καλά ορισμένη. Είναι εύκολο να εξακριβώσουμε ότι η Ψ είναι ένας μονομορφισμός $*$ -αλγεβρών. (Βλ. και Πρόταση 3.2.5).

Επιπλέον, η Ψ είναι επί. Γι' αυτό, είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάθε $(L, R) \in M_{cd}(b(A))$ υπάρχει μοναδική $(\tilde{L}, \tilde{R}) \in b(M_{cd}(A))$ έτσι ώστε

$$(\tilde{L}|_{b(A)}, \tilde{R}|_{b(A)}) = (L, R).$$

Από την πρόταση 3.2.13, προκύπτει ότι οι απεικονίσεις L και R είναι συνεχείς ως προς την τοπολογία που ορίζεται από τις C^* -ημινόρμες $p_a|_b(A)$, $a \in I$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $b(A)$ είναι πυκνό στην A , συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδική συνεχής γραμμική απεικόνιση $\tilde{L}: A \rightarrow A$, αντίστοιχα $\tilde{R}: A \rightarrow A$, έτσι ώστε $\tilde{L}|_{b(A)} = L$, αντίστοιχα $\tilde{R}|_{b(A)} = R$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι $(\tilde{L}, \tilde{R}) \in d(M_{cd}(A))$. Πράγματι, έστω p_a ($a \in I$) μία ημινόρμα της A , $x \in A$, $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq b(A)$ μία προσεγγιστική μονάδα για την A και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ έτσι ώστε

$$p_a(\tilde{L}(x)) \leq p_a(\tilde{L}(x - e_{\lambda_0})) + p_a(\tilde{L}(e_{\lambda_0})x) \leq \varepsilon + p_a(L(e_{\lambda_0}))p_a(x) \leq \varepsilon + \|L(e_{\lambda_0})\|_{\infty} p_a(x).$$

Έτσι $\|(\tilde{L}, \tilde{R})\|_{p_a} \leq \|(L, R)\|$ και συνεπώς $(\tilde{L}, \tilde{R}) \in b(M_{cd}(A))$. □

3.2.15 Πρόρισμα. Έστω A μία $s.s.b$ τοπικά C^* -άλγεβρα. Τότε η $M_{cd}(A)$ είναι επίσης μία $s.s.b$ τοπικά C^* -άλγεβρα.

Απόδειξη.

Επειδή η A είναι μία $s.s.b$ τοπικά C^* -άλγεβρα θα ισχύει $b(A) = A$ επομένως και $M_{cd}(b(A)) = M_{cd}(A)$. Εξάλλου $M_{cd}(b(A)) = b(M_{cd}(A))$

Οπότε σε συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $b(M_{cd}(A)) = M_{cd}(A)$ που σημαίνει ότι η $M_{cd}(A)$ είναι μία $s.s.b$ τοπικά C^* -άλγεβρα. □

3.2.16 Θεώρημα. Έστω A μία $s.s.b$ τοπικά C^* -άλγεβρα με μια αριθμήσιμη προσεγγιστική μονάδα. Αν B είναι μία τοπικά C^* -άλγεβρα και αν $\Phi: A \rightarrow B$ ένας ισομορφισμός αλγεβρών. Τότε ο Φ επεκτείνεται μονοσήμαντα σε ένα “1-1” επιμορφισμό μεταξύ των τοπικά C^* -αλγεβρών $M_{cd}(A)$ και $M_{cd}(B)$.

Απόδειξη.

Από το Πόρισμα 1.13 στο [35] συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $\Phi: b(A) \rightarrow b(B)$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ C^* -άλγεβρών.

Επειδή η A είναι μία $s.s.b$ τοπικά C^* -άλγεβρα και η Φ είναι επί, έχουμε ότι $B = \Phi(A) = \Phi(b(A)) \subseteq b(B) \subseteq B$. Συνεπώς $b(B) = B$ και επομένως και η B είναι μία $s.s.b$ τοπικά C^* -άλγεβρα. Τελικά ο $\Phi: b(A) \rightarrow b(B)$ είναι ένας ισομορφισμός.

Επειδή η $b(A)$ έχει, μια αριθμήσιμη προσεγγιστική μονάδα, από το θεώρημα 10 στο [34] υπάρχει μοναδικός επιμορφισμός C^* -άλγεβρών

$$\bar{\Phi}: M_{cd}(b(A)) \rightarrow M_{cd}(b(B)) \text{ έτσι ώστε } \bar{\Phi}|_{b(A)} = \Phi.$$

επίσης, υπάρχει μοναδικός μορφισμός τοπικά C^* -άλγεβρών

$$\tilde{\Phi}: M_{cd}(A) \rightarrow M_{cd}(B) \text{ έτσι ώστε } \tilde{\Phi}|_A = \Phi. \text{ Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.5}$$

και το Πόρισμα 1.13 από το [35], συμπεραίνουμε ότι η

$$\tilde{\Phi}: M_{cd}(b(A)) \rightarrow M_{cd}(b(B)) \text{ είναι ένας μορφισμός μεταξύ τοπικά } C^*\text{-άλγεβρών}$$

και $\tilde{\Phi}|_{b(A)} = \Phi$. Αλλά (Πόρισμα 3.2.15 και Θεώρημα 3.2.14),

$$M_{cd}(A) = b(M_{cd}(A)) = M_{cd}(b(A)) \text{ και}$$

$$M_{cd}(B) = b(M_{cd}(B)) = M_{cd}(b(B)) \text{ ως } \alpha\lambda\gamma\epsilon\beta\rho\epsilon\varsigma \text{ και έτσι } \tilde{\Phi} = \bar{\Phi}. \quad \square$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε μία τοπικά m -κυρτή $*$ -άλγεβρα A με συνεχή ενέλιξη, η οποία είναι τέλεια τοπολογική άλγεβρα και περιγράφουμε την άλγεβρα των πολλαπλασιαστών (Θεώρημα 4.2.1) στο πλαίσιο μιας ασθενέστερης τοπολογίας, ως προς την οποία, η A είναι μία τοπικά C^* -άλγεβρα. Το ίδιο εφαρμόζεται στην περίπτωση ορισμένων τοπικά κυρτών H^* -αλγεβρών. (Πόρισμα 4.2.2).

4.1 Πολλαπλασιαστές τοπικά κυρτών $*$ -αλγεβρών

Έστω A μία άλγεβρα. Αν $(\emptyset \neq) S \subseteq A$ τότε συμβολίζουμε με

$\mathcal{A}_l(S) = \{x \in A : xs = 0 \text{ για κάθε } s \in S\}$ τον αριστερό μηδενιστή (annihilator) του

S και αντίστοιχα με $\mathcal{A}_r(S) = \{x \in A : sx = 0 \text{ για κάθε } s \in S\}$ τον δεξιό μηδενιστή του S . Το $\mathcal{A}_l(S)$ (αντ. το $\mathcal{A}_r(S)$) είναι αριστερό (αντ. δεξιό) ιδεώδες της A .

Επιπλέον, το $\mathcal{A}_l(S)$ (αντ. το $\mathcal{A}_r(S)$) είναι δίπλευρο ιδεώδες αν το S είναι αριστερό (αντ. δεξιό) ιδεώδες της A .

4.1.1 Ορισμός. Μία άλγεβρα A καλείται αριστερά (αντ. δεξιά) προμηδενιστική αν $\mathcal{A}_l(A) = \{0\}$ (αντ. $\mathcal{A}_r(A) = \{0\}$). Αν $\mathcal{A}_l(A) = \mathcal{A}_r(A) = \{0\}$, τότε η A καλείται προμηδενιστική (βλ. [12, σελ. 149]).

Ένα αριστερό (αντ. δεξιό) ιδεώδες I μίας άλγεβρας A καλείται ουσιώδες (essential) στην A αν $I \cap J \neq \{0\}$ για κάθε J μη μηδενικό αριστερό (αντ. δεξιό) ιδεώδες της A .

Στο κεφάλαιο αυτό μία τοπικά m -κυρτή C^* -άλγεβρα θα καλείται και τοπικά προ- C^* -άλγεβρα.

Μία τοπικά m -κυρτή H^* -άλγεβρα είναι μία άλγεβρα A εφοδιασμένη με μία οικογένεια $(p_a)_{a \in I}$ από ημινόρμες Ambrose, με την έννοια ότι κάθε ημινόρμα p_a , $a \in I$ προκύπτει από ένα ψευδοεσωτερικό γινόμενο $<, >_a$, έτσι ώστε η επαγόμενη τοπολογία κάνει την A , μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Επιπλέον, ικανοποι-

ούνται οι ακόλουθες συνθήκες. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει $x^* \in A$ τέτοιο ώστε $\langle xy, z \rangle_a = \langle y, x^*z \rangle_a$ και $\langle yx, z \rangle_a = \langle y, zx^* \rangle_a$ για κάθε $y, z \in A$ και $a \in I$. Το x^* δεν είναι απαραίτητα μοναδικό. Στην περίπτωση που η άλγεβρα είναι γνήσια (δηλαδή αν $Ax = \{0\}$, $x \in A$ τότε $x = 0$) τότε το x^* είναι μοναδικό και η απεικόνιση $*$: $A \rightarrow A : x \mapsto x^*$ είναι μία ενέλιξη επί της A (βλ. [14, σελ. 451, Definition 1.1 και σελ. 452, Theorem 1.3]).

Για το κεφάλαιο αυτό θεωρούμε τα εξής:

Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και

$$\rho_a : A \rightarrow A / \ker(p_a) \equiv A_a : x \mapsto \rho_a(x) := x + \ker(p_a) \equiv p_a(x) \equiv x_a, a \in I$$

οι αντίστοιχες απεικονίσεις πηλίκο. Τότε η $\|x_a\|_a := p_a(x)$, $x \in A$, $a \in I$ ορίζει επί της A_a μία νόρμα, έτσι ώστε η A_a να είναι μία νορμαρισμένη άλγεβρα και οι απεικονίσεις ρ_a , $a \in I$, είναι συνεχείς. Με $\widetilde{A}_a$, $a \in I$, συμβολίζουμε την πλήρωση της A_a (ως προς την τοπολογία που ορίζει η $\|\cdot\|_a$). Το σύνολο I είναι εφοδιασμένο με την μερική διάταξη " $\leq$ " που ορίζεται ως εξής: $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow p_\alpha(x) \leq p_\beta(x)$ για κάθε $x \in A$. Έτσι $\ker(p_\beta) \subseteq \ker(p_\alpha)$. Επομένως οι απεικονίσεις

$f_{\alpha\beta} : A_\beta \rightarrow A_\alpha : x_\beta \mapsto f_{\alpha\beta}(x_\beta) := x_\alpha$, $\alpha \leq \beta$ ορίζονται και είναι συνεχείς επιμορφισμοί. Επιπλέον η $f_{\alpha\beta}$ επεκτείνεται σε έναν συνεχή μορφισμό

$$\bar{f}_{\alpha\beta} : \widetilde{A}_\beta \rightarrow \widetilde{A}_\alpha, \alpha \leq \beta. \text{ Έτσι τα } (A_\alpha, f_{\alpha\beta}), (\widetilde{A}_\alpha, \bar{f}_{\alpha\beta}), \alpha, \beta \in I \text{ με } \alpha \leq \beta \text{ είναι}$$

προβολικά συστήματα νορμαρισμένων (αντ. Banach) αλγεβρών, έτσι ώστε

$$A \cong \lim_{\leftarrow \alpha} A_\alpha \cong \lim_{\leftarrow \alpha} \widetilde{A}_\alpha \text{ (ανάλυση Arens-Michael) ως προς αλγεβρικούς-τοπολογι-}$$

κούς ισομορφισμούς (βλ. Θεώρημα 1.3.13).

Οι πολλαπλασιαστές ως απλή αλγεβρική έννοια

Με $L(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των γραμμικών τελεστών (απεικονίσεων) επί της άλγεβρας A .

Για το παρόν κεφάλαιο μια απεικόνιση $T : A \rightarrow A$ θα λέγεται *δίπλευρος πολλαπλασιαστής* (ή απλά *πολλαπλασιαστής*) επί της A , αν είναι αριστερός και δεξιός πολλαπλασιαστής επί της A . Δηλαδή αν $T(xy) = T(x)y$ και $T(xy) = xT(y)$ για κάθε $x, y \in A$ ή $xT(y) = T(xy) = T(x)y$ για κάθε $x, y \in A$.

Γνωρίζουμε ότι, αν η A είναι μία γνήσια άλγεβρα, τότε κάθε δίπλευρος πολλαπλασιαστής της είναι μία γραμμική απεικόνιση (βλ. και το Λήμμα 2.1.3).

Υπενθυμίζουμε ότι, με $M_l(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο των αριστερών πολλαπλασιαστών, με $M_r(A)$ το σύνολο των δεξιών πολλαπλασιαστών και με $M(A)$ το σύνολο των (δίπλευρων) πολλαπλασιαστών επί της A . Επομένως θα είναι $M(A) = M_l(A) \cap M_r(A)$.

Αν η άλγεβρα A είναι προμηδενιστική, τότε οι $M_l(A)$, $M_r(A)$ και $M(A)$ είναι υπάλγεβρες της $L(A)$ (βλ. Προτάσεις 2.1.4, 2.1.5 και Πόρισμα 2.1.6).

Τώρα για κάθε $x \in A$, ο τελεστής l_x επί της A που δίνεται από τη σχέση $l_x(y) = xy$, $y \in A$, είναι αριστερός πολλαπλασιαστής της A . *Πράγματι*. Για κάθε $y, z \in A$, $l_x(yz) = x(yz) = (xy)z = (l_x y)z$ και έτσι $l_x \in M_l(A)$. Ανάλογα, ο τελεστής r_x επί της A που δίνεται από τη σχέση $r_x(y) = yx$, $y \in A$, είναι δεξιός πολλαπλασιαστής της A .

4.1.2 Πρόταση. Έστω A μία προμηδενιστική άλγεβρα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα: i) Η απεικόνιση $L : A \rightarrow M_l(A)$ όπου $x \mapsto l_x$ είναι ένας αλγεβρικός μονομορφισμός που εμφυτεύει την A σε μία υπάλγεβρα της $M_l(A)$.

ii) Η A είναι ένα αριστερό ιδεώδες της άλγεβρας $M_l(A)$.

iii) Αν F είναι μία υπάλγεβρα της $M_l(A)$, τέτοια ώστε $A \subset F$, τότε

$I \cap A \neq \{0\}$, για κάθε μη μηδενικό δεξιό ιδεώδες I της F .

Απόδειξη.

i) Έστω $x, y \in A$ και $\lambda \in \mathbf{C}$ τότε, για κάθε $z \in A$ έχουμε:

$$l_{(x+\lambda y)}(z) = (x + \lambda y)z = xz + \lambda(yz) = l_x(z) + \lambda l_y(z) = (l_x + \lambda l_y)(z).$$

Δηλαδή $l_{(x+\lambda y)} = l_x + \lambda l_y$ που σημαίνει ότι $L(x + \lambda y) = L(x) + \lambda L(y)$

$$l_{(xy)}(z) = (xy)z = x(yz) = l_x(yz) = l_x(l_y(z)) = (l_x l_y)(z).$$

Δηλαδή $l_{(xy)} = l_x l_y$ που σημαίνει ότι $L(xy) = L(x)L(y)$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η L είναι ένας ομομορφισμός (άλγεβρων).

Αν $L(x) = 0$ τότε $l_x(y) = 0$ για κάθε $y \in A$, δηλαδή $xA = \{0\}$ και επειδή η άλγεβρα A είναι προμηδενιστική προκύπτει ότι $x = 0$ άρα $\ker(L) = \{0\}$ οπότε η L είναι τελικά, μονομορφισμός.

ii) Από την ταύτιση $x \equiv l_x$ αρκεί να αποδείξουμε μόνο ότι $Tl_x \in M_l(A)$ για κάθε $T \in M_l(A)$. Πράγματι: για κάθε $y \in A$ έχουμε

$$(Tl_x)(y) = T(l_x(y)) = T(xy) = T(x)y = l_{T(x)}(y) \text{ άρα } Tl_x = l_{T(x)} \in M_l(A).$$

iii) Από την υπόθεση έχουμε $\{l_x : x \in A\} \subset I$ (από την ταύτιση $x \equiv l_x$). Έστω ακόμα I μη μηδενικό δεξιό ιδεώδες της F . Έχουμε $IF \subset I$ άρα και $I\{l_x : x \in A\} \subset I$. Εφόσον $I \neq \{0\}$, υπάρχει $T \in I$ και $x \in A$ ώστε $T(x) \neq 0$, τότε $Tl_x = l_{T(x)} \in I$ και $0 \neq l_{T(x)} \in \{l_x : x \in A\}$ επειδή $T(x) \neq 0$. Επομένως $I \cap A \neq \{0\}$. $\square$

Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα προκύπτει και για τους δεξιούς πολλαπλασιαστές. Όμως, το ii) για δίπλευρους πολλαπλασιαστές, είναι κάπως ισχυρότερο. Συγκεκριμένα, η άλγεβρα A μπορεί να εμφυτευτεί, ως ένα δίπλευρο ιδεώδες στην $M(A)$. Έτσι έχουμε.

4.1.3 Πρόρισμα. Κάθε προμηδενιστική άλγεβρα A είναι ένα ουσιώδες δίπλευρο ιδεώδες της άλγεβρας $M(A)$ των πολλαπλασιαστών της.

Απόδειξη.

Η $M(A)$ είναι υπάλγεβρα της $M_l(A)$ και της $M_r(A)$. Η άλγεβρα A ταυτίζεται με ένα αριστερό ιδεώδες της $M_l(A)$, και άρα $A \subseteq M_l(A)$.

Επίσης η A ταυτίζεται με ένα δεξιό ιδεώδες της $M_r(A)$, οπότε $A \subseteq M_r(A)$. Επομένως $A \subseteq M_l(A) \cap M_r(A) = M(A)$, και έτσι η A είναι ένα δίπλευρο ιδεώδες της $M(A)$. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $I \cap A \neq \{0\}$, για κάθε μη μηδενικό δεξιό ιδεώδες I της $M(A)$. Ομοίως, $I \cap A \neq \{0\}$, για κάθε μη μηδενικό αριστερό ιδεώδες I της $M(A)$. Τελικά, η A είναι ουσιώδες δίπλευρο ιδεώδες της $M(A)$. $\square$

Η άλγεβρα των πολλαπλασιαστών μιας τοπικά m -κυρτής άλγεβρας με προσεγγιστική μονάδα

Περιγράφουμε την άλγεβρα πολλαπλασιαστών $M(A)$ στην περίπτωση που η A είναι πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγεβρα με προσεγγιστική μονάδα (βλ. σχόλια μετά την Πρόταση 3.2.4). Με μία κατάλληλη συνθήκη επί των παραγόντων A_a της A , η $M(A)$ είναι υπάλγεβρα της άλγεβρας $\mathcal{L}(A)$ (όπου $\mathcal{L}(A)$ είναι η άλγεβρα των συνεχών γραμμικών τελεστών από την A στην A). (Βλ. Πρόταση 4.1.7).

4.1.4 Θεώρημα. Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγεβρα με μία προσεγγιστική μονάδα $\{e_\delta\}_{\delta \in \Delta}$. Υποθέτουμε ότι κάθε πηλίκο $A_a = A / \ker p_a$ στην ανάλυση Arens-Michael της A είναι πλήρης. Τότε κάθε (δίπλευρος) πολλαπλασιαστής T της A είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Έστω $T \in M(A)$ και $a \in I$. Παίρνουμε $x \in \ker p_a$. Για $\varepsilon > 0$, υπάρχει δείκτης

$\delta_0 \in \Delta$ έτσι ώστε $p_a(T(x) - T(x)e_\delta) < \varepsilon$ όταν $\delta \geq \delta_0$ (επειδή

$\lim_{\delta} (T(x) - T(x)e_\delta) = 0$ και p_a συνεχής). Έχουμε

$$p_a(T(x)) = p_a\left(T\left(x - xe_{\delta_0} + xe_{\delta_0}\right)\right) =$$

$$\begin{aligned}
& p_a \left(T(x) - T(xe_{\delta_0}) + T(xe_{\delta_0}) \right) \leq \\
& p_a \left(T(x) - T(xe_{\delta_0}) \right) + p_a \left(T(xe_{\delta_0}) \right) = \\
& p_a \left(T(x) - T(xe_{\delta_0}) \right) + p_a \left(xT(e_{\delta_0}) \right) \leq \\
& p_a \left(T(x) - T(xe_{\delta_0}) \right) + p_a(x) p_a \left(T(e_{\delta_0}) \right) = \\
& p_a \left(T(x) - T(xe_{\delta_0}) \right) < \varepsilon \quad (\text{επειδή } x \in \ker p_a)
\end{aligned}$$

Δηλαδή $p_a(T(x)) < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, συνεπώς $p_a(T(x)) = 0$ και άρα

$T(x) \in \ker p_a$ και έτσι $T(\ker p_a) \subseteq \ker p_a$. Τότε ο πολλαπλασιαστής T έχει α -πεικονίσεις προβολές $T_a : A_a \rightarrow A_a$ με $T_a(x + \ker p_a) = T(x) + \ker p_a$, $a \in I$. Κάθε T_a είναι πολλαπλασιαστής της γνήσιας νορμαρισμένης άλγεβρας A_a η οποία από την υπόθεση είναι και πλήρης (Banach), για κάθε $a \in I$.

Αν $\rho_a : A \rightarrow A_a$ με $\rho_a(x) = x + \ker p_a$, $a \in I$ οι κανονικές απεικονίσεις πληλίκου, τότε ισχύει $T_a \circ \rho_a = \rho_a \circ T$. Πράγματι για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(T_a \circ \rho_a)(x) &= T_a(\rho_a(x)) = T_a(x + \ker p_a) = \\
& T(x) + \ker p_a = \rho_a(T(x)) = (\rho_a \circ T)(x).
\end{aligned}$$

Επιπλέον, $f_{\alpha\beta} \circ T_\beta = T_\alpha \circ f_{\alpha\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \in I$ με $\alpha \leq \beta$. Όπου $f_{\alpha\beta}$ με $\alpha \leq \beta$ είναι οι συνδέουσες απεικονίσεις του αντίστροφου προβολικού συστήματος. Δηλαδή η οικογένεια $(T_a)_{a \in I}$ είναι ένα προβολικό σύστημα απεικονίσεων, ως προς το $\{(A_\alpha, f_{\alpha\beta})\}$ με $\alpha \leq \beta$ στο I . Έτσι $T = \lim_{\leftarrow} T_a$. (Βλ. [7, σελ. 77, Proposition 1]).

Με f_a συμβολίζουμε τον περιορισμό της απεικόνισης προβολής

$$\pi_a : \prod_{a \in I} A_a \rightarrow A_a \text{ στο αντίστροφο όριο } \lim_{\leftarrow} A_a. \text{ Δηλαδή } f_a = \pi_a|_{\lim_{\leftarrow} A_a}.$$

Αν φ είναι ο αλγεβρικός-τοπολογικός ισομορφισμός που ταυτίζει (εφόσον οι A_a είναι πλήρεις) την A με την $\lim_{\leftarrow} A_a$ (ανάλυση Arens-Michael), μέσω της ισότητας

$f_a \circ \varphi = \rho_a$ παίρνουμε ότι $f_a = \rho_a$. Εφόσον κάθε πολλαπλασιαστής μιας γνήσιας άλγεβρας Banach είναι φραγμένος (και άρα ισοδύναμα συνεχής) (βλ. [29, σελ. 20, Theorem 1.1.1]), ο T_a είναι συνεχής επί της A_a . Επομένως η $u_a = T_a \circ f_a$ είναι συνεχής. Από τα προηγούμενα και εφόσον $f_a \circ T = T_a \circ f_a$ για κάθε $a \in I$, συμπεραίνουμε ότι η T είναι συνεχής. $\square$

Το επόμενο λήμμα είναι απόρροια της προηγούμενης απόδειξης.

4.1.5 Λήμμα. Κάθε πολλαπλασιαστής μιας πλήρους τοπικά m -κυρτής άλγεβρας με προσεγγιστική μονάδα και πλήρεις νορμαρισμένους παράγοντες, είναι το αντίστροφο όριο από πολλαπλασιαστές οι οποίοι είναι προβολές του αρχικού πολλαπλασιαστική στους παράγοντες.

Εξάλλου, έχουμε το ακόλουθο.

4.1.6 Λήμμα. Έστω $A = \varprojlim A_a$ μία άλγεβρα προβολικό όριο. Τότε οι άλγεβρες

πολλαπλασιαστών $M(A_a)$ αποτελούν προβολικό όριο και ισχύει

$$M(A) = M\left(\varprojlim A_a\right) = \varprojlim \left(M(A_a)\right) \text{ (συνολοθεωρητικά).}$$

4.1.7 Πρόρισμα. Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγεβρα με προσεγγιστική μονάδα $\{e_\delta\}_{\delta \in \Delta}$, έτσι ώστε κάθε παράγοντας $A_a = A / \ker p_a$, $a \in I$ είναι πλήρης. Τότε η άλγεβρα $M(A)$ των πολλαπλασιαστών της A είναι μία υπάλγεβρα της $\mathcal{L}(A)$.

Απόδειξη.

Εφόσον η άλγεβρα A έχει προσεγγιστική μονάδα είναι προμηδενιστική, άρα και γνήσια. Συνεπώς κάθε πολλαπλασιαστής T της A , είναι γραμμική απεικόνιση (βλ. Λήμμα 2.1.3). Από το Θεώρημα 4.1.4, έχουμε ότι κάθε πολλαπλασιαστής T της A είναι και συνεχής και το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα. $\square$

Ο Weinder έχει αποδείξει ότι κάθε πολλαπλασιαστής μιας τοπικά C^* -άλγεβρας είναι συνεχής (βλ. [38] και [25, σελ. 74-75]). Εκτός αυτού, κάθε τοπικά C^* -άλγεβρα A έχει προσεγγιστική μονάδα (φραγμένη από το 1) (βλ. [22, σελ 208, Theorem 2.6]) και κάθε παράγοντας A_a είναι πλήρης. Ιδιαίτερα, η A είναι γνήσια και έτσι έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα, ως εναλλακτική διατύπωση και απόδειξη του αποτελέσματος του Weinder.

4.1.8 Πόρισμα. Η άλγεβρα των πολλαπλασιαστών μιας τοπικά C^* -άλγεβρας A είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{L}(A)$.

4.2 Η άλγεβρα των πολλαπλασιαστών μιας τοπικά m -κυρτής H^* -άλγεβρας

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η σχέση μεταξύ της άλγεβρας των πολλαπλασιαστών μιας ειδικής τοπικά κυρτής H^* -άλγεβρας και των άλγεβρών των πολλαπλασιαστών των παραγόντων της στην ανάλυση Arens-Michael (ως προς μία τοπολογία ασθενέστερη της αρχικής).

Αν $(A, (p_a)_{a \in I})$ είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, τότε το σύνολο των αριστερών πολλαπλασιαστών $M_l(A)$ γίνεται μία πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγεβρα ως

προς την οικογένεια $\{\widetilde{p_a}\}_{a \in I}$ των ημινορμών που δίνονται από τη σχέση

$$\widetilde{p_a}(T_l) = \sup\{p_a(T_l(x)), x \in A \text{ και } p_a(x) \leq 1\}, T_l \in M_l(A). \text{ (Βλ. [25, σελ.75,}$$

Theorem 3.5]).

4.2.1 Θεώρημα. Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία πλήρης τοπικά m -κυρτή $*$ -άλγεβρα με συνεχή ενέλιξη, έτσι ώστε το αντίστοιχο προβολικό σύστημα να είναι τέλει. Υποθέτουμε ότι η A μπορεί είναι μία τοπικά C^* -άλγεβρα, ως προς μία τοπικά κυρτή τοπολογία, η οποία είναι ασθενέστερη από την αρχική. Την νέα αυτή τοπολογική άλγεβρα την συμβολίζουμε με $(A, (q_a)_{a \in I})$. Τότε ισχύει

$$M_l(A, (q_a)_{a \in I}) \cong \lim_{\leftarrow} M_l(F_a) \text{ (αλγεβρικά),}$$

όπου F_a , $a \in I$ είναι οι νορμαρισμένοι παράγοντες στην ανάλυση Arens-Michael της A ως προς τη νέα τοπολογία.

Απόδειξη.

Από την υπόθεση, η $(q_a)_{a \in I}$ είναι η οικογένεια των ημινορμών που ορίζουν την ασθενέστερη τοπικά κυρτή τοπολογία της A (ισοδύναμα $\ker(p_a) \subseteq \ker(q_a)$ με $a \in I$). Επειδή κάθε C^* -ημινόρμα είναι υποπολλαπλασιαστική, εν λόγω τοπολογία είναι τοπικά m -κυρτή.

Θέτουμε $F_a = A / \ker(q_a)$. Από το [5, σελ. 32 Theorem 2.4], οι νορμαρισμένες άλγεβρες-παράγοντες F_a , $a \in I$ στην ανάλυση Arens-Michael της A , ως προς τη νέα τοπολογία, είναι C^* -άλγεβρες. Έτσι, αν $\widetilde{F_a}$ είναι η πλήρωση της F_a , θα ισχύει $\widetilde{F_a} = F_a$.

Θεωρούμε τώρα την ανάλυση Arens-Michael $A \cong \lim_{\leftarrow} A_a$ της A , ως προς την αρχική τοπολογία $(p_a)_{a \in I}$.

Από την υπόθεση, κάθε κανονική προβολή $f_a : \lim_{\leftarrow} A_a \rightarrow A_a$ είναι επί (πρβλ. τα σχόλια πριν από το θεώρημα 3.2.7). Συμβολίζουμε με $g_a : \lim_{\leftarrow} F_a \rightarrow F_a$ τις αντίστοιχες απεικονίσεις προβολές που αντιστοιχούν στην οικογένεια $(q_a)_{a \in I}$. Εφόσον $\ker(p_a) \subseteq \ker(q_a)$ ορίζεται η απεικόνιση $\Phi_a : A / \ker(p_a) \rightarrow A / \ker(q_a)$ με $\Phi_a(x + \ker(p_a)) \rightarrow x + \ker(q_a)$, $x \in A$ η οποία είναι επί. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\Phi_a \circ f_a = g_a$, $a \in I$. (Εδώ χρησιμοποιούμε την ταύτιση $f_a = \rho_a$ όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 4.1.4.) Επομένως οι απεικονίσεις g_a , $a \in I$ είναι επίσης επί. Το αποτέλεσμα τώρα έπεται από το Θεώρημα 3.5 στο [25, σελ. 75]. □

Συνεχίζουμε με την παρουσίαση μιας συγκεκριμένης εφαρμογής του προηγούμενου θεωρήματος.

Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία γνήσια πλήρης τοπικά m -κυρτή H^* -άλγεβρα. Τότε η A μπορεί να γίνει μία τοπικά προ- C^* -άλγεβρα μέσω της οικογένειας $(q_a)_{a \in I}$ από C^* -ημινόρμες, όπου

$$(4.2.1) \quad q_a(x) = \sup \{ p_a(xy) : p_a(y) \leq 1 \}, \quad a \in I$$

(κατασκευή Gel'fand' ορολογία Μάλλιου), έτσι ώστε $q_a(x) \leq p_a(x)$ για κάθε $x \in A$ και $a \in I$. Δηλαδή η αντίστοιχη τοπολογία επί της A είναι ασθενέστερη της αρχικής. Επιπλέον,

$$p_a(xy) \leq q_a(x) p_a(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in A \text{ και } a \in I.$$

Πράγματι: Έστω $x, y \in A$ και $a \in I$, τότε έχουμε

$$(4.2.2) \quad p_a(xy) \leq p_a(x) p_a(y) \quad (1).$$

Αν $p_a(y) = 0$ και $p_a(xy) = 0$, οπότε η αποδεικτέα ισχύει (ως ισότητα).

Αν $p_a(y) > 0$ θα εργαστούμε με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι

$$p_a(xy) > q_a(x) p_a(y) \quad \text{και επειδή } q_a(x) = \sup \{ p_a(xz) : p_a(z) \leq 1, z \in A \} \text{ θα ι-}$$

σχύει ότι $\frac{p_a(xy)}{p_a(y)} > \sup \{ p_a(xz) : p_a(z) \leq 1, z \in A \}$. Άρα θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιος

ώστε

$$(4.2.3) \quad \frac{p_a(xy)}{p_a(y)} \geq \varepsilon + \sup \{ p_a(xz) : p_a(z) \leq 1, z \in A \}.$$

Από (4.2.2) και (4.2.3) έχουμε

$$p_a(x) \geq \frac{p_a(xy)}{p_a(y)} \geq \varepsilon + \sup \{ p_a(xz) : p_a(z) \leq 1, z \in A \} \geq \varepsilon + p_a(xz) \quad \text{για κάθε}$$

$z \in A$ με $p_a(z) \leq 1$. Συνεπώς

$$(4.2.4) \quad p_a(x) \geq \varepsilon + p_a(xz) \quad \text{για κάθε } z \in A \text{ με } p_a(z) \leq 1.$$

Έστω $\{e_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ μία προσεγγιστική μονάδα της άλγεβρας με $p_a(e_\delta) \leq 1$ για κάθε $\delta \in \Delta$ και $a \in I$ τότε από την (4.2.4) παίρνουμε $p_a(x) \geq \varepsilon + p_a(xe_\delta)$ για κάθε $\delta \in \Delta$ και επειδή $\lim_{\delta} p_a(xe_\delta) = p_a(x)$ προκύπτει ότι $p_a(x) \geq \varepsilon + p_a(x)$ που σημαίνει ότι $\varepsilon \leq 0$ το οποίο είναι άτοπο. Τελικά $p_a(xy) \leq q_a(x)p_a(y)$ για κάθε $x, y \in A$ και $a \in I$.

4.2.2 Πρόρισμα. Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία πλήρης τοπικά m -κυρτή H^* -άλγεβρα με συνεχή ενέλιξη, έτσι ώστε το αντίστοιχο προβολικό σύστημα είναι τέλειο. Θεωρούμε επί της A την τοπικά m -κυρτή τοπολογία, που ορίζεται μέσω των ημινормών (4.2.1). Τότε ισχύει

$$M_l(\widetilde{A}) \cong \lim_{\leftarrow} M_l(F_a)$$

ως προς ένα ισομορφισμό, όπου F_a , $a \in I$ είναι οι νορμαρισμένοι παράγοντες στην ανάλυση Arens-Michael της $\widetilde{A}$.

Απόδειξη.

Εφόσον η $*$ είναι ενέλιξη, η άλγεβρα A είναι γνήσια (βλ. [14, σελ. 452, Theorem 1.3]). Επιπλέον, όπως είδαμε στα προηγούμενα, η $(A, (q_a)_{a \in I})$ είναι μία τοπικά προ- C^* -άλγεβρα. Επομένως η $\widetilde{A}$ είναι μία τοπικά C^* -άλγεβρα και ο ισχυρισμός έπεται άμεσα από το θεώρημα 4.2.1. Σημειώνουμε εδώ ότι οι παράγοντες της $\widetilde{A}$ είναι οι $F_a = (\widetilde{A}, \widetilde{q}_a / \ker(\widetilde{q}_a))$, όπου $\widetilde{q}_a$, η επέκταση της q_a στην $\widetilde{A}$, για κάθε $a \in I$. □

Βιβλιογραφία

Ελληνική

- [1] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1997.
- [2] Μ. Χαραλαμπίδου, *Εισαγωγή στη θεωρία των Αλγεβρών Banach*, Αθήνα 2000.
- [3] Μ. Χαραλαμπίδου, *Τοπολογικές Αλγεβρες. Αλφαβητάρι, Σημειώσεις*, Αθήνα 2009.

Ξενόγλωσση

- [4] C. A. Akeman, G. K. Pedersen, J. Tomyama, *Multipliers of C^* -algebras*, Journal of Functional Analysis, **13**(1973)277-301.
- [5] C. Apostol, *b^* -algebras and their representation*, J. London Math. Soc. (2) **3**(1971), 30-38.
- [6] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Comblete Normed Algebras*, Springer, New york, 1973.
- [7] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, chap. 3., Hermann, Paris, 1967.
- [8] R.C. Busby, *Double centralizers and extensions of C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **132**(1968), 79-99.
- [9] M. Dutta and B. Tewari, *On multipliers of Segal algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 121-124.
- [10] M. Fragouloupoulou, *An introduction to the representation theory of topological $*$ -algebras*, Schriftenreihe, Univ. Münster, **48**(1988), 1-81.
- [11] S. H. Friedberg, *Compact multipliers on Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **77**(1979), 210.
- [12] M. Haralampidou, *Annihilator topological algebras*, Portug. Math. **51** (1994), 147-162.
- [13] M. Haralampidou, *Centralizers on certain complemented topological algebras* (υπό προετοιμασία).

- [14] M. Haralampidou, *On locally H^* -algebras*, Math. Japon. **38**(1993), 451-460.
- [15] M. Haralampidou, *Structure theorems for Ambrose algebras*, 4955 Period. Math. Hung. **31**(1995), 139-154
- [16] M. Haralampidou, *The Krull nature of locally C^* -algebras*, *Function Spaces* (Edwardsville, IL, 2002), 195-200, Contemp. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [17] M. Haralampidou, *On the Krull property in topological algebras*, Comm. Math. **XLVI**, (2003), 141-162.
- [18] M. Haralampidou, L. Palacios and C. J. Signoret Poillon, *Multipliers in locally convex $*$ -algebras*, Rocky Mountain J. Math.
- [19] T. Husain, *The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces*, Oxford Math. Monograph 1965, second printing, R. E. Krieger Pub. Co., 1976.
- [20] T. Husain, *Multipliers of topological algebras*, Dissertationes Mathematicae, Warszawa 1989.
- [21] T. Husain, *Orthogonal Schauder Bases*, Marcel Dekker Inc., New York, 1991.
- [22] A. Inoue, *Locally C^* -algebras*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., **25**(1971), 197-235.
- [23] M Joița, *Locally von Neumann algebras*, Bull. Math. Soc. Sci Math. Romania , (1998).
- [24] M Joița, *Multipliers of locally C^* -algebras*, An. Univ. Bucuresti, Mat., **48**(1999), 17-24.
- [25] M Joița, *On bounded module maps between Hilbert modules over locally C^* -algebras*. Acta Math. Univ. Comenianae **LXXIV**(2005), 71-78.
- [26] H. Kamowitz, *On compact multipliers of Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 79-80.
- [27] J.L. Kelley, *General Topology*, Springer-Verlag, New York, 1974.

- [28] L. A. Khan, N. Mohammad, and A. B. Thaheem, *Double multipliers on topological algebras*, Internat. J. Math. Sci., **22**(1999), 629-636.
- [29] R. Larsen, *The Multiplier Problem*, Lectures Notes in Math., No 105, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [30] R. Larsen, *Introduction to the Theory of Multipliers*, Grundlagen Math. Wiss. 175, Springer-Verlag, Berlin 1971.
- [31] A. Mallios, *Topological Algebras Selected Topics*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1986.
- [32] Noor Mohammad, *On compact multipliers of topological algebras*, Period. Math. Hung. **32** (1996), 209-212.
- [33] G. K. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups*, Academic press, London, New York, San Francisco, 1979.
- [34] G. K. Pedersen, *SAW*-algebras and corona C*-algebras, contributions to non-commutative topology*, J. Operator Theory, **15**(1986), 15-32.
- [35] N. C. Phillips, *Inverse limits of C*-algebras*, J. Operator Theory, **19**(1988), 159-195.
- [36] A. P. Robertson and W. J. Robertson, *Topological Vector Space*, Cambridge Univ. Press, London, 1973.
- [37] D. C. Taylor, *The strict topology for double centralizer algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **150**(1970), 633-634.
- [38] J. Weinder, *Topological invariants for generalized operator algebras*, Ph. D Thesis, Heidelberg, 1987.

Πίνακας Συμβόλων

Ο αριθμός στα δεξιά κάθε συμβόλου υποδηλώνει την σελίδα στην οποία το συγκεκριμένο σύμβολο εμφανίζεται για πρώτη φορά.

	$\ \cdot\ $	3
A	1	
	L_x	30
$\{(A_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$	10	
$A = \varprojlim (A_\alpha, f_{\alpha\beta}) \equiv \varprojlim A_\alpha \equiv \varprojlim A_\alpha$	10	
	μ^T	35
$(f_\alpha)_{\alpha \in I}$	10	
	a_f	39
N_a	12	
	$(A, \ \cdot\)$	4
E_a	13	
	$(A, (p_\alpha)_{\alpha \in I})$	4
$\bar{E}$	20	
	$(q_\alpha)_{\alpha \in I}$	4
$\mathcal{O}(C)$	23	
	X'	40
D_n	23	
	Y'	41
$\overset{\circ}{D}_n$	23	
	T^*	41
T	27	
	g_s	5
$M_l(A)$	27	
	L^*	60
$M_r(A)$	27	
	R^*	60
$M(A)$	27	
	g_u	5
	$(p_\alpha)_{\alpha \in I}$	6

$(L, R)^*$	60	$(I, \leq)$	14
$M_{cd}(B)$	64	$\{(H_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$	16
$M_{cd}(C)$	64	$\varphi = \lim_{\leftarrow} \varphi_\alpha$	18
$M_{cd}(A_a)$	63	$\mathfrak{B}_\alpha$	19
$\mathfrak{M}^\alpha(A)$	6	$C^\infty[0,1]$	22
(A, τ)	7	$f^{(k)}$	22
$\mathfrak{M}(A)$	7	H^*	25
A^*	7	$(e_\delta)_{\delta \in \Delta}$	25
A'	7	$L_C(A)$	32
q_x	7	$R(A)$	38
$\sigma(A', A)$	7	$Sp_A(x)$	41
$(A', s) \equiv A'_s$	7	$Sp(x)$	41
$(\mathfrak{M}(A), s \upharpoonright_{\mathfrak{M}(A)}) \equiv \mathfrak{M}(A)$	8	$M_d(A)$	49
$F = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$	8	$M_{cd}(A).$	49
$\prod_{a \in I} u_a$	8	$b(A)$	49
$f_{\alpha\beta}$	9	(S, T)	49
$f_{\alpha\alpha}$	9	$\mathcal{C}_C(X)$	58
$*$	2	$\mathcal{K}(X)$	58
$\mathfrak{B}_0 = (u_\alpha)_{\alpha \in I}$	11	$\dot{p}_a$	67
$\{(E_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in I}$	13		

$\mathcal{A}_l(S)$ 73

$\mathcal{A}_r(S)$ 73

“1-1” 2

$\mathbf{C}$ 1

C^* 56

$\mathbf{F}$ 28

I 2

u 2

A/I 3

B_0 32

Πίνακας Εννοιών

Ο αριθμός στα δεξιά κάθε έννοιας υποδηλώνει την σελίδα στην οποία η συγκεκριμένη έννοια εμφανίζεται για πρώτη φορά.

Arens-Michael θεώρημα	21	Άλγεβρα προβολικό (ή αντίστροφο) όριο	10
C^* -άλγεβρα	57	Άλγεβρική νόρμα	4
C^* -ημινόρμα	56	Άλγεβρικό φάσμα	6
C^* -ημινόρμαρισμένη άλγεβρα	56	Ανάλυση Arens-Michael	9
C^* -ιδιότητα	56	Απεικόνιση προβολικό όριο	18
C^* -νόρμα	57	Απόλυτα ομογενής	5
Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα	32	Απορροφούν σύνολο	5
Krull τοπολογική άλγεβρα	46	Αριστερά προμηδενιστική άλγεβρα	73
m -κύλινδρος	6	Αριστερή προσεγγιστική μονάδα	25
m -κυρτά σύνολα	6	Αριστερός μηδενιστής συνόλου	73
A		Αριστερός πολλαπλασιαστής	27
α -κύλινδρος	2	Ασθενής τοπολογία	7
Άλγεβρα	1	Ασθενής τοπολογικός συζυγής	7
Άλγεβρα Banach	4	Αυστηρή (strict) τοπολογία	62
Άλγεβρα απλή	2	Αυτοσυζυγές στοιχείο	3
Άλγεβρα με ενέλιξη	2		
Άλγεβρα πηλίκο	3		

B

B_0 -άλγεβρα 32

Γ

Γνήσια άλγεβρα 25

Δ

Δείκτρια συνάρτηση 5

Δεξιά προμηδενιστική άλγεβρα 73

Δεξιά προσεγγιστική μονάδα 25

Δεξιός μηδενιστής συνόλου 73

Δεξιός πολλαπλασιαστής 27

Δίπλευρος πολλαπλασιαστής 27

Διπλός πολλαπλασιαστής 49

Δυϊκός χώρος 7

E

Επιμορφισμός 2

Ερμητιανό στοιχείο 3

H

Ημιαπλή άλγεβρα 38

Ημινόρμαρισμένη άλγεβρα 4

I

Ιδεώδες αριστερό 2

Ιδεώδες γνήσιο 2

Ιδεώδες δεξιό 2

Ιδεώδες δίπλευρο 2

Ιδεώδες ελάχιστο 2

Ιδεώδες μέγιστο 2

Ισομορφισμός 2

*-Ισομορφισμός αλγεβρών 3

Ισορροπημένο σύνολο 5

Ισχυρά φασματικά φραγμένα (s.s.b)
68

Ισχυρή τοπολογία 32

K

Κανονικό στοιχείο 3

Κυρτό σύνολο 5

κ -χώρος 57

M

Μεταθετικό διάγραμμα 16

Μοναδιαία ψευδοσφαίρα 5

Μονομορφισμός 2

Μορφισμός αλγεβρών 2

*-Μορφισμός αλγεβρών 3

N

Νορμαρισμένη άλγεβρα 3

O

Ολικό φάσμα 7

Ορθογώνια βάση 26

Ουσιώδεις αριστερό ιδεώδεις 73

Ουσιώδεις δεξιό ιδεώδεις 73

Ουσιώδεις δίπλευρο ιδεώδεις 77

Π

Πλήρης χώρος σελ 4

Πλήρως κανονικός 57

Προβολικό (ή αντίστροφο) σύστημα αλγεβρών 9

Προβολικό σύστημα απεικονίσεων 18

Προβολικό σύστημα συνόλων 13

Προβολικό σύστημα τοπολογικών αλγεβρών 10

Προμηδενιστική άλγεβρα 73

Προσεγγιστική μονάδα 25

P

Ριζικό Jacobson 38

Σ

Σημειακό φάσμα 41

Συζυγές στοιχείο 3

Συμπαγής πολλαπλασιαστής 40

Συναρτησοειδής Minkowski 5

T

Ταυτοδύναμο στοιχείο 44

Τοπικά C^* -άλγεβρα 57

Τοπικά m -κυρτή H^* -άλγεβρα 73

Τοπικά m -κυρτή τοπολογική άλγεβρα 6

Τοπικά κυρτή τοπολογική άλγεβρα 6

Τοπικά κυρτός (διανυσματικός) χώρος 6

Τοπικά προ- C^* -άλγεβρα 73

Τοπική βάση 6

Τοπολογία της ομαλής σύγκλισης σελ 22

Τοπολογία των ημινορμών 49

Τοπολογική άλγεβρα 4

Τοπολογική άλγεβρα *Fréchet* 32

Τοπολογική άλγεβρα προβολικό (ή αντίστροφο) όριο 10

Τοπολογικός συζυγής 7

Υ

Υάλγεβρα 1

Υποπολλαπλασιαστική ημινόρμα 4

Υποπροσθετική συνάρτηση 5

Φ

Φραγμένο σύνολο 31

X

Χαρακτήρας 6

Χώρος *Gel'fand* 8

Χώρος μέγιστων ιδεωδών 7