



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Γεωμετρία των Fractals στην Αρχιτεκτονική και η Αξιοποίησή
τους στη Διδακτική των Μαθηματικών

Ροδίτη Ελένη-Χριστίνα

Δ201122

Επιβλέπουσα Συμβουλευτικής Επιτροπής

Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα

Καθηγήτρια

Αθήνα
Σεπτέμβριος, 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό - Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 16^η Οκτωβρίου 2015 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη
από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Λ. Ευαγγελάτου-Δάλλα (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την
καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Λ. Ευαγγελάτου-Δάλλα (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Η. Μπεριάτο	Καθηγητή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την τριμελή συμβουλευτική επιτροπή. Ευχαριστώ την επιβλέπουσα κ. Ευαγγελιάτου-Δάλλα για την πολύτιμη καθοδήγηση και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Ευχαριστώ την κ. Πότاره για τις ιδιαίτερα χρήσιμες παρατηρήσεις και συμβουλές της, καθώς και για την τιμή να συμμετάσχει στη συμβουλευτική επιτροπή. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Μπεριάτο για την τιμή που μου έκανε να συμμετάσχει στη συμβουλευτική επιτροπή.

Ευχαριστώ τους φοιτητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα αφιερώνοντας προσωπικό χρόνο, καθώς επίσης για την έμπνευση που μου προσέφεραν μέσα από τους διαλόγους μας.

Ευχαριστώ την οικογενειά μου για τη στήριξη και την εμπιστοσύνη που μου δείχνουν και έτσι μπορώ και συνεχίζω κάνοντας πράξη τα όνειρά μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους βρέθηκαν δίπλα μου το διάστημα αυτό με υπομονή και με όρεξη και ελπίζω στο μέλλον να τους το ανταποδώσω.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	7
Εισαγωγή	8
1. Η Γεωμετρία των Fractals.....	11
1.1. Τι είναι τα fractals;.....	11
1.1.1. Η αυτό-ομοιότητα	14
1.1.2. Ο χώρος των fractals	16
1.2. Τα Μοτίβα	22
2. Μαθηματικά, Τέχνη και Αρχιτεκτονική.....	24
2.1. Μαθηματικά και Αρχιτεκτονική.....	25
2.1.1. Τα μαθηματικά στον εργασιακό χώρο και τον χώρο των αρχιτεκτόνων	29
2.1.2. Οι φοιτητές της Αρχιτεκτονικής και έρευνες σχετικά με τα Μαθηματικά.....	30
3. Fractals και Αρχιτεκτονική	33
3.1. Fractal στην Αρχιτεκτονική και στην Τέχνη «πριν από τα fractal»	34
3.1.1. Αφρικανική αρχιτεκτονική	35
3.1.2. Ινδονησιακή Αρχιτεκτονική.....	38
3.1.3. Αρχαία Ελληνική αρχιτεκτονική	42
3.1.4. Ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική.....	45
3.1.5. Αρχιτεκτονική των νεότερων χρόνων.....	49
3.2. Σχέσεις μεταξύ Αρχιτεκτονικής και Fractal Γεωμετρίας στα τέλη του 20 ^{ου} αιώνα.....	54
3.3. Μία ψυχολογική-νευρολογική προσέγγιση	60
3.3.1. Το ασυνήδευτο, το συνείδητό και η σχέση με τα fractals	60
3.3.2. Περιβαλλοντολογικοί ψυχολόγοι και Βιοφιλικό περιβάλλον.....	63
4. Η έρευνα	66
4.1. Τα Ερευνητικά Ερωτήματα.....	66
4.2. Η μέθοδος – Ερευνητικό εργαλείο.....	66
4.3. Συλλογή των δεδομένων	67
4.4. Οι συμμετέχοντες	67
4.5. Ανάλυση των δεδομένων	68
5. Αποτελέσματα.....	69
6. Συζήτηση	87
Αναφορές.....	91
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	97

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά στη σχέση της Γεωμετρίας των Fractals και της Αρχιτεκτονικής, στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών. Σε πρώτο επίπεδο, μέσα από μια ιστορική ανασκόπηση της σχέσης της Αρχιτεκτονικής με το μαθηματικό αντικείμενο των fractals διερευνώνται οι λόγοι οι οποίοι οδήγησαν στη χρήση αυτών των μαθηματικών αντικειμένων τόσο πριν από τη θεμελίωση των fractals όσο και μετά. Διαπιστώνεται πως ο κύριος λόγος χρήσης της είναι η συνεχής επεδίωξη της ένταξης χαρακτηριστικών των φυσικών στοιχείων μέσα στα ανθρώπινα δημιουργήματα. Η Γεωμετρία των Fractals είναι η μαθηματική γλώσσα της φύσης και μέσω αυτής προσφέρεται η αρμονία. Στη συνέχεια, μέσα από έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε δύο φοιτητές της Αρχιτεκτονικής, διαπιστώνεται πως οι φοιτητές παρουσιάζουν στο σχεδιασμό τους στοιχεία των ιδιοτήτων των fractals, κυρίως της αυτό-ομοιότητας με μια λιγότερο μαθηματική αυστηρότητα. Επίσης, αντιμετωπίζουν τη Γεωμετρία των Fractals ως μια νέα γι' αυτούς μορφή γεωμετρίας και ένα νέο δημιουργικό εργαλείο.

Λέξεις κλειδιά: Fractals, Μαθηματικά, Αρχιτεκτονική, Γεωμετρία, Φύση

Εισαγωγή

«Τα πάντα γύρω μας είναι μαθηματικά». Είναι μια φράση, η οποία αυθόρμητα αναφέρεται συχνά από πολλούς, μαθηματικούς και μη. Περιέχει θαυμασμό απέναντι στον κόσμο των μαθηματικών και οι λιγότερο σχετικοί με την επιστήμη αυτών αναγνωρίζουν την αναγκαιότητά τους και την αξία τους. Έτσι, είναι κοινώς αποδεκτό πως τα μαθηματικά εισχωρούν στη ζωή μας, στις πράξεις μας, στον τρόπο σκέψης μας και σε ό,τι μας περιβάλλει γενικότερα. Κάθε τομέας ανθρώπινης δραστηριότητας, επιστημονικός, επαγγελματικός κτλ, χρησιμοποιεί μία ή και περισσότερες μορφές μαθηματικών. Όλα αυτά συνδυάζονται μεταξύ τους κι έτσι καταλήγουμε να δεχθούμε πως *τα πάντα είναι μαθηματικά*.

Ο περιβάλλοντας χώρος αποτελεί έμπνευση για τις διάφορες ανθρώπινες δραστηριότητες. Ο άνθρωπος, ως παρατηρητής, προσπαθεί να δώσει ερμηνείες στα γεγονότα και στα στοιχεία που τον περιβάλλουν και συχνά τα μιμείται για να δημιουργήσει και για να δώσει λύσεις στις δικές του ανάγκες. Είμαστε μέρος της φύσης, μας κυριεύουν οι αρχές της και ακολουθούμε τους κανόνες της. Η φύση είναι θαυμαστή και ο άνθρωπος βρίσκεται σε μια αέναη παρατήρηση και προσπάθεια ερμηνείας των φυσικών στοιχείων, των φυσικών φαινομένων και γενικότερα όσων σχετίζονται με αυτή. Στις διαδικασίες αυτές σημαντικό ρόλο έχει η επιστήμη των μαθηματικών, καθώς αποτελεί απαραίτητο εργαλείο.

Οι κατώτεροι μηχανισμοί της φύσης διέπονται από το μαθηματικό φαινόμενο των fractals. Συγκεκριμένα, αναφερόμαστε στη Γεωμετρία των Fractals, μια γλώσσα η οποία χρησιμοποιείται για να περιγράψει, να δώσει πρότυπα και να αναλύσει τις πολύπλοκες μορφές που παρατηρούνται στη φύση. Η βασική διαφορά με ό,τι πιο πριν υπήρχε, αφορά στο ό,τι ενώ τα στοιχεία της παραδοσιακής γλώσσας, της γνωστής δηλαδή Ευκλείδειας γεωμετρίας, είναι βασικές συγκεκριμένες μορφές όπως είναι οι ευθείες, οι κύκλοι, και οι σφαίρες, τα στοιχεία αυτής της νέας γλώσσας δεν προσφέρονται για απ' ευθείας παρατήρηση. Τα στοιχεία αυτά (τα fractal) είναι οι αλγόριθμοι μέσω των οποίων λαμβάνουμε σχήματα και δομές μόνο με τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Από τη στιγμή που γίνεται δυνατή η εκμάθηση της νέας αυτής γλώσσας μπορεί κανείς να περιγράψει, λ.χ. το σχήμα που έχει ένα σύννεφο με την ίδια ευκολία που ένας αρχιτέκτων μπορεί, χρησιμοποιώντας την παραδοσιακή γεωμετρία, να περιγράψει

ένα κτίσμα. Μέσω της Γεωμετρίας των Fractals, εξετάζεται το πώς αντιλαμβανόμαστε την ισορροπία - και κατά συνέπεια την αρμονία και την τάξη - που επικρατεί στη φύση καθώς και σε άλλες καταστάσεις, και επιχειρείται να δοθεί ένα ολοκληρωμένο πρότυπο το οποίο να περιλαμβάνει μια όψη, έστω, της πραγματικής πολυπλοκότητας της φύσης.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζουμε στον τρόπο όπου η συγκεκριμένη μορφή γεωμετρίας, αυτή των fractals, διεισδύει στην αρχιτεκτονική μέσα στους αιώνες, πριν αλλά και μετά από την θεμελίωση της από τον Mandelbrot. Η Γεωμετρία των Fractals είναι πηγή έμπνευσης αλλά και εργαλείο για μια γκάμα εφαρμογών της αρχιτεκτονικής. Κάτι τέτοιο αποτελεί αξιόλογο γεγονός και προκαλεί το ενδιαφέρον και από τη μεριά των μαθηματικών. Τα μαθηματικά με έναν ασυνείδητο αλλά και συνειδητό τρόπο εμπνέουν, δίνουν λύσεις, αλλά αποτελούν και μέρος μας γενικότερης φιλοσοφίας μέσα στο πεδίο της αρχιτεκτονικής.

Σαφώς, τα μαθηματικά και ο εργασιακός χώρος συνδέονται και αξίζουν προσοχής. Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, εστιάζουμε και στους φοιτητές της αρχιτεκτονικής, μέσα από τη μελέτη περιπτώσεων δύο φοιτητών. Επιχειρώντας τη σύνδεση με τον εργασιακό χώρο, καθώς και την αναζήτηση της δημιουργικότητας μέσα από τα μαθηματικά, οι φοιτητές της αρχιτεκτονικής είναι αυτοί οι οποίοι δομούν τους μικρόκοσμούς μας, καθώς αναμένεται να εμφανίσουν επίσης μια καλλιτεχνική πλευρά. Μέχρι τώρα, έχουν πραγματοποιηθεί σχετικές μελέτες σε διάφορες σχολές αρχιτεκτονικής, όπου επιχειρείται να δημιουργηθεί μια περισσότερο στενή σχέση μεταξύ των δύο επιστημονικών πεδίων (π.χ. Πανεπιστήμιο του Middle East, Πανεπιστήμιο της Ρώμης). Τα μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν δημιουργικό εργαλείο για τον χώρο της αρχιτεκτονικής κι έτσι είναι σημαντικό οι φοιτητές να το αντιληφθούν από νωρίς και να απομακρυνθούν από την ψυχρή στάση απέναντι σε αυτά.

Στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών, η σύνδεση της Γεωμετρίας των Fractals με το πεδίο της Αρχιτεκτονικής αποτελεί αξιοσημείωτη μελέτη καθώς συνδέει τα μαθηματικά με τον εργασιακό χώρο, αλλά συγχρόνως εμφανίζει και ένα μαθηματικό εργαλείο το οποίο αποτελεί πηγή έμπνευσης μέσα από τις μοντελοποιημένες του εικόνες (αυτές των φυσικών στοιχείων). Αντίστοιχες έρευνες δεν έχουν πραγματοποιηθεί. Ό,τι πιο συναφές μένει κυρίως στο επίπεδο της σχέσης Μαθηματικά-Αρχιτεκτονική ή διαφορετικά σε εφαρμογές της Γεωμετρίας των

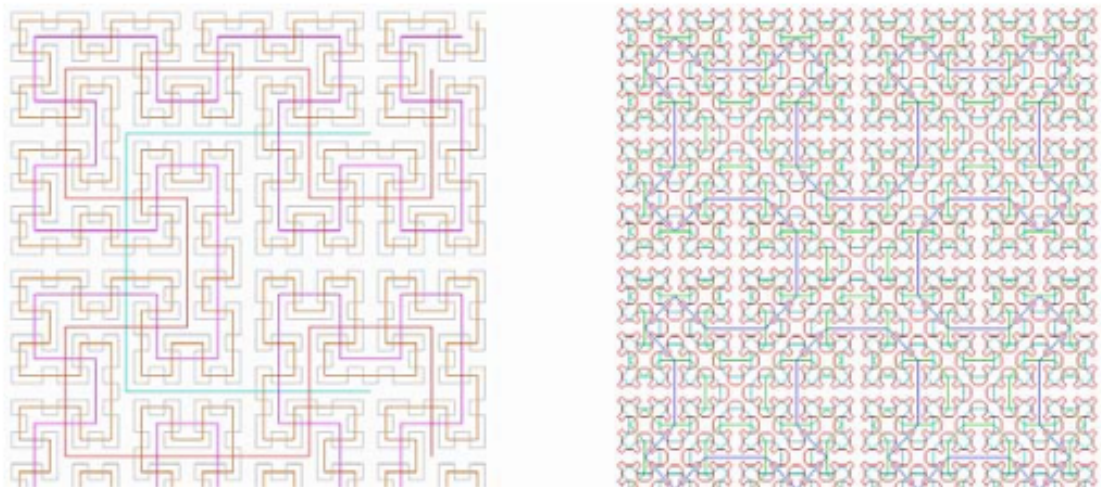
Fractals από τους αρχιτέκτονες. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός πως η Γεωμετρία των Fractals έχει ενεργό ρόλο στην αρχιτεκτονική, καθώς επίσης και το ότι τα μαθηματικά αποτελούν εργαλείο για τους αρχιτέκτονες, επιχειρείται να διαπιστωθεί ο βαθμός στον οποίο αυτή η μορφή γεωμετρίας γίνεται αποδεκτή από το χώρο της αρχιτεκτονικής, αλλά και με ποιο τρόπο.

Στα πρώτα κεφάλαια της εργασίας παρουσιάζεται η Γεωμετρία των Fractals, καθώς και η σχέση των Μαθηματικών και της Αρχιτεκτονικής γενικότερα. Στη συνέχεια γίνεται εκτενής αναφορά στη σχέση της Αρχιτεκτονικής συγκεκριμένα με τη Γεωμετρία των Fractals. Στο σημείο αυτό γίνεται και μια ψυχολογική προσέγγιση της σχέσης των δύο αυτών πεδίων, με σκοπό να επιχειρήσουμε να ερμηνεύσουμε τη σχέση τους. Τέλος, στο τελευταίο μέρος της εργασίας, παρουσιάζεται η έρευνα που πραγματοποιήθηκε, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

1. Η Γεωμετρία των Fractals

1.1. Τι είναι τα fractals;

Αν σχεδιάσουμε μια ευθεία γραμμή σε ένα κομμάτι χαρτιού, τότε σύμφωνα με την Ευκλείδεια γεωμετρία το αποτέλεσμα θα είναι ένα σχήμα μίας διάστασης, και συγκεκριμένα του μήκους. Αν, στη συνέχεια, στρέψουμε τη γραμμή, πίσω και εμπρός χωρίς να διασταυρώνονται οι γραμμές, μέχρις ότου γεμίσει όλο το χαρτί, τότε σύμφωνα πάλι με την Ευκλείδεια γεωμετρία, το αποτέλεσμα θα συνεχίζει να είναι μία γραμμή. Η διαίσθησή μας όμως μας λέει ότι αν η “γραμμή” αυτή γεμίσει πλήρως όλο το επίπεδο του χαρτιού, τότε θα πρέπει να είναι διδιάστατη. Πριν από χρόνια, και κάπως έτσι, ξεκίνησε μια μαθηματική επανάσταση από τους μαθηματικούς, Cantor, Peano, Hilbert, Hausdorff, Koch και Sierpinski, όταν σχεδίασαν καμπύλες, όπου για πολλούς εκείνης της εποχής, τα δημιουργήματα αυτά της φαντασίας χαρακτηρίστηκαν ως «τέρατα» και «ψυχωτικά».



Εικόνα 1. Καμπύλη του Hilbert (αριστερά). Μία καμπύλη του Sierpinski (δεξιά)

Παρά το γεγονός ότι οι επιστήμονες εκείνης της εποχής δεν έδειξαν ενδιαφέρον για αυτά τα «τέρατα», ωστόσο, οι μαθηματικοί τα θεώρησαν σπουδαία, καθώς αποτελούσε απόδειξη πως ο κόσμος των καθαρών Μαθηματικών περιλαμβάνει έναν πλούτο δυνατοτήτων οι οποίες ξεπερνούσαν κατά πολύ τις μέχρι τότε απλούστερες δομές της φύσης.

Συχνά αναφέρεται η φράση του Benoit Mandelbrot πως “τα σύννεφα δεν είναι σφαιρικά, τα βουνά δεν είναι κωνικά, οι ακτές δεν είναι κυκλικές, ο φλοιός των δέντρων δεν είναι λείος και η τροχιά του κεραυνού δεν είναι ευθεία” (Mandelbrot, 1982). Κατά τη διάρκεια του 20^{ου} αιώνα έγινε μια συστηματική μελέτη της γεωμετρίας η οποία διέπει τη φύση. Μέσα από τη μελέτη ήρθε στο φως ο τρόπος της μοντελοποίησής της και της μίμησης μέσω μαθηματικών σχέσεων και μετασχηματισμών. Τα μαθηματικά αντικείμενα τα οποία προκύπτουν από τους μετασχηματισμούς αυτούς ονομάζονται *fractals*. Ο όρος *fractal* έχει τις ρίζες του στο λατινικό όρο *fractus*, που σημαίνει *σπασμένο, κομματιασμένο*. Πολλές φορές αποδίδονται ως Μορφοκλάσματα, Πολυσχιδή ή Κλασματικά σύνολα.

Ένα fractal αποτελείται από όλο και μικρότερες αντιγραφές του ίδιου. Αυτή η βασική ιδιότητα ονομάζεται *αυτό-ομοιότητα*, και εύκολα διακρίνεται σε φυσικά αντικείμενα, όπως για παράδειγμα το *romanesco cauliflower* (Εικ.2). Καθώς εστιάζουμε στην εικόνα παρατηρούμε ότι κάθε μικρότερο μέρος του αντικειμένου είναι όμοιο με το ίδιο το αντικείμενο.



Εικόνα 2. Romanesco Cauliflower

Σε ένα φυσικό fractal η αυτό-ομοιότητα σταματάει σε κάποιο στάδιο, ωστόσο στα μαθηματικά fractals η αυτό-ομοιότητα έχει άπειρα στάδια. Η κυριότερη διαδικασία η οποία ακολουθείται κατά τη δημιουργία των fractals είναι η *επανάληψη* ή η *συνώνυμη* αυτής, η *ανάδραση*. Πρόκειται για μια επαναληπτική διαδικασία η οποία συχνά παρομοιάζεται με μια ανακυκλούμενη μηχανή αποτελούμενη από τρεις μονάδες: Εισαγωγή - Επεξεργασία - Εξαγωγή.

Ο Mandelbrot ισχυρίζεται ότι, όπως τα σχήματα της παραδοσιακής γεωμετρίας είναι ο τρόπος αναπαράστασης των ανθρώπινων κατασκευασμάτων, έτσι και οι fractal καμπύλες είναι ο φυσικός τρόπος αναπαράστασης των αντικειμένων της φύσης, όπως παράλια, δέντρα κ.α. Έτσι, τα fractals είναι διπλής αξίας, τόσο ως ένας τρόπος αναπαράστασης των φυσικών στοιχείων όσο και ως καλλιτεχνικό

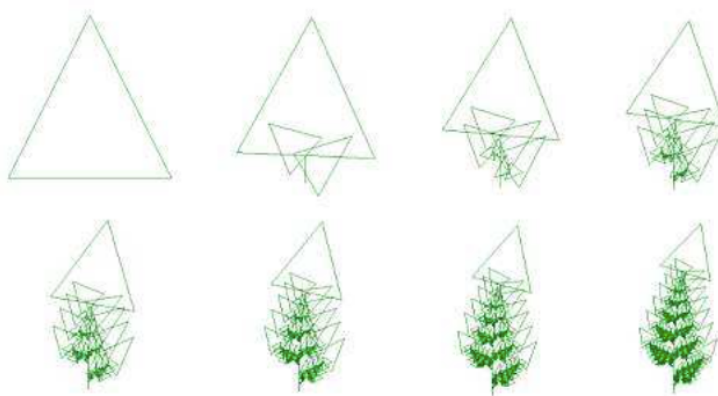
αντικείμενο. Το πρώτο μορφοκλασματικό αντικείμενο σχεδιάστηκε από τον ζωγράφο Albert Duren (1471-1528) και είναι βασισμένο σε κανονικά πεντάγωνα. Επίσης, ο γνωστός Ολλανδός καλλιτέχνης M. C. Escher δημιούργησε χαρακτηριστικά έργα με χαρακτηριστικό την αυτό-ομοιότητα.

Ένα fractal F είναι (ορίζεται ως) ένα γεωμετρικό αντικείμενο το οποίο έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Έχει λεπτή δομή σε κάθε κλίμακα,
2. Είναι ακανόνιστο, και δεν είναι εφικτό να περιγραφεί με την παραδοσιακή γεωμετρία (Ευκλείδεια), ούτε τοπικά ούτε και ολικά,
3. Έχει κάποιας μορφής αυτό-ομοιότητα, είτε στο προσεγγιστικά (approximately) είτε στοχαστικά (stochastically),
4. Έχει *fractal* διάσταση, η οποία είναι μεγαλύτερη από την τοπολογική του διάσταση και
5. Ορίζεται με απλό και αναδρομικό τρόπο σε όλο του το εύρος.

Τα fractals παράγονται με τρεις διαφορετικές τεχνικές-διαδικασίες:

1. Escape-time fractals: ορίζονται μέσω επαναληπτικών σχέσεων σε κάθε σημείο ενός χώρου,
2. Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (ΣΕΣ): μέσω ενός κανόνα σε μια συγκεκριμένη συνεχή υποκατάσταση,
3. Τυχαία fractals: δημιουργούνται με στοχαστικό και όχι ντετερμινιστικό τρόπο.



Εικόνα 3. Παραγωγή φυσικών μορφών μέσω fractal μεθόδων, όπως η μέθοδος ΣΕΣ. Το αποτέλεσμα είναι το φύλλο φτέρης.

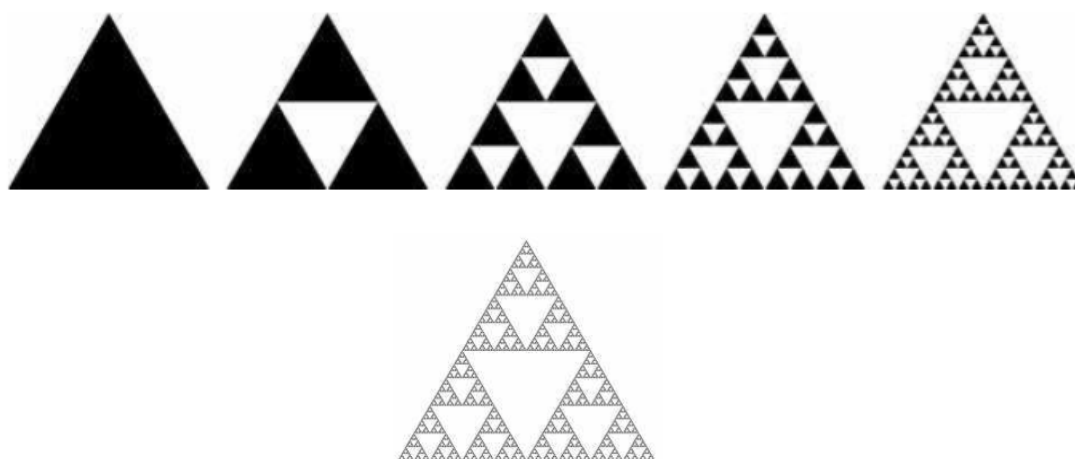
Ο Ν. Salingaros διακρίνει δύο βασικές μορφές των fractals:

- Τα *διάτρητρα* (perforated) fractals. Πρόκειται για fractals τα οποία αφαιρούν όλο και μικρότερα κομμάτια τους, και
- Τα *αυξητικά* (accretive) fractals. Στην περίπτωση αυτή προστίθεται συνεχώς μικρότερο τμήμα, όμοιο με το αρχικό τμήμα.

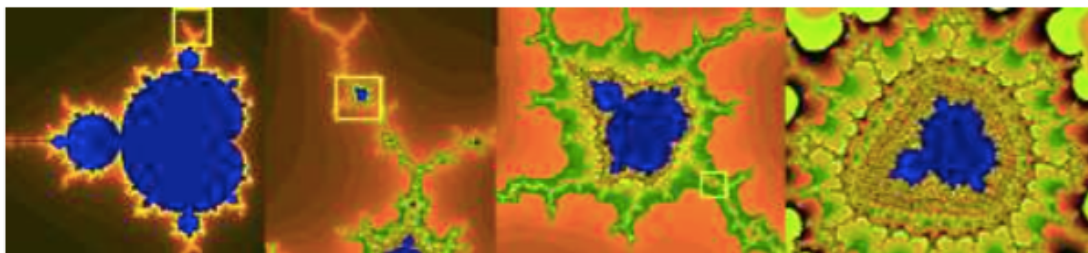
1.1.1. Η αυτό-ομοιότητα

Με την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας, ουσιαστικά, περιγράφουμε τις αρχές της *ακριβούς αυτό-ομοιότητας* (strict self-similarity) και της *στατιστικής αυτό-ομοιότητας* (statistical self-similarity).

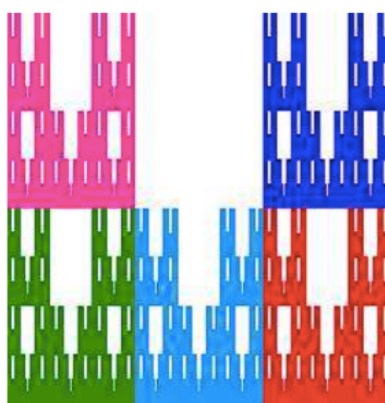
- Η ακριβής αυτό-ομοιότητα συμβαίνει όταν κάθε λεπτομέρεια ενός fractal είναι ένα ακριβές αντίγραφο της ολότητας. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να αποτυπωθεί μέσω ενός Συστήματος Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (ΣΕΣ), όπου οι συναρτήσεις είναι ακριβής ή affine μετασχηματισμοί. Όπως για παράδειγμα, στην περίπτωση του τριγώνου Sierpinski (Εικόνα 4). Έχοντας ως αφετηρία ένα τρίγωνο, στο πρώτο στάδιο κατασκευάζουμε τρία τρίγωνα όμοια με το αρχικό τρίγωνο, με συντελεστή αναλογίας $1/2$, τόσο στον οριζόντιο όσο και στον κατακόρυφο άξονα. Στο επόμενο στάδιο, η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται και στα τρία ίσα τρίγωνα. Η διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται συνεχώς. Το αποτέλεσμα είναι ένα τρίγωνο Sierpinski, κι αυτό γιατί οι υποδομές (τα τρίγωνα) είναι όμοιες με την ολότητα (το αρχικό τρίγωνο).



Εικόνα 4. Η παραγωγή τριγώνου Sierpinski.
Σε κάθε επανάληψη το μεσαίο τρίγωνο αφαιρείται.



Εικόνα 5. Εστιάζοντας στο σύνολο Mandelbrot διακρίνονται σχήματα σχεδόν όμοια μεταξύ τους (quasi similar)



Εικόνα 6. Ένα self-affine fractal.
Η αναλογία του ύψους και του πλάτους κάθε υποσυνόλου
αλλάζει σε σχέση με την αναλογία της ολότητας.

- ii. Η στατιστική αυτό-ομοιότητα είναι η στατιστική μέτρηση της ομοιότητας στα διάφορα επίπεδα ενός συνόλου. Η ιδιότητα αυτή θα μπορούσε να γίνει καλύτερα αντιληπτή παρατηρώντας το περίγραμμα μιας βουνοκορφής στην Εικόνα 7. Υπάρχει μια ευδιάκριτη ανοδική τάση, κάτι το οποίο παρατηρούμε καθώς εστιάζουμε.



Εικόνα 7. Statistical αυτό-ομοιότητα

Στην επόμενη παράγραφο γίνεται μια περισσότερο μαθηματική περιγραφή των fractals και των ιδιοτήτων τους. Επίσης, παρουσιάζονται και κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα.

1.1.2. Ο χώρος των fractals

Οι χώροι μέσα στους οποίους κατασκευάζουμε τα σύνολα fractal και τις fractal συναρτήσεις είναι οι συνήθεις Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής:

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^d$ με την Ευκλείδεια μετρική $|x-y| = \left(\sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, όπου $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$.

Ορίζουμε $H = H(\mathbb{R}^d)$, ($d \geq 1$) το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του χώρου $\mathbb{R}^d$. Το σύνολο H εφοδιάζεται με τη δομή πλήρους μετρικού χώρου με τη μετρική Hausdorff και με τη βοήθεια κατάλληλης συνάρτησης συστολής W κατασκευάζουμε fractal, ως σταθερό σημείο που προκύπτει από το Θεώρημα σταθερού Σημείου του Banach.

Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach

Έστω $f: X \rightarrow X$ μια συνάρτηση συστολή στον πλήρη μετρικό χώρο X . Τότε:

- i. υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο x_0 της f , δηλαδή σημείο τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$
- ii. για τυχαίο $x \in X$, έχουμε $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ ($f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ n -επαναλήψεις της f).

Ο πλήρης μετρικός χώρος $\mathbb{R}^d$ εφοδιασμένος με συναρτήσεις συστολής $\{w_n: n=1, 2, \dots, N\}$ συμβολίζεται με $\{\mathbb{R}^d: w_{1-N}\}$ και καλείται Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων, (ΣΕΣ). Η συστολή που εμφανίζεται στον πλήρη

μετρικό χώρο $H = H(\mathbb{R}^d)$ ορίζεται να είναι η $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A)$, για $A \in H(\mathbb{R}^d)$.

Με τη βοήθεια κατάλληλου ΣΕΣ κατασκευάζουμε σύνολα fractal στους χώρους $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ ως σταθερό σημείο κατάλληλης συστολής. Ακολουθούν ορισμένα σύνολα γνωστών fractals.

1. Τριαδικό σύνολο Cantor

Ξεκινώντας με ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1, πάνω στην ευθεία των αριθμών μεταξύ του 0 και του 1, αφαιρούμε στο πρώτο βήμα της διαδικασίας το μεσαίο τρίτο του, δηλαδή το διάστημα μεταξύ των αριθμών $1/3$ και $2/3$. Ακολουθώντας, αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο των δύο τμημάτων που απομένουν, δηλαδή τα διαστήματα μεταξύ των αριθμών $1/9, 2/9$ και $7/9, 8/9$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο την κατασκευή αυτή και αφαιρώντας σε κάθε βήμα από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα το μεσαίο τρίτο τους, ύστερα από άπειρα βήματα, το σύνολο των σημείων που παραμένουν στο «τέλος», ονομάζεται τριαδικό σύνολο Cantor.

Παρατηρούμε ότι τα τελικά σημεία του συνόλου Cantor είναι άπειρα, αφού ανάμεσα σε αυτά είναι π.χ. όλα τα άκρα των τμημάτων που δημιουργούνται σε κάθε βήμα. Έτσι, στο Βήμα 1 έχουμε τα σημεία 0, $1/3, 2/3$ και 1, στο Βήμα 2 έχουμε 0, $1/9, 2/9, 3/9, 6/9, 7/9, 8/9$ και 1, στο Βήμα 3 έχουμε 0, $1/27, 2/27, 3/27, 6/27, 7/27, 8/27, 9/27, 18/27, 19/27, 20/27, 21/27, 24/27, 25/27, 26/27$ και 1, κ.ο.κ.. Στο τέλος τα σημεία θα είναι άπειρα, αφού σε κάθε βήμα το πλήθος τους διπλασιάζεται. Άπειρα όμως είναι και τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος με το οποίο αρχίσαμε. Άπειροι είναι και οι αριθμοί ανάμεσα στο 0 και το 1 που γράφονται με τη μορφή κλάσματος (ρητοί) και πολλοί από τους οποίους παραλείφθηκαν κατά την κατασκευή του συνόλου Cantor. Η διαφορά θα φανεί μέσω της έννοιας της διάστασης.

Επίσης, παρατηρούμε ότι κάθε ένα από τα δύο ζεύγη τμημάτων που έχουν δημιουργηθεί στο Βήμα 2 είναι πανομοιότυπο με τα δύο τμήματα του Βήματος 1, αν τα σμικρύνει κανείς κατά $1/3$. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για όλα τα ζεύγη του Βήματος 3, σε σχέση με τα αντίστοιχα ζεύγη του Βήματος 2 από το οποίο προήλθαν.

Το φαινόμενο που παρατηρείται μεταξύ όλων των διαδοχικών τμημάτων της κατασκευής του συνόλου Cantor, είναι αυτό της *αυτο-ομοιότητας* και η συγκεκριμένη κλίμακα που συνδέει εδώ τα διαδοχικά ζεύγη τμημάτων είναι το $1/3$.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το σύνολο Cantor ως σταθερό σημείο κατάλληλης συστολής W .

Ορίζουμε τις ομοιότητες:

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έστω $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B)$, $B \in H(\mathbb{R})$.

$$\text{Για } B = [0,1], \quad W^2([0,1]) = W\left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Τότε το σταθερό σημείο της W είναι το $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n([0,1])$ το οποίο είναι το τριαδικό σύνολο Cantor.



Εικόνα 8. Κατασκευή του τριαδικού συνόλου Cantor

2. Τρίγωνο Sierpinski

Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 και αφαιρούμε το μεσαίο τριγωνικό κομμάτι που έχει ως κορυφές τα μέσα των τριών πλευρών του αρχικού τριγώνου (§1.1.1). Στη συνέχεια αφαιρούμε από τα 3 συμπαγή τρίγωνα που έμειναν στο σχήμα το μεσαίο τους κομμάτι, δηλαδή ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $1/4$. Κατόπιν από κάθε ένα από τα 9 συμπαγή τρίγωνα που μένουν αφαιρούμε το μεσαίο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $1/8$.

Αντίστοιχα, παρουσιάζεται το σύνολο Sierpinski ως σταθερό σημείο κατάλληλης συστολής W .

Ορίζουμε τις ομοιότητες:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

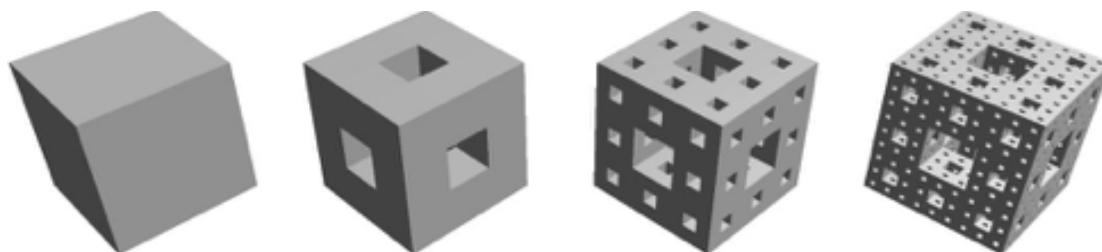
Έστω $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B)$, $B \in H(\mathbb{R}^2)$, $B \in H(\mathbb{R}^2)$. Το σταθερό σημείο της W είναι το τρίγωνο Sierpinski.



Εικόνα 9. Κατασκευή του Τριγώνου Sierpinski

3. Σπόγγος του Menger ή Sierpinski

Ο σπόγγος κατασκευάζεται αν χωρίσουμε τον μοναδιαίο κύβο $[0,1]^3$ σε 27 κύβους πλευράς $\frac{1}{3}$ και αφαιρέσουμε τους επτά κεντρικούς κύβους. Οι συναρτήσεις συστολής είναι $3^3 - 7$ το πλήθος.



Εικόνα 10. Κατασκευή του Σπόγγου του Menger

4. Καμπύλη von Koch

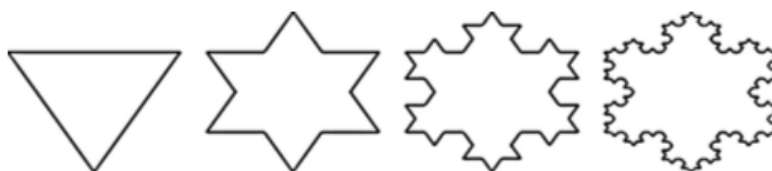
Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 στο επίπεδο. Αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο της κάθε πλευράς και τοποθετούμε στη θέση του δύο άλλα τμήματα μήκους $1/3$ (βήμα 1). Στη συνέχεια, αφαιρούμε από κάθε ευθύγραμμο τμήμα της τεθλασμένης καμπύλης που δημιουργείται το μεσαίο τρίτο του και τοποθετούμε στη θέση του δύο ίσα τμήματα μήκους $\varepsilon_n = (1/3)^n$. Στο όριο αυτής της διαδικασίας, θα σχηματιστεί μια πολύπλοκη καμπύλη, που μοιάζει με πολυσχιδή παραλία, με κολπίσκους και εξογκώματα σε κάθε μεγέθυνση. Είναι απλή κλειστή καμπύλη, άπειρου μήκους και δεν υπάρχει εφαπτομένη σε κανένα σημείο της. Ας δούμε το σύνολο von Koch ως σταθερό σημείο κατάλληλης συστολής W . Ορίζουμε τις ομοιότητες

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{στροφή κατά } \frac{\pi}{3} : w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\text{στροφή κατά } -\frac{\pi}{3} : w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σταθερό σημείο της $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B) \cup w_4(B)$, $B \in H(\mathbb{R}^2)$ είναι η καμπύλη von Koch.



Εικόνα 11. Κατασκευή Καμπύλης von Koch

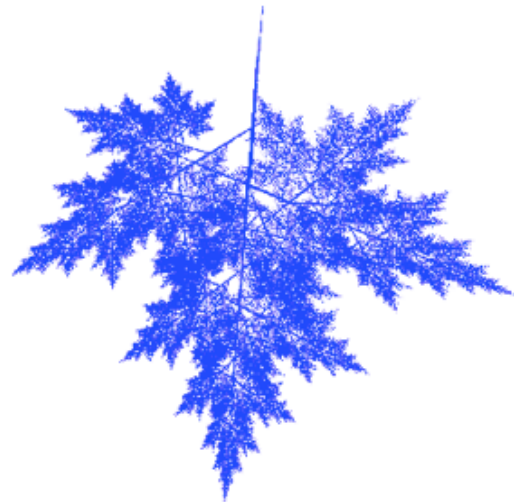
5. Πλατανόφυλλο

Το σταθερό σημείο της $W(B)=w_1(B)\cup w_2(B)\cup w_3(B)\cup w_4(B)$, $B\in H(\mathbb{R}^2)$ είναι το ‘πλατανόφυλλο’, όπου

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49 & 0,01 \\ 0 & 0,62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,52 \\ 0,40 & 0,36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 56 \end{pmatrix},$$

$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,18 & -0,73 \\ 0,50 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 & -0,01 \\ 0,50 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 52 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

		
ΑΡΧΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ	ΒΗΜΑ 1	ΒΗΜΑ 2
		
ΒΗΜΑ 3	ΒΗΜΑ 4	ΒΗΜΑ 5
		
ΒΗΜΑ 6	ΒΗΜΑ 7	ΒΗΜΑ 8



Εικόνα 12. Κατασκευή του Πλατανόφυλλου

1.2. Τα Μοτίβα

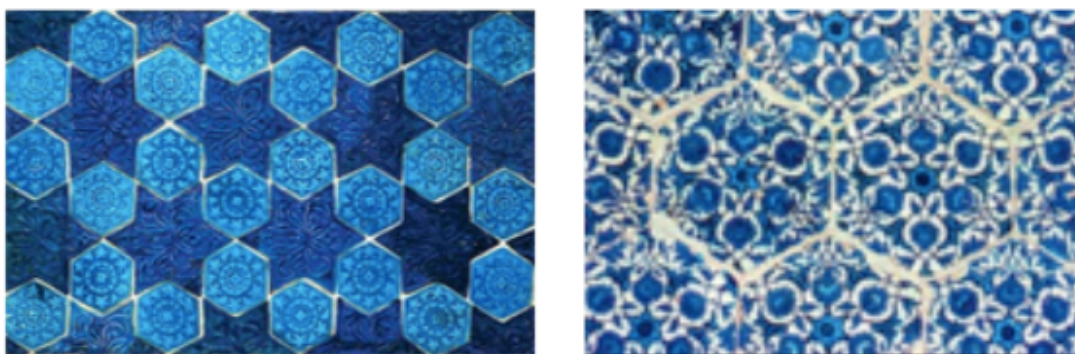
Τα μαθηματικά είναι η επιστήμη των μοτίβων (Steen, 1988). Οι μαθηματικοί αναζητούν τα μοτίβα στους αριθμούς, στην επιστήμη, στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, στο χώρο και στη φαντασία. Οι μαθηματικές θεωρίες εξηγούν τις σχέσεις που έχουν τα μοτίβα μεταξύ τους, για παράδειγμα οι συναρτήσεις και οι γραφικές παραστάσεις, καθώς επίσης, κάποιες μαθηματικές εφαρμογές τα χρησιμοποιούν ώστε να επεξηγήσουν και να προβλέψουν διάφορα φυσικά φαινόμενα. Τα μοτίβα οδηγούν σε νέα μοτίβα, κι όλα αυτά μαζί μπορούν να αποτελούν επίσης μοτίβο.

Με τη διερεύνηση αυτών των κανονικότητων, της τάξης καθώς και την κατανόηση αυτών, καταφέρνουμε να κάνουμε μαθηματικά. Η διαδικασία αυτή πέρα από τους ακριβείς υπολογισμούς, περιλαμβάνει την παρατήρηση των μοτίβων, τη δοκιμή υποθέσεων καθώς και την εκτίμηση αποτελεσμάτων. Ο Devlin Keith (1994) στο βιβλίο του “Mathematics: The science of Patterns” αναφέρει 6 κατηγορίες μοτίβων: τα αριθμητικά, τα γεωμετρικά, τα μοτίβα δικαιολόγησης και επικοινωνίας, τα μοτίβα κίνησης και αλλαγής, τα μοτίβα συμμετρίας και κανονικότητας και τα μοτίβα θέσης.

Στην περίπτωση της επιστήμης των υπολογιστών, τα μοτίβα που εφαρμόζονται στους υπολογιστές έχουν παίξει καθοριστικό ρόλο σε διάφορα μαθηματικά πεδία, όπως η οπτική αναπαράσταση συνεχώς επαναλαμβανόμενων παραστάσεων, δηλαδή τα fractals. Τα fractal μοτίβα με τη σειρά τους έχουν χαρακτηριστική θέση στην εξέλιξη της περιγραφής των φυσικών φαινομένων.

Γεωμετρικά μοτίβα και ιεραρχική διάταξη

Ο Salingeros (2004) ορίζει το γεωμετρικό μοτίβο ως *κανονικότητα εν μέσω συγκεκριμένων διαστάσεων*. Πρόκειται για απλά στοιχεία τα οποία επαναλαμβάνονται σε οπτικό επίπεδο, μέσω γραμμικής ή εκ περιστροφής συμμετρίας.



Εικόνα 13. Γεωμετρικά μοτίβα στην Ισλαμική Τέχνη

Τα μοτίβα μπορούμε επίσης να τα συναντήσουμε και σε αναλογική μείωση ή αύξηση των διαστάσεων, όπου όμοιες μορφές εμφανίζονται σε διαφορετικά μεγέθη. Όταν η γεωμετρική αυτο-ομοιότητα ορίζεται με ιεραρχικό τρόπο σε διάφορες κλίμακες, τότε δημιουργείται ένα αυτό-όμοιο fractal.

Η ιδέα του μοτίβου μπορεί επίσης να επεκταθεί και σε ένα πεδίο λύσεων, όπου οι λύσεις σε παρόμοια προβλήματα μπορούν από μόνες τους να ορίσουν ένα υπόβαθρο το οποίο επαναλαμβάνεται. Έτσι, παρουσιάζεται μια ποικιλία, ώστε κάθε φορά κάθε πρόβλημα να είναι εφικτό να φτάσει στη λύση του. Η βασική ιδέα των παραπάνω είναι η επαναλαμβανόμενη χρήση της πληροφορίας, είτε για να χρησιμοποιηθεί το μοτίβο ως επαναλαμβανόμενη μονάδα ώστε να παραγάγει ένα διδιάστατο σχέδιο, είτε ως βασική λύση σε μια κλάση διαφορετικών λύσεων.

2. Μαθηματικά, Τέχνη και Αρχιτεκτονική

Είναι κοινώς αποδεκτό πως η τέχνη και τα μαθηματικά είναι δύο πεδία με πολλά κοινά στοιχεία. Σύμφωνα με τον Cucker (2013), τόσο η τέχνη, όσο οι αριθμοί και η γεωμετρία περιλαμβάνουν μια δημιουργικότητα η οποία ακολουθεί κανόνες, εξετάζει τις συμμετρίες, τα μοτίβα και τις δομές, όπως για παράδειγμα συμβαίνει και στην ποίηση, στην αρχιτεκτονική, στο χορό και στη μουσική. Τα στοιχεία της διαίσθησης, της δημιουργικότητας, των συναισθημάτων και της ομορφιάς σε κάθε περίπτωση (των μαθηματικών, της τέχνης ή της αρχιτεκτονικής) είναι επίσης σημαντικά. Όσοι ασχολούνται με τα παραπάνω πεδία αναζητούν και βρίσκουν τρόπους για να ερευνήσουν την ποιότητα των μορφών και των χώρων (Bickley-Green, 1995). Στην περίπτωση του σχεδίου (οπτικού σχεδίου) υπάρχουν πολλές διανοητικές δομές της γεωμετρίας. Συναντάμε στοιχεία τα οποία εμπλέκονται και απαιτούν αλγοριθμική σκέψη, όπως για παράδειγμα η ανάπτυξη της προοπτικής του χώρου ή της μοντελοποίησης μιας δομής. Συγχρόνως, οι γενικές μορφές αιτιολόγησης τόσο στην τέχνη (στο στάδιο αυτό μέσα στην τέχνη εντάσσεται και η αρχιτεκτονική¹) όσο και στα μαθηματικά, περνούν μέσα από τον επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό. «Αυτό που διαφοροποιείται μεταξύ των δύο πεδίων είναι οι περιορισμοί και οι παράμετροι των προβλημάτων που τίθενται και όχι οι μέθοδοι αναζήτησης» (Bickley-Green, 1995).

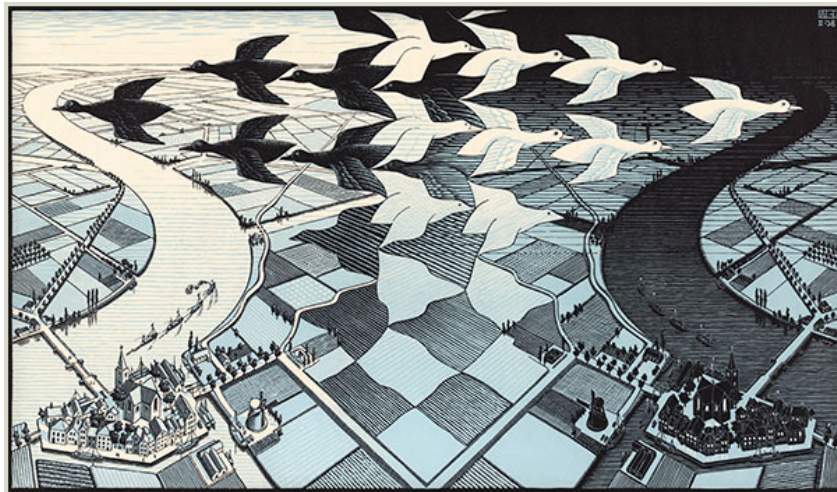
Αρκετοί είναι οι καλλιτέχνες, γνωστοί στην ιστορία, οι οποίοι επηρεάστηκαν από τις μαθηματικές ιδέες, καθώς επίσης και επηρέασαν με τον τρόπο τους τα μαθηματικά. Είναι βασικός ο ρόλος τους στην καλύτερη αντίληψη της αίσθησης της διάταξης μέσα στο χώρο (Moran, Williams, 2005). Γνωστή και πολυαναφερμένη είναι η περίπτωση του εικαστικού καλλιτέχνη Μ. C. Escher. Έγινε ιδιαίτερα γνωστός από τα έργα του και τον τρόπο που χρησιμοποιούσε τη συμμετρία και τα μοτίβα. Τα έργα του χαρακτηρίζονται από απλότητα και καθαρές γραμμές και αυτό φαίνεται να μας ελκύει και να προκαλεί το θαυμασμό μας, καθώς επίσης, ο ίδιος χαρακτηρίζεται από την εμμονή του απέναντι στη συμμετρία και την τάξη. Ο Escher εξερεύνησε την ιδέα της απεικόνισης του απείρου σε ένα διδιάστατο πεδίο και στην προσπάθειά του αυτή δέχθηκε τη βοήθεια του Καναδού μαθηματικού Harold Scott. Οι Henderson και

¹ Η αρχιτεκτονική εντάσσεται στο πεδίο επιστημών. Λόγω του ότι ως βασικά συστατικά της έχει τη δημιουργία και την έμπνευση, καθώς και το ότι πολλές φορές τα αρχιτεκτονήματα είναι αξιοθαύμαστα γλυπτά, συχνά αντιμετωπίζεται και ως τέχνη.

Τανιμα (2005) υποστηρίζουν πως η ομορφιά και ο θαυμασμός στα έργα του Escher οφείλεται κυρίως στη σύνδεση που δημιουργούν στον άνθρωπο με το άπειρο.



Εικόνα 14α. M. C. Escher, Circle Limit I, 1958



Εικόνα 14β. M. C. Escher, Day and Night, 1938

2.1. Μαθηματικά και Αρχιτεκτονική

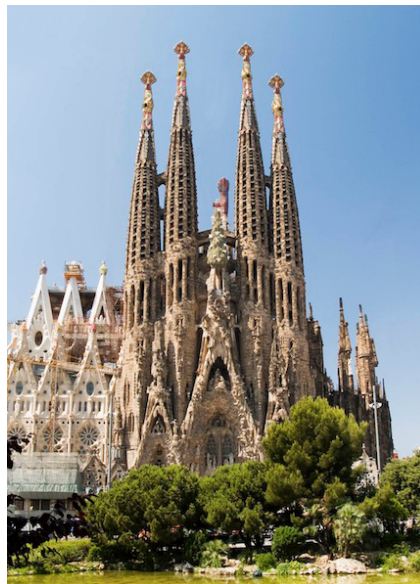
Η σχέση των μαθηματικών και της αρχιτεκτονικής είναι αδιαμφισβήτη, τόσο στο γεγονός ότι η αρχιτεκτονική χρησιμοποιεί ως δημιουργικό εργαλείο τα μαθηματικά, όσο και στο ότι η αρχιτεκτονική σε πολλές στιγμές αποτέλεσε έμπνευση για τα

μαθηματικά και την εξέλιξή τους. Υπάρχει, δηλαδή, μια στενή και αμφίδρομη σχέση μεταξύ των δύο επιστημονικών πεδίων. Κατά την αρχαιότητα μάλιστα, η αρχιτεκτονική αποτελούσε μέρος των μαθηματικών και εν συνεχεία, σε πολλές από τις μετέπειτα περιόδους οι δύο αυτές αρχές ήταν δύσκολο να διακριθούν η μια από την άλλη (Salingaros, 2004). Οι μαθηματικοί ήταν και αρχιτέκτονες, οι κατασκευές των οποίων (οι πυραμίδες, οι ναοί, τα στάδια, κ.α.) είναι θαυμαστές μέχρι και σήμερα. Στην Κλασική Ελλάδα και στην αρχαία Ρώμη οι αρχιτέκτονες ήταν απαραίτητο να είναι και μαθηματικοί. Την ανέγερση της Αγίας Σοφίας, την ανέλαβαν οι γνωστοί γεωμέτρες της εποχής, Ισίδωρος και Ανθέμιος. Η παράδοση αυτή, με τους μαθηματικούς να γίνονται αρχιτέκτονες, συνεχίστηκε και στον Ισλαμικό πολιτισμό. Οι αρχιτέκτονες του Ισλάμ δημιούργησαν μια πλούσια συλλογή από διδιάστατα μοτίβα - τα οποία διακοσμούσαν διάφορες επιφάνειες - πολύ πριν οι μαθηματικοί δώσουν μια ακριβή περιγραφή αυτών των μοτίβων και των σχέσεων που τα χαρακτηρίζουν. Οι κτίστες κατά τον Μεσαίωνα είχαν ισχυρή γεωμετρική αντίληψη, γεγονός που τους οδηγούσε στο να κατασκευάζουν τα αξιοθαύματα κτίρια (όπως καθεδρικούς ναούς) ακολουθώντας αυστηρές μαθηματικές αρχές. Ο Christopher Wren, αρχιτέκτονας του καθεδρικού ναού του Αγίου Παύλου είχε χαρακτηριστεί από το Νεύτωνα ως ο καλύτερος γεωμέτρης της εποχής του. Αξιοσημείωτη είναι και η περίπτωση του Desargues, αρχιτέκτονα ο οποίος ασχολήθηκε με την προβολική γεωμετρία και σύμφωνα με τον M. Rudin το έργο του αποτέλεσε το πιο πρότυπο μαθηματικό δημιούργημα του 17^{ου} αιώνα. Επίσης, ο Lobachevsky, ένας από τους ιδρυτές της υπερβολικής γεωμετρίας διδάχθηκε και αρχιτεκτονική προκειμένου να μπορέσει να αναλάβει την επίβλεψη ενός κτιρίου του Πανεπιστήμιου του Καζάν.

Ο όρος *τα μαθηματικά στην πράξη* μπορεί με απλό τρόπο να αποτυπωθεί μέσα από την *αρχιτεκτονική*. Τα μαθηματικά είναι ίσως ο μόνος τρόπος για να αντιληφθούμε το χώρο μέσα στον οποίο ζούμε. Από την άλλη, οι αρχιτέκτονες είναι αυτοί οι οποίοι μέσα στο χώρο μας σχεδιάζουν τους “υπόχωρους” μας ή αλλιώς τους μικρόκοσμούς μας. Με αυτή τη λογική, τα μαθηματικά αποτελούν ένα από τα απαραίτητα εργαλεία για τη δημιουργία του κόσμου μας. Τα τελευταία χρόνια στην ερευνητική κοινότητα έγινε μεγάλος λόγος για τη σχέση των μαθηματικών και της αρχιτεκτονικής. Η κοινή συνεισφορά και των δύο στον τρόπο σκέψης έχει αποτυπωθεί με πληθώρα εφαρμογών και παραδειγμάτων (Salingaros, 1999), όπως:

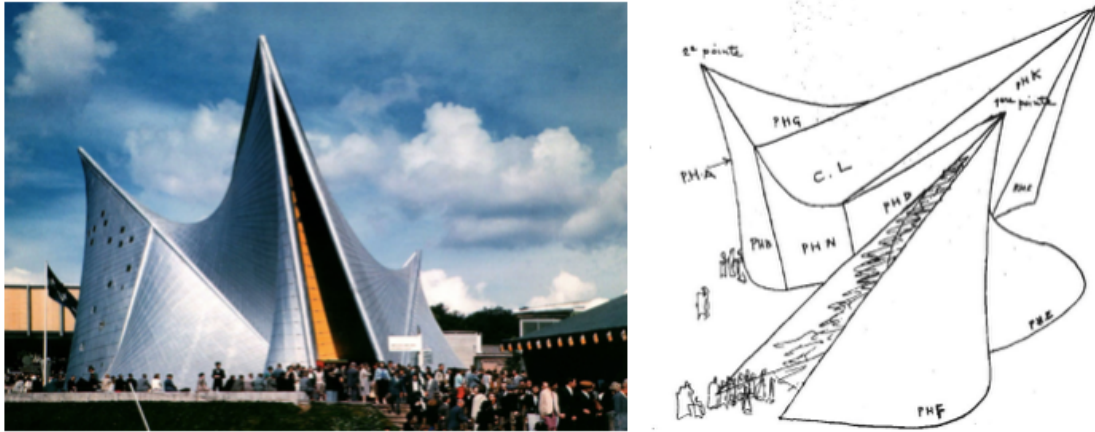
- Η γεωμετρική ανάλυση των αρχιτεκτονικών αντικειμένων, για παράδειγμα ο υπολογισμός διαστάσεων, οι αναλογίες, οι επιφάνειες και οι όγκοι, καθώς επίσης και οι μετασχηματισμοί,
- Η τυποποίηση και η ερμηνεία των αρχιτεκτονικών ιδεών και των συμβόλων, όπως για παράδειγμα η συμμετρία και η κλίμακα,
- Το μαθηματικό υπόβαθρο το οποίο αφορά την επιστήμη και τη μηχανική στην περίπτωση του αρχιτεκτονικού σχεδιασμού και της κατασκευής.

Έτσι, μέσα από την θεωρητική προσέγγιση της σχέσης της αρχιτεκτονικής και των μαθηματικών έως και την εφαρμογή των μαθηματικών αρχών στη σχεδίαση και την κατασκευή αρχιτεκτονημάτων, η σχέση αυτών των δύο παραμένει στενή. Πολλές αρχιτεκτονικές δημιουργίες και των νεότερων χρόνων αποτελούν αξιοθαύμαστες μαθηματικές εφαρμογές. Και οι νεότεροι αρχιτέκτονες πειραματίζονται και εμπνέονται από τα μαθηματικά και τη γεωμετρία. Δείχνουν μεγάλο ενδιαφέρον και κατά τη συνθετική διαδικασία επιχειρούν την ένταξη διαφόρων μη-Ευκλείδειων γεωμετριών. Για παράδειγμα, η περίπτωση του καθεδρικού ναού Sagrada Familia στη Βαρκελώνη, έργο του Gaudí, είναι βασισμένο στις αρχές της υπερβολικής γεωμετρίας.



Εικόνα 15. Sagrada Familia, Barcelona.
Η αρχιτεκτονική χρησιμοποιεί ως εργαλείο την υπερβολική γεωμετρία.

Επίσης, το Phillips Pavilion στις Βρυξέλλες, ένα κτίριο κατασκευασμένο από τους Le Corbusier και Xenakis, είναι ένα υπερβολικό παραβολοειδές.



Εικόνα 16. Phillips Pavilion (αριστερά), Συνθετικό σχέδιο βασισμένο στις καμπύλες (δεξιά)

Στη σύγχρονη αρχιτεκτονική, η αρχιτέκτων και μαθηματικός Zaha Hadid διαμορφώνει χώρους με βάση τις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες.



Εικόνα 17. Έργο της Zaha Hadid

Τα παραδείγματα εφαρμογών των μαθηματικών αρχών και των γεωμετριών σε αρχιτεκτονικές δημιουργίες από την αρχαιότητα έως και τη σύγχρονη αρχιτεκτονική είναι πολλά. Στην παρούσα εργασία δε θα γίνει εκτενή αναφορά τέτοιων παραδειγμάτων, καθώς το ενδιαφέρον στρέφεται συγκεκριμένα στη σχέση της αρχιτεκτονικής με τη Γεωμετρία των Fractals.

Στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας πραγματοποιήθηκε έρευνα σε φοιτητές της αρχιτεκτονικής. Συνεπώς, είναι απαραίτητο να αναφερθούμε και στη

σχέση της Διδακτικής των Μαθηματικών με το χώρο των αρχιτεκτόνων, καθώς και των φοιτητών της αρχιτεκτονικής,

2.1.1. Τα μαθηματικά στον εργασιακό χώρο και τον χώρο των αρχιτεκτόνων

Τα τελευταία χρόνια το ερευνητικό ενδιαφέρον της Διδακτικής των Μαθηματικών, έχει στραφεί και στο πεδίο των μαθηματικών τα οποία χρησιμοποιούνται στους διάφορους επαγγελματικούς χώρους (Triantafyllou, Potari, 2010). Ως ερευνητικός στόχος, είναι η αναγνώριση των μαθηματικών πρακτικών των εργαζομένων. Η Boaler θεωρεί τις μαθηματικές πρακτικές ως τις επαναλαμβανόμενες δράσεις στις οποίες εμπλέκονται οι άνθρωποι και έχουν ως κύρια διαδικασία το να κάνουν μαθηματικά - και όχι το να μαθαίνουν μαθηματικά - (Boaler, 2002). Οι έρευνες αυτές συνήθως αφορούν τις μαθηματικές μετρήσεις και τους υπολογισμούς ("Ποιοι μαθηματικοί υπολογισμοί είναι απαραίτητοι στη δουλειά σου;"), καθώς επίσης τη χρήση και την ανάπτυξη των γεωμετρικών αναπαραστάσεων των δεδομένων της κάθε εργασίας (γραφήματα, προσχέδια, σχέδια, χάρτες κ.α.) ("Χρησιμοποιείς ή παράγεις προσχέδια, σχέδια, χάρτες κ.α. κατά την εργασία σου;") (Nicol, 2002). Ωστόσο, Τα μαθηματικά στον εργασιακό χώρο (καθώς και τα μαθηματικά γενικότερα) δεν είναι μόνο οι μετρήσεις, οι υπολογισμοί, και τα αποτελέσματα, αλλά είναι και ότι αφορά το σχήμα καθώς και την αίσθηση του χώρου (Millroy:1992, Smith:1999). Ο Gerdes αναφέρει πως όταν κάποιος τεχνίτης (μη-μαθηματικός) ανακαλύπτει μία τεχνική για να τη χρησιμοποιήσει στο επάγγελμά του, κάνει μαθηματικά και σκέφτεται με μαθηματικό τρόπο (Gerdes, 1988). Τα εθνομαθηματικά λαμβάνουν μέρος στην παραγωγή της μαθηματικής σκέψης. Επίσης, είχαν σημαντικό και καθοριστικό ρόλο στη σύνδεση των διαφόρων καλλιτεχνικών ειδών και δραστηριοτήτων και των μαθηματικών. Σχετικές έρευνες έδειξαν να υπάρχει ξεκάθαρη παρουσία των μαθηματικών στην κατασκευή και τη διακόσμηση, όπως ξύλινων αντικειμένων, πλακοστρώσεων κ.α. Σύμφωνα με τους Ascher και D'Ambrosio οι κατασκευές αυτές κουβαλάν τον τρόπο σκέψης των κατασκευαστών τους (Ascher, D'Ambrosio, 1994). Παρά το ότι δημιουργούνται από μη τυπικά εκπαιδευμένα άτομα, ωστόσο, έχουν εμφανή τη μαθηματική διάθεση κυρίως μέσα από τη διάταξη, το μοτίβο και τη συμμετρία.

Τα μαθηματικά είναι ίσως ο μόνος τρόπος για να αντιληφθούμε το χώρο μέσα στον οποίο ζούμε. Από την άλλη, οι αρχιτέκτονες είναι αυτοί οι οποίοι μέσα

στο χώρο μας σχεδιάζουν τους “υπόχωρους” μας ή αλλιώς τους μικρόκοσμούς μας (§1.3.1). Με αυτή τη λογική, τα μαθηματικά αποτελούν ένα από τα απαραίτητα εργαλεία για τη δημιουργία του κόσμου μας. Ο Salingaros υποστηρίζει πως η συνθετική διαδικασία που ακολουθεί ένας αρχιτέκτονας, σε όποια από τις δύο μορφές της (bottom-up ή top-down σχεδίαση), έχει ως στόχο τη δημιουργία ενός χρήσιμου αποτελέσματος. Η διαδικασία αυτή γίνεται με έναν μαθηματική αφαίρεση (Salingaros, 2004). Σε συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν με αρχιτέκτονες, διαπιστώθηκε η άποψή τους για τα μαθηματικά. Πιστεύουν πως ανήκουν στον κορμό της εκπαίδευσης της αρχιτεκτονικής, ωστόσο, οι ίδιοι στην πρακτική τους κάνουν χρήση γραφημάτων και αντίστοιχων διαδικασιών (αρχιτεκτονική σχεδίαση), παρά την αναλυτική μέθοδο η οποία προσφέρεται από τα μαθηματικά. Αυτό συμβαίνει διότι, συνήθως, οι ίδιοι δεν κατέχουν την απαιτούμενη μαθηματική γνώση και αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά τα οποία εμπλέκονται στη συνθετική διαδικασία και την κατασκευή με εμπειρικό τρόπο (Salingaros, 2004).

2.1.2. Οι φοιτητές της Αρχιτεκτονικής και έρευνες σχετικά με τα Μαθηματικά

Δεδομένου ότι η ιστορική και φιλοσοφική ματιά μας δείχνει ότι η αρχιτεκτονική έχει παίξει σημαντικό ρόλο στην πορεία της επιστήμης, θεωρείται αναγκαίο οι φοιτητές της αρχιτεκτονικής να διδάσκονται το πώς να σκέφτονται ώστε να αναπτύξουν ευελιξία. Στα αναλυτικά προγράμματα των αρχιτεκτονικών σχολών τα μαθηματικά έχουν σαφώς θέση. Διδάσκονται διάφορα πεδία των ανώτερων μαθηματικών, αλλά το βάρος πέφτει στις γεωμετρίες. Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται να υπάρχει η τάση να γίνει μία ουσιαστικότερη σύνδεση μεταξύ της αρχιτεκτονικής και των μαθηματικών μέσα στις σχολές αρχιτεκτονικής. Είναι απαραίτητο, οι φοιτητές να κατανοήσουν τα μαθηματικά ως εργαλείο, αλλά και να εξοικειωθούν με τα νέα μαθηματικά.

Οι Alsina και Trilles (1984) πρότειναν ορισμένα μαθηματικά αντικείμενα τα οποία με έναν καθαρό κι εύκολο τρόπο γίνονται εργαλείο της αρχιτεκτονικής. Πιο συγκεκριμένα, έκαναν λόγο για τη θεωρία γραφημάτων, την Ευκλείδεια γεωμετρία, την προβολική γεωμετρία κ.α. Καθώς επίσης και τη μελέτη ορισμένων ισομορφιών, όπως συμμετρίες, περιστροφές, ομοιότητα, και τον συνδυασμό αυτών.

Κατά τη διάρκεια της φοίτησής του οι φοιτητές της Αρχιτεκτονικής έρχονται σε επαφή με διάφορα μαθηματικά αντικείμενα, κυρίως γεωμετρίες. Ο βασικός

σκοπός είναι να αναπτύξουν τις σχεδιαστικές τους ικανότητες και συνήθως ξεκινάνε με έναν πιο διαισθητικό και διερευνητικό τρόπο. Σε πανεπιστήμιο του Middle East οι φοιτητές πρώτα φαντάζονται ότι βρίσκονται σε ένα διδιάστατο χώρο, και να έχουν και οι ίδιοι διδιάστατη μορφή. Στο σημείο αυτό γίνεται η εισαγωγή βασικών γεωμετρικών εννοιών όπως το επίπεδο. Μέσα από αυτή τη διαδικασία κατανοούν έννοιες όπως η διάσταση, οι συντεταγμένες και ο χώρος. Στη συνέχεια εισάγονται στις αρχές της ισομετρίας και των ισομετρικών. Στο επόμενο στάδιο, οι φοιτητές φαντάζονται πως βρίσκονται σε τριδιάστατο χώρο και εισάγονται κάποιες μαθηματικές αρχές σχετικές με την ομοιότητα, την αναλογία και τη συμμετρία (Sorguc, 2005). Στο τρίτο στάδιο οι φοιτητές φαντάζονται τους εαυτούς τους ως τριδιάστατους αλλά σε χώρο των τεσσάρων διαστάσεων. Το τελευταίο αυτό στάδιο σχετίζεται με τη βιομίμηση στην αρχιτεκτονική και στα μαθηματικά, οι οποίες υπάρχουν μέσα στις βιο-μορφές και τα ανθρώπινα κατασκευάσματα. Στο στάδιο αυτό, τους γίνεται η ερώτηση: *“Μπορείς να παραστήσεις γραφικά το άπειρο;”* Στη συνέχεια γίνεται ένα παιχνίδι, κατά κάποιο τρόπο, με το χάος χωρίς ωστόσο να εξηγείται το τι συμβαίνει. Ο σκοπός του παιχνιδιού αυτού είναι να παρουσιαστούν οι αρχές των fractals και της αυτό-ομοιότητας και εν συνεχεία της fractal αρχιτεκτονικής.

Σε πανεπιστήμιο του Ισραήλ πραγματοποιήθηκε έρευνα με σκοπό να αναδειχθεί η ανάγκη των μαθηματικών στην αρχιτεκτονική, τόσο ως εργαλείο σχεδίασης όσο και ως τρόπος σκέψης (Vener, Maor, 2003). Οι συμμετέχοντες (φοιτητές της αρχιτεκτονικής) στην έρευνα έδειξαν να αναγνωρίζουν την ανάγκη των μαθηματικών στη σχεδίαση. Επίσης, παρουσιάστηκαν σημαντικές διαφορές μεταξύ των συμμετεχόντων και της ομάδας ελέγχου στις ικανότητες υπολογισμών διαστάσεων των δομικών στοιχείων καθώς και στην κατανόηση των διαδικασιών σχεδίασης σε υπολογιστικό περιβάλλον.

Σε έρευνα του Πολυτεχνείου της Ρώμης, οι ερευνητές θέλησαν να εντάξουν τα μαθηματικά στο αναλυτικό πρόγραμμα, με μία διαφορετική οπτική από αυτή την οποία διδάσκονται. Στόχος ήταν οι φοιτητές να αποκτήσουν την ικανότητα μελέτης και αναγνώρισης μαθηματικών αντικειμένων. Για το λόγο αυτό ένταξαν διάφορα μαθηματικά είδη, όπως ο Απειροστικός Λογισμός, έστω και σε αρχικό επίπεδο. Σε επόμενο στάδιο ο στόχος ήταν οι φοιτητές να αναπτύξουν την ικανότητα της οπτικοποίησης και της αναπαράστασης διαφόρων αφηρημένων μαθηματικών αντικειμένων. Θέλησαν οι φοιτητές να ενταχθούν σε τέτοιες διαδικασίες, ώστε να καταλήγουν σε ερωτήματα τα οποία και ξεφεύγουν από τα τυπικά μαθηματικά. Για

παράδειγμα, να φτάσουν σε αναζητήσεις σχετικές με τις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες. Κινήθηκαν σύμφωνα με κάποιες θεωρητικές αρχές, όπως για παράδειγμα, οι φοιτητές να έρθουν αντιμέτωποι με το διδιάστατο χώρο και τη σχέση του με τον τριδιάστατο, καθώς και την επαφή με την έννοια του *τόπου*. Κάτι τέτοιο γίνεται εφικτό μέσα από τις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες. Επίσης, επεδίωξαν το περασμα από τη διαίσθηση στην οπτικοποίηση και το αντίστροφο. Καθώς και την αναπαραγωγή ορισμένων χαρακτηριστικών μέσα από αφαιρετικές διαδικασίες. Μέσα από αυτή τη μελέτη οι φοιτητές αναμένεται να έχουν αποκτήσει τις απαραίτητες γνώσεις σε διάφορα μαθηματικά πεδία, όπως:

- Τα πολύεδρα και τη συμμετρία,
- Τη σχεδίαση διαφόρων διαδικασιών, όπως κύκλων, την παραγωγή συνεχώς επαναλαμβανόμενων δομών (fractals), κ.α.
- Τη σχεδίαση του κελύφους, έλικα, τοπολογικών επιφανειών,
- Fractal αντικειμένων και τις διαστάσεις τους.

3. Fractals και Αρχιτεκτονική

Ο όρος *τα μαθηματικά στην πράξη* μπορεί με απλό τρόπο να αποτυπωθεί μέσα από την *αρχιτεκτονική*, όπως ξανά αναφέρθηκε. Για παράδειγμα, ένα μεγάλο τμήμα της Νέας Υόρκης έχει ορισθεί ως δίκτυο, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο ή μια συλλογή από ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Περιλαμβάνει επίσης μια διατεταγμένη διάταξη στους δρόμους η οποία μπορεί να αριθμηθεί. Για τους κατοίκους ενός δομημένου περιβάλλοντος συγκεκριμένα προφανή μοτίβα είναι πιθανό να μη γίνονται άμεσα αντιληπτά. *Δεν είμαστε σε θέση να αντιληφθούμε άμεσα ότι μας περιβάλλουν Ευκλείδεια σχήματα - κύκλοι, ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τρίγωνα κ.α. - καθώς δεν έχουμε κατασκευάσει διαφορετικές δομές όπως οι fractal, έτσι ώστε να τις συγκρίνουμε με τις Ευκλείδειες* (Salingaros, 2004).

Ξεκινώντας τη μελέτη της σχέσης της Αρχιτεκτονικής και της Γεωμετρίας των Fractals, θα προσπαθήσουμε να δούμε τον *τρόπο* με τον οποίο οι fractal μορφές διεισδύουν στην αρχιτεκτονική. Εκ πρώτης όψεως φαίνεται να μην υπάρχει ένας καθολικός παράγοντας ο οποίος συνδέει ακολουθιακά τα κτίρια μεταξύ τους. Πρατηρώντας όμως με προσοχή διάφορα αρχιτεκτονήματα, τόσο σε επίπεδο κτιρίου όσο και σε επίπεδο οικισμών και πόλεων, διαπιστώνουμε να υπάρχουν μορφές όπου γίνεται εφαρμογή των αρχών και ιδιοτήτων των fractals, άλλες φορές με αυστηρό τρόπο κι άλλες με λιγότερο.

Ορισμένες φορές η fractal μορφή αποτελεί μια έκφραση του τρόπου με τον οποίο βλέπουμε τον κόσμο μας ή μιας κοινωνικής ιδέας, ενώ σε άλλες περιπτώσεις η αρχιτεκτονική βρίσκει στην Γεωμετρία των Fractals μια ενδιαφέρουσα ιδέα. Τα αρχιτεκτονικά σχέδια καθοδηγούνται με βασικό άξονα τη φιλοσοφία των fractals με συνειδητό ή και με ασυνείδητο τρόπο. Πιθανόν να υπάρχει μια βαθύτερη και κατά κάποιο τρόπο μη συνειδητή αιτία για το *γιατί τέτοιου είδους μοτίβα εισέρχονται στην αρχιτεκτονική* μέσα στις κουλτούρες και τους λαούς, πολύ πριν από τη θεμελιωσή τους. Βέβαια, τις τελευταίες δεκαετίες η Γεωμετρία των Fractals θεμελιώθηκε και τα μοτίβα της χρησιμοποιούνται πλέον συνειδητά.

Στην αρχιτεκτονική τα fractals χρησιμοποιούνται κυρίως με δύο τρόπους:

1. ως δημιουργικό εργαλείο, ώστε να προκύψουν διάφορα αρχιτεκτονικά οργανωτικά στοιχεία (όπως πλέγματα στις κατόψεις, ανοίγματα, σχιχμές κτλ) και
2. ως μέσο για τεχνικές μέτρησης, στην ανάλυση της δομής των κτιρίων, αλλά και των πόλεων (Joye, 2007).

Τα τρία βασικά σχεδιαστικά στοιχεία είναι η *αρμονία*, η *αναλογία* και η *κλίμακα*, τα οποία εφαρμόζονται στο χώρο, και δίνουν στον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό τα χαρακτηριστικά της *ακολουθίας*, του *ρυθμού* και της *διάταξης*.

Στην παρούσα μελέτη, γίνεται μια αναφορά διαφόρων αρχιτεκτονικών περιπτώσεων οι οποίες χρησιμοποιούν τη Γεωμετρία των Fractals. Τα παραδείγματα αυτά διακρίνονται σχετικά με την χρονική τους περίοδο, *πριν* και *μετά* από τη θεμελίωση των fractals. Διακρίνονται δηλαδή στην περίοδο όπου η χρήση των αρχών της Γεωμετρίας των Fractals γίνεται ασυνείδητα και σε αυτή που πλέον μπορεί να γίνει συνειδητά. Εστιάζουμε κυρίως στον *τρόπο* με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα fractals, στους *λόγους* οι οποίοι οδηγούν στη μορφή αυτής της αρχιτεκτονικής, καθώς και στα *μαθηματικά* πίσω από αυτές τις εφαρμογές.

3.1. Fractals στην Αρχιτεκτονική και στην Τέχνη «πριν από τα fractals»

Προσπερνώντας τις βασικές ανάγκες που καλύπτει η αρχιτεκτονική κάποια αρχιτεκτονικά είδη εμπνέονται από τη φύση. Η φύση με τη σειρά της αποτελεί fractal σύνολο. Βασιζόμενοι στη φιλοσοφία αυτή, πολύ πριν τη θεμελίωση της Γεωμετρίας των Fractals οι διάφοροι λαοί και πολιτισμοί έγιναν παρατηρητές της φύσης και έκαναν χρήση των αρχών που τη διέπουν. Σε πολλές περιπτώσεις αρχιτεκτονικής η φιλοσοφία είναι αυτή που έως ένα βαθμό την καθορίζει. Με τρόπο συμβολικό για τον άνθρωπο, τις κοινότητες και τη ζωή διαμορφώνονται μέσα στους αιώνες οι διάφοροι αρχιτεκτονικοί τύποι καθοδηγούμενοι από τις αρχές της φύσης, άρα και υποσυνείδητα από τα fractals. Στη συνέχεια, θα αναφερθούν ορισμένα παραδείγματα αρχιτεκτονικής όπου η φιλοσοφία πίσω από τις αρχές της φύσης, αλλά και μιας γενικότερης φιλοσοφίας γύρω από τον κόσμο είναι εμφανής.

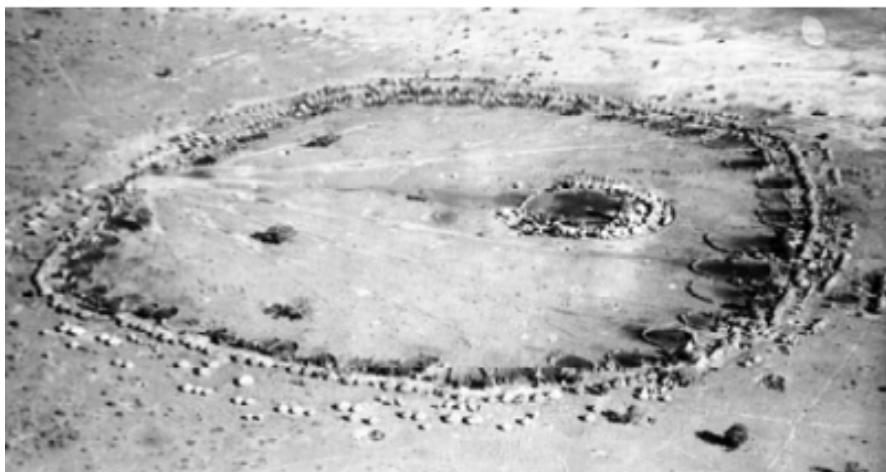
3.1.1. Αφρικανική αρχιτεκτονική

Στην περίπτωση της Αφρικανικής αρχιτεκτονικής παρατηρείται πληθώρα fractal μορφών. Είναι αρκετές οι αρχιτεκτονικές μορφές οι οποίες χρησιμοποιούν ιδιότητες των fractals, από τα σχέδια οχυρώσεων έως τον τρόπο οργάνωσης παραδοσιακών κοινοτήτων. Τέτοιου είδους παραδείγματα είναι η κοινότητα Ba-ilia στη Ζάμπια, στο Καμερούν η πόλη Logone-Birni χτισμένη από τους Kotoko, και στη Γκάνα ο οικισμός των Nankani. Σύμφωνα με τον Eglash (Eglash, ethnomathematician 1989) μέσα από τη Γεωμετρία των Fractals όχι μόνο διαφωτίζονται οι δομές των αφρικανικών σχεδίων, αλλά ακόμα καταφέρνουμε να δούμε τα όρια της κουλτούρας σύμφωνα με την μαθηματική πρακτική.

Η Αφρική, η τρίτη μεγαλύτερη σε έκταση ήπειρος, παρουσιάζει ανομοιογένεια ως προς την κουλτούρα άρα και την αρχιτεκτονική. Ωστόσο, κάποια χαρακτηριστικά επαναλαμβάνονται, όπως συμβαίνει και με τη χρήση των fractals σε διάφορες εφαρμογές. Πιο συγκεκριμένα, ο Eglash αναφέρει fractal δομές τις οποίες διαπίστωσε πως υπάρχουν σε αφρικανικά χωριά. Μέσα από εναέριες παρατηρήσεις και μέσω μετρήσεων επιβεβαιώνεται η fractal διάσταση αυτών των αρχιτεκτονημάτων. Η αρχική υπόθεση ήταν ότι οι δομές αυτές μιμούνταν αυτές της φύσης. Μετά όμως από σχετικές έρευνες προκύπτουν ενδείξεις ότι υπάρχει μια καλύτερη κατηγοριοποίηση των σχεδίων τους. Μάλιστα, στο γνωστικό σύστημα των ιθαγενών της Αφρικής βρέθηκαν στοιχεία αντίστοιχα με τα fractals.

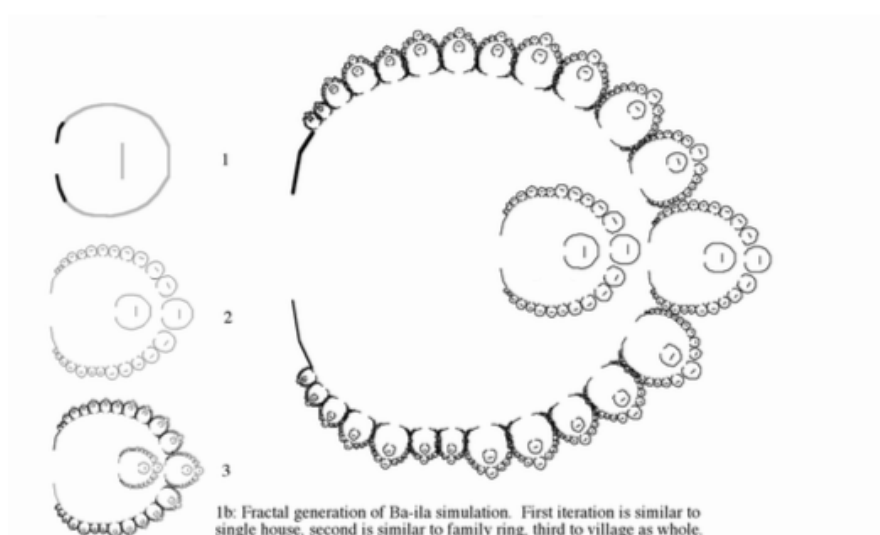
Οικισμός Ba-ilia (Ζάμπια)

Ένα παραδείγματα αρχιτεκτονικής με fractal στοιχεία είναι το χωριό Ba-ilia (Εικ.18). Πρόκειται για έναν οικισμό κυκλικού σχήματος με τα εσωτερικά οικοδομήματα να έχουν την ίδια κυκλική μορφή.



Εικόνα 18. Αεροφωτογραφία του οικισμού Ba-ilia

Τα βασικά γεωμετρικά στοιχεία της δομή του χωριού είναι ένας δακτύλιος ο οποίος περικλείει την κοινότητα και η αύξηση του μεγέθους κάθε εσωτερικού οικοδομήματος. Ξεκινώντας από το εσωτερικό του οικισμού, αρχικά η κάθε οικία έχει κυκλική μορφή και στη συνέχεια περικλείεται από έναν όμοιο δακτύλιο σχηματίζοντας το οικογενειακό δαχτυλίδι. Τέλος, οι δακτύλιοι αυτοί είναι τοποθετημένοι με τέτοιο τρόπο ώστε και το χωριό να έχει το ίδιο κυκλικό σχήμα (Εικ.19). Ο οικισμός έχει το ίδιο σχήμα με τα εσωτερικά κτίσματα, σχηματίζεται δηλαδή ένα δαχτυλίδι από δαχτυλίδια. Η μορφή αυτή που παρουσιάζεται μπορεί να μοντελοποιηθεί με fractals, καθώς τα σχήματα είναι αυτό-όμοια μεταξύ τους.



Εικόνα 19. Fractal μοτίβο στον οικισμό Ba-ila.

1: η οικία, 2: το οικογενειακό δαχτυλίδι, 3: το χωριό σαν ολότητα.

Η διάταξη των κτισμάτων στο εσωτερικό του οικισμού φανερώνει και τον τρόπο διαμόρφωσης της κοινωνίας του. Τα όμοια εσωτερικά κτίσματα βρίσκονται σε διαφορετικές κλίμακες αντανakλώντας έτσι την κοινωνική ιεραρχία του οικισμού.

Πόλη Logone-Birni (Καμερούν)

Η πόλη Logone-Birni, χτισμένη από τους Kotoko του Καμερούν, αποτελεί περίπτωση *αρχιτεκτονικής μέσω προσαύξησης (architecture by accretion)*. Στον οικισμό οι νεότερες περιφράξεις των καταλυμάτων σχηματίστηκαν γύρω από της ήδη υπάρχουσες. Πολλές από αυτές μοιράζονται τοίχους από τα παλαιότερα δώματα.



Εικόνα 20. Αεροφωτογραφία της πόλης Logone-Birni.

Έως ένα βαθμό, η μορφή αυτή της αρχιτεκτονικής αντανakλά τις πατριαρχικές πτυχές της συγκεκριμένης κουλτούρας: ο πατέρας επιθυμεί τα παιδιά του να κατοικούν δίπλα του. Ως εκ τούτου, οι κατοικίες των απογόνων χτίζονταν μοιραζόμενες τοίχους με την κατοικία του γονέα. Παρά το ότι το αποτέλεσμα δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως fractal, το σχέδιο του παλατιού του οικισμού (Εικ.20, δεξιά) εμφανίζει μια ενδιαφέρουσα *κοινωνική κλιμάκωση*.

Οικισμός Nankani (Γκάνα)

Στον οικισμό Nankani τα σπίτια των κατοίκων είναι fractal σειρές κυλίνδρων. Διαμορφώνεται έτσι ένας κύλινδρος από κυλίνδρους, οι οποίοι και γίνονται όλο και μικρότεροι με φορά αντίστροφη από αυτή του ρολογιού. Η fractal διάταξη είναι

συμβολική και δείχνει το πέρασμα πρώτα από τη μητέρα στο βρεφικό δωμάτιο, στη συνέχεια μπουσουλώνοντας το πέρασμα στην αυλή, από εκεί γίνεται η μετάβαση στο χωριό και τέλος από το χωριό σε ολόκληρο τον κόσμο.



Εικόνα 21. Οικία στην κοινότητα Nankani

Στην περίπτωση της κοινότητας των Nankani η δημιουργία των αυτό-όμοιων κύκλων είναι συνειδητή και συμβολική. Η διαδρομή από μέσα προς τα έξω (προς το άπειρο) δείχνει το πέρασμα από τη ζωή στο θάνατο.

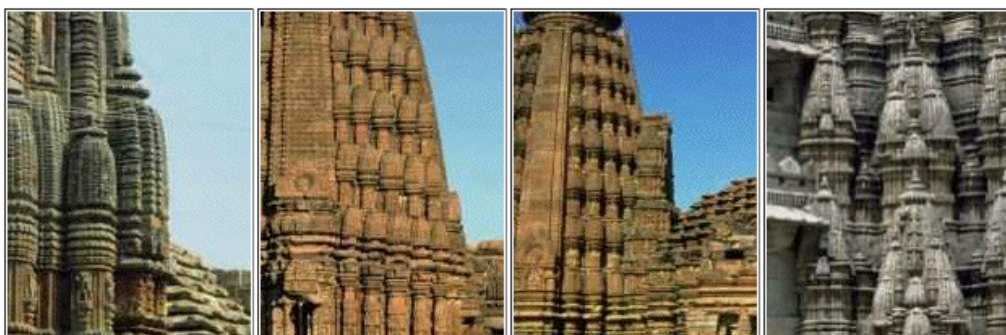
3.1.2. Ινδονησιακή αρχιτεκτονική

Η αρχιτεκτονική της Ινδονησίας αποτελεί μια περίπτωση αρχιτεκτονικής η οποία αντικατοπτρίζει την ποικιλομορφία της κουλτούρας, της ιστορίας και της γεωγραφίας. Σε όλο της το φάσμα είναι επηρεασμένη από τη φιλοσοφία και την κουλτούρα των λαών. Οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των fractals είναι εμφανή σε διάφορες εφαρμογές τόσο σε αρχιτεκτονικά κτίρια, όσο και στη τέχνη τους. Για παράδειγμα, η Batik τέχνη της Ινδονησίας είναι βασισμένη σε φιλοσοφίες οι οποίες συνδέονται με τη μυθολογία και τη θρησκεία. Έχει ως στόχο την αρμονία και γι' αυτό χρησιμοποιεί τη συμμετρία, με το αποτέλεσμα που προκύπτει συχνά μπορεί να χαρακτηριστεί ως fractal. Αντίστοιχα, και σε κάποια παραδείγματα αρχιτεκτονικής (όπως είναι οι Hindu ναοί και ο ναός Borobudum) η φιλοσοφία οδηγεί σε αποτελέσματα όπου κι αυτά με τη σειρά τους περιέχουν fractal χαρακτηριστικά.

Ναοί Hindu

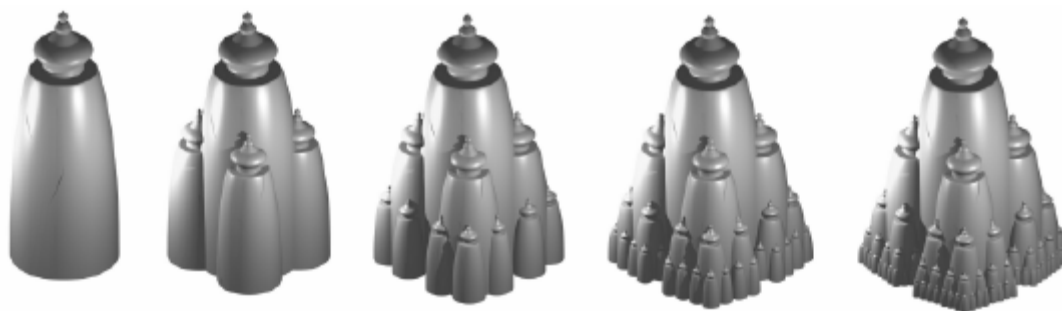
Μια ακόμα αρχιτεκτονική περίπτωση όπου τα τριδιάστατα fractal ασυνείδητα εμφανίζονται, είναι αυτή των Hindu ναών στην Ινδονησία (Trivendi 1989, Portoghesi 2000). Ο William Jackson (2004) ισχυρίζεται πως ολόκληρη η φιλοσοφία του Ινδουισμού έχει έναν καθαρά fractal χαρακτήρα:

«Το σύστημα αυτό είναι ώριμο σαν φρούτο το οποίο έχει εμφανιστεί με συνειδητές πράξεις. Υπάρχει ένα κλαδί ενός δέντρου που περιέχει χιλιάδες τέτοια φρούτα. Υπάρχει ένα δέντρο που περιέχει χιλιάδες τέτοια κλαδιά. Υπάρχει ένα δάσος με χιλιάδες τέτοια δέντρα. Υπάρχει ένα ορεινό έδαφος με χιλιάδες τέτοια δάση. Υπάρχει μια περιοχή που περιέχει χιλιάδες τέτοιες περιοχές. Υπάρχει ένας πλανήτης που περιέχει χιλιάδες τέτοιες περιοχές. Υπάρχει ένα ηλιακό σύστημα που περιέχει χιλιάδες τέτοιους πλανήτες. Υπάρχει ένα σύμπαν με χιλιάδες τέτοια ηλιακά συστήματα. Και υπάρχουν πολλά τέτοια σύμπαντα που περιέχονται μέσα σε αυτό και είναι σαν ένα άτομο μέσα σε ένα άτομο. Αυτό είναι σαν κάτι σαν μία λεπτή ακτίνα η οποία φωτίζει τα πάντα μέσα στον κόσμο. Όλα τα στοιχεία του κόσμου αναδεικνύονται κι αναπτύσσονται μέσα σε αυτή.»



Εικόνα 22. Λεπτομέρειες Hindu ναών

Ο fractal χαρακτήρας των ναών είναι στενά συνδεδεμένος με την κοσμολογία των Hindu. Στη φιλοσοφία του Ινδουισμού ο κόσμος θεωρείται ως ένα ολόγραμμα του οποίου κάθε μέρος από το όλο είναι μία ολότητα από μόνη της και περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες για την ολότητα. Κάποια στοιχεία των Hindu εμμένουν στην άποψη ότι ο μακρόκοσμος εμπεριέχεται ή εσωκλείεται μέσα στον μικρόκοσμο: Ολόκληρος ο κόσμος μπορεί να θεωρηθεί πως περιλαμβάνεται σε μία μικροσκοπική κάψουλα, με τη βοήθεια διακριτικών στοιχείων, τα “tanmatra”. Οι κοσμικές αρχές επαναλαμβάνονται ξανά και ξανά σε όλο και μικρότερες κλίμακες. Ο άνθρωπος περιλαμβάνει μέσα του όλο τον κόσμο (Triverdi, 1989).



Εικόνα 23.

Οι δύο παραπάνω κοσμοθεωρίες είναι ευθέως συνυφασμένες με την αυτό-ομοιότητα των fractals. Η καθολική δομή του κόσμου συμβαίνει ξανά και ξανά μέσα στις μικροδομές. Με σκοπό να υπάρξει μια αρμονική μορφή του κόσμου, τα ανθρώπινα αντικείμενα και οι καλλιτεχνικές εκφράσεις έγιναν σύμφωνα με τις αρχές που διέπουν τη φιλοσοφία των Hindu. Το αποτέλεσμα είναι μια τριδιάστατη fractal αρχιτεκτονική. Η fractal μορφή των Hindu ναών θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε ένα σύνολο τυπικών παρεμβάσεων, όπως:

1. Διάσπαση ή σπάσιμο μιας μορφής κι εν συνεχεία οριζόντια ή κάθετη επανάληψη.
2. Σε κάτοψη σχεδίου ή και σε τριδιάστατη μορφή, η αντικατάσταση των απλών πλευρών από άλλες οι οποίες περιλαμβάνουν εσωτερικές ή εξωτερικές προεξοχές ή κι άλλες λεπτομέρειες.
3. Η τριδιάστατη αυτό-όμοια επανάληψη της κεντρικής σπείρας ενός Hindu τέμπλου.
4. Η οριζόντια ή/και κάθετη επανάληψη όμοιων σχημάτων.
5. Η τριδιάστατη υπέρθεση ενός αρχιτεκτονικού στοιχείου (*“...τα μοτίβα χαράσσονται μέσα σε διαφορετικά μοτίβα και διαφορετικά θεματικά είδη. Στη συνέχεια, τα μοτίβα συμπυκνώνονται κι αντιπαρατίθενται όλα μαζί μέσα σε μια περίπλοκη και νέα οντότητα. (Trivendi, 1988)).*

Ναός Borobudur

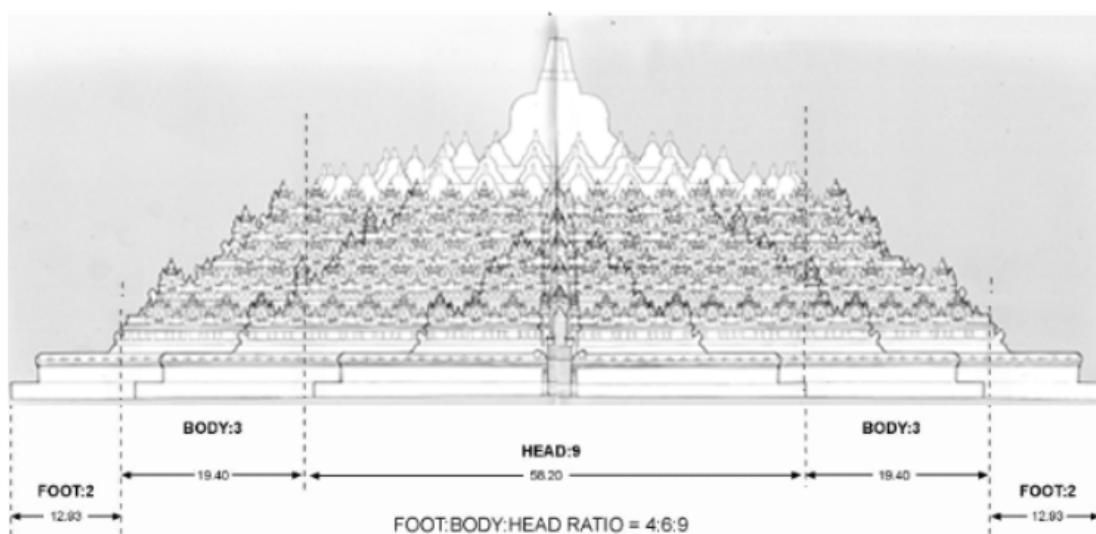
Ένας από τους μεγαλύτερους μύθους ως προς την κατασκευή του ακόμα και στις μέρες μας αποτελεί η περίπτωση του Ινδονησιακού ναού Borobudur. Πρόκειται για ένα Βουδιστικό ναό, ο οποίος χτίστηκε στα πλαίσια της θρησκευτικής παράδοσης.

Με μια γρήγορη ματιά μπορούμε να διακρίνουμε την πολυπλοκότητα της αρχιτεκτονικής του ναού και την αυτό-ομοιότητα την οποία εμφανίζει (Εικ. 24). Το γεγονός αυτό αποτελεί κάτι μοναδικό σε σχέση με άλλα αντίστοιχα θρησκευτικά αρχιτεκτονήματα. Η αυτό-ομοιότητα είναι προφανής στον τρόπο με τον οποίο ένουν κατασκευασθεί τα stupas. Δίνεται η εντύπωση πως η καθολική τριδιάστατη μορφή του ναού είναι ένα μεγάλο stupa, το οποίο αποτελείται από όλο και μικρότερα stupas.



Εικόνα 24. Borobudum

Μελετώντας το ναό ως προς τα μαθηματικά που περιέχει ο αρχιτεκτονικός του σχεδιασμός, διαπιστώνεται πως οι άρτιες μετρήσεις οι οποίες έγιναν για την κατασκευή του, δίνοντας ένα τόσο αξιόλογο αποτέλεσμα, βασίζονται στο μετρικό σύστημα των Javanese (tala system). Το μετρικό σύστημα αυτό αφορά τις ανθρώπινες αναλογίες. Αντίστοιχα, και στο Borobudum συναντάμε τις ίδιες αναλογίες: Head : Body : Foot (9 : 6 : 4) (Εικ. 25).



Εικόνα 25. Οριζόντια αναλογία του ναού 9 : 6 : 4

Ο ναός αποτελεί εφαρμογή των αναλογιών των Javanese, με σκοπό την ύπαρξη της αρμονίας. Η κατασκευή του είναι βασισμένη στην αυτό-ομοιότητα κι έτσι θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως fractal (H. Situngkir).

3.1.3. Αρχαία Ελληνική αρχιτεκτονική

Ο Owen Jones στο έργο *The Grammar of Ornament* (1972) ισχυρίζεται πως τα διακοσμητικά στοιχεία προέρχονται από την παρατήρηση της βαθύτερης δομής της φύσης. Σχετικά με την μορφή των διακοσμητικών στοιχείων στην Αρχαία Ελληνική Τέχνη και Αρχιτεκτονική, αναγνωρίζει πως οι Έλληνες ήταν παρατηρητές της φύσης, και συγκεκριμένα αναφέρει: «Είναι αποδεκτό, πως οι Έλληνες (Αρχαίοι Έλληνες) σχετικά με τα διακοσμητικά τους στοιχεία ήταν στενοί παρατηρητές της φύσης, χωρίς να αντιγράφουν ή να επιχειρούν να μιμηθούν εργάζονται σύμφωνα με τις ίδιες αρχές» (Jones, 1972). Σύμφωνα με αυτή τη σκέψη, η στενή παρατήρηση της φύσης καθοδηγείται από μια fractal ευαισθητοποίηση, αποκαλύπτοντας πως η αυτό-ομοιότητα και η αυτό-συνάφεια (self-affinity) προσφέρει την αρμονία και την ιεραρχική υποδιαίρεση ενός τμήματος σε ένα άλλο.

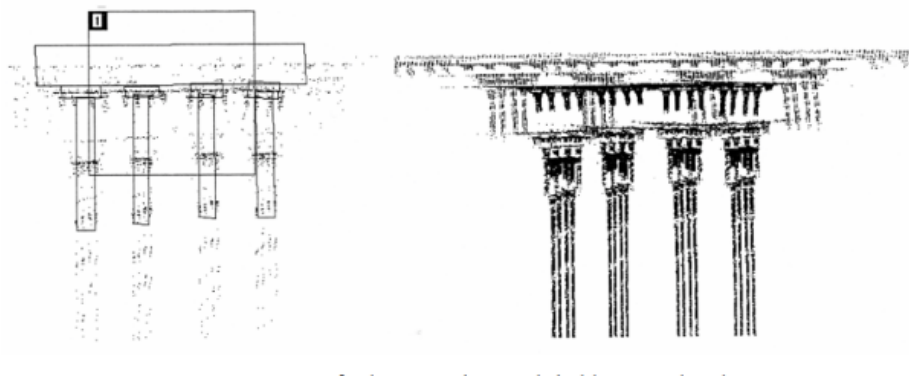
Δωρικός ρυθμός

Στη συνέχεια ο Jones ασχολείται με ένα από τα κυριότερα διακοσμητικά στοιχεία της Αρχαίας Ελληνικής τέχνης και αρχιτεκτονικής, το *δωρικό ρυθμό*. Στην περίπτωση του δωρικού ρυθμού διαπιστώνει σε ευρύ φάσμα την εφαρμογή κάποιων αρχών της φύσης (Jones 1972: 31-37). Η φύση εμφανίζει fractal πολυπλοκότητα, από την όργανωση των γαλαξιών στο διάστημα έως τη δομή των μικροοργανισμών (Mandelbrot, 1982).

Στο δωρικό ρυθμό διακρίνεται μία μορφή αυτό-συνάφειας σε διάφορα επίπεδα. Παρατηρώντας τους δωρικούς ναούς, βλέπουμε πως η πρόσοψη με τους κίονες κατά κάποιο τρόπο επαναλαμβάνεται κάθετα προς τα επάνω. Σύμφωνα με τον Carl Bovill, πρόκειται για κάτι περισσότερο από μία απλή περίπτωση κίωνων οι οποίοι στηρίζουν ένα επιστύλιο. Δεν είναι μόνο η κάθετη μορφή τους και η ένταση όπου τα χαρακτηρίζει, όπως υποστηρίζεται από την Elisabeth Ayrto στο έργο της *The Doric Temple* (Bovill, 2008). Κάθε κίονας με το κιονόκρανο αποτελεί κατά κάποιο τρόπο μια μικρογραφία ολόκληρου του ναού (Bovill, 2008). Αυτό γίνεται

από το μετασχηματισμό ολόκληρου του ναού και της οριζόντιας συστολής κατά πλάτος του κίονος. Ένας δωρικού ρυθμού ναός έχει από δώδεκα έως είκοσι τέσσερις κίονες, με τον πιο συνηθισμένο αριθμό ραβδώσεων να είναι είκοσι. Όπως επισημαίνεται από τον James Curl στο έργο του *Classical Architecture*, στην περίπτωση του Παρθενώνα, με τις είκοσι ραβδώσεις επιτυγχάνεται η πρόσοψη του κίονα να περιέχει οχτώ ραβδώσεις, δηλαδή, ο ίδιος αριθμός του πλήθους των κίωνων της προσόψεως (Bovill, 2008).

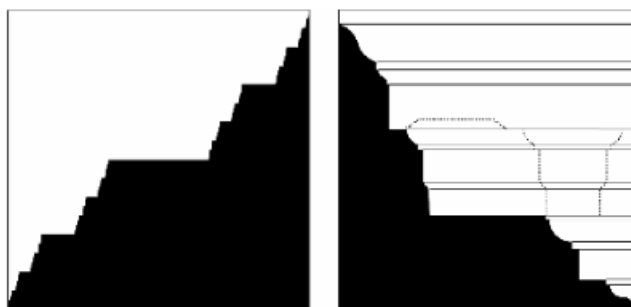
Στο θριγκό, πάνω από το επιστύλιο του ναού βρίσκονται τα τρίγλυφα και οι μετώπες (Εικ. 25). Τα τρίγλυφα με τη σειρά τους παρουσιάζουν κι αυτά μια μορφή αυτό-συνάφειας (self-affine) με το σύνολο της προσόψεως του ναού. Ο αριθμός των ραβδώσεων των τριγλύφων είναι ο ίδιος με τον αριθμό των κίωνων στην πρόσοψη. Ανάμεσα στα τρίγλυφα βρίσκονται οι μετώπες, οι πλάκες οι οποίες γεμίζουν το κενό μεταξύ δύο τριγλύφων. Ο Carl Bovill ισχυρίζεται ότι το κομμάτι αυτό του θριγκού αποτελεί μικρογραφία της προσόψεως του ναού. Εμφανίζεται δηλαδή κι εδώ μία αυτό-ομοιότητα σε διαφορετική κλίμακα και θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ένας fractal απόηχος της προσόψεως.



Εικόνα 26. Πρόσοψη κίωνων Δωρικού ναού

Κατά ύψος των κίωνων, εμφανίζεται ακόμα ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της σχεδίασης. Υπάρχουν πολλαπλές μιμήσεις των ραβδώσεων των κίωνων, οι οποίες και βρίσκονται πάνω από τις κορυφές των στύλων. Σε έναν δωρικό ναό βρίσκονται στο ίδιο σημείο με τα τρίγλυφα οι προμοχθοί και οι σταγόνες. Θα μπορούσαμε κι εδώ να ισχυριστούμε πως τα τρίγλυφα κι εν συνεχεία οι προμοχθοί και οι σταγόνες αποτελούν μία fractal ηχώ του συνόλου του ναού.

Ο Andrew Crompton θέτει το ερώτημα σχετικά με το δωρικό θριγκό: *πως γίνεται ο δωρικός θριγκός, ο οποίος απαρτίζεται από λίγα στάδια (ξεχωριστά τμήματα) και μερικές καμπύλες, να καταφέρνει να δείχνει τόσο καλαίσθητος και φυσικός;* (Crompton, 2002). Σύμφωνα με τον Joye, μια απάντηση στο παραπάνω ερώτημα θα μπορούσε να είναι ότι οφείλεται στα fractal χαρακτηριστικά των περιγραμμάτων και των καμπυλών των θριγκών.



Εικόνα 27. Ο Δωρικός θριγκός (αριστερά) παρουσιάζει αξιοσημείωτη ομοιότητα με το Devil's Staircase (δεξιά).

Πιο συγκεκριμένα, τα στοιχεία αυτά χωρίζονται σε τρία μέρη - το γείσο, τη ζωφόρο και το επιστύλιο - όπου το κάθε ένα από αυτά αποτελείται από άλλα μέρη. Η σύνδεση του δωρικού θριγκού με τα fractals γίνεται ακόμα πιο έντονη μετά την παρατήρηση του Crompton πως ο θριγκός έχει αξιοσημείωτες ομοιότητες με το Devil's Staircase στη Σκωτία. Το οριακό fractal κατασκευάζεται ως εξής: θεωρούμε ένα τετράγωνο πλευράς 1. Στο πρώτο στάδιο, κατασκευάζουμε έναν κίονα στο μεσαίο ένα τρίτο του μήκους, με το πλάτος και το ύψος του κίονα να είναι $1/3$ και $1/2$ αντίστοιχα. Στο επόμενο στάδιο, ανυψώνουμε έναν κίονα ύψους $1/4$ ανάμεσα στο κενό του $1/9$ και $2/9$ κι άλλον ένα ύψους $3/4$ ανάμεσα στο κενό $7/9$ και $8/9$. Στο τρίτο στάδιο, κατασκευάζουμε τέσσερις κίονες ύψους $1/8$, $3/8$, $5/8$, $7/8$. Για κ βήματα, θα κατασκευάζονται 2^{k-1} κίονες με ύψος $1/2^k$, $3/2^k$, ..., (2^{k-1}) . Με την οπτική σύγκριση του Devil's Staircase και του δωρικού θριγκού έρχονται στην επιφάνεια κάποιες αξιοσημείωτες ομοιότητες, οι οποίες αποτελούν αποδείξεις για μία fractal ερμηνεία αυτού του αρχιτεκτονικού στοιχείου (Joye, 2007).

Συνοψίζοντας, θα μπορούμε να πούμε πως και οι Αρχαίοι Έλληνες εμφανίζουν μια fractal φιλοσοφία. Το γεγονός αυτό πιθανόν να προκύπτει από το ότι ήταν παρατηρητές της φύσης. Η fractal αυτή φιλοσοφία εμφανίζεται στις προσόψεις των ναών και καθώς επιχειρούμε να τις αποδομήσουμε συναντάμε τις επαναληπτικές ιδιότητες της *αυτό-ομοιότητας* και της *αυτό-συνάφειας*, χωρίς μεγάλη μαθηματική αυστηρότητα.

3.1.4. Ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική

Η περίπλοκη χρήση αρχιτεκτονικών και διακοσμητικών στοιχείων εμφανίζεται σε διάφορα επίπεδα στο φάσμα της αρχιτεκτονικής των Μεσαιωνικών και των Αναγεννησιακών χρόνων. Τέτοιου είδους παραδείγματα τα συναντάμε περισσότερο σε ναούς. Τα fractal χαρακτηριστικά εμφανίζονται τόσο σε διδιάστατες μορφές (πατώματα, τοιχογραφίες κ.α.) όσο και σε τριδιάστατες.

Μεσαιωνική αρχιτεκτονική

Στους Μεσαιωνικούς Ναούς της Ρώμης, χρονολογούμενοι από τον 11^ο αιώνα, εμφανίζεται ένα συγκεκριμένο σχέδιο πολύ κοντά σε αυτό που σήμερα αποκαλούμε τρίγωνο Sierpinski. Θα αναφέρουμε ορισμένα τέτοια παραδείγματα σε δάπεδα Μεσαιωνικών ναών.

Στη Ρωμαϊκή παράδοση τα μωσαϊκά ήταν μια από τις βασικές μορφές των δαπέδων. Είχαν λειτουργικό χαρακτήρα (για παράδειγμα προσέφεραν προστασία από την υγρασία και το νερό) κι έναν έντονα διακοσμητικό χαρακτήρα. Η μορφή τους ορίστηκε πιο έντονα μετά από τις επηροές που δέχθηκε η Ρωμαϊκή αρχιτεκτονική από την αρχαία Ελλάδα. Την επιμέλεια των πατωμάτων είχαν οι *Marmorari Romani*. Η μορφή του μωσαϊκού βασίζεται στη σύνθεση πλακιδίων σε κυκλικά στοιχεία και σε μπορνούρες-λωρίδες. Τα *πλακίδια* είχαν διάφορα γεωμετρικά σχήματα και δημιουργούσαν μοτίβα και τα *κυκλικά στοιχεία* ήταν κομμάτια δίσκων από τους αρχαίους κίονες.

Παρά το γεγονός ότι δεν είναι γνωστοί με ακρίβεια οι μέθοδοι που ακολουθούσαν οι *Marmorari Romani*, αυτοί είχαν την τάση στις πλακοστρώσεις να χρησιμοποιούν κομμάτια από παλαιότερα κτίσματα. Το γεγονός αυτό οδηγούσε στο διαχωρισμό-κατακερματισμό των μαρμάρων. Δύο είναι οι βασικές συνθετικές μέθοδοι της Ρωμαϊκής και Μεσαιωνικής τέχνης και οι οποίες είναι βασισμένες στη γεωμετρία: η *ad quadratium* και η *ad triangulum*. Και οι δύο είχαν ισχυρές συμβολικές επηροές στους μετέπειτα ρυθμούς. Όπως ο Kim Williams αναφέρει, τα *Cosmati κυματιστά* δάπεδα έχουν μια αίσθηση διάταξης σε διαφορετικά επίπεδα και σε διαφορετικές κλίμακες: ξεκινώντας από τις μεγαλύτερες κλίμακες, το εσωτερικό των ναών διαιρείται με τέτοιο τρόπο ώστε φτάνοντας σε τοπικό επίπεδο να παρατηρούνται στις επιφάνειες συμμετρίες οι οποίες μπορούν να χαρακτηρισθούν αυτό-ομοιότητες (Williams, 1997).

Σε πρώτο στάδιο η *ad quadratum* μορφή (Εικ. 28) αποτελείται από ένα τετράγωνο το οποίο περιγράφεται από ένα άλλο τετράγωνο, με τις κορυφές του πρώτου να βρίσκονται στο μέσο των πλευρών του εξωτερικού τετραγώνου. Σχηματίζονται, έτσι, ένα τετράγωνο και τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Επίσης, το εσωτερικό τετράγωνο έχει στραφεί κατά γωνία $\pi/4$. Αυτό το πρώτο στάδιο επαναλαμβάνεται αναδρομικά σε διάφορες κλίμακες.



Εικόνα 28.
Δεξιά: Δάπεδο στη Santa Maria, Cosmedin,
Αριστερά: SS. Giovanni e Paolo (Ρωμη).

Αντίστοιχα, το πρώτο στάδιο της *ad triangulum* τεχνικής αποτελείται από ένα ισόπλευρο ή ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, το οποίο περιγράφεται από ένα άλλο ισόπλευρο ή ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, αντίστοιχα. Οι κορυφές του εσωτερικού τριγώνου βρίσκονται στο μέσο των πλευρών του εξωτερικού τριγώνου (Εικ. 29). Και εδώ η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται σε διάφορες κλίμακες και τα τρίγωνα που συνεχώς σχηματίζονται είναι όμοια μεταξύ τους.



Εικόνα 29. Sierpinski δάπεδα, Santa Maria, Cosmedin, Ρώμη

Και οι δύο τεχνικές ακολουθούν κανόνες υποδιαίρεσης. Μία ερμηνεία αυτής της μεθόδου θα μπορούσε να είναι πως οι *Marmorari Romani* ήθελαν να έχουν το έλεγχο των διαφορετικών χωρικών κλιμάκων: τα μοτίβα σχεδιάζονταν ως υποδιαίρεσεις κι αυτό τους επέτρεπε, όταν ήταν απαραίτητο, να γεμίζουν με πέτρα διάφορα σημεία (Tedeschini-Lalli, Conversano, 2011). Με αυτόν τον τρόπο, με σωστές υποδιαίρεσεις των τριγώνων μέσα σε τρίγωνα, τότε με ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα και τότε με ισόπλευρα τρίγωνα, προκύπτουν Sierpinski δάπεδα.

Γοτθική αρχιτεκτονική

Στη Δύση, οι fractal ναοί των Hindu (§2.1.2.1) βρίσκουν αντιστοιχία στη Γοτθική αρχιτεκτονική. Από τις απεικονίσεις τέτοιων κτιρίων, μπορεί κάποιος εύκολα να διακρίνει συγκεκριμένες μεθόδους οι οποίες βρίσκονται στις ρίζες των fractals. Πράγματι, οι μέθοδοι αυτοί είναι παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιεί η αρχιτεκτονική των Hindu.



Εικόνα 30. Notre Dame

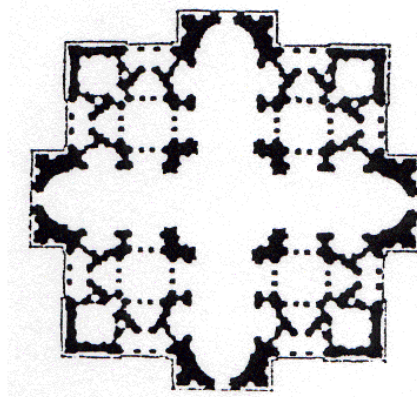
Για παράδειγμα, το σχήμα της βασικής πύλης (Εικ.30) επαναλαμβάνεται σε μικρότερη κλίμακα στις δύο πλευρές της πύλης. Επιπλέον, μικρότερες εκδοχές αυτής της μορφής βρίσκονται σε διαφορετικά τοξωτά παράθυρα ή ανοίγματα. Σε κάποια γοτθικά κτίρια τα παράθυρα χωρίζονται σε τμήματα, όπου το βαμμένο γυαλί με τα λαμπερά πολύχρωμα μοτίβα προσθέτει ακόμη περισσότερες λεπτομέρειες στην πρόσοψη. Η πολυπλοκότητα των γοθικών προσόψεων γίνεται ακόμη πλουσιότερη με την επανάληψη των μορφών. Για παράδειγμα στην περίπτωση του καθεδρικού ναού Notre Dame (Εικ. 30) τα περιγράμματα της βασικής πύλης και των

πλαϊνών πυλών επαναλαμβάνονται. Τα περιγράμματα επαναλαμβάνονται προς το εσωτερικό και περιγράφονται από πλούσιες σκαλιστές φιγούρες. Η κατασκευή αυτή, από την επεξεργασμένη πέτρα κατά αυτό τον τρόπο, αναπτύχθηκε στη γοτθική αρχιτεκτονική με σκοπό να προστατέψει τα παράθυρα από την πίεση του ανέμου.

Οι λόγοι ύπαρξης αυτών των διακοσμητικών κι αρχιτεκτονικών στοιχείων στην περίπτωση των παραπάνω ναών δεν είναι σαφείς. Ωστόσο, μία αρχιτεκτονική ιδέα η οποία οδήγησε σε αυτές τις γοτθικές μορφές, είναι η επίτευξη του μεγαλύτερου δυνατού ύψους με τα λιγότερα υλικά. Έτσι, οι μορφές αυτές μπορεί να είναι αποτέλεσμα των θρησκευτικών αντιλήψεων, αλλά μπορεί και να είναι απλώς η ιδέα των αρχιτεκτόνων, ίσως για χρηστικούς λόγους.

Συνεχίζοντας την διαδρομή στην ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική, συναντάμε πολλά παραδείγματα στα οποία γίνεται υποσυνείδητα χρήση των χαρακτηριστικών των fractals. Ενδεικτικά αναφέρεται και η περίπτωση της Βασιλικής του Αγίου Πέτρου καθώς και κάποιων σχεδίων Βασιλικών του Da Vinci.

Βασιλική του Αγίου Πέτρου

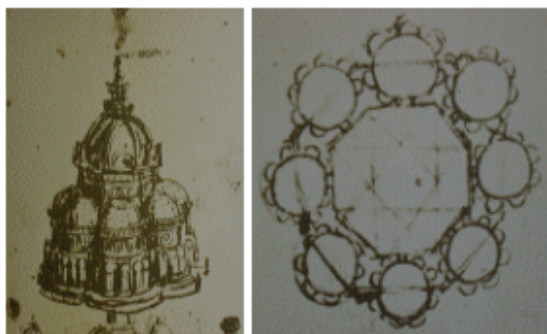


Εικόνα 31.
Κάτοψη της Βασιλικής του Αγίου Πέτρου.

Ο ιστορικός τέχνης G. Hersey επισημαίνει έναν fractal χαρακτήρα στο σχέδιο της Βασιλικής του Αγίου Πέτρου (αρχιτέκτων Bramante, 1506). Σε πολλά βιβλία το σχέδιο περιγράφεται σαν ένας ελληνικός σταυρός με συμμετρικά τοποθετημένους θυγατρικούς θόλους. Με μια καλύτερη παρατήρηση, διαπιστώνεται πως το σχέδιο του Bramante μπορεί να χαρακτηριστεί και fractal, καθώς περιέχει επαναλαμβανόμενες μονάδες σε διαφορετικές κλίμακες.

Σχέδια Βασιλικών του Da Vinci

Σε άλλα σχέδια Βασιλικών του Da Vinci συναντάμε και εκεί ιεραρχικά επίπεδα γύρω από τις Βασιλικές. Δημιουργείται το ερώτημα γιατί ο Da Vinci δημιούργησε υποσυνείδητα fractal σχέδια;



Εικόνα 32. Σχέδια Βασιλικών του Da Vinci

Μια απάντηση στο ερώτημα αυτό θα μπορούσε να είναι πως ο Da Vinci με μεγάλη προσοχή σχεδίαζε άνθη και δίνες νερού κι αυτό τον έκανε να παρατηρήσει την επανάληψη σε διάφορα επίπεδα και τις κλίμακες μέσα στη φύση.

3.1.5. Αρχιτεκτονική των νεότερων χρόνων

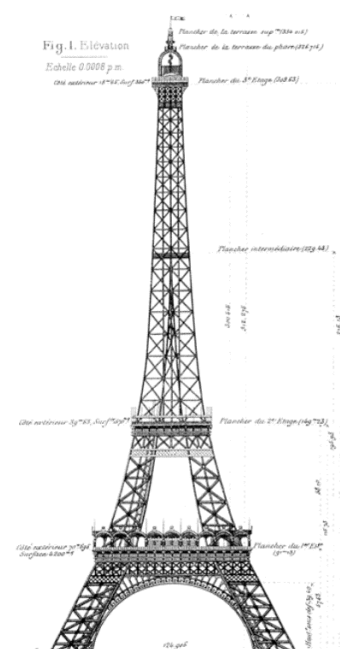
Την ιδέα της μίμησης των ιδιοτήτων της φύσης χρησιμοποιούν με τη σειρά τους και οι αρχιτέκτονες των νεότερων χρόνων. Οι λόγοι για τους οποίους στρέφονται σε τέτοιες τεχνικές και μεθόδους μάλλον αρχίζουν να διαφέρουν από αυτούς του παρελθόντος. Σταματούν να είναι θρησκευτικοί, κοινωνικοί ή μιας γενικότερης φιλοσοφίας απέναντι στον κόσμο (η έμπνευση συνεχίζει να είναι η φύση και οι αρχές που τη διέπουν). Οι αρχιτέκτονες προσπαθούν να δώσουν ένα αισθητικό αποτέλεσμα το οποίο είναι αρμονικό και αυτό ασυνείδητα το επιδιώκουν μέσα από τα χαρακτηριστικά των fractals.

Ο Πύργος του Eiffel

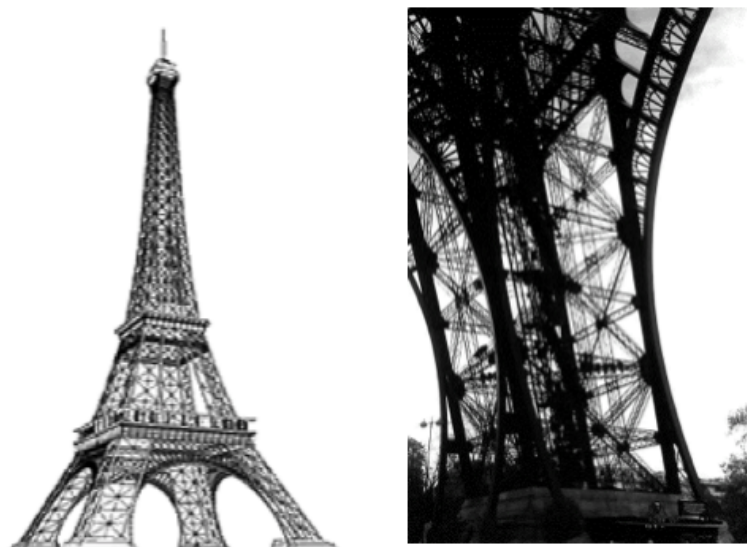
Ο Mandelbrot ισχυρίζεται πως ο πύργος που έχτισε ο Gustave Eiffel στο Παρίσι, ενσωματώνει σκόπιμα την ιδέα μίας fractal καμπύλης μέσα στο χώρο.

«Το γεγονός ότι το κλειδί για τη δύναμη έγκειται στα σημεία διακλάδωσης, το οποίο δόθηκε από τον Buckminster Fuller, ήταν ήδη γνωστό στους κύκλους των σχεδίων των γοθτικών καθεδρικών ναών. Όσο πιο μακριά τον παρατηρήσουμε ως προς αυτή την αρχή, τόσο πιο κοντά φτάνουμε σε μια ιδανική πυραμίδα Sierpinski.» (Mandelbrot, 1982)

Η μορφή του Πύργου του Eiffel θυμίζει σαφώς μια πυραμίδα Sierpinski και οι λόγοι που ακολουθήθηκε η μορφή αυτής της αρχιτεκτονικής είναι κατασκευαστικοί. Στόχος των μηχανικών ήταν να επιτύχουν το μεγαλύτερο δυνατό ύψος του Πύργου χρησιμοποιώντας το λιγότερο κατασκευαστικό υλικό (μέταλλο). Έτσι, ο αρχιτέκτονας κατέληξε στη μορφή αυτού του σχεδίου, όπου τα μεγαλύτερα μεταλλικά πλέγματα αποτελούνται από όλο και μικρότερα μεταλλικά πλέγματα. Η αυτό-όμοια αυτή μορφή δίνει τη δυνατότητα της υψηλής ελαστικότητας του αρχιτεκτονήματος με σχετικά μικρό βάρος.



Εικόνα 33. Πύργος του Eiffel



Εικόνα 34. Πύργος του Eiffel (αριστερά)
Λεπτομέρεια που δείχνει πως προσεγγίζει πυραμίδα Sierpinski (δεξιά)

Ο αρχιτέκτων Frank Lloyd Wright

Ο αμερικανός αρχιτέκτονας Frank Lloyd Wright στις αρχές του 20ου αιώνα σχεδίασε πάνω από 500 κτίρια (πολλά από αυτά παρέμειναν ως σχέδια). Ήταν παρατηρητής της φύσης και τον καθοδηγούσαν τα μοτίβα που τη διέπουν. Καθώς ο Wright δημιούργησε πριν τον φορμαλισμό της Γεωμετρίας των Fractals, η αρχιτεκτονική του δε μπορεί να χαρακτηριστεί επίσημα ως fractal αρχιτεκτονική. Ανήκει στην ομάδα των υποστηρικτών της οργανικής αρχιτεκτονικής². Είναι παρατηρητής της φύσης και εμπνέεται από αυτή, κυρίως από τους μηχανισμούς της. Κατα τη διάρκεια της ζωής του εμπνεύσθηκε από τον Frederic Froebel και τον δάσκαλό του, αρχιτέκτονα Louis Sullivan. Ο Froebel ήταν εκπαιδευτικός, κρυσταλλογράφος και πίστευε πως τα μοτίβα δεν έχουν απλώς αισθητική αξία, *αλλά λαμβάνουν μέρος στην αρμονία*. Αντίστοιχα, ο Sullivan παρήγαγε μία μορφή νατουραλισμού, συνδυάζοντας οργανικά και γεωμετρικά στοιχεία. Ωστόσο, οι διακοσμήσεις του έμεναν στο επίπεδο της επιφάνειας (M. Keane, L. Keane, 2001).

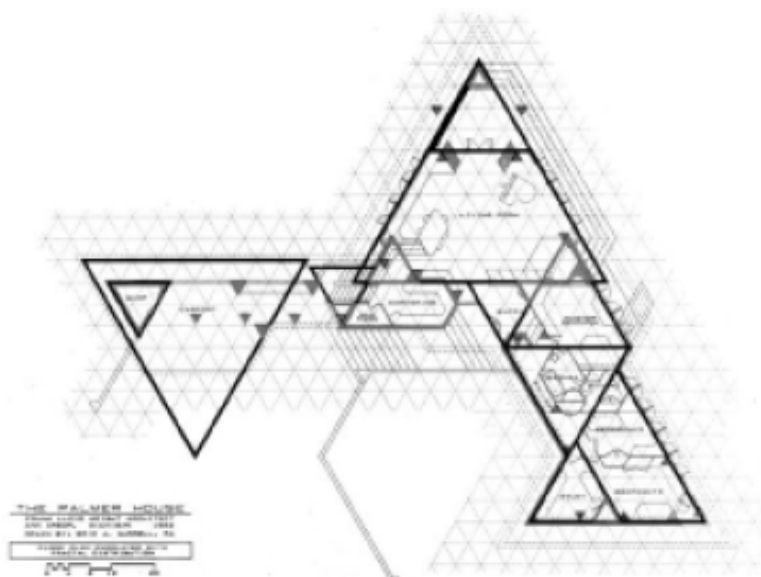
Ο Wright επηρεασμένος από τους Froebel και Sullivan, πίστευε πως είναι αναγκαία η μελέτη της φύσης και θεώρησε πως θα πρέπει να γίνει η βάση για την αρχιτεκτονική. Έτσι, χρησιμοποίησε *τη φύση σαν βάση για τη γεωμετρική αφαίρεση* και είχε ως στόχο να παράγει την γεωμετρία που διέπει τη φύση (Eaton, 1998). Υποστήριζε ότι η *«φύση είναι το μέσο για την ουσιαστική σημαντική ζωή»* και πίστευε πως ο όρος οργανικός προσδιορίζει την εξής σχέση: *«ότι είναι το μέρος για την ολότητα, είναι και η ολότητα για το μέρος κι όλα μαζί έχουν έναν σκοπό...μια τέτοια σχέση επικαλείται τους νόμους της φύσης»* (Meehan, 1987). Οι σχέσεις αυτές είναι και η ουσία των fractal και η βάση των δομών της φύσης (Harris, 2007).

Το τετράγωνο, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το παραλληλόγραμμο, ο κύκλος, η σπείρα και το τόξο κύκλου αποτελούν τα βασικά χαρακτηριστικά των συνθέσεών του. Χρησιμοποιούσε τους αριθμούς, τη γεωμετρία, τις αναλογίες, τα μοτίβα, τη διάταξη και τον προσανατολισμό σε όλο το φάσμα της αρχιτεκτονικής του. Έχοντας τη φύση ως έμπνευση και τη γεωμετρία ως εργαλείο ανέπτυξε αυτό που σήμερα αναφέρεται ως *οργανική αρχιτεκτονική*.

Ένα έργο του Wright, όπου οι παραπάνω σκέψεις περί fractal βρίσκουν εφαρμογή, είναι το Palmer House. Εδώ ο Wright χρησιμοποιεί ένα μοτίβο ως βασικό

² Η οργανική αρχιτεκτονική εμπεριέχει τους μηχανισμούς εκείνους, οι οποίοι διέπουν τις διάφορες φυσικές διεργασίες.

οργανωτικό στοιχείο. Υπό μια έννοια, ένα τέτοιο στοιχείο μπορεί να θεωρηθεί ως δομική μονάδα του κτιρίου (π.χ. ένας κύκλος). Αρχικά, η γεωμετρία από την οποία διέπεται αυτού του είδους αρχιτεκτονική δημιουργήθηκε από μοτίβα, παραμένοντας ευκλείδεια. Στην περίπτωση του Palmer House αυτά τα δομικά στοιχεία είναι τοποθετημένα με τέτοιο τρόπο ώστε να δίνουν στο κτίριο μια αξιοσημείωτη fractal οργάνωση. Δίνεται ένα γεωμετρικό μοτίβο - ένα ισόπλευρο τρίγωνο - και αυτό επαναλαμβάνεται στην κάτοψη του σχεδίου έως και σε επτά διαφορετικές κλίμακες.



Εικόνα 35. Palmer House (F. L. Wright, 1950)

Ο Eaton υποστηρίζει πως η μορφή της κάτοψης του Palmer House αποτελεί fractal και σημειώνει: “[...] παρουσιάζει επαναλήψεις όμοιων γεωμετρικών μονάδων κι όχι προσεγγίσεις, οι οποίες αποκλείουν σε διαφορετικά μεγέθη” (Eaton, 1998). Με τον όρο όμοια γεωμετρικά σχήματα ο Eaton φαίνεται να θεωρεί ως fractal μόνο ότι είναι αυστηρά αυτό-όμοιο. Υποστηρίζει επίσης πως στην περίπτωση του Palmer House η fractal μορφή είναι αποτέλεσμα ενός *συγκεκριμένου* και *συνειδητού* σχεδίου (Eaton, 1998).

Ο H. James δημιούργησε μια fractal μορφή παρόμοια με την κάτοψη του σχεδίου του Palmer House (Εικ. 36). Στην πρώτη επανάληψη, το αρχικό σχήμα φαίνεται με πιο σκούρο γκρι χρώμα και οι τρεις μεταμορφώσεις με πιο ανοιχτό γκρι. Στη δεύτερη και τρίτη επανάληψη το αρχικό σχήμα βγαίνει εκτός και οι επαναλήψεις χρωματίζονται με τρεις διαφορετικές αποχρώσεις του γκρι (H. James, 2007).



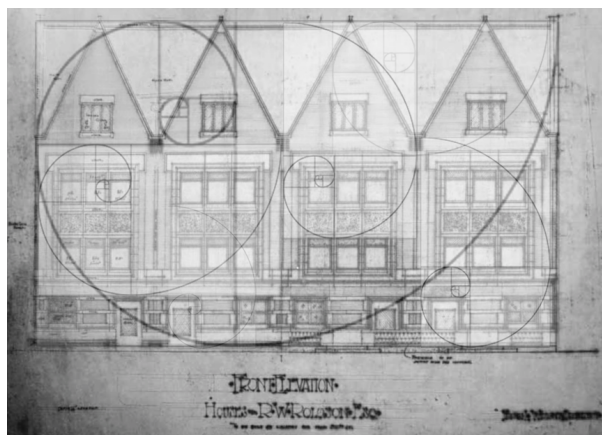
Εικόνα 36. H. James, 2007

Ο Wright στο έργο του Town Hall (Εικ. 37) εφαρμόζει για μια ακόμα φορά γεωμετρικά στοιχεία τα οποία μπορούν να χαρακτηρισθούν fractal. Στην περίπτωση του Town Hall, πάνω από κάθε τόξο υπάρχει κι από ένα άλλο τόξο, το οποίο είναι και μικρότερο από το προηγούμενό του. Δίνεται έτσι στη δομή μία αυτό-ομοιότητα, η οποία εμφανίζεται έως και σε πέντε ιεραρχικά στάδια. Ο Portoghesi μάλιστα θεωρεί πως οι δομές αυτές έρχονται πολύ κοντά στο σύνολο Cantor (Portoghesi, 2000).



Εικόνα 37. Fractal διάταξη των τοξωτών ανοιγμάτων, Town Hall, F. L. Wright

Ένα ακόμα παράδειγμα της φιλοσοφίας του Wright, η οποία διέπεται από τις παραπάνω αρχές, είναι και το έργο του *Roloson Row Houses*. Πρόκειται για τέσσερα σπίτια στη σειρά, τα οποία κρύβουν πολλές μαθηματικές πληροφορίες. Το συγκρότημα περιέχει πολλά αυτό-όμοια μοτίβα σε σύνολα των τριών. Καθώς ο Wright, όπως ήδη αναφέρθηκε, καθοδηγούνταν από τις αρχές της φύσης έδειχνε ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε περίπλοκα οργανικά σχήματα, όπως για παράδειγμα το σχήμα του κέλυφους σαλιγκαριού και το εφάρμοσε με άξονα την χρυσή τομή κρύβοντας κλιμακωτές λογαριθμικές σπείρες.



Εικόνα 38. Roloson Row Houses, F. L. Wright, 1894

Η συστηματική παρακολούθηση της φύσης από τον Wright ήταν έντονη κι ο L. K. Eaton υποστηρίζει ότι είναι πιθανό ο Wright μέσα από το έργο του να προδιαγράφει νέα μαθηματικά (τη Γεωμετρία των Fractals).

3.2. Σχέσεις μεταξύ Αρχιτεκτονικής και Fractal Γεωμετρίας στα τέλη του 20^{ου} αιώνα

Μετά την επίσημη παρουσίαση της γεωμετρίας που διέπει τη φύση από τον Mandelbrot, οι αρχιτέκτονες εμπνέονται από τα fractals και επιχειρούν συνειδητά πλέον την ένταξη τους στις αρχιτεκτονικές συνθέσεις. Παραδείγματα κτιρίων τα οποία εμφανίζουν fractal μορφές έχουν παρουσιαστεί τόσο από αρχιτέκτονες όσο κι από μαθηματικούς, πριν την εμφάνιση της Γεωμετρίας των Fractals. Τα κτίρια αυτά, συμπεριλαμβανομένων των *Hindu ναών*, *Μεσαιωνικών κτιρίων*, καθώς κι έργων του *Frank Lloyd Wright* δε μπορούν να θεωρηθούν συνειδητώς κατασκευασμένα fractal σχέδια, ακόμη κι αν αυτά εμφανίζουν μια fractal ιδέα. Είναι φανερό ότι αρχή της συνειδητής fractal αρχιτεκτονικής δε θα μπορούσε να συμβεί πριν από τη θεμελίωση της Γεωμετρίας των Fractals από τον Benoit Mandelbrot στη δεκαετία του 70.

Ο Mandelbrot στην εισαγωγή του βιβλίου του (*The Fractal Geometry of Nature*) περιλαμβάνει μία συζήτηση σχετικά με τα διάφορα αρχιτεκτονικά είδη, ώστε, να γίνει διαφοροποίηση μεταξύ της Ευκλείδειας γεωμετρίας και της Γεωμετρίας των Fractals. Στη συζήτηση αυτή υποστηρίζει πως «στα πλαίσια της

αρχιτεκτονικής, ένα Mies van der Rohe κτίριο (Εικ. 39) είναι ένα πισωγύρισμα στον Ευκλείδη, καθώς για μεγάλη περίοδο τα καλλιτεχνικού τύπου κτίρια είναι πλούσια σε fractal πτυχές» (Mandelbrot, 1982). Στο σημείο αυτό, παρά το ότι δεν είναι πρώτη φορά που επιχειρείται από επιστήμονες και μαθηματικούς, οι οποίοι ασχολούνται με τις επιστήμες της πολυπλοκότητας, να διερευνήσουν τα αρχιτεκτονικά πεδία, είναι η πρώτη φορά όπου ξεκάθαρα αναγνωρίζεται η προσπάθεια συνδυασμού και σύνδεσης της αρχιτεκτονικής με τη Γεωμετρία των Fractals.



Εικόνα 39. Mies van der Rohe κτίριο.
Διέπεται από τις αρχές της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

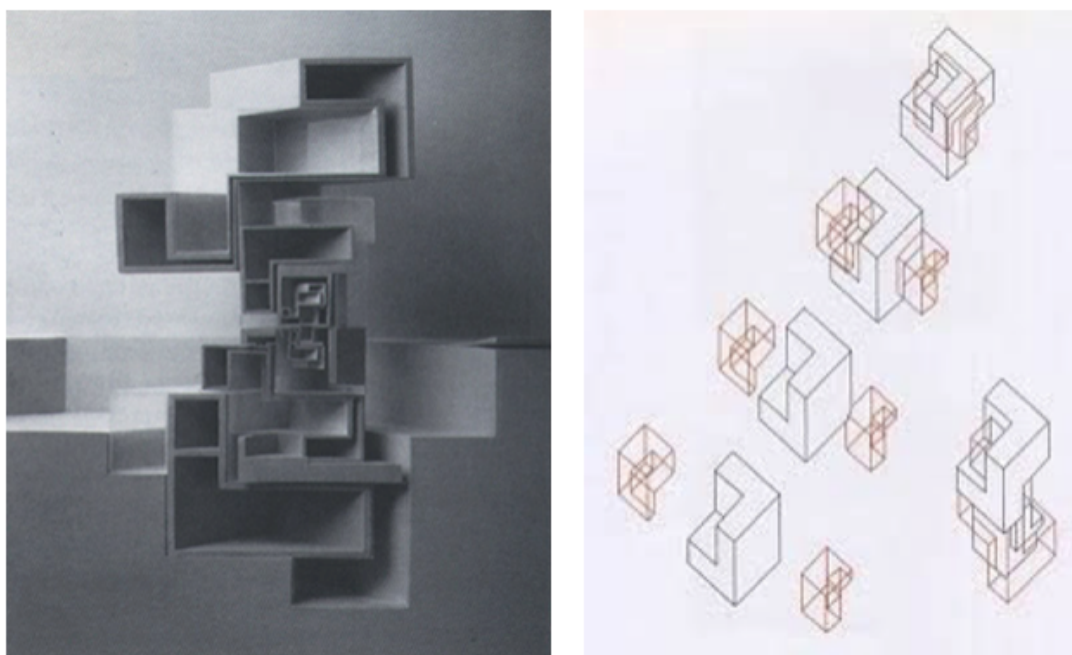
Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένα παραδείγματα τέτοιας αρχιτεκτονικής, όπου η χρήση της Γεωμετρίας των Fractals από τους αρχιτέκτονες γίνεται συνειδητά.

Ο αρχιτέκτων Peter Eisenman

Σε λιγότερο από δύο μήνες από την κυκλοφορία της αγγλικής έκδοσης του έργου του Mandelbrot, ο αρχιτέκτων Peter Eisenman παρουσιάζει το *House 11a*. Λίγες εβδομάδες αργότερα, τον Ιούλιο του 1978, το House 11a γίνεται κεντρικό θεματικό μοτίβο στη σχεδιαστική παραγωγή του Eisenman κατά τη διάρκεια του σχεδιαστικού σεμιναρίου Cannaregio στη Βενετία (Bidard 1994). Αν και το πρότζεκτ αυτό δεν δημοσιοποιήθηκε μέχρι τον Απρίλιο του 1980, παρ'όλα αυτά επισημαίνει την πρώτη

ευρέως δημόσια προσπάθεια από έναν αρχιτέκτονα της σύνδεσης με την ιδέα της θεωρίας της πολυπλοκότητας.

Συγκεκριμένα, ο Eisenman επιχείρησε μια fractal μορφή. Ακολούθησε μια διαδικασία, την οποία ο ίδιος περιγράφει φιλοσοφικά ως το αποτέλεσμα «τριών εννοιών: της ασυνέχειας (*discontinuity*), η οποία μας φέρνει αντιμέτωπους με μία μεταφυσική παρουσία, της αναδρομικότητας (*recursivity*), η οποία αφορά την προέλευση και την αυτό-ομοιότητα (*self similarity*), η οποία συνδέεται με την επανάληψη και τα *aesthetic αντικείμενα*» (Eisenman, 1988). Αργότερα, σε έκθεση του Eisenman αναφέρεται ότι υπάρχουν σημεία *L*, τα οποία συνδυάζουν μορφές σύνθετων περιστροφών (*complex rotational*) και κατακόρυφων συμμετριών. Το σημείο *L*, ουσιαστικά, πρόκειται για ένα τετράγωνο που έχει διαιρεθεί σε τεταρτημόρια και στη συνέχεια έχει αφαιρεθεί ένα τεταρτημόριο.

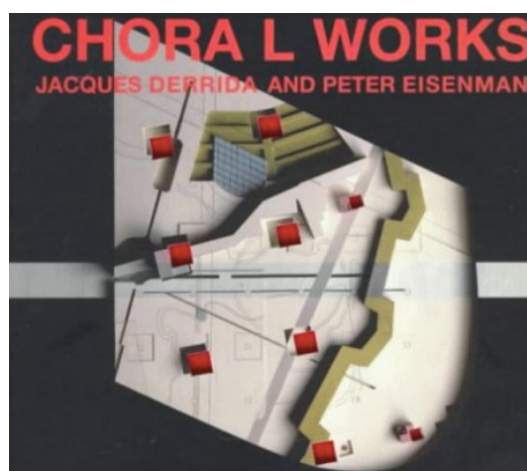


Εικόνα 40. House 11a (δεξιά). Δυναμική κατασκευή του House 11a (αριστερά).

Ο Eisenman βλέπει αυτό το *L*-μορφής αποτέλεσμα ως ένα τρόπο συμβολισμού μιας ασταθούς κατάστασης, το οποίο δεν είναι ούτε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ούτε ένα τετράγωνο. Στην τρισδιάστατη μορφή πρόκειται για έναν κύβο, ο οποίος αφαιρείται από έναν ολόκληρο κύβο. Εδώ, δημιουργείται ένα *L*

στις τρεις διαστάσεις. Σύμφωνα με τον αρχιτέκτονα, κάθε *L* αναπαριστά μία εκ φύσεως ασταθή γεωμετρία, μια μορφή η οποία αμφιταλαντεύεται μεταξύ περισσότερο σταθερών ή καθολικών φιγούρων. Στην περίπτωση του House 11a οι τρύπες των δυο αρχικών *L* συνδυάζονται ώστε να παράγουν σκοπύμως ένα μικρότερης κλίμακας αντικείμενο. Το αντικείμενο αυτό, εν συνεχεία, θα μπορούσε να αναπαραχθεί σε οποιοδήποτε μέγεθος (Eisenman, 1988).

Ίσως το αποκορύφωμα της γοητείας της fractal αρχιτεκτονικής του Eisenman είναι το πρότζεκτ Choral Works, σχεδιασμένο με τη βοήθεια του φιλοσόφου *Jacques Derrida*.

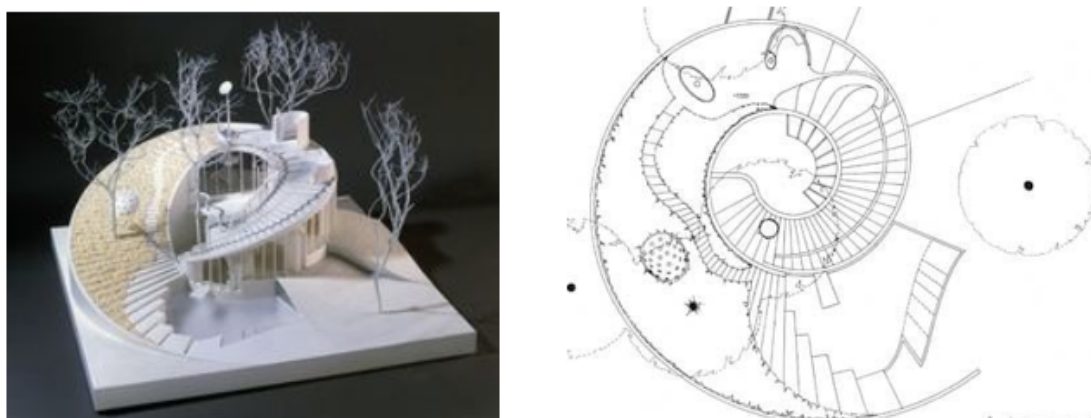


Εικόνα 41. Chora L Works

Στο Choral Works, ο Derrida εμπνέεται από τον Τίμαιο του Πλάτωνα και το συνδυάζει παίζοντας με το Chora, Chora L, Choral κτλ, ώστε να δημιουργήσει ένα παράδειγμα fractal μορφής. Σε κάποια από τις περιγραφές του ο Derrida σημειώνει πως οι δυαδικές σχέσεις θα πρέπει να έχουν ιεραρχία και περιστροφή. Το αποτέλεσμα είναι ο παράγοντας, ο οποίος κατά παράδοση θεωρείται ελλάσσονος σημασίας, να κατέχει δεσπόζουσα θέση. Κάτι τέτοιο οδηγεί στην απουσία της βεβαιότητας και στην εκ νέου αξιολόγηση του συστήματος του συνόλου (Cruickshank, 2010).

Ushida and Findlay

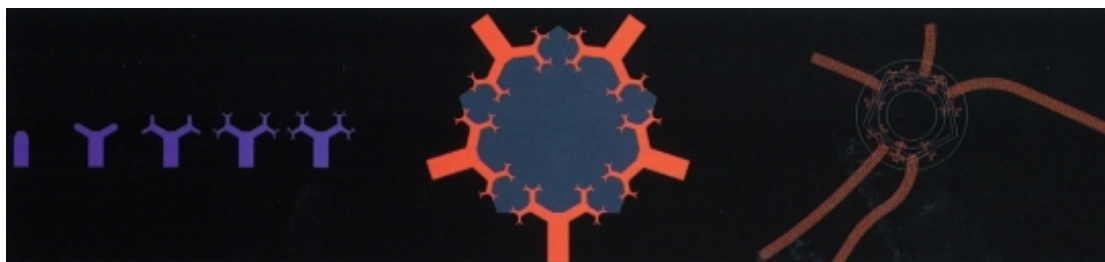
Κατά τη διάρκεια του 1990 η ομάδα των αρχιτεκτόνων των Ushida και Findlay ανέπτυξε μια σειρά από υψηλής εφευρετικότητας πρότζεκτ κάνοντας χρήση της χρυσής τομής και της fractal γεωμετρίας - συχνά σε συνδυασμό αυτών των δύο - ώστε να παραχθούν δυναμικές τυχαίες μορφές. Εφαρμογές των ιδιοτήτων της Γεωμετρίας των Fractals από τους Ushida Findlay γίνονται, μεταξύ άλλων, στα έργα τους House for the Third Millenium, Kirishima Sculpture και Housing Prototype.



Εικόνα 42. The House of The Third Millennium, Ushida Findlay

Τα έργα αυτά βασίζονται στη χρησθή τομή κι εκ πρώτης όψεως μπορούν να χαρακτηρισθούν ως “επιπόλαια” fractals. Ωστόσο, ο Yannick Joye υποστηρίζει πως κάτι τέτοιο είναι fractal. Είναι αποτέλεσμα μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας και γεμίζει το επίπεδο με κάτι παραπάνω από μία γραμμή (Joye, 2007). Απουσιάζει όμως από αυτό η διαφοροποίηση των μεγεθών των ομοίων μορφών.

Το S Project, ένα αστικό σχέδιο, παρουσιάζει τη Fractal Γεωμετρία με έναν ιδιαίτερος επιτακτικό τρόπο. Το σχέδιο διερευνά την ιδέα “city as house”, μία ιδέα η οποία προέκυψε από την συνειδητοποίηση ότι τα φυσικά συστήματα παρουσιάζουν παρόμοια μοτίβα σε διαφορετικά μεγέθη.



Εικόνα 43. Η γεωμετρία των fractals εμπνέει τον σχεδιασμό του πάρκου.



Εικόνα 44. S Project, Ushida and Findlay

Στο S Project οι Ushida and Findlay επιχειρούν να προτείνουν ένα fractal δίκτυο. Το δίκτυο αυτό περιλαμβάνει ένα σύστημα από “flow and clustering” τα οποία λειτουργούν ταυτόχρονα σε διαφορετικές κλίμακες. Αποτελείται από τέσσερις δρόμους οι οποίοι ξεκινούν από το ίδιο σημείο και στη συνέχεια μέχρι και το τέλος τους διακλαδώνονται. Οι Ushida and Findlay συνδέουν το πρότζεκτ αυτό με τη θεωρία του χάους, καθώς ο στόχος είναι το πάρκο να μπορεί να φιλοξενήσει πολλά άτομα, τα οποία έχουν τη δυνατότητα να κινούνται μέσα στην πόλη (Ushida and Findlay, 1996). Περιγράφουν το έργο τους ως ένα όχημα. Το όχημα αυτό έχει σχεδιαστεί ώστε να φιλοξενήσει κατά κάποιο τρόπο την *κίνηση Brown* για τα άτομα, τα αυτοκίνητα, τα τρένα και τις πληροφορίες. Το αποτέλεσμα είναι ένα νέο πεδίο -

ένα είδος τοπογραφίας με δυναμικές ομοιότητες σε διάφορες κλίμακες (Ostwald, 1998). Θα πρέπει να σημειωθεί πως στα συγκεκριμένα παραδείγματα η αρχιτεκτονική δεν είναι τα κτίρια τα οποία είναι fractals, αλλά ο τρόπος οργάνωσή τους μέσα στο χώρο ή η τοποθεσία τους η οποία ακολουθεί fractal μοτίβα.

3.3. Μια ψυχολογική-νευρολογική προσέγγιση

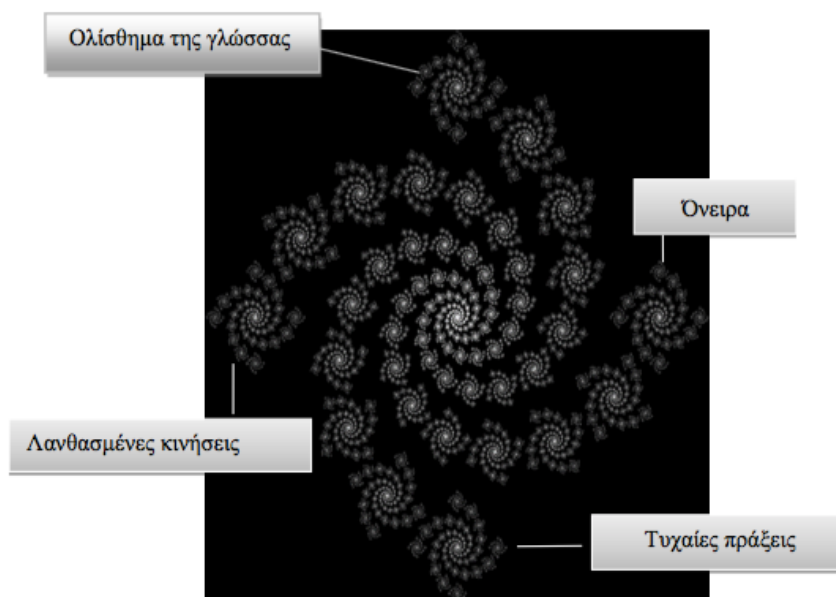
Μετά από την “διαδρομή” μέσα στους αιώνες και τα διάφορα παραδείγματα fractal αρχιτεκτονικής γίνεται μια προσπάθεια να προχωρήσουμε σε βάθος στα *αίτια* που οδήγησαν σε αυτής της μορφής τις δομές, *αλλά* και την *προσφορά* των fractals στην αρχιτεκτονική. Όπως αναφέρθηκε, η αρχιτεκτονική είναι η τέχνη της ικανοποίησης των ανθρωπίνων αναγκών στο χώρο μέσω του σχεδιασμού. Αποτελεί δηλαδή το μέσο της έκφρασης των αναγκών και των ιδεών ώστε να υλοποιηθούν τα διάφορα αρχιτεκτονήματα (κτίρια, γέφυρες κτλ). Μέσα από την ιστορική αναδρομή διαπιστώνεται ότι σε πολλές περιπτώσεις οι διάφορες κατασκευές διέπονται από τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των fractals. Στα παραδείγματα τέτοιας αρχιτεκτονικής η χρήση των fractals, συνειδητά ή ασυνείδητα, οι λόγοι διαφέρουν. Η χρήση τους όμως δεν είναι τυχαία καθώς στη μια και στην άλλη περίπτωση (συνειδητής και ασυνείδητης χρήσης των fractals) αυτά κυριαρχούνται από κάποια αιτία ή φιλοσοφία γενικότερα.

Στο σημείο αυτό, ισχυριζόμαστε πως οι λόγοι αυτών των μορφών των κτιρίων, των διακοσμητικών στοιχείων, των εξωτερικών χώρων και των οικισμών είναι βαθύτεροι. Είναι η ανθρώπινη φύση η οποία οδηγεί σε αυτά τα αρχιτεκτονικά αποτελέσματα. Είναι ο τρόπος σκέψης και η λειτουργία του μυαλού που τα καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό.

3.3.1. Το ασυνήδειτο, το συνειδητό και η σχέση με τα fractals

Η λέξη *ασυνείδητο* χρησιμοποιείται συχνά για να υποδηλώσει το σύνολο των περιεχομένων που δεν είναι παρόντα στο ενεστώς σημείο της συνειδήσεως (Αναγνωστοπούλου, Ευαγγελάτου-Δάλλα, Κουλτούκη, 2015). Το ασυνείδητο από μόνο του παραμένει άγνωστο: μπορούμε να το συλλάβουμε μόνο στα παράγωγά

του ώστε να παραπεμφθούμε στις πηγές και σε εκείνη την ασυνείδητη επιθυμία η οποία δίνει ψυχή στη ζωή μας (Nasio, 2010). Από την άλλη, με τον όρο συνειδητό αναφερόμαστε σε ότι γίνεται με επίγνωση και σκόπιμα. Είναι το τμήμα του ψυχικού κόσμου που βρίσκεται υπό τον έλεγχο της συνειδήσεως. Συνεπώς, οι συνειδητές ενέργειες είναι αποτέλεσμα λογικών και σκέψεων μετά από επίγνωση και σκοπιμότητα. Το Εγώ αποτελείται από το συνειδητό και το ασυνείδητο. Στο άρθρο τους οι Αναγνωστοπούλου, Ευαγγελατου-Δάλλα και Κουλτούκη (2015) υποστηρίζουν πως το Εγώ έχει μια fractal μορφή. Αποτελεί δηλαδή ένα fractal, όπου το συνειδητό και το ασυνείδητο ακολουθούν τις ιδιότητες της αυτό-ομοιότητας και δημιουργούν μια σπείρα (Εικ. 45). Εδώ το μοτίβο της σπείρας επαναλαμβάνεται σε κλίμακες στο διηνεκές ως τμήμα και ως όλον.



Εικόνα 45. Η σπείρα του Εγώ

Οι ψυχολόγοι της Gestalt θέλοντας να δώσουν έμφαση στην δυναμική αλληλεπίδραση του μέρους και του όλου, εστιάζουν στην οπτική αντίληψη. Έχουμε την τάση να αντιλαμβανόμαστε τα οπτικά δεδομένα με οργανωμένο τρόπο και όποια στοιχεία μοιάζουν να τα θεωρούμε “ένα”, να πλησιάζουν μεταξύ τους ή να τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε το ένα να φαίνεται ως συνέχεια του άλλου (Detrie, 2002). Οι θεωρητικοί της Gestalt πιστεύουν σε μία αισθητική διάσταση της εγγενούς διάταξης της φύσης. Η φύση είναι ένα σύστημα υψηλού επιπέδου πολυπλοκότητας και διάταξης. Είμαστε συνδεδεμένοι με το σύστημα αυτό με τρόπο

ακούσιο μέσω του υποσυνείδητου, καθώς και με τη συνειδητή κατανόηση. Με το γεγονός ότι αποτελούμε μέρος της φύσης είναι λογικό ότι είμαστε φτιαγμένοι ώστε να εκτιμούμε τα θεμέλια της φύσης (Detrie, 2002). Ο κόσμος που δομούμε αποτελεί ένα εναλλακτικό περιβάλλον κι έτσι υπάρχει εγγενώς η σύνδεση του φυσικού και του δομημένου κόσμου.

Ο Jean Piaget, ο ιδρυτής της γνωστικής αναπτυξιακής ψυχολογίας, ανέπτυξε τη θεωρία του βασιζόμενος σε τρεις ιδιότητες: *wholeness*, *transformation*, *self regulation*. Η *wholeness*, αναπτύσσεται από στοιχεία τα οποία υπόκεινται σε νόμους και μέσα σε αυτούς τους νόμους ορίζεται η ολότητα. Transformations είναι οι νόμοι οι οποίοι διέπουν τις δομές που συνθέτουν την ολότητα και βασίζονται στις καθολικές ιδιότητες της ολότητας. Self-regulation είναι η έννοια σύμφωνα με την οποία οι transformations τείνουν να αναπτύσσουν στοιχεία που ανήκουν στην όλη δομή και διατηρούν τους νόμους της (Harris, 2007). Όλοι αυτοί οι νόμοι φέρουν τα χαρακτηριστικά ενός ΣΕΣ (IFS) fractal.

Ο Field, αναζητώντας τις μαθηματικές πληροφορίες μέσα στο οπτικό πεδίο ενός φυσικού και ενός αφύσικου περιβάλλοντος βρίσκει στις φυσικές εικόνες fractal ιδιότητες. Επίσης, και ο Taylor με τους συνεργάτες του κάνουν αναφορά στις fractal ιδιότητες των εικόνων του φυσικού περιβάλλοντος και επισημαίνουν την προτίμηση των ιδιοτήτων αυτών στα ανθρώπινα κατασκευάσματα (Cheun, Wells, 2004). Επιπλέον, οι Olhausen και Field υποστηρίζουν ότι τέτοιου είδους ιδιότητες μπορεί να προσφέρουν πληροφορίες σχετικά με το ανθρώπινο νευρολογικό σύστημα. Ο Hughes, αντίστοιχα, σημειώνει πως υπάρχει σχέση μεταξύ της μαθηματικής δομής των προτιμώμενων και ευεργετικών ερεθισμάτων, σε ότι έχει να κάνει με νευρολογικές και φυσιολογικές λειτουργίες. Στο έργο του, σχετικά με τη δομή των ακουστικών ερεθισμάτων, αναφέρεται επίσης στη σημασία των fractal χαρακτηριστικών (όπως για παράδειγμα, την αυτό-ομοιότητα και την περιοδικότητα) και στην επικράτηση αυτών μέσα στο φυσικό περιβάλλον (Cheun, Wells, 2004).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ανθρώπινη φύση μας είναι συνυφασμένη με τα fractals. Ως εκ τούτου, η θετική στάση απέναντι σε τέτοιες δομές και μορφές σε ένα ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων είναι φυσική. Λόγω της ανθρώπινης φύσης, αναζητούμε τα fractal χαρακτηριστικά και αισθανόμαστε ομορφότερα όταν μας περιβάλλουν.

3.3.2. Περιβαλλοντολογικοί ψυχολόγοι και Βιοφιλικό περιβάλλον

Καθώς κινούμαστε προς την βιωσιμότητα και την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η ανθρώπινη ζωή συνδέεται με τον οικοσύστημα, ξεπερνάμε τις μηχανιστικές αντιλήψεις³. Κάτι τέτοιο συμπίπτει και με την αντίληψη των Αρχαίων Ελλήνων σχετικά με τη γεωμετρία η οποία βρίσκεται στις ζωτικές βάσεις. Στην άποψη αυτή, απόδειξη αποτελεί το γεγονός πως στα φυσικά και δομικά περιβάλλοντα η γεωμετρία είναι υπεύθυνη σε μεγάλο βαθμό για την ποιότητα της ζωής (Salingaros, 2010). Συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της φύσης και των δομών των οργανισμών, όπως για παράδειγμα η fractal κλίμακα (αυτό-ομοιότητα), οι συμμετρίες οι οποίες οδηγούν σε πολυπλοκότητα, καθώς και τα δομικά μοτίβα εμφανίζονται ακόμη και στις πιο ασήμαντες δομές. Φαίνεται να είναι αυτές που συνδέουν το σώμα με το περιβάλλον. Μια ποιοτική ζωή προέρχεται σε μεγάλο βαθμό από την επαφή με τη φύση και από διαδικασίες οι οποίες μας φέρνουν σε επαφή με αυτή.

Οι Περιβαλλοντολογικοί ψυχολόγοι (Environmental psychologists) αναγνωρίζουν πως το περιβάλλον επηρεάζει όχι μόνο στον τρόπο σκέψης μας, αλλά και στην πνευματική μας ανάπτυξη. *Οι διατεταγμένες μαθηματικές πληροφορίες μέσα στο περιβάλλον παράγουν θετικά συναισθήματα.* Μάλιστα υποστηρίζουν πως αν βρισκόμασταν σε ένα καθαρά μη-μαθηματικό περιβάλλον αυτό θα επηρεάζε το ενδιαφέρον μας για τα μαθηματικά και την ικανότητα να κατανοούμε τις μαθηματικές έννοιες. Στο σημείο αυτό γεννάται το ερώτημα: *πως θα μας επηρέαζε αντίστοιχα ένα περιβάλλον φτωχό σε μοτίβα;* Παρά το ότι δεν υπάρχει απάντηση σε αυτό, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας πως η απουσία των μοτίβων είναι πιθανό να επηρεάζε την λειτουργία του ανθρώπινου μυαλού. Τα μοτίβα μέσα στο χρόνο είναι απαραίτητα για την ανθρώπινη πνευματική ανάπτυξη. Η καθημερινή δραστηριότητα οργανώνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ακολουθεί τους ρυθμούς της φύσης και τα περιοδικά φαινόμενα μας κυριεύουν, (για παράδειγμα οι εποχές). Σε μικρότερες κλίμακες, η επανάληψη των κινήσεων και των χειρονομιών γίνονται θέατρο και χορός κι αυτά με τη σειρά τους συμπεριλαμβάνονται μέσα στο μύθο, την τελετουργία και τη θρησκεία. Επίσης, η εξέλιξη της φωνής και της μουσικής έχει την ανάγκη του ρυθμικού μοτίβου και των μηνυμάτων. Όλες αυτές οι

³ Σύμφωνα με τις μηχανιστικές αντιλήψεις, το σύμπαν αποτελείται από σωματίδια σε κίνηση, το οποίο περιέχει τον άνθρωπο σαν αυτοκινούμενη (αυτόματη) μηχανή. Ο άνθρωπος ως μηχανή αποτελείται από σωματίδια σε κίνηση που εκλαμβάνονται ως εξαρτήματα μιας μηχανής.

δραστηριότητες συμβαίνουν με τη μορφή μοτίβου σε όλο το εύρος των ανθρώπινων δραστηριοτήτων.

Σύμφωνα πάλι με το Salinargo, τα μαθηματικά είναι μία επιστήμη από μοτίβα. Ο νους διέπεται από συνδέσεις και σχέσεις μεταξύ των εννοιών και των ιδεών και συνεχώς τα συνδέει μεταξύ τους. Η ικανότητά μας να δημιουργούμε μοτίβα είναι συνέπεια της νευρολογικής μας ανάπτυξης σχετικά με τις πληροφορίες που λαμβάνουμε από το περιβάλλον μας. Οι μαθηματικές θεωρίες μπορούν να εξηγήσουν τις σχέσεις μεταξύ των μοτίβων, τα οποία προκύπτουν από λογικές δομές. Τα μοτίβα του μυαλού μιμούνται τα μοτίβα της φύσης και ένα ανθρώπινο μοτίβο πιθανόν να δείχνει το πως τα ανθρώπινα όντα εξελίχθηκαν έτσι ώστε να είναι ικανά να *κάνουν μαθηματικά*. Το να δημιουργούμε μοτίβα φαίνεται να βρίσκεται πέρα από εσωτερική ανάγκη, επεκτείνοντας συνδεδεμένες δομές οι οποίες δημιουργούνται μέσα στον ανθρώπινο νου μέσω της διαδικασίας της σκέψης. Κάτι τέτοιο δικαιολογεί την παρουσία οπτικών μοτίβων στην παραδοσιακή τέχνη και αρχιτεκτονική.

Το φυσικό περιβάλλον σαφώς αποτελεί έμπνευση. Τι συμβαίνει όμως με τα περιβάλλοντα τα οποία κατασκευάζουμε; Σύμφωνα με τον Salinargo τα τεχνητά περιβάλλοντα, τα οποία είναι αποτέλεσμα συναισθηματικών και φυσιολογικών αναγκών και εκφράσεων, εμπεριέχουν σχεδιαστικές τεχνικές από τις διάφορες λαϊκές παραδόσεις. Οι τεχνικές αυτές με τη σειρά τους, όπως διαπιστώθηκε από τα διάφορα παραδείγματα (§2.1.) προέκυψαν μιμούμενες τους μηχανισμούς που διέπουν τη φύση.

Η νέα επιστημονική αρχή της Βιοφιλίας (Biophilia) βασίζεται στη άποψη πως η επαφή με τη φύση είναι ζωτικής σημασίας. Μάλιστα, σχετικές έρευνες έδειξαν πως η επαφή ασθενών με τη φύση είχε σημαντικά και θετικά αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα την μικρότερη χρήση αντικαταθληπτικών φαρμάκων (Salinargos, Masden, 2008). Σύμφωνα με τον Yannick Joye, το νευρικό μας σύστημα αναπτύσσεται γρηγορότερα σε ένα δομικό περιβάλλον το οποίο περιλαμβάνει fractal ιδιότητες και την πολυπλοκότητα η οποία εμφανίζεται στη φύση, παρά σε ένα περιβάλλον φτωχό σε αυτά τα χαρακτηριστικά.

Επιδιώκοντας ένα τεχνητό περιβάλλον το οποίο ακολουθεί τις αρχές της Βιοφιλίας, θα πρέπει να ακολουθήσουμε συγκεκριμένα μαθηματικά πρότυπα όπως τα μοτίβα, το χρώμα και υφές οι οποίες μιμούνται με ουσιαστικό τρόπο όμοιες ιδιότητες οι οποίες ήδη υπάρχουν στη φύση. Συγχρόνως, όλες αυτές οι

πληροφορίες θα πρέπει να οργανωθούν κάνοντας χρήση μαθηματικών τεχνικών όπως συμμετρίες, μοτίβα, αυτό-ομοιότητα, αρμονία χρωμάτων κ.α. (Salingaros, 2006). Η γεωμετρία εδώ γίνεται το κέντρο, καθώς η ζωή που βασίζεται στην γεωμετρία του φυσικού περιβάλλοντος έχει ποιοτικά και όχι ποσοτικά χαρακτηριστικά.

4. Η έρευνα

Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, πραγματοποιήθηκε ποιοτική μελέτη δυο φοιτητών της αρχιτεκτονικής. Ζητούμενο ήταν οι ίδιοι, στο πλαίσιο της αρχιτεκτονικής, να εμφανίσουν μια περισσότερο καλλιτεχνική εκδοχή του εαυτού τους.

4.1. Τα Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία τέθηκαν, αφορούν τους φοιτητές της αρχιτεκτονικής και της σχέσης τους με τη Γεωμετρία των Fractals. Πιο συγκεκριμένα:

1^ο Ε.Ε. : Οι φοιτητές της αρχιτεκτονικής αναγνωρίζουν τη Γεωμετρία των Fractals σε φυσικά στοιχεία και σε αρχιτεκτονήματα;

2^ο Ε.Ε. : Οι φοιτητές της αρχιτεκτονικής χρησιμοποιούν τη Γεωμετρία των Fractals κατά τον σχεδιασμό; (πώς;)

4.2. Η μέθοδος - Ερευνητικό εργαλείο

Στα πλαίσια των ερευνητικών μας σκοπών, επιλέχθηκε ως μέθοδος η ποιοτική μελέτη περίπτωσης. Για τη μελέτη των φοιτητών έγινε από μια ημιδομημένη συνέντευξη διάρκειας περίπου μιας ώρας και 30 λεπτών η κάθε μια. Η επιλογή του δείγματος έγινε συμπτωματικά (ευκαιριακό δείγμα). Προηγήθηκε πιλοτική έρευνα σε μια αρχιτέκτων με σκοπό την αξιολόγηση των ερωτήσεων της συνέντευξης ως προς τη σαφήνεια.

Οι ερωτήσεις της συνέντευξης σχεδιάστηκαν με βάση τους άξονες όπου λαμβάνουν μέρος στο ερευνητικό θέμα (τα μαθηματικά, το φυσικό περιβάλλον και τα fractals). Η δομή της συνέντευξης ήταν τέτοια ώστε αρχικά να μην

παρουσιάζεται το μαθηματικό αντικείμενο των fractals. Αυτό έγινε για να διαπιστωθεί εάν οι συμμετέχοντες οδηγηθούν σε fractal μορφές με τρόπο ασυνείδητο, όπως αντίστοιχα το αντιμετώπισαν στο Πανεπιστήμιο του Middle East, όπως παρουσιάζεται από το Sorguc (2005). Στο τελευταίο στάδιο των συνεντεύξεων δόθηκαν φωτογραφίες κτιρίων και fractal στοιχείων (βλ. Παράρτημα Α και Παράρτημα Β) έτσι ώστε αυτές να σχολιαστούν. Τέλος, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να σχεδιάσουν ένα σκίτσο (σκαρίφημα) βασισμένοι σε όσα πιο πριν συζητήθηκαν.

4.3. Συλλογή των δεδομένων

Η έρευνα στη μια περίπτωση διεξήχθη μέσω μέσου κοινωνικής δικτύωσης (skype), με τη συμμετέχουσα να βρίσκεται στον προσωπικό της χώρο. Στην άλλη περίπτωση πραγματοποιήθηκε στο χώρο εργασίας του συμμετέχοντα. Τα δεδομένα μαγνητοφωνήθηκαν, ενώ συγχρόνως κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου.

4.4. Οι συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες οι οποίοι έλαβαν μέρος στη διεξαγωγή της έρευνας στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ήταν δύο φοιτητές της αρχιτεκτονικής, η Χριστίνα και ο Αντρέας. Τα ονόματα αυτά αποτελούν ψευδώνυμα των συμμετεχόντων για τις ανάγκες της έρευνας. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια μικρή περιγραφή για τον καθένα.

Η Χριστίνα είναι 26 ετών, φοιτήτρια στο Τμήμα Αρχιτεκτονικής του Πανεπιστημίου των Χανίων. Έχει ολοκληρώσει το τρίτο έτος των σπουδών της. Πριν από την αρχιτεκτονική, ολοκλήρωσε τις σπουδές της στο Τμήμα Ανακαίνισης και Αποκατάστασης Κτιρίων. Ο Αντρέας, είναι 30 ετών, φοιτητής στο Τμήμα Αρχιτεκτονικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνίου. Έχει ολοκληρώσει το τέταρτο έτος των σπουδών του. Ο Αντρέας πριν από την αρχιτεκτονική ολοκλήρωσε τις σπουδές του ως Πολιτικός Μηχανικός και παράλληλα με τις σπουδές της αρχιτεκτονικής εργάζεται και ως Πολιτικός Μηχανικός. Και οι δύο φοιτητές δείχνουν μεγάλο ενδιαφέρον προς το αντικείμενο των σπουδών τους, αυτό της αρχιτεκτονικής.

4.5. Ανάλυση των δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας πραγματοποιήθηκε απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων. Χρησιμοποιήθηκαν κάποια στοιχεία της μικροανάλυσης και της ανοιχτής κωδικοποίησης (Strauss and Corbin, 1998). Σε πρώτο επίπεδο ανάλυσης έγινε εντοπισμός των επεισοδίων αναλύοντας τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα των συνεντεύξεων και εστιάζοντας σε συγκεκριμένα αποσπάσματα. Στη συνέχεια, σε δεύτερο επίπεδο αυτές κατηγοριοποιήθηκαν ανάλογα εάν αφορούσαν τα μαθηματικά, το φυσικό περιβάλλον ή τα fractals.

Οι κατηγοριοποίηση των δεδομένων βασίστηκε στους βασικούς άξονες των μαθηματικών, του φυσικού περιβάλλοντος και των *fractals*. Η κατηγορίες που προέκυψαν σχετικά με τα μαθηματικά, αφορούσαν τις πεποιθήσεις των συμμετεχόντων για αυτά, καθώς και την πρακτική τους κατά τον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό. Σαν υποκατηγορία στον άξονα των μαθηματικών θεωρήθηκε η γεωμετρία, χωρίζοντάς τη σε επιπλέον υποκατηγορίες, την *ευκλείδεια γεωμετρία* και τις *μη-ευκλείδειες γεωμετρίες*. Η επόμενη κατηγορία αφορούσε το φυσικό περιβάλλον και εξετάστηκε ως προς τη *στάση* την οποία έχουν απέναντι σε αυτό οι συμμετέχοντες, καθώς και τον *τρόπο ένταξης* του κατά τον σχεδιασμό τους. Τέλος, η τελευταία κατηγορία αφορούσε τα *fractals*. Προέκυψαν τρεις επιμέρους υποκατηγορίες, σχετικά με τις γνώσεις τους σχετικά με τη Γεωμετρία των Fractals, την *πρακτική* κατά τη συνθετική διαδικασία καθώς και τη *στάση* τους ως προς το συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο.

5. Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σύμφωνα με τους βασικούς άξονες, πάνω στους οποίους έγινε η δομή της κάθε συνέντευξης. Εμφανίζονται οι κατηγορίες, καθώς και οι υποκατηγορίες οι οποίες προέκυψαν κατά την ανάλυση. Στο τέλος, γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων στον Πίνακα 1.

1^ο) Η σχέση με την Αρχιτεκτονική

Η αρχή της συνέντευξης των δύο φοιτητών αφορούσε τη γενικότερη σχέση τους με την αρχιτεκτονική. Πέρα από τις πληροφορίες σχετικά με το έτος σπουδών καθώς κι άλλες πληροφορίες γενικά για τις σπουδές τους, σκοπός ήταν στο σημείο αυτό να δούμε και τη γενικότερη φιλοσοφία που έχουν σχετικά με την αρχιτεκτονική.

Χριστίνα

Έτσι, στα πλαίσια της εισαγωγικής συζήτησης η Χριστίνα ανέπτυξε την άποψη της και τη σχέση που έχει με την αρχιτεκτονική. Γι' αυτή η αρχιτεκτονική είναι ένας νέος κόσμος κι όπως χαρακτηριστικά αναφέρει:

«Ένας καινούριος κόσμος, γνώσης και τεχνικής... νέας τεχνικής, που δεν ήξερα ότι υπάρχει και είναι πολύ συναρπαστικός... το να μπαίνεις μέσα σε αυτόν τον κόσμο, ο οποίος έχει να κάνει με την αρχιτεκτονική αλλά και εμπλέκεται και με πάρα πολλά άλλα πράγματα και εμφάνσεις που σε... σε επαναπροσδιορίζουν και σε εκθέτουν συνέχεια σε νέα βάση. Και ως προς την επιστήμη και ως προς τον εαυτό σου».

Αντιμετωπίζει την αρχιτεκτονική τόσο ως επιστήμη όσο και ως τέχνη. Το γεγονός αυτό τη γοητεύει και δυσκολεύεται να την εντάξει αυστηρά σε ένα από τα δύο πεδία. Τα βασικά της ενδιαφέροντα αφορούν το σχεδιασμό και τη συνθετική διαδικασία και δίνει μεγάλο ενδιαφέρον στις διάφορες παραμέτρους που λαμβάνουν μέρος κατά τη σχεδιάση ενός αρχιτεκτονικού ζητήματος.

Αντρέας

Σχετικά με την αρχιτεκτονική, ο Αντρέας πρώτα απ' όλα τη θεωρεί περισσότερο ως επιστήμη και λιγότερο ως τέχνη, χωρίς ωστόσο το ένα να αναιρεί το άλλο.

«Για μένα, είναι ναι μεν τέχνη, αλλά είναι περισσότερο επιστήμη ή τουλάχιστον επιστήμη σε κάποια πράγματα και τέχνη σε κάποια άλλα. Δεν υπάρχει μια σταθερή ισορροπία...»

Επιχειρώντας να ορίσει την αρχιτεκτονική αναφέρεται σε αυτή με έναν γενικό τρόπο λέγοντας χαρακτηριστικά πως *«είναι ουσιαστικά μια συγκροτημένη εμπειρία του ανθρώπου για το πως είναι το περιβάλλον του. Δηλαδή, η αρχιτεκτονική μπορεί να είναι και ένα απλό σπίτι και ο τρόπος δόμησής του, είναι τεχνική εμπειρία ή και η ερμηνεία του γιατί θεωρούμε τα νεοκλασσικά κτίρια ωραία»*.

Σχετικά τις σπουδές του, δείχνει μεγαλύτερο ενδιαφέρον σε ότι έχει να κάνει με την κατοικία, καθώς το θεωρεί πιο οικείο προς αυτόν. Βρίσκεται, ωστόσο, σε συνεχή αναζήτηση κι άλλων πεδίων εκτός της κατοικίας, όπως την πολεοδομία. Επίσης, η θεωρία και η ιστορική εξέλιξη της αρχιτεκτονικής αποτελεί γι' αυτόν σημαντικό στοιχείο και μέσα από αυτή δίνει ερμηνείες σε διάφορα ζητήματα. Γι' αυτόν η αρχιτεκτονική θα πρέπει να έχει πρώτα από όλα νόημα και να εξυπηρετεί τις ανθρώπινες ανάγκες. Αυτός είναι ο βασικός του άξονας και δύσκολα δέχεται μια αρχιτεκτονική σύνθεση η οποία χάνει τέτοιου νοήματος. Ωστόσο, τελευταία δείχνει ενδιαφέρον και σε περισσότερο *“συμβολικής χροιάς κατασκευές”*, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει.

2^ο) Η σχέση με τα Μαθηματικά

Στη συνέχεια η συζήτηση στρέφεται προς τα μαθηματικά. Στο σημείο αυτό, σκοπός είναι να διαπιστωθεί μέσα από τη συνέντευξη η σχέση των συμμετεχόντων με τα μαθηματικά. Τόσο ως προς το επίπεδο των γνώσεων όπου κατέχουν όσο και τη γενικότερη άποψη που έχουν γι' αυτά. Επίσης, σημαντικό είναι να διαπιστωθεί ο βαθμός ο οποίος τα μαθηματικά αποτελούν γι' αυτούς εργαλείο. Συγχρόνως, επιχειρείται να διαπιστωθεί ποια είναι η σχέση τους συγκεκριμένα με τη γεωμετρία και πως τη μεταχειρίζονται κατά το σχεδιασμό. Ακόμα, γίνεται λόγος και για τις μη-

Ευκλείδειες γεωμετρίες, κάτι το οποίο σκοπός είναι να οδηγήσει στη συνέχεια στη Γεωμετρία των Fractals.

Χριστίνα

Όταν η συζήτηση στρέφεται προς τα μαθηματικά, η ίδια γελάει ελαφρώς καθώς θεωρεί ότι είναι κάτι μακριά από αυτή. Αναφέρεται σε αυτά λέγοντας χαρακτηριστικά πως «είναι ένας γοητευτικός κόσμος». Η επαφή της με τα μαθηματικά ήταν κυρίως κατά τη διάρκεια του σχολείου και βασικά κατά τη διάρκεια της Γ' Λυκείου. Όσο ασχολήθηκε συνειδητά μαζί τους έγινε σε επίπεδο σχολείου, καθώς και σε ένα μάθημα το οποίο είχε περάσει κατά τη διάρκεια των σπουδών της στην πρώτη σχολή φοίτησης. Θεωρεί ότι δεν τα κατέχει, αλλά τη γοητεύουν. Θα ήθελε στο μέλλον να ασχοληθεί μαζί τους, έτσι ώστε, όπως χαρακτηριστικά λέει «...να τα μάθω βρε παιδί μου... να μπω στη διαδικασία να μάθω αυτό τον τρόπο σκέψης...». Ο άγνωστος, γι' αυτή, κόσμος των μαθηματικών είναι τρόπος σκέψης. Δε στέκεται σε ένα αρχικό επίπεδο, όπου τα μαθηματικά είναι αριθμοί και πράξεις, αλλά αναφέρεται σε αυτά λέγοντας ότι «... είναι ένας τρόπος σκέψης πολύ γοητευτικός και ενδιαφέρον [...] αυτόν τον τρόπο σκέψης, τέλος πάντων, είναι πολύ καλό να τον έχεις. Νομίζω ότι σε βοηθάει πολύ στην προσέγγιση των προβλημάτων, πραγμάτων, *potential point of view*».

Επιχειρώντας να διαπιστώσουμε εάν αναγνωρίζει την ύπαρξη μαθηματικών κατά τη συνθετική διαδικασία (δηλαδή, κατά τη βασική δραστηριότητα ενός αρχιτέκτονα), σε σχετική ερώτηση απαντάει και φαίνεται να μη βλέπει εκ πρώτης όψεως άμεση σχέση μεταξύ αυτών των δύο. Παρ' ότι αντιμετωπίζει τα μαθηματικά ως τρόπο σκέψης, ωστόσο, δε μπορεί να τα δει μέσα στη συνθετική διαδικασία. Λίγο αργότερα, σκέφτεται ξανά και συμπληρώνει πως:

«Αλλά νομίζω ότι και υποσυνείδητα σε καθοδηγούν και σχεδιαστικά, γιατί το να σταματήσεις τη γραμμή εδώ κι όχι πιο πέρα, αλλά και αυτή η γραμμή να σου πει κάτι αισθητικά για το σύνολο και την ολοκλήρωση της σύνθεσής σου, άρα σημαίνει ότι ακολουθείς μια αριθμητική συνέχεια. Που καθοδηγείται από τη αισθητική σου και ενσταντική σου ματιά [...] Θέλω να πω, ότι παίρνεις το μολύβι, το ότι σταματας εδώ τη γραμμή κι όχι πιο πέρα, σε σχέση με το αποτέλεσμα που θα καταλήξεις να έχεις, έχει από πίσω του ένα υπόβαθρο μαθηματικό. Υποσυνείδητα».

Η Γεωμετρία

Σχετικά με τη γεωμετρία αναφέρει πως: «τα μαθηματικά, η έκφασή τους στην αρχιτεκτονική είναι στη γεωμετρία». Αναφέρεται με μια σιγουριά απέναντι στη γεωμετρία και φαίνεται να την ξεχωρίζει από το σύνολο των μαθηματικών. Μάλιστα, σημειώνει πως:

«Εγώ συνθέτω με πολύ γεωμετρία. Αλλά η γεωμετρία που θέλω να προκύπτει από τη δική μου σύνθεση θέλω να είναι αισθητική γεωμετρία. Όχι γεωμετρία κανονική. Ορθοκανονική».

Μιλάει για μια άλλη μορφή γεωμετρίας, και αναφέρεται στην Ευκλείδεια γεωμετρία με τον όρο κανονική και ορθοκανονική. Για την ίδια η γεωμετρία είναι κάτι ανώτερο και καθοριστικό για τη δουλειά της:

«...η γεωμετρία μπορεί να σου δώσει μορφές που ούτε καν είχες στο μυαλό σου και να προκύψουν αυθαίρετα. Δηλαδή, με μια σταθερά, αριθμητική ας πούμε, μπορεί να προκύψουν γεωμετρίες που μπορεί να μη μπορείς να συνθέσεις αυθαίρετα, δηλαδή να χρειάζεσαι μια σταθερά. Απο κει και πέρα, θα μου άρεσε να χρησιμοποιήσω τη γεωμετρία, με το ενδιαφέρον του τι μπορεί να προκύψει από αυτή τη γεωμετρία και κατ' επέκταση το αποτέλεσμα να μπορείς βέβαια να επιμεληθείς ως προς το πιο κοντινό αποτέλεσμα της δικής σου αισθητικής».

Αναφέρεται σε άλλες, "ιδιαίτερες γεωμετρίες", με μια διαφορετική έννοια από την μαθηματική ερμηνεία των άλλων γεωμετριών, εκτός από την Ευκλείδεια. Για την ίδια, "ιδιαίτερη γεωμετρία" είναι αυτή η οποία δίνει ένα οπτικό αποτέλεσμα διαφορετικό από τα ορθοκανονικά και πρότυπα σχήματα που προκύπτουν από ευκλείδεια σχέδια, καθώς και αυτή που κυριεύεται από διαφορετικές αρχές, χωρίς όμως να το προσδιορίζει με περισσότερο αυστηρό τρόπο. Θα μπορούσαμε να πούμε πως έχει μια γενική αίσθηση, ότι κάτι άλλο συμβαίνει στις *ιδιαίτερες γεωμετρίες*.

Η κλίμακα και οι αναλογίες

Η μέτρηση και η κλίμακα είναι στοιχεία τα οποία τα αντιμετωπίζει πρώτα απ' όλα εμπειρικά και προκύπτουν με φυσικό τρόπο στις διάφορες αρχιτεκτονικές δραστηριότητες «...ακόμα και τόσο πολύ που έχεις δουλέψει την κλίμακα και το κλιμακόμετρο μπορείς να υπολογίσεις με μια γραμμή πόσο σε κλίμακα είναι με 1:100

το ένα μέτρο, σε 1:200 το ένα μέτρο... αυτομάτως συμβαίνει αυτό. Εμπειρικά και αριθμητικά, για να καταλαβαίνεις τα ποσά». Αποτελούν εργαλείο τόσο ως προς το σχεδιασμό, όσο και ως προς την επικοινωνία με τους γύρω. Αναγνωρίζει την εμπειρική χρήση τους ως προσόν για τον αρχιτέκτονα και αναφέρει:

«...για να μπορείς να επικοινωνήσεις καλύτερα με x , ψ διπλανό σου, συνεργάτη σου, καθηγητή σου...Επίσης, πάρα πολύ σημαντικό είναι αριθμητικά ως προς τις κλίμακες να μπορείς να επικοινωνήσεις την ιδέα σου».

Αντρέας

Για τον Αντρέα, τα μαθηματικά είναι ένας θαυμαστός κόσμος. Αναφέρει πως είναι η βάση πάνω στην οποία είναι πολλές επιστήμες. Ο όρος μαθηματικά θεωρεί πως έχει ένα ευρύ φάσμα: «Μπορεί να είναι κάτι από αρκετά πεζό, το ένα κι ένα κάνει δύο μέχρι το τι είναι το μηδέν και το ένα, σαν φιλοσοφική προσέγγιση». Έχει ασχοληθεί με τα μαθηματικά πρώτα σε επίπεδο σχολείου, κατόπιν παρακολούθησε αρκετά μαθήματα μαθηματικών κατά τη διάρκεια των σπουδών του στην πρώτη του σχολή. Ωστόσο, θεωρεί πως ενώ έχει γνώσεις μαθηματικών δεν έχει εμβαθύνει σε αυτά τόσο όσο θα ήθελε.

Αναγνωρίζει πως η αρχιτεκτονική έχει μια στενή σχέση με τα μαθηματικά. Πέρα από τις πρακτικές αρχιτεκτονικές λύσεις οι οποίες προκύπτουν με τη βοήθεια των μαθηματικών, βλέπει μαθηματικά στην αρχιτεκτονική και με πιο αφηρημένο τρόπο. Χαρακτηριστικά αναφέρει: «...έχουν και σχέση με την αρχιτεκτονική. Από το απλό επίπεδο του θα κάνω ένα τοίχο τόσο ή θα έχει κλήση τόση για να ανεβαίνω ή να μην ανεβαίνω μια ράμπα ή μια σκάλα, μπλέκει και με το γεωμετρικό, δηλαδή με την πρακτική του έννοια, μπλέκει και με πιο αφηρημένα πράγματα». Σχετικά με τη διαδικασία την οποία ακολουθεί για να σχεδιάσει αναφέρει πως: «...η γεωμετρία για τη σχεδίαση που εγώ κάνω, για τις χαράξεις που εγώ κάνω σε μία μελέτη που θα ξεκινήσω να προσεγγίζω, ξεκινάει από αυστηρή γεωμετρία, την οποία προσπαθώ σιγά σιγά να αποδομήσω, να διαλύσω, μέχρι εκεί που θα φτάσω...», χρησιμοποιώντας έτσι αφαιρετικές διαδικασίες οι οποίες ίσως κρύβουν μια μαθηματική λογική.

Η Γεωμετρία

Με το άκουσμα του όρου γεωμετρία, το πρώτο πράγμα που του έρχεται στο μυαλό είναι το τρίγωνο. Γι' αυτόν, γεωμετρία είναι η ευκλείδεια γεωμετρία και κάθε ευκλείδειο σχήμα δίνει διαφορετικές γεωμετρίες.

Ε: Ακούς γεωμετρία. Τι σου έρχεται στο μυαλό;

Α: Τρίγωνο. Κυρίως. Μισούσα τη γεωμετρία του κύκλου, που έχουνε σχέση μεταξύ τους. Αλλά ότι έχει να κάνει με τριγωνα μου άρεσε σαν ιδέα [...] Τη γεωμετρία τη συνδέω κυρίως με τα σχήματα...ναι, όταν ακούω γεωμετρία δε μου 'ρχεται στο μυαλό κωνικές τομές πχ. Μπορεί να μου έρθει σε ένα πιο προχωρημένο της επίπεδο η παραστατική γεωμετρία. Δηλαδή, να μου έρθουν η προβολική γεωμετρία. Που έχει να κάνει με κωνικές τομές. Αλλά δε μου 'ρχεται αυτό. Το πρώτο πράγμα που μου έρχεται στο μυαλό όταν μου πεις γεωμετρία, τρίγωνα μου έρχονται.

Κάνει λόγο για "σαφείς" και "αυστηρές" γεωμετρίες, αναφερόμενος σε σχήματα όπως το τετράγωνο και σε στερεά όπως ένας κύβος ή αλλιώς ένα "κουτί", όπως ο ίδιος αναφέρει.

Η γεωμετρία, σύμφωνα με τον Αντρέα, είναι παντού γύρω μας: «Ο δομημένος τρόπος στο σύμπαν που αντιλαμβάνεσαι είναι γεωμετρία. Δηλαδή, δεν είναι...μπορεί η καθαρή γεωμετρία που αντιλαμβάνεται κάποιος με τετράγωνο μυαλό, δηλαδή μπορεί να μην είναι 90 μοίρες όλες οι γωνίες και...ξέρω 'γω όλα σαφή πλατωνικά σχήματα. Αλλά υπάρχει. Είναι το σύμπαν γύρω μας».

Σχετικά με τις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες δε γνωρίζει περί τίνος πρόκειται και στο άκουσμα του όρου φαντάζεται κάτι το οποίο στη μορφή του δεν είναι οικείο ως προς αυτόν:

«Μη ευκλείδεια γεωμετρία...δε μπορώ να φανταστώ τι μπορεί να είναι. Δηλαδή αν μιλάμε για τα σαφώς διαμορφωμένα γεωμετρικά σχήματα, αν αυτό είναι η ευκλείδεια γεωμετρία, δε ξέρω [...] κάτι με ημίτονα και συνημίτονα. Αυτό εγώ αντιλαμβάνομαι ως μη ευκλείδεια.... κάτι που δεν είναι τρίγωνο».

Η μέτρηση και η κλίμακα

Κατά τον σχεδιασμό του λαμβάνει ως μέτρο τον άνθρωπο και από εκεί και πέρα σχεδιάζει κάνοντας υπολογισμούς για να πετύχει τα σχέδιά του να έχουν πρακτική αξία για τις ανθρώπινες δραστηριότητες.

*A: [...] Δε μπορώ να σχεδιάσω μια καρέκλα εύκολα σε μη πρακτική στάθμη...δηλαδή, ξέρεις ότι δε βολεύει. Δηλαδή ξέρεις ότι ένας πάγκος κουζίνας έχει ύψος 82 με 85 εκατοστά. Ψιλοφίξ διαστάσεις. Άμα το σχεδιάσω 95 δε βολεύει για να πλύνω τα χέρια μου. Οπότε υπάρχει ένα *modulor*. Η λογική του *modulor* ας πούμε με παραλλαγές του, στην αρχιτεκτονική είναι εργαλείο. Δεν είναι κάτι στοχαστικό, είναι κάτι ανθρωπομετρικό.*

E: Κατάλαβα... έχεις τον άνθρωπο σαν μέτρο κι απο κει...

A: Κι απο 'κει στήνεις κάποιες αναλογίες.

Σαφώς, για τον Αντρέα, η μέτρηση αποτελεί εργαλείο κατά τον σχεδιασμό. Τη χρησιμοποιεί για να κάνει υπολογισμούς και να προκύψουν σωστά γεωμετρικά αποτελέσματα έχοντας ως μέτρο τον άνθρωπο.

3^ο) Το φυσικό περιβάλλον

Μετά από τη συζήτηση σχετικά με τους παραπάνω άξονες, της αρχιτεκτονικής και των μαθηματικών, γίνεται μια αναφορά στο φυσικό περιβάλλον και τη φύση γενικότερα. Η φύση έχει ενεργό ρόλο στη Γεωμετρία των Fractals, οπότε είναι απαραίτητο να δούμε με ποιο τρόπο και σε ποιο βαθμό το φυσικό περιβάλλον επηρεάζει τους συμμετέχοντες στον σχεδιασμό μιας αρχιτεκτονικής σύνθεσης.

Χριστίνα

Όταν η συζήτηση στρέφεται προς το φυσικό περιβάλλον και τη φύση γενικότερα, η ίδια δείχνει ενθουσιασμό, λέγοντας: «Α! Το αγαπημένο μου! Μου αρέσει πολύ να υπερισχύει. Μου αρέσει πολύ να συμμετέχεις να αναδειχθεί, κι όχι εσύ να αναδειχθείς μέσα από αυτό [...] δε μπορείς να σχεδιάσεις χωρίς αυτό. Είναι εργαλείο. Είναι απαραίτητη προϋπόθεση να το αφουγκραστείς». Σχετικά με την

ομορφιά και τα συναισθήματα που της προσφέρει το φυσικό περιβάλλον αναφέρει πως η φύση είναι απρόβλεπτη και μοναδική «...το τι σε κάνει να νιωθεις ένα φυσικό τοπίο, δε μπορεί να σε κάνει νομίζω να το νιώσεις... πολύ δύσκολα θα σε κάνει να το νιώσεις ένα τεχνητό τοπίο.» Σε ότι αφορά τη το φυσικό περιβάλλον και τη φύση γενικότερα, μένει σε επίπεδο μορφών. Δηλαδή, στο οπτικό αποτέλεσμα το οποίο εισπράττει καθώς βρίσκεται μέσα σε αυτό. Νιώθει θετικά συναισθήματα και αυτό το οφείλει στην άρτια μορφή της φύσης.

Αντρέας

Ο Αντρέας αντιμετωπίζει το φυσικό περιβάλλον ως βασικό σύμμαχο κατά το σχεδιασμό του. Αναφέρεται σε αυτό με όρους και φράσεις, όπως "ηρεμία", "ησυχία", "σεβασμό" και "αφάνταστη εκτίμηση προς αυτό". Όλα αυτά τα ερμηνεύει ως μια «φυσική έλξη του ανθρώπου προς τη φυσική του κατάσταση και τη φυσιολογική τάση επιστροφής στα κατώτερα και υποσεινήδητα ζωώδη του ένστικτα». Συνεχώς αναζητάει τη φύση και δε μπορεί να φανταστεί τον εαυτό του μακριά από ένα φυσικό περιβάλλον. Ο σχεδιασμός του, ως αρχιτέκτων, επηρεάζεται από τα παραπάνω, καθώς εμπνέεται και σέβεται ένα φυσικό περιβάλλον. Η έμπνευση αυτή μένει στο τελικό επίπεδο μορφών των φυσικών στοιχείων και η ηρεμία που δημιουργεί αποτελεί για αυτόν λόγος για να κρατάει τη στάση αυτή όταν σχεδιάζει.

4^ο)Ta fractals

Τελευταίος και βασικός άξονας των συνεντεύξεων ήταν τα fractals. Πρώτα απ' όλα, έπρεπε να διαπιστωθεί εάν οι συμμετέχοντες γνωρίζουν το μαθηματικό αντικείμενο των fractals και με ποιο τρόπο. Συγχρόνως, ένας από τους στόχους είναι να δούμε εάν υποσυνείδητα γίνεται χρήση των ιδιοτήτων των fractals κατά τον σχεδιασμό τους. Ακόμη, θέλαμε να διαπιστώσουμε εάν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν fractal ιδιότητες σε διάφορα παραδείγματα fractal, δείχνοντας εικόνες με γεωμετρικά, φυσικά και αρχιτεκτονικά fractals.

Χριστίνα

Όπως ξανά αναφέρθηκε, σε ότι αφορά τη φύση, αναγνωρίζει τη σπουδαιότητά της στην τελική της μορφή. Δεν έχει ασχοληθεί με τους κατώτερους μηχανισμούς της φύσης, αυτούς που την καθοδηγούν και κρύβουν μαθηματικά. Ωστόσο, σε πρόσφατη εργασία της επιχείρησε το συνδυασμό διαφόρων επιστημονικών πεδίων, εμπλέκοντας μεταξύ όλων των άλλων και τη βιολογία. Η βιολογία στη σύνθεσή της εντάσσονταν με τη μορφή ενός κυττάρου, το οποίο αναπτύσσεται και δίνει μορφές. Πρόκειται ουσιαστικά για τη Γεωμετρία των Fractals, η ίδια όμως το αντιμετωπίζει ως βιολογία. Επίσης, της είναι άγνωστος ο όρος fractal.

Ε: Έχεις παρατηρήσει ή γνωρίζεις για τους ιδιαίτερους, ας το πούμε, μηχανισμούς της φύσης;

Χ: Όταν λες ιδιαίτερους μηχανισμούς της φύσης; [...]

Ε: Άρα δεν έχεις ασχοληθεί ή δε γνωρίζεις για τι πράγμα μπορεί να μιλάμε. Το πως δηλαδή, εξελίσσεται ένα φυσικό αντικείμενο ή κάποια φυσικά αντικείμενα. Για παράδειγμα ένα δέντρο.

Χ: Εννοείς ένας φυσικό οργανισμό; Πως αναπτύσσεται;

Ε: Ναι.

Χ: Βιολογικά; Μπορεί να έχει κάποιες επαναλήψεις που μπορεί να εξηγούνται μαθηματικά;

Ε: Ναι, ακριβώς.

Χ: Αυτό είναι...έχω παρακολουθήσει κάποια προτζεκτ αλλά δεν είμαι τόσο involved ακόμα. Αλλά η βιολογική...οι μορφές οι αναπυσσόμενες... η αρχιτεκτονική που εμπλέκεται με όλα τα άλλα και με την ανάπτυξη, αναλύεται λίγο και στο μανιφέστο. Ότι είναι ένα καρκινικό κύτταρο ουσιαστικά, η ανάπτυξη μιας πόλης. Ότι εμπλέκεται λίγο με τη βιολογία όλο αυτό. Και δίνει μορφές...δεν ξέρω εσύ με ποιον τρόπο το εξετάζεις. Βοηθησέ με λίγο για να μη χαθώ στη σκέψη μου.

Ε: Όχι, είναι αυτό που λες βασικά. Απλά εσυ το λες βιολογία, εγώ το λέω μαθηματικά. Υπάρχει ένας συγκριμένος μηχανισμός από πίσω, ο οποίος χρειάζεται τα μαθηματικά.

Χ: Αυτός ο μηχανισμός πχ που χρειάζεται ένα κύτταρο είναι συνέχεια ο ίδιος, άρα εσύ εξετάζεις τι προκύπτει από την ίδια διαδρομή [...] Εγώ δεν είχα εξετάσει αυτό που μου λες εσύ. Ότι υπάρχει μια διαδικασία ανάπτυξης κυττάρου, κι αυτό μπορεί να εξηγηθεί μαθηματικά. Πίστευα ότι το κάθε ένα μπορεί να μην έχει την ίδια διαδρομή. [...] Αυτό θα ήταν πολύ ενδιαφέρον για να γίνει μορφή. Να γίνει μέσω της μεταγραφής, όπως χρησιμοποιούμε στην αρχιτεκτονική.

Μέσα από τον παραπάνω διάλογο φαίνεται πρώτα απ' όλα ότι η ίδια ενώ δε γνωρίζει στοιχεία σχετικά με τα fractals και τη σχέση τους με τα φυσικά αντικείμενα, υποσυνείδητα έχει κάνει αναφορά σε αυτά. Τα ονομάζει ως "βιολογικά στοιχεία" και διακρίνει ότι ως προς τη μορφή τους χαρακτηρίζονται από την επανάληψη. Στο άκουσμα του "ιδιαίτερου μηχανισμού" που καθοδηγεί τα φυσικά ή βιολογικά στοιχεία δείχνει μεγάλο ενδιαφέρον ώστε αυτό να γίνει μια αρχιτεκτονική μορφή.

Η επανάληψη-αναδρομικότητα

Όπως η ίδια αναφέρει, δείχνει ενδιαφέρον απέναντι στις "ιδιαίτερες γεωμετρίες". Αναφέρεται σε γεωμετρικά σχήματα και γεωμετρικές διαδικασίες σχεδίασης, που της είναι λιγότερο οικεία σε σχέση με τις πρωταρχικές ευκλείδειες δομές. Μέσα σε αυτές τις "ιδιαίτερες γεωμετρίες" εντάσσει και αυτή η οποία κυριεύεται από την επανάληψη (την επανάληψη των σχημάτων). Συγκεκριμένα αναφέρει:

«...η γεωμετρία που θέλω να προκύπτει από τη δική μου σύνθεση θέλω να είναι αισθητική γεωμετρία. Όχι γεωμετρία κανονική. Ορθοκανονική. Να έχει μια γλώσσα επανάληψης ή μη, σχέσης ή μη, των στοιχείων ας πούμε της σύνθεσης, που να προκύπτει ένα αισθητικό αποτέλεσμα.»

Σε κάποιο στάδιο της συζήτησης και αφού έχει προηγηθεί η αναφορά στις επαναλαμβανόμενες διαδικασίες, καθώς και στις "ιδιαίτερες γεωμετρίες", παρατηρεί κάποιες εικόνες κτιρίων με σκοπό να τις συγκρίνει και να διαπιστώσει τις ιδιότητες των fractal, οι οποίες εμφανίζονται σε κάποιες από αυτές.

Συγκριτικά με τις δύο κατηγορίες κτιρίων (fractal κτιρίων και μη fractal) αναφέρει:

«Στο πρώτο είναι γεωμετρία, κλασικά βάση, κορμός, συγκεκριμένες αποστάσεις, μοντέρνο κίνημα μπλα, μπλα...Στο δεύτερο, πάλι έχει γεωμετρία, απλά με άλλο τρόπο [...] Δηλαδή, εδώ παίρνει κι άλλα στοιχεία της επανάληψης της συγκεκριμένης. Παίρνει εμπλοκή ας πούμε. Εμπλοκή γεωμετριών. Αλλά πάλι, την ίδια ακολουθία έχει. Απλά εμπλέκει παραπάνω στοιχεία, σωστά;»

«Καλά, για την τρίτη που έχει την έλλειψη στην είσοδο και γεωμετρία φουλ τετραγώνων...δε μπορώ να δω τη σύνδεση εκεί.» (Παράρτημα Α, Εικόνα 6)

Καταφέρνει να ξεχωρίσει τις δύο διαφορετικές κατηγορίες αρχιτεκτονημάτων (τις fractal και τις μη-fractal) αλλά φαίνεται την επαναληπτική δομή ενός fractal να την αναγνωρίζει μόνο με τον αυξητικό τρόπο και όχι με μορφές όπου έχουν την επανάληψη στο εσωτερικό τους σχηματίζοντας ένα διάτρητο fractal.

Μέσα από τη συζήτηση σχετικά με τη φύση και τα μαθηματικά όπου τη διέπουν, με την έντονη παρουσία της επανάληψης των δομών, της γεννάται η απορία του γιατί η επανάληψη δημιουργεί θετικά συναισθήματα. Όπως φαίνεται από το διάλογο, μία πιθανή απάντηση στο ερώτημά της θα μπορούσε να είναι ότι η ευφορία αυτή που δημιουργείται μέσα από τις δομές αυτές να οφείλεται στην οικειότητα που έχουμε σε κάθε τι φυσικό, ακόμα κι αν αυτό συμβαίνει με ασυνείδητο τρόπο. Στη συνέχεια της δόθηκε μια σειρά από εικόνες με fractal γεωμετρικά, φυσικά και αρχιτεκτονικά (Παράρτημα Β).

Ε: Λοιπον, τι βλέπεις στο πρώτο;

Χ: Βλέπω τις πολύ ωραίες γεωμετρίες των τριγώνων, που μου αρέσουν πάρα πολύ... το τρίγωνο... οι υποδιαίρέσεις του δεν είναι; Και mirror. Το φύλλο έχει κάποια εμπλοκή με τις υποδιαίρέσεις; Φύλλο δεν είναι;

Ε: Ναι, είναι φύλλο φτέρης.

Χ: Μια επανάληψη δεν έχει;

Ε: Ναι.

Χ: Και αντίστοιχα το πιο κάτω που είναι... κτίριο είναι;

Ε: Είναι μέρος ινδουιστικού ναού.

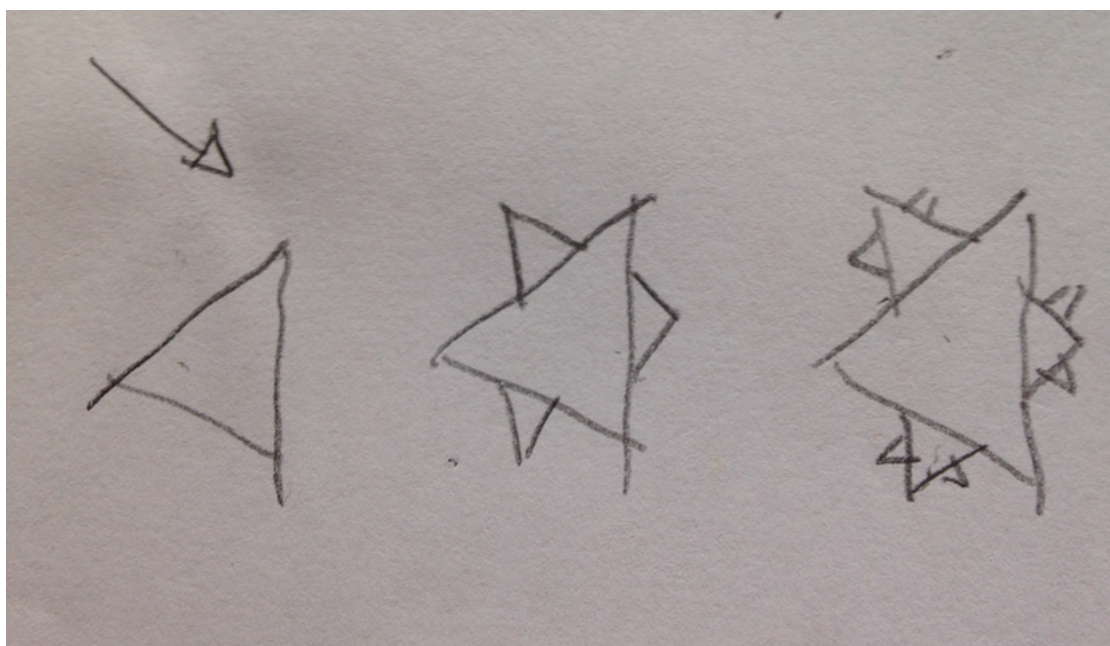
Χ: Κι έχει κι αυτό μια επανάληψη [...] Κι αυτό έχει πολλές αναλογίες...αναλογίες και επαναλήψεις. Η γεωμετρία είναι πολύ σημαντική για το αποτέλεσμα. Γιατί μια γεωμετρία με αναλογίες δεν μου κλωτσάει στο μάτι. Γιατί δε μπορώ να πω ότι βρίσκω γεωμετρία, στο τοπίο, στο φυσικό τοπίο...προφανώς. Ήθελα να πω ότι αυτή τη καθαρή γεωμετρία δεν μπορώ να πω ότι τη συναντάω στα βράχια... αλλά για κάποιο λόγο μου αρέσει αυτό που βλέπω. Από την άλλη, θα είχε ενδιαφέρον να φωτογράφιζες ένα βράχο, και όπως σε ένα πίνακα τραβάς χαράξεις και βγαίνει μια γεωμετρία και λες “α, γι’ αυτό μου αρέσει” και κάπως έτσι το εξηγείς, θα έχει ενδιαφέρον σε ένα φυσικό τοπίο να κάνεις την ίδια διαδικασία για να δεις ότι μου αρέσει αισθητικά αυτό το ακανόνιστο γιατί υπάγεται σε γεωμετρία. [...]

Παρατηρεί τις εικόνες και διακρίνει τις επαναλήψεις που υπάρχουν σε κάθε μια από αυτές. Χαρακτηρίζει τα σχήματα αυτά ως όμορφα και συνεχίζει να δώσει απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα που της είχε δημιουργηθεί. Διακρίνει τις επαναλήψεις, καθώς και το ρυθμό ή αλλιώς την αναλογία. Μέσα από τη συζήτηση κάνει σκέψεις σχετικά με τη γεωμετρία του περιβάλλοντος και ουσιαστικά προτίνει να γίνει μια μέτρηση της εικόνας του περιβάλλοντος με άξονες και χαράξεις, κάτι σαν τη fractal διάσταση.

Αντρέας

Ο Αντρέας έχει μια σχετική οικειότητα με τον όρο fractal και τα χαρακτηριστικά αυτού. Πριν ακόμα γίνει κάποια αναφορά πάνω στα fractal στο πλαίσιο το οποίο είναι δομημένη η συνέντευξη (στο στάδιο δηλαδή όπου έχουμε επιλέξει να συζητηθούν), ο ίδιος αναφέρεται σε fractal και σε οργανικές μορφές. Γνωρίζει πως ένα fractal διέπεται από έναν κανόνα συνεχούς επανάληψης μιας συγκεκριμένης γεωμετρική δομής:

«...νομίζω και τα fractals, δεν ξέρω αν είναι όντως αυτό το πράγμα, αλλά νομίζω ότι είναι μορφές οι οποίες επαναλαμβάνονται, αυτό νομίζω, διόρθωσέ με αν κάνω λάθος. Για τα fractals εγώ έχω μια εικόνα όπου είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο που στα τρίτα των πλευρών του αναπτύσσονται άλλα ισόπλευρα τρίγωνα και πάει λέγοντας. Κι αν αλλάξεις την αναλογία θα αλλάξει το σχήμα, αν αλλάξεις το επίπεδο και το κάνεις στερεό θα αλλάξει η εικόνα κτλ, κτλ» (Εικ. 46)



Εικόνα 46. Σχέδιο στο οποίο ο φοιτητής παρουσιάζει το πως φαντάζεται ένα fractal.

Επίσης, συνήθως κατά τη συνθετική διαδικασία χρησιμοποιεί, όπως ξανά αναφέρθηκε, τη γεωμετρία με συγκεκριμένα βήματα, αφαιρετικά, αλλά δύσκολα θα φτάσει σε μορφές οργανικές οι οποίες έχουν χαρακτηριστικά και ιδιότητες των fractals. Χαρακτηριστικά, αναφέρει:

«...η γεωμετρία για τη σχεδίαση που εγώ κάνω, για τις χαράξεις που εγώ κάνω σε μία μελέτη που θα ξεκινήσω να προσεγγίζω. Ξεκινάει από αυστηρή γεωμετρία, την οποία προσπαθώ σιγά σιγά να αποδομήσω, να διαλύσω, μέχρι εκεί που θα φτάσω [...] Καταλήγω πάντως σε πολύ σαφείς γεωμετρίες [...] Δύσκολα θα πάω να κάνω κάτι με οργανική μορφή».

Ωστόσο, για τον Αντρέα, μια οργανική μορφή η οποία στη βάση της είναι fractal, έχει σαφώς την επανάληψη και την αναλογία του μοτίβου ως βασικά χαρακτηριστικά, αλλά πρόκειται για το αυξητικό fractal. Αυτή τη δομή δυσκολεύεται να την αποδεχθεί και να χρησιμοποιήσει. Από την άλλη, αναζητάει τη συμμετρία και την επανάληψη στα σχήματα καθώς δίνουν μορφές *αρμονικές και αισθητικά καλές*. Χωρίς ο ίδιος να το αντιλαμβάνεται ως fractal, κάνει αποδεκτά πολλά σχήματα, είτε πρόκειται για γεωμετρικά σχήματα είτε για αρχιτεκτονήματα, τα οποία είναι περιπτώσεις διάτρητων fractal. Περιπτώσεις δηλαδή που διατηρούν ένα απλό ευκλείδειο γεωμετρικό σχήμα στο περίγραμμά του (τετράγωνο, τρίγωνο κ.α.). Όταν του δίνεται να σχολιάσει το τρίγωνο Sierpinski, καθώς και ένα κτίριο το

οποίο θυμίζει στη μορφή του το Σπόγγο του Menger (Παράρτημα Α, Εικόνα1), τα χαρακτηρίζει ως "όμορφα" και "ήσυχα" σχήματα.

«Δε με ξενίζει γιατί είναι ένα ήσυχο σχήμα. Τα ήσυχα σχήματα δε μου προκαλούν πανικό...Έχει μια κανονικότητα στα ανοίγματα, δεν έχει δηλαδή ασύμμετρα ή σποραδικά τοποθετημένα ανοίγματα, κάτι το οποίο δημιουργεί μια ψυχολογική ηρεμία σε μένα...»

Τα μοτίβα, η συμμετρία και η επανάληψη

Για τον Αντρέα, η λογική των μοτίβων κατά την αρχιτεκτονική σύνθεση δεν είναι κάτι το αποδεκτό. Θεωρεί ότι περιορίζει τη διαδικασία της σύνθεσης και πέρα από τη μορφή, όπως σε πολλά παραδείγματα άκρως συμμετρικών και fractal αρχιτεκτονικών περιπτώσεων, τα χαρακτηρίζει ως "εμμονικά" και "χωρίς νόημα" κτίρια. Ωστόσο, όπως ξανά αναφέρθηκε, αναγνωρίζει την αισθητική αξία μιας συμμετρικής και κυριευμένης από αναλογίες μορφής.

Στις διάφορες εικόνες που το δώθηκαν να παρατηρήσει (Παράρτημα Β), διέκρινε τις επαναληπτικές διαδικασίες. Ξεχώρισε, όμως, αυτές όπου η επανάληψη γίνεται αυξητικά και αυτές όπου η επανάληψη συμβαίνει στο εσωτερικό του περιγράμματος (διάτρητα). Της πρώτης περίπτωσης σχήματα και δομές τα ονομάζει fractal ή "φρακταλόμορφα", ενώ της δεύτερης περίπτωσης είναι γι' αυτόν μορφές με κάποιες χαρακτηριστικές επαναλήψεις στο εσωτερικό τους. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

«...Ναι εδώ υπάρχει μια αυξητική λογική σε έναν δεδομένο χώρο, σε έναν περιορισμένο χώρο...» (Παράρτημα Β, Εικόνα1)

«...μου θυμίζει ένα φύλλο ενός δέντρου, που ακολουθεί μια αντίστοιχη λογική, τουλάχιστον αφαιρετικά κι αυτό μπορεί να ακολουθεί τη λογική του fractal ας πούμε, της επανάληψης, ένα συγκεκριμένο κανόνα με μια συγκεκριμένη μαθηματική έκφραση, η οποία επαναλαμβάνεται μη σταθερά μειούμενη ή αυξανόμενη...» (Παράρτημα Β, Εικόνα 2).

5^ο) Σχεδίαση-σύνθεση και fractals

Μετά από τη συζήτηση που προηγήθηκε σχετικά με τη γεωμετρία, τη σύνθεση, τη φύση και τους κατώτερους μαθηματικούς μηχανισμούς της, επιχειρήθηκε μια περισσότερο καλλιτεχνική σύνδεση με τα παραπάνω. Σκοπός ήταν να δούμε εάν οι σχετικές προηγούμενες αναφορές οδηγήσουν μέσα από το σχεδιασμό (σκαρίφημα) σε fractal ή κοντά σε fractal μορφές. Έτσι, τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν το άπειρο.

Χριστίνα

E: Θέλω, έτσι, με ένα γρήγορο σκίτσο, όπως σου βγει, να μου σχεδιάσεις το άπειρο.

X: Το άπειρο;

E: Πως θα σχεδιάζες το άπειρο;

X: (σκεφτεται) Δεν ξέρω! (γέλια) Μπορεί να το σχεδιάζα σαν παλμό καρδιάς...κι οτι μπορεί να συνεχίζει σαν συνεχή γραμμή, μπορεί να είναι η συνέχεια σε κάτι άλλο κι όχι απαραίτητα στο ίδιο πράγμα...

Παρ' οτι δεν το σχεδίασε, αυτό που τελικά θα έκανε για να σχηματίσει κάτι το οποίο θα της θύμιζε το άπειρο (τον παλμό της καρδιάς σε ένα καρδιογράφημα), έχει στοιχεία τόσο της επανάληψης όσο και του ρυθμού.

Τέλος, στην ίδια λογική με την προηγούμενη ερώτηση σχετικά με το άπειρο, και θέλοντας να γίνει μια περισσότερο στενή σχέση με την αρχιτεκτονική, ωστόσο σε ένα αρχικό στάδιο, τους δόθηκε ένας κύβος ώστε να τον μεταχειρισθούν ως θεματικό μοτίβο σε μία αρχιτεκτονική σύνθεση.

Χριστίνα

E: Οκ [...] Αν σου έδινα έναν κύβο, πως θα μπορούσες να χρησιμοποιήσεις έναν κύβο σαν μοτίβο, έχω αυτό κι από αυτό κάτι θα φτιάξω.

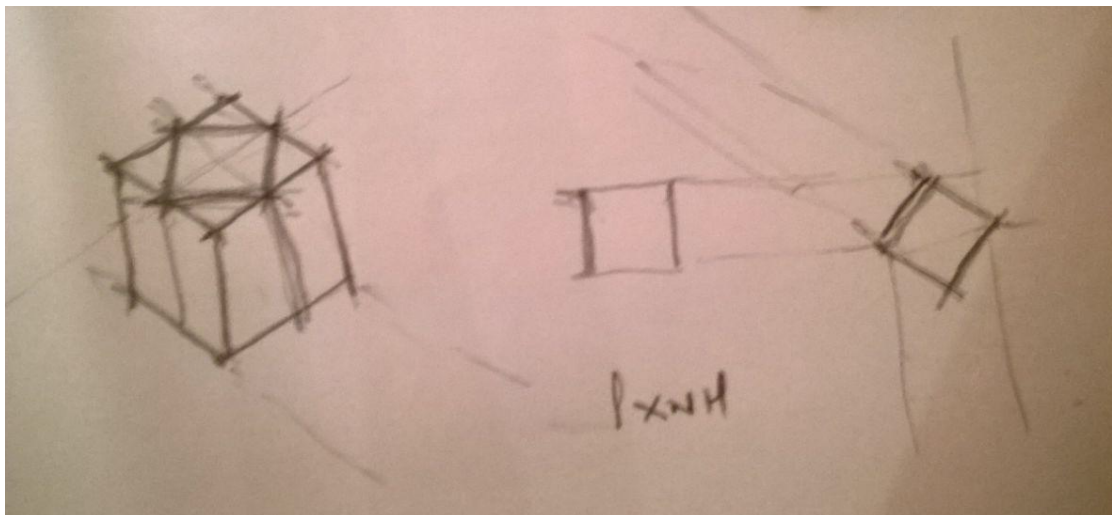
X: Ο οποίος κύβος είναι, τι; Είναι κάτι συγκεκριμένο;

Ε: Είναι ένας κύβος.

Χ: Ό,τι διαστάσεων θέλουμε...θα μου άρεσε η επανάληψη του αποτυπώματός του να κάνει κάτι... δε θα θελα να τον σπάσω... το ίχνος του...άμα ρε παιδί μου είχα έναν κύβο, όπου τον παίρνω και τον σηκώνω και τον σέρνω...τον τοποθετώ σε σημεία, τον σέρνω και τον ακουμπάω κι εκεί που μπορεί να τέμνονται ας πούμε οι...δηλαδή στη μέση του ξέρω γω...τα ίχνη του να μην τα συναντάω στο απόλυτο μέγεθός τους, αλλά και στο μισό τους.

Ε: Οκ, κατάλαβα. Θα έπαιζες με τον κύβο όπως είναι. Δε θα τον έκανες διάτρητο ή θα τον έσπαγες... [...]

Χ: Τώρα που το σχεδιάζω παράλληλα που σου μιλάω...Μπορεί να το χώριζα δημιουργώντας ένα τρίγωνο, που θα σπαγα τις γωνίες του, που θα δημιουργόνταν ένας άλλος κύβος, σαν στραμμένος στο εσωτερικό του [...].

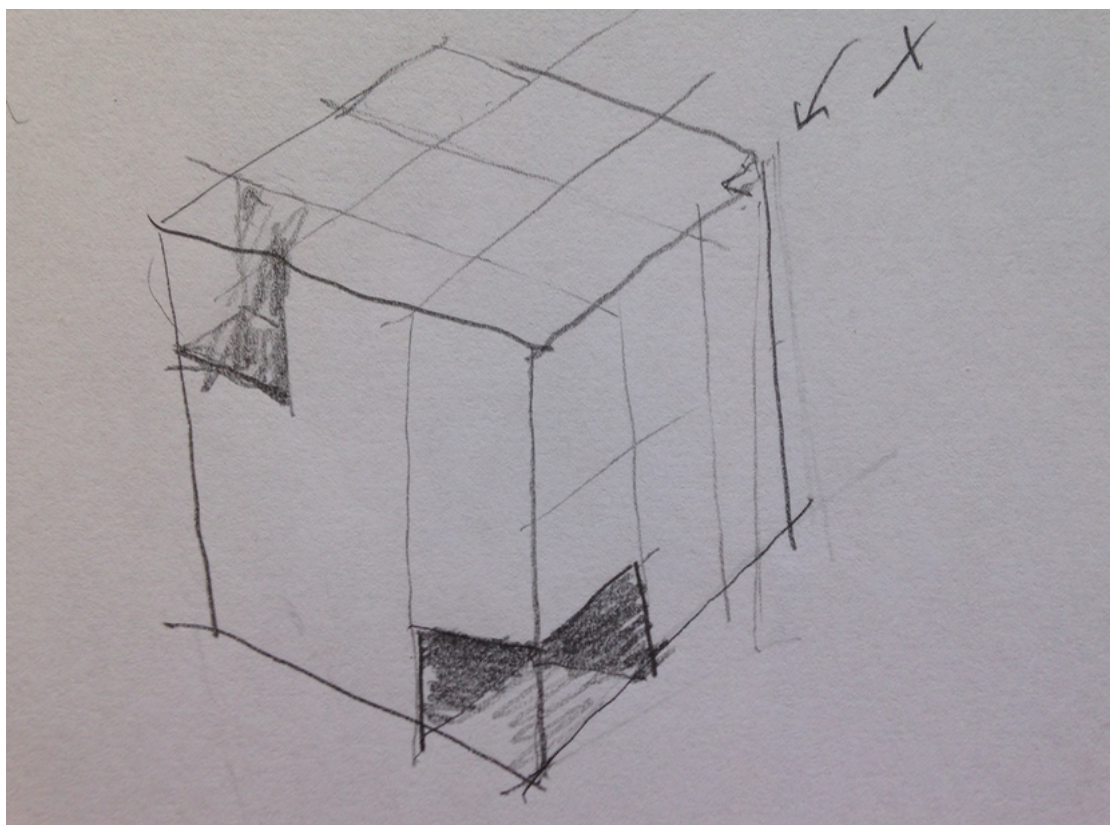


Εικόνα 47. Σχέδιο βασισμένο στον κύβο ως θεματικό μοτίβο. Το αποτέλεσμα εμφανίζει μια αντιστοιχία με τα Medieval πατώματα (§3.1.4.)

Αντρέας

Και στις δύο περιπτώσεις σχετικά με το άπειρο και τη σχεδίαση με θεματικό μοτίβο, ο Αντρέας διατήρησε απλά περιγράμματα και δεν εμφάνισε ιδιότητες των fractal. Μάλιστα κατά το σχεδιασμό με τον κύβο σχολίαζε λέγοντας πως αποφεύγει συνειδητά μια μορφή fractal λογικής διότι θα οδηγηθεί σε αρχιτεκτονικό σφάλμα. Σχετικά με τη σχεδίαση με τον κύβο, καθώς σχεδιάζει αναφέρει:

«...θα ήταν μια λογική πλέγματος στην οποία δε θα είχε συμμετρία... στον οποίο, θα μου πεις με ποια λογική; Θα έκανα αποτμίσεις κυβικές [...] δε θα το πήγαινα μάλλον σε φρακταλική λογική, ίσως επειδή δεν έχω επεξεργαστεί τόσο ακόμα, αλλά ίσως να βρω αφορμές να το κάνω, αλλά θα έδωχνα ίσως κι αυτό. Σε μια λογική συμμετρίας ίσως έδωχνα κι αυτό... είναι κάτι το οποίο είναι πεπερασμένο...δε θα το πήγαινα εδω πέρα και να διώξω ακόμα έναν πιο μικρό κύβο...αυτό θα ήταν φάουλ νομίζω». (Εικ. 48)



Εικόνα 48.

Καθώς εμφανίζει τη λογική που κρύβεται πίσω από το σχέδιό του, φαίνεται να απορρίπτει μια fractal μορφή και την επανάληψη όπου του ζητήθηκε να έχει ο κύβος, αντιμετωπίζοντάς τον ως μοτίβο, την φτάνει σε μικρό αριθμό. Κάνει «αποτμίσεις» όπως λέει, αφαιρώντας μικρότερους κύβους, αλλά κάτι τέτοιο το κάνει μόνο δύο φορές, καθώς αν το συνέχιζε θα ήταν αρχιτεκτονικό λάθος.

	Χριστίνα	Αντρέας
Μαθηματικά		
Πεποιθήσεις	- Γοητευτικός κόσμος - Τρόπος σκέψης - Φιλοσοφικό επίπεδο - Επικοινωνία	- Θαυμαστός κόσμος - Πρακτικό επίπεδο - Φιλοσοφικό επίπεδο
Πρακτική	- Γεωμετρικά σχήματα - Μετασχηματισμοί - Υπολογισμοί - Κλίμακα-Αναλογία - Εμπειρική χρήση	- Γεωμετρικά σχήματα - Υπολογισμοί - Μέτρηση - Κλίμακα - Εμπειρική χρήση
Γεωμετρία		
Ευκλείδεια	- Ορθοκανονικά σχήματα	- Ορθοκανονικά σχήματα
Μη-Ευκλείδειες	- Άγνωστες - Ιδιαίτερες γεωμετρίες	- Διαφορετικό σχήμα → διαφορετική γεωμετρία
Φύση - Φυσικό Περιβάλλον		
Στάση-Συναισθήματα	- Θετικά - Σεβασμός	- Προσφέρει ηρεμία - Συνεχής αναζήτηση
Σχεδιασμός	- Εργαλείο - Υπερισχύει κατά τη σύνθεση - Τελικές φυσικές μορφές	- Εργαλείο - Έμπνευση - Τελικές φυσικές μορφές
Τα fractals		
Εμπειρία-Γνώση	- Άγνωστος όρος - Βιολογικές μορφές - Αυξητικό fractal	- Γνωστός όρος - Βιολογικές μορφές - Αυξητικό fractal
Πρακτική	- Δομές με επανάληψη - Αυξητικά fractal - Αστικό επίπεδο - Διάσταση	- Συμμετρία
Υποσυνείδητη	- Άπειρο: Παλμός καρδιάς - Διάτρητο fractal	- Διάτρητο fractal
Συνειδητή		
Στάση	- Θετική - Βιοφιλικό Περιβάλλον - Μελλοντική χρήση	- Αρνητική

Πίνακας 1.

6. Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία επιχειρήθηκε να διερευνηθεί η σχέση των φοιτητών της αρχιτεκτονικής με τις ιδιαίτερες γεωμετρικές μορφές, αυτές των fractal, οι οποίες χρησιμοποιούνται και ως τρόπος σχεδίασης από την αρχιτεκτονική. Πιο συγκεκριμένα, διερευνήθηκε ο βαθμός κατά τον οποίο οι μορφές αυτές χρησιμοποιούνται από τους φοιτητές, με συνειδητό ή ασυνείδητο τρόπο, αλλά και οι λόγοι όπου οδηγούν σε τέτοιου είδους φόρμες. Στην ενότητα αυτή συζητούνται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων συνθετικά και με αναφορά στα σχετικά βιβλιογραφικά δεδομένα με σκοπό να απαντηθούν τα ερωτήματα. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται σε κατηγορίες, ως προς του άξονες όπου λαμβάνουν μέρος (μαθηματικά, φυσικό περιβάλλον και fractals), όπως αυτά παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Πρώτα απ' όλα, σύμφωνα με τα αποτελέσματα, διαπιστώνεται πως οι φοιτητές αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα και την αξία των μαθηματικών, τόσο ως προς κάτι ανώτερο με μια φιλοσοφική προσέγγιση, αλλά και ως εργαλείο για τον αρχιτέκτονα. Ωστόσο, οι ίδιοι θεωρούν πως δεν κατέχουν τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, γεγονός το οποίο επιβεβαιώνεται και από τις σχετικές έρευνες για τη σχέση των αρχιτεκτόνων με τα μαθηματικά, όπως αυτές παρουσιάζονται από τον Salinger (2004).

Κατά τη συνθετική διαδικασία οι συμμετέχοντες, αρχικά, δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν μαθηματικά. Στη συνέχεια όμως και οι δύο φοιτητές καταλήγουν πως κατά τη συνθετική διαδικασία τα μαθηματικά εμφανίζονται και με μια πιο θεωρητική πλευρά. Έτσι, πέρα από τις πρακτικές λύσεις οι οποίες προκύπτουν μέσα από υπολογισμούς και μετρήσεις, καθώς και μετασχηματισμούς και τη χρήση πρότυπων γεωμετρικών μορφών, κάνουν λόγο και για μαθηματικές αφηρημένες σκέψεις. Κάτι τέτοιο έρχεται κοντά στην άποψη του Salinger (2000), σύμφωνα με την οποία ο αρχιτεκτονικός σχεδιασμός είναι μια διαδικασία η οποία απαιτεί αφαιρετική σκέψη, άρα στη βάση της είναι μαθηματικά. Καθώς επίσης και με τους Millroy (1992) και Smith (1999) όπου η μαθηματική διαδικασία παίρνει μέρος και σε ότι αφορά το σχήμα καθώς και την αίσθηση του χώρου.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, οι φοιτητές αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερη άνεση τη γεωμετρία, γεγονός το οποίο και είναι αναμενόμενο, εφόσον κάνουν κατεξοχήν εμπειρική χρήση γεωμετρικών σχημάτων και ιδιοτήτων. Η γεωμετρία γι' αυτούς είναι η ευκλείδεια γεωμετρία και πιο συγκεκριμένα είναι τα πρότυπα ευκλείδεια σχήματα, όπως το τρίγωνο και το ορθογώνιο. Όταν προκύπτουν γεωμετρικές μορφές οι οποίες αποκλείουν από τις πρότυπες, ακόμα και όταν οι γωνίες σταματούν να είναι ορθές, τότε αναφέρονται σε "ιδιαίτερες γεωμετρίες". Το γεγονός αυτό, θα μπορούσαμε να πούμε πως φανερώνει την Καντιανή άποψη, όπως αυτή διατυπώνεται από τον Arthur Melnick, πως η *γεωμετρία* είναι πρώτα απ' όλα *ευκλείδεια*.

Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν, φάνηκε πως οι συμμετέχοντες ενώ δεν κατέχουν βασικές γνώσεις σχετικά με το μαθηματικό αντικείμενο των fractals, ωστόσο, εμφανίζουν συμπεριφορές οι οποίες μπορούμε να ισχυριστούμε ότι έχουν στοιχεία από τα fractals. Πιο συγκεκριμένα, η Χριστίνα ενώ δεν έχει διδαχθεί στο παρελθόν τη Γεωμετρία των Fractals, καθώς και η σχέση της με τα μαθηματικά και τη γεωμετρία μένει σε εμπειρικό επίπεδο, έχει χρησιμοποιήσει στο παρελθόν ιδιότητες οι οποίες συναντώνται σε fractal αντικείμενα. Για παράδειγμα, τη συνεχή επανάληψη μιας δομής. Αναγνωρίζει το γεγονός πως η αναλογία και η επανάληψη συνδυάζονται και το αποτέλεσμα προσφέρει μορφές οι οποίες είναι αισθητικά αποδεκτές. Ο Αντρέας, από την άλλη, κατέχει κάποιες πληροφορίες σχετικά με τα fractals ως μαθηματικό αντικείμενο και είναι σε θέση να χαρακτηρίσει διάφορες μορφές ως "φρακταλικές". Αξιοσημείωτο αποτελεί το γεγονός πως και οι δύο συμμετέχοντες αναφέρονται σε τέτοιου είδους μορφές με όρους όπως "βιολογικές" και "οργανικές". Επίσης, μέσα από τη συζήτηση καταφέρνουν άμεσα να κάνουν τη σύνδεση των επαναλαμβανόμενων αυτών γεωμετρικών μορφών με τα φυσικά στοιχεία.

Οι συμμετέχοντες, είναι σε θέση να αναγνωρίσουν μορφές οι οποίες είναι fractal, κυρίως μέσω των χαρακτηριστικών επαναλήψεων όπου παρουσιάζονται και της αυτό-ομοιότητας. Όταν, όμως, κάνουν λόγο για fractal στοιχεία εννοούν τα αυξητικά fractals. Σύμφωνα με τις απόψεις που διατυπώθηκαν από τους ίδιους, τα διάτρητα fractals αποτελούν άλλου είδους αντικείμενα. Μάλιστα, ο Αντρέας χαρακτηρίζει ως "ήσυχα σχήματα" τα διάτρητα fractals και δείχνει να έχει προτίμηση σε αυτά, σε αντίθεση με τα αυξητικά. Επίσης, η Χριστίνα, αποκαλεί κυτταρικές (ή αλλιώς βιολογικές) μορφές αυτές οι οποίες είναι αυξητικά fractals,

ενώ δυσκολεύεται να αναγνωρίσει την αυτο-ομοιότητα σε ένα διάτρητο fractal κτίριο.

Οι φοιτητές σε προηγούμενες εφαρμογές (σχεδιασμό) έχουν κάνει ήδη χρήση ιδιοτήτων των fractals. Οι ιδιότητες αυτές θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν και ως *αυτό-ομοιότητα με μια λιγότερο μαθηματική αυστηρότητα*. Ειδικά στην περίπτωση της Χριστίνας αυτό έχει γίνει με υποσυνείδητο τρόπο, καθώς όπως ξανά αναφέρθηκε, δεν κατείχε κάποια γνώση σχετικά με τα συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα. Σε προηγούμενη εφαρμογή (πρότζεκτ το οποίο πραγματοποίησε στα πλαίσια των σπουδών της) το fractal το οποίο χρησιμοποίησε ήταν επηρεά από τη βιολογία και τον τρόπο ανάπτυξης των κυττάρων. Πρόκειται για ένα αυξητικό fractal. Ωστόσο, όταν της ζητάται να σχεδιάσει με τον κύβο ως θεματικό μοτίβο, η αντιμετώπισή της δείχνει να τον χειρίζεται με τρόπο ο οποίος θυμίζει ένα διάτρητο fractal. Εμφανίζει μικρό αριθμό επαναληπτικών κινήσεων οι οποίες θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν και ως *αυτό-ομοιότητα*. Ο Αντρέας από την άλλη, κατά το σχεδιασμό του συνειδητά απορρίπτει τις fractal μορφές, καθώς θεωρεί πως δεν έχουν κάποιου είδους λειτουργική αξία για τη σύνθεση.

Στο σημείο αυτό επιχειρούμε να συνδέσουμε τα αποτελέσματα της έρευνας με τα στοιχεία τα οποία παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία σχετικά με την εξέλιξη της fractal αρχιτεκτονικής, καθώς και τους λόγους για τους οποίους αυτή χρησιμοποιείται. Οι συμμετέχοντες της έρευνας, παρά το ότι κατέχουν ελάχιστες πληροφορίες σχετικά με τη Γεωμετρία των Fractals, δηλαδή, τα μαθηματικά τα οποία διέπουν τη φύση, διαπιστώνεται πρώτον ότι υποσυνείδητα έχουν χρησιμοποιήσει κατά το σχεδιασμό τους σε παλαιότερες συνθέσεις ιδιότητες των fractals (επανάληψη μοτίβου, αυτό-ομοιότητα) και δεύτερον ότι αναγνωρίζουν την αισθητική αξία μιας μορφής η οποία χαρακτηρίζεται από σωστές αναλογίες και συμμετρία. Κάτι τέτοιο συνδέεται με απόψεις όπως αυτές διατυπώθηκαν στην §3.3, σχετικά με την τάση του ανθρώπου σε μορφές οι οποίες θυμίζουν ή είναι fractal. Ως προς το φυσικό περιβάλλον, είναι χαρακτηριστικός ο σεβασμός που δείχνουν προς αυτό, καθώς και το ότι αποτελεί πηγή έμπνευσης για τους ίδιους. Στο τέλος της συζήτησης η Χριστίνα προσπαθεί να ερμηνεύσει με διαφορετικό τρόπο την ευφορία όπου προσφέρει ένα φυσικό περιβάλλον. Δε μένει στις τελικές μορφές, αλλά αναρωτιέται αν αυτό το συναίσθημα τελικά οφείλεται στον άρτιο τρόπο κατά τον οποίο είναι κατασκευασμένη η φύση και τις μαθηματικές διαδικασίες οι οποίες έχουν οδηγήσει τελικά σε αυτές τις μορφές. Η άποψη αυτή έρχεται σε συμφωνία με

τους ισχυρισμούς των Περιβαλλοντικών ψυχολόγων και τις αρχές της Βιοφιλίας, όπως αυτές διατυπώνονται από τους Salingeros και Medsen (2008).

Ως προς την εκπαιδευτική αξία της παρούσας διπλωματικής εργασίας στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών, επιχειρείται να διερευνηθεί σε αρχικό επίπεδο η σχέση των αρχιτεκτόνων με τα μαθηματικά, καθώς και με ιδιαίτερες γεωμετρικές μορφές όπου προσφέρει η φύση, αυτές των fractals. Αφορά, δηλαδή, ένα εργασιακό χώρο ο οποίος κάνει εμπειρική χρήση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, καθώς επίσης εμπνέεται από το φυσικό περιβάλλον, αναζητώντας αισθητικά άρτιες λύσεις. Κάτι τέτοιο έρχεται σύμφωνα με τις σχετικές έρευνες οι οποίες πραγματοποιήθηκαν σε σχολές αρχιτεκτονικής, όπου τα μαθηματικά και συγκεκριμένα η Γεωμετρία των Fractals χρησιμοποιήθηκαν ώστε να αντιμετωπισθούν από τους φοιτητές ως εργαλείο για τον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό, αλλά και για να απομακρυνθούν από την ψυχρή στάση απέναντι στα μαθηματικά γενικότερα, όπως αυτές παρουσιάζονται από τους Sorguc (2005), Vener και Maor (2003). Η προσέγγιση στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας μένει σε θεωρητικό επίπεδο. Θα μπορούσε στο μέλλον να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στην πρακτική των φοιτητών της αρχιτεκτονικής, καθώς και των αρχιτεκτόνων γενικότερα, σε σχέση με τα μαθηματικά και τη Γεωμετρία των Fractals.

Αναφορές

- Ascher, M., D'Ambrosio, U. (1994). Ethnomathematics: A dialogue. *For the learning of mathematics*, 36-43.
- Bickley-Green, C. A. (1995). Math and art curriculum integration: A post-modern foundation. *Studies in Art Education*, 6-1.
- Bovill, C. (2008). The Doric Order as a Fractal. *Nexus Network Journal*, Vol. 10, No1, 283-290.
- Cheun, K. C., Wells, N. M. (2004). The Natural Environment & Human Well-Being: Insights From FractalComposition Analysis? *HarFA - Harmonic and Fractal Image Analysis*, 76 – 82.
- Cruickshank, L. (2010). The Case for a Re-evaluation of Deconstruction and Desing; Against Derrida, Eisenman and Their Choral Works. *A Design Culture Journal*.
- Delgano-Cepeta, F. (2005). Designing a Problem-Based Learning Course of Mathematics for Architects. *Nexus Network Journal*.
- Detrie, T. (2002). Gestalt Principles and Dynamic Symmetry: Natures Connection to Our Built Environment,
http://www.public.asu.edu/~detrie/msj.uc_daap/article.html
- Eglash, R., Odumosu T. B. (2005). Fractals, Complexity, and Connectivity in Africa. *What Mathematics from Africa? Polimetrica International Scientific Publisher Monza/Italy*. 101-109.
- Gerdes, P. (1988). On culture, geometrical thinking and mathematics education. *Educational studies in mathematics*, Vol. 19, No2, 137-162.

- Gonenz Sorcug, A. (2005). Teaching Mathematics in Architecture, *Nexus Network Journal Vol. 7, No. 1*, 119-124.
- Harris, J. (2005). Integrated Function Systems and Organic Architecture from Wright to Mondrian, *Nexus Network Journal* 9,1 (Spring 2007): 93-102.
- Jones, O. 1972. The Grammar of Ornament. *New York: Van Nostrand Reinhold*.
- Joye, Y. (2007). Fractal Architecture Could Be Good for You, *Nexus Network Journal Vol. 9, No 2*, 311-320.
- Keane, M., Keane, L. (2005). The Geometry of Wright, *Nexus Network Journal Vol. 7, No. 1*, 48-57.
- Lukman, M., Hariandi, Y., Destiarmand, A. H. (2015). Batik Fractal: Traditional Art to Modern Complexity. Bandung Institute of Technology & Fe, Bandung, Indonesia.
- Lakoff, G., Johnson, M. (1999). Philosophy in the Flesh: The Embodied Mind & its Challenge to Western of Thought. *Basic Books*.
- Mandelbrot, B. B. (1982). The Fractal Geometry of Nature, *Freeman, New York*.
- Meehan, P. (1987). Truth Against the World. *Wiley-Interscience*.
- Michael, O. J., (2001). Late Twentieth Century Connections Between Architecture and Fractal Geometry, *Nexus Journal Vol. 3, No. 1*, 73-81.
- Mikiten, T. M., Salingaros, N. A., Yu, H. (2000). Pavements as Embodiments of Meaning for a Fractal Mind, *Nexus Network Journal, Volume II*, 63-74.
- Millroy, W. L. (1991). An ethnographic study of the mathematical ideas of a group of carpenters. *Learning and individual differences*, 1-25.

- Moran, J. F., Williams, K. (2005). From Tiling the Plane to Paving Town Square. in Emmer, M. (eds.), *Mathematics and Culture II, Springer Berlin Heidelberg*, 5-22.
- Nasio, J. D. (2010). Πέντε Παραδόσεις Πάνω στη Θεωρία Jacques Lacan, [μεταφρ.] Κανελλοπούλου Β.-Λ., Εκδ. Πατάκης.
- Nicol, C. (2002). Where's the Math? Prospective Teachers Visit the Workplace, *Educational Studies in Mathematics*, 50: 289-309
- Nottoli, H. (2005). Methods for Evaluation in Mathematics for Architecture and Design, *Nexus Journal Vol. 7, No. 1*, 69-75.
- Ostwald, M. J., Tucker, C. (2007). Reconsidering Bovill's method for determining the fractal geometry of architecture, *41st Annual Conference of the Architectural Science Association ANZAScA 2007 at Deakin University*.
- Pagano, A. Tedeschini Lalli, L. (2005). Universita di Roma Tre, 1995-2005 Architecture and Mathematics, *Nexus Network Journal Vol. 7, No 2*, 89-97.
- Portoghesi, (2000). Nature and Architecture. *Milan: Skira*
- Saitis, E. Fractal Art: Closer to Heaven? Modern Mathematics, the Art of Nature and the Nature of Art.
- Sala, N. (2003). Fractal Geometry and Self-Similarity in Architecture: an Overview Across the Centuries, *Bridges, Mathematical Connections in Art, Music and Science*, 235-244.
- Sala, N. (2000). Fractal Models In Architecture: A Case Of Study, *Proceedings International Conference on "Mathematics for Living", Amman, Jordan*, 266-272.

- Salingaros, N. A. (2010). Beauty, Life, And The Geometry Of The Environment, *The Athens Dialogues-The Alexander Onassis Foundation, E-Journal, Harvard University's Center for Hellenic Studies*.
- Salingaros, N. A., Kenneth G. Masden II (2008). Neuroscience, the Natural Environment and Building Design: The Theory, Science and Practice of Bringing Buildings to Life, 59-83.
- Salingaros, N. A. (2004). Design Methods, Emergence, and Collective Intelligence
http://www.katarxis3.com/Salingaros-Collective_Intelligence.htm
- Salingaros, N. A. (2000). The Structure of Pattern Languages, *Architectural Research Quarterly, Vol. 4*, 149-161.
- Salingaros, N. A. (1999). Architecture, Patterns and Mathematics, *Nexus Journal Vol. I*, 75-85.
- Salingaros, N. A. (1999). Urban Space and its Information Field. *Journal of Urban Design 4*, 29-49.
- Schroeder, M. (1991). Fractals, Chaos, Power Laws. *Dover Publications, INC*, 17-21.
- Situngkir, H. Borobudur was Built Algorithmically.
<http://arxiv.org/pdf/1508.03649.pdf>
- Smith, J. P. (1999). Tracking the mathematics of automobile production: Are schools failing to prepare students for work?. *American Educational Research Journal*, 36(4), 835-878.
- Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns, *Science*.

- Strauss, A. & Corbin, J. (1998). Basics Qualitative Research. Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory. United States of America, California.
- Tedeschini Lalli, L., Conversano E. (2011). Sierpinski Triangles in Rome Medieval Floors, *Journal of Applied Mathematics Vol. 4, No 3*, 113-121.
- Triantafyllou, C., Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational Studies in Mathematics*, 74(3), 275-294.
- Trivendi, K. (1988). Hindu temples: models of a fractal universe. *Space design*, 234-258.
- Vaughan, J., Ostwald, M. J. (2008). Approaching Euclidean limits: a fractal analysis of the architecture of Kazuyo Sejima, *ANZAScA 2008 Conference Proceedings*.
- Verner, I. M., Maor, S. (2003). The Effect of Integrating Design Problems on Learning Mathematics in an Architecture College, *Nexus Network Journal Vol. 3, No 2*, 103-115.
- Williams, K. (1998). Italian Pavements: Patterns in Space, *Houston, Texas: Anchorage Press*.
- Williams, K. (1997). The Pavements of the Cosmati, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 19, No. 1, 41-45.
- Wigley, M. (1997). The Architecture of Deconstruction, Derrida's Haunt, *Cambridge, Massachusetts MIT Press*.
- Αναγνωστοπούλου, Ευαγγελάτου-Δάλλα, Λ., Κουλτούκη, Π. (2015). Μία Αναπαράσταση του Εγώ Μέσω των Fractals. *Τμήμα της Διπλωματικής Εργασίας "Η Γεωμετρία των Fractals, Μία Fractal προσέγγιση του

ασυνείδητου” στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, 2013.

Δρακόπουλος, Β., Ευαγγελάτου-Δάλλα, Λ. (1997). Η Νέα Διάσταση της Εκπαιδευτικής Μαθηματικής Σκέψης, *14^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*.

Ευαγγελάτου-Δάλλα, Λ. Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας. *Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα, 2000.*

Ευαγγελάτου-Δάλλα, Λ., Δρακόπουλος, Β., Μπεμ, Α. (1995). Στοιχεία Από Τη Θεωρία Των Fractals.

Μπούρας, Χ. Μαθήματα Ιστορίας της Αρχιτεκτονικής Ι, *Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 1999.*

Ευαγγελόπουλος, Δ. Ιερή Γεωμετρία, *Εκδ. Αρχέτυπο, Αθήνα, 2002.*

Ιστιότοποι

<https://classes.yale.edu/fractals/>

https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α



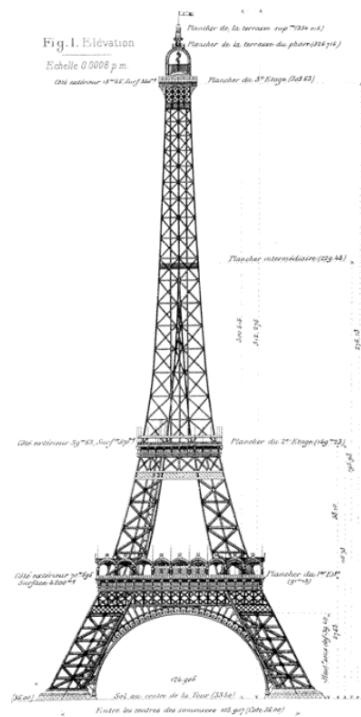
Εικόνα 1



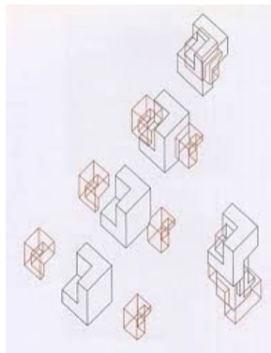
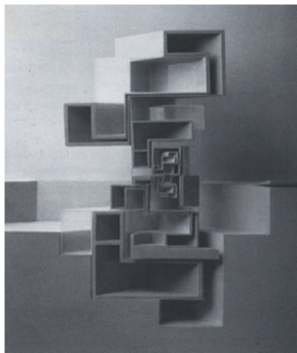
Εικόνα 2



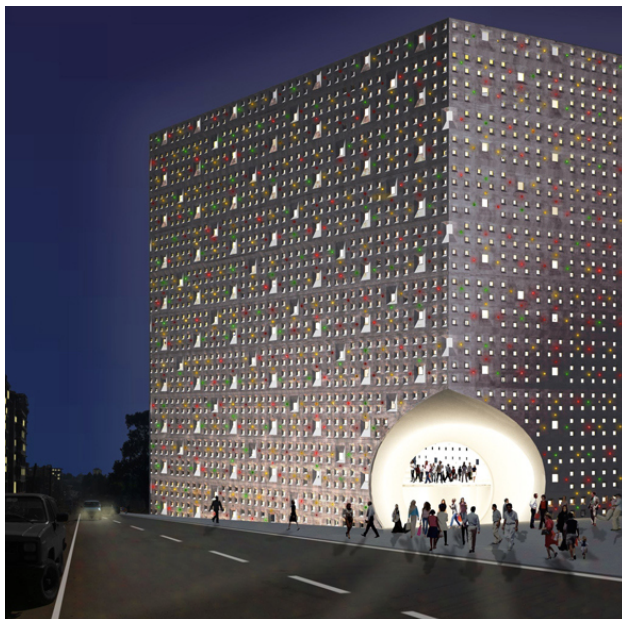
Εικόνα 3



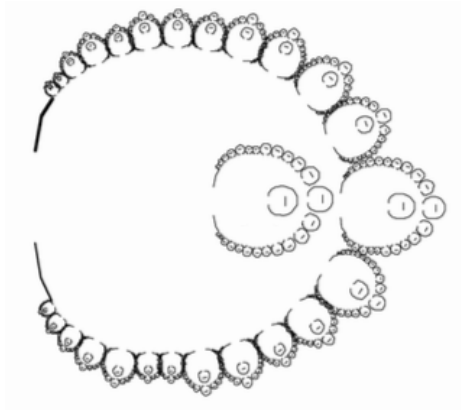
Εικόνα 4



Εικόνα 5



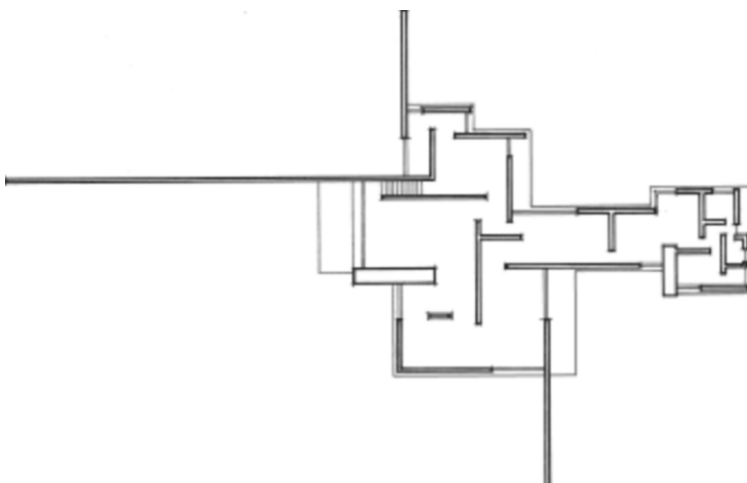
Εικόνα 6



Εικόνα 7

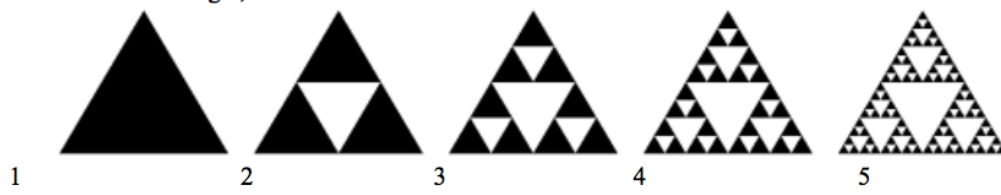


Εικόνα 8



Εικόνα 9

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β



Εικόνα 1



Εικόνα 2

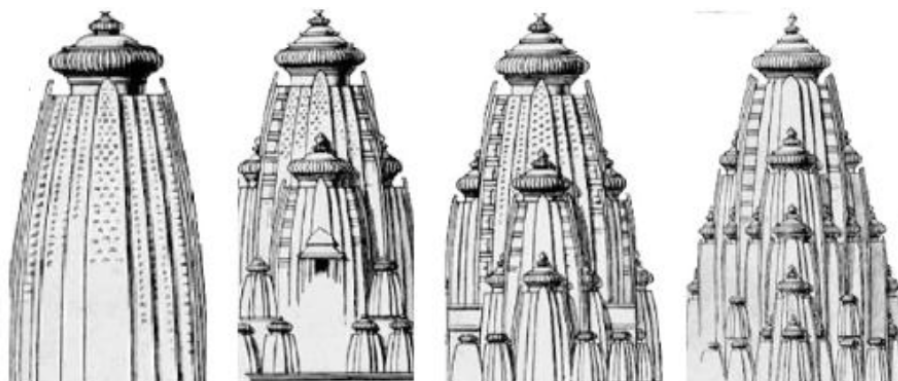


Fig 26: Line drawing of the subdivision of the shikharas of Kandariya temple in Khajuraho. Source : Drawing from Stella Kramrisch's book, The Hindu Temple

Εικόνα 3