

Η ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ Ε.Α. MICHAEL

ΣΠΗΛΙΩΤΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Αθήνα 2012**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ
MARINA ΧΑΡΑΛΑΜΠΙΔΟΥ

Η παρούσα Διπλωματική εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης
στα θεωρητικά μαθηματικά
που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών
του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Εγκρίθηκε την από Εξεταστική επιτροπή
αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο

Βαθμίδα

Υπογραφή

Μαρίνα Χαραλαμπίδου (επιβλέπουσα καθηγήτρια) Αναπληρώτρια καθηγήτρια.....

Μαρία Φραγκουλοπούλου

Καθηγήτρια

Ιωάννης Τσέρτος

Αναπληρωτής καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή αναφέρεται στην Εικασία Michael που αφορά την συναρτησιακή συνέχεια μιας μεταθετικής Fréchet τοπικά m -κυρτής άλγεβρας. Αποδεικνύεται ότι κάθε μεταθετική συμμετρική Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα είναι συναρτησιακά συνεχής. Επίσης, δίνονται οι έννοιες του πυκνού και ισχυρά πυκνού αντιστρόφου ορίου δακτυλίων, καθώς και σχετικά αποτελέσματα. Για μοναδιαίες μεταθετικές Fréchet τοπικά m -κυρτές άλγεβρες δίνονται συνθήκες που εξασφαλίζουν τη συναρτησιακή συνέχειά τους. Περαιτέρω, αποδεικνύεται ότι η Εικασία Michael είναι ισοδύναμη με το αν κάθε γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές μίας μεταθετικής πλήρους τοπικά m -κυρτής άλγεβρας είναι φραγμένο. Επιπλέον, δίνονται προϋποθέσεις ώστε Fréchet τοπικά m -κυρτές άλγεβρες με ορθογώνια βάση να είναι συναρτησιακά συνεχείς. Ακόμη, μέσω της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων πολλών μιγαδικών μεταβλητών, δίνουμε μία συνθήκη, που αν ικανοποιείται, οδηγεί στην συναρτησιακή συνέχεια των Fréchet τοπικά m -κυρτών αλγεβρών. Τέλος, μέσω της τεχνικής Do Sin Sya, παρουσιάζονται εναλλακτικές αποδείξεις ήδη γνωστών αποτελεσμάτων, σχετικών με την Εικασία Michael, καθώς και επιπλέον συμπεράσματα.

Λέξεις και φράσεις κλειδιά. Συναρτησιακά συνεχής τοπολογική άλγεβρα, Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, συμμετρική άλγεβρα, πυκνό (ισχυρά πυκνό) αντίστροφο σύστημα απεικονίσεων, ορθογώνια βάση, φραγμένα πολλαπλασιαστικά συναρτησοειδή, τεχνική Do Sin Sya.

ABSTRACT

This work refers to Michael's Conjecture which is about functional continuity of a commutative Fréchet locally m -convex algebra. It is proved that every commutative symmetric Fréchet locally m -convex algebra is functionally continuous. Moreover, the concepts of dense and strongly dense inverse limit rings are described, and results relevant to them are given. Also, for unitary commutative Fréchet locally m -convex algebras, conditions are given which ensure their functional continuity. Additionally, it is proved that Michael's Conjecture is equivalent to the boundedness of linear multiplicative functionals of a commutative Fréchet locally m -convex algebra. Furthermore, we study the class of Fréchet locally m -convex algebras with orthogonal bases and it is proved that it has the property of functional continuity. In addition, through the theory of complex functions of several complex variables, we refer to a relation which gives positive answer to Michael's Conjecture if it holds true. Finally, alternative proofs of already known results and other conclusions are given, using Do Sin Sya's technique.

Key words and phrases. Functionally continuous topological algebra, Fréchet locally m -convex algebra, symmetric algebra, dense (strongly dense) inverse limit of functions, orthogonal basis, bounded multiplicative functionals, Do Sin Sya technique.

Πρόλογος

Μια Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα είναι μία τοπολογική άλγεβρα της οποίας η τοπολογία ορίζεται μέσω μιας αριθμήσιμης οικογένειας από υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες, ως προς την οποία η άλγεβρα είναι πλήρης και μετριοποιήσιμη.

Το 1952 ο E.A. Michael διατύπωσε ένα ίσως από τα πιο ενδιαφέροντα ερωτήματα στη θεωρία των τοπολογικών αλγεβρών (βλ. [16]). Το ερώτημα είναι γνωστό ως

"Εικασία του Michael" ή "Πρόβλημα Michael",

και αφορά στο αν μια μεταθετική Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, έστω A , είναι απαραίτητα συναρτησιακά συνεχής, δηλαδή αν όλα τα πολλαπλασιαστικά και γραμμικά συναρτησοειδή

$$f: A \rightarrow \mathbb{C}$$

είναι συνεχείς απεικονίσεις. Αναφέρουμε σε αυτό το σημείο, πως είναι πιθανόν ο S. Mazur, να είχε ήδη αναφερθεί στο ερώτημα πριν το 1939 (βλ. [8]).

Στην περίπτωση των αλγεβρών Banach ο ισχυρισμός είναι αληθής, δηλαδή όλες οι άλγεβρες Banach είναι συναρτησιακά συνεχείς (βλ. [8]).

Στο πλαίσιο όμως των Fréchet τοπικά m -κυρτών αλγεβρών, η αλήθεια του ισχυρισμού παραμένει ανοιχτό πρόβλημα μέχρι και σήμερα.

Γενικότερα, υπάρχουν παραδείγματα μη-μετριοποιήσιμων πλήρων τοπικά m -κυρτών αλγεβρών οι οποίες δεν είναι συναρτησιακά συνεχείς. Ωστόσο, δεν γνωρίζουμε κανένα παράδειγμα πλήρους και μετριο-

ποιήσιμης (τοπολογικής) άλγεβρας, ακόμα και μη-μεταθετικής, η οποία να μην είναι συναρτησιακά συνεχής (βλ. [8]).

Η παρούσα εργασία αναφέρεται στη μελέτη και την ανάλυση της "**Εικασίας Michael**" καθώς και σε αποτελέσματα σχετικά με αυτήν.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία σύντομη αναφορά σε βασικές έννοιες της θεωρίας των τοπολογικών αλγεβρών (ειδικότερα των τοπικά m -κυρτών αλγεβρών) οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση των κεφαλαίων που ακολουθούν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια της συμμετρικής $*$ -άλγεβρας και δίνεται μία μερική λύση της Εικασίας Michael. Συγκεκριμένα, κάθε μεταθετική, συμμετρική, Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα (με ενέλιξη) είναι συναρτησιακά συνεχής.

Στο τρίτο κεφάλαιο, δίνονται οι έννοιες του πυκνού και ισχυρά πυκνού αντιστρόφου ορίου δακτυλίων, καθώς και σχετικά αποτελέσματα. Τέλος, δίνεται ένα σημαντικό αποτέλεσμα που αναφέρεται σε συνθήκες, ώστε μία ειδική Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα να είναι συναρτησιακά συνεχής.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, αποδεικνύουμε ότι η Εικασία Michael είναι ισοδύναμη με το αν κάθε γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές μίας μεταθετικής πλήρους τοπικά m -κυρτής άλγεβρας είναι φραγμένο (βλ. Ορισμός 4.1).

Στο πέμπτο κεφάλαιο, μελετάται η κλάση των Fréchet τοπικά m -κυρτών αλγεβρών με ορθογώνια βάση και αποδεικνύεται η ισχύς της εικασίας για τη κλάση αυτή, έχοντας άλλο ένα μερικό αποτέλεσμα.

Μία διαφορετική προσέγγιση στην Εικασία Michael, μέσω της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων πολλών μιγαδικών μεταβλητών, δίνεται στο έκτο κεφάλαιο. Αρχικά, δίνεται ένα παράδειγμα μίας μη μεταθετικής Fréchet τοπικά m -κυρτής άλγεβρας που καταλήγει να μην είναι συναρτησιακά συνεχής αν συνδεθεί, κατάλληλα, με μία Fréchet τοπικά

m -κυρτή άλγεβρα, που επιπλέον δεν είναι συναρτησιακά συνεχής. Τελικά, αναφερόμαστε σε μία συνθήκη (μέσω ακέραιων απεικονίσεων), που αν ικανοποιείται, οδηγεί στην συναρτησιακή συνέχεια των Fréchet τοπικά m -κυρτών αλγεβρών.

Στο έβδομο κεφάλαιο, μέσω της τεχνικής Do Sin Sya, παρουσιάζονται εναλλακτικές αποδείξεις ήδη γνωστών αποτελεσμάτων σχετικών με την Εικασία Michael καθώς και επιπλέον συμπεράσματα.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στη κυρία Μαρίνα Χαραλαμπίδου για την υπόδειξη του θέματος με το οποίο ασχολήθηκα, για τη στήριξή της, τις επωφελείς συζητήσεις, υποδείξεις και παρατηρήσεις της που οδήγησαν ουσιαστικά στη διαμόρφωση αυτής της εργασίας. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, την κυρία Μαρία Φραγκουλοπούλου και τον κύριο Ιωάννη Τσέρτο.

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του *Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών* του τμήματος *Μαθηματικών* της σχολής *Θετικών Επιστημών* του *Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών*.

Περιέχομενα

Κεφάλαιο 1 – Βασικές έννοιες από τη θεωρία των τοπολογικών
άλγεβρών.....σελ.1

Κεφάλαιο 2 – Συμμετρικές Fréchet τοπικά m -κυρτές
άλγεβρες.....σελ.20

Κεφάλαιο 3 – Πυκνά αντίστροφα όρια δακτυλίων και
συναρτησιακή συνέχεια Fréchet τοπικά m -κυρτών
άλγεβρών.....σελ.38

Κεφάλαιο 4 – Φραγμένα πολλαπλασιαστικά συναρτησοειδή σε
τοπικά m -κυρτές άλγεβρες.....σελ.52

Κεφάλαιο 5 – Fréchet τοπικά m -κυρτές άλγεβρες με ορθογώνιες
βάσεις.....σελ.56

Κεφάλαιο 6 – Ακέραιες συναρτήσεις πολλών μιγαδικών
μεταβλητών και η Εικασία Michael.....σελ.69

Κεφάλαιο 7 – Η τεχνική Do Sin Sya και εφαρμογές
της.....σελ.77

Βιβλιογραφία.....σελ.85

Πίνακας Συμβόλων.....σελ.87

Πίνακας Εννοιών.....σελ.88

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΑΛΓΕΒΡΩΝ

Στο παρόν κεφάλαιο, αναφέρουμε κυρίως αποτελέσματα σχετικά με την κλάση των τοπικά m -κυρτών αλγεβρών χωρίς αποδείξεις. Ιδιαίτερα, αναφερόμαστε σε παραδείγματα τοπολογικών αλγεβρών, των οποίων η τοπολογία δεν είναι τοπολογία οριζόμενη από νόρμα. Επίσης, παρουσιάζουμε την ανάλυση Arens–Michael μέσω της οποίας οι τοπικά m -κυρτές άλγεβρες συνδέονται με τις άλγεβρες Banach. Τέλος, αναφερόμαστε στο Θεώρημα Gel'fand-Mazur, το οποίο χαρακτηρίζει τις μιγαδικές, Hausdorff, διαιρετικές, τοπικά m -κυρτές άλγεβρες (βλ.[3],[4]).

Ορισμός 1.1 Έστω A ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών και S ένα υποσύνολο του A . Ονομάζουμε *δείκτρια συνάρτηση ή συναρτησοειδές Minkowski* g_s του S την απεικόνιση:

$$g_s : A \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

που ορίζεται ως εξής:

$$g_s(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda S\}, \text{ αν υπάρχει } \lambda > 0 : x \in \lambda S$$

$$\text{και } g_s(x) = \infty, \text{ αν } x \notin \lambda S \text{ για κάθε } \lambda > 0$$

Σχόλιο Ισχύουν τα εξής:

- (i) $g_s(x) < \infty$, αν το σύνολο S είναι **απορροφούν**,
δηλαδή για κάθε $x \in A$ υπάρχει $k > 0$, έτσι ώστε $x \in \lambda S$ για
κάθε βαθμωτό λ με $|\lambda| \geq k$.
- (ii) Η συνάρτηση g_s είναι **υποπροσθετική**, αν το S είναι **κυρτό**,
δηλαδή αν $x, y \in S$ και $0 \leq \lambda \leq 1$, τότε $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.
- (iii) Αν το S είναι **ισορροπημένο**, δηλαδή $\lambda S \subseteq S$ για κάθε
βαθμωτό λ με $|\lambda| \leq 1$, τότε η g_s είναι **απόλυτα ομογενής**,
δηλαδή $g_s(\lambda x) = |\lambda| g_s(x)$ για κάθε $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Πρόταση 1.2 Σε κάθε διανυσματικό χώρο, η δείκτρια συνάρτηση ενός απορροφούντος, ισορροπημένου και κυρτού συνόλου είναι ημινόρμα.

Πρόταση 1.3 Μία **ημινόρμαρισμένη άλγεβρα** είναι μία άλγεβρα A εφοδιασμένη με μία υποπολλαπλασιαστική ημινόρμα, έστω p , και συμβολίζεται με (A, p) . Θεωρούμε την κλειστή **μοναδιαία ψευδοσφαίρα** της A , που αντιστοιχεί στην p , δηλαδή το σύνολο

$$U \equiv U_p(1) = \{x \in A : p(x) \leq 1\}.$$

Τότε, ισχύει η σχέση:

$$g_u = p.$$

Η απόδειξη της τελευταίας σχέσης, βασίζεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 1.4 Έστω A ένας διανυσματικός χώρος. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν U είναι ένα ισορροπημένο και απορροφούν υποσύνολο του A

τότε η δείκτρια συνάρτηση g_u του U ικανοποιεί τη σχέση:

$$\{x \in A : g_u(x) < 1\} \subseteq U \subseteq \{x \in A : g_u(x) \leq 1\}.$$

(ii) Αν p, q είναι διανυσματικές ημινόρμες επί του A , έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$p(x) < 1, x \in A \Rightarrow q(x) \leq 1,$$

τότε $q(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in A$.

Ορισμός 1.5 Με τον όρο *άλγεβρικός κύλινδρος* ή *α -κύλινδρος* εννοούμε ένα υποσύνολο U μίας άλγεβρας A , το οποίο είναι κυρτό, ισορροπημένο, απορροφούν και πολλαπλασιαστικό ($UU \subseteq U$).

Ένας κλειστός α -κύλινδρος μίας τοπολογικής άλγεβρας A , καλείται *m -κύλινδρος*.

Από την επόμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι διαφορετικοί α -κύλινδροι μπορούν να δώσουν την ίδια δείκτρια συνάρτηση.

Πρόταση 1.6 Έστω μία άλγεβρα A , U ένας α -κύλινδρος της A και $p : A \rightarrow R$ μία ημινόρμα επί της A . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $g_u = p$.

(ii) $\{x \in A : p(x) < 1\} \subseteq U \subseteq U_p(1)$.

Σημειώνουμε ότι η Πρόταση 1.3 και το (ii) του Λήμματος 1.4 ισχύουν και γενικότερα, αν αντί ημινόρμών θεωρήσουμε απόλυτα ομογενείς συναρτήσεις.

Βασική έννοια στην θεωρία των τοπολογικών διανυσματικών χώρων είναι το *σύστημα των περιοχών του μηδενός*, το οποίο είναι ένα *φίλτρο*. Επειδή η βασική έννοια της *τοπικά m-κυρτής άλγεβρας* χαρακτηρίζεται μέσω *τοπικών βάσεων* (:θεμελιώδη συστήματα περιοχών του μηδενός), θα αναφερθούμε στην έννοια του *φίλτρου*.

Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F}$ μία συλλογή από υποσύνολα του X . Το $\mathcal{F}$ καλείται *φίλτρο* επί του X , αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

- (1) Αν $B \subseteq A \subseteq X$ και $B \in \mathcal{F}$, τότε $A \in \mathcal{F}$.
- (2) Το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό στις πεπερασμένες τομές στοιχείων του.
- (3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Από το (1) έχουμε ότι $X \in \mathcal{F}$.

Έστω $\mathcal{B}$ μία συλλογή από υποσύνολα του X . Θεωρούμε τη συλλογή

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : \text{υπάρχει } B \in \mathcal{B} \text{ με } B \subseteq F\}.$$

Τότε το $\mathcal{F}$ είναι ένα φίλτρο επί του X , αν και μόνο αν η συλλογή $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

- (1) Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, έτσι ώστε $B \subseteq B_1 \cap B_2$.
- (2) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ και το κενό υποσύνολο του X δεν ανήκει στη $\mathcal{B}$.

Η συλλογή $\mathcal{F}$, όπως προηγουμένως, καλείται το *φίλτρο, που παράγεται από την συλλογή $\mathcal{B}$* . Εξάλλου, μία συλλογή $\mathcal{B}$ από υποσύνολα ενός μη κενού συνόλου X καλείται *βάση του φίλτρου $\mathcal{F}$* , αν ικανοποιεί τα αξιώματα (1), (2).

Υπενθυμίζουμε ότι μία τοπολογία μπορεί να οριστεί μέσω περιοχών ως εξής: Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X . Τότε, επί του X , ορίζεται μία *τοπολογία*, αν σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχίσουμε μία συλλογή $\mathcal{B}(x)$ από υποσύνολα του X με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (1) Αν $V \subseteq U \subseteq X$ και $V \in \mathcal{B}(x)$, τότε $U \in \mathcal{B}(x)$.
- (2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{B}(x)$ είναι επίσης στοιχείο της $\mathcal{B}(x)$.

(3) Αν $U \in B(x)$, τότε $x \in U$.

(4) Για κάθε $W \in B(x)$ υπάρχει $V \in B(x)$, έτσι ώστε για κάθε $y \in V \Rightarrow W \in B(y)$.

Μέσω της παραπάνω αντιστοιχίας, ο X γίνεται τοπολογικός χώρος και τα στοιχεία της $B(x)$ καλούνται **περιοχές του x** . Από τις (1) - (3) είναι φανερό ότι η συλλογή $B(x)$ είναι φίλτρο και καλείται **φίλτρο των περιοχών του x** .

Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, $x \in X$ και $B(x)$ το φίλτρο των περιοχών του στοιχείου x . Μία βάση του φίλτρου $B(x)$ των περιοχών του x καλείται **θεμελιώδες σύστημα περιοχών (θ.σ.π.) του x** . Για παράδειγμα, αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε για κάθε $x \in X$, οι ανοιχτές περιοχές του x αποτελούν ένα θ.σ.π. του x .

Το επόμενο αποτέλεσμα εκφράζει τη σημασία της έννοιας του φίλτρου για τον ορισμό μίας τοπολογίας.

Θεώρημα 1.7 Έστω A ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Τότε υπάρχει ένα θ.σ.π. $\mathcal{D}$ του $0 \in A$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (1) Κάθε $V \in \mathcal{D}$ είναι απορροφούν.
- (2) Κάθε $V \in \mathcal{D}$ είναι ισορροπημένο.
- (3) Για κάθε $V \in \mathcal{D}$ υπάρχει $U \in \mathcal{D}$ με $U+U \subseteq V$.

Αντίστροφα, αν A είναι διανυσματικός χώρος και $\mathcal{D}$ μία βάση φίλτρου στον A , η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (1) - (3), τότε υπάρχει μία μονοσήμαντα ορισμένη τοπολογία επί του A , έτσι ώστε ο A να είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος και η $\mathcal{D}$ ένα θ.σ.π. του $0 \in A$.

Ορισμός 1.8 Μία **τοπολογική άλγεβρα** είναι μία άλγεβρα A , η οποία είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος έτσι ώστε ο πολλαπλασιασμός

δακτυλίου να είναι χωριστά συνεχής (δηλαδή συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή).

Ιδιαίτερα, η A καλείται **Fréchet τοπολογική άλγεβρα** εάν είναι πλήρης και μετριοποιήσιμη.

Ορισμός 1.9 Μία τοπολογική άλγεβρα A καλείται **συναρτησιακά συνεχής**, αν κάθε γραμμικό και πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές

$$f: A \rightarrow \mathbb{C}$$

είναι συνεχής απεικόνιση.

Ορισμός 1.10 Μία τοπολογική άλγεβρα A καλείται **τοπικά κυρτή**, αν ο υποκείμενος τοπολογικός διανυσματικός χώρος είναι τοπικά κυρτός, δηλαδή αν κάθε περιοχή οποιουδήποτε $x \in A$ περιέχει μία κυρτή περιοχή του x .

Ιδιαίτερα, μία τοπολογική άλγεβρα καλείται **τοπικά m -κυρτή**, αν η τοπολογία της ορίζεται από μία τοπική βάση αποτελούμενη από m -κυρτά σύνολα, δηλαδή κυρτά και πολλαπλασιαστικά.

Εάν μία τοπικά (m) -κυρτή άλγεβρα είναι πλήρης και μετριοποιήσιμη, καλείται **Fréchet τοπικά (m) -κυρτή άλγεβρα**.

Γενικότερα, ένας πλήρης και μετριοποιήσιμος, τοπικά κυρτός (διανυσματικός) χώρος καλείται συντόμως **χώρος Fréchet**.

Αποδεικνύεται ότι κάθε τοπικά m -κυρτή άλγεβρα έχει συνεχή πολλαπλασιασμό και είναι τοπικά κυρτή με την έννοια ότι ο υποκείμενος τοπολογικός διανυσματικός χώρος είναι τοπικά κυρτός. Όμως υπάρχουν τοπολογικές άλγεβρες, οι οποίες είναι τοπικά κυρτές κι έχουν συνεχή πολλαπλασιασμό χωρίς να είναι τοπικά m -κυρτές (π.χ. η άλγεβρα Arens L^ω).

Στο επόμενο θεώρημα δίνονται δύο χαρακτηρισμοί των τοπικά m -κυρτών άλγεβρων.

Θεώρημα 1.11 Έστω A μία άλγεβρα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η A είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα.
- (ii) Η A είναι μία τοπολογική άλγεβρα με μία τοπική βάση αποτελούμενη από m -κυλίνδρους.
- (iii) Η A έχει μία βάση φίλτρου αποτελούμενη από α -κυλίνδρους.

Ακολουθούν, μετά τον επόμενο ορισμό, ένα παράδειγμα τοπικά m -κυρτής άλγεβρας κι ένα παράδειγμα τοπικά κυρτής άλγεβρας, οι οποίες δεν είναι *Banach*.

Ορισμός 1.12 Ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος X καλείται **πλήρως κανονικός** αν για κάθε κλειστό $Y \subseteq X$ και για κάθε $x \notin Y$, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : X \rightarrow [0,1]$ με $f(x)=0$ και $f(Y)=\{1\}$.

Παράδειγμα 1 Έστω X ένας πλήρως κανονικός τοπολογικός χώρος. Θεωρούμε την άλγεβρα $C(X)$ των συνεχών μιγαδικών απεικονίσεων επί του X (με αλγεβρικές πράξεις κατά σημείο). Εφοδιάζουμε το $C(X)$ με την τοπολογία της συμπαγούς σύγκλισης, δηλαδή για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές ορίζουμε την συνάρτηση

$$p_K : C(X) \rightarrow \mathbb{R} : f \rightarrow p_K(f) = \sup \{ |f(x)| : x \in K \}.$$

Αποδεικνύεται ότι η p_K είναι μία υποπολλαπλασιαστική ημινόρμα επί της $C(X)$. Εξάλλου, η οικογένεια $B_0 = \{ \varepsilon U_{p_K}(1) : 0 < \varepsilon \leq 1 \}$, με $K \subseteq X$ συμπαγές και $U_{p_K}(1) = \{ x \in A : p_K(x) \leq 1 \}$ είναι μία τοπική βάση του $C(X)$, αποτελούμενη από m -κυλίνδρους. Επομένως το ζεύγος $(C(X), B_0)$ είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα (πρβλ. Θεώρημα 1.11) και συμβολίζεται με

$C_c(X)$. Το 'c' συμβολίζει την τοπολογία, που ορίζει η B_0 επί του $C(X)$ και η οποία καλείται **τοπολογία της συμπαγούς σύγκλισης**.

Ισχύει ότι κάθε συμπαγής χώρος Hausdorff είναι πλήρως κανονικός. Συνεπώς, αν ο X είναι πλήρως κανονικός, αλλά όχι συμπαγής, τότε η τοπικά m -κυρτή άλγεβρα $C_c(X)$ δεν είναι Banach. Πράγματι, αν $\eta(C_c(X))$ είναι το φάσμα της $C_c(X)$, τότε

$$\eta(C_c(X)) = X$$

ως προς έναν ομοιομορφισμό τοπολογικών χώρων. Αν η άλγεβρα $C_c(X)$ ήταν Banach, τότε από την θεωρία των αλγεβρών Banach, το φάσμα της θα ήταν συμπαγές, το οποίο είναι άτοπο, αφού ο X δεν είναι συμπαγής χώρος.

Παράδειγμα 2 Θεωρούμε το σύνολο $A(D)$ των αναλυτικών συναρτήσεων ορισμένων στον ανοιχτό δίσκο $Int(D) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Το $A(D)$ με τις κατά σημείο πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό και με πολλαπλασιασμό δακτυλίου αυτόν του Hadamard, δηλαδή

$$(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r} f(u)g(zu^{-1}) u^{-1} du$$

με $|z| < r < 1, f, g \in A(D)$ γίνεται μία μοναδιαία άλγεβρα. Η $A(D)$, εφοδιασμένη με την τοπολογία της ομαλής σύγκλισης πάνω στα συμπαγή υποσύνολα του D , και είναι μία πλήρης, μετριοποιήσιμη τοπικά κυρτή άλγεβρα. Η εν λόγω άλγεβρα δεν είναι Banach, διαφορετικά θα ήταν τοπικά m -κυρτή άλγεβρα το οποίο είναι άτοπο.

Έστω A μία άλγεβρα και $(p_a)_{a \in I}$ μία οικογένεια από υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες ορισμένες πάνω στην A . Τότε, μέσω της οικογένειας $(p_a)_{a \in I}$, ορίζεται στην A μία τοπολογία που την κάνει τοπικά m -

κυρτή άλγεβρα. Αυτή η τοπολογία είναι μία αρχική τοπολογία μέσω μίας οικογένειας αλγεβρικών μορφισμών που συνδέονται με τις υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες. Για μία τοπολογική άλγεβρα, όπως προηγουμένως, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $(A_a, (p_a)_{a \in I})$.

Έστω μία άλγεβρα A και $p: A \rightarrow \mathcal{C}$ μία υποπολλαπλασιαστική ημινόρμα (επί της A). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τις ψευδο-σφαίρες

$$U_p\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{x \in A: p(x) \leq \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n} U_p(1)$$

Τότε η οικογένεια

$$B = \{U_p\left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\}$$

είναι μία βάση φίλτρου της A αποτελούμενη από α -κυλίνδρους. Έτσι η A είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, η οποία έχει τη B ως τοπική βάση. Δηλαδή, η A είναι μία μετριοποιήσιμη τοπικά m -κυρτή άλγεβρα.

Έστω τώρα μία άλγεβρα A και $(A_a, p_a)_{a \in I}$ μία οικογένεια ημινόρμαρισμένων αλγεβρών. Επιπλέον, έστω

$$\phi_a: A \rightarrow A_a, a \in I$$

μία οικογένεια αλγεβρικών μορφισμών. Τότε η αρχική τοπολογία επί της A (δηλαδή η μικρότερη τοπολογία επί της A , για την οποία οι $\phi_a, a \in I$ είναι συνεχείς) κάνει την A μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Ιδιαίτερα, τα ακόλουθα υποσύνολα της A

$$U = \bigcap_{i=1}^n \phi_{a_i}^{-1}(U_{a_i}(\varepsilon_i)),$$

(όπου τα $U_{a_i}(\varepsilon_i)$ είναι στοιχεία τοπικών βάσεων των ημινόρμαρισμένων αλγεβρών (A_{a_i}, p_{a_i}) , $0 < \varepsilon \leq 1, 1 \leq i \leq n$), είναι α -κύλινδροι της A .

Έστω μία άλγεβρα A και $(p_a)_{a \in I}$ μία οικογένεια από υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες επί της A . Συμβολίζουμε με A_a την

νορμαρισμένη άλγεβρα (A, p_a) , $a \in I$. Από τα προηγούμενα, η αρχική τοπολογία επί της A , μέσω των ταυτοτικών απεικονίσεων

$$id_a : A \rightarrow A_a, a \in I$$

κάνει την A μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Ιδιαίτερα, η οικογένεια που αποτελείται από τους m -κυλίνδρους

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{p_{a_i}}(\varepsilon_i) = \{x \in A : p_{a_i}(x) \leq \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n\}$$

με $n \in \mathbb{N}$ και $0 < \varepsilon_i \leq 1, 1 \leq i \leq n$, είναι μία τοπική βάση για την τοπικά m -κυρτή τοπολογία της A .

Μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα A της οποίας η τοπολογία ορίζεται από μία οικογένεια $(p_a)_{a \in I}$ από υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες, θα συμβολίζεται με $(A, (p_a)_{a \in I})$.

Η οικογένεια $(p_a)_{a \in I}$, όπως προηγουμένως, καλείται **θεμελιώδης** αν ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

- Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του I , υπάρχει $a \in I$ και $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε $\varepsilon_{p_i}(x) \leq p_a(x)$, για κάθε $i \in F$ και $x \in A$.

Ισοδύναμα, η οικογένεια

$$B_0 = \{\varepsilon U_{p_a}(1) = U_{p_a}(\varepsilon) : a \in I, 0 < \varepsilon \leq 1\}$$

είναι μία τοπική βάση της A . Σχετικά ισχύει το ακόλουθο:

- Αν $(A, (p_a)_{a \in I})$ είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, τότε υπάρχει μία άλλη οικογένεια από υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες (που ορίζονται μέσω της οικογένειας $(p_a)_{a \in I}$) επί της A , η οποία είναι θεμελιώδης. Επιπλέον, η οικογένεια αυτή ορίζει επί της A την ίδια τοπικά m -κυρτή τοπολογία όπως και η $(p_a)_{a \in I}$.

Θεωρούμε μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα A . Αν $B_0 = (U_a)_{a \in I}$ είναι μία τοπική βάση της A αποτελούμενη από m -κυλίνδρους, τότε, μέσω της B_0 ,

ορίζεται μία θεμελιώδης οικογένεια $(p_a)_{a \in I}$ από υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες, οι οποίες ορίζουν την τοπολογία της A . Πράγματι, για κάθε $U_a \in B_0$ η αντίστοιχη δείκτρια συνάρτηση p_{u_a} είναι μία υποπολλαπλασιαστική ημινόρμα επί της A , έτσι ώστε

$$U_a = U_{p_{u_a}}(1) = \{x \in A : p_{u_a}(x) \leq 1\}$$

Επιπλέον, η οικογένεια $(p_{u_a})_{a \in I}$ κάνει την A μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, μέσω της αρχικής τοπολογίας.

Θεώρημα 1.13 Έστω A μία άλγεβρα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η A είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα.
- (ii) Η A είναι μία τοπολογική άλγεβρα με μία τοπική βάση από m -κυλίνδρους.
- (iii) Επί της A υπάρχει μία θεμελιώδης οικογένεια από υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες.

Έστω μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα A και $B_0 = (U_a)_{a \in I}$ μία τοπική βάση της. Τότε η σχέση:

$$a \leq \beta, a, \beta \in I \Leftrightarrow U_\beta \subseteq U_a$$

κάνει το I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Η σχέση αυτή είναι, ιδιαίτερα, προς τα *άνω κατευθυνόμενη*. Πράγματι, αν $a, \beta \in I$, τότε, από τον ορισμό της βάσης φίλτρου, για τα U_a, U_β της B_0 , υπάρχει $U_\gamma \in B_0$ με $U_\gamma \subseteq U_a \cap U_\beta$. Επομένως

$$U_\gamma \subseteq U_a \text{ και } U_\gamma \subseteq U_\beta \Leftrightarrow a \leq \gamma \text{ και } \beta \leq \gamma.$$

Θεωρούμε, για κάθε $a \in I$, την αντίστοιχη δείκτρια συνάρτηση $p_{u_a} \equiv p_a$. Τότε, επί της οικογένειας $(p_a)_{a \in I}$ ορίζεται μία μερική διάταξη, άνω κατευθυνόμενη, ως εξής:

$$p_a \leq p_\beta \text{ για κάθε } a, \beta \in I \text{ με } a \leq \beta \text{ (σημειακά),}$$

δηλαδή $p_a(x) \leq p_\beta(x)$ για κάθε $x \in A$, $a \leq \beta$, στο I .

Παράδειγμα 3 Θεωρούμε το σύνολο

$$L^\omega \equiv L^\omega([0,1]) = \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p([0,1])$$

των μιγαδικών συναρτήσεων επί του $[0,1]$, οι οποίες είναι p -αθροίσιμες για κάθε $p \geq 1$ ως προς το μέτρο *Lebesgue* επί του $[0,1]$. Το L^ω με τις κατά σημείο αλγεβρικές πράξεις και τοπολογία, που ορίζεται από τις L^p -νόρμες

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad f \in L^p([0,1]), \quad p \geq 1,$$

γίνεται μία πλήρης μετριοποιήσιμη, τοπικά κυρτή άλγεβρα με συνεχή πολλαπλασιασμό. Επιπλέον η άλγεβρα L^ω δεν μπορεί να γίνει τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Η L^ω καλείται **άλγεβρα Arens**.

Παράδειγμα 4 Θεωρούμε την άλγεβρα $C^\infty([0,1])$ όλων των C^∞ -διαφορίσιμων μιγαδικών συναρτήσεων επί του $[0,1]$ (με τις κατά σημείο οριζόμενες αλγεβρικές πράξεις), δηλαδή την άλγεβρα των μιγαδικών συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης επί του $[0,1]$. Η εν λόγω άλγεβρα εφοδιασμένη με την οικογένεια των ημινορμών

$$p_n(f) = \sup \{ |f^{(n)}(t)| : t \in [0,1] \}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(όπου $f^{(n)}$ είναι η n -οστή τάξης παράγωγος της $f \in C^\infty([0,1])$) γίνεται

μία πλήρης, μετριοποιήσιμη, τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, η οποία δεν μπορεί να γίνει Banach.

Έστω $(A_a)_{a \in I}$ μία οικογένεια τοπολογικών αλγεβρών. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $F = \prod_{a \in I} A_a$. Το F γίνεται άλγεβρα με πράξεις κατά συντεταγμένες. Μέσω των προβολών

$$\pi_a : F \rightarrow A_a : x = (x_a)_{a \in I} \rightarrow \pi_a(x) = x_a, a \in I,$$

ορίζουμε επί της F την αρχική τοπολογία, δηλαδή την τοπολογία καρτεσιανό γινόμενο. Οι $\pi_a, a \in I$ είναι αλγεβρικοί μορφισμοί και συνεπώς η F γίνεται μία τοπολογική άλγεβρα. Ιδιαίτερα, η F έχει συνεχή πολλαπλασιασμό, αν αυτό συμβαίνει για τους παράγοντες $A_a, a \in I$. Μία τοπική βάση για την τοπολογική άλγεβρα F αποτελείται από σύνολα της μορφής:

$$\bigcap_{i=1}^n \pi_{a_i}^{-1}(U_{a_i})$$

όπου τα U_{a_i} , λαμβάνονται από τοπικές βάσεις των τοπολογικών αλγεβρών $A_a, a \in I$. Ισοδύναμα, θεωρούμε σύνολα της μορφής

$$\prod_{a \in I} U_a$$

με $U_a = A_a$, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος δεικτών $a \in I$ για τους

οποίους τα U_a είναι στοιχεία τοπικών βάσεων των παραγόντων $A_a, a \in I$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το καρτεσιανό γινόμενο F τοπικά κυρτών αλγεβρών (ιδιαίτερα τοπικά m -κυρτών αλγεβρών) είναι μία τοπολογική άλγεβρα ίδιου τύπου με τους παράγοντες. Επίσης η F είναι Hausdorff, εάν και μόνο εάν κάθε $A_a, a \in I$ είναι Hausdorff. Τέλος η F είναι πλήρης, εάν και μόνο εάν οι παράγοντες $A_a, a \in I$ είναι πλήρεις.

Έστω $(A_a)_{a \in I}$ μία οικογένεια αλγεβρών, όπου το I είναι εφοδιασμένο με μία μερική διάταξη " $\leq$ " προς τα άνω κατευθυνόμενη (: για κάθε $a, \beta \in I$, υπάρχει $\gamma \in I$ με $a \leq \gamma, \beta \leq \gamma$). Επιπλέον, έστω $(f_{a\beta})_{a \leq \beta}$ μία οικογένεια αλγεβρικών μορφισμών (:συνδέουσες απεικονίσεις), έτσι ώστε

$$f_{a\beta} : A_\beta \rightarrow A_a, \quad a, \beta \in I \text{ με } a \leq \beta. \quad (*)$$

Ιδιαίτερα,

$$f_{aa} = id_{A_a}, \quad a \in I \quad (**)$$

είναι ο ταυτοτικός μορφισμός της άλγεβρας $A_a, a \in I$.

Ορισμός 1.14 Προβολικό (ή αντίστροφο) σύστημα αλγεβρών, είναι μία οικογένεια ζευγών $\{(A_a, f_{a\beta})\}_{a, \beta \in I}$, όπου $(A_a)_{a \in I}$ είναι μία οικογένεια αλγεβρών και οι $f_{a\beta}, a \leq \beta$ στο I είναι αλγεβρικοί μορφισμοί που ικανοποιούν τις (*), (**). Επιπλέον,

$$f_{a\gamma} = f_{a\beta} \circ f_{\beta\gamma}, \text{ για κάθε } a, \beta, \gamma \in I \text{ με } a \leq \beta \leq \gamma.$$

Θεωρούμε την άλγεβρα καρτεσιανό γινόμενο $F = \prod_{a \in I} A_a$ των $A_a, a \in I$ και το ακόλουθο υποσύνολό της

$$A = \{x = (x_a)_{a \in I} \in F : x_a = f_{a\beta}(x_\beta), \text{ αν } a \leq \beta \text{ στο } I\}.$$

Η A είναι μία υπάλγεβρα της F . Μπορεί $A = \{0\}$. Αν οι άλγεβρες $A_a, a \in I$ έχουν μονάδα, έστω $e_a, a \in I$, τότε υποθέτουμε ότι οι $f_{a\beta}, a \leq \beta$ στο I , τις διατηρούν, οπότε το στοιχείο $e = (e_a)_{a \in I} \in F$ είναι στοιχείο της A και μονάδα της.

Ορισμός 1.15 Έστω $\{(A_a, f_{a\beta})\}_{a, \beta \in I}$ ένα προβολικό σύστημα αλγεβρών. Η υπάλγεβρα

$$A = \{x = (x_a)_{a \in I} \in F : x_a = f_{a\beta}(x_\beta), \text{ αν } a \leq \beta \text{ στο } I\}.$$

της F , καλείται *άλγεβρα προβολικό ή αντίστροφο όριο του δοθέντος προβολικού συστήματος* και συμβολίζεται με

$$A = \varprojlim_{a \in I} (A_a, f_{a\beta}) = \varprojlim_{a \in I} A_a.$$

Αν $\{(A_a, f_{a\beta})\}_{a, \beta \in I}$ είναι ένα προβολικό σύστημα αλγεβρών, ορίζουμε μία οικογένεια αλγεβρικών μορφισμών ως εξής:

$$f_a = \pi_a|_A: A \rightarrow A_a, a \in I,$$

δηλαδή κάθε f_a είναι ο περιορισμός της απεικόνισης προβολής π_a του F στο A_a , $a \in I$. Η απεικόνιση f_a δεν είναι εν γένει επί. Επίσης αποδεικνύεται ότι

$$f_a = f_{a\beta} \circ f_\beta, a, \beta \in I \text{ με } a \leq \beta.$$

Ένα προβολικό (ή αντίστροφο) σύστημα τοπολογικών αλγεβρών είναι ένα προβολικό σύστημα αλγεβρών $\{(A_a, f_{a\beta})\}_{a, \beta \in I}$, όπου οι άλγεβρες $A_a, a \in I$ είναι τοπολογικές και οι απεικονίσεις $f_{a\beta}$, με $a \leq \beta$ στο I , είναι συνεχείς αλγεβρικοί μορφισμοί.

Η άλγεβρα προβολικό όριο $A = \varprojlim_{a \in I} A_a$, εφοδιασμένη με την αρχική τοπολογία, που ορίζεται επ'αυτής από τις απεικονίσεις $f_a, a \in I$ γίνεται μία τοπολογική άλγεβρα και καλείται *τοπολογική άλγεβρα προβολικό (ή αντίστροφο) όριο* του προβολικού συστήματος $\{(A_a, f_{a\beta})\}_{a, \beta \in I}$.

Πόρισμα 1.16 Το προβολικό όριο τοπικά m-κυρτών αλγεβρών είναι μία τοπολογική άλγεβρα ίδιου τύπου.

Από τη συνέχεια των συνδεουσών απεικονίσεων $f_{a\beta}$, με $a \leq \beta$ στο I , και τους ορισμούς προκύπτει το εξής:

Κάθε τοπολογική άλγεβρα προβολικό όριο $A = \varprojlim_{a \in I} (A_a, f_{a\beta})$ **είναι κλειστή υπάλγεβρα της άλγεβρας** $F = \prod_{a \in I} A_a$. Ιδιαίτερα, η A είναι πλήρης, αν αυτό συμβαίνει για κάθε παράγοντα A_a .

Έστω A μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $B = (\mathbf{U}_a)_{a \in I}$ μία τοπική βάση της A αποτελούμενη από m -κυλίνδρους. Θεωρούμε τις δείκτριες συναρτήσεις $p_{u_a} \equiv p_a$ των $\mathbf{U}_a, a \in I$. Έτσι, παίρνουμε μία οικογένεια $(p_a)_{a \in I}$ από συνεχείς υποπολλαπλασιαστικές ημινόρμες, που ορίζουν την τοπολογία της A .

Για κάθε $a \in I$, το ζεύγος (A, p_a) είναι μία ημινόρμαρισμένη άλγεβρα. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την αντίστοιχη νορμαρισμένη άλγεβρα πηλίκου

$$\left(A / \ker(p_a), \dot{p}_a \right)$$

όπου $\ker(p_a) = p_a^{-1}(0) = \{x \in A : p_a(x) = 0\} \equiv N_a$ είναι ένα κλειστό δίπλευρο ιδεώδες της A και $\dot{p}_a(x + \ker p_a) = p_a(x), a \in I$. Έτσι η πλήρωση

$$A_a \equiv \left(A / N_a \right)^{\sim}, a \in I$$

της $\left(A / \ker(p_a), \dot{p}_a \right)$ είναι μία άλγεβρα Banach. Επιπλέον θεωρούμε την αντίστοιχη κανονική απεικόνιση πηλίκου

$$\rho_a : A \rightarrow A / N_a, a \in I$$

η οποία είναι αλγεβρικός επιμορφισμός. Ακόμη, αν

$$i_a : A / N_a \rightarrow \left(A / N_a \right)^{\sim}$$

είναι η κανονική εμφύτευση της A/N_a στην πλήρωσή της, τότε η απεικόνιση

$$\bar{\rho}_a = i_a \circ \rho_a$$

είναι επίσης ένας μορφισμός αλγεβρών. Ορίζουμε στο I μία μερική διάταξη από την ακόλουθη σχέση:

$$\text{Έστω } a, \beta \in I. \text{ Τότε } a \leq \beta, \text{ αν } U_\beta \subseteq U_a$$

$$\text{ισοδύναμα } p_a(x) \leq p_\beta(x) \text{ για κάθε } x \in A.$$

Το I , εφοδιασμένο με την πιο πάνω μερική διάταξη, γίνεται ένα άνω κατευθυνόμενο σύνολο. Έτσι, αν $a \leq \beta$ στο I , τότε $p_a \leq p_\beta$ (κατά σημείο επί του A). Άρα

$$\ker(p_a) \equiv N_a \supseteq N_\beta \equiv \ker(p_\beta)$$

και η απεικόνιση

$$f_{a\beta} : A/N_\beta \rightarrow A/N_a : f_{a\beta}(x + N_\beta) = x + N_a$$

είναι ένας αλγεβρικός επιμορφισμός (καλά ορισμένος). Επιπλέον,

$$\rho_a = f_{a\beta} \circ \rho_\beta, \text{ για } a \leq \beta \text{ στο } I.$$

Επομένως οι απεικονίσεις $f_{a\beta}$ με $a \leq \beta$ στο I είναι συνεχείς. Εξάλλου,

$$f_{aa} = id_{A/N_a} \text{ και } f_{a\gamma} = f_{a\beta} \circ f_{\beta\gamma}.$$

$$(\text{Πράγματι: } (f_{a\beta} \circ f_{\beta\gamma})(x + N_\gamma) = f_{a\beta}(x + N_\beta) = x + N_a = f_{a\gamma}(x + N_\gamma))$$

Συνεπώς η οικογένεια

$$\left\{ \left(A/N_a, f_{a\beta} \right) \right\}_{a \in I}$$

ορίζει ένα προβολικό σύστημα νορμαρισμένων αλγεβρών, που αντιστοιχεί στην τοπική βάση B της A . Εξάλλου, θεωρώντας τις συνεχείς

επεκτάσεις $\bar{f}_{a\beta}$ των απεικονίσεων $f_{a\beta}$, λαμβάνουμε ένα προβολικό σύστημα αλγεβρών Banach:

$$\{(A_a, \bar{f}_{a\beta})\}_{a \in I} \text{ όπου } \bar{\rho}_a = \bar{f}_{a\beta} \circ \bar{\rho}_\beta.$$

Οπότε, το αντίστροφο όριο $\varprojlim_{a \in I} A/\ker(p_a)$ (αντίστοιχα $\varprojlim_{a \in I} A_a$) είναι μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα (αντίστοιχα πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγεβρα).

Θεώρημα 1.17 (Arens – Michael) Έστω A μία (Hausdorff) τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $B=(U_a)_{a \in I}$ μία τοπική βάση της A αποτελούμενη από m -κυλίνδρους. Επιπλέον, έστω $\tilde{A}$ η πλήρωση της A και A/N_a (αντίστοιχα A_a), $a \in I$ οι νορμαρισμένες (αντίστοιχα Banach) άλγεβρες που αντιστοιχούν στη δοθείσα τοπική βάση B . Τότε:

$$A \subseteq \varprojlim_{a \in I} A/N_a \subseteq \varprojlim_{a \in I} A_a = \tilde{A} \text{ (εμφύτευση Arens-Michael)}$$

ως προς τοπολογικούς αλγεβρικούς ισομορφισμούς. Ιδιαίτερα, αν η A είναι πλήρης, τότε:

$$A = \varprojlim_{a \in I} A/N_a = \varprojlim_{a \in I} A_a \text{ (ανάλυση Arens-Michael)}$$

ως προς τοπολογικούς αλγεβρικούς ισομορφισμούς.

Αν $A = \varprojlim_{a \in I} (A_a, f_{a\beta})$ είναι ένα προβολικό όριο τοπολογικών αλγεβρών,

τότε η οικογένεια

$$\{f_a^{-1}(U_a) : U_a \in B_a, a \in I\},$$

(με B_a τοπική βάση της άλγεβρας $A_a, a \in I$) είναι μία τοπική βάση της A .

Υπενθυμίζουμε ότι:

Ορισμός 1.18 Μία άλγεβρα με μονάδα καλείται *διαιρετική*, αν κάθε μη μηδενικό της στοιχείο αντιστρέφεται.

Θεώρημα 1.19 (Gel'fand-Mazur) Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία μιγαδική, διαιρετική, Hausdorff, τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Τότε $A = \mathbb{C}$ ως προς έναν αλγεβροτοπολογικό ισομορφισμό.

Από το Θεώρημα Gel'fand-Mazur έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1.20 Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία μιγαδική, μεταθετική, Hausdorff, τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και M ένα κλειστό, μέγιστο, κανονικό ιδεώδες της A . Τότε $A/M \cong \mathbb{C}$ αλγεβροτοπολογικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ FRECHET ΤΟΠΙΚΑ m -ΚΥΡΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ

Στο παρόν κεφάλαιο δίνουμε την έννοια μίας συμμετρικής άλγεβρας (βλ. Ορισμό 2.3). Επιπλέον, μέσω λημμάτων και προτάσεων, θα καταλήξουμε στο Θεώρημα 2.21, σύμφωνα με το οποίο κάθε μεταθετική, συμμετρική, Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα είναι συναρτησιακά συνεχής (βλ. [16]).

Αν A είναι μία άλγεβρα χωρίς μονάδα, τότε μπορούμε να προσαρτήσουμε σε αυτήν μία μονάδα ως εξής: Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο

$$A_e = \{(x, \lambda) : x \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Το A_e γίνεται άλγεβρα με τις κατά συντεταγμένες διανυσματικές πράξεις και πολλαπλασιασμό οριζόμενο από την σχέση

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu),$$

για κάθε $(x, \lambda), (y, \mu) \in A_e$. Το στοιχείο $e = (0, 1)$ είναι η μονάδα της A_e . Η A_e καλείται **μοναδοποίηση** της A και μέσω του αλγεβρικού ισομορφισμού

$$i: A \rightarrow A_e, x \mapsto (x, 0)$$

η A εμφυτεύεται στην A_e ως ένα μέγιστο δίπλευρο ιδεώδες.

Ακόμη ορίζουμε την απεικόνιση

$$\circ: A \times A \rightarrow A: (x, y) \mapsto x \circ y := x + y - xy$$

και την καλούμε πράξη **κύκλος** επί της A . Η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική και το στοιχείο 0 της A είναι μονάδα για αυτήν.

Σε σχέση με αυτήν την πράξη, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1 Ένα στοιχείο x μίας άλγεβρας A καλείται **αριστερά ψευδοαντιστρέψιμο** ή **αριστερά ψευδοκανονικό**, αν υπάρχει στοιχείο $y \in A$ με $y \circ x = 0$. Το στοιχείο y καλείται **αριστερό ψευδοαντίστροφο** του x . Ανάλογα, το x καλείται **δεξιά ψευδοαντιστρέψιμο** ή **δεξιά ψευδοκανονικό**, αν υπάρχει στοιχείο z της A με $x \circ z = 0$. Το στοιχείο z καλείται **δεξιό ψευδοαντίστροφο** του x . Το x καλείται **ψευδοαντιστρέψιμο** ή **ψευδοκανονικό**, αν είναι αριστερά και δεξιά ψευδοαντιστρέψιμο. Το στοιχείο $x^q \in A$, για το οποίο ισχύει $x \circ x^q = x^q \circ x = 0$ καλείται **ψευδοαντίστροφο** του x .

Σχόλιο Αν x, y είναι στοιχεία μίας άλγεβρας A , με y ψευδοαντίστροφο του x , τότε το y είναι το μοναδικό στοιχείο της άλγεβρας με αυτήν την ιδιότητα.

Πράγματι, θεωρούμε την μοναδοποίηση A_e και τα στοιχεία της

$$e - y \equiv (0, 1) - (y, 0) = (-y, 1) \text{ και } e - x \equiv (0, 1) - (x, 0) = (-x, 1).$$

Έχουμε, $(e-y)(e-x) = (-y,1)(-x,1) = (-(y+x-yx),1) = (-(y \circ x),1) = (0,1) =$
 $= (-(x \circ y),1) = (-(x+y-xy),1) = (-x,1)(-y,1) = (e-x)(e-y)$, δηλαδή το $e-y$
είναι αντίστροφο του $e-x$ στην A_e .

Έστω ότι υπάρχει $z \in A$ με $z \neq y$ και z ψευδοαντίστροφο του x . Τότε, το $e-z$ είναι αντίστροφο του $e-x$ στην A_e . Όμως, από την μοναδικότητα του αντιστρόφου στην A_e , έχουμε $e-y = e-z \Leftrightarrow y = z$.

Θεώρημα 2.2 Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία Hausdorff, πλήρης, τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $A = \varprojlim_{a \in I} A_a$ η ανάλυση Arens-Michael της A . Τότε, ένα στοιχείο $x \in A$ ψευδοαντιστρέφεται, αν και μόνο αν, το $[x]_a := x + \ker p_a$ ψευδοαντιστρέφεται στην A_a για κάθε $a \in I$.

Απόδειξη Έστω $x = ([x]_a) \in A_a$ με $[x]_a$ ψευδοαντιστρέψιμο στην A_a . Τότε υπάρχει ένα στοιχείο $y = (y_a) \in \prod_{a \in I} A_a$ με

$$(*) [x]_a \circ y_a = 0 = y_a \circ [x]_a, \text{ για κάθε } a \in I.$$

Θεωρούμε τους συνεχείς αλγεβρικούς μορφισμούς:

$$\bar{f}_{a\beta} : A_\beta \rightarrow A_a, \quad a \leq \beta \text{ στο } I.$$

Τότε έχουμε ότι

$$\bar{f}_{a\beta}([x]_\beta \circ y_\beta) = \bar{f}_{a\beta}(0) = \bar{f}_{a\beta}(y_\beta \circ [x]_\beta).$$

Ισοδύναμα

$$\bar{f}_{a\beta}([x]_\beta) \circ \bar{f}_{a\beta}(y_\beta) = 0 = \bar{f}_{a\beta}(y_\beta) \circ \bar{f}_{a\beta}([x]_\beta)$$

και συνεπώς λόγω των κανονικών προβολών

$$\rho_a : A \rightarrow A / \ker p_a, \quad \rho_a(x) = x + \ker p_a \equiv [x]_a \in A / \ker p_a \hookrightarrow A_a,$$

έχουμε

$$(**) [x]_a \circ \bar{f}_{a\beta}(y_\beta) = 0 = \bar{f}_{a\beta}(y_\beta) \circ [x]_a.$$

Από τις (*),(**) και το μονοσήμαντο του ψευδοαντιστρόφου (βλ. το σχόλιο πριν το θεώρημα), έχουμε $\bar{f}_{\alpha\beta}(y_\beta) = y_\alpha$, δηλαδή

$$(y_\alpha)_{\alpha \in I} \in \varprojlim A_\alpha = A,$$

και από την (*) προκύπτει ότι

$$x \circ y = 0 = y \circ x, \quad y = (y_\alpha) \in A.$$

Άρα το x ψευδοαντιστρέφεται στην A .

Έστω τώρα ότι το x ψευδοαντιστρέφεται (στην A). Τότε υπάρχει $y = ([y]_\alpha)_{\alpha \in I} \in A$ με $x \circ y = 0 = y \circ x$, ισοδύναμα,

$$[x]_\alpha \circ [y]_\alpha = 0 = [y]_\alpha \circ [x]_\alpha, \quad \alpha \in I$$

δηλαδή το $[x]_\alpha, \alpha \in I$ ψευδοαντιστρέφεται επίσης στην $A/\ker p_\alpha \subseteq A_\alpha$. $\square$

Ορισμός 2.3 Μία μιγαδική άλγεβρα A εφοδιασμένη με μία απεικόνιση $^*: A \rightarrow A, x \mapsto x^*$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad (x^*)^* &= x, & (\gamma) \quad (\lambda x)^* &= \bar{\lambda} x^*, \\ (\beta) \quad (x + y)^* &= x^* + y^*, & (\delta) \quad (xy)^* &= y^* x^*, \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in A$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, καλείται ****-άλγεβρα ή άλγεβρα με ενέλιξη***.

Ιδιαίτερα, αν για την άλγεβρα A ισχύει η ιδιότητα:

$$\text{το } xx^* \text{ είναι ψευδοαντιστρέψιμο, για κάθε } x \in A,$$

τότε η A καλείται ***συμμετρική άλγεβρα***.

Έστω A μία τοπολογική άλγεβρα και A' το σύνολο των συνεχών, γραμμικών συναρτησοειδών επί της A . Καλούμε ***φάσμα*** της άλγεβρας A το σύνολο

$$\eta(A) = \{f \in A' : f \neq 0, f(xy) = f(x)f(y), x, y \in A\},$$

(τα στοιχεία του $\mathcal{M}(A)$ καλούνται *χαρακτήρες*). Το *επεκτεταμένο φάσμα* της A ορίζεται από την σχέση

$$\mathcal{M}(A)^+ = \mathcal{M}(A) \cup \{0\}.$$

Το $\mathcal{M}(A)^+$ είναι εφοδιασμένο με τη σχετική τοπολογία, που επάγεται σε αυτό, από την τοπολογία $\sigma(A', A)$ στον A' , όπου $\sigma(A', A)$ συμβολίζει την ασθενή τοπολογία, που επάγεται στον A' από την A . Ακόμη το $\mathcal{M}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{M}(A)^+$ με τη σχετική τοπολογία.

Θεώρημα 2.4 Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία μεταθετική πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $x \in A$. Τότε το x είναι ψευδοαντιστρέψιμο στην A αν και μόνο αν $f(x) \neq 1$, για κάθε $f \in \mathcal{M}(A)^+$.

Απόδειξη Αν το x είναι ψευδοαντιστρέψιμο στην A , τότε το $f(x)$ είναι ψευδοαντιστρέψιμο. Πράγματι, υπάρχει $y \in A$ έτσι ώστε $x \circ y = y \circ x = 0$.

Άρα,

$$f(x) + f(y) - f(x)f(y) = f(0) = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$f(x) \circ f(y) = f(y) \circ f(x) = 0 \text{ για } f \in \mathcal{M}(A).$$

Ακόμη ισχύει $f(x) \neq 1$, για κάθε $f \in \mathcal{M}(A)^+$. Διαφορετικά,

$$0 = 1 + f(y) - f(y),$$

το οποίο είναι άτοπο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το x δεν είναι ψευδοαντιστρέψιμο στην A κι έστω $A = \varprojlim_{a \in I} A_a$ η ανάλυση Arens-Michael της A . Από το Θεώρημα 2.2 υπάρχει $a \in I$ έτσι ώστε το $[x]_a$ δεν ψευδοαντιστρέφεται στην A_a . Επειδή η A_a είναι μία μεταθετική άλγεβρα Banach, υπάρχει

$h \in \mathcal{M}(A_a)^+$ με $h([x]_a) = 1 \Leftrightarrow h(f_a(x)) = 1$, από το οποίο καταλήγουμε σε άτοπο, αφού $h \circ f_a \in \mathcal{M}(A_a)^+$. $\square$

Στην απόδειξη της επόμενης πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Baire, σύμφωνα με το οποίο *κάθε πλήρης μετρικός χώρος, έστω A , είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας*, δηλαδή δεν υπάρχει ακολουθία $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ αραιών υποσυνόλων του A τέτοια ώστε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = A$. (βλ. [2])

Πρόταση 2.5 Έστω A ένας χώρος Fréchet. Αν U είναι ένα μη κενό, κλειστό, κυρτό, ισορροπημένο υποσύνολο του A για το οποίο ισχύει

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU = A \quad (*)$$

τότε το U είναι μία περιοχή του μηδενός.

Απόδειξη Αφού ο χώρος A είναι πλήρης και μετριοποιήσιμος, έχουμε από το Θεώρημα του Baire ότι είναι δεύτερης κατηγορίας. Επομένως, (βλ. (*)) το nU έχει μη κενό εσωτερικό, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, κι άρα το ίδιο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, το U είναι κυρτό, κι άρα αποτελεί μία περιοχή του μηδενός. $\square$

Ορισμός 2.6 Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *ημισυμπαγής*, αν υπάρχει ακολουθία $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ από συμπαγή υποσύνολα του X , των οποίων η ένωση είναι ίση με το X , και τέτοια ώστε κάθε συμπαγές υποσύνολο του X περιέχεται σε κάποιο από τα σύνολα C_n .

Για το επόμενο λήμμα χρειαζόμαστε επιπλέον ορολογία. Έστω A μία τοπολογική άλγεβρα και $U \subset A$ και $V \subset A'$. Με U° , V° συμβολίζουμε τα πολικά τους, δηλαδή

$$U^\circ = \{f \in A' : \sup_{x \in U} |f(x)| \leq 1\} \text{ και } V^\circ = \{x \in A : \sup_{f \in V} |f(x)| \leq 1\}.$$

Λήμμα 2.7 Έστω μία τοπολογική άλγεβρα A , τότε ισχύουν τα εξής:

- (α) Το $\mathcal{M}(A)^+$ είναι κλειστό στον A' με την ασθενή τοπολογία $\sigma(A', A)$.
- (β) Αν η A έχει μονάδα, έστω e , τότε το 0 είναι ένα μεμονωμένο στοιχείο της A ή ισοδύναμα το $\mathcal{M}(A)$ είναι κλειστό στο $\mathcal{M}(A)^+$.
- (γ) Αν η A είναι ειδικότερα μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα (με μονάδα), τότε το $\mathcal{M}(A)^+$ (αντίστ. το $\mathcal{M}(A)$) είναι ημισυμπαγές.

$$\text{Απόδειξη (α)} \text{ Έχουμε ότι } \mathcal{M}(A)^+ = \bigcap_{x, y \in A} \{f \in A' : f(xy) - f(x)f(y) = 0\}.$$

Επειδή, για σταθερά x και y , οι απεικονίσεις

$$f \rightarrow f(x), \quad f \rightarrow f(y), \quad f \rightarrow f(xy)$$

είναι όλες συνεχείς στον A' , έπεται ότι το $\mathcal{M}(A)^+$ είναι τομή κλειστών συνόλων κι άρα κλειστό.

(β) Το 0 (μηδενικό συναρτησοειδές) είναι το μόνο στοιχείο του ανοιχτού συνόλου

$$U = \{f \in \mathcal{M}(A)^+ : |f(e)| < 1\}$$

κι άρα είναι ένα μεμονωμένο στοιχείο της A . Πράγματι, αν $f = 0$ τότε $f \in U$. Ακόμη, αν υπάρχει $0 \neq f \in U$, έχουμε ότι υπάρχει $0 \neq x \in A$ με $0 \neq |f(x)| = |f(xe)| = |f(x)||f(e)| < |f(x)|$ το οποίο είναι άτοπο.

(γ) Αν A είναι ένας χώρος Fréchet, με βάση $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ των περιοχών του μηδενός, τότε ο A' , με την τοπολογία $\sigma(A', A)$, είναι η ένωση όλων των συμπαγών συνόλων U_n° . Αν C είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του A' , τότε, από την Πρόταση 2.5, το C° είναι μία περιοχή του μηδενός στην A . Έτσι έχουμε $C^\circ \subset U_n$, για κάποιο n , κι επομένως $C^\circ \subset C^{\circ\circ} \subset U_n^\circ$.

Συνεπώς ο A' είναι ημισυμπαγής και το ίδιο ισχύει για το $\mathfrak{M}(A)^+$ από το (α). Αν η A έχει μονάδα, τότε το $\mathfrak{M}(A)$ είναι κλειστό στο $\mathfrak{M}(A)^+$ από το (β), κι επομένως είναι ημισυμπαγές. $\square$

Ορισμός 2.8 Έστω A μία άλγεβρα με μονάδα e και $x \in A$. Καλούμε *φάσμα του στοιχείου x (σημειακό φάσμα)* το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathbb{C}$:

$$Sp_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ δεν αντιστρέφεται στην } A\}.$$

Αν η A δεν έχει μονάδα, τότε το αντίστοιχο σημειακό φάσμα ορίζεται από την σχέση:

$$Sp_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} - \{0\} : \frac{x}{\lambda} \text{ δεν ψευδοαντιστρέφεται στην } A\} \cup \{0\}.$$

Αν A είναι μία άλγεβρα με μονάδα, τότε $0 \in Sp_A(x)$ αν και μόνο αν το x δεν αντιστρέφεται.

Λήμμα 2.9 Έστω A μία άλγεβρα, f ένα γραμμικό και πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές ορισμένο στην A , και $x \in A$. Τότε,

$$f(x) \in Sp_A(x).$$

Απόδειξη Έστω $f(x) = \lambda$. Αν $\lambda = 0$, τότε το x δεν έχει αντίστροφο και συνεπώς $\lambda \in Sp_A(x)$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε το $\frac{x}{\lambda}$ δεν μπορεί να είναι ψευδοαντιστρέψιμο. Διαφορετικά, από το Θεώρημα 2.4, θα είχαμε $f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \neq 1$. Όμως, $f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} f(x) = \frac{1}{\lambda} \lambda = 1$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Λήμμα 2.10 Έστω A μία $*$ -άλγεβρα κι ένα $x \in A$. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (α) Αν $x = x^*$, το $Sp_A(x)$ είναι υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.
 (β) Αν $x = -x^*$, το $Sp_A(x)$ είναι υποσύνολο των φανταστικών αριθμών.
 (γ) Αν f είναι ένα πολλαπλασιαστικό, γραμμικό συναρτησοειδές ορισμένο στην A , τότε $f(x^*) = \overline{f(x)}$.

Απόδειξη (α),(β) (βλ. [16])

(γ) Έχουμε $(x^* + x)^* = x^{**} + x^* = x + x^* = x^* + x$. Επομένως, από το (α) και το Λήμμα 2.9, συμπεραίνουμε ότι

$$f(x^* + x) = f(x^*) + f(x) \in Sp_A(x^* + x) \subseteq R.$$

Ακόμη, $(x^* - x)^* = x^{**} - x^* = x - x^* = -(x^* - x)$. Οπότε, από το (β) και το Λήμμα 2.9, συμπεραίνουμε ότι

$$f(x^* - x) = f(x^*) - f(x) \in Sp_A(x^* - x) \subseteq iR.$$

(όπου iR το σύνολο των φανταστικών αριθμών). Συνεπώς,

$$f(x^*) + f(x) = a, \quad f(x^*) - f(x) = ib \quad \text{για κάποια } a, b \in R.$$

Αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε

$$f(x^*) = \frac{a + ib}{2}, \quad f(x) = \frac{a - ib}{2}. \quad \text{Τελικά, } f(x^*) = \overline{f(x)}. \quad \square$$

Από το Λήμμα 2.10 (γ) προκύπτει το ακόλουθο:

Πόρισμα 2.11 Αν A είναι μία $*$ -άλγεβρα μιγαδικών απεικονίσεων πάνω σε έναν χώρο X , τότε η A είναι κλειστή στις συζυγείς, δηλαδή

$$f^* \in A, \quad \text{για κάθε } f \in A,$$

όπου $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $x \in X$.

Λήμμα 2.12 Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία μεταθετική, πλήρης, συμμετρική, τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Τότε η άλγεβρα A_e είναι συμμετρική άλγεβρα, με ενέλιξη, την απεικόνιση $^*: A_e \rightarrow A_e, (x, \lambda) \mapsto (x, \lambda)^* = (x^*, \bar{\lambda})$.

Απόδειξη Η A_e είναι πλήρης ως προς την οικογένεια των ημινορμών $(p_{a,e})_{a \in I}$, όπου $p_{a,e}((x, \lambda)) = p_a(x) + |\lambda|$, $(x, \lambda) \in A_e$. Αν $f \in \mathfrak{M}(A_e)^+$ και $(x, \lambda) \in A_e$, τότε

$$f[(x, \lambda)(x, \lambda)^*] = f[(x, \lambda)(x^*, \bar{\lambda})] = f[(xx^* + \lambda x^* + \bar{\lambda} x^*, \lambda \bar{\lambda})] = [f(x) + \lambda]^2 \neq 1.$$

Από το Θεώρημα 2.4 το στοιχείο $(x, \lambda)(x, \lambda)^*$ είναι ψευδοαντιστρέψιμο, κι άρα η A_e είναι συμμετρική.

Λήμμα 2.13 Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (α) Μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων της A είναι Cauchy, αν και μόνο αν η $([x_n]_a)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στην A_a , για κάθε a .
- (β) Ιδιαίτερα, αν η A είναι πλήρης, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ είναι ένα φραγμένο υποσύνολο της και αν η σειρά βαθμωτών $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ συγκλίνει απόλυτα, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ συγκλίνει στην A .

Απόδειξη Η απόδειξη του (α) είναι άμεση από τον ορισμούς. Το (β) έπεται από το (α) κι από το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [x_n]_a$ συγκλίνει απόλυτα, για κάθε a . $\square$

Ορισμός 2.14 Μία άλγεβρα συναρτήσεων A , επί ενός συνόλου X , καλείται **διαχωριστική** (*separating*), αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ έτσι ώστε $x_1 \neq x_2$, υπάρχει $f \in A$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ορισμός 2.15 Ονομάζουμε **ριζικό** μίας τοπολογικής άλγεβρας A με $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$ το σύνολο

$$R(A) = \bigcap \{ \ker f : f \in \mathfrak{M}(A) \}.$$

Η A ονομάζεται **ημιαπλή** αν $R(A) = \{0\}$.

Στην συνέχεια, με $C_0(\mathfrak{M}(A))$, συμβολίζουμε την άλγεβρα των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του $\mathfrak{M}(A)$, οι οποίες μηδενίζονται στο μηδενικό συναρτησοειδές.

Πρόταση 2.16 Έστω A μία μεταθετική ημιαπλή πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Τότε η A είναι αλγεβρικά ισόμορφη με μία διαχωριστική υπάλγεβρα $\tilde{A}$ της $C_0(\mathfrak{M}(A))$. Επιπλέον, κάθε στοιχείο της $\tilde{A}$, το οποίο έχει τιμές διάφορες του -1 , έχει ψευδοαντίστροφο στην $\tilde{A}$. Τέλος, αν A είναι ιδιαίτερα μία συμμετρική άλγεβρα (με ενέλιξη), τότε $(\tilde{A})^* \subset \tilde{A}$.

Απόδειξη Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\rho : A \rightarrow C_0(\mathfrak{M}(A)), \quad x \mapsto \rho(x) \text{ με } [\rho(x)](f) = f(x)$$

(η οποία είναι προφανώς ομομορφισμός) κι έστω $\tilde{A} = \rho(A)$. Αφού η A είναι ημιαπλή, έχουμε $\ker \rho = \{0\}$ κι άρα η ρ είναι αλγεβρικός ισομορφισμός. Από τον ορισμό της η $\tilde{A}$ είναι διαχωριστική.

Αν $[\rho(x)](f) \neq -1$, για κάθε $f \in \mathfrak{M}(A)$, τότε το x είναι ψευδοαντιστρέψιμο στην A , από το Θεώρημα 2.4. Ακόμη, $\rho(x^q)$ είναι το ψευδοαντίστροφο του $\rho(x)$ στην $\tilde{A} = \rho(A)$. Τελικά, αν A είναι μία συμμετρική άλγεβρα (με ενέλιξη), από το Πόρισμα 2.11, έχουμε $(\tilde{A})^* \subset \tilde{A}$. $\square$

Ορισμός 2.17 Μία ακολουθία $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ από τοπικά κυρτούς χώρους, με αντίστοιχες τοπολογίες $T_n, n \in \mathbb{N}$, καλείται **συμβιβαστή**, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

- (α) E_n είναι πλήρης,
- (β) E_n είναι γνήσιος υπόχωρος του E_{n+1} ,
- (γ) $T_{n+1}|_{E_n} = T_n$.

Η **κυρτή θήκη** μίας συμβιβαστής ακολουθίας $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ο χώρος $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, εφοδιασμένος με την λεπτότερη τοπικά κυρτή τοπολογία, έστω T_ω , η οποία έχει την ιδιότητα, $T_\omega|_{E_n}$ είναι χονδρότερη της T_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.18 Έστω X τοπολογικός χώρος. Ο X καλείται χώρος **Lindelöf** αν κάθε κάλυψή του από ανοιχτά σύνολα έχει αριθμήσιμη υποκάλυψη. Ακόμη, ο X θα καλείται **σ -συμπαγής** αν είναι αριθμήσιμη ένωση συμπαγών συνόλων.

Σημείωση Κάθε τοπολογικός χώρος που είναι σ -συμπαγής και τοπικά συμπαγής είναι ημισυμπαγής.

Λήμμα 2.19 Έστω A μία τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) Αν η A είναι μεταθετική, πλήρης και η άλγεβρα $A/R(A)$ είναι συναρτησιακά συνεχής, το ίδιο ισχύει και για την A .
- (ii) Αν η A είναι ιδεώδες μίας συναρτησιακά συνεχούς, τοπικά m -κυρτής άλγεβρας B , τότε και η A είναι συναρτησιακά συνεχής.
- (iii) Αν η A_e είναι συναρτησιακά συνεχής, το ίδιο ισχύει για την A .
- (iv) Αν η A είναι η κυρτή θήκη μίας συμβιβαστής ακολουθίας $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συναρτησιακά συνεχών, τοπικά κυρτών αλγεβρών, τότε και η A είναι συναρτησιακά συνεχής.

Απόδειξη (i) Έστω f ένα πολλαπλασιαστικό, γραμμικό συναρτησοειδές ορισμένο στην A . Τότε $f(R(A)) = \{0\}$ και συνεπώς υπάρχει πολλαπλασιαστικό, γραμμικό συναρτησοειδές g ορισμένο στην $A/R(A)$ τέτοιο ώστε $f = g \circ \pi$, όπου π η προβολή από την A στην $A/R(A)$. Όμως η g είναι συνεχής από την υπόθεση, κι άρα η f είναι συνεχής.

(ii) Έστω f ένα πολλαπλασιαστικό, γραμμικό συναρτησοειδές ορισμένο στην A . Η f μπορεί να επεκταθεί σε ένα πολλαπλασιαστικό, γραμμικό συναρτησοειδές g ορισμένο στη B . Επειδή η B είναι συναρτησιακά συνεχής, η g είναι συνεχής κι άρα η f είναι συνεχής.

(iii) Προκύπτει άμεσα από το (ii) αφού η A είναι ιδεώδες στην A_e .

(iv) Έστω f ένα πολλαπλασιαστικό, γραμμικό συναρτησοειδές ορισμένο στην A . Τότε ο περιορισμός της f σε κάθε παράγουσα άλγεβρα είναι συνεχής από την υπόθεση, κι άρα η f είναι συνεχής. $\square$

Σχόλιο Το τελευταίο λήμμα περιορίζει το πρόβλημα του να είναι μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα συναρτησιακά συνεχής, σε μεταθετικές πλήρεις τοπικά m -κυρτές άλγεβρες, στην περίπτωση που είναι ημιαπλές κι έχουν μονάδα. Από την Πρόταση 2.16, μία τέτοια άλγεβρα είναι ισόμορφη με μία άλγεβρα συνεχών, μιγαδικών συναρτήσεων, που περιέχει την ταυτοτική απεικόνιση, ορισμένων στον πλήρως κανονικό χώρο $\mathcal{M}(A)$. Αν η άλγεβρα είναι μετριοποιήσιμη τότε ο χώρος είναι ημισυμπαγής από το Λήμμα 2.7, κι επομένως Lindelöf. Στην επόμενη πρόταση ασχολούμαστε με αυτού του είδους τις άλγεβρες.

Πρόταση 2.20 Έστω X ένας πλήρως κανονικός χώρος, και A μία άλγεβρα συνεχών, μιγαδικών συναρτήσεων επί του X , τέτοια ώστε η αντίστροφη συνάρτηση κάθε στοιχείου της που δεν μηδενίζεται πουθενά, είναι επίσης στην A . Επίσης, θεωρούμε ότι η A περιέχει τη σταθερή συνάρτηση $1_A : X \rightarrow \mathbb{C}$ με $1_A(t) = 1$ (που είναι και μονάδα της). Τότε, κάθε μη μηδενικό γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές στην A , παράγεται από ένα σημείο του X , με την προϋπόθεση ότι η A ικανοποιεί τη συνθήκη (1) και μία τουλάχιστον από τις συνθήκες (2) και (2') όπως παρακάτω:

(1) Αν $x_1, \dots, x_n$ είναι στοιχεία της A τέτοια ώστε

$$Z(x_1) \cap \dots \cap Z(x_n) \neq \emptyset,$$

(όπου $Z(x_i) = \{t \in X : x_i(t) = 0\}$, $i = 1, \dots, n$) τότε υπάρχουν στοιχεία

$y_1, \dots, y_n$ της A τέτοια ώστε $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 1_A$.

(2) Υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $\{a_1, \dots, a_m\} \subset A$ τέτοιο ώστε

$$\bigcap_{n=1}^m \{t \in X : a_n(t) = \lambda_n\} \text{ είναι συμπαγές, για κάθε } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}.$$

(2') (α) Ο X είναι χώρος Lindelöf.

(β) Αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στοιχείων της A , τότε υπάρχει

μία ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων της A , τέτοια ώστε:

$$(\beta_1) \quad Z(x_n) = Z(y_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$(\beta_2) \quad |y_n(t)| \leq 1, \quad t \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$(\beta_3) \quad \text{Αν } y(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} y_n(t), \text{ τότε } y \in A.$$

Απόδειξη Έστω f ένα μη μηδενικό, πολλαπλασιαστικό, γραμμικό συναρτησοειδές επί της A κι έστω $M = \ker f$. Το M είναι γνήσιο.

Πράγματι,

$$f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in A: f(x) \neq 0 \text{ και}$$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x1_A) = f(x)f(1_A) &\Leftrightarrow f(x)[f(1_A) - 1] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(1_A) = 1 \Leftrightarrow 1_A \notin M \Leftrightarrow M \neq A. \end{aligned}$$

Επιπλέον, επειδή το M είναι ιδεώδες κι επειδή κάθε στοιχείο της A , που δεν μηδενίζεται για κάθε $t \in X$, έχει αντίστροφο στην A , το M δεν περιέχει στοιχεία της A με αυτήν την ιδιότητα.

Από τη συνθήκη (1) της υπόθεσης έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

(i) Αν $x_1, \dots, x_n \in M$, τότε $Z(x_1) \cap \dots \cap Z(x_n) \neq \emptyset$. Διαφορετικά, θα είχαμε ότι το M περιέχει στοιχεία που δεν μηδενίζονται για κάθε $t \in X$, το οποίο είναι άτοπο.

(ii) Για κάθε $x \in A$, $f(x) = x(t)$ για κάποιο $t \in X$. Διαφορετικά,

$$f(x) = f(x)1_A(t) \neq x(t) \text{ για κάθε } t \in X, \text{ και συνεπώς}$$

$$x(t) - f(x)1_A(t) = [x - f(x)1_A](t) \neq 0, \text{ για κάθε } t \in X.$$

Δηλαδή, το $x - f(x)1_A$ θα ήταν ένα στοιχείο του M , που δεν μηδενίζεται για κάθε $t \in X$, το οποίο είναι άτοπο από το (i).

(iii) Αν θεωρήσουμε την A εφοδιασμένη με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στον χώρο X , τότε η f είναι συνεχής.

Πράγματι, αν $|x(t)| < \varepsilon$, $t \in X$, τότε $|f(x)| < \varepsilon$ από το (ii).

(iv) Αν $x \in M$, $y \in A$ και $Z(x) \subset Z(y)$, τότε $y \in M$. Διαφορετικά, έχουμε ότι $x, y - f(y) \in M$ και $Z(x) \cap Z(y - f(y)\mathbf{1}_A) = \emptyset$.

Άτοπο από το (i).

Υποθέτουμε ότι η f δεν παράγεται από ένα στοιχείο του χώρου X . Τότε,

$$\bigcap_{x \in M} Z(x) = \emptyset \quad (*).$$

Θα δείξουμε ότι υποθέτοντας την (2) ή την (2') οδηγούμαστε σε άτοπο.

Έστω ότι ισχύει η (2). Θεωρούμε ένα σύνολο $\{a_1, \dots, a_m\} \subset A$ όπως στο (2), τότε $a_i - f(a_i)\mathbf{1}_A \in M$, $i = 1, \dots, m$ και το $C := \bigcap_{i=1}^m Z(a_i - f(a_i)\mathbf{1}_A)$ είναι ένα συμπαγές σύνολο. Από το (i) η συλλογή $\{C \cap Z(x)\}_{x \in M}$ κλειστών υποσυνόλων του C , έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, οπότε έχει μη κενή τομή. Από την (*) έχουμε,

$$\bigcap_{x \in M} C \cap Z(x) = \bigcap_{x \in M} Z(x) = \emptyset,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Έστω τώρα ότι ισχύει η (2'). Από την (*) και το (2')-(α), έχουμε ότι υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του M τέτοια ώστε $\bigcap_{x \in M} Z(x) = \emptyset$. Ακόμη, έστω $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και y όπως στο (2')-(β). Τότε $y(t) \neq 0$, $t \in X$. Επιπλέον, από το (iv), $f(y_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ κι επειδή $\sum_{n=1}^l y_n(t) \xrightarrow{l} y(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον X , έπεται από το (iii) ότι $f(y) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Σχόλιο Σχετικά με το προηγούμενο αποτέλεσμα, αν για κάθε $x \in A$, η συζυγής απεικόνιση x^* ανήκει επίσης στην A , τότε η συνθήκη (1)

ικανοποιείται. Αρκεί να θέσουμε $y_i = \frac{\bar{x}_i}{x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n}$.

Θεώρημα 2.21 Έστω A μία μεταθετική, συμμετρική, Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα (με ενέλιξη). Τότε η A είναι συναρτησιακά συνεχής.

Απόδειξη Από τα Λήμματα 2.12 και 2.19, αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που η A είναι ημιαπλή και μοναδιαία. Από το Θεώρημα 2.4, το Λήμμα 2.7 και την Πρόταση 2.16 έχουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση, η A είναι αλγεβρικά ισόμορφη με μία άλγεβρα συναρτήσεων, η οποία περιέχει την ταυτοτική απεικόνιση ενώ γενικότερα περιέχει συναρτήσεις ορισμένες πάνω στον σ -συμπαγή, πλήρως κανονικό χώρο $\mathcal{M}(A)$, έτσι ώστε η αντίστροφη κάθε απεικόνισης, που δεν μηδενίζεται πουθενά, είναι επίσης στην άλγεβρα. Συνεπώς, μπορούμε να ταυτίσουμε την A με αυτήν την άλγεβρα συναρτήσεων και έτσι έχουμε το πλαίσιο της Πρότασης 2.20. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος, αρκεί να δείξουμε την ισχύ των συνθηκών (1) και (2') της Πρότασης 2.20.

Από το Πόρισμα 2.11, για κάθε $x \in A$, έχουμε $x^* \in A$ με $x^*(t) = \overline{x(t)}$, $t \in \mathcal{M}(A)$. Επόμενως, από το σχόλιο πριν το Θεώρημα η συνθήκη (1) ικανοποιείται. Επειδή, κάθε σ -συμπαγής είναι Lindelöf, η συνθήκη (2')-(α) επίσης ικανοποιείται. Επίσης, για τον χώρο $\mathcal{M}(A)$ μένει να δείξουμε την συνθήκη (2')-(β). Έστω $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία στοιχείων της A . Τότε, (βλ. [16, Πρόταση 3]) υπάρχει ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με $0 \leq \lambda_n \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ώστε το

$$\left\{ \lambda_n (x_n x_n^*) (1 + x_n x_n^*)^{-1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

είναι ένα φραγμένο υποσύνολο της A . Έστω

$$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \lambda_n (x_n x_n^*) (1 + x_n x_n^*)^{-1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}. \text{ Τότε, για κάθε } t \in \mathcal{M}(A),$$

$y_n(t) = \lambda_n |x_n(t)|^2 (1 + |x_n(t)|^2)^{-1}$, από όπου η $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί τις συνθήκες $(2')-(\beta_1)$ και $(2')-(\beta_2)$. Αποδεικνύουμε ότι ισχύει και η $(2')-(\beta_3)$.

Πράγματι, από το Λήμμα 2.13 (β), η σειρά $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} y_n$ συγκλίνει σε κάποιο $y \in A$. Επειδή, η απεικόνιση $x \rightarrow x(t)$ είναι συνεχής στην A , για κάθε $t \in \mathcal{M}(A)$, έχουμε ότι $y(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} y_n$, για κάθε $t \in \mathcal{M}(A)$, το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΥΚΝΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΟΡΙΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ FRECHET ΤΟΠΙΚΑ m - ΚΥΡΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΩΝ

Τα κύριο αποτελέσμα αυτού του κεφαλαίου αναφέρεται σε συνθήκες κάτω από τις οποίες μία μεταθετική μοναδιαία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα είναι συναρτησιακά συνεχής (βλ. Θεώρημα 3.16) (βλ. [5]).

Ορισμός 3.1 Έστω $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων. Ένα αντίστροφο σύστημα απεικονίσεων $\{f_{\alpha\beta} : A_\beta \rightarrow A_\alpha, \alpha \leq \beta\}_{\alpha, \beta \in I}$ καλείται **πυκνό**, αν το $f_{\alpha\beta}(A_\beta)$ είναι πυκνό στο A_α για κάθε $\alpha, \beta \in I$ με $\alpha \leq \beta$. Το αντίστοιχο αντίστροφο όριο, έστω A , καλείται επίσης **πυκνό**. Ιδιαίτερα, αν το $f_\alpha(A)$ είναι πυκνό στο A_α , για κάθε $\alpha \in I$, το A καλείται **ισχυρά πυκνό**. (Αντίστοιχες έννοιες θεωρούνται και για οικογένειες τοπολογικών ομάδων ή ακόμη οικογένειες τοπολογικών αλγεβρών).

Θεώρημα 3.2 Έστω $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ακολουθία από πλήρεις, μετρικούς χώρους και το πυκνό σύστημα απεικονίσεων

$$f_{n,n+1} : A_{n+1} \rightarrow A_n \text{ με } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Τότε, το αντίστροφο όριο $A = \varprojlim_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_n$, είναι πλήρης, ισχυρά πυκνός μετρικός χώρος.

Απόδειξη Ο χώρος καρτεσιανό γινόμενο $F = \prod_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_n$, εφοδιάζεται με την δομή πλήρους, μετρικού χώρου. Αρκεί να θεωρήσουμε την μετρική $d : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(b, b') = d((b_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}, (b'_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}) = \sup \left\{ \max \left(d_n(b_n, b'_n), \frac{1}{2^n} \right), n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

όπου $d_0, d_1, \dots, d_n, \dots$ είναι οι μετρικές των χώρων $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ αντίστοιχα.

Θα δείξουμε ότι το $f_n(A)$ είναι πυκνό στο A_n , για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Αρκεί να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για $n=0$. Για $n \in \mathbb{N}$ συνεχίζουμε ομοίως. Έστω $b_0 \in A_0$ και $\varepsilon > 0$. Θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \in A$ τέτοια ώστε

$$d_0(b_0, a_0) \leq \varepsilon.$$

Στα παρακάτω έχουμε παραλείψει τη χρήση δεικτών (π.χ. στις μετρικές $d_0, d_1, \dots, d_n, \dots$) για απλούστευση του συμβολισμού. Επίσης με f^m θα συμβολίζουμε την σύνθεση m διαδοχικών απεικονίσεων από τις $f_{n,n+1} : A_{n+1} \rightarrow A_n$ με $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Επιλέγουμε μία ακολουθία θετικών αριθμών $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\sum_{i \in \mathbb{N}} \varepsilon_i \leq \varepsilon$. Τότε, από την πυκνότητα των απεικονίσεων $f_{n,n+1}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ υπάρχει $b_1 \in A_1$ με

$$d(b_0, f(b_1)) < \varepsilon_1.$$

Συνεχίζοντας, μπορούμε να βρούμε $b_2 \in A_2$ με

$$d(b_1, f(b_2)) < \varepsilon_2.$$

Επιπλέον, από τη συνέχεια της f , έχουμε

$$d(f(b_1), f^2(b_2)) < \varepsilon_2.$$

Τελικά, επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, καταλήγουμε σε μία ακολουθία $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $b_i \in A_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, για την οποία ισχύει

$$d(f^k(b_n), f^{k+1}(b_{n+1})) < \varepsilon_{n+1} \text{ για κάθε } k < n.$$

Για κάθε n , θεωρούμε τώρα την ακολουθία

$$(c_n)_p \equiv c_{n,p} = f^{p-n}(b_p) \text{ με } p = n, n+1, n+2, \dots$$

η οποία είναι βασική, αφού

$$d(c_{n,p+1}, c_{n,p}) < \varepsilon_{p+1}$$

Έστω a_n το όριο της ακολουθίας στον A_n , δηλαδή $a_n = \lim_{p \rightarrow \infty} f^p(b_p)$.

Έχουμε $f(c_{n+1,p}) = c_{n,p} \Leftrightarrow f(a_{n+1}) = a_n$ και συνεπώς $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \in A$.

Επίσης, από την τριγωνική ιδιότητα της μετρικής του χώρου A_0 , έχουμε

$$d(b_0, f^p(b_p)) < d(b_0, f(b_1)) + \dots + d(f^{p-1}(b_{p-1}), f^p(b_p)) < \varepsilon$$

Τελικά, παίρνοντας το όριο για $p \rightarrow \infty$, έχουμε $d_0(b_0, a_0) \leq \varepsilon$, δηλαδή το αντίστροφο όριο A , είναι ένας πλήρης, ισχυρά πυκνός μετρικός χώρος. $\square$

Σχόλιο Έστω $A = \varprojlim_{\alpha \in I} A_\alpha$ ένας χώρος αντίστροφο όριο και

$x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in A$. Αν U είναι μία περιοχή του X_β για κάποιο $\beta \in I$, τότε το σύνολο

$$E_{\beta, U} = \{y = (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in A : y_\beta \in U\}$$

είναι μία περιοχή του X και η οικογένεια $\{E_{\beta, U}\}$ είναι μία βάση περιοχών του X στην A , αλλά όχι στην F .

Σχόλιο Στο επόμενο θεώρημα, θεωρούμε μία οικογένεια τοπολογικών πολλαπλασιαστικών ομάδων $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ και τους ομομορφισμούς $\{f_{\alpha\beta} : A_\beta \rightarrow A_\alpha, \alpha \leq \beta\}_{\alpha, \beta \in I}$. Το αντίστοιχο αντίστροφο όριο A θα έχει επίσης τη δομή τοπολογικής ομάδας. Επιπλέον, το στοιχείο $e = (e_\alpha)_{\alpha \in I}$, όπου e_α είναι η μονάδα της ομάδας A_α , ικανοποιεί τη σχέση

$$f_{\alpha\beta}(e_\beta) = e_\alpha, \alpha \leq \beta$$

δηλαδή το στοιχείο $e = (e_\alpha)_{\alpha \in I}$ ανήκει στην ομάδα A και μάλιστα είναι η μονάδα της.

Θεώρημα 3.3 Έστω ένας $(B, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach και μία οικογένεια τοπολογικών, πολλαπλασιαστικών ομάδων $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, με το αντίστροφο της όριο, έστω A , να είναι ισχυρά πυκνό. Επίσης, έστω ένας συνεχής ομομορφισμός $T : A \rightarrow B$. Τότε υπάρχει $\alpha \in I$ με

$$T = T_\alpha \circ f_\alpha,$$

όπου $T_\alpha : A_\alpha \rightarrow B$ είναι συνεχής ομομορφισμός. Επιπλέον, για κάθε $\alpha \in I$, υπάρχει το πολύ ένα T_α τέτοιο ώστε να $T = T_\alpha \circ f_\alpha$.

Απόδειξη Από την υπόθεση ο ομομορφισμός T είναι ιδιαίτερα συνεχής στη μονάδα $e = (e_\alpha)_{\alpha \in I}$ της A . Τότε, από το σχόλιο μετά το Θεώρημα 3.2, υπάρχει περιοχή W του e τέτοια ώστε $\|T(x)\| \leq 1$ για $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in W$. Θα δείξουμε ότι το $T(x) = T((x_\alpha)_{\alpha \in I})$ εξαρτάται μόνο από το x_α , όπου ο δείκτης α είναι τέτοιος ώστε $W = \{x = (x_\beta)_{\beta \in I} \in A : x_\alpha \in U\}$ (με U είναι περιοχή του x_α). Αρκεί να δείξουμε ότι

$$x_\alpha = e_\alpha \Rightarrow T(x) = 0.$$

Έστω λοιπόν ότι $x_\alpha = e_\alpha$. Τότε $(x^n)_\alpha \in U$, για κάθε θετικό αριθμό n με

$$\|T(x^n)\| \leq 1. \quad \text{Όμως ο } T \text{ είναι ομομορφισμός κι άρα}$$

$$\|nT(x)\| \leq 1 \Leftrightarrow \|T(x)\| \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow T(x) = 0.$$

Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε $T_\alpha(b) = T(x_\alpha)$, για κάθε $b \in A_\alpha$ της μορφής x_α ($a \in A$). Η T_α μπορεί να επεκταθεί για κάθε $\alpha \in I$, αφού το $f_\alpha(\prod_{\beta \in I} A_\beta)$ είναι πυκνό στο A_α , και ο χώρος $(B, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης. $\square$

Σε ό,τι ακολουθεί, συμβολίζουμε με 1 τη μονάδα 1_R ενός δακτυλίου R .

Ορισμός 3.4 Έστω B ένας δακτύλιος με μονάδα. Μία διατεταγμένη n -άδα $(b_1, \dots, b_n)$ από στοιχεία του B καλείται *δεξιό κανονικό σύστημα* αν η εξίσωση

$$b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 1$$

μπορεί να επιλυθεί στο B .

Θεώρημα 3.5 Έστω $(b_1, \dots, b_n)$ ένα δεξιό κανονικό σύστημα ενός δακτυλίου B και $(x_1, \dots, x_n)$ μία λύση της εξίσωσης $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 1$.

Τότε το

$$\left\{ (z_1, \dots, z_n) \mid z_i = t_i + x_i(1 - \sum_{k=1}^n b_k t_k), t_i \in B, i = 1, \dots, n \right\}$$

είναι ένα σύνολο λύσεων της.

Απόδειξη Έστω $(x_1, \dots, x_n)$ και $(z_1, \dots, z_n)$ λύσεις της $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 1$. Για να δείξουμε ότι η λύση $(z_1, \dots, z_n)$ μπορεί να προκύψει από την $(x_1, \dots, x_n)$

αρκεί να ορίσουμε $t_i = z_i - x_i$ για $i = 1, \dots, n$, και η σχέση $z_i = t_i + x_i \left(1 - \sum_{k=1}^n b_k t_k\right)$ ισχύει ταυτοτικά. $\square$

Σχόλιο Στην απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος η επιλογή της n -άδας $(t_1, \dots, t_n)$ δεν είναι μοναδική.

Πόρισμα 3.6 Έστω B_1, B_2 τοπολογικοί δακτύλιοι για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

- (1) Υπάρχει ομομορφισμός $f : B_2 \rightarrow B_1$ με $f(B_2)$ πυκνό στον B_1 .
- (2) Υπάρχει δεξιό κανονικό σύστημα $(b_1, \dots, b_n)$ στον B_2 , τέτοιο ώστε το $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ είναι ένα δεξιό κανονικό σύστημα στον B_1 .
- (3) Υπάρχουν $y_1, \dots, y_n \in B_1$ με $f(b_1)y_1 + \dots + f(b_n)y_n = 1_{B_1}$.

Τότε υπάρχουν $z_1, \dots, z_n \in B_2$ τέτοια ώστε $b_1 z_1 + \dots + b_n z_n = 1_{B_2}$ και για $i = 1, \dots, n$, το $f(z_i)$ ανήκει σε μία περιοχή του y_i στον B_1 .

Απόδειξη Από το (2), υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in B_2$ τέτοια ώστε $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 1$. Για $i = 1, \dots, n$, θεωρούμε το $z_i = t_i + x_i \left(1 - \sum_{k=1}^n b_k t_k\right)$ επιλέγοντας t_i , τέτοιο ώστε το $f(t_i)$ να είναι κοντά στο $y_i \in B_1$. Τα $z_i, i = 1, \dots, n$ ικανοποιούν τη σχέση $b_1 z_1 + \dots + b_n z_n = 1_{B_1}$. Επιπλέον, το $\sum_{k=1}^n f(b_k) f(t_k)$ είναι κοντά στο $\sum_{k=1}^n f(b_k) y_k = 1_{B_1}$, τέτοιο ώστε το $f\left(1 - \sum_{k=1}^n b_k t_k\right)$ είναι κοντά στο 0. Συνεπώς, για $i = 1, \dots, n$ το $f(z_i)$ είναι κοντά στο $f(t_i)$, το οποίο είναι κοντά στο y_i . $\square$

Για τα ακόλουθα, χρειαζόμαστε επιπλέον ορολογία και συμβολισμούς. Συμβολίζουμε με A ένα πυκνό, αντίστροφο όριο μίας ακολουθίας

$\{(B_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ από πλήρεις μετρικούς δακτυλίους. Επίσης, στα ακόλουθα θα χρησιμοποιήσουμε διατεταγμένες m -άδες στοιχείων από τους χώρους A και B_n . Θα γράφουμε $a = (a_1, \dots, a_m) \in A^m$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in B_n^m$. Ακόμη, για $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ορίζουμε την μετρική $d_n^m : B_n^m \times B_n^m \rightarrow R$ με

$$d_n^m(b, c) = d_n^m((b_1, \dots, b_m), (c_1, \dots, c_m)) = \max\{d_n(b_k, c_k), k = 1, \dots, m\}.$$

Με $(b, c) = ((b_1, \dots, b_m), (c_1, \dots, c_m))$ συμβολίζουμε το άθροισμα $b_1 c_1 + \dots + b_m c_m$ και για $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ έχουμε:

1. f_n είναι ο κανονικός ομομορφισμός από το A στο B_n ή από το A^m στο B_n^m ,
2. $f = f_{n, n+1} : B_{n+1} \rightarrow B_n$ ή $B_{n+1}^m \rightarrow B_n^m$,
3. f^m είναι η σύνθεση m διαδοχικών απεικονίσεων της προηγούμενης μορφής.

Θεώρημα 3.7 Έστω A ένα πυκνό, αντίστροφο όριο μίας ακολουθίας $\{(B_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ πλήρων μετρικών δακτυλίων. Επίσης, έστω $a_1, \dots, a_m \in A$ τέτοια ώστε το $(f_n(a_1), \dots, f_n(a_m))$ είναι ένα δεξιό κανονικό σύστημα στον B_n , για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Τότε το $a = (a_1, \dots, a_m)$ είναι ένα δεξιό κανονικό σύστημα στο A .

Απόδειξη Αναζητούμε $x \in A^m$ τέτοιο ώστε $(a, x) = 1$. Από την υπόθεση, υπάρχει $y \in B_0^m$ με

$$(f_0(a), y) = 1.$$

Έστω $\sum_{i \in \mathbb{N}} \varepsilon_i$ τυχαία σειρά θετικών αριθμών. Από το Πόρισμα 3.6 υπάρχει $y^1 \in B_1^m$ τέτοιο ώστε

$$(f_1(a), y^1) = 1 \text{ και } d_0^m(f(y^1), y^0) < \varepsilon_1.$$

Συνεχίζοντας με επαγωγή, βρίσκουμε $y^2 \in B_2^m, y^3 \in B_3^m, \dots$ τέτοια ώστε

$$(f_n(a), y^n) = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (*)$$

$$\text{και } d_{n-1}^m(f^l(y^n), f^{l-1}(y^{n-1})) < \varepsilon_n, \quad l < n \quad (**).$$

Έστω $c(k)_n = f^{n-k}(y^n)$, $n = k, k+1, \dots$. Τότε $c(k)_n = f(c(k+1)_n)$, $n > k$ και επομένως

$$d_{n-1}^m(c(n-l)_n, c(n-l)_{n-1}) < \varepsilon_n, \quad n > l \text{ (από την (**))}$$

$$\text{και } (f_k(a), c(k)_n) = 1, \quad n > k \text{ (από την (*)).}$$

Συνεπώς, η $c(k)_n$ είναι μία ακολουθία Cauchy στον B_k^m , η οποία συγκλίνει σε κάποια n -άδα έστω $c(k)$, ενώ επίσης έχουμε

$$(f_k(a), c(k)) = 1 \text{ και } c(k) = f(c(k+1))$$

Τελικά, $c(\cdot)$ είναι ένα στοιχείο x της άλγεβρας αντίστροφο όριο A^m , το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $(a, x) = 1$. $\square$

Ορισμός 3.8 Ένα ιδεώδες M , μίας τοπολογικής άλγεβρας A , καλείται **συν-πεπερασμένο (cofinite)** αν είναι κλειστό, και το πηλικό A/M είναι πεπερασμένης διάστασης.

Σχετικά με την ορολογία που αναφέρθηκε πριν το θεώρημα 3.7, υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάθε n , η B_n είναι ιδιαίτερα μία μοναδιαία άλγεβρα, υπεράνω ενός τοπολογικού σώματος K (με χωριστά συνεχή πολλαπλασιασμό), τέτοια ώστε

$$f_{n,n+1}(kb) = kf_{n,n+1}(b), \quad k \in K, \quad b \in B_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι:

Σε μία μοναδιαία άλγεβρα Banach, ή γενικότερα σε έναν μοναδιαίο Q -δακτύλιο, κάθε γνήσιο, δεξιό, ιδεώδες περιέχεται σε ένα κλειστό (κανονικό) ιδεώδες.

Θεώρημα 3.8 Υποθέτουμε ότι κάθε τοπολογική άλγεβρα B_n (όπως προηγουμένως) έχει την εξής ιδιότητα:

Κάθε γνήσιο, πεπερασμένως παραγόμενο δεξιό ιδεώδες, περιέχεται σε κάποιο μέγιστο, συμπεπερασμένο, δεξιό ιδεώδες.

Τότε, η άλγεβρα αντίστροφο όριο A έχει επίσης την ίδια ιδιότητα.

Απόδειξη Έστω J ένα γνήσιο, πεπερασμένως παραγόμενο ιδεώδες της A και $a_1, \dots, a_m$ τα στοιχεία που το παράγουν. Επειδή το J είναι γνήσιο, το $(a_1, \dots, a_m)$ είναι ένα μη κανονικό σύστημα στο αντίστροφο όριο A . Διαφορετικά, θα περιείχε τη μονάδα της άλγεβρας A , η οποία υπάρχει αφού οι παράγοντες της άλγεβρας αντίστροφο όριο είναι μοναδιαίες άλγεβρες. Συνεπώς υπάρχει n , τέτοιο ώστε τα $f_n(a_1), \dots, f_n(a_m)$ ανήκουν σε κάποιο γνήσιο, πεπερασμένως παραγόμενο ιδεώδες J_n του B_n . Από την υπόθεση, το J_n περιέχεται σε ένα μέγιστο, συν-πεπερασμένο, δεξιό ιδεώδες, έστω M_n του B_n . Τότε, υπάρχει μία απεικόνιση

$$j_n : A \rightarrow B_n / M_n$$

τέτοια ώστε το $j_n(A)$ είναι πυκνό στο B_n / M_n κι άρα η j_n είναι επί.

Συνεπώς, το $M = \ker j_n$ είναι ένα συν-πεπερασμένο, μέγιστο, κλειστό ιδεώδες, το οποίο περιέχει το J . $\square$

Ορισμός 3.9 Έστω B, K τοπολογικοί δακτύλιοι και

$$L(B, K) = \{\zeta : B \rightarrow K \mid \zeta \text{ ομομορφισμός}\}$$

(αν ο δακτύλιος K είναι μοναδιαίος, τότε με $L(B, K)$ συμβολίζουμε το σύνολο των μη-μηδενικών ομομορφισμών από το B στο K).

Επίσης, έστω $n \in \mathbb{N}$ και $(b_1, \dots, b_n)$ μία διατεταγμένη n -άδα του B . Το σύνολο

$$L(b_1, \dots, b_n \mid B, K) = \{(\zeta(b_1), \dots, \zeta(b_n)) : \zeta \in L(B, K)\} \subseteq K^n$$

καλείται K -**φασματική εικόνα του** $(b_1, \dots, b_n)$ ως προς τον τοπολογικό δακτύλιο B .

Σχόλιο Έστω A το αντίστροφο όριο μίας οικογένειας $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ τοπολογικών δακτυλίων. Επειδή κάθε συνεχής ομομορφισμός ζ των B_α επάγει έναν ομομορφισμό $\zeta \circ f_\alpha$ στο A συμπεραίνουμε ότι

$$L(a_1, \dots, a_n \mid A, K) \supseteq \bigcup_{\alpha \in I} L(f_\alpha(a_1), \dots, f_\alpha(a_n) \mid B_\alpha, K)$$

για κάθε n -άδα $(a_1, \dots, a_n) \in A$. Αν K είναι μία άλγεβρα Banach και το A είναι ισχυρά πυκνό αντίστροφο όριο, η τελευταία σχέση γίνεται ισότητα.

Θεώρημα 3.10 Αν K είναι μία άλγεβρα Banach και το αντίστροφο όριο A των τοπολογικών δακτυλίων $B_\alpha, \alpha \in I$ είναι ισχυρά πυκνό, τότε

$$L(A, K) = \bigcup_{\alpha \in I} L(B_\alpha, K)$$

Απόδειξη Έστω $\zeta \in L(B_\alpha, K)$ για κάποιο $\alpha \in I$. Τότε $\zeta \circ f_\alpha \in L(A, K)$ και επειδή $f_\alpha(A)$ είναι πυκνό στο B_α , έχουμε

$$\zeta_1 \neq \zeta_2 \Rightarrow \zeta_1 \circ f_\alpha \neq \zeta_2 \circ f_\alpha$$

για $\zeta_1, \zeta_2 \in L(B_\alpha, K)$. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε την εμβάπτιση

$$Z : L(B_\alpha, K) \rightarrow L(A, K)$$

από την οποία έχουμε ότι

$$L(B_\alpha, K) \subset L(B_\beta, K)$$

Επιπλέον, από το Θεώρημα 3.3, το $L(A, K)$ εξαντλείται από την ένωση των $L(B_\alpha, K), \alpha \in I$. $\square$

Ορισμός 3.11 Έστω B ένας μοναδιαίος δακτύλιος, K υποδακτύλιός του και $b_1, \dots, b_n \in B$. Το σύνολο

$$\sigma(b_1, \dots, b_n | B, K) = \{(k_1, \dots, k_n) \in K^n \mid b_1 - k_1, \dots, b_n - k_n \text{ ορίζουν ένα γνήσιο,} \\ \text{δεξιό ιδεώδες στο } B\}$$

καλείται **δεξιό K -φάσμα του $(b_1, \dots, b_n)$** ως προς το B .

Σχόλιο (στον προηγούμενο ορισμό). Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\zeta \in L(B, K)$, το $\ker \zeta$ είναι ένα κανονικό ιδεώδες του δακτυλίου B . Συνεπώς ισχύει η σχέση

$$\sigma(b_1, \dots, b_n | B, K) \supset L(b_1, \dots, b_n | B, K)$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι μπορούμε να ορίσουμε το $\sigma(F | B, K)$ για F μία άπειρη οικογένεια στοιχείων. Ας εφαρμόσουμε λοιπόν αυτήν την ιδέα στην περίπτωση ενός αντίστροφου ορίου A . Τότε πρέπει να ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

1. κάθε B_α περιέχει το K ή μία άλγεβρα ισομορφική με αυτό,
2. οι απεικονίσεις $f_{\alpha\beta} : B_\beta \rightarrow B_\alpha, \alpha \leq \beta, \alpha, \beta \in I$ διατηρούν το K .

Συνεπώς, το A περιέχει το K και οι απεικονίσεις $f_\alpha : A \rightarrow B_\alpha, \alpha \in I$ το διατηρούν.

Υποθέτουμε ότι $(k_1, \dots, k_n) \in (f_\alpha(a_1), \dots, f_\alpha(a_n) | B_\alpha, K)$ για κάποιο $\alpha \in I$. Τότε, $(f_\alpha(a_1 - k_1), \dots, f_\alpha(a_n - k_n))$ δεν είναι κανονικό στο B_α και επομένως το $(a_1 - k_1, \dots, a_n - k_n)$ δεν είναι κανονικό στο A . Άρα

$$\sigma(a_1, \dots, a_n \mid A, K) \supset \bigcup_{\alpha \in I} \sigma(f_\alpha(a_1), \dots, f_\alpha(a_n) \mid B_\alpha, K).$$

Θεώρημα 3.12 Έστω μία ακολουθία μοναδιαίων, μετρικών δακτυλίων $B_0, B_1, \dots$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

(1) Για $i = 0, 1, 2, \dots$ ο B_i περιέχει έναν υποδακτύλιο K τέτοιο ώστε

$$f_{n,n+1}(k) = k, k \in K \text{ (δηλαδή } f_{n,n+1}|_K = \text{ταυτοτική}).$$

(2) Το αντίστροφο όριο A της ακολουθίας, είναι πυκνό.

Τότε για $a_1, \dots, a_n \in A$ έχουμε

$$\sigma(a_1, \dots, a_n \mid A, K) = \bigcup_{\alpha \in I} \sigma(f_\alpha(a_1), \dots, f_\alpha(a_n) \mid B_\alpha, K).$$

Απόδειξη Από το προηγούμενο σχόλιο, έχουμε ότι

$$\sigma(a_1, \dots, a_n \mid A, K) \supset \bigcup_{\alpha \in I} \sigma(f_\alpha(a_1), \dots, f_\alpha(a_n) \mid B_\alpha, K). \quad (*)$$

Έστω ότι $(0, \dots, 0) \notin \sigma(f_\alpha(a_1), \dots, f_\alpha(a_n) \mid B_\alpha, K)$ για $\alpha \in I$. Τότε, από το Θεώρημα 3.7, έχουμε ότι $(0, \dots, 0) \notin \sigma(a_1, \dots, a_n \mid A, K)$. Από την (*), καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Θεώρημα 3.13 Έστω μία ακολουθία μοναδιαίων, μετρικών δακτυλίων $B_0, B_1, \dots$ για την οποία ισχύουν τα :

(1) Για $i = 0, 1, 2, \dots$ ο B_i περιέχει υποδακτύλιο K τέτοιο ώστε

$$f_{n,n+1}(k) = k, k \in K.$$

(2) Το αντίστροφο όριο A της ακολουθίας είναι πυκνό.

(3) Ο K είναι χώρος Banach.

(4) Για $b_1, \dots, b_m \in B_i$, που ανήκουν σε ένα γνήσιο, δεξιό ιδεώδες του B_i ,

υπάρχει ένας συνεχής ομομορφισμός $f : B_i \rightarrow K$ με

$$f(b_k) = 0, k = 1, \dots, m.$$

Τότε, για $a_1, \dots, a_m \in A$, που ανήκουν σε κανονικό, δεξιό ιδεώδες του A , υπάρχει συνεχής ομομορφισμός $f : A \rightarrow K$ με $f(a_k) = 0, k = 1, \dots, m$ και $\sigma(a_1, \dots, a_m | A, K) = L(a_1, \dots, a_m | A, K)$.

Απόδειξη Από το Θεώρημα 3.12, ισχύει

$$\sigma(a_1, \dots, a_m | A, K) = \bigcup_{\alpha \in I} \sigma(f_\alpha(a_1), \dots, f_\alpha(a_m) | B_\alpha, K).$$

Άρα, αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$L(a_1, \dots, a_m | A, K) = \bigcup_{\alpha \in I} \sigma(f_\alpha(a_1), \dots, f_\alpha(a_m) | B_\alpha, K) \text{ (βλ. [5]). } \square$$

Το επόμενο αποτέλεσμα υλοποιεί το Θεώρημα 3.13:

Θεώρημα 3.14 Έστω $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ μία μοναδιαία, μεταθετική, Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Τότε, για $a_1, \dots, a_m$, που ανήκουν σε ένα γνήσιο, δεξιό ιδεώδες της A , υπάρχει συνεχής ομομορφισμός

$$f : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ με } f(a_k) = 0, k = 1, \dots, m.$$

Απόδειξη Αρχικά, από την ανάλυση Arens – Michael, η A μπορεί να ταυτιστεί με το αντίστροφο όριο μίας οικογένειας $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από μεταθετικές, άλγεβρες Banach της μορφής

$$B_n = A / \ker q_n, n \in \mathbb{N}.$$

Ακόμη, το $\mathbb{C}$ είναι ένας χώρος Banach και για $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:

1. Κάθε ιδεώδες της B_n περιέχεται σε ένα τουλάχιστον μέγιστο ιδεώδες.
2. Όλα τα μέγιστα ιδεώδη της B_n είναι κλειστά.
3. Η B_n είναι ισόμορφη με το $\mathbb{C}$ από το Πόρισμα 1.20.

Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.13, για $a_1, \dots, a_m$, που ανήκουν σε ένα γνήσιο, δεξιό ιδεώδες της A , υπάρχει συνεχής ομομορφισμός

$$f : A \rightarrow \mathcal{C} \text{ με } f(a_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad \square$$

Ορισμός 3.15 Ένα στοιχείο a μίας τοπολογικής άλγεβρας A καλείται *φραγμένο*, αν το σύνολο

$$\{\zeta(a) \mid \zeta \in L(A, \mathcal{C})\}$$

είναι φραγμένο υπόσυνολο του $\mathcal{C}$.

Θεώρημα 3.16 Έστω $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ μία μοναδιαία μεταθετική Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Η A είναι συναρτησιακά συνεχής αν

(1) Υπάρχουν $g_1, \dots, g_m \in A$ έτσι ώστε για την απεικόνιση

$$H : L(A, \mathcal{C}) \rightarrow L(g_1, \dots, g_m \mid A, \mathcal{C}) \text{ με } H(\zeta) = (\zeta(g_1), \dots, \zeta(g_m)),$$

το $H^{-1}(h_1, \dots, h_m)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $L(A, \mathcal{C})$, για κάθε $(h_1, \dots, h_m) \in L(g_1, \dots, g_m \mid A, \mathcal{C})$,

ή ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(2) Για κάθε $x \in A$, υπάρχει $y \in A$ φραγμένο, τέτοιο ώστε

$$\zeta(x) = 0 \text{ όταν } \zeta(y) = 0, \text{ για κάθε } \zeta \in L(A, \mathcal{C}).$$

(3) Αν $y_1, y_2, \dots \in A$ φραγμένα και $s(\zeta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \zeta(y_k)$ συγκλίνει

ομοιόμορφα στο $L(A, \mathcal{C})$, τότε υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε

$$s(\zeta) = \zeta(a) \text{ για κάθε } \zeta \in L(A, \mathcal{C}).$$

Απόδειξη Η απόδειξη βασίζεται σε αυτήν της Πρότασης 2.20, όπου εμφανίζονται ασθενέστερες μορφές των συνθηκών (2) και (3), όπως παραπάνω. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΦΡΑΓΜΕΝΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΟΕΙΔΗ ΣΕ ΤΟΠΙΚΑ m -ΚΥΡΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ

Κεντρικό σημείο του παρόντος κεφαλαίου είναι το Θεώρημα 4.4, σύμφωνα με το οποίο, η εικασία Michael είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο:

Κάθε γραμμικό, πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές επί μίας μεταθετικής, πλήρους τοπικά m -κυρτής άλγεβρας είναι φραγμένο. (βλ. Ορισμός 6.1) (βλ. [10])

Ορισμός 4.1 Ένα συναρτησοειδές, επί μίας τοπολογικής άλγεβρας A , καλείται *φραγμένο*, αν η εικόνα κάθε φραγμένου υποσυνόλου της A είναι φραγμένο σύνολο.

Ορισμός 4.2 Μία απεικόνιση $p: A \rightarrow R \cup \{\infty\}$, επί μίας άλγεβρας A , καλείται *επεκτεταμένη ημινόρμα*, αν η p περιορισμένη στο υποσύνολο $\{x \in A: p(x) \neq \infty\}$ της A , είναι ημινόρμα.

Ιδιαίτερα, η p καλείται **κάτω ημισυνεχής**, αν το σύνολο $\{x \in A : p(x) \leq 1\}$ είναι κλειστό στην A .

Θεώρημα 4.3 (Θεώρημα Πληρότητας του Garling).

Έστω $(X, (p_a)_{a \in I})$ ένας πλήρης τοπικά κυρτός διανυσματικός χώρος και μία οικογένεια $(q_\beta)_{\beta \in J}$ από κάτω ημισυνεχείς επεκτεταμένες ημινόρμες, ορισμένες επί του X . Τότε ο χώρος:

$$Y = \{ x \in X : q_\beta(x) < \infty, \beta \in J \}$$

είναι πλήρης ως προς την τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια $(q_\beta)_{\beta \in J} \cup (p_a)_{a \in I}$.

Απόδειξη Έστω $(x_\delta)_{\delta \in \Delta} \subseteq Y$ ένα δίκτυο Cauchy ως προς την τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια $(q_\beta)_{\beta \in J} \cup (p_a)_{a \in I}$. Τότε $(x_\delta)_{\delta \in \Delta} \subseteq X$ και επειδή ο $(X, (p_a)_{a \in I})$ είναι πλήρης, έχουμε $x_\delta \rightarrow x$ για κάποιο $x \in X$ (ως προς την τοπολογία που παράγεται από την ακολουθία ημινόρμων $(p_a)_{a \in I}$).

Θα δείξουμε ότι $x \in Y$. Έστω $\beta \in J$. Τότε, από τον ορισμό της, η $(q_\beta(x_\delta))_{\delta \in \Delta}$ είναι τελικά φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχει

$$M_\beta > 0 \text{ και } \delta_0 \in \Delta, \text{ τέτοια ώστε } q_\beta(x_\delta) \leq M_\beta, \text{ για κάθε } \delta \geq \delta_0.$$

Επειδή, το $J_\beta = \{x \in X : q_\beta(x) \leq M_\beta\}$ είναι κλειστό και $(x_\delta)_{\delta \geq \delta_0} \subseteq J_\beta$, έχουμε ότι $q_\beta(x) \leq M_\beta$, δηλαδή $x \in Y$.

Τέλος, θα δείξουμε ότι $x_\delta \rightarrow x$ ως προς την τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια $(q_\beta)_{\beta \in J} \cup (p_a)_{a \in I}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $q_\beta(x_\delta - x) \xrightarrow{\delta} 0$, για κάθε $\beta \in J$. Έστω λοιπόν $\beta \in J$, $\varepsilon > 0$ ενώ ακόμη υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x = 0$. Τότε, υπάρχει

$\delta_0 \in \Delta$ με $q_\beta(x_{\delta_1} - x_{\delta_2}) < \varepsilon$, για κάθε $\delta_1 \geq \delta_0$, $\delta_2 \geq \delta_0$. Τελικά, για $\delta_1 \geq \delta_0$ έχουμε $q_\beta(x_{\delta_1} - x) < \varepsilon$. $\square$

Θεώρημα 4.4 Τα ακόλουθα προβλήματα είναι ισοδύναμα:

- (1) Κάθε γραμμικό, πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές επί μίας μεταθετικής Fréchet τοπικά m -κυρτής άλγεβρας είναι συνεχές.
- (2) Κάθε γραμμικό, πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές επί μίας μεταθετικής, πλήρους τοπικά m -κυρτής άλγεβρας είναι φραγμένο (βλ. Ορισμός 6.1).

Απόδειξη (2) $\Rightarrow$ (1) Άμεσο, αφού κάθε φραγμένο, γραμμικό, συναρτησοειδές επί ενός μετριοποιήσιμου, τοπικά κυρτού χώρου είναι συνεχές.

Αντίστροφα, αποδεικνύουμε ότι η άρνηση του (2) συνεπάγεται την άρνηση του (1). Έστω f ένα μη φραγμένο πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές επί μίας άλγεβρας $(A, (p_a)_{a \in I})$ όπως στο (2). Τότε, υπάρχει μία φραγμένη ακολουθία $(y_n)_{n \in N} \subset A$, τέτοια ώστε η ακολουθία $(f(y_n))_{n \in N} \subset \mathbb{C}$ είναι μη φραγμένη. Αφού η $(y_n)_{n \in N}$ είναι φραγμένη, για κάθε $a \in I$, υπάρχει σταθερά M_a με $p_a(y_n) < M_a$, για κάθε $n \in N$. Ορίζουμε, για $m \in N$, τα εξής:

$$I_m = \{ a \in I : p_a(y_n) < m, \text{ για κάθε } n \in N \} \text{ και}$$

$$q_m(x) = \sup \{ p_a(x) : a \in I_m \}, \quad x \in A.$$

Τότε, η $(q_m)_{m \in N}$ είναι μία ακολουθία από επεκτεταμένες ημινόρμες, οι οποίες είναι κάτω ημισυνεχείς. Πράγματι, έστω $m \in N$ και

$$J_m = \{ x \in A : q_m(x) \leq 1 \}.$$

Θα δείξουμε ότι $\bar{J}_m = J_m$ (δηλαδή το J_m κλειστό). Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\bar{J}_m \subseteq J_m$ (αφού $J_m \subseteq \bar{J}_m$). Έστω $z \in \bar{J}_m$. Τότε, υπάρχει δίκτυο $(z_\delta)_{\delta \in \Delta} \subseteq J_m$ έτσι ώστε $\lim_{\delta} z_\delta = z$, ενώ ακόμη ισχύει

$$p_a(z_\delta) \leq q_m(z_\delta) \leq 1, \text{ για κάθε } a \in I_m, \delta \in \Delta.$$

Επίσης, για $a \in I_m$ έχουμε

$$\lim_{\delta} p_a(z_\delta) \leq 1 \Leftrightarrow p_a(\lim_{\delta} z_\delta) \leq 1 \Leftrightarrow p_a(z) \leq 1 \Leftrightarrow z \in J_m$$

(αφού οι p_a , $a \in I_m$ είναι συνεχείς απεικονίσεις). Οπότε $\bar{J}_m \subseteq J_m$. Από το Θεώρημα 4.3, έχουμε ότι ο υπόχωρος

$$A_0 = \{ x \in A : q_m(x) < \infty, m \in N \}$$

είναι πλήρης, ως προς την τοπολογία, έστω T_0 , η οποία ορίζεται μέσω της οικογένειας ημινормών $(q_m)_{m \in N} \cup (p_a)_{a \in I}$. Η T_0 συμπίπτει με την τοπολογία, η οποία ορίζεται μόνο μέσω της ακολουθίας $(q_m)_{m \in N}$. Συνεπώς, η A_0 , εφοδιασμένη με την τοπολογία T_0 , γίνεται μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα. Η ακολουθία $(y_n)_{n \in N}$ είναι φραγμένη (ως προς την τοπολογία T_0) επειδή $q_m(y_n) \leq m$ για κάθε $m, n \in N$. Όμως, η ακολουθία $(f(y_n))_{n \in N}$ είναι μη φραγμένη και επομένως το f μη συνεχές. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

FRECHET ΤΟΠΙΚΑ m -ΚΥΡΤΕΣ

ΑΛΓΕΒΡΕΣ ΜΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΒΑΣΕΙΣ

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η απόδειξη ενός ακόμη σημαντικού αποτελέσματος σχετικά με την εικασία Michael. Θα αποδείξουμε ότι κάθε Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα με ορθογώνια βάση (Ορισμός 5.1) είναι συναρτησιακά συνεχής (Θεωρήματα 5.9, 5.12 και 5.13). (βλ. [13])

Ορισμός 5.1 Έστω A ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Μία ακολουθία $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ του A καλείται **βάση**, αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει μία μοναδική ακολουθία $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i .$$

Ιδιαίτερα, με τον όρο **ορθογώνια βάση** θα εννοούμε μία βάση $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $x_i x_j = 0$ για κάθε $i \neq j$.

Πρόταση 5.2 Έστω ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος A με βάση $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ και $x \in A$ με $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Τότε κάθε συναρτησοειδές (συντεταγμένη) $a_i : A \rightarrow \mathbb{C}$ με $a_i(x) = a_i$ είναι συνεχής απεικόνιση.

Απόδειξη (βλ. [19]). $\square$

Πρόταση 5.3 Έστω $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία ενός χώρου Fréchet $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Τότε για κάθε ακολουθία μιγαδικών $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in A$ αν και μόνο αν για κάθε q_n υπάρχει φυσικός αριθμός N_n (εξαρτώμενος από το n) τέτοιος ώστε $q_n(x_i) = 0$ για κάθε $i \geq N_n$.

Απόδειξη Έστω $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών και $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in A$. Αφού η σειρά συγκλίνει έχουμε, $\lim_{i \rightarrow \infty} q_n(a_i x_i) = 0 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| q_n(x_i) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (λόγω της απόλυτης ομογένειας των $q_n, n \in \mathbb{N}$). Όμως, η $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι τυχαία κι έτσι έχουμε $\lim_{i \rightarrow \infty} q_n(x_i) = 0, n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, υπάρχει φυσικός αριθμός $N_n = N_n(n)$ τέτοιος ώστε $q_n(x_i) = 0$ για κάθε $i \geq N_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε ημινόρμα q_n υπάρχει φυσικός αριθμός N_n , εξαρτώμενος από το n , τέτοιος ώστε $q_n(x_i) = 0$ για κάθε $i \geq N_n$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών, το $\sum_{i=1}^{\infty} a_i q_n(x_i)$ συγκλίνει. Επίσης $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| q_n(x_i)$ συγκλίνει (απόλυτη σύγκλιση) κι έχουμε ότι $|a_i| q_n(x_i) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_i| q_n(x_i) \rightarrow 0 \Leftrightarrow q_n(a_i x_i) \rightarrow 0, n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in A,$$

δηλαδή συγκλίνει στην A για τυχούσα $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. $\square$

Πρόταση 5.4 Έστω $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ βάση της, τέτοια ώστε αν $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in A$, να ισχύει $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $q_{n_0}(x_i) > 0$ για κάθε $x_i, i \in \mathbb{N}$.

Αντίστροφα, αν $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία της A τέτοια ώστε :

(α) για κάθε x_i έχουμε $x_i^2 = c_i x_i$, όπου $\inf_{i \geq 1} |c_i| > 0$,

(β) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $q_{n_0}(x_i) > 0$ για κάθε x_i ,

τότε για κάθε $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in A$ έχουμε $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$.

Απόδειξη Θέτουμε $Z_n = \{i \in \mathbb{N}, q_n(x_i) = 0\}, n \in \mathbb{N}$. Η $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία ημινορμών, δηλαδή για $m \leq n$, $0 \leq q_m(x) \leq q_n(x), x \in A$. Συνεπώς, η ακολουθία συνόλων $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, δηλαδή $Z_m \supseteq Z_n$. Υποθέτουμε ότι $Z_n \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}$. Επομένως από το αξίωμα της επιλογής, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ακολουθία $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $i_n \in Z_n$. Ουσιαστικά, επιλέγουμε ένα $i_n \in Z_n$ (μπορούμε αφού $Z_n \neq \emptyset$) επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε όμως $q_m(x_{i_n}) = 0$ για κάθε $m \leq n$ αφού $0 \leq q_m(x_{i_n}) \leq q_n(x_{i_n}) = 0$. Άρα, από την Πρόταση 5.3, για κάθε $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών το $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_{i_n}$ συγκλίνει στην A , συμπεράσμα το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεσή μας. Επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $Z_{n_0} = \emptyset$ κι έτσι $q_{n_0}(x_i) \neq 0, i \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $q_{n_0}(x_i) > 0, i \in \mathbb{N}$.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $q_{n_0}(x_i) > 0, i \in \mathbb{N}$. Έχουμε $[q_{n_0}(x_i)]^2 = q_{n_0}(x_i) q_{n_0}(x_i) \geq q_{n_0}(x_i x_i) = q_{n_0}(x_i^2) = q_{n_0}(c_i x_i) = |c_i| q_{n_0}(x_i)$ (από την

υποπολλαπλασιαστικότητα, την απόλυτη ομογένεια της q_{n_0} και την υπόθεση (α)). Συνέπως:

$$[q_{n_0}(x_i)]^2 \geq |c_i| q_{n_0}(x_i) \Leftrightarrow q_{n_0}(x_i)[q_{n_0}(x_i) - |c_i|] \geq 0 \Leftrightarrow q_{n_0}(x_i) - |c_i| \geq 0$$

(από την υπόθεση (β)) και τελικά

$$q_{n_0}(x_i) > |c_i| \Leftrightarrow q_{n_0}(x_i) \geq \inf_{i \in \mathbb{N}} |c_i|. \quad (*)$$

Αν $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in A$, δηλαδή η σειρά συγκλίνει σε στοιχείο της A , έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} q_{n_0}(a_i x_i) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| q_{n_0}(x_i) = 0 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| \inf_{k \in \mathbb{N}} |c_k| = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\inf_{i \in \mathbb{N}} |c_i|) (\lim_{i \rightarrow \infty} |a_i|) = 0 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| = 0 \end{aligned}$$

αφού $|a_i| q_{n_0}(x_i) \geq |a_i| \inf_{k \in \mathbb{N}} |c_k|, i \in \mathbb{N}$ (από την (*)) και $\inf_{k \in \mathbb{N}} |c_k| > 0$ (από την υπόθεση (α)). $\square$

Πρόταση 5.5 Έστω $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ορθογώνια βάση της. Τότε η A έχει μονάδα, έστω e , εάν και μόνο εάν:

$$(\alpha) \quad x_i^2 \neq 0, i \in \mathbb{N}$$

$$(\beta) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i \in A \text{ για τυχούσα ακολουθία μιγαδικών } (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι η A έχει μονάδα e κι ότι $e = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ για

κάποια ακολουθία μιγαδικών $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (Ορισμός 5.1). Επειδή $x_i x_j = 0, i \neq j$

$$\text{για } j \in \mathbb{N}, \text{ έχουμε } 0 \neq x_j = x_j e = x_j \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_j x_i = a_j x_j^2$$

Συνεπώς $x_j^2 \neq 0, j \in \mathbb{N}$ και για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} q_n(x_j) &= q_n(a_j x_j^2) = |a_j| q_n(x_j x_j) \leq |a_j| q_n(x_j) q_n(x_j) = |a_j| [q_n(x_j)]^2 \\ &\Leftrightarrow q_n(x_j) \leq |a_j| [q_n(x_j)]^2 \Leftrightarrow q_n(x_j) - |a_j| [q_n(x_j)]^2 \leq 0 \Leftrightarrow q_n(x_j) [a_j q_n(x_j) - 1] \geq 0 \end{aligned}$$

Ακόμη, αφού η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ συγκλίνει, για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$\lim_{i \rightarrow \infty} q_n(a_i x_i) = 0 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| q_n(x_i) = 0 \Leftrightarrow q_n(x_j) = 0$ για κάθε $j \geq j_0$,
όπου $j_0 = j_0(n)$ (μπορούμε να επιλέξουμε το j_0 όσο μεγάλο επιθυμούμε ανάλογα με το n). Από την Πρόταση 5.3, έχουμε λοιπόν ότι για κάθε ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i \in A$.

Αντίστροφα, έστω $x_i^2 \neq 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in A$ για κάθε $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών. Επειδή η $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι βάση της A , για $i \in \mathbb{N}$, έχουμε $x_i^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$. Τότε, για $k \neq i$, έχουμε:

$0 = x_k x_i \Leftrightarrow 0 = x_k x_i^2 = x_k \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_k x_j = a_{ik} x_k^2$. Όμως $x_k^2 \neq 0$,
δηλαδή $a_{ik} = 0, k \neq i$. Τελικά

$$0 \neq x_i^2 = a_{ii} x_i \quad (*)$$

και συνεπώς $a_{ii} \neq 0, i \in \mathbb{N}$, και άρα μπορούμε να ορίσουμε το στοιχείο $e = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_{ii}} x_i$ το οποίο ανήκει στην A από την υπόθεσή μας. Τότε, για

$x = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i \in A$ έχουμε, λαμβάνοντας υπόψη και την $(*)$, ότι

$ex = xe = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \frac{1}{a_{ii}} x_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i = x$. Επομένως το e είναι μονάδα για την άλγεβρα A . $\square$

Θεώρημα 5.6 Έστω $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ορθογώνια βάση της. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in A$ για κάθε $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $N_n \in \mathbb{N}$ με $q_n(x_i) = 0$ για κάθε $i > N_n$.

(γ) Η A έχει μονάδα e .

(δ) $A \cong C^{\mathbb{N}}$, ως προς έναν αλγεβρικό ισομορφισμό.

Απόδειξη (α) $\Leftrightarrow$ (β) (Άμεσο από την Πρόταση 5.3) .

(α) $\Leftrightarrow$ (γ) (Από την Πρόταση 5.5).

(β) $\Leftrightarrow$ (γ) (Ισχύει αφού (α) $\Leftrightarrow$ (β) και (α) $\Leftrightarrow$ (γ)).

(α) $\Leftrightarrow$ (δ) Ο αλγεβρικός ισομορφισμός είναι ο

$$f : A \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ με } f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} . \quad \square$$

Σχόλιο Από το τελευταίο θεώρημα προκύπτει ότι η μόνη μοναδιαία, Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα με ορθογώνια βάση, είναι η άλγεβρα $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ των μιγαδικών ακολουθιών με τις κατά συντεταγμένες αλγεβρικές πράξεις.

Θεώρημα 5.7 Έστω $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ορθογώνια βάση της. Τότε κάθε γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $f(x_i) \neq 0$, για κάποιο $i \in \mathbb{N}$, είναι συνεχής απεικόνιση.

Απόδειξη Έστω $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ στοιχείο της A , και $i \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $f(x_i) \neq 0$. Επειδή η βάση είναι ορθογώνια, έχουμε:

$$xx_i = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right)x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j x_i = a_i x_i^2 . \quad (*)$$

Επίσης, από την πολλαπλασιαστικότητα, την γραμμικότητα του συναρτησοειδούς f , καθώς και την (*) έχουμε:

$$\begin{aligned} f(xx_i) &= f(x)f(x_i) \Leftrightarrow f(a_i x_i^2) = f(x)f(x_i) \Leftrightarrow a_i f(x_i^2) = f(x)f(x_i) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_i [f(x_i)]^2 = f(x)f(x_i) \Leftrightarrow a_i f(x_i) = f(x) \Leftrightarrow a_i(x)f(x_i) = f(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή το συναρτησοειδές f είναι συνεχής απεικόνιση, αφού το $f(x_i) \in \mathcal{C}$ και η απεικόνιση (συντεταγμένη) $a_i: A \rightarrow C$ με $a_i(x) = a_i$ είναι συνεχής από την Πρόταση 5.2. $\square$

Λήμμα 5.8 Έστω $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία της, τέτοια ώστε:

$$(α) \quad x_i x_j = 0 \text{ για } i \neq j,$$

$$(β) \text{ για κάθε } (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ακολουθία μιγαδικών το } \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in A.$$

Τότε $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = 0$ για κάθε $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών, όπου $f: A \rightarrow \mathcal{C}$ είναι πολλαπλασιαστικό, γραμμικό συναρτησοειδές το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη $f(x_i) = 0, i \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη Θα δείξουμε αρχικά ότι $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = 0$, χρησιμοποιώντας εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) \neq 0$. Έχουμε:

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} ix_i\right) f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right) = \left[f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)\right]^2 \neq 0.$$

$$\text{Επομένως } f\left(\sum_{i=1}^{\infty} ix_i\right) \neq 0.$$

Θέτουμε $a = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right), \alpha\beta = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} ix_i\right)$. Τότε :

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\beta - i)x_i\right) = f\left(\beta \sum_{i=1}^{\infty} x_i - \sum_{i=1}^{\infty} ix_i\right) = \beta f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) - f\left(\sum_{i=1}^{\infty} ix_i\right) = \beta a - \alpha\beta = 0$$

Αν ο β δεν είναι θετικός ακέραιος, έχουμε:

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\beta - i)x_i\right) f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta - i} x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right) = \left[f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)\right]^2 \neq 0 \text{ το οποίο}$$

είναι άτοπο.

Αν ο β είναι ακέραιος, έστω n , αφού $f(x_i) = 0, i \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
0 &= f\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\beta - i)x_i\right) f\left(\sum_{i=1, i \neq n}^{\infty} \frac{1}{\beta - i} x_i\right) = f\left(\sum_{i=1, i \neq n}^{\infty} x_i^2\right) = \left[f\left(\sum_{i=1, i \neq n}^{\infty} x_i\right)\right]^2 = \\
&= \left[f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)\right]^2 \neq 0
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς σε κάθε περίπτωση

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = 0. \quad (*)$$

Τώρα θα δείξουμε το ζητούμενο: έστω $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών.

Απο την (*) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left[f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right)\right]^2 &= f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 x_i^2\right) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 x_i\right) f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left[f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right)\right]^2 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = 0
\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Σχόλιο Από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε ιδιαίτερα, ότι κάθε χαρακτήρας της A δηλαδή κάθε μη-μηδενικό πολλαπλασιαστικό, γραμμικό συναρτησοειδές $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής απεικόνιση. Επιπλέον, έχουμε ότι κάθε πολλαπλασιαστικό, γραμμικό συναρτησοειδές, ορισμένο στην Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ των μιγαδικών ακολουθιών, είναι ταυτοτικά ίσο με μηδέν αν μηδενίζεται στα στοιχεία της βάσης $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ όπου $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ ($\delta_{ij} = \delta(i, j) = 1$ αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$, είναι το δ του Kronecker).

Θεώρημα 5.9 Έστω $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μία ορθογώνια βάση της. Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μιγαδικών αριθμών, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in A$. Τότε κάθε γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής απεικόνιση.

Απόδειξη Έστω ένα γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές

$f: A \rightarrow \mathbb{C}$.

(α) Αν υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ με $f(x_i) \neq 0$, από το Θεώρημα 5.7, έχουμε το ζητούμενο.

(β) Αν $f(x_i) = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, από το Λήμμα 5.8, $f = 0$, οπότε η f είναι συνεχής.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, το συναρτησοειδές f είναι μία συνεχής απεικόνιση. $\square$

Σχόλιο Έστω $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μία ορθογώνια βάση της. Τότε, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, υπάρχει μοναδική ακολουθία μιγαδικών $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε το $x_i^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$. Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα της βάσης και πολλαπλασιάζοντας με x_i έχουμε $x_i^3 = a_{ii} x_i^2$. Με την ίδια διαδικασία έχουμε επίσης $x_i^4 = a_{ii} x_i^3$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) Αν $a_{ii} \neq 0$ θέτοντας $\psi_i = a_{ii}^{-1} x_i$ στην $x_i^4 = a_{ii} x_i^3$ προκύπτει ότι $\psi_i^4 = \psi_i^3$.

(β) Αν $a_{ii} = 0$ από τις σχέσεις $x_i^3 = a_{ii} x_i^2$ και $x_i^4 = a_{ii} x_i^3$ προκύπτει ότι $x_i^4 = x_i^3 = 0$.

Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ορθογώνια βάση ικανοποιεί πάντα την σχέση $x_i^4 = x_i^3$.

Ορισμός 5.10 Μία ορθογώνια βάση $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μίας τοπολογικής άλγεβρας καλείται **κανονικοποιημένη** αν ικανοποιεί τη συνθήκη $x_i^4 = x_i^3$ για $i \in \mathbb{N}$.

Πόρισμα 5.11 Έστω A μία τοπολογική άλγεβρα και $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μία κανονικοποιημένη βάση της. Τότε $x_i^6 = x_i^4$ και $x_i^8 = x_i^6$ για $i \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη Αφού η βάση είναι κανονικοποιημένη, έχουμε $x_i^4 = x_i^3$.

Συνεπώς $x_i^6 = x_i^4 x_i^2 = x_i^3 x_i^2 = x_i^5 = x_i^4 x_i = x_i^3 x_i = x_i^4$.

Επίσης $x_i^6 = x_i^3 x_i^3 = x_i^4 x_i^4 = x_i^8$. $\square$

Θεώρημα 5.12 Έστω $(A, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μία ορθογώνια βάση της, έτσι ώστε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i x_i \in A \text{ όταν } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$$

για κάθε $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}, (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθίες μιγαδικών με $|a_i| \leq 1$. Τότε κάθε γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές ορισμένο στην A είναι συνεχής απεικόνιση.

Απόδειξη Έστω f ένα γραμμικό και πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές της A .

Αν υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ με $f(x_i) \neq 0$, από το Θεώρημα 5.7, το f είναι συνεχής απεικόνιση.

Έστω τώρα ότι $f(x_i) = 0, i \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι το f είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν. Από το σχόλιο μετά το Θεώρημα 5.9, η βάση $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι κανονικοποιημένη και ικανοποιεί την συνθήκη της υπόθεσης. Θεωρούμε

τα σύνολα $B = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ και $B_n = \{x \in B : q_n(x^2) = 0\}, n \in \mathbb{N}$. Επειδή η

$(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία ημινορμών, έχουμε, για $n \in \mathbb{N}$ και

$x \in B_{n+1}$, ότι $0 \leq q_n(x^2) \leq q_{n+1}(x^2) = 0$, δηλαδή $q_n(x^2) = 0$ κι άρα $B_n \supseteq B_{n+1}$.

Θέτουμε $H_1 = \{x \in B : q_1(x^2) \neq 0\}$ και $H_n = B_{n-1} - B_n, n \in \mathbb{N} - \{1\}$, οπότε

$H_n \cap B_n = \emptyset$. Επομένως $q_n(x^2) \neq 0$ για κάθε $x \in H_n, n \in \mathbb{N}$ (*). Ακόμη

για $m > n$ έχουμε $H_m \subset B_{m-1} \subset B_n$ κι επομένως $q_n(x^2) = 0$ για κάθε

$x \in H_m$ με $m > n$ (**) (αφού $0 \leq q_n(x^2) \leq q_m(x^2) = 0$). Έστω $H_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$.

Αν $x \in H_0 \Leftrightarrow x \in B_n, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow q_n(x^2) = 0, n \in \mathbb{N}$. Επειδή η A είναι

Hausdorff (ως τοπολογικός διανυσματικός χώρος) έχουμε $x^2 = 0$.

Επίσης από τον τρόπο που ορίσαμε τα $H_i, i \in \mathbb{N}$ είναι ανά δύο ξένα και

$\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i = B$. Θέτουμε $H_j = (x_{jm})_{m \in \mathbb{N}}, j \in \mathbb{N}$. Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, μπορούμε

να τακτοποιήσουμε τα $x_{jm}, m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $jm \geq jn \Leftrightarrow m > n$. Επίσης

ισχύει ότι, αν $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ τότε $x^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 x_i^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{jm}^2 x_{jm}^2$. Αν

k είναι ένας θετικός ακέραιος ορίζουμε $a_i = 1$ αν $x_i \in H_k$ και $a_i = 0$ αν

$x_i \notin H_k$. Ισχύει $|a_i| \leq 1$ για $i \in \mathbb{N}$ και άρα, από την υπόθεση, έχουμε

$\sum_{x_i \in H_k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i \in A$. Επειδή

$$km > kn \Leftrightarrow m > n \text{ και } \sum_{x_i \in H_k} \alpha_i x_i = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{km} x_{km} \in A,$$

έχουμε, από την ορθογωνιότητα των x_i , ότι

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{km} x_{km} \right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{km}^2 x_{km}^2 \in A.$$

Θέτουμε $y_k = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{km}^2 x_{km}^2, k \in \mathbb{N}$. Από την (**), παρατηρούμε ότι αν

$k > j$, τότε

$$q_j(x_{km}^2) = 0 \text{ για κάθε } x_{km} \in H_k$$

και επομένως $q_j\left(\sum_{m=1}^{p_k} x_{km}^2\right) = 0, k > j$. Άρα, $\lim_{p_k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{p_k} \alpha_{km}^2 x_{km}^2 = y_k$ από

το οποίο έχουμε $q_j(y_k) = 0, j < k$. Από την Πρόταση 5.3 έπεται ότι για

κάθε ακολουθία μιγαδικών $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k y_k \in A.$$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{km}^2 x_{km}^2 \in A$. Επειδή

$y_k = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{km}^2 x_{km}^2, k \in \mathbb{N}$, για κάθε ημινόρμα q_j , έχουμε

$$\lim_{p_k \rightarrow \infty} q_j \left(y_k - \sum_{m=1}^{p_k} \alpha_{km}^2 x_{km}^2 \right) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} q_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k - \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 x_i^2 \right) &= q_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{km}^2 x_{km}^2 - \sum_{m=1}^{p_k} \alpha_{km}^2 x_{km}^2 \right) \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^j q_j \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{km}^2 x_{km}^2 - \sum_{m=1}^{p_k} \alpha_{km}^2 x_{km}^2 \right) \end{aligned}$$

επειδή $q_j(x_{km}^2) = 0$ για $j < k$ από την (**). Το p χωρίζεται σε p_k , $k \in \mathbb{N}$

και $p \rightarrow \infty$ υπονοεί ότι $p_k \rightarrow \infty$. Επομένως,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} q_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k - \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 x_i^2 \right) = 0 \quad \text{για } j < k.$$

Επειδή η A είναι Hausdorff, ισχύει ότι

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 x_i^2 = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{km}^2 x_{km}^2.$$

Από το ότι $y_k = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{km}^2 x_{km}^2$ έπεται

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q_k(\alpha_{km}^2 x_{km}^2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |\alpha_{km}|^2 q_{km}(x_{km}^2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |\alpha_{km}|^2 = 0$$

για κάθε k , αφού $q_k(x_{km}^2) \neq 0$ από την (*). Επειδή $x_i x_j = 0, i \neq j$ έχουμε

$y_i y_j = 0, i \neq j$. Θα δείξουμε ότι $f(y_i) = 0, i \in \mathbb{N}$ με εις άτοπον απαγωγή.

Έστω ότι υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ με $f(y_i) \neq 0$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $f(y_i) = 1$. Αφού το f είναι γραμμικό και

πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές έχουμε $f(y_i^2 - y_i^3) = f(z_i) = 0$ όπου

$$z_i = y_i^2 - y_i^3 = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{im}^2 x_{im}^2 \right)^2 - \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{im}^2 x_{im}^2 \right)^3 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{im}^4 x_{im}^4 - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{im}^6 x_{im}^6.$$

Από το Πρόρισμα 5.11 ισχύει $x_{im}^4 = x_{im}^6$ κι επομένως $z_i = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{im}^4 - \alpha_{im}^6) x_{im}^4$.

Επειδή $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{im}^2 = 0$, για αρκετά μεγάλο m μπορούμε να έχουμε

$$|\alpha_{im}^2| < \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \text{επομένως} \quad \left| \frac{\alpha_{im}^6}{\alpha_{im}^4 - \alpha_{im}^6} \right| \leq 1, \quad \text{με την προϋπόθεση ότι } \alpha_{im} \neq 0 \quad (\text{το}$$

γεγονός ότι $f(y_i) = 1$ μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $m \in \mathbb{N}$ με

$\alpha_{im} \neq 0$). Επειδή $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$, από την υπόθεση (β), έχουμε

$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{im} x_{im} \in A$ και $\sum_{m=1, \alpha_{im} \neq 0}^{\infty} \frac{\alpha_{im}^6}{\alpha_{im}^4 - \alpha_{im}^6} \alpha_{im} x_{im} \in A$. Από την υπόθεση (α)

έχουμε

$$z_i' = \left(\sum_{m=1, \alpha_{im} \neq 0}^{\infty} \frac{\alpha_{im}^6}{\alpha_{im}^4 - \alpha_{im}^6} \alpha_{im} x_{im} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{im} x_{im} \right) = \sum_{m=1, \alpha_{im} \neq 0}^{\infty} \frac{\alpha_{im}^8}{\alpha_{im}^4 - \alpha_{im}^6} x_{im}^2 \in A.$$

$$\text{Τότε } z_i z_i' = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{im}^8 x_{im}^6 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{im}^8 x_{im}^8 = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{im}^2 x_{im}^2 \right)^4 = y_i^4$$

(βλ. Πρόσμμα 5.12). Δηλαδή $0 = f(z_i) f(z_i') = f(z_i z_i') = [f(y_i)]^4 = 1$ το

οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς $f(y_i) = 0, i \in \mathbb{N}$ και άπο το Λήμμα 5.8 για την

$(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ έχουμε $0 = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i\right) = f(x^2) = [f(x)]^2 \Leftrightarrow f(x) = 0$ για τυχαίο

$x \in A$, που είναι το ζητούμενο. $\square$

Σχόλιο Μία βάση η οποία ικανοποιεί την υπόθεση του Θεωρήματος 5.12 καλείται βάση Schauder. Κάθε βάση ενός χώρου Fréchet είναι βάση Schauder. Συνεπώς, από το Θεώρημα 5.13, προκύπτει το ακόλουθο:

Θεώρημα 5.13 Κάθε Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα με αλγεβρικά ορθογώνια βάση, είναι συναρτησιακά συνεχής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ Η ΕΙΚΑΣΙΑ MICHAEL

Στο παρόν κεφάλαιο δίνουμε μία διαφορετική προσέγγιση στην εικασία Michael. Συγκεκριμένα, το Θεώρημα 6.6 αναφέρεται σε μία συνθήκη, που αν ικανοποιείται, οδηγεί στην συναρτησιακή συνέχεια των Fréchet τοπικά m -κυρτών άλγεβρων. Ακόμη, θα δοθεί παράδειγμα μη μεταθετικής Fréchet τοπικά m -κυρτής άλγεβρας για την οποία θα δείξουμε ότι αν μία τυχούσα Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα δεν είναι συναρτησιακά συνεχής, το ίδιο θα ισχύει και για την αρχική. (βλ. [9])

Συμβολίζουμε με Σ την άλγεβρα των τυπικών δυναμοσειρών με άπειρες, μη μεταθετικές μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ με μιγαδικούς συντελεστές. Η άλγεβρα Σ είναι εφοδιασμένη με το τυπικό γινόμενο σειρών. Αν $f \in \Sigma$ τότε $f = \sum_{(i) \in \Lambda} \lambda_{(i)} x^{(i)}$ όπου Λ είναι το σύνολο όλων

των πεπερασμένων υποσυνόλων $(i) = (i_1, \dots, i_k)$, των φυσικών αριθμών. Επίσης $x^{(i)} = x_{i_1} \dots x_{i_k}$ και $\|(i)\| = k$ για κάθε $(i) \in \Lambda$. Συμβολίζουμε το κενό σύνολο με (0) και ορίζουμε $\|(0)\| = 0$ έτσι ώστε $e = x^{(0)}$ να είναι η μονάδα της άλγεβρας Σ . Επίσης θέτουμε

$$\mathcal{E} = \{f \in \Sigma : p_m(f) < +\infty, m \in \mathbb{N}\} \quad (*)$$

όπου $p_m(f) = \sum_{(i) \in \Lambda} |\lambda_{(i)}| m^{\|(i)\|}$, $m \in \mathbb{N}$. Η $(\mathcal{E}, (p_m)_{m \in \mathbb{N}})$ είναι Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα.

Πρόταση 6.1 Έστω $(E, (q_m)_{m \in \mathbb{N}})$ Fréchet τοπικά κυρτός χώρος. Ένας χαρακτήρας $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής εάν και μόνο εάν

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f(a_n)\| < +\infty$$

όπου $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στοιχείων του E .

Πρόταση 6.2 Αν μία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα A δεν είναι συναρτησιακά συνεχής, το ίδιο θα ισχύει και για την άλγεβρα $(\mathcal{E}, (p_m)_{m \in \mathbb{N}})$ (Βλ. (*))

Απόδειξη Έστω $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$ μη συνεχής χαρακτήρας της A . Από την πρόταση 6.1, υπάρχει φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων της A με

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\chi(a_n)\| = +\infty$$

Υποθέτουμε ότι η A είναι μοναδιαία (διαφορετικά, θεωρούμε την μοναδοποίηση $A \oplus \mathbb{C}e$ της A). Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi : \mathcal{E} \rightarrow A \text{ με } \phi\left(\sum_{(i) \in \Lambda} \lambda_{(i)} x^{(i)}\right) = \sum_{(i) \in \Lambda} \lambda_{(i)} a^{(i)}$$

όπου $a^{(0)} = e, a^{(i)} = a_{i_1} \dots a_{i_k}$. Η ϕ είναι ένας συνεχής ομομορφισμός αλγεβρών. Θέτουμε $y = \chi \circ \phi$. Τότε

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |y(x_n)| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |\chi(a_n)| = +\infty$$

Επειδή $p_m(x_n) = m$ με $m, n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στην $\mathbb{E}$ και η y δεν είναι συνεχής. $\square$

Στη συνέχεια αναφερόμαστε σε επιπλέον ορολογία και αποτελέσματα χρήσιμα στην απόδειξη των βασικών Θεωρημάτων 6.5 και 6.6.

Έστω $H(U, \mathbb{C}^q)$ το σύνολο των ολόμορφων απεικονίσεων $f: U \rightarrow \mathbb{C}^q$ όπου U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}^p$, δηλαδή $f = (f_1, \dots, f_q)$ με $f_i, i = 1, 2, \dots, q$ ολόμορφες στο U .

Αν $g \in H(\mathbb{C}^p, \mathbb{C})$, η g θα είναι αναλυτική και συνεπώς

$$g(z_1, \dots, z_p) = \sum_{i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_{i_1, \dots, i_p} z_1^{i_1} \dots z_p^{i_p}$$

όπου $a_{i_1, \dots, i_p} \in \mathbb{C}$ και $\sum_{i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |a_{i_1, \dots, i_p}| R^{i_1 + \dots + i_p} < +\infty$ για κάθε $R > 0$.

Επίσης, αν A μοναδιαία Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, η

$$\sum_{i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_{i_1, \dots, i_p} a_1^{i_1} \dots a_p^{i_p}$$

είναι συγκλίνουσα στην A , για κάθε οικογένεια $(a_1, \dots, a_p)$ p στοιχείων της. Με $g(a_1, \dots, a_p)$ θα εννοούμε το άθροισμα της σειράς. Επίσης αν

η A είναι μεταθετική και B είναι η κλειστή μοναδιαία υπάλγεβρα της που παράγεται από τα $(a_1, \dots, a_p)$, έχουμε ότι ο περιορισμός ενός χαρακτήρα χ της A , στη B , είναι συνεχής, έτσι ώστε

$$\chi(f(a_1, \dots, a_p)) = f(\chi(a_1), \dots, \chi(a_p))$$

για κάθε $f \in H(\mathbb{C}^p, \mathbb{C})$ και για κάθε οικογένεια $(a_1, \dots, a_p)$ p στοιχείων της A .

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μη μεταθετικές άλγεβρες τυπικών δυναμοσειρών, για να εξετάσουμε και την περίπτωση μίας μη μεταθετικής άλγεβρας A .

Σταθεροποιούμε $p \in \mathbb{N}$ και συμβολίζουμε με Λ_p , το σύνολο όλων των πεπερασμένων οικογενειών $(i) = (i_1, \dots, i_k)$ από το σύνολο $\{1, \dots, p\}$. Θέτουμε, (0) την κενή οικογένεια και ορίζουμε $|(0)| = 0$, $|(i_1, \dots, i_k)| = k$.

Συμβολίζουμε με Σ_p την άλγεβρα των τυπικών δυναμοσειρών με p μη μεταθετικές μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_p$, με μιγαδικούς συντελεστές. Η άλγεβρα Σ_p είναι εφοδιασμένη με το τυπικό γινόμενο σειρών. Αν $f \in \Sigma$ τότε $f = \sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} x^{(i)}$ όπου $x^{(i)} = x_{i_1} \dots x_{i_k}$, $(i) \in \Lambda_p$ και $\lambda_{(i)} \in \mathbb{C}$. Θέτουμε

$$\mathcal{E}_p = \{f \in \Sigma_p : p_m(f) < +\infty, m \in \mathbb{N}\}$$

όπου $p_m(f) = \sum_{(i) \in \Lambda_p} |\lambda_{(i)}| m^{|(i)|}$, $m \in \mathbb{N}$. Η $(\mathcal{E}_p, (p_m)_{m \in \mathbb{N}})$ είναι μία μοναδιαία, Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και κλειστή υπάλγεβρα της $(\mathcal{E}, (p_m)_{m \in \mathbb{N}})$.

Πρόταση 6.3 Οι χαρακτήρες χ των Fréchet τοπικά m -κυρτών αλγεβρών $(\mathcal{E}_p, (p_m)_{m \in \mathbb{N}})$, $p \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς απεικονίσεις και ορίζονται ως εξής

$$\chi(f) = \chi\left(\sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} x^{(i)}\right) = \sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} \Delta^{(i)}$$

όπου $\Delta^{(i)} = \chi(x^{(i)}) = \chi(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = \chi(x_{i_1}) \dots \chi(x_{i_k})$, $\Delta^{(0)} = \chi(x^{(0)}) = \chi(e) = 1$ για κάθε $(i) = (i_1, \dots, i_k) \in \Lambda_p$.

Απόδειξη Θεωρούμε έναν χαρακτήρα χ της $\mathcal{E}_p$ για κάποιο $p \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} \Delta^{(i)}$ συγκλίνει στο $\mathbb{C}$, για κάθε $f \in \mathcal{E}_p$. Έτσι, συμβολίζοντας με $\phi(f)$ το άθροισμά της, έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\phi : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathbb{C} \text{ με } f \rightarrow \phi(f)$$

είναι συνεχής χαρακτήρας της $\mathcal{E}_p$. Με επαγωγή στο k μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε μονώνυμο $x^{(i)} = x_{i_1} \dots x_{i_k}$ ισχύει

$$x^{(i)} = (x_{i_1} - \chi(x_{i_1})e)y_{(i),1} + \dots + (x_{i_k} - \chi(x_{i_k})e)y_{(i),k} + \phi(x^{(i)})e$$

όπου $y_{(i),j} \in \mathcal{E}_p$ και

$$p_m(y_{(i),j}) \leq |\chi(x_{i_1}) \dots \chi(x_{i_k})| m^{k-j} \text{ με } 1 \leq j \leq k, m \geq 1.$$

Έστω $\rho = 1 + \max_{1 \leq i \leq p} |\chi(x_i)|$. Τότε από την τελευταία σχέση για $m \geq \rho$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k p_m(y_{(i),j}) &\leq \sum_{j=1}^k |\chi(x_{i_1}) \dots \chi(x_{i_k})| m^{k-j} = |\chi(x_{i_1}) \dots \chi(x_{i_k})| \sum_{j=1}^k m^{k-j} \leq \\ &\leq (\max_{1 \leq i \leq p} |\chi(x_i)|) \sum_{j=1}^k m^{k-j} = (\rho - 1) \sum_{j=1}^k m^{k-j} \leq (m - 1) \sum_{j=1}^k m^{k-j} = \\ &= (m - 1)(m^{k-1} + m^{k-2} + \dots + 1) = m^k - 1 \leq m^k \end{aligned}$$

Δηλαδή, $\sum_{j=1}^k p_m(y_{(i),j}) \leq m^k$ για $m \geq \rho$.

Έστω $f = \sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} x^{(i)} \in \mathcal{E}_p$. Για $(i) \in \Lambda_p$ και $m \geq \rho$ έχουμε

$$x^{(i)} = (x_1 - \chi(x_1)e)z_{(i),1} + \dots + (x_\rho - \chi(x_\rho)e)z_{(i),\rho} + \phi(x^{(i)})e$$

όπου $z_{(i),j} \in \mathcal{E}_p$ και $p_m(z_{(i),j}) \leq m^{|(i)|}$, $j = 1, \dots, \rho$.

Συνεπώς, λόγω της τελευταίας σχέσεως, για $j = 1, \dots, \rho$ η σειρά

$$\sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} z_{(i),j} \text{ συγκλίνει απολύτως (δηλαδή } \sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} p_m(z_{(i),j}) < \infty) \text{ κι}$$

άρα συγκλίνει σε κάποιο $f_j \in \mathcal{E}_p$ και άρα έχουμε

$$f = \sum_{j=1}^{\rho} (x_j - \chi(x_j)e)f_j + \phi(f)e$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \chi(f) &= \chi\left(\sum_{j=1}^{\rho} (x_j - \chi(x_j)e)f_j + \phi(f)e\right) \\ &= \chi\left(\sum_{j=1}^{\rho} (x_j - \chi(x_j)e)f_j\right) + \phi(f)\chi(e) = \phi(f), f \in \mathcal{E}_p. \end{aligned}$$

Άρα η χ συνεχής, αφού η ϕ είναι συνεχής. $\square$

Πόρισμα 6.4 Έστω A μοναδιαία, Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα.

Τότε

$$\chi(f(a_1, \dots, a_p)) = f(\chi(a_1), \dots, \chi(a_p))$$

για κάθε $f \in H(\mathbb{C}^p, \mathbb{C})$, για κάθε πεπερασμένη οικογένεια $(a_1, \dots, a_p)$ από p στοιχεία της A και για κάθε χαρακτήρα χ , συνεχή ή όχι, επί της A .

Απόδειξη Έχουμε $f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N}} \alpha_{i_1, \dots, i_p} z_1^{i_1} \dots z_p^{i_p}$ η αναλυτική έκφραση της f . Θέτουμε

$$\bar{f} = \sum_{i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N}} \alpha_{i_1, \dots, i_p} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p}$$

Τότε $\bar{f} \in \mathcal{E}_p$. Σταθεροποιούμε $a_1, \dots, a_p \in A$ και για κάθε $(i) = (i_1, \dots, i_k) \in \Lambda_p$, θέτουμε $a^{(i)} = a_{i_1} \dots a_{i_k}$. Η απεικόνιση

$$y: \mathcal{E}_p \rightarrow A \text{ με } y\left(\sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} x^{(i)}\right) = \sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} a^{(i)}$$

είναι ένας συνεχής ομομορφισμός αλγεβρών. Από την Πρόταση 6.3 έχουμε

$$(\chi \circ y)\left(\sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} x^{(i)}\right) = \sum_{(i) \in \Lambda_p} \lambda_{(i)} \Delta^{(i)}$$

όπου $\Delta^{(i)} = (\chi \circ y)(x_{i_1}) \dots (\chi \circ y)(x_{i_k})$, για κάθε $(i) = (i_1, \dots, i_k) \in \Lambda_p$. Τελικά

$$\chi(f(a_1, \dots, a_p)) = \chi\left(y\left(\bar{f}\right)\right) = \sum_{i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N}} \alpha_{i_1, \dots, i_p} \chi(a_1)^{i_1} \dots \chi(a_p)^{i_p} = f(\chi(a_1), \dots, \chi(a_p)). \square$$

Έστω $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αριθμήσιμη οικογένεια χώρων Fréchet, και οικογένεια απεικονίσεων $\{\Theta_n: E_n \rightarrow E_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$. Τότε

$$\varprojlim (E_n, \Theta_n) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n : x_n = \Theta_n(x_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$$

Επίσης, έστω η απεικόνιση προβολή $\pi_1: \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n \rightarrow E_1$ με $\pi_1((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x_1$.

Από το Θεώρημα Mittag-Leffler έχουμε ότι αν

(α) Θ_n συνεχής για $n \in \mathbb{N}$,

(β) $\Theta_n(E_{n+1})$ είναι πυκνό στο E_n , για $n \in \mathbb{N}$,

τότε $\pi_1\left(\varprojlim (E_n, \Theta_n)\right)$ είναι πυκνό στο E_1 (βλ. Θεώρημα 2.4 [5]).

Θεώρημα 6.5 Έστω, μη συναρτησιακά συνεχής, Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα A . Τότε $\varprojlim (\mathcal{C}^{p_n}, F_n) \neq \emptyset$, για κάθε προβολικό σύστημα $(\mathcal{C}^{p_n}, F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $F_n : \mathcal{C}^{p_{n+1}} \rightarrow \mathcal{C}^{p_n}$ ακέραια, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι η A είναι μοναδιαία. Αν χ μη συνεχής χαρακτήρας της A , θέτουμε $M = \ker \chi$ και $\chi_p(a) = (\chi(a_1), \dots, \chi(a_p))$ για $a = (a_1, \dots, a_p) \in A^p$. Επίσης, θέτουμε

$$q_1 = 0 \text{ και } q_n = p_1 + \dots + p_{n-1}, n \in \mathbb{N} - \{1\}.$$

Θέτουμε $E_n \equiv A^{p_n} \times M^{q_n}$, όπου το M είναι εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία. Ορίζουμε για $n \in \mathbb{N}$ την απεικόνιση

$$\Theta_n : E_{n+1} \rightarrow E_n \text{ με } \Theta_n(a, x_1, \dots, x_{q_{n+1}}) = (F_n(a) + (x_{q_{n+1}}, \dots, x_{q_{n+1}}), x_1, \dots, x_{q_n}).$$

Η τελευταία απεικόνιση είναι καλά ορισμένη αφού $q_n = q_{n+1} + p_n$. Επειδή το $M^{q_{n+1}}$ είναι εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία και η $F_n : A^{p_{n+1}} \rightarrow A^{p_n}$ είναι συνεχής, έχουμε ότι η Θ_n είναι συνεχής. Όμως το M^{p_n} είναι πυκνό στην A^{p_n} , έτσι ώστε $\Theta_n(\{a\} \times M^{q_{n+1}})$ πυκνό στο E_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a \in A^{p_{n+1}}$. Συνεπώς από το Θεώρημα Mittag-Leffler έχουμε ότι $\varprojlim (E_n, \Theta_n) \neq \emptyset$. Έστω $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim (E_n, \Theta_n)$. Έχουμε ότι

$u_n = (a_n, V_n)$ με $a_n \in A^{p_n}$ και $V_n \in M^{q_n}$. Έπεται από τον ορισμό του Θ_n ότι, $a_n - F_n(a_{n+1}) \in M^{p_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\chi_{p_n}(a_n) = \chi_{p_n}(F_n(a_{n+1}))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Πόρισμα 6.4, έχουμε $\chi_{p_n}(F_n(a_{n+1})) = F_n(\chi_{p_{n+1}}(a_{n+1}))$, κι αν θέσουμε $z_n = \chi_{p_{n+1}}(a_{n+1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim (\mathcal{C}^{p_n}, F_n)$.

Δηλαδή $\varprojlim (\mathcal{C}^{p_n}, F_n) \neq \emptyset$. $\square$

Θεώρημα 6.6 Έστω ότι για κάποιο $p \in \mathbb{N}$, υπάρχει ακολουθία $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από ακέραιες απεικονίσεις $F_n : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$, με

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_1 \circ \dots \circ F_n) (\mathbb{C}^p) = \emptyset$$

Τότε, κάθε Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα είναι συναρτησιακά συνεχής.

Απόδειξη Θέτουμε $p_n = p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\pi_1(\varprojlim (\mathbb{C}^{p_n}, F_n)) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_1 \circ \dots \circ F_n) (\mathbb{C}^p) = \emptyset.$$

Συνεπώς από το Θεώρημα 6.5 κάθε Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα είναι συναρτησιακά συνεχής. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Η ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΟΥ DO SIN SYA

ΚΑΙ Η ΕΙΚΑΣΙΑ MICHAEL

Στα ακόλουθα αποτελέσματα εφαρμόζεται η τεχνική Do Sin Sya η οποία οδηγεί στον ορισμό κατάλληλης βασικής ακολουθίας της οποίας (λόγω της πληρότητας των τοπολογικών αλγεβρών που θεωρούμε) η σύγκλιση οδηγεί στο να είναι τα γραμμικά πολλαπλασιαστικά συναρτησοειδή συνεχή. Η εν λόγω τεχνική είναι επομένως ιδιαίτερης σημασίας για την εικασία Michael (βλ. [12, 17, 20]).

Πρόταση 7.1 Κάθε πραγματική, μοναδιαία, μεταθετική, Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα είναι συναρτησιακά συνεχής.

Απόδειξη Έστω A μία άλγεβρα που ικανοποιεί την υπόθεση και f μη φραγμένος χαρακτήρας της. Τότε, υπάρχει φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων της A τέτοια ώστε η $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μη φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι

$$f(x_n) \geq n \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{n}x_n\right) \geq 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n} x_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$, έχουμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι

φραγμένη ακολουθία στοιχείων της A με

$$f(a_n) \geq 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Εφαρμόζουμε την τεχνική Do Sin Sya και έχουμε ότι υπάρχει

υπακολουθία $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε η ακολουθία $(B_k^{(j)})_{k \in \mathbb{N}}$ με

$$B_k^{(j)} = b_j + \left(b_{j+1} + \left(\dots + (b_{k-1} + b_k^2)^2 \dots \right)^2 \right)^2, \quad 1 \leq j \leq k-1$$

είναι βασική. Θέτουμε $c_j = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k^{(j)}$. Τότε $c_j = b_j + c_{j+1}^2$, ενώ επίσης, ισχύει $f(B_k^{(j)}) \geq 0$, για κάθε $j, k \in \mathbb{N}$. Ακόμη $f(c_j) \geq 0$ για $f(c_{j+1})$ πραγματικό αριθμό. Τότε όμως $f(c_1) \geq p$, για κάθε $p \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Ορισμός 7.2 Μία τοπολογική άλγεβρα A καλείται *ακολουθιακά πλήρης* αν κάθε ακολουθία Cauchy του υποκείμενου τοπολογικού διανυσματικού χώρου συγκλίνει.

Πρόταση 7.3 Έστω $(A, (p_a)_{a \in I})$ μία πραγματική, μεταθετική, ακολουθιακά πλήρης τοπικά m -κυρτή άλγεβρα και $(B, \| \cdot \|)$ μία πραγματική, μεταθετική άλγεβρα Banach τέτοια ώστε, για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ έτσι ώστε $\|x_n\| \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ακολουθία $f_n : B \rightarrow R, n \in \mathbb{N}$ γραμμικών, πολλαπλασιαστικών συναρτησοειδών η οποία ικανοποιεί την συνθήκη

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x_n)| \geq \varepsilon.$$

Τότε, κάθε γραμμικός τελεστής $T : A \rightarrow B$ με

$$T(x^2) = [T(x)]^2, \quad x \in A$$

είναι φραγμένος.

Απόδειξη Αν ο T δεν είναι φραγμένος, τότε υπάρχει φραγμένη ακολουθία

$$(x_n)_{n \in N} \subseteq A \text{ έτσι ώστε } \|T(x_n)\| \geq n, \text{ για κάθε } n \in N.$$

Επειδή, $\left\| \frac{T(x_n)}{n} \right\| \geq 1$, για κάθε $n \in N$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ακολουθία

$f_n : B \rightarrow R, n \in N$ γραμμικών, πολλαπλασιαστικών συναρτησοειδών η οποία ικανοποιεί την συνθήκη $\inf_{n \in N} \|f_n(y_n)\| \geq \varepsilon$, όπου

$$y_n = \frac{T(x_n)}{n} = T\left(\frac{x_n}{n}\right), \text{ για κάθε } n \in N.$$

Έστω $z_n = \left(\frac{cy_n}{\varepsilon}\right)^2$, όπου $c > 1$ σταθερο. Τότε,

$$f_n(z_n) \geq c^2 > 1 \text{ και } f_m(z_n) = \left[f_m\left(\frac{cy_n}{\varepsilon}\right) \right]^2 \geq 0, \text{ για κάθε } m, n \in N.$$

Θέτουμε, $a_n = \left(\frac{cx_n}{\varepsilon}\right)^2, n \in N$ (η $(a_n)_{n \in N} \subseteq A$ είναι φραγμένη) και

$z_n = T\left(\frac{a_n}{n^2}\right), n \in N$. Επομένως, για κάθε $a \in I$, υπάρχει σταθερά c_a με

$$p_a(a_n) < c_a, n \in N.$$

Ορίζουμε, $I_k = \{a \in I : p_a(a_n) < k, n \in N\}, k \in N$, τότε η $\{I_k\}_{k \in N}$ είναι αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του I με $I = \bigcup_{k \in N} I_k$. Από την τεχνική

Do Sin Sya ορίζουμε επαγωγικά μία υπακολουθία $(b_k)_{k \in N}$ της $\left(\frac{a_n}{n^2}\right)_{n \in N}$ ως εξής: Έστω $b_1 = a_1$, κι αν υποθέσουμε ότι τα $b_1, \dots, b_{k-1}$ έχουν

οριστεί, τότε επιλέγουμε $b_k = \frac{a_{n_k}}{n_k^2}$, για αρκετά μεγάλο k τέτοιο ώστε

$$(*) \quad p_a(B_k^{(j)} - B_{k-1}^{(j)}) \leq \frac{1}{2^k}, \text{ για κάθε } a \in I_k \text{ και } 1 \leq j \leq k-1,$$

όπου $B_k^{(j)} = b_j + (B_{j+1} + (\dots + (b_{k-1} + b_k^2) \dots)^2)^2$. Εφόσον, οι ημινόρμες είναι υποπολλαπλασιαστικές έχουμε

$$p_a(B_k^{(j)} - B_{k-1}^{(j)}) \leq \{p_a(b_j) + (p_a(b_{j+1}) + (\dots + (p_a(b_{k-1}) + p_a(b_k^2)^2 \dots)^2)^2\} - \\ - \{p_a(b_j) + (p_a(b_{j+1}) + (\dots + (p_a(b_{k-2}) + p_a(b_{k-1})^2)^2 \dots)^2\},$$

και επειδή $p_a(a_i) \leq k$, για κάθε $a \in I_k$, και για αρκετά μεγάλο m ,

$$p_a(b_m) = p_a\left(\frac{n_m}{n_m^2}\right) \leq \frac{k}{n_m^2}, \text{ για κάθε } a \in I_k, \quad m = j, j+1, \dots. \text{ Δηλαδή το } p_a(b_k)$$

είναι επαρκώς μικρό, ώστε η (*) να ισχύει.

Επιπλέον, για κάθε $a \in I$, $a \in I_k$, για κάποιο k , κι αν $p > q \geq k$, $a \in I_{k+1}, \dots, I_p$. Από την (*) έχουμε,

$$p_a(B_p^{(j)} - B_q^{(j)}) = p_a\left(\sum_{k=q+1}^p (B_k^{(j)} - B_{k-1}^{(j)})\right) \leq \sum_{k=q+1}^p p_a(B_k^{(j)} - B_{k-1}^{(j)}) \leq \sum_{k=q+1}^p \frac{1}{2^k},$$

για κάθε $j: 1 \leq j \leq q-1$. Συνεπώς, για κάθε $j \in N$, το $\{B_k^{(j)}\}_{k>j}$ είναι

ακολουθία Cauchy. Έστω, $C_j = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k^{(j)}$. Από την κατασκευή έχουμε,

$$C_1 = b_1 + C_2^2, \dots, C_j = b_j + C_{j+1}^2.$$

Επειδή, $b_j = \frac{a_{n_j}}{n_j^2}$, έχουμε $f_{n_j}(T(b_j)) = f_{n_j}\left(T\left(\frac{a_{n_j}}{n_j^2}\right)\right) = f_{n_j}(z_{n_j}) \geq c^2$,

$$f_{n_j}(T(C_{j+1}^2)) = [f_{n_j}(T(C_{j+1}))]^2 \geq 0 \quad \text{και} \quad f_{n_j}(T(b_i)) = f_{n_j}(z_{n_i}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, j-1.$$

Συνεπώς επαγωγικά έχουμε,

$$f_{n_j}(T(C_1)) = f_{n_j}(T(b_1 + (b_2 + (\dots + (b_j + C_{j+1}^2)^2)^2))) = \\ = f_{n_j}(T(b_1)) + (f_{n_j}(T(b_2)) + (\dots + (f_{n_j}(T(b_j)) + f_{n_j}(T(C_{j+1}^2))^2)^2) \geq c^{2j}, \quad j \in N.$$

Άτοπο, αφού $|f_{n_j}(T(C_1))| \leq \|T(C_1)\| < \infty$, για κάθε $j \in N$. $\square$

Σχετικά με το προηγούμενο θεώρημα, αν θεωρήσουμε ως άλγεβρα Banach, την άλγεβρα R των πραγματικών αριθμών καταλήγουμε στο ακόλουθο.

Θεώρημα 7.4 Αν A είναι μία ακολουθιακά πλήρης, μεταθετική τοπικά m -κυρτή άλγεβρα τότε κάθε γραμμικό, πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές $f : A \rightarrow R$ είναι φραγμένο.

Σχόλιο Αν A είναι μία άλγεβρα με ενέλιξη $*$, κάθε στοιχείο $x \in A$ παρίσταται μονοσήμαντα με τη μορφή $x = y + iz$. Πράγματι, αρκεί να

θεωρήσουμε $y = \frac{x + x^*}{2}, z = \frac{x - x^*}{2i}$. Τα $y, z \in H$ όπου,

$$H = \{x \in A : x = x^*\}.$$

Το H είναι το σύνολο των *ερμιτιανών* στοιχείων της άλγεβρας.

Θεώρημα 7.5 Αν A είναι μία μιγαδική, συμμετρική, ακολουθιακά πλήρης, μεταθετική τοπικά m -κυρτή άλγεβρα με συνεχή ενέλιξη, τότε κάθε γραμμικό, πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές είναι φραγμένο.

Απόδειξη Έστω f ένα γραμμικό, πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές ορισμένο στην A . Έχουμε, ότι $A = H \oplus iH$, όπου H τα ερμιτιανά στοιχεία της άλγεβρας. Ακόμη, η H είναι παραγματική υπάλγεβρα της A . Για κάθε φραγμένο σύνολο B στην A , έχουμε $B \subseteq B_H + iB'_H$, όπου B_H και B'_H είναι φραγμένα σύνολα στην H . Επειδή ο περιορισμός f_H παίρνει πραγματικές τιμές, τα $f(B_H), f(B'_H)$, από το Θεώρημα 7.4, είναι φραγμένα. Επομένως, το $f(B)$ είναι φραγμένο. $\square$

Πρόταση 7.6 Κάθε συμμετρική, μοναδιαία, μεταθετική Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα είναι συναρτησιακά συνεχής.

Απόδειξη Εφαρμόζοντας μία απόδειξη ανάλογη με αυτήν της Πρότασης 7.3 και καταλήγουμε στο $c_j = b_j + c_{j+1}^2$. Εδώ επιλέγουμε τα $B_k^{(j)}$, $k \in \mathbb{N}$ να είναι ερμιτιανά κι έτσι έχουμε $f(c_j) \geq 0$ για $f(c_{j+1})$ πραγματικό αριθμό. $\square$

Σχόλιο Στο προηγούμενο αποτέλεσμα, η υπόθεση της συνεχούς ενέλιξης δεν είναι επαρκής. Πράγματι, μία μεταθετική Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα A μπορεί να θεωρηθεί σαν κλειστό ιδεώδες μίας τέτοιας άλγεβρας με συνεχή ενέλιξη. Αρκεί να θεωρήσουμε την άλγεβρα $F = A \times A$ με την τοπολογία γινόμενο και τις ακόλουθες πράξεις

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ (x, y)(x', y') &= (xx', yy') \\ a(x, y) &= (\bar{a}x, ay) \\ (x, y)^* &= (y, x)\end{aligned}$$

για κάθε $(x, y), (x', y') \in F$, $a \in \mathbb{C}$.

Επιπλέον, κάθε χαρακτήρας στην προηγούμενη πρόταση είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή $f(x^*) = \bar{f}(x)$, για κάθε x . Εφαρμόζουμε την τεχνική Do Sin Sya και έτσι οδηγούμαστε στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.7 Κάθε ερμιτιανή, μοναδιαία, μεταθετική Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα είναι συναρτησιακά συνεχής.

Πρόταση 7.8 Κάθε μοναδιαία, μεταθετική, πεπερασμένα παραγόμενη Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, είναι συναρτησιακά συνεχής.

Απόδειξη Έστω f ένας χαρακτήρας της A και $u_1, \dots, u_n$ τα στοιχεία που την παράγουν. Αν ο f δεν είναι φραγμένος τότε, επίσης, δεν είναι φραγμένος και στην υπάλγεβρα της A ,

$$F = \mathcal{C}[u_1, \dots, u_n]$$

όπου η F είναι πυκνή στην A . Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $b_j, j \in \mathbb{N}$ (όπως στην απόδειξη της Πρότασης 7.3) ανήκουν στην F . Τότε όμως υπάρχει συνεχής χαρακτήρας g της A , με $f(B_k^{(j)}) = g(B_k^{(j)})$, για κάθε $k, j \in \mathbb{N}$ (βλ. [5]) από το οποίο έχουμε

$$g(c_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(B_k^{(j)}) \geq 0.$$

Τότε $g(c_1) \geq p$, για κάθε $p \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Πρόταση 7.9 Έστω A μία μοναδιαία, μεταθετική Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα, P_1 το σύνολο όλων των τετραγώνων στην A και P το σύνολο των πεπερασμένων αθροισμάτων στοιχείων του P_1 . Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει ένας κλειστός, κυρτός κώνος L τέτοιος ώστε $P_1 \subset L \subset P$. Τότε η άλγεβρα A είναι συναρτησιακά συνεχής.

Απόδειξη Από την συνθήκη $P_1 \subset L \subset P$ και την κυρτότητα του κώνου L , έχουμε ότι $L = P$. Επιπλέον, το L , σαν κλειστό σύνολο, περιέχει όλα τα όρια συγκλινουσών ακολουθιών των στοιχείων του. Έστω ότι υπάρχει χαρακτήρας f της A , μη φραγμένος. Τότε, μπορούμε να βρούμε φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε η $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ μη φραγμένη και μάλιστα $f(x_n) \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, η ακολουθία $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη μέσα στην L , ενώ η $(f(x_n^2))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μη φραγμένη. Έτσι, εφαρμόζουμε μία ανάλογη διαδικασία της τεχνικής Do Sin Sya και καταλήγουμε στον ισχύρισμο. $\square$

Σχόλιο Βασιζόμενοι στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, και αφαιρώντας την υπόθεση της μετρικοποιησιμότητας, μπορούμε να

αποδείξουμε ότι κάθε χαρακτήρας της άλγεβρας A είναι φραγμένος. Μία τέτοια άλγεβρα καλείται *συναρτησιακά φραγμένη*.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- [1] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1997.
- [2] Κ. Α. Σταθακόπουλος, *Πραγματική Ανάλυση*, Εκδόσεις Αίθρα, 1989.
- [3] Μ. Χαραλαμπίδου, *Εισαγωγή Στη Θεωρία Των Αλγεβρών Banach*, εκτύπωση Σ. Αθανασόπουλος – Σ. Παπαδάμης, Αθήνα 2000.
- [4] Μ. Χαραλαμπίδου, *Τοπολογικές Άλγεβρες, Αλφαβητάρι, Σημειώσεις*, Αθήνα 2009.

Ξενόγλωσση

- [5] R. Arens, *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. Journal 5 (1958).
- [6] V. A. Belfi – R. S. Doran, *Characterizations of C^* -Algebras. The Gelfand-Naimark Theorems*, Marcel – Dekker, New York, 1986.
- [7] D. Clayton, *A reduction of the continuous homomorphism problem for F -algebras*, Rocky Mountain J. Math. 5 (1975), 337-344.
- [8] H.G. Dales, S.R. Patel, C.J. Read, *Fréchet algebras of power series. Banach algebras 2009*, 123-158, Banach Center Publ., 91, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2010.
- [9] P.G. Dixon, J.R. Esterle, *Michael's problem and the Poincaré-Bieberbach phenomenon*, Bull. American Math. Soc., 15, 127-128, 1986.
- [10] Dixon P.G., Fremlin D.H., *A remark concerning multiplicative functionals on LMC algebras*, J. London Math. Soc. 5 (1972), 231-232.
- [11] M. Fragouloupoulou, *Topological algebras with involution*, North-Holland, 2005.
- [12] T. Husain, S.B. Ng, *Boundedness of multiplicative linear functionals*, Canad. Math. Bull. 17 (1974), 213-215.

- [13] T. Husain and J. Liang, *Multiplicative functionals on Fréchet algebras with bases*, Can. J. Math., 29 (1977), 270-276.
- [14] T. Husain, *Multiplicative Functionals on Topological Algebras*, Pitman Advanced Publ. Program, Boston, 1983.
- [15] A. Mallios, *Topological Algebras. Selected Topics*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [16] E. A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras*, Memoirs American Math. Soc., 11 (1952).
- [17] M. Oudadess, *The problem of E.A. Michael on m -convexity and the techniques of D.S. Sya*, Southeast Asian Bull. of Mathematics 29 (2005), 1113-1116.
- [18] R. Rolewicz: *Some remarks on radicals in commutative B_0 -algebras*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys. 15 (1967), 153-155.
- [19] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, MacMillan, New York, 1964.
- [20] Do-Sin Sya, *On semi-normed rings with involutions*, Ser. Math. 23, Izv. Acad. Nauk. SSSR, (1959) 509-528.
- [21] A. Wilansky, *Topics in Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

Πίνακας Συμβόλων

Ο αριθμός δίπλα σε κάθε σύμβολο υποδηλώνει τη σελίδα στην οποία το συναντούμε για πρώτη φορά.

$(A_a, (p_a)_{a \in I})$ 9

B_0 10

L^ω 12

π_a 13

$f_{a\beta}$ 14

$A = \varprojlim_{a \in I} (A_a, f_{a\beta}) = \varprojlim_{\alpha \in I} A_\alpha$ 15

A_e 20

A' 23

$\mathfrak{M}(A)$ 23

$\mathfrak{M}(A)^+$ 24

$Sp_A(x)$ 27

$R(A)$ 30

$C_0(\mathfrak{M}(A))$ 30

$(B, \|\cdot\|)$ 41

$L(B, K)$ 47

$L(b_1, \dots, b_n \mid B, K)$ 47

$\sigma(b_1, \dots, b_n \mid B, K)$ 48

$(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 56

$\mathcal{E}$ 70

$\mathcal{E}_p$ 87

Πίνακας Εννοιών

Fréchet τοπικά m -κυρτή άλγεβρα 6

Fréchet τοπολογική άλγεβρα 6

Fréchet χώρος 6

Lindelöf χώρος 31

A

ακολουθιακά πλήρης τοπολογική άλγεβρα 78

άλγεβρα Arens 12

αλγεβρικός κύλινδρος 3

άλγεβρα προβολικό όριο 15

άλγεβρα με ενέλιξη 23

ανάλυση Arens-Michael 18

αριστερά ψευδοαντιστρέψιμο στοιχείο 21

αριστερό ψευδοαντίστροφο 21

B

βάση 56

Δ

δεξιά ψευδοαντιστρέψιμο στοιχείο 21

δεξιό ψευδοαντίστροφο 21

δεξιό K -φάσμα 48

δεξιό κανονικό σύστημα 42

δεύτερης κατηγορίας χώρος 25

διαχωριστική άλγεβρα συναρτήσεων 30

E

εμφύτευση Arens-Michael 18

επεκτεταμένη ημινόρμα 52
επεκτεταμένο φάσμα άλγεβρας 24

Η

ημινόρμαρισμένη άλγεβρα 2
ημισυμπαγής χώρος 25

Θ

θεμελιώδες σύστημα περιοχών (θ.σ.π.) 5
θεμελιώδης οικογένεια ημινόρμων 10

Κ

K -φασματική εικόνα 47
κανονικοποιημένη βάση 64
κάτω ημισυνεχής ημινόρμα 53

Ο

ορθογώνια βάση 56

Π

προβολικό σύστημα αλγεβρών 14
πυκνό αντίστροφο σύστημα απεικονίσεων 38

Σ

σημειακό φάσμα 27
 σ -συμπαγής χώρος 31
συμμετρική άλγεβρα 23
συναρτησιακά συνεχής τοπολογική άλγεβρα 6
συν-πεπερασμένο ιδεώδες 45

T

τοπολογία της συμπαγούς σύγκλισης 8

τοπολογική άλγεβρα 5

Φ

φάσμα άλγεβρας 23

φραγμένο στοιχείο 51

φραγμένο συναρτησοειδές 52