



**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ**

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

**ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ, ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ
ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

**ΦΟΙΤΗΤΗΣ
ΣΩΦΡΟΝΗΣ ΒΑΜΒΑΚΟΥΣΗΣ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ
ΔΕΣΠΟΙΝΑ ΠΟΤΑΡΗ**

ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2014

**UNIVERSITY OF ATHENS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
DEPARTMENT OF PHILOSOPHY – PEDAGOGY AND PSYCHOLOGY
DEPARTMENT OF METHODOLOGY OF HISTORY
AND THEORY OF SCIENCE**

**UNIVERSITY OF CYPROUS
DEPARTMENT OF SCIENCE EDUCATION
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS**

MASTER THESIS

**UNDERSTANDING OF THE CONCEPT OF VARIABLE, UNKNOWN AND PARAMETER BY
STUDENTS IN THE THIRD GRADE OF HIGH SCHOOL.**

Vamvakousis P. Sofronis

Supervisor
Despina Potari

Athens, September 2014

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, στα πλαίσια του Διαπανεπιστημιακού – Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών “ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”, τον Σεπτέμβριο του 2014

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι:

Πότاره Δέσποινα (επιβλέπουσα καθηγήτρια)

Ζαχαριάδης Θεοδόσης

Θωμαΐδης Γιάννης

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια της διπλωματικής μου εργασίας, κυρία Δέσποινα Πόταρη για την καθοδήγηση σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης, καθώς επίσης για τις εύστοχες παρατηρήσεις και επισημάνσεις της, σε θέματα της Διδακτικής, κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο Μεταπτυχιακό τμήμα.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον κύριο Θεοδόση Ζαχαριάδη και τον κύριο Γιάννη Θωμαΐδη που μου έκαναν την τιμή να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης της εργασίας μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Τάσο Πατρώνη, επίκουρο καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών, φίλο μου από τα φοιτητικά χρόνια, για τις ατελείωτες συζητήσεις που έχουμε κάνει σχετικά με τα Μαθηματικά, την Παιδεία, την Εκπαίδευση, την Τέχνη και τα μεγάλα κοινωνικά θέματα. Ένα μεγάλο μέρος της αγάπης που έχω για τη διδακτική το οφείλω στον Τάσο.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου Πέτρο και Ελένη για την στήριξη και τη συμπαράσταση που έδειξαν στις δύσκολες στιγμές της ζωής μου.

Τέλος, θέλω να αφιερώσω αυτή την εργασία στην κόρη μου Έλενα, για την αγάπη που μου προσφέρει απλόχερα.

Αθήνα, Σεπτέμβρης 2014

Σωφρόνης Βαμβακούσης

“Χωρίς τη μαθηματική τάξη δεν στέκει τίποτε:
Ούτε ουρανός, ούτε ρόδο” ...
N. Βρεττάκος

Περίληψη

Στην εργασία μας επιχειρείται η μελέτη του επιπέδου κατανόησης των εννοιών της μεταβλητής, του αγνώστου και της παραμέτρου από μαθητές της Γ΄ γυμνασίου.

Για τον σκοπό της έρευνας κατασκευάστηκαν ερωτηματολόγια και δόθηκαν στους μαθητές στις αρχές του Μάη, στο τέλος ουσιαστικά της σχολικής χρονιάς.

Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, είναι μαθητές ενός Γυμνασίου της Ανατολικής Αττικής. Η διδασκαλία του μαθήματος διεξάγονταν σύμφωνα με το Επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα και τα σχολικά εγχειρίδια.

Κρίθηκε σκόπιμο κάποιοι μαθητές να δώσουν συνεντεύξεις για να διευκρινιστούν κάποιες ασάφειες καθώς και κάποιοι άλλοι, που οι απαντήσεις τους στα ερωτηματολόγια παρουσίαζαν ερευνητικό ενδιαφέρον, να ερωτηθούν περαιτέρω.

Οι απαντήσεις των μαθητών και οι συνεντεύξεις τους αποτέλεσαν το υλικό επεξεργασίας και εξαγωγής συμπερασμάτων.

Από απαντήσεις των μαθητών γραπτές ή προφορικές εξήχθησαν μάλλον αρνητικά συμπεράσματα όσον αφορά στην κατανόηση εκ μέρους των μαθητών των εννοιών της μεταβλητής, του αγνώστου και της παραμέτρου.

Οι μαθητές δυσκολεύονται να μεταφράσουν από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική, να σχηματίσουν τις εξισώσεις, τις ανισώσεις ή τα συστήματα που προκύπτουν από προβλήματα.

Οι μαθητές επιλύουν τις εξισώσεις ακολουθώντας οδηγίες και αλγορίθμους που διατυπώνονται στα βιβλία ή από καθηγητές.

Στο τέλος της εργασίας διατυπώνονται με λεπτομέρειες τα συμπεράσματα όσον αφορά στους μαθητές και προτάσεις-απόψεις διδασκαλίας όσον αφορά στους καθηγητές.

Λέξεις κλειδιά: μεταβλητή, παράμετρος, πρόβλημα, εξίσωση, αλγεβρική σκέψη

Abstract

This paper attempts to study the level of understanding the concept of variable, unknown and parameter by students in the third grade of high school.

For the purpose of this research, questionnaires were given to students at the beginning of May. The students who participated in the survey, are students of a high school in the East Attica. The teaching of the course was held in accordance with the Official Curriculum and textbooks.

It was appropriate for some students to give interviews to clarify some ambiguities as well as some others, that their responses to the questionnaires contained research interest, be queried further.

The responses of the students and their interviews were the export and editing material findings.

From responses of pupils in written or oral, rather negative conclusions were exported as far as the pupils' understanding of the concepts of variable, the unknown and the parameter was concerned.

It was found that students find it difficult to translate the natural language into algebraic, to form the equations, the inequations or the systems arising from problems.

Students solve equations following instructions and algorithms contained in books or given by teachers.

At the end of the work findings regarding the students are spelled out in detail as well as suggestions-teaching views regarding the teachers.

Keywords: variable, unknown, parameter, problem, algebraic thinking.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Κεφάλαιο 1: Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας

- 1.1 Η έννοια της μεταβλητής
- 1.2 Η έννοια της εξίσωσης (ο άγνωστος x)
- 1.3 Η έννοια της παραμέτρου
- 1.4 Η συναρτησιακή προσέγγιση της Άλγεβρας

Κεφάλαιο 2:

Ιστορική αναδρομή για την έννοια της συνάρτησης

Κεφάλαιο 3: Μεθοδολογία

- 3.1 Οι συμμετέχοντες
- 3.2 Πλαίσιο έρευνας
- 3.3 Η διαδικασία της έρευνας και η συλλογή δεδομένων
- 3.4 Τα ερευνητικά εργαλεία
 - 3.4.1 Τα ερωτηματολόγια
- 3.5 Οι συνεντεύξεις

Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα

- 4.1 Ανάλυση των ερωτήσεων-απαντήσεων των ερωτηματολογίων
- 4.2 Στατιστικά στοιχεία για τους μαθητές που έδωσαν συνεντεύξεις
- 4.3 Συμπεράσματα από τις απαντήσεις των μαθητών
- 4.4 Προτάσεις διδασκαλίας
 - 4.4.1 Οι δάσκαλοι των μαθηματικών
 - 4.4.2 Στατιστικά στοιχεία για τις απαντήσεις των μαθητών

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Εισαγωγή

Η Άλγεβρα είναι ο κλάδος των σχολικών Μαθηματικών που προκαλεί φόβο στους μαθητές. Σε ερώτηση που τέθηκε σε ένα οραματιστή δάσκαλο σχετικά με τις πρώτες εμπειρίες του στα μαθηματικά, εξομολογήθηκε ότι όλα πήγαιναν καλά μέχρι που ήρθε σε επαφή για πρώτη φορά με την άλγεβρα στα γυμνασιακά του χρόνια. Ξαφνικά βρέθηκε μπροστά σε μία αφηρημένη συμβολική γλώσσα, που το νόημα της δεν μπορούσε να αντιληφθεί άμεσα-ένα είδος ιερογλυφικού κειμένου, που αν και είχε αποθαρρύνει πολλούς, έγινε τελικά η Εσπεράντο των σύγχρονων επιστημών (Radford 2012). Παρόμοιες εξομολογήσεις ακούγονται σε συζητήσεις εντός και εκτός σχολείου από μαθητές και ενήλικες.

Η μικτή αυτή γλώσσα που είναι “κράμα” φυσικής και αλγεβρικής γλώσσας χρειάζεται εξοικείωση για τη μετάβαση από τη μία στην άλλη.

Η συμβολική αλγεβρική γλώσσα χρησιμοποιεί γράμματα και διάφορα άλλα σύμβολα που είναι τα εργαλεία έκφρασης και σύνταξης των αλγεβρικών προτάσεων και σχέσεων.

Τα γράμματα χρησιμοποιούνται στην Άλγεβρα με διαφορετικές σημασίες που εξαρτώνται από τα συμφραζόμενα και τις εκφράσεις. Ο Kuchemann (1981) αναφέρει αρκετούς τρόπους ερμηνείας και χρήσης των γραμμάτων, τρεις από τους οποίους σχετίζονται με την παρούσα εργασία:

1. Άγνωστοι – το γράμμα έχει μία συγκεκριμένη αλλά άγνωστη τιμή. Το γράμμα ως άγνωστος χρησιμοποιείται όταν χρειάζεται να επιλυθεί μια εξίσωση, ή στην διατύπωση εκφράσεων όπως π.χ. η περίμετρος κανονικού πολυγώνου με n πλευρές είναι 10 .
2. Γενικευμένοι αριθμοί – το γράμμα μπορεί να πάρει περισσότερες από μία τιμές. Τα γράμματα ως γενικευμένοι αριθμοί χρησιμοποιούνται σε προβλήματα όπως: “η ισότητα $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \delta + \gamma$ είναι πάντα αληθής, μερικές φορές αληθής, ή ποτέ αληθής;”
3. Μεταβλητές – χρησιμοποιούνται όταν τα γράμματα θεωρούνται ότι αντιπροσωπεύουν μία συλλογή μη ορισμένων τιμών και όταν μία συστηματική σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ δύο τέτοιων συνόλων τιμών των μεταβλητών. Αυτή η χρήση των γραμμάτων είναι αναγκαία σε προβλήματα που το ερώτημα είναι: “ποιο είναι μεγαλύτερο το $2n$ ή το $n+2$;” Σύμφωνα με την ανάλυση του Kuchemann, τα γράμματα χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές όταν το πρόβλημα διατυπώνει μία δεύτερου βαθμού σχέση μεταξύ σχέσεων (σε αυτή την περίπτωση μεταξύ των συναρτήσεων $2n$ και $n+2$).

Είναι γνωστό ότι οι μαθητές κατανοούν καλύτερα μία έννοια όταν είναι ενταγμένη μέσα σε ένα συγκεκριμένο φυσικό πλαίσιο, που έχει νόημα γι’ αυτούς. Μια τέτοια έννοια είναι η συνάρτηση, που αποτελεί μία από τις κεντρικές έννοιες στα μαθηματικά. Η έννοια αυτή αποτελεί ένα ξεκομμένο κεφάλαιο της ύλης των μαθηματικών του γυμνασίου.

Σημαντικοί ερευνητές της σύγχρονης διδακτικής της άλγεβρας υποστηρίζουν ότι η συναρτησιακή προσέγγιση έχει πολλά πλεονεκτήματα έναντι της παραδοσιακής προσέγγισης, ειδικά στην διδασκαλία των εξισώσεων και των ανισώσεων.

“Η παραδοσιακή διδασκαλία”, όπως τονίζει η Kieran (1997), “έχει αμελήσει και δεν έχει δείξει την απαιτούμενη προσοχή στην παροχή εννοιολογικής κατανόησης των αλγεβρικών συμβόλων. Πολύ συχνά η μόνη έμφαση που δίνεται είναι στις εξισώσεις και στην επίλυση των εξισώσεων. Η χρήση των γραμμάτων για την παράσταση της γενικότητας προκειμένου να δικαιολογήσουμε, να εικάσουμε ή να προβλέψουμε και να αποδείξουμε έχει παραληφθεί εντελώς. Εκείνοι που θα επιχειρούσαν να δώσουν περισσότερο νόημα στα σύμβολα της άλγεβρας χρησιμοποιώντας την έννοια της συνάρτησης ως ένα ενοποιητικό νήμα, έχουν τη δυνατότητα στην διδασκαλία τους να παρέχουν αυτά τα σύμβολα με μια λογική, που παλαιότερα απουσίαζε”.

Στην εργασία μας θα μελετήσουμε τη φύση αυτών των εννοιών και θα ερευνήσουμε τον τρόπο και το βαθμό κατανόησης τους από 24 μαθητές της Γ΄ γυμνασίου, ενός δημόσιου σχολείου της Ανατολικής Αττικής.

Κεφάλαιο 1

Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας

1.1 Η έννοια της μεταβλητής

Το πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα συνδέεται άμεσα με την ανάπτυξη του αλγεβρικού συμβολισμού. Η ανάπτυξη της αλγεβρικής γλώσσας κατέστησε την Άλγεβρα ένα ισχυρό μεθοδολογικό εργαλείο στην επιστήμη των μαθηματικών και όχι μόνο. Θεμελιώδης έννοια, όχι μόνο στην Άλγεβρα αλλά σε όλους τους τομείς της επιστήμης των μαθηματικών, είναι η **μεταβλητή**. Στα διάφορα Εκπαιδευτικά συστήματα οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τον τομέα της Άλγεβρας σε ηλικία περίπου 14 ετών. Οι έρευνες και η εμπειρία των δασκάλων των μαθηματικών δείχνουν ότι υπάρχουν προβλήματα στην κατανόηση της άλγεβρας παρόλο που κάποιοι ερευνητές την θεωρούν γενική Αριθμητική (Haspekian 2003).

Μία προσεκτικότερη προσέγγιση των μεταβλητών μέσω γενικευμένης αριθμητικής αναδεικνύει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Με μια πρώτη ματιά φαίνεται πως οι μαθητές απλά πρέπει να θέσουν κάποιους αριθμούς ("number template") (Sfard, 2000) πάνω στα γράμματα-μεταβλητές και όλα θα ήταν προφανή σε αυτούς μια και οι μεταβλητές είναι αριθμοί, που έχουν αντικατασταθεί από γράμματα και τα γράμματα μπορεί να υπόκεινται στις ίδιες πράξεις όπως οι αριθμοί. Οι μαθητές όμως ασχολούνται με τους αριθμούς με διαφορετικό τρόπο απ' αυτόν που αναμένεται να ασχοληθούν με τα γράμματα. Ύστερα από μακρόχρονη εκπαίδευση στην αριθμητική, -πάνω από έξι χρόνια-, οι μαθητές συνήθως πιστεύουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι άλλο παρά υπολογισμοί για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων και ότι το σύμβολο της ισότητας απλά υπάρχει ως σύμβολο που δηλώνει, "κάνε υπολογισμό" (Carragher & Schliemann, 2007, p. 670).

Η McNeil (2004) δηλώνει με έμφαση ότι οι δυσκολίες των παιδιών στην εκμάθηση των εξισώσεων συνδέονται ισχυρά με την προηγούμενη γνώση τους. Μία εναλλακτική λοιπόν προσέγγιση θα μπορούσε η μακρόχρονη αυτή αριθμητική εκπαίδευση να περιλαμβάνει και αλγεβρικό περιεχόμενο, έτσι ώστε η μετάβαση στην άλγεβρα να γίνεται ευκολότερα.

Παρόλα αυτά το να διδαχθεί νωρίτερα η έννοια της μεταβλητής στους μαθητές δεν αποτελεί πανάκεια. Αν προσέξει κάποιος τα ποικίλα προβλήματα, που έχουν οι μαθητές με τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης και τα γράμματα μεταβλητές (Carragher & Schliemann, 2007) δεν θα ενοχοποιήσει μόνο την μακρόχρονη αριθμητική εκπαίδευση.

Αιτίες για τις δυσκολίες μπορεί επίσης να εντοπισθούν στην ίδια τη φύση της άλγεβρας. Για να αναπτύξουν αλγεβρική γνώση με τη βοήθεια των μεταβλητών, οι μαθητές δεν πρέπει απλά να μετατρέψουν περιγραφική γνώση σε αφηρημένη τυπική γνώση (Malle, 1993), αλλά χρειάζεται επιπλέον να αναπτύξουν ευελιξία στη σκέψη, ώστε να μπορούν να χειρίζονται διαδικασίες για να φέρουν σε πέρας μαθηματικές εργασίες και να χειρίζονται νοητικά τις μεταβλητές ως μέρος ενός ευρύτερου

νοητικού σχήματος, να αντιμετωπίζουν δηλαδή ένα αμάλγαμα από διαδικασίες και ιδέες (process and concepts) ή να επινοούν μεθόδους ("procept") (Gray & Tall, 1994, p.1).

Ανεξάρτητα από την προσέγγιση που έχει επιλεγεί για την διδασκαλία των μεταβλητών, οι μαθητές πρέπει να μεταφέρουν την νέα τους γνώση σε διαφορετικές καταστάσεις. Αυτή είναι η φύση των Μαθηματικών. Επιπλέον, η νέα γνώση οπωσδήποτε θα επηρεασθεί από την προηγούμενη αριθμητική γνώση. Έτσι γεννάται το ερώτημα πώς να κατασκευαστεί ένα περιβάλλον μάθησης για να εισάγει την έννοια της μεταβλητής ώστε να αλληλεπιδράσει η νέα αλγεβρική γνώση με την προηγούμενη αριθμητική γνώση.

Στα επόμενα θα εστιάσουμε σε κάποιες έρευνες για την έννοια της μεταβλητής ανεξάρτητα από την αντιμετώπιση της ως αποτέλεσμα γενικευμένης αριθμητικής.

Υπάρχουν αρκετά εμπόδια στην εννοιολογική προσέγγιση της άλγεβρας (Lincevski & Hercovics 1996, Stacey & MacGregory 1997, Thomas and Tall 1991). Μία από τις πιο σημαντικές δυσκολίες είναι η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής. Αυτή η έννοια σπάνια συζητείται στις περισσότερες τάξεις που διδάσκεται η άλγεβρα αν και πρέπει να είναι βασική για κάθε μαθητή. Καθώς τα περισσότερα σχολικά βιβλία δεν εξηγούν και πολλά ούτε καν αναφέρουν την έννοια της μεταβλητής, ο R. Skemp (1986, p. 213) τονίζει ότι "Η μεταβλητή είναι έννοια κλειδί (key concept) στην άλγεβρα". Σε αντίθεση με την σπουδαιότητα της έννοιας, πολλά εκπαιδευτικά προγράμματα συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν την μεταβλητή ως απλό σύμβολο (Kieran 1981), παρόλο που η έρευνα όπως ήδη έχει λεχθεί, έχει δείξει ότι οι μαθητές έχουν ιδιαίτερη δυσκολία με αυτό το σύμβολο, που εκφράζει την έννοια της μεταβλητής (Schoenfeld & Arcavi 1988, Bills 2001, Cooper et al. 1997). Εάν θέλουμε οι μαθητές να προχωρήσουν πέρα από τις βασικές αριθμητικές πράξεις, θα πρέπει πρώτα να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής πριν προχωρήσουν σε άλλους τομείς της άλγεβρας. Σύγχρονα εκπαιδευτικά προγράμματα (π.χ. NCTM 2000) υποστηρίζουν ότι πρέπει να δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να αναγνωρίζουν και να πραγματοποιούν *συνδέσεις* μεταξύ των μαθηματικών εννοιών και να κατανοούν τον τρόπο που αλληλοσυνδέονται και πώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους για να δημιουργήσουν ένα συνεπές σύνολο.

Ένας από τους λόγους που καθιστούν την έννοια τη μεταβλητής δύσκολη είναι η συχνή χρήση των "γγραμμάτων" και των "λεκτικών συμβόλων" (verbal symbols). Τα "γράμματα" και τα "λεκτικά σύμβολα" που χρησιμοποιούνται στην άλγεβρα είναι σύνθετα και οι πολλαπλές αναπαραστάσεις αυτής της έννοιας (Schoenfeld & Arcavi 1988) καθιστούν δύσκολο το εγχείρημα να εκφραστεί αυτή η έννοια. Ο Skemp (1986) περιγράφει την μεταβλητή ως "ένα μη συγκεκριμένο στοιχείο ενός δοσμένου συνόλου" (σελ.214).

Αρκετοί ερευνητές δήλωσαν ότι η έννοια της μεταβλητής είναι μία από τις πιο ουσιαστικές έννοιες στη διδασκαλία των μαθηματικών, από το δημοτικό σχολείο μέχρι το λύκειο (Sasmanet. al. 1997). Ο Philipp (1992) αναφέρει τον Rajaratnam ο οποίος ανέφερε στο τέλος της δεκαετίας του 50 ότι αυτή η έννοια είναι τόσο σπουδαία και η ανακάλυψη της ήταν ένα ορόσημο στην ιστορία των μαθηματικών. Σε σχέση με το ίδιο θέμα, ο Percy Nunn δήλωσε το 1919 ότι η ανακάλυψη των

μεταβλητών είναι ίσως το πιο σπουδαίο συμβάν στην ιστορία της ανθρωπότητας. Δέκα χρόνια αργότερα ο William Betz ανέφερε ότι ο συμβολισμός στην άλγεβρα αποτελεί στοιχείο υψίστης σπουδαιότητας και συγχρόνως υψίστης δυσκολίας. (Sasmanet. Al. 1997).

Η έννοια της μεταβλητής είναι στενά συνδεδεμένη με την ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης. Πραγματικά, όπως ο Kleine υπογράμμισε, ο Leibniz ήταν ο πρώτος που ανέφερε τους όρους μεταβλητή και συνάρτηση (Philipp 1992). Η στενή σχέση μεταξύ μεταβλητής και συνάρτησης συνέχισε να υπάρχει στην εκπαίδευση μέχρι το πρώτο μισό του 20^{ου} αιώνα. Επίσης, αυτή η σχέση εύκολα μπορεί να κατανοηθεί από τον επόμενο ορισμό: “αριθμοί που σχετίζονται όπως x και y που συμμεταβάλλονται ονομάζονται μεταβλητές”. Ο Philipp (1992) επίσης αναφέρει τους ορισμούς του Osborne για την μεταβλητή: “μία ποσότητα που μπορεί να πάρει άπειρες αριθμητικές τιμές”. Πολλά εγχειρίδια διαχωρίζουν τις ποσότητες που αναπαριστούν μία μοναδική τιμή (σταθερά) από ποσότητες που μπορούν να έχουν αρκετές τιμές (μεταβλητές). Για παράδειγμα, σαν κανονική εξίσωση του κύκλου, $x^2 + y^2 = a^2$, οι x και y είναι μεταβλητές και ο a είναι σταθερά (Philipp 1992).

Η μεταρρύθμιση στη μαθηματική εκπαίδευση στο τέλος της δεκαετίας του 50 και αρχές της δεκαετίας του 60 έφερε αξιοσημείωτη αλλαγή στον ορισμό της μεταβλητής, που ακόμη και σήμερα είναι σε ισχύ. Σε αντίθεση με την μέχρι τότε ενοποιημένη αντίληψη στα μαθηματικά προγράμματα, η έννοια της μεταβλητής διδάχτηκε στην γενική της μορφή από την αρχή και όλα τα γράμματα-σύμβολα ονομάστηκαν μεταβλητές (Kieran 1989). Έκτοτε η έννοια της μεταβλητής δεν έχει συνδεθεί με την έννοια της συνάρτησης αλλά με την έννοια του συνόλου. Σύμφωνα με την μελέτη του Tonnessen, ο οποίος ανέλυσε μαθηματικά εγχειρίδια που εκδόθηκαν κατά την διάρκεια των αρχών της δεκαετίας του 50 μέχρι και το τέλος της δεκαετίας του 80, σχεδόν όλα αυτά τα βιβλία, εμμέσως πλην σαφώς έδιναν έναν ορισμό της μεταβλητής και η μεταβλητή ήταν ένα σύμβολο που αναπαριστούσε οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου που περιείχε τουλάχιστον δύο στοιχεία (Philipp 1992). Με άλλα λόγια όλες οι χρήσεις των γραμμάτων-συμβόλων ήταν μεταβλητές. Με αυτή τη θεώρηση το γράμμα-σύμβολο x στη σχέση $x + 3 = 7$ είναι μεταβλητή, επειδή το x αναπαριστά οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου, και το πεδίο ορισμού της δεν είναι ορισμένο αλλά συνήθως υπονοείται από το κείμενο-πλαίσιο. Σε αυτή τη περίπτωση η μεταβλητή μπορεί να αναπαριστά πραγματικό, ρητό, ακέραιο ή φυσικό αριθμό. Ας ξαναθυμηθούμε ότι ο x είναι μεταβλητή με την προϋπόθεση ότι ανήκει σε ένα σύνολο, που περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Υπάρχουν παραδείγματα γραμμάτων που δεν είναι μεταβλητές. Είναι σύμβολα που αναπαριστούν ειδικούς αριθμούς, όπως το e – η βάση των φυσικών λογαρίθμων, c – η ταχύτητα του φωτός και π – ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς την διάμετρο του (Philipp 1992).

Σήμερα, πολλοί ερευνητές στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν φαίνεται να αποδέχονται ένα κοινό ορισμό για την έννοια της μεταβλητής. Μάλλον προτείνουν διαφορετικούς ορισμούς για αυτή την έννοια. (Ένας από αυτούς που αναφέρει ο Philipp (1992 σελ. 26), λέει ότι μεταβλητή είναι “ένα σύμβολο το οποίο μπορεί να αναπαριστά οποιοδήποτε από τα στοιχεία ενός συγκεκριμένου συνόλου”). Σαν

αποτέλεσμα, οι σχεδιαστές των σχολικών προγραμμάτων συνήθως αντιμετωπίζουν διαφορετικές απόψεις σε σχέση με τον ορισμό της έννοιας της μεταβλητής και η προσέγγισή τους σε αυτή την έννοια μπορεί να προκαλέσει πολλούς περιορισμούς στην εκμάθηση και την διδασκαλία της άλγεβρας. Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής έχει μία ουσιαστική σπουδαιότητα στην δημιουργία μιας γερής βάσης για άλλες αλγεβρικές έννοιες που σχετίζονται με αυτή (Balyta 1999). Σύμφωνα με τους Graham & Thomas (2000), η κατανόηση αυτή είναι η βάση για όλες τις ανώτερες σπουδές. Είναι προφανώς σημαντικό για όλους τους μαθητές να κερδίσουν αυτοπεποίθηση χρησιμοποιώντας μεταβλητές. Καθώς όμως η μεταβλητή είναι μία έννοια που συνδέεται με ποικιλία αναφορικών νοημάτων και εικόνων (Tall & Vinner 1981), οι μαθητές δεν αναμένεται να μπορούν να κατανοήσουν αυτή την έννοια εύκολα.

Σύμφωνα με τον Kuchemann (1981) τα παιδιά δίνουν έξι διαφορετικές ερμηνείες στα γράμματα, που συναντούν σε αλγεβρικές παραστάσεις:

1. Το γράμμα παίρνει μια αριθμητική τιμή από κάποιο σύνολο.
2. Η τιμή ενός γράμματος μπορεί να αγνοηθεί, χωρίς να χρειασθεί να υπολογισθεί.
3. Χρησιμοποιείται για να συμβολίσει ένα αντικείμενο.
4. Χρησιμοποιείται ως ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός.
5. Χρησιμοποιείται σαν ένας γενικός αριθμός που μπορεί να πάρει περισσότερες από μία τιμές.
6. Χρησιμοποιείται σαν μεταβλητή, έτσι ώστε να αντιπροσωπεύει ένα σύνολο όχι συγκεκριμένων τιμών.

Ο Kuchemann παρατήρησε ότι τα παιδιά ηλικίας 13-15 ετών έχουν δυσκολία στην κατανόηση της ερμηνείας των γραμμάτων στις τρεις τελευταίες περιπτώσεις.

Οι Βερύκιος και Κλαουδάτος (1999) ερεύνησαν την αντίληψη μαθητών Γ' γυμνασίου σε σχέση με τις έξι ερμηνείες που αποδίδουν τα παιδιά στα γράμματα κατά τον Kuchemann. Για το σκοπό αυτό μοίρασαν ερωτηματολόγια με έξι ερωτήσεις σύμφωνα με την ταξινόμηση του Kuchemann και διαπίστωσαν ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες όταν πρέπει να αντιμετωπίσουν το γράμμα σε μία από τις τρεις τελευταίες περιπτώσεις.

Οι Βερύκιος και Κλαουδάτος στην έρευνά τους διέκριναν τρία στάδια για την κατανόηση της μεταβλητής: το πρώιμο στάδιο τυπικών διεργασιών ή στάδιο των συγκεκριμένων ενεργειών, το στάδιο κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής με διακριτό τρόπο και το στάδιο κατανόησης της μεταβλητής με συνεχή τρόπο.

Χώρισαν τους μαθητές σε τρεις ομάδες: την ομάδα χαμηλής επίδοσης, την ομάδα μέτριας επίδοσης και την ομάδα υψηλής επίδοσης. Πήραν συνέντευξη από τρεις μαθήτριες και παρατήρησαν ότι η μαθήτρια της χαμηλής επίδοσης κατανοούσε το πρώιμο στάδιο, η μαθήτρια της μέτριας επίδοσης κατανοούσε το δεύτερο στάδιο και η μαθήτρια της υψηλής επίδοσης κατανοούσε το τρίτο στάδιο.

Σε νεώτερη έρευνα του Βερύκιου (2003)¹, διατυπώνονται 5 τρόποι με τους οποίους χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές:

1. Στις εξισώσεις σαν άγνωστοι αριθμοί, παράδειγμα $4+x=9$.

2. Για να δηλώσουν ιδιότητες ή γενικεύσεις, παράδειγμα $\alpha+0=\alpha$, $\alpha+\beta = \beta+\alpha$, $\alpha 1=1\alpha=\alpha$
3. Για να περιγραφτούν συναρτήσεις ή ακολουθίες, παράδειγμα 1,3,5,7,..., $2n+1$
4. Στους τύπους για να εκφράσουν σχέσεις, παράδειγμα $\Pi_{\text{τετραγώνου}}=4\alpha$, όπου α είναι η πλευρά του τετραγώνου.
5. Στα προγράμματα των υπολογιστών για να υποδειχτούν θέσεις αποθήκευσης, παράδειγμα $A=A+1$

Σύμφωνα με Έλληνες και ξένους ερευνητές οι μαθητές δυσκολεύονται και παρερμηνεύουν την έννοια της μεταβλητής όταν την διδάσκονται για πρώτη φορά. Η έρευνα δείχνει ότι και πιο έμπειροι μαθητές παρερμηνεύουν την έννοια της μεταβλητής και αυτό αποτελεί σοβαρό εμπόδιο για την κατανόηση της Άλγεβρας και των Μαθηματικών γενικότερα. Ο Βερύκιος (2003)¹, δίνει το παρακάτω παράδειγμα μιας τέτοιας παρερμηνείας: οι μαθητές στο δημοτικό μαθαίνουν ότι το 8μ σημαίνει συνήθως 8 μέτρα, αυτό έχει ως αποτέλεσμα κάποιοι μαθητές συχνά να θεωρούν ότι το 8ψ πρέπει να σημαίνει 8 ψάρια ή 8 ψωμιά.

Στις δύο πρώτες τάξεις του γυμνασίου παρατηρείται ότι οι μαθητές παραλείπουν το σύμβολο . του πολλαπλασιασμού και μεταξύ δύο αριθμών επειδή στην άλγεβρα 8ψ σημαίνει 8 επί ψ. Όπως αναφέρει ο Λεμονίδης (1996), ένας μαθητής που εισάγεται για πρώτη φορά στην άλγεβρα στην Α΄ γυμνασίου πρέπει να γνωρίζει ότι το 8μ σημαίνει 8 φορές το 1 μέτρο και όχι απλά 8 μέτρα. Αναφέρει λοιπόν ο Λεμονίδης ότι η αλλαγή αυτή στη σημασία των γραμμάτων δημιουργεί στους μαθητές το πρόβλημα της “έλλειψης αριθμητικής αναφοράς”.

Ανάλογο παράδειγμα δίνει και η Wagner et al (1984) για κάποιο καθηγητή που ρώτησε τους μαθητές ποιός ακέραιος είναι ο επόμενος του χ και η απάντηση ήταν ψ . Κατά την άποψη της Wagner οι μαθητές συχνά συγχέουν την γραμμική διάταξη των ακεραίων με τη διάταξη στο αλφάβητο με αποτέλεσμα ακόμη και μαθητές που έχουν εμπειρία στη χρήση των γραμμάτων να μπερδεύονται όταν αντιμετωπίζουν μια νέα κατάσταση.

Οι μαθητές του Δημοτικού έβλεπαν τα Μαθηματικά σαν κάτι συγκεκριμένο , χειρίζονταν αριθμούς, έκαναν πράξεις χωρίς να είναι τίποτα αφηρημένο όπως στην άλγεβρα. Οι Βερύκιος και Κλαουδάτος (1999) αναφέρουν ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής οφείλονται στο γεγονός ότι στην ηλικία, στην οποία τα παιδιά εισάγονται σε αυτή την έννοια, βρίσκονται στο στάδιο των συγκεκριμένων ενεργειών ή αλλιώς στο πρώιμο στάδιο των τυπικών διεργασιών.

1.2 Η έννοια της εξίσωσης (ο άγνωστος χ)

Με την έννοια της εξίσωσης, της μεταβλητής και του αγνώστου ο μαθητής έρχεται σε επαφή στην **ΣΤ΄ δημοτικού** στη δεύτερη θεματική ενότητα του σχολικού βιβλίου με τίτλο “Εξισώσεις”. Εκεί διατυπώνεται ο ορισμός:

Άγνωστος/Μεταβλητή

Το **γράμμα** ή το **σύμβολο** που χρησιμοποιείται σε μία αριθμητική παράσταση στη θέση μιας τιμής άγνωστης ή μεταβαλλόμενης λέγεται **μεταβλητή**.

Στην **Α΄ γυμνασίου**, όπως και στην **ΣΤ΄ δημοτικού** ο μαθητής καλείται να αντιμετωπίσει εξισώσεις απλές, χρησιμοποιώντας τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής. Ο τρόπος επίλυσης που προτείνεται είναι η αντιστροφή των πράξεων.

Το σχολικό εγχειρίδιο της **Β΄ γυμνασίου** στην παράγραφο 1.1 αναφέρεται στην έννοια της μεταβλητής μέσω παραδειγμάτων. Ο ορισμός που διατυπώνεται είναι ο εξής: *Το γράμμα x που παριστάνει έναν οποιονδήποτε αριθμό, λέγεται **μεταβλητή**.* Στην παράγραφο 1.2 εισάγεται η έννοια της εξίσωσης με το μοντέλο του ζυγού και καταλήγει στον εξής ορισμό για την εξίσωση: *Η ισότητα αυτή, που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x , ονομάζεται **εξίσωση**.* Στην ίδια παράγραφο εισάγεται και η τυπική διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης πρώτου βαθμού μέσω εφαρμογών. Επίσης προτείνονται προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις πρώτου βαθμού.

Στο σχολικό βιβλίο της **Γ΄ γυμνασίου** επαναλαμβάνεται η επίλυση της εξίσωσης πρώτου βαθμού και η διερεύνηση ή μη των λύσεων και εισάγονται τα γραμμικά συστήματα 2×2 , καθώς και η εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού. Στην παράγραφο 2.1 γίνεται διερεύνηση της $ax+b=0$ χωρίς να ονομάζονται τα σύμβολα a και b παράμετροι. Στην ίδια παράγραφο γίνεται υπενθύμιση του αλγόριθμου επίλυσης των εξισώσεων a' βαθμού.

Οι ερευνητές Stacy & MacGregor (1997), παρατηρούν τρεις κεντρικές αντιλήψεις, που έχουν σχηματίσει οι μαθητές για την εξίσωση. Κάποιοι μαθητές θεωρούν τις εξισώσεις αλγόριθμους μέσω των οποίων καταλήγουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή θεωρούν ότι η εξίσωση είναι η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε τον άγνωστο. Κάποιοι άλλοι μαθητές πιστεύουν ότι οι εξισώσεις είναι ένας τρόπος περιγραφής πράξεων που οδηγούν σε κάποιο αποτέλεσμα, όπως για παράδειγμα η εξίσωση $x+7=11$, περιγράφει το άθροισμα ενός αριθμού x με το 7. Τέλος υπάρχουν μαθητές, που έχουν την αντίληψη ότι η εξίσωση αποτελεί ένα τύπο, για παράδειγμα η περίμετρος τετραγώνου πλευράς a : $P=4 \cdot a$.

Στη Βιβλιογραφία υπάρχουν ερευνητικά άρθρα σε σχέση με προσεγγίσεις για μια αποτελεσματική διδασκαλία των εξισώσεων.

Η Vlassis, σε έρευνά της (2002) χρησιμοποίησε το μοντέλο της ζυγαριάς για την επίλυση των εξισώσεων πρώτου βαθμού. Με την χρήση μπαλονιών συμβόλιζαν τις διάφορες ποσότητες πάνω στη ζυγαριά. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το μοντέλο της ζυγαριάς βοηθάει τους μαθητές να αντιληφθούν το σύμβολο της ισότητας ως ισοδυναμία ανάμεσα στα δύο μέλη της εξίσωσης, αλλά δεν τους βοηθά να κατανοήσουν τη μεταβλητή ως άγνωστο. Το μοντέλο αυτό δεν βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν και τις περιπτώσεις με αρνητικούς αριθμούς.

Οι Lima & Tall (2008) διατυπώνουν ότι το μοντέλο της ζυγαριάς έχει προβλήματα π.χ. στην εξίσωση $2x - 3 = 5$ που μπορεί να επιλυθεί με αντίστροφες διαδικασίες, δεν είναι εύκολο να αντιμετωπιστεί με το μοντέλο της ζυγαριάς επειδή δεν είναι δυνατό να αφαιρεθεί το 3 από το $2x$, εάν ο x δεν είναι γνωστός αριθμός. Αν στην εξίσωση υπάρχουν αρνητικοί αριθμοί, το μοντέλο της ζυγαριάς είναι δύσκολο να επεξηγήσει. Οπότε η επίλυση της εξίσωσης θα γίνει με τη μεταφορά του αριθμού 3 από το αριστερό μέλος στο δεξί.

Αν φανταστούμε μπαλόνια γεμάτα με το ελαφρύ αέριο ήλιον τα οποία θα “σηκώνουν” αριθμούς από τη ζυγαριά και έτσι θα λειτουργούν ως αρνητικοί αριθμοί. Προβλήματα προκύπτουν και σε εξισώσεις όπως $2x + 3 = 2 + x$, που περιέχει θετικούς αριθμούς, ανάγεται τελικά στην $x + 1 = 0$ που φαίνεται αδύνατο να εξηγηθεί με την “ζυγαριά”.

Οι ερευνητές Pirie & Martin (1997), χρησιμοποίησαν κενά τετραγωνάκια αντί αγνώστων σε απλές εξισώσεις σε μαθητές χαμηλής επίδοσης. Οι μαθητές καλούνταν στις ισότητες αυτές να συμπληρώσουν το σωστό αριθμό στα τετραγωνάκια ώστε να ισχύει η ισότητα. Η μέθοδος αυτή είναι κατάλληλη για μικρούς μαθητές που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τις εξισώσεις και δεν περιέχει το σύμβολο x που προκαλεί σύγχυση. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές ανακάλυψαν μόνοι τους αλγόριθμους για να αναζητήσουν τους “αόρατους αριθμούς”.

Είναι σημαντικό επίσης να αποκτήσει ο μαθητής την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Δηλαδή να κατανοεί το πρόβλημα, να “μεταφράζει” σε αλγεβρική γλώσσα, να σχηματίζει την ανάλογη εξίσωση, ανίσωση ή το σύστημα που προκύπτει και να επιλύει αναλόγως.

1.3 Η έννοια της παραμέτρου

Ένα άλλο αλγεβρικό αντικείμενο, που οι μαθητές δύσκολα κατανοούν, είναι η **παραμέτρος**, η οποία είναι ακαθόριστη σταθερά που παίρνει τιμές από ένα σύνολο. Η επιστημολογική φύση αυτού του αλγεβρικού αντικειμένου συνδέεται με ένα παράδοξο και μία πρόδηλη αντίφαση: είναι ένας παγιωμένος, ιδιαίτερος αριθμός, παρόλα αυτά παραμένει ακαθόριστος. Από τη σκοπιά της Διδακτικής το ερώτημα είναι: Πώς μπορεί ένα τέτοιο αντικείμενο να γίνει αντικείμενο της σκέψης των μαθητών;

Στα μαθηματικά συχνά θα δούμε την απάντηση: Η παράμετρος είναι σχεδόν το ίδιο αντικείμενο όπως η μεταβλητή. Εξαιτίας αυτής της θεώρησης μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ιδιαίτερο είδος μεταβλητής. Συνεπώς, η ιδιότητα αυτής της μεταβλητής εξαρτάται από τον τρόπο της εφαρμογής. Για τους μαθηματικούς “παραμέτρος” και “μεταβλητή” αναπαριστούν μόνο διαφορετικά ονόματα που έχουν δοθεί στο ίδιο αντικείμενο. Δεν υπάρχει ανάγκη για ένα ακριβή ορισμό του αντικειμένου “παραμέτρος” επειδή η χρήση της λέξης “παραμέτρος” αποκτάται από την ίδια τη μαθηματική εμπειρία, και ο μαθηματικός διαχωρίζει την μεταβλητή ή την παράμετρο με τη διαίσθηση. Αυτό έχει επηρεάσει τα σχολικά μαθηματικά και τα προγράμματα μαθηματικών σπουδών, όπου δεν υπάρχει ένας ακριβής ορισμός ούτε της λέξης ούτε του αντικειμένου παράμετρος. Στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του γυμνασίου δεν αναφέρεται ούτε καν η λέξη “παραμέτρος” αν και υπάρχουν ασκήσεις που περιέχουν την έννοια και ζητείται από τους μαθητές να αντιμετωπίσουν αυτές τις ασκήσεις.

Οι έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές δεν μπορούν να διαχωρίσουν την “παραμέτρο” από την “μεταβλητή”. Χρησιμοποιούν την παράμετρο με τον ίδιο τρόπο όπως την μεταβλητή, αλλά έχουν την πεποίθηση ότι πρέπει να υπάρχει διαφορά μεταξύ των δύο εννοιών, την οποία δεν μπορούν να εξηγήσουν. Εξαιτίας των διαφορετικών

εκφράσεων προκύπτει το ερώτημα εάν κάποιο μοντέλο ή ιδέα μπορεί να αναπτυχθεί, εστιάζοντας στην ιδέα της παραμέτρου σαν ένα κατώτερο είδος μεταβλητής.

Η παράμετρος είναι μία “έξτρα” μεταβλητή σε μία αλγεβρική έκφραση ή συνάρτηση που γενικεύει πάνω στην κλάση των εκφράσεων και πάνω στην κλάση των συναρτήσεων. Η παράμετρος μπορεί να θεωρηθεί ως μετα-μεταβλητή: το α στην $\psi = \alpha x + \beta$ μπορεί να παίξει τον ίδιο ρόλο μιας “συνηθισμένης” μεταβλητής, αγνώστου ή μεταβαλλόμενης ποσότητας, αλλά λειτουργεί σε υψηλότερο επίπεδο από την περίπτωση της μεταβλητής. Για παράδειγμα: η μεταβολή στην τιμή μιας παραμέτρου δεν επιδρά σε ένα μόνο σημείο, αλλά όλο το γράφημα συνολικά. Οι διαφορετικοί ρόλοι της παραμέτρου αναδεικνύονται, αλλά τώρα σε υψηλότερη στάθμη, και η αρχική συνάρτηση γίνεται το αντικείμενο της μελέτης. Η έννοια της παραμέτρου, συνεπώς, είναι κατάλληλη να συμβάλλει, περισσότερο από τη μεταβλητή, σε μία υψηλότερου βαθμού αφαίρεση των αλγεβρικών αντικειμένων. Αυτός είναι ένας ισχυρός λόγος που η έννοια της παραμέτρου είναι “σκοτεινή” για τους μαθητές.

Η διδασκαλία της γραμμικής συνάρτησης $\psi = \alpha x + \beta$ αρχίζει στην Β΄ γυμνασίου, στο 2^ο Κεφάλαιο, αφού έχει προηγηθεί στην ίδια τάξη η διδασκαλία της έννοιας της μεταβλητής, της εξίσωσης και της ανίσωσης.

Στην Γ΄ γυμνασίου ο μαθητής διδάσκεται την γραμμική συνάρτηση $\psi = \alpha x + \beta$, καθώς και την συνάρτηση 2^{ου} βαθμού $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (παραβολή). Στο κεφάλαιο αυτό διδάσκεται τον ρόλο των συντελεστών (δηλ. παραμέτρων) α, β, γ στην γραφική παράσταση της παραβολής.

1.4 Η Συναρτησιακή προσέγγιση της Άλγεβρας

Στις σύγχρονες μαθηματικές θεωρίες η έννοια της **συνάρτησης** είναι θεμελιώδες δομικό στοιχείο και συνδέεται άμεσα με την έννοια της μεταβλητής. Εξαιτίας της στενής σχέσης συνάρτησης-μεταβλητής θεωρούμε σκόπιμο να αναφέρουμε στοιχεία για την έννοια της συνάρτησης καθώς και την εξέλιξη της από τις απαρχές της Ιστορίας των Μαθηματικών μέχρι τις μέρες μας.

Η έννοια της μεταβλητής είναι θεμελιώδης για την άλγεβρα. Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές σχηματίζουμε αλγεβρικές παραστάσεις μιας ή περισσότερων μεταβλητών. Κάθε αλγεβρική παράσταση είναι συνάρτηση. Η συνάρτηση με τη σειρά της εκφράζει τον τρόπο που συνδέεται η ανεξάρτητη μεταβλητή με την εξαρτημένη μεταβλητή.

Μέσω της έννοιας της συνάρτησης, η μεταβλητή παίζει κυρίαρχο ρόλο όχι μόνο μέσα στη μαθηματική επιστήμη, αλλά σε όλο το φάσμα των θετικών επιστημών.

Τα τελευταία χρόνια η έρευνα για τη διδασκαλία των εξισώσεων και των ανισώσεων έχει στραφεί στην συναρτησιακή προσέγγιση.

Η συναρτησιακή προσέγγιση της άλγεβρας προϋποθέτει ότι η συνάρτηση είναι η κεντρική ιδέα γύρω από την οποία η σχολική άλγεβρα μπορεί να οργανωθεί. Αυτό σημαίνει ότι οι αναπαραστάσεις των σχέσεων μπορεί να εκφραστούν ως τρόποι κατάλληλοι για συναρτήσεις και οι συμβολικές γραμματικές εκφράσεις είναι τέτοιοι

τρόποι (modes). Έτσι, ο αλγεβρικός τρόπος σκέψης μπορεί να ορισθεί ως η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για να χειριστούμε ποσοτικές καταστάσεις με ένα σχεσιακό τρόπο.

Σε έρευνα των Φαρμάκη, Κλαουδάτο και Βερύκιο (2005) παρουσιάζεται και αναλύεται διδασκαλία των εξισώσεων που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές της Β' γυμνασίου, μετά τη διδασκαλία των συναρτήσεων. Στο επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα προτείνεται το αντίστροφο.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε τμήμα Β' γυμνασίου και περιελάμβανε 26 μαθήματα των 45 λεπτών, 4 την εβδομάδα όπως ορίζει το επίσημο πρόγραμμα. Η σειρά των μαθημάτων άρχιζε με τη διδασκαλία του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων, του πίνακα τιμών και σχεδίαση του γραφήματος μιας απλής συνάρτησης. Δόθηκε μεγάλη έμφαση στη γραφική αναπαράσταση προβλήματος, όπου το x παρουσιαζόταν ως μεταβλητή και όχι σαν άγνωστη ποσότητα. Στο τελευταίο μέρος της ερευνητικής διδασκαλίας διδάχτηκαν οι εξισώσεις με τον τυπικό τρόπο.

Στο τέλος της έρευνας δόθηκε στους μαθητές ένα πρόβλημα που αναφέρεται στον τρόπο υπολογισμού του κομίστρου του ταξί: 0,80 € πάγιο και 0,30 € για κάθε χιλιόμετρο. Αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές να συμπληρώσουν ένα πίνακα τιμών, να εκφράσουν τη συνάρτηση που συνδέει τα δύο ποσά x και y (όπου x η απόσταση και y το κόστος σε €) και να σχεδιάσουν την γραφική παράσταση. Τέλος ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν πόσο απέχει το σπίτι κάποιου από μια συγκεκριμένη τοποθεσία, αν για τη διαδρομή αυτή πλήρωσε 3,5 €. Η τελευταία ερώτηση είχε στόχο να συνδέσουν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης με την έννοια της εξίσωσης. Οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν για να απαντηθεί το τελευταίο ερώτημα ήταν: με βάση τον πίνακα τιμών, με βάση τη γραφική παράσταση, με επίλυση της εξίσωσης αλγεβρικά. Οι μαθητές εργάστηκαν ως εξής:

Α. Πήγαν στον πίνακα τιμών και έδωσαν την τιμή 3,5 στην εξαρτημένη μεταβλητή και αναζήτησαν την αντίστοιχη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Β. Χρησιμοποίησαν το γράφημα της $y=0,30x+0,80$ όπου αντικατάστησαν όπου y την τιμή 3,5 και έλυσαν ως προς x .

Γ. Έλυσαν την εξίσωση $3,5=0,30x+0,80$.

Τα συμπεράσματα του ερευνητή ήταν ότι η προσέγγιση μέσω των συναρτήσεων ενθαρρύνει τους μαθητές να συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης μεταξύ τους και να συνδέουν καθεμιά με την επίλυση εξίσωσης. Παρατήρησε ότι η προσέγγιση αυτή είναι θεμελιώδης για την ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης. Μια γνωστική δυσκολία που παρατηρήθηκε στους μαθητές ήταν η ύπαρξη δύο μεταβλητών x και y που σε μερικούς έφερε δυσκολίες. Δεν ήταν εύκολο να θεωρήσουν την μεταβλητή y σαν διαφορετικό τρόπο έκφρασης του x .

Κεφάλαιο 2

2.1 Ιστορική αναδρομή για την έννοια της συνάρτησης

Οι απαρχές της έννοιας της συνάρτησης βρίσκονται στους πίνακες των Βαβυλωνίων (2000 π.Χ.), όπου αντιστοιχίζονταν οι αριθμοί με τα τετράγωνά τους και τις ρίζες τους (Πατρώνης, Τ., Σπανός, Δ., 1996) καθώς και ένα μεγάλο μέρος αριθμητικών υπολογισμών γίνονταν με πίνακες. Βρέθηκαν επίσης πολλαπλασιαστικοί πίνακες και άλλοι πιο σύνθετοι που περιέχουν αντίστροφους αριθμούς καθώς και κυβικές ρίζες (Struik, D. 1982).

Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν ένα ιερογλυφικό σύμβολο που προφέρονταν “χάου” ή “άχα” και σήμαινε σωρός. Σε κάποια βιβλία η Αιγυπτιακή άλγεβρα αναφέρεται και ως λογισμός των “αχα”. Οι Αιγύπτιοι γνώριζαν την επίλυση των απλών γραμμικών εξισώσεων, ενώ οι Βαβυλώνιοι έλυναν γραμμικές και δευτεροβάθμιες εξισώσεις με δύο μεταβλητές (Struik, D. 1982)

Παρόλο που αυτοί οι λαοί είχαν επινοήσει τους πίνακες, είχαν συλλέξει δεδομένα για οικονομικούς σκοπούς και είχαν καταγράψει αστρονομικές παρατηρήσεις, δεν ανέπτυξαν κάποιες θεωρητικές έννοιες και συναρτήσεις. Η έννοια της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής δεν είναι δυνατό να προκύψει ως άμεση γενίκευση από πίνακες τιμών.

Στην Κίνα της περιόδου των Χαν υπάρχουν διαγράμματα στο βιβλίο των μεταβολών (Ι-Τσινγκ). Ωστόσο τα Μαθηματικά των Ινδών και των Κινέζων δεν φαίνεται να διαφοροποιούνται από αυτά των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων. Τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν ως επιστημονικός κλάδος, με την σημερινή έννοια, στην αρχαία Ελλάδα (Struik, D. 1982). Ήδη από το 600 π.Χ. ο Ίωνας μαθηματικός και φιλόσοφος Θαλής είχε εισάγει την έννοια της απόδειξης.

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί ασχολήθηκαν κατά κόρο με γεωμετρικές οντότητες και όχι με αλγεβρικές, οπότε υπήρξε ‘καθυστέρηση’ στην ανάπτυξη της ιδέας της συνάρτησης. Αιτία ήταν η μελέτη των γεωμετρικών μεγεθών με αναλογίες και όχι με αριθμούς καθώς και η κυρίαρχη τάση του Πλατωνισμού που πρέσβευε τη σταθερότητα των μαθηματικών αντικειμένων ως ‘ιδεών’ και την άρνηση των απειροστών μεγεθών στη γεωμετρία μέσω του αξιώματος του Ευδόξου και του Αρχιμήδη (Πατρώνης, Τ., Σπανός, Δ., 1996).

Όπως αναφέρει η A. Sierpinska, η ‘στατική’ φιλοσοφική αντίληψη που βρίσκουμε για τα Μαθηματικά στον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη ήταν ίσως ο λόγος για τον οποίο οι μετέπειτα μαθηματικοί εκφράζονταν με τη βοήθεια των αγνώστων και απροσδιορίστων περισσότερο, παρά με την έννοια της μεταβλητής. Η κατάσταση αυτή οδηγούσε στις αναλογίες και στις εξισώσεις, όχι όμως στις συναρτήσεις (Πατρώνης, Τ., Σπανός, Δ., 1996).

Η επιμονή των αρχαίων Ελλήνων αλλά και μεταγενέστερων μαθηματικών όπως ο Fermat στη συνθετική άποψη της Γεωμετρίας αποτέλεσε επιστημολογικό εμπόδιο για την εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης. Έτσι έχουμε ανάπτυξη της λεγόμενης ‘γεωμετρικής άλγεβρας’ και όχι της ‘αναλυτικής γεωμετρίας’. Ο Fermat, συνεχίζοντας αυτή την παράδοση, όρισε τις αλγεβρικές καμπύλες με τη βοήθεια αναλογιών. Το αποτέλεσμα ήταν να καθυστερήσει η ανάπτυξη των αναλυτικών μεθόδων και του διαφορικού λογισμού σαν βασικό μαθηματικό εργαλείο.

Στην Ελληνιστική περίοδο έχουμε μία αξιόλογη σύνθεση του πολιτισμού της Ανατολής με τον Ελληνικό. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο γεννήθηκε η Τριγωνομετρία, ένας κλάδος κλειδί για την μετέπειτα ανάπτυξη των Μαθηματικών και την εφαρμογή τους σε σύνθετα προβλήματα. Ένα από τα μεγαλύτερα συγγράμματα, ανάγεται στη δεύτερη αλεξανδρινή περίοδο, είναι η Μαθηματική Σύναξη του Πτολεμαίου. Είναι περισσότερο γνωστή με τον εξαραβισμένο τίτλο *Αλμαγέστη (Η Μεγίστη)* και τοποθετείται χρονικά γύρω στο 150 μ.Χ. Ήταν έργο αστρονομικό αποτελούμενο από πολλά βιβλία υπέρτατης δεξιοτεχνίας και πρωτοτυπίας. Μπορεί όμως πολλές ιδέες που εκεί αναπτύσσονται να έχουν προέλθει από τον Ίππαρχο ή από Βαβυλώνιους αστρονόμους. Το έργο αυτό περιέχει ένα πίνακα για τις χορδές του κύκλου, οι οποίες αντιστοιχούν σε γωνίες που αυξάνουν διαδοχικά κατά μισή μοίρα (Struik, D. 1982). Αυτός ο πίνακας, που συνδέει τα μήκη των χορδών με τα αντίστοιχα τόξα, είναι κάτι πολύ περισσότερο από τους αριθμητικούς πίνακες των Βαβυλωνίων. Αυτό συμβαίνει για πολλούς λόγους. Πρώτον επειδή προέκυψε από μία σύνθετη προβληματική κατάσταση και αποδεικτική εργασία και ύστερα γιατί δεν αντιστοιχίζει απλώς ακέραιους αριθμούς σε ακέραιους ή στις τετραγωνικές τους ρίζες αλλά συνεχή μεγέθη (τόξα κύκλου) σε άλλα συνεχή μεγέθη (αντίστοιχες χορδές) που έχουν εν γένει ένα υπερβατικό λόγο προς τα πρώτα. Ο συγκεκριμένος πίνακας διευρύνει κατά πολύ την αντίληψη των αριθμητικών σχέσεων αφού αγγίζει σχεδόν τη γενικότερη έννοια της συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής (Πατρώνης, Τ., Σπανός, Δ., 1996). Μάλιστα σύμφωνα με το δόγμα ότι τα ελληνικά μαθηματικά είναι κατά βάση γεωμετρία οι ιστορικοί των μαθηματικών έδειξαν μεγάλη αμέλεια σε έργα με αριθμητικούς υπολογισμούς όπως του πίνακα του Πτολεμαίου (Negeubauer).

Τον 14^ο αιώνα οι Bradwardine και Oresme εισάγουν έμμεσα μία συναρτησιακή σχέση μέσω της εκθετικής συνάρτησης με εκθέτη ρητό. Ο Oresme λίγο πριν το 1361 είχε την ιδέα, να κατασκευάσει μια εικόνα ή ένα γράφημα του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται τα πράγματα (Boyer, C.). Στο φυλλάδιό του λοιπόν με τίτλο *De alitudinibus* (Για τα πλάτη των σχημάτων) υπάρχει το διάγραμμα μιας εξαρτημένης μεταβλητής (‘μήκος’) σε σχέση με μian ανεξάρτητη (‘πλάτος’) η οποία έπαιρνε διάφορες τιμές (Struik, D. 1982). Ο Oresme έγραψε πως οτιδήποτε μετρήσιμο μπορεί να θεωρηθεί συνεχές μέγεθος. Οι όροι ‘μήκος’ και ‘πλάτος’ που χρησιμοποίησε ο Oresme είναι ισοδύναμοι με τους όρους ‘τετμημένη’ και ‘τεταγμένη’ που χρησιμοποιούμε σήμερα, και οι γραφικές παραστάσεις τους θυμίζουν την αναλυτική γεωμετρία. Ένα είδος συντεταγμένων είχαν χρησιμοποιηθεί και από τον Απολλώνιο και από άλλους, η γραφική παράσταση όμως ενός μεταβλητού μεγέθους ήταν κάτι το πρωτόγνωρο (Boyer, C.).

Το 1544 ο Stiefel δημοσιεύει το έργο του *Arithmetica integra* όπου σχετίζει τους όρους αριθμητικής προόδου με τους όρους γεωμετρικής ανοίγοντας το δρόμο για την λογαριθμική συνάρτηση (Loria, G.). Το 1614 ο Napier στο έργο του *Mirifici logarithmorum canonicis de scription* έκανε γνωστούς τους λογάριθμους και τους λογαριθμικούς πίνακες από τις εργασίες του Stiefel.

Το 17^ο αιώνα οι Γάλλοι μαθηματικοί P. Fermat (1601-1655) και R. Descartes (1596-1650) έκαναν διάκριση μεταξύ σταθερών και μεταβλητών μεγεθών. Ο Descartes στο έργο του *La geometrie* εισήγαγε παρόμοιο αλγεβρικό συμβολισμό με τη μορφή που ξέρουμε σήμερα με τη διαφορά ότι, σε αντίθεση με εμάς, ο στοχαστής θεωρούσε τις παραμέτρους και τους αγνώστους ευθύγραμμα τμήματα. Στις εργασίες του Descartes οφείλει πολλά η θεωρία των συναρτήσεων αλλά η έννοια της συνάρτησης δεν έπαιξε ρόλο στην καρτεσιανή γεωμετρία (Boyer, C.). Στο ίδιο έργο ο Descartes παρουσιάζει τον τρόπο προσδιορισμού μίας καμπύλης από μία εξίσωση με x και y . Κατέστησε έτσι δυνατό ένα γεωμετρικό πρόβλημα να μετατρέπεται σε αλγεβρικό και αντίστροφα.

Ο Fermat ανέλαβε να ανακατασκευάσει τους γεωμετρικούς τόπους του Απολλώνιου. Συνέπεια αυτής της προσπάθειας είναι η ανακάλυψη, το 1636 της βασικής αρχής της αναλυτικής γεωμετρίας.

Στην έννοια της συνάρτησης αναφέρονται και οι Newton (την ονομάζει *relata quantitas*) και Leibniz (με τον όρο *functionem faciens* ή *function*). Οι πρώτες ανακαλύψεις του Newton χρονολογούνται γύρω στο 1665 και ήταν αποτέλεσμα της ικανότητας του να εκφράζει τις συναρτήσεις ως απειροσειρές. Το 1666 επινόησε τη μέθοδο των ροών (*fluxions*) για την επίλυση προβλημάτων φυσικής. Το 1711 δημοσίευσε το *De analysi per aequationes numero terminorum* που είναι η πρώτη συστηματική περιγραφή της σπουδαίας μαθηματικής ανακάλυψης, του απειροστικού λογισμού (Boyer, C.). Έως το 1676, στη Γερμανία, ο Leibniz είχε ανακαλύψει και αυτός τον απειροστικό λογισμό με μία μέθοδο σημαντική που μπορούσε να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε συνάρτηση ρητή, άρρητη, αλγεβρική ή υπερβατική (Boyer, C.). Η όρος *function* προέρχεται από το λατινικό *fungor* και εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1673 σ' ένα χειρόγραφο του Leibniz με τίτλο "η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων" (*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*). Σε αυτόν οφείλονται και οι όροι "παράμετρος", "μεταβλητή", "συντεταγμένες", "σταθερά".

Ο Newton ήταν γνωστός στην Αγγλία σε αντίθεση με τον Leibniz που έγινε γνωστός στην ηπειρωτική Ευρώπη. Οι Ελβετοί αδελφοί Bernoulli ήταν οι πιο διακεκριμένοι μελετητές του και απ' αυτούς ο Jean Bernoulli διαφόρισε και ολοκλήρωσε τις εκθετικές συναρτήσεις. Κατά τον Jean Bernoulli η συνάρτηση δεν είχε οριστεί οπότε έδωσε τον ακόλουθο ορισμό, απελευθερωμένο από γεωμετρικά στοιχεία : "Συνάρτηση είναι μία ποσότητα που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από μεταβλητή ποσότητα και σταθερές". Ο ορισμός αυτός παρέμεινε αμετάβλητος ως τον 19^ο αιώνα.

Το χειμώνα του 1691 ο Jean Bernoulli έδωσε τις ιδέες του στον G.F.A. del' Hospital και το 1696 ο τελευταίος δημοσίευσε το πρώτο εγχειρίδιο για τον απειροστικό λογισμό. Το εγχειρίδιο άρχιζε με δύο ορισμούς. Στον πρώτο, μεταβλητές ονομάζονται οι ποσότητες εκείνες που αυξάνονται ή ελαττώνονται συνεχώς, ενώ σταθερές είναι

αυτές που παραμένουν ίδιες καθώς οι άλλες μεταβάλλονται. Στον δεύτερο ορισμό όριζε ως διαφορά το απειροστό τμήμα κατά το οποίο μια μεταβλητή ποσότητα αυξάνει ή ελαττώνεται (Γιαννακούλιας, Ε., 2007). Στις μελέτες του μαρκησίου του del' Hospital η καμπύλη δεν εθεωρείτο σαν ένα γράφημα συνάρτησης αλλά σαν ένα σχήμα που ενσωμάτωνε τη "σχέση" μεταξύ των x και y .

Το 18^ο αιώνα εμφανίζεται μια μεγάλη μορφή στο χώρο των Μαθηματικών. Είναι ο Ελβετός μαθηματικός Leonard Euler που μετέτρεψε τον λογισμό του Leibniz σε μία τυπική θεωρία των συναρτήσεων που δεν ήταν ανάγκη να αναφέρεται σε διαγράμματα ή γεωμετρικές έννοιες (Γιαννακούλιας, Ε., 2007). Ο Euler έδωσε έναν ορισμό για την έννοια της συνάρτησης και έκανε συστηματική μελέτη και ταξινόμηση όλων των στοιχειωδών συναρτήσεων, των διαφορικών τους και των ολοκληρωμάτων τους. Η συνάρτηση ήταν για τον Euler όχι τόσο μία ποσότητα που εξαρτάται από μεταβλητές όσο μία αναλυτική έκφραση με σταθερές και μεταβλητές που μπορούσαν να παρασταθούν με απλά σύμβολα (Γιαννακούλιας, Ε., 2007). Το 1755 διατύπωσε: "Αυτές οι ποσότητες, που εξαρτώνται από άλλες σε τρόπο ώστε, αν οι άλλες ποσότητες μεταβληθούν, να μεταβληθούν και αυτές οι ίδιες, ονομάζονται συνήθως 'συναρτήσεις', μια μετωνυμική λέξη που είναι εύστοχη και εμπεριέχει όλους τους τρόπους με τους οποίους μία ποσότητα μπορεί να προσδιοριστεί από άλλες. Έτσι, αν μπορούσα να ονομάσω τις μεταβλητές ποσότητες, τότε κάθε ποσότητα που εξαρτάται με κάποιον τρόπο από το x μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια αυτού, αυτό είναι η συνάρτηση μιας μεταβλητής x ". Είναι πολύ σημαντική η παρατήρηση ότι η λέξη συνάρτηση είναι μια μετωνυμία. Αυτό μάλλον σημαίνει ότι η λέξη πέρασε από άλλους τομείς στα μαθηματικά με μια ειδική σημασία. Σήμερα από διδακτικής πλευράς παίζει σπουδαιότερο ρόλο ένα μετωνυμικό φαινόμενο που λαμβάνει χώρα μέσα στα ίδια τα μαθηματικά. Σε αυτό το φαινόμενο η λέξη συνάρτηση χρησιμοποιείται αυθόρμητα με μια διολίσθηση της σημασίας της αφού από τη συναρτησιακή σχέση η λέξη καταλήγει να σημαίνει απλά την εξαρτώμενη ποσότητα (Πατρώνης, Τ., Σπανός, Δ., 1996).

Ο Euler υπήρξε ο πιο επιτυχημένος εφευρέτης συμβόλων όλων των εποχών. Ίσως το πιο σημαντικό να είναι το σύμβολο $f(x)$ που χρησιμοποιούμε μέχρι σήμερα.

Ο Euler έκανε για την ανάλυση του Newton και του Leibniz ότι έκανε ο Ευκλείδης για την γεωμετρία του Ευδόξου και του Θεαίτητου ή ότι έκανε ο Viète για την άλγεβρα του Al Xbarizmi και του Cardano. Ήταν αυτός που πήρε το διαφορικό λογισμό και τη μέθοδο του ρυθμού μεταβολών και τα έκανε μέρος ενός γενικότερου κλάδου των Μαθηματικών, αυτόν της ανάλυσης (Boyer, C.). Πριν τον Euler ο απειροστικός λογισμός μελετούσε ιδιότητες των καμπυλών ενώ με την συμβολή του ο λογισμός διαπραγματεύονταν πλέον ιδιότητες συναρτήσεων. Η αλλαγή αυτή προκάλεσε μεγάλη ανατροπή στο μαθηματικό τοπίο.

Το 1797 ο Lagrange παρουσίασε το έργο του *Theorie des Fonctions Analytiques*. Σε αυτό παρουσίασε μία μέθοδο που βασιζόταν στον ισχυρισμό ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά (σειρά Taylor). Επικρίθηκε για τον φορμαλισμό του και υπήρχαν πολλές αντιρρήσεις στο ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις μπορούσαν να αναπτυχθούν σε σειρά Taylor. Παρ' όλα αυτά συντέλεσε

στην εμφάνιση μιας πρώτης θεωρίας συναρτήσεων μιας μεταβλητής (Γιαννακούλιας, Ε., 2007).

Το 1821 ο Γάλλος μαθηματικός Cauchy παρουσίασε το σημαντικό έργο του Cours d'Analyse. Σε αυτό έδωσε τον ορισμό της μεταβλητής: Μια ποσότητα που θεωρείται ως διαδοχή πολλών τιμών, διαφορετικών μεταξύ τους, καλείται μεταβλητή. Κατά τον Cauchy όταν οι μεταβλητές είναι συσχετισμένες έτσι ώστε όταν δίνεται η τιμή της μίας να μπορεί να οριστεί η τιμή των άλλων, τότε οι διάφορες μεταβλητές μπορούν να εκφραστούν μέσω μίας από αυτές, η οποία ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι άλλες μεταβλητές ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής ονομάζονται συναρτήσεις αυτής της μεταβλητής.

Το 1807 ο Fourier απάντησε θετικά στο ερώτημα αν μπορεί οποιαδήποτε συνάρτηση που ορίζεται μέσω μιας αυθαίρετης καμπύλης να αναπαρασταθεί από μια σειρά. Για την σειρά αυτή δημιουργήθηκε ενδιαφέρον που πήγαζε από την ιδιαίτερα θεωρητική της αξία και τον προβληματισμό σχετικά με το τι εννοούμε συνάρτηση. Οι μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα θεώρησαν αναγκαίο να ασχοληθούν με ζητήματα σχετικά με την θεμελίωση των μαθηματικών εννοιών και έννοια της απόδειξης στα Μαθηματικά.

Το έργο του Fourier παίζει σημαντικό ρόλο στα Μαθηματικά και στη Φυσική. Οι συναρτήσεις δεν ήταν υποχρεωτικό πλέον να φέρονται “καλά” για να διευκολύνουν τους μαθηματικούς (Struik, D. 1982). Το 1829 ο Dirichlet μελετώντας το έργο του Fourier οδηγείται στο να διατυπώσει ένα γενικό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης (Πατρώνης, Τ., Σπανός, Δ., 1996). Το 1837 διατυπώνει ένα πολύ ευρύ ορισμό: αν μια μεταβλητή γοχετίζεται με μια μεταβλητή x έτσι ώστε το y να παίρνει μία μοναδική τιμή, σύμφωνα με ένα κανόνα, τότε το y είναι μία συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Ο ορισμός αυτός βρίσκεται πολύ κοντά στη σύγχρονη αντίληψη της αντιστοίχισης των στοιχείων δύο συνόλων, αλλά οι έννοιες του συνόλου και του πραγματικού αριθμού δεν είχαν ακόμη καθιερωθεί. Ο Dirichlet για να δείξει την τελείως αυθαίρετη φύση του κανόνα αντιστοίχισης πρότεινε μία πολύ ‘άσχημα συμπεριφερόμενη’ συνάρτηση: $y=c$ όταν ο x είναι άρρητος και $y=d$ όταν ο x είναι ρητός. Η συνάρτηση αυτή είναι τόσο ‘παθολογική’ ώστε για καμιά τιμή του x δεν είναι συνεχής. Με τη συμβολή του Dirichlet η έννοια της συνάρτησης άρχισε να χειραφετείται σταθερά από την αντίληψη του Euler ότι εκφράζεται με μια *cuncta quaecunque libero manus ductu de scripta* (οποιαδήποτε καμπύλη που γράφεται με ελεύθερο χέρι).

Ο Riemann προχώρησε ακόμη και έδωσε ένα παράδειγμα συνάρτησης που είναι συνεχής αλλά δεν έχει παράγωγο. Οι μαθηματικοί δεν έπαιρναν στα σοβαρά τέτοιες συναρτήσεις και τις αποκαλούσαν παθολογικές. Η σύγχρονη ανάλυση δείχνει πόσο φυσικές είναι αυτές και πόσο ο Riemann είχε διεισδύσει σε ένα θεμελιώδες πεδίο των Μαθηματικών (Struik, D. 1982).

Το 1861 ο Weierstrass έδωσε επίσης ένα παράδειγμα συνάρτησης που είναι συνεχής χωρίς να έχει παράγωγο σε κανένα σημείο. Ένα τέτοιο παράδειγμα είχε δώσει και ο Bolzano το 1830 αλλά η κατασκευή ήταν γεωμετρική, χωρίς αναλυτική έκφραση. Ο ίδιος αμφισβήτησε την εγκυρότητά της γεωμετρικής εποπτείας στην Ανάλυση οπότε το παράδειγμα έμεινε για καιρό στην αφάνεια (Πατρώνης, Τ., Σπανός, Δ., 1996). Το

παράδειγμα του Weierstrass ισοδυναμεί με παράδειγμα συνεχούς καμπύλης η οποία δεν έχει εφαπτομένη σε κανένα σημείο κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη διαίσθησή μας. Το παράδειγμα αυτό επέφερε ένα ισχυρό κτύπημα στην συνήθεια που υπήρχε μέχρι τότε να χρησιμοποιείται η γεωμετρική διαίσθηση στην μελέτη της μαθηματικής ανάλυσης

Το πρώτο μισό του 19^{ου} αιώνα έχουμε προσπάθεια ορισμού της συνάρτησης από τους Lobatchevsky και Cournot, Ο πρώτος το 1834 (στο έργο του *Για την σύγκλιση των τριγωνομετρικών σειρών*) έγραψε:

Η γενική θεώρηση απαιτεί να ονομαστεί 'συνάρτηση του x ' ένας αριθμός ο οποίος δίνεται για κάθε x και ο οποίος αλλάζει βαθμιαία με το x . Η τιμή της συνάρτησης μπορεί να δίνεται ή από μία αναλυτική έκφραση είτε από μία συνθήκη η οποία παρέχει ένα μέσο ελέγχου όλων των αριθμών και επιλογής ενός εξ' αυτών ή τέλος η εξάρτηση μπορεί να υπάρχει αλλά παραμένει άγνωστη.

Ο Cournot στο *Theorie des fonctions* το 1841 έγραψε:

Αντιλαμβανόμαστε ότι ένα μέγεθος μπορεί να εξαρτάται από ένα άλλο χωρίς αυτή η εξάρτηση να είναι τέτοιας φύσης ώστε, να μπορεί να εκφράζεται με ένα συνδυασμό πρόσημων της άλγεβρας (Χασάπης, Δ., 2009).

Το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα βλέπουμε πως η 'φυσιογνωμία' της έννοιας της συνάρτησης προέκυψε από τη γεωμετρία και τη νεότερη άλγεβρα και ήταν ουσιαστικά μια γενίκευση της έννοιας του μετασχηματισμού. Στο άρθρο του R. Dedekind 'Η Φύση και το Νόημα των Αριθμών', 1887, δίνεται ένας ορισμός μέσω της έννοιας του μετασχηματισμού και δεν αναφέρεται η λέξη 'συνάρτηση'. Αντί αυτής χρησιμοποιεί την φράση 'μετασχηματισμός ενός συστήματος S ' η οποία σημαίνει την πιο γενική έννοια της συνάρτησης (Πατρώνης, Α., 1995). Ο ορισμός του Dedekind απέχει από τον ορισμό του Euler και των συγχρόνων του μαθηματικών του 18^{ου} αιώνα.

Το 1870 ο Hankel έδειξε πως οι συναρτήσεις που εκφράζονται καθολικά δεν έχουν κοινές ιδιότητες και θεώρησε τον ορισμό του Euler εικονικό. Τον ίδιο χρόνο παρουσίασε τον παρακάτω ορισμό για την συνάρτηση "...Μια σχέση του x προς y είναι συνάρτηση αν κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μέσα σ' ένα διάστημα μια συγκεκριμένη τιμή του y , είτε το y εξαρτάται σε ολόκληρα διαστήματα από τον ίδιο κανόνα του x είτε όχι, είτε η εξάρτηση από τις μαθηματικές διαδικασίες μπορεί να αποτυπωθεί είτε όχι...". Ο Hankel παρατήρησε ότι ο ορισμός του Dirichlet αφορούσε στις συνεχείς συναρτήσεις. Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και αρχές του 20^{ου} επικράτησε ο γενικός ορισμός της συνάρτησης.

Η σύγχρονη μαθηματική λογική έδειξε έμφυτες δυσκολίες στη γενίκευση της έννοιας της συνάρτησης. Ο Weyl το 1927 στην εργασία του *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών), παρατήρησε ότι: "Κανείς δεν μπορεί να ερμηνεύσει τι είναι η συνάρτηση ... μια συνάρτηση f θεωρείται γνωστή, αν με οποιοδήποτε τρόπο που ορίζεται σύμφωνα μ' ένα κανόνα, κάθε αριθμός x αντιστοιχεί στον αριθμό y ... αν ισχύει αυτό που λέμε πως το y είναι η τιμή της συνάρτησης f σε x , κείνο το x ... Έτσι, δύο διαφορετικά ορισμένες συναρτήσεις είναι ακριβώς ίδιες αν, για όλες τις πιθανές τιμές του x , οι αντίστοιχες τιμές του y συμπίπτουν" (Χόρτη, Α., 2010).

Ακόμη και μέχρι τις πρώτες δεκαετίες του εικοστού αιώνα η συζήτηση περί της ακριβούς φύσης της μεταβλητής και της συνάρτησης ήταν ακόμη ζωντανή. Οι γνώμες που εκφράστηκαν από τον Frege το 1904 στο άρθρο του "Τι είναι συνάρτηση;"

ρίχνουν άπλετο φως στο τι θα γινόταν εκείνο τον καιρό: Ακόμη και τώρα είναι υπό αμφισβήτηση τι σημαίνει η λέξη “συνάρτηση” στην Ανάλυση, μολονότι είναι σε συνεχή χρήση για πολύ καιρό. Σε ορισμούς, βρίσκουμε δυο εκφράσεις συνεχώς επαναλαμβανόμενες, κάποιες φορές σε συνδυασμό και κάποιες φορές χωριστά: “μαθηματική έκφραση” και “μεταβλητή”. Παρατηρήσαμε επίσης και ποικίλη χρήση: το όνομα “συνάρτηση” δίνεται άλλες φορές σ’ αυτό που καθορίζει τον τρόπο εξάρτησης και άλλες στην εξαρτημένη μεταβλητή... είναι οι μεταβλητές της Ανάλυσης μεταβλητοί αριθμοί;... τι παραμένει ίδιο όταν ένας αριθμός ποικίλει; Τίποτε... Συνεπώς δεν υπάρχουν μεταβλητοί (Sfard, A.).

Η μαθηματική κοινότητα άρχισε να προσεγγίζει την έννοια συνολοθεωρητικά με αφετηρία μια ιδέα του Dirichlet για αυθαίρετη αντιστοιχία το 1837, συγκεκριμένα μια αντιστοιχία όχι κατ’ ανάγκη βασισμένη σε αλγοριθμική εξάρτηση ανάμεσα στο x και y και κατέληξε στο σύνολο διατεταγμένων ζευγών των Bourbaki (Sfard, A.). Ο ορισμός που έδωσαν οι Bourbaki για την συνάρτηση ήταν ο εξής: “Έστω E και F δυο σύνολα, διακριτά ή όχι. Μια σχέση μεταξύ μιας, μεταβλητής x του E και μιας μεταβλητής y του F ονομάζεται συναρτησιακή σχέση στο F ή συναρτησιακή σχέση του E προς το F , εάν για οποιοδήποτε x ανήκει στο E , υπάρχει ένα και μόνο στοιχείο y του F , το οποίο συνδέεται με το x μέσω της δεδομένης σχέσης (Χασάπης, Δ., 2009).

Το 1911 ο Giuseppe Peano στο έργο του *Sul la definition di funzione*, *Atti dei Linzei* (πάνω στον ορισμό της συνάρτησης) θεωρούσε ότι η έννοια της συνάρτησης θα έπρεπε να αναχθεί στην έννοια της σχέσης, εισήγαγε την έννοια της μονοσήμαντης σχέσης και υποστήριξε πως οι συναρτήσεις είναι μονοσήμαντες σχέσεις. Ο Hausdorff το 1913 στο βιβλίο του *Grundzuge der Mengenlehre* εξέφρασε την ιδέα ότι μπορεί να ορισθεί η συνάρτηση μιας μεταβλητής μέσω της έννοιας του διατεταγμένου ζεύγους. Ο ίδιος το 1914 διευκρίνισε ότι το διατεταγμένο ζεύγος σχετίζεται με δύο αντικείμενα a και b , που επιλέχτηκαν αυθαίρετα. Αυτή η “ατέλεια” αντιμετωπίστηκε το 1920 από τον Kuratowski $[(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}]$ (Σπύρου, Π., Γαγάτσης, Α.).

Κατά τους Stewart and Tall (1977), ο σύγχρονος ορισμός που δίνεται στα βιβλία είναι της μορφής: Έστω δύο τυχαία σύνολα X και Y . Ονομάζουμε συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ ένα υποσύνολο f του συνόλου $X \times Y$ τέτοιο ώστε: Αν $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$ (x,y) $\in f$ και το σημείο y είναι μοναδικό, με άλλα λόγια αν $x \in X$ και $y, z \in Y$ είναι τέτοια ώστε αν $(x,y) \in f$ και $(x,z) \in f$ έπεται ότι $y=z$ (Σπύρου, Π., Γαγάτσης, Α.).

Ο Kuratowski το 1961 δίνει ένα παρόμοιο ορισμό: Έστω δύο σύνολα X και Y . Συνάρτηση, της οποίας οι μεταβλητές διατρέχουν το σύνολο X , (πεδίο ορισμού), και της οποίας οι τιμές ανήκουν στο πεδίο τιμών Y , είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα μόνο y τέτοιο ώστε $y=f(x)$ (Σπύρου, Π., Γαγάτσης, Α.).

Μελετώντας την εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης θα μπορούσαμε να τη χωρίσουμε σε τρεις περιόδους. Η πρώτη αρχίζει από το 2000 π.Χ. όπου στους πίνακες των Βαβυλωνίων υπάρχουν περιπτώσεις μελέτης εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτήτων χωρίς όμως τον προσδιορισμό της έννοιας των μεταβλητών και της συνάρτησης, και τελειώνει το 14^ο αιώνα με τη διατύπωση για πρώτη φορά της γενικής έννοιας αυτής με γεωμετρικό ή μηχανικό τρόπο και της σχέσης μεταξύ δύο ποσοτήτων με γράφημα (ευθύγραμμες συντεταγμένες). Η δεύτερη περίοδος ξεκινάει το 16^ο αιώνα και τελειώνει στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Την περίοδο αυτή έχουμε αρχικά τη διατύπωση

αναλυτικών εκφράσεων με τη βοήθεια άπειρων σειρών. Αργότερα η ερμηνεία των συναρτήσεων σαν αναλυτικές εκφράσεις κρίθηκε ανεπαρκής και το 19^ο αιώνα δόθηκε ένας γενικός ορισμός για τη συνάρτηση. Η δεύτερη υπήρξε και η περίοδος που γέννησε τον κλασικό ορισμό της συνάρτησης. Η τρίτη περίοδος χαρακτηρίζεται από το συνολοθεωρητικό ορισμό των Bourbaki το 1939. Σε αυτή την περίοδο έχουμε τη δημιουργία του σύγχρονου ορισμού της συνάρτησης.

Κεφάλαιο 3

Μεθοδολογία

Η έρευνά μας είχε σκοπό να διερευνήσει τα εξής ερωτήματα:

Α. Σε ποιο βαθμό οι μαθητές της Γ΄ γυμνασίου κατανοούν την έννοια της μεταβλητής;

Β. Με ποιο τρόπο οι μαθητές κατανοούν ένα πρόβλημα, το ρόλο του αγνώστου; Έχουν αποκτήσει την ικανότητα να κατασκευάζουν κατάλληλη εξίσωση, σύστημα εξισώσεων ή ανίσωση, για να επιλύσουν το πρόβλημα;

Γ. Σε ποιο βαθμό οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια της παραμέτρου και τη σχέση μεταβλητής – παραμέτρου;

Για τον σκοπό της έρευνας, όπως έχει ήδη αναφερθεί, κατασκευάστηκαν 4 φύλλα με ερωτήσεις, τα Α, Α2, Β, Γ, για να απαντηθούν από τους μαθητές σε 4 διδακτικές ώρες. Τα ερωτηματολόγια Α, Α2 σκοπό είχαν να μας βοηθήσουν να απαντήσουμε στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, το τρίτο ερωτηματολόγιο περιλάμβανε 3 προβλήματα και σκοπό είχε να μας βοηθήσει να απαντήσουμε στο δεύτερο ερευνητικό μας ερώτημα και το τέταρτο ερωτηματολόγιο περιλάμβανε 9 ερωτήσεις για να μας βοηθήσει να απαντήσουμε στο τρίτο ερευνητικό μας ερώτημα.

Οι απαντήσεις των μαθητών μελετήθηκαν, αξιολογήθηκαν και στη συνέχεια ζητήθηκε από κάποιους μαθητές να δώσουν συνεντεύξεις για να αντιληφθούμε τον τρόπο σκέψης και το βαθμό κατανόησης τους γύρω από τα θέματα που ερευνήσαμε.

3.1 Οι συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 24 μαθητές ενός τμήματος Γ΄ γυμνασίου, 2 από αυτούς είχαν το πρόβλημα της δυσλεξίας και συμμετείχαν με δική τους επιθυμία. Το τμήμα είχε διδάσκοντα επί 3 χρόνια τον διεξάγοντα την έρευνα. Η διδασκαλία ήταν τυπική σύμφωνα με το επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα και τα σχολικά εγχειρίδια.

Οι απαντήσεις των μαθητών στα ερωτηματολόγια και οι συνεντεύξεις τους αποτέλεσαν το ερευνητικό υλικό αυτής της μελέτης.

3.2 Πλαίσιο έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στις αρχές Μάη του 2013 σε ένα Γυμνάσιο του Κορωπίου στην Ανατολική Αττική.

Στην πρώτη φάση διατέθηκαν στους μαθητές 4 διδακτικές ώρες, κατανεμημένες σε 4 διαδοχικές μέρες, για να απαντήσουν στα ερωτηματολόγια, στις ώρες του μαθήματος των μαθηματικών.

Τα ίδια ερωτηματολόγια δόθηκαν σε όλους τους μαθητές του τμήματος, ένα ερωτηματολόγιο κάθε φορά. Οι μαθητές αυτοί διαφοροποιούνται ως προς την επίδοσή τους στο μάθημα των μαθηματικών σε 3 ομάδες:

- (α) Καλοί 6 μαθητές
- (β) Μέτριοι 5 μαθητές
- (γ) Χαμηλής επίδοσης 14 μαθητές

Το επίπεδο των μαθητών της ομάδας (γ) είναι πολύ χαμηλό, όσον αφορά στις γνώσεις τους στα Μαθηματικά και στην αντιληπτική τους ικανότητα.

Ζητήθηκε να γράψουν το όνομά τους στα φυλλάδια για να εντοπίσουμε τους μαθητές των οποίων οι απαντήσεις θα παρουσίαζαν ερευνητικό ενδιαφέρον. Τονίστηκε επίσης ότι τα στοιχεία της έρευνας θα χρησιμοποιούνταν για την συγκεκριμένη έρευνα και ότι οι απαντήσεις τους δεν είχαν σκοπό την αξιολόγησή τους.

3.3 Η διαδικασία της έρευνας και η συλλογή δεδομένων

Τα φύλλα των ερωτήσεων περιλαμβάνουν ερωτήσεις στις ενότητες:

1. Τα ερωτηματολόγια **A** και **A2** περιείχαν ερωτήσεις σχετικές με την έννοια της μεταβλητής.
Το φυλλάδιο **A** περιείχε 7 ερωτήσεις, όπου κάποιες από αυτές περιείχαν υποερωτήματα.
Το φυλλάδιο **A2** περιείχε 11 ερωτήσεις που ζητούσαν από τους μαθητές να γράψουν τις παραστάσεις, τις εξισώσεις ή τα συστήματα που προέκυπταν από προβλήματα ή εκφράσεις. Στο ερωτηματολόγιο αυτό οι μαθητές έπρεπε να “μεταφράσουν” από την κοινή καθομιλουμένη γλώσσα στην αλγεβρική με την βοήθεια μεταβλητών.
2. Με το ερωτηματολόγιο **B** τέθηκαν στους μαθητές 3 **προβλήματα**.
Στο **πρώτο πρόβλημα** οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 και να το επιλύσουν. Ο στόχος ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές ένα πρόβλημα εκφρασμένο λεκτικά, στη συνέχεια να κατασκευάσουν το σύστημα που προκύπτει και να το επιλύσουν.
Το **δεύτερο πρόβλημα** επινοήθηκε από τον διεξάγοντα την έρευνα για τους σκοπούς της συγκεκριμένης έρευνας. Το πρόβλημα είναι γεωμετρικό αλλά μπορεί να αντιμετωπισθεί μόνο με εξίσωση και μάλιστα β' βαθμού. Η ιδιαιτερότητά του και ως εκ τούτου και η δυσκολία του οφείλεται στο ότι ο μαθητής-λύτης πρέπει να εκφράσει το εμβαδόν ενός ορθογώνιου

παραλληλογράμμου με τον γνωστό τύπο (μήκος)×(πλάτος) και να το εξισώσει με μία αλγεβρική παράσταση που και αυτή εκφράζει το ίδιο εμβαδόν.

Το πρόβλημα αυτό δόθηκε για να εξετάσουμε αν οι μαθητές μπορούν να δουν το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο, εν προκειμένω το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλογράμμου, εκφρασμένο με δύο διαφορετικές αλγεβρικές σχέσεις, οπότε να σχηματίσουν την κατάλληλη εξίσωση, να την επιλύσουν για να υπολογίσουν το πλάτος και το εμβαδόν. Στο γεωμετρικό αυτό πρόβλημα τέθηκε το μήκος μιας πλευράς του ορθογώνιου $2+\chi$, οπότε εξετάσαμε αν οι μαθητές σκέφτηκαν να θέσουν τον περιορισμό $2+\chi>0$.

Στο **τρίτο πρόβλημα**, που περιλάμβανε δύο ερωτήματα, ζητήθηκε από τους μαθητές να σχηματίσουν μία εξίσωση που προκύπτει από τη λεκτική διατύπωση του προβλήματος. Στο δεύτερο ερώτημα ζητήθηκε με έμμεσο τρόπο από τους μαθητές να επιλύσουν την εξίσωση που σχημάτισαν από το κείμενο του προβλήματος.

Στόχος μας ήταν να εξετάσουμε αν θα μπορούσαν να αντιληφθούν οι μαθητές ότι για να δώσουν απάντηση στο δεύτερο μέρος του προβλήματος έπρεπε να επιλύσουν την κλασματική εξίσωση που προέκυψε από το πρώτο ζητούμενο.

3. Το τελευταίο **ερωτηματολόγιο Γ**, το τέταρτο δηλαδή της έρευνάς μας, περιείχε 9 ερωτήσεις, με τη βοήθεια των οποίων ερευνήσαμε το βαθμό κατανόησης, από τους μαθητές, της έννοιας της παραμέτρου και τη σχέση της με την έννοια της μεταβλητής.

Οι ερωτήσεις αυτές έχουν πηγή τα στοιχεία της αναλυτικής γεωμετρίας που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της γ' γυμνασίου. Οι ερωτήσεις 6 και 7 είχαν στόχο να προβληματίσουν τους μαθητές για τον ρόλο των μεταβλητών και των παραμέτρων και για την αλλαγή των ρόλων τους.

Επίσης όλες σχεδόν οι ερωτήσεις τέθηκαν για να προβληματιστούν οι μαθητές για τις διάφορες αναπαραστάσεις κάποιων γεωμετρικών αντικειμένων π.χ. τι σημαίνει γραφικά η επίλυση μιας εξίσωσης.

Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν από ένα κάθε φορά και πριν αρχίσουν να απαντούν οι μαθητές διευκρινίστηκε ο σκοπός της έρευνας και τους ζητήθηκε να γράψουν το όνομά τους για να δώσουν συνέντευξη αυτοί, που οι απαντήσεις τους θα παρουσίαζαν ερευνητικό ενδιαφέρον.

3.4 Τα ερευνητικά εργαλεία

3.4.1 Τα ερωτηματολόγια

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α (1^η διδακτική ώρα)

ΤΑΞΗ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΝΟΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

Α. ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

1. Να γράψετε με γράμματα και μαθηματικά σύμβολα τις παρακάτω έννοιες:

- α. Ένα τυχαίο αριθμό
- β. Ένα άρτιο αριθμό
- γ. Ένα περιττό αριθμό
- δ. Την διαφορά δύο αριθμών
- ε. Δύο διαδοχικούς αριθμούς
- στ. Δύο άρτιους αριθμούς
- ζ. Τον κύβο ενός αριθμού
- η. Τον όγκο ενός κύβου πλευράς α
- θ. Το τριπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά δύο.

2. Οι αριθμοί χ, ψ, ω είναι θετικοί και οι αριθμοί α, β, γ είναι αρνητικοί. Να τοποθετήσετε τους επόμενους αριθμούς στον επόμενο πίνακα:

$\chi + \psi, \chi + \alpha, \alpha + \beta + \gamma, -\alpha - \beta, \alpha - \beta, \chi - \psi, -\chi - \omega, -\alpha + \chi, \alpha^2, \alpha^2 + \gamma^2, (\alpha + \chi)^2, \alpha + 2\beta, -2\beta - 3\gamma, 2\beta + 5\alpha$

Θετικοί	Αρνητικοί	Δεν γνωρίζω
---------	-----------	-------------

3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\chi, 2\chi, 3\chi, 4\chi, 5\chi$, όπου χ είναι τυχαίος μη μηδενικός αριθμός.

4. Να γράψετε ποιοί από τους παρακάτω αριθμούς είναι θετικοί, ποιοί αρνητικοί και τέλος για ποιούς δεν είστε βέβαιοι:

$4\chi^2, (-\chi)^2, \chi - 4\psi, 2\chi + 1, (\chi - 3\psi)^2, -\chi, -\chi + \psi, -\chi^2, 1 - 2\chi, \chi^2 + \psi^2, \chi^2 - \psi^2, \chi^2 + 2, \chi + \chi^2, -3\chi^3, \chi^3.$

Θετικοί	Αρνητικοί	Δεν γνωρίζω
---------	-----------	-------------

5. Ο αριθμός $-(-(-\chi))$ είναι θετικός. Τι συμπεραίνετε για τον χ ;

6. Ο αριθμός $0,1\chi$ είναι μεγαλύτερος από τον χ . Τι συμπεραίνετε για τον χ ;

7. Σε κάποιο στρατόπεδο οι στρατιώτες είναι εικοσαπλάσιοι από τους αξιωματικούς. Αν συμβολίσουμε με α το πλήθος των αξιωματικών και με σ το πλήθος των στρατιωτών, ποιά σχέση συνδέει το α με το σ ;

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α2

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (2η διδακτική ώρα)

Να γράψετε τις παραστάσεις, τις εξισώσεις, τις ανισώσεις ή τα συστήματα που προκύπτουν από τα παρακάτω προβλήματα ή εκφράσεις.

1. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι μικρότερο του 5.
2. Το γινόμενο δύο αριθμών ισούται με τη διαφορά τους.
3. 40 οχήματα έχουν 140 ρόδες. Πόσα είναι με 2 τροχούς και πόσα με 4 τροχούς;
4. Το τετράγωνο ενός αριθμού αυξημένο κατά 6.
5. Ο κύβος ενός αριθμού μειωμένος κατά το τετράγωνό του.
6. Σε ένα τρίγωνο το άθροισμα των μηκών της βάσης και του ύψους του είναι 10. Να γράψετε τον τύπο του εμβαδού, αν ονομάσουμε τη βάση x .
7. Να εκφράσετε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που το μήκος του είναι κατά 2 μεγαλύτερο από το πλάτος του.
8. Να γράψετε την περίμετρο ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές α και β .
9. Το άθροισμα 3 διαδοχικών αριθμών ισούται με 9.
10. Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3 είναι μεγαλύτερο του αριθμού αυτού.
11. Σε ένα θέατρο πωλούνται εισιτήρια των 12 ευρώ και των 16 ευρώ. Πουλήθηκαν 55 εισιτήρια και εισπράχθηκαν 800 ευρώ. Να εκφράσετε με εξίσωση ή με σύστημα εξισώσεων τα παραπάνω.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Β (3^η διδακτική ώρα)

ΤΑΞΗ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΝΟΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

Β. ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

1. Ο Μιχάλης, τον Απρίλη, μίλησε 150 λεπτά από το σταθερό και το κινητό του. Κάθε λεπτό ομιλίας κοστίζει 0,2 Ε από το κινητό και 0,05Ε από το σταθερό. Οι κλήσεις αυτές κόστισαν 12Ε (χωρίς το πάγιο). Πόσα λεπτά μίλησε από το σταθερό και πόσα από το κινητό;
2. Το μήκος ενός ορθογωνίου είναι 3 και το πλάτος του $2+x$. Το εμβαδό του είναι $7x+2x^2$. Να βρείτε το πλάτος και το εμβαδόν του ορθογωνίου.
3. Να σχηματίσετε την εξίσωση που προκύπτει από το πρόβλημα: Το άθροισμα δύο αντίστροφων αριθμών ισούται με την μονάδα. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Γ (4^η διδακτική ώρα)

ΤΑΞΗ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΝΟΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ

1. Τι σημαίνουν γεωμετρικά οι εξισώσεις: $\psi = \alpha\chi + \beta$ και $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$;
2. Δίνονται οι συναρτήσεις $\psi = \alpha_1\chi + \beta_1$ και $\psi = \alpha_2\chi + \beta_2$. Πότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες;
3. Στην εξίσωση $\alpha\chi + \beta = 0$ ο αριθμός α δεν είναι 0 και ο β "πλησιάζει" στο 0. Τι συμβαίνει με τη λύση της εξίσωσης;
4. Στην συνάρτηση $\psi = \alpha\chi^2$ μεταβάλλουμε τον αριθμό α . Τι συμβαίνει με τη γραφική παράσταση;
5. (i) Στην εξίσωση $\alpha\chi^2 + \gamma = 0$, ο γ είναι σταθερός αρνητικός αριθμός και ο α είναι θετικός, πως μεταβάλλονται οι ρίζες της εξίσωσης στον άξονα χ' , όταν μεταβάλλεται ο α ; (ii) Μπορείτε να ερμηνεύσετε μέσω της γραφικής παράστασης γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη όταν $\alpha = \gamma$;
6. Κάποιος καθηγητής έγραψε στον πίνακα τον τύπο $\psi = \alpha\chi + \beta$ και έδωσε σε κάθε μαθητή του διαφορετική συνάρτηση ώστε ο κάθε μαθητής να σχεδιάσει διαφορετική ευθεία. Πως το έκανε αυτό;
7. Στην προηγούμενη περίπτωση ποιές ήταν οι μεταβλητές για τον καθηγητή και ποιές για τους μαθητές;
8. Να εκφράσετε, με τη βοήθεια μιας εξίσωσης, τις παρακάτω εξισώσεις: $2 - 3\chi = 2\chi - 3$, $4 - 5\chi = 4\chi - 5$, $13 - 2\chi = 13\chi - 2$ και να επιβεβαιώσετε ότι έχει τις ίδιες λύσεις με τις προηγούμενες.
9. Δίνονται οι ευθείες $\psi = \alpha\chi + \beta$ και $\psi = \beta\chi + \alpha$, με α διαφορετικό από το β .
(i) Να βρεθεί το κοινό τους σημείο. (ii) Αν μεταβάλλουμε τα α και β βρίσκουμε και διαφορετικά σημεία τομής. Αυτά τα σημεία που βρίσκονται;

3.5 Οι συνεντεύξεις

Οι συνεντεύξεις αποτελούν την δεύτερη φάση της εργασίας μας. Πραγματοποιήθηκαν σε διάστημα δύο ημερών, στα μέσα Μαΐου, μετά το πέρας των μαθημάτων στο χώρο του σχολείου.

Επελέγησαν μαθητές των οποίων οι απαντήσεις είχαν ερευνητικό ενδιαφέρον ή παρουσίαζαν κάποιες χαρακτηριστικές δυσκολίες στην κατανόηση και αντιμετώπιση κάποιων καταστάσεων.

Οι ερωτήσεις ήταν ανοικτού τύπου, εξειδικευμένες για κάθε μαθητή και για κάθε ερώτηση. Σκοπός ήταν να διερευνηθούν οι παρανοήσεις των μαθητών για τον καθένα χωριστά, η ιδιαιτερότητα της σκέψης καθενός, και να διδαχτούν με την συζήτηση κατά τη διάρκεια της συνέντευξης.

Οι πληροφορίες που προέκυψαν από τις συνεντεύξεις χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των συμπερασμάτων και την ομαδοποίησή τους.

1. Βασίλης Τ

ΕΡΩΤΗΣΗ Α3. Έγραψε: $x > 2x > 3x > 4x > 5x$

Ερ: Γιατί σημείωσες αυτή τη διάταξη, θα μπορούσε να ήταν και αλλιώς δηλαδή να διακρίνεις περιπτώσεις;

Απ: Δεν σκέφτηκα να διακρίνω περιπτώσεις.

Ερ: Γιατί θεώρησες ότι ο x είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς;

Απ: Εννοούσα το αντίθετο (λάθος φορά συμβόλου)

Ερ: Αν ο x ήταν αρνητικός;

Απ:

Ο μαθητής δεν έλαβε υπόψη ότι το σύμβολο x παριστάνει μεταβλητή. Για το λόγο αυτό δεν πήρε περιπτώσεις $x > 0$ και $x < 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ Β2. Έγραψε: $3 \cdot 2 + x = 7x + 2x^2$ και κατόπιν την έσβησε, κάτω από τις μουτζούρες φάνηκαν λανθασμένες πράξεις, έπειτα μια κενή γραμμή, τέλος το σωστό: $6 + 3x = 7x + 2x^2$, αλλά και αυτή η εξίσωση σβησμένη.

Ερ: Γιατί σχημάτισες την εξίσωση και μετά την έσβησες;

Απ: Δεν μπορούσα να βρω τρόπο να την λύσω.

Ερ: Δεν είδες ότι είναι 2^{ου} βαθμού;

Απ: Έκανα λάθος στις πράξεις και γι αυτό τα έσβησα.

Ερ: Μα στην τελευταία σου γραμμή (σβησμένη) είδα ότι έγραψες σωστά την εξίσωση, παρόλα αυτά την έσβησες και αυτή. Γιατί;

Απ: Μπλόκαρα ...

Στο ερώτημα Β2 δυσκολεύτηκε επειδή είχε να κατανοήσει το πρόβλημα, έπειτα να σχηματίσει και να ασχοληθεί με την επίλυσή της. Δεν αναγνώρισε ότι είναι μία τυπική

2^{ου} βαθμού με όρους και στα δύο μέλη. Έχει διαπιστωθεί ότι οι μαθητές αρχίζουν με διακρίνουσα, επειδή τα περισσότερα βιβλία δίνουν συνήθως την εξίσωση στην τελική μορφή. Έτσι οι μαθητές συνήθως δεν “τακτοποιούν” τους όρους της εξίσωσης για να τη φέρουν στη μορφή $ax^2 + bx + c = 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ Β3. Έγραψε σωστά την εξίσωση και χωρίς να την λύσει απάντησε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί.

Ερ: Βασίλη σχημάτισες σωστά την εξίσωση. Πως κατάλαβες ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί; Σκέφθηκες κάτι ή το έγραψες στην τύχη;

Απ: Έκανα κάποιες δοκιμές και δεν έβγαине. Σκέφθηκα ότι έτσι θα ήτανε για όλους τους αριθμούς!

Ερ: Δηλαδή;

Απ: Πρόσθετα ζευγάρια αντίστροφων αριθμών και τα αθροίσματα έβγαίναν πάνω από 1, οπότε ...

Ο μαθητής δεν δυσκολεύτηκε στο σχηματισμό της εξίσωσης, όμως δεν αναγνώρισε ότι είναι μία απλή κλασματική με αποτέλεσμα να κάνει κάποιες δοκιμές και αυθαίρετα να απαντήσει ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί.

Η έλλειψη αναπτυγμένης αλγεβρικής σκέψης και η διατύπωση-ερώτηση του προβλήματος: υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί;, λειτούργησε αποτρεπτικά για τον συγκεκριμένο μαθητή να κατασκευάσει την εξίσωση, γι’ αυτό κατέφυγε στη μέθοδο δοκιμής-λάθους.

ΕΡΩΤΗΣΗ Γ9. Δοκίμασε να επιλύσει το σύστημα με αντίθετους συντελεστές, πολλαπλασίασε την πρώτη εξίσωση με β και την δεύτερη με $-\alpha$, έγραψε σωστά το σύστημα που προέκυψε, διέγραψε τους αντίθετους όρους, χωρίς να κάνει πρόσθεση και τα έσβησε όλα.

Ερ: Βασίλη γιατί δεν συνέχισες την επίλυση του συστήματος;

Απ: Μπερδεύτηκα γιατί δεν είχε αριθμούς και δεν ήξερα τι να κάνω με τα γράμματα.

Ερ: Για το δεύτερο ερώτημα τι έχεις να πεις. Είδα ότι δεν ασχολήθηκες.

Απ: Αν αλλάζαμε το α θα άλλαζε και το β . Αν αλλάξει το α που είναι παράμετρος, αλλάζει και η ευθεία.

Στο Γ9 σχημάτισε το σύστημα σωστά, αλλά λόγω των παραμέτρων σταμάτησε γιατί όπως δήλωσε δεν είχε αριθμητικούς συντελεστές.

Η έννοια της παραμέτρου δεν είναι κατανοητή στους μαθητές της Γ’ γυμνασίου. Φαίνεται να την προσεγγίζουν διαισθητικά.

2. Μαριτίνα

Στο ερώτημα Α.2 έγραψε ότι η παράσταση $2\beta + 5\alpha$ είναι θετικός αριθμός, με την προϋπόθεση ότι οι αριθμοί α, β είναι αρνητικοί.

Ερ: Μαριτίνα, γιατί έγραψες $2\beta + 5\alpha > 0$, πως κατάλαβες ότι ο αριθμός $2\beta + 5\alpha$ είναι θετικός;

Απ: Επειδή $5\alpha > 2\beta$...

Ερ: Τι εννοείς;

Απ: Αφού σε μεγαλύτερο αριθμό προσθέτουμε μικρότερο αρνητικό, το αποτέλεσμα θα είναι θετικός!

Ερ: Είναι και οι δύο αρνητικοί! Το άθροισμα αρνητικών τι είναι πάντα;

Απ: ... αρνητικός

Στο ερώτημα Α.3 έγραψε: $\chi < 2\chi < 3\chi < 4\chi < 5\chi$.

Ερ: Αν ο αριθμός χ ήταν αρνητικός πάλι την ίδια διάταξη θα έβαζες;

Απ: Όχι! Το σκέφτηκα μετά!

Η μαθήτρια δεν έχει κατανοήσει την έννοια της μεταβλητής όπως φάνηκε στις απαντήσεις στα ερωτήματα Α2 και Α3. Ο ισχυρισμός της ότι $5\alpha > 2\beta$ άρα $5\alpha + 2\beta > 0$ είναι δηλωτικός.

Στο ερώτημα Β.1 έγραψε $120 = 0,02 \text{ ευρώ} + 0,05 \text{ ευρώ}$

Ερ: Γιατί έγραψες την προηγούμενη ισότητα;

Απ: Ήθελα να γράψω $\chi + \psi = 150$ και $12 = 0,2\chi + 0,05\psi$, αλλά δεν μου ήρθε...

Στο ερώτημα Β.2 έγραψε $6 + 3\chi + 7\chi + 2\chi^2 = 6 + 10\chi + 2\chi^2$, πήρε διακρίνουσα, την υπολόγισε και έπειτα σταμάτησε

Ερ: Η εξίσωση που είναι;

Απ: Δεν ήξερα πως να τα ονομάσω...

Ερ: Ποιά;

Απ: Το μήκος και το πλάτος ... Δεν μπόρεσα να κάνω κάτι άλλο ...

Η μαθήτρια δεν εξίσωσε αλλά πρόσθεσε κατά μέλη τις δύο παραστάσεις που εκφράζουν το ίδιο εμβαδόν, ακολούθως σχημάτισε τη διακρίνουσα. Φαίνεται ότι δεν μπορεί να αντιμετωπίσει επίλυση προβλήματος. Χαρακτηριστικά είπε ότι δεν ήξερε πώς να ονομάσει το μήκος και το πλάτος, ενώ αυτά ανήκουν στα δεδομένα του προβλήματος και είναι το 3 και το $\chi + 2$.

Στο ερώτημα Γ.1 απάντησε ότι: οι εξισώσεις αυτές είναι παράλληλες

Ερ: Γιατί θεωρείς ότι οι γραμμές αυτές είναι παράλληλες;

Απ: Επειδή έχουν το ίδιο α

Ερ: Είναι και οι δύο εξισώσεις ευθείας;

Απ: Όχι ... Έκανα λάθος ...

Ερ: Τι φανερώνει η καθεμία;

Απ: Ευθεία και παραβολή!

Βρισκόμαστε στα κεφάλαια του σχολικού εγχειριδίου που πραγματεύονται τις παραμετρικές εξισώσεις ευθείας $\psi = \alpha\chi + \beta$ και παραβολής $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$. Τα κεφάλαια αυτά διδάσκονται βιαστικά επειδή η σχολική χρονιά είναι στο τέλος της, η μετάβαση από τον αλγεβρικό τύπο στην γραφική αναπαράσταση είναι δυσνόητο θέμα. Η μαθήτρια έχει ακούσει ότι αν δύο γραμμικές εξισώσεις έχουν το ίδιο α είναι παράλληλες, οπότε γενίκευσε αυθαίρετα.

Στο ερώτημα Γ.9 απάντησε ότι το κοινό σημείο είναι το χ

Ερ: Γιατί το χ είναι το κοινό τους σημείο;

Απ: Γιατί τα α και β άλλαξαν, ενώ το χ παρέμεινε το ίδιο....

Υπάρχει σύγχυση για τον ρόλο της μεταβλητής και της παραμέτρου και για τους αλγεβρικούς τύπους που αντιπροσωπεύουν γεωμετρικά αντικείμενα.

3. Σοφία

Στο ερώτημα Α.7 έγραψε: Στρατιώτες σ , αξιωματικοί α , άρα $20\alpha + \sigma$

Ερ: Γιατί πρόσθεσες τους αξιωματικούς με τους στρατιώτες; Η ερώτηση είναι τι σχέση έχουν οι αριθμοί α και σ .

Απ: Μετά το είδα και δεν πρόλαβα να το διορθώσω.

Η μαθήτρια σωστά βρήκε τη σχέση, αλλά πρόσθεσε. Οι περισσότεροι μαθητές έχουν την τάση να κάνουν κάποιες πράξεις όταν συναντούν πρόβλημα, δεν θεωρούν ότι η απάντηση μπορεί να είναι απλά η εύρεση μιας σχέσης.

Στο ερώτημα Β.1 έγραψε: έστω χ λεπτά με το σταθερό και ψ λεπτά με το κινητό και σταμάτησε

Ερ: Γιατί δεν μπόρεσες να το αντιμετωπίσεις Σοφία;

Απ: Έκανα κατάταξη αλλά δεν μπόρεσα να κάνω εξίσωση.

Η γνωστή δυσκολία των μαθητών να μεταφράσουν από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική.

Στο ερώτημα Β.2 σχημάτισε και έλυσε σωστά την εξίσωση και σταμάτησε

Ερ: Τι φανερώνει το χ ;

Απ: Μήκος

Ερ: Πως θα έβρισκες το εμβαδόν αν π.χ. το μήκος ήταν 3;

Απ: $3 \cdot 3 = 9$

Ερ: Τι αλλαγή θα έκανες ; Αν π.χ. η ρίζα της εξίσωσης ήταν -2 θα την δεχόσουν;

Απ: Ναι

Ερ: Γιατί;

Απ: Γιατί $(-2) \cdot (-2) = 4$

Ερ: Μήπως το μπερδεύεις με τον πολλαπλασιασμό!

Απ: Οκ!

Ερ: Σκέφτηκες αν μπορούσες να δεχτείς την ρίζα -3; Αν το πλάτος του ορθογωνίου ήταν $x + 5$, τότε θα μπορούσε το x να ήταν το -3 επειδή $5 + (-3) = 2$, δηλαδή το πλάτος τότε θα ήταν 2 που είναι επιτρεπτό.

Απ: Α! ναι!

Εντοπίζεται ότι οι λίγοι μαθητές που έλυσαν την εξίσωση του προβλήματος δεν ασχολήθηκαν με τον έλεγχο των λύσεων που βρήκαν. Έχουν εθιστεί απλά να επιλύουν διαδικαστικά κάποια εξίσωση και να σταματούν.

Στο ερώτημα A2.11 έγραψε: $12x + 55 = 800$ και $16x + 55 = 800$

Ερ: Τι σημαίνει το x ;

Απ: Τον άγνωστο! Σχημάτισα ένα σύστημα εξισώσεων.

4. Θοδωρής

Στο ερώτημα A2.7 έγραψε: $E = \mu + 2 \cdot \pi$

Ερ: Γιατί δεν έγραψες το εμβαδόν συναρτήσει του πλάτους και χρησιμοποίησες 2 μεταβλητές το μ και το π ;

Απ: Γιατί το μ συμβολίζει το μήκος και το π το πλάτος

Ερ: Ποιά σχέση συνδέει το μήκος με το πλάτος;

Απ: Δώστε μου λίγο χρόνο...

Ερ: Παρακαλώ...

Απ: $\dots \mu = \pi + 2$

Ερ: Το εμβαδό πως θα το εκφράσεις;

Απ: $\dots E = \mu \cdot \pi \dots E = (\pi + 2) \cdot \pi$

Ερ: Παρένθεση έπρεπε να βάλεις;

Απ: Ναι! $E = (\pi + 2) \cdot \pi$

Ερ: Εντάξει

Στο ερώτημα αυτό ο μαθητής χρησιμοποιεί την μεταβλητή ως όνομα αντικειμένου.

Στο ερώτημα B.2 σχημάτισε και έλυσε σωστά την εξίσωση, δεν απέρριψε το -3 φανερά, αλλά δεν το χρησιμοποίησε για τον υπολογισμό του πλάτους και του εμβαδού.

Ερ: Θοδωρή, τι φανερώνει ο x ; Χρειάζεται περιορισμό;

Απ: Το x φανερώνει κάποιο μήκος...

Ερ: Γιατί χρησιμοποίησες μόνο το $x = 1$ και όχι το $x = -3$;

Απ: Το -3 το απορρίπτω αφού φανερώνει μήκος

Ερ: Για τον υπολογισμό του εμβαδού έγραψες $E = 7 + 2 = 9$ και για το πλάτος $\Pi = 3 + 2 + 1 = 6$, γιατί;

Απ: Στον τύπο $E = 7\chi + 2\chi^2$ έθεσα όπου χ το 1 και για το πλάτος στην παράσταση $3(2+\chi)$ πάλι όπου χ το 1.

Ερ: Γιατί στο Π έκανες πρόσθεση των αριθμών και πως νόμιζες ότι θα ήταν το πλάτος;

Απ: ... για το πλάτος έκανα λάθος. Είδα την παράσταση $3(2 + \chi)$ και αντικατέστησα λάθος ...

Απέρριψε κατευθείαν την αρνητική λύση χωρίς δεύτερη σκέψη.

Στο ερώτημα Β.3 σχημάτισε την εξίσωση σωστά $\chi/1 + 1/\chi = 1$, έπειτα έγραψε $2\chi/2 = 1/2$, οπότε σταμάτησε

Ερ: Θοδωρή δεν θυμάσαι πως τη λύνουμε; Τι είδους εξίσωση είναι;

Απ: Απροσεξία μου ... είναι κλασματική, έκανα λάθος ... Με μπέρδεψε το πρόβλημα ...

Όπως και οι υπόλοιποι συμμαθητές του, δεν κατάφερε να διαχειριστεί μία απλή κλασματική εξίσωση επηρεασμένος από το ίδιο το πρόβλημα.

Στο ερώτημα Γ.8 πρόσθεσε κατά μέλη τις εξισώσεις σχηματίζοντας τελικά την εξίσωση $19 - 10\chi = -10 + 19\chi$ και σταμάτησε εκεί

Ερ: Γιατί πρόσθεσες τις εξισώσεις;

Απ: Στην εκφώνηση διάβασα ότι έπρεπε να τις εκφράσω όλες με μία εξίσωση και σκέφτηκα να τις προσθέσω...

Ερ: Γιατί τελικά δεν την έλυσες αφού την προχώρησες σωστά

Απ: Κάτι δεν μου πήγαινε καλά ... Δεν ήξερα πως να συνεχίσω ...

Δεν σκέφτηκε ότι η σωστή απάντηση ήταν ο σχηματισμός μιας παραμετρικής εξίσωσης. Επηρεασμένος από την εκφώνηση θεώρησε "λογικό" να προσθέσει όλες τις εξισώσεις. Την εξίσωση που σχημάτισε μπορούσε να τη λύσει, αλλά ασυνείδητα καταλάβαινε ότι δεν απαντούσε στο ερώτημα. Ο μαθητής οδηγήθηκε σε αυτή την απάντηση εξαιτίας της άγνοιας που έχει για την έννοια της παραμέτρου.

5. Λευτέρης

Στο ερώτημα Β.2 σχημάτισε και έλυσε σωστά την εξίσωση και δεν απάντησε στα ερωτήματα για το εμβαδό και το πλάτος

Ερ: Γιατί δεν συνέχισες; Δεν μπορούσες να απαντήσεις για το εμβαδό και το πλάτος;

Απ: Νόμιζα ότι τελειώνει, δεν το πρόσεξα, βιαζόμουν για τις επόμενες...

Ερ: Το χ τι φανερώνει

Απ: Κάποιο μήκος ...

Ερ: Το πλάτος πως εκφράζεται στο πρόβλημα;

Απ: Σαν $\chi + 2$

Ερ: Αν $\chi = -3$, τότε το πλάτος θα ήταν;

Απ: -1, οπότε απορρίπτω το $\chi = -3$

Ερ: Τελικά τι λες για το πλάτος και το εμβαδό;

Απ: Το πλάτος είναι $2 + 1 = 3$ και το εμβαδό είναι $3 \cdot 3 = 9$

Ερευνητής: Εντάξει Λευτέρη

Ο μαθητής τελείωσε όταν έλυσε την εξίσωση. Δεν συνειδητοποίησε ότι η εξίσωση είχε σχηματιστεί εξαιτίας κάποιου γεωμετρικού προβλήματος, οπότε οι άγνωστοι υπόκεινται σε περιορισμούς.

6. Ευθύμιος

Στα προβλήματα παρουσίασε δυσκολία, παρόλο που στα υπόλοιπα τεστ πήγε πολύ καλά.

Συγκεκριμένα στο B1 κατασκεύασε εξισώσεις, χωριστά με το χ και το ψ , εισήγαγε και βοηθητικούς αγνώστους α και β και δεν χρησιμοποίησε το ποσό 150.

Ερ: Θύμιο τι σε προβλημάτισε και δεν κατάφερες να σχηματίσεις κατάλληλο σύστημα εξισώσεων;

Απ: Προσπάθησα με διάφορους τρόπους να φτιάξω σύστημα αλλά δεν μου έβγαινε...

Ερ: Δηλαδή τι δε σου έβγαινε;

Απ: Χρησιμοποίησα τους αγνώστους χ για το κινητό, ψ για το σταθερό, α το ποσό για το κινητό και β το ποσό για το σταθερό...

Ερ: Τα χ και ψ φανερώνουν και αυτά ποσά, δηλαδή ευρώ;

Απ:

Ερ: Αν το χ φανερώνει τον χρόνο ομιλίας για το κινητό και το ψ για το σταθερό; Μπορείς να φτιάξεις εξίσωση για τα 12 ευρώ;

Απ: ... $0,2\chi$ και $0,05\psi$...

Ερ: Και τα δύο ποσά μαζί;

Απ: Το βρήκα $0,2\chi + 0,05\psi = 12!$

Ερ: Και ο χρόνος; ... 150 λεπτά ομιλίας;

Απ: Κατάλαβα, $\chi + \psi = 150$, τώρα μου ήρθε!

Ο μαθητής χρησιμοποίησε 4 μεταβλητές $\chi, \psi, \alpha, \beta$ επειδή δεν μπόρεσε να συσχετίσει τις χ, ψ . Δεν μπόρεσε να μεταφράσει τα δεδομένα στην αλγεβρική γλώσσα.

Στο B2 σχημάτισε την εξίσωση 7. $3+\chi = 7\chi + 2\chi^2$, για άγνωστο λόγο παρέλειψε το 3, φθάνει στην τελική εξίσωση $7 = 6\chi + 2\chi^2$ οπότε σταματά

Ερ: Γιατί δεν έλυσες την εξίσωση;

Απ: Ήξερα ότι έπρεπε να τη λύσω, με μπέρδεψε ... , δεν έχω ξαναδεί τέτοια εξίσωση ...

Ερ: Τίνος βαθμού είναι;

Απ: 2^{ου} ...

Ερ: Τότε;

Απ: Κόμπλαρα ...

Πάλι εμφανίζεται το φαινόμενο που ο μαθητής δεν αναγνωρίζει μία απλή εξίσωση 2^{ου} βαθμού αν θέλει κάποια αναγωγή στην τελική μορφή. Όπως προέκυψε και από απαντήσεις άλλων μαθητών, όταν η εξίσωση προκύπτει από κάποιο πρόβλημα οι μαθητές αισθάνονται ανασφάλεια και εγκαταλείπουν την προσπάθεια επίλυσης της εξίσωσης ακόμη κι αν είναι απλή.

7. Βασίλης Χ

Στο Β.1 είχε σβησμένες κάποιες αριθμητικές πράξεις και την ισότητα $150 = 0,2 + 0,05 = 12E$

Ερ: Γιατί Βασίλη δεν κατάφερες να το αντιμετωπίσεις;

Απ: Άρχισα με δοκιμές, οπότε έχασα χρόνο και αποφάσισα να το λύσω με εξίσωση, αλλά δεν μπόρεσα. Το Ε το θεώρησα άγνωστο.

Ερ: Γιατί δεν ονόμασες χ τον 1 άγνωστο και ψ τον άλλο, οπότε θα κατέληγες στο σύστημα $0,2\chi + 0,05\psi = 12$ και $\chi + \psi = 150$;

Απ: Αν είχα σκεφτεί από την αρχή τα χ και ψ θα σχημάτιζα την εξίσωση ...

Ο μαθητής δεν έχει ώριμη αλγεβρική σκέψη. Προσπάθησε με δοκιμές να δώσει λύση στο πρόβλημα. Όπως αναφέρει ο ίδιος: αν είχα σκεφτεί από την αρχή τα χ και ψ θα σχημάτιζα την εξίσωση.

Στο Β.2 σχηματίζει την εξίσωση, χωρίς παρένθεση, οπότε καταλήγει στην εξίσωση $6 + \chi = 7\chi + 2\chi^2$. Στη συνέχεια γράφει ως διακρίνουσα $(-2)^2 + 4 \cdot 6 \cdot 7$, βρίσκει λάθος το χ και σταματάει.

Ερ: Βασίλη όπως βλέπεις ξέχασες να βάλεις παρένθεση. Αν έβαζες παρένθεση θα έβρισκες άλλη λύση;

Απ: Ναι

Ερ: Αν είχες βρει τις σωστές τιμές του άγνωστου χ , πως θα υπολόγιζες το πλάτος και το εμβαδόν;

Απ: Θα αντικαθιστούσα όπου χ την τιμή του στο $\chi + 2$ και έπειτα θα πολλαπλασίαζα με το 3 για το εμβαδόν.

Ερ: Η μία λύση που βρήκες είναι θετική ενώ η άλλη είναι αρνητική. Θα ήταν δεκτές και οι 2 λύσεις στο πρόβλημα;

Απ:

Ερ: Πως εκφράζεται το πλάτος στο πρόβλημα;

Απ: $2 + \chi$

Ερ: Συμφωνείς ότι οι διαστάσεις των σχημάτων είναι μήκη και εκφράζονται με θετικούς αριθμούς;

Απ: Ναι

Ερ: Επομένως ο αριθμός $2 + \chi$ πρέπει να είναι θετικός;

Απ: Οποσδήποτε

Ερ: Τι έχεις λοιπόν να πεις για τον χ ; Μπορεί να είναι αρνητικός; Και αν ναι, ποιές

τιμές μπορεί να πάρει;

Απ: Μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του -2!

Ερ: Τον τύπο της διακρίνουσας τον θυμάσαι;

Απ: Βέβαια! $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Ερ: Τον χρησιμοποίησες σωστά; Ποιός είναι ο α , ο β και ο γ ;

Απ: Πήρα την Δ με λάθος τρόπο τα μετέφερα νοερά.

Ισχύουν ανάλογες παρατηρήσεις με τους συμμαθητές του στο πρόβλημα Β.2

Στην ερώτηση Γ.8 επέλεξε μία από τις εξισώσεις, την έλυσε σωστά και βρήκε $x = 1$

Ερ: Βασίλη γιατί έλυσες μόνο μία από τις εξισώσεις; Οι υπόλοιπες ποιά λύση έχουν;

Απ: Όπως μας δώσατε τους αριθμούς στις εξισώσεις κατάλαβα ότι ήταν ίδιοι, έλυσα 2 εξισώσεις και μετά δεν χρειάστηκε να λύσω και τις άλλες αφού θα καταλήγανε στο $x = 1$!

Ερ: Θα μπορούσες να γράψεις μία εξίσωση με γράμματα που να έχει τον ίδιο τύπο με αυτές; Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν; Κάτι μου είπες προηγουμένως.

Απ: (σκέφτηκε για λίγο) Δεν μπορώ να σκεφτώ κάτι.....

Σωστά σκέφτηκε να λύσει κάποιες εξισώσεις παρατηρώντας ότι η κοινή λύση είναι $x=1$. Δεν κατάφερε να σκεφτεί να κατασκευάσει την ζητούμενη παραμετρική λόγω ανεπαρκούς κατανόησης της έννοιας της παραμέτρου.

Στην ερώτηση Γ.9 εξίσωσε σωστά $\alpha x + \beta = \beta x + \alpha$, διαίρεσε κατά μέλη με το x , απλοποίησε λανθασμένα το x μόνο και του προέκυψε η ισότητα $\alpha - \alpha = \beta - \beta$, άρα $0 = 0$, οπότε απαντά ότι το κοινό τους σημείο είναι η αρχή των αξόνων.

Ερ: Βασίλη γιατί κατασκεύασες το σύστημα $\psi = \alpha x + \beta$ και $\psi = \beta x + \alpha$;

Απ: Έτσι βρίσκουμε το σημείο τομής 2 ευθειών!

Ερ: Ποιοί είναι οι άγνωστοι;

Απ: Οι x και ψ

Ερ: Ωραία! Πως σκέφτηκες να διαιρέσεις με το x ;

Απ: Απλοποίησα την εξίσωση, όπως στο ερώτημα 8 που διαίρεσα με το 2 και έτσι έφτασα στο $0 = 0$, άρα είναι η αρχή των αξόνων το κοινό τους σημείο!

Ο μαθητής γνωρίζει ότι για να βρει το σημείο τομής των ευθειών πρέπει να σχηματίσει το σύστημα και να το επιλύσει. Βρέθηκε όμως αντιμέτωπος με την εξίσωση $\alpha x + \beta = \beta x + \alpha$, τον μπέρδεψαν οι παράμετροι και τα υπόλοιπα τα εξηγεί στην συνέντευξη.

8. Κωνσταντίνος

Στην ερώτηση Α2.1 απάντησε: $x+2<5$

Ερ: Γιατί έγραψες $x+2<5$ αντί $x+\psi<5$;
Απ: Έγραψα 2 επειδή δύο είναι οι αριθμοί!
Ερ: Καταλαβαίνεις ότι το σωστό είναι $x+\psi<5$;
Απ: Τώρα ναι!

Στην ερώτηση Γ.4 απάντησε: αλλάζουν τα σημεία

Ερ: Τι εννοείς Κωνσταντίνε αλλάζουν τα σημεία; Τι παριστάνει η εξίσωση $\psi = \alpha x^2$;
Απ: Θα βρούμε άλλα σημεία της γραφικής παράστασης αν πάρουμε άλλο α . Η εξίσωση $\psi = \alpha x^2$ παριστάνει παραβολή που περνάει από την αρχή των αξόνων.
Ερ: Αν αλλάξουμε το α τι θα συμβεί;
Απ: Θα έχουμε άλλο τύπο
Ερ: Τι τύπο; Τι θα παριστάνει ο νέος τύπος;
Απ:παραβολή...
Ερ: Την ίδια με την προηγούμενη;
Απ:όχι, θα είναι μια άλλη παραβολή

Ο μαθητής σωστά κατανόησε ότι αν αλλάξει ο συντελεστής α θα αλλάξει η καμπύλη, παραμένοντας παραβολή, αλλά δεν μπόρεσε να ερμηνεύσει τι ακριβώς θα συμβεί με την γραφική παράσταση. Εδώ φαίνεται να είναι ανεπαρκής η γνώση του ως προς την κατανόηση του πως ακριβώς επιδρούν οι μεταβολές της παραμέτρου α στην καμπύλη.

Στην ερώτηση Γ.6 απάντησε: Ο καθηγητής έδωσε διαφορετικό β

Ερ: Κωνσταντίνε, γράφεις ότι ο καθηγητής έδωσε διαφορετικό β σε κάθε μαθητή. Με το α τι νομίζεις ότι έκανε; Έδωσε το ίδιο α σε όλους τους μαθητές του;
Απ: Αφού τους έδινε διαφορετικό β , ο καθένας θα είχε άλλη ευθεία... Για το α δεν το σκέφτηκα... Νομίζω ότι θα μπορούσε να αλλάξει και το α ...
Ερ: Μπορείς να μου πεις αν όλοι είχαν το ίδιο α και διαφορετικό β τι ευθείες θα σχεδίαζαν;
Απ: ... μήπως παράλληλες;
Απ. Ερευνητή: Σωστά!

Η απάντησή του είναι σωστή; Ο μαθητής έχει κατανοήσει το ρόλο της παραμέτρου, αφού σκέφτηκε ότι με την αλλαγή έστω της παραμέτρου β ο καθηγητής θα έδινε στον κάθε μαθητή μία διαφορετική ευθεία, όμως θα ανήκαν όλες στην ίδια οικογένεια ευθειών, ήτοι θα ήταν παράλληλες. Αφού όμως δεν υπήρχε περιορισμός στο πρόβλημα, η απάντησή του θεωρείται σωστή.

Στο Β.1 δεν απάντησε

Ερ: Δεν μπόρεσες να γράψεις κάτι Κωνσταντίνε, δεν σκέφτηκες κάποιο τρόπο;
Απ: Κατάλαβα ότι είναι σύστημα αλλά δεν μου ήρθε πως να το κάνω. Μπερδεύτηκα.

Στο Β.2 σχημάτισε σωστά την εξίσωση, την έφθασε στην τελική μορφή, υπολόγισε την διακρίνουσα και σταμάτησε

Ερ: Κώστα γιατί δεν συνέχισες;

Απ: Δεν είχα χρόνο

Ερ: Αν είχες τι θα έκανες;

Απ: Θα έβρισκα το χ , μετά το πλάτος $2 + \chi$ και μετά το εμβαδόν.

Ερ: Πως θα υπολόγιζες το εμβαδόν;

Απ: 3χ

Στα προβλήματα Β1,Β2 ισχύουν οι παρατηρήσεις των προηγούμενων.

Στο Β.3 σχημάτισε σωστά την εξίσωση και απάντησε ότι υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί.

Ερ: Πως το κατάλαβες ότι υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί, αφού δεν έκανες κάτι για να τους βρεις;

Απ: Θα έλυνα με χιαστή την εξίσωση $\chi + 1/\chi = 1$ και θα τους εύρισκα.

Ερ: Γιατί δεν την έλυσες;

Απ: Δεν έφθανε ο χρόνος, δεν μπόρεσα

Ερ: Αναρωτήθηκες μήπως η εξίσωση μπορούσε να ήταν αδύνατη;

Απ: Δεν το σκέφτηκα

Ερ: Αν ήταν αδύνατη τι απάντηση θα έδινες;

Απ: δεν υπάρχουν αριθμοί.

Ο μαθητής σκέφτηκε ότι αφού υπάρχει η εξίσωση θα την έλυνε και θα εύρισκε τους ζητούμενους αριθμούς. Δεν πρόβλεψε ότι η εξίσωση θα μπορούσε να ήταν αδύνατη. Συχνά εμφανίζεται το φαινόμενο όπου οι μαθητές θεωρούν ότι η έννοια της εξίσωσης είναι ταυτισμένη με την ύπαρξη λύσης.

9 Γιώργος

Στην ερώτηση Α.2 απάντησε ότι οι παραστάσεις $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha + 2\beta$, $2\beta + 5\alpha$ και $\chi + \alpha$ είναι θετικοί

Ερ: Γιατί Γιώργο νομίζεις ότι οι προηγούμενοι αριθμοί είναι θετικοί, αφού οι α , β , γ είναι αρνητικοί;

Απ: Δεν διάβασα την έκφραση χ , ψ , ω θετικοί και α , β , γ είναι αρνητικοί

Ερ: Παρόλα αυτά ο αριθμός $\alpha + \beta + \gamma$ είναι θετικός με οποιουσδήποτε αριθμούς α , β , γ ; Τι λες;

Απ: Θεώρησα όλους τους αριθμούς α , β , γ , χ , ψ , ω θετικούς!

Στην ερώτηση Α2.7 απάντησε: $E=2\chi.\psi$

Ερ: Πως σκέφτηκες τον τύπο που έγραψες; Γιατί $2\chi\psi$; Τι δείχνει το 2χ ;

Απ: 2χ σημαίνει ότι το πλάτος είναι 2 μεγαλύτερο από το μήκος ψ

Ερ: Αντιλαμβάνεσαι ότι 2χ σημαίνει το διπλάσιο του χ ;

Απ: ... ναι ...

Ερ: Πως θα εκφράσεις κατά 2 μεγαλύτερο;

Απ: ... με ... $\chi+2\ldots+2$

Ερ: Άρα $E=$;

Απ: ... $E=\chi+2\cdot\psi$

Ερ: Γιατί το πλάτος ψ ; Μήπως χ το πλάτος και $\chi+2$ το μήκος Γιώργο;

Απ: Ναι, κατάλαβα

Ερ: Θα γράψεις το E ;

Απ: $E=(\chi+2)\cdot\chi$!

Στην ερώτηση Γ.4 απάντησε: Αν μεγαλώνει ο α θα μεγαλώνει και ο ψ και αν μειωθεί ο α θα μειωθεί και ο ψ

Ερ: Σωστά παρατήρησες, αλλά δεν είπες τι θα συμβεί με την γραφική παράσταση;

Απ: ...δεν ξέρω ...δεν μπορώ να καταλάβω.

Εδώ ο μαθητής δεν έκανε σύνδεση με τη γραφική παράσταση.

Στην ερώτηση Γ.8 απλά πρόσθεσε κατά μέλη όλες τις εξισώσεις και σταμάτησε

Ερ: Γιατί πρόσθεσες κατά μέλη τις εξισώσεις;

Απ: Επειδή μας ζητήσατε στην ερώτηση να εκφράσουμε με την βοήθεια μιας εξίσωσης τις παρακάτω εξισώσεις, οπότε τις πρόσθεσα και έφτιαξα μία εξίσωση.

Στην ερώτηση Α2.11 σχημάτισε την εξίσωση $12\chi + 15\chi = 800$

Ερ: Γιατί Γιώργο έβαλες δύο φορές τον ίδιο άγνωστο χ ;

Απ: Έπρεπε να βάλω χ και ψ

Ερ: Δηλαδή;

Απ: $12\chi + 15\psi = 800$

Ερ: Μόνο αυτή η εξίσωση σχηματίζεται; Το 55 δεν το χρησιμοποιείς;

Απ: ... Ναι $\chi + \psi = 55$

Ο μαθητής όταν σκέφτεται την έννοια άγνωστος θεωρεί ότι το σύμβολο χ μπορεί να αντιπροσωπεύει οποιονδήποτε άγνωστο.

Στο Β.2 νόμισε ότι αναφερόμαστε σε ορθογώνιο τρίγωνο κατέληξε στην εξίσωση $3/2\chi - 7\chi - 2\chi^2 + 3 = 0$ και σταμάτησε

Ερ: Νόμισες ότι έχουμε ορθογώνιο τρίγωνο;

Απ: Ναι

Ερ: Σχημάτισες σωστά την εξίσωση, έκανες τις πράξεις και μετά σταμάτησες, Γιατί;

Απ: Δεν ήξερα τι να κάνω με το $(3/2)\chi$

Ερ: Αν έλυνες την εξίσωση τι θα έκανες με το χ που θα έβρισκες;

Απ: Θα έβρισκα το πλάτος $2 + \chi$ και το εμβαδόν.

Ο μαθητής συνάντησε κλάσμα στην εξίσωση εγκατέλειψε την προσπάθεια. Πολλοί μαθητές έχουν δυσκολία στην επίλυση μιας εξίσωσης όταν αυτή περιέχει και κλασματικούς όρους.

Στο Β.3 σχημάτισε την εξίσωση $\chi + 1/\chi = 1$, κατόπιν $\chi^2/\chi + 1/\chi = 1$ και σταμάτησε

Ερ: Τι είδους εξίσωση είχες να λύσεις;

Απ: Κλασματική, έκανα ομώνυμα τα κλάσματα και μετά δεν μπορούσα να τη λύσω

Ερ: Δεν θυμήθηκες την απαλοιφή παρονομαστών που κάνουμε πάντα στις κλασματικές εξισώσεις;

Απ: Κόλλησα, δεν ξέρω ...

Ισχύει η προηγούμενη παρατήρηση.

10. Σωκράτης

Στην ερώτηση Α2.8 απάντησε: $\Pi = \alpha + \beta + \gamma$

Ερ: Σωστά έγραψες την περίμετρο Σωκράτη. Θα μπορούσες να την εκφράσεις μόνο με τις κάθετες πλευρές α και β επειδή αυτές δίνονται;

Απ: γ είναι η υποτείνουσα ...

Ερ: Θα μπορούσε η υποτείνουσα να εκφραστεί σαν συνάρτηση των κάθετων πλευρών α και β ; Στα ορθογώνια τρίγωνα πως συνδέονται τα μήκη των καθέτων με το μήκος της υποτείνουσας; Θυμάσαι κάτι από την περσινή γεωμετρία ... για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο;

Απ: ... Μήπως το Πυθαγόρειο θεώρημα;

Ερ: Μπορείς να το εκφράσεις;

Απ: Το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών

Ερ: Με υποτείνουσα γ και κάθετες πλευρές α και β μπορείς να το γράψεις συμβολικά;

Απ: ... $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$

Ερ: Μπορείς να εκφράσεις την υποτείνουσα γ ;

Απ: Δε μου έρχεται

Στην ερώτηση Γ.3 απάντησε: Δεν θα ξέρουμε ποιά θα είναι η λύση της εξίσωσης

Ερ: Σωκράτη, γιατί δεν θα ξέρουμε ποιά θα είναι η λύση;

Απ: Επειδή ο αριθμός β αλλάζει

Ερ: Αν σταθεροποιούσαμε τον β , δηλαδή αν του δώσουμε μία τιμή πολύ κοντά στο μηδέν και ο α ας είναι ένας αριθμός μονοψήφιος ή διψήφιος, η λύση θα είναι μεγάλος ή μικρός αριθμός;

Απ: Να σκεφτώ λίγο. Ο χ θα είναι κλάσμα με αριθμητή τον πολύ μικρό αριθμό και παρονομαστή τον α ..., δηλαδή πολύ μικρός αριθμός.

Ερ: Αν λοιπόν ο β ήταν ασύλληπτα μικρός αριθμός τι θα ήταν η λύση της εξίσωσης;

Απ: Πολύ κοντά στο 0.

Ο μαθητής βρέθηκε σε αμηχανία επειδή εδώ η παράμετρος “κινείται”, μοιάζει να είναι μεταβλητή. Ο μαθητής διερωτάται τι είδους λύση θα μπορούσε να προτείνει αφού η εμπειρία του τον οδηγεί στην αντιμετώπιση εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Δεν σκέφτηκε προς στιγμή να σταθεροποιήσει την παράμετρο και να αντιμετωπίσει το ζήτημα.

Στην ερώτηση Γ.8 έλυσε κάθε εξίσωση, βρήκε την κοινή λύση τους $x = 1$. Έπειτα σχημάτισε την παραμετρική εξίσωση $\beta - \alpha x = \beta x - \alpha$ την οποία δεν έλυσε

Ερ: Σωκράτη σωστά ανακάλυψες την εξίσωση $\beta - \alpha x = \beta x - \alpha$, γιατί δεν την έλυσες;

Απ: Κατάλαβα ότι η λύση της είναι $x = 1$

Ερ: Πως το κατάλαβες;

Απ: Επειδή είναι του ίδιου τύπου με τις υπόλοιπες!

Ο μαθητής σκέφτηκε κατ’ αναλογία και συμπέρανε ότι η παραμετρική εξίσωση, την οποία ανακάλυψε, θα έχει την ίδια λύση με τις άλλες, χωρίς να τη λύσει.

Στο Β. 2 απέρριψε την λύση $x = -3$ κατευθείαν

Ερ: Σωκράτη πάντα θα απορρίπτουμε τον αρνητικό αριθμό όταν πρόκειται για γεωμετρικά μεγέθη ή πρέπει να προσέξουμε κάτι;

Απ: Το $x = -3$ απέρριψα επειδή μιλάμε για πλευρά.

Ερ: Η πλευρά όμως δόθηκε $2 + x$. Σκέφτηκες να δοκιμάσεις αν μπορεί το -3 να αντικατασταθεί και να προκύψει θετικός αριθμός για την πλευρά;

Απ: Θεώρησα εκείνη τη στιγμή το -3 σαν πλευρά, δεν κοίταξα το $x + 2$. Όχι εκείνη τη στιγμή δεν το σκέφτηκα.

Ο μαθητής έλυσε την εξίσωση και δεν έκανε το απαραίτητο έλεγχο των λύσεων.

Στο Β. 3β έλυσε λάθος την εξίσωση, δηλαδή έκανε απαλοιφή παρονομαστών μόνο στο πρώτο μέλος

Ερ: Σωκράτη έκανες απαλοιφή μόνο στο πρώτο μέλος της εξίσωσης, γιατί;

Απ: Εκείνη τη στιγμή δεν ασχολήθηκα με το δεύτερο μέλος επειδή δεν υπήρχε κλάσμα

Ερ: Τώρα το βλέπεις ότι έπρεπε να κοιτάξεις και το δεύτερο μέλος;

Απ: Ναι.

Κεφάλαιο 4

4.1 Ανάλυση των ερωτήσεων-απαντήσεων των ερωτηματολογίων

Στο Φύλλο Α, για την έννοια της μεταβλητής, στην **A1 ερώτηση** εξετάστηκε αν οι μαθητές έχουν αποκτήσει την ικανότητα να “μεταφράζουν” απλές μαθηματικές εκφράσεις σε αλγεβρική γλώσσα. (Επιτυχία: 25,5%).

Ερώτηση A1.

Να γράψετε με γράμματα και μαθηματικά σύμβολα τις παρακάτω έννοιες:

α. Ένα τυχαίο αριθμό

Απαντήσεις:

Κατηγορία α: 3 μαθητές απάντησαν σωστά και τρεις έγραψαν συγκεκριμένους αριθμούς.

Κατηγορία β: 2 μαθητές απάντησαν σωστά, ένας μαθητής έγραψε $x+5=8$, ένας μαθητής έγραψε $\omega=7$ και ένας μαθητής έγραψε ένα συγκεκριμένο αριθμό.

β. Ένα άρτιο αριθμό

Απαντήσεις:

Οι μαθητές της **κατηγορίας α** απάντησαν σωστά 50% στην **A1**.

Στην ερώτηση (**η**) απάντησαν 2 από τους 6, ενώ στην προηγούμενη που είχε το ίδιο ζητούμενο, με άλλη διατύπωση, απάντησαν 4 στους 6.

Στην ερώτηση (**στ**) 2 δεν απάντησαν, 2 απάντησαν 2 χ , 4 χ , 1 έγραψε 8, 10 και 1 έγραψε 35+ χ , 63+ ψ .

Στην (**γ**) 2 δεν απάντησαν, 1 έγραψε τον αριθμό 3, 1 μαθητής έγραψε άρτιος 2 χ , περιττός 3 χ , 1 μαθητής έγραψε άρτιος χ , περιττός ψ , τέλος 1 μαθητής έγραψε περιττός 5 ψ .

Στην ερώτηση (**ε**) 3 μαθητές έγραψαν χ , $\chi+1$, 1 μαθητής έγραψε α , β και άλλος έγραψε χ , 2 χ .

Οι μαθητές **κατηγορίας β** απάντησαν σωστά 48% στην **A1** ερώτηση. Οι απαντήσεις τους ήταν ανάλογες αυτών της **κατηγορίας α**, ποιοτικά και ποσοτικά.

Στην **ερώτηση 2** εξετάστηκε η κατανόηση του πρόσημου στις μεταβλητές με κάποιες προϋποθέσεις (Επιτυχία: 49,7%).

Στην ερώτηση **A3** κεντρικός στόχος είναι η διάκριση περιπτώσεων σε μια μεταβλητή (Επιτυχία: 12,5%)

Με την ερώτηση **A4** εξετάστηκε η κατανόηση του πρόσημου μιας μεταβλητής χωρίς προϋποθέσεις (Επιτυχία: 48,8%)

Η ερώτηση **A5** έχει τον ίδιο στόχο με την **A2** (Επιτυχία: 70,83%)

Η ερώτηση **A6** έχει τον ίδιο στόχο με την **A4** (Επιτυχία: 29,15%)

Στην ερώτηση **A7** ο στόχος είναι να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι η αντιστοιχία εκφράζεται αντίστροφα από την ισότητα (Επιτυχία: 16,66%)

Στο Φύλλο A2, εξετάστηκε η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, της κατασκευής εξίσωσης, ανίσωσης και συστήματος από προβλήματα. Στο φυλλάδιο αυτό οι μαθητές έπρεπε να «μεταφράσουν» τα λεκτικά προβλήματα και εκφράσεις σε εξισώσεις, ανισώσεις, συστήματα και αλγεβρικές παραστάσεις με τη βοήθεια των μεταβλητών. (Επιτυχία: 32,5%)

Στο Φύλλο B, τέθηκαν 3 προβλήματα **B1, B2, B3**.

Στο **B1** τίθεται πρόβλημα που μπορεί να λυθεί με σύστημα 2×2 ή χωρίς. Στόχος μας ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές ένα πρόβλημα εκφρασμένο λεκτικά, στη συνέχεια να κατασκευάσουν το σύστημα των 2 γραμμικών εξισώσεων που προέκυπτε, δηλαδή να μεταφράσουν σε αλγεβρική γλώσσα, και ακολούθως να επιλύσουν το σύστημα. Αντιμετωπίστηκε με επιτυχία από 2 μαθητές (Επιτυχία: 2/24 ή 6,3%).

Στο **B2** διατυπώθηκε γεωμετρικό πρόβλημα που επιλύεται με τη βοήθεια εξίσωσης β' βαθμού. Μία ρίζα είναι αποδεκτή. Το πρόβλημα αυτό επινοήθηκε από τον ερευνητή για τους σκοπούς της συγκεκριμένης έρευνας. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως είναι γεωμετρικό αλλά μπορεί να αντιμετωπισθεί μόνο με εξίσωση και μάλιστα β' βαθμού. Η ιδιαιτερότητά του και ως εκ τούτου η δυσκολία του οφείλεται στο ότι ο μαθητής-λύτης πρέπει να εκφράσει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με τον γνωστό τύπο (μήκος)χ(πλάτος) και να το εξισώσει με μία αλγεβρική παράσταση που και αυτή εκφράζει το ίδιο εμβαδόν.

Το πρόβλημα αυτό δόθηκε για να εξετάσουμε αν οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο, εν προκειμένω το εμβαδόν του ορθογωνίου εκφρασμένο με δύο διαφορετικές αλγεβρικές σχέσεις, οπότε να αντιληφθούν το σχηματισμό της εξίσωσης. Στο γεωμετρικό αυτό πρόβλημα δόθηκε το μήκος μιας πλευράς του ορθογωνίου $2+x$, οπότε εξετάσαμε αν οι μαθητές σκέφτηκαν να θέσουν τον περιορισμό $2+x > 0$. (Επιτυχία: 19%).

Στο **B3** στο πρώτο ερώτημα ζητείται να σχηματιστεί κλασματική εξίσωση και στο δεύτερο να επιλυθεί (ζητήθηκε με έμμεσο τρόπο).

Στόχος μας ήταν να ερευνήσουμε αν οι μαθητές μπορούσαν να κατανοήσουν ότι για να απαντήσουν στο δεύτερο σκέλος έπρεπε να επιλύσουν την εξίσωση που σχημάτισαν. (Επιτυχία: (α) 41,65%, (β) 6,3%).

Στο Φύλλο Γ, θέσαμε 9 ερωτήσεις με τη βοήθεια των οποίων ερευνήσαμε την κατανόηση, από τους μαθητές, της έννοιας της παραμέτρου και τη σχέση της με την έννοια της μεταβλητής. Οι ερωτήσεις αυτές πηγάζουν από τα στοιχεία αναλυτικής γεωμετρίας που περιέχονται στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' γυμνασίου στις παραγράφους 3.1, 4.1 και 4.2. Οι ερωτήσεις 6 και 7 είχαν στόχο να προβληματιστεί ο μαθητής για τον σχέση των μεταβλητών-παραμέτρων και την αλλαγή των ρόλων τους

Στόχος επίσης των περισσότερων ερωτήσεων ήταν να παρατηρήσουν οι μαθητές τις διάφορες αναπαραστάσεις κάποιων γεωμετρικών αντικειμένων και τι σημαίνει γραφικά η ρίζα μιας εξίσωσης.

Στην ερώτηση **Γ1** δίνονται παραμετρικά οι εξισώσεις $y = ax + b$ και $\psi = ax^2 + bx + y$ και καλούνται οι μαθητές να αναγνωρίσουν τι σημαίνουν γεωμετρικά (Επιτυχία: 5/24 ή 20,8%).

Στις ερωτήσεις **Γ3, Γ4, Γ5** μεταβάλλονται κάποιες παράμετροι και ζητείται από τους μαθητές να αποφανθούν για τις συνέπειες αυτών των μεταβολών. (Επιτυχία: 8%).

Στις ερωτήσεις **Γ6, Γ7** ζητείται από τους μαθητές να διακρίνουν την αλλαγή των ρόλων των παραμέτρων σε μεταβλητές (Επιτυχία: 16%).

Στην ερώτηση **Γ8** ζητείται η κατασκευή παραμετρικής εξίσωσης πρώτου βαθμού (Επιτυχία: 16%).

Στην ερώτηση **Γ9** πρέπει να σχηματιστεί εξίσωση και να ερμηνευτούν οι λύσεις ως γεωμετρικός τόπος των σημείων μιας ευθείας. (Επιτυχία: 6,3%).

4.2 Στατιστικά στοιχεία για τους μαθητές που έδωσαν συνεντεύξεις

1. Βασίλης Τ

Ερωτηματολόγιο Α (για την έννοια της μεταβλητής)

A.1	Σωστές απαντήσεις: 6/9 (66,66%)			
A.2	Θετικοί -	Αρνητικοί -	Δεν γνωρίζω	Σύνολο
	4/7 (57%)	2/4 (50%)	2/3 (66,66%)	8/14 (57%)
A.3	50%			
A.4	Θετικοί -	Αρνητικοί -	Δεν γνωρίζω	Σύνολο
	3/5 (60%)	0/1 (0%)	3/9 (33,3%)	6/15 (40%)
A.5	Σωστά (100%)			
A.6	Λάθος (0%)			
A.7	Σωστά (100%)			

Ερωτηματολόγιο Α2 (συμπληρωματικό)

Σωστές απαντήσεις: 6/11 (54,5%)

Ερωτηματολόγιο Β

B.1 Μηδέν (0%)

B.2 Μηδέν (0%)

B.3 (α) 100%, (β) 0%

Ερωτηματολόγιο Γ

Σωστές απαντήσεις: 1/9 (11%)

2. Μαριτίνα

Ερωτηματολόγιο Α (για την έννοια της μεταβλητής)

A.1 Σωστές απαντήσεις: 4/9 (44,5%)

A.2	Θετικοί -	Αρνητικοί -	Δεν γνωρίζω	Σύνολο
	4/7 (57%)	3/4 (75%)	3/3 (100%)	10/14 (71,5%)

A.3 1/2 (50%)

A.4	Θετικοί -	Αρνητικοί -	Δεν γνωρίζω	Σύνολο
	5/5 (100%)	1/1 (100%)	6/9 (66,66%)	12/15 (80%)

A.5 Σωστά (100%)

A.6 Λάθος (0%)

A.7 Λάθος (0%)

Ερωτηματολόγιο Α2 (συμπληρωματικό)

Σωστές απαντήσεις: 6/11 (54,5%)

Ερωτηματολόγιο Β

B.1 Μηδέν (0%)

B.2 40%

B.3 (α) 100%, (β) 0%

Ερωτηματολόγιο Γ

Σωστές απαντήσεις: 2/9 (22,2%)

3. Σοφία

Ερωτηματολόγιο Α (για την έννοια της μεταβλητής)

A.1	Σωστές απαντήσεις: 7/9 (77.8%)	
A.2	Θετικοί - Αρνητικοί - Δεν γνωρίζω	Σύνολο
	4/7 (57%) 2/4 (50%) 1/3 (33,3%)	7/14 (50%)
A.3	50%	
A.4	Θετικοί - Αρνητικοί - Δεν γνωρίζω	Σύνολο
	3/5 (60%) 1/1 (100%) 5/9 (55,55%)	9/15 (60%)
A.5	Σωστά (100%)	
A.6	Σωστά (100%)	
A.7	Λάθος (0%)	

Ερωτηματολόγιο Α2 (για την έννοια της μεταβλητής)

Σωστές απαντήσεις: 7/11 (63,6%)

Ερωτηματολόγιο Β

- B.1 Λάθος (0%)
- B.2 75%
- B.3 90%

Ερωτηματολόγιο Γ

Σωστές απαντήσεις: 2/9 (22,2%)

4. Θοδωρής

Ερωτηματολόγιο Α

A.1	Σωστές απαντήσεις: 5/9 (55,55%)	
A.2	Θετικοί - Αρνητικοί - Δεν γνωρίζω	Σύνολο
	3/7 (42,85%) 2/4 (50%) 1/3 (33,33%)	6/14 (42,85%)
A.3	50%	
A.4	Θετικοί - Αρνητικοί - Δεν γνωρίζω	Σύνολο
	4/5 (80%) 1/1 (100%) 3/9 (33,33%)	8/15 (53,33%)
A.5	Λάθος 0%	
A.6	Λάθος 0%	
A.7	Λάθος 0%	

Ερωτηματολόγιο Α2 (συμπληρωματικό)

Σωστές απαντήσεις: 6/11 (54,5%)

Ερωτηματολόγιο Β

- B.1 Μηδέν 0%
B.2 Σωστό 100%
B.3 (α) Σωστό (100%), (β) Λάθος (0%)

Ερωτηματολόγιο Γ

Σωστές απαντήσεις: 5/9 (55%)

5. Λευτέρης

Ερωτηματολόγιο Α (για την έννοια της μεταβλητής)

- A.1 Σωστές απαντήσεις: 8/9 (88,88%)
A.2 Θετικοί - Αρνητικοί - Δεν γνωρίζω Σύνολο
6/7 (85,7%) 4/4 (100%) 3/3 (100%) 13/14 (92,85%)
A.3 Σωστά (100%)
A.4 Θετικοί - Αρνητικοί - Δεν γνωρίζω Σύνολο
4/5 (80%) 1/1 (100%) 6/9 (66,66%) 11/15 (73,33%)
A.5 Σωστά (100%)
A.6 Σωστά (100%)
A.7 Σωστά (100%)

Ερωτηματολόγιο Α2 (συμπληρωματικό)

Σωστές απαντήσεις: 10/11 (91%)

Ερωτηματολόγιο Β

- B.1 Σωστό (100%)
B.2 75%
B.3 Σωστό (100%)

Ερωτηματολόγιο Γ

Σωστές απαντήσεις: 7/9 (77,8%)

6. Ευθύμιος

Ερωτηματολόγιο Α (για την έννοια της μεταβλητής)

- A.1 Σωστές απαντήσεις: 2/9 (22,22%)
A.2 Θετικοί - Αρνητικοί - Δεν γνωρίζω Σύνολο

6/7 (85,7%)	3/4 (75%)	3/3 (100%)	12/14 (85,7%)
A.3 Σωστά (100%)			
A.4 Θετικοί - Αρνητικοί - Δεν γνωρίζω			Σύνολο
4/5 (80%)	1/1 (100%)	9/9 (100%)	14/15 (93,33%)
A.5 Σωστά (100%)			
A.6 Σωστά (100%)			
A.7 Λάθος (0%)			

Ερωτηματολόγιο A2 (συμπληρωματικό)

Σωστές απαντήσεις: 9/11 (81,8%)

Ερωτηματολόγιο B

- B.1 10%
- B.2 20%
- B.3 (α) 100%, (β) 0%

Ερωτηματολόγιο Γ

Σωστές απαντήσεις: 3/9 (33,33%)

7. Βασίλης Χ

Ερωτηματολόγιο A (για την έννοια της μεταβλητής)

A.1 Σωστές απαντήσεις: 4/9		
A.2 Θετικοί – Αρνητικοί – Δεν γνωρίζω		Σύνολο
7/7 (100%) 3/4 (75%) 2/3 (66,66%)		12/14 (85,7%)
A.3 Σωστά		
A.4 Θετικοί – Αρνητικοί – Δεν γνωρίζω		Σύνολο
5/5 (100%) 0/1 (0%) 4/9 (44,44%)		9/15 (60%)
A.5 Σωστά		
A.6 Μηδέν		
A.7 Σωστά		

Ερωτηματολόγιο A2 (συμπληρωματικό)

Σωστές Απαντήσεις 6/11 (54,54%)

Ερωτηματολόγιο B

- B.1 Μηδέν
- B.2 Μέρος της λύσης σωστό
- B.3 (α) Σωστό (β) μηδέν

Μηδέν

8. Κωνσταντίνος

Ερωτηματολόγιο Α (για την έννοια της μεταβλητής)

- | | | | |
|-----|-----------------------------------|--------------|--------------|
| A.1 | Σωστές απαντήσεις | 1/9 (11,11%) | |
| A.2 | Θετικοί - Αρνητικοί – Δεν γνωρίζω | | Σύνολο |
| | 2/7 (28,6%) | 1/4 (25%) | 2/3 (66,66%) |
| | | | 5/14 (35,7%) |
| A.3 | 1/2 (50%) | | |
| A.4 | Θετικοί - Αρνητικοί - Δεν γνωρίζω | | Σύνολο |
| | 4/5 (80%) | 0/1 (0%) | 2/9 (22,22%) |
| | | | 6/15 (40%) |
| A.5 | Μηδέν | | |
| A.6 | Μηδέν | | |
| A.7 | Σωστά | | |

Ερωτηματολόγιο A2 (συμπληρωματικό)

Σωστές Απαντήσεις: 4/11 (36,36%)

Ερωτηματολόγιο Β

- B.1 Μηδέν
B.2 Σχημάτισε σωστά την εξίσωση και έφτασε σωστά μέχρι και την διακρίνουσα, περίπου 50%
B.3 (α) Σωστά, (β) Μηδέν

Ερωτηματολόγιο Γ

0/9 (0%)

9. Γιώργος

Ερωτηματολόγιο Α (για την έννοια της μεταβλητής)

- | | | | | |
|-----|---------------------------------|-------------|--------------|----------------|
| A.1 | Σωστές απαντήσεις: 5/9 (55,55%) | | | |
| A.2 | Θετικοί - | Αρνητικοί - | Δεν γνωρίζω | Σύνολο |
| | 4/7 (57,15%) | 1/4 (25%) | 2/3 (66,66%) | 7/14 (50%) |
| A.3 | Σωστά 100% | | | |
| A.4 | Θετικοί - | Αρνητικοί - | Δεν γνωρίζω | Σύνολο |
| | 5/5 (100%) | 1/1 100%) | 4/9 (44,44%) | 10/15 (66,66%) |
| A.5 | Σωστά 100% | | | |

A.6 Σωστά 100%

A.7 Μηδέν 0%

Ερωτηματολόγιο A2 (συμπληρωματικό)

Σωστές απαντήσεις 6/11 (54,54%)

Ερωτηματολόγιο B

B.1 Μηδέν

B.2 40%

B.3 (α) Σωστά (100%), (β) Μηδέν (0%)

Ερωτηματολόγιο Γ

Σωστές απαντήσεις: 1/9 (11,11%)

10. Σωκράτης

Ερωτηματολόγιο A

A.1 Σωστές απαντήσεις: 2/9 (22,22%)

A.2 Θετικοί -	Αρνητικοί -	Δεν γνωρίζω	Σύνολο
4/7 (57,14%)	4/4 (100%)	3/3 (100%)	11/14 (78,6%)

A.3 50%

A.4 Θετικοί -	Αρνητικοί -	Δεν γνωρίζω	Σύνολο
4/5 (80%)	1/1 (100%)	5/9 (55,55%)	10/15 (66,66%)

A.5 Σωστά (100%)

A.6 Λάθος (0%)

A.7 Λάθος (0%)

Ερωτηματολόγιο A2 (συμπληρωματικό)

Σωστές απαντήσεις: 9/11 (81,8%)

Ερωτηματολόγιο B

B.1 Σωστά (100%)

B.2 Σωστά (100%)

B.3 (α) Σωστά (100%), (β) 20%

Ερωτηματολόγιο Γ

Σωστές απαντήσεις: 1/9 (11,11%)

4.3 Συμπεράσματα

Η απόδοση νοήματος στα γράμματα από τους μαθητές είναι ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα στη μάθηση της άλγεβρας. Το γράμμα είναι ένα σημείο που προσδιορίζει κάτι άλλο.

Μία από τις πηγές προβλημάτων στην άλγεβρα αποτελεί η ιδιαιτερότητα της φυσικής γλώσσας που χρησιμοποιείται για την διατύπωση των αλγεβρικών εννοιών, όπως π.χ. “έστω ένας τυχαίος αριθμός” που δεν γίνεται εύκολα κατανοητή από τους μαθητές (Pimm, 1987). Στο συγκεκριμένο ερώτημα της εργασίας μας (ερώτηση A1) απάντησαν σωστά οι μισοί μαθητές της κατηγορίας α και 48% της κατηγορίας β. Οι υπόλοιποι έγραψαν τυχαίους συγκεκριμένους αριθμούς. Από τις συνεντεύξεις προέκυψε ότι έγραψαν συγκεκριμένους αριθμούς “στην τύχη”.

Η δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση των γραμμάτων ως μεταβλητές έχει εντοπιστεί από τους ερευνητές και καταγράφηκε στην δική μας έρευνα στα ερωτηματολόγια A και A2.

Στο ερωτηματολόγιο A στις ερωτήσεις 2, 3, 4, 5 και 6, οι μαθητές αντιμετώπισαν τις μεταβλητές ως θετικούς άγνωστους αριθμούς και η δυσκολία τους αυξάνονταν όταν παρατηρούσαν π.χ. στην ερώτηση 6: Ο αριθμός 0,1χ είναι μεγαλύτερος από τον χ. Τι συμπεραίνετε για τον χ; οι σωστές απαντήσεις ήταν 25% (6/24).

Ως διαδοχικοί αριθμοί συνήθως εκλαμβάνονται από τους μαθητές οι α, β, γ ή χ, ψ, ω, δηλαδή η διαδοχή τους στο αλφάβητο. Το φαινόμενο αυτό έχει διαπιστωθεί σε ξένες και ελληνικές έρευνες. Στην έρευνά μας το 25% απάντησε σωστά στην ερώτηση: το άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών ισούται με 9.

Συχνά οι μαθητές έχουν μία περιορισμένη οπτική για τις αλγεβρικές παραστάσεις και χρησιμοποιούν αριθμητικά μοντέλα περισσότερο παρά αλγεβρικά, οπότε χάνουν το νόημα που αποδίδεται στις μεταβλητές και τα “γραμματικά” σύμβολα.

Ως προς την επίλυση προβλήματος (Problem solving) οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσουν τρία επίπεδα δυσκολίας:

1. Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές έχουν να μεταφράσουν το κείμενο του προβλήματος από την καθομιλουμένη στην αλγεβρική γλώσσα.
2. Το δεύτερο επίπεδο δυσκολίας είναι να επιλύσουν την εξίσωση που προκύπτει.
3. Στο τρίτο επίπεδο πρέπει να ερμηνεύσουν την απάντηση που έδωσαν από την επίλυση της εξίσωσης και να επανέλθουν στο πρόβλημα που μελετούν.

Η δυσκολία των μαθητών όσον αφορά στο πρώτο επίπεδο πηγάζει από την έμφαση που δίνεται, στο Δημοτικό σχολείο, στις αριθμητικές πράξεις που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος και όχι στην αναπαράσταση της επίλυσης. Το άλμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα είναι μεγάλο αφού οι μαθητές πρέπει να επικεντρωθούν στη δομή και όχι στις πράξεις που απαιτούνται. Η δυσκολία αυτή αποτυπώθηκε στις απαντήσεις των μαθητών στο πρόβλημα B1, (Διατύπωση: Ο Μιχάλης, τον Απρίλη, μίλησε 150 λεπτά από το σταθερό και το κινητό του. Κάθε λεπτό ομιλίας κοστίζει 0,2€ από το κινητό και 0,05€ από το σταθερό. Οι κλήσεις αυτές κόστισαν 12€ (χωρίς το πάγιο). Πόσα λεπτά μίλησε από σταθερό και πόσα από το

κινητό;) όπου 2 μαθητές από τους 24 απάντησαν σωστά και στα 2 σκέλη (ποσοστό επιτυχίας 6,3%). Οι υπόλοιποι προσπάθησαν ανεπιτυχώς να το επιλύσουν με αριθμητικές μεθόδους.

Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές δυσκολεύονται από το είδος και την πολυπλοκότητα των εξισώσεων δηλαδή αν υπάρχουν παράμετροι, παρονομαστές, παρενθέσεις κλπ. Στην παρούσα εργασία διαπιστώθηκε ότι στο πρόβλημα B3 (Διατύπωση του προβλήματος: Να σχηματίσετε την εξίσωση που προκύπτει από το πρόβλημα: Το άθροισμα δύο αντίστροφων αριθμών ισούται με τη μονάδα. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί.) το 41,65% των μαθητών σχημάτισαν σωστά την εξίσωση και μόνο το 6,3% (2 μαθητές στους 24) την έλυσαν σωστά. Οι υπόλοιποι δεν αναγνώρισαν ότι είναι μία απλή κλασματική εξίσωση, δεν έθεσαν περιορισμό $x \neq 0$, οι περισσότεροι δεν έκαναν απαλοιφή παρονομαστών και κάποιοι έκαναν απαλοιφή μόνο στο πρώτο μέλος. Ένας μαθητής χρησιμοποίησε δύο άγνωστους για το πρώτο ερώτημα, δηλαδή $x/\psi + \psi/x = 1$, αλλά βρέθηκε σε αμηχανία όταν αντιμετώπισε το δεύτερο ερώτημα που δεν μπόρεσε να επιλύσει. Επίσης μερικοί δοκίμασαν με αριθμητικά κλάσματα και απάντησαν ότι το πρόβλημα είναι αδύνατο. Η έλλειψη κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής και του αγνώστου είναι εμφανής.

Όταν βρίσκουν δυσκολίες οι μαθητές στην άλγεβρα, όπως π.χ. κατά την επίλυση της εξίσωσης $x + 1/x = 1$ του προβλήματος Β, ο εμπειρικός-διαισθητικός τρόπος υπερτερεί της τυπικής διαδικασίας.

Όσον αφορά στις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές στο τρίτο επίπεδο παρατηρήθηκε στις απαντήσεις που έδωσαν στο πρόβλημα Β2 ότι δέχτηκαν τις λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης που έλυσαν και δεν σκέφθηκαν να επιστρέψουν στο πρόβλημα για να ελέγξουν αν οι αριθμοί-λύσεις είναι αποδεκτές.

Μόνο ένας μαθητής σκέφθηκε να απορρίψει την λύση $x = -3$ επειδή είναι αρνητική, χωρίς να ελέγξει ότι το μήκος του ορθογώνιου δεν ήταν το x αλλά το $x + 2$.

Αρκετοί μαθητές, στο ίδιο πρόβλημα, δεν έβαλαν παρένθεση στο $x + 2$ όταν το πολλαπλασίασαν με το 3. Έχουν δυσκολία να αντιμετωπίσουν μία παράσταση ως ένα αριθμό, εν προκειμένω το $x + 2$ που στο συγκεκριμένο πρόβλημα εκφράζει το πλάτος του ορθογώνιου.

Κάποια μαθήτρια στη συνέντευξη είπε ότι δεν συνέχισε να λύσει το πρόβλημα επειδή δεν ήξερε πώς να ονομάσει το μήκος και το πλάτος. Στο σημείο αυτό παρατηρούμε τη μη κατανόηση του ρόλου της μεταβλητής στις αλγεβρικές εκφράσεις.

Η δυσκολία των μαθητών να επιλύουν προβλήματα είναι μεγαλύτερη από τη δυσκολία που έχουν να επιλύουν εξισώσεις, ανισώσεις ή συστήματα χωρίς αναφορά σε κείμενο. Η διδακτική εμπειρία φαίνεται να ενισχύει την άποψη κάποιων ερευνητών ότι τα προβλήματα των μαθητών δεν είναι τόσο στο διαδικαστικό κομμάτι όσο στην εννοιολογική κατανόηση.

Στις απαντήσεις των μαθητών στο φυλλάδιο Γ παρατηρήθηκε διαπιστώθηκε ότι έχουν χαμηλό επίπεδο κατανόησης της έννοιας της παραμέτρου.

Παρακάτω συνοψίζουμε τα συμπεράσματα που βγάλαμε μελετώντας τις απαντήσεις των μαθητών στα ερωτηματολόγια, τις συνεντεύξεις που μας παραχώρησαν και την διδακτική εμπειρία.

Συμπεράσματα για τους μαθητές:

1. Δεν έχουν κατανοήσει την έννοια της μεταβλητής, του αγνώστου και της παραμέτρου.
2. Συμβολίζουν αντικείμενα ή ποσότητες με το αρχικό γράμμα του αντικειμένου, π.χ. ψ για το ψάρι.
3. Δεν έχουν αναπτύξει αφηρημένη αλγεβρική σκέψη.
4. Χρησιμοποιούν συνήθως αριθμητικά μοντέλα.
5. Λειτουργούν “διαδικαστικά” ακολουθώντας σειρές εντολών κατά τη διαδικασία επίλυσης εξισώσεων.
6. Στην επίλυση προβλήματος έχουν μεγάλη δυσκολία στην “μετάφραση” από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική.
7. Αντιμετωπίζουν ευκολότερα προβλήματα ίδια ή παρόμοια με αυτά που ήδη έχουν λύσει.
8. Δεν κάνουν έλεγχο των λύσεων στα προβλήματα, αποδέχονται όλες τις λύσεις.
9. Στις εξισώσεις, χρησιμοποιούν το ίσον (=) όπως στο Δημοτικό σχολείο, με το λειτουργικό του ρόλο και όχι ως σύμβολο ισοδυναμίας των δύο μελών της εξίσωσης.
10. Δεν αναγνωρίζουν κοινές δομές σε διαφορετικά σενάρια. Αν διαφοροποιηθεί λίγο το σενάριο οδηγούνται σε αποτυχία κατασκευής της εξίσωσης.
11. Μπερδεύονται με το πρόσημο των μεταβλητών θεωρώντας π.χ. το $-x$ αρνητική ποσότητα.

4.4 Προτάσεις διδασκαλίας

Τελειώνοντας το γυμνάσιο ο μαθητής πρέπει να έχει κατανοήσει την έννοια της μεταβλητής, να χειρίζεται με ευχέρεια αλγεβρικές παραστάσεις, να αναπτύσσει τις βασικές ταυτότητες, και να μπορεί να παραγοντοποιεί αλγεβρικές παραστάσεις. Σημαντικό είναι να γνωρίζει ο μαθητής να επιλύει γραμμικές εξισώσεις και γραμμικά συστήματα, δευτεροβάθμιες και κλασματικές εξισώσεις, καθώς και πολυωνυμικές εξισώσεις ανωτέρου βαθμού, ως εφαρμογή της παραγοντοποίησης.

Οι συναρτήσεις $\psi = \alpha x + \beta$ και $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ πρέπει να έχουν κατανοηθεί ως αλγεβρικά και ως γεωμετρικά αντικείμενα και να είναι αναγνωρίσιμα στις διάφορες αναπαραστάσεις τους.

Στις ενότητες αυτές εμπλέκεται η άλγεβρα και η αναλυτική γεωμετρία, οπότε προσφέρεται η ευκαιρία στον καθηγητή να διδάξει την παράμετρο.

Εδώ φαίνεται ο ρόλος των παραμέτρων, και πως αυτές επηρεάζουν τη γραφική παράσταση σε κάθε περίπτωση.

Η Άλγεβρα δεν θα μπορούσε να υπάρξει χωρίς τις μεταβλητές. Μεταβλητές και άλγεβρα είναι συνώνυμα.

Ο δάσκαλος των Μαθηματικών, εισάγοντας την άλγεβρα, μπορεί να προσεγγίσει την διδασκαλία της σαν να ήταν διδασκαλία άγνωστης γλώσσας, μιας γλώσσας συμβόλων την οποία οι μαθητές χρειάζεται να κατανοήσουν, μέσω δραστηριοτήτων που στοχεύουν στην ερμηνεία της, και στην απόκτηση της ικανότητας να “μεταφράζουν” προτάσεις μαθηματικού περιεχομένου στη συμβολική αυτή γλώσσα, την αλγεβρική γλώσσα. Αυτή η νέα γλώσσα θα είναι το εργαλείο που θα ωθήσει τους μαθητές να εμβαθύνουν στη μαθηματική σκέψη.

Οι μεταβλητές και ο άγνωστος x συμβολίζονται με γράμματα, και συνδέονται κατάλληλα με τα διάφορα μαθηματικά σύμβολα για να αποτελέσουν αλγεβρικές εκφράσεις.

Μία τέτοιου τύπου εισαγωγή στην άλγεβρα θα μπορούσε να διδάσκεται στην Α΄ γυμνασίου με έμφαση στην ερμηνεία και την μετάφραση των βασικών αλγεβρικών συμβόλων και εννοιών. Οι δάσκαλοι των μαθηματικών μπορούν να κατασκευάσουν και να προτείνουν κατάλληλες δραστηριότητες στους μαθητές τους όπως π.χ. κάποιες από τις ερωτήσεις των φυλλαδίων Α και Α2 της παρούσας εργασίας και άλλων ερωτήσεων και δραστηριοτήτων προσαρμοσμένες στην ικανότητα των μαθητών αυτής της ηλικίας. Καλό είναι οι δάσκαλοι να αφιερώσουν περισσότερο χρόνο από αυτόν που προτείνει το Αναλυτικό Πρόγραμμα.

Στα ερωτηματολόγια Α και Α2 διαπιστώθηκε η δυσκολία των μαθητών να “μεταφράσουν” τις μαθηματικές εκφράσεις σε αλγεβρική γλώσσα που σημαίνει ότι δεν έχουν κατανοήσει την έννοια της μεταβλητής.

Η Άλγεβρα είναι εργαλείο επίλυσης προβλημάτων, χρήσιμο για μοντελοποίηση, για γενίκευση και έκφραση αλγεβρικών σχέσεων. Οι δάσκαλοι των μαθηματικών μπορούν μέσα από απλές δραστηριότητες να ωθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν και να αποκτήσουν αλγεβρική σκέψη. Θεμελιώδες στοιχείο της αλγεβρικής σκέψης αποτελεί η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής.

Οι αλγεβρικές εκφράσεις μπορεί να περιέχουν σχέσεις μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών και με κατάλληλη επεξεργασία μία από τις μεταβλητές μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των υπολοίπων. Με τη διαδικασία αυτή καταλήγουμε σε ένα τύπο συνάρτησης.

Οι δύο προηγούμενες προτάσεις διδασκαλίας όσον αφορά στην έννοια της μεταβλητής μπορούν να πραγματοποιηθούν και οι δύο η μία συμπληρώνοντας την άλλη ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές μια πολύπλευρη και πλούσια εικόνα για την μεταβλητή και τον σπουδαίο ρόλο που παίζει η έννοια αυτή στην άλγεβρα και σε σύγχρονους κλάδους των Μαθηματικών όπως π.χ. στις συναρτήσεις.

Κατά τη διδασκαλία της έννοιας της μεταβλητής είναι απαραίτητο να τονισθεί ότι, σε αντίθεση με τον αριθμό, η μεταβλητή μεταβάλλεται, δεν είναι αριθμός αλλά αλγεβρικό αντικείμενο που μπορεί να αντικατασταθεί από αριθμό.

Μία καλή διδασκαλία των εννοιών της άλγεβρας πρέπει να στοχεύει στην διαδικαστική και στην εννοιολογική κατανόηση. Ο R. Skemp (1976) αναφέρει ότι

εννοιολογική κατανόηση σημαίνει “ξέρω τι κάνω και γιατί” και διαδικαστική “ακολουθώ κανόνες χωρίς νόημα”. Δίνει παραδείγματα κανόνων που προτείνονται από τους καθηγητές, όπως “όταν αλλάζω μέρος στους όρους μιας εξίσωσης, αλλάζω πρόσημο”, “για να διαιρέσω δύο κλάσματα αντιστρέφω το δεύτερο κλάσμα και κάνω πολλαπλασιασμό”, “αν υπάρχει το πρόσημο πλην μπροστά από παρένθεση, βγάζω την παρένθεση και αλλάζω τα πρόσημα των αριθμών μέσα στην παρένθεση”, οι οποίοι είναι πιθανόν να οδηγήσουν σε διαδικαστική κατανόηση. Όταν λοιπόν κάποιος μαθητής εφαρμόζει αυτούς τους κανόνες σωστά, θεωρεί ότι έχει καταλάβει, δεν είναι όμως σε θέση να ερμηνεύσει το γιατί. Ο R. Skemp (1976) δεν θεωρούσε την διαδικαστική ως είδος κατανόησης, η τόσο συχνή ύπαρξη της, όμως, τον έκανε να αναθεωρήσει. Παρατήρησε ότι αρκετοί δάσκαλοι των μαθηματικών διδάσκουν “διαδικαστικά”, οπότε διατύπωσε κάποια πλεονεκτήματα μερικά από τα οποία είναι:

1. Οι διαδικαστικοί κανόνες είναι πιο εύκολο να κατανοηθούν και ακόμη περισσότερο να εφαρμοστούν.
2. Εμπλέκεται λιγότερη γνώση. Ο μαθητής μπορεί να βρει τη σωστή απάντηση πιο γρήγορα. Εδώ τονίζει ότι ακόμα και τα “εννοιολογικά μαθηματικά” χρησιμοποιούν “διαδικαστική σκέψη”.
3. Ο καθηγητής παίρνει στα χέρια του γραπτά με πολλές σωστές απαντήσεις και με αυτή την επιτυχία τα παιδιά αποκτούν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση, δέχονται επιβράβευση και έτσι δημιουργείται θετικό κλίμα.

Παρακάτω αναφέρει τα πλεονεκτήματα της διδασκαλίας που έχει στόχο την “εννοιολογική κατανόηση”.

1. Ένας μαθητής που κατανοεί εννοιολογικά, μπορεί να προσαρμόσει ευκολότερα τις έννοιες που έχει μάθει σε νέες καταστάσεις και προβλήματα που έχει να επεξεργαστεί.
2. Μπορεί να θυμηθεί πιο εύκολα τις έννοιες και τους κανόνες που έχει μάθει.
3. Οι έννοιες που αποκτώνται από το μαθητή είναι δομημένες πιο σταθερά και πιο ποιοτικά.

Πρέπει να τονιστεί ότι τα επιτυχή αποτελέσματα έχουν άμεση σχέση με το είδος της κατανόησης που αποσκοπεί ο καθηγητής και οι μαθητές. Αν οι μαθητές στοχεύουν στη διαδικαστική κατανόηση ενώ ο καθηγητής στην εννοιολογική, είναι ότι καλύτερο για τους μαθητές, το αντίθετο όμως δημιουργεί προβλήματα. Αν κάποιος μαθητής κατανοεί “εννοιολογικά” και ο καθηγητής διδάσκει απλά τύπους χωρίς ερμηνεία και απόδειξη, προκαλεί την αδιαφορία και ερωτηματικά στον μαθητή.

Σύμφωνα με τον Davis (1988) υπάρχουν “επιτυχημένοι” μαθητές οι οποίοι έχουν αρκετές παρερμηνείες για τα μαθηματικά και η επιτυχία τους εντέλει οφείλεται στις οδηγίες: “Κάνε αυτό, μετά εκείνο ...” από τους καθηγητές. Και το σημαντικό είναι ότι οι καθηγητές δέχονται τη σωστή διαδικασία ως επιτυχία. Μαθαίνουν δηλαδή τους μαθητές να λειτουργούν ως ένα πρόγραμμα υπολογιστή εκτελώντας σειρά εντολών. Χάνεται έτσι η δημιουργική σκέψη, γίνεται δύσκολη η κατανόηση των εννοιών και όταν ο μαθητής πρέπει να λύσει κάποιο πρόβλημα έχει μεγάλη δυσκολία. Οι

δάσκαλοι των μαθηματικών πρέπει να σχεδιάζουν την διδασκαλία τους με προσανατολισμό στην εννοιολογική κατανόηση και τη δημιουργική σκέψη, που θα βοηθήσουν τον μαθητή στην επίλυση προβλήματος.

Επίσης η διατύπωση των προβλημάτων πρέπει να είναι προσεκτικά επιλεγμένη, αφ' ενός μεν να μη φωτογραφίζει την πορεία προς τη λύση, αφ' ετέρου να είναι τέτοια που να μη προκαλεί παρανοήσεις στους μαθητές.

Στην επίλυση προβλημάτων, οι μεταβλητές είναι χρήσιμες για να σχηματίσουν οι μαθητές τις αλγεβρικές σχέσεις που προκύπτουν από το κείμενο του προβλήματος. Οι σχέσεις αυτές μεταξύ των μεταβλητών, στις γυμνασιακές τάξεις, μπορεί να είναι εξισώσεις, ανισώσεις ή συστήματα εξισώσεων.

Κατά την αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων οι μαθητές χρειάζεται να έχουν κατανοήσει όχι μόνο το ρόλο των μεταβλητών, αλλά να έχουν τη δυνατότητα να επιλύσουν την εξίσωση ή την ανίσωση που προκύπτει. Σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή μετατρέπεται σε άγνωστο σταθερό αριθμό, ο οποίος θα "αποκαλυφθεί" μετά την επίλυση της εξίσωσης ή της ανίσωσης.

Ενδιαφέρον στη Διδακτική των Μαθηματικών παρουσιάζει η περίπτωση της ανίσωσης, όπου παρουσιάζονται συνήθως άπειρες στο πλήθος λύσεις και οι μαθητές έχουν σύγχυση, αφού έχουν την εντύπωση ότι το σύμβολο χ είναι μεταβλητή εξαιτίας του άπειρου πλήθους των λύσεων. Ο δάσκαλος πρέπει να τονίσει, στην περίπτωση αυτή, ότι μπορεί να προκύπτουν άπειρες στο πλήθος λύσεις στην ανίσωση, ωστόσο οι άπειροι αυτοί αριθμοί αποτελούν το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης και δεν είναι μεταβλητές. Οι μεταβλητές παίρνουν όλες τις τιμές ενός συνόλου ορισμού.

Όταν εξισώσεις, ανισώσεις ή συστήματα εξισώσεων προτείνονται προς επίλυση, χωρίς να προκύπτουν από κάποιο πρόβλημα, καλό είναι ο εισηγητής-δάσκαλος να προσδιορίζει το **σύνολο** στο οποίο μπορεί να πάρει τιμές ο άγνωστος χ . Προκαλεί έκπληξη στους μαθητές όταν κάποια εξίσωση έχει λύση στο σύνολο π.χ. των Ακεραίων ενώ είναι αδύνατη στο σύνολο των Φυσικών αριθμών.

Πριν αρχίσει η διαδικασία της επίλυσης ο άγνωστος είναι στοιχείο, συνήθως, ενός απειροσυνόλου, "μοιάζει" σαν μεταβλητή, αλλά όταν αρχίζει η επίλυση ο μαθητής αντιλαμβάνεται ότι ο χ είναι συγκεκριμένος άγνωστος αριθμός τον οποίο καλείται να ανακαλύψει και να αποκαλύψει.

Χρήσιμο θα ήταν να πραγματοποιούνται αριθμητικές δραστηριότητες, για τους μαθητές της Α' γυμνασίου, όπως να διαβάζουν ένα πρόβλημα και να ζητείται από αυτούς να γράψουν την αριθμητική παράσταση που προκύπτει. Ανάλογες δραστηριότητες θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν στις τάξεις της Β' γυμνασίου με αλγεβρικό περιεχόμενο. Δηλαδή να διατυπώνεται κάποιο πρόβλημα και ο μαθητής να γράφει την εξίσωση, την ανίσωση ή το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει. Έτσι ο μαθητής της Γ' γυμνασίου θα έχει ήδη αποκτήσει επαρκή εμπειρία ως προς το πρώτο επίπεδο της επίλυσης προβλήματος.

Η έννοια της παραμέτρου καλύπτεται από ένα πέπλο μυστηρίου στα μάτια των μαθητών. Στα σχολικά εγχειρίδια δεν υπάρχει αναφορά ούτε στην έννοια, ούτε στο αλγεβρικό αντικείμενο "παραμέτρος".

Η γραμμική συνάρτηση, $\psi = \alpha x + \beta$, προσφέρει μια ευκαιρία στον δάσκαλο να εισάγει την έννοια της παραμέτρου, ενδεχομένως με ηλεκτρονικά μέσα, δείχνοντας τι θα συμβεί αν διατηρούμε σταθερό το α και μεταβάλλουμε το β , ή αντίστροφα.

Η γραμμική εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ επίσης είναι κατάλληλη για διδασκαλία της παραμέτρου. Διερευνώντας, ο δάσκαλος με τους μαθητές του, το είδος των λύσεων για τις διάφορες τιμές των α και β .

Η διδασκαλία δεν είναι μόνο τέχνη, είναι και τεχνική. Η μεν τέχνη ανάγεται στα χαρίσματα, το ταλέντο και την προσωπικότητα του δασκάλου, η δε τεχνική ανάγεται στη συνειδητή προσπάθεια, εκπαίδευση και συνεχή ενημέρωση του δασκάλου.

Παραθέτουμε κάποιες απαραίτητες αρχές για μία καλή διδασκαλία οι οποίες προφανώς μπορούν να εμπλουτιστούν, να εξειδικευτούν-τροποποιηθούν ανάλογα με την τάξη και την προσωπικότητα του δασκάλου:

4.4.1 Οι δάσκαλοι των μαθηματικών

1. Καλό είναι να προκαλούν το ενδιαφέρον, να βοηθούν στην κατανόηση και τη θετική στάση των μαθητών για τα Μαθηματικά, να εφευρίσκουν κατάλληλα παραδείγματα, διαδικασίες και δραστηριότητες, να χρησιμοποιούν νέες τεχνολογίες ώστε να αναδειχθεί η χρησιμότητα της άλγεβρας, που είναι από τη φύση της αφηρημένος κλάδος των Μαθηματικών.
2. Θετικό είναι να μελετούν τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών ώστε να τα αξιοποιήσουν στη διδασκαλία. Στην περίπτωση αυτή η χρήση κατάλληλων αντιπαραδειγμάτων είναι ωφέλιμη.
3. Καλό είναι να αξιοποιούν την Ιστορία των Μαθηματικών για μία ποιοτική διδασκαλία, αναδεικνύοντας τις μεγάλες στιγμές των μαθηματικών ανακαλύψεων. Έτσι οι μαθητές εντυπωσιάζονται και μαθαίνουν καθοδηγούμενοι με κατάλληλες δραστηριότητες που θα δοθούν από τον διδάσκοντα.
4. Αρνητικό είναι να θεωρούν επιτυχία των μαθητών την πιστή αναπαραγωγή των αλγοριθμικών διαδικασιών που τους υποδεικνύουν.
5. Οφείλουν να αντιλαμβάνονται ότι οι μαθηματικές γνώσεις και ιδέες που είναι γι' αυτούς αυτονόητες, δεν είναι και για τους μαθητές το ίδιο.
6. Θετικό είναι να γίνεται η διδασκαλία με σύγχρονα μέσα π.χ. αντί για παραδοσιακό πίνακα να παρουσιάζονται τα θέματα με power point, οπότε ο καθηγητής θα κινείται μέσα στην τάξη και θα μπορεί να βοηθά τον κάθε μαθητή.
7. Καλό είναι να προτείνουν δραστηριότητες στους μαθητές όπως π.χ. επίλυση προβλήματος (problem solving) και να τους προτρέπουν να κατασκευάζουν οι ίδιοι οι μαθητές προβλήματα.
8. Θετικό είναι να ζητούν από τους μαθητές να διατυπώνουν λεκτικά τις αλγεβρικές σχέσεις, όπως π.χ. ταυτότητες, αλγεβρικές παραστάσεις κ.λ.π.

«Υπάρχουν τόσες καλές διδασκαλίες όσες και οι καλοί δάσκαλοι.»

4.4.2 Στατιστικά στοιχεία στις απαντήσεις των ερωτηματολογίων

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α (1^η διδακτική ώρα)

Ερωτήσεις Α, για την έννοια της μεταβλητής
(Συμμετείχαν 24 μαθητές-τριες)

ΕΡΩΤΗΣΗ 1 α 25%, 1 β 50%, 1 γ 0%, 1 δ 33,33% (8/24), 1 ε 25%, 1 στ 20,83% (5/24), 1 ζ 25%, 1 η 8,33% (2/24), 1 θ 41,65% (10/24).

ΕΡΩΤΗΣΗ 2 (Αναφέρεται το ποσοστό των σωστών απαντήσεων). Από τις 14 αλγεβρικές παραστάσεις που δόθηκαν, οι 7 δήλωναν θετικούς αριθμούς, 4 αρνητικούς και 3 απροσδιόριστες. Άρα οι σωστές απαντήσεις σε κάθε περίπτωση εκφράζονται με ετερόνυμα κλάσματα δηλαδή 7/7, 4/4, 3/3. Το συνολικό όμως επιτυχίας για κάθε μαθητή εκφράζεται με κλάσμα της μορφής α/14, εφόσον ο αριθμός των ερωτήσεων είναι 14.

Αυξ. Αριθμ. Μαθητή	Θετ-Αρν- Δεν γνωρ.	Ποσοστό
1.	7 /7 - 3/ 4 -3/ 3	13/14 (92,85%)
2.	1/7 – 3/4 – 0/3	4/14 (28,50%)
3.	4/7- 2/4 - 2/3	8/14 (57,14%)
4.	4/7 – 4/4 - 3/3	11/14 (78,57%)
5.	3/7 - 2/4 - 3/3	8/14 (57,14%)
6.	6/7 - 0/4 - 2/3	6/14 (42,85%)
7.	7/7 - 3/4 - 3/3	13/14 (92,85%)
8.	4/7 - 0/4 – 0/3	4/14 (28,50%)
9.	4/7 – 1/4 – 0/3	5/14 (35,70%)
10.	4/7 - 0/4 - 0/3	4/14 (28,50%)
11.	4/7 - 1/4 - 2/3	7/14 (50,00%)
12.	1/7 - 3/4 - 1/3	5/14 (35,70%)
13.	2/7 - 1/4 - 2/3	5/14 (35,70%)
14.	5/7 - 0/4 - 0/3	5/14 (35,70%)
15.	3/7 - 3/4 - 0/3	6/14 (42,85%)
16.	1/7 - 2/4 – 1/3	4/14 (28,50%)
17.	4/7 – 0/4 – 1/3	5/14 (35,70%)
18.	3/7 - 2/4 - 1/3	6/14 (42,85%)
19.	3/7 - 1/4 - 0/3	4/14 (28,50%)
20.	4/7 - 3/4 - 3/3	10/14 (71,40%)
21.	6/7 - 4/4 - 3/3	13/14 (92,85%)

22.	4/7 - 2/4 - 1/3	7/14 (50,00%)
23.	2/7 - 1/4 - 0/3	3/14 (21,40%)
24.	3/7 - 2/4 - 0/3	5/14 (35,70%)

Μέση τιμή τμήματος: 67/140 (47,85%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Α.3

Σωστές απαντήσεις 3/24 (12,50%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Α.4

Όλες οι ερωτήσεις είναι 15 από τις οποίες είναι 5,1,9 σωστές ανά κατηγορία. Το συνολικό ποσοστό το εκφράζω με κλάσμα της μορφής α/15

Αυξ. Αρ.	Θετ – Αρν – αγν.	Ποσοστά
Μαθητή		
1.	4/5 – 1/1 – 9/9	14/15 (93,33%)
2.	3/5 - 0/1 - 2/9	5/15 (33,33%)
3.	3/5 - 0/1 - 3/9	6/15 (40,00%)
4.	4/5 - 1/1 - 5/9	10/15 (66,66%)
5.	2/5 - 1/1 - 2/9	5/15 (33,33%)
6.	4/5 - 0/1 – 3/9	7/15 (46,66%)
7.	5/5 – 0/1 – 4/9	9/15 (60,00%)
8.	5/5 – 1/1 – 6/9	12/15 (80,00%)
9.	5/5 - 0/1 – 0/9	5/15 (33,33%)
10.	3/5 - 1/1 – 0/9	4/15 (26,66%)
11.	5/5 - 1/1 - 4/9	10/15 (66,66%)
12.	5/5 - 0/1 - 3/9	8/15 (53,33%)
13.	4/5 - 0/1 - 2/9	6/15 (40,00%)
14.	1/5 – 0/1 – 0/9	1/15 (06,66%)
15.	5/5 - 0/1 – 3/9	8/15 (53,33%)
16.	3/5 – 0/1 – 2/9	5/15 (33,33%)
17.	5/5 – 0/1 - 2/9	7/15 (46,66%)
18.	4/5 – 1/1 – 3/9	8/15 (53,33%)
19.	3/5 – 1/1 – 3/9	7/15 (46,66%)
20.	5/5 - 1/1 - 6/9	12/15 (80,00%)
21.	4/5 – 1/1 - 6/9	11/15 (73,33%)
22.	3/5 - 1/1 – 5/9	9/15 (60,00%)
23.	1/5 - 1/1 - 0/9	2/15 (13,33%)
24.	3/5 - 1/1 - 1/9	5/15 (33,33%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Α.5 17/24 (70,83%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Α.6 7/24 (29,16%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Α.7 4/24 (16,66%)

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α.2 (2^η διδακτική ώρα)

(Για την έννοια της μεταβλητής)

Ποσοστά ορθών απαντήσεων:

1. 14/24 (58,25%)	2. 11/24 (45,76%)	3. 3/24 (12,48%)
4. 13/24 (54,08%)	5. 13/24 (20,8%)	6. 3/24 (12,48%)
7. 5/24 (20,8%)	8. 1/24 (4,16%)	9. 6/24 (25%)
10. 12/24 (50%)	11. 5/24 (20,8%)	

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Β (3^η διδακτική ώρα)

ΕΡΩΤΗΣΗ Β.1 Σωστές απαντήσεις: 2/24 (8,32%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Β.2 Σχεδόν σωστές απαντήσεις: 6/24 (25%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Β.3 Σωστές απαντήσεις: 2/24 (8,32%) Α' σκέλος: 8/24 (33,33%)

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Γ (4^η διδακτική ώρα)

ΕΡΩΤΗΣΗ Γ.1 Σωστές απαντήσεις: 5/24 (20,80%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Γ.2 Σωστές απαντήσεις: 2/24 (8,32%), μερικά σωστές απαντήσεις: 2/24 (8,32%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Γ.3 Σωστές απαντήσεις: 0/24 (0%), μερικά σωστές απαντήσεις: 2/24 (8,32%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Γ.4 Σωστές απαντήσεις: 4/24 (16,64%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Γ.5(ι) Σωστές απαντήσεις: 1/24 (4,16%), **Γ.5(ιι)** μερικά σωστή απάντηση: 1/24 (4,16%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Γ.6 Σωστές απαντήσεις: 4/24 (16,64%), μερικά σωστές απαντήσεις: 2/24 (8,32%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Γ.7 Σωστές απαντήσεις: 3/24 (12,48%), μερικά σωστές απαντήσεις: 2/24 (8,32%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Γ.8(ι) Σωστές απαντήσεις: 4/24 (16,64%), μερικά σωστές απαντήσεις: 2/24 (8,32%), **(ιι)** Σωστές απαντήσεις: 1/24 (4,16%)

ΕΡΩΤΗΣΗ Γ.9 (ι) Σωστές απαντήσεις: 1/24 (4,16%), **(ιι)** μερικά σωστές απαντήσεις: 1/24 (4,16%)

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Balyta, P., (1999). *The effects of using motion detector technology to develop conceptual understanding of functions through dynamic representation in grade 6 students*. A Thesis in the Department of Mathematics at Concordia University, Montreal, Quebec, Canada.
2. Βερύκιος, Π. (2003)¹. Η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα: Εμπόδια στη μαθησιακή πορεία του μαθητή. Η περίπτωση της εξίσωσης. *Πρακτικά του 20^{ου} Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ, Βέροια*.
3. Βερύκιος, Π. και Κλαουδάτος, Ν. Τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής από μαθητές της Γ' Γυμνασίου. *Πρακτικά του 16^{ου} Συνεδρίου της ΕΜΕ, Λάρισα*.
4. Bills, L., (2001). *Shifts in the meanings of literal symbols*. In: Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed). *Proceedings of the 21th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol.2 (pp. 161 – 168). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.
5. Booth, L.R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (20-32). Reston, V.A.. N.C.T.M.
6. Boyer, C., 1997, Ιστορία των Μαθηματικών, Εκδόσεις Πνευματικού.
7. Γιαννακούλιας, Ε., 2007, Απειροστικός Λογισμός, η Ιστορική του Εξέλιξη, Εκδόσεις Συμμετρία.
8. Carracher, D.W. & Schliemann, A.D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F.K. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (669 – 705). Charlotte, NC: IAP & NCTM
9. Cooper, T., Lewis, G. M. B., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L., and Mutch, S., (1997). *The transition from arithmetic to algebra: initial understanding of equals, operations and variable*. In: Pehkonen, E. (Ed). *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (21st, Lahti, Finland, July 14 – 19, 1997), Vol.2, pp. 89 – 96.
10. Davis, R., B. (1975). Cognitive process involved in solving simple algebraic equations. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, **1** (3), 7-35.
11. Farmaki, V., Kλαουδάτος, Ν. & Βερίκιος, Ρ. (2005). *Introduction of algebraic thinking. Connecting the concepts of linear function and linear equation*. Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education, Palermo, Italy, Vol II, 407-422

12. Graham, A.T., Thomas, M. O. (2000). *Building a Versatile Understanding of Algebraic Variables with a Graphic Calculator*, Educational Studies in Mathematics, 41(3), 265 – 282.
13. Gray, E., Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A 'proceptual' view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116 – 140.
14. Haspeskian, M. *Contribution to an instrumental approach*. Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME3, Bellaria, Italy, 27Feb – 2Mar, 2003. Ανακτήθηκε από το διαδύκτιο στις 15/10/2012. Internet: www.dm.unipi.it/didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG9.Haspekian_cerme3.pdf
15. Kieran, C., (1981). *Concepts associated with the equality symbol*. Educational Studies in Mathematics, 12(3), 317 – 326.10.
16. Kieran, C., (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective*. In: S. Wagner & Kieran (Eds), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33 – 56). Reston, VA: National Council of Teaching of Mathematics.
17. Kieran, C., (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: The learning of algebra and functions. In Nunez T., Bryant, P., (eds), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*. Psychology Press, 133-162
18. Kuchemann, D. (1981). 'Algebra' in *Children's Understanding of Mathematics*, 11 – 16, K. Hart(Ed.). Alden Press, Oxford, London.
19. Λεμονίδης, Χ. (1996). Εμπειρική έρευνα στην ικανότητα επίλυσης εξισώσεων Α' βαθμού από μαθητές Γυμνασίου. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, Τεύχος 1. Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της ΕΜΕ, σς. 14-35.
20. Lima, N. & Tall, D. (2008) *Procedural embodiment and magic in linear equations*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 6 (No. 1). Pp. 3 – 18.
21. Linchevski, L., Herscovics, N., (1996). *Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknowns in the context of equations*. Educational Studies in Mathematics, 30(1), 39 – 65.
22. Loria, G. (1983) *Ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Παπαζήση.

23. Malle, G. (1993). *Didaktischeprobleme der elementaren algebra*. Braunschweig: Vieweg.
24. McClain (Eds), *Symbolizing and Communicating: Perspectives on mathematical discourse, tools and instructional design*, (37 – 98). Mahwah, NJ: Erlbaum.
25. McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2004). You'll see what you mean: Students encode equations based on their knowledge of arithmetic. *Cognitive Science*, 28, 451 – 466..
26. N.C.T.M., (2000), p. 223
27. Negeubauer, Οι Απαρχές των Θετικών Επιστημών, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης.
28. Πατρώνης, Τ., Σπανός, Δ., 1996, Σύγχρονες Θεωρήσεις και Αντιλήψεις στη Μαθηματική Παιδεία, Εκδόσεις Πνευματικός.
29. Πατρώνης, Α., 1995, Η Σύγχρονη Έννοια της Συνάρτησης και ο Διδακτικός Μετασχηματισμός, Β' Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση, Εκδόσεις: Σύγχρονη Εποχή Κύπρου.
30. Philipp, R. A., (1992). *The many uses of algebraic variables*. *Mathematics Teacher*, 85(7), 557 – 561.
31. Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*. London: Routledge Kegan & Paul.
32. Pirie, S. & Martin, L. (1997). One approach to the teaching of linear equations. *Educational in Mathematics* 34, 159 – 181.
33. Radford, L. (2012). Early Algebraic Thinking Epistemological, Semiotic, and Developmental Issues. *12th International Congress on Mathematical Education. July 2012, Seoul, Korea*. Ανακτήθηκε από το διαδύκτιο στις 12/02/2013.
Internet: <http://academic.sun.ac.za/mathed/MALATI/Rational.pdf>
34. Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. Yackel & K.
35. Schoenfeld, A. H., Arcavi, A., (1988). *On the meaning of Variable*. *Mathematics Teacher*, 81(6), 420 – 427.

36. Sfard A., Η Διαδικαστική Καταγωγή των Μαθηματικών Αντικειμένων και το Δίλημμα της Αντικειμενοποίησης-η Περίπτωση της Συνάρτησης, Άρθρο.
37. Skemp, R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics* (2nd edition). London: Penguin.
38. Σπύρου, Π., Γαγάτσης, Α., Συνάρτηση: Η Επιστημολογική Διάσταση και η Διδακτική της Μεταφορά, Άρθρο. Ανακτήθηκε από το διαδύκτιο στις 09/10/2012.
[http:// www.math.uoa.gr/me/faculty/spirou.html](http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spirou.html)
39. Stacy, K. & MacGregor, M. (1997). *Ideas about symbolism that students bring to algebr*. *The Mathematics Teacher* (90)2, 110 – 113.
40. Struik Dirk, J., Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών, Εκδόσεις Δαίδαλος-Ι. Ζαχαρόπουλος 1982.
41. Tall, D., Vinner, S., 1981. *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*, *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151 – 159.
42. Thomas, M., Tall, D. (1991). *Encouraging Versatile Thinking in Algebra Using Computer*. *Educational Studies in Mathematics*, 22(2), 125 – 147.
43. Vlassis, J., 2002. *The Balance Model: Hindrance or support?* *Educational Studies in Mathematics*, 49, 351 – 359.
44. Wagner, S., Rachlin, S.L., & Jensen, R. J. (1984). *Algebra Learning Project: Final report*. Athens: University of Georgia, Department of Mathematics Education.
45. Χασάπης, Δ., 2009, Ιστορικά Κείμενα των Μαθηματικών στην Τάξη, Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών (Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών), Εκδόσεις Ζήτη.
46. Χόρτη, Α., 2010, Η Έννοια της Συνάρτησης: Από την Ιστορική της Εξέλιξη στα Ορθογώνια Πολυώνυμα και τις Εφαρμογές, Διπλωματική Εργασία (Δ.Π.Μ.Σ. Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών)