

# Η ροή Ricci και εφαρμογές

Δελής Αναστάσιος



# Περιεχόμενα

|          |                                                                        |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Πολλαπλότητες Riemann και καμπυλότητα</b>                           | <b>7</b>  |
| 1.1      | Διανυσματικές Δέσμες . . . . .                                         | 7         |
| 1.1.1    | Εφαπτόμενη Δέσμη . . . . .                                             | 9         |
| 1.1.2    | Δυϊκή Δέσμη . . . . .                                                  | 9         |
| 1.2      | Τανυστές . . . . .                                                     | 10        |
| 1.2.1    | Τανυστικό Γινόμενο Δεσμών . . . . .                                    | 16        |
| 1.3      | Μετρική . . . . .                                                      | 16        |
| 1.4      | Συνοχή . . . . .                                                       | 19        |
| 1.5      | Ολοκλήρωση και Θεώρημα Απόκλισης . . . . .                             | 21        |
| 1.6      | Ανάκληση(Pullback) . . . . .                                           | 22        |
| 1.6.1    | Συνοχή από ανάκληση . . . . .                                          | 23        |
| 1.6.2    | Παράλληλη Μετατόπιση . . . . .                                         | 24        |
| 1.6.3    | Η παράγωγος Lie . . . . .                                              | 25        |
| 1.7      | Καμπυλότητα . . . . .                                                  | 26        |
| 1.7.1    | Καμπυλότητα στην Εφαπτόμενη Δέσμη . . . . .                            | 27        |
| 1.7.2    | Καμπυλότητα διατομής, καμπυλότητα Ricci, βαθμωτή καμπυλότητα . . . . . | 28        |
| <b>2</b> | <b>Ροή Ricci και Γεωμετροποίηση</b>                                    | <b>33</b> |
| 2.1      | Γεωμετρική δομή . . . . .                                              | 33        |
| 2.2      | Εικασία Γεωμετροποίησης του Thurston . . . . .                         | 34        |
| 2.2.1    | Διάσπαση πολλαπλοτήτων . . . . .                                       | 34        |
| 2.3      | Hamilton-Ροή Ricci . . . . .                                           | 36        |
| 2.4      | Perelman-Από εικασία σε θεώρημα . . . . .                              | 37        |
| <b>3</b> | <b>Ροές σε Πολλαπλότητες Riemann</b>                                   | <b>41</b> |
| 3.1      | Διαστολή . . . . .                                                     | 46        |
| 3.2      | Αμφιδιαφορίσεις . . . . .                                              | 46        |
| 3.3      | Η ροή Ricci . . . . .                                                  | 47        |
| 3.4      | Νορμαρισμένη ροή Ricci . . . . .                                       | 51        |
| <b>4</b> | <b>Αρχή Μεγίστου</b>                                                   | <b>55</b> |
| 4.1      | Θεωρία παραβολικών μ.δ.ε . . . . .                                     | 55        |
| 4.1.1    | Γραμμική Θεωρία . . . . .                                              | 55        |
| 4.1.2    | Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών μ.δ.ε. . . . .                             | 56        |
| 4.2      | Η Αρχή του Μεγίστου . . . . .                                          | 57        |
| 4.2.1    | Αρχή Μεγίστου για Βαθμωτές Συναρτήσεις . . . . .                       | 58        |
| 4.2.2    | Αρχή Μεγίστου για συμμετρικούς 2-τανυστες . . . . .                    | 61        |

|          |                                                        |           |
|----------|--------------------------------------------------------|-----------|
| 4.2.3    | Αρχή Μεγίστου σε Διανυσματικές Δέσμες . . . . .        | 66        |
| <b>5</b> | <b>Το θεώρημα του Hamilton</b>                         | <b>77</b> |
| 5.1      | Υπαρξη και μοναδικότητα λύσης της ροής Ricci . . . . . | 77        |
| 5.2      | Η καμπυλότητα γίνεται μη φραγμένη . . . . .            | 83        |
| 5.2.1    | Υπαρξη και συνέχεια οριακής μετρικής . . . . .         | 83        |
| 5.2.2    | Ομαλότητα Οριακής Μετρικής . . . . .                   | 85        |
| 5.3      | Οι Καμπυλότητες Διατομής Συγκλίνουν . . . . .          | 96        |
| 5.3.1    | Τοπική Σύγκλιση . . . . .                              | 99        |
| 5.3.2    | Ολική Σύγκλιση . . . . .                               | 102       |
| 5.4      | Νορμαρισμένη ροή Ricci . . . . .                       | 111       |
| 5.4.1    | Υπαρξη λύσης για όλο το χρόνο . . . . .                | 112       |
| 5.4.2    | Σύγκλιση σε μετρική σταθερής καμπυλότητας . . . . .    | 113       |

# Πρόλογος

Με την εργασία αυτή ολοκληρώνεται ο κύκλος των μεταπτυχιακών σπουδών μου στην κατεύθυνση θεωρητικών μαθηματικών του τμήματος μαθηματικών του πανεπιστημίου Αθηνών. Η εκπόνησή της έγινε υπό την επίβλεψη του καθηγητή, κυρίου Αντώνιου Μελά, κατά τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους 2010-11. Βασικός της στόχος είναι να μελετηθούν τα αποτελέσματα και οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν από τον Richard Hamilton στην ρηξικέλευθη εργασία του: *Three - manifolds with positive Ricci curvature* ([6]), ώστε να αποδείξει το εξής θεώρημα:

**Θεώρημα 0.0.1.** *Έστω  $(M^3, g_0)$  μία κλειστή πολλαπλότητα Riemann διάστασης 3, η οποία δέχεται μετρική Riemann γνήσια θετικής καμπυλότητας Ricci. Τότε η  $M$  δέχεται και μετρική σταθερής θετικής καμπυλότητας.*

Ιδιαίτερα, η προσπάθεια είναι να περιγραφεί το βασικό νέο εργαλείο το οποίο εισήγαγε, η ροή Ricci.

Πριν να περιγράψουμε το περιεχόμενο των επιμέρους κεφαλαίων, πρέπει να αναφερθεί εξ' αρχής ότι το σύνολο της παρουσίασης αποτελεί αναδιάταξη αποτελεσμάτων τα οποία μπορούν να βρεθούν στην βιβλιογραφία που δίνεται στο τέλος της εργασίας. Οι πηγές που αναφέρονται είναι περισσότερες από όσες στην πραγματικότητα χρησιμοποιήθηκαν, ώστε να μην παραληφθούν κλασσικά συγγράμματα και άρθρα πάνω στα θέματα που θα εξεταστούν. Παρ' όλα αυτά δεν αποτελούν ένα πλήρη κατάλογο, ο οποίος όμως μπορεί να συμπληρωθεί ακολουθώντας τις αναφορές των πηγών αυτών. Στη συνέχεια, σε κάθε κεφάλαιο, θα αναφέρεται ακριβώς ποιές είναι οι βασικές πηγές που ακολουθήθηκαν. Η εν λόγω αναδιάταξη τώρα ή όπως θα μπορούσαμε να πούμε συρραφή των επιμέρους αποσπασμάτων, έγινε με γνώμονα την επίτευξη της μέγιστης δυνατής πληρότητας στην παρουσίαση και τις αποδείξεις οι οποίες μπορεί να δίνονται συνοπτικά ή να παραλείπονται τελείως στις πηγές, ανάλογα με το υπόβαθρο των αναγνωστών στους οποίους απευθύνεται η κάθε μία.

Στο κεφάλαιο 1 λοιπόν, παρουσιάζεται εκτενώς σε ορισμένα σημεία και λιγότερο σε άλλα, η προαπαιτούμενη για την κατανόηση όσων θα ακολουθήσουν θεωρία των διαφορικών πολλαπλοτήτων και της γεωμετρίας Riemann. Η ανάπτυξη ακολουθεί κυρίως το [10]. Για φοιτητές οι οποίοι δεν προέρχονται από αμιγώς μαθηματικές προπτυχιακές σπουδές και με δεδομένο πως αντίστοιχα μαθήματα δεν διδάσκονται στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών των θεωρητικών μαθηματικών, είναι πιθανό η θεωρία γύρω από τους τανυστές (και συνεπώς τις διαφορικές μορφές και την ολοκλήρωση) να αποτελεί κάτι εντελώς καινούργιο. Τα κεφάλαια 11, 12, 13, 14 και 6 του [11] και 2

του [25] καλύπτουν το θέμα εκτενέστερα από όσο απαιτείται εδώ. Άλλα και γενικότερα τα εν λόγω βιβλία αποτελούν κλασσικά συγγράμματα πάνω στη θεωρία των διαφορικών πολλαπλοτήτων. Αντίστοιχα, τα [12] και [27] μαζί με τις ασκήσεις που περιέχονται στο [28] καλύπτουν εξαιρετικά τη βασική θεωρία της γεωμετρίας Riemann.

Το κεφάλαιο 2 είναι μία συνοπτική επισκόπηση της ιστορίας της εικασίας του Poincaré και της γενικότερης του Thurston, της οποίας η πρώτη αποτελεί ειδική περίπτωση. Η παρουσίαση οφείλεται στα [31, 22]. Στόχος δεν είναι η κατανόηση των επιμέρους αποτελεσμάτων αφού κάτι τέτοιο είναι αδύνατο στο σημείο αυτό. Στα [8, 9, 14, 15, 16, 17] αναπτύσσονται πλήρως τα αντίστοιχα επιχειρήματα. Συνεπώς ούτε αποδείξεις δίνονται ούτε το σύνολο των εννοιών εξηγούνται πλήρως. Στόχος είναι να αναδειχθεί η σημασία της ροής Ricci ως το εργαλείο με τη βοήθεια του οποίου ο Hamilton μετέφερε ένα τοπολογικό-γεωμετρικό πρόβλημα στην περιοχή των διαφορικών εξισώσεων, να καταγραφούν τα βήματα που έκανε ο ίδιος προς την επίλυση της εικασίας του Thurston, καθώς και τα αντίστοιχα του Grigori Perelman ο οποίος ξεπέρασε τα εμπόδια που δεν κατάφερε ο Hamilton και ολοκλήρωσε την απόδειξη.

Τα τελευταία τρία κεφάλαια αποτελούν το κυρίως αντικείμενο της εργασίας που είναι η πλήρης παρουσίαση της απόδειξης του θεωρήματος (0.0.1). Η παρουσίαση στηρίζεται βασικά στα [1, 29]. Το κεφάλαιο 3 προέρχεται από τις δύο πρώτες από τις καταπληκτικές (όπως και κάθε τι στο blog και την προσωπική σελίδα του) διαλέξεις του Terence Tao πάνω στην απόδειξη της εικασίας του Poincaré ([20]). Ως πολύτιμο συμπλήρωμα στις δύο παραπάνω βασικές αναφορές, συμπληρώνοντας την απαιτούμενη θεωρία και πολλές αποδείξεις, είναι οι [30, 13].

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω καταρχάς τον καθηγητή μου στο μάθημα της γεωμετρίας Riemann κατά το εαρινό εξάμηνο του έτους 2010-11, κύριο Λάππα Διονύσιο, ο οποίος μου παρείχε άφθονο χρόνο και ελευθερία στην επιλογή θέματος, σε εργασία απαιτούμενη για την προαγωγή στο μάθημά του, δίνοντάς μου με τον τρόπο αυτό τη δυνατότητα να μην παρεκκλίνω καθόλου από την προσπάθεια διεκπεραίωσης της παρούσας εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Αντώνιο Μελά, αφενός για την διαθεσιμότητά του ως προς την επίλυση οποιασδήποτε απορίας και αφετέρου για την επιλογή του συγκεκριμένου θέματος, με το οποίο μου δόθηκε η ευκαιρία να μελετήσω (στο βαθμό που αυτό ήταν εφικτό) μερικά από τα στάδια της απόδειξης ενός από τα μεγαλύτερα ανοιχτά προβλήματα όλων των εποχών, και κυρίως να πάρω μια γεύση από το βαθμό της αλληλεπίδρασης μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών που λαμβάνει χώρα στη σύγχρονη μαθηματική έρευνα.

## Κεφάλαιο 1

# Πολλαπλότητες Riemann και καμπυλότητα

**Ορισμός 1.0.1.** Μία ομαλή ή ( $C^\infty$ ) πολλαπλότητα  $M$  διάστασης  $n$  (ή  $n$ -πολλαπλότητα για συντομία), αποτελείται από ένα τοπολογικό χώρο  $M$  (τον οποίο θα θεωρούμε Hausdorff και δεύτερο αριθμήσιμο) και μία (ομαλή) διαφορική δομή, δηλαδή

1. Ένα ανοιχτό κάλυμμα  $\{U_i\}_{i \in I}$  του  $M$  και
2. Μία οικογένεια ομοιομορφισμών  $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n \mid i \in I\}$ , (που ονομάζονται χάρτες ή τοπικές συντεταγμένες της πολλαπλότητας) για τους οποίους,  $\varphi(U_i)$  είναι ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και αν  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  για κάποια  $i, j \in I$  τότε η απεικόνιση

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

είναι ομαλή (δηλαδή  $C^\infty$ )

Μία συνάρτηση  $f : M \rightarrow N$ , όπου  $N$  μία άλλη διαφορική πολλαπλότητα, λέμε πως είναι ομαλή αν για οποιουδήποτε χάρτες  $\varphi, \psi$ , η απεικόνιση  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  είναι ομαλή στο πεδίο ορισμού της:  $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ , όπου  $U, V$  τα πεδία ορισμού των  $\varphi$  και  $\psi$  αντίστοιχα. Μία ομαλή απεικόνιση με ομαλή αντίστροφη καλείται αμφιδιαφόριση. Ιδιαίτερα για την περίπτωση μίας  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ή  $\mathbb{C}$  η  $f$  είναι ομαλή αν η  $f \circ \varphi^{-1}$  είναι ομαλή στο πεδίο ορισμού της ( $\varphi(U)$ ) για οποιοδήποτε χάρτη  $\varphi$ . Το σύνολο όλων των απεικονίσεων της μορφής αυτής συμβολίζεται με  $C^\infty(M)$  και αποδεικνύεται πως αποτελεί άλγεβρα ως προς τους πραγματικούς αριθμούς. Όμοια μπορούμε να σχηματίσουμε την άλγεβρα  $C^\infty(U)$ , όπου  $U$  ένα ανοιχτό υποσύνολο της  $M$ .

### 1.1 Διανυσματικές Δέσμες

**Ορισμός 1.1.1.** Έστω  $F, M$  διαφορικές πολλαπλότητες. Μία νηματική δέσμη πάνω από τη  $M$  με νήμα (ή ίνα)  $F$  είναι μία διαφορική πολλαπλότητα  $E$  μαζί με μία ομαλή απεικόνιση  $\pi : E \rightarrow M$  η οποία είναι επί και ικανοποιεί τη συνθήκη: Για κάθε  $p \in M$  υπάρχει  $U$  ανοιχτό υποσύνολο της  $M$  ώστε  $p \in U$ , και

αμφιδιαφόριση  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  (η οποία ονομάζεται τοπική τετριμμενοποίηση της  $E$ ) ώστε  $\pi = \pi_1 \circ \varphi$  στο  $\pi^{-1}(U)$ , όπου  $\pi_1(x, y) = x$ , η προβολή στον πρώτο παράγοντα. Το νήμα στο  $p$ , το οποίο συμβολίζεται με  $E_p$ , είναι το σύνολο  $\pi^{-1}(p)$ .

Αποδεικνύεται ότι η  $\pi$  είναι εμβύθιση (η  $\pi_*|_{E_x} : E_x \rightarrow M_{\pi(x)}$  είναι επί για κάθε  $x$  στην  $E$ ) και το  $E_p$  είναι αμφιδιαφορικό με την  $F$  για κάθε  $p \in M$ .

Ενώ τοπικά λοιπόν μία νηματική δέσμη μπορεί να ταυτιστεί με το γινόμενο  $U \times F$ , κάτι τέτοιο δεν ισχύει ολικά. Ο ονομάζεται ολικός χώρος, ο  $M$  βάση και η  $\pi$  προβολή της δέσμης. Στα επόμενα θα αναφέρουμε συχνά για συντομία: "έστω  $\pi : E \rightarrow M$  ομαλή νηματική δέσμη".

**Ορισμός 1.1.2.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα. Μία (ομαλή) διανυσματική δέσμη τάξης  $k$  της  $M$  είναι μία νηματική δέσμη  $\pi : E \rightarrow M$  με νήμα  $\mathbb{R}^k$  με τις εξής ιδιότητες:

1. Οι ίνες  $E_p$  έχουν δομή  $k$ -διάστατου διανυσματικού χώρου και
2. Οι τοπικές τετριμμενοποιήσεις  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  είναι τέτοιες ώστε η  $\pi_2 \circ \varphi|_{E_p}$  είναι γραμμικός ισομορφισμός για κάθε  $p \in U$ , όπου  $\pi_2(x, y) = y$ .

**Ορισμός 1.1.3.** Μία ομαλή (ολική) διατομή μιας νηματικής δέσμης  $\pi : E \rightarrow M$  είναι μία ομαλή απεικόνιση  $X : M \rightarrow E$  (θα γράφουμε συχνά  $p \rightarrow X_p$ ), ώστε  $\pi \circ X = \text{id}_M$ . Αν  $E$  είναι διανυσματική δέσμη, τότε η οικογένεια των διατομών της  $M$  (συμβολίζεται με  $\Gamma(E)$ ) αποτελεί  $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο με την κατά σημείο πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό και  $C^\infty(M)$ -πρότυπο ορίζοντας  $(f \circ X)(p) = f(p)X_p$  με  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Συχνά ενδιαφερόμαστε για τοπικές διατομές  $f : U \rightarrow E$  ορισμένες σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο  $U$  της  $M$ , με το χώρο που αυτές σχηματίζουν να έχει αντίστοιχες ιδιότητες με εκείνες των ολικών διατομών και συμβολίζεται  $\Gamma(U \rightarrow E)$  ή  $\Gamma(E|_U)$ .

*Παρατήρηση 1.1.1.* Αν  $E = M \times \mathbb{R}^k$  είναι η δέσμη γινόμενο (αποδεικνύεται εύκολα πως πρόκειται πράγματι για διανυσματική δέσμη της  $M$ ) τότε υπάρχει μία φυσική ένα προς ένα αντιστοίχιση μεταξύ ομαλών διατομών της  $E$  και ομαλών απεικονίσεων από τη  $M$  στον  $\mathbb{R}^k$ : Μία  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  καθορίζει μία διατομή  $\tilde{f} : M \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$  με  $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$  και αντίστροφα. Ιδιαίτερα ο  $C^\infty(M)$  μπορεί να ταυτιστεί με φυσικό τρόπο με τον  $\Gamma(M \times \mathbb{R})$ .

**Ορισμός 1.1.4.** Ένα τοπικό πλαίσιο μίας διανυσματικής δέσμης  $E$ , τάξης  $k$ , είναι μία  $k$ -άδα  $(\xi_i)$  (κατά σημείο) γραμμικά ανεξάρτητων τοπικών διατομών σε ένα ανοιχτό  $U \subset M$ . Δηλαδή,  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \Gamma(E|_U)$  και τα  $\xi_1(p), \dots, \xi_k(p)$ , αποτελούν βάση του  $\mathbb{R}^k$  (είναι δηλαδή γραμμικά ανεξάρτητα) για κάθε  $p \in U$ .

*Παρατήρηση 1.1.2.* Υπάρχει ένα προς ένα αντιστοίχιση μεταξύ τοπικών τετριμμενοποιήσεων και τοπικών πλαισίων: Αν  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  είναι τετριμμενοποίηση της  $E$ , ορίζουμε τις απεικονίσεις  $\sigma_1, \dots, \sigma_k : U \rightarrow E$  με

$$\sigma_i(p) = \varphi^{-1}(p, e_i),$$

όπου  $(e_i)$  η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}^k$ , οι οποίες αποτελούν τοπικό πλαίσιο για την  $E$ . Αντίστροφα, αν  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  είναι τοπικό πλαίσιο της  $E$ , κάθε διατομή



$\alpha \in \Gamma(E|_U)$  μπορεί να γραφεί ως  $\alpha = \sum \alpha^i \sigma_i$  με  $\alpha^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  και τότε η απεικόνιση  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  με

$$\varphi(p, \sum \alpha^i(p) \sigma_i|_p) = (p, \alpha^1(p), \dots, \alpha^k(p))$$

αποτελεί τοπική τετριμμενοποίηση.

**Πρόταση 1.1.1.** Μία διατομή  $\alpha \in \Gamma(E|_U)$  είναι ομαλή αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της,  $\alpha^i$ , ως προς το πλαίσιο  $(\sigma_i)$  είναι ομαλές.

**Ορισμός 1.1.5.** Μία υποδέσμη  $\pi_{E'} : E' \rightarrow M$  μίας διανυσματικής δέσμης  $\pi : E \rightarrow M$  είναι μία διανυσματική δέσμη της  $M$  μαζί με έναν  $1-1$  ομομορφισμό διανυσματικών δεσμών,  $\iota : E' \rightarrow E$  που καλύπτει την ταυτοτική απεικόνιση  $\text{id}$  της  $M$ . Δηλαδή,  $\iota$  ομαλή,  $1-1$ , με  $\pi_E \circ \iota = \pi_{E'}$  και  $\iota|_{E'} : E'_p \rightarrow E_p$  γραμμική.

Μία υποδέσμη δηλαδή, αποτελεί μία ομαλά μεταβαλλόμενη οικογένεια διανυσματικών υποχώρων των νημάτων της αρχικής δέσμης, η οποία σχηματίζει μια νέα διανυσματική δέσμη και ορίζεται με στόχο κυρίως να μπορούν να διακριθούν οι διατομές της υποδέσμης από αυτές της αρχικής δέσμης.

### 1.1.1 Εφαπτόμενη Δέσμη

**Ορισμός 1.1.6.** Έστω μία  $n$ -πολλαπλότητα και  $p \in M$ . Μία απεικόνιση  $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  καλείται διαφορίση στο  $p$  αν είναι γραμμική και ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz:

$$X_p(fg) = f(p)(X_p g) + g(p)(X_p f)$$

για κάθε  $f, g \in C^\infty(M)$ . Το σύνολο των διαφορίσεων στο  $p$  αποτελεί  $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο με τις κατά σημείο πράξεις και καλείται εφαπτόμενος χώρος της  $M$  στο  $p$ . Συμβολίζεται δε ως  $T_p M$ . Ένα στοιχείο  $X \in T_p M$  ονομάζεται εφαπτόμενο διάνυσμα στο  $p$ .

Η πιο θεμελιώδης τώρα διανυσματική δέσμη σε μία πολλαπλότητα  $M$  είναι η εφαπτόμενη δέσμη η οποία ως ολικό χώρο έχει την πολλαπλότητα

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

Μία διατομή  $X \in \Gamma(TM)$  της  $M$  ονομάζεται διανυσματικό πεδίο. Σε κάθε  $p \in M$  αντιστοιχίζει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα  $X(p)$  (ή  $X_p$ )  $\in T_p M$

### 1.1.2 Δυϊκή Δέσμη

**Ορισμός 1.1.7.** Αν  $E$  είναι διανυσματική δέσμη της  $M$ , η δυϊκή δέσμη  $E^*$  της  $M$  ορίζεται ως η διανυσματική δέσμη της οποίας τα νήματα αποτελούνται από τους δυϊκούς χώρους των νημάτων της  $E$ :

$$E^* = \{(p, \omega) : \omega \in E_p^*\}$$

Αν  $(\xi_i)$  είναι τοπικό πλαίσιο της  $E$  στο ανοιχτό  $U \subset M$  τότε η  $\phi : \pi_{E^*}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  με  $(p, \omega) \rightarrow (p, \omega(\xi_1(p)), \dots, \omega(\xi_k(p)))$  αποτελεί τοπική τετριμμενοποίηση της  $E^*$  στο  $U$ . Το αντίστοιχο τοπικό πλαίσιο από τις διατομές  $(\theta^i)$  που ορίζονται ως  $\theta^i(\xi_j) = \delta_j^i$ .

## 1.2 Τανυστές

Έστω  $E, F$  πεπερασμένης διάστασης διανυσματικοί χώροι πάνω από το  $\mathbb{R}$ . Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα

$$\mathcal{J}(E, F) = \bigoplus_{(e,f) \in E \times F} \mathbb{R}.$$

Ισοδύναμα, ο διανυσματικός χώρος  $\mathcal{J}(E, F)$  μπορεί να ταυτιστεί με το χώρο των συναρτήσεων  $c : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  όπου  $c$  μη μηδενική σε πεπερασμένα μόνο σημεία του  $E \times F$ . Μία βάση του χώρου αυτού αποτελείται από τις συναρτήσεις

$$\delta_{e,f} : E \times F \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{αν } (x, y) = (e, f), \\ 0 & \text{αν } (x, y) \neq (e, f). \end{cases} \text{ Ιδιαίτερα, έχουμε την}$$

ένα προς ένα απεικόνιση

$$\delta : E \times F \rightarrow \mathcal{J}(E, F), (e, f) \mapsto \delta_{e,f}$$

Θεωρούμε στη συνέχεια τον υπόχωρο  $\mathcal{R}(E, F)$  του  $\mathcal{J}(E, F)$  ο οποίος παράγεται από τις συναρτήσεις:

$$\lambda \delta_{e,f} - \delta_{\lambda e, f}, \lambda \delta_{e,f} - \delta_{e, \lambda f}, \delta_{e+e', f} - \delta_{e, f} - \delta_{e', f}, \delta_{e, f+f'} - \delta_{e, f} - \delta_{e, f'},$$

όπου  $e, e' \in E, f, f' \in F$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ορίζουμε τώρα

$$E \otimes F := \mathcal{J}(E, F) / \mathcal{R}(E, F),$$

και συμβολίζουμε με  $\pi$  την κανονική προβολή  $\pi : \mathcal{J}(E, F) \rightarrow E \otimes F$ . Θέτουμε

$$e \otimes f := \pi(\delta_{e,f})$$

Παίρνουμε έτσι μια φυσική απεικόνιση

$$\iota : E \times F \rightarrow E \otimes F, e \times f \mapsto e \otimes f$$

η οποία είναι προφανώς διγραμμική. Ο διανυσματικός χώρος  $E \otimes F$  καλείται τανυστικό γινόμενο των χώρων  $E$  και  $F$  πάνω από το  $\mathbb{R}$ . Η ακόλουθη ιδιότητα είναι ιδιαίτερα σημαντική:

**Πρόταση 1.2.1.** Για κάθε διγραμμική απεικόνιση  $\varphi : E \times F \rightarrow G$ , όπου  $G$  διανυσματικός χώρος, υπάρχει μοναδική απεικόνιση  $\Phi : E \otimes F \rightarrow G$  ώστε να ισχύει:

$$\varphi = \Phi \circ \iota.$$

Αποδεικνύεται τώρα πως αν  $(e_i), (f_j)$  είναι βάσεις των  $E$  και  $F$  αντίστοιχα, τότε η  $(e_i \otimes f_j)$  είναι βάση του  $E \otimes F$  και συνεπώς

$$\dim(E \otimes F) = \dim(E) \cdot \dim(F)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την παραπάνω πρόταση μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει φυσικός ισομορφισμός  $E \otimes F \cong F \otimes E$  ο οποίος ορίζεται μοναδικά ως  $e \otimes f \mapsto f \otimes e$ .

Όμοια, αν  $E_1, E_2, E_3$  είναι διανυσματικοί χώροι μπορούν να κατασκευαστούν τα τανυστικά γινόμενα

$$(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3, \text{ και } E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$

και αποδεικνύεται πως υπάρχει φυσικός ισομορφισμός μεταξύ τους. Είναι τώρα προφανές πως δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα στον ορισμό του τανυστικού γινομένου  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$  για οποιοδήποτε  $n$ .

**Ορισμός 1.2.1.** (α) Για οποιουδήποτε διανυσματικούς χώρους  $U, V$  πάνω από το  $\mathbb{R}$ , συμολίζουμε με  $\text{Hom}(U, V)$  το χώρο των  $\mathbb{R}$ -γραμμικών απεικονίσεων από το  $U$  στο  $V$ .

(β) Ο δυϊκός ενός διανυσματικού χώρου  $E$  είναι ο διανυσματικός χώρος  $E^*$  που ορίζεται ως ο  $\text{Hom}(E, \mathbb{R})$ . Για κάθε  $e^* \in E^*$  και  $e \in E$  θέτουμε

$$\langle e^*, e \rangle := e^*(e)$$

.

Οι επόμενες προτάσεις θα χρειαστούν στη συνέχεια

**Πρόταση 1.2.2.** (α) Έστω  $E_i, F_i, G_i, i = 1, 2$   $\mathbb{R}$ -διανυσματικοί χώροι. Αν  $T_i \in \text{Hom}(E_i, F_i), S_i \in \text{Hom}(F_i, G_i), i = 1, 2$  γραμμικοί τελεστές, αυτοί επάγουν τους επίσης γραμμικούς τελεστές

$$T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes E_2 \rightarrow F_1 \otimes F_2,$$

$$S_1 \otimes S_2 : F_1 \otimes F_2 \rightarrow G_1 \otimes G_2$$

οι οποίοι ορίζονται μοναδικά ως

$$T_1 \otimes T_2(e_1 \otimes e_2) = (T_1 e_1) \otimes (T_2 e_2)$$

και

$$S_1 \otimes S_2(f_1 \otimes f_2) = (S_1 f_1) \otimes (S_2 f_2)$$

και ικανοποιούν την

$$(S_1 \otimes S_2) \circ (T_1 \otimes T_2) = (S_1 \circ T_1) \otimes (S_2 \circ T_2)$$

(β) Κάθε γραμμικός τελεστής  $A : E \rightarrow F$ , επάγει ένα γραμμικό τελεστή  $A^* : F^* \rightarrow E^*$  μοναδικά ορισμένο από τη σχέση

$$\langle A^* f^*, e \rangle = \langle f^*, Ae \rangle, \forall e \in E, f^* \in F^*$$

Ο τελεστής  $A^*$  καλείται συζυγής του  $A$ . Επιπλέον,

$$(A \circ B)^* = B^* \circ A^*, \forall A \in \text{Hom}(F, G), B \in \text{Hom}(E, F)$$

Αν  $(e_i)$  είναι μία βάση ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου και  $(e^j)$  η επαγόμενη δυϊκή βάση (δηλαδή  $e^j(e_i) = \delta_i^j$ ), τότε έχουμε:

**Πρόταση 1.2.3.** (α) Υπάρχει φυσικός ισομορφισμός

$$E^* \otimes F^* \cong (E \otimes F)^*$$

μοναδικά ορισμένος ως

$$e^* \otimes f^* \mapsto L_{e^* \otimes f^*} \in (E \otimes F)^*,$$

όπου

$$\langle L_{e^* \otimes f^*}, x \otimes y \rangle = \langle e^*, x \rangle \langle f^*, y \rangle \forall x \in E, y \in F$$

Συνεπώς ο χώρος  $E^* \otimes F^*$  μπορεί να ταυτιστεί φυσιολογικά με το χώρο των διγραμμικών απεικονίσεων  $E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ .

(β) Η απεικόνιση  $E^* \otimes F \rightarrow \text{Hom}(E, F)$  με

$$e^* \otimes f \mapsto T_{e^* \otimes f} \in \text{Hom}(E, F),$$

όπου

$$T_{e^* \otimes f}(x) := \langle e^*, x \rangle f, \forall x \in E,$$

είναι ισομορφισμός.

Έστω λοιπόν,  $V$  διανυσματικός χώρος. Για  $r, s \geq 0$  θέτουμε

$$T_r^s(V) := V^{\otimes s} \otimes (V^*)^{\otimes r}$$

όπου εξ'ορισμού  $V^{\otimes 0} = (V^*)^{\otimes 0} = \mathbb{R}$ . Ένα στοιχείο του  $T_r^s$  καλείται τανυστής τύπου  $(s, r)$  (ή  $(s, r)$ -τανυστής).

**Παράδειγμα 1.2.1.** Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση ένας  $(1, 1)$ -τανυστής μπορεί να ταυτιστεί με ένα γραμμικό ενδομορφισμό του  $V$ :

$$T_1^1 \cong \text{End}(V)$$

και γενίκευση αυτού αποτελεί το ακόλουθο

**Λήμμα 1.2.1.** Ο χώρος  $T_{r+1}^s(V)$  είναι κανονικά ισομορφικός με το χώρο των  $\text{Mult}((V^*)^r \times V^s, V)$  των πολυγραμμικών απεικονίσεων από το  $(V^*)^r \times V^s$  στο  $V$ , μέσω του ισομορφισμού  $\Phi : \text{Mult}((V^*)^r \times V^s, V) \rightarrow T_{r+1}^s(V)$ , ο οποίος δίνεται από τον τύπο

$$\Phi(A)(\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = \omega^0(A(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s))$$

για κάθε  $A \in \text{Mult}((V^*)^r \times V^s, V)$ ,  $\omega^i \in V^*$ ,  $X_j \in V$ .

Η άλγεβρα των τανυστών του  $V$  ορίζεται ως

$$\mathcal{T}(V) := \bigotimes_{s,r} T_r^s(V)$$

(Ως γινόμενο χρησιμοποιούμε την πράξη

$$\otimes : \mathcal{T}_r^s \times \mathcal{T}_{r'}^{s'} \rightarrow \mathcal{T}_{r+r'}^{s+s'}$$

με

$$T \otimes S(X_1, \dots, X_{s+s'}, \omega^1, \dots, \omega^{r+r'}) = T(X_1, \dots, X_s, \omega^1, \dots, \omega^r) \cdot S(X_{s+1}, \dots, X_{s+s'}, \omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+r'}).$$

Σε συντεταγμένες τώρα, αν  $(e_1, \dots, e_n)$  είναι βάση του  $V$  και  $(\phi^1, \dots, \phi^n)$  η δυϊκή της, αποδεικνύεται ότι μία βάση του  $T_l^k(V)$  είναι της μορφής

$$e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l} \otimes \phi^{i_1} \otimes \dots \otimes \phi^{i_k},$$

όπου

$$e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l} \otimes \phi^{i_1} \otimes \dots \otimes \phi^{i_k}(\phi^{s_1} \dots \phi^{s_l}, e_{r_1} \dots e_{r_k}) = \delta_{j_1}^{s_1} \dots \delta_{j_l}^{s_l} \delta_{r_1}^{i_1} \dots \delta_{r_k}^{i_k}$$

Έτσι ο  $F \in T_l^k(V)$  γράφεται ως προς την παραπάνω βάση

$$F = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l} \otimes \phi^{i_1} \otimes \dots \otimes \phi^{i_k}$$

όπου

$$F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = F(\phi^{j_1} \dots \phi^{j_l}, e_{i_1} \dots e_{i_k}).$$

### Συστολή

Όσο μεγαλύτερη η τάξη ενός τανυστή τόσο πιο πολύπλοκος είναι ο χειρισμός του γεωμετρικά. Θα δούμε λοιπόν τώρα μία βασική έννοια η οποία μας επιτρέπει να μειώνουμε την τάξη οποιουδήποτε τανυστή. Ας θυμηθούμε αρχικά πως για ένα πίνακα  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  το ίχνος του ορίζεται ως  $\text{tr} A = \sum_i A_{ii}^i$ . Σαν απεικόνιση, το ίχνος  $\text{tr} : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $\mathbb{R}$ -γραμμική και αντιμεταθετική με την έννοια  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . Συνεπώς  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$  και κατ' επέκταση αν  $P \in GL(n)$ , τότε  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$ . Όμοιοι πίνακες δηλαδή έχουν το ίδιο ίχνος. Επεκτείνουμε λοιπόν την έννοια του ίχνους στο χώρο  $\text{End}(V)$ , όπου  $V$  διανυσματικός χώρος, θεωρώντας το ίχνος οποιουδήποτε πίνακα που αναπαριστά την απεικόνιση  $A : V \rightarrow V$ . Σύμφωνα τότε με το παραπάνω παράδειγμα η απεικόνιση  $\text{tr}$  μπορεί να δράσει και σε τανυστές: Αν  $F = e^* \otimes f \in \mathcal{T}_1^1(V)$  το ίχνος ή συστολή όπως επίσης λέγεται, ορίζεται να είναι το ίχνος του  $T_F = T_{e^* \otimes f}$  όπως αυτός ορίστηκε στην πρόταση 4. Ο πίνακας της απεικόνισης αυτής μπορεί εύκολα να δειχθεί πως είναι  $F(\phi^i, e_j)$  (οι βάσεις όπως ορίστηκαν προηγουμένως). Άρα  $\text{tr} F = F(\phi^i, e_i) = F_{i,i}^i$ , όπου εφαρμόσαμε τη σύμβαση άθροισης του Einstein σύμφωνα με την οποία επαναλαμβανόμενοι άνω και κάτω δείκτες υποδηλώνουν άθροιση.

Γενικεύοντας ορίζουμε

$$\text{tr} : \mathcal{T}_{l+1}^{k+1}(V) \rightarrow \mathcal{T}_l^k(V)$$

ως

$$(\text{tr} F)(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k) = \text{tr}(F(\omega^1, \dots, \omega^l, \cdot, X_1, \dots, X_k, \cdot)).$$

Δηλαδή,  $(\text{tr} F)(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)$  είναι το ίχνος του ενδομορφισμού  $F(\omega^1, \dots, \omega^l, \cdot, X_1, \dots, X_k, \cdot) \in \mathcal{T}_1^1(V) \cong \text{End}(V)$ . Σε συντεταγμένες:

$$(\text{tr} F)_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l m}$$

Σημειώνουμε τώρα κάποιες σημαντικές ειδικές περιπτώσεις

1. Αν  $F = F_{ik}^j \phi^i \otimes e_j \otimes \phi^k \in \mathcal{T}_1^2(V)$  μπορούμε να θεωρήσουμε τη συστολή ως προς τους δύο πρώτους δείκτες:  $(\text{tr}_{12} F)_k = \text{tr} F(\cdot, \cdot, e_k) = F_{ik}^i$  ή ως προς τους δύο τελευταίους:  $(\text{tr}_{23} F)_k = \text{tr} F(e_k, \cdot, \cdot) = F_{ki}^i$ .
2. Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συστολή ως προς πολλαπλά ζεύγη δεικτών. Για παράδειγμα αν  $F = F_{ij}^{kl} \phi^i \otimes \phi^j \otimes e_k \otimes e_l \in \mathcal{T}_2^2(V)$  μπορούμε να θεωρήσουμε το ίχνος ως προς τον πρώτο με τον τρίτο και το δεύτερο με τον τέταρτο δείκτη:  $\text{tr} F = \text{tr}_{13} \text{tr}_{24} F = \text{tr} F(\cdot, *, \cdot, *) = F_{pq}^{pq}$ .
3. Στην περίπτωση που έχουμε μία μετρική (έννοια που θα ορίσουμε σε λίγο), μπορούμε να θεωρήσουμε τη συστολή είτε ως προς ένα ζεύγος άνω ή ένα ζεύγος κάτω δεικτών (σε αντίθεση με ό,τι είδαμε ως τώρα όπου η συστολή γινόταν σε ζεύγη ενός άνω και ενός κάτω δείκτη. Η πράξη αυτή ονομάζεται μετρική συστολή.
4. Μία από τις πιο σημαντικές εφαρμογές είναι στην περίπτωση που έχουμε  $F = \omega \otimes X \in \mathcal{T}_1^1(V)$  για κάποια (σταθερά)  $X \in V, \omega \in V^*$ . Στην περίπτωση αυτή

$$\text{tr} F = F(\partial_i, dx^i) = \omega(\partial_i)X(dx^i) = \omega_i X^i = \omega(X)$$

όπου  $(\partial_i)_i$  βάση συντεταγμένων του  $V$ ,  $(dx^i)_i$  η δυϊκή της και  $X(dx^i)$  ορίζεται μέσω της φυσιολογικής ταύτισης  $V \cong V^{**}$  η οποία δίνεται από την

$$\begin{aligned}\xi : V &\rightarrow V^{**} \\ X &\mapsto \xi(X) : V^* \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

με  $\xi(X)(\omega) = \omega(X)$

Γενικεύοντας τώρα: Αν  $F \in \mathcal{T}_l^k(V)$  και  $\omega^1, \dots, \omega^l \in V^*, X_1, \dots, X_k \in V$  (σταθερά), τότε

$$F \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^l \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_k \in \mathcal{T}_{k+l}^{k+l}(V)$$

και η συστολή ως προς όλους τους δείκτες είναι

$$\begin{aligned}\text{tr}(F \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^l \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_k) &= \omega_{j_1} \dots \omega_{j_l} F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} X^{i_1} \dots X^{i_k} \\ &= F(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)\end{aligned}$$

### Συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί τανυστές

Έστω  $V$  διανυσματικός χώρος πάνω από το  $\mathbb{R}$ . Θέτουμε  $\mathcal{T}^k(V) := \mathcal{T}_0^k(V)$ , και συμβολίζουμε  $\mathcal{S}_k$  την ομάδα μεταθέσεων του συνόλου  $\{1, \dots, k\}$ . Για  $k=0$  θέτουμε  $\mathcal{S}_0 := 1$ .

Αν  $\sigma \in \mathcal{S}_k$  και  $T \in \mathcal{T}^k(V)$  ορίζουμε

$$\sigma T(X_1, \dots, X_k) = T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})$$

Σημειώνουμε πως  $\tau(\sigma T) = \tau\sigma T$ . Ορίζουμε τώρα

$$S_k : \mathcal{T}^k(V) \rightarrow \mathcal{T}^k(V), S_k(T) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \sigma T$$

και

$$A_k : \mathcal{T}^k(V) \rightarrow \mathcal{T}^k(V), A_k(T) := \begin{cases} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \sigma T & \text{αν } k \leq \dim V, \\ 0 & \text{αν } k \geq \dim V \end{cases}$$

όπου  $\text{sgn}(\sigma) = 1$  αν η μετάθεση είναι περιττή και 0 αν είναι άρτια. Σημειώνουμε πως

$$S_0, A_0 = \text{id}_{\mathbb{R}}$$

**Ορισμός 1.2.2.** Ένας τανυστής  $T \in \mathcal{T}^k(V)$  καλείται συμμετρικός (αντίστοιχα, αντισυμμετρικός) αν

$$S_k(T) = T \text{ (αντίστοιχα } A_k(T) = T)$$

Ο χώρος των συμμετρικών τανυστών (αντ. αντισυμμετρικών τανυστών) συμβολίζεται με  $\mathcal{S}^k V$  (αντ.  $\mathcal{A}^k V$ ). Θέτουμε

$$\mathcal{S}^* V := \bigotimes_{k \geq 0} \mathcal{S}^k V$$

και

$$\mathcal{A}^* V := \bigotimes_{k \geq 0} \mathcal{A}^k V$$

**Ορισμός 1.2.3.** Η απεικόνιση

$$\wedge : \Lambda^r V \times \Lambda^s V \rightarrow \Lambda^{r+s} V$$

που ορίζεται ως

$$\omega^r \wedge \eta^s := \mathbf{A}_{r+s}(\omega \otimes \eta),$$

$$\forall \omega^r \in \Lambda^r V, \eta^s \in \Lambda^s V$$

**Πρόταση 1.2.4.** Το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

1. (Προσεταιριστικότητα)

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{S}^* V.$$

Ιδιαίτερα

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = k! \mathbf{A}_k(v_1 \otimes, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}, \quad \forall v_i \in V$$

$$2. \omega^r \wedge \eta^s = (-1)^{rs} \eta^s \wedge \omega^r, \quad \forall \omega^r \in \Lambda^r V, \eta^s \in \Lambda^s V.$$

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος  $(\mathcal{S}^* V, +, \wedge)$  είναι άλγεβρα και λέγεται εξωτερική άλγεβρα του  $V$ . Από την ιδιότητα (2) παραπάνω και το γεγονός ότι

$$(\Lambda^r V) \wedge (\Lambda^s V) \subset \Lambda^{r+s} V, \quad \forall r, s.$$

προκύπτει ότι πρόκειται για αντιμεταθετική graded άλγεβρα. Όμοια ο χώρος  $\mathcal{S}^* V$  δέχεται δομή προσεταιριστικής άλγεβρας με γινόμενο το

$$\alpha \cdot \beta := \mathbf{S}_{r+s}(\alpha \otimes \beta) \quad \forall \alpha \in \mathcal{S}^r V, \beta \in \mathcal{S}^s V$$

.

### Τανυστικές Δέσμες

Για μία πολλαπλότητα  $M$  τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις παραπάνω κατασκευές κατά σημείο σε κάθε εφαπτόμενο χώρο  $T_p M$ . Ένας  $(k, l)$ - τανυστής στο σημείο  $p \in M$  είναι ένα στοιχείο του  $\mathcal{T}_l^k(T_p M)$ . Η διανυσματική δέσμη των  $(k, l)$ -τανυστών της  $M$  ορίζεται ως

$$\mathcal{T}_l^k M := \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{T}_l^k(T_p M) = \bigcup_{p \in M} \otimes^k T_p^* M \otimes^l T_p M$$

. Ιδιαίτερα,  $\mathcal{T}_1 M = \mathcal{T} M$ ,  $\mathcal{T}^1 M = \mathcal{T}^*$ . Αν  $(\chi^i)$  είναι τοπικός χάρτης στο  $U \subset M$  γύρω από το σημείο  $p \in M$  τότε ο  $F \in \mathcal{T}_l^k(\mathcal{T}_p M)$  γράφεται

$$F = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$$

και μία τοπική τετριμμενοποίηση είναι η  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}$  με

$$\Phi(F) = (p, F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l})$$

όπου  $\pi : \mathcal{T}_l^k M \rightarrow M$  η προβολή της δέσμης. Σημαντική υποδέσμη της  $\mathcal{T}^2 M$  είναι η  $\mathcal{S}^2 \mathcal{T}^* M$  : ο χώρος των συμμετρικών  $(2, 0)$ -τανυστών της  $M$  ενώ της  $\mathcal{T}^k M$  η  $\Lambda^k \mathcal{T}^* M$ , η δέσμη των αντισυμμετρικών  $(k, 0)$ -τανυστών της  $M$ . Ένα  $(k, l)$ -τανυστικό πεδίο τώρα, είναι ένα στοιχείο του  $\Gamma(\mathcal{T}_l^k M)$

### 1.2.1 Τανυστικό Γινόμενο Δεσμών

**Ορισμός 1.2.4.** Αν  $E_1, \dots, E_k$  είναι διανυσματικές δέσμες πάνω από τη  $M$ , το τανυστικό γινόμενο  $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$  είναι η διανυσματική δέσμη της οποίας η ίνα πάνω από το  $p \in M$  είναι το τανυστικό γινόμενο  $(E_1)_p \otimes \dots \otimes (E_k)_p$ . Αν  $\{\xi_i^j : 1 \leq i \leq n_j\}$  είναι τοπικό πλαίσιο της  $E_j$  στο  $U$  για  $1 \leq j \leq k$ , τότε το  $\{\xi_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes \xi_{i_k}^k : 1 \leq i_j \leq n_j, 1 \leq j \leq k\}$  αποτελεί τοπικό πλαίσιο της  $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ . Επίσης, ισχύει κατ' αναλογία με όσα είπαμε στα προηγούμενα, ότι  $E_1^* \otimes E_2^* \cong (E_1 \otimes E_2)^*$  και  $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \cong E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$

**Πρόταση 1.2.5.** Για τις διανυσματικές δέσμες  $E_1, \dots, E_k$  της  $M$ , η απεικόνιση  $F : \Gamma(E_1) \times \dots \times \Gamma(E_k) \rightarrow C^\infty(M)$  είναι τανυστικό πεδίο, δηλαδή  $F \in \Gamma(E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*)$ , αν και μόνο αν η  $F$  είναι  $C^\infty(M)$  πολυγραμμική.

Επίσης από το λήμμα της σελίδας 7 προκύπτει το εξής:

**Πρόταση 1.2.6.** Για τις διανυσματικές δέσμες  $E_0, E_1, \dots, E_k$  της  $M$ , η απεικόνιση  $F : \Gamma(E_1) \times \dots \times \Gamma(E_k) \rightarrow \Gamma(E_0)$  καθορίζει ένα τανυστικό πεδίο, δηλαδή  $F \in \Gamma(E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^* \otimes E_0)$ , αν και μόνο αν η  $F$  είναι  $C^\infty(M)$  πολυγραμμική.

*Παρατήρηση 1.2.1.* Μπορούμε λοιπόν, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, να ερμηνεύουμε τον  $F \in \Gamma(E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^* \otimes E_0)$  ως ένα τανυστή επί του  $E_1, \dots, E_k$  με τιμές στην  $E_0$ .

## 1.3 Μετρική

Ένα εσωτερικό γινόμενο σε ένα διανυσματικό χώρο μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια του μήκους ενός διανύσματος και της γωνίας μεταξύ διανυσμάτων. Οι μετρικές μεταφέρουν τη δομή αυτή στις δέσμες μίας πολλαπλότητας.

**Ορισμός 1.3.1.** Μία μετρική Riemann σε μία διανυσματική δέσμη  $E$  πάνω σε μία πολλαπλότητα  $M$  είναι μία διατομή  $g$  της δέσμης  $(E \otimes E)^*$  τέτοια, ώστε για όλα τα  $p$  στην  $M$ , το  $g_p$  είναι εσωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο  $E_p$ . Μία διανυσματική δέσμη Riemann  $(E, g)$  αποτελείται από μία διανυσματική δέσμη  $E$  εφοδιασμένη με μία μετρική Riemann  $g$ . Μία πολλαπλότητα Riemann  $(M, g)$  είναι μία πολλαπλότητα  $M$  μαζί με μία μετρική Riemann στην  $TM$ . Η  $g$  τότε καλείται και μετρική Riemann της  $M$ .

Αν  $\zeta, \xi \in E_p, p \in M$ , γράφουμε  $\langle \zeta, \xi \rangle$  για το  $g(\zeta, \xi) := g_p(\zeta \otimes \xi) \in \mathbb{R}$ , και θέτουμε  $\|\zeta\|^2 := \langle \zeta, \zeta \rangle$ . Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου,  $\|\zeta\|^2 > 0$  αν  $\zeta \neq 0$ .

Για  $X, Y \in \Gamma(E)$ , έπεται ότι  $\langle \cdot, \cdot \rangle \in C^\infty M$

**Ορισμός 1.3.2.** Έστω  $(E_j, g_j)$  είναι διανυσματική δέσμη Riemann σε μία πολλαπλότητα  $M_j, j=1,2$ . Ένας ομομορφισμός (διανυσματικών) δεσμών πάνω από μία απεικόνιση  $f : M_1 \rightarrow M_2$  είναι ισομετρικός αν  $\langle h\zeta, h\xi \rangle_2 = \langle \zeta, \xi \rangle_1$  για όλα τα  $\zeta \otimes \xi \in E_1 \otimes E_1$ . Έστω  $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$  πολλαπλότητες Riemann. Μία απεικόνιση  $f : M_1 \rightarrow M_2$  είναι ισομετρική αν η  $f_* : TM_1 \rightarrow TM_2$  είναι ισομετρική, δηλαδή, αν  $f^* g_2 = g_1$ . Μία ισομετρία είναι μία ισομετρική αμφιδιαφόριση μεταξύ πολλαπλοτήτων Riemann.



Ισχύει η παρακάτω θεμελιώδης πρόταση.

**Πρόταση 1.3.1.** Κάθε διανυσματική δέσμη δέχεται μετρική Riemann.

**Ορισμός 1.3.3.** Δοθέντων διανυσματικών δεσμών Riemann  $(E_j, g_j)$  στις πολλαπλότητες  $M_j, j = 1, 2$ , η Riemann μετρική γινόμενο στο  $E_1 \times E_2$  ορίζεται ως

$$\langle (\zeta_1, \zeta_2), (\xi_1, \xi_2) \rangle := \langle \zeta_1, \xi_1 \rangle_1 + \langle \zeta_2, \xi_2 \rangle_2.$$

Αν  $M = M_1 \times M_2$  και  $g$  είναι η μετρική γινόμενο στην  $TM$  που καθορίζεται από τις μετρικές  $g_1, g_2$  στις  $TM_1, TM_2$  αντίστοιχα, τότε η  $(M, g)$  καλείται γινόμενο Riemann των  $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ .

**Ορισμός 1.3.4.** Η μετρική Riemann στο τανυστικό γινόμενο  $E_1 \otimes E_2$  ορίζεται ως

$$\langle \zeta_1 \otimes \zeta_2, \xi_1 \otimes \xi_2 \rangle := \langle \zeta_1, \xi_1 \rangle_1 \langle \zeta_2, \xi_2 \rangle_2.$$

**Ορισμός 1.3.5.** Η μετρική Riemann στη δέσμη της εξωτερικής άλγεβρας,  $\Lambda(E)$  μίας διανυσματικής δέσμης Riemann  $(E, g)$  της  $M$ , ορίζεται ως

$$\langle \zeta_1 \wedge \dots \wedge \zeta_r, \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_s \rangle := \begin{cases} \det[\langle \zeta_i, \xi_j \rangle] & \text{αν } r = s, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Έστω  $(E, g)$  διανυσματική δέσμη Riemann της  $M$ . Για κάθε  $p \in M$ , για το  $g_p$  ισχύει  $\langle \zeta, \zeta \rangle = 0 \forall \zeta \in E_p \Rightarrow \zeta = 0$ . Από αυτό έπεται ότι η απεικόνιση  $E \rightarrow E^*$  που στέλνει κάθε διάνυσμα  $\zeta$  στην 1-μορφή  $\langle \zeta, \cdot \rangle$  είναι ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών.

**Ορισμός 1.3.6.** Ορίζουμε τους μουσικούς ισομορφισμούς ως προς την  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ως  $b: E \rightarrow E^*, b\zeta := \langle \zeta, \cdot \rangle$ , και  $\sharp: E^* \rightarrow E$  ώστε η  $\sharp$  να είναι η αντίστροφη της  $b$ .

Λέμε συνήθως ότι η  $b$  "κατεβάζει" τους δείκτες αφού αν  $(e_i), (\omega^i)$  είναι βάσεις των  $E_p$  και  $E_p^*$  αντίστοιχα, αν  $\zeta = \zeta^i e_i$ , τότε  $b\zeta = \zeta_j \omega^j$ , όπου  $\zeta_j = \langle e_i, e_j \rangle \zeta^i = g_{ij} \zeta^i$ . Ο αντίστροφος ισομορφισμός  $\sharp$  λέμε ότι "ανεβάζει" του δείκτες.

**Ορισμός 1.3.7.** Η μετρική Riemann στη δυϊκή  $E^*$  μίας διανυσματικής δέσμης Riemann ορίζεται ως

$$\langle \eta, \mu \rangle_{E^*} := \langle \sharp\eta, \sharp\mu \rangle_E \quad \eta \times \mu \in E^* \times E^*.$$

**Λήμμα 1.3.1.** (1) Αν  $\eta, \mu \in E_p^*$  και  $X \in E_p$  και  $(e_i)$  ορθοκανονική βάση του  $E_p$ , τότε  $\langle \eta, \mu \rangle = \sum \eta(e_i) \mu(e_i)$  και

$$\langle \mu, bX \rangle = \mu(X) = \langle \sharp\mu, X \rangle.$$

(2) Οι  $b$  και  $\sharp$  είναι ισομορφισμοί διανυσματικών δεσμών.

**Ορισμός 1.3.8.** Αν  $(E_j, g_j)$  είναι διανυσματικές δέσμες Riemann της  $M$ , η μετρική Riemann στη δέσμη των ομομορφισμών,  $\text{Hom}(E_1, E_2)$ , πάνω από τη  $M$  ορίζεται έτσι ώστε ο ισομορφισμός  $\text{Hom}(E_1, E_2) \cong E_1^* \otimes E_2$  να είναι ισομετρικός.

**Ορισμός 1.3.9.** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann. Για κάθε  $f \in C^\infty M$  το  $\text{grad}$  (κλίση) της  $f$  είναι το διανυσματικό πεδίο  $\nabla f := \sharp(df)$  της  $M$ :

$$\langle \nabla f, v \rangle := \langle \sharp(df), v \rangle = df(v) = v f \quad v \in TM.$$

**Ορισμός 1.3.10.** Αν  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώρος εσωτερικού γινομένου, ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση  $T : \Lambda^2 V \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  ως

$$T_{u \wedge v}(x) := \langle v, x \rangle u - \langle u, x \rangle v, \quad x \in V.$$

Αν  $(E, g)$  είναι διανυσματική δέσμη Riemann, ορίζουμε τον ομομορφισμό δεσμών  $T : \Lambda^2 E \rightarrow \mathfrak{gl}(E)$ , να είναι ο παραπάνω ομομορφισμός σε κάθε νήμα.

Αν  $u, v, w, x \in V$ , όπου  $V$  όπως στον ορισμό,

$$\begin{aligned} \langle T_{u \wedge v}(w), x \rangle &= \langle \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v, x \rangle \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle u, x \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, x \rangle & \langle v, w \rangle \end{pmatrix} \\ &= \langle u \wedge v, x \wedge w \rangle_{\Lambda^2 V}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ιδιαίτερα,  $\langle T_{u \wedge v}(w), x \rangle = - \langle u \wedge v, w \wedge x \rangle = - \langle w, T_{u \wedge v}(x) \rangle$  και άρα η  $T_{u \wedge v}$  είναι αντισυμμετρική ως προς το  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Με άλλα λόγια η  $T_{u \wedge v}$  ανήκει στην άλγεβρα των ορθογώνιων μετασχηματισμών  $\mathfrak{so}(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$ , ως προς το  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Έπεται άμεσα ότι η γραμμική απεικόνιση  $T : \Lambda^2 V \rightarrow \mathfrak{so}(V)$  είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Σε επίπεδο διανυσματικών δεσμών τώρα, αυτό σημαίνει ότι η  $\Lambda^2 E$  (ο συμβολισμός και πάλι όπως στον ορισμό) είναι ισομορφική με τη δέσμη  $\mathfrak{so}(E) \subset \mathfrak{gl}(E)$  των αντισυμμετρικών μετασχηματισμών μεταξύ νημάτων της  $(E, g)$ .

**Παρατήρηση 1.3.1.** Ο ισομορφισμός αυτός δεν είναι ισομετρικός ως προς τις μετρικές Riemann των  $\Lambda^2 E$  και  $\mathfrak{so}(E) \subset \mathfrak{gl}(E)$  (όπου  $\mathfrak{gl}(E)$  ισομορφική με την  $\text{Hom}(E, E) \cong E^* \otimes E$  ως Riemann διανυσματικές δέσμες), αφού ως στοιχείο της  $\mathfrak{so}(E)$ ,  $u \wedge v = bu \otimes v - bv \otimes u$ , και

$$\begin{aligned} \|bu \otimes v - bv \otimes u\|^2 &= 2(\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2) = 2 \det \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix} \\ &= 2 \|u \wedge v\|_{\Lambda^2 E}^2 \end{aligned}$$

**Ορισμός 1.3.11.** Ο τελεστής άστρο του Hodge σε μία  $n$ -διάστατη προσανατολισμένη πολλαπλότητα Riemann  $(M, g)$ , είναι μία διατομή  $\star \in \Gamma(\text{End}(\Lambda T^* M))$  τέτοια, ώστε

$$(\star \mu)(X) := \langle \mu \wedge b(X), \omega \rangle \quad \mu \in \Gamma \Lambda^r T^* M, X \in \Gamma \Lambda^{n-r} TM,$$

όπου  $\omega \in \Lambda^n T^* M$  είναι το στοιχείο όγκου της  $M$ .

**Πρόταση 1.3.2.** Ο τελεστής άστρο του Hodge σε μία  $n$ -διάστατη προσανατολισμένη πολλαπλότητα Riemann  $(M, g)$  είναι ισομετρικός ισομορφισμός της δέσμης  $\Lambda T^* M$  με τον εαυτό της, και αντιστοιχίζει την  $\Lambda^r T^* M$  ισομορφικά με την  $\Lambda^{n-r} T^* M$ .

## 1.4 Συνοχή

Ένα διανυσματικό πεδίο  $X$  παρέχει ένα τρόπο παραγωγής βαθμωτών συναρτήσεων  $f \in C^\infty(M)$ , διαδικασία που έχει ως αποτέλεσμα τη συνάρτηση  $Xf \in C^\infty(M)$ . Αν τώρα  $f \in \Gamma(V)$ , όπου  $V$  διανυσματική δέσμη της  $M$ , ο ορισμός που δόθηκε για την προηγούμενη περίπτωση (μέσω του ορίου) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί και εδώ δεδομένου πως δεν υπάρχει κανονικός τρόπος σύνδεσης των διανυσματικών χώρων που αποτελούν τα νήματα της δέσμης σε διαφορετικά σημεία της πολλαπλότητας. Η συνοχή παρέχει έναν ανεξάρτητο συντεταγμένων τρόπο τέτοιας σύνδεσης.

**Ορισμός 1.4.1.** Μία συνοχή  $\nabla$  σε μία διανυσματική δέσμη  $E$  της πολλαπλότητας  $M$  είναι μία απεικόνιση

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

η οποία συμβολίζεται συνήθως ως  $(X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma$  και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

1. Η  $\nabla$  είναι  $C^\infty$ -γραμμική ως προς  $X$ :

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} \sigma = f_1 \nabla_{X_1} \sigma + f_2 \nabla_{X_2} \sigma$$

2. Η  $\nabla$  είναι  $\mathbb{R}$ -γραμμική ως προς  $\sigma$ :

$$\nabla_X (\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2) = \lambda_1 \nabla_X \sigma_1 + \lambda_2 \nabla_X \sigma_2$$

3. Ικανοποιεί τον κανόνα του γινομένου:

$$\nabla_X (f\sigma) = (Xf)\sigma + f(\nabla_X \sigma)$$

όπου  $f \in C^\infty(M)$ .

Λέμε πως η  $\nabla_X \sigma$  είναι η συναλλοίωτη παράγωγος της  $\sigma$  στην κατεύθυνση του  $X$ .

**Παρατήρηση 1.4.1.** Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη συνοχή ως την απεικόνιση

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

η οποία είναι  $\mathbb{R}$ -γραμμική και ικανοποιεί τον κανόνα του γινομένου. Διότι αν  $\sigma \in \Gamma(E)$ , τότε  $\nabla \sigma \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ , όπου  $(\nabla \sigma)(X) = \nabla_X \sigma$  είναι  $C^\infty(M)$ -γραμμική από την ιδιότητα 1 του παραπάνω ορισμού. Από την πρόταση 7 τώρα, προκύπτει πως  $\nabla \sigma : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(E)$  είναι τανυστής.

Αν  $\{\xi_\alpha\}$  είναι τοπικό πλαίσιο, στο  $U$ , της  $E$ , τότε οι συντελεστές της συνοχής δίνονται από τον τύπο

$$\nabla_{\partial_i} \xi_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\beta \xi_\beta$$

όπου  $(\xi^i)$  χάρτης της  $M$  στο  $U$ . Μία συνοχή στην εφαιπτόμενη δέσμη  $TM$  ονομάζεται γραμμική συνοχή και οι συντελεστές της ονομάζονται σύμβολα του Christoffel ( $\Gamma_{ij}^k = dx^k(\nabla_{\partial_i} \partial_j)$ ).

Οι  $\nabla^{(1)}, \nabla^{(2)}$  στις δέσμες  $E_1, E_2$  επάγουν συνοχές στις διϊκές δέσμες  $E_1^*, E_2^*$ , και γενικότερα στις  $E_1^{\otimes k} \otimes (E_2^*)^{\otimes l}$  για κάθε  $k, l$ , και  $E_1 \otimes E_2$ . Πιο συγκεκριμένα έχουμε τους παρακάτω ορισμούς:

**Ορισμός 1.4.2.** Αν  $\nabla$  είναι συνοχή στην  $E$ , τότε υπάρχει μοναδική συνοχή στην  $E^*$ , που συμβολίζεται και πάλι με  $\nabla$ , και ορίζεται ως

$$(\nabla_X \omega)(\xi) = X(\omega(\xi)) - \omega(\nabla_X \xi)$$

γιά κάθε  $\xi \in \Gamma(E)$ ,  $\omega \in \Gamma(E^*)$ ,  $X \in \Gamma(TM)$

**Ορισμός 1.4.3.** Αν  $\nabla^{(i)}$  συνοχή στην  $E_i$  για  $i = 1, 2$ , τότε υπάρχει μοναδική συνοχή  $\nabla$  στην  $E_1 \otimes E_2$  που ορίζεται ως

$$\nabla_X(\xi_1 \otimes \xi_2) = (\nabla_X^{(1)} \xi_1) \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes (\nabla_X^{(2)} \xi_2)$$

**Ορισμός 1.4.4.** Αν  $\nabla^{(i)}$  συνοχή στην  $E_i$  για  $i = 1, 2$ , τότε υπάρχει μοναδική συνοχή  $\nabla$  στη δέσμη  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  των ομομορφισμών μεταξύ των δεσμών  $E_1, E_2$ , που ορίζεται για  $A \in \Gamma(\text{Hom}(E_1, E_2))$  ως

$$(\nabla_X A)(u) = \nabla_X^{(2)}(Au) - A(\nabla_X^{(1)} u)$$

όπου  $u \in E_1$ .

Ιδιαίτερα για την εφαπτόμενη δέσμη (μία συνοχή στη δέσμη αυτή καλείται γραμμική) ισχύει το εξής:

**Πρόταση 1.4.1.** Μία γραμμική συνοχή  $\nabla$ , ορίζει μοναδική συνοχή σε κάθε τανυστική δέσμη, η οποία συμβολίζεται συνήθως και πάλι  $\nabla$ , και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Στην  $TM$  η  $\nabla$  ταυτίζεται με τη δοθείσα γραμμική συνοχή.
2. Στην  $C^\infty(M) = T_0^0 M$ , η  $\nabla$  δρα ως παραγωγήιση

$$\nabla_X f = Xf$$

3.  $\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$ , για οποιουσδήποτε τανυστές  $F, G$ .
4. Η  $\nabla$  αντιμετωπίζεται με το ίχνος:

$$\nabla_X(\text{tr} F) = \text{tr}(\nabla_X F)$$

για κάθε τανυστή  $F$ .

**Παράδειγμα 1.4.1.** Ας υπολογίσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο της 1-μορφής  $\omega$  ως προς το διανυσματικό πεδίο  $X$ . Εφόσον  $\text{tr}(dx^j \otimes \partial_i) = \delta_i^j$  (σύμφωνα με την ειδική περίπτωση 4 της συστολής που είδαμε προηγουμένως),  $\nabla_X \text{tr}(dx^j \otimes \partial_i) = \text{tr}(\nabla_X(dx^j \otimes \partial_i)) = 0$  Έτσι  $\text{tr}(\nabla_X dx^j \otimes \partial_i) + \text{tr}(dx^j \otimes \nabla_X \partial_i) = 0 \Rightarrow (\nabla_X dx^j)(\partial_i) = -dx^j(\nabla_X \partial_i)$ . Άρα

$$\begin{aligned} (\nabla_X \omega)(\partial_k) &= (\nabla_X \omega_j dx^j)(\partial_k) \\ &= (X\omega_j)dx^j(\partial_k) + \omega_j(\nabla_X dx^j)(\partial_k) \\ &= X\omega_k + \omega_j(\nabla_X dx^j)(\partial_k) = \nabla_X \omega_k - \omega_j dx^j(\nabla_X \partial_k) \\ &= X^i \partial_i \omega_k - \omega_j X^i \Gamma_{ik}^j \end{aligned}$$

Γενικεύοντας, μπορεί να δειχθεί το εξής:

**Πρόταση 1.4.2.** Για οποιοδήποτε τανυστικό πεδίο  $F \in \Gamma(\mathcal{T}_l^k M)$ , διανυσματικό πεδίο  $Y_i$  και 1-μορφές  $\omega^j$  έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla_X F(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, Y_k) &= X(F(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, Y_k)) \\ &= - \sum_{j=1}^l F(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, Y_k) \\ &= - \sum_{i=1}^k F(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k)\end{aligned}$$

Καθώς η συναλλοίωτη παράγωγος είναι  $C^\infty$ - γραμμική ως προς  $X$ , ορίζουμε  $\nabla F \in \Gamma(\otimes^{k+1} T^*M \otimes^l TM)$  ως

$$\nabla F(X_1, Y_1, \dots, Y_k, \omega^1, \dots, \omega^l) = \nabla_X F(Y_1, \dots, Y_k, \omega^1, \dots, \omega^l)$$

για  $F \in \Gamma(\mathcal{T}_l^k M)$ . Έτσι, στην περίπτωση αυτή, η  $\nabla$  είναι μία  $\mathbb{R}$ - γραμμική απεικόνιση  $\nabla : \Gamma(\mathcal{T}_l^k M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_l^{k+1} M)$ .

Στην περίπτωση όπου  $E = \mathcal{T}_l^k M$  με αντίστοιχη συνοχή  $\nabla$ , αν  $F \in \Gamma(E)$ , τότε  $\nabla F \in \Gamma(T^*M \otimes E)$  και συνεπώς  $\nabla^2 F \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$  και για διανυσματικά πεδία  $X, Y$ :

$$\begin{aligned}\nabla^2 F(X, Y) &= (\nabla_X (\nabla F))(Y) \\ &= \nabla_X ((\nabla F)(Y)) - \nabla F(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X (\nabla_Y F) - \nabla_{\nabla_X Y} F\end{aligned}$$

Για  $f \in C^\infty M$  ορίζουμε την εσσianή της  $f$  ως

$$\text{Hess}(f) = \nabla(df).$$

Αν δηλαδή  $X, Y$  είναι διανυσματικά πεδία, τότε  $\text{Hess}(f)(X, Y) = (\nabla df)(X, Y) = \nabla_X df(Y) = \nabla_X (df(Y)) - df(\nabla_X Y) = \nabla_X (Yf) - (\nabla_X Y)f = \nabla_X (\nabla_Y f) - \nabla_{\nabla_X Y} f = \nabla_{X,Y}^2 f$

## 1.5 Ολοκλήρωση και Θεώρημα Απόκλισης

Αν  $(M, g)$  είναι μία προσανατολισμένη πολλαπλότητα Riemann με σύνορο και  $\tilde{g}$  είναι η επαγόμενη μετρική στο  $\partial M$ , τότε ορίζουμε το στοιχείο όγκου της  $\tilde{g}$  ως  $d\sigma_{\tilde{g}} = \iota_{\nu} d\mu_g|_{\partial M}$ . Ιδιαίτερα, αν  $X$  είναι ομαλό διανυσματικό πεδίο, έχουμε  $\iota_X d\mu_g|_{\partial M} = \langle X, \nu \rangle_g d\sigma_{\tilde{g}}$ . Η απόκλιση  $\text{div} X$  του  $X$  ορίζεται ως η ποσότητα που ικανοποιεί

$$d(\iota_X d\mu) = \text{div} X d\mu$$

**Θεώρημα 1.5.1** (Θεώρημα Απόκλισης). Έστω  $(M, g)$  συμπαγής προσανατολισμένη πολλαπλότητα Riemann. Αν  $X$  είναι διανυσματικό πεδίο, τότε

$$\int_M \text{div} X d\mu = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle_g d\sigma.$$

Ιδιαίτερα, αν η  $M$  είναι κλειστή τότε  $\int_M \text{div} X d\mu = 0$ .

Από το θεώρημα αυτό έπονται οι ακόλουθοι χρήσιμοι τύποι

**Πρόταση 1.5.1** (Ολοκλήρωση κατά Μέρη). Σε μία πολλαπλότητα Riemann με  $u, v \in C^\infty(M)$  ισχύει

1. Αν η πολλαπλότητα είναι κλειστή,

$$\int_M \Delta u d\mu = 0$$

2. Αν η πολλαπλότητα είναι συμπαγής,

$$\int_M (u \Delta v - v \Delta u) d\mu = \int_{\partial M} \left( u \frac{\partial u}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Ιδιαίτερα, σε μία κλειστή πολλαπλότητα:  $\int_M u \Delta v d\mu = \int_M v \Delta u d\mu$ .

3. Σε συμπαγή πολλαπλότητα,

$$\int_M u \Delta v d\mu + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mu = \int_{\partial M} \frac{\partial v}{\partial \nu} u d\sigma.$$

Ιδιαίτερα σε κλειστή πολλαπλότητα,  $\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mu = - \int_M u \Delta v d\mu$

Αναζητώντας τώρα μία τοπική έκφραση για την απόκλιση αποδεικνύεται το εξής:

**Λήμμα 1.5.1.** Η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου  $X$  μπορεί να εκφραστεί σε τοπικές συντεταγμένες ως

$$\operatorname{div}(X^i \partial_i) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (X^i \sqrt{\det g})$$

και συνεπώς

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr} \nabla X = \operatorname{tr}(\nabla X)(\cdot, \cdot) = (\nabla_i X)(dx^i).$$

Γενικότερα τώρα, αν  $T$  είναι ένας  $(k, l)$ -τανυστής τότε η απόκλιση ορίζεται ως ο  $(k-1, l)$ -τανυστής

$$(\operatorname{div} T)(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \operatorname{tr}(X \rightarrow \sharp(\nabla T)(X, \cdot, Y_1, \dots, Y_{k-1}))$$

δηλαδή ως το ίχνος της συναλλοίωτης παραγώγου ως προς τους δύο πρώτους κάτω δείκτες. Σε συντεταγμένες:

$$(\operatorname{div} T)_{j_1 \dots j_{k-1}}^{i_1 \dots i_l} = g^{ij} \nabla_i T_{j j_1 \dots j_{k-1}}^{i_1 \dots i_l}$$

## 1.6 Ανάκληση(Pullback)

Έστω  $M, N$  πολλαπλότητες,  $E$  διανυσματική δέσμη της  $N$  και  $f : M \rightarrow N$  ομαλή απεικόνιση.

**Ορισμός 1.6.1.** Η διανυσματική δέσμη από ανάκληση της  $E$  μέσω της  $f$  συμβολίζεται  $f^*E$ , είναι διανυσματική δέσμη της  $M$  και ορίζεται ως

$$f^*E = \{(p, \xi) : p \in M, \xi \in E \quad \text{με } \pi(\xi) = f(p)\}$$

Αν  $\xi_1, \dots, \xi_k$  είναι τοπικό πλαίσιο της  $E$  γύρω από το  $f(p) \in N$  τότε τα  $(\Xi_i)_i$  με  $\Xi_i(p) = \xi_i(f(p))$  αποτελούν τοπικό πλαίσιο της  $f^*E$  γύρω από το  $p$ .

**Λήμμα 1.6.1.** *Ισχύουν τα ακόλουθα*

1.  $(f^*E)^* = f^*(E^*)$
2.  $(f^*E_1) \otimes (f^*E_2) = f^*(E_1 \otimes E_2)$

**Ορισμός 1.6.2.** Ο περιορισμός  $\xi_f \in \Gamma(f^*E)$  του  $\xi \in \Gamma(E)$  ορίζεται ως

$$\xi_f(p) = \xi(f(p)) \in E_{f(p)} = (f^*E)_p$$

για όλα τα  $p \in M$ .

Για παράδειγμα, αν  $f : M \rightarrow N$  είναι μία ομαλή απεικόνιση, τότε για κάθε  $p \in M$  ορίζεται η γραμμική απεικόνιση  $f_*(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N = (f^*TN)_p$ . Δηλαδή,  $f_*(p) \in T_p^* M \otimes (f^*TN)_p$  κι έτσι  $f_* \in \Gamma(T^*M \otimes f^*TN)$ .

Για  $X \in \Gamma(TM)$  η ανάκληση του  $X$  είναι η διατομή  $f_*X \in \Gamma(f^*TN)$  που προκύπτει εφαρμόζοντας την  $f_*$  στο  $X$ . Όμοια, μπορούμε να μεταφέρουμε  $(k,0)$ -τανυστές της  $N$  σε  $(k,0)$ -τανυστές της  $M$ : Αν  $S \in \Gamma(T^k N)$ , τότε ο περιορισμός του  $S$  ορίζεται, όπως είδαμε, ως  $S_f \in \Gamma(f^*T^k N)$  και ορίζουμε  $f^*S \in \Gamma(T^k M)$  ως

$$f^*S(X_1, \dots, X_k) = S_f(f_*X_1, \dots, f_*X_k)$$

όπου  $X_i$  είναι διανυσματικά πεδία της  $M$ .

Ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί ώστε να περιληφθούν τανυστές με τιμές σε κάποια δέσμη. Αν  $S \in \Gamma(T^k N \otimes E)$  είναι  $(k,0)$ -τανυστικό πεδίο της  $N$  με τιμές στην  $E$ , τότε ο περιορισμός δίνει  $S_f \in (f^*T^k N \otimes f^*E)$  και θα συμβολίζουμε με  $f^*S$  τον  $(k,0)$ -τανυστή της  $M$  με τιμές στην  $f^*E$  ο οποίος ορίζεται ως

$$f^*S(X_1, \dots, X_k) = S_f(f_*X_1, \dots, f_*X_k).$$

Πρόκειται δηλαδή για τον ίδιο τύπο με πριν μόνο που και τα δύο μέλη παίρνουν τιμές στη  $f^*E$ .

### 1.6.1 Συνοχή από ανάκληση

Αν  $\nabla$  είναι συνοχή στην διανυσματική δέσμη  $E$  της  $N$  και  $f : M \rightarrow N$  ομαλή απεικόνιση τότε ισχύει το ακόλουθο.

**Θεώρημα 1.6.1.** *Υπάρχει μοναδική συνοχή  $\nabla^f$  στην  $f^*E$ , η οποία ονομάζεται συνοχή από ανάκληση, ώστε*

$$\nabla_v^f(\xi_f) = \nabla_{f_*v} \xi$$

για  $v \in TM$ ,  $\xi \in \Gamma(E)$

**Παρατήρηση 1.6.1.** Ονομάζεται συνοχή από ανάκληση διότι αν  $\xi \in \Gamma(E)$ , τότε  $\nabla \xi \in \Gamma(T^*N \otimes E)$  και μέσω ανάκλησης παίρνουμε

$$\nabla^f \xi_f := f^*(\nabla \xi) \in \Gamma(T^*M \otimes f^*E)$$

Για να ορίσουμε τώρα την  $\nabla_v^f \xi$  για τυχαίο  $\xi \in \Gamma(f^*E)$ , σταθεροποιούμε ένα  $p \in M$  και επιλέγουμε τοπικό πλαίσιο της  $E$ ,  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  γύρω από το  $f(p)$ .

Μπορούμε τότε να γράψουμε  $\xi = \sum_{i=1}^k \xi^i(\sigma_i)_f$  με  $\xi^i$  ομαλές συναρτήσεις ορισμένες γύρω από το  $p$ . Έτσι

$$\begin{aligned}\nabla_v^f \xi &= \nabla_v^f (\xi^i(\sigma_i)_f) \\ &= v(\xi^i)(\sigma_i)_f + \xi^i \nabla_v^f (\sigma_i)_f \\ &= v(\xi^i)(\sigma_i)_f + \xi^i \nabla_{f_* v} \sigma_i\end{aligned}$$

Για την περίπτωση που στη δέσμη  $E$  με συνοχή  $\nabla$ , υπάρχει μία μετρική, μας ενδιαφέρει η συνοχή να έχει την παρακάτω ιδιότητα:

**Ορισμός 1.6.3.** Η συνοχή  $\nabla$  στη διανυσματική δέσμη  $E$  λέγεται ότι είναι συμβατή με τη μετρική  $g$  αν για οποιαδήποτε  $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ ,  $X \in \Gamma(TM)$  ισχύει

$$X(g(\xi, \eta)) = g(\nabla_X \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X \eta).$$

Αν η  $\nabla$  είναι συμβατή με τη μετρική  $g$ , τότε και η επαγόμενη συνοχή στην  $E^*$  είναι συμβατή με την (επαγόμενη) μετρική  $g^{-1}$  στην  $E^*$ . Επιπλέον, αν οι συνοχές σε δύο διανυσματικές δέσμες είναι συμβατές με δοθείσες μετρικές, τότε και η επαγόμενη συνοχή στο τανυστικό γινόμενο θα είναι συμβατή με την αντίστοιχη μετρική.

Για μία μετρική στην εφαπτόμενη δέσμη θέλουμε η συνοχή να ικανοποιεί και το ακόλουθο:

**Ορισμός 1.6.4.** Μία συνοχή  $\nabla$  στην  $TM$  είναι συμμετρική αν

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

για οποιαδήποτε διανυσματικά πεδία  $X, Y$ , ή ισοδύναμα  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

Για τη συνοχή από ανάκληση τώρα ισχύουν τα ακόλουθα.

**Πρόταση 1.6.1.** Αν  $g$  είναι μετρική στην  $E$  και  $\nabla$  είναι συνοχή στην  $E$  συμβατή με την  $g$ , τότε και η  $\nabla^f$  είναι συμβατή με τον περιορισμό της μετρικής  $g_f$

**Πρόταση 1.6.2.** Αν η  $\nabla$  είναι συμμετρική συνοχή στην  $TM$ , τότε και η  $\nabla^f$  είναι συμμετρική συνοχή στην  $f^*TM$  με την έννοια

$$\nabla_U^f (f_* V) - \nabla_V^f (f_* U) = f_* ([U, V])$$

για κάθε  $U, V \in \Gamma(TM)$ .

## 1.6.2 Παράλληλη Μετατόπιση

Η παράλληλη μετατόπιση (ή παράλληλη μεταφορά) είναι ένας τρόπος σύγκρισης γεωμετρικών ποσοτήτων σε διαφορετικά σημεία κατά μήκος ομαλών καμπυλών χρησιμοποιώντας τη συνοχή. Έστω  $\nabla$  συνοχή στη δέσμη  $\pi : E \rightarrow M$ . Αν  $\gamma : I \rightarrow M$  είναι ομαλή καμπύλη, τότε μία ομαλή διατομή κατά μήκος της  $\gamma$  είναι μία διατομή της  $\gamma^*E$ . Σύμφωνα με όσα είδαμε παραπάνω, μπορεί να οριστεί η συνοχή  $\nabla^\gamma$ . Μία διατομή  $V$  κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma$  καλείται παράλληλη κατά μήκος της  $\gamma$  αν  $\nabla_{\partial_t}^\gamma V \equiv 0$ . Σε ένα τοπικό πλαίσιο  $(e_j)$  σε μία περιοχή του  $\gamma(t_0)$ :

$$\nabla_{\partial_t}^\gamma V(t_0) = \dot{V}^k(t_0) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) V^j(t_0) \dot{\gamma}^i(t_0) e_k$$



όπου  $V(t) = V^j(t)e_j$  και  $\Gamma_{ij}^k$  είναι τα σύμβολα του Christoffel της  $\nabla$  ως προς το πλαίσιο αυτό.

Έχοντας δει λοιπόν τα παραπάνω μπορούμε να εξετάσουμε λίγο πιο αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο υλοποιείται η "σύνδεση" μεταξύ των διανυσματικών χώρων που αποτελούν τις ίνες μίας διανυσματικής δέσμης, μέσω της συνοχής. Ισχύει κατ' αρχάς το πολύ σημαντικό επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 1.6.2.** *Αν  $\gamma : I \rightarrow M$  είναι ομαλή καμπύλη (το θεώρημα ισχύει και για κατά τμήματα ομαλή καμπύλη αλλά δεν θα το χρησιμοποιήσουμε εδώ) και  $V_0 \in E_{\gamma(0)}$ , τότε υπάρχει μοναδική παράλληλη διατομή  $V$  κατά μήκος της  $\gamma$  ώστε  $V(0) = V_0$ .*

Μία τέτοια διατομή καλείται παράλληλη μετατόπιση του  $V_0$  κατά μήκος της  $\gamma$ . Κάθε τέτοια καμπύλη  $\gamma$  λοιπόν καθορίζει μία μοναδική οικογένεια γραμμικών ισομορφισμών

$$P_t : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(t)}$$

ένα διανυσματικό πεδίο  $V$  κατά μήκος της  $\gamma$  να είναι παράλληλο αν και μόνο αν  $V(t) = P_t(V_0)$  για όλα τα  $t$ . Αυτό που αποδεικνύεται τώρα και είναι το ζητούμενο, είναι ότι

$$\nabla_X V(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t^{-1}(V(t)) - V_0}{t}$$

### 1.6.3 Η παράγωγος Lie

Υπάρχει ένας ακόμα τρόπος μεταφοράς διανυσματικών πεδίων (και τανυστών γενικότερα) μεταξύ σημείων μιας πολλαπλότητας και αυτός είναι μέσω αμφιδιαφορίσεων. Συγκεκριμένα, αν  $X$  είναι διανυσματικό πεδίο της πολλαπλότητας  $M$  και  $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  είναι η ροή που αυτό επάγει (υποθέτουμε χάριν απλότητας πως πρόκειται για ολική ροή αφού η περίπτωση τοπικής ροής είναι παρόμοια εκτός της μεγαλύτερης πολυπλοκότητας στις αποδείξεις πως όσα κάνουμε είναι καλά ορισμένα), τότε για κάθε  $t$  η  $\Phi_t : M \rightarrow M$  είναι αμφιδιαφύριση και συνεπώς η  $(\Phi_t)_*$  είναι γραμμικός ισομορφισμός σε κάθε σημείο. Ορίζουμε λοιπόν την παράγωγο Lie ενός διανυσματικού πεδίου  $Y$  ως προς το διανυσματικό πεδίο  $X$  ως

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t})_* Y_{\Phi_t(p)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{-t})_* Y_{\Phi_t(p)} - Y_p}{t}.$$

Αποδεικνύεται ότι  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

Γενικότερα, αν  $p \in M$  η  $\theta_t^*$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να ανασύρουμε (pullback) ένα τανυστή οποιουδήποτε τύπου στο  $\theta_t(p)$  σε έναν στο  $p$ . Αν  $T$  λοιπόν είναι ομαλό τανυστικό πεδίο στη  $M$ , ορίζουμε την παράγωγο Lie του  $T$  ως προς το διανυσματικό πεδίο  $X$  ως

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_t^* T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta_t^*(T_{\theta_t(p)}) - T_p}{t}$$

Συνοψίζουμε τώρα τις βασικές ιδιότητες της παραγωγού Lie

**Πρόταση 1.6.3.** *Έστω  $X, Y$  διανυσματικά πεδία,  $f$  ομαλή πραγματική απεικόνιση (η οποία θεωρείται ως 0-τανυστικό πεδίο),  $\sigma, \tau$  ομαλά τανυστικά πεδία και  $\omega, \eta$  διαφορικές μορφές.*

1.  $\mathcal{L}_X f = Xf$
2.  $\mathcal{L}_X(f\sigma) = (\mathcal{L}_X f)\sigma + f\mathcal{L}_X\sigma$
3.  $\mathcal{L}_X(\sigma \otimes \tau) = (\mathcal{L}_X\sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes \mathcal{L}_X\tau$
4.  $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta$
5.  $\mathcal{L}_X(Y \lrcorner \omega) = (\mathcal{L}_X Y) \lrcorner \omega + Y \lrcorner \mathcal{L}_X\omega$
6. Αν  $Y_1, \dots, Y_k$  είναι διανυσματικά πεδία και  $\sigma$  είναι  $(k,0)$ -τανυστικό πεδίο,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\sigma(Y_1, \dots, Y_k)) &= (\mathcal{L}_X\sigma)(Y_1, \dots, Y_k) + \sigma(\mathcal{L}_X Y_1, \dots, Y_k) \\ &\quad + \dots + \sigma(Y_1, \dots, \mathcal{L}_X Y_k) \end{aligned}$$

Από το (6) της προηγούμενης πρότασης προκύπτει το εξής:

**Πόρισμα 1.6.1.** Αν  $X, Y_1, \dots, Y_k$  είναι διανυσματικά πεδία και  $\sigma$  είναι  $(k,0)$ -τανυστικό πεδίο,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X\sigma)(Y_1, \dots, Y_k) &= X(\sigma(Y_1, \dots, Y_k)) - \sigma([X, Y_1], Y_2, \dots, Y_k) \\ &\quad - \sigma(Y_1, \dots, Y_{k-1}, [X, Y_k]). \end{aligned}$$

**Πόρισμα 1.6.2.** Αν  $f \in C^\infty(M)$ , τότε  $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f)$

**Πρόταση 1.6.4.** Για οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο  $X$  και διαφορική μορφή  $\omega$ ,

$$\mathcal{L}_X\omega = X \lrcorner (d\omega) + d(X \lrcorner \omega)$$

**Πόρισμα 1.6.3.** Για οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο  $X$  και διαφορική μορφή  $\omega$ ,

$$\mathcal{L}_X(d\omega) = d(\mathcal{L}_X\omega).$$

Πρέπει κλείνοντας να τονίσουμε πως η απεικόνιση  $\mathcal{L} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  δεν είναι συνοχή αφού δεν είναι  $C^\infty(M)$ -γραμμική, δηλαδή  $\mathcal{L}_{fX}Y \neq f\mathcal{L}_XY$  γενικά.

## 1.7 Καμπυλότητα

**Ορισμός 1.7.1.** Έστω  $E$  μία διανυσματική δέσμη της πολλαπλότητας  $M$ . Αν  $\nabla$  είναι μία συνοχή της  $E$ , τότε η καμπυλότητα της συνοχής  $\nabla$  στην  $E$  είναι η διατομή  $R_\nabla \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E^* \otimes E)$  που ορίζεται ως

$$R_\nabla(X, Y)\xi = \nabla_Y(\nabla_X\xi) - \nabla_X(\nabla_Y\xi) - \nabla_{[X, Y]}\xi.$$

Ισοδύναμα

$$R_\nabla \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \text{End}(E))$$

και επειδή είναι άμεσο από τον ορισμό ότι η  $R_\nabla$  είναι αντισυμμετρική ως προς τους δύο πρώτους όρους, έχουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} R_\nabla &\in \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \text{End}(E)) \cong \\ &\Gamma(\text{Hom}(\Lambda^2(TM), \text{End}(E))). \end{aligned}$$

**Πρόταση 1.7.1.** *Αν η δέσμη  $E$  έχει μία συνοχή  $g$  συμβατή με τη μετρική  $\nabla$  της  $E$ , τότε για  $X, Y \in \Gamma(TM)$ ,  $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$*

$$g(R(X, Y)s_1, s_2) + g(R(X, Y)s_2, s_1) = 0$$

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι  $g(R(X, Y)s, s) = 0$  για οποιοδήποτε  $s \in \Gamma(E)$ . Εφόσον η  $R$  είναι τανυστής μπορούμε υποθέσουμε πως  $[X, Y] = 0$ . Τότε

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)s, s) &= g(\nabla_X \nabla_Y s, s) - g(\nabla_Y \nabla_X s, s) \\ &= Xg(\nabla_Y s, s) - g(\nabla_Y s, \nabla_X s) - Yg(\nabla_X s, s) + g(\nabla_X s, \nabla_Y s) \\ &= \frac{1}{2}(XYg(s, s) - YXg(s, s)) = 0. \end{aligned}$$

□

Έπεται λοιπόν ότι

$$R_\nabla \in \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \mathfrak{so}(E)),$$

όπου  $\mathfrak{so}(E)$  η δέσμη των αντισυμμετρικών ενδομορφισμών της  $E$  και σύμφωνα με όσα είπαμε μετά τον ορισμό 1.3.10

$$R_\nabla \in \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \Lambda^2(E)).$$

### 1.7.1 Καμπυλότητα στην Εφαπτόμενη Δέσμη

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε στην εφαπτόμενη δέσμη διατυπώνοντας αρχικά το θεμελιώδες θεώρημα της γεωμετρίας Riemann.

**Θεώρημα 1.7.1.** *Εστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann. Υπάρχει μοναδική συνοχή  $\nabla$  στην  $TM$  η οποία είναι συμμετρική και συμβατή με την  $g$ . Η συνοχή αυτή καλείται Levi-Civita ή συνοχή Riemann.*

Θα συμβολίζουμε τη διατομή καμπυλότητας (ή πιά απλά την καμπυλότητα) στην εφαπτόμενη δέσμη ως  $Rm$ . Αν  $\nabla$  είναι η συνοχή Riemann της  $TM$  και  $g$  η μετρική Riemann της  $M$ , από όσα είδαμε προηγουμένως έχουμε:

$$\begin{aligned} Rm &\in \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \mathfrak{so}(TM)) \cong \\ &\Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \Lambda^2(TM)) \cong \\ &\Gamma(\text{End}(\Lambda^2(TM))). \end{aligned}$$

**Πρόταση 1.7.2.** *Η καμπυλότητα της συνοχής Riemann μίας πολλαπλότητας Riemann  $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ικανοποιεί τις ακόλουθες ταυτότητες: Αν  $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$  τότε*

$$Rm(X, Y)Z + Rm(Y, X)Z = 0 \quad (1.2)$$

$$Rm(X, Y)Z + Rm(Y, X)Z + Rm(Z, X)Y = 0 \quad (1.3)$$

$$Rm(X, Y, Z, W) + Rm(X, Y, W, Z) = 0 \quad (1.4)$$

$$Rm(X, Y, Z, W) = Rm(Z, W, X, Y) \quad (1.5)$$

και

$$\nabla Rm(Z, V, W, X, Y) + \nabla Rm(V, W, Z, X, Y) + \nabla Rm(W, Z, V, X, Y) = 0, \quad (1.6)$$

όπου  $Rm(X, Y, Z, W) = \langle Rm(X, Y)W, Z \rangle = b(Rm(X, Y)W)(Z)$

Αν τώρα  $(x^i)$  είναι σύστημα συντεταγμένων της  $M$ , ορίζουμε τους συντελεστές  $R_{ijk}^l$  της  $Rm$  ως προς το χάρτη αυτό έτσι ώστε

$$Rm(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l$$

και τους συντελεστές  $R_{ijkl}$  της  $Rm$ , ως

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &:= Rm(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \langle Rm(\partial_i, \partial_j)\partial_l, \partial_k \rangle \\ &= \langle R_{ijl}^m \partial_m, \partial_k \rangle \\ &= R_{ijlm} g_{mk}. \end{aligned}$$

**Ορισμός 1.7.2.** Ο τελεστής καμπυλότητας της  $(M, g)$  είναι ο  $\mathcal{R} \in \Gamma(\text{End}(\Lambda^2(TM)))$ :

$$\langle \mathcal{R}(W \wedge X), Y \wedge Z \rangle_{\Lambda^2 TM} = \langle Rm(W, X)Z, Y \rangle_{TM},$$

για  $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ , δηλαδή  $\mathcal{R}(W \wedge X) = \sharp \mu$ , όπου  $\mu \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M)$ , τέτοιο, ώστε

$$\mu(Y \wedge Z) := \langle Rm(W, X)Z, Y \rangle_{TM}.$$

Ο τελεστής καμπυλότητας είναι συμμετρικός (αυτοσυζυγής) αφού

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(W \wedge X), Y \wedge Z \rangle &= \langle Rm(W, X)Z, Y \rangle = \langle Rm(Y, Z)X, W \rangle \\ &= \langle \mathcal{R}(Y \wedge Z), W \wedge X \rangle. \end{aligned}$$

Άμεσα επάγεται και η αντίστοιχη συμμετρική διγραμμική μορφή στην  $\Lambda^2(TM)$ :

$$\mathcal{R}(W \wedge X, Y \wedge Z) := \langle \mathcal{R}(W \wedge X), Y \wedge Z \rangle. \quad (1.7)$$

Άρα

$$\mathcal{R} \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes_S \Lambda^2 T^*M) = S^2(\Lambda^2 T^*M).$$

Σε συντεταγμένες,

$$R_{(ij)(kl)} := \mathcal{R}(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l) = R_{ijkl},$$

όπου  $(e_i)$  τοπικό πλαίσιο του  $TM$ .

### 1.7.2 Καμπυλότητα διατομής, καμπυλότητα Ricci, βαθμωτή καμπυλότητα

Ας υποθέσουμε ότι  $\dim M \geq 2$ . Σταθεροποιούμε  $p \in M$ . Δοθέντος  $u \wedge v \in \Lambda^2 T_p M - \{0\}$ , θέτουμε

$$K_{u \wedge v} := \frac{\langle \mathcal{R}(u \wedge v), u \wedge v \rangle}{\|u \wedge v\|^2}. \quad (1.8)$$

Εφόσον  $u \wedge v \neq 0$ , τα  $u$  και  $v$  παράγουν ένα διδιάστατο υπόχωρο  $\sigma$  του  $T_p M$ . Αν  $h \in GL(\sigma)$ , τότε  $hu = au + bv, hv = cu + dv$ , όπου  $ad - bc \neq 0$ . Έτσι  $hu \wedge hv = (ad - bc)u \wedge v = (\det h)u \wedge v$  και συνεπώς

$$K_{hu \wedge hv} = \frac{\langle \mathcal{R}(hu \wedge hv), hu \wedge hv \rangle}{\|hu \wedge hv\|^2} = \frac{(\det h)^2 \langle \mathcal{R}(u \wedge v), u \wedge v \rangle}{(\det h)^2 \|u \wedge v\|^2} = K_{u \wedge v}.$$

**Ορισμός 1.7.3.** Η καμπυλότητα διατομής της  $(M, g)$  ως προς το επίπεδο  $\sigma \subset T_p M, p \in M$  είναι

$$K_\sigma := K_{u \wedge v} = \frac{\langle \mathcal{R}(u \wedge v), u \wedge v \rangle}{\|u \wedge v\|^2} = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2},$$

όπου τα  $u, v \in T_p M$  είναι βάση του  $\sigma$ .

Έστω  $R$  η καμπυλότητα της πολλαπλότητας  $M$  με συνοχή  $\nabla$ . Για σταθερά  $u, v \in T_p M$ ,  $R(\cdot, u)v = [w \rightarrow R(w, u)v]$  είναι ενδομορφισμός του  $T_p M$ . Το ίχνος του λοιπόν είναι καλά ορισμένο. Αν  $U, V \in \Gamma(TM)$  η συνάρτηση  $\text{tr}R(\cdot, U)V$  είναι  $C^\infty$  στη  $M$  και η απεικόνιση

$$Rc : (U, V) \mapsto \text{tr}R(\cdot, U)V$$

είναι  $(2,0)$ -τανυστικό πεδίο στη  $M$ .

**Ορισμός 1.7.4.** Το  $(2,0)$ -τανυστικό πεδίο  $Rc$  όπως ορίστηκε παραπάνω καλείται τανυστικό πεδίο Ricci της  $\nabla$ .

Σε συντεταγμένες

$$\begin{aligned} R_{ij} &:= Rc(\partial_i, \partial_j) = \text{tr}[\partial_l \rightarrow R(\partial_l, \partial_i)\partial_j] \\ &= \text{tr}[\partial_l \rightarrow R_{lij}^m \partial_m] = R_{lij}^l. \end{aligned}$$

Είναι τώρα εύκολο να παρατηρήσουμε ότι  $Rc(U, V) = Rc(V, U)$ .

**Ορισμός 1.7.5.** Η καμπυλότητα Ricci της  $(M, g)$  στη διεύθυνση του μη μηδενικού διανύσματος  $v \in TM$  είναι

$$r(v) := \frac{Rc(v, v)}{\|v\|^2}.$$

Ο ενδομορφισμός Ricci τώρα ορίζεται ως ο τελεστής  $Rc(v) := \sharp Rc(v, \cdot)$  και η βαθμωτή καμπυλότητα ως το ίχνος του:

$$R = \text{tr}[v \rightarrow Rc(v)].$$

Η καμπυλότητα Ricci και η βαθμωτή καμπυλότητα μπορούν να εκφραστούν ως προς τις καμπυλότητες διατομής.

**Λήμμα 1.7.1.** Έστω  $X \in T_p M$  μοναδιαίο διάνυσμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $X$  περιέχεται σε κάποια ορθοκανονική βάση του  $T_p M$ . Τότε η  $Rc(X, X)$  είναι το άθροισμα των καμπυλοτήτων διατομής όλων των επιπέδων από το  $X$  και κάποιο ακόμα στοιχείο της βάσης αυτής.

Για οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του  $T_p M$  τώρα, η βαθμωτή καμπυλότητα στο  $p$  είναι το άθροισμα των καμπυλοτήτων διατομής όλων των επιπέδων που παράγονται από ζεύγη διανυσμάτων της βάσης.

Το ακόλουθο λήμμα θα αποδειχθεί στο κεφάλαιο 5 αλλά θα χρησιμοποιηθεί αρκετά μέχρι τότε.

**Λήμμα 1.7.2.** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann διάστασης 3. Διαγωνοποιούμε τον τελεστή καμπυλότητας  $\mathcal{R}$  ως προς κάποια βάση της  $\Lambda^2 TM$ , η οποία προκύπτει από το ορθοκανονικό πλαίσιο  $\{e_1, e_2, e_3\}$  της  $TM$  (αυτό γίνεται διότι ο τελεστής καμπυλότητας είναι συμμετρικός). Υποθέτουμε ότι ο πίνακας του  $\mathcal{R}$  που προκύπτει με τον τρόπο αυτό έχει ως μη μηδενικά (διαγώνια) στοιχεία τα  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Τότε ως προς τη βάση  $\{e_1, e_2, e_3\}$  ο ενδομορφισμός Ricci είναι της μορφής

$$Rc = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 + \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

και η βαθμωτή καμπυλότητα είναι

$$R = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \quad (1.10)$$

**Ορισμός 1.7.6.** Αν  $(M, g)$  είναι  $n$ -διάστατη πολλαπλότητα Riemann, ο τανυστής του Einstein (ή μηδενικού ίχνους μέρος του τανυστή Ricci) ορίζεται ως

$$E = \mathring{R}c := Rc - \frac{1}{n}Rg.$$

Μία μετρική καλείται Einstein αν ο τανυστής του Einstein της είναι ταυτοτικά 0.

Στη διάσταση 3 οι Einstein μετρικές είναι ιδιαίτερης σημασίας.

**Λήμμα 1.7.3.** Μία Einstein μετρική σε μία πολλαπλότητα διάστασης  $n \geq 3$  έχει σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα. Αν  $n=3$  η μετρική έχει σταθερές καμπυλότητες διατομής.

*Απόδειξη.* Η δεύτερη ταυτότητα του Bianchi, (1.6), σε συντεταγμένες γράφεται

$$\nabla_p R_{ijkl} + \nabla_i R_{jpkl} + \nabla_j R_{pikl}.$$

Υψώνοντας τους δείκτες  $k, l$ , παίρνουμε

$$\nabla_p R_{ij}{}^{kl} + \nabla_i R_{jp}{}^{kl} + \nabla_j R_{pi}{}^{kl},$$

και θεωρώντας το ίχνος ως προς τους δείκτες  $i, l$ , και χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες του τανυστή καμπυλότητας:

$$\nabla_p R_j^k - \nabla_i R_{jp}{}^{ik} - \nabla_j R_p^k = 0.$$

Αν τώρα πάρουμε το ίχνος και ως προς τους δείκτες  $j, k$  θα έχουμε

$$\nabla_p R = \nabla_i R_p^i + \nabla_i R_p^i,$$

ή ισοδύναμα

$$g^{ij} \nabla_i R_{jp} = \frac{1}{2} \nabla_p R. \quad (1.11)$$

Έτσι

$$g^{ij} \nabla_i E_{jp} = g^{ij} \nabla_i (R_{jp} - \frac{1}{n} R g_{jp}) = \frac{1}{2} \nabla_i R - \frac{1}{n} \nabla_i R = (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \nabla_p R. \quad (1.12)$$

Αν η μετρική είναι Einstein, τότε  $E_{jp} = 0$  και συνεπώς

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\nabla_p R = 0.$$

Επειδή τώρα  $n \neq 2$  αυτό σημαίνει ότι  $\nabla R = 0$  και κατά συνέπεια η  $R$  είναι σταθερή.

Για  $n=3$  τώρα, από την (1.9), προκύπτει

$$Rc = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 + \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{R}{3}g = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

όπου η  $C = \frac{1}{3}R$  είναι σταθερά σε όλη την πολλαπλότητα. Συνεπώς οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$  είναι όλες ίσες με μία σταθερά  $C$ , από όπου έπεται πως η πολλαπλότητα έχει σταθερή καμπυλότητα διατομής.  $\square$

Τέλος, καταγράφουμε ένα σημαντικό θεώρημα που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

**Θεώρημα 1.7.2 (Myers).** Έστω  $(M, g)$  πλήρης, συνεκτική  $n$ - πολλαπλότητα Riemann της οποίας ο τανυστής Ricci ικανοποιεί την

$$Rc \geq (n-1)Hg$$

για κάποια σταθερά  $H$ . Τότε η  $M$  είναι συμπαγής με πεπερασμένη θεμελιώδη ομάδα και διάμετρο το πολύ  $\pi H^{-\frac{1}{2}}$ .





## Κεφάλαιο 2

# Ροή Ricci και Γεωμετρικοποίηση

### 2.1 Γεωμετρική δομή

Μία γεωμετρική δομή σε μία  $n$ -διάστατη πολλαπλότητα  $M$  μπορεί να θεωρηθεί ως μία πλήρης, τοπικά ομογενής μετρική Riemann  $g$ . Μία μετρική καλείται τοπικά ομογενής αν μοιάζει ίδια σε κάθε σημείο. Ακριβέστερα, λέμε ότι η μετρική  $g$  είναι τοπικά ομογενής αν για κάθε  $x, y \in M$ , υπάρχουν περιοχές  $U_x \subset M$  του  $x$ ,  $U_y \subset M$  του  $y$  και  $g$ -ισομετρία  $\gamma_{xy} : U_x \rightarrow U_y$  με  $\gamma_{xy}(x) = y$ . Μία μετρική Riemann  $g$  καλείται (ολικά) ομογενής αν για κάθε  $x, y \in M$  υπάρχει  $g$ -ισομετρία  $\gamma_{xy} : M \rightarrow M$  με  $\gamma_{xy}(x) = y$ . Οι δύο αυτές έννοιες είναι ισοδύναμες όταν η  $M$  είναι απλά συνεκτική.

**Πρόταση 2.1.1** (Singer). *Κάθε τοπικά ομογενής μετρική  $g$  σε μία απλά συνεκτική πολλαπλότητα είναι ολικά ομογενής.*

Ισχύει επίσης το ακόλουθο.

**Πρόταση 2.1.2.** *Κάθε ομογενής μετρική είναι πλήρης.*

**Ορισμός 2.1.1.** Μία απλά συνεκτική γεωμετρική δομή ή μία γεωμετρία μοντέλο, είναι ένα ζεύγος  $(G, X)$ , όπου  $X$  είναι πολλαπλότητα και  $G$  ομάδα Lie από αμφιδιαφορίσεις της  $X$ , που ικανοποιούν τα εξής:

- 1 Η  $X$  είναι συνεκτική και απλά συνεκτική,
- 2 η  $G$  δρα μεταβατικά στην  $X$  με συμπαγή ομάδα ισοτροπίας,  $G_x = \{\gamma \in G : \gamma(x) = x\}$ , για κάθε  $x$ ,
- 3 η  $G$  δεν περιέχεται σε κάποια μεγαλύτερη ομάδα αμφιδιαφορίσεων της  $X$  με συμπαγή ομάδα ισοτροπίας και
- 4 υπάρχει τουλάχιστον μία συμπαγής πολλαπλότητα που μοντελοποιείται από το ζεύγος  $(G, X)$ . Δηλαδή, υπάρχει συμπαγής πολλαπλότητα  $M$  και διακριτή υποομάδα  $\Gamma$  της  $G$  για τις οποίες ισχύει  $M = X/\Gamma$ .

Κάθε τέτοια  $M$  καλείται επίσης γεωμετρία μοντέλο. Με άλλα λόγια λοιπόν, μία συμπαγής πολλαπλότητα  $M$  είτε έχει γεωμετρική δομή ή, στην περίπτωση που ο καθολικός χώρος επικάλυψής της έχει απλά συνεκτική γεωμετρική δομή, είναι γεωμετρία μοντέλο.

## 2.2 Εικασία Γεωμετρικοποίησης του Thurston

Ήδη από το 19ο αιώνα η τοπολογία των πολλαπλοτήτων διάστασης 2 ήταν γνωστή κυρίως λόγω του έργου των Poincare και Koebe. Η κατηγοριοποίησή τους δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.2.1** (Uniformization). *Κάθε προσανατολίσιμη κλειστή επιφάνεια  $S$  δέχεται μετρική καμπυλότητας Gauss 1,0 ή -1. Δηλαδή είναι δυνατό να δοθεί στην  $S$  γεωμετρική δομή που μοντελοποιείται από τις  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{E}^2$  και  $\mathbb{H}^2$  αντίστοιχα.*

Η αντίστοιχη κατηγοριοποίηση των 3-πολλαπλοτήτων αποδείχτηκε ένα πολύ δυσκολότερο πρόβλημα (ένω είναι αδύνατη για διάσταση  $n > 3$ ). Το πρώτο μεγάλο πρόβλημα που σχετίζεται με αυτήν είναι η "εικασία του Poincare". Συγκεκριμένα, περί τα 1900 ο Poincare διατύπωσε το εξής ερώτημα:

Αν μία κλειστή 3-πολλαπλότητα έχει τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα, είναι απαραίτητα ομοιομορφική με την  $\mathbb{S}^3$ ;

Η "εικασία του Poincare" έλεγε πως η απάντηση ήταν ναι. Όπως όμως φάνηκε, επρόκειτο γιά ένα εξαιρετικά δύσκολο ερώτημα, πολύ δυσκολότερο από το αντίστοιχο για διάσταση μεγαλύτερη του τέσσερα, που απαντήθηκε (καταφατικά) το 1966 από τον Smale ([21]), και για διάσταση τέσσερα, που απαντήθηκε (επίσης καταφατικά) το 1982 από τον Freedman ([5]). Αποτέλεσε δε ένα από τα κύρια εμπόδια στην προσπάθεια κατηγοριοποίησης όλων των 3-πολλαπλοτήτων.

### 2.2.1 Διάσπαση πολλαπλοτήτων

Τα πρώτα δύο βασικά βήματα στην κατεύθυνση αυτή αποτελούν οι μέθοδοι διάσπασης μίας πολλαπλότητας κατά μήκος σφαιρών (Sphere Decomposition, SD) και τόρων (Torus Decomposition, TD) αντίστοιχα. Το πρώτο έγινε από τον Hellmuth Kneser.

Για να αναφερθούμε στο αντίστοιχο θεώρημα χρειαζόμαστε πρώτα κάποιους ορισμούς.

**Ορισμός 2.2.1** (συνεκτικό άθροισμα). Αν μία κλειστή 3-πολλαπλότητα  $M$  περιέχει μία εμφυτευμένη σφαίρα  $\mathbb{S}^2$  η οποία τη διαχωρίζει, μπορούμε να χωρίσουμε τη  $M$  κατά μήκος της  $\mathbb{S}^2$  σε πολλαπλότητες  $M_1, M_2$  με σύνορο  $\mathbb{S}^2$ . Μπορούμε στη συνέχεια να συμπληρώσουμε τα σφαιρικά αυτά σύνορα με 3-μπάλες παράγοντας έτσι δύο κλειστές πολλαπλότητες  $N_1, N_2$ . Λέμε τότε ότι η  $M$  είναι το συνεκτικό άθροισμα των  $N_1, N_2$  και γράφουμε  $M = N_1 \# N_2$ .

Μία τετριμμένη δυνατότητα διάσπασης της  $M$  είναι η  $M = M \# \mathbb{S}^3$ . Αν αυτή είναι και η μοναδική, τότε η  $M$  καλείται "πρώτη" (prime). Αυτό είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

**Ορισμός 2.2.2** (πρώτη πολλαπλότητα (prime manifolds)). Μία κλειστή 3-πολλαπλότητα καλείται πρώτη αν κάθε εμφυτευμένη 2-σφαίρα που την διαχωρίζει φράσσει μία 3-μπάλα.

Ένας ορισμός που σχετίζεται με τον παραπάνω είναι ο εξής

**Ορισμός 2.2.3** (μη-ελαττούμενη πολλαπλότητα (irreducible manifolds)). Μία κλειστή 3-πολλαπλότητα καλείται μη-ελαττούμενη αν κάθε εμφυτευμένη 2-σφαίρα φράσσει μία 3-μπάλα.

Συνεπώς κάθε μη-ελαττούμενη πολλαπλότητα είναι πρώτη. Ένα μερικό αντίστροφο αυτού είναι ότι αν μία πολλαπλότητα είναι πρώτη αλλά όχι μη-ελαττούμενη, τότε είναι η  $S^1 \times S^2$ .

Στοχος είναι να διερευνήσουμε ποιές 3-πολλαπλότητες δέχονται γεωμετρικές δομές. Δυστυχώς για το σκοπό αυτό η διάσπαση κατά μήκος σφαιρών δεν επαρκεί. Στρεφόμεστε λοιπόν στις αμέσως απλούστερες επιφάνειες: τους τόρους.

Ένας τόρος  $T$  εμφυτευμένος στην  $M$  καλείται συμπίεσιμος αν υπάρχει δίσκος  $D \subset M$  με  $D \cap T = \partial D$  και η καμπύλη  $\partial D$  δεν είναι συστατική στον  $T$ . Σε αντίθετη περίπτωση λέγεται μη-συμπίεσιμος. Μία μη-ελαττούμενη 3-πολλαπλότητα  $M$  καλείται atoroidal αν κάθε  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  υποομάδα της  $\pi_1(M)$  είναι συζυγής με τον εγκλεισμό της θεμελιώδους ομάδας μιας συνιστώσας τοροειδούς συνόρου της  $M$ . Αυτό είναι ισοδύναμο με την απαίτηση κάθε μη-συμπίεσιμος τόρος να διαχωρίζει τη  $M$  σε ένα αντίγραφο της  $M$  και του  $\partial M \times I$ .

**Ορισμός 2.2.4.** Μία διάσπαση κατά μήκος τόρων μίας μη-ελαττούμενης πολλαπλότητας  $M$ , είναι μία συλλογή από εμφυτευμένους μη συμπίεσιμους τόρους  $T_1, \dots, T_n$ , ώστε οι συνιστώσες του  $M - \bigcup_i T_i$  είναι είτε atoroidal ή Seifert fibred, και κανένα γνήσιο υποσύνολο των  $T_1, \dots, T_n$  δεν έχει την ιδιότητα αυτή.

Κάθε συμπαγής, προσανατολίσιμη, μη-ελαττούμενη 3-πολλαπλότητα δέχεται διάσπαση κατά μήκος τόρων. Αποδεικνύεται πως υπάρχει μεγιστική οικογένεια εμφυτευμένων, μη-συμπίεσιμων τόρων  $T_1, \dots, T_n$  στη  $M$ , οι οποίοι διαχωρίζουν τη  $M$  σε atoroidal κομμάτια. Μερικά εξ' αυτών τώρα, είναι πιθανό να δέχονται Seifert fibred δομές, ενώ μπορεί και δύο γειτονικά τμήματα, διαχωριζόμενα από τον  $T_i$  να δέχονται συμβατές τέτοιες δομές. Στην περίπτωση αυτή αφαιρούμε τον  $T_i$  και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Μπορεί να δειχθεί ότι κάθε τέτοια συλλογή από τόρους είναι μοναδική ως προς ισοτοπία.

Ο Thurston απέδειξε ότι στη διάσταση 3 υπάρχουν 8 πιθανές γεωμετρικές μοντέλα και διατύπωσε την ακόλουθη εικασία:

**Εικασία 2.2.1** (Γεωμετρικοποίησης του Thurston). *Έστω  $M$  κλειστή, προσανατολισμένη, μη-ελαττούμενη 3-πολλαπλότητα. Τότε κάθε συνιστώσα της διάσπασης ως προς σφαίρες και τόρους δέχεται γεωμετρική δομή (που μοντελοποιείται σε μία από τις 8 θεμελιώδεις γεωμετρικές που βρήκε).*

Έχει δειχθεί ότι κάθε Seifert fibred χώρος δέχεται γεωμετρική δομή. Μένει λοιπόν να εξεταστεί η περίπτωση των atoroidal πολλαπλοτήτων όπου υπάρχουν δύο περιπτώσεις.

Αν η  $\pi_1(M)$  είναι πεπερασμένη, τότε κάθε γεωμετρία στην οποία μοντελοποιείται η  $M$ , πρέπει να είναι συμπαγής και συνεπώς μόνο μία δυνατότητα υπάρχει:

**Εικασία 2.2.2** (Εικασία Ελλειπτικοποίησης). *Κάθε κλειστή προσανατολίσιμη 3- πολλαπλότητα με πεπερασμένη θεμελιώδη ομάδα δέχεται γεωμετρική δομή που μοντελοποιείται στην  $S^3$ .*

Παρατηρούμε ότι για  $\pi_1(M) = 0$  έχουμε την υπόθεση του Poincare.

Η δεύτερη περίπτωση είναι η  $\pi_1(M)$  να είναι άπειρη. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε atoroidal τέτοια  $M$  είναι υπερβολική. Η περίπτωση που η  $M$  είναι Haken (δηλαδή πρώτη και περιέχει συνεκτική προσανατολίσιμη μη- συμπίεσιμη εμφυτευμένη επιφάνεια διαφορετική της  $S^2$ ), στην οποία περιλαμβάνονται όλες οι συμπαγείς πολλαπλότητες με μη- κενό σύνορο, αποδείχτηκε από τον Thurston. Μένει λοιπόν το ακόλουθο:

**Εικασία 2.2.3.** *Αν η  $M$  είναι κλειστή προσανατολίσιμη atoroidal πολλαπλότητα με άπειρη θεμελιώδη ομάδα αλλά όχι Haken, τότε δέχεται υπερβολική δομή.*

## 2.3 Hamilton-Ροή Ricci

Και φτάνουμε στον Richard Hamilton ο οποίος παρακινήμένος από τις εργασίες των Eells και Sampson οι οποίοι εξέλιξαν συναρτήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων μέσω παραβολικών διαφορικών εξισώσεων με σκοπό να τις "βελτιώσουν", σκέφτηκε πως το ίδιο θα μπορούσε να κάνει και με άλλα γεωμετρικά αντικείμενα όπως παραδείγματος χάριν τη μετρική. Το 1982 λοιπόν δημοσιεύει μία ρηξικέλευθη εργασία στην οποία εισάγει τη ροή Ricci.

Αν  $M$  είναι πολλαπλότητα Riemann με μετρική  $g_0$ , η ροή Ricci είναι μία μδε που εξελίσσει τη μετρική:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g(t) &= -2\text{Rc}(g(t)) \\ g(0) &= g_0,\end{aligned}$$

όπου  $\text{Rc}(g(t))$  είναι ο τανυστής Ricci της μετρικής  $g(t)$ .

Σε αρμονικές συντεταγμένες  $(x_1, \dots, x^n)$  στο  $p \in M$ , δηλαδή σε συντεταγμένες για τις οποίες ισχύει  $\Delta x^i = 0$  για κάθε  $i$ , έχουμε

$$\text{Rc}_{ij} = -\frac{1}{2}\Delta g_{ij} + Q_{ij}(g^{-1}, \partial g),$$

όπου  $Q$  είναι τετραγωνική ως προς  $g^{-1}$  και ως προς  $\partial g$  και κατά συνέπεια χαμηλότερης τάξης ως προς παραγώγους της  $g$  (βλ. [1] Λήμμα 3.32 σελ. 92). Συνεπώς, στις συντεταγμένες αυτές η εξίσωση της ροής Ricci είναι εξίσωση θερμότητας για τη μετρική:

$$\frac{\partial}{\partial t}g = \Delta g + 2Q(g^{-1}, \partial g).$$

Η ιδέα του Hamilton ήταν ότι εξελίσσοντας τη μετρική με τέτοιο τρόπο, η πολλαπλότητα θα γίνεται όλο και πιο σφαιρική τείνοντας σε κάποια από τις οχτώ γεωμετρίες μοντέλα για τις 3- πολλαπλότητες.

Στην ίδια εργασία που εισάγει τη ροή, αποδεικνύει και το ακόλουθο θεώρημα (του οποίου την απόδειξη θα μελετήσουμε παρακάτω στην εργασία αυτή):

**Θεώρημα 2.3.1** (Hamilton, 1982). *Έστω  $M$  μία κλειστή 3-πολλαπλότητα που δέχεται μετρική αυστηρά θετικής καμπυλότητας Ricci. Τότε η  $M$  δέχεται και μετρική σταθερής θετικής καμπυλότητας.*

Από το θεώρημα (2.2.1) τότε προκύπτει ότι κάθε απλά συνεκτική πολλαπλότητα που δέχεται μετρική αυστηρά θετικής καμπυλότητας Ricci είναι αμφιδιαφορική με την  $\mathbb{S}^3$ .

## 2.4 Perelman-Από εικασία σε θεώρημα

Ωστόσο το σχέδιο του Hamilton δεν απέδωσε μέχρι τέλους. Και αυτό γιατί η ροή συχνά εμφάνιζε κάποιες ιδιομορφίες. Κάποια είδη από αυτές κατάφερε να τα αντιμετωπίσει ενώ άλλα όχι. Αλλά πριν προχωρήσουμε ας δώσουμε έναν ακριβή ορισμό των ιδιομορφιών.

**Ορισμός 2.4.1.** Μία λύση  $(M, g(t))$  της ροής Ricci σε ένα διάστημα  $[0, T]$  καλείται μέγιστη αν δεν μπορεί να επεκταθεί για χρόνο  $t > T$ .

- i Αν  $T = \infty$  και  $\sup_{M \times [0, T]} |Rm| < \infty$ , η μέγιστη λύση της ροής καλείται μη ιδιόμορφη.
- (ii) Αν  $T \leq \infty$  και  $\sup_{M \times [0, T]} |Rm| = \infty$ , η μέγιστη λύση καλείται ιδιόμορφη και λέμε ότι η ιδιομορφία εμφανίζεται τη χρονική στιγμή  $T$ .

Τα επόμενα μεγάλα βήματα του Hamilton στην κατεύθυνση της απόδειξης της εικασίας του Thurston είναι:

**Θεώρημα 2.4.1** (Hamilton 1999). *Έστω  $M$  μία συμπαγής 3-πολλαπλότητα Riemann η οποία δέχεται μη ιδιόμορφη λύση της νορμαρισμένης ροής Ricci (θα εξηγήσουμε αργότερα ποιά η διαφορά με τη (μη νορμαρισμένη) ροή Ricci). Τότε μπορεί να διασπαστεί σε γεωμετρικά τμήματα της εικασίας του Thurston. Ακριβέστερα:*

*Αν  $g(t)$  είναι λύση της νορμαρισμένης ροής η οποία υπάρχει για όλο το χρόνο ( $T = \infty$ ) και η ποσότητα  $tRm(x, t)$  είναι φραγμένη καθώς  $t \rightarrow \infty$ , τότε η  $M$  είναι μία από τις ακόλουθες πολλαπλότητες:*

1. Seifert πολλαπλότητα,
2. πηλίκο  $\mathbb{S}^3/\Gamma$ ,
3. επίπεδη πολλαπλότητα,
4. υπερβολική πολλαπλότητα και
5. ένωση κατά μήκος ασυμπίεστων τώρων πεπερασμένου όγκου υπερβολικών και Seifert πολλαπλοτήτων.

**Θεώρημα 2.4.2.** Έστω  $M$  μία συμπαγής 3-πολλαπλότητα Riemann η οποία δέχεται λύση της ροής Ricci η οποία εμφανίζει κάποια ιδιομορφία τη χρονική στιγμή  $T$ . Τότε υπάρχει ακολουθία από διαστολές της λύσεις η οποία συγκλίνει σε πηλίκο από ισομετρίες μίας από τις ακόλουθες πολλαπλότητες:

i)  $\mathbb{S}^3$ ,

ii)  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

iii)  $\Sigma \times \mathbb{R}$ , όπου  $\Sigma$  είναι μία λύση "πούρο" με μετρική  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1+x^2+y^2}$ .

Συνεπώς για μη ιδιόμορφες λύσεις το ερώτημα είχε απαντηθεί. Παρέμνε όμως ανοιχτό για την τελευταία περίπτωση. Και τότε ο Grigori Perelman δημοσιεύει στο internet (!) μία σειρά άρθρων (το πρώτο τον Νοέμβριο του 2002) με τα οποία ισχυρίζεται πως ολοκληρώνεται η απόδειξη της εικασίας του Thurston. Χρειάστηκε να περάσουν 4 χρόνια, ώστε το 2006 η μαθηματική κοινότητα κατανοήσει το έργο του και να πιστεί για την ορθότητα των επιχειρημάτων του.

Συνοπτικά τα 5 κύρια βήματα στη δουλειά του Perelman είναι τα εξής:

- (i) Μόνο οι περιπτώσεις i) και ii) του παραπάνω θεωρήματος του Hamilton είναι εφικτές (δηλαδή η λύση "πούρο" αποκλείεται),
- (ii) Χειρουργείο (surgery): Κόβουμε τις ιδιομορφίες που εμφανίζονται τις χρονικές στιγμές  $T_i$  που η καμπυλότητα γίνεται μη φραγμένη και συγκολλάμε ένα σφαιρικό "καπάκι" φραγμένης καμπυλότητας σε κάθε τομή. Στην προκύπτουσα πολλαπλότητα, πετάμε τα τμήματα εκείνα που έχουν θετική καμπυλότητα Ricci (αφού γνωρίζουμε τι συμβαίνει με αυτά από το θεώρημα 2.3.1). Προκύπτει έτσι μία νέα πολλαπλότητα  $M_{sur}$  στην οποία συνεχίζουμε τη ροή Ricci,
- (iii) υπάρχουν μόνο πεπερασμένες χρονικές στιγμές  $T_i$  (στις οποίες εμφανίζονται ιδιομορφίες),
- (iv) για  $t$  αρκετά μεγάλο δεν υπάρχουν ιδιομορφίες και σε μία τέτοια χρονική στιγμή η  $M_{sur}$  διασπάται (κατά μήκος ασυμπίεστων τόρων) σε δύο κομμάτια:  $M_{sur} = M_{thick} \cup M_{thin}$ , όπου το  $M_{thick}$  κομμάτι πεπερασμένου ογκου πλήρη υπερβολική μετρική, ενώ
- (v) το  $M_{thin}$  κομμάτι είναι πολλαπλότητα γράφημα (graph manifold).

Ας δούμε λοιπόν πώς τα βήματα αυτά συνεπάγονται την απόδειξη της εικασίας του Thurston. Σε κάποια αρκετά μεγάλη χρονική στιγμή  $t'$ , η διαδικασία του χειρουργείου (που μπορεί να εφαρμοστεί αφού οι ιδιομορφίες έχουν απλή και γνωστή τοπολογική μορφή -συμφωνά με το (i)-, και επίσης διότι από το (ii) έχουμε ικανό έλεγχο των χρόνων  $T_i$ ) μας επιτρέπει να αποδομήσουμε την πολλαπλότητα σε πρώτες ως

$$M \equiv P_1 \# \dots \# P_r \# (\mathbb{S}^3/\Gamma) \# \dots \# (\mathbb{S}^3/\Gamma) \# \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \# \dots \# \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2. \quad (2.1)$$

Επιπλέον, από την (iv), κάθε μη ελαττούμενος παράγοντας  $P_i$ , δέχεται αποδόμηση κατά μήκος τόρων της μορφής:

$$P_i \equiv H_i \cap G_i, \quad (2.2)$$

όπου  $H_i$  είναι υπερβολική πολλαπλότητα και  $G_i$  είναι πολλαπλότητα γράφημα (σύμφωνα με το βήμα (v)).

Πρέπει εδώ να σημειωθεί τα αποτελέσματα του Perelman δεν αποδεικνύουν δεν θα υπάρξουν άλλες ιδιομορφίες πέραν του χρόνου  $t'$ . Αντι αυτού αποδεικνύεται ότι αν εμφανιστούν, αυτό θα συμβεί στο  $G_i$  κομμάτι (ή  $M_{thin}$ ) και άρα δεν δημιουργείται πρόβλημα αφού υπάρχουν αποτελέσματα σύμφωνα με τα οποία κάθε πολλαπλότητα γράφημα ικανοποιεί την εικασία.

Συνεπώς, από τις (1.2), (1.3) και τις παραπάνω παρατηρήσεις, έπεται ότι η  $M$  μπορεί να αποδομηθεί σε γεωμετρικά τμήματα γεγονός που αποτελεί το ζητούμενο της εικασίας γεωμετρικοποίησης.





## Κεφάλαιο 3

# Ροές σε Πολλαπλότητες Riemann

Για τις ανάγκες όσων θέλουμε να δούμε παρακάτω είναι απαραίτητο να μελετήσουμε όχι μεμονωμένες πολλαπλότητες Riemann αλλά μονοπαριακές οικογένειες τέτοιων πολλαπλοτήτων,  $t \rightarrow (M, g(t))$ , όπου η πολλαπλότητα  $(M, g(t))$  καθορίζει την πολλαπλότητα  $(M, g(t+h))$  μέσω κάποιας εξέλιξης που περιγράφει την εξέλιξη της μετρικής. Για να περιγραφεί η διαδικασία αυτή τυπικά είναι απαραίτητη κάποια έννοια διαφορίσης της μετρικής. Για μία οικογένεια μετρικών λοιπόν  $g = g(t) \in \Gamma(S^2 T^*M)$  με παραμέτρηση ως προς το "χρόνο"  $t$ , ορίζουμε την παράγωγο  $\frac{\partial}{\partial t} g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$  της μετρικής  $g$  ως

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} g\right)(X, Y) := \frac{\partial}{\partial t} g(X, Y) \quad (3.1)$$

για οποιαδήποτε στατικά (δηλαδή ανεξάρτητα του χρόνου) διανυσματικά πεδία  $X, Y$  και με  $\frac{\partial}{\partial t} g(X, Y)$  να είναι η γνωστή παράγωγος ως προς το χρόνο της ομαλής απεικόνισης  $g(X, Y) : M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $I \subset \mathbb{R}$ . Σε τοπικές συντεταγμένες η μετρική γράφεται  $g(t) = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  και συνεπώς η (3.1) παίρνει τη μορφή  $\frac{\partial}{\partial t} g = \dot{g}_{ij}(t) dx^i \otimes dx^j$ . Δηλαδή η παράγωγος της μετρικής είναι η παράγωγος των συναρτήσεων συντεταγμένων της ως προς κάποια σταθερή βάση. Εφόσον η συνοχή Riemann μπορεί να γραφεί τοπικά με τη βοήθεια της μετρικής, θα εξαρτάται και αυτή από το χρόνο. Όμοια λοιπόν με πριν, ορίζουμε την παράγωγο της  $\nabla = \nabla^{(t)}$  ως

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla\right)(X, Y) := \frac{\partial}{\partial t} \nabla_X Y,$$

για οποιαδήποτε στατικά διανυσματικά πεδία  $X, Y$ . Δεδομένου πως η  $\nabla$  ικανοποιεί τον κανόνα του γινομένου, δεν είναι τανυστής. Ισχύει όμως το επόμενο:

**Λήμμα 3.0.1.** Η παράγωγος  $\frac{\partial}{\partial t} \nabla$  της συνοχής Riemann  $\nabla$  είναι  $C^\infty(M)$ -γραμμική ως προς όλα τα ορίσματά της και συνεπώς είναι τανυστής.

*Απόδειξη.* Για  $f \in C^\infty(M)$  και  $X, Y \in \Gamma(TM)$  στατικά διανυσματικά πεδία, έχουμε

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla\right)(X, fY) = \frac{\partial}{\partial t} ((Xf)Y + f\nabla_X Y) = f \frac{\partial}{\partial t} \nabla_X Y = f \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla\right)(X, Y)$$

και από τις ιδιότητες της συνοχής έχουμε το ζητούμενο και για το  $X$ .  $\square$

**Λήμμα 3.0.2.** *Αν το διανυσματικό πεδίο  $V$  εξαρτάται από το χρόνο και το  $X$  είναι στατικό τότε*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla\right)(X, V) = \frac{\partial}{\partial t}\nabla_X V - \nabla_X \frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.2)$$

*Απόδειξη.* Αφού  $\nabla_X = \nabla_X^{(t)} : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ , έχουμε

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla\right)(X, V) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\nabla^{(t+\delta)}(X, V(t+\delta)) - \nabla^{(t)}(X, V(t))}{\delta}.$$

Όμως

$$\begin{aligned} & \nabla^{(t+\delta)}(X, V(t+\delta)) - \nabla^{(t)}(X, V(t)) = \\ & \nabla^{(t+\delta)}(X, V(t+\delta)) - \nabla^{(t+\delta)}(X, V(t)) + \nabla^{(t+\delta)}(X, V(t)) - \nabla^{(t)}(X, V(t)) = \\ & \nabla^{(t+\delta)}(X, V(t+\delta) - V(t)) + (\nabla^{(t+\delta)} - \nabla^{(t)})(X, V(t)). \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\nabla_X V &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \nabla^{(t+\delta)}(X, V(t+\delta) - V(t)) + \lim_{\delta \rightarrow 0} (\nabla^{(t+\delta)} - \nabla^{(t)})(X, V(t)) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \nabla^{(t+\delta)}(X, \frac{V(t+\delta) - V(t)}{\delta}) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\nabla^{(t+\delta)} - \nabla^{(t)}}{\delta}(X, V(t)) \\ &= \nabla_X^{(t)}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla\right)(X, V) \end{aligned}$$

$\square$

Θέλουμε τέλος να παραγωγίσουμε τα σύμβολα του Christoffel της συνοχής Riemann,  $\Gamma_{ij}^k = dx^k(\nabla_{\partial_i}\partial_j)$ . Τα θεωρούμε λοιπόν ως συναρτήσεις  $\Gamma : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow C^\infty(M)$  με

$$\Gamma(X, Y, \omega) := \omega(\nabla_X Y)$$

και ορίζουμε

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Gamma(X, Y, \omega) := \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(X, Y, \omega).$$

Είναι τώρα εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η  $\frac{\partial}{\partial t}\Gamma$  είναι τανυστής αφού  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Gamma(X, Y, \omega) = \frac{\partial}{\partial t}\omega(\nabla_X Y) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla_X Y\right)$  και η ποσότητα  $\frac{\partial}{\partial t}\nabla$  είναι τανυστική από το λήμμα 2.0.1.

Στη συνέχεια υποθέτουμε πως η μετρική εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση  $\frac{\partial}{\partial t}g = h$ , όπου  $h$  ένας  $(2,0)$ -τανυστής και αναζητούμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη διαφόρων ποσοτήτων που εξαρτώνται από τη αυτήν. Να σημειώσουμε αρχικά πως αν  $T=T(g)$  είναι  $(k,l)$ -τανυστής, τότε ορίζεται η

$$\frac{\partial}{\partial t}T = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}T(g + th) \quad (3.3)$$

**Θεώρημα 3.0.3.** *Έστω  $g(t)$  μία οικογένεια μετρικών στην πολλαπλότητα  $M$  ώστε  $\frac{\partial}{\partial t}g = h$ . Τότε ισχύουν τα εξής:*

$$(i) \quad \partial_t g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} h_{kl} \quad (3.4)$$

$$(ii) \quad \partial_t \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}) \quad (3.5)$$

$$(iii) \quad \begin{aligned} \partial_t R_{ijk}^l = \frac{1}{2} g^{lp} (\nabla_i \nabla_j h_{kp} + \nabla_i \nabla_k h_{jp} - \nabla_i \nabla_p h_{kj} \\ - \nabla_j \nabla_i h_{kp} - \nabla_j \nabla_k h_{ip} + \nabla_j \nabla_p h_{ki}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

και

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ijk}^l = \frac{1}{2} g^{lp} (\nabla_i \nabla_k h_{jp} - \nabla_i \nabla_p h_{kj} - \nabla_j \nabla_k h_{ip} \\ + \nabla_j \nabla_p h_{ki} - R_{ijk}^q h_{qp} - R_{ijp}^q h_{kq}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

(iv) Για τον τανυστή Ricci έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{jk} = \frac{1}{2} g^{pq} (\nabla_q \nabla_j h_{kp} + \nabla_q \nabla_k h_{jp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_k h_{qp}) \quad (3.8)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{jk} = -\frac{1}{2} (\Delta_L h_{jk} + \nabla_j \nabla_k H + \nabla_j (\delta h)_k + \nabla_k (\delta h)_j) \quad (3.9)$$

όπου

$$\Delta_L h_{jk} = \Delta h_{jk} + 2g^{pq} R_{qjk}^r h_{rp} - g^{qp} R_{jp} h_{kq} - g^{pq} R_{kp} h_{jq}$$

είναι η λαπλασιανή του Lichnerowicz,

$$H = \text{tr}_g h = g^{qp} h_{qp} \text{ και}$$

$$(\delta h)_k = -(\text{div} h)_k = -g^{qp} \nabla_q h_{pk}$$

(v) Για τη βαθμωτή καμπυλότητα ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial t} R = -\Delta R + \nabla^p \nabla^q h_{pq} - \langle h, Rc \rangle \quad (3.10)$$

$$= -\Delta R + g^{ip} g^{jq} \nabla_i \nabla_j h_{pq} - \langle h, Rc \rangle \quad (3.11)$$

$$= -\Delta R + \text{div}(\text{div} h) - \langle h, Rc \rangle \quad (3.12)$$

(vi) ενώ για το στοιχείο όγκου

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu = \frac{H}{2} d\mu \quad (3.13)$$

Απόδειξη. (i) Γνωρίζουμε ότι  $g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i$ . Άρα

$$0 = \partial_t (g^{ik} g_{kl}) = (\partial_t g^{ik}) g_{kl} + g^{ik} (\partial_t g_{kl}) = (\partial_t g^{ik}) g_{kl} + g^{ik} h_{kl}.$$

Συνεπώς

$$\partial_t g^{ij} = \partial_t (g^{ik} \delta_k^j) = (\partial_t g^{ik}) g_{kl} g^{jl} = -g^{ik} g^{jl} h_{kl}.$$

(ii) Είναι γνωστό πως

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

Άρα

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} (\partial_t g^{kl}) (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i \partial_t g_{jl} + \partial_j \partial_t g_{il} - \partial_l \partial_t g_{ij}) \end{aligned}$$

Η ποσότητα  $\partial_t \Gamma$  όπως έχουμε δείξει είναι τανυστική και άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων, γύρω από οποιοδήποτε σημείο και τα αποτελέσματα να ισχύουν ολικά. Επιλέγοντας λοιπόν κανονικές συντεταγμένες γύρω από ένα σημείο  $p \in M$  γνωρίζουμε ότι  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ . Συνεπώς

$$\nabla_i A_{jk} = \partial_i A_{jk} - A(\nabla_i \partial_j, \partial_k) - A(\partial_j, \nabla_i \partial_k) = \partial_i A_{jk}$$

για κάθε (2,0)-τανυστή  $A$ . Ιδιαίτερα  $\partial_i g_{jk}(p) = 0$  για όλα τα  $i, j, k$ . Έτσι

$$\partial_t \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\nabla_i \partial_t g_{jl} + \nabla_j \partial_t g_{il} - \nabla_l \partial_t g_{ij})$$

και έχουμε το ζητούμενο.

(iii) Υπενθυμίζουμε ότι σε τοπικές συντεταγμένες  $(x^i)_i$

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l.$$

Σε κανονικές συντεταγμένες και πάλι, γύρω από ένα σημείο  $p \in M$ , υπολογίζουμε

$$\partial_t R_{ijk}^l = \partial_i \partial_t \Gamma_{jk}^l - \partial_j \partial_t \Gamma_{ik}^l = \nabla_i \partial_t \Gamma_{jk}^l - \nabla_j \partial_t \Gamma_{ik}^l.$$

Αντικαθιστώντας από το (ii),

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ijk}^l &= \nabla_i \left( \frac{1}{2} g^{lp} (\nabla_j h_{kp} + \nabla_k h_{jp} - \nabla_p h_{jk}) \right) \\ &\quad - \nabla_j \left( \frac{1}{2} g^{lp} (\nabla_i h_{kp} + \nabla_k h_{ip} - \nabla_p h_{ik}) \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{lp} [\nabla_i \nabla_j h_{kp} + \nabla_i \nabla_k h_{jp} - \nabla_i \nabla_p h_{jk} \\ &\quad - \nabla_j \nabla_i h_{kp} - \nabla_j \nabla_k h_{ip} + \nabla_j \nabla_p h_{ik}] \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\nabla_i \nabla_j h_{kp} - \nabla_j \nabla_i h_{kp} = -R_{ijk}^p h_{qp} - R_{ijp}^q h_{kq}.$$

Με αντικατάσταση προκύπτει η (2.7).

(iv) Για τον τανυστή Ricci, θέτοντας  $i=l=q$ , έχουμε  $R_{jk} = R_{qjk}^q$  και από το (iii),

$$\begin{aligned} \partial_t R_{jk} &= \frac{1}{2} g^{pq} [\nabla_q \nabla_j h_{kp} + \nabla_q \nabla_k h_{jp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk} \\ &\quad - \nabla_j \nabla_q h_{kp} - \nabla_j \nabla_k h_{qp} + \nabla_j \nabla_p h_{qk}]. \end{aligned}$$

Εφόσον  $g^{pq}$ ,  $h_{ij}$  είναι συμμετρικοί τανυστές

$$\partial_t R_{jk} = \frac{1}{2} g^{pq} [\nabla_q \nabla_j h_{kp} + \nabla_q \nabla_k h_{jp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_k h_{qp}].$$

και έχουμε την (2.8).

Τώρα

$$\begin{aligned} \partial_t R_{jk} &= \frac{1}{2} g^{pq} [\nabla_q \nabla_j h_{kp} - \nabla_j \nabla_q h_{kp} + \nabla_q \nabla_k h_{jp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk} \\ &\quad - \nabla_j \nabla_k h_{qp} + \nabla_j \nabla_p h_{qk}] \\ &= \frac{1}{2} g^{pq} [-R_{qjk}^r h_{rp} - R_{qjp}^r h_{kr} + \nabla_k \nabla_q h_{jp} - R_{qkj}^r h_{rp} - R_{qkp}^r h_{jr} \\ &\quad - \nabla_q \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_k h_{qp} + \nabla_j \nabla_p h_{qk}] \\ &= -\frac{1}{2} g^{pq} (R_{qjk}^r h_{rp} + R_{qkj}^r h_{rp}) - \frac{1}{2} g^{pq} R_{qjp}^r h_{kr} - \frac{1}{2} g^{pq} R_{qkp}^r h_{jr} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Delta h_{jk} - \frac{1}{2} \nabla_j \nabla_k H - \frac{1}{2} \nabla_j (\delta h)_k - \frac{1}{2} \nabla_k (\delta h)_j \\ &= -\frac{1}{2} [g^{pq} g^{rs} (R_{qjsk} h_{rp} + R_{qksj} h_{rp}) + g^{pq} g^{rs} R_{qjsp} h_{kr} + g^{pq} g^{rs} R_{qksp} h_{jr} \\ &\quad + \Delta h_{jk} + \nabla_j \nabla_k H + \nabla_j (\delta h)_k + \nabla_k (\delta h)_j] \\ &= -\frac{1}{2} [g^{pq} g^{rs} (R_{qjsk} h_{rp} + R_{sjqk} h_{rp}) - g^{rs} R_{js} h_{kr} - g^{rs} R_{ks} h_{jr} \\ &\quad + \Delta h_{jk} + \nabla_j \nabla_k H + \nabla_j (\delta h)_k + \nabla_k (\delta h)_j] \\ &= -\frac{1}{2} [2g^{pq} g^{rs} (R_{qjsk} h_{rp} - g^{rs} R_{js} h_{kr} - g^{rs} R_{ks} h_{jr} \\ &\quad + \Delta h_{jk} + \nabla_j \nabla_k H + \nabla_j (\delta h)_k + \nabla_k (\delta h)_j] \\ &= -\frac{1}{2} [\Delta h_{jk} + 2g^{pq} (R_{qjk}^r h_{rp} g^{qp} R_{jp} h_{kq} - g^{qp} R_{kp} h_{jq} \\ &\quad + \nabla_j \nabla_k H + \nabla_j (\delta h)_k + \nabla_k (\delta h)_j] \\ &= -\frac{1}{2} [\Delta_L h_{jk} + \nabla_j \nabla_k H + \nabla_j (\delta h)_k + \nabla_k (\delta h)_j]. \end{aligned}$$

(v) Για τη βαθμωτή καμπυλότητα έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_t R &= \partial_t (g^{jk} R_{jk}) = (\partial_t g^{jk}) R_{jk} + g^{jk} (\partial_t R_{jk}) \\ &= -g^{jp} g^{kq} h_{pq} R_{jk} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{jk} g^{pq} (\nabla_q \nabla_j h_{kp} + \nabla_q \nabla_k h_{jp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_k h_{qp}) \\ &= -g^{jp} g^{kq} h_{pq} R_{jk} + g^{jk} g^{pq} (\nabla_q \nabla_j h_{kp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk}) \\ &= -g^{ij} g^{kl} h_{il} R_{jk} + g^{ij} g^{kl} (\nabla_i \nabla_k h_{jl} - \nabla_i \nabla_j h_{kl}) \\ &= -g^{ij} g^{kl} (\nabla_i \nabla_j h_{kl} - \nabla_i \nabla_k h_{jl} + h_{ik} R_{jl}). \end{aligned}$$

(vi) Για ένα τετραγωνικό πίνακα  $A$  γνωρίζουμε πως

$$\det A I_{n \times n} = A \cdot \text{adj} A.$$

Συνεπώς  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$ , αν  $\det A \neq 0$ . Αν λοιπόν  $a_{ij}$  είναι το  $(i,j)$ -στοιχείο του  $A$ , μπαρούμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς την  $i$ -οστή γραμμή

παίρνοντας  $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$ . Κατά συνέπεια

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = (\operatorname{adj} A)_{ji} = \det A (A^{-1})_{ji}.$$

Για το στοιχείο όγκου λοιπόν, έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_t d\mu &= \partial_t \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_t \det g}{\sqrt{\det g}} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial \det g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\det g} (g^{-1})_{ji} h_{ij} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2} g^{ij} h_{ij} \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}_g h d\mu = \frac{H}{2} d\mu. \end{aligned}$$

□

### 3.1 Διαστολή

Ας εξετάσουμε τώρα μερικές ειδικές περιπτώσεις ροών  $(M, g(t))$  μίας μετρικής Riemann πάνω από μία σταθερή πολλαπλότητα  $M$ . Η πιό απλή περίπτωση (αν εξαιρέσουμε την τετριμμένη  $g(t) = g(0)$ ), είναι η διαστολή

$$g(t) := A(t)g(0),$$

όπου  $A(t) > 0$  και  $A(0) = 1$ . Είναι άμεσο πως η ροή στην περίπτωση αυτή δίνεται από την

$$\partial_t g = a(t)g(t),$$

όπου  $a(t) := \frac{1}{A(t)} \frac{d}{dt} A(t) = \frac{d}{dt} \log A(t)$ , η λογαριθμική παράγωγος της  $A$  (ή ισοδύναμα  $A(t) = \exp(\int_0^t a(s) ds)$ ). Είναι εύκολο τώρα να ελέγξουμε ότι οι εξισώσεις που είδαμε στην παράγραφο 1 παίρνουν τη μορφή:

$$(i) \quad \partial_t g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} \alpha_{kl} = -\alpha g^{ij}$$

$$(ii) \quad \partial \Gamma_{ij}^k = 0$$

$$(iii) \quad \partial R_{ijk}^l = 0$$

$$(iv) \quad \partial_t R_{jk} = 0$$

$$(v) \quad \partial_t d\mu = \frac{1}{2} g^{ij} \alpha g_{ij} d\mu = \frac{n}{2} \alpha d\mu$$

### 3.2 Αμφιδιαφορίσεις

Μία ακόμα σημαντική ροή είναι αυτή που προέρχεται από μία ομαλά μεταβαλλόμενη οικογένεια αμφιδιαφορίσεων  $\phi(t) : M \rightarrow M$  με  $\phi(0)$  να είναι η

ταυτοτική απεικόνιση. Η ροή που προκύπτει είναι η  $g(t) := \phi(t)^*g(0)$  με

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g(t) &= \frac{d}{dt}\phi_t^*g(0) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\phi_{t+s}^*(g(0)) \\ &= \frac{d}{ds}\big|_{s=0}(\phi_t^{-1} \circ \phi_{t+s})^*\phi_t^*g(0) = \mathcal{L}_{X(t)}(\phi_t^*g(0)) = \mathcal{L}_{X(t)}g(t),\end{aligned}$$

όπου  $X(t) := \frac{d}{ds}\big|_{s=0}(\phi_t^{-1} \circ \phi_{t+s}) = (\phi_t^{-1})^*\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\phi_{t+s} = (\phi_t^{-1})^*(\frac{d}{dt}\phi_t)$  Γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$(\mathcal{L}_Xg)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i. \quad (3.14)$$

Είναι τώρα εύκολο να δειχθεί ότι

- (i)  $\partial_t g^{ij} = \mathcal{L}_X g^{ij}$
- (ii)  $\partial_t R_{ijk}^l = (\mathcal{L}_X Rm)_{ijk}^l$
- (iii)  $\partial_t R_{jk} = (\mathcal{L}_X R)_{jk}$
- (iv)  $\partial_t R = \mathcal{L}_X R$
- (v)  $\partial_t d\mu = \text{div} X d\mu$

### 3.3 Η ροή Ricci

Μία μονοπαραμετρική οικογένεια μετρικών  $g(t)$  σε μια πολλαπλότητα  $M$ , ορισμένη σε ένα διάστημα  $I$ , λέμε πως ικανοποιεί τη ροή Ricci αν

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Rc(g(t)). \quad (3.15)$$

Ισχύει τότε το ακόλουθο

**Θεώρημα 3.3.1.** Έστω  $g(t)$  μία λύση της ροής Ricci,  $\partial_t g_{jk} = -2R_{jk}$ . Τότε

$$(i) \quad \partial_t g^{ij} = 2g^{ik}g^{jl}R_{kl} \quad (3.16)$$

$$(ii) \quad \partial_t \Gamma_{ij}^k = -g^{kl}(\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij}) \quad (3.17)$$

$$(iii) \quad \begin{aligned}\partial_t R_{ijk}^l &= g^{lp}(-\nabla_i \nabla_j R_{kp} - \nabla_i \nabla_k R_{jp} + \nabla_i \nabla_p R_{kj} \\ &\quad + \nabla_j \nabla_i R_{kp} + \nabla_j \nabla_k R_{ip} - \nabla_j \nabla_p R_{ki})\end{aligned} \quad (3.18)$$

και

$$\begin{aligned}\partial_t R_{ijk}^l &= g^{lp}(-\nabla_i \nabla_k R_{jp} + \nabla_i \nabla_p R_{kj} + \nabla_j \nabla_k R_{ip} \\ &\quad - \nabla_j \nabla_p R_{ki} - R_{ijk}^q R_{qp} - R_{ijp}^q R_{kq})\end{aligned} \quad (3.19)$$

και

$$\begin{aligned}\partial_t R_{ijk}^l &= \Delta R_{ijk}^l + g^{pq}(R_{ijp}^r R_{r q k}^l - 2R_{pik}^r R_{jqr}^l + 2R_{pir}^l R_{jqk}^r) \\ &\quad - R_i^p R_{pjk}^l - R_j^p R_{ipk}^l - R_k^p R_{ijp}^l - R_p^l R_{ijk}^p.\end{aligned} \quad (3.20)$$

(iv)

$$\begin{aligned}\partial_t R_{ijkl} = \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}) \\ - g^{pq}(R_{qi}R_{pjkl} + R_{qj}R_{ipkl} + R_{qk}R_{ijpl} + R_{ql}R_{ijkp}).\end{aligned}\quad (3.21)$$

όπου  $B_{ijkl} = g^{pr}g^{qs}R_{piqj}R_{rksl}$ .

(v) Για τον τανυστή Ricci έχουμε

$$\partial_t R_{jk} = \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - g^{pq}(\nabla_q \nabla_j R_{kp} + \nabla_q \nabla_k R_{jp}). \quad (3.22)$$

$$\partial_t R_{jk} = \Delta_L R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R + \nabla_j (\delta R c)_k + \nabla_k (\delta R c)_j. \quad (3.23)$$

$$\partial_t R_{jk} = \Delta_L R_{jk} = \Delta R_{jk} + 2g^{pq}g^{rs}R_{qs}R_{pjrk} - 2g^{pq}R_{pj}R_{qk}. \quad (3.24)$$

(vi)

$$\partial_t R = 2\Delta R - 2g^{jk}g^{qp}\nabla_q \nabla_j R_{pk} + |Rc|^2 \quad (3.25)$$

$$= \Delta R + 2|Rc|^2. \quad (3.26)$$

(vii)  $\partial_t d\mu = -Rd\mu$ .(viii)  $\partial_t \int_M d\mu = -\int_M R d\mu$ .

*Απόδειξη.* Αντικαθιστώντας  $-2R_{ij}$  όπου  $h_{ij}$  στις (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) παίρνουμε τις (3.16), (3.17), (3.18), (3.19). Από τη δεύτερη ταυτότητα του Bianchi τώρα, και αντιμεταθέτωντας τις συναλλοίωτες παραγώγους, έχουμε

$$\begin{aligned}\Delta R_{ijk}^l = g^{pq}\nabla_p \nabla_q R_{ijk}^l = g^{pq}\nabla_p (-\nabla_i R_{jqk}^l - \nabla_j R_{qik}^l) \\ = g^{pq}(-\nabla_i \nabla_p R_{jqk}^l + R_{pij}^r R_{rqk}^l + R_{piq}^r R_{jrk}^l + R_{pik}^r R_{jqr}^l - R_{pir}^l R_{jqk}^r \\ - \nabla_j \nabla_p R_{qik}^l + R_{pjq}^r R_{rik}^l + R_{pji}^r R_{qrk}^l + R_{pjk}^r R_{qir}^l - R_{pjr}^l R_{qik}^r).\end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned}g^{pq}\nabla_p R_{jqk}^l = g^{pq}g^{lm}\nabla_p R_{jqmk} = g^{pq}g^{lm}\nabla_p R_{mkjq} \\ = g^{pq}g^{lm}(-\nabla_m R_{kpjq} - \nabla_k R_{pmjq}) = -\nabla^l R_{ik} + \nabla_k R_j^l.\end{aligned}$$

Όμοια

$$g^{pq}\nabla_p R_{qik}^l = -g^{pq}\nabla_p R_{iqk}^l = \nabla^l R_{ik} + \nabla_k R_i^l.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\Delta R_{ijk}^l = \nabla_i \nabla^l R_{jk} - \nabla_i \nabla_k R_j^l - \nabla_j \nabla^l R_{ik} + \nabla_j \nabla_k R_i^l \\ + g^{pq}(R_{pij}^r R_{rqk}^l + R_{piq}^r R_{jrk}^l + R_{pik}^r R_{jqr}^l - R_{pir}^l R_{jqk}^r \\ + R_{pjq}^r R_{rik}^l + R_{pji}^r R_{qrk}^l + R_{pjk}^r R_{qir}^l - R_{pjr}^l R_{qik}^r).\end{aligned}$$

Από την πρώτη ταυτότητα του Bianchi

$$R_{pij}^r R_{rqk}^l + R_{pji}^r R_{qrk}^l = R_{pij}^r R_{rqk}^l + R_{jpi}^r R_{rqk}^l = -R_{ijp}^r R_{rqk}^l.$$



Έτσι

$$\begin{aligned}\Delta R_{ijk}^l &= \nabla_i \nabla^l R_{jk} - \nabla_i \nabla_k R_j^l - \nabla_j \nabla^l R_{ik} + \nabla_j \nabla_k R_i^l \\ &\quad + g^{pq} (-R_{ijp}^r R_{rqk}^l + R_{piq}^r R_{jrk}^l + R_{pik}^r R_{jqr}^l - R_{pir}^l R_{jqk}^r \\ &\quad + R_{pj q}^r R_{rik}^l - R_{pjk}^r R_{qir}^l - R_{pjr}^l R_{qik}^r).\end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned}&g^{pq} (R_{pik}^r R_{jqr}^l - R_{pir}^l R_{jqk}^r + R_{pj k}^r R_{qir}^l - R_{pjr}^l R_{qik}^r) \\ &= g^{pq} (R_{pik}^r R_{jqr}^l - R_{pjr}^l R_{qik}^r - R_{pir}^l R_{jqk}^r + R_{pj k}^r R_{qir}^l) \\ &= g^{pq} (R_{pik}^r R_{jqr}^l + R_{jpr}^l R_{qik}^r - R_{pir}^l R_{jqk}^r + R_{jp k}^r R_{qir}^l) \\ &= g^{pq} (2R_{pik}^r R_{jqr}^l - 2R_{pir}^l R_{jqk}^r).\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\Delta R_{ijk}^l &= \nabla_i \nabla^l R_{jk} - \nabla_i \nabla_k R_j^l - \nabla_j \nabla^l R_{ik} + \nabla_j \nabla_k R_i^l - R_i^r R_{jrk}^l - R_j^r R_{rik}^l \\ &\quad + g^{pq} (-R_{ijp}^r R_{rqk}^l + 2R_{pik}^r R_{jqr}^l - 2R_{pir}^l R_{jqk}^r).\end{aligned}$$

Από την (3.18) τώρα, έχουμε

$$\begin{aligned}\partial_t R_{ijk}^l &= g^{lp} (-\nabla_i \nabla_k R_{jp} - \nabla_j \nabla_p R_{ik} - \nabla_i \nabla_p R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R_{ip} + R_{ijk}^q R_{pq} + R_{ijp}^q R_{kq}) \\ &= -\nabla_i \nabla_k R_j^l - \nabla_j \nabla^l R_{ik} + \nabla_i \nabla^l R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R_i^l + R_{ijk}^q R_q^l + g^{lp} R_{ijp}^q R_{kq}\end{aligned}$$

με

$$g^{lp} R_{ijp}^q R_{kq} = g^{lp} g^{qs} R_{ijsp} R_{kq} = -R_{ijs}^l R_k^s.$$

Έτσι

$$\partial_t R_{ijk}^l = \nabla_i \nabla^l R_{jk} - \nabla_i \nabla_k R_j^l - \nabla_j \nabla^l R_{ik} + \nabla_j \nabla_k R_i^l + R_{ijk}^q R_q^l - R_{ijs}^l R_k^s.$$

Άρα

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta) R_{ijk}^l &= g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqk}^l - 2R_{pik}^r R_{jqr}^l + 2R_{pir}^l R_{jqk}^r \\ &\quad + R_{ijk}^q R_q^l - R_{ijs}^l R_k^s + R_{jrk}^l R_i^r - R_{rik}^l R_j^r).\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned}\partial_t R_{ijk}^l &= \Delta R_{ijk}^l + g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqk}^l - 2R_{pik}^r R_{jqr}^l + 2R_{pir}^l R_{jqk}^r) \\ &\quad - R_{pj k}^l R_i^p - R_{ip k}^l R_j^p - R_{ijp}^l R_k^p + R_{ijk}^p R_p^l.\end{aligned}$$

Για το (iv):

$$\begin{aligned}\partial_t R_{ijkl} &= -\partial_t R_{ijlk} = -\partial_t (g_{ls} R_{ijk}^s) \\ &= -\partial_t (g_{ls}) R_{ijk}^s - g_{ls} (\partial_t R_{ijk}^s) = 2R_{ls} R_{ijk}^s - g_{ls} (\partial_t R_{ijk}^s).\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}g_{ls} (\partial_t R_{ijk}^s) &= g_{ls} \Delta R_{ijk}^s + g_{ls} g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqk}^s - 2R_{pik}^r R_{jqr}^s + 2R_{pir}^l R_{jqk}^r) \\ &\quad - g_{ls} R_{pj k}^p R_i^p - g_{ls} R_{ip k}^p R_j^p - g_{ls} R_{ijp}^p R_k^p + g_{ls} R_{ijk}^p R_p^s.\end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned} g_{ls} g^{pq} R_{ijp}^r R_{rqk}^s &= g_{ls} g^{pq} g^{ru} g^{sv} R_{ijup} R_{rqvk} = g^{pq} g^{ru} R_{ijup} R_{rqlk} \\ &= -g^{pq} g^{ru} R_{upij} R_{rqkl} = -g^{pq} g^{ru} (-R_{piuj} - R_{iupj}) (-R_{qkrl} - R_{krql}) \\ &= -g^{pq} g^{ru} R_{piuj} R_{qkrl} + g^{pq} g^{ru} R_{piuj} R_{qlrk} + g^{pq} g^{ru} R_{uijp} R_{rlqk} - g^{pq} g^{ru} R_{iujp} R_{krlq} \\ &= -B_{ijkl} + B_{ijlk} + B_{ijlk} - B_{ijkl} = -2(B_{ijkl} - B_{ijlk}). \end{aligned}$$

$$g_{ls} g^{pq} R_{pik}^r R_{jqr}^s = g_{ls} g^{pq} g^{ru} g^{sv} R_{piuk} R_{jqvr} = g^{pq} g^{ru} R_{piuk} R_{jqrl} = g_{pq} g^{ru} R_{piuk} R_{qjrl} = B_{ikjl}$$

$$g_{ls} g^{pq} R_{pir}^s R_{jqk}^r = g_{ls} g^{pq} g^{ru} g^{sv} R_{pivr} R_{jquk} = g_{pq} g^{ru} R_{pilir} R_{jquk} = g_{pq} g^{ru} R_{iplr} R_{jqku} = B_{ikjl}$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} g_{ls} (\partial_t R_{ijk}^s) &= -\Delta R_{ijkl} - 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}) \\ &\quad + R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_{lp} R_{ijk}^p. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ijkl} &= 2R_{lp} R_{ijk}^p - g_{ls} (\partial_t R_{ijk}^s) \\ &= \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}) \\ &\quad - (R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_{lp} R_{ijk}^p). \end{aligned}$$

Για τον τελευταίο όρο έχουμε

$$R_{lp} R_{ijk}^p = g^{pq} R_{lp} R_{ijqk} = -g^{pq} R_{lp} R_{ijkq} = -R_l^q R_{ijkq} = -R_l^p R_{ijkp}$$

και έτσι

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ijkl} &= \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}) \\ &\quad - (R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp}). \end{aligned}$$

(v) Αντικαθιστώντας το  $h_{ij}$  με  $-2R_{ij}$  στην (3.9) προκύπτει

$$\begin{aligned} \partial_t R_{jk} &= \Delta_L R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R + \nabla_j (\delta R c)_k + \nabla_k (\delta R c)_j \\ &= \Delta R_{jk} + 2g^{pq} R_{qjk}^r R_{rp} - g^{qp} R_{jp} R_{kq} - g^{pq} R_{kp} R_{jq} \\ &\quad + \nabla_j \nabla_k R + \nabla_j (\delta R c)_k + \nabla_k (\delta R c)_j \\ &= \Delta R_{jk} + 2g^{pq} R_{qjk}^r R_{rp} - g^{qp} R_{jp} R_{kq} - g^{pq} R_{kp} R_{jq} + \nabla_j \nabla_k R \\ &\quad - g^{pq} \nabla_j \nabla_q R_{pk} - g^{pq} \nabla_k \nabla_q R_{pj} \\ &= \Delta R_{jk} + 2g^{pq} R_{qjk}^r R_{rp} - g^{qp} R_{jp} R_{kq} - g^{pq} R_{kp} R_{jq} \\ &\quad + \nabla_j \nabla_k R - g^{pq} \nabla_q \nabla_j R_{pk} - g^{pq} \nabla_q \nabla_k R_{pj} \\ &\quad + g^{pq} R_{jqp}^r R_{rk} + g^{pq} R_{jqk} R_{pr} + g^{pq} R_{kqp}^r R_{rj} + g^{pq} R_{kqj} R_{pr} \\ &= \Delta R_{jk} + 2g^{pq} g^{rs} R_{qj sk} R_{rp} - g^{qp} R_{jp} R_{kq} - g^{pq} R_{kp} R_{jq} \\ &\quad + \nabla_j \nabla_k R - g^{pq} \nabla_q \nabla_j R_{pk} - g^{pq} \nabla_q \nabla_k R_{pj} + g^{pq} g^{rs} R_{jq sp} R_{rk} \\ &\quad + g^{pq} g^{rs} R_{jq sk} R_{rp} + g^{pq} g^{rs} R_{kq sp} R_{rj} + g^{pq} g^{rs} R_{kq sj} R_{pr} \\ &= \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - g^{pq} \nabla_q \nabla_j R_{pk} - g^{pq} \nabla_q \nabla_k R_{pj} \\ &\quad + 2g^{pq} g^{rs} R_{qj sk} R_{rp} + g^{pq} g^{rs} R_{jq sk} R_{rp} + g^{pq} g^{rs} R_{kq sj} R_{pr} \\ &\quad - g^{qp} R_{jp} R_{kq} - g^{pq} R_{kp} R_{jq} + g^{rs} R_{js} R_{rk} + g^{rs} R_{ks} R_{rj} \\ &= \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - g^{pq} \nabla_q \nabla_j R_{pk} - g^{pq} \nabla_q \nabla_k R_{pj}. \end{aligned}$$

Επίσης από τη δεύτερη ταυτότητα του Bianchi με συστολή

$$\begin{aligned}\partial_t R_{jk} &= \Delta_L R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - g^{pq} \nabla_j \nabla_q R_{pk} - g^{pq} \nabla_k \nabla_q R_{pj} \\ &= \Delta_L R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - \frac{1}{2} \nabla_j \nabla_k R - \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_j R \\ &= \Delta_L R_{jk}\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}\partial_t R &= -g^{ij} g^{kl} (-2\nabla_i \nabla_j R_{kl} + 2\nabla_i \nabla_k R_{jl} - 2R_{ik} R_{jl}) \\ &= 2\Delta R - 2g^{jk} g^{pq} \nabla_q \nabla_j R_{pk} + 2|Rc|^2 \\ &= 2\Delta R - g^{pq} \nabla_q \nabla_p R + 2|Rc|^2 \\ &= \Delta R + 2|Rc|^2.\end{aligned}$$

Τα (vii), (viii) είναι άμεσα από την (3.13) με αντικατάσταση του  $h_{ij}$  με  $-2R_{ij}$ .  $\square$

### 3.4 Νορμαρισμένη ροή Ricci

**Λήμμα 3.4.1.** Έστω  $g, \tilde{g} = Cg$  μετρικές Riemann. Οι γεωμετρικές ποσότητες που εξαρτώνται από τη μετρική σχετίζονται ως εξής:

1.  $\nabla^g = \nabla^{\tilde{g}}$
2.  $\tilde{g}^{ij} = C^{-1} g^{ij}$
3.  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$
4.  $\tilde{R}_{ijk}^l = R_{ijk}^l$
5.  $\tilde{r}_{ijkl} = R_{ijkl}$
6.  $\tilde{R}_{ij} = R_{ij}$
7.  $\tilde{R} = C^{-1} R$
8.  $\tilde{d}\mu = C^{\frac{n}{2}} d\mu$

*Απόδειξη.* 1) Η συνοχή Riemann χρησιμοποιώντας τη μετρική γράφεται

$$2g(\nabla_X Y, Z) = \chi g(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)$$

Θέτοντας  $Cg$  όπου  $g$  προκύπτει το ζητούμενο.

2) Προφανώς  $g^{-1} = C^{-1} \tilde{g}^{-1}$ .

3)  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \tilde{g}^{kl} (\partial_i \tilde{g}_{jl} + \partial_j \tilde{g}_{il} - \partial_l \tilde{g}_{ij}) = \frac{1}{2} C^{-1} g^{kl} C (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = \Gamma_{ij}^k$ .

4)

$$\begin{aligned}R_{ijk}^l &= dx^l(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k) = dx^l(\nabla_i^g \nabla_j^g \partial_k - \nabla_j^g \nabla_i^g \partial_k - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]}^g \partial_k) \\ &= dx^l(\nabla_i^{Cg} \nabla_j^{Cg} \partial_k - \nabla_j^{Cg} \nabla_i^{Cg} \partial_k) = \tilde{R}_{ijk}^l.\end{aligned}$$

- 5)  $\tilde{R}_{ijkl} = \tilde{g}_{ks} \tilde{R}_{ijl}^s = C g_{ks} R_{ijl}^s = C R_{ijkl}$   
 6)  $\tilde{R}_{ij} = \tilde{g}^{jl} \tilde{R}_{ijk} = C^{-1} g^{jl} C R_{ijk} = R_{ij}$   
 7)  $\tilde{R} = \tilde{g}^{ij} \tilde{R}_{ij} = C^{-1} g^{ij} R_{ij} = C^{-1} R$   
 8)

$$\begin{aligned} d\mu &= \sqrt{\det(\tilde{g})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sqrt{\det(Cg)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= C^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(g)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = C^{\frac{n}{2}} d\mu. \end{aligned}$$

□

Έστω  $\tilde{g}(t) = \psi(t)g(t)$ , όπου  $g(t)$  λύση της ροής Ricci,  $\psi(0)=1$  και  $\psi(t)$  τέτοια ώστε το στοιχείο όγκου της πολλαπλότητας ως προς τη μετρική  $\tilde{g}(t)$  να παραμένει σταθερό. Τότε από το προηγούμενο λήμμα

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\tilde{g}(t)) &= \text{Vol}(\tilde{g}(0)) \\ \Rightarrow \psi(t)^{\frac{n}{2}} \text{Vol}(g(t)) &= \text{Vol}(g(0)) \Rightarrow \psi(t) = \left( \frac{\int_{M^n} d\mu(t)}{\int_{M^n} d\mu(0)} \right)^{-\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα (2.3.1) τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(t) &= -\frac{2}{n} \left( \frac{\int_{M^n} d\mu(t)}{\int_{M^n} d\mu(0)} \right)^{-\frac{2}{n}-1} \frac{\frac{d}{dt} \int_{M^n} d\mu(t)}{\int_{M^n} d\mu(0)} \\ &= \frac{2}{n} \frac{\psi(t)}{\frac{\int_{M^n} d\mu(t)}{\int_{M^n} d\mu(0)}} \frac{\int_{M^n} R d\mu(t)}{\int_{M^n} d\mu(0)} \\ &= \frac{2r}{n} \psi(t) = \frac{2\tilde{r}}{n} (\psi(t))^2, \end{aligned} \tag{3.27}$$

όπου  $r$  η μέση βαθμωτή καμπυλότητα η οποία ορίζεται ως

$$r := \frac{\int_{M^n} R d\mu}{\int_{M^n} d\mu}$$

και  $\tilde{r}$  η νορμαρισμένη μέση βαθμωτή καμπυλότητα:

$$\tilde{r} := \frac{\int_{M^n} \tilde{R} d\mu}{\int_{M^n} d\mu} = \frac{r}{\psi(t)}.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{g}(t) &= (\partial_t g) \psi(t) + g \frac{d}{dt} \psi(t) \\ &= -2\psi(t) \text{Rc}(g(t)) + \frac{2\tilde{r}}{n} (\psi(t))^2 g(t) \\ &= \psi(t) (-2\text{Rc}(g(t)) + \frac{2\tilde{r}}{n} \tilde{g}(t)). \end{aligned}$$

Για να απαλλαγούμε από τον όρο  $\psi(t)$ , ορίζουμε

$$\tau = \int_0^t \psi(u) du$$

και τότε

$$\begin{aligned}\partial_\tau \tilde{g} &= \partial_t \tilde{g} \partial_\tau t = \frac{1}{\psi(t)} \psi(t) (-2\text{Rc}(\tilde{g}(t)) + \frac{2\tilde{r}}{n} \tilde{g}(t)) \\ &= -2\tilde{\text{Rc}} + \frac{2\tilde{r}}{n} \tilde{g}.\end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση καλείται νορμαρισμένη ροή Ricci. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη των διαφόρων ποσοτήτων που εξαρτώνται από τη νέα μετρική δίνονται στο επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.4.1.** Έστω  $(M^n, \tilde{g}(\tau))$  λύση της νορμαρισμένης ροής Ricci προερχόμενη από τη λύση  $(M^n, g(t))$  της (μη νορμαρισμένης) ροής Ricci. Τότε

$$(i) \quad \partial_\tau \Gamma_{ij}^k = -\tilde{g}^{kl} (\tilde{\nabla}_i \tilde{R}_{jl} + \tilde{\nabla}_j \tilde{R}_{il} - \tilde{\nabla}_l \tilde{R}_{ij})$$

(ii)

$$\begin{aligned}\partial_\tau \tilde{R}_{ijk}^k &= \tilde{\Delta} \tilde{R}_{ijk}^l + \tilde{g}^{pq} (\tilde{R}_{ijp}^r \tilde{R}_{rqk}^l - 2\tilde{R}_{pik}^r \tilde{R}_{jqr}^l + 2\tilde{R}_{pir}^l \tilde{R}_{jqk}^r) \\ &\quad - \tilde{R}_i^p \tilde{R}_{pjk}^l - \tilde{R}_j^p \tilde{R}_{ipk}^l - \tilde{R}_k^p \tilde{R}_{ijp}^l - \tilde{R}_p^l \tilde{R}_{ijk}^p.\end{aligned}\quad (3.28)$$

(iii)

$$\begin{aligned}\partial_\tau \tilde{R}_{ijkl} &= \tilde{\Delta} \tilde{R}_{ijkl} + 2(\tilde{B}_{ijkl} - \tilde{B}_{ijlk} + \tilde{B}_{ikjl} - \tilde{B}_{iljk}) \\ &\quad - \tilde{g}^{pq} (\tilde{R}_{qil} \tilde{R}_{pjkl} + \tilde{R}_{qj} \tilde{R}_{ipkl} + \tilde{R}_{qk} \tilde{R}_{ijpl} + \tilde{R}_{ql} \tilde{R}_{ijkp}) + \frac{2\tilde{r}}{n} \tilde{R}_{ijkl}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

$$\text{όπου } \tilde{B}_{ijkl} = \tilde{g}^{pr} \tilde{g}^{qs} \tilde{R}_{piqj} \tilde{R}_{rksl}.$$

(iv)

$$\partial_\tau \tilde{R}_{jk} = \tilde{\Delta} \tilde{R}_{jk} = \tilde{\Delta} \tilde{R}_{jk} + 2\tilde{g}^{pq} \tilde{g}^{rs} \tilde{R}_{qs} \tilde{R}_{pjrk} - 2\tilde{g}^{pq} \tilde{R}_{pj} \tilde{R}_{qk}.\quad (3.30)$$

(v)

$$\partial_\tau \tilde{R} = \tilde{\Delta} \tilde{R} + 2|\tilde{\text{Rc}}|^2 - \frac{2\tilde{r}}{n} \tilde{R}\quad (3.31)$$

*Απόδειξη.* (i) Από την (3.17) και το λήμμα (3.4.1):

$$\begin{aligned}\partial_\tau \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \partial_t \Gamma_{ij}^k \frac{1}{\psi t} = \frac{1}{\psi t} (-g^{kl} (\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij})) \\ &= -\tilde{g}^{kl} (\tilde{\nabla}_i \tilde{R}_{jl} + \tilde{\nabla}_j \tilde{R}_{il} - \tilde{\nabla}_l \tilde{R}_{ij})\end{aligned}$$

(ii) Από την (3.20)

$$\begin{aligned}\partial_\tau \tilde{R}_{ijk}^k &= \partial_t R_{ijk}^k \psi^{-1} \\ &= \psi^{-1} (\Delta R_{ijk}^l + g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqk}^l - 2R_{pik}^r R_{jqr}^l + 2R_{pir}^l R_{jqk}^r) \\ &\quad - R_i^p R_{pjk}^l - R_j^p R_{ipk}^l - R_k^p R_{ijp}^l - R_p^l R_{ijk}^p) \\ &= \psi^{-1} [\psi \tilde{\Delta} \tilde{R}_{ijk}^l + \psi \tilde{g}^{pq} (\tilde{R}_{ijp}^r \tilde{R}_{rqk}^l - 2\tilde{R}_{pik}^r \tilde{R}_{jqr}^l + 2\tilde{R}_{pir}^l \tilde{R}_{jqk}^r) \\ &\quad \psi (-\tilde{R}_i^p \tilde{R}_{pjk}^l - \tilde{R}_j^p \tilde{R}_{ipk}^l - \tilde{R}_k^p \tilde{R}_{ijp}^l - \tilde{R}_p^l \tilde{R}_{ijk}^p)].\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \tilde{R}_{ijkl} &= \partial_t(\psi R_{ijkl})\psi^{-1} = \partial_t R_{ijkl} + \partial_t \psi \psi^{-1} R_{ijkl} \\
&= \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}) \\
&\quad - g^{pq}(R_{qi}R_{pjkl} + R_{qj}R_{ipkl} + R_{qk}R_{ijpl} + R_{ql}R_{ijkp}) + \partial_t \psi \psi^{-1} R_{ijkl} \\
&= \tilde{\Delta} \tilde{R}_{ijkl} + 2(\tilde{B}_{ijkl} - \tilde{B}_{ijlk} + \tilde{B}_{ikjl} - \tilde{B}_{iljk}) \\
&\quad - \tilde{g}^{pq}(\tilde{R}_{qi}\tilde{R}_{pjkl} + \tilde{R}_{qj}\tilde{R}_{ipkl} + \tilde{R}_{qk}\tilde{R}_{ijpl} + \tilde{R}_{ql}\tilde{R}_{ijkp}) + \frac{2\tilde{r}}{n}\tilde{R}_{ijkl} + \partial_t \psi \psi^{-2} R_{ijkl}.
\end{aligned}$$

Έχουμε όμως δει ότι

$$\partial_t \psi(t) = \frac{2\tilde{r}}{n}(\psi(t))^2 \Rightarrow \partial_t \psi \psi^{-2} = \frac{2\tilde{r}}{n}$$

και αντικαθιστώντας έχουμε το ζητούμενο.

(iv)

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \tilde{R}_{jk} &= \partial_t R_{jk} \psi^{-1} = \psi^{-1} \Delta_L R_{jk} \\
&= \psi^{-1}(\Delta R_{jk} + 2g^{pq}g^{rs}R_{qs}R_{pjrk} - 2g^{pq}R_{pj}R_{qk}) \\
&= \tilde{\Delta} \tilde{R}_{jk} + 2\tilde{g}^{pq}\tilde{g}^{rs}\tilde{R}_{qs}\tilde{R}_{pjrk} - 2\tilde{g}^{pq}\tilde{R}_{pj}\tilde{R}_{qk} \\
&= \tilde{\Delta}_L \tilde{R}_{jk}.
\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \tilde{R} &= \partial_t \tilde{R} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \psi^{-1} \partial_t(\psi^{-1} R) = \psi^{-2} \partial_t R - \psi^{-3} \partial_t \psi R \\
&= \psi^{-2}(\Delta R + 2|Rc|^2) - \frac{2\tilde{r}}{n} \psi^{-1} R \\
&= \tilde{\Delta} \tilde{R} + 2|\tilde{R}c|^2 - \frac{2\tilde{r}}{n} \tilde{R}.
\end{aligned}$$

□

## Κεφάλαιο 4

# Αρχή Μεγίστου

### 4.1 Θεωρία παραβολικών μ.δ.ε

Στην παράγραφο αυτή θα συνοψίσουμε τα κύρια αποτελέσματα ύπαρξης λύσεων για μ.δ.ε, που θα χρειαστούν στα επόμενα. Ας θεωρήσουμε αρχικά μία διανυσματική δέσμη  $\pi : E \rightarrow M$ , όπου  $M$  πολλαπλότητα Riemann με μετρική (στη δέσμη)  $h$ . Ενδιαφερόμαστε για μ.δ.ε που περιγράφουν την εξέλιξη μίας χρονικά εξαρτώμενης διατομής της δέσμης  $E$ ,

$$u : M \times [0, T) \rightarrow E,$$

και είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= L(u) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου  $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  διαφορικός τελεστής.

#### 4.1.1 Γραμμική Θεωρία

**Ορισμός 4.1.1.** Ένας πολυδείκτης  $\alpha$  είναι μία  $n$ -άδα μη αρνητικών ακεραίων  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Ορίζουμε

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Αν  $f$  είναι συνάρτηση  $n$  μεταβλητών  $x_1, \dots, x_n$ , ορίζουμε

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Υποθέτουμε αρχικά πως ο τελεστής  $L$  είναι γραμμικός. Δηλαδή, χρησιμοποιώντας πολυδείκτες για το συμβολισμό, έστω ότι

$$L(u) = \sum_{|\alpha| \leq k} L_\alpha \partial^\alpha u, \tag{4.2}$$

όπου  $k$  ο βαθμός του  $L$  και  $L_\alpha \in \Gamma(\text{Hom}(E, E)) \cong \text{Hom}(\Gamma(E), \Gamma(E))$  (αναλυτικότερα:  $L(u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} L_\alpha(x)(\partial^\alpha u)$ ). Ως παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα δευτεροβάθμιο γραμμικό διαφορικό τελεστή ο οποίος δρα σε βαθμωτές συναρτήσεις. Πρόκειται δηλαδή για την περίπτωση  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $E = M \times \mathbb{R}$ ,  $k = 2$ . Ο τελεστής αυτός λοιπόν θα είναι της μορφής

$$L(u) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \partial^i \partial^j u + \sum_i b_i \partial^i u + cu.$$

Το ολικό σύμβολο  $L$  ενός τέτοιου τελεστή στην κατεύθυνση του  $\phi \in \Gamma(T^*M)$  ορίζεται ως

$$\sigma(L)(\phi)(u) = \sum_{|\alpha| \leq k} L_\alpha(u) \prod_j \phi^{\alpha_j}.$$

Επιστρέφοντας στο παραπάνω παράδειγμα

$$\sigma(L)(\phi)(u) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \phi^i \phi^j u + \sum_i b_i \phi^i u + cu.$$

Το κύριο σύμβολο του  $L$  στη διεύθυνση  $\phi$  είναι ο ομομορφισμός δεσμών  $\hat{\sigma}[L](\phi) : E \rightarrow E$  που προέρχεται μόνο από τους υψηλότερης τάξης όρους ως προς  $L$ :

$$\hat{\sigma}[L](\phi)(u) = \sum_{|\alpha|=k} L_\alpha(u) \prod_j \phi^{\alpha_j}.$$

Στο παράδειγμα και πάλι

$$\hat{\sigma}[L](\phi)(u) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \phi^i \phi^j u.$$

**Ορισμός 4.1.2.** Το σύστημα (1) καλείται (ισχυρά) παραβολικό αν υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας  $M$ , για κάθε  $\phi \neq 0$  όπως πριν και  $u \neq 0$  της  $\Gamma(E)$ :

$$\langle \hat{\sigma}[L](\phi)(u), u \rangle > \delta |\phi|^2 |u|^2.$$

Στο αρχικό παράδειγμα δηλαδή

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} \phi^i \phi^j u > \delta |\phi|^2$$

για κάθε  $\phi \neq 0$ , που σημαίνει ότι ο πίνακας  $[\alpha_{ij}]$  είναι θετικά ορισμένος.

#### 4.1.2 Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών μ.δ.ε.

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με μη γραμμικές μ.δ.ε, όπου ο  $L$  δεν είναι της μορφής (3.2) που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Θα χρειαστεί λοιπόν να ορίσουμε την έννοια της γραμμικοποίησης ενός μη γραμμικού τελεστή με στόχο να μπορέσουμε να εξετάσουμε παραβολικές μη γραμμικές μ.δ.ε. Η γραμμικοποίηση λοιπόν ενός τελεστή  $L$  ορίζεται κατ' αναλογία με την παράγωγο μίας συνάρτησης  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , η οποία είναι μία γραμμική απεικόνιση



ορισμένη έτσι ώστε να αποτελεί τη "βέλτιστη" προσέγγιση της  $f$  σε κάθε σημείο που αυτή είναι διαφορίσιμη. Αν δηλαδή  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι μία καμπύλη που ικανοποιεί

$$\begin{aligned} x(0) &= p \\ x'(0) &= v, \end{aligned}$$

τότε

$$D_p f(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x(t)).$$

Η γραμμικοποίηση τώρα ενός μη γραμμικού τελεστή  $L$  σε μία διανυσματική δέσμη  $E$ , ορίζεται ως εξής: Αν  $u : [0, 1] \rightarrow \Gamma(E)$  είναι χρονικά εξαρτώμενη διατομή της  $E$  με

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ u'(0) &= v \end{aligned}$$

η γραμμικοποίηση του  $L$  στο  $u_0$  είναι η γραμμική απεικόνιση

$$D_{u_0}[L] : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

με

$$D_{u_0}[L](v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L(u(t)),$$

αν το όριο υπάρχει. Λέμε τότε πως το σύστημα (3.1) είναι ισχυρά παραβολικό στο  $u_0$  αν το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_{u_0}[L](v) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

είναι ισχυρά παραβολικό με την έννοια που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Ιδιαίτερα ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση όπου

$$D[L] = \sum_{|\alpha| \leq k} L_\alpha \partial^\alpha,$$

για κάποιο  $k < \infty$ . Το παρακάτω θεώρημα είναι το βασικό θεώρημα ύπαρξης που θα χρειαστούμε.

**Θεώρημα 4.1.1.** *Αν το σύστημα (3.1) είναι ισχυρά παραβολικό στο  $u_0$ , τότε έχει λύση σε κάποιο διάστημα  $[0, T)$  και αυτή είναι μοναδική σε ολόκληρο το διάστημα ύπαρξής της.*

## 4.2 Η Αρχή του Μεγίστου

Η αρχή του μεγίστου είναι το βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε ώστε να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων της ροής Ricci. Η βασική της λειτουργία έγκειται στη δυνατότητα που μας παρέχει να δείξουμε ότι ανισότητες που ισχύουν για τα αρχικά δεδομένα παραβολικών μ.δ.ε διατηρούνται κατά την εξέλιξη. Όπως είδαμε, όταν η μετρική εξελίσσεται σύμφωνα με τη ροή Ricci οι τανυστές καμπυλότητας  $Rm$ ,  $Rc$ ,  $R$ , ικανοποιούν

τέτοια συστήματα μ.δ.ε. Εφαρμόζοντας λοιπόν την αρχή θα μπορέσουμε να δείξουμε πως συγκεκριμένες ανισότητες που διατηρούνται αρχικά, εξακολουθούν να ισχύουν κατά την εξέλιξη παρέχοντας έτσι τη δυνατότητα ελέγχου της γεωμετρίας των υπό εξέλιξη μετρικών.

### Εισαγωγή

Έστω  $U \subset \mathbb{R}^n$  ανοιχτό και  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ομαλή απεικόνιση. Αν η  $f$  έχει τοπικό ελάχιστο σε κάποιο σημείο  $p \in M$  τότε έπεται ότι  $\nabla f(p) = 0$  και  $\Delta f(p) \geq 0$ . Αυτό έπεται από το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις μίας μεταβλητής: Για κάθε διάνυσμα  $v \in \mathbb{R}^n$ , η απεικόνιση  $t \rightarrow f_v(t) := f(p + tv)$  έχει τοπικό ελάχιστο στο  $t=0$  και συνεπώς  $f'_v(0) = \nabla_v f(p) = 0$  και  $f''_v(0) = \nabla_v \nabla_v f(p) \geq 0$ . Η Λαπλασιανή τώρα είναι ανάλογη του μέσου όρου της  $f''_v(0)$  ως προς όλα τα μοναδιαία διανύσματα  $v$ , και συνεπώς είναι και αυτή μη αρνητική.

Σε μία πολλαπλότητα Riemann το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται αν ορίσουμε  $f_v(t) := f(\exp_p(tv))$ , και έτσι έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

**Λήμμα 4.2.1.** Έστω  $M$   $n$ -διάστατη πολλαπλότητα Riemann και  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  μία  $C^2$  συνάρτηση. Αν η  $u$  έχει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο  $p \in M$ , τότε

$$\nabla u(p) = 0 \quad \text{και} \quad \Delta u(p) \geq 0$$

### 4.2.1 Αρχή Μεγίστου για Βαθμωτές Συναρτήσεις

Ξεκινάμε με την πιό βασική περίπτωση. Μία  $C^2$  συνάρτηση σε ένα υποσύνολο του  $M \times \mathbb{R}$  είναι  $C^2$  ως προς τις χωρικές μεταβλητές και  $C^1$  ως προς το χρόνο. Η πολλαπλότητα  $M$  θα θεωρείται συμπαγής εκτός κι αν αναφέρεται το αντίθετο.

**Πρόταση 4.2.1.** Έστω  $g(t)$  ομαλή μονοπαραμετρική οικογένεια μετρικών στο  $M \times [0, T)$ . Αν  $u(x, t) : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία  $C^2$  υπερλύση της εξίσωσης θερμότητας

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{g(t)} u, \quad (4.3)$$

δηλαδή αν

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} u,$$

με  $u(x, 0) \geq C_1$ , για κάποια σταθερά  $C_1$ , τότε  $u(x, t) \geq C_1$ , για όλα τα  $t \in [0, T)$ . Αντίστοιχα, αν  $u$  είναι  $C^2$  υπολύση της (3.3) δηλαδή αν

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leq \Delta_{g(t)} u,$$

με  $u(x, 0) \leq C_2$ , για κάποια σταθερά  $C_2$ , τότε  $u(x, t) \leq C_2$ , για όλα τα  $t \in [0, T)$ .

**Απόδειξη.** Θα δείξουμε την περίπτωση της υπερλύσης δεδομένου ότι η άλλη είναι παρόμοια. Έστω  $F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$   $C^2$  συνάρτηση και ας υποθέσουμε ότι  $(x_0, t_0)$  είναι ένα σημείο για το οποίο

$$F(x_0, t_0) = \min_{M \times [0, t_0]} F.$$

Τότε θα ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(x_0, t_0) &\leq 0 \\ \nabla F(x_0, t_0) &= 0 \\ \Delta F(x_0, t_0) &\geq 0.\end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα  $F_\epsilon(x, t) = u(x, t) - C_1 + \epsilon t + \epsilon$  για  $\epsilon > 0$ . Στο  $t=0$  έχουμε  $F_\epsilon \geq \epsilon > 0$ , ενώ η  $F_\epsilon$  ικανοποιεί την ανισότητα

$$\frac{\partial F_\epsilon}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon \geq \Delta_{g(t)} u + \epsilon = \Delta_{g(t)} F_\epsilon + \epsilon.$$

Αν δείξουμε ότι  $F_\epsilon > 0$  για όλα τα  $t \in [0, T)$ , για οποιοδήποτε  $\epsilon > 0$ , τότε έχουμε το ζητούμενο. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Ότι δηλαδή υπάρχει  $\epsilon > 0$  ώστε  $F_\epsilon \leq 0$  για κάποιο  $(x_1, t_1) \in M \times [0, T)$ . Εφόσον η  $M$  είναι συμπαγής και  $F_\epsilon > 0$  στο  $t=0$ , υπάρχει μία (πρώτη) χρονική στιγμή  $t_0 \in (0, t_1]$  στην οποία θα μπορούμε να βρούμε  $x_0 \in M$  με  $F_\epsilon(x_0, t_0) = 0$ . Παρατηρώντας ότι

$$u(x_0, t_0) = C_1 - \epsilon t_0 - \epsilon < C_1, \quad (4.4)$$

από τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει

$$0 \geq \frac{\partial F_\epsilon}{\partial t}(x_0, t_0) \geq \Delta_{g(t)} F_\epsilon + \epsilon \geq \epsilon > 0,$$

το οποίο είναι αντίφαση. □

**Παρατήρηση 4.2.1.** Από την (4.4) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι θα μπορούσαμε να είχαμε υποθέσει πως η  $u$  είναι υπερλύση μόνο στα σημεία όπου  $u < C_1$ . Επιπλέον η παραπάνω πρόταση θα εξακολουθούσε να ισχύει αν στο δεξί μέλος προσθέταμε έναν όρο της μορφής  $\langle X(t), \nabla u \rangle$ , όπου  $X(t)$  είναι διανυσματικό πεδίο εξαρτώμενο από το χρόνο. Πράγματι κάτι τέτοιο δεν θα επηρέαζε την απόδειξη αφού η  $\nabla u$  θα μηδενιζόταν στο σημείο ελαχίστου.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση που η εξίσωση περιέχει και ένα μηδενικής τάξης όρο.

**Πρόταση 4.2.2.** Έστω  $g(t)$  ομαλή μονοπαραμετρική οικογένεια μετρικών στο  $M \times [0, T)$  και έστω  $\beta : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  άνω φραγμένη. Αν  $u(x, t) : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $C^2$  υπερλύση της

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} u + \beta(x, t)u$$

με  $u(x, 0) \geq 0$ , τότε  $u(x, t) \geq 0$  για όλα τα  $t \in [0, T)$ . Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν στην περίπτωση της υπολύσης.

**Απόδειξη.** Έστω  $v(x, t) = e^{-Ct}u(x, t)$ , όπου  $C$  άνω φράγμα της  $\beta$ . Τότε υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= -Ce^{-Ct}u(x, t) + e^{-Ct} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &\geq -Ce^{-Ct}u(x, t) + e^{-Ct}(\Delta_{g(t)} u + \beta(x, t)u) \\ &= \Delta_{g(t)} v + (\beta - C)u \\ &\geq \Delta_{g(t)} v\end{aligned}$$

σε κάθε  $(x, t) \in M \times [0, T]$  με  $v(x, t) < 0$ . Από την προηγούμενη παρατήρηση και την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι  $v \geq 0$  για όλα τα  $(x, t) \in M \times [0, T]$  και άρα και αυτό που θέλαμε.  $\square$

Για μη γραμμικό παράγοντα μηδενικής τάξης ισχύει το επόμενο.

**Θεώρημα 4.2.1.** Έστω  $g(t)$  ομαλή μονοπαραμετρική οικογένεια μετρικών στο  $M \times [0, T]$  και  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τοπικά Lipschitz συνάρτηση. Έστω  $u(x, t) : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $C^2$  υπερλύση της

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} u + F(t)$$

με  $C_1 \leq u(x, 0)$ . Έστω  $\phi_1$  η λύση της σ.δ.ε

$$\frac{d}{dt} \phi_1 = F(\phi_1), \quad \phi_1(0) = C_1.$$

Τότε  $\phi_1(t) \leq u(x, t)$ , για όλα τα  $(x, t) \in M \times [0, T]$  που η  $\phi_1(t)$  υπάρχει. Αντίστοιχα στην περίπτωση υπολύσης.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \phi_1) \geq \Delta_{g(t)} u + F(u) - F(\phi_1).$$

Από την υπόθεση,  $u \geq \phi_1$  για  $t=0$ . Έστω  $t_0 \in (0, T)$ . Εφόσον η  $M$  είναι συμπαγής, υπάρχει σταθερά  $C_{t_0}$  ώστε  $|u(x, t)| \leq C_{t_0}$  και  $|\phi_1(t)| \leq C_{t_0}$  για όλα τα  $(x, t) \in M \times [0, t_0]$ . Από την υπόθεση για την  $F$  υπάρχει σταθερά  $C'$  ώστε

$$|F(r) - F(s)| \leq C'|r - s| \quad \text{για όλα τα } r, s \in [-C_{t_0}, C_{t_0}].$$

Στο  $M \times [0, t_0]$  λοιπόν η  $u - \phi_1$  ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u - \phi_1) &\geq \Delta_{g(t)}(u - \phi_1) + F(u) - F(\phi_1) \\ &\geq \Delta_{g(t)}(u - \phi_1) - C' \operatorname{sgn}(u - \phi_1)(u - \phi_1). \end{aligned}$$

Όμως από την προηγούμενη πρόταση, για  $\beta = -C' \operatorname{sgn}(u - \phi_1)$  προκύπτει ότι  $u - \phi_1 \geq 0$  για κάθε  $(x, t) \in M \times [0, t_0]$ . Το θεώρημα έπεται αφού το  $t_0$  ήταν τυχαίο.  $\square$

### Εφαρμογές

Από την (3.26) έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2|Rc|^2 \geq \Delta R. \quad (4.5)$$

Άμεση λοιπόν συνέπεια της πρότασης (3.2.1) είναι η εξής:

**Πρόταση 4.2.3.** Έστω  $g(t)$  λύση της ροής Ricci με  $g(0) = g_0$ . Αν για τη βαθμωτή καμπυλότητα  $R$  της  $g_0$  ισχύει  $R(g(0)) \geq k$ , για κάποια σταθερά  $k$ , τότε

$$R(g(t)) \geq k,$$

σε όλη τη διάρκεια ύπαρξης λύσης.

Εξετάζοντας τώρα πιά προσεχτικά το δεξί μέλος της (4.5) μπορούμε να εξάγουμε ένα πιά ισχυρό αποτέλεσμα.

**Πρόταση 4.2.4.** *Αν η λύση της ροής Ricci υπάρχει σε ένα διάστημα  $[0, T)$  τότε*

$$R(g(t)) \geq \frac{R_{\min}(g_0)}{1 - \frac{2}{n}t R_{\min}(g_0)}, \quad (4.6)$$

όπου  $R_{\min}(g_0) = \inf\{R(x, 0) : x \in M\}$ .

*Απόδειξη.* Για τον τανυστή του Einstein  $E$ , έχουμε  $|E|^2 \geq 0$ . Άρα

$$\begin{aligned} (R_{ij} - \frac{1}{n}Rg_{ij})(R^{ij} - \frac{1}{n}Rg^{ij}) &= |Rc|^2 + \frac{1}{n}R^2 - \frac{1}{n}RR_{ij}g^{ij} - \frac{1}{n}RR^{ij}g_{ij} \\ &= |Rc|^2 + \frac{1}{n}R^2 - \frac{2}{n}R^2 = |Rc|^2 - \frac{1}{n}R^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Από την ισότητα της (4.5) λοιπόν, έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} R \geq \Delta R + \frac{2}{n}R^2.$$

Αν  $\phi_1$  είναι λύση της σ.δ.ε

$$\frac{d}{dt}\phi_1 = \frac{2}{n}\phi_1^2,$$

με  $\phi_1(0) = R_{\min}(g_0)$ , τότε

$$\phi_1(t) = \frac{1}{R_{\min}(g_0)^{-1} - \frac{2}{n}t} \quad \text{για} \quad R_{\min}(g_0) \neq 0$$

Από το θεώρημα (4.2.1) έχουμε αυτό που θέλαμε.  $\square$

**Πόρισμα 4.2.1.** *Αν η λύση της ροής Ricci υπάρχει σε ένα διάστημα  $[0, T)$  και η  $R_{g(0)}$  είναι αυστηρά θετική, τότε*

$$T \leq \frac{n}{2} \frac{1}{R_{\min}(g_0)}.$$

*Απόδειξη.* Είναι άμεση αφού από τη (4.6) η βαθμωτή καμπυλότητα απειρίζεται σε χρόνο  $T_0 = \frac{n}{2} \frac{1}{R_{\min}(g_0)}$ .  $\square$

## 4.2.2 Αρχή Μεγίστου για συμμετρικούς 2-τανυστες

Περνάμε τώρα σε ένα αποτέλεσμα το οποίο αποτελεί παράδειγμα εφαρμογής της αρχής μεγίστου σε συστήματα. Υπενθυμίζουμε ότι γράφουμε  $A \geq 0$  για ένα συμμετρικό 2-τανυστής  $A$  αν η τετραγωνική μορφή που επάγεται από τον  $A$  είναι θετικά ορισμένη.

**Θεώρημα 4.2.2.** *Έστω  $g(t)$  μονοπαραμετρική οικογένεια μετρικών Riemann σε μία κλειστή πολλαπλότητα  $M^n$ . Έστω  $\alpha(t) \in \Gamma(S^2T^*M)$  συμμετρικός  $(2,0)$ -τανυστής ο οποίος ικανοποιεί την ημιγραμμική εξίσωση θερμότητας*

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha \geq \Delta_{g(t)} \alpha + \beta,$$

όπου  $\beta = \beta(a, g, t)$  συμμετρικός  $(2, 0)$ -τανυστής, τοπικά Lipschitz ως προς όλα τα ορίσματά του, που ικανοποιεί την υπόθεση μηδενικού ιδιοδιανύσματος (Y.M.I). Αν δηλαδή  $V(x, t)$  είναι μηδενικό ιδιοδιάνυσμα του  $a(t)$ :

$$\alpha_{ij} V^j(x, t) = 0,$$

τότε  $\beta(V, V)(x, t) = \beta_{ij} V^i V^j \geq 0$ . Αν  $\alpha(0) \geq 0$ , τότε  $\alpha(t) \geq 0$ , για όσο υπάρχει η λύση.

*Απόδειξη.* Δοθέντος  $\tau \in (0, T)$  θα δείξουμε ότι υπάρχει  $\delta \in [0, T]$ , ώστε για κάθε  $t_0 \in [0, \tau - \delta]$ , αν  $\alpha \geq 0$  στο  $t = t_0$ , τότε  $\alpha \geq 0$  στο  $M \times [t_0, t_0 + \delta]$ . Το θεώρημα τότε προκύπτει άμεσα.

Σταθεροποιούμε  $t_0 \in [0, \tau - \delta]$ . Για  $0 < \epsilon \leq 1$ , θεωρούμε τον τροποποιημένο  $(2, 0)$ -τανυστή  $A_\epsilon$  που ορίζεται για κάθε  $(x, t) \in M \times [t_0, t_0 + \delta]$  ως

$$A_\epsilon(x, t) = \alpha(x, t) + \epsilon[\delta + (t - t_0)]g(x, t),$$

όπου το  $\delta$  θα επιλεγεί κατάλληλα στη συνέχεια. Για  $t = t_0$  τότε, έχουμε

$$A_\epsilon(x, t_0) = \alpha(x, t_0) + \epsilon\delta g(x, t_0) > 0$$

(δηλαδή ο  $A_\epsilon$  είναι θετικά ορισμένος στο  $t = t_0$ ) και ο όρος  $\epsilon(t - t_0)g$  θα μας δώσει

$$\frac{\partial}{\partial t} A_\epsilon > \frac{\partial}{\partial t} \alpha,$$

για  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ , όταν επιλέξουμε  $\delta > 0$  αρκετά μικρό που να εξαρτάται μόνο από το

$$\max_{M \times [0, T]} \left| \frac{\partial}{\partial t} g \right|.$$

Η εξέλιξη του  $A_\epsilon$  περιγράφεται από την

$$\frac{\partial}{\partial t} A_\epsilon = \frac{\partial}{\partial t} \alpha + \epsilon g + \epsilon[\delta + (t - t_0)] \frac{\partial}{\partial t} g.$$

Εφόσον  $\Delta A_\epsilon = \Delta A$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_\epsilon \geq \Delta A_\epsilon + \epsilon g + \epsilon[\delta + (t - t_0)] \frac{\partial}{\partial t} g,$$

το οποίο ξαναγράφουμε ως

$$\frac{\partial}{\partial t} A_\epsilon \geq \Delta A_\epsilon + \beta(A_\epsilon, g, t) + [\beta(\alpha, g, t) - \beta(A_\epsilon, g, t)] + \epsilon g + \epsilon[\delta + (t - t_0)] \frac{\partial}{\partial t} g.$$

Επιλέγουμε αρχικά  $\delta_0 > 0$  εξαρτώμενο από την  $g(t)$  για  $t \in [0, T]$ , ώστε στο  $M \times [t_0, t_0 + \delta]$  να έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} g \geq -\frac{1}{4\delta_0} g.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \epsilon g + \epsilon[\delta + (t - t_0)] \frac{\partial}{\partial t} g &\geq \epsilon g - \epsilon\delta_0 \frac{1}{4\delta_0} g - \epsilon(t - t_0) \frac{1}{4\delta_0} g \\ &= \epsilon g - \epsilon \frac{g}{4} - \epsilon(t - t_0) \frac{1}{4\delta_0} g \\ &\geq \frac{1}{2} \epsilon g \end{aligned} \tag{4.8}$$

στο  $M \times [t_0, t_0 + \delta]$ . Αφού η  $\beta$  είναι τοπικά Lipschitz, υπάρχει σταθερά  $K$  που εξαρτάται από τα  $a$  και  $g$  (αλλά όχι από το  $\varepsilon$ ), ώστε

$$\beta(\alpha, g, t) - \beta(A_\varepsilon, g, t) \geq -K\varepsilon[\delta_0 + (t - t_0)]g \geq -2K\varepsilon\delta_0 g$$

στο  $M \times [t_0, t_0 + \delta]$ . Αν τώρα επιλέξουμε  $\delta \in (0, \delta_0)$  ώστε  $\frac{1}{4K} > \delta$ , τότε

$$\beta(\alpha, g, t) - \beta(A_\varepsilon, g, t) > -\frac{1}{2}\varepsilon g. \quad (4.9)$$

Από τις (4.8), (4.9) λοιπόν

$$\frac{\partial}{\partial t} A_\varepsilon \geq \Delta A_\varepsilon + \beta(A_\varepsilon, g, t), \quad (4.10)$$

στο  $M \times [t_0, t_0 + \delta]$ . Ο ισχυρισμός τώρα είναι ότι  $A_\varepsilon > 0$  στο  $M \times [t_0, t_0 + \delta]$ . Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε υπάρχει  $(x_1, t_1) \in M \times (t_0, t_0 + \delta]$  και μη μηδενικό διάνυσμα  $v \in T_{x_1} M$ , ώστε  $A_\varepsilon > 0$  για  $t_0 \leq t < t_1$  και

$$((A_\varepsilon)_{ij} v^j)(x_1, t_1) = 0.$$

Επεκτείνουμε το  $v$  σε διανυσματικό πεδίο  $V$  σε μία περιοχή του  $(x_1, t_1)$  με τρόπο ώστε  $V(x_1, t_1) = v$  και

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x_1, t_1) = 0$$

$$\nabla V(x_1, t_1) = 0$$

$$\Delta V(x_1, t_1) = 0.$$

Αυτό επιτυγχάνεται μεταφέροντας παράλληλα (ως προς την  $g(t_1)$ ) το  $v$  στη  $M$ , κατά μήκος ακτινικών γεωδαισιακών (ως προς την  $g(t_1)$ ) που ξεκινούν από το  $x_1$  και παίρνοντας το  $V$  ανεξάρτητο του χρόνου. Μπορούμε να δούμε πως η λαπλασιανή μηδενίζεται στο  $(x_1, t_1)$  θεωρώντας ορθοκανονικό (ως προς την  $g(t_0)$ ) πλαίσιο  $\{e_i \in T_{x_1} M\}_{i=1}^n$  και μεταφέροντάς το παράλληλα στο χώρο κατά μήκος γεωδαισιακών όπως πριν. Ως προς το πλαίσιο αυτό τότε,

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1, t_1) &= \sum_{i=1}^n [\nabla_{e_i} (\nabla_{e_i} V - \nabla_{\nabla_{e_i} V})](x_1, t_1) \\ &= \sum_{i=1}^n [\nabla_{e_i} 0 - \nabla_0 V] = 0. \end{aligned}$$

Τότε από την (3.10) και την Υ.Μ.Ι στο  $(x_1, t_1)$ , έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{\partial}{\partial t} ((A_\varepsilon)_{ij} V^i V^j) = \left( \frac{\partial}{\partial t} A_\varepsilon \right)_{ij} V^i V^j \\ &> [(\Delta A_\varepsilon)_{ij} + \beta_{ij}(A_\varepsilon, g, t)] V^i V^j \\ &= \Delta((A_\varepsilon)_{ij} V^i V^j) + \beta_{ij}(A_\varepsilon, g, t) V^i V^j \geq 0. \end{aligned}$$

Από την αντίφαση έχουμε τον ισχυρισμό. Αφού τώρα το  $\delta > 0$  εξαρτάται μόνο απ' το  $\max_{M \times [0, T]} |\frac{\partial}{\partial t} g|$  και το  $K$ , και ιδιαίτερα δεν εξαρτάται από το  $\varepsilon$ , παίρνοντας  $\varepsilon \rightarrow 0$ , έχουμε το θεώρημα.  $\square$

### Εφαρμογές

Στην παράγραφο αυτή, χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, θα δείξουμε το εξής:

**Πρόταση 4.2.5.** Έστω  $g(t)$  λύση της ροής Ricci σε μία κλειστή πολλαπλότητα με  $g(0) = g_0$ . Αν  $Rc(g_0) > 0$  (αντ.  $Rc(g_0) \geq 0$ ), τότε  $Rc(g(t)) > 0$  (αντ.  $Rc(g(t)) \geq 0$ ), σε όλο το διάστημα ύπαρξης της λύσης.

Από τη (2.24) έχουμε

$$\partial_t R_{jk} = \Delta_L R_{jk} = \Delta R_{jk} + 2g^{pq} g^{rs} R_{qs} R_{pjrk} - 2g^{pq} R_{pj} R_{qk}.$$

Η παρουσία του τανυστή καμπυλότητας Riemann στην παραπάνω εξίσωση αποτελεί εμπόδιο στην απόδειξη της πρότασης αφού δεν μας επιτρέπει να ελέγξουμε το δεξιό μέλος ώστε να εφαρμόσουμε τελικά κάποια αρχή μεγίστου. Για να μπορέσουμε να διορθώσουμε το πρόβλημα είναι απαραίτητο να μελετήσουμε τον τανυστή του Weyl.

Ορίζουμε αρχικά το γινόμενο Kulkarni-Nomizu. Θέλουμε για δύο  $(2,0)$ -τανυστές να κατασκευάσουμε ένα  $(4,0)$ -τανυστή ο οποίος να έχει τις συμμετρίες του τανυστή καμπυλότητας Riemann. Ορίζουμε αρχικά την απεικόνιση

$$\otimes : S^2 T^* M \times S^2 T^* M \rightarrow S^2(\wedge^2 T^* M)$$

όπου για  $\alpha, \beta \in S^2 T^* M$  έχουμε

$$(\alpha \otimes \beta)_{ijkl} := \alpha_{ik} \beta_{jl} + \alpha_{jl} \beta_{ik} - \alpha_{jk} \beta_{il} - \alpha_{il} \beta_{jk}$$

και μπορούμε εύκολά να ελέγξουμε ότι ισχύουν οι ζητούμενες συμμετρίες.

Ο τανυστής καμπυλότητας του Weyl ορίζεται ως το μηδενικού ίχνους μέρος του τανυστή καμπυλότητας Riemann και προκύπτει από αυτόν μετά από αφαίρεση ενός τανυστή  $C$  ο οποίος είναι το άθροισμα της βαθμωτής καμπυλότητας και του μηδενικού ίχνους μέρους του τανυστή Ricci, με την επιπλέον ιδιότητα να έχει το ίδιο ίχνος με τον Rm. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας το γινόμενο Kulkarni-Nomizu θεωρούμε τον τανυστή

$$C = c_1 Rg \otimes g + c_2 \mathring{R}c \otimes g,$$

όπου  $c_1, c_2$  βαθμωτά. Εφόσον θέλουμε να ισχύει  $\text{tr} Rm = \text{tr} C$ , πρέπει

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl} = g^{jl} C_{ijkl}.$$

Τώρα αφού

$$C_{ijkl} = 2c_1 R(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) + c_2 (\mathring{R}_{ik} g_{jl} + \mathring{R}_{jl} g_{ik} - \mathring{R}_{il} g_{jk} - \mathring{R}_{jk} g_{il})$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} Rg_{ik} + \mathring{R}_{ik} &= R_{ik} = g^{jl} C_{ijkl} \\ &= 2c_1 (n-1) Rg_{ik} + c_2 (n-2) \mathring{R}_{ik} \end{aligned}$$

και άρα  $c_1 = \frac{1}{2n(n-1)}$ ,  $c_2 = \frac{1}{n-2}$ . Ο τανυστής του Weyl λοιπόν, είναι της μορφής

$$W = Rm - \frac{1}{n-2} \mathring{R}c \otimes g - \frac{R}{2n(n-1)} g \otimes g.$$



Άμεσα έχουμε

$$Rm = \frac{R}{2n(n-1)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} \overset{\circ}{R}c \otimes g + W$$

και αντικαθιστώντας τον τανυστή του Einstein  $\overset{\circ}{R}c$ :

$$Rm = -\frac{R}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} Rc \otimes g + W. \quad (4.11)$$

Ο Hamilton στο [6] παρατήρησε ότι στη διάσταση  $n=3$  ο τανυστής του Weyl μηδενίζεται. Πράγματι, για  $n=3$  υπάρχουν μόνο δύο τύποι μη μηδενικών συντελεστών του  $W$ . Είτε υπάρχουν τρεις διακεκριμένοι δείκτες ( $W_{1213}$ ), ή δύο ( $W_{1212}$ ). Από την ιδιότητα όμως του μηδενικού ίχνους, ισχύει

$$W_{1213} = -W_{2223} - W_{3233} = 0$$

και

$$W_{1212} = W_{2222} - W_{3232} = -W_{3232} = W_{3131} = -W_{2121} = -W_{1212}$$

και συνεπώς  $W_{1212} = 0$ .

Για  $n=3$  λοιπόν, η (4.11) ξαναγράφεται

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -\frac{R}{4} (g_{ik}g_{jl} + g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk} - g_{jk}g_{il}) \\ &\quad + R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il} \\ &= R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il} - \frac{R}{2} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Από την ισότητα αυτή παρατηρούμε πως στη διάσταση αυτή ο τανυστής Ricci καθορίζει πλήρως τον τανυστή Riemann. Συνεπώς ισχύει το ακόλουθο.

**Λήμμα 4.2.2.** *Για  $n=3$  ο τανυστής Ricci μιας λύσης της ροής Ricci, ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{jk} = \Delta R_{jk} - 6g^{pq}R_{pj}R_{qk} + 3RR_{jk} + (2|Rc|^2 - R^2)g_{jk}.$$

*Απόδειξη.* Από την (4.12) έχουμε

$$\begin{aligned} 2g^{pq}g^{rs}R_{pjrk}R_{qs} &= 2g^{pq}g^{rs}[R_{pr}g_{jk} + R_{jk}g_{pr} - R_{pk}g_{jr} - R_{jr}g_{pk} - \frac{R}{2}(g_{pr}g_{jk} - g_{pk}g_{jr})]R_{qs} \\ &= 2g^{pq}g^{rs}R_{pr}g_{jk}R_{qs} + 2g^{pq}g^{rs}R_{jk}g_{pr}R_{qs} - 2g^{pq}g^{rs}R_{pk}g_{jr}R_{qs} - 2g^{pq}g^{rs}R_{jr}g_{pk}R_{qs} \\ &\quad - g^{pq}g^{rs}Rg_{pr}g_{jk}R_{qs} + g^{pq}g^{rs}Rg_{pk}g_{jr}R_{qs} \\ &= 2R^{qs}R_{qs}g_{jk} + 2R_{jk}g_{pr}R^{pr} - 2R_{pk}R_{qs}g^{pq}\delta_j^s - 2R_{jr}R_{qs}g^{rs}\delta_k^q \\ &\quad - Rg_{pr}g_{jk}R^{pr} + Rg_{pk}g_{jr}R^{pr} \\ &= 2|Rc|^2g_{jk} + 2RR_{jk} - 2R_{pk}R_{qj}g^{pq} - 2g^{rs}R_{jr}R_{ks} - R^2g_{jk} + RR_{jk} \\ &= 2|Rc|^2g_{jk} + 3RR_{jk} - 4g^{pq}R_{pk}R_{qj} - R^2g_{jk}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.24), έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{jk} &= \Delta R_{jk} + (2|Rc|^2 - R^2)g_{jk} + 3RR_{jk} - 4g^{pq}R_{pk}R_{qj} - 2g^{pq}R_{jp}R_{qk} \\ &= \Delta R_{jk} - 6g^{pq}R_{pj}R_{qk} + 3RR_{jk} + (2|Rc|^2 - R^2)g_{jk} \end{aligned}$$

□

*Απόδειξη.* (Πρότασης (4.2.5)) Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα (3.2.2) πρέπει να ελέγξουμε την ισχύ της Υ.Μ.Ι. Έστω  $V$  λοιπόν ένα μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα του τανυστή Ricci. Τότε

$$(-6g^{pq}R_{pj}R_{qk} + 3RR_{jk} + (2|Rc|^2 - R^2)g_{jk})V^iV^j = (2|Rc|^2 - R^2)|V|^2 \geq 0,$$

λόγω της (4.7), (για  $n=2$  δεδομένου ότι ο  $Rc$  έχει μηδενική ιδιοτιμή), και συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

#### 4.2.3 Αρχή Μεγίστου σε Διανυσματικές Δέσμες

Περνάμε τώρα στην περίπτωση της αρχής του μεγίστου από την οποία θα μπορέσουμε να εξάγουμε πολλά από τα σημαντικά αποτελέσματα του επόμενου κεφαλαίου. Τρία βασικά θεωρήματα θα αναφέρουμε αλλά οι αποδείξεις θα παραληφθούν. Στην υποενότητα των εφαρμογών θα δούμε ένα αποτέλεσμα ανάλογο εκείνων που δείξαμε για τις προηγούμενες περιπτώσεις, αναβάλλοντας τα πορίσματα που θα μας χρειαστούν στην απόδειξη του θεωρήματος του Hamilton για το επόμενο κεφάλαιο όπου θα ταιριάξουν ομαλότερα στη ροή της παρουσίασης.

Στο [6] λοιπόν, ο Hamilton έδειξε πως μπορεί να γενικευτεί η αρχή του μεγίστου ώστε να εφαρμοστεί σε διατομές μίας διανυσματικής δέσμης (με την περίπτωση των βαθμωτών συναρτήσεων να αποτελεί ειδική περίπτωση). Υπάρχει ένα λεπτό σημείο: Μία εξίσωση τύπου θερμότητας έχει ως όρο τη Λαπλασιανή μίας ποσότητας. Θα πρέπει λοιπόν να γίνει ξεκάθαρο τι εννοούμε με τον όρο Λαπλασιανή στην περίπτωση αυτή. Έστω λοιπόν  $\pi: E \rightarrow M$  διανυσματική δέσμη της  $M$  με σταθερή μετρική  $h$ ,  $\bar{\nabla}(t)$  ομαλή χρονικά εξαρτώμενη οικογένεια συνοχών της  $E$ , συμβατών με την  $h$  και  $g(t)$  χρονικά εξαρτώμενη μετρική Riemann στη  $M$ . Για να οριστεί η Λαπλασιανή μίας διατομής  $\phi$  πρέπει να θεωρήσουμε δύο συναλλοίωτες παραγωγίσεις της  $\phi$  και στη συνέχεια να πάρουμε το ίχνος. Ωστόσο η πρώτη συναλλοίωτη παράγωγος είναι  $\bar{\nabla}(\phi) \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ .

Εδώ υπάρχει το πρόβλημα αφού η  $\bar{\nabla}(\phi)$  δεν είναι διατομή της  $E$  και συνεπώς δεν μπορούμε να θεωρήσουμε τη δεύτερη συναλλοίωτη παράγωγο χρησιμοποιώντας την  $\bar{\nabla}(t)$ . Για να λυθεί το πρόβλημα, ορίζουμε μία συνοχή  $\hat{\nabla}(t)$  στη διανυσματική δέσμη  $T^*M \otimes E$  σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου:

$$\hat{\nabla}_X(\phi \otimes \xi) \equiv \bar{\nabla}_X\phi \otimes \xi + \phi \otimes \nabla_X\xi,$$

όπου  $\phi \in \Gamma(E)$ ,  $\xi \in \Gamma(T^*M)$  και  $\nabla$  η συνοχή Riemann της μετρικής  $g(t)$ . Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τη Λαπλασιανή: χρησιμοποιώντας δείκτες  $\alpha$  για διατομές της  $E$  και  $i, j$  για αντίστοιχες της  $T^*M$  (ώστε ένα στοιχείο  $H$  της  $T^*M \otimes E$  να έχει συντεταγμένες  $H_{i\alpha}$  ως προς κάποια βάση), τότε

$$(\hat{\Delta}\phi)_\alpha := g^{ij}\hat{\nabla}_i\bar{\nabla}_j\phi_\alpha.$$

Έστω τώρα  $F: E \times [0, T] \rightarrow E$  μία συνεχής απεικόνιση τέτοια ώστε  $F(\cdot, \cdot, t): E \rightarrow E$  να διατηρεί τα νήματα για κάθε  $t \in [0, T]$  και  $F(\cdot, x, t): E_x \rightarrow E_x$  να είναι Lipschitz για κάθε  $x \in M^n$  και  $t \in [0, T]$ . Έστω  $\mathcal{K}$  ένα κλειστό υποσύνολο της  $E$ . Τότε ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα το οποίο αν και γενικότερο από όσα έχουμε δει, μπορούμε και πάλι να το καλέσουμε αρχή μεγίστου για τανυστές διότι θα το εφαρμόσουμε στην περίπτωση που  $g(t)$  είναι λύση της ροής Ricci και  $E$  είναι τανυστική δέσμη.

**Θεώρημα 4.2.3.** Με τις παραπάνω υποθέσεις, έστω  $\alpha(t) : 0 \leq t \leq T$  μία λύση της μη γραμμικής μ.δ.ε.

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha = \hat{\Delta} \alpha + F(\alpha),$$

ώστε  $\alpha(0) \in \mathcal{K}$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι:

- Το  $\mathcal{K}$  είναι αναλλοίωτο σε παράλληλες μεταφορές ως προς την  $\bar{\nabla}(t)$  για όλα τα  $t \in [0, T]$  και
- το  $\mathcal{K}_x := \mathcal{K} \cap \pi^{-1}(x)$  είναι κλειστό κυρτό υποσύνολο του  $E_x = \pi^{-1}(x)$  για όλα τα  $x \in M^n$ .

Αν κάθε λύση της σ.δ.ε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha &= F(\alpha) \\ \alpha(0) &= \mathcal{K}_x \end{aligned}$$

που ορίζεται σε κάθε νήμα  $E_x$ , παραμένει στην  $\mathcal{K}_x$ , τότε η λύση  $\alpha(t)$  της μ.δ.ε. παραμένει στο  $\mathcal{K}$ .

Υπάρχουν δύο σημαντικές γενικεύσεις του παραπάνω αποτελέσματος οι οποίες θα μας χρησιμεύσουν. Στην πρώτη το  $\mathcal{K}$  εξαρτάται από το χρόνο.

**Θεώρημα 4.2.4.** Υποθέτουμε όσα και προηγουμένως και θεωρούμε ότι το  $\mathcal{K}(t)$  είναι κλειστό υποσύνολο της  $E$  για κάθε  $t \in [0, T]$ . Έστω  $\alpha(t) : 0 \leq t \leq T$  μία λύση της μη γραμμικής μ.δ.ε.

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha = \hat{\Delta} \alpha + F(\alpha),$$

ώστε  $\alpha(0) \in \mathcal{K}(0)$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι:

- Το σύνολο  $\cup_{t \in [0, T]} (\mathcal{K}(t) \times \{t\})$  είναι κλειστό στο  $E \times [0, T]$ .
- Το  $\mathcal{K}(t)$  είναι αναλλοίωτο σε παράλληλες μεταφορές ως προς την  $\bar{\nabla}(t)$  για όλα τα  $t \in [0, T]$  και
- το  $\mathcal{K}_x(t) := \mathcal{K}(t) \cap \pi^{-1}(x)$  είναι κλειστό κυρτό υποσύνολο του  $E_x$  για όλα τα  $x \in M^n$  και  $t \in [0, T]$ .

Αν κάθε λύση της σ.δ.ε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha &= F(\alpha) \\ \alpha(0) &= \mathcal{K}_x(0) \end{aligned}$$

που ορίζεται σε κάθε νήμα  $E_x$ , παραμένει στην  $\mathcal{K}_x(t)$ , τότε η λύση  $\alpha(t)$  της μ.δ.ε. παραμένει στο  $\mathcal{K}(t)$ .

Τέλος, υπάρχει και η ακόλουθη γενίκευση, την οποία όμως δεν θα χρησιμοποιήσουμε αλλά θα καταγράψουμε χαριν πληρότητας. Προέρχεται από εφαρμογές στις οποίες η λύση της σ.δ.ε. μπορεί να διαφύγει από κάποιο  $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$ , αλλά που μπορούμε να υποθέσουμε ότι η λύση της αντίστοιχης μ.δ.ε. αποφεύγει το σύνολο  $\mathcal{A}$ . Για αυτό το λόγο άλλωστε, το  $\mathcal{A}$  καλείται σύνολο αποφυγής.

**Θεώρημα 4.2.5.** Υποθέτουμε και πάλι όσα και πριν και θεωρούμε ότι το  $\mathcal{K}(t)$  είναι κλειστό υποσύνολο της  $E$  για κάθε  $t \in [0, T]$ . Έστω  $\alpha(t) : 0 \leq t \leq T$  μία λύση της μη γραμμικής μ.δ.ε.

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha = \hat{\Delta} \alpha + F(\alpha),$$

ώστε  $\alpha(0) \in \mathcal{K}(0)$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι:

- Τα σύνολα  $\cup_{t \in [0, T]} (\mathcal{K}(t) \times \{t\})$  και  $\cup_{t \in [0, T]} ((t) \times \{t\})$  είναι κλειστά στο  $E \times [0, T]$ .
- Το  $\mathcal{K}(t)$  είναι αναλλοίωτο σε παράλληλες μεταφορές ως προς την  $\bar{\nabla}(t)$  για όλα τα  $t \in [0, T]$ .
- Το  $\mathcal{K}_x(t) := \mathcal{K}(t) \cap \pi^{-1}(x)$  είναι κλειστό κυρτό υποσύνολο του  $E_x$  για όλα τα  $x \in M^n$  και  $t \in [0, T]$  και
- η  $\alpha(t)$  αποφεύγει το  $\mathcal{A}(t)$ , δηλαδή  $\alpha(t) \notin \mathcal{A}(t)$  για οποιοδήποτε  $t \in [0, T]$ .

Αν κάθε λύση της σ.δ.ε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha &= F(\alpha) \\ \alpha(0) &= \mathcal{K}_x(0) \setminus \mathcal{A}_x(0) \end{aligned}$$

που ορίζεται σε κάθε νήμα  $E_x$ , είτε παραμένει στην  $\mathcal{K}_x(t)$ , για όλα τα  $t \in [0, T]$  ή εισέρχεται στο  $\mathcal{A}(t_0)$  σε κάποια στιγμή  $t_0 \in (0, T]$ , τότε η λύση  $\alpha(t)$  της μ.δ.ε. παραμένει στο  $\mathcal{K}(t)$ .

### Εφαρμογές

Θέλουμε εδώ να εξάγουμε ένα αποτέλεσμα ανάλογο των προτάσεων (4.2.3) και (4.2.5) για τον τανυστή καμπυλότητας Riemann όμως. Η εξίσωση (3.21) ωστόσο δεν είναι σε μορφή που να μπορεί να εφαρμοστεί κάποιο από τα παραπάνω αποτελέσματα. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να τη μετατρέψουμε με το πρώτο βήμα να είναι η απαλοιφή των όρων της μορφής  $Rc \star Rm$ . Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί οφείλεται στον Karen Uhlenbeck.

**Το τρικ του Uhlenbeck** Έστω  $(M, g(t))$  λύση της ροής Ricci και  $\{e_\alpha^0\}_{\alpha=1}^n$  ένα τοπικό πεδίο πλαισίων ορισμένο σε ένα ανοιχτό  $U \subset M$ . Υποθέτουμε ότι το  $\{e_\alpha^0\}$  είναι ορθοκανονικό ως προς τη μετρική  $g_0$ . Θα θέλαμε να μεταβάλουμε το πλαίσιο με τέτοιο τρόπο ώστε να παραμείνει ορθοκανονικό ως προς την  $g(t)$ . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί θεωρώντας το ακόλουθο σύστημα σ.δ.ε. ορισμένο στο  $T_x M$  για κάθε  $x \in U$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_\alpha(x, t) &= Rc(e_\alpha(x, t)) \\ e_\alpha(x, 0) &= e_\alpha^0(x). \end{aligned} \tag{4.13}$$

*Παρατήρηση 4.2.2.* Στο παραπάνω γράφοντας  $Rc$  θεωρούμε τον ενδομορφισμό Ricci:

$$\begin{aligned} \sharp Rc : TM &\rightarrow TM \\ X &\mapsto \sharp(Rc(X, \cdot)) \end{aligned}$$

και σε συντεταγμένες

$$Rc(X) = X^a Rc(e_a) = X^a \sharp(R_{ab} e^b) = X^a R_a^l e_l,$$

όπου  $R_a^l = g^{lb} R_{ab}$  και  $\{e^b\}$  η δυϊκή βάση της  $\{e_b\}$ .

Εφόσον το (4.13) είναι γραμμικό σύστημα, έπεται ότι έχει λύση για όσο υπάρχει η λύση της ροής Ricci. Το παρακάτω λήμμα μας εξασφαλίζει αυτό που θέλαμε.

**Λήμμα 4.2.3.** *Το εσωτερικό γινόμενο  $g(e_a, e_b)$  είναι σταθερό για κάθε λύση  $g(t)$  της ροής Ricci και για κάθε πεδίο πλαισίων  $\{e_a(t)\}$  που ικανοποιεί το (4.13).*

*Απόδειξη.* Παρατηρώντας ότι τα  $g$ ,  $Rc$  και  $e_a$ , όλα εξαρτώνται από το χρόνο, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [g(e_a, e_b)] &= \left( \frac{\partial}{\partial t} g \right) (e_a, e_b) + g \left( \frac{\partial}{\partial t} e_a, e_b \right) + g \left( e_a, \frac{\partial}{\partial t} e_b \right) \\ &= -2Rc(e_a, e_b) + g(Rc(e_a), e_b) + g(e_a, Rc(e_b)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Πόρισμα 4.2.2.** *Αν το  $\{e_\alpha^0\}$  είναι ορθοκανονικό ως προς τη  $g_0$ , τότε το  $\{e_a(t)\}$  παραμένει ορθοκανονικό ως προς την  $g(t)$ .*

Η ιδέα τώρα της εξέλιξης ενός πεδίου πλαισίων στο χρόνο με τέτοιο τρόπο ώστε να ακολουθήσει τη μεταβολή της μετρικής, μπορεί να γενικευθεί. Έστω λοιπόν  $(M, g(t))$   $t \in [0, T]$  μία λύση της ροής Ricci με  $g(0) = g_0$ . Έστω επίσης  $V$  διανυσματική δέσμη της  $M$  ισομορφική με τη  $TM$  και  $i_0 : V \rightarrow TM$  ένας ισομορφισμός δεσμών. Ορίζοντας

$$h = i_0^*(g_0),$$

προκύπτει η ισομετρία

$$i_0 : (V, h) \rightarrow (TM, g_0).$$

Στόχος είναι να μπορέσουμε να επεκτείνουμε την  $i_0$  σε μία οικογένεια ισομετρικών  $i(t)$  ώστε να ισχύει  $h = i(t)^*(g(t))$  για κάθε  $t$ . Εξελίσσουμε λοιπόν τη  $i$  σύμφωνα με το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} i &= Rc \circ i \\ i(0) &= i_0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

όπου για το  $Rc$  ισχύει η προηγούμενη παρατήρηση. Για κάθε  $x \in M$  η (4.14) ορίζει ένα γραμμικό σύστημα σ.δ.ε. το οποίο συνεπώς έχει μοναδική λύση σε ολόκληρο το διάστημα ύπαρξης της  $\{g(t)\}$ . Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει το ζητούμενο.

**Πρόταση 4.2.6.** Έστω  $h(t) = i(t)^*(g(t))$ , όπου  $i(t)$  ικανοποιεί το (4.14). Τότε η  $h(t)$  είναι σταθερή ως προς το χρόνο και κατά συνέπεια οι απεικονίσεις

$$i(t) : (V, h) \rightarrow (TM, g(t))$$

είναι ισομετρίες για κάθε  $t$ .

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h(X, Y) &= \frac{\partial}{\partial t} (i^* g(X, Y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (g(i(X), i(Y))) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} g \right) (i(X), i(Y)) + g \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} i \right) (X), Y \right) + g \left( X, \left( \frac{\partial}{\partial t} i \right) (Y) \right) \\ &= -2\text{Rc}(i(X), i(Y)) + g(\text{Rc}(i(X)), Y) + g(X, \text{Rc}(i(Y))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή η  $h(t)$  είναι ανεξάρτητη του χρόνου και άρα  $h(t) = h = i_0^*(g_0) \quad \forall t$ .  $\square$

Μέσω των παραπάνω ισομετριών, θεωρούμε την ανάκληση  $D(t)$  της συνοχής Riemann,  $\nabla(t)$  που αντιστοιχεί στη  $g(t)$ . Δηλαδή

$$D(t) := i^*(t) \nabla(t) : \Gamma(TM) \times \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V)$$

με  $D(t)_X \xi = i(t)^{-1} (\nabla_X (i(t)(\xi)))$ . Χρησιμοποιώντας τις  $\nabla$  και  $D$ , ορίζουμε συνοχές με τον τρόπο που έχουμε δει στο κεφάλαιο 1, στις δέσμες τανυστικών γινομένων των  $TM$  και  $V$ , καθώς και στις δυϊκές τους,  $T^*M, V^*$ . Συμβολίζουμε όλες τις συνοχές αυτές με  $\nabla_D$ .

Έστω τώρα  $\{x^k\}_{k=1}^n$  τοπικές συντεταγμένες σε ένα ανοιχτό  $U \subset M$  και  $\{e_a\}_{a=1}^n$  μία βάση τοπικών διατομών του  $V$  περιορισμένη στο  $U$ . Οι συντελεστές  $(i_a^k)$  του ισομορφισμού  $i : (V, h) \rightarrow (TM, g(t))$  ορίζονται ως

$$i(t)(e_a) = \sum_{k=1}^n i(t)_a^k \partial_k,$$

ή για συντομία:

$$i(e_a) = i_a^k \partial_k.$$

**Λήμμα 4.2.4.** (i) Για τη συνοχή

$$\nabla_D : \Gamma(TM) \times \Gamma(V^* \otimes TM) \rightarrow \Gamma(V^* \otimes TM),$$

ή ισοδύναμα

$$\nabla_D : \Gamma(TM) \times \Gamma(\text{Hom}(V, TM)) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}(V, TM)),$$

ισχύει  $\nabla_D i = 0$ .

(ii) Για τη συνοχή  $D$  όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω, έχουμε  $Dh = 0$ .

Απόδειξη. Από τους ορισμούς,

$$\begin{aligned} (\nabla_D)_X(i)(\xi) &= \nabla_X(i(\xi)) - i(D_X \xi) \\ &= \nabla_X(i(\xi)) - i(i^{-1}(\nabla_X(i(\xi)))) \\ &= \nabla_X(i(\xi)) - \nabla_X(i(\xi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} D_{\partial_k} h(e_a, e_b) &= \partial_k(h(e_a, e_b)) - h(D_{\partial_k} e_a, e_b) - h(e_a, D_{\partial_k} e_b) \\ &= \partial_k(g(i(e_a), i(e_b))) - h(D_{\partial_k} e_a, e_b) - h(e_a, D_{\partial_k} e_b) \\ &= g(\nabla_k(i(e_a)), i(e_b)) + g(i(e_a), \nabla_k(i(e_b))) - h(D_{\partial_k} e_a, e_b) - h(e_a, D_{\partial_k} e_b) \\ &= g(i(D_k e_a), i(e_b)) + g(i(e_a), D_k(i(e_b))) - h(D_{\partial_k} e_a, e_b) - h(e_a, D_{\partial_k} e_b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Ορίζουμε τώρα τον τελεστή

$$\Delta_D := g^{ij}(\nabla_D)_i(\nabla_D)_j,$$

θεωρούμε την ανάκληση του τανυστή καμπυλότητας Riemann:  $i^*Rm \in \Gamma(\Lambda^2 V^* \otimes \Lambda^2 V^*)$  ώστε για  $x \in M$  και  $X, Y, Z, W \in V_x$

$$i^*Rm(X, Y, Z, W) = Rm(i(X), i(Y), i(Z), i(W)), \quad (4.15)$$

με συντελεστές  $R_{abcd} = i^*Rm(e_a, e_b, e_c, e_d) = i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l R_{ijkl}$ , και ορίζουμε

$$B_{abcd} = h^{eg} h^{fh} R_{aebf} R_{cgdh} = (i^*B)(e_a, e_b, e_c, e_d).$$

Τότε ισχύει η παρακάτω πρόταση

**Πρόταση 4.2.7.** Αν  $g(t)$  είναι λύση της ροής Ricci και  $i(t)$  είναι λύση του (4.14), τότε η καμπυλότητα  $i^*Rm$  ικανοποιεί την

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{abcd} = \Delta_D R_{abcd} + 2(B_{abdc} - B_{acbd} + B_{acbd} - B_{adb c}).$$

Απόδειξη. Γράφουμε αρχικά την (4.14) σε συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} i\right)(e_a) &= \frac{\partial}{\partial t}(i(e_a)) = \frac{\partial}{\partial t} i_a^k \partial_k = \left(\frac{\partial}{\partial t} i_a^k\right) \partial_k = R_c(i(e_a)) \\ &= \sharp(R_c(i_a^k \partial_k, \partial_j), dx^j) = \sharp(i_a^k R_{kj} dx^j) = i_a^k R_k^l \partial_l = i_a^l R_l^k \partial_k. \end{aligned}$$

Δηλαδή  $\frac{\partial}{\partial t} i_a^k = i_a^l R_l^k$ . Συνεπώς

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{abcd} &= \frac{\partial}{\partial t} (i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l R_{ijkl}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} i_a^i\right) i_b^j i_c^k i_d^l R_{ijkl} + i_a^i \left(\frac{\partial}{\partial t} i_b^j\right) i_c^k i_d^l R_{ijkl} + i_a^i i_b^j \left(\frac{\partial}{\partial t} i_c^k\right) i_d^l R_{ijkl} \\ &\quad + i_a^i i_b^j i_c^k \left(\frac{\partial}{\partial t} i_d^l\right) R_{ijkl} + i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l \left(\frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl}\right) \\ &= R_m^i i_a^m i_b^j i_c^k i_d^l R_{ijkl} + i_a^i R_m^j i_b^m i_c^k i_d^l R_{ijkl} + i_a^i i_b^j R_m^k i_c^m i_d^l R_{ijkl} + i_a^i i_b^j i_c^k R_m^l i_d^m R_{ijkl} \\ &\quad + i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l [\Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}) \\ &\quad - R_i^p R_{pjkl} - R_j^p R_{ipkl} - R_k^p R_{ijpl} - R_l^p R_{ijkp}] \\ &= i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l [\Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk})]. \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} B_{abcd} &= h^{eg} h^{fh} R_{aebf} R_{cgdh} \\ &= h^{eg} h^{fh} i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l i_e^p i_f^q i_g^r i_h^s R_{ipjq} R_{krts} \\ &= i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l g^{pr} g^{qs} R_{ipjq} R_{krts} = i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l B_{ijkl}, \end{aligned}$$

με την προτελευταία ισότητα να ισχύει αφού

$$h(e_a, e_b) = g(i(e_a), i(e_b)) = i_a^i i_b^j g(\partial_i, \partial_j) \Rightarrow h^{-1}(e^a, e^b) = i_a^i i_b^j g(dx^i, dx^j),$$

ενώ από το λήμμα (4.2.4,(i))

$$\begin{aligned} \Delta_D R_{abcd} &= g^{pq} (\nabla_D)_p (\nabla_D)_q (i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l R_{ijkl}) \\ &= g^{pq} i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l (\nabla_D)_p (\nabla_D)_q R_{ijkl} \\ &= i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l g^{pq} \nabla_p \nabla_q R_{ijkl} \\ &= i_a^i i_b^j i_c^k i_d^l \Delta_D R_{ijkl}, \end{aligned}$$

όπου και πάλι η προτελευταία ισότητα ισχύει δεδομένου ότι εξ' ορισμού, η  $\nabla_D$  δρα στα στοιχεία οποιουδήποτε τανυστικού γινομένου δεσμών της  $TM$ , όπως η  $\nabla$ . Συνεπώς

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{abcd} = \Delta_D R_{abcd} + 2(B_{abdc} - B_{acbd} + B_{acdb} - B_{adbc}). \quad (4.16)$$

□

$Rm^2$  και  $Rm^\#$  Θα μετασχηματίσουμε στη συνέχεια τους τέσσερις τελευταίους όρους του δεξιού μέλους της (4.16).

Ο τελεστής καμπυλότητας  $\mathcal{R} \in \Gamma(\text{End}(\Lambda^2 TM))$  και η αντίστοιχη συμμετρική διγραμμική μορφή

$$\mathcal{R} \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes_S \Lambda^2 T^*M)$$

(χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο) έχουν οριστεί ώστε

$$\mathcal{R}(U, V) = \langle \mathcal{R}(U), V \rangle$$

για οποιαδήποτε  $U, V \in \Lambda^2 TM$ . Δηλαδή

$$\mathcal{R}(U) = \#(\langle \mathcal{R}(U), \cdot \rangle).$$

Αν  $\{e_i\}$  τοπικό πλαίσιο της  $TM$ ,  $\{e^j\}$  το δυϊκό πλαίσιο της  $T^*M$  και  $\{e_i \wedge e_j\}_{i < j}$  (αντίστοιχα  $\{e^i \wedge e^j\}_{i < j}$ ) το αντίστοιχο πλαίσιο στην  $\Lambda^2 TM$  (αντ.  $\Lambda^2 T^*M$ ), τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(U)^{ij} e_i \wedge e_j &= \#(U^{kl} R_{klpq} e^p \wedge e^q) = g^{ip} g^{jq} U^{kl} R_{klpq} e_i \wedge e_j \\ &= U^{kl} R_{kl}^{ij} e_i \wedge e_j. \end{aligned}$$

Ορίζουμε  $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ . Είναι άμεσο πως πρόκειται για συμμετρικό τελεστή και συνεπώς μπορεί να οριστεί η  $\mathcal{R}^2 \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes_S \Lambda^2 T^*M)$  ως

$$\mathcal{R}^2(U, V) = \langle \mathcal{R}^2(U), V \rangle.$$



Σε συντετεγμένες,

$$\mathcal{R}^2(U)^{ij} = \mathcal{R}(\mathcal{R}(U))^{ij} = \mathcal{R}(U)^{kl} R_{kl}{}^{ij} = U^{pq} R_{pq}{}^{kl} R_{kl}{}^{ij}$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2(U, V) &= \langle \mathcal{R}^2(U), V \rangle = \mathcal{R}^2(U)^{ij} V_{ij} = U^{pq} R_{pq}{}^{kl} R_{kl}{}^{ij} V_{ij} = R_{kl}{}^{ij} R_{pq}{}^{kl} U^{pq} V^{ij} \\ &= R_{pqkl} R_{ij}{}^{pq} U^{ij} V^{kl} = R_{ijpq} R^{pq}{}_{kl} U^{ij} V^{kl}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε  $\mathcal{R}^2_{(ij)(kl)} := \mathcal{R}^2(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l) = R_{ijpq} R^{pq}{}_{kl} = g^{pr} g^{qs} R_{ijpq} R_{rskl}$ .

**Πρόταση 4.2.8.**

$$\mathcal{R}^2_{(ij)(kl)} = 2(B_{ijkl} - B_{ijlk}),$$

όπου  $B_{ijkl} = g^{pr} g^{qs} R_{piqj} R_{rksl}$  ή σε ορθοκανονική βάση  $B_{ijkl} = R_{piqj} R_{pkql}$ .

*Απόδειξη.*

$$\begin{aligned} (Rm^2)_{(ij)(kl)} &= R_{ijpq} R_{pkql} \\ &= (R_{ipjq} - R_{iqjp})(R_{pkql} - R_{plqk}) \\ &= R_{ipjq} R_{pkql} - R_{ipjq} R_{plqk} \\ &\quad - R_{iqjp} R_{pkql} + R_{iqjp} R_{plqk} \\ &= R_{piqj} R_{pkql} + R_{iqjp} R_{qkpl} \\ &\quad - R_{piqj} R_{plqk} - R_{iqjp} R_{qlpk} \\ &= 2(B_{ijkl} - B_{ijlk}). \end{aligned}$$

□

Για να μετασχηματίσουμε τους δύο τελευταίους όρους της (4.16) θα χρειαστεί να εργαστούμε στο πλαίσιο των αλγεβρών Lie. Έστω λοιπόν  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  μία άλγεβρα Lie,  $C_\gamma^{\alpha\beta}$  οι σταθερές δομής της, οι οποίες ορίζονται από την

$$[\phi^\alpha, \phi^\beta] = C_\gamma^{\alpha\beta} \phi^\gamma, \quad (4.17)$$

όπου  $(\phi^\alpha)$  μία βάση της  $\mathfrak{g}$ . Έστω  $(\phi_\beta)$  η δυϊκή βάση αυτής  $(\phi_\beta(\phi^\alpha) = \delta_\beta^\alpha)$ .

Αν  $L, M : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συμμετρικές διγραμμικές μορφές, δηλαδή  $L, M \in \mathfrak{g} \otimes_S \mathfrak{g}$ , με συντελεστές  $L_{\alpha\beta} := L(\phi_\alpha, \phi_\beta)$ , τότε ορίζεται η  $L^\sharp M \in \mathfrak{g} \otimes_S \mathfrak{g}$  ως

$$(L^\sharp M)_{\alpha\beta} := C_\alpha^{\gamma\delta} C_\beta^{\epsilon\zeta} L_{\gamma\epsilon} M_{\delta\zeta}.$$

θα γράφουμε  $L^\sharp \in \mathfrak{g} \otimes_S \mathfrak{g}$  εννοώντας  $L^\sharp L$ , όπου

$$(L^\sharp)_{\alpha\beta} = C_\alpha^{\gamma\delta} C_\beta^{\epsilon\zeta} L_{\gamma\epsilon} M_{\delta\zeta}.$$

**Λήμμα 4.2.5.** Αν  $L$  όπως παραπάνω, με  $L \geq 0$  τότε  $L^\sharp \geq 0$ .

*Απόδειξη.* Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε βάση  $(\phi_\alpha)$  που να διαγωνοποιεί τον  $L$ , έτσι ώστε  $L_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} L_{\alpha\alpha}$ . Τότε για κάθε  $v = v^\alpha \phi_\alpha$ , έχουμε

$$L^\sharp(v, v) = (v^\alpha C_\alpha^{\gamma\delta})(v^\beta C_\beta^{\epsilon\zeta}) L_{\gamma\epsilon} L_{\delta\zeta} = (v^\alpha C_\alpha^{\gamma\delta})^2 L_{\gamma\gamma} L_{\delta\delta}.$$

□

Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι ο διανυσματικός χώρος  $\Lambda^2 T^*M$  μπορεί να εφοδιαστεί με δομή άλγεβρας Lie ισομορφικής με την  $\mathfrak{so}(n)$ : Πράγματι, για  $U, V \in \Lambda^2 T^*M$ , ορίζουμε την αγκύλη Lie ως

$$[U, V]_{ij} := g^{kl}(U_{ik}V_{lj} - V_{ik}U_{lj}).$$

Σε ορθοκανονικό πεδίο πλαισίων  $\{e_i\}$ , κάθε 2-μορφή  $U$  μπορεί να ταυτιστεί με ένα αντισυμμετρικό πίνακα  $(U_{ij})$  και άρα ο παραπάνω τύπος θα αντιστοιχεί στην

$$[U, V]_{ij} = (UV - VU)_{ij}.$$

Προκύπτει με αυτό τον τρόπο ένας ισομορφισμός αλγεβρών Lie μεταξύ των  $\mathfrak{g} := (\Lambda^2 T_x^*M, [\cdot, \cdot])$  και  $\mathfrak{so}(n)$  για κάθε  $x \in M$ . Εφοδιάζουμε την  $\mathfrak{g}$  με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle U, V \rangle := g^{ik}g^{jl}U_{ij}V_{kl}.$$

Τότε η παραπάνω κατασκευή μπορεί να εφαρμοστεί και ισχύει το ακόλουθο:

**Λήμμα 4.2.6.** *Αν  $(e^i)$  είναι μία βάση της  $T^*M$  τότε*

$$(Rm)_{(ij)(kl)}^\# = R_{pquv}R_{rswx}C_{(ij)}^{(pq)(rs)}C_{(kl)}^{(uv)(wx)} = 2(B_{ikjl} - B_{iljk}).$$

*Απόδειξη.* Έχουμε ορίσει  $Rm_{(pq)(rs)} = R_{pqrs}$ . Συνεπώς

$$\begin{aligned} (Rm)_{(ij)(kl)}^\# &= (Rm)_{(ij)(kl)}^\# \\ &= C_{(ij)}^{(pq)(rs)}C_{(kl)}^{(uv)(wx)}Rm_{(pq)(uv)}Rm_{(rs)(wx)} \\ &= C_{(ij)}^{(pq)(rs)}C_{(kl)}^{(uv)(wx)}Rm_{pquv}Rm_{rswx}. \end{aligned}$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τις σταθερές δομές. Έστω  $(e^i)$  μία βάση της  $T^*M$ .

$$e^p \wedge e^q = \frac{1}{2}(e^p \otimes e^q - e^q \otimes e^p) = \sum_{a,b} \frac{1}{2}(\delta_a^p \delta_b^q - \delta_a^q \delta_b^p)(e^a \otimes e^b).$$

Τότε

$$\begin{aligned} C_{(ij)}^{(pq)(rs)} &= [e^p \wedge e^q, e^r \wedge e^s]_{ij} \\ &= \frac{1}{4}g^{kl}((\delta_i^p \delta_k^q - \delta_i^q \delta_k^p)(\delta_l^r \delta_j^s - \delta_l^s \delta_j^r) - (\delta_i^r \delta_k^s - \delta_i^s \delta_k^r)(\delta_l^p \delta_j^q - \delta_l^q \delta_j^p)) \\ &= \frac{1}{4}(g^{kl}\delta_i^p \delta_k^q \delta_l^r \delta_j^s - g^{kl}\delta_i^p \delta_k^q \delta_l^s \delta_j^r - g^{kl}\delta_i^q \delta_k^p \delta_l^r \delta_j^s + g^{kl}\delta_i^q \delta_k^p \delta_l^s \delta_j^r \\ &\quad - g^{kl}\delta_i^r \delta_k^s \delta_l^p \delta_j^q + g^{kl}\delta_i^r \delta_k^s \delta_l^q \delta_j^p + g^{kl}\delta_i^s \delta_k^r \delta_l^p \delta_j^q - g^{kl}\delta_i^s \delta_k^r \delta_l^q \delta_j^p) \\ &= \frac{1}{4}(g^{qr}\delta_i^p \delta_j^s - g^{qs}\delta_i^p \delta_j^r - g^{pr}\delta_i^q \delta_j^s + g^{ps}\delta_i^q \delta_j^r \\ &\quad - g^{sr}\delta_i^r \delta_j^q + g^{sq}\delta_i^r \delta_j^p + g^{rp}\delta_i^s \delta_j^q - g^{rq}\delta_i^s \delta_j^p) \\ &= \frac{1}{4}(g^{qr}(\delta_i^p \delta_j^s - \delta_i^s \delta_j^p) + g^{qs}(\delta_i^r \delta_j^p - \delta_i^p \delta_j^r) \\ &\quad + g^{pr}(\delta_i^s \delta_j^q - \delta_i^q \delta_j^s) + g^{ps}(\delta_i^q \delta_j^r - \delta_i^r \delta_j^q)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{pqun} C_{(ij)}^{(pq)(rs)} &= \frac{1}{4} R_{pqun} (g^{qr} (\delta_i^p \delta_j^s - \delta_i^s \delta_j^p) + g^{qs} (\delta_i^r \delta_j^p - \delta_i^p \delta_j^r) \\
&\quad + g^{pr} (\delta_i^s \delta_j^q - \delta_i^q \delta_j^s) + g^{ps} (\delta_i^q \delta_j^r - \delta_i^r \delta_j^q)) \\
&= \frac{1}{2} R_{pqun} (g^{qr} (\delta_i^p \delta_j^s - \delta_i^s \delta_j^p) + g^{ps} (\delta_i^q \delta_j^r - \delta_i^r \delta_j^q)),
\end{aligned}$$

και όμοια

$$R_{rswn} C_{(kl)}^{(uv)(wx)} = \frac{1}{2} R_{rswn} (g^{vw} (\delta_k^u \delta_l^x - \delta_k^x \delta_l^u) + g^{ux} (\delta_k^v \delta_l^w - \delta_k^w \delta_l^v)).$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
&R_{pqun} R_{rswn} C_{(ij)}^{(pq)(rs)} C_{(kl)}^{(uv)(wx)} \\
&= \frac{1}{4} R_{pqun} R_{rswn} (g^{qr} (\delta_i^p \delta_j^s - \delta_i^s \delta_j^p) + g^{ps} (\delta_i^q \delta_j^r - \delta_i^r \delta_j^q)) (g^{vw} (\delta_k^u \delta_l^x - \delta_k^x \delta_l^u) + g^{ux} (\delta_k^v \delta_l^w - \delta_k^w \delta_l^v)) \\
&= R_{pqun} R_{rswn} g^{qr} (\delta_i^p \delta_j^s - \delta_i^s \delta_j^p) g^{vw} (\delta_k^u \delta_l^x - \delta_k^x \delta_l^u) \\
&= -g^{vw} R_{pqun} g^{qr} R_{wxrs} (\delta_i^p \delta_j^s - \delta_i^s \delta_j^p) (\delta_k^u \delta_l^x - \delta_k^x \delta_l^u) \\
&= -R_{pqu}^w R_{wxs}^q (\delta_i^p \delta_j^s - \delta_i^s \delta_j^p) (\delta_k^u \delta_l^x - \delta_k^x \delta_l^u) \\
&= R_{iqk}^w R_{lwj}^q - R_{iqk}^w R_{kwj}^q - R_{jqk}^w R_{lwi}^q + R_{jqk}^w R_{kwl}^q \\
&= -R_{lwi}^q R_{jqk}^w + R_{kwl}^q R_{jqk}^w + R_{lwj}^q R_{iqk}^w - R_{kwj}^q R_{iqk}^w.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$B_{ijkl} = g^{pr} g^{qs} R_{piqj} R_{rksl} = R_{pij}^s R_{slk}^p = R_{ipj}^s R_{lsk}^p.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
&-R_{lwi}^q R_{jqk}^w + R_{kwl}^q R_{jqk}^w + R_{lwj}^q R_{iqk}^w - R_{kwj}^q R_{iqk}^w \\
&= -B_{jkil} + B_{jlik} + B_{ikjl} - B_{iljk} = 2(B_{ikjl} - B_{iljk}).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$R_{pqun} R_{rswn} C_{(ij)}^{(pq)(rs)} C_{(kl)}^{(uv)(wx)} = 2(B_{ikjl} - B_{iljk}).$$

□

**Η θετική καμπυλότητα Riemann διατηρείται.** Έχουμε λοιπόν δείξει το εξής:

**Θεώρημα 4.2.6.** Αν  $g(t)$  είναι λύση της ροής Ricci, η καμπυλότητα  $i^*Rm$  όπως ορίστηκε στην (4.15), ικανοποιεί την

$$\frac{\partial}{\partial t} (i^*Rm) = \Delta_D i^*Rm + i^*Rm^2 + i^*Rm^\sharp.$$

Από το λήμμα (4.2.5) και επειδή προφανώς  $i^*Rm^2 > 0$ , έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 4.2.3.** Αν  $(M^n, g(t))$  είναι λύση της ροής Ricci της οποίας ο τελεστής καμπυλότητας είναι θετικός αρχικά, τότε η συνθήκη αυτή διατηρείται καθ'όλη τη διάρκεια ύπαρξης της λύσης.



## Κεφάλαιο 5

# Το θεώρημα του Hamilton

Περνάμε τώρα στο βασικό αντικείμενο της εργασίας το οποίο είναι η παρουσίαση της απόδειξης του παρακάτω θεωρήματος του Hamilton.

**Θεώρημα 5.0.7.** Έστω  $(M^3, g_0)$  μία κλειστή πολλαπλότητα Riemann διάστασης 3 με θετική καμπυλότητα Ricci. Τότε υπάρχει μοναδική λύση  $g(t)$  της νορμαρισμένης ροής Ricci με  $g(0) = g_0$ , ορισμένη στο  $[0, \infty)$ , με τις  $g(t)$  να συγκλίνουν, καθώς  $t \rightarrow \infty$ , εκθετικά γρήγορα σε κάθε  $C^k$ -νόρμα, σε μία μετρική  $g_\infty$  σταθερής, θετικής καμπυλότητας διατομής.

### 5.1 Υπαρξη και μοναδικότητα λύσης της ροής Ricci

Για να έχει νόημα να μιλάμε για λύση της ροής Ricci πρέπει αρχικά να δείξουμε πως αυτή υπάρχει τουλάχιστον για κάποιο "μικρό" χρονικό διάστημα. Το σύστημα του οποίου την ύπαρξη λύσης θέλουμε να δείξουμε είναι το

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} g(t) &= -2\text{Rc}(g(t)) \\ g(0) &= g_0.\end{aligned}$$

Εξετάζουμε αρχικά αν το σύστημα είναι παραβολικό ώστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα (3.1.1).

Η γραμμικοποίηση του τανυστή Ricci στην  $g_0$  είναι:  $D[\text{Rc}] : \Gamma(\mathcal{S}^2 T^*M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}^2 T^*M)$ , με

$$D[\text{Rc}](h)_{ij} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \text{Rc}(g_{ij}(t)),$$

όπου  $h_{ik} = \partial_t g_{ik}$ .

**Λήμμα 5.1.1.** Η γραμμικοποίηση του τανυστή Ricci δίνεται από τον τύπο

$$D[\text{Rc}](h)_{ij} = \frac{1}{2} g^{pq} (\nabla_q \nabla_i h_{jp} + \nabla_q \nabla_j h_{ip} - \nabla_q \nabla_p h_{ij} - \nabla_i \nabla_j h_{qp}).$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την (2.8).  $\square$

Για να ελέγξουμε αν το σύστημα είναι ισχυρά παραβολικό, πρέπει να εξετάσουμε το κύριο σύμβολό του, το οποίο και υπολογίζεται εύκολα από τη γραμμικοποίηση.

**Λήμμα 5.1.2.** Το κύριο σύμβολο του διαφορικού τελεστή  $-2Rc$  (ως συνάρτηση της μετρικής  $g$ ), στην κατεύθυνση ενός  $\phi \in \Gamma(T^*M)$ , είναι

$$\hat{\sigma}[-2Rc](\phi)(h)_{ij} = -g^{pq}(\phi_q \phi_i h_{jp} + \phi_q \phi_j h_{ip} - \phi_q \phi_p h_{ij} - \phi_i \phi_j h_{qp})$$

Η ροή Ricci θα είναι λοιπόν ισχυρά παραβολική αν υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε για κάθε  $\phi \in T^*M$  και  $h_{ij} \neq 0$ ,

$$\langle \hat{\sigma}[-2Rc](\phi)(h), h \rangle > \delta |\phi|^2 |h|^2,$$

ή σύμφωνα με το λήμμα (5.1.2), αν

$$g^{pq}(\phi_q \phi_i h_{jp} + \phi_q \phi_j h_{ip} - \phi_q \phi_p h_{ij} - \phi_i \phi_j h_{qp}) h^{ij} > \delta \phi_k \phi^k h_{rs} h^{rs}.$$

Όμως, επιλέγοντας  $h_{ij} = \phi_i \phi_j$  είναι άμεσο πως το αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας μηδενίζεται. Η ροή Ricci λοιπόν δεν είναι ισχυρά παραβολική.

Παρ' όλα αυτά ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.1.1.** Αν  $(M, g_0)$  είναι συμπαγής πολλαπλότητα Riemann, τότε υπάρχει μοναδική λύση  $g(t)$  της ροής Ricci για  $t \in [0, \varepsilon]$  για κάποιο  $\varepsilon > 0$ , όπου  $g(0) = g_0$ .

Για την απόδειξη θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο του Dennis DeTurck ο οποίος έδειξε πως μπορούμε να τροποποιήσουμε τη ροή Ricci με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνει παραβολική. Αρχικά λοιπόν ξαναγράφουμε τη γραμμικοποίηση του τανυστή Ricci έτσι ώστε να φαίνεται ποιοί όροι είναι εκείνοι που τον καθιστούν μη παραβολικό.

**Λήμμα 5.1.3.** Η γραμμικοποίηση του  $-2Rc$  είναι

$$D[-2Rc](h)_{ij} = g^{pq} \nabla_p \nabla_q h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i + S_{ij},$$

όπου

$$V_i = g^{pq} \left( \frac{1}{2} \nabla_i h_{pq} - \nabla_q h_{pi} \right) \quad \text{και}$$

$$S_{ij} = g^{pq} (2R_{qij}^r h_{rp} - R_{ip} h_{jq} - R_{jp} h_{iq}).$$

**Απόδειξη.** Από το λήμμα (4.1.1) έχουμε

$$\begin{aligned} D[-2Rc](h)_{ij} &= g^{pq} (\nabla_q \nabla_p h_{ij} + \nabla_i \nabla_j h_{qp} - \nabla_q \nabla_i h_{jp} - \nabla_q \nabla_j h_{ip}) \\ &= g^{pq} (\nabla_q \nabla_p h_{ij} + \nabla_i \nabla_j h_{qp} - (\nabla_i \nabla_q h_{jp} - R_{qij}^r h_{rp} - R_{qip}^r h_{jr}) \\ &\quad - (\nabla_j \nabla_q h_{ip} - R_{qji}^r h_{rp} - R_{qjp}^r h_{ir})) \\ &= g^{pq} \nabla_p \nabla_q h_{ij} + g^{pq} (\nabla_i (\frac{1}{2} \nabla_j h_{pq} - \nabla_q h_{jp})) + g^{pq} (\nabla_j (\frac{1}{2} \nabla_i h_{pq} - \nabla_q h_{ip})) \\ &\quad + g^{pq} (R_{qij}^r h_{rp} + R_{qip}^r h_{jr} + R_{qji}^r h_{rp} + R_{qjp}^r h_{ir}) \\ &= g^{pq} \nabla_p \nabla_q h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i \\ &\quad + g^{pq} g^{kr} (R_{qikj} h_{rp} + R_{qjki} h_{rp}) + g^{pq} g^{kr} (R_{qikp} h_{jr} + R_{qjpk} h_{ir}) \\ &= g^{pq} \nabla_p \nabla_q h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i \\ &\quad + g^{pq} g^{kr} (R_{qikj} h_{rp} + R_{kijq} h_{rp}) + g^{pq} g^{kr} (-R_{qipk} h_{jr} - R_{qjpk} h_{ir}) \\ &= \Delta h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i + g^{pq} g^{kr} 2R_{qikj} h_{rp} - g^{kr} (R_{ik} h_{jr} + R_{jk} h_{ir}) \\ &= \Delta h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i + g^{pq} (2R_{qij}^r h_{rp} - R_{ip} h_{jq} - R_{jp} h_{iq}). \end{aligned}$$

□

Οι όροι του  $S_{ij}$ , ως χαμηλότερης τάξης ως προς  $h$ , δεν συνεισφέρουν στο κύριο σύμβολο. Η Λαπλασιανή δεν δημιουργεί πρόβλημα αφού έχει αυστηρά θετικό κύριο σύμβολο ενώ οι όροι που περιέχουν το  $V$  είναι αυτοί που κάνουν τη ροή μη παραβολική. Για να γίνει το σύστημα παραβολικό θα πρέπει να εισάγουμε κάποια (χρονικά εξαρτώμενη) αναπαραμέτρηση. Αναζητούμε λοιπόν ένα σύστημα

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = P(g_t), \quad (5.1)$$

το οποίο είναι παραβολικό, καθώς και χρονικά εξαρτώμενες αμφιδιαφορίσεις  $\phi_t : M \rightarrow M$  με  $\phi_0 = \text{id}_M$ , ώστε η μετρική

$$\bar{g}_t = \phi_t^* g_t$$

να αποτελεί λύση της ροής Ricci.

Για τη μετρική αυτή θα ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}_t &= \frac{\partial}{\partial t} \phi_t^* g_t = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \phi_{t+s}^* g_{t+s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi_{t+s}^* g_{t+s} - \phi_{t+s}^* g_t + \phi_{t+s}^* g_t - \phi_t^* g_t}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \phi_{t+s}^* \left( \frac{g_{t+s} - g_t}{s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\phi_{t+s}^* g_t - \phi_t^* g_t}{s} \\ &= \phi_t^* \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g_{t+s} + \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \phi_{t+s}^* g_t \\ &= \phi_t^* P(g_t) + \phi_t^* \mathcal{L}_{\frac{\partial \phi_t}{\partial t}} g_t. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε τα  $\phi_t$  ώστε να ικανοποιούν την

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_t(p) &= W(t, \phi_t(p)) \\ \phi_0 &= \text{id} \end{aligned} \quad (5.2)$$

για κάποιο διανυσματικό πεδίο  $W(t)$  εξαρτώμενο από το χρόνο. Το σύστημα αυτό έχει λύση για όσο υπάρχει το  $W(t)$  (βλ. [1] Lem. 3.15), αφού η  $M$  είναι συμπαγής. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην εύρεση ενός διαφορικού τελεστή  $P$  ώστε το σύστημα (4.1) να είναι ισχυρά παραβολικό και ενός χρονικά εξαρτώμενου διανυσματικού πεδίου  $W(t)$ , ώστε αν ορίσουμε μία μονοπαραμετρική οικογένεια αμφιδιαφορίσεων που να ικανοποιεί την (4.2), τότε

$$\phi_t^* P(g_t) + \phi_t^* \mathcal{L}_{W(t)} g_t = -2\text{Rc}(\phi_t^* g_t) = -2\phi_t^* \text{Rc}(g_t).$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με

$$P(g_t) = -2\text{Rc}(g_t) - \mathcal{L}_{W(t)} g_t.$$

Γνωρίζοντας ότι  $(\mathcal{L}_W g_t)_{ij} = \nabla_i W_j + \nabla_j W_i$ , από το λήμμα (4.1.3) έχουμε

$$D[P](h)_{ij} = g^{pq} \nabla_p \nabla_q h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i + S_{ij} \quad (5.3)$$

$$- D[\mathcal{L}_{W(t)}](h)_{ij}. \quad (5.4)$$

Είδαμε ότι ο  $S_{ij}$  δεν παίζει ρόλο στο κύριο σύμβολο ενώ ο πρώτος όρος δεν δημιουργεί πρόβλημα. Αυτό που θέλουμε είναι να διαλέξουμε το  $W(t)$  έτσι

ώστε οι όροι της (4.3) που δημιουργούν πρόβλημα να αναιρεθούν από αντίστοιχους όρους της (4.4). Αυτό θα συμβεί αν η γραμμικοποίηση του  $W_i$  είναι ίδια με αυτή του  $V_i$ , (υπενθυμίζουμε ότι όσο αφορά το κύριο σύμβολο, η συναλλοίωτη παράγωγος  $\nabla_i$  είναι ίδια με την παράγωγο ως προς συντεταγμένες  $\partial_t$ ). Άρα αν το κύριο σύμβολο της γραμμικοποίησης του  $V_i$  είναι ίδιο με το αντίστοιχο του  $W_i$ , το ίδιο θα ισχύει και για τα  $\nabla_i W_j, \nabla_i V_j$ .

Ο  $V$  ορίστηκε ως

$$\begin{aligned} V_i &= g^{pq} \left( \frac{1}{2} \nabla_i h_{pq} - \nabla_p h_{iq} \right) \\ &= -\frac{1}{2} g^{pq} (\nabla_p h_{iq} + \nabla_q h_{ip} - \nabla_i h_{pq}). \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$D[\Gamma_{ij}^k](h) = \frac{\partial}{\partial t} (\Gamma_{ij}^k(g(t))) = \frac{1}{2} g^{kl} (\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}),$$

όπου  $h_{ij} = \partial_t g_{ij}$ . Εξαιτίας της ομοιότητας με το  $V$ , μπορούμε να δοκιμάσουμε

$$W_i = -g^{pq} g_{ij} \Gamma_{pq}^j.$$

Η έκφραση αυτή όμως εξαρτάται από τις συντεταγμένες στις οποίες δουλεύουμε αφού τα σύμβολα του Christoffel δεν είναι τανυστές. Η διαφορά τους όμως είναι. Σταθεροποιούμε λοιπόν μία συνοχή με αντίστοιχα σύμβολα Christoffel  $\tilde{\Gamma}_{pq}^k$  και ορίζουμε

$$W_l = -g^{pq} g_{kl} (\Gamma_{pq}^k - \tilde{\Gamma}_{pq}^k). \quad (5.5)$$

Η σταθερή συνοχή δεν συνεισφέρει στο κύριο σύμβολο του  $W$  αφού είναι ανεξάρτητη της μετρικής. Αυτό λοιπόν θα είναι ίδιο με εκείνο του  $V$  και οι προβληματικοί όροι απαλοίζονται.

Το κύριο σύμβολο της γραμμικοποίησης του  $P$  είναι

$$\sigma(D[P])(\phi)(h)_{ij} = g^{pq} \phi_p \phi_q h_{ij}.$$

Άρα

$$\langle \sigma(D[P])(\phi)(h), h \rangle = |\phi|^2 |h|^2.$$

Συνεπώς το σύστημα που περιγράφει τη ροή Ricci-DeTurck η οποία ορίζεται από την

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = P(g) = -2R_{ij} + \nabla_i W_j + \nabla_j W_i,$$

είναι ισχυρά παραβολική και άρα έχει λύση για κάποιο χρονικό διάστημα. Όσο διαρκεί η λύση αυτή υπάρχουν και τα  $W(t)$  και συνεπώς από το σύστημα (4.2) υπάρχουν και οι  $\phi_t$ . Από τους παραπάνω υπολογισμούς, η μετρική

$$\bar{g}_t = \phi_t^* g_t$$

είναι λύση της ροής Ricci.

Ερχόμαστε τώρα στη μοναδικότητα. Αρκεί να δείξουμε ότι μία λύση της ροής Ricci - DeTurck μπορεί να παραχθεί από μία λύση της ροής Ricci μετά από αναπαραμέτρηση η οποία ορίζεται μέσω της ροής θερμότητας αρμονικής συνάρτησης.



Ξεκινάμε με τους απαραίτητους ορισμούς. Έστω  $(M^n, g)$  και  $(N^m, h)$  πολλαπλότητες Riemann και  $f : M \rightarrow N$  ομαλή απεικόνιση. Για την παράγωγο της  $f$  έχουμε

$$df = f_* \in \Gamma(T^*M \otimes f^*TN).$$

Σε τοπικές συντεταγμένες  $(x^i)$  για τη  $M$  και  $(y^a)$  στη  $N$ , συμβολίζουμε τη συνοχή Riemann της  $g$  ως  $\Gamma(g)_{ij}^k$  και την αντίστοιχη της  $h$  ως  $\Gamma(h)_{\alpha\beta}^\gamma$ . Τότε

$$df = (df)_j^\alpha (dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} (dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}).$$

Η επαγόμενη συνοχή

$$\nabla : \Gamma(T^*M \otimes f^*TN) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes f^*TN)$$

ορίζεται ως

$$\begin{aligned} (f^*\Gamma)_{i\beta}^\gamma &= \nabla_i^f(\partial_\beta)_f = \nabla_{f_*(\partial_i)}\partial_\beta \\ &= \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \nabla_{\partial_\alpha} \partial_\beta = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} (\Gamma_h \circ f)_{\alpha\beta}^\gamma. \end{aligned}$$

Έτσι

$$\nabla(df) = \sum_{i,j,\alpha} (\nabla df)_{ij}^\alpha dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

όπου

$$\begin{aligned} (\nabla df)_{ij}^\alpha &\equiv \nabla_i d_j f^\alpha = \partial_i (df(\partial_j, dx^\alpha)) - df(\nabla_i \partial_j, dx^\alpha) - df(\partial_j, \nabla_i^f dx^\alpha) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \right) - (\Gamma_g)_{ij}^k \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} \right) - df(\partial_j, -(f^*\Gamma)_{i\gamma}^\alpha dx^\gamma) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \right) - (\Gamma_g)_{ij}^k \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} (\Gamma_h \circ f)_{\beta\gamma}^\alpha \left( \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j} \right). \end{aligned}$$

Η Λαπλασιανή αρμονικής συνάρτησης ως προς τις μετρικές  $g$  και  $h$  στα  $M$  και  $N$  αντίστοιχα, ορίζεται ως το ίχνος

$$\Delta_{g,h} f := \text{tr}_g(\nabla(df)) \in \Gamma(f^*TN),$$

δηλαδή

$$\Delta_{g,h} f = (g^{ij} \nabla_i d_j f^\gamma) \frac{\partial}{\partial y^\gamma}.$$

Σε συντεταγμένες,

$$(\Delta_{g,h} f)^\gamma = g^{ij} \left[ \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - (\Gamma_g)_{ij}^k \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^k} + ((\Gamma_h)_{\alpha\beta}^\gamma \circ f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} \right]. \quad (5.6)$$

Δοθείσης  $f_0 : M \rightarrow N$ , η ροή αρμονικής συνάρτησης η οποία εισήχθει από τους Eells και Sampson είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \Delta_{g,h} f, \\ f(0) &= f_0. \end{aligned}$$

Πρόκειται για παραβολική εξίσωση και άρα έχει λύση για "μικρό" χρονικό διάστημα.

Όταν η  $f$  είναι αμφιδιαφόριση, η Λαπλασιανή  $\Delta_{g,h} f$  μπορεί να γραφεί με ένα χρήσιμο τρόπο.

**Λήμμα 5.1.4.** Έστω  $f : (M^n, g) \rightarrow (N^m, h)$  αμφιδιαφόριση μεταξύ πολλαπλοτήτων Riemann. Τότε

$$(\Delta_{g,h} f)^\gamma(x) = [(f^{-1})^* g]^{\alpha\beta} (-\Gamma((f^{-1})^* g)_{\alpha\beta}^\gamma + \Gamma(h)_{\alpha\beta}^\gamma)(f(x)).$$

*Απόδειξη.* Υπολογίζουμε αρχικά τα σύμβολα του Christoffel της ανακλήσης μιας μετρικής σε τοπικές συντεταγμένες  $(x^i)$  της  $M$  και  $(y^\alpha)$  της  $N$ . Έστω  $\phi : M \rightarrow N$  αμφιδιαφόριση. Τότε αν  $k$  είναι μετρική στη  $N$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k(\phi^* k) &= \nabla(\phi^* k)_{\partial_i} \partial_j \\ &= (\phi^{-1})_*(\nabla(k)_{\phi_*(\partial_i)} \phi_*(\partial_j)) \\ &= (\phi^{-1})_*(\nabla(k)_{\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}} (\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta})) \\ &= (\phi^{-1})_*(\frac{\partial^2 \phi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} + \Gamma(k)_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\gamma}) \\ &= (\frac{\partial^2 \phi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial(\phi^{-1})^k}{\partial y^\beta} + \Gamma(k)_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial(\phi^{-1})^k}{\partial y^\gamma}) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Έτσι

$$\Gamma_{ij}^k(\phi^* k) \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma(k)_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j}.$$

Εφόσον

$$k^{\alpha\beta} = (\phi^* k)^{ij} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j},$$

πολλαπλασιάζοντας με  $(\phi^* k)^{ij}$  έχουμε

$$-k^{\alpha\beta} \Gamma(k)_{\alpha\beta}^\gamma = (\phi^* k)^{ij} (\frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k(\phi^* k) \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^k}). \quad (5.7)$$

Θέτοντας  $\phi = f$  και  $k = (f^{-1})^* g$  στην (4.7) και αντικαθιστώντας στην (4.6) παίρνουμε

$$(\Delta f)^\gamma = ((f^{-1})^* g)^{\alpha\beta} [-\Gamma((f^{-1})^* g)_{\alpha\beta}^\gamma + \Gamma(h)_{\alpha\beta}^\gamma],$$

από όπου το λήμμα έπεται.  $\square$

Οι αμφιδιαφορίσεις  $\phi_t$  όπως ορίστηκαν στην (4.2) και με βάση την (4.5) ικανοποιούν την

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t = -W \circ \phi = g^{pq} (-\Gamma_{pq}^k + \tilde{\Gamma}_{pq}^k).$$

Αν  $\tilde{g}$  είναι η συνοχή Riemann της μετρικής  $\tilde{g}$ , τότε από το προηγούμενο λήμμα για την  $g_t = \phi_t^* \tilde{g}_t$  έχουμε

$$g^{pq} (-\Gamma_{pq}^k + \tilde{\Gamma}_{pq}^k) = ((\phi_t^{-1})^* \tilde{g})^{pq} (-\Gamma_{pq}^k + \tilde{\Gamma}_{pq}^k) = \Delta_{\tilde{g}(t), \tilde{g}} \phi_t.$$

Άρα

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t = \Delta_{\tilde{g}(t), \tilde{g}} \phi_t.$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι οι αμφιδιαφορίσεις  $\phi_t$  της ροής Ricci-DeTurck ικανοποιούν τη ροή θερμότητας αρμονικής συνάρτησης:

**Λήμμα 5.1.5.** Οι αμφιδιαφορίσεις  $\phi_t$  που χρησιμοποιήθηκαν ώστε να πάρουμε τη λύση  $\bar{g}(t)$  της ροής Ricci από τη λύση  $g(t)$  της ροής Ricci-DeTurck, ικανοποιούν τη ροή αρμονικής συνάρτησης ως προς τις μετρικές  $\bar{g}(t)$  και  $\bar{g}$ .

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η λύση της ροής Ricci καθορίζεται μοναδικά από τα αρχικά δεδομένα. Έστω  $\bar{g}_1, \bar{g}_2$  λύσεις της ροής Ricci στο  $M \times [0, \varepsilon)$ . Αν  $(\phi_1)_t, (\phi_2)_t$  λύσεις της ροής αρμονικής συνάρτησης ως προς τις μετρικές  $\bar{g}_1, \bar{g}$  και  $\bar{g}_2, \bar{g}$  αντίστοιχα, τότε υπολογίζοντας είναι άμεσο ότι οι μετρικές

$$g_1(t) := ((\phi_1)_t)_* \bar{g}_1(t) \text{ και } g_2(t) := ((\phi_2)_t)_* \bar{g}_2(t)$$

είναι και οι δύο λύσεις της ροής Ricci-DeTurck. Επειδή  $g_1(0) = g_2(0)$  και η ροή αυτή έχει μοναδική λύση, ισχύει  $g_1(t) = g_2(t)$  για όσο διάστημα διαρκούν και οι δύο. Αλλά τότε οι  $(\phi_1)_t, (\phi_2)_t$  είναι και οι δύο λύσεις της σ.δ.ε.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_i)_t(p) = W(t, (\phi_i)_t(p)) \quad i = 1, 2$$

που προέρχεται από το ίδιο διανυσματικό πεδίο

$$W = -g^{pq}(\Gamma_{pq}^k - \tilde{\Gamma}_{pq}^k).$$

Συνεπώς,  $(\phi_1)_t = (\phi_2)_t$  για όσο διάστημα ορίζονται και οι δύο, κάτι που σημαίνει ιδιαίτερα ότι

$$\bar{g}_1(t) = (\phi_1)_t^* g_1(t) = (\phi_2)_t^* g_2(t) = \bar{g}_2(t).$$

## 5.2 Η καμπυλότητα γίνεται μη φραγμένη

Στόχος στην ενότητα αυτή είναι να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.2.1.** Αν  $g_0$  είναι ομαλή μετρική σε μία συμπαγή πολλαπλότητα Riemann  $M$ , η ροή Ricci με  $g(0) = g_0$  έχει μοναδική λύση για μέγιστο χρονικό διάστημα  $[0, T)$ , όπου  $T \leq \infty$ . Αν  $T < \infty$ , τότε

$$\lim_{t \rightarrow T} \left( \sup_{x \in M} |Rm(x, t)| \right) = \infty.$$

Η ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης αποδείχθηκε στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο. Μένει να δειχθεί ότι αν  $T < \infty$  (στην περίπτωση για την οποία ενδιαφερόμαστε δηλαδή, σύμφωνα με το πόρισμα (3.2.1)), η καμπυλότητα απειρίζεται. Για την απόδειξη, θα υποθέσουμε ότι  $|Rm| \leq K$  για κάποια σταθερά  $K$  και θα δείξουμε πως τότε η μετρική  $g(t)$  συγκλίνει ομαλά σε μία ομαλή μετρική  $g(T)$ . Αν ισχύει κάτι τέτοιο, από το θεώρημα (4.1.1), με αρχική μετρική την  $g(T)$ , μπορούμε να επεκτείνουμε τη λύση πέρα από το χρόνο  $T$  γεγονός που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι η  $T$  είναι ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης της λύσης.

### 5.2.1 Ύπαρξη και συνέχεια οριακής μετρικής

Ένα βασικό στοιχείο της απόδειξης είναι το ακόλουθο θεώρημα και το πόρισμά του σύμφωνα με τα οποία η οριακή μετρική στην οποία αναφερθήκαμε υπάρχει και είναι συνεχής.

Λέμε πως μία οικογένεια από μετρικές  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$  είναι ομοιόμορφα ισοδύναμες με την αρχική μετρική  $g(0)$ , αν υπάρχει σταθερά  $C < \infty$  ώστε  $\frac{1}{C}g(x, 0) \leq g(x, t) \leq Cg(x, 0)$  για κάθε  $x \in M$  και  $t \in [0, T)$ .

**Θεώρημα 5.2.2.** Έστω  $M$  κλειστή πολλαπλότητα και  $g(t)$  ομαλή μετρική στη  $M$ , εξαρτώμενη από το χρόνο, που ορίζεται στο διάστημα  $[0, T)$ . Αν υπάρχει σταθερά  $C < \infty$  τέτοια, ώστε

$$\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right|_{g(t)} dt < C \quad (5.8)$$

για όλα τα  $x \in M$ , τότε οι μετρικές  $g(t)$  συγκλίνουν ομοιόμορφα καθώς  $t \rightarrow T$  σε μία συνεχή μετρική  $g(T)$  με

$$e^{-C}g(x, 0) \leq g(x, T) \leq e^Cg(x, 0).$$

Άρα η  $g(T)$  είναι ομοιόμορφα ισοδύναμη με την  $g(0)$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $x \in M$ ,  $t_0 \in [0, T)$ ,  $V \in T_x M$ . Τότε

$$\begin{aligned} \left| \log \left( \frac{g_{(x, t_0)}(V, V)}{g_{(x, 0)}(V, V)} \right) \right| &= \left| \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} [\log g_{(x, t)}(V, V)] dt \right| \\ &= \left| \int_0^{t_0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} g_{(x, t)}(V, V)}{g_{(x, t)}(V, V)} dt \right| \\ &\leq \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial}{\partial t} g_{(x, t)} \left( \frac{V}{|V|_{g(t)}}, \frac{V}{|V|_{g(t)}} \right) \right| dt \\ &\leq \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right|_{g(t)} dt \\ &\leq C, \end{aligned}$$

αφού  $|A(U, U)| \leq |A|_g$  για κάθε 2-τανυστή  $A$  και μοναδιαίο διάνυσμα  $U$ . Θεωρώντας τώρα το  $\exp$  και στα δύο μέλη, έχουμε

$$e^{-C}g_{(x, 0)}(V, V) \leq g_{(x, t_0)}(V, V) \leq e^Cg_{(x, 0)}(V, V),$$

για κάθε  $V$ . Έτσι

$$e^{-C}g(x, 0) \leq g(x, t_0) \leq e^Cg(x, 0) \quad (5.9)$$

και κατά συνέπεια οι μετρικές  $g(t)$  είναι ομοιόμορφα ισοδύναμες. Άρα

$$\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right|_{g(0)} dt \leq C' \quad (5.10)$$

για κάποιο  $C' > 0$ . Τονίζουμε εδώ τη διαφορά από την (4.8): Η νόρμα που θεωρούμε εδώ είναι ως προς τη σταθερή μετρική  $g(0)$  και όχι την  $g(t)$ .

Ορίζουμε τώρα

$$g(x, T) = g(x, 0) + \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) dt.$$

Το ολοκλήρωμα υπάρχει καθώς οι μετρικές είναι ομαλές και η προς ολοκλήρωση ποσότητα είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη ως προς τη νόρμα που επάγεται από τη  $g(0)$  όπως προκύπτει από την (4.10). Τώρα,

$$|g(x, t) - g(x, T)|_{g(0)} \leq \int_t^T \left| \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right|_{g(0)} dt \rightarrow 0$$

καθώς  $t \rightarrow T$  για κάθε  $x \in M$ . Επειδή η  $M$  είναι συμπαγής, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Έτσι  $g(t) \rightarrow g(T)$  ομοιόμορφα, με αποτέλεσμα η  $g(T)$  να είναι συνεχής. Θεωρώντας τα όρια στην (4.9), μπορούμε να δείξουμε ότι

$$e^{-C} g(x, 0) \leq g(x, T) \leq e^C g(x, 0),$$

και συνεπώς η  $g(T)$  είναι θετικά ορισμένη. Άρα οι μετρικές  $g(t)$  συγκλίνουν ομοιόμορφα σε μία συνεχή μετρική Riemann  $g(T)$  η οποία είναι ομοιόμορφα ισοδύναμη με τη  $g(0)$ .  $\square$

**Πόρισμα 5.2.1.** Έστω  $(M, g(t))$  λύση της ροής Ricci σε μία κλειστή πολλαπλότητα. Αν η  $|Rm|_g$  είναι φραγμένη στο  $[0, T)$ , όπου  $T < \infty$ , τότε η  $g(t)$  συγκλίνει ομοιόμορφα, καθώς  $t \rightarrow T$ , σε μία συνεχή μετρική  $g(T)$  η οποία είναι ομοιόμορφα ισοδύναμη με τη  $g(0)$ .

*Απόδειξη.* Κάθε φράγμα στην  $|Rm|_g$  επάγει ένα φράγμα στην  $|Rc|_g$  και κατά συνέπεια στην  $|\frac{\partial}{\partial t} g|_g$ , μέσω της ροής Ricci. Το ολοκλήρωμα στην (5.8) τότε, είναι ολοκλήρωμα μίας φραγμένης ποσότητας πάνω από ένα πεπερασμένο διάστημα και συνεπώς είναι φραγμένο. Από το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

Δείξαμε λοιπόν την ύπαρξη οριακής μετρικής  $g(T)$  η οποία είναι συνεχής. Για να εφαρμοστεί το θεώρημα (5.1.1) πρέπει να δείξουμε πως είναι και ομαλή και για να γίνει αυτό πρέπει να ελέγξουμε πως οι παράγωγοι της  $g(t)$ , ως προς τυχαίες συντεταγμένες, κοντά στο χρόνο  $T$ , δεν απειρίζονται. Ψαχνουμε λοιπόν για κάποια φράγματα στις ποσότητες αυτές. Το πρώτο βήμα στην εύρεση κατάλληλων τέτοιων φραγμάτων είναι να βρούμε αντίστοιχα φράγματα για τις παραγώγους της καμπυλότητας. Αυτό θα γίνει μέσω των εκτιμήσεων Bernstein-Bando-Shi (BBS), οι οποίες δίνουν φράγματα για τις παραγώγους όταν γνωρίζουμε αντίστοιχα για την ίδια την καμπυλότητα.

## 5.2.2 Ομαλότητα Οριακής Μετρικής

### Εκτιμήσεις Bernstein-Bando-Shi

Θέλουμε να δείξουμε το παρακάτω.

**Θεώρημα 5.2.3.** Έστω  $(M, g(t))$  λύση της ροής Ricci σε μία κλειστή  $n$ -πολλαπλότητα. Τότε για κάθε  $a > 0$  και  $m \in \mathbb{N}$  υπάρχει σταθερά  $C_m$  που εξαρτάται μόνο από τα  $m, n$  και  $\max\{\alpha, 1\}$ , ώστε αν

$$|Rm(x, t)|_{g(t)} \leq K \quad \text{για κάθε } t \in [0, \frac{\alpha}{K}],$$

τότε

$$|\nabla^m Rm(x, t)|_{g(t)} \leq \frac{C_m K}{t^{m/2}} \quad \text{για κάθε } t \in (0, \frac{\alpha}{K}].$$

Για να αποφύγουμε οι εκφράσεις που θα προκύψουν στη συνέχεια, να γίνουν εξαιρετικά πολύπλοκες, υιοθετούμε την παρακάτω σύμβαση ως προς το συμβολισμό: Θα συμβολίζουμε με

$$A \star B,$$

όπου  $A, B$  τανυστές σε μία πολλαπλότητα Riemann, οποιαδήποτε ποσότητα προέρχεται από τους  $A, B$  μέσω μίας εκ των παρακάτω πράξεων:

1. Άθροιση ως προς ζεύγη αντίστοιχων άνω και κάτω δεικτών,
2. συστολή ως προς τη μετρική (σε ζεύγος άνω ή κάτω δεικτών),
3. πολλαπλασιασμό με σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το  $n$  (τη διάσταση της πολλαπλότητας) και τους βαθμούς των  $A, B$ .

Για παράδειγμα η (2.21) σύμφωνα με τα παραπάνω γράφεται

$$\partial_t Rm = \Delta Rm + Rm^{\star 2}, \quad (5.11)$$

όπου για οποιοδήποτε τανυστή  $A$

$$A^{\star k} = A \star A \cdots \star A$$

$k$ -φορές.

Δίνουμε τώρα μερικά αποτελέσματα που θα χρειαστούν στην απόδειξη του θεωρήματος (4.2.3).

**Λήμμα 5.2.1.** *Αν ο τανυστής  $A$  ικανοποιεί την*

$$\frac{\partial}{\partial t} A = \Delta A + F,$$

*κατά τη διάρκεια της ροής Ricci (όπου  $F$  τανυστής ίδιου τύπου με τον  $A$ ), τότε το τετράγωνο της νόρμας του ικανοποιεί την*

$$\frac{\partial}{\partial t} |A|^2 = \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + F \star A + Rc \star A^{\star 2}.$$

*Απόδειξη.* Γράφουμε  $g_t$  για τη μετρική τη χρονική στιγμή  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_t(A, A) &= 2g_t\left(\frac{\partial}{\partial t} A, A\right) + \frac{\partial g_t}{\partial t}(A, A) \\ &= 2g_t(\Delta A + F, A) + Rc \star A^{\star 2} \\ &= \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + F \star A + Rc \star A^{\star 2}, \end{aligned}$$

όπου ο τελευταίος όρος στη δεύτερη γραμμή προέρχεται από την παράγωγο της μετρικής (η οποία είναι  $-2Rc$  για τη ροή Ricci) ενώ έχουμε χρησιμοποιήσει και την ταυτότητα

$$\Delta |A|^2 = 2\langle \Delta A, A \rangle + 2|\nabla A|^2.$$

□

**Λήμμα 5.2.2.** *Αν ο τανυστής  $A$  ικανοποιεί την*

$$\frac{\partial}{\partial t} A = \Delta A + F,$$

*κατά τη διάρκεια της ροής Ricci (όπου  $F$  τανυστής ίδιου τύπου με τον  $A$ ), τότε η συναλλοίωτη παράγωγός του ικανοποιεί την*

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla A = \Delta(\nabla A) + \nabla F + \text{Rm} \star \nabla A + \nabla \text{Rc} \star A.$$

*Απόδειξη.* Από την πρόταση (1.4.2) έχουμε ότι η  $\nabla A$  είναι της μορφής

$$\nabla A = \partial A + f(\Gamma, A),$$

όπου  $f(\Gamma, A)$  είναι έκφραση της μορφής  $\Gamma \star A$ , που εξαρτάται από τον τύπο του τανυστή  $A$ . Επιπλέον, από τη (2.17), έχουμε

$$\partial_t \Gamma = (g^{-1}) \star \nabla \text{Rc}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla A &= \partial_t \partial A + \partial_t f(\Gamma, A) \\ &= \partial \partial_t A + f(\partial_t \Gamma, A) + f(\Gamma, \partial_t A) \\ &= \nabla(\partial_t A) + f(g^{-1} \star \nabla \text{Rc}, A) \text{ (αφού } \partial_t A \text{ είναι ίδιου τύπου τανυστής με τον } A \text{)} \\ &= \nabla(\Delta A + F) + \nabla \text{Rc} \star A \\ &= (\Delta \nabla A + \text{Rm} \star \nabla A + \nabla \text{Rc} \star A) + \nabla F + \nabla \text{Rc} \star A \\ &= \Delta \nabla A + \nabla F + \text{Rm} \star \nabla A + \nabla \text{Rc} \star A. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο

$$\nabla \Delta A - \Delta \nabla A = \text{Rm} \star \nabla A + \nabla \text{Rc} \star A.$$

□

Από την (4.12) τώρα, και τα παραπάνω λήμματα μπορούμε να υπολογίσουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη των παραγώγων της καμπυλότητας.

**Λήμμα 5.2.3.**

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^k \text{Rm} = \Delta \nabla^k \text{Rm} + \sum_{j=0}^k \nabla^j \text{Rm} \star \nabla^{k-j} \text{Rm}. \quad (5.12)$$

*Απόδειξη.* Το λήμμα αποδεικνύεται με επαγωγή. Η (4.12) μας δίνει τη βάση της επαγωγής ( $k=0$ ). Υποθέτουμε την ισχύ του λήμματος για ένα δοθέν  $k$  και εφαρμόζουμε το λήμμα (4.2.2) με  $A = \nabla^k \text{Rm}$  και

$$F = \sum_{j=0}^k \nabla^j \text{Rm} \star \nabla^{k-j} \text{Rm}.$$

Τότε

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \nabla^k Rm = \Delta(\nabla \nabla^k Rm) + \nabla F + Rm \star \nabla(\nabla^k Rm) + \nabla Rc \star \nabla^k Rm.$$

Είναι προφανές πως οι όροι στο δεξιό μέλος της ισότητας αυτής (εκτός τη Λαπλασιανής) είναι της μορφής  $\nabla^i Rm \star \nabla^j Rm$ , όπου  $i+j=k+1$ . Έτσι

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^{k+1} Rm = \Delta \nabla^{k+1} Rm + \sum_{j=0}^{k+1} \nabla^j Rm \star \nabla^{k+1-j} Rm$$

ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα. □

**Λήμμα 5.2.4.** *Το τετράγωνο της νόρμας της κ-οστης συναλλοίωτης παραγώγου του τανυστή καμπυλότητας Riemann ικανοποιεί την*

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k Rm|^2 = \Delta |\nabla^k Rm|^2 - 2|\nabla^{k+1} Rm|^2 + \sum_{j=0}^k \nabla^j Rm \star \nabla^{k-j} Rm \star \nabla^k Rm. \quad (5.13)$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε το λήμμα (4.2.1) με  $A = \nabla^k Rm$  και

$$F = \sum_{j=0}^k \nabla^j Rm \star \nabla^{k-j} Rm,$$

από το αποτέλεσμα του προηγούμενου λήμματος. Τότε

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k Rm|^2 = \Delta |\nabla^k Rm|^2 - 2|\nabla^{k+1} Rm|^2 + F \star \nabla^k Rm + Rc \star (\nabla^k Rm)^{\star 2}.$$

Προφανώς οι όροι στο δεξιό μέλος της ισότητας αυτής (εκτός τη Λαπλασιανής) είναι της μορφής  $\nabla^i Rm \star \nabla^j Rm \star \nabla^k Rm$ , όπου  $i+j=k$  και συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. □

Εφαρμόζουμε τώρα την κατάλληλη αρχή μεγίστου στις εξισώσεις που προέκυψαν στα παραπάνω λήμματα με στόχο να βρούμε φράγματα στις παραγώγους της καμπυλότητας. Τα φράγματα αυτά θα προκύψουν έχοντας υποθέσει πως η ίδια η καμπυλότητα είναι φραγμένη από κάποια σταθερά  $K$ ,  $|Rm| < K$ . Υπάρχουν δύο προβλήματα στην προσπάθεια να εφαρμόσουμε την αρχή του μεγίστου στην (4.13): Κατ'αρχάς δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε αρχικές συνθήκες στις παραγώγους της καμπυλότητας αν το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι κάποια φράγματα στην ίδια την καμπυλότητα και δεύτερον υπάρχουν όροι (οι όροι της άθροισης) τους οποίους δεν γνωρίζουμε πως να ελέγξουμε.

Το πρώτο θα το ξεπεράσουμε βρίσκοντας χρονικά εξαρτώμενα άνω φράγματα στις παραγώγους τα οποία αποκλίνουν στο  $t=0$  (και συνεπώς δίνουν χρήσιμα αποτελέσματα μόνο μετά από αυτή τη χρονική στιγμή), ενώ θα δούμε πως να ξεπεράσουμε το δεύτερο στη διάρκεια της απόδειξης.

*Απόδειξη.* (θεωρήματος 4.2.3) Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο  $m$ . Για  $m=0$  το αποτέλεσμα ισχύει από την υπόθεση με  $C_0 = 1$ . Ας υποθέσουμε ότι ισχύει



και για όλα τα  $p \leq m-1$ . Το αποτέλεσμα του λήμματος (4.2.4) μας λέει ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} |\nabla^m R_m|^2 &= \Delta |\nabla^m R_m|^2 - 2 |\nabla^{m+1} R_m|^2 + \sum_{j=0}^m \nabla^j R_m \star \nabla^{m-j} R_m \star \nabla^m R_m \\
 &\leq \Delta |\nabla^m R_m|^2 - 2 |\nabla^{m+1} R_m|^2 + \sum_{j=0}^m c_{mj} |\nabla^j R_m| \star |\nabla^{m-j} R_m| \star |\nabla^m R_m| \\
 &\leq \Delta |\nabla^m R_m|^2 - 2 |\nabla^{m+1} R_m|^2 + \left( \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj} \frac{C_j}{t^{j/2}} \frac{C_{m-j}}{t^{(m-j)/2}} \right) K^2 |\nabla^m R_m| \\
 &\quad + (c_{m0} + c_{mm}) K |\nabla^m R_m|^2 \\
 &\leq \Delta |\nabla^m R_m|^2 - 2 |\nabla^{m+1} R_m|^2 + C'_m K |\nabla^m R_m|^2 + \frac{C''_m}{t^{m/2}} K^2 |\nabla^m R_m|,
 \end{aligned}$$

για  $t \in (0, \frac{\alpha}{K}]$ , όπου  $C'_m, C''_m$  σταθερές που εξαρτώνται μόνο από τα  $m$  και  $n$ . Χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση για να μεταβούμε από τη δεύτερη στην τρίτη γραμμή. Συμπληρώνοντας το τετράγωνο (ως προς τη μεταβλητή  $|\nabla^m R_m|$ ) στο δεξιό μέλος και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα  $(a+b)^2/2 \leq a^2 + b^2$  παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^m R_m|^2 \leq \Delta |\nabla^m R_m|^2 - 2 |\nabla^{m+1} R_m|^2 + \bar{C}_m K (|\nabla^m R_m|^2 + \frac{K^2}{t^m}) \quad (5.14)$$

για κάποια σταθερά  $\bar{C}_m$ .

Για να βρούμε το επιθυμητό φράγμα λοιπόν πρέπει να βρούμε ένα άνω φράγμα για την  $t^m |\nabla^m R_m|^2$ . Η ποσότητα αυτή έχει προφανώς ένα άνω φράγμα για  $t=0$  αφού ισούται με 0. Για να εφαρμόσουμε λοιπόν την αρχή μεγίστου και να βρούμε το φράγμα που θέλουμε αρκεί να δείξουμε πως οι όροι στο δεξιό μέλος την κάνουν να φθίνει με την πάροδο του χρόνου. Το πρόβλημα που προκύπτει εδώ είναι ότι η ποσότητα αυτή ικανοποιεί την ανισότητα

$$\frac{\partial}{\partial t} t^m |\nabla^m R_m|^2 \leq \Delta (t^m |\nabla^m R_m|^2) - 2 t^m |\nabla^{m+1} R_m|^2 + \quad (5.15)$$

$$+ (\bar{C}_m K t + m) t^{m-1} |\nabla^m R_m|^2 + \bar{C}_m K^3 \quad (5.16)$$

και οι όροι στην (4.16) είναι μη αρνητικοί. Αυτό είναι το δεύτερο πρόβλημα στο οποίο αναφερθήκαμε παραπάνω.

Για να διορθωθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο  $-2 |\nabla^{k+1} R_m|^2$  από το λήμμα (4.2.4). Προσθέτοντας την κατάλληλη ποσότητα από την  $t^{m-1} |\nabla^{m-1} R_m|^2$  (η οποία γνωρίζουμε από τη επαγωγική υπόθεση πως είναι φραγμένη) μπορούμε να διαγράψουμε τους "κακούς" όρους της  $t^m |\nabla^m R_m|^2$ . Κάνοντας κάτι τέτοιο, νέοι "κακοί" όροι θα εισαχθούν και γι' αυτό θα πρέπει να προσθέσουμε την κατάλληλη ποσότητα από την επόμενη παράγωγο κ.ο.κ. Ορίζουμε λοιπόν

$$G = t^m |\nabla^m R_m|^2 + \sum_{j=0}^{m-1} a_{mj} t^j |\nabla^j R_m|^2,$$

όπου οι συντελεστές  $a_{mj}$  θα καθοριστούν σε λίγο με τέτοιο τρόπο ώστε όλοι οι όροι να αναιρούνται.

Από την ανισότητα (4.15) προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G \leq & \Delta G + (\bar{C}_m K t + m) t^{m-1} |\nabla^m R m|^2 + \bar{C}_m K^3 \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} a_{mj} [-2t^j |\nabla^{j+1} R m|^2 + (\bar{C}_j K t + j) t^{j-1} |\nabla^j R m|^2 + \bar{C}_j K^3]. \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν αριθμοί  $D_j$  εξαρτώμενοι μόνο από τα  $j$ , για  $1 \leq j \leq m-1$ , ώστε

$$\bar{C}_j K t^j |\nabla^j R m|^2 + \bar{C}_j K^3 \leq D_j K^3,$$

για όλα τα  $t \in (0, \frac{a}{K}]$ . Συνεπώς

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G \leq & \Delta G + (\bar{C}_m K t + m) t^{m-1} |\nabla^m R m|^2 + \bar{C}_m K^3 \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} a_{mj} [-2t^j |\nabla^{j+1} R m|^2 + j t^{j-1} |\nabla^j R m|^2 + D_j K^3] \\ = & \Delta G + (\bar{C}_m K t + m - 2a_{m,m-1}) t^{m-1} |\nabla^m R m|^2 \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} [j a_{mj} - 2a_{m,j-1}] t^{j-1} |\nabla^j R m|^2 \\ & + \bar{C}_m K^3 + \sum_{j=0}^{m-1} a_{mj} D_j K^3. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε τώρα τα  $a_{mj}$  ώστε να αναιρέσουμε τους ανεπιθύμητους όρους: επιλέγουμε  $a_{m,m-1}$  ώστε

$$0 = \bar{C}_m a + m - 2a_{m,m-1} \geq \bar{C}_m K t + m - 2a_{m,m-1},$$

όπου η ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι δουλεύουμε στο διάστημα  $(0, a/K]$ . Ορίζουμε επίσης  $a_{m,m-2}, a_{m,m-3}, \dots, a_{m0}$  με τη σειρά αυτή, θέτοντας σε κάθε βήμα

$$j a_{mj} - 2a_{m,j-1} = 0.$$

Αν ορίσουμε τώρα

$$B_m := \bar{C}_m + \sum_{j=0}^{m-1} a_{mj} D_j,$$

τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} G \leq \Delta G + B_m K^3.$$

Στο δεξί μέλος τώρα έχουμε μία σταθερά η οποία στη χειρότερη περίπτωση δίνει γραμμική αύξηση. Εφόσον  $G = a_{m0} |R m|^2 \leq a_{m0} K^2$  στο  $t=0$ , από την αρχή μεγίστου για βαθμωτές συναρτήσεις προκύπτει

$$G \leq a_{m0} K^2 + B_m K^3 \leq (a_{m0} + B_m a) K^2 := C_m^2 K^2$$

για  $t \in (0, \frac{a}{K}]$ , όπου  $C_m$  είναι σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα  $m, n$  και  $\max\{a, 1\}$ . Άρα

$$|\nabla^m Rm|^2 \leq \sqrt{\frac{G}{t^m}} \leq \frac{C_m K}{t^{m/2}}$$

για  $t \in (0, \frac{a}{K}]$  όπως ζητούσαμε.  $\square$

Το γεγονός ότι οι εκτιμήσεις αυτές δεν μας δίνουν πληροφορία για  $t=0$  δεν αποτελεί πρόβλημα αφού ενδιαφερόμαστε για εκτιμήσεις των παραγώγων κοντά στη χρονική στιγμή  $t=T$ . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα (4.2.3) και να βρούμε τέτοιες εκτιμήσεις θεωρώντας τη ροή Ricci να ξεκινάει στο χρόνο  $t=T$ . Με αυτό τον τρόπο προκύπτει το ακόλουθο.

**Πόρισμα 5.2.2.** (θεωρήματος 4.2.3) Έστω  $(M, g(t))$  λύση της ροής Ricci σε μία συμπαγή  $n$ -πολλαπλότητα. Αν υπάρχουν  $\beta, K > 0$ , ώστε

$$|Rm(x, t)|_{g(t)} \leq K \quad \text{για κάθε } t \in [0, T],$$

όπου  $T > \beta/K$ , τότε για κάθε  $m \in \mathbb{N}$  υπάρχει σταθερά  $B_m$  που εξαρτάται μόνο από τα  $m, n$  και  $\min\{\beta, 1\}$ , ώστε

$$|\nabla^m Rm(x, t)|_{g(t)} \leq B_m K^{1+\frac{m}{2}}$$

για κάθε  $x \in M$  και  $t \in [\frac{\min\{\beta, 1\}}{K}, T]$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $\beta_1 = \min\{\beta, 1\}$ . Για  $t_0 \in [\frac{\beta_1}{K}, T]$  θεωρούμε τη ροή Ricci να ξεκινάει τη χρονική στιγμή  $T_0 = t_0 - \beta_1/K$ . Από το θεώρημα (4.2.3) τότε, για τη ροή αυτή, προκύπτει

$$|\nabla^m Rm| \leq \frac{C_m K}{(t - T_0)^{m/2}},$$

όπου  $C_m = C_m(m, n, \min\{\beta, 1\})$ . Έτσι για  $t = t_0$ , έχουμε

$$|\nabla^m Rm| \leq \frac{C_m K}{(\beta_1/K)^{m/2}} = \frac{C_m}{\beta_1^m} K^{1+m/2}$$

και το αποτέλεσμα έπεται.  $\square$

### Φράγματα στις Παραγώγους της Μετρικής και Ομαλότητα

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω φράγμα των παραγώγων της καμπυλότητας κοντά στο χρόνο  $t=T$ , μπορούμε να εξάγουμε τα ζητούμενα φράγματα των παραγώγων της μετρικής κοντά σε αυτή τη χρονική στιγμή.

**Πρόταση 5.2.1.** Έστω  $(M, g(t))$  λύση της ροής Ricci σε μία συμπαγή  $n$ -πολλαπλότητα με σταθερή μετρική  $\bar{g}$ , και συνοχή  $\bar{\nabla}$ . Αν υπάρχει  $K > 0$ , ώστε

$$|Rm(x, t)|_g \leq K \quad \text{για κάθε } x \in M, t \in [0, T],$$

τότε για κάθε  $m \in \mathbb{N}$  υπάρχει σταθερά  $C_m$  που εξαρτάται μόνο από τα  $m, n, K, T$  και  $g_0$ , ώστε

$$|\bar{\nabla}^m g(x, t)|_{\bar{g}} \leq C_m$$

για κάθε  $x \in M$  και  $t \in [0, T]$ .

*Απόδειξη.* Εφόσον η  $M$  είναι συμπαγής υπάρχει πεπερασμένος άτλας που την καλύπτει και στον οποίο έχουμε ομοιόμορφες εκτιμήσεις για τις παραγώγους των τοπικών χαρτών. Στο εξής λοιπόν σταθεροποιούμε ένα χάρτη σε αυτόν:  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Αφού οι  $\bar{g}$  και  $\bar{\nabla}$  είναι σταθεροποιημένες, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε  $m \in \mathbb{N}$  οι συνήθεις παράγωγοι της  $g$  τάξης  $m$  ικανοποιούν μία εκτίμηση

$$|\partial^m g(x, t)| \leq C_m \quad \text{για κάθε } x \in M \text{ και } t \in [0, T],$$

όπου η νόρμα  $|\cdot| \equiv |\cdot|_\delta$ , λαμβάνεται ως προς την Ευκλείδεια μετρική  $\delta$  στο  $U$  και η  $C_m$  εξαρτάται μόνο από τα  $m, n, K, T$  και  $g_0$ . Υιοθετώντας αυτή την οπτική θα θεωρούμε ιδιαίτερα το  $\Gamma$  ως τανυστή στο  $U$ , δηλαδή ως τη διαφορά της συνοχής Riemann της  $g$  και της σταθερής συνοχής στο  $U$ . Η απόδειξη τώρα προχωράει με επαγωγή στο  $m$ .

Στις εκτιμήσεις που ακολουθούν η  $C$  θα είναι σταθερά η οποία θα αλλάζει τιμή από τη μία ανισότητα στην άλλη αλλά σε κάθε περίπτωση θα εξαρτάται μόνο από τα  $m, n, K, T$  και  $g_0$ . Επιλέγουμε  $\beta = \beta(K, T)$  ώστε  $0 < \beta < \min\{KT, 1\}$ . Από την (4.9) και το πόρισμα (4.2.1) προκύπτει

$$e^{-2KT} g(x, 0) \leq g(x, t) \leq e^{2KT} g(x, 0) \quad (5.17)$$

για κάθε  $x \in M$  και  $t \in [0, T]$ , όπου  $K$  τέτοιο ώστε  $|Rc| \leq K$ . Έχουμε δηλαδή ομοιόμορφα άνω και κάτω κατά σημείο φράγματα για τις μετρικές  $g(t)$  στο διάστημα  $[0, T]$ . Για να υπολογίσουμε τις πρώτες παραγώγους της μετρικής γράφουμε αρχικά

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{jk} \right) = -2 \frac{\partial}{\partial x^i} R_{jk} \\ &= -2(\nabla_i R_{jk} + \Gamma_{ij}^l R_{lk} + \Gamma_{ik}^l R_{jl}). \end{aligned}$$

Εφόσον από την υπόθεση ισχύει  $|Rm(x, t)|_g \leq K$ , έπεται ότι

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \partial g \right| = 2|\partial Rc| \leq |\nabla Rc| + CK|\Gamma|. \quad (5.18)$$

Όμως

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = -g^{kl}(\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij}),$$

οπότε

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \Gamma \right| \leq C|\nabla Rc|,$$

αφού φράγματα στη  $g$  επάγουν φράγματα στην  $g^{-1}$ . Από το πόρισμα (4.2.2) υπάρχει  $B=B(m, n, K, \beta)$  ώστε

$$|\nabla Rc| \leq B \quad \forall t \in (\beta/K, T).$$

Εφόσον η  $|\Gamma|$  είναι φραγμένη στο  $[0, \beta/K]$  από κάποιο  $A = A(K, \beta, g_0)$  βλέπουμε ότι

$$|\Gamma(x, t)| \leq A + BC(T - \beta/K) \leq C, \quad (5.19)$$

για κάθε  $x \in M$  και  $t \in [0, T]$ . Επειδή τώρα η  $|\nabla Rc|$  είναι φραγμένη και στο  $[0, \beta/K]$  από κάποιο  $D = D(K, \beta, g_0)$ , από την (4.18) έχουμε

$$|\partial g| \leq |\partial g_0| + CD \frac{\beta}{K} + (2B + C)(T - \frac{\beta}{K}) \leq C.$$

Για το επαγωγικό βήμα τώρα, έστω  $a = (a_1, \dots, a_r)$  πολυδείκτης με  $|a|=m$ . Εφόσον

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^{|a|}}{\partial x^a} g_{ij} \right) = -2 \left( \frac{\partial^{|a|}}{\partial x^a} R_{ij} \right),$$

αρκεί να βρούμε ένα φράγμα για την  $|\partial^{|a|} R_c|$ . Στην περίπτωση  $m=2$  μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά:

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j R_{kl} &= \partial_i (\nabla_j R_{kl}) + \partial_i (\Gamma_{jk}^p R_{pl} + \Gamma_{jl}^p R_{kp}) \\ &= \nabla_i \nabla_j R_{kl} + \nabla_{\nabla_i \partial_j} R_{kl} + \Gamma_{ik}^p \nabla_j R_{pl} + \Gamma_{il}^p \nabla_j R_{kp} \\ &\quad + (\partial_i \Gamma_{jk}^p) R_{pl} + (\partial_i \Gamma_{jl}^p) R_{kp} + (\partial_i R_{pl}) \Gamma_{jk}^p + (\partial_i R_{kp}) \Gamma_{jl}^p \\ &= \nabla_i \nabla_j R_{kl} + \Gamma_{ij}^p \nabla_p R_{kl} + \Gamma_{ik}^p \nabla_j R_{pl} + \Gamma_{il}^p \nabla_j R_{kp} \\ &\quad + \Gamma_{jk}^q (\nabla_i R_{pl} + \Gamma_{ip}^q R_{ql} + \Gamma_{il}^q R_{pq}) + \Gamma_{jl}^q (\nabla_i R_{kp} + \Gamma_{ik}^q R_{qp} + \Gamma_{ip}^q R_{kq}) \\ &\quad + (\partial_i \Gamma_{jk}^p) R_{pl} + (\partial_i \Gamma_{jl}^p) R_{kp} \\ &= \nabla_i \nabla_j R_{kl} \\ &\quad + \Gamma_{ij}^p \nabla_p R_{kl} + \Gamma_{ik}^p \nabla_j R_{pl} + \Gamma_{il}^p \nabla_j R_{kp} + \Gamma_{jk}^p \nabla_i R_{pl} + \Gamma_{jl}^p \nabla_i R_{kp} \\ &\quad + \Gamma_{ip}^q \Gamma_{jl}^p R_{kq} + \Gamma_{ip}^q \Gamma_{jk}^p R_{ql} + \Gamma_{il}^q \Gamma_{jk}^p R_{pq} + \Gamma_{ik}^q \Gamma_{jl}^p R_{pq} \\ &\quad + (\partial_i \Gamma_{jk}^p) R_{pl} + (\partial_i \Gamma_{jl}^p) R_{kp}. \end{aligned}$$

Γενικεύοντας, μπορούμε να δούμε ότι ισχύει

$$|\partial^m R_c| \leq \sum_{i=0}^m c_i |\Gamma^i| |\nabla^{m-i} R_c| + \sum_{i=1}^{m-1} c'_i |\partial^i \Gamma| |\partial^{m-1-i} R_c|, \quad (5.20)$$

όπου οι σταθερές  $c_i, c'_i$  εξαρτώνται μόνο από τα  $m$  και  $n$ . Εφαρμόζοντας τώρα το πόρισμα (4.2.2), από την (4.19) βλέπουμε ότι

$$\sum_{i=0}^m c_i |\Gamma^i| |\nabla^{m-i} R_c| \leq C \sup_{0 \leq t \leq \beta/K} \left[ \sum_{i=0}^m |\nabla^{m-i} R_c| \right] + C \sum_{i=0}^m c_{m-i} K^{1+\frac{m-i}{2}} \leq C.$$

Από την επαγωγική υπόθεση μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε εκτιμήσει την ποσότητα  $|\partial_t \partial^p g|$  και συνεπώς και την  $|\partial^p R_c|$ , για κάθε  $0 \leq p < m-1$ . Από την (4.20), αυτό σημαίνει ιδιαίτερα πως έχουμε βρει φράγμα για την  $|\partial^i \Gamma|$  για όλα τα  $1 \leq i \leq m-2$ . Για να ολοκληρωθεί λοιπόν η απόδειξη πρέπει να βρούμε μία εκτίμηση για την ποσότητα  $|\partial^{m-1} \Gamma|$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{p_1} \dots \partial x^{p_{m-1}}} \Gamma_{ij}^k \right) &= \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{p_1} \dots \partial x^{p_{m-1}}} (\partial_t \Gamma_{ij}^k) \\ &= \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{p_1} \dots \partial x^{p_{m-1}}} [g^{kl} (-\nabla_i R_{jl} - \nabla_j R_{il} + \nabla_l R_{ij})]. \end{aligned}$$

Άρα από την επαγωγική υπόθεση και την (4.17),

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} \partial^{m-1} \Gamma \right| &\leq C \sum_{i=0}^{m-1} |\partial^{m-1-i} (g^{-1})| |\partial^i \nabla R_c| \\ &\leq C \sum_{i=0}^{m-1} |\partial^{m-1-i} g| |\partial^i \nabla R_c| \\ &\leq C \sum_{i=0}^{m-1} |\partial^i \nabla R_c|. \end{aligned} \quad (5.21)$$

(Χρησιμοποιήσαμε και πάλι το γεγονός ότι φράγματα στην  $g$  και τις παραγώγους της επάγουν φράγματα στις παραγώγους της  $g^{-1}$  μέσω της ταυτότητας  $\partial_i g^{jk} = -g^{jp} g^{kq} \partial_i g_{pq}$ ).

Με τον ίδιο τρόπο που προέκυψε η (4.20) αλλά με  $\nabla R_c$  στη θέση του  $R_c$  προκύπτει

$$|\partial^i \nabla R_c| \leq \sum_{j=0}^i \bar{c}_j |\Gamma^j| |\nabla^{i+1-j} R_c| + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{c}'_j |\partial^j \Gamma| |\partial^{i-j} R_c|,$$

όπου οι σταθερές  $\bar{c}_j, \bar{c}'_j$  εξαρτώνται από τα  $p$  και  $n$ . Εφαρμόζοντας την εκτίμηση αυτή στην (4.21) έχουμε

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \partial^{m-1} \Gamma \right| \leq C \sum_{i=0}^{m-1} \left( \sum_{j=0}^i |\Gamma^j| |\nabla^{i+1-j} R_c| + \sum_{j=1}^{i-1} |\partial^j \Gamma| |\partial^{i-j} R_c| \right),$$

όπου για όλους τους όρους στο δεξί μέλος έχουμε βρει φράγματα. Συνεπώς

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \partial^{m-1} \Gamma \right| \leq C$$

και άρα

$$|\partial^{m-1} \Gamma| \leq C + CT.$$

□

Εξετάζοντας την παραπάνω απόδειξη, είναι άμεσο πως έχουμε δείξει και το ακόλουθο.

**Πόρισμα 5.2.3.** Έστω  $(M, g(t))$  λύση της ροής Ricci σε μία συμπαγή  $n$ -πολλαπλότητα με σταθερή μετρική  $\bar{g}$ , και συνοχή  $\bar{\nabla}$ . Αν υπάρχει  $K > 0$ , ώστε

$$|Rm(x, t)|_g \leq K \quad \text{για κάθε } x \in M, t \in [0, T],$$

τότε για κάθε  $m \in \mathbb{N}$  υπάρχει σταθερά  $C'_m$  που εξαρτάται μόνο από τα  $m, n, K, T$  και  $g_0$  και τα  $(\bar{g}, \bar{\nabla})$  ώστε

$$|\bar{\nabla}^m R_c(x, t)|_{\bar{g}} \leq C'_m$$

για κάθε  $x \in M$  και  $t \in [0, T]$ .

Μπορούμε τώρα να δείξουμε πως η μετρική του πορίσματος (5.1.2) είναι ομαλή.

**Πόρισμα 5.2.4.** Η μετρική του πορίσματος (5.1.2) είναι ομαλή και οι μετρικές  $g(t)$  συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάθε  $C^k$ -νόρμα στην  $g(T)$  καθώς  $t \rightarrow T$ .

*Απόδειξη.* Για να δείξουμε ότι η μετρική είναι ομαλή πρέπει να θεωρήσουμε τις παραγώγους τις ως προς κάποιο τυχαίο σύστημα συντεταγμένων. Έστω λοιπόν  $U \subset M$  το πεδίο ορισμού τυχαίου χάρτη της  $M$ . Από την εξίσωση της ροής Ricci προκύπτει ότι

$$g_{ij}(x, T) = g_{ij}(x, t) - 2 \int_t^T R_{ij}(x, \tau) d\tau,$$

για κάθε  $t \in [0, T)$ .

Αν  $\alpha$  είναι πολυδείκτης, από την πρόταση (4.2.1) και το πόρισμα (4.2.3), οι ποσότητες  $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}$  και  $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} R_{ij}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο  $U \times [0, T)$  και συνεπώς μπορούμε να μεταφέρουμε την παράγωγο μέσα στο ολοκλήρωμα:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, T) = \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij} \right)(x, t) - 2 \int_t^T \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} R_{ij} \right)(x, \tau) d\tau, \quad (5.22)$$

για κάθε  $x \in U$ . Ιδιαίτερα το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης υπάρχει για κάθε  $\alpha$ , άρα η  $g(T)$  είναι ομαλή.

Θα δείξουμε τώρα ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε  $C^m$ -νόρμα με την εξής έννοια: Μπορούμε να επιλέξουμε χάρτες που καλύπτουν τη  $M$  τέτοιους, ώστε για κάθε πολυδείκτη  $\alpha$  και κάθε  $\varepsilon > 0$  να υπάρχει  $\delta > 0$ , ώστε

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, T) - \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, t) \right|_{g(x, T)} < \varepsilon \quad (5.23)$$

σε οποιονδήποτε από τους χάρτες αυτούς και για κάθε  $t \in [T - \delta, T)$  και  $x \in M$ . Επειδή η  $M$  είναι συμπαγής μπορούμε να επιλέξουμε πεπερασμένο πλήθος χαρτών ώστε οι κλειστές μοναδιαίες μπάλες τους να καλύπτουν τη  $M$ . Εφόσον αυτές είναι συμπαγείς, η Ευκλείδεια μετρική σε κάθε μία από αυτές είναι ισοδύναμη με την  $g(T)$  και επειδή υπάρχουν μόνο πεπερασμένες η Ευκλείδεια μετρική είναι ομοιόμορφα ισοδύναμη με την  $g(T)$ . Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι η (4.23) ισχύει ως προς την Ευκλείδεια αντί της μετρικής  $g(x, T)$ , σε κάθε σημείο  $x \in M$ .

Από το πόρισμα (4.2.3), για κάθε ένα από τους χάρτες που επιλέξαμε, υπάρχει  $C'_m$  ώστε  $|\partial^m R_c| \leq C'_M$  ως προς την Ευκλείδεια μετρική στο χάρτη αυτό. Επιλέγουμε  $C$ , το μεγαλύτερο των  $C'_m$ , όπου  $m = |\alpha|$ . Τότε από την (4.22)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, T) - \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, t) \right| &= \left| 2 \int_t^T \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} R_{ij} \right)(x, \tau) d\tau \right| \\ &\leq 2 \int_t^T |\partial^m R_c(x, \tau)| d\tau \\ &\leq 2C(T - t). \end{aligned}$$

Έπεται λοιπόν πως για  $t \rightarrow T$  ισχύει  $g(t) \rightarrow g(T)$  ομοιόμορφα σε κάθε  $C^m$ -νόρμα.  $\square$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα (4.2.1).

*Απόδειξη.* (θεωρήματος 4.2.1) Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι η  $|Rm(x, t)|_g$  είναι άνω φραγμένη από τη σταθερά  $K$ . Από τα πορίσματα (4.2.1) και (4.2.4), οι μετρικές  $g(t)$  συγκλίνουν ομοιόμορφα, σε κάθε  $C^m$ -νόρμα, σε μία ομαλή μετρική  $g(T)$ . Επειδή η  $g(t)$  είναι ομαλή, υπάρχει λύση της ροής Ricci με αρχική μετρική την  $g(T)$ . Έτσι η αντίστοιχη λύση με αρχική μετρική  $g(0) = g_0$  μπορεί να επεκταθεί και μετά τη χρονική στιγμή  $t=T$ . Η επέκταση αυτή είναι ομαλή αφού όλες οι παράγωγοι ως προς κάποιο χάρτη είναι συνεχείς στο  $t=T$  (λόγω της σύγκλισης της  $g(t)$  σε κάθε  $C^m$ -νόρμα). Έπεται τότε πως όλες οι παράγωγοι (και ατές ως προς το χρόνο) είναι συνεχείς στο  $t=T$  αφού η εξίσωση της ροής Ricci μας επιτρέπει να γράψουμε τις παραγώγους ως προς το χρόνο, ποσοτήτων που εξαρτώνται από τη μετρική, με όρους παραγώγων ως προς συντεταγμένες οι οποίες όπως είδαμε είναι συνεχείς. Γι' αυτό το λόγω η λύση μπορεί να επεκταθεί και συνεπώς η χρονική στιγμή  $T$  δεν μπορεί να είναι η μέγιστη. Έχουμε λοιπόν αντίφαση και άρα η αρχική υπόθεση ότι  $|Rm(x, t)|_g \leq K$  πρέπει να είναι λανθασμένη.  $\square$

**Πόρισμα 5.2.5.** Με τα δεδομένα όπως στο θεώρημα (4.2.1), για  $n=3$ ,

$$\lim_{t \rightarrow T} \sup_{x \in M^3} |Rc(x, t)| = \infty.$$

*Απόδειξη.* Από την (3.12) έπεται ότι υπάρχει σταθερά  $C$  ώστε  $|Rm| \leq C|Rc|$ . Το ζητούμενο έπεται άμεσα.  $\square$

### 5.3 Οι Καμπυλότητες Διατομής Συγκλίνουν

Στο θεώρημα (4.2.6) είδαμε πως η  $i^*Rm : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow R$  ικανοποιεί τη μδε

$$\frac{\partial}{\partial t}(i^*Rm) = \Delta_D i^*Rm + i^*Rm^2 + i^*Rm^\sharp.$$

Θεωρώντας τον θετικά ορισμένο (σύμφωνα με το πόρισμα (4.2.3)), συμμετρικό πίνακα  $M$  που αντιστοιχεί σε αυτήν, από όσα είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η αντίστοιχη σδε είναι

$$\frac{d}{dt}M = M^2 + M^\sharp, \quad (5.24)$$

με

$$M_{(ij)(kl)}^2 = g^{pr}g^{qs}R_{ijpq}R_{rskl} \quad (5.25)$$

και

$$M_{(ij)(kl)}^\sharp = C_{(ij)}^{(pq)(rs)}C_{(kl)}^{(uv)(wx)}R_{pquv}R_{rswx} \quad (5.26)$$

Θέλουμε να μελετήσουμε την εξίσωση αυτή στην περίπτωση μίας 3-πολλαπλότητας. Πριν από αυτό ας πούμε μερικά πράγματα για τις συμβάσεις που θα ακολουθήσουμε ως προς τις οποίες υπάρχει μεγάλη ποικιλία στη βιβλιογραφία και που αποσαφηνίζονται στο βιβλίο του Topping. Το εσωτερικό γινόμενο στην  $\Lambda^2 TM$  που θα χρησιμοποιήσουμε δεν είναι αυτό του ορισμού (1.3.5) (ας το ονομάσουμε  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ ), ως προς το οποίο αν  $(e_i)$  ορθοκανονική βάση του  $T_x M$ , τότε  $\langle e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j \rangle_1 = 1$ . Αντίθετα θα χρησιμοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο για το οποίο έχουμε  $\langle e_i \otimes e_j, e_i \otimes e_j \rangle = 1$  (έστω  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ ). Στην περίπτωση αυτή έχει σημασία η επιλογή ορισμού για



το γινόμενο  $\wedge$  (wedge). Δηλαδή, αν θα ισχύει  $e_i \wedge e_j = e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$  ή  $e_i \wedge e_j = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)$ . Επιλέγουμε την περίπτωση του ορισμού (1.2.3), δηλαδή τη δεύτερη.

Έστω λοιπόν  $(e_i)$  ορθοκανονική βάση της  $T_x M$ , και  $(e^j)$  η δυϊκή της. Τότε σύμφωνα με τα παραπάνω η  $\{\sqrt{2}e_1 \wedge e_2, \sqrt{2}e_2 \wedge e_3, \sqrt{2}e_3 \wedge e_1\}$  αποτελεί ορθοκανονική βάση του  $\Lambda^2 T_x M$  και  $\{\theta^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^1 \wedge e^2, \theta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^2 \wedge e^3, \theta^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^3 \wedge e^1\}$  είναι η δυϊκή της στην  $\Lambda^2 T^* M$ .

Επιστρέφουμε τώρα σε όσα αναφέραμε μετά τον ορισμό (1.3.10). Εκεί ορίσαμε μία γραμμική απεικόνιση  $T : \Lambda^2 V \rightarrow \mathfrak{so}(V)$  και δείξαμε ότι είναι ισομορφισμός. Επειδή για τα δύο παραπάνω εσωτερικά γινόμενα  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  και  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  ισχύει  $\langle e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j \rangle_1 = 2 \langle e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j \rangle_2$  η  $T$  παραμένει αντισυμμετρική σε κάθε περίπτωση. Ας εξετάσουμε λοιπόν πιά αναλυτικά τη συγκεκριμένη απεικόνιση. Έστω  $(e_i)_{i=1}^n$  μία ορθοκανονική βάση του  $V$ . Τότε η  $(e_i \wedge e_j)_{i < j}$  αποτελεί βάση του  $\Lambda^2 V$ . Ας δούμε που στέλνει η  $T$  τη βάση αυτή. Έχουμε

$$(T_{e_i \wedge e_j})(e_k) = \langle e_j, e_k \rangle e_i - \langle e_i, e_k \rangle e_j = \delta_{jk} e_i - \delta_{ik} e_j.$$

Συνεπώς ο πίνακας της  $T_{e_i \wedge e_j}$  θα είναι ο  $E_{ij} - E_{ji}$ , όπου  $E_{ij}$  ο πίνακας με 1 στη θέση  $(i,j)$  και μηδεν αλλού.

Άρα έχουμε

$$T_{\theta^1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{\theta^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{\theta^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς (ταυτίζοντας το  $\theta^i$  με την εικόνα του μέσω της  $T$ ), έχουμε

$$\begin{aligned} [\theta^1, \theta^2] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \theta^3 \end{aligned}$$

Όμοια

$$[\theta^2, \theta^3] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \theta^1$$

$$[\theta^3, \theta^1] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \theta^2$$

Συνεπώς από την (4.17)

$$C_1^{23} = C_2^{31} = C_3^{12} = C_1^{32} = C_2^{13} = C_3^{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ενώ  $C_a^{bc} = 0$  σε κάθε άλλη περίπτωση. Από την (5.26) τώρα, προκύπτει άμεσα ότι

$$(M^\sharp)_{ij} = \text{συμπαράγωγος του } M_{ij}.$$

Άρα

$$M^\sharp = \det M \cdot (M^{-1})^T. \quad (5.27)$$

**Λήμμα 5.3.1.** Αν  $\{e^i\}$  ορθοκανονική βάση της  $T^*M$ ,  $\{\theta^p = \sum_{i < j} \theta_{ij}^p e^i \wedge e^j\}$  ορθοκανονική βάση της  $\Lambda^2 T^*M$  και ο πίνακας  $M$  (που αντιστοιχεί στη  $Rm \in \Lambda^2 T^*M \otimes_S \Lambda^2 T^*M$  γράφεται  $M = M_{pq} \theta^p \otimes \theta^q$ , τότε

$$R_{ijkl} = M_{pq} \theta_{ij}^p \theta_{kl}^q.$$

*Απόδειξη.* Αφού  $\theta^p = \sum_{i < j} \theta_{ij}^p e^i \wedge e^j$ , έπεται ότι  $e_i \wedge e_j = \theta_{ij}^p \theta_p$ , όπου  $\{\theta_q\}$  η δυϊκή βάση της  $\{\theta^p\}$ . Έτσι

$$R_{ijkl} = R(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l) = \theta_{ij}^p \theta_{kl}^q R(\theta_p, \theta_q) = \theta_{ij}^p \theta_{kl}^q M_{pq}$$

□

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$K(e_i, e_j) = \theta_{ij}^p \theta_{ij}^q M_{pq}$$

και αν  $M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , τότε

$$K(e_i, e_j) = (\theta_{ij}^p)^2 \lambda_p.$$

Για  $n=3$  τώρα, αν  $M = \text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$  με  $\lambda \geq \mu \geq \nu > 0$  οι ιδιοτιμές του  $M$ , από όσα είδαμε παραπάνω έχουμε  $\theta_{23}^1 = \theta_{12}^3 = -\theta_{13}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  και  $\theta_{ij}^k = 0$  σε κάθε άλλη περίπτωση. Συνεπώς

$$K(e_2, e_3) = (\theta_{23}^1)^2 \lambda_1 = \frac{1}{2} \lambda,$$

$$K(e_1, e_3) = (\theta_{13}^2)^2 \lambda_2 = \frac{1}{2} \mu,$$

$$K(e_1, e_2) = (\theta_{12}^3)^2 \lambda_1 = \frac{1}{2} \nu.$$

Οι ιδιοτιμές λοιπόν του  $M$  είναι το διπλάσιο των καμπυλοτήτων διατομής.

Η εξίσωση που προέκυψε στο θεώρημα (4.2.6) λοιπόν, μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d}{dt} \text{diag}(\lambda, \mu, \nu) = \text{diag}(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) + \text{diag}(\mu\nu, \lambda\nu, \lambda\mu). \quad (5.28)$$

Ιδιαίτερα ο  $\mathcal{R}(t)$  παραμένει διαγώνιος κατα τη ροή Ricci, (κάτι που δεν ισχύει σε άλλες διαστάσεις). Επιπλέον,  $\lambda(t) \geq \mu(t) \geq \nu(t)$  για όλα τα  $t \geq 0$  για τα οποία υπάρχει η λύση αφού

$$\frac{d}{dt}(\lambda - \mu) = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu - \nu) \quad (5.29)$$

$$\frac{d}{dt}(\mu - \nu) = (\mu - \nu)(-\lambda + \mu + \nu). \quad (5.30)$$

Από όσα είδαμε προκύπτει άμεσα η απόδειξη του λήμματος (1.7.2) σύμφωνα με το οποίο

$$R_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu + \nu & 0 & 0 \\ 0 & \nu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \mu \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

όπου  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \mu, \lambda_3 = \nu$  (οι οποίες είναι το διπλάσιο των καμπυλοτήτων διατομής). Για μελλοντική αναφορά σημειώνουμε ότι

$$R_m^\circ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2\lambda + \mu + \nu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2\mu + \nu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \mu - 2\nu \end{pmatrix} = 2R_c. \quad (5.32)$$

### 5.3.1 Τοπική Σύγκλιση

Το πρώτο αποτέλεσμα που θα εξετάσουμε μας λέει ότι τιμές των καμπυλοτήτων διατομής παραμένουν κατά τη διάρκεια της ροής τουλάχιστον όσο "κοντά" βρίσκονταν και τη χρονική στιγμή  $t=0$ .

**Λήμμα 5.3.2.** *Με τις αρχικές υποθέσεις της ενότητας αυτής, αν υπάρχει σταθερά  $C < \infty$  ώστε*

$$\lambda \leq C(\mu + \nu),$$

*για  $t=0$ , τότε η ανισότητα αυτή διατηρείται σε όλη τη διάρκεια ύπαρξης λύσης της ροής.*

**Απόδειξη.** Παρατηρούμε αρχικά ότι  $\lambda + \lambda \geq \mu + \nu \Rightarrow \lambda \geq (\mu + \nu)/2 > 0$ . Έτσι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{\lambda}{\mu + \nu}\right) &= \frac{\mu + \nu}{\lambda} \left( \frac{\frac{d\lambda}{dt}(\mu + \nu) - \lambda \frac{d(\mu + \nu)}{dt}}{(\mu + \nu)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda(\mu + \nu)} \left( (\mu + \nu) \frac{d\lambda}{dt} - \lambda \frac{d}{dt}(\mu + \nu) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda(\mu + \nu)} [(\mu + \nu)(\lambda^2 + \mu\nu) - \lambda(\mu^2 + \lambda\nu + \nu^2 + \lambda\mu)] \\ &= \frac{1}{\lambda(\mu + \nu)} [\mu\lambda^2 + \mu^2\nu + \nu\lambda^2 + \mu\nu^2 - \lambda\mu^2 - \lambda^2\nu - \lambda\nu^2 - \lambda^2\mu] \\ &= \frac{1}{\lambda(\mu + \nu)} [(\mu^2(\nu - \lambda) + \nu^2(\mu - \lambda))] \leq 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\ln \frac{\lambda(t)}{\mu(t) + \nu(t)} \leq \ln \frac{\lambda(0)}{\mu(0) + \nu(0)}$$

και

$$\frac{\lambda(t)}{\mu(t) + \nu(t)} \leq \frac{\lambda(0)}{\mu(0) + \nu(0)} \leq C. \quad (5.33)$$

Για  $x \in M$  έστω  $\lambda(P)_x \geq \mu(P)_x \geq \nu(P)_x$  οι ιδιοτιμές του

$$P \in (\Lambda^2 T^*M \otimes_S \Lambda^2 T^*M)_x.$$

Ορίζουμε  $\mathcal{K} \subset \Lambda^2 T^*M \otimes_S \Lambda^2 T^*M$  με

$$\mathcal{K}_x = \{P : \lambda(P)_x - C(\mu(P)_x + \nu(P)_x) \leq 0\}.$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε πως το  $\mathcal{K}$  είναι αναλλοίωτο ως προς παράλληλες μετατοπίσεις. Επιπλέον είναι κυρτό σε κάθε νήμα αφού η συνάρτηση

$$\lambda(P) - C(\mu(P) + \nu(P)) = \max_{\substack{|V|=|W|=1 \\ \langle V, W \rangle = 0}} [-P(V, V) - P(W, W)]$$

είναι κυρτή. Αν τώρα  $\mathcal{R}(t) \in \Lambda^2 T^*M \otimes_S \Lambda^2 T^*M$  είναι η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στον  $Rm_{g(t)}$ , εφόσον  $M(0) \in \mathcal{K}$ , από την (4.24) και το θεώρημα (3.2.3) έχουμε ότι  $M(t) \in \mathcal{K}$ .  $\square$

**Πόρισμα 5.3.1.** *Η βαθμωτή καμπυλότητα απειρίζεται καθώς  $t \rightarrow T$ . Αν δηλαδή ορίσουμε  $R_{\max}(t) := \sup_{x \in M} R(x, t)$ , τότε*

$$\lim_{t \rightarrow T} R_{\max}(t) = \infty.$$

*Απόδειξη.* Από το προηγούμενο λήμμα ο  $Rc$  παραμένει θετικός κατά τη ροή Ricci. Αν τον διαγωνοποιήσουμε ως προς κάποια ορθοκανονική βάση και  $a, b, c$  είναι οι ιδιοτιμές του, τότε

$$|Rc|^2 = a^2 + b^2 + c^2 < (a + b + c)^2 = R^2$$

και το αποτέλεσμα έπεται από το πόρισμα (4.2.5).  $\square$

**Πόρισμα 5.3.2.** *Αν  $(M, g(t))$  όπως πριν και αν ορίσουμε*

$$R_{\min}(t) = \inf_{x \in M^3} R(x, t),$$

*τότε υπάρχει  $\beta > 0$  που εξαρτάται μόνο από την  $g_0$ , ώστε*

$$Rc \geq 2\beta^2 Rg \geq 2\beta^2 R_{\min} g. \quad (5.34)$$

*Απόδειξη.* Από το λήμμα (4.3.1) και τις (1.9), (1.10) έχουμε

$$Rc \geq \frac{\mu + \nu}{2} g \geq \frac{\lambda}{2C} g = \frac{3\lambda}{6C} g \geq \frac{\lambda + \mu + \nu}{6C} g = \frac{R}{6C} g \geq \frac{R_{\min}}{6C} g.$$

$\square$

Δείχνουμε τώρα ότι οι ιδιοτιμές πλησιάζουν μεταξύ τους όλο και περισσότερο καθώς  $Rm \rightarrow \infty$ .

**Θεώρημα 5.3.1.** *Υπάρχουν θετικές σταθερές  $\delta < 1$  και  $\bar{C}$  (που εξαρτώνται μόνο από την  $g_0$ ) ώστε*

$$\frac{\lambda - \nu}{R} \leq \frac{\bar{C}}{R^\delta},$$

*όπου  $R = \lambda + \mu + \nu$  η βαθμωτή καμπυλότητα.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του λήμματος (4.3.1). Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν  $\bar{C}$ ,  $\delta$  τέτοια, ώστε

$$\frac{\lambda - \nu}{\mu + \nu} \leq \frac{\bar{C}}{(\mu + \nu)^\delta}. \quad (5.35)$$

Λόγω συμπάγειας, για οποιοδήποτε  $\delta > 0$  μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο  $\bar{C}$  στο χρόνο  $t=0$ , διότι  $\mu + \nu > 0$  παντού στη  $M$  από τη συνθήκη της αρχικά θετικής καμπυλότητας Ricci. Θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει σε όλη τη διάρκεια ύπαρξης της λύσης, χρησιμοποιώντας την αρχή μεγίστου του θεωρήματος (3.2.3) με την ίδια διανυσματική δέσμη  $E$  του λήμματος (4.3.1) αλλά διαφορετικό  $\mathcal{K}$ :

$$\mathcal{K} \equiv \{Q \in E : [\lambda(Q) - \nu(Q)] - \bar{C}[\mu(Q) + \nu(Q)]^{1-\delta} \leq 0\}.$$

Και εδώ, το  $\mathcal{K}$  είναι αναλλοίωτο σε παράλληλες μεταφορές και κυρτό σε κάθε νήμα. Για να δείξουμε ότι η λύση παραμένει στο  $\mathcal{K}$  υπολογίζουμε από τις (4.25), (4.26) πως

$$\frac{d}{dt} \log(\lambda - \nu) = \lambda - \mu + \nu$$

και

$$\frac{d}{dt} \log(\mu + \nu) = \frac{1}{\mu + \nu} (\mu^2 + \nu^2 + \lambda(\mu + \nu)) = \lambda + \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu + \nu}.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log \frac{\lambda - \nu}{(\mu + \nu)^{1-\delta}} &= (\lambda - \mu + \nu) - (1 - \delta) \left( \lambda + \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu + \nu} \right) \\ &= \delta \lambda + (\nu - \mu) - (1 - \delta) \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu + \nu} \leq \delta \lambda - (1 - \delta) \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu + \nu} \\ &\quad (\text{αφού } \nu \leq \mu) \\ &\leq \delta \lambda - \frac{1}{2} (1 - \delta) (\mu + \nu) \quad (\text{αφού } \nu^2 + \mu^2 \geq \frac{1}{2} (\mu + \nu)^2). \end{aligned}$$

Από το λήμμα (4.3.1) μπορούμε να επιλέξουμε  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε η παραπάνω ποσότητα να μην είναι θετική δηλαδή η

$$\frac{\lambda - \nu}{(\mu + \nu)^{1-\delta}}$$

να μην είναι αύξουσα και άρα να διατηρείται η ανισότητα (4.31). Από την αρχή μεγίστου τώρα έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

Σύμφωνα με το θεώρημα λοιπόν, σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας, οι πολλαπλότητες διατομής πλησιάζουν μεταξύ τους καθώς η καμπυλότητα απειρίζεται ( $\lambda - \nu$  είναι η μέγιστη διαφορά μεταξύ των ιδιοτιμών). Επιπλέον το αριστερό μέλος της εκτίμησης αυτής είναι αναλλοίωτο ως προς αναπααραμετρήσεις. Έτσι όταν αναπααραμετρήσουμε τη μετρική, το φράγμα αυτό μας λέει ότι οι καμπυλότητες διατομής θα εξακολουθήσουν να είναι κοντά.

**Πόρισμα 5.3.3.** Υπάρχουν θετικές σταθερές  $B, \bar{\delta}$  τέτοιες, ώστε

$$\frac{|E|^2}{R^2} \leq B R^{-\bar{\delta}}$$

όπου  $E$  ο τανυστής του Einstein.

Απόδειξη. Από την (4.28) έχουμε

$$\mathring{R}c = E = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2\lambda + \mu + \nu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2\mu + \nu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \mu - 2\nu \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{|E|^2}{R^2} &= \frac{(\mu + \nu - 2\lambda)^2 + (\lambda - 2\mu + \nu)^2 + (\lambda + \mu - 2\nu)^2}{36(\lambda + \mu + \nu)^2} \\ &= \frac{(\lambda - \mu)^2 + (\mu - \nu)^2 + (\nu - \lambda)^2}{12(\lambda + \mu + \nu)^2} \\ &\leq \frac{3(\nu - \lambda)^2}{12(\lambda + \mu + \nu)^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{\nu - \lambda}{R} \right)^2 \\ &\leq BR^{-\delta}, \end{aligned}$$

από το αποτέλεσμα του προηγούμενου θεωρήματος, με  $\bar{\delta} = 2\delta$ . Το προτελευταίο βήμα έπεται από το γεγονός ότι  $\lambda - \nu$  είναι η μέγιστη διαφορά ιδιοτιμών.  $\square$

Η ποσότητα  $|E|^2$  μετράει κατά πόσο η μετρική απέχει από το να είναι Einstein. Από το λήμμα (1.7.3), όταν  $|E|^2 = 0$  ισχύει  $R_{ij} = Cg_{ij}$ , όπου  $C$  σταθερά σε όλη την πολλαπλότητα ενώ στη διάσταση  $n=3$  προκύπτει ότι η μετρική έχει σταθερή καμπυλότητα διατομής. Οποιαδήποτε φράγματα λοιπόν στην  $|E|^2$  είναι εξαιρετικά χρήσιμα.

### 5.3.2 Ολική Σύγκλιση

Δείξαμε ως τώρα ότι οι καμπυλότητες διατομής σε κάποιο σημείο της πολλαπλότητας  $M$  πλησιάζουν μεταξύ τους αν η βαθμωτή καμπυλότητα απειρίζεται στο σημείο αυτό. Είδαμε επίσης ότι η καμπυλότητα απειρίζεται σε κάποιο σημείο της πολλαπλότητας καθώς πλησιάζουμε το χρόνο  $T$ . Το πρόβλημα είναι πως από αυτό και μόνο το αποτέλεσμα δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι καμπυλότητες διατομής πλησιάζουν μεταξύ τους σε όλη την πολλαπλότητα.

Ωστόσο, στο πόρισμα (4.3.3) είδαμε ότι

$$\frac{|E|^2}{R^2} \leq BR^{-\bar{\delta}}$$

για κάποια  $B$  και  $\bar{\delta}$ . Από το λήμμα (1.7.3) γνωρίζουμε πως αν  $E=0$  τότε η  $R$  είναι σταθερή. Θα περιμέναμε λοιπόν ότι κάποιο φράγμα για την  $|E|^2$  (το οποίο και έχουμε από το πόρισμα (4.3.3) το οποίο ισχύει για όλη την πολλαπλότητα, θα είχε ως συνέπεια η  $R$  να είναι σχεδόν σταθερή. Είναι λοιπόν λογικό να περιμένουμε ότι από το παραπάνω αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να βρούμε ένα φράγμα για την ποσότητα  $|\nabla R|$ . Κάτι τέτοιο θα είναι εξαιρετικά χρήσιμο αφού θα μας επιτρέψει να συγκρίνουμε τις τιμές της  $R$  σε διαφορετικά σημεία της πολλαπλότητας και επειδή ήδη γνωρίζουμε ότι η  $R$  απειρίζεται σε κάποιο σημείο της  $M$  θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι είναι μεγάλη παντού και άρα ότι οι καμπυλότητες διατομής πλησιάζουν σε κάθε σημείο της  $M$ .

**Θεώρημα 5.3.2.** Έστω  $(M, g(t))$  είναι λύση της ροής Ricci σε μία κλειστή 3-πολλαπλότητα με  $Rc(g(0)) > 0$ . Τότε υπάρχουν  $\beta, \bar{\delta} > 0$  που εξαρτώνται μόνο από την  $g_0$ , ώστε για κάθε  $\beta \in [0, \beta]$ , υπάρχει  $C$  εξαρτώμενο μόνο από τα  $\beta$  και  $g_0$ , ώστε

$$\frac{|\nabla R|^2}{R^2} \leq \beta R^{-\bar{\delta}/2} + CR^{-3}.$$

Παρατηρούμε και πάλι πως το αριστερό μέλος είναι αναλλοίωτο σε αναβαθμολογίσεις της μετρικής ενώ το δεξί είναι μικρό όταν η καμπυλότητα είναι μεγάλη. Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει σε διάφορα βήματα.

**Λήμμα 5.3.3.** Αν  $(M, g(t))$  είναι λύση της ροής Ricci τότε

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla R|^2 = \Delta |\nabla R|^2 - 2 |\nabla \nabla R|^2 + 4 \langle \nabla R, \nabla |Rc|^2 \rangle.$$

*Απόδειξη.* Από την εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της βαθμωτής καμπυλότητας, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla R|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij} \nabla_i R \nabla_j R) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \nabla_i R \nabla_j R + g^{ij} \left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla_i R \right) \nabla_j R + g^{ij} \nabla_i R \left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla_j R \right) \\ &= 2g^{ik} g^{jl} R_{kl} \nabla_i R \nabla_j R + g^{ij} \nabla_i (\Delta R + 2|Rc|^2) \nabla_j R + g^{ij} \nabla_i R \nabla_j (\Delta R + 2|Rc|^2) \\ &= 2R_{kl} \nabla^k R \nabla^l R + \nabla^j (\Delta R + 2|Rc|^2) \nabla_j R + \nabla_i R \nabla^i (\Delta R + 2|Rc|^2) \\ &= 2Rc(\nabla R, \nabla R) + 2 \langle \nabla R, \nabla (\Delta R + 2|Rc|^2) \rangle \\ &= 2Rc(\nabla R, \nabla R) + 2 \langle \nabla R, \nabla \Delta R \rangle + 4 \langle \nabla R, \nabla |Rc|^2 \rangle. \end{aligned}$$

**Λήμμα 5.3.4.** Τύπος Bochner-Weitzenböck Αν  $f \in C^\infty M$ , τότε

$$\Delta |\nabla f|^2 = 2 |\nabla \nabla f|^2 + 2 \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + 2Rc(\nabla f, \nabla f).$$

*Απόδειξη.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 &= \frac{1}{2} \nabla_i \nabla^i (\nabla_j f \nabla^j f) = \frac{1}{2} \nabla_i (\nabla^j f \nabla^i \nabla_j f + \nabla_j f \nabla^i \nabla^j f) \\ &= \frac{1}{2} \nabla_i (\nabla^j f \nabla_j \nabla^i f + \nabla_j f \nabla^j \nabla^i f) = \nabla_i (\nabla_j \nabla^i f \nabla^j f) \\ &= \nabla_i \nabla_j \nabla^i f \nabla^j f + \nabla^i \nabla_j f \nabla_i \nabla^j f \\ &= \nabla_j \nabla_i \nabla^i f \nabla^j f + R_{ijl}^i \nabla^l f \nabla^j f + \nabla_i \nabla_j \nabla^i \nabla^j f \\ &= \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + Rc(\nabla f, \nabla f) + |\nabla \nabla f|^2. \end{aligned}$$

□

Το λήμμα τώρα έπεται άμεσα.

□

Στη συνέχεια εξετάζουμε πως εξελίσσεται η ποσότητα  $|\nabla R|^2/R$ .

**Λήμμα 5.3.5.** Έστω  $(M, g(t))$  λύση της ροής Ricci με  $R > 0$  αρχικά. Τότε σε όλο το διάστημα ύπαρξης λύσης,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) = \Delta \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) - 2R |\nabla \left( \frac{\nabla R}{R} \right)|^2 - 2 \frac{|\nabla R|^2}{R^2} |Rc|^2 + \frac{4}{R} \langle \nabla R, \nabla |Rc|^2 \rangle.$$

*Απόδειξη.* Έχουμε δείξει πως η ανισότητα  $R > 0$  διατηρείται. Από την εξίσωση της εξέλιξης της βαθμωτής καμπυλότητας και πάλι, και το προηγούμενο λήμμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla R|^2 + |\nabla R|^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla R|^2 + |\nabla R|^2 \left( -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial t} R \right) \\ &= \frac{1}{R} (\Delta |\nabla R|^2 - 2 |\nabla \nabla R|^2 + 4 \langle \nabla R, \nabla |Rc|^2 \rangle) - \frac{|\nabla R|^2}{R^2} (\Delta R + 2 |Rc|^2) \\ &= \frac{1}{R} \Delta |\nabla R|^2 - \frac{2}{R} |\nabla \nabla R|^2 - \frac{|\nabla R|^2}{R^2} \Delta R - 2 \frac{|\nabla R|^2}{R^2} |Rc|^2 + \frac{4}{R} \langle \nabla R, \nabla |Rc|^2 \rangle. \end{aligned}$$

Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις  $u, v$  ισχύει

$$\Delta \left( \frac{u}{v} \right) = \operatorname{div} \left( \nabla \frac{u}{v} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2} \right) = \operatorname{div} \frac{\nabla u}{v} - \operatorname{div} \frac{u \nabla v}{v^2},$$

και από τον τύπο  $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$  μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\Delta \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{\Delta u}{v} - \frac{u \Delta v}{v^2} - \frac{2}{v^2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + 2 \frac{u}{v^3} |\nabla v|^2.$$

Άρα

$$\Delta \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) = \frac{\Delta (|\nabla R|^2)}{R} - |\nabla R|^2 \frac{\Delta R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \langle \nabla |\nabla R|^2, \nabla R \rangle + 2 \frac{|\nabla R|^2}{R^3} |\nabla R|^2$$

και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) &= \Delta \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) - 2 \frac{|\nabla R|^4}{R^3} + 2 \frac{\langle \nabla |\nabla R|^2, \nabla R \rangle}{R^2} - 2 \frac{|\nabla \nabla R|^2}{R} \\ &\quad - \frac{2}{R^2} |\nabla R|^2 |Rc|^2 + \frac{4}{R} \langle \nabla R, \nabla |Rc|^2 \rangle \\ &= \Delta \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) - 2R \left( \frac{|\nabla R|^4}{R^4} - \frac{\langle \nabla |\nabla R|^2, \nabla R \rangle}{R^3} + \frac{|\nabla \nabla R|^2}{R^2} \right) \\ &\quad - \frac{2}{R^2} |\nabla R|^2 |Rc|^2 + \frac{4}{R} \langle \nabla R, \nabla |Rc|^2 \rangle. \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} \frac{\langle \nabla |\nabla R|^2, \nabla R \rangle}{R^3} &= \frac{\nabla_i (\nabla_j R \nabla^j R) \nabla^i R}{R^3} = \frac{(\nabla_i \nabla_j R \nabla^j R + \nabla_j R \nabla_i \nabla^j R) \nabla^i R}{R^3} \\ &= \frac{\nabla_i \nabla_j R \nabla^i \nabla^j R + \nabla_i \nabla_j R \nabla^i \nabla^j R}{R^3} = 2 \frac{\langle \nabla \nabla R, \nabla R \nabla R \rangle}{R^3}. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) &= \Delta \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) - 2R \left( \frac{|\nabla R|^4}{R^4} - \frac{2 \langle \nabla \nabla R, \nabla R \nabla R \rangle}{R^3} + \frac{|\nabla \nabla R|^2}{R^2} \right) \\ &\quad - \frac{2}{R^2} |\nabla R|^2 |Rc|^2 + \frac{4}{R} \langle \nabla R, \nabla |Rc|^2 \rangle. \end{aligned}$$



ενώ

$$\begin{aligned}
 -2R|\nabla(\frac{\nabla R}{R})|^2 &= -2R|\nabla(\frac{1}{R})\nabla R + \frac{1}{R}\nabla\nabla R|^2 \\
 &= -2R\langle -\frac{1}{R^2}\nabla R\nabla R + \frac{1}{R}\nabla\nabla R, -\frac{1}{R^2}\nabla R\nabla R + \frac{1}{R}\nabla\nabla R \rangle \\
 &= -2R(\frac{1}{R^4}\langle \nabla R\nabla R, \nabla R\nabla R \rangle - \frac{2}{R^3}\langle \nabla R\nabla R, \nabla\nabla R \rangle + \frac{1}{R^2}\langle \nabla\nabla R, \nabla\nabla R \rangle) \\
 &= -2R(\frac{|\nabla R|^4}{R^4} - \frac{2\langle \nabla\nabla R, \nabla R\nabla R \rangle}{R^3} + \frac{|\nabla\nabla R|^2}{R^2})
 \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο μόνος πιθανά θετικός όρος στο δεξί μέλος είναι ο  $\frac{4}{R}\langle \nabla R, \nabla|\text{Rc}|^2 \rangle$ . Αν η διάσταση της πολλαπλότητας είναι 3, το πρόβλημα μπορεί να διορθωθεί προσθέτοντας την ποσότητα  $|\text{Rc}|^2 - \frac{1}{3}R^2$  (δηλαδή την  $|E|^2$ ) στην  $\frac{|\nabla R|^2}{R}$ . Ας δούμε όμως πρώτα δύο αποτελέσματα που ισχύουν σε κάθε διάσταση και τα οποία θα χρειαστούν.

**Λήμμα 5.3.6.** *Αν  $(M, g(t))$  λύση της ροής Ricci, τότε*

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial t} R^2 = \Delta(R^2) - 2|\nabla R|^2 + 4R|\text{Rc}|^2, \text{ και}$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\text{Rc}|^2 = \Delta|\text{Rc}|^2 - 2|\nabla \text{Rc}|^2 + 4R_{ijkl}R^{il}R^{jk}.$$

*Απόδειξη.* Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} R^2 = \frac{\partial}{\partial t} (R \cdot R) = 2R \frac{\partial}{\partial t} R = 2R(\Delta R + 2|\text{Rc}|^2),$$

ενώ

$$\begin{aligned}
 \Delta R^2 &= g^{ij}\nabla_i\nabla_j R^2 = g^{ij}[\nabla_i(\nabla_j R^2) - \nabla_i\partial_j R^2] = g^{ij}[\nabla_i(2R\nabla_j R) - \nabla_{\nabla_i\partial_j} R^2] \\
 &= g^{ij}[2(\nabla_i R\nabla_j R + R\nabla_i(\nabla_j R) - 2R\nabla_i\partial_j R) = 2g^{ij}[\nabla_i R\nabla_j R + R(\nabla_i(\nabla_j R) - \nabla_i\partial_j R)] \\
 &= 2(|\nabla R|^2 + R\Delta R).
 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \frac{\partial}{\partial t} R^2 = \Delta(R^2) - 2|\nabla R|^2 + 4R|\text{Rc}|^2.$$

Για τη δεύτερη σχέση:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{Rc}|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} (g^{ik} g^{jl} R_{ij} R_{kl}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ik} \right) g^{jl} R_{ij} R_{kl} + g^{ik} \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{jl} \right) R_{ij} R_{kl} \\
&\quad + g^{ik} g^{jl} \left( \frac{\partial}{\partial t} R_{ij} \right) R_{kl} + g^{ik} g^{jl} R_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial t} R_{kl} \right) \\
&= 2 \partial_t g^{ik} g^{jl} R_{ij} R_{kl} + 2 g^{ik} g^{jl} \partial_t R_{ij} R_{kl} \\
&= 4 g^{pi} g^{qk} g^{jl} R_{pq} R_{ij} R_{kl} + 2 g^{ik} g^{jl} (\Delta_L R_{ij}) R_{kl} \\
&= 4 g^{pi} g^{qk} g^{jl} R_{pq} R_{ij} R_{kl} \\
&\quad + 2 g^{ik} g^{jl} (\Delta R_{ij} + 2 g^{pq} g^{rs} R_{pirj} R_{qs} - 2 g^{pq} R_{pi} R_{qj}) R_{kl} \\
&= 4 g^{pi} g^{qk} g^{jl} R_{pq} R_{ij} R_{kl} + 2 g^{ik} g^{jl} \Delta R_{ij} R_{kl} \\
&\quad + 4 g^{ik} g^{jl} g^{pq} g^{rs} R_{pirj} R_{qs} R_{kl} - g^{pq} g^{ik} g^{jl} R_{pi} R_{qj} R_{kl} \\
&= g^{ik} g^{jl} (\Delta R_{ij} R_{kl} + R_{ij} \Delta R_{kl}) + 4 g^{ik} g^{jl} g^{pq} g^{rs} R_{pirj} R_{qs} R_{kl} \\
&= \Delta (g^{ik} g^{jl} R_{ij} R_{kl}) - 2 g^{ik} g^{jl} \langle \nabla R_{ij}, \nabla R_{kl} \rangle + 4 g^{ik} g^{jl} g^{pq} g^{rs} R_{pirj} R_{qs} R_{kl} \\
&= \Delta |\mathbf{Rc}|^2 - 2 |\nabla \mathbf{Rc}|^2 + 4 R_{pirj} R^{pr} R^{ij} \\
&= \Delta |\mathbf{Rc}|^2 - 2 |\nabla \mathbf{Rc}|^2 + 4 R_{ijkl} R^{ik} R^{jl}.
\end{aligned}$$

αφού

$$\Delta (R_{ij} R_{kl}) = \Delta R_{ij} R_{kl} + R_{ij} \Delta R_{kl} + 2 \langle \nabla R_{ij}, \nabla R_{kl} \rangle.$$

□

**Πόρισμα 5.3.4.** Αν  $(M^3, g(t))$  λύση της ροής Ricci, τότε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (|\mathbf{Rc}|^2 - \frac{1}{3} R^2) &= \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{E}|^2 = \Delta (|\mathbf{Rc}|^2 - \frac{1}{3} R^2) - 2 (|\nabla \mathbf{Rc}|^2 - \frac{1}{3} |\nabla R|^2) \\
&\quad - 8 \operatorname{tr}_g (\mathbf{Rc}^3) + \frac{26}{3} R |\mathbf{Rc}|^2 - 2 R^3.
\end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Στη διάσταση  $n=3$  από την (3.12), μπορούμε να γράψουμε το (b) του παραπάνω λήμματος ως

$$\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{Rc}|^2 = \Delta |\mathbf{Rc}|^2 - 2 |\nabla \mathbf{Rc}|^2 - 2 R^3 - 8 \operatorname{tr}_g (\mathbf{Rc}^3) + 10 R |\mathbf{Rc}|^2.$$

□

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο  $-2 (|\nabla \mathbf{Rc}|^2 - \frac{1}{3} |\nabla R|^2)$  ώστε να εξάγουμε ένα φράγμα για τον  $\frac{4}{R} \langle \nabla R, \nabla |\mathbf{Rc}|^2 \rangle$  του λήμματος (4.3.4) ο οποίος δημιουργεί το πρόβλημα.

**Πόρισμα 5.3.5.** Για  $n=3$

$$|\nabla \mathbf{E}|^2 = |\nabla \mathbf{Rc}|^2 - \frac{1}{3} |\nabla R|^2 \geq \frac{1}{37} |\nabla \mathbf{Rc}|^2.$$

*Απόδειξη.* Ορίζουμε τον (3,0)-τανυστή  $X : X_{ijk} := \nabla_i R_{jk} - \frac{1}{3} \nabla_i R g_{jk}$  και τον

(1,0)-τανυστή  $Y : Y_k := g^{ij}X_{ijk}$ . Από την (1.13), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 |Y|^2 &= Y_k Y^k = g^{ij}X_{ijk}g^{ij}X_{ij}^k \\
 &= g^{ij}(\nabla_i R_{jk} - \frac{1}{3}\nabla_i R g_{jk})g^{ij}(\nabla_i R_j^k - \frac{1}{3}\nabla_i R g_j^k) \\
 &= (\nabla^j R_{jk} - \frac{1}{3}\nabla_i R \delta_k^i)(\nabla^j R_j^k - \frac{1}{3}\nabla^j R \delta_j^k) \\
 &= (\nabla^j R_{jk} - \frac{1}{3}\nabla_k R)(\nabla^j R_j^k - \frac{1}{3}\nabla^k R) \\
 &= (\frac{1}{2}\nabla_k R - \frac{1}{3}\nabla_k R)(\frac{1}{2}\nabla^k R - \frac{1}{3}\nabla^k R) \\
 &= \frac{1}{6}\nabla_k R \frac{1}{6}\nabla^k R = \frac{1}{36}|\nabla R|^2.
 \end{aligned}$$

Όμως για κάθε (2,0)-τανυστή  $Z$  (όχι κατ' ανάγκη συμμετρικό), ισχύει

$$|Z|^2 \geq \frac{1}{n}(\text{tr}_g Z)^2, \quad (5.37)$$

όπου  $n$  η διάσταση της πολλαπλότητας. Συνεπώς, για  $n=3$ ,

$$\frac{1}{3}|Y|^2 \leq |X|^2 = |\nabla R c|^2 - \frac{1}{3}|\nabla R|^2 = |\nabla E|^2.$$

Άρα

$$|\nabla R c|^2 \geq \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{36})|\nabla R|^2 = \frac{37}{108}|\nabla R|^2,$$

και έτσι

$$\frac{36}{37}|\nabla R c|^2 = |\nabla R c|^2 - \frac{1}{37}|\nabla R c|^2 \geq \frac{1}{3}|\nabla R|^2 + \frac{1}{108}|\nabla R|^2 - \frac{1}{37}|\nabla R c|^2$$

$$\text{με } \frac{1}{108}|\nabla R|^2 - \frac{1}{37}|\nabla R c|^2 \leq 0. \quad \square$$

Από τα πορίσματα (4.3.4), (4.3.5) τώρα, προκύπτει

**Πόρισμα 5.3.6.** Αν  $(M^3, g(t))$  λύση της ροής Ricci, τότε

$$\frac{\partial}{\partial t}(|R c|^2 - \frac{1}{3}R^2) \leq \Delta(|R c|^2 - \frac{1}{3}R^2) - \frac{2}{37}|\nabla R c|^2 - 8\text{tr}_g(Rc^3) + \frac{26}{3}R|R c|^2 - 2R^3.$$

Επιστρέφουμε στο λήμμα (4.3.4). Αφού  $Rc > 0$ , διαγωνοποιώντας ως προς μία ορθοκανονική βάση, αν  $a, b, c > 0$  οι ιδιοτιμές που προκύπτουν, τότε

$$|R c|^2 = a^2 + b^2 + c^2 < (a + b + c)^2 = R^2.$$

Επίσης από την (4.33) έχουμε

$$|\nabla R|^2 \leq 3|\nabla R c|^2$$

και υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
 |\nabla |R c|^2|^2 &= \nabla^i(R_{jk}R^{jk})\nabla_i(R_{jk}R^{jk}) \\
 &= (R^{jk}\nabla^i R_{jk} + R_{jk}\nabla^i R^{jk})(R^{jk}\nabla_i R_{jk} + R_{jk}\nabla_i R^{jk}) \\
 &= R^{jk}R^{jk}\nabla^i R_{jk}\nabla_i R_{jk} + R^{jk}R_{jk}\nabla^i R_{jk}\nabla_i R^{jk} + R_{jk}R^{jk}\nabla^i R^{jk}\nabla_i R_{jk} + R_{jk}R_{jk}\nabla^i R^{jk}\nabla_i R^{jk} \\
 &= 4|R c|^2|\nabla R c|^2.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \frac{4}{R} \langle \nabla R, \nabla |Rc|^2 \rangle &\leq \frac{4}{R} |\nabla R| |\nabla |Rc|^2| = 8 |\nabla R| |\nabla Rc| \frac{|Rc|}{R} \\ &\leq 8 |\nabla R| |\nabla Rc| \leq 8\sqrt{3} |\nabla Rc|^2. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) = \Delta \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) - 2R |\nabla \left( \frac{\nabla R}{R} \right)|^2 - 2 \frac{|\nabla R|^2}{R^2} |Rc|^2 + 8\sqrt{3} |\nabla Rc|^2$$

και από το πόρισμα (4.3.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) = \Delta \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) - 2R |\nabla \left( \frac{\nabla R}{R} \right)|^2 - 2 \frac{|\nabla R|^2}{R^2} |Rc|^2 \quad (5.38)$$

$$+ 8\sqrt{3} \cdot 37 (|\nabla E|^2) \quad (5.39)$$

Θέλουμε να απαλλαγούμε από τον όρο (4.35). Ορίζουμε λοιπόν

$$V := \frac{|\nabla R|^2}{R} + \frac{37}{2} (8\sqrt{3} + 1) |E|^2.$$

Από τις (4.34), (4.35) και το πόρισμα (4.3.6) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V &\leq \Delta \left( \frac{|\nabla R|^2}{R} \right) - 2R |\nabla \left( \frac{\nabla R}{R} \right)|^2 - 2 \frac{|\nabla R|^2}{R^2} |Rc|^2 \\ &\quad + 8\sqrt{3} \cdot 37 (|\nabla E|^2) + \frac{37}{2} (8\sqrt{3} + 1) (\Delta |E|^2 - 2 |\nabla E|^2 + W) \\ &= \Delta V - 2R |\nabla \left( \frac{\nabla R}{R} \right)|^2 - 2 \frac{|\nabla R|^2}{R^2} |Rc|^2 \\ &\quad + \frac{37}{2} (8\sqrt{3} + 1) W - 37 |\nabla E|^2, \end{aligned}$$

όπου  $W = \frac{26}{3} R |Rc|^2 - 8 \operatorname{tr}_g (Rc^3) - 2R^3$ . Από το πόρισμα (4.3.5) και πάλι

$$\frac{\partial}{\partial t} V = \Delta V - |\nabla Rc|^2 + \frac{37}{2} (8\sqrt{3} + 1) W. \quad (5.40)$$

Ο προβληματικός (πιθανά θετικός) όρος και εδώ είναι ο τελευταίος. Από το πόρισμα (4.3.4) ωστόσο θα περιμέναμε ότι ο  $W$  μηδενίζεται σε Einstein πολλαπλότητες. Πράγματι ισχύει το επόμενο.

**Λήμμα 5.3.7.** Σε μία 3-πολλαπλότητα θετικής καμπυλότητας Ricci, ισχύει

$$W \leq \frac{50}{3} R |E|^2.$$

*Απόδειξη.* Ορίζουμε  $X := -8 \langle Rc - \frac{1}{3} Rg, Rc^2 \rangle$ . Τότε  $X = \frac{8}{3} R |Rc|^2 - 8 \operatorname{tr}_g (Rc^3)$  και μπορούμε να γράψουμε

$$W = X + 6R (|Rc|^2 - \frac{1}{3} R^2)$$

. Ορίζουμε τον (2,0)-τανυστή  $Y$ :  $Y := Rc^2 - \frac{1}{9} R^2 g$  και παρατηρούμε ότι

$$Y_{ij} = R_i^k R_{kj} - \frac{1}{9} R^2 g_{ij} = g^{kl} (R_{ik} - \frac{1}{3} R g_{ik}) (R_{jl} + \frac{1}{3} R g_{jl}).$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz για  $n=3$ , έχουμε

$$\begin{aligned} X &= -8\langle Rc - \frac{1}{3}Rg, Y \rangle \\ &\leq 8|Rc + \frac{1}{3}Rg||Rc - \frac{1}{3}Rg|^2 \\ &\leq \frac{32}{3}R|Rc - \frac{1}{3}Rg|^2 = \frac{32}{3}R(|Rc|^2 - \frac{1}{3}R^2), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει διότι  $Rc > 0$ .  $\square$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε αυτό που θέλουμε.

*Απόδειξη.* (θεωρήματος 4.3.2) Έστω  $(M, g(t))$  είναι λύση της ροής Ricci σε μία κλειστή 3-πολλαπλότητα με  $Rc(g(0)) > 0$ . Από την (4.36) και το λήμμα (4.3.6) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} V \leq \Delta V - |\nabla Rc|^2 + \frac{7400\sqrt{3} + 925}{3} R(|Rc|^2 - \frac{1}{3}R^2).$$

Από το πόρισμα (4.3.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} V \leq \Delta V - |\nabla Rc|^2 + CR^{3-2\gamma},$$

όπου τα  $C$  και  $\gamma = \frac{\bar{\delta}}{2}$  εξαρτώνται μόνο από την  $g_0$ . Από την (2.26) τώρα προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial t} R^{2-\gamma} = \Delta(R^{2-\gamma}) - (2-\gamma)(1-\gamma)R^{-\gamma}|\nabla R|^2 + 2(2-\gamma)R^{1-\gamma}|Rc|^2.$$

Επιλέγουμε  $\bar{\beta}$  που εξαρτάται μόνο από την  $g_0$  ώστε

$$0 < \bar{\beta} \leq \frac{(R_{\min}(0))^\gamma}{3(2-\gamma)(1-\gamma)}.$$

Αφού  $|\nabla R|^2 \leq 3|\nabla Rc|^2$ , για κάθε  $\beta \in [0, \bar{\beta}]$  θα ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (V - \beta R^{2-\gamma}) &\leq \Delta(V - \beta R^{2-\gamma}) \\ &\quad + [\beta(2-\gamma)(1-\gamma)R^{-\gamma}|\nabla R|^2 - |\nabla Rc|^2] \\ &\quad + CR^{3-2\gamma} - 2\beta(2-\gamma)R^{1-\gamma}|Rc|^2 \\ &\leq \Delta(V - \beta R^{2-\gamma}) + C_1, \end{aligned}$$

όπου η  $C_1$  εξαρτάται από τα  $\beta$  και  $g_0$ . Από την αντίστοιχη αρχή μεγίστου τώρα, παίρνουμε ότι

$$V - \beta R^{2-\gamma} \leq C_1 t + C_2.$$

Όμως έχουμε δείξει πως το διάστημα ύπαρξης της λύσης είναι πεπερασμένο και συνεπώς έχουμε ένα ομοιόμορφο άνω φράγμα. Καταλήγουμε λοιπόν στο

$$\frac{|\nabla R|^2}{R} \leq V \leq \beta R^{2-\gamma} + C_3,$$

από όπου έπεται πως

$$\frac{|\nabla R|^2}{R^3} \leq 2\beta R^{-\gamma} + C_4 R^{-3}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το ζητούμενο.  $\square$

Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του θεωρήματος (4.3.2), μπορούμε να βρούμε ολικά φράγματα για τη μεταβολή της καμπυλότητας.

**Θεώρημα 5.3.3.** *Με τις υποθέσεις που έχουν γίνει στην αρχή της παραγράφου, υπάρχουν σταθερές  $C, \gamma > 0$  εξαρτώμενες μόνο από τις αρχικές συνθήκες ώστε*

$$\frac{R_{\min}}{R_{\max}} \geq 1 - CR_{\max}^{-\gamma}.$$

Αυτό σημαίνει ότι  $\frac{R_{\min}}{R_{\max}} \rightarrow 1$  καθώς  $t \rightarrow T$ , αφού  $R_{\max} \rightarrow \infty$  σύμφωνα με το πόρισμα (4.3.1). Άρα  $R \rightarrow \infty$  ομοιόμορφα καθώς  $t \rightarrow T$ .

**Απόδειξη.** Το θεώρημα (4.3.2) μας επιτρέπει να συγκρίνουμε την καμπυλότητα σε διαφορετικά σημεία της πολλαπλότητας. Από το πόρισμα (4.3.1) γνωρίζουμε ότι  $R_{\max} \rightarrow \infty$  καθώς  $t \rightarrow T$ . Συνεπώς για  $t$  αρκετά κοντά στο  $T$ , το θεώρημα (4.3.2) μας λέει πως υπάρχουν θετικές σταθερές  $A, \alpha$  ώστε

$$|\nabla R| \leq AR_{\max}^{\frac{3}{2}-\alpha}.$$

Έτσι (για  $t$  αρκετά κοντά στο  $T$ )

$$|R(x) - R(y)| \leq \int_{\gamma} |\nabla R| ds \leq AR_{\max}^{\frac{3}{2}-\alpha} d(x, y), \quad (5.41)$$

όπου  $\gamma$  η ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή που συνδέει τα  $x, y$ . Επιλέγουμε  $x(t)$  τέτοιο, ώστε  $R_{\max}(t) = R(x, t)$  (το οποίο γίνεται αφού η  $M$  είναι συμπαγής) και ορίζουμε

$$L(t) := \frac{1}{\varepsilon \sqrt{R_{\max}(t)}},$$

για  $\varepsilon > 0$ . Τότε, για κάθε  $y \in B(x(t), L(t))$ , λόγω της (4.37), έχουμε

$$R(y) \geq R(x) - AR_{\max}^{\frac{3}{2}-\alpha} L \geq R_{\max} \left(1 - \frac{A}{\varepsilon} R_{\max}^{-\alpha}\right). \quad (5.42)$$

Όμως,  $R_{\max} \rightarrow \infty$  καθώς  $t \rightarrow T$ . Κατά συνέπεια, για  $\delta > 0$  και  $t$  κοντά στο  $T$ , έχουμε

$$R(y) \geq (1 - \delta) R_{\max} \quad (5.43)$$

για κάθε  $y \in B(x(t), L(t))$ .

Θα έχουμε δείξει το θεώρημα αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι η  $B(x(t), L(t))$  είναι ολόκληρη η  $M$  για κάθε  $t$  κοντά στο  $T$ . Για να δειχθεί αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Myers. Έστω  $\mathcal{N} = B(x(t), L(t))$ . Έχουμε δείξει ότι  $R_c \geq 2\beta^2 R_g$  για κάποιο  $\beta > 0$ , στο πόρισμα (4.3.2). Έτσι, λόγω της (4.39), για κάθε  $\delta > 0$  ισχύει

$$R_c \geq 2\beta^2 (1 - \delta) R_{\max} g$$

στη  $\mathcal{N}$  για  $t$  κοντά στο  $T$ . Από την απόδειξη του θεωρήματος του Myers, προκύπτει

$$\text{diam}(\mathcal{N}) \leq \frac{\pi}{\beta \sqrt{(1 - \delta) R_{\max}}} < \frac{1}{\delta R_{\max}} < \frac{1}{\varepsilon R_{\max}} = L$$

για  $\delta$  αρκετά μικρό. Επειδή η  $\mathcal{N}$  ορίστηκε ως η  $B(x(t), L(t))$  αλλά όπως δείξαμε έχει διάμετρο  $< L$ , πρέπει να είναι μη συνεκτική. Γνωρίζουμε όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει και συνεπώς η  $\mathcal{N}$  πρέπει να είναι ολόκληρη η  $M$  και το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από την (4.38).  $\square$

**Πόρισμα 5.3.7.** Αν  $\lambda(x, t) \geq \mu(x, t) \geq \nu(x, t)$  οι ιδιοτιμές του τελεστή καμπυλότητας στο  $(x, t)$ , τότε για κάθε  $\varepsilon \in (0, 1)$  υπάρχει  $T_\varepsilon \in [0, T)$  ώστε

$$\min_{x \in M^3} \nu(x, t) \geq (1 - \varepsilon) \max_{x \in M^3} \lambda(x, t) > 0,$$

για όλα τα  $t \in [T_\varepsilon, T)$ . Ιδιαίτερα, η μετρική θα αποκτήσει θετική καμπυλότητα διατομής σε ολόκληρη τη  $M$ .

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε το θεώρημα (4.3.1):

$$\nu \geq \lambda - \bar{C}(\lambda + \mu + \nu)^{1-\delta} \geq \lambda(1 - 3\bar{C}R^{-\delta}) \quad (5.44)$$

σε κάθε σημείο  $x \in M$ . Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι  $R \rightarrow \infty$  ομοιόμορφα όταν  $t \rightarrow T$ . Αν μας δοθεί λοιπόν  $\eta > 0$ , και  $t$  κοντά στο  $T$  έχουμε

$$\begin{aligned} \nu(x, t) &\geq (1 - \eta)\lambda(x, t) \quad (\text{από την (4.40) καθώς } R^{-\delta} \rightarrow 0) \\ &\geq \frac{1 - \eta}{3} R(x, t) \quad (\text{αφού } 3\lambda \geq \lambda + \mu + \nu = R) \\ &\geq \frac{(1 - \eta)^2}{3} R(y, t) \quad (\text{αφού } R_{\max}/R_{\min} \rightarrow 1) \\ &\geq \frac{(1 - \eta)^2}{3} (\lambda(y, t) + 2(1 - \eta)\lambda(y, t)) \\ &\quad (\text{αφού από την (4.41) } \mu + \nu \geq 2\nu \geq 2(1 - \eta)\lambda) \\ &\geq (1 - \eta)^3 \lambda(y, t). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Παίρνοντας το supremum ως προς όλα τα  $x, y \in M$  έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

## 5.4 Νορμαρισμένη ροή Ricci

Έχουμε λοιπόν δει ως τώρα πως η λύση της ροής Ricci υπάρχει για πεπερασμένο χρόνο  $T$ , η καμπυλότητα απειρίζεται καθώς πλησιάζουμε αυτή τη χρονική στιγμή και οι καμπυλότητες διατομής πλησιάζουν μεταξύ τους καθώς συμβαίνει αυτό. Επειδή αναζητούμε μία μετρική σταθερής καμπυλότητας διατομής, σκεφτόμαστε να χρησιμοποιήσουμε την οριακή μετρική καθώς  $t \rightarrow T$ . Εδώ όμως υπάρχει το πρόβλημα ότι η πολλαπλότητα εκφυλίζεται σε σημείο στο χρόνο  $T$ . Αναβαθμολογούμε λοιπόν τη μετρική με τέτοιο τρόπο ώστε η πολλαπλότητα να διατηρεί σταθερό όγκο. Το αποτέλεσμα είναι η λεγόμενη νορμαρισμένη ροή Ricci για την οποία είδαμε κάποια πράγματα στο κεφάλαιο 2. Ακριβώς επειδή η εξίσωση αυτή προκύπτει από αναβαθμολόγηση της μετρικής, τα περισσότερα αποτελέσματα που ισχύουν για τη (μη νορμαρισμένη) ροή Ricci μεταφέρονται χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία στη νορμαρισμένη ροή Ricci μέσω του λήμματος (2.4.1).

Η σημαντική διαφορά της νέας ροής από τη ροή Ricci είναι πως η λύση υπάρχει για όλο το χρόνο αφού τώρα πια η πολλαπλότητα δεν συρρικνώνεται σε σημείο (σταθερός όγκος). Αφήνοντας λοιπόν το  $t \rightarrow \infty$  θα δείξουμε ότι έχουμε σύγκλιση σε μετρική σταθερής θετικής καμπυλότητας ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του θεωρήματος (4.0.7).

### 5.4.1 Ύπαρξη λύσης για όλο το χρόνο

**Λήμμα 5.4.1.** Αν  $\bar{g}(t)$  είναι λύση της νορμαρισμένης ροής Ricci σε μία κλειστή 3-πολλαπλότητα, γνησια θετικής αρχικής καμπυλότητας Ricci, τότε η  $\bar{R}_{\max}$  είναι φραγμένη.

*Απόδειξη.* Από το πόρισμα (4.3.2) και το λήμμα (2.4.1),

$$\bar{R}_c = R_c \geq 2\beta^2 R_g \geq 2\beta^2 R_{\min} g = 2\beta^2 \bar{R}_{\min} g$$

για κάποιο  $\beta > 0$ . Από το θεώρημα του Myers λοιπόν η διάμετρος  $\bar{L}$  της  $M$  ως προς τη μετρική  $\bar{g}$  ικανοποιεί την

$$\bar{L} \leq \frac{\pi}{\beta \sqrt{\bar{R}_{\min}}}.$$

Ένα κάτω φράγμα για την  $\bar{L}$  προκύπτει από το γεγονός πως ο όγκος της πολλαπλότητας είναι σταθερός, μέσω του θεωρήματος Bishop-Gunter. Αφού  $\bar{R}_c = R_c \geq 0$ ,

$$\bar{V} = \text{Vol}(B(p, \bar{L})) \leq V_3^o = \frac{4\pi}{3} \bar{L}^3,$$

όπου  $\bar{V}$  ο όγκος της  $M$  ως προς την  $\bar{g}$ , ο οποίος είναι σταθερός (έστω  $\bar{V}_0$  η σταθερή αυτή τιμή). Συνεπώς,

$$\left(\frac{3\bar{V}_0}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \bar{L} \leq \frac{\pi}{\beta \sqrt{\bar{R}_{\min}}}$$

και έχουμε ένα άνω φράγμα για την  $\bar{R}_{\min}$ . Από το θεώρημα (4.3.3) τώρα (και το λήμμα (2.4.1)), έπεται ότι υπάρχει  $C > 0$  ώστε

$$\frac{\bar{R}_{\min}}{\bar{R}_{\max}} = \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \geq \frac{1}{C}.$$

Το άνω φράγμα για την  $\bar{R}_{\min}$  λοιπόν δίνει ένα άνω φράγμα για την  $\bar{R}_{\max}$  και η απόδειξη είναι πλήρης.  $\square$

**Θεώρημα 5.4.1.** Αν  $(M, g(t))$  είναι λύση της ροής Ricci σε μία κλειστή 3-πολλαπλότητα με  $Rc(g(0)) > 0$ , τότε η αντίστοιχη λύση της νορμαρισμένης ροής Ricci υπάρχει για όλο το χρόνο.

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε πρώτα πως

$$\int_0^T R_{\max}(t) dt = \infty,$$

όπου  $R_{\max}$  η μέγιστη τιμή της βαθμωτής καμπυλότητας της  $g(t)$  και  $[0, T)$  το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης της ροής Ricci. Θέτουμε λοιπόν

$$f(t) = \exp\left[2 \int_0^t R_{\max}(u) du\right] R_{\max}(0)$$

και είναι άμεσο να δούμε πως αυτή ικανοποιεί την

$$\frac{df}{dt} = 2R_{\max}(t)f(t).$$



Από την (2.26) τώρα,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(R - f) &= \Delta R + 2|Rc|^2 - 2R_{\max}(t)f \\ &\leq \Delta(R - f) + 2R_{\max}(R - f)\end{aligned}$$

(διότι  $|Rc|^2 \leq R^2$  το οποίο ισχύει αφού η  $Rc$  είναι θετική). Όμως  $R - f \leq 0$  αρχικά αφού  $f(0) = R_{\max}(0)$ . Η συνθήκη αυτή διατηρείται από τη σ.δ.ε. που προκύπτει αγνοώντας τη Λαπλασιανή στην παραπάνω εξίσωση, καθώς η

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = 2R_{\max}(t)\phi(t)$$

είναι ισοδύναμη της

$$\frac{d}{dt} \log(|\phi(t)|) = 2R_{\max}(t),$$

από την οποία προκύπτει ότι η  $\phi$  δεν αλλάζει πρόσημο. Από την αρχή του μεγίστου για βαθμωτές συναρτήσεις λοιπόν, η συνθήκη  $R - f \leq 0$  διατηρείται. Όμως  $R_{\max} \rightarrow \infty$  καθώς  $t \rightarrow T$  και συνεπώς  $f \rightarrow \infty$  καθώς  $t \rightarrow T$ . Από τον ορισμό της  $f$  αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{t \rightarrow T} \int_0^t R_{\max}(u) du = \infty.$$

Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα για τη νορμαρισμένη ροή Ricci θα είναι το ίδιο:

$$\int_0^{\bar{T}} \bar{R}_{\max}(\tau) d\tau = \int_0^T r(t) dt = \infty,$$

όπου  $[0, \bar{T})$  το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της ροής Ricci. Αυτό έπεται από το λήμμα (2.4.1) καθώς  $\bar{R}_{\max} d\tau = (\psi^{-1} R_{\max})(\psi d\tau) = r dt$ . Έτσι το ολοκλήρωμα για τη νορμαρισμένη ροή Ricci πρέπει επίσης να αποκλίνει. Αλλά η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι φραγμένη από το προηγούμενο λήμμα. Συνεπώς το διάστημα ολοκλήρωσης πρέπει να είναι μη φραγμένο, δηλαδή  $\bar{T} = \infty$ , δηλαδή το ζητούμενο.  $\square$

#### 5.4.2 Σύγκλιση σε μετρική σταθερής καμπυλότητας

Θα δείξουμε τώρα πως η νορμαρισμένη ροή Ricci συγκλίνει σε ομαλή μετρική,  $\bar{g}_\infty$ , σταθερής, θετικής καμπυλότητας διατομής. Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του θεωρήματος (4.2.1) και βασικό εργαλείο θα είναι και πάλι το θεώρημα (4.2.2).

Εξετάζουμε αρχικά την ύπαρξη και τη συνέχεια της οριακής μετρικής. Για να δείξουμε πως η  $\bar{g}_\infty$  υπάρχει και είναι συνεχής πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει  $C < \infty$  τέτοιο, ώστε

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{g} \right| d\tau < C.$$

Από την εξίσωση της νορμαρισμένης ροής Ricci αυτό είναι ισοδύναμο με το

$$\int_0^\infty \left| \bar{Rc} - \frac{\bar{r}}{3} \bar{g} \right| d\tau \quad (5.46)$$

να είναι φραγμένο. Από το πόρισμα (4.3.3) γνωρίζουμε ότι

$$\frac{|Rc - \frac{1}{3}Rg|^2}{R^2} \leq CR^{-\delta}.$$

Αυτό είναι ένα γράμμα της μορφής που χρειαζόμαστε ( το θεώρημα (4.3.3) μας λέει ότι καθώς  $t \rightarrow \infty$  τα  $r$  και  $R$  πλησιάζουν ομοιόμορφα). Ωστόσο, χρειαζόμαστε ένα αντίστοιχο φράγμα που να ισχύει για τη νορμαρισμένη ροή Ricci και που θα κάνει το ολοκλήρωμα (4.42) να είναι επίσης φραγμένο. Ο ευκολότερος τρόπος για να γίνει αυτό είναι να δείξουμε ότι η προς ολοκλήρωση ποσότητα είναι φραγμένη από κάποια εκθετικά φθίνουσα ποσότητα (ένα σταθερό φράγμα δεν είναι αρκετό για την περίπτωση αυτή αφού το διάστημα ολοκλήρωσης είναι μη φραγμένο. Θα χρειαστούμε κάποια εισαγωγικά αποτελέσματα.

**Λήμμα 5.4.2.** *Αν  $(M^3, \bar{g}(\tau))$  είναι λύση της ροής νορμαρισμένης ροής Ricci σε μία κλειστή 3-πολλαπλότητα με γνήσια θετική αρχική καμπυλότητα Ricci, τότε υπάρχει  $\varepsilon > 0$  ώστε  $\bar{R} \geq \varepsilon$  για κάθε  $\tau > 0$ .*

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 5.4.3.** *Αν  $M$  είναι απλά συνεκτική πολλαπλότητα διάστασης 3, της οποίας οι καμπυλότητες διατομής βρίσκονται μεταξύ των τιμών  $K$  και  $\frac{1}{4}K$ , για κάποια σταθερά  $K$ , τότε η εγχύσιμη ακτίνα της  $M$  είναι τουλάχιστον  $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ .*

Από το πόρισμα (4.3.7)

$$\frac{v(x, t)}{\lambda(x, t)} \rightarrow 1$$

καθώς  $t \rightarrow T$ , ομοιόμορφα για όλα τα  $x, y \in M$ . Από το λήμμα (2.4.1) και το γεγονός ότι  $\lambda \geq \mu \geq \nu$  έπεται τότε ότι

$$\frac{\bar{\lambda}_i}{\bar{\lambda}_j} \rightarrow 1$$

ομοιόμορφα, καθώς  $\tau \rightarrow \infty$  για κάθε  $i, j$  ( $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \mu, \lambda_3 = \nu$ ). Συνεπώς, μετά από κάποια χρονική στιγμή θα ισχύουν οι υποθέσεις του παραπάνω λήμματος με  $K$  κάποιο πολλαπλάσιο του  $\bar{R}_{\min}$  σύμφωνα με το θεώρημα (4.3.3). Εφαρμόζοντας το λήμμα λοιπόν, στον καθολικό χώρο επικάλυψης  $N$  της  $M$ , βρίσκουμε ότι ο όγκος του είναι τουλάχιστον ένα πολλαπλάσιο της τρίτης δύναμης της ακτίνας έγχυσης,  $p(N)$ , σύμφωνα με το θεώρημα σύγκρισης Bishop-Gunther, αφού έχουμε ένα ομοιόμορφο φράγμα στις καμπυλότητες διατομής από το λήμμα (4.4.1). Έτσι,

$$\text{Vol}(N) \geq C' p(N)^3 \geq C' \left( \frac{\pi}{\sqrt{K}} \right)^3 \geq C \bar{R}_{\max}^{-\frac{3}{2}}. \quad (5.47)$$

Σημειώνουμε πως αφού ο τανυστής Ricci της  $M$  είναι κάτω φραγμένος (από το πόρισμα (4.3.2)), η θεμελιώδης ομάδα της  $M$  είναι πεπερασμένη (από το θεώρημα του Myers). Επιπλέον ο όγκος της  $M$  είναι σταθερός στη ωρμαρισμένη ροή Ricci. Έτσι

$$\text{Vol}(N) = |\pi_1(M)| \text{Vol}(M) = \text{σταθερά}.$$

Από αυτό και την (4.43) προκύπτει ένα κάτω φράγμα για την  $\bar{R}_{\max}$  και το αποτέλεσμα του θεωρήματος (4.3.3) δίνει το ομοιόμορφο κάτω φράγμα για την  $\bar{R}_{\min}$  που ζητούσαμε.  $\square$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το κατάλληλο φράγμα που θα μας επιτρέψει να δείξουμε πως το ολοκλήρωμα (4.42) είναι φραγμένο. Τόσο σε αυτήν όσο και σε επόμενες αποδείξεις θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε επιχειρήματα που περιλαμβάνουν την αρχή του μεγίστου όπως έχουμε κάνει και στα προηγούμενα. Για το λόγο αυτό πρέπει να γνωρίζουμε πως εξελίσσονται οι διάφορες ποσότητες κατά τη νορμαρισμένη ροή Ricci. Στο κεφάλαιο 2 κάποια τέτοια αποτελέσματα (θεώρημα (2.4.1)), εδώ όμως θα εξετάσουμε το θέμα γενικότερα. Υπάρχει ένας εύκολος τρόπος να μεταβαίνουμε από τη ροή Ricci στη νορμαρισμένη ροή Ricci. Πρώτα πρέπει να εισάγουμε την έννοια του βαθμού ενός τανυστή.

Αν λοιπόν  $P$  είναι τανυτής εξαρτώμενος από τη μετρική και την καμπυλότητα ως προς τη ροή Ricci, τότε η ίδια ποσότητα υπολογισμένη ως προς τη νορμαρισμένη ροή Ricci, από τα αποτελέσματα του λήμματος (2.4.1), θα σχετίζεται με την  $P$  μέσω ενός τύπου της μορφής  $\bar{P} = \psi^n P$  (όπου  $\psi$  είναι ο παράγοντας με τον οποίο πολλαπλασιάσαμε τη μετρική ώστε να προκύψει η νορμαρισμένη ροή Ricci). Καλούμε το  $n$  βαθμό του  $P$ . Για παράδειγμα η βαθμωτή καμπυλότητα έχει βαθμό -1.

**Λήμμα 5.4.4.** *Αν ο τανυστής  $P$  ικανοποιεί την*

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \Delta P + Q$$

*ως προς τη (μη νορμαρισμένη) ροή Ricci, σε μία 3-πολλαπλότητα, και είναι βαθμού  $n$ , τότε ο  $Q$  έχει βαθμό  $n-1$  και ως προς τη νορμαρισμένη ροή Ricci θα ισχύει*

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{P} = \bar{\Delta} \bar{P} + \bar{Q} + \frac{2\bar{r}n}{3} \bar{P}.$$

*Απόδειξη.* Ο  $Q$  έχει βαθμό  $n-1$  διότι  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = \psi$  και συνεπώς  $\frac{\partial}{\partial t} P$  έχει βαθμό  $n-1$ . Επίσης, ισχύει  $\Delta = \psi \bar{\Delta}$  κι έτσι η  $\Delta P$  έχει βαθμό  $n-1$ , άρα και η  $Q$ . Τώρα  $\bar{P} = \psi^n P$  και ισχύει και η (2.27). Έτσι

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{P} &= \psi^{-1} \frac{\partial \psi^n P}{\partial t} \\ &= \psi^{n-1} \frac{\partial P}{\partial t} + n \psi^{n-2} \frac{d\psi}{dt} P \\ &= \psi^{n-1} (\Delta P + Q) + n \psi^{n-2} \left( \frac{2\bar{r}}{3} \psi^2 \right) P \\ &= \bar{\Delta} \bar{P} + \bar{Q} + \frac{2\bar{r}n}{3} \bar{P}. \end{aligned}$$

□

**Θεώρημα 5.4.2.** *Αν  $(M^3, \bar{g}(\tau))$  είναι λύση της νορμαρισμένης ροής Ricci σε μια κλειστή 3-πολλαπλότητα γνήσια θετικής αρχικής καμπυλότητας Ricci, τότε υπάρχουν σταθερές  $C, \delta > 0$  ώστε*

$$|\bar{E}| \leq C e^{-\delta \tau}.$$

*Απόδειξη.* Επειδή  $|\bar{E}| = |E| \leq (\bar{\lambda} - \bar{\nu})^2/4 = (\bar{\lambda} - \bar{\nu})^2/4$  αρκεί να βρούμε εκθετικά φθίνον φράγμα για την  $(\bar{\lambda} - \bar{\nu})$ . Στην πραγματικότητα θα δείξουμε ότι υπάρχουν σταθερές  $C, \delta > 0$  ώστε

$$\bar{\lambda} - \bar{\nu} \leq C e^{-\delta \tau} (\bar{\mu} + \bar{\nu}).$$

Το αποτέλεσμα τότε θα είναι άμεσο από το λήμμα (4.4.1), το οποίο δίνει ένα ομοιόμορφο φράγμα για την  $\bar{\mu} + \bar{\nu}$ .

Χρησιμοποιούμε και πάλι το τρικ του Uhlenbeck αυτή τη φορά για τη νορμαρισμένη ροή Ricci. Το αντίστοιχο του συστήματος (3.14) είναι τώρα το

$$\frac{\partial}{\partial \tau} i_a^i = \bar{R}_l^i i_a^l - \frac{\bar{r}}{2} i_a^i$$

(ή  $\frac{\partial}{\partial \tau} i = \bar{R} \circ i - \frac{\bar{r}}{2} i$ ). Η εξέλιξη τώρα του  $i^* \bar{R} i$  είναι τότε (από το θεώρημα (2.4.1) και το προηγούμενο λήμμα)

$$\partial_t \bar{R}_{abcd} = \bar{\Delta} \bar{R}_{abcd} + 2(\bar{B}_{abcd} - \bar{B}_{abdc} + \bar{B}_{acbd} - \bar{B}_{adb c}) - \bar{r} \bar{R}_{abcd}.$$

Οδηγούμαστε έτσι στην ανάλογη της εξίσωσης (4.24)

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \\ \bar{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^2 + \bar{\mu} \bar{\nu} - \bar{r} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu}^2 + \bar{\nu} \bar{\lambda} - \bar{r} \bar{\mu} \\ \bar{\nu}^2 + \bar{\lambda} \bar{\mu} - \bar{r} \bar{\nu} \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την αρχή του μεγίστου όπως κάναμε και στις αποδείξεις του λήμματος (4.3.1) και του θεωρήματος (4.3.1), με το χρονικά εξαρτώμενο αυτή τη φορά σύνολο

$$\mathcal{K}(\tau) \equiv \{Q \in E : e^{\delta \tau} (\bar{\lambda}(Q) - \bar{\nu}(Q)) - C(\bar{\nu}(Q) + \bar{\mu}(Q)) \leq 0\}$$

για κάποια  $C, \alpha, \delta$  που πρέπει να επιλεγούν. Από την (4.44) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \log(e^{\delta \tau} \frac{\bar{\lambda} - \bar{\nu}}{\bar{\nu} + \bar{\mu}}) &= \delta - (\bar{\mu} - \bar{\nu}) - \frac{\bar{\nu}^2 + \bar{\mu}^2}{\bar{\nu} + \bar{\mu}} \\ &\leq \delta \frac{1}{2} (\bar{\nu} + \bar{\mu}), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο όρος  $\bar{\nu} - \bar{\mu}$  παραμένει αρνητικός στη νορμαρισμένη ροή Ricci, γεγονός που έπεται από την (4.44) με τον ίδιο τρόπο που δείξαμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τη ροή Ricci.

Από το λήμμα (4.4.2) τώρα, μπορούμε να επιλέξουμε  $\varepsilon > 0$  ώστε

$$2\varepsilon \leq \bar{\lambda} + \bar{\mu} + \bar{\nu} \leq (1 + B)(\bar{\mu} + \bar{\nu}),$$

για κάποιο  $B > 0$  με το τελευταίο βήμα να προκύπτει από το λήμμα (4.3.1), καθώς

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu} + \bar{\nu}} = \frac{\lambda}{\mu + \nu} \leq B.$$

Μπορούμε τώρα να επιλέξουμε  $\delta > 0$ , αρκετά μικρό, ώστε

$$\delta - \frac{\varepsilon}{1 + B} < 0.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{d}{d\tau} \log(e^{\delta \tau} \frac{\bar{\lambda} - \bar{\nu}}{\bar{\nu} + \bar{\mu}}) \leq \delta - \frac{1}{2} (\bar{\mu} + \bar{\nu}) \leq \delta - \frac{\varepsilon}{1 + B} \leq 0.$$

Συνεπώς η λύση της σ.δ.ε. παραμένει στο  $\mathcal{K}(\tau)$  για κατάλληλα επιλεγμένα  $C, \delta > 0$ . Το  $\mathcal{K}(\tau)$  είναι κλειστό, κυρτό και αναλλοίωτο σε παράλληλες μετατοπίσεις. Άρα έχουμε το ζητούμενο από το θεώρημα (3.2.4).  $\square$

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα (4.2.2) πρέπει να βρούμε ένα εκθετικό φράγμα για το  $|\bar{R}c - \frac{\bar{r}}{3}\bar{g}|$ . Το προηγούμενο αποτέλεσμα μας έδωσε ένα φράγμα για το  $|\bar{E}| = |\bar{R}c - \frac{\bar{R}}{3}\bar{g}|$ . Χρειαζόμαστε λοιπόν ένα εκθετικό φράγμα για τη διαφορά  $|\bar{R} - \bar{r}|$ . Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο.

**Λήμμα 5.4.5.** Υπάρχουν σταθερές  $C, \delta > 0$ , ώστε

$$\bar{R}_{\max} - \bar{R}_{\min} < Ce^{-\delta\tau}.$$

*Απόδειξη.* Επειδή έχουμε βρει ένα ομοιόμορφο άνω φράγμα για τη διάμετρο της  $M$  (όπως προέκυψε από την απόδειξη του λήμματος (4.4.1)), αρκεί να βρούμε ένα εκθετικό φράγμα για το  $|\nabla \bar{R}|$ . Αυτό επιτυγχάνεται με παρόμοιο τρόπο με το θεώρημα (4.3.2). Έστω

$$G = \frac{|\nabla \bar{R}|^2}{R^2} + \alpha |\bar{E}|^2,$$

για κάποιο  $\alpha > 0$  που θα επιλεγεί κατάλληλα σε λίγο. Ο  $G$  είναι βαθμού -2 και με τον ίδιο τρόπο όπως στο θεώρημα (4.3.2) μπορούμε να δείξουμε ότι, για κατάλληλο  $\alpha > 0$ , ικανοποιεί την

$$\frac{\partial}{\partial t} G \leq \Delta G + \beta R |\bar{E}|^2$$

για κάποιο  $\beta > 0$ . Έτσι από το λήμμα (4.4.4) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{G} &\leq \bar{\Delta} \bar{G} + \beta \bar{R} |\bar{E}|^2 - \frac{4\bar{r}}{3} \bar{G} \\ &\leq \bar{\Delta} \bar{G} + Ce^{-\delta\tau} - \delta \bar{G} \end{aligned}$$

για κάποια  $C, \delta > 0$  από το αποτέλεσμα του θεωρήματος (4.4.2), χρησιμοποιώντας επιπλέον ότι η  $\bar{R}$  είναι κάτω φραγμένη (λήμμα (4.4.2)), ώστε να φράξουμε το  $\bar{r} > \frac{3\delta}{4}$  για  $\delta > 0$ . Έτσι

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (e^{\delta\tau} \bar{G} - C\tau) \leq \bar{\Delta} (e^{\delta\tau} \bar{G} - C\tau)$$

και από την αρχή του μεγίστου:  $e^{\delta\tau} \bar{G} - C\tau \leq C$  από όπου έπεται ότι η  $\bar{G}$  ελαττώνεται εκθετικά. Καθώς τώρα η  $\bar{R}$  είναι άνω φραγμένη όπως είδαμε στο λήμμα (4.4.1), η  $|\nabla \bar{R}|^2$  είναι επίσης εκθετικά φθίνουσα και έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε αυτό που θέλουμε.

**Θεώρημα 5.4.3.** Αν  $(M^3, \bar{g}(\tau))$  είναι λύση της νορμαρισμένης ροής Ricci σε μια κλειστή 3-πολλαπλότητα γνήσια θετικής αρχικής καμπυλότητας Ricci, τότε η  $\bar{g}(\tau)$  υπάρχει για όλα τα  $\tau \in [0, \infty)$  και συγκλίνει ομοιόμορφα καθώς  $\tau \rightarrow \infty$  σε μία συνεχή μετρική  $\bar{g}_\infty$ .

*Απόδειξη.* Από το θεώρημα (4.4.2) και το λήμμα (4.4.5),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \frac{\partial \bar{g}}{\partial \tau} \right| d\tau &= \int_0^\infty \left| \bar{R}c - \frac{\bar{r}}{3}\bar{g} \right| d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \left( \left| \bar{R}c - \frac{\bar{R}}{3}\bar{g} \right| + \left| \bar{R}c - \frac{\bar{R}-\bar{r}}{3}\bar{g} \right| \right) d\tau \\ &< \int_0^\infty Ce^{-\delta\tau} d\tau < \infty. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα (4.2.2), έπεται ότι η  $\bar{g}(\tau)$  συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνεχή μετρική  $\bar{g}_\infty$ , καθώς  $\tau \rightarrow \infty$ .  $\square$

### Η απόδειξη του θεωρήματος του Hamilton

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομαλή. Αυτό είναι σημαντικό διότι θέλουμε η οριακή μετρική να είναι ομαλή και ακόμα επειδή θέλουμε οι καμπυλότητες ως προς τη νορμαρισμένη ροή Ricci να συγκλίνουν στις αντίστοιχες καμπυλότητες της οριακής μετρικής (καθώς η καμπυλότητα είναι δεύτερης τάξης παράγωγος της μετρικής). Τότε, από τα αποτελέσματα που έχουμε δει σχετικά με το "πλησίασμα" των καμπυλοτήτων διατομής, θα μπορέσουμε να εξάγουμε ανάλογα αποτελέσματα για την οριακή μετρική η οποία θα δειχθεί τελικά πως είναι σταθερής καμπυλότητας διατομής.

**Θεώρημα 5.4.4.** *Η οριακή μετρική  $\bar{g}_\infty$  του προηγούμενου θεωρήματος είναι ομαλή και η σύγκλιση της  $\bar{g}(\tau)$  καθώς  $\tau \rightarrow \infty$  είναι ομοιόμορφη σε κάθε  $C^k$ -νόρμα.*

*Απόδειξη.* Όπως και στο πόρισμα (4.2.4), πρέπει να δείξουμε ότι σε κάθε πεδίο ορισμού  $U$  ενός χάρτη, ισχύει

$$\int_0^\infty |\partial_\tau \partial^k g| d\tau < \infty$$

για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ . Από την εξίσωση της νορμαρισμένης ροής Ricci προκύπτει άμεσα πως αρκεί να δείξουμε ότι

$$|\partial^k F| \leq C e^{-\delta \tau},$$

όπου  $F = \bar{R}c - \frac{1}{3} \bar{r} \bar{g}$ . Συνδυάζοντας το λήμμα (4.3.1) και το θεώρημα (4.3.1), παρατηρούμε ότι η  $|F|$  είναι εκθετικά φραγμένη. Το πιο σημαντικό βήμα στην απόδειξη πως οι παράγωγοί της είναι και αυτές εκθετικά φραγμένες, θα είναι να δείξουμε ότι οι συναλλοίωτες παράγωγοί της είναι εκθετικά φραγμένες. Επειδή η  $\bar{r}$  είναι σταθερή (όχι ως προς το χρόνο) και  $\bar{\nabla} \bar{g} = 0$ , αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι οι συναλλοίωτες παράγωγοι της  $\bar{R}c$  είναι εκθετικά φραγμένες ως προς τη  $\bar{g}(\tau)$ . Υπενθυμίζοντας ότι οι μετρικές  $\bar{g}(\tau)$ ,  $\tau \in [0, \infty)$  είναι ομοιόμορφα ισοδύναμες με την  $\bar{g}(0)$ , έχουμε ότι τελικά αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι οι παράγωγοι αυτές είναι φραγμένες ως προς μία σταθερή μετρική.

**Λήμμα 5.4.6.** *Υπάρχουν θετικές σταθερές  $C_k, \delta_k$  τέτοιες, ώστε*

$$|\bar{\nabla}^k \bar{R}c| \leq C_k e^{-\delta \tau}$$

για κάθε  $k \geq 1$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη ακολουθεί σε γενικές γραμμές αυτή του θεωρήματος (4.2.3) (εκτιμήσεις B.B.S) ενώ θα χρησιμοποιηθούν και κάποιες τεχνικές από την απόδειξη του θεωρήματος (4.3.2). Συγκεκριμένα η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο  $k$ . Σε όλη τη διάρκεια της απόδειξης  $C$  και  $\delta$  θα δηλώνουν σταθερές των οποίων οι τιμές θα αλλάζουν σχεδόν σε κάθε εξίσωση. Σημειώνουμε αρχικά ότι  $|\bar{R}c| \leq |\bar{R}c - \frac{1}{3} \bar{R} \bar{g}| + \frac{|\bar{R}|}{3} \leq C$  από τα αποτελέσματα του θεωρήματος (4.4.2) και του λήμματος (4.4.1).

Ας ξεκινήσουμε την επαγωγή. Δεν χρειαζόμαστε βάση για την επαγωγή. Αν υποθέσουμε ότι  $|\bar{\nabla}^j \bar{R}c| \leq Ce^{-\delta\tau}$  για όλα τα  $1 \leq j \leq k-1$  για κάποιες θετικές σταθερές  $C, \delta$ , για  $k=1$  έχουμε κενή και συνεπώς αληθή υπόθεση.

Εφόσον βρισκόμαστε στη διάσταση 3 ο  $Rm$  μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός από ίχνη του  $Rc$ . Έπεται τότε, από το λήμμα (4.2.3) ότι η ποσότητα  $\nabla^k Rc$  ικανοποιεί μια εξίσωση παρόμοια με του λήμματος αυτού με τον  $Rc$  όμως να έχει αντικατασταθεί από τον  $Rm$ . Έπεται τότε από το λήμμα (4.2.4) ότι η  $|\nabla^k Rc|^2$  ικανοποιεί μία εξίσωση της μορφής

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k Rc|^2 = \Delta |\nabla^k Rc|^2 - 2 |\nabla^{k+1} Rc|^2 + \sum_{j=0}^k \nabla^m Rc \star \nabla^{k-j} Rc \star \nabla^k Rc.$$

Αυτό ισχύει για τη (μη νορμαρισμένη) ροή Ricci. Για τη νορμαρισμένη ροή τώρα, η εξίσωση θα είναι η ίδια εκτός από έναν όρο της μορφής

$$\frac{2n\bar{r}}{3} |\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2,$$

σύμφωνα με το λήμμα (4.4.4). Ο όρος αυτός ωστόσο θα απορροφηθεί στον  $j=0$  όρο της άθροισης αφού είναι φραγμένος από έναν όρο της μορφής

$$\bar{R}c \star \bar{\nabla}^k \bar{R}c \star \bar{\nabla}^k \bar{R}c$$

(σημειώνουμε ότι από το θεώρημα (4.3.3), η  $\bar{r}$  είναι ομοιόμορφα άνω φραγμένη από το CR για κάποια σταθερά  $C>0$ ).

Έτσι έχουμε την εξίσωση που ικανοποιεί η  $|\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2$  ως προς τη νορμαρισμένη ροή Ricci, και χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση μπορούμε να την απλοποιήσουμε:

$$\begin{aligned} \partial_t |\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2 &\leq \bar{\Delta} |\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2 - 2 |\bar{\nabla}^{k+1} \bar{R}c|^2 + \sum_{j=0}^k \bar{\nabla}^j \bar{R}c \star \bar{\nabla}^{k-j} \bar{R}c \star \bar{\nabla}^k \bar{R}c \\ &\leq \bar{\Delta} |\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2 - 2 |\bar{\nabla}^{k+1} \bar{R}c|^2 + Ce^{-\delta\tau} + \bar{R}c \star (\bar{\nabla}^k \bar{R}c)^{\ast 2} \\ &\leq \bar{\Delta} |\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2 - 2 |\bar{\nabla}^{k+1} \bar{R}c|^2 + Ce^{-\delta\tau} + B_k |\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τα εκθετικά φράγματα από την επαγωγική υπόθεση και το ομοιόμορφο άνω φράγμα της  $|\bar{\nabla} \bar{R}c|$ . Αυτό όμως δεν είναι αρκετό αφού όλοι οι όροι στο δεξί μέλος προκαλούν εκθετική αύξηση. Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο τέχνασμα που χρησιμοποιήθηκε και στην απόδειξη του θεωρήματος (4.2.3): θα προσθέσουμε όρους χαμηλότερης τάξης ώστε να ξεφορτωθούμε τους προβληματικούς όρους του δεξιού μέλους. Αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο του  $|\bar{R}c|^2$  θα πάρουμε κάτι όχι εκθετικά φραγμένο. Αντίθετα πρέπει να προστεθούν πολλαπλάσια της  $|\bar{E}|^2$ .

Από το πόρισμα (4.3.4) και το λήμμα (4.3.6), έχουμε

$$\partial_t |E|^2 \leq \Delta |E|^2 - |\nabla E|^2 + \frac{50}{3} R |E|^2.$$

Εφαρμόζουμε τώρα το πόρισμα (4.3.5) και το λήμμα (4.4.4) παίρνοντας

$$\begin{aligned} \partial_t |\bar{E}|^2 &\leq \bar{\Delta} |\bar{E}|^2 - \frac{2}{37} |\bar{\nabla} \bar{R}c|^2 + \frac{50}{3} R |E|^2 - \frac{4\bar{r}}{3} |\bar{E}|^2 \\ &\leq \bar{\Delta} |\bar{E}|^2 - \frac{2}{37} |\bar{\nabla} \bar{R}c|^2 + Ce^{-\delta\tau} \end{aligned}$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε τα φράγματα:  $\bar{R} \leq C$  και  $|\bar{E}|^2 \leq Ce^{-\delta\tau}$  για τον τελευταίο όρο).

Ορίζουμε τώρα

$$V := |\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2 + \alpha_{k0} |\bar{E}|^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} |\bar{\nabla}^j \bar{R}c|^2,$$

όπου  $\alpha_{kj}$  είναι σταθερές που πρέπει να επιλεγούν. Ο  $V$  ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} \partial_\tau V \leq \bar{\Delta} V + Ce^{-\delta\tau} + (B_k - 2\alpha_{kk-1}) |\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2 + \sum_{j=1}^{k-1} (\alpha_{kj} B_j - 2\alpha_{kj-1}) |\bar{\nabla}^j \bar{R}c|^2 \\ + (\alpha_{k1} B_1 - \frac{2}{37} \alpha_{k0}) |\bar{\nabla} \bar{R}c|^2, \end{aligned}$$

όπου συγκεντρώσαμε όλους τους εκθετικά φθίνοντες όρους μαζί.

Επιλέγουμε τα  $\alpha_{kj}$  έτσι, ώστε

$$\begin{aligned} B_k - 2\alpha_{k,k-1} &\leq -1 \\ \alpha_{k,j} B_j - 2\alpha_{k,j-1} &\leq -\alpha_{k,j} \quad \text{για } 2 \leq j \leq k-1 \\ \alpha_{k,1} B_1 - \frac{2}{37} \alpha_{k0} &\leq -\alpha_{k1}. \end{aligned}$$

Η εξίσωση τότε, που ικανοποιεί ο  $V$  γίνεται

$$\partial_\tau V \leq \bar{\Delta} V + Ce^{-\delta\tau} - V.$$

Για  $t=0$  έχουμε ένα άνω φράγμα για τον  $V$  λόγω συμπίεσης της  $M$ . Η σ.δ.ε που αντιστοιχεί στην παραπάνω μ.δ.ε. είναι:

$$\frac{d\phi}{dt} = Ce^{-\delta\tau} - \phi$$

και έχει λύση

$$\phi(\tau) = Be^{-\tau} + \frac{C}{1-\delta} e^{-\delta\tau}.$$

Από την κατάλληλη αρχή μεγίστου λοιπόν η  $V$  είναι εκθετικά φραγμένη και συνεπώς

$$|\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2 \leq V \leq C_k e^{-\delta_k \tau}.$$

□

Τώρα πρέπει από φράγματα στην  $|\bar{\nabla}^k \bar{R}c|^2$  να πάμε σε φράγματα της  $|\partial^k \bar{R}c|^2$ . Όπως κάναμε και στην πρόταση (4.2.1), θα θεωρήσουμε τα σύμβολα του Christoffel ως τανυστές σε κάποιο χάρτη  $\mathcal{U}$ . Για να πάμε από τις συναλλοίωτες παραγώγους σε παραγώγους ως προς συντεταγμένες θα χρειαστούμε φράγματα στις παραγώγους των συμβόλων του Christoffel.

**Λήμμα 5.4.7.** Σε σταθερό χάρτη  $\mathcal{U}$ , για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  ισχύει το ομοιόμορφο άνω φράγμα

$$|\partial^{k-1} \bar{\Gamma}| \leq C_k.$$



*Απόδειξη.* Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε  $1 \leq k \leq m-1$ . Όπως και στο προηγούμενο λήμμα δεν χρειαζόμαστε βάση της επαγωγής.

Για το επαγωγικό βήμα τώρα, έχουμε δείξει (από το θεώρημα (2.3.1) και το λήμμα (2.4.1)) ότι

$$\partial_\tau \bar{\Gamma}_{ij}^k = -\bar{g}^{kl} (\bar{\nabla}_i \bar{R}_{jl} + \bar{\nabla}_j \bar{R}_{il} - \bar{\nabla}_l \bar{R}_{ij}).$$

Από αυτό και την — έπεται

$$\begin{aligned} \partial^{m-1} \partial_\tau \bar{\Gamma} &= \sum_{i=0}^{m-1} (\star_{j \leq m-2} (\partial^j \bar{\Gamma})) \star \bar{\nabla}^i (\partial_\tau \bar{\Gamma}) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (\star_{j \leq m-2} (\partial^j \bar{\Gamma})) \star \bar{\nabla}^i \bar{R}c. \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ένα ομοιόμορφο φράγμα σε κάθε ένα από τους όρους της  $\partial^j \bar{\Gamma}$  και από το προηγούμενο λήμμα ένα εκθετικά φθίνον φράγμα στους όρους του  $\bar{\nabla}^i \bar{R}c$ . Έτσι

$$\partial_\tau \partial^{m-1} \bar{\Gamma} \leq C e^{-\delta \tau}.$$

Συνεπώς

$$|\partial^{m-1} \bar{\Gamma}| \leq |\partial^{m-1} \bar{\Gamma}|_{t=0} + \int_0^\infty C e^{-\delta \tau} d\tau \leq C_m$$

για κάποια θετική σταθερά  $C_m$ . Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και συνεπώς την απόδειξη.  $\square$

Έχουμε λοιπόν βρει:

$$|\partial^k F| = \left| \sum_{i=0}^{m-1} (\star_{j \leq m-2} (\partial^j \bar{\Gamma})) \star \bar{\nabla}^i F \right| \leq C e^{-\delta \tau}$$

για όλα τα  $k \in \mathbb{N}$ . Χρησιμοποιήσαμε τις εκτιμήσεις  $|\partial^j \bar{\Gamma}| \leq C$ , για  $j \leq m-1$  από το προηγούμενο λήμμα και  $|\bar{\nabla}^i F|^2 \leq C e^{-\delta \tau}$  από το λήμμα (4.4.6) και το θεώρημα (4.4.2). Επέιδη

$$\begin{aligned} \bar{g}_\infty(x) &= \bar{g}(x, 0) - 2 \int_0^\infty \frac{\partial \bar{g}}{\partial \tau} d\tau \\ &= \bar{g}(x, 0) - 2 \int_0^\infty F(x, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για οποιοδήποτε πολυδείκτη  $\alpha$  μπορούμε να μεταφέρουμε την παράγωγο μέσα στο ολοκλήρωμα:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \bar{g}_\infty(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \bar{g}(x, 0) - 2 \int_0^\infty \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} F(x, \tau) d\tau,$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο από το αποτέλεσμα που δείξαμε παραπάνω:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} F(x, \tau) d\tau \leq \int_0^\infty |\partial^{|\alpha|} F(x, \tau)| d\tau \leq \int_0^\infty C e^{-\delta \tau} d\tau < \infty.$$

Συνεπώς η  $\bar{g}_\infty$  έχει παραγώγους κάθε τάξης (είναι ομαλή) και εύκολα δείχνουμε ότι η σύγκλιση ως προς  $C^k$ -νόρμα είναι ομοιόμορφη (με τον ίδιο τρόπο όπως στο πόρισμα (4.2.4)).  $\square$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το θεώρημα (4.0.7). Αρκεί να δείξουμε ότι η οριακή μετρική έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

**Θεώρημα 5.4.5.** *Η οριακή μετρική  $\bar{g}_\infty$  είναι ομαλή με σταθερή, θετική καμπυλότητα διατομής.*

*Απόδειξη.* Από το προηγούμενο θεώρημα η  $\bar{g}(\tau)$  συγκλίνει στην  $\bar{g}_\infty$  στις  $C^0, C^1, C^2$ -νόρμες. Επειδή οι καμπυλότητες συνδυασμοί τέτοιων τάξεων παραγώγων της μετρικής, αυτό σημαίνει πως μπορούμε να θεωρήσουμε το όριο ώστε να δείξουμε πως ο τανυστής του Einstein της  $\bar{g}_\infty$  μηδενίζεται:

$$|\bar{E}_\infty| = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |\bar{E}(\tau)| \leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} C e^{-\delta\tau} = 0,$$

από το αποτέλεσμα του θεωρήματος (4.4.2). Έτσι η  $\bar{g}_\infty$  είναι Einstein και από το λήμμα (1.7.3) έχει σταθερή (θετική) καμπυλότητα διατομής.  $\square$

# Βιβλιογραφία

- [1] B. Chow, D. Knopf, The ricci flow: An introduction, Mathematical surveys and monographs; no. 110, 2004.
- [2] B. Chow, P.Lu, L. Ni, Hamilton's Ricci flow, Graduate Studies in Mathematics, vol. 77, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [3] D. DeTurck, Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors, J. Differential Geom. 18 (1983) 157-162.
- [4] J. Eells, J. Sampson, Harmonic mappings on Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86 (1964) 109-160.
- [5] M.H.Freedman, J. Differential Geom. Volume 17, Number 3 (1982), 357-453.
- [6] R.S.Hamilton, Three - manifolds with positive Ricci curvature, Jour. Diff. Geom. 17 (1982), 255-306.
- [7] R.S.Hamilton, Four manifolds with positive curvature operator, Jour. Diff. Geom. 24 (1986), 153-179.
- [8] R.S.Hamilton, Formation of singularities in the Ricci flow, Surveys in Diff. Geom. 2 (1995), 7-136.
- [9] R.S.Hamilton, Non-singular solutions of the Ricci flow on three manifolds, Commun. Anal. Geom. 7 (1999), 695-729.
- [10] C. Hopper, B. Andrews, The Ricci flow in Riemannian Geometry, [maths.anu.edu.au/~andrews/book.pdf](http://maths.anu.edu.au/~andrews/book.pdf).
- [11] John M. Lee Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature, Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [12] John M. Lee Introduction to smooth manifolds, Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [13] J.Ling, Notes on the Ricci flow, [https://www.uvu.edu/profpages/profiles/show/user\\_id/2741](https://www.uvu.edu/profpages/profiles/show/user_id/2741).
- [14] J.W.Morgan, G. Tian, Ricci flow and the Poincare conjecture, <http://arxiv.org/math.DG/0607607v1>, 2006.
- [15] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, <http://arxiv.org/math.DG/0211159v1>, 2002.

- [16] G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three manifolds, <http://arxiv.org/math.DG/0307245v1>, 2002.
- [17] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three manifolds, <http://arxiv.org/math.DG/0303109v1>, 2003.
- [18] P. Petersen, Riemannian Geometry, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, New York, 2006.
- [19] W.A. Poor, Differential geometric structures, McGraw-Hill Book Co., New York, (1981).
- [20] <http://terrytao.wordpress.com/category/teaching/285g-poincare-conjecture/>
- [21] S. Smale, The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions, Bull. Amer. Math. Soc. 66, 1960, 373-375.
- [22] The 3-Dimensional Geometrisation Conjecture Of W. P. Thurston, <http://www.ucl.ac.uk/ucahhjr/Notes/Essay.pdf>.
- [23] W. Thurston, Three-Dimensional Geometry and Topology, Vol. 1, Princeton University Press, 1997.
- [24] P. Topping, Lectures on the Ricci Flow, <http://www.maths.warwick.ac.uk/topping/RFnotes.html>, 2005.
- [25] F. Warner, Foundation of differentiable manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [26] E.C. Zeeman, The generalised Poincaré conjecture. Bull. Amer. Math. Soc. 67, 1961, 270.
- [27] <http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367658/RiemannGeo.pdf>
- [28] <http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367658/>
- [29] <http://math.mit.edu/nicks/ricciflow.pdf>
- [30] [http://www.math.wisc.edu/jeffv/courses/865\\_Fall\\_2007.pdf](http://www.math.wisc.edu/jeffv/courses/865_Fall_2007.pdf)
- [31] <http://www.uv.es/miquel/Papers/BCMoHP.pdf>