

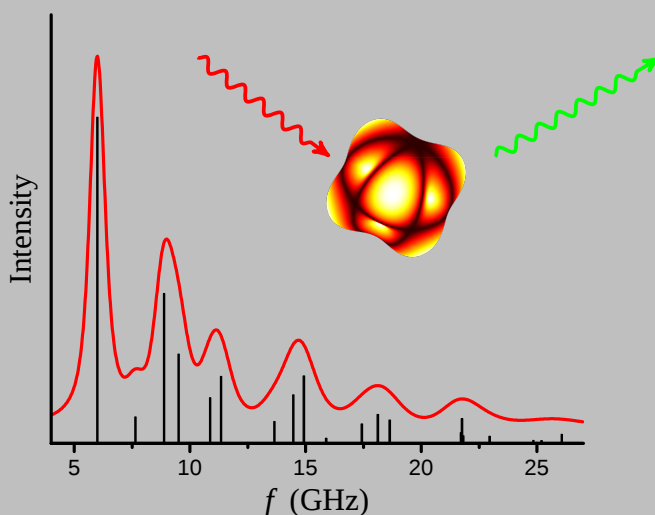


ΕΘΝΙΚΟΝ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Θεωρητική Μελέτη της Σκέδασης Brillouin από Σφαιρικά Σωματίδια



ΜΔΕ «Φυσική των Υλικών»
Διπλωματική Εργασία

Απόστολος Ζδάγκας
ΑΜ: 201304

Επιβλέπων: Καθηγητής Ν. Στεφάνου
Αθήνα, Οκτώβριος 2015

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Φυσική των Υλικών, στον Τομέα Φυσικής Στερεάς Κατάστασης του Πανεπιστημίου Αθηνών. Στην τριμελή εξεταστική επιτροπή συμμετείχαν ο Καθηγητής Ν. Στεφάνου (επιβλέπων), η Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Μ. Καλαμιώτου και ο Επίκουρος Καθηγητής Ε. Συσκάκης. Υπεύθυνοι της τετράμηνης πρακτικής μου άσκησης στο Εργαστήριο Κυμάτων και Σύνθετων Μέσων (LOMC) UMR CNRS 6294 του Πανεπιστημίου της Χάβρης στη Γαλλία, ήταν οι Αναπληρωτές Καθηγητές Ρ. Σαϊνίδου και Ρ. Rembert.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα το Ίδρυμα Μποδοσάκη για την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε, χωρίς την οποία θα ήταν αδύνατον να ολοκληρώσω τις μεταπτυχιακές μου σπουδές. Ευχαριστώ επίσης το LOMC για τη μερική χρηματοδότηση που μου παρείχε τους τέσσερις μήνες της διαμονής μου.

Summary

Brillouin light scattering is the inelastic light scattering due to the spatial and temporal variations of the refractive index of a material. These variations are due to collective oscillations of a quantity in the material which, in our case, are the collective lattice oscillations (phonons). These oscillations are in the GHz frequency range and this is why the development of lasers and the invention of the multi-pass tandem Fabry-Pérot interferometer was needed in order to use the effect as a spectroscopic technique. This technique has already been used for the characterization of the elastic properties of solids and liquids but with the advent of meso-scale periodic structures, in which the dominant frequencies are in the GHz range, it soon became apparent that the technique could be used for the characterization of phononic microstructures. In the last decade, a lot of effort has been devoted in order to explain the Brillouin spectrum of such periodic microstructures of spherical particles. The effort was focused on indirect explanations either by calculating the eigenmodes, the scattering cross section and the density of states of the individual particles or the frequency band structure of the phononic crystal, as well as using group theory. It became clear that only a detailed theoretical study, which takes into account the interaction of light with the elastic field, can give the correct relative intensities of the scattered light. Such a theoretical approach of the Brillouin light scattering by a spherical particle, based on Green's functions, is attempted in the present thesis. Using the work of T. Still et al., *J. Phys. Chem. Lett.* **1**, 2440-2444 (2010) as a starting point, we improve the computation time and the accuracy of the calculations and establish the theoretical foundations for a thorough description of the effect as well as the extension of Brillouin light scattering calculations to periodic structures.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	9
1 Θεωρία ελαστικότητας	11
1.1 Ο τανυστής παραμόρφωσης	11
1.2 Ο τανυστής τάσης	14
1.3 Νόμος του Hook	15
2 Κυματική εξίσωση και ιδιοταλαντώσεις σφαιρικού σωματιδίου	19
2.1 Η κυματική εξίσωση της ελαστικότητας	19
2.2 Πολυπολικό ανάπτυγμα ελαστικού πεδίου	20
2.3 Ιδιοταλαντώσεις σφαιρικού σωματιδίου	23
3 Θεωρητική μελέτη της σκέδασης Brillouin	27
3.1 Φωτοελαστικό φαινόμενο	27
3.2 Η εξίσωση Lippmann-Schwinger στην ανελαστική σκέδαση φωτός	29
3.3 Συνάρτηση φασματικής πυκνότητας	31
4 Εφαρμογή στη σκέδαση από σφαιρικό σωματίδιο	35
4.1 Συνάρτηση φασματικής πυκνότητας σφαιρικού σωματιδίου στο κενό	35
4.2 Σκέδαση από στρεπτικούς και σφαιροειδείς τρόπους ταλάντωσης	37
4.3 Κανονικοποίηση σφαιροειδών κανονικών τρόπων ταλάντωσης	39
4.4 Εφαρμογές	40
Συμπεράσματα-Προοπτικές	45
Παραρτήματα	47
Α' Διανυσματικές ταυτότητες	47
Β' Συναρτήσεις Bessel	49

Γ' Σφαιρικές αρμονικές	53
Δ' Υπολογισμός του ολοκληρώματος σύζευξης για σφαιροειδείς τρόπους ταλάντωσης	57
Βιβλιογραφία	59

Εισαγωγή

Σκέδαση Brillouin ονομάζεται η ανελαστική σκέδαση φωτός από τις χωρικές και χρονικές διαταραχές του δείκτη διάθλασης ενός υλικού. Αυτές οι διαταραχές οφείλονται στις συλλογικές ταλαντώσεις μιας ποσότητας του υλικού, που στην παρούσα εργασία είναι οι συλλογικές ταλαντώσεις των δομικών του μονάδων (φωνόνια). Αυτές οι ταλαντώσεις έχουν συχνότητα της τάξης των GHz και για αυτό το λόγο χρειάστηκε να περιμένουμε μέχρι την ανάπτυξη των laser και τη δημιουργία του συμβολόμετρου tandem fabry-Perrot πολλαπλής διέλευσης, έως ότου το φαινόμενο βρει εφαρμογή σαν φασματοσκοπική τεχνική. Η τεχνική έχει ήδη χρησιμοποιηθεί σε στερεά και σε υγρά για τον προσδιορισμό των ελαστικών τους παραμέτρων. Με τη δημιουργία όμως περιοδικών δομών στη μικροκλίμακα, στην οποία οι συχνότητες που κυριαρχούν είναι της τάξης των GHz, έγινε γρήγορα φανερό ότι η τεχνική θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για το χαρακτηρισμό φωνονικών μικροδομών.

Την τελευταία δεκαετία έγινε σημαντική προσπάθεια ερμηνείας του φάσματος Brillouin τέτοιων περιοδικών δομών σφαιρικών σωματιδίων. Οι ερμηνείες στηρίχτηκαν στον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων των σφαιρών ή της φωνονικής δομής ζωνών, της ενεργού διατομής σκέδασης, του υπολογισμού της πυκνότητας καταστάσεων και της εφαρμογής θεωρίας ομάδων. Έγινε όμως φανερό ότι μόνο μία πλήρης θεωρητική μελέτη του φαινομένου, που λαμβάνει υπόψη την αλληλεπίδραση φωτός και ελαστικού πεδίου, μπορεί να οδηγήσει στο σωστό υπολογισμό των σχετικών εντάσεων του σκεδαζόμενου φωτός. Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η ανάπτυξη μίας τέτοιας πλήρους μελέτης της σκέδασης Brillouin από ένα σφαιρικό σωματίδιο, με χρήση συναρτήσεων Green. Βασιζόμενοι στην εργασία των T. Still et al. [11], βελτιώνουμε την ταχύτητα και την ακρίβεια των υπολογισμών και θέτουμε τη θεωρητική βάση για την πλήρη θεωρητική μελέτη του φαινομένου καθώς και για την επέκταση των υπολογισμών σκέδασης Brillouin από περιοδικές δομές.

Κεφάλαιο 1

Θεωρία ελαστικότητας

1.1 Ο τανυστής παραμόρφωσης

Έστω στερεό σώμα πυκνότητας ρ το οποίο δέχεται μια παραμόρφωση με συνέπεια να τροποποιηθούν οι συντεταγμένες που περιγράφουν τη θέση κάθε σημείου του, από x_i σε x'_i , με $i = 1, 2, 3$, όπου κάνουμε τη σύμβαση $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$. Ορίζουμε ως διάνυσμα μετατόπισης το διάνυσμα $\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ που εκφράζει την αλλαγή των συντεταγμένων του κάθε σημείου υπό την επίδραση της παραμόρφωσης. Μπορούμε, βέβαια, να γράψουμε: $u_i = r'_i - r_i = x'_i - x_i$.

Θεωρούμε τώρα δύο σημεία που απέχουν αρχικά κατά $d\mathbf{r}$ και μετά την εξάσκηση της παραμόρφωσης κατά $d\mathbf{r}'$, οπότε προφανώς θα ισχύει $du_i = dx'_i - dx_i$. Αν dl και dl' είναι η απόσταση των δύο σημείων πριν και μετά την εξάσκηση της παραμόρφωσης, αντίστοιχα, με $dl = \sqrt{\sum_i dx_i^2}$ και $dl' = \sqrt{\sum_i dx_i'^2}$, τότε μπορούμε να γράψουμε [1, 2]

$$\begin{aligned} dl'^2 &= \sum_i dx_i'^2 = \sum_i (dx_i + du_i)^2 = \sum_i \left(dx_i + \sum_{i'} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} dx_{i'} \right)^2 \\ &= \sum_i \left[dx_i^2 + \left(\sum_{i'} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} dx_{i'} \right)^2 + 2 \sum_{i'} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} dx_i dx_{i'} \right] \\ &= \sum_i \left(dx_i^2 + \sum_{i'i''} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i''}} dx_{i'} dx_{i''} + 2 \sum_{i'} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} dx_i dx_{i'} \right) \\ &= dl^2 + \sum_{ii'i''} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i''}} dx_{i'} dx_{i''} + 2 \sum_{ii'} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} dx_i dx_{i'}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Γράφοντας

$$\begin{aligned} \sum_{ii'i''} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i''}} dx_{i'} dx_{i''} &= \sum_{ii'i''} \frac{\partial u_{i'}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{i''}}{\partial x_{i'}} dx_i dx_{i'} \\ \sum_{ii'} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} dx_i dx_{i'} &= \sum_{ii'} \frac{\partial u_{i'}}{\partial x_i} dx_i dx_{i'} = \frac{1}{2} \sum_{ii'} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial u_{i'}}{\partial x_i} \right) dx_i dx_{i'}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

τελικά παίρνουμε

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \sum_{ii'} u_{ii'} dx_i dx_{i'}, \quad (1.3)$$

όπου $u_{ii'}$ ο τανυστής παραμόρφωσης που ορίζεται ως

$$u_{ii'} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial u_{i'}}{\partial x_i} + \sum_{i''} \frac{\partial u_{i''}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{i''}}{\partial x_{i'}} \right). \quad (1.4)$$

Όπως είναι φανερό από την Εξ. (1.3), ο τανυστής της παραμόρφωσης εκφράζει τη σχετική μεταβολή της απόστασης και θέσης μεταξύ δύο γειτονικών σημείων. Είναι λοιπόν εύκολο να σκεφτούμε περιπτώσεις, όπως αυτή της μακριάς λεπτής ράβδου, όπου παρόλο που οι παραμορφώσεις είναι μικρές, οι μετατοπίσεις είναι μεγάλες. Σε αυτή την εργασία θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά σώματα πεπερασμένων διαστάσεων τα οποία δεν μπορούν να έχουν μεγάλες μετατοπίσεις αν δεν υπάρχει μεγάλη συμπίεση ή επιμήκυνση και άρα μεγάλη παραμόρφωση. Δηλαδή, μικρές παραμορφώσεις θα σημαίνει ότι οι μετατοπίσεις καθώς και οι παράγωγοί τους είναι μικρές με αποτέλεσμα οι όροι δεύτερης τάξης να παραλείπονται. Έτσι, ο τανυστής παραμόρφωσης γράφεται

$$u_{ii'} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial u_{i'}}{\partial x_i} \right). \quad (1.5)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις αναφέρονται στις καρτεσιανές συντεταγμένες, όπου εννοείται ότι οι δείκτες παίρνουν τιμές από 1 έως 3. Σε σφαιρικές συντεταγμένες, τα στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης (για μικρές πάντα παραμορφώσεις) γράφονται

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r}, \\ 2u_{\theta\phi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}, \quad 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ 2u_{\phi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ο τανυστής $u_{ii'}$, όπως ορίστηκε στις Εξ. (1.4) και (1.5), είναι αδιάστατος και συμμετρικός, δηλαδή

$$u_{ii'} = u_{i'i}. \quad (1.7)$$

Επειδή ο πίνακας $u_{ii'}$ είναι συμμετρικός θα διαγωνιοποιείται, δηλαδή θα υπάρχει κάποιο σύστημα συντεταγμένων (το σύστημα κύριων αξόνων του τανυστή) στο οποίο ο τανυστής παίρνει τη μορφή

$$u_{ii'} = u^{(i)} \delta_{ii'}, \quad (1.8)$$

οπότε η Εξ. (1.3) θα δώσει

$$dl'^2 \equiv \sum_i dx_i'^2 = \sum_i \left(1 + 2u^{(i)}\right) dx_i^2 \Leftrightarrow \quad (1.9)$$

$$dx_i' = \left(1 + 2u^{(i)}\right)^{1/2} dx_i \simeq \left(1 + u^{(i)}\right) dx_i. \quad (1.10)$$

Έτσι, θα ισχύει

$$dV' = \prod_i dx_i' \simeq \prod_i \left(1 + u^{(i)}\right) dx_i = dV \prod_i \left(1 + u^{(i)}\right) \simeq dV \left(1 + \sum_i u^{(i)}\right), \quad (1.11)$$

όπου στο τελευταίο βήμα κρατήσαμε μόνο όρους πρώτης τάξης. Όμως το ίχνος ενός πίνακα μένει αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς ομοιότητας, οπότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί

$$dV' \simeq dV \left(1 + \sum_i u_{ii}\right). \quad (1.12)$$

Η Εξίσωση (1.12) μας λέει ότι μπορούμε κάλλιστα να έχουμε παραμόρφωση που να μην προκαλεί αλλαγή στον όγκο του σώματος ($dV' \simeq dV$), αρκεί να είναι

$$\sum_i u_{ii} = 0. \quad (1.13)$$

Τότε μιλάμε για *διατμητική παραμόρφωση*.

Από την Εξ. (1.10) έχουμε

$$du_i = dx_i' - dx_i \simeq u^{(i)} dx_i. \quad (1.14)$$

Η (1.14) υποδηλώνει ότι μπορούμε να βρούμε κάποιο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι παραμορφώσεις στον καθένα από τους τρεις άξονες του συστήματος γίνονται ανεξάρτητα η μια από την άλλη και έτσι είναι απλές επιμηκύνσεις ή συσπειρώσεις στην καθεμιά από τις τρεις διευθύνσεις και, επιπλέον, η σχετική αλλαγή μήκους στην κάθε διεύθυνση ισούται με την ποσότητα $u^{(i)}$. Εάν, επιπρόσθετα, $u^{(i)} = \text{σταθ.} \equiv \mathcal{U}$, τότε θα έχουμε παραμόρφωση η οποία αλλάζει τον όγκο του υλικού, αλλά όχι το σχήμα του, και σε αυτή την περίπτωση θα μιλάμε για *υδροστατική συμπίεση*. Προϋπόθεση για αυτό είναι να ισχύει

$$u_{ii'} = \mathcal{U} \delta_{ii'}, \quad \mathcal{U} = \text{σταθ.} \quad (1.15)$$

Σημειώνουμε ότι αν η παραμόρφωση είναι διατμητική σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε θα διατηρεί αυτό το χαρακτηριστικό σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα, ενώ αν η παραμόρφωση είναι υδροστατική συμπίεση, τότε αυτό θα συμβαίνει για ένα και μόνο σύστημα συντεταγμένων.

1.2 Ο τανυστής τάσης

Προφανώς, η ύπαρξη παραμορφώσεων συνδέεται άρρηκτα με την εξάσκηση δυνάμεων στο σώμα. Ειδικότερα, πέρα από τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό, καθοριστικό ρόλο παίζουν οι *εσωτερικές τάσεις*, οι δυνάμεις που εμφανίζονται κατά την παραμόρφωση και οφείλονται στις δυνάμεις αλληλεπίδρασης (μοριακές) μεταξύ των δομικών μονάδων που απαρτίζουν το σώμα. Οι δυνάμεις αυτές έχουν εμβέλεια όσο περίπου είναι η απόσταση μεταξύ των μορίων¹. Έτσι, στη θεωρία ελαστικότητας, η οποία είναι μια μακροσκοπική θεωρία, η εμβέλεια θεωρείται μηδενική. Κατά συνέπεια, αν μιλάμε για ένα δεδομένο όγκο δV , η συνισταμένη δύναμη που ασκείται από το περιβάλλον (υπόλοιπο σώμα) σε αυτό, θα επιδρά τελικά μόνο επιφανειακά.

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα τμήμα δV του σώματος. Αυτή θα είναι ίση με $\mathbf{F}_{\delta V} = \int_{\delta V} \mathbf{F} dV$, όπου $\mathbf{F}$ η πυκνότητα δύναμης, δηλαδή η συνολική δύναμη ανά μονάδα όγκου που ασκείται σε κάθε ένα στοιχειώδη όγκο δV . Όμως, επειδή οι εσωτερικές δυνάμεις του δV (δηλαδή οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των στοιχειωδών όγκων που απαρτίζουν τον δV) δε συνεισφέρουν λόγω δράσης-αντίδρασης στη συνολική δύναμη $\mathbf{F}_{\delta V}$, τελικά αυτή θα ισούται με τη συνισταμένη των *εξωτερικών δυνάμεων* που δέχεται ο δV . Με την έννοια εξωτερικές εννοούμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον δV από τον περίγυρό του και, όπως είπαμε παραπάνω, θα ασκούνται επιφανειακά στον δV . Έτσι αναφερόμενοι στην i συνιστώσα της δύναμης μπορούμε να γράψουμε $F_{\delta V;i} = \sum_{i'} \oint_S \sigma_{ii'} dS_{i'}$, όπου το μέγεθος $\sigma_{ii'}$ είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης. Παρατηρούμε ότι έχει διαστάσεις πίεσης και εκφράζει την i συνιστώσα της δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας που ασκείται στην επιφάνεια $dS_{i'}$ που είναι κάθετη στη διεύθυνση i' . Έτσι, η $\sigma_{i'i'}$ είναι η κάθετη συνιστώσα της δύναμης ανά επιφάνεια στην επιφάνεια $dS_{i'}$, ενώ η $\sigma_{ii'}$, $i \neq i'$, είναι οι εφαπτομενικές συνιστώσες της δύναμης ανά επιφάνεια στην $dS_{i'}$. Ο τανυστής $\sigma_{ii'}$ ονομάζεται *τανυστής τάσης*.

Συγκρίνοντας τώρα τις δύο εκφράσεις για την $\mathbf{F}_{\delta V}$ και εφαρμόζοντας το *Θεώρημα του Gauss* θα πάρουμε τελικά

$$F_{\delta V;i} = \int_{\delta V} \mathcal{F}_i dV = \sum_{i'} \oint_S \sigma_{ii'} dS_{i'} = \sum_{i'} \int_{\delta V} \frac{\partial \sigma_{ii'}}{\partial x_{i'}} dV, \quad (1.16)$$

οπότε θα έχουμε

$$\mathcal{F}_i = \sum_{i'} \frac{\partial \sigma_{ii'}}{\partial x_{i'}}. \quad (1.17)$$

Αυτή είναι η σχέση που συνδέει τον τανυστή τάσης με τη δύναμη που περικλείει όλες τις παραπάνω φυσικές πληροφορίες, σε αναλογία με τις (1.4), (1.5) που συνδέουν τον τανυστή παραμόρφωσης με τη μεταβολή της θέσης των σημείων του σώματος.

¹Ο ισχυρισμός αυτός, και άρα η ανάπτυξη που ακολουθεί, δεν είναι έγκυρος στις περιπτώσεις όπου η παραμόρφωση του σώματος οδηγεί στη δημιουργία μακροσκοπικών δυνάμεων, όπως αυτές που οφείλονται στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα παραμορφωμένο πιεζοηλεκτρικό σώμα

Στο πλαίσιο των προσεγγίσεων και υποθέσεων που έχουμε κάνει, αποδεικνύεται [1] ότι ο τανυστής της τάσης είναι συμμετρικός²

$$\sigma_{ii'} = \sigma_{i'i}. \quad (1.18)$$

Κλείνουμε την αναφορά μας στον τανυστή $\sigma_{ii'}$ με την ειδική περίπτωση που είναι διαγώνιος και ισότροπος

$$\sigma_{ii'} = -p\delta_{ii'}, \quad (1.19)$$

που αντιστοιχεί στην περίπτωση που έχουμε υδροστατική συμπίεση. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει φορά προς τα μέσα ως προς την επιφάνεια $dS_{i'}$.

1.3 Νόμος του Hook

Εφόσον ο τανυστής $u_{ii'}$ συνδέεται με τις μετατοπίσεις λόγω παραμορφώσεων και ο $\sigma_{ii'}$ με τις δυνάμεις, και αφού γνωρίζουμε ότι οι παραμορφώσεις προκαλούνται από τις δυνάμεις, αναμένουμε να υπάρχει σχέση σύνδεσης των δύο μεγεθών. Το μέγεθος που συνδέει μετατόπιση και δύναμη είναι το έργο. Το στοιχειώδες έργο ανά μονάδα όγκου θα είναι $\delta R = \sum_i \mathcal{F}_i \delta u_i$, οπότε το συνολικό έργο θα δίνεται με τη βοήθεια των (1.17), (1.18) από την

$$\begin{aligned} W &= \sum_i \int \mathcal{F}_i \delta u_i dV = \sum_{ii'} \int \frac{\partial \sigma_{ii'}}{\partial x_{i'}} \delta u_i dV = \sum_{ii'} \int \left(\frac{\partial (\sigma_{ii'} \delta u_i)}{\partial x_{i'}} - \sigma_{ii'} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_{i'}} \right) dV \\ &= \sum_{ii'} \left(\oint_S \sigma_{ii'} \delta u_i dS_{i'} - \int \sigma_{ii'} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} dV \right) = - \sum_{ii'} \int \sigma_{ii'} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} dV \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ii'} \int \sigma_{ii'} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial u_{i'}}{\partial x_i} \right) dV = - \sum_{ii'} \int \sigma_{ii'} \delta u_{ii'} dV, \end{aligned} \quad (1.20)$$

όπου θεωρήσαμε ότι στα όρια του σώματος οι τάσεις μηδενίζονται. Έτσι, το στοιχειώδες έργο στη μονάδα του όγκου θα είναι

$$\delta R = - \sum_{ii'} \sigma_{ii'} \delta u_{ii'} \quad \text{ή} \quad dR = - \sum_{ii'} \sigma_{ii'} du_{ii'}. \quad (1.21)$$

Στην απλή περίπτωση της υδροστατικής συμπίεσης θα ισχύει η (1.19) και θα έχουμε με τη βοήθεια και της (1.12): $dR = - \sum_{ii'} \sigma_{ii'} du_{ii'} = p \sum_i du_{ii'} = p dv$, όπου το dv συμβολίζει τώρα τη σχετική (γιατί το dR αναφέρεται στη μονάδα του όγκου) αλλαγή του όγκου κατά την παραμόρφωση $du_{ii'} \equiv u'_{ii'} - u_{ii'}$ και θα ισούται με $dv = \frac{dV'' - dV'}{dV}$, όπου dV'' και dV' οι όγκοι που προκλήθηκαν από παραμορφώσεις $u'_{ii'}$ και $u_{ii'}$ αντίστοιχα. Έτσι, παίρνουμε για το έργο το αναμενόμενο αποτέλεσμα: *στοιχειώδες έργο στη μονάδα του όγκου*=(πίεση)×(σχετική αλλαγή όγκου).

²Σε μια γενικότερη ανάπτυξη της θεωρίας ελαστικότητας (ελαστικότητα Cosserat) ο τανυστής τάσης δεν είναι εν γένει συμμετρικός.

Αφού θεωρήσουμε ότι η παραμόρφωση γίνεται ικανοποιητικά αργά ώστε η διαδικασία να θεωρείται θερμοδυναμικά αντιστρεπτή και με τη βοήθεια της (1.21) βρίσκουμε (από γνωστές θερμοδυναμικές σχέσεις) για την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz ανά μονάδα όγκου, F

$$dF = -dR - SdT = \sum_{ii'} \sigma_{ii'} du_{ii'} - SdT, \quad (1.22)$$

οπότε

$$\sigma_{ii'} = \left. \frac{\partial F}{\partial u_{ii'}} \right|_T. \quad (1.23)$$

Στόχος μας είναι η εύρεση της μορφής της F , ώστε να γίνει η σύνδεση μεταξύ των τανυστών $\sigma_{ii'}$ και $u_{ii'}$. Ξέρουμε ότι όταν δεν εξασκούνται τάσεις, δε θα υπάρχουν και παραμορφώσεις, δηλαδή θα πρέπει

$$\sigma_{ii'} = 0 \Rightarrow u_{ii'} = 0. \quad (1.24)$$

Για να ικανοποιείται αυτή η απαίτηση, και εφόσον ισχύει η (1.23), πρέπει η F να μην έχει όρους $u_{ii'}$ στην πρώτη δύναμη. Παίρνοντας επιπλέον υπόψιν ότι μας απασχολεί η περίπτωση της ύπαρξης μόνο μικρών παραμορφώσεων, μπορούμε να πούμε ότι η F θα είναι σε πρώτη προσέγγιση άθροισμα τετραγωνικών όρων του $u_{ii'}$. Έτσι, για ισότροπο σώμα σταθερής θερμοκρασίας, μπορούμε να γράψουμε

$$F = \frac{1}{2} \lambda \left(\sum_i u_{ii} \right)^2 + \mu \sum_{ii'} u_{ii'}^2, \quad (1.25)$$

όπου λ, μ οι συντελεστές Lamé που είναι συντελεστές αναλογίας με διαστάσεις πυκνότητας ενέργειας.

Για να βρούμε τη σχέση σύνδεσης μεταξύ των $\sigma_{ii'}$, $u_{ii'}$ παραγωγίζουμε την (1.25) σύμφωνα με την (1.23). Έτσι, έχουμε

$$\sigma_{ii'} = \lambda \sum_{i''} u_{i''i''} \sum_{i'''} \frac{\partial u_{i''i''}}{\partial u_{ii'}} + 2\mu \sum_{i''i'''} u_{i''i'''} \frac{\partial u_{i''i'''}}{\partial u_{ii'}} \quad (1.26)$$

όμως

$$\frac{\partial u_{i''i''}}{\partial u_{ii'}} = \delta_{ii''} \delta_{i''i''}, \quad \sum_{i'''} \frac{\partial u_{i''i'''}}{\partial u_{ii'}} = \sum_{i'''} \delta_{ii''} \delta_{i''i'''} = \delta_{ii'}, \quad (1.27)$$

οπότε

$$\sigma_{ii'} = \lambda \sum_{i''} u_{i''i''} \delta_{ii'} + 2\mu \sum_{i''i'''} u_{i''i'''} \delta_{ii'} = \lambda \sum_{i''} u_{i''i''} \delta_{ii'} + 2\mu u_{ii'}. \quad (1.28)$$

Η έκφραση (1.28) δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο γνωστός νόμος του Hook αφού δίνει τις τάσεις σαν γραμμική έκφραση των παραμορφώσεων. Υπενθυμίζουμε ότι η παραπάνω έκφραση ισχύει για ομοιογενές και ισότροπο σώμα στο όριο των μικρών παραμορφώσεων.

Στην έκφραση (1.28) τα $i, i' = 1, 2, 3$ υποδηλώνουν τις καρτεσιανές συνιστώσες x, y, z , όμως αποδεικνύεται ότι η ίδια σχέση ισχύει και στις σφαιρικές συντεταγμένες αν αντιστοιχίσουμε στα $i, i' = 1, 2, 3$ τις συνιστώσες r, θ, ϕ .

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με την εισαγωγή ενός επιπλέον μεγέθους, της *επιφανειακής τάσης* $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$, ιδιαίτερα χρήσιμου όταν κανείς έχει να αντιμετωπίσει περιπτώσεις ανομοιογενών υλικών στα οποία η ανομοιογένεια εισάγεται με την ύπαρξη ασυνεχειών (διαχωριστικών επιφανειών). Οι συνιστώσες της επιφανειακής τάσης $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$ σε ένα δεδομένο σημείο $\mathbf{r}$ μιας διαχωριστικής επιφάνειας ορίζονται [3] ως

$$\tau_i(\mathbf{r}) = \sum_{i'} \sigma_{ii'}(\mathbf{r}) n_{i'}(\mathbf{r}) = \sum_{i'} \sigma_{i'i}(\mathbf{r}) n_{i'}(\mathbf{r}), \quad (1.29)$$

όπου $n_{i'}(\mathbf{r})$ η καρτεσιανή i' συνιστώσα του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ που είναι κάθετο στην υπό μελέτη διαχωριστική επιφάνεια, στη θέση $\mathbf{r}$. Έτσι, για παράδειγμα, για μια επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια παράλληλη στο επίπεδο xy θα είναι $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}}$ και από τις (1.28), (1.29) έχουμε

$$\begin{aligned} \tau_x &= \sigma_{xz} = \mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] \\ \tau_y &= \sigma_{yz} = \mu \left[\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] \\ \tau_z &= \sigma_{zz} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ανάλογα για μια σφαιρική διαχωριστική επιφάνεια με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων θα είναι $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}}$ και από τις (1.28), (1.29) και (1.6) έχουμε

$$\begin{aligned} \tau_r &= \sigma_{rr} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \tau_\theta &= \sigma_{r\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \\ \tau_\phi &= \sigma_{r\phi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Κεφάλαιο 2

Κυματική εξίσωση και ιδιοταλαντώσεις σφαιρικού σωματιδίου

2.1 Η κυματική εξίσωση της ελαστικότητας

Εφόσον οι τάσεις συνδέονται εξ' ορισμού με τη δύναμη μέσω της έκφρασης (1.17) και εφόσον έχουμε προσδιορίσει τη σχέση (1.28) που συνδέει τις τάσεις $\sigma_{ii'}$ με τις παραμορφώσεις $u_{ii'}$, μπορούμε να πούμε πως θα υπάρχει μια έκφραση που συνδέει τη δύναμη με το διάνυσμα μετατόπισης, μέσω των $u_{ii'}$. Πράγματι, από τις (1.5), (1.17) και (1.28) θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i &= \sum_{i'} \frac{\partial \sigma_{ii'}}{\partial x_{i'}} = \sum_{i'} \left[\delta_{ii'} \sum_{i''} \frac{\partial (\lambda u_{i''i''})}{\partial x_{i'}} + 2 \frac{\partial (\mu u_{ii'})}{\partial x_{i'}} \right] \\ &= \sum_{i'} \left[\delta_{ii'} \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left(\lambda \sum_{i''} \frac{\partial u_{i''}}{\partial x_{i''}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} + \mu \frac{\partial u_{i'}}{\partial x_i} \right) \right],\end{aligned}\quad (2.1)$$

η οποία σε διανυσματική μορφή γράφεται

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \nabla \lambda \\ &\quad + (\nabla \mu \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla \mu) - \mathbf{u} \cdot \nabla (\nabla \mu).\end{aligned}\quad (2.2)$$

Αυτή είναι η έκφραση της δύναμης ανά μονάδα όγκου που προκαλεί τις παραμορφώσεις συναρτήσει του διανύσματος μετατόπισης. Αν το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, απαιτούμε $\mathcal{F}_{ολ} = 0$, όπου στην $\mathcal{F}_{ολ}$ συμπεριλαμβάνεται η $\mathcal{F}$ (έκφραση 2.2) και όλες οι υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Αν το σώμα δεν είναι σε ισορροπία, τότε η εξίσωση της κίνησης θα είναι της μορφής $\mathcal{F}_{ολ} = \rho \alpha$, όπου α η επιτάχυνση που αναπτύσσεται στο σώμα και ρ η πυκνότητά του. Για να βρούμε την εξίσωση της κίνησης για ένα ισότροπο ελαστικό μέσο θα αμελήσουμε την επίδραση των υπόλοιπων δυνάμεων στην κίνησή του και με βάση τα παραπάνω θα έχουμε

$$\mathcal{F} = \rho \alpha = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.\quad (2.3)$$

Από τις (2.1) και (2.3) έχουμε

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{i'} \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left[\lambda \delta_{ii'} \sum_{i''} \frac{\partial u_{i''}}{\partial x_{i''}} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial u_{i'}}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2.4)$$

όπου, τονίζουμε, ότι στη γενική περίπτωση η πυκνότητα ρ και οι συντελεστές Lamé λ, μ , που περιγράφουν το μέσο, είναι συναρτήσεις της θέσης. Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι οι συντελεστές Lamé είναι πραγματικές (αυτό ισχύει για μέσα στα οποία δεν υπάρχει απορρόφηση) και θετικές ποσότητες, ανεξάρτητες από τη συχνότητα. Για αρμονικά ελαστικά κύματα συχνότητας ω , έχουμε

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}; t) = \text{Re} \{ \mathbf{u}(\mathbf{r}) \exp[-i\omega t] \} \quad (2.5)$$

και η Εξ. (2.4) καταλήγει στη χρονοανεξάρτητη μορφή

$$-\rho \omega^2 u_i = \sum_{i'} \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left[\lambda \delta_{ii'} \sum_{i''} \frac{\partial u_{i''}}{\partial x_{i''}} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial u_{i'}}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (2.6)$$

ή από την Εξ. (2.2)

$$\begin{aligned} -\rho \omega^2 \mathbf{u} = & (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \nabla \lambda \\ & + (\nabla \mu \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla \mu) - \mathbf{u} \cdot \nabla (\nabla \mu). \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2 Πολυπολικό ανάπτυγμα ελαστικού πεδίου

Θα εξετάσουμε τώρα τη διάδοση ελαστικών κυμάτων δεδομένης συχνότητας ω σε ομοιογενές ελαστικό μέσο πυκνότητας ρ και συντελεστών Lamé λ, μ . Σε ένα τέτοιο μέσο προφανώς τα ελαστικά χαρακτηριστικά ρ, λ, μ δεν εξαρτώνται από τη θέση και η κυματική εξίσωση (2.7) παίρνει τη μορφή

$$-c_l^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + c_t^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \omega^2 \mathbf{u}, \quad (2.8)$$

όπου $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ και $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$. Όπως έχουμε αναφέρει, για συνηθισμένα ελαστικά μέσα που δεν παρουσιάζουν απορρόφηση, οι συντελεστές Lamé είναι πραγματικοί αριθμοί. Στην αντίθετη περίπτωση (μέσα με απορρόφηση), και υποθέτοντας αρμονική εξάρτηση από το χρόνο, οι συντελεστές Lamé γίνονται μιγαδικοί [4]

$$\lambda = \lambda_e - i\omega \lambda_v, \quad \mu = \mu_e - i\omega \mu_v. \quad (2.9)$$

Αποδεικνύεται¹ ότι το ελαστικό πεδίο μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δύο ανεξάρτητων όρων, ενός διαμήχους (αστροβίλου: $\nabla \times \mathbf{u} = 0$) και ενός εγκάρσιου (σωληνοειδούς: $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) και κατά συνέπεια η (2.8) χωρίζεται σε δύο ανεξάρτητες εξισώσεις

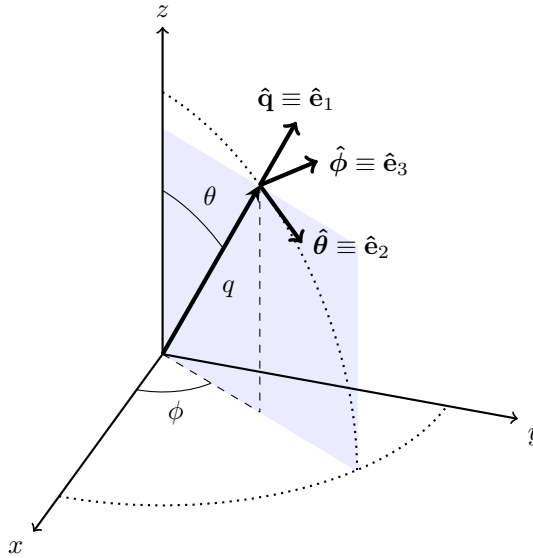
$$\nabla^2 \mathbf{u} + q_l^2 \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (2.10)$$

¹Από το θεώρημα του Helmholtz με την προϋπόθεση ότι ο στροβιλισμός και η απόκλιση του διανύσματος $\mathbf{u}$ μηδενίζονται στο άπειρο, πράγμα που ικανοποιείται στην περίπτωσή μας [5].

και

$$\nabla^2 \mathbf{u} + q_\nu^2 \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.11)$$

με $q_\nu = \omega/c_\nu$, $\nu = l, t$. Οι διαφορικές εξισώσεις (2.10), (2.11) έχουν την κλασική μορφή κυματικής εξίσωσης Helmholtz. Οι ποσότητες c_ν είναι οι ταχύτητες διάδοσης των δύο ειδών ελαστικών κυμάτων, διαμήκων ($\nu = l$) και εγκάρσιων ($\nu = t$), τα οποία διαδίδονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο σε ένα ομοιογενές ελαστικό μέσο. Από εδώ και στο εξής, θα χρησιμοποιούμε τις ποσότητες ρ , c_l , c_t , αντί των ρ , λ , μ , για να περιγράψουμε τις ελαστικές ιδιότητες ενός ομοιογενούς μέσου. Τονίζουμε ότι όσα αναφέραμε πιο πάνω αφορούν στην περίπτωση στερεών ή ρευστών με ιζώδες. Σε ρευστά μέσα χωρίς ιζώδες ($\mu = 0$ ή ισοδύναμα $c_t = 0$) μόνο τα διαμήκη κύματα είναι φυσικά παραδεκτές λύσεις. Παρ' όλα αυτά όπως φαίνεται αμέσως από την (2.8), και τα εγκάρσια κύματα μπορούν να θεωρηθούν λύσεις, με ιδιοσυχνότητα $\omega = 0$. Τέτοιες τετριμμένες μαθηματικές λύσεις είναι απαραίτητες για να μας εξασφαλίσουν την πληρότητα της βάσης των ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή της κυματικής εξίσωσης στην περίπτωση ρευστού μέσου, για το χώρο των διανυσματικών συναρτήσεων.



Σχήμα 2.1: Τοπικό σύστημα συντεταγμένων ως προς το $\mathbf{q}$.

Οι Εξ. (2.10), (2.11) επιδέχονται, προφανώς, λύσεις της μορφής επίπεδων κυμάτων με κατάλληλο κυματόνυσμα. Για μια δεδομένη συχνότητα ω , θα είναι

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{q}_\nu) \exp(i\mathbf{q}_\nu \cdot \mathbf{r}), \quad (2.12)$$

με $\mathbf{u}_0(\mathbf{q}_\nu) = u_0(\mathbf{q}_\nu) \hat{\mathbf{e}}$, $\mathbf{q}_\nu = q_\nu \hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{q}_\nu)$, όπου το u_0 δηλώνει το μέτρο και το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{e}}$ την πόλωση του ελαστικού πεδίου. Για διαμήκη κύματα $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{q}_l)$, ενώ για εγκάρσια $\hat{\mathbf{e}} \perp \hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{q}_t)$. Υπάρχουν δύο ανεξάρτητοι εγκάρσιοι τρόποι ταλάντωσης, που αντιστοιχούν σε

δύο πολώσεις για τα εγκάρσια κύματα, [π.χ., $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}_2(\mathbf{q}_t)$, $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}_3(\mathbf{q}_t)$]. Με το συμβολισμό $\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{q})$, $p = 1, 2, 3$, υποδηλώνουμε το ακτινικό, πολικό και αξιμουθιακό μοναδιαίο διάνυσμα, αντίστοιχα, για ένα δεδομένο διάνυσμα $\mathbf{q}$, Σχ. 2.1. Προφανώς λοιπόν ο δείκτης p προσδιορίζει και την πόλωση ν του ελαστικού πεδίου.

Οι λύσεις των Εξ. (2.10) και (2.11) στη μορφή των επίπεδων κυμάτων (2.12), αν και είναι οι πιο γνωστές και απλές, δεν είναι πάντα και οι καταλληλότερες όταν κανείς θέλει να μελετήσει τη διάδοση ελαστικών κυμάτων σε συνθετότερα από την περίπτωση του ομοιογενούς μέσου συστήματα. Έτσι, για συστήματα με σφαιρική γεωμετρία (όπως αυτά που θα διαπραγματευτούμε στη συνέχεια) είναι βολικό να εκφράσουμε τις λύσεις σε πολυπολικό ανάπτυγμα στη βάση σφαιρικών κυματικών λύσεων των (2.10), (2.11). Ένα πλήρες και ορθογώνιο σύνολο τέτοιων λύσεων για τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz, που είναι γνωστές και ως διανυσματικά σφαιρικά κύματα, δίνεται από τις [6]

$$\mathbf{J}_{L\ell m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{q_l} \nabla [j_\ell(q_l r) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})], \quad \mathbf{H}_{L\ell m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{q_l} \nabla [h_\ell^+(q_l r) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] \quad (2.13)$$

$$\mathbf{J}_{M\ell m}(\mathbf{r}) = j_\ell(q_t r) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{H}_{M\ell m}(\mathbf{r}) = h_\ell^+(q_t r) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.14)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{N\ell m}(\mathbf{r}) &= \frac{i}{q_t} \nabla \times [j_\ell(q_t r) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] = \frac{i}{q_t} \nabla \times \mathbf{J}_{M\ell m}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{N\ell m}(\mathbf{r}) &= \frac{i}{q_t} \nabla \times [h_\ell^+(q_t r) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] = \frac{i}{q_t} \nabla \times \mathbf{H}_{M\ell m}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

όπου $j_\ell(q_\nu r)$ και $h_\ell^+(q_l r)$ οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Hankel αντίστοιχα (βλ. Παράρτημα Β'), και $Y_{\ell m}$, $\mathbf{X}_{\ell m}$ οι συνήθεις και οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές αντίστοιχα (βλ. Παράρτημα Γ'), με το $\hat{\mathbf{r}}$ να δηλώνει τις γωνιακές μεταβλητές (θ, ϕ) του $\mathbf{r}$ σε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Είναι εμφανές ότι οι Εξ. (2.13) αποτελούν λύσεις της κυματικής εξίσωσης (2.10), αφού εκφράζουν ένα αστρόβιλο πεδίο. Αντίστοιχα, οι Εξ. (2.14) και (2.15) αποτελούν λύσεις της κυματικής εξίσωσης (2.11), αφού εκφράζουν ένα σωληνοειδές πεδίο. Δηλαδή οι διαμήκεις λύσεις θα δίνονται από τις (2.13) ενώ οι εγκάρσιες από τις (2.14) και (2.15). Κάθε μία από τις παραπάνω σφαιρικές κυματικές λύσεις χαρακτηρίζεται, για δεδομένη πάντα συχνότητα, από τους δείκτες της στροφορμής ℓ, m , και το δείκτη $P = L, M, N$. Για απλότητα χρησιμοποιούμε το δείκτη L (αυτός δε θα πρέπει να συγχέεται με το δείκτη L που χαρακτηρίζει τα διαμήκη σφαιρικά κύματα) για να δηλώνουμε συλλογικά τα $P\ell m$. Τονίζουμε ότι οι λύσεις $\mathbf{J}_L(\mathbf{r})$ παρουσιάζουν ομαλή συμπεριφορά σε κάθε σημείο, σε αντίθεση με τις $\mathbf{H}_L(\mathbf{r})$ οι οποίες απειρίζονται στο $r = 0$ και έχουν τη μορφή εξερχόμενων σφαιρικών κυμάτων για $r \rightarrow \infty$.

Στη γενική περίπτωση, το ελαστικό πεδίο σε ένα ομοιογενές μέσο, για δεδομένη συχνότητα ω , γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{J}_L(\mathbf{r})$ και $\mathbf{H}_L(\mathbf{r})$ σε αυτή τη συχνότητα

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_L [a_L^0 \mathbf{J}_L(\mathbf{r}) + a_L^+ \mathbf{H}_L(\mathbf{r})], \quad (2.16)$$

όπου οι συντελεστές a_L^0 και a_L^+ προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες.

2.3 Ιδιοταλαντώσεις σφαιρικού σωματιδίου

Γράφοντας στη γενική περίπτωση το ελαστικό πεδίο $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ σαν γραμμικό συνδυασμό των (2.13), (2.14) και (2.15) με κατάλληλους συντελεστές $a_{P\ell m}$, $P = L, M, N$, και με χρήση των σχέσεων του Παραρτήματος Γ', μπορούμε να βρούμε την έκφραση του $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ στις σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{\ell m} \mathcal{B}_{\ell m}^{(0)} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \\ u_\theta &= \sum_{\ell m} \left[\mathcal{B}_{\ell m}^{(1)} X_{\ell m; \theta}(\hat{\mathbf{r}}) - \mathcal{B}_{\ell m}^{(2)} X_{\ell m; \phi}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \\ u_\phi &= \sum_{\ell m} \left[\mathcal{B}_{\ell m}^{(2)} X_{\ell m; \theta}(\hat{\mathbf{r}}) + \mathcal{B}_{\ell m}^{(1)} X_{\ell m; \phi}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ανάλογα, ξεκινώντας από τις Εξ. (1.31), προκύπτουν οι αντίστοιχες εκφράσεις για την επιφανειακή τάση $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$ στις σφαιρικές συντεταγμένες συναρτήσει των συντελεστών $a_{P\ell m}$ των συνιστωσών του ελαστικού πεδίου

$$\begin{aligned} \tau_r &= \sum_{\ell m} \mathcal{B}_{\ell m}^{(3)} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \tau_\theta &= \sum_{\ell m} \left[\mathcal{B}_{\ell m}^{(4)} X_{\ell m; \theta}(\hat{\mathbf{r}}) - \mathcal{B}_{\ell m}^{(5)} X_{\ell m; \phi}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \\ \tau_\phi &= \sum_{\ell m} \left[\mathcal{B}_{\ell m}^{(5)} X_{\ell m; \theta}(\hat{\mathbf{r}}) + \mathcal{B}_{\ell m}^{(4)} X_{\ell m; \phi}(\hat{\mathbf{r}}) \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

όπου

$$\mathcal{B}_{\ell m}^{(0)} = a_{L\ell m} f'_\ell(y_l) - a_{N\ell m} \psi_\ell \frac{f_\ell(y_t)}{y_t} \quad (2.19)$$

$$\mathcal{B}_{\ell m}^{(1)} = a_{M\ell m} f_\ell(y_t) \quad (2.20)$$

$$\mathcal{B}_{\ell m}^{(2)} = i \left[-a_{L\ell m} \psi_\ell \frac{f_\ell(y_l)}{y_l} + a_{N\ell m} \frac{y_t f'_\ell(y_t) + f_\ell(y_t)}{y_t} \right] \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\ell m}^{(3)} &= -a_{L\ell m} \rho q_l \left[c_l^2 f_\ell(y_l) + 2c_t^2 \frac{2y_l f'_\ell(y_l) - \psi_\ell^2 f_\ell(y_l)}{y_l^2} \right] \\ &\quad - a_{N\ell m} 2\rho c_t^2 q_t \psi_\ell \frac{y_t f'_\ell(y_t) - f_\ell(y_t)}{y_t^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\mathcal{B}_{\ell m}^{(4)} = a_{M\ell m} \rho c_t^2 q_t \frac{y_t f'_\ell(y_t) - f_\ell(y_t)}{y_t} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\ell m}^{(5)} &= -2i\rho c_t^2 \left\{ a_{L\ell m} \psi_\ell q_l \frac{y_l f'_\ell(y_l) - f_\ell(y_l)}{y_l^2} \right. \\ &\quad \left. + a_{N\ell m} q_t \frac{f_\ell(y_t) [1 + y_t^2/2 - \psi_\ell^2] + y_t f'_\ell(y_t)}{y_t^2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

με $y_\nu = q_\nu r$, $\nu = l, t$, $f_\ell(y_\nu) = j_\ell(y_\nu)$ ή $h_\ell^+(y_\nu)$ και $\psi_\ell = \sqrt{\ell(\ell+1)}$.

Για ένα σφαιρικό σωματίδιο που βρίσκεται στο κενό, οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες είναι ο μηδενισμός της επιφανειακής τάσης. Όπως έχουμε αναφέρει, οι σφαιρικές Hankel απειρίζονται στο $r = 0$, συνεπώς αποδεκτές λύσεις μέσα στη σφαίρα θα είναι μόνο οι σφαιρικές Bessel, $j_\ell(y_\nu)$. Από τις Εξ. (2.18) και (Γ'.29) και για $r = S$, όπου S η ακτίνα της σφαίρας, έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \left[\tau_r \hat{\mathbf{r}} + \tau_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \tau_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right]_{r=S} &= \sum_{\ell m} \left[\mathcal{B}_{\ell m}^{(3)} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{B}_{\ell m}^{(4)} \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) + \mathcal{B}_{\ell m}^{(5)} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \right]_{r=S} \\ &= 0\hat{\mathbf{r}} + 0\hat{\boldsymbol{\theta}} + 0\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad \forall \theta, \phi, \end{aligned} \quad (2.25)$$

που σημαίνει ότι απαιτούμε τον ταυτόχρονο μηδενισμό των $\mathcal{B}_{\ell m}^{(3)}$, $\mathcal{B}_{\ell m}^{(4)}$, $\mathcal{B}_{\ell m}^{(5)}$, στο $r = S$. Έτσι από τις (2.22) και (2.24) έχουμε

$$a_{N\ell m} = -a_{L\ell m} \frac{q_t}{q_l} \frac{1}{2c_t^2 \psi_\ell} \frac{j_\ell(q_l S) [q_l^2 S^2 c_l^2 + 2c_t^2 (2\ell - \psi_\ell^2)] - 4c_t^2 q_l S j_{\ell+1}(q_l S)}{(\ell - 1) j_\ell(q_t S) - q_t S j_{\ell+1}(q_t S)} \quad (2.26)$$

και

$$a_{N\ell m} = -a_{L\ell m} \frac{q_t}{q_l} \psi_\ell \frac{(\ell - 1) j_\ell(q_l S) - q_l S j_{\ell+1}(q_l S)}{j_\ell(q_t S) \left[\ell + 1 + (q_t S)^2 / 2 - \psi_\ell^2 \right] - q_t S j_{\ell+1}(q_t S)} \quad (2.27)$$

αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τη δεύτερη στην πρώτη καταλήγουμε στην

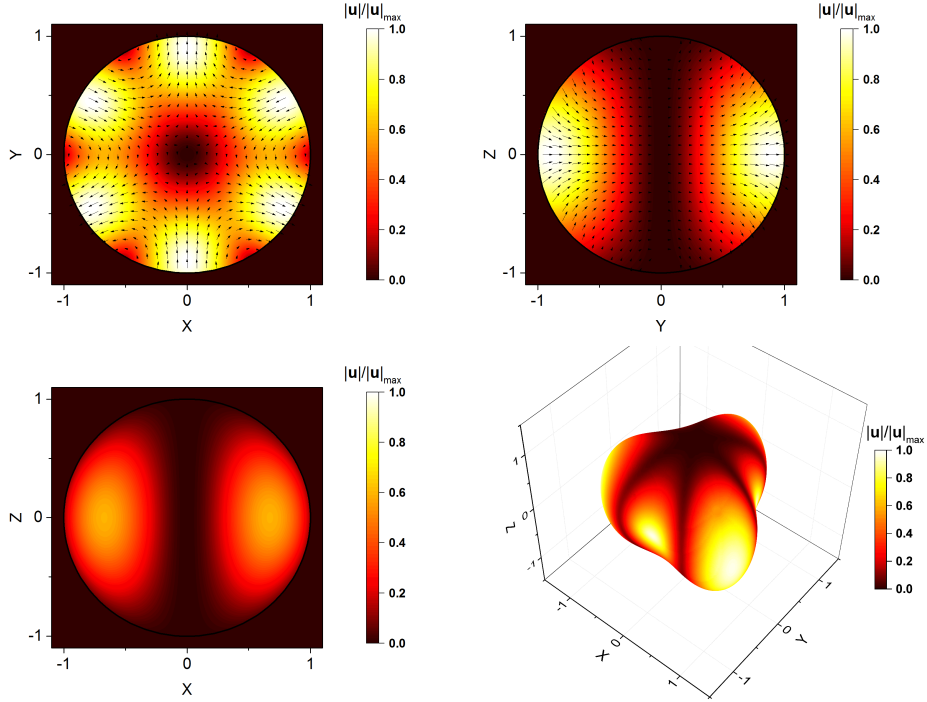
$$\begin{aligned} 2c_t^2 \psi_\ell^2 \frac{(\ell - 1) j_\ell(q_l S) - q_l S j_{\ell+1}(q_l S)}{j_\ell(q_t S) \left[\ell + 1 + (q_t S)^2 / 2 - \psi_\ell^2 \right] - q_t S j_{\ell+1}(q_t S)} = \\ \frac{j_\ell(q_l S) [q_l^2 S^2 c_l^2 + 2c_t^2 (2\ell - \psi_\ell^2)] - 4c_t^2 q_l S j_{\ell+1}(q_l S)}{(\ell - 1) j_\ell(q_t S) - q_t S j_{\ell+1}(q_t S)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

ενώ η (2.23) θα δώσει την

$$(\ell - 1) j_\ell(q_t S) - q_t S j_{\ell+1}(q_t S) = 0. \quad (2.29)$$

Οι Εξ. (2.28) και (2.29) λύνονται αριθμητικά και δίνουν τις συχνότητες των ιδιοταλαντώσεων. Υπενθυμίζουμε ότι $q_\nu = \omega/c_\nu$, $\nu = l, t$. Παρατηρούμε έτσι ότι υπάρχουν δύο είδη ιδιοταλαντώσεων. Αυτές που προέρχονται από τις λύσεις της Εξ. (2.28), και ονομάζονται *σφαιροειδείς κανονικοί τρόποι ταλάντωσης* αφού παρατηρούμε ότι έχουν ακτινική και γωνιακή συνιστώσα ταλάντωσης, και αυτές που προέρχονται από τις λύσεις της Εξ. (2.29), και ονομάζονται *στρεπτικοί κανονικοί τρόποι ταλάντωσης* αφού έχουν μόνο γωνιακή συνιστώσα ταλάντωσης. Στην ειδική περίπτωση όπου $\ell = 0$, έχουμε εξ' ορισμού $\tau_\theta = \tau_\phi = 0$ αφού $\mathbf{X}_{00}(\hat{\mathbf{r}}) = 0$ και από την Εξ. (2.25) προκύπτει η

$$\tan y_l = \frac{y_l}{1 - \left(\frac{c_l}{2c_t} \right)^2 y_l^2}, \quad (2.30)$$



Σχήμα 2.2: Απεικόνιση της κανονικοποιημένης στη μονάδα RMS τιμής του ελαστικού πεδίου (χρωματική κλίμακα), για το σφαιροειδή κανονικό τρόπο ταλάντωσης $l = 3$, $m = \pm 3$, ενός σφαιρικού σωματιδίου πολυστυρενίου με ελαστικές ταχύτητες διάδοσης $c_l = 2350\text{m/s}$, $c_t = 1210\text{m/s}$. Η αδιάστατη συχνότητα ταλάντωσης είναι $\omega S/c_l = 2.03127$. Φαίνονται τρεις, ορθογώνιες μεταξύ τους, τομές που διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας, καθώς και η επιφανειακή κατανομή του πεδίου μαζί με την παραμόρφωση που προκαλεί. Τα διαγράμματα έχουν κοινή κανονικοποίηση. Τα βέλη δείχνουν τη διεύθυνση της ταλάντωσης μια τυχαία χρονική στιγμή, ενώ η παραμόρφωση της επιφάνειας στο τρισδιάστατο σχήμα έχει κανονικοποιηθεί, για λόγους ευκρίνειας, έτσι ώστε το μέγιστο πλάτος να αντιστοιχεί στο 20% της ακτίνας της σφαίρας.

όπου τώρα η σφαίρα έχει μόνο ακτινική συνιστώσα ταλάντωσης και για αυτό το λόγο οι τρόποι αυτής της ταλάντωσης ονομάζονται *ακτινικοί κανονικοί τρόποι ταλάντωσης*.

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με ένα παράδειγμα υπολογισμού και απεικόνισης ενός σφαιροειδούς κανονικού τρόπου ταλάντωσης. Οι υπολογισμοί γίνονται σύμφωνα με τις Εξ. (2.16) και (2.26) ή (2.27). Πριν προχωρήσουμε όμως, θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις.

Από τις (2.26) και (2.27), και για συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα, υπολογίζουμε το συντελεστή $a_{N\ell m}$ σαν συνάρτηση του $a_{L\ell m}$. Ο $a_{L\ell m}$ θα πρέπει να είναι γνωστός από κάποια κανονικοποίηση. Στο Κεφ. 4, θα κανονικοποιήσουμε τους συντελεστές $a_{P\ell m}$ σύμφωνα με την πιθανότητα κατάληψης τη κάθε ενεργειακής κατάστασης, όπως αυτή προκύπτει από την ολική ενέργεια του συστήματος σε μια δεδομένη θερμοκρασία και από την κατανομή Bose-Einstein. Εδώ για λόγους απλότητας και αφού απεικονίζουμε μόνο ένα τρόπο ταλάντωσης,

κανονικοποιούμε το συντελεστή $a_{L\ell m}$, έτσι ώστε η μέγιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού ελαστικού πεδίου να ισούται με μονάδα. Στην ουσία απεικονίζουμε την κανονικοποιημένη στη μονάδα τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου του πεδίου, Root Mean Square (RMS), αφού όπως δείχνεται πολύ εύκολα,

$$\begin{aligned}
 u_{\text{RMS}}(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{\text{Re}[\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]\}^2 dt} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-2i\omega t}) + \mathbf{u}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{r}) e^{2i\omega t} + 2\mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{r})}{4} dt} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|, \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

το μέτρο του μιγαδικού πεδίου είναι ανάλογο αυτής (υπό την προϋπόθεση ότι η χρονική εξάρτηση είναι αρμονική).

Κάτι ακόμα που πρέπει να τονίσουμε, είναι ότι για δεδομένη τιμή του ℓ και για συμμετρικές τιμές του m (δηλαδή για m και $-m$), η συνεισφορά των αντίστοιχων συμμετρικών όρων στο πολυπολικό ανάπτυγμα θα είναι ίδια σαν μέτρο αλλά θα διαφέρει κατά μία φάση, που είναι φανερή από τις σχέσεις (Γ'.6) και (Γ'.28). Αυτή η φάση είναι μαθηματικής προέλευσης και οφείλεται στην ανάπτυξη του πεδίου σε μιγαδικούς όρους². Έτσι, εφόσον δεν υπάρχει φυσικός τρόπος να ξεχωρίσουμε τις 2 αυτές περιπτώσεις, τα συμμετρικά m θα πρέπει πάντα να χρησιμοποιούνται μαζί στους υπολογισμούς.

Σε συμφωνία λοιπόν με τα παραπάνω, στο Σχ. 2.2 απεικονίζεται η κανονικοποιημένη RMS τιμή του ελαστικού πεδίου για τον χαμηλότερης συχνότητας σφαιροειδή κανονικό τρόπο ταλάντωσης $l = 3$, $m = \pm 3$, ενός σφαιρικού σωματιδίου πολυστυρενίου με ελαστικές ταχύτητες διάδοσης $c_l = 2350\text{m/s}$, $c_t = 1210\text{m/s}$. Η ιδιοσυχνότητα υπολογίστηκε από την Εξ. (2.28) και είναι $\omega S/c_l = 2.03127$ (αδιάστατη συχνότητα).

²Φαινόμενο αντίστοιχο με την εμφάνιση αρνητικών συχνοτήτων στο μετασχηματισμό Fourier ενός πραγματικού σήματος.

Κεφάλαιο 3

Θεωρητική μελέτη της σκέδασης Brillouin

3.1 Φωτοελαστικό φαινόμενο

Το φωτοελαστικό φαινόμενο συνδέει τη μηχανική παραμόρφωση¹, Εξ. (1.5), σε ένα σημείο $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ενός υλικού, με την οπτική διηλεκτρική συνάρτηση [7]. Γενικά, για μικρές παραμορφώσεις, μπορούμε να εκφράσουμε τη μεταβολή των στοιχείων του ταυυστή της σχετικής διηλεκτρικής συνάρτησης $\delta\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ σαν γραμμική συνάρτηση των στοιχείων του ταυυστή της παραμόρφωσης [8]

$$\delta\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\gamma\delta} K_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma\delta}(\mathbf{r}, t). \quad (3.1)$$

Οι ελαστο-οπτικές σταθερές Pockels $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, ορίζονται από τη σχέση

$$[\delta\epsilon^{-1}]_{\alpha\beta} \equiv [\epsilon^{-1}]_{\alpha\beta} - [\epsilon_r^{-1}]_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma\delta}, \quad (3.2)$$

όπου $\overleftrightarrow{\epsilon}$ και $\overleftrightarrow{\epsilon}_r$ οι σχετικοί διηλεκτρικοί ταυυστές του παραμορφωμένου και του απαρμόρφωτου (σώμα αναφοράς) σώματος αντίστοιχα. Για μικρές παραμορφώσεις, το διαφορικό του διηλεκτρικού ταυυστή ταυτίζεται με τη διαφορά των διηλεκτρικών ταυυστών του παραμορφωμένου και του σώματος αναφοράς, $\delta\overleftrightarrow{\epsilon} = \overleftrightarrow{\epsilon} - \overleftrightarrow{\epsilon}_r$. Αντίστοιχη σχέση ισχύει και για το διαφορικό του αντίστροφου ταυυστή. Έτσι, παίρνοντας το διαφορικό της ταυυστικής ταυτότητας $\overleftrightarrow{\epsilon}^{-1}\overleftrightarrow{\epsilon} = \overleftrightarrow{1}$ και κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης, προκύπτει ότι $\delta\overleftrightarrow{\epsilon}^{-1}\overleftrightarrow{\epsilon}_r + \overleftrightarrow{\epsilon}_r^{-1}\delta\overleftrightarrow{\epsilon} = 0$. Πολλαπλασιάζοντας τώρα από αριστερά με $\overleftrightarrow{\epsilon}_r$ καταλήγουμε στην $\delta\overleftrightarrow{\epsilon} = -\overleftrightarrow{\epsilon}_r\delta\overleftrightarrow{\epsilon}^{-1}\overleftrightarrow{\epsilon}_r$ ή αλλιώς

$$\delta\epsilon_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu} [\epsilon_r]_{\alpha\mu} [\delta\epsilon^{-1}]_{\mu\nu} [\epsilon_r]_{\nu\beta}. \quad (3.3)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.2) στην (3.3) προκύπτει η

$$\delta\epsilon_{\alpha\beta} = - \sum_{\mu\nu\gamma\delta} [\epsilon_r]_{\alpha\mu} P_{\mu\nu\gamma\delta} u_{\gamma\delta} [\epsilon_r]_{\nu\beta}, \quad (3.4)$$

¹Η οποία μπορεί να οφείλεται, για παράδειγμα, σε θερμικά διεγερόμενα ελαστικά κύματα (φωνόνια).

και συγκρίνοντας τις Εξ. (3.1) και (3.4) καταλήγουμε στην

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \sum_{\mu\nu} [\epsilon_r]_{\alpha\mu} P_{\mu\nu\gamma\delta} [\epsilon_r]_{\nu\beta} \quad (3.5)$$

που δίνει τις σταθερές $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$ σαν συνάρτηση των ελαστο-οπτικών σταθερών Pockels. Η αντίστροφη σχέση προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta} [\epsilon_r^{-1}]_{\kappa\alpha} K_{\alpha\beta\gamma\delta} [\epsilon_r^{-1}]_{\beta\lambda} &= - \sum_{\alpha\beta} \sum_{\mu\nu} [\epsilon_r^{-1}]_{\kappa\alpha} [\epsilon_r]_{\alpha\mu} P_{\mu\nu\gamma\delta} [\epsilon_r]_{\nu\beta} [\epsilon_r^{-1}]_{\beta\lambda} \Rightarrow \\ \sum_{\alpha\beta} [\epsilon_r^{-1}]_{\kappa\alpha} K_{\alpha\beta\gamma\delta} [\epsilon_r^{-1}]_{\beta\lambda} &= - \sum_{\mu\nu} \delta_{\kappa\mu} P_{\mu\nu\gamma\delta} \delta_{\nu\lambda} \Rightarrow \\ P_{\kappa\lambda\gamma\delta} &= \sum_{\alpha\beta} [\epsilon_r^{-1}]_{\kappa\alpha} K_{\alpha\beta\gamma\delta} [\epsilon_r^{-1}]_{\beta\lambda}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Για ένα ισότροπο υλικό ισχύει $[\epsilon_r]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \epsilon_r$ και έτσι οι Εξ. (3.5) και (3.6) γίνονται

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon_r^2 P_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (3.7)$$

και

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = -K_{\alpha\beta\gamma\delta} / \epsilon_r^2 \quad (3.8)$$

Οι ελαστο-οπτικοί συντελεστές ικανοποιούν τις συμμετρίες μετάθεσης $P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\beta\alpha\gamma\delta}$ και $P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\beta\delta\gamma}$. Έτσι, είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε συντεταγμένους δείκτες, οι οποίοι θα συντομεύσουν το συμβολισμό. Αυτοί ορίζονται ως εξής: $1 \equiv (11)$, $2 \equiv (22)$, $3 \equiv (33)$, $4 \equiv (23) = (32)$, $5 \equiv (13) = (31)$, και $6 \equiv (12) = (21)$. Τονίζουμε ότι η κρυσταλλική συμμετρία ενός υλικού μπορεί να δώσει πληροφορίες μόνο για τη μορφή του τανυστή και όχι για το μέγεθος των ελαστο-οπτικών συντελεστών. Έτσι, η ομάδα συμμετρίας σημείου καθορίζει ποιοι από τους 36 συντελεστές θα είναι ταυτοτικά ίσοι με μηδέν, καθώς επίσης και τις σχέσεις που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ των συντελεστών που παραμένουν. Για ένα ισοτροπικό υλικό, για παράδειγμα ένα πολυκρυσταλλικό ή άμορφο στερεό, ή ένα υγρό, παραμένουν μόνο δύο ανεξάρτητοι συντελεστές και ο ελαστο-οπτικός τανυστής Pockels έχει τη μορφή

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{12} & P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(P_{11}-P_{12})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(P_{11}-P_{12})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(P_{11}-P_{12})}{2} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Για ένα μέσο αναφοράς που χαρακτηρίζεται από μία βαθμωτή σχετική διηλεκτρική συνάρτηση, $[\epsilon_r]_{\alpha\beta} = \epsilon_r \delta_{\alpha\beta}$, η Εξ. (3.4) γίνεται

$$\delta\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_r^2 \sum_{\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma\delta}. \quad (3.10)$$

και στην περίπτωση του ισότροπου υλικού, χρησιμοποιώντας την Εξ. (3.9), ο τανυστής της διηλεκτρικής συνάρτησης σε συντεταγμένη μορφή γράφεται

$$\begin{aligned} \delta^{\leftarrow\epsilon} &= -\epsilon_r^2 \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{12} & P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(P_{11}-P_{12})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(P_{11}-P_{12})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(P_{11}-P_{12})}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{22} \\ u_{33} \\ u_{23} \\ u_{13} \\ u_{12} \end{pmatrix} \\ &= -\epsilon_r^2 \begin{pmatrix} P_{11}u_{11} + P_{12}u_{22} + P_{12}u_{33} \\ P_{12}u_{11} + P_{11}u_{22} + P_{12}u_{33} \\ P_{12}u_{11} + P_{12}u_{22} + P_{11}u_{33} \\ (P_{11} - P_{12}) u_{23}/2 \\ (P_{11} - P_{12}) u_{13}/2 \\ (P_{11} - P_{12}) u_{12}/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ή, ισοδύναμα, στη μορφή ενός 3×3 πίνακα

$$\delta^{\leftarrow\epsilon} = -\epsilon_r^2 \begin{pmatrix} P_{11}u_{11} + P_{12}u_{22} + P_{12}u_{33} & (P_{11} - P_{12}) u_{12}/2 & (P_{11} - P_{12}) u_{13}/2 \\ (P_{11} - P_{12}) u_{12}/2 & P_{12}u_{11} + P_{11}u_{22} + P_{12}u_{33} & (P_{11} - P_{12}) u_{23}/2 \\ (P_{11} - P_{12}) u_{13}/2 & (P_{11} - P_{12}) u_{23}/2 & P_{12}u_{11} + P_{12}u_{22} + P_{11}u_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι $P_{11} \simeq P_{12} = P$, ο τανυστής $\delta^{\leftarrow\epsilon}$ μετατρέπεται στη βαθμωτή ποσότητα

$$\delta\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_r^2 P \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.13)$$

3.2 Η εξίσωση Lippmann-Schwinger στην ανελαστική σκέδαση φωτός

Από τις εξισώσεις του Maxwell, το ηλεκτρικό πεδίο, απουσία ύπαρξης μακροσκοπικών ρευμάτων στο υλικό, ικανοποιεί τη διανυσματική εξίσωση

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = -\frac{\mu}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \leftarrow\epsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (3.14)$$

όπου έχουμε θεωρήσει σταθερή σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ , η οποία, από εδώ και στο εξής, θα θεωρείται ίση με μονάδα, ενώ $c_0 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, με τα ϵ_0 , μ_0 να δηλώνουν την ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Η χρονική μεταβολή της σχετικής διηλεκτρικής συνάρτησης $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ είναι ανάλογη της συχνότητας των φωνονίων, η οποία είναι συνήθως 5 τάξεις μεγέθους μικρότερη από αυτή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στις περιπτώσεις που είναι έγκυρη η μακροσκοπική θεωρία του φωτοελαστικού φαινομένου, όπως στη σκέδαση Brillouin. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να αγνοήσουμε

τη χρονική μεταβολή του ταυυστή της σχετικής διηλεκτρικής συνάρτησης και η Εξ. (3.14) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\sum_{\alpha} \mathcal{L}_{\delta\alpha}(\mathbf{r}, t) E_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c_0^2} \sum_{\alpha} \delta\epsilon_{\delta\alpha}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_{\alpha}(\mathbf{r}, t), \quad (3.15)$$

όπου

$$\mathcal{L}_{\delta\alpha}(\mathbf{r}, t) = -[\nabla \times (\nabla \times)]_{\delta\alpha} - \delta\epsilon_{\delta\alpha} \frac{\epsilon_r(\mathbf{r})}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (3.16)$$

Η μη ομογενής διαφορική εξίσωση (3.15) μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας την τεχνική των συναρτήσεων Green. Εισάγοντας τη δυαδική συνάρτηση Green μέσω της σχέσης

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{r}, t) \overleftrightarrow{G}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \overleftrightarrow{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (3.17)$$

ή σε μορφή στοιχείων του ταυυστή

$$\sum_{\alpha} \mathcal{L}_{\delta\alpha}(\mathbf{r}, t) G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \delta_{\delta\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (3.18)$$

δείχνεται εύκολα ότι η

$$E_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = E_{r;\alpha}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c_0^2} \sum_{\beta\gamma} \int d^3r' \int dt' G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \delta\epsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{r}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} E_{\gamma}(\mathbf{r}', t'), \quad (3.19)$$

όπου $\mathbf{E}_r$ η λύση της ομογενούς, ικανοποιεί την Εξ. (3.15) και έχει τη μορφή της εξίσωσης Lippmann-Schwinger. Η λύση της μη ομογενούς μπορεί να προσεγγισθεί τελικά από την Εξ. (3.19) με μια επαναληπτική τεχνική που δίνει τη λύση σε σειρά Born, η οποία σε μορφή τελεστών γράφεται ως

$$|E\rangle = |E_r\rangle + \hat{G}\hat{\Delta}|E\rangle = |E_r\rangle + \hat{G}\hat{\Delta}|E_r\rangle + \hat{G}\hat{\Delta}\hat{G}\hat{\Delta}|E_r\rangle + \dots, \quad (3.20)$$

όπου

$$\langle \alpha r t | \hat{\Delta} | \alpha' r' t' \rangle = \frac{1}{c_0^2} \delta\epsilon_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (3.21)$$

Έτσι, στην αναπαράσταση θέσης και χρόνου παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} E_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = & E_{r;\alpha}(\mathbf{r}, t) \\ & + \frac{1}{c_0^2} \sum_{\beta\gamma} \int d^3r' \int dt' G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \delta\epsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{r}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} E_{r;\gamma}(\mathbf{r}', t') \\ & + \frac{1}{c_0^4} \sum_{\beta\gamma\delta\epsilon} \int d^3r' \int dt' \int d^3r'' \int dt'' \left\{ G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \delta\epsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{r}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right. \end{aligned}$$

$$G_{\gamma\delta}(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t'') \delta\epsilon_{\delta\epsilon}(\mathbf{r}'', t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} E_{\mathbf{r};\epsilon}(\mathbf{r}'', t'') \Big\} + \dots \quad (3.22)$$

Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσουν διαδικασίες ανελαστικής σκέδασης φωτός από ένα μόνο φωνόνιο. Έτσι, θα περιοριστούμε στην πρώτης τάξης προσέγγιση της σειράς Born, που είναι γνωστή στα προβλήματα σκέδασης ως προσέγγιση Born, αφού αυτή δίνει μία έκφραση για το σχεδάζόμενο ηλεκτρικό πεδίο που σχετίζεται με πρώτης τάξης τελεστές του πεδίου των φωνονίων, Εξ. (3.20), και άρα περιγράφει διαδικασίες αλληλεπίδρασης, και άρα σκέδασης, από ένα φωνόνιο. Κατά συνέπεια, από την Εξ. (3.22), το σχεδάζόμενο πεδίο δίνεται από την

$$E_{\mathbf{s};\alpha}(\mathbf{r}, t) \equiv E_{\alpha}(\mathbf{r}, t) - E_{\mathbf{r};\alpha}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \\ E_{\mathbf{s};\alpha}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c_0^2} \sum_{\beta\gamma} \int d^3r' \int dt' G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \delta\epsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{r}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} E_{\mathbf{r};\gamma}(\mathbf{r}', t'). \quad (3.23)$$

Υποθέτοντας τώρα ότι το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι μονοχρωματικό με αρμονική χρονική εξάρτηση $\propto \exp(-i\omega t)$, η Εξ. (3.23) παίρνει τη μορφή

$$E_{\mathbf{s};\alpha}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega_{\mathbf{r}}^2}{c_0^2} \sum_{\beta\gamma} \int d^3r' \int dt' G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \delta\epsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{r}', t') E_{\mathbf{r};\gamma}(\mathbf{r}', t'). \quad (3.24)$$

Τέλος, δείχνεται εύκολα ότι ο μετασχηματισμός Fourier της χρονικά ανεξάρτητης δυαδικής συνάρτησης Green, που ορίζεται από την

$$\sum_{\alpha} \{z\delta_{\delta\alpha} - [\nabla \times (\nabla \times)]_{\delta\alpha}\} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; z) = \delta_{\delta\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.25)$$

παράγει τη χρονικά εξαρτημένη δυαδική συνάρτηση Green, $\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$. Δηλαδή

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega^2) e^{-i\omega(t-t')}. \quad (3.26)$$

3.3 Συνάρτηση φασματικής πυκνότητας

Η δυαδική συνάρτηση Green της διανυσματικής κυματικής εξίσωσης του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα ομοιογενές και ισότροπο μέσο δίνεται από τη σχέση [9]

$$\overleftrightarrow{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; \omega) = \left[\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}. \quad (3.27)$$

Για σημεία παρατήρησης μακριά από την περιοχή των πηγών, $R \gg r$, έχουμε

$$|\mathbf{R} - \mathbf{r}| = (R^2 + r^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^{1/2} = R \left(1 - 2\hat{\mathbf{R}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \simeq \frac{1}{R} e^{ikR} e^{-i(k\hat{\mathbf{R}})\cdot\mathbf{r}} \quad (3.28)$$

και άρα η Εξ. (3.27) γίνεται

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; \omega) &\simeq \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \left[\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi R} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left[\overleftrightarrow{I} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

όπου ορίσαμε $\mathbf{k} \equiv k\hat{\mathbf{R}}$. Με χρήση της ταυτότητας (Α'.2), δείχνεται εύκολα ότι

$$\left[\overleftrightarrow{I} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \right] \mathbf{a} \equiv -\hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{a}) \quad (3.30)$$

και τελικά η Εξ. (3.29) παίρνει τη μορφή

$$\overleftrightarrow{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; \omega) \simeq -\frac{e^{ikR}}{4\pi R} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times). \quad (3.31)$$

Ξεκινώντας τώρα από την Εξ. (3.24) θεωρώντας προσπίπτον επίπεδο κύμα $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)] \hat{\mathbf{n}}_i$ και χρησιμοποιώντας τις Εξ. (3.26) και (3.31), προκύπτει ότι²

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(\mathbf{R}, t) &= -\frac{\omega_i^2}{c_0^2} \int d^3r \int dt' \overleftrightarrow{G}(\mathbf{R}, t; \mathbf{r}, t') \delta^{\leftarrow\epsilon^{\rightarrow}}(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t') \\ &= -\frac{\omega_i^2}{c_0^2} \int d^3r \int dt' \int \frac{d\omega}{2\pi} \overleftrightarrow{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; \omega) e^{-i\omega(t-t')} \delta^{\leftarrow\epsilon^{\rightarrow}}(\mathbf{r}, t') E_0 e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t')} \hat{\mathbf{n}}_i \\ &\simeq \frac{\omega_i^2 E_0}{c_0^2 4\pi R} \int d^3r \int dt' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{ikR} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} e^{-i(\omega_i - \omega)t'} \hat{\mathbf{k}} \times \left\{ \hat{\mathbf{k}} \times \right. \\ &\quad \left. [\delta^{\leftarrow\epsilon^{\rightarrow}}(\mathbf{r}, t') \hat{\mathbf{n}}_i] \right\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

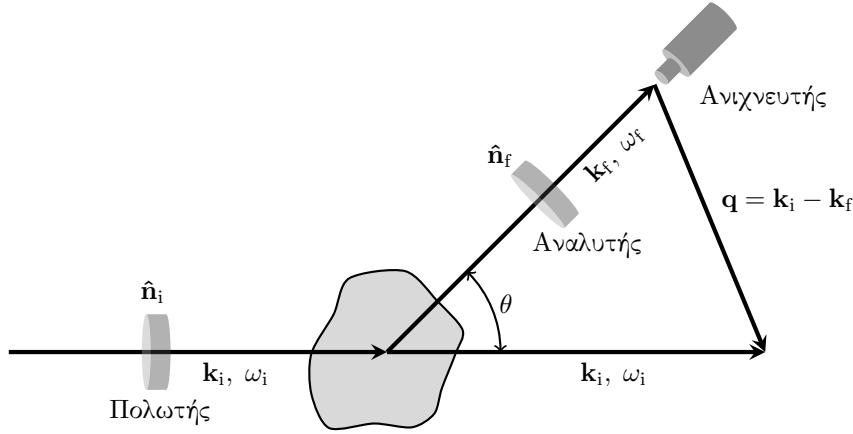
Αν αναπτύξουμε τη διαταραχή του τανυστή της σχετικής διηλεκτρικής συνάρτησης στις ιδιοκαταστάσεις του ελαστικού πεδίου

$$\delta^{\leftarrow\epsilon^{\rightarrow}}(\mathbf{r}, t) = \sum_p \delta^{\leftarrow\epsilon^{\rightarrow}}_p(\mathbf{r}) e^{-i\Omega_p t} \quad (3.33)$$

και την αντικαταστήσουμε στην Εξ. (3.32), παίρνουμε την

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(\mathbf{R}, t) &= \frac{\omega_i^2 E_0}{c_0^2 4\pi R} \sum_p \int d^3r \int dt' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{ikR} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} e^{i(\omega - \omega_i - \Omega_p)t'} \hat{\mathbf{k}} \times \left\{ \hat{\mathbf{k}} \times \right. \\ &\quad \left. [\delta^{\leftarrow\epsilon^{\rightarrow}}_p(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}_i] \right\} \end{aligned}$$

²Από εδώ και στο εξής, και εφόσον χρησιμοποιούμε την Εξ. (3.31), υπονοείται ότι όλα τα αποτελέσματα αφορούν την περίπτωση $R \gg r$, κάτι που συνήθως ικανοποιείται στα πειράματα σκέδασης.



Σχήμα 3.1: Σχηματική παράσταση της διαδικασίας μέτρησης σε ένα πείραμα σκέδασης. Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία πόλωσης $\hat{\mathbf{n}}_i$, κυματανύσματος $\mathbf{k}_i$ και συχνότητας ω_i προσπίπτει σε μία περιοχή σκέδασης, από όπου σκεδάζεται προς όλες τις διευθύνσεις. Στον ανιχνευτή τελικά καταφτάνει φως συγκεκριμένης πόλωσης $\hat{\mathbf{n}}_f$ και διεύθυνσης $\hat{\mathbf{k}}_f$, που καθορίζονται από τη στροφή του αναλυτή και τη γωνία θ . Το κυμαάνυσμα $\mathbf{q}$ προσδιορίζεται από τη γεωμετρία. Η τεχνική ανίχνευσης της συχνότητας του σκεδαζόμενου φωτός, ω_f , ποικίλει ανάλογα με τη διαφορά της από την προσπίπτουσα και δεν απεικονίζεται στο σχήμα.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\omega_i^2 E_0}{c_0^2 4\pi R} \sum_p \int d^3r \int d\omega \delta(\omega - \omega_i - \Omega_p) e^{ikR} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{k}} \times \left\{ \hat{\mathbf{k}} \times \right. \\
 &\quad \left. [\delta^{\leftarrow \rightarrow}_p(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}_i] \right\} \\
 &= \frac{\omega_i^2 E_0}{c_0^2 4\pi R} \int d^3r e^{ik_f R} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_i t} \hat{\mathbf{k}}_f \times \left\{ \hat{\mathbf{k}}_f \times [\delta^{\leftarrow \rightarrow}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{n}}_i] \right\} \\
 &= \frac{E_0}{4\pi \epsilon_r R} e^{i(k_f R - \omega_i t)} \mathbf{k}_f \times \left\{ \mathbf{k}_f \times \left[\int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \delta^{\leftarrow \rightarrow}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{n}}_i \right] \right\}, \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

όπου $k_f = (\omega_i + \Omega_p)/c_r \simeq k_i$, με c_r την ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο μέσο αναφοράς, $\mathbf{k}_f \equiv k_f \hat{\mathbf{k}}_f \simeq k_i \hat{\mathbf{R}} = \omega_i \sqrt{\epsilon_r}/c_0 \hat{\mathbf{R}}$ και $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$, Σχ. 3.1. Είναι φανερό ότι η παραπάνω περιγραφή αντιστοιχεί σε απορρόφηση ενός φωνονίου από ένα φωτόνιο, διαδικασία anti-Stokes. Προκειμένου να περιγράψουμε μαθηματικά την εκπομπή ενός φωνονίου, διαδικασία Stokes, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το συζυγή μιγαδικό του $\delta^{\leftarrow \rightarrow}(\mathbf{r}, t)$ στην Εξ. (3.32).

Παίρνοντας τώρα την προβολή του σκεδαζόμενου πεδίου σε μια συγκεκριμένη τελική πόλωση, $\hat{\mathbf{n}}_f$, και εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier

$$\delta^{\leftarrow \rightarrow}(\mathbf{q}, t) = \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \delta^{\leftarrow \rightarrow}(\mathbf{r}, t), \tag{3.35}$$

προκύπτει η

$$E_s(\mathbf{R}, t) = \hat{\mathbf{n}}_f \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{R}, t)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{E_0}{4\pi\epsilon_r R} e^{i(k_f R - \omega_i t)} \hat{\mathbf{n}}_f \cdot \{\mathbf{k}_f \times [\mathbf{k}_f \times (\delta^{\leftarrow} \epsilon^{\rightarrow}(\mathbf{q}, t) \hat{\mathbf{n}}_i)]\} \\
&= -\frac{E_0 k_f^2}{4\pi\epsilon_r R} e^{i(k_f R - \omega_i t)} \delta\epsilon_{if}(\mathbf{q}, t), \tag{3.36}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη διανυσματική ταυτότητα (Α'.2) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι σε ένα διαδιδόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα η πόλωση είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης, $\hat{\mathbf{n}}_f \perp \hat{\mathbf{k}}_f$. Επίσης, το $\delta\epsilon_{if}(\mathbf{q}, t) = \hat{\mathbf{n}}_f \delta^{\leftarrow} \epsilon^{\rightarrow}(\mathbf{q}, t) \hat{\mathbf{n}}_i$ εκφράζει το στοιχείο του τανυστή της διαταραχής της σχετικής διηλεκτρικής συνάρτησης κατά μήκος της αρχικής και τελικής διεύθυνσης της πόλωσης.

Η συνάρτηση συσχέτισης του πεδίου δίνεται τελικά από τη σχέση [10]

$$\langle E_s^*(\mathbf{R}, 0) E_s(\mathbf{R}, t) \rangle = \frac{|E_0|^2 k_f^4}{16\pi^2 \epsilon_r^2 R^2} \langle \delta\epsilon_{if}^*(\mathbf{q}, 0) \delta\epsilon_{if}(\mathbf{q}, t) \rangle e^{-i\omega_i t}, \tag{3.37}$$

όπου το αστέρι στον εκθέτη εκφράζει μιγαδική συζυγία, και η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας του σκεδαζόμενου φωτός από την κατάσταση $|\hat{\mathbf{n}}_i \mathbf{k}_i \omega_i\rangle$ στην κατάσταση $|\hat{\mathbf{n}}_f \mathbf{k}_f \omega_f\rangle$ προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης συσχέτισης του πεδίου

$$\begin{aligned}
I_{if}(\mathbf{q}, \omega_f, R) &\equiv \int dt e^{i\omega_f t} \langle E_s^*(\mathbf{R}, 0) E_s(\mathbf{R}, t) \rangle \\
&= \frac{|E_0|^2 k_f^4}{16\pi^2 \epsilon_r^2 R^2} \int dt \langle \delta\epsilon_{if}^*(\mathbf{q}, 0) \delta\epsilon_{if}(\mathbf{q}, t) \rangle e^{i\omega t}, \tag{3.38}
\end{aligned}$$

όπου ορίσαμε ότι $\omega \equiv \omega_f - \omega_i$.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή στη σκέδαση από σφαιρικό σωματίδιο

4.1 Συνάρτηση φασματικής πυκνότητας σφαιρικού σωματιδίου στο κενό

Θεωρούμε την ύπαρξη ενός σφαιρικού σωματιδίου στο κενό. Σύμφωνα με τη θεωρία του Κεφ. 2, οι συνοριακές συνθήκες του ελαστικού πεδίου οδηγούν στην ύπαρξη διακριτών ιδιοκαταστάσεων ταλάντωσης εντοπισμένων αποκλειστικά στον όγκο της σφαίρας και άρα η Εξ. (3.33) είναι έγκυρη. Παρόλο που σε αυτή την περίπτωση ο δείκτης διάθλασης του υλικού δεν μπορεί να είναι ίδιος με αυτόν του κενού χώρου, θα συνεχίσουμε την ανάλυση θεωρώντας ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα αγνοεί αυτή τη διαφορά και αλληλεπιδρά μόνο με τις διαταραχές της διηλεκτρικής συνάρτησης όπως αυτές προκύπτουν από το φωτοελαστικό φαινόμενο¹². Θεωρούμε δηλαδή ότι η Εξ. (3.38) είναι έγκυρη.

Από την Εξ. (3.33) και τον ορισμό της συνάρτησης συσχέτισης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\langle \delta\epsilon_{\text{if}}^*(\mathbf{q}, 0) \delta\epsilon_{\text{if}}(\mathbf{q}, t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \delta\epsilon_{\text{if}}^*(\mathbf{q}, \tau) \delta\epsilon_{\text{if}}(\mathbf{q}, \tau + t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \sum_{pp'} \delta\epsilon_{\text{if}}^{(p')*}(\mathbf{q}) \delta\epsilon_{\text{if}}^{(p)}(\mathbf{q}) e^{i(\Omega_{p'} - \Omega_p)\tau} e^{-i\Omega_p t} \\ &= \sum_p |\delta\epsilon_{\text{if}}^{(p)}(\mathbf{q})|^2 e^{-i\Omega_p t},\end{aligned}\tag{4.1}$$

αφού

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau e^{i(\Omega_{p'} - \Omega_p)\tau} = \delta_{pp'}.\tag{4.2}$$

¹Μία σωστή αντιμετώπιση του προβλήματος θα απαιτούσε τη χρήση της συνάρτησης Green σφαιρικού σωματιδίου και όχι του ομοιογενούς χώρου όπως χρησιμοποιήσαμε στην ανάπτυξη της θεωρίας του Κεφ. 3.

²Εναλλακτικά, μπορεί να θεωρηθεί ότι το σωματίδιο βρίσκεται σε περιβάλλον με ίδιο δείκτη διάθλασης [11]. Σε αυτή την περίπτωση όμως επιτρέπονται ταλαντώσεις με οποιαδήποτε συχνότητα και οι διαταραχές της διηλεκτρικής συνάρτησης θα εκτείνονται και έξω από τον όγκο της σφαίρας. Σε κάθε περίπτωση, θα δείξουμε παρακάτω ότι η μελέτη της σκέδασης από μία μεμονωμένη σφαίρα, παρά τις απλουστεύσεις, μπορεί να δώσει χρήσιμες πληροφορίες για την ένταση της σκέδασης Brillouin.

Κατά συνέπεια, η Εξ. (3.38) γίνεται

$$\begin{aligned} I_{\text{if}}(\mathbf{q}, \omega_f, R) &= \frac{|E_0|^2 k_f^4}{16\pi^2 \epsilon_r^2 R^2} \int dt \sum_p |\delta\epsilon_{\text{if}}^{(p)}(\mathbf{q})|^2 e^{i(\omega - \Omega_p)t} \\ &= \frac{|E_0|^2 k_f^4}{8\pi \epsilon_r^2 R^2} \sum_p |\delta\epsilon_{\text{if}}^{(p)}(\mathbf{q})|^2 \delta(\omega - \Omega_p). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Όμως στην περίπτωση μέσου αναφοράς που χαρακτηρίζεται από βαθμωτή διηλεκτρική συνάρτηση δείξαμε ότι ισχύει η Εξ. (3.10) και άρα

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_{\alpha\beta}^{(p)}(\mathbf{q}) &= \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \delta\epsilon_{\alpha\beta}^{(p)}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left\{ -\epsilon_r^2 \sum_{\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_{\gamma}^{(p)}(\mathbf{r})}{\partial x_{\delta}} + \frac{\partial u_{\delta}^{(p)}(\mathbf{r})}{\partial x_{\gamma}} \right] \right\} \\ &= \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left\{ i \frac{\epsilon_r^2}{2} \sum_{\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} [q'_{\delta} u_{\gamma}^{(p)}(\mathbf{q}') + q'_{\gamma} u_{\delta}^{(p)}(\mathbf{q}')] e^{-i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}} \right\} \\ &= i \frac{\epsilon_r^2}{2} \sum_{\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta} [q_{\delta} u_{\gamma}^{(p)}(\mathbf{q}) + q_{\gamma} u_{\delta}^{(p)}(\mathbf{q})] \\ &= i \frac{\epsilon_r^2}{2} \sum_{\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta} \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} [q_{\delta} u_{\gamma}^{(p)}(\mathbf{r}) + q_{\gamma} u_{\delta}^{(p)}(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.4) στην Εξ. (4.3) προκύπτει η

$$I_{\text{if}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{|E_0|^2 k_f^4 \epsilon_r^2}{32\pi R^2} \sum_p \left| \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} n_{f;\alpha} P_{\alpha\beta\gamma\delta} \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} [q_{\delta} u_{\gamma}^{(p)}(\mathbf{r}) + q_{\gamma} u_{\delta}^{(p)}(\mathbf{r})] n_{i;\beta} \right|^2 \delta(\omega - \Omega_p). \quad (4.5)$$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε για ευκολία την περίπτωση ισότροπου υλικού στο οποίο ισχύει ότι $P_{11} \simeq P_{12} = P$, Εδ. 3.1, ή ισοδύναμα $P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{\gamma\delta}$, καταλήγουμε τελικά στην

$$I_{\text{if}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{|E_0|^2 k_f^4 \epsilon_r^2}{8\pi R^2} \sum_p \left| P \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}) \sum_{\alpha} n_{f;\alpha} n_{i;\alpha} \right|^2 \delta(\omega - \Omega_p). \quad (4.6)$$

Η ύπαρξη του εσωτερικού γινομένου της πόλωσης του προσπίπτοντος και του σχεδιαζόμενου ηλεκτρομαγνητικού κύματος, υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει αλλαγή πόλωσης κατά την ανελαστική σκέδαση και από εδώ και στο εξής, στους υπολογισμούς, θα θεωρούμε σχεδιαζόμενο με πόλωση ίδια με του προσπίπτοντος, $\sum_{\alpha} n_{f;\alpha} n_{i;\alpha} = 1$. Επίσης, είναι φανερό ότι στην προσέγγιση που ακολουθούμε δεν λαμβάνουμε υπόψιν τη συνεισφορά στη διαταραχή της διηλεκτρικής σταθεράς που προέρχεται από την κίνηση της επιφάνειας της σφαίρας. Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι η παραπάνω έκφραση δίνει τη φασματική πυκνότητα και κατά συνέπεια η ένταση προκύπτει

από την ολοκλήρωσή της σε ένα εύρος συχνοτήτων. Έτσι, στην περίπτωση μας όπου οι συχνότητες είναι διακριτές, για μια δεδομένη ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης της ελαστικής σφαίρας Ω_p υπάρχει πάντα μία μικρή ποσότητα ϵ έτσι ώστε το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega_p - \epsilon}^{\Omega_p + \epsilon} d\omega I_{\text{if}}(\mathbf{q}, \omega)$ να δίνει την ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που οφείλεται στη σκέδαση από τη δεδομένη ιδιοσυχνότητα

$$I(\mathbf{q}, \Omega_p) = \frac{|E_0|^2 k_f^4 \epsilon_r^2 P}{8\pi R^2} \left| \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}) \right|^2, \quad (4.7)$$

που είναι και η ποσότητα που μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε.

4.2 Σκέδαση από στρεπτικούς και σφαιροειδείς τρόπους ταλάντωσης

Στο εδάφιο αυτό θα υπολογίσουμε τη μορφή του ολοκληρώματος

$$\int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}), \quad (4.8)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}) = & \sum_{\ell m} \left\{ \left[a_{L\ell m} j'_\ell(qr) - a_{N\ell m} \psi_\ell \frac{j_\ell(qr)}{qr} \right] Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \right. \\ & + a_{M\ell m} j_\ell(qr) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \\ & \left. + \left[a_{L\ell m} i \psi_\ell \frac{j_\ell(qr)}{qr} - a_{N\ell m} i \frac{qr j'_\ell(qr) + j_\ell(qr)}{qr} \right] \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

το ελαστικό πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας, για την περίπτωση στρεπτικού και σφαιροειδούς κανονικού τρόπου ταλάντωσης.

Έστω, για αρχή, ένας στρεπτικός κανονικός τρόπος ταλάντωσης με συγκεκριμένους δείκτες n, ℓ', m' , όπου ο δείκτης n εκφράζει τους ακτινικούς κόμβους. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{n\ell'm'}(\mathbf{r}) &= \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} a_{M\ell'm'} j_{\ell'}(qr) \mathbf{q} \cdot \mathbf{X}_{\ell'm'}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \int dr a_{M\ell'm'} j_{\ell'}(qr) i^{\ell'} 4\pi j_{\ell'}(qr) r^2 \mathbf{q} \cdot \sum_m Y_{\ell'm}(\hat{\mathbf{q}}) \frac{1}{\psi_{\ell'}} [\delta_{mm'} m \hat{\mathbf{z}} \\ &\quad + \delta_{m+1m'} a_{\ell'}^{-m'} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) + \delta_{m-1m'} a_{\ell'}^{m'} (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})], \end{aligned} \quad (4.10)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (Γ'.41) και το ανάπτυγμα

$$e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{\ell m} i^\ell 4\pi j_\ell(qr) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{q}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}). \quad (4.11)$$

Αντικαθιστώντας τώρα το $\mathbf{q} = q(\sin \theta_q \cos \phi_q \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_q \sin \phi_q \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta_q \hat{\mathbf{z}})$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Γ'.12), (Γ'.13) και (Γ'.14), προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα είναι ίσο με μηδέν,

όπως και περιμέναμε αφού οι στρεπτικοί τρόποι ταλάντωσης προκαλούν μόνο διατμητικές παραμορφώσεις οι οποίες σύμφωνα με την Εξ. (3.13) δεν διαταράσσουν τη διηλεκτρική συνάρτηση και άρα δεν μπορούν να συνεισφέρουν στην σκέδαση Brillouin.

Για ένα σφαιροειδή κανονικό τρόπο ταλάντωση με συγκεκριμένους δείκτες n, ℓ', m' , δείχνεται στο Παράρτημα Δ' ότι

$$\begin{aligned}
 \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{n\ell'm'}(\mathbf{r}) = & q \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell'+1}} i^{\ell'-1} \left\{ a_{L\ell'0\ell'} (2\ell'+1) \int_0^S dr r^2 \frac{j_{\ell'}(qr)}{qr} j_{\ell'-1}(qr) \right. \\
 & - a_{L\ell'0\ell'} \int_0^S dr r^2 j_{\ell'+1}(qr) j_{\ell'-1}(qr) \\
 & - a_{N\ell'0\psi_{\ell'}} (2\ell'+1) \int_0^S dr r^2 \frac{j_{\ell'}(qr)}{qr} j_{\ell'-1}(qr) \\
 & + a_{N\ell'0\psi_{\ell'}} \int_0^S dr r^2 j_{\ell'+1}(qr) j_{\ell'-1}(qr) \\
 & + a_{L\ell'0} (\ell'+1) \int_0^S dr r^2 j_{\ell'+1}(qr) j_{\ell'+1}(qr) \\
 & \left. + a_{N\ell'0\psi_{\ell'}} \int_0^S dr r^2 j_{\ell'+1}(qr) j_{\ell'+1}(qr) \right\}. \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Δηλαδή οι γωνιακές συνιστώσες υπολογίζονται αναλυτικά, ενώ οι ακτινική συνιστώσα θα πρέπει να υπολογισθεί αριθμητικά. Παρατηρούμε επίσης ότι η λύση είναι ανεξάρτητη από τον δείκτη m και σε συνδυασμό με την Εξ. (2.28), που δείχνει ότι οι ιδιοσυχνότητες είναι επίσης ανεξάρτητες από τον δείκτη m , για ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης συχνότητας Ω_p το ολοκλήρωμα (4.8) τελικά γράφεται

$$\int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}) = \sum_m \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{n\ell m}(\mathbf{r}) = (2\ell+1) \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{n\ell 0}(\mathbf{r}). \quad (4.13)$$

Στην ειδική περίπτωση $\ell = 0$ θα έχουμε

$$\mathbf{u}_{n00}(\mathbf{r}) = \frac{a_{L00}}{4\pi} \frac{\cos(qr) qr - \sin(qr)}{(qr)^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.14)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.14) στο ολοκλήρωμα (4.8) και θεωρώντας τον άξονα $\hat{\mathbf{z}}$ στη διεύθυνση του $\mathbf{q}$, όπως και στο Παράρτημα Δ', το ολοκλήρωμα λύνεται αναλυτικά και είναι

$$\begin{aligned}
 \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{n00}(\mathbf{r}) = & \frac{\sqrt{4\pi} a_{L00}}{iq_l} \left[\frac{q_l}{q_l^2 - q^2} \cos(qS) \sin(q_l S) \right. \\
 & \left. + \frac{q}{q^2 - q_l^2} \cos(q_l S) \sin(qS) - \frac{\sin(q_l S) \sin(qS)}{q_l q S} \right]. \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

4.3 Κανονικοποίηση σφαιροειδών κανονικών τρόπων ταλάντωσης

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.13) στην (4.7) προκύπτει η σκεδαζόμενη ένταση από μία ταλάντωση ιδιοσυχνότητας Ω_p . Ο μόνος άγνωστος που παραμένει είναι το πλάτος του ελαστικού πεδίου σε μία ιδιοσυχνότητα, που εκφράζεται μέσω των συντελεστών $a_{L\ell m}$ και $a_{N\ell m}$. Όπως και στο παράδειγμα του εδαφίου 2.3, μπορούμε να εκφράσουμε το συντελεστή $a_{N\ell m}$ σαν συνάρτηση του $a_{L\ell m}$, μέσα από τις Εξ. (2.26) και (2.27). Στη συνέχεια, ο $a_{L\ell m}$ υπολογίζεται από την κατανομή της θερμικής ενέργειας στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης σύμφωνα με την κατανομή Bose-Einstein.

Για ένα σωματίδιο θερμοκρασίας T που βρίσκεται στο κενό, η αποθηκευμένη ενέργεια ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης p , λόγω θερμοκρασίας, σχετίζεται με τον αριθμό των φωνονίων του σωματιδίου που έχουν συχνότητα Ω_p μέσω της σχέσης

$$\int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Omega_p^2 \left| \mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}, t) \right|^2 = \left[n(\Omega_p) + \frac{1}{2} \right] \hbar \Omega_p, \quad (4.16)$$

όπου $n(\Omega_p) = 1/[\exp(\hbar \Omega_p/kT) - 1]$ η κατανομή Bose-Einstein. Για σωματίδια με διαστάσεις της τάξης του μm , όπως αυτά που θα μας απασχολήσουν σε αυτή την εργασία, οι ιδιοσυχνότητες είναι της τάξης του GHz και άρα $\hbar \Omega_p \sim 10^{-6} \text{eV}$. Επίσης σε θερμοκρασία δωματίου $kT \sim 0.02585 \text{eV}$. Συνεπώς, $\hbar \Omega_p/kT \ll 1 \Rightarrow n(\Omega_p) \simeq kT/\hbar \Omega_p \gg 1$ και για σωματίδια σταθερής πυκνότητας η Εξ. (4.16) γίνεται

$$\int d^3r \left| \mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}, t) \right|^2 = \frac{kT}{\rho \Omega_p^2}. \quad (4.17)$$

Όπως φαίνεται από την Εξ. (2.28) και έχουμε ήδη αναφέρει, για ένα σφαιροειδή κανονικό τρόπο ταλάντωσης η ιδιοσυχνότητα θα εξαρτάται μόνο από το δείκτη ℓ . Αυτό σημαίνει ότι για συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα η θερμική ενέργεια μοιράζεται στους $(2\ell + 1)$ τρόπους ταλάντωσης. Το μοίρασμα γίνεται ισοδύναμα στους τρόπους με διαφορετικό δείκτη m , αφού η θερμική ενέργεια είναι στατιστικής φύσεως και άρα δεν δείχνει κάποια ιδιαίτερη προτίμηση, σε αντίθεση με την περίπτωση όπου διεγείρουμε εξωτερικά το σύστημα. Οπότε, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int d^3r \left| \mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}, t) \right|^2 &= (2\ell + 1) \int d^3r \left| \mathbf{u}_{n\ell m}(\mathbf{r}, t) \right|^2 \Rightarrow \\ \int d^3r \left| \mathbf{u}_{n\ell m}(\mathbf{r}, t) \right|^2 &= \frac{1}{2\ell + 1} \frac{kT}{\rho \Omega_p^2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Έτσι, από την Εξ. (4.9) για σφαιροειδή τρόπο ταλάντωσης και για δεδομένα $n\ell m$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int d^3r \left| \mathbf{u}_{n\ell m}(\mathbf{r}, t) \right|^2 &= \left[a_{L\ell m}^{(n)} \right]^2 \int d^3r \left\{ \left[j'_\ell(qr) \right]^2 Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \right. \\ &\quad - 2\psi_\ell \frac{a_{N\ell m}^{(n)}}{a_{L\ell m}^{(n)}} \frac{j'_\ell(qr) j_\ell(qr)}{qr} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \\ &\quad \left. + \left[\psi_\ell \frac{j_\ell(qr)}{qr} \right]^2 [\mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] \cdot [\mathbf{X}_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\psi_\ell \frac{a_{N\ell m}^{(n)}}{a_{L\ell m}^{(n)}} \frac{j_\ell(q_l r)}{q_l r} \frac{q_t r j'_\ell(q_t r) + j_\ell(q_t r)}{q_t r} [\mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] \cdot [\mathbf{X}_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] \\
& + \left[\frac{a_{N\ell m}^{(n)}}{a_{L\ell m}^{(n)}} \right]^2 \left[\frac{q_t r j'_\ell(q_t r) + j_\ell(q_t r)}{q_t r} \right]^2 [\mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] \cdot [\mathbf{X}_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] \\
& + \left[\frac{a_{N\ell m}^{(n)}}{a_{L\ell m}^{(n)}} \right]^2 \left[\psi_\ell \frac{j_\ell(q_t r)}{q_t r} \right]^2 Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \Bigg\}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Όμως $[\mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] \cdot [\mathbf{X}_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] = \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{X}_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}})$ και έτσι, από τις σχέσεις ορθογωνιότητας (Γ'.9) και (Γ'.37), η Εξ. (4.19) γίνεται

$$\int d^3 r |\mathbf{u}_{n\ell m}(\mathbf{r}, t)|^2 = \left[a_{L\ell m}^{(n)} \right]^2 \Gamma_{n\ell}, \tag{4.20}$$

όπου

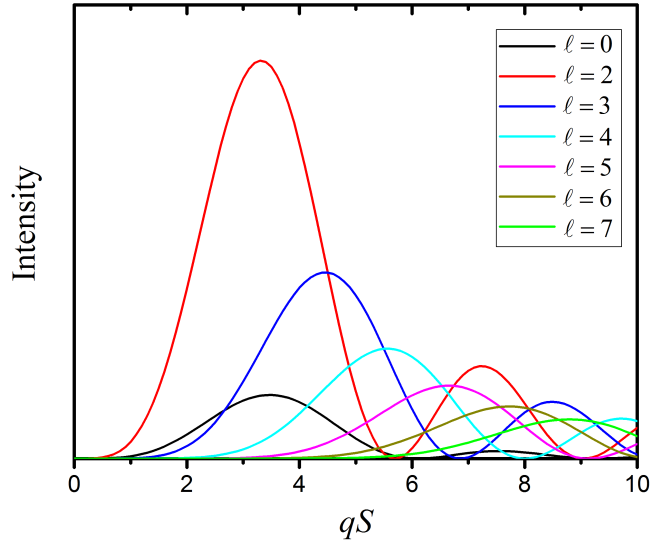
$$\begin{aligned}
\Gamma_{n\ell} = \int_0^S dr r^2 \Bigg\{ & \left[\frac{\ell j_\ell(q_l r) - q_l r j_{\ell+1}(q_l r)}{q_l r} - \psi_\ell \frac{j_\ell(q_t r)}{q_t r} \frac{a_{N\ell m}^{(n)}}{a_{L\ell m}^{(n)}} \right]^2 \\
& + \left[\psi_\ell \frac{j_\ell(q_t r)}{q_t r} - \frac{(\ell+1) j_\ell(q_t r) - q_t r j_{\ell+1}(q_t r)}{q_t r} \frac{a_{N\ell m}^{(n)}}{a_{L\ell m}^{(n)}} \right]^2 \Bigg\} \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Τέλος, συγκρίνοντας την Εξ. (4.20) με την (4.18) προκύπτει η σταθερά κανονικοποίησης

$$a_{L\ell m}^{(n)} = \sqrt{\frac{1}{2\ell+1} \frac{kT}{\rho \Omega_p^2} \frac{1}{\Gamma_{n\ell}}}. \tag{4.22}$$

4.4 Εφαρμογές

Η ένταση της σκέδασης Brillouin από ένα σφαιροειδή τρόπο ταλάντωσης (n, ℓ) ενός σφαιρικού σωματιδίου ακτίνας $S = d/2$, όπου d η διάμετρος, εξαρτάται από το γινόμενο qS , όπως είναι φανερό από την Εξ. (4.12). Αυτή την εξάρτηση έδειξαν οι T. Still et al. [11] υπολογίζοντας την τιμή της σχεδασζόμενης έντασης από ένα σφαιρικό σωματίδιο πολυστυρενίου, $c_l = 2350\text{m/s}$, $c_t = 1210\text{m/s}$, για διάφορες τιμές του γινομένου qS . Στην εργασία τους, υπολόγισαν το ολοκλήρωμα (4.8) με αριθμητικές μεθόδους διαμερίζοντας το χώρο ολοκλήρωσης με ένα κυβικό πλέγμα 9171 σημείων. Όπως δείξαμε στο Παράρτημα Δ', η γωνιακή εξάρτηση του ολοκληρώματος (4.8) μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά. Έτσι, στην παρούσα εργασία, επαληθεύσαμε το αποτέλεσμα πραγματοποιώντας αριθμητικά μόνο το ακτινικό ολοκλήρωμα. Με αυτό τον τρόπο οι υπολογισμοί γίνονται πιο γρήγορα και τα αποτελέσματα έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια, αφού τα σφάλματα λόγω της αριθμητικής ολοκλήρωσης έχουν πρακτικά εξαλειφθεί. Τα αποτελέσματά μας απεικονίζονται στο Σχ. (4.1), που δίνει την ένταση τη σκέδασης Brillouin σαν συνάρτηση του γινομένου qS για $n = 1$ και ℓ από 0 έως 7, και βρίσκονται σε



Σχήμα 4.1: Ένταση της σκέδασης Brillouin, σε αυθαίρετες μονάδες, από ένα σφαιρικό σωματίδιο πολυστυρενίου, $c_l = 2350\text{m/s}$, $c_t = 1210\text{m/s}$, σαν συνάρτηση του γινομένου του κυματαριθμού σκέδασης q και της ακτίνας της σφαίρας S . Απεικονίζονται οι εντάσεις για $n = 1$ και από $\ell = 0$ έως 7, εκτός του $\ell = 1$ (βλέπε κείμενο).

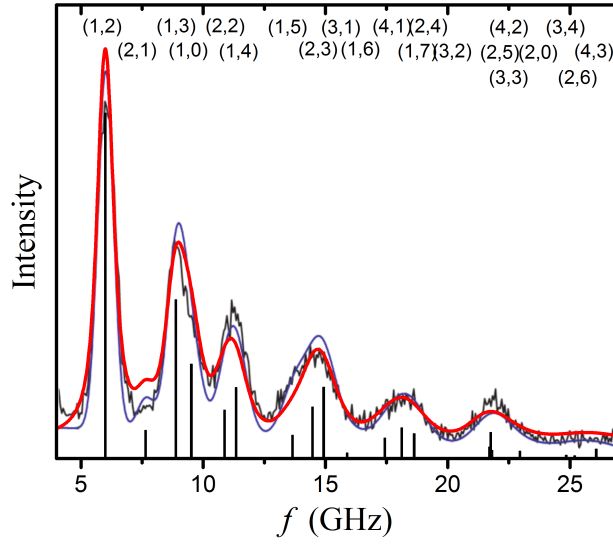
συμφωνία με αυτά των T. Still et al.. Ο τρόπος ταλάντωσης (1,1) λείπει από το διάγραμμα, αφού για ένα ελεύθερο σωματίδιο περιγράφει τη μετατόπιση του σωματιδίου, που αντιστοιχεί σε μηδενική συχνότητα ταλάντωσης.

Στο εργαστήριο όμως δεν είναι δυνατόν να μετρηθεί η ένταση της σκέδασης Brillouin από ένα μόνο σφαιρικό σωματίδιο. Αυτό που συνήθως γίνεται είναι εναπόθεση σφαιρικών σωματιδίων σε ένα πλακίδιο με τεχνικές αυτο-οργάνωσης, όπως κάθετη εναπόθεση από διάλυμα, και έπειτα η μέτρηση της ανελαστικά σκεδαζόμενης έντασης που ανακλάται ή διέρχεται από το υμένιο που έχει σχηματιστεί [12]. Όμως οι σφαίρες πάνω σε ένα πλακίδιο δεν σχηματίζουν ένα ομοιογενές υμένιο. Η διαφορά στο δείκτη διάθλασης προκαλεί πολλαπλή σκέδαση του φωτός, με αποτέλεσμα να χάνεται η όποια πληροφορία για το κυματόνισμα σκέδασης. Όπως έδειξαν πειραματικά οι T. Still et al. [11], η ένταση της σκεδαζόμενης δέσμης είναι ίδια για οποιαδήποτε γωνία σκέδασης θ . Δηλαδή, λόγω της πολλαπλής σκέδασης, σε κάθε γωνία σκέδασης θα συνεισφέρουν όλοι οι κυματαριθμοί q . Κατά συνέπεια, ο θεωρητικός υπολογισμός αυτής της έντασης για μία ιδιοσυχνότητα θα δίνεται με ολοκλήρωση της Εξ. (4.7) σε όλα τα δυνατά qS . Δηλαδή η ένταση για κάθε ιδιοσυχνότητα θα είναι το εμβαδόν κάτω από κάθε καμπύλη του Σχ. 4.1, με τα κατάλληλα όμως όρια. Αν γνωρίζουμε λοιπόν την ακτίνα των σωματιδίων S , τα όρια υπολογίζονται από τη σχέση

$$q^2 = |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f|^2 \simeq 2k_i^2 (1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$q \simeq \frac{4\pi n_r}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (4.23)$$

όπου n_r ο δείκτης διάθλασης της σφαίρας (σύμφωνα με τις προσεγγίσεις που έχουμε θεω-

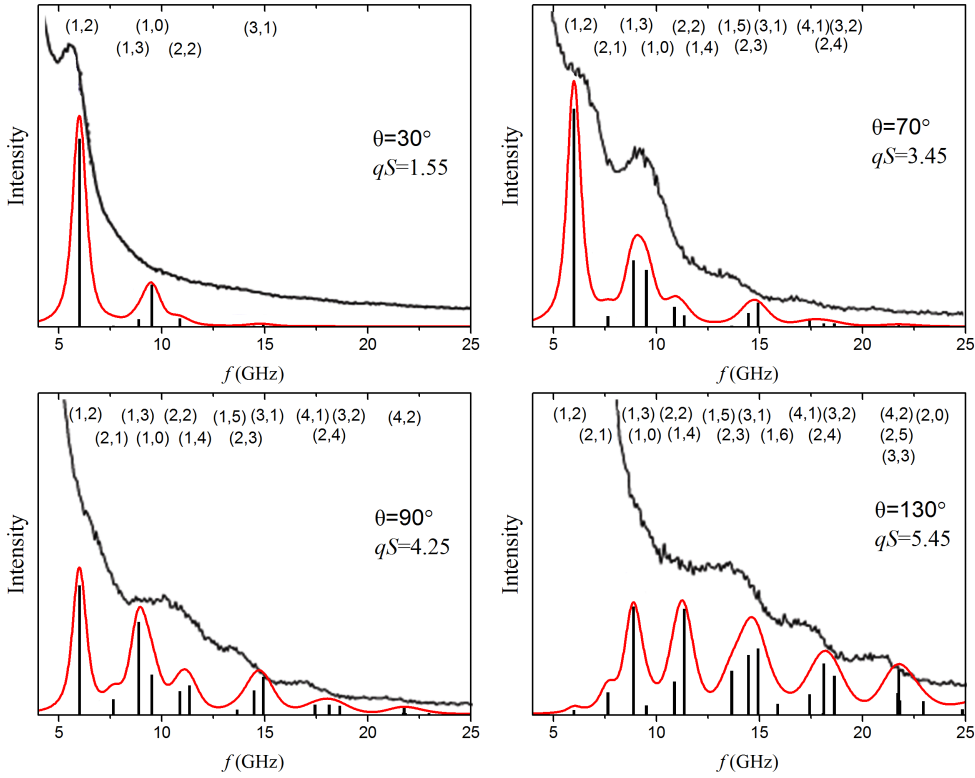


Σχήμα 4.2: Ένταση της σκέδασης Brillouin, σε αυθαίρετες μονάδες, από σφαιρικά σωματίδια διοξειδίου του πυριτίου, $c_l = 4226\text{m/s}$, $c_t = 2530\text{m/s}$ και διαμέτρου $d = 354\text{nm}$, σαν συνάρτηση της μεταβολής της συχνότητας του προσπίπτοντος φωτός. Η μαύρη καμπύλη δίνει τις πειραματικές τιμές [11] ενώ οι μαύρες κατακόρυφες στήλες δίνουν τις σχετικές τιμές της έντασης από τις διάφορες ιδιοσυχνότητες (n, ℓ) , όπως τις υπολογίσαμε από την ολοκλήρωση της Εξ. (4.7) σε όλα τα δυνατά qS (βλέπε κείμενο). Η μπλε καμπύλη δίνει τη διεύρυνση του διακριτού φάσματος όπως έγινε από τους T. Still et al. [11], ενώ η κόκκινη καμπύλη δίνει την αντίστοιχη διεύρυνση που υπολογίσαμε από την Εξ. (4.24).

ρήσει), λ το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός και $0 \leq \theta \leq 180$ σύμφωνα με το Σχ. 3.1.

Στα πειραματικά δεδομένα των T. Still et al. [11] του Σχ. 4.2, χρησιμοποιήθηκε δέσμη laser με μήκος κύματος 532nm και σφαίρες διοξειδίου του πυριτίου διαμέτρου $d = 354\text{nm}$. Το διοξείδιο του πυριτίου σε αυτό το μήκος κύματος έχει δείκτη διάθλασης $n_{\text{SiO}_2} \simeq 1.44$ και από την Εξ. (4.23) προκύπτει ότι $q_{\min}S = 0$ και $q_{\max}S \simeq 6$. Έτσι, οι μαύρες κατακόρυφες στήλες του Σχ. 4.2 δίνουν τις σχετικές τιμές της έντασης από τις διάφορες ιδιοσυχνότητες (n, ℓ) , όπως τις υπολογίσαμε από την ολοκλήρωση της Εξ. (4.7) σε όλα τα δυνατά qS σε συμφωνία με τα παραπάνω.

Παρατηρούμε ότι οι σχετικές εντάσεις είναι σε πολύ καλή συμφωνία με το πείραμα, παρά τις απλοποιήσεις που έχουμε κάνει. Η ύπαρξη αέρα μεταξύ των σφαιρών του δείγματος, δεν ευνοεί την αλληλεπίδραση μεταξύ τους με αποτέλεσμα η μορφή του φάσματος να διαμορφώνεται σε σημαντικό βαθμό από τις ιδιοκαταστάσεις της απομονωμένης σφαίρας. Παρόλα αυτά, η κάποια αλληλεπίδραση που υπάρχει διευρύνει το διακριτό φάσμα και αυτός είναι ο λόγος ύπαρξης του συνεχούς φάσματος στα πειραματικά δεδομένα. Ένας έμμεσος τρόπος να παραχθεί το συνεχές φάσμα ξεκινώντας από το φάσμα της απομονωμένης σφαίρας είναι να διευρύνουμε το τελευταίο μέσω μιας συνάρτησης Gauss-Lorentz σύμφωνα με τη σχέση [13, 14]



Σχήμα 4.3: Ένταση της σκέδασης Brillouin, σε αυθαίρετες μονάδες, από σφαιρικά σωματίδια διοξειδίου του πυριτίου, $c_l = 4226\text{m/s}$, $c_t = 2530\text{m/s}$ και διαμέτρου $d = 354\text{nm}$, εμβαπτισμένα σε υγρό ίδιου δείκτη διάθλασης (SR256) σαν συνάρτηση της μεταβολής της συχνότητας του προσπίπτοντος φωτός. Η μαύρη καμπύλη δίνει τις πειραματικές τιμές [11] ενώ οι μαύρες κατακόρυφες στήλες δίνουν τις σχετικές τιμές της έντασης από τις διάφορες ιδιοσυχνότητες (n, ℓ) , όπως τις υπολογίσαμε από την Εξ. (4.7) με την αντίστοιχη τιμή qS . Η κόκκινη καμπύλη δίνει τη διεύρυνση του διακριτού φάσματος όπως υπολογίστηκε από την Εξ. (4.24).

$$I(\omega) = \int dx A(x) \frac{\Gamma(x)}{(\omega - \Omega_p(x))^2 - \Gamma^2(x)} \frac{e^{-\frac{(x-d)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad (4.24)$$

όπου το x εκφράζει τη διάμετρο του σωματιδίου με το $\sigma = 0.03d$ [11] να είναι η τυπική της απόκλιση και το d η μέση τιμή της, $\Gamma(x) = 0.28\text{GHz}$ [11] το πειραματικό εύρος στο μισό του μέγιστου, $\Omega_p(x) = 2\pi f_p d/x$ με το f_p να εκφράζει την ιδιοσυχνότητα σε GHz και $A(x)$ μία τιμή ανάλογη της έντασης της ιδιοσυχνότητας του απομονωμένου σωματιδίου για την οποία γίνεται η διεύρυνση.

Τονίζουμε ότι η Εξ. (4.24) έχει διαστάσεις αντιστρόφου συχνότητας και εκφράζει τη φασματική πυκνότητα. Έτσι, η συνολική ένταση από ένα πολύ μικρό εύρος συχνοτήτων $d\omega$ θα δίνεται από την $\int_{\omega}^{\omega+d\omega} d\omega' I(\omega') = I(\omega)d\omega$ κατ' αντιστοιχία με την Εξ. (4.7), όπου το

εύρος $d\omega$ μπορεί να απορροφηθεί από την ποσότητα $A(x)$. Τέλος, παίρνοντας το άθροισμα σε όλες τις ιδιοσυχνότητες $\sum_p I(\omega)$, προκύπτει η τιμή της έντασης που προέρχεται από αυτό το μικρό εύρος συχνοτήτων γύρω από την τιμή ω . Με αυτό τον τρόπο παράγεται η κόκκινη καμπύλη του Σχ. (4.2) η οποία εκφράζει το συνεχές φάσμα που προέρχεται από τη διεύρυνση του διακριτού.

Ένας τρόπος να αποφευχθεί η πολλαπλή σκέδαση και άρα να έχουμε μετρήσεις που εξαρτώνται από τη γωνία θ , και άρα από τον κυματαριθμό q , είναι να τοποθετηθούν οι σφαίρες σε υγρό με δείκτη διάθλασης παρόμοιο με αυτόν των σφαιρών. Αυτό έκαναν οι T. Still et al. [11] στην εργασία τους τοποθετώντας σφαίρες διοξειδίου του πυριτίου σε υγρό 2(2-ethoxyethoxy) ethyl acrylate (SR256, Sartomer). Τα πειραματικά αποτελέσματα απεικονίζονται στο Σχ. 4.3 μαζί με τους θεωρητικούς μας υπολογισμούς. Είναι φανερό ότι οι ιδιοταλαντώσεις των σφαιρών αλληλεπιδρούν πολύ πιο έντονα μεταξύ τους στο υγρό περιβάλλον σε σχέση με την περίπτωση του αέρα. Αυτή η αλληλεπίδραση διευρύνει τόσο πολύ τις ιδιοκαταστάσεις που η επιρροή τους παρατηρείται μόνο σε μεγάλη κλίμακα συχνοτήτων. Παρόλα αυτά είναι φανερό τώρα ότι σε μικρές γωνίες, και άρα μικρές τιμές του qS , μόνο οι ιδιοταλαντώσεις με μικρούς δείκτες n, ℓ διαμορφώνουν κάπως το φάσμα. Σε μεγαλύτερες γωνίες και άρα qS , η συνεισφορά των μεγαλύτερων δεικτών n, ℓ είναι εμφανής, κάτι που είναι σε συμφωνία με τα αποτελέσματα του Σχ. 4.1.

Συμπεράσματα-Προοπτικές

Συνοψίζοντας, μελετήσαμε θεωρητικά τη σκέδαση Brillouin από ένα σφαιρικό σωματίδιο που βρίσκεται στο κενό δεχόμενοι, για λόγους απλότητας, ότι το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό επίπεδο κύμα δε βλέπει μεταβολές του δείκτη διάθλασης πέρα από αυτές που οφείλονται στο φωτοελαστικό φαινόμενο. Ακολουθώντας την πορεία των T. Still et al. [11] δείξαμε ότι η σκέδαση Brillouin εξαρτάται από τον κυματαριθμό σκέδασης q και, με βάση το φάσμα της μίας σφαίρας, προσπαθήσαμε να ερμηνεύσουμε το φάσμα της σκέδασης από δομές σφαιρικών σωματιδίων, μεταξύ των οποίων υπάρχει αέρας ή υγρό ίδιου δείκτη διάθλασης με αυτόν των σφαιρών. Σε αντίθεση όμως με την εργασία τους, όπου οι υπολογισμοί έγιναν εξολοκλήρου με αριθμητικές μεθόδους, δείξαμε ότι τα γωνιακά ολοκληρώματα της εξίσωσης που δίνει τη σκεδαζόμενη ένταση, υπολογίζονται αναλυτικά και άρα οι αριθμητικές τεχνικές χρειάζονται μόνο για το ακτινικό ολοκλήρωμα. Με αυτή τη βελτίωση, ο χρόνος υπολογισμού των αποτελεσμάτων γίνεται πολύ μικρός και τα αριθμητικά σφάλματα σχεδόν εξαλείφονται.

Η παραπάνω μεθοδολογία μπορεί εύκολα να επεκταθεί, έτσι ώστε να δίνει ακριβώς την ένταση της σκέδασης Brillouin από περιοδικές δομές (φωνονικοί κρύσταλλοι), αν χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με τη μέθοδο της πολλαπλής σκέδασης [15–17], με την ολοκλήρωση να γίνεται τώρα στο χώρο της μοναδιαίας κυψελίδας [18] για κάθε τιμή της συχνότητας που είναι επιτρεπτή από τη δομή ζωνών του φωνονικού κρυστάλλου. Μία πληρέστερη μελέτη, που αφορά τη σκέδαση από δομές με διαφορετικό δείκτη διάθλασης, είναι δυνατή με χρήση των συναρτήσεων Green της ηλεκτρομαγνητικής κυματικής εξίσωσης της σφαίρας σε ομοιογενή χώρο ή της περιοδικής δομής σφαιρών σε περιβάλλον διαφορετικού δείκτη διάθλασης (φωτονικός κρύσταλλος) [19]. Τέλος, η μελέτη που έγινε μπορεί εύκολα να επεκταθεί στην περίπτωση υλικών με ανισοτροπικό φωτοελαστικό φαινόμενο (κρυσταλλικά υλικά), αρκεί να λάβουμε υπόψιν τον πλήρη τανυστή, καθώς επίσης μπορεί να γίνει μελέτη φαινομένων αλληλεπίδρασης μεγαλύτερης τάξης, όπως η διφωνονική απορρόφηση, κρατώντας περισσότερους όρους στη σειρά Born της εξίσωσης Lippmann-Schwinger.

Παράρτημα Α΄

Διανυσματικές ταυτότητες

Τα εσωτερικά και εξωτερικά γινόμενα για τους πιθανούς συνδυασμούς τεσσάρων διανυσμάτων, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\text{A'.1})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (\text{A'.2})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) . \quad (\text{A'.3})$$

Η δράση των τελεστών $\nabla \cdot$ και $\nabla \times$ σε ένα διάνυσμα ή σε συνδυασμό δύο διανυσμάτων ή ενός διανύσματος και ενός βαθμωτού μεγέθους ψ περιγράφεται από τις ταυτότητες

$$\nabla \times \nabla \psi = 0 \quad (\text{A'.4})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad (\text{A'.5})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (\text{A'.6})$$

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A'.7})$$

$$\nabla \times (\psi \mathbf{a}) = \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a} \quad (\text{A'.8})$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (\text{A'.9})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (\text{A'.10})$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} . \quad (\text{A'.11})$$

Παράρτημα Β'

Συναρτήσεις Bessel

Η εξίσωση Laplace για βαθμωτά πεδία, $\nabla^2 F(\mathbf{r}) = 0$, επιδέχεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες λύσεις της μορφής $F(\mathbf{r}) = F_\nu(x) \exp(\pm qz + i\nu\phi)$, όπου $\mathbf{r} = (\rho, \phi, z)$ το διάνυσμα θέσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες, $x = q\rho$, και $F_\nu(x)$ η ακτινική λύση, που δίνεται μέσω της εξίσωσης Bessel,

$$F_\nu''(x) + \frac{1}{x}F_\nu'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)F_\nu(x) = 0, \quad (\text{B'.1})$$

όπου ο τόνος συμβολίζει παραγωγή ως προς το όρισμα της συνάρτησης. Η Εξ. (B'.1) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και έχει, για συγκεκριμένη τιμή του ν , δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Για μη ακέραιες τιμές του ν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους τάξης $\pm\nu$

$$J_{\pm\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s \pm \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \quad (\text{B'.2})$$

Για ακέραιες τιμές του $\nu = n$ ισχύει

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (\text{B'.3})$$

και μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση είναι η συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους,

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad (\text{B'.4})$$

η οποία υπολογίζεται οριακά για $\nu \rightarrow n$. Από όλες τις δυνατές λύσεις της Εξ. (B'.1) μόνο η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους δεν απειρίζεται στο $x = 0$. Οι συναρτήσεις μορφής Bessel πληρούν τις αναγωγικές σχέσεις

$$F_{\nu-1}(x) + F_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} F_\nu(x) \quad (\text{B'.5})$$

$$F_{\nu-1}(x) - F_{\nu+1}(x) = 2F_\nu'(x). \quad (\text{B'.6})$$

Οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους μπορούν να υπολογιστούν και από τις ολοκληρωτικές εκφράσεις

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi \cos(x \sin \phi - \nu\phi) \quad (\text{B'.7})$$

$$= \frac{1}{\pi i^\nu} \int_0^\pi d\phi \exp(i x \cos \phi) \cos(\nu \phi) \quad (\text{B'.8})$$

$$= \frac{1}{2\pi i^\nu} \int_0^{2\pi} d\phi \exp(i[z \cos \phi + \nu \phi]) , \quad (\text{B'.9})$$

ενώ ικανοποιούν τις αθροιστικές ταυτότητες

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = 1 \quad (\text{B'.10})$$

και

$$\exp(i x \cos \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) \exp(in\phi) . \quad (\text{B'.11})$$

Η εξίσωση Helmholtz για βαθμωτά πεδία, $\nabla^2 F(\mathbf{r}) + q^2 F(\mathbf{r}) = 0$, επιδέχεται λύσεις της μορφής $F(\mathbf{r}) = \sum_{\ell m} f_\ell(qr) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$, όπου $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$ είναι οι σφαιρικές αρμονικές (βλ. Παράρτημα Γ'), με το $\hat{\mathbf{r}}$ να δηλώνει την εξάρτηση του διανύσματος $\mathbf{r}$ από τις γωνίες θ, ϕ στις σφαιρικές συντεταγμένες, και $f_\ell(qr)$ είναι το ακτινικό τμήμα των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + q^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] f_\ell(qr) = 0 , \quad (\text{B'.12})$$

ή, ισοδύναμα,

$$f_\ell''(x) + \frac{2}{x} f_\ell'(x) + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right] f_\ell(x) = 0 \quad (\text{B'.13})$$

με $x = qr$, αν εκφράσουμε τον τελεστή ∇^2 σε σφαιρικές συντεταγμένες. Η Εξ. (B'.13) έχει, για συγκεκριμένη τιμή του ℓ , δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Γνωστές μορφές τέτοιων λύσεων είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, Neumann, και Hankel πρώτου ή δεύτερου είδους, που δίνονται αντίστοιχα από τις

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x) = (2x)^\ell \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s+\ell)!}{s! (2s+2\ell+1)!} x^{2s} \quad (\text{B'.14})$$

$$n_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\ell+1/2}(x) = 2(-2x)^{-\ell-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s-\ell)!}{s! (2s-2\ell)!} x^{2s} \quad (\text{B'.15})$$

$$h_\ell^+(x) = j_\ell(x) + i n_\ell(x) \quad (\text{B'.16})$$

$$h_\ell^-(x) = j_\ell(x) - i n_\ell(x) , \quad (\text{B'.17})$$

και οι οποίες συχνά αποκαλούνται συλλογικά σφαιρικές συναρτήσεις Bessel. Από όλες τις λύσεις, μόνο η $j_\ell(x)$ δεν απειρίζεται στο $x = 0$. Για όλες τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel ισχύουν οι αναγωγικές σχέσεις

$$x f_\ell'(x) = \ell f_\ell(x) - x f_{\ell+1}(x) \quad (\text{B'.18})$$

$$(2\ell+1) f_\ell(x) = x f_{\ell-1}(x) + x f_{\ell+1}(x) \quad (\text{B'.19})$$

$$x f_{\ell-1}(x) = x f'_{\ell}(x) + (\ell + 1) f_{\ell}(x) \quad (\text{B'.20})$$

$$(2\ell + 1) f'_{\ell}(x) = \ell f_{\ell-1}(x) - (\ell + 1) f_{\ell+1}(x) . \quad (\text{B'.21})$$

Συχνά είναι χρήσιμη είναι και η ορίζουσα Wronski,

$$\begin{vmatrix} j_{\ell}(x) & n_{\ell}(x) \\ j'_{\ell}(x) & n'_{\ell}(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2} . \quad (\text{B'.22})$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel ($x \gg 1$) είναι

$$j_{\ell}(x \gg 1) \sim \frac{1}{x} \sin(x - \frac{\ell\pi}{2}) \quad (\text{B'.23})$$

$$n_{\ell}(x \gg 1) \sim -\frac{1}{x} \cos(x - \frac{\ell\pi}{2}) \quad (\text{B'.24})$$

$$h_{\ell}^{+}(x \gg 1) \sim (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ix}}{x} \quad (\text{B'.25})$$

$$h_{\ell}^{-}(x \gg 1) \sim i^{\ell+1} \frac{e^{-ix}}{x} , \quad (\text{B'.26})$$

ενώ για μικρά ορίσματα ($x \ll 1$) ισχύουν οι

$$j_{\ell}(x \ll 1) \sim \frac{x^{\ell}}{(2\ell + 1)!!} \quad (\text{B'.27})$$

$$n_{\ell}(x \ll 1) \sim -\frac{(2\ell - 1)!!}{x^{\ell+1}} . \quad (\text{B'.28})$$

Παράρτημα Γ'

Σφαιρικές αρμονικές

Οι σφαιρικές αρμονικές, $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$, αποτελούν το γωνιακό τμήμα των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz και ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned}\nabla^2 Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} \right] Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= -\frac{\mathbf{L}^2}{r^2} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}),\end{aligned}\quad (\Gamma'.1)$$

όπου $\mathbf{L}$ είναι ο τελεστής της στροφορμής,

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= -i(\mathbf{r} \times \nabla) = i \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ \mathbf{L}^2 &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},\end{aligned}\quad (\Gamma'.2)$$

και το όρισμα $\hat{\mathbf{r}}$ δηλώνει την εξάρτηση του διανύσματος $\mathbf{r}$ από τις γωνίες θ και ϕ στις σφαιρικές συντεταγμένες. Οι $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$ δίνονται από την έκφραση

$$Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (\Gamma'.3)$$

με $\ell = 0, 1, \dots$, $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$ και $P_{\ell}^m(\cos \theta)$ τα προσαρτημένα πολυώνυμα Legendre

$$P_{\ell}^m(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^{\ell}, \quad x = \cos \theta \quad (\Gamma'.4)$$

για $m > 0$, ενώ για $m < 0$ ορίζονται από την

$$P_{\ell}^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(x). \quad (\Gamma'.5)$$

Από τις παραπάνω προκύπτει

$$Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^m Y_{\ell -m}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\Gamma'.6)$$

και

$$Y_{\ell m}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\Gamma'.7)$$

$$Y_{\ell m}(\theta = 0, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \delta_{m0}. \quad (\Gamma'.8)$$

Οι $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$ πληρούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας και πληρότητας

$$\int d\Omega Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (\Gamma'.9)$$

$$\sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}') = \delta(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}'), \quad (\Gamma'.10)$$

με το $d\Omega$ να συμβολίζει ολοκλήρωση στη στερεά γωνία, το θεώρημα άθροισης σφαιρικών αρμονικών

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})|^2 = \frac{2\ell+1}{4\pi}, \quad (\Gamma'.11)$$

μια σειρά σχέσεων που συνδέουν αρμονικές διάφορων τάξεων

$$\cos\theta Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) = \zeta_{\ell+1}^m Y_{\ell+1m}(\hat{\mathbf{r}}) + \zeta_{\ell}^m Y_{\ell-1m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\Gamma'.12)$$

$$e^{i\phi} \sin\theta Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) = 2 [\gamma_{\ell}^{-m} Y_{\ell-1m+1}(\hat{\mathbf{r}}) - \gamma_{\ell+1}^{m+1} Y_{\ell+1m+1}(\hat{\mathbf{r}})] \quad (\Gamma'.13)$$

$$e^{-i\phi} \sin\theta Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) = 2 [\gamma_{\ell+1}^{-m+1} Y_{\ell+1m-1}(\hat{\mathbf{r}}) - \gamma_{\ell}^m Y_{\ell-1m-1}(\hat{\mathbf{r}})] \quad (\Gamma'.14)$$

$$m \cot\theta Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) = - [\alpha_{\ell}^m e^{-i\phi} Y_{\ell m+1}(\hat{\mathbf{r}}) + \alpha_{\ell}^{-m} e^{i\phi} Y_{\ell m-1}(\hat{\mathbf{r}})] , \quad (\Gamma'.15)$$

καθώς και τις

$$\frac{\partial Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta} = \alpha_{\ell}^m e^{-i\phi} Y_{\ell m+1}(\hat{\mathbf{r}}) - \alpha_{\ell}^{-m} e^{i\phi} Y_{\ell m-1}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\Gamma'.16)$$

$$= i\psi_{\ell} X_{\ell m, \phi}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\Gamma'.17)$$

$$\frac{\partial Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\phi} = im Y_{\ell m}(\mathbf{r}) \quad (\Gamma'.18)$$

$$= -i\psi_{\ell} \sin\theta X_{\ell m, \theta}(\hat{\mathbf{r}}) . \quad (\Gamma'.19)$$

Τέλος, ισχύει

$$\begin{aligned} \nabla [f_{\ell}(qr) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] &= f_{\ell}(qr) \nabla Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) + q f'_{\ell}(qr) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \\ &= i\psi_{\ell} \frac{f_{\ell}(qr)}{r} [X_{\ell m, \phi}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} - X_{\ell m, \theta}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\phi}}] \\ &\quad + q f'_{\ell}(qr) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (\Gamma'.20)$$

Στις παραπάνω σχέσεις

$$\psi_{\ell} = \sqrt{\ell(\ell+1)} \quad (\Gamma'.21)$$

$$\alpha_\ell^m = \frac{1}{2} [(\ell - m)(\ell + m + 1)]^{1/2} \quad (\Gamma'.22)$$

$$\gamma_\ell^m = \frac{[(\ell + m)(\ell + m - 1)]^{1/2}}{2[(2\ell - 1)(2\ell + 1)]^{1/2}} \quad (\Gamma'.23)$$

$$\zeta_\ell^m = \frac{[(\ell + m)(\ell - m)]^{1/2}}{[(2\ell - 1)(2\ell + 1)]^{1/2}}, \quad (\Gamma'.24)$$

και $X_{\ell m, \theta}(\hat{\mathbf{r}})$, $X_{\ell m, \phi}(\hat{\mathbf{r}})$ είναι οι συνιστώσες των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών, $\mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$, που ορίζονται από την

$$\psi_\ell \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{L}Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \equiv -i\mathbf{r} \times \nabla Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\Gamma'.25)$$

Εξ ορισμού, $\mathbf{X}_{00}(\hat{\mathbf{r}}) = 0$, ενώ για $\ell \geq 1$

$$\begin{aligned} \psi_\ell \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) &= \left[\alpha_\ell^{-m} \cos \theta e^{i\phi} Y_{\ell m-1}(\hat{\mathbf{r}}) - m \sin \theta Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) + \alpha_\ell^m \cos \theta e^{-i\phi} Y_{\ell m+1}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + i \left[\alpha_\ell^{-m} e^{i\phi} Y_{\ell m-1}(\hat{\mathbf{r}}) - \alpha_\ell^m e^{-i\phi} Y_{\ell m+1}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (\Gamma'.26)$$

$$= \alpha_\ell^{-m} Y_{\ell m-1}(\hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) + m Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{z}} + \alpha_\ell^m Y_{\ell m+1}(\hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}). \quad (\Gamma'.27)$$

Από τις $\mathbf{L}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}$ και $\mathbf{L}^2 \mathbf{L} = \mathbf{L} \mathbf{L}^2$ θα ισχύει $\mathbf{L}^2 \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) = \ell(\ell + 1) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$. Από τις Εξ. (Γ'.25) προκύπτει ότι

$$\mathbf{X}_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^{m+1} \mathbf{X}_{\ell -m}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\Gamma'.28)$$

$$\mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} = X_{\ell m, \phi}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} - X_{\ell m, \theta}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{i\mathbf{r} \nabla Y_{\ell m}}{\psi_\ell}, \quad (\Gamma'.29)$$

και

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] = \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\Gamma'.30)$$

Η δράση των τελεστών $\nabla \times$ και $\nabla \cdot$ στις $\mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$ περιγράφεται από τις

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{r} \left[i\psi_\ell Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - X_{\ell m, \phi}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + X_{\ell m, \theta}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] \\ &= \frac{1}{r} [i\psi_\ell Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] \\ &= \frac{i}{\psi_\ell} \left[\frac{\psi_\ell^2}{r} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + \nabla Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \end{aligned} \quad (\Gamma'.31)$$

και

$$\nabla \cdot \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) = 0, \quad (\Gamma'.32)$$

ενώ με τη βοήθειά τους προκύπτουν οι

$$\nabla \times f_\ell(x) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) = q \left\{ i\psi_\ell \frac{f_\ell(x)}{x} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \left[f'_\ell(x) + \frac{f_\ell(x)}{x} \right] \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} \right\} \quad (\Gamma'.33)$$

$$\nabla \cdot [f_\ell(x) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] = 0 \quad (\Gamma'.34)$$

$$\nabla^2 [f_\ell(x) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] = -\nabla \times [\nabla \times f_\ell(x) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] = -q^2 f_\ell(x) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\Gamma'.35)$$

με $x = qr$. Για την τελευταία χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$\begin{aligned} \nabla \{ \nabla \cdot [f_\ell(x) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] \} &= \nabla [\nabla f_\ell(x) \cdot \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) + f_\ell(x) \nabla \cdot \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] \\ &= \nabla [\nabla f_\ell(x) \cdot \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] = 0. \end{aligned} \quad (\Gamma'.36)$$

Οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές πληρούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\int d\Omega \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{X}_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (\Gamma'.37)$$

$$\int d\Omega \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{r}})] = 0, \quad (\Gamma'.38)$$

από όπου προκύπτει

$$\begin{aligned} \sum_{\ell m} \left\{ \mathcal{A}_{\ell m}^{(1)}(r) \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) + \mathcal{A}_{\ell m}^{(2)}(r) [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})] \right\} &= 0 \Rightarrow \\ \mathcal{A}_{\ell m}^{(1)}(r) = \mathcal{A}_{\ell m}^{(2)}(r) &= 0. \end{aligned} \quad (\Gamma'.39)$$

Τέλος, μπορεί ναδειχθεί ότι

$$\int d\Omega \mathbf{X}_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \nabla [f_\ell(r) \mathbf{X}_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{r}})] = 0, \quad (\Gamma'.40)$$

και με τη βοήθεια των Εξ. (Γ'.9) και (Γ'.27) ότι

$$\begin{aligned} \int d\Omega Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) \mathbf{X}_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{\delta_{\ell\ell'}}{\psi_\ell} \left[\delta_{m+1m'} \alpha_{\ell'}^{-m'} (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{mm'} m \hat{\mathbf{z}} + \delta_{m-1m'} \alpha_{\ell'}^{m'} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) \right], \end{aligned} \quad (\Gamma'.41)$$

$$\begin{aligned} \int d\Omega Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} &= \delta_{m+1m'} (-\gamma_{\ell+1}^{m+1} \delta_{\ell+1\ell'} + \gamma_\ell^{-m} \delta_{\ell-1\ell'}) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) \\ &\quad + \delta_{m-1m'} (\gamma_{\ell+1}^{-m+1} \delta_{\ell+1\ell'} - \gamma_\ell^m \delta_{\ell-1\ell'}) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) \\ &\quad + \delta_{mm'} (\zeta_{\ell+1}^m \delta_{\ell+1\ell'} + \zeta_\ell^m \delta_{\ell-1\ell'}) \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (\Gamma'.42)$$

και

$$\begin{aligned} \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \mathbf{X}_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} &= \frac{i}{\psi_{\ell'}} \left[\delta_{mm'-1} \left(\ell' \gamma_{\ell'+1}^{-m'+1} \delta_{\ell\ell'+1} + (\ell' + 1) \gamma_{\ell'}^{m'} \delta_{\ell\ell'-1} \right) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) \right. \\ &\quad - \delta_{mm'+1} \left(\ell' \gamma_{\ell'+1}^{m'+1} \delta_{\ell\ell'+1} + (\ell' + 1) \gamma_{\ell'}^{-m'} \delta_{\ell\ell'-1} \right) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) \\ &\quad \left. - \delta_{mm'} \left((\ell' + 1) \zeta_{\ell'}^{m'} \delta_{\ell\ell'-1} - \ell' \zeta_{\ell'+1}^{m'} \delta_{\ell\ell'+1} \right) \hat{\mathbf{z}} \right]. \end{aligned} \quad (\Gamma'.43)$$

Παράρτημα Δ'

Υπολογισμός του ολοκληρώματος σύζευξης για σφαιροειδείς τρόπους ταλάντωσης

Για ένα σφαιροειδή κανονικό τρόπο ταλάντωσης με συγκεκριμένους δείκτες n, ℓ', m' , το πεδίο θα δίνεται από την Εξ. (4.9) όπου τώρα $a_{M\ell'm'} = 0$. Αντικαθιστώντας το πεδίο στο ολοκλήρωμα (4.8) και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (4.11) έχουμε

$$\begin{aligned} \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{n\ell'm'}(\mathbf{r}) &= \int_0^S dr r^2 \mathbf{q} \cdot \sum_{\ell m} \left\{ \left[a_{L\ell'm'} j'_{\ell'}(q_l r) - a_{N\ell'm'} \frac{\psi_{\ell'} j_{\ell'}(q_t r)}{q_t r} \right] \right. \\ &\quad \int d\Omega Y_{\ell'm'}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + \left[a_{L\ell'm'} i \psi_{\ell'} \frac{j_{\ell'}(q_l r)}{q_l r} - a_{N\ell'm'} i \frac{q_t r j'_{\ell'}(q_t r) + j_{\ell'}(q_t r)}{q_t r} \right] \\ &\quad \left. \int d\Omega \mathbf{X}_{\ell'm'}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \right\} i^\ell 4\pi j_\ell(qr) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{q}}). \quad (\Delta'.1) \end{aligned}$$

Με εφαρμογή των Εξ. (Γ'.42), (Γ'.43) και θεωρώντας τον άξονα $\hat{\mathbf{z}}$ στη διεύθυνση του $\mathbf{q}$, έτσι ώστε να εκμεταλλευτούμε την Εξ. (Γ'.8), έχουμε

$$\begin{aligned} \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{n\ell'm'}(\mathbf{r}) &= \int_0^S dr r^2 q \sum_{\ell} \left\{ \left[a_{L\ell'0} j'_{\ell'}(q_l r) - a_{N\ell'0} \frac{\psi_{\ell'} j_{\ell'}(q_t r)}{q_t r} \right] \right. \\ &\quad (\zeta_{\ell+1}^0 \delta_{\ell+1\ell'} + \zeta_{\ell}^0 \delta_{\ell-1\ell'}) \\ &\quad + \left[a_{L\ell'0} i \psi_{\ell'} \frac{j_{\ell'}(q_l r)}{q_l r} - a_{N\ell'0} i \frac{q_t r j'_{\ell'}(q_t r) + j_{\ell'}(q_t r)}{q_t r} \right] \\ &\quad \left. \frac{i}{\psi_{\ell'}} (\ell' \zeta_{\ell'+1}^0 \delta_{\ell\ell'+1} - (\ell' + 1) \zeta_{\ell'}^0 \delta_{\ell\ell'-1}) \right\} i^\ell \sqrt{4\pi} \sqrt{2\ell+1} j_\ell(qr), \quad (\Delta'.2) \end{aligned}$$

όπου τώρα αναδιατάσσοντας τους όρους και εφαρμόζοντας την αναδρομική σχέση (Β'.18), η Εξ. (Δ'.2) παίρνει τη μορφή

$$\int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{n\ell'm'}(\mathbf{r}) = \int_0^S dr r^2 q \sqrt{4\pi} \left\{ \left[a_{L\ell'0} \frac{j_{\ell'}(q_l r)}{q_l r} (2\ell' + 1) - a_{L\ell'0} j_{\ell'+1}(q_l r) \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& - a_{N\ell'0} \frac{j_{\ell'}(q_t r)}{q_t r} \left(\psi_{\ell'} + \frac{(\ell' + 1)^2}{\psi_{\ell'}} \right) + a_{N\ell'0} j_{\ell'+1}(q_t r) \frac{(\ell' + 1)}{\psi_{\ell'}} \Big] \\
& \zeta_{\ell'}^0 i^{\ell'-1} \sqrt{2\ell' - 1} j_{\ell'-1}(qr) \\
& - \left[a_{L\ell'0} j_{\ell'+1}(q_l r) + a_{N\ell'0} \frac{j_{\ell'+1}(q_t r) \ell'}{\psi_{\ell'}} \right] \\
& \zeta_{\ell'+1}^0 i^{\ell'+1} \sqrt{2\ell' + 3} j_{\ell'+1}(qr) \Big\}. \tag{\Delta'.3}
\end{aligned}$$

Τέλος, αναπτύσσοντας τα γινόμενα και τα $\zeta_{\ell'}^0$, $\zeta_{\ell'+1}^0$ προκύπτει η τελική μορφή

$$\begin{aligned}
\int d^3 r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{n\ell'm'}(\mathbf{r}) = & q \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell'+1}} i^{\ell'-1} \left\{ a_{L\ell'0} \ell' (2\ell' + 1) \int_0^S dr r^2 \frac{j_{\ell'}(q_l r)}{q_l r} j_{\ell'-1}(qr) \right. \\
& - a_{L\ell'0} \ell' \int_0^S dr r^2 j_{\ell'+1}(q_l r) j_{\ell'-1}(qr) \\
& - a_{N\ell'0} \psi_{\ell'} (2\ell' + 1) \int_0^S dr r^2 \frac{j_{\ell'}(q_t r)}{q_t r} j_{\ell'-1}(qr) \\
& + a_{N\ell'0} \psi_{\ell'} \int_0^S dr r^2 j_{\ell'+1}(q_t r) j_{\ell'-1}(qr) \\
& + a_{L\ell'0} (\ell' + 1) \int_0^S dr r^2 j_{\ell'+1}(q_l r) j_{\ell'+1}(qr) \\
& \left. + a_{N\ell'0} \psi_{\ell'} \int_0^S dr r^2 j_{\ell'+1}(q_t r) j_{\ell'+1}(qr) \right\}. \tag{\Delta'.4}
\end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, 3rd ed. (Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 1986).
- [2] Π. Σαϊνίδου, *Φωνονικοί Κρύσταλλοι, η μέθοδος στρωματικής πολλαπλής σκέδασης και εφαρμογές της*, Διδακτορική Διατριβή (Αθήνα, Απρίλιος 2004).
- [3] B. A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids*, Vol. I (John Willey & Sons Inc., New York, 1973).
- [4] D. Brill and G. Gaunaurd, *J. Acoust. Soc. Am.* **81**, 1 (1987).
- [5] Π. Σαϊνίδου, *Σκέδαση ελαστικών κυμάτων από σφαιρικά σωματίδια - φωνονικοί κρύσταλλοι*, Μεταπτυχιακή Εργασία (Αθήνα, 2000).
- [6] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Part. II (McGraw-Hill, Tokyo, 1953).
- [7] A. Yariv and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals, Propagation and Control of Laser Radiation*, (John Willey & Sons Inc., New York, 1984).
- [8] M. Born and K. Huang, *Dynamical Theory of Crystal Lattices*, (Oxford University Press, Oxford, 1954).
- [9] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, (IEEE Press, New York, 1995).
- [10] B. J. Berne and R. Pecora, *Dynamic Light Scattering*, (John Willey & Sons Inc., New York, 1976).
- [11] T. Still, M. Mattarelli, D. Kiefer, G. Fytas and M. Montagna, *J. Phys. Chem. Lett.* **1**, 2440-2444 (2010).
- [12] T. Still, *High Frequency Acoustics in Colloid-Based Meso- and Nanostructures by Spontaneous Brillouin Light Scattering*, Phd Thesis (Springer, New York, 2010).
- [13] W. Cheng, J. J. Wang, U. Jonas, W. Steffen, G. Fytas, R. .S. Penciu and E. N. Economou, *J. Chem. Phys.* **123**, 121104 (2005).

- [14] M. Faatz W. Cheng, G. Wegner, G. Fytas, R. .S. Penciu and E. N. Economou, *Lagmuir* **21**, 6666-6668 (2005).
- [15] M. Kafesaki, E. N. Economou, *Phys. Rev. B* **60**, 11993 (1999).
- [16] Z. Liu, C. T. Chan, P. Sheng, A. L. Goertzen, J. H. Page, *Phys. Rev. B* **62**, 2446 (2000).
- [17] I. E. Psarobas, N. Stefanou, A. Modinos, *Phys. Rev. B* **62**, 278 (2000).
- [18] N. Stefanou, H. Akai and R. Zeller, *Comput. Phys. Commun.* **60**, 231-238 (1990).
- [19] V. Yannopapas and N. V. Vitanov, *Phys. Rev. B* **75**, 115124 (2007).