Θεωρήματα συνεχούς επιλογής και παρασυμπαγείς τοπολογικοί χώροι

Στυλιανός Κοτρώνης

Διπλωματική εργασία ειδίκευσης στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Τριμελής επιτροπή

Γεώργιος Κουμουλλής

Σοφοκλής Μερκουράκης

Αθανάσιος Τσαρπαλιάς

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Εθνικό και Καποδιστριακό

Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα 2012

Περιληψη

Ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα και σημαντικά προβλήματα στη τοπολογία είναι το πρόβλημα της επέκτασης συνεχών συναρτήσεων: δοθέντων δύο τοπολογικών χώρων X, Y και ενός $A \subseteq X$ κλειστού, θα θέλαμε να ξέρουμε πότε μια συνεχής συνάρτηση $g : A \to Y$ μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$. Κάποιες φορές, υπάρχουν και επιπρόσθετες απαιτήσεις για την f οι οποίες, συχνά, έχουν την εξής μορφή: για κάθε $x \in X$ το $f(x)$ πρέπει να ανήκει σε ένα προκαθορισμένο υποσύνολο του Y που εξαρτάται από το x. Το καινούριο αυτό πρόβλημα, το οποίο καλούμε πρόβλημα συνεχούς επιλογής, είναι το κεντρικό θέμα της εργασίας αυτής.

Ανάμεσα στα θεωρήματα συνεχούς επιλογής στα οποία θα αναφερθούμε, εκείνο με το ξεχωριστό ενδιαφέρον είναι το θεώρημα συνεχούς επιλογής για παρασυμπαγείς χώρους X. Ο χώρος Y είναι πάντα χώρος $Banach$. Το εξετάζουμε στο 2ο Κεφάλαιο μαζί με τα υπόλοιπα θεωρήματα συνεχούς επιλογής για αριθμήσιμα παρασυμπαγείς φυσιολογικούς, για κατά συλλογή φυσιολογικούς και για φυσιολογικούς χώρους.

Στο 1ο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποιες τοπολογικές ιδιοτήτες που σχετίζονται με τα θεωρήματα συνεχούς επιλογής του 2ου Κεφαλαίου. Εξετάζουμε κυρίως τους παρασυμπαγείς τοπολογικούς χώρους και κάποιες γενικεύσεις τους, όπως τους αριθμήσιμα παρασυμπαγείς φυσιολογικούς χώρους και τους κατά συλλογή φυσιολογικούς χώρους.

Τέλος, στο 3ο Κεφάλαιο αναφερόμαστε σε εφαρμογές των θεωρημάτων συνεχούς επιλογής σε κάποια θεωρήματα παρεμβολής και στην συναρτησιακή ανάλυση.

Abstract

One of the most interesting and important problems in topology is the extension problem: two topological spaces X and Y are given, together with a closed $A \subseteq X$, and we would like to know when a continuous function $g : A \to Y$ can be extended to a continuous function f from X into Y. Sometimes there are additional requirements on f, which frequently take the following form: for every $x \in X$, $f(x)$ must be an element of a preassigned subset of Y, which depends on the x. This new problem, which we call continuous selection problem, is the main issue in this dissertation.

Among the other continuous selection theorems that we refer to, the most interesting one is the continuous selection theorem for paracompact space X. The space Y is always Banach. We study this theorem in the 2nd Chapter where continuous selection theorems for countably paracompact normal spaces, collectionwise normal spaces and normal spaces are studied too.

In the 1st Chapter we study some topological properties related to the 2nd Chapter's continuous selection theorems. We study, mostly, paracompact spaces and some of their generalisation such as countably paracompact spaces and collectionwise normal spaces.

Finally, in the 3rd Chapter we study some applications of the continuous selection theorems in three insertion theorems and in functional analysis as well.

Εισαγωγη

Ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα και σημαντικά προβλήματα στη τοπολογία είναι το πρόβλημα της επέκτασης συνεχών συναρτήσεων: δοθέντων δύο τοπολογικών χώρων X, Y και ενός $A \subseteq X$ κλειστού, θα θέλαμε να ξέρουμε πότε μια συνεχής συνάρτηση $g : A \to Y$ μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$. Κάποιες φορές, υπάρχουν και επιπρόσθετες απαιτήσεις για την f οι οποίες, συχνά, έχουν την εξής μορφή: για κάθε $x \in X$ το $f(x)$ πρέπει να ανήκει σε ένα προκαθορισμένο υποσύνολο του Y που εξαρτάται από το x. Το καινούριο αυτό πρόβλημα, το οποίο καλούμε πρόβλημα συνεχούς επιλογής, παραμένει δύσκολο ακόμα και σε περιπτώσεις όπου το πρόβλημα επέκτασης είναι προφανές, όπως για παράδειγμα όταν το $A = \emptyset$ ή το $A = \{x_0\}$, $x_0 \in X$.

Κεντρική σημασία στη εργασία έχει ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 0.1. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Αν έχουμε μια απεικόνιση $\phi : X \to 2^Y = \{S \in \mathcal{P}(Y) | S \neq \emptyset\}$ τότε μια *συνεχής επιλογή* για την ϕ είναι μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ ώστε $f(x) \in \phi(x)$ για κάθε $x \in X$.

Με βάση τον ορισμό αυτό, λοιπόν, το πρόβλημα συνεχούς επιλογής, που περιγράψαμε παραπάνω, μπορεί να γενικευθεί με τον εξής τρόπο:

(P) Κάτω από ποιές προϋποθέσεις για τον τοπολογικό χώρο X, για το κλειστό $A \subseteq X$, τον τοπολογικό χώρο Y και την απεικόνιση $\phi : X \to 2^Y$, μπορεί κάθε συνεχής επιλογή για την $\phi_{|A}$ να επεκταθεί σε συνεχή επιλογή για την ϕ ;

Το πρόβλημα (P) είναι το κεντρικό θέμα της εργασίας αυτής.

Στην συνέχεια της εργασίας, οι απεικονίσεις $\phi : X \to 2^Y$ θα θεωρούνται κάτω ημισυνεχείς. Η υπόθεση αυτή είναι απαραίτητη λόγω της παρακάτω προφανούς πρότασης:

Πρόταση 0.2. Αν μια απεικόνιση $\phi : X \to 2^Y$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $x_0 \in X$ και $y_0 \in \phi(x_0)$ μπορούμε να βρούμε περιοχή U του x_0 και μια συνεχή επιλογή για την απεικόνιση $\phi_{|U}$ ώστε $f(x_0) = y_0$ τότε η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής.

Η υπόθεση της κάτω ημισυνέχειας της απεικόνισης της ϕ αρκεί -ως ιδιότητα συνέχειας - για τα θεωρήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στην εργασία. Επομένως, τα υπόλοιπα που μένουν να εξετάσουμε για την ϕ είναι το πεδίο ορισμού της και το πεδίο τιμών της. Με αλλα λόγια, το παραπάνω πρόβλημα (P) μετατρέπεται στο ακόλουθο:

(P_1) Πότε ένας τοπολογικός χώρος X, ένα κλειστό $A \subseteq X$ και ένα $\mathcal{S} \subseteq 2^Y$ ικανοποιούν της εξής συνθήκη:
αν $\phi : X \to \mathcal{S}$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση τότε κάθε συνεχής επιλογή για την $\phi_{|A}$ μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή επιλογή για την ϕ ;

Στην εργασία αυτή, δίνεται απάντηση στο πρόβλημα (P_1) παίρνοντας το $\mathcal{S}$ να είναι οικογένεια κατάλληλων κυρτών υποσυνόλων χώρου *Banach*. Με τον τρόπο αυτόν, προκύπτουν νέοι χαρακτηρισμοί για τους παρασυμπαγείς χώρους, τους αριθμήσιμα παρασυμπαγείς φυσιολογικούς χώρους, τους κατά συλλογή φυσιολογικού χώρους, τους φυσιολογικούς χώρους και τους τέλεια φυσιολογικούς χώρους.

Το πρόβλημα (P_1) μπορεί να απλουστευτεί σε κάποιες περιπτώσεις. Η παρακάτω πρόταση (η απόδειξή της αναφέρεται στο 3ο Κεφάλαιο) μας δίνει τον τρόπο που επιτυγχάνεται αυτό:

Πρόταση 0.3. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Αν $\mathcal{S} \subseteq 2^Y$ και περιέχει όλα τα μονοσύνολα των στοιχείων του Y, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Κάθε κάτω ημισυνεχής $\phi : X \to \mathcal{S}$ έχει συνεχή επιλογή.

(ii) η P_1 ισχύει για κάθε $A \subseteq X$ κλειστό.

Η παραπάνω πρόταση μετατρέπει το πρόβλημα (P_1), από πρόβλημα επέκτασης μιας συνεχούς επιλογής, σε πρόβλημα εύρεσης μιας συνεχούς επιλογής. Τα θεωρήματα στα οποία θα αναφερθούμε στην εργασία αυτή θα διατυπωθούν με αυτό τον τρόπο.

Πιο συγκεκριμένα, τα θεωρήματα συνεχούς επιλογής στα οποία θα αναφερθούμε είναι γνωστά ως θεωρήματα συνεχούς επιλογής του *Michael*. Δημοσιεύθηκαν στην εργασία *Continuous Selections I* του *Ernest Michael* το 1956 στο *Annals of Mathematics* ([12]). Η εργασία αυτή υπήρξε, στην ουσία η αρχή της θεωρίας των συνεχών επιλογών, και υπήρξε εργαλείο για πολλούς μαθηματικούς οι οποίοι ασχολούνταν με διαφορετικούς τομείς, από την τοπολογία και την συναρτησιακή ανάλυση μέχρι τα οικονομικά μαθηματικά.

Το πρώτο θεώρημα επιλογής στο οποίο κατέληξε ο $E.Michael$ ήταν το θεώρημα συνεχούς επιλογής για παρασυμπαγείς χώρους, και αρχικός σκοπός του θεωρήματος αυτού ήταν να χρησιμοποιηθεί για την απλούστευση της απόδειξης και την επέκταση ενός θεωρήματος των $R.Bartle$ και $L.Graves$. Η διατύπωσή του είναι η παρακάτω:

Θεώρημα. (Θεώρημα συνεχούς επιλογής για παρασυμπαγείς τοπολογικούς χώρους) Για έναν T_1 τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι παρασυμπαγής.

(ii) Αν Y είναι χώρος $Banach$, τότε κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ έχει συνεχή επιλογή (όπου $\mathcal{F}(Y)$ τα μη κενά, κλειστά, κυρτά υποσύνολα του Y).

Η σημασία του θεωρήματος αυτού είναι, από τη μία, η λύση που δίνεται στο πρόβλημα συνεχούς επιλογής, από την άλλη, ο τρόπος με την οποία την εντάσει στη εξέλιξη της τοπολογίας. Στο ίδιο πνεύμα κινούνται και τα υπόλοιπα θεωρήματα της εργασίας του $E.Michael$. Αυτά χαρακτηρίζουν -μέσω θεωρημάτων ίδιου τύπου με το παραπάνω- τους αριθμήσιμα παρασυμπαγείς φυσιολογικούς χώρους, τους κατά συλλογή φυσιολογικους χώρους και τους φυσιολογικούς χώρους. Το αντίστοιχο θεώρημα για τους τέλεια φυσιολογικούς είναι ξεχωριστή περίπτωση από τα προηγούμενα και απαιτεί το θεώρημα παρεμβολής του $Dowker$. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο το αναφέρουμε στο 3ο Κεφάλαιο μαζί με τα υπόλοιπα θεωρήματα παρεμβολής, και όχι στο 2ο Κεφάλαιο.

Η μέθοδος και οι ιδέες των αποδείξεων όλων των θεωρημάτων επιλογής, αν και κοινές εν πολλοίς, παρουσιάζουν ξεχωριστό ενδιαφέρον. Αφενός, έχουν αποτελέσει τη βάση για την απόδειξη άλλων θεωρημάτων συνεχούς επιλογής και επίσης θεωρημάτων επιλογής σε κατηγορίες χώρων πέρα των τοπολογικών. Χαρακτηριστικό πράδειγμα αποτελεί το θεωρήμα μετρήσιμης επιλογής των $Kutatowski$ και $Ryll-Nardzewski$ ([9]) . Από την άλλη, για τα θεωρήματα συνεχούς επιλογής για φυσιολογικούς και για κατα συλλογή φυσιολογικούς χώρους, χρησιμοποιούν το θεώρημα επέκτασης των $Urysohn$, $Tietze$, $Dudundji$

και $Hanner$ και το θεώρημα επέκτασης του $Dowker$, αντίστοιχα. Στην εργασία [12] ο $E.Michael$ αναφέρει τα δύο θεωρήματα συνεχούς επέκτασης επειδή συνδέονται με τα παραπάνω θεωρήματα συνεχούς επιλογής (και μάλιστα είναι συνέπειες αυτών). Όμως τα επιχειρήματά στην [12] για τις αποδείξεις αυτών των θεωρημάτων συνεχούς επιλογής δεν είναι πλήρη. Η πρώτη πλήρης απόδειξη δόθηκε από τους $Choban$ και $Valov$ στην [1]. Εμείς θα ακολουθήσουμε την εργασία [5] των $V.Gutev$ και $N.R.F.Makala$ όπου η απόδειξη του θεωρήματος διατηρεί το κύριο μέρος της -κοινής με τα υπόλοιπα θεωρήματα- τεχνικής και χρησιμοποιεί τα παραπάνω θεωρήματα συνεχούς επέκτασης.

Τα θεωρήματα συνεχούς επιλογής της παραπάνω μορφής αποτελούν το κεντρικό μέρος της εργασίας και παρουσιάζονται στο 2ο Κεφάλαιο. Στις αποδείξεις των θεωρημάτων αυτού του κεφαλαίου κεντρική σημασία έχουν οι διαμερίσεις της μονάδας μέσω των οποίων χαρακτηρίζονται οι παρασυμπαγείς τοπολογικοί χώροι.

Στο 1ο Κεφάλαιο μέσω του θεωρήματος του $A.H.Stone$ που ταυτίζει τους παρασυμπαγείς με τους πλήρως φυσιολογικούς ($fully\ normal$) χώρους, αποδεικνύουμε διάφορες ιδιότητες των παρασυμπαγών χώρων, καθώς και τον χαρακτηρισμό τους μέσω διαμερίσεων της μονάδας.

Τέλος, στο 3ο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια ειδικής μορφής θεωρήματα συνεχούς επιλογής (θεωρήματα παρεμβολής) και εφαρμογές στη συναρτησιακή ανάλυση (θεώρημα $Bartle - Graves$).

Θεωρώ ιδιαίτερη υποχρέωση μου να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεώργιο Κουμουλλή για την συνεχή του στήριξη και τις καίριες παρεμβάσεις του. Η συμβολή του κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας υπήρξε ανεκτίμητη. Επιπλέον, ευχαριστώ τους καθηγητές κ. Σοφοκλή Μερκουράκη και κ. Αθανάσιο Τσαρπαλιά για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής έγινε στο πλαίσιο της υλοποίησης του μεταπτυχιακού προγράμματος το οποίο συγχρηματοδοτήθηκε μέσω της Πράξης «Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών Ι.Κ.Υ. με διαδικασία εξατομικευμένης αξιολόγησης ακαδ. έτους 2011-2012 » από πόρους του Ε.Π. «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου (ΕΚΤ) και του ΕΣΠΑ, του 2007-2013.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Παρασυμπαγείς τοπολογικοί χώροι και σχετικές έννοιες

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση κάποιων τοπολογικών ιδιοτήτων που σχετίζονται με τα θεωρήματα συνεχούς επιλογής του 2ου Κεφαλαίου. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε, κυρίως, τους παρασυμπαγείς τοπολογικούς χώρους και κάποιες γενικεύσεις τους, όπως τους αριθμήσιμα παρασυμπαγείς φυσιολογικούς χώρους και τους κατά συλλογή φυσιολογικούς χώρους.

Η κεντρική έννοια με την οποία θα ασχοληθούμε είναι η παρασυμπάγεια. Η παρασυμπάγεια εισήχθη το 1944 από τον *J.Dieudonne*. Το 1948 ο *A.H.Stone* απέδειξε την ισοδυναμία μεταξύ της έννοιας αυτής και των πλήρως φυσιολογικών χώρων (οι πλήρεις φυσιολογικοί χώροι (*fully normal*) εισήχθησαν από τον *J.W.Tukey* το 1940). Έπειτα από το θεώρημα του *A.H.Stone*, η έννοια αυτή έμεινε στην βιβλιογραφία ως παρασυμπάγεια τοπολογικών χώρων, ωστόσο αποτελέσματα του *Tukey* και το θεώρημα του *A.H.Stone* οδήγησαν στο κεντρικό, για την Γενική Τοπολογία, θεώρημα ότι κάθε μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος είναι παρασυμπαγής.

Αυτή είναι και η μέθοδος με την οποία παρουσιάζουμε εδώ το βασικό αυτό θεώρημα, και επίσης τις διάφορες ιδιότητες των παρασυμπαγών τοπολογικών χώρων. Δηλαδή, εξετάζουμε ιδιότητες των πλήρως φυσιολογικών χώρων και μέσω του θεωρήματος του *A.H.Stone* έπεται ότι αυτές αποτελούν και ιδιότητες των παρασυμπαγών τοπολογικών χώρων. Όμως για την μελέτη του 2ου Κεφαλαίου δεν είναι απαραίτητη η έννοια των πλήρως φυσιολογικών χώρων, όπως εξηγείται στο σχόλιο στο τέλος του Κεφαλαίου.

Προτού περάσουμε στην παρουσίαση των εννοιών και των θεωρημάτων που θα μας απασχολήσουν, όποτε αναφερόμαστε σε έναν τοπολογικό χώρο X θα εννοούμε τον τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$.
Ξεκινάμε το κύριο μέρος του κεφαλαίου αυτού, παρουσιάζοντας κάποιους βασικούς ορισμούς για τους ψευδομετρικοποιήσιμους χώρους.

Ορισμός 1.1. Μιά συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες :

(i) $d(x, x) = 0$, *για κάθε* $x \in X$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, *για κάθε* $x, y \in X$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *για κάθε* $x, y, z \in X$

λέγεται *ψευδομετρική* στον X.

Για κάθε ψευδομετρική d στον τοπολογικό χώρο X ορίζουμε το σύνολο $B_d(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$. Η οικογένεια $\{B_d(x, r) | x \in X, r > 0\}$ είναι βάση για μιά τοπολογία στον X, την οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_d$, και την καλούμε τοπολογία που επάγεται από την d.

Έστω X τοπολογικός χώρος και d ψευδομετρική στον X. Η d θα λέγεται *συνεχής ψευδομετρική* στον X, αν d συνεχής ως απεικόνιση από τον $X \times X$ στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι, η d είναι συνεχής ψευδομετρική στον X αν και μόνον αν η $\mathcal{T}_d$ είναι ασθενέστερη της τοπολογίας του X αν και μόνον αν η $B_d(x, r)$ είναι περιοχή του x για κάθε $x \in X$ και $r > 0$. Αν, μάλιστα, η $\mathcal{T}_d$ συμπίπτει με την τοπολογία του X, τότε λέμε ότι η d είναι *συμβατή ψευδομετρική* για τον X, και ο X λέγεται *ψευδομετρικοποιήσιμος* χώρος. Ο χώρος (X, d), όπου d ψευδομετρική, θα λέγεται *ψευδομετρικός* χώρος.

Σκοπός μας, στη συνέχεια, είναι να χαρακτηρίσουμε τους πλήρους φυσιολογικούς χώρους μέσω ανοικτών -ως προς μια συνεχή ψευδομετρική d- καλυμμάτων.

Λήμμα 1.2. $(Frink)$ Έστω X σύνολο και έστω συνάρτηση $f : X \times X \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x, z) \leq 2max\{f(x, y), f(y, z)\}$ για κάθε $x, y, z \in X$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $x_0, ..., x_{n+1} \in X$ έχουμε $f(x_0, x_{n+1}) \leq 2f(x_0, x_1) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, x_{i+1}) + 2f(x_n, x_{n+1})$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Για $n = 1$, η ανισότητα γίνεται $f(x_0, x_2) \leq 2f(x_0, x_1) + 2f(x_1, x_2)$, η οποία ισχύει διότι $f(x_0, x_2) \leq 2max\{f(x_0, x_1), f(x_1, x_2)\}$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n < k$. Για να αποδείξουμε οτι ισχύει για k, έστω $x_0, ..., x_{k+1} \in X$. Αν έχουμε είτε ότι $f(x_0, x_{k+1}) \leq 2f(x_0, x_1)$ είτε ότι $f(x_0, x_{k+1}) \leq 2f(x_k, x_{k+1})$, τότε η ανισότητα ισχύει για $x_0, ..., x_{k+1}$. Υποθέτουμε, τώρα, ότι $f(x_0, x_{k+1}) > 2f(x_0, x_1)$ και $f(x_0, x_{k+1}) > 2f(x_k, x_{k+1})$.
Λόγω της δεύτερης ανισότητας και αφού

$$f(x_0, x_{k+1}) \leq 2max\{f(x_0, x_k), f(x_k, x_{k+1})\}$$

έχουμε ότι $f(x_0, x_{k+1}) \leq 2f(x_0, x_k)$.
Ορίζουμε l το ελάχιστο i, ώστε $f(x_0, x_{k+1}) \leq 2f(x_0, x_i)$.
Παρατηρούμε ότι, $1 < l < k + 1$ και $f(x_0, x_{k+1}) > 2f(x_0, x_{l-1})$. Αφού $f(x_0, x_{k+1}) \leq 2max\{f(x_0, x_{l-1}), f(x_{l-1}, x_{k+1})\}$ έπεται ότι

$$f(x_0, x_{k+1}) \leq 2f(x_{l-1}, x_{k+1}).$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $f(x_0, x_l) \leq 2f(x_0, x_1) + 4\sum_{i=1}^{l-2} f(x_i, x_{i+1}) + 2f(x_{l-1}, x_l)$ και $f(x_{l-1}, x_{k+1}) \leq 2f(x_{l-1}, x_l) + \sum_{i=l}^{k-1} f(x_i, x_{i+1}) + 2f(x_k, x_{k+1})$.
Προσθέντοτας κατά μέλη, έχουμε :

$$f(x_0, x_l) + f(x_{l-1}, x_{k+1}) \leq 2f(x_0, x_1) + \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i, x_{i+1}) + 2f(x_k, x_{k+1})$$

Καλούμε την παραπάνω σχέση $(*)$. Αφού $f(x_0, x_{k+1}) \leq 2f(x_0, x_l)$ και $f(x_0, x_{k+1}) \leq 2f(x_{l-1}, x_{k+1})$ προσθέτοντας κατά μέλη έπεται ότι $f(x_0, x_{k+1}) \leq f(x_0, x_{l-1}) + f(x_l, x_{k+1})$ και έπεται από την $(*)$ ότι η επιθυμητή ανισότητα ισχύει για $x_0, ..., x_{k+1}$.
Έτσι δείξαμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $n = k$. □

Ορισμός 1.3. Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathcal{U}$ οικογένεια υποσυνόλων του. Για κάθε $A \subseteq X$ θέτουμε $(\mathcal{U})_A = \{U \in \mathcal{U} | U \cap A \neq \emptyset\}$. Ορίζουμε $St(A, \mathcal{U}) = \bigcup(\mathcal{U})_A$ και $St^2(A, \mathcal{U}) = St(St(A, \mathcal{U}), \mathcal{U})$.

Πρόταση 1.4. Έστω X τοπολογικός χώρος και $\{\mathcal{U}_n | n = 1, 2, ...\}$ ακολουθία καλυμμάτων του X ώστε $St^2(x, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq St(x, \mathcal{U}_n)$ για κάθε $x \in X$ και κάθε

$n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ψευδομετρική d στον X ώστε $B_d(x, \frac{1}{2^{n+1}}) \subseteq St(x, \mathcal{U}_n) \subseteq B_d(x, \frac{1}{2^{n-1}})$ για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathcal{U}_0 = \{X\}$. Για $x, y \in X$ ορίζουμε $f : X \times X \to \mathbb{R}$, με $f(x,y) = \inf\{\frac{1}{2^n} | n = 1, 2, ... \textit{ και } x \in St(y, \mathcal{U}_n)\}$. Έστω $x, y, z \in X$. Θα δείξουμε ότι $f(x,z) \leq 2max\{f(x,y), f(y,z)\}$. Αν $max\{f(x,y), f(y,z)\} = 1$ η ανισότητα ειναι προφανής. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $max\{f(x,y), f(y,z)\} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\epsilon \in \mathbb{R}$ ώστε $max\{f(x,y), f(y,z)\} \leq \epsilon$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $max\{f(x,y), f(y,z)\} \leq \frac{1}{2^n} \leq \epsilon$. Άρα από τον ορισμό της f έχουμε ότι $x \in St(y, \mathcal{U}_n)$ και $y \in St(z, \mathcal{U}_n)$. Επομένως, $x \in St^2(z, \mathcal{U}_n) \subseteq St(z, \mathcal{U}_{n-1})$ και άρα $f(x,z) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2\epsilon$. Από τα προηγούμενα έπεται ότι $f(x,z) \leq 2max\{f(x,y), f(y,z)\}$. Ορίζουμε συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$, με $d(x,y) = \inf\{\sum_{i=0}^{n} f(z_i, z_{i+1}) | n \in \mathbb{N}, z_i \in X \textit{ γαι κάθε } i, z_0 = x \textit{ και } z_{n+1} = y\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι d ψευδομετρική. Έπεται άμεσα, επίσης, ότι $d \leq f$. Επιπλέον από το Λήμμα 1.2 έχουμε ότι $f \leq 4d$ (αφού $f \geq 0$). Έστω $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Για κάθε $y \in B_d(x, \frac{1}{2^{n+1}})$ έχουμε ότι $f(x,y) \leq 4d(x,y) < 4\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$ και άρα $f(x,y) \leq \frac{1}{2^n}$, δηλαδή $y \in St(x, \mathcal{U}_n)$. Άρα δείξαμε $B_d(x, \frac{1}{2^{n+1}}) \subseteq St(x, \mathcal{U}_n)$.
Για κάθε $z \in St(x, \mathcal{U}_n)$ έχουμε ότι $d(z,x) \leq f(z,x) \leq \frac{1}{2^n}$ και άρα $d(z,x) < \frac{1}{2^{n-1}}$. Έπεται ότι $St(x, \mathcal{U}_n) \subseteq B_d(x, \frac{1}{2^{n-1}})$.

□

Ορισμός 1.5. Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ οικογένειες υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{V}$ λέγεται *εκλέπτυνση* της $\mathcal{U}$ (ή ότι *εκλεπτύνει* το $\mathcal{U}$), αν για κάθε $V \in \mathcal{V}$ υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ ώστε $V \subseteq U$ και $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$. Μια εκλέπτυνση λέγεται *ανοικτή*, αν αποτελείται από ανοικτά σύνολα.

Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathcal{U}$ κάλυμμά του. Ένα κάλυμμά $\mathcal{V}$ του X λέγεται *κατά σημείο άστρο εκλέπτυνση* του καλύμματος $\mathcal{U}$, αν η οικογένεια $\{St(x, \mathcal{V}) | x \in X\}$ είναι εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$.

Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται *πλήρως φυσιολογικός*, αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει κατά σημείο άστρο ανοικτή εκλέπτυνση.

Θεώρημα 1.6. Κάθε ψευδομετρικοποιήσιμος χώρος είναι πλήρως φυσιολογικός.

Απόδειξη. Έστω X ψευδομετρικοποιήσιμος χώρος και d μια συμβατή ψευδομετρική για τον X. Έστω $\mathcal{U}$ ανοικτό κάλυμα του X. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε $r_x = \sup\{r \in [0,1] | B_d(x,r) \subseteq U \text{ για κάποιο } U \in \mathcal{U}\}$.
Παρατηρούμε ότι $r_x > 0$, διότι το $\mathcal{U}$ ανοικτό κάλυμμα. Θα δείξουμε ότι το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{V} = \{B_d(x, \frac{1}{4}r_x) | x \in X\}$ του X είναι κατά σημείο άστρο εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$. Έστω $x \in X$ και $U_x \in \mathcal{U}$ ώστε $B_d(x, \frac{5}{6}r_x) \subseteq U_x$. Δείχνουμε ότι $St(x, \mathcal{V}) \subseteq U_x$. Έστω $y \in X$ τέτοιο ώστε $x \in B_d(y, \frac{1}{4}r_y)$. Για να δειχθεί ότι $B_d(y, \frac{1}{4}r_y) \subseteq U_x$, δείχνουμε πρώτα ότι $r_y \leq \dfrac{5}{3}r_x$.
Αυτό ισχύει αν έχουμε $r_x = 1$.
Αν $r_x < 1$ το $B_d(x, \frac{5}{4}r_x)$ δεν περιέχεται σε κανένα $U \in \mathcal{U}$. Αφού $B_d(x, \frac{5}{4}r_x) \subseteq B_d(y, \frac{1}{4}r_y + \frac{5}{4}r_x)$, έπεται ότι πρέπει $\dfrac{1}{4}r_y + \dfrac{5}{4}r_x \geq r_y$. Άρα ισχύει πάλι $r_y \leq \dfrac{5}{3}r_x$.
Αφού $x \in B_d(y, \frac{1}{4}r_y)$, έχουμε ότι $B_d(y, \frac{1}{4}r_y) \subseteq B_d(x, \frac{2}{4}r_y) \subseteq B_d(x, \frac{5}{6}r_x) \subseteq U_x$.
Άρα $St(x, \mathcal{V}) \subseteq U_x$.

□

Καταλήγουμε στο θεώρημα το οποίο θέλαμε, το οποίο στη συνέχεια θα μας χρησιμεύσει για να αποδείξουμε αρκετές ιδιότητες για τους πλήρως φυσιολογικούς χώρους.

Ορισμός 1.7. Έστω d ψευδομετρική στον X. Ένα κάλυμμα $\mathcal{U}$ του X λέγεται *d-ομοιόμορφο* αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η οικογένεια $\{B_d(x,r) | x \in X\}$ να είναι εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$.

Θεώρημα 1.8. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι πλήρως φυσιολογικός.

(ii) Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X είναι $d-$ομοιόμορφο για μια συνεχή ψευδομετρική d στον X.

(iii) Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει $\mathcal{T}_d-$ανοικτή εκλέπτυνση για κάποια συνεχή ψευδομετρική στον X.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Υποθέτουμε ότι ο X είναι πλήρως φυσιολογικός, και έστω $\mathcal{U}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Θέτουμε $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι ο X είναι πλήρως φυσιολογικός, ορίζουμε με επαγωγή ακολουθία ανοικτών καλυμματων $\{\mathcal{U}_n | n \in \mathbb{N}\}$ ώστε $\mathcal{U}_n$ να είναι κατά σημείο άστρο εκλέπτυνση του $\mathcal{U}_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την Πρόταση 1.4 υπάρχει ψευδομετρική

d στον X ώστε $B_d(x, \frac{1}{2^{n+1}}) \subseteq St(x, \mathcal{U}_n) \subseteq B_d(x, \frac{1}{2^{n-1}})$ για κάθε $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

Αφού τα $\mathcal{U}_n$ είναι ανοικτά, η d είναι συνεχής. Επίσης, έχουμε ότι η οικογένεια $\{B_d(x, \frac{1}{4}) | x \in X\}$ εκλεπτύνει την $\mathcal{U}$, διότι $\mathcal{U}_1$ κατά σημείο άστρο εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$ και έτσι έχουμε ότι $B_d(x, \frac{1}{4}) \subseteq St(x, \mathcal{U}_1)$ για κάθε $x \in X$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Προφανές.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Έστω $\mathcal{U}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει συνεχής ψευδομετρική d του X και εκλέπτυνση $\mathcal{V}$ του $\mathcal{U}$ ώστε $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_d$. Από το Θεώρημα 1.6, το $\mathcal{T}_d-$ανοικτό κάλυμμα του X έχει κατά σημείο άστρο $\mathcal{T}_d-$ανοικτή εκλέπτυνση $\mathcal{W}$. Αφού $\mathcal{V}$ είναι εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$, η $\mathcal{W}$ είναι επίσης κατά σημείο άστρο εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$. Αφού d είναι συνεχής ψευδομετρική, το $\mathcal{T}_d-$ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{W}$ είναι ανοικτό κάλυμα του X. □

Βασικό μας στόχο, στη συνέχεια, αποτελεί το θεώρημα του $A.H.Stone$, το οποίο μας δίνει την ισοδυναμία μεταξύ $Hausdorff$ πλήρως φυσιολογικών χώρων και παρασυμπαγών χώρων.

Ορισμός 1.9. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο συναρτήσεων $\{f_i | i \in I\}$, με $f_i : X \to \mathbb{R}$, λέγεται *φραγμένο*, αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f_i(x)| \leq M$ για κάθε $i \in I$ και $x \in X$.

Ορισμός 1.10. Έστω $\mathcal{U}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X και έστω $x \in X$. Η οικογένεια $\mathcal{U}$ λέγεται *κατά σημείο πεπερασμένη στο* x, αν η οικογένεια $(\mathcal{U})_x$ είναι πεπερασμένη και λέγεται *τοπικά πεπερασμένη στο* x, αν υπάρχει περιοχή V του x ώστε η οικογένεια $(\mathcal{U})_V$ να είναι πεπερασμένη.

Η *οικογένεια* $\mathcal{U}$ λέγεται κατά σημείο πεπερασμένη (αντίστοιχα, τοπικά πεπερασμένη), αν η $\mathcal{U}$ είναι κατά σημείο πεπερασμένη (αντίστοιχα τοπικά πεπερασμένη) σε κάθε $x \in X$.

Αν μια οικογένεια υποσυνόλων του X δίνεται ως $\{U_i | i \in I\}$, τότε , αντίστοιχα με πρίν, λέμε ότι αυτή είναι κατά σημείο πεπερασμένη , αν το σύνολο $\{i \in I | x \in U_i\}$ είναι πεπρασμένο για κάθε $x \in X$. Ανάλογος είναι ο ορισμός της τοπικά πεπερασμένης οικογένειας $\{U_i | i \in I\}$.

Ορισμός 1.11. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και συνάρτηση $f : X \to Y$. Ορίζουμε $Supp(f) = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$.

Πρόταση 1.12. Έστω X τοπολογικός χώρος και $\{f_i|i \in I\}$ φραγμένο σύνολο συναρτήσεων, ώστε η οικογένεια $\{Supp(f_i)|i \in I\}$ να είναι τοπικά πεπερασμένη. Για κάθε $i \in I$, ορίζουμε ψευδομετρική d_i στον X με $d_i(x,y) = |f_i(x) - f_i(y)|$. Τότε η $\sup_{i \in I} d_i$ είναι συνεχής ψευδομετρική στον X.

Απόδειξη. Έστω $d = \sup_{i \in I} d_i$. Παρατηρούμε ότι η d είναι ψευδομετρική στον X. Θα δείξουμε ότι η d είναι συνεχής. Έστω $(x,y) \in X \times X$. Τότε υπάρχουν περιοχές V του x και W του y τέτοιες ώστε τα $J = \{i \in I|Supp(f_i) \cap V \neq \emptyset\}$ και $K = \{i \in I|Supp(f_i) \cap W \neq \emptyset\}$ να είναι πεπερασμένα. Θέτουμε $L = J \cup K$, και παρατηρούμε ότι $d(z,u) = \max_{i \in L} d_i(z,u)$ για κάθε $(z,u) \in V \times W$. Παρατηρούμε επίσης ότι η $\max_{i \in L} d_i$ είναι συνεχής στην περιοχή $V \times W$ του (x,y). Έτσι έπεται το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.13. Ένας T_1 τοπολογικός χώρος λέγεται *φυσιολογικός* αν για κάθε ζεύγος F_1, F_2 από ξένα, κλειστά υποσύνολα του X, υπάρχει ζεύγος G_1, G_2 ξένων, ανοικτών υποσυνόλων του X, ώστε να ισχύει $F_1 \subseteq G_2$ και $F_2 \subseteq G_2$.

Λήμμα 1.14. Έστω $\mathcal{U}$ κατά σημείο πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα ενός φυσιολογικού χώρου X. Τότε υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{V_U|U \in \mathcal{U}\}$ του X ώστε $\overline{V_U} \subseteq U$ για κάθε $U \in \mathcal{U}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U} = \{U_a|0 < a < \lambda\}$,όπου λ διατακτικός, ώστε $U_a \neq U_b$ όταν $a \neq b$. Θέτουμε $U_0 = \emptyset$. Θα χρησιμοποιήσουμε υπερπεπερασμένη επαγωγή για να ορισουμε ανοικτά σύνολα V_a για $a < \lambda$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε a :

$(i)_a$ $\overline{V}_a \subseteq U_a$

$(ii)_a$ Η οικογένεια $\{V_\beta|\beta \leq a\} \cup \{U_\beta|a < b < \lambda\}$ καλύπτει τον X .

Ξεκινάμε την επαγωγή θέτοντας $V_0 = \emptyset$.
Υποθέτουμε ότι $\gamma \leq \lambda$ και ότι V_a ορίστηκαν για κάθε $\alpha < \gamma$ ώστε οι συνθήκες $(i)_a, (ii)_a$ να ισχυουν.
Ισχυρισμός: Η οικογένεια $\{V_a : a < \gamma\} \cup \{U_\beta : \gamma \leq \beta < \lambda\}$ κάλυπτει τον X. Πράγματι, υποθέτουμε το αντίθετο, οτι δηλαδή υπάρχει $x \in X$ που δεν καλύπτεται. Αφού $\mathcal{U}$ είναι κατά σημείο πεπερασμένο, το $A = \{\alpha < \lambda|x \in U_a\}$

είναι πεπερασμένο άρα μπορούμε να θεωρήσουμε το $\delta = \max A$. Εφόσον το $x \notin \bigcup\{U_\beta | \gamma \leq \beta < \lambda\}$ έχουμε ότι $\delta < \gamma$. Από την επαγωγική υπόθεση, η $(ii)_\delta$ ισχύει. Από τον ορισμό του δ, έχουμε ότι $x \notin \bigcup\{U_\beta | \delta < \beta < \lambda\}$ και αφού επίσης η $(ii)_\delta$ ισχύει, έπεται οτι η οικογένεια στον *Ισχυρισμό* δεν καλύπτει τον X, άτοπο.

Αν $\gamma = \lambda$, ο *Ισχυρισμός* δίνει ότι η οικογένεια $\{V_a | \alpha < \lambda\}$ καλύπτει τον X. Στην περίπτωση αυτήν έχουμε τελειώσει.

Αν $\gamma < \lambda$, τότε ο *Ισχυρισμός* δίνει ότι το κλειστό

$$F = X \setminus (\{V_\alpha : \alpha < \gamma\}\} \cup \{U_\beta | \gamma < \beta < \lambda\})$$

περιέχεται στο U_γ. Αφού ο X είναι φυσιολογικός , υπάρχει ανοικτό σύνολο V_γ ώστε $F \subseteq V_\gamma \subseteq \overline{U_\gamma}$. Τότε οι συνθήκες $(i)_\gamma, (ii)_\gamma$ ικανοποιούνται και έτσι ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα. □

Πρόταση 1.15. Έστω X φυσιολογικός χώρος και $\mathcal{U}$ ένα τοπικά πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του. Τότε το $\mathcal{U}$ είναι $d-$ομοιόμορφο για κάποια συνεχή ψευδομετρική d στον X.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.14 υπάρχει κλειστό κάλυμμα $\{F_U | U \in \mathcal{U}\}$ του X τέτοιο ώστε $F_U \subseteq U$ για κάθε $U \in \mathcal{U}$. Από το λήμμα $Urysohn$ έχουμε ότι για κάθε $U \in \mathcal{U}$, υπάρχει συνεχής $f_U : X \to [0,1]$ ώστε $f_U(F_U) \subseteq \{1\}$ και $Supp(f_U) \subseteq U$. Για κάθε $U \in \mathcal{U}$, ορίζουμε ψευδομετρική d_U στον X με $d_U(x,y) = |f_U(x) - f_U(y)|$. Το σύνολο $\{Supp(f_U) | U \in \mathcal{U}\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο και λόγω της Πρόταση 1.12 η $d = \sup\limits_{U \in \mathcal{U}} d_U$ είναι συνεχής ψευδομετρικής στον X.

Θα δείξουμε ότι το κάλυμμα $\mathcal{U}$ είναι $d-$ομοιόμορφο. Έστω $x \in X$. Τότε υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $x \in F_U$, και άρα $f_U(x) = 1$ και $f_U(y) = 0$ για κάθε $y \in X \setminus U$. Συνεπώς, έχουμε ότι $B_d(x,1) \subseteq B_{d_U}(x,1) \subseteq U$. Οπότε η οικογένεια $\{B_d(z,1) | z \in X\}$ εκλεπτύνει το $\mathcal{U}$. □

Θα δώσουμε, στη συνέχεια, κάποιους βασικούς ορισμούς προκειμένου να αναφερθούμε στην έννοια των διαμερίσεων της μονάδας.

Ορισμός 1.16. Ορίζουμε το άθροισμα μη αρνητικών πραγματικών αριθμών r_i, $i \in I$, ως εξής: $\sum\limits_{i \in I} r_i = \sup\{\sum\limits_{j \in J} r_j | J \subseteq I \textit{ και } J \textit{ πεπερασμένο } \}$.

Αν X τοπολογικός χώρος, μία *διαμέριση της μονάδας* για τον X λέγεται μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $\{f_i | i \in I\}$, με $f_i : X \to [0,1]$, ώστε να ισχύει $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. Παρατηρούμε τότε οτι η οικογένεια $\{Supp(f_i) | i \in I\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X.

Μια διαμέριση της μονάδας λέμε ότι *κυριαρχείται* από το κάλυμμα $\mathcal{U}$ του X, αν η οικογένεια $\{Supp(f_i) | i \in I\}$ είναι εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$.

Τέλος, λέμε ότι μια διαμέριση της μονάδας είναι *τοπικά πεπερασμένη*, αν η οικογένεια $\{Supp(f_i) | i \in I\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη.

Παρατηρούμε ότι αν το κάλυμμα $\mathcal{U}$ του X είναι τοπικά πεπερασμένο και η διαμέριση της μονάδας $\{f_i | i \in I\}$ κυριαρχείται από αυτό τότε και η διαμέριση της μονάδας είναι τοπικά πεπερασμένη. Στην συνέχεια, όποτε έχουμε μια διαμέριση της μονάδας να κυριαρχείται από ένα κάλυμμα το οποίο είναι τοπικά πεπερασμένο, δεν θα κάνουμε ιδιαίτερη μνεία στο ότι είναι και αυτή τοπικά πεπερασμένη. Θα αναφέρουμε, απλά, ότι κυριαρχείται από το κάλυμμα.

Το παρακάτω θεώρηματα, μας δείχνουν την σχέση που υπάρχει μεταξύ των ψευδομετρικοποιήσιμων τοπολογικών χώρων και των διαμερίσεων της μονάδας.

Θεώρημα 1.17. Κάθε ανοικτό κάλυμμα ενός ψευδομετρικού χώρου, έχει διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται απ΄ αυτό.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{G}$ ανοικτό κάλυμμα ενός ψευδομετρικού χώρου (X,d). Από το Θεώρημα καλής διάταξης, μπορούμε να γράψουμε $\mathcal{G} = \{G_a | a < \lambda\}$, όπου λ διατακτικός αριθμός. Θέτουμε $\sup \emptyset = 0$. Για κάθε $a \leq \lambda$, ορίζουμε τη συνάρτηση $g_a : X \to [0,1]$ με $g_a(x) = min(1, \sup_{\beta<\alpha} d(x, X \setminus G_\beta))$. Η g_a είναι συνεχής, διότι για κάθε $x, y \in X$ ισχύει

$$|g_a(x) - g_a(y)| \leq \sup_{\beta<\alpha} |d(x, X \setminus G_\beta) - d(y, X \setminus G_\beta)| \leq d(x,y).$$

Για κάθε $a < \lambda$, θέτουμε $f_a = g_{a+1} - g_a$ και παρατηρούμε ότι η $f_a : X \to [0,1]$ είναι συνεχής. Αν για $x \in X$ ισχύει $f_a(x) > 0$ τότε έχουμε ότι $g_{a+1}(x) > g_a(x)$ και άρα $\sup_{\beta \leq a} d(x, X \setminus G_\beta) > \sup_{\beta<\alpha} d(x, X \setminus G_\beta)$. Συνεπώς, $d(x, X \setminus G_a) > 0$. Έχουμε, λοιπόν, ότι $Supp(f_a) \subseteq G_a$.

Χρησιμοποιούμε υπερπεπερασμένη επαγωγή για να δείξουμε ότι $\sum_{\beta<\alpha} f_a = g_a$ για

κάθε $a \leq \lambda$. Η ισότητα ισχύει για $a = 0$, διότι $\sum_{\beta<0} f_\beta \equiv 0 \equiv g_0$. Υποθέτουμε οτι $\sum_{\beta<\gamma} f_\beta = g_a$ για κάθε $\gamma < a$, όπου $0 < \alpha \leq \lambda$. Παρατηρούμε ότι $g_a = \sup_{\gamma<a} g_{\gamma+1}$. Για κάθε $\gamma < a$ έχουμε ότι $f_\gamma = g_{\gamma+1} - g_\gamma$ και άρα από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι $g_{\gamma+1} = f_\gamma + g_\gamma = f_\gamma + \sum_{\beta<\gamma} f_\beta = \sum_{\beta\leq\gamma} f_\beta$. Άρα, έχουμε ότι $g_a = \sup_{\gamma<a} \sum_{\beta\leq\gamma} f_\beta = \sum_{\beta<\alpha} f_\beta$. Και έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγή.
Έχουμε, λοιπόν, ότι $\sum_{a<\lambda} f_a = g_\lambda$. Αφού το $\mathcal{G}$ είναι ανοικτό κάλυμμα, έπεται ότι $g_\lambda(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Τότε, η οικογένεια $\{\frac{f_a}{g_\lambda} | a < \lambda\}$ είναι μια διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από το $\mathcal{G}$. □

Πρόταση 1.18. Αν $\{V_a | a \in A\}$ τοπικά πεπρασμένο ανοικτό κάλυμμα ενός φυσιολογικού χώρου X, τότε υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{f_a | a \in A\}$ που κυριαρχείται από αυτό, δηλαδή για κάθε $a \in A$ να ισχύει $Supp(f_a) \subseteq V_a$.

Απόδειξη. **α τρόπος:** Έπεται από την Πρόταση 1.15 και το Θεώρημα 1.17.
β τρόπος: από το Λήμμα 1.14 υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{W_a | a \in A\}$ του X ώστε $\overline{W_a} \subseteq V_a$ για κάθε $x \in X$. Αφού ο X είναι φυσιολογικός μπορούμε να βρούμε συνεχείς $q_a : X \to [0, 1]$ ώστε

(i) $q_a(x) = 1$, για $x \in \overline{W}_a$,

(ii) $q_a(x) = 0$, για $x \in X \setminus V_a$.

Ορίζουμε $f_a : X \to [0, 1]$, με $f_a(x) = \dfrac{q_a(x)}{\sum_{b\in A} q_b}$. Για κάθε $a \in A$ η f_a είναι καλά ορισμένη αφού το κάλυμμα $\{W_a | a \in A\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο. Η οικογένεια $\{f_a | a \in A\}$ είναι η ζητούμενη διάμεριση της μονάδας.

□

Θεώρημα 1.19. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι ψευδομετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν η τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι η ασθενής τοπολογία που επάγεται από μία διαμέριση της μονάδας.

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι ψευδομετρικοποιήσιμος. Θεωρούμε ψευδομετρική d στον X ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Από το Θεώρημα 1.17, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{f_i | i \in I_n\}$ του X που κυριαρχείται από το ανοικτό κάλυμμα $\{B_d(x, \frac{1}{n}) | x \in X\}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_n \cap I_k = \emptyset$ για $n \neq k$. Θέτουμε $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ και για κάθε $i \in I$ ορίζουμε $g_i : X \to [0, 1]$, με $g_i = \dfrac{1}{2n} f_i$ για $i \in I_n$. Τότε η οικογένεια $\{g_i | i \in I\}$ είναι διαμέριση της μονάδας για τον X.

Η οικογένεια $\{g_i | i \in I\}$ αποτελείται από $\mathcal{T}_d-$συνεχείς συναρτήσεις, και άρα $\mathcal{T}_W \subseteq \mathcal{T}_d$, όπου $\mathcal{T}_W$ η ασθενής τοπολογία που επάγεται στον X από την διαμέριση της μονάδας.

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_W$. Έστω $x \in X$ και $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{2}{n} < \epsilon$ και $i \in I_n$ ώστε $f_i(x) > 0$. Έστω $z \in X$ τέτοιο ώστε $Supp(f_i) \subseteq B_d(z, \frac{1}{n})$. Τότε έχουμε ότι $x \in B_d(z, \frac{1}{n})$, και άρα $B_d(z, \frac{1}{n}) \subseteq B_d(x, \frac{2}{n})$. Έπεται ότι $x \in Supp(g_i) \subseteq B_d(x, \epsilon)$, όπου το $Supp(g_i)$ είναι $\mathcal{T}_d-$ανοικτό σύνολο. Άρα $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_W$.

Για το αντίστροφο του θεωρήματος, υποθέτουμε ότι η τοπολογία $\mathcal{T}$ του X είναι η ασθενής τοπολογία που επάγεται την διαμέριση της μονάδας $\{g_i | i \in I\}$. Ορίζουμε ψευδομετρική $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x, y) = \sup\limits_{i\in I} |g_i(x) - g_i(y)|$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

Για την $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ η $B_d(x, r)$ είναι περιοχή του x ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$. Έστω $x \in X$ και $r > 0$. Αφού $\sum\limits_{i\in I} g_i(x) = 1$, υπάρχει $J \subseteq I$ πεπερασμένο ώστε $\sum\limits_{i\in J} g_i(x) > 1 - \dfrac{r}{3}$. Θέτουμε, $n = |J|$. Για $i \in J$ οι συναρτήσεις g_i είναι $\mathcal{T}-$συνεχείς, και άρα υπάρχει V περιοχή του x, ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$, τέτοια ώστε $|g_i(z) - g_i(x)| < \dfrac{r}{3n}$, για κάθε $z \in V$ και $i \in J$. Έστω $v \in V$. Τότε $\sum\limits_{i\in J} g_i(v) > \sum\limits_{i\in J} (g_i(x) - \dfrac{r}{3n}) > 1 - \dfrac{r}{3} - \dfrac{r}{3} = 1 - \dfrac{2r}{3}$ και έπεται ότι $g_i(v) < \dfrac{2r}{3}$ για κάθε $i \in I \setminus J$. Από την επιλογή του J έπεται, τώρα, ότι $|g_i(v) - g_i(x)| < \dfrac{2r}{3}$ για κάθε $i \in I \setminus J$. Αφού $|g_i(v) - g_i(x)| < \dfrac{r}{3}$ για κάθε $i \in J$, ισχύει ότι $d(v, x) = \sup\limits_{i\in I} |g_i(v) - g_i(x)| \leq \dfrac{2r}{3}$, άρα $v \in B_d(x, r)$. Επομένως, $V \subseteq B_d(x, r)$, και άρα η $B_d(x, r)$ είναι περιοχή του x ώς προς $\mathcal{T}$.

Η οικογένεια $\mathcal{C} = \{g_i^{-1}(G) | i \in I \text{ και } G \subseteq \mathbb{R} \text{ ανοικτό}\}$ είναι υποβάση της $\mathcal{T}$. Για να δείξουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$, αρκεί να δειχθεί $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}_d$. Έστω $i \in I$, $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό και $x \in g_i^{-1}(G)$. Αφού $g_i(x) \in G$, και G είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $(g(x) - r, g(x) + r) \subseteq G$. Άρα $B_d(x, r) \subseteq g_i^{-1}(G)$, διότι αν $d(y, x) < r$ τότε $|g_i(y) - g_i(x)| < r$ και άρα $g_i(y) \in (g(x) - r, g(x) + r) \subseteq G$, απ' όπου έχουμε ότι $y \in g_i^{-1}(G)$. Τελικά, $g_i^{-1}(G) \in \mathcal{T}_d$. □

Θεώρημα 1.20. Ένας τοπολογικός χώρος είναι πλήρως φυσιολογικός αν και μόνον αν για κάθε ανοικτό κάλυμμά του υπάρχει διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από αυτό.

Απόδειξη. Έστω X πλήρως φυσιολογικός, και $\mathcal{U}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Από το Θεώρημα 1.8 υπάρχει συνεχής ψευδομετρική d στον X και μια $\mathcal{T}_d-$ανοικτή εκλέπτυνση $\mathcal{V}$ του $\mathcal{U}$. Από το Θεώρημα 1.17 ο ψευδομετρικός χώρος (X, d) έχει διαμέριση της μονάδας $\{f_i | i \in I\}$ που κυριαρχείται από το $\mathcal{V}$. Αφού η d είναι συνεχής στον X, η οικογένεια $\{f_i | i \in I\}$ είναι επίσης διαμέριση της μονάδας για τον X. Επίσης, αφού το $\mathcal{V}$ εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$, η διαμέριση της μονάδας $\{f_i | i \in I\}$ κυριαρχείται από το $\mathcal{U}$.
Για το αντίστροφο του θεωρήματος, υποθέτουμε ότι για κάθε ανοικτό κάλυμμα του X υπάρχει διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από αυτό. Για να δείξουμε ότι ο τοπολογικός χώρος X είναι πλήρως φυσιολογικός, έστω $\mathcal{U}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Έστω $\{f_i | i \in I\}$ η διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από αυτό. Από το Θεώρημα 1.19, υπάρχει ψευδομετρική d του X τέτοια ώστε η ασθενής τοπολογία που επάγεται στον X από την $\{f_i | i \in I\}$ να συμπίπτει με την τοπολογία $\mathcal{T}_d$. Για κάθε $i \in I$ η f_i είναι συνεχής στον X, επομένως η ασθενής τοπολογία που επάγεται από την διαμέριση της μονάδας $\{f_i | i \in I\}$ είναι ασθενέστερη της τοπολογίας του X. Συνεπώς, η d είναι συνεχής ψευδομετρική στον X, και επιπλέον ισχύει ότι το $\mathcal{T}_d-$ανοικτό κάλυμμα $\{Supp(f_i) | i \in I\}$ του X εκλεπτύνει το $\mathcal{U}$. Δείξαμε, δηλαδή, ότι κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει $\mathcal{T}_d-$εκλέπτυνση για μιά συνεχή ψευδομετρική στον X. Άρα, από το Θεώρημα 1.8 ο X είναι πλήρως φυσιολογικός. □

Δείξαμε στο παραπάνω θεώρημα τον τρόπο με τον οποίο χαρακτηρίζονται οι πλήρως φυσιολογικοί χώροι μέσω των διαμερίσεων της μονάδας. Επιπλέον, μπορούμε να έχουμε αυτήν τη διαμέριση της μονάδας να είναι και τοπικά πεπερασμένη.

Λήμμα 1.21. Έστω $\{f_i | i \in I\}$ μια διαμέριση της μονάδας στον τοπολογικό χώρο X. Για κάθε $x \in X$ και $\epsilon > 0$, υπάρχουν V περιοχή του x και πεπερασμένο $I_0 \subseteq I$ ώστε $\sum_{i \in I \setminus I_0} f_i(z) < \epsilon$ για κάθε $z \in V$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε συνεχή $g : X \to [0,1]$ και για κάθε $x_0 \in X$ για το οποίο $g(x_0) > 0$, υπάρχει περιοχή V_0 του x_0 και $I_0 \subseteq I$ πεπερασμένο ώστε $f_i(x) < g(x)$ για κάθε $i \in I \setminus I_0$ και $x \in V$. $(*)$

Πράγματι, κάθε σύνολο $I_0 = \{i_1, ..., i_n\} \subseteq I$ ώστε να ισχύει $1 - \sum_{k=1}^{n} f_{i_k}(x_0) < g(x_0)$ και το ανοικτό σύνολο $V_0 = \{x \in X | 1 - \sum_{k=1}^{n} f_{i_k}(x) < g(x)\}$ ικανοποιεί την $(*)$. □

Λήμμα 1.22. Έστω $\{f_i | i \in I\}$ μια διαμέριση της μονάδας στον τοπολογικό χώρο X και $J \subseteq I$. Τότε οι αυναρτήσεις $\sum_{i \in J} f_i$ και $\sup_{i \in J} f_a$ είναι συνεχείς.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το προηγούμενο λήμμα. □

Πρόταση 1.23. Έστω $\{f_i | i \in I\}$ διαμέριση της μονάδας στον τοπολογικό χώρο X. Τότε υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{g_i | i \in I\}$ στον X τέτοια ώστε $Supp(g_i) \subseteq Supp(f_i)$ για κάθε $i \in I$ και η οικογένεια $\{Supp(g_i) | i \in I\}$ να είναι τοπικά πεπερασμένη.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα, η συνάρτηση $h = \sup_{i \in I} f_i$ είναι συνεχής. Συνεπώς για κάθε $x \in X$ το σύνολο $U_i = \{x \in X | f_i(x) > \frac{1}{2} h(x)\}$ είναι ανοικτό. Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$ καλύπτει τον X. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{U}$ είναι τοπικά πεπερασμένη. Έστω $x \in X$. Τότε υπάρχει $i_x \in I$ τέτοιο ώστε $f_{i_x}(x) > \frac{3}{4} h(x)$. Θέτουμε $V = \{z \in X | f_{i_x}(z) > \frac{3}{4} h(x)\}$. Από το Λήμμα 1.21 έπεται ότι υπάρχει περιοχή W του x και πεπερασμένο $I_0 \subseteq I$ ώστε να έχουμε $f_i(z) < \frac{1}{4} h(x)$, για κάθε $z \in W$ και $i \in I \setminus I_0$. Θα δείξουμε ότι $\{i \in I | U_i \cap V \cap W \neq \emptyset\} \subseteq I_0$. Πράγματι, ας υποθέσουμε οτι υπάρχει $i \in I \setminus I_0$ και $z \in U_i \cap V \cap W$. Τότε έχουμε ότι $f_i(z) > \frac{1}{2} h(z)$, $f_{i_x}(z) > \frac{3}{4} h(x)$ και $f_i(z) < \frac{1}{4} h(x)$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\frac{1}{4} h(x) > f_i(z) > \frac{1}{2} h(z)$ και $h(z) \geq f_{i_x}(z) > \frac{3}{4} h(x)$, αυτό όμως είναι αντίφαση. Έπεται, λοιπόν, ότι $\mathcal{U}$ είναι τοπικά πεπερασμένη.

Για κάθε $i \in I$, η συνάρτηση $k_i = 0 \vee (f_i - \frac{1}{2} h)$ είναι συνεχής και $Supp(k_i) = U_i$. Άρα για την οικογένεια $\{k_i | i \in I\}$ το $\{Supp(k_i) | i \in A\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο και η συνάρτηση $k = \sum_{i \in I} k_i$ είναι συνεχής. Αν θέσουμε $g_i = \frac{k_i}{k}$ για κάθε $i \in I$ τότε έχουμε διαμέριση της μονάδας $\{g_i | i \in I\}$ με τις ζητούμενες απαιτήσεις.

$\square$

Είμαστε σε θέση τώρα να περάσουμε στο θεώρημα του $A.H.Stone$. Προηγουμένως, διατυπώνουμε τον ορισμό των παρασυμπαγών χώρων και αποδεικνύουμε ότι κάθε παρασυμπαγής χώρος είναι φυσιολογικός.

Ορισμός 1.24. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται παρασυμπαγής αν είναι $Hausdorff$ και κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση.

Πρόταση 1.25. Κάθε παρασυμπαγής χώρος είναι φυσιολογικός.

Απόδειξη. Έστω X παρασυμπαγής χώρος. Για να δείξουμε ότι ο X είναι φυσιολογικός, δείχνουμε πρώτα ότι είναι κανονικός. Έστω $F \subseteq X$ και $x \in X \setminus F$. Αφού X είναι $Hausdorff$ για κάθε $z \in F$ υπάρχει ανοικτή περιοχή του z, έστω U_z, ώστε $x \notin \overline{U_z}$. Η οικογένεια $\mathcal{U} = \{U_z | z \in F\} \bigcup \{X \setminus F\}$, είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Έστω $\mathcal{V}$ τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$. Για κάθε $V \in (\mathcal{V})_F$, υπάρχει $z \in F$ ώστε $V \subseteq U_z$, και άρα έχουμε ότι $\overline{V} \subseteq \overline{U_z} \subseteq X \setminus \{x\}$. Αφού το $\mathcal{V}$ είναι τοπικά πεπερασμένο, έχουμε ότι $\overline{St(F, \mathcal{V})} = \overline{\bigcup (\mathcal{V})_F} = \bigcup \{\overline{V} | V \in (\mathcal{V})_F\} \subseteq X \setminus \{x\}$. Από τα προηγούμενα, τα σύνολα $St(F, \mathcal{V})$ και $X \setminus \overline{St(F, \mathcal{V})}$ είναι ξένα ανοικτά και περιέχουν τα F και x αντίστοιχα. Άρα ο X είναι κανονικός.

Για να δείξουμε ότι ο X φυσιολογικός, έστω $F \subseteq X$, $H \subseteq X$ ξένα κλειστά. Από το προηγούμενο μέρος της απόδειξης, για κάθε $x \in F$, υπάρχει ανοικτή περιοχή G_x του x ώστε $\overline{G_x} \cap H = \emptyset$. Έστω $\mathcal{V}$ τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση του ανοικτού καλύμματος $\mathcal{G} = \{G_x | x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ του X. Με ένα όμοιο -με το παραπάνω- επιχείρημα, έχουμε ότι τα σύνολα $St(F, \mathcal{V})$ και $X \setminus \overline{St(F, \mathcal{V})}$ είναι ξένα ανοικτά και περιέχουν τα F και H, αντίστοιχα. Επομένως ο X είναι φυσιολογικός. $\square$

Θεώρημα 1.26. ($A.H.Stone$) Ένας χώρος $Hausdorff$ είναι παρασυμπαγής αν και μόνον αν είναι πλήρως φυσιολογικός.

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι παρασυμπαγής. Από την Πρόταση 1.25 ο X είναι φυσιολογικός. Αφού κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση, από την Πρόταση 1.15 έπεται ότι κάθε ανοικτό κάλυμμα του X είναι $d-$ομοιόμορφο για μια συνεχή ψευδομετρική d στον X, και άρα από το Θεώρημα 1.8, ο X είναι πλήρως φυσιολογικός.
Για την αντίστροφη κατεύθυνση του θεωρήματος, έστω X πλήρως φυσιολογικός χώρος. Από το Θεώρημα 1.20 και την Πρόταση 1.23, κάθε ανοικτό κάλυμμα έχει τοπικά πεπερασμένη διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από αυτό. Συνεπώς, αφού X είναι $Hausdorff$, τελικά ο X είναι παρασυμπαγής. □

Από το θεώρημα του $A.H.Stone$ σε συνδυασμό με τα Θεωρήματα 1.8, 1.20 και την Πρόταση 1.23 έχουμε τους παρακάτω χαρακτηρισμούς των παρασυμπαγών χώρων.

Θεώρημα 1.27. Για έναν $Hausdorff$ τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(i) X είναι παρασυμπαγής.

(ii) Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X, έχει ανοικτή κατά σημείο άστρο εκλέπτυνση.

(iii) Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X, έχει διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από αυτό.

(iv) Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X, έχει τοπικά πεπερασμένη διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από αυτό.

(v) Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X, είναι d ομοιόμορφο για κάποια συνεχή ψευδομετρική d του X.

(vi) Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X, έχει $\mathcal{T}_d-$ ανοικτή εκλέπτυνση για κάποια συνεχή ψευδομετρική.

Θεώρημα 1.28. Κάθε μετρικός χώρος είναι παρασυμπαγής.

Απόδειξη. Έπεται από το Θεώρημα 1.17 και το Θεώρημα 1.27 $((iii) \Rightarrow (i))$. □

Παρακάτω θα αναφερθούμε σε κάποιες άλλες ιδιότητες που σχετίζονται με τους παρασυμπαγείς τοπολογικούς χώρους.

Λήμμα 1.29. Κάθε ανοικτό κάλυμμα ενός παρασυμπαγούς χώρου έχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση από κλειστά υποσύνολα του.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U}$ ανοικτό κάλυμμα ενός παρασυμπαγούς κανονικού χώρου X. Λόγω της κανονικότητας, υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{V}$ του X τέτοιο ώστε η οικογένεια $\{\overline{V}|V \in \mathcal{V}\}$ να είναι εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$. Αφού ο X είναι παρασυμπαγής, η $\mathcal{V}$ έχει τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση, ας την πούμε $\mathcal{W}$. Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\{\overline{W}|W \in \mathcal{W}\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$ από κλειστά σύνολα. □

Ορισμός 1.30. Μια οικογένεια $\mathcal{U}$ από υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται *διακριτή*, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή του που τέμνει το πολύ ένα στοιχείο της οικογένειας.

Μια οικογένεια $\mathcal{U}$ από υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται *$\sigma-$τοπικά πεπερασμένη* (αντίστοιχα, *$\sigma-$διακριτή*), αν $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ όπου κάθε οικογένεια $\mathcal{U}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη (αντίστοιχα, διακριτή).

Παρατήρηση:

Μια οικογένεια $\mathcal{U}$ είναι διακριτή αν και μόνον αν η $\mathcal{U}$ είναι τοπικά πεπερασμένη και για κάθε $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, με $U_1 \neq U_2$, ισχύει $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$.

Πρόταση 1.31. Έστω οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $\{f_i|i \in I\}$, με $f_i : X \to [0,1]$ για $i \in I$, ώστε η οικογένεια $\{Supp(f_i)|i \in I\}$ να είναι τοπικά πεπερασμένη. Τότε η οικογένεια $\{Supp(f_i)|i \in I\}$ έχει $\sigma-$διακριτή ανοικτή εκλέπτυνση.

Απόδειξη. Διατάσουμε καλά την οικογένεια $\{f_i|i \in I\}$ και την γράφουμε ως $\{f_a|a < \lambda\}$, όπου λ είναι διατακτικός αριθμός. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a < \lambda$, θέτουμε $G_a^n = \{x \in X|f_a(x) > \frac{1}{n}\}$ και $H_a^n = \{x \in X|f_a(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $a < \lambda$ και $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\overline{G_a^n} \subseteq H_a^n \subseteq G_a^{n+1}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού η $\{Supp(f_a)|a < \lambda\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη, η οικογένεια $\mathcal{H}_n = \{H_a^n|a < \lambda\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη και άρα ισχύει $\overline{\bigcup\limits_{a<\lambda} H_a^n} = \bigcup\limits_{a<\lambda} \overline{H_a^n} = \bigcup\limits_{a<\lambda} H_a^n$, αφού το H_a^n κλειστό για κάθε $a < \lambda$. Έπεται ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a < \lambda$, το υποσύνολο του $Supp(f_a)$, $U_a^n = G_a^n \setminus \bigcup\limits_{\beta<a} H_\beta^{n+1}$ είναι ανοικτό.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $\mathcal{U}_n = \{U_a^n | a < \lambda\}$ και παρατηρούμε ότι $\mathcal{U}_n$ τοπικά πεπερασμένη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\beta < a < \lambda$. Τότε έχουμε ότι $U_a^n \subseteq X \setminus H_\beta^{n+1} \subseteq X \setminus G_\beta^{n+1}$ και άρα ότι $\overline{U_a^n} \subseteq X \setminus G_\beta^{n+1}$. Επιπλέον, έχουμε ότι $U_\beta^n \subseteq G_\beta^n$ και ότι $\overline{G_\beta^n} \subseteq G_\beta^{n+1}$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\overline{U_a^n} \cap \overline{U_\beta^n} = \emptyset$. Άρα από την παραπάνω παρατήρηση η οικογένεια $\mathcal{U}_n$ είναι διακριτή.
Τέλος, δείχνουμε ότι η οικογένεια $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ καλύπτει το σύνολο $\bigcup\limits_{f \in \mathcal{F}} Supp(f)$.
Έστω $x \in \bigcup\limits_{f \in \mathcal{F}} Supp(f)$. Ορίζουμε γ τον ελάχιστο διατακτικό $a < \lambda$ ώστε $f_a(x) > 0$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f_\gamma(x) > \dfrac{1}{n}$. Τότε έχουμε ότι $x \in U_\gamma^n$.

□

Πρόταση 1.32. Σε έναν παρασυμπαγή χώρο X κάθε ανοικτό κάλυμμα έχει $\sigma-$διακριτή ανοικτή εκλέπτυνση.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το Θεώρημα 1.27 ($(i) \Rightarrow (ii)$) και την Πρόταση 1.31. □

Λήμμα 1.33. Αν ένα ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{U}$ του X έχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\mathcal{F}$ από κλειστά σύνολα τότε το $\mathcal{U}$ έχει κατά σημείο άστρο ανοικτή εκλέπτυνση.

Απόδειξη. Για κάθε $F \in \mathcal{F}$, έστω $U_F \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $F \subseteq U_F$. Για κάθε $x \in X$, θέτουμε $V_x = \bigcap\{U_F | F \in (\mathcal{F})_x\} \setminus \bigcup \mathcal{F} \setminus (\mathcal{F})_x$ και παρατηρούμε ότι το V_x είναι ανοικτή περιοχή του x (Χρησιμοποιούμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι τοπικά πεπαρασμένη οικογένεια κλειστών συνόλων).
Θα δείξουμε, τώρα, ότι το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{V} = \{V_x | x \in X\}$ του X είναι κατά σημείο άστρο εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$. Έστω $x \in X$, και $H \in (\mathcal{F})_x$. Θα δείξουμε ότι $St(x, \mathcal{V}) \subseteq U_H$. Έστω $y \in X$ ώστε $x \in V_y$. Τότε, έχουμε ότι $x \notin \bigcup(\mathcal{F} \setminus (\mathcal{F})_y)$ και έπεται ότι $H \in (\mathcal{F})_y$. Από τα προηγούμενα έπεται ότι $V_y \subseteq U_H$ και άρα τελικά δείξαμε ότι $St(x, \mathcal{V}) \subseteq U_H$.

□

Θεώρημα 1.34. Έστω X τοπολογικός χώρος $Hausdorff$.

(i) Ο X είναι παρασυμπαγής αν και μόνον αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση από κλειστά σύνολα.

(ii) Αν επιπλέον ο X είναι κανονικός χώρος και αν κάθε ανοικτό κάλυμμά του έχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση (από αυθαίρετα σύνολα), τότε ο X είναι παρασυμπαγής.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι ο X είναι παρασυμπαγής. Από το Λήμμα 1.29 έπεται ότι κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση από κλειστά σύνολα.
Το αντίστροφο έπεται άμεσα από το Λήμμα 1.33 και το θεώρημα 1.27 ($(ii) \Rightarrow (i)$).
(ii) Με τις υποθέσεις του (ii) και χρησιμοποιώντας το επιχείρημα του Λήμματος 1.29, έπεται ότι κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση από κλειστά σύνολα. Από το (i) έπεται ότι ο X είναι παρασυμπαγής. □

Λήμμα 1.35. Κάθε $\sigma-$τοπικά πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου X, έχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ ανοικτό κάλυμμα του X, τέτοιο ώστε κάθε $\mathcal{U}_n$ να είναι τοπικά πεπερασμένη οικογένεια. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\mathcal{V}_n = \{U \setminus \bigcup\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{U}_i | U \in \mathcal{U}_n\}$. Έπεται άμεσα ότι η οικογένεια $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$.

□

Θεώρημα 1.36. Για έναν κανονικό χώρο $Hausdorff$ X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι παρασυμπαγής.

(ii) Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση.

(iii) Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει $\sigma-$διακριτή ανοικτή εκλέπτυνση.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (iii)$ Από το Θεώρημα 1.27 ($(i) \Rightarrow (iv)$) την Πρόταση 1.31.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Άμεσο.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Έπεται από το Λήμμα 1.35 και το Θεώρημα 1.34 (ii) □

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε σε κάποιες τοπολογικές ιδιότητες, οι οποίες απαιτούνται στα επόμενα κεφάλαια, και θα εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται με τους παρασυμπαγείς χώρους.

Ορισμός 1.37. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ο X λέγεται *κατά συλλογή φυσιολογικός* (*collectionwise normal*) χώρος αν είναι T_1 και για κάθε διακριτή οικογένεια $\mathcal{D}$ από κλειστά υποσύνολα του X, υπάρχει διακριτή οικογένεια $\{U_D | D \in \mathcal{D}\}$ από ανοικτά υποσύνολα του X, τέτοια ώστε να ισχύει $D \subseteq U_D$ για κάθε $D \in \mathcal{D}$.

Πρόταση 1.38. Έστω X T_1 τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο X είναι κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος.

(ii) Για κάθε διακριτή οικογένεια $\{F_i | i \in I\}$ από κλειστά υποσύνολα του X, υπάρχει οικογένεια $\{U_i | i \in I\}$ ανοικτών, ξένων ανά δυο, υποσυνόλων του ώστε να ισχύει $F_i \subseteq U_i$ για κάθε $i \in I$.

(iii) Για κάθε διακριτή οικογένεια $\{F_i | i \in I\}$ από κλειστά υποσύνολα του X, υπάρχει τοπικά πεπερασμένη οικογένεια $\{U_i | i \in I\}$ ανοικτών, ξένων ανά δύο, υποσυνόλων του ώστε να ισχύει $F_i \subseteq U_i$ για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (iii)$ και $(iii) \Rightarrow (ii)$ Άμεσα.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Είναι προφανές από την υπόθεση ότι ο X είναι φυσιολογικός. Έστω $\{F_i | i \in I\}$ διακριτή οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Τότε, από το (ii), υπάρχει οικογένεια $\{U_i | i \in I\}$ ανοικτών, ξένων ανά δύο, υποσυνόλων του ώστε να ισχύει $F_i \subseteq U_i$ για κάθε $i \in I$. Θεωρούμε τα κλειστά υποσύνολα του X, $A = \bigcup_{i \in I} F_i$ και $B = X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$, για τα οποία ισχύει ότι $A \cap B = \emptyset$. Αφου ο τοπολογικός χώρος X είναι φυσιολογικός, υπάρχουν ξένα, ανοικτά σύνολα U, V ώστε $A \subseteq U$ και $B \subseteq V$. Θέτοντας $V_i = U_i \cap U$ για κάθε $i \in I$, η οικογένεια $\{V_i | i \in I\}$ είναι διακριτή και ισχύει ότι $F_i \subseteq V_i$ για κάθε $i \in I$.

□

Θεώρημα 1.39. Κάθε παρασυμπαγής τοπολογικός χώρος είναι κατά συλλογή φυσιολογικός.

Απόδειξη. Έστω $\{F_i|i \in I\}$ διακριτή οικογένεια από κλειστά υποσύνολα του παρασυμπαγούς χώρου X. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U_x του x, έτσι ώστε η κλειστή θήκη της να τέμνει το πολύ ένα στοιχείο της οικογένειας $\{F_i|i \in I\}$. Θεωρούμε τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση $\mathcal{W}$ του καλύμματος $\{U_x|x \in X\}$, και για κάθε $i \in I$ έστω

$$V_i = X \setminus \bigcup\{\overline{W}|W \in \mathcal{W} \text{ και } \overline{W} \cap F_i = \emptyset\}.$$

Ισχύει, τότε, $F_i \subseteq V_i$, και το V_i είναι ανοικτό. Άρα αρκεί να δειχθεί ότι κάθε $W \in \mathcal{W}$ τέμνει το πολύ ένα στοιχείο της οικογένειας $\{V_i|i \in I\}$. Αυτό, όμως, έπεται από το ότι το $\overline{W}$ τέμνει το πολύ ένα F_i. □

Τέλος, παρατηρούμε εύκολα, ότι κάθε συμπαγής τοπολογικός χώρος $Hausdorff$ είναι παρασυμπαγής.

Ορισμός 1.40. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται *αριθμήσιμα παρασυμπαγής*, αν κάθε αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του X έχει τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση.

Θεώρημα 1.41. Για έναν φυσιολογικο χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής.

(ii) Κάθε αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του X έχει κατά σημείο πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση.

(iii) Κάθε αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα $\{U_i|i = 1, 2, ...\}$ του X έχει ανοικτή εκλέπτυνση $\{V_i|i = 1, 2, ...\}$ με $\overline{V_i} \subseteq U_i$ για $i = 1, 2, ...$.

(iv) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{F_i|i = 1, 2, ...\}$ από κλειστά υποσύνολα του X με κενή τομή, υπάρχει ακολουθία $\{G_i|i = 1, 2, ...\}$ ανοικτών με κενή τομή, ώστε $F_i \subseteq G_i$ για $i = 1, 2, ...$.

(v) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{F_i|i = 1, 2, ...\}$ από κλειστά υποσύνολα του X με κενή τομή, υπάρχει ακολουθία $\{A_i|i = 1, 2, ...\}$ κλειστών G_δ συνόλων με κενή τομή ώστε $F_i \subseteq A_i$ για $i = 1, 2, ...$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έπεται άμεσα.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Έστω $\{U_i|i = 1, 2, ...\}$ αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε

λόγω του (ii) θα έχει κατά σημείο πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση, έστω την $\mathcal{B}$. Για κάθε $W \in \mathcal{B}$, έστω $y(W)$ το πρώτο U_i που περιέχει το W, και G_i η ένωση όλων των W ώστε $y(W) = U_i$. Τότε το $\{G_i | i = 1, 2, ...\}$ είναι κατά σημείο πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του X και $G_i \subseteq U_i$ για $i = 1, 2, ...$ Από το Λήμμα 1.15, αφού ο X είναι φυσιολογικός έπεται ότι το κάλυμμα αυτό έχει κατά ανοικτή εκλέπτυνση $\{V_i | i = 1, 2, ...\}$ ώστε $\overline{V_i} \subseteq G_i \subseteq U_i$ για $i = 1, 2, \ldots$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Έστω $\{F_i | i = 1, 2, ...\}$ ακολουθία από ακλειστά υποσύνολα του X ώστε $F_{i+1} \subseteq F_i$ και $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$. Τότε αν $U_i = X \setminus F_i$ για $i = 1, 2, \ldots$, το $\{U_i | i = 1, 2, ...\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Λόγω του (iii) υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{V_i | i = 1, 2, ...\}$ με $\overline{V_i} \subseteq U_i$ για $i = 1, 2, \ldots$. Έστω $G_i = X \setminus \overline{V_i}$ για $i = 1, 2, \ldots$. Τότε το G_i ανοικτό για $i = 1, 2, ...$ και αφού $\overline{V_i} \subseteq U_i$ έχουμε ότι $F_i \subseteq G_i$ για $i = 1, 2, \ldots$, και αφού $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{V_i} = X$ έχουμε ότι $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \emptyset$.
$(iv) \Rightarrow (v)$ Έστω $\{F_i | i = 1, 2, ...\}$ ακολουθία κλειστών συνόλων με $F_{i+1} \subseteq F_i$ για $i = 1, 2, ...$ και $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$. Τότε απο το (iv), υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων $\{G_i | i = 1, 2, ..\}$ με $F_i \subseteq G_i$ γαι $i = 1, 2, ...$ και $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \emptyset$. Από το λήμμα $Urysohn$, και για $i = 1, 2, \ldots$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση ϕ_i με $0 \le \phi_i(x) \le 1$ τέτοια ώστε άν $x \in F_i$ τότε $\phi_i(x) = 0$, και άν $x \in X \setminus G_i$ τότε $\phi_i(x) = 1$. Ορίζουμε, τώρα, $G_{ij} = \{x \in X | \phi_i(x) < \frac{1}{j}\}$ για $i, j \in \{1, 2, ...\}$ και έστω $A_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_{ij} = \{x \in X | \phi_i(x) = 0\}$ για $i = 1, 2, \ldots$. Τότε, G_{ij} ανοικτό για $i, j \in \{1, 2, ...\}$, το A_i κλειστό G_δ, $F_i \subseteq A_i \subseteq G_i$ για $i = 1, 2, ...$ και $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \emptyset$.
$(v) \Rightarrow (i)$ Έστω $\{U_i | i = 1, 2, ...\}$ αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του X και $F_i = X \setminus \bigcup_{k \le i} U_k$ για $i = 1, 2, \ldots$. Τότε, το F_i κλειστό και $F_{i+1} \subseteq F_i$ για $i = 1, 2, ...,$ και αφού $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = X$ έπεται ότι $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$. Λόγω του (v), υπάρχει ακολουθία $\{A_j | j = 1, 2, ...\}$ κλειστών G_δ συνόλων, με $F_j \subseteq A_j$ για $j = 1, 2, ...$ και $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$. Τότε το $X \setminus A_j$ είναι F_σ για $j = 1, 2, \ldots$, δηλαδή $X \setminus A_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{j,i}$, όπου $B_{j,i}$ είναι κλειστό για κάθε $i = 1, 2, \ldots$. Αφού X

είναι φυσιολογικός μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B_{j,i}$ περιέχεται στο εσωτερικό του $B_{j,i+1}$. Έστω $H_{j,i}$ το εσωτερικό του $B_{j,i}$. Τότε, $H_{i,j} \subseteq B_{i,j} \subseteq H_{j,i+1}$ και $X \setminus A_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_{i,j}$ και $B_{i,j} \subseteq X \setminus A_j \subseteq X \setminus F_j = \bigcup_{k \leq j} U_k$. Έστω $V_i = U_i \setminus \bigcup_{j<i} B_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots$. Τότε κάθε V_i είναι ανοικτό. Άν $j < i$ ισχύει ότι $B_{j,i} \subseteq \bigcup_{k \leq j} U_k \subseteq \bigcup_{k<i} U_k$ άρα $\bigcup_{j<i} B_{j,i} \subseteq \bigcup_{k<i} U_k$. Άρα, $U_i \setminus \bigcup_{k \leq i} U_k \subseteq V_i$. Οπότε, αφού $\{U_i | i = 1, 2, ...\}$ ανοικτό κάλυμα του X, έπεται ότι και το $\{V_i | i = 1, 2, ...\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, προφανώς εκλέπτυνση του $\{U_i | i = 1, 2, ...\}\}$. Για κάθε $x \in X$, υπάρχει A_j ώστε $x \in X \setminus A_j$ και άρα $x \in H_{j,k}$ για κάποιο k. Τότε άν $i > j$ και $i > k$, $H_{j.k} \subseteq B_{j,i}$ οπότε $H_{j,k} \cap V_i = \emptyset$. Τότε το ανοικτό $H_{j,k}$ περιέχει το x και τέμνει το πολύ πεπερασμένα το πλήθος V_i. Οπότε το $\{V_i | i = 1, 2, ...\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο. Έπεται οτι ο X είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής. $\square$

Από το Θεώρημα 1.28, έπεται ότι κάθε μετρικός χώρος είναι παρασυμπαγής, ενώ είναι προφανές επίσης ότι κάθε παρασυμπαγής τοπολογικός χώρος είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής φυσιολογικός τοπολογικός χώρος.

Ορισμός 1.42. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται *τέλεια φυσιολογικός* $(perfectly\ normal)$, αν είναι φυσιολογικός χώρος και κάθε $A \subseteq X$ κλειστό είναι G_δ.

Είναι προφανές ότι κάθε μετρικός χώρος είναι τέλεια φυσιολογικός. Επίσης, από το Θεώρημα $1.41(v)$ έπεται ότι κάθε τέλεια φυσιολογικός τοπολογικός χώρος είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής φυσιολογικός.

Μεταξύ των τοπολογικών ιδιοτήτων που αναφέραμε παραπάνω δεν υπάρχει κάποια άλλη σχέση, εννοώντας, αφενός, ότι όλοι οι εγκλεισμοί είναι γνήσιοι και , αφετέρου, ότι δεν υπάρχουν άλλοι. Δεν θα αναφερθούμε λεπτομερέστερα σε αυτό, ώστόσο ενδεικτικά μπορούμε να παραπέμψουμε στα παρακάτω:

(I) Υπάρχει φυσιολογικός χώρος που δεν είναι κατά συλλογή φυσιολογικός: [2], σελ.306.

(II) Υπάρχει (κατά συλλογή) φυσιολογικός χώρος που δεν είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής: [10].

(III) Υπάρχει κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος που δεν είναι παρασυμπαγής: [14], σελ.209, $Ex.V.4$.

(IV) Υπάρχει φυσιολογικός και αριθμήσιμα παρασυμπαγής που δεν είναι παρασυμπαγής: [14], σελ.205, $Ex.V.3$.

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα:

$$\text{συμπαγής } Hausdorff$$

$$\text{μετρικός χώρος} \implies \text{παρασυμπαγής} \implies \text{κατά συλλογή φυσιολογικός}$$

$$\text{τέλεια φυσιολογικός} \implies \text{αριθμήσιμα παρασυμπαγής φυσιολογικός} \implies \text{φυσιολογικός}$$

Σχόλιο:

Το 2ο Κεφάλαιο μπορεί να διαβαστεί χωρίς την έννοια των πλήρως φυσιολογικών χώρων. Πιο συγκεκριμένα απαραίτητα, για το επόμενο κεφάλαιο, είναι το Θεώρημα 1.27 (οι ισοδυναμίες $(i), (iii), (iv)$), το Θεώρημα 1.28, το Θεώρημα 1.41 και η Πρόταση 1.25. Για τον σκοπό αυτό, οι απαραίτητες ισοδυναμίες του Θεωρήματος 1.27 που αναφέρουμε παραπάνω θα πρέπει να αποδειχτούν με τον παρακάτω τρόπο.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (iii)$ Προκύπτει από τη Πρόταση 1.18 (με την β απόδειξη).
$(iii) \Rightarrow (i)$ Έπεται άμεσα λόγω της ισοδυναμίας των (iii) και (iv). □

Κεφάλαιο 2

Θεωρήματα συνεχούς επιλογής

2.1 Θεώρημα συνεχούς επιλογής για παρασυμπαγείς τοπολογικούς χώρους

Ανάμεσα στα θεωρήματα συνεχούς επιλογής που θα αποδείξουμε, εκείνο με το ξεχωριστό ενδιαφέρον είναι το θεώρημα συνεχούς επιλογής για παρασυμπαγείς χώρους. Πρόκειται για τον πρώτο χαρακτηρισμό των παρασυμπαγων χώρων που έχει να κάνει με συναρτήσεις και όχι με καλύμματα. Εφαρμογές αυτού του θεωρήματος υπάρχουν στο 3ο Κεφάλαιο. Για τη παρουσίαση του θεωρήματος αυτού υπενθυμίζουμε ένα συμβολισμό που αναφέραμε και στην εισαγωγή, και επιπλέον δύο καινούριους. Οι συμβολισμοί αυτοί θα διατηρηθούν στην εργασία αυτή.

$\Sigma_{(i)}$: αν X τοπολογικός χώρος συμβολίζουμε $2^X = \{A \subseteq X | A \neq \emptyset\}$.

$\Sigma_{(ii)}$: αν $\varphi : X \to 2^Y$ είναι μια απεικόνιση συμβολίζουμε

$$\varphi^{-1}(A) = \{x \in X | \varphi(x) \cap A \neq \emptyset\} \text{ για κάθε } A \subseteq Y.$$

$\Sigma_{(iii)}$: αν Y είναι τοπολογικός χώρος, θέτουμε

$$\mathcal{F}(Y) = \{S \in 2^Y | S \quad \text{κυρτό και κλειστό}\}.$$

Ορισμός 2.1. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μία απεικόνιση $\phi : X \to 2^Y$ λέγεται *κάτω ημισυνεχής*, αν $\phi^{-1}(V) = \{x \in X | \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ είναι ανοικτό στο X για κάθε $V \subseteq Y$ ανοικτό.

Παρατηρήσεις:

(i) Ένας χαρακτηρισμός των κάτω ημισυνεχών απεικονίσεων είναι ο παρακάτω: αν X, Y είναι τοπολογικοί χώροι, μια απεικόνιση $\phi : X \to 2^Y$ είναι κάτω ημισυνεχής αν και μονο αν για κάθε $x \in X$, $y \in \phi(x)$ και περιοχή V του y, υπάρχει περιοχή του U του x ώστε για κάθε $x' \in U$ να ισχύει $\phi(x') \cap V \neq \emptyset$.

Πράγματι, για το ευθύ, έστω ότι η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής απεικόνιση και έστω $x \in X$, $y \in \phi(x)$ και Vπεριοχή του y. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι V ανοικτό υποσύνολο του Y. Άρα από τον παραπάνω ορισμό, το υποσύνολο του X, $U = \phi^{-1}(V)$, είναι ανοικτή περιοχή του x. Αν $x' \in U$ τότε έχουμε $\phi(x') \cap V \neq \emptyset$ και έχουμε το συμπέρασμα.

Για το αντίστροφο, έστω μια απεικόνιση $\phi : X \to 2^Y$ που ικανοποιεί την συνθήκη. Έστω $V \subseteq Y$ ανοικτό και $x \in \phi^{-1}(V)$. Τότε $\phi(x) \cap V \neq \emptyset$. Έστω $y \in \phi(x) \cap V$. Τότε το V είναι περιοχή του y , και από τη υπόθεσή μας, υπάρχει περιοχή του U του x, ώστε για κάθε $x' \in U$ να ισχύει $\phi(x') \cap V \neq \emptyset$. Επομένως, $U \subseteq \phi^{-1}(V)$, το οποίο σημαίνει ότι το $\phi^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στον X, και επομένως η ϕ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση.

(ii) Είναι προφανές ότι, αν έχουμε X, Y τοπολογικούς χώρους, απεικόνιση $\phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής και $\psi : X \to 2^Y$ απεικόνιση τέτοια ώστε $\overline{\psi(x)} = \overline{\phi(x)}$ τότε η ψ είναι επίσης κάτω ημισυνεχής.

Είμαστε σε θέση, τώρα, να διατυπώσουμε το θεώρημα συνεχούς επιλογής.

Θεώρημα 2.2. (Θεώρημα συνεχούς επιλογής για παρασυμπαγείς τοπολογικούς χώρους) Για έναν T_1 τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι παρασυμπαγής.

(ii) Αν Y είναι χώρος $Banach$, τότε κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ έχει συνεχή επιλογή.

Για να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος αυτού, θα χρειαστούμε ένα λήμμα. Το λήμα αυτό μας εξασφαλίζει την κάτω ημισυνέχεια μιας χρήσιμης, για την απόδειξη του θεωρήματος, συνάρτησης δεδομένης μιας αλλης κατω ημισυνεχούς και θα χρησιμοποιηθεί και στα θεωρήματα συνεχούς επιλογής που θα ακολουθήσουν στη συνέχεια της εργασίας.

Λήμμα 2.3. Έστω X τοπολογικός χώρος, (Y,d) μετρικός χώρος, απεικονίσεις $\varphi,\psi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχείς και $r>0$ ώστε $d\left(\phi(x),\psi(x)\right)<r$ για κάθε $x\in X$. Τότε η απεικόνιση $\theta : X \to 2^Y$ με $\theta(x)=B_d\left(\phi(x),r\right)\bigcap\psi(x)$ είναι κάτω ημισυνεχής (όπου $B_d(\phi(x),r)=\{y\in Y|d(\phi(x),y<r)\}$).

Απόδειξη. Έστω $G\subseteq Y$ ανοικτό και $x\in\theta^{-1}(G)$. Αρκεί να δειχθεί ότι το $\theta^{-1}(G)$ είναι περιοχή του x. Έστω $u\in\theta(x)\cap G$. Τότε $u\in B_d\left(\varphi(x),r\right)$ και άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε $\phi(x)\cap B_d\left(u,r-\delta\right)\neq\emptyset$. Αφού ϕ κάτω ημισυνεχής το $V=\phi^{-1}\left(B_d(u,r-\delta)\right)$ είναι περιοχή του x. Έχουμε επίσης οτι $u\in\psi(x)$ και αφού ψ κάτω ημισυνεχής έπεται ότι το $W=\psi^{-1}(G\cap B_d(u,\delta))$ είναι περιοχή του x.
Έστω $z\in V\cap W$. Αφού $z\in W$ υπάρχει $v\in\psi(z)\cap G$ ώστε $d(v,u)<\delta$. Αφού $z\in V$ υπάρχει $w\in\phi(z)$ ώστε $d(w,u)<r-\delta$. Έχουμε ότι $d\left(v,\phi(z)\right)\leqslant d(v,w)\leq d(v,u)+d(u,w)<\delta+r-\delta=r$ και άρα $v\in\vartheta(z)$ οπότε $\theta(z)\cap G\neq\emptyset$. Άρα $V\cap W\subseteq\theta^{-1}(G)$. Έπεται ότι $\theta^{-1}(G)$ είναι περιοχή του x. □

Περνάμε τώρα στην απόδειξη του πρώτου βήματος της κατευθυνσης $(i)\Rightarrow(ii)$ του θεωρήματος συνεχούς επιλογής. Η απόδειξη του θεωρήματος, όπως και στις αντίστοιχες κατευθύνσεις των υπολοίπων θεωρημάτων συνεχούς επιλογής στα οποία θα αναφερθούμε στη συνέχεια, απαιτεί δύο βήματα. Το πρώτο βήμα, είναι ενα λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής, το οποίο χρησιμοποιείται ουσιωδώς στο δεύτερο βήμα, όπου κατασκευάζουμε επαγωγικά μια κατάλληλη ακολουθια συνεχών συναρτήσεων, της οποιας το ομοιόμορφο όριο είναι η ζητούμενη συνεχής επιλογή.

Πρίν προχωρήσουμε, δίνουμε έναν συμβολισμό παρόμοιο με εκείνον του $\mathcal{F}(A)$ ο οποίος, επίσης, θα διατηρηθεί στην υπόλοιπη εργασία.
$\Sigma_{(iv)}$: αν Y τοπολογικός χώρος θέτουμε

$$\mathcal{K}(A)=\{S\in 2^Y|S\quad\text{κυρτό }\}.$$

Λήμμα 2.4. (Λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής I) Έστω X παρασυμπαγής χώρος, Y χώρος με νόρμα και $\phi : X\to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση. Τότε για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X\to Y$ ώστε $f(x)\in B_d(\phi(x),\epsilon)$.

Απόδειξη. Για κάθε $y\in Y$ έστω $U_y=\{x\in X|y\in B_d(\phi(x),\epsilon)\}$. Ισχύει ότι $U_y=\phi^{-1}(B_d(y,\epsilon))$, αφού για κάθε $x\in X$ ισχύει $y\in B_d(\phi(x),\epsilon)$ αν και μόνο αν υπάρχει $y' \in \phi(x)$ ώστε $d(y', y) < \epsilon$, δηλαδη $\phi(x) \cap B_d(y, \epsilon) \neq \emptyset$. Αφού, τώρα, το $B_d(y, \epsilon)$ είναι ανοικτό και η ϕ κάτω ημισυνεχής, έπεται ότι U_y ανοικτό στον X. Θεωρούμε το $\mathcal{U} = \{U_y | y \in Y\}$. Τότε το $\mathcal{U}$ ανοικτό κάλυμμα του X, διότι U_y ανοικτό για κάθε $y \in Y$ και αν $x \in X$ τότε υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε $\phi(x) \cap B_d(y_0, \epsilon) \neq \emptyset$, άρα το $x \in U_{y_0}$. Αφού ο X είναι παρασυμπαγής, έπεται ότι το $\mathcal{U}$ έχει τοπικά πεπερασμένη διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται απο αυτό. Έστω $\{f_i | i \in I\}$ μια τέτοια διαμέριση της μονάδας. Έχουμε ότι για κάθε $i \in I$ υπάρχει $y(i) \in Y$ ώστε $Supp(f_i) \subseteq U_{y(i)}$. Ορίζουμε συνάρτηση $f : X \to Y$ με $f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x) y(i)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$, υπάρχει $U(x)$ ανοικτή περιοχή του x, ώστε το σύνολο $\{i \in I | Supp(f_i) \cap U(x) \neq \emptyset\}$ να είναι πεπερασμένο. Επομένως,η f είναι καλά ορισμένη και $f|_{U(x)}$ είναι συνεχης για κάθε $x \in X$ ως πεπερασμένο άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Άρα η $f : X \to Y$ είναι συνεχής.Επίσης ισχύει $f(x) \in B_d(\phi(x), \epsilon)$ για κάθε $x \in X$. Πράγματι, αν $x \in X$, τότε το $f(x)$ είναι κυρτός συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους σημείων $y(i)$ τα οποία ανήκουν στο κυρτό σύνολο $B_d(\phi(x), \epsilon)$ και άρα $f(x) \in B_d(\phi(x), \epsilon)$. □

Απόδειξη. (Θεωρήματος 2.2)
$(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $\phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση . Θα βρούμε συνεχή επιλογή για την ϕ. Κατασκευάζουμε επαγωγικά ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_i : X \to Y$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, ώστε για κάθε $x \in X$ να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

(I) $f_{i+1}(x) \in B_d(f_i(x), \frac{1}{2^i})$, για $i = 0, 1, \ldots$,

(II) $f_i(x) \in B_d(\phi(x), \frac{1}{2^{i+1}})$, για $i = 0, 1, \ldots$.

Από το προηγούμενο λήμμα (για $\epsilon = \frac{1}{2}$) έπεται ότι υπάρχει $f_0 : X \to Y$ συνεχής ώστε $f_0(x) \in B_d(\phi(x), \frac{1}{2})$ για κάθε $x \in X$.
Έστω ότι έχουμε ορίσει $f_0, \ldots, f_k$ που ικανοποιούν τις συνθήκες (I),(II) . Πρέπει να βρούμε συνεχή $f_{k+1} : X \to Y$ που ικανοποιεί τις (I),(II) για $i = k$ και $i = k + 1$ αντίστοιχα.
Αφού $d(\phi(x), f_k(x)) < \frac{1}{2^{k+1}}$, από το Λήμμα 2.4 (για $\psi : X \to 2^Y$ με $\psi(x) = \{f_k(x)\}$ και $r = \frac{1}{2^{k+1}}$), έπεται ότι η απεικόνιση $\phi_{k+1} : X \to 2^Y$ με $\phi_{k+1}(x) =$

$\phi(x) \cap B_d(f_k(x), \frac{1}{2^{k+1}})$ για κάθε $x \in X$, είναι κάτω ημισυνεχής. Προφανώς η ϕ_{k+1} παίρνει κυρτές τιμές. Από το Λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής I υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_{k+1} : X \to Y$ ώστε $f_{k+1}(x) \in B_d(\phi_{k+1}(x), \frac{1}{2^{k+2}})$ για κάθε $x \in X$. Άρα έχουμε ότι $f_{k+1}(x) \in B_d(f_k(x), \frac{1}{2^k})$, επομένως την συνθήκη (I) για $i = k$. Επίσης $f_{k+1}(x) \in B_d(\phi(x), \frac{1}{2^{k+2}})$ για κάθε $x \in X$ άρα έχουμε την συνθήκη (II) για $i = k + 1$.

Ορίσαμε, λοιπόν, την επιθυμητή ακολουθία $\{f_i | i = 0, 1, ...\}$. Λόγω της συνθήκης (I) (απ'οπου έπεται ότι η ακολουθία $\{f_i | i = 0, 1, ...\}$ είναι ομοιόμορφα *Cauchy*) και της πληρότητας του Y υπάρχει συνάρτηση $f : X \to Y$ ώστε $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ ομοιόμορφα. Αφού κάθε f_i είναι συνεχής έπεται ότι και η f είναι συνεχής.

Για κάθε $x \in X$ και $i = 1, 2, ...$, ισχύει $d(f_i(x), \phi(x)) \leq \frac{1}{2^{i+1}}$. Επομένως $d(f(x), \phi(x)) = 0$ και, αφού το $\phi(x)$ είναι κλειστό, έπεται $f(x) \in \phi(x)$. Επομένως, η ϕ είναι συνεχής επιλογή για την ϕ.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Για να δείξουμε οτι ο X είναι παρασυμπαγής θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.27 ($(iii) \Rightarrow (i)$). Αποδεικνύουμε λοιπόν ότι κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται απ΄ αυτο.

Έστω $\mathcal{U}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Θεωρούμε τον χώρο

$$Y = l_1(\mathcal{U}) = \{g : \mathcal{U} \to \mathbb{R} | \sum_{U\in\mathcal{U}} |y(U)| < \infty\}.$$

O Y είναι χώρος *Banach* με νόρμα την $\|y\|_1 = \sum_{U\in\mathcal{U}} |y(U)|$. Επίσης, θέτουμε $C = \{y \in Y | y(U) \geq 0 \ \forall U \in \mathcal{U} \ \textit{και} \ \|y\|_1 = 1\}$. Προφανώς, το $C \in \mathcal{F}(Y)$ και το $C \cap \{y \in Y | y(U) = 0 \ \forall U \in \mathcal{U} \ \textit{ώστε} \ x \notin U\} \in \mathcal{F}(Y)$. Ορίζουμε απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{F}(Y)$, με $\phi(x) = C \bigcap \{y \in Y | y(U) = 0 \ \forall U \in \mathcal{U} \ \textit{με} \ x \notin U\}$.

Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής.

Ισχυρισμός: Για $y \in C$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $y' \in C$ και $U_1, ..., U_k \in \mathcal{U}$ ώστε :

$$\|y - y'\| < \epsilon$$

$$y(U_i) > 0, i = 1, ..., k$$

$$y'(U) = 0, \ \textit{αν} \ U \neq U_i \ \textit{για} \ i = 1, ..., k$$

Πράγματι, εφ'οσον $\sum_{U\in\mathcal{U}} y(U) = 1$ και $y(U) \geqslant 0$ για κάθε $U \in \mathcal{U}$ μπορούμε να επιλέξουμε $U_1, ..., U_k \in \mathcal{U}$ ώστε $y(U_1) + ... + y(U_k) = \delta > 1 - \frac{\epsilon}{2}$ και $y(U_i) > 0$ για $i = 1, ..., k$. Ορίζουμε y' ως εξής:

$$y'(U) = 0 \text{ αν } U \neq U_i \text{ για } i = 1, ..., k$$

$$y'(U_1) = y(U_1) + 1 - \delta$$

$$y'(U_i) = y(U_i), \text{ για } i = 2, ..., k$$

Τότε έπεται ότι $y' \in C$. Επιπλέον, $\|y - y'\| = \sum_{U\in\mathcal{U}} |y(U) - y'(U)| = 1 - \delta + \sum_{U\neq U_1,...,U_k} |y(U)| = 2(1-\delta) < \epsilon$ Επομένως, το y έχει τις ιδιότητες που θέλαμε και έτσι ο *Ισχυρισμός* αποδείχτηκε.

Για να αποδείξουμε, τώρα, ότι η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής θα πρέπει για κάθε $x \in X$, $y \in \phi(x)$, και $\epsilon > 0$ να υπάρχει περιοχή U του x ώστε για κάθε $x' \in U$ να υπάρχει $y' \in \phi(x')$ με $\|y - y'\| < \epsilon$ (Παρατήρηση (i), μετά τον Ορισμό 2.1). Έστω, λοιπόν, $x \in X$, $y \in \phi(x)$ και $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $y', U_1, ..., U_k$ όπως στον *Ισχυρισμό*. Θέτουμε $U = U_1 \cap ... \cap U_k$. Αφού $y(U_i) > 0$ για $i = 1, ..., n$ έπεται από τον ορισμό της ϕ ότι $x \in U_i$ για $i = 1, ..., n$ και επομένως η U είναι περιοχή του x. Επίσης από τον ορισμό της ϕ και τον Ισχυρισμό έπεται ότι $y' \in \phi(x')$ για κάθε $x' \in U$. Έτσι η U ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις και άρα η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής.

Από την υπόθεση, υπάρχει f συνεχής επιλογή για την ϕ. Για $U \in \mathcal{U}$ ορίζουμε $f_U : X \to \mathbb{R}$ με $f_U(x) = [f(x)](U)$. Αφού η f είναι συνεχής έπεται ότι κάθε f_U είναι συνεχής συνάρτηση. Επίσης, από τους ορισμούς έπεται άμεσα ότι $\{f_U | U \in \mathcal{U}\}$ είναι διαμέριση της μονάδας στον X. Η $\{f_U | U \in \mathcal{U}\}$ κυριαρχείται από το $\mathcal{U}$, διότι $f_U(x) = 0$ για κάθε $x \notin U$, άρα $Supp(f_U) \subseteq U$.

Από τα παραπάνω και αφού ο X είναι T_1 χώρος, έπεται οτι είναι και $Hausdorff$. Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in X$. Το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{V} = \{X \setminus \{x_1\}, X \setminus \{x_2\}\}$ έχει διαμέριση της μονάδας $\{f_i | i \in I\}$ που κυριαρχείται από αυτό. Επιλέγουμε $i_0 \in I$ ώστε $f_{i_0}(x_1) = a > 0$. Αφού το $f_{i_0}^{-1}((0, 1])$ περιέχεται στο $X \setminus \{x_2\}$ έχουμε ότι $f_{i_0}(x_2) = 0$. Τα $U_1 = f_{i_0}^{-1}((\frac{a}{2}, 1])$ και $U_2 = f_{i_0}^{-1}([0, \frac{a}{2}))$ είναι ανοικτά ξένα και περιέχουν τα x_1, x_2 αντίστοιχα. □

2.2 Θεώρημα συνεχούς επιλογής για αριθμήσιμα παρασυμπαγείς φυσιολογικούς τοπολογικούς χώρους

Έχουμε παρατηρήσει στο πρώτο κεφάλαιο ότι κάθε παρασυμπαγής τοπολογικός χώρος είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής φυσιολογικός χώρος , ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει. Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ένα θεώρημα συνεχούς επιλογής που χαρακτηρίζει τους αριθμήσιμα παρασυμπαγείς φυσιολογικούς χώρους. Μειώνοντας, ωστόσο, τις υποθέσεις μας για τον τοπολογικό χώρο X αναγκαζόμαστε να κάνουμε μια επιπλέον υπόθεση για τον χώρο *Banach* Y. Θα απαιτήσουμε, λοιπόν, ο χώρος *Banach* Y να είναι και διαχωρίσιμος, οπότε το θεώρημα έχει την εξής διατύπωση:

Θεώρημα 2.5. (Θεώρημα συνεχούς επιλογής για αριθμήσιμα παρασυμπαγείς φυσιολογικούς τοπολογικούς χώρους.) Για έναν T_1 τοπολογικό χώρο τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής φυσιολογικός χώρος.

(ii) Κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ έχει συνεχή επιλογή.

(iii) Αν Y είναι διαχωρίσιμος χώρος *Banach*, τότε κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ έχει συνεχή επιλογή.

Πρίν προχωρήσουμε στην απόδειξη δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.6. Έστω X τοπολογικός χώρος και συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Η f θα λέγεται *άνω ημισυνεχής* , αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το $f^{-1}((-\infty, a))$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Αντίστοιχα, η $f : X \to \mathbb{R}$ θα λέγεται *κάτω ημισυνεχής* , αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το $f^{-1}((a, \infty))$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Παράδειγμα:

Έστω X τοπολογικός χώρος και $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $\bigcap A_n = \emptyset$. Τότε η $g : X \to \mathbb{R}$, με $g(x) = \min\{n \in \mathbb{N} | x \in X \setminus A_n\}$, είναι άνω ημισυνεχής.

Πράγματι, αν $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $g^{-1}(-\infty, a) = g^{-1}((-\infty, n]$ όπου $n = [a]$, το ακέραιο μέρος του a, αν $a \notin \mathbb{N}$, και $n = a - 1$, αν $a \in \mathbb{N}$. Παρατηρώντας ότι $g^{-1}((-\infty, n]) = X \setminus A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι το $g^{-1}((-\infty, a))$ είναι ανοικτό και άρα η g είναι άνω ημισυνεχής.

Λήμμα 2.7. **(Λημμα συνεχούς ϵ-επιλογής** *II*) Έστω X αριθμήσιμα παρασυμπαγής φυσιολογικός χώρος, Y διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και $\phi : X \to \mathcal{K}(Y)$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ ώστε $f(x) \in B_d(\psi(x), \epsilon)$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Έστω D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του Y. Όπως στο Λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής I, θέτουμε $U_y = \{x \in X | y \in B_d(y, \epsilon)\}$ για $y \in D$,και με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι τα U_y είναι ανοικτό κάλυμμα του X (αφού ϕ κάτω ημισυνεχής και D πυκνό). Άρα η οικογένεια $\{U_y | y \in D\}$ είναι αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του X (αφού D είναι αριθμήσιμο) και επομένως έχει μια τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση $\{V_i | i \in I\}$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση της μονάδας $\{f_i | i \in I\}$ που να κυριαρχείται από το κάλυμμα $\{V_i | i \in I\}$ (Πρόταση 1.18) . Για κάθε $i \in I$ επιλέγουμε $y(i) \in D$ ώστε $V_i \subseteq U_{y(i)}$. Η υπόλοιπη απόδειξη συνεχίζει ακριβώς όπως στο Λήμμα συνεχούς ϵ-επιλογής I.

□

Πρόταση 2.8. Αν X,Y τοπολογικοί χώροι, $S \subseteq 2^Y$ και το S περιέχει κάθε μονοσύνολο του Y και τον Y τότε το $(i) \Rightarrow (ii)$:

(i) Κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to S$ έχει συνεχή επιλογή.

(ii) Για κάθε κλειστό $A \subseteq X$ κάθε συνεχής συνάρτηση $g : A \to Y$ μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$.

Απόδειξη. Ορίζουμε απεικόνιση $\phi : X \to S$ με $\phi(x) = \{g(x)\}$ για $x \in A$ και $\phi(x) = Y$ για $x \notin A$. Τότε η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής. Πράγματι, αν $V \subseteq Y$ είναι μη κενό ανοικτό τότε το $\phi^{-1}(V) = g^{-1}(V) \bigcup (X \setminus A)$ είναι ανοικτό στον X . Επομένως, λόγω της υπόθεσης υπάρχει συνεχής επιλογή $f : X \to Y$ για την ϕ. Προφανώς η f επεκτείνει την g.

□

Είμαστε σε θέση, πλέον, να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος συνεχούς επιλογής για αριθμήσιμα παρασυμπαγείς φυσιολογικούς χώρους.

Απόδειξη. (*Θεωρήματος 2.5*).
$(i) \Rightarrow (iii)$ Ακολουθεί την μέθοδο της απόδειξης της κατεύθυνσης $(i) \Rightarrow (ii)$ του Θεωρήματος συνεχούς επιλογής για παρασυμπαγείς τοπολογικούς χώρους, αφού ομως αντικαταστήσουμε το Λήμμα $\epsilon-$συνεχούς επιλογής I, με το II.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Προφανές, αφού ο $\mathbb{R}$ διαχωρίσιμος χώρος $Banach$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Από την Πρόταση 2.8 έπεται ότι ο X ικανοποιεί το θεώρημα $Tietze$ και άρα είναι φυσιολογικός. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι ο X είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής. Λόγω του Θεωρήματος 1.41 αρκεί να δείξουμε ότι αν $\{A_n|n = 1, 2, ...\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με κενή τομή, τότε υπάρχει $\{U_n|n = 1, 2, ...\}$ ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων του X με κενή τομή ώστε $A_n \subseteq U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Έστω, λοιπόν, $\{A_n|n = 1, 2, ...\}$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με κενή τομή. Ορίζουμε συνάρτηση

$$g : X \to \mathbb{R} \ \mu\epsilon \ g(x) = min\{n \in \mathbb{R}|x \in X \setminus A_n\}.$$

Τότε $A_n = \{x \in X|g(x) > n\}$ και η g είναι άνω ημισυνεχής (από το παράδειγμα κάτω από τον Ορισμό 2.6). Η απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$, που ορίζεται από την $\phi(x) = \{y \in \mathbb{R}|g(x) \leq y\}$, είναι κάτω ημισυνεχής. Πράγματι, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, το $\phi^{-1}((a, b)) = \{x \in X|[g(x), \infty) \cap (a, b) \neq \emptyset\} = \{x \in X|g(x) < b\}$ είναι ανοικτό. Λόγω της υπόθεσης, υπάρχει συνεχής επιλογή για την ϕ. Άρα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, με $f(x) \geq g(x)$ για $x \in X$. Ορίζουμε, τώρα, $U_n = \{x \in X|f(x) > n\}$. Τότε η ακολουθία $\{U_n|n = 1, 2, ...\}$ ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις μας.

□

2.3 Θεώρημα συνεχούς επιλογής για κατά συλλογή φυσιολογικούς τοπολογικούς χώρους

Στην παράγραφο αυτήν θα αποδείξουμε το θεώρημα συνεχούς επιλογής για κατά συλλογη φυσιολογικούς χώρους. Για να έχουμε ένα θεώρημα του ίδιου τύπου με τα προηγούμενα, δηλαδη χαρακτηρισμό των κατά συλλογή φυσιολογικών χώρων , θα υποθέσουμε για την κάτω ημισυνεχή απεικόνιση ϕ ότι για κάθε $x \in X$, το $\phi(x)$ είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του χώρου $Banach$ Y ή $\phi(x) = Y$. Η διαδικασία της απόδειξης για το θεώρημα αυτό θα είναι παρόμοια με του θεωρήματος για παρασυμπαγείς χώρους . Θα βασιστεί, δηλαδη, σε ένα αντίστοιχο λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής. Ωστόσο, απαιτείται και ένα ενδιάμεσο θεώρημα συνεχούς επιλογής στο οποίο θα θεωρήσουμε την ϕ να παίρνει τιμες στα μη κενά, κυρτά, συμπαγή υποσύνολα του Y. Θα αναφερθούμε στην συνέχεια λεπτομερέστερα στην σύνδεση των θεωρημάτων αυτών. Προς το παρόν θα δώσουμε έναν συμβολισμό .

Ακολουθώντας τον συμβολισμό των $\mathcal{K}(Y)$, $\mathcal{F}(Y)$ που δόθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, από εδώ και στο υπόλοιπο της εργασίας θέτουμε:
$\Sigma_{(v)} : \mathcal{C}(Y) = \{S \in 2^Y | S \text{ κυρτο, συμπαγές } \}$.
και
$\Sigma_{(vi)} : \mathcal{C}'(Y) = \mathcal{C}(Y) \cup Y$.

Το βασικό θεώρημα της παραγράφου αυτής είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 2.9. (Θεώρημα συνεχούς επιλογής για κατά συλλογή φυσιολογικούς χώρους) Για έναν T_1 τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος.

(ii) Αν Y είναι χώρος $Banach$, τότε κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{C}^{'}(Y)$ έχει συνεχή επιλογή.

Σαν πρώτο βήμα για την απόδειξη του θεωρήματος, θα δειχθεί το επόμενο θεώρημα που είναι ειδική περίπτωση της κατεύθυνσης $(i) \Rightarrow (ii)$ του παραπάνω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.10. Αν ο X είναι κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος και Y χώρος $Banach$, τότε κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ έχει συνεχή επιλογή.

Ορισμός 2.11. Μια οικογένεια υποσυνόλων $\{A_s | s \in S\}$ ενός τοπολογικού χώρου λέγεται *άστρο πεπερασμένη* (αντίστοιχα, *άστρο αριθμήσιμη*) αν για κάθε $s_0 \in S$ το σύνολο $\{s \in S | A_s \bigcap A_{s_0} \neq \emptyset\}$ είναι πεπερασμένο (αντίστοιχα, αριθμήσιμο).

Εύκολα μπορούμε να παρατήσουμε ότι κάθε άστρο πεπερασμένο κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου είναι κατά σημείο πεπερασμένο, και ότι ένα άστρο πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου X είναι τοπικά πεπερασμένο.

Λήμμα 2.12. Κάθε αριθμήσιμο κάλυμμα $\{U_i|i=1,2,...\}$ ενός τοπολογικού χώρου X, όπου κάθε U_i είναι συμπλήρωμα μηδενικού συνόλου, έχει αριθμήσιμη άστρο πεπερασμένη εκλέπτυνση από συμπληρώματα μηδενικών συνόλων (και άρα τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση).

Απόδειξη. Έστω $U_i = f_i^{-1}((0,1])$, όπου $f_i : X \to [0,1]$ είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $i = 1,2,\dots$. Θέτουμε $f : X \to [0,1]$ με $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(x)$.Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς, έπεται ότι η f είναι συνεχής. Αφού $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ έχουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X$ και άρα οι οικογένειες $\{V_k|k = 1,2,...\}$ και $\{F_k|k = 1,2,...\}$, όπου $V_k = f^{-1}((\frac{1}{k},1])$ και $F_k = f^{-1}([\frac{1}{k},1])$, είναι καλύμματα του X που αποτελούνται από συμπληρώματα μηδενικών συνόλων και από μηδενικά σύνολα αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι τα συμπληρώματα μηδενικών συνόλων $U_{k,j} = U_j \cap (V_{k+1} \setminus F_{k-1})$, όπου $1 \leq j \leq k$ $k = 1,2,...$ και $F_0 = \emptyset$, αποτελούν ένα άστρο πεπερασμένο κάλυμμα του X.
Έστω, λοιπόν, $x \in X$. Θεωρούμε τον ελάχιστο ακέραιο k ώστε $x \in F_k$. Παρατηρούμε ότι $F_k \subseteq \displaystyle\bigcup_{j \leq k} U_j$, και άρα υπάρχει $j \leq k$ ώστε $x \in U_j$. Επομένως $x \in U_j \bigcap (F_k \setminus F_{k-1}) \subseteq U_{k,j}$. Αφού $U_{k,j} \subseteq V_{k+1} \subseteq F_{k+1}$, έπεται ότι για $i \leq m$ $U_{k,j} \cap U_{m,i} \subseteq F_{k+1} \setminus F_{m-1} = \emptyset$ για $m \geq k+2$. Άρα το $\{U_{k,j}|j \leq k, k = 1,2,...\}$ είναι άστρο πεπερασμένο κάλυμμα από συμπληρώματα μηδενικών συνόλων.

□

Θεώρημα 2.13. Κάθε αριθμήσιμο κατά σημείο πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα $\{W_i|i = 1,2,...\}$ ενός φυσιολογικού χώρου X, έχει τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση $\{V_i|i = 1,2,...\}$ ώστε $V_i \subseteq W_i$ για $i = 1,2,\dots$.

Απόδειξη. Έστω $\{W_i|i = 1,2,...\}$ αριθμήσιμο, κατά σημείο πεπερασμένο, ανοικτό κάλυμμα του X . Τότε από το Λήμμα 1.14 υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{U_i|i = 1,2,...\}$ ώστε $\overline{U_i} \subseteq W_i$ για $i = 1,2,\dots$. Από το λήμμα *Urysohn* για κάθε $i = 1,2,...$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_i : X \to [0,1]$ ώστε $f_i(\overline{U_i}) \subseteq \{0\}$ και $f_i(X \setminus W_i) \subseteq \{1\}$. Τότε τα συμπληρώματα μηδενικών συνόλων $G_i = [f_i < \frac{1}{2}]$ για $i = 1,2,...$ αποτελούν αριθμήσιμο κάλυμμα του X ώστε

$G_i \subseteq W_i$. Άρα από το Λήμμα 2.12, το κάλυμμα αυτό έχει μια αριθμήσιμη τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση $\{R_j | j = 1, 2, ...\}$. Για κάθε $j = 1, 2, ...$ έστω $k_j \in \mathbb{N}$ ώστε $R_j \subseteq G_{k_j}$. Τότε τα $V_i = \bigcup \{R_j | k_j = i\}$, $i = 1, 2, ...$, ικανοποιούν το συμπέρασμα.

$\square$

Θεώρημα 2.14. Κάθε κατά σημείο πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα ενός κατά συλλογή φυσιολογικού χώρου έχει τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U}$ ένα κατά σημείο πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του κατά συλλογή φυσιολογικού χώρου X. Θα κατασκευάσουμε ακολουθία $\{\mathcal{W}_i | i = 0, 1, 2, ...\}$ οικογενειών που αποτελούνται από ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε αν $W_i = \bigcup \{W | W \in \mathcal{W}_i\}$ να ικανοποιούνται τα εξής για όλα τα $i = 1, 2, ...$:

(i) Κάθε $W \in \mathcal{W}_i$ είναι υποσύνολο κάποιου $U \in \mathcal{U}$.

(ii) Η $\mathcal{W}_i$ είναι διακριτή, και άρα τοπικά πεπερασμένη.

(iii) Αν $x \in X$ ανήκει σε i το πολύ στοιχεία του $\mathcal{U}$, τότε $x \in \bigcup_{k=0}^{i} W_k$

(iv) Κάθε $x \in W_i$ ανήκει σε τουλάχιστον i στοιχεία του $\mathcal{U}$.

Ας υποθέσουμε ότι έχει κατασκευαστεί η ακολουθία $\{\mathcal{W}_i | i = 1, 2, ...\}$. Τότε αφού $\mathcal{U}$ κατά σημείο πεπερασμένη, η $\{W_i | i = 1, 2, ...\}$ είναι κάλυμμα του X από το (iii) , και μάλιστα από το (iv) κατά σημείο πεπερασμένο. Από το Θεώρημα 2.13 έπεται ότι η $\{W_i | i = 1, 2, ...\}$ έχει ανοικτή τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\{V_i | i = 1, 2, ...\}$ ώστε $V_i \subseteq W_i$ για κάθε $i = 1, 2, ...$, και άρα $\bigcup_{i=0}^{\infty} \{V_i \cap W | W \in \mathcal{W}_i\}$ είναι ανοικτή τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$, λόγω των (i) και (ii). Επομένως αρκεί να κατασκευαστεί η ακολουθία $\{\mathcal{W}_i | i \in I\}$.

Θέτουμε $\mathcal{W}_, = \{\emptyset\}$. Αφού το μόνο στοιχείο του $\mathcal{W}_0$ είναι το $\emptyset$, οι $(i) - (iv)$ ικανοποιούνται για $i = 0$.

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{W}_0, ..., \mathcal{W}_n$ έχουν οριστεί ώστε να ικανοποιούν τα $(i) - (iv)$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Θα κατασκευάσουμε το $\mathcal{W}_{n+1}$. Έστω $\mathfrak{R}$ η οικογένεια των $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U}$ έτσι ώστε το $\mathcal{R}$ να έχει ακριβώς $n+1$ στοιχεία. Για κάθε $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ έστω

$$A(\mathcal{R}) = (X \setminus \bigcup_{k=0}^{n} W_k) \bigcap (X \setminus \bigcup \{U \in \mathcal{U} | U \notin \mathcal{R}\})$$

Το $A(\mathcal{R})$ είναι κλειστό. Επίσης, η οικογένεια $\{A(\mathcal{R})|\mathcal{R} \in \mathfrak{R}\}$ είναι διακριτή, αφού κάθε $x \in X$ έχει περιοχή που τέμνει το πολύ ένα $A(\mathcal{R})$. Πράγματι, παρατηρούμε τα παρακάτω :

(α) Αν το x ανήκει σε γνήσια περισσότερα από $n+1$ στοιχεία του $\mathcal{U}$, τότε η τομή οποιαδήποτε $n+2$ από αυτά δεν τέμνει κανένα $A(\mathcal{R})$.

(β) Αν το x ανήκει σε γνήσια λιγότερα από $n+1$ στοιχεία του $\mathcal{U}$, τότε από το (iii) $x \in \bigcup\limits_{k=0}^{n} W_k$, το οποίο δεν τέμνει κανένα $A(\mathcal{R})$.

(γ) Αν το x ανήκει σε ακριβώς $n+1$ στοιχεία του $\mathcal{U}$, ας πούμε στα $U_1, ..., U_{n+1}$ τότε το $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} U_k$ είναι περιοχή του x που δεν τέμνει το $A(\mathcal{L})$ για $\mathcal{L} \neq \{U_1, ..., U_{n+1}\}$, διότι τότε τουλάχιστον ένα U_k δεν είναι στοιχείο του $\mathcal{L}$, και αυτό το U_k δεν μπορεί να τέμνει το $A(\mathcal{L})$.

Αφού, η $\{A(\mathcal{R})|\mathcal{R} \in \mathfrak{R}\}$ είναι διακριτή οικογένεια από κλειστά υποσύνολα του κατά συλλογή φυσιολογικού χώρου X, υπάρχει διακριτή οικογένεια $\{V(\mathcal{R})|(\mathcal{R}) \in \mathfrak{R}\}$ ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $A(\mathcal{R}) \subseteq V(\mathcal{R})$. Παρατηρούμε ότι $A(\mathcal{R}) \subseteq U$ για κάθε $U \in \mathcal{R}$, διότι διαφορετικά κάποιο $x \in A(\mathcal{R})$ θα ήταν στοιχείο το πολύ n στοιχείων του $\mathcal{U}$ το οποίο είναι άτοπο λόγω του (iii) και του ορισμού του $A(\mathcal{R})$. Άρα θέτοντας $P(\mathcal{R}) = V(\mathcal{R}) \bigcap (\cap\{U|U \in \mathcal{R})\}$ τότε $A(\mathcal{R}) \subseteq P(\mathcal{R})$ για κάθε $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$. Ορίζουμε, τώρα, $W_{n+1} = \{P(\mathcal{R})|\mathcal{R} \in \mathfrak{R}\}$. Από τον ορισμό του $\mathcal{W}_{n+1}$ έχουμε ότι τα $(i), (ii), (iv)$ ικανοποιούνται για $i = n+1$. Για να δούμε αν και το (iii) ικανοποείται, έστω $x \in X$ το οποίο ανήκει σε $n+1$ το πολύ στοιχεία του $\mathcal{U}$. Τότε προφανώς υπάρχει $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ ώστε $x \in (X \setminus \bigcup\{U \in \mathcal{U}|U \notin \mathfrak{R}\}$. Αλλά τότε έχουμε ότι είτε $x \in (X \setminus \bigcup\{U \in \mathcal{U}|U \notin \mathcal{R}\}) \bigcap (X \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{n} W_k) = A(\mathcal{R}) \subseteq P(\mathcal{R}) \subseteq W_{n+1}$ ή $x \in \bigcup\limits_{k=0}^{n} W_k$. Σε κάθε περίπτωση $x \in \bigcup\limits_{k=0}^{n+1} W_k$.

□

Είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.10. Η μέθοδός της είναι παρόμοια με εκείνη του θεωρήματος για τους παρασυμπαγείς χώρους. Δηλαδή, θα βασιστεί σε ένα λήμμα συνεχούς $\epsilon-$ επιλογής, και στη συνέχεια θα κατασκευαστεί επαγωγικά κατάλληλη συγκλίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων.

Λήμμα 2.15. (**Λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής** III) Έστω X κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος, Y χώρος με νόρμα και $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ ώστε $f(x) \in B_d(\phi(x), \epsilon)$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Για $\epsilon > 0$ θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα $\{B_d(y, \epsilon) : y \in Y\}$. Αφού ο χώρος *Banach* Y είναι μετρικός χώρος, το παραπάνω κάλυμμα έχει ανοικτή τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\mathcal{W}$ (Θεώρημα 1.28) . Θεωρούμε το $\mathcal{U} = \{\phi^{-1}(W) | W \in \mathcal{W}\}$. Αφού το $\mathcal{W}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του Y και η ϕ κάτω ημισυνεχής έπεται ότι το $\mathcal{U}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Από το ότι η ϕ παίρνει συμπαγείς τιμές και το $\mathcal{W}$ είναι τοπικά πεπερασμένο, έπεται ότι το $\mathcal{U}$ είναι κατά σημείο πεπερασμένο.
Αφού ο X είναι κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος έπεται από το Θεώρημα 2.14 ότι το $\mathcal{U}$ έχει τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση, έστω $\{V_i | i \in I\}$. Για κάθε $i \in I$, επιλέγουμε $U_i \in \mathcal{U}$ ώστε $V_i \subseteq U_i$ και στην συνέχεια ένα $W_i \in \mathcal{W}$ ώστε $U_i \subseteq \phi^{-1}(W_i)$ και ένα $y(i) \in Y$ ώστε $W_i \subseteq B_d(y(i), \epsilon)$. Τότε $V_i \subseteq \phi^{-1}(B_d(y(i), \epsilon)) = \{x \in X | y(i) \in B_d(\phi(x), \epsilon)$.
Επίσης, αφού X είναι και φυσιολογικός , υπάρχει διαμέριση της μονάδας$\{f_i | i \in I\}$ που κυριαρχείται από το $\{V_i | i \in I\}$ (Πρόταση 1.18). Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι όπως στο Λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής I.

□

Απόδειξη. (*Θεωρήματος 2.10*).
Έστω $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση. Λόγω του προηγούμενου λήμματος η ϕ έχει μια συνεχή $\frac{1}{2}-$επιλογή την $f_0 : X \to Y$. Ορίζουμε, τώρα, την απεικόνιση $\phi_1 : X \to \mathcal{C}(Y)$ με $\phi_1(x) = \overline{\phi(x) \cap B_d(f_0(x), \frac{1}{2})}$, η οποία είναι καλά ορισμένη. Η ϕ_1 είναι κάτω ημισυνεχής, λόγω του Λήμματος 2.3 και της Παρατήρησης (ii), κάτω από τον Ορισμό 2.1. Επομένως, πάλι από το προηγούμενο λήμμα η ϕ_1 έχει συνεχή $\frac{1}{4}-$επιλογή, έστω την $f_1 : X \to Y$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $d(f_1(x), f_0(x)) \leq \dfrac{1}{2} < 2^0$ για κάθε $x \in X$.
Έτσι, με επαγωγή, παίρνουμε ακολουθία $\{f_i : i = 0, 1, ...\}$ συνεχών συναρτήσεων, τέτοιων ώστε για κάθε $i = 0, 1, ...$ και $x \in X$:

(I) $f_{i+1}(x) \in B_d(f_i(x)), \frac{1}{2^i})$,

(II) $f_i(x) \in B_d(\phi(x), \frac{1}{2^{i+1}})$.

Από την (I) παίρνουμε ότι η $\{f_i | i = 0, 1, ...\}$ είναι ομοιόμορφα $Cauchy$, με τιμές στον χώρο $Banach$ Y, επομένως συγκλίνει σε μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$. Λόγω της (II) έχουμε ότι $f(x) \in \phi(x)$ για κάθε $x \in X$.

□

Παρατηρούμε οτι το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.10 δεν ισχύει ($Example$ 1, [11]) .

Για το γενικότερο Θεώρημα 2.9 , χρειαζόμαστε επιπλέον το θεώρημα επέκτασης του $Dowker$, το οποίο χαρακτηρίζει τους κατά συλλογή φυσιολογικούς χώρους.

Θεώρημα 2.16. *(Επέκτασης του Dowker)*

Για έναν T_1 τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος.

(ii) Αν Y είναι χώρος $Banach$, $F \subseteq X$ κλειστό και $f : F \to Y$ συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει συνάρτηση $g : X \to Y$ συνεχής με $g_{|F} \equiv f$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ομοιότητα της μεθόδου της απόδειξης του θεωρήματος αυτού με εκείνη των θεωρημάτων επιλογής. Βασίζεται σε ένα λήμμα προσέγγισης (Λήμμα 2.18) -αντιστοιχο με τα λήμματα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής - το οποίο στη συνέχεια χρησιμοποιείται σε μία επαγωγή απ'οπου προκύπτει και η κατεύθυνση $(i) \Rightarrow (ii)$ του θεώρηματος. Η απόδειξη της άλλης κατεύθυνσης ειναι στοιχειώδης.

Αποδεικνύουμε πρώτα το παρακάτω λήμμα, το οποίο είναι γνωστό ότι χαρακτηρίζει τους κατα συλλογή φυσιολογικούς χώρους.

Λήμμα 2.17. Έστω X κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος και $A \subseteq X$ κλειστό. Έστω $\{U_i | i \in I\}$ ανοικτό τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα του A. Τότε υπάρχει $\{V_i | i \in I\}$ ανοικτό τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα του X, τέτοιο ώστε $V_i \cap A \subseteq U_i$ για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Αφού ο A είναι κατά συλλογή φυσιολογικός υπόχωρος του X, ως κλειστό υποσύνολό του, και άρα φυσιολογικός, υπάρχει $\{W_i|i \in I\}$ κάλυμμα του A από συμπληρώματα μηδενικών συνόλων και άρα ανοικτά F_σ σύνολα, ώστε να ισχύει $W_i \subseteq U_i$ για κάθε $i \in I$ (χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.14 και το Λήμμα *Urysohn*). Διατάσουμε καλά το I και θέτουμε $C_i = W_i \setminus \bigcup_{j<i} W_j$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \in I$ το C_i είναι F_σ σύνολο, αφού λαμβάνεται ως η τομή ενός F_σ σύνολου και ενός κλειστού. Άρα $C_i = \bigcup_{r=1}^{\infty} Ci, r$, όπου για $i \in I$, $r = 1, 2, ...$ το $C_{i,r}$ είναι κλειστό στον A, άρα και στον X. Ισχύει επίσης ότι τα C_i είναι ξένα ανά δύο και $\bigcup_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I} W_i = A$.
Αφού η οικογένεια $\{U_i|i \in I\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στο κλειστό $A \subseteq X$ είναι τοπικά πεπερασμένη και στον X. Επομένως, αφού για κάθε $i \in I$ ισχύει $C_{i,r} \subseteq C_i \subseteq W_i \subseteq U_i$, για σταθεροποιημένο $r = 1, 2, ...$, η $\{C_{i,r}|i \in I\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη και αποτελείται από ξένα ανά δύο κλειστά σύνολα. Αφού ο X είναι κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος, για κάθε $r = 1, 2, ...$ υπάρχει τοπικά πεπερασμένη οικογένεια $\{G_{i,r}|i \in I\}$ από ξένα αμά δύο ανοικτά σύνολα του X, ώστε $C_{i,r} \subseteq G_{i,r}$. Υπάρχει, επομένως, για $i \in I$, $r = 1, 2, ...$, ανοικτό F_σ σύνολο $H_{i,r}$ με $C_{i,r} \subseteq H_{i,r} \subseteq G_{i,r} \cap (U_i \cup (X \setminus A))$.
Θέτουμε $H = \bigcup\{H_{i,r}|i \in I, r = 1, 2, ...\}$. Τότε το σύνολο H είναι ανοικτό και $A = \bigcup\{C_{i,r}|i \in I, r = 1, 2, ...\} \subseteq H$. Άρα υπάρχει ανοικτό F_σ σύνολο H_0 τέτοιο ώστε $X \setminus H \subseteq H_0 \subseteq X \setminus A$. Προσθέτοντας το H_0 σε ένα οποιοδήποτε από τα $H_{i,r}$, παίρνουμε μια οικογένεια $\{L_{i,r}|i \in I, r = 1, 2, ...\}$ ανοικτών F_σ συνόλων με $\bigcup\{L_{i,r}|i \in I, r = 1, 2, ...\} = X$ και $C_{i,r} \subseteq L_{i,r} \subseteq U_i \cup (X \setminus A)$, για $i \in I$, $r = 1, 2, ...,$ και επίσης για κάθε $r = 1, 2, ...$ η οικογένεια $\{L_{i,r}|i \in I\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη. Θέτουμε $L_r = \bigcup_{i\in I} L_{i,r}$ για κάθε $r = 1, 2, ...$, και έχουμε ότι L_r ανοικτό F_σ υποσύνολο του X για κάθε $r = 1, 2, ...$, και ότι $\{L_r|r = 1, 2, ...\}$ είναι κάλυμμα του X. Για κάθε L_r υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\phi_r : X \to [0, 1]$ τέτοια ώστε $\phi_r(x) > 0$ αν και μόνον αν $x \in L_r$. Έστω $F_{r,n} = \{x \in X|\phi_r(x) \geq \frac{1}{n}\}$ και έστω $D_r = L_r \setminus \bigcup_{s<r} F_{s,r}$ για $r = 1, 2, ...$. Η οικογένεια $\{D_r|r = 1, 2, ...\}$ αποτελείται από ανοικτά σύνολα και παρατηρούμε ότι αν $x \in X$, και θεωρώντας $i \in \mathbb{N}$ τον ελάχιστο φυσικό ώστε $x \in L_i$, τότε $x \in X \setminus F_s$ για κάθε $s < i$ και άρα το $x \in D_i$, οπότε είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Επιπλέον, αν $y \in D_r$, θεωρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τον ελάχιστο

φυσικό ώστε $y \in \{x \in X | \phi_r(x) > \frac{1}{n_0}\}$. Για $m > n_0$ και $m > r$ έχουμε ότι $\{x \in X | \phi_r(x) > \frac{1}{n_0}\} \subseteq F_{r,m}$ και άρα $\{x \in X | \phi_r(x) > \frac{1}{n_0}\} \cap D_m = \emptyset$. Συνεπώς, η οικογένεια $\{D_r | r = 1, 2, ...\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα του X και $D_r \subseteq L_r$ για κάθε $r = 1, 2, \ldots$.

Θέτουμε $V_{i,r} = L_{i,r} \cap D_r$ και $V_i = \bigcup_{r=1}^{\infty} V_{i,r}$ για κάθε $i \in I$. Η οικογένεια $\{V_i | i \in I\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Πράγματι, τα $L_{i,r}$ και D_r είναι ανοικτά, άρα κάθε V_i είναι ανοικτό. Επίσης αν $x \in X$, τότε $x \in D_r$ για κάποιο $r = 1, 2, \ldots$, επομένως $x \in L_{i,r}$, διότι $D_r \subseteq \bigcup_{i \in I} L_{i,r}$ για κάθε $r = 1, 2, \ldots$, και άρα $x \in L_{i,r} \cap D_r = V_{i,r}$ για κάποιο $i \in I$, οπότε $x \in V_i$. Τέλος, το κάλυμμα $\{V_i | i \in I\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο, αφού η οικογένεια $\{D_r | r = 1, 2, ...\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη και, για κάθε $r = 1, 2, \ldots$, η $\{L_{i,r} | i = 1, 2, ...\}$ είναι επίσης τοπικά πεπερασμένη. Αφού $V_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} L_{i,r} \subseteq U_i \cap (X \setminus A)$ για κάθε $i \in I$, έχουμε ότι $V_i \cap A \subseteq U_i$ για κάθε $i \in I$. Έτσι έπεται το ζητούμενο.

□

Λήμμα 2.18. Έστω X κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος, $F \subseteq X$ κλειστό, Y χώρος με νόρμα, $f : F \to Y$, $g : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις και $r > 0$ ώστε $d_F(f, g) \leq r$ (όπου $d_F(f, g) = \sup\{\|f(x) - g(x)\| | x \in F\}$) . Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $h : X \to Y$ ώστε $d_F(f, h) \leq \epsilon$ και $d_X(g, h) \leq r + 3\epsilon$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Αφού ο Y είναι παρασυμπαγής (Θεωρημα 1.28), το ανοικτό κάλυμμα $\{B_d(y, \epsilon) | y \in Y\}$ του Y έχει μια τοπικά πεπερασμένη ανοικτή εκλέπτυνση $\{G_a | a \in A\}$. Για κάθε $a \in A$, έστω $y_a \in Y$ ώστε $G_a \subseteq B_d(y_a, \epsilon)$. Θέτουμε : $V_a = g^{-1}(G_a)$, $a \in A$ και $U_\beta = f^{-1}(G_\beta)$, $\beta \in B$. Λόγω της συνέχειας των g και f, τα $\{V_a | a \in A\}$ και $\{U_\beta | \beta \in B\}$ είναι τοπικά πεπερασμένα ανοικτά καλύμματα των X και F, αντίστοιχα. Αφού το F είναι κλειστό υποσύνολο του κατά συλλογή φυσιολογικού χώρου X, από το Λήμμα 2.17 υπάρχει τοπικά πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα $\{W_\beta | \beta \in A\}$ του X ώστε $F \cap W_\beta \subseteq U_\beta$ για κάθε $\beta \in A$. Αφού καθε κατά συλλογή φυσιολογικός είναι και φυσιολογικός χώρος, για το τοπικά πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα $\{V_a \cap W_\beta | (a, \beta) \in A \times A\}$ του X υπάρχει διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από αυτό (Πρόταση

1.18). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A είναι άπειρο, άρα $A \times A$ είναι ισοπληθικό με το A. Έτσι η διαμέριση της μονάδας συμβολίζεται με $\{h_i | i \in A\}$. Για κάθε $i \in A$, θέτουμε

$$A_i = \{a \in A | Supp(h_i) \subseteq V_a\} \textit{ και}$$

$$B_i = \{\beta \in B| \textit{ υπάρχει } a \in A \textit{ με } Supp(h_i) \subseteq V_a \cap W_\beta \textit{ και } V_a \cap W_\beta \cap F \neq \emptyset\}$$

και επιλέγουμε $\gamma(i)$ στο A ώστε : $\gamma(i) \in B_i$, αν $B_i \neq \emptyset$ και $\gamma(i) \in A_i$, αν $B_i = \emptyset$.
Τότε η συνάρτηση $h : X \to Y$ με $h(x) = \sum_{i \in A} h_i y_{\gamma(i)}$ είναι συνεχής. Θα δειχθεί ότι ικανοποιεί το συμπέρασμα.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$, $\|y - h(x)\| = \| \sum_{i \in A} h_i(x) y - \sum_{i \in A} h_i(x) y_{\gamma(i)}\| \leqslant \sum_{i \in A} h_i(x) \|y - y_{\gamma(i)}\|$ $(*)$.
Έστω $x \in F$ και $i \in A$ ώστε $h_i(x) \neq 0$. Τότε $B_i \neq \emptyset$, αφού για οποιαδήποτε $(a', \beta') \in A \times A$ ώστε $Supp(h_i) \subseteq V_{a'} \cap W_{\beta'}$, ισχύει $x \in V_{a'} \cap W_{\beta'} \cap F$. Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε $a \in A$ ώστε $Supp(h_i) \subseteq V_a \cap W_{\gamma(i)}$. Τότε $x \in V_a \cap W_{\gamma(i)} \cap F \subseteq V_a \cap U_{\gamma(i)}$, άρα $f(x) \in G_{\gamma(i)} \subseteq B_d(y_{\gamma(i)}, \epsilon)$, δηλαδή $\|f(x) - y_{\gamma(i)}\| < \epsilon$. Από την $(*)$ έπεται ότι $\|f(x) - h(x)\| < \epsilon$ για κάθε $x \in F$ και άρα $d_F(f, h) \leqslant \epsilon$.
Έστω τώρα $x \in X$ και $i \in A$ ώστε $h_i(x) \neq 0$. Αν $B_i \neq \emptyset$, επιλέγουμε $a \in A$ ώστε $Supp(h_i) \subseteq V_a \cap W_{\gamma(i)}$ και $V_a \cap W_{\gamma(i)} \cap F \neq \emptyset$. Έστω $x' \in V_a \cap W_{\gamma(i)} \cap F \subseteq V_a \cap U_{\gamma(i)}$. Τότε $\|g(x) - y_{\gamma(i)}\| \leqslant \|g(x) - y_a\| + \|y_a - g(x')\| + \|g(x') - f(x')\| + \|f(x') - y_{\gamma(i)}\| < \epsilon + \epsilon + r + \epsilon = r + 3\epsilon$, χρησιμοποιώντας διαδοχικά ότι $x \in V_a$, $x' \in V_a$, $x' \in F$ και $x' \in U_{\gamma(i)}$. Η ίδια ανισότητα, $\|g(x) - y_{\gamma(i)}\| < r + 3\epsilon$, ισχύει και όταν $B_i = \emptyset$, αφού τότε $Supp(h_i) \subseteq V_{\gamma(i)}$, άρα $x \in V_{\gamma(i)}$ και επομένως $\|g(x) - y_{\gamma(i)}\| < \epsilon$. Τώρα από την $(*)$ έπεται $\|g(x) - h(x)\| < r + 3\epsilon$ για κάθε $x \in X$ και άρα $d_X(g, h) \leqslant r + 3\epsilon$. □

Απόδειξη. (Θεώρηματος 2.16).
$(i) \Rightarrow (ii)$ Θεωρώντας οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση $f_0 : X \to Y$, έπεται από το Λήμμα 2.18 ότι υπάρχει $f_1 : X \to Y$ συνεχής ώστε $d_F(f, f_1) < \frac{1}{4}$. Έστω ότι $f_1, ..., f_n : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις έχουν οριστεί ώστε $d_F(f, f_i) < \frac{1}{4^i}$ για $i = 1, ..., n$ και $d_X(f_{i-1}, f_i) < \frac{1}{4^{i-2}}$ για $i = 2, ..., n$. Από το Λήμμα 2.18

υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_{n+1} : X \to Y$ ώστε $d_F(f, f_{n+1}) < \dfrac{1}{4^{n+1}}$ και $d_X(f_n, f_{n+1}) < \dfrac{1}{4^n} + \dfrac{3}{4^{n+1}} < \dfrac{1}{4^{n-1}}$. Τότε η ακολουθία $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ είναι ομοιόμορφα *Cauchy* και άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $g : X \to Y$ με $g|_F = f$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω διακριτή οικογένεια $\{F_a | a \in A\}$ από κλειστά υποσύνολα του X. Θεωρούμε τον χώρο *Banach* $l_1(A)$ και ορίζουμε $f : \bigcup\{F_a | a \in A\} \to l_1(A)$ με $f_{|F_a} = e_a$ όπου $e_a(b) = 1$, αν $b = a$, και $e_a(b) = 0$, αν $b \neq a$. Τότε η f είναι συνεχής στο κλειστο υποσύνολο $\bigcup\{F_a | a \in A\}$ του X επομένως από την υπόθεσή μας υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to Y$ ώστε $g_{|\bigcup\{F_a | a \in A\}} \equiv f$. Για κάθε $a, a' \in A$ με $a \neq a'$ παρατηρούμε ότι $B_d(e_a, 1) \cap B_d(e_{a'}, 1) = \emptyset$. Συνεπώς τα σύνολα $U_a = g^{-1}(B_d(e_a, 1)$, για $a \in A$, είναι μια ξένη οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $F_a \subseteq U_a$. Επομένως από την Πρόταση 1.38 έπεται ότι ο X είναι κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος.

□

Περνάμε στην απόδειξη του κεντρικού θεωρήματος της παραγράφου αυτής. Θα ακολουθήσουμε την κλασσική μέθοδο και εδώ: ένα λήμμα συνεχούς $\epsilon-$ επιλογής και μέσω αυτού θα κατασκευάσουμε συγκλίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων.

Λήμμα 2.19. (Λήμμα συνεχούς ϵ-επιλογής IV) Έστω X κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος, Y χώρος *Banach* και $\phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση, $g : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση ώστε το $\phi(x)$ είναι συμπαγές για εκείνα τα $x \in X$ για τα οποία $g(x) \notin \phi(x)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ ώστε $f(x) \in B_d(\phi(x), \epsilon)$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$ και $A = \{x \in X | d(g(x), \phi(x)) \geq \epsilon\}$. Τότε αφού η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής και η g συνεχής έπεται ότι το A κλειστό. Παρατηρούμε επίσης ότι η $\phi_{|A}$ παίρνει συμπαγείς τιμές, δηλαδή $\phi_{|A} : A \to \mathcal{C}(Y)$, λόγω του ορισμού του A. Αφού ο X κατά συλλογή φυσιολογικός και το $A \subseteq X$ κλειστό έπεται ότι το A κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος. Επομένως, από το Θεώρημα 2.10 η $\phi_{|A}$ έχει συνεχή επιλογή $h_0 : A \to Y$. Από το θεώρημα *Dowker* υπάρχει συνεχής συνάρτηση $h : X \to Y$ ώστε $h_{|A} \equiv h_0$. Θεωρούμε, τώρα, το σύνολο $U = \{x \in X | d(h(x), \phi(x)) < \epsilon\}$ το οποίο περιέχει το A, και

είναι ανοικτό διότι ϕ είναι κάτω ημισυνεχής και h συνεχής. Αφού ο X είναι φυσιολογικός από το λήμμα *Urysohn* υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\alpha : X \to [0,1]$ ώστε $A \subseteq \alpha^{-1}(\{0\})$ και $X \setminus U \subseteq \alpha^{-1}(\{1\})$.
Ορίζουμε, τώρα, συνεχή $f : X \to Y$ με $f(x) = \alpha(x)g(x) + (1-\alpha(x))h(x)$ για κάθε $x \in X$. Τότε η f ικανοποιει το συμπέρασμά μας. Πράγματι, έστω $x \in X$. Αν $x \in A$, τότε $\alpha(x) = 0$ και επομένως $f(x) = h(x) = h_0(x) \in \phi(x)$. Αν $x \in X \setminus U$ τότε $\alpha(x) = 1$ και άρα $f(x) = g(x)$, οπότε $d(f(x), \phi(x)) = d(g(x), \phi(x)) < \epsilon$ αφού $x \notin A$. Τέλος, αν $x \in U \setminus A$ τότε $d(h(x), \phi(x)) < \epsilon$ και $d(g(x), \phi(x)) < \epsilon$. Αφού το $\phi(x)$ είναι κυρτό και $f(x) = \alpha(x)g(x) + (1 - \alpha(x))h(x)$ έχουμε ότι $d(f(x), \phi(x)) < \epsilon$.

□

Προχωράμε στην απόδειξη του θεωρήματος :

Απόδειξη. (Θεωρήματος 2.9).
$((i) \Rightarrow (ii))$ Έστω Y χώρος *Banach* και $\phi : X \to \mathcal{C}'(Y)$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση. Αν $g : X \to Y$ είναι συνεχής συνάρτηση, για παράδειγμα μια σταθερή συνάρτηση, τότε το $\phi(x)$ είναι συμπαγές για κάθε $x \in X$ ώστε $g(x) \notin \phi(x)$. Λόγω του προηγούμενου λήμματος η ϕ έχει μια συνεχή $\dfrac{1}{2}-$επιλογή $f_0 : X \to Y$. Ορίζουμε τώρα $\phi_1 : X \to \mathcal{F}(Y)$ με $\phi_1(x) = \overline{\phi(x) \bigcap B_d(f_0(x), \frac{1}{2})}$.
Η ϕ_1 είναι κάτω ημισυνεχής λόγω του Λήμματος 2.3 και της Παρατήρησης (ii) κάτω από τον Ορισμό 2.1. Παρατηρούμε ότι, αν $f_0(x) \notin \phi_1(x)$ για κάποιο $x \in X$, τότε $f_0(x) \notin \phi(x)$ και αφού η ϕ παίρνει τιμές στο $\mathcal{C}'(Y)$ έπεται ότι το $\phi(x)$ είναι συμπαγές. Επομένως, πάλι από το προηγούμενο λήμμα η ϕ_1 έχει συνεχή $\dfrac{1}{4}-$επιλογή την $f_1 : X \to Y$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $d(f_1(x), f_0(x)) \leq \dfrac{1}{2} < 2^0$ για κάθε $x \in X$.
Έτσι, με επαγωγή παίρνουμε ακολουθία $\{f_i | i = 0, 1, ...\}$ συνεχών συναρτήσεων ώστε για κάθε $i = 0, 1, ...$ και $x \in X$:

(I) $f_{i+1}(x) \in B_d(f_i(x), \dfrac{1}{2^i})$,

(II) $f_i(x) \in B_d(\phi(x), \dfrac{1}{2^{i+1}})$.

Λόγω της (I) η $\{f_i | i = 0, 1, ...\}$ είναι *Cauchy* στον χώρο *Banach* Y. Από την (II), $f(x) \in \phi(x)$ γαι κάθε $x \in X$. Επομένως, έχουμε το ζητούμενο.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Έπεται άμεσα από την Πρόταση 2.8 και το Θεώρημα *Dowker* $((i) \Rightarrow$

(ii)).

□

Όπως αναφέραμε και στην Εισαγωγή η απόδειξη του Θεωρήματος 2.9 στην εργασία [12] δεν είναι πλήρης. Τα επιχειρήματά της αρκούν μόνο για το Θεώρημα 2.10, καθώς τα σύνολα της μορφής $\overline{\phi(x) \cap B_d(y,\epsilon)}$, όπου $x \in X$, $y \in Y$, $\epsilon > 0$, όταν η ϕ παίρνει τιμές στο $\mathcal{C}^{'}(Y)$, δεν είναι πάντοτε συμπαγή.

2.4 Θεώρημα συνεχούς επιλογής για φυσιολογικούς τοπολογικούς χώρους

Στην παράγραφο αυτήν θα αποδείξουμε το θεώρημα συνεχούς επιλογής για φυσιολογικούς χώρους. Πρόκειται για ένα θεώρημα όμοιο με το θεώρημα για τους κατά συλλογή φυσιολογικούς χώρους, με την διαφορα ότι για τους φυσιολογικούς χώρους ο χώρος *Banach* Y πρέπει να είναι διαχωρίσιμος.

Το ίδιο ισχύει και για την μέθοδο της απόδειξης. Θα διατυπώσουμε πρώτα ένα θεώρημα συνεχούς επιλογής όπου η κάτω ημισυνεχής απεικόνιση θα παίρνει τιμές στα μη κενά, κυρτά, συμπαγή υποσύνολα του Y, και στην συνέχεια ένα δεύτερο - το οποίο είναι το θεώρημα που μας ενδιαφέρει - στο οποίο θα επιτρέψουμε η κάτω ημισυνεχής συνάρτηση να παίρνει και σαν τιμή τον Y.

Το βασικό θεώρημα της παραγράφου αυτής είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 2.20. (Θεώρημα συνεχούς επιλογής για φυσιολογικούς χώρους) Για έναν T_1 τοπολογικό χώρο τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι φυσιολογικός χώρος.

(ii) Κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{C}^{'}(\mathbb{R})$ έχει συνεχή επιλογή.

(iii) Αν Y είναι διαχωρίσιμος χώρος *Banach*, τότε κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{C}^{'}(Y)$ έχει συνεχή επιλογή.

Όπως και πρίν, σαν πρώτο βήμα για την απόδειξη του θεωρήματος, θα δειχθεί το επόμενο θεώρημα που είναι ειδική περίπτωση της κατεύυθυνσης $(i) \Rightarrow (ii)$ του παραπάνω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.21. Αν X είναι φυσιολογικός χώρος και Y διαχωρίσιμος χώρος *Banach*, τότε κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ έχει συνεχή επιλογή.

Προχωρώντας στην απόδειξη αυτού του θεωρήματος, περνάμε σε ένα λήμμα συνεχούς $\epsilon-$ επιλογής.

Λήμμα 2.22. (Λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής V) Έστω X φυσιολογικός χώρος, Y διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ ώστε $f(x) \in B_d(\phi(x), \epsilon)$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Είναι όμοια με την απόδειξη του Λήμματος συνεχούς $\epsilon-$επιλογής III . Διαφέρει, μόνο, στο ότι ξεκινάμε με το αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα $\{B_d(y, \epsilon) | y \in D\}$, όπου D είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του Y, και χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.13 αντί του Θεωρήματος 2.14. □

Απόδειξη. (Θεωρήματος 2.21).
Ακολουθεί ακριβώς την ίδια διαδικασία με την απόδειξη για κατά συλλογή φυσιολογικούς χώρους, χρησιμοποιώντας το Λήμμα $\epsilon-$συνεχούς επιλογής V αντί του Λήμματος συνεχούς $\epsilon-$επιλογής III.

□

Παρατηρούμε ότι και το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.21 ισχύει. Πράγματι, αφού ισχύει το συμπέρασμα για κάθε διαχωρίσιμο χώρο *Banach* θα ισχύει και για τον $\mathbb{R}$. Έτσι λοιπόν, αν $f : A \to [0, 1]$ μια συνεχής συνάρτηση τότε ορίζοντας την $\phi : X \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ με $\phi(x) = \{f(x)\}$, αν $x \in A$, και $\phi(x) = [0, 1]$, αν $x \notin A$, και ακολουθώντας την απόδειξη της Πρότασης 2.8, έπεται ότι ο X ικανοποιεί το θεώρημα του *Tietze* και άρα είναι φυσιολογικός.

Στην συνέχεια, θα δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος συνεχούς επιλογής για φυσιολογικούς χώρους. Σε αντιστοιχία με την απόδειξη του θεωρήματος για τους κατά συλλογή φυσιολογικούς χώρους - όπου χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα επέκτασης του *Dowker* - εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 2.23. (*Urysohn, Tietze, Dugundji, Hanner*)

Για έναν T_1 τοπολογικό χώρο τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι φυσιολογικός χώρος.

(ii) Αν $F \subseteq X$ είναι κλειστό και $f : F \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ συνεχής με $g_{|F} = f$.

(iii) Αν Y είναι διαχωρίσιμος χώρος *Banach*, $F \subseteq X$ κλειστό και $f : F \to Y$ συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to Y$ με $g_{|F} = f$.

Η απόδειξη της κατεύθυνσης $(i) \Rightarrow (iii)$ του θεωρήματος, ακολουθεί την μέθοδο της αντίστοιχης κατεύθυνσης του Θεωρήματος 2.16 (επέκτασης του *Dowker*). Έτσι θα χρησιμοποιηθεί το παρακάτω λήμμα, που είναι ανάλογο με το Λήμμα 2.18.

Λήμμα 2.24. Έστω X φυσιολογικός χώρος, $F \subseteq X$ κλειστό, Y διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, $f : F \to Y$, $g : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις και $r > 0$ ώστε $d_F(f, g) \leq r$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $h : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση ώστε $d_F(f, h) \leq \epsilon$ και $d_X(g, h) \leq r + 3\epsilon$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Αφού ο Y είναι διαχωρίσιμος υπάρχει ακολουθία $\{y_n | n \in \mathbb{N}\}$ στο Y ώστε $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_d(y_n, \epsilon)$.
Θέτουμε : $U_n = f^{-1}(B_d(y_n, \epsilon))$ για $n = 1, 2, ...$ και $V_m = g^{-1}(B_d(y_m, \epsilon))$ για $m = 1, 2, ...$. Τα U_n αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του F και τα V_m ανοικτό κάλυμμα του X από συμπληρώματα μηδενικών συνόλων στο F και X αντίστοιχα.
Αφού ο X είναι φυσιολογικός, από το θεώρημα *Tietze* έπεται ότι υπάρχουν συμπληρώματα μηδενικών συνόλων W_n, $n = 1, 2, ...$, στον X ώστε $W_n \cap F = U_n$ για $n = 1, 2, ...$. Από το λήμμα *Urysohn*, υπάρχει $\phi : X \to [0, 1]$ συνεχής ώστε $\phi(F) \subseteq \{0\}$ και $\phi(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n) \subseteq \{1\}$. Θέτουμε $W_0 = \{x \in X | \phi(x) > 0\}$. Τότε τα W_n, $n = 1, 2, ...$, αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του X από συμπληρώματα μηδενικών συνόλων.
Από τα παραπάνω έπεται ότι το σύνολο $\{V_m \cap W_n | m = 1, 2, ...n = 1, 2, ...\}$ είναι αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του X από συμληρώματα μηδενικών συνόλων. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.13 και την Πρόταση 1.18, έπεται ότι υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{h_i | i = 1, 2, ...\}$ που κυριαρχείται από αυτό το κάλυμμα. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε $A_i = \{n \in \mathbb{N} |\ \textit{υπάρχει}\ m \in \mathbb{N}\ \textit{ωστε}\ Supp(h_i) \subseteq V_m \cap W_n\ \textit{και}\ V_m \cap U_n \neq \emptyset\}$, $B_i = \{m \in \mathbb{N} | Supp(h_i) \subseteq V_m\}$ και στην συνέχεια

επιλέγουμε $\gamma(i) = \min A_i$, αν $A_i \neq \emptyset$ και $\gamma(i) = \min B_i$, αν $N_i = \emptyset$. Ορίζοντας $h : X \to Y$ με $h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x) y_{k(i)}$ και προχωρώντας ακριβώς όπως στο Λήμμα 2.18 επεται το ζητούμενο. □

Απόδειξη. (Θεωρήματος 2.23).
$(i) \Rightarrow (iii)$ Έπεται ακριβώς όπως η αντίστοιχη κατεύθυνση του Θεωρήματος 2.16, με την διαφορά ότι χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2.24 αντί του Λήμματος 2.18 .
$(iii) \Rightarrow (ii)$ και $(ii) \Rightarrow (i)$ Προφανή. □

Για την απόδειξη του βασικού θεωρήματος θα βασιστούμε - και πάλι - σε ένα λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής, με το οποίο θα κατασκευάσουμε την κατάλληλη συγκλίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων.

Λήμμα 2.25. (Λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής VI**)** Έστω X φυσιολογικός χώρος, Y διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, $\phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση, και $g : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\phi(x)$ να είναι συμπαγές για εκείνα τα $x \in X$ για τα οποία $g(x) \notin \phi(x)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ η ϕ έχει συνεχή ϵ-επιλογή.

Απόδειξη. Κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία με εκείνη του Λήματος $\epsilon-$συνεχούς επιλογής IV, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.23, αντι του θεωρήματος επέκτασης του $Dowker$.

□

Απόδειξη. (Θεωρήματος 2.20). $(i) \Rightarrow (iii)$ Ομοίως με την κατεύθυνση $(i) \Rightarrow (ii)$ του Θεωρήματος συνεχούς επιλογής για κατά συλλογή φυσιολογικούς χώρους, χρησιμοποιώντας το Λήμμα συνεχούς $\epsilon-$επιλογής VI αντί του Λήμματος συνεχούς $\epsilon-$επιλογής IV.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Προφανές.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Από την Πρόταση 2.8 έπεται ότι ο X ικανοποιεί το θεώρημα $Tietze$ και άρα είναι φυσιολογικός.

□

Κεφάλαιο 3

Θεωρήματα παρεμβολής και εφαρμογές στη συναρτησιακή ανάλυση

Έχουμε δει ως τώρα τον τρόπο με τον οποίο χαρακτηρίζονται οι φυσιολογικοί, παρασυμπαγείς, αριθμήσιμα παρασυμπαγείς φυσιολογικοί και οι κατά συλλογή φυσιολογικοί χώροι μέσω θεωρημάτων συνεχών επιλογών.

Ωστόσο, κάποιες από αυτές τις τοπολογικές ιδιότητες χαρακτηρίζονται και μέσω των θεωρημάτων παρεμβολής των $Dowker$, $Katetov - Tong$ και του $Michael$, τα οποία είναι ειδικής μορφής θεωρήματα συνεχούς επιλογής. Τα θεωρήματα αυτά, στις αρχικές τους παρουσιάσεις, είχαν διαφορετικές και κάποια αρκετά εκτενείς αποδείξεις, σε σχέση με αυτές που θα δώσουμε εδώ. Σκοπός μας εδώ είναι να χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα συνεχούς επιλογής του προηγούμενου κεφαλαίου, και να τα χρησιμοποιήσουμε για τις αποδείξεις των θεωρημάτων, γεγονός που θα τις κάνει σχετικά στοιχειώδεις.

Πιο συγκεκριμένα, τα θεωρήματα τα οποία θα μας απασχολήσουν είναι τα παρακάτω:

Θεώρημα. ($Katetov - Tong$) Ένας T_1 τοπολογικός χώρος X είναι φυσιολογικός αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $g, h : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g \leq h$, η g είναι άνω ημισυνεχής και η h κάτω ημισυνεχής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g \leq f \leq h$.

Θεώρημα. (*Dowker*) Ένας T_1 τοπολογικός χώρος είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής φυσιολογικός αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $g, h : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g < h$, η g είναι άνω ημισυνεχής και η h κάτω ημισυνεχής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g < f < h$.

Θεώρημα. (*Michael*) Ένας T_1 τοπολογικός χώρος X είναι τέλεια φυσιολογικός αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $g, h : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g \le h$, η g είναι άνω ημισυνεχής και η h κάτω ημισυνεχής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g \le f \le h$ και $g(x) < f(x) < h(x)$ όταν $g(x) < h(x)$.

Ξεκινάμε δίνοντας κάποια βασικά αποτελέσματα που μας είναι χρήσιμα για τις αποδείξεις που θα ακολουθήσουν.

Λήμμα 3.1. Το γινόμενο $X \times Y$ ενός αριθμήσιμα παρασυμπαγούς φυσιολογικού χώρου X και ενός συμπαγούς μετρικού χώρου Y είναι φυσιολογικός.

Απόδειξη. Έστω A, B δύο ξένα, κλειστά υποσύνολα του $X \times Y$. Θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $\{G_i | i = 1, 2, ...\}$ για τα ανοικτά σύνολα του Y και για κάθε πεπερασμένο $G \subseteq \mathbb{N}$, θέτουμε

$$H_G = \bigcup_{i \in G} G_i \text{ και } U_G = \{x \in X | A_x \subseteq H_G \subseteq \overline{H_G} \subseteq Y \setminus B_x\}$$

όπου τα σύνολα $A_x = \{y \in Y | (x, y) \in A\}$ και $B_x = \{y \in Y | (x, y) \in B\}$ είναι προφανώς κλειστά στον Y.
Έστω $x_0 \in X$ ώστε $A_{x_0} \subseteq H_G$. Τότε για κάθε $y \in Y \setminus H_G$ το $(x_0, y) \notin A$ και αφού το A είναι κλειστό υπάρχει περιοχή του (x_0, y) έστω $N_y \times M_y$ που δεν τέμνει το A. Έτσι παίρνουμε ένα ανοικτό κάλυμμα $\{M_y | y \in Y \setminus H_G\}$ του $Y \setminus H_G$. Αφού το $Y \setminus H_G$ συμπαγές υπάρχουν πεπερασμένα M_y που το καλύπτουν. Αν, τώρα, N_{x_0} είναι η τομή των αντίστοιχων (προς τα πεπερασμένα M_y) N_y τότε το $N_{x_0} \times (Y \setminus H_G)$ δεν τέμνει το A. Επομένως, αν $x \in N_{x_0}$ το $A_x \subseteq H_G$. Άρα το $\{x \in X | A_x \subseteq H_G\}$ είναι ανοικτό. Με τον ίδιο τρόπο το $\{x \in X | \overline{H_G} \subseteq Y \setminus B_x\}$ είναι ανοικτό. Άρα το $U_G = \{x \in X | A_x \subseteq H_G\} \bigcap \{x \in X | \overline{H_G} | Y \setminus B_x\}$ είναι επίσης ανοικτό.
Έστω $x \in X$. Τότε για κάθε $y \in A_x$ υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο G_i ώστε $y \in G_i$ και $\overline{G_i} \bigcap B_x = \emptyset$. Ένας πεπερασμένος αριθμός από αυτά τα G_i καλύπτουν το A_x ας πούμε για $D \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, $A_x \subseteq \bigcup_{i \in D} G_i = H_D$ και

$\overline{H_D} = \bigcup_{i\in D} \overline{G_i} \subseteq Y \setminus B_x$. Οπότε $x \in U_D$. Άρα το $\{U_G | G \subseteq \mathbb{N}\ \textit{πεπερασμένο}\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, προφανώς αριθμήσιμο .

Αφού ο X είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής υπάρχει ανοικτή τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\{W_i | i \in I\}$ του $\{U_G | G \subseteq \mathbb{N}\ \textit{πεπερασμένο}\}$. Τότε για κάθε $i \in I$ υπάρχει $G(i) \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο ώστε $W_i \subseteq U_{G(i)}$. Για $G \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο θέτουμε $W_G = \bigcup\{U_G | G(i) = G\}$. Τότε ,από το Θεώρημα 1.41, το αριθμήσιμο κάλυμμα $\{W_G | G \subseteq \mathbb{N}\ \textit{πεπερασμένο}\ \}$, έχει εκλέπτυνση $\{V_G | G \subseteq \mathbb{N}\ \textit{πεπερασμένο}\ \}$ ώστε να ισχύει $\overline{V_G} \subseteq W_G$, και άρα να είναι και τοπικά πεπερασμένη. Έστω το $U = \bigcup_{G\subseteq\mathbb{N}\ \textit{πεπερ.}} (V_G \times H_G)$. Το U ανοικτό. Για κάθε σημείο (x, y) του A και για κάποιο V_G το $x \in V_G \subseteq U_G$. Τότε $y \in A_x \subseteq H_G$ και άρα $(x, y) \in V_G \times H_G$. Άρα $A \subseteq U$. Αφού το $\{V_G | G \subseteq \mathbb{N}\ \textit{πεπερασμένο}\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο κάθε $x \in X$ ανήκει σε κάποιο ανοικτό $S(x)$ το οποίο τέμνει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων του $\{V_G | G \subseteq \mathbb{N}\ \textit{πεπερασμένο}\}$. Κατά συνέπεια η περιοχή $S(x) \times Y$ του (x, y) τέμνει πεπερασμένα $V_G \times H_G$. Άρα,

$$(x, y) \in \overline{U} \Leftrightarrow \ \textit{ανήκει στην κλειστή θήκη κάποιου}\ V_G \times H_G$$

Δηλαδή, $\overline{U} = \bigcup_{G\subseteq\mathbb{N}\ \textit{πεπερ.}} (\overline{V_G \times H_G})$. Αλλά, $\overline{V_G \times H_G} = \overline{V_G} \times \overline{H_G}$. Οπότε έχουμε ότι $\overline{U} = \bigcup_{G\subseteq\mathbb{N}\ \textit{πεπερ.}} (\overline{V_G} \times \overline{H_G}) \subseteq \bigcup_{G\subseteq\mathbb{N}\ \textit{πεπερ.}} (U_G \times \overline{H_G})$.

Αλλά $(U_G \times \overline{H_G}) \bigcap B = \emptyset$ άρα $\overline{U} \bigcap B = \emptyset$. Άρα το ανοικτό U περιέχει το A και η κλειστή του θήκη δεν τέμνει το B. Επομένως ο $X \times Y$ είναι φυσιολογικός. $\square$

Λήμμα 3.2. Έστω X φυσιολογικός χώρος και $h : X \to [0, 1]$ κάτω ημισυνεχής συνάρτηση και $\{U_n | n = 1, 2, ...\}$ μια μη φθίνουσα ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = [h > 0]$ και $\overline{U_n} \subseteq [h > \frac{1}{n}]$ για $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $f : X \to [0, 1]$ συνεχής ώστε $0 \leq f \leq h$ και $[h > 0] \subseteq [f > 0]$.

Απόδειξη. Έστω $\{q_n | n = 1, 2, ...\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Τότε ορίζεται μοναδικά ακολουθία $(s_n) \subseteq \mathbb{N}$ διαμερίζοντας το $(0, 1)$ σε διαστήματα της μορφής $[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m})$ για $m \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $s_n = m \Leftrightarrow q_n \in [\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m})$. Παρατηρούμε ότι, $q_l < q_n \Rightarrow s_l \geq s_n$.

Για κάθε $n \geq 2$ κατασκευάζουμε επαγωγικά οικογένεια $\{F_{q_i} | i < n\}$ ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε:

$$\overline{F_{q_i}} \subseteq F_{q_j},\ \text{αν}\ q_j < q_i\ \text{και}\ i, j < n,$$

(I_n)

$$\overline{U_{s_i}} \subseteq F_{q_i} \subseteq \overline{F_{q_i}} \subseteq [h > \frac{1}{s_i}],\ \text{αν}\ i < n.$$

Το ότι ο χώρος X είναι φυσιολογικός μας εξασφαλίζει την ύπαρξη του F_{q_1} που ικανοποιεί την (I_2). Υποθέτουμε ότι τα F_{q_i} έχουν οριστεί για $i < n$ και ικανοποιούν την (I_n). Θέτουμε

$$q_l = max\{q_i < q_n | i < n\}\ \text{και}\ q_r = min\{q_i > q_n | i > n\}.$$

Τότε, $q_l < q_n < q_r$ και άρα $s_l \geq s_n \geq s_r$. Απ' αυτό που μόλις κατασκευάσαμε έχουμε ότι $\overline{U_{s_n}} \bigcup \overline{F_{q_r}} = K \subseteq V = F_{q_l} \bigcap [h > \frac{1}{s_n}]$. Λόγω του ότι ο X είναι φυσιολογικός, επιλέγουμε ανοικτό F_{q_n} ώστε $K \subseteq F_{q_n} \subseteq \overline{F_{q_n}} \subseteq V$. Τότε η οικογένεια $\{F_{q_i} | i < n+1\}$ ικανοποιεί την (I_{n+1}).
Έστω $F_{q_n} = X$ για όλα τα $q \leq 0$ και $F_q = \emptyset$ για όλα τα $q \geq 1$. Ορίζουμε $f : X \to [0,1]$ με $f(x) = \sup\{q \in \mathbb{Q} : x \in F_q\}$. Τότε f συνεχής (Λήμμα 13.1, σελ.362, [15]).
Για κάθε $q \in \mathbb{Q} \bigcap (0,1)$ έχουμε $F_q \subseteq [h > \frac{1}{m}]$ όπου $q \in [\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m})$. Άρα $F_q \subseteq [h > q]$, δηλαδή $f \leq h$. Τέλος αν $f(x) = 0$ τότε $x \in X \setminus F_q$ για όλα τα $q > 0$. Από την (I_n), $x \in X \setminus U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $h(x) = 0$.

□

Πρόταση 3.3. Έστω X φυσιολογικός χώρος. Για $A \subseteq X$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) A είναι κλειστό G_δ−σύνολο.

(ii) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : A \to [0,1]$ έχει συνεχή επέκταση $\overline{f} : X \to [0,1]$ ώστε $\overline{f}(X \setminus A) \subset (0,1)$.

(iii) A είναι μηδενικό σύνολο.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $f : A \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση. Από το θεώρημα $Tietze$ η f επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση $g : X \to [0,1]$. Αφού το A είναι G_δ, υπάρχει ακολουθία $\{F_n | n = 1, 2, ...\}$ κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $X \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Αφού ο X είναι φυσιολογικός, υπάρχει ακολουθία

$\{V_n | n = 1, 2, ...\}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $F_n \subseteq V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq X \setminus A$. Έστω $U_n = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Τότε έχουμε ότι $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = X \setminus A = [X_{X\setminus A} > 0]$ και $\overline{U_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \subseteq X \setminus A = [X_{X\setminus A} > \frac{1}{n}]$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, με την $X_{X\setminus A}$ να είναι κάτω ημισυνεχής. Έτσι, από το Λήμμα 3.2 υπάρχει $h : X \to [0,1]$ συνεχής ώστε $0 \leq h \leq X_{X\setminus A}$ και $h(X \setminus A) \subseteq (0,1]$. Τέλος, ορίζουμε την συνάρτηση $\overline{f} : X \to [0,1]$ με $\overline{f} = \frac{1}{2}(max(g-h, 0) + \frac{1}{2}min(g+h, 1))$. Αφού $h(A) = \{0\}$ και $g_{|A} = f$ έπεται ότι $\overline{f_{|A}} = f$. Αν $x \in X \setminus A$ τότε ισχύει ότι $\overline{f}(x) \geq \frac{1}{2}min(h(x) + g(x), 1) > 0$. Όμοια, $\overline{f}(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}max(g(x) - h(x), 0)$ $< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Άρα $\overline{f}(X \setminus A) \subseteq (0,1)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Αν $f \equiv 0$ στο A, τότε $A = [\overline{f} = 0]$ και άρα το A είναι μηδενικό σύνολο.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Προφανές, αφού για κάποια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει $A = f^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$.

□

Θεώρημα 3.4. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι τέλεια φυσιολογικός αν και μόνο αν κάθε κλειστό σύνολο στο X είναι μηδενικό σύνολο.

Απόδειξη. Αν ο X είναι τέλεια φυσιολογικός, τότε κάθε κλειστό υποσύνολο του είναι και G_δ, άρα, από την Πρόταση 3.3, μηδενικό σύνολο.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι μηδενικό σύνολο έχουμε ότι κάθε κλειστό είναι G_δ, λόγω της Πρότασης 2.4. Επίσης, έστω K, L δυο ξένα κλειστά σύνολα στον X και έστω $K = [f = 0]$, $L = [g = 0]$ για $f, g : X \to [0,1]$ συνεχείς. Τότε για την συνεχή $h = \frac{f^2}{f^2 + g^2}$ έχουμε ότι $h(K) \subseteq \{0\}$ και $h(L) \subseteq \{1\}$. Άρα ο X είναι φυσιολογικός, και τελικά τέλεια φυσιολογικός.

□

Πόρισμα 3.5. Κάθε υπόχωρος τέλεια φυσιολογικού χώρου είναι τέλεια φυσιολογικός χώρος.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το Θεώρημα 3.4 αφού η τομή ενός μηδενικού συνόλου με έναν υπόχωρο, είναι μηδενικό σύνολο του υποχώρου.

□

Στην συνέχεια περνάμε στις αποδείξεις των θεωρημάτων που διατυπώσαμε στην αρχή του κεφαλαίου :

Θεώρημα 3.6. (*Katetov – Tong*) Ένας T_1 τοπολογικός χώρος X είναι φυσιολογικός αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $g, h : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g \leq h$, η g είναι άνω ημισυνεχής και η h κάτω ημισυνεχής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g \leq f \leq h$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι ο X είναι φυσιολογικός. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ με $\phi(x) = [g(x), h(x)]$, όπου g και h είναι όπως στη διατύπωση του θεωρήματος. Έστω (a, b) με $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $(a, b) = (-\infty, b) \bigcap (a, \infty)$.Άρα το $\phi^{-1}((a, b)) = \{x \in X |\ [g(x), h(x)] \bigcap (a, b) \neq \emptyset\}$ $= g^{-1}((-\infty, b)) \bigcap h^{-1}((a, +\infty))$ είναι ανοικτό, λόγω του ότι η g είναι άνω ημισυνεχής και η h κάτω ημισυνεχής. Επομένως η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής. Από το Θεώρημα 2.20 υπάρχει συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(x) \in \phi(x)$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in X$.
($\Leftarrow$) Έστω $F_1, F_2 \subseteq X$ κλειστά, ξένα . Τότε $X_{F_1} \leq X_{X \setminus F_2}$, όπου X_{F_1} είναι άνω ημισυνεχής και $X_{X \setminus F_2}$ κάτω ημισυνεχής. Άρα, από την υπόθεση, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $X_{F_1} \leq f \leq X_{X \setminus F_2}$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in F_1$ τότε $f(x) = 1$ και αν $x \in F_2$ τότε $f(x) = 0$. Επομένως, ο X είναι φυσιολογικός χώρος.

□

Θεώρημα 3.7. (*Dowker*) Ένας T_1 τοπολογικός χώρος X είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής φυσιολογικός αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $g, h : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g < h$, η g είναι άνω ημισυνεχής και η h κάτω ημισυνεχής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g < f < h$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω οτι ο X είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής φυσιολογικός χώρος, και g, h όπως στη διατύπωση του θεωρήματος. Αρκεί να βρούμε άνω ημισυνεχή u και κάτω ημισυνεχή l ώστε $g < u \leq l < h$. Τότε, από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει συνεχής f τέτοια ώστε $g < u \leq f \leq l < h$.
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι και η g και η h παίρνουν τιμές στο $(0, 1)$. Έστω $A = \{(x, r) | r \geq h(x)\}$ και $B = \{(x, r) | r \leq g(x)\}$. Λόγω της ημισυνέχειας

των g, h έχουμε ότι τα A,B είναι κλειστά υποσύνολα του $X \times [0,1]$. Μάλιστα, είναι και ξένα αφού $g < h$ και αφού $X \times [0,1]$ είναι φυσιολογικός (Λήμμα 3.1), υπάρχουν ανοικτά σύνολα U , V ώστε $A \subseteq V$, $B \subseteq U$ και $\overline{U} \bigcap \overline{V} = \emptyset$.
Ορίζουμε $u, l : X \to [0,1]$ με $u(x) = \sup\{r|(x,s) \in \overline{U}$ *για κάθε* $s < r\}$, $l(x) = \inf\{r|(x,s) \in \overline{V}$ *για κάθε* $s > r\}$. Αφού $(x,s) \in U$ για κάθε $s < g(x)$ και αφού $(x, h(x)) \notin \overline{U}$, η u είναι καλά ορισμένη και $u(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in X$. Πράγματι, $u(x) > g(x)$ αφού το U ανοικτό και $(x, g(x)) \in U$. Ομοίως, $l(x) < h(x)$. Αφού ο $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικός, για κάθε $x \in X$ υπάρχει s_0 ώστε $(x, s_0) \notin \overline{U} \bigcup \overline{V}$, άρα $u(x) \leq s_0 \leq l(x)$. Παρατηρούμε ότι η u άνω ημισυνεχής. Πράγματι, αν $x \notin u^{-1}([t, +\infty))$ υπάρχει $s_0 \in [u(x), t)$ ώστε $(x, s_0) \notin \overline{U}$. Οπότε, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο W που περιέχει το x τέτοιο ώστε $(y, s_0) \notin \overline{U}$ για όλα τα $y \in W$ και $u(y) \leq s_0 < t$ για όλα τα $y \in W$. Από αυτό έπεται ότι το $u^{-1}([t, +\infty))$ είναι κλειστό. Μετον ίδιο τρόπο έπεται ότι η l είναι κάτω ημισυνεχής, οπότε έπεται το ζητούμενο.
($\Leftarrow$) Έστω A,B ξένα κλειστά υποσύνολα του X. Έστω $g, h : X \to \mathbb{R}$ με $g = X_A$ και $h = X_B + 2X_{X\setminus B}$. Τότε, η g είναι άνω ημισυνεχής, η h κάτω ημισυνεχής και $g(x) < h(x)$ για κάθε $x \in X$. Άρα από την υπόθεση, υπάρχει συνεχής συνάρτηση f με $g(x) < f(x) < h(x)$. Έστω $U = \{x \in X|f(x) > 1\}$ και $V = \{x \in X|f(x) < 1\}$. Τότε, $A \subseteq U$ και $B \subseteq V$ με U,V ξένα ανοικτά. Οπότε, ο X είναι φυσιολογικός.
Έστω $\{F_i|i = 1, 2, ...\}$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων με $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$.
Έστω $g = 0$ στο X και η $h(x) = \dfrac{1}{i+1}$ για $x \in F_i \setminus F_{i+1}$ $i = 1, 2, ...$ $(F_0 = X)$. Τότε η g είναι άνω ημισυνεχής, η h κάτω ημισυνεχής, και $g(x) < h(x)$ για κάθε $x \in X$. Άρα υπάρχει συνεχής συνάρτηση f με $0 < f(x) < h(x)$. Έστω $G_i = \{x \in X|f(x) < \dfrac{1}{i+1}\}$ για $i = 1, 2, ...$. Τότε το G_i ανοικτό και $F_i \subseteq G_i$ για $i = 1, 2, ...$, και αφού $f(x) > 0$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \emptyset$. Άρα από το Θεώρημα 1.41 ο X είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής.

□

Θεώρημα 3.8. (*Michael*) Ένας T_1 τοπολογικός χώρος X είναι τέλεια φυσιολογικός αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $g, h : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g \leq h$, η g είναι άνω ημισυνεχής και η h κάτω ημισυνεχής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g \leq f \leq h$ και $g(x) < f(x) < h(x)$ όταν $g(x) < h(x)$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Από το Θεώρημα 1.41 εχουμε ότι ο X είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ με $\phi(x) = [g(x), h(x)]$ όπου g και h είναι όπως στη διατύπωση του θεωρήματος. Η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής (όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.6) . Άρα από το Θεώρημα 3.6 υπάρχει συνεχής συνάρτηση $l : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x) \leq l(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in X$. Θέτουμε $A = \{x \in X | g(x) = h(x)\}$. Το A είναι κλειστό, επειδή η $g - h$ είναι άνω ημισυνεχής και $A = \{x \in X | g(x) - h(x) \geq 0\}$. Αφού, τώρα, κάθε υπόχωρος του X είναι τέλεια φυσιολογικός (Πόρισμα 3.5) και άρα αριθμήσιμα παρασυμπαγής, από το Θεώρημα 3.7 έπεται ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $u : X \setminus A \to \mathbb{R}$ ώστε $g(x) < u(x) < h(x)$ για κάθε $x \in X \setminus A$. Τέλος, αφού ο X είναι τέλεια φυσιολογικός χώρος υπάρχει συνεχής $p : X \to [0, 1]$ ώστε $p^{-1}(\{0\}) = A$ (Πρόταση 3.3).
Ορίζουμε τώρα $v : X \to \mathbb{R}$ με:

$$v(x) = 0, \ \text{αν } x \in A$$

$$v(x) = \frac{p(x)}{1 + |u(x) - l(x)|}(u(x) - l(x)), \ \text{αν } x \in X \setminus A$$

Η v είναι συνεχής. Ορίζοντας $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = l(x) + v(x)$, έχουμε την ζητούμενη συνεχή συνάρτηση.
($\Leftarrow$) Το ότι ο X είναι φυσιολογικός έπεται όμοια με την απόδειξη της κατεύθυνση ($\Leftarrow$) του Θεωρήματος 3.7 . Για να δείξουμε ότι ο X είναι τέλεια φυσιολογικός, αρκεί κάθε κλειστό υποσύνολο $A \subseteq X$ να είναι G_δ . Έστω, λοιπόν, $A \subseteq X$ κλειστό. Θεωρούμε την συνάρτηση $g = X_A$ και την σταθερή συνάρτηση $h \equiv 1$. Ισχύει τότε ότι η g είναι κάτω ημισυνεχής, η h άνω ημισυνεχής και $g \leq h$. Από την υπόθεση λοιπόν, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in X$ και $g(x) < f(x) < h(x)$ όταν $g(x) < h(x)$. Αν $x \in A$ τότε $g(x) = 1$ οπότε $f(x) = 1$ και αν $x \in X \setminus A$ τότε $g(x) = 0$ άρα $f(x) < 1$. Επομένως, $[f = 1] = A$ και από τη Πρόταση 3.3 το A είναι G_δ και άρα ο X τέλεια φυσιολογικός.

□

Πρόταση 3.9. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $S \subseteq 2^Y$ ώστε να περιέχει όλα τα μονοσύνολα του Y. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to S$ έχει συνεχή επιλογή.

(ii) Αν A είναι κλειστό υποσύνολο του X και $\phi : X \to \mathcal{S}$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση, τότε κάθε συνεχής επιλογή για τη $\phi_{|A}$ επεκτείνεται σε συνεχή επιλογή για τη ϕ.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $\phi : X \to S$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση, $A \subseteq X$ κλειστό και έστω g συνεχής επιλογή για την $\phi_{|A}$. Για να επεκτείνουμε την g σε συνεχή επιλογή για την ϕ κάνουμε το εξής :
ορίζουμε $\psi : X \to S$ με $\phi(x) = \{g(x)\}$ αν $x \in A$ και $\psi(x) = \phi(x)$ αν $x \in X \backslash A$. Παρατηρούμε ότι η ψ είναι κάτω ημισυνεχής, αφού αν $V \subseteq Y$ είναι ανοικτό τότε $\psi^{-1}(V) = \{x \in X | \psi(x) \bigcap V \neq \emptyset\} = g^{-1}(V) \bigcup (\psi^{-1}(V) \bigcap (X \setminus A))$, το οποίο είναι ανοικτό. Άρα από το (i) η ψ έχει συνεχή επιλογή f. Προφανώς η f είναι συνεχής επιλιγής και για την ϕ που επεκτείνει την g.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Προφανές.

□

Έχοντας, πλέον, το Θεώρημα 3.8 και την προηγούμενη πρόταση, μπορούμε να διατυπώσουμε ένα ακόμα θεώρημα συνεχούς επιλογής, το οποίο θα χαρακτηρίζει τους τέλεια φυσιολογικούς χώρους.

Θεώρημα 3.10. (Θεώρημα συνεχούς επιλογής για τέλεια φυσιολογικούς χώρους) Σε έναν T_1 τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι τέλεια φυσιολογικός.

(ii) Κάθε κάτω ημισυνεχής απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{K}(\mathbb{R})$ έχει συνεχή επιλογή.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $\phi : X \to \mathcal{K}(\mathbb{R})$ κάτω ημισυνεχής απεικόνιση. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $g(x) = \inf \phi(x)$ και $h(x) = \sup \phi(x)$. Τότε έχουμε ότι η g είναι άνω ημισυνεχής και η h κάτω ημισυνεχής αφού ισχύει ότι

$$g^{-1}((-\infty, a)) = \{x \in X | \phi(x) \cap (-\infty, a) \neq \emptyset\} \ \textit{και}$$

$$h^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in X | \phi(x) \cap (a, +\infty) \neq \emptyset\}.$$

Από το Θεώρημα 3.8 υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in X$, και τέτοια ώστε $g(x) < f(x) < h(x)$ όταν $g(x) < h(x)$.

Προφανώς η f είναι συνεχής επιλογή για την ϕ.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Από την Πρόταση 2.8 έπεται ότι ο X φυσιολογικός χώρος. Απομένει να δείξουμε ότι αν $A \subseteq X$ είναι κλειστό τότε είναι και G_δ. Ορίζουμε απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{K}(\mathbb{R})$ με $\phi(x) = [0,1]$ αν $x \in A$ και $\phi(x) = (0,1]$ αν $x \in X \setminus A$. Τότε η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής (από την Παρατήρηση (ii) κάτω από τον Ορισμό 2.1).
Η συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, είναι μια συνεχής επιλογή για την $\phi_{|A}$. Όμως, αφού έχουμε υποθέσει το (ii) και λόγω της Πρότασης 3.9 έπεται ότι η g επεκτείνεται συνεχώς σε μία f ώστε η f να είναι συνεχής επιλογή για την ϕ. Τότε, $f^{-1}(\{0\}) = A$, το οποίο συνεπάγεται ότι το A είναι G_δ στον X. □

Παρακάτω αναφερόμαστε σε μια εφαρμογή του θεωρήματος επέκτασης του *Dowker*.

Θεώρημα 3.11. Έστω X κατά συλλογή φυσιολογικός χώρος. Τότε κάθε συνεχής ψευδομετρική σε ένα κλειστο υπόχωρο του X επεκτείνεται σε συνεχή ψευδομετρική στον X.

Απόδειξη. Έστω $F \subseteq X$ κλειστό και d συνεχής ψευδομετρική στον F. Θεωρούμε $x_0 \in F$ και για κάθε $x \in X$ ορίζουμε συνάρτηση $f_x : F \to \mathbb{R}$ με $f_x(y) = d(x,y) - d(y,x_0)$. Η απεικόνιση $h : F \to l_\infty(F)$, με $h(x) = f_x$, είναι ισομετρία. Πράγματι, είναι καλά ορισμένη αφού $|f_x(y)| = |d(y,x) - d(y,x_0)| \leq d(x,x_0)$ για κάθε $y \in F$, επομένως $f_x \in l_\infty(F)$ και ισομετρία διότι για $x, x' \in F$ έχουμε $\|f_x - f_{x'}\|_\infty = \sup\limits_{y\in F} |f_x(y) - f_{x'}(y)| = \sup\limits_{y\in F} |d(y,x) - d(y,x')| = d(x,x')$.
Από το θεώρημα επέκτασης του *Dowker* (Θεώρημα 2.16) υπάρχει συνάρτηση $\overline{h} : X \to l_\infty(F)$ συνεχής, ώστε $\overline{h}_{|F} = h$. Ορίζουμε συνεχή ψευδομετρική $\overline{d} : X \to \mathbb{R}$, με $\overline{d}(x,y) = \|\overline{h}(x) - \overline{h}(y)\|_\infty$ και παρατηρούμε ότι επεκτείνει την d. □

Θα αναφερθούμε, τώρα, σε κάποια αποτελέσματα της συναρτησιακής ανάλυσης τα οποία προκύπτουν χρησιμοποιώντας το θεώρημα συνεχούς επιλογής για παρασυμπαγείς τοπολογικούς χώρους. Το βασικό αποτέλεσμα είναι το θεώρημα *Bartle – Graves*.

Θεώρημα 3.12. (*Bartle – Graves*) Έστω X και Y χώροι *Banach* και συνάρτηση $u : Y \to X$ φραγμένη, γραμμική και επί. Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ ώστε $f(x) \in u^{-1}(\{x\})$ για κάθε $x \in X$ (δηλαδή η $u \circ f$ είναι ταυτοτική του X).

Απόδειξη. Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης η u είναι ανοικτή. Ορίζοντας, λοιπόν, την απεικόνιση $\phi : X \to \mathcal{F}(Y)$, με $\phi(x) = u^{-1}(\{x\})$ για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής. Ο X ως μετρικός χώρος είναι παρασυμπαγής . Από το Θεώρημα συνεχούς επιλογής για παρασυμπαγείς χώρους, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ ώστε $f(x) \in \phi(x) = u^{-1}(\{x\})$ για κάθε $x \in X$. □

Παρατήρηση:
Το συμπέρασμα του θεωρήματος $Bartle - Graves$ είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει $Z \subseteq Y$ ώστε η $u_{|Z} : Z \to X$ είναι ομοιομορφισμός. Πράγματι, για το ευθύ παίρνουμε $Z = f(X)$. Για το αντίστροφο, παίρνουμε $f = (u_{|Z})^{-1} : X \to Z \subseteq Y$.

Παραθέτουμε, τώρα, κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τους χώρους πηλίκα.

Έστω X διανυσματικός χώρος και Y υπόχωρός του. Για κάθε $x \in X$ θεωρούμε το σύμπλοκο $\widehat{x} = \{x + y | y \in Y\} = x + Y$. Ο *χώρος πηλίκο* του X πάνω από τον Y, το οποίο συμβολίζουμε με X/Y, είναι ο χώρος όλων των συμπλόκων, δηλαδή $X/Y = \{\widehat{x} | x \in X\}$.

Εύκολα επαληθεύουμε ότι οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $+ : X/Y \times X/Y \to X/Y$, και $. : \mathbb{R} \times X/Y \to X/Y$, με $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ και $\lambda\widehat{x} = \widehat{\lambda x}$ για κάθε $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζονται καλά. Ο χώρος πηλίκο X/Y εφοδιασμένος με αυτές τις πράξεις γίνεται ένας διανυσματικός χώρος με μηδέν το σύμπλοκο $\widehat{0} = Y$.

Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι επι πλέον ένας χώρος με νόρμα, έστω $\|.\|$, και $Y \subseteq X$ κλειστός διανυσματικός υπόχωρός του. Μπορούμε να ορίσουμε νόρμα στον χώρο πηλίκο X/Y ως εξής: αν $\widehat{x} = x + Y \in X/Y$ θέτουμε $\|\widehat{x}\| = \inf\{\|x + y\| | y \in Y\} = d(x, Y)$ και την καλούμε *νόρμα πηλίκο*. Πράγματι, είναι άμεσο ότι $\|\lambda(x + Y)\| = |\lambda| \, \|x + Y\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $x + Y \in X/Y$. Για την τριγωνική ιδιότητα θεωρούμε x_1, $x_2 \in X$ και παρατηρούμε ότι για κάθε y_1,

$y_2 \in Y$ ισχύει

$$\|(x_1 + x_2) + Y\| \leq \|x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|$$

Συνεπώς

$$\|(x_1 + x_2) + Y\| \leq \inf\{\|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| | y_1, y_2 \in Y\} =$$

$$\inf\{\|x_1 - y_1\| | y_1 \in Y\} + \inf\{\|x_2 - y_2\| | y_2 \in Y\} = \|x_1 + Y\| + \|y_1 + Y\|.$$

Επομένως $\|(x_1 + Y) + (x_2 + Y)\| \leq \|x_1 + Y\| + \|x_2 + Y\|$ και η τριγωνική ανισότητα έχει δειχθεί. Επίσης $\|x + Y\| \geq 0$ για κάθε $x + Y \in X/Y$. Τέλος, πρέπει να ισχύει $\|x + Y\| = 0 \Leftrightarrow x \in Y$. Όμως $\|x + Y\| = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{Y} = Y$, διότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X. Από δω και στο εξής, οποτεδήποτε θεωρούμε έναν χώρο πηλίκο X/Y ενός χώρου με νόρμα $(X, \|.\|)$ θα θεωρούμε τον X/Y εφοδιασμένο με την νόρμα πηλίκο.

Πρόταση 3.13. Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και $p : X \to X/Y$ η κανονική απεικόνιση, με $p(x) = x + Y$, τότε η p είναι φραγμένη γραμμική και επί. Αν ο X είναι χώρος *Banach* τότε και ο X/Y είναι χώρος *Banach*.

Απόδειξη. Από τα προηγούμενα ο $(X/Y, \|.\|)$ είναι χώρος με νόρμα. Η p είναι προφανώς γραμμική και εφόσον $\|p(x)\| \leq \|x\|$ γιαι κάθε $x \in X$ είναι επίσης και φραγμένη.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο X είναι χώρος *Banach*. Για να είναι ο χώρος $(X/Y, \|.\|)$ *Banach* αρκεί κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά στον X/Y είναι συγκλίνουσα. Έστω $\{x_n + Y | n \in \mathbb{N}\}$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + Y\| < \infty$. Για κάθε $n = 1, 2, ...$ επιλέγουμε $z_n \in x_n + Y$ ώστε $\|z_n\| < \frac{1}{2^n} + \|x_n + Y\|$. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \|x_n + Y\|) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + Y\| < \infty$ και άρα, αφού ο X είναι χώρος *Banach*, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει σε ένα $z \in X$. Δείχνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + Y) = z + Y$. Για κάθε $n = 1, 2, ...$ έχουμε

$$\| \sum_{i=1}^{n} (x_i + Y) - (z + Y)\| = \| \sum_{i=1}^{n} (z_i + Y) - (z + Y)\| = \| \sum_{i=1}^{n} z_i - z\| \longrightarrow_{n \to \infty} 0$$

και άρα $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+Y)=z+Y$. Επομένως ο χώρος $(X/Y,\|.\|)$ είναι *Banach*. $\square$

Πρόταση 3.14. Έστω X, Y χώροι *Banach* και $f : X \to Y$ φραγμένη, γραμμική, επί απεικόνιση. Τότε ο $X/Kerf$ είναι ισόμορφος με τον Y.

Απόδειξη. Ορίζουμε $F : X/kerf \to Y$ με $F(x+kerf)=f(x)$. Παρατηρούμε καταρχήν ότι η F είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $x+kerf=x^{'}+kerf$ τότε $x-x^{'}\in kerf$ άρα $f(x-x^{'})=0$ συνεπώς $f(x)=f(x^{'})$. Επίσης η F είναι γραμμική αφού

$$F(\lambda(x+kerf)+\mu(y+kerf))=F((\lambda x+\mu y)+kerf)=f(\lambda x+\mu y)=$$

$$\lambda f(x)+\mu f(y)=\lambda F(x+kerf)+\mu F(y+kerf)$$

για κάθε λ, $\mu\in\mathbb{R}$ και $x+kerf$, $y+kerf\in X/kerf$. Επίσης ο F είναι $1-1$ αφού αν $F(x+kerf)=F(x^{'}+kerf)$ τότε $f(x)=f(x^{'})$ άρα $f(x-x^{'})=0$ δηλαδή $x-x^{'}\in kerf$ συνεπώς $x+kerf=x^{'}+kerf$. Ο F είναι επί. Πράγματι αν $z\in Z$ τότε, εφόσον η f είναι επί, υπάρχει $x\in X$ ώστε $f(x)=z$ και άρα $F(x+kerf)=z$.

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση $F : X/kerf \to Y$ είναι φραγμένος με $\|F\|\leq\|f\|$. Έστω $x+kerf\in X/kerf$. Για κάθε $\epsilon>0$ μπορούμε να επιλέξουμε $y\in x+kerf$ με $\|y\|<\|x+kerf\|+\epsilon$ και άρα

$$\|F(x+kerf)\|=\|F(y+kerf)\|=\|f(y)\|\leq\|f\|\|y\|<\|f\|(\|x+kerf\|+\epsilon)$$

Εφόσον αυτά ισχύουν για κάθε $\epsilon>0$ έπεται επίσης ότι $\|F(x+kerf)\|\leq\|f\|\|x+kerf\|$. Έτσι η F είναι φραγμένη, γραμμική $1-1$ και επί μεταξύ των χώρων *Banach* $X/kerf$ και Z και άρα η F είναι ισομορφισμός. Επομένως ο χώρος πηλίκο $X/kerf$ είναι ισόμορφος του Z. $\square$

Πόρισμα 3.15. Έστω F κλειστός γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου *Banach* Y. Τότε υπάρχει $Z\subseteq Y$ ώστε η συνάρτηση $u : Z\to Y/F$ με $u(y)=y+F$ να είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Έπεται από το θεώρημα $Bartle-Graves$ για την απεικόνιση πηλίκο $u : Y\to Y/F$ με $u(y)=y+F$ και την παρατήρηση . $\square$

Πόρισμα 3.16. Έστω K συμπαγής χώρος $Hausdorff$ και F κλειστός υπόχωρος του K. Τότε υπάρχει τοπολογική εμφύτευση

$$C(F) \ni f \to \overline{f} \in C(K)$$

ώστε η $\overline{f}$ να επεκτείνει την f.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη φραγμένη, γραμμική συνάρτηση $u : C(K) \to C(F)$ με $u(f) = f_{|F}$, η οποία είναι και επί αφού το F είναι κλειστό στο K. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα $Bartle - Graves$ και την παρατήρηση. □

Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι δεν υπάρχει φραγμένη, γραμμική $1-1$ συνάρτηση από τον $l_\infty/c_0 \to l_\infty$ Θεώρημα 3.19, ($Phillips$). Το θεώρημα αυτό δείχνει ότι η συνάρτηση f στο θεώρημα $Bartle - Graves$ δεν μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι και γραμμική (ειδικά όταν u είναι η κανονική απεικόνιση από τον $l_\infty/c_0 \to l_\infty$, η οποία είναι φραγμένη, γραμμική και επί μεταξύ χώρων $Banach$ από την Πρόταση 3.13).

Ένα υποσύνολο A ενός χώρου με νόρμα $(X, \|.\|)$ λέγεται *φραγμένο*, αν το σύνολο $\{\|a\| | a \in A\}$ είναι φραγμένο στον $\mathbb{R}$.

Λήμμα 3.17. Έστω X χώρος $Banach$ και $A \subseteq X$ τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\overbrace{A} = \{a_1 + ... + a_n | n \in \mathbb{N} \textit{ και } a_1, ..., a_n \in A \textit{ διαφορετικά ανά δύο } \}$$

να είναι φραγμένο. Τότε για κάθε $\phi \in X^*$, το σύνολο $\{a \in A | \phi(a) \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συναρτησοειδές $\phi \in X^*$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{a \in A | \phi(a) \neq 0\}$ να είναι υπεραριθμήσιμο. Τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο $C = \{a \in A | |\phi(a)| \geq r\}$ να είναι άπειρο και άρα τουλάχιστον ένα από τα σύνολα $C_+ = \{a \in A | \phi(a) \geq r\}$, $C_- = \{a \in A | \phi(a) \leq -r\}$ να είναι άπειρο. Αντικαθιστώντας την ϕ με την $-\phi$, αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το C_+ είναι άπειρο. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $a_1, ..., a_n \in C_+$, διαφορετικά ανά δύο, οπότε $\phi(a_1 + ... a_n) = \phi(a_1) + ... + \phi(a_n) \geq nr$. Επομένως το $\phi(\overbrace{A})$ δεν είναι φραγμένο. Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι το συναρτησοειδές ϕ και το σύνολο $\overbrace{A}$ είναι φραγμένα. □

Πρόταση 3.18. Έστω X χώρος *Banach* ο οποίος περιέχει ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο A τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\widehat{A} = \{a_1 + ... + a_n | n \in \mathbb{N} \text{ και } a_1, ..., a_n \in A \text{ διαφοριτκά ανά δύο } \}$$

να είναι φραγμένο. Τότε δεν υπάρχει φραγμένη, γραμμική, 1-1 συνάρτηση $f : X \to l_\infty$.

Απόδειξη. Έστω $f : X \to l_\infty$ φραγμένη, γραμμική συνάρτηση. Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι 1-1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $e_n : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x_n$ το φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές του l_∞ και έστω $\phi_n = e_n \circ f \in X^*$. Έπεται, από το Λήμμα 3.17, ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_n = \{a \in A | \phi_n(a) \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο. Εφόσον το A είναι υπεραριθμήσιμο, υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $a \neq 0$ και $a \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού $a \notin A_n$, έχουμε ότι $f(a)_n = e_n(f(a)) = \phi_n(a) = 0$. Επομένως, έχουμε ότι f δεν είναι 1-1, αφού $a \neq 0$. □

Θεώρημα 3.19. (*Phillips*) Δεν υπάρχει συνάρτηση $f : l_\infty / c_0 \to l_\infty$ φραγμένη, γραμμική και 1-1.

Απόδειξη. Ο χώρος $C(\beta\mathbb{N})$ (με την $\sup -$νόρμα) είναι ισομετρικός με τον χώρο *Banach* l_∞. Έτσι ο υπόχωρος c_0 του l_∞ αντιστοιχεί στον υπόχωρο $F = \{f \in C(\beta\mathbb{N}) | f_{|N^*} \equiv 0\}$ του $C(\beta\mathbb{N})$, όπου $N^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Αφού το N^* είναι κλειστό στο $\beta\mathbb{N}$ από την Πρόταση 3.14 για την συνάρτηση από το $C(\beta\mathbb{N}) \to C(\mathbb{N}^*)$ με $f \to f_{|\mathbb{N}^*}$ έπεται ότι ο χώρος πηλίκο $C(\beta\mathbb{N})/F$ είναι ισομορφικός με τον $C(N^*)$.

Λόγω των παραπάνω, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει φραγμένη, γραμμική, 1-1 συνάρτηση $f : C(N^*) \to l_\infty$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει υπεραριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{H}$ του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ώστε $|H \cap J| < \omega$ για κάθε $H, J \in \mathcal{H}$ με $H \neq J$. [Πράγματι, αφού τα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Q}$ είναι ισοπληθικά, αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει τέτοια υποοικογένεια του $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Για κάθε $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ έστω H_γ το σύνολο των τιμών μιας ακολουθίας ρητών αριθμών που συγκλίνει στο γ. Προφανώς το H_γ είναι άπειρο σύνολο για κάθε $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς. Αν $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, με $\gamma_1 \neq \gamma_2$, τότε το σύνολο $H_{\gamma_1} \cap H_{\gamma_2}$ είναι πεπερασμένο, εφόσον στην αντίθετη περίπτωση θα υπάρχει ακολουθία του $\mathbb{R}$ που θα συνέκλινε σε δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}$. Έτσι θέτουμε

$\mathcal{H} = \{H_\gamma | \gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.]
Η οικογένεια $\mathcal{H}^* = \{\overline{H} \setminus \mathbb{N} | H \in \mathcal{H}\}$ είναι υπεραριθμήσιμη και αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά. Το υπεραριθμήσιμο υποσύνολο $A = \{X_G | G \in \mathcal{H}^*\}$ του $C(N^*)$ ικανοποιεί την συνθήκη της Πρότασης 3.18 και επομένως δεν υπάρχει φραγμένη, γραμμική, 1-1 συνάρτηση $f : C(N^*) \to l_\infty$.

$\square$

Από την απόδειξη του θεωρήματος του *Phillips* έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.20. Δεν υπάρχει συνεχής, γραμμική, 1-1 συνάρτηση $g : C(N^*) \to C(\beta\mathbb{N})$.

Βιβλιογραφια

[1] *M.Choban and V.Valov*, *On a theorem of E.Michael on selections*, *C.R.Acad.BulgareSci.* 28 (1975), 871-873, (*in Russian*).

[2] *C.H.Dowker* : *On countably paracompact spaces*, *Canadian J. Math* (3) (1951), 219 – 224.

[3] *C.H.Dowker* : *On a theorem of Hanner*, *Ark. Mat.*, 2 (1952), 307 – 313.

[4] *Ryszard Engelkin*, *General Topology*, 1989.

[5] *Valletin Gutev*, *Narcisse Roland Loufouma Makala*, *Selections*, *extensions and collectionwise normality*, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 368, (2010), 573-577

[6] *Chris Good*, *Ian Stares*, *New proofs of classical insertion theorems*, *Comment. Math. Uni. Carolin.* 41, 1, (2000) ,139 – 142.

[7] *Gutierez Garcia*, *T.Kubiak*, *A new look at some classical theorems on continuous functions on normal spaces*, *Acta Math. Hungar.*, 119 (4) (2008), 333–339.

[8] *Heikki Junnila*, *Topology* III, *Σημειώσεις*.

[9] *K.Kuratowski and C.Ryll–Nardzewski*, *A general theorem on selectors*, *Bull.Pol.Acad.Sci*, 13, 397-403, 1965

[10] *Mary Ellen Rudin*, *A normal space* X *for which* $X\times[0,1]$ *is not normal*, *Vol.*73, 1971, *Fundamenta Mathematicae*, 179 – 186.

[11] *E.Michael*, *Point–finite and locally finite coverings*, *Canadian J. Math.* 7 (1955), 275 – 280.

[12] *E.Michael*, *Continuous Selections I*, *Annals of Mathematics* 2nd *Ser. No.*2. (1956), 361 – 382.

[13] *E.Michael*, *Selected Selections Theorems*, , *Amer.Math.Monthly*, 63 (1956), 233-238

[14] *J.Nagata*, *Modern General Topology*, *North Holland Mathematical Library*, (1985).

[15] Θ.Ζαχαριάδης, Ν.Καλαμίδας, Σ.Νεγρεπόντης, Β.Φαρμάκη: Γενική τοπολογία και συναρτησιακή ανάλυση, εκδόσεις Συμμετρία, (1997).