Θεωρια Μετρου και Ολοκληρωσης σε Τοπικα Συμπαγεις Ομαδες

Διπλωματικη Εργασια

Σακελαρόπουλος Αλέξιος

Τμημα Μαθηματικων
Πανεπιστημιο Αθηνων Αθηνα 2016

Επιβλεπων Καθηγητης :

Α. Κατάβολος

Τριμελης Επιτροπη :

Μ. Ανούσης

Α. Κατάβολος

Γ. Κουμουλλής

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Ο όρος Αρμονική Ανάλυση είναι αρκετά ευέλικτος και έχει χρησιμοποιηθεί για αρκετά διαφορετικά πράγματα. Σίγουρα η σύγχρονη μορφή της ξεκινά με την ανάλυση Fourier στον $\mathbb{R}$ και κατ΄ επέκταση στον $\mathbb{R}^n$, αλλά κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει ότι οι απαρχές της βρίσκονται στην αρχαιότητα, καθώς οι μουσικές θεωρίες του Πυθαγόρα έχουν στοιχεία τριγωνομετρικής φύσης. Ο όρος αρμονικός άλλωστε σημαίνει μουσικά ικανός. Για περισσότερες λεπτομέρειες στην ιστορία και εξέλιξη της ανάλυσης Fourier και της αρμονικής ανάλυσης παραπέμπουμε στο [11].

Η ανάλυση Fourier μελετά το πώς και ποιών ειδών συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$ μπορούν να αναπαρασταθούν ή να προσεγγιστούν με, απλούστερες, τριγωνομετρικές συναρτήσεις, μέσω μετασχηματισμών Fourier, θεωρία που έχει εφαρμογές σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών και της Φυσικής, όπως για παράδειγμα, Μ.Δ.Ε., θεωρία αριθμών, combinatorics, ανάλυση σήματος, οπτική, ακουστική κ.ά.

Η αφηρημένη αρμονική ανάλυση με τη σειρά της αναπτύχθηκε παίρνοντας την ιδέα της προσέγγισης πραγματικών συναρτήσεων και γενικεύοντας τη για συναρτήσεις που ορίζονται σε τυχαίες τοπικά συμπαγείς Hausdorff τοπολογικές ομάδες, όπως είναι οι πραγματικοί.

Ιδιαίτερα για μη αβελιανές ομάδες, η αρμονική ανάλυση συνδέεται με τη θεωρία των unitary αναπαραστάσεων ομάδων και ειδικότερα για συμπαγείς ομάδες η ζητούμενη προσέγγιση των συναρτήσεων και κατ ΄ επέκταση η διάσπαση του $L^2(G)$ με χρήση αυτών των αναπαραστάσεων γίνεται πολύ συγκεκριμένα, όπως διαφαίνεται το θεώρημα των Peter και Weyl, καταληκτικό θεώρημα αυτής της εργασίας.

Ειδικότερα σε αυτή την εργασία ασχολούμαστε με τα βασικά θεωρητικά αναγκαία για να κανουμε αρμονική ανάλυση σε τοπικά συμπαγείς ομάδες. Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 1 αναφέρονται οι προαπαιτούμενες για τη συνέχεια γνώσεις απο τη Θεωρία Μέτρου και τη Θεωρία Τελεστών. Στο κεφάλαιο 2 ασχολούμαστε με τις τοπολογικές ομάδες και αποδεικνύουμε την ύπαρξη του μέτρου Haar, η οπία είναι κομβικής σημασίας. Στο κεφάλαιο 3 αναφέρονται τα βασικά της Θεωρίας (unitary) Αναπαραστάσεων, ενω στο 4ο και τελευταίο κεφάλαιο περιοριζόμαστε στην ανάλυση σε συμπαγείς ομάδες και αποδεικνύουμε το προαναφερθέν θεώρημα Peter-Weyl.

Τέλος, στο Παράρτημα παρατίθεται η διάσπαση της δεξιάς και της αριστεράς κανονικής αναπαράστασης μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας (λεπτομερέστερα) καθώς και ένα παράδειγμα αυτής για την S_3. (Ευχαριστώ θερμά τον Δ. Γατζούρα για την προσθήκη αυτή.)

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

1.1 Τοπικά Συμπαγείς Χώροι

Ορισμός 1.1.1. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται *τοπικά συμπαγής* εάν για κάθε $x \in X$, υπάρχει $U \subseteq X$ συμπαγές, με $x \in U^{\circ}$.

Παρατήρηση 1.1.2. Για λόγους απλότητας, ένα ως άνω U θα το ονομάζουμε συμπαγή περιοχή του x. Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο περιοχή ενός $x \in X$ εννοούμε ένα $U \subseteq X$, ανοικτό, με $x \in U$.

Παράδειγμα 1.1.3.

1. Ο χώρος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών (με τη συνήθη τοπολογία) είναι τοπικά συμπαγής, αφού, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $x \in [x-r, x+r]$, για οποιοδήποτε $r > 0$. Ο $\mathbb{Q}$, ως υπόχωρος του $\mathbb{R}$ δεν είναι τοπικά συμπαγής.
2. Κάθε συμπαγής χώρος είναι τοπικά συμπαγής.
3. Κάθε διακριτός χώρος είναι τοπικά συμπαγής.
4. Οι κλειστοί υπόχωροι τοπικά συμπαγών χώρων είναι επίσης τοπικά συμπαγείς.

Πρόταση 1.1.4. *Έστω X χώρος Hausdorff. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο X είναι τοπικά συμπαγής.*
2. *Για κάθε $x \in X$ υπάρχει U περιοχή του x, με $\overline{U}$ συμπαγές.*
3. *Για κάθε $x \in X$ και U ανοικτό με $x \in U$, υπάρχει V ανοιχτό, σχετικά συμπαγές σύνολο με $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*
4. *Για κάθε $F \subseteq X$, συμπαγές και $U \subseteq X$, ανοικτό, με $F \subseteq U$, υπάρχει V ανοικτό, σχετικά συμπαγές με $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Απόδειξη

$(1) \Rightarrow (2)$: Άμεσο από τον ορισμό.

$(2) \Rightarrow (3)$: Έστω $x \in X, U \subseteq X$, ανοιχτό, με $x \in U$. Εφόσον ο X είναι τοπικά συμπαγής, υπάρχει F συμπαγής περιοχή του x. Το F είναι κανονικός χώρος στη σχετική του τοπολογία και το σύνολο $F \cap U$ είναι μία περιοχή του x στο F. Επομένως υπάρχει G ανοικτό στο F με $x \in G \subseteq cl_F G \subseteq F \cap U$. Για το G τώρα, υπάρχει $E \subseteq X$, ανοικτό, τέτοιο ώστε $G = F \cap E$. Θέτουμε $V = E \cap F^\circ$ και έχουμε $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ και $\overline{V}$ συμπαγές.

$(3) \Rightarrow (4)$: Έστω $F \subseteq X$, συμπαγές, και $U \subseteq X$, ανοιχτό, με $F \subseteq U$. Για κάθε $x \in F$ έχουμε $x \in U$, οπότε υπάρχει $V(x)$ ανοιχτό, σχετικά συμπαγές, με $x \in V(x) \subseteq \overline{V(x)} \subseteq U$. Η οικογένεια $\{V(x) : x \in F\}$ αποτελεί ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς F, οπότε υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in F$ τέτοια ώστε $F \subseteq V(x_1) \cup \cdots \cup V(x_k)$. Θέτουμε $V = V(x_1) \cup \cdots \cup V(x_k)$ και έχουμε $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ με V σχετικά συμπαγές.

$(4) \Rightarrow (1)$: Άμεσο από τον ορισμό.

□

Πρόταση 1.1.5. *Ένας τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff είναι τελείως κανονικός.*

Απόδειξη Έστω X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff. Αν $x \in X$ και $F \subseteq X$, κλειστό, με $x \notin F$, τότε υπάρχει $U \subseteq X$, ανοιχτό, με $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus F$, με το $\overline{U}$ να είναι συμπαγές και επίσης υπάρχει V ανοιχτό στο X, τέτοιο ώστε $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Όμως το $\overline{U}$ είναι συμπαγής χώρος Hausdorff, οπότε είναι φυσιολογικός και άρα, απο το λήμμα του Urysohn, υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση

$$f : \overline{U} \to [0,1], \text{ με } f(x) = 1 \text{ και } f(y) = 0 \text{ για κάθε } y \in \overline{U} \setminus V.$$

Θέτουμε τώρα:

$$g : X \to [0,1]$$

με $F|\overline{U} = f$ και $g(y) = 0$, για κάθε $y \in X \setminus \overline{U}$. Εφόσον οι περιορισμοί $g|\overline{U}, g|X \setminus V$ είναι συνεχείς και ταυτίζονται στο σύνολο $\overline{U} \cup (X \setminus V)$, έχουμε ότι g συνεχής, οπότε X τελείως κανονικός. □

Ορισμός 1.1.6. 1. Αν X τοπικά συμπαγής χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μια πραγματική ή μιγαδική συνάρτηση, οναμάζουμε φορέα της f το σύνολο:

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

2. Συμβολίζουμε με $C_c(X)$ σύνολο όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων, που ο φορέας τους είναι συμπαγές σύνολο και με $C_c(X, \mathbb{C})$ το σύνολο των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων, που ο φορέας τους είναι συμπαγές σύνολο.

Πρόταση 1.1.7. *Έστω X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff, $K \subseteq X$, συμπαγές και $U \subseteq X$, ανοιχτό με $K \subseteq U$. Τότε υπάρχει $f \in C_c(X)$ τέτοια ώστε $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ και $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$.*

Απόδειξη Από την πρόταση 1.1.4 (4) έχουμε ότι υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο V τέτοιο ώστε το $\overline{V}$ να είναι συμπαγές και $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Ο χώρος V είναι φυσιολογικός, ως συμπαγής Hausdorff. Από το λήμμα του Urysohn έπεται ότι υπάρχει $g : \overline{V} \to [0,1]$ συνεχής, με $g(x) = 1, x \in K$ και $g(x) = 0, x \in \overline{V} \setminus V$. Ορίζουμε τώρα:

$$f : X \to [0,1], \text{ με } \begin{cases} g(x), & \text{αν } x \in \overline{V} \\ 0, & \text{αν } x \in X \setminus \overline{V} \end{cases}$$

Αφού τα $\overline{V}, X \setminus V$ είναι κλειστά, καλύπτουν τον X και η f περιορισμένη στο καθένα είναι συνεχής, έπεται ότι η g είναι συνεχής, ενώ είναι φανερό ότι $\chi_K \leq f \leq \chi_U$.

□

Παρατήρηση 1.1.8 (συμβολισμός)**.** Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $f \prec U$ εννοώντας ότι $f \in C_c(X)$, U ανοιχτό υποσύνολο του X, $0 \leq f \leq \chi_U$ και $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$. Αντίστοιχα, με $K \prec f$ εννοούμε ότι
K συμπαγές, $f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1$ και $f(x) = 1$ για $x \in K$.
Για παράδειγμα, με το συμβολισμό αυτό, το συμπέρασμα της προηγούμενης πρότασης γράφεται: $K \prec f \prec U$.

1.2 Κανονικά μέτρα σε τοπικά συμπαγείς χώρους - Το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz

Ορισμός 1.2.1. Έστω X χώρος Hausdorff , $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στον X, με $Bo(X) \subseteq \mathcal{A}$, (όπου με $Bo(X)$ συμβολίζουμε τη σ-άλγεβρα των Borel συνόλων) και μ ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Το μ λέγεται *κανονικό*, εάν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\mu(K) < \infty$, για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές.

2. $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U$ ανοικτό στον $X, A \subseteq U\}$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ (εξωτερική κανονικότητα).

3. $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K$ συμπαγές στον $X, K \subseteq A\}$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ (εσωτερική κανονικότητα).

Το μ θα λέγεται *ασθενώς κανονικό*, εάν η εσωτερική κανονικότητα ισχύει για τα ανοικτά σύνολα του X, δηλαδή εάν η ως άνω ιδιότητα (3) αντικατασταθεί από την ασθενέστερη:
(3)′ $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K$ συμπαγές στον $X, K \subseteq U\}$, για κάθε $U \subseteq X$, ανοιχτό.

Εάν $\mathcal{A} = Bo(X)$ και το μ είναι ασθενώς κανονικό και τοπικά πεπερασμένο, δηλαδή αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια περιοχή του x με πεπερασμένο μέτρο, τότε το μ θα λέγεται μέτρο Radon. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν ο X είναι τοπικά συμπαγής, ένα ασθενώς κανονικό μέτρο είναι αυτόματα και τοπικά πεπερασμένο.

Παρατήρηση 1.2.2. Πρέπει να σημειωθεί ότι η ως άνω ορολογία δεν είναι ενιαία και ότι πολλοί συγγραφείς με τον όρο κανονικότητα εννοούν αυτό που εμείς οριζουμε ως ασθενή κανονικότητα. Αυτό μάλλον οφείλεται στο γεγονός ότι αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, παραδείγματος χάριν αν ο X είναι σ-συμπαγής, τότε η (3)′ συνεπάγεται από την (3). Ενδεικτικά παραπέμπουμε στα [2, Πρόταση 12.4], [4, p.47, Regularity Properties of Borel measures].

Παράδειγμα 1.2.3.

1. Το μέτρο Lebesgue στους ευκλειδείους χώρους είναι κανονικό. Περιορισμένο δε στις αντίστοιχες Borel σ-άλγεβρες είναι μέτρο Radon.

2. Κάθε μέτρο Dirac είναι μέτρο Radon.

3. Το αριθμητικο μέτρο στο $\mathbb{R}$ δεν είναι Radon, αφού δεν είναι τοπικά πεπερασμένο.

Στα παρακάτω θεωρούμε ότι ο X είναι τοπικά συμπαγής και το μ είναι ασθενώς κανονικό μέτρο.

Πρόταση 1.2.4. *Το σύνολο των απλών συναρτήσεων στον $L^p(\mu)$ είναι πυκνό υποσύνολο του $L^p(\mu), 1 \leq p \leq \infty$.*

Απόδειξη Έστω $f \in L^p(\mu)$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\{s_n\}$ ακολουθία απλών συναρτήσεων στον $L^p(\mu)$ ώστε $s_n \to f$ στον $L^p(\mu)$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $1 \leq p < \infty$. Έστω $f \geq 0$.Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\{s_n\}$ ακολουθία απλών μετρησίμων ώστε $0 \leq s_n \leq f$ και $\lim_n s_n = f$. Έπεται ότι $|s_n|^p \leq |f|^p$ και αφού $f \in L^p(\mu)$ έχουμε και ότι κάθε $s_n \in L^p(\mu)$. Επίσης έχουμε ότι $|f|^p \in L^1(\mu)$ και $|f - s_n|^p \leq |f|^p$ (αφού $0 \leq f - s_n \leq f$.) Από το θεωρημα κυριαρχημένης συγκλισης έπεται ότι:

$\int |f - s_n|^p \to 0$, οπότε $\|f - s_n\|^p = (\int |f - s_n|^p)^{\frac{1}{p}} \to 0$,
δηλαδή $s_n \to f$, στον $L^p(\mu)$.

(Η γενική περίπτωση όπου η f είναι μιγαδική μετρήσιμη έπεται εύκολα απο τα παραπάνω, αφού η $f = u + iv$ γράφεται $f = u^+ - u^- + i(v^+ - v^-)$, όπου οι u^+, u^-, v^+, v^- είναι θετικές, μετρήσιμες και ανήκουν στον $L^p(\mu)$ εάν $f \in L^p(\mu)$, όπως προκύπτει εύκολα. Για παράδειγμα για την u^+ έχουμε $|u^+|^p \leq |f|^p$.)

Έστω τώρα $p = \infty$. Όπως πριν, αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο όταν η f είναι πραγματική. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε μια διαμέριση του διαστήματος $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty + 1]$ με λεπτότητα μικρότερη του $\frac{1}{n}$, έστω $\{t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n\}$. Θέτουμε τώρα:

$$s_n = \sum_{i=1}^{k_n} t_i^n \chi_{[t_{i-1}^n \leq f < t_i^n]} \quad , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Τότε οι s_n είναι απλές με $s_n \in L^\infty(\mu)$ και $|f - s_n| \leq \frac{1}{n}$, μ σχεδόν παντού. Επομένως $\|f - s_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$, οπότε $s_n \to f$, στον $L^\infty(\mu)$.

□

Πρόταση 1.2.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος (ασθενώς) κανονικού μέτρου, όπου X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff. Τότε ο $C_c(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, για $1 \leq p < \infty$.*

Απόδειξη Αρχικά παρατηρούμε ότι ο $C_c(X)$ αποτελεί υπόχωρο του $L^p(\mu)$. Πράγματι, αν $f \in C_c(X)$, τότε η f είναι, ως συνεχής, Borel μετρήσιμη και άρα $\mathcal{A}$ μετρήσιμη. (Υπενθυμίζουμε την απαίτηση στον ορισμό του κανονικού μέτρου, $Bo(X) \subseteq \mathcal{A}$.) Επίσης έχουμε:

$$\int |f|^p d\mu = \int_{\mathrm{supp}(f)} |f|^p d\mu \leq (\sup_{x \in \mathrm{supp}(f)} |f(x)|^p) \mu(\mathrm{supp}(f)) < \infty,$$

αφού $\mathrm{supp}(f)$ συμπαγές.

Τώρα προκειμένου να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να το δείξουμε για χαρακτηριστικές, αφού η περίπτωση των απλών έπεται άμεσα και μετά μπορούμε να κάνουμε χρήση της αμέσως προηγούμενης πρότασης. Έστω λοιπόν $f = \chi_A \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, δηλαδή $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) < \infty$ και $\epsilon > 0$. Από την κανονικότητα του μ, υπάρχουν $K, U \subseteq X$ με K συμπαγές και U ανοιχτό, τέτοια ώστε $K \subseteq A \subseteq U$ και $\mu(U \setminus K) < \epsilon^p$. Από την πρόταση 1.1.7 έχουμε ότι υπάρχει $g \in C_c(X)$ με $\chi_K \prec g \prec \chi_U$. Τότε έχουμε $|f - g| = |\chi_A - g| \leq \chi_{U \setminus K}$ και άρα:
$\|f - g\|_p \leq (\mu(U \setminus K))^{\frac{1}{p}} < \epsilon$.

□

Δείξαμε ότι αν το μ είναι ένα (ασθενώς) κανονικό μέτρο στον τοπικά συμπαγή X, τότε ο $C_c(X)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$. Περιοριζόμαστε τώρα στα μέτρα Radon. Αφού ο $C_c(X)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, ορίζεται η απεικόνιση:

$$I : C_c(X) \to \mathbb{R}, \text{ με } I(f) = \int f d\mu.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή αποτελεί γραμμικό συναρτησοειδές του $C_c(X)$ και μάλιστα θετικό, δηλαδή ισχύει $I(f) \geq 0$, για κάθε $f \in C_c(X), f \geq 0$. Στην πραγματικότητα ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε θετικό γραμμικό συναρτησοειδές είναι αυτής της μορφής και μάλιστα το αντίστοιχο μ που το αναπαριστά ως ολοκλήρωμα είναι μοναδικό. Συγκεκριμένα έχουμε τα παρακάτω:

Λήμμα 1.2.6. *Αν μ είναι ένα μέτρο Radon σε έναν τοπικά συμπαγή χώρο Hausdorff X, τότε:*

$$\begin{aligned}\mu(U) &= \sup\{\int f d\mu : f \in C_c(X), f \prec U\} \\ &= \sup\{\int f d\mu : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq \chi_u\},\end{aligned}$$

για κάθε $U \subseteq X$, ανοιχτό.

Απόδειξη Προφανώς $\int f d\mu \leq \mu(U)$ για κάθε $f \in C_c(X)$ με $0 \leq f \leq \chi_U$. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι:
$\mu(U) \leq \sup\{\int f d\mu : f \in C_c(X), f \prec U.\}$
Έστω λοιπόν $\beta \in \mathbb{R}$, με $0 \leq \beta < \mu(U)$. Αν $\mu(U) = 0$, τότε η ανισότητα είναι προφανής. Έστω $\mu(U) > 0$. Από την εσωτερική κανονικότητα του μ, υπάρχει $K \subseteq U$, συμπαγές, με $\mu(K) > \beta$. Από την πρόταση 1.1.7, υπάρχει $f \in C_c(X)$, με $K \prec f \prec U$. Τότε $\int f d\mu \geq \mu(K) > \beta$ και άρα
$\sup\{\int f d\mu : f \in f \prec U\} > \beta$.
Αφού αυτό ισχύει για κάθε β με $0 \leq \beta < \mu(U)$, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 1.2.7 (αναπαράστασης Riesz)**.** *Έστω X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και I έναι θετικό γραμμικό συναρτησοειδές του $C_c(X)$. Τότε υπάρχει ένα μέτρο Radon στον X, τέτοιο ώστε:*

$$I(f) = \int f d\mu, \text{ για κάθε } f \in C_c(X).$$

Μάλιστα, από το λήμμα 1.2.6, το μέτρο αυτό είναι μοναδικό.

Για την απόδειξη παραπέμπουμε:[2, Θεώρημα 12.25],[4, Theorem 2.14]

1.3 Στοιχεία θεωρίας χώρων Hilbert

Στα παρακάτω αναφέρουμε βασικά στοιχεία θεωρίας χώρων Hilbert που θα χρησιμοποιοηθούν στη συνέχεια. Για αναλυτικές αποδείξεις των προτάσεων καθώς και για πληρέστερη θεωρία παραπέμπουμε στα [9] και [10].

1.3.1 Χώροι Hilbert

Ορισμός 1.3.1. Έστω $\mathcal{H}$ μιγαδικός γραμμικός χώρος. Ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{H}$ είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

με τις ιδιότητες:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$ για κάθε $x, x_1, x_2, y \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{C}$. Τότε η απεικόνιση
$$\|\cdot\| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$
είναι νόρμα στον $\mathcal{H}$.

Ένας χώρος με εσωτερικο γινόμενο ονομάζεται χώρος Hilbert εφόσον είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Δύο στοιχεία $x, y \in \mathcal{H}$ σ'εναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο ονομάζονται κάθετα, εάν $\langle x, y \rangle = 0$. Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{H}$, το σύνολο

$$A^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \text{ για κάθε } y \in A\}$$

είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρός του. Τότε $M^{\perp} \neq \{0\}$ και ισχύει*

$$M \oplus M^{\perp} = \mathcal{H}.$$

Επομένως κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο

$$x = P_M(x) + P_{M^{\perp}}(x)$$

όπου $P_M(x) \in M$ *και* $P_{M^\perp}(x) \in M^\perp$ *και ισχύει*

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}\|^2$$

λόγω του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Επομένως $\|P_M(x)\|^2 \leq \|x\|^2$. *Η απεικόνιση*

$$P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

λέγεται ορθή προβολή επί του M. *Είναι καλά ορισμένη, γραμμική και συνεχής. Μάλιστα* $\|P_M\| = 1$, *όταν* $M \neq \{0\}$.

1.3.2 Τελεστές σε χώρους Hilbert

Θεώρημα 1.3.3. *Αν* $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ *χώροι Hilbert και* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *είναι γραμμική απεικόνιση, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Η* T *είναι συνεχής.*
2. *Η* T *είναι συνεχής στο* $0 \in \mathcal{H}$.
3. *Η* T *είναι συνεχής σε κάποιο* $x_0 \in \mathcal{H}$.
4. *Υπάρχει* $M < \infty$ *ώστε* $\|Tx\|_{\mathcal{K}} \leq M \|x\|_{\mathcal{H}}$ *για κάθε* $x \in \mathcal{H}$.
5. *Ο περιορισμός της* T *στη μοναδιαία μπάλα του* $\mathcal{H}$ *είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή το σύνολο* $\|Tx\|_{\mathcal{K}} : \|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$ *είναι φραγμένο.*
6. *Η* T *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Ορισμός 1.3.4. Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ λέγεται φραγμένη, ή φραγμένος γραμμικός τελεστής, αν ο περιορισμός της T στη μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{H}$ είναι φραγμένη συνάρτηση.

Ο αριθμός

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_{\mathcal{K}} : \|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$$

ονομάζεται νόρμα του T.

Πρόταση 1.3.5. *Έστω* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *φραγμένος τελεστής. Τότε:*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in \mathcal{H}, x \neq 0\} \\ &= \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M \|x\| \text{ για κάθε } x \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

και ισχύει $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$, *για κάθε* $x \in \mathcal{H}$.

Ορισμός 1.3.6. Το σύνολο των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ συμβολίζεται με $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Γράφουμε $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, αντί για $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

Αν εφοδιάσουμε το σύνολο $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ με τις κατά σημείο πράξεις, δηλαδή αν ορίσουμε, για $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ και $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x)\text{και } (\lambda T)(x) = \lambda T(x)$$

τότε ο $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ γίνεται γραμμικός χώρος. Επιπλέον η απεικόνιση

$$\|\cdot\| : \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}) \to \mathbb{R}^+ : T \to \|T\|$$

είναι νόρμα στον $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, ως προς την οποία μάλιστα είναι πλήρης, δηλαδή χώρος Banach.

Όταν $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ ορίζεται η σύνθεση απεικονίσεων: $A \cdot B = A \circ B, A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ο τελεστής AB είναι φραγμένος και μάλιστε ισχύει η ανισότητα $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, για κάθε A, B. Με πολλαπλασιασμό τη σύνθεση τελεστών, ο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ παίρνει τη δομή άλγεβρας Banach.

Θεώρημα 1.3.7 (Riesz). *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Για κάθε συνεχή γραμμική μορφή $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό $y \in \mathcal{H}$, ώστε $f(x) = \langle x, y\rangle$, για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Επιπλέον ισχύει ότι $\|f\| = \|y\|$. Επομένως ο τοπολογικός δυικός ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ είναι αντιγραμμικά ισόμορφος με τον $\mathcal{H}$.*

Ορισμός 1.3.8 (ευθύ άθροισμα).

1. Αν $\{\mathcal{H}_i\}$ είναι μια οικογένεια χώρων Hilbert, ονομάζουμε το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα $\oplus_i \mathcal{H}_i$ το σύνολο $\mathcal{H}$ όλων των οικογενειών (x_i), με $x_i \in \mathcal{H}_i$, για κάθε i, που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλαδή: $\sum_i \|x_i\|^2_{\mathcal{H}_i} < \infty$. Συμβολίζουμε ένα $x \in \mathcal{H}$ με $\oplus x_i$ και θέτουμε
$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_i \langle x_i, y_i\rangle_{\mathcal{H}_i}$$

2. Αν $T_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{K}_i$ είναι φραγμένοι τελεστές για κάθε i και $\sup_i \|T_i\| < \infty$, τότε για κάθε $\oplus x_i \in \mathcal{H}$ η οικογένεια $(T_i(x_i))$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμη, οπότε ορίζουμε το ευθύ άθροισμα των T_i να είναι ο τελεστής
$$T : \oplus \mathcal{H}_i \to \oplus \mathcal{K}_i$$
$$\oplus x_i \mapsto \oplus_i T_i(x_i)$$
Ο T είναι φραγμένος και μάλιστα έχουμε: $\|T\| = \sup \|T_i\|$.

3. Αν $\mathcal{H}_n, n \in \mathbb{N}$ είναι κάθετοι ανά δύο υπόχωροι ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, τότε το εσωτερικό ευθύ τους άθροισμα $\vee \mathcal{H}_n$, δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_n, είναι ίσο με το σύνολο
$$\mathcal{H}_0 = \{\sum_n x_n : x_n \in \mathcal{H}_n, \sum \|x_n\|^2 < \infty\}$$

και η απεικόνιση

$$W : \oplus_n \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_0 : \oplus x_n \mapsto \sum_n x_n$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Επομένως ταυτίζουμε το εξωτερικό ευθύ άθροισμα κάθετων ανά δύο υποχώρων ενός χώρου Hilbert με το εξωτερικό ευθύ τους άθροισμα. Τονίζουμε ότι, από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου στο εξωτερικό ευθύ άθροισμα, οι προσθετέοι του εμφυτεύονται σε αυτό ως κάθετοι ανά δύο υπόχωροί του.

1.3.3 Ειδικές κατηγορίες τελεστών σε χώρους Hilbert

Ορισμός 1.3.9. Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ χώροι Hilbert. Μια sesquilinear μορφή ϕ είναι μια απεικόνιση $\phi : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ που είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή και αντιγραμμική ως προς την δεύτερη.

Η ϕ λέγεται φραγμένη αν ο αριθμός

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x,y)| : x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}, \|x\| = \|y\| = 1\}$$

είναι πεπερασμένος. Αν $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ ορίζεται η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή: $\tilde{\phi}(x) = \phi(x,x)$.

Όταν $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, η ταυτότητα πολικότητας

$$4\phi(x,y) = \tilde{\phi}(x+y) - \tilde{\phi}(x-y) + i\tilde{\phi}(x+iy) - i\tilde{\phi}(x-iy) \tag{1.1}$$

δείχνει ότι η ϕ καθορίζεται από την $\tilde{\phi}$.

Αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ θέτουμε

$$\phi_T : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto \langle Tx, y\rangle.$$

Η ϕ_T είναι sesquilinear και φραγμένη, με $\|\phi_T\| = \|T\|$.

Είναι φανερό ότι δύο φραγμένοι τελεστές S, T στον $\mathcal{H}$ συμπίπτουν αν και μόνο αν οι αντίστοιχες sesquilinear μορφές ϕ_T, phi_S συμπίπτουν. Από την ταυτότητα πολικότητας προκύπτει ότι $S = T \Leftrightarrow \langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$, για κάθε $x \in \mathcal{H}$.

Έχουμε λοιπόν κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ορίζει μία μοναδική φραγμένη sesquilinear μορφή ϕ_T. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή:

Πρόταση 1.3.10. *Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ από τη σχέση:*

$$\langle Tx, y\rangle = \phi(x,y), \text{ για κάθε } x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}.$$

Μάλιστα έχουμε: $\|T\| = \|\phi\|$.

Πρόταση 1.3.11. *Για κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ υπάρχει μοναδικός $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ ώστε*

$$\langle Tx, y \rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, T^* y \rangle_{\mathcal{H}}$$

Μάλιστα ισχύει $\|T\| = \|T^*\|$.

Ορισμός 1.3.12. Ο T^* λέγεται ο συζυγής τελεστής του T.

Παρατήρηση 1.3.13. Στην περίπτωση που $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ η απεικόνιση

$$* : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) : T \mapsto T^*$$

είναι μία ενέλιξη στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, η οποία ικανοπειεί την C^* ιδιότητα ($\|T^*T\| = \|T\|^2$), οπότε ο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ παίρνει τη δομή μιας C^*-άλγεβρας.

Ορισμός 1.3.14 (Κατηγορίες Τελεστών)**.** Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ονομάζεται:

1. φυσιολογικός εάν: $TT^* = T^*T$
2. αυτοσυζυγής εάν: $T = T^*$
3. ορθομοναδιαίος (unitary) εάν: $T^* = T^{-1}$
4. θετικός εάν: $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, για κάθε $x \in \mathcal{H}$
5. συμπαγής εάν η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{H}$ μέσω του T είναι σχετικά συμπαγές σύνολο
6. πεπερασμένης τάξης εάν η διάσταση του συνόλου τιμών του T είναι πεπερασμένη
7. αντιστρέψιμος εάν υπάρχει $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ώστε $AB = BA = I$, οπότε και ορίζουμε $B = A^{-1}$.

Πρόταση 1.3.15. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Ένας $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι συμπαγής, αν και μόνο αν είναι (norm) όριο μιας ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης.*

Πρόταση 1.3.16. *Έστω $\mathcal{H}$ απειροδιάστατος χώρος Hilbert. Τότε ένας αντιστρέψιμος τελεστής δεν μπορεί να είναι συμπαγής.*

Ορισμός 1.3.17. Έστω H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Ένα μη μηδενικό $u \in H$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του T, εάν υπάρχει μη μηδενικό $\lambda \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $Tu = \lambda u$. Το δε $\lambda \in \mathbb{C}$ ονομάζεται ιδιοτιμή του T. Αν $\lambda \neq 0$ ιδιοτιμή του T, θέτουμε $M_\lambda = \ker(T - \lambda I)$. Ο M_λ ονομάζεται ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Πρόταση 1.3.18. *Έστω H απειροδιάστατος χώρος Hilbert και K φραγμένος, συμπαγής, αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε:*

1. *Ο K έχει μη μηδενική ιδιοτιμή, οπότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$, με $M_\lambda \neq \{0\}$. Μάλιστα, τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $\|K\|, -\|K\|$ είναι ιδιοτιμή του K.*
2. *Για κάθε ιδιοτιμή λ έχουμε $\dim M_\lambda < \infty$ και $P_{M_\lambda} K = K P_{M_\lambda}$.*

Ορισμός 1.3.19. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια οικογένεια $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A}$ τελεστών σε έναν χώρο Hilbert H λέγεται *φασματικό μέτρο αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

1. . $E(\Omega)^* = E(\Omega)$
2. . $E(\Omega_1 \cup \Omega_2) = E(\Omega_1)E(\Omega_2)$
3. . $E(\emptyset) = 0$ *και* $E(X) = I$
4. . *Για κάθε $x, y \in H$, η απεικόνιση: $\mu_{x,y} : \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, y\rangle$ είναι μιγαδικό μέτρο ορισμένο στην $\mathcal{A}$.*

Παρατήρηση 1.3.20. Από τις (1), (2) προκύπτει ότι κάθε $E(\Omega)$ είναι ορθή προβολή.

Ορισμός 1.3.21. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A}\}$ φασματικό μέτρο με τιμές σε έναν χώρο Hilbert H. Αν f απλή, μετρήσιμη με κανονική μορφή

$$f = \sum \lambda_i \chi_{\Omega_i}$$

ορίζουμε

$$\int_X f(\lambda) dE_\lambda = \sum_i \lambda_i E(\Omega_i) \in \mathcal{B}(H).$$

Πρόταση 1.3.22. *Η απεικόνιση: $f \mapsto \int_X f(\lambda) dE_\lambda$ είναι συνεχής, ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης, από τον χώρο των απλών συναρτήσεων στον $\mathcal{B}(H)$ και επεκτείνεται μοναδικά στον χώρο $\mathcal{L}^\infty(X)$.*

Ορισμός 1.3.23. Έστω H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Το φάσμα του T είναι το σύνολο:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ ο } T - \lambda I \text{ δεν έχει αντίστροφο } \}.$$

Πρόταση 1.3.24. *Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή είναι μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Ειδικότερα, για T αυτοσυζυγή έχουμε ότι $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

Θεώρημα 1.3.25 (Φασματικό θεώρημα για φυσιολογικούς τελεστές)**.** *Αν* $T \in \mathcal{B}(H)$ *είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε υπάρχει μοναδικό κανονικό φασματικό μέτρο* $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C}$ *Borel*$\}$ *που φέρεται από το* $\sigma(T)$*, ώστε*

$$T = \int \lambda dE_\lambda.$$

Επιπλέον, ένας $A \in \mathcal{B}(H)$ *μετατίθεται με τον* T *αν και μόνο αν μετατίθεται με καθε* $E(\Omega)$.

Κεφάλαιο 2

Το μέτρο Haar σε Τοπολογικές Ομάδες

2.1 Τοπολογικές Ομάδες

Μια τοπολογική ομάδα είναι μια ομάδα G εφοδιασμένη με μια τοπολογία ως προς την οποία οι πράξεις της ομάδας είναι συνεχείς. Δηλαδή, ο πολλαπλασιασμός:

$$(x, y) \mapsto xy$$

$$G \times G \to G$$

και η αντιστροφή:

$$x \mapsto x^{-1}$$

$$G \to G$$

είναι συνεχείς.

Παράδειγμα 2.1.1. 1. Οποιαδήποτε ομάδα G δύναται να γίνει τοπολογική ομάδα με τη διακριτή τοπολογία, δηλαδή την τοπολογία στην οποία κάθε σύνολο είναι ανοιχτό. Μια ομάδα θεωρούμενη με τη διακριτή τοπολογία ονομάζεται διακριτή.

2. Η προσθετική ομάδα των πραγματικών $(\mathbb{R}, +)$ και η πολλαλασιαστική ομάδα των πραγματικών $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ αποτελούν τοπολογικές ομάδες με τη συνήθη τοπολογία.

3. Οι παρακάτω ομάδες πινάκων, με τη σχετική τοπολογία από τον $M^n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2n}$ ή τον $M^n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{2n}$ αποτελούν τοπολογικές ομάδες.

   $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M^n(\mathbb{R}) : detA \neq 0\}$

$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : detA = 1\}$

$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : A^\top A = 1\}$

$GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M^n(\mathbb{C}) : detA \neq 0\}$

$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A^* A = I\}$

$SU(n) = \{A \in U(n) : detA = 1\}$

Ορισμός 2.1.2. Αν G τοπολογική ομάδα και $A, B \subseteq G, x \in G$ τότε ορίζουμε: $Ax = \{yx, y \in A\}$, $xA = \{xy, y \in A\}$, $A^{-1} = \{y^{-1}, y \in A\}$,
$AB = \{xy, x \in A, y \in B\}$.

Ένα σύνολο A θα ονομάζεται συμμετρικό, εάν $A = A^{-1}$

Παρατήρηση 2.1.3. Δεν θα συμβολίζουμε με A^2 το AA. Με A^2 θα εννοούμε το σύνολο $\{x^2, x \in A\}$.

Επίσης είναι χρήσιμη η εξής παρατήρηση: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow 1 \notin A^{-1}B$.

Η επόμενη πρόταση αφορά βασικές ιδιότητες τοπολογικών ομάδων.

Πρόταση 2.1.4.

1. *Η τοπολογία είναι αναλλοίωτη στις πράξεις, δηλαδή αν $U \subseteq G$, ανοιχτό, τότε τα σύνολα xU, Ux, U^{-1} είναι ανοιχτά για κάθε $x \in G$. Επίσης, για κάθε $A \subseteq G$ τα σύνολα AU, UA είναι ανοιχτά.*

2. *Για κάθε U περιοχή της μονάδας, υπάρχει V συμμετρική περιοχή της μονάδας με $VV \subseteq U$.*

3. *Αν H υποομάδα της G, τότε και η $\overline{H}$ υποομάδα της G.*

4. *Αν η H είναι κανονική υποομάδα, τότε και η $\overline{H}$ είναι κανονική.*

5. *Κάθε ανοιχτή υποομάδα είναι κλειστή.*

6. *Αν A, B συμπαγή, τότε και το AB είναι συμπαγές.*

Απόδειξη

1. Ότι τα xU, Ux, U^{-1} είναι ανοιχτά, εφόσον U ανοιχτό, έπεται άμεσα απο τη συνέχεια των πράξεων στην G. Για παράδειγμα, για $x \in G$, η απεικόνιση $\pi_{x^{-1}} : y \mapsto x^{-1}y$ είναι συνεχής και προφανώς έχουμε $xU = (\pi_{x^{-1}})^{-1}(U)$. Έπεται ότι AU ανοιχτό,για το τυχαίο $A \subseteq G$ γράφοντας $AU = \cup_{x \in A} xU$ και ομοίως για το UA.

2. Απο τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού στη μονάδα, έπεται ότι, αν U περιοχή της μονάδας, τότε υπάρχουν W_1, W_2 περιοχές της μονάδας με $W_1W_2 \subseteq U$. Τότε για $V = W_1 \cap W_2 \cap W_1^{-1} \cap W_2^{-1}$ ισχύει το ζητούμενο.

3. Έστω H υποομάδα της G. Αρκεί να δείξουμε ότι, αν $x, y \in \overline{H}$, τότε $xy^{-1} \in \overline{H}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\pi : (\overline{H} \times \overline{H}) \mapsto \overline{H}$, με $\pi(x, y) = xy^{-1}$, η οποία είναι συνεχής. Πρέπει λοιπόν $\pi^{-1}(\overline{H})$ να είναι κλειστή. Όμως $H \times H \subseteq \pi^{-1}(\overline{H})$,οπότε $\overline{H} \times \overline{H} = \overline{H \times H} \subseteq \pi^{-1}(\overline{H})$.

4. Έστω H κανονική υποομάδα της G. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $g \in G$, το σύνολο $g\overline{H}g^{-1}$ είναι κλειστό και περιέχει το $gHg^{-1} = H$.Έπεται ότι $\overline{H} \subseteq g\overline{H}g^{-1}$, άρα $g^{-1}\overline{H}g \subseteq \overline{H}$, για κάθε $g \in G$.

5. Αν H ανοιχτή υποομάδα της G, από το 1 έχουμε ότι κάθε σύμπλοκο xH είναι επίσης ανοιχτό.Όμως $G \setminus H = \bigcup\limits_{y \nsim 1} yH$, οπότε είναι ανοιχτό, άρα και H κλειστή.

6. Πάλι θεωρώντας τη συνεχή απεικόνιση $\pi : (G \times G \mapsto G)$ του πολλαπλασιασμού στην G έχουμε $AB = \pi(A \times B)$, συμπαγές, ως συνεχής εικόνα συμπαγούς.

□

Παρατήρηση 2.1.5. Είναι προφανές πως, για $x \in G$, οι απεικονίσεις $g \mapsto xg$, $g \mapsto gx$ $g \mapsto g^{-1}$ είναι ομοιομορφισμοί καθώς και ότι V περιοχή του $x \in G \iff x^{-1}V$ περιοχή της μονάδας $\iff Vx^{-1}$ περιοχή της μονάδας καθώς και ότι αν U περιοχή της μονάδας, τότε xU περιοχή του x, για κάθε $x \in G$.

Αν H υποομάδα της G, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον αντιστοιχο χώρο πηλίκο G/H, δηλαδή το χώρο όλων των αριστερών συμπλόκων $xH, x \in G$ της H.Θεωρούμε την απεικόνιση πηλίκο $q : G \mapsto G/H$. Τότε το G/H γίνεται τοπολογικός χώρος με την τοπολογία πηλίκο, δηλαδή ένα σύνολο $U \subseteq G/H$ είναι ανοιχτό, αν και μόνο αν $q^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό στην G.Παρατηρούμε επίσης ότι η q είναι ανοικτή απεικόνιση, δηλαδή αν $V \subseteq G$ ανοικτό, έχουμε $q(V) \subseteq G/H$ ανοικτό. Πράγματι, παρατηρούμε ότι, αν $V \subseteq G$, ανοικτό, τότε το $q(V) \subseteq G/H$ ανοικτό, αφού $q^{-1}(q(V)) = VH$ ανοικτό απο την προηγούμενη πρόταση. Για το G/H έχουμε τα παρακάτω.

Πρόταση 2.1.6. *Έστω H υποομάδα της τοπολογικής ομάδας G.Τότε*

1. *Αν η H είναι κλειστή, τότε ο G/H είναι χώρος Hausdorff.*

2. *Αν η G είναι τοπικά συμπαγής, τότε και ο χώρος G/H είναι τοπικά συμπαγής.*

3. *Αν η H είναι κανονική, τότε η G/H είναι τοπολογική ομάδα.*

Απόδειξη

1. Έστω $\overline{x} = q(x), \overline{y} = q(y)$ με $\overline{x} \neq \overline{y}$ και έστω H κλειστή. Τότε, το xHy^{-1} είναι κλειστό και δεν περιέχει τη μονάδα (άρα και το συμπλήρωμα του είναι περιοχή της μονάδας), οπότε, (από το 2 της προηγούμενης πρότασης) υπάρχει V συμμετρική περιοχή της μονάδας, με $VV \cap xHy^{-1} = \emptyset$. Έχουμε: $VV \cap xHy^{-1} = \emptyset \Rightarrow V \cap xHy^{-1}V^{-1} = \emptyset$. Εφόσον $V = V^{-1}$ και $H = HH$, έχουμε: $V \cap xHy^{-1}V^{-1} = \emptyset \Leftrightarrow 1 \notin V^{-1}xH(Vy)^{-1} \Leftrightarrow 1 \notin VxH(Vy)^{-1} = VxH(VyH)^{-1}$, άρα $VxH \cap VyH = \emptyset$, δηλαδή οι $q(Vx) = VxH$ και $q(Vy) = VyH$ είναι ξένες περιοχές των $\overline{x}, \overline{y}$.

2. Αν U συμπαγής περιοχή της μονάδας, τότε $q(Ux)$ έιναι συμπαγής περιοχή του $q(x)$ στην G/H (αφού η q συνεχής και ανοικτή).

3. (Αν η H είναι κανονική,τότε το G/H είναι ομάδα). Έστω $x, y \in G$ και U μια περιοχή του $q(xy) \in G/H$. Από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού, υπάρχουν V, W περιοχές των x, y αντίστοιχα, ώστε $VW \subseteq q^{-1}(xy)$.Τότε οι $q(U), q(W)$ είναι περιοχές των $q(x), q(y)$ αντίστοιχα (q ανοιχτή), με $q(V)q(W) \subseteq U$, άρα ο πολλαπλασιασμός είναι συνεχής στην G/H. Ομοίως δουλεύουμε και για την αντιστροφή.

□

Πόρισμα 2.1.7. *Αν η G είναι T_1, τότε είναι Hausdorff. Αν η G δεν είναι T_1,τότε η $\overline{\{1\}}$ είναι κλειστή, κανονική υποομάδα, οπότε η $G/\overline{\{1\}}$ είναι Hausdorff τοπολογική ομάδα.*

Απόδειξη Το πρώτο έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση για $H = \{1\}$. Τώρα, αν η G δεν είναι T_1 χρησιμοποιούμε πάλι την προηγούμενη πρόταση, για $H = \overline{\{1\}}$, λαμβάνοντας υπόψη ότι η $\overline{\{1\}}$ είναι κανονική υποομάδα αφού η $\{1\}$ είναι κανονική. □

Η επόμενες παρατηρήσεις θα μας φανούν χρήσιμες στη συνέχεια.

Λήμμα 2.1.8. *Έστω G, H τοπολογικές ομάδες και $\phi : G \mapsto H$ ένας ομομορφισμός. Τότε ο ϕ είναι συνεχής, αν και μόνο αν είναι συνεχής στη 1_G.*

Απόδειξη Έστω ϕ συνεχής στη 1_G και έστω $x \in G$. Αν x_i δικτυο στην G, με $x_i \mapsto x$, τότε $x^{-1}x_i \mapsto x^{-1}x = 1_G$, οπότε $\phi(x)^{-1}\phi(x_i) = \phi(x^{-1}x) \mapsto \phi(1_H)$, άρα $\phi(x_i) \mapsto \phi(x)$. □

Ορισμός 2.1.9. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού μια τοπολογική ομάδα G και έστω $y \in G$. Ορίζουμε την αριστερή και τη δεξιά μεταφορά της f κατά y ως εξής:

$$L_y f(x) = f(y^{-1}x), \qquad R_y f(x) = f(yx) \tag{2.1}$$

Χρησιμοποιούμε y^{-1} στην L_y και y στην R_y ούτως ώστε οι απεικονίσεις $y \mapsto L_y$ και $y \mapsto R_y$ να είναι ομομορφισμοί ομάδων:

$$L_{yz} = L_y L_z, \qquad R_{yz} = R_y R_z.$$

Ορισμός 2.1.10. Λέμε ότι η f είναι αριστερά (αντ. δεξιά) ομοιόμορφα συνεχής εάν ισχύει: $\|L_y f - f\|_{\sup} \to 0$ (αντ. $\|R_y f - f\|_{\sup} \to 0$) καθώς $y \to 1_G$.

Πρόταση 2.1.11. *Έστω G τοπολογική ομάδα και $f \in C_c(G)$. Τότε η f είναι αριστερά και δεξιά ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη Θα δείξουμε την αριστερή ομοιόμορφη συνέχεια, καθώς η δεξιά έπεται αναλόγως. Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει U περιοχή της μονάδας, τέτοια ώστε, αν $x^{-1}y \in U$, τότε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Έστω $f \in C_c(G)$ και $\epsilon > 0$. Θέτουμε $K = \mathrm{supp}(f)$. Έστω επίσης V μια συμπαγής περιοχή της 1_G. Από τη συνέχεια της f έπεται ότι για κάθε $x \in G$ υπάρχει (ανοιχτή) περιοχή της 1_G $\ V_x$ με $V_X \subseteq V$, ώστε για κάθε $y \in xV_x$ να ισχύει $|f(x) - f(y) < \frac{\epsilon}{2}$. Έστω τώρα U_x ανοιχτή συμμετρική περιοχή της 1_G με $U_x U_x \subseteq V_x$. (Πρόταση 2.1.4). Έχουμε ότι τα σύνολα $xU_x, x \in KV$ καλύπτουν το συμπαγές KV, οπότε υπάρχουν $x_1, \cdots, x_k \in KV$ ώστε $KV \subseteq \cup_1^k x_i U_{x_i}$. Θέτουμε τώρα $U = \cap_1^k U_{x_i}$. Η U είναι ανοιχτή, συμμετρική περιοχή της 1_G. Έστω τώρα $x, y \in G$ με $x^{-1}y \in U$. Αν $x \notin KV$ τότε αναγκαστικά $y \notin K$, αφού $x^{-1}y \in U \Rightarrow x^{-1} \in Uy^{-1} \Rightarrow x \in yU^{-1} = yU \subseteq yV$ και τότε έχουμε $f(x) = f(y) = 0$. Έστω τώρα $x \in KV$. Τότε υπάρχει j ώστε $x \in x_j U_{x_j}$, άρα $y \in x_j U_{x_j} U^{-1} = x_j U_{x_j} U \subseteq x_j V_{x_j}$, οπότε έχουμε
$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. □

Παρατήρηση 2.1.12. Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να υποθέτουμε ότι κάθε τοπολογική ομάδα είναι Hausdorff, (ειδάλλως δουλεύουμε με την $G/\overline{\{1\}}$). Εφεξής με τον όρο *τοπικά συμπαγής ομάδα*, θα εννοούμε μια τοπολογική ομάδα, που η τοπολογία της είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff.

2.2 Το μέτρο Haar

Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα.Υπενθυμίζουμε ότι με $C_c(G)$ συμβολίζουμε το χώρο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στη G και θέτουμε $C_c^+(G) = \{f \in C_c(G) : f \geq 0, f \neq 0\}$. Προφανώς η γραμμική θήκη αυτού είναι όλος ο $C_c(G)$.

Επίσης, υπενθυμίζουμε τον παρακάτω:

Ορισμός 2.2.1. Έστω X τοπικά συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος. Ένα μέτρο Radon στον X είναι ένα μέτρο Borel που είναι πεπερασμένο στα συμπαγή, εξωτερικά κανονικό σε όλα τα Borel και εσωτερικά κανονικό στα ανοιχτά υποσύνολα του X. Πιο συγκεκριμένα ένα μέτρο Borel μ θα είναι μέτρο Radon εάν:

1. $\mu(K) < \infty$, για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές.
2. $\mu(A) = inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U$ ανοιχτό στον $X\}$, για κάθε $A \in Bo(X)$.
3. $\mu(U) = sup\{\mu(K) : K \subseteq U, K$ συμπαγές στον $X\}$, για κάθε U ανοιχτό στον X.

Παρατήρηση 2.2.2. Αποδεικνύεται ότι ένα σ-πεπερασμένο μέτρο Radon είναι και εσωτερικά κανονικό, δηλαδή η παραπάνω σχέση (3) ισχύει για κάθε $U \in Bo(X)$.

Ορισμός 2.2.3. Ένα *αριστερό (αντ, δεξί) μέτρο Haar* σε μια τοπικά συμπαγή ομάδα G είναι ένα μη μηδενικό μετρο Radon μ στην G που ικανοποιεί την $\mu(xE) = \mu(E)$ (αντ. $\mu(Ex) = \mu(E)$), για κάθε $E \subseteq G$, Borel και κάθε $x \in G$.

Πρόταση 2.2.4. *Έστω μ ένα (μη μηδενικό) μέτρο Radon στην τοπικά συπμαγή G και έστω $\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$. Τότε:*

1. *Το μ είναι αριστερό μέτρο Haar στην G αν και μόνο αν το $\tilde{\mu}$ είναι δεξί μέτρο Haar.*
2. *Το μ είναι αριστερό μέτρο Haar στην G αν και μόνο αν $\int L_y f d\mu = \int f d\mu$, για κάθε $f \in C_c^+(G)$ και $y \in G$.*

Απόδειξη

1. Έστω $x \in G$ και $E \in Bo(G)$. Έχουμε: $\tilde{\mu}(Ex) = \mu(x^{-1}E^{-1}) = \tilde{\mu}(E)$ και $\mu(xE) = \tilde{\mu}(E^{-1}x^{-1}) = \tilde{\mu}(E^{-1}) = \mu(E)$.
2. Έστω μ μέτρο Radon στην G. Ορίζουμε $\mu_y(E) = \mu(yE)$ για κάθε $y \in G$, $E \in Bo(G)$. Έστω τώρα $s = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ μία απλή συνάρτηση. Τότε, παρατηρώντας ότι, για κάθε $A \in Bo(X), y \in G$ ισχύει $L_y \chi_A = \chi_{yA}$, έχουμε ότι αν $y \in G$ ισχύει: $\int L_y s d\mu = \sum_{i=1}^k a_i \mu(yA_i) = \sum_{i=1}^k a_i \mu_y(A_i) = \int s d\mu_y$. Έστω τώρα μια $f \in C_c^+(G)$. Έχουμε: $\int L_y f d\mu = \sup\{\int L_y s d\mu : s$ απλή,$0 \leq s \leq f\} = \sup\{\int s d\mu_y, s$ απλη, $0 \leq s \leq f\} = \int f d\mu_y$. Έπεται ότι , αν μ μέτρο Haar στην G, τότε $\mu = \mu_y$, οπότε $\int L_y f d\mu = \int f d\mu$, για κάθε $f \in C_c^+(G)$. Αντίστροφα, αν $\int L_y f d\mu = \int f d\mu$ για κάθε $f \in C_c^+(G)$, δηλαδή αν $\int f d\mu = \int d\mu_y$ για κάθε $f \in C_c^+(G)$ (άρα και για κάθε $f \in C_c(G)$ λόγω γραμμικότητας), τότε το ζητούμενο έπεται απο τη μοναδικότητα του μέτρου στο θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

□

Παρατήρηση 2.2.5. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι δεν έχει μεγάλη σημασία το αν θα επιλέξουμε να μελετήσουμε αριστερά ή δεξιά μέτρα Haar, είναι συνηθέστερο όμως να μελετάμε αριστερά.

Η μελέτη του μέτρου Haar δεν είναι κενή περιεχομένου, όπως φαίνεται απο το παρακάτω:

Θεώρημα 2.2.6. *Κάθε τοπικά συμπαγής ομάδα διαθέτει ένα (αριστερό) μέτρο Haar.*

Για την απόδειξη αυτού χρειάζονται τα εξής:

Παρατήρηση 2.2.7. Για κάθε $f, \phi \in C_c^+(G)$ υπάρχουν πεπερασμένα στο πλήθος $c_j \geq 0$ και $x_j \in G$ τέτοια ώστε:
$f(x) \leq \sum_{j=1}^n \phi(x_j^{-1}x)$, δηλαδή έτσι ώστε $f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi$ και μπορούμε να ορίσουμε

$$(f : \phi) = \inf\{\sum_{j=1}^n c_j : f \leq \sum_{j=1}^n L_{x_j}\phi\}.$$

Πράγματι, έστω $f, \phi \in C_c^+(G)$. Θεωρούμε $U = [\phi > \frac{1}{2}\|\phi\|_\infty]$. Το U είναι ανοιχτό και προφανώς $G = \bigcup\limits_{x \in G} xU$. Αφού $s(f)$ συμπαγές, έπεται ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, ...x_n \in G$, με $s(f) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^n x_jU$. Επομένως, αν $x \in s(f)$ έχω $x \in x_jU$ για κάποιο $1 \leq j \leq n$ άρα $x_j^{-1}x \in U$, οπότε $L_{x_j}\phi(x) > \frac{1}{2}\|\phi\|_\infty$. Κατά συνέπεια, για κάθε $c > 0$ έχουμε
$cL_{x_j}\phi(x) > \frac{c}{2}\|\phi\|_\infty$. Επιλέγοντας λοιπόν $c_j > 0$, με $\|f\|_\infty \leq \frac{c_j}{2}\|\phi\|_\infty$ έχουμε, για κάθε $x \in s(f)$ αν $x \in x_jU$ ότι $f(x) \leq \|f\|_\infty \leq \frac{c_j}{2}\|\phi\|_\infty$. Αν θεωρήσουμε λοιπόν $c_1 = c_2 = ... = c_n = \frac{2\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}$ έχουμε $f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi$ και
$(f : \phi) \leq \sum_{j=1}^n c_j \leq \frac{2n\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}$.

Ορισμός 2.2.8. Για κάθε $f, \phi \in C_c^+(G)$ το $(f : \phi)$ είναι καλά ορισμένο και ονομάζεται δείκτης της f ως προς την ϕ.

Λήμμα 2.2.9. *Ιδιότητες του δείκτη Για κάθε $f, f_1, f_2, \phi, \psi \in C_c^+(G)$, $y \in G$ και $c > 0$ ισχύουν:*

1. $(f : \phi) = (L_y f : \phi)$
2. $(f_1 + f_2 : \phi) \leq (f_1 : \phi) + (f_2 : \phi)$
3. $(cf : \phi) \leq c(f : \phi)$

4. *$(f_1 : \phi) \leq (f_2 : \phi)$, όταν $f_1 \leq f_2$*

5. *$(f : \phi) \geq \frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}$*

6. *$(f : \phi) \leq (f : \psi)(\psi : \phi)$*

Απόδειξη

1. Αν $f \leq \sum c_j L_{x_j}\phi$ και $y \in G$ τότε $L_y f \leq \sum c_j L_y L_{x_j}\phi = \sum c_j L_{yx_j}\phi$ και αν $L_y f \leq \sum c_j L_{x_j}\phi$ τότε $f \leq \sum c_j L_{y^{-1}x_j}\phi$

2. Αφού $f_1, f_2 \geq 0$ έχουμε $f_i \leq f_1 + f_2 \leq \sum c_j L_{x_j}\phi, i = 1, 2$

3. Αν $f \leq \sum c_j L_{x_j}\phi$ τότε $cf \leq \sum cc_j L_{x_j}\phi$ και αν $cf \leq \sum c_j L_{x_j}\phi$, τότε $f \leq \sum c^{-1} c_j L_{x_j}\phi$, αφού $c > 0$.

4. Άμεσο.

5. Έστω $x_0 \in G$ με $f(x_0) = \max f$. Τότε $\max f = f(x_0) \leq \sum c_j \phi(x_j^{-1}x_0) \leq \sum c_j \max\phi$.

6. Αν $f \leq \sum c_j L_{x_j}\psi$ και $\psi \leq \sum b_i L_{y_i}\phi$ τότε $f \leq \sum_j \sum_i c_j b_i L x_j y_j \phi$.

□

Σταθεροποιώντας τώρα μία $f_0 \in C_c^+(G)$ ορίζουμε

$$I_\phi(f) = \frac{(f : \phi)}{(f_0 : \phi)}, f, \phi \in C_c^+(G).$$

Από το προηγούμενο Λήμμα έπεται ότι το I_ϕ είναι θετικό, L_y-αναλλοίωτο, υπογραμμικό, θετικά ομογενές και μονότονο ενώ επίσης ισχύει:

$$(f_0 : \phi)^{-1} \leq I_\phi(f) \leq (f : f_0). \tag{2.2}$$

Εάν δε ήταν και γραμμικό, θα ήταν ο περιορισμός στον $C_c^+(G)$ ενός L_y-αναλλοίωτου θετικού γραμμικού συναρτησοειδούς στον $C_c(G)$,οπότε και θα προέκυπτε το αντίστοιχο μέτρο Radon στην G, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

Για να βρούμε ένα όμως ένα I_ϕ που να είναι όντως και γραμμικό χρειαζόμαστε το παρακάτω:

Λήμμα 2.2.10. *Έστω $f_1, f_2 \in C_C^+(G)$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει V περιοχή της 1_G, τέτοια ώστε: $I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq I_\phi(f_1 + f_2) + \epsilon$, όταν $s(\phi) \subseteq V, \phi \in C_c^+(G), \phi \neq 0$.*

Απόδειξη

Σταθεροποιούμε μία $g \in C_c^+(G)$ με $g = 1$ στο $s(f_1 + f_2)$. Έστω $\epsilon > 0$ και $\delta > 0$ (η τιμή του οποίου θα προσδιορισθεί παρακάτω). Θέτουμε
$h = f_1 + f_2 + \delta g$ και $h_i = \frac{f_i}{h}, i = 1, 2$, όπου βέβαια θέτουμε $h_i(x) = 0$, όταν $h(x) = 0$. Τότε έχουμε ότι κάθε $h_i \in C_c^+(G)$, οπότε κάθε h_i είναι ομοιόμορφα συνεχής, επομένως, για το $\delta > 0$, υπάρχει V περιοχή της 1_G τέτοια ώστε $|h_i(x) - h_i(y)| < \delta, i = 1, 2$ όταν $y^{-1}x \in V$.
Έστω τώρα $\phi \in C_c^+(G)$ με $s(\phi) \subseteq V$.
Αν $c_j > 0$, με $h \leq \sum c_j L_{x_j}\phi$, τότε
$f_i(x) = h(x)h_i(x) \leq \sum c_j \phi(x_j^{-1}x)h_i(x) \leq \sum c_j \phi(x_j^{-1}x)[h_i(x_j) + \delta]$, αφού $|h_i(x) - h_i(x_j)| < \delta$, όταν $x_j^{-1}x \in s(\phi) \subseteq V$. Επειδή $h_1 + h_2 \leq 1$ έχουμε: $(f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \leq \sum c_j[h_1 + \delta] + \sum c_j[h_2 + \delta] \leq \sum c_j[1 + 2\delta]$.
Παίρνοντας infimum για όλα τα αθροίσματα $\sum c_j$ έχουμε:
$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq (1 + 2\delta)I_\phi(h) \leq (1 + 2\delta)[I_\phi(f_1 + f_2) + \delta I_\phi(g))] =$
$= I_\phi(f_1 + f_2) + 2\delta I_\phi(f_1 + f_2) + \delta(1 + 2\delta)I_\phi(g)$.
Επιλέγοντας τώρα δ τέτοιο ώστε

$2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(g : f_0) < \epsilon$ τότε, σύμφωνα με την 2.2 έχουμε: $2\delta I_\phi(f_1 + f_2) + \delta(1 + 2\delta)I_\phi(g) < \epsilon$, οπότε $I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) < I_\phi(f_1 + f_2) + \epsilon$.

$\square$

Μπορούμε πλέον να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος ύπαρξης.

Για κάθε $f \in C_c^+(G)$ θεωρούμε το διάστημα $X_f = [(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)] \subseteq \mathbb{R}$ και θεωρούμε ως χώρο X το καρτεσιανό γινόμενο των X_f. Ο X είναι ο συμπαγής Hausdorff, που αποτελείται από όλες τις απεικονίσεις απο τον $C_c^+(G)$ στο $(0, +\infty)$, που οι τιμές τους σε κάθε f βρίσκονται στο αντίστοιχο X_f. Πάλι από την 2.2 έχουμε ότι $I_\phi \in X$, για κάθε $\phi \in C_c^+(G)$. Θεωρούμε τώρα για κάθε V περιοχή της 1_G το $K(V) = cl_X\{I_\phi : s(\phi) \subseteq V\}$. Επειδή $\cap_1^n K(V_j) \supseteq K(\cap_1^n(V_j))$ και προφανώς $\cap_1^n(V_j) \neq \emptyset$ (περιέχουν τη 1_G) για κάθε πεπερασμένη επιλογή περιοχών της 1_G, έπεται ότι η οικογένεια $\{K(V), V$ περιοχή της $1_G\}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, οπότε, από τη συμπάγεια του X έχουμε ότι υπάρχει $I \in X$ με $I \in \cap\{K(V), V$ περιοχή της $1_G\}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε περιοχή του I περιέχει I_ϕ με $s(\phi)$ αυθαίρετα μικρό. Με άλλα λόγια, για κάθε περιοχή της 1_G, κάθε $\epsilon > 0$ και και κάθε πεπερασμένη επιλογή $f_1, f_2, ..., f_n \in C_c^+(G)$, υπάρχει $\phi \in C_C^+(G)$, με $s(\phi) \subseteq V$ και $|I(f_j) - I_\phi(f_j)| < \epsilon$, για όλα τα $j = 1, 2...n$.
Το επαγόμενο I έχει τις επόμενες τρεις ιδιότητες. Από αυτές, οι (1), (3) έπονται άμεσα από το 2.2.9, ενώ η (2) αποδεικνύεται παρακάτω.

1. $I(L_y f) = I(f)$, για κάθε $y \in G$ και για κάθε $f \in C_c^+(G)$.

2. $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$, για κάθε $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$.

3. $I(cf) = cI(f)$, για κάθε $c > 0$ και $f \in C_c^+(G)$.

Αποδεικνύουμε την (2):
Έστω $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ και $\epsilon > 0$. Από το λήμμα 2.2.10, υπάρχει V περιοχή της 1_G τέτοια ώστε $I\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq I_\phi(f_1 + f_2) + \epsilon$, οποτεδήποτε $s(\phi) \subseteq V$. Από τα παραπάνω, υπάρχει μία ϕ με $s(f) \subseteq V$ ώστε:
$|I(f_1) - I_\phi(f_1)| < \epsilon$
$|I(f_2) - I_\phi(f_2)| < \epsilon$
$|I(f_1 + f_2) - I_\phi(f_1 + f_2)| < \epsilon$, οπότε έχουμε
$I(f_1) + I(f_2) \leq I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) + 2\epsilon \leq I_\phi(f_1 + f_2) + 3\epsilon \leq I(f_1 + f_2) + 5\epsilon$.
Αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι: $I(f_1) + I(f_2) \leq I(f_1 + f_2)$, οπότε από το λήμμα 2.2.9 έπεται $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$.

Επεκτείνουμε τώρα το I στον $C_c(G)$ θέτοντας: $I(f) = I(f_+) - I(f_-)$. Αν $g, h \in C_c^+(G)$, ώστε $f = g - h$, έχουμε $f_+ + h = f_- + g$, οπότε
$I(f_+) + I(h) = I(f_-) + I(g) \Rightarrow I(f_+) - I(f_-) = I(g) - I(h)$. Έπεται ότι το I είναι ένα καλά ορισμένο θετικό γραμμικό συναρτησοειδές στην $C_c(G)$, οπότε απο το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μοναδικό μέτρο Radon μ στην G, ώστε $I(f) = \int f d\mu, f \in C_c(G)$. Επειδή έχουμε $I(L_y f) = I(f)$, δηλαδή $\int L_y f d\mu = \int f d\mu$, για κάθε $y \in G, f \in C_c(G)$, έπεται ότι το μ είναι (αριστερό) μέτρο Haar στην G, από την πρόταση 2.2.4.

Για να συνεχίσουμε στο θεώρημα της μοναδικότητας του μέτρου Haar, χρειαζόμαστε την παρακάτω:

Πρόταση 2.2.11. *Εάν το λ είναι αριστερό μέτρο Haar στην G, τότε*
$\lambda(U) > 0$ για κάθε $U \subseteq G$ ανοιχτό, μη κενό και
$\int f d\lambda > 0$ για κάθε $f \in C_c^+(G)$.

Απόδειξη Έστω $U \subseteq G$ ανοιχτό, μη κενό, με $\lambda(U) = 0$. Τότε $\lambda(xU) = 0$, για κάθε $x \in G$. Αν τώρα $K \subseteq G$, συμπαγές, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$,
$x_1, x_2, ...x_n \in G$ τέτοια ώστε $K \subseteq \cup_{i=1}^n x_i U$. Έπεται ότι $\lambda(K) = 0$. Άρα
$\lambda(G) = 0$, από την εσωτερική κανονικότητα του λ, άτοπο, αφού $\lambda \neq 0$. Τώρα, έστω $f \in C_c^+(G)$. Θεωρούμε $U = [f > \frac{1}{2} \|f\|_\infty]$.
Τότε $\int f d\lambda > \frac{1}{2} \|f\|_\infty \lambda(U) > 0$.

□

Θεώρημα 2.2.12. *Αν λ, μ αριστερά μέτρα Haar στην G, τότε υπάρχει $c > 0$ ώστε $\mu = c\lambda$.*

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι ο λόγος $\dfrac{\int f d\lambda}{\int f d\mu}$ είναι ο ίδιος, για κάθε $f \in C_c^+(G), f \neq 0$.
Έστω λοιπόν $f, g \in C_c^+(G)$ και V_0 μία συμμετρική συμπαγής περιοχή της 1_G. Θέτουμε:

$$A = s(f)V_0 \cup V_0 s(f) \quad \text{και} \quad B = s(g)V_0 \cup V_0 s(g).$$

Τότε τα A, B είναι συμπαγή και αν $y \in V_0$, τότε οι συναρτήσεις $f(xy) - f(yx), g(xy) - g(yx)$ φέρονται, ως συναρτήσεις του x στα A και B αντίστοιχα.
Έστω $\epsilon > 0$, τότε, από την ομοιόμορφη συνέχεια των f, g, υπάρχει μία $V \subseteq V_0$, συμμετρική περιοχή της 1_G τέτοια ώστε:
$|f(xy) - f(yx)| < \epsilon$ και $|g(xy) - g(yx)| < \epsilon$, για όλα τα x όταν $y \in V$.
Επιλέγουμε μια $h \in C_c^+(G)$ με $h(x) = h(x^{-1})$ και $s(h) \subseteq V$. (Αυτό είναι όντως εφικτό. Ήδη γνωρίζουμε πως, για κάθε $U \subseteq G$, ανοιχτό, υπάρχει $h \in C_c(G)$ με $h \prec U$, δηλαδή $0 \leq h \leq \chi_U$ και $s(h) \subseteq U$. Αν λοιπόν V συμμετρική περιοχή της 1_G θεωρώντας ως U την V° λαμβάνουμε μια ως άνω h και θεωρούμε $h'(x) = h(x) + h(x^{-1})$ ή $h'(x) = \dfrac{h(x) + h(x^{-1})}{2}$ αν επιθυμούμε $h' \prec V$). Τότε έχουμε:
$\int h d\mu \int f d\lambda = \iint h(y) f(x) d\lambda(x) d\mu(y) = \iint h(y) f(yx) d\lambda(x) d\mu(y)$.
Επίσης:

$$\begin{aligned}
\int h d\lambda \int f d\mu &= \iint h(x) f(y) d\lambda(x) d\mu(y) \\
&= \iint h(y^{-1}x) f(y) d\lambda(x) d\mu(y) \\
&= \iint h(x^{-1}y) f(y) d\mu(y) d\lambda(x) \\
&= \iint h(y) f(xy) d\mu(y) d\lambda(x) \\
&= \iint h(y) f(xy) d\lambda(x) d\mu(y),
\end{aligned}$$

όπου στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι τα λ, μ είναι αριστερά αναλλοίωτα, ότι $h(x) = h(x^{-1})$ καθώς και το θεώρημα Fubini, αφού τα παραπάνω ολοκληρώματα λαμβάνονται ουσιαστικά επί συμπαγών και άρα πεπερασμένου μέτρου συνόλων. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \left|\int h d\lambda \int f d\mu - \int h d\mu \int f d\lambda\right| &= \left|\iint h(y)[f(xy) - f(yx)] d\lambda(x) d\mu(y)\right| \\ &\leq \epsilon\lambda(A) \int h d\mu. \end{aligned}$$

Ομοίως λαμβάνουμε:

$$\left|\int h d\lambda \int g d\mu - \int h d\mu \int g d\lambda\right| \leq \epsilon\lambda(B) \int h d\mu.$$

Διαιρώντας την 1η απο τις παραπάνω με $\int h d\mu \int f d\mu$ και τη 2η με $\int h d\mu \int g d\mu$ λαμβάνουμε:

$$\left|\frac{\int h d\lambda}{\int h d\mu} - \frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu}\right| \leq \frac{\epsilon\lambda(A)}{\int f d\mu} \quad \text{και} \quad \left|\frac{\int h d\lambda}{\int h d\mu} - \frac{\int g d\lambda}{\int g d\mu}\right| \leq \frac{\epsilon\lambda(B)}{\int g d\mu}.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\int h d\lambda}{\int f d\mu} - \frac{\int g d\lambda}{\int g d\mu}\right| &\leq \left|\frac{\int h d\lambda}{\int h d\mu} - \frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu}\right| + \left|\frac{\int h d\lambda}{\int h d\mu} - \frac{\int g d\lambda}{\int g d\mu}\right| \\ &\leq \epsilon\left[\frac{\lambda(A)}{\int f d\mu} + \frac{\lambda(B)}{\int g d\mu}\right]. \end{aligned}$$

Αφού το ϵ ήταν τυχόν, έπεται ότι: $\dfrac{\int f d\lambda}{\int f d\mu} = \dfrac{\int g d\lambda}{\int g d\mu}$.
Επομένως, υπάρχει $c > 0$, τέτοιο ώστε $\int f d\lambda = c \int f d\mu$, για κάθε $f \in C_c^+(G)$. Έπεται ότι $\lambda(U) = c\mu(U)$, για κάθε $U \subseteq G$ ανοιχτό και άρα $\lambda = c\mu$, από την εξωτερική κανονικότητα των λ και μ. $\square$

Παραδείγματα μέτρων Haar

1. Στην προσθετική ομάδα των πραγματικών, το μέτρο Lebesgue είναι αριστερό και δεξί μέτρο Haar.

2. Στην πολλαπλασιαστική ομάδα των πραγματικών $G = (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \times)$, το μέτρο Haar παύει να είναι αριστερά αναλλοίωτο. Η παρακάτω απεικόνιση:

$$\mu : C_c^+(G) \mapsto \mathbb{C}, f \mapsto \int_G f(x) \frac{d\lambda(x)}{|x|}$$

ορίζει ένα αναλλοίωτο (δεξιά και αριστερά) συναρτησοειδές και επομένως ένα αριστερό και δεξί μέτρο Haar στην G.

3. Αν $G = \mathbb{T}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο Haar ως εξής: Θεωρούμε $f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{T}, f(t) = (\cos t, \sin t)$. Τότε ορίζουμε $\mu(S) = \frac{1}{2\pi}\lambda(f^{-1}(S))$.

Κλείνουμε το κεφάλαιο με την παρακάτω χρήσιμη

Πρόταση 2.2.13. *Για κάθε $g \in L^p, \quad 1 \leq p < \infty$ οι απεικονίσεις $y \mapsto \int R_y g$, $y \mapsto \int L_y g$ είναι συνεχείς απο την G στον L^p. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει U περιοχή της 1_G ώστε για κάθε $y \in U$ να ισχύει $\|L_y g - g\|_p < \epsilon$ και $\|R_y g - g\|_p < \epsilon$.*

Απόδειξη Αρχικά έστω $g \in C_c(G)$ και $\epsilon > 0$. Θέτουμε $K = \operatorname{supp}(g)$. Για κάθε $y \in G$ έχουμε $\operatorname{supp}(L_y g) \subseteq yK$. Έστω τώρα U_0 συμπαγής συμμετρική περιοχή της 1_G, με $U_0 \subseteq U$, οπότε για κάθε $y \in U_0$ έχουμε $\operatorname{supp}(L_y g) \subseteq U_0 K$. Έστω τώρα $\delta = \frac{\epsilon}{\lambda(U_0 K)^{\frac{1}{p}}}$. Από την πρόταση 2.1.11 έπεται ότι υπάρχει U περιοχή της 1_G ώστε για κάθε $y \in U$ να έχουμε $\|L_y g - g\|_{sup} < \delta$. Επομένως για κάθε $y \in U$ έχουμε:
$\|L_y g - g\|_p = \Big(\int_G |g(y^{-1}x) - g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \delta\lambda(U_0 K)^{\frac{1}{p}} = \epsilon.$

Έστω τώρα $g \in L^p$ και $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $f \in C_c(G)$ με $\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{3}$ και από τα παραπάνω υπάρχει U περιοχή της 1_G ώστε για κάθε $y \in U$ να έχουμε $\|L_y f - f\|_p < \frac{\epsilon}{3}$. Επομένως, για κάθε $y \in U$ έχουμε:
$\|g - L_y g\|_p \leq \|g - f\|_p + \|f - L_y f\|_p + \|L_y f - L_y g\|_p < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$, αφού $\|L_y f - L_y g\|_p = \|f - g\|_p$.

Εργαζόμαστε ανάλογα για την R_y. □

2.3 Κάποια τεχνικά ζητήματα

Προκειμένου να μην περιοριστούν τα αποτελέσματά μας, δεν έχουμε υποθέσει ότι η ομάδα G είναι σ-συμπαγής, οπότε το μέτρο Haar δεν είναι (κατάνάγκη) σ-πεπερασμένο, γεγονός που προκαλεί κάποια τεχνικά προβλήματα στη χρησιμοποιούμενη θεωρία μέτρου. Πιο συγκεκριμένα μας απασχολεί ότι οταν το μέτρο δεν είναι σ-πεπερασμένο, δεν ισχύουν δύο βασικά και αναγκαία για τη μελέτη μας θεωρήματα και συγκεκριμένα δεν ισχύει το θεώρημα Fubini, το οποίο χρειαζόμαστε κυρίως για να ορίσουμε συνέλιξη, καθώς και η δυικότητα των $L^1(\mu), L^\infty(\mu)$. Καμία από τις δύο ελλείψεις όμως δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα, όπως θα δείξουμε στα παρακάτω. Αν κάποιος βέβαια δουλεύει σε σ-συμπαγείς ομάδες μπορεί να παραλείψει την ανάγνωση των επομένων.

Πρόταση 2.3.1. *Αν G τοπικά συμπαγής ομάδα, τότε υπάρχει H υποομάδα της, η οποία είναι ανοιχτή, κλειστή και σ-συμπαγής.*

Απόδειξη Ας είναι V μία συμμετρική, σχετικά συμπαγής περιοχή της 1_G. Θέτουμε $V_n = VV\cdots V$ (n παράγοντες) και $H = \cup_{n=1}^{\infty} V_n$. Τότε η H είναι υποομάδα της G, η οποία είναι ανοιχτή. Πράγματι, αν $x \in V_n, y \in V_m,$ τότε $xy \in V_{n+m}$ και αφού V συμμετρική έχω κάθε V_n συμμετρική, οπότε $x^{-1} \in V_n$. Επίσης H ανοιχτή , άρα και κλειστή, από την πρόταση 2.1.4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\overline{V_n} = \overline{V}_n \subseteq VV_n = V_{n+1}$. (όπου $\overline{V}_n = \overline{V} \quad \overline{V}\cdots\overline{V}$ (n παράγοντες.) Από την ίδια πρόταση έχουμε ότι κάθε $\overline{V_n}$ είναι συμπαγές, οπότε η H είναι σ-συμπαγής.

□

Έχοντας τωρα μία σ-συμπαγή υποομάδα H θεωρούμε το σύνολο Y, που περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε σύμπλοκο xH, οπότε η G είναι η ξένη ένωση των $yH, y \in Y$. Τότε ισχύει η παρακάτω:

Πρόταση 2.3.2. *Έστω $E \in \mathbb{B}(G)$. Αν $E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} y_i H$, για κάποιο αριθμήσιμο υποσύνολο του Y, τότε $\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E \cap y_i H)$. Αν $E \cap yH \neq \emptyset$ για υπεραριθμήσιμο πλήθος απο $y \in Y$, τότε $\lambda(E) = \infty$.*

Απόδειξη Το πρώτο έπεται άμεσα από την σ-προσθετικότητα του μέτρου λ. Για το δεύτερο , αρκεί, λόγω εξωτερικής κανονικότητας να το δείξουμε για ανοιχτά σύνολα. Έστω λοιπόν $E \subseteq G$, ανοιχτό. Αφού H ανοιχτή, έχουμε yH ανοιχτό, για κάθε $y \in Y$, οπότε κάθε $E \cap yH$ ανοιχτό. Ιδιαίτερα δε αν $E \cap yH \neq \emptyset$ τότε $\lambda(E \cap yH) > 0$, από την πρόταση 2.2.11. Έπεται ότι υπάρχει $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε $\lambda(E \cap yH) > \epsilon$

□

Πόρισμα 2.3.3. *Αν $f \in L^1(G)$ τότε $s(f) \subseteq H$, όπου H κάποια σ-συμπαγής, ανοιχτή υποομάδα της G.*

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $A = \{x \in G : f(x) \neq 0\}$ περιέχεται σε μια τέτοια H, αφού τότε και ο $s(f) = \overline{A}$ θα περιέχεται στην H, γιατι H κλειστή, αφού είναι ανοιχτή. (πρόταση 2.1.4) Έχουμε $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου $A_n = \{x \in G : f(x) > \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ και κάθε A_n είναι πεπερασμένου μέτρου, αφού f ολοκληρώσιμη. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ένα απο αυτά περιέχεται σε μια σ-συμπαγή υποομάδα H_n, αφού τότε το A θα ανήκει στην υποομάδα H που παράγεται απο τις H_n, η οποία θα είναι επίσης σ-συμπαγής. Αρκεί να δείξουμε επομένως ότι κάθε σύνολο πεπερασμένου μέτρου, περιέχεται σε μια τέτοια υποομάδα και από την εξωτερική κανονικότητα του λ, αρκεί αυτό να το κάνουμε για ανοιχτά σύνολα. Έστω λοιπόν $U \subseteq G,$ ανοιχτό,με $\lambda(U) < \infty$. Από την προηγούμενη πρόταση, αν H, Y, όπως πρίν, έχουμε ότι $U \cap yH \neq \emptyset$ για αριθμήσιμο πλήθος απο $y \in Y$, οπότε η ζητούμενη υποομάδα θα είναι αυτή που παράγεται από την H και ακριβώς αυτά τα yH.

□

Θα χρειαστούμε το θεώρημα Fubini για να αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης σε διπλά ολοκληρώματα της μορφής: $\int_G \int_G f(x,y)d\lambda(x)d\lambda(y)$. Δεν έχουμε κανένα πρόβλημα *εφόσον η f μηδενίζεται εκτός ενός σ- συμπαγούς συνόλου* $E \subseteq G \times G$. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση οι προβολές E_1, E_2 του E στον πρώτο και στον δεύτερο παράγοντα αντίστοιχα είναι επίσης σ-συμπαγείς, ενώ έχουμε ότι $E \subseteq E_1 \times E_2$, οπότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την $G \times G$ με το (σ-συμπαγές) $E_1 \times E_2$, στο οποίο όμως το θεώρημα Fubini είναι εφαρμόσιμο.

Ειδικότερα για συνελίξεις στον $L^1(G)$ (ακριβής ορισμός στην επόμενη παράγραφο), μας ενδιαφέρουν συναρτήσεις της μορφής $f(x,y) = g(x)h(y^{-1}x)$. Αν η g μηδενίζεται εκτός ενός συνόλου A και η h εκτός ενός συνόλου B, τότε η f μηδενίζεται εκτός ενός συνόλου $A \times AB$ και βεβαίως το AB είναι σ-συμπαγές, όποτε τα A και B είναι. Τα προηγούμενα ισχύουν για $g, h \in L^1(G)$, από την προηγούμενη πρόταση, οπότε στα παρακάτω μπορούμε να χρησιμοποιούμε το θεώρημα Fubini δίχως περαιτέρω σχόλια.

Όσων αφορά στη δυικοτητα του $L^1(\mu)$ με τον $L^\infty(\mu)$, όταν το μ δεν είναι σ-πεπερασμένο δεν είναι γενικά αληθές ότι $L^\infty(\mu) = L^1(\mu)^*$, έχοντας το συνήθη ορισμό για τον L^∞. Όταν όμως πρόκειται για μέτρα Radon σε τποικά συμπαγείς χώρους Hausdorff, τότε μπορεί να διασωθεί το αποτέλεσμα, διαφοροποιώντας λίγο τον ορισμό του L^∞. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Έστω X τοπικά συμπαγής Hausdorff και μ μέτρο Radon στον X. Ένα σύνολο $E \subseteq X$ θα λέγεται τοπικά Borel, αν $E \cap F$ είναι Borel για κάθε $F \subseteq X$ Borel, με $\mu(F) < \infty$.
Ένα τοπικά Borel σύνολο E θα λέγεται τοπικά μηδενικό, αν $\mu(E \cap F)$, για κάθε F Borel με $\mu(F) < \infty$. Μια πρόταση για σημεία του X θα είναι αληθής τοπικά σχεδόν παντού, αν είναι αληθής εκτός ενός τοπικά μηδενικού συνόλου. Μια συνάρτηση $f : X \mapsto \mathbb{C}$ θα λέγεται τοπικά μετρήσιμη, αν $f^{-1}(A)$ είναι τοπικά Borel, για κάθε $A \subseteq \mathbb{C}$, Borel.

Ορίζουμε λοιπόν ως L^∞ το σύνολο όλων των τοπικά μετρησίμων συναρτήσεων, οι οποίες είναι φραγμένες εκτός ενός τοπικά μηδενικού συνόλου, modulo τις συναρτήσεις που έιναι τοπικά σχεδόν παντού μηδενικές.
Ο $L^\infty(\mu)$ είναι χώρος Banach με τη νόρμα:

$$\|f\|_\infty = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ ,τοπικά σχεδον παντού}\}.$$

Τότε έχουμε $L^\infty(\mu) = L^1(\mu)^*$. Πράγματι, αν $f \in L^\infty, g \in L^1$, τότε η fg είναι μετρήσιμη, αφού το σύνολο $\{x : g(x) \neq 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο και είναι ολοκληρώσιμη, αφού το $\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\} \cap \{x : g(x) \neq 0\}$ είναι μηδενικό. Επομένως, η απεικόνιση $g \mapsto \int fg d\mu$ είναι ένα καλά ορισμένο γραμμικό συναρτησοειδές, νόρμας $\|f\|_\infty$. Για περισσότερες λεπτομέρειες, καθώς και για το ότι κάθε φραμμικό συναρτησοειδές του L^1 είναι αυτής της μορφής, παραπέμπουμε στο [5, Theorem 12.18].

Στην περίπτωση του μέτρου Haar λ σε μια τοπικά συμπαγή ομάδα G, τα παραπάνω επιτυγχάνονται ως εξής: Με την ορολογία της πρότασης 2.3.2 έχουμε ότι ένα $E \subseteq G$ είναι τοπικά Borel $\Leftrightarrow$ $E \cap yH$ είναι Borel, για κάθε $y \in Y$ και ότι ένα $E \subseteq G$ είναι τοπικά μηδενικό $\Leftrightarrow$ $\lambda(E \cap yH) = 0$, για κάθε $y \in Y$, ενώ μια $f : G \to \mathbb{C}$ είναι τοπικά μετρήσιμη $\Leftrightarrow$, $f|yH$ είναι μετρήσιμη, για κάθε $y \in Y$. Τότε, αν $\Phi \in L^1(G, \lambda)^*$ έχουμε ότι η $\Phi|yH$ δίνεται από μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f_y στον yH, αφού το λ είναι σ-πεπερασμένο στο yH. Ορίζοντας $f : G \to \mathbb{C}$, με $f = f_y$ στον yH, τότε η f είναι τοπικά μετρήσιμη με $\|f\|_\infty = \sup\limits_{y \in Y} \|f_y\|_\infty = \|\Phi\|$ και $\Phi(g) = \int fg$, για κάθε $f \in L^1$.

2.4 The modular function

Έστω μια τοπικά συμπαγής ομάδα G και λ αριστερό μέτρο Haar στην G.
Για $x \in G$ ορίζουμε $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$, για κάθε $E \in \mathbb{B}(G)$. Έχουμε ότι το λ_x είναι επίσης αριστερό μέτρο Haar στην G. Πράγματι, για $y \in G$, έχουμε:
$\lambda_x(yE) = \lambda((yE)x) = \lambda(y(Ex)) = \lambda(Ex) = \lambda_x(E)$.
Από τη μοναδικότητα του μέτρου Haar έπεται ότι, για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\Delta(x) > 0$ ώστε $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$. Μάλιστα αυτό το $\Delta(x)$ είναι ανεξάρτητο της αρχικής επιλογής του λ. Πράγματι, έστω μ ένα άλλο αριστερό Haar στην G, οπότε, πάλι απο τη μοναδικότητα του Haar, υπάρχει $c > 0$ ώστε $\mu = c\lambda$. Τότε, επαναλαμβάνοντας τους παραπάνω συλλογισμούς, για κάθε $x \in G$, υπάρχει $\Delta(x)' > 0$, έτσι ώστε $\mu_x = \Delta(x)'\mu$. Τότε, για $x \in G$ και $E \in \mathbb{B}(G)$ έχουμε: $\mu_x(E) = \mu(Ex) = c\lambda(Ex) = c\lambda_x(E) = c\Delta(x)\lambda(E) = c\Delta(x)\frac{1}{c}\mu(E) = \Delta(x)\mu(E)$, οπότε έχουμε όντως ότι $\Delta(x) = \Delta(x)'$.
Επομένως, ορίζεται καλά, σύμφωνα με τα παραπάνω μία απεικόνιση

$$\Delta : G \to (0, \infty), x \mapsto \Delta(x),$$

η οποία ονομάζεται modular function της G.

Παρακάτω δείχνουμε κάποιες ιδιότητες αυτής της απεικόνισης, που είναι χρήσιμες για τον ορισμό της συνέλιξης αλλά και για αντικαταστάσεις σε ολοκληρώματα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Πρόταση 2.4.1. *Η Δ είναι συνεχής ομομορφισμός από την G στην πολλαπλασιαστική ομαδα των πραγματικών $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$. Περαιτέρω έχουμε ότι ισχύει*

$$\int R_y f d\lambda = \Delta(y^{-1}) \int f d\lambda, \tag{2.3}$$

για κάθε $f \in L^1(G)$.

Απόδειξη Έστω $x, y \in G$ και $E \subseteq G$. Τότε: $\Delta(xy)\lambda(E) = \lambda(Exy) = \Delta(y)\lambda(Ex) = \Delta(y)\Delta(x)\lambda(E)$, οπότε η Δ είναι ομομορφισμός. Επίσης, δεδομένου ότι $\chi_E(xy) = \chi_{Ey^{-1}}(x)$, έχουμε:

$$\int \chi(xy)d\lambda(x) = \lambda(Ey^{-1}) = \Delta(y^{-1})\lambda(E) = \Delta(y^{-1})\int \chi_E(x)d\lambda(x).$$

Άρα το ζητούμενο ισχύει για χαρακτηριστικές, άρα και για απλές, οπότε ισχύει για κάθε $f \in L^1(G)$, από την πυκνότητα των απλών στον $L^1(G)$. Τώρα,σταθεροποιώντας μια $f \in C_c(G)$, με $\int f d\lambda \neq 0$, λαμβάνοντας υπόψη την πρόταση 2.2.13 (δηλαδή τη συνέχεια της απεικόνισης $y \mapsto R_y f$, από την G στον $C_c(G)$), έπεται ότι η απεικόνιση $y \mapsto \int R_y f d\lambda$ είναι συνεχής από την G στο $\mathbb{C}$, οπότε γράφοντας, από την 2.3 για $y \in G$,
$\Delta(y) = \dfrac{\int R_{y^{-1}} f d\lambda}{\int f d\lambda}$, έπεται η συνέχεια της Δ.

$\square$

Παρατήρηση 2.4.2. Αν στην 2.3 θέσουμε $y_0 = y^{-1}$ και κάνουμε την αντικατάσταση $x \mapsto xy_0$, επάγεται η

$$\Delta(y_0)\int f(x)d\lambda(x) = \int f(xy_0^{-1})d\lambda(x) = \int f(x)d\lambda(xy_0) \tag{2.4}$$

η οποία μπορεί να γραφτεί στη συνεπτυγμένη και βολική μορφή

$$d\lambda(xy_0) = \Delta(y_0)d\lambda(x) \tag{2.5}$$

η οποία βεβαίως θα μας είναι χρήσιμη για τις αντικαταστάσεις στα ολοκληρώματα, όπως επίσης θα είναι και η σχέση που προκύπτει από την επόμενη:

Πρόταση 2.4.3. *Για κάθε $f \in L^1(G)$ ισχύει ότι:*

$$\int f(x^{-1})\Delta(x^{-1})d\lambda(x) = \int f(x)d\lambda(x). \tag{2.6}$$

Απόδειξη Έστω $f \in C_c(G)$. Ορίζουμε:

$I : C_c(G) \to \mathbb{C}$ με $I(f) = \int f(x^{-1})\Delta(x^{-1})d\lambda(x)$. Για $z \in G$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
I(L_z f) &= \int f(z^{-1}x^{-1})\Delta(x^{-1})d\lambda(x) \\
&= \int f((xz)^{-1})\Delta(x^{-1})d\lambda(x) \\
&= \Delta(z^{-1})\int f(x^{-1})\Delta(zx^{-1})d\lambda(x) \\
&= \Delta(z^{-1})\int f(x^{-1})\Delta(z)\Delta(x^{1})d\lambda(x) \\
&= \int f(x^{-1})\Delta(x^{-1})d\lambda(x) \\
&= I(f),
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα εφαρμόσαμε την αντικατάσταση $x \to xz^{-1}$ σύμφωνα με την 2.5. Έπεται ότι το I είναι αριστερά αναλλοίωτο, άρα υπάρχει $c > 0$, τέτοιο ώστε $I(f) = c\int f(x)d\lambda(x)$. Ισχυριζόμαστε ότι $c = 1$. Πράγματι:

Έστω $\epsilon > 0$. Από τη συνέχεια της Δ στη 1_G, υπάρχει μια V συμμετρική περιοχη της 1_G, με $|1 - \Delta(s)| < \epsilon$, για $s \in V$. Επιλέγουμε μια συμμετρική $f \in C_c^+(V)$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
|1-c|\int f(x)d\lambda(x) &= |\int f(x)d\lambda(x) - I(f)| \\
&\leq \int |f(x) - f(x^{-1})\Delta(x^{-1})|d\lambda(x) \\
&= \int_V f(x)|1 - \Delta(x^{-1})|d\lambda(x) \\
&< \epsilon\int_G f(x)d\lambda(x)
\end{aligned}$$

Δηλαδή $|1 - c| < \epsilon$ και αφού το ϵ ήταν τυχόν, έπεται ότι $c = 1$. Επειδή το I είναι φραγμένο, επεκτείνεται στον L^1. $\square$

Παρατήρηση 2.4.4. Όπως πριν, μπορούμε να γράψουμε την ισότητα της παραπάνω πρότασης στη συνεπτυγμένη και βολική για αντικαταστάσεις μορφή:

$$d\lambda(x^{-1}) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x) \tag{2.7}$$

2.5 Η άλγεβρα $L^1(G)$

Για $f, g \in L^1(G)$, ορίζουμε τη συνέλιξή τους να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την

$$f * g(x) = \int f(y)g(y^{-1}x)dy \tag{2.8}$$

Έχοντας υπόψη τα αποτελέσματα της παραγράφου 1.3 συμπεραίνουμε ότι η παραπάνω σχέση όντως ορίζει μια συνάρτηση που ανήκει στον $L^1(G)$. Συγκεκριμένα έχουμε ότι η απεικόνιση $(x, y) \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ είναι μετρήσιμη και:

$\iint |f(y)g(y^{-1}x)|dxdy = \iint |f(y)g(x)|dxdy = \|f\|_1 \|g\|_1$, επομένως:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

(όπου βεβαίως στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Fubini και το αριστερά αναλλοίωτο του μέτρου dy). Το ολοκλήρωμα που ορίζει την $f * g(x)$ μπορεί να εκφραστεί με τους παρακάτω τρόπους:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int f(y)g(y^{-1}x)dy \qquad (2.9) \\ &= \int f(xy)g(y^{-1})dy \\ &= \int f(y^{-1})g(yx)\Delta(y^{-1})dy \\ &= \int f(xy^{-1})g(y)\Delta(y^{-1})dy \end{aligned}$$

Οι παραπάνω προκύπτουν εύκολα εφαρμόζοντας τις αντικαταστάσεις $y \to xy$ και $y \to y^{-1}$ σύμφωνα με την 2.7. Από την προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού στην G προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα της συνέλιξης σε σχέση με τις μεταθέσεις.

Λήμμα 2.5.1. *Για κάθε* $f, g \in L^1(G)$ *και* $z \in G$ *ισχύει:*

$$R_z(f * g) = f * (R_z g), \quad L_z(f * g) = (L_z f) * g$$

Απόδειξη Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= f * g(xz) = \int f(y)g(y^{-1}xz)dy = \int f(y)R_z g(y^{-1}x)dy \\ &= f * (R_z g)(x) \end{aligned}$$

Ομοίως δουλεύουμε για την L. □

Η $L^1(G)$ εφοδιάζεται και με μια ενέλιξη, η οποία ορίζεται από την :

$$f^*(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})} \tag{2.10}$$

Το συνελικτικό γινόμενο και η ενέλιξη δίνουν στην $L^1(G)$ τη δομή μιας ***-άλγεβρας Banach** που καλείται η (L^1) άλγεβρα της ομάδας.

Παρατήρηση 2.5.2. Κάποιοι συγγραφείς, στον ορισμό της *-άλγεβρας Banach δεν απαιτούν η ενέλιξη να είναι ισομετρική, αλλά μόνο συνεχής, αφού από τη γενική θεωρία των *-αλγεβρών προκύπτει ότι μπορούμε να βρούμε πάντα ισοδύναμη με την αρχική νόρμα, ως προς την οποία η ενέλιξη είναι ισομετρική. Για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [8, σελ. 61]. Στην περίπτωσή μας βέβαια, έχουμε εξ' ορισμού, σύμφωνα με την 2.7, ότι η ενέλιξη είναι ισομετρική.

Αν η G είναι διακριτή, τότε η συνάρτηση $\delta = \chi_{1_G}$, ικανοποιεί τη σχέση $f * \delta = \delta * f = f$, για κάθε f. Όταν όμως η G δεν είναι διακριτή δεν υπάρχει συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα. Σε αυτήν την περίπτωση κάνουμε χρήση προσεγγιστικών μονάδων, η κατασκευή και οι ιδιότητες των οποίων παρατίθενται παρακάτω. Πριν από αυτά όμως, χρειαζόμαστε το εξής:

Λήμμα 2.5.3. *Για κάθε $1 \leq p < \infty$ και $f \in L^p(G)$ οι απεικονίσεις $y \mapsto L_y f$ και $y \mapsto R_y f$ είναι συνεχείς (από την G στον $L^p(G)$). Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει U περιοχή της 1_G, τέτοια ώστε: $\|L_y f - f\|_p < \epsilon$ και $\|R_y f - f\|_p < \epsilon$, για κάθε $y \in U$.*

Απόδειξη Αρχικά έστω $g \in C_c(G)$. Έστω $\epsilon > 0$ και έστω $\operatorname{supp} g = K$. Για κάθε $y \in G$ έχουμε ότι η συνάρτηση $L_y g$ φέρεται στο yK. Αν U_0 είναι μια συμπαγής, συμμετρική περιοχή της 1_G, τότε, για κάθε $y \in G$ έχουμε ότι $\operatorname{supp} L_y g \subseteq U_0 K$. Έστω $\delta > 0$. Τότε, από την πρόταση 2.2.13, έπεται ότι υπάρχει περιοχή της μονάδας U, με $U \subseteq U_0$, τέτοια ώστε για κάθε $y \in U$ να έχουμε $\|L_y g - g\|_\infty < \delta$.
Ειδικότερα, για κάθε $y \in U$ έχουμε:
$\|L_y g - g\|_p = (\int |g(y^{-1}x) - g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \delta \lambda(U_0 K)^{\frac{1}{p}}$
Επιλέγοντας λοιπόν $\delta < \dfrac{\epsilon}{\lambda(U_0 K)^{\frac{1}{p}}}$, έπεται ότι για κάθε $y \in U$ έχουμε $\|L_y g - g\|_p < \epsilon$.

Αν τώρα $f \in L^p$ και $\epsilon > 0$, από την πυκνότητα του $C_c(G)$ στον L^p, υπάρχει $g \in C_c(G)$, τέτοια ώστε $\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{3}$. Επίσης υπάρχει U περιοχή της 1_G, τέτοια ώστε $\|L_y g - g\|_p < \frac{\epsilon}{3}$, για κάθε $y \in U$. Τότε, για $y \in U$ έχουμε:

$$\|L_y f - f\|_p \leq \|L_y g - L_y f\|_p + \|L_y g - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Στο τελευταίο βήμα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\|L_yf-L_yg\|_p=\|f-g\|_p$, που ισχύει από το αριστερό αναλλοίωτο του λ. Η απόδειξη για τις δεξιές μεταφορές είναι παρόμοια, μόνο που στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε την ισότητα
$\|R_yf - R_yg\|_p = \Delta(y^{-1})^{\frac{1}{p}} \|f-g\|_p$ η οποία προκύπτει άμεσα από την 2.5 και τη συνέχεια της modular function Δ.

□

Στην παρακάτω πρόταση παρατίθενται οι ιδιότητες των προσεγγιστικών μονάδων. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Πρόταση 2.5.4. *Έστω $\mathbb{U}$, μία βάση περιοχών της 1_G και έστω, για κάθε $U \in \mathbb{U}$ μια συνάρτηση ψ_U που ικανοποιεί:*

1. $\operatorname{supp}\psi_U$ *συμπαγές υποσύνολο του* U
2. $\psi_U \geq 0$
3. $\psi_U(x^{-1}) = \psi_U(x)$, *για κάθε* $x \in G$
4. $\int \psi_U = 1$

Τότε έχουμε ότι για κάθε $f \in L^p$, με $1 \leq p < \infty$, οι $\psi_U * f$, $f * \psi_U$ συγκλίνουν στην f, στον L^p. Επίσης, για κάθε $f \in C_c(G)$ υπάρχουν οι $f * \psi_U$ και $\psi_U * f$ και για κάθε $x \in G$ οι $f * \psi_U(x)$ και $\psi_U * f(x)$ συγκλίνουν στο $f(x)$.

Απόδειξη Έχουμε:
$\psi_U * f(x) - f(x) = \int \psi_U(y) f(y^{-1}x)dy - f(x)\int \psi_U(x)dy =$
$\int \psi_U(y)(f(y^{-1}x) - f(x))dy = \int [L_yf(x) - f(x)]\psi_U(y)dy$. Έπεται ότι:

$$\begin{aligned}
\|\psi_U * f - f\|_p &= \left(\int \left|\int [L_yf(x) - f(x)]\psi_U(y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int \left(\int |[L_yf(x) - f(x)]\psi_U(y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&= \int \left(\int |L_yf(x) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \psi_U(y)dy \\
&= \int \psi_U(y) \|L_yf - f\|_p dy
\end{aligned}$$

Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι $\|L_yf - f\|_p \to 0$ καθώς $U \to 1$, οπότε και έπεται το ζητούμενο. Έστω τώρα $f \in C_c(G)$, έστω $x \in G$. Τότε έχουμε:
$\|\psi_U * f\|_\infty \leq \int \psi_U(y) \|L_yf - f\|_\infty \leq \|L_yf - f\|_\infty \to 0,$ όταν $U \to 1_G$, από την πρόταση 2.1.11. □

Μία οικογένεια συναρτήσεων με τις ιδιότητες της ως άνω πρότασης θα ονομάζεται προεγγιστική μονάδα. Η κατασκευή τέτοιων δεν παρουσιάζει μεγάλη δυσκολία. Για παράδειγμα, αν $\mathbb{U}$ μία βάση συμμετρικών, συμπαγών περιοχών της 1_G, τότε η οικογένεια $\psi_U, U \in \mathbb{U}$, όπου $\psi_U = \lambda(U)^{-1}\chi_U$ αποτελεί μία προσεγγιστική μονάδα.

Κεφάλαιο 3

Αναπαραστάσεις Τοπικά Συμπαγών Ομάδων

3.1 Unitary Αναπαραστάσεις

Ορισμός 3.1.1. Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Μια unitary αναπαράσταση της G είναι ένας *ομομορφισμός*

$$\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$$

όπου $\mathcal{H}_\pi$ είναι (κάποιος) μη μηδενικός χώρος Hilbert και $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ η ομάδα των unitary τελεστών, η οποία είναι SOT-συνεχής. Επομένως η π έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$, για όλα τα $x, y \in G$.
2. $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1} = \pi(x)^*$.
3. Η απεικόνιση $x \mapsto \pi(x)u$ είναι συνεχής από την G στον $\mathcal{H}_\pi$, για κάθε $u \in \mathcal{H}_\pi$.

Ο $\mathcal{H}_\pi$ καλείται *χώρος αναπαράστασης* της π και η διάστασή του, διάσταση της π.

Παρατήρηση 3.1.2. Στον $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ η WOT και η SOT τοπολογίες συμπίπτουν, οπότε η, φαινομενικά, ασθενέστερη συνθήκη της WOT συνέχειας της π συνεπάγεται την SOT συνέχειά της. Πράγματι, αν $\{T_\alpha\}$ είναι ένα δίκτυο στον $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ και $u \in \mathcal{H}_\pi$ με $T_\alpha \overset{\text{WOT}}{\longrightarrow} T$ τότε, για $T \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$,έχουμε: $\|(T_\alpha - T)u\|^2 = \|T_\alpha u\|^2 - 2Re\langle T_\alpha u, Tu\rangle + \|Tu\|^2 = 2\|u\|^2 - 2Re\langle T_\alpha u, Tu\rangle$ (αφού T_α, T ισομετρίες). Όμως, αφού $T_\alpha \overset{\text{WOT}}{\longrightarrow} T$, για κάθε $u \in \mathcal{H}_\pi$, έχουμε $\langle T_a lphau, Tu\rangle \to \langle Tu, Tu\rangle = \|u\|^2$, άρα $\|(T_\alpha - T)u\| \to 0$.

Παράδειγμα 3.1.3. Ένα βασικό παράδειγμα unitary αναπαράστασης μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας G είναι η κανονική αριστερή αναπαράσταση της G στον $L^2(G)$. Αν θεωρήσουμε τις αριστερές μεταφορές ορίζεται η αριστερή κανονική αναπαράσταση $\pi_L : G \to \mathcal{U}(L^2(G))$ με:

$$[\pi_L(x)f](y) = L_x f(y) = f(x^{-1}y).$$

Πράγματι έχουμε:

$$\begin{aligned}[\pi_L(xy)f](s) &= f[(xy)^{-1}s] = f(y^{-1}x^{-1}s) = \pi_L(y)f(x^{-1}s) \\ &= [\pi_L(y)f](x^{-1}s) = [\pi_L(x)\pi_L(y)f](s),\end{aligned}$$

για κάθε $f \in L^2(G)$.

Για κάθε $x \in G$ και $f, g \in L^2(G)$, έχουμε:
$\langle \pi_L(x^{-1})f, g\rangle = \int L_{x^{-1}}f(s)\overline{g(s)}ds = \int f(xs)\overline{g(s)}ds = \int f(s)\overline{g(x^{-1}s)}ds = \langle f, \pi_L(x)g\rangle = \langle \pi_L(x)^* f, g\rangle$.

Η SOT συνέχεια έπεται από το λήμμα 2.5.3.

Παρατήρηση 3.1.4. Οπως ακριβώς οι τελεστές αριστερής μεταφοράς L_x έτσι και οι τελεστές δεξιάς μεταφοράς R_x ορίζουν μία unitary αναπαράσταση π_R στον $L^2(G, \rho)$,όπου ρ το δεξί μέτρο Haar στην G. Η π_R μπορεί να μετατραπεί σε αναπαράσταση $\tilde{\pi}_R$ στον $L^2(G)$ (με το αριστερό μέτρο Haar) θέτοντας:

$$[\tilde{\pi}_R(x)f](y) = \Delta(x)^{1/2}R_x f(y) = \Delta(x)^{1/2}f(yx)$$

Κάθε unitary αναπαράσταση μιας τοπολογικής ομάδας G σε κάποιον χώρο Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ καθορίζει μια ακόμα αναπαράσταση $\overline{\pi}$ στον $\mathcal{H}_\pi{}'$, δηλαδή στον δυικό του $\mathcal{H}_\pi$. Συγκεκριμένα, θέτουμε $\overline{\pi}(x) = \pi(x^{-1})^\top$. Εκ πρώτης όψεως το αντίστροφο στον ορισμό της π μπορεί να φανεί παράξενο, όμως αν θυμηθούμε ότι η ο $\mathcal{H}_\pi$ είναι αντιγραμμικά ισόμορφος με τον $\mathcal{H}_\pi{}'$ καταλαβαίνουμε ότι είναι αναγκαίο για να είναι η $\overline{\pi}$ ομομορφισμός. Η $\overline{\pi}$ καλείται η contagredient της π και αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}_\pi$, ώστε ο $\pi(x)$ να αναπαρίσταται απο έναν πίνακα $M(x)$, τότε ο $\overline{\pi}(x)$ αναπαρίσταται απο τον ανάστροφο συζυγή αυτού.

Εισάγουμε πλέον την αναγκαία ορολογία σχετικά με τις unitary αναπαραστάσεις.

Ορισμός 3.1.5.

1. Αν π_1 και π_2 είναι unitary αναπαραστάσεις της G, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής

   $T : \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ θα λέγεται intertwining τελεστής για τις π_1, π_2 εφόσον ισχύει

   $$T\pi_1(x) = \pi_2(x)T,$$

για κάθε $x \in G$. Το σύνολο όλων αυτών των τελεστών θα συμβολίζεται με $C(\pi_1, \pi_2)$. Οι π_1, π_2 θα ονομάζονται unitarily ισοδύναμες, εφόσον ο $C(\pi_1, \pi_2)$ περιέχει έναν unitary τελεστή U, οπότε και θα ισχύει: $\pi_2(x) = U\pi_1(x)U^{-1}$.

Επίσης θα γράφουμε $C(\pi)$ αντί για $C(\pi, \pi)$. Πρόκειται για τον χώρο όλων των φραγμένων τελεστών από τον $\mathcal{H}_\pi$ στον $\mathcal{H}_\pi$ που μετατίθενται με τους $\pi(x)$, για κάθε $x \in G$ και ονομάζεται ο *μεταθέτης* της G.

2. Ένας κλειστός υπόχωρος $\mathcal{M}$ του $\mathcal{H}_\pi$ θα καλείται *αναλλοίωτος υπόχωρος* για την π,εφόσον $\pi(x)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ για κάθε $x \in G$. Αν ο $\mathcal{M}$ είναι αναλλοίωτος και $\neq 0$, τότε ο περιορισμός της π στον $\mathcal{M}$

$$\pi^{\mathcal{M}} = \pi(x)|_{\mathcal{M}}$$

ορίζει μια νέα αναπαράσταση της G στον $\mathcal{M}$, η οποία ονομάζεται *υποαναπαράσταση* της π. Εάν η π δέχεται έναν μη τετριμμένο ($\neq 0, \mathcal{H}_\pi$) αναλλοίωτο υπόχωρο θα λέγεται *αγώγιμη* (reducible), ειδάλλως *ανάγωγη* (irreducible).

3. Εάν $\{\pi_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια unitary αναπαραστάσεων, τότε το ευθύ τους άθροισμα $\oplus\pi_i$ είναι η αναπαράσταση στον $\mathcal{H} = \oplus\mathcal{H}_{\pi i}$, η οποία ορίζεται με $\pi(x)(\sum v_i) = \sum \pi_i(x)v_i$. Σε αυτήν την περίπτωση οι $\mathcal{H}_{\pi_i}$, ως υπόχωροι του $\mathcal{H}$ είναι π-αναλλοίωτοι και κάθε π_i είναι υποαναπαράσταση της π. Μάλιστα, όπως θα δειχθεί παρακάτω κάθε υποαναπαράσταση μιας αναπαράστασης προκύπτει ως προσθετέος ευθέως αθροίσματος.

4. Εάν π είναι μια unitary αναπαράσταση της G και $u \in \mathcal{H}_\pi$ τότε η κλειστή γραμμική θήκη

   $\mathcal{M}_u$ του $\{\pi(x)u : x \in G\}$ στον $\mathcal{H}_\pi$ θα ονομάζεται ο *κυκλικός υπόχωρος* (για την π) που παράγεται από το u. Είναι προφανές ότι ο $\mathcal{M}_u$ είναι π-αναλλοίωτος. Εάν δε, $\mathcal{M}_u = \mathcal{H}_\pi$, τότε το u ονομάζεται *κυκλικό διάνυσμα* για την π και μια π ονομάζεται *κυκλική*, εφόσον διαθέτει κυκλικό διάνυσμα. Δεν είναι αλήθεια ότι κάθε κυκλική αναπαράσταση (βλ. παρακάτω παράδειγμα) είναι ανάγωγη, ενώ προφανώς μια ανάγωγη αναπαράσταση είναι κυκλική. Συγκεκριμένα ισχύει ότι μια αναπαράσταση είναι ανάγωγη, αν και μονο αν κάθε μη μηδενικό διάνυσμα είναι κυκλικό.

Παράδειγμα 3.1.6. Θεωρούμε την εξής αναπαράσταση του $\mathbb{R}$ στον $\mathbf{C}^2$: $\rho(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \sin x \end{pmatrix}$. Η παραπάνω είναι unitary κυκλική αναπαράσταση, με κυκλικό διάνυσμα το (0,1), αφού:

$\rho(\frac{\pi}{2})(1,0) = (0,1)$.
Δεν είναι όμως irreducible, αφού:
$\rho(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Εδώ ένας αναλλοίωτος υπόχωρος είναι ο
$M = \{(-x, ix), x \in \mathbb{R}\}$.

Πρόταση 3.1.7. *Εάν ο $\mathcal{M}$ είναι π-αναλλοίωτος, τότε και ο $\mathcal{M}^{\perp}$ είναι π-αναλλοίωτος.*

Απόδειξη

Έστω $u \in \mathcal{M}$ και $v \in \mathcal{M}^{\perp}$.Τότε:$\langle \pi(x)v, u\rangle = \langle v, \pi(x^{-1})u\rangle = 0$, οπότε $\pi(x)v \in \mathcal{M}^{\perp}$. □

Πόρισμα 3.1.8. *Εαν η π έχει έναν μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο $\mathcal{M}$, τότε η π είναι το ευθύ άθροισμα των $\pi^{\mathcal{M}}$ και $\pi^{\mathcal{M}^{\perp}}$.*

Πρόταση 3.1.9. *Κάθε unitary αναπαράσταση είναι ευθύ άθροισμα κυκλικών.*

Απόδειξη

Έστω π μια unitary αναπαράσταση. Θέτουμε $\mathcal{E} =$ η οικογένεια όλων των συνόλων E που αποτελούνται απο μη μηδενικά διανύσματα τέτοια ώστε:

$\pi(G)\xi \perp \pi(G)\eta$, για $\xi, \eta \in E$.

Θεωρούμε ως σχέση διάταξης στο $\mathcal{E}$ το περιέχεσθαι. Με εφαρμογή του λήμματος του Zorn λαμβάνουμε ένα μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{E}$, έστω E_0 (και άρα μια μεγιστική οικογένεια κάθετων ανά δύο κυκλικών υποχώρων.) Θέτουμε $H_0 = \oplus\{cl[\pi(G)\eta], \eta \in E_0\}$. Έστω τώρα ένα $\xi \in \mathcal{H}_\pi \cap H_0^{\perp}$. Τότε έχουμε:

$0 = \langle \pi(x)\eta, \xi\rangle$,για κάθε $x \in G$ και $\eta \in E_0$. Έπεται, αν $x, y \in G$ και $\xi \in H_0$ ότι: $0 = \langle \pi(y^{-1}x)\eta, \xi\rangle = \langle \pi(y)^*\pi(x)\eta, \xi\rangle = \langle \pi(x)\eta, \pi(y)\xi\rangle$. Δηλαδή, $\pi(G)\eta \perp \pi(G)\xi$, για κάθε $\xi \in E_0$, επομένως έχουμε $E_0 \cup \{\xi\} \in \mathcal{E}$, που έρχεται σε αντίφαση με τη μεγιστικότητα του E_0. Άρα $H_0 = \mathcal{H}_\pi$. Τώρα, για $\xi \in E_0$ θέτουμε $\mathcal{M}_\eta = cl[\pi(G)\eta]$ και προφανώς έχουμε $\mathcal{H}_\pi = \oplus_{\eta \in E_0}\mathcal{M}_\eta$ και $\pi = \oplus_{\eta \in E_0}\pi^{\mathcal{M}_\eta}$. □

Παρακάτω δείχνουμε ότι ανάλογα με το αν μια unitary αναπαράσταση είναι irreducible ή όχι, καθορίζει τη μορφή των τελεστών στον $C(\pi)$ και αντίστροφα.

Πρόταση 3.1.10. *Έστω $\mathcal{M}$ ένας κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}_\pi$ και έστω $P_{\mathcal{M}}$ η ορθή προβολή στον $\mathcal{M}$. Τότε ο $\mathcal{M}$ έιναι π-αναλλοίωτος αν και μόνο αν $P_{\mathcal{M}} \in C(\pi)$.*

Απόδειξη Αν $P_{\mathcal{M}} \in C(\pi)$ και $\xi \in \mathcal{M}$, τότε
$\pi(x)\xi = \pi(x)P_{\mathcal{M}}\xi = P_{\mathcal{M}}\pi(x)\xi \in \mathcal{M}$, οπότε ο $\mathcal{M}$ είναι π-αναλλοίωτος.

Αντίστροφα, αν ο $\mathcal{M}$ είναι π-αναλλοίωτος, έχουμε $\pi(x)P_{\mathcal{M}}\xi = \pi(x)\xi = P_{\mathcal{M}}\pi(x)\xi$, όταν $\xi \in \mathcal{M}$ και $\pi(x)P_{\mathcal{M}}\xi = 0 = P_{\mathcal{M}}\pi(x)\xi$, όταν $\xi \in \mathcal{M}^{\perp}$. □

Παρακάτω αποδεικνύουμε το Λήμμα του Schur, που περιγράφει τη δομή των $C(\pi)$ και $C(\pi_1, \pi_2)$ όταν οι π, π_1, π_2 είναι ανάγωγες αναπαραστάσεις και $\pi_1 \sim \pi_2$.

Πρόταση 3.1.11. *(Το λήμμα του Schur)*

1. *Μια unitary αναπαράσταση της G είναι ανάγωγη αν και μόνο αν ο $C(\pi)$ περιέχει μόνο πολλαπλάσια του ταυτοτικού τελεστή I.*
2. *Αν π_1, π_2 ανάγωγες αναπαραστάσεις της G τότε ο $C(\pi_1, \pi_2)$ είναι μονοδιάστατος όταν $\pi_1 \sim \pi_2$ και $C(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$ όταν $\pi_1 \nsim \pi_2$.*

Απόδειξη

1. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι αν η π είναι μη-ανάγωγη, τότε ο $C(\pi)$ τότε περιέχει μη τετριμμένες προβολές.

   Αντίστροφα, έστω π ανάγωγη και έστω $T \in C(\pi)$ με $T \neq cI$. Τότε, θεωρώντας
   $$A = \frac{1}{2}(T + T^*), B = \frac{1}{2i}(T - T^*),$$
   έχουμε ότι, τουλάχιστον ένας απο τους δύο, έστω ο A, δεν είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού. Όμως ο τελεστής A είναι αυτοσυζυγής, οπότε ό,τι μετατίθεται με τον A, ειδικότερα κάθε $\pi(x)$, μετατίθεται με τις φασματικές προβολές $E(\Omega)$. Έπεται ότι ο $C(\pi)$ περιέχει μη τετριμμένες προβολές, οπότε η π δεν είναι ανάγωγη.

2. Αν $T \in C(\pi_1, \pi_2)$ τότε $T^* \in C(\pi_2, \pi_1)$. Πράγματι, έχουμε:
   $$\begin{aligned}\langle T^*\pi_2(x)\eta_2, \xi_1\rangle &= \langle \eta_2, \pi_2(x)^*T\xi_1\rangle = \langle \eta_2, \pi_2(x^{-1})T\xi_1\rangle \\ &= \langle \eta_2, T\pi_1(x^{-1})\xi_1\rangle = \langle (T\pi_1(x^{-1})^*\eta_2, \xi_1\rangle = \langle \pi_1(x)T^*\eta_2, \xi_1\rangle,\end{aligned}$$
   για κάθε $\xi_1 \in \mathcal{H}_{\pi_1}, \eta_2 \in \mathcal{H}_{\pi_2}$,
   $x \in G$,οπότε $T^*\pi_2(x) = \pi_1(x)T^*$.
   Έπεται ότι $T^*T \in C(\pi_1)$ και $TT^* \in C(\pi_2)$. Όντως, για $x \in G, \xi, \eta \in \mathcal{H}_{\pi_1}$, έχουμε
   $$\begin{aligned}\langle T^*T\pi_1(x)\xi, \eta\rangle &= \langle \xi, (T^*T\pi_1(x))^*\eta\rangle = \langle \xi, \pi(x^{-1})T^*T\eta\rangle \\ &= \langle \xi, T^*\pi_2(x^{-1})T\eta\rangle = \langle \xi, T^*T\pi_1(x^{-1})\eta\rangle = \langle \pi_1(x)T^*T\xi, \eta\rangle.\end{aligned}$$

   Τότε όμως έχουμε (από το α) ότι υπάρχει $c \in \mathbb{C}$, ώστε $T^*T = cI$ και

$TT^* = cI$, οπότε είτε $T = 0$ είτε ο $c^{-\frac{1}{2}}T$ είναι unitary. Επομένως $C(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$ ακριβώς όταν οι π_1, π_2 δεν είναι ισοδύναμες, ενώ αλλιώς ο $C(\pi_1, \pi_2)$ περιέχει μόνο πολλαπλάσια unitary τελεστών. Μάλιστα τότε, αν $T_1, T_2 \in C(\pi_1, \pi_2)$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{C}$, ώστε $T_2^{-1}T_1 = cT_2^*T_1 \in C(\pi_1)$, οπότε $T_2^{-1}T_1 = dI$ άρα $T_1 = dT_2$ δηλαδή $\dim C(\pi_1, \pi_2) = 1$.

□

Πόρισμα 3.1.12. *Αν G αβελιανή, τότε κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της G είναι μονοδιάστατη.*

Απόδειξη Έστω π ανάγωγη. Επειδή η G αβελιανή οι τελεστές $\pi(x), x \in G$ μετατίθενται, οπότε ανήκουν στον $C(\pi)$. Αφού η π είναι ανάγωγη, έπεται ότι $\pi(x) = c_x I$, για κάθε $x \in G$. Έπεται ότι κάθε υπόχωρος διάστασης ενα του $\mathcal{H}_\pi$ είναι π-αναλλοίωτος και αφού η π είναι ανάγωγη, κάθε ένας ταυτίζεται με τον $\mathcal{H}_\pi$. □

3.2 Οι αναπαραστάσεις μιας ομάδας και η άλγεβρα της ομάδας

Εάν G είναι μια τοπικά συμπαγής ομάδα, ενθυμούμαστε ότι η $L^1(G)$ είναι μία *-άλγεβρα Banach, με γινόμενο τη συνέλιξη και με (ισομετρική) ενέλιξη την $f^*(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}$. Στις *-άλγεβρες Banach αναπτύσσεται μια θεωρία αναπαραστάσεων, όπου βασικό ρόλο παίζουν οι μη εκφυλισμένες *-αναπαραστάσεις (βλ. ορισμό παρακάτω). Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των unitary αναπαραστάσεων της G και τις μη εκφυλισμένες *-αναπαραστάσεις της $L^1(G)$.

Ορισμός 3.2.1. Έστω A μία *-άλγεβρα Banach και H ένας χώρος Hilbert. Μία απεικόνιση $\phi : A \to \mathbb{B}(H)$ λέγεται μη εκφυλισμένη *-αναπαράσταση (της A στον H) εάν είναι *-ομομορφισμός και το $\phi(A)H = \{\phi(a)u, a \in A, u \in H\}$ είναι πυκνό στον H.

Παρατήρηση 3.2.2. Μια ως άνω ϕ είναι μη εκφυλισμένη, αν και μόνο αν, για κάθε $v \in H, v \neq 0$, υπάρχει $a \in A$, τέτοιο ώστε $\phi(a)v \neq 0$.

Πράγματι, αν υπάρχει $v \in H, v \neq 0$ με $\phi(a)v = 0$, για κάθε $a \in A, u \in H$, τότε έχουμε: $\langle v, \phi(a)u \rangle = \langle \phi(a^*)v, u \rangle = 0$, για κάθε $a \in A, u \in H$. Τότε προφανώς $v \in (\phi(A)H)^\perp$, οπότε $\phi(A)H$ όχι πυκνό στον H.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $v \in H, v \neq 0$ υπάρχει $a \in A$, ώστε $\phi(a)v \neq 0$ και έστω $v \in (\phi(A)H)^\perp$. Τότε έχουμε $0 = \langle v, \phi(a)u \rangle = \langle \phi(a^*)v, u \rangle$, για κάθε $a \in A, u \in H$. Έπεται ότι $\phi(a)v = 0$, για κάθε $a \in A$, οπότε, από υπόθεση έχουμε $v = 0$, άρα $(\phi(A)H)^\perp = 0$, οπότε $\phi(A)H$ πυκνό στον H.

Παρατηρούμε ότι στον ορισμό της *-αναπαράστασης δεν απαιτήθηκε κανενός είδους συνέχεια. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί μία τέτοια είναι αυτομάτως συνεχής, όπως φαίνεται απο το παρακάτω:

Λήμμα 3.2.3. *Έστω E μία *-άλγεβρα Banach και F μία C^*-άλγεβρα. Τότε, κάθε *-μορφισμός $\phi : E \to F$ είναι συνεχής. Ιδιαίτερα $\|\phi(x)\| \le \|x\|$.*

Απόδειξη Έχουμε ότι: $sp_F(\phi(x)) \subseteq sp_E(x)$, για κάθε $x \in E$. Άρα $r_F(\phi(x)) \le r_E(x) \le \|x\|$, για κάθε $x \in E$. Επομένως:

$$\begin{aligned} \|\phi(x)\|^2 &= \|\phi(x)^*\phi(x)\| = \|\phi(x^*)\phi(x)\| \\ &= r_F(\phi(x^*)\phi(x)) = r_F(\phi(x^*x)) \\ &\le \|x^*x\| \le \|x^*\|\,\|x\| = \|x\|^2 , \end{aligned}$$

αφού το $\phi(x^*)\phi(x)$ είναι κανονικό. □

Κάθε unitary αναπαράσταση π της G καθορίζει μια αναπαράσταση $\tilde{\pi}$ της $L^1(G)$ ως εξής: Αν $f \in L^1$, ορίζουμε τον φραγμένο τελεστή $\tilde{\pi}(f)$ στον $\mathcal{H}_\pi$ με:

$$\tilde{\pi}(f) = \int f(x)\pi(x)dx$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται ασθενώς, δηλαδή από την ισότητα:

$$\langle\tilde{\pi}(f)u, v\rangle = \int f(x)\langle\pi(x)u, v\rangle dx, \quad u, v \in \mathcal{H}_\pi . \tag{3.1}$$

Εφόσον η απεικόνιση $x \mapsto \langle\pi(x)u, v\rangle$ είναι συνεχής και φραγμένη απο την G στο $\mathbb{R}$, το δεξί ολοκλήρωμα παραπάνω είναι ένα σύνηθες ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης στον L^1. Ισχυριζόμαστε οτι η ως άνω σχέση ορίζει έναν φραγμένο τελεστή (που θα ονομάσουμε $\tilde{\pi}(f)$). Προς αυτό, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mathcal{H}_\pi \times \mathcal{H}_\pi \to \mathbb{C}$$

$$(u, v) \mapsto \int f(x)\langle\pi(x)u, v\rangle dx$$

Είναι άμεσο ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι sesquilinear και επειδή $|\int f(x)\langle\pi(x)u, v\rangle dx| \le |\int f(x)\,\|\pi(x)u\|\,\|v\|\,| \le \|f\|_1\,\|u\|\,\|v\|$, για κάθε $u, v \in \mathcal{H}_\pi$, έχουμε ότι είναι και φραγμένη. Επομένως (πρόταση 1.3.10) υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $\tilde{\pi}(f) : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_\pi$, ώστε $\langle\tilde{\pi}(f)u, v\rangle = \int f(x)\langle\pi(x)u, v\rangle$, για κάθε $u, v \in \mathcal{H}_\pi$. Μάλιστα ισχύει: $\|\tilde{\pi}(f)\| \le \|f\|_1$.

Παράδειγμα 3.2.4. Έστω π_L η αριστερή κανονική αναπαράσταση της G στον $L^2(G)$. Τότε η αντίστοιχη $\tilde{\pi}(f)$ δίνεται από τη συνέλιξη με την f από αριστερά. Πράγματι, έστω $f \in L^1(G), g, h \in L^2(G)$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\pi}_L(f)g, h\rangle &= \int f(x)\langle \pi_L(x)g, h\rangle dx \\
&= \int f(x)\Big(\int \pi_L(x)g(y)\overline{h(y)}dy\Big)dx \\
&= \iint f(x)g(x^{-1}y)\overline{h(y)}dy)dx \\
&= \int (f * g)(y)\overline{h(y)}dy = \langle f * g, h\rangle
\end{aligned}$$

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω π μια unitary αναπαράσταση της G. Η απεικόνιση:*

$$L^1(G) \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$$

$$f \mapsto \tilde{\pi}(f)$$

*είναι μια μη εκφυλισμένη *-αναπαράσταση της $L^1(G)$. Περαιτέρω έχουμε ότι:*

$$\pi(x)\tilde{\pi}(f) = \tilde{\pi}(L_x f), \quad \tilde{\pi}(f)\pi(x) = \Delta(x^{-1})\tilde{\pi}(R_{x^{-1}}f). \tag{3.2}$$

Απόδειξη Η απεικόνιση $f \mapsto \tilde{\pi}(f)$ είναι προφανώς γραμμική. Έστω τώρα $f, g \in L^1(G), u, v \in \mathcal{H}_\pi, x \in G$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\pi}(f * g)u, v\rangle &= \int (f * g)(x)\langle \pi(x)u, v\rangle dx \\
&= \iint f(y)g(y^{-1}x)\langle \pi(x)u, v\rangle dxdy \\
&= \iint f(y)g(x)\langle \pi(yx)u, v\rangle dxdy \\
&= \iint f(y)g(x)\langle \pi(y)\pi(x)u, v\rangle dxdy \\
&= \int f(y)\int g(x)\langle \pi(x)u, \pi(y)^*v\rangle dxdy \\
&= \int f(y)\langle \tilde{\pi}(g)u, \pi(y)^*v\rangle dy \\
&= \int f(y)\langle \pi(y)\tilde{\pi}(g)u, v\rangle dy \\
&= \langle \tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)u, v\rangle
\end{aligned}$$

(όπου στην τρίτη ισότητα αντικαταστήσαμε το x με yx και χρησιμοποιήσαμε το αναλλοίωτο του μέτρου Haar.) Επομένως $\tilde{\pi}(f \circ g) = \tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)$.

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\pi}(f^*)u, v\rangle &= \int \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}\langle \pi(x)u, v\rangle dx \\
&= \int \Delta(x)\overline{f(x)}\langle \pi(x^{-1})u, v\rangle \Delta(x^{-1}) dx \\
&= \int \langle u, f(x)\pi(x)v\rangle dx \\
&= \langle u, \tilde{\pi}(f)v\rangle \\
&= \langle \tilde{\pi}(f)^* u, v\rangle
\end{aligned}$$

Άρα $\tilde{\pi}(f^*) = \tilde{\pi}(f)^*$.

$$\begin{aligned}
\langle \pi(x)\tilde{\pi}(f)u, v\rangle &= \langle \tilde{\pi}(f)u, (\pi(x))^* v\rangle \\
&= \int f(y)\langle \pi(y)u, (\pi(x))^* v\rangle dy \\
&= \int f(y)\langle \pi(xy)u, v\rangle dy \\
&= \int f(x^{-1}y)\langle \pi(y)u, v\rangle dy \\
&= \langle \tilde{\pi}(L_x f)u, v\rangle
\end{aligned}$$

Άρα $\pi(x)\tilde{\pi}(f) = \tilde{\pi}(L_x f)$.

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\pi}(f)\pi(x)u, v\rangle &= \int f(y)\langle \pi(y)\pi(x)u, v\rangle dy \\
&= \int f(y)\langle \pi(yx)u, v\rangle dy \\
&= \int \Delta(x^{-1}) f(yx^{-1})\langle \pi(y)u, v\rangle dy \\
&= \Delta(x^{-1})\langle \tilde{\pi}(R_{x^{-1}} f)u, v\rangle
\end{aligned}$$

Άρα $\tilde{\pi}(f)\pi(x) = \Delta(x^{-1})\tilde{\pi}(R_{x^{-1}} f)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η $\tilde{\pi}$ είναι *-ομομορφισμός και ότι ισχύει η 3.2. Τώρα, έστω $u \in \mathcal{H}_\pi, u \neq 0$. Επειδή η π είναι SOT συνεχής, υπάρχει συμπαγής, συμμετρική περιοχή της μονάδας τέτοια ώστε: $\|\pi(x)u - u\| < \|u\|$. Θεωρούμε την

$f = \lambda(V)^{-1}\chi_V$. Τότε έχουμε:
$\|\tilde{\pi}(f)u - u\| = \left\|\int \lambda(V)^{-1}\chi_V \pi(x)udx - \int_V \lambda(V)^{-1}dx\right\| =$
$\left\|\int_V \lambda(V)^{-1}[\pi(x)u - u]dx\right\| = \frac{1}{\lambda(V)}\left\|\int_V [\pi(x)u - u]dx\right\| < \|u\|$.
Ειδικότερα, έχουμε ότι $\tilde{\pi}(f)u \neq 0$. άρα η $\tilde{\pi}$ είναι μη εκφυλισμένη.

□

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε μη εκφυλισμένη *-αναπαράσταση της $L^1(G)$ προκύπτει απο μια unitary αναπαράσταση της G, όπως θα δείξουμε στην επόμενη:

Πρόταση 3.2.6. *Έστω ρ μια μη εκφυλισμένη *-αναπαράσταση της $L^1(G)$ σε έναν χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει μοναδική unitary αναπαράσταση π της G στον H, τέτοια ώστε $\rho = \tilde{\pi}$.*

Απόδειξη Έστω $\{\psi_U\}$ μια προσεγγιστική μονάδα στην $L^1(G)$. Τότε, για κάθε $f \in L^1$ έχουμε $\psi_U * f \to f$, στον L^1, άρα (2.5.3) $(L_x\psi_U) * f = L_x(\psi_U * f) \to L_x f$, στον L^1, οπότε, αν $v \in H$ έχουμε:
$\rho(L_x\psi_U * f)v = \rho(L_x\psi_U)\rho(f)v \to \rho(L_x f)v$, για κάθε $x \in G, f \in L^1$.
Θέτουμε τώρα $D = [\rho(f)v : f \in L^1, v \in H]$.
Ισχυριζόμαστε ότι το D είναι πυκνό στον H, αφού η ρ είναι μη εκφυλισμένη.
Η σχέση $\rho(L_x\psi_U)\rho(f)v \to \rho(L_x f)v$ δείχνει ότι οι τελεστές $\rho(L_x\psi_U)$ συγκλίνουν για κάθε σημείο του D σε κάποιον τελεστή $\pi : D \to D$, που ικανοποιεί την:

$$\pi(x)\rho(f)v = \rho(L_x f)v.$$

Επίσης έχουμε $\|\rho(L_x\psi_U)\| \leq \|L_x\psi_U\|_1 = 1$, επομένως ο π επεκτείνεται συνεχώς στον H και μάλιστα έχουμε ότι $\|\pi(x)\| \leq 1$ και $\pi(x)\rho(f) = \rho(L_x f)$.
Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η π είναι unitary αναπαράσταση της G στον H.
Έστω $x, y \in G, f \in L^1$. Τότε έχουμε:
$\pi(xy)\rho(f) = \rho(L_{xy}f) = \rho(L_x L_y f) = \pi(x)\rho(L_y f) = \pi(x)\pi(y)\rho(f)$. Δηλαδή έχουμε ότι: $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ στον πυκνό D, άρα, από τη συνέχεια της π και στον H. Επίσης έχουμε ότι $\pi(1_G) = I$, οπότε η π παίρνει τιμές αντιστρέψιμους τελεστές.
Τώρα, αν $u \in H$, έχουμε: $\|u\| = \|\pi(x^{-1})\pi(x)u\| \leq \|\pi(x)u\| \leq \|u\|$, επομένως κάθε $\pi(x)$ είναι και ισομετρία, οπότε είναι unitary. Έστω $x_\alpha \to x$, στην G, οπότε $L_{x_\alpha}f \to L_x f$, στον L^1, για κάθε $f \in L^1$, οπότε $\rho(L_{x_\alpha}f) \to \rho(L_x f)$, άρα $\pi(x_\alpha)\rho(f)v \to \pi(x)\rho(f)v$, για κάθε $v \in H$. Έχουμε λοιπόν ότι $\pi(x_\alpha)\xi \longrightarrow \pi(x)\xi$, για κάθε $\xi \in D$.
Έστω τώρα $u \in H$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\|\pi(x_\alpha)u - \pi(x)u\| \leq \|\pi(x_\alpha)\|\,\|u - \rho(f)v\| \quad &+ \quad \|\pi(x_\alpha)\rho(f)v - \pi(x)\rho(f)v\| \\ &+ \quad \|\pi(x)\|\,\|\rho(f)v - u\|,\end{aligned}$$

για κάθε $f \in L^1, v \in H$. Αφού D πυκνό στον H και $\|\pi(x_\alpha)\| \leq 1, \|\pi(x)\| \leq 1$, έπεται ότι $\pi(x_\alpha) \xrightarrow{\text{SOT}} \pi(x)$ στον H.
Μένει να δείξουμε ότι $\rho = \tilde{\pi}$, σύμφωνα με την 3.1. Αν $f, g \in L^1$, έχουμε: $\rho(f)\rho(g) = \rho(f * g) = \int f(y)\rho(L_y g)dy = \int f(y)\pi(y)\rho(g)dy = \tilde{\pi}(f)\rho(g)$.
Επομένως οι τελεστές $\tilde{\pi}(f), \rho(g)$ συμπίπτουν στον D, άρα και στον H.
Τέλος, αν π' μια unitary αναπαράσταση της G, με $\tilde{\pi}'(f) = \rho(f), f \in L^1$,,τότε, σύμφωνα με την 3.1 έχουμε ότι: $\langle \pi'(x)u, v\rangle = \langle \pi(x)u, v\rangle$, για κάθε $x \in G, u, v \in H$, οπότε $\pi'(x) = \pi(x)$, για κάθε $x \in G$. $\square$

3.3 Συναρτήσεις θετικού τύπου

Απώτερος στόχος αυτής και της επόμενης παραγράφου είναι η εξασφάλιση " αρκετών" unitary αναγώγων αναπαραστάσεων. Προκειμένου να γίνει αυτό, θα περιγράψουμε μια μέθοδο κατασκευής ενός χώρου Hilbert χρησιμοποιώντας την $L^1(G)$ στον οποίον η G δρα unitarily. Θα δείξουμε ότι, μέχρις ισοδυναμίας, κάθε κυκλική και κατέπέκταση, κάθε unitary αναπαράσταση προκύπτει με αυτόν τον τρόπο. Να σημειωθεί ότι η μέθοδος αυτή ομοιάζει με την κατασκευή G.N.S. στις C^*-άλγεβρες. Θα δείξουμε ότι οι κυκλικές αναπαραστάσεις παράγονται από συγκεκριμένου είδους συναρτήσοειδή στην $L^1(G)$, τα οποία παράγονται από συγκεκριμένου τύπου συναρτήσεις στον $L^\infty(G)$. Ξεκινάμε με τον ορισμό:

Ορισμός 3.3.1. Έστω G τοπικά συμπαγής. Μια $\phi \in L^\infty(G)$ λέγεται θετικού τύπου στην G, εφόσον ορίζει ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές στην $L^1(G)$, εφόσον δηλαδή ισχύει:

$$\int (f^* * f)\phi \geq 0, \text{ για κάθε } f \in L^1(G).$$

Παρατήρηση 3.3.2. Μια $\phi \in L^\infty$ είναι θετικού τύπου αν και μόνο αν ικανοποιεί την

$$\iint f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy \geq 0, \text{ για κάθε } f \in L^1(G) \tag{3.3}$$

Απόδειξη

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\int (f^* * f)(x)\phi(x)dx &= \int \left(\int \Delta(y^{-1})\overline{f(y^{-1})}f(y^{-1}x)dy \right)\phi(x)dx \\
&= \int \left(\int \overline{f(y)}f(yx)dy \right)\phi(x)dx \\
&= \iint \overline{f(y)}f(yx)\phi(x)dydx \\
&= \iint \overline{f(y)}f(yx)\phi(x)dxdy \\
&= \iint \overline{f(y)}f(x)\phi(y^{-1}x)dxdy \\
&= \iint f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy
\end{aligned}$$

□

Θα δείξουμε παρακάτω, ότι κάθε συνάρτηση θετικού τύπου είναι τοπικά σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συντηση, οπότε εφεξής θα θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις θετικού τύπου είναι και συνεχείς. Συμβολίζουμε με $\mathbb{P} = \mathbb{P}(G)$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων θετικού τύπου στην G.

Πρόταση 3.3.3. *Αν η ϕ είναι θετικού τύπου, τότε και η $\overline{\phi}$ είναι θετικού τύπου.*

Απόδειξη Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:
$\int (f^* * f)\overline{\phi} = \overline{\int [(\overline{f})^* * \overline{f}]\phi}, \qquad f \in L^1.$ □

Παρακάτω θα εξετάσουμε τη σύνδεση που έχουν οι συναρτήσεις θετικού τύπου με τις unitary αναπαραστάσεις. Αρχικά έχουμε την παρακάτω:

Πρόταση 3.3.4. *Έστω π unitary αναπαράσταση της G και $u \in \mathcal{H}_\pi$ και έστω $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u\rangle$. Τότε $\phi \in \mathbb{P}$.*

Απόδειξη Προφανώς η ως άνω ϕ είναι συνεχής. Περαιτέρω έχουμε: $\phi(y^{-1}x) = \langle \pi(y^{-1})\pi(x)u, u\rangle = \langle \pi(x)u, \pi(y)u\rangle$. Επομένως, αν $f \in L^1(G)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\iint f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dydx &= \iint f(x)\overline{f(y)}\langle \pi(x)u, \pi(y)u\rangle dydx \\
&= \iint f(x)\langle \pi(x)u, f(y)\pi(y)u\rangle dxdy \\
&= \int \langle \tilde{\pi}(f)u, f(y)\pi(y)u\rangle dy \\
&= \overline{\int f(y)\langle \pi(y)u, \tilde{\pi}(f)u\rangle dy} \\
&= \overline{\langle \tilde{\pi}(f)u, \tilde{\pi}(f)u\rangle} \\
&= \|\tilde{\pi}(f)u\|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 3.3.5. *Έστω $f \in L^2(G)$. Ορίζουμε $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Τότε $f * \tilde{f} \in \mathbb{P}$.*

Απόδειξη Έστω π_L η αριστερή κανονική αναπαράσταση. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\langle \pi_L(x)f, f\rangle &= \int L_x f(y)\overline{f(y)}dy \\
&= \overline{\int f(y)\overline{f(x^{-1}y)}dy} \\
&= \overline{f * \tilde{f}(x)}
\end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται άμεσα απο τις δυο προηγούμενες προτάσεις. □

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε μη μηδενική συνάρτηση θετικού τύπου προκύπτει από μία unitary αναπαράσταση, όπως στην πρόταση 3.3.4.
Έστω $\phi \in \mathbb{P}, \phi \neq 0$. Ορίζουμε, μέσω αυτής την παρακάτω απεικόνιση:

$$L^1(G) \times L^1(G) \to \mathbb{C},$$

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle_\phi = \int (g^* * f)\phi = \iint f(x)\overline{g(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy \tag{3.4}$$

Η απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$ είναι ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο στην $L^1(G)$, που ικανοποιεί την:

$$|\langle f,g\rangle_\phi| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1 . \tag{3.5}$$

Θέτουμε: $N = \{f \in L^1 : \langle f,f\rangle_\phi = 0\}$ και παρατηρούμε ότι:
$f \in N \Leftrightarrow \langle f,g\rangle_\phi = 0,$ για κάθε $g \in L^1$.
Έπεται ότι η $\langle,\rangle_\phi$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο πηλίκο L^1/N, που αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας $[f], f \in L^1$, της σχέσης:

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N.$$

Ορίζουμε τώρα $\|[f]\|_\phi = \langle [f],[f]\rangle_\phi^{\frac{1}{2}} = \langle f,f\rangle_\phi^{\frac{1}{2}}$ και θεωρούμε την πλήρωση του l^1/N, ως προς την $\|\cdot\|_\phi$, την οποία θα συμβολίζουμε με H_ϕ. Είναι προφανές ότι ο H_ϕ με το $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$ (και άρα την $\|\cdot\|_\phi$), επεκτεταμένα στον H_ϕ, είναι χώρος Hilbert. Όπως προκύπτει άμεσα από την 3.5, ισχύει:

$$\|[f]\|_\phi \leq \|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}} \|f\|_1 , f \in L^1 \tag{3.6}$$

Τώρα, για $f,g \in L^1, x \in G$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle L_x f, L_x g\rangle_\phi &= \iint f(x^{-1}y)\overline{g(x^{-1}z)}\phi(y^{-1}z)dydz \\ &= \iint f(y)\overline{g(z)}\phi((xy)^{-1}(xz))dydz \\ &= \langle f,g\rangle_\phi \end{aligned}$$

Ειδικότερα, έχουμε ότι: $L_x(N) \subseteq N$, οπότε οι τελεστές L_x επάγουν μία unitary αναπαράσταση π_ϕ στον H_ϕ, η οποία καθορίζεται από την:

$$\pi_\phi(x)[f] = [L_x f], \quad f \in L^1 \tag{3.7}$$

Παρατήρηση 3.3.6. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η αντίστοιχη αναπαράσταση της $L^1(G)$ καθορίζεται από την: $\tilde{\pi}_\phi(f)[g] = [f * g]$.

Στόχος μας, όπως είπαμε παραπάνω, είναι να δείξουμε ότι η ϕ προκύπτει απο κάποια unitary αναπαράσταση, σύμφωνα με την 3.3.4. Πρώτα χρειαζόμαστε το παρακάτω:

Λήμμα 3.3.7. *Έστω $\phi, \langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$ και H_ϕ ως άνω. Τότε, αν ψ_U μια προσεγγιστική μονάδα της $L^1(G)$, το $\lim\langle v, \psi_U\rangle$ υπάρχει, για κάθε $v \in H_\phi$, οπότε το $\{[\psi_U]\}_U$ συγκλίνει ασθενώς, έστω στο $\epsilon \in H_\phi$. Επιπλέον ισχύει ότι: $\langle[f], \epsilon\rangle_\phi = \int f\phi$, για κάθε $f \in L^1$.*

Απόδειξη Έστω $\{\psi_U\}$ προσεγγιστική μονάδα, τότε έχουμε $\psi_U^* * f \to f$, για κάθε $f \in L^1$, οπότε $\int(\psi_U^* * f)\phi \to f\phi$, για κάθε $f \in L^1$. Δηλαδή, για κάθε $f \in L^1$ έχουμε:
$\langle[\psi_U], [f]\rangle_\phi \to \int f\phi$. Από την 3.6 έπεται ότι:

$$|\langle[\psi_U], [f]\rangle_\phi| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \|\psi_U\|_1 = \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \tag{3.8}$$

Ορίζουμε:

$$\Lambda : \frac{L^1}{N} \to \mathbb{C},$$

με

$$\Lambda([f]) = \lim\langle[\psi_U], [f]\rangle_\phi$$

Το Λ είναι γραμμικό και η 3.8 δείχνει ότι είναι και $\|\cdot\|_\phi$ φραγμένο, οπότε επεκτείνεται στην πλήρωση H_ϕ. Από το θεώρημα αναπαράστασης (φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών επί ενός χώρου Hilbert) του Riesz, έπεται ότι υπάρχει $v \in H_\phi$, τέτοιο ώστε $\Lambda(\xi) = \langle\xi, v\rangle_\phi$, για κάθε $\xi \in H_\phi$ και
$\Lambda([f]) = \lim\langle[\psi_U], [f]\rangle_\phi = \langle[f], v\rangle_\phi$, για κάθε $f \in L^1$.
Ισχυριζόμαστε ότι $\langle\xi, v\rangle_\phi = \lim\langle\xi, [\psi_U]\rangle - \phi$, για κάθε $\xi \in L^1$.
Πράγματι, έστω $\epsilon > 0, \xi \in H_\phi$. Επιλέγοντας $f \in L^1$, με
$\|\xi - [f]\|_\phi < \min\{\frac{\epsilon}{3\|v\|_\phi}, \frac{\epsilon}{3\|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}}}\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & |\langle\xi, v\rangle_\phi - \langle[f], \psi_U\rangle_\phi| \leq \\ \leq \; & |\langle\xi, v\rangle_\phi - \langle[f], v\rangle_\phi| + |\langle[f], v\rangle_\phi - \langle[f], \psi_U\rangle_\phi| + |\langle[f], \psi_U\rangle_\phi - \langle\xi, \psi_U\rangle_\phi|. \\ \leq \; & |\langle\xi, v\rangle_\phi - \langle[f], v\rangle_\phi| + |\langle[f], v\rangle_\phi - \langle[f], \psi_U\rangle_\phi| + \|[f] - \xi\|_\phi \|\psi_U\|_\phi . \end{aligned}$$

Όμως, πάλι από την 3.8 έπεται ότι $\|[\psi_U]\|_\phi \leq \|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}}$, και επειδή
$\langle[f], v\rangle_\phi = \lim\langle[f], [\psi_U]\rangle_\phi$, έπεται ότι υπάρχει U_0, τέτοιο ώστε
$|\langle[f], v\rangle_\phi - \langle[f], [\psi_U]\rangle| < \frac{\epsilon}{3}$, για κάθε $U \subseteq U_0$.
Από όλα τα παραπάνω έχουμε ότι, για κάθε $U \subseteq U_0$ έχουμε:
$|\langle\xi, v\rangle\phi - \langle\xi, [\psi_U]\rangle_\phi| \leq \epsilon$. Δηλαδή $\lim\langle[f], [\psi_U]\rangle_\phi = \langle[f], v\rangle_\phi$. □

Πρόταση 3.3.8. *Δεδομένης μιας συνάρτησης θετικού τύπου ϕ στην G, αν H_ϕ και π_ϕ ως άνω, τότε υπάρχει ένα κυκλικό διάνυσμα ϵ για την π_ϕ, τέτοιο ώστε $\tilde{\pi}_\phi(f)\epsilon = [f]$, για κάθε $f \in L^1$ και $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\epsilon, \epsilon\rangle$ τοπικά σχεδόν παντού.*

Απόδειξη Έστω $f, g \in L^1, y \in G$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\langle [g], \pi_\phi(y)\epsilon\rangle_\phi &= \langle \pi_\phi(y^{-1})[g], \epsilon\rangle_\phi \\
&= \langle [L^1_y g], \epsilon\rangle_\phi \\
&= \int g(yx)\phi(x)dx \\
&= \int g(x)\phi(y^{-1}x)dx
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\langle [g], [f]\rangle_\phi &= \iint g(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy \\
&= \int \left(\int g(x)\phi(y^{-1}x)dx\right)\overline{f(y)}dy \\
&= \int \langle [g], \pi_\phi(y)\epsilon\rangle_\phi \overline{f(y)}dy \\
&= \langle [g], \pi_\phi(f)\epsilon\rangle_\phi
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $[f] = \tilde{\pi}_\phi(f)\epsilon$, για κάθε $f \in L^1$ και ότι αν $\langle [g], \pi_\phi(y)\epsilon\rangle = 0$, για κάθε $y \in G$, τότε $\langle [g], [f]\rangle_\phi = 0$, για κάθε $f \in L^1$, οπότε $g = 0$. Επομένως η γραμμική θήκη του $\{\pi_\phi(y)\epsilon, y \in G\}$ είναι πυκνή στον H_ϕ, οπότε το ϵ είναι κυκλικό διάνυσμα. Επιπλέον, για κάθε $f \in L^1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int \langle \epsilon, \pi_\phi(y)\epsilon\rangle_\phi \overline{f(y)}dy &= \lim \int \langle [\psi_U], \pi_\phi(y)\epsilon\rangle_\phi \overline{f(y)}dy \\
&= \lim \langle [\psi_U], \tilde{\pi}_\phi(f)\epsilon\rangle_\phi \\
&= \lim \langle [\psi_U], [f]\rangle_\phi \\
&= \langle \epsilon, [f]\rangle_\phi \\
&= \overline{\langle [f], \epsilon\rangle_\phi} \\
&= \overline{\int \phi(y)f(y)dy}.
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $\langle \pi_\phi(y)\epsilon, \epsilon\rangle = \phi(y)$ τοπικά σχεδόν παντού.

□

Πόρισμα 3.3.9. *Κάθε συνάρτηση θετικού τύπου είναι τοπικά σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση.*

Πόρισμα 3.3.10. *Αν $\phi \in \mathbb{P}$, τότε $\|\phi\|_\infty = \phi(1)$ και $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$.*

Απόδειξη Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι υπάρχει π και v τέτοια ώστε: $\phi(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle$, οπότε:
$|\phi(x)| = |\langle \pi(x)v, v\rangle| \leq \|v\|^2 = \phi(1)$ και
$\phi(x^{-1}) = \langle \pi(x^{-1})v, v\rangle = \langle v, \pi(x)v\rangle = \overline{\phi(x)}$. □

Οι προτάσεις 3.3.4, 3.3.8 εκφράζουν την αντιστοιχία μεταξύ κυκλικών αναπαραστάσεων και συναρτήσεων θετικού τύπου. Αν και στην πρόταση 3.3.4 δεν υποθέσαμε ότι η π είναι κυκλική, παρατηρεί κανείς ότι για κάθε v η $\langle \pi(\cdot)v, v\rangle$ καθορίζεται από την υποαναπαράσταση της π στον κυκλικό υπόχωρο που παράγεται από το v. Περαιτέρω έχουμε ότι αναπαραστάσεις που σχετίζονται με την ίδια συνάρτηση θετικού τύπου είναι ισοδύναμες. Συγκεκριμένα έχουμε ότι:

Πρόταση 3.3.11. *Έστω π, ρ κυκλικές αναπαραστάσεις με αντίστοιχα κυκλικά διανύσματα u, v. Αν ισχύει $\langle \pi(x)u, u\rangle = \langle \rho(x)v, v\rangle$, για κάθε $x \in G$, τότε $\rho \sim \pi$. Ειδικότερα, υπάρχει unitary τελεστής $T \in C(\pi, \rho)$, τέτοιος ώστε $Tu = v$.*

Απόδειξη Έστω $x, y \in G$. Έχουμε:
$\langle \pi(x)u, \pi(y)u\rangle = \langle \pi(y^{-1}x)u, u\rangle = \langle \rho(y^{-1}x)v, v\rangle = \langle \rho(x)v, \rho(y)v\rangle$. Ορίζουμε: $T[\pi(x)u] = \rho(x)v$. Ο T επεκτείνεται σε μια καλώς ορισμένη ισομετρία απο το $\operatorname{span}\{\pi(x)u, x \in G\}$ στο $\operatorname{span}\{\rho(x)v, x \in G\}$. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\rho(x_i)v\right\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i\overline{a}_j\langle \rho(x_j^{-1}x_i)v, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i\overline{a}_j\langle \pi(x_j^{-1}x_i)u, u\rangle \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\pi(x_i)u\right\|^2,\end{aligned}$$

οπότε η T είναι καλώς ορισμένη ισομετρία, αφού εάν $\sum_{i=1}^n a_i\pi(x_i)u = 0$ έχουμε

$$\left\|T(\sum_{i=1}^{n} a_i\pi(x_i)u\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\rho(x_i)v\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\pi(x_i)u\right\|^2 = 0,$$

οπότε $\sum_{i=1}^n a_i\rho(x_i)v = 0$. Λόγω συνέχειας, η T επεκτείνεται σε unitary $H_\pi \to H_\rho$. Περαιτέρω έχουμε:
$\rho(y)T[\pi(x)u] = \rho(y)\rho(x)v = \rho(yx)v = T[\pi(y)\pi(x)u]$, για κάθε $x, y \in G$, δηλαδή $T \in C(\pi, \rho)$. Τέλος :
$Tu = T[\pi(1_G)u] = \rho(1_G)v = v$. □

Πόρισμα 3.3.12. *Εάν π είναι κυκλική αναπαράσταση της G με κυκλικό διάνυσμα u και $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u\rangle$ τότε η π είναι ισοδύναμη με την αναπαράσταση π_ϕ, που ορίζεται σύμφωνα με την 3.3.4.*

Παρατήρηση 3.3.13. Από την απόδειξη της προτασης 3.3.11 φαίνεται ότι αν π, ρ είναι οποιεσδήποτε αναπαραστάσεις (δηλαδή όχι κατ'ανάγκη κυκλικές), που ικανοποιούν $\langle \pi(x)u, u\rangle = \langle \rho(x)v, v\rangle$, για κάποια $u \in H_\pi, v \in H_\rho$ για κάθε $x \in G$, τότε υπάρχει $T \in C(\pi, \rho)$ τέτοιος ώστε $Tu = v$. Πιο συγκεκριμένα, η απόδειξη μας δίνει μια ισομετρία $T \in C(\pi^M, \rho)$, όπου M είναι ο κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το u, την οποία επεκτείνουμε στον H_π απλά θέτοντας $T = 0$ στον $M^\perp$.

3.4 Το θεώρημα Gelfand-Raikov

Οι συναρτήσεις θετικού τύπου και η σχέση τους με τις αναπαραστάσεις παίζουν κομβικό ρόλο στην απόδειξη της ύπαρξης " αρκετών" αναπαραστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, ιδιαίτερη σημασία έχουν τα παρακάτω υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{P}$:

Ορισμός 3.4.1.

$$\mathbb{P}_1 = \{\phi \in \mathbb{P} : \|\phi\|_\infty = 1\} = \{\phi \in \mathbb{P} : \phi(1) = 1\},$$

$$\mathbb{P}_0 = \{\phi \in \mathbb{P} : \|\phi\|_\infty \leq 1\} = \{\phi \in \mathbb{P} : 0 \leq \phi(1) \leq 1\}.$$

(Οι δεύτερες ισότητες προκύπτουν απο το πόρισμα 3.3.10.) Τα σύνολα $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_0$ είναι φραγμένα και κυρτά. Θέτουμε:

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}_j) = \{ \text{ το σύνολο των ακραίων σημείων του } \mathbb{P}_j\}, j = 1, 2.$$

Το $\mathbb{E}(\mathbb{P}_1)$ έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον λόγω του επομένου θεωρήματος.

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω $\phi \in \mathbb{P}_1$. Τότε $\phi \in \mathbb{E}(\mathbb{P}_1)$, αν και μόνο αν η αναπαράσταση π_ϕ της πρότασης 3.3.8 είναι ανάγωγη.*

Απόδειξη Έστω ότι η π_ϕ δεν είναι ανάγωγη και έστω M ένας (μη τετριμμένος) π_ϕ αναλλοίωτος υπόχωρος, οπότε $H_\phi = M \oplus M^\perp$. Αν $\epsilon \in H_\phi$ είναι το κυκλικό διάνυσμα για την π_ϕ, όπως στην πρόταση 3.3.8, τότε δεν μπορεί $\epsilon \in M$, ούτε $\epsilon \in M^\perp$. Έστω λοιπόν ότι $\epsilon = u + v, u \in M, v \in M^\perp, u, v \neq 0$. Τότε έχουμε: $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\epsilon, \epsilon\rangle_\phi = \langle \pi_\phi(x)u, u\rangle_\phi + \langle \pi_\phi(x)v, v\rangle_\phi = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$, όπου θέσαμε: $c_1 = \|u\|^2, c_2 = \|v\|^2, \psi_1(x) = \frac{1}{c_1}\langle \pi_\phi(x)u, u\rangle, \psi_2(x) = \frac{1}{c_2}\langle \pi_\phi(x)v, v\rangle$. Έχουμε ότι $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{P}_1$ και $c_1 + c_2 = \phi(1) = 1$, άρα η ϕ δεν είναι ακραίο σημείο.

Αντίστροφα, έστω π_ϕ ανάγωγη, αλλά $\phi = \psi + \psi'$, με $\psi, \psi' \in \mathbb{P}$. Τότε, για κάθε $f, g \in L^1$ έχουμε:
$\langle f, f\rangle_\psi = \langle f, f\rangle_\phi - \langle f, f\rangle_{\psi'} \leq \langle f, f\rangle_\phi$, άρα
$|\langle f, g\rangle_\psi| \leq \langle f, f\rangle_\psi^{\frac{1}{2}} \langle g, g\rangle_\psi^{\frac{1}{2}} \leq \langle f, f\rangle_\phi^{\frac{1}{2}} \langle g, g\rangle_\phi^{\frac{1}{2}}$.
Έπεται ότι η απεικόνιση: $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle_\psi$ επάγει μια φραγμένη sesquilinear (και μάλιστα ερμιτιανή) μορφή στον H_ϕ, οπότε υπάρχει $T \in \mathcal{B}(H)$ (και μάλιστα αυτοσυζυγής), τέτοιος ώστε:
$\langle f, g\rangle_\psi = \langle T[f], [g]\rangle_\phi, f, g \in L^1$. Έπεται ότι, για κάθε $f, g \in L^1, x \in G$:

$$\begin{aligned}
\langle T\pi(x)[f]_\phi[f], [g]\rangle_\phi &= \langle T[L_x f], [g]\rangle_\phi = \langle L_x f, g\rangle_\psi \\
&= \langle f, L_{x^{-1}} g\rangle_\psi = \langle T[f], [L_x^{-1} g]\rangle_\phi \\
&= \langle T[f], \pi_\phi(x^{-1})[g]\rangle_\phi = \langle \pi_\phi(x) T[f], [g]\rangle_\phi
\end{aligned}$$

Δηλαδή $T \in C(\pi_\phi)$, οπότε από το Λήμμα του Schur έχουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε: $T = cI$, οπότε $\langle f, g\rangle_\psi = c\langle f, g\rangle_\phi$, για κάθε $f, g \in L^1$. Λαμβάνοντας υπόψη την 3.4, έχουμε:
$\iint f(x)\overline{g(y)}\psi(y^{-1}x)dxdy = c \iint f(x)\overline{g(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy, \quad$ για κάθε $f, g \in L^1$.
Αν θέσουμε λοιπόν $g = \psi_U$ (και πάρουμε όρια), προκύπτει ότι $\psi = c\phi$, άρα $\psi' = (1 - c)\phi$, οπότε $\phi \in \mathbb{E}(\mathbb{P}_1)$.

$\square$

Παρατήρηση 3.4.3. Η συνθήκη $\int (f^* * f)\phi \geq 0$ προφανώς διατηρείται απο ασθενώς-* όρια, οπότε το $\mathbb{P}_0$ αποτελεί ένα ασθενώς * κλειστό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του L^∞. Από το θεώρημα Αλάογλου έχουμε ότι το $\mathbb{P}_0$ είναι ασθενώς* συμπαγές, οπότε από το θεώρημα Krein-Milman, το $\mathbb{P}_0$ είναι η ασθενώς* κλειστή κυρτή θήκη (στον L^∞) των ακραίων σημείων του. Το $\mathbb{P}_1$ από την άλλη, πλην της περίπτωσης που η G είναι διακριτή, δεν είναι ασθενώς* κλειστό. Παρόλα αυτά όμως, το συμπέρασμα του θεωρήματος Krein-Milman ισχύει, όπως θα δείξουμε στα παρακάτω.

Λήμμα 3.4.4. $\mathbb{E}(\mathbb{P}_0) = \mathbb{E}(\mathbb{P}_1) \cup \{0\}$.

Απόδειξη Πρώτα θα δείξουμε ότι το 0 είναι ακραίο σημείο του $\mathbb{E}(\mathbb{P}_0)$.
Έστω $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{E}(\mathbb{P}_0), c_1, c_2 \geq 0,$ με $c_1 + c_2 = 1,$ και $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = 0$. Τότε:
$c_1\phi_1(1_G) + c_2\phi_2(1_G) = 0 \Rightarrow \phi_1(1_G) = \phi_2(1_G) = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 = 0,$ αφού $\phi(1_G) = \|\phi\|_\infty,$ για κάθε $\phi \in \mathbb{P}$.

Τώρα, έστω $\phi \in \mathbb{E}(\mathbb{P}_1)$, με $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2, c_1 + c_2 = 1, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{P}_0$. Μα τότε, πάλι έχουμε $\phi_1(1_G) = \phi_2(1_G) = 1$, οπότε $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{P}_1$. Αφού η ϕ είναι ακραίο στο $\mathbb{P}_1$, έπεται ότι $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, οπότε η ϕ είναι ακραίο και στο $\mathbb{P}_0$.

Τέλος, αν $\phi \in \mathbb{P}_0 \setminus \mathbb{P}_1 \cup \{0\}$, τότε η ϕ δεν μπορεί να είναι ακραίο, αφού έχουμε $0 < \phi(1_G) < 1$, οπότε η ϕ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος με

άκρα το 0 και το $\frac{\phi}{\phi(1_G)}$. Όντως έχουμε $\left\|\frac{\phi}{\phi(1_G)}\right\|_\infty = 1$ και $\phi = 0 + \phi(1_G)\dfrac{\phi}{\phi(1_G)}$.
□

Θεώρημα 3.4.5. *Η κυρτή θήκη του $\mathbb{E}(\mathbb{P}_1)$ είναι ασθενώς* πυκνή στο $\mathbb{P}_1$.*

Απόδειξη Έστω $\phi_0 \in \mathbb{P}_1$. Από το προηγούμενο Λήμμα και τις προ αυτού παρατηρήσεις, έχουμε ότι η ϕ_0 θα είναι ασθενές* όριο ενός δικτύου από ϕ_α, καθεμία από τις οποίες είναι της μορφής: $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots + c_n\psi_n + c_{n+1}0$, όπου $\psi_1, \dots \psi_n \in \mathbb{E}(\mathbb{P}_1), c_1, \dots, c_{n+1} \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1$. Έχουμε ότι: $\|\lim \phi_\alpha\|_\infty = 1, \|\phi_a\|_\infty \leq 1$, οπότε $\lim \|\phi_a\|_\infty \leq 1$. Ισχυριζόμαστε ότι $\lim \|\phi_a\|_\infty = 1$. (Υπενθυμίζουμε ότι για $\phi \in \mathbb{P}$ έχουμε ότι $\|\phi\|_\infty = \phi(1_G)$ επομένως το όριο αυτό υπάρχει αφού οι ϕ_α συγκλίνουν ασθενώς). Αν όχι, έστω $\lim \|\phi_a\|_\infty = c < 1$. Τότε υπάρχει α_0, τέτοιο ώστε: $| \|\phi_a\|_\infty - c| < \frac{1-c}{2}$, για κάθε $\alpha \geq \alpha_0$, οπότε $\|\phi_a\|_\infty < \frac{1+c}{2} < 1, \alpha \geq \alpha_0$. Όμως, το σύνολο $\{f \in L^\infty : \|f\|_\infty \leq \frac{1+c}{2}\}$ είναι ασθενώς* κλειστό, οπότε έχουμε ότι $\|\lim \phi_a\|_\infty \leq \frac{1+c}{2} < 1$, που αποτελεί αντίφαση. Τώρα, αν θέσουμε $\phi'_a = \dfrac{\phi_a}{\phi_a(1_G)}$, έχουμε:

$$\phi'_a = \frac{1}{\phi_a(1_G)} \sum_1^n c_i\psi_i, \qquad \frac{1}{\phi_a(1_G)} \sum_1^n c_i = \frac{\phi_a(1_G)}{\phi_a(1_G)},$$

οπότε οι ϕ'_a ανήκουν στην κυρτή θήκη του $\mathbb{E}(\mathbb{P}_1)$ και $\phi_0 = \lim \phi'_a$.

□

Όπως ήδη έχουμε δει, το $\mathbb{P}_1$ ως υποσύνολο του $L^\infty(G)$, κληρονομεί την ασθενή* τοπολογία. Ένα αξιοσημείωτο και χρήσιμο για εμάς γεγονός είναι ότι στο $\mathbb{P}_1$ η ασθενής * τοπολογία είναι ίδια με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα της G. Μια βάση περιοχών για μία ϕ_0 σε αυτήν την τοπολογία δίνεται από τα σύνολα $\{N(\phi_0; \epsilon, K, \epsilon > 0, K \subseteq G, \text{συμπαγές}\}$, όπου:

$$N(\phi_0; \epsilon, K) = \{\phi : |\phi(x) - \phi_0(x)| < \epsilon, x \in K\}$$

Η απόδειξη στηρίζεται στο ακολουθο:

Λήμμα 3.4.6. *Έστω X χώρος Banach και B ένα φραγμένο υποσύνολο του X^*. Στο B, η ασθενής* τοπολογία και η τοπολογία της σύγκλισης στα συμπαγή στην G συμπίπτουν.*

Απόδειξη Η ασθενής* τοπολογία είναι η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης στην G, οπότε είναι ασθενέστερη της τοπολογίας της σύγκλισης στα συμπαγή.

Για το αντίστροφο, υπενθυμίζουμε πρώτα ότι μια βασική περιοχή ενός $x_0^* \in X^*$ για την ασθενή * τοπολογία είναι της μορφής

$$W(x_0^*) = \cap_1^n \{x^* \in X^* : |x^*(x_j) - x_0^*(x_j)| < \epsilon\}.$$

(Αν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς, η παραπάνω περιοχή θα πρέπει να συμβολιστεί ως $W(x_0^*; x_1, x_2, \dots x_n, \epsilon)$).

Έστω τώρα $x_0^* \in B, \epsilon > 0$ και $K \subseteq X$, συμπαγές . Θέτουμε $c = \sup\{\|x^*\| : x^* \in B\}$ και παίρνουμε $\delta = \frac{\epsilon}{3c}$. Το K είναι συμπαγές, οπότε υπάρχουν $x_1 \dots, x_k \in K$, τέτοια ώστε: $K \subseteq \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \delta)$. Τώρα, αν $x^* \in B$ και $x \in K$, τότε υπάρχει $1 \leq j_0 \leq k$, τέτοιο ώστε: $\|x - x_{j_0}\| < \delta$, οπότε έχουμε:

$$|x^*(x) - x_0^*(x)| < |x^*(x - x_{j_0})| + |(x^* - x_0^*)(x_{j_0})| + |x_0^*(x_{j_0} - x)| < \frac{2\epsilon}{3} + |(x^* - x_0^*)(x_{j_0})|$$

Έχουμε λοιπόν ότι η ασθενής* περιοχή $\cap_1^k \{x^* : |(x^* - x_0^*)(x_j)| < \frac{\epsilon}{3}\}$ περιέχεται στην $N(x_0^*, \epsilon, K)$.

$\square$

Λήμμα 3.4.7. *Έστω $\phi_0 \in \mathbb{P}_1, f \in L^1$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ και $K \subseteq G$, συμπαγές, υπάρχει μια ασθενής* περιοχή της ϕ_0 Φ, (στο $\mathbb{P}_1$) τέτοια ώστε: $|f * \phi(x) - f * \phi_0(x)| < \epsilon$, για κάθε $\phi \in \Phi, x \in K$.*

Απόδειξη Από το πόρισμα 3.3.10 έχουμε: $f * \phi(x) = \int f(xy)\phi(y^{-1})dy = \int L_{x^{-1}} f \overline{\phi}$. Από τη συνέχεια της απεικόνισης $x \mapsto L_{x^{-1}} f$ (Λήμμα 2.5.3) προκύπτει ότι το $\{L_{x^{-1}} f : x \in K\}$ είναι συμπαγές στον L^1, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο λήμμα. Πιο συγκεκριμένα, με τους συμβολισμούς του παραπάνω λήμματος, εδώ έχουμε ότι $X = L^1, \quad X^* = L^\infty$ και $B = \mathbb{P}_1$. Έστω λοιπόν $\phi_0 \in \mathbb{P}_1, \epsilon > 0$ και $K \subseteq G$, συμπαγές. Θεωρούμε τη βασική περιοχή $N_{\phi_0, \epsilon, \overline{K'}}$ της ϕ_0 στη N τοπολογία και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} N_{\phi_0;\epsilon,\overline{K'}} &= \{\phi : \Big| \int \overline{g}\phi - \int \overline{g}\phi_0 \Big| < \epsilon, g \in K'\} \\ &= \{\phi : \Big| \int g\overline{\phi} - \int g\overline{\phi_0} \Big| < \epsilon, g \in K'\} \\ &= \{\phi : \Big| \int (L_{x^{-1}} f)\overline{\phi} - \int (L_{x^{-1}} f)\overline{\phi_0} \Big| < \epsilon, \quad x \in K\} \\ &= \{\phi : \Big| f * \phi(x) - f * \phi_0(x) \Big| < \epsilon\} \end{aligned}$$

Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι η $N_{\phi_0, \epsilon, \overline{K'}}, \quad \phi \in \mathbb{P}_1$ είναι ασθενής* περιοχή της ϕ_0. $\square$

Λήμμα 3.4.8. *Έστω $\phi \in \mathbb{P}_1$. Τότε $|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2 - 2\operatorname{Re}(\phi(yx^{-1}))$.*

Απόδειξη Από την πρόταση 3.3.8 έχουμε ότι $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u\rangle$, για κάποια ανάγωγη π και κάποιο μοναδιαίο $u \in \mathcal{H}_\pi$. Έπεται ότι:

$$\begin{aligned}
|\phi(x) - \phi(y)|^2 &= |\langle [\pi(x) - \pi(y)]u, u\rangle|^2 = |\langle u, [\pi(x^{-1}) - \pi(y^{-1})]u\rangle|^2 \\
&\leq \left\|\pi(x^{-1})u - \pi(y^{-1})u\right\| = 2 - 2\operatorname{Re}\langle \pi(x^{-1})u, \pi(y^{-1})u\rangle \\
&= 2 - 2\operatorname{Re}\langle \pi(yx^{-1})u, u\rangle = 2 - 2\operatorname{Re}\phi(yx^{-1}).
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.4.9. *Στο $\mathbb{P}_1$ η ασθενής* τοπολογία και η τοπολογία της σύγκλισης στα συμπαγή συμπίπτουν.*

Απόδειξη Έστω $f \in L^1(G)$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $K \subseteq G$, συμπαγές, τέτοιο ώστε: $\int_{G\setminus K} |f| < \frac{\epsilon}{4}$. Έστω τώρα $\phi, \phi_0 \in \mathbb{P}_1$, με $|\phi - \phi_0| < \frac{\epsilon}{2\|f\|_1}$ στο K, τότε: $|\int(f\phi - f\phi_0)| \leq \int_K |f||\phi - \phi_0| + \int_{G\setminus K} |f||\phi - \phi_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Επομένως η σύγκλιση στα συμπαγή συνεπάγεται την ασθενή* σύγκλιση.

Αντίστροφα, έστω $\phi_0 \in \mathbb{P}_1, \epsilon > 0$ και $K \subseteq G$, συμπαγές . Θέλουμε να βρούμε μια ασθενή* περιοχή Φ της ϕ_0 στο $\mathbb{P}_1$, τέτοια ώστε $|\phi - \phi_0| < \epsilon$ στο K, όταν $\phi \in \Phi$. Αρχικά, αν $\eta > 0$, τότε υπάρχει μια συμπαγής περιοχή V της 1_G, τέτοια ώστε $|\phi_0(x) - 1| < \eta,$ για $x \in V$. Θέτουμε:

$$\Phi_1 = \{\phi \in \mathbb{P}_1 : \left|\int_V (\phi - \phi_0)\right| < \eta\lambda(V)\}.$$

Η Φ_1 είναι όντως μια weak * περιοχή της ϕ_0, αφού $\chi_V \in L^1$.(V συμπαγής) Τώρα, αν $\phi \in \Phi_1$, τότε:

$$\left|\int_V (1 - \phi)\right| \leq \left|\int_V (1 - \phi_0)\right| + \left|\int_V (\phi_0 - \phi)\right| < 2\eta\lambda(V) \tag{3.9}$$

Επίσης, για $\phi \in \Phi_1, x \in G$ έχουμε:

$$|\chi_V * \phi(x) - \lambda(V)\phi(x)| = \left|\int_V [\phi(y^{-1}x) - \phi(x)]dy\right| \| \leq \int_V |\phi(y^{-1}x) - \phi(x)|dy$$

Από το λήμμα 3.4.8, την 3.9 ο τελευταίος όρος φράσσεται από:

$$\int_V [2 - 2\Re(\phi(y)]^{\frac{1}{2}} dy \leq \left(\int_V [2 - 2\Re\phi(y)]dy\right)^{\frac{1}{2}} \lambda(V)^{\frac{1}{2}} < 2\lambda(V)\sqrt{\eta}).$$

Τώρα, από το λήμμα 3.4.7, υπάρχει μια ασθενής * περιοχή Φ_2 της ϕ_0 στο $\mathbb{P}_1$, τέτοια ώστε: $|\chi_V * \phi(x) - \chi_V * \phi_0(x)| < \eta\lambda(V)$, για $\phi \in \Phi_2, x \in K$. Επομένως, αν $\phi \in \Phi_1 \cup \Phi_2$ και $x \in K$, η ποσότητα $|\phi(x) - \phi_0(x)|$ φράσσεται από:

$$\frac{1}{\lambda(V)}\left[|\lambda(V)\phi(x)-\chi_V * \phi(x)| + |\chi_V * (\phi-\phi_0)(x)| + |\chi_V * \phi_0(x)-\lambda(V)\phi_0(x)|\right]$$
$$\leq \frac{1}{\lambda(V)}(2\lambda(V)\sqrt{\eta} + \lambda(V)\eta + 2\lambda(V)\sqrt{\eta} = \eta + 4\sqrt{\eta}.$$

Επιλέγοντας λοιπόν η τέτοι ώστε $\eta + 4\sqrt{\eta} < \epsilon$, έχουμε ότι η $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ είναι η ζητούμενη ασθενής* περιοχή της ϕ_0.

□

Προτού αποδείξουμε το θεώρημα Gelfand -Raikov, χρειαζόμαστε το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.4.10. *Η γραμμική θήκη του $C_c(G) \cup \mathbb{P}(G)$ περιέχει όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f * g, f, g \in C_c(G)$. Είναι δε πυκνή στον $C_c(G)$ ως προς τη νόρμα της ομοιόμορφης σύγκλισης και στους $L^p(G), 1 \leq p < \infty$(ως προς τις L^p νόρμες.)*

Απόδειξη Από το πόρισμα 3.3.5, έχουμε ότι το $C_c(G) \cup \mathbb{P}(G)$ περιέχει κάθε συνάρτηση της μορφής $f * \tilde{f}$, με $f \in C_c(G)$, όπου $\tilde{f} = \overline{f(x^{-1})}$. Επομένως περιέχει όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f * \tilde{h}, f, h \in C_c(G)$, αφού ισχύει $f * \tilde{g} = \frac{1}{4}[(f+g) * (\widetilde{f+g}) - (f-g) * (\widetilde{f-g}) + i(f+ig) * (\widetilde{f+ig}) - i(f - ig) * (\widetilde{f-ig})$ και άρα όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f * h, f, h \in C_c(G)$ (βάζοντας $g = \tilde{h}$). Το σύνολο $\{f*g : f, g \in C_c(G)\}$ με τη σειρά του είναι πυκνό στον $C_c(G)$ με τη νόρμα της ομοιόμορφης σύγκλισης, καθώς μπορούμε να επιλέξουμε ως g μια προσεγγιστική μονάδα. Τέλος, το $C_c(G)$ είναι το ίδιο πυκνό στους L^p. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το μείζον αποτέλεσμα της παραγράφου.

Θεώρημα 3.4.11 (Το Θεώρημα Gelfand-Raikov). *Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Οι ανάγωγες unitary αναπαραστάσεις της G χωρίζουν τα σημεία της G, δηλαδή αν x, y διακεκριμένα στοιχεία της G, τότε υπάρχει μια ανάγωγη unitary αναπαράσταση π της G, τέτοια ώστε $\pi(x) \neq \pi(y)$.*

Απόδειξη Έστω $x \neq y$. Τότε υπάρχει $f \in C_c(G)$ με $f(x) \neq f(y)$. Από την πρόταση 3.4.10 η f είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων θετικού τύπου. Από τα θεωρήματα 3.4.5 και 3.4.9 υπάρχει γραμμικός συνδυασμός g απο ακραία σημεία του $\mathbb{P}_1$, που να προσεγγίζει την f αρκετά κοντά στο συμπαγές $\{x, y\}$ ώστε $g(x) \neq g(y)$. Έπεται ότι υπάρχει $\phi \in \mathbb{E}(\mathbb{P}_1)$ με $\phi(x) \neq \phi(y)$. Η αντίστοιχη π_ϕ που ορίζεται σύμφωνα με την 3.3.4 είναι ανάγωγη από το θεώρημα 3.4.2 και ισχύει ότι:
$\langle \pi_\phi(x)\epsilon, \epsilon\rangle = \phi(x) \neq \phi(y) = \langle \pi_\phi(y)\epsilon, \epsilon\rangle$, οπότε $\pi_\phi(x) \neq \pi_\phi(y)$. □

Κεφάλαιο 4

Ανάλυση σε συμπαγείς ομάδες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τη βασική θεωρία αναπαραστάσεων για συμπαγείς ομάδες. Θα θεωρούμε λοιπόν σε όλο το κεφάλαιο ότι η G είναι συμπαγής ομάδα, οπότε το μέτρο Haar είναι αριστερά και δεξιά αναλλοίωτο καθώς επίσης ότι είναι κανονικοποιημένο, δηλαδή ότι ισχύει $\lambda(G) = 1$.

4.1 Αναπαραστάσεις συμπαγών ομάδων

Ξεκινάμε με κάποια βασικά για τη θεωρία αναπαραστάσεων σε συμπαγείς ομάδες.

Λήμμα 4.1.1. *Έστω π unitary αναπαράσταση της G. Σταθεροποιούμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \mathcal{H}_\pi$ και ορίζουμε τον τελεστή T στον $\mathcal{H}_\pi$ ως:*

$$Tv = \int \langle v, \pi(x)u \rangle \pi(x)u dx.$$

Τότε ο T είναι θετικός, μη μηδενικός και συμπαγής και $T \in C(\pi)$.

Απόδειξη Για κάθε $v \in \mathcal{H}_\pi$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle &= \int \langle v, \pi(x)u \rangle \langle \pi(x)u, v \rangle dx = \int \langle v, \pi(x)u \rangle \overline{\langle v, \pi(x)u \rangle} dx \\ &= \int |\langle v, \pi(x)u \rangle|^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Επομένως ο T είναι θετικός. Για $v = u$ και $x = 1_G$
έχουμε $\langle u, \pi(1_G)u \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2 = 1$, οπότε, από τη συνέχεια της απεικόνισης $x \mapsto \pi(x)u$ και του εσωτερικού γινομένου, έπεται ότι υπάρχει περιοχή της 1_G όπου $\langle u, \pi(x)u \rangle > 0$, οπότε $\langle Tu, u \rangle > 0$ και $T \neq 0$. Αφού

G συμπαγής, η απεικόνιση $x \mapsto \pi(x)u$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\epsilon > 0$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει διαμέριση της G, έστω $E_1, \ldots, E_n$ και $x_j \in E_j, j = 1, 2 \ldots, n$, τέτοια ώστε: $\|\pi(x)u - \pi(x_j)u\| < \frac{1}{2}\epsilon$, για $x \in E_j$. Πράγματι, για το $\epsilon > 0$ υπάρχει V περιοχή της 1_G, ώστε $\|\pi(x)u - u\| < \frac{1}{2}\epsilon, x \in V$. Τώρα, για την V υπάρχει U συμμετρική περιοχή της 1_G με $UU \subseteq V$. Τότε το $\{gU, g \in G\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα της G, οπότε λόγω συμπάγειας υπάρχουν $g_1, \ldots g_n \in G$ με $\bigcup_1^n g_jU = G$. Ξενικοποιούμε τα g_jU θέτοντας $E_1 = g_1U, E_j = g_jU \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} g_kU, 1 < j \leq n$. Δίχως βλάβη της γενικότητας έχουμε ότι κάθε $E_j \neq \emptyset$, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα x_j σε κάθε $E_j, j = 1 \ldots, n$. Τότε, αν $x \in E_j$ έχουμε $x_j^{-1}x \in Ug_j^{-1}g_jU = UU \subseteq V$. Έπεται ότι για κάθε $x \in E_j$ έχουμε $\|\pi(x)u - \pi(x_j)u\| = \left\|\pi(x_j^{-1}x)u - u\right\| < \frac{1}{2}\epsilon$ και ο ισχυρισμός μας έχει αποδειχθεί. Τώρα, για $x \in E_j$ έχουμε:
$\|\langle v, \pi(x)u\rangle\pi(x)u - \langle v, \pi(x_j)u\rangle\pi(x_j)u\|$
$\leq \|\langle v, [\pi(x) - \pi(x_j)]u\rangle\pi(x)u\| + \|\langle v, \pi(x_j)u\rangle[\pi(x) - \pi(x_j)]u\|$
$\leq \|v\| \, \|[\pi(x) - \pi(x_j)]u\| \, \|\pi(x)u\| + \|v\| \, \|\pi(x_j)u\| \, \|[\pi(x) - \pi(x_j)]u\|$
$< \|v\| \frac{1}{2}\epsilon + \|v\| \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon \|v\|$
Αν λοιπόν θέσουμε
$T_\epsilon v = \sum_1^n \lambda(E_j)\langle v, \pi(x_j)u\rangle\pi(x_j)u = \sum_1^n \int_{E_j} \langle v, \pi(x_j)u\rangle\pi(x_j)udx$
έχουμε ότι για κάθε $v \in \mathcal{H}_\pi$ ισχύει: $\|Tv - T_\epsilon V\| < \epsilon \|v\|$.
Από τα παραπάνω έχουμε ότι ο T είναι norm-όριο των T_ϵ. Όμως, επειδή $ranT_\epsilon = \text{span}\{\pi(x_j)u : 1 \leq j \leq n\}$, έχουμε ότι κάθε T_ϵ είναι πεπεραμένης τάξης, οπότε ο T είναι συμπαγής.

Τέλος, για κάθε $y \in G$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\pi(y)Tv &= \int \langle v, \pi(x)u\rangle\pi(yx)udx \\
&= \int \langle v, \pi(y^{-1}x)u\rangle\pi(x)udx \\
&= \int \langle \pi(y)v, \pi(x)u\rangle\pi(x)udx \\
&= T\pi(y)v
\end{aligned}$$

Επομένως $T \in C(\pi)$.

□

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω G συμπαγής. Τότε κάθε ανάγωγη αναπαράσταση είναι πεπερασμένης διάστασης και καθε unitary αναπαράσταση είναι ευθύ άθροισμα αναγώγων.*

Απόδειξη Έστω π ανάγωγη. Θεωρούμε τον T όπως στο λήμμα 4.1.1. Από το λήμμα του Schur έχουμε ότι $T = cI, c \neq 0$. Έπεται ότι ο ταυτοτικός τελεστής στον $\mathcal{H}_\pi$ είναι συμπαγής, οπότε $\dim \mathcal{H}_\pi < \infty$.

Έστω τώρα π τυχαία unitary αναπαράσταση της G. Θεωρούμε πάλι τον T, ο οποίος είναι μη μηδενικός, συμπαγής και αυτοσυζυγής. Από το φασματικό θεώρημα ο T έχει μη μηδενική ιδιοτιμή μ, με τον αντίστοιχο ιδιόχωρο E_μ να είναι πεπερασμένης διάστασης, αφού ο περιορισμός του T στον E_μ είναι μI και συμπαγής. Επειδή $T \in C(\pi)$ έχουμε ότι ο E_μ είναι π-αναλλοίωτος, επομένως η π έχει υποαναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης. Με ένα απλό επαγωγικό επιχείρημα, έχουμε ότι κάθε αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης είναι ευθύ άθροισμα αναγώγων, οπότε η π έχει ανάγωγη υποαναπαράσταση.

Πλέον, με χρήση του λήμματος Zorn, θεωρούμε μια μεγιστική οικογένεια M_α κάθετων ανά δύο αναλλοίωτων υποχώρων. Αν $N = (\oplus M_\alpha)^\perp$, από την πρόταση 3.1.7 έχουμε ότι και ο N είναι π-αναλλοίωτος, οπότε από το παραπάνω επιχείρημα η π^N έχει με τη σειρά της κάποιον ανάγωγο υπόχωρο, γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με την μεγιστικότητα. Έπεται λοιπόν ότι $N = \{0\}$, οπότε $\mathcal{H}_\pi = \oplus M_\alpha$.

□

Συμβολίζουμε με $\hat{G}$ το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των ανάγωγων unitary αναπαραστάσεων της G. Επίσης συμβολίζουμε με $[\pi]$ την κλάση ισοδυναμίας μιας ανάγωγης unitary αναπαράστασης π. Πλέον, όταν λέμε: έστω $[\pi] \in \hat{G}$, θα εννοούμε έστω π μια ανάγωγη unitary αναπαράσταση.

Η διάσπαση μιας unitary αναπαράστασης ρ σε ανάγωγες αναπαραστάσεις δεν είναι εν γένει μοναδική. Για παράδειγμα, έστω ρ η τετριμμένη αναπαράσταση σε κάποιον χώρο Hilbert H, με $\dim H > 1$. Τότε, κάθε ορθοκανονική βάση του H μας δίνει μία τέτοια διάσπαση της ρ σε ανάγωγους αναλλοίωτους μονοδιάστατους υποχώρους του H. Η διάσπαση όμως μιας ρ σε αναλλοίωτους υποχώρους που αντιστοιχούν στις διάφορες κλάσεις ισοδυναμίας είναι μοναδική. Συγκεκριμένα έστω, για κάθε $\pi \in \hat{G}$, να είναι M_π η κλειστή γραμμική θήκη όλων των αναλλοίωτων υποχώρων του H_ρ, στους οποίους $\rho \sim \pi$. Τότε κάθε M_π είναι αναλλοίωτος και έχουμε:

Πρόταση 4.1.3. $M_\pi \perp M_{\pi'}$, *όταν* $[\pi] \neq [\pi']$. *Επιπλέον, αν* N *είναι οποιοσδήποτε αναλλοίωτος υποχώρος του* M_π, *τότε* $\rho^N \sim \pi$.

Απόδειξη Έστω L_π και $L_{\pi'}$ ανάγωγοι υπόχωροι όπου η ρ είναι ισοδύναμη με τις π, π' αντίστοιχα και έστω P η ορθή προβολή στον L_π. Τότε η $P|L_{\pi'} \in C(\rho^{L_{\pi'}}, \rho^{L_\pi})$. Πράγματι,για κάθε $v \in H_\rho$ και $x \in G$ έχουμε:
$Pv \in L_\pi \Rightarrow \rho(x)Pv \in L_\pi$, οπότε $P(\rho(x)Pv) = \rho(x)Pv$, δηλαδή $P\rho(x)P = \rho(x)P$,για κάθε $x \in G$. Έπεται ότι $P\rho(x)^*P = \rho(x)^*P$ και άρα $P\rho(x) = \rho(x)P$. Τώρα, από το Λήμμα του Schur έχουμε, $P|L_{\pi'} = 0$. Έπεται ότι
$L_\pi \perp L_{\pi'}$, οπότε και $M_\pi \perp M_{\pi'}$.

Έστω τώρα N ένας ρ-ανάγωγος υπόχωρος του M_π. Από τον ορισμό του M_π έχουμε ότι υπάρχει ένας αναλλοίωτος υπόχωρος $L \subseteq M_\pi$, τέτοιος ώστε

$\rho^L \sim \pi$ και $P(N) \neq 0$, όπου P η ορθή προβολή στον L. Πάλι έχουμε $P|N \in C(\rho^N, \rho^L)$, οπότε πάλι απο το Λήμμα του Schur ισχύει $\rho^N \sim \rho^L$. Άρα $\rho^N \sim \rho^L \sim \pi$.

□

Παρατήρηση 4.1.4. Απο το θεώρημα 4.1.2 έχουμε ότι $H_\rho = \oplus_{\pi \in \hat{G}} M_\pi$. Επίσης όμως κάθε M_π ακολούθως διασπάται ως $M_\pi = \oplus_{\alpha \in A} L_\alpha$, όπου για κάθε α έχουμε $\rho^{L_\alpha} \sim \pi$. Η τελευταία διάσπαση δεν είναι έν γένει μοναδική όταν η ο M_π δεν είναι ανάγωγος, όμως η πληθικότητα του A είναι η ίδια για κάθε τέτοια διάσπαση. Αυτή η πληθικότητα ονομάζεται πολλαπλότητα της $[\pi]$ στην ρ και συμβολίζεται με $mult(\pi, \rho)$. Σχετικά έχουμε την παρακάτω πρόταση, της οποίας η απόδειξη είναι ιδιαίτερα τεχνική και παραλείπεται, αφού δεν θα την χρειαστούμε παρακάτω.

Πρόταση 4.1.5. $mult(\pi, \rho) = \dim C(\pi, \rho)$.

Παρατήρηση 4.1.6. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν ρ μια πιθανώς όχι unitary αναπαράσταση μιας συμπαγούς ομάδας G σε έναν πεπερασμένης διάστασης χώρο V, τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο εσωτερικό γινόμενο στον V, ως προς το οποίο η ρ θα είναι unitary. Συγκεκριμένα, αν $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ το αρχικό εσωτερικό γινόμενο του V, ορίζουμε ένα νέο εσωτερικο γινόμενο ως:

$$\langle u, v \rangle = \int \langle \rho(x)u, \rho(x)v \rangle_0 dx.$$

Έχουμε ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι ρ-αναλλοίωτο, αφού:
$\langle \rho(y)u, \rho(y)v \rangle = \int \langle \rho(xy)u, \rho(xy)v \rangle_0 dx = \int \langle \rho(x)u, \rho(x)v \rangle_0 dx = \langle u, v \rangle$.

Επομένως η θεωρία των unitary αναπαραστάσεων της G περιλαμβάνει τη θεωρία όλων των αναπαραστάσεων πεπερασμένης διάστασης της G.

4.2 Το θεώρημα Peter-Weyl

Παρακάτω θα ορίσουμε και θα μελετήσουμε το μη αβελιανό ανάλογο των τριγονομετρικών πολυωνύμων της κλασσικής αρμονικής ανάλυσης.

Ορισμός 4.2.1. Έστω π μια unitary αναπαράσταση της G. Για κάθε $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\phi_{u,v}(x) = \langle \pi(x)u, v \rangle.$$

Οι $\phi_{u,v}$ ονομάζονται matrix elements ή matrix coefficients της π. Όταν δε τα u, v αποτελούν στοιχεία κάποιας ορθοκανονικής βάσης $\{e_j\}$ του $\mathcal{H}_\pi$, τότε ο πίνακας της $\pi(x)$ ως προς αυτή τη βάση αποτελείται όντως από τα $\phi_{u,v}$, δηλαδή έχουμε $\pi(x) \sim (\pi_{ij}(x))_{ij}$, όπου:

$$\pi_{ij}(x) = \phi_{e_j,e_i}(x) = \langle \pi(x)e_j, e_i \rangle \tag{4.1}$$

Θα συμβολίζουμε τη γραμμική θήκη των matrix elements μιας π ως E_π. Έχουμε ότι ο E_π είναι ένας υπόχωρος του $C_c(G)$, οπότε και όλων των $L^p(G)$.

Πρόταση 4.2.2. *Ο χώρος E_π εξαρτάται μόνο από την κλάση ισοδυναμίας της π. Είναι αναλλοίωτος σε αριστερές και δεξιές μεταφορές και αν $\dim \mathcal{H}_\pi = n$, τότε $\dim E_\pi \leq n^2$.*

Απόδειξη Έστω $\pi \sim \pi'$ και T unitary, τέτοιος ώστε: $\pi' = T\pi T^{-1}$. Τότε $\langle \pi(x)u, v \rangle = \langle \pi'(x)Tu, Tv \rangle$, που μας δείχνει τον πρώτο ισχυρισμό. Έχουμε: $\phi_{u,v}(y^{-1}x) = \langle \pi(y^{-1}x)u, v, \rangle = \langle \pi(x)u, \pi(y)v \rangle = \phi_{u,\pi(y)v}(x)$. Ομοίως δείχνουμε ότι $\phi_{u,v}(xy) = \phi_{\pi(y)u,v}(x)$.
Τέλος, εάν $\dim \mathcal{H}_\pi = n$, προφανώς ο E_π παράγεται απο τις n^2 στο πλήθος συναρτήσεις $\pi_{i,j}$. □

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $\pi = \pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_n$. Τότε $E_\pi = \sum_1^n E_{\pi_j}$, όπου το προηγούμενο άθροισμα δεν είναι κατ' ανάγκην ευθύ.*

Απόδειξη Προφανώς έχουμε $E_{\pi_j} \subseteq E_\pi$, για όλα τα j, αφού $H_{\pi_j} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Από την άλλη, εάν $u = \sum u_j$ και $v = \sum v_j$, με $u_j, v_j \in H_{\pi_j}$, τότε $\langle \pi(x)u_j, v_k \rangle = 0$, για $j \neq k$, οπότε $\phi_{u,v} = \sum \phi_{u_j,v_j} \in \sum E_{\pi_j}$. □

Θα χρησιμοποιήσουμε τα matrix elements των αναγώγων αναπαραστάσεων για να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση του $L^2(G)$. Για τα παρακάτω θετουμε $d_\pi = \dim \mathcal{H}_\pi, \pi \in \hat{G}$. Θα χρειαστούμε την παρακάτω:

Πρόταση 4.2.4. *Σχέσεις ορθογωνιότητας του Schur. Έστω π, ρ ανάγωγες unitary αναπαραστάσεις της G και οι αντίστοιχοι E_π, E_ρ. Τότε:*

1. *Αν $[\pi] \neq [\rho]$, τότε $E_\pi \perp E_\rho$, ως υπόχωροι του $L^2(G)$.*
2. *Αν $\{e_j\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}_\pi$ και ορίσω τα $\pi_{i,j}$, όπως στην 4.1, τότε τα $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{i,j} : i, j = 1, \ldots, d_\pi\}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του E_π. (ως υπόχωρου του $L^2(G)$.)*

Απόδειξη Έστω $A : \mathcal{H}_\pi \to H_\rho$, οποιαδήποτε γραμμική απεικόνιση. Ορίζουμε:

$$\tilde{A} = \int \rho(x^{-1})A\pi(x)dx.$$

Τότε έχουμε:
$\tilde{A}\pi(y) = \int \rho(x^{-1})A\pi(x)\pi(y)dx = \int \rho(x^{-1})A\pi(xy)dx = \int \rho(yx^{-1})A\pi(x)dx =$

$\int \rho(y)\rho(x^{-1})A\pi(x)dx = \rho(y)\tilde{A}$. Έχουμε λοιπόν ότι $\tilde{A} \in C(\pi, \rho)$.
Πλέον σταθεροποιούμε $v \in \mathcal{H}_\pi, v' \in H_\rho$ και ορίζουμε:
$A : \mathcal{H}_\pi \to H_\rho$ με $Au = \langle u, v\rangle v'$.
Τότε, για κάθε $u \in \mathcal{H}_\pi, u' \in H_\rho$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{A}u, u'\rangle &= \int \langle \rho(x^{-1})A\pi(x)u, u'\rangle dx = \int \langle A\pi(x)u, \rho(x)u'\rangle dx \\
&= \int \langle \langle \pi(x)u, v\rangle v', \rho(x)u'\rangle = \int \langle \pi(x)u, v\rangle \langle v', \rho(x)u'\rangle \\
&= \int \phi^\pi_{u,v}(x)\overline{\phi^\rho_{u',v'}(x)}dx
\end{aligned}$$

Τώρα εφαρμόζουμε το λήμμα του Schur. Συγκεκριμένα, αν $[\pi] \neq [\rho]$, έχουμε ότι $\tilde{A} = 0$, οπότε $\phi^\pi_{u,v} \perp \phi^\rho_{u',v'}$, για κάθε $u, v \in \mathcal{H}_\pi, u', v' \in H_\rho$. Έπεται ότι $\mathcal{H}_\pi \perp H_\rho$.

Αν τώρα $\pi = \rho$, έχουμε ότι $\tilde{A} = cI$. Έστω τώρα $\{e_j\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}_\pi$. Θέτουμε $u = e_j, v = e_i, u' = e_{j'}, v' = e_{i'}$, οπότε έχουμε:
$\int \pi_{ij}(x)\overline{\pi_{i'j'}(x)}dx = c\langle e_j, e_{j'}\rangle = c\delta_{jj'}$.
Επίσης έχουμε: $cd_\pi = \operatorname{tr} \tilde{A} = \int \operatorname{tr}[\pi(x^{-1})A\pi(x)]dx = \operatorname{tr}(A)$.
Όμως $Au = \langle u, e_i\rangle e_{i'}$, οπότε $\operatorname{tr}(A) = \delta_{ii'}$. Τελικά λοιπόν έχουμε:
$\int \pi_{ij}(x)\overline{\pi_{i'j'}(x)}dx = \frac{1}{d_\pi}\delta_{ii'}\delta_{jj'}$.
Έπεται ότι το σύνολο $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}\}$ είναι ορθοκανονικό και αφού $\dim E_\pi \leq n^2$, έχουμε ότι αποτελεί και βάση. □

Όπως είδαμε στην πρόταση 4.2.2, κάθε E_π είναι L_x και R_x αναλλοίωτος. Προκύπτει λοιπόν το ερώτημα του ποιές είναι οι ανάγωγες υποαναπαραστάσεις των L και R στον E_π. Η απάντηση δίνεται στην παρακάτω:

Πρόταση 4.2.5. *Έστω π ανάγωγη και π_{ij} όπως στην 4.1. Για $i = 1, 2, \ldots, d_\pi$ θέτουμε $\mathcal{R}_i$ την γραμμική θήκη των $\pi_{i1}, \pi_{i2}, \ldots, \pi_{id_\pi}$ (δηλαδή την i γραμμή του πίνακα $(\pi_{ij})_{ij}$ και $\mathcal{C}_i$ τη γραμμική θήκη των $\pi_{1i}, \pi_{2i}, \ldots, \pi_{d_\pi i}$ (δηλαδή της i στήλης). Τοτε ο $\mathcal{R}_i$ (αντ. ο $\mathcal{C}_i$) είναι αναλλοίωτος από την δεξιά (αντ. την αριστερή) κανονική αναπαράσταση και έχουμε ότι $R^{\mathcal{R}_i} \sim \pi$ και $L^{\mathcal{C}_i} \sim \overline{\pi}$. Η ισοδυναμία δίνεται από την: $\sum c_j e_j = \sum c_j \pi_{ij}$ (αντ. $\sum c_J e_j = \sum c_j \pi_{ji}$.)*

Απόδειξη Σταθεροποιούμε μία βάση του E_π, έστω $\{e_j\}_{j=1}^{d_\pi}$. Τότε η π δίνεται από την σχέση:

$$\pi(x)(\sum_j c_j e_j) = \sum_{sj} \pi_{sj}(x)c_j e_s. \tag{4.2}$$

Επιπλέον έχουμε: $\pi(yx) = \pi(x)\pi(y)$, οπότε: $\pi_{ij}(yx) = \sum_s \pi_{is}(y)\pi_{sj}(x)$, δηλαδή $R_x\pi_{ij} = \sum_s \pi_{sj}(x)\pi_{is}$. Επομένως έχουμε

$$R_x(\sum_j c_j\pi_{ij}) = \sum_{js} \pi_{js}(x)c_j\pi_{is}. \tag{4.3}$$

Συγκρίνοντας τις (3.2) και (3.3) έπεται το ζητούμενο.

Ομοίως, για αριστερές μεταφορές έχουμε:

$$L_x(\sum_j c_j\pi_{ji}) = \sum_{jk} \pi_{jk}(x^{-1})c_j\pi_{ki}$$

Όμως η π είναι unitary, οπότε $\pi_{jk}(x^{-1}) = \overline{\pi}_{kj}(x)$, οπότε έπεται το συμπέρασμα και την αριστερή κανονική αναπαράσταση. □

Ορίζουμε πλέον

$$\mathcal{E} = \operatorname{span} \bigcup_{[\pi]\in\hat{G}} E_\pi.$$

Δηλαδή το $\mathcal{E}$ αποτελεί το σύνολο των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των matrix elements των αναγώγων αναπαραστάσεων.Από την πρόταση 4.2.3, ο $\mathcal{E}$ είναι η γραμμική θήκη των E_π, όπου οι δείκτες π διατρέχουν τις πεπερασμένες αναπαραστάσεις της G. Ο $\mathcal{E}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο χώρος των "τριγωνομετρικών πολυωνύμων" της G. Θα δείξουμε ότι ο $\mathcal{E}$ είναι πυκνός στον $L^2(G)$. Το μόνο που χρειαζόμαστε ακόμα είναι η παρακάτω:

Πρόταση 4.2.6. *Ο $\mathcal{E}$ είναι άλγεβρα.*

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι αν $[\pi], [\rho] \in \hat{G}$, και π_{ij}, ρ_{kl} τα αντίστοιχα matrix elements αυτών, τότε τα $\pi_{ij}\rho_{kl}$ είναι matrix elements για κάποια αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης της G, την οποία θα συμβολίσουμε με $\pi\otimes\rho$. (Ο συμβολισμός δεν είναι ατυχής, καθώς η $\pi\otimes\rho$ είναι όντως το εσωτερικό τανυστικό γινόμενο των π, ρ, όμως για λόγους απλότητας θα την ορίσουμε χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία τανυστικών γινομένων.) Σταθεροποιώντας βάσεις για τους $\mathcal{H}_\pi, H_\rho$, ορίζουμε τα αντίστοιχα matrix elements αυτών και ουσιαστικά έχουμε ότι:
$\mathcal{H}_\pi \simeq \mathbb{C}^n, H_\rho \simeq \mathbb{C}^m$, όπου $n = d_\pi, m = d_\rho$.
Ορίζουμε τώρα την $\pi\otimes\rho$ στον $\mathbb{C}^{nm}$ με:

$$(\pi\otimes\rho)(x)T = \pi(x)T\overline{\rho}(x^{-1}), T \in \mathbb{C}^{nm}, x \in G.$$

Θεωρώντας τώρα την ορθοκανονική βάση $\{E_{ij}\}$ του $\mathbb{C}^{nm}$, όπου
$E_{ij} = (a_{mn})_{mn},$ με $a_{mn} = 1,$ όταν $m = i, n = j, a_{mn} = 0,$ αλλιώς ,
έχουμε ότι:

$$\langle(\pi\otimes\rho)(x)E_{jl}, E_{ik}\rangle = \pi_{ij}(x)\rho_{kl}(x)$$

□

Πλέον μπορούμε να δείξουμε το τελευταίο τεχνικό λήμμα για το θεώρημα Peter-Weyl για τη θεωρία αναπαραστάσεων για συμπαγείς ομάδες. Το λήμμα αυτό είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων αποτελεσμάτων και των θεωρημάτων Gelfand-Raikov και Stone-Weierstrass. Οφείλουμε να σημειώσουμε πως αυτά είναι μεταγενέστερα του Peter-Weyl, οπότε η απόδειξη που θα παραθέσουμε δεν είναι η αυθεντική, η οποία κάνει χρήση του θεωρήματος Arzela-Ascoli, καθώς και του φασματικου θεωρήματος για συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές, είναι όμως αρκετά πιο απλή. Συγκεκριμένα έχουμε:

Θεώρημα 4.2.7. *Ο $\mathcal{E}$ είναι πυκνός στον $C(G)$, ως προς τη νόρμα της ομοιόμορφης σύγκλισης και πυκνός σε κάθε $L^p(G), 1 \leq p < \infty$, ως προς την $\|\cdot\|_p$.*

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι ο $\mathcal{E}$ είναι πυκνός στον $C(G)$, ο οποίος με τη σειρά του είναι πυκνός στους L^p. Έχουμε όμως ότι ο $\mathcal{E}$ είναι άλγεβρα, που χωρίζει τα σημεία (από το θεώρημα Gelfand-Raikov), περιέχει τις σταθερές, λογω της τετριμμενης αναπαράστασης και είναι και αυτοσυζυγής, αφού κάθε αναπαράσταση καθορίζει την αντίστοιχη contragredient. Το αποτέλεσμα τώρα έπεται από το θεώρημα Stone-Weierstrass

□

Αν τώρα συνδυάσουμε το θεώρημα 4.2.7 με τις σχέσεις ορθογωνιότητας του Schur(4.2.4), βλέπουμε ότι ο $L^2(G)$ είναι το ορθογώνιο ευθύ άθροισμα των E_π, όπου $[\pi] \in \hat{G}$, καθώς και ότι σταθεροποιώντας μια π για κάθε κλάση $[\pi]$, παίρνοντας τα αντίστοιχα matrix elements αυτών (σταθεροποιώντας εννοείται μια ορθοκανονική βάση σε κάθε $\mathcal{H}_\pi$), λαμβάνουμε μια ορθοκανονική του βάση. Μπορούμε λοιπόν να συμπεριλάβουμε όλα τα αποτελέσματά μας στο παρακάτω θεώρημα, όπου βέβαια θεωρούμε πως σταθεροποιούμε έναν αντιπροσωπο π για κάθε κλάση $[\pi]$ και σταθεροποιούμε μία ορθοκανονική βάση του αντίστοιχου $\mathcal{H}_\pi$. Συγκεκριμένα έχουμε το:

Θεώρημα 4.2.8 (Το Θεώρημα Peter-Weyl)**.** *Έστω G συμπαγής ομάδα. Τότε:*

1. *ο $\mathcal{E}$ είναι ομοιόμορφα πυκνός στον $C(G)$.*

2. *$L^2(G) = \oplus_{[\pi]\in\hat{G}} E_\pi$.*

3. *Το σύνολο $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij} : i, j = 1, 2 \ldots d_\pi, [\pi] \in G$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2(G)$.*

4. *Κάθε $[\pi]$ εμφανίζεται στην αριστερή και στην δεξιά κανονική αναπαράσταση με πολλαπλότητα d_π. Πιο συγκεκριμένα, για $i = 1, 2 \ldots, d_\pi$, ο υπόχωρος του E_π (αντ. του $E_{\overline{\pi}}$) που παράγεται από την i γραμμή (αντ. την i στήλη) του πίνακα $(\pi_{ij})_{ij}$ (αντ. του $(\overline{\pi}_{ij})_{ij}$) είναι αναλλοίωτος υπό την δεξιά (αντ. την αριστερή) κανονική αναπαράσταση, οι οποίες είναι ισοδύναμες με την π στους αντίστοιχους χώρους.*

Παράρτημα Α΄

Διάσπαση της Αριστερά Κανονικής και Δεξιά Κανονικής Αναπαράστασης Συμπαγούς Ομάδας

Έστω G συμπαγής τοπολογική ομάδα Hausdorff. λ μέτρο Haar της G, κανονικοποιημένο ώστε $\lambda(G) = 1$. $Bo(G)$ η Borel σ-άλγεβρα της G.

Η left regular αναπαράσταση της G επί του χώρου Hilbert $L^2(G, Bo(G), \lambda)$: για $x \in G$, $f \in L^2(G, Bo(G), \lambda)$, $L_x f$ είναι η συνάρτηση με τύπο

$$[L_x f](y) := f(x^{-1}y) \qquad y \in G.$$

Η right regular αναπαράσταση της G επί του χώρου Hilbert $L^2(G, Bo(G), \lambda)$: για $x \in G$, $f \in L^2(G, Bo(G), \lambda)$, $R_x f$ είναι η συνάρτηση με τύπο

$$[R_x f](y) := f(yx) \qquad y \in G.$$

Παρατηρεί κανείς ότι

$$\begin{aligned}\langle L_x f, \pi_{ij}\rangle &= \int_G f(x^{-1}y)\overline{\pi_{ij}(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_G f(y)\overline{\pi_{ij}(xy)}\,\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \sum_{k=1}^{d_\pi} \overline{\pi_{ik}(x)} \int_G f(y)\overline{\pi_{kj}(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y) = \sum_{k=1}^{d_\pi} \overline{\pi_{ik}(x)}\langle f, \pi_{kj}\rangle\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\langle R_x f, \pi_{ij}\rangle &= \int_G f(yx)\overline{\pi_{ij}(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_G f(y)\overline{\pi_{ij}(yx^{-1})}\,\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \sum_{k=1}^{d_\pi} \overline{\pi_{kj}(x^{-1})} \int_G f(y)\overline{\pi_{ik}(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y) = \sum_{k=1}^{d_\pi} \pi_{jk}(x)\langle f, \pi_{ik}\rangle,\end{aligned}$$

για $i, j \in \{1, \dots, d_\pi\}$, όπου χρησιμοποιήθηκε η ισότητα $\pi(x^{-1}) = [\pi(x)]^*$, από όπου συνάγεται ότι $\pi_{kj}(x^{-1}) = \overline{\pi_{jk}(x)}$. Για $f = \rho_{mn}$, όπου $[\rho] \in \widehat{G}$,

$$\langle L_x \rho_{mn}, \pi_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^{d_\pi} \overline{\pi_{ik}(x)} \langle \rho_{mn}, \pi_{kj} \rangle = \begin{cases} d_\pi^{-1} \overline{\pi_{im}(x)} & \text{αν } [\pi] = [\rho] \text{ και } n = j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$\langle R_x \rho_{mn}, \pi_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^{d_\pi} \pi_{jk}(x) \langle \rho_{mn}, \pi_{ik} \rangle = \begin{cases} d_\pi^{-1} \pi_{jn}(x) & \text{αν } [\pi] = [\rho] \text{ και } m = i \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για $i, j \in \{1, \dots, d_\pi\}$ και $m, n \in \{1, \dots, d_\rho\}$, από τις σχέσεις ορθογωνιότητας του Shur.

Από το Θεώρημα Peter–Weyl, οι συναρτήσεις

$$\sqrt{d_\pi} \pi_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, d_\pi\}, \quad [\pi] \in \widehat{G},$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2(G, Bo, \lambda)$. Τα $d_\pi \langle L_x \rho_{mn}, \pi_{ij} \rangle$ είναι οι ‘συντελεστές του πίνακα του τελεστή L_x ως προς αυτή την βάση’, και ομοίως τα $d_\pi \langle R_x \rho_{mn}, \pi_{ij} \rangle$ για τον τελεστή R_x. Στις παραπάνω σχέσεις οι μόνοι συντελεστές αυτών των πινάκων που είναι μη μηδενικοί είναι οι $d_\pi \langle L_x \pi_{mj}, \pi_{ij} \rangle$, $i, m \in \{1, \dots, d_\pi\}$, για την ίδια π και το ίδιο j, για τον L_x, και $d_\pi \langle R_x \pi_{in}, \pi_{ij} \rangle$, $j, n \in \{1, \dots, d_\pi\}$, για το ίδιο π πάλι και το ίδιο i τώρα, για τον R_x. Δηλαδή, η αναπαράσταση L είναι ευθύ άθροισμα

$$L = \bigoplus_{[\pi] \in \widehat{G}} (\underbrace{A_{\overline{\pi}} \oplus \cdots \oplus A_{\overline{\pi}}}_{d_\pi}),$$

δηλαδή

$$L_x = \bigoplus_{[\pi] \in \widehat{G}} [A_{\overline{\pi}}(x) \oplus \cdots \oplus A_{\overline{\pi}}(x)] \qquad \forall\, x \in G,$$

με αντίστοιχο ευθύ άθροισμα υποχώρων για τον $L^2(G, Bo, \lambda)$ το

$$\begin{aligned} L^2(G, Bo, \lambda) &= \bigoplus_{[\pi] \in \widehat{G}} (\operatorname{span}\{\pi_{11}, \dots, \pi_{d_\pi 1}\} \oplus \cdots \oplus \operatorname{span}\{\pi_{1 d_\pi}, \dots, \pi_{d_\pi d_\pi}\}) \\ &= \bigoplus_{[\pi] \in \widehat{G}} \left(C_1^\pi \oplus \cdots \oplus C_{d_\pi}^{d_\pi} \right) \end{aligned}$$

(ανεξάρτητα του $x \in G$), και $A_{\overline{\pi}}(x)$ τον τελεστή με πίνακα

$$A_{\overline{\pi}}(x) = \begin{bmatrix} \overline{\pi_{11}(x)} & \dots & \overline{\pi_{1 d_\pi}(x)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\pi_{d_\pi 1}(x)} & \dots & \overline{\pi_{d_\pi d_\pi}(x)} \end{bmatrix}$$

ως προς την βάση $\pi_{1j}, \dots, \pi_{d_\pi j}$ του $C_j^\pi := \mathrm{span}\{\pi_{1j}, \dots, \pi_{d_\pi j}\}$, για κάθε στήλη $j \in \{1, \dots, d_\pi\}$· $C_j^\pi := \mathrm{span}\{\pi_{1j}, \dots, \pi_{d_\pi j}\}$ είναι ο υπόχωρος του $L^2(G, Bo, \lambda)$ που παράγεται από τις συναρτήσεις που αποτελούν την j στήλη της π. Αντίστοιχα η αναπαράσταση R είναι ευθύ άθροισμα

$$R = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} (\underbrace{A_\pi \oplus \cdots \oplus A_\pi}_{d_\pi}),$$

ήτοι

$$R_x = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} [A_\pi(x) \oplus \cdots \oplus A_\pi(x)] \qquad \forall\, x \in G,$$

με αντίστοιχο ευθύ άθροισμα υποχώρων για τον $L^2(G, Bo, \lambda)$ το

$$\begin{aligned} L^2(G, Bo, \lambda) \quad &= \textstyle\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \left(\mathrm{span}\{\pi_{11}, \dots, \pi_{1d_\pi}\} \oplus \cdots \oplus \mathrm{span}\{\pi_{d_\pi 1}, \dots, \pi_{d_\pi d_\pi}\}\right) \\ &= \left(R_1^\pi \oplus \cdots \oplus R_{d_\pi}^\pi\right) \end{aligned}$$

αυτή τη φορά, και $A_\pi(x)$ τον τελεστή με πίνακα

$$A_\pi(x) = \begin{bmatrix} \pi_{11}(x) & \dots & \pi_{1d_\pi}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{d_\pi 1}(x) & \dots & \pi_{d_\pi d_\pi}(x) \end{bmatrix}$$

ως προς την βάση $\pi_{i1}, \dots, \pi_{id_\pi}$ του $R_i^\pi := \mathrm{span}\{\pi_{i1}, \dots, \pi_{id_\pi}\}$, για κάθε γραμμή $i \in \{1, \dots, d_\pi\}$· $R_i^\pi := \mathrm{span}\{\pi_{i1}, \dots, \pi_{id_\pi}\}$ είναι ο υπόχωρος του $L^2(G, Bo, \lambda)$ που παράγεται από τις συναρτήσεις που αποτελούν την i γραμμή της π.

Παράρτημα Β΄

Αναπαραστάσεις της Συμμετρικής Ομάδας S_3

Συμβολισμοί: $S_3 = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_5\}$, όπου:
σ_0 ουδέτερο στοιχείο, ήτοι

$$\sigma_0(1) = 1 \qquad \sigma_0(2) = 2 \qquad \sigma_0(3) = 3.$$

$\sigma_1 = (12)$, ήτοι

$$\sigma_1(1) = 2 \qquad \sigma_1(2) = 1 \qquad \sigma_1(3) = 3.$$

$\sigma_2 = (23)$, ήτοι

$$\sigma_2(1) = 1 \qquad \sigma_2(2) = 3 \qquad \sigma_2(3) = 2.$$

$\sigma_3 = (13)$, ήτοι

$$\sigma_3(1) = 3 \qquad \sigma_3(2) = 2 \qquad \sigma_3(3) = 1.$$

$\sigma_4 = (123)$, ήτοι

$$\sigma_4(1) = 2 \qquad \sigma_4(2) = 3 \qquad \sigma_4(3) = 1.$$

$\sigma_5 = (132)$, ήτοι

$$\sigma_5(1) = 3 \qquad \sigma_5(2) = 1 \qquad \sigma_5(3) = 2.$$

Παρατηρείστε ότι $(123) = (12)(23)$, ήτοι $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_4$, και $(132) = (23)(12)$, ήτοι $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_5$. Υπάρχουν δύο μη ισοδύναμες μονοδιάστατες unitary αναπαραστάσεις της S_3: μία η τετριμμένη

$$\chi(\sigma) = 1 \qquad\qquad \forall\, \sigma \in S_3,$$

και μία η

$$\psi(\sigma_1) = \psi(\sigma_2) = \psi(\sigma_3) = -1 \qquad \psi(\sigma_0) = \psi(\sigma_4) = \psi(\sigma_5) = 1;$$

δηλαδή

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \sigma \text{ γράφεται ως άρτιο γινόμενο αντιμεταθέσεων} \\ -1 & \text{αν } \sigma \text{ γράφεται ως περιττό γινόμενο αντιμεταθέσεων.} \end{cases}$$

Παρατηρεί κανείς ότι, προφανώς

$$\chi(\sigma \circ \tau) = 1 = 1 \cdot 1 = \chi(\sigma)\chi(\tau) \qquad \forall\, \sigma, \tau \in S_3,$$

και ότι

$$\psi(\sigma \circ \tau) = 1 = 1 \cdot 1 = \psi(\sigma)\psi(\tau)$$

αν σ και τ είναι και οι δύο άρτιο γινόμενο αντιμεταθέσεων, οπότε και $\sigma \circ \tau$ είναι άρτιο γινόμενο αντιμεταθέσεων,

$$\psi(\sigma \circ \tau) = 1 = (-1) \cdot (-1) = \psi(\sigma)\psi(\tau)$$

αν σ και τ είναι και οι δύο περιττό γινόμενο αντιμεταθέσεων, και

$$\psi(\sigma \circ \tau) = -1 = (-1) \cdot 1 = \psi(\sigma)\psi(\tau) \quad \text{ή} \quad \psi(\sigma \circ \tau) = -1 = 1 \cdot (-1) = \psi(\sigma)\psi(\tau)$$

αν σ περιττό και τ άρτιο, ή σ άρτιο και τ περιττό γινόμενο αντιμεταθέσεων, αντίστοιχα· δηλαδή οι χ και ψ είναι αναπαραστάσεις, ήτοι ομομορφισμοί της G στην ομάδα των αντιστρέψιμων φραγμένων γραμμικών τελεστών του γραμμικού χώρου $\mathbb{C}$, και δει unitary αφού τελικά είναι ομομορφισμοί της G στους unitary τελεστές του χώρου Hilbert $\mathbb{C}$. Προφανώς επίσης οι χ και ψ είναι ανάγωγες αφού είναι μονοδιάστατες αναπαραστάσεις.

Υπάρχει μία ακόμη ανάγωγη unitary αναπαράσταση της G, ή ακριβέστερα, μία ακόμη κλάση ισοδυναμίας τέτοιων αναπαραστάσεων. Έστω $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^3$, ας πούμε η συνήθης· ορίζεται τότε μία αναπαράσταση U της G από την σχέση

$$U(\sigma)\zeta_i = \zeta_{\sigma(i)} \qquad \sigma \in S_3,\ i \in \{1, 2, 3\}\cdot$$

συγκεκριμένα, ο πίνακας του τελεστή $U(\sigma)$ ως προς την βάση $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ είναι

$$U(\sigma_0) = I_3 \qquad U(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U(\sigma_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U(\sigma_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad U(\sigma_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αυτή είναι πράγματι μία αναπαράσταση της S_3 αφού, για $\sigma, \tau \in S_3$,

$$U(\sigma \circ \tau)\zeta_i = \zeta_{\sigma(\tau(i))} = U(\sigma)\zeta_{\tau_i} = U(\sigma)U(\tau)\zeta_i \qquad \forall\, i \in \{1,2,3\},$$

οπότε

$$U(\sigma \circ \tau) = U(\sigma)U(\tau),$$

η οποία είναι και unitary αφού

$$U(\sigma)^* U(\sigma) = U(\sigma)U(\sigma)^* = I_3 \qquad \forall\, \sigma \in S_3$$

(οι στήλες και οι γραμμές κάθε $U(\sigma)$ αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα). Η αναπαράσταση αυτή όμως δεν είναι ανάγωγη· ο υπόχωρος

$$H := \{(z_1, z_2, z_3)' \in \mathbb{C}^3 \colon z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$$

του $\mathbb{C}^3$ είναι αναλλοίωτος, όπου $'$ συμβολίζει ανάστροφο, ήτοι

$$(z_1, z_2, z_3)' = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

Πράγματι, κάθε τελεστής $U(\sigma)$ απλά αναδιατάσσει τις συντεταγμένες ενός διανύσματος, οπότε αν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος έχουν άθροισμα μηδέν, τότε και οι συντεταγμένες της εικόνας του μέσω του $U(\sigma)$ θα έχουν επίσης άθροισμα μηδέν. Επίσης, οι πίνακες $U(\sigma)$, $\sigma \in S_3$, δεν έχουν άλλα κοινά ιδιοδιανύσματα πέραν των πολλαπλασίων του $(1,1,1)'$, οπότε η αναπαράσταση U δεν έχει άλλον αναλλοίωτο υπόχωρο διάστασης ένα, πέραν του υπόχωρου που παράγει το διάνυσμα $(1,1,1)'$, και άρα η U περιορισμένη στον υπόχωρο H είναι ανάγωγη. Η αναπαράσταση αυτή, η U δηλαδή περιορισμένη στον H, είναι unitarily ισοδύναμη με την αναπαράσταση

$$\pi(\sigma_0) = I_2 \qquad \pi(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \pi(\sigma_2) = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi(\sigma_3) = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \pi(\sigma_4) = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \pi(\sigma_5) = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

Αυτό μπορεί να το δει κανείς ως εξής. Τα διανύσματα $(6^{-1/2}, 6^{-1/2}, -2\cdot 6^{-1/2})'$ και $(2^{-1/2}, -2^{-1/2}, 0)'$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του H, και οι πίνακες της αναπαράστασης U ως προς αυτή την βάση είναι οι πίνακες $\pi(\sigma_i)$. Ισοδύναμα, ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 6^{-1/2} & 2^{-1/2} \\ 6^{-1/2} & -2^{-1/2} \\ -2\cdot 6^{-1/2} & 0 \end{bmatrix},$$

που στέλνει την συνήθη βάση του $\mathbb{C}^2$ στην παραπάνω ορθοκανονική βάση του H, ικανοποιεί την $U^*U = I_2$ και άρα είναι ένας unitary τελεστής από τον $\mathbb{C}^2$ στην εικόνα του $U\mathbb{C}^2 = H$ (αφού η $U^*U = I_2$ συνεπάγεται την $UU^*U = U$, και άρα $UU^*z = z$ για κάθε z στην εικόνα $U\mathbb{C}^2$ του $\mathbb{C}^2$· ή πιο άμεσα,

$$UU^* = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

και ο τελευταίος πίνακας επάγει την ταυτοτική απεικόνιση αν περιοριστεί στον υπόχωρο H)· επομένως $U\colon \mathbb{C}^2 \to H$ είναι ένας unitary τελεστής και οι πίνακες

$$\pi(\sigma_i) := U^*U(\sigma_i)U \qquad i \in \{1,2,3\},$$

ορίζουν μία αναπαράσταση, αφού ικανοποιούν τις

$$\pi(\sigma\tau) = U^*U(\sigma\tau)U = U^*U(\sigma)U(\tau)U = U^*U(\sigma)UU^*U(\tau)U = \pi(\sigma)\pi(\tau) \qquad \sigma,\tau \in S_3,$$

δηλαδή η π είναι ομομορφισμός, και δει unitary αφού

$$\pi(\sigma)^*\pi(\sigma) = U^*U(\sigma)^*UU^*U(\sigma)U = U^*U(\sigma)^*U(\sigma)U = U^*U = I_2.$$

(Ελέγχει κανείς άμεσα ότι τα $\pi(\sigma_i) = U^*U(\sigma_i)U$ είναι όπως έχουν δοθεί παραπάνω.)
Οι μιγαδικές συναρτήσεις της S_3 μπορούν να ταυτοποιηθούν με διανύσματα στον $\mathbb{C}^6$: η $f\colon G \to \mathbb{C}$ ταυτοποιείται με το διάνυσμα $(f(\sigma_0), f(\sigma_1), \ldots, f(\sigma_5))'$· και φυσικά κάθε μιγαδική συνάρτηση επί της S_3 είναι στον L^2. Παίρνουμε ως ορθοκανονική βάση τις συναρτήσεις που υπαγορεύει το Θεώρημα Peter–Weyl: το διάνυσμα $(1,1,1,1,1,1)'$ αντιστοιχεί στην συνάρτηση χ, το διάνυσμα $(1,-1,-1,-1,1,1)'$ στην συνάρτηση ψ, και τα διανύσματα

$$\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

στις συναρτήσεις $\sqrt{2}\pi_{11}, \sqrt{2}\pi_{12}, \sqrt{2}\pi_{21}, \sqrt{2}\pi_{22}$, αντίστοιχα. Τα διανύσματα αυτά έχουν νόρμα ένα όχι ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^6$, αλλά με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο πολλαπλασιασμένο με $\frac{1}{6}$· αυτό διότι παίρνουμε το μέτρο Haar στην ομάδα S_3 να είναι μέτρο πιθανότητας, να δίνει δηλαδή μάζα $\frac{1}{6}$ σε κάθε σημείο της S_3.

Παρατηρείστε τώρα ότι

$$\begin{aligned}
L(\sigma)\chi &= \chi, \\
L(\sigma)\psi &= \psi(\sigma^{-1})\psi, \\
L(\sigma)\pi_{11} &= \pi_{11}(\sigma^{-1})\pi_{11} + \pi_{12}(\sigma^{-1})\pi_{21}, \\
L(\sigma)\pi_{12} &= \pi_{11}(\sigma^{-1})\pi_{12} + \pi_{12}(\sigma^{-1})\pi_{22}, \\
L(\sigma)\pi_{21} &= \pi_{21}(\sigma^{-1})\pi_{11} + \pi_{22}(\sigma^{-1})\pi_{21}, \\
L(\sigma)\pi_{22} &= \pi_{21}(\sigma^{-1})\pi_{12} + \pi_{22}(\sigma^{-1})\pi_{22},
\end{aligned}$$

για κάθε $\sigma \in S_3$· ο πίνακας επομένως της left regular αναπαράστασης L της S_3 στον $L^2(S_3) \simeq \mathbb{C}^6$ ως προς αυτή την βάση

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \sqrt{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\end{bmatrix} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{bmatrix} \quad \sqrt{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(με αυτή την σειρά), είναι

$$\begin{aligned}
L(\sigma) &= \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \psi(\sigma^{-1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \pi_{11}(\sigma^{-1}) & 0 & \pi_{21}(\sigma^{-1}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & \pi_{11}(\sigma^{-1}) & 0 & \pi_{21}(\sigma^{-1}) \\
0 & 0 & \pi_{12}(\sigma^{-1}) & 0 & \pi_{22}(\sigma^{-1}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & \pi_{12}(\sigma^{-1}) & 0 & \pi_{22}(\sigma^{-1})
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \psi(\sigma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \pi_{11}(\sigma) & 0 & \pi_{12}(\sigma) & 0 \\
0 & 0 & 0 & \pi_{11}(\sigma) & 0 & \pi_{12}(\sigma) \\
0 & 0 & \pi_{21}(\sigma) & 0 & \pi_{22}(\sigma) & 0 \\
0 & 0 & 0 & \pi_{21}(\sigma) & 0 & \pi_{22}(\sigma)
\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

για κάθε $\sigma \in S_3$. (Εδώ χρησιμοποιήθηκε πάλι το γεγονός ότι, για κάθε unitary αναπαράσταση ρ μιας ομάδας G, $\rho(x^{-1}) = \rho(x)^{-1} = \rho(x)^* \; \forall\, x \in G$, και επομένως $\rho_{ij}(x^{-1}) = \overline{\rho_{ji}(x)} \; \forall\, x \in G$· εδώ επιπλέον όλα τα $\psi(\sigma)$, $\pi_{ij}(\sigma)$ είναι πραγματικά.)

Παρατηρείστε επίσης ότι

$$\begin{aligned} R(\sigma)\chi &= \chi, \\ R(\sigma)\psi &= \psi(\sigma)\psi, \\ R(\sigma)\pi_{11} &= \pi_{11}(\sigma)\pi_{11} + \pi_{21}(\sigma)\pi_{12}, \\ R(\sigma)\pi_{12} &= \pi_{12}(\sigma)\pi_{11} + \pi_{22}(\sigma)\pi_{12}, \\ R(\sigma)\pi_{21} &= \pi_{11}(\sigma)\pi_{21} + \pi_{21}(\sigma)\pi_{22}, \\ R(\sigma)\pi_{22} &= \pi_{12}(\sigma)\pi_{21} + \pi_{22}(\sigma)\pi_{22}, \end{aligned}$$

για κάθε $\sigma \in S_3$· ο πίνακας επομένως της right regular αναπαράστασης R της S_3 στον $L^2(S_3) \simeq \mathbb{C}^6$ ως προς την παραπάνω βάση είναι

$$R(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi(\sigma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{11}(\sigma) & \pi_{12}(\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{21}(\sigma) & \pi_{22}(\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{11}(\sigma) & \pi_{12}(\sigma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{21}(\sigma) & \pi_{22}(\sigma) \end{bmatrix},$$

$\sigma \in S_3$· ή πιο σύντομα,

$$R(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \psi(\sigma) & & \\ & & \pi(\sigma) & \\ & & & \pi(\sigma) \end{bmatrix}.$$

Έστω τέλος

$$U := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

τότε $U^* = U$ και $U^*U = UU^* = U^2 = I_6$ και βλέπει κανείς επίσης άμεσα ότι

$$U^*L(\sigma)U = R(\sigma) \qquad \forall\, \sigma \in S_3.$$

Οι L και R είναι δηλαδή unitarily ισοδύναμες.

Παρατήρηση Β΄.0.9. Ο τελευταίος πίνακας U είναι ο πίνακας του τελεστή $f \mapsto Uf$, όπου $(Uf)(\sigma) = f(\sigma^{-1})$, για $f \in L^2(S_3)$ και $\sigma \in S_3$, ως προς την παραπάνω βάση. Πράγματι, έχει κανείς ότι

$$\sigma_0^{-1} = \sigma_0, \quad \sigma_1^{-1} = \sigma_1, \quad \sigma_2^{-1} = \sigma_2, \quad \sigma_3^{-1} = \sigma_3, \quad \sigma_4^{-1} = \sigma_5, \quad \sigma_5^{-1} = \sigma_4;$$

έπεται ότι $U\chi = \chi$, αφού $\chi(\sigma^{-1}) = 1 = \chi(s)\ \forall\, \sigma \in S_3$, $U\psi = \psi$, αφού $\psi(\sigma_i^{-1}) = \psi(\sigma_i)$ για $i \in \{0,1,2,3\}$ και $\psi(\sigma_i^{-1}) = -1 = \psi(\sigma_i)$ για $i \in \{4,5\}$, και όμοια βλέπει κανείς ότι $U\pi_{11} = \pi_{11}$, $U\pi_{22} = \pi_{22}$ και $U\pi_{12} = \pi_{21}$ και $U\pi_{21} = \pi_{12}$.

Αυτό ισχύει γενικά σε οποιαδήποτε τοπικά συμπαγή ομάδα Hausdorff G.

Βιβλιογραφία

[1] Gerald B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*. CRC Press 1994

[2] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*. Συμμετρία 1991

[3] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*. Springer 1997

[4] W. Rudin, *Real and Complex Analysis, 3rd Edition*. McGraw Hill 1986

[5] E.Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis, vol. 1* Springer 1979

[6] A. Deitmar, *A First Course in Harmonic Analysis*. Springer 2005

[7] A. Deitmar, Siegfried Echterhoff *Principles of Harmonic Analysis*. Springer 2009

[8] Μ. Φραγκουλοπούλου, *Εισαγωγή στη θεωρία των αλγεβρών Banach Σημειώσεις, Αθήνα 1989*

[9] Α. Κατάβολος, *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*. Εκδόσεις Συμμετρία 2008

[10] Α. Κατάβολος, *Θεωρία Τελεστών*. Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος 2004

[11] N. Wiener, The Historical background of Harmonic Analysis. In *Semicentennial Adresses of the American Mathematical Society*, pages 56-68. 1938.