

Θεωρία Ramsey

σε Λεπτές Οικογένειες Schreier

Γιώργος Μαργώνης

Διπλωματική εργασία ειδίκευσης στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα 2015

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως κεντρικό θέμα την θεωρία Ramsey. Αρχικά αποδεικνύουμε τρία βασικά θεωρήματα της κλασικής θεωρίας Ramsey, το θεώρημα Ramsey, το θεώρημα Nash-Williams και το θεώρημα Ellentuck. Ορίζοντας τις Λεπτές Οικογένειες Schreier πεπερασμένων υποσυνόλων φυσικών αριθμών, όπως ορίστηκαν από την Φαρμάκη, και τον ισχυρό Cantor-Bendixson δείκτη, αποδεικνύουμε μία επεκτεταμένη θεωρία Ramsey, που αναπτύχθηκε από την Φαρμάκη, συμπεριλαμβάνοντας ένα θεώρημα Ramsey για κάθε διατακτικό αριθμό, μία ισχυρότερη μορφή του θεωρήματος Nash-Williams και μία καινούργια απόδειξη του θεωρήματος Ellentuck.

Λέξεις κλειδιά: Ramsey, Nash-Williams, Ellentuck, Schreier.

Abstract

The main topic of this Master Thesis is Ramsey theory. Firstly we prove three basic theorems of the classical Ramsey theory, the Ramsey theorem, the Nash-Williams theorem and Ellentuck's theorem. Defining the thin Schreier families of finite subsets of natural numbers, defined by Farmaki, and the strong Cantor-Bendixson index, we prove an extended Ramsey theory, developed by Farmaki, including a Ramsey theorem for every countable ordinal, a stronger form of Nash-Williams partition theorem and a new proof of Ellentuck's theorem.

Key Words: Ramsey, Nash-Williams, Ellentuck, Schreier.

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία, που εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών μου για το μεταπτυχιακό δίπλωμα ειδίκευσης στα Θεωρητικά Μαθηματικά, έχει ως κεντρικό θέμα απειροσυνδιαστικά διαχωριστικά θεωρήματα τύπου Ramsey σε Λεπτές Οικογένειες Schreier για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό.

Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό και αποτελείται από πέντε παραγράφους. Στην πρώτη παράγραφο αναφέρονται οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στην εργασία. Στην δεύτερη παράγραφο ορίζονται τα καλά διατεταγμένα σύνολα και αποδεικνύεται η αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής για τα σύνολα αυτά. Στην τρίτη παράγραφο ορίζονται και χαρακτηρίζονται οι διατακτικοί αριθμοί, συνδέονται τα καλά διατεταγμένα σύνολα με τους διατακτικούς αριθμούς και αποδεικνύεται η αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής. Στην πέμπτη παράγραφο ορίζονται οι βασικές έννοιες της τοπολογίας, καθώς και οι δύο τοπολογίες που θα χρησιμοποιήθουν στην εργασία, η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης και η τοπολογία Ellentuck στις άπειρες ακολουθίες φυσικών αριθμών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύονται τρία βασικά θεωρήματα της κλασικής θεωρίας Ramsey. Πρώτα αποδεικνύεται το διαχωριστικό Θεώρημα Ramsey για κ-άδες φυσικών αριθμών ([R], 1929). Ακολούθως αποδεικνύεται το διαχωριστικό θεώρημα Nash-Williams για άπειρες ακολουθίες φυσικών αριθμών ([N-W], 1965), χρησιμοποιώντας την κλασική μέθοδο combinatorial forcing. Τέλος αποδεικνύεται ο χαρακτηρισμός των διαμεριστικών οικογενειών από άπειρες ακολουθίες φυσικών αριθμών, για τις οποίες ισχύει το ανάλογο διαχωριστικό θεώρημα,

δηλαδή το Θεώρημα Ellentuck ([E], 1974)).

Στα επόμενα τρία κεφάλαια αναπτύσσεται μία επεκταμένη, σε κάθε διατακτικό αριθμο, ισχυροποιημένη θεωρία Ramsey που αναπτύχθηκε από την Φαρμάκη ([F], 2004).

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζονται οι Λεπτές οικογένειες Schreier $\mathcal{A}_\xi$ για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ . Οι οικογένειες αυτές ορίστηκαν από την Φαρμάκη ([F], 2004) και είναι τροποποιήσεις των γενικευμένων οικογενειών Schreier $([A-A])$, που χρησιμοποιήθηκαν στην Συναρτησιακή Ανάλυση. Η λεπτότητα και ο επαγωγικός τους χαρακτήρας κάνει τις οικογένειες αυτές κατάλληλες για την θεωρία Ramsey. Αποδεικνύεται ότι οι οικογένειες αυτές έχουν ακόμη δύο σημαντικές ιδιότητες. Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει κανονική αναπαράσταση ως προς κάθε μία από τις οικογένειες $\mathcal{A}_\xi$ (Πρόταση 3.8) και κάθε οικογένεια $\mathcal{A}_\xi$ έχει πολυπλοκότητα ξ , μετρούμενη με ένα δείκτη ανάλογο του Cantor-Bendixson ([A-M-T], 1998).

Στο τέταρτο κεφάλαιο επεκτείνεται το θεώρημα Ramsey, μέσω των λεπτών οικογενειών Schreier, σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό, αντικαθιστώντας τις οικογένειες $[\mathbb{N}]^k$, όλων των k -άδων φυσικών αριθμών, με τις οικογένειες $\mathcal{A}_\xi$ (Θεώρημα 5.1). Στην περίπτωση που η διαμεριστική οικογένεια, πεπερασμένων υποσυνόλων φυσικών αριθμών, είναι κληρονομική ή γενικότερα δέντρο παίρνουμε ένα ισχυρότερο θεώρημα Ramsey (Θεωρήματα 4.6, 4.11), προσδιορίζοντας, μέσω του ισχυρού Cantor-Bendixson δείκτη, ποιό σκέλος της διχοτομίας ισχύει.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αποδεικνύεται μία ισχυροποιημένη μορφή του θεωρήματος Nash-Williams (Θεώρημα 5.4). Το θεώρημα αυτό προκύπτει άμεσα από το

ισχυροποιημένο θεώρημα Ramsey για την περίπτωση που η διαμεριστική οικογένεια είναι δέντρο (θεώρημα 4.12)

Στο κεφάλαιο 6 αποδεικνύεται ο χαρακτηρισμός των κατάλληλων διαμεριστικών οικογενειών, άπειρων ακολουθιών φυσικών αριθμών, ώστε να ισχύει το ανάλογο διαμεριστικό θεώρημα (completely Ramsey οικογένειες), δηλαδή το θεώρημα Ellentuck μέσω του ισχυροποιημένου θεωρήματος Ramsey (θεώρημα 4.11).

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια κ. Β. Φαρμάκη για την πολύτιμη βοήθειά της και για το χρόνο που αφιέρωσε για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας καθώς και τους καθηγητές κ. Δημητρακόπουλο και κ. Κουμουλλή για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής μου.

Γιώργος Μαργώνης
Αθήνα, Δεκέμβριος 2015

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές Έννοιες

1.1 Συμβολισμοί

Στην παράγραφο αυτή αναφέρονται οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιήθουν στην εργασία.

Ορισμός 1.1. Έστω $s, t \subseteq \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε:

$s \prec t$ αν s αρχικό τμήμα του t ,

$s < t$ αν $\max s < \min t$.

Ορισμός 1.2. Έστω $l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{N}$, τότε

$(l_1, l_2, \dots, l_n) = \{l_1, l_2, \dots, l_n : l_1 < l_2 < \dots < l_n\}$

Ορισμός 1.3. Έστω M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, τότε:

(i) $[M] = \{L \subseteq M : L \text{ άπειρο σύνολο}\}$

(ii) $[M]^{<\infty} = \{s \subseteq M : s \text{ πεπερασμένο σύνολο}\}$

(iii) $[\mathbb{N}]^\kappa = \{(n_1, n_2, \dots, n_\kappa) : n_i \in \mathbb{N} \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, \kappa\}, \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbb{N}.$

Ορισμός 1.4. Έστω $M \in [\mathbb{N}]$ και $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, τότε:

$$[s, M] = \{s \cup L : L \in [M] \text{ και } s < L\}.$$

Ορισμός 1.5. Έστω $X \subseteq [\mathbb{N}]$.

Η X λέγεται **completely Ramsey** αν για κάθε $M \in [\mathbb{N}]$ και κάθε $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$,

υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } [a, L] \subseteq X$$

$$\text{είτε } [a, L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X$$

Ορισμός 1.6. Έστω $\mathcal{F}$ μία οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$.

(i) Η $\mathcal{F}$ λέγεται **λεπτή** αν δεν υπάρχουν $s, t \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $s \prec t$

(ii) $\mathcal{F}^* = \{t \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : t \prec s \text{ για κάποιο } s \in \mathcal{F}\} \cup \{\emptyset\}$

(iii) $\mathcal{F}_* = \{t \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : t \subseteq s \text{ για κάποιο } s \in \mathcal{F}\}$

(iv) Η $\mathcal{F}$ λέγεται **δέντρο** αν $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$

(v) Η $\mathcal{F}$ λέγεται **κληρονομική** αν $\mathcal{F}_* = \mathcal{F}$.

1.2 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

Στην παράγραφο αυτή ορίζονται τα καλά διατεταγμένα σύνολα και αποδεικνύεται η αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής για καλά διατεταγμένα σύνολα.

Συμβολισμός. Με $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z} = \{\pm n : n \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο των ακεραίων, με

$\mathbb{Q} = \{k/l : k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ το σύνολο των ρητών αριθμών, με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών και με $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Αν X είναι υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών με $0 \in X$, θέτουμε $X^* = X \setminus \{0\}$.

Ορισμός 1.7. Δύο σύνολα A, B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει αντιστοιχία $f : A \rightarrow B$ 1-1 και επί και γράφουμε $A =_c B$.

Ορισμός 1.8. Ένα σύνολο A είναι **πεπερασμένο** αν υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε

$$A =_c \{i \in \mathbb{N} : i < n\} = \{0, \dots, n-1\},$$

αλλιώς το A είναι **άπειρο**.

Το σύνολο A είναι **αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, αλλιώς είναι **υπεραριθμήσιμο**.

Παρατήρηση 1.9. Το κενό σύνολο, $\emptyset$, είναι πεπερασμένο, αφού $\emptyset = \{i \in \mathbb{N} : i < 0\}$.

Ορισμός 1.10. Το **δυναμοσύνολο** $\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A , δηλαδή

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \text{ είναι σύνολο και } X \subseteq A\}.$$

Ορισμός 1.11. Έστω X ένα σύνολο και $\leq$ μια διμελής σχέση με τις ιδιότητες

- (i) $x \leq x$ για κάθε $x \in X$ (**αυτοπαθής**).
- (ii) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$ για κάθε $x, y, z \in X$ (**μεταβατική**).
- (iii) Αν $x, y \in X$ με $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$ (**αντισυμμετρική**).
- (iv) Για κάθε $x, y \in X$ ή $x \leq y$ ή $y \leq x$ (**γραμμική**).

Αν ισχύουν οι (i),(ii), τότε το $(X, \leq)$ λέγεται **προδιατεταγμένο**.

Αν ισχύουν οι (i),(ii),(iii), τότε το $(X, \leq)$ λέγεται **μερικά διατεταγμένο**.

Αν ισχύουν οι (i),(ii),(iii),(iv), τότε το $(X, \leq)$ λέγεται **ολικά διατεταγμένο**.

Ορισμός 1.12. Έστω $(X, \leq)$ ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο. Το X λέγεται **καλά διατεταγμένο σύνολο**, αν κάθε μη κενό υποσύνολο A του X έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή αν υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε για κάθε $x \in A$ να έχουμε $x_0 \leq x$.

Πρόταση 1.13. Έστω $(A, \leq)$ ολικά διατεταγμένο σύνολο. Τότε το A είναι καλά διατεταγμένο σύνολο αν και μόνο αν δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία στοιχείων του A .

Απόδειξη. Έστω ότι A είναι καλά διατεταγμένο σύνολο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του A γνησίως φθίνουσα, άρα

$$x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$$

Θεωρούμε το σύνολο $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, γιατί αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το x_{n_0} να είναι το ελάχιστο στοιχείο του B έχουμε ότι $x_{n_0+1} < x_{n_0}$ και $x_{n_0+1} \in B$ άτοπο.

Έστω τώρα ότι το $(A, \leq)$ δεν είναι καλά διατεταγμένο. Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του A , που είναι γνησίως φθίνουσα. Έστω $B \subseteq A$ μη κενό που δεν έχει ελάχιστο στοιχείο και έστω $x_1 \in B$. Τότε υπάρχει $x_2 \in B$ με $x_2 < x_1$. Έστω ότι έχουμε βρει $x_1 > \dots > x_n$. Τότε $B \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ είναι μη κενό και μπορούμε να επιλέξουμε $x_{n+1} \in B$ με $x_{n+1} < x_n$, διότι το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. $\square$

Παράδειγμα 1.14. Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο, αφού κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο στοιχείο. Από την άλλη τα σύνολα των ακεραίων $\mathbb{Z}$ και των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ δεν είναι καλά διατεταγμένα, αφού υπάρχουν υποσύνολά τους που δεν έχουν ελάχιστο στοιχείο.

Ορισμός 1.15. Έστω $(X, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται **αλυσίδα**, αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει ή $x \leq y$ ή $y \leq x$, δηλαδή αν το A είναι ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του X .

Ορισμός 1.16. Έστω $(X, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Τότε για κάθε $x \in X$ ορίζουμε το σύνολο των προηγούμενων στοιχείων του x .

$$P(x) = \{y \in X : y < x\}$$

Ορισμός 1.17. Έστω $(X, \leq), (Y, \leq)$ μερικά διατεταγμένα σύνολα. Μια συνάρτηση $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$ λέγεται **εμφύτευση** (ως προς $\leq$), αν η f είναι 1-1 και αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ ισχύει

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Δηλαδή η f διατηρεί τη διάταξη. Αν η εμφύτευση f είναι επιπλέον επί, τότε λέγεται **ισομορφισμός διάταξης**.

Παρατήρηση 1.18. Αν $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$ είναι εμφύτευση τότε επειδή η f είναι 1-1 τότε για κάθε $x_1, x_2 \in X$ ισχύει $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Θεώρημα 1.19. (Υπερπεπερασμένης Επαγωγής) Έστω $(A, \leq)$ ένα καλά διατεταγμένο σύνολο και $B \subseteq A$. Υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$a \in A \text{ και } P(a) \subseteq B \Rightarrow a \in B.$$

Τότε $A = B$.

Απόδειξη. Έστω ότι $B \neq A$ τότε $A \setminus B \neq \emptyset$ και $A \setminus B \subseteq A$. Το $(A, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο, άρα υπάρχει $a_0 \in A \setminus B$ ελάχιστο στοιχείο. Τότε $P(a_0) \subseteq B$ και από υπόθεση έχουμε ότι $a_0 \in B$, άτοπο. Άρα $A = B$. $\square$

Πόρισμα 1.20. Έστω $(A, \leq)$ καλά διατεταγμένο σύνολο και $f : (A, \leq) \rightarrow (A, \leq)$ μια εμφύτευση. Τότε η f είναι μη φθίνουσα, δηλαδή $a \leq f(a)$ για κάθε $a \in A$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{a \in A : a \leq f(a)\}$. Θα δείξουμε ότι $B = A$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι, αν $a \in A$ και $P(a) \subseteq B$, τότε $a \in B$. Έστω $a \in A$ με $P(a) \subseteq B$ και υποθέτουμε ότι $a \notin B$. Τότε $f(a) < a$ και άρα $f(a) \in P(a) \subseteq B$. Επομένως $f(a) \leq f(f(a))$. Όμως η f είναι εμφύτευση και επειδή $f(a) < a$ έχουμε ότι $f(f(a)) < f(a)$. Άτοπο, άρα $A = B$ οπότε $a \leq f(a)$ για κάθε $a \in A$. $\square$

Πόρισμα 1.21. Έστω $(A, \leq), (B, \leq)$ καλά διατεταγμένα σύνολα και έστω $f : (A, \leq) \rightarrow (B, \leq)$ ισομορφισμός διάταξης. Τότε ο ισομορφισμός αυτός είναι μοναδικός.

Απόδειξη. Έστω $f : (A, \leq) \rightarrow (B, \leq), g : (A, \leq) \rightarrow (B, \leq)$ ισομορφισμοί διάταξης. Τότε η $g^{-1} \circ f : (A, \leq) \rightarrow (A, \leq)$ είναι εμφύτευση και από το Πόρισμα (??) έχουμε ότι $a \leq g^{-1}(f(a))$ για κάθε $a \in A$ και άρα $g(a) \leq f(a)$ για κάθε $a \in A$. Από την άλλη η $f^{-1} \circ g : (A, \leq) \rightarrow (A, \leq)$ είναι εμφύτευση οπότε πάλι από Πόρισμα (??) έχουμε ότι $a \leq f^{-1}(g(a))$ για κάθε $a \in A$, οπότε έχουμε ότι $f(a) \leq g(a)$ για κάθε $a \in A$. Άρα δείξαμε ότι $f(a) = g(a)$ για κάθε $a \in A$ και επομένως η f είναι μοναδική. $\square$

Πόρισμα 1.22. Έστω $(A, \leq)$ καλά διατεταγμένο σύνολο. Τότε δεν είναι ισόμορφο με ένα αρχικό τμήμα $P(x) = \{a \in A : a < x\}$ για κάθε $x \in A$.

Απόδειξη. Έστω $x \in A$ και $f : (A, \leq) \rightarrow (P(x), \leq)$ ισομορφισμός. Τότε η f είναι εμφύτευση και άρα $a \leq f(a)$ για κάθε $a \in A$, άρα και $x \leq f(x)$. Όμως $f(a) \in P(x)$ για κάθε $a \in A$ άρα και $f(x) \in P(x)$. Οπότε $f(x) < x$ άτοπο. $\square$

1.3 Διατακτικοί Αριθμοί

Στη παράγραφο αυτή ορίζονται και χαρακτηρίζονται οι διατακτικοί αριθμοί, συνδέονται τα καλά διατεταγμένα σύνολα με τους διατακτικούς αριθμούς και αποδεικνύεται η αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής.

Ορισμός 1.23 (von Neumann). Ένα σύνολο ξ λέγεται **διατακτικός αριθμός (ordinal)** αν ισχύουν:

- i Αν $\zeta \in \xi$, τότε $\zeta \subseteq \xi$.
- ii Αν $\zeta, \eta \in \xi$, τότε είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$.
- iii Για κάθε $A \subseteq \xi$ μη κενό υπάρχει $\zeta \in A$, ώστε $\zeta \cap A = \emptyset$.

Παράδειγμα 1.24. Η κατασκευή των φυσικών αριθμών:

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$

Λήμμα 1.25. Έστω ξ ένας διατακτικός αριθμός. Τότε δεν υπάρχουν σύνολα ξ', ξ'', ξ''' τέτοια ώστε

$$\xi' \in \xi''' \in \xi'' \in \xi' \in \xi \quad (1.1)$$

Ιδιαίτερα $\xi \notin \xi$ και δεν υπάρχουν σύνολα ξ', ξ'' τέτοια ώστε

$$\xi' \in \xi'' \in \xi' \in \xi \quad (1.2)$$

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν σύνολα ξ', ξ'', ξ''' που να ικανοποιούν την (??). Θέτουμε $A = \{\xi', \xi'', \xi'''\}$. Επειδή $\xi' \in \xi$ έχουμε ότι $\xi' \subseteq \xi$. Επειδή $\xi'' \in \xi'$, έχουμε ότι $\xi'' \in \xi$ και άρα $\xi'' \subseteq \xi$. Επειδή $\xi''' \in \xi''$ έχουμε ότι $\xi''' \in \xi$ και άρα $\xi''' \subseteq \xi$. Επομένως το A είναι μη κενό υποσύνολο του ξ και άρα υπάρχει $\eta \in A$ με $\eta \cap A = \emptyset$. Όμως $\xi'' \in A \cap \xi' \neq \emptyset$, $\xi''' \in A \cap \xi'' \neq \emptyset$, $\xi' \in A \cap \xi''' \neq \emptyset$. Άρα δεν υπάρχει

$\eta \in A$ με $\eta \cap A = \emptyset$, άτοπο.

Ιδιαίτερα $\xi \notin \xi$ αλλιώς θα μπορούσαμε να πάρουμε $\xi = \xi' = \xi'' = \xi'''$.

Αν τώρα υπάρχουν σύνολα ξ', ξ'' με $\xi' \in \xi'' \in \xi' \in \xi$ τότε θέτοντας $A = \{\xi', \xi''\}$ έχουμε ότι $A \subseteq \xi$ και έχουμε ότι $\xi' \in \xi'' \cap A \neq \emptyset$ και $\xi'' \in \xi' \cap A \neq \emptyset$, άτοπο. Άρα δεν υπάρχουν τέτοια ξ', ξ'' . $\square$

Λήμμα 1.26. Έστω ξ διατακτικός αριθμός και ζ με $\zeta \in \xi$. Τότε ο ζ είναι διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Έστω $\zeta \neq \emptyset$ και $\eta \in \zeta$. Τότε για $\theta \in \eta$ έχουμε $\theta \in \eta \in \zeta \in \xi$. Αφού ο ξ είναι διατακτικός αριθμός και $\zeta \in \xi$ έχουμε ότι $\zeta \subseteq \xi$ οπότε $\eta \in \xi$ άρα $\eta \subseteq \xi$ και τελικά έχουμε $\theta \in \xi$. Αφού $\theta, \zeta \in \xi$, από τη δεύτερη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών, έχουμε είτε $\theta = \zeta$, είτε $\theta \in \zeta$, είτε $\zeta \in \theta$.

Αν $\theta = \zeta$, τότε $\zeta \in \eta \in \zeta \in \xi$ και από Λήμμα (??) έχουμε άτοπο.

Αν $\zeta \in \theta$, τότε $\zeta \in \theta \in \eta \in \zeta \in \xi$ και πάλι από Λήμμα (??) έχουμε άτοπο.

Επομένως $\theta \in \zeta$ και άρα $\eta \subseteq \zeta$.

Έστω $\eta, \theta \in \zeta$. Τότε αφού $\zeta \in \xi$ έχουμε ότι $\zeta \subseteq \xi$ και άρα $\eta, \theta \in \xi$. Επομένως, αφού ο ξ είναι διατακτικός αριθμός έχουμε ότι είτε $\theta = \eta$, είτε $\theta \in \eta$, είτε $\eta \in \theta$.

Τέλος έστω $A \subseteq \zeta \subseteq \xi$ μη κενό. Τότε αφού ο ξ είναι διατακτικός υπάρχει $\eta \in A$ με $\eta \cap A = \emptyset$. Άρα ο ζ είναι διατακτικός αριθμός. $\square$

Ορισμός 1.27. Έστω ξ, ζ διατακτικοί αριθμοί. Τότε ορίζουμε

$$\zeta \leq \xi \Leftrightarrow \zeta \subseteq \xi$$

$$\zeta < \xi \Leftrightarrow \zeta \subsetneq \xi$$

Επίσης ορίζουμε $P(\xi) = \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός αριθμός με } \zeta \subsetneq \xi\}$

Λήμμα 1.28. Έστω ξ, ζ διατακτικοί αριθμοί. Τότε

$$\zeta \subsetneq \xi \Leftrightarrow \zeta \in \xi.$$

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Επειδή ο ξ είναι διατακτικός αριθμός και $\zeta \in \xi$ έχουμε ότι $\zeta \subseteq \xi$ και μάλιστα $\zeta \subsetneq \xi$ γιατί αν $\zeta = \xi$ τότε $\zeta = \xi \notin \xi$, άτοπο.

($\Rightarrow$) Έστω, $\zeta \subsetneq \xi$. Τότε $\xi \setminus \zeta \neq \emptyset$ και $\xi \setminus \zeta \subseteq \xi$. Επειδή ο ξ είναι διατακτικός αριθμός υπάρχει $\eta \in \xi \setminus \zeta$ με $\eta \cap (\xi \setminus \zeta) = \emptyset$, άρα $\eta \subseteq \zeta$. Αφού $\eta \in \xi$ τότε $\eta \subseteq \xi$.

Θα δείξουμε ότι $\zeta = \eta$.

Πράγματι έστω $\eta \neq \zeta$. Τότε $\eta \subsetneq \zeta$ και άρα $\zeta \setminus \eta \neq \emptyset$ και $\zeta \setminus \eta \subseteq \zeta$. Τότε αφού ζ είναι διατακτικός αριθμός, υπάρχει $\theta \in \zeta \setminus \eta$ με $\theta \cap (\zeta \setminus \eta) = \emptyset$ και άρα $\theta \subseteq \eta$. Επειδή $\theta \in \zeta$ έχουμε $\theta \subseteq \zeta$. Αφού $\eta \in \xi$, $\theta \in \zeta \subsetneq \xi$ και επειδή ο ξ είναι διατακτικός αριθμός από τη δεύτερη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών έχουμε ότι είτε $\theta = \eta$, είτε $\eta \in \theta$, είτε $\theta \in \eta$.

Αν $\theta = \eta$, τότε $\eta = \theta \in (\zeta \setminus \eta) \cap (\xi \setminus \zeta) = \emptyset$, άτοπο.

Αν $\theta \in \eta \in \xi \setminus \zeta$ τότε $\theta \in \xi \setminus \zeta$, άτοπο αφού $\theta \in \zeta$.

Αν $\eta \in \theta$ και επειδή $\theta \in \zeta$ έχουμε $\eta \in \zeta$, άτοπο αφού $\eta \in \xi \setminus \zeta$.

Επομένως $\zeta = \eta \in \xi$. □

Πρόταση 1.29. Έστω ξ διατακτικός αριθμός. Τότε $\xi = P(\xi)$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα (??) έχουμε ότι $\xi \notin \xi$ και επειδή αν $\zeta \in \xi$ ισχύει $\zeta \subseteq \xi$ τότε από Λήμμα (??) έχουμε

$$\xi \subseteq \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός με } \zeta \subsetneq \xi\} = \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός με } \zeta < \xi\} = P(\xi).$$

Από το Λήμμα (??) παρατηρούμε ότι έχουμε

$$P(\xi) = \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός με } \zeta < \xi\} = \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός με } \zeta \subsetneq \xi\} \subseteq \xi$$

και άρα

$$\xi = \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός με } \zeta < \xi\} = P(\xi).$$

□

Γράφοντας $P(\xi) = [0, \xi)$ τότε έχουμε $\xi = [0, \xi)$. Δηλαδή τα στοιχεία ενός διατακτικού αριθμού ξ είναι ακριβώς οι διατακτικοί αριθμοί που είναι γνήσια μικρότεροι από τον ξ .

Πόρισμα 1.30. Έστω ξ, ζ διατακτικοί αριθμοί με $\zeta \subsetneq \xi$. Τότε $\zeta \in \xi$ και $\zeta = \{\eta \in \xi : \eta < \zeta\}$, δηλαδή ο ζ είναι ένα αρχικό τμήμα του ξ .

Απόδειξη. Επειδή $\zeta = \{\eta \in \xi : \eta < \zeta\}$ έχουμε ότι $\zeta \subseteq \{\eta \in \xi : \eta < \zeta\}$. Έστω $\eta \in \xi$ με $\eta < \zeta$, τότε η διατακτικός αριθμός με $\eta < \zeta$ και άρα $\eta \in \zeta$ οπότε $\{\eta \in \xi : \eta < \zeta\} \subseteq \zeta$. Άρα $\zeta = \{\eta \in \xi : \eta < \zeta\}$. □

Πρόταση 1.31. Αν ξ είναι διατακτικός αριθμός τότε το $(\xi, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο.

Απόδειξη. Η σχέση $\leq$ είναι καλά ορισμένη στο ξ , αφού το ξ είναι το σύνολο των μικρότερων διατακτικών αριθμών, αφού για κάθε $\zeta \in \xi$ έχουμε $\zeta \subseteq \xi$ και άρα $\zeta \leq \xi$.

Για κάθε $\zeta \in \xi$ έχουμε $\zeta \subseteq \zeta$ και άρα $\zeta \leq \zeta$.

Έστω $\zeta, \eta, \theta \in \xi$ με $\zeta \leq \eta$ και $\eta \leq \theta$ άρα $\zeta \subseteq \eta$ και $\eta \subseteq \theta$ οπότε έχουμε ότι $\zeta \subseteq \theta$ και άρα $\zeta \leq \theta$.

Έστω $\zeta, \eta \in \xi$ με $\zeta \leq \eta$ και $\eta \leq \zeta$ τότε $\zeta \subseteq \eta$ και $\eta \subseteq \zeta$ και άρα $\zeta = \eta$.

Έστω $\zeta, \eta \in \xi$. Τότε από δεύτερη ιδιότητα διατακτικών αριθμών έχουμε ότι είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$. Οπότε έχουμε ότι είτε $\zeta \subseteq \eta$, είτε $\eta \subseteq \zeta$, και άρα είτε $\zeta \leq \eta$, είτε $\eta \leq \zeta$.

Επομένως δείξαμε ότι το $(\xi, \leq)$ είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο.

Έστω $A \subseteq \xi$ μη κενό. Τότε από τρίτη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών έχουμε ότι υπάρχει $\zeta \in A$ με $\zeta \cap A = \emptyset$. Έστω τώρα $\eta \in A$. Τότε $\zeta, \eta \in \xi$ και από δεύτερη

ιδιότητα των διατακτικών αριθμών έχουμε ότι είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$.

Αν $\eta \in \zeta$ τότε $\eta \in \zeta \cap A = \emptyset$ άτοπο.

Οπότε έχουμε ότι είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$ δηλαδή $\zeta \subseteq \eta$ για κάθε $\eta \in A$ άρα $\zeta \leq \eta$ για κάθε $\eta \in A$ οπότε ο ζ είναι ελάχιστο στοιχείο του A .

Επομένως το $(\xi, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο. $\square$

Πρόταση 1.32. Έστω ξ, ζ διατακτικοί αριθμοί. Τότε ο $\xi \cap \zeta$ είναι διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Έστω $\eta \in \xi \cap \zeta$. Τότε $\eta \in \xi$ και $\eta \in \zeta$ οπότε $\eta \subseteq \zeta$ και $\eta \subseteq \xi$ και άρα $\eta \subseteq \xi \cap \zeta$.

Έστω $\eta, \theta \in \xi \cap \zeta$. Τότε $\eta, \theta \in \xi$ και $\eta, \theta \in \zeta$ και επειδή ζ, ξ είναι διατακτικοί αριθμοί από δεύτερη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών έχουμε ότι είτε $\eta = \theta$ είτε $\eta \in \theta$ είτε $\theta \in \eta$.

Έστω $A \subseteq \zeta \cap \xi$ μη κενό. Τότε $A \subseteq \zeta$ και $A \subseteq \xi$ και από τρίτη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών υπάρχει $\theta \in A$ με $\theta \cap A = \emptyset$.

Οπότε $\zeta \cap \xi$ είναι διατακτικός αριθμός. $\square$

Πρόταση 1.33. Έστω ζ, ξ διατακτικοί αριθμοί. Τότε έχουμε ότι ή $\zeta \subseteq \xi$ ή $\xi \subseteq \zeta$. Δηλαδή κάθε σύνολο από διατακτικούς αριθμούς είναι ολικά διατεταγμένο.

Απόδειξη. Έστω ότι $\zeta \not\subseteq \xi$ και $\xi \not\subseteq \zeta$. Τότε από Πρόταση (??) έχουμε ότι ο $\zeta \cap \xi$ είναι διατακτικός αριθμός και επίσης $\zeta \cap \xi \not\subseteq \xi$ και $\zeta \cap \xi \not\subseteq \zeta$ και από Λήμμα (??) έχουμε ότι $\zeta \cap \xi \in \xi$ και $\zeta \cap \xi \in \zeta$. Επομένως, $\zeta \cap \xi \in \zeta \cap \xi$ άτοπο. $\square$

Πρόταση 1.34. Έστω ξ, ζ διατακτικοί αριθμοί με $\xi \neq \zeta$. Τότε τα σύνολα $(\xi, \leq), (\zeta, \leq)$ δεν είναι ισόμορφα με ισομορφισμό διάταξης.

Απόδειξη. Από Πρόταση (??) έχουμε ότι ή $\xi \subsetneq \zeta$ ή $\zeta \subsetneq \xi$.

Έστω ότι $\zeta \subsetneq \xi$ τότε από Λήμμα (??) και Πρόταση (??) έχουμε ότι το ζ είναι αρχικό τμήμα του ξ , δηλαδή $\zeta = \{\eta \in \xi : \eta \leq \zeta\}$. Έτσι από Πόρισμα (??) το ξ δεν είναι ισόμορφο με το ζ . $\square$

Πρόταση 1.35. Έστω ξ διατακτικός αριθμός. Τότε ο $\xi \cup \{\xi\}$ είναι διατακτικός αριθμός και $\xi \cup \{\xi\} = \xi + 1$ που είναι ο αμέσως επόμενος του ξ . Δηλαδή αν η διατακτικός αριθμός με $\xi < \eta$ τότε $\xi + 1 \leq \eta$.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι ο $\xi \cup \{\xi\} = \xi + 1$ είναι διατακτικός αριθμός.

Έστω $\zeta \in \xi + 1$. Τότε ή $\zeta \in \xi$ ή $\zeta = \xi$.

Αν $\zeta \in \xi$ τότε $\zeta \subseteq \xi \subseteq \xi + 1$.

Αν $\zeta = \xi$ τότε $\zeta = \xi \subseteq \xi + 1$.

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $\zeta \subseteq \xi + 1$.

Έστω $\zeta, \eta \in \xi + 1$ με $\zeta \neq \eta$. Τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

Αν $\zeta, \eta \in \xi$, επειδή ο ξ είναι διατακτικός αριθμός, έχουμε ότι είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$.

Αν $\zeta = \xi$, τότε έχουμε $\eta \in \xi = \zeta$.

Αν $\eta = \xi$, τότε $\zeta \in \xi = \eta$.

Άρα για κάθε $\zeta, \eta \in \xi + 1$ έχουμε ότι είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$.

Έστω $A \subseteq \xi + 1$ μη κενό.

Αν $A \subseteq \xi$, επειδή ο ξ είναι διατακτικός αριθμός, από τρίτη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών υπάρχει $\eta \in A$ με $\eta \cap A = \emptyset$.

Έστω $\xi \in A$, τότε αν $\xi \cap A = \emptyset$ έχουμε ότι $A = \xi$, οπότε θέτουμε $\eta = \xi$ και έχουμε $\eta \cap A = \emptyset$. Στην περίπτωση που $\xi \cap A \neq \emptyset$ έχουμε ότι $\xi \cap A \subseteq \xi$ και από τρίτη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών (για τον ξ) υπάρχει $\eta \in \xi \cap A$ με $\eta \cap \xi \cap A = \emptyset$. Όμως $\eta \in \xi$ και άρα $\eta \cap A = \eta \cap \xi \cap A = \emptyset$.

Επομένως ο $\xi \cup \{\xi\}$ είναι διατακτικός αριθμός.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο $\xi \cup \{\xi\} = \xi + 1$ είναι ο επόμενος του ξ . Έστω η διατακτικός αριθμός με $\xi < \eta$. Τότε έχουμε ότι $\xi \subsetneq \eta$ και από Λήμμα (??) έχουμε ότι $\xi \in \eta$. Οπότε έχουμε ότι $\xi + 1 = \xi \cup \{\xi\} \subseteq \eta$ και άρα $\xi + 1 \leq \eta$. $\square$

Πρόταση 1.36. Έστω A μη κενό σύνολο διατακτικών αριθμών, τότε το σύνολο $\cup A = \{\zeta \in \xi : \xi \in A\}$ είναι διατακτικός αριθμός και μάλιστα ο $\cup A$ είναι το supremum του A με την έννοια ότι $\xi \leq \cup A$ για κάθε $\xi \in A$ και αν η διατακτικός αριθμός με $\xi \leq \eta$ για κάθε $\xi \in A$ τότε $\cup A \leq \eta$.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι ο $\cup A$ είναι διατακτικός αριθμός.

Έστω $\zeta \in \cup A$. Τότε υπάρχει $\xi \in A$ με $\zeta \in \xi \in A$ άρα $\zeta \subseteq \xi$. Οπότε αν $x \in \zeta$, τότε $x \in \xi$ και άρα $x \in \cup A$. Δηλαδή $\zeta \subseteq \cup A$.

Έστω $\zeta, \eta \in \cup A$. Τότε υπάρχουν $\xi, \xi' \in A$ με $\zeta \in \xi \in A$ και $\eta \in \xi' \in A$. Από Πρόταση (??) έχουμε ότι ή $\xi \subseteq \xi'$ ή $\xi' \subseteq \xi$. Οπότε έχουμε ότι ή $\zeta, \eta \in \xi$ ή $\zeta, \eta \in \xi'$. Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$.

Έστω $B \subseteq \cup A$ μη κενό. Στη συνέχεια θεωρούμε $\zeta \in B \in \cup A$. Αν $\zeta \cap B = \emptyset$, τότε ικανοποιείται η τρίτη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών. Έστω ότι $\zeta \cap B \neq \emptyset$. Τότε $\zeta \cap B \subseteq \zeta$. Επομένως επειδή ζ είναι διατακτικός αριθμός, υπάρχει η διατακτικός αριθμός με $\eta \in \zeta \cap B$ και $\eta \cap \zeta \cap B = \emptyset$. Όμως $\eta \in \zeta$ και άρα $\eta \subseteq \zeta$. Οπότε $\eta \cap B = \eta \cap \zeta \cap B = \emptyset$. Άρα ο $\cup A$ είναι διατακτικός αριθμός.

Έστω η διατακτικός αριθμός τέτοιος ώστε $\xi \leq \eta$ για κάθε $\xi \in A$ και άρα $\xi \subseteq \eta$ για κάθε $\xi \in A$ και άρα $\cup A \subseteq \eta$ και έτσι $\cup A$ είναι το supremum του A . $\square$

Πρόταση 1.37. Κάθε μη κενό σύνολο διατακτικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη. Έστω A μη κενό σύνολο διατακτικών αριθμών και $\xi \in A$. Τότε $\cup A$ είναι διατακτικός αριθμός και επειδή $\xi \in A$ έχουμε ότι $\xi \subseteq \cup A + 1 = \cup A \cup \{\cup A\}$.

Επομένως, $A \subseteq \cup A + 1$. Επειδή το $\cup A + 1$ είναι διατακτικός αριθμός, είναι καλά διατεταγμένο σύνολο και το σύνολο A έχει ελάχιστο στοιχείο. $\square$

Πρόταση 1.38. Δεν υπάρχει σύνολο που να περιέχει όλους τους διατακτικούς αριθμούς

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σύνολο A και στη συνέχεια θέτουμε $B = \{\xi \in A : \xi \text{ διατακτικός αριθμός}\}$. Το B είναι σύνολο και θα δείξουμε ότι υπάρχει διατακτικός αριθμός, που δεν ανήκει στο B . Από Πρόταση (??) έχουμε ότι το $\cup B$ είναι διατακτικός αριθμός, άρα και ο $\zeta = \cup B \cup \{\cup B\}$ είναι ο επόμενος διατακτικός αριθμός. Τότε $\zeta \notin B$ γιατί για κάθε $\xi \in B$ έχουμε ότι $\xi \leq \cup B < \zeta$, δηλαδή αν $\zeta \in B$ έχουμε ότι $\zeta \leq \cup B$ άτοπο, αφού $\cup B < \zeta$. Οπότε αν υπήρχε το σύνολο $\mathcal{A}$ όλων των διατακτικών αριθμών θα υπήρχε διατακτικός αριθμός που δε θα ανήκε στο $\mathcal{A}$, άτοπο. $\square$

Ορισμός 1.39. Ένας διατακτικός αριθμός ξ είναι **επόμενος διατακτικός αριθμός** αν $\xi = \zeta + 1 = \zeta \cup \{\zeta\}$ για κάποιον διατακτικό αριθμό ζ . Αν ο ξ δεν είναι επόμενος, τότε λέγεται **οριακός διατακτικός αριθμός**.

Πρόταση 1.40. Υπάρχει μη μηδενικός οριακός διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σύνολο A τέτοιο ώστε $\emptyset \in A$ και αν $b \in A$ τότε $b \cup \{b\} \in A$. Θέτουμε $B = \{\eta \in A : \eta \text{ διατακτικός αριθμός}\}$ και παρατηρούμε ότι $B \subseteq A$ και αφού $\emptyset \in B$ έχουμε ότι $\emptyset \cup \{\emptyset\} \in B$. Στη συνέχεια θέτουμε $\xi = \cup B$. Θα δείξουμε ότι ο ξ δεν είναι επόμενος διατακτικός αριθμός. Έστω ότι ο ξ είναι επόμενος, τότε υπάρχει διατακτικός αριθμός ζ με $\xi = \zeta \cup \{\zeta\} = \cup B$. Τότε επειδή $\emptyset \in B$ έχουμε ότι $\emptyset \in \xi$ και άρα $\xi \neq \emptyset$. Επειδή $\xi = \cup B$ έχουμε ότι υπάρχει $\eta \in B$ με $\zeta \in \eta$ και άρα $\zeta \subsetneq \eta$. Επομένως έχουμε $\xi = \zeta \cup \{\zeta\} \subseteq \eta \subsetneq$

$\eta \cup \{\eta\} = \eta + 1$, δηλαδή $\xi \in \eta + 1$. Όμως $\eta + 1 \in B$ και επομένως $\eta + 1 \in \xi$ και άρα $\eta + 1 \subsetneq \xi$, ισοδύναμα $\eta + 1 < \xi$, άτοπο. Άρα ο ξ δεν είναι επόμενος διατακτικός αριθμός. $\square$

Παρατήρηση 1.41. Με ω θα συμβολίζουμε τον ελάχιστο οριακό διατακτικό αριθμό. Τότε $\omega = \mathbb{N}$ ικανοποιεί τα αξιώματα του Peano και τα στοιχεία του λέγονται πεπερασμένοι διατακτικοί αριθμοί και είναι οι φυσικοί αριθμοί.

Θεώρημα 1.42. Έστω $(A, \leq)$ ένα καλά διατεταγμένο σύνολο. Τότε είναι ισόμορφο ως προς ισομορφισμό διάταξης με μοναδικό διατακτικό αριθμό.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε τη μοναδικότητα. Έστω ότι υπάρχουν διατακτικοί αριθμοί ξ, ζ με $\xi \neq \zeta$, που είναι ισόμορφοι με το A . Τότε όμως και το ξ θα είναι ισόμορφο με το ζ και αυτό είναι άτοπο σύμφωνα με την Πρόταση (?). Θεωρούμε το σύνολο $B = A \cup \{t\}$ όπου $t \notin A$. Επεκτείνουμε τη διάταξη του A στο B θέτοντας $a < t$ για κάθε $a \in A$. Τότε το $(B, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο. Θεωρούμε το σύνολο $P(x) = \{y \in B : y < x\}$ για κάθε $x \in B$ και θέτουμε

$$C = \{x \in B : P(x) \text{ να είναι διατακτικά ισόμορφο με ένα διατακτικό αριθμό}\}$$

Θα αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι $B = C$. Πράγματι αρκεί να δείξουμε ότι αν $x \in B$ με $P(x) \subseteq C$ τότε $x \in C$.

Έστω $x \in B$ με $P(x) \subseteq C$. Τότε για κάθε $y \in P(x)$ υπάρχει διατακτικός αριθμός ξ_y και μοναδικός ισομορφισμός διάταξης $f_y : P(y) \rightarrow \xi_y$. Θέτουμε

$$f : \bigcup_{y < x} P(y) \rightarrow \bigcup_{y < x} \xi_y = \xi.$$

Τότε η f είναι ισομορφισμός διάταξης.

Πράγματι η f είναι καλά ορισμένη αφού αν $y_1, y_2 \in P(x) \subseteq B$ με $y_1 < y_2$, τότε $P(y_1) \subseteq P(y_2)$ και $f_{y_2}|_{P(y_1)} = f_{y_1}$.

Η f είναι 1-1, αφού αν $x_1, x_2 \in \bigcup_{y < x} P(y)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε έχουμε ότι $x_1 \in P(y_1)$ και $x_2 \in P(y_2)$. Αν $y_1 \leq y_2$, έχουμε ότι $P(y_1) \subseteq P(y_2)$ οπότε έχουμε ότι $f_{y_2}(x_1) = f(x_1) = f(x_2) = f_{y_2}(x_2)$ και επειδή f_{y_2} είναι 1-1, έχουμε ότι $x_1 = x_2$. Αν $y_2 \leq y_1$, έχουμε ότι $P(y_2) \subseteq P(y_1)$, οπότε έχουμε ότι $f_{y_1}(x_1) = f(x_1) = f(x_2) = f_{y_1}(x_2)$ και επειδή f_{y_1} είναι 1-1, έχουμε ότι $x_1 = x_2$.

Η f είναι επί, αφού αν $z \in \bigcup_{y < x} \xi_y = \xi$ τότε $z \in \xi_y$ για κάποιο $y < x$. Οπότε επειδή f_y είναι επί υπάρχει $x' \in P(y)$ με $f_y(x') = z$ και άρα $f(x') = z$.

Η f διατηρεί τη διάταξη. Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in \bigcup_{y < x} P(y)$ με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε ότι $x_1 \in P(y_1)$ και $x_2 \in P(y_2)$. Αν $y_1 \leq y_2$ έχουμε ότι $P(y_1) \subseteq P(y_2)$ οπότε $x_1, x_2 \in P(y_2)$ και άρα $f(x_1) = f_{y_2}(x_1) < f_{y_2}(x_2) = f(x_2)$. Αν $y_2 \leq y_1$ έχουμε ότι $P(y_2) \subseteq P(y_1)$ οπότε $x_1, x_2 \in P(y_1)$ και άρα $f(x_1) = f_{y_1}(x_1) < f_{y_1}(x_2) = f(x_2)$.

Άρα η f είναι ισομορφισμός διάταξης.

Αν το σύνολο $P(x)$ έχει maximum, έστω x_0 τότε $P(x) = \bigcup_{y < x} P(y) \cup \{x_0\}$ και άρα το $P(x)$ είναι διατακτικά ισόμορφο με τον $\xi \cup \{\xi\} = \xi + 1$, δηλαδή $x \in C$.

Αν το $P(x)$ δεν έχει maximum, τότε $P(x) = \bigcup_{y < x} P(y)$ και άρα το $P(x)$ είναι διατακτικά ισόμορφο με τον ξ , δηλαδή $x \in C$.

Άρα αποδείχθηκε ότι $B = C$ και επομένως $t \in C$, οπότε το $P(t) = A$ είναι ισομορφο με ένα διατακτικό αριθμό. $\square$

Θεώρημα 1.43 (Υπερπεπερασμένης Επαγωγής για Διατακτικούς Αριθμούς).

Έστω $\mathcal{C}$ μια κλάση διατακτικών αριθμών τέτοια ώστε

(i) $0 \in \mathcal{C}$,

(ii) αν $\alpha \in \mathcal{C}$, τότε $\alpha + 1 \in \mathcal{C}$,

- (iii) αν α είναι μη μηδενικός οριακός διατακτικός αριθμός και $\beta \in \mathcal{C}$ για κάθε $\beta < \alpha$, τότε $\alpha \in \mathcal{C}$.

Τότε $\mathcal{C}$ είναι η κλάση όλων των διατακτικών αριθμών.

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει το θεώρημα και έστω α ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $\alpha \notin \mathcal{C}$.

Αν $\alpha = 0$ από το (i) έχουμε ότι $\alpha \in \mathcal{C}$ άτοπο.

Αν α είναι επόμενος, τότε υπάρχει β διατακτικός αριθμός με $\beta + 1 = \alpha$ οπότε $\beta < \alpha$ και επειδή ο α είναι ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός με $\alpha \notin \mathcal{C}$ έχουμε ότι $\beta \in \mathcal{C}$ και από το (ii) έχουμε ότι $\alpha = \beta + 1 \in \mathcal{C}$ άτοπο.

Αν α είναι οριακός διατακτικός αριθμός και επειδή για κάθε $\beta < \alpha$ έχουμε $\beta \in \mathcal{C}$ τότε από (iii) έχουμε $\alpha \in \mathcal{C}$ άτοπο.

Αρα η κλάση $\mathcal{C}$ περιέχει όλους τους διατακτικούς αριθμούς. $\square$

1.4 Αριθμητική Διατακτικών Αριθμών

Στην παράγραφο αυτή ορίζεται η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός και οι δυνάμεις διατακτικών και αποδεικνύεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της Cantor κανονικής αναπαράστασης διατακτικού αριθμού.

Ορισμός 1.44 (Πρόσθεση Διατακτικών Αριθμών). Για κάθε διατακτικό αριθμό α ορίζουμε

$$(i) \quad \alpha + 0 = \alpha$$

$$(ii) \quad \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \text{ για κάθε } \beta \text{ διατακτικό αριθμό}$$

$$(iii) \quad \alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\} = \lim_{\xi \rightarrow \beta} (\alpha + \xi) \text{ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό } \beta \neq 0$$

Παρατήρηση 1.45. Αν στο (ii) θέσουμε $\beta = 0$, τότε έχουμε την ισότητα $\alpha + 1 = \alpha + 1$ όπου στο αριστερό μέρος έχουμε την πρόσθεση των διατακτικών αριθμών α και 1, ενώ στο δεξιό μέρος της ισότητας έχουμε τον επόμενο διατακτικό αριθμό του α .

Παρατήρηση 1.46. Παρατηρούμε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό α έχουμε ότι $(\alpha + 1) + 1 = \alpha + 2$ και γενικά $(\alpha + n) + 1 = \alpha + (n + 1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση 1.47. Αν θεωρήσουμε τον διατακτικό αριθμό ω , τότε έχουμε

$$\omega + \omega = \sup\{\omega + n : n < \omega\}.$$

Τώρα θεωρούμε το άθροισμα $m + \omega$ για κάποιον $m < \omega$. Τότε έχουμε

$$m + \omega = \sup\{m + n : n < \omega\} = \omega$$

επειδή m είναι φυσικός αριθμός, οπότε και $m + n$ είναι φυσικός αριθμός για κάθε $n < \omega$. Άρα έχουμε ότι $\omega + m \neq m + \omega$ οπότε η πρόσθεση των διατακτικών αριθμών δεν μεταθετική. Επίσης παρατηρούμε επειδή $1 \neq 2$ και επειδή $1 + \omega = 2 + \omega = \omega$ έχουμε ότι δεν ισχύει ο κανόνας της διαγραφής για την πρόσθεση από δεξιά.

Πρόταση 1.48. Έστω α, γ διατακτικοί αριθμοί όπου γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός. Τότε και ο $\alpha + \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Έστω $\zeta < \alpha + \gamma$. Επειδή $\alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \gamma\}$ υπάρχει $\xi < \gamma$ με $\zeta \leq \alpha + \xi$. Τότε

$$\zeta + 1 \leq (\alpha + \xi) + 1 = \alpha + (\xi + 1) < \alpha + \gamma.$$

Άρα $\alpha + \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός. □

Πρόταση 1.49. Έστω $(A_1, \leq_1), (A_2, \leq_2)$ ολικά διατεταγμένα σύνολα με $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Τότε το άθροισμα των A_1 και A_2 είναι το σύνολο $A = A_1 \cup A_2$ με διάταξη $\leq$ που ορίζεται ως εξής $a \leq b$ αν και μόνο αν

(i) $a, b \in A_1$ και $a \leq_1 b$ ή

(ii) $a, b \in A_2$ και $a \leq_2 b$ ή

(iii) $a \in A_1$ και $b \in A_2$

και μάλιστα είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο.

Απόδειξη. Αυτοπαθής. Έστω $a \in A$, τότε $a \in A_1$ ή $a \in A_2$, άρα $a \leq_1 a$ ή $a \leq_2 a$, οπότε $a \leq a$.

Μεταβατική. Έστω $a, b, c \in A$ με $a \leq b$ και $b \leq c$. Τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

Αν $a, b, c \in A_1$, τότε $a \leq_1 c$ και άρα $a \leq c$.

Αν $a, b, c \in A_2$, τότε $a \leq_2 c$ και άρα $a \leq c$.

Αν $a \in A_1$ και $c \in A_2$, τότε από τον ορισμό της $\leq$ είτε $b \in A_1$, είτε $b \in A_2$ έχουμε ότι $a \leq c$.

Αντισυμμετρική. Έστω $a, b \in A$ με $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε αναγκαστικά θα έχουμε ή $a, b \in A_1$ ή $a, b \in A_2$, γιατί αν $a \in A_1$ και $b \in A_2$, τότε δεν ισχύει $b \leq a$ και αν $b \in A_1$ και $a \in A_2$ δεν ισχύει $a \leq b$. Αν $a, b \in A_1$, τότε $a =_1 b$ και άρα $a = b$. Αν $a, b \in A_2$, τότε $a =_2 b$ και άρα $a = b$.

Γραμμική. Έστω $a, b \in A$. Αν $a, b \in A_1$, τότε ή $a \leq_1 b$ ή $b \leq_1 a$ και άρα $a \leq b$ ή $b \leq a$. Αν $a, b \in A_2$, τότε ή $a \leq_2 b$ ή $b \leq_2 a$ και άρα $a \leq b$ ή $b \leq a$. Αν $a \in A_1$ και $b \in A_2$, τότε $a \leq b$ ενώ αν $a \in A_2$ και $b \in A_1$ τότε $b \leq a$.

□

Πρόταση 1.50. Έστω $(A_1, \leq_1), (A_2, \leq_2)$ ολικά διατεταγμένα σύνολα. Τότε το γινόμενο των A_1 και A_2 είναι το σύνολο $A = A_1 \times A_2$ με διάταξη $\leq$ που ορίζεται ως εξής: $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ αν και μόνο αν $a_1 <_1 b_1$ ή αν $a_1 =_1 b_1$, τότε $a_2 <_2 b_2$ και μάλιστα είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο.

Απόδειξη. Αυτοπαθής. Έστω $(a_1, a_2) \in A$, τότε $a_1 \leq_1 a_1$ και $a_2 \leq_2 a_2$ άρα $(a_1, a_2) \leq (a_1, a_2)$.

Μεταβατική. Έστω $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in A$ με $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ και $(b_1, b_2) \leq (c_1, c_2)$.

Αν $a_1 <_1 b_1$ και $b_1 \leq_1 c_1$ έχουμε $a_1 \leq_1 c_1$ και άρα $(a_1, a_2) \leq (c_1, c_2)$.

Αν $a_1 =_1 b_1$ και $b_1 =_1 c_1$, τότε $a_2 \leq_2 b_2$ και $b_2 \leq_2 c_2$ και άρα $(a_1, a_2) \leq (c_1, c_2)$.

Αν $a_1 =_1 b_1$ και $b_1 \leq_1 c_1$ έχουμε $a_1 \leq_1 c_1$, οπότε $(a_1, a_2) \leq (c_1, c_2)$.

Αντισυμμετρική. Έστω $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A$ με $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ και $(b_1, b_2) \leq (a_1, a_2)$.

Έχουμε $a_1 \leq_1 b_1$ και $b_1 \leq_1 a_1$ οπότε $a_1 =_1 b_1$ και άρα $a_2 \leq_2 b_2$ και $b_2 \leq_2 a_2$ οπότε $a_2 =_2 b_2$ και έχουμε $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

Γραμμική. Έστω $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A$. Τότε ισχύει μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Αν $a_1 <_1 b_1$, έχουμε $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$

Αν $b_1 <_1 a_1$, έχουμε $(b_1, b_2) < (a_1, a_2)$

Αν $a_1 =_1 b_1$ και $a_2 <_2 b_2$, έχουμε $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$

Αν $a_1 =_1 b_1$ και $b_2 <_2 a_2$, έχουμε $(b_1, b_2) < (a_1, a_2)$

Αν $a_1 =_1 b_1$ και $a_2 =_2 b_2$, έχουμε $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$

οπότε σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι τα $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ είναι συγκρίσιμα. Άρα δείξαμε ότι το $(A, \leq)$ είναι ολικά διατεταγμένο. $\square$

Λήμμα 1.51. (i) Έστω α, β και γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\alpha < \beta$ αν και μόνο

$$\text{αν } \gamma + \alpha < \gamma + \beta$$

(ii) Έστω α, β και γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

(iii) Έστω α, β και γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε ισχύει $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

Απόδειξη. (i) Θα το αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο β .

Έστω $\beta = \alpha + 1$, τότε $\gamma + \alpha < (\gamma + \alpha) + 1 = \gamma + (\alpha + 1) = \gamma + \beta$.

Έστω τώρα $\alpha < \beta$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $\xi < \beta$ με $\alpha < \xi$ ότι ισχύει $\gamma + \alpha < \gamma + \xi$.

Αν β είναι επόμενος υπάρχει διατακτικός αριθμός ξ με $\alpha \leq \xi$ και $\beta = \xi + 1$. Τότε από επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\gamma + \alpha \leq \gamma + \xi < (\gamma + \xi) + 1 = \gamma + (\xi + 1) = \gamma + \beta.$$

Αν β είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε για κάθε $\alpha < \xi < \beta$ ισχύει

$$\gamma + \alpha < \gamma + \xi \leq \sup\{\gamma + \xi : \xi < \beta\} = \gamma + \beta.$$

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$. Αν $\beta < \alpha$, τότε έχουμε $\gamma + \beta < \gamma + \alpha$ άτοπο. Αν $\alpha = \beta$, τότε έχουμε $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$ άτοπο.

Οπότε από τη γραμμικότητα της $\leq$ έχουμε ότι $\alpha < \beta$.

(ii) Έστω ότι ισχύει $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$. Αν $\alpha \neq \beta$ έχουμε ότι ή $\alpha < \beta$ ή $\beta < \alpha$ και από το (i) έχουμε ότι ή $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ ή $\gamma + \beta < \gamma + \alpha$ αντίστοιχα, άτοπο. Άρα $\alpha = \beta$.

Αν $\alpha = \beta$, τότε προφανώς $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$.

(iii) Θα το αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ .

Για $\gamma = 0$ έχουμε ότι $(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0)$.

Έστω ότι ισχύει η υπόθεση για κάθε διατακτικό αριθμό $\xi < \gamma$.

Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος και έχουμε

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= (\alpha + \beta) + (\xi + 1) = [(\alpha + \beta) + \xi] + 1 = [\alpha + (\beta + \xi)] + 1 \\ &= \alpha + [(\beta + \xi) + 1] = \alpha + [\beta + (\xi + 1)] = \alpha + (\beta + \gamma). \end{aligned}$$

Αν ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε ότι

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \sup\{(\alpha + \beta) + \delta : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha + (\beta + \delta) : \delta < \gamma\}$$

Παρατηρούμε ότι $\beta + \gamma = \sup\{\beta + \delta : \delta < \gamma\}$ και από Πρόταση (??) ο $\beta + \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και άρα $\beta + \gamma = \sup\{\xi : \xi < \beta + \gamma\}$. Επομένως,

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \sup\{\alpha + (\beta + \delta) : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta + \gamma\} = \alpha + (\beta + \gamma)$$

□

Θεώρημα 1.52. Έστω $(A_1, \leq_1), (A_2, \leq_2)$ καλά διατεταγμένα σύνολα με

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ισόμορφα ως προς διατακτικούς αριθμούς α_1 και α_2 αντίστοιχα.

Τότε το άθροισμα $A = A_1 \cup A_2$ των A_1 και A_2 είναι ισόμορφο με τον διατακτικό αριθμό $\alpha_1 + \alpha_2$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με υπερπεπερασμένη επαγωγή στον α_2 .

Αν $\alpha_2 = 0$, τότε για $A_2 = \emptyset$ έχουμε ότι $\emptyset = 0$, οπότε έχουμε ότι

$$A_1 \cup \emptyset = A_1 \simeq \alpha_1 = \alpha_1 + 0.$$

Αν $\alpha_2 = \xi + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός. Επειδή $A_2 \simeq \alpha_2 = \xi + 1$ έχουμε ότι το A_2 έχει μέγιστο στοιχείο, έστω $x_0 \in A_2$. Οπότε $A_2 \setminus \{x_0\} \simeq \xi < \alpha_2$.

Από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει διατακτικός ισομορφισμός $f_0 : A_1 \cup (A_2 \setminus \{x_0\}) \rightarrow \alpha_1 + \xi$, γιατί $\xi < \alpha_2$. Επεκτείνουμε το $A_1 \cup (A_2 \setminus \{x_0\})$ στο

$A_1 \cup (A_2 \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0\} = A_1 \cup A_2$ και τον ισομορφισμό f_0 στον ισομορφισμό f αντιστοιχίζοντας το $\{x_0\}$ στον διατακτικό αριθμό $\alpha_1 + \xi$, οπότε

$$f : A_1 \cup A_2 \rightarrow (\alpha_1 + \xi) \cup \{\alpha_1 + \xi\} = (\alpha_1 + \xi) + 1.$$

Όμως $(\alpha_1 + \xi) + 1 = \alpha_1 + (\xi + 1) = \alpha_1 + \alpha_2$, άρα $A_1 \cup A_2 \simeq \alpha_1 + \alpha_2$.

Έστω ότι α_2 είναι οριακός διατακτικός αριθμός. Τότε επειδή $A_2 \simeq \alpha_2$ έχουμε ότι το A_2 δεν έχει μέγιστο στοιχείο και άρα $A_2 = \bigcup_{x \in A_2} P(x)$. Οπότε για κάθε $x \in A_2$ υπάρχει διατακτικός αριθμός ξ_x τέτοιος ώστε $P(x) \simeq \xi_x$ και από επαγωγική υπόθεση και επειδή $\xi_x < \alpha_2$ έχουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $f_x : A_1 \cup P(x) \rightarrow \alpha_1 + \xi_x$ και άρα η

$$f : \bigcup_{x \in A_2} (A_1 \cup P(x)) \rightarrow \bigcup_{x \in A_2} (\alpha_1 + \xi_x)$$

είναι ισομορφισμός. Παρατηρούμε ότι $\bigcup_{x \in A_2} (A_1 \cup P(x)) = A_1 \cup A_2$ και ότι

$\bigcup_{x \in A_2} \xi_x = \alpha_2 = \sup\{\xi : \xi < \alpha_2\}$ γιατί αν ισχύει $\bigcup_{x \in A_2} \xi_x = \xi < \alpha_2$, τότε έχουμε ότι $A_2 \simeq \xi < \alpha_2$, άτοπο. Επίσης από Πρόταση (??) ο $\alpha_1 + \alpha_2$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, οπότε έχουμε ότι $\alpha_1 + \alpha_2 = \sup\{\zeta : \zeta < \alpha_1 + \alpha_2\} = \sup\{\alpha_1 + \xi : \xi < \alpha_2\}$ και άρα

$$\bigcup_{x \in A_2} (\alpha_1 + \xi_x) = \sup\{\alpha_1 + \xi : \xi < \alpha_2\} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Δηλαδή $A_1 \cup A_2 = \alpha_1 + \alpha_2$. □

Λήμμα 1.53. Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί με $\alpha \leq \beta$. Τότε υπάρχει μοναδικός διατακτικός αριθμός ξ με $\beta = \xi + \alpha$.

Απόδειξη. Επειδή $\alpha \leq \beta$ έχουμε ότι $\alpha \subseteq \beta$. Θέτουμε $A = \{\zeta : \alpha \leq \zeta < \beta\}$. Το A είναι καλά διατεταγμένο σύνολο και από Θεώρημα (??) έχουμε ότι υπάρχει

μοναδικός διατακτικός αριθμός ξ ισόμορφος με το A . Από Θεώρημα (??) έχουμε ότι

$$\beta = \alpha \cup A \simeq \alpha + \xi$$

και άρα $\beta = \alpha + \xi$

□

Ορισμός 1.54 (Πολλαπλασιασμός Διατακτικών Αριθμών). Για κάθε διατακτικό αριθμό α ορίζουμε

$$(i) \quad \alpha \cdot 0 = 0$$

$$(ii) \quad \alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \text{ για κάθε } \beta \text{ διατακτικό αριθμό}$$

$$(iii) \quad \alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\} = \lim_{\xi \rightarrow \beta} (\alpha \cdot \xi) \text{ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό } \beta \neq 0.$$

Παρατήρηση 1.55. (i) $\alpha \cdot 1 = \alpha \cdot (0 + 1) = \alpha \cdot 0 + \alpha = \alpha$

$$(ii) \quad \alpha \cdot 2 = \alpha \cdot (1 + 1) = \alpha \cdot 1 + \alpha = \alpha + \alpha \text{ ιδιαίτερα έχουμε ότι } \omega \cdot 2 = \omega + \omega.$$

$$(iii) \quad \alpha \cdot 3 = \alpha \cdot (2 + 1) = \alpha \cdot 2 + \alpha = \alpha + \alpha + \alpha$$

$$(iv) \quad \alpha \cdot \omega = \sup\{\alpha \cdot n : n < \omega\}$$

$$(v) \quad 1 \cdot \alpha = \alpha. \text{ Πράγματι με υπερπεπερασμένη επαγωγή έχουμε.}$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot (\alpha + 1) = 1 \cdot \alpha + 1 = \alpha + 1$$

Αν α είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε

$$1 \cdot \alpha = \sup\{1 \cdot \xi : \xi < \alpha\} = \sup\{\xi : \xi < \alpha\} = \alpha.$$

$$(vi) \quad 2 \cdot \omega = \sup\{2 \cdot n : n < \omega\} = \omega \text{ ενώ } \omega \cdot 2 = \omega + \omega \text{ και άρα } 2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2, \text{ οπότε συμπεραίνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός δεν είναι εν γένει μεταθετικός.}$$

Πρόταση 1.56. Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί όπου ο β είναι οριακός διατακτικός αριθμός. Τότε και ο $\alpha \cdot \beta$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Έστω $\zeta < \alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \gamma\}$, τότε υπάρχει διατακτικός αριθμός $\xi < \gamma$ με $\zeta \leq \alpha \cdot \xi$. Οπότε $\zeta + 1 \leq (\alpha \cdot \xi) + 1 \leq (\alpha \cdot \xi) + \alpha = \alpha \cdot (\xi + 1) < \alpha \cdot \gamma$. Άρα ο $\alpha \cdot \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός. $\square$

- Λήμμα 1.57.** (i) Έστω α, β και $\gamma > 0$ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\alpha < \beta$ αν και μόνο αν $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$.
- (ii) Έστω α, γ διατακτικοί αριθμοί με $\alpha > 0$. Τότε $\alpha \cdot \gamma \geq \gamma$.
- (iii) Έστω α, β και $\gamma > 0$ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.
- (iv) Έστω α, β και $\gamma > 0$ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
- (v) Έστω α, β και γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
- (vi) Αν α, γ διατακτικοί αριθμοί με $0 < \alpha \leq \gamma$, τότε υπάρχει μέγιστος διατακτικός αριθμός β με $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$.
- (vii) Έστω α, γ διατακτικοί αριθμοί με $\alpha > 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικοί διατακτικοί αριθμοί β και ρ με $\rho < \alpha$ τέτοιοι ώστε $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho$

Απόδειξη. (i) Θα το αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο β . Έστω διατακτικός αριθμός α με $\alpha < \beta$. Υποθέτουμε ότι για $\xi < \beta$ αν ισχύει $\alpha < \xi$, τότε $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \xi$ για κάθε $\gamma > 0$.

Αν $\beta = \xi + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός με $\alpha \leq \xi$, τότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε για κάθε $\gamma > 0$

$$\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \xi < (\gamma \cdot \xi) + 1 \leq (\gamma \cdot \xi) + \gamma = \gamma \cdot (\xi + 1) = \gamma \cdot \beta.$$

Αν β είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε για $\alpha < \xi < \beta$ έχουμε

$$\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \xi \leq \sup\{\gamma \cdot \xi : \xi < \beta\} = \gamma \cdot \beta$$

για κάθε $\gamma > 0$.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$. Αν $\beta < \alpha$, τότε έχουμε $\gamma \cdot \beta < \gamma \cdot \alpha$, άτοπο. Αν $\alpha = \beta$, τότε έχουμε $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$, άτοπο. Οπότε από τη γραμμικότητα

της $\leq$ έχουμε ότι $\alpha < \beta$.

(ii) Έστω $\alpha > 0$. Για $\gamma = 1$ έχουμε $\alpha \cdot 1 = \alpha \geq 1$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\xi < \gamma$ ισχύει $\alpha \cdot \xi \geq \xi$.

Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος και έχουμε

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\xi + 1) = \alpha \cdot \xi + \alpha \geq \xi + \alpha \geq \xi + 1 = \gamma.$$

Αν γ είναι οριακός διατακτικός έχουμε

$$\alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \gamma\} \geq \sup\{\xi : \xi < \gamma\} = \gamma.$$

(iii) Έστω ότι ισχύει $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$ για $\gamma > 0$. Αν $\alpha \neq \beta$ έχουμε ότι είτε $\alpha < \beta$, είτε $\beta < \alpha$ και από το (i), έχουμε ότι είτε $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$, είτε $\gamma \cdot \beta < \gamma \cdot \alpha$ αντίστοιχα, άτοπο. Άρα $\alpha = \beta$.

Αν $\alpha = \beta$, τότε έχουμε προφανώς $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$.

(iv) Έστω διατακτικοί αριθμοί α, β . Για $\gamma = 0$ έχουμε $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0$.

Έστω $\gamma > 0$ διατακτικός αριθμός και έστω ότι ισχύει $\alpha \cdot (\beta + \xi) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi$ για κάθε $\xi < \gamma$.

Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος από Λήμμα (??(iii)) έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot [\beta + (\xi + 1)] = \alpha \cdot [(\beta + \xi) + 1] = \alpha \cdot (\beta + \xi) + \alpha \\ &= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi) + \alpha = \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \xi + \alpha) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot (\xi + 1) \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \end{aligned}$$

Αν ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός τότε από Πρόταση (??) ο $\beta + \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta + \gamma\} = \sup\{\alpha \cdot (\beta + \delta) : \delta < \gamma\} \\ &= \sup\{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\}$ και από Πρόταση (??) ο $\alpha \cdot \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, άρα έχουμε ότι $\alpha \cdot \gamma = \sup\{\xi : \xi < \alpha \cdot \gamma\}$. Οπότε,

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \sup\{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha \cdot \beta + \xi : \xi < \alpha \cdot \gamma\} = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

(v) Θα το αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ . Έστω $\alpha, \beta \neq 0$ διατακτικοί αριθμοί. Για $\gamma = 0$ έχουμε ότι $(\alpha \cdot \beta) \cdot 0 = 0 = \alpha \cdot (\beta \cdot 0)$. Έστω διατακτικός αριθμός γ και ότι ισχύει η υπόθεση για κάθε διατακτικό αριθμό $\xi < \gamma$. Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός έχουμε

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma &= (\alpha \cdot \beta) \cdot (\xi + 1) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \xi + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta \cdot \xi) + \alpha \cdot \beta \\ &= \alpha \cdot (\beta \cdot \xi + \beta) = \alpha \cdot [\beta \cdot (\xi + 1)] = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \end{aligned}$$

Αν ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε ότι

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \sup\{(\alpha \cdot \beta) \cdot \delta : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) : \delta < \gamma\}.$$

Από Πρόταση (??) ο $\beta \cdot \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και άρα έχουμε ότι $\beta \cdot \gamma = \sup\{\xi : \xi < \beta \cdot \gamma\} = \sup\{\beta \cdot \delta : \delta < \gamma\}$. Επομένως,

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta \cdot \gamma\} = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

(vi) Από το (ii) έχουμε ότι $\alpha \cdot (\gamma + 1) \geq \gamma + 1$ και άρα $\alpha \cdot (\gamma + 1) > \gamma$. Οπότε υπάρχει ξ διατακτικός αριθμός ώστε $\alpha \cdot \xi > \gamma$. Εφόσον κάθε υποσύνολο των διατακτικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο υπάρχει ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $\alpha \cdot \xi > \gamma$. Παρατηρούμε ότι ο ελάχιστος αυτός είναι επόμενος, γιατί αν είναι οριακός, τότε για κάθε $\zeta < \xi$ θα έχουμε $\alpha \cdot \zeta \leq \gamma$ άρα και $\alpha \cdot \xi = \sup\{\alpha \cdot \zeta : \zeta < \xi\} \leq \gamma$, άτοπο. Οπότε $\xi = \beta + 1$ για κάποιον διατακτικό αριθμό β και άρα ο β είναι ο μέγιστος διατακτικός αριθμός για τον οποίο έχουμε $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$

(vii) Έστω β ο μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός τέτοιος ώστε $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$. Από Λήμμα (??) έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός διατακτικός αριθμός ρ , ώστε $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho$. Επίσης ισχύει $\rho < \alpha$ γιατί αν $\rho \geq \alpha$ έχουμε ότι $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho \geq \alpha \cdot \beta + \alpha = \alpha \cdot (\beta + 1)$, άτοπο, γιατί β είναι ο μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός, ώστε $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$.

Έστω ότι υπάρχουν β_1, β_2 και $\rho_1, \rho_2 < \alpha$ διατακτικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\gamma = \alpha \cdot \beta_1 + \rho_1 = \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2$. Υποθέτουμε ότι $\beta_1 < \beta_2$. Τότε $\beta_1 + 1 \leq \beta_2$ και έχουμε $\alpha \cdot \beta_1 + (\alpha + \rho_2) = (\alpha \cdot \beta_1 + \alpha) + \rho_2 = \alpha \cdot (\beta_1 + 1) + \rho_2 \leq \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2 = \alpha \cdot \beta_1 + \rho_1$ και άρα $\rho_1 \geq \alpha + \rho_2 \geq \alpha$, άτοπο. Οπότε $\beta_1 = \beta_2$ και $\rho_1 = \rho_2$. $\square$

Θεώρημα 1.58. Έστω $(A_1, \leq_1), (A_2, \leq_2)$ διαφορετικά και μη κενά καλά διατεταγμένα σύνολα ισόμορφα ως προς διατακτικούς αριθμούς α_1 και α_2 αντίστοιχα. Τότε το γινόμενο $A = A_1 \times A_2$ των A_1 και A_2 με τη λεξικογραφική διάταξη είναι ισόμορφο με τον διατακτικό αριθμό $\alpha_1 \cdot \alpha_2$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με υπερπεπερασμένη επαγωγή στον α_2 .

Επειδή $A_1 \simeq \alpha_1$ και $A_2 \simeq \alpha_2$ υπάρχουν διατακτικοί ισομορφισμοί $f_1 : A_1 \rightarrow \alpha_1$ και $f_2 : A_2 \rightarrow \alpha_2$ αντίστοιχα.

Αν $\alpha_2 = 0$, τότε για $A_2 = \emptyset$ έχουμε ότι $\emptyset \simeq 0$ και

$$\emptyset = A_1 \times \emptyset \simeq \alpha_1 \cdot 0 = 0.$$

Έστω ότι $\alpha_2 > 0$. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε $\zeta < \alpha_2$. Έστω ότι α_2 είναι επόμενος. Τότε υπάρχει διατακτικός αριθμός $\zeta < \alpha_2$ τέτοιος ώστε $\alpha_2 = \zeta + 1$. Επειδή $A_2 \simeq \alpha_2 = \zeta + 1$ έχουμε ότι το A_2 έχει μέγιστο στοιχείο, έστω $x_0 \in A_2$. Τότε $A_2 \setminus \{x_0\} \simeq \zeta$ και από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $f_0 : A_1 \times (A_2 \setminus \{x_0\}) \rightarrow \alpha_1 \cdot \zeta$. Επεκτείνουμε τον ισομορφισμό f_0 στην $f : A_1 \times A_2 \rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \zeta + \alpha_1$, όπου για κάθε $x \in A_1$ το $(x, x_0) \in A_1 \times A_2$ το αντιστοιχούμε στο διατακτικό αριθμό $\alpha_1 \cdot \zeta + f_1(x)$, όπου

$f_1(x) = \xi_x < \alpha_1$. Η f είναι καλά ορισμένη. Πράγματι αν $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ με $x_2 = x_0$, τότε $f((x_1, x_0)) = \alpha_1 \cdot \zeta + f_1(x_1) < \alpha_1 \cdot \alpha_2$. Αν $x_2 \neq x_0$ τότε $f((x_1, x_2)) = f_0((x_1, x_2)) < \alpha_1 \cdot \alpha_2$ οπότε η f είναι καλά ορισμένη.

Η f είναι εμφύτευση. Πράγματι η f στο $A_1 \times (A_2 \setminus \{x_0\})$ είναι εμφύτευση. Έστω, τώρα $(x, x_0), (y, x_0) \in A_1 \times A_2$ με $(x, x_0) \neq (y, x_0)$. Τότε $x \neq y$ και άρα $x < y$ ή $y < x$. Αν $x < y$ τότε $f_1(x) < f_1(y)$, οπότε $\alpha_1 \cdot \zeta + f_1(x) < \alpha_1 \cdot \zeta + f_1(y)$, δηλαδή $f((x, x_0)) < f((y, x_0))$ και επομένως $f((x, x_0)) \neq f((y, x_0))$. Έστω $(x_1, x_2), (y, x_0) \in A_1 \times A_2$ με $x_2 \neq x_0$ τότε $x_2 < x_0$ και έχουμε

$f((x_1, x_2)) = \alpha_1 \cdot \zeta < \alpha_1 \cdot \zeta + f_1(y) = f((y, x_0))$ οπότε η f είναι εμφύτευση.

Η f είναι επί. Πράγματι έστω $\eta \in \alpha_1 \cdot \alpha_2$.

Αν $\eta \in \alpha_1 \cdot \zeta$ από επαγωγική υπόθεση η f_0 είναι επί οπότε υπάρχουν $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ με $f_0((x_1, x_2)) = \eta$ και άρα

$$f((x_1, x_2)) = f_0((x_1, x_2)) = \eta.$$

Αν $\eta \in \alpha_1 \cdot \alpha_2 \setminus \alpha_1 \cdot \zeta = (\alpha_1 \cdot \zeta + \alpha_1) \setminus \alpha_1 \cdot \zeta$, τότε $\eta = \alpha_1 \cdot \zeta + \xi$, όπου $\xi \in \alpha_1$.

Επειδή η f_1 είναι επί υπάρχει $x_1 \in A_1$ με $f_1(x_1) = \xi$ οπότε

$$f((x_1, x_0)) = \alpha_1 \cdot \zeta + f_1((x_1)) = \alpha_1 \cdot \zeta + \xi = \eta$$

Επομένως η f είναι επί.

Έστω ότι ο α_2 είναι οριακός. Τότε επειδή $A_2 \simeq \alpha_2$ το ${}_2$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο και άρα $A_2 = \bigcup_{x \in A_2} P(x)$. Οπότε για κάθε $x \in A_2$ υπάρχει διατακτικός αριθμός ξ_x τέτοιος ώστε $P(x) \simeq \xi_x$ και από επαγωγική υπόθεση και επειδή $\alpha_1 \cdot \xi_x < \alpha_1 \cdot \alpha_2$ έχουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $f_x : A_1 \times P(x) \rightarrow \alpha_1 \cdot \xi_x$ και άρα η $f : \bigcup_{x \in A_2} (A_1 \times P(x)) \rightarrow \bigcup_{x \in A_2} (\alpha_1 \cdot \xi_x)$ είναι ισομορφισμός. Παρατηρούμε ότι $\bigcup_{x \in A_2} (A_1 \times P(x)) = {}_1 \times A_2$ και ότι $\bigcup_{x \in A_2} \xi_x = \alpha_2$, γιατί αν $\bigcup_{x \in A_2} \xi_x = \xi < \alpha_2$ έχουμε ότι $A_2 \simeq \xi < \alpha_2$ άτοπο. Από Πρόταση (??) παρατηρούμε ότι ο $\alpha_1 \cdot \alpha_2$

είναι οριακός διατακτικός αριθμός. Οπότε έχουμε ότι

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \sup\{\zeta : \zeta < \alpha_1 \cdot \alpha_2\} = \sup\{\alpha_1 \cdot \xi : \xi < \alpha_2\}$$

και άρα

$$\bigcup_{x \in A_2} (\alpha_1 \cdot \xi_x) = \sup\{\alpha_1 \cdot \xi_x : \xi_x < \alpha_2\} = \alpha_1 \cdot \alpha_2.$$

Δηλαδή $A_1 \times A_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2$

□

Ορισμός 1.59. Για κάθε διατακτικό αριθμό α ορίζουμε

(i) $\alpha^0 = \alpha$

(ii) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta + \alpha$ για κάθε β διατακτικό αριθμό

(iii) $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \beta\} = \lim_{\xi \rightarrow \beta} (\alpha^\xi)$ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό $\beta \neq 0$

Παρατήρηση 1.60. (i) $\alpha^1 = \alpha^{0+1} = \alpha^0 \cdot \alpha = \alpha$

(ii) $\alpha^2 = \alpha^{1+1} = \alpha^1 \cdot \alpha^1 = \alpha \cdot \alpha$ ιδιαίτερα έχουμε ότι $\omega^2 = \omega \cdot \omega$.

(iii) $\alpha^3 = \alpha^{2+1} = \alpha^2 + \alpha = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$

(iv) $\alpha^\omega = \sup\{\alpha^n : n < \omega\}$

(v) $1^\alpha = \alpha$. Πράγματι με υπερπεπερασμένη επαγωγή έχουμε.

$$1^0 = 1$$

$$1^{\alpha+1} = 1^\alpha \cdot 1 = 1$$

Αν α είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε

$$1^\alpha = \sup\{1^\xi : \xi < \alpha\} = \sup\{1 : \xi < \alpha\} = 1.$$

ιδιαίτερα έχουμε ότι $1^\omega = 1$

- (vi) $2^\omega = \sup\{2^n : n < \omega\} = \omega$ και γενικότερα $m^\omega = \sup\{m^n : n < \omega\} = \omega$ για κάθε $m \in \omega$ ενώ $\omega^\omega = \sup\{\omega^n : n < \omega\} > \omega$
- (vii) Τέλος ορίζουμε $\varepsilon = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}} \dots\}$ και μπορούμε να ορίσουμε τους $\varepsilon + 1, \varepsilon + \omega, \varepsilon^\omega, \varepsilon^\varepsilon, \varepsilon^{\varepsilon^\varepsilon}, \dots$
- (viii) Παρατηρούμε ότι εν γένει δεν ισχύει $(\alpha \cdot \beta)^\gamma \neq \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$, επειδή δεν ισχύει η μεταθετικότητα στον πολλαπλασιασμό.

Πρόταση 1.61. Έστω α, γ διατακτικοί αριθμοί. Αν $\alpha > 1$ και γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε ο α^γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Επειδή ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε ότι $\alpha^\xi = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \gamma\}$. Έστω $\zeta < \alpha^\gamma$. Τότε υπάρχει $\xi < \gamma$ ώστε $\zeta < \alpha^\xi$ και άρα

$$\zeta + 1 \leq \zeta + \zeta = \zeta \cdot 2 \leq \zeta \cdot \alpha < \alpha^\xi \cdot \alpha = \alpha^{\xi+1} < \alpha^\gamma.$$

□

Λήμμα 1.62. (i) Έστω α, β, γ διατακτικοί αριθμοί με $\gamma > 0$. Τότε $\alpha \leq \beta$ αν και μόνο αν $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

(ii) Έστω α, β, γ διατακτικοί αριθμοί με $\alpha > 1$. Τότε $\beta < \gamma$ αν και μόνο αν $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

(iii) Έστω α, β, γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

(iv) Έστω α, β, γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε ισχύει $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

(v) Αν α, γ διατακτικοί αριθμοί με $1 < \alpha \leq \gamma$, τότε υπάρχει μέγιστος διατακτικός αριθμός β με $\alpha^\beta \leq \gamma$

Απόδειξη. (i) Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί με $\alpha \leq \beta$. Θα αποδείξουμε με υπερ-πεπερασμένη επαγωγή στο γ ότι $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

Για $\gamma = 1$ είναι $\alpha^1 = \alpha \leq \beta = \beta^1$ άρα ισχύει.

Υποθέτουμε ότι για κάθε $\xi < \gamma$ ισχύει $\alpha^\xi \leq \beta^\xi$.

Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός και έχουμε

$$\alpha^\gamma = \alpha^{\xi+1} = \alpha^\xi \cdot \alpha \leq \beta^\xi \cdot \alpha \leq \beta^\xi \cdot \beta = \beta^{\xi+1} = \beta^\gamma.$$

Έστω γ οριακός διατακτικός αριθμός. Τότε από επαγωγική υπόθεση για κάθε $\xi < \gamma$ έχουμε ότι $\alpha^\xi \leq \beta^\xi$. Οπότε για κάθε $\xi < \gamma$ έχουμε

$$\alpha^\xi \leq \beta^\xi \leq \sup\{\beta^\xi : \xi < \gamma\} = \beta^\gamma$$

και άρα

$$\alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \gamma\} \leq \beta^\gamma.$$

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$. Αν $\beta < \alpha$ τότε έχουμε $\beta^\gamma < \alpha^\gamma$ άτοπο.

(ii) Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί με $\alpha > 1$. Θα δείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ ότι αν $\beta < \gamma$, τότε $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

Έστω $\gamma = \beta + 1$. Τότε $\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha > \alpha \cdot 1 = \alpha^\beta$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό ξ με $\beta < \xi \leq \gamma$ ισχύει $\alpha^\beta < \alpha^\xi$.

Αν $\gamma = \xi + 1 > \xi > \beta$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός και έχουμε

$$\alpha^\beta < \alpha^\xi < \alpha^\xi \cdot \alpha = \alpha^{\xi+1} = \alpha^\gamma.$$

Αν γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός τότε υποθέτουμε ότι για κάθε $\beta < \xi < \gamma$ ισχύει

$$\alpha^\beta < \alpha^\xi \leq \sup\{\alpha^\xi : \xi < \gamma\} = \alpha^\gamma.$$

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\alpha^\gamma < \alpha^\beta$. Αν $\beta \leq \gamma$, τότε έχουμε $\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$, άτοπο.

(iii) Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί. Θα δείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ ότι $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

Για $\gamma = 0$ έχουμε $\alpha^{\beta+0} = \alpha^\beta = \alpha^\beta \cdot \alpha^0$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε $\xi < \gamma$ ισχύει $\alpha^{\beta+\xi} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\xi$.

Αν $\gamma = \xi + 1$, είναι επόμενος οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta+\gamma} &= \alpha^{\beta+(\xi+1)} = \alpha^{(\beta+\xi)+1} = \alpha^{\beta+\xi} \cdot \alpha = (\alpha^\beta \cdot \alpha^\xi) \cdot \alpha \\ &= \alpha^\beta \cdot (\alpha^\xi \cdot \alpha) = \alpha^\beta \cdot \alpha^{\xi+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma\end{aligned}$$

Αν ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε από Πρόταση (??) ο $\beta + \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και άρα

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \beta + \gamma\} = \sup\{\alpha^{\beta+\delta} : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta : \delta < \gamma\}.$$

Επίσης $\alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\delta : \delta < \gamma\}$ και από Πρόταση (??) έχουμε ότι ο α^γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και άρα $\alpha^\gamma = \sup\{\xi : \xi < \alpha^\gamma\}$. Οπότε

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \sup\{\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha^\beta \cdot \xi : \xi < \alpha^\gamma\} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$$

(iv) Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί, θα αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ ότι $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

Για $\gamma = 0$ έχουμε ότι $(\alpha^\beta)^0 = 1 = \alpha^{\beta \cdot 0}$.

Έστω ότι για κάθε διατακτικό αριθμό $\xi < \gamma$ ισχύει $(\alpha^\beta)^\xi = \alpha^{\beta \cdot \xi}$.

Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός και τότε έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^\gamma &= (\alpha^\beta)^{\xi+1} = (\alpha^\beta)^\xi \cdot \alpha^\beta = \alpha^{\beta \cdot \xi} \cdot \alpha^\beta \\ &= \alpha^{\beta \cdot \xi + \beta} = \alpha^{\beta \cdot (\xi+1)} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}\end{aligned}$$

Αν ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε ότι

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \sup\{(\alpha^\beta)^\delta : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha^{\beta \cdot \delta} : \delta < \gamma\}$$

Από Πρόταση (??) ο $\beta \cdot \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και από Πρόταση (??) ο $\alpha^{\beta \cdot \gamma}$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός επομένως $\alpha^{\beta \cdot \gamma} = \sup\{\xi : \xi < \alpha^{\beta \cdot \gamma}\}$.
Οπότε

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \sup\{\alpha^{\beta \cdot \delta} : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha^\zeta : \zeta < \beta \cdot \gamma\} = \sup\{\xi : \xi < \alpha^{\beta \cdot \gamma}\} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$$

(v) Έστω α, γ διατακτικοί αριθμοί με $1 < \alpha \leq \gamma$. Παρατηρούμε ότι $\alpha^{\gamma+1} \geq \gamma + 1 > \gamma$. Πράγματι αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $1 < \alpha \leq \xi$ ισχύει $\alpha^\xi \geq \alpha \cdot \xi$.
Αν $\xi = \alpha$, έχουμε $\alpha^\xi = \alpha^\alpha \geq \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot \xi$.

Αν $\xi = \zeta + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός και έχουμε $\alpha^\xi = \alpha^{\zeta+1} = \alpha^\zeta \cdot \alpha \geq (\alpha \cdot \zeta) \cdot \alpha \geq (\alpha \cdot \zeta) \cdot 2 = \alpha \cdot \zeta \cdot (1+1) = \alpha \cdot \zeta + \alpha \cdot \zeta \geq \alpha \cdot \zeta + \alpha = \alpha \cdot (\zeta + 1) = \alpha \cdot \xi$.
Έστω ότι ξ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και έστω ότι για κάθε $\zeta < \xi$ ισχύει $\alpha^\zeta \geq \alpha \cdot \zeta$, άρα και

$$\alpha^\xi = \sup\{\alpha^\zeta : \zeta < \xi\} \geq \sup\{\alpha \cdot \zeta : \zeta < \xi\} = \alpha \cdot \xi.$$

Άρα για $\xi = \gamma + 1$ έχουμε $\alpha^{\gamma+1} \geq \alpha \cdot (\gamma + 1) \geq \gamma + 1 > \gamma$. Οπότε υπάρχει ξ διατακτικός αριθμός, ώστε $\alpha^\xi > \gamma$. Εφόσον κάθε υποσύνολο των διατακτικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο υπάρχει ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $\alpha^\xi > \gamma$. Επίσης παρατηρούμε ότι ο ελάχιστος αυτός είναι επόμενος γιατί αν είναι οριακός, τότε για κάθε $\zeta < \xi$ θα έχουμε $\alpha^\zeta \leq \gamma$ άρα και $\alpha^\xi = \sup\{\alpha^\zeta : \zeta < \xi\} \leq \gamma$. Οπότε $\xi = \beta + 1$ για κάποιον διατακτικό αριθμό β και άρα ο β είναι ο μέγιστος διατακτικός αριθμός για τον οποίο έχουμε $\alpha^\beta \leq \gamma$

□

1.5 Τοπολογία

Σε αυτή την παράγραφο ορίζονται οι βασικές έννοιες της τοπολογίας, καθώς και οι δύο τοπολογίες που θα χρησιμοποιηθούν στην εργασία, η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης και η τοπολογία Ellentuck.

Ορισμός 1.63. Έστω X σύνολο. Μία **τοπολογία** του X είναι μία οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Το X και το κενό σύνολο ($\emptyset$) ανήκουν στην $\mathcal{T}$.
 - (ii) Η τομή πεπερασμένης οικογένειας στοιχείων της $\mathcal{T}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{T}$ (δηλαδή, αν $n \in \mathbb{N}$ και $G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathcal{T}$ τότε $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{T}$).
 - (iii) Η ένωση αυθαίρετης οικογένειας στοιχείων της $\mathcal{T}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{T}$ (δηλαδή, αν I ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $G_i \in \mathcal{T}$ για $i \in I$, τότε $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$).
- Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται **τοπολογικός χώρος**. Τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ λέγονται **ανοικτά** σύνολα ως προς την $\mathcal{T}$, ή ανοικτά σύνολα του τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$, ή απλώς ανοικτά σύνολα, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

Ορισμός 1.64. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ δύο τοπολογίες του X . Η $\mathcal{T}_1$ είναι **ασθενέστερη** (ή μικρότερη) της $\mathcal{T}_2$ αν κάθε ανοικτό σύνολο ως προς την $\mathcal{T}_1$ είναι ανοικτό σύνολο και ως προς την $\mathcal{T}_2$, δηλαδή αν $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Στην περίπτωση αυτή η $\mathcal{T}_2$ είναι **ισχυρότερη** (ή μεγαλύτερη) της $\mathcal{T}_1$.

Ορισμός 1.65. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Μία υποοικογένεια $\mathcal{B}$ της $\mathcal{T}$ είναι μία **βάση** (για την τοπολογία $\mathcal{T}$) αν κάθε ανοικτό σύνολο είναι ίσο με την ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Δηλαδή, αν για κάθε $G \in \mathcal{T}$ υπάρχουν $B_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$, ώστε $G = \bigcup_{i \in I} B_i$. Τα στοιχεία της $\mathcal{B}$ είναι **βασικά** (ανοικτά) σύνολα του $(X, \mathcal{T})$ (ως προς την βάση $\mathcal{B}$).

Ορισμός 1.66. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A λέγεται **κλειστό** αν το συμπλήρωμα του $X \setminus A$ είναι ανοικτό (δηλαδή, αν $X \setminus A \in \mathcal{T}$).

Ορισμός 1.67. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$.

Το **εσωτερικό** A° του A είναι η ένωση όλων των ανοικτών συνόλων που περιέχονται στο A . Δηλαδή,

$$A^\circ = \bigcup \{G \subseteq X : G \text{ ανοικτό και } G \subseteq A\}.$$

Το A° είναι ένα ανοικτό σύνολο, σαν ένωση ανοικτών, και μάλιστα το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο που περιέχεται στο A .

Η **κλειστότητα** $\bar{A}$ του A είναι η τομή όλων των κλειστών συνόλων που περιέχουν το A . Δηλαδή, $\bar{A} = \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ κλειστό και } A \subseteq F\}$.

Το $\bar{A}$ είναι ένα κλειστό σύνολο, περιέχει το A και μάλιστα είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A .

Ορισμός 1.68. Ένα σύνολο X λέγεται **πουθενά πυκνό** αν η κλειστότητα του έχει κενό εσωτερικό, δηλαδή αν $(\bar{X})^\circ = \emptyset$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πρώτης κατηγορίας** ή **meager** αν είναι αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων, δηλαδή αν $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, όπου $(\bar{X}_n)^\circ = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ένα σύνολο X έχει την **ιδιότητα Baire** αν υπάρχει ανοικτό σύνολο U τέτοιο ώστε το σύνολο $X \Delta U = (X \setminus U) \cup (U \setminus X)$ να είναι πρώτης κατηγορίας.

Αν ένα σύνολο X έχει την ιδιότητα Baire υπάρχουν ένα κλειστό σύνολο F και ένα σύνολο Q πρώτης κατηγορίας τέτοια ώστε $X = F \Delta Q = (F \setminus Q) \cup (Q \setminus F)$ (βλ. [K-N]).

Ορισμός 1.69. Η τοπολογία της **κατά σημείο σύγκλισης** είναι η τοπολογία που έχει βάση όλα τα σύνολα $[a, \mathbb{N}]$, όπου $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$.

Πρόταση 1.70. Έστω $\mathcal{F}$ μία μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}$.

- (i) Έστω $\mathcal{F}$ δέντρο. Τότε η $\mathcal{F}$ είναι κατά σημείο κλειστή αν και μόνο αν δεν υπάρχει άπειρη ακολουθία $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε $s_1 \prec s_2 \prec \dots$ ($s_1 \neq s_2 \neq \dots$).
- (ii) Έστω $\mathcal{F}$ κληρονομική. Τότε η $\mathcal{F}$ είναι κατά σημείο κλειστή αν και μόνο αν δεν υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]$ τέτοιο ώστε $[M]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\mathcal{F}$ δέντρο.

Αν $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία της $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε $s_1 \prec s_2 \prec \dots$, τότε η $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε ένα άπειρο υποσύνολο s του $\mathbb{N}$. Άρα $s \notin \mathcal{F}$, οπότε η $\mathcal{F}$ δεν είναι κατά σημείο κλειστή.

Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathcal{F}$ με

$$s_1 \prec s_2 \prec \dots$$

Έστω $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία του $\mathcal{F}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο υποσύνολο t του $\mathbb{N}$. Αν t πεπερασμένο, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το t είναι αρχικό τμήμα του t_{n_0} . Αφού το $\mathcal{F}$ είναι δέντρο έχουμε ότι $t \in \mathcal{F}$.

Αν t άπειρο, $t = (n_1, n_2, \dots)$ με $n_1 < n_2 < \dots$. Θέτουμε $s_i = (n_1, n_2, \dots, n_i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και προφανώς $s_1 \prec s_2 \prec \dots$. Θέτουμε $s_n^i = t_n \cap [0, n_i]$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $(s_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ και $(s_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο s_i για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε ότι $s_i \in \mathcal{F}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση μας, άρα t πεπερασμένο και $t \in \mathcal{F}$. Άρα η $\mathcal{F}$ είναι κατά σημείο κλειστή.

(ii) Έστω $\mathcal{F}$ κληρονομική. Τότε προφανώς η $\mathcal{F}$ είναι και δέντρο.

Έστω ότι δεν υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]$ τέτοιο ώστε $[M]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι κατά σημείο κλειστή αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε $s_1 \prec s_2 \prec \dots$ (από το (i)). Πράγματι δεν υπάρχει τέτοια ακολουθία γιατί αν υπήρχε θέτοντας $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} s_i$, έχουμε ότι $M \in [\mathbb{N}]$ και

$[M]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$ (αφού $\mathcal{F}$ κληρονομική), άτοπο.

Αν $\mathcal{F}$ κατά σημείο κλειστή, τότε από το (i) δεν υπάρχει ακολουθία $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε $s_1 \prec s_2 \prec \dots$. Τότε δεν υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]$ τέτοιο ώστε $[M]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$, γιατί αν υπήρχε θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ακολουθία $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ υποσυνόλων του M (άρα $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$) τέτοια ώστε $s_1 \prec s_2 \prec \dots$, άτοπο. $\square$

Ορισμός 1.71. Έστω $M \in [\mathbb{N}]$. Τότε

$$s_{n,M} = \{x_1, x_2, \dots, x_n : M = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ όπου } x_1 < x_2 < \dots\}.$$

Ορισμός 1.72. Η τοπολογία Ellentuck στον χώρο $[\mathbb{N}]$, είναι η τοπολογία που έχει βάση όλα τα σύνολα $[a, M]$, όπου $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]$. Προφανώς η τοπολογία της κατά σημείο συγκλισης είναι ασθενέστερη από την τοπολογία Ellentuck. Θα συμβολίζουμε $\hat{\mathcal{U}}$ την κλειστότητα του συνόλου $\mathcal{U}$ και $\mathcal{U}^\circ$ το εσωτερικό του, ως προς την τοπολογία Ellentuck. Παρατηρούμε ότι:

$$(i) \hat{\mathcal{U}} = \{L \in [\mathbb{N}] : [s_{n,L}, L] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}$$

$$(ii) \mathcal{U}^\circ = \{L \in [\mathbb{N}] : \text{υπάρχει } n \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } [s_{n,L}, L] \subseteq \mathcal{U}\}.$$

Κεφάλαιο 2

Κλασική Θεωρία Ramsey

Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύονται τρία βασικά θεώρηματα της κλασικής θεωρίας Ramsey. Πρώτα αποδεικνύεται το διαχωριστικό Θεώρημα Ramsey για κ-άδες φυσικών αριθμών ([R], 1929). Ύστερα αποδεικνύεται το διαχωριστικό θεώρημα Nash-Williams για άπειρες ακολουθίες φυσικών αριθμών ([N-W], 1965) με την χρήση της κλασικής μεθόδου combinatorial forcing. Τέλος αποδεικνύεται ο χαρακτηρισμός των οικογενειών, ακολουθιών φυσικών αριθμών, για τις οποίες ισχύει το ανάλογο διαχωριστικό θεώρημα (δηλ. το Θεώρημα Ellentuck ([E], 1974)).

2.1 Θεώρημα Ramsey

Θεώρημα 2.1. Για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} \subseteq [N]^\kappa$ και $A \in [\mathbb{N}]$, υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } [B]^\kappa \subseteq \mathcal{F}$$

$$\text{είτε } [B]^\kappa \subseteq [\mathbb{N}]^\kappa \setminus \mathcal{F}.$$

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με επαγωγή στο κ .

Για $\kappa = 1$: Έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}$ και $A \in [\mathbb{N}]$. Θέτουμε $I = \{m \in A : m \in \mathcal{F}\}$. Αν το I είναι άπειρο τότε θέτουμε $B = I$ και $B \subseteq \mathcal{F}$. Αλλιώς το $A \setminus I$ είναι άπειρο. Τότε θέτουμε $B = A \setminus I$ και $B \subseteq \mathbb{N} \setminus \mathcal{F}$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η υπόθεση ισχύει για κάθε $\lambda < \kappa$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για κ .

Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^\kappa$ και $A \in [\mathbb{N}]$.

Θέτουμε $m_1 = \min A$, $A_1 = A \setminus \{m_1\}$ και $\mathcal{F}_1 = \{s \in [A_1]^{\kappa-1} : \{m_1\} \cup s \in \mathcal{F}\}$.

Τότε από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει $B_1 \in [A_1]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } [B_1]^{\kappa-1} \subseteq \mathcal{F}_1 \quad \text{είτε } [B_1]^{\kappa-1} \subseteq [\mathbb{N}]^{\kappa-1} \setminus \mathcal{F}_1.$$

Θέτουμε $m_2 = \min B_1$, $A_2 = B_1 \setminus \{m_2\}$ και

$\mathcal{F}_2 = \{s \in [A_2]^{\kappa-1} : \{m_2\} \cup s \in \mathcal{F}\}$. Τότε από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει $B_2 \in [A_2]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } [B_2]^{\kappa-1} \subseteq \mathcal{F}_2 \quad \text{είτε } [B_2]^{\kappa-1} \subseteq [\mathbb{N}]^{\kappa-1} \setminus \mathcal{F}_2.$$

Συνεχίζοντας ανάλογα κατασκευάζουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία

$I = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του A και δύο φθίνουσες οικογένειες άπειρων υποσυνόλων του A , $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοιες ώστε:

- (i) $m_n \in B_i$ για κάθε $n > i$
- (ii) $B_n \subseteq A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$
- (iii) $[B_n]^{\kappa-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ ή $[B_n]^{\kappa-1} \subseteq [\mathbb{N}]^{\kappa-1} \setminus \mathcal{F}_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$
 $(\mathcal{F}_n = \{s \in [A_n]^{\kappa-1} : \{m_n\} \cup s \in \mathcal{F}\})$.

Θέτουμε $I_1 = \{m_n \in I : [B_n]^{\kappa-1} \subseteq \mathcal{F}_n\}$.

Αν το I_1 είναι άπειρο τότε $[I_1]^\kappa \subseteq \mathcal{F}$.

Πράγματι, έστω $F \in [I_1]^\kappa$. Τότε $m_n = \min F$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και $F = \{m_n\} \cup s$, όπου $s \in [I_1]^{\kappa-1} \subseteq \mathcal{F}_n$. Άρα $F = \{m_n\} \cup s \in \mathcal{F}$.

Αν το I_1 δεν είναι άπειρο, τότε είναι άπειρο το σύνολο $I_2 = I \setminus I_1$. Σε αυτήν την περίπτωση $[I_2]^\kappa \subseteq [\mathbb{N}]^\kappa \setminus \mathcal{F}$.

Πράγματι, έστω $F \in [I_2]^\kappa$. Τότε $m_n = \min F$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και $F = \{m_n\} \cup s$, όπου $s \in [I_1]^{\kappa-1} \subseteq [\mathbb{N}]^{\kappa-1} \setminus \mathcal{F}_n$. Άρα $s \notin \mathcal{F}_n$, οπότε $F = \{m_n\} \cup s \notin \mathcal{F}$. Τότε $F \in [\mathbb{N}]^\kappa \setminus \mathcal{F}$.

□

2.2 Θεωρήματα Nash-Williams και Ellentuck

Ορισμός 2.2. Έστω $\mathcal{U} \subseteq [\mathbb{N}]$, $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $A \in [\mathbb{N}]$.

- (i) Το $[a, A]$ λέγεται **καλό** αν υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε $[a, B] \subseteq \mathcal{U}$.
- (ii) Το $[a, A]$ λέγεται **κακό** αν δεν είναι καλό.
- (iii) Το $[a, A]$ λέγεται **πολύ κακό** αν είναι κακό και $[a \cup \{n\}, A]$ είναι κακό για κάθε $n \in A \cap (\max a, +\infty)$.

Παρατηρήσεις 2.3. (i) Αν $[a, A]$ κακό, τότε $[a, B]$ κακό για κάθε $B \in [A]$.

Απόδειξη. Έστω $[a, A]$ κακό και $B \in [A] \Rightarrow [a, \Gamma] \cap \mathcal{U}^c \neq \emptyset$ για κάθε $\Gamma \in [A]$ ($\mathcal{U}^c = [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$) $\Rightarrow [a, \Gamma] \cap \mathcal{U}^c \neq \emptyset$ για κάθε $\Gamma \in [B] \Rightarrow [a, B]$ κακό. □

(ii) Αν $[a, A]$ πολύ κακό, τότε $[a, B]$ πολύ κακό για κάθε $B \in [A]$.

Απόδειξη. Έστω $[a, A]$ πολύ κακό και $B \in [A] \Rightarrow [a, A]$ κακό και $[a \cup \{n\}, A]$ κακό για κάθε $n \in A \cap (\max a, +\infty)$. Τότε $[a, B]$ κακό (αφού $[a, A]$ κακό) και $[a \cup \{n\}, B]$ κακό για κάθε $n \in B \cap (\max a, +\infty) \Rightarrow [a, B]$ πολύ κακό. □

Λήμμα 2.4. Αν $[a, A]$ κακό, υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε το $[a, B]$ είναι πολύ κακό.

Απόδειξη. Έστω $[a, A]$ κακό. Ας υποθέσουμε ότι κανένα από τα $[a, \Gamma]$ δεν είναι πολύ κακό για κανένα από τα $\Gamma \in [A]$.

Αφού το $[a, A]$ δεν είναι πολύ κακό, υπάρχει $n_0 \in A \cap (\max a, +\infty)$ τέτοιο ώστε $[a \cup \{n_0\}, A]$ καλό. Άρα υπάρχει $B_0 \in [A]$ τέτοιο ώστε $[a \cup \{n_0\}, B_0] \subseteq \mathcal{U}$. Αφού το $[a, B_0]$ δεν είναι πολύ κακό, υπάρχει $n_1 \in B_0 \cap (n_0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $[a \cup \{n_1\}, B_0]$ καλό. Άρα υπάρχει $B_1 \in [B_0]$ τέτοιο ώστε $[a \cup \{n_1\}, B_1] \subseteq \mathcal{U}$. Συνεχίζοντας ανάλογα, κατασκευάζουμε μία αύξουσα ακολουθία $(n_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}} \subseteq A$ και μία φθίνουσα οικογένεια άπειρων υποσυνόλων του A , $A \supseteq B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots$ τέτοιες ώστε $[a \cup \{n_\kappa\}, B_\kappa] \subseteq \mathcal{U}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

Τότε $[a, B] \subseteq \mathcal{U}$. Πράγματι, έστω $I \in [a, B]$. Τότε $I = a \cup \Gamma$ όπου $\Gamma \in [B]$, $a < \Gamma$. Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_\lambda = \min \Gamma$. Οπότε $I \in [a \cup \{n_\lambda\}, B] \subseteq \mathcal{U}$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $[a, A]$ κακό.

Άρα υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε το $[a, B]$ είναι πολύ κακό. $\square$

Θεώρημα 2.5. Έστω $\mathcal{U}$ ανοικτή ως προς την τοπολογία Ellentuck, τότε η $\mathcal{U}$ είναι completely Ramsey.

Απόδειξη. Έστω $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, $A \in [\mathbb{N}]$.

Αν $[a, A]$ καλό, τότε υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε $[a, B] \subseteq \mathcal{U}$.

Αν $[a, A]$ κακό, τότε υπάρχει $B_0 \in [A \setminus a]$, τέτοιο ώστε $[a, B_0]$ πολύ κακό. Θέτω $n_0 = \min B_0$. Τότε $[a \cup \{n_0\}, B_0]$ κακό. Άρα υπάρχει $B_1 \in [B_0]$ τέτοιο ώστε $[a \cup \{n_0\}, B_1]$ πολύ κακό. Θέτω $n_1 = \min B_1$. Το $[a \cup \{n_1\}, B_1]$ είναι κακό. Άρα υπάρχει $B_2^1 \in [B_1]$ τέτοιο ώστε $[a \cup \{n_1\}, B_2^1]$ πολύ κακό και αφού $[a \cup \{n_0\}, B_1]$ πολύ κακό, το $[a \cup \{n_0, n_1\}, B_2^1]$ είναι κακό. Άρα υπάρχει $B_2^2 := B_2$ τέτοιο ώστε $[a \cup \{n_0, n_1\}, B_2]$ πολύ κακό. Συνεχίζοντας ανάλογα κατασκευάζουμε μία αύξουσα ακολουθία $(n_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}}$ και μία φθίνουσα οικογένεια άπειρων υποσυνόλων του A , $A \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, τέτοιες ώστε $n_i = \min B_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, το σύνολο $[a \cup s, B_\kappa]$ είναι πολύ κακό για κάθε $s \subseteq \{n_0, n_1, \dots, n_{\kappa-1}\}$ και το σύνολο

$[a \cup s, B_\kappa]$ είναι κακό για κάθε $s \subseteq \{n_0, n_1, \dots, n_\kappa\}$. Θέτω $B = \{n_0, n_1, \dots\}$.

Τότε $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει. Αφού η $\mathcal{U}$ είναι ανοικτή (στην Ellentuck τοπολογία) υπάρχουν $a \subseteq a' \in [a \cup B]^{<\infty}$, $B' \in [B]$, τέτοια ώστε $[a', B'] \subseteq [a, B] \cap \mathcal{U}$. Τότε υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a' = a \cup \beta$ για κάποιο $\beta \subseteq \{n_0, n_1, \dots, n_i\}$ και $B' \subseteq B_i$ τέτοια ώστε $[a', B'] \subseteq [a, B] \cap \mathcal{U}$. Άρα $[a \cup \beta, B'] \subseteq \mathcal{U}$, οπότε $[a \cup \beta, B_i]$ καλή, άτοπο. Άρα $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$. $\square$

Θεώρημα 2.6. (Nash-Williams) Έστω $X \subseteq [\mathbb{N}]$ κατά σημείο κλειστή. Για κάθε $A \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε
 είτε $[B] \subseteq X$
 είτε $[B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X$.

Απόδειξη. Αφού η X είναι κατά σημείο κλειστή, η $[\mathbb{N}] \setminus X$ είναι ανοικτή ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης. Άρα η $[\mathbb{N}] \setminus X$ είναι ανοικτή και ως προς την τοπολογία Ellentuck. Άρα από το θεώρημα 2.5 υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε είτε $[B] \subseteq X$ είτε $[B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X$. $\square$

Λήμμα 2.7. Αν το X είναι ένα πουθενά πυκνό υποσύνολο του $[\mathbb{N}]$ (ως προς την τοπολογία Ellentuck), τότε για κάθε $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και για κάθε $A \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X$.

Απόδειξη. Έστω $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $A \in [\mathbb{N}]$. Από το θεώρημα 2.6 υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε $[a, B] \subseteq \hat{X}$ ή $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \hat{X} \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X$. Αφού $(\hat{X})^\diamond = \emptyset$, η πρώτη περίπτωση είναι αδύνατη. $\square$

Λήμμα 2.8. Αν το X είναι meager σύνολο ως προς την τοπολογία Ellentuck, τότε για κάθε $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $A \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X$.

Απόδειξη. Έστω $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, $A \in [\mathbb{N}]$ και X ένα meager σύνολο. $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ όπου X_n πουθενά πυκνό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $A_0 \in [A]$ τέτοιο ώστε $[a, A_0] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X_0$. Θέτουμε $n_0 = \min A_0 \setminus a$ και $a_1 = a \cup \{n_0\}$. Διαλέγουμε $A_1 \in [A_0]$ τέτοιο ώστε $[a \cup \{n_0\}, A_1] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X_1$. Θέτουμε $n_1 = \min A_1 \setminus a_1$ και $a_2 = a_1 \cup \{n_1\}$. Διαλέγουμε $A_2 \in [A_1]$ τέτοιο ώστε $[a \cup \{n_1\}, A_2] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X_2$ για κάθε $b \subseteq \{n_0, n_1\}$. Συνεχίζουμε ανάλογα. Θέτουμε $B = \{n_0, n_1, \dots\}$. Τότε $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X$. $\square$

Θεώρημα 2.9. (Ellentuck) Έστω $X \subseteq [\mathbb{N}]$. Η X είναι completely Ramsey αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα Baire στην τοπολογία Ellentuck.

Απόδειξη. Έστω ότι η X έχει την ιδιότητα Baire. Τότε $X = U \triangle Y$ όπου U ανοικτό και Y meager. Για $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $A \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus Y$. Επίσης υπάρχει $C \in [B]$ τέτοιο ώστε $[a, C] \subseteq U$ ή $[a, C] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus U$. Αν ισχύει η πρώτη περίπτωση τότε $[a, C] \subseteq X$, ενώ αν ισχύει η δεύτερη περίπτωση $[a, C] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X$. Άρα η X είναι completely Ramsey.

Έστω ότι η X είναι completely Ramsey. $X = X^\circ \triangle Y$ όπου $Y = X \setminus X^\circ$. Θα δείξουμε ότι το Y είναι πουθενά πυκνό, οπότε η X έχει την ιδιότητα Baire. Πράγματι, αν δεν είναι πουθενά πυκνό υπάρχουν $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $A \in [\mathbb{N}]$ τέτοια ώστε $[a, A] \subseteq \hat{Y}$. Υπάρχει $B \in [A]$ τέτοιο ώστε $[a, B] \subseteq X$ ή $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X$. Αφού $[a, B] \cap Y \neq \emptyset$, η περίπτωση $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus X$ είναι αδύνατη. Άρα $[a, B] \subseteq X$, οπότε $[a, B] \subseteq X^\circ$ και $[a, B] \cap Y = \emptyset$, άτοπο. $\square$

Κεφάλαιο 3

Λεπτές Οικογένειες Schreier

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζονται οι Λεπτές οικογένειες Schreier $\mathcal{A}_\xi$ για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ . Οι οικογένειες αυτές ορίστηκαν από την Φαρμάκη ([F], 2004) και είναι τροποποιήσεις των γενικευμένων οικογενειών Schreier ([A-A]), που χρησιμοποιήθηκαν στην Συναρτησιακή Ανάλυση. Η λεπτότητα και ο επαγωγικός τους χαρακτήρας κάνει τις οικογένειες αυτές κατάλληλες για την θεωρία Ramsey. Αποδεικνύεται ότι οι οικογένειες αυτές έχουν ακόμη δύο σημαντικές ιδιότητες. Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει κανονική αναπαράσταση ως προς κάθε μία από τις οικογένειες $\mathcal{A}_\xi$ (Πρόταση 3.8) και κάθε οικογένεια $\mathcal{A}_\xi$ έχει πολυπλοκότητα ξ , μετρούμενη με ένα δείκτη ανάλογο του Cantor-Bendixson ([A-M-T], 1998).

Πρόταση 3.1. Έστω a ένας μη μηδενικός αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Για κάθε οριακό διατακτικό ξ , τέτοιο ώστε $\omega^a < \xi < \omega^{a+1}$, υπάρχει μοναδικός αριθμός $m \geq 0$, μια ακολουθία διατακτικών $a > a_1 > \dots > a_m > 0$ και φυσικοί αριθμοί $p, p_1, \dots, p_m \geq 1$ (τέτοιοι ώστε είτε $p > 1$ είτε $p = 1$ και $m \geq 1$), τέτοιοι ώστε $\xi = p\omega^a + \sum_{i=1}^m p_i\omega^{a_i}$.

Ορισμός 3.2. (Λεπτό σύστημα Schreier $(\mathcal{A}_\xi)_{\xi < \omega_1}$) Για κάθε μη μηδενικό, οριακό, αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό λ ορίζουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία από "επόμενους" διατακτικούς αριθμούς $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (δηλ. $\forall n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ξ_n τέτοιο ώστε $\xi_n + 1 = \lambda_n$) μικρότερους του λ με $\sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n = \lambda$. Παρακάτω ορίζουμε τα σύνολα $(\mathcal{A}_\xi)_{\xi < \omega_1}$ τα οποία αποτελούν το "λεπτό σύστημα Schreier".

(1) για $\xi = 0$

$$\mathcal{A}_0 = \{\emptyset\}$$

(2) για $\xi = \zeta + 1$

$$\mathcal{A}_\xi = \mathcal{A}_{\zeta+1} = \{s \subseteq \mathbb{N} : s = \{n\} \cup s_1, n \in \mathbb{N}, \{n\} < s_1 \text{ και } s_1 \in \mathcal{A}_\zeta\}$$

(3) για $\xi = \omega^{\beta+1}$, όπου β αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός

$$\mathcal{A}_\xi = \mathcal{A}_{\omega^{\beta+1}} =$$

$$\left\{ \bigcup_{i=1}^n s_i : n = \min s, s_1 < s_2 < \dots < s_n \text{ και } s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathcal{A}_{\omega^\beta} \right\}$$

(4) για $\xi = \omega^\lambda$, όπου λ μη μηδενικός, αριθμήσιμος, οριακός διατακτικός αριθμός

$$\mathcal{A}_\xi = \mathcal{A}_{\omega^\lambda} = \{s \in \mathcal{A}_{\omega^{\lambda_n}} : n = \min s\}$$

(5) για ξ αριθμήσιμο, οριακό διατακτικό αριθμό, με $\omega^a < \xi < \omega^{a+1}$, για κάποιο $0 < a < \omega_1$

Έστω $\xi = p\omega^a + \sum_{i=1}^m p_i \omega^{a_i}$ η αναπαράσταση του ξ

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\xi &= \{s_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^m s_i \right) : s_m < \dots < s_1 < s_0, \text{ όπου } s_0 = s_1^0 \cup \dots \cup s_p^0 \text{ με} \\ &s_1^0 < \dots < s_p^0, s_j^0 \in \mathcal{A}_{\omega^a}, 1 \leq j \leq p, \text{ και } s_i = s_1^i \cup \dots \cup s_{p_i}^i \text{ με} \\ &s_1^i < \dots < s_{p_i}^i, s_j^i \in \mathcal{A}_{\omega^{a_i}}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p_i\}. \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 3.3. (i) $\mathcal{A}_\xi \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ για κάθε $\xi < \omega_1$ και $\emptyset \notin \mathcal{A}_\xi$ για κάθε $\xi > 0$.

(ii) $\mathcal{A}_k = [\mathbb{N}]^k$ για $k = 1, 2, \dots$

(iii) $\mathcal{A}_\omega = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\omega} : s = \{n_1, \dots, n_k\} \text{ όπου } n_1 < \dots < n_k \text{ και } n_1 = k\}$.

Ορισμός 3.4. Έστω $\mathcal{F}$ μία οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Θέτουμε:

$$\mathcal{F}(n) = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\omega} : \{n\} < s \text{ και } \{n\} \cup s \in \mathcal{F}\} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Πρόταση 3.5. Για κάθε αριθμήσιμο, διατακτικό αριθμό ξ υπάρχει μία ακολουθία $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από αριθμήσιμους διατακτικούς αριθμούς τέτοια ώστε $\mathcal{A}_\xi(n) = \mathcal{A}_{\xi_n} \cap [\mathbb{N} \cap (n, +\infty)]^{<\infty}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $\xi_n = \zeta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $\xi = \zeta + 1$, και (ξ_n) είναι γνησίως αύξουσα με $\sup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n = \xi$, αν ο ξ είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο ξ .

(1) Αν $\xi = 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1(n) = \{\emptyset\} = \mathcal{A}_0 \cap [\mathbb{N} \cap (n, +\infty)]^{<\infty}$.

(2) Αν $\xi = \zeta + 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A}_\xi(n) = \{s \subseteq \mathbb{N} : \{n\} < s \text{ και } s \in \mathcal{A}_\zeta\} = \mathcal{A}_\zeta \cap [\mathbb{N} \cap (n, +\infty)]^{<\infty}.$$

(3) Αν $\xi = \omega^{\beta+1}$ με $0 \leq \beta < \omega_1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\xi(n) &= \{s \subseteq \mathbb{N} : \{n\} \cup s = \bigcup_{i=1}^n s_i, s_1 < \dots < s_n \text{ και } s_1, \dots, s_n \in \mathcal{A}_{\omega^\beta}\} \\ &= \{s \subseteq \mathbb{N} : s_0 \cup \left(\bigcup_{i=2}^n s_i\right) \text{ με } s_0 \in \mathcal{A}_{(\omega^\beta)_n} \cap [\mathbb{N} \cap (n, +\infty)]^{<\infty}, s_0 < s_2 < \dots < s_n \text{ και} \\ &\quad s_2, \dots, s_n \in \mathcal{A}_{\omega^\beta}\} \\ &= \mathcal{A}_{(n-1)\omega^\beta + (\omega^\beta)_n} \cap [\mathbb{N} \cap (n, +\infty)]^{<\infty}, \text{ από την υπόθεση της επαγωγής.} \end{aligned}$$

Άρα $\xi_n = (n-1)\omega^\beta + (\omega^\beta)_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και προφανώς $\sup_n \xi_n = \omega^{\beta+1}$.

Επισημαίνουμε ότι στην περίπτωση $\xi = \omega$, $\xi_n = n-1$ αφού $\omega^0 = 1$.

(4) Αν $\xi = \omega^\lambda$ για λ μη μηδενικό, αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό. Έστω (λ_n) η ακολουθία "επόμενων" διατακτικών αριθμών που συγκλίνουν στο λ που έχουμε ορίσει στον ορισμό του συστήματος Schreier $(\mathcal{A}_\xi)_{\xi < \omega_1}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\xi(n) &= \{s \subseteq \mathbb{N} : \{n\} < s \text{ και } \{n\} \cup s \in \mathcal{A}_{\omega^{\lambda_n}}\} \\ &= \{s \subseteq \mathbb{N} : s \in \mathcal{A}_{\omega^{\lambda_n}}(n)\} = \mathcal{A}_{(\omega^{\lambda_n})_n} \cap [\mathbb{N} \cap (n, +\infty)]^{<\infty}, \end{aligned}$$

σύμφωνα με το επαγωγικό βήμα. Αν $\lambda_n = \mu_n + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\xi_n = (\omega^{\lambda_n})_n = (\omega^{\mu_n+1})_n = (n-1)\omega^{\mu_n} + (\omega^{\mu_n})_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Προφανώς $\sup_n \xi_n = \omega^\lambda$, αφού $\omega^{\mu_n} \leq (n-1)\omega^{\mu_n} \leq (n-1)\omega^{\mu_n} + (\omega^{\mu_n})_n$.

(5) Αν ξ οριακός με $\omega^a < \xi < \omega^{a+1}$ για κάποιο $0 < a < \omega_1$.

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $\xi = p\omega^a$ για κάποιο $p \in \mathbb{N}$ με $p > 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\xi(n) &= \{s \subseteq \mathbb{N} : \{n\} < s \text{ και } \{n\} \cup s = \bigcup_{i=1}^p si \text{ με } s_1 < \dots < s_p \text{ και } s_i \in \mathcal{A}_{\omega^a} \text{ για } 1 \leq i \leq p\} \\ &= \{s \subseteq \mathbb{N} : s = s_0 \cup (\bigcup_{i=2}^p si) \text{ με } \{n\} < s_0 < s_2 < \dots < s_p, s_0 \in \mathcal{A}_{(\omega^a)_n} \text{ και } s_2, \dots, s_p \in \mathcal{A}_{\omega^a}\} \\ &= \mathcal{A}_{(p-1)\omega^a + (\omega)_n} \cap [\mathbb{N} \cap (n, +\infty)]^{<\infty}. \end{aligned}$$

Άρα $\xi_n = (p\omega^a)_n = (p-1)\omega^a + (\omega^a)_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $\sup_n \xi_n = \xi$, αφού $\sup_n (\omega^a)_n = \omega^a$.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση $\xi = \beta + p\omega^a$ όπου $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 1$ και β διατακτικός αριθμός με $0 < \beta < \xi$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\xi(n) &= \{s \subseteq \mathbb{N} : \{n\} < s, \{n\} \cup s = s_1 \cup s_2, s_1 < s_2, s_1 \in \mathcal{A}_{p\omega^a} \text{ και } s_2 \in \mathcal{A}_\beta\} \\ &= \{s \subseteq \mathbb{N} : s = s_0 \cup s_2 \text{ με } \{n\} < s_0 < s_2, s_0 \in \mathcal{A}_{p\omega^a}(n) \text{ και } s_2 \in \mathcal{A}_\beta\} \\ &= \{s \subseteq \mathbb{N} : s = s_0 \cup s_2 \text{ με } \{n\} < s_0 < s_2, s_0 \in \mathcal{A}_{p\omega^a}(n) \text{ και } s_2 \in \mathcal{A}_\beta\} = \\ &= \mathcal{A}_{\beta + (p\omega^a)_n} \cap [\mathbb{N} \cap (n, +\infty)]^{<\infty}. \end{aligned}$$

Άρα $\xi_n = \beta + (p\omega^a)_n = \beta + (p-1)\omega^a + (\omega^a)_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $\sup_n \xi_n = \xi$. □

Πρόταση 3.6. Κάθε οικογένεια $\mathcal{A}_\xi$ με $\xi < \omega_1$ είναι λεπτή.

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με επαγωγή στο ξ .

Για $\xi = 1$, $\mathcal{A}_1 = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$ η οποία προφανώς είναι λεπτή.

Ας υποθέσουμε ότι οι οικογένειες $\mathcal{A}_\zeta$ είναι λεπτές για κάθε $\zeta < \xi$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}_\xi$ είναι λεπτή. Έστω $s \in \mathcal{A}_\xi$ και t ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του s . Αν $t = \emptyset$ τότε $t \notin \mathcal{A}_\xi$. Αν $t \neq \emptyset$, θέτω $m = \min s$. Τότε το $t \setminus \{m\}$ είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του $s \setminus \{m\}$. Αφού $s \setminus \{m\} \in \mathcal{A}_\xi(m) \subseteq \mathcal{A}_{\xi_m}$ η οποία είναι λεπτή ($\xi_m < \xi$), $t \setminus \{m\} \notin \mathcal{A}_{\xi_m}$, οπότε $t \notin \mathcal{A}_\xi$. Άρα η $\mathcal{A}_\xi$ είναι λεπτή. $\square$

Ορισμός 3.7. Έστω $\mathcal{F}$ μία οικογένεια από πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

(i) Ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο s του $\mathbb{N}$ έχει **κανονική αναπαράσταση**

$R_{\mathcal{F}}(s) = \{s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}\}$ με τύπο $t_{\mathcal{F}}(s) = n$ ως προς την $\mathcal{F}$, αν υπάρχουν μοναδικά $n \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathcal{F}$ και s_{n+1} ένα γνήσιο αρχικό τμήμα κάποιου στοιχείου της $\mathcal{F}$ με $s_1 < s_2 < \dots < s_n < s_{n+1}$ τέτοια ώστε $s = \bigcup_{i=1}^{n+1} s_i$.

(ii) Ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει **κανονική αναπαράσταση** $R_{\mathcal{F}}(I) = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ως προς την $\mathcal{F}$, αν υπάρχει μοναδική ακολουθία $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ με

$s_1 < s_2 < \dots$, τέτοια ώστε $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} s_i$.

Πρόταση 3.8. (Κανονική αναπαράσταση ως προς το $\mathcal{A}_\xi$) Έστω ξ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει κανονική αναπαράσταση ως προς την οικογένεια $\mathcal{A}_\xi$.

Απόδειξη. Έστω I ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Θα δείξουμε, με επαγωγή στο ξ , ότι το I έχει κανονική αναπαράσταση ως προς το $\mathcal{A}_\xi$, $\xi < \omega_1$.

Για $\xi = 1$, $\mathcal{A}_1 = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Προφανώς η I έχει κανονική αναπαράσταση ως προς την $\mathcal{A}_1$.

Ας υποθέσουμε ότι η I έχει κανονική αναπαράσταση ως προς την $\mathcal{A}_\zeta$ για κάθε $\zeta < \xi$. Θα δείξουμε ότι η I έχει κανονική αναπαράσταση ως προς το $\mathcal{A}_\xi$.

Θέτουμε $m_1 = \min I$ και $I_1 = I \setminus \{m_1\}$. Τότε από την υπόθεση της επαγωγής η I_1 έχει κανονική αναπαράσταση $(s_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ ως προς την $\mathcal{A}_{\xi_{m_1}}$, (αφού $1 \leq \xi_{m_1} < \xi$). Τότε $s_1 = \{m_1\} \cup s_1^1 \in \mathcal{A}_\xi$. Θέτω $m_2 = \min(I \setminus s_1)$ και $I_2 = I \setminus (s_1 \cup \{m_2\})$. Από την υπόθεση της επαγωγής η I_2 έχει κανονική αναπαράσταση $(s_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ ως προς την $\mathcal{A}_{\xi_{m_2}}$. Τότε $s_2 = \{m_2\} \cup s_1^2 \in \mathcal{A}_\xi$. Θέτω $m_3 = \min(I \setminus s_1 \cup s_2)$ και $I_3 = I \setminus (s_1 \cup s_2 \cup \{m_3\})$ και συνεχίζω ανάλογα. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μία ακολουθία $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}_\xi$ τέτοια ώστε $s_1 < s_2 < \dots$ και $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} s_n$. Η αναπαράσταση αυτή του I ως προς την $\mathcal{A}_\xi$ είναι μοναδική αφού η $\mathcal{A}_\xi$ είναι λεπτή οικογένεια. Άρα το I έχει κανονική αναπαράσταση ως προς την $\mathcal{A}_\xi$.

Έστωσαν ξ αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός και $s = \{m_1, \dots, m_\kappa\}$, ένα μη κενό, πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, με $m_1 < \dots < m_\kappa$. Θέτουμε $m_{\kappa+i} = m_\kappa + i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Το άπειρο σύνολο $I = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει κανονική αναπαράσταση ως προς το $\mathcal{A}_\xi$. Είναι άμεσο ότι το s έχει κανονική αναπαράσταση ως προς το $\mathcal{A}_\xi$. $\square$

Πόρισμα 3.9. Έστω ξ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Για κάθε μη κενό, πεπερασμένο σύνολο s του $\mathbb{N}$ ισχύει ένα από τα επόμενα ενδεχόμενα:

- είτε (i) το s είναι αρχικό τμήμα κάποιου στοιχείου της $\mathcal{A}_\xi$
- είτε (ii) υπάρχει στοιχείο της $\mathcal{A}_\xi$ το οποίο είναι αρχικό τμήμα της s .

Απόδειξη. Έστω s μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε αν $t_{\mathcal{A}_\xi}(s) = 0$ παίρνουμε την περίπτωση (i), ενώ αν $t_{\mathcal{A}_\xi}(s) \geq 1$ παίρνουμε την περίπτωση (ii). $\square$

Ορισμός 3.10. Έστω $\mathcal{F}$ μία κληρονομική και κατά σημείο κλειστή οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Για κάθε $M \in [\mathbb{N}]$ ορίζουμε τις **ισχυρές Cantor-Bendixson παραγώγους** $(\mathcal{F})_M^\xi$ του $\mathcal{F}$ στο M , για κάθε $\xi < \omega_1$ ως εξής:

$$(\mathcal{F})_M^1 = \{F \in \mathcal{F} \cap [M]^{<\infty} : F \text{ σημείο συσσώρευσης του } \mathcal{F} \cap [F \cup L]^{<\infty} \text{ για κάθε } L \in [M]\}$$

Αν η $(\mathcal{F})_M^\xi$ έχει οριστεί, τότε $(\mathcal{F})_M^{\xi+1} = ((\mathcal{F})_M^\xi)_M^1$.

Αν ο ξ είναι οριακός και τα $(\mathcal{F})_M^\zeta$ έχουν οριστεί για κάθε $\zeta < \xi$, τότε

$$(\mathcal{F})_M^\xi = \bigcap_{\zeta < \xi} (\mathcal{F})_M^\zeta.$$

Ονομάζουμε **ισχυρό Cantor-Bendixson δείκτη του $\mathcal{F}$ στο M** τον μικρότερο αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ για τον οποίο $(\mathcal{F})_M^\xi = \emptyset$. Θα συμβολίζουμε αυτόν τον δείκτη $s_M(\mathcal{F})$.

Παρατηρήσεις 3.11. (i) Ο ισχυρός Cantor-Bendixson δείκτης $s_M(\mathcal{F})$ μίας κληρονομικής και κατά σημείο κλειστής οικογένειας $\mathcal{F}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ σε κάποιο $M \in [\mathbb{N}]$ είναι ένας "επόμενος" αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός και είναι μικρότερος από τον "συνήθη" Cantor-Bendixson δείκτη $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ (βλ. [A-M-T]).

(ii) Έστω $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ κληρονομικές και κατά σημείο κλειστές οικογένειες με $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, τότε $s_M(\mathcal{F}_1) \leq s_M(\mathcal{F}_2)$ για κάθε $M \in [\mathbb{N}]$.

(iii) $s_M(\mathcal{F}) = s_M(\mathcal{F} \cap [M]^{<\omega})$ για κάθε $M \in [\mathbb{N}]$ (βλ. [A-M-T]).

(iv) Για κάθε $M \in [\mathbb{N}]$ και $s \in [M]^{<\omega}$, έχουμε ότι:

$s \in (\mathcal{F})_M^1$ αν και μόνο αν το σύνολο $\{m \in M : s \cup \{m\} \notin \mathcal{F}\}$ είναι πεπερασμένο

(βλ. [J]).

(v) Χρησιμοποιώντας το (iv), μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $L \in [M]$ και $\xi < \omega_1$, αν $F \in (\mathcal{F})_M^\xi$, τότε $F \cap L \in (\mathcal{F})_L^\xi$. Άρα $s_L(\mathcal{F}) \geq s_M(\mathcal{F})$.

(vi) Αν το L σχεδόν περιέχεται στο M (δηλαδή $L \setminus M$ πεπερασμένο), τότε $s_L(\mathcal{F}) \geq s_M(\mathcal{F})$.

Λήμμα 3.12. Έστω ξ αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, $L \in [\mathbb{N}]$ και $\mathcal{L}$ μία οικογένεια από πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\mathcal{L}_\star$ και $\mathcal{L}(n)_\star$ να είναι

κατά σημείο κλειστά για κάθε $n \in L$.

(i) Αν $F \in (\mathcal{L}(n)_*)_L^\xi$ για κάποιο $n \in L$, τότε $\{n\} \cup F \in (\mathcal{L}_*)_L^\xi$.

(ii) Αν $F \neq \emptyset$ και $F \in (\mathcal{L}_*)_L^\xi$, τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ με $l \leq \min F$ και $I \in [L]$ τέτοια ώστε $F \setminus \{l\} \in (\mathcal{L}(l)_*)_I^\xi$.

Απόδειξη. (i) Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο ξ .

Έστω $F \in (\mathcal{L}(n)_*)_L^1$. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι το σύνολο $\{m \in L : F \cup \{m\} \notin \mathcal{L}(n)_*\}$ είναι πεπερασμένο.

$$\{m \in L : F \cup \{m\} \in \mathcal{L}(n)_*\} \subseteq \{m \in L : F \cup \{m\} \cup \{n\} \in \mathcal{L}_*\}$$

(Αφού αν $F \cup \{m\} \in \mathcal{L}(n)_* \Rightarrow \exists s \in \mathcal{L}(n)$ τέτοιο ώστε $F \cup \{m\} \subseteq s \in \mathcal{L}(n) \Rightarrow F \cup \{m\} \cup \{n\} \subseteq s \cup \{n\} \in \mathcal{L} \Rightarrow F \cup \{m\} \cup \{n\} \in \mathcal{L}_*$)

Άρα $\{m \in L : F \cup \{m\} \cup \{n\} \notin \mathcal{L}_*\} \subseteq \{m \in \mathcal{L} : F \cup \{m\} \notin \mathcal{L}(n)_*\}$,

και αφού $\{m \in \mathcal{L} : F \cup \{m\} \notin \mathcal{L}(n)_*\}$ πεπερασμένο $\Rightarrow$

$\{m \in L : F \cup \{m\} \cup \{n\} \notin \mathcal{L}_*\}$ πεπερασμένο. Άρα πάλι από το προηγούμενο λήμμα $F \cup \{n\} \in (\mathcal{L}_*)_L^1$.

Έστω ότι η υπόθεση ισχύει για κάθε $\beta < \xi$. Αν $\xi = \zeta + 1$ και $F \in (\mathcal{L}(n)_*)_L^{\zeta+1}$, τότε $\{m \in L : F \cup \{m\} \notin (\mathcal{L}(n)_*)_L^\zeta\}$ πεπερασμένο, και αφού από την υπόθεση της επαγωγής ισχύει ότι

$$\{m \in L : F \cup \{m\} \in (\mathcal{L}(n)_*)_L^\zeta\} \subseteq \{m \in L : F \cup \{m\} \cup \{n\} \in (\mathcal{L}_*)_L^\zeta\} \text{ τότε}$$

και το σύνολο $\{m \in L : F \cup \{m\} \cup \{n\} \notin (\mathcal{L}_*)_L^\zeta\}$ είναι πεπερασμένο. Άρα

$$F \cup \{n\} \in (\mathcal{L}_*)_L^{\zeta+1}.$$

Αν ξ οριακός και $F \in (\mathcal{L}(n)_*)_L^\xi = \bigcap_{\zeta < \xi} (\mathcal{L}(n)_*)_L^\zeta$. Τότε από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι $F \cup \{n\} \in \bigcap_{\zeta < \xi} (\mathcal{L}_*)_L^\zeta = (\mathcal{L}_*)_L^\xi$.

(ii) Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο ξ .

Έστω $F \neq \emptyset$ και $F \in (\mathcal{L}_*)_L^1$. Τότε από το προηγούμενο λήμμα το σύνολο

$$L_F = \{m \in L : F \cup \{m\} \in \mathcal{L}_* \text{ με } \min F \leq m\} \text{ είναι σχεδόν ίσο με το } L.$$

Για κάθε $m \in L_F$ υπάρχει $s_m \subseteq \mathcal{L}$ τέτοιο ώστε $F \cup \{m\} \subseteq s_m$. Προφανώς

$1 \leq \min s_m \leq \min F$ για κάθε $m \in L_F$. Θέτουμε

$l = \min\{n \in \mathbb{N} : \{m \in L_F : \min s_m = n\} \text{ άπειρο σύνολο } \}$ και

$I = \{m \in \mathbb{N} : \min s_m = l\} \cup F$. Άρα σχεδόν για κάθε $m \in I$

$\min s_m = l$, $F \cup \{m\} \subseteq s_m$, $\min s_m \leq \min F \Rightarrow$

$(F \setminus \{l\}) \cup \{m\} \subseteq s_m \setminus \{l\} \in \mathcal{L}(l) \Rightarrow (F \setminus \{l\}) \cup \{m\} \in \mathcal{L}(l)_*$.

Άρα $F \setminus \{l\} \in (\mathcal{L}(l)_*)_I^1$.

Ας υποθέσουμε ότι η υπόθεση ισχύει για κάθε $\beta < \xi$.

Αν $\xi = \zeta + 1$ και $F \in (\mathcal{L}_*)_L^{\zeta+1}$, $F \neq \emptyset$. Τότε

$L_F = \{m \in L : F \cup \{m\} \in (\mathcal{L}_*)_L^\zeta \text{ και } \min F \leq \{m\}\}$ είναι σχεδόν ίσο με το L .

Θέτουμε $m_1 = \min L_F$. $F \cup \{m_1\} \in (\mathcal{L}_*)_{L_F \cup F}^\zeta$, άρα από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει $l_1 \leq \min F \cup \{m\} = \min F$, $I_1 \in [L_F]$ τέτοιο ώστε

$(F \cup \{m_1\}) \setminus \{l_1\} \in (\mathcal{L}(l_1)_*)_{I_1 \cup F}^\zeta$.

Διαλέγουμε $m_2 \in I_1$, $m_2 > m_1$. $F \cup \{m_2\} \in (\mathcal{L}_*)_{I_1 \cup F}^\zeta$ (αφού $I_1 \cup F$ σχεδόν υποσύνολο του L).

Άρα από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχουν $l_2 \in \mathbb{N}$, με

$l_2 \leq \min F \cup \{m_2\} = \min F$ και $I_2 \in [I_1]$ τέτοια ώστε

$(F \cup \{m_2\}) \setminus \{l_2\} \in (\mathcal{L}(l_2)_*)_{I_2 \cup F}^\zeta$. Διαλέγουμε $m_3 \in [I_2]$ με $m_3 > m_2$ και συνε-

χίζουμε ανάλογα. Κατασκευάσαμε έτσι μία αύξουσα ακολουθία $(m_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq L_F$

και μία φθίνουσα οικογένεια συνόλων $(I_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq [L_F]$ τέτοια ώστε

$(F \cup \{m_i\}) \setminus \{l_i\} \in (\mathcal{L}(l_i)_*)_{I_i \cup F}^\zeta$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Αφού $1 \leq \{l_i\} \leq \min F$, υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το σύνολο

$L_1 = \{i \in \mathbb{N} : l_i = l\}$ να είναι άπειρο. Έστω $I = \{m_i : i \in L_1\} \cup F$. Τότε

$(F \cup \{m_i\}) \setminus \{l\} \in (\mathcal{L}(l)_*)_{I_i \cup F}^\zeta$ για κάθε $i \in L_1$ και αφού το I σχεδόν περιέχεται

στο $I_i \cup F$ για κάθε $i \in L_1 \Rightarrow ((F \cup \{m_i\}) \setminus \{l\}) \cap I \in (\mathcal{L}(l)_*)_I^\zeta$ για κάθε $i \in L_1 \Rightarrow$

$(F \cup \{m_i\}) \setminus \{l\} \in (\mathcal{L}(l)_*)_I^\zeta$ για κάθε $m \in I \Rightarrow F \setminus \{l\} \in (\mathcal{L}(l)_*)_I^{\zeta+1} = (\mathcal{L}(l)_*)_I^\xi$.

Αν ξ οριακός διαλέγουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ διατακτικών τέτοια ώστε $\zeta_i < \xi$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $\sup_{n \in \mathbb{N}} \zeta_n = \xi$. Έστω $F \in (\mathcal{L}_*)_L^\xi$ και $F \neq \emptyset$.

Τότε $F \in (\mathcal{L}_*)^{\zeta_i}_L$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Άρα $F \in (\mathcal{L}_*)^{\zeta_1}_L$ και από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχουν $l_1 \in \mathbb{N}$ με $\{l_1\} \leq \min F$ και $I_1 \in [L \cap (\in F, +\infty)]$ τέτοια ώστε $F \setminus \{l_1\} \in (\mathcal{L}(l_1)_*)^{\zeta_1}_{I_1 \cup F}$. Αφού $F \in (\mathcal{L}_*)^{\zeta_2}_{I_1 \cup F}$ υπάρχουν $l_2 \in \mathbb{N}$ με $\{l_2\} \leq \min F$ και $I_2 \in [I_1]$ τέτοια ώστε $I_2 \neq I_1$ και $F \setminus \{l_2\} \in (\mathcal{L}(l_2)_*)^{\zeta_2}_{I_2 \cup F}$. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε μία ακολουθία $(l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $1 \leq l_i \leq \min F$ και μία γνησίως φθίνουσα οικογένεια συνόλων $(I_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq [L]$ τέτοια ώστε $F \setminus \{l_i\} \in (\mathcal{L}(l_i)_*)^{\zeta_i}_{I_i \cup F}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Αφού $1 \leq l_i \leq \min F$ υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $L_1 = \{i \in \mathbb{N} : l_i = l\}$ να είναι άπειρο. Θέτουμε $I = \{\min I_i : i \in L_1\} \cup F$. Τότε $F \setminus \{l\} \in (\mathcal{L}(l)_*)^{\zeta_i}_{I_i \cup F} \Rightarrow F \setminus \{l\} \in (\mathcal{L}(l)_*)^{\zeta_i}_I$ (αφού I σχεδόν υποσύνολο του $I_i \cup F$), για κάθε $i \in L_1$. Αφού $\sup_{i \in L_1} \zeta_i = \xi$, έχουμε ότι $F \setminus \{l\} \in (\mathcal{L}(l)_*)^\xi_I$ για κάθε $\zeta < \xi \Rightarrow F \setminus \{l\} \in (\mathcal{L}(l)_*)^\xi_I$ □

Πρόταση 3.13. Έστω $\mathcal{F}$ μία κληρονομική και κατά σημείο κλειστή οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, ξ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός και $L \in [\mathbb{N}]$. Τότε η οικογένεια συνόλων $(\mathcal{F})^\xi_L$ είναι κληρονομική.

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο ξ .

Για $\xi=1$: Έστω $F \in (\mathcal{F})^1_L$ και $s \subseteq F$. Τότε το σύνολο

$\{m \in L : F \cup \{m\} \notin \mathcal{F}\}$ είναι πεπερασμένο. Άρα και το σύνολο

$\{m \in L : s \cup \{m\} \notin \mathcal{F}\}$ είναι πεπερασμένο

(αφού $[F \cup \{m\} \in \mathcal{F} \Rightarrow s \cup \{m\} \in \mathcal{F}]$).

Τότε $s \in (\mathcal{F})^1_L$ και άρα $(\mathcal{F})^1_L$ κληρονομική.

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $\beta < \xi$.

Για $\xi=\zeta+1$: Έστω $F \in (\mathcal{F})^{\zeta+1}_L$ και $s \subseteq F$. Τότε το σύνολο

$\{m \in L : F \cup \{m\} \notin (\mathcal{F})^\zeta_L\}$ είναι πεπερασμένο. Άρα και το σύνολο

$\{m \in L : s \cup \{m\} \notin (\mathcal{F})^\zeta_L\}$ είναι πεπερασμένο

($[F \cup \{m\} \in (\mathcal{F})^\zeta_L \Rightarrow s \cup \{m\} \in (\mathcal{L}_*)^\zeta_L]$ αφού $(\mathcal{F})^\zeta_L$ κληρονομική)

Τότε $s \in (\mathcal{F})_L^{\zeta+1}$ και άρα $(\mathcal{F})_L^{\zeta+1}$ κληρονομική.

Για ξ οριακό: Έστω $F \in (\mathcal{F})_L^\xi = \bigcap_{\zeta < \xi} (\mathcal{F})_L^\zeta$ και $s \subseteq F$.

Τότε $F \in (\mathcal{F})_L^\zeta$ για κάθε $\zeta < \xi$ και άρα $s \in (\mathcal{F})_L^\zeta$ για κάθε $\zeta < \xi$. Τότε

$s \in \bigcap_{\zeta < \xi} (\mathcal{F})_L^\zeta = (\mathcal{F})_L^\xi$. Άρα $(\mathcal{F})_L^\xi$ κληρονομική. $\square$

Πρόταση 3.14. Έστω $M \in [\mathbb{N}]$ και ξ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός.

Τότε η οικογένεια $(\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_\star$ είναι κατά σημείο κλειστή.

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο ξ .

Για $\xi=1$: $(\mathcal{A}_1 \cap [M]^{<\infty})_\star = \{\{m\} : m \in M\} \cup \{\emptyset\}$ και χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.70 εύκολα βλέπουμε ότι $(\mathcal{A}_1 \cap [M]^{<\infty})_\star$ είναι κατά σημείο κλειστή.

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $\beta < \xi$.

Αν η $(\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_\star$ δεν είναι κατά σημείο κλειστή, τότε υπάρχει ακολουθία $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq (\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_\star$ τέτοια ώστε $s_1 \prec s_2 \prec \dots$. Θέτω $n = \min s_1$. Τότε προφανώς $n = \min s_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επίσης για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει

$F_i \in \mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty}$ τέτοια ώστε $s_i \subseteq F_i$. Τότε

$s_i \setminus \{n\} \subseteq F_i \setminus \{n\} \in (\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})(n) = \mathcal{A}_{\xi_n} \cap [M \cap (n, +\infty)]^{<\infty}$.

Άρα $s_i \setminus \{n\} \in (\mathcal{A}_{\xi_n} \cap [M \cap (n, +\infty)]^{<\infty})_\star$. Οπότε κατασκευάσαμε μία ακολουθία της $(\mathcal{A}_{\xi_n} \cap [M \cap (n, +\infty)]^{<\infty})_\star$ με $s_1 \setminus \{n\} \prec s_2 \setminus \{n\} \prec \dots$, άτοπο, αφού $\xi_n < \xi$. $\square$

Πόρισμα 3.15. Η οικογένεια $((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})(m))_\star$ είναι κατά σημείο κλειστή, αφού $((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})(m))_\star = (\mathcal{A}_{\xi_m} \cap [M \cap (m, +\infty)]^{<\infty})_\star$.

Πρόταση 3.16. Έστω M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε

$s_L((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_\star) = \xi+1$ για κάθε ξ αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό και $L \in [M]$.

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο ξ .

Για $\xi=1$: Αφού $(\mathcal{A}_1 \cap [M]^{<\infty})_* = \{\{m\} : m \in M\} \cup \{\emptyset\}$ έχουμε ότι $((\mathcal{A}_1 \cap [M]^{<\infty})_*)_L^1 = \{\emptyset\}$ και άρα $((\mathcal{A}_1 \cap [M]^{<\infty})_*)_L^2 = \emptyset$, δηλαδή $s_L((\mathcal{A}_1 \cap [M]^{<\infty})_*) = 2$.

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $\beta < \xi$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση $\mathcal{A}_\xi(n) = \mathcal{A}_{\xi_n} \cap [\mathbb{N} \cap (n, +\infty)]^{<\infty}$.

$(\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})(m) = \mathcal{A}_\xi(m) \cap [M]^{<\infty} = \mathcal{A}_{\xi_m} \cap [\mathbb{N} \cap (m, +\infty)]^{<\infty} \cap [M]^{<\infty} = \mathcal{A}_{\xi_m} \cap [M \cap (m, +\infty)]^{<\infty}$. Άρα $((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})(m))_* = (\mathcal{A}_{\xi_m} \cap [M \cap (m, +\infty)]^{<\infty})_*$.

Τότε $s_L((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})(m)_*) = s_L((\mathcal{A}_{\xi_m} \cap [M \cap (m, +\infty)]^{<\infty})_*) = \xi_m + 1$ για κάθε $m \in M$, οπότε $\emptyset \in ((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})(m)_*)_{L^{\xi_m}}$ για κάθε $m \in M$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι $\emptyset \in (\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_*^\xi$.

Για $\xi=\zeta+1$: $\xi_m = \zeta$ για κάθε $m \in M$.

$\emptyset \in (\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_*^\zeta \Rightarrow$

$\{l\} \in ((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_*^\zeta)_L$ για κάθε $l \in L \Rightarrow$

$\emptyset \in ((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_*^\zeta)_L^\xi$.

Για ξ οριακό: τότε $\emptyset \in ((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_*^\xi)_L$ για κάθε $l \in L$.

Αφού $\xi_l < \xi$ και $\sup_{l \in L} \xi_l = \xi$ έχουμε ότι $\emptyset \in ((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_*^\xi)_L^\xi$.

Τώρα θα δείξουμε ότι $((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_*^\xi)_L^\xi = \{\emptyset\}$. Έστω $F \in ((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_*^\xi)_L^\xi$ και $F \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, $\{n\} \leq \min F$ και $I \in [L]$ τέτοια ώστε

$F \setminus \{n\} \in ((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})(n)_*)_I^\xi$. Τότε

$\xi_n + 1 = s_I((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})(n)_*) \geq \xi + 1 > \xi_n + 1$, άτοπο.

Οπότε $((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_*^\xi)_L^\xi = \{\emptyset\}$ και $s_L((\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})_*) = \xi + 1$.

□

Κεφάλαιο 4

Επέκταση Θεωρήματος Ramsey

Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 2, το θεώρημα Ramsey είναι ένα διαμεριστικό θεώρημα για τις οικογένειες $[\mathbb{N}]^\kappa$, όλων των κ -άδων φυσικών αριθμών, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$. Στο κεφάλαιο αυτό επεκτείνεται το θεώρημα, μέσω των λεπτών οικογενειών Schreier, σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό, αντικαθιστώντας τις οικογένειες $[\mathbb{N}]^\kappa$ με τις $\mathcal{A}_\xi$ (Θεώρημα 5.1). Σημειώνουμε ότι $\mathcal{A}_\kappa = [\mathbb{N}]^\kappa$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση που η διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι κληρονομική ή γενικότερα δέντρο παίρνουμε ένα ισχυρότερο θεώρημα Ramsey (4.6 , 4.11), προσδιορίζοντας, μέσω του ισχυρού Cantor-Bendixson δείκτη, ποιό σκέλος της διχοτομίας ισχύει. Δηλαδή, δοθέντος ξ , μπορούμε να συμπεράνουμε αν η περιορισμένη οικογένεια $(\mathcal{A}_\xi \cap [M]^{<\infty})$ ανήκει στην διαμεριστική οικογένεια $\mathcal{F}$ ή στο συμπλήρωμα της $[\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$.

Θεώρημα 4.1. (Επέκταση θεωρήματος Ramsey στο σύστημα Schreier)

Έστω $\mathcal{F}$ ένα τυχαίο σύνολο από πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και ξ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Τότε υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο L του M τέτοιο ώστε
είτε $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$

είτε $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$.

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο ξ .

Για $\xi = 1$. $\mathcal{A}_1 = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]$. Θέτω $I = \{m \in M : \{m\} \in \mathcal{F}\}$ και $L = I$ αν I άπειρο ή $L = M \setminus I$ αν I πεπερασμένο. Προφανώς $\mathcal{A}_1 \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$ ή $\mathcal{A}_1 \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$.

Για $\xi > 1$. Ας υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό $\zeta < \xi$. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]$. Έστω $m_1 = \min M$, $M_1 = M \setminus \{m_1\}$ και $\mathcal{F}_1 = \{s \subseteq M_1 : \{m_1\} \cup s \in \mathcal{F}\}$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.5, $\mathcal{A}_\xi(m_1) = \mathcal{A}_{\xi_{m_1}} \cap [\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, m_1\}]^{<\infty}$ με $\xi_{m_1} < \xi$. Άρα από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $L_1 \in [M_1]$ τέτοιο ώστε

είτε $\mathcal{A}_{\xi_{m_1}} \cap [L_1]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_1$ είτε $\mathcal{A}_{\xi_{m_1}} \cap [L_1]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}_1$.

Άρα είτε $\mathcal{A}_\xi(m_1) \cap [L_1]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_1$ είτε $\mathcal{A}_\xi(m_1) \cap [L_1]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}_1$.

Θέτω $m_2 = \min L_1$, $M_2 = L_1 \setminus \{m_2\}$ και $\mathcal{F}_2 = \{s \subseteq M_2 : \{m_2\} \cup s \in \mathcal{F}_1\}$. Αφού $\mathcal{A}_\xi(m_2) = \mathcal{A}_{\xi_{m_2}} \cap [\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, m_2\}]^{<\infty}$ με $\xi_{m_2} < \xi$, υπάρχει $L_2 \in [M_2]$ τέτοιο ώστε είτε $\mathcal{A}_\xi(m_2) \cap [L_2]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_2$ είτε $\mathcal{A}_\xi(m_2) \cap [L_2]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}_2$.

Θέτω $m_3 = \min L_2$, $M_3 = L_2 \setminus \{m_3\}$ και συνεχίζω με τον ίδιο τρόπο.

Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία $I = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του M , δύο φθίνουσες οικογένειες συνόλων $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $[M]$ τέτοιες ώστε:

(i) $m_\kappa \in L_n$ για κάθε $\kappa > n$

(ii) $L_n \subseteq M_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(iii) Αν $\mathcal{F}_n = \{s \subseteq M_n : \{m_n\} \cup s \in \mathcal{F}\}$, τότε

είτε $\mathcal{A}_\xi(m_n) \cap [L_n]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_n$ είτε $\mathcal{A}_\xi(m_n) \cap [L_n]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}_n$.

Θέτω $I_1 = \{m_n \in I : \mathcal{A}_\xi(m_n) \cap [L_n]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_n\}$ και $I_2 = I \setminus I_1$. Αν το I_1 είναι άπειρο τότε $\mathcal{A}_\xi \cap [I_1]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Πράγματι, έστω $F \in \mathcal{A}_\xi \cap [I_1]^{<\infty}$ και έστω

$m_n = \min F$. Τότε $F = \{m_n\} \cup s$ για κάποιο $s \in \mathcal{A}_\xi(m_n)$. Εφόσον $m_n < s$ και $s \in [I]^{<\infty}$ ισχύει ότι $s \subseteq L_n$ χρησιμοποιώντας το (i). Άρα $s \in \mathcal{A}_\xi(m_n) \cap [L_n]^{<\infty}$. Αφού $m_n \in I_1$ ισχύει ότι $s \in \mathcal{F}_n$ και συνεπώς $F = \{m_n\} \cup s \in \mathcal{F}$. Αν το I_2 είναι άπειρο αποδεικνύουμε με όμοιο τρόπο ότι $\mathcal{A}_\xi \cap [I_2]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$. Θέτοντας $L = I_1$ αν το I_1 είναι άπειρο και $L = I \setminus I_1$ αν το I_1 πεπερασμένο ισχύει ότι είτε $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$ είτε $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$. $\square$

Πόρισμα 4.2. Έστω M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, $\{P_1, \dots, P_n\}$ μία πεπερασμένη διαμέριση του $[M]^{<\infty}$ και ξ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Τότε υπάρχει $L \in [M]$ και $i \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq P_i$.

Πόρισμα 4.3. Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια από πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, $M \in [\mathbb{N}]$ και ξ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Αν $\mathcal{A}_\xi \cap \mathcal{F} \cap [I]^{<\infty} \neq \emptyset$ για κάθε $I \in [M]$, τότε υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$.

Πρόταση 4.4. Έστω $\mathcal{F}$ μία οικογένεια από πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, η οποία είναι δέντρο, M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και ξ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Τότε υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$$

$$\text{είτε } \mathcal{F} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^* \setminus \mathcal{A}_\xi.$$

Απόδειξη. Από την Επέκταση του θεωρήματος Ramsey στο σύστημα Schreier (4.1) υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$$

$$\text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}.$$

Αφού $\mathcal{F}$ δέντρο έχουμε ότι $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$ αν και μόνο αν

$$\mathcal{F} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^* \setminus \mathcal{A}_\xi.$$

Πράγματι, έστω $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$ και $F \in \mathcal{F} \cap [L]^{<\infty}$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.9 υπάρχει $s \in \mathcal{A}_\xi$ τέτοιο ώστε είτε το F είναι αρχικό τμήμα του s είτε το s είναι αρχικό τμήμα του F .

Αν το F είναι αρχικό τμήμα του s , τότε $F \in (\mathcal{A}_\xi)^*$. Όμως $F \notin \mathcal{A}_\xi$ γιατί αλλιώς θα είχαμε $F \in \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$, άτοπο. Οπότε $F \in (\mathcal{A}_\xi)^* \setminus \mathcal{A}_\xi$.

Αν το s είναι αρχικό τμήμα του F , τότε αφού το $\mathcal{F}$ είναι δέντρο και $F \in \mathcal{F} \cap [L]^{<\infty}$ έχουμε ότι $s \in \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \cap \mathcal{F}$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$. Άρα $\mathcal{F} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^* \setminus \mathcal{A}_\xi$.

Έστω τώρα ότι ισχύει $\mathcal{F} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^* \setminus \mathcal{A}_\xi$ και $F \in \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty}$. Τότε $F \notin \mathcal{F} \cap [L]^{<\infty}$ και αφού $F \in [L]^{<\infty}$ έχουμε ότι $F \notin \mathcal{F}$. Άρα $F \in [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$. $\square$

Πόρισμα 4.5. Έστω ξ_1, ξ_2 αριθμήσιμοι διατακτικοί αριθμοί με $\xi_1 < \xi_2$. Για κάθε $M \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $(\mathcal{A}_{\xi_1})_* \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_{\xi_2})^* \setminus \mathcal{A}_{\xi_2}$.

Απόδειξη. Αφού $(\mathcal{A}_{\xi_1})_*$ δέντρο, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, για κάθε $M \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε είτε $\mathcal{A}_{\xi_2} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_{\xi_1})_*$ είτε $(\mathcal{A}_{\xi_1})_* \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_{\xi_2})^* \setminus \mathcal{A}_{\xi_2}$. Η πρώτη περίπτωση είναι αδύνατη αφού αν $\mathcal{A}_{\xi_2} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_{\xi_1})_*$, τότε $\xi_2 + 1 = s_L((\mathcal{A}_{\xi_2} \cap [L]^{<\infty})_*) \leq s_L((\mathcal{A}_{\xi_1})_*) = \xi_1 + 1$. Άρα $(\mathcal{A}_{\xi_1})_* \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_{\xi_2})^* \setminus \mathcal{A}_{\xi_2}$. $\square$

Θεώρημα 4.6. Έστω $\mathcal{F}$ μία κληρονομική οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν η οικογένεια $\mathcal{F} \cap [M]^{<\infty}$ δεν είναι κατά σημείο κλειστή, τότε υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$.
2. Αν η οικογένεια $\mathcal{F} \cap [M]^{<\infty}$ είναι κατά σημείο κλειστή, τότε θέτουμε

$$\xi_M^{\mathcal{F}} = \sup\{s_L(\mathcal{F}) : L \in [M]\}.$$

Τότε ο $\xi_M^{\mathcal{F}}$ είναι ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός και

(i) για κάθε ξ για το οποίο ισχύει $\xi_M^{\mathcal{F}} > \xi + 1$, υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$$

(ii) για κάθε ξ για το οποίο ισχύει $\xi_M^{\mathcal{F}} < \xi + 1$ και για κάθε $I \in [M]$, υπάρχει $L \in [I]$ τέτοιο ώστε:

$$\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F} \text{ (ή ισοδύναμα } \mathcal{F} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^* \setminus \mathcal{A}_\xi \text{)}$$

(iii) για το ξ για το οποίο ισχύει $\xi_M^{\mathcal{F}} = \xi + 1$, υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F} \text{ είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$$

Και οι δύο περιπτώσεις της **2(iii)** μπορούν να ικανοποιηθούν.

Απόδειξη. 1. Αν η οικογένεια $\mathcal{F} \cap [M]^{<\infty}$ δεν είναι κατά σημείο κλειστή, τότε από την πρόταση 1.70 υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$.

2. Αν η οικογένεια $\mathcal{F} \cap [M]^{<\infty}$ είναι κατά σημείο κλειστή. Τότε ο $\xi_M^{\mathcal{F}}$ είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Πράγματι, αφού ο Cantor-Bendixson δείκτης $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ του $\mathcal{F}$ (όπως ορίζεται στο [Ku]) είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός (αφού κάθε οικογένεια παράγωγων συνόλων της $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη) και αφού $s_I(\mathcal{F}) \leq \mathcal{O}(\mathcal{F})$ για κάθε $I \in [\mathbb{N}]$, έχουμε ότι $\xi_M^{\mathcal{F}} \leq \mathcal{O}(\mathcal{F}) < \omega_1$.

(i) Έστω ξ διατακτικός αριθμός με $\xi_M^{\mathcal{F}} > \xi + 1$. Τότε υπάρχει $I \in [M]$ τέτοιο ώστε $\xi + 1 < s_I(\mathcal{F})$. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.1 και την Πρόταση 4.4, υπάρχει $L \in [I]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F} \text{ είτε } \mathcal{F} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^* \setminus \mathcal{A}_\xi \subseteq (\mathcal{A}_\xi)_*.$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι αδύνατη αφού αν $\mathcal{F} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)_*$, τότε σύμφωνα με την πρόταση 3.16 και την παρατήρηση 3.11(ii)

$$s_I(\mathcal{F}) \leq s_L(\mathcal{F}) = s_L(\mathcal{F} \cap [L]^{<\infty}) \leq s_L((\mathcal{A}_\xi)_*) = \xi + 1, \text{ άτοπο.}$$

Άρα $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$.

(ii) Έστω ξ αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός με $\xi + 1 > \xi_M^\mathcal{F}$ και $I \in [M]$. Τότε από το θεώρημα 4.1 υπάρχει $L \in [I]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F} \quad \text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}.$$

Η πρώτη περίπτωση είναι αδύνατη αφού αν $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$ τότε και $(\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty})_\star \subseteq \mathcal{F}$ και έχουμε

$$\xi + 1 > s_L(\mathcal{F}) \geq s_L((\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty})_\star) = \xi + 1, \quad \text{άτοπο}.$$

Άρα $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$.

(iii) Έστω ξ διατακτικός αριθμός με $\xi + 1 = \xi_M^\mathcal{F}$. Τότε από το θεώρημα 4.1 υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F} \quad \text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}.$$

Μπορούμε να δούμε ότι ικανοποιούνται και οι δύο περιπτώσεις από τα παρακάτω παραδείγματα. □

Παράδειγμα 4.7. (1η περίπτωση)

Θέτουμε $\mathcal{F} = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : s \neq \emptyset \text{ και } |s| = 2 \min s + 1\}$ και $M = \mathbb{N}$.

Η $\mathcal{F}_\star$ είναι κατά σημείο κλειστή.

(Πράγματι, αν η $\mathcal{F}_\star$ δεν ήταν κλειστή τότε θα υπήρχε ακολουθία $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $s_1 \prec s_2 \prec \dots \prec s_n \prec \dots$. Όμως $n_0 = \min s_1 = \min s_\kappa$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, οπότε $|s_n| \leq 2n_0 + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο.)

Θα δείξουμε ότι $s_L(\mathcal{F}_\star) = \omega + 1$ για κάθε $L \in [\mathbb{N}]$.

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{F}(n) = \mathcal{A}_{2n} \cap [\mathbb{N} \cap (n, +\infty)]^{<\infty}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα από την Πρόταση 3.16, $s_L((\mathcal{F}(n))_\star) = 2n + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $L \in [\mathbb{N}]$.

Άρα $\emptyset \in ((\mathcal{F}(n))_\star)_L^{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\{n\} \in (\mathcal{F}_\star)_L^{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οπότε

$\{m\} \in (\mathcal{F}_\star)_L^{2n}$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow$

$\emptyset \in (\mathcal{F}_\star)_L^{2n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\emptyset \in \bigcap_{n < \omega} (\mathcal{F}_\star)_L^n = (\mathcal{F}_\star)_L^\omega.$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει $F \neq \emptyset, F \in (\mathcal{F}_\star)_L^\omega.$

Τότε από το λήμμα 3.12 υπάρχει $l < \min F$ και $I \in [L]$ τέτοια ώστε

$F \setminus \{l\} \in ((\mathcal{F}(l))_\star)_I^\omega$, άτοπο αφού $s_I((\mathcal{F}(l))_\star) = 2l + 1.$

Άρα $(\mathcal{F}_\star)_L^\omega = \{\emptyset\} \Rightarrow (\mathcal{F}_\star)_L^{\omega+1} = \emptyset \Rightarrow s_L(\mathcal{F}_\star) = \omega + 1.$

Τότε $\xi_{\mathbb{N}}^{\mathcal{F}_\star} = \sup\{s_L(\mathcal{F}_\star) : L \in \mathbb{N}\} = \omega + 1$ και προφανώς $\mathcal{A}_\omega \subseteq \mathcal{F}_\star.$

Παράδειγμα 4.8. (2η περίπτωση)

Θέτουμε $\mathcal{F} = \{s \in [M]^{<\omega} : s \neq \emptyset \text{ και } |s| = \frac{\min s}{2}\}$ και

$M = \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0 \text{ και } n \text{ άρτιος}\}.$

Η $\mathcal{F}_\star$ είναι κατά σημείο κλειστή (όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα).

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{F}(n) = \mathcal{A}_{\frac{n}{2}-1} \cap [M \cap (n, +\infty)]^{<\omega}$ για κάθε $n \in M$, και

με όμοιο τρόπο με το προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$\xi_M^{\mathcal{F}_\star} = \omega + 1.$

Όμως σε αυτό το παράδειγμα ισχύει ότι $\mathcal{F}_\star \cap [M]^{<\omega} \subseteq (\mathcal{A}_\omega)^\star \setminus \mathcal{A}_\omega.$

(Πράγματι, $F \in \mathcal{F}_\star \cap [M]^{<\omega} \Rightarrow F \in \mathcal{F}_\star \Rightarrow$

$F \subseteq s \in \mathcal{F} \subseteq (\mathcal{A}_\omega)^\star$ και αφού $F \notin \mathcal{A}_\omega \Rightarrow F \in (\mathcal{A}_\omega)^\star \setminus \mathcal{A}_\omega).$

Ορισμός 4.9. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Θέτουμε

$$\mathcal{F}_h = \{s \in \mathcal{F} : \text{κάθε μη κενό υποσύνολο του } s \text{ ανήκει στο } \mathcal{F}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Προφανώς η οικογένεια $\mathcal{F}_h$ είναι η μεγαλύτερη υπο-οικογένεια της $\mathcal{F}$ η οποία είναι κληρονομική.

Πρόταση 4.10. Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ και για κάθε $L \in [\mathbb{N}]$ ισχύει

$$\mathcal{A}_\xi^* \cap [L]^{<\infty} = (\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty})^*.$$

Απόδειξη. $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{A}_\xi \Rightarrow (\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty})^* \subseteq \mathcal{A}_\xi^*$. Επίσης

$(\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty})^* \subseteq [L]^{<\infty}$, οπότε $(\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty})^* \subseteq \mathcal{A}_\xi^* \cap [L]^{<\infty}$.

Αρα μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{A}_\xi^* \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty})^*$.

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή.

Για $\xi=1$. $\mathcal{A}_1^* = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\} \Rightarrow$

$$\mathcal{A}_1^* \cap [L]^{<\infty} = \{\{n\} : n \in L\} \cup \{\emptyset\} = (\mathcal{A}_1 \cap [L]^{<\infty})^*.$$

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $\beta < \xi$, θα δείξουμε ότι ισχύει και για το ξ . Έστω $F \in \mathcal{A}_\xi^* \cap [L]^{<\infty} \Rightarrow F \in \mathcal{A}_\xi^*$ και $F \in [L]^{<\infty}$. Τότε υπάρχει $s \in \mathcal{A}_\xi$ τέτοιο ώστε $F \prec s$. Θέτουμε $l = \min F$ οπότε $F \setminus \{l\} \prec s \setminus \{l\} \in \mathcal{A}_\xi(l) = \mathcal{A}_{\xi_l} \cap [\mathbb{N} \cap (l, +\infty)]^{<\infty} \Rightarrow F \setminus \{l\} \in \mathcal{A}_{\xi_l}^* \cap [L]^{<\infty} = (\mathcal{A}_{\xi_l} \cap [L]^{<\infty})^*$. Αρα υπάρχει $s' \in \mathcal{A}_{\xi_l} \cap [L]^{<\infty}$ τέτοιο ώστε $F \setminus \{l\} \prec s'$. Τότε $F \prec s' \cup \{l\} \in \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \Rightarrow F \in (\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty})^*$. Οπότε $\mathcal{A}_\xi^* \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty})^*$. $\square$

Θεώρημα 4.11. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ το οποίο είναι δέντρο και $M \in [\mathbb{N}]$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν η οικογένεια $\mathcal{F}_h \cap [M]^{<\infty}$ δεν είναι κατά σημείο κλειστή, τότε υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$.
2. Αν η οικογένεια $\mathcal{F}_h \cap [M]^{<\infty}$ είναι κατά σημείο κλειστή, τότε θέτουμε

$$\zeta_M^{\mathcal{F}} = \sup\{s_L(\mathcal{F}_h) : L \in [M]\} = \xi_M^{\mathcal{F}_h}.$$

Τότε ο $\zeta_M^{\mathcal{F}}$ είναι ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός και

(i) για κάθε ξ για το οποίο ισχύει $\zeta_M^{\mathcal{F}} > \xi + 1$, υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$$

(ii) για κάθε ξ για το οποίο ισχύει $\zeta_M^{\mathcal{F}} < \xi$ και για κάθε $I \in [M]$, υπάρχει $L \in [I]$ τέτοιο ώστε:

$$\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F} \text{ (ή ισοδύναμα } \mathcal{F} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^* \setminus \mathcal{A}_\xi \text{)}$$

(iii) για τα ξ για τα οποία ισχύει $\xi_M^{\mathcal{F}} = \xi + 1$ ή $\xi_M^{\mathcal{F}} = \xi$, υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F} \text{ είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}.$$

Απόδειξη. 1. Αν η οικογένεια $\mathcal{F}_h \cap [M]^{<\infty}$ δεν είναι κατά σημείο κλειστή, τότε από την πρόταση 1.70 υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$.

2. Αν η οικογένεια $\mathcal{F}_h \cap [M]^{<\infty}$ είναι κατά σημείο κλειστή. Τότε ο $\zeta_M^{\mathcal{F}}$ είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός αφού είναι ίσος με τον δείκτη $\xi_M^{\mathcal{F}_h}$.

(i) Έστω ξ διατακτικός αριθμός με $\zeta_M^{\mathcal{F}} > \xi + 1$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 4.6 (**2(i)**) υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_h \subseteq \mathcal{F}.$$

(ii) Έστω ξ αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός με $\zeta_M^{\mathcal{F}} > \xi$ και $I \in [M]$.

Τότε $\zeta_M^{\mathcal{F}} < \zeta_M^{\mathcal{F}} + 1 < \xi + 1$, και άρα από το θεώρημα 4.6(**2(ii)**) υπάρχει $M_1 \in [I]$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{A}_{\zeta_M^{\mathcal{F}}} \cap [M_1]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}_h.$$

Από το θεώρημα 4.1 υπάρχει $L \in [M_1]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F} \text{ είτε } \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}.$$

Η πρώτη περίπτωση είναι αδύνατη. Πράγματι, έστω $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Τότε αφού $\mathcal{F}$ δέντρο έχουμε $(\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty})^* \subseteq \mathcal{F}$, και άρα από την πρόταση 4.10 παίρνουμε $(\mathcal{A}_\xi)^* \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Αφού $\xi > \zeta_M^{\mathcal{F}}$ τότε σύμφωνα με το πόρισμα 4.5 υπάρχει $L_1 \in [L]$ τέτοιο ώστε $(\mathcal{A}_{\zeta_M^{\mathcal{F}}})_* \cap [L_1]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^* \setminus \mathcal{A}_\xi \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^*$. Άρα

$(\mathcal{A}_{\zeta_M^{\mathcal{F}}})_* \cap [L_1]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^* \cap [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Αυτό είναι αδύνατο, γιατί

$$\mathcal{A}_{\zeta_M^{\mathcal{F}}} \cap [M_1]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}_h.$$

(Πράγματι, έστω $\mathcal{A}_{\zeta_M^{\mathcal{F}}} \cap [M_1]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}_h$. Αν $F \in \mathcal{A}_{\zeta_M^{\mathcal{F}}} \cap [L_1]^{<\infty}$ τότε $F \in (\mathcal{A}_{\zeta_M^{\mathcal{F}}})_* \cap [L_1]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow F \in (\mathcal{A}_{\zeta_M^{\mathcal{F}}})_* \cap [L_1]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_h \cap [L_1]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_h \Rightarrow F \in \mathcal{F}_h$. Ισχύει επίσης

$$F \in \mathcal{A}_{\zeta_M^{\mathcal{F}}} \cap [L_1]^{<\infty} \subseteq \mathcal{A}_{\zeta_M^{\mathcal{F}}} \cap [M_1]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}_h \Rightarrow F \in [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}_h, \text{ άτοπο.})$$

Άρα $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$ ή ισοδύναμα $\mathcal{F} \cap [L]^{<\infty} \subseteq (\mathcal{A}_\xi)^* \setminus \mathcal{A}_\xi$.

(iii) Έστω ξ διατακτικός αριθμός με $\zeta_M^{\mathcal{F}} = \xi + 1$ ή $\zeta_M^{\mathcal{F}} = \xi$ τότε απλά χρησιμοποιούμε το θεώρημα 4.1 . . □

Θεώρημα 4.12. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ δέντρο. Τότε υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]$ τέτοιο ώστε:

είτε **(1)** $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$

είτε **(2)** υπάρχει ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός ξ_0 τέτοιος ώστε για κάθε $I \in [L]$ υπάρχει $s \in ([\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}) \cap \mathcal{A}_{\xi_0}$ το οποίο είναι αρχικό τμήμα του I , και είναι το μοναδικό στοιχείο του $\mathcal{A}_{\xi_0}$ το οποίο είναι αρχικό τμήμα του I .

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο θεώρημα στην $\mathcal{F}$.

(1) Αν η $\mathcal{F}_h$ δεν είναι κατά σημείο κλειστή, τότε υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]$ τέτοιο ώστε $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$.

(2) Αν η $\mathcal{F}_h$ είναι κατά σημείο κλειστή, τότε θέτουμε $\xi_0 = \zeta_{\mathbb{N}}^{\mathcal{F}} + 1$ και (από το προηγούμενο θεώρημα) υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A}_{\xi_0} \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8 για κάθε $I \in [L]$, υπάρχει μοναδική κανονική αναπαράσταση του I ως προς το $\mathcal{A}_{\xi_0}$, οπότε για κάθε $I \in [L]$, υπάρχει μοναδικό αρχικό τμήμα $s_{\xi_0, I}$ του I το οποίο ανήκει στο $\mathcal{A}_{\xi_0}$ και άρα και στο $[\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$. □

Κεφάλαιο 5

Ισχυροποιημένο Nash-Williams

Στο κεφάλαιο 2 διατυπώσαμε και αποδείξαμε το θεώρημα Nash-Williams, το οποίο είναι ένα διαμεριστικό θεώρημα για ακολουθίες φυσικών αριθμών, δοθείσης μίας κατά σημείο κλειστής διαμεριστικής οικογένειας $\mathcal{U}$. Το θεώρημα αυτό έχει μία ισοδύναμη έκφραση (**Πρόταση Γ**), η οποία είναι πόρισμα του επεκταμένου θεωρήματος Ramsey για πεπερασμένες οικογένειες οι οποίες είναι δέντρα που είδαμε στο κεφάλαιο 4 (4.12). Με αυτή την απόδειξη βλέπουμε μία σύνδεση μεταξύ των θεωρημάτων Ramsey και Nash-Williams η οποία δεν φαίνεται από την κλασική απόδειξη.

Αποδεικνύουμε επίσης μία ισχυροποιημένη μορφή του θεωρήματος Nash-Williams (5.4), με την έννοια ότι στο δεύτερο σκέλος της διχοτομίας ($[L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$), μπορούμε να βρούμε ένα συγκεκριμένο αρχικό τμήμα $(s_{\xi, I})$ για κάθε ακολουθία (της L).

Πρόταση 5.1. Πρόταση A (Nash Williams)

Αν $\mathcal{U} \subseteq [\mathbb{N}]$ κατά σημείο κλειστή και $M \in [\mathbb{N}]$, τότε υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

είτε $[L] \subseteq \mathcal{U}$

είτε $[L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$.

Πρόταση Β (Gowers Reformulation of Nash-Williams)

Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$, τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε
 είτε $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$
 είτε κάθε $I \in [L]$ έχει αρχικό τμήμα που ανήκει στην $[\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$.

Πρόταση Γ (Gowers Reformulation of Nash-Williams for trees)

Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ δέντρο, τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε
 είτε $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$
 είτε κάθε $I \in [L]$ έχει αρχικό τμήμα που ανήκει στην $[\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$.

Η **Πρόταση Α** είναι το θεώρημα Nash-Williams. Η **Πρόταση Β** είναι η ισοδύναμη μορφή του Nash-Williams την οποία χρησιμοποίησε και απέδειξε ο Gowers. Η **Πρόταση Γ** είναι μία ισοδύναμη μορφή με την **πρόταση Β** για οικογένειες οι οποίες είναι δέντρα.

Παρακάτω θα αποδείξουμε τις τρεις ισοδυναμίες.

Απόδειξη. Πρόταση Β ↔ Πρόταση Γ

Αν ισχύει η **Πρόταση Β** τότε προφανώς ισχύει και η **Πρόταση Γ**.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η **Πρόταση Γ**.

Έστωσαν $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ μία τυχαία οικογένεια και $M \in [\mathbb{N}]$.

Θέτουμε $\mathcal{F}_t = \{s \in \mathcal{F} : \text{κάθε κενό αρχικό τμήμα του } s \text{ ανήκει στην } \mathcal{F}\} \cup \{\emptyset\}$.

Η οικογένεια $\mathcal{F}_t$ είναι ένα δέντρο το οποίο περιέχεται στην $\mathcal{F}$. Εφαρμόζουμε την

Πρόταση Γ στην οικογένεια $\mathcal{F}_t$. Τότε υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

είτε $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$

είτε κάθε $I \in [L]$ έχει αρχικό τμήμα που ανήκει στην

$[\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}_t = (\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_t) \cup ([\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F})$. Έστω $J \in [L]$. Τότε υπάρχει αρχικό τμήμα u του J το οποίο ανήκει στην $(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_t) \cup ([\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F})$. Τότε είτε $u \in [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$ (οπότε παίρνουμε το ζητούμενο), είτε $u \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_t$. Τότε (από τον ορισμό της $\mathcal{F}_t$) υπάρχει s αρχικό τμήμα του u (άρα και αρχικό τμήμα της J) το οποίο δεν ανήκει στην $\mathcal{F}$.

Άρα $s \in [\mathbb{N}]^{<\omega} \setminus \mathcal{F}$.

Πρόταση Α $\leftrightarrow$ Πρόταση Γ

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η **Πρόταση Α**. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ δέντρο και

$M \in [\mathbb{N}]$. Θέτουμε $\mathcal{U} = \{L \in [M] : \text{κάθε αρχικό τμήμα του } L \text{ ανήκει στην } \mathcal{F}\}$.

$\mathcal{U}$ κλειστή: Έστω $(L_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$, $L_n \Rightarrow L$, και s αρχικό τμήμα του L . Αφού $L_n \Rightarrow L$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $s \prec L_{n_0}$. Άρα $s \in \mathcal{F}$ για κάθε αρχικό τμήμα s του L . Οπότε $L \in \mathcal{U}$ και $\mathcal{U}$ κλειστή.

Αφού η $\mathcal{U}$ είναι κλειστή, από την **Πρόταση Α**, υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

είτε $[L] \subseteq \mathcal{U}$

είτε $[L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$.

Αν $[L] \subseteq \mathcal{U}$, τότε $[L]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F}$. Πράγματι, έστω $s \in [L]^{<\omega}$. Τότε υπάρχει $I \in [L]$ τέτοιο ώστε $s \prec I$. Αφού $I \in [L] \subseteq \mathcal{U}$, $s \in \mathcal{F}$.

Αν $[L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$, τότε κάθε $I \in [L]$ έχει αρχικό τμήμα στην $[\mathbb{N}]^{<\omega} \setminus \mathcal{F}$. Πράγματι, έστω $I \in [L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$. Τότε υπάρχει $s \prec I$ τέτοιο ώστε $s \notin \mathcal{F}$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει η **Πρόταση Γ**. Έστω $\mathcal{U} \subseteq [\mathbb{N}]$ κατά σημείο κλειστή και $M \in [\mathbb{N}]$. Θέτουμε

$\mathcal{F} = \{s \in [M]^{<\omega} : \text{υπάρχει } I \in \mathcal{U} \text{ τέτοιο ώστε } s \prec I\}$. Τότε η $\mathcal{F}$ είναι δέντρο, οπότε, από την **Πρόταση Γ**, υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

είτε $[L]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F}$

είτε κάθε $I \in [L]$ έχει αρχικό τμήμα που ανήκει στην $[\mathbb{N}]^{<\omega} \setminus \mathcal{F}$.

Αν $[L]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F}$, τότε $[L] \subseteq \mathcal{U}$. Πράγματι, έστω $I \in [L]$, $I = (l_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Θέτουμε $s_n = (l_1, l_2, \dots, l_n)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $I_n \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $s_n \prec I_n$. Προφανώς $I_n \rightarrow I$, και αφού $\mathcal{U}$ κλειστή, $I \in \mathcal{U}$.

Αν κάθε $I \in [L]$ έχει αρχικό τμήμα που ανήκει στην $[\mathbb{N}]^{<\omega} \setminus \mathcal{F}$, τότε $[L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$.

Πράγματι, έστω $I \in [L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$. Τότε υπάρχει $s \prec I$ τέτοιο ώστε $s \in [\mathbb{N}]^{<\omega} \setminus \mathcal{F}$.

Αν $I \in \mathcal{U}$, τότε $s \in \mathcal{F}$, άτοπο. Άρα $I \in [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$. □

Άρα οι τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες και η **Πρόταση Γ** είναι άμεσο πόρισμα του θεωρήματος 4.12 . .

Ορισμός 5.2. Έστω $M \in [\mathbb{N}]$, $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και ξ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Συμβολίζουμε $s_{\xi, M}$ το μοναδικό αρχικό τμήμα του M το οποίο είναι στοιχείο του $\mathcal{A}_\xi$, σύμφωνα με την πρόταση 3.8 (Προφανώς $s_{0, M} = \emptyset$).

Θεώρημα 5.3. (Ισχυροποιημένο Nash-Williams)

Έστω $\mathcal{U}$ μία κατά σημείο κλειστή οικογένεια άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και $M \in [\mathbb{N}]$. Τότε

- (i) είτε υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[L] \subseteq \mathcal{U}$
- (ii) είτε υπάρχει ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός $\zeta_M^\mathcal{U}$ τέτοιος ώστε για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ με $\xi > \zeta_M^\mathcal{U}$ και για κάθε $M_1 \in [M]$, υπάρχει $L \in [M_1]$ τέτοιο ώστε για κάθε $I \in [L]$ το μοναδικό αρχικό τμήμα $s_{\xi, I}$ του I το οποίο ανήκει στο $\mathcal{A}_\xi$ ικανοποιεί την σχέση $[s_{\xi, I}, \mathbb{N}] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F} = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : [s, \mathbb{N}] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$. $\mathcal{F}$ δέντρο οπότε από το θεώρημα 4.11:

είτε (i) (θεώρημα 4.11(1.)) υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Άρα για κάθε $s \in [L]^{<\infty}$ έχουμε ότι $[s, \mathbb{N}] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, και από αυτό συμπεραίνουμε ότι $[L] \subseteq \mathcal{U}$. Πράγματι, έστω $I \in [L]$, $I = (\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Θέτουμε $s_n = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$. Τότε $s_n \in [L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F}$ και άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[s_n, \mathbb{N}] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $I_n \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $s_n \prec I_n$. Προφανώς $I_n \xrightarrow{n} I$, και αφού η $\mathcal{U}$ είναι κλειστή, $I \in \mathcal{U}$.

είτε (ii) (θεώρημα 4.11(2.(ii))) . Θέτουμε $\zeta_M^\mathcal{U} = \zeta_M^\mathcal{F}$, και άρα ο $\zeta_M^\mathcal{U}$ είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Επίσης για κάθε $\xi > \zeta_M^\mathcal{U}$ και για κάθε $M_1 \in [M]$ υπάρχει $L \in [M_1]$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$. Για κάθε $I \in [L]$, $s_{\xi, I}$

είναι το μοναδικό αρχικό τμήμα του I το οποίο ανήκει στο $\mathcal{A}_\xi$. Τότε

$s_{\xi,I} \in [\mathbb{N}]^{<\omega} \setminus \mathcal{F}$ για κάθε $I \in [L]$, οπότε $[s_{\xi,I}, \mathbb{N}] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$. □

Πόρισμα 5.4. (Θεώρημα Nash-Williams)

Έστω $\mathcal{U}$ μία κλειστή οικογένεια άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε υπάρχει L άπειρο υποσύνολο του M τέτοιο ώστε

(i) είτε $[L] \subseteq \mathcal{U}$

(ii) είτε $[L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$

(ή ισοδύναμα (ii) για κάθε $I \in [L]$ υπάρχει ένα αρχικό τμήμα s του I τέτοιο ώστε $[s, I] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$).

Κεφάλαιο 6

Θεώρημα Ellentuck

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύεται ο χαρακτηρισμός των κατάλληλων διαχωριστικών οικογενειών, άπειρων ακολουθιών φυσικών αριθμών, ώστε να ισχύει το διαμεριστικό θεώρημα (completely Ramsey οικογένειες), δηλαδή το θεώρημα Ellentuck. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το επεκταμένο θεώρημα Ramsey (Θεώρημα 4.11).

Θεώρημα 6.1. Έστω $\mathcal{U} \subseteq [\mathbb{N}]$ κατά σημείο κλειστή, $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]$.

Τότε:

είτε (i) υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[a, L] \subseteq \mathcal{U}$

είτε (ii) υπάρχει ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός $\zeta_{a,M}^{\mathcal{U}}$ τέτοιος ώστε για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό $\xi > \zeta_{a,M}^{\mathcal{U}}$ και για κάθε $M_1 \in [M]$ υπάρχει $L \in [M_1]$ τέτοιο ώστε $[a \cup s_{\xi,I}, \mathbb{N}] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$ για κάθε $I \in [L]$.

Απόδειξη. Θέτω $\mathcal{F} = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : [a \cup s, \mathbb{N}] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$. Προφανώς $\mathcal{F}$ δέντρο, οπότε από το θεώρημα 4.11

είτε (1.) υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[L]^{<\infty} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow [a, L] \subseteq \mathcal{U}$

(Πράγματι, έστω $I \in [L]$, $a < I$ ($a \cup I \in [a, L]$), $I = (\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Θέτω

$s_n = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in [L]^{<\infty}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $I_n \in [a \cup s_n, \mathbb{N}] \cap \mathcal{U}$.

$a \cup s_n \prec I_n$, οπότε $I_n \rightarrow a \cup I$ και αφού $\mathcal{U}$ κλειστή $a \cup I \in \mathcal{U}$.)

είτε **(2.)** υπάρχει αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός $\zeta_M^{\mathcal{F}}$ τέτοιος ώστε για κάθε

$\xi > \zeta_M^{\mathcal{F}}$ και για κάθε $M_1 \in [M]$ υπάρχει $L \in [M_1]$ τέτοιο ώστε

$\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$. Θέτω $\zeta_{a,M}^{\mathcal{U}} = \zeta_M^{\mathcal{F}}$. Για κάθε $I \in [L]$,

$s_{\xi,I} \in \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\infty} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus \mathcal{F}$, άρα $[a \cup s_{\xi,I}, \mathbb{N}] \cap \mathcal{U} = \emptyset \Rightarrow$

$[a \cup s_{\xi,I}, \mathbb{N}] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$. □

Πόρισμα 6.2. (Galvin-Prikry) Κάθε κατά σημείο κλειστή (ή κατά σημείο ανοικτή) οικογένεια άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ είναι completely Ramsey.

Λήμμα 6.3. Έστω $\mathcal{L} \subseteq \{[s, I] : s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} \text{ και } I \in [\mathbb{N}]\}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Για κάθε $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[a, L] \in \mathcal{L}$

(ii) Αν $[a, M] \in \mathcal{L}$, τότε $[a, L] \in \mathcal{L}$ για κάθε $L \in [M]$.

Τότε για κάθε $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[a \cup \beta] \in \mathcal{L}$ για κάθε $\beta \in [L]^{<\infty}$.

Απόδειξη. Έστωσαν $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, με $|a| = m$, και $M \in [\mathbb{N}]$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $a \prec M$. Από την ιδιότητα (i) υπάρχει $L_1 \in [L]$ τέτοιο ώστε $[a, L_1] \in \mathcal{L}$.

Έστω $\{s_1^1, s_2^1, \dots, s_{r_1}^1\} = \{s \in [L_1]^{<\infty} : s \subseteq s_{m+1, L_1} \text{ και } s \not\subseteq s_{m, L_1}\}$. Τότε (από

(i)) υπάρχει $I_2^1 \in [L_1]$ τέτοιο ώστε $[s_1^1, I_2^1] \in \mathcal{L}$. Θέτουμε $L_2^2 = I_2^1 \cup s_{m+1, L_1}$. Τότε

$L_2^1 \in [s_{m+1, L_1}, L_1]$ και $[s_1^1, L_2^1] = [s_1^1, I_2^1] \in \mathcal{L}$.

Από (i) υπάρχει $I_2^2 \in [L_2^1]$ τέτοιο ώστε $[s_2^2, I_2^2] \in \mathcal{L}$. Θέτουμε $L_2^2 = I_2^2 \cup s_{m+1, L_1}$.

Τότε $L_2^2 \in [s_{m+1, L_1}, L_2^1]$ και $[s_2^1, L_2^2] = [s_2^1, I_2^2] \in \mathcal{L}$.

Συνεχίζοντας ανάλογα διαλέγουμε $L_2^\kappa \in [s_{m+1, L_1}, L_2^{\kappa-1}]$ με $[s_\kappa^1, L_2^\kappa] \in \mathcal{L}$ για κάθε

$2 \leq \kappa \leq r_1$. Θέτουμε $L_2 = L_2^{r_1}$. Τότε για κάθε $1 \leq i \leq r_1$, $[s_i^1, L_2] \in \mathcal{L}$.

Με όμοιο τρόπο επιλέγουμε $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots \supseteq L_n \supseteq \dots$, ($L_i \in [M]$)

τέτοια ώστε $L_{n+1} \in [s_{m+n}, L_n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αν

$\{s_1^n, s_2^n, \dots, s_{r_n}^n\} = \{s \subseteq [L_n]^{<\infty} : s \subseteq s_{m+n, L_n} \text{ και } s \not\subseteq s_{m+n-1, L_n}\}$, τότε $[s_i^n, L_{n+1}] \in \mathcal{L}$ για κάθε $1 \leq i \leq r_n$.

Παρατηρούμε ότι $s_{m+n, L_n} \prec s_{m+n+1, L_{n+1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το σύνολο $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_{m+n, L_n}$ έχει την ζητούμενη ιδιότητα.

Πράγματι, έστω $\beta \in [L]^{<\infty}$. Τότε $\beta \subseteq s_{m+n, L_n}$ και $\beta \not\subseteq s_{m+n-1, L_n}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε $[a \cup \beta, L_{n+1}] \in \mathcal{L} \Rightarrow [a \cup \beta, L] \in \mathcal{L}$. $\square$

Θεώρημα 6.4. Έστω $\mathcal{U} \subseteq [\mathbb{N}]$, $M \in [\mathbb{N}]$ και $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Τότε υπάρχει

$L \in [M]$ τέτοιο ώστε:

είτε (i) $[a, L] \subseteq \hat{\mathcal{U}}$

είτε (ii) $[a, L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U} \subseteq [\mathbb{N}]$, $M \in [\mathbb{N}]$ και $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Θέτουμε

$$\mathcal{L}^{\mathcal{U}} = \{[s, I] : \text{είτε } [s, I] \cap \mathcal{U} = \emptyset \text{ είτε } [s, I_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \text{ για κάθε } I_1 \in [I]\}.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του λήμματος 6.3.

Για την (i): Έστω $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]$. Αν υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[s, L] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, τότε $[s, L] \in \mathcal{L}^{\mathcal{U}}$. Αλλιώς $[s, L] \cap \mathcal{U} = \emptyset$ για κάθε $L \in [M]$. Οπότε $[s, M] \in \mathcal{U}$.

Για την (ii): Έστω $[s, M] \in \mathcal{L}^{\mathcal{U}}$ και $L \in [M]$. Αν $[s, M] \cap \mathcal{U} = \emptyset$ τότε $[s, L] \cap \mathcal{U} = \emptyset$ και άρα $[s, L] \in \mathcal{L}^{\mathcal{U}}$. Αν $[s, L_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $L_1 \in [M]$, τότε $[s, L_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $L_1 \in [L]$, οπότε $[s, L] \in \mathcal{L}^{\mathcal{U}}$.

Άρα υπάρχει $I \in [M]$ τέτοιο ώστε $[a \cup \beta, I] \in \mathcal{L}^{\mathcal{U}}$ για κάθε $\beta \in [I]^{<\infty}$.

Αφού $[a, I] \in \mathcal{L}^{\mathcal{U}}$, $[a, I] \cap \mathcal{U} = \emptyset$ ή $[a, I_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $I_1 \in [I]$.

Αν $[a, I] \cap \mathcal{U} = \emptyset$, τότε $[a, I] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$, οπότε παίρνουμε την περίπτωση (ii) του θεωρήματος ($L = I$).

Αν $[a, I_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $I_1 \in [I]$, θέτουμε

$$\mathcal{F} = \{\beta \in [I]^{<\omega} : a < \beta \text{ και } [a \cup \beta, I_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \text{ για κάθε } I_1 \in [I]\}.$$

Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι δέντρο.

Έστω $\beta_1, \beta_2 \in [I]^{<\omega}$ με $\beta_1 \prec \beta_2$ και $\beta_2 \in \mathcal{F}$. Άρα $a < \beta_2$ και $[a \cup \beta_2, I_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $I_1 \in [I]$. Οπότε $a < \beta_1$ και αφού $[a \cup \beta_2, I_1] \subseteq [a \cup \beta_1, I_1]$ για κάθε $I_1 \in [I]$, παίρνουμε ότι $[a \cup \beta_1, I_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $I_1 \in [I]$, άρα $\beta_1 \in \mathcal{F}$.

Αφού $\mathcal{F}$ δέντρο, από το θεώρημα 4.11 παίρνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.
(4.11 (1)) Υπάρχει $L \in [I]$ τέτοιο ώστε $[L]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F}$. Άρα για κάθε $\beta \in [L]^{<\omega}$, $a < \beta$ και $[a \cup \beta, I_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $I_1 \in [I]$.

Θα δείξουμε ότι $[a, L] \subseteq \hat{\mathcal{U}}$.

Έστω $I_0 \in [L]$, τότε $s_{n, I_0} \in [L]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$[a \cup s_{n, I_0}, I_0] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $a \cup I_0 \in \hat{\mathcal{U}}$.

(4.11 (2)) Υπάρχουν αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός $\zeta_M^{\mathcal{F}}$ και $L \in [I]$, τέτοια ώστε, για κάθε ξ με $\xi > \zeta_M^{\mathcal{F}}$, $\mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\omega} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega} \setminus \mathcal{F}$.

Θα δείξουμε ότι $[a, L] \cap \mathcal{U} = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο αφού $[a, I_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $I_1 \in [I]$.

Πράγματι, έστω $L_2 \in [a, L] \cap \mathcal{U}$. Τότε $L_2 = a \cup L_1$, για κάποιο $L_1 \in [L]$ και $a < L_1$. Τότε $L_2 \in [a \cup s_{\xi, L_1}, I] \cap \mathcal{U}$ (για κάποιο $\xi > \zeta_M^{\mathcal{F}}$). Αφού $[a \cup s_{\xi, L_1}, I] \in \mathcal{L}^{\mathcal{U}}$ και $[a \cup s_{\xi, L_1}, I] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ παίρνουμε ότι $[a \cup s_{\xi, L_1}, I_1] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ για κάθε $I_1 \in [I]$, άρα $[a \cup s_{\xi, L_1}, I] \in \mathcal{F}$. Οπότε $s_{\xi, L_1} \in \mathcal{A}_\xi \cap [L]^{<\omega} \cap \mathcal{F}$, άτοπο. Άρα η περίπτωση (2) του 4.11 είναι αδύνατη. $\square$

Πόρισμα 6.5. Κάθε οικογένεια άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ η οποία είναι κλειστή (αντίστοιχα ανοικτή) στην τοπολογία Ellentuck είναι completely Ramsey.

Πόρισμα 6.6. Έστω $\mathcal{U}$ οικογένεια άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, η οποία είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας ως προς την τοπολογία Ellentuck, $M \in [\mathbb{N}]$ και $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Τότε υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε $[a, L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n$, όπου $(\hat{\mathcal{U}}_n)^\diamond = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα 6.4 παίρνουμε ότι υπάρχει $L \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } [a, L] \subseteq \hat{\mathcal{U}}$$

$$\text{είτε } [a, L] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}.$$

Θα δείξουμε ότι η δεύτερη περίπτωση είναι αδύνατη. Έστω $L \in [M]$.

Θέτουμε $\mathcal{L} = \{[s, I] : s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}, I \in [\mathbb{N}] \text{ και } [s, I] \cap \mathcal{U}_\kappa = \emptyset \text{ για κάθε } \kappa \leq |s|\}$.

Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις (i) και (ii) του λήμματος 6.3 .

(i) Έστω $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, με $|a| = \kappa$, και $M \in [\mathbb{N}]$. Τότε από το θεώρημα 6.4 υπάρχει $L_1 \in [M]$ τέτοιο ώστε

$$\text{είτε } [a, L_1] \subseteq \hat{\mathcal{U}}_1 \text{ είτε } [a, L_1] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}_1.$$

Αν $[a, L_1] \subseteq \hat{\mathcal{U}}_1$, τότε $[a, L_1] \subseteq (\hat{\mathcal{U}}_1)^\diamond = \emptyset$, άτοπο. Άρα $[a, L_1] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}_1$.

Όμοια, υπάρχει $L_2 \in [L_1]$ τέτοιο ώστε $[a, L_2] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}_2$. Συνεχίζοντας ανάλογα βρίσκουμε $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots \supseteq L_\kappa$, ($L_i \in [M]$), τέτοια ώστε $[a, L_i] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}_i$ για κάθε $i \leq \kappa$. Άρα $[a, L_\kappa] \cap \mathcal{U}_i = \emptyset$ για κάθε $i \leq \kappa$, δηλαδή $[a, L_\kappa] \in \mathcal{L}$.

(ii) Έστω $[s, L] \in \mathcal{L}$. Τότε $[s, L] \cap \mathcal{U}_n = \emptyset$ για κάθε $n \leq |s|$. Άρα $[s, I] \cap \mathcal{U}_n = \emptyset$ για κάθε $n \leq |s|$ και για κάθε $I \in [L]$. Οπότε $[s, I] \in \mathcal{L}$ για κάθε $I \in [L]$.

Άρα υπάρχει $L_1 \in [a, L]$ τέτοιο ώστε $[a \cup \beta, L_1] \in \mathcal{L}$ για κάθε $\beta \in [L_1]^{<\infty}$, δηλαδή $[a \cup \beta, L_1] \cap \mathcal{U}_\kappa = \emptyset$ για κάθε $\kappa \leq |a \cup \beta|$. Τότε $L_1 \notin \hat{\mathcal{U}}$, αφού $[a, L_1] \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

Πράγματι έστω $L_2 \in [a, L_1] \cap \mathcal{U}$ τότε $L_2 \in \mathcal{U}_\kappa$, για κάποιο $\kappa \in \mathbb{N}$. Διαλέγουμε $\beta \prec L_2$ τέτοιο ώστε $|a \cup \beta| \geq \kappa$, τότε $L_2 \in [a \cup \beta, L_1] \cap \mathcal{U}_\kappa = \emptyset$, άτοπο. Άρα $L_1 \notin \hat{\mathcal{U}} \Rightarrow [a, L_1] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$. $\square$

Θεώρημα 6.7. (Ellentuck) Μία οικογένεια $\mathcal{U}$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ είναι completely Ramsey αν και μόνο αν η $\mathcal{U}$ έχει την ιδιότητα Baire στην τοπολογία Ellentuck.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U}$ οικογένεια άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ η οποία έχει την ιδιότητα Baire, $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]$. Αφού η $\mathcal{U}$ έχει την ιδιότητα Baire υπάρχουν $\mathcal{B}$ κλειστό σύνολο και $\mathcal{C}$ σύνολο πρώτης κατηγορίας, στην τοπολογία Ellentuck, τέτοια ώστε $\mathcal{U} = \mathcal{B} \triangle \mathcal{C} = (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}^c) \cup (\mathcal{B}^c \cap \mathcal{C})$ (συμβολίζοντας $\mathcal{B}^c = [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{B}$ και $\mathcal{C}^c = [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{C}$). Τότε από το πόρισμα 6.6 υπάρχει $L_1 \in [M]$ τέτοιο ώστε $[a, L_1] \subseteq \mathcal{C}^c$. Σύμφωνα με το θεώρημα 6.4 υπάρχει $L \in [L_1]$ τέτοιο ώστε
 είτε (i) $[a, L] \subseteq \hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \Rightarrow [a, L] \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{C}^c \subseteq \mathcal{U}$
 είτε (ii) $[a, L] \subseteq \mathcal{B}^c \Rightarrow [a, L] \subseteq \mathcal{B}^c \cap \mathcal{C}^c \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U}$.
 Άρα η $\mathcal{U}$ είναι completely Ramsey.

Ας υποθέσουμε ότι η $\mathcal{U}$ είναι completely Ramsey.

$\mathcal{U} = \mathcal{U}^\circ \triangle (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ) = \mathcal{U}^\circ \cup (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ)$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ$ είναι meager, οπότε η $\mathcal{U}$ είναι πρώτης κατηγορίας. Έστω $M \in \widehat{(\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ)}^\diamond$. Τότε υπάρχει $a \prec M$ και $I \in [\mathbb{N}]$ τέτοια ώστε $M \in [a, I] \subseteq \widehat{(\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ)}$. Άρα για κάθε $L \in [a, I]$, $[s_{n,L}, L] \cap (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ) \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι $|a| = m$. Αφού η $\mathcal{U}$ είναι completely Ramsey υπάρχει $L_1 \in [L]$ (θεωρώ $a \prec L_1$) τέτοιο ώστε
 είτε $[s_{m,L}, L_1] \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow [s_{m,L}, L_1] \subseteq (\mathcal{U})^\circ \Rightarrow [s_{m,L}, L_1] \cap (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ) = \emptyset \Rightarrow [a, L_1] \cap (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ) = \emptyset$,
 είτε $[s_{m,L}, L_1] \subseteq [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{U} \Rightarrow [s_{m,L}, L_1] \cap \mathcal{U} = \emptyset \Rightarrow [s_{m,L}, L_1] \cap (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ) = \emptyset \Rightarrow [a, L_1] \cap (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ) = \emptyset$.

Άρα $[a, L_1] \cap (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ) = \emptyset$. Άτοπο, αφού $L_1 \in [a, I] \Rightarrow [a, L_1] \cap (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ) \neq \emptyset$.

Άρα το σύνολο $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}^\circ$ είναι meager. □

Βιβλιογραφία

- [A-A] D. Alspach and S. Argyros, *Complexity of weakly null sequences* (1992)
- [A-M-T] S. Argyros, S. Merkourakis and A. Tsarpalias, *Convex unconditionality and summability of weakly null sequences* (1998)
- [E] E. E. Ellentuck, *A new proof that analytic sets are Ramsey* (1974)
- [F] V. Farmaki, *Ramsey and Nash-Williams combinatorics via Schreier families* (2004)
- [F1] V. Farmaki, *Ramsey dichotomies with ordinal index* (1998)
- [F2] V. Farmaki, *The uniform convergence ordinal index and l^1 -behavior of a sequence of function* (2004)
- [Ft] Β. Φαρμάκη, *Συνολοθεωρητική Τοπολογία, Σημειώσεις μαθήματος του Π. Μ. Σ. Θεωρητικών Μαθηματικών του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, Αθήνα* (2011)
- [J] R. Judd, *A Dichotomy on Schreier sets* (1999)
- [K-N] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου* (2005)
- [Ke] A. S. Kechris *Classical Descriptive Theory* (1994)
- [Ku] K. Kuratowski *Topology, Volume I* (1966)

- [N-Z-K-F] Νεγρεπόντης, Σ., Ζαχαριάδης, Θ., Καλαμίδας, Ν., Φαρμάκη, Β.,
Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση (1997)
- [N-W] C. St. J. A. Nash-Williams, *On well quasi-ordering transfinite sequences*
(1965)
- [R] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic* (1929)