ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σοφία Σμιτ

Θέματα της κλασσικής περιγραφικής συνολοθεωρίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΤΣΑΡΠΑΛΙΑΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

26 Ιουνίου 2013

Εισαγωγή

Στην παρούσα συνθετική εργασία παρουσιάζουμε ορισμένες βασικές αρχές της Περιγραφικής Συνολοθεωρίας.
Η εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Το Κεφάλαιο 1 είναι προκαταρτικό, παρουσιάζονται έννοιες και αποτελέσματα που χρησιμοποιούνται στα επόμενα. Στην Παράγραφο 1.1 παραθέτονται στοιχεία από την (ZFC) συνολοθεωρία τα οποία αναφέρονται κυρίως στην πληθικότητα των συνόλων. Ορίζεται το σύνολο $Cantor$, δίνεται μία ενδιαφέρουσα απόδειξη του θεωρήματος $Schröder-Bernstein$ προερχόμενη από το [2] και ακολούθως αποδεικνύουμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι ισοπληθικό με το δυναμοσύνολο, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Διατυπώνουμε την υπόθεση του συνεχούς (CH) καθώς και την Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς (GCH). Τέλος εξηγούμε συνοπτικά την έννοια του $von-Neumann$ διατακτικού αριθμού καθώς και την έννοια του πληθαρίθμου. Η Παράγραφος 1.2 είναι αφιερωμένη στους γενικούς τοπολογικούς χώρους. Εξηγούνται οι βασικές έννοιες καθώς και τα βασικά θεωρήματα που χρειαζόμαστε. Η Παράγραφος 1.3 αναφέρεται στους μετρικούς χώρους. Ορίζεται η πληρότητα των μετρικών χώρων καθώς και η έννοια του μετρικοποιήσιμου τοπολογικού χώρου. Για κάθε μετρικό χώρο X και $A \subseteq X$ ορίζεται η χρήσιμη συνάρτηση f_A και ακολούθως αποδεικνύεται το λήμμα $Uryshon$ για μετρικούς χώρους. Τέλος, διατυπώνονται χρήσιμοι χαρακτηρισμοί της συμπάγειας των μετρικών χώρων. Στην Παράγραφο 1.4 ορίζεται η έννοια της λέξης και στην Παράγραφο 1.5 η έννοια του δένδρου σε ένα σύνολο. Αποδεικνύεται το πολύ σημαντικό λήμμα του $König$: Κάθε άπειρο δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης έχει ένα άπειρο κλαδί. Χρησιμοποιώντας το λήμμα $König$ αποδεικνύεται το θεώρημα της Βεντάλιας το οποίο χρησιμοποιούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Στο Κεφάλαιο 2 ορίζουμε τον χώρο του $\mathcal{N}$, του $Baire$, ως το σώμα του μεγαλύτερου δένδρου στο $\mathbb{N}$. Επαναδιατυπώνουμε την Υπόθεση του συνεχούς και αποδεικνύουμε τα βασικά αποτελέσματα του χώρου $\mathcal{N}$ που έχουν σχέση με το πρόβλημα του συνεχούς. Η δομή δένδρου του $\mathcal{N}$ είναι μια συνδιαστική δομή. Επίσης, ο $\mathcal{N}$ έχει μια φυσική δομή τοπολογικού χώρου και αποτελεί το βασικό πρότυπο Πολωνικού χώρου. Εξετάζουμε τον $\mathcal{N}$ κυρίως ως συνδιαστικό αντικείμενο και ελάχιστα χρησιμοποιούμε την τοπολογική δομή του. Δίνουμε συνδιαστικούς χαρακτηρισμούς διαφόρων τοπολογικών εννοιών. Για παράδειγμα δείχνουμε ότι ένα υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν είναι σώμα δένδρου, είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι σώμα δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης και είναι τέλειο αν και μόνο αν είναι σώμα διασπώμενου δένδρου. Αποδεικνύουμε με συνδιαστικό τρόπο το θεώρημα $Cantor - Bendixson$. Η δομή δένδρου μας επιτρέπει να ορίσουμε τις προσεγγίσεις μιας συνεχούς συνάρτησης $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, οι οποίες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην περαιτέρω μελέτη του $\mathcal{N}$. Ορίζουμε την έννοια του αναλυτικού υποσυνόλου του $\mathcal{N}$: Ένα υποσύνολο A του $\mathcal{N}$ είναι αναλυτικό αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ ώστε $A = f[\mathcal{N}]$. Ακολούθως χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις μιας συνεχούς συνάρτησης αποδεικνύουμε το περίφημο Θεώρημα Τέλειου Συνόλου του $Souslin$: Κάθε υπεραριθμήσιμο, αναλυτικό υποσύνολο A του $\mathcal{N}$ περιέχει ένα αντίγραφο του χώρου $Cantor$ $\mathcal{C}$, και άρα είναι ισοπληθικό με το συνεχές. Αποδεικνύουμε ότι η οικογένεια των αναλυτικών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ με αναλυτικό συμπλήρωμα είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την σ-άλγεβρα των $Borel$ υποσυνόλων του $\mathcal{N}$. Ακολούθως αποδεικνύουμε το Θεώρημα Διαχωρισμού του $Lusin$: Αν $A, B \subseteq \mathcal{N}$ είναι ξένα και αναλυτικά σύνολα, τότε υπάρχει ένα σύνολο $Borel$, $C \subseteq \mathcal{N}$ που διαχωρίζει τα A και B, δηλαδή $A \subseteq C$ και $C \cap B = \emptyset$. Από το Θεώρημα Διαχωρισμού έπεται αμέσως το Θεώρημα του $Souslin$: Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ είναι $Borel$ αν και μόνο αν A και A^c είναι αναλυτικά.

Στο Κεφάλαιο 3 εξετάζονται οι Πολωνικοί χώροι, δηλαδή οι διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι των οποίων η τοπολογία καθορίζεται από μια πλήρη μετρική. Στην Παράγραφο 3.1 παρουσιάζονται ορισμένα παραδείγματα Πολωνικών χώρων που παίζουν έναν ιδιαίτερο ρόλο. Στην Παράγραφο 3.2 ορίζεται η ταλάντωση μιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου (X) και τιμές σε έναν μετρικό χώρο (Y). Χρησιμοποιώντας την ταλάντωση αποδεικνύεται ότι το σύνολο των σημείων συνέχειας μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ είναι G_δ-σύνολο. Επίσης αποδεικνύεται το σημαντικό Θεώρημα Επέκτασης του $Kuratowski$ (Θεώρημα 3.2.4). Στην παράγραφο 3.3 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Επέκτασης του $Kuratowski$ αποδεικνύεται το Θεώρημα του $Mazurkiewicz$ (Θεώρημα 3.3.2) . Αν (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$ το Y είναι πλήρως μετρικοποιήσιμο αν και μόνο αν είναι G_δ-σύνολο. Στην Παράγραφο 3.4 αποδεικνύεται η εξής καθολική ιδιότητα του κύβου του $Hilbert$ $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$: Κάθε Πολωνικός χώρος είναι ομοιομορφικός με ένα G_δ-υποσύνολο του $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύουμε ότι κάθε Πολωνικός χώρος είναι ομοιομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Στην Παράγραφο 3.5 αποδεικνύουμε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι συνεχής εικόνα του χώρου $Cantor$, $\mathcal{C}$. Μια εφαρμογή του αποτελέσματος αυτού στη θεωρία χώρων $Banach$ δίνεται στην Παράγραφο 3.6: Ο διαχωρίσιμος χώρος $Banach$, $C\big([0,1]\big)$ είναι καθολικός για την κλάση των διαχωρίσιμων χώρων $Banach$, υπό την έννοια ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος $Banach$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν υπόχωρο του $C\big([0,1]\big)$. Στην Παράγραφο 3.7 δείχνουμε ότι ο χώρος του $Cantor$ $\mathcal{C}$ είναι ο ελάχιστος, μη κενός, τέλειος Πολωνικός χώρος, υπό την έννοια ότι κάθε μη κενός, τέλειος, Πολωνικός χώρος περιέχει ένα αντίγραφο του $\mathcal{C}$. Στην Παράγραφο 3.8 αποδεικνύουμε την $Cantor - Bendixson$ διάσπαση κάθε Πολωνικού χώρου και ορίζουμε τον δείκτη $Cantor - Bendixson$ ενός Πολωνικού χώρου.

Στο Κεφάλαιο 4 εξετάζονται μετρικοποιήσιμοι τοπολογικοί χώροι μηδενικής διάστασης, δηλαδή μετρικοποιήσιμοι χωροι που έχουν μια βάση για την τοπολογία τους που αποτελείται από ανοικτά-κλειστά σύνολα. Τυπικά παραδείγματα χώρων μηδενικής διάστασης είναι: ο χώρος του $Cantor$ $\mathcal{C}$ και ο χώρος του $Baire$ $\mathcal{N}$. Στην Παράγραφο 4.1 ορίζεται το σχήμα $Cantor$ σ' έναν μετρικό χώρο και αποδεικνύεται ότι ο χώρος του $Cantor$, $\mathcal{C}$ είναι ο μοναδικός μέχρι ισομορφισμού συμπαγής, τέλειος, μετρικοποιήσιμος χώρος μηδενικής διάστασης. Στην Παράγραφο 4.2 ορίζεται το σχήμα $Lusin$ σ' έναν μετρικό χώρο καθώς και η συνοδεύουσα συνάρτηση του σχήματος. Αποδεικνύεται το γενικό Θεώρημα 4.2.2 το οποίο χρησιμοποιείται στα επόμενα κατά τρόπο ουσιαστικό. Αποδεικνύεται το Θεώρημα $Alexandrov - Urysohn$ που χαρακτηρίζει τον χώρο του $Baire$, $\mathcal{N}$: Ο χώρος $\mathcal{N}$ είναι ο μοναδικός μέχρι ισομορφισμού μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος του οποίου κάθε συμπαγές υποσύνολο έχει κενό εσωτερικό. Άμεσο πόρισμα αυτού του χαρακτηρισμού είναι το γεγονός ότι ο χώρος $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ των αρρήτων με τη συνήθη τοπολογία είναι ισομορφικός με τον χώρο του $Baire$. Στην Παράγραφο 4.3 αποδεικνύεται ότι ο χώρος του $Baire$ είναι καθολικός για την κλάση των μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων υπό την έννοια ότι κάθε μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος είναι ισομορφικός με έναν κλειστό υπόχωρο του $\mathcal{N}$. Στην Παράγραφο 4.4 αποδεικνύεται το εξής πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα (Θεώρρημα 4.4.3): Αν X είναι Πολωνικός χώρος, τότε υπάρχουν κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{N}$ και συάρτηση $f : F \longrightarrow X$ συνεχής $1-1$ και επί. Χρησιμοποιώντας ότι για κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{N}$ υπάρχει συνεχής προβολή $h : \mathcal{N} \longrightarrow F$, έπεται από το προηγούμενο αποτέλεσμα: Κάθε Πολωνικός χώρος είναι συνεχής εικόνα του χώρου του $Baire$. Η παράγραφος τελειώνει με το πολύ σημαντικό θεώρημα του $Hurewicz$: Ένας Πολωνικός χώρος X περιέχει ένα κλειστό υποσύνολο ισομορφικό με το χώρο του $Baire$ αν και μόνο αν ο X δεν είναι σ-συμπαγής.

Το Κεφάλαιο 5 είναι αφιερωμένο στα αναλυτικά υποσύνολα Πολωνικών χώρων. Στην Παράγραφο 5.1 εισάγεται η έννοια του αναλυτικού υποσυνόλου ενός Πολωνικού χώρου: Ένα υποσύνολο A ενός Πολωνικού χώρου X είναι αναλυτικό αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to X$ ώστε $A = f[\mathcal{N}]$. Αποδεικνύονται διάφοροι χαρακτηρισμοί των αναλυτικών συνόλων μεταξύ των οποίων ο εξής χαρακτηρισμός μέσω του τελεστή $Souslin$: Ένα υποσύνολο A ένός Πολωνικού χώρου X είναι αναλυτικό αν και μόνο αν έχει την αναπαράσταση

$$A = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{\sigma|_n}$$

όπου κάθε $F_{\sigma|_n}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Στην Παράγραφο 5.2, χρησιμοποιώντας αποτελέσματα για τον χώρο του $Baire$ και το Θεώρημα 4.4.3 αποδεικνύουμε ότι σ' ένα Πολωνικό χώρο X η κλάση των αναλυτικών υποσυνόλων του X που έχουν αναλυτικό συμπλήρωμα είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την σ-άλγεβρα των $Borel$ υποσυνόλων του X. Ακολουθεί το θεώρημα διαχωρισμού του $Lusin$ για τα αναλυτικά υποσύνολα ενός Πολωνικού χώρου. Άμεση συνέπεια των ανωτέρω είναι ότι σ' έναν Πολωνικό χώρο X η κλάση των αναλυτικών υποσυνόλων του X με αναλυτικό συμπλήρωμα ταυτίζεται με την κλάση των $Borel$ υποσυνόλων του X. Τέλος, επεκτείνουμε με απλό τρόπο, το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου του $Souslin$ σε Πολωνικούς χώρους. Στην Παράγραφο 5.2, για X Πολωνικό χώρο εισάγεται η έννοια του καθολικού αναλυτικού υποσυνόλου του $X \times \mathcal{N}$ για τα αναλυτικά υποσύνολα του X. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ που είναι καθολικό για τα αναλυτικά υποσύνολα του $\mathcal{N}$. Τέλος, δείχνουμε ότι ένα $\mathcal{N}$-καθολικό αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ δεν είναι $Borel$.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προκαταρτικά

1.1 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

Παραθέτουμε εδώ ορισμένα στοιχεία από την ZFC θεωρία Συνόλων, τα οποία αναφέρονται κυρίως στην πληθικότητα των συνόλων.

Έστω σύνολα A, B. Μία συνάρτηση $f : A \to B$ που είναι $1-1$ και επί καλείται <u>αντιστοιχία</u>. Τα σύνολα A, B είναι <u>ισοπληθικά</u>, $A =_c B$, αν υπάρχει αντιστοιχία $f : A \to B$. Το σύνολο A έχει πληθικότητα μικρότερη-ίση του B, $A \leq_c B$, αν υπάρχει συνάρτηση $f : A \to B$ που είναι $1-1$. Το A έχει πληθικότητα (γνήσια) μικρότερη από την πληθικότητα του B, $A <_c B$ αν $A \leq_c B$ αλλά $A \neq_c B$.

Ένα σύνολο A είναι αριθμήσιμο αν είναι πεπαρασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο, $\mathbb{N}$, των φυσικών αριθμών, αλλιώς καλείται υπεραριθμήσιμο. Με το πρώτο διαγώνιο επιχείρημα του $Cantor$ αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Για κάθε σύνολο A συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(A)$ το δυναμοσύνολο του A, δηλαδή το σύνολο των υποσυνόλων του A, δηλαδή

$$\mathcal{P}(A) = \{x : x \quad \sigma\grave{\upsilon}\nu o\lambda o \quad \& \quad x \subseteq A\}.$$

Είναι φανερό ότι αν δύο σύνολα A, B είναι ισοπληθικά τότε το δυναμοσύνολο του A είναι ισοπληθικό με το δυναμοσύνολο του B, δηλαδή:

$$A =_c B \Rightarrow \mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B).$$

Έτσι έχουμε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

1.1.1 Θεώρημα: $(Cantor)$
Για κάθε σύνολο A, ισχύει
$$A <_c \mathcal{P}(A).$$

Απόδειξη:
Η συνάρτηση $(x \mapsto \{x\})$ από το A στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ του A, που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο x του A στο μονοσύνολο $\{x\}$ είναι $1-1$, και επομένως $A \leq_c \mathcal{P}(A)$.

Προς απαγωγή σε άτοπο δεχόμαστε ότι υπάρχει κάποια αντιστοιχία
$$\pi : A \to \mathcal{P}(A),$$
που δείχνει ότι $A =_c \mathcal{P}(A)$ και ορίζουμε το σύνολο
$$B = \{x \in A : x \notin \pi(x)\}.$$
Εφ' όσον το B είναι υποσύνολο του A και η π είναι επί του $\mathcal{P}(A)$, υπάρχει $b \in A$ ώστε $B = \pi(b)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι
$$b \in B \Leftrightarrow b \notin B,$$
που είναι άτοπο.

■

1.1.2 Πόρισμα: Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο.

Αν A, B είναι σύνολα, συμβολίζουμε με $(A \to B)$ ή με B^A το σύνολο των συναρτήσεων από το A στο B,
$$(A \to B) = \{f : \ f : A \to B\}.$$

1.1.3 Ορισμός: Το σύνολο Δ των δυαδικών ακολουθιών είναι
$$\Delta = (\mathbb{N} \to \{0, 1\})$$
Για κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του A είναι η συνάρτηση

$$\chi_A : \mathbb{N} \to \{0,1\} : \quad \chi_A(n) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad n \in A \\ 0 & \alpha\nu \quad n \notin A. \end{cases}$$

1.1.4 Πρόταση: Το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών είνια ισοπληθικό με το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$, δηλαδή

$$\Delta =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Απόδειξη:

Έυκολα μπορούμε να δούμε ότι η απεικόνιση $(A \mapsto \chi_A)$ που αντιστοιχίζει σε κάθε υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ την χαρακτηριστική του συνάρτηση είναι αντιστοιχία από το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ στο Δ, επομένως $\Delta =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

■

1.1.5 Πόρισμα: Το σύνολο Δ των δυαδικών ακολουθιών είναι υπεραριθμήσιμο.

1.1.6. *Το σύνολο του $Cantor$.* *(Σχήμα: 1.1)*

Αν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί με $a < b$, θέτουμε

$$L[a,b] = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)],$$

$$R[a,b] = [a + \frac{2}{3}(b-a), b].$$

Το σύνολο του $Cantor$ κατασκευάζεται ως ακολούθως.

Ορίζουμε πρώτα μια ακολουθία $C_0, C_1, ..., C_n, ...$ υποσυνόλων του διαστήματος $[0,1]$ που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. $C_0 = [0,1]$

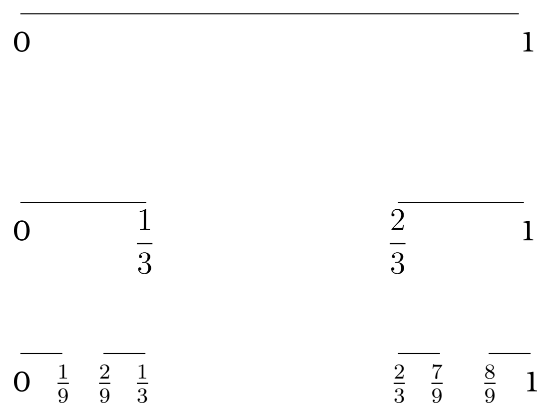
2. *Κάθε C_n είναι ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων, και*

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq ... \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq ...$$

3. *Το C_{n+1} κατασκευάζεται από το C_n με την αντικατάσταση κάθε διαστήματος $[a,b]$ του C_n από τα δύο κλειστά διαστήματα $L[a,b]$ και $R[a,b]$.*

Το σύνολο $Cantor$ είναι

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$



Σχήμα 1.1: Η κατασκευή του συνόλου $Cantor$

1.1.7 Πρόταση: Το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών είναι ισοπληθικό με το σύνολο του $Cantor$, δηλαδή:

$$\Delta =_c \mathcal{C}.$$

Απόδειξη:
Σε κάθε δυαδική ακολουθία $\delta \in \Delta$ αντιστοιχίζουμε την ακολουθία:

$$F_0^\delta, F_1^\delta, ..., F_n^\delta, ...$$

που ορίζεται με την αναδρομή

$$F_0^\delta = \mathcal{C}_0 = [0,1],$$

$$F_{n+1}^\delta = \begin{cases} LF_n^\delta & \alpha\nu\ \delta(n) = 0 \\ RF_n^\delta & \alpha\nu\ \delta(n) = 1. \end{cases}$$

Με επαγωγή γίνεται σαφές ότι για κάθε n, το F_n^δ είναι ένα από τα κλειστά διαστήματα του C_n, που εμφανίζονται στην κατασκευή του συνόλου $Cantor$. Για κάθε n το μήκος του διαστήματος F_n^δ είναι $\frac{1}{3^n}$, και προφανώς

$$F_0^\delta \supseteq F_1^\delta \supseteq ... \supseteq F_n^\delta \supseteq ... \quad .$$

Από την πληρότητα του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών έπεται ότι η τομή αυτής της ακολουθίας είναι ένα μονοσύνολο. Θέτουμε

$$f(\delta) = \text{το μοναδικό σημείο της τομής } \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n^{\delta}.$$

Προφανώς $f(\delta) \in \mathcal{C}$.
Έτσι έχουμε μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathcal{C}$.
Δείχνουμε ότι η f είναι $1-1$.
Έστω $\delta, \epsilon \in \Delta$ με $\delta \neq \epsilon$ και n ο ελάχιστος φυσικός αριθμός ώστε $\delta(n) \neq \epsilon(n)$, έστω $\delta(n) = 0$, τότε $F_n^{\delta} = F_n^{\epsilon}$ από την επιλογή του n,

$$f(\delta) \in F_{n+1}^{\delta} = LF_n^{\delta},$$

$$f(\epsilon) \in F_{n+1}^{\epsilon} = RF_n^{\delta},$$

και

$$LF_n^{\delta} \cap RF_n^{\delta} = \emptyset,$$

οπότε $f(\delta) \neq f(\epsilon)$, καθώς $f(\delta) \in LF_n^{\delta}$ και $f(\epsilon) \in RF_n^{\delta}$.
Ομοίως $f(\delta) \neq f(\epsilon)$ αν $\delta(n) = 1$.

Συνεπώς η f είναι $1-1$.
Επίσης, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η f είναι επί.

$\blacksquare$

Ο επόμενος σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ισοπληθικό με το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ του συνόλου των φυσικών αριθμών.
Από τις προτάσεις 1.1.4 και 1.1.7 έπεται αμέσως το εξής.

1.1.8 Λήμμα: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ και το γεγονός ότι $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ αποδεικνύουμε το επόμενο.

1.1.9 Λήμμα: $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Απόδειξη:
Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}) : \quad \pi(x) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Η συνάρτηση π είναι $1-1$.
Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ τότε υπάρχει κάποιος ρητός q ώστε $x < q < y$, και επομένως $q \in \pi(y) \setminus \pi(x)$, οπότε $\pi(x) \neq \pi(y)$.

■

Από τα ανωτέρω λήμματα έπεται ότι η ισοπληθικότητα $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι πόρισμα του επόμενου βασικού θεωρήματος.

1.1.10 Θεώρημα: $(Schröder - Bernstein)$
Για όλα τα σύνολα A, B,

$$A \leq_c B \quad \& \quad B \leq_c A \quad \Rightarrow \quad A =_c B.$$

Η ενδιαφέρουσα απόδειξη που παρουσιάζουμε προέρχεται από το [2]. Το θεώρημα έπεται άμεσα από ο εξής.

1.1.11 Λήμμα: Αν $A' \subseteq B \subseteq A$ και $A =_c A'$, τότε επίσης και $A =_c B$.

Απόδειξη:
Έστω $f : A \to A'$ αντιστοιχία που δείχνει ότι $A =_c A'$. Θέτουμε

$$Q = B \setminus f[A].$$

Ακολούθως ορίζουμε την οικογένεια υποσυνόλων του A

$$\mathcal{T} = \{X \subseteq A : \quad Q \cup f[X] \subseteq X\},$$

και θέτουμε

$$T = \bigcap \mathcal{T}.$$

Δείχνουμε πρώτα ότι

$$(1) \qquad T = Q \cup f[T].$$

Έχουμε για κάθε $X \in \mathcal{T}$,

$$Q \cup f[T] \subseteq Q \cup f[X] \subseteq X,$$

και άρα

$$(2) \qquad Q \cup f[T] \subseteq T.$$

Από τη σχέση αυτή έπεται ότι

$$Q \cup f\big[Q \cup f[T]\big] \subseteq Q \cup f[T]$$

και συνεπώς

$$Q \cup f[T] \in \mathcal{T}$$

οπότε,

$$(3) \qquad T \subseteq Q \cup f[T]$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται η (1).
Καθώς τα σύνολα Q και $f[T]$ είναι ξένα, από την (1) παίρνουμε

$$Q = T \backslash f[T].$$

Από τον ορισμό του Q έχουμε $B = Q \cup f[A]$, και επομένως

$$\begin{aligned} B &= \big(T \backslash f[T]\big) \cup f[A] \\ &= T \cup \big(f[A] \backslash f[T]\big), \text{ επειδή } f[T] \subseteq T \text{ και } f[T] \subseteq f[A], \\ &= T \cup f[A \backslash T], \text{ επειδή η } f \text{ είναι αντιστοιχία.} \end{aligned}$$

Έτσι,

$$(4) \qquad B = T \cup f[A \backslash T].$$

Τα σύνολα T και $f[A \backslash T]$ είναι ξένα, εφ' όσον $T \subseteq f[T]$, $f[A \backslash T] = f[A] \backslash f[T]$, και καθώς η f είναι αντιστοιχία η σχέση (4) συνεπάγεται ότι

$$A =_c B.$$

■

<u>Απόδειξη του θεωρήματος:</u>

Από την υπόθεση υπάρχουν $1-1$ συναρτήσεις, $f: A \to B$ και $g: B \to A$. Τότε

$$A =_c gf[A] \subseteq g[B] \subseteq A, \quad g[B] =_c B.$$

Από το λήμμα έπεται $A =_c g[B]$, και άρα $A =_c B$.

■

1.1.12 Πόρισμα: $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

1.1.13. *Υπόθεση του Συνεχούς* $(Continuum\ Hypothesis)$
Δεν υπάρχει σύνολο πραγματικών αριθμών X με πλήθος στοιχείων ενδιάμεσο αυτών του $\mathbb{N}$ και του $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$(CH) \qquad (\forall X \subseteq \mathbb{R})[X \leq_c \mathbb{N} \quad \vee \quad X =_c \mathbb{R}].$$

Εφ' όσον $\mathbb{R} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, η (CH) είναι ειδική περίπτωση της <u>Γενικευμένης Υπόθεσης του Συνεχούς</u> $(Generalized\ Continuum\ Hypothesis)$, δηλαδή της υπόθεσης ότι για κάθε άπειρο σύνολο A,

$$(GCH) \qquad \big(\forall X \subseteq \mathcal{P}(A)\big)[X \leq_c A \quad \vee \quad X =_c \mathcal{P}(A)].$$

1.1.14. *Συνέπεια της Γενικευμένης Υπόθεσης του Συνεχούς* GCH**,** $(Gödel\ 1939)$
Στο μοντέλο L των κατασκευάσιμων συνόλων ικανοποιείται η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς, GCH, και ειδικότερα η Υπόθεση του Συνεχούς, CH, δεν διαψεύδεται στην ZFC Θεωρία Συνόλων.

1.1.15. *Ανεξαρτησία της Υπόθεσης του Συνεχούς* CH**,** $(Cohen\ 1963)$
Υπάρχει μοντέλο της ZFC Θεωρίας Συνόλων στο οποίο η Υπόθεση του Συνεχούς CH, δεν ισχύει, άρα η Υπόθεση του Συνεχούς δεν είναι θεώρημα της ZFC Θεωρίας Συνόλων.

1.1.16 Ορισμός: $(von - Neumann)$
Διατακτικός αριθμός $(ordinal)$ είναι ένα καλά διατεταγμένο σύνολο α τέτοιο ώστε για κάθε $\xi \in \alpha$, το σύνολο $\{x \in \alpha : \quad x < \xi\}$ είναι το ξ. Έτσι κάθε διατακτικός αριθμός ταυτίζεται με το σύνολο όλων των προηγούμενων του.

Συμβολίζουμε με ORD την κλάση όλων των διατακτικών αριθμών:

$$0, 1, 2, ...\omega, \omega + 1, ..., \omega 2, ..., \omega^2, ..., \omega^\omega, ..., \epsilon_0, ...$$

Ένας διατακτικός αριθμός α είναι επόμενος αν είναι $\alpha = \beta + 1$ για κάποιο διατακτικό αριθμό β. Αν $\alpha \neq 0$ και α δεν είναι επόμενος τότε ο α είναι οριακός. Σημειώνουμε ότι οι πεπερασμένοι διατακτικοί αριθμοί είναι ακριβώς οι φυσικοί αριθμοί. Ο διατακτικός αριθμός ω ταυτίζεται με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. Επίσης, συμβολίζουμε με ω_1 τον πρώτο υπεραριθμήσιμο διατακτικό αριθμό.

1.1.17 Ορισμός: Πληθάριθμος $(Cardinal)$ είναι ένας διατακτικός αριθμός α, που δεν είναι ισοπληθικός με κανένα διατακτικό αριθμό $\beta < \alpha$. Οι διατακτικοί αριθμοί ω και ω_1 είναι πληθάριθμοι, και ως πληθάριθμοι συμβολίζονται, χρησιμοποιώντας το πρώτο γράμμα του Εβραϊκού αλφαβήτου $\aleph$, με $\aleph_0$ και $\aleph_1$ αντιστοίχως.

Κάθε σύνολο A είναι ισοπληθικό ακριβώς με έναν πληθάριθμο α, που καλείται πληθάριθμος του A.
Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $|A| = \alpha$ ή $card(A) = \alpha$.
Για παράδειγμα, ο πληθάριθμος του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι $\aleph_0$,

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Δανειζόμενοι το συμβολισμό από την αριθμητική των πληθαρίθμων έχουμε ότι ο πληθάριθμος του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι $2^{\aleph_0}$,

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

Επίσης ο πληθάριθμος του $\mathbb{R}$ συχνά καλείται πληθάριθμος του συνεχούς και συμβολίζεται με c. Είναι σαφές ότι $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. Με πληθαρίθμους η Υπόθεση του Συνεχούς διατυπώνεται ως εξής:

$$(CH) \qquad 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

1.2 Τοπολογικοί Χώροι

Έστω X σύνολο και $\mathcal{T}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X.
Η οικογένεια $\mathcal{T}$ είναι μια <u>τοπολογία</u> στο X αν έχει τις ιδιότητες:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(2) $A,\, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$, δηλαδή είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές και

(3) $A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$ όπου I τυχαία οικογένεια δεικτών, δηλαδή είναι κλειστή ως προς αυθαίρετες ενώσεις.

Αν $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X, τότε το διατεταγμένο ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ καλείται τοπολογικός χώρος, τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ είναι τα ανοικτά σύνολα και τα συμπληρώματα των ανοικτών συνόλων είναι τα κλειστά σύνολα.

Ένα υποσύνολο G του X είναι $\mathcal{G}_\delta$ αν $G = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$, όπου κάθε U_n είναι ανοικτό σύνολο, και ένα υποσύνολο F του X είναι $\mathcal{F}_\sigma$ αν $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$, όπου κάθε F_n είναι κλειστό σύνολο.

Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι <u>$Hausdorff$, (T_2)</u>, αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$. Συνήθως οι τοπολογικοί χώροι που εξετάζουμε είναι $Hausdorff$.

Αν $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο σύνολο X και $Y \subseteq X$, τότε η <u>σχετική τοπολογία</u> στο Y είναι η τοπολογία

$$\mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y : \quad U \in \mathcal{T}\}.$$

Ο τοπολογικός χώρος $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ είναι υπόχωρος του $(X, \mathcal{T})$.

Συνήθως συμβολίζουμε τον τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ με X και η τοπολογία $\mathcal{T}$ εννοείται.

<u>Βάση</u> για την τοπολογία $\mathcal{T}$ του X είναι μια οικογένεια $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του X, που αποτελείται από ανοικτά σύνολα, με την ιδιότητα ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση μελών της $\mathcal{B}$.

<u>Υποβάση</u> για την τοπολογία $\mathcal{T}$ του X είναι μια οικογένεια $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ τέτοια ώστε η οικογένεια των πεπερασμένων τομών της $\mathcal{S}$ να είναι βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$.

Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$, ένα ανοικτό σύνολο U με $x \in U$ καλείται <u>ανοικτή περιοχή</u> του x.

<u>Βάση περιοχών</u> του σημείου $x \in X$ είναι μια οικογένεια $\mathcal{N}_x$ ανοικτών περιοχών του x, ώστε για κάθε ανοικτή περιοχή V του x να υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$ με $U \subseteq V$.

Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και μια απεικόνιση $f : X \to Y$. Η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $x \in X$ αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(V)$ κάθε ανοικτής περιοχής V του $f(x)$ περιέχει μια ανοικτή περιοχή του x. Η f είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x του X. Είναι εύκολο να δούμε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(V)$ κάθε ανοικτού συνόλου $V \subseteq Y$ είναι ανοικτό σύνολο.

Μια απεικόνιση $g : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός αν είναι $1-1$, επί, συνεχής και η αντίστροφη της είναι συνεχής. Σε αυτή την περίπτωση οι τοπολογικοί χώροι X και Y καλούνται ομοιομορφικοί. Η $f : X \to Y$ καλείται εμφύτευση αν είναι ομοιομορφισμός από το X επί του $f[X]$.

Έστω $(Y_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων, X σύνολο και $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$ μια οικογένεια συναρτήσεων. Η ελάχιστη τοπολογία στο σύνολο X ως προς την οποία κάθε f_i είναι συνεχής καλείται τοπολογία παραγόμενη από την οικογένεια συναρτήσεων $(f_i)_{i\in I}$. Μια υποβάση για αυτή την τοπολογία είναι η οικογένεια $\mathcal{S} = \{f_i^{-1}(U) : \quad U \subseteq Y \text{ ανοικτό}, i \in I\}$.

Το Καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ μιας οικογένειας τοπολογικών χώρων $(X_i)_{i\in I}$ είναι ο τοπολογικός χώρος που συνίσταται από το Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων X_i, $i \in I$ και την τοπολογία που παράγεται από τις προβολές $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j :$ $\pi_j(x) = x_j$, όταν $x = (x_i)$.

Αν $X_i = X$ για κάθε $i \in I$ θέτουμε $\prod_{i\in I} X_i = X^I$.

Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$.
Η κλειστότητα του A είναι το σύνολο

$$\overline{A} = cl_X(A) = \bigcap\{F \subseteq X : \quad F \text{ κλειστό } \& \ A \subseteq F\},$$

και το εσωτερικό του A είναι το σύνολο

$$A^o = Int_X(A) = \bigcup\{U \subseteq X : U \text{ ανοικτό } \& \ U \subseteq A\}.$$

Είναι φανερό ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$, και επίσης ότι το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A = A^o$.
Ένα σημείο $x \in X$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου $A \subseteq X$ αν για κάθε ανοικτή περιοχή U του x, $(A\backslash\{x\}) \cap U \neq \emptyset$.

Το παράγωγο σύνολο του συνόλου A είναι το σύνολο των σημείων συσσωρεύσεως του A και συμβολίζεται με A'.

Ένα υποσύνολο P του τοπολογικού χώρου X είναι τέλειο αν $P = P'$. Για παράδειγμα, το σύνολο του $Cantor$, C, είναι τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ένα υποσύνολο A του τοπολογικού χώρου X είναι πυκνό στο X αν $\overline{A} = X$, ισοδύναμα αν το σύνολο A τέμνει κάθε ανοικτό, μη κενό υποσύνολο του X.

Ο τοπολογικός χώρος X είναι διαχωρίσιμος αν υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $D \subseteq X$ που είναι πυκνό στον X.

Ο X είναι πρώτος αριθμήσιμος αν κάθε σημείο του έχει μια αριθμήσιμη βάση περιοχών.

Ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος αν υπάρχει μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

Έστω X τοπολογικός χώρος και $K \subseteq X$. Ανοικτό κάλυμμα του K είναι μια οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Το σύνολο K είναι συμπαγές αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή, αν $(U_i)_{i\in I}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του K, υπάρχει $I_0 \subseteq I$ πεπερασμένο ώστε $K \subseteq \bigcup_{i\in I_0} U_i$.
Ο τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής αν το σύνολο X είναι συμπαγές.

Ένας τοπολογικός χώρος X είναι *Lindelöf* αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα.

Είναι σαφές ότι αν ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος τότε είναι χώρος $Lindelöf$.

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνονται ορισμένες βασικές ιδιότητες της συμπάγειας, οι οποίες εύκολα αποδεικνύονται.

1.2.1 Πρόταση: (i). Κλειστά υποσύνολα συμπαγών χώρων είναι σύνολα συμπαγή.
(ii). Συμπαγή υποσύνολα συμπαγών χώρων $Hausdorff$ είναι σύνολα κλειστά.
(iii). Συνεχής εικόνα συμπαγούς χώρου είναι συμπαγής χώρος.

Για τους συμπαγής χώρους θεμελιώδες είναι το ακόλουθο θεώρημα.

1.2.2 Θεώρημα: $(Tychonov)$
Το Καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών χώρων είναι συμπαγής χώρος.

1.3 Μετρικοί Χώροι

1.3.1 Ορισμός: Μετρική σε ένα σύνολο X είναι μια συνάρτηση $d : X \times X \to [0, +\infty)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
(i). $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii). $d(x,y) = d(y,x)$
(iii). $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Αν d είναι μετρική στο X, τότε το διατεταγμένο ζεύγος (X,d) καλείται μετρικός χώρος.

Η ανοικτή μπάλα με κέντρο ένα σημείο $x \in X$ και ακτίνα $r > 0$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{B}(x,r) = \{y \in X : \ d(y,x) < r\},$$

και η αντίστοιχη κλειστή μπάλα είναι

$$\overline{\mathcal{B}}(x,r) = \{y \in X : \ d(y,x) \leq r\}.$$

Η οικογένεια που αποτελείται από όλες τις ανοικτές μπάλες είναι βάση για μια τοπολογία στο X, η οποία καλείται τοπολογία του μετρικού χώρου (X,d).

Ένας μετρικός χώρος (X,d) είναι, ως τοπολογικός χώρος, πρώτος αριθμήσιμος: για κάθε $x \in X$, η οικογένεια $\{\mathcal{B}(x,\frac{1}{n}) : \ n = 1,2,...\}$ είναι μια βάση περιοχών του x.

Επιπλέον, ένας μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του X λέγεται ακολουθία $Cauchy$ αν

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_m,x_n) = 0$$

δηλαδή,

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[m,n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < \epsilon].$$

Ο μετρικός χώρος (X,d) καλείται πλήρης αν κάθε $Cauchy$ ακολουθία σημείων του X έχει όριο στο X.

1.3.2 Ορισμός: Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $\emptyset \neq B \subseteq X$.
Η διάμετρος του B είναι

$$diam(B) = sup\{d(x,y) : \ x,y \in B\}.$$

Αν $B = \emptyset$, θέτουμε $diam(B) = 0$.

1.3.3 Θεώρημα: $(Cantor)$
Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα.
(i). Ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης.
(ii). Αν $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X, ώστε για κάθε n, $F_n \supseteq F_{n+1}$ και $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, τότε η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ είναι ένα μονοσύνολο.

Απόδειξη:
$(i) \Rightarrow (ii)$. Για κάθε n, επιλέγουμε ένα σημείο $x_n \in F_n$. Η ακολουθία $(x_n)_n$ είναι $Cauchy$: Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει n_0 ώστε $diam(F_{n_0}) < \epsilon$. Από το γεγονός ότι η ακολουθόα (F_n) είναι φθίνουσα έπεται ότι

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow x_m, x_n \in F_{n_0} \text{ και επομένως } d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Εφ′ όσον ο μετρικός χώρος είναι πλήρης υπάρχει $x \in X$ ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Για $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_n \in F_m$ για κάθε $n \geq m$, και άρα $x \in F_m$, οπότε $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$. Προφανώς $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m = \{x\}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία $Cauchy$ στο X. Για κάθε n θέτουμε $F_n = cl\{x_m : \ m \geq n\}$. Τότε για κάθε n, $F_n \supseteq F_{n+1}$ και $\lim_{n\to\infty} diamF_n = 0$. Επομένως, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\bigcap_n F_n = \{x\}$. Είναι σαφές ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

■

Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι <u>μετρικοποιήσιμος</u> αν υπάρχει μια μετρική d στο X ώστε η $\mathcal{T}$ είναι η τοπολογία του μετρικού χώρου (X, d). Σ′ αυτή την περίπτωση η μετρική d καλείται <u>συμβιβαστή</u> με την τοπολογία $\mathcal{T}$. Αν επιπλέον ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης, τότε ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ καλείται <u>πλήρως μετρικοποιήσιμος</u>.
Παρατηρούμε ότι η μετρική d είναι συμβιβαστή με την τοπολογία $\mathcal{T}$ αν και μόνο αν η μετρική

$$d' = \frac{d}{1+d}$$

είναι συμβιβαστή με την τοπολογία $\mathcal{T}$. Είναι δε $d' \leq 1$.
Επιπλέον ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρρης αν και μόνο αν ο μετρικός χώρος (X, d') είναι πλήρης.

Αν σε ένα σύνολο X έχουν ορισθεί περισσότερες από μία μετρικές, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο X και x είναι ένα σημείο του X ώστε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x ως προς μια μετρική d του X, γράφουμε $x_n \xrightarrow{d} x$.

Υπόχωρος ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι ένα υποσύνολο $Y \subseteq X$ με την επαγώμενη μετρική $d|_Y$:
$d|_Y(x, y) = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in Y$.
Η τοπολογία του μετρικού χώρου $(Y, d|_Y)$ είναι η σχετική τοπολογία του Y.

Έτσι, ένας υπόχωρος ενός μετρικοποιήσιμου τοπολογικού χώρου είναι μετρικοποιήσιμος. Ακόμη, ένας υπόχωρος ενός διαχωρίσιμου μετρικοποιήσιμου χώρου είναι διαχωρίσιμος.

Αν $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρικών χώρων, τότε το Καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ με την αντίστοιχη τοπολογία γινόμενο είναι χώρος μετρικοποιήσιμος από την μετρική:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

όπου $x = (x_n)$ και $y = (y_n)$. Αν επιπλέον κάθε μετρικός χώρος (X_n, d_n) είναι πλήρης, τότε και ο χώρος γινόμενο με την μετρική d είναι πλήρης. Έτσι το Καρτεσιανό γινόμενο μιας ακολουθίας μετρικοποιήσιμων χώρων είναι χώρος μετρικοποιήσιμος.

Έστω (X, d), (Y, d') μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)[d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y) < \epsilon)].$$

Αν (X, d) είναι μετρικός χώρος και $A \subseteq X$ είναι μη κενό σύνολο, για κάθε $x \in X$ η απόσταση του x από το A είναι:

$$dist(x, A) = inf\{d(x, y) : \ y \in A\}.$$

Είναι σαφές ότι $dist(x, A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$. Χρησιμοποιώντας την απόσταση κάθε σημείου $x \in X$ από το A ορίζεται η συνάρτηση:

$$f_A : X \to [0, +\infty) : \ f_A(x) = dist(x, A).$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in X$, $|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y)$, και επομένως η συνάρτηση f_A είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επίσης $f_A(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις f_A μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του μετρικού χώρου X είναι $\mathcal{G}_\delta$-σύνολο.

1.3.4 Πρόταση: Αν (X, d) είναι μετρικός χώρος και A είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε το A είναι $\mathcal{G}_\delta$-σύνολο.

Απόδειξη:
Θεωρούμε τη συνάρτηση f_A και έχουμε

$$A = f_A^{-1}(\{0\}) = f_A^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}[0, \frac{1}{n})\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_A^{-1}\Big([0, \frac{1}{n})\Big),$$

εφ' όσον η συνάρτηση $f_A \geq 0$ είναι συνεχής τα $f_A^{-1}\big([0, \frac{1}{n})\big)$ είναι ανοικτά.

Μπορούμε επιπλέον με χρήση των συναρτήσεων f_A να αποδείξουμε εύκολα το Λήμμα του $Urysohn$ στην περίπτωση των μετρικοποιήσιμων χώρων.

1.3.5 Θεώρημα: (Λήμμα του $Urysohn$)
Έστω X μετρικοποιήσιμος χώρος. Αν A, $B \subseteq X$ είναι σύνολα κλειστά και ξένα μεταξύ τους, τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ ώστε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in B$.

Απόδειξη:
Θεωρούμε μια μετρική d στο X συμβιβαστή με την τοπολογία του και ορίζουμε τις συναρτήσεις f_A και f_B ως ανωτέρω. Θέτουμε

$$f = \frac{f_A}{f_A + f_B}.$$

Τότε η f είναι συνεχής, $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in B$.

■

Το θεώρημα 1.3.2 είναι ειδική περίπτωση του επόμενου θεωρήματος.

1.3.6 Θεώρημα: (Θεώρημα Επεκτάσεως του $Tietze$)
Έστω X ένας μετρικοποιήσιμος χώρος. Αν $A \subseteq X$ είναι σύνολο κλειστό και $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$, η οποία είναι επέκταση της f. Αν επιπλέον υπάρχει $\mu < \infty$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$, τότε $|\hat{f}(x)| \leq M$ για κάθε $x \in X$.

Η συμπάγεια των μετρικών χώρων χαρακτηρίζεται ως ακολούθως.

1.3.7 Θεώρημα: Έστω X μετρικός χώρος. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα.
(i). Ο X είναι συμπαγής.
(ii). Κάθε ακολουθία στο X έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.
(iii). Ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$, ο X μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος ανοικτές μπάλες ακτίνας $< \epsilon$.

1.3.8 Πόρισμα: Αν X είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος, τότε για κάθε μετρική d στο X συμβιβαστή με την τοπολογία του, ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης.

Η μετρικοποιησιμότητα συμπαγών χώρων έχει τον επόμενο απλό χαρακτηρισμό.

1.3.9 Θεώρημα: Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος. Τότε ο X είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν είναι $Hausdorff$ και δεύτερος αριθμήσιμος.

Ένας χρήσιμος χαρακτηρισμός της πληρότητας στους μετρικούς χώρους είναι ο ακόλουθος.

1.4 Λέξεις

Για κάθε φυσικό αριθμό n, το αντίστοιχο <u>αρχικό τμήμα</u> είναι το σύνολο

$$[0, n) = \{i \in \mathbb{N} : i < n\}.$$

Αν $n = 0$, τότε βέβαια $[0, n) = \emptyset$.
Έστω E ένα σύνολο. <u>Λέξη</u> στο E είναι μία πεπερασμένη ακολουθία u στο E, δηλαδή η u είναι μία συνάρτηση $u : [0, n) \to E$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με E^* το σύνολο των λέξεων στο E,

$$E^* = \{u \subseteq \mathbb{N} \times E : Function(u) \& (\exists n \in \mathbb{N})\big[Domain(u) = [0, n)\big]\}.$$

Αν $u : [0, n) \to E$ είναι μια λέξη στο E, τότε ο αριθμός n καλείται <u>μήκος</u> της λέξης u και συμβολίζεται με $lh(u)$, $lh(u) = n$. Η μόνη λέξη που έχει μήκος 0 είναι η κενή λέξη $\emptyset$. Αν $a_0, ..., a_{n-1}$ είναι στοιχεία του E, συμβολίζουμε με

$< a_0, ..., a_{n-1} >= \{(0, a_0), ..., (n-1, a_{n-1})\}$

την ακολουθία τους. Ειδικά $<>= \emptyset$ και για $a \in E$ $< a >= \{(0, a)\}$. Για όλες τις λέξεις $u, v \in E^*$ η παράθεση ($concatanation$) των u και v είναι η λέξη

$$u * v =< u(0), ..., u\big(lh(u) - 1\big), v(0), ..., v(lh(v) - 1) > .$$

Για λέξεις $u, v \in E^*$ θέτουμε

$u \sqsubseteq v \Leftrightarrow_{o\rho} u \subseteq v,$

και καλούμε τη λέξη u αρχικό τμήμα της λέξης v.

Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ ορίζουμε την συνάρτηση $\overline{f} : \mathbb{N} \to E^*$ με τον κανόνα:

$\overline{f}(n) =_{o\rho} f|_{[o,n)}$.

Μπορούμε να ανακτήσουμε τη συνάρτηση f από την $\overline{f}$ ως εξής

$i < n \Rightarrow f(i) = \overline{f}(n)(i), (n \in \mathbb{N})$.

1.5 Δέντρα

1.5.1 Ορισμός: Έστω ένα σύνολο E. Δέντρο στο σύνολο E είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο λέξεων T στο E, $T \subseteq E^*$, ο οποίο είναι κλειστό προς τα κάτω, δηλαδή

$u \sqsubseteq v$ & $v \in T \Rightarrow u \in T$.

Έστω T δένδρο στο E. Τα στοιχεία του T καλούνται κόμβοι ($nodes$) ή πεπερασμένα κλαδιά του T. Αν το δένδρο T είναι μη κενό έχει το $\emptyset$ ως ελάχιστο κόμβο, τη ρίζα. Για κάθε $u \in T$ και $x \in E$ αν $u* < x >\in T$, τότε ο κόμβος u καλείται γονέας του $u* < x >$ και ο $u* < x >$ καλείται παιδί του u στο T. Κάθε κόμβος εκτός από τη ρίζα έχει ακριβώς ένα γονέα, ενώ μπορεί να έχει πολλά παιδιά. Αν ο κόμβος u δεν έχει παιδιά, τότε καλείται τερματικός κόμβος. Σε κάθε κόμβο u αντιστοιχίζουμε το υποδένδρο

$$T_u = \{w \in T : w \sqsubseteq u \vee u \sqsubseteq w\}$$

των κόμβων του T που είναι συγκρίσιμοι με τον u.

Χρήσιμη είναι η επόμενη προφανής σχέση

$T_u = \bigcup\{T_v : v \text{ είναι παιδί του } u\}, (u \in T)$.

Άπειρο κλαδί ενός δένδρου T είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}, \overline{f}(n) \in T$.

Συμβολίζουμε με $[T]$ το σύνολο των άπειρων κλαδιών του T και το καλούμε σώμα του δένδρου T. Έτσι

$$[T] =_{o\rho} \{f : \mathbb{N} \to E : (\forall n)[\overline{f}(n) \in T].$$

Κάθε άπειρο κλαδί του δένδρου T παράγεται από άπειρο πλήθος διαδοχικών κόμβων. Επομένως πεπερασμένα δένδρα έχουν κενά σώματα.

1.5.2 Ορισμός: Ένα δένδρο T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης αν κάθε κόμβος του T έχει το πολύ πεπερασμένα παιδιά.

Το επόμενο συνδιαστικό λήμμα παίζει βασικό ρόλο στην μελέτη των δένδρων πεπερασμένης διακλάδωσης.

1.5.3 Λήμμα: (Λήμμα του $König$)
Κάθε πεπερασμένης διακλάδωσης άπειρο δένδρο έχει ένα άπειρο κλαδί.

Απόδειξη:
Έστω $T \in E^*$ άπειρο δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης. Θεωρούμε το υποδένδρο του T

$S = \{u \in T : T_u$ είναι άπειρο $\}$,

που αποτελέιται από όλους τους κόμβους $u \in T$ που συγκρίνονται με άπειρο πλήθος κόμβων. Έχουμε $T_\emptyset = T$ και καθώς το T είναι άπειρο η ρίζα $\emptyset$ ανήκει στο S.

Επίσης για κάθε $u \in S$ υπάρχει $v \in S$ που είναι παιδί του u. Πράγματι, για κάθε $u \in S$,

$T_u = \bigcup\{T_v : v$ παιδί του $u\}$

και επειδή το T_u είναι άπειρο και το σύνολο

$\{T_v : v$ παιδί του $u\}$

είναι πεπερασμένο, καθώς $|\{T_v : v$ παιδί του $u\}| = |\{v : v$ παιδί του $u\}|$, κάποιο T_v πρέπει να είναι άπειρο, δηλαδή $v \in S$. Μπορούμε τώρα χρησιμοποιώντας το Αξίωμα της Επιλογής, να ορίσουμε επαγωγικά μια συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to S$ τέτοια ώστε $g(0) = \emptyset$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $g(n+1)$ να είναι παιδί του $g(n)$ οπότε $g(n) \underset{\neq}{\sqsubseteq} g(n+1)$. Θέτουμε

$f = \bigcup\{g(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Τότε η f είναι ολική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\overline{f}(n) = g(n)$ που σημαίνει ότι η f είναι άπειρο κλαδί του δένδρου T.

■

Το λήμμα του $König$ είναι πολύ χρήσιμο στην επόμενη εκδοχή του, που είναι μια μορφή συμπάγειας.

1.5.4 Ορισμός: Έστω ένα δένδρο T και ένα υποσύνολο $B \subseteq T$. Το B καλείται φράχτης (bar) του δένδρου T αν κάθε άπειρο κλαδί του T περιέχει τουλάχιστον έναν κόμβο του B,

$$(\forall f \in [T])(\exists n)[\overline{f}(n) \in B].$$

1.5.5 Θεώρημα: Θεώρημα Βεντάλιας ($Fan\ Theorem$)
Έστω δένδρο T πεπερασμένης διακλάδωσης. Τότε κάθε φράχτης B του δένδρου T έχει πεπερασμένο υποσύνολο

$$B_0 = \{u_1, ..., u_n\} \subseteq B$$

που είναι επίσης φράχτης του T.

Απόδειξη:
Έστω B_0 το σύνολο των ελαχιστικών κόμβων του B, δηλαδή

$$B_0 = \{u \in B : (\forall v \underset{\neq}{\sqsubseteq} u)[v \notin B]\}.$$

Το B_0 είναι φράχτης του T.
Πράγματι, αν $f \in [T]$ και n είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $\overline{f}(n) \in B$, τότε $\overline{f}(n) \in B_0$. Θεωρούμε το υποδένδρο S όλων των αρχικών κόμβων του B_0,

$$S = \{v \in T : (\exists u \in B_0)[v \sqsubseteq u]\}.$$

Το S ως υποδένδρο του T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και το S έχει τερματικούς κόμβους ακριβώς τα μέλη του B_0. Το δένδρο S δεν έχει άπειρο κλαδί γιατί κάθε πεπερασμένο κλαδί του είναι αρχικό τμήμα κάποιου κόμβου του B_0. Άρα από το λήμμα του $König$ το S είναι πεπερασμένο, επομένως και το υποσύνολο του B_0 είναι επίσης πεπερασμένο.

■

Κεφάλαιο 2

Ο χώρος του $Baire$

Ένα από τα πιο θεμελιώδη αντικείμενα μελέτης της Περιγραφικής Συνολοθεωρίας είναι ο χώρος του $Baire$ $\mathcal{N}$,

$\mathcal{N} = (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) =$ το σύνολο των ακολουθιώνμε στοιχεία από το $\mathbb{N}$.

Το σύνολο $Cantor$ $\mathcal{C}$ είναι

$\mathcal{C} = (\mathbb{N} \to \{0, 1\}) =$ το σύνολο των ακολουθιών με στοιχεία 0 ή 1.

Επομένως

$$c =_c 2^{\aleph_0} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c |\mathcal{C}| \leq_c |\mathcal{N}| \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c c.$$

Έτσι έχουμε $|\mathcal{N}| =_c |\mathbb{R}|$. Εξ' αυτού έπεται ότι η Υπόθεση του Συνεχούς μπορεί να εκφρασθεί με την πρόταση

$$(CH)\ (\forall X \subseteq \mathcal{N})[X \leq_c \mathbb{N} \vee X =_c \mathcal{N}].$$

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να αποδειχθούν τα βασικά αποτελέσματα για τον χώρο $\mathcal{N}$ που έχουν σχέση με το Πρόβλημα του Συνεχούς. Θα ορίσουμε την οικογένεια των αναλυτικών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ και θα αποδείξουμε ότι κάθε αναλυτικό σύνολο ικανοποιεί την Υπόθεση του Συνεχούς: είτε είναι αριθμήσιμο ή είναι ισοπληθικό με το $\mathcal{N}$. Αυτό θα προκύψει από το θεώρημα Τέλειου Συνόλου: κάθε αναλυτικό, μη αριθμήσιμο σύνολο περιέχει ένα μη κενό τέλειο σύνολο. Είναι ένα σημαντικό θεώρημα, επειδή όλα σχεδόν τα σύνολα με τα οποία ασχολείται η κλασσική ανάλυση, είναι αναλυτικά. Ιδιαιτέρως όλα τα σύνολα $Borel$ είναι αναλυτικά. Στο τέλος του κεφαλαίου θα δείξουμε ότι η φυσική μέθοδος απόδειξης της Υπόθεσης του Συνεχούς για τα αναλυτικά σύνολα δεν μπορεί να δώσει λύση στο γενικό Πρόβλημα του Συνεχούς.

2.1 Η συνδιαστική δομή του $\mathcal{N}$

Από τον ορισμό του το $\mathcal{N}$ είναι το σώμα του μεγαλύτερου δένδρου στο $\mathbb{N}$,

$\mathcal{N} = [\mathbb{N}^*]$.

Επεκτείνουμε το συμβολισμό για αρχικά τμήματα λέξεων:

$u \sqsubseteq x \Leftrightarrow_{o\rho} u \subseteq x \ (u \in \mathbb{N}^*, x \in \mathcal{N})$.

Επίσης για κάθε $u \in \mathbb{N}^*$ θέτουμε

$\mathcal{N}_u = \{x \in \mathcal{N} | u \sqsubseteq x\}$.

Είναι σαφές ότι

$\mathcal{N}_u = [\mathbb{N}^*_u]$.

2.2 Βασικά αποτελέσματα για τον χώρο $\mathcal{N}$ τπυ Baire

Θεωρούμε στο $\mathbb{N}$ τη διακριτή τοπολογία και στο $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ την αντίστοιχη τοπολογία γινόμενο.
Η οικογένεια $\{\mathcal{N}_u | u \in \mathbb{N}^*\}$ είναι μια βάση περιοχών για την τοπολογία του $\mathcal{N}$, η οποία είναι αριθμήσιμη. Έτσι ο χώρος $\mathcal{N}$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Κάθε σύνολο της μορφής $\mathcal{N}_u, (u \in \mathbb{N})$ το καλούμε περιοχή, και όταν θα αναφερόμαστε σε περιοχές θα εννοούμε περιοχές αυτής της μορφής.
Παρατηρούμε ότι κάθε περιοχή $\mathcal{N}_u$, του u είναι ανοικτό-κλειστό σύνολο. Επίσης είναι προφανές ότι: ο χώρος $\mathcal{N}$ είναι $Hausdorff$. Επίσης θα δούμε ότι ο $\mathcal{N}$ είναι μετρικοποιήσιμος από μια πλήρη μετρική.

Οι δύο δομές του $\mathcal{N}$, συνδιαστική και τοπολογική, είναι άρρηκτα συνδεδεμένες έτσι ώστε κάθε ενδιαφέρουσα συνδιαστική ιδιότητα να έχει μια αντίστοιχη τοπολογική εκδοχή και αντιστρόφως.

Κατωτέρω θα εκφράσουμε, χρησιμοποιώντας υποδένδρα του $\mathbb{N}^*$, διάφορες τοπολογικές ιδιότητες υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου $\mathcal{N}$. Η επόμενη προφανής ισοδυναμία συσχετίζει κάθε δένδρο T με το σώμα του.

2.2.1 Παρατήρηση: Για κάθε δένδρο T,
$x \in [T] \Leftrightarrow (\forall u \sqsubseteq x)[u \in T]$.

2.2.2 Πρόταση: Έστω σύνολο $F \subseteq \mathcal{N}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:
(i) Το σύνολο F είναι κλειστό.
(ii) Υπάρχει δένδρο $T \subseteq \mathbb{N}^*$ ώστε $F = [T]$.

Απόδειξη:

$(ii) \Rightarrow (i)$. Έστω $x \in \mathcal{N} \backslash [T]$. Τότε από την Παρατήρηση 2.2.1 υπάρχει $u \sqsubseteq x$ ώστε $u \notin T$ και επομένως $\mathcal{N}_u \cap [T] = \emptyset$, άρα $\mathcal{N}_u \subseteq \mathcal{N} \backslash [T]$. Επομένως το $[T]$ είναι κλειστό.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Θέτουμε:

$$T^F = \{u \in \mathbb{N}^* : (\exists x \in F)[u \sqsubseteq x]\}$$

Προφανώς το T^F είναι δένδρο και $F \subseteq [T^F]$.

Μένει να δείξουμε ότι $[T^F] \subseteq F$. Πράγματι αν $x \in \mathcal{N} \backslash F$, τότε υπάρχει $u \sqsubseteq x$ τέτοιο ώστε $\mathcal{N}_u \cap F = \emptyset$, και άρα από τον ορισμό του T^F, έπεται ότι $x \notin [T^F]$. Συνεπώς $[T^F] \subseteq F$.

$\blacksquare$

2.2.3 Παρατήρηση:

(1). Όπως είδαμε στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, αν το $F \subseteq \mathcal{N}$ είναι κλειστό σύνολο τότε $F = [T^F]$. Το δένδρο $T = T^F$ δεν έχει τερματικούς κόμβους. Έτσι όταν F είναι κλειστό, τότε $F = [T]$ για κάποιο δένδρο $T \subseteq \mathbb{N}^*$, για το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχει τερματικούς κόμβους.

(2). Για αυθαίρετο σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ θεωρούμε το δένδρο

$$T^A = \{u \in \mathbb{N}^* : (\exists x \in A)[u \sqsubseteq x]\}.$$

Τότε $[T^A]$ είναι η κλειστότητα του A, $[T^A] = clA$.

Για κάθε σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$, το σύνολο των σημείων συσσωρεύσεως του A συμβολίζεται με A' και καλείται παράγωγο σύνολο του A. Ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{N}$ καλείται τέλειο αν $P = P'$

2.2.4 Ορισμός: Έστω ένα δένδρο $T \subseteq \mathbb{N}^*$. Μία συνάρτηση $\tau : T \to \mathbb{N}^*$ καλείται μονοτονική αν

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow \tau(u) \sqsubseteq \tau(v), (u, v \in T).$$

2.2.5 Ορισμός: Έστω δένδρο $T \subseteq \mathbb{N}^*$. Μία λέξη u του T διασπάται στο T αν έχει ασυμβίβαστες επεκτάσεις. Το δένδρο T είναι διασπώμενο αν κάθε $u \in T$ διασπάται στο T,

$$u \in T \Rightarrow \text{διασπάται } (\exists u_1, u_2 \in T)[u \sqsubseteq u_1 \& u \sqsubseteq u_2 \& u_1 | u_2].$$

2.2.6 Πρόταση: Έστω σύνολο $P \subseteq \mathcal{N}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα.

(i) Το P είναι τέλειο σύνολο.

(ii) Υπάρχει διασπώμενο δένδρο $T \subseteq \mathbb{N}^*$ ώστε $P = [T]$.

Απόδειξη:

$(i) \Rightarrow (ii)$. Εφ' όσον το P είναι τέλειο, είναι κλειστό. Επομένως από την πρόταση 2.2.2 έχουμε $P = [T]$ για κάποιο δένδρο $T \subseteq \mathbb{N}^*$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το T δεν έχει τερματικούς κόμβους. Θα δείξουμε ότι το T είναι διασπώμενο. Έστω $u \in T$. Εφ' όσον το T δεν έχει τερματικούς κόμβους υπάρχει $x \in [T]$ ώστε $x \in \mathcal{N}_u$. Ας υποθέσουμε ότι η λέξη u δεν είναι διασπώμενη, τότε για κάθε $v \in T$ με $u \sqsubseteq v$ είναι $v \sqsubseteq x$. Επομένως $[T] \cap \mathcal{N}_u = \{x\}$, και άρα το x δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του P, που είναι άτοπο.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Από την Πρόταση 2.2.2 έπεται ότι το P είναι κλειστό και άρα $P' \subseteq P$. Θα δείξουμε ότι $P \subseteq P'$. Έστω $x \in P = [T]$ και $x \in \mathcal{N}_u$. Τότε $u \in T$ και εφ' όσον το T είναι διασπώμενο μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά μια συνάρτηση $\tau : \mathbb{N} \to T$ τέτοια ώστε $u \underset{\neq}{\sqsubseteq} \tau(0) \& \tau(0) | x \& (\forall n)[\tau(n) \not\sqsubseteq \tau(n+1)]$.

Θέτουμε

$$y = sup\{\tau(n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Είναι σαφές ότι $y \in \mathcal{N}_u \cap [T]$ και $y \neq x$. Άρα το x είναι σημείο συσσωρεύσεως του P. Έπεται ότι $P' \subseteq P$. Συνεπώς $P = P'$.

■

2.2.7 Πρόταση: Κάθε μη κενό, τέλειο υποσύνόλο του $\mathcal{N}$ έχει πληθικότητα c.

Απόδειξη:

Έστω $P \subseteq \mathcal{N}$ μη κενό, τέλειο υποσύνολο του $\mathcal{N}$. Από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει μη κενό διασπώμενο δένδρο $T \subseteq \mathbb{N}^*$ ώστε $P = [T]$.

Επιλέγουμε συναρτήσεις

$$l : T \to T, \quad r : T \to T$$

που φανερώνουν ότι το δένδρο T είναι διασπώμενο, δηλαδή τέτοιες ώστε για κάθε $u \in T$,

$$u \sqsubseteq l(u), u \sqsubseteq r(u) \;\;\&\;\; l(u)|r(u).$$

Ορίζουμε επαγωγικά μια συνάρτηση

$$\sigma : \{0,1\}^* \to T$$

με τις ιδιότητες

$$\sigma(\emptyset) = \emptyset, \sigma(u* < 0 >) = l(\sigma(u)), \sigma(u* < 1 >) = r(\sigma(u)).$$

Είναι σαφές ότι για κάθε $u \in \{0,1\}^*$,

$$lh(u) \leq lh(\sigma(u)).$$

Επίσης $\sigma(u) \sqsubseteq \sigma(u* < i >)$ για $i = 0, 1$. Ακόμη, με μια εύκολη επαγωγή δείχνουμε ότι $\sigma(u) \sqsubseteq \sigma(u * v)$ που σημαίνει ότι η σ είναι μονοτονική

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow \sigma(u) \sqsubseteq \sigma(v).$$

Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $\pi : C \to [T]$ με τον τύπο

$$\pi(x) = sup\{\sigma(u) : u \sqsubseteq x\}.$$

Η κρίσημη ιδιότητα της σ είναι ότι διατηρεί την ασυμβιβαστότητα,

$$u|v \Rightarrow \sigma(u)|\sigma(v).$$

Πράγματι, για $u, v \in \{0,1\}^*$ με $u|v$, έστω i ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με $u(i) \neq v(i)$. Τότε υπάρχει $w \in \{0,1\}^*$ ώστε $w* < 0 >= u$, $w* < 1 >= v$ (ή αντιστρόφως). Συνεπώς από τον ορισμό της σ, $\sigma(w* < 0 >)$ και $\sigma(w* < 1 >)$ είναι ασυμβίβαστες, και από την μονοτονικότητα της $\sigma, \sigma(u)$ και $\sigma(v)$ είναι επεκτάσεις των $\sigma(w* < 0 >)$ και $\sigma(w* < 1 >)$ αντιστοίχως, επομένως είναι επίσης ασυμβίβαστες. Άρα η π είναι μονομορφισμός και συνεπώς $C \leq_c [T]$.

■

Η ανωτέρω απόδειξη δείχνει μια φυσική πρόσβαση στο Πρόβλημα του Συνεχούς για τα υποσύνολα του $\mathcal{N}$ για να αποδείξουμε ότι ένα μη αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathcal{N}$ έχει πληθικότητα c αρκεί να δείξουμε ότι περιέχει ένα μη κενό, τέλειο σύνολο. Αυτό είναι προφανές για τα ανοικτά σύνολα, καθώς κάθε $\mathcal{N}_u$ είναι τέλειο, και επίσης αληθεύει και για τα κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{N}$, όπως προκύπτει από το θεώρημα 3.2.9.

2.2.8 Λήμμα: Έστω $P \subseteq \mathcal{N}$ μη κενό τέλειο σύνολο. Τότε για κάθε $x \in P$ και $u \in \mathbb{N}^*$ με $x \in \mathcal{N}_u$, το σύνολο $\mathcal{N}_u \cap P$ έχει πληθικότητα c.

Απόδειξη:

Έστω $P = [T]$, όπου $T \subseteq \mathbb{N}^*$μη κενό, διασπώμενο δένδρο. Παρατηρούμε ότι για $u \in \mathbb{N}^*$ και $x \in P$ με $x \in \mathcal{N}_u$ έχουμε $\mathcal{N}_u \cap P = [\mathbb{N}^*_u \cap T]$ και το $\mathbb{N}^*_u \cap T$ είναι μη κενό διασπώμενο δένδρο. Επομένως, από την προηγούμενη πρόταση το σύνολο $\mathcal{N}_u \cap P$ είναι μη κενό, τέλειο σύνολο και άρα έχει πληθικότητα c.

■

2.2.9 Θεώρημα: $(Cantor - Bendixson)$

Κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{N}$ διασπάται με έναν μόνο τρόπο σε δύο ξένα σύνολα, $F = P \cup S, P \cap S = \emptyset$, όπου το P είναι τέλειο και το S είναι αριθμήσιμο. Καλούμε το P πυρήνα $(kernal)$ και το S διασπαρμένο $(scattered\, part)$ του F.

Συνεπώς κάθε μη αριθμήσιμο κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ έχει μη κενό πυρήνα, και επομένως έχει πληθικότητα c.

Απόδειξη:

Έστω $F = [T]$ με T υποδένδρο του $\mathbb{N}^*$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το T δεν έχει τερματικούς κόμβους. Θέτουμε

$$S = \bigcup \{[T_u] : u \in T \quad \& \quad |[T_u]| \leq_c \aleph_0\},$$

$$P = F \setminus S.$$

Εξ' ορισμού το S είναι ένωση μιας αριθμήσιμης οικογένειας αριθμήσιμων συνόλων και επομένως είναι αριθμήσιμο. Μένει να δείξουμε ότι το P είναι τέλειο.

Το σύνολο λέξεων

$$\kappa T = \{u \in T : |[T_u]| >_c \aleph_0\}$$

είναι σαφές ότι είναι δένδρο, και από τον ορισμό του S,

$$x \in S \Leftrightarrow x \in F \quad \& \quad (\exists u \sqsubseteq x)[u \notin \kappa T]$$

Όμως $P = F \setminus S$, , άρα

$$x \in P \Leftrightarrow x \in F \quad \& \quad \Big[x \notin F \vee (\forall u \sqsubseteq x)[u \in \kappa T]\Big]$$

$$\Leftrightarrow (\forall u \sqsubseteq x)[u \in T] \quad \& \quad (\forall u \sqsubseteq x)[u \in \kappa T]$$

$$\Leftrightarrow (\forall u \sqsubseteq x)[u \in \kappa T]$$

$$\Leftrightarrow x \in [\kappa T].$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι το δένδρο κT είναι διασπώμενο. Προς απαγωγή σε άτοπο, δεχόμαστε ότι κάποιο $u \in \kappa T$ δεν διασπάται στο κT. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι επεκτάσεις του στο κT είναι συγκρίσιμες, επομένως προσδιορίζουν ένα μοναδικό σημείο

$$x = sup\{v \in \kappa T : u \sqsubseteq v\},$$

και εφ' όσον κάθε επέκταση του u στο κT είναι προσέγγιση του x,

$$[T_u] = \{x\} \cup \{[T_u] : u \sqsubseteq v \in T \quad \& \quad |[T_v]| \leq \aleph_0\}$$

και συνεπώς το $[T_u]$ είναι αριθμήσιμο, που είναι άτοπο.
Μένει να δείξουμε την μοναδικότητα της ανωτέρω διάσπασης του F. Υποθέτουμε ότι το F είναι μη αριθμήσιμο. Αν $x \in S$ τότε εφ' όσον το P είναι κλειστό υπάρχει $u \sqsubseteq x$ ώστε $\mathcal{N}_u \cap P = \emptyset$, και επομένως $\mathcal{N}_u \cap F$ είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς, από το λήμμα 3.2.8 $x \in P \Leftrightarrow (\forall u \sqsubseteq x)\big[|\mathcal{N}_u \cap F| =_c c\big]$.
Άρα τα P και S είναι μοναδικά.

■

2.2.10 Θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα.
(i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής.
(ii) Υπάρχει μονοτονική συνάρτηση $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ ώστε

$$f(x) = sup\{\tau(u) : u \sqsubseteq x\}, \quad (x \in \mathcal{N}) \qquad \textbf{(1)}$$

$$= lim_n \tau(\overline{x}(n)).$$

Η μονοτονική συνάρτηση $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ υπολογίζει την συνάρτηση f αν ικανοποιεί την (1).

Απόδειξη:

$(ii) \Rightarrow (i)$ Αν η f ικανοποιεί την (10.4), τότε

$$f(x) \in \mathcal{N}_v \Leftrightarrow (\exists u \sqsubseteq x)[v \sqsubseteq \tau(u)],$$

και συνεπώς η αντίστροφη εικόνα κάθε περιοχής

$$f^{-1}(\mathcal{N}_v) = \bigcup \{\mathcal{N}_u : v \sqsubseteq \tau(u)\}$$

είναι ένωση περιοχών, άρα η f είναι συνεχής.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και θέτουμε

$$S(u) =_{o\rho} \{v \in \mathbb{N}^* : f[\mathcal{N}_u] \subseteq \mathcal{N}_v\}, (u \in \mathbb{N}^*).$$

Κάθε $S(u)$ είναι μη κενό, εφ' όσον η ρίζα $\emptyset \in S(u)$.
Επίσης, παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του $S(u)$ είναι ανά δύο συγκρίσιμα, δηλαδή

$$v, v' \in S(u) \Rightarrow [v \sqsubseteq v' \quad \vee \quad v' \sqsubseteq v].$$

Πράγματι,

$$v, v' \in S(u) \Rightarrow f[\mathcal{N}_u] \subseteq \mathcal{N}_v \cap \mathcal{N}_{v'} \Rightarrow [v \sqsubseteq v' \quad \vee \quad v' \sqsubseteq v],$$

επειδή $v|v' \Rightarrow \mathcal{N}_v \cap \mathcal{N}_{v'} = \emptyset$. Έτσι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

<u>1^{η} Περίπτωση</u>
Υπάρχει $v \in S(u)$ τέτοια ώστε $lh(u) = lh(v)$
Τότε θέτουμε

$$\tau(u) =_{o\rho} v = \text{η μοναδική λέξη στο } S(u) \text{ τέτοια ώστε } lh(v) = lh(u) \; .$$

<u>2^{η} Περίπτωση</u>
Δεν υπάρχει $v \in S(u)$ τέτοιο ώστε $lh(v) = lh(u)$. Σ' αυτή την περίπτωση θέτουμε

$$\tau(u) =_{o\rho} sup\{v | v \in S(u)\}.$$

Η μονοτονικότητα της τ έπεται εύκολα από τη συνεπαγωγή

$$u_1 \sqsubseteq u_2 \Rightarrow S(u_1) \subseteq S(u_2),$$

θεωρώντας τις διάφορες περιπτώσεις στον ορισμό των $\tau(u_1)$ και $\tau(u_2)$. Για να δείξουμε την (1) παρατηρούμε πρώτα ότι καθώς

$$\tau(u) \in S(u), \quad u \sqsubseteq x \in \mathcal{N} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{N}_{\tau(u)} \Rightarrow \tau(u) \sqsubseteq f(x).$$

Επίσης από την συνέχεια της f έπεται ότι αν $u \sqsubseteq f(x)$, τότε για κάποιο $u \sqsubseteq x, f[\mathcal{N}_u] \subseteq \mathcal{N}_v$, άρα $v \in S(u)$ καιείτε αμέσως $v \sqsubseteq \tau(u)$ αν η τιμή $\tau(u)$ ορίζεται με την 2^{η}περίπτωση ή υπάρχει κάποια επέκταση v' της v με $lh(v') = lh(v)$ τέτοια ώστε $v' = \tau(u)$.

■

Η (1) δίνει έναν υπολογιστικό χαρακτηρισμό της συνέχειας: Η συνάρτηση $\tau(u)$ στις λέξεις, μας δίνει διδοχικά καλύτερες προσεγγίσεις της τιμής $f(x)$ καθώς η μεταβλητή παίρνει διαδοχικά τιμές που είναι ακριβέστερες ποσεγγίσεις του x.

2.2.11 Ορισμός: Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ καλείται <u>αναλυτικό ή $Souslin$</u> αν είτε $A = \emptyset$ ή το A είναι συνεχής εικόνα του χώρου του $Baire$, δηλαδή αν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση

$$f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow A.$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$ το σύνολο των αναλυτικών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$, δηλαδή

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathcal{N} : A = \emptyset \vee (\exists \text{ συνεχής } f : \mathcal{N} \to \mathcal{N})\big[A = f[\mathcal{N}]\big]\}.$$

2.2.12 Λήμμα: Αν F είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$, τότε υπάρχει συνεχής προβολή του $\mathcal{N}$ επί του F, δηλαδή υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση

$$f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow F, \text{ ώστε } f(x) = x \text{ για κάθε } x \in F.$$

Επομένως, κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι αναλυτικό.

Απόδειξη:

Έστω $F = [T]$ με T υποδένδρο του $\mathbb{N}^*$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το δένδρο T δεν έχει τερματικούς κόμβοους. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $l : T \to T$ τέτοια ώστε

$$u \sqsubseteq T \Rightarrow u \sqsubseteq l(u) \quad \& \quad lh\big(l(u)\big) = lt(u) + 1.$$

Θεωρούμε πρώτα τη συνάρτηση

$$rtail(u) = \overline{u}\big(lh(u) - 1\big), \quad (lh(u) > 0),$$

με πεδίο ορισμού το σύνολο των μη κενών λέξεων του T, η οποία αφαιρεί από κάθε λέξη το τελευταίο ψηφίο. Ακολούθως, με επαγωγή στο μήκος κάθε λέξης $u \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε μια συνάρτηση $\tau : \mathbb{N}^* \to T$ τέτοια ώστε

$$\tau(u) = \begin{cases} l\big(\tau(rtail)(u)\big) & \alpha\nu\ u \notin T \\ u & \alpha\nu\ u \in T \end{cases}$$

Η τ είναι μονοτονική, σέβεται το μήκος και ο περιορισμός $\tau|_T$ είναι η ταυτοτική. Έπεται ότι η τ υπολογίζει μια συνεχή προβολή $f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow [T]$.

■

Κατωτέρω δίνουμε έναν συνδιαστικό χαρακτηρισμό των συμπαγών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$.

2.2.13 Πρόταση: Έστω $K \subseteq \mathcal{N}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα.

(i). Το K είναι συμπαγές.

(ii). Υπάρχει δένδρο $T \subseteq \mathbb{N}^*$ πεπερασμένης διακλάδωσης ώστε $K = [T]$.

Απόδειξη:

$(i) \Rightarrow (ii)$. Εφ' όσον ο χώρος $\mathcal{N}$ είναι $Hausdorff$, το K είναι κλειστό. Επομένως, από την Πρόταση 3.2.2, υπάρχει δένδρο $T \subseteq \mathbb{N}^*$, ώστε $K = [T]$.

Προς απαγωγή σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι το δένδρο T δεν είναι πεπερασμένης διακλάδωσης. Τότε υπάρχει κόμβος $u \in T$ που έχει άπειρο πλήθος παιδιών στο T. Είναι σαφές ότι η οικογένεια

$$\{\mathcal{N}_v : v \in T \quad \& \quad \big[v \text{ παιδί του } u \vee (v|u)\big]\}$$

είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $[T]$, χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα, που είναι άτοπο.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Έστω $\mathcal{G}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του K. Τότε για κάθε $x \in [T]$ υπάρχουν $G_x \in \mathcal{G}$ και $u_x \in \mathbb{N}^*$ ώστε $x \in \mathcal{N}_{u_x} \subseteq G_x$, και άρα $u_x \subseteq x$, οπότε $u_x \in T$. Έπεται ότι η οικογένεια

$$\{u_x : x \in [T]\}$$

είναι φράχτης του T. Εφ' όσον το δένδρο T είναι παπερασμένης διακλάδωσης, από το θεώρημα της Βεντάλιας (Θεώρημα 1.5), υπάρχουν $x_1, x_2, ..., x_n \in [T]$ ώστε η οικογένεια $\{u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n}\}$ να είναι φράχτης του T. Είναι σαφές ότι η πεπερασμένη υποοικογένεια $\{G_{x_1}, G_{x_2}, ..., G_{x_n}\}$ της $\mathcal{G}$ είναι κάλυμμα του $[T]$. Άρα το K είναι συμπαγές.

■

2.2.14 Πρόταση: Έστω $K \subseteq \mathcal{N}$ και συνεχής συνάρτηση $f : K \to \mathcal{N}$.
Ισχύουν τα εξής.
(1). Αν το K είναι συμπαγές, τότε η εικόνα $f[K]$ είναι συμπαγές σύνολο.
(2) Αν το K είναι συμπαγές και τέλειο, και η f είναι $1-1$ τότε η εικόνα $f[K]$ είναι συμπαγής και τέλεια.

Απόδειξη:
Τα συμπεράσματα προκύπτουν αμέσως από τους τοπολογικούς ορισμούς. Δίνουμε κατωτέρω απ' ευθείας αποδείξεις χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες παραστάσεις ως σώματα δένδρων. Από το λήμα 3.2.12, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathcal{N}$.

(1). Έστω $K = [T]$, όπου $T \subseteq \mathbb{N}^*$ είναι δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης, και $\tau : \mathbb{N}^* \to T$ υπολογίζει την f σύμφωνα με την (1)του θεωρήματος 2.11. Θεωρούμε το δένδρο όλων των αρχικών τμημάτων της εικόνας $f[K]$, δηλαδή το δένδρο

$$S = T^{f[K]} = \{v : (\exists x \in K)[v \sqsubseteq f(x)]\}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και $f[K] = [S]$.
Έστω $v \in S$. Θέτουμε

$$B =_{o\rho} \{u \in T : v|\tau(u) \quad \vee \quad v \not\sqsubseteq \tau(u)\}$$

και υποθέτουμε ότι $x \in [T]$. Αν $v|f(x)$, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε $v|\tau(\overline{x}(n))$, άρα $\overline{x}(n) \in B$, και αν $v \sqsubseteq f(x)$, τότε για κάποιο n, $v \not\sqsubseteq \tau(\overline{x}(n))$, οπότε πάλι $\overline{x}(n) \in B$. Συνεπώς το B είναι φράχτης του T, και από το θεώρημα της Βεντάλιας υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο

$$B_0 = \{u_0, u_1, ..., u_n\} \subseteq B$$

που είναι επίσης φράχτης του T. Έπεται ότι για κάθε $x \in K$ με $v \sqsubseteq f(x)$, υπάρχει κάποιο u_i τέτοιο ώστε $v \underset{\neq}{\sqsubset} \tau(u_i) \sqsubseteq f(x)$, και επομένως κάθε παιδί του v στο

S είναι αρχικό τμήμα κάποιου $\tau(u_i)$ και επειδή το πλήθος των u_i είναι πεπερασμένο, το v έχει πεπερασμένα παιδιά στο S. Άρα το δένδρο S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης.

Προφανώς $f[K] \subseteq [S]$. Για να δείξουμε ότι $[S] \subseteq f[K]$, δεχόμαστε, προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει $y \in [S] \backslash f[K]$ και θέτουμε

$$B =_{o\rho} \{u \in T : \tau(u)|y\}.$$

Το B είναι φράχτης του T επειδή για κάθε $x \in [T]$ ο μόνος τρόπος που είναι δυνατόν να αληθεύει η $\tau(\overline{x}(n)) \sqsubseteq y$ για όλους τους κόμβους $\tau(\overline{x}(n))$ είναι να ισχύει $f(x) = y$. Από το θεώρημα της Βεντάλιας, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο

$$B_0 = \{u_0, u_1, ..., u_n\} \subseteq B,$$

που είναι επίσης φράχτης του T. Θέτουμε

$$\kappa = max\{lh(\tau(u_i)) : i \leq n\} + 1.$$

Εφ' όσον $y \in [S]$, υπάρχει $x \in [T]$ ώστε $\overline{y}(\kappa) \sqsubseteq f(x)$. Καθώς B_0 είναι φράχτης του $[T]$, $u_i \sqsubseteq x$ για κάποιο i, άρα $\tau(u_i) \sqsubseteq f(x)$ επειδή η τ υπολογίζει την f, επομένως $\tau(u_i)$ και $\overline{y}(\kappa)$ είναι αρχικά τμήματα του $f(x)$. Συνεπώς οι κόμβοι $\tau(u_i)$ και $\overline{y}(\kappa)$ είναι συγκρίσιμοι, και καθώς ο κόμβος $\tau(u_i)$ έχει μικρότερο μήκος από το μήκος του $\overline{y}(\kappa)$ πρέπει να ισχύει $\tau(u_i) \sqsubseteq y$, που αντιβαίνει στον ορισμό του B.

(2). Με τον συμβολισμό του (1) και την επιπρόσθετη υπόθεση ότι το K είναι τέλειο και η $f|K$ είναι $1-1$, έστω $v \in S$. Τότε $v \sqsubseteq \tau(u)$ όπου το $u \in T$. Εφ' όσον το T είναι διασπώμενο υπάρχουν διαφορετικά σημεία

$$x_1, x_2 \in K \cap \mathcal{N}_u$$

και καθώς η τ υπολογίζει την f,

$$\tau(u) \sqsubseteq f(x_1), \tau(u) \sqsubseteq f(x_2), \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως $f(x_1) \neq f(x_2)$ επειδή η $f|K$ είναι $1-1$, άρα υπάρχουν ασυμβίβαστα , $u_1 \sqsubseteq$

$f(x_1), u_2 \sqsubseteq f(x_2)$ που επεκτείνουν την $\tau(u)$, από την (1), και αυτά διασπούν την $\tau(u)$ και το αρχικό της τμήμα v στο S.

■

2.2.15 Θεώρημα: Τέλειου Συνόλου ($Perfect\ Set\ Theorem$, $Souslin$, 1916)
Κάθε μη αριθμήσιμο αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ έχει μη κενό τέλειο υποσύνολο.

Απόδειξη:
Έστω $A \subseteq \mathcal{N}$ μη αριθμήσιμο αναλυτικό σύνολο. Τότε υπάρχει συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ συνεχής, ώστε $A = f[\mathcal{N}]$. Έστω επίσης $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ συνάρτηση που υπολογίζει την f. Θέτουμε

$$T =_{o\rho} \{u \in \mathbb{N}^* : |f[\mathcal{N}_u]| >_c \aleph_0\}.$$

Το T είναι μη κενό γιατί $\emptyset \in T$, και προφανώς είναι δένδρο.

2.2.16 Λήμμα: Το δένδρο T είναι τ-διασπώμενο, δηλαδή για κάθε $u \in T$ υπάρχουν $u_1, u_2 \in T$ τέτοια ώστε

$$u \sqsubseteq u_1, \quad u \sqsubseteq u_2, \quad \tau(u_1)|\tau(u_2).$$

Απόδειξη:
Για κάθε $u \in T$ και κάθε $x \in \mathcal{N}_u$,

$$f[\mathcal{N}_u] = \{f(x)\} \cup \bigcup \{f[\mathcal{N}_{u'}] : \tau(u')|f(x)\}, \quad \textbf{(1)}$$

επειδή $f(y) \neq f(x) \Rightarrow \tau(u') \sqsubseteq f(y)$ για κάποιο u' τέτοιο ώστε η $\tau(u')$ να είναι ασυμβίβαστη με το $f(x)$. Αν το Λήμμα δεν αληθεύει γι' αυτό το u, τότε:

$$u \sqsubseteq u' \in T \Rightarrow \tau(u') \sqsubseteq f(x),$$

και επομένως κάθε εικόνα $f[\mathcal{N}_{u'}]$ με $\tau(u')|f(x)$ στην (1) αναφέρεται σε κάποιο $u' \notin T$ και επομένως είναι αριθμήσιμη, και υπάρχουν αριθμήσιμες επιλογές για το u'. Άρα η εικόνα $F[\mathcal{N}_u]$ είναι ένωση ενός μονοσυνόλου και μιας αριθμήσιμης οικογένειας, αριθμησίμων συνόλων, επομένως είναι αριθμήσιμη, που αντιβαίνει στην υπόθεση.

■

Όπως και στο Θεώρημα 2.2.9 επιλέγουμε συναρτήσεις

$$l : T \to T, \quad r : T \to T,$$

που φανερώνουν ότι το δένδρο T είναι τ-διασπώμενο, δηλαδή για κάθε $u \in T$,

$$u \sqsubseteq l(u), \quad u \sqsubseteq r(u), \quad \tau(l(u))|\tau(r(u)).$$

Ορίζουμε επαγωγικά μία συνάρτηση

$$\sigma : \{0,1\}^* \to T$$

με τις ιδιότητες

$$\sigma(\emptyset) = \emptyset, \quad \sigma(u* < 0 >) = l(\sigma(u)), \quad \sigma(u* < 1 >) = r(\sigma(u)).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η σ είναι μονοτονική,

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow \sigma(u) \sqsubseteq \sigma(v).$$

Η κρίσημη ιδιότητα της σ είναι ότι αντιστοιχίζει σε ασυμβίβαστες δυαδικές λέξεις, τ-ασυμβίβαστες λέξεις,

$$u|v \Rightarrow \tau(\sigma(u))|\tau(\sigma(v)). \qquad \textbf{(2)}$$

Πράγματι, έστω i ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με την ιδιότητα $u(i) \neq v(i)$. Τότε υπάρχει δυαδική λέξη w ώστε $w\times < 0 >= u$, $w\times < 1 >= v$ (ή αντιστρόφως), συνεπώς $\sigma(w\times < 0 >)$ και $\sigma(w\times < 1 >)$ είναι τ-ασυμβίβαστες, και από τη μονοτονικότητα της σ, οι $\sigma(u)$ και $\sigma(v)$ είναι επεκτάσεις των $\sigma(w\times < 0 >)$ και $\sigma(w\times < 1 >)$ αντιστοίχως, επομένως καθώς η τ είναι μονοτονική, οι $\sigma(u)$ και $\sigma(v)$ είναι τ-ασυμβίβαστες. Επίσης η σ υπολογίζει μία συνέχη συνάρτηση $g : C \to \mathcal{N}$,

$$g(x) = sup\{\sigma(u) : u \sqsubseteq x\}$$

και προφανώς

$$g[C] \subseteq [T]. \qquad \textbf{(3)}$$

Θεωρούμε τώρα την σύνθεση $h = f \circ g$ που υπολογίζεται από την σύνθεση των τ και σ,

$$h(x) = sup\{\tau(\sigma(u)) : u \sqsubseteq x\}.$$

Η h είναι συνεχής και επίσης είναι $1-1$ από την (2), άρα η εικόνα $h[C] = f \circ g[C]$ είναι συμπαγής και τέλεια από την Πρόταση $2.2.14$ και είναι υποσύνολο του $f[T] \subseteq A$, από την (3).

■

2.2.17 Λήμμα: Κάθε συνεχής εικόνα αναλυτικού υποσυνόλου του $\mathcal{N}$ είναι αναλυτικό σύνολο.

Απόδειξη:
Έστω $A \subseteq \mathcal{N}$ αναλυτικό σύνολο και $B \subseteq \mathcal{N}$ ώστε να υπάρχει $g : A \to \mathcal{N}$ συνεχής συνάρτηση με $B = g[A]$. Καθώς το A είναι αναλυτικό σύνολο, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ με $A = f[\mathcal{N}]$. Τότε η συνάρτηση $g \circ f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχής και $B = g \circ f[\mathcal{N}]$, επομένως το B είναι αναλυτικό σύνολο.

■

2.2.18 Λήμμα: Αν $f, g : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε το σύνολο

$$E = \{x \in \mathcal{N} : f(x) = g(x)\}$$

είναι κλειστό.

Απόδειξη:
Επειδή δύο σημεία είναι διαφορετικά αν και μόνο αν έχουν ασυμβίβαστες προσεγγίσεις,

$$x \in \mathcal{N} \setminus E$$

$$\Leftrightarrow f(x) \neq g(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists u, v)\big[f(x) \in \mathcal{N}_u \ \& \ g(x) \in \mathcal{N}_v \ \& \ u|v\big],$$

και άρα

$$\mathcal{N} \setminus E = \bigcup \{f^{-1}[\mathcal{N}_u] \cap g^{-1}[\mathcal{N}_v] | u|v\},$$

δηλαδή το $\mathcal{N}-E$ είναι ένωση ανοικτών συνόλων και επομένως είναι ανοικτό σύνολο, οπότε τό συμπλήρωμα του, E, είναι κλειστό.

■

2.2.19 Θεώρημα: Αριθμήσιμες ενώσεις αναλυτικών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ είναι αναλυτικά σύνολα.

Απόδειξη:

Έστω $A_n \subseteq \mathcal{N}, n = 0, 1, 2, ...$ αναλυτικά σύνολα. Τότε υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_n : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, $n = 0, 1, 2, ...$ ώστε $A_n = f_n[\mathcal{N}]$ για κάθε n. Θεωρούμε πρώτα την συνάρτηση $tail(z), z \in \mathcal{N}$ έτσι ώστε

$$tail(z) = \Big(i \mapsto z(i+1)\Big) = \Big(z(1), z(2), ...\Big)$$

Η συνάρτηση $tail(z)$ αφαιρείαπό κάθε σημείο z το πρώτο ψηφίο. Ακολούθως ορίζουμε την συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ με τον τύπο

$$f(z) = f_{z(0)}(tail(z)).$$

Παρατητούμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. Πράγματι, έστω $z \in \mathcal{N}$ και $\mathcal{N}_v$ μια περιοχή του $f(z)$. Τότε $f_{z(0)}(tail(z)) = f(z) \in \mathcal{N}_v$, επομένως $\mathcal{N}_v$ είναι περιοχή του $f_{z(0)}(tail(z))$ και εφ' όσον η συνάρτηση $f_{z(0)}$ είναι συνεχής στο $tail(z)$, υπάρχει περιοχή $\mathcal{N}_u$ του $tail(z)$ ώστε

$$x \in \mathcal{N}_u \Rightarrow f_{z(0)}(x) \in \mathcal{N}_v.$$

Θέτουμε $w =< z(0) > *u$, τότε $z \in \mathcal{N}_w$ και

$$y \in \mathcal{N}_w \Rightarrow y(0) = z(0) \quad \& \quad tail(y) \in \mathcal{N}_u,$$

οπότε $f_{z(0)}(tail(y)) \in \mathcal{N}_v$ δηλαδή $f(y) \in \mathcal{N}_v$. Άρα η f είναι συνεχής. Επίσης,

$$y \in \bigcup_n f_n[\mathcal{N}]$$

$$\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})[y = f_n(x)]$$

$$\Leftrightarrow (\exists z \in \mathcal{N})[y = f_{z(0)}(tail(z))] \quad \mu\epsilon \quad z(0) = n, \quad tail(z) = x$$

$$\Leftrightarrow (\exists z \in \mathcal{N})[y = f(z)],$$

άρα $\bigcup_n A_n = f[\mathcal{N}]$ και επομένως η ένωση είναι αναλυτικό σύνολο.

■

2.2.20 Λήμμα: Έστω συνάρτηση $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Τότε η συνάρτηση

$$\phi^* : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : \phi^*(z) = z \circ \phi$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη:

Έστω $z \in \mathcal{N}$ και $\mathcal{N}_v$ περιοχή του $\phi^*(z)$, δηλαδή $v \sqsubseteq z \circ \phi$. Θέτουμε $m = max\{\phi(i) | i < lh(v)\}$, και έστω $u \in \mathbb{N}^*$ με $lh(u) = m$ και $u(j) = z(j)$ για $j < m$. Είναι σαφές ότι $z \in \mathcal{N}_u$, και $x \in \mathcal{N}_u \Rightarrow \phi^*(x) \in \mathcal{N}_v$.

Άρα η ϕ^* είναι συνεχής.

2.2.21 Θεώρημα: Αριθμήσιμες τομές αναλυτικών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ είναι αναλυτικά σύνολα.

Απόδειξη:

Έστω $A_n \subseteq \mathcal{N}$ αναλυτικά σύνολα. Τότε υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_n : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ ώστε $A_n = f_n[\mathcal{N}]$ για κάθε n. Επιλέγουμε μία αντιστοιχία $\rho : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}$ και για κάθε n θέτουμε

$$\rho'_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \rho'_n(i) = \rho(n, i).$$

Από το λήμμα 3.2.19 έπεται ότι για κάθε n, η συνάρτηση

$$\rho_n : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : \rho_n(z) = z \circ \rho'_n$$

είναι συνεχής. Ακόμη είναι

$$\rho_n(z)(i) = z(\rho'_n(i)) = z(\rho(n, i)).$$

Επίσης, αν $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άπειρη ακολουθία στο $\mathcal{N}$ υπάρχει $z \in \mathcal{N}$ ώστε

$$\rho_n(z) = x_n.$$

Πράγματι, θέτουμε $x' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x'(n,i) = x_n(i)$, και $z = x' \circ \rho^{-1}$. Τότε $z(\rho(n,i)) = x'(n,i) = x_n(i)$, δηλαδή $\rho_n(z) = x_n$. Χρησιμοποιώντας το Αξίωμα Επιλογής έχουμε τώρα

$$y \in \bigcap_n A_n$$

$$\Leftrightarrow (\forall n)(\exists x)[y = f_n(x)]$$

$$\Leftrightarrow (\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})(\forall n)[y = f_n(x)], \qquad \textbf{(1)}$$

$$\Leftrightarrow (\exists z \in \mathcal{N})(\forall n)[y = f_n(\rho_n(z))]$$

$$\Leftrightarrow (\exists z \in \mathcal{N})(\forall n)[f_n(\rho_n(z)) = f_0(\rho_0(z)) \quad \& \quad y = f_0(\rho_0(z))].$$

Από το Λήμμα 3.2.17 έπεται ότι για κάθε n, το σύνολο

$$B_n = \{z \in \mathcal{N} : f_n(\rho_n(z)) = f_0(\rho_0(z))\}$$

είναι κλειστό, άρα και η τομή

$$B = \bigcap_n B_n$$

είναι κλειστό σύνολο. Όμως από την (1) προκύπτει ότι

$$\bigcap_n A_n = f_0(\rho_0[B]),$$

που σημαίνει ότι η τομή των A_n είναι συνεχής εικόνα κλειστού υποσυνόλου του $\mathcal{N}$ και επομένως είναι αναλυτικό σύνολο.

■

2.2.22 Ορισμός: Η οικογένεια $\mathcal{B}(X)$ των $Borel$ υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X που περιέχει τα ανοικτά σύνολα. Έτσι $\mathcal{B}(\mathcal{N})$ είναι η σ-άλγεβρα των $Borel$ υποσυνόλων του χώρου $\mathcal{N}$.

2.2.23 Πόρισμα: Κάθε $Borel$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι αναλυτικό ($Souslin$). Επομένως, κάθε μη αριθμήσιμο $Borel$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$ περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύολο ($Alexandroff$, $Hausdorff$).

Απόδειξη:

Έστω:

$$c\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathcal{N} | \mathcal{N} \setminus A \in \mathcal{A}\}$$

η οικογένεια των συμπληρωμάτων ων αναλυτικών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$. Η οικογένεια $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap c\mathcal{A}$ των υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ που είναι αναλυτικά και έχουν αναλυτικό συμπλήρωμα είναι σ-άλγεβρα.
Πράγματι, έστω $A_n \in B, n = 0, 1, 2, \ldots$.
Τότε εφ' όσον $A_n \in \mathcal{A}$ και $A_n^c \in \mathcal{A}$ για κάθε n, από θεωρήματα έπεται ότι $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ και $(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c \in \mathcal{A}$, επομένως $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A} \cap c\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Επίσης, κάθε ανοικτό σύνολο είναι αριθμήσιμη ένωση περιοχών. Επομένως, καθώς κάθε κλειστό σύνολο είναι αναλυτικό, η οικογένεια $\mathcal{B}$ περιέχει τα ανοικτά σύνολα. Άρα η $\mathcal{B}$ περιέχει την οικογένεια των $Borel$ υποσυνόλων του $\mathcal{N}$, δηλαδή

$$\mathcal{B}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{A} \cap c\mathcal{A}.$$

■

Από το επόμενο θεώρημα έπεται επιπλέον ότι

$$\mathcal{B}(\mathcal{N}) = \mathcal{A} \cap c\mathcal{A}.$$

Έστω $A, B \subseteq \mathcal{N}$. Ένα υποσύνολο C του $\mathcal{N}$ διαχωρίζει το σύνολο A από το B, αν $A \subseteq C$, $C \cap B = \emptyset$.
Προφανώς αν το C διαχωρίζει το A από το B, τότε $A \cap B = \emptyset$.

2.2.24 Λήμμα: (1). Έστω $\{A_i\}$ και $\{B_j\}$ δύο ακολουθίες υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ και για όλα τα i και τα j το $C_{ij} \subseteq \mathcal{N}$ διαχωρίζει το A_i από το B_j. Τότε το σύνολο

$$C = \bigcup_i \bigcap_j C_{ij}$$

διαχωρίζει το $\bigcup_i A_i$ από το $\bigcup_j B_j$, δηλαδή

$$\bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_i \bigcap_j C_{ij}, \quad (\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}) \cap (\bigcup_j B_j) = \emptyset.$$

(2). Αν $\{A_i\}$ και $\{B_j\}$ είναι δύο ακολουθίες υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ και δεν υπάρχει

$Borel$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$ που να διαχωρίζει το $A = \bigcup_i A_i$ από το $B = \bigcup_j B_j$, τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί i_0 και j_0 ώστε κανένα υποσύνολο $Borel$ του $\mathcal{N}$ να μην διαχωρίζει το A_{i_0} από το B_{j_0}.

Απόδειξη:

(1).Για κάθε i, j ισχύει από την υπόθεση, $A_i \subseteq C_{ij}$, και άρα $A_i \subseteq \bigcap_j C_{ij}$.
Επομένως,

$$A = \bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_i (\bigcap_j C_{ij}),$$

που είναι η πρώτη σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε.
Για την δεύτερη, παρατηρούμε ότι για κάθε i, j, ισχύει $B_j \cap C_{ij} = \emptyset$, που σημαίνει ότι

$$B_j \subseteq C_{ij}^c$$

και άρα

$$B = \bigcup_j B_j \subseteq \bigcup_j C_{ij}^c,$$

επομένως,

$$B \subseteq \bigcap_i \bigcup_j C_{ij}^c.$$

Είναι όμως:

$$\bigcap_i \bigcup_j C_{ij}^c = (\bigcup_i \bigcap_j C_{ij})^c$$

οπότε

$$B \cap (\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}) = \emptyset.$$

■

(2). Προς απαγωγη σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι για κάθε i, j υπάρχει κάποιο σύνολο $Borel$ C_{ij} που διαχωρίζει το A_i από το B_j, τότε το σύνολο $\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}$ είναι $Borel$ και από το (1) του λήμματος, διαχωρίζει το σύνολο A από το σύνολο B, που είναι άτοπο.

■

2.2.25 Θεώρημα: Το Θεώρημα διαχωρισμου ($The\ separation\ Theorem$, $Lusin$) Έστω $A, B \subseteq \mathcal{N}$ αναλυτικά σύνολα με $A \cap B = \emptyset$. Τότε υπάρχει ένα $Borel$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$ το οποίο διαχωρίζει το A από το B.

Απόδειξη:

Έστω $f, g : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $A = f[\mathcal{N}]$ και $B = g[\mathcal{N}]$. Από το Θεώρημα υπάρχουν μονοτονικές συναρτήσεις λέξεων $\sigma, \tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ που υπολογίζουν τις f και g αντιστοίχως, δηλαδή

$$f(x) = lim_n \sigma(\overline{x}(n)), \quad g(y) = lim_n \tau(\overline{y}(n)), \quad (x, y \in \mathcal{N}).$$

Για όλες τις λέξεις u και v θέτουμε

$$A_u = f[\mathcal{N}_u] = \{f(x) | u \sqsubseteq x\}, \quad B_v = g[\mathcal{N}_v] = \{g(y) | v \sqsubseteq y\}.$$

Από το γεγονός ότι οι σ και τ υπολογίζουν τις f και g αντιστοίχως έπεται ότι

$$A_u \subseteq \mathcal{N}_{\sigma(u)}, \quad B_v \subseteq \mathcal{N}_{\tau(v)}. \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης έχουμε $A_\emptyset = A$, $B_\emptyset = B$ και για όλα τα u, v ,

$$A_u = \bigcup_i A_{u \times <i>}, \quad B_v = \bigcup_j B_{v \times <j>}. \qquad \textbf{(2)}$$

Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο ότι δεν υπάρχει σύνολο $Borel$ που να διαχωρίζει το $A = A_\emptyset$ από το $B = B_\emptyset$. Από το λήμμα 3.2.24 συνάγουμε ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί i_0, j_0 τέτοιοι ώστε κανένα σύνολο $Borel$ να μην διαχωρίζει το $A_{<i_0>}$ από το $B_{<j_0>}$. Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας επαναλληπτικά το λήμμα 3.2.24 και την (2) και ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες $x = (i_0, i_1, ...)$ και $y = (j_0, j_1, ...) \in \mathcal{N}$, τέτοιες ώστε για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ κανένα σύνολο $Borel$ να μην διαχωρίζει το $A_{\overline{x}(n)}$ από το $B_{\overline{y}(n)}$. Επομένως, από την σχέση (1) έπεται ότι για κάθε n,

$$\mathcal{N}_{\sigma(\overline{x}(n))} \cap \mathcal{N}_{\tau(\overline{y}(n))} \neq \emptyset, \qquad \textbf{(3)}$$

Όμως η (3) συνεπάγεται ότι για κάθε n οι λέξεις $\sigma(\overline{x}(n))$ και $\tau(\overline{y}(n))$ είναι συγκρίσιμες, άρα

$$f(x) = lim_n \sigma(\overline{x}(n)) = lim_n \tau(\overline{y}(n)) = g(y),$$

και επομένως $f(x) = g(y) \in A \cap B$, που είναι άτοπο, καθώς $A \cap B = \emptyset$.

■

2.2.26 Θεώρημα: Το Θεώρημα του $Souslin$
Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ είναι $Borel$ αν και μάνο αν το A και το A^c είναι αναλυτικά.

Απόδειξη:
Από το πόρισμα 3.2.23 έχουμε ότι αν το A είναι $Borel$, τότε το A και το A^c είναι αναλυτικά. Για το αντίστροφο εφαρμόζουμε το θεώρημα Διαχωρισμού στα A και A^c.

■

Κεφάλαιο 3

Πολωνικοί χώροι

3.1 Εισαγωγή και Παραδείγματα

3.1.1 Ορισμός: Ένας πλήρως μετρικοποιήσιμος και διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος καλείται Πολωνικός χώρος.

Εύκολα αποδεικνύονται οι ακόλουθες προτάσεις.

3.1.2 Πρόταση: Έστω X Πολωνικός χώρος. Τότε ισχύουν τα εξής.
(i). Κάθε κλειστό υποσύνολο του X, με τη σχετική τοπολογία, είναι χώρος Πολωνικός.
(ii). Το καρτεσιανό γινόμενο μιας ακολουθίας Πολωνικών χώρων, με την τοπολογία γινόμενο, είναι χώρος Πολωνικός.

3.1.3 Πρόταση: Κάθε συμπαγής μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος είναι Πολωνικός.

Ο χώρος του $Cantor$ είναι ο χώρος $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο, όπου στο $\{0,1\}$ θεωρούμε τη διακτιτή τοπολογία. Είναι σαφές ότι ο χώρος του $Cantor$ είναι Πολωνικός χώρος.

Ο χώρος του $Baire$, $\mathcal{N}$, που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 2, είναι τυπικό παράδειγμα Πολωνικού χώρου. Ο χώρος $\mathcal{N}$ είναι πλήρως μετρικποιήσιμος από την εξής πολύ απλή μετρική: Για $(x_n),(y_n) \in \mathcal{N}$,

$$\rho\big((x_n),(y_n)\big) = \frac{1}{m+1} \ \alpha\nu \ \ (x_n) \neq (y_n),$$

όπου $m = min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$, και $\rho\big((x_n),(y_n)\big) = 0$ αν $(x_n) = (y_n)$.

Ο κύβος του $Hilbert$ είναι ο χώρος $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο, όπου $\mathbb{I}$ είναι το διάστημα $[0,1]$. Ο χώρος $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός και όπως θα δούμε είναι καθολικός για την κλάση των Πολωνικών χώρων. Επίσης ο χώρος $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,ε την τοπολογία γινόμενο είναι Πολωνικός χώρος.

3.2 Ταλάντωση και Συνέχεια Συναρτήσεων

3.2.1 Ορισμός: Έστω X τοπολογικός χώρος, (Y,d) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και συνάρτηση $f : A \to Y$. Για κάθε $x \in \overline{A}$, η ταλάντωση $(oscillation)$ της f στο x είναι:

$$osc_f(x) = inf\Big\{diam f[A \cap U] : \ U \text{ ανοικτή περιοχή του } x\Big\}.$$

3.2.2 Λήμμα: Έστω X τοπολογικός χώρος, (Y,d) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και συνάρτηση $f : A \to Y$.
(i). Για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο

$$A_\epsilon = \big\{x \in \overline{A} : osc_f(x) < \epsilon\big\}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\overline{A}$, με τη σχετική τοπολογία.

(ii). Το σύνολο

$$\big\{x \in \overline{A} : osc_f(x) = 0\big\}$$

είναι G_δ-υποσύνολο του χώρου $\overline{A}$.

Απόδειξη:
(i). Έστω $x \in A_\epsilon$, τότε υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτό με $x \in U$ ώστε $diam f[A \cap U] < \epsilon$. Για $t \in \overline{A} \cap U$ έχουμε $osc_f(x) \leq diam f[A \cap U] < \epsilon$. Επομένως, $t \in A_\epsilon$, και άρα $\overline{A} \cap U \subseteq A_\epsilon$, οπότε το σύνολο A_ϵ είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\overline{A}$.

(ii). Έχουμε

$$\big\{x \in \overline{A} : osc_f(x) = 0\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}},$$

και εφ' όσον κάθε σύνολο $A_{\frac{1}{n}}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\overline{A}$, το σύνολο $\big\{x \in \overline{A} : osc_f(x) = 0\big\}$ είναι G_δ-υποσύνολο του χώρου $\overline{A}$.

■

3.2.3 Πρόταση: Έστω X τοπολογικός χώρος, (Y, d) μετρικός χώρος και συνάρτηση $f : X \to Y$. Τότε ισχύουν τα εξής.
(i). Για κάθε $x \in X$, η f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν $osc_f(x) = 0$.
(ii). Το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι G_δ-σύνολο.

Απόδειξη:
(i). Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x \in X$, και έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτή περιοχή του x ώστε

$$t \in U \Rightarrow d\big(f(t), f(x)\big) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Επομένως για κάθε $t, t' \in U$ έχουμε

$$d\big(f(t), f(t')\big) \leq d\big(f(t), f(x)\big) + d\big(f(x), f(t')\big) < \epsilon,$$

και άρα $diamf[U] \leq \epsilon$. Συνεπώς $osc_f(x) \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $osc_f(x) = 0$.

Αντίστροφα, έστω $x \in X$ ώστε $osc_f(x) = 0$, και $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτή περιοχή του x ώστε $diamf[U] < \epsilon$, και επομένως

$$t \in U \Rightarrow d\big(f(t), f(x)\big) \leq diamf[U] < \epsilon,$$

άρα η f είναι συνεχής στο x.

(ii). Έπεται αμέσως από το (i) και την πρόταση 3.2.2(ii).

■

Χρησιμοποιώντας τα ανωτέρω θα αποδείξουμε το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα επέκτασης συναρτήσεων.

3.2.4 Θεώρημα: $(Kuratowski)$
Έστω X ένας μετρικός χώρος, Y ένας πλήρως μετρικοποιήσιμος χώρος, $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχουν ένα G_δ-υποσύνολο του X, G, με $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$ και μια συνεχής επέκταση $g : G \to Y$ της συνάρτησης f.

Απόδειξη:
Έστω d συμβιβαστή μετρική στο X και d' συμβιβαστή μετρική στο Y ώστε ο μετρικός

χώρος (Y, d') να είναι πλήρης. Θέτουμε

$$G = \{x \in \overline{A} : osc_f(x) = 0\}$$

Από την Πρόταση 3.2.2(ii) έπεται ότι το G είναι G_δ-σύνολο στο χώρο $\overline{A}$, και εφ' όσον το $\overline{A}$ είναι G_δ-υποσύνολο του χώρου X έπεται ότι το G είναι G_δ-σύνολο στο χώρο X. Επίσης, από τη συνέχεια της f στο A έπεται ότι $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$. (Πρόταση 3.2.3$(i)$)
Έστω $x \in G$, τότε $x \in \overline{A}$. Επιλέγουμε ακολουθία $(x_n)_n$ σημείων του A ώστε $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\big(f(x_n)\big)_n$ είναι $Cauchy$: Έστω $\epsilon > 0$, τότε καθώς $x \in G$, υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτή περιοχή του x ώστε $diam f[A \cap U] < \epsilon$. Εφ' όσον $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in A \cap U.$$

Επομένως για κάθε $m, n \geq n_0$ έχουμε

$$f(x_m), f(x_n) \in f[A \cap U],$$

και άρα $d'\big(f(x_m), f(x_n)\big) < \epsilon$. Συνεπώς η ακολουθία $\big(f(x_n)\big)_n$ είναι $Cauchy$. Εφ' όσον ο μετρικός χώρος (Y, d') είναι πλήρης η ακολουθία $\big(f(x_n)\big)_n$ συγκλίνει. Θέτουμε

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g : G \to Y$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή η τιμή $g(x)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας $(x_n)_n$ στο A που συγκλίνει στο x.
Για να δούμε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο G, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in G$, $osc_g(x) = 0$. Έστω $x \in G$ και $U \subseteq X$ ανοικτή περιοχή του x, τότε

$$g[G \cap U] \subseteq \overline{f[A \cap U]}.$$

Πράγματι, αν $t \in G \cap U$ και $(t_n)_n$ είναι ακολουθία στο A ώστε $t_n \to t$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $t_n \in A \cap U$, οπότε $f(t_n) \in f[A \cap U]$, και άρα $g(t) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) \in \overline{f[A \cap U]}$. Συνεπώς,

$$diam\Big(g[G \cap U]\Big) \leq diam\Big(\overline{f[A \cap U]}\Big) = diam f[A \cap U],$$

και επομένως $osc_g(x) = 0$.

■

3.3 Υπόχωροι Πλήρων Μετρικών Χώρων

3.3.1 Λήμμα: Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $U \subseteq X$ ανοικτό σύνολο. Τότε υπάρχει μετρική ρ στο U ισοδύναμη με την μετρική $d|_U$ ώστε ο μετρικός χώρος (U, ρ) να είναι πλήρης.

Απόδειξη:
Θέτουμε $A = X \backslash U$ και θεωρούμε την συνάρτηση f_A. Εφ' όσον το σύνολο U είναι ανοικτό το A είναι κλειστό, επομένως για κάθε $x \in U$, $f_A(x) > 0$. Στό σύνολο U ορίζουμε την μετρική:

$$\rho(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{f_A(x)} - \frac{1}{f_A(y)} \right|, \quad x, y \in U.$$

Οι μετρικές ρ και $d|_U$ είναι ισοδύναμες:
Έστω ακολουθία $(x_n)_n$ στο U και $x \in U$. Είναι σαφές ότι αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$, τότε $x_n \xrightarrow{d} x$. Για το αντίστροφο, έστω $x_n \xrightarrow{d} x$ τότε από τη συνέχεια της f_A έπεται $f_A(x_n) \longrightarrow f_A(x)$, και εφ' όσον $x \in U$, $f_A(x) > 0$, συνεπώς $\frac{1}{f_A(x_n)} \longrightarrow \frac{1}{f_A(x)}$. Είναι τώρα σαφές ότι $\rho(x_n, x) \longrightarrow 0$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Για να δείξουμε ότι ο μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης, έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στο U, η οποία είναι *Cauchy* ως προς τη μετρική ρ. Τότε προφανώς η $(x_n)_n$ είναι *Cauchy* ως προς τη μετρική d, και εφ' όσον ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{d} x$. Από τη συνέχεια της συνάρτησης f_A, $f_A(x_n) \xrightarrow{d} f_A(x)$. Η υπόθεση ότι η ακολουθία $(x_n)_n$ είναι *Cauchy* ως προς τη μετρική ρ συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\left(\frac{1}{f_A(x_n)}\right)_n$ είναι φραγμένη, και άρα $f(x) \geq 0$, που σημαίνει ότι $x \in U$. Επίσης $\frac{1}{f_A(x_n)} \longrightarrow \frac{1}{f_A(x)}$. Έπεται ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

■

3.3.2 Θεώρημα: ($S.\ Mazurkiewicz$)
Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα.
(i). Το Y είναι G_δ-σύνολο.
(ii). Ο υπόχωρός Y είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος.

Απόδειξη:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω ακολουθία $(U_n)_n$ ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε

$$Y = \bigcap_n U_n.$$

Από το λήμμα 3.3.1 για κάθε n, υπάρχει μετρική ρ_n στο U_n ισοδύναμη με την μετρική $d|_U$ ώστε ο μετρικός χώρος (U_n, ρ_n) να είναι πλήρης. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε n, $\rho_n \leq 1$. Ορίζουμε την εξής μετρική στο Y:

$$\rho(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \rho_n(x, y), \quad x, y \in Y$$

Η μετρική ρ είναι ισοδύναμη με την μετρική $d|_Y$: Έστω $(y_m)_m$ ακολουθία στο Y και $y \in Y$. Υποθέτουμε ότι $y_m \xrightarrow{d} y$, τότε εφ' όσον κάθε ρ_n είναι ισοδύναμη με την $d|_Y$, $y_m \xrightarrow{\rho_n} y$ για κάθε n.
Έστω $\epsilon > 0$, επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \rho_n(y_m, y) < \frac{\epsilon}{2}, \quad (m \in \mathbb{N})$$

Καθώς $y_m \xrightarrow{\rho_i} y$ για $i = 1, ..., n_0$, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$m \geq m_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{2^{n+1}} \rho_n(y_m, y) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$m \geq m_0 \Rightarrow \rho(y_m, y) < \epsilon,$$

και άρα $y_m \xrightarrow{\rho} y$. Αντίστροφα, έστω $y_m \xrightarrow{\rho} y$, τότε είναι σαφές ότι για κάθε n, $y_m \xrightarrow{\rho_n} y$, και άρα $y_m \xrightarrow{d} y$.

Μένει να δείξουμε ότι ο μετρικός χώρος (Y, ρ) είναι πλήρης. Έστω $(y_m)_m$ ακολουθία $Cauchy$ στον μετρικό χώρο (Y, ρ). Τότε για κάθε n, η ακολουθία $(y_m)_m$ ειναι $Cauchy$ στον πλήρη μετρικό χώρο (U_n, ρ_n), επομένως υπάρχει $y^n \in U_n$ ώστε $y_m \xrightarrow{\rho_n} y^n$ και άρα $y_m \xrightarrow{d} y^n$, επομένως υπάρχει $y \in X$ ώστε για κάθε n, $y^n = y$. Συνεπώς $y \in U_n$ για κάθε n, δηλαδή $y \in Y$. Επίσης $y_n \xrightarrow{d} y$, οπότε $y_n \xrightarrow{\rho} y$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Έστω d' συμβιβαστή μετρική στο Y ώστε ο μετρικός χώρος (Y, d') να είναι πλήρης. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : Y \to (Y, d') : \phi(y) = y$. Εφ' όσον η μετρική d' είναι ισοδύναμη με την μετρική $d|_Y$, η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής. Από το θεώρημα 3.2.4 έπεται ότι υπάρχουν G_δ-υποσύνολο G του X με $Y \subseteq G \subseteq \overline{Y}$ και μια συνεχής επέκταση $g : G \to Y$ της συνάρτησης ϕ. Για $y \in G$ υπάρχει ακολουθία $(y_n)_n$ στο Y ώστε $y_n \longrightarrow y$ και άρα $g(y_n) \longrightarrow g(y) \in Y$. Όμως για κάθε n, $g(y_n) = \phi(y_n) = y_n$, και από την μοναδικότητα του ορίου της (y_n) έπεται ότι $g(y) = y$, και άρα $y \in Y$. Συνεπώς $Y = G$.

■

3.4 Μια Καθολική Ιδιότητα του Κύβου του Hilbert

3.4.1 Θεώρημα: Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του κύβου του $Hilbert$, $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$. Ιδιαιτέρως κάθε Πολωνικός χώρος είναι ομοιομορφικός με έναν G_δ-υπόχωρο του κύβου του $Hilbert$.

Απόδειξη:
Έστω (X, d) ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος με $d \leq 1$. Έστω επίσης $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα πυκνό υποσύνολο του X. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f : X \to \mathbb{I}^{\mathbb{N}} : f(x) = \big(d(x, x_n)\big).$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής: Έστω ακολουθία $(x^m)_m$ στο X και $x \in X$ ώστε $x^m \longrightarrow x$. Τότε από την σχέση

$$|d(x^m, x_n) - d(x, x_n)| \leq d(x^m, x)$$

έπεται ότι για κάθε n, $d(x^m, x_n) \longrightarrow d(x, x_n)$, και άρα η f είναι συνεχής.
Η f είναι $1-1$: Έστω $x, x' \in X$ ώστε για κάθε n, $d(x, x_n) = d(x', x_n)$. Αν για κάποιο n, $x = x_n$, τότε προφανώς $x' = x_n$ και επομένως $x = x'$. Υποθέτουμε ότι $x \neq x_n$ για κάθε n. Τότε υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(n_\kappa)_\kappa$ ώστε $x_{n_\kappa} \longrightarrow x$, και άρα $d(x_{n_\kappa}, x) \longrightarrow 0$.

Έχουμε $d(x_{n_\kappa}, x') = d(x_{n_\kappa}, x)$ για κάθε κ, άρα $d(x_{n_\kappa}, x') \longrightarrow 0$. Από την μοναδικότητα του ορίου της ακολουθίας $(x_{n_\kappa})_\kappa$ έπεται ότι $x = x'$. Συνεπώς η f είναι $1-1$.

Μένει να δείξουμε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής. Έστω ακολουθία $(x^m)_m$ στο X και $x \in X$ ώστε $f(x^m) \longrightarrow f(x)$. Τότε για κάθε n,

$$d(x^m, x_n) \longrightarrow d(x, x_n)$$

Έστω $\epsilon > 0$. Από την πυκνότητα του συνόλου $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, x) <$.
Εφ' όσον $d(x^m, x_n) \longrightarrow d(x, x_n)$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$m \geq N \Rightarrow d(x^m, x_n) < \epsilon$$

Για $m \geq N$ εχουμε

$$d(x^m, x) \leq d(x^m, x_n) + d(x_n, x) < 2\epsilon.$$

Άρα $x^m \longrightarrow x$. Συνεπώς η f^{-1} είναι συνεχής.
Έτσι ο χώρος X είναι ομοιομορφικός με τον υπόχωρο $f[X]$ του $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$.

Αν ο X είναι χώρος Πολωνικός, τότε και ο $f[X]$ είναι Πολωνικός, επομένως από το θεώρημα 3.3.2 ο $f[X]$ είναι G_δ-υπόχωρος του Πολωνικού χώρου $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$.

■

3.4.2 Θεώρημα: Κάθε Πολωνικός χώρος είναι ομοιομορφικός με έναν κλειστό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη:
Από το θεώρημα 3.4.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο δεδομένος Πολωνικός χώρος

είναι G_δ-υπόχωρος G του $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$. Έστω $(U_n)_n$ ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ ώστε

$$G = \bigcap_n U_n.$$

Έστω επίσης για κάθε n, $An = \mathbb{I}^{\mathbb{N}} \setminus U_n$. Θεωρούμε μια συμβιβαστή μετρική d στο $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ και τις αντίστοιχες συναρτήσεις f_{A_n}. Ορίζουμε την συνάρτηση $g : G \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $g = (g_n)_n$ με

$$g_{2n+1}(x) = x_n$$

$$g_{2n}(x) = \frac{1}{f_{A_n}(x)}.$$

Η συνάρτηση g είναι $1-1$: Έστω $x = (x_n)$, $x' = (x'_n)$ σημεία του G με $g(x) = g(x')$, τότε από τον ορισμό της g έχουμε για κάθε n, $x_n = x_{n'}$, και άρα $x = x'$. Η g είναι συνεχής: Έστω ακολουθία $(x^m)_m$ στο G και $x \in G$, ώστε $x^m \longrightarrow x$ ότι για κάθε n, $x^m_n \longrightarrow x_n$, και άρα $g_{2n+1}(x^m) \longrightarrow g_{2n+1}(x)$. Επίσης, από την συνέχεια των συναρτήσεων f_{A_n}, για κάθε n, $f_{A_n}(x^m) \longrightarrow f_{A_n}(x)$.
Καθώς $x \in G$, $x \neq A_n$ για κάθε n, και συνεπώς $f_{A_n}(x) > 0$, οπότε

$$\frac{1}{f_{A_n}(x^m)} \longrightarrow \frac{1}{f_{A_n}(x)}.$$

Άρα $g(x^m) \longrightarrow g(x)$. Είναι προφανές ότι η συνάρτηση g^{-1} είναι συνεχής.

Μένει να δείξουμε ότι το σύνολο $g[G]$ είναι κλειστό.
Έστω ακολουθία $(x^m)_m$ στο G και $y = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ώστε $g(x^m) \longrightarrow y$.
Τότε για κάθε n, $g_{2n+1}(x^m) \longrightarrow y(2n+1)$. Έχουμε $g_{2n+1}(x^m) = x^m_n \in \mathbb{I}$, άρα $y(an+1) \in \mathbb{I}$.
Θέτουμε για κάθε n, $x_n = y(2n+1)$, τότε $x \in \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ και $x^m \longrightarrow x$. Επομένως, καθώς κάθε f_{A_n} είναι συνεχής, $f_{A_n}(x^m) \longrightarrow f_{A_n}(x)$. Επίσης, η ακολουθία

$$\left(\frac{1}{f_{A_n}(x^m)}\right)_m$$

συγκλίνει στο $y(2n)$ για κάθε n, και άρα είναι φραγμένη. Επομένως $f_{A_n}(x) > 0$ για κάθε n και συνεπώς $x \neq A_n$, οπότε $x \in U_n$ για κάθε n, δηλαδή $x \in G$. Είναι τώρα σαφές ότι $y = g(x)$. Άρα το σύνολο $g[G]$ είναι κλειστό.

■

3.5 Συνεχείς Εικόνες του χώρου Cantor

Παρατηρούμε πρώτα ότι ο χωρος C του $Cantor$ είναι ομοιομορφικός με το χώρο $C^{\mathbb{N}}$. Πράγματι, έχουμε $C^{\mathbb{N}} = \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$H : \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : H(f)(m,n) = f(m)(n).$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση H είναι ομοιομορφισμός. Επιπλέον, καθώς $\mathbb{N}\times\mathbb{N} =_c \mathbb{N}$, ο χώρος $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικός με τον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Άρα ο χώρος C είναι ομοιομορφικός με τον χώρο $C^{\mathbb{N}}$.

3.5.1 Λήμμα: Ο χώρος $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής εικόνα του χώρου $Cantor$, C.

Απόδειξη:
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : C \longrightarrow \mathbb{I} : f\big((x_n)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{2^{n+1}}.$$

Από την δυαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών του διαστήματος $\mathbb{I}$, έπεται ότι η f είναι επί. Επίσης, η f είναι συνεχής: Έστω $x = (x_n) \in C$ και $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^N} < \epsilon$, και θέτουμε $u =< x_0, ..., x_N >$, $U = \{t \in C : u \sqsubseteq t\}$. Το σύνολο U είναι ανοικτή περιοχή του x και

$$t = (t_n) \in U \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|t_n - x_n|}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Άρα η f είναι συνεχής. Επομένως, η συνάρτηση

$$F : C^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{I}^{\mathbb{N}} : F\big((x_n)\big) = \big(f(x_n)\big)$$

είναι συνεχής και επί. Εφ' όσον ο χώρος $C^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικός με τον C έπεται ότι υπάρχει συνάρτηση $g : C \longrightarrow \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ συνεχής και επί.

■

3.5.2 Θεώρημα: Κάθε μη κενός συμπαγής μετρικός χώρος είναι συνεχής εικόνα του χώρου $Cantor$, C.

Απόδειξη:
Έστω K μη κενός συμπαγής μετρικός χώρος. Από το θεώρημα 3.4.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι K είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$. Το λήμμα 3.5.1 εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας συνεχούς και επί συνάρτησης $g : C \longrightarrow \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$. Η αντίστροφη εικόνα $g^{-1}(K)$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του C. Όπως είναι γνωστό (βλ.) υπάρχει συνεχής προβολή $\phi : C \longrightarrow g^{-1}(K)$. Η σύνθεση $h \circ \phi : C \longrightarrow K$ είναι συνεχής και επί.

■

3.6 Μια Εφαρμογή στη Θεωρία Χώρων Banach

Έστω K συμπαγής τοπολογικός χώρος. Με $C(K)$ συμβολίζουμε το συνολο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων επί του K. Το $C(K)$ με πράξεις ορισμένες κατά σημείο είναι διανυσματικός χώρος. Η $supremum - norm$ ή $norm$ της ομοιόμορφης σύγκλισης στο $C(K)$ είναι :

$$\|f\| = sup\Big\{\, |f(x)| : x \in K \Big\}, \quad f \in C(K).$$

Ο $C(K)$ με αυτήν την $norm$ είναι χώρος $Banach$.

Έστω X χώρος $Banach$ και X^* ο δυϊκός του X. Με $B_1(X^*)$ συμβολίζουμε την κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^*, και σε όλα τα επόμενα αυτής της παραγράφου θεωρούμε την $B_1(X^*)$ ως τοπολογικό χώρο εφοδιασμένο με την ασθενή* τοπολογία.

3.6.1 Θεώρημα: (Αλάογλου-Bourbaki) Gia k'aje q'wro $Banach$ o q'wroc $B_1(X^*)$ e'inai sumpag'hc.

3.6.2 Πρόταση: Έστω X χώρος $Banach$. Τότε ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν υπόχωρο του $C\big(B_1(X^*)\big)$.

Απόδειξη:
Η απεικόνιση

$$T : X \longrightarrow C\big(B_1(X^*)\big) : T(x)(x^*) = x^*(x)$$

είναι γραμμική ισομετρία.

■

3.6.3 Θεώρημα: $(Banach)$
Έστω X διαχωρίσιμος χώρος $Banach$. Τότε ο χώρος $B_1(X^*)$ είναι μετρικοποιήσιμος.

Απόδειξη:
Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα πυκνό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του X. Τότε η μετρική

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left|x^*(x_n) - y^*(x_n)\right|, \quad x^*, y^* \in B_1(X^*)$$

είναι συμβιβαστή με την ασθενή* τοπολογία του $B_1(X^*)$.

■

3.6.4 Θεώρημα: Έστω X διαχωρίσιμος χώρος $Banach$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $h : [0,1] \longrightarrow B_1(X^*)$ συνεχής επι.

Απόδειξη:
Από τα θεωρήματα 3.6.1 και 3.6.3, ο χώρος $B_1(X^*)$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος. Επομένως, από το θεώρημα 3.5.2 υπάρχει συνάρτηση $f : C \longrightarrow B_1(X^*)$ συνεχής επί. Θεωρούμε τον χώρο $Cantor$, C, ως υπόχωρο του $[0,1]$. Το σύνολο $[0,1]\setminus$ είναι ένωση μιας αριθμήσιμης οικογένειας $\mathcal{D}$ ανοικτών διαστημάτων ξένων ανά δύο. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h : [0,1] \longrightarrow B_1(X^*) : h(x) = \begin{cases} f(x) & \alpha\nu \quad x \in C \\ \\ (1-t)f(\alpha) + tf(\beta) & \alpha\nu \quad x = (1-t)\alpha + t\beta, \ \ t \in [0,1], \end{cases}$$

όπου $\alpha < \beta$ και $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$. Είναι σαφές ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής επέκταση της f, και άρα είναι επί.

■

Μπορούμε τώρα να δείξουμε την επόμενη καθολική ιδιότητα του διαχωρίσιμου χώρου $Banach$.

3.6.5 Θεώρημα: Κάθε διαχωρίσιμος χώρος $Banach$, X, είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν κλειστό υπόχωρο του $C\big([0,1]\big)$.

Απόδειξη:
Από την πρόταση 3.6.2 αρκεί να δείξουμε ότι ο $C\big(B_1(X^*)\big)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν υπόχωρο του $C\big([0,1]\big)$. Το θεώρημα 3.6.4 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας συνάρτησης $h : [0,1] \longrightarrow B_1(X^*)$ η οποία είναι συνεχής και επί. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$T : C\big(B_1(X^*)\big) \longrightarrow C\big([0,1]\big) : T(f) = f \circ h.$$

Είναι σαφές ότι η T είναι γραμμική, και καθώς η h είναι επί, η T είναι ισομετρία.

■

3.7 Εμφύτευση του χώρου Cantor σε Τέλειους Πολωνικούς Χώρους

Ένας τοπολογικός χώρος X είναι τέλειος αν κάθε σημείο $x \in X$ είναι σημείο συσσωραύσεως του X. Αν P είναι υποσυνολο ενός τοπολογικού χώρου X, το P είναι τέλειο στον X αν είναι κλειστό και κάθε σημείο x του P είναι σημείο συσσωρεύσεως του P. Είναι προφανές ότι ο χώρος C του $Cantor$ είναι τέλειος. Κατωτέρω θα δείξουμε ότι ο χώρος C είναι ο ελάχιστος μη κενός, τέλειος, Πολωνικός χώρος, υπό την έννοια ότι κάθε μη κενός, τέλειος, Πολωνικός χώρος περιέχει ένα αντίγραφο του C.

3.7.1 Ορισμός: Ένα <u>σχήμα $Cantor$</u> επί ενός συνόλου X είναι μία οικογένεια $(A_s)_{s\in\{0,1\}^*}$ υποσυνόλων του X τετοια ώστε:
(i). $A_{s*<0>} \cap A_{s*<1>} = \emptyset$, για $s \in \{0,1\}^*$
(ii). $A_{s*<i>} \subseteq A_s$ για $s \in \{0,1\}^*$ και $i \in \{0,1\}$.

3.7.2 Θεώρημα: Έστω X μη κενός, τέλειος, Πολωνικός χώρος. Τότε υπάρχει εμφύτευση του C στον X.

Απόδειξη:
Έστω d μια συμβιβαστή μετρική στο X ώστε ο μετρικός χώρος (X,d) να είναι πλήρης. Θα ορίσουμε ένα σχήμα $Cantor$, $(U_s)_{s\in\{0,1\}^*}$ στο X με τις εξής ιδιότητες:
(i). U_s είναι ανοικτό, μη κενό σύνολο.

(ii). $diam(U_s) \leq 2^{-lh(s)}$

(iii). $\overline{U}_{s*<i>} \subseteq U_s$, για $s \in \{0,1\}^*$ και $i \in \{0,1\}$.

Ορίζουμε τα U_s με επαγωγή στο μήκος της s. Επιλέγουμε ένα υποσύνολο $U_\emptyset$ του X που έχει τις ιδιότητες (i) και (ii) για $s = \emptyset$. Υποθέτουμε ότι για $s \in \{0,1\}^*$ έχει ορισθεί το ανοικτό μη κενό σύνολο $U_s \subseteq X$. Εφ' όσον κάθε σημείο του X είναι σημείο συσσωρεύσεως υπάρχουν $y_1, y_2 \in U$ με $y_1 \neq y_2$. Επιλέγουμε $U_{s*<0>}$, $U_{s*<1>}$ ανοικτές μπάλεςμε κέντρα y_1, y_2 και ακτίνες $r_1, r_2 > 0$ αντιστοίχως, με $r_1, r_2 \leq \frac{1}{4}2^{-lh(s)}$ ώστε οι αντίστοιχες κλειστές μπάλες να περιέχονται στο U_s και να είναι ξένες.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in C$, $\bigcap_n U_{x|n} = \bigcap_n \overline{U}_{x|n}$ και η τομή $\bigcap_n \overline{U}_{x|n}$ είναι ένα μονοσύνολο (Θεώρημα). Θέτουμε για κάθε $x \in C$,

$$f(x) = \text{το μοναδικό σημείο της τομής } \bigcap_n U_{x|n}.$$

Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση $f : C \longrightarrow X$. Αποδεικνύεται, όπως στο θεώρημα ότι η f είναι $1-1$. Επίσης, η f είναι συνεχής: Έστω $x \in C$ και $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $s \in \{0,1\}^*$ ώστε $s \sqsubseteq x$, και $2^{-lh(s)} < \epsilon$, τότε $f(x) \in U_s$. Θέτουμε $V = \{t \in C : s \sqsubseteq t\}$. Το V είναι ανοικτή περιοχή του x, και για κάθε $t \in V$, $f(t) \in U_s$, επομένως $d(f(t), f(x)) \leq diam(U_s) < \epsilon$, άρα η f είναι συνεχής.
Εφ' όσον ο C είναι συμπαγής χώρος η f είναι εμφύτευση.

■

3.7.3 Πόρισμα: Αν X είναι μη κενός, τέλειος, Πολωνικός χώρος, τότε $card(X) = 2^{\aleph_0}$.

Απόδειξη:
Εφ' όσον ο X είναι διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος χώρος, $card(X) \leq 2^{\aleph_0}$. Επίσης, από το θεώρημα 3.7.1, $card(X) \geq card(C) = 2^{\aleph_0}$. Επομένως, από το Θεώρημα $Schröder - Bernstein$, $card(X) = 2^{\aleph_0}$.

■

3.8 Διάσπαση και Δείκτης Cantor-Bendixson Πολωνικού Χώρου

Ένα σημείο x σ' ένα τοπολογικό χώρο X είναι σημείο συμπυκνώσεως του X αν κάθε ανοικτή περιοχή του x είναι ένα σύνολο υπεραριθμήσιμο. Για κάθε Πολωνικο χώρο θέτουμε

$$Y^* = \{y \in Y : y \text{ είναι σημείο συμπυκνώσεως του } Y\}.$$

3.8.1 Λήμμα: Αν Y είναι τέλειος Πολωνικός χώρος τότε

$$Y^* = Y.$$

Απόδειξη:
Έστω $y \in Y$ και U ανοικτή περιοχή του y. Τότε ο χώρος U είναι μη κενός τέλειος Πολωνικός χώρος, επομένως από το Πόρισμα 3.7.2, ο U έχει πληθάριθμο $2^{\aleph_0}$, και άρα το y είναι σημείο συμπηκνώσεως του Y. Επομένως, $Y^* = Y$.

■

3.8.2 Θεώρημα: $(Cantor - Bendixson)$ Έστω X ένας Πολωνικός χώρος. Τότε ο X διασπάται με μοναδικό τρόπο ως εξής:

$$X = P \cup C, \quad P \cap C = \emptyset,$$

όπου το P είναι τέλειο σύνολο και το C είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη:
Έστω X^* το σύνολο των σημείων συμπυκνώσεως του X. Θέτουμε $P = X^*$ και $C = X \backslash P$. Εφ' όσον ο X είναι διαχωρίσιμος και μετρικοποιήσιμος, είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Έστω $\{U_n : h \in \mathbb{N}\}$ μια βάση για την τοπολογία του X, τότε το C είναι η ένωση όλων των U_n με U_n αριθμήσιμο, επομένως το C είναι αριθμήσιμο. Προφανώς το P είναι κλειστό σύνολο. Για να δείξουμε ότι το P είναι τέλειο σύνολο, έστω $x \in P$ και U μια ανοικτή περιοχή του x. Τότε το U είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο, και εφ' όσον το C είναι αριθμήσιμο, το $U \cap P$ είναι υπεραριθμήσιμο, και άρα το x είναι σημείο συσσωρεύσεως του P.

Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα, έστω $X = P_1 \cup C_1$ μια άλλη διάσπαση του X ως ανωτέρω. Τότε ο υπόχωρος P_1 είναι τέλειος Πολωνικός, επομένως, από το Λήμμα 3.8.1, $P_1^* = P_1$ και άρα $P_1 \subseteq P$. Επίσης αν $x \in C_1$, τότε εφ' όσον το C_1 είναι αριθμήσιμο, ανοικτό σύνολο, $x \in C$, συνεπώς $C_1 \subseteq C$. Έπεται ότι $P = P_1$ και $C = C_1$.

■

3.8.3 Πόρισμα: Κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος περιέχει έναν υπόχωρο ισομορφικό με το χώρο του $Cantor$, C, και ιδιαιτέρος έχει πληθαριθμο $2^{\aleph_0}$.

3.8.4 Ορισμός: Για κάθε Πολωνικό χώρο X, αν $X = P \cup C$, όπου P είναι τέλειο σύνολο, C είναι αριθμήσιμο σύνολο και $P \cap C = \emptyset$, καλούμε το P <u>τέλειο πυρήνα</u> του X.

Κατωτέρω θα δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος $Cantor - Bendixson$ με την οποία η κατασκευή του πυρήνα οδηγεί στον δείκτη $Cantor - Bendixson$ και δίνει πιο πολλές πληροφορίες για τη δομή του χώρου. Πρώτα θα δούμε ένα γενικό αποτέλεσμα για μονότονες υπερπεπερασμένες ακολουθίες κλειστών ή ανοικτών υποσυνόλων ενός δεύτερου αριθμήσιμου χώρου. Αυτό ο αποτέλεσμα θα το χρειαστούμε στη συνέχεια.

3.8.5 Θεώρημα: Έστω X ένας δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, και $(F_\alpha)_{\alpha<\beta}$ μια γνήσια φθίνουσα υπερπεπερασμένη ακολουθία κειστων υποσυνόλων του X. Τότε ο διατακτικός αριθμός β είναι αριθμήσιμος.

Απόδειξη:
Έστω $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια βάση για την τοπολογία του X. Σε κάθε κλειστό υποσύνολο F του X αντιστοιχίζουμε το υποσύνολο του $\mathbb{N}$:

$$N(F) = \{n \in \mathbb{N} : U_n \cap F \neq \emptyset\}.$$

Καθώς το $X \backslash F$ είναι ανοικτό, έχουμε:

$$X \backslash F = \bigcup \{U_n : n \notin N(F)\}.$$

Επομένως η απεικόνιση $F \mapsto N(F$ είναι $1-1$. Επίσης, αν F, G είναι κλειστά υποσύνολα του X και $F \subseteq G$, τότε προφανώς $N(F) \subseteq N(G)$. Συνεπώς θέτοντας

$$N_\alpha = N(F_\alpha) \text{ για } \alpha < \beta,$$

τότε η υπερπεπερασμένη ακολουθία $(N_\alpha)_{\alpha<\beta}$ είναι γνήσια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, και άρα ο διατακτικός αριθμός β είναι αριθμήσιμος.

■

3.8.6 Ορισμός: Για κάθε τοπολογικό χώρο X, έστω

$$X' = \{x \in X : x \text{ είναι σημειο συσσωρεύσεως του } X\}$$

Καλούμε το X', $Cantor - Bendixson$ παράγωγο του X. Προφανώς το X' είναι κλειστό σύνολο.

Χρησιμοποιώντας υπερπεπερασμένη αναδρομή ορίζουμε την επαναλαμβανόμενη $Cantor - Bendixson$ παράγωγο ως ακολούθως:
$X^0 = X$
$X^{\alpha+1} = (X^\alpha)'$
$X^\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} X^\alpha$ αν ο λ είναι οριακός.
Η υπερπεπερασμένη ακολουθία $(X^\alpha)_{\alpha\in ORD}$ είναι φθίνουσα και κάθε X^α είναι κλειστό σύνολο.

3.8.7 Θεώρημα: Έστω X Πολωνικός χώρος. Τότε για κάποιο αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό α_0, $X^\alpha = X^{\alpha_0}$ για κάθε $\alpha \geq \alpha_0$ και X^{α_0} είναι ο τέλειος πυρίνας του X.

Απόδειξη:
Από το Θεώρημα 3.8.5 έπεται ότι υπάρχει αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός α_0 ώστε $X^\alpha = X^{\alpha_0}$ για κάθε $\alpha \geq \alpha_0$. Θέτουμε $P = X^{\alpha_0}$, τότε $P' = (X^{\alpha_0})' = X^{\alpha_0} = P$ επομένως το σύνολο P είναι τέλειο. Επίσης, θέτουμε

$$C = \bigcup_{\alpha<\alpha_0}(X^\alpha \backslash X^{\alpha+1})$$

Τότε έχουμε

$$X = P \cup C,$$
$$P \cap C = \emptyset$$

Μένει να δείξουμε ότι το C είναι αριθμήσιμο:
Κάθε $X^\alpha \backslash X^{\alpha+1}$ είναι αριθμήσιμο, διότι αν ήταν υπεραριθμήσιμο θα υπήρχε $x \in X^\alpha \backslash X^{\alpha+1}$ σημείο συμπήκνωσης του $X^\alpha \backslash X^{\alpha+1}$ και άρα το x θα ήταν σημείο συσσωρεύσεως του X^α χωρίς να ανήκει στο $X^{\alpha+1}$, που είναι άτοπο. Εφ' όσον κάθε $X^\alpha \backslash X^{\alpha+1}$ είναι αριθμήσιμο και η αριθμήσιμη ένωση

$$C = \bigcup_{\alpha<\alpha_0}(X^\alpha \backslash X^{\alpha+1})$$

είναι σύνολο αριθμήσιμο. Άρα πράγματι, το σύνολο $P = X^\alpha$ είναι ο τέλειος πυρήνας του X.

■

3.8.8 Ορισμός: Για κάθε Πολωνικό χώρο X, ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός α_0 με την ιδιότητα $X^\alpha = X^{\alpha_0}$ για κάθε $\alpha \geq \alpha_0$ καλείται δείκτης $Cantor - Bendixson$ του X και συμβολίζεται με $|X|_{CB}$.

Κεφάλαιο 4

Χώροι Μηδενικής Διάστασης

Ένας τοπολογικός χώρος X είναι μηδενικής διάστασης αν είναι $Hausdorff$ και έχει μια βάση για την τοπολογία του, που αποτελείται από ανοικτά-κλειστά σύνολα. Τυπικά παραδείγματα χώρων μηδενικής διάστασης είναι ο χώρος C του $Cantor$ και ο χώρος $\mathcal{N}$ του $Baire$.

4.1 Ένας Τοπολογικός Χαρακτηρισμός του χώρου Cantor

Ο χώρος του $Cantor$, C, έχει τις εξής προφανείς ιδιότητες: είναι μηδενικής διάστασης, συμπαγής, μετρικοποιήσιμος και τέλειος. Θα δείξουμε ότι αυτές οι ιδιότητες χαρακτηρίζουν το χώρο C.

4.1.1 Θεώρημα: Έστω X τοπολογικός χώρος. Αν ο X είναι μηδενικής διάστασης, συμπαγής, μετρικοποιήσιμος και τέλειος, τότε ο X είναι ομοιομορφικός με τον χώρο του $Cantor$, C.

Απόδειξη:
Έστω d μια μετρική στο X συμβιβαστή με την τοπολογία του. Θα κατασκευάσουμε ένα σχήμα $Cantor$ στο X, $(C_s)_{s\in\{0,1\}^*}$ με τις εξής ιδιότητες:
(i). $C_\emptyset = X$,
(ii). C_s είναι ανοικτό-κλειστό, μη κενό,
(iii). $C_s = C_{s*<0>} \cup C_{s*<1>}$,
(iv). $\lim_{n\to\infty} diam(C_{x|_n}) = 0$.

Εφ' όσον ο X είναι συμπαγής, μηδενικής διάστασης, υπάρχει ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα $(U_i)_{i=1}^n$ του X, ώστε κάθε U_i είναι ανοικτό-κλειστό σύνολο διαμέτρου $< \frac{1}{2}$. Θέτουμε:

$$W_1 = U_1 \text{ και για κάθε } i \text{ με } 2 \leq i \leq n,\ W_i = U_i \setminus \bigcup_{j<i} U_j$$

Τα σύνολα W_i είναι προφανώς ανοικτά-κλειστά, $X = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ και $W_i \cap W_j = \emptyset$ για $i \neq j$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε $W_i \neq \emptyset$. Προφανώς για κάθε i, $diamW_i < \frac{1}{2}$. Ακολούθως θέτουμε:

$$\begin{array}{ll} & C_{\emptyset} = X \\ C_{<0>} = W_2 \cup ... \cup W_n & , C_{<1>} = W_1, \\ C_{<0,0>} = W_3 \cup ... \cup W_n & , C_{<0,1>} = W_2, \\ \vdots & \\ C_{<\underbrace{0,0,...,0}_{n-1}>} = W_n & , C_{<0,n>} = W_n, \end{array}$$

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για κάθε W_i, $i = 1, ..., n$, και κατασκευάζουμε ανοικτά-κλειστά, μη κενά υποσύνολα του W_i διαμέτρου $< \frac{1}{3}$, και συνεχίζουμε επαγωγικά. Το σχήμα $Cantor$ που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

Για κάθε $x \in C$, η τομή $\bigcap_n C_{x|n}$ είναι ένα μονοσύνολο. Ορίζουμε την συνάρτηση $f : C \longrightarrow X$ ως εξής: για κάθε $x \in C$

$$f(x) = \text{το μοναδικό σημείο της τομής } \bigcap_n C_{x|n}.$$

Όπως στο Θεώρημα 3.7.2, αποδεικνύεται ότι η f είναι συνεχής και $1-1$. Επιπλέον από τις ιδιότητες (i) και (ii) έπεται ότι η f είναι επί: αν $y \in X$ τότε υπάρχει ακριβώς ένα $x \in C$ ώστε $y \in \bigcap_n C_{x|n}$ και επομένως $f(x) = y$. Εφ' όσον ο X είναι συμπαγής η f είναι ομοιομορφισμός.

■

4.2 Ένας Τοπολογικός Χαρακτηρισμός του Χώρου Baire

4.2.1 Ορισμός: Σχήμα $Lusin$ επί ενός συνόλου X είναι μια οικογένεια $(A_s)_{s\in\mathbb{N}^*}$ από υποσύνολα του X τέτοια ώστε
(i). $A_{s*<i>} \cap A_{s*<j>} = \emptyset$ για $s \in \mathbb{N}^*$, $i, j \in \mathbb{N}$ με $i \neq j$,
(ii). $A_{s*<i>} \subseteq A_s$ για $s \in \mathbb{N}^*$, $i \in \mathbb{N}$.

Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος και $(A_s)_{s\in\mathbb{N}^*}$ είναι ένα σχήμα $Lusin$ επί του X, το $(A_s)_{s\in\mathbb{N}^*}$ έχει μηδενική διάμετρο αν $\lim_{n\to\infty} diam(A_{x|n}) = 0$ για κάθε $n \in \mathcal{N}$.
Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε

$$D = \{x \in \mathcal{N} : \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{x|_n} \neq \emptyset\},$$

και ορίζουμε την συνάρτηση

$$f : D \longrightarrow X \text{ με } \{f(x)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{x|_n}.$$

Η f καλείται <u>συνοδεύουσα</u> συνάρτηση του σχήματος.

4.2.2 Θεώρημα: Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $(A_s)_{s\in\mathbb{N}^*}$ ένα σχήμα $Lusin$ επί του X, το οποίο είναι μηδενικής διαμέτρου. Έστω επίσης $f : D \longrightarrow X$ η συνοδεύουσα συνάρτηση του σχήματος. Ισχύουν τα ακόλουθα.
(i). Η f είναι $1-1$ και συνεχής.
(ii). Αν ο μετρικός χώρος (X,d) είναι πλήρης και κάθε σύνολο A_s είναι κλειστό, τότε το D είναι επίσης κλειστό σύνολο.
(iii). Αν κάθε A_s είναι ανοικτό, τότε η f είναι εμφύτευση.

Απόδειξη:
(i). Η f είναι $1-1$: Έστω $x, x' \in D$ με $x = x'$, τότε υπάρχουν $u \in \mathbb{N}^*$, $i, j \in \mathbb{N}$ με $i \neq j$ ώστε

$$u* < i > \sqsubseteq \qquad , u* < j > \sqsubseteq x',$$

επομένως $A_{u*<i>} \cap A_{u*<j>} = \emptyset$ και $f(x) \in A_{u*<i>}$, $f(x') \in A_{u*<j>}$, άρα $f(x) \neq f(x')$. Η f είναι συνεχής: Έστω $x \in D$ και $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $diam(A_{x|_N}) < \epsilon$. Θέτουμε $s = x|_N$ και θεωρούμε την περιοχή του x, $\mathcal{N}_s = \{z \in \mathcal{N} : s \sqsubseteq z\}$. Για κάθε $z \in \mathcal{N}_s$, $z|_N = x|_N$, και άρα $A_{z|_N} = A_{x|_N}$, επομένως για κάθε $z \in \mathcal{N}_s \cap D$, $f(z) \in A_{x|_N}$ και επίσης $f(x) \in A_{x|_N}$, άρα $d\big(f(z), f(x)\big) \leq diam(A_{x|_N}) < \epsilon$.
Έτσι έχουμε:

$$z \in \mathcal{N}_s \cap D \Rightarrow d\big(f(z), f(x)\big) < \epsilon.$$

Άρα η f είναι συνεχής.

(ii). Υποθέτουμε ότι ο μετρικός χώρος (X,d) είναι πλήρης, κάθε σύνολο A_s είναι κλειστό και θα δείξουμε ότι το σύνολο D είναι κλειστό. Έστω ακολουθία $(x_n)_n$ σημείων του D και $x \in \mathcal{N}$ ώστε $x_n \longrightarrow x$. Δείχνουμε πρώτα ότι η ακολουθία $\Big(f(x_n)\Big)_n$ είναι $Cauchy$: Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $diam\big(A_{x|_N}\big) < \epsilon$. Εφ' όσον $x_n \longrightarrow x$ υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n \geq M \;\; \Rightarrow \;\; x_n|_N = x|_N.$$

Συνεπώς για κάθε $m, n \geq M$, $f(x_m), f(x_n) \in A_{x|_N}$, και άρα $d\Big(f(x_m), f(x_n)\Big) \leq diam\big(A_{x|_N}\big) < \epsilon$. Ώστε

$$m, n \geq M \Rightarrow d\Big(f(x_m), f(x_n)\Big) < \epsilon.$$

Άρα, η ακολουθία $\big(f(x_n)\big)$ είναι $Cauchy$. Εφ' όσον ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης, υπάρχει $y \in X$ ώστε $f(x_n) \longrightarrow y$. Καθώς $x_n \longrightarrow x$, για $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_0 = n_0(m) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_{n|_m} = x|_m.$$

Επομένως, για κάθε $n \geq n_0$, $f(x_n) \in A_{x|_m}$, και επειδή το σύνολο $A_{x|_m}$ είναι κλειστό έπεται ότι $y \in A_{x|_m}$. Ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $y \in A_{x|_m}$, και άρα $y \in \bigcap_m A_{x|_m}$, οπότε $\bigcap_m A_{x|_m} \neq \emptyset$, που σημαίνει ότι $x \in D$. Άρα, το σύνολο D είναι κλειστό.

(iii). Υποθέτουμε ότι κάθε σύνολο A_s είναι ανοικτό και παρατηρούμε ότι για κάθε $s \in \mathbb{N}^*$,

$$f[\mathcal{N}_s \cap D] = A_s \cap f[D].$$

Άρα για κάθε $s \in \mathbb{N}^*$ το σύνολο $f[\mathcal{N}_s \cap D]$ είναι ανοικτό στο χώρο $f[D]$, δηλαδή η συνάρτηση $f : D \longrightarrow f[D]$ είναι ανοικτή. Συνεπώς η $f^{-1} : f[D] \longrightarrow D$ είναι συνεχής. Άρα η f είναι εμφύτευση.

■

4.2.3 Λήμμα: Υποθέτουμε ότι (X, d) είναι διαχωρίσιμος πλήρης μετρικός χώρος μηδενικής διάστασης ώστε αν $K \subseteq X$ είναι συμπαγές σύνολο, τότε $K^o = \emptyset$. Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό-κλειστό, μη κενό σύνολο και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ από μη κενά ανοικτά-κλειστά υποσύνολα του U ώστε

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \text{ και } diam(U_i) < \epsilon.$$

Απόδειξη:

Το σύνολο U δεν είναι συμπαγές γιατί έχει μη κενό εσωτερικό, $U^o = U \neq \emptyset$, δηλαδή ο μετρικός χώρος (U, d) δεν είναι συμπαγής, είναι όμως πλήρης εφ' όσον το U είναι κλειστό υποσύνολο του X. Επομένως ο μετρικός χώρος (U, d) δεν είναι ολικά φραγμένος. Αν για κάθε $0 < \epsilon' < \epsilon$ υπήρχαν πεπερασμένα το πλήθος σύνολα $V_1, ..., V_n \subseteq U$ ανοικτά-κλειστά ώστε (1) $U = V_1 \cup ... \cup V_n$ και (2) $diam(V_j) < \epsilon'$

για $j = 1, ..., n$, τότε φυσικά ο μετρικός χώρος (U, d) θα ήταν ολικά φραγμένος. Συνεπώς υπάρχει $0 < \epsilon' < \epsilon$ ώστε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά-κλειστά υποσύνολα του U με τις ιδιότητες (1) και (2) δεν υπάρχουν.

Εφ' όσον ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Επομένως υπάρχει μαι ακολουθία $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά-κλειστά υποσύνολα του U ώστε

$$U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i \text{ και } diam(V_i) < \epsilon' \text{ για κάθε } i.$$

Θέτουμε
$U_0 = V_0$ και
$U_i = V_i \setminus \bigcup_{j<i} V_j$ για $i \geq 1$.
Τότε κάθε U_i είναι ανοικτό-κλειστό,
$U = \bigcup_i U_i$
$U_i \cap U_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και
$diam(U_i) < \epsilon'$ για κάθε i.

Από την επιλογή του ϵ' έχουμε ότι άπειρα U_i είναι μη κενά, και μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα U_i είναι μη κενά.

■

4.2.4 Θεώρημα: $(Alexandrov - Urysohn)$
Αν X είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος, τέτοιος ώστε κάθε συμπαγές υποσύνολο του έχει κενό εσωτερικό, τότε ο X είναι ομοιομορφικός με τον χώρο $\mathcal{N}$ του $Baire$.

Απόδειξη:
Έστω d πλήρης μετρική στο X συμβιβαστή με την τοπολογία του X. Με βάση το λήμμα 4.2.3 εύκολα κατασκευάζεται ένα σχήμα $Lusin$ $(C_s)_{s\in\mathbb{N}^*}$ επί του X με τις ακόλουθες ιδιότητες.
(i). $C_\emptyset = X$ και $C_s \neq \emptyset$ για κάθε $s \in \mathbb{N}^*$
(ii). Κάθε C_s είναι σύνολο ανοικτό-κλειστό
(iii). $C_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{s*<i>}$
(iv). $diam(C_s) \leq 2^{-lh(s)}$

Έστω $f : D \longrightarrow X$ η συνοδεύουσα συνάρτηση του σχήματος $Lusin$. Από τις ανωτέρω ιδιότητες του σχήματος $Lusin$ και την πληρότητα του μετρικού χώρου (X, d) προκύπτει ότι $D = \mathcal{N}$. Έτσι η συνοδεύουσα συνάρτηση είναι $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$. Καθώς κάθε C_s είναι ανοικτό σύνολο, από το θεώρημα $4.2.2(iii)$ έπεται ότι η f

είναι επί. Ένα $y \in X$ καθορίζει ακριβώς ένα $x \in \mathcal{N}$ ώστε $y \in C_{x|n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως $y \in \bigcap_n C_{x|n}$, και άρα $f(x) = y$. Συνεπώς η συνάρτηση f είναι ομοιομορφισμός.

■

4.2.5 Πόρισμα: Ο χώρος τών άρρητων $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ με την συνληθη τοπολογία είναι ομοιομορφικός με τον χώρο $\mathcal{N}$ του $Baire$.

Απόδειξη:

Το σύνολο A είναι G_δ-υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επομένως ο χώρος A με την σχετική τοπολογία είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος (θεώρημα ··). Συνεπώς ο χώρος A είναι Πολωνικός. Επίσης ο A είναι μηδενοδιάστατος, καθώς η οικογένεια που αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $(\alpha, \beta) \cap A$ με $\alpha < \beta$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ είναι μια βάση για την τοπολογία του και κάθε σύνολο αυτής της μορφής είναι ανοικτό-κλειστό στο χώρο A. Επιπλέον κάθε συμπαγές υποσύνολο του A έχει κενό εσωτερικό, γιατί αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $\alpha < \beta$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ στο $(\alpha, \beta) \cap A$ ώστε $x_n \to \alpha$, και άρα η $(x_n)_n$ δεν έχει υπακολουθία συγκλίνουσα σε κάποιο άρρητο αριθμό. Από το θεώρημα 4.2.4 έπεται ότι ο χώρος A είναι ομοιομορφικός με τον χώρο $\mathcal{N}$ του $Baire$.

■

4.3 Μηδενοδιάστατοι Χώροι ως Υπόχωροι του χώρου του Baire

4.3.1 Θεώρημα: α) Κάθε μηδενοδιάστατος διαχωρίσιμος μετρικοποιήσιμος χώρος X εμφυτεύεται στο χώρο του $Baire$, δηλαδή υπάρχει ομοιμορφισμός

$$f : X \longrightarrow f[X] \subseteq \mathcal{N}$$

β) Κάθε μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος είναι ομοιομορφικός με έναν κλειστό υπόχωρο του χώρου του $Baire$.

Απόδειξη:

α) Έστω d μια συμβιβαστή μετρική στο X. Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε ένα σχήμα $Lusin$ επί του X $(C_s)_{s\in\mathbb{N}^*}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες

(i). $C_\emptyset = X$

(ii). C_s είναι σύνολο ανοικτό-κλειστό

(iii). $C_s = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_{s*<i>}$
(iv). $diam(C_s) \leq 2^{-lh(s)}$

Έστω $g : D \longrightarrow X$ η συνοδεύουσα συνάρτηση του σχήματος. Από τις ιδιότητες (i) και (iii) έπεται ότι $g[D] = X$ και από το θεώρημα 3.3.2 έχουμε ότι η g είναι ομοιομορφισμός, και άρα η συνάρτηση

$$f = g^{-1} : X \longrightarrow \mathcal{N}$$

είναι εμφύτευση.

β) Αν ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης, από το θεώρημα 3.3.2 έπεται ότι το σύνολο D είναι κλειστό.

■

4.4 Πολωνικοι Χώροι ως Συνεχείς Εικόνες του Χώρου του Baire

4.4.1 Λήμμα: Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $F \subseteq X$, $\mathcal{F}_\sigma$-σύνολο και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του X με τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$
2. $K_i \cap K_j = \emptyset$ για $i \neq j$
3. K_i είναι $\mathcal{F}_\sigma$-σύνολο
4. $diam(K_i) < \epsilon$

Απόδειξη:
Υπάρχει ακολουθία $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του X ώστε

$$F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$$

Εφ' όσον ο μετρικός χώρος X είναι διαχωρίσιμος, είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Επομένως για κάθε i υπάρχει μια ακολουθία $(V_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ ανοικτών υποσυνόλων του X

ώστε

$$F_i \subseteq \bigcup_j V_{ij}$$

και

$$diam(V_{ij}) < \epsilon.$$

Έπεται ότι

$$F = \bigcup_{i,j} (F_i \cap \overline{V}_{ij}).$$

Η οικογένεια $\{F_i \cap \overline{V}_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη, και έστω

$$\{F_i \cap \overline{V}_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\} = \{S_i : i \in \mathbb{N}\}$$

Τότε κάθε S_i είναι κλειστό σύνολο,

$$F = \bigcup_i S_i \text{ και } diam(S_i) < \epsilon$$

Θέτουμε

$$K_0 = S_0 \text{ και}$$
$$K_i = S_i \setminus \bigcup_{j<i} S_j \text{ για } i \geq 1$$

Έχουμε για κάθε $i \geq 1$, $K_i = S_i \cap (\bigcup_{j<i} S_i)^c$ και το σύνολο $(\bigcup_{j<i} S_j)^c$ είναι ακοικτό υποσύνολο του X, άρα είναι $\mathcal{F}_\sigma$-σύνολο. Επομένως για κάθε i το σύνολο K_i είναι $\mathcal{F}_\sigma$-σύνολο.
Είναι σαφές ότι η ακολουθία $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ έχει τις ιδιότητες 1 έως 4.

■

4.4.2 Λήμμα: Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, $F \subseteq X$, $\mathcal{F}_\sigma$-σύνολο και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του X με τις ακόλουθες ιδιότητες

1. $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$
2. $F_i \cap F_j = \emptyset$ για $i \neq j$
3. F_i είναι $\mathcal{F}_\sigma$-σύνολο
4. $\overline{F}_i \subseteq F$

5. $diam(F_i) < \epsilon$

Απόδειξη:
Εφ' όσον το F είναι $\mathcal{F}_\sigma$-σύνολο, υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του X με $C_0 = \emptyset$, ώστε

$$F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$$

και επομένως

$$F = \bigcup_{i=0}^{\infty}(C_{i+1}\backslash C_i)$$

Για κάθε i έχουμε

$$C_{i+1}\backslash C_i = C_{i+1} \cap C_i^c,$$

και εφ' όσον το C_{i+1} είναι κλειστό σύνολο και το C_i^c είναι ανοικτό, η τομή $C_{i+1} \cap C_i^c$ είναι $\mathcal{F}_\sigma$-σύνολο. Επομένως από το Λήμμα 4.4.1, για κάθε i υπάρχει ακολουθία $(K_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο $\mathcal{F}_\sigma$-συνόλων με διάμετρο $< \epsilon$, ώστε

$$C_{i+1}\backslash C_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_{ij}$$

Έπεται ότι

$$F = \bigcup_{i,j} K_{ij}$$

Επίσης για κάθε i, j,

$$\overline{K}_{ij} \subseteq \overline{C_{i+1}\backslash C_i} \subseteq \overline{C_{i+1}} = C_{i+1} \subseteq F$$

Η οικογένεια $\{K_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη και έστω

$$\{K_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\} = \{F_i : i \in \mathbb{N}\}$$

Τότε η ακολουθία $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ έχει τις ιδιότητες 1 έως 5.

■

4.4.3 Θεώρημα: Έστω X Πολωνικός χώρος. Τότε υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{N}$ και συνάρτηση

$$f : F \longrightarrow X$$

που είναι συνεχής, $1-1$ και επί.

Απόδειξη:

Έστω d μια συμβιβαστή μετρική στο X. Με βάση το Λήμμα 4.4.2 κατασκευάζουμε ένα σχήμα $Lusin$ $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^*}$ επί του X με τις ακόλουθες ιδιότητες.

(i). $F_\emptyset = X$

(ii). F_s είναι $\mathcal{F}_\sigma$-σύνολο

(iii). $F_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_{s*<i>} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{F}_{s*<i>}$

(iv). $diam(F_s) \leq 2^{-lh(s)}$

Έστω $f : D \longrightarrow f[D] \subseteq X$

η συνοδεύουσα συνάρτηση του σχήματος. Από τις ιδιότητες (i) και (iii) έπεται ότι $f[D] = X$. Επίσης από το Θεώρημα 4.2.2 προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και $1-1$. Μένει να δείξουμε ότι το σύνολο D είναι κλειστό. Έστω $(x_n)_n$ μια ακολουθία στο D και $x \in \mathcal{N}$ ώστε $x_n \to x$. Αποδεικνύεται όπως στο Θεώρημα 4.2.2 ότι η ακολουθία $\big(f(x_n)\big)_n$ είναι $Cauchy$, επομένως υπάρχει $y \in X$ ώστε $f(x_n) \to y$. Για $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $x_{n|i} = x|_i$ οπότε $f(x_n) \in F_{x|_i} \subseteq \overline{F}_{x|_i}$, επομένως $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \overline{F}_{x|_i}$.

Συνεπώς

$$y \in \bigcap_i \overline{F}_{x|_i} = \bigcap_i F_{x|_i} = \{f(x)\}$$

και άρα $y = f(x)$, δηλαδή $x \in D$. Έτσι το σύνολο D είναι κλειστό.

■

4.4.4 Πόρισμα: Αν X είναι μη κενός Πολωνικός χώρος τότε υπάρχει συνάρτηση

$$g : \mathcal{N} \longrightarrow X$$

που είναι συνεχής και επί.

Απόδειξη:

Από το θεώρημα 4.4.3 υπάρχουν $F \subseteq \mathcal{N}$ κλειστό σύνολο και σύνάρτηση $f : F \longrightarrow X$ συνεχής $1-1$ και επί. Όπως είναι γνωστό (Λήμμα 2.2.12) υπάρχει συνεχής προβολή $h : \mathcal{N} \longrightarrow F$. Η συνάρτηση

$$g = f \circ h : \mathcal{N} \longrightarrow X$$

είναι συνεχής και επί.

■

4.5 Κλειστά Υποσύνολα Ομοιομορφικά με τον Χώρο του Baire

4.5.1 Λήμμα: Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $F \subseteq X$ κλειστό μη κενό σύνολο. Υποθέτουμε ότι το F δεν είναι σ-συμπαγές, και έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μη κενών υποσυνόλων του F με τος ακόλουθες ιδιότητες

1. $F_i \cap F_j = \emptyset$ για $i \neq j$
2. F_i είναι κλειστό σύνολο
3. F_i δεν είναι σ-συμπαγές
4. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια ανοικτή περιοχή U του x ώστε $U \cap F_i \neq \emptyset$ για το πολύ ένα i
5. $diam(F_i) < \epsilon$

Απόδειξη:
Θέτουμε

$$H = \{x \in F : \forall \text{ ανοικτή περιοχή } U \text{ του } x, \overline{U \cup F} \text{ δεν είναι } \sigma\text{-συμπαγές}\}.$$

Καθώς το F δέν είναι σ-συμπαγές και ο χώρος X είναι δεύτερος αριθμήσιμος, το σύνολο H είναι μη κενό.

- Το σύνολο H είναι κλειστό: Έστω $x_0 \in \overline{H} \subseteq F$, τότε για κάθε ανοικτή περιοχή U του x_0, $U \cap H \neq \emptyset$, και άρα υπάρχει $x \in U \cap H$, οπότε U είναι ανοικτή περιοχή του x και $x \in H$, επομένως $\overline{U \cap F}$ δεν είναι σ-συμπαγές, συνεπώς $x_0 \in H$.
- Το H δεν είναι σ-συμπαγές: Ας υποθέσουμε το αντίθετο τότε

  $$H = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m,$$

  όπου κάθε K_m είναι συμπαγές. Από τον ορισμό του H έπεται ότι για κάθε $x \in F \backslash H$ υπάρχει ανοικτή περιοχή V_x του x, ώστε $\overline{V_x \cap F}$ είναι σ-συμπαγές. Η οικογένεια $\{V_x : x \in F\backslash H\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $F\backslash H$, και εφ' όσον ο χώρος X είναι δεύτερος αριθμήσιμος υπάρχουν σημεία $x_0, x_1, ...$ στο $F\backslash H$, ώστε

$$F \backslash H \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{x_n}.$$

Έπεται ότι

$$F = \bigcup_m K_m \cup (\bigcup_n \overline{V_n \cap F}),$$

και άρα το F είναι σ-συμπαγές, που είναι άτοπο.

- Ιδιαιτέρως το σύνολο H δεν είναι συμπαγές, επομένως, καθώς το H είναι κλειστό υποσύνολο του X, υπάρχει ακολουθία $(x_\kappa)_\kappa$ στο H με $x_\kappa \neq x_l$ για $\kappa \neq l$, χωρίς συγκλίνουσα υπακολουθία. Συνεπώς μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(U_\kappa)_\kappa$ ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε

$$x_\kappa \in U_\kappa \text{ για κάθε } \kappa,$$
$$\overline{U}_\kappa \cap \overline{U}_l = \emptyset \text{ για } \kappa \neq l$$

και

$$diam(U_\kappa) < \frac{\epsilon}{2^\kappa}$$

Θέτουμε

$$F_\kappa = \overline{U_\kappa \cap F},\ \kappa = 0, 1, 2, ...$$

Προφανώς η ακολουθία $(F_\kappa)_\kappa$ έχει τις ιδιότητες 1,2,3 και 5.

- Μένει να δείξουμε ότι η $(F_\kappa)_\kappa$ έχει και την ιδιότητα 4.
Έστω $x \in X$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

<u>Περίπτωση 1</u>

$$x \notin \bigcup_\kappa F_\kappa$$

Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχουν μια ανοικτή περιοχή W του x και $\kappa_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$W \cap F_\kappa = \emptyset \text{ για κάθε } \kappa > \kappa_0$$

Υποθέτουμε το αντίθετο, και έστω $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του x. Τότε για την περιοχή W_1 υπάρχει κ_1 ώστε $W_1 \cap F_{\kappa_1} \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $y_1 \in W_1 \cap F_{\kappa_1}$. Για την περιοχή $W_1 \cap W_2$ υπάρχει $\kappa_2 > \kappa_1$ ώστε $W_1 \cap W_2 \cap F_{\kappa_2} \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $y_2 \in W_1 \cap W_2 \cap F_{\kappa_2}$. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο και κατασκευάζουμε επαγωγικά μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(\kappa_i)_{i=1}^{\infty}$ και μια ακολουθία σημείων του X, $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ ώστε για κάθε i,

$$y_i \in W_1 \cap ... \cap W_i$$

και

$$y_i \in F_{\kappa_i}.$$

Είναι σαφές ότι $y_i \to x$. Επίσης $d(y_i, x_{\kappa_i}) \leq \frac{1}{2^{\kappa_i}}$ και άρα $d(y_i, x_{\kappa_i}) \to 0$, επομένως $x_{\kappa_i} \to x$, που είναι άτοπο. Άρα πράγματι υπάρχουν ανοικτή περιοχή W του x και κ_0 ώστε $W \cap F_\kappa = \emptyset$ για κάθε $\kappa > \kappa_0$. Το σύνολο $F_1 \cup ... \cup F_{\kappa_0}$ είναι κλειστό, επομένως υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x ώστε $V \cap (F_1 \cup ... \cup F_{\kappa_0}) = \emptyset$. Θέτουμε $U = V \cap W$. Τότε U είναι ανοικτή περιοχή του x και $U \cap F_\kappa = \emptyset$ για κάθε κ.

<u>Περίπτωση 2</u>

$$x \in \bigcup_\kappa F_\kappa$$

Τότε υπάρχει ακριβώς ένα κ_1 ώστε $x \in F_\kappa$. Όπως και στην περίπτωση 1, υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x ώστε $U \cap F_\kappa = \emptyset$ για κάθε $\kappa \neq \kappa_1$, επομένως $U \cap F_\kappa \neq \emptyset$ μόνο για $\kappa = \kappa_1$.

■

4.5.2 Θεώρημα: $(Hurewicz)$
Έστω X Πολωνικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
α) Ο X περιέχει ένα κλειστό υποσύνολο ομοιομορφικό με τον χώρο $\mathcal{N}$ του $Baire$.
β) Ο X δεν είναι σ-συμπαγής.

Απόδειξη:
(α)⇒ (β). Έστω ότι υπάρχει κλειστό υποσύνολο $F \subseteq X$ που είναι ομοιομορφικό με το χώρο $\mathcal{N}$. Αν υποθέσουμε ότι ο χώρος X είναι σ-συμπαγής, τότε το F είναι επίσης σ-συμπαγές, επομένως και ο χώρος $\mathcal{N}$ είναι σ-συμπαγής, που είναι άτοπο.

(β)⇒ (α). Θα κατασκευάσουμε ένα σχήμα $Lusin$ $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^*}$ επί του X με τις ακόλουθες ιδιότητες
(i). $F_\emptyset = X$, $F_s \neq \emptyset$
(ii). F_s είναι κλειστό
(iii). F_s δεν είναι σ-συμπαγές
(iv). Για κάθε n και για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια ανοικτή περιοχή U του x ώστε $F_s \cap U \neq \emptyset$ για το πολύ μία s με $lh(s) = n$.
(v). $diam(F_s) \leq 2^{-lh(s)}$.

Κατασκευάζουμε τα F_s με επαγωγή στο $n = lh(s)$.
Για $n = 0$ θέτουμε $F_\emptyset = X$. Υποθέτουμε ότι τα F_s έχουν κατασκευασθεί για $lh(s) = n$ και έχουν τις ιδιότητες (i) έως (v). Για s με $lh(s) = n$, θα κατασκευάσουμε τα σύνολα $F_{s*<\kappa>}$ για $\kappa \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.5.1 για κάθε F_s με $lh(s) = n$ και για $\epsilon = 2^{-n-1}$ και κατασκευάζουμε τα σύνολα $F_{s*<\kappa>}$ για $\kappa \in \mathbb{N}$, που έχουν τις ιδιότητες 1 έως 5 του Λήμματος. Από την ιδιότητα 4 και την επαγωγική υπόθεση εξασφαλίζεται η ιδιότητα (iv). Οι άλλες ιδιότητες είναι άμεσες.
Έστω τώρα $f : D \longrightarrow X$ η συνοδεύουσα συνάρτηση του σχήματος. Η f είναι συνεχής, $1-1$, και επιπλέον $D = \mathcal{N}$. Επομένως έχουμε τη συνάρτηση

$$f : \mathcal{N} \longrightarrow X$$

που είναι συνεχής και $1-1$. Μένει να δείξουμε ότι $f[\mathcal{N}]$ είναι κλειστό υποσύνολο του X και η f είναι ανοικτή.

- $f[\mathcal{N}]$ είναι κλειστό: Έστω $x \in \overline{f[\mathcal{N}]}$, τότε για κάθε n,

  $$x \in \overline{\bigcup\{F_s : lh(s) = n\}} \qquad (*)$$

  Από την ιδιότητα (iv) υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x ώστε $U \cap F_{s^n} \neq \emptyset$ για το πολύ μια s^n με $lh(s^n) = n$. Επομένως από την $(*)$ έπεται ότι για κάθε ανοικτή περιοχή V του x με $V \subseteq U$, έχουμε $V \cap F_{s^n} \neq \emptyset$, και άρα $x \in F_{s^n}$. Συνεπώς $s^n \sqsubseteq s^{n+1}$ για κάθε n και $x \in \bigcap_n F_{s^n}$
  Άρα για $y = sup\{y^n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{N}$ έχουμε $f(y) = x$, οπότε $x \in f[\mathcal{N}]$. Έτσι το σύνολο $f[\mathcal{N}]$ είναι κλειστό.

- Η συνάρτηση f είναι ανοικτή: Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι $f[\mathcal{N}_s]$ είναι ανοικτό στο $f[\mathcal{N}]$ για κάθε $s \in \mathbb{N}^*$. Από την ιδιότητα (iv) έπεται ότι το F_s είναι ανοικτό στο σύνολο

$$\bigcup\{F_t : lh(t) = lh(s)\} \supseteq f[\mathcal{N}],$$

άρα $F_s \cap f[\mathcal{N}]$ είναι ανοικτό στο $f[\mathcal{N}]$, και επειδή $f[\mathcal{N}_s] = F_s \cap f[\mathcal{N}]$ το $f[\mathcal{N}_s]$ είναι ανοικτό στο $f[\mathcal{N}]$.

■

Βιβλιογραφία

[1] Alexander S. Kechris, *Lectures on classical descriptive settheory* .

[2] Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης, *Σημειώσεις στη συνολοθεωρία*, εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα(1993).

[3] Σ.Νεγρεπόντης, Θ.Ζαχαριάδης, Ν.Καλαμίδας, Β.Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και συναρτησιακή ανάλυση*, Συμμετρία, Αθήνα (1997).

[4] Γ. Κουμουλής, Σ.Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Συμμετρία, Αθήνα (1991)