*Διπλωματική Εργασία*

# $K$-Θεωρία για $C^*$-Άλγεβρες

Κυριάκος Τσαφαράς

*Επιβλέπων Καθηγητής:*
Ιωάννης Εμμανουήλ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Απρίλιος 2013

# Περιεχόμενα


**I Βασικά στοιχεία της θεωρίας των $C^*$-αλγεβρών 1**

I.1 Βασικοί ορισμοί και Θεωρήματα . . . 1
I.2 Η Μοναδοποίηση . . . 2
I.3 Φασματική θεωρία . . . 3
I.4 Άλγεβρες Πινάκων . . . 4
I.5 Η κατηγορία $C^*$ . . . 4

**II Προβολές και Ορθομοναδιαία στοιχεία 6**

II.1 Ορθομοναδιαία στοιχεία . . . 6
II.2 Προβολές . . . 8

**III Ο συναρτητής $K_0$ για μοναδιαίες $C^*$-άλγεβρες 9**

III.1 Η κατασκευή της ομάδας Grothendieck . . . 9
III.2 Δύο ημιομάδες προβολών . . . 10
III.3 Η ομάδα $K_0$ και ο συναρτητής $K_0$ . . . 11

**IV Ο συναρτητής $K_0$ στη γενική περίπτωση 16**

IV.1 Επέκταση του συναρτητή $K_0$ . . . 16
IV.2 Ιδιότητες του συναρτητή $K_0$ . . . 20
IV.3 Παραδείγματα . . . 24

**V Ο συναρτητής $K_1$ 26**

V.1 Η ομάδα $K_1$ . . . 26
V.2 Ο συναρτητής $K_1$ . . . 31

**VI Η δείκτρια συνάρτηση και ο ισομορφισμός των $K_1(A)$ και $K_0(SA)$ 33**

VI.1 Ορισμός της δείκτριας συνάρτησης . . . 33
VI.2 Περιγραφή της $\delta_1$ μέσω μερικών ισομετριών . . . 35
VI.3 Μια ακριβής ακολουθία έξι όρων . . . 38
VI.4 Ο ισομορφισμός των ομάδων $K_1(A)$ και $K_0(SA)$ . . . 41
VI.5 Η μακριά ακριβής ακολουθία . . . 45

**VII Η περιοδικότητα Bott** **48**
VII.1 Τανυστικά γινόμενα . . . . . 48
VII.2 Η άλγεβρα Toeplitz . . . . . 51
VII.3 Η απόδειξη της περιοδικότητας Bott . . . . . 52
VII.4 Η κυκλική ακριβής ακολουθία των έξι όρων . . . . . 55
VII.5 Εφαρμογές . . . . . 57

**VIII Οι άλγεβρες Cuntz** **59**
VIII.1 Υπολογισμός της ομάδας $K_0(\mathcal{O}_2)$ . . . . . 59

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

# Βασικά στοιχεία της θεωρίας των $C^*$-αλγεβρών

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε, συνοπτικά και χωρίς αποδείξεις, κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα από την θεωρία των $C^*$-αλγεβρών. Ακόμα περιγράφουμε δύο κατασκευές, τη μοναδοποίηση και τις άλγεβρες πινάκων, με την βοήθεια των οποίων θα οριστούν στα επόμενα κεφάλαια οι συναρτητές $K_0$ και $K_1$ .

## I.1 Βασικοί ορισμοί και Θεωρήματα

Θυμίζουμε ότι $^*$-άλγεβρα ή άλγεβρα με ενέλιξη, είναι μια άλγεβρα $A$, η οποία είναι εφοδιασμένη με μια προσθετική απεικόνιση $a \mapsto a^*$, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες $(xy)^* = y^*x^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$ και $(x^*)^* = x$ για κάθε $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Ορισμός.** $C^*$-άλγεβρα είναι μια μιγαδική άλγεβρα Banach $A$, με ενέλιξη, έτσι ώστε να ικανοποιείται η $C^*$-ιδιότητα:

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

Όπως για κάθε άλγεβρα, λέμε ότι μια $C^*$-άλγεβρα είναι μεταθετική ή με μονάδα, αν ο πολλαπλασιασμός δακτυλίου είναι μεταθετικός ή έχει ουδέτερο στοιχείο, αντίστοιχα.

Ένας $^*$-ομομορφισμός είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δυο $^*$-αλγεβρών, η οποία διατηρεί τον πολλαπλασιασμό δακτυλίου και την ενέλιξη. Η $C^*$-ιδιότητα είναι ιδιαίτερα σημαντική. Με την βοήθεια της αποδεικνύεται ότι η ενέλιξη είναι ισομετρική και ότι η αλγεβρική δομή μιας $C^*$-άλγεβρας καθορίζει πλήρως τη νόρμα. Επίσης κάθε $^*$-ομομορφισμός $\varphi$ μεταξύ δυο $C^*$-αλγεβρών είναι αυτόματα συνεχής, καθώς ισχύει η σχέση $\|\varphi(a)\| \leqslant \|a\|$, για κάθε $a$ στην $A$. Ένας $^*$-ομομορφισμός είναι ισομετρικός, αν και μόνο αν είναι 1-1.

Αναπαράσταση μιας $^*$-άλγεβρας $A$, σ'έναν χώρο Hilbert $H$, είναι ένας $^*$-ομομορφισμός $\pi\colon A \to \mathcal{B}(H)$. Η αναπαράσταση λέγεται πιστή, αν ο $\pi$ είναι μονομορφισμός.

**Θεώρημα I.1** (Gelfand-Naimark)**.** *Κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$, δέχεται μια πιστή αναπαράσταση. Αν η $A$ είναι διαχωρίσιμη, τότε μπορεί να αναπαρασταθεί σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.*

Μια $C^*$-υπάλγεβρα της $A$, είναι μια υπάλγεβρα της, η οποία είναι κλειστή ως προς την ενέλιξη και ως προς τη νόρμα. Επομένως είναι ένα υποσύνολο της $A$, που είναι επίσης $C^*$-άλγεβρα, με τους περιορισμούς των πράξεων της $A$. Με τον όρο ιδεώδες θα εννοούμε ένα κλειστό, δίπλευρο ιδεώδες. Ένα ιδεώδες $I$ της $A$, είναι αυτόματα αυτοσυζυγές και επομένως $C^*$-υπάλγεβρα. Το πηλίκο $A/I$, εφοδιασμένο με τη νόρμα πηλίκο :

$$\|a + I\| = \inf\{\|a + x\| : x \in I\},$$

γίνεται μια $C^*$-άλγεβρα και η απεικόνιση πηλίκο $\pi\colon A \to A/I$ είναι ένας $^*$-ομομορφισμός. Θεωρώντας τον εγκλεισμό $i\colon I \to A$ προκύπτει η βραχεία ακριβής ακολουθία $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών:

$$0 \longrightarrow I \stackrel{i}{\longrightarrow} A \stackrel{\pi}{\longrightarrow} A/I \longrightarrow 0.$$

Ο πυρήνας ενός $^*$-ομομορφισμού, $\varphi\colon A \to B$, είναι πάντα ιδεώδες της $A$, ενώ η εικόνα του είναι μια $C^*$-υπάλγεβρα της $B$.

Με χρήση της θεωρίας της μιγαδικής ανάλυσης και της δομής των μεγιστικών ιδεωδών, αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα I.2** (Gelfand)**.** *Κάθε μεταθετική $C^*$-άλγεβρα είναι ισομετρικά ισόμορφη με την $C^*$-άλγεβρα $C_0(X)$, όλων των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο, για κάποιο τοπικά συμπαγή χώρο Hausdorff $X$.*

## I.2 Η Μοναδοποίηση

Έστω A μια $C^*$-άλγεβρα. Όπως και στην γενική θεωρία των αλγεβρών Banach, η μοναδοποίηση $\widetilde{A}$ της $A$, είναι το σύνολο $A \times C$, εφοδιασμένο με διανυσματικές πράξεις κατά συντεταγμένη και ο πολλαπλασιασμός δακτυλίου δίνεται από τη σχέση:

$$(\alpha, \lambda) \cdot (b, \mu) = (\alpha b + \mu\alpha + \lambda b, \lambda\mu).$$

Η $\tilde{A}$ εφοδιασμένη με ενέλιξη κατά συντεταγμένη γίνεται μια $^*$-άλγεβρα, με μονάδα το στοιχείο $1_{\tilde{A}} = (0, 1)$. Η μοναδική, όμως νόρμα που προσδίδει στην $\tilde{A}$ τη δομή μιας $C^*$-άλγεβρας, ορίζεται ως εξής:

$$\|(\alpha, \lambda)\| = \sup\{\|\alpha x + \lambda x\| : x \in A, \|x\| \leq 1\}.$$

Ορίζουμε τους $^*$-ομομορφισμούς $i\colon A \to \tilde{A}, \pi\colon \tilde{A} \to \mathbb{C}, \rho\colon \mathbb{C} \to \tilde{A}$, με $i(\alpha) = (\alpha, 0)$,$\pi(\alpha, \lambda) = \lambda$ και $\rho(\lambda) = (0, \lambda)$. Προκύπτει η παρακάτω διασπώμενη ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow A \stackrel{i}{\longrightarrow} \tilde{A} \underset{\rho}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Καθώς η εικόνα του μονομορφισμού $i$ ισούται με τον πυρήνα του $^*$-ομομορφισμού $\pi$, είναι ένα ιδεώδες της $\tilde{A}$. Ταυτίζουμε την A με το ιδεώδες $i(A)$ της $\tilde{A}$. Το πηλίκο $\tilde{A}/A$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{C}$.

Αν η αρχική $C^*$-άλγεβρα A έχει μονάδα, έστω $1_A$, τότε η μοναδοποίηση της είναι ισόμορφη με τη $C^*$-άλγεβρα $A \oplus \mathbb{C}$. Η απεικόνιση $(\alpha, \lambda) \mapsto (\alpha - \lambda 1, \lambda)$ είναι ένας $^*-$ισομορφισμός μεταξύ των $A \oplus \mathbb{C}$ και $\tilde{A}$. Στην περίπτωση που η A δεν έχει μονάδα, δεν ισχύει το ίδιο, καθώς τότε ούτε η $A \oplus \mathbb{C}$ έχει μονάδα.

Ένας $^*$-ομομορφισμός $\varphi\colon A \to B$, μεταξύ δύο τυχαίων $C^*$-αλγεβρών, επάγει έναν $^*$-ομομορφισμό $\tilde{\varphi}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$, ο οποίος δίνεται από τη σχέση $\tilde{\varphi}(\alpha, \lambda) = (\varphi(\alpha), \lambda)$. Ο $\tilde{\varphi}$ διατηρεί σε κάθε περίπτωση τη μονάδα.

## I.3 Φασματική θεωρία

**Ορισμός.** Έστω $A$ μια άλγεβρα Banach με μονάδα και $x$ ένα στοιχείο της $A$. Το φάσμα του $x$ στην $A$ είναι το σύνολο:

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda 1 \quad \text{δεν αντιστρέφεται στην } A\}.$$

Αν η $A$ δεν έχει μονάδα, τότε $\sigma_A(x) = \sigma_{\tilde{A}}(x)$. Η φασματική ακτίνα του στοιχείου $x$ είναι ο αριθμός $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\}$.

Αν $p = \sum_{\kappa=0}^{n} \alpha_\kappa x^\kappa$ είναι ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές και $x \in A$, μπορούμε να θεωρήσουμε το στοιχείο $p(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa x^\kappa$ της $A$. Προκύπτει μια συνάρτηση $\Phi_0\colon p \to p(A)$, που ονομάζεται συναρτησιακός λογισμός για πολυώνυμα.

**Πρόταση I.3.** *Έστω $A$ μια άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in A$. Τότε:*

*(i) Το $\sigma_A(x)$ είναι ένα μη κενό, συμπαγές υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών.*

*(ii) $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = inf \|x^n\|^{1/n}$.*

*(iii) Αν $p$ είναι ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, τότε:*

$$\sigma_A(p(x)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma_A(x)\}.$$

**Ορισμός.** Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα και $x \in A$. Το $x$ λέγεται αυτοσυζυγές αν $x = x^*$, φυσιολογικό αν μετατίθεται με το συζυγές του και θετικό, αν είναι αυτοσυζυγές και το φάσμα του αποτελείται από μη-αρνητικούς αριθμούς.

Αποδεικνύεται ότι το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς στοιχείου αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς, και ότι για κάθε φυσιολογικό στοιχείο ισχύει $r(x) = \|x\|$. Ακόμα, ένα στοιχείο είναι θετικό αν και μόνο αν είναι της μορφής $x^*x$, για κάποιο $x$ στην $A$. Το σύνολο $A^+$ των θετικών στοιχείων της $A$, αποτελεί έναν κλειστό της κώνο.

### Συνεχής συναρτησιακός λογισμός

Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα και $x$ ένα φυσιολογικό στοιχείο της. Υπάρχει ένας μοναδικός $^*$-ομομορφισμός:

$$\Phi\colon C(\sigma_A(x)) \to A : f \mapsto \Phi(f) = f(x),$$

έτσι ώστε η ταυτοτική του $\sigma_A(x)$ να απεικονίζεται στο $x$ και η μονάδα της $C(\sigma_A(x))$ στη μονάδα της A. O $\Phi$ λέγεται συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις και επεκτείνει το συναρτησιακό λογισμό για πολυώνυμα.

Με τη βοήθεια του συναρτησιακού λογισμού, μπορούμε να δείξουμε, για παράδειγμα, ότι κάθε θετικό στοιχείο $x$ έχει μια θετική τετραγωνική ρίζα, δηλαδή ότι υπάρχει $y \in A^+$, με $y^2 = x$. Το μοναδικό $y$ με τις παραπάνω ιδιότητες συμβολίζεται με $x^{1/2}$. Ακόμα, για κάθε φυσιολογικό στοιχείο $x$ της $A$, μπορούμε να ορίσουμε το στοιχείο $exp(x) = e^x$.

## I.4 Άλγεβρες Πινάκων

Αν $A$ είναι μια $C^*$-άλγεβρα και $n$ ένας φυσικός αριθμός, με $M_n(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο των $n \times n$ πινάκων, με στοιχεία από την $A$. Το $M_n(A)$ γίνεται μια άλγεβρα με ενέλιξη, αν εφοδιαστεί με τις κατά σημείο διανυσματικές πράξεις, το συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων και ενέλιξη που δίνεται από τη σχέση:

$$(\alpha_{ij})^*_{i,j} = (\alpha^*_{ji})_{i,j}.$$

Κάθε $^*$-ομομορφισμός $\varphi\colon A \to B$, μεταξύ δυο $C^*$-αλγεβρών $A$ και $B$, επάγει έναν $^*$-ομομορφισμό $\varphi_n\colon M_n(A) \to M_n(B)$, με $\varphi_n(\alpha_{ij})_{i,j} = (\varphi(\alpha_{i,j}))_{i,j}$. Αν $H$ είναι ένας χώρος Hilbert, τότε, μέσω του κανονικού ισομορφισμού, μπορούμε να ταυτίσουμε τις $^*$-άλγεβρες $M_n(B(H))$ και $B(H^n)$. Επομένως, αν $\pi$ είναι μια πιστή αναπαράσταση της $A$ στον H, τότε ο $^*$-ομομορφισμός $\pi_n\colon M_n(A) \to M_n(B(H))$ είναι μια, επίσης πιστή, αναπαράσταση της $M_n(A)$ στον χώρο $H^n$. Η $^*$-άλγεβρα $M_n(A)$ γίνεται $C^*$-άλγεβρα, με την επαγόμενη νόρμα, η οποία ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\max_{i,j}\{\|\alpha_{ij}\|\} \leq \|\alpha\| \leq \sum_{i,j} \|\alpha_{ij}\|, \qquad \forall \alpha = (\alpha_{ij})_{i,j} \in M_n(A).$$

Αν $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ είναι στοιχεία της $A$, τότε συμβολίζουμε:

$$\text{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \in M_n(A).$$

Με $0_n$ συμβολίζουμε το μηδενικό στοιχείο της $M_n(A)$, δηλαδή τον $n \times n$ πινάκα, κάθε στοιχείο του οποίου ισούται με το μηδενικό στοιχείο της $A$. Αν η $A$ έχει μονάδα $1$, τότε το στοιχείο $1_n = \text{diag}(1, 1, ..., 1)$ είναι η μονάδα της $M_n(A)$.

## I.5 Η κατηγορία $C^*$

Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ αποτελείται από μια κλάση αντικειμένων obj$(\mathcal{C})$, ένα σύνολο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, τα στοιχεία του οποίου λέγονται μορφισμοί, για κάθε δύο αντικείμενα $A, B$ της $\mathcal{C}$, ένα στοιχείο $id_A$ στο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, για κάθε αντικείμενο $A$, και μια απεικόνιση $\circ\colon \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, για κάθε τρια αντικείμενα $A, B, C$, ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

- $id_B \circ f = f = f \circ id_A, \ \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$

- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \ \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$

Θα ασχοληθούμε με την κατηγορία $C^*$ των $C^*$-αλγεβρών, στην οποία οι μορφισμοί είναι οι $^*$-ομομορφισμοί, και την κατηγορία $Ab$ των αβελιανών ομάδων, στην οποία οι μορφισμοί είναι οι ομομορφισμοί ομάδων. Βοηθητικά θα χρησιμοποιήσουμε και την κατηγορία των $C^*$-αλγεβρών με μονάδα, με μορφισμούς όλους τους $^*$-ομομορφισμούς, είτε διατηρούν τη μονάδα, είτε όχι.

Ένας (συναλλοίωτος) συναρτητής $F$ από μια κατηγορία $\mathcal{C}$, σε μια κατηγορία $\mathcal{D}$, απεικονίζει κάθε αντικείμενο $A$ της $\mathcal{C}$, σε ένα αντικείμενο $FA$ της $\mathcal{D}$, και κάθε μορφισμό $\varphi$ στο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, σε ένα μορφισμό $F(\varphi)$ στο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$, έτσι ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες:

- $F(id_A) = id_{FA}, \ \forall A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$

- $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi), \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C), A, B, C \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$

Αν $A, B$ είναι $C^*$-άλγεβρες, τότε δύο $^*$-ομομορφισμοί $\varphi, \psi \colon A \to B$ λέμε ότι είναι ομοτοπικοί (συμβ. $\varphi \sim_h \psi$), αν υπάρχει μονοπάτι $^*$-ομομορφισμών $\varphi_t \colon A \to B$, με $\varphi_0 = \varphi, \varphi_1 = \psi$ και το μονοπάτι $t \mapsto \varphi_t(\alpha)$ του $B$, είναι συνεχές για κάθε $\alpha$ στο $A$.

Ένας συναρτητής $F$ από την κατηγορία των $C^*$-αλγεβρών στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, μπορεί να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Ο $F$ είναι ακριβής, αν για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών
$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$
η αντίστοιχη ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών
$$0 \longrightarrow FI \xrightarrow{F(\varphi)} FA \xrightarrow{F(\psi)} FB \longrightarrow 0,$$
είναι επίσης ακριβής.

(ii) Αν για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών, όπως παραπάνω, η αντίστοιχη ακολουθία αβελιανών ομάδων, είναι ακριβής στην $FA$, τότε ο συναρτητής λέγεται ημιακριβής.

(iii) Αν για κάθε δύο $C^*$-άλγεβρες $A, B$ και κάθε δύο ομοτοπικούς $^*$-ομομορφισμούς $\varphi, \psi \colon A \to B$, ισχύει $F(\varphi) = F(\psi)$, τότε ο $F$ λέγεται ομοτοπικά αναλλοίωτος.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

# Προβολές και Ορθομοναδιαία στοιχεία

Οι ομάδες $K_0$ και $K_1$ ορίζονται ως κλάσεις ισοδυναμίας προβολών και ορθομοναδιαίων στοιχείων, αντίστοιχα, σε κατάλληλες άλγεβρες. Θα ορίσουμε αυτές τις σχέσεις ισοδυναμίας και θα δούμε τις βασικές τους ιδιότητες, οι οποίες θα μας χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

Σε έναν τοπολογικό χώρο $X$, λέμε ότι τα στοιχεία $a$ και $b$ είναι ομοτοπικά, συμβολικά $a \sim_h b$, αν υπάρχει συνεχές μονοπάτι $v\colon [0,1] \to X$, με $v_0 = a$ και $v_1 = b$. Η ομοτοπία είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

## II.1 Ορθομοναδιαία στοιχεία

Ένα στοιχείο $u$ μιας $C^*$-άλγεβρας $A$ με μονάδα 1, λέγεται ορθομοναδιαίο (unitary), αν ισχύει $uu^* = u^*u = 1$. Το σύνολο των ορθομοναδιαίων στοιχειων της A συμβολίζεται με $U(A)$ και αποτελεί μια πολλαπλασιαστική ομάδα, με $u^{-1} = u^*$. Προφανώς ισχύει $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$ και άρα $\sigma_A(u) \subseteq \mathbb{T}$. Η σχέση ισοδυναμίας, που θα χρησιμοποιήσουμε στο $U(A)$, είναι η ομοτοπία. Με $U_0(A)$ συμβολίζουμε τη συνεκτική συνιστώσα της μονάδας στο $U(A)$. Στη συνέχεια θα δώσουμε μια περιγραφή των στοιχειων της $U_0(A)$ και μια πρόταση σχετικά με την ύπαρξη lift για ορθομοναδιαία στοιχεία, μέσω ενός $^*$-επιμορφισμού που διατηρεί τη μονάδα. Θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο λήμμα.

**Λήμμα II.1.** *Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα.*

*(i) Αν $u_1 \sim_h v_1$ και $u_2 \sim_h v_2$ στο $U(A)$, τότε $u_1u_2 \sim_h v_1v_2$.*

*(ii) Αν $h$ είναι αυτοσυζυγές στοιχείο της $A$, τότε $exp(ih) \in U_0(A)$.*

*(iii) Αν για ένα ορθομοναδιαίο στοιχείο $u$ ισχύει $\sigma_A(u) \neq \mathbb{T}$, τότε $u = exp(ih) \in U_0(A)$, για κάποιο αυτοσυζυγές στοιχείο $h$ της $A$.*

*(iv) Αν $u, v$, είναι ορθομοναδιαία στοιχεία της $A$, με $\|u - v\| < 2$, τότε $v^*u = exp(ih)$, για κάποιο αυτοσυζυγές $h$, και άρα $u \sim_h v$.*

**Λήμμα II.2.** *Αν $G$ είναι μια τοπολογική ομάδα και $H$ μια υποομάδα της, η οποία είναι ανοικτό υποσύνολο της $G$, τότε είναι και κλειστό.*

*Απόδειξη.* Μπορούμε να γράψουμε την $H$ ως το συμπλήρωμα της ένωσης υποσυνόλων της μορφής $gH$, τα οποία είναι ανοιχτά. □

**Πρόταση II.3.** *Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα. Τότε*

*(i) Το $U_0(A)$ είναι μια κανονική υποομάδα της $U(A)$.*

*(ii) Τα στοιχεία της ομάδας $U_0(A)$ είναι ακριβώς τα πεπερασμένα γινόμενα στοιχείων της μορφής $exp(ih)$, για κάποιο αυτοσυζυγές στοιχείο $h$ της $A$.*

*(iii) Το $U_0(A)$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο της $U(A)$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το σύνολο $G$ των πεπρασμένων γινομένων στοιχείων της μορφής $exp(ih)$, για $h$ αυτοσυζυγές. Από το λήμμα (II.1), το $G$ είναι υποσύνολο της $U_0(A)$. Επιπλέον είναι και υποομάδα της, καθώς $exp(ih)^{-1} = exp(-ih)$.

Για να δείξουμε ότι η $G$ είναι ανοικτό υποσύνολο της $U(A)$, άρα και της $U_0(A)$, θεωρούμε $v \in G$ και $u \in U(A)$, με $\|v - u\| < 2$. Από το λήμμα (II.1), έχουμε $v^*u = exp(ih)$ για $h$ αυτοσυζυγές, και άρα $u = vexp(ih) \in G$.

Από το λήμμα (II.2) προκύπτει ότι το $G$ είναι και κλειστό υποσύνολο του συνεκτικού $U_0(A)$. Καθώς το $G$ είναι μη κενό, πρέπει να ισχύει $G = U_0(A)$. □

Θεμελιώδη σημασία για την κατασκευή της $K_1$ έχει το επόμενο λήμμα.

**Λήμμα II.4.** *(Whitehead). Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα και $u, v$ ορθομοναδιαία στοιχεία της. Τότε στο $U(M_2(A))$ ισχύει:*

$$\begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και ιδιαίτερα: } \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Απόδειξη.* Από το λήμμα(II.1) ισχύει:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ στο } U(M_2(A))$$

και επομένως:

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί και η πρώτη ομοτοπία. □

Έστω $\varphi\colon A \to B$ ένας $^*$-επιμορφισμός, μεταξύ δύο $C^*$-αλγεβρών με μονάδα. Ο $\varphi$ διατηρεί τη μονάδα και ισχύει $\varphi(U(A)) \subseteq U(B)$. Γενικά, όμως, δεν ισχύει η ισότητα. Χρησιμοποιώντας την πρόταση (II.3), μπορούμε να δείξουμε ότι $\varphi(U_0(A)) = U_0(B)$. Επιπλέον, από το λήμμα Whitehead, αν $u \in U(B)$, τότε $\text{diag}(u, u^*) \in U_0(M_2(B))$ και άρα υπάρχει $v$ στο $U_0(M_2(A))$, ώστε $\varphi_2(v) = \text{diag}(u, u^*)$. Τέλος, αν $u \in U(B)$ και υπάρχει $v$ στο $U(A)$, με $u \sim_h \varphi(v)$, τότε $u\varphi(v^*) \sim_h 1$ και επομένως υπάρχει $v_0$ στο $U_0(A)$, με $\varphi(v_0) = u\varphi(v^*)$, άρα $u = \varphi(v_0 v) \in \varphi(U(A))$.

## II.2 Προβολές

Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα. Ένα στοιχείο $p$ της $A$ λέγεται προβολή, αν είναι αυτοσυζυγές και ταυτοδύναμο ($p^* = p = p^2$). Το σύνολο των προβολών της $A$ συμβολίζεται με $\mathcal{P}(A)$.

Δύο προβολές $p, q$ λέγονται κάθετες, αν $pq = 0$. Τότε ισχύει και $qp = (pq)^* = 0$ και το άθροισμα $p + q$ είναι επίσης προβολή. Αν $p$ είναι προβολή, το φάσμα της είναι υποσύνολο του $\{0, 1\}$. Με χρήση του συναρτησιακού λογισμού μπορούμε να δείξουμε ότι αν το $p$ είναι φυσιολογικό, ισχύει και το αντίστροφο. Αν η $A$ έχει μονάδα, τότε το στοιχείο $1 - p$ είναι επίσης προβολή, κάθετη στην $p$.

Ορίζουμε στο $\mathcal{P}(A)$ τρεις σχέσεις ισοδυναμίας.

(i) Τη σχέση ομοτοπίας, $\sim_h$.

(ii) Την ισοδυναμία Murray-von Neumann, $\sim$: ορίζουμε $p \sim q$, αν υπάρχει στοιχείο $v$ στην $A$, ώστε $p = v^*v, \ q = vv^*$.

(iii) Την ορθομοναδιαία ισοδυναμία, $\sim_u$, η οποία ορίζεται ως εξής: $p \sim_u q$, αν υπάρχει ορθομοναδιαίο στοιχείο $u$ στην $U(\widetilde{A})$, με $q = upu^*$.

Ένα στοιχείο $v$, για το οποίο το γινόμενο $v^*v$ είναι προβολή, λέγεται μερική ισομετρία. Τότε το στοιχείο $vv^*$ είναι επίσης προβολή. Αν $p = v^*v$ και $q = vv^*$ είναι προβολές, τότε:

$$qv = vp = qvp = v.$$

Στην περίπτωση που η $A$ έχει μονάδα, έστω $1_A$, το ορθομοναδιαίο στοιχείο, που φανερώνει ότι $p \sim_u q$, μπορεί να επιλεγεί στην $A$. Ακόμα ισχύει $p \sim_u q$ αν και μόνο αν $p \sim q$ και $1_A - p \sim 1_A - q$.

Οι τρεις αυτές σχέσεις ισοδυναμίας δεν είναι γενικά ισοδύναμες. Ισχύει όμως η παρακάτω πρόταση:

**Πρόταση II.5.** *Έστω $p, q$ προβολές σε μια $C^*$-άλγεβρα $A$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

*(i)* $p \sim_h q \Rightarrow p \sim_u q \Rightarrow p \sim q$.

*(ii)* $p \sim q \Rightarrow$ *diag*$(p, 0) \sim_u$ *diag*$(q, 0)$ *στο*$M_2(A)$.

*(iii)* $p \sim_u q \Rightarrow$ *diag*$(p, 0) \sim_h$ *diag*$(q, 0)$ *στο*$M_2(A)$.

Ο τελεστής $S$, μετατόπισης αριστερά στον χώρο $l^2(\mathbb{N})$, ικανοποιεί τη σχέση $S^*S = 1$, όμως δεν είναι επί και άρα δεν είναι ορθομοναδιαίο στοιχείο. Η προβολή $1 = S^*S$ είναι ισοδύναμη κατά Murray-von Neumann με την $SS^*$. Όμως, αν οι προβολές αυτές ήταν και ορθομοναδιαία ισοδύναμες, τότε $0 = 1 - S^*S \sim 1 - SS^*$. Επομένως θα υπήρχε μερική ισομετρία $v$ στην $A$, με $v^*v = 0$ και $1 - SS^* = vv^*$. Τότε όμως $v = 0$ και $SS^* = 1$, που είναι άτοπο. Αυτό δείχνει ότι η ισοδυναμία Murray-von Neumann δεν συνεπάγεται γενικά την ορθομοναδιαία ισοδυναμία.

Κλείνουμε το κεφάλαιο, σημειώνοντας ότι αν $H$ είναι ένας απειροδιάστατος χώρος Hilbert και $p, q$ είναι προβολές στο $\mathcal{B}(H)$, τότε $p \sim q$ αν και μόνο αν dim$p(H) =$ dim$q(H)$, ενώ $p \sim_u q$ αν και μόνο αν ισχύει επιπλέον και dim$(p(H)^\perp) =$ dim$(q(H)^\perp)$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

# Ο συναρτητής $K_0$ για μοναδιαίες $C^*$-άλγεβρες

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την αβελιανή ομάδα $K_0$ μιας $C^*$-άλγεβρας με μονάδα και τον αντίστοιχο συναρτητή, από την κατηγορία των $C^*$-αλγεβρών με μονάδα, στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων.

## III.1 Η κατασκευή της ομάδας Grothendieck

Θα περιγράψουμε την κατασκευή μιας αβελιανής ομάδας από μια αβελιανή ημιομάδα, γενικεύοντας την κατασκευή των ακεραίων αριθμών από τους φυσικούς. Η κύρια διαφορά είναι ότι στη γενική περίπτωση, η αρχική ημιομάδα ενδέχεται να μην έχει την ιδιότητα της διαγραφής και επομένως δεν είναι πάντοτε δυνατή η εμφύτευση της στην ομάδα που κατασκευάζουμε.

Έστω $S$ μια αβελιανή ημιομάδα. Ορίζουμε στο $S \times S$ τη σχέση $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, αν υπάρχει $z$ στο $S$ ώστε $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η ομάδα Grothendieck $G(S)$ της $S$, είναι το πηλίκο $S \times S / \sim$, εφοδιασμένο με την πράξη

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle,$$

όπου $\langle x, y \rangle$ είναι η κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το $(x, y)$. Η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη, προσεταιριστική και μεταθετική, με ουδέτερο στοιχείο το $\langle x, x \rangle$ για τυχαίο $x$ στο $S$. Ακόμα είναι εύκολο να δούμε ότι $-\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\gamma : S \to G(S)$ με $\gamma(x) = \langle x + x, x \rangle$ , η οποία είναι προσθετική. Η ημιομάδα $(S, +)$ λέμε ότι έχει την ιδιότητα της διαγραφής, αν η σχέση $x + z = y + z$ συνεπάγεται ότι $x = y$, για κάθε $x, y, z$ στην $S$.

**Πρόταση III.1.** *Η ομάδα Grothendieck $G(S)$, μιας ημιομάδας $S$, έχει τις παρακάτω ιδιότητες.*

*(i)* $G(S) = \{\gamma(x) - \gamma(y) : x, y \in S\}$

*(ii) Αν $x, y$ είναι στοιχεία στην $S$, τότε $\gamma(x) = \gamma(y)$ αν και μόνο αν υπάρχει $z$ στην $S$ τέτοιο ώστε $x + z = y + z$. Επομένως η απεικόνιση Grothendieck $\gamma : S \to G(S)$, είναι 1-1, αν και μόνο αν η $S$ έχει την ιδιότητα της διαγραφής.*

(iii) Καθολική ιδιότητα. *Αν $H$ είναι μια αβελιανή ομάδα και $\alpha : S \to H$ είναι μια προσθετική απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\varphi : G(S) \to H$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ G(S) \arrow[r, "\varphi"'] & H \end{tikzcd}$$

(iv) *Αν $S, T$, είναι αβελιανές ημιομάδες και $\varphi : S \to T$ είναι μια προσθετική απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $G(\varphi) : G(S) \to G(T)$, έτσι ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_S"] & T \arrow[d, "\gamma_T"] \\ G(S) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(T) \end{tikzcd}$$

**Παραδείγματα.** (i) Η ομάδα Grothendieck της αβελιανής ημιομάδας $(\mathbb{Z}^+, +)$, είναι ισόμορφη με την ομάδα $(\mathbb{Z}, +)$. Πράγματι, θεωρώντας τον εγκλεισμό $i : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ και εφαρμόζοντας την καθολική ιδιότητα της κατασκευής Grothendieck, προκύπτει ένας ομομορφισμός ομάδων $\varphi : G(\mathbb{Z}^+) \to \mathbb{Z}$, με $\varphi(\gamma(x)) = x$, για κάθε $x$ στο $\mathbb{Z}^+$. Η $\varphi$ είναι ισομορφισμός, καθώς:

- Είναι μονομορφισμός

$$\varphi(\gamma(x) - \gamma(y)) = 0 \Rightarrow \varphi(\gamma(x)) = \varphi(\gamma(y)) \Rightarrow x = y \Rightarrow \gamma(x) - \gamma(y) = 0$$

- Αν $z$ είναι ένας ακέραιος αριθμός, τότε υπάρχουν $x, y$ στο $\mathbb{Z}^+$, ώστε

$$z = x - y = \varphi(\gamma(x)) - \varphi(\gamma(y)) = \varphi(\gamma(x) - \gamma(y))$$

(ii) Η ομάδα Grothendieck της αβελιανής ημιομάδας $\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, είναι η μηδενική ομάδα εφ'όσον, αν $x, y$ είναι στοιχεία της ημιομάδας, τότε $x + \infty = y + \infty$, και άρα $\gamma(x) = \gamma(y)$. Επομένως έχουμε

$$G(S) = \{\gamma(x) - \gamma(y) : x, y \in S\} = 0$$

## III.2 Δύο ημιομάδες προβολών

### Η ημιομάδα $(\mathcal{P}_\infty(A), \oplus)$

Θυμίζουμε ότι με $\mathcal{P}(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο των προβολών μιας $C^*$-άλγεβρας. Ορίζουμε επίσης:

$$\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(M_n(A)), \quad \mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$$

Ορίζουμε την πράξη $\oplus$ στο $\mathcal{P}_\infty(A)$, με:

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_{n+m}(A),$$

αν $p, q$ είναι προβολές στο $\mathcal{P}_n(A)$ και $\mathcal{P}_m(A)$ αντίστοιχα. Προφανώς η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική, όχι, όμως, μεταθετική.

**Η ημιομάδα** $(\mathcal{D}(A), +)$

Στο $\mathcal{P}_\infty(A)$, θα ταυτίσουμε τις προβολές στο $\mathcal{P}_n(A)$, που είναι ισοδύναμες κατά Murray-von Neumann, καθώς και κάθε προβολή $p$ στο $\mathcal{P}_n(A)$, με την προβολή diag($p, 0$) στο $\mathcal{P}_{n+1}(A)$. Η σχέση ισοδυναμίας που μόλις περιγράψαμε, μπορεί να οριστεί και ως εξής. Αν $p, q$ είναι προβολές στο $\mathcal{P}_n(A)$ και $\mathcal{P}_m(A)$ αντίστοιχα, γράφουμε $p \sim_0 q$, αν υπάρχει στοιχείο $v$ στο $M_{m,n}(A)$, ώστε $p = v^*v$ και $q = vv^*$. Προφανώς αν $p, q$ είναι προβολές στο $\mathcal{P}_n(A)$, τότε $p \sim_0 q$ αν και μόνο αν $p \sim q$. Επίσης $p \sim_0 p \oplus 0_n$, για κάθε φυσικό αριθμό $n$.

Ορίζουμε $\mathcal{D}(A)$ να είναι το πηλίκο $\mathcal{P}_\infty(A)/\sim_0$ και συμβολίζουμε με $[p]_\mathcal{D}$ την κλάση ισοδυναμίας που περιέχει την προβολή $p$. Ορίζουμε την πράξη $+$ στο $\mathcal{D}(A)$, με τη σχέση:

$$[p]_\mathcal{D} + [q]_\mathcal{D} = [p \oplus q]_\mathcal{D}$$

.

Με χρήση κατάλληλων πινάκων, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη και ότι $p \oplus q \sim_0 q \oplus p$, για κάθε δύο προβολές $p, q$ στο $\mathcal{P}_\infty(A)$. Ακόμα, η πράξη $\oplus$ είναι προσεταιριστική, άρα το ίδιο και η $+$. Τελικά το ζεύγος $(\mathcal{D}(A), +)$ αποτελεί μια αβελιανή ημιομάδα, η οποία έχει ουδέτερο στοιχείο το $[0_n]_\mathcal{D}$, για κάθε φυσικό αριθμό $n$.

## III.3 Η ομάδα $K_0$ και ο συναρτητής $K_0$

**Ορισμός.** Αν $A$ είναι μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα, ορίζουμε:

$$K_0(A) = G(\mathcal{D}(A)).$$

Έχουμε, λοιπόν τις συναρτήσεις $[\cdot]_\mathcal{D} : \mathcal{P}_\infty(A) \to \mathcal{D}(A)$ και $\gamma\colon \mathcal{D}(A) \to K_0(A)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $[\cdot]_0$, ως τη σύνθεση των δύο αυτών απεικονίσεων.

$$[\cdot]_0 : \mathcal{P}_\infty(A) \to K_0(A)\colon\ [p]_0 = \gamma([p]_\mathcal{D})$$

Από το (i) της Πρότασης III.1, προκύπτει άμεσα ότι:

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0\,, p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)\},$$

όπου οι προβολές $p, q$ μπορούν να επιλεγούν στο $\mathcal{P}_n(A)$, για κάποιο φυσικό αριθμό $n$, λόγω της σχέσης $p \sim_0 p \oplus 0_m$, για κάθε φυσικό αριθμό $m$.

**Πότε ισχύει $[p]_0 = [q]_0$;**

Θυμίζουμε ότι η συνάρτηση $\gamma$ δεν είναι, εν γένει, 1-1. Από την ιδιότητα (ii) της Πρότασης III.1, προκύπτει ότι δύο προβολές στο $\mathcal{P}_\infty(A)$ ταυτίζονται ως στοιχεία της $K_0(A)$, αν υπάρχει προβολή $r$ στο $\mathcal{P}_\infty(A)$, ώστε:

$$[p]_{\mathcal{D}} + [r]_{\mathcal{D}} = [q]_{\mathcal{D}} + [r]_{\mathcal{D},} \text{ ή ισοδύναμα } p \oplus r \sim_0 q \oplus r.$$

Προκύπτει, έτσι μια σχέση ισοδυναμίας, $\sim_s$, στο $\mathcal{P}_\infty(A)$, ασθενέστερη της $\sim_0$, η οποία ονομάζεται ευσταθής ισοδυναμία και για την οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} p \sim_s q \ &\Leftrightarrow \exists\, r \in \mathcal{P}_\infty(A) : p \oplus r \sim_0 q \oplus r \\ &\Leftrightarrow [p]_0 = [q]_0\,. \end{aligned}$$

**Πρόταση III.2.** *Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα. Ισχύουν τα παρακάτω:*

*(i)* $[p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$*, για κάθε $p, q$ στο $\mathcal{P}_\infty(A)$.*

*(ii)* $[0_n]_0 = 0 \in K_0(A)$*, για κάθε φυσικό αριθμό $n$.*

*(iii) Αν $p$,$q$ ανήκουν στο $\mathcal{P}_n(A)$, για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$ και $p \sim_h q$ στο $\mathcal{P}_n(A)$, τότε $[p]_0 = [q]_0$.*

*(iv) Αν $p, q$ είναι κάθετες προβολές στο $\mathcal{P}_n(A)$, τότε $[p+q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.*

*Απόδειξη.* Η (i) είναι αποτέλεσμα του ορισμού της πρόσθεσης στο $\mathcal{D}(A)$ και της προσθετικότητας της $\gamma$. Η (ii) προκύπτει από το γεγονός ότι το $[0_n]_0$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της $\mathcal{D}(A)$, για κάθε φυσικό αριθμό $n$.

(iii) Αν $p, q$ ανήκουν στο $\mathcal{P}_n(A)$, για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$, τότε:

$$p \sim_h q \Rightarrow p \sim q \Rightarrow p \sim_0 q.$$

(iv) Έστω $p, q$ στο $\mathcal{P}_n(A)$, για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$. Αν $pq = 0$, τότε $qp = (pq)^* = 0$ και άρα το στοιχείο $p + q$ είναι επίσης προβολή. Θέτουμε:

$$u = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in M_{2n,n}(A).$$

Τότε $p + q = u^*u$ και $p \oplus q = uu^*$, επομένως $p + q \sim_0 p \oplus q$.

□

**Λήμμα III.3.** *Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα και $p, q$ προβολές στο $\mathcal{P}_\infty(A)$, με $p \sim_s q$. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $n$, με $p \oplus 1_n \sim_0 q \oplus 1_n$.*

*Απόδειξη.* Αν $p \sim_s q$, υπάρχει φυσικός αριθμός $n$ και προβολή $r$ στο $\mathcal{P}_n(A)$, με $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$. Η προβολή $1_n - r$ είναι κάθετη στην $r$, επομένως ισχύει:

$$p \oplus 1_n = p \oplus (r + 1_n - r) \sim_0 p \oplus r \oplus (1_n - r) \sim_0 q \oplus r \oplus (1_n - r) \sim_0 q \oplus 1_n.$$

□

**Πρόταση III.4** (Καθολική ιδιότητα της $K_0$). *Έστω αβελιανή ομάδα $G$ και απεικόνιση $\nu\colon \mathcal{P}_\infty(A) \to G$, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

*(i)* $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q)$, *για κάθε $p, q$ στο $\mathcal{P}_\infty(A)$.*

*(ii)* $\nu(0_A) = 0 \in G$.

*(iii) Αν $p, q$ είναι ομοτοπικά στο $\mathcal{P}_n(A)$, τότε $\nu(p) = \nu(q)$.*

*Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\varphi\colon K_0(A) \to G$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} P_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_0(A) \arrow[r, "\varphi"'] & G \end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.*

- Έστω προβολές $p, q$ στο $\mathcal{P}_\infty(A)$, με $p \sim_0 q$. Αν η $p$ ανήκει στο $\mathcal{P}_m(A)$ και η $q$ στο $\mathcal{P}_n(A)$, με $m < n$, τότε $p \oplus 0_{n-m} \sim_0 p \sim_0 q$ και άρα $p \oplus 0_{n-m} \sim q$ στο $\mathcal{P}_n(A)$. Τότε από την πρόταση II.5, ισχύει:

$$(p \oplus 0_{n-m}) \oplus 0_{3n} \sim_h q \oplus 0_{3n},$$

άρα $\nu(p) + \nu(0_{n-m}) + \nu(0_{3n}) = \nu(q) + \nu(0_{3n})$ και τελικά $\nu(p) = \nu(q)$.

- Έστω προβολές $p, q$ στο $\mathcal{P}_\infty(A)$, με $p \sim_s q$. Τότε υπάρχει $r$ στο $\mathcal{P}_\infty(A)$, τέτοιο ώστε $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$, άρα $\nu(p) + \nu(r) = \nu(q) + \nu(r)$ κι επομένως $\nu(r) = \nu(q)$.

- Η ζητούμενη απεικόνιση πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\varphi([p]_0 - [q]_0) = \nu(p) - \nu(q), \quad p, q \in \mathcal{P}_\infty(A),$$

από την οποία γίνεται προφανής η μοναδικότητα. Για να δείξουμε ότι η $\varphi$ είναι καλά ορισμένη, παρατηρούμε ότι για $p, q, p', q'$ στο $\mathcal{P}_\infty(A)$, ισχύει:

$$\begin{aligned}[p]_0 - [q]_0 = \left[p'\right]_0 - \left[q'\right]_0 &\Rightarrow [p]_0 + \left[q'\right]_0 = \left[p'\right]_0 + [q]_0 \\ &\Rightarrow p \oplus q' \sim_s p' \oplus q \Rightarrow \nu(p) + \nu(q') = \nu(p') + \nu(q).\end{aligned}$$

- Η προσθετικότητα της $\varphi$ προκύπτει εύκολα από την προσθετικότητα της $\nu$.

□

**0 συναρτητής $K_0$**

Έστω $A, B$ $C^*$-άλγεβρες με μονάδα και $\varphi\colon A \to B$ ένας $^*$-ομομορφισμός. Όπως έχουμε δει, η $\varphi$ επάγει έναν $^*$-ομομορφισμό $\varphi_n\colon M_n(A) \to M_n(B)$, για κάθε φυσικό αριθμό $n$ (συχνά αντί για $\varphi_n$, γράφουμε απλώς $\varphi$). Καθώς κάθε $^*$-ομομορφισμός απεικονίζει προβολές σε προβολές, προκύπτει μια συνάρτηση $\varphi\colon \mathcal{P}_\infty(A) \to \mathcal{P}_\infty(B)$.

Η $\nu\colon \mathcal{P}_\infty(A) \to K_0(B)$, με $\nu(p) = [\varphi(p)]_0$, ικανοποιεί τις συνθήκες της καθολικής ιδιότητας της $K_0$. Για παράδειγμα, αν $v_t$ είναι ένα μονοπάτι που δείχνει ότι $p \sim_h q$ στο $\mathcal{P}_n(A)$, τότε το $\varphi(v_t)$ είναι ένα συνεχές μονοπάτι που δείχνει ότι $\varphi(p) \sim_h \varphi(q)$ στο $\mathcal{P}_n(B)$ και άρα $\nu(p) = \nu(q)$. Επομένως υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $K_0(\varphi)\colon K_0(A) \to K_0(B)$, έτσι ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_\infty(A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\cdot]_0}"] & \mathcal{P}_\infty(B) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"] \\
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\varphi)"'] & K_0(B)
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0$, μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι ο $K_0$ είναι πράγματι ένας συναλλοίωτος συναρτητής, από την κατηγορία των $C^*$-αλγεβρών με μονάδα, στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, όπως μας λέει η παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση III.5.** *Αν $A, B, C$ είναι $C^*$-άλγεβρες με μονάδα, τότε:*

*(i)* $K_0(id_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$

*(ii) Αν $\varphi\colon A \to B$ και $\psi\colon B \to C$ είναι $^*$-ομομορφισμοί, τότε $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.*

*Απόδειξη.* Είναι άμεση από τον ορισμό του συναρτητή $K_0$, από την στοιχειώδη παρατήρηση ότι ο $^*$-ομομορφισμός που επάγει η $\mathrm{id}_A$ είναι η ταυτοτική της $M_n(A)$, καθώς και ότι $\psi_n \circ \varphi_n = (\psi \circ \varphi)_n\colon M_n(A) \to M_n(C)$. □

Επίσης ισχύει $M_n(\{0\}) = \{0_n\} = \mathcal{P}_n(\{0\})$ και επομένως $K_0(\{0\}) = 0$. Επιπλέον η μηδενική απεικόνιση μεταξύ δύο $C^*$-αλγεβρών μπορεί να παραγοντοποιηθεί, σύμφωνα με το σχήμα $A \to \{0\} \to B$ και άρα, καθώς $K_0(\{0\}) = 0$ , η επαγόμενη απεικόνιση μεταξύ των $K_0(A)$ και $K_0(B)$ είναι η σύνθεση δύο αναγκαστικά μηδενικών απεικονίσεων και άρα μηδενική.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι ο συναρτητής που έχουμε ορίσει είναι ομοτοπικά αναλλοίωτος.

**Πρόταση III.6.** *Έστω $A, B$ δύο $C^*$-άλγεβρες με μονάδα.*

*(i) Αν $\varphi, \psi\colon A \to B$ είναι ομοτοπικοί $^*$-ομομορφισμοί, τότε $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.*

*(ii) Αν $\varphi$ είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία, τότε η απεικόνιση $K_0(\varphi)\colon K_0(A) \to K_0(B)$ είναι ισομορφισμός ομάδων.*

*Απόδειξη.* (i) Αν $p = (a_{ij})_{i,j}$ είναι μια προβολή στο $\mathcal{P}_n(A)$, για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$ και $\varphi(t)$ είναι ένα μονοπάτι $^*$-ομομορφισμών που δείχνει ότι οι $\varphi$ και $\psi$ είναι ομοτοπικοί, τότε για κάθε $i, j$ , το μονοπάτι $\varphi_t(a_{ij})$ είναι εξ'ορισμού συνεχές, άρα και το μονοπάτι $\varphi_t(p)$ στο $M_n(B)$ είναι επίσης συνεχές και επιπλέον παίρνει τιμές στο $\mathcal{P}_n(B)$, καθώς οι $\varphi_t$ είναι $^*$-ομομορφισμοί. Επομένως $\varphi(p) \sim_h \psi(p)$ και συνεπώς $[\varphi(p)]_0 = [\psi(p)]_0$ , που δείχνει ότι τελικά ισχύει $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) και το γεγονός ότι ο $K_0$ είναι συναρτητής.

$\square$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

## Ο συναρτητής $K_0$ στη γενική περίπτωση

### IV.1 Επέκταση του συναρτητή $K_0$

Όπως έχουμε δει, για κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$, μπορούμε να θεωρήσουμε την ακόλουθη βραχεία ακριβή ακολουθία $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών:

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow O.$$

Η $A$ μπορεί να ταυτιστεί με την εικόνα του $i$, η οποία ισούται με τον πυρήνα του $\pi$. Οι $\tilde{A}$ και $\mathbb{C}$ είναι $C^*$-άλγεβρες με μονάδα και ήδη έχουμε ορίσει τον ομομορφισμό ομάδων:

$$K_0(\pi)\colon K_0(\tilde{A}) \to K_0(\mathbb{C}).$$

**Ορισμός.** Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα. Ορίζουμε $K_0(A) = \mathrm{ker} K_0(\pi)$.

Η $K_0(A)$, ως υποομάδα της $K_0(\tilde{A})$, είναι κι αυτή μια αβελιανή ομάδα. Στη συνέχεια θα δειξουμε ότι στην περίπτωση που η $A$ έχει μονάδα, ο παραπάνω ορισμός της $K_0(A)$, συμπίπτει, ως προς ισομορφισμό, με αυτόν που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση, στην οποία χρησιμοποιούμε τον ορισμό του συναρτητή $K_0$, από το προηγούμενο κεφάλαιο.

**Πρόταση IV.1.** *Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα. Θεωρούμε τη διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία:*

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \underset{\rho}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow O.$$

*Η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων και $^*$-ομομορφισμών,*

$$O \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(i)} K_0(\tilde{A}) \underset{K_0(\rho)}{\overset{K_0(\pi)}{\rightleftarrows}} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow O$$

*είναι επίσης διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.*

*Απόδειξη.* Αν $f = 1_{\tilde{A}} - 1_A \in \tilde{A}$, τότε για κάθε $\alpha$ στην $A$ ισχύει $\alpha f = f\alpha = 0$ και επιπλέον $\tilde{A} = A + \mathbb{C}f$. Ορίζοντας τους $^*$-ομομορφισμούς $\mu\colon \tilde{A} \to A$ με $\mu(\alpha + \lambda f) = \alpha$, και $p'\colon \mathbb{C} \to \tilde{A}$, με $p'(\lambda) = \lambda f$, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\pi \circ p = id_{\mathbb{C}},\ \mu \circ i = id_A,\ \pi \circ i = 0,\ i \circ \mu + p' \circ \pi = id_{\tilde{A}}.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $K_0$ είναι συναρτητής για την κατηγορία των $C^*$-αλγεβρών με μονάδα, μπορούμε να συμπεράνουμε το ζητούμενο. Από την πρώτη σχέση προκύπτει ότι $K_0(\pi) \circ K_0(p) = id_{K_0(\mathbb{C})}$ κι επομένως ο $K_0(\pi)$ είναι και επί και η ακολουθία είναι διασπώμενη. Από τη δεύτερη σχέση έχουμε $K_0(\mu) \circ K_0(i) = id_{K_0(A)}$ και άρα ο $K_0(A)$ είναι 1-1. Από την τρίτη σχέση συμπεραίνουμε ότι im$K_0(i) \subseteq$ ker$K_0(\pi)$ και τέλος, από τη τελευταία σχέση και το επόμενο λήμμα, έχουμε τη σχέση:

$$K_0(i) \circ K_0(\mu) + K_0(p') \circ K_0(\pi) = id_{K_0(\tilde{A})},$$

από την οποία εξάγουμε ότι ker$K_0(\pi) \subseteq$ im$K_0(i)$. □

**Λήμμα IV.2.** *Αν $A, B$ είναι $C^*$-άλγεβρες με μονάδα και $\phi, \psi\colon A \to B$ είναι $^*$-ομομορφισμοί κάθετοι μεταξύ τους $(\varphi(x) \cdot \psi(y) = 0, \forall x, y \in A)$, τότε η συνάρτηση $\varphi + \psi\colon A \to B$, είναι επίσης $^*$-ομομορφισμός και ισχύει $K_0(\varphi + \psi) = K_0(\varphi) + K_0(\psi)$.*

*Απόδειξη.* Προφανώς η $\varphi + \psi$ είναι γραμμική και διατηρεί την ενέλιξη. Καθώς οι $^*$-ομομορφισμοί $\varphi$ και $\psi$ είναι κάθετοι, έπεται ότι η $\varphi + \psi$ είναι και πολλαπλαστική. Αν $p \in \mathcal{P}_n(A)$, για κάποιο φυσικό αριθμό $n$, τότε οι προβολές $\varphi_n(p)$ και $\psi_n(p)$ είναι κάθετες και από το (iv) της προτασης III.3, έχουμε:

$$\begin{aligned} K_0(\varphi + \psi)([p]_0) &= [(\varphi + \psi)_n(p)]_0 = [\varphi_n(p) + \psi_n(p)]_0 \\ &= [\varphi_n(p)]_0 + [\psi_n(p)]_0 \\ &= K_0(\varphi)([p]_0) + K_0(\psi)([p]_0). \end{aligned}$$

□

Η ακρίβεια της ακολουθίας των αβελιανών ομάδων της πρότασης IV.1, μας δείχνει ότι χρησιμοποιώντας τον ορισμό του προηγούμενου κεφαλαίου, για την ομάδα $K_0(A)$ μιας $C^*$-άλγεβρας $A$ με μονάδα, έχουμε:

$$K_0(A) \simeq \text{im}K_0(i) = \text{ker}K_0(\pi).$$

Επομένως οι δυο ορισμοί μας δίνουν ισόμορφες ομάδες. Χρησιμοποιώντας το νέο ορισμό για την $K_0(A)$, είτε η αρχική $C^*$-άλγεβρα $A$ έχει μονάδα, είτε όχι, τότε $K_0(A) \leq K_0(\tilde{A})$ και η IV.1, είναι πάλι μια διασπώμενη ακριβής ακολουθία, αρκεί να αντικαταστήσουμε τον $K_0(i)$ με τον εγκλεισμό της $K_0(A)$ στην $K_0(\tilde{A})$. Η ακρίβεια στην $K_0(\tilde{A})$ είναι ακριβώς η σχέση με την οποία ορίσαμε την $K_0(A)$.

## **Ο συναρτητής** $K_0$

Θα περιγράψουμε πως ο $K_0$ γίνεται συναρτητής από την κατηγορία των $C^*$-αλγεβρών προς την κατηγορία των αβελιανών ομάδων, επεκτείνοντας τον συναρτητή $K_0$ που ήδη έχουμε ορίσει.

Έστω $A, B$ δύο $C^*$-άλγεβρες και $\varphi\colon A \to B$ ένας $^*$-ομομορφισμός. Αυτός επάγει έναν $^*$-ομομορφισμό $\tilde{\varphi}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$ και στη συνέχεια τον ομομορφισμό $K_0(\tilde{\varphi})\colon K_0(\tilde{A}) \to K_0(\tilde{B})$. Θεωρώντας τους εγκλεισμούς $i_1, i_2$, έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, dashed] & K_0(\tilde{A}) \arrow[d, "K_0(\tilde{\varphi})"] \\ K_0(B) \arrow[r, "i_2"'] & K_0(\tilde{B}) \end{tikzcd}$$

το οποίο γίνεται μεταθετικό, μόνο αν θεωρήσουμε τον περιορισμό του $K_0(\tilde{\varphi})$ στην $K_0(A)$. Θα δείξουμε ότι ο περιορισμός αυτός παίρνει τιμές στην $K_0(B)$. Θεωρούμε τους συνήθεις επιμορφισμούς $\pi_A\colon \tilde{A} \to \mathbb{C}$ και $\pi_B\colon \tilde{B} \to \mathbb{C}$. Έστω $x \in K_0(A) = \ker K_0(\pi_A)$. Ισχύει $\pi_B \circ \tilde{\varphi} = \pi_A$ και άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} K_0(\pi_B) \circ K_0(\tilde{\varphi})(x) = K_0(\pi_B \circ \tilde{\varphi})(x) = \\ = K_0(\pi_A)(x) = 0. \end{aligned}$$

Επομένως $K_0(\widetilde{\varphi})(x) \in \ker K_0(\pi_B) = K_0(B)$. Ορίζουμε, λοιπόν, τον ομομορφισμό $K_0(\varphi)$, ως τον περιορισμό του $K_0(\widetilde{\varphi})$ στην $K_0(A)$, και το διάγραμμα γίνεται μεταθετικό.

**Πρόταση IV.3.** *Αν $A, B, C$ είναι $C^*$-άλγεβρες, ισχύουν τα εξής:*

*(i)* $K_0(id_A) = id_{K_0(A)}$

*(ii) Αν $\varphi\colon A \to B$ και $\psi\colon B \to C$ είναι $^*$-ομομορφισμοί, τότε $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$*

*Απόδειξη.* Καθώς ο $K_0$ είναι συναρτητής στην περίπτωση των $C^*$-αλγεβρών με μονάδα, ισχύει:

(i) $K_0(\widetilde{id_A}) = K_0(id_{\widetilde{A}}) = id_{K_0(\widetilde{A})}$,
επομένως και ο περιορισμός στην $K_0(A)$ είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός.

(ii) $K_0(\widetilde{\psi \circ \varphi}) = K_0(\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}) = K_0(\widetilde{\psi}) \circ K_0(\widetilde{\varphi})$,
άρα και οι περιορισμοί στην $K_0(A)$ είναι ίσοι.

$\square$

Αν $A = \{0\}$, τότε η $\pi\colon \tilde{A} \to \mathbb{C} : (0, \lambda) \mapsto \lambda$ είναι $^*$-ισομορφισμός, συνεπώς $K_0(\{0\}) = \ker(K_0(\pi)) = 0$. Με το ίδιο ακριβώς επιχείρημα, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε στη συνέχεια να δείξουμε ότι ο ομομορφισμός ομάδων που αντιστοιχεί, μέσω του $K_0$, στον μηδενικό $^*$-ομομορφισμο μεταξύ δυο $C^*$-αλγεβρών, είναι ο μηδενικός.

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε τώρα, ότι ο συναρτητής $K_0$ είναι ομοτοπικά αναλλοίωτος.

**Πρόταση IV.4.** *Έστω $A, B$ δύο $C^*$-άλγεβρες*

*(i) Αν $\varphi, \psi \colon A \to B$ είναι ομοτοπικοί $^*$-ομομορφισμοί, τότε $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$*

*(ii) Αν $A, B$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμες $C^*$-άλγεβρες, τότε $K_0(A) \simeq K_0(B)$.*

*Απόδειξη.* Για το $(i)$, παρατηρούμε ότι αν $\varphi_t$ είναι ένα μονοπάτι $^*$-ομομορφισμών, που δείχνει ότι $\varphi \sim_h \psi$, τότε το μονοπάτι $\tilde{\varphi}_t$ δείχνει ότι $\tilde{\varphi} \sim_h \tilde{\psi}$ και άρα $K_0(\tilde{\varphi}) = K_0(\tilde{\psi})$. Έπεται ότι και οι περιορισμοί στην $K_0(A)$ είναι ίσοι. Το $(ii)$ προκύπτει από το $(i)$ και το γεγονός ότι ο $K_0$ είναι συναρτητής. □

**Ορισμός.** Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα. Έχουμε ορίσει τις συναρτήσεις $\pi \colon \tilde{A} \to \mathbb{C}$ και $\rho \colon \mathbb{C} \to \tilde{A}$, με $\pi \circ \rho = id_{\mathbb{C}}$. Η βαθμωτή απεικόνιση είναι ο $^*$-ομομορφισμός:

$$s = \rho \circ \pi \colon \tilde{A} \to \tilde{A} : (x, \lambda) \mapsto (0, \lambda).$$

Προφανώς $\pi \circ s = \pi$. Ένα στοιχείο $y$ της $\tilde{A}$ λέγεται βαθμωτό, αν $y = s(y)$, δηλαδή αν το $y$ είναι της μορφής $(0, \lambda)$, για κάποιο $\lambda$ στο $\mathbb{C}$. Η $s$ επάγει τον $^*$-ομομορφισμό $s_n \colon M_n(\tilde{A}) \to M_n(\tilde{A})$ και ένα στοιχείο $y$ της $M_n(\tilde{A})$ λέγεται βαθμωτό, αν $y = s_n(y)$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια αναλυτικότερη περιγραφή των στοιχείων της $K_0(A)$.

**Πρόταση IV.5.** *Για κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$, ισχύει η σχέση:*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})\}.$$

*Απόδειξη.* Αρχικά παρατηρούμε ότι καθώς ένας $^*$-ομομορφισμός απεικονίζει προβολές σε προβολές, το $s(p)$ ανήκει επίσης στο $\mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$ και το στοιχείο $[p]_0 - [s(p)]_0$ ανήκει στην $K_0(\tilde{A})$. Επιπλέον, ανήκει στην $K_0(A) = \ker K_0(\pi)$, αφού ισχύει:

$$K_0(\pi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\pi(p)]_0 - [\pi \circ s(p)]_0 = 0.$$

Αντίστροφα, έστω $x \in K_0(A) \leq K_0(\tilde{A})$. Τότε υπάρχει $n$ στο $\mathbb{N}$ και $e, f$ στο $\mathcal{P}_n(\tilde{A})$, με $x = [e]_0 - [f]_0$. Αν $1_n$ είναι η μονάδα της $M_n(\tilde{A})$, γνωρίζουμε ότι το στοιχείο $1_n - f$ είναι μια προβολή κάθετη στην $f$, και άρα ισχυεί:

$$[1_n]_0 = [(1_n - f) + f]_0 = [1_n - f]_0 + [f]_0 .$$

Θεωρούμε την προβολή $p = e \oplus (1_n - f)$ της $M_{2n}(\tilde{A})$. Ισχύει:

$$[p]_0 = [e]_0 + [1_n]_0 - [f]_0 = x + [1_n]_0 .$$

Άρα $x = [p]_0 - [1_n]_0$. Επιπλέον, το $x$ ανήκει στον πυρήνα της $K_0(\pi)$ και το $1_n$ είναι βαθμωτό στοιχείο, επομένως:

$$\begin{aligned} 0 = K_0(\lambda) \circ K_0(\pi)(x) = K_0(s)(x) = [s_{2n}(p)]_0 - [s_n(1_n)]_0 = \\ = [s_{2n}(p)]_0 - [1_n]_0 . \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε $[1_n]_0 = [s(p)]_0$ και $x = [p]_0 - [s(p)]_0$. □

**Πρόταση IV.6.** *Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα και $p, q$ προβολές στο $\mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$

*(ii) Υπάρχουν προβολές $r_1, r_2$ που είναι βαθμωτά στοιχεία του $\mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$, τέτοια ώστε $p \oplus r_1 \sim_0 q \oplus r_2$.*

*(iii) Υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $k, l$, έτσι ώστε $p \oplus 1_k \sim_0 q \oplus 1_l$*

*Απόδειξη.*

- Αν ισχύει η $(i)$, τότε $[p \oplus s(q)]_0 = [q \oplus s(p)]_0$ ή ισοδύναμα $p \oplus s(q) \sim_s q \oplus s(p)$. Από το λήμμα III.3 , υπάρχει $n$ στο $\mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$p \oplus s(q) \oplus 1_n \sim_0 q \oplus s(p) \oplus 1_n.$$

  Καθώς οι προβολές $s(q) \oplus 1_n$ και $s(p) \oplus 1_n$ είναι βαθμωτά στοιχεία, ισχύει η $(ii)$.

- Για να δείξουμε ότι $(iii) \Rightarrow (ii)$, δείχνουμε αρχικά ότι αν $p \in \mathcal{P}_n(\tilde{A})$ και $q \in \mathcal{P}_m(\tilde{A})$, με $p \sim_0 q$, τότε $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$. Αν $p \sim_0 q$, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει και $s(p) \sim_0 s(q)$. Πράγματι , υπάρχει $v \in M_{m,n}(\tilde{A})$ με $p = v^*v$ και $q = vv^*$ και τότε $s(v) \in M_{m,n}(\tilde{A}), s(p) = s(v)^*s(v)$ και $s(q) = s(v)s(v)^*$, άρα $s(p) \sim_0 s(q)$. Τώρα, λοιπόν, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} p \oplus 1_k \sim_0 q \oplus 1_l &\Rightarrow [p \oplus 1_k]_0 - [s(p \oplus 1_k)]_0 = [q \oplus 1_l]_0 - [s(q \oplus 1_l)]_0 \\ &\Rightarrow [p]_0 + [1_k]_0 - [s(p)]_0 - [1_k]_0 = [q]_0 + [1_l]_0 - [s(q)]_0 - [1_l]_0 \\ &\Rightarrow [p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0 . \end{aligned}$$

□

Παρατηρούμε ότι αν έχουμε μια προβολή $p$, που ανήκει στο $\mathcal{P}_\infty(A)$, τότε αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο της $\mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$, για το οποίο ισχύει $s(p) = 0 \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$. Έπεται ότι το $[p]_0$ είναι ένα στοιχείο της $K_0(A)$. Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε παρατηρώντας ότι το $[p]_0$ ανήκει στον πυρήνα του $K_0(\pi)$.

## IV.2 Ιδιότητες του συναρτητή $K_0$

**Λήμμα IV.7.** *Έστω $A, B$ δύο $C^*$-άλγεβρες και $\varphi \colon A \to B$ ένας $^*$-ομομορφισμός. Έστω $x$ ενα στοιχείο του πυρήνα του $K_0(\varphi)$ [ker$K_0(\varphi) = K_0(A) \cap$ ker$K_0(\tilde{\varphi})$]. Τότε:*

*(i) Υπάρχει προβολή $p$ στο $\mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$, έτσι ώστε $x = [p]_0 - [s(p)]_0$ και $\tilde{\varphi}(p) \sim_u s\tilde{\varphi}(p)$*

*(ii) Αν η $\varphi$ είναι επί, υπάρχει προβολή $p$ στο $\mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$, με $x = [p]_0 - [s(p)]_0$ και $\tilde{\varphi}(p) = s\tilde{\varphi}(p)$.*

*Απόδειξη.* (i) Καθώς $x \in K_0(A)$, υπάρχει $n$ στο $\mathbb{N}$ και $p_1$ στο $\mathcal{P}_n(\tilde{A})$, με $x = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0$. Ακόμα ισχύει:

$$0 = K_0(\varphi)(x) = [\tilde{\varphi}(p_1)]_0 - [\tilde{\varphi}(s(p_1))]_0 = [\tilde{\varphi}(p_1)]_0 - [s\tilde{\varphi}(p_1)]_0 .$$

Επομένως $\tilde{\varphi}(p_1) \sim_s s\tilde{\varphi}(p_1)$ και από το λήμμα III.3, υπάρχει $m$ στο $\mathbb{N}$, με

$$\tilde{\varphi}(p_1) \oplus 1_m \sim_0 s\tilde{\varphi}(p_1) \oplus 1_m.$$

Θεωρούμε την προβολή $p_2 = p_1 \oplus 1_m$ στο $\mathcal{P}_{n+m}(\tilde{A})$. Από την προηγούμενη πρόταση $x = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0 = [p_2]_0 - [s(p_2)]_0$. Επιπλέον ισχύει:

$$\tilde{\varphi}(p_2) = \tilde{\varphi}(p_1) \oplus 1_m \sim_0 s\tilde{\varphi}(p_1) \oplus 1_m = s\tilde{\varphi}(p_2).$$

Αν θεωρήσουμε τις προβολές $\tilde{\varphi}(p_2)$ και $s\tilde{\varphi}(p_2)$ σαν πίνακες διπλάσιας διάστασης, είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες. Για να μπορούμε να περιγράψουμε και το $x$ βάσει της αντίστοιχης προβολής, ορίζουμε

$$p_3 = p_2 \oplus 0_{n+m} \in \mathcal{P}_{2(n+m)}(\tilde{A}).$$

Ισχύει $p_3 \sim_0 p_2$ και άρα $x = [p_3]_0 - [s(p_3)]_0$. Τέλος έχουμε:

$$\tilde{\varphi}(p_3) = \tilde{\varphi}(p_2) \oplus 0_{n+m} \sim_u s\tilde{\varphi}(p_2) \oplus 0_{n+m} = s\tilde{\varphi}(p_3).$$

(ii) Ο $\tilde{\varphi}$ είναι ένας $^*$-ομομορφισμός μεταξύ μοναδιαίων $C^*$-αλγεβρών. Αν είναι επί, τότε διατηρεί τη μονάδα και όπως έχουμε δει ισχύει $\tilde{\varphi}(U_0(M_n(\tilde{A}))) = U_0(M_n(\tilde{B}))$. Αν $u$ ανήκει στο $U(M_n(A))$, με $u\tilde{\varphi}(p_3)u^* = s\tilde{\varphi}(p_3)$, τότε το $\mathrm{diag}(u, u^*)$ ανήκει στο $U_0(M_{2n}(\tilde{B}))$ και μπορούμε να βρούμε $\upsilon$ στο $U_0(M_{2n}(\tilde{A}))$, με $\tilde{\varphi}(\upsilon) = \mathrm{diag}(u, u^*)$. Θεωρούμε την προβολή $p_4 = \upsilon\mathrm{diag}(p_3, 0_{2(n+m)})\upsilon^*$ στο $M_{4(n+m)}(\tilde{A})$. Τότε $p_3 \oplus 0 \sim_u p_4$, άρα $p_4 \sim_0 p_3 \oplus 0 \sim p_3$ και $x = [p_4]_0 - [s(p_4)]_0$. Το $\tilde{\varphi}(p_4)$ είναι βαθμωτό στοιχείο, καθώς ισχύει:

$$\tilde{\varphi}(p_4) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(p_3) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(p_3) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Αν

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών, τότε η $\varphi$ είναι $1-1$. Προφανώς οι επαγόμενοι $^*$-ομομορφισμοί $\tilde{\varphi}\colon \tilde{I} \to \tilde{A}$ και $\tilde{\varphi}_n\colon M_n(\tilde{I}) \to M_n(\tilde{A})$, είναι επίσης $1-1$.

Μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση είναι η εξής. Ένα στοιχείο $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j}$ της $M_n(\tilde{A})$, ανήκει στην εικόνα της $\tilde{\varphi}_n$, αν και μόνο αν το $\tilde{\psi}_n(\alpha)$ είναι βαθμωτό. Πράγματι αν το $\alpha$ ανήκει στην εικόνα της $\tilde{\varphi}_n$, υπάρχει $b = ((x_{ij}, \lambda_{ij}))_{i,j}$ στην $M_n(\tilde{I})$, με $\tilde{\varphi}_n(b) = \alpha$. Έτσι έχουμε:

$$\tilde{\psi}_n(\alpha) = \tilde{\psi}_n(\tilde{\varphi}_n(b)) = (\psi \circ \varphi(x_{ij}), \lambda_{ij})_{i,j} = (0, \lambda_{ij})_{i,j}.$$

Αντίστροφα, αν $\alpha = ((y_{ij}, \lambda_{ij}))_{i,j}$ είναι ένα στοιχείο της $M_n(\tilde{A})$, έτσι ώστε το $\tilde{\psi}_n(\alpha)$ να είναι βαθμωτό, τότε για κάθε $i, j$ ισχύει $\psi(y_{ij}) = 0$, άρα $y_{ij} \in \ker\psi = \mathrm{im}\varphi$ και τελικά το $\alpha$ ανήκει στην εικόνα της $\tilde{\varphi}_n$.

Τώρα μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε μια σημαντική ιδιότητα του συναρτητή $K_0$.

**Πρόταση IV.8.** *Ο συναρτητής $K_0$ είναι ημιακριβής.*

*Απόδειξη.* Έστω
$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$
μια ακριβής ακολουθίας $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών. Πρέπει να δείξουμε ότι η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων:
$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B),$$
είναι ακριβής στην $K_0(A)$, δηλαδή ότι im$K_0(\varphi) =$ ker$K_0(\psi)$. Ο $K_0$ είναι συναρτητής και ισχύει $\psi \circ \varphi = 0$, συνεπώς
$$K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(0) = 0.$$
Η σχέση αυτή δείχνει ότι im$K_0(\varphi) \subseteq$ ker$K_0(\psi)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in$ ker$K_0(\psi)$. Καθώς ο $\psi$ είναι επί, από το $(ii)$ του λήμματος IV.7, μπορούμε να βρούμε προβολή στο $\mathcal{P}_n(\tilde{A})$, με $x = [p]_0 - [s(p)]_0$ και το $\tilde{\psi}(p)$ να είναι βαθμωτό στοιχείο. Τότε, όμως, το $p$ ανήκει στην εικόνα του $\tilde{\varphi}$, δηλαδή υπάρχει $q$ στο $M_n(\tilde{I})$, με $\tilde{\varphi}(q) = p$. Ο $\varphi$ είναι $1-1$, άρα το ίδιο και ο $\tilde{\varphi}$. Επομένως το $q$ είναι επίσης προβολή. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη, παρατηρώντας ότι:
$$K_0(\varphi)([q]_0 - [s(q)]_0) = [\tilde{\varphi}(q)]_0 - [s\tilde{\varphi}(q)]_0 = [p]_0 - [s(p)]_0 = x.$$
□

**Πρόταση IV.9.** *Ο συναρτητής $K_0$ είναι διασπώμενα ακριβής.*

*Απόδειξη.* Έστω μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία $C^*$-αλγεβρών:
$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \underset{\lambda}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0.$$
Πρέπει να δείξουμε ότι η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων:
$$0 \longrightarrow K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \underset{K_0(\lambda)}{\overset{K_0(\psi)}{\rightleftarrows}} K_0(B) \longrightarrow 0,$$
είναι επίσης μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.

- Ο $K_0$ είναι ημιακριβής, άρα έχουμε ακρίβεια στην $K_0(A)$.
- Η αρχική ακολουθία είναι διασπώμενη, που σημαίνει ότι $\psi \circ \lambda = id_B$ και επομένως $K_0(\psi) \circ K_0(\lambda) = id_{K_0(B)}$. Άρα ο $K_0(\psi)$ είναι επί και η ακολουθία είναι διασπώμενη.

- Δείχνουμε ότι η $K_0(\varphi)$ είναι 1-1. Ένα στοιχειο του πυρήνα της $K_0(\varphi)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $[p]_0 - [s(p)]_0$, με $p$ στο $\mathcal{P}_n(\widetilde{I})$, για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$, έτσι ώστε οι προβολές $\widetilde{\varphi}(p)$ και $s(\widetilde{\varphi}(p))$ του $\mathcal{P}_n(\widetilde{A})$ να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες. Αρκεί να δείξουμε ότι οι προβολές $p$ και $s(p)$ είναι επίσης ορθομοναδιαία ισοδύναμες.

  Έστω $u$ στο $U_n(\widetilde{A})$, με $u\widetilde{\varphi}(p)u^* = s(\widetilde{\varphi}(p))$. Παρατηρούμε ότι, αφού η αρχική ακολουθία είναι διασπώμενη, το στοιχείο $v = (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^*)u$ απεικονίζεται, μέσω της $\widetilde{\psi}$, στο βαθμωτό στοιχείο $\widetilde{\psi}(u^*u) = 1_n$. Επομένως, υπάρχει $w$ στην $M_n(\widetilde{I})$, με $\widetilde{\varphi}(w) = v$. Επειδή το $v$, ως γινόμενο ορθομοναδιαίων, είναι ορθομοναδιαίο, και ο $\widetilde{\varphi}$ είναι $1-1$, το $w$ είναι κι αυτό ορθομοναδιαίο. Μάλιστα, καθώς η $\widetilde{\varphi}$ είναι 1-1 και οι επαγόμενοι στους $n \times n$ πίνακες $^*$-ομομορφισμοί αφήνουν αναλλοίωτο το βαθμωτό μέρος ενός πίνακα με στοιχεια από την μοναδοποίηση, το $w$ δείχνει ότι $\widetilde{\varphi}(p) \sim_u s(\widetilde{\varphi}(p))$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(wpw^*) &= (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^*)u\widetilde{\varphi}(p)u^*(\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u) \\
&= (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^*)s(\widetilde{\varphi}(p))(\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u) \\
&= \widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi}(u^* s(\widetilde{\varphi}(p))u) \\
&= \widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi}(\widetilde{\varphi}(p)) = s(\widetilde{\varphi}(p)) = \widetilde{\varphi}(s(p)).
\end{aligned}$$

□

Έστω $G_1, G_2, G$ αβελιανές ομάδες και $f_i \colon G_i \to G$ ομομορφισμός ομάδων $(i = 1, 2)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η απεικόνιση:

$$f = f_1 \oplus f_2 \colon G_1 \oplus G_2 \to G,$$

με $f(g_1, g_2) = f_1(g_1) + f_2(g_2)$ είναι επίσης ομομορφισμός ομάδων.

**Πρόταση IV.10.** *Αν $A, B$ είναι $C^*$-άλγεβρες, τότε:*

$$K_0(A \oplus B) \simeq K_0(A) \oplus K_0(B).$$

*Απόδειξη.* Οι συνήθεις $^*$-μονομορφισμοί, $i_A \colon A \to A \oplus B$ και $i_B \colon B \to A \oplus B$ επάγουν τους ομομορφισμούς:

$$K_0(i_A) \colon K_0(A) \to K_0(A \oplus B), \quad K_0(i_B) \colon K_0(B) \to K_0(A \oplus B).$$

Όπως ξέρουμε, μπορούμε να θεωρήσουμε την διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A \oplus B \underset{i_B}{\overset{\pi_B}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0.$$

0 $K_0$ είναι διασπώμενα ακριβής, άρα στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & K_0(A) \oplus K_0(B) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "K_0(i_A) \oplus K_0(i_B)"] & K_0(B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(i_A)"'] & K_0(A \oplus B) \arrow[r, "K_0(\pi_B)"'] & K_0(B) \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

όχι μόνο η πρώτη, αλλά και η δεύτερη γραμμή είναι βραχεία ακριβής ακολουθία. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Από το $5$ λήμμα , προκύπτει ότι ο $K_0(i_A) \oplus K_0(i_B)$ είναι ισομορφισμός. □

**Πρόταση IV.11.** *Αν $A$ είναι μια $C^*$-άλγεβρα και $n$ ένας φυσικός αριθμός, τότε $K_0(M_n(A)) \simeq K_0(A)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $n$ ένας φυσικός αριθμός. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\lambda_A \colon A \to M_n(A) : \alpha \mapsto \mathrm{diag}(\alpha, 0, \cdots, 0),$$

η οποία είναι $^*$-ομομορφισμός.

Θα κάνουμε μια σκιαγράφηση της απόδειξης στην περίπτωση που η $A$ έχει μονάδα. Με ένα φυσικό τρόπο μπορούμε να δούμε κάθε στοιχείο της $M_k(M_n(A))$ ως στοιχείο της $M_{kn}(A)$. Η θεώρηση αυτή ορίζει έναν $^*$-ισομορφισμό, για κάθε $k$ στο $\mathbb{N}$, και έτσι προκύπτει μια απεικόνιση από το $\mathcal{P}_\infty(M_n(A))$ στο $\mathcal{P}_\infty(A)$. Συνθετόντας με την $[\cdot]_0$, προκύπτει μια απεικόνιση προς την $K_0(A)$. Εφαρμόζοντας την καθολική ιδιότητα της $K_0(M_n(A))$, παίρνουμε έναν ομομορφισμό $K_0(M_n(A)) \longrightarrow K_0(A)$. Τέλος δείχνουμε ότι ο $K_0(\lambda_A)$ είναι αντίστροφος του ομομορφισμού αυτού, ο οποίος τελικά είναι ισομορφισμός.

Με βάση τα προηγούμενα, μπορούμε εύκολα να δειξουμε ότι η πρόταση ισχύει και στην περίπτωση που η $A$ δεν έχει μονάδα. Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\lambda_A"'] & \tilde{A} \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, "\lambda_{\tilde{A}}"'] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\rho"] \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{\mathbb{C}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_n(A) \arrow[r, "i_n"] & M_n(\tilde{A}) \arrow[r, shift left, "\pi_n"] & M_n(\mathbb{C}) \arrow[l, shift left, "\rho_n"] \arrow[r] & 0 ,
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι μεταθετικό και η κάθε του γραμμή είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία. Εφ'όσον ο $K_0$ είναι ένας διασπώμενα ακριβής συναρτητής, το επόμενο διάγραμμα αβελιανών ομάδων είναι επίσης μεταθετικό και αποτελείται από ακριβείς γραμμές:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_A)"'] & K_0(\tilde{A}) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{\tilde{A}})"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{\mathbb{C}})"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(M_n(A)) \arrow[r] & K_0(M_n(\tilde{A})) \arrow[r] & K_0(M_n(\mathbb{C})) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Οι $\tilde{A}, \mathbb{C}$ είναι $C^*$-άλγεβρες με μονάδα, άρα οι $K_0(\lambda_{\tilde{A}})$ και $K_0(\lambda_{\mathbb{C}})$ είναι ισομορφισμοί. Από το $5$ λήμμα ή με στοιχειώδεις συλλογισμούς επί του διαγράμματος, έπεται ότι και ο $K_0(\lambda_A)$ είναι ισομορφισμός. □

## IV.3 Παραδείγματα

(i) Θεωρούμε την απεικόνιση $\dim \colon \mathcal{P}_\infty(\mathbb{C}) \to \mathbb{Z}^+$, με $\dim(p) = \dim(p(\mathbb{C}^n))$, αν $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. Δύο προβολές του $M_n(\mathbb{C})$ είναι ισοδύναμες κατά Murray-von Neumann αν και μόνο αν

$\dim(p) = \dim(q)$. Επιπλέον $\dim(p \oplus 0) = \dim p$, άρα αν $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ και $q \in \mathcal{P}_{m+n}(\mathbb{C})$, τότε:

$$p \sim_0 q \Leftrightarrow p \oplus 0_n \sim q \Leftrightarrow \dim(p) = \dim(q).$$

Αυτό δείχνει ότι η απεικόνιση:

$$\dim\colon \mathcal{D}(\mathbb{C}) \to \mathbb{Z}^+ : [p]_{\mathcal{D}} \mapsto \dim(p)$$

είναι καλά ορισμένη και $1-1$. Προφανώς είναι επί και ακόμα προσθετική, διότι $\dim(p \oplus q) = \dim(p) + \dim(q)$. Επομένως οι ημιομάδες $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ και $\mathbb{Z}^+$ είναι ισόμορφες και συνεπώς:

$$K_0(\mathbb{C}) \simeq G(\mathbb{Z}^+) \simeq \mathbb{Z},$$

με $[p]_0$ να είναι ένας γεννήτορας της $K_0(\mathbb{C})$, για κάθε μονοδιάστατη προβολή του $M_n(\mathbb{C})$.

(ii) Έστω $H$ ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ταυτίζοντας το $M_n(\mathcal{B}(H))$ με το $\mathcal{B}(H^n)$, ισχύει $p \sim q$ αν και μόνο αν $\dim p(H^n) = \dim q(H^n)$. Μπορούμε να εργαστούμε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα και να δείξουμε ότι:

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}(H)) \simeq \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}.$$

Επομένως $K_0(\mathcal{B}(H)) = 0$.

(iii) Αν ο $H$ είναι απειροδιάστατος, μη διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, έστω $\kappa$ ο πληθάριθμος μιας ορθοκανονικής του βάσης. Με τα ίδια επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι η ημιομάδα $\mathcal{D}(\mathcal{B}(H))$ είναι ισόμορφη με την ημιομάδα όλων των πληθαρίθμων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον $\kappa$. Αν $\lambda, \mu$ είναι δύο τέτοιοι πληθάριθμοι, ισχύει $\gamma(\lambda) = \gamma(\mu)$, καθώς:

$$\lambda + \kappa = \kappa = \mu + \kappa.$$

Έτσι και σ'αυτήν την περίπτωση ισχύει $K_0(\mathcal{B}(H)) = 0$.

(iv) Στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} G \underset{\lambda}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} H \longrightarrow 0,$$

η απεικόνιση $\varphi \oplus \lambda\colon I \oplus H \to G$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων. Αν $A$ είναι μια $C^*$-άλγεβρα, θεωρούμε τη διασπώμενη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Εφ'όσον ο $K_0$ είναι διασπώμενα ακριβής, η παραπάνω ακολουθία επάγει μια διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, η οποία, σύμφωνα με το προηγούμενο σχόλιο, μας δείχνει ότι:

$$K_0(\tilde{A}) \simeq K_0(A) \oplus K_0(\mathbb{C}) \simeq K_0(A) \oplus \mathbb{Z}.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

# Ο συναρτητής $K_1$

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την ομάδα $K_1$ μιας $C^*$-άλγεβρας, βασιζόμενοι στην πολλαπλασιαστική ομάδα των ορθομοναδιαίων στοιχείων και χρησιμοποιώντας μια πράξη, η οποία, όπως θα δούμε, επεκτείνει το γινόμενο της ομάδας αυτής σε κλάσεις ισοδυναμίας ορθομοναδιαίων στοιχείων αλγεβρών πινάκων κάθε διάστασης. Στη συνέχεια δείχνουμε πως προκύπτει ο συναρτητής $K_1$ και αποδεικνύουμε τις βασικές του ιδιότητες.

## V.1 Η ομάδα $K_1$

**Ορισμός.** Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα. Θυμίζουμε ότι με $U(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ορθομοναδιαίων στοιχείων της. Ορίζουμε ακόμα:

$$U_n(A) = U(M_n(A)), \quad U_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(A).$$

Επίσης, αν $u$ είναι ένα στοιχείο στο $U_n(A)$ και $v$ στο $U_m(A)$, ορίζουμε:

$$u \oplus v = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in U_{n+m}(A).$$

Προφανώς η $\oplus$ είναι μια προσεταιριστική πράξη στο $U_\infty(A)$. Πριν να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο $U_\infty(A)$, διατυπώνουμε το παρακάτω χρήσιμο λήμμα.

**Λήμμα V.1.** *Αν $u \sim_h u'$ στο $U_n(A)$ και $v \sim_h v'$ στο $U_m(A)$, τότε $u \oplus v \sim_h u' \oplus v'$ στο $U_{n+m}(A)$.*

*Απόδειξη.* Αν τα μονοπάτια $w_1 : [0,1] \to U_n(A)$ και $w_2 : [0,1] \to U_m(A)$ φανερώνουν τις ομοτοπίες $u \sim_h u'$ και $v \sim_h v'$ αντίστοιχα, τότε το συνεχές μονοπάτι

$$w(t) = w_1(t) \oplus w_2(t) \in U_{n+m}(A),$$

μας δείχνει ότι $u \oplus v \sim_h u' \oplus v'$. □

**Ορισμός.** Ορίζουμε τη σχέση $\sim_1$ στο $U_\infty(A)$, ως εξής. Αν $u$ ανήκει στο $U_n(A)$ και $v$ στο $U_m(A)$, τότε $u \sim_1 v$, αν υπάρχει φυσικός αριθμός $k > \max\{n, m\}$, τέτοιος ώστε:

$$u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m}.$$

Εύκολα δείχνουμε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα V.1, ότι η $\sim_1$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $U_\infty(A)$. Ακόμα αν $u \sim_h v$ στο $U_n(A)$, από το ίδιο λήμμα προκύπτει ότι $u \oplus 1 \sim_h v \oplus 1$ στο $U_{n+1}(A)$ και άρα $u \sim_1 v$. Όμως, αν $u, v$ ανήκουν στο $U(A)$, ενδέχεται να μην ισχύει $uv \sim_h vu$, αλλά από το λήμμα του Whitehead προκύπτει ότι $uv \oplus 1_n \sim_h vu \oplus 1_n$ και άρα $uv \sim_1 vu$.

**Πρόταση V.2.** *Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

*(i)* $u \sim_1 u \oplus 1_n$, *για κάθε $u$ στο $U_\infty(A)$ και κάθε φυσικό αριθμό $n$.*

*(ii) Αν $u, v$ ανήκουν στο $U_n(A)$, για κάποιον φυσικό αριθμό $n$, τότε $uv \sim_1 vu \sim_1 u \oplus v$*

*(iii) Για κάθε $u, v$ στο $U_\infty(A)$, ισχύει $u \oplus v \sim_1 v \oplus u$.*

*(iv) Αν $u \sim_1 u'$ και $v \sim_1 v'$, τότε $u \oplus v \sim_1 u' \oplus v'$, για κάθε $u, v, u', v'$ στο $U_\infty(A)$.*

*Απόδειξη.* Το $(i)$ είναι προφανές, ενώ το $(ii)$ προκύπτει από το λήμμα του Whitehead.

*(iii)* Αν $u$ είναι ένα στοιχείο στο $U_n(A)$ και $v$ στο $U_m(A)$, θεωρούμε το στοιχείο:

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \in U_{m+n}(A),$$

και χρησιμοποιώντας το $(ii)$, έχουμε:

$$u \oplus v = z^* z(u \oplus v) \sim_1 z(u \oplus v)z^* = v \oplus u.$$

*(iv)* Έστω $u \sim_1 u'$ και $v \sim_1 v'$ στο $U_\infty(A)$. Τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $k_1$, $k_2$, $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$, ώστε:

$$\begin{aligned} u \oplus 1_{n_1} &\sim_h u' \oplus 1_{n_2}, \quad \text{στο } U_{k_1}(A), \\ v \oplus 1_{n_3} &\sim_h v' \oplus 1_{n_4}, \quad \text{στο } U_{k_2}(A). \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται εφαρμόζοντας το Λήμμα V.1 και παρατηρώντας ότι χρησιμοποιώντας τα $(i)$ και $(iii)$, για τυχαίους φυσικούς αριθμούς $n, m$, έχουμε:

$$(u \oplus 1_n) \oplus (v \oplus 1_m) \sim_1 (u \oplus 1_n) \oplus v \sim_1 v \oplus (u \oplus 1_n) \sim_1 v \oplus u \sim_1 u \oplus v.$$

□

**Ορισμός.** Για κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$, ορίζουμε:

$$K_1(A) = U_\infty(\widetilde{A}) / \sim_1 .$$

Αν $u$ είναι ένα στοιχείο στο $U_\infty(A)$, τότε με $[u]_1$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας που το περιέχει. Αν $[u]_1$, $[v]_1$ είναι στοιχεία της $K_1(A)$, τότε ορίζουμε:

$$[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1 \, .$$

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη, μεταθετική και προσεταιριστική. Επιπλέον, αν $n > 1$, ισχύει $1_n = 1 \oplus 1_{n-1} \sim_1 1$. Επομένως για κάθε φυσικό αριθμό $n$, ισχύει $[1_n]_1 = [1]_1$ και το στοιχείο αυτό είναι το ουδέτερο της πρόσθεσης. Επίσης για κάθε φυσικό αριθμό $n$ και $u$ στο $U_n(A)$, ισχύει:

$$[u]_1 + [u^*]_1 = [u \oplus u^*]_1 = [uu^*]_1 = [1_n]_1$$

Επομένως η $K_1(A)$, εφοδιασμένη με την πράξη που ορίσαμε, γίνεται μια αβελιανή ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο το $[1]_1$ και αντίθετο του $[u]_1$, το $[u^*]_1$.

**Πρόταση V.3** (Καθολική ιδιότητα της $K_1$). *Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα, $G$ μια αβελιανή ομάδα και $\nu : U_\infty(\widetilde{A}) \to G$ μία προσθετική απεικόνιση που δίνει την ίδια τιμή σε ομοτοπικά στοιχεία και διατηρεί τη μονάδα ($\nu(1) = 0 \in G$). Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\varphi : K_1(A) \to G$, έτσι ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{array}{ccc} U_\infty(\widetilde{A}) & & \\ {\scriptstyle [\cdot]_1}\downarrow & \overset{\nu}{\searrow} & \\ K_1(A) & \xrightarrow[\varphi]{} & G \end{array}$$

*Απόδειξη.* Με επαγωγή δείχνουμε ότι $\nu(1_n) = 0$, για κάθε φυσικό αριθμό $n$. Η μοναδική συνάρτηση που καθιστά το διάγραμμα μεταθετικό, είναι η $\varphi : K_1(A) \to G$, με $\varphi([u]_1) = \nu(u)$, για κάθε $u$ στο $U_\infty(\widetilde{A})$.

Για να δείξουμε ότι η $\varphi$ είναι καλά ορισμένη, θεωρούμε $u, v$ στο $U_\infty(\widetilde{A})$, με $u \sim_1 v$. Τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $n_1$,$n_2$, ώστε $u \oplus 1_{n_1} \sim_h v \oplus 1_{n_2}$. Επομένως έχουμε:

$$\nu(u) = \nu(u) + \nu(1_{n_1}) = \nu(u \oplus 1_{n_1}) = \nu(v \oplus 1_{n_2}) = \nu(v) + \nu(1_{n_2}) = \nu(v).$$

Επίσης η $\varphi$ είναι προσθετική:

$$\varphi([u]_1 + [v]_1) = \varphi([u \oplus v]_1) = \nu(u \oplus v) = \nu(u) + \nu(v) = \varphi([u]_1) + \varphi([v]_1).$$

□

Αν $A$ είναι μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα, μπορούμε να δείξουμε ότι τα πηλίκα $U_\infty(\widetilde{A})/\sim_1$ και $U_\infty(A)/\sim_1$ είναι ισόμορφα. Ορίζουμε το μοναδιαίο $^*$-ομομορφισμό $\mu \colon \widetilde{A} \to A$, με $\mu(x, \lambda) = x + \lambda 1_A$. Ο επαγόμενος $^*$-ομομορφισμός, στους $n \times n$ πίνακες, είναι επίσης μοναδιαίος και προκύπτει με τον τρόπο αυτόν μια απεικόνιση $\mu \colon U_\infty(\widetilde{A}) \to U_\infty(A)$.

**Πρόταση V.4.** *Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα. Υπάρχει ισομορφισμός $\rho \colon K_1(A) \to U_\infty(A)/\sim_1$, έτσι ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
U_\infty(\widetilde{A}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] & U_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_1}"] \\
K_1(A) \arrow[r, "\rho"'] & U_\infty(A)/\sim_1
\end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Θα εφαρμόσουμε την καθολική ιδιότητα της $K_1$, για την σύνθεση της $\mu$ και της $[\cdot]_1$, και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο μοναδικός ομομορφισμός $\rho$, που καθιστά το διάγραμμα μεταθετικό, είναι ισομορφισμός.

- Κάθε επαγόμενος $^*$-ομομορφισμός $\mu$, στους $n \times n$ πίνακες, ικανοποιεί την σχέση $\mu(u \oplus v) = \mu(u) \oplus (v)$. Από τον ορισμό της πρόσθεσης στο $U_\infty(A/\sim_1)$ έχουμε:

$$[\mu(u \oplus v)]_1 = [\mu(u)]_1 + [\mu(v)]_1 \,.$$

- Ο $\mu$ είναι μοναδιαίος, άρα $\left[\mu(1_{\tilde{A}})\right]_1 = [1_A]_1 = 0$.

- Έστω $u, v$ ομοτοπικά στο $U_n(\widetilde{A})$, για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$. Ο $\mu$ είναι μοναδιαίος και κάθε $^*$-ομομορφισμός είναι συνεχής, συνεπώς $\mu(u) \sim_h \mu(v)$ στο $U_n(A)$ και $[\mu(u)]_1 = [\mu(v)]_1$

Μένει να δείξουμε ότι ο $\rho$ είναι 1-1 και επί. Εφ'όσον οι $\mu$ και $[\cdot]_1$ είναι επί και το διάγραμμα είναι μεταθετικό, η $\rho$ είναι επίσης επί. Παρατηρούμε ότι αν $u, v$ ανήκουν στο $U_\infty(\widetilde{A})$, τότε:

$$\begin{aligned}
\rho([u]_1) = \rho([v]_1) &\Rightarrow [\mu(u)]_1 = [\mu(v)]_1 \\
&\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : \mu(u) \oplus 1_m \sim_h \mu(v) \oplus 1_n \\
&\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : \mu(u \oplus 1_m) \sim_h \mu(v \oplus 1_n).
\end{aligned}$$

Επομένως για να δείξουμε ότι ο $\rho$ είναι 1-1, αρκεί να δείξουμε ότι αν $\mu(u) \sim_h \mu(v)$ στο $U_n(A)$, για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$, τότε $u \sim_h v$ στο $U_n(\widetilde{A})$.

Αν $f$ είναι η προβολή $1_{\tilde{A}} - 1_A$ της $\widetilde{A}$ και $a = (x, \lambda) \in \widetilde{A}$, τότε ισχύει η σχέση

$$a = \mu(a) + \lambda f.$$

Επομένως και στο $M_n(\widetilde{A})$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$u = \mu(u) + u_0, \; v = \mu(v) + v_0,$$

όπου $u_0, v_0$ είναι ορθομοναδιαία στοιχεία στην $M_n(\mathbb{C}f)$. Όμως το $U_n(\mathbb{C}f)$ είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό και άρα $u_0 \sim_h v_0$, στο $U_n(\mathbb{C}f)$. Αν το μονοπάτι $w_t$ δείχνει ότι $\mu(u) \sim_h \mu(v)$, και το μονοπάτι $z_t$ ότι $u_0 \sim_h v_0$, τότε το μονοπάτι $w_t + z_t$ δείχνει ότι $u \sim_h v$ στο $U_n(\widetilde{A})$. $\square$

Προφανώς, λόγω της παραπάνω πρότασης, η ομάδα $K_1$ της μοναδοποίησης μιας $C^*$-άλγεβρας μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$K_1(\widetilde{A}) \simeq U_\infty(\widetilde{A})/\sim_1 = K_1(A).$$

### Η πολική αναπαράσταση και επέκταση στο $GL_\infty(\widetilde{A})$

Αν $z$ είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο μιας μοναδιαίας $C^*$-άλγεβρας $A$, τότε η απόλυτη του τιμή $|z| = (z^*z)^{1/2}$ είναι επίσης αντιστρέψιμο (και επιπλέον θετικό) στοιχείο. Ενας απλός υπολογισμός δείχνει ότι το στοιχείο $\omega(z) = z|z|^{-1}$ είναι ορθομοναδιαίο. Προκύπτει έτσι μια συνεχής συνάρτηση $\omega\colon GL(A) \to U(A)$, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\omega(u) = u, \quad \forall u \in U(A)$

(ii) $\omega(z) \sim_h z$ στο $GL(A)$

Από τα παραπάνω έπεται ότι δυο ορθομοναδιαία στοιχεία $u, v$ είναι ομοτοπικά στο $GL(A)$ αν και μόνο αν είναι ομοτοπικά στο $U(A)$.

Επεκτείνουμε τη συνάρτηση $[\cdot]_1 : U_\infty(\widetilde{A}) \to K_1(A)$, σε μια συνάρτηση $[\cdot]_1 : GL_\infty(\widetilde{A}) \to K_1(A)$, θέτοντας

$$[z]_1 = [\omega(z)]_1\,, \quad z \in GL_\infty(\widetilde{A}).$$

Παρατηρούμε ότι αν $u$ είναι ένα στοιχείο στο $U_n(\widetilde{A})$ και $z \sim_h u$ στο $GL_n(\widetilde{A})$, τότε εφ'όσον ισχύει και $z \sim_h \omega(z)$ στο $GL_n(\widetilde{A})$, έχουμε τελικά ότι $\omega(z) \sim_h u$ στο $GL_n(\widetilde{A})$, άρα και στο $U_n(\widetilde{A})$. Επομένως $[z]_1 = [u]_1$.

### Παραδείγματα

(i) Ένα ορθομοναδιαίο στοιχείο $u$ του $M_n(\mathbb{C})$, έχει πεπερασμένο φάσμα, συνεπώς $\sigma(u) \neq \mathbb{T}$, που σημαίνει ότι $u \sim_h 1_n$. Έπεται ότι το $U_n(\mathbb{C})$ είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό, για κάθε $n$ στο $\mathbb{N}$ και τελικά:

$$K_1(\mathbb{C}) \simeq U_\infty(\mathbb{C})/\sim_1 = 0.$$

Επίσης, λόγω του ισομορφισμού των $M_k(M_n(\mathbb{C}))$ και $M_{kn}(\mathbb{C})$, ισχύει, για τους ίδιους λόγους, $K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$, για κάθε $n$ στο $\mathbb{N}$.

(ii) Στον $\mathcal{B}(H)$, για κάποιον χώρο Hilbert $H$, ισχύει επίσης $U_n(\mathcal{B}(H)) = U_0(M_n(\mathcal{B}(H))$, για κάθε $n$ στο $\mathbb{N}$, και άρα $K_1(\mathcal{B}(H)) = 0$. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι για τυχαιο φυσικό αριθμό $n$, μπορούμε να ταυτίσουμε το $M_n(\mathcal{B}(H))$, με το $\mathcal{B}(H^n)$. Έστω, λοιπόν, ένα ορθομοναδιαίο στοιχείο του $\mathcal{B}(H^n)$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι της μορφής $exp(ih)$, για κάποιο αυτοσυζυγές στοιχείο του $\mathcal{B}(H^n)$. Καθώς το φάσμα κάθε ορθομοναδιαίου στοιχείου είναι υποσύνολο του $\mathbb{T}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Borel συναρτησιακό λογισμό (βλ. [8] , ενότητα 5.2) στη φραγμένη Borel συνάρτηση:

$$\varphi\colon \mathbb{T} \to [0, 2\pi) : e^{i\theta} \to \theta,\ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Η $\varphi$ παίρνει πραγματικές τιμές, άρα το $\varphi(u)$ είναι αυτοσυζυγές. Προφανώς ισχύει $exp(i\varphi(u)) = u$.

## V.2 Ο συναρτητής $K_1$

Αν $\varphi\colon A \to B$ είναι ένας $^*$-ομομορφισμός $C^*$-αλγεβρών, θεωρούμε τους επαγόμενους $^*$-ομομορφισμούς $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ και $\widetilde{\varphi}_n\colon M_n(\widetilde{A}) \to M_n(\widetilde{B})$, για κάθε $n$ στο $\mathbb{N}$. Ο $\widetilde{\varphi}$, άρα και οι $\widetilde{\varphi}_n$, διατηρούν τη μονάδα και κάθε $^*$-ομομορφισμός με αυτήν την ιδιότητα απεικονίζει ορθομοναδιαία στοιχεία σε ορθομοναδιαία. Έτσι παίρνουμε, δια περιορισμού, μια απεικόνιση:

$$\widetilde{\varphi}\colon U_\infty(\widetilde{A}) \to U_\infty(\widetilde{B}).$$

Αν συνθέσουμε την $\widetilde{\varphi}$ με την $[\cdot]_1$, προκύπτει μια απεικόνιση $\nu\colon U_\infty(\widetilde{A}) \to K_1(B)$, με $\nu(u) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες της καθολικής ιδιότητας. Υπαρχει, επομένως, μοναδικός $^*$-ομομορφισμός $K_1(\varphi)\colon K_1(A) \to K_1(B)$, έτσι ώστε:

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1\,, \quad \forall u \in U_\infty(\widetilde{A}).$$

Τα ίδια σχεδόν επιχειρήματα, όπως και στην περίπτωση της $K_0$ , αποδεικνύουν ότι ο $K_1$ είναι πράγματι ένας συναρτητής και μάλιστα ομοτοπικά αναλλοίωτος. Ακόμα παρατηρούμε ότι:

$$K_1(\{0\}) \simeq K_1(\widetilde{\{0\}}) \simeq K_1(\mathbb{C}) = 0$$

Έπεται ότι και οι μηδενικοί $^*$-ομομορφισμοί αντιστοιχούν σε μηδενικούς ομομορφισμούς ομάδων.

Με όσα έχουμε δει ως τώρα για τον συναρτητή $K_1$, μπορούμε να δείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο, με την εισαγωγή της έννοιας της δείκτριας συνάρτησης, ότι η ομάδα $K_1$ μιας $C^*$-άλγεβρας , είναι ισόμορφη με την ομάδα $K_0$ της $C^*$-άλγεβρας που αντιστοιχεί στην $A$, μέσω ενός συναρτητή, ο οποίος έχει αρκετά καλές ιδιότητες. Ο ισομορφισμός αυτός είναι φυσικός κι έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι ο $K_1$, όπως και ο $K_0$, είναι ημιακριβής, διασπώμενα ακριβής, διατηρεί τα ευθέα αθροίσματα και ισχύει $K_1(M_n(A)) \simeq K_1(A)$, για κάθε $n$ στο $\mathbb{N}$. Οι ιδιότητες αυτές, ωστόσο, μπορούν να αποδειχθούν όπως αποδείχτηκαν για τον $K_0$. Για λόγους καλύτερης ανάπτυξης της ύλης στο επόμενο κεφάλαιο, αποδεικνύουμε τώρα ότι ο $K_1$ είναι ημιακριβής.

**Πρόταση V.5.** *Ο συναρτητής $K_1$ είναι ημιακριβής.*

*Απόδειξη.* Έστω μια βραχεία ακριβής ακολουθία $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

Για να δείξουμε ότι η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B)$$

είναι ακριβής, παρατηρούμε αρχικά ότι:

$$K_1(\psi) \circ K_1(\varphi) = K_1(\psi \circ \varphi) = K_1(0) = 0.$$

Αυτό δείχνει ότι $\mathrm{im}K_1(\varphi) \subseteq \ker K_1(\psi)$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, θεωρούμε ένα στοιχείο $[u]_1$ στον πυρήνα της $K_1(\psi)$, για κάποιο $u$ στο $U_n(\widetilde{A})$ και $n$ στο $\mathbb{N}$. Για να δείξουμε ότι η κλάση ισοδυναμίας $[u]_1$ ανήκει στην εικόνα της $K_1(\varphi)$, αρκεί να βρούμε έναν αντιπρόσωπο της, ο οποίος να απεικονίζεται σε βαθμωτό στοιχείο μέσω της $\widetilde{\psi}$. Εφ'όσον $[\widetilde{\psi}(u)]_1 = 0 = [1_n]_1$ , υπάρχει $m$ στο $\mathbb{N}$, με $\widetilde{\psi}(u) \oplus 1_m \sim_h 1_{n+m}$ στο $U_{n+m}(\widetilde{B})$. Θέτουμε $u' = u \oplus 1_m \in U_{n+m}(\widetilde{A})$. Προφανώς το $\widetilde{\psi}(u')$ είναι ομοτοπικό με τη μονάδα στο $U_{n+m}(\widetilde{B})$, άρα υπάρχει $w$ στο $U_0(M_{n+m}(\widetilde{A}))$, με $\widetilde{\psi}(w) = \widetilde{\psi}(u')$. Η εικόνα του ορθομοναδιαίου στοιχείου $w^*u'$, μέσω της $\widetilde{\psi}$, είναι το βαθμωτό στοιχείο $1_{n+m}$, και επιπλέον ισχύει:

$$w^*u' \sim_h u' = u \oplus 1_m \sim_1 u.$$

$\square$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

# Η δείκτρια συνάρτηση και ο ισομορφισμός των $K_1(A)$ και $K_0(SA)$

## VI.1 Ορισμός της δείκτριας συνάρτησης

Έστω η βραχεία ακριβής ακολουθία $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

Για να ορίσουμε την δείκτρια συνάρτηση $\delta_1 \colon K_1(B) \to K_0(I)$, θα ορίσουμε αρχικά μια απεικόνιση από το $U_\infty(\tilde{B})$ στο $K_0(I)$, η οποία στη συνέχεια, με χρήση της καθολικής ιδιότητας της $K_1$, θα επεκταθεί σε έναν ομομορφισμό από την $K_1(B)$ στην $K_0(I)$.

Έστω $n$ ένας φυσικός αριθμός και $u$ στο $U_n(\tilde{B})$. Από το λήμμα του Whitehead, ισχύει $u \oplus u^* \sim_h 1_{2n}$, επομένως υπάρχει $v$ στο $U_0(M_{2n}(\tilde{A}))$, με $\psi(\tilde{v}) = u \oplus u^*$. Θεωρούμε την προβολή $p' = v(1_n \oplus 0_n)v^*$ στο $M_{2n}(\tilde{A})$. Εφ'όσον ισχύει:

$$\tilde{\psi}(p') = (u \oplus u^*)(1_n \oplus 0_n)(u^* \oplus u) = 1_n \oplus 0_n,$$

το $\tilde{\psi}(p')$ είναι βαθμωτό στοιχείο και άρα η $p'$ ανήκει στην εικόνα της $\tilde{\varphi}$. Έστω, λοιπόν, $p$ στο $M_{2n}(\tilde{I})$, με $\tilde{\varphi}(p) = p'$. Καθώς η $\tilde{\varphi}$ είναι $^*$-μονομορφισμός, το $p$ είναι επίσης προβολή.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\nu \colon U_\infty(\tilde{B}) \to K_0(I)$, θέτοντας:

$$\nu(u) = [p]_0 - [s(p)]_0 \,.$$

Για να δείξουμε ότι η $\nu$ είναι καλά ορισμένη, θεωρούμε ένα στοιχείο $v_1$ στο $U_{2n}(\tilde{A})$, με $\tilde{\psi}(v_1) = u \oplus u^*$, και το μοναδικό $p_1$ στο $M_{2n}(\tilde{I})$, με $\tilde{\varphi}(p_1) = v_1(1_n \oplus 0_n)v_1^*$. Ισχύει:

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(p_1) = 1_n \oplus 0_n = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(p) \in M_{2n}(\tilde{B}).$$

Από τον τρόπο που έχουν οριστεί οι επαγόμενοι $^*$-ομομορφισμοί $\tilde{\psi}$ και $\tilde{\varphi}$, πρέπει να ισχύει:

$$s(p_1) = 1_n \oplus 0_n = s(p) \in M_{2n}(\tilde{I}).$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $p \sim_u p_1$, καθώς τότε θα ισχύει και $[p]_0 = [p_1]_0$ και η $\nu$ θα είναι, τελικά, καλά ορισμένη. Πράγματι, θεωρώντας το στοιχειο $v_1 v^*$ στο $U_{2n}(\tilde{A})$, παρατηρούμε ότι η εικόνα του μέσω του $\tilde{\psi}$ είναι βαθμωτό στοιχείο:

$$\tilde{\psi}(v_1 v^*) = \tilde{\psi}(v_1)\tilde{\psi}(v)^* = (u \oplus u^*)(u^* \oplus u) = 1_{2n}.$$

Συνεπώς το $v_1 v^*$ ανήκει στην εικόνα της $\tilde{\varphi}$, κι εφ'όσον αυτή είναι $1-1$, το στοιχείο $z$ της $M_{2n}(\tilde{I})$, για το οποίο $\tilde{\varphi}(z) = v_1 v^*$, είναι επίσης ορθομοναδιαίο. Ακόμα ισχυει:

$$\tilde{\varphi}(zpz^*) = (v_1 v^*)(v(1_n \oplus 0_n)v^*)(v v_1^*) = v_1(1_n \oplus 0_n)v_1^* = \tilde{\varphi}(p_1),$$

άρα $zpz^* = p_1$ και $p_1 \sim_u p$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η $\nu$ ικανοποιεί τις συνθήκες της καθολικής ιδιότητας της $K_1$. Αποδεικνύουμε, για παράδειγμα, ότι δίνει την ίδια τιμή σε ομοτοπικά στοιχεία. Έστω, $u_1 \sim_h u_2$ στο $U_n(\tilde{B})$. Τότε τα στοιχεία $u_1^* u_2$ και $u_1 u_2^*$ ανήκουν στο $U_0(M_n(\tilde{B}))$ κι επομένως υπάρχουν $w_1, w_2$ στο $U_0(M_n(\tilde{A}))$, με $\tilde{\psi}(w_1) = u_1^* u_2$ και $\tilde{\psi}(w_2) = u_1 u_2^*$. Έστω $v_1$ στο $U_{2n}(\tilde{A})$ και $p_1$ στο $\mathcal{P}_{2n}(\tilde{I})$, τέτοια ώστε $\tilde{\psi}(v_1) = u_1 \oplus u_1^*$ και $\tilde{\varphi}(p_1) = v_1(1_n \oplus 0_n)v_1^*$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε το $\nu(u_1)$ μέσω της προβολής $p_1$. Μέσω της ίδιας προβολής, μπορούμε να ορίσουμε και το $\nu(u_2)$, καθώς το στοιχείο $v_2 = v_1(w_1 \oplus w_2)$ ανήκει στο $U_{2n}(\tilde{A})$ και επιπλέον:

$$\tilde{\psi}(v_2) = \tilde{\psi}_{2n}(v_1)(\tilde{\psi}_n(w_1) \oplus \tilde{\psi}_n(w_2)) = (u_1 \oplus u_1^*)(u_1^* u_2 \oplus u_1 u_2^*) = u_2 \oplus u_2^*,$$

$$v_2(1_n \oplus 0_n)v_2^* = v_1(w_1 w_1^* \oplus 0_n)v_1^* = \tilde{\varphi}(p_1).$$

Επομένως, έχουμε:

$$\nu(u_2) = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0 = \nu(u_1).$$

Από την καθολική ιδιότητας της $K_1$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\delta_1 \colon K_1(B) \to K_0(I)$, που να ικανοποιεί τη σχέση $\delta_1([u]_1) = \nu(u)$, για κάθε $u$ στο $U_\infty(\tilde{B})$.

**Πρόταση VI.1** (Φυσικότητα της δείκτριας συνάρτησης)**.** *Έστω ότι το διάγραμμα $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I' \arrow[r, "\varphi'"'] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*είναι μεταθετικό και κάθε γραμμή είναι ακριβής. Αν $\delta_1$ και $\delta_1'$ είναι οι δείκτριες συναρτήσεις, που ορίζουν οι ακολουθίες της πρώτης και της δεύτερης γραμμής αντίστοιχα, τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd}
K_1(B) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "K_1(\beta)"'] & K_0(I) \arrow[d, "K_0(\gamma)"] \\
K_1(B') \arrow[r, "\delta_1'"'] & K_0(I')
\end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Έστω $n$ στο $\mathbb{N}$ και $u$ στο $U_n(\tilde{B})$. Τότε μπορούμε να βρούμε $v$ στο $U_{2n}(\tilde{A})$ και $p$ στο $\mathcal{P}_{2n}(\tilde{I})$, με $\tilde{\psi}(v) = u \oplus u^*$ και $\tilde{\varphi}(p) = v(1_n \oplus 0_n)v^*$. Σύμφωνα με τους ορισμούς, ισχύει:

$$K_0(\gamma) \circ \delta_1([u]_1) = K_0(\gamma)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\tilde{\gamma}(p)]_0 - [s\tilde{\gamma}(p)]_0 \,.$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή της $\delta_1'$ στο $K_1(\beta)([u]_1) = [\tilde{\beta}(u)]_1$, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής. Παρατηρούμε ότι καθώς το αρχικό διάγραμμα είναι μεταθετικό, για το ορθομοναδιαίο στοιχείο $\tilde{\alpha}(v)$, ισχύει:

$$\tilde{\psi}'(\tilde{\alpha}(v)) = \tilde{\beta}(\tilde{\varphi}(v)) = \tilde{\beta}(u \oplus u^*) = \tilde{\beta}(u) \oplus \tilde{\beta}(u)^*.$$

Θα δείξουμε ακόμα ότι:

$$\tilde{\varphi}'(\tilde{\gamma}(p)) = \tilde{\alpha}(v)(1_n \oplus 0_n)\tilde{\alpha}(v)^*,$$

και επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε το $\nu(\tilde{\beta}(u))$, βάσει της προβολής $\tilde{\gamma}(p)$. Πράγματι, καθώς το αρχικό διάγραμμα είναι μεταθετικό, έχουμε την ισότητα $\tilde{\varphi}' \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \circ \tilde{\varphi}$, από την οποία προκύπτει η παραπάνω σχέση.

Τελικά έχουμε:

$$\delta_1' \circ K_1(\beta)([u]_1) = \nu(\tilde{\beta}(u)) = [\tilde{\gamma}(p)]_0 - [s\tilde{\gamma}(p)]_0 = K_0(\gamma) \circ \delta_1([u]_1).$$

□

## VI.2 Περιγραφή της $\delta_1$ μέσω μερικών ισομετριών

Περιγράφουμε έναν εναλλακτικό τρόπο ορισμού της δείκτριας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας μερικές ισομετρίες.

**Λήμμα VI.2.** *Έστω $A, B$ δύο $C^*$-άλγεβρες με μονάδα, και $\psi\colon A \to B$ ένας $^*$-επιμορφισμός (αναγκαστικά ισχύει $\psi(1_A) = 1_B$). Αν $u$ είναι ένα ορθομοναδιαίο στοιχείο της $B$, υπάρχει μερική ισομετρία $v$ στο $M_2(A)$, με $\psi(v) = diag(u, 0)$.*

*Απόδειξη.* Η $\psi$ είναι επί, άρα υπάρχει $\alpha$ στην $A$, με $\psi(\alpha) = u$. Μάλιστα, μπορούμε να επιλέξουμε το $\alpha$, έτσι ώστε $\|\alpha\| = 1$ (βλ. [1] , παρ. 2.2.10). Τότε το φάσμα του αυτοσυζυγούς στοιχείου $1 - \alpha^*\alpha$ αποτελείται από μη-αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς και άρα το στοιχείο αυτό είναι θετικό και έχει τετραγωνική ρίζα, έστω $b$. Θεωρούμε τον πίνακα:

$$v = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in M_2(A).$$

Καθώς η τετραγωνική ρίζα είναι θετικό στοιχείο, ισχύει:

$$\alpha^*\alpha + b^*b = \alpha^*\alpha + b^2 = \alpha^*\alpha + 1 - \alpha^*\alpha = 1.$$

Μετά από αυτή την παρατήρηση, ένας απλός πολλαπλασιασμός πινάκων μας δείχνει ότι:

$$v^*v = \mathrm{diag}(\alpha^*\alpha + b^*b, 0) = \mathrm{diag}(1, 0) \in \mathcal{P}_2(A),$$

και άρα το $\upsilon$ είναι μερική ισομετρία. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι $\psi(b) = 0$. Ένας $^*$-ομομορφισμός απεικονίζει θετικά στοιχεία σε θετικά, καθώς $\psi(x^*x) = \psi(x)^*\psi(x)$. Άρα, αν $h$ είναι ένα θετικό στοιχείο της $A$, το $\psi(h^{1/2})$ είναι ένα θετικό στοιχείο της $B$, για το οποίο ισχυει $\psi(h^{1/2})^2 = \psi(h)$. Αυτό μας δείχνει ότι $\psi(h^{1/2}) = \psi(h)^{1/2}$ και τελικά:

$$\psi(b) = \psi((1-\alpha^*\alpha)^{1/2}) = (1-u^*u)^{1/2} = 0$$

□

**Πρόταση VI.3.** *Έστω η βραχεία ακριβής ακολουθία $C^*$-αλγεβρών:*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

*Έστω ακόμα $u \in U_n(\tilde{B})$ για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$ και μερική ισομετρία $\upsilon$ στο $M_m(\tilde{A})$, για κάποιο $m \geq n$, με*

$$\tilde{\psi}(\upsilon) = u \oplus 0_{m-n} \in M_m(\tilde{B}).$$

*Τότε υπάρχουν προβολές $p, q$ στο $\mathcal{P}_m(\tilde{I})$, με $\tilde{\varphi}(p) = 1_m - \upsilon^*\upsilon, \tilde{\varphi}(q) = 1_m - \upsilon\upsilon^*$ και ισχύει:*

$$\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [q]_0\,.$$

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι το $\widetilde{\psi}(1_m - \upsilon^*\upsilon)$ είναι ένα βαθμωτό στοιχείο του $M_m(\tilde{B})$:

$$\widetilde{\psi}(1_m - \upsilon^*\upsilon) = 1_m - (u^* \oplus 0_{m-n})(u \oplus 0_{m-n}) = 0_n \oplus 1_{m-n} \in M_m(\tilde{B}).$$

Ομοίως το $\tilde{\psi}(1_m - \upsilon\upsilon^*)$ είναι βαθμωτό στοιχείο, και άρα υπάρχουν προβολές $p, q$ στο $\mathcal{P}_m(\tilde{I})$, με $\tilde{\varphi}(p) = 1_m - \upsilon^*\upsilon, \tilde{\varphi}(q) = 1_m - \upsilon\upsilon^*$.

Θεωρούμε την προβολή $r = (1_m - q) \oplus p$ στο $\mathcal{P}_{2m}(\tilde{I})$. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ορθομοναδιαίο στοιχείο $z$ στο $M_{2m}(\tilde{I})$, με $\tilde{\varphi}(zrz^*) = w(1_m \oplus 0_m)w^*$, για κάποιο ορθομοναδιαίο στοιχείο $w$ στο $M_{2m}(\tilde{A})$, για το οποίο ισχύει:

$$\tilde{\psi}(w) = (u \oplus 1_{m-n}) \oplus (u \oplus 1_{m-n})^*.$$

Καθώς $u \oplus 1_{m-n} \sim_1 u$ και $zrz^* \sim_u r$, έχουμε τελικά:

$$\begin{aligned}\delta_1([u]_1) = \delta_1([u \oplus 1_{m-n}]_1) &= [zrz^*]_0 - [s(zrz^*)]_0 = [r]_0 - [s(r)]_0\\ &= [1_m - q]_0 + [p]_0 - [1_m - s(q)]_0 - [s(p)]_0 = [p]_0 - [q]_0\,,\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει ότι εφ'όσον:

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(p) = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(q) = 0_n \oplus 1_{m-n} \in M_m(\tilde{B}),$$

ισχύει:

$$s(p) = s(q) = 0_n \oplus 1_{m-n} \in M_m(\tilde{I}).$$

□

Έστω $B$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα και $f = 1_{\widetilde{B}} - 1_B$. Το στοιχείο $f$ της $\widetilde{B}$ είναι προβολή και ισχύει $fb = bf = 0$, για κάθε $b$ στην $B$. Ένα ορθομοναδιαίο στοιχείο $u$ της $B$, θεωρούμενο ως στοιχείο της μοναδοποίησης, δεν είναι ορθομοναδιαίο, διότι η μονάδα της $B$ δεν είναι η μονάδα της μοναδοποίησης. Το στοιχείο, όμως, $u_1 = u + f$ είναι ορθομοναδιαίο στοιχείο της $\widetilde{B}$.

Γενικότερα, για κάθε $k$ στο $\mathbb{N}$, θεωρούμε τον διαγώνιο πίνακα $f_k$ της $M_k(\widetilde{B})$, κάθε διαγώνιο στοιχείο του οποίου, ισούται με $f$. Τότε, ένα ορθομοναδιαίο στοιχείο $u$ της $M_k(B)$, μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο ορθομοναδιαίο στοιχείο $u_1 = u + f_k$ της $M_k(\widetilde{B})$. Παρατηρούμε ότι $\mu(f) = 0$, άρα $\mu(f_n) = 0$ και $\mu(u_1) = \mu(u) = u$, όπου $\mu$ η απεικόνιση της πρότασης V.4. Μπορούμε να ταυτίσουμε το στοιχείο $[u_1]_1$ της $K_1(A)$, με την εικόνα του μέσω του ισομορφισμού $\rho$ :

$$\rho([u_1]_1) = [\mu(u_1)]_1 = [u]_1 \in U_\infty(A)/ \sim_1 .$$

Έχοντας αυτήν την ταύτιση κατά νου, διατυπώνουμε τις ακόλουθες δυο προτάσεις.

**Πρόταση VI.4.** *Έστω η βραχεία ακριβής ακολουθία $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών:*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

*Αν οι $A$ και $B$ έχουν μονάδα, ορίζουμε τον $^*$-ομομορφισμό $\varphi' : \widetilde{I} \to A$, με $\varphi'(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda 1_A$, για κάθε $x$ στην $I$ και $\lambda$ στο $\mathbb{C}$. Έστω $u$ ένα στοιχείο στο $U_n(B)$, για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$. Αν $v$ είναι μια μερική ισομετρία στο $M_m(A)$, για κάποιο $m \geq n$, με $\psi(v) = u \oplus 0_{m-n}$, υπάρχουν προβολές $p, q$ στο $M_m(\widetilde{I})$, με $\varphi'(p) = 1_m - v^*v, \varphi'(q) = 1_m - vv^*$, και τότε ισχύει:*

$$\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [q]_0 .$$

*Απόδειξη.* Αν η $\varphi'$ δεν είναι $1-1$, τότε υπάρχει $x$ στο $I$ και $\lambda$ στο $\mathbb{C}$, με $(x, \lambda) \neq (0, 0)$ και $\varphi(x) + \lambda 1_A = 0$. Επειδή η $\varphi$ είναι $1-1$, δεν μπορεί να ισχύει $\lambda = 0$, άρα $\varphi(-x/\lambda) = 1_A$. Επομένως το ιδεώδες $\mathrm{im}\varphi$ της $A$ ισούται με την $A$ και ισχύει $I \simeq A$ και $B = 0$, που είναι άτοπο, αφού η $B$ έχουμε υποθέσει ότι έχει μονάδα. Άρα η $\varphi'$ είναι $1-1$.

Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει:

$$\mathrm{im}\varphi' = \{z \in A : \exists \lambda \in \mathbb{C} : \psi(z) = \lambda 1_B\}.$$

Πράγματι, αν $z = \varphi'(x, \lambda)$, για κάποιο $x$ στο $I$ και $\lambda$ στο $\mathbb{C}$, τότε $\psi(z) = \psi(\varphi(x) + \lambda 1_A) = \lambda 1_B$, καθώς ο $\psi$ είναι επί και άρα διατηρεί τη μονάδα. Αντίστροφα, αν $\psi(z) = \lambda 1_B$, για κάποιο $\lambda$ στο $\mathbb{C}$, τότε το στοιχείο $z - \lambda 1_A$ ανήκει στον $\ker\psi = \mathrm{im}\varphi$. Υπάρχει, λοιπόν, $x$ στο $I$, με $\varphi(x) = z - \lambda 1_A$. Τότε $z = \varphi'(x, \lambda)$.

Από τον παραπάνω ισχυρισμό, έπεται ότι κάθε στοιχείο των πινάκων $1_m - v^*v$ και $1_m - vv^*$ της $\mathcal{P}_m(A)$ ανήκει στην εικόνα της $\varphi'$, αφού ισχύει:

$$\psi_m(1_m - vv^*) = \psi_m(1_m - v^*v) = 0 \oplus 1_{m-n} \in M_m(B). \tag{VI.1}$$

Άρα υπάρχουν $p, q$ στο $M_m(\widetilde{I})$, με $\varphi'(p) = 1_m - v^*v, \varphi'(q) = 1_m - vv^*$. Η $\varphi'$ είναι $1-1$, άρα τα $p, q$ είναι επίσης προβολές.

Θέτουμε $g = 1_{\tilde{A}} - 1_A$ και ορίζουμε τον διαγώνιο πίνακα $g_n$ της $M_n(\widetilde{A})$, κάθε διαγώνιο στοιχείο του οποίου ισούται με $g$. Θεωρούμε το στοιχείο:

$$w = v + (g_n \oplus 0_{m-n}) \in M_m(\widetilde{A}).$$

Εφ'όσον $ga = ag = 0$, για κάθε $a$ στην $A$, το $w$ είναι μερική ισομετρία. Βέβαια ισχύει $\psi(g) = f$, άρα:

$$\psi(w) = (u \oplus 0_{m-n}) + (f_n \oplus 0_{m-n}) = u_1 \oplus 0_{m-n} \in M_m(\widetilde{B}).$$

Μένει να δείξουμε ότι $\widetilde{\varphi}(p) = 1_m - w^*w$ και $\widetilde{\varphi}(q) = 1_m - ww^*$. Για να υπολογίσουμε το $\widetilde{\varphi}(p)$, παρατηρούμε ότι αν $(x, \lambda)$ είναι ένα στοιχειο της $\widetilde{I}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(x,\lambda) &= (\varphi(x),\lambda) = \varphi(x) + (0,\lambda)\\ &= \varphi'(x,\lambda) - \lambda 1_A + (0,\lambda)\\ &= \varphi'(x,\lambda) - \varphi'(s(x,\lambda)) + \widetilde{\varphi}(s(x,\lambda)).\end{aligned}$$

Από την σχέση $VI.1$, την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού και το γεγονός ότι η $\varphi'$ είναι $1-1$, έπεται ότι :

$$s(p) = s(q) = \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & 1_{M_{m-n}(\widetilde{I})} \end{pmatrix} \in M_m(\widetilde{I}).$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(p) &= \varphi'(p) - \varphi'(s(p)) + \widetilde{\varphi}(s(p))\\ &= 1_{M_m(A)} - v^*v - (0_n \oplus 1_{M_{m-n}(A)}) + (0_n \oplus 1_{M_{m-n}(\widetilde{A})})\\ &= 1_{M_m(A)} - v^*v + (0_n \oplus g_{m-n}) = 1_{M_m(A)} - w^*w + g_m = 1_{M_m(\widetilde{A})} - w^*w.\end{aligned}$$

□

**Πρόταση VI.5.** *Θεωρούμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία:*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

*όπου το $I$ είναι ιδεώδες της $A$ και $i$ ο αντίστοιχος εγκλεισμός. Υποθέτουμε ακόμα ότι οι $A, B$ έχουν μονάδα. Αν $u$ ανήκει στο $U_n(B)$ και $v$ είναι μια μερική ισομετρία στο $M_n(A)$, με $\psi_n(v) = u$, τότε ισχύει:*

$$\delta_1([u]_1) = [1_n - v^*v]_0 - [1_n - vv^*]_0 \,.$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση, παρατηρώντας ότι:

$$\psi(1_n - v^*v) = 1_n - u^*u = 0 = 1_n - uu^* = \psi(1_n - vv^*),$$

που δείχνει ότι οι προβολές $1_n - v^*v$ και $1_n - vv^*$ ανήκουν στη $M_n(I)$. Προφανώς ο $i' : M_n(\widetilde{I}) \to M_n(A)$, απεικονίζει ένα στοιχείο του $M_n(I)$ στον εαυτό του. □

## VI.3 Μια ακριβής ακολουθία έξι όρων

Έχοντας ορίσει τον ομομορφισμό ομάδων $\delta_1$, για μια βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

θα δείξουμε τώρα, ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B) \xrightarrow{\delta_1} K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B),$$

είναι ακριβής. Ξέρουμε ότι οι συναρτητές $K_0$ και $K_1$ είναι ημιακριβείς, επομένως απομένει να δείξουμε την ακρίβεια στην $K_1(B)$ και στην $K_0(I)$. Τα επόμενα τέσσερα λήμματα αποδεικνύουν τον ισχυρισμό.

**Λήμμα VI.6.** *Ισχύει im*$K_1(\psi) \subseteq$ *ker*$\delta_1$.

*Απόδειξη.* Ένα στοιχείο $x$ στην εικόνα της $K_1(\psi)$ έχει τη μορφή

$$x = K_1(\psi)([u]_1) = [\tilde{\psi}(u)]_1,$$

για κάποιο $u$ στο $U_n(\tilde{A})$ και $n$ στο $\mathbb{N}$. Για να υπολογίσουμε το $\delta_1(x)$, παρατηρούμε ότι

$$\tilde{\psi}(u) \oplus \tilde{\psi}(u)^* = \tilde{\psi}(u \oplus u^*)$$

και βέβαια το στοιχείο $u \oplus u^*$ είναι ορθομοναδιαίο. Η προβολή $p$ στη $M_{2n}(\tilde{I})$ για την οποία ισχύει:

$$\tilde{\varphi}(p) = (u \oplus u^*)(1_n \oplus 0_n)(u^* \oplus u) = 1_n \oplus 0_n \in M_{2n}(\tilde{A}),$$

είναι προφανώς η $p = 1_n \oplus 0_n$. Καθώς ισχύει $p = s(p)$, έπεται ότι:

$$\delta_1(x) = \nu(\tilde{\psi}(u)) = [p]_0 - [s(p)]_0 = 0 \in K_0(I).$$

□

**Λήμμα VI.7.** *Ισχύει ker*$\delta_1 \subseteq$ *im*$K_1(\psi)$.

*Απόδειξη.* Έστω ένα στοιχείο $[u]_1$ στον πυρήνα της $\delta_1$, με $u$ στο $U_n(\tilde{B})$, για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$. Για να δείξουμε ότι το $[u]_1$ ανήκει στην εικόνα της $K_1(\psi)$, αρκεί να βρούμε $u'$ στο $U_\infty(\tilde{A})$, με $\tilde{\psi}(u') \sim_1 u$.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα VI.2 και την πρόταση VI.3, μπορούμε να βρούμε μερική ισομετρία $w$ στο $M_{2n}(\tilde{A})$, με:

$$\tilde{\psi}(w) = u \oplus 0_n \in M_{2n}(\tilde{B}).$$

Έστω $p, q$ προβολές στο $M_{2n}(\tilde{I})$, με $\tilde{\varphi}(p) = 1_{2n} - w^*w,\ \tilde{\varphi}(q) = 1_{2n} - ww^*$. Ισχύει:

$$[p]_0 = [p]_0 - [q]_0 + [q]_0 = \delta_1([u]_1) + [q]_0 = [q]_0\,.$$

Άρα $p \sim_s q$. Από το λήμμα III.3, υπάρχει $k$ στο $\mathbb{N}$, με $p \oplus 1_k \sim_0 q \oplus 1_k$. Επιπλέον οι προβολές αυτές είναι της ίδιας διάστασης, άρα είναι Murray-von Neumann ισοδύναμες. Έστω μερική ισομετρία $\upsilon$ στο $M_{2n+k}(\tilde{I})$, με

$$\upsilon^*\upsilon = p \oplus 1_k,\ \upsilon\upsilon^* = q \oplus 1_k.$$

Θεωρούμε το στοιχείο $x = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(\upsilon)$, το οποίο είναι βαθμωτό, καθώς $\psi \circ \varphi = 0$.Εφαρμόζοντας τους $^*$-ομομορφισμούς $\tilde{\varphi}$ και $\tilde{\psi}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} x^* x &= (\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(\upsilon))^* (\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(\upsilon)) = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(\upsilon^* \upsilon) = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(p \oplus 1_k) \\ &= \tilde{\psi}\left[(1_{2n} - w^* w) \oplus 1_k\right] = \left[1_{2n} - (u^* \oplus 0_n)(u \oplus 0_n)\right] \oplus 1_k \\ &= \left[1_{2n} - (1_n \oplus 0_n)\right] \oplus 1_k = 0_n \oplus 1_{n+k}. \end{aligned}$$

Ομοίως $xx^* = 0_n \oplus 1_{n+k}$. Αφού το $x$ είναι και βαθμωτό, πρέπει αναγκαστικά να είναι της μορφής $0_n \oplus z$, για κάποιο $z$ στο $M_{n+k}(\tilde{B})$. Προφανώς το $z$ είναι ορθομοναδιαίο. Κάθε ορθομοναδιαίο, βαθμωτό στοιχείο, όμως, έχει πεπερασμένο φάσμα και άρα $z \sim_h 1_{n+k}$.

Θέτουμε $u' = (w \oplus 0_k) + \tilde{\varphi}(\upsilon) \in M_{2n+k}(\tilde{A})$. Τα στοιχεία $x_1 = w \oplus 0_k$ και $x_2 = \varphi(\upsilon)$ είναι μερικές ισομετρίες, αφού τα $w, \upsilon$ είναι μερικές ισομετρίες. Επιπλέον ισχύει:

$$x_1^* x_1 + x_2^* x_2 = (w^* \oplus 0_k)(w \oplus 0_k) + \varphi(\upsilon^* \upsilon) = [w^* w \oplus 0_k] + [(1_{2n} - w^* w) \oplus 1_k] = 1_{2n+k}.$$

Ομοίως $x_1 x_1^* + x_2 x_2^* = 1_{2n+k}$ κι επομένως το $x_1 + x_2 = u'$ είναι ορθομοναδιαίο στοιχείο. Ισχύει:

$$\tilde{\psi}(u') = (u \oplus 0_{n+k}) + (0_n \oplus z) = u \oplus z \sim_h u \oplus 1_{n+k} \sim_1 u.$$

□

**Λήμμα VI.8.** *Ισχύει im*$\delta_1 \subseteq$ *ker*$K_0(\varphi)$.

*Απόδειξη.* Ένα στοιχείο της εικόνας της $\delta_1$ είναι της μορφής $\delta_1([u]_1)$, για κάποιο $u$ στο $U_n(\tilde{B})$ και $n$ στο $\mathbb{N}$. Έστω στοιχεία $\upsilon$ στο $U_{2n}(\tilde{A})$ και $p$ στο $\mathcal{P}_{2n}(\tilde{I})$, με τα οποία μπορούμε να ορίσουμε το $\nu(u)$. Ισχύει:

$$\tilde{\psi}(\tilde{\varphi}(p)) = 1_n \oplus 0_n \in M_{2n}(\tilde{B}).$$

κι επομένως το $s(\tilde{\varphi}(p))$ ισούται με $1_n \oplus 0_n$ στο $M_{2n}(\tilde{A})$. Προφανώς οι προβολές $\tilde{\varphi}(p) = \upsilon(1_n \oplus 0_n)\upsilon^*$ και $s(\tilde{\varphi}(p)) = 1_n \oplus 0_n$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες και άρα ισχύει:

$$K_0(\varphi)(\delta_1([u]_1)) = K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0 = [\tilde{\varphi}(p)]_0 - [s\tilde{\varphi}(p)]_0 = 0.$$

□

**Λήμμα VI.9.** *Ισχύει ker*$K_0(\varphi) \subseteq$ *im*$\delta_1$.

*Απόδειξη.* Ένα στοιχειο $g$ της $K_0(I)$ έχει τη μορφή $[p]_0 - [s(p)]_0$ για $p$ στο $\mathcal{P}_n(\tilde{I})$, και κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$. Αν το στοιχείο αυτό ανήκει στον πυρήνα της $K_0(\varphi)$, τότε, όπως έχουμε δείξει, δεν ισχύει μόνο $\tilde{\varphi}(p) \sim_s s\tilde{\varphi}(p)$, αλλά για κατάλληλη επιλογή του $n$ και της προβολής $p$, τα στοιχεία $\tilde{\varphi}(p)$ και $s\tilde{\varphi}(p)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμα. Έστω $w$ στο $U_n(\tilde{A})$, με $w\tilde{\varphi}(p)w^* = s\tilde{\varphi}(p)$. Το στοιχείο $w$ είναι ορθομοναδιαίο και η $p$ είναι προβολή, άρα το στοιχείο:

$$u_0 = \tilde{\psi}(w(1_n - \tilde{\varphi}(p))),$$

είναι μερική ισομετρία στο $M_n(\tilde{B})$. Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$u_0^* u_0 = 1_n - \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}(p)),$$

$$u_0u_0^* = 1_n - \tilde{\psi}(s\tilde{\varphi}(p)) = 1_n - \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}(p)).$$

Όταν, όμως, μια μερική ισομετρία $u_0$ είναι και φυσιολογικό στοιχείο, τότε το άθροισμα:

$$u = u_0 + (1_n - u_0u_0^*),$$

είναι ορθομοναδιαίο στοιχείο στο $M_n(\tilde{B})$.

Τέλος, μπορούμε να βρούμε κατάλληλη ισομετρία στο $M_{2n}(\tilde{A})$ και να δείξουμε ότι:

$$\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0 = g.$$

□

## VI.4 Ο ισομορφισμός των ομάδων $K_1(A)$ και $K_0(SA)$

**Ορισμός.** Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα. Ορίζουμε τα σύνολα $CA$ και $SA$ ως εξής:

$$CA = \{f \in C([0,1], A) : f(0) = 0\},$$

$$SA = \{f \in C([0,1], A) : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Η $CA$ ονομάζεται ο κώνος της $A$ και η $SA$ η ανάρτηση της $A$.

Και τα δύο σύνολα γίνονται $C^*$-άλγεβρες, με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum. Η $SA$ είναι, βέβαια, μια $C^*$-υπάλγεβρα της $CA$. Θεωρώντας τον εγκλεισμό $i$ και τον επιμορφισμό $\pi\colon CA \to A$, με $\pi(f) = f(1)$, έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0.$$

**Πρόταση VI.10.** *Αν $A$ είναι μια $C^*$-άλγεβρα, τότε $K_0(CA) = K_1(CA) = 0$.*

*Απόδειξη.* Καθώς οι συναρτητές $K_0, K_1$ είναι ομοτοπικά αναλλοίωτοι και αντιστοιχούν τη μηδενική $C^*$-άλγεβρα στη μηδενική αβελιανή ομάδα, αρκεί να δείξουμε ότι η $CA$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την μηδενική $C^*$-άλγεβρα.

Θεωρούμε τις μηδενικές απεικονίσεις $0_1\colon CA \to 0$ και $0_2\colon 0 \to CA$. Προφανώς $0_1 \circ 0_2 = id_0$, άρα αρκεί η $0_2 \circ 0_1\colon CA \to CA$ να είναι η ομοτοπική με την ταυτοτική της $CA$. Θεωρούμε το μονοπάτι $^*$-ομομορφισμών $\varphi_t$, με $\varphi_t(f)(s) = f(st)$, για κάθε $f$ στην $CA$ και $s, t$ στο $[0,1]$. Η $\varphi_t(f)$ είναι συνεχές μονοπάτι στην $A$, με $\varphi_t(f)(0) = f(0t) = 0$. Το μονοπάτι $t \mapsto \varphi_t(f)$ είναι συνεχές για κάθε $f$ στο $CA$, η $\varphi_t$ είναι $^*$-ομομορφισμός για κάθε $t$ στο $[0,1]$ και ισχύει

$$\varphi_0(f) = 0 = 0_2 \circ 0_1(f),\ \varphi_1(f) = f = id_{CA}(f).$$

Επομένως ισχύει $0_2 \circ 0_1 \sim_h id_{CA}$ και άρα η $CA$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την μηδενική $C^*$-άλγεβρα. □

## Ο συναρτητής S

Ο $S$ μπορεί να γίνει ένας συναλλοίωτος συναρτητής, από την κατηγορία $C^*$ των $C^*$-αλγεβρών, στον εαυτό της, αν, για κάθε $^*$-ομομορφισμό $\varphi$ μεταξύ δυο $C^*$-αλγεβρών $A$ και $B$, θέσουμε $S\varphi\colon SA \to SB$, με $S\varphi(f) = \varphi \circ f$. Πράγματι, η σύνθεση αυτή είναι ένα συνεχές μονοπάτι στο $B$, με $S\varphi(f)(0) = S\varphi(f)(1) = 0$. Επιπλέον η $S\varphi$ είναι ένας $^*$-ομομορφισμός και ισχύει:

- $Sid_A = id_{SA}$, καθώς $id_A \circ f = f$.
- Αν $\psi\colon B \to C$ είναι ένας $^*$-ομομορφισμός $C^*$-αλγεβρών, τότε

$$S(\psi \circ \varphi)(f) = (\psi \circ \varphi) \circ f = \psi \circ (\varphi \circ f) = S\psi \circ S\varphi(f), \forall f \in SA.$$

Παρατηρούμε ότι ο συναρτητής $S$ απεικονίζει τη μηδενική $C^*$-άλγεβρα στη μηδενική $C^*$-άλγεβρα και (επομένως) μηδενικούς $^*$-ομομορφισμούς σε μηδενικούς $^*$-ομομορφισμούς. Για να αποδείξουμε ότι ο συναρτητής $S$ είναι ακριβής, θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα και την παρατήρηση ότι η συνάρτηση προς το $SA$, που απεικονίζει μια συνάρτηση $f$ του $C_0((0,1),A)$, στην επέκταση της $\tilde{f}$, με $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$, είναι ένας $^*$-ισομορφισμός. Επομένως μπορούμε να ταυτίσουμε τις $C^*$-άλγεβρες $C_0((0,1),A)$ και $SA$.

**Λήμμα VI.11.** *Έστω $X$ ένας τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και $A$ μια $C^*$-άλγεβρα. Αν η $f$ ανήκει στο $C_0(X)$ και το $\alpha$ στην $A$, τότε προφανώς η συνάρτηση:*

$$f \bullet \alpha\colon X \to A : f \bullet \alpha(x) = f(x)\alpha,$$

*είναι συνεχής και επίσης μηδενίζεται στο άπειρο. Η γραμμική θήκη όλων των στοιχείων της μορφής $f \bullet \alpha$, για $f$ στο $C_0(X)$ και $\alpha$ στην $A$, είναι πυκνό υποσύνολο του $C_0(X,A)$.*

**Πρόταση VI.12.** *Ο συναρτητής $S$ είναι ακριβής.*

*Απόδειξη.* Έστω

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία:

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow 0,$$

είναι επίσης μια βραχεία ακριβής ακολουθία.

- Η $\varphi$ είναι $1-1$, άρα και η $S\varphi$ είναι $1-1$, διότι, αν $f, g$ ανήκουν στο $SI$, τότε:

$$S\varphi(f) = S\varphi(g) \Rightarrow \varphi \circ f = \varphi \circ g \Rightarrow f = g.$$

- $S\psi \circ S\varphi = S(\psi \circ \varphi) = 0$, άρα im$S\varphi \subseteq$ ker$S\psi$.
- Για να δείξουμε ότι ker$S\psi \subseteq$ im$S\varphi$, θεωρούμε ένα μονοπάτι $f$ στον πυρήνα της $S\psi$. Για κάθε $t$ στο $[0,1]$, το στοιχείο $f(t)$ ανήκει στον ker$\psi$ = im$\varphi$, εφ'όσον $\psi \circ f(t) = 0$. Επομένως υπάρχει μοναδικό στοιχείο $g(t)$ στο $I$, με $\varphi(g(t)) = f(t)$. Το μονοπάτι $g$ ανήκει στο $SI$ και ισχύει $S\varphi(g) = \varphi \circ g = f$.

- Για να αποδείξουμε ότι η $S\psi$ είναι επί, παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο της $SB$, της μορφής $f \bullet b$, για κάποιο $f$ στο $C_0((0,1))$ και $b$ στο $B$, ανήκει στην εικόνα της $S\psi$. Πράγματι, από την ακρίβεια του αρχικού διαγράμματος, η $\psi$ είναι επί κι έτσι μπορούμε να βρούμε $\alpha$ στην $A$, με $\psi(\alpha) = b$. Επομένως ισχύει:

  $$S\psi(f \bullet \alpha)(t) = \psi \circ (f \bullet \alpha)(t) = \psi \circ (f(t)\alpha) = f(t)\psi(\alpha) = f \bullet \psi(\alpha)(t), \forall t \in (0,1).$$

  Συνεπώς $S\psi(f \bullet \alpha) = f \bullet \psi(\alpha) = f \bullet b$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα και το γεγονός ότι κάθε $^*$-ομομορφισμός $C^*$-άλγεβρών είναι γραμμική και συνεχής απεικόνιση.

□

**Θεώρημα VI.13.** *Για κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$, υπάρχει ισομορφισμός $\theta_A : K_1(A) \to K_0(SA)$, ώστε αν $A, B$ είναι $C^*$-άλγεβρες και $\varphi : A \to B$ ένας $^*$-ισομομορφισμός, το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd}
K_1(A) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] \arrow[d, "\theta_A"'] & K_1(B) \arrow[d, "\theta_B"] \\
K_0(SA) \arrow[r, "K_0(S\varphi)"'] & K_0(SB)
\end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Θεωρώντας τη βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0,$$

έχουμε τη δείκτρια συνάρτηση $\delta_1 : K_1(A) \to K_0(SA)$ και την ακριβή ακολουθία:

$$K_1(SA) \longrightarrow 0 \longrightarrow K_1(A) \xrightarrow{\delta_1} K_0(SA) \longrightarrow 0 \longrightarrow K_0(A),$$

δεδομένου ότι $K_1(CA) = K_0(CA) = 0$. Από την ακρίβεια της ακόλουθίας αυτής, η $\delta_1$ είναι ισομορφισμός. Θέτουμε $\theta_A = \delta_1$.

Έστω $\varphi : A \to B$ ένας $^*$-ομομορφισμός. Για να δείξουμε ότι το διάγραμμα είναι μεταθετικό, αρκεί απλώς να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της φυσικότητας της δείκτριας συνάρτησης, στο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & SA \arrow[r, "i"] \arrow[d, "S\varphi"'] & CA \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "C\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & SB \arrow[r, "i"'] & CB \arrow[r, "\pi"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

όπου $C\varphi$ είναι ο $^*$-ομομορφισμός με $C\varphi(f) = \varphi \circ f$, για κάθε $f$ στο $CA$. □

**Πρόταση VI.14.** *Ο συναρτητής $K_1$ είναι διασπώμενα ακριβής.*

*Απόδειξη.* Έστω μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \rightleftarrows B \longrightarrow 0 \, .$$

Ο S είναι ακριβής, επομένως προκύπτει η διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \rightleftarrows SB \longrightarrow 0 \, .$$

Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] \arrow[d, "\theta_I"'] & K_1(A) \arrow[r, shift left] \arrow[d, "\theta_A"'] & K_1(B) \arrow[r] \arrow[l, shift left] \arrow[d, "\theta_B"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_0(SI) \arrow[r, "K_0(S\varphi)"] & K_0(SA) \arrow[r, shift left] & K_0(SB) \arrow[r] \arrow[l, shift left] & 0 \end{tikzcd}$$

Από το θεώρημα VI.13, οι απεικονίσεις $\theta_I, \theta_A, \theta_B$ είναι ισομορφισμοί και το διάγραμμα είναι μεταθετικό προς όλες τις κατευθύνσεις. Επειδή ο $K_0$ είναι διασπώμενα ακριβής, η κάτω γραμμή του διαγράμματος είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία, άρα το ίδιο είναι και η πάνω γραμμή.

□

Αν $A$ και $B$ είναι $C^*$-άλγεβρες, τότε για κάθε μονοπάτι $f$, που ανήκει στο $S(A \oplus B)$, υπάρχει $a_t$ στην $A$ και $b_t$ στην $B$, με $f_t = (a_t, b_t)$, για κάθε $t$ στο $[0, 1]$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η απεικόνιση:

$$S(A \oplus B) \to S(A) \oplus S(B) \colon f \mapsto (a, b),$$

είναι ένας $^*$-ισομορφισμός. Με παρόμοιο τρόπο, έχουμε έναν $^*$-ισομορφισμό απ'το $S(M_n(A))$ στο $M_n(SA)$.

**Πρόταση VI.15.** *Αν $A$ και $B$ είναι $C^*$-άλγεβρες, ισχύει:*

$$K_1(A \oplus B) \simeq K_1(A) \oplus K_1(B).$$

*Απόδειξη.* Οι συναρτητές $S$ και $K_0$ διατηρούν τα ευθέα αθροίσματα, άρα και ο $K_1$:

$$\begin{aligned} K_1(A \oplus B) &\simeq K_0(S(A \oplus B)) \simeq K_0(SA \oplus SB) \\ &\simeq K_0(SA) \oplus K_0(SB) \simeq K_1(A) \oplus K_1(B). \end{aligned}$$

□

**Πρόταση VI.16.** *Η ομάδα $K_1(M_n(A))$ είναι ισόμορφη με την $K_1(A)$, για κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$ και $n$ στο $\mathbb{N}$.*

*Απόδειξη.* Παρομοίως με την προηγούμενη απόδειξη, έχουμε:

$$K_1(M_n(A)) \simeq K_0(SM_n(A)) \simeq K_0(M_n(SA)) \simeq K_0(SA) \simeq K_1(A).$$

□

## VI.5 Η μακριά ακριβής ακολουθία

Επεκτείνουμε τους ορισμούς των συναρτητών $K_0$ και $K_1$, ορίζοντας για κάθε φυσικό αριθμό $n$, ένα συναρτητή $K_n$.

Αν $F$ είναι ένας συναρτητής μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$, και $G$ ένας συναρτητής μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$, είναι μια εύκολη εφαρμογή των ορισμών να δει κανείς ότι η "σύνθεση" $G \circ F$ των δύο αυτών συναρτητών, με $G \circ F(A) = G(F(A))$, για κάθε αντικείμενο $A$ της $\mathcal{A}$ και $G \circ F(\varphi) = G(F(\varphi))$, για κάθε μορφισμό $\varphi$, είναι ένας συναρτητής από την $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{C}$.

Είναι, επίσης, στοιχειώδες να δει κανείς οτι η σύνθεση δύο ακριβών συναρτητών είναι ακριβής συναρτητής, ενώ η σύνθεση $G \circ F$, με $F$ ακριβή και $G$ ημιακριβή, είναι ημιακριβής συναρτητής,

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να δώσουμε τον εξής επαγωγικό ορισμό:

**Ορισμός.** Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ορίζουμε έναν συναρτητή από την κατηγορία των $C^*$-αλγεβρών, στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, με:

$$K_{n+1} = K_n \circ S.$$

Με βάση τον ορισμό αυτό, έχουμε:

$$K_2(A) = K_1(SA),\ K_3(A) = K_2(SA) = K_1(S^2A),$$

και επαγωγικά:

$$K_{n+1}(A) = K_1(S^nA),\ \text{για } n \geq 1.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και δεδομένου ότι ο συναρτητής $S$ είναι ακριβής και ο $K_1$ είναι ημιακριβής, έπεται ότι ο $K_n$ είναι ημιακριβής, για κάθε $n$ στο $\mathbb{N}$.

Έστω η βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

Έχουμε ορίσει τη σχετική δείκτρια συνάρτηση $\delta_1 \colon K_1(B) \to K_0(I)$. Θα ορίσουμε ένα ομομορφισμό ομάδων $\delta_{n+1} \colon K_{n+1}(B) \to K_n(I)$ και θα προκύψει μια μακριά ακριβής ακολουθία $K$-ομάδων.

Θυμίζουμε ότι $K_{n+1}(B) = K_1(S^nB)$ και $K_n(I) = K_1(S^{n-1}I) \simeq K_0(S^nI)$. Γίνεται, λοιπόν, προφανές οτι μπορούμε να ορίσουμε την δείκτρια συνάρτηση $\delta_{n+1}$, ως τη δείκτρια συνάρτηση $\bar{\delta_1}$, που επάγεται από την βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow S^nI \xrightarrow{S^n\varphi} S^nA \xrightarrow{S^n\psi} S^n(B) \longrightarrow 0,$$

θεωρώντας ότι αυτή παίρνει τιμές στο $K_1(S^{n-1}I)$. Πιο αναλυτικά, χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό $\theta_{S^{n-1}I} \colon K_1(S^{n-1}I) \to K_0(S^nI)$, ορίζουμε:

$$\delta_{n+1} = \theta^{-1}_{S^{n-1}I} \circ \bar{\delta_1}.$$

**Πρόταση VI.17** (Φυσικότητα της $\delta_n$)**.** *Έστω το μεταθετικό διάγραμμα $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών:*

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I' \arrow[r, "\varphi'"'] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

*στο οποίο η κάθε γραμμή είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία. Τότε το διάγραμμα αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών ομάδων:*

$$
\begin{tikzcd}
K_{n+1}(B) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "K_{n+1}(\beta)"'] & K_n(I) \arrow[d, "K_n(\gamma)"] \\
K_{n+1}(B') \arrow[r, "\delta'_{n+1}"] & K_n(I')
\end{tikzcd}
$$

*είναι μεταθετικό, για κάθε $n$ στο $\mathbb{N}$.*

*Απόδειξη.* Ο συναρτητής $S^n$ είναι ακριβής, κι έτσι έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^nI \arrow[r, "S^n\varphi"] \arrow[d, "S^n\gamma"'] & S^nA \arrow[r, "S^n\psi"] \arrow[d, "S^n\alpha"] & S^nB \arrow[r] \arrow[d, "S^n\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^nI' \arrow[r, "S^n\varphi'"'] & S^nA' \arrow[r, "S^n\psi'"'] & S^nB' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

στο οποίο η κάθε γραμμή είναι βραχεία ακριβής ακολουθία.

Από την φυσικότητα της δείκτριας συνάρτησης $\delta_n$, για $n = 1$, προκύπτει ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$
\begin{tikzcd}
K_1(S^nB) \arrow[r, "\bar{\delta_1}"] \arrow[d, "K_1(S^n\beta)"'] & K_0(S^nI) \arrow[d, "K_1(S^n\gamma)"] \\
K_1(S^nB') \arrow[r, "\bar{\delta_1'}"] & K_0(S^nI')
\end{tikzcd}
$$

Ισχύει βέβαια $K_0(S^nI) \simeq K_n(I)$ και $K_0(S^nI') \simeq K_n(I')$. Από τον ορισμό της $\delta_{n+1}$ έπεται το ζητούμενο:

$$
\begin{aligned}
K_n(\gamma) \circ \delta_{n+1} &= K_n(\gamma) \circ \theta^{-1}_{S^{n-1}I} \circ \bar{\delta_1} = \theta^{-1}_{S^{n-1}I'} \circ K_1(S^n\gamma) \circ \bar{\delta_1} \\
&= \theta^{-1}_{S^{n-1}I} \circ \bar{\delta_1}' \circ K_1(S^nB) = \delta'_{n+1} \circ K_1(S^nB).
\end{aligned}
$$

$\square$

**Πρόταση VI.18.** *Θεωρώντας για μια βραχεία ακριβή ακολουθία,*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

*τις δείκτριες συναρτήσεις $\delta_n$, για κάθε $n$ στο $\mathbb{N}$, έχουμε τη μακριά ακριβή ακολουθία:*

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1}(A) \xrightarrow{K_{n+1}(\psi)} K_{n+1}(B) \xrightarrow{\delta_{n+1}} K_n(I) \xrightarrow{K_n(\varphi)} K_n(A) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B).$$

*Απόδειξη.* Όπως έχουμε δείξει, για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία, χρησιμοποιώντας την δείκτρια συνάρτηση $\delta_1$, παίρνουμε μια ακριβή ακολουθία $K$-ομάδων, έξι όρων. Θεωρώντας την ακολουθία αυτή, για την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow S^n I \xrightarrow{S^n\varphi} S^n A \xrightarrow{S^n\psi} S^n B \longrightarrow 0,$$

για τυχαίο $n$ στο $\mathbb{N}$, και την αντίστοιχη δείκτρια συνάρτηση $\bar{\delta_1}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
K_{n+1}(I) \arrow[r, "K_{n+1}(\varphi)"] \arrow[d, equal] & K_{n+1}(A) \arrow[r, "K_{n+1}(\psi)"] \arrow[d, equal] & K_{n+1}(B) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, equal] & K_n(I) \arrow[r, "K_n(\varphi)"] \arrow[d, "\theta_{S^{n-1}I}"'] & K_n(A) \arrow[r, "K_n(\psi)"] \arrow[d, "\theta_{S^{n-1}A}"'] & K_n(B) \arrow[d, "\theta_{S^{n-1}B}"'] \\
K_1(S^nI) \arrow[r, "K_{n+1}(\varphi)"'] & K_1(S^nA) \arrow[r, "K_{n+1}(\psi)"'] & K_1(S^nB) \arrow[r, "\bar{\delta_1}"'] & K_0(S^nI) \arrow[r, "K_0(S^n\varphi)"'] & K_0(S^nA) \arrow[r, "K_0(S^n\psi)"'] & K_0(S^nB)
\end{tikzcd}$$

όπου $K_n(I) = K_1(S^{n-1}I)$ και $\theta_{S^{n-1}I}$ είναι ο αντίστοιχος φυσικός ισομορφισμός. Η κάτω γραμμή είναι ακριβής, άρα και η πάνω. $\square$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

# Η περιοδικότητα Bott

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε την περιοδικότητα Bott, δηλαδή ότι για κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός μεταξυ της $K_0(S^2A)$ και της $K_0(A)$. Έχουμε δείξει ότι $K_1(SA) \simeq K_0(S^2A)$, άρα θα έχουμε

$$K_1(SA) \simeq K_0(A).$$

Έπεται ότι $K_1(S^2A) \simeq K_1(A)$ και γενικά $K_{n+2} = K_n$. Σαν συνέπεια της περιοδικότητας Bott, μπορούμε να δείξουμε ότι η ακριβής ακολουθία των έξι όρων που επάγει μια βραχεία ακριβής ακολουθία $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών, γίνεται κυκλική.

Αντί της συνηθισμένης απόδειξης του Atiyah, παρουσιάζουμε την απόδειξη του Cuntz, η οποία χρησιμοποιεί μόνο τις συναρτητικές ιδιότητες των $K_0$ και $K_1$ και όχι ποιοί ακριβώς είναι οι συναρτητές αυτοί. Θα χρειαστούμε κάποια επιπλέον εργαλεία.

## VII.1 Τανυστικά γινόμενα

### Τανυστικό γινόμενο διανυσματικών χώρων

Στα επόμενα $U, V, W$ είναι μιγαδικοί, διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f\colon U \times V \to W$ λέγεται διγραμμική, αν είναι γραμμική για κάθε μεταβλητή χωριστά, δηλαδή αν ισχύει:

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 f(u_1, v) + \lambda_2 f(u_2, v), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, u_1, u_2 \in U, v \in V,$$

$$f(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(u, v_1) + \lambda_2 f(u, v_2), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, v_1, v_2 \in V, u \in U.$$

**Ορισμός.** Τανυστικό γινόμενο των $U$ και $V$ είναι κάθε ζεύγος $(T, t\colon U \times V \to T)$, καθολικό ως προς την διγραμμικότητα, με την έννοια ότι ο $T$ είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος, η $t$ είναι διγραμμική, και κάθε άλλη διγραμμική απεικόνιση $s$, απο το $U \times V$ προς κάποιον μιγαδικό διανυσματικό χώρο $W$, παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο μέσω της $t$, δηλαδή υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\tau\colon T \to W$, με $\tau \circ t = s$.

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "s"] & \\
T \arrow[r, dashed, "\tau"'] & W
\end{tikzcd}$$

Λόγω της καθολικής του ιδιότητας, το τανυστικό γινόμενο είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό και συμβολίζεται με $U \otimes V$. Θέτουμε ακόμα $t(u, v) = u \otimes v$. Το τανυστικό γινόμενο δυο γραμμικών χώρων υπάρχει και μπορεί να κατασκευαστεί με διάφορους τρόπους.

Αν $\tau : U \to U'$ και $\sigma : V \to V'$ είναι γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ των μιγαδικών διανυσματικών χώρων $U, U'$ και $V, V'$, τότε η $f : U \times V \to U' \otimes V'$, με $f(u, v) = \tau(u) \otimes \sigma(v)$ είναι διγραμμική, άρα από την καθολική ιδιότητα, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\tau \odot \sigma : U \otimes V \to U' \otimes V'$, με $(\tau \odot \sigma) \circ t = f$ ή ισοδύναμα

$$\tau \odot \sigma(u \otimes v) = \tau(u) \otimes \sigma(v).$$

## Τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert

Σε χώρους Hilbert, η παραπάνω κατασκευή μπορεί να επεκταθεί εύκολα, λόγω του παρακάτω θεωρήματος.

**Θεώρημα VII.1.** *Αν $H, K$ είναι χώροι Hilbert, υπάρχει μοναδικό εσωτερικό γινόμενο $< \cdot, \cdot >$ στον $H \otimes K$, με*

$$< x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 >=< x_1, x_2 >< y_1, y_2 >, \quad \forall x_1, x_2 \in H, y_1, y_2 \in K.$$

Το τανυστικό γινόμενο των $H, K$, ως χώρων Hilbert, είναι η πλήρωση του χώρου $H \otimes K$, ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, και συμβολίζεται με $H \hat{\otimes} K$. Ισχύει:

$$\|x \otimes y\|^2 =< x \otimes y, x \otimes y >=< x, x > \cdot < y, y >= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2, \forall x \in H, y \in K.$$

**Πρόταση VII.2.** *Αν $u \in B(H)$ και $v \in B(K)$, τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής $u \hat{\otimes} v$ στον $B(H \hat{\otimes} K)$, με:*

$$(u \hat{\otimes} v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y).$$

*Ακόμα ισχύει $\|u \hat{\otimes} v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.*

## Τανυστικά γινόμενα $C^*$-αλγεβρών

Χρησιμοποιώντας την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου για κατάλληλες διγραμμικές απεικονίσεις, μπορούμε να δείξουμε τα εξής. Αν $A, B$ είναι άλγεβρες, υπάρχει μοναδικός πολλαπλασιασμός στο $A \otimes B$, έτσι ώστε:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2, \forall a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B.$$

Επίσης μπορούμε να δείξουμε ότι αν $A, B$ είναι άλγεβρες με ενέλιξη, τότε υπάρχει μοναδική ενέλιξη στο $A \otimes B$, με

$$(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*, \ \forall \alpha \in A, b \in B.$$

Για να ορίσουμε μια $C^*$-νόρμα στην $^*$-άλγεβρα $A \otimes B$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω.

**Θεώρημα VII.3.** *Αν $\pi_1, \pi_2$ είναι αναπαραστάσεις των $C^*$-αλγεβρών $A, B$ στους χώρους Hilbert $H, K$ αντίστοιχα, τότε υπάρχει μοναδικός $^*$-ομομορφισμός $\pi\colon A \otimes B \to \mathcal{B}(H\hat{\otimes}K)$, με*

$$\pi(\alpha \otimes b) = \pi_1(\alpha)\hat{\otimes}\pi_2(b).$$

Υπολογίζοντας τη νόρμα του $\pi(\alpha \otimes b)$, συμπεραίνουμε ότι αν οι $\pi_1$ και $\pi_2$ είναι $1-1$, τότε η $\pi$ είναι επίσης $1-1$. Θεωρώντας, λοιπόν, πιστές αναπαραστάσεις για τις $A, B$, παίρνουμε μια πιστή αναπαράσταση $\pi$ της $A \otimes B$ στον $H\hat{\otimes}K$. Μέσω της $\pi$, το $\mathcal{B}(H\hat{\otimes}K)$ επάγει μια $C^*$-νόρμα $\|\cdot\|$ στο $A \otimes B$, η οποία αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητη των αναπαραστάσεων. Ισχύει η ισότητα:

$$\|\alpha \otimes b\| = \|\pi(\alpha \otimes b)\| = \|\pi_1(\alpha)\hat{\otimes}\pi_2(b)\| = \|\pi_1(\alpha)\| \cdot \|\pi_2(b)\| = \|\alpha\| \cdot \|b\|.$$

Η πλήρωση της $(A \otimes B, \|\cdot\|)$ είναι το ελαχιστικό τανυστικό γινόμενο των $C^*$-αλγεβρών $A, B$ και στα επόμενα θα το συμβολίζουμε απλώς με $A \otimes B$, αφού είναι το μόνο που θα χρησιμοποιήσουμε.

Γενικά, μπορεί να υπάρχουν περισσότερες $C^*$-νόρμες στο $A \otimes B$. Αποδεικνύεται ότι η νόρμα του ελαχιστικού τανυστικού γινομένου είναι μικρότερη από κάθε άλλη $C^*$-νόρμα στο $A \otimes B$. Η $A$ λέμε ότι είναι nuclear, αν για κάθε άλλη $C^*$-άλγεβρα $B$, υπάρχει μοναδική $C^*$-νόρμα στο $A \otimes B$. Αποδεικνύεται ότι κάθε $C^*$-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης είναι nuclear. Ακόμα κάθε μεταθετική $C^*$-άλγεβρα είναι nuclear (Θεώρημα Takesaki).

**Θεώρημα VII.4.** *Θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία $C^*$-αλγεβρών*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

*Αν για κάποια $C^*$-άλγεβρα $D$, η $^*$-άλγεβρα $B \otimes D$ δέχεται μοναδική $C^*$-νόρμα, τότε η επαγόμενη ακολουθία*

$$0 \longrightarrow I \otimes D \longrightarrow A \otimes D \longrightarrow B \otimes D \longrightarrow 0,$$

*είναι επίσης ακριβής.*

Αν $f$ ανήκει στο $S\mathbb{C}$ και $a$ σε μια $C^*$-άλγεβρα $A$, μπορούμε να ορίσουμε το γινόμενο τους $f \bullet a$ όπως και στο λήμμα VI.11 . Τότε η απεικόνιση $a \otimes f \mapsto f \bullet A$, απ΄το $A \otimes S\mathbb{C}$ στο $SA$ είναι ένας $^*$ ισομορφισμός, άρα ισχύει $A \otimes S\mathbb{C} \simeq SA$. Αποδεικνύεται επίσης ότι $\mathbb{C} \otimes A \simeq A$ και ότι $M_n(\mathbb{C}) \otimes A \simeq M_n(A)$.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα, παρατηρώντας ότι αν $A, B$ είναι $C^*$-άλγεβρες και $p$ είναι μια μη μηδενική προβολή στο $B$, τότε έχουμε έναν $^*$-μονομορφισμό:

$$i\colon A \to A \otimes B : \alpha \mapsto a \otimes p.$$

Πράγματι, καθώς η $\otimes$ είναι διγραμμική, η $i$ είναι γραμμική. Η $i$ διατηρεί τον πολλαπλασιασμό δακτυλίου και την ενέλιξη, αφού το $p$ είναι προβολή. Έχουμε για παράδειγμα:

$$i(\alpha_1\alpha_2) = \alpha_1\alpha_2 \otimes p = \alpha_1\alpha_2 \otimes pp = (\alpha_1 \otimes p)(\alpha_2 \otimes p) = i(\alpha_1)i(\alpha_2), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in A.$$

Για να δείξουμε ότι η $i$ είναι $1-1$, υπολογίζουμε:

$$\|i(\alpha)\| = \|\alpha \otimes p\| = \|\alpha\| \cdot \|p\| = \|\alpha\|.$$

## VII.2 Η άλγεβρα Toeplitz

Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $H = l^2(\mathbb{N})$, των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών και τη συνήθη ορθοκανονική του βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Θυμίζουμε ότι ο τελεστής μετατόπισης δεξιά, $S$, ορίζεται από τις σχέσεις $S(e_n) = e_{n+1}$, για $n$ στο $\mathbb{N}$. Ο συζυγής τελεστής $S^*$, δίνεται από τις σχέσεις:

$$S^*(e_n) = \begin{cases} e_{n-1} & ,\text{αν } n \geq 1 \\ 0 & ,\text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Ο $S$ είναι ισομετρία, καθώς $S^*S = 1$, δεν είναι όμως ορθομοναδιαίο στοιχείο, διότι δεν είναι επί.

**Ορισμός.** Η άλγεβρα Toeplitz, $\mathcal{T}$, είναι η $C^*$-άλγεβρα $C^*(S)$, που παράγεται από το $S$.

Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα, η άλγεβρα Toeplitz είναι η καθολική άλγεβρα που παράγεται από μια ισομετρία.

**Θεώρημα VII.5** (Coburn)**.** *Για κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$ με μονάδα και $v$ ισομετρία στην $A$, υπάρχει μοναδικός $^*$-ομομορφισμός $\mathcal{T} \to A$, με $S \mapsto v$*

Με $\mathcal{K}$ συμβολίζουμε τους συμπαγείς τελεστές του $l^2(\mathbb{N})$.

**Πρόταση VII.6.** *Υπάρχουν κατάλληλοι $^*$-ομομορφισμοί, ώστε η ακολουθία $C^*$-αλγεβρών*

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

*να είναι ακριβής.*

*Απόδειξη.* Δείχνουμε αρχικά ότι ο $\mathcal{K}$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{T}$, κι έτσι έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}/\mathcal{K} \longrightarrow 0.$$

Στη συνέχεια θα δειξουμε ότι $\mathcal{T}/\mathcal{K} \simeq C(\sigma(\pi(S))) = C(\mathbb{T})$.

Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{K}$ παράγεται από τους τελεστές πρώτης τάξης $E_{nm}$, με

$$E_{nm}(\xi) =< \xi, e_m > e_n.$$

Παρατηρούμε ότι $SS^*e_n = e_n$, για $n \geq 1$ και $SS^*e_0 = 0$. Επομένως το στοιχείο $1 - SS^*$ είναι η προβολή στον $< e_0 >$ και ισούται με τον $E_{00}$. Γενικότερα ο τελεστής $E_{nm}$ απεικονίζει το $e_m$ στο $e_n$ και το $e_k$ στο $0$, για $k \neq m$. Είναι εύκολο να δούμε τώρα ότι ισχύει:

$$E_{nm} = S^n(1 - SS^*)(S^*)^m \in \mathcal{T}.$$

Επομένως $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}$. Ο $\mathcal{K}$ είναι ιδεώδες του $\mathcal{B}(H)$, άρα και της $\mathcal{T}$.

Ο $\pi$ είναι ένας $^*$-επιμορφισμός και ο $S$ παράγει την $\mathcal{T}$. Έπεται ότι το $\pi(S)$ παράγει το $\mathcal{T}/\mathcal{K}$. Ακόμα γνωρίζουμε ότι ο συναρτησιακός λογισμός, για ένα φυσιολογικό στοιχείο, είναι ένας $^*$-ισομορφισμός προς την $C^*$-άλγεβρα που παράγεται από το στοιχείο αυτό. Το στοιχείο $1 - SS^*$

ανήκει στον $\mathcal{K}$, άρα το $\pi(S)$ είναι ορθομοναδιαίο στοιχείο του $\mathcal{T}/\mathcal{K}$, και κατά μείζονα λόγο φυσιολογικό. Επομένως ισχύει:

$$\mathcal{T}/\mathcal{K} = C^*(\pi(S)) \simeq C(\sigma(\pi(S))).$$

Μένει να δείξουμε ότι $\sigma(\pi(S)) = \mathbb{T}$. Καθώς το $\pi(S)$ είναι ορθομοναδιαίο, το φάσμα του είναι υποσύνολο του $\mathbb{T}$. Για να έχουμε ισότητα, σύμφωνα με το λήμμα II.1, αρκεί να δειξουμε ότι το $\pi(S)$ δεν είναι ομοτοπικό με τη μονάδα στο $U(\mathcal{T}/\mathcal{K})$. Αν $\delta_1 \colon K_1(\mathcal{T}/\mathcal{K}) \to K_0(\mathcal{K})$ είναι η σχετική δείκτρια συνάρτηση, τότε, σύμφωνα με την πρόταση VI.5, έχουμε ότι:

$$\delta_1([\pi(S)]_1) = [1 - S^*S]_0 - [1 - S^*S]_0 = -[E_{00}]_0$$

Το $[E_{00}]_0$ είναι μη μηδενικό στοιχείο της $K_0(\mathcal{K})$, άρα το $[\pi(S)]_1$ είναι μη μηδενικό στην $K_1(\mathcal{T}/\mathcal{K})$. $\square$

## VII.3 Η απόδειξη της περιοδικότητας Bott

**Ορισμός.** Ένας συναρτητής $E$, από την κατηγορία των $C^*$-αλγεβρών στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, λέγεται ευσταθής, αν η εμφύτευση:

$$\kappa \colon A \to A \otimes \mathcal{K} : \alpha \mapsto \alpha \otimes E_{00},$$

αντιστοιχεί σε ισομορφισμό $E(\kappa) \colon E(A) \to E(A \otimes \mathcal{K})$.

Ξέρουμε ότι ισχύει:

$$K_i(M_n(\mathbb{C}) \otimes A) \simeq K_i(M_n(A)) \simeq K_i(A), \quad i = 1, 2.$$

Με χρήση επαγωγικών ορίων $C^*$-αλγεβρών, μπορούμε να δείξουμε ότι ο $\mathcal{K}$ είναι το επαγωγικό όριο της $M_n(\mathbb{C})$ και ότι οι συναρτητές $K_0, K_1$ είναι συνεχείς. Επομένως οι $K_0, K_1$ είναι ευσταθείς.

**Θεώρημα VII.7.** *Αν $E$ είναι ένας ομοτοπικά αναλλοίωτος και ημιακριβής συναρτητής από την $C^*$ στην $Ab$, τότε:*

*(i) Υπάρχει μια μακριά ακριβής ακολουθία:*

$$\cdots \longrightarrow E(S^2(B)) \xrightarrow{\delta_2} E(SI) \longrightarrow E(SA) \longrightarrow E(SB) \xrightarrow{\delta_1} E(I) \longrightarrow E(A) \longrightarrow E(B),$$

*για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία:*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0,$$

*έτσι ώστε οι συνδέουσες απεικονίσεις $\delta_n$ να είναι φυσικές.*

*(ii) Ο $E$ είναι διασπώμενα ακριβής.*

(iii) *Ο $E$ είναι προσθετικός, με την έννοια ότι, αν $\varphi, \psi\colon A \to B$ είναι δυο κάθετοι $^*$-ομομορφισμοί $(\varphi(x) \cdot \varphi(y) = 0, \forall x, y \in A)$, τότε ισχύει*

$$E(\varphi + \psi) = E(\varphi) + E(\psi).$$

Έστω $j\colon \mathbb{C} \to \mathcal{T}$ η μοναδιαία εμφύτευση και $p\colon \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ η συνάρτηση που απεικονίζει το $S$ στο $1$.

**Πρόταση VII.8.** *Έστω $E$ ένας ημιακριβής, ομοτοπικα αναλλοίωτος και ευσταθής συναρτητής από την $C^*$ στην $Ab$. Τότε:*

(i) *Ο ομομορφισμός $E(p)\colon E(\mathcal{T}) \to E(\mathbb{C})$ είναι ισομορφισμός.*

(ii) *Για κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$ , ο ομομορφισμός $E(id_A \otimes p)\colon E(A \otimes \mathcal{T}) \to E(A \otimes \mathbb{C})$, είναι ισομορφισμός.*

Σημειώνουμε ότι αν ένας συναρτητής $E$ έχει της ιδιότητες της παραπάνω πρότασης, τότε και ο $ES$ έχει τις ιδιότητες αυτές.

**Θεώρημα VII.9** (Περιοδικότητα Bott)**.** *Έστω $E$ ένας ημιακριβής, ομοτοπικά αναλλοίωτος και ευσταθής συναρτητής από την κατηγορία των $C^*$-αλεγβρών, στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων. Υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός $E(A) \simeq E(S^2(A))$, για κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$.*

*Απόδειξη.* Καθώς οι απεικονίσεις $p, j$ ικανοποιούν την σχέση $p \circ j = id_C$, σχηματίζουμε μια διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία, θεωρώντας απλώς τον εγλεισμό $i$ του πυρήνα της $p$ στην $\mathcal{T}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_0 \xrightarrow{i} \mathcal{T} \underset{j}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

όπου το $\mathcal{T}_0$ είναι ο πυρήνας της $p$. Ο συναρτητής $ES$ είναι διασπώμενα ακριβής, αφού την ιδιότητα αυτή έχει και ο $E$, άρα επάγει μια ακριβή ακολουθία, στην οποία, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, ο $ES(p)$ είναι ισομορφισμός. Επομένως ισχύει $ES(\mathcal{T}_0) = 0$. Ομοίως έχουμε ότι $E(\mathcal{T}_0) = 0$.

θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, equal] & \mathcal{T}_0 \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "i"'] & S\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "i_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & \mathcal{T} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & C(\mathbb{T}) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Προφανώς έχουμε μια εμφύτευση της $S\mathbb{C}$ στην $C(\mathbb{T})$, θεωρώντας κάθε μονοπάτι του $S\mathbb{C}$ ως ένα στοιχείο του $C(\mathbb{T})$, το οποίο μηδενίζεται στο $1 \in \mathbb{T}$. Θεωρώντας την εκτίμηση στο $1$ ως απεικόνιση $f\colon C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$, προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία.

Ορίζουμε τις απεικονίσεις $i_3\colon \mathcal{K} \to \mathcal{T}_0$ και $\psi'\colon \mathcal{T}_0 \to S\mathbb{C}$, έτσι ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό. Ο $\mathcal{K}$ είναι υποσύνολο του $\mathcal{T}_0$, διότι:

$$\mathcal{K} = i_1(\mathcal{K}) = \ker\psi \subseteq \ker(f \circ \psi) = \ker p = \mathcal{T}_0.$$

Ο $i_3$ είναι ο αντίστοιχος εγκλεισμός. Επίσης, μορούμε να θεωρήσουμε τον περιορισμό $\psi'$ του $\psi\colon \mathcal{T} \to C(\mathbb{T})$, ως απεικόνιση από το $\mathcal{T}_0$ στο $S\mathbb{C}$, ως εξής. Αν $x \in \mathcal{T}_0 = \ker p = \ker(f \circ \psi)$, τότε το $\psi(x)$ ανήκει στον πυρήνα της $f$, που ισούται με την εικόνα του $^*$-ομομορφισμού $i_2$. Επομένως, υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\psi'(x)$ του $S(\mathbb{C})$, με $i_2 \circ \psi'(x) = \psi(x)$.

Το παραπάνω διάγραμμα, λοιπόν, είναι μεταθετικό και έχει τις τρεις στήλες και τις δυο κάτω γραμμές ακριβείς. Από το λήμμα $3 \times 3$, έπεται ότι και η πάνω γραμμή είναι ακριβής. Έχουμε δηλαδή την βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T}_0 \longrightarrow S\mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Εφαρμόζουμε την μακριά ακριβή ακολουθία που επάγεται από τον $E$, σύμφωνα με το θεώρημα VII.7 και έχουμε την ακριβή ακολουθία:

$$\cdots \longrightarrow E(S\mathcal{T}_0) \longrightarrow E(S^2\mathbb{C}) \longrightarrow E(\mathcal{K}) \longrightarrow E(\mathcal{T}_0) \longrightarrow \cdots$$

Όμως, ισχύει $ES(\mathcal{T}_0) = 0 = E(\mathcal{T}_0)$, επομένως, χρησιμοποιώντας επιπλέον τον ισομορφισμό $\mathcal{K} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{K}$, έχουμε:

$$E(S^2\mathbb{C}) \simeq E(\mathcal{K}) \simeq E(\mathbb{C} \otimes \mathcal{K}) \simeq E(\mathbb{C}),$$

που δείχνει την περιοδικότητα Bott για το $\mathbb{C}$.

Έστω $A$ μια τυχαία $C^*$-άλγεβρα. Η $S\mathbb{C}$ είναι nuclear, ως μεταθετική, από το θεώρημα Takesaki. Επομένως, λόγω του θεωρήματος VII.4, η ακολουθία:

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathcal{K} \longrightarrow A \otimes \mathcal{T}_0 \longrightarrow A \otimes S\mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

παραμένει ακριβής. Η $A \otimes S\mathbb{C}$ είναι ισόμορφη με την $SA$ και άρα μπορεί να αντικατασταθεί από αυτήν. Η επαγόμενη μακριά ακριβής ακολουθία είναι:

$$\cdots \longrightarrow E(S(A \otimes \mathcal{T}_0)) \longrightarrow E(S^2A) \xrightarrow{\delta} E(A \otimes \mathcal{K}) \longrightarrow E(A \otimes \mathcal{T}_0) \longrightarrow \cdots.$$

Ο $E$ είναι ευσταθής, συνεπώς αν δείξουμε ότι $E(S(A \otimes \mathcal{T}_0)) = E(A \otimes \mathcal{T}_0) = 0$, τότε θα έχουμε:

$$E(S^2A) \overset{\delta}{\simeq} E(A \otimes \mathcal{K}) \simeq E(A).$$

Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι μεταθετικό, έχουμε τη διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathcal{T}_0 \xrightarrow{id_A \otimes i} A \otimes \mathcal{T} \xrightarrow{id_A \otimes p} A \otimes \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Από το $(ii)$ της προηγούμενης πρότασης, ο $E(id_A \otimes p)$ είναι ισομορφισμός, άρα ισχύει $E(A \otimes \mathcal{T}_0) = 0$. Έπεται ότι και $E(S(A \otimes \mathcal{T}_0)) = 0$.

Για να αποδείξουμε την φυσικότητα του προηγούμενου ισομορφισμού, θεωρούμε έναν $^*$-ομομορφισμό $\varphi\colon A \to B$ και το παρακάτω διάγραμμα (όπου $e = E_{00}$):

$$\begin{tikzcd}
E(S^2A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "E(S^2\varphi)"'] & E(A\otimes\mathcal{K}) \arrow[d, "E(\varphi\otimes id_{\mathcal{K}})"'] & E(A) \arrow[l, "E(\alpha\mapsto\alpha\otimes e)"'] \arrow[d, "E(\varphi)"] \\
E(S^2B) \arrow[r, "\delta'"'] & E(B\otimes\mathcal{K}) & E(B) \arrow[l, "E(b\mapsto b\otimes e)"]
\end{tikzcd}$$

Το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό, λόγω της φυσικότητας της συνδέουσας απεικόνισης $\delta$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha\mapsto\alpha\otimes e"] \arrow[d, "\varphi"'] & A\otimes\mathcal{K} \arrow[d, "\varphi\otimes id_{\mathcal{K}}"] \\
B \arrow[r, "b\mapsto b\otimes e"'] & B\otimes\mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Καθώς ο $E$ είναι συναρτητής, και το δεξί τετράγωνο του αρχικού διαγράμματος είναι μεταθετικό. Επειδή ο $E$ είναι και ευσταθής, οι οριζόντιοι ομομορφισμοί ομάδων είναι ισομορφισμοί, άρα το δεξί τετράγωνο είναι μεταθετικό και με την αντίστροφη φορά. Τα παραπάνω δείχνουν ότι ο ισομορφισμός των $E(S^2A)$ και $E(A)$, που θεωρήσαμε, είναι φυσικός. □

## VII.4 Η κυκλική ακριβής ακολουθία των έξι όρων

Έχουμε δείξει με ποιον τρόπο μια βραχεία ακριβής ακολουθία $C^*$-αλγεβρών επάγει μια ακριβή ακολουθία έξι όρων. Από την πρόταση VII.9 της περιοδικότητας Bott, προκύπτει ότι για κάθε $C^*$-άλγεβρα $A$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός $\beta_A\colon K_0(A)\to K_2(A)$. Η φυσικότητα της $\beta$ μπορεί να δειχθεί αντιγράφοντας το επιχείρημα της πρότασης VII.11, που εκφράζει ότι η σύνθεση δύο φυσικών απεικονίσεων είναι φυσική.

**Θεώρημα VII.10.** *Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών:*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

*επάγει την κυκλική ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων:*

$$\begin{tikzcd}
K_0(I) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\psi)"] & K_0(B) \arrow[d, "\delta_0"] \\
K_1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\psi)"] & K_1(I) \arrow[l, "K_1(\varphi)"]
\end{tikzcd}$$

*Η $\delta_0$ ονομάζεται εκθετική απεικόνιση και είναι η σύνθεση του ισομορφισμού $\beta\colon K_0(B)\to K_2(B)$ και της $\delta_2\colon K_2(B)\to K_1(I)$, η οποία έχει οριστεί στην ενότητα VI.5 της μακριάς ακριβούς ακολουθίας.*

*Απόδειξη.* Λόγω της ακριβούς ακολουθίας των έξι όρων της ενότητας VI.3, μένει να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι ακριβής στην $K_0(B)$ και στην $K_1(I)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το τμήμα της ακολουθίας που θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ακριβές, είναι ουσιαστικά ένα τμήμα της μακριάς ακριβής ακολουθίας, όπως γίνεται σαφές με το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\psi)"] \arrow[d, "\beta_A"] & K_0(B) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\beta_B"] & K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] \arrow[d, equal] & K_1(A) \arrow[d, equal] \\
K_2(A) \arrow[r, "K_2(\psi)"'] & K_2(B) \arrow[r, "\delta_2"'] & K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"'] & K_1(A)
\end{tikzcd}$$

Οι $\beta_A$ και $\beta_B$ είναι ισομορφισμοί. Λόγω της φυσικότητας τους και του ορισμού του $\delta_0$, το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Η ακρίβεια της μακριάς ακολουθίας δείχνει, επομένως, και την ακρίβεια που θέλουμε. □

**Πρόταση VII.11** (Φυσικότητα της $\delta_0$)**.** *Έστω το μεταθετικό διάγραμμα $C^*$-αλγεβρών και $^*$-ομομορφισμών:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I' \arrow[r, "\varphi'"'] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*στο οποίο η κάθε γραμμή είναι ακριβής, Τότε το επαγόμενο διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
K_0(B) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "K_0(\beta)"'] & K_1(I) \arrow[d, "K_0(\gamma)"] \\
K_0(B') \arrow[r, "\delta_0'"'] & K_1(I')
\end{tikzcd}$$

*είναι μεταθετικό.*

*Απόδειξη.* Δεδομένου ότι η απεικόνιση $\delta_0$ είναι η σύνθεση των $\beta_B$ και $\delta_2$, η φυσικότητα της έπεται από την φυσικότητα των δυο αυτών απεικονίσεων, η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
K_0(B) \arrow[r, "\beta_B"] \arrow[d, "K_0(\beta)"'] & K_2(B) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "K_2(\beta)"] & K_1(I) \arrow[d, "K_1(\gamma)"] \\
K_0(B') \arrow[r, "\beta_{B'}"'] & K_2(B') \arrow[r, "\delta_2'"'] & K_1(I')
\end{tikzcd}$$

□

## VII.5 Εφαρμογές

(i) Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα. Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να ταυτίσουμε μια συνεχή συνάρτηση από το $(0,1)$ στην $A$, που μηδενίζεται στο άπειρο, με ένα στοιχείο της $SA$. Ακόμα το $(0,1)$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}$, επομένως:

$$SA \simeq C_0((0,1),A) \simeq C_0(\mathbb{R},A).$$

Αν $A=\mathbb{C}$, τότε έχουμε $S\mathbb{C} \simeq C_0(\mathbb{R})$. Γενικότερα ισχύει $S^n(\mathbb{C}) \simeq C_0(\mathbb{R}^n)$, με το επαγωγικό βήμα να είναι:

$$S^{n+1}(\mathbb{C}) \simeq S(C_0(\mathbb{R}^n)) \simeq C_0(\mathbb{R}, C_0(\mathbb{R}^n)) \simeq C_0(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Μπορούμε, λοιπόν, να υπολογίσουμε τις ομάδες $K_0$ και $K_1$ της $C_0(\mathbb{R}^n)$, για κάθε φυσικό αριθμό $n$, ως εξής:

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \simeq K_0(S^n(\mathbb{C})) \simeq K_n(\mathbb{C}) \simeq \begin{cases} K_0(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ K_1(\mathbb{C}) \simeq 0, & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

$$K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \simeq K_1(S^n(\mathbb{C})) = K_{n+1}(\mathbb{C}) \simeq \begin{cases} K_1(\mathbb{C}) = 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ K_0(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}, & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

(ii) Αν $A$ είναι μια $C^*$-άλγεβρα, μπορούμε να θεωρήσουμε τη διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\varphi} C(\mathbb{T},A) \xrightarrow{\psi} A \longrightarrow 0,$$

όπου η $\varphi$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο της $SA$ σε μια συνχεή απεικόνιση από το $\mathbb{T}$ στην $A$, η οποία μηδενίζεται στο $1 \in \mathbb{T}$, και η $\psi$ είναι η εκτίμηση στο $1 \in \mathbb{T}$. Οι συναρτητές $K_0, K_1$ είναι διασπώμενα ακριβείς, επομένως στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων έχουμε τον ισομορφισμό:

$$K_i(C(\mathbb{T},A)) \simeq K_i(SA) \oplus K_i(A),\ i=0,1.$$

Έπεται ότι:

$$K_0(C(\mathbb{T},A)) \simeq K_1(A) \oplus K_0(A) \simeq K_1(C(\mathbb{T},A)).$$

Επίσης η σχέση $C(\mathbb{T}^2) \simeq C(\mathbb{T}, C(\mathbb{T}))$, έχει σαν συνέπεια ότι:

$$K_i(C(\mathbb{T}^2)) \simeq K_0(C(\mathbb{T})) \oplus K_1(C(\mathbb{T})) \simeq \mathbb{Z}^2,\ i=0,1.$$

Γενικά, καθώς $C(\mathbb{T}^{n+1}) \simeq C(\mathbb{T}, C\mathbb{T}^n))$, μπορούμε επαγωγικά να δείξουμε ότι:

$$K_i(C(\mathbb{T}^{n+1})) \simeq K_0(C(\mathbb{T}^n)) \oplus K_1(C(\mathbb{T}^n)) \simeq \mathbb{Z}^{2^n}.$$

(iii) Θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{\psi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0.$$

Η $\psi$ είναι η σύνθεση της απεικόνισης πηλίκο $\pi\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{K}$ και ενός ισομορφισμού. Το $\pi(S)$ είναι ορθομοναδιαίο στοιχείο της $\mathcal{T}/\mathcal{K}$, επομένως το $\psi(S)$ είναι ορθομοναδιαίο στοιχείο του $C(\mathbb{T})$. Στο προηγούμενο παράδειγμα δείξαμε ότι $K_i(C(\mathbb{T})) \simeq \mathbb{Z}$, για $i = 0, 1$. Ακόμα, λόγω της ευστάθειας των $K_0$ και $K_1$, έχουμε:

$$K_i(\mathcal{K}) \simeq K_i(\mathbb{C} \otimes \mathcal{K}) \simeq K_i(\mathbb{C}),\ i = 1, 2.$$

Συνεπώς $K_0(\mathcal{K}) \simeq \mathbb{Z}$ και η κλάση ισοδυναμίας κάθε μονοδιάστατης προβολής του $\mathcal{K}$, παράγει την $K_0(\mathcal{K})$. Έστω $\delta_1\colon K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(\mathcal{K})$ η σχετική δεικτρια συνάρτηση. Ακριβώς όπως και στην πρόταση VII.6, έχουμε ότι:

$$\delta_1([\psi(S)]_1) = [1 - S^*S]_0 - [1 - SS^*]_0 = -[E_{00}]_0 .$$

Η $\delta_1$, λοιπόν, ως ενδομορφισμός του $\mathbb{Z}$ που απεικονίζει κάποιο στοιχείο σε γεννήτορα του $\mathbb{Z}$, είναι αναγκαστικά ισομορφισμός. Θεωρούμε την αντίστοιχη ακριβή ακολουθία των έξι όρων:

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathcal{K}) \arrow[r, "K_0(i)"] & K_0(\mathcal{T}) \arrow[r, "K_0(\psi)"] & K_0(C(\mathbb{T})) \arrow[d, "\delta_0"] \\
K_1(C(\mathbb{T})) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(\mathcal{T}) \arrow[l] & K_1(\mathcal{K}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Καθώς η $\delta_1$ είναι ισομορφισμός και $K_1(\mathcal{K}) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $K_1(\mathcal{T}) = 0$, ο $K_0(i)$ είναι μηδενικός και ο $K_0(\psi)$ είναι ισομορφισμός. Επομένως:

$$K_0(\mathcal{T}) \simeq K_0(C(\mathbb{T})) \simeq \mathbb{Z}.$$

(iv) Αν $H$ είναι ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{B}(H) \longrightarrow \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0,$$

όπου $\mathcal{Q}(H) = \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}$ είναι η άλγεβρα Calkin του $H$. Η αντίστοιχη ακριβής ακολουθία των έξι όρων είναι:

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathcal{K}) \arrow[r] & K_0(\mathcal{B}(H)) \arrow[r] & K_0(\mathcal{Q}(H)) \arrow[d, "\delta_0"] \\
K_1(\mathcal{Q}(H)) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(\mathcal{B}(H)) \arrow[l] & K_1(\mathcal{K}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Γνωρίζουμε ότι $K_0(\mathcal{B}(H)) = K_1(\mathcal{B}(H)) = 0$, που σημαίνει ότι οι συνδέουσες απεικονίσεις $\delta_0$ και $\delta_1$ είναι ισομορφισμοί. Επομένως οι $K$-ομάδες της άλγεβρας Calkin $\mathcal{Q}(H)$ είναι:

$$K_0(\mathcal{Q}(H)) \simeq K_1(\mathcal{K}) = 0,\ K_1(\mathcal{Q}(H)) \simeq K_0(\mathcal{K}) \simeq \mathbb{Z}.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

# Οι άλγεβρες Cuntz

Αν $H$ είναι ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, αποδεικνύεται ότι, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 2$, υπάρχουν ισομετρίες $s_1, \dots, s_n$ στο $\mathcal{B}(H)$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση Cuntz:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1.$$

**Ορισμός.** Η άλγεβρα Cuntz $\mathcal{O}_n$, για κάποιο φυσικό αριθμο $n \geqslant 2$, είναι η $C^*$-άλγεβρα που παράγεται από κάποιες ισομετρίες $s_1, \dots, s_n$ του $\mathcal{B}(H)$ που ικανοποιούν τη σχέση Cuntz. Δείχνουμε στη συνέχεια ότι η $\mathcal{O}_n$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των ισομετριών $s_1, \dots, s_n$.

Η σχέση Cuntz δείχνει ότι οι προβολές $s_i s_i^*$ είναι ανά δύο κάθετες. Επομένως, αφού κάθε ισομετρία είναι αριστερά αντιστρέψιμο στοιχείο, προκύπτει ότι:

$$s_i^* s_j = 0, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j.$$

**Θεώρημα VIII.1** (Καθολική ιδιότητα της $\mathcal{O}_n$). *Αν $A$ είναι μια μοναδιαία $C^*$-άλγεβρα, η οποία περιέχει ισομετρίες $t_1, \dots, t_n$, που ικανοποιούν τη σχέση Cuntz, τότε υπάρχει μοναδικός $^*$-ομομορφισμός $\varphi\colon \mathcal{O}_n \to A$, με $\varphi(s_i) = t_i$, για $i = 1, \dots, n$.*

Αποδεικνύεται επίσης ότι οι άλγεβρες Cuntz είναι απλές, δηλαδή ότι δεν περιέχουν γνήσια, μη τετριμμένα ιδεώδη. Αν $t_1, \dots, t_n$ είναι ισομετρίες που ικανοποιούν τη σχέση Cuntz, τότε ο πυρήνας του $^*$-ομομορφισμού $\varphi\colon \mathcal{O}_n \to C^*(t_1, \dots, t_n)$, ως ιδεώδες της $\mathcal{O}_n$, είναι αναγκαστικά τετριμμένος και άρα η $\varphi$ είναι ένας $^*$-ισομορφισμός. Επομένως οι άλγεβρες Cuntz είναι καλά ορισμένες.

## VIII.1 Υπολογισμός της ομάδας $K_0(\mathcal{O}_2)$

**Λήμμα VIII.2.** *Έστω $A$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα και $s$ μια ισομετρία της . Η απεικόνιση:*

$$\mu\colon A \to A\colon a \mapsto \mu(a) = sas^*,$$

*είναι ένας $^*$-ενδομορφισμός και $K_0(\mu) = id_{K_0(A)}$.*

*Απόδειξη.* Είναι εύκολο να δούμε ότι ο $\mu$ είναι ένας $^*$-ομομορφισμός. Αν θέσουμε:

$$s_n = \text{diag}(s, \ldots, s) \in M_n(A),$$

τότε ο επαγόμενος $^*$-ομομορφισμός $\mu_n \colon M_n(A) \to M_n(A)$, ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mu_n((a_{ij})_{i,j}) = (sa_{ij}s^*)_{i,j} = s_n a s_n^*, \quad a = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(A).$$

Έστω $p$ μια προβολή στο $\mathcal{P}_n(A)$, για κάποιο $n$ στο $\mathbb{N}$. Για να αποδείξουμε την ισότητα $K_0(\mu) = \text{id}_{K_0(A)}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(p) \sim p$. Πράγματι, η τελευταία ισοδυναμία ισχύει, καθώς το στοιχείο $v = s_n p$ της $M_n(A)$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$v^*v = ps_n^* s_n p = p, \quad vv^* = s_n p s_n^* = \mu_n(p).$$

□

**Λήμμα VIII.3.** *Έστω ένας φυσικός αριθμός $n \geqslant 2$.*

*(i) Για κάθε ορθομοναδιαίο στοιχείο $u$ του $\mathcal{O}_n$, υπάρχει μοναδικός $^*$-ενδομορφισμός $\varphi_u$ στο $\mathcal{O}_n$, με $\varphi_u(s_i) = us_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Ισχύει:*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_u(s_i) s_i^*.$$

*(ii) Κάθε μοναδιαίος $^*$-ενδομορφισμός του $\mathcal{O}_n$ ισούται με τον $\varphi_u$, για κάποιο ορθομοναδιαίο στοιχείο $u$ του $\mathcal{O}_n$.*

*Απόδειξη.* (i) Εύκολα ελέγχουμε ότι το σύνολο $\{us_1, \ldots, us_n\}$ αποτελείται επίσης από μερικές ισομετρίες που ικανοποιούν τη σχέση Cuntz, άρα εφαρμόζοντας την καθολική ιδιότητα της $\mathcal{O}_n$, προκύπτει ότι πράγματι υπάρχει μοναδικός $^*$-ενδομορφισμός $\varphi_u$ στο $\mathcal{O}_n$, με $\varphi_u(s_i) = us_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Προφανώς ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_u(s_i) s_i^* = u \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = u.$$

(ii) Αν $\varphi$ είναι ένας $^*$-ενδομορφισμός του $\mathcal{O}_n$, ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι το στοιχείο $u = \sum_{i=1}^{n} \varphi(s_i) s_i^*$ είναι ορθομοναδιαίο. Αν $\varphi_u$ είναι ο αντίστοιχος $^*$-ενδομορφισμός, τότε:

$$\varphi_u(s_j) = us_j = \sum_{i=1}^{n} \varphi(s_i) s_i^* s_j = \varphi(s_j).$$

□

**Πρόταση VIII.4.** *Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 2$, ο μοναδιαίος $^*$-ενδομορφισμός:*

$$\lambda \colon \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n \colon x \mapsto \sum_{i=1}^{n} s_i x s_i^*$$

*ικανοποιεί τις σχέσεις:*

*(i)* $K_0(\lambda) = n \cdot id_{K_0(\mathcal{O}_n)}$,

*(ii)* $K_0(\lambda) = id_{K_0(\mathcal{O}_n)}$.

*Απόδειξη.* (i) Αν $\mu_i \colon \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$ είναι ο $^*$-ενδομορφισμός με $\mu_i(x) = s_i x s_i^*$, τότε από το λήμμα VIII.2 ισχύει $K_0(\mu_i) = \mathrm{id}_{K_0(\mathcal{O}_n)}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Καθώς οι $\mu_i$ είναι ανά δύο κάθετοι και ο $K_0$ είναι προσθετικός, έχουμε:

$$K_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} K_0(\mu_i) = n \cdot \mathrm{id}_{K_0(\mathcal{O}_n)}.$$

(ii) Σύμφωνα με το λήμμα VIII.3, το στοιχείο $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda(s_i) s_i^*$ είναι ορθομοναδιαίο και $\varphi_u = \lambda$. Παρατηρούμε ότι:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda(s_i) s_i^* = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} s_j s_i s_j^*) s_i^* = \sum_{i=1}^{n} (s_i)^2 (s_i^*)^2,$$

$$u^* = \sum_{i=1}^{n} s_i \lambda(s_i^*) = \sum_{i=1}^{n} s_i (\sum_{j=1}^{n} s_j s_i^* s_j^*) = \sum_{i=1}^{n} (s_i)^2 (s_i^*)^2.$$

Επομένως το $u$ είναι αυτοσυζυγές και το φάσμα του $\sigma(u)$, ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δε μπορεί να ισούται με $\mathbb{T}$ και άρα $u \sim_h 1$. Αν $u_t$ είναι ένα συνεχές μονοπάτι ορθομοναδιαίων στοιχείων, που συνδέει το $u$ με τη μονάδα, τότε το μονοπάτι $^*$-ομομορφισμών $\varphi_{u_t}$ δείχνει ότι:

$$\lambda = \varphi_u \sim_h \varphi_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_n}.$$

□

Προκύπτει άμεσα από την παραπάνω πρόταση ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 2$ και κάθε στοιχείο $x$ της αβελιανής ομάδας $K_0(\mathcal{O}_n)$, ισχύει $ng = g$ ή ισοδύναμα $(n-1)g = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η τάξη κάθε στοιχείου της $K_0(\mathcal{O}_n)$ διαιρεί το $n-1$. Ιδιαίτερα έχουμε $K_0(\mathcal{O}_2) = 0$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $K_1(\mathcal{O}_2) = 0$.

# Βιβλιογραφία

[1] M. Rørdam, F. Larsen, and N.J. Laustsen .
*An Introduction to $K$-Theory for $C^*$-Algebras*.
London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2000.

[2] Mikael Rørdam and Erling Størmer.
*Classification of Nuclear $C^*$-Algebras. Entropy in Operator Algebras*.
Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 2002.

[3] Bruce Blackadar.
*$K$-Theory for Operator Algebras*.
Springer-Verlag, 1986.

[4] Joachim Cuntz.
$C^*$-algebras generated by isometries.
*Communications in Mathematical Physics*, 57:173--185, 1977.

[5] Joachim Cuntz.
$K$-theory for certain $C^*$-algebras.
*Annals of Mathematics*, 113:181--197, 1981.

[6] Joachim Cuntz.
$K$-theory and $C^*$-algebras.
*Lecture Notes in Mathematics*, 1046:55--79, 1984.

[7] Kenneth R. Davidson.
*$C^*$-Algebras by Example*.
Fields Institute Monographs. American Mathematical Society, 1996.

[8] Richard Kadison and John Ringrose.
*Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, volume I and II.
Academic Press, 1983.

[9] Gerard Murphy.
*$C^*$-Algebras and Operator Theory*.
Academic Press, 1990.

[10] Steven Roman.
*Advanced Linear Algebra*.
Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2007.

[11] N.E Wegge-Olsen.
*$K$-Theory and $C^*$-Algebras*.
Oxford University Press, 1993.

[12] Αριστείδης Κατάβολος.
*Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*.
Συμμετρία, 2008.