

Κβαντοποίηση με παραμόρφωση
και
ο ισομορφισμός Duflo

Χρήστος Θ. Αραβανής

Μεταπτυχιακή Εργασία

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα 2014

Κβαντοποίηση με παραμόρφωση
και
ο ισομορφισμός Duflo

Χρήστος Θ. Αραβανής

Μεταπτυχιακή Εργασία

Επιβλέπων Καθηγητής:
Ιάκωβος Ανδρουλιδάκης, Επίκουρος Καθηγητής

Μέλη επιτροπής:

- Αντώνιος Μελάς,
Καθηγητής ΕΚΠΑ
- Παναγιώτης Μπαταχίδης,
Λέκτορας Penn State

Ναι, αλλά ... c'est la vie!

I. A.

En fait, le mathématicien passe son temps à essayer de simplifier un véritable complexité.

Cédric Villani

Ευχαριστίες

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου, Δρ. Ιάκωβο Ανδρουλιδάκη. Κατά την διάρκεια των τελευταίων δύο χρόνων, στάθηκε για μένα πολύ περισσότερα από ένας απλός επιβλέπων. Χωρίς την καθοδήγηση του, τις συμβουλές του, τις προσωπικές του απόψεις, το πάθος του, η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία δεν θα είχε αυτή την μορφή.

Εγκάρδιες ευχαριστίες απευθύνονται στον Δρ. Παναγιώτη Μπατακίδη από το Penn State για την υπομονή του και την ανεκτικότητα του στις (συχνά τετριμμένες!!!) ερωτήσεις μου, καθώς και για τον χρόνο που μου αφιέρωσε κατά την παραμονή του στην Αθήνα εξηγώντας μου τις ιδέες του Kontsevich. Επιπροσθέτως, τον ευχαριστώ θερμά για τις χρήσιμες παρατηρήσεις του σχετικά με το κείμενο της εργασίας αυτής και που δέχτηκε να είναι μέλος της τριμελούς επιτροπής.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους καθηγητές μου κ. Δ. Λάππα, κ. Μ. Μαλιάκα, κ. Α. Μελά, κ. Τ. Χατζηαφράτη, για όλα όσα μου έμαθαν κατά την διάρκεια των σπουδών μου στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Ιδιαίτερως, ευχαριστώ τον κ. Α. Μελά που δέχτηκε να συμμετάσχει στην τριμελή επιτροπή και να διαβάσει την παρούσα εργασία.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συμφοιτητή μου Π. Χρήστου, για τις χρήσιμες παρατηρήσεις και τις συζητήσεις που είχα μαζί του σχετικά με το Deformation Quantization of Poisson and Symplectic manifolds.

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στα Université de Lorraine, Universität Erlangen-Nürnberg, Université de Strasbourg τα οποία μου πρόσφεραν οικονομική ενίσχυση ώστε να συμμετάσχω στα συνέδρια τα οποία διοργάνωναν και μου έδωσαν την ευκαιρία να είμαι σε επαφή με την μοντέρνα έρευνα αλλά και να συζητήσω κομμάτια της εργασίας αυτής με τους υπόλοιπους συμμετέχοντες.

Η οικογένεια μου με βοήθησε με τον δικό της τρόπο, ώστε να επιτύχω όλους μου τους στόχους κατά την διάρκεια των σπουδών μου. Τους ευχαριστώ εγκάρδια.

Κλείνοντας αυτό το κομμάτι των ευχαριστιών, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην Βούλα Χαρ. Η απεριόριστη υπομονή της, η αγάπη της, οι συμβουλές τις στις δύσκολες στιγμές των τελευταίων δύο χρόνων έκαναν πολλά πράγματα να φαίνονται ευκολότερα.

Στον I.A. με εκτίμηση...

Εισαγωγή

Από το 1950 και τα αποτελέσματα του Harish-Chandra [12], ήταν γνωστό ότι στην περίπτωση των απλών άλγεβρων Lie, ο χώρος των αναλλοίωτων στοιχείων της συμμετρικής άλγεβρας και το κέντρο της αντίστοιχης universal enveloping άλγεβρας της $\mathfrak{g}$ είναι ισόμορφες ως άλγεβρες. Αργότερα, ο Michel Duflo απέδειξε το ίδιο και για την περίπτωση των επιλύσιμων άλγεβρων Lie [16].

Το 1977, ο Michel Duflo [17] απέδειξε ότι για κάθε πραγματική πεπερασμένη διάστασης άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$, ο χώρος των αναλλοίωτων πολυωνύμων στην $\mathfrak{g}^*$ είναι ισόμορφος, ως άλγεβρα, με το κέντρο της αντίστοιχης universal enveloping άλγεβρας της $\mathfrak{g}$. Ο ισομορφισμός που κατασκευάστηκε από τον M. Duflo, σήμερα γνωστός και ως *Duflo isomorphism*, βασίζεται στην “Orbit method” του A.A. Kirillov [4]. Πιο συγκεκριμένα, ο ισομορφισμός Duflo είναι η σύνθεση της απεικόνισης Poincaré-Birkhoff-Witt (η οποία είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων) με έναν αυτομορφισμό της συμμετρικής άλγεβρας, γνωστό ως *στοιχείο Duflo*.

Το βαθύτερο νόημα του ισομορφισμού Duflo είναι η επόμενη: από το θεώρημα Poincaré-Birkhoff-Witt έχουμε ότι η universal enveloping άλγεβρα ταυτίζεται -με τους δεξιά-αναλλοίωτους διαφορικούς τελεστές στην ομάδα Lie G (η οποία αντιστοιχεί στην άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$, από το 3ο Θεώρημα του Lie), ο ισομορφισμός Duflo ταυτίζει, τα δεξιά και αριστερά αναλλοίωτα πολυώνυμα επί της δυικής άλγεβρας Lie, με τους αριστερούς και δεξιούς αναλλοίωτους διαφορικούς τελεστές της ομάδας Lie G .

Το 1997, ο Maxim Kontsevich στη εργασία του [19], έδωσε μια νέα και εντελώς διαφορετική απόδειξη για τον ισομορφισμό Duflo. Πιο συγκεκριμένα, εισήγαγε ένα λογισμό με γραφήματα έτσι ώστε να αποδείξει μια γενικότερη εικασία, την Εικασία Τυπικότητας (Formality Conjecture) η οποία είχε διατυπωθεί από τον ίδιο το 1996 και διατυπώνεται ως εξής: υπάρχει ένας L_∞ -μορφισμός από την διαφορίσιμη βαθμωτή άλγεβρα Lie των πολυ-διανυσματικών πεδίων μια ομαλής πολλαπλότητας X στην διαφορίσιμη βαθμωτή άλγεβρα Lie των πολυ-διαφορικών τελεστών της ίδιας ομαλής πολλαπλότητας X , τέτοιος ώστε ο πρώτος όρος αυτού του L_∞ -μορφισμού να είναι η απεικόνιση Hochschild-Kostant-Rosenberg. Ως συνέπεια του Θεωρήματος Τυπικότητας, προκύπτει η λύση για το πρόβλημα της κβαντοποίησης με παραμόρφωση μιας τυχαίας πολλαπλότητας Poisson, και μια καινούργια απόδειξη του ισομορφισμού Duflo. Πιο συγκεκριμένα, η απόδειξη του ισομορφισμού Duflo προκύπτει ως εφαρμογή της μεθόδου που εισήγαγε στο [19] για την δυική άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}^*$.

Ο στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει την απόδειξη του Kontsevich για τον ισομορφισμό Duflo. Αν και η απόδειξη του Kontsevich δεν είναι η πρώτη απόδειξη για τον ισομορφισμό Duflo, οι μέθοδοι που εμφανίστηκαν στο [19] οδήγησαν σε σημαντικά αποτελέσματα τα επόμενα χρόνια. Το 2006, οι A. Alekssev και E. Meinrenken [1], χρησιμοποιώντας το λογισμό με τα γραφήματα που εισήγαγε ο Kontsevich, απέδειξαν θετικά και σε πλήρη γενικότητα την εικασία Kashiwara-Vergne για όλες τις πεπερασμένης διάστασης άλγεβρες Lie. Το 2011, οι D. Calaque και C. Rossi [5] απέδειξαν ανάλογες εκφράσεις του ισομορφισμού Duflo για Q -χώρους και μιγαδικές πολλαπλότητες.

Η διάρθρωση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η ακόλουθη:

- Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε βασικούς ορισμούς απαραίτητους για το υπόλοιπο της εργασίας αυτής. Αρχικά, ορίζουμε την έννοια της παραγωγίσιμης βαθμωτής άλγεβρας

Lie (DGLA) και των αντίστοιχων συν-άλγεβρών (coalgebras). Τα βασικά παραδείγματα DGLA στην διατριβή αυτή αποτελούν τα πολυ-διανυσματικά πεδία και οι πολυ-διαφορικοί τελεστές σε μια ομαλή πολλαπλότητα X , τα οποία αποτελούν και τα απαραίτητα συστατικά της απεικόνισης Τυπικότητας του Kontsevich (Kontsevich Formality map). Στην συνέχεια, ορίζουμε την συμμετρική άλγεβρα μια άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ και την αντίστοιχη universal enveloping άλγεβρα. Για να παρουσιάσουμε την βαθύτερη σχέση τους, διατυπώνουμε και αποδυνκνύουμε το θεώρημα Poincaré-Birkhoff-Witt. Πιο συγκεκριμένα, η απόδειξη που παρουσιάζεται στην διατριβή αυτή κάνει ξεκάθαρη την ταύτιση της universal enveloping άλγεβρας της $\mathfrak{g}$ με τους δεξιά-αναλλοίωτους διαφορικούς τελεστές πάνω στην ομάδα Lie G , όπου $Lie(G) = \mathfrak{g}$. Τέλος, ορίζουμε την συνομολογία Hochschild μιας προσεταιριστικής άλγεβρας και περιγράφουμε τις πρώτες ομάδες συνομολογίας αυτής.

- Στο δεύτερο κεφάλαιο, ο στόχος μας είναι να συζητήσουμε τα βασικά συστατικά του Θεωρήματος Τυπικότητας του Kontsevich. Μετά από μια μικρή εισαγωγή στις πολλαπλότητες Poisson και τα $\star$ -γινόμενα σε προσεταιριστικές άλγεβρες, παρουσιάζουμε λεπτομερώς πως κατασκευάζονται οι DGLAs των πολυ-διανυσματικών πεδίων και των πολυ-διαφορικών τελεστών της ομαλής πολλαπλότητας X . Στην συνέχεια, συζητάμε την απεικόνιση Hochschild-Kostant-Rosenberg και δίνουμε λεπτομερείς υπολογισμούς γιατί η απεικόνιση αυτή, αποτυγχάνει να λύσει το πρόβλημα της κβαντοποίησης με παραμόρφωση μιας τυχαίας πολλαπλότητας Poisson. Σε επόμενο βήμα, εισάγουμε τις έννοιες των L_∞ -άλγεβρών και L_∞ -μορφισμών και εξηγούμε γιατί επεκτείνουν κατά μια έννοια τις DGLAs και τους αντίστοιχους (DGLA-) μορφισμούς. Κλείνοντας, παρουσιάζουμε την ακριβή formula για την απεικόνιση Τυπικότητας του Kontsevich (Kontsevich Formality map)
- Ο βασικός στόχος του τρίτου κεφαλαίου είναι να εξηγήσει πως υλοποιείται η απεικόνιση Τυπικότητας του Kontsevich αλλά και να εξηγήσει την formula για το $\star$ -γινόμενο του Kontsevich. Προτού το κάνουμε αυτό, εισάγουμε πρωτίστως την έννοια των παραδεκτών γραφημάτων (admissible graphs) και παρουσιάζουμε μέσω ενός παραδείγματος, πως κατασκευάζεται ένας δι-διαφορικός τελεστής από ένα admissible γράφημα. Σε επόμενο βήμα, ορίζουμε τους χώρους διαμόρφωσης (configuration spaces), όπου τα admissible γραφήματα ορίζονται και συζητάμε την κατασκευή ολοκληρωτικών βαρών (integral weights) που αντιστοιχούν σε κάθε γράφημα. Κλείνοντας, παρουσιάζουμε (χωρίς απόδειξη), την ακριβή formula για το $\star$ -γινόμενο του Kontsevich.
- Στο τελευταίο κεφάλαιο το οποίο και ολοκληρώνει την διατριβή αυτή, περιγράφουμε την απόδειξη του Kontsevich για τον ισομορφισμό Duflo. Αφού υπενθυμίσουμε τον αρχικό ισομορφισμό Duflo, παρουσιάζουμε πως το Θεώρημα Τυπικότητας του Kontsevich οδηγεί στην ύπαρξη ενός ισομορφισμού μεταξύ του χώρου των αναλλοίωτων πολυωνύμων πάνω στην $\mathfrak{g}^*$ και του κέντρου της αντίστοιχης universal enveloping άλγεβρας. Σε επόμενο βήμα, ορίζουμε τον ισομορφισμό του Kontsevich και αποδεικνύουμε ότι ταυτίζεται με τον αρχικό ισομορφισμό του Duflo.

Καθόλη την διάρκεια της διατριβής αυτής, υποθέτουμε ότι $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα με χαρακτηριστική 0. Για τους σκοπούς μας $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Εκτός και αν οριστεί ρητώς κάτι άλλο, οι άλγεβρες, τα πρότυπα και όλες οι δομές είναι υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Περιεχόμενα

1	Συμμετρικές άλγεβρες, universal enveloping άλγεβρες και συνομολογία Hochschild	9
1.1	Διαφορίσιμες βαθμωτές (Lie) άλγεβρες και συν-άλγεβρες	9
1.2	Συμμετρικές άλγεβρες	17
1.3	Universal enveloping άλγεβρες	19
1.4	Συνομολογία Hochschild	26
2	Το Θεώρημα Τυπικότητας του Kontsevich	29
2.1	Δομές Poisson και gauge δράσεις	29
2.2	Star-γινόμενα	31
2.3	Οι DGLAs $\mathcal{T}_{poly}(X)$ και $\mathcal{D}_{poly}(X)$	34
2.3.1	$\mathcal{T}_{poly}(X)$	34
2.3.2	$\mathcal{D}_{poly}(X)$	36
2.4	Ο ισομορφισμός Hochschild-Kostant-Rosenberg	40
2.5	L_∞ -άλγεβρες και το Θεώρημα Τυπικότητας	42
3	Κβαντοποίηση με παραμόρφωση πολλαπλοτήτων Poisson	45
3.1	Admissible γραφήματα	45
3.2	Πολυ-διαφορικοί τελεστές & admissible γραφήματα	46
3.3	Χώροι διαμορφώσεως και οι συμπαγοποιήσεις τους	49
3.4	Integral weights	53
4	Ο Duflo-Kontsevich ισομορφισμός	57
4.1	Ο ισομορφισμός Duflo	57
4.2	Κβαντοποίηση με παραμόρφωση της $\mathfrak{g}^*$	59
4.3	Ο ισομορφισμός του Kontsevich	62
4.4	Ο ισομορφισμός του Duflo και ο ισομορφισμός του Kontsevich ταυτίζονται. . .	63
	A' Άλγεβρες Lie και ομάδες Lie	68
	B' Chevalley-Eilenberg συνομολογία	70
	Γ' Απειροστικές παραμορφώσεις προσεταιριστικών αλγεβρών	72

1 Συμμετρικές άλγεβρες, universal enveloping άλγεβρες και συνομολογία Hochschild

Σε αυτό το κεφάλαιο, ορίζουμε πλήθος διαφορετικών αλγεβρών. Κάθε άλγεβρα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την εργασία αυτή. Αρχικά, ορίζουμε τις διαφορίσιμες βαθμωτές (Lie) άλγεβρες και συν-άλγεβρες (coalgebras). Στην συνέχεια, συζητάμε την τανυστική άλγεβρα $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ μιας άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ και πως κατασκευάζεται η αντίστοιχη συμμετρική άλγεβρα $S(\mathfrak{g})$. Ακολουθεί, η μελέτη της universal enveloping άλγεβρας και παρουσιάζουμε την σχέση της με την συμμετρική άλγεβρα μέσω του θεωρήματος Poincaré-Birkhoff-Witt theorem (PBW). Σε γενικές γραμμές, ο ισομορφισμός PBW ταυτίζει την καθολική περιβάλλουσα άλγεβρα της $\mathfrak{g}$ με την άλγεβρα των αριστερά-αναλλοίωτων διαφορικών τελεστών στην ομάδα Lie G , όπου $Lie(G) = \mathfrak{g}$. Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, συζητάμε την συνομολογία Hochschild μιας προσεταιριστικής άλγεβρας $\mathcal{A}$. Η παρουσίαση ακολουθεί κατά βάση τα [20], [6], [2] και για την απόδειξη του θεωρήματος Poincaré-Birkhoff-Witt το [9].

1.1 Διαφορίσιμες βαθμωτές (Lie) άλγεβρες και συν-άλγεβρες

Έστω $M(V, W)$ ένας διανυσματικός χώρος του οποίου τα στοιχεία είναι της μορφής $(v, w) \in V \times W$, και N ο διανυσματικός υπόχωρος του $M(V, W)$ ο οποίος παράγεται από τα στοιχεία της μορφής

$$\begin{aligned} (v + v', w) - (v, w) - (v', w), & \quad (v, w + w') - (v, w) - (v, w'), \\ (rv, w) - r(v, w), & \quad (v, rw) - r(v, w), \end{aligned}$$

όπου $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ και $r \in \mathbb{K}$.

Ορισμός 1.1. Το τανυστικό γινόμενο $V \otimes W$ είναι το πηλίκο

$$V \otimes W = \frac{V \times W}{N}$$

με βάση $\{v_i \otimes w_j\}$ για $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ και $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W = n \cdot m$.

Έστω $\mathfrak{g}$ μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα Lie και μια βάση της $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Ορισμός 1.2. Για $k \geq 1$, ορίζουμε $\mathcal{T}^k(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \dots \otimes \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\otimes k}$ τέτοια ώστε $\mathcal{T}^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}$ και $\mathcal{T}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Η τανυστική άλγεβρα της $\mathfrak{g}$ είναι

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) := \mathbb{K} \oplus \mathcal{T}^1(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{T}^2(\mathfrak{g}) \oplus \dots = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^k(\mathfrak{g})$$

εφοδιασμένη με το τανυστικό γινόμενο το οποίο ορίζεται με concatenation, δηλαδή για $k, l \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}) \times \mathcal{T}^l(\mathfrak{g}) &\rightarrow \mathcal{T}^{k+l}(\mathfrak{g}) \\ [(v_1 \otimes \dots \otimes v_k), (w_1 \otimes \dots \otimes w_l)] &\mapsto [v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_l] \end{aligned}$$

Τα στοιχεία της $\mathcal{T}^k(\mathfrak{g})$ ονομάζονται *ομογενή στοιχεία βαθμού k* και η ένθεση $j : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ απεικονίζει την $\mathfrak{g}$ στην συνιστώσα $\mathfrak{g}^{\otimes 1}$. Κάποια βασικά αποτελέσματα για την $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ περιλαμβάνονται στο επόμενο θεώρημα, του οποίου η απόδειξη βρίσκεται στο [8, §11.5].

Θεώρημα 1.3. Για την τανυστική άλγεβρα $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- α') Είναι μια ελεύθερη προσεταιριστική άλγεβρα υπεράνω της $\mathfrak{g}$, με βάση $\{e_1 \otimes \cdots \otimes e_k\}$.
- β') (Καθολική ιδιότητα) Έστω $\mathcal{A}$ μια προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα, και $j : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ η φυσική ένθεση. Τότε, για κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{A}$ υπάρχει ένας και μοναδικός ομορφισμός αλγεβρών $g : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}$ τέτοιος ώστε το επόμενο διάγραμμα να μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{j} & \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & \mathcal{A} \end{array}$$

Ως εκ τούτου, υπάρχει μια φυσιολογική 1-1 αντιστοιχία

$$Hom_{Linear}(\mathfrak{g}, Linear(\mathcal{A})) \simeq Hom_{Assoc}(\mathcal{T}(\mathfrak{g}), \mathcal{A})$$

όπου $Linear(\mathcal{A})$ υποδεικνύει ότι θεωρούμε την $\mathcal{A}$ απλά ως διανυσματικό χώρο, Hom_{Linear} συμβολίζουμε τους γραμμικούς ομορφισμούς, και με Hom_{Assoc} συμβολίζουμε τους ομορφισμούς προσεταιριστικών αλγεβρών.

Παρατήρηση 1.4. Αν συμβολίσουμε με β μια βάση της $\mathfrak{g}$, η $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ μπορεί να περιγραφεί ως $\mathbb{K}[\beta]$ δηλαδή τον χώρο των πολυωνύμων με μεταβλητές $v \in \beta$ και συντελεστές στο $\mathbb{K}$ με το συνήθη πολλαπλασιασμό πολυωνύμων.

Διαφορίσιμες βαθμωτές άλγεβρες

Ορισμοί 1.5. Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$.

- Ένας $\mathbb{Z}$ -βαθμωτός διανυσματικός χώρος, είναι ένας διανυσματικός χώρος της μορφής $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V^n$ για υπόχωρους V^n του V . Τα στοιχεία $v \in V^n$ καλούνται *ομογενή στοιχεία βαθμού n* .
- Ένας γραμμικός ενδομορφισμός $d : V \rightarrow V$ καλείται *βαθμωτός γραμμικός ενδομορφισμός βαθμού k* αν ικανοποιεί την σχέση $d(V^n) \subset V^{n+k}$, για $k \in \mathbb{N}$.
- Ένα *βαθμωτό προσεταιριστικό γινόμενο* στον V είναι ένα γινόμενο τέτοιο ώστε για $a \in V^n$ και $b \in V^m$ τότε $a \cdot b \in V^{n+m}$.
- Μια *βαθμωτή παραγωγή* βαθμού k είναι ένας βαθμωτός ενδομορφισμός τέτοιος ώστε για $a \in V^n$ και $b \in V^m$ τότε $d(a \cdot b) = d(a)b + (-1)^{kn}a \cdot d(b)$.

Ως εκ τούτου, έχουμε τα εξής

- α') Ένας διαφορίσιμος $\mathbb{Z}$ -βαθμωτός διανυσματικός χώρος, εν συντομία DG-διανυσματικός χώρος, είναι ένας $\mathbb{Z}$ -βαθμωτός διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα βαθμωτό γραμμικό ενδομορφισμό $d : C \rightarrow C$ βαθμού 1 τέτοιος ώστε $d \circ d = 0$. Οι ενδομορφισμοί αυτοί καλούνται διαφορικά.
- β') Μια διαφορίσιμη βαθμωτή άλγεβρα, εν συντομία DG-άλγεβρα, είναι ένας DG-διανυσματικός χώρος (V, d) εφοδιασμένος με ένα προσεταιριστικό βαθμωτό γινόμενο και το διαφορικό d .
- γ') Ένας μορφισμός DG-διανυσματικών χώρων (αντ.. DG-αλγεβρών) είναι μια βαθμωτή απεικόνιση που διατηρεί το βαθμό και πλέκεται intertwines με τα διαφορικά (αντ. τα γινόμενα).

Παράδειγμα 1.6. Η διαφορίσιμη βαθμωτή άλγεβρα των διαφορικών μορφών $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$ εφοδιασμένη με το διαφορικό de Rham είναι μια DG-άλγεβρα.

Παρατηρήσεις 1.7. α') Ένας DG-διανυσματικός χώρος καλείται σύμπλοκο (complex) και το διαφορικό d συν-συνοριακός τελεστής (coboundary operator).

- β') Εν γένει, με τον ίδιο τρόπο ορίζεται το τανυστικό γινόμενο $X \otimes Y$ για δύο σύμπλοκα X και Y πάνω από το $\mathbb{K}$ με συνιστώσες

$$(X \otimes Y)^n = \bigoplus_{p+q=n} X^p \otimes_{\mathbb{K}} Y^q$$

Το τανυστικό γινόμενο δύο μορφισμών f, g βαθμών p και q , αντίστοιχα ορίζεται ως

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{pq} f(x) \otimes g(y)$$

- γ') Για ένα βαθμωτό διανυσματικό χώρο V , ορίζεται ο βαθμωτός διανυσματικός χώρος $V[k]$ αν μετατοπιστεί (shift) κάθε συνιστώσα κατά k δηλαδή

$$V[k] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V[k]^i$$

όπου $V[k] := V^{i+k}$.

Υπενθυμίζουμε, ότι για κάθε σύμπλοκο (V, d) η συνομολογία του $H^\bullet(V, d)$ είναι ο χώρος πηλίκο $\ker(d)/\text{Im}(d)$ και η i -οστή ομάδα συνομολογίας είναι το πηλίκο

$$\mathcal{H}^i(V, d) = \frac{\{v \in V^i | d(v) = 0\}}{\{a \in V^{i-1} | b = d(a)\}} = \frac{\{n - \text{cocycles}\}}{\{n - \text{coboundaries}\}}.$$

Κάθε μορφισμός συμπλόκων, επάγει σε επίπεδο συνομολογιών, μια γραμμική απεικόνιση η οποία διατηρεί τον βαθμό. Επομένως,

Ορισμός 1.8. Ένας σχεδόν-ισομορφισμός (quasi-isomorphism) είναι ένας μορφισμός συμπλόκων, ο οποίος επάγει ισομορφισμό στις συνολογίες.

Παράδειγμα 1.9. (Το Λήμμα του Poincaré.) Έστω $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ να είναι η προβολή της πρώτης συντεταγμένης και $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ η μηδενική τομή. Οι απεικονίσεις αυτές, επάγουν αμοιβαίους αντίστροφους ισομορφισμούς στις συνολογίες και επομένως $\mathcal{H}^\bullet(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{H}^\bullet(\mathbb{R}^{n+1})$.

Διαφορίσιμες βαθμωτές άλγεβρες Lie Έστω $\mathfrak{g}$ μια άλγεβρα Lie.

Ορισμός 1.10. Μια διαφορίσιμη βαθμωτή άλγεβρα Lie, εν συντομία DGLA, είναι η τριάδα $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], d)$ τέτοια ώστε $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$ είναι ένας $\mathbb{Z}$ -βαθμωτός διανυσματικός χώρος, εφοδιασμένος με μια διγραμμική απεικόνιση

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- α') $[a, b] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ (ομογένεια)
- β') $[a, b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b, a]$ (αντί-συμμετρικότητα)
- γ') $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\alpha\beta}[b, [a, c]]$ (ιδιότητα Jacobi)

για κάθε $a \in \mathfrak{g}^\alpha$, $b \in \mathfrak{g}^\beta$, $c \in \mathfrak{g}^\gamma$ και $d : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ένας γραμμικός τελεστής βαθμού 1 δηλαδή $d : \mathfrak{g}^i \rightarrow \mathfrak{g}^{i+1}$ ο οποίος ικανοποιεί

- $d[a, b] = [da, b] + (-1)^\alpha[a, db]$ (ιδιότητα Leibniz)
- $d \circ d = 0$

για κάθε $a \in \mathfrak{g}^\alpha$, $b \in \mathfrak{g}^\beta$.

Ο γραμμικός τελεστής όπως ορίστηκε παραπάνω καλείται και **διαφορικό** της DGLA.

Παραδείγματα 1.11. α') Κάθε άλγεβρα Lie είναι DGLA συγκεντρωμένη στο βαθμό 0.

β') Έστω $A = \bigoplus A^i$ μια προσεταιριστική βαθμωτή μεταθετική $\mathbb{K}$ -άλγεβρα¹ και $L = \bigoplus L^i$ μια DGLA. Τότε η $L \otimes A$ έχει μια φυσιολογική δομή DGLA θέτοντας:

$$(L \otimes_{\mathbb{K}} A)^n = \bigoplus_i (L^i \otimes_{\mathbb{K}} A^{n-i}), \quad d(x \otimes a) = dx \otimes a, \quad [x \otimes a, y \otimes b] = (-1)^{\alpha\beta}[x, y] \otimes ab.$$

Ως συνήθως, με $Z^i(\mathfrak{g})$ συμβολίζεται ο πυρήνας του διαφορικού $d : \mathfrak{g}^i \rightarrow \mathfrak{g}^{i+1}$ και με $B^i(\mathfrak{g})$ η εικόνα του διαφορικού $d : \mathfrak{g}^{i-1} \rightarrow \mathfrak{g}^i$. Η ι-οστή ομάδα συνολογίας της $\mathfrak{g}$ είναι το πηλίκο

$$\mathcal{H}^i(\mathfrak{g}) = Z^i(\mathfrak{g})/B^i(\mathfrak{g}).$$

¹δηλαδή $ab = (-1)^{\alpha\beta}ba$ για $a \in \mathfrak{g}^\alpha$, $b \in \mathfrak{g}^\beta$ ομογενή στοιχεία.

Πρόταση 1.12. Για κάθε DGLA $\mathfrak{g}$, η συνομολογία $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i(\mathfrak{g})$

- α') έχει την δομή βαθμωτού διανυσματικού χώρου.
- β') έχει την δομή βαθμωτής άλγεβρας Lie από την συνθήκη συμβατότητας (compatibility condition) μεταξύ του διαφορικού d και του bracket της $\mathfrak{g}$.
- γ') μπορεί να γίνει DGLA, αν εφοδιαστεί με το διαφορικό $d = 0$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το (b) της πρότασης. Αρχικά, η formula για το Lie bracket στην $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ διαβάζει

$$[|a|, |b|]_{\mathcal{H}} = |[a, b]_{\mathfrak{g}}|$$

για τις δύο κλάσεις συνομολογίας $|a| \in \mathcal{H}^k(\mathfrak{g})$ και $|b| \in \mathcal{H}^l(\mathfrak{g})$. Θα δείξουμε ότι το $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{H}}$ είναι καλά ορισμένο. Έστω $\tilde{a} \in |a|$ και $\tilde{b} \in |b|$ δύο άλλοι αντιπρόσωποι $\tilde{a} \in |a|$ και $\tilde{b} \in |b|$, εκφρασμένοι στην μορφή

$$\tilde{a} = a + d\gamma_1 \quad \text{ανδ} \quad \tilde{b} = b + d\gamma_2$$

για $\gamma_1 \in \mathfrak{g}^{k-1}$, $\gamma_2 \in \mathfrak{g}^{l-1}$. Τότε,

$$\begin{aligned} [\tilde{a}, \tilde{b}]_{\mathfrak{g}} &= [a + d\gamma_1, b + d\gamma_2]_{\mathfrak{g}} \\ &= [a, b]_{\mathfrak{g}} + [a, d\gamma_2]_{\mathfrak{g}} + [d\gamma_1, b]_{\mathfrak{g}} + [d\gamma_1, d\gamma_2]_{\mathfrak{g}} \end{aligned}$$

Από τον κανόνα του Leibniz έχουμε

- $[d\gamma_1, d\gamma_2]_{\mathfrak{g}} = d[\gamma_1, d\gamma_2]_{\mathfrak{g}} - (-1)^{k-2}[\gamma_1, d(d(\gamma_2))]_{\mathfrak{g}} = d[\gamma_1, d\gamma_2]_{\mathfrak{g}}$, αφού $d^2 = 0$
- $d[a, b] = [da, b] + (-1)^k[a, db] = 0$, αφού $a \in \ker d^k \subset \mathfrak{g}^k$ και $b \in \ker d^l \subset \mathfrak{g}^l$
- $[a, d\gamma_2]_{\mathfrak{g}} + [d\gamma_1, b]_{\mathfrak{g}} = d([a + \gamma_1, b + \gamma_2]_{\mathfrak{g}} - [\gamma_1, \gamma_2]_{\mathfrak{g}})$

οπότε

$$[a, d\gamma_2]_{\mathfrak{g}} + [d\gamma_1, b]_{\mathfrak{g}} + [d\gamma_1, d\gamma_2]_{\mathfrak{g}} = d([a + \gamma_1, b + \gamma_2]_{\mathfrak{g}} - [\gamma_1, \gamma_2]_{\mathfrak{g}} + [\gamma_1, d\gamma_2]_{\mathfrak{g}})$$

Κλείνοντας,

$$[\tilde{a}, \tilde{b}]_{\mathfrak{g}} - [a, b]_{\mathfrak{g}} = d([a + \gamma_1, b + \gamma_2]_{\mathfrak{g}} - [\gamma_1, \gamma_2]_{\mathfrak{g}} + [\gamma_1, d\gamma_2]_{\mathfrak{g}})$$

και επομένως

$$[|\tilde{a}|, |\tilde{b}|]_{\mathcal{H}} = |[\tilde{a}, \tilde{b}]_{\mathfrak{g}}| = |[a, b]_{\mathfrak{g}}| = [|a|, |b|]_{\mathcal{H}}$$

□

Ορισμοί 1.13. Έστω $(\mathfrak{g}_1, [\cdot, \cdot]_1, d_1)$ και $(\mathfrak{g}_2, [\cdot, \cdot]_2, d_2)$ δύο DGLAs.

- α') Ένας μορφισμός $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ μεταξύ DGLAs είναι μια γραμμική απεικόνιση η οποία διατηρεί τον βαθμό και μετατίθεται με τα brackets και τα διαφορικά, δηλαδή

$$\phi \circ d_1 = d_2 \circ \phi \quad \text{ανδ} \quad \phi([x, y]_1) = [\phi(x), \phi(y)]_2$$

για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}_1$.

β') Κάθε μορφισμός $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ μεταξύ DGLAs επάγει ένα μορφισμό $\mathcal{H}(\phi) : \mathcal{H}(\mathfrak{g}_1) \rightarrow \mathcal{H}(\mathfrak{g}_2)$ μεταξύ των συνομολογιών. Ένα *σχεδόν-ισομορφισμός* (quasi-isomorphism) είναι ένας μορφισμός μεταξύ DGLAs ο οποίος επάγει ισομορφισμό στις συνομολογίες.

γ') Μια DGLA $\mathfrak{g}$ καλείται *τυπική* αν είναι quasi-isomorphic με την συνομολογία της, την οποία (συνομολογία) την θεωρούμε ως DGLA με το μηδενικό διαφορικό και το επαγόμενο bracket.

Ορισμός 1.14. Η *Maurer-Cartan εξίσωση* (ή αλλιώς *εξίσωση παραμόρφωσης*) μιας DGLA $\mathfrak{g}$ είναι η

$$da + \frac{1}{2}[a, a] = 0, \quad a \in \mathfrak{g}^1. \quad (1.1)$$

Διαφορίσιμες βαθμωτές συν-άλγεβρες Εν γένει, οι συν-άλγεβρες είναι δομές οι οποίες είναι δυικές, σε κατηγορικο-θεωρητικό επίπεδο των αντίστροφων βελών, με τις άλγεβρες.

Ορισμός 1.15. Μια *συν-άλγεβρα* (coalgebra) είναι μια τριάδα (C, Δ, ϵ) όπου C είναι ένας διανυσματικός χώρος, $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ και $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, οι οποίες καλούνται *συν-πολλαπλασιασμός* (comultiplication) και *συν-μονάδα* (counit) αντίστοιχα, οι οποίες ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα (**Coassoc**) και (**Coun**)

(**Coassoc**) : Το τετράγωνο μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \Delta \downarrow & & \downarrow id \otimes \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes id} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

(**Coun**) : Τα τρίγωνα στο ακόλουθο διάγραμμα μετατίθενται

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes id} & C \otimes C & \xrightarrow{id \otimes \epsilon} & C \otimes \mathbb{K} \\ & \searrow \cong & \uparrow \Delta & \swarrow \cong & \\ & & C & & \end{array}$$

Η συν-άλγεβρα C καλείται *συν-μεταθετική* (cocommutative) αν το ακόλουθο τρίγωνο μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \Delta \swarrow & & \searrow \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{T} & C \otimes C \end{array}$$

όπου T είναι η twisting απεικόνιση, η οποία ορίζεται για $x, y \in C$ τέτοια ώστε $x \otimes y \in C \otimes C$ ως $T(x \otimes y) := y \otimes x$.

Ορισμός 1.16. Έστω (C, Δ, ϵ) και (C', Δ', ϵ') δύο συν-άλγεβρες. Μια γραμμική απεικόνιση $f : C \rightarrow C'$ καλείται *μορφισμός συν-αλγεβρών* αν τα επόμενα διαγράμματα

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C' \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta' \\ C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & C' \otimes C' \end{array}$$

και

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C' \\ & \searrow \epsilon & \swarrow \epsilon' \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

μετατίθενται.

Παραδείγματα 1.17. α') Έστω $\mathbb{K}$ σώμα. Τότε το $\mathbb{K}$ είναι μια συν-άλγεβρα αν θέσουμε $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ και $\epsilon(1) = 1$.

β') Έστω V ένας $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος με $\mathcal{B}$. Τότε, ο V δέχεται μια δομή συν-άλγεβρας θέτοντας

$$\begin{aligned} \Delta(V) &= v \otimes v \\ \epsilon(V) &= 1 \end{aligned}$$

για κάθε $v \in \mathcal{B}$.

γ') Για κάθε συν-άλγεβρα $C = (C, \Delta, \epsilon)$, θέτουμε

$$\Delta^{op} = T \circ \Delta$$

και έχουμε μια νέα συν-άλγεβρα, την $C^{cop} = (C, \Delta^{op}, \epsilon)$

Αν αντικαταστήσουμε τον διανυσματικό χώρο C με ένα βαθμωτό διανυσματικό χώρο, τότε θα έχουμε βαθμωτές συν-άλγεβρες, οι οποίες θα συμβολίζονται εν συντομία με CGA.

Ορισμοί 1.18. α') Μια *βαθμωτή συν-άλγεβρα* είναι ένας βαθμωτός διανυσματικός χώρος $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{h}^i$ με μια βαθμωτή γραμμική απεικόνιση

$$\Delta : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h},$$

τον *συν-πολλαπλασιασμό* ο οποίος ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

- $\Delta(\mathfrak{h}^i) \subset \bigoplus_{j+k=i} \mathfrak{h}^j \otimes \mathfrak{h}^k$
- $(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$ (συν-προσεταιριστικότητα)

β') Καλείται βαθμωτή συν-άλγεβρα (CGA)

- με συν-μονάδα αν υπάρχει μορφισμός

$$\epsilon : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{K}$$

τέτοιος ώστε

- για κάθε $i > 0$ έχουμε $\epsilon(\mathfrak{h}^i) = 0$
- $(\epsilon \otimes id)\Delta(a) = (id \otimes \epsilon)\Delta(a) = a$ για κάθε $a \in \mathfrak{h}$.
- **συν-μεταθετική** αν η twisting απεικόνιση $T : \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, η οποία ορίζεται στο $x \otimes y$ (από ομογενή στοιχεία βαθμού $|x|, |y|$, αντίστοιχα) ως

$$T(x \otimes y) := (-1)^{|x||y|} y \otimes x$$

ικανοποιεί την σχέση

$$T \circ \Delta = \Delta.$$

Για να ορίσουμε το ανάλογο της διαφορίσιμης βαθμωτής άλγεβρας Lie για βαθμωτές συν-άλγεβρες, ορίζουμε την έννοια της συν-παραγώγισης.

Ορισμός 1.19. Μια συν-παραγώγιση βαθμού k στην CGA $\mathfrak{h}$ είναι μια βαθμωτή γραμμική απεικόνιση $\delta : \mathfrak{h}^i \rightarrow \mathfrak{h}^{i+k}$ η οποία ικανοποιεί την συν- Leibniz ιδιότητα:

$$\Delta \delta v = (\delta \otimes id)\Delta(v) + ((-1)^{k|v|} id \otimes \delta)\Delta(v)$$

για κάθε $v \in \mathfrak{h}^{|v|}$. Μια συν-παραγώγιση βαθμού 1, της οποίας το τετράγωνο μηδενίζεται καλείται *διαφορικό*, και θα συμβολίζεται με Q

Παράδειγμα 1.20. Έστω V διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Η τανυστική άλγεβρα $T(V)$ του V με συν-πολλαπλασιασμό στα ομογενή στοιχεία

$$\begin{aligned} \Delta_T(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) &:= 1 \otimes (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} (v_1 \otimes \dots \otimes v_k) \otimes (v_{k+1} \otimes \dots \otimes v_n) \\ &+ (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \otimes 1 \end{aligned}$$

και με συν-μονάδα $\epsilon_T : T(V) \rightarrow V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$ είναι μια συν-άλγεβρα.

Παρατήρηση 1.21. Η επαγόμενη τανυστική άλγεβρα $\bar{T}(V)$ η οποία προκύπτει από την προβολή $\bar{\pi} : T(V) \rightarrow \bar{T}(V)$ και την ένθεση $i : \bar{T}(V) \hookrightarrow T(V)$ αποκτά ένα συν-πολλαπλασιασμό αλλά όχι συν-μονάδα.

1.2 Συμμετρικές άλγεβρες

Στην παράγραφο αυτή, θα κατασκευάσουμε από την τανυστική άλγεβρα $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ 1.2 μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα Lie την αντίστοιχη συμμετρική της άλγεβρα. Έστω η συμμετρική ομάδα S_n . Οι γραμμικές απεικονίσεις

$$s : x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}$$

και

$$a : x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_n := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}$$

όπου $\text{sgn}(\sigma)$ είναι η υπογραφή της μετάθεσης, επεκτείνονται σε δύο καλά ορισμένους ενδομορφισμούς $s, a : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$, την *symmetrization* και την *anti-symmetrization* απεικόνιση, αντίστοιχα. Οι εικόνες των απεικονίσεων αυτών, $\text{Im}(s)$ και $\text{Im}(a)$, είναι συμπληρωματικοί διανυσματικοί υπόχωροι των ιδεωδών $\mathcal{I} = \{j(x)j(y) - j(y)j(x)\}$ και $\mathcal{J} = \{j(x)j(y) + j(y)j(x)\}$ για $x, y \in \mathfrak{g}$, αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\text{Im}(s) \oplus \mathcal{I} = \mathcal{T}(\mathfrak{g})$$

και

$$\text{Im}(a) \oplus \mathcal{J} = \mathcal{T}(\mathfrak{g}).$$

Ορισμοί 1.22. α') Η *συμμετρική άλγεβρα* $S(\mathfrak{g})$ της $\mathfrak{g}$ είναι το πηλίκο της $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ με το ιδεώδες $\mathcal{I}$ δηλαδή,

$$S(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(\mathfrak{g}), \quad S^k(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}) / \mathcal{I}^k. \quad (1.2)$$

β') Η *exterior άλγεβρα* $\Lambda(\mathfrak{g})$ της $\mathfrak{g}$ είναι το πηλίκο της $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ με το $\mathcal{J}$ δηλαδή

$$\Lambda(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(\mathfrak{g}), \quad \Lambda^k(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{\otimes k} / \mathcal{J}^k \quad (1.3)$$

Για τη συμμετρική άλγεβρα ενός n -διάστατου διανυσματικού χώρου ισχύει η ακόλουθη πρόταση του οποίου η απόδειξη βρίσκεται στο [8, §11.5].

Πρόταση 1.23. Έστω V ένας n -διάστατος διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$. Τότε, η $S(V)$ είναι ισόμορφη, ως βαθμωτή άλγεβρα υπεράνω του $\mathbb{K}$ με τον δακτύλιο των πολυωνύμων σε n μεταβλητές υπεράνω του $\mathbb{K}$. Πιο συγκεκριμένα, ο ισομορφισμός είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων από τον $S^k(V)$ στον χώρο των ομογενών πολυωνύμων βαθμού k .

Συμβολισμοί 1.24. Η *reduced* συμμετρική άλγεβρα $\overline{S}(\mathfrak{g})$ της $\mathfrak{g}$, ορίζεται ως

$$\overline{S}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} S^k(\mathfrak{g}) \quad (1.4)$$

Λήμμα 1.25. Η συμμετρική άλγεβρα της $\mathfrak{g}$, εν συντομία $S(\mathfrak{g})$, έχει την δομή $\mathfrak{g}$ -προτύπου.

Απόδειξη. Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι να επεκτείνουμε την adjoint δράση $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ σε όλη την $S(\mathfrak{g})$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibniz. Πιο συγκεκριμένα, για $x^n \in S^n(\mathfrak{g})$ έχουμε

$$ad_y(x^n) = n[y, x]x^{n-1}$$

Η πλήρης απόδειξη του λήμματος βρίσκεται στο [15] σελ. 8.

□

Παράδειγμα 1.26. Για $n = 2$ η δράση του ξ στο στοιχείο $x^2 = x \otimes x \in S^2(\mathfrak{g})$ διαβάζει

$$\begin{aligned} \xi \cdot x^2 &= \xi(x \otimes x) \\ &= \xi(x) \otimes x + x \otimes \xi(x) \\ &= \xi(x)x + x\xi(x) \\ &= 2\xi(x)x^{2-1} \end{aligned}$$

όπου η 3η ισότητα ισχύει επειδή $\xi(x)$ είναι ένας αριθμός στο σώμα $\mathbb{K}$, και το σύμβολο $\xi(x) \otimes x$ δηλώνει το τανυστικό γινόμενο ενός αριθμού με ένα στοιχείο της άλγεβρας.

Παρατηρήσεις 1.27. α') Η δράση του $\xi \in \mathfrak{g}^*$ στην $S(\mathfrak{g})$ γίνεται με παραγωγίσεις. Πιο συγκεκριμένα, για $x^n \in S^n(\mathfrak{g})$ η δράση ορίζεται ως

$$\xi \cdot x^n := n \cdot \xi(x) \cdot x^{n-1}$$

και σε ένα τυχαίο στοιχείο $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in S^n$ ως

$$\xi \cdot x_1 \otimes \cdots \otimes x_n := \sum_{i=1}^n x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes \xi(x_i) \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n$$

β') Επεκτείνουμε την παραπάνω δράση, τα στοιχεία της μορφής $(\xi)^k \in S^k(\mathfrak{g}^*)$ δρουν στην $S(\mathfrak{g})$ ως

$$(\xi)^k \cdot x^n := n \cdots (n - k + 1) \xi(x)^k \cdot x^{n-k}$$

Παράδειγμα 1.28. Για $n = 2$, και για στοιχεία της μορφής $x \otimes x \otimes x = x^3 \in S^3(\mathfrak{g})$ και $\xi^2 \in S^2(\mathfrak{g}^*)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\xi^2 \cdot (x \otimes x \otimes x) &= \xi(x) \otimes \xi(x) \otimes x + \xi(x) \otimes x \otimes \xi(x) + x \otimes \xi(x) \otimes \xi(x) \\ &= \xi(x)\xi(x)x + \xi(x)\xi(x)x + \xi(x)\xi(x)x \\ &= 3\xi(x)^2 x^{3-2}\end{aligned}$$

όπου η 2η ισότητα ισχύει επειδή δεν είναι τίποτα άλλο από το τανυστικό γινόμενο ενός αριθμού με ένα στοιχείο της άλγεβρας. Στην περίπτωση, που έχουμε στοιχεία της μορφής $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \in S^3(\mathfrak{g})$ ανδ $\xi^2 \in S^2(\mathfrak{g}^*)$, τότε

$$\begin{aligned}\xi^2 \cdot (x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) &= \xi(x_1) \otimes \xi(x_2) \otimes x_3 + \xi(x_1) \otimes x_2 \otimes \xi(x_3) + x_1 \otimes \xi(x_2) \otimes \xi(x_3) \\ &= \xi(x_1)\xi(x_2)x_3 + \xi(x_1)x_2\xi(x_3) + \xi(x_2)\xi(x_3)x_1\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή δεν είναι τίποτα άλλο από το τανυστικό γινόμενο ενός αριθμού με ένα στοιχείο της άλγεβρας.

γ') Με όμοιο τρόπο, η άλγεβρα $\widehat{S}(\mathfrak{g}^*)$ (αντ. $\widehat{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$) δρα στην $S(\mathfrak{g})$ (αντ. $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$), όπου $\widehat{S}(\mathfrak{g}^*)$ είναι το σύνολο των τυπικών δυναμοσειρών στην $\mathfrak{g}$.

Παρατήρηση 1.29. Η συμμετρική άλγεβρα $S(V)$ ενός $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου V εφοδιασμένη με τον συν-πολλαπλασιασμό

$$\Delta_S(v) := 1 \otimes v + v \otimes 1$$

για ομογενή στοιχεία v , είναι μια βαθμωτή συν-άλγεβρα. Κατά προφανή τρόπο, η επαγόμενη συμμετρική άλγεβρα, $\bar{S}(V)$ είναι μια βαθμωτή συν-άλγεβρα χωρίς συν-μονάδα.

1.3 Universal enveloping άλγεβρες

Ορισμός 1.30. Η *universal enveloping* άλγεβρα $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ μιας άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ είναι η άλγεβρα με γεννήτορες $\xi \in \mathfrak{g}$ οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1 = [\xi_1, \xi_2] \quad (1.5)$$

για $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$.

Φορμαλιστικά, η κατασκευή της universal enveloping άλγεβρας $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ γίνεται μέσω της τανυστικής άλγεβρας $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Ισοδύναμα η $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ορίζεται ως το πηλίκο της τανυστικής άλγεβρας $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ με το δι-πλευρο ιδεώδες που ορίζεται από

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$$

όπου $[x, y]$ το Lie bracket της $\mathfrak{g}$. Τα στοιχεία της universal enveloping άλγεβρας είναι γραμμικοί συνδιασμοί λέξεων της μορφής $\xi_1 \cdots \xi_n$, οι οποίες υπακούουν στις σχέσεις 1.5.

Παρατήρηση 1.31. Αν η $\mathfrak{g}$ είναι μια μεταθετική άλγεβρα Lie, τότε το Lie bracket είναι τετριμμένο δηλαδή $[x, y] = 0$ για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}$. Επομένως, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ και καλείται *commutative universal enveloping άλγεβρα* της $\mathfrak{g}$, επειδή ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα (όπως ορίστηκε παραπάνω) για μεταθετικές άλγεβρες.

Παράδειγμα 1.32. Έστω $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ η άλγεβρα Lie (της ομάδας Lie $SL(2, \mathbb{R})$), με βάση e, f, h και brackets που ικανοποιούν τα εξής

$$[e, f] = h, [h, e] = 2e, [h, f] = -2f.$$

Τα στοιχεία της $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ μπορούν να εκφραστούν ως άθροισμα γινομένων της μορφής $f^k h^l e^m$, για $k, l, m \geq 0$.

Θεωρούμε την φυσιολογική ένθεση $j : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ και την προβολή $pr : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Η σύνθεση των απεικονίσεων αυτών, ορίζει μια νέα απεικόνιση $\epsilon = pr \circ j : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Από τον τρόπο κατασκευής, η απεικόνιση ϵ είναι ομομορφισμός Lie αλγεβρών. Εν γένει, η κατασκευή της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ από την $\mathfrak{g}$ είναι functorial: κάθε ομομορφισμός αλγεβρών Lie $\mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ επάγει ένα μορφισμό αλγεβρών $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$.

Θεώρημα 1.33. (Καθολική ιδιότητα) Αν $\mathcal{A}$ είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα και $\epsilon : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ η απεικόνιση που επάγεται από την ένθεση $\tau : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$, τότε κάθε ομομορφισμός αλγεβρών Lie $\kappa : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{A}$ υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός προσεταιριστικών αλγεβρών $\kappa_{\mathcal{U}} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}$ τέτοιος ώστε το επόμενο διάγραμμα να μετατίθεται:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ & \searrow \kappa & \downarrow \kappa_{\mathcal{U}} \\ & & \mathcal{A} \end{array}$$

Απόδειξη. Η απεικόνιση κ επεκτείνεται σε ένα ομομορφισμό αλγεβρών $\mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}$. Αυτός ο ομομορφισμός αλγεβρών μηδενίζεται στα δίπλευρα ιδεώδη $\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$, και επομένως γίνεται ένα ομομορφισμός αλγεβρών $\kappa_{\mathcal{U}} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}$ με την επιθυμητή ιδιότητα. Η επέκταση αυτή είναι μοναδική αφού η απεικόνιση $\epsilon(\mathfrak{g})$ παράγει την $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ως άλγεβρα. $\square$

Πρόταση 1.34. Έστω D μια παραγωγή της $\mathfrak{g}$.

- α') Υπάρχει μια και μόνο μια παραγωγή D' της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ η οποία επεκτείνει την D .
- β') Αν υπάρχει $x \in \mathfrak{g}$ τέτοιο ώστε $D = ad_x$, τότε $D'(u) = xu - ux$ για κάθε $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.
- γ') Η universal enveloping άλγεβρα $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ είναι ένα $\mathfrak{g}$ -πρότυπο.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [15] σελ. 79 και σελ. 73 $\square$

²Κάθε προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα, εφοδιασμένη με το μεταθέτη ως Lie bracket δηλαδή $[a, b]_{\mathcal{A}} = ab - ba$ είναι μια άλγεβρα Lie.

Λήμμα 1.35. Το επόμενο διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{I_{PBW}} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ ad_x \downarrow & & \downarrow ad_x \\ S(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{I_{PBW}} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την σχέση $ad_x \circ I_{PBW} = I_{PBW} \circ ad_x$ για $n = 3$, η οποία είναι η πρώτη μη τετριμμένη περίπτωση, και με επαγωγή έχουμε το ζητούμενο για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Έστω $y^3 \in S(\mathfrak{g})$. Έχουμε

$$\begin{aligned} (ad_x \circ I_{PBW})(y^3) &= ad_x(I_{PBW}(y^3)) \\ &= ad_x(y^3) \\ &= xy^3 - y^3x \end{aligned}$$

όπου υπολογίσαμε την απεικόνιση ad_x στα στοιχεία της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Από την άλλη πλευρά έχουμε

$$\begin{aligned} (I_{PBW} \circ ad_x)(y^3) &= I_{PBW}(ad_x(y^3)) \\ &= I_{PBW}(3[x, y]y^{3-1}) \\ &= 3 \cdot I_{PBW}([x, y]y^2) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3!}([x, y]yy + yy[x, y] + y[x, y]y + y[x, y]y + yy[x, y] + [x, y]yy) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3!}([x, y]y^2 + y^2[x, y] + y[x, y]y + y[x, y]y + y^2[x, y] + [x, y]y^2) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3!}(2[x, y]y^2 + 2y^2[x, y] + 2y[x, y]y) \\ &= \frac{2 \cdot 3}{3!}([x, y]y^2 + y^2[x, y] + y[x, y]y) \\ &= ([x, y]y^2 + y^2[x, y] + y(xy - yx)y) \\ &= ((xy - yx)y^2 + y^2(xy - yx) + y(xy - yx)y) \\ &= xy^3 - yxy^2 + y^2xy - y^3x + yxy^2 - y^2xy \\ &= xy^3 - y^3x \end{aligned}$$

όπου η απεικόνιση ad_x υπολογίστηκε στα στοιχεία της $S(\mathfrak{g})$ και χρησιμοποιήθηκε η σχέση $xy - yx = [x, y]$ η οποία περιγράφει τα στοιχεία $x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Η απόδειξη του λήμματος για την περίπτωση $n = 3$ είναι πλήρης.

□

Λήμμα 1.36. Το κέντρο της universal enveloping άλγεβρας, $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ ταυτίζεται με τα αναλλοίωτα στοιχεία της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ υπό την adjoint δράση της $\mathfrak{g}$ στην $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Με άλλα λόγια,

$$\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$$

Απόδειξη. Έστω $C \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Τότε, $C \in \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ αν και μόνο μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες της καθολικής περιβάλλουσας άλγεβρας, δηλαδή αν $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ γεννήτορας τότε $xC = Cx$. Με άλλα λόγια, αν και μόνο αν $xC - Cx = 0$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το $ad_x C = 0$. $\square$

Παράδειγμα 1.37. Έστω η Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ με γεννήτορες e, f, h όπως ορίστηκαν παραπάνω και έστω $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$. Τότε το C ανήκει στο κέντρο της $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$

Απόδειξη. Θα επαληθεύσουμε την πρόταση για τον γεννήτορα e και με όμοιους υπολογισμούς προκύπτει ότι $hC = Ch$ και $fC = Cf$.

$$\begin{aligned} eC &= e^2f + efe + \frac{1}{2}eh^2 \\ &= e(fe + h) + (fe + h)e + \frac{1}{2}(he - 2e)h \\ &= efe + fe^2 + \frac{1}{2}heh + eh + he - eh \\ &= efe + fe^2 + \frac{1}{2}h(he - 2e) + he \\ &= efe + fe^2 + \frac{1}{2}h^2e \\ &= Ce \end{aligned}$$

$\square$

Αν και η $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ είναι μια βαθμωτή άλγεβρα και η $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ προκύπτει ως η προβολή της $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ στο πηλίκο $\mathcal{T}(\mathfrak{g}) / \{x \otimes y - y \otimes x - [x, y]\}$, η $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ δεν είναι βαθμωτή άλγεβρα, επειδή οι σχέσεις που ορίζουν την $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ δεν είναι ομογενείς εκτός και αν $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} = 0$. Με άλλα λόγια, έστω $\epsilon : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ τέτοια ώστε το επόμενο διάγραμμα να μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{j} & \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \\ & \searrow \epsilon & \downarrow pr \\ & & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Για $x, y \in \mathfrak{g}$, τότε κάθε λέξη $\epsilon(x)\epsilon(y)$ και $\epsilon(y)\epsilon(x)$ έχει “μήκος” ίσο με 2. Η διαφορά τους

$$\epsilon(x)\epsilon(y) - \epsilon(y)\epsilon(x) = \epsilon([x, y]_{\mathfrak{g}})$$

έχει μήκος 1. Επομένως, το μήκος δεν διατηρείται από τις αλγεβρικές πράξεις. Παρόλα αυτά, η $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ έχει ένα *φιλτράρισμα* το οποίο ορίζεται ως

$$\mathbb{R} = \mathcal{U}^{(0)}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}^{(1)}(\mathfrak{g}) \subset \dots \subset \mathcal{U}^{(n)}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}^{(n+1)}(\mathfrak{g}) \subset \dots$$

όπου $\mathcal{U}^{(k)} = \frac{\mathcal{T}^{(k)}(\mathfrak{g})}{\mathcal{I}}$ και $\mathcal{T}^{(k)}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \leq k} \mathcal{T}^i(\mathfrak{g})$. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ παράγεται από την $\mathcal{U}^{(1)}(\mathfrak{g})$.

Ορισμός 1.38. Η βαθμωτή άλγεβρα της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ είναι η

$$Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} Gr_k(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \quad (1.6)$$

όπου $Gr_k(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \mathcal{U}^{(k)}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}^{(k-1)}(\mathfrak{g})$ με το φυσιολογικό γινόμενο το οποίο ορίζεται ως

$$Gr_p(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \times Gr_q(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \rightarrow Gr_{p+q}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})).$$

Πόρισμα 1.39. Η βαθμωτή άλγεβρα $Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ παράγεται από $\mathcal{U}^{(1)}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}^{(0)}(\mathfrak{g})$.

Θεώρημα 1.40. Η άλγεβρα $Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ είναι μεταθετική.

Απόδειξη. Αφού η άλγεβρα $Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ παράγεται από την $Gr_1(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, δηλαδή την εικόνα της $\mathfrak{g}$ η οποία επάγεται από την απεικόνιση $\epsilon : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, αρκεί να δείξουμε ότι τα $\epsilon(x), \epsilon(y)$ μετατίθενται στην $Gr_2(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}$. Αφού ϵ είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie έχουμε ότι

$$\epsilon(x)\epsilon(y) - \epsilon(y)\epsilon(x) = [\epsilon(x), \epsilon(y)].$$

Αλλά, $\epsilon([x, y]) \in \mathcal{U}^{(1)}$ και άρα $\epsilon(x)\epsilon(y) \equiv \epsilon(y)\epsilon(x) \pmod{\mathcal{U}^{(1)}(\mathfrak{g})}$. Επομένως

$$\epsilon(x)\epsilon(y) = \epsilon(y)\epsilon(x)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πόρισμα 1.41. Η κανονική απεικόνιση $\mathfrak{g} \rightarrow Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ επεκτείνεται σε ένα ομομορφισμό $i_S : S(\mathfrak{g}) \rightarrow Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$.

Θεώρημα 1.42. (*Poincaré-Birkhoff-Witt*) Η απεικόνιση $i_S : S(\mathfrak{g}) \rightarrow Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ είναι ένας ισομορφισμός βαθμωτών αλγεβρών.

Θα δείξουμε το θεώρημα αυτό για την ειδική περίπτωση όπου η $\mathfrak{g}$ είναι η άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie G , και πιο συγκεκριμένα, όταν η $\mathfrak{g}$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Η ιδέα για την απόδειξη είναι η συσχέτιση της universal enveloping άλγεβρας με τους διαφορικούς τελεστές πάνω στην ομάδα G . Υπενθυμίζουμε αρχικά τα εξής

Ορισμός 1.43. Για κάθε πολλαπλότητα M , οι διαφορικοί τελεστές τάξης k στην M είναι το σύνολο

$$DO^{(k)}(M) = \{D \in \text{End}(C^\infty(M)) \mid \forall f_0, f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M), ad_{f_0} \cdots ad_{f_k} D = 0\}$$

όπου $ad_f = [f, \cdot]$ είναι ο μεταθέτης με τον τελεστή του πολλαπλασιασμού κατά f . Αυτό σημαίνει, ότι για κάθε $f \in C^\infty(M)$ υπάρχει ένας τελεστής $m_f : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) : g \mapsto m_f(g) := f \cdot g$, τέτοιος ώστε για $D \in \text{End}(C^\infty(M))$, $g \in C^\infty(M)$ η formula διαβάζει

$$\begin{aligned} ad_f(D)(g) &= [m_f, D](g) \\ &= (m_f \circ D)(g) - (D \circ m_f)(g) \\ &= m_f(D(g)) - D(m_f(g)) \\ &= f \cdot D(g) - D(f \cdot g) \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 1.44. Για μια πολλαπλότητα M

α') έχουμε ότι, $D \in DO^{(k)}(M)$ αν και μόνο αν $ad_f^{k+1} D = 0$, για κάθε f .

β') Σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων, η μορφή ενός τέτοιου τελεστή $D \in DO^{(k)}(M)$ είναι

$$D = \sum_{i_1 + \dots + i_n \leq k} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_k}}{\partial x_{i_k}}$$

γ') $DO^{(0)}(M) \cong C^\infty(M)$ και $DO^{(1)}(M) \cong C^\infty \oplus \mathfrak{X}(M)$.

δ') Η άλγεβρα $DO(M) = \bigcup_{k=0}^\infty DO^{(k)}(M)$ είναι φιλτραρισμένη άλγεβρα, όπου το γινόμενο τελεστών τάξης k, l αντιστοιχεί είναι ένας τελεστής τάξης $k + l$.

Απόδειξη. (PBW) Η απεικόνιση $i_S : S(\mathfrak{g}) \rightarrow Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, είναι το ευθύ άθροισμα πάνω από όλες τις δυνατές περιπτώσεις

$$\begin{aligned} i_S : S^k(\mathfrak{g}) &\rightarrow \mathcal{U}^{(k)}(\mathfrak{g}) / \mathcal{U}^{(k-1)}(\mathfrak{g}) \\ \xi_1 \cdots \xi_k &\mapsto \xi_1 \cdots \xi_k \mod \mathcal{U}^{(k-1)}(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η i_S είναι 1-1 και επί.

Για το επί, θεωρούμε $y \in \mathcal{U}^k(\mathfrak{g}) / \mathcal{U}^{k-1}(\mathfrak{g})$ και επιλέγουμε ένα $\tilde{y} \in \mathcal{U}^k(\mathfrak{g})$ το οποίο γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός k -στών γινομένων από στοιχεία της $\mathfrak{g}$. Αυτόν τον ίδιο γραμμικό συνδιασμό με το γινόμενο, τον θεωρούμε ως στοιχείο της συμμετρικής άλγεβρας, το οποίο ορίζει ένα στοιχείο $x \in S^k(\mathfrak{g})$ με $i_S(x) = y$.

Για το 1-1, θεωρούμε την απεικόνιση $\kappa : \mathfrak{g} \rightarrow DO(G)$, $\xi \mapsto \xi^L$ η οποία είναι ομορφισμός αλγεβρών Lie. Από την καθολική ιδιότητα, της universal enveloping άλγεβρας, το επόμενο διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\
& \searrow \kappa & \downarrow \kappa_{\mathcal{U}} \\
& & DO(G)
\end{array}$$

δηλαδή υπάρχει μοναδικός μορφισμός αλγεβρών $\kappa_{\mathcal{U}} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow DO(G)$ ο οποίος διατηρεί το φιλτράρισμα.

Από την ταύτιση της συμμετρικής άλγεβρας της $\mathfrak{g}$ με το δακτύλιο των πολυωνύμων στην $\mathfrak{g}^*$, δηλαδή $S(\mathfrak{g}) \equiv Pol(\mathfrak{g}^*)$, για $x = \xi_1 \cdots \xi_k \in S^k(\mathfrak{g})$ και $\mu \in \mathfrak{g}^*$ το πολυώνυμο γράφεται ως

$$x \mapsto p_x(\mu) = k! \langle \mu, \xi_1 \rangle \cdots \langle \mu, \xi_k \rangle$$

Δοθέντος $x \in S^k(\mathfrak{g})$, $\mu \in \mathfrak{g}^*$, επιλέγουμε $f \in C^\infty(G)$ και $y \in \mathcal{U}^{(k)}(\mathfrak{g})$ τέτοιο ώστε

$$\mu = d_e f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i_S(x) = y \bmod \mathcal{U}^{(k)}(\mathfrak{g})$$

Μια τέτοια f υπάρχει, από το Δεύτερο Θεώρημα του Lie. Επίσης, ένας διαφορικός τελεστής $D = \kappa_{\mathcal{U}}(y) \in DO^{(k)}(G)$ ικανοποιεί την σχέση

$$ad_f^k(D)|_e = (-1)^k p_x(\mu). \quad (1.7)$$

Πράγματι, για $k = 2$, και $D = \xi_1^L \xi_2^L \in DO^{(2)}(G)$

$$\begin{aligned}
ad_f^2(\xi_1^L \xi_2^L)(g) &= [m_f, [m_f, \xi_1^L \xi_2^L]](g) \\
&= (m_f \circ [m_f, \xi_1^L \xi_2^L] - [m_f, \xi_1^L \xi_2^L] \circ m_f)(g) \\
&= f[m_f, \xi_1^L \xi_2^L](g) - [m_f, \xi_1^L \xi_2^L](f \cdot g)
\end{aligned}$$

Αφού

$$\begin{aligned}
[m_f, \xi_1^L \xi_2^L](g) &= f(\xi_1^L(\xi_2^L(g))) - \xi_1^L \xi_2^L(f \cdot g) \\
&= f \cdot \xi_1^L(\xi_2^L(g)) - \xi_1^L[f \xi_2^L(g) + g \xi_2^L(f)] \\
&= f \cdot \xi_1^L(\xi_2^L(g)) - \xi_1^L(f) \xi_2^L(g) - f \xi_1^L(\xi_2^L(g)) - \xi_1^L(g) \xi_2^L(f) - g \xi_1^L \xi_2^L(f) \\
&= -\xi_1^L(f) \xi_2^L(g) - \xi_1^L(g) \xi_2^L(f) - g \xi_1^L \xi_2^L(f)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
-[m_f, \xi_1^L \xi_2^L] \circ m_f(g) &= - (m_f \circ \xi_1^L \xi_2^L - \xi_1^L \xi_2^L \circ m_f)(f \cdot g) \\
&= - f \xi_1^L \xi_2^L(f \cdot g) + \xi_1^L \xi_2^L(f^2 \cdot g) \\
&= - f \xi_1^L [f \xi_2^L(g) + g \xi_2^L(f)] + \xi_1^L [f^2 \xi_2^L(g) + 2fg \xi_2^L(f)] \\
&= - f \xi_1^L(f) \xi_2^L(g) - f^2 \xi_1^L \xi_2^L(g) - f \xi_1^L(g) \xi_2^L(f) - fg \xi_1^L \xi_2^L(f) \\
&\quad + 2f \xi_1^L(f) \xi_2^L(g) + f^2 \xi_1^L \xi_2^L(g) + 2g \xi_1^L(f) \xi_2^L(f) + 2f \xi_1^L(g) \xi_2^L(f) + 2fg \xi_1^L \xi_2^L(f)
\end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$ad_f^2(\xi_1^L \xi_2^L)(g) = [m_f, [m_f, \xi_1^L \xi_2^L]](g) = (-1)^2 2! g \xi_1^L(f) \xi_2^L(f) \quad (1.8)$$

Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$\begin{aligned}
p_x(\mu) &= 2! \langle \mu, \xi_1 \rangle \langle \mu, \xi_2 \rangle \\
&= 2! \mu(\xi_1) \mu(\xi_2) \\
&= 2! d_e f(\xi_1) d_e f(\xi_2) \\
&= 2! \xi_1^L(f) \xi_2^L(f) \big|_e
\end{aligned}$$

επειδή $\langle \mu, \xi_1 \rangle = \mu(\xi_1) = d_e f(\xi_1) = \xi_1^L(f) \big|_e$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο σχέσεις, έχουμε

$$ad_f^2(\xi_1^L \xi_2^L) \big|_e = (-1)^2 2! \xi_1^L(f) \xi_2^L(f) \big|_e = (-1)^2 p_x(\mu).$$

Εν γένει, για $k \in \mathbb{N}$ η formula 1.7 διαβάζει

$$ad_f^k(\xi_1^L \cdots \xi_k^L) \big|_e = (-1)^k k! (\xi_1^L(f) \cdots \xi_k^L(f)) \big|_e = (-1)^k k! \langle \mu, \xi_1 \rangle \cdots \langle \mu, \xi_k \rangle.$$

Κλείνοντας, έστω $i_S(x) = 0$ τέτοιο ώστε $y \in \mathcal{U}^{(k-1)}(\mathfrak{g})$ και $D \in DO^{k-1}(G)$. Η τελευταία σχέση όμως, από τον ορισμό του διαφορικού τελεστή τάξης $k-1$, είναι ισοδύναμο με $ad_f^k(D) = 0$. Από την σχέση 1.7 έχουμε $p_x = 0$ δηλαδή $x=0$ και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

1.4 Συνομολογία Hochschild

Έστω A μια προσεταιριστική $\mathbb{K}$ -άλγεβρα, και M ένα A -διπρότυπο.

Ορισμός 1.45. Το σύμπλοκο Hochschild $C^\bullet(A, M)$ της A με συντελεστές στο M είναι ο βαθμωτός διανυσματικός χώρος

$$C^\bullet(A, M) = \bigoplus_{n \geq 0} C^n(A, M)$$

όπου $C^n(A, M) := \{\text{γραμμικές απεικονίσεις } A^{\otimes n} \rightarrow M\}$ εφοδιασμένος με το διαφορικό *Hochschild*

$$\begin{aligned} d_H(f)(a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_1 \cdot f(a_2, \dots, a_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1, \dots, a_n) \cdot a_{n+1} \end{aligned}$$

όπου $f \in C^n(A, M)$ και $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$.

Πρόταση 1.46. Το διαφορικό Hochschild είναι πράγματι διαφορικό δηλαδή ικανοποιεί την σχέση $d_H^{n+1} \circ d_H^n = 0$.

Απόδειξη. Αρχικά, θέτουμε $d_H^n = d^n$ για απλότητα. Για $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ ορίζουμε d_i^n με

$$d_i^n(f)(a_1, \dots, a_{n+1}) := \begin{cases} a_1 \cdot f(a_2, \dots, a_{n+1}) & \text{αν } i = 0 \\ f(a_1, \dots, a_n) \cdot a_{n+1} & \text{αν } i = n+1 \\ f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για $f \in CH^n(A, M)$ και $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, n+2\}$ και $j \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ έχουμε

$$d_j^{n+1} \circ d_i^n := \begin{cases} d_i^{n+1} \circ d_{j-1}^n & \text{αν } i \geq j \\ d_{i+1}^{n+1} \circ d_j^n & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} d^{n+1} \circ d^n &= \sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j d_j^{n+1} \circ \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i^n \\ &= \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} d_j^{n+1} \circ d_i^n \\ &= \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} d_j^{n+1} \circ d_i^n + \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{i=j}^{n+1} (-1)^{i+j} d_j^{n+1} \circ d_i^n \\ &= \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} d_i^{n+1} \circ d_{j-1}^n + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=j}^{n+1} (-1)^{i+j} d_j^{n+1} \circ d_i^n \\ &= - \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} d_i^{n+1} \circ d_j^n + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=j}^{n+1} (-1)^{i+j} d_j^{n+1} \circ d_i^n \\ &= - \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{j=i}^j (-1)^{i+j} d_i^{n+1} \circ d_j^n + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=j}^{n+1} (-1)^{i+j} d_j^{n+1} \circ d_i^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 1.47. Στην ειδική περίπτωση που $M = B$ μια άλγεβρα, τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ και $b, b' \in B$ ισχύουν οι επόμενες σχέσεις

$$a(bb') = (ab)b' \text{ και } (bb')a = b(b'a)$$

το σύμπλοκο Hochschild γίνεται μια DG-άλγεβρα με γινόμενο $\cup$ ορισμένο στα ομογενή στοιχεία ως

$$(f \cup g)(a_1, \dots, a_{m+n}) = f(a_1, \dots, a_m)g(a_{m+1}, \dots, a_{m+n}).$$

Ορισμός 1.48. Η συνομολογία Hochschild $H^\bullet(A, M)$ της A με συντελεστές στο M είναι η

$$H^\bullet(A, M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(A, M)$$

όπου η n -οστή ομάδα συνομολογίας είναι η $H^n(A, M) = \ker d_H / \text{Im} d_H$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμβολισμοί 1.49. Αν $M = A$, γράφουμε $H^\bullet(A, A) = HH^\bullet(A)$.

Η 0-νική ομάδα συνομολογίας $H^0(A, M)$

$$\begin{aligned} H^0(A, M) &= \{\phi \in A \mid a_0\phi - \phi a_0 = 0, \forall a_0 \in M\} \\ &= \text{τα } A\text{-αναλλοίωτα στοιχεία της } M. \end{aligned}$$

- Αν $A = M$, τότε $HH^0(A) = \mathcal{Z}(A)$ το κέντρο της άλγεβρας A .
- Αν $A = M$ και μεταθετική, τότε η $HH^0(A) = A$ αφού κάθε στοιχείο της A είναι στοιχείο του κέντρου.

Η 1η ομάδα συνομολογίας $H^1(A, M)$ Οι 1-σύγκυκλοι είναι οι A -παραγωγίσεις, εν συντομία $\text{Der}(A)$, με τιμές στο M . Δηλαδή, οι απεικονίσεις $\phi : A \rightarrow M$ τέτοιες ώστε

$$\phi(a_0 \cdot a_1) = a_0\phi(a_1) + \phi(a_0)a_1,$$

για κάθε $a_0, a_1 \in M$. Από την άλλη μεριά, οι 1-coboundary τελεστές είναι οι *εσωτερικές παραγωγίσεις* της A , εν συντομία $\text{Inn}(A)$. Δηλαδή, οι απεικονίσεις ϕ_m τέτοια ώστε $\phi_m(a) = am - ma$ για κάθε $m \in M$ και $a \in A$. Επομένως,

$$H^1(A, M) = \text{Der}(A) / \text{Inn}(A).$$

2 Το Θεώρημα Τυπικότητας του Kontsevich

Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε μια σύντομη περιγραφή των συστατικών του Θεωρήματος Τυπικότητας όπως διατυπώθηκε από τον Maxim Kontsevich στο [19]. Το θεώρημα αυτό αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για το πρόβλημα της κβαντοποίησης με παραμόρφωση των πολλαπλοτήτων Poisson και παίζει πολύ σημαντικό ρόλο για την απόδειξη του ισομορφισμού του Duflo. Πιο συγκεκριμένα, ο ισομορφισμός του Duflo, προκύπτει ως εφαρμογή του Θεωρήματος Τυπικότητας 2.34 για την δυική άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}^*$. Η παρουσίαση ακολουθεί κατά βάση τα [19], [6], [3].

2.1 Δομές Poisson και gauge δράσεις

Ορισμός 2.1. Έστω X μια ομαλή πολλαπλότητα πεπερασμένης διάστασης και $C^\infty(X)$ οι ομαλές συναρτήσεις πάνω στην X . Μια δομή Poisson στην X είναι μια διγραμμική απεικόνιση $\{\cdot, \cdot\}$ στην $C^\infty(X)$, η οποία καλείται Poisson bracket, και η οποία ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

α') αντι-συμμετρικότητα

$$\{f, g\} = -\{g, f\},$$

β') την ιδιότητα Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

γ') την ιδιότητα Leibniz

$$\{fg, h\} = \{f, g\}h + f\{g, h\}$$

Μια πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια τέτοια δομή καλείται πολλαπλότητα Poisson.

Ορισμός 2.2. Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Ένα διαφορίσιμο k πολυ-διανυσματικό πεδίο γ στην X είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $X \rightarrow \bigwedge^k TX$ τέτοια ώστε $x \mapsto \gamma(x) \in \bigwedge^k T_x X$ για $x \in X$. Με άλλα λόγια, είναι μια τομής της k -οστής δύναμης της exterior άλγεβρας $\bigwedge TX$ της X .

Αν $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_x \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_x$, $i_1 < \dots < i_k$ είναι τα στοιχεία της γραμμικής βάσης της $\bigwedge^k T_x M$, τότε, ένα k - πολυ-διανυσματικό πεδίο γ εκφράζεται σε τοπικές συντεταγμένες γύρω από ένα σημείο x ως

$$\gamma(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \gamma^{i_1 \dots i_k}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_x \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_x \quad \text{όπου} \quad \gamma^{i_1, \dots, i_k}(x) \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Υπάρχει μια σύνδεση μεταξύ των δι-διανυσματικών πεδίων και του Poisson bracket. Πιο συγκεκριμένα, έστω μια ομαλή πολλαπλότητα X και έστω ένα δι-διανυσματικό πεδίο Π στην X . Τότε, η διγραμμική απεικόνιση $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(X) \times C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ ορίζεται και ως

$$(f, g) \mapsto \{f, g\} = \Pi(df, dg) = \langle df \wedge dg, \Pi \rangle, \quad (2.2)$$

η οποία είναι αντι-συμμετρική, και ικανοποιεί την ιδιότητα Leibniz πάντα. Όμως, δεν ικανοποιείται εν γένει, η ιδιότητα Jacobi. Αν η απεικόνιση $\{\cdot, \cdot\}$ 2.2 ικανοποιεί και την ιδιότητα Jacobi, τότε αποτελεί ένα *Poisson bracket* για την X .

Παράδειγμα 2.3. Έστω $(U, x_1, \dots, x_n)$ ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων γύρω από το σημείο $x \in U \subset \mathbb{R}^n$. Η δομή Poisson στην $\mathbb{R}^n$ με σταθερούς συντελεστές είναι η

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

τέτοια ώστε $\Pi_{ij} = -\Pi_{ji} \in \mathbb{R}^n$.

Έστω $\mathcal{P} = \{\Pi \in \Gamma(X, \wedge^2 TX)\}$ είναι το σύνολο όλων των δι-διανυσματικών πεδίων τα οποία είναι και δομές Poisson για μια ομαλή πολλαπλότητα X . Στο σύνολο αυτό, δρα η ομάδα των αμφιδιαφορίσεων της X , εν συντομία $Diff(X)$, με πράξη ομάδας την σύνθεση συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα, η δράση αυτή ορίζεται ως

$$Diff(X) \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} : (\phi, \Pi) \mapsto \Pi_\phi = \phi_* \Pi$$

όπου ϕ_* η push-forward της ϕ . Θεωρούμε τώρα, τις δομές Poisson οι οποίες εξαρτώνται από την τυπική παράμετρο $\hbar$ δηλαδή

$$\mathcal{P}_\hbar = \left\{ \Pi(\hbar) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k \hbar^k \in \Gamma(X, \wedge^2 TX)[[\hbar]] \right\}$$

με τα αντίστοιχα Poisson bracket να ορίζονται ως

$$\{f, g\}_\hbar := \sum_{m=0}^{\infty} \hbar^m \sum_{i,j,k=0, i+j+k=0}^m \langle \Pi_i, df_j \wedge dg_k \rangle$$

Σε αυτό το σύνολο, δρα το σύνολο των τυπικών αμφιδιαφορίσεων της X δηλαδή, τις τυπολές δυναμοσειρές της μορφής $\phi_\hbar(Y) = \exp(\hbar Y)$ όπου Y είναι ένα τυπικό διανυσματικό πεδίο δηλαδή, μια τυπική δυναμοσειρά της οποίας οι συντελεστές είναι διανυσματικά πεδία. Θα συμβολίζουμε, το σύνολο των τυπικών αμφιδιαφορίσεων με

$$\mathcal{V} = \left\{ \phi_\hbar(Y) = \exp(\hbar Y) | Y = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k \hbar^k \right\}$$

όπου η δομή ομάδας δίνεται από την Baker-Cambell-Hausdorff formula για την εκθετική συνάρτηση, δηλαδή

$$\exp(\hbar Y) \cdot \exp(\hbar Z) = \exp\left(\hbar Y + \hbar Z + \frac{1}{2}[Y, Z] + \dots\right)$$

Το σύνολο $\mathcal{V}$ δρα στο σύνολο των τυπικών δομών Poisson $\Pi_\hbar$ ως εξής

$$(exp(\hbar Y), \Pi(\hbar)) \mapsto exp(\hbar Y)_* \Pi(\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{i,j,k=0, i+j+k=0}^n (\mathcal{L}_{Y_i})^j \Pi_k(\hbar).$$

όπου $exp(\hbar Y)_* \Pi(\hbar)$ είναι η συνάρτηση push-forward.

2.2 Star-γινόμενα

Ορισμός 2.4. Ένα *star γινόμενο* $\star$ στην A είναι ένα προσεταιριστικό, διγραμμικό γινόμενο

$$(f, g) \mapsto f \star g := f \cdot g + B_1(f, g)\hbar + B_2(f, g)\hbar^2 + \dots$$

όπου $f, g, h \in A$ και B_i είναι δι-διαφορικοί τελεστές ³ παντού φραγμένης τάξης. Αν θεωρήσουμε στοιχεία στην $A[[\hbar]]$ αντί για συναρτήσεις στην A , δηλαδή, τυπικές δυναμοσειρές με μεταβλητή $\hbar$, τότε το star-γινόμενο $\star$ διαβάζει

$$\left(\sum_{n \geq 0} f_n \hbar^n \right) \star \left(\sum_{n \geq 0} g_n \hbar^n \right) := \sum_{k,l \geq 0} f_k g_l \hbar^{k+l} + \sum_{k,l \geq 0, m \geq 1} B_m(f_k g_l) \hbar^{k+l+m}.$$

Παράδειγμα 2.5. (Το Moyal-Weyl γινόμενο) Θεωρούμε την περίπτωση που η ομαλή πολλαπλότητα είναι η $X = \mathbb{R}^d$, και η προσεταιριστική άλγεβρα είναι η $A = C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Η δομή Poisson α με σταθερούς συντελεστές στον $\mathbb{R}^d$ ορίζεται ως

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j, \quad \Pi^{ij} = -\Pi^{ji} \in \mathbb{R}$$

όπου $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ για ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $(U, x_1, \dots, x_n)$ στο $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ και το Moyal-Weyl γινόμενο διαβάζει

$$\begin{aligned} f \star_{MW} g &= f \cdot g + \hbar \sum_{i,j} \Pi_{i,j} \partial_i(f) \partial_j(g) + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j,k,l} \Pi_{i,j} \Pi_{k,l} \partial_i \partial_k(f) \partial_j \partial_l(g) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n} \prod_{k=1}^n \Pi_{i_k j_k} \left(\prod_{k=1}^n \partial_{i_k} \right) (f) \times \left(\prod_{k=1}^n \partial_{j_k} \right) (g) \end{aligned}$$

Για $d = 2$, το Poisson bracket στον $\mathbb{R}^2$, διαβάζει

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

³διγραμμικές απεικονίσεις $A \times A \rightarrow A$ οι οποίες είναι διαφορικοί τελεστές σε κάθε όρισμα και για ένα δοθέν τοπικό σύστημα συντεταγμένων $\{x_i\}_{i=1}^{dim X}$ και πολυ-δείκτες $K = (k_1, \dots, k_m)$ ανδ $L = (l_1, \dots, l_n)$ μήκους $m, n \in \mathbb{N}$ αντίστοιχα,

$$B_i(f, g) = \sum_{K,L} \beta_i^{KL} \partial_K(f) \partial_L(g)$$

όπου β_i^{KL} είναι ομαλές συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι μηδενικές για πεπερασμένες επιλογές των πολυ-δεικτών.

για $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ και το star-γινόμενο $\star_{MW}$ ορίζεται ως

$$f \star_{MW} g = f \cdot g + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} \hbar + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_2} \frac{\hbar^2}{2!} + \dots$$

Παρατηρήσεις 2.6. Στα επόμενα, παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες του star-γινομένου.

- Ο μηδενικής τάξης δι-διαφορικός τελεστής, δηλαδή ο $B_0(-, -)$ συμβολίζει το σύννηθες γινόμενο συναρτήσεων της A . Επίσης, κάθε B_i μηδενίζεται τετριμμένα στις σταθερές συναρτήσεις. Με άλλα λόγια,

$$B_i(f, 1) = B_i(1, f) = 0$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

- Η προσεταιριστικότητα του star-γινομένου υποδεικνύει ότι ο δι-διαφορικός τελεστής 1ης τάξης, δηλαδή ο $B_1(f, g)$, είναι ένας 2-σύγκυκλος για την Hochschild συνομολογία της A και αντιστρόφως. Πιο συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} (f \star g) \star h &= \left(f \cdot g + \hbar B_1(f, g) + \dots \right) \star h \\ &= (f \cdot g) \star h + (\hbar B_1(f, g)) \star h + \dots \\ &= \left(f \cdot g \right) \cdot h + \hbar B_1(f \cdot g, h) + \dots + \left(\hbar B_1(f, g) \cdot h + \hbar B_1(\hbar B_1(f, g), h) + \dots \right) + \dots \\ &= (f \cdot g) \cdot h + \hbar \left(B_1(f \cdot g, h) + B_1(f, g) \cdot h \right) + \dots \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f \star (g \star h) &= f \star \left(g \cdot h + \hbar B_1(g, h) + \dots \right) \\ &= f \star (g \cdot h) + f \star (\hbar B_1(g, h)) + \dots \\ &= \left(f \cdot (g \cdot h) + \hbar B_1(f, g \cdot h) + \dots \right) + \left(f \cdot \hbar B_1(g, h) + \hbar B_1(f, \hbar B_1(g, h)) + \dots \right) + \dots \\ &= f \cdot (g \cdot h) + \hbar \left(B_1(f, g \cdot h) + f \cdot B_1(g, h) \right) + \dots \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω παραστάσεις, και θεωρώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης και ότι $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$, έχουμε

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h) \iff f \cdot B_1(f, g) - B_1(f \cdot g, h) + B_1(f, \hbar B_1(g, h)) - B_1(f, g) \cdot h = 0$$

το οποίο είναι ακριβώς ένας 2-σύγκυκλος για το Hochschild σύμπλοκο της άλγεβρας A .

- Η μεταθετικότητα του $\star$ “μετράται” από τον μεταθέτη ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} [f \star g] &= f \star g - g \star f \\ &= \left(f \cdot g + \hbar B_1(f, g) + \dots \right) - \left(g \cdot f + \hbar B_1(g, f) + \dots \right) \\ &= \hbar \left(B(f, g) - B(g, f) \right) + O(\hbar^2) \end{aligned}$$

Αφού $[-_\star -]$ είναι ο μεταθέτης στην προσεταιριστική άλγεβρα $A[[\hbar]] = C^\infty(X)[[\hbar]]$, θα ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις

$$[f_\star(g \star h)] = [f_\star g] \star h + g \star [f_\star h] \quad (f, g \in A \subset A[[\hbar]]) \quad (2.3)$$

$$[[f_\star g]_\star h] = [f_\star [g_\star h]] - [g_\star [f_\star h]] \quad (f, g, h \in A \subset A[[\hbar]]) \quad (2.4)$$

οι οποίες είναι οι ιδιότητες Leibniz και Jacobi αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με $B_1^- = \left(B(f, g) - B(g, f) \right)$, το αντισυμμετρικό κομμάτι του δι-διαφορικού τελεστή. Από τις σχέσεις 2.3 και 2.4 έχουμε ότι ο B_1^- ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} - B_1^-(f, g) &= -B_1^-(g, f) \\ - B_1^-(f, g \cdot h) &= g \cdot B_1^-(f, h) + B_1^-(f, g) \cdot h \\ - B_1^-(B_1^-(f, g), h) + B_1^-(B_1^-(g, h), f) + B_1^-(B_1^-(h, f), g) &= 0 \end{aligned}$$

οι οποίες μας λένε ότι το αντισυμμετρικό κομμάτι του δι-διαφορικού τελεστή πρώτης τάξης είναι ένα Poisson bracket.

Στο σύνολο των star γινομένων της X δρα η gauge ομάδα των $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -γραμμικών αυτομορφισμών της $A[[\hbar]]$ οι οποίοι ορίζονται ως

$$\mathcal{D} = 1 + \hbar \mathcal{D}_1 + \hbar^2 \mathcal{D}_2 + \dots$$

όπου $\mathcal{D}_i$'s οι οποίοι είναι διαφορικοί τελεστές στην A .

Ορισμός 2.7. Δύο star-γινόμενα $\star$ και $\star'$ στην $C^\infty(X)$ καλούνται *ισοδύναμα* αν και μόνο αν υπάρχει ένας γραμμικός τελεστής $\mathcal{D} : A[[\hbar]] \rightarrow A[[\hbar]]$ τέτοιος ώστε

$$f \star' g := \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{D}(f) \star \mathcal{D}(g))$$

και η δράση του στις ομαλές συναρτήσεις f ορίζεται ως

$$\mathcal{D}(f) := f + \sum_{i=1}^{\infty} D_i(f) \hbar^i$$

Παρατήρηση 2.8. Όπως και παραπάνω, οι τελεστές $\mathcal{D}_i$ είναι διαφορικοί τελεστές οι οποίοι μηδενίζονται στις σταθερές συναρτήσεις.

2.3 Οι DGLAs $\mathcal{T}_{poly}(X)$ και $\mathcal{D}_{poly}(X)$

2.3.1 $\mathcal{T}_{poly}(X)$

Ορισμός 2.9. Ο βαθμωτός διανυσματικός χώρος των πολυ-διανυσματικών πεδίων στην X ορίζεται ως

$$\mathcal{T}_{poly}(X) = \bigoplus_{n \geq -1} \mathcal{T}_{poly}^n(X)$$

$$\text{όπου } \mathcal{T}_{poly}^n(X) = \Gamma(X, \bigwedge^{n+1} TX)$$

Ο στόχος μας είναι να εφοδιάσουμε τον $\mathcal{T}_{poly}$ με μια δομή DGLA. Αρχικά, εφοδιάζουμε το $\mathcal{T}_{poly}(X)$ με το τετριμμένο διαφορικό, δηλαδή $d = 0$, και άρα μετατρέπεται σε ένα διαφορισμό βαθμωτό διανυσματικό χώρο. Για να οριστεί ένα κατάλληλο γινόμενο, δουλεύουμε ως εξής:

Ορισμός 2.10. Το *Schouten-Nijenhuis* bracket, εν συντομία $[\cdot, \cdot]_{SN}$ ορίζεται στον $\mathcal{T}_{poly}(X)$ ως

$$[\cdot, \cdot]_{SN} : \mathcal{T}^k(X) \otimes \mathcal{T}^l(X) \rightarrow \mathcal{T}^{k+l+1}(X)$$

τέτοιος ώστε

- για $k, l \geq 0$ και $X_i, Y_j \in \Gamma(X, TX)$

$$[X_0 \wedge \cdots \wedge X_k, Y_0 \wedge \cdots \wedge Y_l]_{SN} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_k \wedge Y_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{Y}_j \wedge \cdots \wedge Y_l,$$

- για $k \geq 0$, $X_i \in \Gamma(X, TX)$ και $f \in C^\infty(X)$

$$[X_0 \wedge \cdots \wedge X_k, f]_{SN} = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(f) \cdot (X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_k)$$

- και για $f, h \in C^\infty(X)$

$$[f, h]_{SN} = 0.$$

όπου το σύμβολο $\widehat{}$ υποδεικνύει ότι παραλείπουμε τον όρο αυτό κατά τους υπολογισμούς και το bracket $[X_i, Y_j]$ συμβολίζει την παράγωγο Lie $\mathcal{L}_{X_i}(Y_j)$.

Στο επόμενο λήμμα, παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες του $[\cdot, \cdot]_{SN}$. Η απόδειξη βρίσκεται στο [3] σελ.105

Λήμμα 2.11. Για κάθε τριάδα X, Y, Z από πολυ-διανυσματικά πεδία τάξης x, y, z , αντίστοιχα, το $[\cdot, \cdot]_{SN}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις

$$\alpha') [X, Y]_{SN} = -(-1)^{xy}[Y, X]_{SN}$$

$$\beta') [X, Y \wedge Z]_{SN} = [X, Y]_{SN} \wedge Z + (-1)^{y(z+1)}Y \wedge [X, Z]_{SN}$$

$$\gamma') [X, [Y, Z]_{SN}]_{SN} = [[X, Y]_{SN}, Z]_{SN} + (-1)^{yz}[Y, [X, Z]_{SN}]_{SN}$$

Η επόμενη πρόταση ([13, §1.8]), δίνει μια απαραίτητη συνθήκη για ένα δι-διανυσματικό πεδίο Π να αποτελεί δομή Poisson

Πρόταση 2.12. Ένα δι-διανυσματικό πεδίο Π είναι μια δομή Poisson αν και μόνο αν το Schouten-Nijenhuis bracket του Π με τον ευατό του μηδενίζεται, δηλαδή

$$[\Pi, \Pi]_{SN} = 0$$

Αφού κάθε πολυ-διανυσματικό πεδίο είναι ένας $C^\infty(M)$ -γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων της exterior δύναμης της εφαπτόμενης δέσμης, κάποιος θα μπορούσε να αντικαταστήσει την αντίστοιχη βάση του $T_x X$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right\}_{i=1}^n$, με νέες μεταβλητές $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ οι οποίες αντι-μετατίθενται, δηλαδή $\psi_i \psi_j = -\psi_j \psi_i$ για $i \neq j$. Οι νέες αυτές μεταβλητές ονομάζονται “περιττές”. Ως εκ τούτου, η βάση της εφαπτόμενης δέσμης TX γράφεται ως $(x^1, \dots, x^n | \psi_1, \dots, \psi_n)$ και αποτελείται από δύο ειδών μεταβλητές: Τις μεταβλητές $(x^1, \dots, x^n)$ της πολλαπλότητας X οι οποίες μετατίθενται δηλαδή $x^i x^j = x^j x^i$ για $i \neq j$ και τις “περιττές” οι οποίες αντι-μετατίθενται. Επομένως, για δύο πολυ-διανυσματικά πεδία X, Y τάξης k_1, k_2 αντίστοιχα, σε συντεταγμένες $(x^1, \dots, x^n | \psi_1, \dots, \psi_n)$ ορίζεται η σύνθεση

$$X \bullet Y := \sum_{i=0}^n \frac{\partial X}{\partial \psi_i} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x^i} \quad (2.5)$$

όπου η παραγώγιση του πολυ-διανυσματικού πεδίου X γίνεται ως προς τις περιττές συντεταγμένες και η παραγώγιση του πολυ-διανυσματικού πεδίου Y γίνεται ως προς τις “άρτιες” συντεταγμένες.
4

Παρατήρηση 2.13. Στο [7] αποδεικνύεται ότι με την χρήση της σύνθεσης $\bullet$, το Schouten-Nijenhuis bracket γράφεται και ως

$$[X, Y]_{SN} := X \bullet Y - (-1)^{k_1 \cdot k_2} Y \bullet X$$

Ορισμός 2.14. Η DGLA των πολυδιανυσματικών πεδίων $\mathcal{T}_{poly}(X)$ αποτελείται από την επόμενη τετράδα

$$(\mathcal{T}_{poly}(X), [\cdot, \cdot]_{SN}, \bullet, d = 0)$$

Παρατήρηση 2.15. Η παραπάνω κατασκευή της DGLA των πολυ-διανυσματικών πεδίων για μια ομαλή πολλαπλότητα X , δουλεύει κατά ίδιο τρόπο για οποιαδήποτε πεπερασμένη διάστασης ομαλή πολλαπλότητα.

⁴Για περισσότερες λεπτομέρειες για την σύνθεση $\bullet$ παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [7].

Πόρισμα 2.16. Τα Poisson δι-διανυσματικά πεδία Π είναι ακριβώς οι λύσεις της Maurer-Cartan εξίσωσης στην $\mathcal{T}_{poly}(X)$

$$d\Pi + \frac{1}{2}[\Pi, \Pi]_{SN} = 0, \quad \Pi \in \mathcal{T}_{poly}^1(X). \quad (2.6)$$

2.3.2 $\mathcal{D}_{poly}(X)$

Έστω $\mathcal{A}$ μια προσεταιριστική $\mathbb{K}$ -άλγεβρα, M ένα $\mathcal{A}$ -διπρότυπο και $C^\bullet(\mathcal{A}, M)$ το Hochschild σύμπλοκο όπως ορίστηκε στο κεφάλαιο 1. Θέτοντας $M = \mathcal{A}$ και κάνοντας shift κατά 1, ορίζεται ένας νέος βαθμωτός διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}$, ο $C^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$ τέτοιος ώστε

$$C^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1] = \bigoplus_{n \geq -1} C^k(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$$

όπου $C^k(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1] := Hom(\mathcal{A}^{\otimes(k+1)}, \mathcal{A})$ για $k \geq -1$. Σε αυτόν το βαθμωτό διανυσματικό χώρο διαφορικό Hochschild d_H διαβάζει

$$\begin{aligned} d_H(f)(a_0, \dots, a_{n+1}) &= a_0 \cdot f(a_1, \dots, a_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{i=0}^n (-1)^i f(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^n f(a_0, \dots, a_n) \cdot a_{n+1} \end{aligned}$$

όπου $f \in C^k(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$ και $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathcal{A}$. Για να γίνει το σύμπλοκο $C^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$ μια DGLA, πρέπει να οριστεί το απαραίτητο bracket. Αρχικά, το Gerstenhaber γινόμενο ορίζεται για $\phi \in C^p(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$ και $\psi \in C^q(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$ ως εξής

$$\begin{aligned} (\phi \circ \psi)(f_0 \otimes \dots \otimes f_{p+q}) &= \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^{(iq)} \phi(f_0 \otimes \dots \otimes f_{i-1} \otimes \psi(f_i \otimes \dots \otimes f_{i+q}) \otimes f_{i+q+1} \otimes \dots \otimes f_{p+q}) \end{aligned}$$

Ορισμός 2.17. Το Gerstenhaber bracket $[\cdot, \cdot]_G : C^p \otimes C^q \rightarrow C^{p+q}$ ορίζεται ως

$$[\phi, \psi] = \phi \circ \psi - (-1)^{pq} \psi \circ \phi$$

για ϕ μια p -cochain και ψ μια q -cochain στο $C(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$.

Θεωρούμε τώρα τον προσεταιριστικό πολλαπλασιασμό $\mathfrak{m}$ στην $C(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$. Αυτός είναι ένας γραμμικός τελεστής στον $C^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1] = Hom(\mathcal{A}^{\otimes 2}, \mathcal{A})$ ο οποίος ικανοποιεί επίσης την προσεταιριστική ιδιότητα. Με άλλα λόγια, η προσεταιριστική ιδιότητα μεταφράζεται ως

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h) \Leftrightarrow \mathfrak{m}(\mathfrak{m}(f, g), h) - \mathfrak{m}(f, \mathfrak{m}(g, h)) = 0 \quad (2.7)$$

Λήμμα 2.18. Το Gerstenhaber bracket του $\mathfrak{m}$ με τον ευατό του μηδενίζεται.

Απόδειξη. Αφού ο τελεστής του πολλαπλασιασμού είναι ένα στοιχείο του $C^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1] = \text{Hom}(\mathcal{A}^{\otimes 2}, \mathcal{A})$, το bracket $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_G$ είναι ένα στοιχείο του $C^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1] = \text{Hom}(\mathcal{A}^{\otimes 3}, \mathcal{A})$ και από την προσεταιριστικότητα του $\mathfrak{m}$ έχουμε

$$\begin{aligned} [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_G(f, g, h) &= (\mathfrak{m} \circ \mathfrak{m} - (-1)\mathfrak{m} \circ \mathfrak{m})(f, g, h) \\ &= (\mathfrak{m} \circ \mathfrak{m})(f, g, h) + (\mathfrak{m} \circ \mathfrak{m})(f, g, h) \\ &= \mathfrak{m}(\mathfrak{m}(f, g), h) - \mathfrak{m}(f, \mathfrak{m}(g, h)) + \mathfrak{m}(\mathfrak{m}(f, g), h) - \mathfrak{m}(f, \mathfrak{m}(g, h)) \\ &= 2(\mathfrak{m}(\mathfrak{m}(f, g), h) - \mathfrak{m}(f, \mathfrak{m}(g, h))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε DGLA $\mathfrak{g}$ και για κάθε ϕ τάξης k της $\mathfrak{g}$, η απεικόνιση $ad_\phi = [\phi, \cdot]$ είναι μια παραγωγήιση τάξης k , αφού η ιδιότητα Jacobi γράφεται και ως

$$ad_\phi[\psi, \chi] = [ad_\phi\psi, \chi] + (-1)^{km}[\psi, ad_\phi\chi]$$

για κάθε $\psi \in \mathfrak{g}^m$ και $\chi \in \mathfrak{g}^n$.

Πράγματι, από τον ορισμό της ad_ϕ , έχουμε

$$ad_\phi[\psi, \chi] = [ad_\phi\psi, \chi] + (-1)^{km}[\psi, ad_\phi\chi] \Leftrightarrow [\phi, [\psi, \chi]] = [[\phi, \psi], \chi] + (-1)^{km}[\psi, [\phi, \chi]]$$

η οποία είναι η ιδιότητα Jacobi. Ως εκ τούτου, έχουμε έναν ισοδύναμο ορισμό του διαφορικού Hochschild d_H χρησιμοποιώντας τον τελεστή του πολλαπλασιασμού.

Ορισμός 2.19. Το διαφορικό Hochschild ορίζεται ως

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{m}} : C^i &\rightarrow C^{i+1} \\ \psi &\mapsto d_{\mathfrak{m}}\psi := [\mathfrak{m}, \psi]_G \end{aligned}$$

όπου $[\cdot, \cdot]_G$ το Gerstenhaber bracket.

Λήμμα 2.20. Για το διαφορικό Hochschild ισχύει $d_{\mathfrak{m}}^2 = 0$.

Απόδειξη. Πράγματι, αφού $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_G = 0$

$$\begin{aligned} (d_{\mathfrak{m}} \circ d_{\mathfrak{m}})\phi &= [\mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \phi]_G]_G \\ &= [[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_G, \phi]_G - [\mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \phi]_G]_G \\ &= -[\mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \phi]_G]_G \end{aligned}$$

Επομένως

$$[\mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \phi]_G]_G = -[\mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \phi]_G]_G \Leftrightarrow 2[\mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \phi]_G]_G = 0 \Leftrightarrow d_{\mathfrak{m}}^2 = 0.$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Η απόδειξη της επόμενης πρότασης δίνεται στο [3] σελ.106

Πρόταση 2.21. Ο βαθμωτός διανυσματικός χώρος $C^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$ εφοδιασμένος με το Gerstenhaber bracket και το διαφορικό d_m είναι μια DGLA.

Από την παραπάνω συζήτηση, έχουμε ότι τα Maurer-Cartan στοιχεία της Hochschild DGLA είναι οι προσεταιριστικοί πολλαπλασιασμοί $\mathbf{m}$. Ισοδύναμα, αυτό γράφεται και ως

$$d_m \mathbf{m} + \frac{1}{2}[\mathbf{m}, \mathbf{m}]_G = 0 \quad (2.8)$$

Θεωρούμε την περίπτωση όπου η X είναι μια ομαλή πολλαπλότητα και $\mathcal{A} = M = C^\infty(X)$, στο ορισμό του συμπλόκου Hochschild. Επίσης, υποθέτουμε ότι η υπάλγεβρα της $C^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$ που αποτελείται από τους πολύ-διαφορικούς τελεστές οι οποίοι δρουν πάνω στις ομαλές συναρτήσεις της X , και περιέχει και τους διαφορικούς τελεστές τάξης 0. Στην συνέχεια, περιοριζόμαστε, στους πολυ-διαφορικούς τελεστές οι οποίοι μηδενίζονται στις σταθερές συναρτήσεις. Επομένως, έχουμε το σύμπλοκο ζομπλεξ

$$\mathcal{D}_{poly}(X) = \bigoplus_{n \geq -1} \mathcal{D}_{poly}^i(X) \quad (2.9)$$

όπου $\mathcal{D}_{poly}^i(X) \subset C^i(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1] = Hom(\mathcal{A}^{\otimes(i+1)}, \mathcal{A})$. Τα στοιχεία κάθε $\mathcal{D}^i(X)$, είναι πολυδιαφορικοί τελεστές με τις παραπάνω ιδιότητες. Σε τοπικές συντεταγμένες για το $x \in X$, γράφονται ως

$$f_0 \otimes \dots \otimes f_i \mapsto \sum_{I_0, I_1, \dots, I_i} C^{I_0, I_1, \dots, I_i} \partial_{I_0}(f_0) \dots \partial_{I_i}(f_i)$$

όπου το άθροισμα είναι πεπερασμένο, με I_k για $0 \leq k \leq i$ συμβολίζουμε τα σύνολα από πολυ-δείκτες, με $C^{I_0, I_1, \dots, I_i}$ συμβολίζονται οι ομαλές συναρτήσεις και με ∂_{I_k} οι αντίστοιχες μερικές παραγωγίσεις.

Ορισμός 2.22. Η DGLA των πολυ-διαφορικών τελεστών σε μια ομαλή πολλαπλότητα X είναι η τετράδα

$$(\mathcal{D}_{poly}(X)), [\cdot, \cdot]_G, \circ, d_m)$$

Μια απειροστική παραμόρφωση μιας προσεταιριστικής άλγεβρας A Γ'.2 είναι ένα προσεταιριστικό ϵ -γραμμικό γινόμενο $*$ στην $A[\epsilon]/\epsilon^2$ τέτοιο ώστε για κάθε $a, b \in A$

$$a * b = ab + \mu(a, b)\epsilon$$

με $\mu : A \otimes A \rightarrow A$. Από την προσεταιριστικότητα του $*$ -γινομένου, αποδείξαμε ότι ο τελεστής μ είναι ένας Hochschild 2-σύγκυκλος για την $HH^2(A)$. Θα εφαρμόσουμε το παραπάνω για την άλγεβρα $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ των συνεχών συναρτήσεων μιας ομαλής πολλαπλότητας X . Για δοθέν, $B \in \mathcal{D}^1(X) = C^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$ και θεωρώντας τον τελεστή του πολλαπλασιασμού $\mathbf{m} \in C^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1]$ (όπου $\mathbf{m}(f, g) = f \cdot g$ για $f, g \in C^\infty(X)$), μια απειροστική παραμόρφωση $*$ στην $C^\infty(X)$ εκφράζεται ως

$$f * g = \mathfrak{m}(f, g) + B(f, g)\epsilon = f \cdot g + B(f, g)\epsilon. \quad (2.10)$$

Αντικαθιστώντας την απεικόνιση $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ με τον πολυδιαφορικό τελεστή B έχουμε ότι ο B είναι ένας 2-σύγκυκλος για την $HH^2(\mathcal{A})$.

Λήμμα 2.23. Το Gerstenhaber bracket του $\mathfrak{m} + B$ με τον ευατό του μηδενίζεται.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε αρχικά ότι $\mathfrak{m}, B \in C^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})[1] = \text{Hom}(\mathcal{A}^{\otimes 2}, \mathcal{A})$. Από την γραμμικότητα για το Gerstenhaber bracket έχουμε

$$[\mathfrak{m} + B, \mathfrak{m} + B]_G = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_G + [\mathfrak{m}, B]_G + [B, \mathfrak{m}]_G + [B, B]_G$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_G = 0$. Επομένως, από τον ορισμό του Gerstenhaber bracket έχουμε

$$\begin{aligned} [\mathfrak{m}, B]_G(f_0, f_1, f_2) &= (\mathfrak{m} \circ B + B \circ \mathfrak{m})(f_0, f_1, f_2) \\ &= (\mathfrak{m} \circ B)(f_0, f_1, f_2) + (B \circ \mathfrak{m})(f_0, f_1, f_2) \\ &= \mathfrak{m}(B(f_0, f_1), f_2) - \mathfrak{m}(f_0, B(f_1, f_2)) \\ &\quad + B(\mathfrak{m}(f_0, f_1), f_2) - B(f_0, \mathfrak{m}(f_1, f_2)) \\ &= B(f_0, f_1)f_2 - f_0B(f_1, f_2) + B(f_0f_1, f_2) - B(f_0, f_1f_2) \\ &= B(f_0, f_1)f_2 - f_0B(f_1, f_2) + f_0B(f_1, f_2) + B(f_0, f_2)f_1 - f_1B(f_0, f_2) - B(f_0, f_1)f_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} [\mathfrak{m}, B]_G &= \mathfrak{m} \circ B - (1)^1 B \circ \mathfrak{m} \\ &= \mathfrak{m} \circ B + B \circ \mathfrak{m} \\ &= B \circ \mathfrak{m} + \mathfrak{m} \circ B \\ &= B \circ \mathfrak{m} - (1)^1 \mathfrak{m} \circ B \\ &= [B, \mathfrak{m}]_G \end{aligned}$$

και ως εκ τούτου $[\mathfrak{m}, B]_G = [B, \mathfrak{m}]_G = 0$. Επιπροσθέτως, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Gerstenhaber γινομένου και του γεγονότος ότι οι πολυδιαφορικοί τελεστές B είναι 2-σύγκυκλοι έχουμε

$$\begin{aligned} [B, B]_G(f_0, f_1, f_2) &= (B \circ B + B \circ B)(f_0, f_1, f_2) \\ &= 2(B \circ B)(f_0, f_1, f_2) \\ &= 2\left(B(B(f_0, f_1), f_2) - B(f_0, B(f_1, f_2))\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, έχουμε ότι $[\mathfrak{m} + B, \mathfrak{m} + B]_G = 0$ και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Από το παραπάνω λήμμα και την χρήση του ορισμού του Hirsch διαφορικού $d_{\mathfrak{m}} := [\mathfrak{m}, \cdot]_G$ έχουμε

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{m} + B, \mathfrak{m} + B] = 0 &\Leftrightarrow [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_G + [\mathfrak{m}, B]_G + [B, \mathfrak{m}]_G + [B, B]_G = 0 \\
&\Leftrightarrow [\mathfrak{m}, B]_G + [\mathfrak{m}, B]_G + [B, B]_G = 0 \\
&\Leftrightarrow 2[\mathfrak{m}, B]_G + [B, B]_G = 0 \\
&\Leftrightarrow [\mathfrak{m}, B]_G + \frac{1}{2}[B, B]_G = 0 \\
&\Leftrightarrow d_{\mathfrak{m}}B + \frac{1}{2}[B, B]_G = 0
\end{aligned}$$

Πόρισμα 2.24. Τα στοιχεία $B \in \mathcal{D}^1(X)$ είναι ακριβώς οι λύσεις της Maurer-Cartan εξίσωσης στο $\mathcal{D}_{poly}(X)$ δηλαδή

$$d_{\mathfrak{m}}B + \frac{1}{2}[B, B]_G = 0, \quad B \in \mathcal{D}_{poly}^1(X). \quad (2.11)$$

2.4 Ο ισομορφισμός Hochschild-Kostant-Rosenberg

Ο στόχος της παραγράφου αυτής, είναι να διατυπώσουμε και να συζητήσουμε μια έκφραση του ισομορφισμού Hochschild-Kostant-Rosenberg (για τον αρχικό ισομορφισμό, ο αναγνώστης μπορεί να βρει λεπτομέρειες στο [11]). Εν γένει, η απεικόνιση αυτή, στέλνει ένα n -πολυδιανυσματικό πεδίο $\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_n$ σε έναν n -οστής τάξης πολυ-διαφορικό τελεστή εφαρμοσμένο στο $f_0 \otimes \cdots \otimes f_n$ όπου f_i ομαλές συναρτήσεις. Από δω και στο εξής, ο συμβολισμός HKR θα παραπέμπει στον ισομορφισμό Hochschild-Konstant-Rosenberg όπως θα διατυπωθεί παρακάτω. Επίσης, θα χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $\mathcal{U}_1^{(0)}$.

Θεώρημα 2.25. Η απεικόνιση

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1^{(0)} : \mathcal{T}_{poly}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{D}_{poly}(\mathbb{R}^n) \\
(\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_n) &\mapsto \left(f_0 \otimes \cdots \otimes f_n \mapsto \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} sgn(\sigma) \prod_{i=0}^n \xi_{\sigma_i}(f_i) \right), \quad \text{φορ } n \geq 0
\end{aligned}$$

και

$$g \mapsto (1 \mapsto g)$$

στην περίπτωση που $g \in C^\infty(X)$, είναι ένας quasi-isomorphism συμπλόκων.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βρίσκεται στο [19, §4.6].

Αν και ο HKR είναι ένας quasi-isomorphism συμπλόκων, το Schouten-Nijenhuis bracket δεν απεικονίζεται στο Gerstenhaber bracket και ως εκ τούτου, η δομή άλγεβρας Lie δεν διατηρείται. Άρα, ο HKR δεν είναι quasi-isomorphism μεταξύ DGLAs. Αυτό όμως έχει μια βαθύτερη

συνέπεια. Αν ο HKR ήταν quasi-isomorphism of DGLAs, τότε, θα είχαμε λύση για για το πρόβλημα της Κβαντοποίησης με παραμόρφωση μιας πολλαπλότητας Poisson. Αφού, ο HKR δεν είναι ο ζητούμενος quasi-isomorphism, πρέπει να προσεγγίσουμε το πρόβλημα σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Αυτό το ευρύτερο πλαίσιο είναι οι L_∞ -άλγεβρες. Στο υπόλοιπο της παραγράφου αυτής, αποδεικνύουμε ότι η δομή άλγεβρας Lie δεν διατηρείται.

Λήμμα 2.26. Για δύο δοθέν δι-διανυσματικά πεδία $x_0 \wedge x_1$ και $y_0 \wedge y_1$

$$\mathcal{U}_1^{(0)}([x_0 \wedge x_1, y_0 \wedge y_1]_{SN}) \neq [\mathcal{U}_1^{(0)}(x_0 \wedge x_1), \mathcal{U}_1^{(0)}(y_0 \wedge y_1)]_G$$

Η απόδειξη του λήμματος βασίζεται στους ορισμούς του Shouten-Nijenhuis και Gerstenhaber brackets και στον décalage ισομορφισμό. Υπενθυμίζουμε ότι décalage ισομορφισμός είναι η απεικόνιση $dec_n : S^n(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \Lambda^n(\mathfrak{g})[n]$ η οποία διαβάζει

$$x_1 \cdots x_n \mapsto (-1)^{\sum_{i=1}^n (n-1)(|x_i|-1)} x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$$

όπου το πρόσημο επιλέγεται έτσι ώστε να αντισταθμίσει την βαθμωτή αντισυμμετρία του σφηνοειδούς γινομένου. Η απόδειξη ότι ο dec_n είναι ισομορφισμός δίνεται στο [7].

Απόδειξη. Έστω $x_0 \wedge x_1, y_0 \wedge y_1$ δύο δι-διανυσματικά πεδία. Έχουμε

$$\begin{aligned} [x_0 \wedge x_1, y_0 \wedge y_1]_{SN} &= \\ &= [x_0, y_0]_{SN} \wedge x_1 \wedge y_1 - [x_0, y_1]_{SN} \wedge x_1 \wedge y_0 - [x_1, y_0]_{SN} \wedge x_0 \wedge y_1 + [x_1, y_1]_{SN} \wedge x_0 \wedge y_0 \\ &= [x_0, y_0]_{SN} \cdot x_1 y_1 - [x_0, y_1]_{SN} \cdot x_1 y_0 - [x_1, y_0]_{SN} \cdot x_0 y_1 + [x_1, y_1]_{SN} \cdot x_0 y_0 \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Shouten-Nijenhuis bracket και η δεύτερη από τον ισομορφισμό décalage. Άρα, η εικόνα του $[x_0 \wedge x_1, y_0 \wedge y_1]_{SN}$ υπό την $\mathcal{U}_1^{(0)}$, εφαρμόζεται σε μια τριάδα συναρτήσεων $f_0 \otimes f_1 \otimes f_2$, και διαβάζει

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(0)}([x_0, y_0]_{SN} \cdot x_1 y_1 - [x_0, y_1]_{SN} \cdot x_1 y_0 - [x_1, y_0]_{SN} \cdot x_0 y_1 + [x_1, y_1]_{SN} \cdot x_0 y_0)(f_0 \otimes f_1 \otimes f_2) &= \\ = \frac{1}{6} \Big(x_0 y_0(f_0) x_1(f_1) y_2(f_2) - y_0 x_0(f_0) x_1(f_1) y_1(f_2) - x_0 y_1(f_0) x_1(f_1) y_0(f_2) + y_1 x_0(f_0) x_1(f_1) y_0(f_2) \\ - x_1 y_0(f_0) x_0(f_1) y_1(f_2) + y_0 x_1(f_0) x_0(f_1) y_1(f_2) + x_1 y_1(f_0) x_0(f_1) y_0(f_2) - y_1 x_1(f_0) x_0(f_1) y_0(f_2) \Big) \\ + \text{perm. terms} \end{aligned}$$

όπου οι permutation terms εμφανίζονται επειδή η $\mathcal{U}_1^{(0)}$ ορίζονται ως το άθροισμα όλων των $\sigma \in S_{n+1}$. Από την άλλη μεριά υπολογίζουμε την δράση της $\mathcal{U}_1^{(0)}$ σε ένα δι-διανυσματικό πεδίο και έχουμε

$$\mathcal{U}_1^{(0)}(x_0 \wedge x_1)(f_0 \otimes f_1) = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=0}^1 x_{\sigma_i}(f_i) = \frac{1}{2!} (x_0(f_0) x_1(f_1) - x_1(f_0) x_0(f_1))$$

και με τον ίδιο τρόπο

$$\mathcal{U}_1^{(0)}(y_0 \wedge y_1)(f_0 \otimes f_1) = \frac{1}{2!} \left(y_0(f_0)y_1(f_1) - y_1(f_0)y_0(f_1) \right).$$

Τώρα, το Gerstenhaber bracket με ορίσματα τους τελεστές οι οποίοι ορίστηκαν όπως προηγουμένως, εφαρμόζεται σε μια τριάδα συναρτήσεων $f_0 \otimes f_1 \otimes f_2$ και διαβάζει

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}_1^{(0)}(x_0 \wedge x_1), \mathcal{U}_1^{(0)}(y_0 \wedge y_1)]_G(f_0 \otimes f_1 \otimes f_2) = \\ = \left[\frac{1}{2!}(x_0 \cdot x_1 - x_1 \cdot x_0), \frac{1}{2!}(y_0 \cdot y_1 - y_1 \cdot y_0) \right]_G(f_0 \otimes f_1 \otimes f_2) \end{aligned}$$

όπου επακριβείς υπολογισμοί δίνουν

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2!}(x_0 \cdot x_1 - x_1 \cdot x_0), \frac{1}{2!}(y_0 \cdot y_1 - y_1 \cdot y_0) \right]_G(f_0 \otimes f_1 \otimes f_2) = \\ & = \frac{1}{4} \left([x_0 \cdot x_1, y_0 \cdot y_1]_G - [x_0 \cdot x_1, y_1 \cdot y_0]_G - [x_1 \cdot x_0, y_0 \cdot y_1]_G + [x_1 \cdot x_0, y_1 \cdot y_0]_G \right) (f_0 \otimes f_1 \otimes f_2) = \\ & = \frac{1}{4} \left(x_0(y_0(f_0)y_1(f_1))x_1(f_2) - x_0(f_0)x_1(y_0(f_1)y_1(f_2)) - y_0(x_0(f_0)x_1(f_1))y_1(f_2) + y_0(f_0)y_1(x_0(f_1)x_1(f_2)) \right. \\ & \quad - x_1(y_1(f_0)y_0(f_1))x_0(f_2) + x_1(f_0)x_0(y_1(f_1)y_0(f_2)) + y_1(x_0(f_0)x_1(f_1))y_0(f_2) + y_1(f_0)y_0(x_0(f_1)x_1(f_2)) \\ & \quad - x_1(y_0(f_0)y_1(f_1))x_0(f_2) + x_1(f_0)x_0(y_0(f_1)y_1(f_2)) + y_0(x_1(f_0)x_0(f_1))y_1(f_2) + y_0(f_0)y_1(x_1(f_1)x_0(f_2)) \\ & \quad \left. + x_1(y_1(f_0)y_0(f_1))x_0(f_2) - x_1(f_0)x_0(y_1(f_1)y_0(f_2)) - y_1(x_1(f_0)x_0(f_1))y_0(f_2) - y_1(f_0)y_0(x_1(f_1)x_0(f_2)) \right) \end{aligned}$$

Είναι προφανές, ότι τα δύο μέρη δεν ταυτίζονται και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

2.5 L_∞ -άλγεβρες και το Θεώρημα Τυπικότητας

Ορισμός 2.27. Μια L_∞ -άλγεβρα αποτελείται από:

- ένα βαθμωτό διανυσματικό χώρο $\mathfrak{g}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.
- ένα διαφορικό συν-άλγεβρων Q , ορισμένο στον $\bar{S}(\mathfrak{g}[1])$, δηλαδή την αναχθείσα συμμετρική άλγεβρα του shifted κατά 1 βαθμωτού διανυσματικού χώρου $\mathfrak{g}$.

Το διαφορικό Q περιγράφεται πλήρως από την άπειρη ακολουθία των συντελεστών Taylor Q^i όπου

$$\begin{aligned} Q^1 &: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}[1] \\ Q^2 &: \wedge^2(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g} \\ Q^3 &: \wedge^3(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}[-1] \\ &\dots \end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.28. Χρησιμοποιώντας τον décalage ισομορφισμό, η παραπάνω ακολουθία των συντελεστών Taylor μπορούν να οριστούν και ως

$$Q^n : \bar{S}^n(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathfrak{g}[1].$$

Παραδείγματα 2.29. Στα επόμενα, παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα L_∞ -άλγεβρων

α') Έστω μια DGLA $(\mathfrak{g}, d, [\cdot, \cdot])$ και $x, y \in \mathfrak{g}$ τάξης k_1, k_2 αντίστοιχα. Θέτοντας $Q^1(x) = dx$, $Q^2(x, y) = (-1)^{k_2}[x, y]$, $Q^i = 0$, $\forall i \geq 3$, η DGLA μετατρέπεται σε μια L_∞ -άλγεβρα.⁵

β') Υπενθυμίζουμε, τα πολυ-διανυσματικά πεδία $\mathcal{T}_{poly}(X)$ και οι πολυ-διαφορικοί τελεστές $\mathcal{D}_{poly}(X)$ μιας ομαλής πολλαπλότητας X είναι παραδείγματα DGLAs. Από το παράδειγμα (α'), έχουμε ότι οι $\mathcal{T}_{poly}(X)$, $\mathcal{D}_{poly}(X)$ είναι επίσης και L_∞ -άλγεβρες.

Ορισμός 2.30. Ένας μορφισμός $\mathcal{F}$ μεταξύ δύο L_∞ -άλγεβρων $(\mathfrak{g}_1, Q_1)$, $(\mathfrak{g}_2, Q_2)$, είναι ένας μορφισμός βαθμωτών συν-άλγεβρων

$$\mathcal{F} : \bar{S}(\mathfrak{g}_1[1]) \rightarrow \bar{S}(\mathfrak{g}_2[1])$$

τέτοιος ώστε να ικανοποιεί τις σχέσεις $\mathcal{F} \circ Q_1 = Q_2 \circ \mathcal{F}$.

Όπως στην περίπτωση του διαφορικού Q , ένας L_∞ -μορφισμός περιγράφεται από μια άπειρη ακολουθία

$$\mathcal{F}^1 : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2, \quad \mathcal{F}^2 : \wedge^2(\mathfrak{g}_1) \rightarrow \mathfrak{g}_2[-1], \quad \mathcal{F}^3 : \wedge^3(\mathfrak{g}_1) \rightarrow \mathfrak{g}_2[-1], \quad \dots$$

Έστω $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ δύο DGLAs και $\mathcal{F}$ ένας DGLA-μορφισμός μεταξύ αυτών. Αυτός ο DGLA-μορφισμός $\mathcal{F}$ είναι επίσης και ένας L_∞ -μορφισμός αν ο n -οστός συντελεστής Taylor ικανοποιεί την επόμενη σχέση

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}_n(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n) - \sum_{i=1}^n \pm \mathcal{F}_n(\gamma_1 \wedge \dots \wedge d\gamma_i \wedge \dots \wedge \gamma_n) &= \sum_{i < j} \mathcal{F}_{n-1}([\gamma_i, \gamma_j] \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \hat{\gamma}_i \wedge \dots \wedge \hat{\gamma}_j \wedge \dots \wedge \gamma_n) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k, l \geq 1, k+l=n} \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_n} \pm [\mathcal{F}_k(\gamma_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \gamma_{\sigma(k)}), \mathcal{F}_l(\gamma_{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge \gamma_{\sigma(n)})] \end{aligned}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και ομογενή στοιχεία $\gamma_i \in \mathfrak{g}_1$. Πιο συγκεκριμένα, για $n = 1, 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}_1(\gamma_1) &= \mathcal{F}_1(d\gamma_1) \\ d\mathcal{F}_2(\gamma_1 \wedge \gamma_2) - \mathcal{F}_2(d\gamma_1 \wedge \gamma_2) - (-1)^{|\gamma_1|} \mathcal{F}_2(\gamma_1 \wedge d\gamma_2) &= \mathcal{F}_1([\gamma_1, \gamma_2]) - [\mathcal{F}_1(\gamma_1), \mathcal{F}_1(\gamma_2)] \end{aligned}$$

⁵Για περισσότερες λεπτομέρειες δες [3]

Ορισμός 2.31. Ένας quasi-isomorphism $\mathcal{F}$ μεταξύ L_∞ -αλγεβρών είναι ένας L_∞ -μορφισμός τέτοιος ώστε η πρώτη συνιστώσα του $\mathcal{F}^1$ να επάγει ισομορφισμό στις ομάδες συνολογίας των συμπλόκων $(\mathfrak{g}_1, Q_{(\mathfrak{g}_1)}^1)$ και $(\mathfrak{g}_2, Q_{(\mathfrak{g}_2)}^1)$.

Το επόμενο θεώρημα, είναι ο ακρογωνιαίος λίθος για τον μηχανισμό που εισήγαγε ο M. Kontsevich στο [19], του οποίου η απόδειξη δίνεται στο [19].

Θεώρημα 2.32. Αν η $\mathfrak{g}_1$ είναι quasi isomorphic με την $\mathfrak{g}_2$ τότε και η $\mathfrak{g}_2$ είναι quasi-isomorphic με την $\mathfrak{g}_1$. Στην περίπτωση των DGLAs, ένας L_∞ -μορφισμός $\mathcal{F}$ μεταξύ των $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ θεωρούμενες ως DGLAs, επάγει έναν ισομορφισμό μεταξύ των αντίστοιχων στοιχείων Maurer-Cartan για τις $\mathfrak{g}_i, i = 1, 2$.

Παρατήρηση 2.33. Μεταξύ quasi-isomorphic L_∞ -αλγεβρών, έχουμε μια σχέση ισοδυναμίας. Κάτι, το οποίο δεν επιτυγχάνεται μεταξύ quasi-isomorphic DGLAs.

Στο [19], ο Kontsevich θεώρησε ως $\mathfrak{g}_1 = \mathcal{T}_{poly}(\mathbb{R}^n)$ και $\mathfrak{g}_2 = \mathcal{D}_{poly}(\mathbb{R}^n)$, και όρισε έναν L_∞ -quasi isomorphism μεταξύ αυτών, όπου ο n -οστός συντελεστής Taylor της απεικόνισης αυτής, ορίζεται ως άθροισμα πάνω από όλους τους όρους που αντιστοιχούν σε (admissible) γραφήματα Γ όπου κάθε όρος είναι το γινόμενο ενός δι-διαφορικού τελεστή B_Γ και ενός βάρους (integral weight) $\mathcal{W}_\Gamma$ το οποίο αντιστοιχεί σε κάθε γράφημα Γ ⁶. Ως εκ τούτου, προέκυψε ένας ισομορφισμός μεταξύ των τυπικών δομών Poisson στο X , modulo την δράση της συσχετισμένης gauge ομάδας, και των star-γινομένων, modulo της συσχετισμένης gauge ομάδας. Με άλλα λόγια, έδωσε την λύση για το πρόβλημα της κβάντοποίησης με παραμόρφωση μια τυχαίας πολλαπλότητας Poisson.

Θεώρημα 2.34 (Θεώρημα Τυπικότητας του Kontsevich [19]). Η απεικόνιση $\mathcal{U} : \mathcal{T}_{poly}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}_{poly}(\mathbb{R}^n)$ όπου ο n -οστός συντελεστής Taylor δίνεται από την formula

$$\mathcal{U}_n : \otimes^n \mathcal{T}_{poly}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}_{poly}(\mathbb{R}^n)[1 - n]$$

$$\mathcal{U}_n := \sum_{m \geq 0} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_{n,m}} \mathcal{W}_\Gamma B_\Gamma \quad (2.12)$$

είναι ένας L_∞ -μορφισμός και μάλιστα ένας quasi-isomorphism μεταξύ DGLAs. Ιδιαίτερος, ο πρώτος όρος $\mathcal{U}_1^{(0)}$ είναι ο HKR και ο $\mathcal{U}$ απεικονίζει το cup-product της $\mathcal{T}_{poly}(X)$ στο cup-product της $\mathcal{D}_{poly}(X)$.

⁶Το κεφάλαιο 4 της παρούσης διατριβής, είναι αφιερωμένο στο να εξηγήσει πως από αυτά τα γραφήματα ορίζονται οι δι-διαφορικοί τελεστές και τα integral weights.

3 Κβαντοποίηση με παραμόρφωση πολλαπλοτήτων Poisson

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζουμε εν-συντομία, την λύση του προβλήματος της κβαντοποίησης με παραμόρφωση κάθε πολλαπλότητας Poisson όπως προτάθηκε από τον Kontsevich. Το αποτέλεσμα αυτό, αποτελεί καθοριστικό συστατικό για τον ισομορφισμό του Duflo που αποτελεί και το κύριο θέμα της διπλωματικής αυτής. Πιο συγκεκριμένα, εξηγούμε στο κεφάλαιο αυτό, την formula για το star-γινόμενο όπως ορίστηκε από τον Kontsevich στο θεώρημα 3.17. Η παρουσίαση μας ακολουθεί κατά βάση τα [6], [3], [5]. Είναι περιγραφική, παραλείποντας αποδείξεις, αλλά περιέχει παραδείγματα και δίνει ακριβείς αναφορές. Τα σχήματα της παραγράφου 3.1 προέρχονται από το [19] και έχουν ξανασχεδιαστεί με την βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου GeoGebra. Τα σχήματα της παραγράφου 3.2 είναι από το [5]

3.1 Admissible γραφήματα

Ένα *γράφημα* Γ είναι ένα ζεύγος (V_Γ, E_Γ) αποτελούμενο από δύο πεπερασμένα σύνολα, όπου τα στοιχεία του V_Γ καλούνται *κορυφές* του Γ , τα στοιχεία του E_Γ *ακμές* του Γ τέτοια ώστε $E_\Gamma \subset V_\Gamma \times V_\Gamma$. Τα στοιχεία του συνόλου V_Γ σημαίνονται είτε από ένα θετικό ακέραιο ή με τη χρήση συμβόλων της μορφής v_i (το οποίο σημαίνει: η κορυφή που έχει αριθμηθεί με τον αριθμό $i \in \mathbb{N}$). Ένα γράφημα για το οποίο το σύνολο V_Γ είναι αριθμημένο ονομάζεται *γράφημα του οποίου όλες οι κορυφές έχουν ετικέτες*. Μια ακμή που ξεκινάει από την κορυφή v_1 και τελειώνει στην κορυφή v_2 συμβολίζεται με $e = (v_1, v_2) \in E_\Gamma \subset V_\Gamma \times V_\Gamma$.

Ένα γράφημα, για το οποίο όλες οι ακμές είναι προσανατολισμένες ⁷, καλείται *προσανατολισμένο*. Η αρίθμηση των κορυφών επιτρέπει να διατάξουμε τις ακμές σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη. Αυτό σημαίνει, ότι κάποιος διατάσει πρώτα τις ακμές της κορυφής με ετικέτα 1, στην συνέχεια, τις ακμές που ξεκινάνε από την κορυφή με ετικέτα 2, και ούτω καθεξής. Αν το σύνολο E_Γ όλων των ακμών του Γ είναι ολικά διατεταγμένο και συμβατό με τη διάταξη των κορυφών, τότε το Γ καλείται *διατεταγμένο*.

Ορισμός 3.1. Έστω n, m δύο μην αρνητικοί ακέραιοι. Το σύνολο των *admissible* γραφημάτων $\mathcal{G}_{n,m}$ αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα, προσανατολισμένα γραφήματα Γ των οποίων όλες οι κορυφές έχουν ετικέτες και ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το σύνολο των κορυφών V_Γ του Γ είναι η ξένη ένωση

$$V_\Gamma = \{1, 2, \dots, n\} \sqcup \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m}\}$$

όπου οι κορυφές με ετικέτες από το σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$ καλούνται *κορυφές πρώτου τύπου* ή *of type I* και οι κορυφές με ετικέτες από το σύνολο $\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m}\}$ καλούνται *κορυφές τύπου 2* ή *of type II* και ικανοποιούν την σχέση $2n + m - 2 \geq 0$.

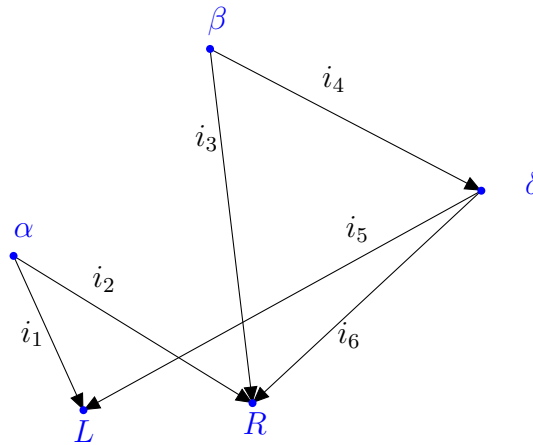
⁷Αυτό σημαίνει ότι κάθε ακμή $e = (v_1, v_2)$ έχει προκαθορισμένη αρχική κορυφή v_1 και ένα προκαθορισμένο πέρας v_2 .

- Το σύνολο των ακμών είναι πεπερασμένο, όλες οι ακμές είναι προσανατολισμένες, και έχουν ως αρχική κορυφή κορυφές πρώτου τύπου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχουν εξερχόμενες ακμές, από τις κορυφές δεύτερου τύπου.
- Δεν υπάρχουν μικροί βρόγχοι, δηλαδή ακμές που ξεκινούν και τελειώνουν στην ίδια κορυφή.
- Δεν υπάρχουν πολλαπλές ακμές, δηλαδή κάθε αρχική κορυφή και κάθε τελική κορυφή ενώνονται με μια και μόνο μια ακμή.

Ένα τέτοιο γράφημα $\Gamma \in \mathcal{G}_{n,m}$ θα καλείται *admissible* γράφημα με n κορυφές of type I και m κορυφές of type II.

3.2 Πολυ-διαφορικοί τελεστές & admissible γραφήματα

Στόχος της παραγράφου αυτής είναι να κατασκευάσει από ένα admissible γράφημα $\Gamma \in \mathcal{G}_{n,m}$ ένα πολυ-διαφορικό τελεστή B_Γ . Για την ακρίβεια, στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε ένα πολύ συγκεκριμένο παράδειγμα. Για γραφήματα, με τυχαίο αριθμό κορυφών και ακμών, τα βήματα της κατασκευής είναι τα ίδια ενώ μια λεπτομερής κατασκευή για την γενική περίπτωση μπορεί να βρει κάποιος στο [3]. Η ακόλουθη παρουσίαση είναι εμπνευσμένη από μια διάλεξη του D. Calaque κατά την διάρκεια του workshop GDO⁸ που πραγματοποιήθηκε στο University of Cambridge, το 2013.



Admissible γράφημα

⁸ Grothendieck-Teichmüller Groups, Deformation and Operads

Θεωρούμε ένα admissible γράφημα Γ , με τρεις κορυφές πρώτου τύπου με ετικέτες α, β, γ και δύο κορυφές δεύτερου τύπου, με ετικέτες $L(=\bar{1})$ και $R(=\bar{2})$, όπως στο 3.2

Η κατασκευή του πολυ-διαφορικού τελεστή από το παραπάνω γράφημα γίνεται ως εξής

α') Αρχικά, απαριθμούμε όλες τις ακμές

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6) = ((\alpha, L), (\alpha, R), (\beta, R), (\beta, \delta), (\delta, L), (\delta, R)).$$

Παρατηρούμε, ότι η κορυφή με ετικέτα α έχει δύο εξερχόμενα βέλη τα i_1, i_2 , όπου και τα δύο έχουν σαν πέρας κορυφές δεύτερου τύπου. Με παρόμοιο τρόπο, η κορυφή με ετικέτα δ έχει δύο εξερχόμενα βέλη, τα οποία και τα δύο έχουν πέρας κορυφές δεύτερου τύπου. Όμως, η κορυφή με ετικέτα β έχει δύο εξερχόμενα βέλη, τα i_3, i_4 , όπου το βέλος με ετικέτα i_3 έχει ως πέρας μια κορυφή δεύτερου τύπου, ενός το πέρας του βέλους με ετικέτα i_4 έχει ως πέρας μια κορυφή πρώτου τύπου.

β') Σε κάθε κορυφή πρώτου τύπου, βάζουμε το ίδιο δι-διανυσματικό πεδίο γ , και σε κάθε κορυφή δεύτερου τύπου μια ομαλή συνάρτηση δηλαδή $L \mapsto f$ και $R \mapsto g$. Επίσης, σε κάθε ακμή, βάζουμε μια μερική παράγωγο δηλαδή $i_k \mapsto \partial_{i_k}$ για $1 \leq k \leq 6$. Θα συμβολίζουμε τις κορυφές πρώτου τύπου με σύμβολα της μορφής $\gamma^{i_1 i_2}, \gamma^{i_3 i_4}$ και $\gamma^{i_5 i_6}$, όπου οι πάνω δείκτες θα υποδεικνύουν επακριβώς ποια βέλη εξέρχονται από την κορυφή αυτή.

γ') Γράφουμε όλα τα παραπάνω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, σε μια σειρά

$$\gamma^{i_1 i_2} \quad \gamma^{i_3 i_4} \quad \gamma^{i_5 i_6} \quad f \quad g$$

Στην συνέχεια, γράφουμε σε ποια κορυφή δρα η κάθε μερική παράγωγος πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους και αθροίζουμε πάνω από όλα τα δυνατά γραφήματα που μπορούν να αριθμηθούν κατά αυτόν τον τρόπο δηλαδή

$$\sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6} \gamma^{i_1 i_2} \gamma^{i_3 i_4} \partial_{i_4} (\gamma^{i_5 i_6}) \partial_{i_1} \partial_{i_5} (f) \partial_{i_2} \partial_{i_3} \partial_{i_6} (g)$$

Ως εκ τούτου, ο τελεστής $B_{\Gamma, \gamma}$ που αντιστοιχεί στο παραπάνω γράφημα Γ και που εξαρτάται από το δι-διανυσματικό πεδίο γ είναι ο τελεστής $B_{\Gamma, \gamma} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ όπου $\mathcal{A} = C^\infty(U)$, U μια ανοιχτή περιοχή του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$(f, g) \mapsto B_{\Gamma, \gamma}(f, g) := \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6} \gamma^{i_1 i_2} \gamma^{i_3 i_4} \partial_{i_4} (\gamma^{i_5 i_6}) \partial_{i_1} \partial_{i_5} (f) \partial_{i_2} \partial_{i_3} \partial_{i_6} (g) \quad (3.1)$$

Παρατηρήσεις 3.2. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την προηγούμενη κατασκευή μπορούν να βρεθούν στο [7], και στο [3]

α') Κάποιος θα μπορούσε να αριθμήσει τις ακμές με διαφορετικό τρόπο. Η μόνη διαφορά, θα ήταν στο πρόσημο του τελεστή B_{Γ} .

β') Το δι-διανυσματικό πεδίο γ δεν είναι κατ'ανάγκη Poisson.

γ') Σε όλες τις κορυφές of type I βάζουμε το ίδιο δι-διανυσματικό πεδίο.

δ') Στο βήμα (γ), η σειρά που γράφουμε τους όρους δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο. Οποιαδήποτε αλλαγή, θα επηρεάσει μόνο το πρόσημο του τελεστή.

ε') Τα ίδια βήματα χρειάζονται να γίνουν, για την κατασκευή ενός πολυ-διαφορικού τελεστή από ένα γράφημα με $\Gamma \in \mathcal{G}_{n,m}$. Για περισσότερες λεπτομέρειες δες [3].

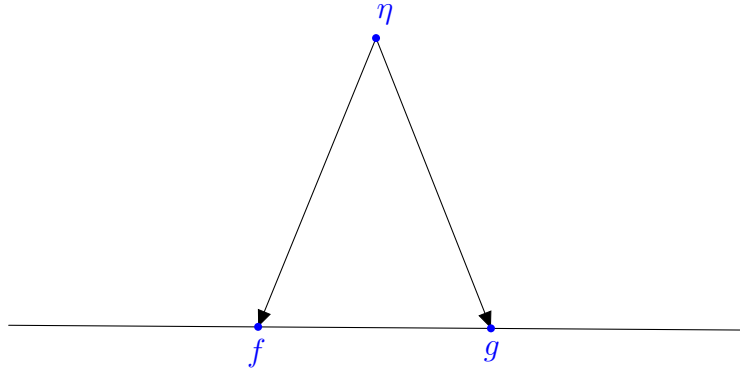
Παρατήρηση 3.3. Για να είναι ξεκάθαρο, γιατί η παραπάνω formula 3.1 είναι πράγματι ένας δι-διαφορικός τελεστής, θα δώσουμε ένα ακόμη απλούστερο παράδειγμα. Έστω $\eta : X \rightarrow TX \wedge TX$ ένα δι-διανυσματικό πεδίο το οποίο διαβάζει

$$\eta(x) = \eta_1(x) \wedge \eta_2(x)$$

για $x \in X$. Σε τοπικές συντεταγμένες για μια n -διάσταση πολλαπλότητα X , έχουμε

$$\eta_1 = \sum_{i=1}^n \eta_1^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \eta_2 = \sum_{i=1}^n \eta_2^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Για λόγους απλότητας, θεωρούμε το γράφημα Γ με μια κορυφή πρώτου τύπου και δύο κορυφές δεύτερου τύπου όπως στο επόμενο σχήμα



Ως εκ τούτου, ο δι-διαφορικός τελεστής που προκύπτει από το παραπάνω γράφημα Γ και ένα δι-διανυσματικό πεδίο η ορίζεται ως

$$B_{\Gamma,\eta}(f,g) = \eta_1(f)\eta_2(g) + \eta_1(g)\eta_2(f) = \sum_{i,j=1}^n \eta_1^i \eta_2^j \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^n \eta_2^j \eta_1^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$$

3.3 Χώροι διαμορφώσεως και οι συμπαγοποιήσεις τους

Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι να περιγράψει την κατασκευή κατάλληλων συμπαγών χώρων, με στόχο να ορίσει πάνω σε αυτούς του δι-διαφορικούς τελεστές οι οποίοι εμφανίζονται στην formula του Θεωρήματος Τυπικότητας. Η κατασκευή των χώρων αυτών γίνεται σε δύο βήματα: αρχικά ορίζουμε τους χώρους διαμόρφωσης, οι οποίοι είναι ομαλές αλλά όχι συμπαγείς πολλαπλότητες, και στην συνέχεια συμπαγοποιούμε τις πολλαπλότητες αυτές ώστε να προκύψουν οι επιθυμητοί χώροι. Η παρουσίαση ακολουθεί κατά βάση τα [5] και [3] και τα σχήματα είναι από το [5].

Ορισμός 3.4. Για n, m μη αρνητικούς ακεραίους, συμβολίζουμε με $Conf_{n,m}^+$ τους χώρους διαμορφώσεως (configuration spaces) n σημείων στον $\mathbb{H}^+$ και m διατεταγμένων σημείων του $\mathbb{R}^m$ δηλαδή το σύνολο των $n + m$ -άδων τέτοιες ώστε

$$(z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{H}^+)^n \times \mathbb{R}^m \quad (3.2)$$

για κάθε $z_i \neq z_j$ για $i \neq j$, και $x_1 < x_2 < \dots < x_m$

Στην πράξη, χειριζόμαστε αυτές τις $n + m$ -άδες ως ανοιχτά υποσύνολα του $(\mathbb{H}^+)^n \times \mathbb{R}^m$, και άρα ο $Conf_{n,m}^+$ είναι μια ομαλή αλλά όχι συμπαγής πολλαπλότητα διάστασης $2n + m$. Στην συνέχεια, θεωρούμε τις ομάδες $Lie \mathbb{R}^+$ και $\mathbb{R}$, όπου η $\mathbb{R}^+$ δρα στην $\mathbb{R}$ με rescalings και μεταφορές. Το ημιευθύ του γινόμενο $G_2 := \mathbb{R}^+ \ltimes \mathbb{R}$ είναι επίσης μια ομάδα Lie (πραγματικής) διάστασης 2, και ως πολλαπλότητα μοιάζει με το Cartesian-γινόμενο $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Η δράση της της G_2 στον $Conf_{n,m}^+$ ορίζεται ως

$$\begin{aligned} G_2 \times Conf_{n,m}^+ &\rightarrow Conf_{n,m}^+ \\ ((a, b), (z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m)) &\mapsto (az_1 + b, \dots, az_n + b, ax_1 + b, \dots, ax_m + b) \end{aligned}$$

για κάθε ζεύγος $(a, b) \in G_2$. Αν οι αριθμοί n, m ικανοποιούν την σχέση $2n + m \geq 2$, τότε η δράση της G_2 στην $Conf_{n,m}^+$ είναι ελεύθερη δηλαδή όλες οι σταθεροποιούσες ομάδες της G_2 είναι τετριμμένες. Πράγματι, για $n = 1, m = 1$ έχουμε $2 \cdot 1 + 1 = 3 \geq 2$, και προκύπτει εύκολα ότι τα μόνα στοιχεία (a, b) της G_2 τέτοια ώστε

$$(a, b) \cdot (z_1, x_1) = (z_1, x_1)$$

είναι το $(e, 0)$, όπου με e συμβολίζεται το μοναδιαίο στοιχείο του $\mathbb{R}^+$. Από την άλλη πλευρά, για $n = 0, m = 1$ τέτοιο ώστε $2 \cdot 0 + 1 = 1 \leq 2$, έχουμε ότι μόνο το στοιχείο $(0, 1)$ ικανοποιεί την σχέση $(a, b) \cdot x_1 = x_1$. Με άλλα λόγια, η σταθεροποιούσα ομάδα της G_2 είναι μη τετριμμένη.

Αφού η δράση της G_2 είναι ελεύθερη, οι τροχιές

$$C_{n,m}^+ = Conf_{n,m}^+ / G_2$$

είναι ομαλές πολλαπλότητες διάστασης $2n + m - 2$.

Συμβολισμοί 3.5. Χωρίς βλάβη της γενικότητας όταν θα αναφερόμαστε στον χώρο διαμόρφωσης n σημείων στον $\mathbb{H}^+$ και m διατεταγμένων σημείων στον $\mathbb{R}^m$ θα εννοούμε τον $C_{n,m}^+$ και όχι τον $Conf_{n,m}^+$. Θα λέμε ότι ένα πεπερασμένο σύνολο S αποτελούμενο από σημεία στον $\mathbb{H}^+ \sqcup \mathbb{R}$ είναι σε *standard position* αν και μόνο αν

- α') η προβολή της κυρτής θήκης του S στην ευθεία των πραγματικών $\mathbb{R}$ είναι είτε το μονοσύνολο $\{0\}$ είτε ένα διάστημα με κέντρο το 0.
- β') το maximum της διαμέτρου του S και της απόστασης του συνόλου S από $\mathbb{R}$ ισούται με 1.

Οι χώροι διαμορφώσεως χωρίς σημεία στην ευθεία των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ορίζονται με παρόμοιο τρόπο.

Ορισμός 3.6. Έστω n ένας μη αρνητικός ακέραιος. Θα συμβολίζουμε με $Conf_n$ τον χώρο διαμορφώσεως n σημείων στο $\mathbb{C}$ δηλαδή το σύνολο n -άδων στο $\mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $z_i \neq z_j$ για $i \neq j$.

Στην περίπτωση αυτή, τα σημεία βρίσκονται σε όλο το $\mathbb{C}$ και όχι μόνο στο $\mathbb{H}^+$, και η ομάδα $\mathbb{R}^+$ δρα στο $\mathbb{C}$ με rescalings και μιγαδικές μεταφορές. Η ομάδα $G_3 := \mathbb{R}^+ \ltimes \mathbb{C}$ είναι μια ομάδα Lie, πραγματικής διάστασης 3 της οποίας η δράση στον $Conf_n$ ορίζεται ως

$$G_3 \times Conf_n \rightarrow Conf_n$$

$$((a, b), (z_1, \dots, z_n)) \mapsto (az_1 + b, \dots, az_n + b)$$

για κάθε ζεύγος $(a, b) \in G_3$. Για παρόμοιους λόγους με την ομάδα Lie G_2 , για $n \geq 2$ η δράση της G_3 στον $Conf_n$ είναι ελεύθερη και ως εκ τούτου οι τροχιές

$$C_n = Conf_n / G_3$$

είναι ομαλές πολλαπλότητες διάστασης $2n - 3$.

Συμβολισμοί 3.7. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, όταν θα αναφερόμαστε στους χώρους διαμόρφωσης με n σημεία στο $\mathbb{C}$ θα εννοούμε τον C_n αντί του $Conf_n$. Επίσης, θα λέμε ότι ένα σύνολο του C_n είναι σε *standard position* αν και μόνο αν

- α') η διάμετρος του συνόλου $\{x_1, \dots, x_n\}$ ισούται με 1
- β') το κέντρο του μικρότερου κύκλου που περιέχει τα $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι το $0 \in \mathbb{C}$.

Παραδείγματα 3.8. Στα επόμενα, παρουσιάζουμε κάποια βασικά παραδείγματα χώρων διαμόρφωσης.

- α') Ο χώρος διαμόρφωσης $C_{1,1}^+$ ταυτίζεται με το ανοιχτό διάστημα $(-1, 1)$. Θεωρούμε τον $C_{1,1}^+$ ως τον χώρο πηλίκου $Conf_{1,1}^+/G_2 = \{(z_1, q_1) \in \mathbb{H}^+ \times \mathbb{R}\}/G_2$, και επιλέγουμε ένα αντιπρόσωπο αυτής της κλάσης ισοδυναμίας ως εξής: φιζάρουμε το $q_1 = 0 \in \mathbb{R}$ και αφήνουμε το σημείο $z_1 \in \mathbb{H}^+$ να κινείται υπό την δράση της G_2 σε απόσταση το πολύ 1 από το 0. Τότε, προκύπτει $S^1 \cap \mathbb{H}^+ \simeq (-1, 1)$, αφού κάθε ανοιχτή, απλή καμπύλη είναι ομοιομορφική με ένα ανοιχτό διάστημα.
- β') Ο χώρος διαμόρφωσης $C_{2,0}^+$ μπορεί να ταυτιστεί με το $\mathbb{H}^+ - \{i\}$. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το πρώτο σημείο μπορεί να τοποθετηθεί στο σημείο i και το δεύτερο να κινείται στο άνω ημιεπίπεδο.
- γ') Ο χώρος διαμόρφωσης $C_{0,m}^+$ ο οποίος έχει ακριβώς m διατεταγμένα σημεία στο $\mathbb{R}^m$ μπορεί να ταυτιστεί με το ανοιχτό $(m-2)$ -simplex.
- δ') Ο χώρος διαμόρφωσης με δύο σημεία στο μιγαδικό επίπεδο C_2 μπορεί να ταυτιστεί με τον S^1 . Πράγματι, μπορούμε να επιλέξουμε ένα αντιπρόσωπο της κλάσης ισοδυναμίας $C_2 = Conf_2/G_3$ με παρόμοιο τρόπο: έστω το σημείο z_1 να είναι φιζαρισμένο στο $0 \in \mathbb{C}$ και το δεύτερο σημείο z_2 να κινείται στο $\mathbb{C}$, αλλά σε απόσταση 1 από το σημείο z_1 . Επομένως, $C_2 \simeq S^1$.

Οι παραπάνω πολλαπλότητες είναι ομαλές, αλλά όχι συμπαγείς. Στα επόμενα, παρουσιάζουμε την διαδικασία συμπαγοποίησης του C_n , και σε μεθεπόμενο βήμα (στην συμπαγοποίηση) του $C_{n,m}^+$ η οποία είναι πιο tricky. Η βασική ιδέα είναι να 'βάλουμε' τον εκάστοτε χώρο διαμόρφωσης στο Cartesian γινόμενο αντιγράφων του S^1 και αντιγράφων του $\mathbb{RP}^2$.

Συμπαγοποίηση του C_n Η απεικόνιση $\iota_n : Conf_n \rightarrow (S^1)^{n(n-1)} \times (\mathbb{RP}^2)^{n(n-1)(n-2)}$ ορίζεται ως

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \prod_{i \neq j} \frac{\arg(z_j - z_i)}{2\pi} \times \prod_{i \neq j, j \neq k, i \neq k} [|z_i - z_j| : |z_i - z_k| : |z_j - z_k|]$$

η οποία επάγεται στον C_n και είναι embedding πολλαπλοτήτων. Επομένως, ο συμπαγοποιημένος χώρος διαμόρφωσης $\overline{C}_n$ είναι η κλειστότητα της εικόνας του C_n ως προς την απεικόνιση ι_n , με άλλα λόγια, είναι η $\overline{\iota(C_n)}$ στον

$$(S^1)^{n(n-1)} \times (\mathbb{RP}^2)^{n(n-1)(n-2)}$$

με την τοπολογία του Cartesian γινομένου.

Συμπαγοποίηση του $C_{n,m}^+$ Αρχικά, θεωρούμε την απεικόνιση $\iota_{n,m}^+ : Conf_{n,m}^+ \rightarrow Conf_{2n+m}$ η οποία διαβάζει

$$(z_1, \dots, z_n, q_1, \dots, q_m) \mapsto (z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, q_1, \dots, q_m)$$

Η απεικόνιση $\iota_{n,m}^+$ είναι imbedding⁹ του χώρου διαμορφώσεως $Conf_{n,m}^+$ στο χώρο διαμόρφωσης με $2n+m$ σημεία του $\mathbb{C}$, η οποία είναι equivariant υπό την δράση της ομάδας

⁹δηλαδή είναι embedding και 1-1.

G_2 , η οποία επάγεται σε embedding από τον $C_{n,m}^+$ στο C_{2n+m} . Στην συνέχεια, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\iota_{2n+m} : Conf_{2n+m} \rightarrow (S^1)^{(2n+m)(2n+m-1)} \times (\mathbb{RP}^2)^{(2n+m)(2n+m-1)(2n+m-2)}$$

η οποία επάγεται στον C_{2n+m} και είναι και αυτή επίσης embedding. Ως εκ τούτου, η επιθυμητή συμπαγοποίηση $\overline{C}_{n,m}^+$ πραγματοποιείται μέσω της σύνθεσης $\iota_{2n+m} \circ \iota_{n,m}^+$ η οποία είναι επίσης imbedding.

Ορισμός 3.9. Ο συμπαγοποιημένος χώρος διαμόρφωσης $\overline{C}_{n,m}^+$ είναι η κλειστότητα της εικόνας τους $C_{n,m}^+$ ως προς την απεικόνιση $\iota_{2n+m} \circ \iota_{n,m}^+$ στην

$$(S^1)^{(2n+m)(2n+m-1)} \times (\mathbb{RP}^2)^{(2n+m)(2n+m-1)(2n+m-2)}$$

Παραδείγματα 3.10. Στην συνέχεια, παρουσιάζουμε κάποια παραδείγματα συμπαγοποιημένων χώρων διαμόρφωσης:

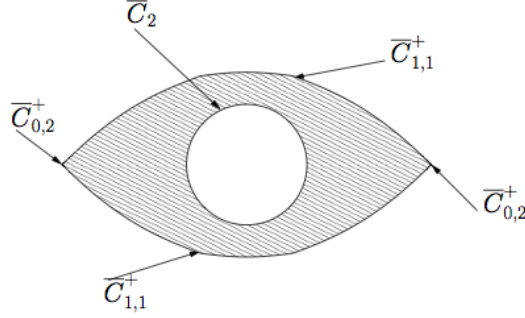
- α') Ο συμπαγοποιημένος χώρος διαμόρφωσης $C_{1,1}^+$ είναι το $\overline{C}_{1,1}^+ \simeq [-1, 1]$ δηλαδή το κλειστό διάστημα.
- β') Παρομοίως, $\overline{C}_2 \simeq S^1$.
- γ') Ο συμπαγοποιημένος χώρος $\overline{C}_{2,0}^+$ του $C_{2,0}^+$ είναι γνωστός και ως *μάτι του Kontsevich*. Το boundary stratification του χώρου αυτού είναι δύο ειδών. Υπάρχουν 3 boundary strata συνδιάστασης 1 και δύο boundary strata συνδιάστασης 2.

Τα boundary strata συνδιάστασης 1 είναι οι χώροι $\overline{C}_{1,1}^+ \simeq [-1, 1]$ και $\overline{C}_2 \simeq S^1$. Στην πρώτη περίπτωση (δηλαδή στον $\overline{C}_{1,1}^+$), έχουμε δύο σημεία z, w όπου ένα από τα δύο προσεγγίζει το $\mathbb{R}$. Στην δεύτερη περίπτωση, δύο σημεία $z, w \in \mathbb{H}^+$ κινούνται στο $\mathbb{H}^+$ και συγκολλούνται σε ένα σημείο επίσης στον $\mathbb{H}^+$. Επειδή, υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία τα οποία μπορούν να προσεγγίζουν την ευθεία των πραγματικών αριθμών, υπάρχουν δύο αντίγραφα του $\overline{C}_{1,1}^+$.

Τα boundary strata συνδιάστασης 2 είναι οι χώροι $\overline{C}_{0,2}^+$. Αντιστοιχούν στην περίπτωση που δύο σημεία $z, w \in \mathbb{H}^+$ προσεγγίζουν το ένα το άλλο και συγκολλούνται σε ένα σημείο στην ευθεία των πραγματικών. Ξανά, εξαιτίας της διάταξης σημείων του των $\mathbb{R}$, υπάρχουν δύο αντίγραφα των χώρων αυτών.

Παρατηρήσεις 3.11. Στα επόμενα, αναφέρουμε κάποιες παρατηρήσεις (χωρίς λεπτομέρειες) σχετικά με τους χώρους διαμόρφωσης και τις συμπαγοποιήσεις τους.

- α') Στο χώρο διαμόρφωσης $C_{n,m}^+$ (αντ. C_n) δρα η συμμετρική ομάδα S_n , μεταθέτοντας τα στοιχεία του $\mathbb{H}^+$ (αντ. $\mathbb{C}$). Η δράση αυτή (της S_n) επεκτείνεται επίσης στις συμπαγοποιήσεις $\overline{C}_{n,m}^+$ (αντ. $\overline{C}_n$).



Σχήμα 1: Το μάτι του Kontsevich

- β') Εν γένει, για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A από θετικούς ακераίους και για κάθε πεπερασμένο, διατεταγμένο υποσύνολο B (επίσης από θετικούς ακεραίους), είναι εφικτό να ορίσουμε χώρους διαμόρφωσης C_A και $C_{A,B}^+$ και τους αντίστοιχους συμπαγοποιημένους χώρους ($\bar{C}_A$ και $\bar{C}_{A,B}^+$, αντ.), όπως προηγουμένως. Το γεγονός αυτό, θα μας επιτρέψει στην συνέχεια να ορίσουμε διαφορετικά είδη από boundary strata για τους συμπαγοποιημένους χώρους.
- γ') Οι πολλαπλότητες $Conf_{n,m}^+$ (αντ. $Conf_n$) είναι προσανατολισμένες πολλαπλότητες. Ως εκ τούτου, και οι πολλαπλότητες $C_{n,m}^+$ (αντ. C_n) είναι προσανατολισμένες, και τελικά και οι αντίστοιχοι συμπαγοποιημένοι χώροι αποκτούν τον ίδιο προσανατολισμό. Αν και δεν θα δώσουμε παραπάνω λεπτομέρειες και θα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [7] και στο [5], παρόλα αυτά θα αναφέρουμε ότι ο προσανατολισμός των χώρων αυτών έχει σημασία γιατί στην λύση του προβλήματος της κβαντοποίησης με παραμόρφωση των πολλαπλοτήτων Poisson γίνεται χρήση του θεωρήματος Stokes για ολοκληρώματα.
- δ') Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα διαφορετικά boundary strata μπορούν να βεθούν [5].

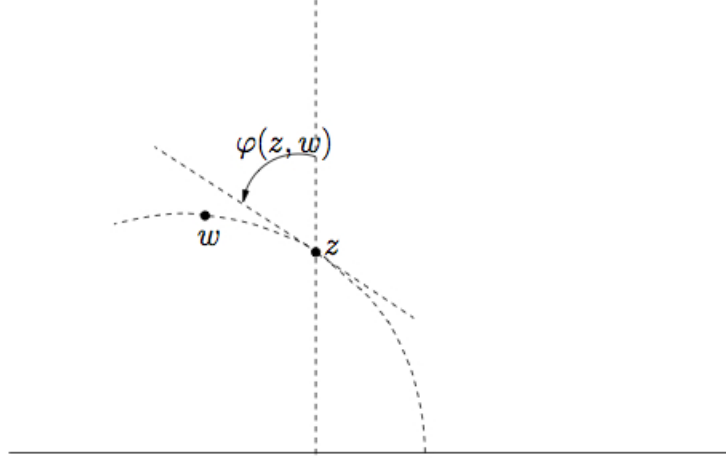
3.4 Integral weights

Έστω $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$ το άνω ημιεπίπεδο. Για τους σκοπούς της εργασίας αυτής, δουλεύουμε πάνω από το $\mathbb{H}^+ \sqcup \mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την μετρική Lobachevsky¹⁰. Οι γεωδαισιακές του $\mathbb{H}^+ \sqcup \mathbb{R}$ είναι κατακόρυφες ευθείες οι οποίες διέρχονται από ένα σημείο και το ∞ στο απόλυτο, και κυκλικά τόξα ορθογώνια στην ευθεία των πραγματικών. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $l(z, \infty)$ και $l(z, w)$ δύο τέτοιες γεωδαισιακές οι οποίες διέρχονται από τα σημεία z , w , ∞ για $z \neq w$. Θα συμβολίζουμε με $\angle(l(z, \infty), l(z, w))$ την γωνία του υπερβολικού επιπέδου μεταξύ των δύο γεωδαισιακών, η οποία μετράται κατά την αντίστροφη φορά των δεικτών του ρολογιού και υπολογίζεται μέσω της απεικόνισης

$$(z, w) \mapsto \phi(z, w) = \frac{1}{2\pi} \arg\left(\frac{z - w}{\bar{z} - w}\right)$$

¹⁰για $z = x + iy$, έχουμε $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dzd\bar{z}}{y^2}$

για $(z, w) \in \mathbb{H}^+ \sqcup \mathbb{R}$.



Σχήμα 2: Hyperbolic angle

Θεωρούμε τον περιορισμό της ϕ στο χώρο διαμόρφωσης $C_{2,0}^+ \subseteq \mathbb{H}^+ \sqcup \mathbb{R}$.

Ορισμός 3.12. Η *angle map* ορίζεται ως

$$\phi|_{C_{2,0}^+} : C_{2,0}^+ \rightarrow S^1$$

η οποία είναι καλά ορισμένη, και επεκτείνεται ομαλά στο συμπαγοποιημένο χώρο $\overline{C}_{2,0}^+$ (γνωστός και ως *Kontsevich's eye*) για τον οποίο ισχύουν τα εξής:

- όταν η ϕ περιορίζεται στο boundary stratum $\overline{C}_2$ (δηλαδή στον κύκλο S^1), τότε ισούται με την standard angle coordinate της S^1
- όταν η ϕ περιορίζεται στο boundary stratum $\overline{C}_{1,1}^+$, τότε μηδενίζεται.

Για να ορίσουμε την angle map σε ένα τυχαίο χώρο διαμόρφωση $C_{n,m}^+$ (και στον αντίστοιχο συμπαγοποιημένο $\overline{C}_{n,m}^+$) ο οποίος έχει $n + m$ σημεία, θεωρούμε πρώτα την φυσική προβολή $\pi_e : C_{n,m}^+ \rightarrow C_{2,0}^+$ η οποία διαβάζει

$$(z_1, \dots, z_m) \mapsto (z_i, z_j)$$

και συνθέτουμε την φυσική προβολή π_e με την ϕ . Επομένως, προκύπτει το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} C_{n,m}^+ & \xrightarrow{\pi_e} & C_{2,0}^+ \\ & \searrow \phi \circ \pi_e & \downarrow \phi \\ & & S^1 \end{array}$$

όπου η απεικόνιση $\phi_e := \phi \circ \pi_e : C_{n,m}^+ \rightarrow S^1$ διαβάζει

$$C_{n,m}^+ \ni (z_1, \dots, z_m) \mapsto \phi(z_i, z_j) \in S^1$$

Η απεικόνιση ϕ_e επεκτείνεται ομαλά στον συμπαγοποιημένο χώρο $\overline{C}_{n,m}^+$. Στην συνέχεια, για κάθε admissible γράφημα παρουσιάζουμε την μέθοδο κατασκευής ενός κατάλληλου integral weight.

Έστω $\Gamma \in \mathcal{G}_{n,m}$ να είναι ένα admissible γράφημα του οποίου οι κορυφές είναι στοιχεία του $C_{n,m}^+$. Για κάθε ακμή $e = (z_i, z_j) \in E_\Gamma$ ορίζεται η angle map ϕ_e . Το διαφορικό $d\phi_e$ της angle map ϕ_e , είναι το διαφορικό $d\phi$ (της απεικόνισης ϕ), pulled-back μέσω της φυσική προβολής π_e στο χώρο διαμόρφωσης $C_{n,m}^+$. Με άλλα λόγια, έχουμε

$$d\phi_e := \pi_e^* d\phi \in \Omega^1(C_{n,m}^+)$$

όπου $\Omega^1(C_{n,m}^+)$ δηλώνει το χώρο των 1-μορφών του $(C_{n,m}^+)$. Σε μεθεπόμενο βήμα, θεωρούμε το σφηνοειδές γινόμενο όλων των 1-μορφών και σε κάθε γράφημα $\Gamma \in \mathcal{G}_{n,m}$ αντιστοιχούμε την ακόλουθη διαφορική μορφή

$$\omega_\Gamma := \bigwedge_{e \in E_\Gamma} d\phi_e \quad (3.3)$$

Ορισμός 3.13. Το *integral weight* ενός γραφήματος $\Gamma \in \mathcal{G}_{n,m}$, εν συντομία $\mathcal{W}_\Gamma$ ορίζεται ως

$$\mathcal{W}_\Gamma = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(\#Star(k))!} \frac{1}{(2\pi)^{2n+m-2}} \int_{\overline{C}_{n,m}^+} \omega_\Gamma$$

όπου $Star(k) = \{(v_1, v_2) \in E_\Gamma : v_1 = k\}$.

Παρατηρήσεις 3.14. α') Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο $\mathcal{W}_\Gamma$ είναι καλά ορισμένο επειδή η ολοκλήρωση γίνεται πάνω σε μια συμπαγής και ομαλή πολλαπλότητα με corners ¹¹.

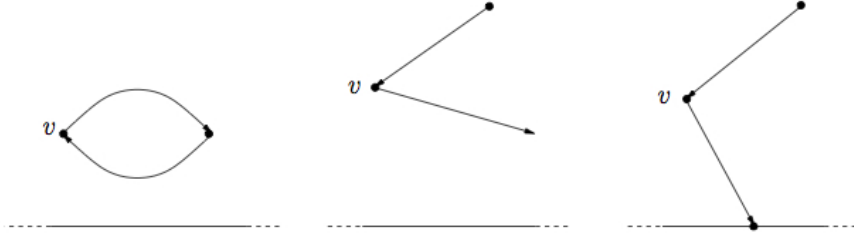
β') Κάθε γράφημα $\Gamma \in \mathcal{G}_{n,m}$ έχει $2n + m - 2$ ακμές, το οποίο σημαίνει η διαφορική μορφή ω_Γ είναι of top degree, και επομένως το $\mathcal{W}_\Gamma$ είναι μη-τετριμμένο και παίρνει πραγματικές τιμές.

Στις περιπτώσεις όπου τα integral weights μηδενίζονται, παίζουν σημαντικό ρόλο στην Κβαντοποίηση με παραμόρφωση των πολλαπλοτήτων Poisson. Για το λόγο αυτό, διατυπώνουμε τα ακόλουθα λήμματα μηδενισμού, των οποίων οι αποδείξεις βρίσκονται στα [5], [19].

Λήμμα 3.15. Για $\Gamma \in \mathcal{G}_{n,m}$ και v κορυφή πρώτου τύπου με ακριβώς μια εισερχόμενη και μια εξερχόμενη ακμή, το integral weight $\mathcal{W}_\Gamma$ που αντιστοιχεί στο Γ μηδενίζεται.

Πιο συγκεκριμένα, η αρχή της εισερχόμενης κορυφής πρέπει να είναι πρώτου τύπου, ενώ το πέρας της εξερχόμενης κορυφής μπορεί να είναι είτε πρώτου είτε δεύτερου τύπου.

¹¹Μια προσανατολισμένη πολλαπλότητα με corners X διάστασης k είναι μια ομαλή πολλαπλότητα με την σύνηθες έννοια, της οποίας οι τοπικοί χάρτες είναι αμφιδιαφορίσιμοι με σύνολα της μορφής $U_{n,m} = \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m, n + m = k$ όπου $\mathbb{R}_+ = \{x \geq 0\}$.



Λήμμα 3.16. Για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 3$, το ολοκλήρωμα πάνω από το $\overline{C}_n$, του σφηνοειδούς γινομένου από $2n - 3$ -μορφές της μορφής $d(\arg(z_i - z_j))$, $i \neq j$, μηδενίζεται.

Θεώρημα 3.17 (Kontsevich [19]). Έστω X μια ομαλή πολλαπλότητα και Π ένα Poisson δι-διανυσματικό πεδίο X . Τότε, ο τελεστής

$$f \star_K g = f \cdot g + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_{n,2}} \mathcal{W}_{\Gamma} B_{\Gamma}^{\Pi}(f, g) \right) \hbar^n \quad (3.4)$$

είναι ένα προσεταιριστικό star-γινόμενο σε μια πολλαπλότητα Poisson (X, Π) , όπου $f, g \in C^{\infty}(X)$.

4 Ο Duflo-Kontsevich ισομορφισμός

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε αρχικά τον αρχικό ισομορφισμό του Duflo και στην συνέχεια ορίζουμε τον ισομορφισμό του Kontsevich από τον χώρο των αναλλοίωτων πολυωνύμων πάνω στην $\mathfrak{g}^*$ στο κέντρο της αντίστοιχης universal enveloping άλγεβρας. Στο τελευταίο κομμάτι αυτής της παραγράφου, αποδεικνύουμε ότι οι δύο ισομορφισμοί ταυτίζονται. Η περιγραφή ακολουθεί κατά βάση τις αναφορές [19] και [5]. Τα σχήματα της §4.4 είναι από το [19] και έχουν ξανα-σχεδιαστεί με το υπολογιστικό πρόγραμμα GeoGebra.

4.1 Ο ισομορφισμός Duflo

Έστω $\mathfrak{g}$ μια πεπερασμένης διάστασης πραγματική άλγεβρα Lie. Υπενθυμίζουμε, ότι η απεικόνιση $Sym : S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ η οποία διαβάζει

$$x_1 \cdots x_n \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων (από το θεώρημα PBW) η οποία επάγει ισομορφισμό μεταξύ βαθμωτών αλγεβρών. Όμως δεν είναι ισομορφισμός αλγεβρών. Από τα αποτελέσματα του Harish-Chandra [12] έχουμε ότι στην περίπτωση απλών αλγεβρών Lie, τα αναλλοίωτα στοιχεία της $S(\mathfrak{g})$ και της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ υπό την adjoint δράση της $\mathfrak{g}$, εν συντομία $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ και $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ αντίστοιχα είναι ισόμορφα. Αργότερα, ο M. Duflo [17] απέδειξε ότι συνθέτοντας την απεικόνιση symmetrization με μια πολύ συγκεκριμένη απεικόνιση, προκύπτει ένας ισομορφισμός μεταξύ των αλγεβρών $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ και $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ για κάθε πεπερασμένης διάστασης πραγματική άλγεβρα Lie. Για να διατυπώσουμε τον ισομορφισμό του Duflo, πρέπει να φιξάρουμε ένα κατάλληλο συμβολισμό.

Υπενθυμίζουμε, ότι για κάθε πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$, η συμμετρική της άλγεβρα $S(\mathfrak{g})$ ταυτίζεται με τον δαχτύλιο των πολυωνύμων σε n -μεταβλητές υπεράνω του $\mathbb{R}$ δηλαδή $\mathbb{R}[p_1, p_2, \dots, p_n]$. Επίσης, συμβολίζουμε με $S[[\mathfrak{g}^*]]$ την άλγεβρα των τυπικών δυναμοσειρών στα στοιχεία της $\mathfrak{g}^*$ εν συντομία $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$. Είναι βοηθητικό να θεωρήσουμε τα στοιχεία της $S[[\mathfrak{g}^*]]$ ως άπειρης τάξης διαφορικούς τελεστές με σταθερούς συντελεστές οι οποίοι δρουν στην $S(\mathfrak{g})$. Εν γένει, για ένα πολυώνυμο στην $\mathbb{R}[p_1, \dots, p_n]$, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε μεταβλητή p_i του πολυωνύμου ένα διαφορικό ως εξής

$$p_i \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Για παράδειγμα, για μια μεταβλητή (δηλαδή $n = 1$) και ένα πολυώνυμο P σε μια μεταβλητή p , αντιστοιχίζεται ο ακόλουθος διαφορικός τελεστής

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k + \cdots \\ &\mapsto \partial_P = a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + \cdots + a_k \frac{d^k}{dx^k} + \cdots \in S[[\mathfrak{g}^*]] \end{aligned}$$

Στο [17], ο M. Duflo απέδειξε ότι από τη σύνθεση της symmetrization απεικόνισης (που επάγει ισομορφισμό διανυσματικών χώρων και βαθμωτών αλγεβρών) με ένα συγκεκριμένο διαφορικό τελεστή της $S[[\mathfrak{g}^*]]$ προκύπτει μια απεικόνιση μεταξύ της $S(\mathfrak{g})$ και $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ της οποίας ο περιορισμός στις άλγεβρες $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ και $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ είναι ισομορφισμός μεταθετικών αλγεβρών. Ο διαφορικός τελεστής αυτός, είναι γνωστός στην βιβλιογραφία ως στοιχείο *Duflo* και ορίζεται ως εξής

Ορισμός 4.1. Το στοιχείο *Duflo* J είναι ένας διαφορικός τελεστής στην $S[[\mathfrak{g}^*]]$ ο οποίος ορίζεται ως

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{g}}(x) &= \det_{\mathfrak{g}} \left(\frac{1 - e^{-ad_x}}{ad_x} \right) \\ &= \exp \left(-\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}} \frac{ad_x}{2} \right) \det_{\mathfrak{g}} \left(\frac{\sinh(ad_{\frac{x}{2}})}{\frac{ad_x}{2}} \right) \end{aligned}$$

για $x \in \mathfrak{g}$.

Πιο συγκεκριμένα, χρειαζόμαστε την τετραγωνική ρίζα του στοιχείου Duflo και πιο συγκεκριμένα την ακόλουθη έκφραση σε δυναμοσειρά

$$\begin{aligned} J^{\frac{1}{2}}(x) &= \left(\det \left(\frac{e^{ad_x} - 1}{ad_x} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}(ad_x) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k \cdot k!} \operatorname{tr}(ad_x^k) \right) \in S[[\mathfrak{g}^*]] \end{aligned}$$

όπου B_k είναι οι αριθμοί *Bernoulli*¹². Εν γένει, ο όρος $c_k := \operatorname{tr}(ad^k)$ $k \geq 1$ είναι ένα στοιχείο της $S(\mathfrak{g}^*)$ το οποίο είναι $\mathfrak{g}$ -αναλλοίωτο (για λεπτομέρειες δες το [5] σελ.3).

Θεώρημα 4.2 (Duflo [17]). Για κάθε πεπερασμένης διάστασης πραγματική άλγεβρα Lie, η απεικόνιση $Sym \circ J^{\frac{1}{2}} : S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ είναι ένας ισομορφισμός $\mathfrak{g}$ -προτύπων, η οποία ορίζει έναν ισομορφισμό μεταθετικών αλγεβρών όταν περιορίζεται στα ad -αναλλοίωτα στοιχεία. Με άλλα λόγια,

$$(S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \simeq \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \quad (4.1)$$

Η απόδειξη που προτάθηκε από τον M.Duflo κάνει χρήση της Orbit method όπως προτάθηκε από τον A.A. Kirillov στο [4] η οποία βασίζεται στην δομή των αλγεβρών Lie. Ο σκοπός του συγγραφέα για το υπόλοιπο της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει, όσο το δυνατόν διαυγέστερα, τον ισομορφισμό του Kontsevich μεταξύ των αναλλοίωτων στοιχείων της $S(\mathfrak{g})$ και της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ όπως διατυπώθηκε στο [19].

¹²Οι αριθμοί *Bernoulli* ορίζονται από την γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{t}{1 - e^{-t}} = 1 + \frac{t}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

Πιο συγκεκριμένα, οι πρώτοι αριθμοί είναι οι $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$ και $B_{2k+1} = 0$ για $k \geq 1$.

4.2 Κβαντοποίηση με παραμόρφωση της $\mathfrak{g}^*$

Έστω $\mathfrak{g}$ μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα Lie πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών. Φιξάρουμε μια βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ της $\mathfrak{g}$ και έστω c_{ij}^k να είναι οι σταθερές δομής της $\mathfrak{g}$ δηλαδή $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k$. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{g}^*$ την δυική άλγεβρα Lie της $\mathfrak{g}$ και υπενθυμίζουμε την κατασκευή του Kirillov-Poisson bracket. Έστω ϕ, ψ να είναι δύο ομαλές συναρτήσεις πάνω στην $\mathfrak{g}^*$ (αντ. $\phi, \psi \in \mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]$) και έστω $p \in \mathfrak{g}^*$. Τότε, τα γραμμικά συναρτησοειδή $d_p\phi$ και $d_p\psi$ ορίζονται ως

$$T_p\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Με άλλα λόγια, τα $d_p\phi, d_p\psi$ είναι στοιχεία της $(\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$ αφού η $\mathfrak{g}$ είναι πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα Lie. Το Kirillov-Poisson bracket στην $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ ορίζεται ως

$$(f, g) \mapsto \{f, g\}(p) = \langle p, [df|_p, dg|_p] \rangle$$

το οποίο σημαίνει, ότι θεωρούμε αρχικά τα γραμμικά συναρτησοειδή $d_p\phi, d_p\psi$ τα οποία είναι στοιχεία της $\mathfrak{g}$ και υπολογίζουμε το Lie bracket αυτών. Στην συνέχεια, υπολογίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές (δηλαδή $[d_p\phi, d_p\psi]$) στο $p \in \mathfrak{g}^*$.

Θεώρημα 4.3 (Kontsevich [19]). Η κβαντοποίηση με παραμόρφωση της $\mathfrak{g}^*$ είναι ισόμορφη με μια οικογένεια από καθολικές περιβάλλουσες άλγεβρες $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ εφοδιασμένες με το bracket $\hbar[\cdot, \cdot]$. Πιο συγκεκριμένα, για $\hbar = 1$,

$$(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \cdot) \xrightarrow{\sim} (S(\mathfrak{g}), \star)$$

Απόδειξη. Αρχικά, από την κατασκευή του Kontsevich ενός κανονικού star-γινόμενου στην άλγεβρα των συναρτήσεων μιας τυχαίας πολλαπλότητας Poisson, προκύπτει ότι έχουμε ένα star-γινόμενο στις $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ δηλαδή ένα προσεταιριστικό, $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -γραμμικό γινόμενο στις $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\hbar]]$.

Έστω $S(\mathfrak{g})$ η συμμετρική άλγεβρα της $\mathfrak{g}$, η οποία ταυτίζεται με τον δακτύλιο $\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]$ των πολυωνυμικών συναρτήσεων πάνω στην $\mathfrak{g}^*$. Η άλγεβρα $S(\mathfrak{g})$ είναι μια υπάλγεβρα της $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Θεωρούμε τώρα την άλγεβρα $S(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ των πολυωνύμων στη μεταβλητή $\hbar$ των οποίων οι συντελεστές είναι επίσης πολυώνυμα πάνω στην $\mathfrak{g}^*$. Επίσης, η $(S(\mathfrak{g})[[\hbar]], \star)$ είναι μια υπάλγεβρα της $(C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\hbar]], \star)$ επειδή το άθροισμα και το $\star$ -γινόμενο δύο πολυωνύμων στην $S(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ είναι και πάλι ένα στοιχείο της $S(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Πιο συγκεκριμένα, το $\star$ -γινόμενο δύο πολυωνύμων $P, Q \in S(\mathfrak{g}) \subseteq S(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ τάξης k, l αντίστοιχα, διαβάζει

$$P \star Q := P \cdot Q + \frac{1}{2}[P, Q]\hbar + \mathcal{W}_2 B_2(P, Q)\hbar^2 + \dots$$

όπου ο πρώτος όρος είναι ένα πολυώνυμο τάξης $k + l$ (το στάνταρ μεταθετικό γινόμενο στην $S(\mathfrak{g})$). Ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στον δι-διαφορικό τελεστής ο οποίος προκύπτει από το admissible γράφημα $\mathcal{G}_{1,2}$, όπου στην κορυφή of type I έχουμε βάλει το Lie bracket της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$, και στις κορυφές of type II, τα πολυώνυμα P, Q αντίστοιχα.

Οι συντελεστές $\frac{1}{2}$ οι οποίοι εμφανίζονται μπροστά από το bracket είναι το βάρος τους γραφήματος $\mathcal{G}_{1,2}$.¹³ Οι συντελεστές των όρων μεγαλύτερης τάξης, δηλαδή $B_i(P, Q)$ και $\mathcal{W}_i$ για $i \geq 2$,

¹³τα βάρη των γραφημάτων της μορφής $\mathcal{G}_{1,m}$ ισούνται με $\frac{1}{m!}$ δεξ και [5] σελ.72

είναι δι-διαφορικοί τελεστές οι οποίοι δρουν στα P, Q και τα αντίστοιχα βάρη τους τα οποία αντιστοιχούν σε admissible γραφήματα $\mathcal{G}_{n,2}$ $n \geq 2$.

Στις κορυφές of type I (αντ. στις κορυφές of type II) των γραφημάτων $\mathcal{G}_{n,2}$ $n \geq 2$ έχουμε βάλει αντίγραφα από το Lie bracket της $\mathfrak{g}$ (αντ. των πολυωνύμων P, Q). Όμως, το $B_i(P, Q)$ συμβολίζει την δράση του δι-διαφορικού τελεστή B_i (ο οποίος αντιστοιχεί στο admissible γράφημα $\mathcal{G}_{n,2}$ και κατασκευάστηκε με την χρήση του Lie bracket) στα πολυώνυμα P, Q , το αποτέλεσμα θα είναι πάλι ένα πολυώνυμο το οποίο θα έχει τάξη $m \leq k + l$ επειδή το Lie bracket μειώνει την τάξη. Επομένως, έχουμε ένα star-γινόμενο στην $S(\mathfrak{g})$.

Η καθολική ιδιότητα της universal enveloping άλγεβρας $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (δες και [2] σελ. 2) περιγράφεται ως εξής: θεωρούμε την απεικόνιση $i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ η οποία είναι η σύνθεση της ένθεσης $j : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ με την φυσική προβολή $pr : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Φιξάρουμε μια προσεταιριστική άλγεβρα $\mathcal{A}$, και έστω $Lie(\mathcal{A})$ είναι η άλγεβρα $\mathcal{A}$ εφοδιασμένη με το Lie bracket $[a, b]_{\mathcal{A}} = ab - ba$. Επομένως η $\mathcal{A}$ μπορεί να θεωρηθεί ως Lie άλγεβρα. Τότε, για κάθε ομορφισμό Lie αλγεβρών $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{A}$, υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός προσεταιριστικών αλγεβρών $g : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}$ ο οποίος κάνει το επόμενο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{i} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & \mathcal{A} \end{array}$$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία στην περίπτωση που $\mathcal{A} = (S(\mathfrak{g}), \star)$ και για $\hbar = 1$. Το αντίστοιχο Lie bracket στην $(S(\mathfrak{g}), \star)$ για δύο πολυώνυμα φορ τωο πολψνομιαλς $P, Q \in (S(\mathfrak{g}), \star)$ ορίζεται ως

$$[P, Q]_{\star} := P \star Q - Q \star P \quad (4.2)$$

Θεωρούμε δύο πολυώνυμα P, Q τάξης 1, με άλλα λόγια $P = \gamma_1$ και $Q = \gamma_2$ για $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{g}$, τότε

$$[\gamma_1, \gamma_2]_{\star} := \gamma_1 \star \gamma_2 - \gamma_2 \star \gamma_1 = [\gamma_1, \gamma_2]$$

Πράγματι, από τον ορισμό του star-γινόμενου στην $S(\mathfrak{g})$ έχουμε

$$\gamma_1 \star \gamma_2 = \gamma_1 \cdot \gamma_2 + \frac{1}{2}[\gamma_1, \gamma_2] + \dots$$

Όμως, οι όροι τάξης ≥ 2 μηδενίζονται, επειδή οι διαφορικοί τελεστές οι οποίοι εμφανίζονται στην formula του star-γινόμενου θα δρουν ως παράγωγοι 2ης τάξης στα γ_1, γ_2 , και άρα όλοι αυτοί οι όροι θα μηδενίζονται. Με άλλα λόγια

$$\gamma_1 \star \gamma_2 = \gamma_1 \cdot \gamma_2 + \frac{1}{2}[\gamma_1, \gamma_2]$$

Αφού το standard-γινόμενο $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ είναι μεταθετικό και το Lie bracket αντισυμμετρικό, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
[\gamma_1, \gamma_2]_\star &= \gamma_1 \star \gamma_2 - \gamma_2 \star \gamma_1 \\
&= \left(\gamma_1 \cdot \gamma_2 + \frac{1}{2}[\gamma_1, \gamma_2] \right) - \left(\gamma_2 \cdot \gamma_1 + \frac{1}{2}[\gamma_2, \gamma_1] \right) \\
&= \frac{1}{2}[\gamma_1, \gamma_2] - \frac{1}{2}[\gamma_2, \gamma_1] \\
&= \frac{1}{2}[\gamma_1, \gamma_2] + \frac{1}{2}[\gamma_1, \gamma_2] \\
&= [\gamma_1, \gamma_2]
\end{aligned}$$

Επομένως, από την καθολική ιδιότητα της καθολικής περιβάλλουσας άλγεβρας $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, υπάρχει ένας και μόνο ένας ομομορφισμός προσεταιριστικών αλγεβρών

$$I_{alg} : (\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \cdot) \rightarrow (S(\mathfrak{g}), \star)$$

ο οποίος διαβάζει $\gamma \mapsto I_{alg}(\gamma) = \gamma$ για κάθε $\gamma \in \mathfrak{g}$. Από το θεώρημα Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW), και η $S(\mathfrak{g})$ αλλά και η $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ έχουν την ίδια διάσταση ως διανυσματικοί χώροι. Συνδιάζοντας όλα τα παραπάνω, ο ομομορφισμός I_{alg} είναι ένας ισομορφισμός προσεταιριστικών αλγεβρών. Επαναφέροντας την μεταβλητή $\hbar$, η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Πόρισμα 4.4. Η άλγεβρα $S(\mathfrak{g})^\natural$ των $\mathfrak{g}$ -αναλλοίωτων πολυωνύμων πάνω στην $\mathfrak{g}^*$ είναι ισόμορφη με κανονικό τρόπο με την $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ το κέντρο της universal enveloping άλγεβρας της $\mathfrak{g}$.

Θα σχηματίσουμε την ιδέα της απόδειξης ενώ η πλήρης απόδειξη της 4.4 δίνεται στο [19] σελ. 48. Από το Θεώρημα Τυπικότητας 2.34 για την πολλαπλότητα Poisson $X = \mathfrak{g}^*$ (εφοδιασμένη με το Kirillov-Poisson bracket), η πρώτη συνιστώσα της απεικόνισης του Θεωρήματος Τυπικότητας, είναι η $\mathcal{U}_1 : \mathcal{T}_{poly}(\mathfrak{g}^*) \rightarrow \mathcal{D}_{poly}(\mathfrak{g}^*)$ και από τον ορισμό 2.31, έχουμε ότι επάγεται ένας ισομορφισμός αλγεβρών μεταξύ των

$$H^\bullet(\mathfrak{g}, S(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\sim} HH^\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

Όμως, 0-νική ομάδα συνομολογίας του Hochschild συμπλόκου της άλγεβρας $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ είναι

$$HH^0(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

δηλαδή το κέντρο της universal enveloping άλγεβρας της $\mathfrak{g}$. Με άλλα λόγια, οι αριστερά και δεξιά αναλλοίωτοι διαφορικοί τελεστές. Με τον ίδιο τρόπο, η 0-νική ομάδα συνομολογίας του Chevalley-Eilenberg συμπλόκου της άλγεβρας $S(\mathfrak{g})$ είναι τα αριστερά και δεξιά αναλλοίωτα πολυώνυμα, υπό την adjoint δράση της $\mathfrak{g}$ στην $S(\mathfrak{g})$ δηλαδή

$$H^0(\mathfrak{g}, S(\mathfrak{g})) = S(\mathfrak{g})^\natural$$

Επομένως, στην τάξη 0 έχουμε τον ακόλουθο ισομορφισμό αλγεβρών

$$S(\mathfrak{g})^\natural \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

4.3 Ο ισομορφισμός του Kontsevich

Από την παραπάνω συζήτηση, για $\hbar = 1$ έχουμε ότι η απεικόνιση $I_{alg} : (\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \cdot) \rightarrow (S(\mathfrak{g}), \star)$ είναι ισομορφισμός αλγεβρών. Επίσης, συμβολίζουμε με I_{PBW} την symmetrization απεικόνιση η οποία είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων από το θεώρημα Poincaré-Birkhoff-Witt. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι η $I_{PBW} : S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ορίζεται ως

$$x_1 \cdots x_n \rightarrow \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

και είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Στην συνέχεια, θα συμβολίζουμε με I_T την απεικόνιση η οποία απεικονίζει τα στοιχεία της $\mathcal{T}_{poly}^0(\mathfrak{g}^*)$ σε 0-cochain του Hochschild συμπλόκου της άλγεβρας $(S(\mathfrak{g}), \star)$, δηλαδή

$$I_T : \mathcal{T}_{poly}^0(\mathfrak{g}^*) \rightarrow \mathcal{D}_{poly}^0((S(\mathfrak{g}), \star)) \quad (4.3)$$

Αφού, $\mathcal{T}_{poly}^0(\mathfrak{g}^*) = \Gamma(\mathfrak{g}^*, T\mathfrak{g}^*) = S(\mathfrak{g})$ παρατηρούμε ότι η I_T απεικονίζει ένα στοιχείο της $S(\mathfrak{g})$ σε ένα διαφορικό τελεστή της $S(\mathfrak{g})$. Θεωρώντας την $S(\mathfrak{g})$ ως διανυσματικό χώρο (χωρίς αλγεβρική δομή), τότε

$$I_T : S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})$$

είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, της οποίας ο περιορισμός στα $ad(\mathfrak{g})^*$ -αναλλοίωτα πολυώνυμα της $\mathfrak{g}^*$ είναι ισομορφισμός αλγεβρών δηλαδή

$$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(S(\mathfrak{g}), \star)$$

Αυτό ισχύει επειδή τα στοιχεία της $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ είναι τα αναλλοίωτα πολυώνυμα, και τα στοιχεία της $\mathcal{Z}(S(\mathfrak{g}), \star)$ είναι οι αριστερά και δεξιά αναλλοίωτοι διαφορικοί τελεστές της $(S(\mathfrak{g}), \star)$. Επομένως, και από τις δύο πλευρές έχουμε μεταθετικές άλγεβρες και οι διαφορικοί τελεστές μετατίθενται με την δράση.

Θεώρημα 4.5 (Kontsevich [19]). Η απεικόνιση $I_{alg}^{-1} \circ I_T : S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ όταν περιοριστεί στους $ad(\mathfrak{g})$ -αναλλοίωτους υπόχωρους

$$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

είναι ισομορφισμός αλγεβρών.

Απόδειξη. Από τα παραπάνω, έχουμε την ακόλουθη ακολουθία ισομορφισμών μεταξύ διανυσματικών χώρων

$$S(\mathfrak{g}) \xrightarrow{I_T} S(\mathfrak{g}) \xleftarrow{I_{alg}} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xleftarrow{Sym} S(\mathfrak{g})$$

Όλοι οι ισομορφισμοί, είναι $ad(\mathfrak{g})$ -αναλλοίωτοι το οποίο σημαίνει ότι κάθε 'τετράγωνο' του επόμενου διαγράμματος μετατίθεται,

$$\begin{array}{ccccccc}
S(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{I_T} & S(\mathfrak{g}) & \xleftarrow{I_{alg}} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \xleftarrow{I_{PBW}} & S(\mathfrak{g}) \\
\downarrow ad_x & & \downarrow ad_x & & \downarrow ad_x & & \downarrow ad_x \\
S(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{I_T} & S(\mathfrak{g}) & \xleftarrow{I_{alg}} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \xleftarrow{I_{PBW}} & S(\mathfrak{g})
\end{array}$$

όπου $ad_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ συμβολίζεται η adjoint απεικόνιση για $x \in \mathfrak{g}$, η οποία έχει επεκταθεί στην $S(\mathfrak{g})$ και την $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Τότε, από τον περιορισμό στους $ad(\mathfrak{g})$ -αναλλοίωτους υπόχωρους έχουμε την ακόλουθη ακολουθία απεικονίσεων

$$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{I_T|...} \mathcal{Z}(S(\mathfrak{g}), \star) \xleftarrow{I_{alg}|...} \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \xleftarrow{I_{PBW}|...} S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \quad (4.4)$$

όπου το σύμβολο $|...$ συμβολίζει τον περιορισμό στους $ad(\mathfrak{g})$ -αναλλοίωτους υπόχωρους. Στην 4.4 μόνο τα δύο πρώτα βέλη είναι ισομορφισμοί αλγεβρών και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

4.4 Ο ισομορφισμός του Duflo και ο ισομορφισμός του Kontsevich ταυτίζονται.

Για να αποδείξουμε ότι ο ισομορφισμός του Duflo και ο ισομορφισμός του Kontsevich ταυτίζονται, χρειαζόμαστε την επόμενη έκφραση σε τυπικές δυναμοσειρές των αυτομορφισμών I_T και $I_{alg} \circ I_{PBW}$ του διανυσματικού χώρου $S(\mathfrak{g})$.

Θεώρημα 4.6. Οι τελεστές I_T και $I_{alg} \circ I_{PBW}$ είναι αναλλοίωτοι ως προς τις μεταφορές και οι αντίστοιχες τυπικές δυναμοσειρές τους στο $0 \in \mathfrak{g}$ είναι οι $S_1(\gamma)$ και $S_2(\gamma)$ όπου

$$S_1(\gamma) = \exp\left(\sum_{k \geq 1} c_{2k}^{(1)} \text{tr}\left(ad(\gamma)^{2k}\right)\right), \quad S_2(\gamma) = \exp\left(\sum_{k \geq 1} c_{2k}^{(2)} \text{tr}\left(ad(\gamma)^{2k}\right)\right)$$

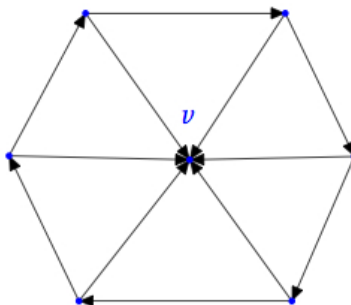
με $c_{2k}^{(1)}$ και $c_{2k}^{(2)}$ δύο άπειρες ακολουθίες από πραγματικούς αριθμούς με δείκτες άρτιους φυσικούς αριθμούς.

Η απόδειξη 4.6 βρίσκεται στο [19] σελ.49 Και στις δύο περιπτώσεις, η ιδέα της κατασκευής των τυπικών δυναμοσειρών αυτών, είναι να αθροίσουμε πάνω από όλα τα δυνατά admissible γραφήματα. Πιο συγκεκριμένα, για το τελεστή I_T τα γραφήματα τα οποία συμβάλλουν έχουν

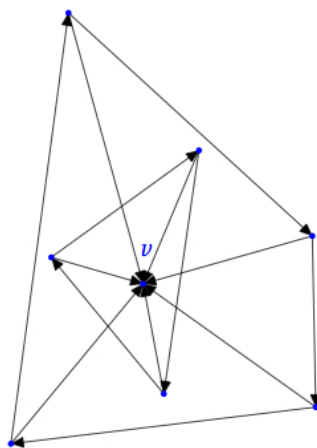
- $n + 1$ κορυφές of type I όπου η μια από αυτές, χαρακτηρίζεται ως 'special κορυφή' και συμβολίζεται με v .
- στην 'special κορυφή' v βάζουμε ένα στοιχείο της συμμετρικής άλγεβρας $S(\mathfrak{g})$ και στις υπόλοιπες n κορυφές, το Kirillov-Poisson δι-διανυσματικό πεδίο της $\mathfrak{g}^*$.

Αφού σε κάθε κορυφή (εκτός από τη special κορυφή v), έχουμε βάλει το Kirillov-Poisson bracket, τότε από κάθε τέτοια κορυφή, εξέρχονται ακριβώς 2 ακμές, και αποτελεί κορυφή άφιξης για μόνο μια κορυφή. Επίσης, από το 3.15 προκύπτει ότι δεν μπορούν να υπάρξουν γραφήματα

με ακριβώς μια εισερχόμενη και ακριβώς μια εξερχόμενη κορυφή. Επίσης, η 'special κορυφή' δέχεται μόνο ακμές αλλά δεν εξέρχεται καμιά ακμή από αυτήν. Επομένως, τα γραφήματα που συμβάλλουν είναι τα *wheels*¹⁴ (σχήμα 3) ή ένωση από wheels (σχήμα 4)



Σχήμα 3: Wheel



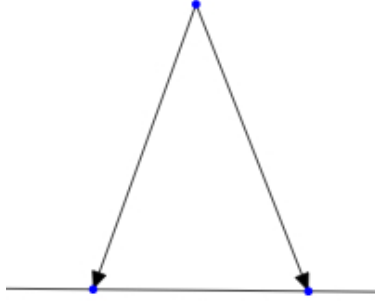
Σχήμα 4: Ένωση από wheels

Από την άλλη μεριά, τα γραφήματα που συμβάλλουν στην κατασκευή του τελεστή $I_{alg} \circ I_{PBW} : (S(\mathfrak{g}), \cdot) \rightarrow (S(\mathfrak{g}), \star)$ ο οποίος ορίζεται ως

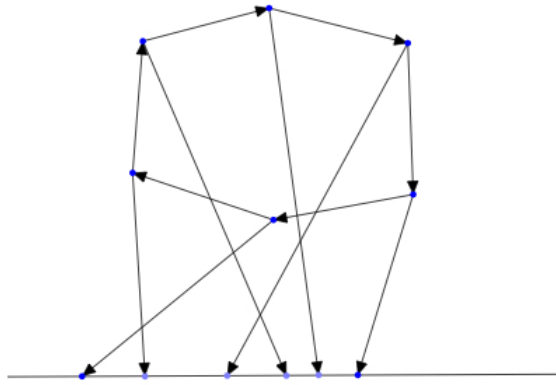
$$\gamma^n \mapsto \gamma \star \dots \star \gamma \quad (4.5)$$

είναι Λ -γραφήματα (σχήμα 5) και *wheels without axles* (σχήμα 6).

¹⁴Πιο συγκεκριμένα, τα wheels τα οποία παίρνουν μέρος στην κατασκευή του διαφορικού τελεστή, είναι αυτά που έχουν άρτιο αριθμό κορυφών συν την special κορυφή v . Ειδικά, το αντίστοιχο integral weight το οποίο αντιστοιχεί στο wheel με περιττό αριθμό κορυφών συν την special κορυφή v , μηδενίζεται (για περισσότερες λεπτομέρειες δες [5] σελ.73).



Σχήμα 5: Λ -γράφημα



Σχήμα 6: A wheel without axles

Παρατηρήσεις 4.7. Από αλγεβρικής σκοπιάς, τα στοιχεία $tr(ad(\gamma)^{2k})$ τα οποία εμφανίζονται και στους δύο τελεστές είναι το ίχνος του γινομένου πινάκων.

Πράγματι, έστω $\mathfrak{g}$ μια άλγεβρα Lie, $\{x_1, \dots, x_n\}$ μια βάση της $\mathfrak{g}$, και $\gamma \in \mathfrak{g}$. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην $ad(\gamma)$ είναι ο $n \times n$ πίνακας

$$ad(\gamma) = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

όπου $x_{ji} = \partial_{x_j}([\gamma, x_i])$ ¹⁵ Προφανώς,

¹⁵ Για κάθε $\gamma \in \mathfrak{g}$ και x_i στοιχείο της βάσης της $\mathfrak{g}$ το στοιχείο $[\gamma, x_i]$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των $\{x_1, \dots, x_n\}$. Επομένως, υπάρχουν συντελεστές $x_{ik} \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$ τέτοιοι ώστε $[\gamma, x_i] = \sum_{k=1}^n x_{ik} \cdot x_j$. Η ισότητα, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές x_{ik} : θεωρούμε ένα $1 \leq j \leq n$ και εφαρμόζουμε ∂_{x_j} και στις δύο πλευρές της ισότητας. Αφού, το ∂_{x_j} είναι γραμμικό, έχουμε $\partial_{x_j}(x_{ik}x_k) = x_{ik}\partial_{x_j}(x_k)$. Επίσης, $\partial_{x_j}(x_k) = \delta_{jk}$ (το δ_{jk} είναι το δέλτα του Kronecker). Επομένως, η ισότητα γίνεται $x_{ji} = \partial_{x_j}([\gamma, x_i])$.

$$tr(ad(\gamma)) = x_{11} + x_{22} + \dots + x_{nn}$$

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση $tr(ad(\gamma)^2)$. Με τον ίδιο τρόπο,

$$ad(\gamma)^2 = ad(\gamma) \cdot ad(\gamma) = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

και ως εκ τούτου $tr(ad(\gamma)^2)$ είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων

$$tr(ad(\gamma)^2) = \sum_{i=1}^n x_{ii}^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n x_{ij}x_{ji}$$

Με την ίδια μέθοδο, μπορεί να υπολογιστεί το $tr(ad(\gamma)^k)$ για $\gamma \in \mathfrak{g}$.

Θεώρημα 4.8 (Kontsevich [19]). Ο ισομορφισμός $I_{alg}^{-1} \circ I_T$ ταυτίζεται με τον ισομορφισμό $I_{PBW} \circ J^{\frac{1}{2}}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $I_{alg}^{-1} \circ I_T \neq Sym \circ J^{\frac{1}{2}}$. Και οι δύο απεικονίσεις ($I_{alg}^{-1} \circ I_T$ και $Sym \circ J^{\frac{1}{2}}$) ορίζονται στην $S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ και όπως έχει αποδειχθεί προηγουμένως ο περιορισμός τους στους $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ είναι ισομορφισμός αλγεβρών. Ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned} I_{alg}^{-1} \circ I_T \neq I_{PBW} \circ J^{\frac{1}{2}} &\Leftrightarrow I_{alg} \circ I_{alg}^{-1} \circ I_T \neq I_{alg} \circ I_{PBW} \circ J^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow I_T \neq I_{alg} \circ I_{PBW} \circ J^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow I_T \circ J^{-\frac{1}{2}} \neq I_{alg} \circ I_{PBW} \circ J^{\frac{1}{2}} \circ J^{-\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow I_T \circ J^{-\frac{1}{2}} \neq I_{alg} \circ I_{PBW} \end{aligned}$$

Επομένως, η διαφορά τους είναι ένας αυτομορφισμός της άλγεβρας $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ και η έκφραση αυτού του αυτομορφισμού σε μια μη-μηδενική τυπική δυναμοσειρά είναι της μορφής

$$Err(\gamma) = exp\left(c \cdot tr(ad(\gamma)^{2k}) + \dots\right) \neq 0$$

όπου c μια μηδενική σταθερά. Αφού, η απεικόνιση $exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$, επεκτείνεται στην $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών, το πολυώνυμο $\gamma \mapsto tr(ad(\gamma)^{2k})$ θα πρέπει να δρα ως παραγώγιση στην $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ για κάθε άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Όμως, θεωρούμε την περίπτωση της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ η οποία έχει βάση τα διανύσματα X, H, Y τέτοια ώστε

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H$$

και οι αντίστοιχοι πίνακες της adjoint αναπαράστασης σε κάθε διάνυσμα ορίζεται ως

$$adX = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad adH = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad adY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα. Επίσης, τα διανύσματα X, Y είναι μηδενοδύναμα τάξης 3, δηλαδή $ad(X)^n = ad(Y)^n = 0$ για $n \geq 3$ όπου $ad(X)^n$ (αντ. $ad(Y)^n$) ισούται με $adX \cdots adX$, n -φορές (αντ. $adY \cdots adY$, n -φορές), και για το διάνυσμα H ισχύει η σχέση

$$tr(ad(H)^{2n}) = 2^{2n+1}$$

Οι πρώτοι όροι είναι οι $tr(ad(H)^2) = 8 = 2^3$, $tr(ad(H)^3) = 0$, $tr(ad(H)^4) = 32 = 2^5$, για $n = 1, 2, 3$ αντίστοιχα. Τα αναλλοίωτα στοιχεία της συμμετρικής άλγεβρας $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, εν συντομία $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ είναι γραμμικοί συνδιασμοί των στοιχείων της μορφής $H^2 + 4XY$. Επομένως,

$$\begin{aligned} tr(ad^4)(H^2 + 4XY) &= tr(ad^4)(H^2) + tr(ad^4)(4XY) \\ &= tr(ad^4)(H \cdot H) + 4tr(ad^4)(XY) \\ &= H \cdot tr(ad(H)^4) + H \cdot tr(ad(H)^4) + 4Y \cdot tr(ad(X)^4) + 4X \cdot tr(ad(Y)^4) \\ &= 2H \cdot tr(ad(H)^4) + 0 + 0 \\ &= 2H \cdot 2^5 + 0 \notin S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \end{aligned}$$

Επομένως, η $tr(ad(\gamma)^{2k})$ δεν είναι παραγωγήιση στα αναλλοίωτα στοιχεία της $\mathfrak{sl}(2)$ η οποία αποδεικνύει ότι το πολυώνυμο που αντιστοιχεί στην $\gamma \mapsto tr(ad(\gamma)^{2k})$ δεν δρα ως παραγωγήιση σε κάθε άλγεβρα Lie. Επομένως, $Err = 0$, οπότε $I_{alg}^{-1} \circ I_T = I_{PBW} \circ J^{\frac{1}{2}}$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

□

A' Άλγεβρες Lie και ομάδες Lie

Ορισμός A'.1. Μια άλγεβρα Lie είναι ένας διανυσματικός χώρος $\mathfrak{g}$ με ένα πολλαπλασιασμό ο οποίος ονομάζεται αγκύλη Lie και συμβολίζεται ως $(x, y) \mapsto [x, y]$ τέτοια ώστε

- η απεικόνιση $(x, y) \mapsto [x, y]$ είναι διγραμμική;
- $[x, x] = 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{g}$;
- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ για κάθε $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Ορισμοί A'.2. Έστω $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ άλγεβρες Lie.

- Ένας ομομορφισμός της $\mathfrak{g}$ στην $\mathfrak{g}'$ είναι μια γραμμική απεικόνιση ϕ από την $\mathfrak{g}$ στη $\mathfrak{g}'$ τέτοια ώστε

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}$.

- Μια γραμμική απεικόνιση $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ τέτοια ώστε

$$D([x, y]) = [Dx, y] + [x, Dy]$$

για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}$ καλείται παραγωγή της $\mathfrak{g}$.

- Μια αναπαράσταση της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος V με μια απεικόνιση $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.
- Έστω V μια αναπαράσταση της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$. Ένα διάνυσμα $v \in V$ καλείται αναλλοίωτο αν $\rho(x)v = 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{g}$. Ο υπόχωρος των αναλλοίωτων στοιχείων της V συμβολίζεται με $V^{\mathfrak{g}}$.
- Το κέντρο της $\mathfrak{g}$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \left\{ x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g} \right\}$$

Πρόταση A'.3. Αν D είναι μια μηδενοδύναμη παραγωγή της $\mathfrak{g}$ (δηλαδή $D^k = 0$ για κάποιο $k > 0$), τότε η $\exp(D)$ είναι ένας αυτομορφισμός της $\mathfrak{g}$.

Απόδειξη. Για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
[\exp(D)(x), \exp(D)(y)] &= \left[\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} D^n(x), \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} D^m(y) \right] \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{n+m=k} \frac{1}{n!m!} [D^n(x), D^m(y)] \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D^k[x, y] \\
&= \exp(D)([x, y]).
\end{aligned}$$

□

Πρόταση Α'.4. Η απεικόνιση $ad_x \in \text{End} \mathfrak{g}$ είναι ένας ομομορφισμός της άλγεβρας Lie επί του εαυτού της, δηλαδή $[ad_x, ad_y] = ad_{[x, y]}$.

Απόδειξη. Για κάθε $x, y, z \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
[ad_x, ad_y](z) &= ad_x(ad_y(z)) - ad_y(ad_x(z)) \\
&= ad_x[y, z] - ad_y[x, z] \\
&= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\
&= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\
&= -[z, [x, y]] \\
&= [[x, y], z] \\
&= ad_{[x, y]}(z)
\end{aligned}$$

όπου στην πέμπτη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα Jacobi της αγκύλης Lie

□

B' Chevalley-Eilenberg συνομολογία

Στα επόμενα, αναφέρουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και σχετικές έννοιες σχετικά με το Chevalley-Eilenberg σύμπλοκο. Η παρουσίαση ακολουθεί το [5].

Ορισμός B'.1. Έστω V ένα $\mathfrak{g}$ -πρότυπο. Το *Chevalley-Eilenberg* σύμπλοκο είναι ο $\mathbb{N}$ -βαθμωτός διανυσματικός χώρος

$$CE^\bullet(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{n \geq 0} CE^n(\mathfrak{g}, V)$$

όπου $CE^n(\mathfrak{g}, V) = \bigwedge^n(\mathfrak{g})^* \otimes V$ είναι ο χώρος όλων των γραμμικών απεικονίσεων $\bigwedge^n(\mathfrak{g}) \rightarrow V$. Το *Chevalley-Eilenberg* διαφορικό d_{CE} ορίζεται ως

$$\begin{aligned} (d_{CE})(l)(x_0, \dots, x_n) &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} l([x_i, x_j], x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{i=0}^n (-1)^i x_i \cdot l(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

για $x_0, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$ και l ομογενές στοιχείο βαθμού n δηλαδή $l \in CE^n(\mathfrak{g}, V)$ το οποίο ικανοποιεί την σχέση $d_{CE}^2 = 0$.

Ορισμός B'.2. Η *Chevalley-Eilenberg* συνομολογία του Chevalley-Eilenberg συμπλόκου είναι ο βαθμωτός διανυσματικός χώρος $H_C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ όπου η n -οστή ομάδα συνομολογίας ορίζεται ως

$$H_C^n(\mathfrak{g}, V) = \frac{\ker\{d_{CE}^{n+1} : CE^n(\mathfrak{g}, V) \rightarrow CE^{n+1}(\mathfrak{g}, V)\}}{\operatorname{Im}\{d_{CE}^n : CE^n(\mathfrak{g}, V) \rightarrow CE^{n+1}(\mathfrak{g}, V)\}} \quad (\text{B'.1})$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ωιτη $d_{CE}^{-1} = 0$.

Παράδειγμα B'.3. Η 0-νική ομάδα συνομολογίας, $H_{CE}^0(\mathfrak{g}, V)$ ισούται με τον χώρο $V^\mathfrak{g}$ των $\mathfrak{g}$ -αναλλοίωτων στοιχείων του V .

Παρατηρήσεις B'.4. Στα επόμενα, κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με το $\cup$ -γινόμενο στην $CE^\bullet(\mathfrak{g}, V)$.

- Αν $V = A$ εφοδιασμένο με ένα $\mathfrak{g}$ -αναλλοίωτο γινόμενο, δηλαδή για κάθε $x \in \mathfrak{g}$ και κάθε $a, b \in A$ ισχύει

$$x \cdot (ab) = (x \cdot a)b + a(x \cdot b)$$

τότε η $CE^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ γίνεται μια βαθμωτή άλγεβρα με γινόμενο το $\cup$ -γινόμενο το οποίο ορίζεται ως εξής: για κάθε $a, b \in A$ και $\xi, \eta \in \bigwedge(\mathfrak{g})^*$ ισχύει

$$(\xi \otimes a) \cup (\eta \otimes b) = \xi \wedge \eta \otimes ab$$

- Ένας άλλος τρόπο να γραφεί το $\cup$ -γινόμενο είναι ο ακόλουθος

$$(l \cup l')(x_1, \dots, x_{m+n}) = \frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in S_{m+n}} (-1)^\sigma l(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) l'(x_{\sigma(m+1)}, \dots, x_{\sigma(m+n)})$$

για $l \in \bigwedge^m(\mathfrak{g})^* \otimes A$ και $l' \in \bigwedge^n(\mathfrak{g})^* \otimes A$.

- Το $\cup$ -γινόμενο είναι προσεταιριστικό και ικανοποιεί τα εξής

$$d_{CE}(l \cup l') = d_{CE}(l) \cup l' + (-1)^{|l|} l \cup d_{CE}(l')$$

Γ' Απειροστικές παραμορφώσεις προσεταιριστικών αλγεβρών

Στα ακόλουθα, συζητάμε για απειροστικές παραμορφώσεις (infinitesimal deformations) προσεταιριστικών αλγεβρών, και την σχέση τους με την Hochschild ομάδες συνομολογίας $HH^2(A)$ ανδ $HH^3(A)$. Ακολουθούμε πιστά το [5]

Ορισμοί Γ'.1. α') Μια απειροστική παραμόρφωση (infinitesimal deformation) της άλγεβρας A είναι προσεταιριστικό ϵ -γραμμικό γινόμενο $*$ στην $A[\epsilon]/\epsilon^2$ τέτοιο ώστε

$$a * b = a \cdot b \bmod \epsilon.$$

Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $a, b \in A$ έχουμε

$$a * b = ab + \mu(a, b)\epsilon \quad (\Gamma'.1)$$

με $\mu : A \otimes A \rightarrow A$.

β') Δύο απειροστικές παραμορφώσεις $*$ και $'$ της A λέγονται *ισοδύναμες* αν και μόνο αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $\phi : (A[\epsilon]/\epsilon^2, *) \rightarrow (A[\epsilon]/\epsilon^2, ')$ μεταξύ $\mathbb{K}[\epsilon]/\epsilon^2$ -αλγεβρών τέτοιος ώστε να υπάρχει απεικόνιση $l : A \rightarrow A$ τέτοια ώστε ο ισομορφισμός να γράφεται $a \mapsto \phi(a) = a + l(a)\epsilon$.

γ') Μια απειροστική παραμόρφωση τάξης n της A είναι ένα προσεταιριστικό ϵ -γραμμικό γινόμενο $*$ στην $A[\epsilon]/\epsilon^{n+1}$ τέτοιο ώστε $a * b = ab + \mu(a, b)\epsilon$. Πιο συγκεκριμένα, το γινόμενο διαβάζει

$$a * b = ab + \sum_{i=1}^n \mu_i(a, b)\epsilon \quad (\Gamma'.2)$$

όπου $\mu_i : A \otimes A \rightarrow A$.

Λήμμα Γ'.2. Η προσεταιριστικότητα του $*$ γινομένου κωδικοποιείται ως ότι η απεικόνιση μ είναι ένας δύο σύγκυκλος για την $HH^2(A)$.

Απόδειξη. Έστω $a, b, c \in A$. Έχουμε

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (ab + \epsilon\mu(a, b)) * c \\ &= (ab)c + \epsilon\mu(a, b)c + \epsilon\mu(ab, c) + \epsilon(\mu(\epsilon\mu(a, b), c)) \\ &= (ab)c + \epsilon\mu(a, b)c + \epsilon\mu(ab, c) + \epsilon^2(\mu(\mu(a, b), c)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (bc + \epsilon\mu(b, c)) \\ &= a(bc) + \epsilon\mu(b, c)a + \epsilon\mu(a, bc) + \epsilon\mu(a, \epsilon\mu(b, c)) \\ &= a(bc) + \epsilon\mu(b, c)a + \epsilon\mu(a, bc) + \epsilon^2\mu(a, \mu(b, c)) \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned}
(a * b) * c = a * (b * c) &\Leftrightarrow \mu(a, b)c + \mu(ab, c) = a\mu(b, c) + \mu(a, bc) \\
&\Leftrightarrow a\mu(b, c) - \mu(ab, c) + \mu(a, bc) - \mu(a, b)c = 0 \\
&\Leftrightarrow d_H(\mu)(a, b, c) = 0.
\end{aligned}$$

το οποίο είναι ακριβώς η ιδιότητα του 2-σύγκυκλου για την Hochschild συνομολογία. $\square$

Θεώρημα Γ'.3. Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ της $HH^2(A)$ και του χώρου των κλάσεων ισοδυναμίας των απειροστικών παραμορφώσεων της A .

Απόδειξη. Έστω $a, b \in A$ και $*$, $*$ ' δύο απειροστικές παραμορφώσεις της A τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned}
a * b &= ab + \epsilon\mu_1(a, b) \\
a *' b &= ab + \epsilon\mu_2(a, b)
\end{aligned}$$

όπου $\mu_1, \mu_2 : A \otimes A \rightarrow A$ είναι 2-σύγκυκλοι της συνομολογίας Hochschild. Από τον ορισμό των ισοδύναμων απειροστικών παραμορφώσεων, υπάρχει $l : A \rightarrow A$ τέτοιος ώστε ο ισομορφισμός απεικονίζει $a \mapsto a + l(a)\epsilon$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\phi(a *' b) &= \phi(ab + \mu_2(a, b)\epsilon) \\
&= \phi(ab) + \phi(\mu_2(a, b))\epsilon \\
&= ab + l(ab)\epsilon + \phi(\mu_2(a, b))\epsilon \\
&= ab + l(ab)\epsilon + \mu_2(a, b)\epsilon + l(\mu_2(a, b))\epsilon^2 \\
&= ab + (l(ab) + \mu_2(a, b))\epsilon + l(\mu_2(a, b))\epsilon^2 \\
&= ab + (l(ab) + \mu_2(a, b))\epsilon
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\phi(a) * \phi(b) &= (a + l(a)\epsilon) * (b + l(b)\epsilon) \\
&= (a + l(a)\epsilon)(b + l(b)\epsilon) + \mu_1((a + l(a)\epsilon), (b + l(b)\epsilon))\epsilon \\
&= ab + (al(b) + l(a)b)\epsilon + l(a)l(b)\epsilon^2 + \mu_1((a + l(a)\epsilon), (b + l(b)\epsilon)) \\
&= ab + (al(b) + l(a)b + \mu_1(a, b))\epsilon \\
&\quad + (l(a)l(b) + \mu_1(a, l(b)) + \mu_1(l(a), b) + \mu_1(l(a), l(b)))\epsilon^2 \\
&= ab + (al(b) + l(a)b + \mu_1(a, b))\epsilon
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις

$$\begin{aligned}
\phi(a *' b) = \phi(a) * \phi(b) &\Leftrightarrow \mu_2(a, b) + l(ab) = \mu_1(a, b) + al(b) + l(a)b \\
&\Leftrightarrow \mu_2(a, b) - \mu_1(a, b) = al(b) - l(ab) + l(a)b \\
&\Leftrightarrow \mu_2(a, b) - \mu_1(a, b) = d_H(l)(a, b)
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, δύο απειροστικές παραμορφώσεις είναι 2-σύγκυκλοι μ_1, μ_2 της συνομολογίας Hochschild είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν η μ_2 διαφέρει από την μ_1 κατά ένα coboundary, δηλαδή αν και μόνο αν $[\mu_1] = [\mu_2] \in HH^2(A)$. $\square$

Η σχέση με την $HH^3(A)$ περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα, του οποίου η απόδειξη δίνεται στο [5, §2.1]

Θεώρημα Γ'.4. Για κάθε n -παραμόρφωση $*$, η γραμμική απεικόνιση

$$v_{n+1}(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (\mu_i(\mu_{n+1-i}(a, b)c) - \mu_i(a, \mu_{n+1-i}(b, c)))$$

είναι ένας σύγκυκλος στο $C^3(A, A)$, δηλαδή $d_H(v+1) = 0$. Επιπροσθέτως, μια n -παραμόρφωση επεκτείνεται σε μια $(n+1)$ -παραμόρφωση αν και μόνο αν $[v_{n+1}] = 0$ στην $HH^3(A, A)$.

Πόρισμα Γ'.5. Τα μόνα εμπόδια για την επέκταση των απειροστικών παραμορφώσεων βρίσκονται στην $HH^3(A)$.

Anafor'es

- [1] A. Alekseev and E. Meinrenken. On the Kashiwara-Vergne conjecture. *Invent. Math.*, 2006.
- [2] A. Cannas da Silva and A. Weinstein. *Geometric models for noncommutative algebras*. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Berkeley, CA: Berkeley Center for Pure and Applied Mathematics, 1999.
- [3] A. S. Cattaneo. Formality and star products (lecture notes taken by D. Indelicato). In *Poisson geometry, deformation quantisation and group representations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [4] A.A. Kirillov. *The method of orbits in representation theory*. Lie Groups Represent., Proc. Summer Sch. Bolyai Janos math. Soc., Budapest 1971, 219-230 (1975)., 1975.
- [5] D. Calaque and C. A. Rossi. *Lectures on Duflo isomorphisms in Lie algebra and complex geometry*. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2011.
- [6] A. Cattaneo, B. Keller, C. Torossian, and A. Bruguières. *Déformation, quantification, théorie de Lie*. Paris: Société Mathématique de France, 2005.
- [7] D. Arnal and D. Manchon and M. Masmoudi. Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich. *Pac. J. Math.*, 2002.
- [8] D. S. Dummit and R. M. Foote. *Abstract algebra. 3rd ed.* Chichester: Wiley, 2004.
- [9] Eckhard Meinrenken. Lie groups and Lie algebras. Lecture Notes.
- [10] G. Hochschild. On the cohomology groups of an associative algebra. *Ann. Math. (2)*, 46, 1945.
- [11] G. Hochschild and Bertram Kostant and Alex Rosenberg. Differential forms on regular affine algebras. *Trans. Am. Math. Soc.*, 102, 1962.
- [12] Harish-Chandra. On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1951.
- [13] J. Dufour and N. T. Zung. *Poisson structures and their normal forms*. Basel: Birkhäuser, 2005.
- [14] J.-P. Serre. *Lie algebras and Lie groups. 1964 lectures given at Harvard University*. New York-Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc. (1965)., 1965.
- [15] Jacques Dixmier. Enveloping algebras. *Providence, RI: AMS, American Mathematical Society*, 1996.

- [16] M. Duflo. Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 1970.
- [17] M. Duflo. Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 1977.
- [18] M. Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. *Ann. Math. (2)*, 79(59–103), 1964.
- [19] M. Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 66(3), 2003.
- [20] M. Manetti. Deformation theory via differential graded Lie algebras. *Università degli Studi di Roma "La Sapienza", Dipartimento di Matematica, Roma; Istituto Nazionale di Alta Matematica Francesco Severi, Roma*, 1999.
- [21] Panagiotis Batakidis. *Déformation par Quantification et Théorie de Lie*. PhD thesis, Université Denis Diderot - Paris 7, 2009.