



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μεγιστοποίηση Χρησιμότητας Δικτύου

Κωνσταντίνος Δ. Κατσάνος

Επιβλέπων: Νικόλαος Καλουπτσίδης, Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2016

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μεγιστοποίηση Χρησιμότητας Δικτύου

Κωνσταντίνος Δ. Κατσάνος

A.M.: M1367

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Νικόλαος Καλουπτσίδης, Καθηγητής

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: Νικόλαος Κολοκοτρώνης, Επίκουρος Καθηγητής

Ιούλιος 2016

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Καθώς τα ασύρματα δίκτυα γίνονται στις μέρες μας όλο και πιο ετερογενή και αναγκαία στην καθημερινότητά μας, παρουσιάζονται παράλληλα όλο και μεγαλύτερες δυσκολίες στο σχεδιασμό και τη διαχείρισή τους. Αυτό έχει ως συνέπεια, τα σύγχρονα ασύρματα συστήματα να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην ποιότητα εξυπηρέτησής τους, λόγω της σταθερής κατανομής των πόρων που αποτυγχάνει να εξετάσει το ενδεχόμενο πιθανών παρεμβολών. Επομένως, ένα φλέγον θέμα της ασύρματης δικτύωσης είναι η βελτιστοποίηση της κατανομής των πόρων έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η χρησιμότητα του δικτύου και παράλληλα να διαχειρίζονται επιτυχώς οι παρεμβολές. Στην εργασία αυτή, μελετάται εκτενώς το πρόβλημα αυτό έτσι, ώστε να διερευνηθεί η διαδικασία με την οποία μπορεί να λυθεί. Παρότι το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί και στο παρελθόν και έχουν προταθεί λύσεις του, στην παρούσα εργασία γίνεται όχι μόνο μία επισκόπηση των παλαιότερων αυτών μεθόδων, αλλά και μία επανεκτίμηση του προβλήματος. Αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι η εφαρμογή νέων-σύγχρονων τεχνικών βελτιστοποίησης οι οποίες βασίζονται σε μία γενίκευση του Γεωμετρικού Προγραμματισμού: το Σιγμοειδή Προγραμματισμό. Επιπλέον, με τη χρήση νέων τεχνικών μη-γραμμικής κυρτής παλινδρόμησης, προκύπτει μέσα από παραδείγματα ότι το εν λόγω πρόβλημα δύναται να λυθεί βέλτιστα με την ανάλυση που γίνεται. Αυτό έχει βεβαίως σαν κατάληξη, η προταθείσα μέθοδος να είναι απλή στην εφαρμογή της, να σημειώνει βελτίωση συγκριτικά με παλαιότερες λύσεις και εν δυνάμει να αποδίδει μία σημαντική συνεισφορά στη λύση του αρχικού προβλήματος: τη μεγιστοποίηση χρησιμότητας δικτύου.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση σε Ασύρματα Δίκτυα

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: μεγιστοποίηση χρησιμότητας δικτύου, ασύρματα δίκτυα, μη-κυρτός προγραμματισμός, επεκτάσεις γεωμετρικού προγραμματισμού, σιγμοειδής προγραμματισμός

ABSTRACT

As wireless networks become nowadays increasingly heterogeneous and necessary, many difficulties in their planning and management arise. As a consequence, modern wireless systems have difficulties in Quality of Service (QoS), because stable distribution of resources fails to consider possible interference. Therefore, it is crucial to optimize the allocation of resources so as to maximize the utility of the network, while successfully managing interference. In this thesis, this problem is extensively studied so as to investigate the process by which it can be solved. Although this problem has been studied in the past and other solutions have been proposed, this work is not only an overview of these older methods, but also a reassessment of the problem. In our work, we apply new and modern optimization techniques based on a generalization of Geometric Programming: Signomial Programming. Furthermore, using new techniques of non-linear convex regression, we show that the problem can be solved optimally with this analysis. Concluding, the proposed method is simple to implement, has an improvement compared to past solutions and potentially yields a significant contribution to the solution of the original problem: network utility maximization.

SUBJECT AREA: Applied Optimization on Wireless Networks

KEYWORDS: network utility maximization, wireless networks, non-convex optimization, geometric programming extensions, signomial programming

Στην οικογένειά μου...

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Νικόλαο Καλουππίδη, όχι μόνο για την εμπιστοσύνη του να μου αναθέσει αυτήν την εργασία, αλλά κυρίως για τη μεγάλη στήριξή του. Τον ευχαριστώ ειλικρινά, για τις πολύτιμες γνώσεις και συμβουλές του που άντλησα καθ' όλο το διάστημα αυτής μου της προσπάθειας.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τον Αλέξανδρο, τον Κυριάκο, τον Κώστα και τον Νίκο, τον καθένα ιδιαιτέρως, για τις πολύτιμες υποδείξεις τους από την αρχή έως το πέρας της πραγματοποίησης αυτής της εργασίας.

Τέλος, από αυτήν την ενότητα δε θα μπορούσαν να λείπουν τα μέλη της οικογένειάς μου καθώς και οι φίλοι μου, καθένας από τους οποίους μου έχει σταθεί με το δικό του τρόπο, πρώτα και κύρια στις δύσκολες στιγμές μου, παρά τη χιλιομετρική απόσταση με κάποιους εξ αυτών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	11
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	12
1.1 Συναρτήσεις Χρησιμότητας και Περιορισμών σε ένα Δίκτυο	13
1.2 Έλεγχος Ισχύος Δικτύου	15
1.3 Έλεγχος Ισχύος και Μεγιστοποίηση Χρησιμότητας Δικτύου	15
1.3.1 Προσεγγίσεις Επίλυσης ΜΧΔ Προβλημάτων	15
1.4 Σκοπός και Δομή της Εργασίας	16
2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΔΙΚΤΥΟΥ	18
2.1 Διατύπωση Βασικών Εννοιών	18
2.2 Διατύπωση του Προβλήματος Βελτιστοποίησης	20
2.3 Διερεύνηση του Προβλήματος Βελτιστοποίησης	22
3. ΣΙΓΜΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ	28
3.1 Βασικά Στοιχεία Γεωμετρικού Προγραμματισμού	28
3.1.1 Μονώνυμα	28
3.1.2 Ποζυνώμια	29
3.1.3 Θεμελιώδης Μορφή Γεωμετρικού Προγραμματισμού	29
3.1.4 Επίλυση Γεωμετρικών Προβλημάτων	30
3.1.5 Γενικευμένος Γεωμετρικός Προγραμματισμός	31
3.2 Σιγμοειδής Προγραμματισμός	32
3.2.1 Σιγμοειδή Προβλήματα Βελτιστοποίησης	33
3.2.2 Επίλυση Σιγμοειδών Προβλημάτων	34
4. ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΕ ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ	38
4.1 Μέθοδοι Προσαρμογής Δεδομένων σε Κυρτές-Τμηματικά Γραμμικές Συναρτήσεις	38
4.1.1 Αλγόριθμος Επίλυσης Ελαχίστων Τετραγώνων	40
4.2 Μέθοδοι Προσαρμογής Δεδομένων σε Συναρτήσεις Συμβατές με τον Γεωμετρικό Προγραμματισμό	42
4.2.1 Softmax-Affine Συναρτήσεις	43
4.2.2 Implicit-Softmax-Affine Συναρτήσεις	44

5. ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΔΙΚΤΥΟΥ ΜΕ ΣΙΓΜΟΕΙΔΗ ΠΡΟΓΡΑΜ- ΜΑΤΙΣΜΟ	45
5.1 Προσέγγιση Αντικειμενικής Συνάρτησης	45
5.2 Προτεινόμενη Διαδικασία Βελτιστοποίησης	48
5.3 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων	50
5.3.1 Αριθμητικό Παράδειγμα	50
5.3.2 Σύγκριση Αποτελεσμάτων	50
6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ	52
6.1 Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις Μελέτης	52
6.2 Πιθανές Μελλοντικές Επεκτάσεις	53
6.2.1 Γνωστικά Δίκτυα Ραδιοεπικοινωνιών (Cognitive Radio Networks)	54
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	55
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	61

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1:	Σύγκριση της προσαρμογής δεδομένων με τις συναρτήσεις f_{MA} και f_{SMA} , με κριτήριο το RMS που επιτυγχάνεται στις δύο αυτές περιπτώσεις.	44
Σχήμα 2:	Γραφική απεικόνιση της αντικειμενικής συνάρτησης $f_0 = \sum_{k=1}^K w_k \log(1 + \gamma_k)$ για 2 χρήστες του δικτύου.	46
Σχήμα 3:	Γραφική απεικόνιση της αντικειμενικής συνάρτησης μετά από λογαριθμικό μετασχηματισμό.	46
Σχήμα 4:	Προσέγγιση της f_0 , του Σχήματος 2 από μία συνάρτηση τύπου SMA.	47
Σχήμα 5:	Απεικόνιση της συνάρτησης προς βελτιστοποίηση και των σημείων που αποτελούν τις λύσεις του αριθμητικού παραδείγματος (5.8).	51
Σχήμα 6:	Παραδείγματα κυρτών και μη-κυρτών συνόλων. <i>Αριστερά</i> : Το εξάγωνο αυτό αποτελεί κυρτό σύνολο καθώς πληροί τον παραπάνω ορισμό. <i>Μέση</i> : Μη-κυρτό σύνολο. <i>Δεξιά</i> : Το σύνολο αυτό περιέχει κάποια σημεία στο σύνορό του, ενώ κάποια άλλα όχι, επομένως είναι μη-κυρτό, [8].	55
Σχήμα 7:	Ιδιότητα κυρτότητας: Η χορδή που ενώνει δύο σημεία της γραφικής παράστασης της κυρτής συνάρτησης f , βρίσκεται πάντα άνωθεν της γραφικής παράστασης, [8].	56
Σχήμα 8:	Ιδιότητα κυρτότητας για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, [8].	56
Σχήμα 9:	Γεωμετρική ερμηνεία της συνθήκης (11), [8].	59

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1: Σύγκριση αποτελεσμάτων προτεινόμενης λύσης με άλλες υπάρχουσες τεχνικές	51
--	----

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εργασία αυτή είναι αποτέλεσμα πολύμηνης προσπάθειας, και πραγματοποιήθηκε κυρίως τους πρώτους μήνες του 2016. Σε αυτό το διάστημα, καλύφθηκαν σημαντικά κενά, αντλήθηκαν πολλές γνώσεις και αναγνώστηκε αρκετό υλικό κυρίως στην αγγλόφωνη γλώσσα. Πέρα από το βασικό σκοπό αυτής της εργασίας, που είναι να παρουσιάσει νέες τεχνικές επίλυσης του προβλήματος που πραγματεύεται, ο συγγραφέας φιλοδοξεί να συγκεντρώσει πληθώρα υλικού που αφορά στη συγκεκριμένη θεματολογία, ούτως ώστε μελλοντικά να αποτελεί μία όσο το δυνατόν πληρέστερη και συγκεντρωτική αναφορά επί του θέματος. Μία ακόμη φιλοδοξία είναι ότι η μελέτη αυτή έχει οργανωθεί έτσι, ώστε να είναι ευχάριστα αναγνώσιμη και τα θέματα που διακυβεύονται να έχουν μία λογική αλληλουχία μεταξύ τους. Επιπλέον, παρά την πληθώρα μαθηματικών εξισώσεων, έχει γίνει προσπάθεια ώστε να γίνεται αντιληπτό το νόημά τους μέσα από παραδείγματα, σχήματα και επεξηγήσεις, χωρίς να θυσιάζεται παράλληλα η μαθηματική αυστηρότητα.

Μία ακόμα επιθυμία του συγγραφέα είναι ο εμπλουτισμός της ελληνικής βιβλιογραφίας επί του θέματος που επιχειρείται να παρουσιαστεί στην παρούσα εργασία. Δυστυχώς, λόγω του γεγονότος ότι ζούμε σε μία εποχή κρίσης, οικονομικής αλλά και αξιών, οι νέοι επιστήμονες αναγκάζονται να προσφεύγουν στη μετανάστευση και να μένει πίσω ένα ακάλυπτο κενό στην ελληνική βιβλιογραφία. Ευτυχώς, το γεγονός αυτό δεν έχει επηρεάσει την ποιότητα της παιδείας στη χώρα μας και αυτό είναι ιδιαίτερα χαρμόσυνο και ελπιδοφόρο.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Καθώς τα ασύρματα δίκτυα βρίσκουν πλέον στις ημέρες μας όλο και περισσότερες εφαρμογές στην καθημερινότητά μας (όπως είναι για παράδειγμα οι εφαρμογές μετάδοσης ήχου, δεδομένων, οπτικό-ακουστικού υλικού), είναι φυσικό επόμενο ότι κάθε χρήστης ενός δικτύου έχει όλο και μεγαλύτερες απαιτήσεις στην ποιότητα εξυπηρέτησής του (Quality of Service - QoS). Λόγω της ευρείας εκπομπής στις ράδιο-συχνότητες οι ρυθμοί μετάδοσης δεδομένων και άλλων μετρικών (τύπου QoS) επηρεάζονται άμεσα από τις παρεμβολές που υπάρχουν όταν ένα δίκτυο συνίσταται από πολλούς χρήστες. Ο λόγος (του επιθυμητού) σήματος προς τις παρεμβολές (Signal to Interference Ratio - SIR) χρησιμοποιείται πολύ συχνά, ώστε να αποτυπώσει τις παρεμβολές που δέχεται κανείς τόσο από το ίδιο κανάλι επικοινωνίας, όσο και από γειτονικά κανάλια. Ο έλεγχος της ισχύος που κατανέμεται σε ένα δίκτυο έχει τη δυνατότητα, να ελέγχει με τη σειρά του, το SIR και κατά επέκταση να ελέγχει εμμέσως και την ποιότητα εξυπηρέτησης κάθε χρήστη. Έτσι, λοιπόν, η εκπεμπόμενη ισχύς στα ασύρματα δίκτυα, αποτελεί έναν ουσιώδη βαθμό ελευθερίας για τη διαχείριση των παρεμβολών, της ενέργειας και της συνδεσιμότητας μεταξύ των χρηστών σε ένα δίκτυο.

Το πρόβλημα του ελέγχου της κατανομής ισχύος σε ένα δίκτυο, αποτελεί μείζον θέμα μελέτης τις τελευταίες δεκαετίες και πολλά από τα αποτελέσματα που έχουν βρεθεί ανά καιρούς, έχουν προτρέψει τη συνεχή εξέλιξη στο χώρο των ψηφιακών επικοινωνιών, τόσο στο χώρο των κυψελωτών (cellular), όσο και στο χώρο των αυτο-οργανούμενων (ad hoc) δικτύων. Συγκεκριμένα, όσον αφορά τη διαχείριση των παρεμβολών, το προαναφερθέν πρόβλημα είναι ιδιαίτερα σημαντικό να λυθεί στην περίπτωση των CDMA (code division multiple access) συστημάτων, στα οποία είναι δύσκολο να εξασφαλιστεί ότι δε θα υπάρχουν καθόλου αλλοιώσεις των επιθυμητών σημάτων. Στην περίπτωση τέτοιων συστημάτων, εξασφαλίζεται αποδοτική επαναχρησιμοποίηση του φάσματος και ικανοποιητική εμπειρία για κάθε χρήστη, χάρη στον έλεγχο ροής της ισχύος.

Όσον αφορά στη διαχείριση της ενέργειας, λόγω των περιορισμών που υπάρχουν σε ένα σύστημα (για παράδειγμα περιορισμένη ενέργεια στους κινούμενους σταθμούς ή στις συσκευές ή γενικότερα στους κόμβους του δικτύου), η κατανάλωση της ενέργειας κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική σε τέτοιες περιπτώσεις, καθώς αυτή είναι που εξασφαλίζει τη διάρκεια ζωής ακόμα και του δικτύου ολόκληρου σε ορισμένες περιπτώσεις. Επιπλέον, λόγω της αβεβαιότητας και της χρονικής αλλαγής των καναλιών, ακόμα και στην περίπτωση που δεν υπάρχουν καθόλου παρεμβολές ούτε ανάγκες εξοικονόμησης ενέργειας, ένας παραλήπτης δεδομένων χρειάζεται να συντηρεί έστω και στον ελάχιστο βαθμό, ότι θα παραμένει συνδεδεμένος στο δίκτυο και ότι θα έχει τη δυνατότητα να εκτιμά κάθε φορά την κατάσταση του καναλιού. Η διαχείριση της ισχύος, βοηθάει στο να συντηρείται η συνδεσιμότητα με κάποια δεδομένη τεχνική εκτίμησης καναλιού.

Βάσει των παραπάνω, στα πλαίσια της διαχείρισης των παρεμβολών, υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους θα μπορούσε να διατυπωθεί το πρόβλημα αυτό, οι οποίοι πε-

ριλαμβάνουν τη βελτιστοποίηση μετρικών, τύπου ποιότητας εξυπηρέτησης (QoS), όπως είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις χρησιμότητας. Οι τελευταίες βασίζονται στην απόδοση διακίνησης των δεδομένων (throughput) και στην καθυστέρηση μετάδοσης, και επιτυγχάνουν τη δικτυακή χωρητικότητα του συστήματος (με όρους θεωρίας πληροφορίας). Οι συναρτήσεις χρησιμότητας δύνανται, ακόμα, να εκφράζουν τη δικτυακή σταθερότητα σύμφωνα με όρους αναμονής όταν στο δίκτυο υπάρχουν δυναμικές αφίξεις και αποχωρήσεις χρηστών. Ωστόσο, στα πλαίσια της εργασίας αυτής δε θα ληφθούν υπόψιν συναρτήσεις χρησιμότητας της τελευταίας κατηγορίας. Παρόλα αυτά, δεδομένης αυτής της ειδίκευσης στον τύπο των συναρτήσεων χρησιμότητας, εξακολουθεί να υπάρχει ιδιαίτερα μεγάλο εύρος αποτελεσμάτων, τα οποία χρήζουν μεγάλης σημασίας τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά.

1.1 Συναρτήσεις Χρησιμότητας και Περιορισμών σε ένα Δίκτυο

Στη συνέχεια, κρίνεται σκόπιμο να διερευνηθεί η μορφή των συναρτήσεων χρησιμότητας σε ένα δίκτυο, μιας και οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν το αντικείμενο μελέτης αυτής της εργασίας. Μία συνάρτηση χρησιμότητας ορίζεται γενικά έτσι, ώστε να αποτυπώνει με κάποιον τρόπο τα οφέλη σημαντικών ποσοτήτων για κάθε έναν κόμβο ενός δικτύου. Εάν οι ποσότητες αυτές (ή αλλιώς μετρικές) εκφράζουν την πραγματική απόδοση κάθε κόμβου, τότε όσο μεγαλύτερη είναι η εν λόγω απόδοση τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η συνολική χρησιμότητα του δικτύου. Αντιθέτως, εάν εκφράζουν την καθυστέρηση ή την παραμόρφωση στους κόμβους, τότε όσο μεγαλύτερα είναι τα μεγέθη αυτά, τόσο χειρότερη θα είναι συνολικά η απόδοση του δικτύου. Στο σημείο αυτό, να σημειωθεί ότι όπως ίσως έγινε αντιληπτό, η συνάρτηση της χρησιμότητας και στις δύο εκφάνσεις της (δηλαδή είτε αύξουσα, είτε φθίνουσα), έχει την ιδιότητα να είναι προσθετική ανά τους κόμβους του δικτύου (με την έννοια ότι κάθε κόμβος δύναται να έχει τη δική του συνάρτηση χρησιμότητας), καθώς, επίσης, και να εξαρτάται τοπικά από τις μετρικές που αναφέρθηκαν (δηλαδή κάθε κόμβος να έχει τις δικές του μετρικές).

Συνήθως, μία πολύ σημαντική μετρική ενδιαφέροντος για την ποιότητα εξυπηρέτησης, αποτελεί η απόδοση διακίνησης των δεδομένων, η οποία είναι συνάρτηση του SIR. Όμως, το SIR είναι με τη σειρά του συνάρτηση της εκπεμπόμενης ισχύος και ως γνωστόν, εκφράζεται με όρους θεωρίας πληροφορίας από τον φορμαλισμό του Shannon για τη χωρητικότητα ως εξής:

$$U_i(\text{SIR}_i) = d \log(1 + c \text{SIR}_i), \quad (1.1)$$

όπου στην παραπάνω εξίσωση ως U_i εκφράζεται η χρησιμότητα (utility) του κόμβου i και οι σταθερές c και d , εξαρτώνται από το σχήμα διαμόρφωσης που χρησιμοποιείται και από τον επιθυμητό ρυθμό των εσφαλμένων bit (Bit Error Rate - BER), [1]. Όταν το SIR στην εξίσωση (1.1), είναι, για παράδειγμα, υψηλό τότε η συνάρτηση χρησιμότητας είναι λογαριθμική ($U_i = d \log(c \text{SIR}_i)$), ενώ όταν παίρνει χαμηλές τιμές η παραπάνω σχέση

γίνεται γραμμική ($U_i = dc \text{ SIR}_i$).

Ένας άλλος τρόπος για να περιγραφεί η απόδοση διακίνησης των δεδομένων (throughput), είναι μέσω μίας συνάρτησης f , η οποία απεικονίζει το SIR στην πιθανότητα της επιτυχημένης αποκωδικοποίησης ενός πακέτου δεδομένων, η οποία μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση:

$$U_i(\text{SIR}_i) = R_i f(\text{SIR}_i), \quad (1.2)$$

όπου R_i ο ρυθμός αποστολής δεδομένων.

Επιπλέον, όσον αφορά τη συνάρτηση χρησιμότητας αυτή καθ' εαυτήν, είναι σύνηθες να μοντελοποιείται σαν μία μονότονη, λεία και κοίλη συνάρτηση, αλλά στην πιο γενική της μορφή δεν είναι αναγκαίο να πληροί τα δύο τελευταία χαρακτηριστικά. Επίσης, μπορεί να αποτυπώνει οποιαδήποτε από τα εξής χαρακτηριστικά: την αρμονία των χρηστών του δικτύου, την πιθανή ελαστικότητα της διακίνησης των δεδομένων, την αποδοτικότητα της κατανομής των πόρων, ακόμα και την έννοια της δίκαιης διαχείρισης (fairness) των χρηστών.

Πέρα από τις συναρτήσεις χρησιμότητας, στα προβλήματα ελέγχου της κατανομής της ισχύος σε ένα δίκτυο πολύ σημαντικό ρόλο παίζουν και οι περιορισμοί που τίθενται. Οι περιορισμοί διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες, [1]. Η σημαντικότερη κατηγορία είναι εκείνη κατά την οποία το δίκτυο έχει περιορισμένη συνολική ισχύ, αλλά και μέγιστη ενέργεια εκπομπής ανά χρήστη του δικτύου. Αυτή η κατηγορία είναι και η πιο απλή ως προς το χειρισμό της θεωρητικά, για το λόγο ότι όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2, η μαθηματική προσέγγιση του προβλήματος είναι με τη σειρά της απλούστερη.

Μία άλλη κατηγορία συναρτήσεων περιορισμού, βασίζεται σε ανελαστικές και ξεχωριστές για κάθε χρήστη απαιτήσεις, όπου για παράδειγμα σε έναν κεντρικό κόμβο που λαμβάνει μηνύματα από δύο χρήστες, τα ληφθέντα σήματα πρέπει να έχουν το ίδιο SIR ή σε έναν δευτερεύοντα κόμβο ο ρυθμός δεν επιτρέπεται να είναι μικρότερος από ένα κατώφλι. Τέτοιοι περιορισμοί δεν είναι δυνατόν να ικανοποιούνται πάντα και στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα καταλήγει πολλές φορές να μην είναι επιλύσιμο. Η τρίτη κατηγορία αφορά ένα σύνολο περιορισμών που είναι πιο περίπλοκοι. Με όρους θεωρίας πληροφορίας, η χωρητικότητα στο κανάλι παρεμβολών, θα πρέπει να λαμβάνει τιμές στο επιτρεπτό εύρος τιμών (capacity region). Ωστόσο, η ανάλυση για το κανάλι παρεμβολών (interference channel), είναι ιδιαίτερα περίπλοκη και οι περιορισμοί αυτοί δεν είναι ξεκάθαροι. Παρά την πληθώρα περιορισμών που θα μπορούσαν να παίξουν ρόλο στο πρόβλημα της κατανομής της ισχύος σε ένα δίκτυο, στα πλαίσια της εργασίας αυτής θα εξεταστούν περιορισμοί της πρώτης κατηγορίας μόνο.

1.2 Έλεγχος Ισχύος Δικτύου

Για να λυθεί το πρόβλημα της κατανομής ισχύος σε ένα δίκτυο με μία συνάρτηση χρησιμότητας και συναρτήσεις περιορισμού που θέτουν άνω φράγμα στη χρησιμοποιούμενη ισχύ κάθε χρήστη του δικτύου, υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις ως προς το ποια πρέπει να είναι η μεταβλητή στο πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει. Σε αυτήν την εργασία, ως μεταβλητή θεωρείται η ποσότητα SIR, η οποία με τη σειρά της συνδέεται με την ισχύ κάθε χρήστη, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα και όπως θα προκύψει από τη μεταγενέστερη ανάλυση στο Κεφάλαιο 2.

Το να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή το SIR αποτελεί μία αρκετά σημαντική επιλογή, καθώς με τον τρόπο αυτό η ισχύς κατανέμεται σύμφωνα με τις απαιτήσεις κυκλοφορίας των δεδομένων και την κατάσταση του καναλιού. Υψηλό SIR, σημαίνει ότι επιτυγχάνονται καλύτεροι ρυθμοί μετάδοσης δεδομένων και πιθανότατα μεγαλύτερη αξιοπιστία για το δίκτυο. Ακόμα, ανάλογα με τις απαιτήσεις κάθε χρήστη του δικτύου, με την κατανομή του SIR τίθεται θέμα καλύτερης εξυπηρέτησης για κάποιον που έχει περισσότερες προσδοκίες για ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) και με τον τρόπο αυτό δεν είναι αναγκαίο να έχουν όλοι το ίδιο SIR. Έτσι, το πρόβλημα της κατανομής της ισχύος, με μεταβλητή το SIR, κρίνεται ως μία καλή επιλογή για την επίλυσή του.

1.3 Έλεγχος Ισχύος και Μεγιστοποίηση Χρησιμότητας Δικτύου

Μέχρι στιγμής, έχει περιγραφεί το πρόβλημα του ελέγχου της κατανομής ισχύος στους κόμβους ενός δικτύου. Επιπλέον, έχει αναφερθεί ότι για να λυθεί το εν λόγω πρόβλημα, αρκεί να μεγιστοποιηθεί μία συνάρτηση χρησιμότητας με βάση κάποιους περιορισμούς. Ακόμα, όπως ορίζεται το πρόβλημα Μεγιστοποίησης Χρησιμότητας Δικτύου-MXD (Network Utility Maximization-NUM), σκοπός του είναι να μεγιστοποιηθεί η χρησιμότητα των πόρων, η οποία εκφράζεται ως συνάρτηση των επιτεύξιμων ρυθμών, υπό κάποιους περιορισμούς, [2]. Από αυτή την περιγραφή συμπεραίνουμε ότι τα δύο αυτά προβλήματα συσχετίζονται μεταξύ τους. Στην ουσία του, λοιπόν, ο σκοπός του MXD προβλήματος είναι ο έλεγχος της ροής ισχύος.

1.3.1 Προσεγγίσεις Επίλυσης MXD Προβλημάτων

Το πρόβλημα της Μεγιστοποίησης Χρησιμότητας Δικτύου, έχει απασχολήσει αρκετά την ερευνητική δραστηριότητα, τόσο για ενσύρματα όσο και για ασύρματα δίκτυα. Ωστόσο, η επέκταση του προβλήματος από τα ενσύρματα δίκτυα στα ασύρματα, δεν είναι άμεση και επιτυχής, [3]. Επομένως, χρειάζονται τροποποιήσεις για να γεφυρωθούν οι διαφορές, οι οποίες, όμως, δεν αποτελούν αντικείμενο μελέτης αυτής της εργασίας.

Όσον αφορά τα ασύρματα δίκτυα, οι κύριες προσπάθειες που έχουν γίνει και οι οποίες ανήκουν στο ίδιο πλαίσιο με αυτή την εργασία, είναι οι εξής:

- Στο [4], το πρόβλημα εξετάζεται από την οπτική γωνία της ποιότητας εξυπηρέτησης

(QoS) και της δίκαιης διαχείρισης (fairness) των πόρων ενέργειας σε ένα δίκτυο. Όπως αναφέρεται, το πρόβλημα δύναται να διατυπωθεί με ποικίλους τρόπους και η ανάλυση που γίνεται καταλήγει στο ότι το πρόβλημα αυτό λύνεται με τεχνικές γεωμετρικού προγραμματισμού. Να σημειωθεί ότι ο γεωμετρικός προγραμματισμός αποτελεί μία μεθοδολογία για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με συγκεκριμένη μορφή (όπως παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3).

- Στα [5] και [6], αφού εξηγείται ότι το πρόβλημα του ελέγχου ισχύος δεν είναι γραμμικό αλλά ούτε και κυρτό, η ανάλυση διαχωρίζεται ανάλογα με το αν η τιμή του SIR είναι χαμηλή ή μεγάλη. Στην περίπτωση που η ποσότητα ενδιαφέροντος παίρνει χαμηλές τιμές τότε το πρόβλημα λύνεται με γεωμετρικό προγραμματισμό. Στην περίπτωση υψηλών τιμών, παρουσιάζονται κατανομημένοι αλγόριθμοι με εφαρμογή και πάλι του γεωμετρικού προγραμματισμού. Το γεγονός ότι με τη μεθοδολογία του διαχωρισμού των σχημάτων βελτιστοποίησης, μπορούν να βρεθούν λύσεις για κάθε τιμή του SIR, επιτρέπει την εφαρμογή της ίδιας προσέγγισης και σε ενσύρματα δίκτυα και συγκεκριμένα στο DSL (Digital Subscriber Line).
- Στο [7], παρουσιάζεται μία άλλη μορφή που δύναται να λάβει το πρόβλημα, με βάση την οποία εάν γίνει μετασχηματισμός από το πεδίο των ισχύων στο πεδίο των SIR, τότε το πρόβλημα δύναται να λυθεί σε ικανοποιητικό επίπεδο, ώστε να προκύψει η βέλτιστη λύση. Για την ακρίβεια, χρησιμοποιούνται ανισότητες για μη-αρνητικούς πίνακες (Friedland-Karlin inequalities), και χάρη σε αυτές δημιουργείται ένα ισοδύναμο κυρτό πρόβλημα (σύμφωνα με τους ορισμούς στο Παράρτημα).

1.4 Σκοπός και Δομή της Εργασίας

Βασικός στόχος της εργασίας αυτής, είναι να γίνει μία όσο το δυνατόν πληρέστερη παρουσίαση του προβλήματος της μεγιστοποίησης χρησιμότητας ενός δικτύου, χρησιμοποιώντας ως κύριο άξονα για την ανάλυση αυτή, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει. Μέχρι στιγμής, έχει οριστεί τι σημαίνει χρησιμότητα για κάθε έναν χρήστη του δικτύου, αλλά και συγκεντρωτικά για ένα (ασύρματο) δίκτυο. Επιπλέον, έχει δειχθεί ο λόγος για τον οποίο αυτό το πρόβλημα παρότι έχει προσεγγιστεί με διάφορους τρόπους στο παρελθόν, δεν παύει να είναι φλέγον θέμα και στις ημέρες μας για τα ασύρματα δίκτυα κυρίως, στα οποία ο επιτυχημένος έλεγχος της κατανάλωσης ισχύος καθορίζει άμεσα ακόμα και την υπόσταση ενός δικτύου.

Επιπροσθέτως, στην παρούσα εργασία, γίνεται μία απόπειρα επαναπροσέγγισης του προβλήματος βελτιστοποίησης της χρησιμότητας που προκύπτει. Ειδικότερα, με βάση τις προγενέστερες αναλύσεις (όπως αυτές αναφέρθηκαν στην υποενότητα (1.3.1)), χρησιμοποιούνται στοιχεία της ανάλυσης του προβλήματος όπως αυτό επιλύθηκε στις αναφερθείσες πηγές, και στη συνέχεια τα στοιχεία αυτά συνδυάζονται μεταξύ τους με σκοπό μία νέα απόπειρα προσέγγισης και λύσης του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, η αλληλουχία των επόμενων ενοτήτων, είναι τέτοια, ώστε όχι μόνο να παρουσιαστούν οι ήδη

υπάρχουσες τεχνικές, αλλά και για να τεθούν οι βάσεις για νέες λύσεις του προβλήματος αυτού. Συνεπώς, κρίνεται αναγκαία μία σύνοψη του προβλήματος που διαπραγματεύεται η εργασία αυτή, ώστε όχι μόνο να παρουσιαστούν οι πιο σύγχρονες τεχνικές ανάλυσης τέτοιων προβλημάτων, αλλά ακόμα και για να δοθεί το ερέθισμα για νέα, περαιτέρω έρευνα στο αντικείμενο αυτό.

Η εργασία αυτή οργανώνεται ως εξής:

Πρώτα από όλα, στο *Κεφάλαιο 2*, ορίζονται κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν στο πρόβλημα της Μεγιστοποίησης Χρησιμότητας Δικτύου και γίνεται μία εμβάθυνση στο πρόβλημα αυτό. Ειδικότερα, περιγράφεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει και διερευνώνται τα χαρακτηριστικά του, προκειμένου να γίνει πιο ξεκάθαρη η μορφή του. Έπειτα, από την ανάλυση αυτή, ακολουθεί το *Κεφάλαιο 3*, στο οποίο περιγράφονται γενικές αρχές και επεκτάσεις του γεωμετρικού προγραμματισμού, κάτι το οποίο εξυπηρετεί, ώστε να γίνει πιο κατανοητή η μορφή του προβλήματος βελτιστοποίησης και να δοθεί η αφορμή για την επίλυσή του με βάση το σιγμοειδή προγραμματισμό, που όπως θα φανεί είναι η πιο κατάλληλη μέθοδος επίλυσης. Στη συνέχεια, στο *Κεφάλαιο 4*, περιγράφονται νέες τεχνικές προσέγγισης μίας συνάρτησης (με συγκεκριμένες ιδιότητες όπως θα φανεί) από συναρτήσεις οι οποίες είναι συμβατές με τον γεωμετρικό και κατά επέκταση τον σιγμοειδή προγραμματισμό.

Στο *Κεφάλαιο 5*, χρησιμοποιούνται όλες οι τεχνικές που συζητήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια και γίνεται μία προσπάθεια ώστε να προσεγγιστεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος, μέσα από παραδείγματα. Ακολουθεί το *Κεφάλαιο 6*, στο οποίο συγκεντρώνονται όλα τα συμπεράσματα από τη μελέτη του προβλήματος στην παρούσα εργασία. Αναφέρονται, επίσης, κάποιες μελλοντικές προεκτάσεις με τις οποίες μπορεί να προσεγγιστεί το πρόβλημα και παρουσιάζεται η νέα τάση που έχει λάβει το αντικείμενο αυτό, μέσα από το πρίσμα μίας πιο σύγχρονης εξέτασης του προβλήματος. Τέλος, στο *Παράρτημα*, δίνεται μία πιο πλήρης και συγκεκριμένη αναφορά μαθηματικών εννοιών που συναντώνται σε όλη την έκταση της εργασίας.

Να σημειωθεί, ακόμη, ότι υιοθετείται ο εξής συμβολισμός: τα διανύσματα αναπαρίστανται με πεζά και έντονα γράμματα, οι πίνακες με κεφαλαία και τα βαθμωτά μεγέθη με πεζά γράμματα.

2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΔΙΚΤΥΟΥ

Όπως περιγράφηκε στην Εισαγωγή, το πρόβλημα που διαπραγματεύεται η εργασία αυτή, είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής διακίνησης δεδομένων σε ένα δίκτυο πολλαπλής πρόσβασης, χρησιμοποιώντας έλεγχο της διαθέσιμης ισχύος κάθε χρήστη. Προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα, αρκεί να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή ισχύος ανά χρήστη η οποία θα μεγιστοποιεί το ρυθμό διακίνησης δεδομένων στο κανάλι επικοινωνίας. Ωστόσο, λόγω των παρεμβολών που υπάρχουν τόσο μεταξύ των χρηστών, όσο και λόγω του θορύβου που υπεισέρχεται στο κανάλι επικοινωνίας, η ανάλυση του προς μελέτη προβλήματος, καθίσταται ιδιαίτερα πολύπλοκη. Αποδεικνύεται, παρόλα αυτά, ότι με επιτυχημένο έλεγχο κατανομής ισχύος, οι παρεμβολές μεταξύ των χρηστών εξαλείφονται σε σημαντικό βαθμό και με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η μεγιστοποίηση του ρυθμού μετάδοσης κάθε χρήστη, [7]. Στη συνέχεια, στην ενότητα 2.1 ορίζονται κάποιες γενικές έννοιες πάνω στις οποίες τίθενται τα θεμέλια του προς μελέτη προβλήματος, στην ενότητα 2.2 περιγράφεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης και στην ενότητα 2.3 η προσέγγιση για την επίλυση του.

2.1 Διατύπωση Βασικών Εννοιών

Έστω, ένα κανάλι παρεμβολών στο οποίο υπάρχουν K ζεύγη πομπών-παραληπτών. Στη συνέχεια, χάριν συντομίας, θεωρούμε ότι κάθε τέτοιο ζεύγος αποτελεί και έναν χρήστη του δικτύου. Το δίκτυο αυτό, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα Γκαουσιανό κανάλι παρεμβολών, το οποίο μοντελοποιείται από την ακόλουθη σχέση:

$$y_k = h_{kk}x_k + \sum_{j \neq k} h_{kj}x_j + z_k \quad (2.1)$$

όπου $y_k \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ εκφράζει το σήμα που λαμβάνει ο k χρήστης, h_{kj} είναι ο συντελεστής του καναλιού μεταξύ του πομπού του j χρήστη και του λήπτη του k χρήστη, $(x_1, \dots, x_K)^T \in \mathbb{C}^{L \times 1}$ είναι το διάνυσμα των εκπεμπόμενων σημάτων που μεταφέρουν την πληροφορία και z_k είναι οι ανεξάρτητοι και ομοιόμορφα κατανομημένοι (independent and identically distributed - i.i.d.) συντελεστές του λευκού προσθετικού θορύβου (AWGN) με διασπορά $\frac{n_k}{2}$ για το πραγματικό και φανταστικό μέρος τους. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης (2.1) αναπαριστά το επιθυμητό σήμα, ενώ ο δεύτερος όρος τα σήματα παρεμβολής από τους άλλους χρήστες. Για κάθε χρήστη, υπάρχει περιορισμός στο σήμα x_k που εκπέμπεται, με την έννοια της μέσης ισχύος ($\mathbb{E}[|x_k|^2] = p_k$), όπου κάθε όρος δεν μπορεί να ξεπεράσει την τιμή $\bar{p}_k$. Έστω, ακόμα, ο πίνακας $G = [g_{kj}]_{k,j=1}^K > 0_{K \times K}$ του οποίου τα στοιχεία δίνονται ως: $g_{kj} = |h_{kj}|^2$ και $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_K)^T > 0$, όπου n_k είναι η ισχύς του θορύβου στον k παραλήπτη. Με βάση τα παραπάνω, ο λόγος ισχύος-προς-παρεμβολή-θόρυβο (signal-to-interference-noise-ratio (SINR)) ορίζεται ως: $\text{SINR} = \frac{g_{kk}p_k}{\sum_{j \neq k} g_{kj}p_j + n_k}$, $k = 1, \dots, K$. Επιπλέον, ορίζεται ότι: $F = [f_{ij}]_{i,j=1}^K$, όπου:

$$f_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ \frac{g_{ij}}{g_{ii}} & i \neq j \end{cases}$$

και $\mathbf{v} = \left(\frac{n_1}{g_{11}}, \frac{n_2}{g_{22}}, \dots, \frac{n_K}{g_{KK}} \right)^T$. Στη συνέχεια, εάν θεωρηθεί το διάνυσμα $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_K)^T \geq 0$, ορίζεται ([7]) ο μετασχηματισμός: $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{y}(\mathbf{p})$ ως εξής:

$$y_k(\mathbf{p}) := \frac{g_{kk}p_k}{\sum_{j \neq k} g_{kj}p_j + n_k}, k = 1, \dots, K \quad (2.2)$$

όπου η σχέση (2.2), δύναται να γραφεί σαν διάνυσμα για όλους τους χρήστες, εάν αριθμητής και παρονομαστής διαιρεθούν με g_{kk} :

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = (y_1(\mathbf{p}), \dots, y_K(\mathbf{p}))^T = \mathbf{p} \circ (\mathbf{F}\mathbf{p} + \mathbf{v})^{-1} \quad (2.3)$$

Στην εξίσωση (2.3), ο τελεστής $\circ$ εκφράζει το γινόμενο Schur κατά το οποίο εάν έχουμε δύο διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^K$, τότε ισχύει ότι $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = [x_1y_1, \dots, x_Ky_K]^T$. Επιπροσθέτως, για ένα διάνυσμα $\mathbf{x} > 0$ ορίζεται ότι $\mathbf{x}^{-1} := (\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_K})^T$. Με βάση τα προαναφερθέντα, παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός που ορίζει η εξίσωση (2.2), αποτελεί το μετασχηματισμό από το πεδίο των ισχύων ($\mathbf{p}$) κάθε χρήστη στο πεδίο των SINR ($\mathbf{y}(\mathbf{p})$). Στη συνέχεια, παρατίθεται το εξής θεμελιώδες αποτέλεσμα [7], όσον αφορά τον προαναφερθέν μετασχηματισμό:

Έστω $\mathbf{p}$ ένα διάνυσμα με μη-αρνητικά στοιχεία και το διάνυσμα $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ το οποίο ορίζεται βάσει των εξισώσεων (2.2) και (2.3). Τότε, ισχύουν τα εξής: $\rho(\text{diag}(\mathbf{y}(\mathbf{p}))\mathbf{F}) < 1$, όπου ο πίνακας $\mathbf{F}$ δίνεται παραπάνω. Έτσι, για $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{p})$, ισχύει ότι

$$\mathbf{p} = P(\mathbf{y}) := (\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{y})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}(\mathbf{y})\mathbf{v}. \quad (2.4)$$

Αντιστρόφως, εάν $\mathbf{y}$ βρίσκεται στο σύνολο

$$\Gamma := \{\mathbf{y} \geq 0, \rho(\text{diag}(\mathbf{y})\mathbf{F}) < 1\}, \quad (2.5)$$

τότε το διάνυσμα $\mathbf{p}$ που ορίζεται από την εξίσωση (2.4) είναι μη-αρνητικό. Επιπλέον, ισχύει ότι $\mathbf{y}(P(\mathbf{p})) = \mathbf{y}$. Η τελευταία αυτή σχέση σημαίνει ότι $\mathbf{y} : \mathbb{R}_+^K \rightarrow \Gamma$ και $P : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+^K$ είναι αντίστροφες συναρτήσεις/απεικονίσεις.

Στο σημείο αυτό, να σημειωθεί ότι ο συμβολισμός $\rho(A)$, όπου A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $K \times K$, αναπαριστά τη φασματική ακτίνα (spectral radius) του πίνακα A . Η φασματική ακτίνα ενός τετραγωνικού πίνακα A , ορίζεται ως η μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του A . Ακόμα, ως $\text{diag}(\mathbf{x})$ ορίζεται ο διαγώνιος πίνακας του οποίου τα διαγώνια στοιχεία δίνονται από τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^K$.

2.2 Διατύπωση του Προβλήματος Βελτιστοποίησης

Με βάση τους ορισμούς και τους συμβολισμούς που προηγήθηκαν στην ενότητα 2.1, το πρόβλημα που αποτελεί το αντικείμενο μελέτης της εργασίας αυτής, διατυπώνεται ως ακολούθως:

Έστω ο πίνακας $F = [f_{ij}]_{i,j=1}^K$ και το διάνυσμα $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_K)^T$ όπως ορίστηκαν προηγουμένως. Έστω, επίσης, $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_K)^T$ και $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_K)^T$ δοθέντα διανύσματα όπου το $\bar{\mathbf{p}}$ λαμβάνει θετικές τιμές και το $\mathbf{w}$ να είναι διάνυσμα πιθανοτήτων, δηλαδή τα στοιχεία του να παίρνουν μη-αρνητικές τιμές και να έχουν άθροισμα ίσο με τη μονάδα. Τότε, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που πρέπει να λυθεί ώστε να επιτευχθεί μέγιστη συνολική διακίνηση ρυθμού (sum rate maximization) σε ένα δίκτυο K χρηστών, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\max_{0 \leq p_k \leq \bar{p}_k, \forall k} \sum_{k=1}^K w_k \log \left(1 + \frac{p_k}{\sum_{j \neq k} f_{kj} p_j + v_k} \right). \quad (2.6)$$

Όσον αφορά την εξίσωση (2.6), παρατηρεί κανείς ότι κάθε χρήστης k του δικτύου έχει το δικό του βάρος w_k και ότι ο μόνος περιορισμός σε αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι το άνω φράγμα στην ισχύ που επιτρέπεται να διαθέσει ο καθένας. Να σημειωθεί, ακόμα, ότι το βάρος w_k εκφράζει ουσιαστικά την προτεραιότητα του κάθε χρήστη: μεγαλύτερο βάρος σημαίνει και μεγαλύτερη προτεραιότητα. Εάν ληφθούν υπόψιν οι ορισμοί της ενότητας 2.1 για τον πίνακα F και εισαχθούν οι συντελεστές g_{ij} στην τελευταία εξίσωση, τότε το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \sum_{k=1}^K w_k \log \left(1 + \frac{g_{kk} p_k}{\sum_{j \neq k} g_{kj} p_j + n_k} \right) \\ & \text{subject to} \quad 0 \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις ((2.6), (2.7)) πηγάζουν από τον τύπο του Shannon για τη χωρητικότητα σε ένα Γκαουσιανό κανάλι, κατά τον οποίο ο επιτεύξιμος ρυθμός αποστολής δεδομένων (ή διαφορετικά ο μέγιστος ρυθμός πληροφορίας) του χρήστη k του εν λόγω καναλιού, δίνεται από την εξίσωση:

$$r_k = \log \left(1 + \frac{\gamma_k(\mathbf{p})}{\Gamma} \right) \text{ nats/symbol}, \quad (2.8)$$

όπου Γ η απόκλιση του SINR από την χωρητικότητα (gap to capacity), που είναι πάντα μεγαλύτερη της μονάδας. Ωστόσο, στην εργασία αυτή το Γ , θεωρείται ότι υπεισέρχεται στους συντελεστές $g_{\ell\ell}$ για κάθε ℓ και λόγω αυτού η σχέση (2.8) γράφεται πιο απλά $r_k = \log(1 + \gamma_k(\mathbf{p}))$. Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την (2.2) στην (2.7), η προς βελτιστοποίηση συνάρτηση (objective function), είναι πλέον η $f_0 = \sum_{k=1}^K w_k \log(1 + \gamma(\mathbf{p}))$. Έπειτα, αρκεί να εξετάσουμε τη μορφή των συναρτήσεων περιορισμού (constraint functions), ώστε

να διερευνηθεί η μορφή τους. Προς τούτο, θεωρούμε το διάνυσμα $\mathbf{e}_k = (\bar{\delta}_{k1}, \dots, \bar{\delta}_{kK})^T$, $k = 1, \dots, K$ του οποίου οι συνιστώσες είναι μηδενικές, εκτός από τη συνιστώσα στη θέση k η οποία ισούται με τη μονάδα. Το διάνυσμα αυτό χρησιμεύει ώστε να εξεταστεί η k συνιστώσα του διανύσματος $\mathbf{p}$. Βάσει αυτού, εάν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της εξίσωσης (2.4) (εκ των αριστερών) με το διάνυσμα $\mathbf{e}_k^T$, τότε προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}_k^T \mathbf{p} \leq \mathbf{e}_k^T \bar{\mathbf{p}}, \forall k = 1, \dots, K \\
& \Leftrightarrow \mathbf{e}_k^T (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \leq \bar{p}_k \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{p}_k} \mathbf{e}_k^T (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \leq 1 \\
& \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\bar{p}_k} \mathbf{e}_k^T (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \geq 0 \\
& \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \det(I - \frac{1}{\bar{p}_k} (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \mathbf{e}_k^T) \geq 0 \\
& \stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} \det(I - D(\mathbf{Y})F - \frac{1}{\bar{p}_k} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \mathbf{e}_k^T) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \det(I - D(\mathbf{Y})(F + \frac{1}{\bar{p}_k} \mathbf{v} \mathbf{e}_k^T)) \geq 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

(a): Έστω $B = \mathbf{xy}^T \in \mathbb{R}^{K \times K}$ ένας πίνακας τάξης 1 (rank one matrix). Τότε, ο B έχει $K-1$ ιδιοτιμές ίσες με μηδέν και μία ιδιοτιμή ίση με $\mathbf{y}^T \mathbf{x}$. Έτσι, ο πίνακας $I - \mathbf{xy}^T$ θα έχει $K-1$ ιδιοτιμές ίσες με τη μονάδα και μία ιδιοτιμή ίση με $(1 - \mathbf{y}^T \mathbf{x})$. Επομένως, ισχύει ότι $\det(I - \mathbf{xy}^T) = 1 - \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ ή στην περίπτωση μας ότι:

$$1 - \frac{1}{\bar{p}_k} \mathbf{e}_k^T (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \geq 0 = \det(I - \frac{1}{\bar{p}_k} (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \mathbf{e}_k^T).$$

Μένει ναδειχθεί ότι η μοναδική μη-μηδενική ιδιοτιμή του πίνακα B ισούται με $\mathbf{y}^T \mathbf{x}$. Ισχύει ότι εάν λ είναι μη-μηδενική ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}$ το οποίο είναι μη-μηδενικό, τότε $B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, ή ότι $(\mathbf{xy}^T)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Όμως, λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας, η τελευταία σχέση γράφεται και ως $\mathbf{x}(\mathbf{y}^T \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Η ποσότητα $(\mathbf{y}^T \mathbf{v})$ είναι βαθμωτό μέγεθος. Άρα, επειδή και το λ είναι βαθμωτό μέγεθος, εάν υποθεθεί ότι $\lambda \neq 0$, τότε προκύπτει ότι $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{v}}{\lambda} \mathbf{x}$. Επομένως, επειδή το διάνυσμα $\mathbf{x}$ συνδέεται με την ιδιοτιμή λ , το $\mathbf{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B . Δηλαδή, ισχύει ότι $\mathbf{x}(\mathbf{y}^T \mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (\lambda - \mathbf{y}^T \mathbf{x})\mathbf{x} = 0$ και επειδή $\mathbf{x} \neq 0$, προκύπτει, τελικά, το ζητούμενο, ότι $\lambda = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$. $\square$

(b): Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
I - \frac{1}{\bar{p}_k} (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \mathbf{e}_k^T &= (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} (I - D(\mathbf{Y})F) - \frac{1}{\bar{p}_k} (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \mathbf{e}_k^T \\
&= (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} \left[(I - D(\mathbf{Y})F) - \frac{1}{\bar{p}_k} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \mathbf{e}_k^T \right]
\end{aligned}$$

υπό την προϋπόθεση ότι ο πίνακας $(I - D(\mathbf{Y})F)$ είναι αντιστρέψιμος. Ωστόσο, αυτό ισχύει πάντα, καθώς:

$$\begin{aligned} \det(I - D(\mathbf{Y})F) &= \prod \text{eig}(I - D(\mathbf{Y})F) \\ &= \prod (1 - \text{eig}(D(\mathbf{Y})F)) \end{aligned}$$

όπου $\text{eig}(\bullet)$ οι ιδιοτιμές του πίνακα εντός των παρενθέσεων. Όμως,

$$\text{eig}(D(\mathbf{Y})F) < \rho(D(\mathbf{Y})F) < 1$$

λόγω της σχέσης (2.5). Συνεπώς, $\prod (1 - \text{eig}(D(\mathbf{Y})F)) > 0 \Leftrightarrow \det(I - D(\mathbf{Y})F) > 0$ λόγω του ότι η ορίζουσα ενός πίνακα ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του. Επιπλέον, επειδή για οποιονδήποτε αντιστρέψιμο πίνακα B ισχύει ότι $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$, προκύπτει ότι και $\det[(I - D(\mathbf{Y})F)^{-1}] > 0$. Τέλος, ισχύει η εξής πρόταση:

$$\det(BC) = \det(B) \det(C).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} &\det \left\{ (I - D(\mathbf{Y})F)^{-1} \left[(I - D(\mathbf{Y})F) - \frac{1}{\bar{\rho}_k} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \mathbf{e}_k^T \right] \right\} \\ &= \det((I - D(\mathbf{Y})F)^{-1}) \det \left[(I - D(\mathbf{Y})F) - \frac{1}{\bar{\rho}_k} D(\mathbf{Y}) \mathbf{v} \mathbf{e}_k^T \right]. \end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτει ότι η συνεπαγωγή (b) ισχύει πάντοτε. $\square$

Στη συνέχεια, χάριν συντομογραφίας θα θεωρούμε ότι $A_k := F + \frac{1}{\bar{\rho}_k} \mathbf{v} \mathbf{e}_k^T$, $\forall k = 1, \dots, K$, ο οποίος είναι ένας μη-αρνητικός πίνακας. Με βάση την παραπάνω ανάλυση, προκύπτει ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} &\max_{\gamma_k > 0} \quad \sum_{k=1}^K w_k \log(1 + \gamma_k) \\ &\text{subject to} \quad -\det(I - D(\mathbf{Y})A_k) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.3 Διερεύνηση του Προβλήματος Βελτιστοποίησης

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης της εξίσωσης (2.10) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{aligned} &\min_{\gamma_k > 0} \quad -\sum_{k=1}^K w_k \log(1 + \gamma_k) \\ &\text{subject to} \quad -\det(I - D(\mathbf{Y})A_k) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \tag{2.11}$$

Η εξίσωση (2.11), έχει πλέον την τυπική μορφή ενός προβλήματος βελτιστοποίησης σύμ-

φωνα με το Παράρτημα. Πριν τη διαδικασία επίλυσής του κρίνεται αναγκαίο να διερευνηθεί η μορφή του προβλήματος αυτού. Όσον αφορά την συνάρτηση βελτιστοποίησης, $f_0 = -\sum_{k=1}^K w_k \log(1 + \gamma_k)$, η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή για $\gamma_k > 0$. Αυτό ισχύει επειδή η συνάρτηση αυτή ισούται με το άθροισμα κοίλων συναρτήσεων, λαμβάνοντας υπόψιν το αρνητικό πρόσημο. Συγκεκριμένα, είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $a \log(x)$ είναι κοίλη (για $a > 0$) και κατ' επέκταση το άθροισμα κοίλων συναρτήσεων είναι κοίλη συνάρτηση, [8]. Επιπλέον, εάν η f είναι κοίλη, τότε η $-f$ είναι κυρτή. Στη συνέχεια, αρκεί να εξεταστεί η μορφή των συναρτήσεων περιορισμού $f_k(\mathbf{y}) = -\det(I - D(\gamma)A_k)$. Οι συναρτήσεις f_k είναι εν γένει πολύπλοκο να προσδιοριστούν ως προς το αν είναι κυρτές ή όχι. Η πολυπλοκότητα αυτή εξηγείται από το γεγονός ότι υπεισέρχεται η ορίζουσα (determinant) στο όρισμά τους, της οποίας ο υπολογισμός είναι υπολογιστικά ιδιαίτερα δαπανηρή διαδικασία. Πρόκειται, λοιπόν, από τη φύση του για ένα δύσκολο πρόβλημα βελτιστοποίησης, λόγω των συναρτήσεων περιορισμού που τίθενται στην προς βελτιστοποίηση συνάρτηση. Παρόλα αυτά, στην εργασία αυτή γίνονται κάποιες προσεγγίσεις για τον χαρακτηρισμό και στη συνέχεια την επίλυση του προβλήματος αυτού, που άρουν ως έναν βαθμό τις δυσκολίες που μόλις αναφέρθηκαν.

Ένας τρόπος για να εξεταστεί η κυρτότητα των συναρτήσεων $f_k(\mathbf{y})$ είναι η εύρεση του Hessian μητρώου (Hessian matrix) και να γίνει διερεύνηση για το αν ικανοποιείται η συνθήκη ο πίνακας αυτός να είναι θετικά ορισμένος. Ο Hessian πίνακας, ορίζεται, ως γνωστόν, ως ο πίνακας των δεύτερων μερικών παραγώγων της συνάρτησης ενδιαφέροντος. Πιο συγκεκριμένα, είναι ο τετραγωνικός-συμμετρικός πίνακας του οποίου τα στοιχεία ισούνται με: $H_{ij} = \frac{\partial^2 f_k(\mathbf{y})}{\partial y_i \partial y_j}$. Αρκεί, λοιπόν, να βρεθεί μία γενική έκφραση από την οποία να προκύπτουν τα στοιχεία του πίνακα. Οι συναρτήσεις $f_k(\mathbf{y})$, είναι σύνθετες συναρτήσεις. Συνεπώς, πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο κανόνας αλυσίδας, ο οποίος υπαγορεύει το εξής: Έστω μία συνάρτηση $U = f(x)$ και ότι πρέπει να βρεθεί η παράγωγος της $g(U)$ ως προς x . Τότε, ισχύει ότι: $\frac{\partial g(U)}{\partial x} = \frac{\partial g(f(x))}{\partial x}$. Για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και χρησιμοποιώντας

συμβολισμό πινάκων, η τελευταία σχέση ισούται με ([9]): $\frac{\partial g(U)}{\partial \mathbf{x}_i} = \text{Tr} \left[\left(\frac{\partial f(U)}{\partial U} \right)^T \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} \right]$, όπου $\text{Tr}[\cdot]$ το ίχνος (trace) ενός πίνακα. Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για τις συναρτήσεις $f_k(\mathbf{y})$ και θεωρώντας ότι έχουμε τις αντιστοιχίες $x_i \rightarrow \gamma_i$, $U \rightarrow I - D(\gamma)A$ και $g(U) \rightarrow f_k(U)$ προκύπτει μετά από πράξεις ότι:

$$\frac{\partial f_k(U)}{\partial \gamma_i} = -\det(U) \text{Tr} \left[U^{-1} \frac{\partial}{\partial \gamma_i} (D(\mathbf{y})A_k) \right] \quad (2.12)$$

Στη συνέχεια, με όμοιους συλλογισμούς και έπειτα από πράξεις, ο τελικός τύπος για την

εύρεση του στοιχείου H_{ij} , δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_k(\mathbf{U})}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} = \det(\mathbf{U}) & \left\{ \text{Tr} \left[\mathbf{U}^{-1} \frac{\partial}{\partial \gamma_j} (D(\mathbf{Y}) \mathbf{A}_k) \right] \text{Tr} \left[\mathbf{U}^{-1} \frac{\partial}{\partial \gamma_i} (D(\mathbf{Y}) \mathbf{A}_k) \right] \right. \\ & \left. - \text{Tr} \left[\left(\mathbf{U}^{-1} \frac{\partial}{\partial \gamma_j} (D(\mathbf{Y}) \mathbf{A}_k) \right) \left(\mathbf{U}^{-1} \frac{\partial}{\partial \gamma_i} (D(\mathbf{Y}) \mathbf{A}_k) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ωστόσο, από την τελευταία εξίσωση είναι ιδιαίτερα δύσκολο να εξαχθούν συμπεράσματα για τη μορφή του Hessian μητρώου. Για το λόγο αυτό, κρίνεται σκόπιμο οι συναρτήσεις f_k να γραφούν σε μία διαφορετική μορφή, ώστε να είναι πιο διαχειρίσιμες και να επιτραπεί με τον τρόπο αυτό η περαιτέρω διερεύνησή τους.

Θεωρούμε το σύνολο $\{1, \dots, K\}$, το οποίο όπως ορίστηκε περιέχει όλους τους θετικούς ακέραιους από το 1 έως το K . Έστω, επίσης, τα υποσύνολα $a \subseteq \{1, \dots, K\}$, $b \subseteq \{1, \dots, K\}$ του προηγούμενου συνόλου, τα οποία θα συμβολίζουν τους δείκτες ενός τετραγωνικού πίνακα A , ως εξής: Ο συμβολισμός A_{ab} , θα αναπαριστά τον υποπίνακα (submatrix) του A , του οποίου οι γραμμές θα αντιστοιχούν στο σύνολο a και οι στήλες στο σύνολο b . Με άλλα λόγια, από τον πίνακα A θα διατηρούνται οι a γραμμές και οι b στήλες. Επιπλέον, εάν τα σύνολα a και b ταυτίζονται (δηλαδή $b = a$), τότε ο υποπίνακας A_{aa} , θα ονομάζεται κύριος-υποπίνακας (principle submatrix) του A . Τέλος, το σύνολο $\bar{a}$, θα θεωρείται ως το συμπληρωματικό σύνολο του a , έτσι ώστε : $a \cup \bar{a} = \{1, \dots, K\}$ και $a \cap \bar{a} = \emptyset$.

Για παράδειγμα, έστω $K = 3$, $a = \{1\}$, και $b = \{3\}$. Τότε, με βάση τα παραπάνω,

$$\bar{a} = \{2, 3\} \text{ και αν } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ προκύπτει ότι } A_{ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, A_{aa} = a_{11} \text{ και}$$

$$A_{\bar{a}\bar{a}} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ όπου } A_{aa}, A_{\bar{a}\bar{a}} \text{ θεωρούνται κύριοι υποπίνακες του } A.$$

Έστω, ακόμα, ένας οποιοσδήποτε διαγώνιος πίνακας D . Αποδεικνύεται ([10]), ότι $\det(D + A) = \sum_a \det(D_{aa}) \det(A_{\bar{a}\bar{a}})$. Ωστόσο, επειδή $\det(-A) = (-1)^K \det(A)$, η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή

$$\det(D - A) = \sum_a \det(D_{aa}) (-1)^{|a|} \det(A_{\bar{a}\bar{a}}), \quad (2.14)$$

όπου $|a|$ ο πληθάρθρωμος (cardinality) του συνόλου a . Βάσει των παραπάνω, οι συναρτήσεις $f_k(\mathbf{Y})$, δύνανται να γραφούν στην ακόλουθη μορφή, εάν στην (2.14) θεωρήσουμε όπου $D : I$ και $A : D(\mathbf{Y}) \mathbf{A}_k$. Ειδικότερα, με αυτήν την αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\det(I - D(\mathbf{y})A_k) &\stackrel{(a)}{=} \det(D(\mathbf{y})D^{-1}(\mathbf{y}) - D(\mathbf{y})A_k) \\
&\stackrel{(b)}{=} \det(D(\mathbf{y})) \det(D^{-1}(\mathbf{y}) - A_k) \\
&\stackrel{(c)}{=} \det(D(\mathbf{y})) \sum_a \det(D_{aa}^{-1})(-1)^{|a|} \det(A_{\bar{a}\bar{a}})
\end{aligned}$$

(a): Ο αντίστροφος πίνακας του $D(\mathbf{y})$, ορίζεται εφόσον $\gamma_k > 0$.

(b): Ισχύει ότι $\det(BC) = \det(B) \det(C)$.

(c): Λόγω της (2.14).

Όμως, ισχύει ότι η ορίζουσα ενός πίνακα είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών του. Επιπροσθέτως, ένας διαγώνιος πίνακας έχει ως ιδιοτιμές τα διαγώνια στοιχεία του. Επομένως, λόγω αυτών η ορίζουσα ενός διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του. Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\det(I - D(\mathbf{y})A_k) &= \sum_a \prod_{j \in a} \gamma_j^{-1} (-1)^{|a|} \det(A_{\bar{a}\bar{a}}) \\
&= \sum_a \prod_{i=a \cup \bar{a}} \gamma_i \prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j (-1)^{|a|} \det(A_{\bar{a}\bar{a}})
\end{aligned}$$

ή ότι

$$\det(I - D(\mathbf{y})A_k) = \sum_a \prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j (-1)^{|a|} \det(A_{\bar{a}\bar{a}}) \quad (2.15)$$

Άρα, λόγω της εξίσωσης (2.15), οι συναρτήσεις περιορισμού γράφονται πλέον πιο απλά ως:

$$f_k(\mathbf{y}) = \sum_a \prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j (-1)^{|a|+1} \det(A_{\bar{a}\bar{a}}) \quad (2.16)$$

Πλέον, λόγω της εξίσωσης (2.16), είναι πιο εύκολο να εξαχθούν συμπεράσματα για τη μορφή του Hessian πίνακα. Ειδικότερα, οι συναρτήσεις $f_k(\mathbf{y})$, είναι αθροίσματα από γινόμενα των μεταβλητών, πολλαπλασιασμένων με τις σταθερές $(-1)^{|a|+1} \det(A_{\bar{a}\bar{a}})$. Επομένως, αρκεί να βρεθούν οι εκφράσεις για τις δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς κάθε όρο του γινομένου. Η πρώτη μερική παράγωγος του $\prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j$, ως προς μία συνιστώσα του διανύσματος $\mathbf{y}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_l} \left(\prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j \right) = \begin{cases} \prod_{\substack{j \in \bar{a} \\ j \neq l}} \gamma_j, & l \in \bar{a} \\ 0 & , l \notin \bar{a} \end{cases}$$

Βάσει της τελευταίας σχέσης, η δεύτερη μερική παράγωγος δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση:

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma_m \partial \gamma_l} \left(\prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j \right) = \begin{cases} \prod_{\substack{j \in \bar{a} \\ j \neq m, \\ j \neq l}} \gamma_j, & m, l \in \bar{a} \\ 0 & , m \notin \bar{a}, m = l \end{cases} \quad (2.17)$$

Λόγω της (2.17), προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα διαγώνια στοιχεία του Hessian πίνακα είναι ίσα με μηδέν, συνεπώς πρόκειται για έναν Hollow πίνακα.

Στη συνέχεια, εξετάζονται οι περιπτώσεις για δύο και τρεις χρήστες του δικτύου, δηλαδή όταν ο πίνακας A_k είναι 2×2 και 3×3 , αντιστοίχως.

Παράδειγμα 1: Δύο χρήστες δικτύου ($K = 2$)

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, έστω $F = \begin{bmatrix} 0 & f_1 \\ f_2 & 0 \end{bmatrix}$, και $A_1 = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\rho_1} & f_1 \\ f_2 + \frac{v_2}{\rho_1} & 0 \end{bmatrix}$ για $k = 1$. Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση (2.17), προκύπτει έπειτα από πράξεις ότι ο Hessian πίνακας είναι: $H = \begin{bmatrix} 0 & -\det(A_1) \\ -\det(A_1) & 0 \end{bmatrix}$. Αρκεί, πλέον, να δειχθεί ότι είναι θετικά ορισμένος στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Έστω το διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Τότε,

$$\mathbf{x}^T H \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\det(A_1) \\ -\det(A_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2x_1 x_2 \det(A).$$

Ισχύει ότι $\det(A_1) = -f_1(f_2 + \frac{v_2}{\rho_1}) < 0$, καθώς τα στοιχεία του πίνακα A_1 είναι μη-αρνητικά. Επομένως, το πρόσημο της ποσότητας $-2x_1 x_2 \det(A)$ εξαρτάται από το πρόσημο του γινομένου των x_1, x_2 . Όμοια αποτελέσματα προκύπτουν και για $k = 2$. Άρα, στην περίπτωση των δύο χρηστών δεν είναι δυνατόν να αποφανθεί κανείς εάν οι συναρτήσεις περιορισμού είναι κυρτές, για οποιαδήποτε στοιχεία των πινάκων A_1, A_2 .

Παράδειγμα 2: Τρεις χρήστες δικτύου ($K=3$)

Ακολουθώντας την προηγούμενη προσέγγιση και θεωρώντας ότι $F = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_3 & 0 & f_4 \\ f_5 & f_6 & 0 \end{bmatrix}$, προ-

κύπτει ότι για $k = 1$, $A_1 = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\rho_1} & f_1 & f_2 \\ f_3 + \frac{v_2}{\rho_1} & 0 & f_4 \\ f_5 + \frac{v_3}{\rho_1} & f_6 & 0 \end{bmatrix}$ και $H = \begin{bmatrix} 0 & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & 0 & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & 0 \end{bmatrix}$, όπου

$h_{12} = \det(A_1)\gamma_3 - M_{33}^{A_1}$, $h_{13} = \det(A_1)\gamma_2 - M_{22}^{A_1}$ και $h_{23} = \det(A_1) - M_{11}^{A_1}$, όπου $M_{ij}^{A_1}$ είναι οι ορίζουσες του υποπίνακα του A_1 που προκύπτει εάν διαγραφούν οι i γραμμές και j στήλες. Τότε, πρέπει να εξεταστεί το πρόσημο της ποσότητας $\mathbf{x}^T H \mathbf{x}$, η οποία ισούται με:

$$\mathbf{x}^T H \mathbf{x} = 2h_{12}x_1x_2 + 2h_{13}x_1x_3 + 2h_{23}x_2x_3.$$

Ωστόσο, είναι δύσκολο να προκύψει κάποιο συμπέρασμα για το πρόσημο της παραπάνω σχέσης. Από τα δύο παραδείγματα που προηγήθηκαν, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η ανάλυση του προβλήματος είναι εν γένει δύσκολο να γίνει λαμβάνοντας υπόψιν ότι πρέπει να ελέγχεται κάθε φορά εάν ο Hessian πίνακας είναι θετικά ορισμένος ή όχι.

Συνοψίζοντας, πρόκειται εν γένει για ένα μη-κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο παρουσιάζει δυσκολίες στην επίλυσή του. Για το λόγο αυτό, είναι χρήσιμο να γίνει μία διαφορετική διερεύνηση του προβλήματος ώστε να επιλυθεί τελικά. Το έναυσμα για αυτήν την προσπάθεια το δίνει η σχέση (2.15), της οποίας η μορφή είναι ειδική όπως θα γίνει αντιληπτό στο επόμενο κεφάλαιο.

3. ΣΙΓΜΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε το πρόβλημα της μεγιστοποίησης χρησιμότητας σε ένα δίκτυο όσον αφορά το πώς ορίζεται. Έγιναν, επίσης, κάποιες προσπάθειες για το χαρακτηρισμό του προβλήματος με όρους κυρτού προγραμματισμού προκειμένου να απλουστευθεί η επίλυσή του. Ωστόσο, όπως προέκυψε από την ενότητα 2.3 όπου έγινε μία ανάλυση του προβλήματος στο βαθμό που αυτό είναι δυνατό, παρουσιάζεται δυσκολία στο να αποφανθεί κανείς εάν το πρόβλημα είναι κυρτό στη γενική περίπτωση για αυθαίρετο πλήθος χρηστών του δικτύου.

Στο παρόν κεφάλαιο, έχοντας υπόψιν τα αποτελέσματα που προέκυψαν στις προηγούμενες υποενότητες, παρουσιάζονται γενικές έννοιες που αφορούν το γεωμετρικό προγραμματισμό. Ο γεωμετρικός προγραμματισμός (geometric programming) αποτελεί μία μέθοδο επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης, των οποίων η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση και οι συναρτήσεις περιορισμού έχουν συγκεκριμένη μορφή. Τα τελευταία χρόνια, έχουν αναπτυχθεί σημαντικά υπολογιστικά εργαλεία για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων βελτιστοποίησης, για παράδειγμα [11], [12]. Επομένως, ένα πρόβλημα που υπάγεται σε αυτήν την κατηγορία δύναται να λυθεί με κάποια σχετική ευκολία αποδοτικά και αξιόπιστα. Ακόμα και στην περίπτωση που ένα πρόβλημα δεν ανήκει στην εν λόγω κατηγορία, δύναται με προσεγγίσεις να μοντελοποιηθεί και να επιλυθεί με τα προαναφερθέντα εργαλεία. Συνεπώς, κρίνεται αναγκαίο, πριν την εφαρμογή των τεχνικών αυτών στο πρόβλημα βελτιστοποίησης της εργασίας αυτής, να παρουσιαστούν οι βασικές αρχές του γεωμετρικού προγραμματισμού.

Το κεφάλαιο αυτό οργανώνεται ως εξής: Στην ενότητα 3.1, περιγράφονται τα θεμελιώδη στοιχεία που ορίζουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Στη συνέχεια, στην ενότητα 3.2, αναφέρονται έννοιες σιγμοειδή γεωμετρικού προγραμματισμού, καθώς όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5, η συγκεκριμένη επέκταση του γεωμετρικού προγραμματισμού είναι αναγκαία ώστε να επιλυθεί, τελικά, το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας ενός δικτύου.

3.1 Βασικά Στοιχεία Γεωμετρικού Προγραμματισμού

3.1.1 Μονώνυμο

Έστω ένα διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_K)^T \in \mathbb{R}^K$, του οποίου τα στοιχεία είναι θετικά ($x_k > 0, k = 1, \dots, K$). Τότε, ως μονώνυμο (monomial) ορίζεται μία συνάρτηση της μορφής:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= c x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_K^{a_K} \\ &= c \prod_{k=1}^K x_k^{a_k}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου $c > 0$ και $a_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, K$. Θα αναφερόμαστε στη σταθερά c ως σταθερά του μονώνυμου και στα a_k ως οι εκθέτες του μονώνυμου. Τα μονώνυμα έχουν τις εξής

ιδιότητες:

- Όταν διαιρούνται και πολλαπλασιάζονται δύο μονώνυμα f, g μεταξύ τους, τότε το αποτέλεσμα εξακολουθεί να είναι μονώνυμο.
- Επίσης, όταν ένα μονώνυμο υψώνεται σε μία δύναμη, τότε προκύπτει και πάλι μονώνυμο.

Να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι ο όρος μονώνυμο στην άλγεβρα διαφέρει από το μονώνυμο στο γεωμετρικό προγραμματισμό, στο ότι οι εκθέτες μπορούν να είναι πραγματικοί αριθμοί και όχι κατά ανάγκη μη αρνητικοί ακέραιοι. Στο εξής, όταν αναφέρεται ο όρος μονώνυμο, αυτό θα σημαίνει ότι πρόκειται για μονώνυμο όπως αυτό ορίζεται στην εξίσωση (3.1).

3.1.2 Ποζυνώμια

Ως ποζυνώμιο (posynomial) θα ορίζεται ένα πεπερασμένο άθροισμα από μονώνυμα, δηλαδή

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{\ell=1}^L c_{\ell} x_1^{a_{1\ell}} x_2^{a_{2\ell}} \cdots x_K^{a_{K\ell}} \\ &= \sum_{\ell=1}^L c_{\ell} \prod_{k=1}^K x_k^{a_{k\ell}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

όπου $c_{\ell} > 0$ για κάθε $\ell = 1, \dots, L$. Τα ποζυνώμια έχουν με τη σειρά τους τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το άθροισμα, και το γινόμενο δύο ποζυνωμίων είναι με τη σειρά του ποζυνώμιο.
- Η θετική βάρθρωση (positive scaling) ενός ποζυνωμίου, αποτελεί ποζυνώμιο.
- Εάν ένα ποζυνώμιο f διαιρεθεί από ένα μονώνυμο g , τότε το αποτέλεσμα της πράξης (f/g) , είναι ποζυνώμιο.

3.1.3 Θεμελιώδης Μορφή Γεωμετρικού Προγραμματισμού

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης γεωμετρικού προγραμματισμού, έχει την ακόλουθη μορφή [13]:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_0(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to} && f_i(\mathbf{x}) \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \\ &&& g_i(\mathbf{x}) = 1, \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (3.3)$$

όπου $f_i(\mathbf{x}), i = 0, \dots, m$ είναι ποζυνώμια και $g_i(\mathbf{x})$ μονώνυμα $i = 1, \dots, p$.

3.1.4 Επίλυση Γεωμετρικών Προβλημάτων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, τα προβλήματα γεωμετρικού προγραμματισμού δύνανται να επιλυθούν ιδιαίτερα αποτελεσματικά. Ακόμα και προβλήματα με πολλές μεταβλητές -της τάξης των 1000- ή και αραιά (sparse problems) είναι δυνατόν να λυθούν μέσα σε λίγα λεπτά [13].

Αυτό συμβαίνει επειδή ουσιαστικά, τα αναφερθέντα προβλήματα βελτιστοποίησης ανάγονται σε κυρτά προβλήματα και στη συνέχεια επιλύονται με αλγόριθμους εσωτερικών σημείων (interior-point algorithms). Αυτή η μετατροπή σε κυρτό πρόβλημα πραγματοποιείται μέσω μίας λογαριθμικής αλλαγής των μεταβλητών x_k . Πιο συγκεκριμένα, στη θέση των x_k , χρησιμοποιούνται οι λογάριθμοι τους $y_k = \log(x_k)$ έτσι, ώστε $x_k = e^{y_k}$. Στη συνέχεια, η προς βελτιστοποίηση συνάρτηση θεωρείται η $\log f_0$. Έπειτα, οι ανισοτικές συναρτήσεις περιορισμού f_i αντικαθίστανται από τις $\log f_i \leq 0$ και ομοίως οι περιορισμοί $g_i = 1$, αντιστοιχούν πλέον στους περιορισμούς $\log g_i = 0$. Ως αποτέλεσμα, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που ορίζεται στη (3.3), λαμβάνει με τις αντικαταστάσεις που μόλις αναφέρθηκαν, την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \log f_0(e^{\mathbf{y}}) \\ & \text{subject to} && \log f_i(e^{\mathbf{y}}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && \log g_i(e^{\mathbf{y}}) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου τώρα, η βελτιστοποίηση γίνεται ως προς τις μεταβλητές y_k . Ο συμβολισμός $e^{\mathbf{y}}$, σημαίνει ότι κάθε όρος του διανύσματος $\mathbf{y}$, ισούται με $(e^{\mathbf{y}})_k = e^{y_k}$. Το πρόβλημα (3.4), φαίνεται πιο περίπλοκο από το (3.3), ωστόσο αποδεικνύεται ότι είναι εν τέλει κυρτό πρόβλημα.

Απόδειξη: Αρχικά, ελέγχεται η κυρτότητα για τους ισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος ($\log g_i(e^{\mathbf{y}})$). Έστω ότι η $g(\mathbf{x})$ είναι ένα μονώνυμο όπως ορίζει η σχέση (3.1). Τότε, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \log g(e^{\mathbf{y}}) &= \log c + a_1 \log x_1 + \dots + a_K \log x_K \\ &= \log c + a_1 y_1 + \dots + a_K y_K \end{aligned}$$

όπου η τελευταία σχέση είναι συσχετιζόμενη (affine function), δηλαδή γραμμική συν μία σταθερά. Επομένως, προκύπτει ότι οι ισοτικοί περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις υπό τις νέες μεταβλητές y_k , καθώς

$$a_1 y_1 + \dots + a_K y_K = \log c,$$

κάτι το οποίο έρχεται σε συμφωνία με το γεγονός ότι σε ένα κυρτό πρόβλημα οι ισοτικοί περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές συναρτήσεις, όπως αναφέρεται και στο Παράρ-

τημα. Έπειτα, ελέγχεται η κυρτότητα των περιορισμών $\log f_i(\mathbf{e}^y) \leq 0$, όπου f_i ποζυνώμιο. Όμως, ισχύει ότι:

$$\log f(\mathbf{e}^y) = \log \sum_{\ell=1}^L \exp(\mathbf{a}_\ell^T \mathbf{x} + \log(c_\ell)),$$

όπου $\mathbf{a}_\ell$, $\ell = 1, \dots, L$ είναι το διάνυσμα των συντελεστών του ℓ -οστού όρου του ποζυνωμίου, όπως αυτό ορίστηκε στη σχέση (3.2). Όμως, είναι γνωστό [8], ότι μία συνάρτηση της μορφής $\log(\text{sum}(\exp(\mathbf{x})))$, είναι κυρτή. Αλλά, το όρισμα της συνάρτησης $\log(\text{sum}(\exp(\mathbf{x})))$ είναι συσχετιζόμενη συνάρτηση. Αποδεικνύεται [8], ότι η κυρτότητα είναι εξασφαλισμένη για τέτοιους μετασχηματισμούς του ορίσματος μίας συνάρτησης. Οπότε, τελικά, η συνάρτηση $\log f(\mathbf{e}^y)$ είναι κυρτή. $\square$

3.1.5 Γενικευμένος Γεωμετρικός Προγραμματισμός

Ο γεωμετρικός προγραμματισμός επιτρέπει κάποιες γενικεύσεις, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα τη πιο γενική χρήση των μεθόδων επίλυσης αυτής της ομάδας προβλημάτων βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, όπως ορίστηκαν τα μονώνυμα και τα ποζυνώμια προηγουμένως, υπάρχει ένας σχετικός περιορισμός στη χρήση τους. Για παράδειγμα, έστω δύο ποζυνώμια f_1 , f_2 . Η ύψωση των f_1 , f_2 και f_3 , σε μη ακέραιες δυνάμεις δεν αποδίδει ποζυνώμιο, και αυτό γιατί δεν είναι εφικτό να γίνει το ανάπτυσμα ενός αθροίσματος σε μη-ακέραια δύναμη. Δηλαδή, η πράξη $f_1^{2.2}$, δεν αποτελεί ποζυνώμιο. Έστω, επίσης, ότι ένα γεωμετρικό πρόγραμμα βελτιστοποίησης, έχει τον ακόλουθο ανισοτικό περιορισμό:

$$f_1^{2.2}(\mathbf{x}) + f_2^{3.5}(\mathbf{x}) \leq 1.$$

Τότε προκύπτει το ερώτημα του πώς λύνεται ένα τέτοιο πρόβλημα. Σύμφωνα με το [13], η παραπάνω παράσταση δύναται να γραφεί ως εξής: Προστίθενται δύο νέες μεταβλητές t_1 , t_2 , ώστε να ισχύει $f_1(\mathbf{x}) \leq t_1$ και $f_2(\mathbf{x}) \leq t_2$ - δηλαδή οι νέες μεταβλητές χρησιμοποιούνται ως άνω φράγμα των προηγούμενων συναρτήσεων. Τότε, η παραπάνω ανίσωση είναι ισοδύναμη με την ανίσωση:

$$t_1^{1.2} + t_2^{3.5} \leq 1,$$

η οποία είναι, πλέον, συμβατή με το γεωμετρικό προγραμματισμό. Αυτή η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και γενικότερα. Έστω μία ανίσωση της μορφής:

$$x + y + \left((1 + xy)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{1 + \frac{y}{z}} \right)^{3.1} \leq 1.$$

Τότε, εάν θεωρηθεί ότι $x + y + t_1^{3.1} \leq 1$, $t_2^{\frac{3}{2}} + t_3^{\frac{1}{2}} \leq t_1$, $1 + xy \leq t_2$ και $1 + \frac{y}{z} \leq t_3$, (όπου t_1 , t_2 και

t_3 νέες μεταβλητές), η παραπάνω ανίσωση λαμβάνει επιτρεπτή μορφή για το γεωμετρικό προγραμματισμό.

Γενικότερα, έστω $f_1, \dots, f_k$ ποζυνώμια. Τότε ο ακόλουθος ανισοτικός περιορισμός:

$$f_0(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) \leq 1$$

γράφεται ως εξής:

$$f_0(t_1, \dots, t_k) \leq 1, f_1(\mathbf{x}) \leq t_1, \dots, f_k(\mathbf{x}) \leq t_k,$$

όπου t_i : νέες μεταβλητές.

Με παρόμοιο σκεπτικό, μία παράσταση της μορφής $\max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\} + f_3(\mathbf{x}) \leq 1$, δύναται να αναχθεί σε τρεις ανισοτικές σχέσεις, χρησιμοποιώντας μία νέα μεταβλητή t , ως εξής:

$$t + f_3(\mathbf{x}) \leq 1, \quad f_1(\mathbf{x}) \leq t, \quad f_2(\mathbf{x}) \leq t.$$

Οι τελευταίες σχέσεις είναι συμβατές με το γεωμετρικό προγραμματισμό.

Μία συνάρτηση θα είναι γενικευμένο ποζυνώμιο εάν σχηματίζεται από ποζυνώμια υπό τις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού, της ύψωσης σε (μη-ακέραια) θετική δύναμη και της συνάρτησης $\max$. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης θα ανήκει στην κατηγορία του Γενικευμένου Γεωμετρικού Προγραμματισμού (Generalized Geometric Programming), εάν και η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί, είναι γενικευμένα μονώνυμα ή ποζυνώμια. Συνεπώς, η κατηγορία αυτή είναι ευρύτερη του γεωμετρικού προγραμματισμού.

3.2 Σιγμοειδής Προγραμματισμός

Ο σιγμοειδής προγραμματισμός (signomial programming) αποτελεί μία άλλη επέκταση του γεωμετρικού προγραμματισμού. Έχει την ίδια μορφή με ένα πρόβλημα γεωμετρικού προγραμματισμού, όπως αυτό αποτυπώθηκε στο πρόβλημα (3.3), με τη διαφορά ότι πλέον οι συναρτήσεις f και g είναι σιγμοειδείς συναρτήσεις.

Μία συνάρτηση f λέγεται σιγμοειδής εάν ορίζεται ως εξής:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^L c_{\ell} x_1^{a_{1\ell}} x_2^{a_{2\ell}} \cdots x_K^{a_{K\ell}}, \quad (3.5)$$

όπου και αυτή τη φορά $x_k > 0$, αλλά οι συντελεστές c_{ℓ} δύναται να είναι και αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Το γεγονός αυτό, κάνει ένα σιγμοειδές πρόβλημα ιδιαίτερα περίπλοκο στην ανάλυσή και επίλυσή του, καθώς η ιδιότητα της κυρτότητας που προαναφέρθηκε και αποδείχτηκε στην υποενότητα 3.1.4 αναιρείται. Ο λόγος που αναιρείται, είναι ότι ναι μεν το άθροισμα κυρτών συναρτήσεων είναι με τη σειρά του μία κυρτή συνάρτηση, ωστόσο η διαφορά κυρτών συναρτήσεων δεν έχει την ίδια σημαντική ιδιότητα. Επομένως, πρέ-

πρέπει να αναζητηθούν άλλες τεχνικές επίλυσης σιγμοειδών προβλημάτων βελτιστοποίησης οι οποίες να άρουν αυτή τη δυσκολία που παρουσιάζεται. Επιπλέον, όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 2, το πρόβλημα της βελτιστοποίησης που πραγματεύεται η εργασία αυτή, είναι εν μέρει σιγμοειδές, καθώς οι συναρτήσεις περιορισμού έχουν τη μορφή που ορίζει η σχέση (3.5). Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει εύκολα, εάν συγκριθούν μεταξύ τους οι σχέσεις (2.15) και (3.5), όπου παρατηρεί κανείς ότι

$$c_\ell = (-1)^{|a|} \det(A_{\bar{a}\bar{a}}).$$

Κρίνεται, λοιπόν, απαραίτητο να γίνει διερεύνηση για το πώς λύνονται τέτοια προβλήματα βελτιστοποίησης.

3.2.1 Σιγμοειδή Προβλήματα Βελτιστοποίησης

Τα τελευταία χρόνια, υπάρχει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον γύρω από τον σιγμοειδή προγραμματισμό, καθώς τέτοια προβλήματα εμφανίζονται συχνά σε αρκετούς επιστημονικούς κλάδους (στις τηλεπικοινωνίες, στη σχεδίαση ηλεκτρονικών κυκλωμάτων και γενικότερα σε επιστήμες μηχανικών). Επιπλέον, έχουν προταθεί ανά καιρούς, διάφορες τεχνικές εύρεσης ολικών ελαχίστων/μεγίστων (global solutions). Συγκεκριμένα, το 2004 [14], προτάθηκε μία τεχνική επίλυσης, η οποία χρησιμοποιεί linear relaxation, ώστε να μετασχηματίσει το σιγμοειδές πρόβλημα σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο στη συνέχεια λύνεται με μεθόδους τύπου διακλάδωσης και οριοθέτησης (branch-and-bound algorithms).

Επίσης, το 2010 [15], χρησιμοποιείται η μέση-αριθμητική-ανισότητα και αναπτύσσονται οι αλγόριθμοι MM, προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα. Το 2014 [16], προτάθηκε μία μέθοδος μετατροπής του προβλήματος σε ένα μονοτονικό πρόβλημα, το οποίο στη συνέχεια ανάγεται σε πολλά γραμμικά προβλήματα, μέσω τεχνικών γραμμικοποίησης. Ωστόσο, αυτές οι προσεγγίσεις δεν εγγυώνται πάντα τη σύγκλιση στο ολικό βέλτιστο, επομένως δεν κρίνονται πάντοτε ως κατάλληλες. Ακόμα, υπάρχει τρόπος [17] να γίνει κυρτοποίηση (convexification) των σιγμοειδών όρων ενός προβλήματος, αλλά μία τέτοια μέθοδος εξυπηρετεί περισσότερο όταν υπάρχουν λίγοι σιγμοειδείς όροι, καθώς η υπολογιστική πολυπλοκότητα αυξάνεται ραγδαία με την εισαγωγή επιπλέον όρων.

Παρόλα αυτά, έχει αποδειχθεί [18], ότι ένα σιγμοειδές πρόβλημα μπορεί με συγκεκριμένες τεχνικές να μετατραπεί σε γεωμετρικό πρόβλημα και στη συνέχεια να επιλυθεί σύμφωνα με τις μεθόδους που περιγράφηκαν στην υποενότητα 3.1.4.

3.2.2 Επίλυση Σιγμοειδών Προβλημάτων

Έστω, στη γενική του μορφή, το ακόλουθο σιγμοειδές πρόβλημα:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} \quad f_0(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{L_0} c_{0\ell} \prod_{k=1}^K x_k^{a_{0k\ell}} \\
 & \text{subject to} \quad f_m(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{L_k} c_{m\ell} \prod_{k=1}^K x_k^{a_{mk\ell}} \leq 1, \quad m = 1, \dots, p \\
 & \quad \quad \quad f_m(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{L_k} c_{m\ell} \prod_{k=1}^K x_k^{a_{mk\ell}} = 1, \quad m = p+1, \dots, q \\
 & \quad \quad \quad x_k > 0, \quad k = 1, \dots, K
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_K)^T \in \mathbb{R}^K$. Αρχικά, ορίζονται οι συναρτήσεις: $f_m = f_m^+(\mathbf{x}) - f_m^-(\mathbf{x})$, όπου

$$\begin{aligned}
 f_m^+(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in J_m^+} c_{mj} \prod_{k=1}^K x_k^{a_{mkj}}, \quad m = 0, 1, \dots, q \\
 f_m^-(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in J_m^-} (-c_{mj}) \prod_{k=1}^K x_k^{a_{mkj}}, \quad m = 0, 1, \dots, q
 \end{aligned}$$

με $J_m^+ = \{m | m \in J_m, c_{mj} > 0\}$ και $J_m^- = \{m | m \in J_m, c_{mj} < 0\}$, όπου $J_m = \{1, 2, \dots, L_k\}$. Βάσει αυτών των ορισμών, το πρόβλημα (3.6), λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} \quad f_0^+(\mathbf{x}) - f_0^-(\mathbf{x}) + M \\
 & \text{subject to} \quad f_m^+(\mathbf{x}) - f_m^-(\mathbf{x}) \leq 1, \quad m = 1, \dots, p \\
 & \quad \quad \quad f_m^+(\mathbf{x}) - f_m^-(\mathbf{x}) = 1, \quad m = p+1, \dots, q \\
 & \quad \quad \quad x_k > 0, \quad k = 1, \dots, K
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

όπου $M > 0$ σταθερός αριθμός επαρκώς μεγάλος. Ο λόγος που εισάγεται αυτή η σταθερά είναι γιατί η προς βελτιστοποίηση συνάρτηση πρέπει να είναι θετική, καθώς εάν δεν είναι, τότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί γεωμετρικός προγραμματισμός. Στη συνέχεια, εισάγεται μία πρόσθετη μεταβλητή x_0 , ώστε η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση να είναι μονώνυμο και επιπλέον γίνεται μία ανακατάταξη των όρων ώστε να προκύψει το ακόλουθο ισοδύ-

ναμο πρόβλημα:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && x_0 \\
 & \text{subject to} && \frac{f_0^+(\mathbf{x}) + M}{f_0^-(\mathbf{x}) + x_0} \leq 1 \\
 & && \frac{f_m^+(\mathbf{x})}{f_m^-(\mathbf{x}) + 1} \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots, p \\
 & && \frac{f_m^+(\mathbf{x})}{f_m^-(\mathbf{x}) + 1} = 1, \quad m = p + 1, \dots, q \\
 & && x_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, K
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Εάν δεν υπάρχουν ισοτικοί περιορισμοί, η επίλυση του προβλήματος (3.8), απλουστεύεται σημαντικά. Για μία πλήρη μελέτη του προβλήματος (3.8), ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [18]. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής, το πρόβλημα απλοποιείται και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\text{minimize} \quad x_0 \tag{3.9}$$

$$\text{subject to} \quad \frac{f_0^+(\mathbf{x}) + M}{f_0^-(\mathbf{x}) + x_0} \leq 1 \tag{3.10}$$

$$\frac{f_m^+(\mathbf{x})}{f_m^-(\mathbf{x}) + 1} \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots, p \tag{3.11}$$

$$x_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, K \tag{3.12}$$

Επιπλέον, το πρόβλημα αυτό απλοποιείται περισσότερο (όπως θα φανεί στη συνέχεια), ως εξής:

$$\text{minimize} \quad x_0 \tag{3.13}$$

$$\text{subject to} \quad \frac{f_0^+(\mathbf{x}) + M}{f_0^-(\mathbf{x}) + x_0} \leq 1 \tag{3.14}$$

$$\frac{f_m^+(\mathbf{x})}{f_m^-(\mathbf{x}) + 1} \leq 1, \quad m \in M_{11} \tag{3.15}$$

$$\frac{f_m^+(\mathbf{x})}{f_m^-(\mathbf{x}) + 1} \leq 1, \quad m \in M_{12} \tag{3.16}$$

$$x_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, K \tag{3.17}$$

όπου $M_{11} = \{m | m \in M_1, f_m^-(\mathbf{x}) + 1 : \text{μονωνυμο}\}$, $M_{12} = \{m | m \in M_1, m \notin M_{11}\}$ και $M_1 = \{1, 2, \dots, p\}$.

Σε αυτό το πρόβλημα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση (3.13) είναι

ένα μονώνυμο, οι ανισώσεις (3.14)-(3.16) είναι πηλικά ποζυνωμίων και οι ανισώσεις (3.17) είναι επίσης μονώνυμα. Όμως, το πηλίο δύο ποζυνωμίων δεν είναι ποζυνώμιο (ή μονώνυμο), και άρα το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης, δεν είναι επιλύσιμο με τεχνικές γεωμετρικού προγραμματισμού. Ωστόσο, λόγω μίας πολύ σημαντικής ιδιότητας, τα ποζυνώμια $\hat{f}_0^-(\mathbf{x}) + x_0$ και $\hat{f}_m^-(\mathbf{x}) + 1$, δύνανται να προσεγγιστούν από μονώνυμα. Η ιδιότητα αυτή είναι η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου (λόγω αυτής της ιδιότητας, ονομάστηκαν τα συγκεκριμένα προβλήματα βελτιστοποίησης ως γεωμετρικός προγραμματισμός [13]). Έστω ένα ποζυνώμιο $g(\mathbf{x}) = \sum_v u_v(\mathbf{x})$, όπου $u_v(\mathbf{x})$ τα μονώνυμα που απαρτίζουν το ποζυνώμιο $g(\mathbf{x})$. Τότε, λόγω της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου (arithmetic-geometric-mean inequality), ισχύει ότι:

$$g(\mathbf{x}) \geq \hat{g}(\mathbf{x}) = \prod_v \left(\frac{u_v(\mathbf{x})}{a_v(\mathbf{y})} \right)^{a_v(\mathbf{y})}, \quad (3.18)$$

όπου οι παράμετροι a_v δίνονται από τη σχέση:

$$a_v(\mathbf{y}) = \frac{u_v(\mathbf{x})}{g(\mathbf{y})}, \quad \forall v, \quad (3.19)$$

και $\mathbf{y}$ ένα καθορισμένο σημείο (fixed-point), με $\mathbf{y} > 0$. Αποδεικνύεται ότι το μονώνυμο $\hat{g}(\mathbf{x})$ όπως ορίστηκε παραπάνω, αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση ενός ποζυνωμίου γύρω από το σημείο $\mathbf{y}$ [13]. Βάσει αυτών, ένα πηλίο δύο ποζυνωμίων (h, g) που πρέπει να ικανοποιεί την ανίσωση $h/g \leq 1$ δύνανται να προσεγγιστεί από το ποζυνώμιο (ή το μονώνυμο): $h/\hat{g} \leq 1$ και ισχύει ότι $h/g \leq h/\hat{g} \leq 1$. Εφαρμόζοντας τα τελευταία συμπεράσματα στο πρόβλημα που ορίζουν οι σχέσεις (3.13)-(3.17), το πρόβλημα βελτιστοποίησης διαμορφώνεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x_0 \\ & \text{subject to} && \frac{\hat{f}_0^+(\mathbf{x}) + M}{\hat{f}_0^-(\mathbf{x}, x_0)} \leq 1 \\ & && \frac{\hat{f}_m^+(\mathbf{x})}{\hat{f}_m^-(\mathbf{x}) + 1} \leq 1, \quad m \in M_{11} \\ & && \frac{\hat{f}_m^+(\mathbf{x})}{\hat{f}_{12m}^-(\mathbf{x})} \leq 1, \quad m \in M_{12} \\ & && x_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, K \end{aligned} \quad (3.20)$$

όπου $\hat{f}_0^-(\mathbf{x}, x_0)$, $\hat{f}_{12m}^-(\mathbf{x})$ οι προσεγγίσεις των $\hat{f}_0^-(\mathbf{x}) + x_0$ και $\hat{f}_m^-(\mathbf{x}) + 1$ με βάση τις σχέσεις (3.18), (3.19), αντιστοίχως.

Συνοψίζοντας, για να λυθεί το πρόβλημα (3.20), αρκεί να χρησιμοποιηθεί ο επαναληπτικός αλγόριθμος που ακολουθεί:

- **Βήμα 0:** Επιλογή αρχικών τιμών $\mathbf{x}^{(0)}$, $x_0^{(0)}$ που να καλύπτουν τους περιορισμούς του

προβλήματος (feasible values) για τις μεταβλητές $\mathbf{x}$ και x_0 , αντιστοίχως. Επιλογή ακρίβειας $\varepsilon > 0$. Απόδοση τιμής μηδέν (0) στο μετρητή επαναλήψεων r ($r = 0$).

- **Βήμα 1:** Στην r επανάληψη, υπολογισμός των μονώνυμων που απαρτίζουν τα ποζυνώμια των παρονομαστών στις σχέσεις (3.14)-(3.16), αντικαθιστώντας τις τιμές $\mathbf{x}^{(r-1)}, x_0^{(r-1)}$. Υπολογισμός των αντίστοιχων παραμέτρων $a_v(\mathbf{x}^{(r-1)}, x_0^{(r-1)})$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.19).
- **Βήμα 2:** Υπολογισμός της προσέγγισης που ορίζεται από τη σχέση (3.18), σύμφωνα με τις παραμέτρους $a_v(\mathbf{x}^{(r-1)}, x_0^{(r-1)})$ του προηγούμενου βήματος.
- **Βήμα 3:** Επίλυση του γεωμετρικού προβλήματος (3.20), έτσι, ώστε να προκύψουν οι νέες τιμές $\mathbf{x}^{(r)}, x_0^{(r)}$.
- **Βήμα 4:** Εάν $\|\mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{x}^{(r-1)}\| \leq \varepsilon$, τότε $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(r)}$ (όπου $\mathbf{x}^*$ η βέλτιστη λύση) και ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται. Διαφορετικά, $r = r + 1$ και επιστροφή στο Βήμα 1.

Ο παραπάνω αλγόριθμος αποδεικνύεται ότι συγκλίνει πάντα στη βέλτιστη λύση, με απόκλιση ε [18].

4. ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΕ ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Στο Κεφάλαιο 3, έγινε μία επισκόπηση στον γεωμετρικό προγραμματισμό και ειδικότερα παρουσιάστηκαν τεχνικές με βάση τις οποίες επιλύονται σιγμοειδή προβλήματα, τα οποία αποτελούν προέκταση των γεωμετρικών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Η προσέγγιση αυτή έγινε επειδή το πρόβλημα βελτιστοποίησης που διαπραγματεύεται η εργασία αυτή, δύναται να αναχθεί σε ένα σιγμοειδές πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας σε ένα δίκτυο, όπως αυτό προέκυψε από την ανάλυσή του στο Κεφάλαιο 2 (ενότητα 2.3), έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & f_0 = \sum_{k=1}^K w_k \log(1 + \gamma_k) \\ \text{subject to} \quad & f_k = \sum_a [(-1)^{|a|+1} \det(A_{\bar{a}\bar{a}})] \prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j, k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (4.1)$$

Από τη σχέση (4.1), είναι σαφές ότι οι συναρτήσεις περιορισμού f_k είναι σιγμοειδείς, όπως ορίστηκε στο Κεφάλαιο 3 (σχέση (3.5)), όπου το ρόλο των συντελεστών των σιγμοειδών συναρτήσεων, τον έχουν οι σταθερές $(-1)^{|a|+1} \det(A_{\bar{a}\bar{a}})$. Πρόκειται, δηλαδή, εν μέρει για ένα σιγμοειδές πρόβλημα βελτιστοποίησης, λαμβάνοντας υπόψιν τις συναρτήσεις περιορισμού. Ωστόσο, λόγω της συνάρτησης προς βελτιστοποίηση (f_0), το πρόβλημα (4.1), δεν μπορεί να λυθεί με τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.2.2. Λόγω των παραπάνω, κρίνεται αναγκαίο να αναζητηθεί κάποια μέθοδος με την οποία να μπορεί να αρθεί αυτή η δυσκολία. Επομένως, αρκεί να γίνει κάποιος μετασχηματισμός της f_0 , ώστε να είναι τελικά διαχειρίσιμη και να λυθεί το πρόβλημα (4.1), με όρους σιγμοειδή προγραμματισμού.

Ένας πιθανός τρόπος λύσης του νέου αυτού προβλήματος, είναι να προσεγγιστεί η f_0 από μία συνάρτηση που να είναι συμβατή με τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στο γεωμετρικό προγραμματισμό, δηλαδή με μονώνυμο ή με ποζυνώμιο. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τεχνικές με τις οποίες μπορεί να πραγματοποιηθεί η προσέγγιση που μόλις περιγράφηκε. Πιο συγκεκριμένα, το κεφάλαιο αυτό οργανώνεται ως εξής: Στην ενότητα 4.1, περιγράφονται γενικές έννοιες προσαρμογής δοθέντων δεδομένων σε συγκεκριμένου τύπου συναρτήσεις. Τέλος, στην ενότητα 4.2 παρουσιάζονται τεχνικές με βάση τις οποίες δύναται να λυθεί το εν λόγω πρόβλημα και να προκύψει στη θέση της f_0 , μία συνάρτηση $\hat{f}_0$ της οποίας η μορφή να είναι τέτοια, ώστε να ανάγεται σε συνάρτηση που να είναι συμβατή με τον γεωμετρικό προγραμματισμό.

4.1 Μέθοδοι Προσαρμογής Δεδομένων σε Κυρτές-Τμηματικά Γραμμικές Συναρτήσεις

Έστω ότι διατίθενται M το πλήθος πολυδιάστατα δεδομένα (multi-dimensional data),

$$(u_1, y_1), \dots, (u_M, y_M) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}$$

τα οποία είναι επιθυμητό να προσαρμοστούν από μία κυρτή-τμηματικά γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$ από κάποιο σύνολο υποψήφιων συναρτήσεων $\mathcal{F}$. Εάν υιοθετηθεί μέσο τετραγωνικό κριτήριο προσαρμογής (least-squares fitting), τότε προκύπτει το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad J(f) = \sum_{i=1}^M (f(u_i) - y_i)^2 \\ & \text{subject to} \quad f \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{4.2}$$

με μεταβλητή τη συνάρτηση f . Αναζητείται, δηλαδή, μία συνάρτηση f , η οποία θα ελαχιστοποιεί την $J(f)$. Η ποσότητα $(J(f)/M)^{1/2}$ θα αναπαριστά τη μέση τετραγωνική απόκλιση (RMS - root-mean-square) της προσαρμογής των δεδομένων από την συνάρτηση-λύση του προβλήματος (4.2) (όσο μεγαλύτερο το RMS, τόσο χειρότερη η προσαρμογή). Από εδώ και στο εξής, θα θεωρούμε ότι η οικογένεια των συναρτήσεων $\mathcal{F}$ είναι η $\mathcal{F}_{MA}$, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής

$$f(\mathbf{x}) = \max \{ \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} + b_1, \dots, \mathbf{a}_L^T \mathbf{x} + b_L \},$$

όπου $\mathbf{a}_\ell \in \mathbb{R}^K$, $b \in \mathbb{R}$. Μία συνάρτηση που ορίζεται κατά αυτόν τον τρόπο ονομάζεται μέγιστη-συσχετιζόμενη (max-affine) συνάρτηση. Το σύνολο των παραμέτρων $\alpha = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_L, b_1, \dots, b_L)$ που απαιτείται να προσδιοριστεί είναι $p = L(K + 1)$ και το πρόβλημα βελτιστοποίησης (4.2), έχει πλέον τη μορφή:

$$\text{minimize} \quad J(\alpha) = \sum_{i=1}^M \left(\max_{\ell=1, \dots, L} (\mathbf{a}_\ell^T \mathbf{u}_i + b_\ell) - y_i \right)^2 \tag{4.3}$$

με μεταβλητές τις παραμέτρους $\mathbf{a}_\ell$, b_ℓ . Η συνάρτηση J , είναι κατά τμήματα τετραγωνική συνάρτηση της παραμέτρου α : πράγματι, για κάθε i , η $f(\mathbf{u}_i) - y_i$ είναι κατά τμήματα γραμμική και η J είναι το άθροισμα των τετραγώνων τέτοιων συναρτήσεων, άρα η J είναι τετραγωνικώς κυρτή (convex quadratic), όπου η $f(\mathbf{u}_i)$ είναι συσχετιζόμενη. Ωστόσο, η J δεν είναι παντού κυρτή κάτι το οποίο σημαίνει ότι το πρόβλημα (4.3), δεν είναι κυρτό.

Η οικογένεια των μέγιστων-συσχετιζόμενων συναρτήσεων, είναι χρήσιμη για το γεωμετρικό προγραμματισμό, λόγω του ότι βρίσκει εφαρμογή στο να προσδιοριστεί ένα μονώνυμο δοθέντων κάποιων δεδομένων σημείων (όπως έχει προαναφερθεί). Έστω για παράδειγμα, ότι με κάποιον τρόπο - είτε με δειγματοληψία, είτε με τυχαία επιλογή σημείων στο πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης - είναι διαθέσιμα τα δεδομένα: $\mathbf{z}_i, w_i \in \mathbb{R}_{++}^K \times \mathbb{R}_{++}$

και ότι αυτά στη συνέχεια μετασχηματίζονται λογαριθμίζοντάς τα:

$$\mathbf{u}_i = \log(\mathbf{z}_i), y_i = \log(w_i), i = 1, \dots, M.$$

Τότε, εφαρμόζοντας τα προηγούμενα, τα δεδομένα αυτά δύνανται να προσαρμοστούν σε ένα μονώνυμο ως εξής:

$$y_i \approx \max \{ \mathbf{a}_1^T \mathbf{u}_i + b_1, \dots, \mathbf{a}_L^T \mathbf{u}_i + b_L \}.$$

Όμως, η τελευταία σχέση μας δίνει το μοντέλο μέγιστο-μονώνυμο (max-monomial):

$$w_i \approx \max \{ g_1(\mathbf{z}_i), \dots, g_L(\mathbf{z}_i) \},$$

$$\text{όπου } g_\ell(\mathbf{z}) = e^{b_\ell} z_1^{a_{\ell 1}} \dots z_K^{a_{\ell K}}, \ell = 1, \dots, L.$$

4.1.1 Αλγόριθμος Επίλυσης Ελαχίστων Τετραγώνων

Για να λυθεί το πρόβλημα (4.3), αρκεί να υλοποιηθεί ο αλγόριθμος που περιγράφεται στη συνέχεια [19].

Έστω $P_\ell^{(q)}$, $\ell = 1, \dots, L$ ένας διαχωρισμός των δεικτών των δεδομένων στην q επανάληψη του αλγορίθμου, δηλαδή $P_\ell^{(q)} \subseteq \{1, \dots, M\}$ με

$$\bigcup_i P_\ell^{(q)} = \{1, \dots, M\}, \quad P_{\ell_i}^{(q)} \cap P_{\ell_j}^{(q)} = \emptyset, i \neq j.$$

Έστω, επίσης, ότι $\mathbf{a}_\ell^{(q)}, \mathbf{b}_\ell^{(q)}$ δηλώνουν τις παραμέτρους προς αναζήτηση, στην επανάληψη q . Τότε, οι παράμετροι $\mathbf{a}_\ell^{(q+1)}, \mathbf{b}_\ell^{(q+1)}$, ισούνται με τις τιμές που ελαχιστοποιούν το άθροισμα

$$\sum_{i \in P_\ell^{(q)}} (\mathbf{a}_\ell^T \mathbf{u}_i + b - y_i)^2 \quad (4.4)$$

Μετά από παραγωγή και επίλυση της εξίσωσης που προκύπτει ως προς $\mathbf{a}_\ell^{(q)}, \mathbf{b}_\ell^{(q)}$, προκύπτει ότι οι τιμές $\mathbf{a}_\ell^{(q+1)}, \mathbf{b}_\ell^{(q+1)}$, δίνονται από το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_\ell^{(q+1)} \\ b_\ell^{(q+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T & \sum \mathbf{u}_i \\ \sum \mathbf{u}_i^T & |P_\ell^{(q)}| \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y_i \mathbf{u}_i \\ \sum y_i \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

όπου όλα τα αθροίσματα είναι ως προς $i \in P_\ell^{(q)}$. Όταν ο πίνακας στην εξίσωση (4.5), είναι μη-αντιστρέψιμος, τότε μία εναλλακτική είναι να προστεθεί στο άθροισμα (4.4) ένας όρος $\lambda \|\mathbf{a}\|_2^2 + \mu b^2$, όπου λ και μ θετικές σταθερές.

Χρησιμοποιώντας τις νέες τιμές για τους συντελεστές $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, τα νέα σύνολα $P_\ell^{(q+1)}$ προκύπτουν ως εξής: Ο δείκτης i θα περιέλθει στο σύνολο $P_\ell^{(q+1)}$ εάν ικανοποιεί την εξίσωση

$$f^{(q)}(\mathbf{u}_i) = \max_{s=1,\dots,\ell} (\mathbf{a}_s^{(q)T} \mathbf{u}_i + b_s^{(q)}) = \mathbf{a}_j^{(q)T} \mathbf{u}_i + b_j, \quad (4.6)$$

δηλαδή το σύνολο $P_\ell^{(q+1)}$ περιέχει εκείνους τους δείκτες για τους οποίους η συσχετιζόμενη συνάρτηση $\mathbf{a}_j^T \mathbf{z} + b_j$ είναι μέγιστη.

Συνοψίζοντας, ο αλγόριθμος είναι ο ακόλουθος:

Αλγόριθμος Ελαχίστων Τετραγώνων

Δοθέντων των διαμερισμών $P_1^{(0)}, \dots, P_L^{(0)}$ των δεικτών $\{1, \dots, M\}$ και του μέγιστου ορίου επαναλήψεων q_{max} , επανάληψη των ακόλουθων βημάτων για $q = 0, \dots, q_{max}$:

1. Υπολογισμός των $\mathbf{a}_\ell^{(q+1)}, \mathbf{b}_\ell^{(q+1)}$ όπως στην εξίσωση (4.5).
2. Δημιουργία των συνόλων $P_1^{(0)}, \dots, P_\ell^{(0)}$, όπως στην εξίσωση (4.6).
3. Εάν $P_j^{(q)} = P_j^{(q+1)}$ για $j = 1, \dots, \ell$, τότε ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται.

Εάν κατά τη διάρκεια του παραπάνω αλγορίθμου, κάποιο σύνολο $P_j^{(q)}$ προκύψει να είναι το κενό σύνολο, τότε ο αλγόριθμος συνεχίζεται με παραλειπόμενα τα κενά σύνολα.

Ωστόσο, ο παραπάνω αλγόριθμος δεν είναι πλήρης, καθώς δεν έχει περιγραφεί με ποια διαδικασία πραγματοποιείται η επιλογή των αρχικών διαμερισμών $P_1^{(0)}, \dots, P_L^{(0)}$. Για την αρχική επιλογή αυτών των συνόλων, πρέπει να ακολουθηθούν τα εξής δύο βήματα:

1. Αρχικά, επιλέγονται κάποια τυχαία αρχικά σημεία $(p_1, \dots, p_L)$ με βάση την εμπειρική κανονική κατανομή (δειγματικός μέσος όρος $(\bar{u} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u_i)$ και δειγματικός πίνακας συνδιασποράς $(\Sigma_u = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u_i u_i^T)$) των στοιχείων u_i .
2. Στη συνέχεια, ένας δείκτης i θα ανήκει στο σύνολο $P_\ell^{(0)}$, εάν ικανοποιείται η σχέση:

$$P_\ell^{(0)} = \{i \mid \|u_i - p_j\| < \|u_i - p_s\|, s \neq j\}, j = 1, \dots, L. \quad (4.7)$$

Ο τελικός αλγόριθμος με βάση τον οποίο γίνεται η προσαρμογή δεδομένων σε μία κατά-τμήματα γραμμική συνάρτηση, έχει τα εξής βήματα:

Κατά τμήματα-γραμμικός αλγόριθμος προσαρμογής δεδομένων

- Επιλογή των μεγεθών N_{trials}, q_{max}
- Για $i = 1, \dots, N_{trials}$:
 1. Δημιουργία των αρχικών συνόλων διαχωρισμού των δεικτών, σύμφωνα με τη σχέση (4.7).
 2. Εφαρμογή του *Αλγορίθμου Ελαχίστων Τετραγώνων*.
 3. Εύρεση και αποθήκευση του μικρότερου RMS που προκύπτει.

Συνήθως [19], αρκεί να χρησιμοποιηθεί $N_{\text{trials}} = 10$. Από τις επαναλήψεις αυτές, στο τέλος του αλγορίθμου κρατούνται οι παράμετροι που αντιστοιχούν στη μικρότερη τιμή του RMS.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι, όπως ίσως έγινε αντιληπτό, δοθέντων των δεδομένων μίας συνάρτησης f που πρόκειται να προσεγγιστεί από μία κατά τμήματα-γραμμική και κυρτή συνάρτηση $\hat{f}$ με βάση την παραπάνω διαδικασία, δεν είναι εφικτό να προσεγγιστούν όλα τα σημεία της με οσοδήποτε μικρό σφάλμα. Συγκεκριμένα, η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται πιο αποδοτικά, όταν τα δεδομένα παρουσιάζουν ως ένα βαθμό κυρτότητα. Εάν, για παράδειγμα, η f είναι μία κοίλη συνάρτηση, τότε δεν είναι εφικτό αυτή η συνάρτηση να προσεγγιστεί από μία κατά τμήματα-γραμμική κυρτή συνάρτηση. Άρα το RMS σε μία τέτοια περίπτωση αναμένεται ιδιαίτερα μεγάλο και ο αλγόριθμος αποτυγχάνει. Επιπλέον, όπως προαναφέρθηκε προηγουμένως, όταν πρόκειται να προσεγγιστεί μία συνάρτηση f από ένα μονώνυμο, τότε τα δεδομένα της πρέπει πρώτα να λογαριθμιστούν. Συνεπώς, τα μετασχηματισμένα δεδομένα είναι αυτά που πρέπει να διατηρούν την ιδιότητα της κυρτότητας σε αυτήν την περίπτωση, ή αλλιώς η συνάρτηση να είναι λογαριθμικά-κυρτή (log-convex) όπως ορίζεται στο Παράρτημα.

4.2 Μέθοδοι Προσαρμογής Δεδομένων σε Συναρτήσεις Συμβατές με τον Γεωμετρικό Προγραμματισμό

Στην προηγούμενη ενότητα, παρουσιάστηκε ένας αλγόριθμος εύρεσης παραμέτρων, με βάση τον οποίο λύνεται το πρόβλημα της προσέγγισης σημείων από μία συνάρτηση της μορφής

$$f_{MA}(\mathbf{x}) = \max_{\ell=1,\dots,L} \{\mathbf{a}_\ell^T \mathbf{x} + b_\ell\},$$

όπου το ρόλο των παραμέτρων τον έχουν οι σταθερές $\mathbf{a}_\ell$, b_ℓ . Η επιλογή των συναρτήσεων f_{MA} , βασίζεται βασίζεται στο γεγονός ότι οποιαδήποτε κυρτή συνάρτηση, μπορεί να περιγραφεί ως το ασυμπτωτικό μέγιστο (supremum) από ένα σύνολο (εν γένει μεγάλο) συσχετιζόμενων συναρτήσεων [8]. Με άλλα λόγια, μία οποιαδήποτε κυρτή συνάρτηση προσεγγίζεται με αυθαίρετα μεγάλη ακρίβεια από ένα οσοδήποτε μεγάλο σύνολο (ιδανικά $L \rightarrow \infty$) συναρτήσεων της παραπάνω μορφής.

Παρά το σημαντικό αυτό αποτέλεσμα, προκύπτει το εύλογο ερώτημα του πόσο μεγάλο L πρέπει να χρησιμοποιηθεί, ώστε να λάβει κανείς με ικανοποιητική ακρίβεια το αποτέλεσμα που επιθυμεί. Επιπλέον, ένα άλλο ερώτημα που προκύπτει, είναι εάν υπάρχουν άλλες επιλογές ομάδων συναρτήσεων $\mathcal{F}$, οι οποίες να δίνουν καλύτερα αποτελέσματα όταν πρόκειται να προσεγγιστούν συναρτήσεις που πρέπει να είναι συμβατές με τον γεωμετρικό προγραμματισμό, δηλαδή μονώνυμα και ποζυνώμια.

Σύμφωνα με το [20], υπάρχουν τέτοιες οικογένειες συναρτήσεων, οι οποίες πληρούν την ιδιότητα του να είναι πιο ειδικές για το γεωμετρικό προγραμματισμό, οι οποίες όπως θα φανεί στη συνέχεια, αποτελούν γενίκευση της $\mathcal{F}_{MA}$ κατηγορίας.

4.2.1 Softmax-Affine Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις Softmax-Affine έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$f_{SMA}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \log \sum_{\ell=1}^L \exp(\alpha(\mathbf{a}_\ell^T \mathbf{x} + b_\ell)). \quad (4.8)$$

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (4.8), υπάρχει μία ακόμα παράμετρος που πρέπει να προσδιοριστεί, δηλαδή συνολικά πρέπει να προσδιοριστούν $p = L(K+1) + 1$ παράμετροι, όπου K το πλήθος των συνιστωσών του διανύσματος $\mathbf{x}$. Επειδή, όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, η συνάρτηση $\log(\text{sum}(\exp(\cdot)))$ είναι κυρτή, οι συναρτήσεις f_{SMA} είναι κυρτές για $\alpha \in \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$. Η πρόσθετη παράμετρος α , χρησιμοποιείται ώστε να εξομαλύνει τις κορυφές στα σημεία όπου τέμνονται δύο συσχετιζόμενες συναρτήσεις. Επιπλέον, για τις συναρτήσεις αυτές ισχύει η εξής ιδιότητα:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \log \sum_{\ell=1}^L \exp(\alpha(\mathbf{a}_\ell^T \mathbf{x} + b_\ell)) = \max_{\ell=1, \dots, L} \{\mathbf{a}_\ell^T \mathbf{x} + b_\ell\}, \quad (4.9)$$

κάτι το οποίο σημαίνει ότι οι συναρτήσεις αυτές παίρνουν τη μορφή των f_{MA} συναρτήσεων, όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος α .

Οι f_{SMA} συναρτήσεις, δύνανται να μετατραπούν σε μία συνάρτηση τύπου ποζυνώμιο, με τον ακόλουθο τρόπο:

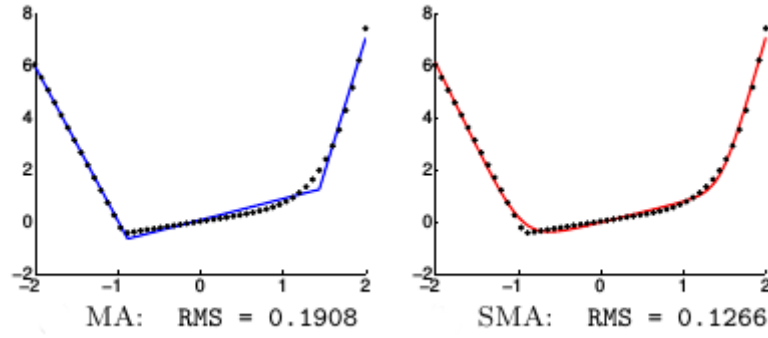
Έστω, $\hat{y} = f_{SMA}(\mathbf{x})$. Τότε, μετασχηματίζοντας λογαριθμικά τη συνάρτηση (4.8), προκύπτει ένα ποζυνώμιο της μορφής:

$$w^\alpha = \sum_{\ell=1}^L e^{ab_\ell} \prod_{k=1}^K u_i^{\alpha a_{k\ell}}, \quad (4.10)$$

ή διαφορετικά

$$w = \left(\sum_{\ell=1}^L e^{ab_\ell} \prod_{k=1}^K u_i^{\alpha a_{k\ell}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (4.11)$$

Στο σχήμα 1, απεικονίζεται ένα παράδειγμα προσαρμογής δεδομένων με τις δύο οικογένειες συναρτήσεων που προαναφέρθηκαν. Παρατηρούμε ότι πράγματι η προσέγγιση (λόγω του RMS που αναγράφεται στο σχήμα) είναι καλύτερη με τις συναρτήσεις τύπου f_{SMA} σε σχέση με τη συνάρτηση τύπου f_{MA} , και ότι τα ακραία σημεία της τελευταίας έχουν εξομαλυνθεί.



Σχήμα 1: Σύγκριση της προσαρμογής δεδομένων με τις συναρτήσεις f_{MA} και f_{SMA} , με κριτήριο το RMS που επιτυγχάνεται στις δύο αυτές περιπτώσεις.

4.2.2 Implicit-Softmax-Affine Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις τύπου Implicit-Softmax-Affine (f_{ISMA}) έχουν τη μορφή

$$\tilde{f}_{ISMA}(\mathbf{x}, y) = \log \sum_{\ell=1}^L \exp(\alpha_{\ell}(\mathbf{a}_{\ell}^T \mathbf{x} + b_{\ell} - y)), \quad (4.12)$$

όπου πλέον εισάγονται οι παράμετροι $\alpha_{\ell} \in \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$ για κάθε όρο του παραπάνω αθροίσματος. Αποδεικνύεται [20], ότι υπάρχει μοναδική λύση στην εξίσωση $\tilde{f}_{ISMA}(\mathbf{x}, y) = 0$ και ότι η συνάρτηση που υπάγεται στην κατηγορία $\mathcal{F}_{ISMA}$ είναι κυρτή. Πλέον, οι παράμετροι που πρέπει να προσδιοριστούν προκειμένου να επιτύχει η προσαρμογή στα δεδομένα, είναι $p = L(K + 2)$.

Ακόμα, όπως και οι συναρτήσεις της οικογένειας $\mathcal{F}_{SMA}$, έτσι και οι συναρτήσεις f_{ISMA} , αντιστοιχούν σε ποζυνώμια σύμφωνα με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\sum_{\ell=1}^L \frac{e^{\alpha_{\ell} b_{\ell}}}{w^{\alpha_{\ell}}} \prod_{k=1}^K u_i^{\alpha_{\ell} a_{k\ell}} = 1. \quad (4.13)$$

Ωστόσο, αυτές οι συναρτήσεις εξυπηρετούν περισσότερο εάν πρόκειται να προσδιοριστεί μία συνάρτηση περιορισμού σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Επομένως η σχέση (4.13), δεν εξυπηρετεί τους σκοπούς αυτής της εργασίας, καθώς το πρόβλημα (4.1), έχει ήδη συναρτήσεις περιορισμού που είναι στη μορφή ποζυνωμίων.

Συνοψίζοντας, στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιηθούν μόνο οι συναρτήσεις τύπου $\mathcal{F}_{SMA}$, παρότι οι συναρτήσεις $\mathcal{F}_{ISMA}$ αποδίδουν μεγαλύτερη ακρίβεια στην προσαρμογή των δεδομένων (μικρότερο RMS).

5. ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΔΙΚΤΥΟΥ ΜΕ ΣΙΓΜΟΕΙΔΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μία προσπάθεια να συνδυαστούν όσα παρουσιάστηκαν στα κεφάλαια 3 και 4, με σκοπό να λυθεί το πρόβλημα που διαπραγματεύεται η εργασία αυτή. Συγκεκριμένα, έως τώρα έχει διερευνηθεί ποια είναι η μορφή του προβλήματος και πώς αυτό μπορεί να περιγραφεί με όρους σιγμοειδούς προγραμματισμού. Ακόμα, έχουν παρουσιαστεί τεχνικές για το πώς μπορεί να διαμορφωθεί το πρόβλημα έτσι, ώστε να προσεγγιστεί (Κεφάλαιο 4) και να αποκτήσει πλήρως τη μορφή ενός σιγμοειδούς προβλήματος βελτιστοποίησης. Αρκεί, λοιπόν, να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα αυτών των προσεγγίσεων και στη συνέχεια να εξεταστεί η ποιότητα των αποτελεσμάτων. Στη συνέχεια, στην ενότητα 5.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν εφαρμόζοντας τις τεχνικές από το Κεφάλαιο 4, στην ενότητα 5.2 παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος επίλυσης του συνολικού προβλήματος βελτιστοποίησης και στην ενότητα 5.3 τα αποτελέσματα προσομοιώσεων που έγιναν για την επίλυση ενός παραδείγματος.

5.1 Προσέγγιση Αντικειμενικής Συνάρτησης

Η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση (αντικειμενική συνάρτηση), όπως αυτή ορίστηκε από το Κεφάλαιο 2, δίνεται από τη σχέση:

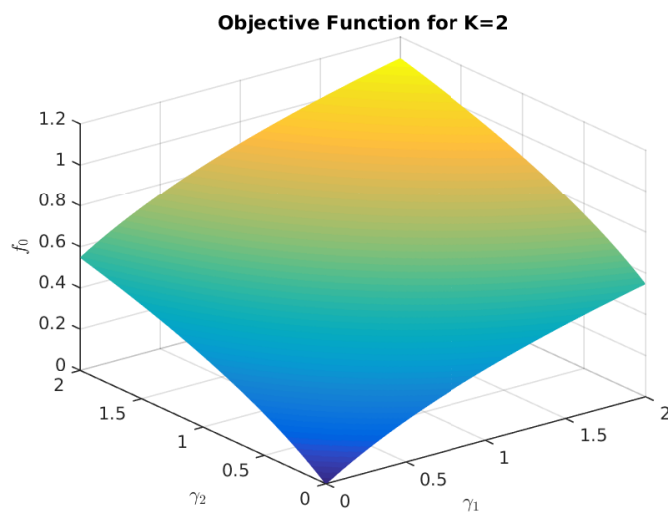
$$f_0 = \sum_{k=1}^K w_k \log(1 + \gamma_k). \quad (5.1)$$

Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 4, για να προσεγγιστεί μία συνάρτηση από μία άλλη συνάρτηση, όπου η τελευταία θα έχει μορφή που να ανάγεται σε μονώνυμο ή ποζυνώμιο, πρέπει να εφαρμοστεί συνοπτικά η εξής διαδικασία [20]:

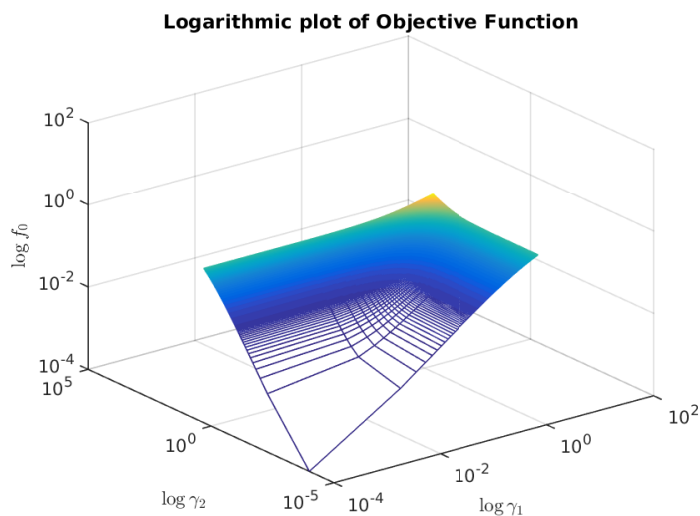
1. Δειγματοληψία της αντικειμενικής συνάρτησης στο διάστημα ενδιαφέροντος, ώστε να προκύψουν δεδομένα $(u_i, y_i) \in \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}_{++}$, $i = 1, \dots, M$, όπου M το πλήθος των σημείων δειγματοληψίας.
2. Εφαρμογή λογαριθμικού μετασχηματισμού των δεδομένων που προέκυψαν:
 $(x_i, y_i) = (\log u_i, \log w_i)$.
3. Προσαρμογή των μετασχηματισμένων δεδομένων σε μία κυρτή συνάρτηση (αλλά όχι συμβατή με τον Γεωμετρικό Προγραμματισμό).
4. Μετασχηματισμός της προκύπτουσας συνάρτησης, στον πρωταρχικό χώρο έτσι, ώστε να προκύψει μία συνάρτηση που να είναι της μορφής που ορίζει ο Γεωμετρικός Προγραμματισμός (μονώνυμο, ποζυνώμιο ή γενικευμένο ποζυνώμιο).

Έως σήμερα, και όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι καλύτερες τεχνικές για να επιτύχει η προσέγγιση μίας συνάρτησης από συναρτήσεις γεωμετρικού προγραμματισμού είναι να χρησιμοποιηθεί κάποια συνάρτηση της οικογένειας $\mathcal{F}_{MA}$, $\mathcal{F}_{SMA}$ ή $\mathcal{F}_{ISMA}$.

Όμως, σημαντική προϋπόθεση για να υπάρχει μικρή απόκλιση στη διαδικασία αυτή, είναι η συνάρτηση προς προσέγγιση να είναι σε έναν ικανοποιητικό βαθμό λογαριθμικώς κυρτή (μία έννοια που ορίζεται στο Παράρτημα). Επομένως, αρχικά, πρέπει να εξεταστεί εάν στην περίπτωση της (5.1) ισχύει αυτή η ιδιότητα. Ένας τρόπος για να διαπιστωθεί αυτό, είναι να γίνει το γράφημα της συνάρτησης ενδιαφέροντος σε λογαριθμική κλίμακα τόσο για τους άξονες των ανεξάρτητων μεταβλητών (γ_k) όσο και για τον άξονα της εξαρτημένης μεταβλητής ($y = f_0$). Για την περίπτωση της συνάρτησης (5.1), ο μόνος τρόπος για να εξεταστεί το λογαριθμικό αυτό γράφημα είναι η περίπτωση όπου $K = 2$, λόγω του ότι υπάρχει περιορισμός στη δυνατότητα οπτικοποίησης για $K \geq 3$. Στα δύο σχήματα που ακολουθούν, απεικονίζονται τόσο η f_0 , όσο και ο λογαριθμικός μετασχηματισμός της που αναφέρθηκε.



Σχήμα 2: Γραφική απεικόνιση της αντικειμενικής συνάρτησης $f_0 = \sum_{k=1}^K w_k \log(1 + \gamma_k)$ για 2 χρήστες του δικτύου.



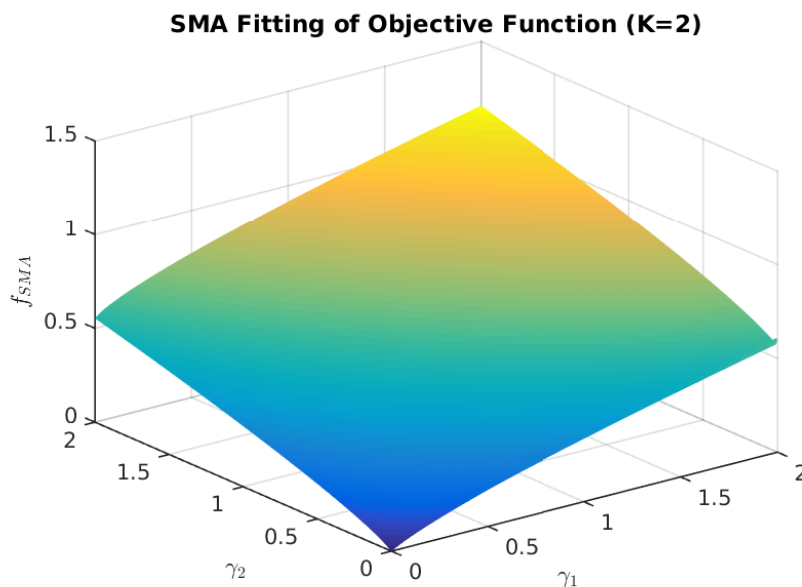
Σχήμα 3: Γραφική απεικόνιση της αντικειμενικής συνάρτησης μετά από λογαριθμικό μετασχηματισμό.

Παρατηρώντας το Σχήμα 3, συμπεραίνει κανείς ότι η συνάρτηση παρουσιάζει έναν ικανοποιητικό βαθμό κυρτότητας, σε κάποιες περιοχές. Επομένως, κρίνεται ότι η f_0 μπορεί να προσεγγιστεί από μία συνάρτηση που να αντιστοιχεί σε μονώνυμο ή ποζυνώμιο.

Αρχικά, πρέπει να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος που περιγράφηκε στην ενότητα 4.1.1: *Κατά τμήματα-γραμμικός αλγόριθμος προσαρμογής δεδομένων*, προκειμένου να προκύψει ένα αρχικό μοντέλο προσέγγισης της συνάρτησης f_0 . Από τη διαδικασία αυτή, όπως είχε αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, προκύπτει μία συνάρτηση, της οποίας η μορφή είναι:

$$\hat{w} = \max_{\ell=1,\dots,L} \{ \mathbf{a}_\ell^T \mathbf{u} + b_\ell \}.$$

Ο λόγος που χρησιμοποιείται πρώτα η οικογένεια συναρτήσεων $\mathcal{F}_{MA}$, είναι για να προκύψει μία πρώτη -σχετικά ικανοποιητική- εκτίμηση της συνάρτησης που είναι επιθυμητό να προσεγγιστεί. Στη συνέχεια, για να βελτιωθεί η προσέγγιση (δηλαδή να μειωθεί το RMS) χρησιμοποιείται η άλλη οικογένεια συναρτήσεων $\mathcal{F}_{SMA}$, η οποία για να προσδιοριστεί πλήρως, χρησιμοποιεί ως αρχικές παραμέτρους, τις παραμέτρους $\mathbf{a}_\ell$ και b_ℓ που προκύπτουν από το $\mathcal{F}_{MA}$ μοντέλο. Για παράδειγμα, εφαρμόζοντας τη διαδικασία αυτή για τη συνάρτηση f_0 της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2 και θεωρώντας $L = 2$, προέκυψε η γραφική παράσταση του επόμενου σχήματος:



Σχήμα 4: Προσέγγιση της f_0 , του Σχήματος 2 από μία συνάρτηση τύπου SMA.

Όπως φαίνεται από μία πρώτη σύγκριση των δύο όμοιων σχημάτων, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η προσέγγιση της αντικειμενικής συνάρτησης, είναι αρκετά ικανοποιητική και κατά συνέπεια, στη θέση της εν λόγω συνάρτησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί το SMA μοντέλο, το οποίο όπως είχε οριστεί, είναι ένα ποζυνώμιο.

5.2 Προτεινόμενη Διαδικασία Βελτιστοποίησης

Όπως έχει παρουσιαστεί και σε προηγούμενα κεφάλαια, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που πρέπει να επιλυθεί, είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} \quad f_0 = \sum_{k=1}^K w_k \log(1 + \gamma_k) \\
 & \text{subject to} \quad f_k = \sum_a [(-1)^{|a|+1} \det(A_{aa}^k)] \prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j \leq 0, k = 1, \dots, K
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

όπου A_{aa}^k ο k -οστός πίνακας (και όχι ο πίνακας υψωμένος στη δύναμη k).

Το πρόβλημα αυτό, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} \quad \hat{f}_0 = f_{SMA}(\mathbf{Y}) \\
 & \text{subject to} \quad f_k = \sum_a [(-1)^{|a|+1} \det(A_{aa}^k)] \prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j \leq 0, k = 1, \dots, K
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

έπειτα από την προσέγγιση της f_0 από ένα ποζυνώμιο, το οποίο προκύπτει βάσει των όσων αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Στη συνέχεια, προσθέτοντας μία επιπλέον μεταβλητή $\gamma_0 > 0$, στην οποία θέτουμε τον περιορισμό $\gamma_0 \leq f_{SMA}$, τότε το πρόβλημα (5.3), λαμβάνει την ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} \quad \gamma_0 \\
 & \text{subject to} \quad \gamma_0 \leq f_{SMA}(\mathbf{Y}) \\
 & \quad \sum_a [(-1)^{|a|+1} \det(A_{aa}^k)] \prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j \leq 0, k = 1, \dots, K \\
 & \quad \gamma_k > 0, k = 0, 1, \dots, K
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Το πρόβλημα (5.4), μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής ώστε να λάβει μορφή που να είναι πιο κοντά στη συνηθισμένη μορφή ενός προβλήματος γεωμετρικού προγραμματισμού (όπως αυτό ορίστηκε στο Κεφάλαιο 3):

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} \quad \gamma_0^{-1} \\
 & \text{subject to} \quad \frac{\gamma_0}{f_{SMA}(\mathbf{Y})} \leq 1 \\
 & \quad \sum_a [(-1)^{|a|+1} \det(A_{aa}^k)] \prod_{j \in \bar{a}} \gamma_j \leq 0, k = 1, \dots, K \\
 & \quad \gamma_k > 0, k = 0, 1, \dots, K
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Όμως, μία f_{SMA} συνάρτηση, έχει τη μορφή:

$$f_{SMA} = \frac{1}{w^\alpha} \sum_{\ell=1}^L \exp(\alpha b_\ell) \prod_{k=1}^K u_k^{\alpha a_{k\ell}},$$

όπως ορίστηκε στο Κεφάλαιο 4. Επομένως, ο όρος $f_{SMA}(\mathbf{y})$ στο πρόβλημα γράφεται ως:

$$\frac{1}{w^\alpha} \sum_{\ell=1}^L \exp(\alpha b_\ell) \prod_{k=1}^K y_k^{\alpha a_{k\ell}},$$

και η ανίσωση

$$\frac{Y_0}{f_{SMA}(\mathbf{y})} \leq 1$$

(από το πρόβλημα (5.5)), γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{Y_0}{\sum_{\ell=1}^L \exp(\alpha b_\ell) \prod_{k=1}^K y_k^{\alpha a_{k\ell}}} \leq w^{-\alpha}.$$

Άρα, τελικά, το πρόβλημα βελτιστοποίησης διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && Y_0^{-1} \\ & \text{subject to} && \frac{Y_0}{\sum_{\ell=1}^L \exp(\alpha b_\ell) \prod_{k=1}^K y_k^{\alpha a_{k\ell}}} \leq w^{-\alpha} \\ & && \sum_a [(-1)^{|a|+1} \det(A_{\bar{a}\bar{a}}^k)] \prod_{j \in \bar{a}} y_j \leq 0, \quad k = 1, \dots, K \\ & && w, y_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, K \end{aligned} \tag{5.6}$$

Το πρόβλημα (5.6), έχει πλέον τη μορφή ενός σιγμοειδούς προβλήματος βελτιστοποίησης, λόγω του ότι κάποιοι από τους συντελεστές $c_a = (-1)^{|a|+1} \det(A_{\bar{a}\bar{a}}^k)$ δύνανται να έχουν και αρνητικές τιμές. Επιπλέον, επειδή ο πρώτος ανισοτικός περιορισμός είναι ένα κλάσμα του οποίου ο αριθμητής είναι μονώνυμο και ο παρονομαστής ποζυνώμιο, το πηλίκο αυτό δεν είναι συνάρτηση γεωμετρικού προγραμματισμού. Για να αρθεί αυτή η δυσκολία, αρκεί να γίνει εκ νέου προσέγγιση του εν λόγω ποζυνωμίου από ένα μονώνυμο. Η προσέγγιση μπορεί να γίνει σύμφωνα με τις σχέσεις (3.18) και (3.19), χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο σταθερό σημείο, ώστε η προσέγγιση να γίνει κοντά σε αυτό. Όσον αφορά το αρχικό αυτό σημείο, η επιλογή του παίζει ρόλο πώς θα γίνει, γιατί το σημείο αυτό, θα πρέπει να ανήκει στο πεδίο (domain) του προβλήματος (5.6). Σύμφωνα με το άρθρο [7], ισχύει από τη σχέση (2.2) ότι:

$$y_k(\mathbf{p}) = \frac{p_k}{(F\mathbf{p})_k + v_k} \leq \frac{p_k}{v_k} \leq \frac{\bar{p}_k}{v_k}. \tag{5.7}$$

Επομένως, αρκεί να επιλεγεί ένα σημείο $(y_k^{(0)})$ τέτοιο, ώστε $y_k^{(0)} \in \left(0, \frac{\bar{p}_k}{v_k}\right)$.

5.3 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

5.3.1 Αριθμητικό Παράδειγμα

Έστω ένα δίκτυο δύο χρηστών (δηλαδή $K = 2$). Έστω, επίσης, η συνάρτηση προς μεγιστοποίηση:

$$\max_{0 \leq p_k \leq 2} \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{p_1}{p_2 + 1} \right) + \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{p_2}{p_1 + 1} \right). \quad (5.8)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (5.8) με τη σχέση (2.6), η οποία επαναλαμβάνεται και στο σημείο αυτό:

$$\max_{0 \leq p_k \leq \bar{p}_k, \forall k} \sum_{k=1}^K w_k \log \left(1 + \frac{p_k}{\sum_{j \neq k} f_{kj} p_j + v_k} \right),$$

συμπεραίνουμε τα ακόλουθα για τα δεδομένα του προβλήματος:

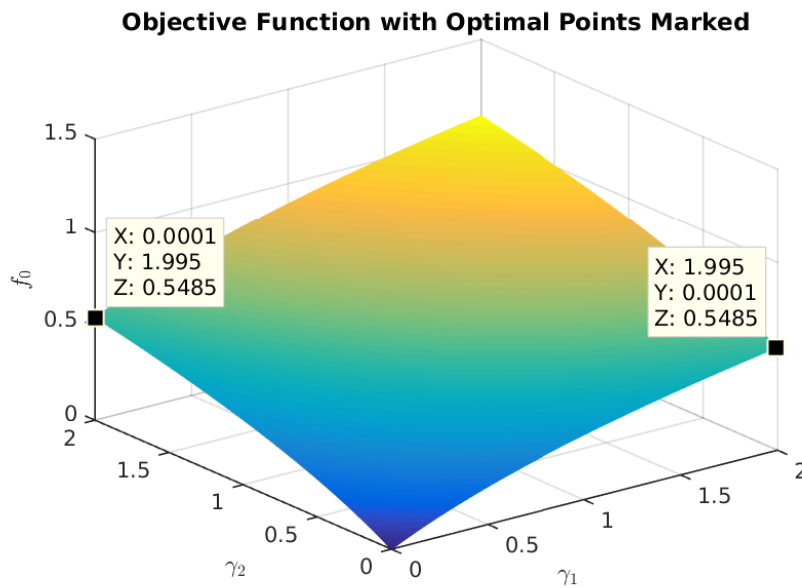
$$\begin{aligned} \bullet \bar{\mathbf{p}} &= (2, 2)^T, & \bullet w_1 &= w_2 = \frac{1}{2}, \\ \bullet \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \bullet \mathbf{v} &= (1, 1)^T. \end{aligned}$$

Βάσει του [7], η βέλτιστη λύση στο παράδειγμα αυτό είναι, λόγω συμμετρίας της (5.8) είτε $\mathbf{y}^* = (2, 0)^T$, είτε $\mathbf{y}^* = (0, 2)^T$. Εάν η λύση αυτή μετασχηματιστεί, έτσι ώστε από το πεδίο των SINR, να περάσει στο αρχικό πεδίο των ισχύων, τότε $\mathbf{p}^* = (2, 0)^T$ ή $\mathbf{p}^* = (0, 2)^T$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι ο ένας χρήστης μεταδίδει με όλη τη διαθέσιμη ισχύ, ενώ ο άλλος χρήστης δεν μεταδίδει καθόλου. Από μαθηματικής απόψεως, αυτό σημαίνει ότι οι βέλτιστες λύσεις είναι τα ακραία σημεία της συνάρτησης (5.8). Στο Σχήμα 5 απεικονίζονται η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση καθώς και τα σημεία που αποτελούν τις λύσεις $\mathbf{y}^*$. Επιπλέον, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $f_0^* = 0.5493$, [7]. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5, αυτή η τιμή επιτυγχάνεται πράγματι (προσεγγιστικά ή ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια) για τα ακραία σημεία. Επιπλέον, να σημειωθεί ότι στο σχήμα αυτό έχει απεικονισθεί η συνάρτηση ενδιαφέροντος σε όλο το διάστημα $\left(0, \frac{\bar{p}_k}{v_k}\right) = (0, 2)$, σύμφωνα με τα δεδομένα του παραδείγματος. Ωστόσο, το διάστημα αυτό αποτελεί υπερσύνολο του διαστήματος στο οποίο αναζητούνται οι λύσεις. Επομένως, το σύνολο αυτό περιορίζεται στην πραγματικότητα, λόγω του ότι τίθενται περιορισμοί στο πρόβλημα βελτιστοποίησης που πρέπει να επιλυθεί. Παρόλα αυτά, αποδίδει μία ικανοποιητική πρώτη εκτίμηση, για να καθοριστεί από που θα εκκινήσει ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος.

5.3.2 Σύγκριση Αποτελεσμάτων

Στον Πίνακα 1, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν έπειτα από την επίλυση του προβλήματος (5.8) με σιγμοειδή προγραμματισμό και συγκρίνονται με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του ίδιου προβλήματος στο [7], όπου το

πρόβλημα λύνεται με άλλες τεχνικές. Για τις προσομοιώσεις χρησιμοποιήθηκε το toolbox GGPLAB [12], του περιβάλλοντος MATLAB.



Σχήμα 5: Απεικόνιση της συνάρτησης προς βελτιστοποίηση και των σημείων που αποτελούν τις λύσεις του αριθμητικού παραδείγματος (5.8).

Πίνακας 1: Σύγκριση αποτελεσμάτων προτεινόμενης λύσης με άλλες υπάρχουσες τεχνικές

Μέθοδος	Σιγμοειδής Προγραμματισμός	[7]
Αποτελέσματα		
$\mathbf{y}^*$	$(2, 0)^T$	$(2, \exp(-100))^T$
Αριθμός Επαναλήψεων	4	22
Ακρίβεια ε	1.5×10^{-3}	1.5×10^{-3}

Με βάση τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα, προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος αποδίδει τη βέλτιστη λύση με μεγαλύτερη ακρίβεια (λόγω της σταθεράς $\exp(-100)$ στη λύση του [7]) και επιπλέον, με λιγότερες επαναλήψεις.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

6.1 Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις Μελέτης

Στην εργασία αυτή έγινε μία προσπάθεια, ώστε να πραγματοποιηθεί μία όσο το δυνατόν πιο εμπεριστατωμένη μελέτη σε ένα γενικό πρόβλημα που αφορά (κυρίως) τα ασύρματα δίκτυα: τη *Μεγιστοποίηση Χρησιμότητας Δικτύου*, για κάθε χρήστη του δικτύου. Πρώτα από όλα, περιγράφηκε πώς αποτυπώνεται και τι εκφράζει η έννοια της χρησιμότητας σε ένα δίκτυο. Στη συνέχεια, η έννοια αυτή ορίστηκε μαθηματικά και κατά τη διαδικασία αυτή θεμελιώθηκε η δομή ενός προβλήματος βελτιστοποίησης που πρέπει να λυθεί, ούτως ώστε να επιτευχθεί ο επιθυμητός στόχος: η βέλτιστη κατανομή ισχύος σε ένα δίκτυο, βάσει πρακτικών περιορισμών.

Έπειτα, για να διερευνηθεί αυτό το πρόβλημα, κρίθηκε σκόπιμο να παρουσιαστούν τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία, ώστε να είναι πρακτικά εφικτό να λυθεί το πρόβλημα. Τα εργαλεία αυτά, αφορούν κάποιες ιδιαίτερα πρόσφατες τεχνικές, οι οποίες δεν είναι ακόμα ιδιαίτερα διαδεδομένες στην πράξη. Ωστόσο, τελικά, προέκυψε ότι δύνανται να αποτελέσουν μία σημαντική αφετηρία για να επιλυθεί ένα δύσκολο - μη κυρτό - πρόβλημα βελτιστοποίησης, όπως είναι το πρόβλημα που πραγματεύεται η εργασία αυτή. Έτσι, λοιπόν, παρά τις προσεγγίσεις που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, προέκυψε το συμπέρασμα ότι η ανάλυση που έγινε ήταν - τουλάχιστον ως έναν βαθμό - επιτυχής, καθώς το πρόβλημα απέδωσε καρποφόρα αποτελέσματα όταν αυτά συγκρίθηκαν με αντίστοιχα παλαιότερα αποτελέσματα, από άλλες εργασίες επί του θέματος, για παράδειγμα [7].

Βάσει των προαναφερθέντων, προκύπτει άμεσα το συμπέρασμα ότι στην παρούσα εργασία τέθηκαν ισχυρά θεμέλια για την επίλυση του προβλήματος που διαπραγματεύεται, τέτοια, ώστε εάν μπορούν να εφαρμοστούν και σε πιο γενικές περιπτώσεις (για παράδειγμα για αυθαίρετο πλήθος χρηστών του δικτύου) με την ίδια επιτυχία, τότε ενδεχομένως να προκύψει μία απλούστερη διαδικασία επίλυσης. Για να συμβεί, όμως, αυτό απαιτείται ασφαλώς να γίνει μία περαιτέρω διαδικασία διερεύνησης, η οποία να αφορά την υπολογιστική πολυπλοκότητα της μεθόδου επίλυσης που έχει παρουσιαστεί και προταθεί. Την αφετηρία προς αυτήν την κατεύθυνση, δύναται να αποτελέσει ο υπολογισμός της υπολογιστικής πολυπλοκότητας της διαδικασίας προσέγγισης της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4, για το λόγο ότι η διαδικασία αυτή είναι και η πιο πολύπλοκη κατά την επίλυση του προβλήματος.

Πιο συγκεκριμένα, στο παράδειγμα των δύο χρηστών που εξετάστηκε στο Κεφάλαιο 5, οι παράμετροι που έπρεπε να υπολογιστούν ήταν λίγες, καθώς το πλήθος τους είναι ευθέως ανάλογο του αριθμού των χρηστών του δικτύου (καθώς τόσες είναι οι μεταβλητές του προβλήματος) και του αριθμού των όρων (για παράδειγμα το πλήθος μονώνυμων) που θα χρειαστούν για να γίνει η προσέγγιση. Παραδείγματος χάριν, στην πρακτική εφαρμογή που εξετάστηκε στο Κεφάλαιο 6, όπου υπήρχε η δυνατότητα της οπτικοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας, οι δύο όροι (αρχικά για το μονώνυμο f_{MA} και στη συνέχεια

για το ποζυνώμιο f_{SMA}) ήταν αρκετοί. Από εμπειρικές δοκιμές που έγιναν με περισσότερους όρους, η απόδοση της προσέγγισης (με μετρική το RMS), δεν απέφερε αξιόλογη βελτίωση. Αντιθέτως, όπως παρατηρήθηκε αυξανόταν ο χρόνος εκτίμησης των τελικών παραμέτρων και κατά επέκταση η υπολογιστική πολυπλοκότητα. Όμως, πέρα από την τελευταία παρατήρηση, προκύπτει το εξής ερώτημα: Στην περίπτωση πολλών χρηστών, όπου οι διαστάσεις αυξάνονται, πόσοι όροι αρκούν προκειμένου να προσεγγιστεί όσο το δυνατόν καλύτερα η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση;

Όσον αφορά τις κυρτές συναρτήσεις, υπάρχει το εξής γνωστό αποτέλεσμα [8]: Οποιαδήποτε κυρτή συνάρτηση, μπορεί να προσεγγιστεί σημείο-προς-σημείο ως το ασυμπτωτικό μέγιστο, από ένα (εν γένει άπειρο) σύνολο συσχετιζόμενων (affine) συναρτήσεων. Όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4, αυτή η προσέγγιση δεν είναι άλλη από τη προσέγγιση της οικογένειας των $\mathcal{F}_{MA}$ συναρτήσεων, όταν χρησιμοποιούνται υποθετικά άπειρες τέτοιες συναρτήσεις. Επιπλέον, οι συναρτήσεις αυτές έχουν την πολύ σημαντική ιδιότητα ότι μπορούν να εκφραστούν ως μονώνυμα, εάν πραγματοποιηθεί λογαριθμικός μετασχηματισμός των δεδομένων (Κεφάλαιο 4). Προκύπτει, λοιπόν, το συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις $\mathcal{F}_{MA}$ αποτελούν μία φυσική επιλογή, αλλά απαιτούν συγχρόνως τον υπολογισμό πολλών παραμέτρων ώστε να επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια στην προσέγγιση που πρέπει να γίνει.

Ωστόσο, το ερώτημα που τέθηκε προηγουμένως εξακολουθεί να παραμένει αναπάντητο. Η απάντηση έχει δοθεί μερικώς στο [20], όπου προτάθηκαν οι δύο άλλες οικογένειες συναρτήσεων $\mathcal{F}_{SMA}$, $\mathcal{F}_{ISMA}$, οι οποίες έχουν την ιδιότητα να συμπίπτουν ασυμπτωτικά με τις $\mathcal{F}_{MA}$, υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική και έχει ως αποτέλεσμα οι συναρτήσεις $\mathcal{F}_{SMA}$, $\mathcal{F}_{ISMA}$ να αποδίδουν καλύτερα από ότι οι $\mathcal{F}_{MA}$, ακόμα και αν χρησιμοποιούνται λίγοι όροι (της τάξης των δύο ή τριών) για την προσέγγιση. Συνεπώς, για μελλοντικές προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος μεγιστοποίησης χρησιμότητας δικτύου, οι συναρτήσεις αυτές κρίνονται ως κατάλληλες ακόμα και όταν διαθέτουν δύο ή τρεις όρους.

Συνοψίζοντας, στην παρούσα εργασία έγινε μία σημαντική προσπάθεια επαναπροσέγγισης του προβλήματος της μεγιστοποίησης χρησιμότητας ενός δικτύου, η οποία ναι μεν βασίζεται στο συνδυασμό παλαιότερων τεχνικών επίλυσης ([4], [5], [6] και [7]), αλλά καταλήγει στο να προταθεί μία νέα εξ ολοκλήρου λύση. Προκύπτει, έτσι, το γενικό συμπέρασμα ότι ενδεχομένως να έχει βρεθεί ένας απλούστερος τρόπος επίλυσης του προβλήματος που εξετάστηκε στην εργασία αυτή, ο οποίος βασίζεται πάντα σε άλλες προγενέστερες και σημαντικές μελέτες. Εάν ισχύει πράγματι κάτι τέτοιο, τότε η συνεισφορά της προτεινόμενης διαδικασίας επίλυσης, είναι σίγουρα σημαντική.

6.2 Πιθανές Μελλοντικές Επεκτάσεις

Λόγω του τρόπου της διατύπωσης του προβλήματος που απασχόλησε την εργασία αυτή, δύναται να συμπεράνει κανείς ότι το αντικείμενο μελέτης είναι ενδεχομένως γενικό. Το συ-

μπέρασμα αυτό, επιτρέπει πλήθος μελλοντικών επεκτάσεων που θα μπορούσε να λάβει το αρχικό πρόβλημα. Εκτός, δηλαδή, από τις προφανείς επεκτάσεις που είναι η δοκιμή του προτεινόμενου αλγορίθμου για αυθαίρετο πλήθος χρηστών (για παράδειγμα της τάξης των 100 ή 200 χρηστών), καθώς και η δοκιμή σε άλλα παραδείγματα, υπάρχουν και άλλες πιθανές προεκτάσεις που θα μπορούσαν να γίνουν. Στην ενότητα που ακολουθεί, περιγράφεται συνοπτικά ένα παράδειγμα μίας τέτοιας επέκτασης.

6.2.1 Γνωστικά Δίκτυα Ραδιοεπικοινωνιών (Cognitive Radio Networks)

Τα *γνωστικά δίκτυα* (cognitive radio networks) είναι συστήματα επικοινωνιών, τα οποία ανιχνεύουν το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα και δύνανται να προσαρμόζουν τις λειτουργικές τους παραμέτρους, για να τροποποιούν τις λειτουργίες του συστήματος δυναμικά και αυτόνομα. Πρόκειται, δηλαδή, για ευφυή συστήματα τα οποία έχουν τη δυνατότητα να αντιλαμβάνονται τα χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος και να προσαρμόζουν κατάλληλα τις παραμέτρους λειτουργίας του δικτύου, με σκοπό τη βελτίωση της επικοινωνίας μεταξύ των χρηστών του δικτύου. Όπως, ίσως, γίνεται αντιληπτό, σε ένα τέτοιο τηλεπικοινωνιακό σύστημα οι παρεμβολές λόγω των πολλών χρηστών είναι αναπόφευκτες. Επιπλέον, η συνολική εφικτή χρησιμότητα όλων των χρηστών εξαρτάται από την από κοινού ανάθεση του λόγου Σήματος-προς-Παρεμβολή-συν-θόρυβο (Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio - SINR), από την ισχύ της εκπομπής και από τις θερμοκρασιακές παρεμβολές που υπάρχουν (οι οποίες αφορούν την ανάλυση του φάσματος).

Επομένως, είναι αναγκαίο να αντιμετωπίζονται οι παραπάνω παρεμβολές, προκειμένου να μην μειώνεται η χρησιμότητα κάθε χρήστη του δικτύου. Με άλλα λόγια, οι πόροι του δικτύου πρέπει να κατανέμονται βέλτιστα ώστε να περιορίζονται τα φαινόμενα αυτά. Στο [21], αναφέρεται ότι το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, το οποίο εάν μετασχηματιστεί από το χώρο της ισχύος, στο χώρο των SINR, μπορεί να λυθεί βέλτιστα ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με αυτή του [7]. Συνεπώς, μιας και η εργασία αυτή έχει βασιστεί στην τελευταία αναφορά, το πρόβλημα στα γνωστικά δίκτυα μπορεί, ενδεχομένως, να προσεγγιστεί και με σιγμοειδή προγραμματισμό.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Το παράρτημα αυτό, έχει σκοπό να συγκεντρώσει κάποιες βασικές μαθηματικές έννοιες, προκειμένου η εργασία αυτή να είναι όσο το δυνατόν πιο πλήρης στην ανάγνωσή της. Για μία πιο λεπτομερή αναφορά πάνω στα θέματα που διαπραγματεύονται, ο αναγνώστης παραπέμπεται σε άλλες πηγές, όπως αυτές σημειώνονται σε καίρια σημεία.

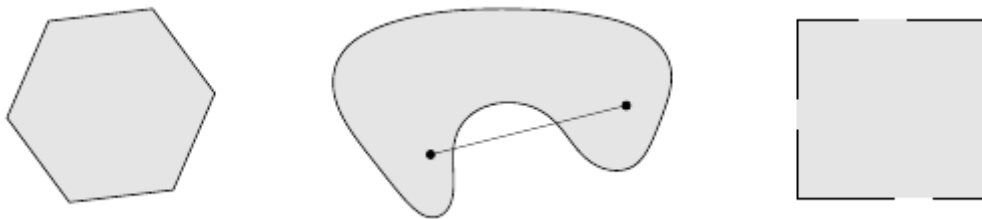
Κυρτά Σύνολα

Έστω δύο σημεία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ με $x_1 \neq x_2$. Τα σημεία που δίνονται από την σχέση

$$y = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2, \quad (1)$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$, αναπαριστούν την ευθεία γραμμή που συνδέει τα σημεία x_1 και x_2 . Η τιμή $\theta = 0$ αντιστοιχεί στο σημείο x_2 , ενώ η τιμή $\theta = 1$ στο σημείο x_1 .

Έστω ένα σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Το σύνολο C , θα λέγεται κυρτό (convex) εάν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in C$, ισχύει πάντοτε ότι $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C$, για $\theta \in [0, 1]$. Δηλαδή, ένα σύνολο καλείται κυρτό εάν η ευθεία που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία του συνόλου, βρίσκεται ολόκληρη εντός του συνόλου αυτού. Στο ακόλουθο σχήμα, απεικονίζονται κάποια κυρτά και μη-κυρτά σύνολα, με βάση τον ορισμό που μόλις προηγήθηκε.



Σχήμα 6: Παραδείγματα κυρτών και μη-κυρτών συνόλων. *Αριστερά:* Το εξάγωνο αυτό αποτελεί κυρτό σύνολο καθώς πληροί τον παραπάνω ορισμό. *Μέση:* Μη-κυρτό σύνολο. *Δεξιά:* Το σύνολο αυτό περιέχει κάποια σημεία στο σύνορό του, ενώ κάποια άλλα όχι, επομένως είναι μη-κυρτό, [8].

Κυρτές Συναρτήσεις

Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f θα λέγεται ότι είναι κυρτή συνάρτηση, εάν το πεδίο ορισμού της είναι κυρτό σύνολο και επιπλέον, εάν για οποιαδήποτε σημεία x και y , τα οποία ανήκουν στο πεδίο ορισμού της και για κάθε $0 \leq \theta \leq 1$, ισχύει ότι

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y). \quad (2)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία της προηγούμενης σχέσης, είναι ότι το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $(x, f(x))$ και $(y, f(y))$, το οποίο, ουσιαστικά, αναπαριστά τη χορδή που ενώνει τα σημεία x, y , βρίσκεται πάντοτε επάνω από τη γραφική παράσταση της f . Αυτή η ιδιότητα

απεικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 7: Ιδιότητα κυρτότητας: Η χορδή που ενώνει δύο σημεία της γραφικής παράστασης της κυρτής συνάρτησης f , βρίσκεται πάντα άνωθεν της γραφικής παράστασης, [8].

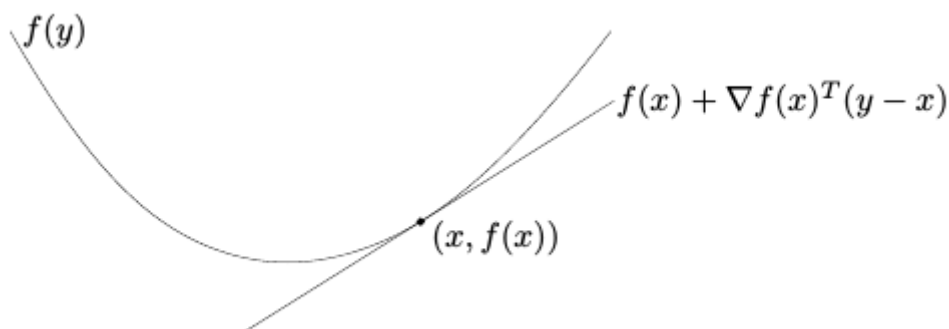
Μία συνάρτηση, θα λέγεται αυστηρώς κυρτή, όταν η παραπάνω ανίσωση ισχύει μόνο με ανισότητα, $x \neq y$ και $0 < \theta < 1$. Επιπλέον, μία συνάρτηση f χαρακτηρίζεται ως κοίλη (concave), όταν εάν η συνάρτηση $-f$ είναι κυρτή και αυστηρώς κοίλη όταν η $-f$ είναι αυστηρώς κυρτή.

Συνθήκες Κυρτότητας Πρώτης-Τάξης

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή ότι η βάθμωση ∇f , ορίζεται για κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης (το οποίο είναι ένα ανοικτό σύνολο). Τότε, η συνάρτηση f είναι κυρτή, εάν και μόνο εάν ισχύει

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x), \quad (3)$$

για κάθε x, y στο πεδίο ορισμού της f . Επιπλέον, εάν η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο ανισοτικά, τότε η f είναι αυστηρώς κυρτή.



Σχήμα 8: Ιδιότητα κυρτότητας για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, [8].

Τέλος, η συνάρτηση f θα είναι κοίλη, εάν ισχύει ότι

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x), \quad (4)$$

για κάθε x, y στο πεδίο ορισμού της f .

Συνθήκες Κυρτότητας Δεύτερης-Τάξης

Σε συνέχεια των προηγούμενων, υποθέτουμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ότι ο Hessian πίνακας της f (ή $\nabla^2 f$) ορίζεται για κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f (το οποίο υποθέτουμε ότι είναι ανοικτό σύνολο). Τότε, η f είναι κυρτή εάν και μόνο εάν το πεδίο ορισμού της f είναι κυρτό και αν ο Hessian πίνακας της f είναι θετικά ημι-ορισμένος, δηλαδή

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0. \quad (5)$$

Ομοίως, μία συνάρτηση είναι κοίλη εάν και μόνο εάν ισχύει

$$\nabla^2 f(x) \preceq 0, \quad (6)$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f .

Θεμελιώδεις Έννοιες Βελτιστοποίησης

Έστω ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{subject to} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (7)$$

Με τον τρόπο αυτό περιγράφεται το πρόβλημα του να βρεθεί ένα σημείο x , το οποίο θα ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση f_0 , από όλα εκείνα τα x , που ικανοποιούν τις ανισώσεις $f_i(x) \leq 0$ και τις ισότητες $h_i(x) = 0$. Επίσης, η μεταβλητή x θα λέγεται μεταβλητή βελτιστοποίησης (optimization variable) και η συνάρτηση f_0 θα λέγεται είτε συνάρτηση προς βελτιστοποίησης, είτε αντικειμενική συνάρτηση (objective function) ή ακόμα και συνάρτηση κόστους (cost function). Οι συναρτήσεις f_i , θα καλούνται ανισοτικές συναρτήσεις περιορισμών (inequality constraints functions) και οι ανισότητες $f_i(x) \leq 0$, ανισοτικοί περιορισμοί. Ομοίως, οι συναρτήσεις h_i ονομάζονται ισοτικές συναρτήσεις περιορισμών (equality constraints functions) και οι ισότητες $h_i(x) = 0$, ισοτικοί περιορισμοί. Εάν, $m = p = 0$, τότε το πρόβλημα θα λέγεται μη-περιοριστικό (unconstrained).

Έστω, επίσης, ότι ως $\text{dom } f_i$ και ως $\text{dom } h_i$ συμβολίζονται τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f_i και h_i , αντιστοίχως. Τότε, το σύνολο

$$D = \bigcap_{i=0}^m \text{dom } f_i \cap \bigcap_{i=1}^p \text{dom } h_i$$

ονομάζεται ως το πεδίο (domain) του προβλήματος (7). Εάν ένα σημείο x που ανήκει στο σύνολο D , αποτελεί και λύση του προβλήματος (7), δηλαδή ελαχιστοποιεί την f_0 και ικανοποιεί παράλληλα και τους περιορισμούς, τότε το σημείο αυτό θα λέγεται εφικτή ή δυνατή λύση (feasible). Ακόμα, το πρόβλημα (7) θα λέγεται εφικτό, όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x , που αποτελεί λύση του, διαφορετικά θα λέγεται μη-εφικτό (unfeasible). Το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων x , λέγεται εφικτό σύνολο ή το σύνολο των περιορισμών.

Η βέλτιστη τιμή p^* ορίζεται ως εξής:

$$p^* = \inf \{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p\}. \quad (8)$$

Εάν το πρόβλημα (7) δεν είναι εφικτό, προκύπτει $p^* = \infty$, εάν επιτραπεί στο p^* να παίρνει τις τιμές $\pm\infty$.

Κυρτή Βελτιστοποίηση

Ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{subject to} && f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & && a_i^T x = b_i, i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (9)$$

όπου οι συναρτήσεις $f_i(x)$, $i = 0, \dots, m$ είναι κυρτές συναρτήσεις. Συγκρίνοντας το γενικό πρόβλημα (7), με το (9) συμπεραίνουμε ότι ένα κυρτό πρόβλημα έχει τις εξής παραπάνω απαιτήσεις:

- η αντικειμενική συνάρτηση f_0 πρέπει να είναι κυρτή,
- οι συναρτήσεις ανισοτικών περιορισμών πρέπει να είναι κυρτές,
- οι συναρτήσεις $h_i(x) = a_i^T x - b_i$ πρέπει να είναι συσχετιζόμενες συναρτήσεις (affine functions).

Μία σημαντική ιδιότητα του προβλήματος (9), είναι ότι το εφικτό σύνολο είναι κυρτό, καθώς είναι η τομή κυρτών συνόλων, δηλαδή

$$D = \bigcap_{i=0}^m \text{dom } f_i(x).$$

Προβλήματα Βελτιστοποίησης Κοίλων Συναρτήσεων

Όταν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζεται όπως στη συνέχεια:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && f_0(x) \\ & \text{subject to} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (10)$$

όπου η συνάρτηση f_0 είναι κοίλη συνάρτηση, τότε θα λέγονται και αυτά κυρτά προβλήματα.

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα των κυρτών προβλημάτων βελτιστοποίησης, είναι ότι εάν βρεθεί ένα τοπικό ελάχιστο (ή μέγιστο), τότε αυτό θα είναι και ολικό ελάχιστο (ή ολικό μέγιστο). Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο αυτά τα προβλήματα έχουν μελετηθεί τόσο πολύ, για παράδειγμα [8].

Κριτήριο Εύρεσης Βέλτιστης Λύσης

Έστω ότι η f_0 είναι μία κυρτή και παραγωγίσιμη συνάρτηση, και ότι για όλα τα $x, y \in \text{dom } f_0$, ισχύει ότι

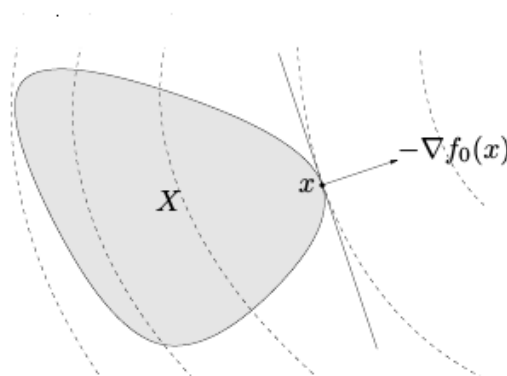
$$f_0(y) \geq f_0(x) + \nabla f_0(x)^T (y - x).$$

Έστω, ακόμα, ότι το εφικτό σύνολο X , όπου

$$X = \{x | f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p\}.$$

Τότε, το x είναι η βέλτιστη λύση, εάν και μόνο εάν $x \in X$ και

$$\nabla f_0(x)^T (y - x) \geq 0, \quad \forall y \in X. \quad (11)$$



Σχήμα 9: Γεωμετρική ερμηνεία της συνθήκης (11), [8].

Λογαριθμικώς Κοίλες και Κυρτές Συναρτήσεις

Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγεται λογαριθμικώς κοίλη (log-concave), εάν $f(x) > 0$ και για όλα τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f ($x \in \text{dom } f$), ισχύει ότι η συνάρτηση $\log f$ είναι κοίλη. Επίσης, εάν η $\log f$ είναι κυρτή συνάρτηση, τότε η f θα λέγεται λογαριθμικώς κυρτή συνάρτηση. Έτσι, μία συνάρτηση θα λέγεται λογαριθμικώς κυρτή, εάν και μόνο εάν η συνάρτηση $1/f$, είναι λογαριθμικώς κοίλη.

Μία συνάρτηση μπορεί να χαρακτηριστεί λογαριθμικώς κοίλη, και ως εξής: Εάν το πεδίο ορισμού της f είναι κυρτό σύνολο και $f(x) > 0$, $\forall x \in \text{dom } f$, τότε η f θα λέγεται λογαριθμικώς κοίλη, εάν και μόνο εάν για κάθε $x, y \in \text{dom } f$ και για οποιοδήποτε $\theta \in [0, 1]$, ισχύει η ιδιότητα:

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \geq f(x)^\theta f(y)^{1-\theta}. \quad (12)$$

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Mung Chiang, Prashanth Hande, Tian Lan, Chee Wei Tan. *Power Control in Wireless Cellular Networks*. Foundations and Trends in Networking, 2008.
- [2] Mung Chiang, A. Robert Calderbank. *Layering as Optimization Decomposition: A Mathematical Theory of Network Architectures*, Vol. 95, No. 1, January 2007 | Proceedings of the IEEE
- [3] Daniel O'Neill, Andrea Goldsmith and Stephen Boyd. *Wireless Network Utility Maximization*. October 8, 2008.
- [4] David Julian, Mung Chiang, Daniel O'Neill and Stephen Boyd. *QoS and Fairness Constrained Convex Optimization of Resource Allocation for Wireless Cellular and Ad Hoc Networks*. IEEE INFOCOM 2002.
- [5] Chee Wei Tan, Daniel P. Palomar, Mung Chiang. *Solving Nonconvex Power Control Problems in Wireless Networks: Low SIR Regime and Distributed Algorithms*. IEEE Globecom 2005.
- [6] Mung Chiang, Chee Wei Tan, Daniel P. Palomar, Daniel O'Neill, and David Julian. *Power Control By Geometric Programming*. IEEE TRANSACTIONS ON WIRELESS COMMUNICATIONS, VOL. 6, NO. 7, JULY 2007
- [7] Chee Wei Tan, Shmuel Friedland, and Steven Low *Nonnegative Matrix Inequalities and their Application to Nonconvex Power Control Optimization*. SIAM J. MATRIX ANAL. and APPL. Vol. 32, No. 3, pp. 1030–1055
- [8] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. 2004. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, NY, USA.
- [9] Kaare Brandt Petersen, and Michael Syskind Pedersen *The Matrix Cookbook*, <http://matrixcookbook.com>, Version: November 15, 2012.
- [10] Cottle, R.W. and Pang, J.S. and Stone, R.E. *The Linear Complementarity Problem*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104, 1992.
- [11] Michael Grant and Stephen Boyd. *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1*. <http://cvxr.com/cvx>. March, 2014.
- [12] *Ggplab version 1.00: A Matlab Toolbox for Geometric Programming*
- [13] Stephen P. Boyd, Seung Jean Kim, Lieven Vandenberghe, and Arash Hassibi. *A Tutorial on Geometric Programming*. Revised for Optimization and Engineering, 7/05.
- [14] Peiping Shen, and Kecun Zhang. *Global optimization of signomial geometric programming using linear relaxation*. Applied Mathematics and Computation 150 (2004) 99–114, Elsevier.
- [15] Kenneth Lange, and Hua Zhou. *MM Algorithms for Geometric and Signomial Programming*. arXiv:1007.2371v1 [math.NA], July 2010.
- [16] Xue-Ping Hou, Pei-Ping Shen, and Yong-Qiang Chen. *A Global Optimization Algorithm for Signomial Geometric Programming Problem* Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Volume 2014, Article ID 163263, 12 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2014/163263>
- [17] Tapio Westerlund and Andreas Lundell. *Global Optimization of Signomial Programming Problems*. European Workshop on Mixed Integer Nonlinear Programming, April 12–16, 2010, Marseille, France
- [18] Gongxian Xu. *Global optimization of signomial geometric programming problems*. European Journal of Operational Research 233 (2014) 500–510, Elsevier.
- [19] Alessandro Magnani, and Stephen P. Boyd. *Convex piecewise-linear fitting*. Optim Eng (2009) 10: 1–17.
- [20] Warren Hoburg, Philippe Kirschen, and Pieter Abbeel. *Fitting geometric programming models to data*. 2014.
- [21] Liang Zheng and Chee Wei Tan. *Cognitive Radio Network Duality and Algorithms for Utility Maximization*. IEEE JOURNAL ON SELECTED AREAS IN COMMUNICATIONS, VOL. 31, NO. 3, MARCH 2013.