Μεικτά Προβλήματα Συνοριακών Τιμών για Εξισώσεις Maxwell

Διπλωματική Εργασία για το ΠΜΣ “Εφαρμοσμένα Μαθηματικά”

Αγγελική Καϊάφα

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Δεκέμβριος 2015

Περιεχόμενα

Abstract

In this thesis, we present mixed boundary value problems for Maxwell equations. In chapter 1, we thoroughly study the equation fields, we present two different kinds of normalization of the Maxwell equations and we give all the necessary information for the wave number. In chapter 2, we study the boundary value problems for the interior and exterior electromagnetic field and the scattering boundary problems. In chapter 3, we focus on the Stratton-Chu integral representations of both the interior and the exterior electromagnetic field as well as its corresponding far field pattern. In chapter 4, we present mixed boundary scattering problems and basic theorems of uniqueness and existence of the solution of the inverse scattering problem. In chapter 5, we study the scattering cross section via which we present the electromagnetic field in low frequency expansion series in terms of the wave number. Finally, in chapter 6, we present an application of scattering in transparent displays.

Τριμελής Επιτροπή

Επίκουρος Καθηγήτρια, Ευαγγελία Αθανασιάδου-Κόττα (επιβλέπουσα)

Καθηγητής, Γεράσιμος Μπαρμπάτης

Professor, Alexander Chroneos (Coventry University of UK)

Ευχαριστίες

Θεωρώ απαραίτητο να ευχαριστήσω τον Ομότιμο Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών, κύριο Χριστόδουλο Αθανασιάδη και την επιβλέπουσα Επίκουρο Καθηγήτρια, κυρία Ευαγγελία Αθανασιάδου-Κόττα για την καθοδήγηση, υποστήριξη και τις πολύτιμες παρατηρήσεις τους κατά την διάρκεια της μελέτης μου.
Επίσης, ευχαριστώ τον Καθηγητή του Coventry University of United Kingdom, κύριο Αλέξανδρο Χροναίο για τη συμβολή του στο 6^o κεφάλαιο και τις σημαντικές συμβουλές του.
Τέλος, ευχαριστώ θερμά την υποψήφια διδάκτορα, Σωτηρία Δημητρούλα, για τα σχήματα και την πολύτιμη βοήθεια στην παρουσίαση της διπλωματικής μου εργασίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα μεγάλο κομμάτι της κυματικής έχει άμεση σχέση με την ακουστική, τον ηλεκτρομαγνητισμό και την ελαστικότητα. Ασχολείται με προβλήματα διάδοσης, ακτινοβολίας και σκέδασης. Η παρούσα εργασία ασχολείται με ηλεκτρομαγνητικά κύματα και τα προβλήματα διάδοσης, ακτινοβολίας και σκέδασης αυτών.

Τα προβλήματα διάδοσης εξετάζουν το είδος και τη μορφή των διαδιδόμενων κυμάτων σε ένα μέσο και συνδέονται με τις ιδιότητες του εν λόγω μέσου. Στα προβλήματα διάδοσης δεν λαμβάνεται υπόψη η πηγή που δημιουργεί τα κύματα.

Τα προβλήματα ακτινοβολίας εξετάζουν ακριβώς τη μορφή και τη συμπεριφορά των κυμάτων και αυτό γίνεται σε απόλυτη συνάρτηση με την πηγή.

Τα πιο σύνθετα προβλήματα είναι τα προβλήματα σκέδασης. Εξετάζουν τη συμπεριφορά του προσπίπτοντος κύματος μέσα σε ένα μέσο όταν υπάρχει κάποιο εμπόδιο (ο σκεδαστής), το προσπίπτον κύμα θεωρείται ότι είναι κάποιο γνωστό κυματικό πεδίο. Ο σκεδαστής με τη σειρά του μετατρέπεται κι αυτός σε πηγή παραγωγής κυμάτων (αφού επανεκπέμπει με άλλο τρόπο το αρχικό κύμα και μετασχηματίζει μέρος της ενέργειας του προσπίπτοντος κυματικού πεδίου). Το σκεδασμένο κύμα επηρεάζεται από τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή. Το προσπίπτον κύμα επηρεάζεται μόνο από τα χαρακτηριστικά (εκπομπής) της πηγής που το παράγει.

Τα προβλήματα σκέδασης είναι δύο ειδών [21], ευθεία και αντίστροφα. Ο διαχωρισμός αυτός γίνεται με βάση τη γνώση που έχουμε για τα δεδομένα του προβλήματος. Έχουμε ευθύ πρόβλημα σκέδασης το οποίο ορίζεται ως το πρόβλημα σκέδασης στο οποίο γνωρίζουμε την επιφάνεια και όλα τα φυσικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή και αναζητούμε το σκεδασμένο πεδίο που δημιουργείται. Αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ορίζεται να είναι το πρόβλημα σκέδασης κατά το οποίο γνωρίζουμε το σκεδασμένο κύμα και αναζητούμε το γεωμετρικό σχήμα και τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή. Για

τον ορισμό του ευθέος και του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης απαραίτητη είναι η γνώση του προσπίπτοντος κύματος.
Στην παρούσα εργασία στο πρώτο κεφάλαιο [1], [5], [11], [6] δίνονται οι εξισώσεις των πεδίων των ηλεκτρομαγνητικων κυματων για τις εξισώσεις Maxwell και έπειτα παρουσιάζονται οι δύο μορφές κανονικοποίησης των εξισώσεων Maxwell. Στο δεύτερο κεφάλαιο [5], [4], [6] γίνεται παρουσίαση των προβληματων των συνοριακών συνθηκών για το εσωτερικό και το εξωτερικό πρόβλημα, στην συνέχεια παρουσιάζουμε οι συνθήκες ακτινοβολίας, τα προβλήματα συνοριακών τιμών για εξισώσεις Maxwell, και τέλος παρουσιάζοντα τα προβλήμα σκέδασης, τα οποία δεν είναι άλλα από τα εξωυερικά προβλήματα των προβλημάτων συνοριακών τιμών για εξισώσεις Maxwell.
Στο τρίτο κεφάλαιο [8], [15], [19], ξεκινάμε περίγράφοντας τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις Stratton-Chu των εσωτερικών και των ολικών πεδίων στην σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (αυτό γίνεται τόσο για την βαθμωτή μορφή, όσο και για την διαδική μορφή), εν συνεχεία κάνουμε μία απλούστευση αυτών για κάποιες ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων σκέδασης. Τέλος, ορίζουμε το μακρινό ηλεκρικό και μαγνητικό πέδιο. Στο τέταρτο κεφάλαιο [4], [6], [9], [10], [12], [13], [14], [20], ξεκινάμε με κάποια απαραίτητα στοιχεία συναρτησιακής ανάλυσης, συνεχίζουμε με τον ορισμό του μεικτού προβλήματος σκέδασης Maxwell, παραθέτουμε τα βασικά θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης του τελευταίου. Τελειώνουμε, περιγράφοντας ένα πρόβλημα σκέδασης στις δύο διαστάσεις και αποδεικνύοντας εκεί το αντίστοιχο βασικό θεώρημα.
Στο πέμπτο κεφάλαιο [2], [3], [17], αναλύουμε την θεωρία των χαμηλών συχνοτήτων, ορίζουμε τις διατομές σκέδασης, ασχολούμαστε με τα προβλήματα του τέλειου αγωγού, της εμπέδησης και της διαπερατότητας. Στο έκτο κεφάλαιο [7], παρουσιάζουμε μία εφαρμογή του φαινομένου της σκέδασης προβάλλοντας σε διαφανείς οθόνες. Χρησιμοποιούμε τον συντονισμό νανοσωματιδίων προκειμένου να πετύχουμε κάτι τέτοιο, παρουσιάζουμε το θεωρητικό-μαθηματικό μοντέλο για την υλοποίηση της ιδέας που έχουμε περιγράψει και έπειτα παραθέτουμε την πειραματική απόδειξη του μοντέλου, υλοποιώντας το με την βοήθεια μίας μονοχρωματικής μπλέ ακτίνας φωτός.

Κεφάλαιο 1

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL

Στο κεφάλαιο αυτό ακολουθεί μία στοιχειώδης παρουσίαση της θεωρίας για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις Maxwell, οι συνοριακές συνθήκες, οι συνθήκες διάδοσης και γίνεται εκτενής αναφορά στα βασικά προβλήματα σκέδασης καθώς και στα ειδικά αποτελέσματα που έχουμε για τα προβλήματα αυτά.

1.1 Εξισώσεις Πεδίων

Οι εξισώσεις Maxwell [11] αποτελούν τις θεμελιώδεις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις στο πεδίο του χρόνου και ουσιαστικά είναι μία διαφορική μορφή του νόμου του Faraday:

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\boldsymbol{B}}(\mathbf{r}, t) \tag{1.1}$$

και του νόμου του Ampere

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\mathbf{r}, t) = \dot{\boldsymbol{D}}(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{J}(\mathbf{r}, t) \tag{1.2}$$

όπου $\boldsymbol{E}$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο, $\boldsymbol{B}$ είναι η μαγνητική επαγωγή, $\boldsymbol{H}$ το μαγνητικό πεδίο, $\boldsymbol{D}$ είναι η ηλεκτρική μετατόπιση και $\boldsymbol{J}$ είναι η αγωγιμότητα πυκνότητας του ρεύματος. Η ποσότητα $\boldsymbol{E}$ είναι μετρημένη σε μονάδες δύναμης ανά μονάδα φορτίου, το $\boldsymbol{H}$ σε μονάδες φορτίου ανά το γινόμενο $($μονάδα μήκους$) \times ($μονάδα χρόνου$)$, το $\boldsymbol{D}$ σε μονάδες φορτίου ανά μονάδα επιφάνειας και το $\boldsymbol{J}$ σε μονάδες φορτίου ανά το γινόμενο $($μονάδα περιοχής(εμβαδόν)$) \times ($μονάδα χρόνου$)$. Η χρονική αρμονική μορφή των εξισώσεων αυτών δίνεται θεωρώντας:

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{r},\, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{1.3}$$
$$\boldsymbol{B}(\mathbf{r},\, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{1.4}$$
$$\boldsymbol{H}(\mathbf{r},\, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{1.5}$$
$$\boldsymbol{D}(\mathbf{r},\, t) = \mathbf{D}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{1.6}$$
$$\boldsymbol{J}(\mathbf{r},\, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \tag{1.7}$$

Τα **E**, **B**, **H**, **D**, **J** είναι μιγαδικές διανυσματικές συναρτήσεις θέσης και χρησιμοποιούνται στον ηλεκτρομαγνητισμό παγκοσμίως. Τα φυσικά μεγέθη παρατηρούνται παίρνοντας το πραγματικό μέρος των ποσοτήτων στις (1.3)-(1.7). Αντικαθιστώντας τις (1.3)-(1.4) στην (1.1) έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}}{\partial t} \\
e^{-i\omega t}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\mathbf{B}(\mathbf{r})\frac{\partial e^{-i\omega t}}{\partial t} \\
e^{-i\omega t}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\mathbf{B}(\mathbf{r})(-i\omega)e^{-i\omega t} \\
\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}e^{i\omega t} \\
\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{1.8}$$

και αντικαθιστώντας τις (1.5)-(1.7) στην (1.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) &= \frac{\partial(\mathbf{D}(\mathbf{r})e^{-i\omega t})}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \\
e^{-i\omega t}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{D}(\mathbf{r})\frac{\partial(e^{-i\omega t})}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \\
\cancel{e^{-i\omega t}}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega\cancel{e^{-i\omega t}}\mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r})\cancel{e^{-i\omega t}} \\
\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega\mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Για ένα γραμμικό, ομογενές και ισότροπο μέσο ισχύουν οι καταστατικές εξισώσεις που συνδέουν όλα τα προανεφερθέντα μεγέθη με τα χαρακτηριστικά μεγέθη του υλικού μέσου

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \to \mathbf{D}\cancel{e^{-i\omega t}} = \varepsilon\mathbf{E}\cancel{e^{-i\omega t}} \to \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{1.10}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \to \mathbf{B}\cancel{e^{-i\omega t}} = \mu\mathbf{H}\cancel{e^{-i\omega t}} \to \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{1.11}$$
$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \to \mathbf{J}\cancel{e^{-i\omega t}} = \sigma\mathbf{E}\cancel{e^{-i\omega t}} \to \mathbf{J} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{1.12}$$

όπου ε είναι η διηλεκτρική σταθερά, υπολογισμένη σε χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους, μ είναι η μαγνητική διαπερατότητα υπολογισμένη σε επαγωγή ανά μονάδα μήκους και σ είναι η αγωγιμότητα υπολογισμένη ανά το γινόμενο μονάδα μήκους επί μονάδα χρόνου του υλικού μέσου που μελετάμε.
Η (1.8) λόγω της (1.11) δίνει

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}. \tag{1.13}$$

Η (1.9) λόγω των (1.10)-(1.12) δίνει

$$\nabla \times \mathbf{H} = (-i\omega\varepsilon + \sigma)\mathbf{E}. \tag{1.14}$$

Λύνοντας την (1.13) ως προς το μαγνητικό πεδίο και εφαρμόζοντας τον τελεστή $\nabla\cdot$ έχουμε

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu}\nabla \times \mathbf{E} \to \nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\frac{1}{i\omega\mu}\nabla \times \mathbf{E}) = 0,$$

αντίστοιχα λύνοντας την (1.14) ως προς το ηλεκτρικό πεδίο και εφαρμόζοντας τον τελεστή $\nabla\cdot$ έχουμε

$$\mathbf{E} = \frac{1}{-i\omega\varepsilon + \sigma}\nabla \times \mathbf{H} \to \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (\frac{1}{-i\omega\varepsilon + \sigma}\nabla \times \mathbf{H}) = 0.$$

Έτσι,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \tag{1.15}$$

Οι εξισώσεις (1.13)-(1.15) αποτελούν την τυπική μορφή των αρμονικά χρονικά εξαρτώμενων εξισώσεων Maxwell σε συνάρτηση με τα χαρακτηριστικά μεγέθη του υλικού μέσου ε, μ, σ και της γωνιακής συχνότητας ω.
Ανάλογα με τις τιμές που μπορεί να λάβει το σ διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.
Το τέλεια αγώγιμο μέσο $(\sigma \to \infty)$.
Εάν θεωρήσουμε ότι το $\nabla \times \mathbf{H}$ είναι φραγμένο καθώς $\sigma \to \infty$, η εξίσωση (1.14) μας αναγκάζει να δεχτούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ μηδενίζεται. Τότε όμως λόγω της (1.13) μηδενίζεται και το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}$. Έτσι αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει ούτε ηλεκτρικό ούτε μαγνητικό πεδίο σε ένα τέλεια αγώγιμο μέσον.

Το μη-αγώγιμο μέσο, $(\sigma = 0)$.
Ένα μη-αγώγιμο μέσο δεν επιτρέπει (εξ'ορισμού) κίνηση φορτίου επομένως και η αγωγιμότητα πυκνότητας ρεύματος μηδενίζεται, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Ένα τέτοιο

μέσο συνηθίζεται να λέγεται τέλειο διηλεκτρικό.

Αν σε ένα αγώγιμο μέσο, $\sigma \neq 0$, θεωρήσουμε ένα επίπεδο κύμα της μορφής $\mathbf{E} = \mathbf{p}e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}$, εφαρμόσουμε τον τελεστή $\nabla\times$ στην (1.13) και λάβουμε υπόψη την (1.14)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega\mu(-i\omega\varepsilon + \sigma)\mathbf{E} \tag{1.16}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = (i\omega\mu\sigma + \varepsilon\mu\omega^2)\mathbf{E}. \tag{1.17}$$

Αντικαθιστώντας το $\mathbf{E}$ στην (1.17) και χρησιμοποιώντας γνωστή διανυσματική ταυτότητα λαμβάνουμε

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} = \nabla_{\mathbf{r}} \times (\mathbf{p}e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}) = \nabla e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}\nabla_r \times \mathbf{p}.$$

Όμως $\nabla_r \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$ διότι η πόλωση $\mathbf{p}$ είναι ανεξάρτητη του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}$ ως σταθερό διάνυσμα. Άρα,

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} = \nabla e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}} \times \mathbf{p}.$$

Έστω $\mathbf{r} = (x,\, y,\, z)$ και $\hat{\mathbf{d}} = (d_1,\, d_2,\, d_3)$ τότε

$$\nabla e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}} = \nabla e^{ik(d_1x+d_2y+d_3z)} = (\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y},\, \frac{\partial}{\partial z})e^{ik(d_1x+d_2y+d_3z)}$$

$$(ikd_1e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}},\, ikd_2e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}},\, ikd_3e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}) = ike^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}(d_1,\, d_2,\, d_3) = ik\hat{\mathbf{d}}e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}.$$

'Αρα,

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} = ike^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{p}.$$

Οπότε

$$\nabla_{\mathbf{r}}\times(\nabla_{\mathbf{r}}\times\mathbf{E}) = \nabla_{\mathbf{r}}\times(ike^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}\hat{\mathbf{d}}\times\mathbf{p}) = ik\nabla_{\mathbf{r}}e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{d}}\times\mathbf{p})+ike^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{d}}\times\mathbf{p}).$$

Όμως, το διάνυσμα $\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{p}$ είναι ανεξάρτητο του $\mathbf{r}$ οπότε $\nabla_{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Άρα,

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times (\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}) = ik\nabla_{\mathbf{r}}e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{p}) = ikike^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}\hat{\mathbf{d}} \times (\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{p})$$
$$= -k^2e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}\Big((\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{p})\hat{\mathbf{d}} - (\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{d}})\mathbf{p}\Big).$$

Όμως, η διεύθυνση διάδοσης ενός επίπεδου κύματος είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{d}}$ κάθετο στην πόλωση $\mathbf{p}$, $\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{p} = 0$ με $\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{d}} = |\hat{\mathbf{d}}|^2 = 1$ οπότε

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times (\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}) = k^2\mathbf{p}e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}} = k^2\mathbf{E}.$$

Από την (1.17) έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} k^2\mathbf{E} &= (i\omega\mu\sigma + \varepsilon\mu\omega^2)\mathbf{E} \\ k^2 &= i\omega\mu\sigma + \varepsilon\mu\omega^2. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στον ορισμό του κυματικού αριθμού, k, ως

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}. \tag{1.19}$$

Επιλέγουμε να πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα τέτοια ώστε $Imk \geq 0$. Ένα επίπεδο κύμα διαδίδεται σε ένα αγώγιμο μέσο με φασική ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{\omega}{Rek} \tag{1.20}$$

και διαχέεται με ρυθμό ίσο με Imk. Ειδικότερα, αν $\sigma = 0$ τότε το κύμα δεν διαχέεται. Ο αριθμός k είναι μιγαδικός οπότε μπορεί να πάρει τη μορφή $k = x+iy$, $k^2 = x^2-y^2+2xyi$. Εξισώνουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη της (1.18)

$$x^2 - y^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \text{ και } y = \frac{\mu\sigma\omega}{2x}$$

$$x^2-(\frac{\mu\sigma\omega}{2x})^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \leftrightarrow x^2-\frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{4x^2} = \mu\varepsilon\omega^2 \leftrightarrow 4x^4-4\mu\varepsilon\omega^2x^2-\mu^2\sigma^2\omega^2 = 0.$$

Η διακρίνουσα της τελευταίας εξίσωσης είναι ίση με

$$\Delta = (4\mu\varepsilon\omega^2)^2(1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}) > 0.$$

Άρα,

$$x^2 = \frac{4\mu\varepsilon\omega^2 \pm 4\mu\varepsilon\omega^2\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}}{8}.$$

Εφόσον $x^2 \geq 0$,

$$x^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2 \pm \mu\varepsilon\omega^2\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}}{2}$$

με $Rek = x > 0$:

$$Rek = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\Big(\frac{1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.21}$$

Επομένως αντικαθιστώντας την (1.21) στην (1.20) έχουμε

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\Big(\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}}\Big)^2. \tag{1.22}$$

Σε ένα υλικό μέσο χωρίς απώλειες, δηλαδή μη-αγώγιμο $\sigma = 0$, από την (1.19)

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{1.23}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{1.24}$$

Η χαρακτηριστική εμπέδηση του μέσου, μετρημένη σε επαγωγή ανά μονάδα μήκους, ορίζεται να είναι το μέγεθος

$$Z = \frac{\mu\omega}{\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}} \tag{1.25}$$

και την χαρακτηριστική αγωγιμότητα

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}}{\mu\omega}. \tag{1.26}$$

Λόγω της θετικής τετραγωνικής ρίζας δεχόμαστε ότι $ImY \geq 0$ και $ImZ \leq 0$. Από τις (1.13) και (1.14)

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} = \omega\mu\frac{\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}}{\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}}\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}\frac{\omega\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}}\mathbf{H},$$

από την οποία μέσω των (1.19) και (1.25)

$$\nabla \times \mathbf{E} = ikZ\mathbf{H}. \tag{1.27}$$

Αντίστοιχα έχουμε,

$$\nabla \times \mathbf{H} = (-i\omega\varepsilon + \sigma)\mathbf{E} = -i\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}\frac{\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}}{\omega\mu}\mathbf{E},$$

από την οποία μέσω των (1.20) και (1.13)

$$\nabla \times \mathbf{H} = -ikY\mathbf{E}. \tag{1.28}$$

1.2 Κανονικοποίηση

Η (1.1) λόγω της καταστατικής σχέσης (1.11) γίνεται:

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mu\boldsymbol{H},$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\mu\boldsymbol{H} = \mathbf{0}. \tag{1.29}$$

Η (1.2) λόγω των καταστατικών σχέσεων (1.10), (1.12) γίνεται:

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\mathbf{r},\, t) = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\mathbf{r},\, t) - \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \tag{1.30}$$

κάνουμε τώρα τον μετασχηματισμό [6]

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{r},\, t) = \varepsilon^{-1/2}\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{H}(\mathbf{r},\, t) = \mu^{-1/2}\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \tag{1.32}$$

Η (1.29) λόγω των (1.31), (1.32) και της (1.23) δίνει:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\varepsilon^{-1/2}\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mu \frac{\partial}{\partial t}(\mu^{-1/2}\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) &= \mathbf{0} \\
\varepsilon^{-1/2}e^{-i\omega t}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - i\omega\mu\mu^{-1/2}\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} &= \mathbf{0} \\
\varepsilon^{-1/2}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - i\omega\mu^{1/2}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0} \\
\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - i\omega\varepsilon^{1/2}\mu^{1/2}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - ik\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \tag{1.33}$$

Η (1.30) λόγω των (1.31), (1.32) και της (1.23) δίνει:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mu^{-1/2}\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^{-1/2}\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) &= \mathbf{0} \\
\mu^{-1/2}e^{-i\omega t}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \varepsilon\varepsilon^{-1/2}i\omega\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) &= \mathbf{0} \\
\mu^{-1/2}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \varepsilon^{-1/2}i\omega\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0} \\
\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \varepsilon^{1/2}\mu^{1/2}i\omega\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) + ik\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \tag{1.34}$$

Οι (1.33), (1.34) αποτελούν τις κανονικοποιημένες εξισώσεις Maxwell. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\nabla \times \nabla = \nabla\nabla - \nabla^2$ στην σχέση (1.17)

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = k^2\mathbf{E},$$

$$-\nabla^2\mathbf{E} = k^2\mathbf{E}.$$

Ανάλογα για το μαγνητικό πεδίο **H**,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2\mathbf{H},$$

$$\nabla \times (-ikY\mathbf{E}) = -\nabla^2\mathbf{H},$$

$$-ikY\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{H},$$

$$-ikYikZ\mathbf{H} = -\nabla^2\mathbf{H},$$

$$-i^2k^2\frac{1}{Z}Z\mathbf{H} = -\nabla^2\mathbf{H},$$

$$-\nabla^2\mathbf{H} = k^2\mathbf{H}.$$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο ικανοποιούν τις σχέσεις

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{1.35}$$

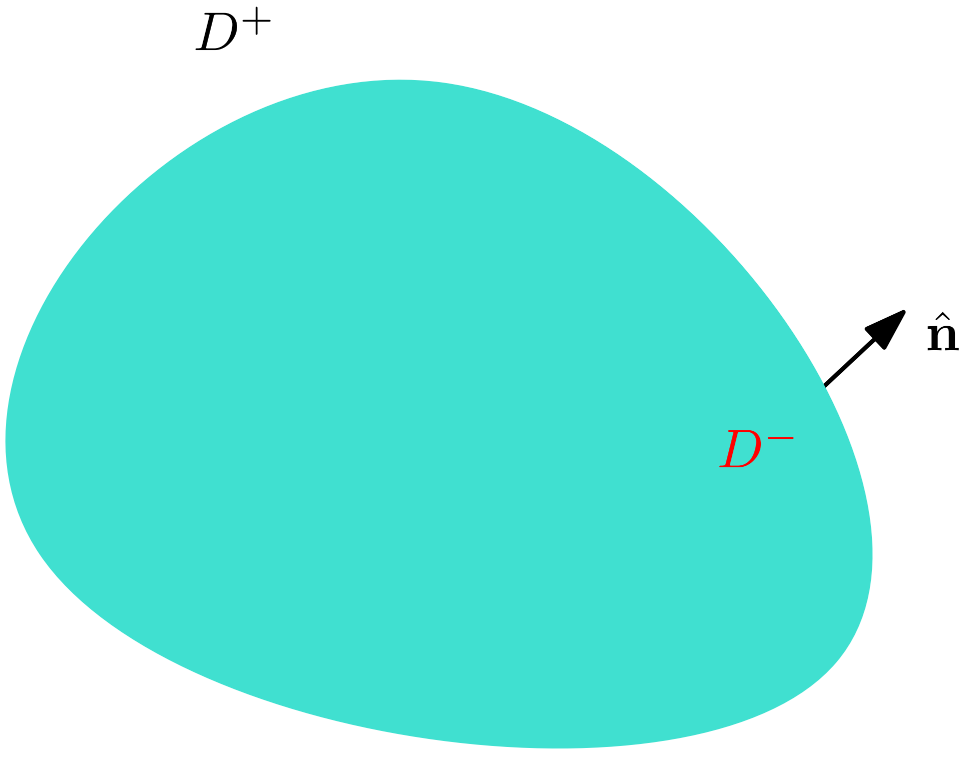
$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{H} = \mathbf{0}. \tag{1.36}$$

Αποδεικνύεται ότι όλα τα καρτεσιανά συστήματα των **E**, **H** ικανοποιούν τις εξισώσεις Helmholtz με τον ίδιο κυματικό αριθμό k.
Θεωρούμε διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε δύο χώρους V^+, V^- που χωρίζονται με μία επιφάνεια S, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Θα χρησιμοποιήσουμε τους δείκτες $+$, $-$ ανάλογα με τα υλικά μέσα (V^+, V^-) ώστε να αντιλαμβανόμαστε την διαφορετικότητα των παραμέτρων σε κάθε περίπτωση. Επιπλέον, θεωρούμε ότι το μη φραγμένο μέσο V^+ δεν παρουσιάζει απώλειες, $\sigma^+ = 0$. Η μόνη περίπτωση στην οποία δεν θα χρησιμοποιήσουμε δείκτη είναι ο κυματικός αριθμός για το εξωτερικό υλικό μέσο V^+, $k = \omega\sqrt{\varepsilon^+\mu^+}$. Ο σχετικός δείκτης διάθλασης $\eta = \dfrac{k^-}{k^+}$ μας επιτρέπει να γράφουμε τις εξισώσεις Maxwell για τα (V^+, V^-) ως

$$\nabla \times \mathbf{E}^+ = ikZ^+\mathbf{H}^+, \nabla \times \mathbf{H}^+ = -ikY^+\mathbf{E}^+, \text{ στο } V^+, \tag{1.37}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^- = i\eta kZ^-\mathbf{H}^-, \nabla \times \mathbf{H}^- = -i\eta kY^-\mathbf{E}^-, \text{ στο } V^-, \tag{1.38}$$

εφόσον $k = k^+$ και $\eta = \dfrac{k^-}{k}$ στα V^+, V^- αντίστοιχα. Οι παράμετροι Z, Y ορίζονται από τις σχέσεις (1.25), (1.26) και όλες οι φυσικές παράμετροι έχουν τον κατάλληλο δείκτη.



Εικόνα 1

Κεφάλαιο 2

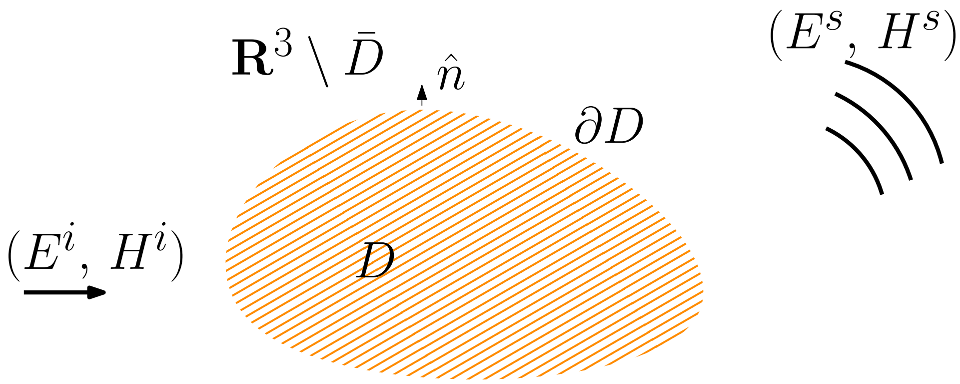
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται παρουσίαση των συνοριακων συνθηκών που επιβάλλονται για το εσωτερικό και το εξωτερικό πρόβλημα σκέδασης, των συνθηκών ακτινοβολίας και έπειτα αναφερόμαστε στα σημαντικότερα προβλήματα συνοριακών συνθηκών. Τέλος παρουσιάζονται τα σημαντικότερα προβλήματα σκέδασης, τα οποία δεν είναι άλλα από τα εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών.

2.1 Συνοριακές Συνθήκες

Η κατηγοριοποίηση των προβλήματων σκέδασης [9], [4] γίνεται ανάλογα με τον προσδιορισμό του τρόπου που το υλικό μέσο V^- προκαλεί διαταραχή σε ένα γνωστό προσπίπτον κύμα $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$. Όταν το προσπίπτον κύμα διαπερνά το V^- τότε πρέπει το ολικό εξωτερικό πεδίο $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$ και το εσωτερικό πεδίο $(\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-)$ να ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες στην επιφάνεια/σύνορο S του σκεδαστή (εικόνα 2). Στην περίπτωση που δεν ειπεισέρχονται πεδία στο V^- τότε ο σκεδαστής λέμε ότι είναι μη διαπερατός και πρέπει να επιβάλλουμε συγκεκριμένου τύπου συνοριακές συνθήκες για το ολικό εξωτερικό πεδίο.

Η τέλεια αγώγιμη επιφάνεια



Εικόνα 2

Η συνθήκες που επιβάλλουμε είναι

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in S, \tag{2.1}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του σκεδαστή S. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ποσότητες που δεν προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες μπορούν να ερμηνευθούν ως επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, ρ_S και επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος, $\mathbf{J}_S$,

$$\rho_S(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}^+(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S \tag{2.2}$$

$$\mathbf{J}_S(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S. \tag{2.3}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ρ_S μετράται σε φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας ενώ η πυκνότητα ρεύματος είναι μία εφαπτομενική διανυσματική συνάρτηση που μετράει το φορτίο που διέρχεται από μία καμπύλη της επιφάνειας S ανά μονάδα μήκους και χρόνου.

Επιφάνεια εμπέδησης

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r})) = -Z_S Z^+(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r})), \mathbf{r} \in S. \tag{2.4}$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξία εξωτερικά την (2.4) με $\hat{\mathbf{n}}$ και χρησιμοποιώντας γνωστές διανυσματικές ταυτότητες

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r})) \times \hat{\mathbf{n}} = -Z_S Z^+(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r})) \times \hat{\mathbf{n}},$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r})) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r})))\hat{\mathbf{n}} = Z_S Z^+ \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r})),$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r})) - (\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}}))\hat{\mathbf{n}} = Z_S Z^+ \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r}))$$

εφόσον $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ έχουμε

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r})) = Z_S Z^+ \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r})),\ \mathbf{r} \in S. \tag{2.5}$$

Η αδιάστατη παράμετρος Z_S εκφράζει την αντίσταση της επιφάνειας συσχετιζόμενη με την χαρακτηριστική αντίσταση Z^+ του υλικού μέσου και μπορεί να διαφέρει κατά μήκος της επιφάνειας S. Η συνοριακή συνθήκη για την επιφάνεια εμπέδησης βρίσκει ευρεία εφαρμογή στη σκέδαση λόγω ενός φραγμένου εμποδίου. Στις περιπτώσεις αυτές το εμπόδιο, δηλαδή ο σκεδαστής, δεν έχει τέλεια αγώγιμη επιφάνεια αλλά το εξωτερικό πεδίο δεν διαπερνά βαθειά τον σκεδαστή. Σημειώνουμε επίσης ότι το πρόβλημα εμπέδησης ανάγεται στο πρόβλημα του τέλειου αγωγού καθώς η επιφανειακή αντίσταση του υλικού προσεγγίζει το 0.

Συνθήκες διαπερατότητας

Εάν η αγωγιμότητα σ^- στο V^- είναι πεπερασμένη (πιθανόν και 0), τότε το προσπίπτον κύμα διαδίδεται από το χωρίς απώλειες μέσο V^+ στο μέσο V^-. Τα δύο διαφορετικά υλικά μέσα, όπως έχουμε δεί, περγράφονται από τις εξισώσεις Maxwell με κατάλληλες καταστατικές παραμέτρους και συναντιούνται στο σύνορο S. Οι σχέσεις που συνδέουν τα χωρία V^-, V^+ στο S είναι

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}) \tag{2.6}$$

$$\varepsilon^+ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \varepsilon^-(1 + \frac{i\sigma^-}{\varepsilon^-\omega})\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}^-(\mathbf{r}) \tag{2.7}$$

$$Y^+ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \eta Y^- \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}^-(\mathbf{r}) \tag{2.8}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^-(\mathbf{r}) \tag{2.9}$$

$$\mu^+ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mu^- \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}^-(\mathbf{r}) \tag{2.10}$$

$$Z^+ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \eta Z^- \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}^-(\mathbf{r}) \tag{2.11}$$

όπου $\mathbf{r} \in S$ σε όλες τις εξισώσεις. Από τιε σχέσεις (2.6) και (2.9) βλέπουμε ότι το εφαπτομενικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι συνεχή στο S. Οι συνθήκες (2.7) και (2.10) δείχνουν τη συνέχεια κάθετη συνιστώσα των πεδίων κατά μήκος της S.

2.2 Συνθήκες Ακτινοβολίας

Είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους τις εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούνται από το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα καθώς και τις απαραίτητες συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται ανάλογα με τη φύση του σκεδαστή. Το σκεδασμένο πεδίο στον εξωτερικό χώρο V^+ αντιπροσωπεύει ακτινοβολούσα ενέργεια. Στον ηλεκτρομαγνητισμό αυτό εξασφαλίζεται από την συνθήκη ακτινοβολίας Silver-M$\ddot{u}$ller (M$\ddot{u}$ller 1948-Silver 1949) [11], [3], [4] η οποία έχει την ακόλουθη μορφή

$$\lim_{r\to\infty}[\mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{E})+ikr\mathbf{E}]=\mathbf{0} \tag{2.12}$$

$$\lim_{r\to\infty}[\mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{H})+ikr\mathbf{H}]=\mathbf{0} \tag{2.13}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$. Οι σχέσεις (2.12)-(2.13) μπορούν να γραφούν ισοδύναμα στη μορφή

$$Z^+\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{H}+\mathbf{E}=o(\frac{1}{r}) \tag{2.14}$$

$$Y^+\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{E}-\mathbf{H}=o(\frac{1}{r}) \tag{2.15}$$

και ισχύουν ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις του $\hat{\mathbf{r}}$ καθώς $r\to\infty$. Το ηλεκτρικό **E** και το μαγνητικό **H** πεδίο είναι ασυμπτωτικά ορθογώνια στο $\hat{\mathbf{r}}$, δηλαδή δεν έχουν ακτινικές συνιστώσες. Η κάθε καρτεσιανή συνιστώσα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

$$\lim_{r\to\infty} r(\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial r}-iku(\mathbf{r}))=0,$$

$\hat{\mathbf{r}}\in S^2$, $\hat{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{r}}{r}$, $r=|\mathbf{r}|$, όπου S^2 η μοναδιαία σφαίρα. Επιπλέον μπορεί να αποδειχθεί ότι οι σχέσεις (2.12)-(2.13) είναι ισοδύναμες. Έτσι, δεν είναι ανεξάρτητη η μία από την άλλη αλλά συνδέονται με τις εξισώσεις Maxwell και με αυτόν τον τρόπο αρκεί μόνο η μία από τις δύο για την εξασφάλιση της εξασθένισης του σκεδασμένου πεδίου στο άπειρο.

2.3 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών για τις Εξισώσεις Maxwell

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βασικά εσωτερικά και εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών για τις εξισώσεις Maxwell [4]. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τους ακόλουθους χώρους

$$C_D^{0,\alpha}(\partial D) := \{\mathbf{h} \in C_T^{0,\alpha}(\partial D) : \nabla \cdot \mathbf{h} \in C^{0,\alpha}(\partial D)\}$$

και

$$C_T^{0,\alpha}(\partial D) := \{\mathbf{h} \in C^{0,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3) : \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{h} = 0 \,\text{στο}\, \partial D\}$$

όπου $\partial D = S$ είναι το σύνορο του σκεδαστή.

Εσωτερικό Συνοριακό Πρόβλημα Maxwell.

Αναζητούμε διανυσματικά πεδία **E**, **H** $\in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ που ικανοποιούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0}, \text{ στο } D \tag{2.16}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0}, \text{ στο } D \tag{2.17}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{c}, \text{ στο } \partial D \tag{2.18}$$

με $\mathbf{c} \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$ και D το χωρίο του σκεδαστή.

Εξωτερικό Συνοριακό Πρόβλημα Maxwell

Αναζητούμε διανυσματικά πεδία **E**, **H** $\in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ που ικανοποιούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0}, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.19}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0}, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.20}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{c}, \text{ στο } \partial D \tag{2.21}$$

με $\mathbf{c} \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$ και $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ το εξωτερικό του σκεδαστή και μία από τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-M$\ddot{u}$ller:

$$(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{E} = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty \tag{2.22}$$

$$(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{H} = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty \tag{2.23}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$. Έχουμε ότι $Div(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}) = -(\hat{\mathbf{n}}Curl\mathbf{E})$ και άρα είναι απαραίτητο να είναι συνεχής η $Div\mathbf{c}$ ώστε να υπάρχει λύση στο πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Στη συνέχεια θεωρούμε κάποια λίγο πιο γενικά προβλήματα συνοριακών τιμών για τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz, προκειμένου να μελετήσουμε τα προβλήματα συνοριακών τιμών Maxwell.

Εσωτερικό Συνοριακό Ηλεκτρικό Πρόβλημα

Αναζητούμε $\mathbf{E} \in \mathcal{F}(D)$, με

$$\mathcal{F}(D) := \{\mathbf{E} : \bar{D} \to \mathbb{C}^3 : \mathbf{E} \in C^2(D) \cap C(\bar{D}),\ \nabla \cdot \mathbf{E},\ \nabla \times \mathbf{E} \in C(\bar{D})\},$$

που να ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}, \text{ στο } D \tag{2.24}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{c},\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \gamma \text{ στο } \partial D \tag{2.25}$$

όπου $\gamma \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ είναι μία γνωστή συνάρτηση και $\mathbf{c} \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$ γνωστό εφαπτομενικό διάνυσμα.

Εξωτερικό Συνοριακό Ηλεκτρικό Πρόβλημα

Αναζητούμε $\mathbf{E} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$,που να ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.26}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{c},\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \gamma \text{ στο } \partial D \tag{2.27}$$

όπου τα γ, $\mathbf{c}$ είναι γνωστά και τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\nabla \times \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \nabla \cdot \mathbf{E} - ik\mathbf{E} = o(\frac{1}{r}), \tag{2.28}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις του $\hat{\mathbf{r}}$, $r \to \infty$.

Εσωτερικό Συνοριακό Μαγνητικό Πρόβλημα.

Αναζητούμε $\mathbf{H} \in \mathcal{F}(D)$ που ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = \mathbf{0}, \text{ στο } D \tag{2.29}$$

$$(\nabla \times \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}} = \ell,\ \nabla \cdot \mathbf{H} = \delta \text{ στο } \partial D \tag{2.30}$$

όπου $\delta \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ είναι μία γνωστή συνάρτηση και $\ell \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$ γνωστό εφαπτομενικό διάνυσμα.

Εξωτερικό Συνοριακό Μαγνητικό Πρόβλημα

Αναζητούμε **H** $\in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$,που να ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = \mathbf{0}, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.31}$$

$$(\nabla \times \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}} = \ell,\ \nabla \cdot \mathbf{H} = \delta \text{ στο } \partial D \tag{2.32}$$

με $\delta,\ \ell$ όπως προηγούμένως και συνθήκη ακτινοβολίας

$$\nabla \times \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \nabla \cdot \mathbf{H} - ik\mathbf{H} = o(\frac{1}{r}), \tag{2.33}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις του $\hat{\mathbf{r}}$. Το $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ικανοποιεί τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \Delta(\nabla \cdot \mathbf{E}) + k^2 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot (\Delta \mathbf{E}) + k^2 \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \nabla \cdot (-k^2 \mathbf{E}) + k^2 \nabla \cdot \mathbf{E} = -k^2 \nabla \cdot \mathbf{E} + k^2 \nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Εάν το **E** ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\nabla \times \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \nabla \cdot \mathbf{E} - ik\mathbf{E} = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty$$

τότε το $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ικανοποιεί τη <u>συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld</u>:

$$\hat{\mathbf{r}} \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - ik \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty$$

προς όλες τις διευθύνσεις του $\hat{\mathbf{r}}$.
Εξωτερικό Συνοριακό Πρόβλημα Εμπέδησης
Αναζητούμε **E**, **H** $\in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ που ικανοποιούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0},\ \nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0}, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.34}$$

$$[\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H})] - \psi(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) = \ell, \text{ στο } \partial D \tag{2.35}$$

με $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ γνωστή συνάρτηση και $\ell \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$ γνωστό εφαπτομενικό διάνυσμα και μία εκ των συνθηκών Silver-M$\ddot{u}$ller:

$$\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{E} = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty \tag{2.36}$$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{H} = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty, \tag{2.37}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις του $\hat{\mathbf{r}}$.
Μεταβατικό Πρόβλημα
Αναζητούνται $\mathbf{E}$, $\mathbf{H} \in C^{1,\alpha}(D) \cap C(\bar{D})$, $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{H}^+ \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus D) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$, με $0 < \alpha < 1$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}^+ - ik^+\mathbf{H}^+ = \mathbf{0},\ \nabla \times \mathbf{H}^+ + ik^+\mathbf{E}^+ = \mathbf{0},\ \text{στο}\ \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.38}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0},\ \nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0},\ \text{στο}\ D, \tag{2.39}$$

τις συνθήκες σύνδεσης:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+ - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{f},\ q^+\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+ - q\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = \mathbf{g} \tag{2.40}$$

επί του ∂D και την συνθήκη ακτινοβολίας Silver-M$\ddot{u}$ller:

$$\mathbf{H}^+ \times \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{E}^+ = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty \tag{2.41}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις του $\hat{\mathbf{n}}$ και k, k^+, q, $q^+ \in C \setminus \{0\}$, με $Imk^+ \geq 0$ και $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$.

2.4 Προβλήματα σκέδασης των εξισώσεων Maxwell

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα βασικά προβλήματα σκέδασης για τις εξισώσεις Maxwell. Πρόκειται για εξωτερικά πρόβληματα συνοριακών τιμών και αναζητείται το ολικό εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.
Εξωτερικό Πρόβλημα Σκέδασης Maxwell
Αναζητούμε διανυσματικά πεδία $\mathbf{E}$, $\mathbf{H} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ που ικανοποιούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0},\ \text{στο}\ \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.42}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0},\ \text{στο}\ \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.43}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{c},\ \text{στο}\ \partial D \tag{2.44}$$

με $\mathbf{c} \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$ και $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ το εξωτερικό του σκεδαστή και μία από τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-M$\ddot{u}$ller:

$$(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{E} = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty \tag{2.45}$$

$$(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{H} = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty \tag{2.46}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$. Έχουμε ότι $Div(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}) = -(\hat{\mathbf{n}}Curl\mathbf{E})$ και άρα είναι απαραίτητο να είναι συνεχής η $Div\mathbf{c}$ ώστε να υπάρχει λύση στο πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Εξωτερικό Ηλεκτρικό Πρόβλημα Σκέδασης

Αναζητούμε $\mathbf{E} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$, που να ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = \mathbf{0},\ \text{στο}\ \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.47}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{c},\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \gamma\ \text{στο}\ \partial D \tag{2.48}$$

όπου τα γ, $\mathbf{c}$ είναι γνωστά και τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\nabla \times \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}}\nabla \cdot \mathbf{E} - ik\mathbf{E} = o(\frac{1}{r}), \tag{2.49}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις του $\hat{\mathbf{r}}$.

Εξωτερικό Μαγνητικό Πρόβλημα Σκέδασης

Αναζητούμε $\mathbf{H} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$,που να ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = \mathbf{0},\ \text{στο}\ \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.50}$$

$$(\nabla \times \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}} = \ell,\ \nabla \cdot \mathbf{H} = \delta\ \text{στο}\ \partial D \tag{2.51}$$

με δ, ℓ όπως προηγούμένως και συνθήκη ακτινοβολίας

$$\nabla \times \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}}\nabla \cdot \mathbf{H} - ik\mathbf{H} = o(\frac{1}{r}), \tag{2.52}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις του $\hat{\mathbf{r}}$.

Εξωτερικό Πρόβλημα Σκέδασης με επιφάνεια εμπέδησης

Αναζητούμε $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ που ικανοποιούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0},\ \nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0},\ \text{στο}\ \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.53}$$

$$[\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H})] - \psi(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) = \ell,\ \text{στο}\ \partial D \tag{2.54}$$

με $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ γνωστή συνάρτηση και $\ell \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$ γνωστό εφαπτομενικό διάνυσμα και μία εκ των συνθηκών Silver-M$\ddot{u}$ller:

$$\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{E} = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty \tag{2.55}$$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{H} = o(\frac{1}{r}),\ r \to \infty, \tag{2.56}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις του $\hat{\mathbf{r}}$.

Κεφάλαιο 3

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των λύσεων των προβλημάτων σκέδασης και τα μακρινά τους πεδία (πλάτη σκέδασης). Με τις ενότητες αυτού του κεφαλαίου ολοκληρώνεται ή γενική εισαγωγή στην θεωρία της σκέδασης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

3.1 Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις Stratton-Chu

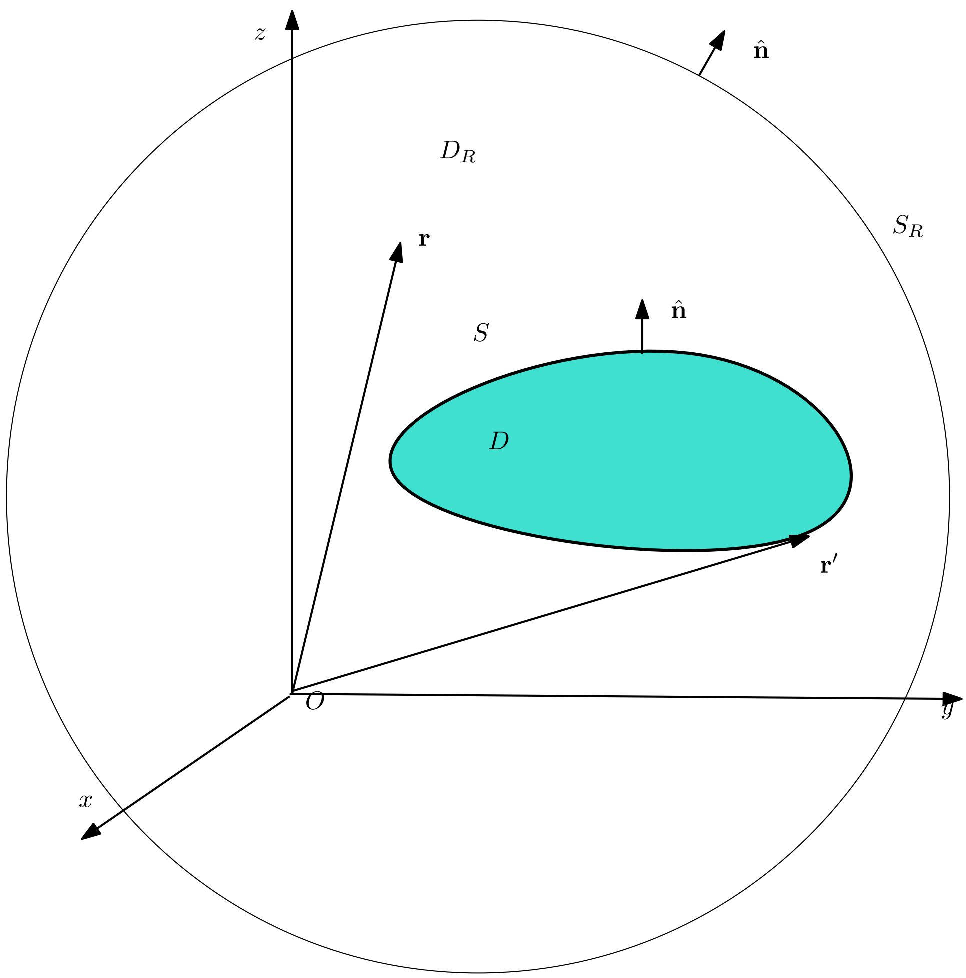
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις βασικές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που παρατηρούνται με την ακόλουθη διαδιακασία [11], [8], [15], [19].
Εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης του Gauss για το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_1 \times (\nabla \times \mathbf{f}_2) - \mathbf{f}_2 \times (\nabla \times \mathbf{f}_1), \tag{3.1}$$

για $\mathbf{f}_1,\, \mathbf{f}_2 \in C^2(V) \cap C^1(\bar{V})$ και λαμβάνουμε

$$\int_V [\mathbf{f}_1 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_2 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{f}_1] dv = \int_S [\mathbf{f}_2 \times \nabla \times \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_1 \times \nabla \times \mathbf{f}_2] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \tag{3.2}$$

για κάθε λείο, φραγμένο χωρίο V με σύνορο S. Η σχέση (3.2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων κατά Stratton-Chu (1939) θεωρώντας ότι το χωρίο V είναι η τομή του εξωτερικού υλικού μέσου με μία σφαίρα, $V^+ \setminus B(\mathbf{r},\, \epsilon)$, της οποίας η ακτίνα ϵ είναι αρκετά μεγάλη ώστε να περιέχει το χωρίο του σκεδαστή (εικόνα 3). Θέτουμε



Εικόνα 3

την $\mathbf{f}_1 := G^+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}'})\mathbf{a}$ με την θεμελιώδη συνάρτηση Green για το εξωτερικό πεδίο πολλαπλασιασμένη με ένα σταθερό διάνυσμα

$$G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

και $\mathbf{f}_2 := \mathbf{E}$ ή $\mathbf{f}_2 := \mathbf{H}$ με το σκεδασμένο ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\mathbf{a}$ σε όλο το $\mathbb{R}^3$ ως εξής

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(\mathbf{r},\,\epsilon)\cap V^+} \frac{\partial}{\partial \hat{n}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}ds(\mathbf{r}'). \tag{3.3}$$

Όταν $\mathbf{r} \in S$ η συνάρτηση $\mathbf{a}$ αποτελεί ένα μέτρο της γωνίας που σχηματίζει το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{r} \in S$ με το V^+. Έχει μελετηθεί ότι η συνάρτηση α λαμβάνει τις ακόλουθες τιμές ανάλογα με το που βρίσκεται η θέση $\mathbf{r}$

$$\alpha(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in V^- \\ \frac{1}{2}, & \mathbf{r} \in S \\ 1, & \mathbf{r} \in V^+. \end{cases} \tag{3.4}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Maxwell προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi}\int_S [&ikZ^+G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) + (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}'} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \\ &-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \times (\hat{\mathbf{n}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),\end{aligned} \tag{3.5}$$

και

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi}\int_S [&-ikY^+G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) + (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}'} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \\ &-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \times (\hat{\mathbf{n}'} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),\end{aligned} \tag{3.6}$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ για το ηλεκτρικό και μαγνητικό σκεδασμένο πεδίο αντίστοιχα. Επίσης ορίζουμε τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για το ολικό εσωτερικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο θεωρώντας ότι το χωρίο V είναι η τομή του εσωτερικού υλικού μέσου με τη σφαίρα, $V^- \setminus B(\mathbf{r}, \epsilon)$, της οποίας η ακτίνα είναι τέτοια ώστε να περιέχεται μέσα στον σκεδαστή. Θέτουμε την $\mathbf{f}_1 := G^-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}'})\mathbf{a}$ και $\mathbf{f}_2 := \mathbf{E}^-(\mathbf{r})$ ή $\mathbf{f}_2 := \mathbf{H}^-(\mathbf{r})$ και μέσω των εξισώσεων Maxwell έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{E}^-(\mathbf{r}) = \frac{ik^-}{4\pi}\int_S [&ik^-Z^-G^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^-(\mathbf{r}')) \\ &+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}'} \cdot \mathbf{E}^-(\mathbf{r}')) \\ &-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \times (\hat{\mathbf{n}'} \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),\end{aligned} \tag{3.7}$$

και

$$(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{H}^-(\mathbf{r}) = \frac{ik^-}{4\pi}\int_S [-ik^-Y^-G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}'}\cdot\mathbf{H}^-(\mathbf{r}'))$$
$$-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}'}\times\mathbf{H}^-(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'), \qquad (3.8)$$

για κάθε $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$ και ο δείκτης $-$ δείχνει ότι όλα τα πεδία και οι παράμετροι είναι υπολογισμένα στο εσωτερικό υλικό μέσο V^-. Τα προσπίπτοντα πεδία ικανοποιούν επίσης τις αναπαραστασείς των εξωτερικών πεδίων εφόσον είναι λύσεις των εξισώσεων Maxwell του εξωτερικού χωρίου V^+

$$(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi}\int_S [ikZ^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^i(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}'}\cdot\mathbf{E}^i(\mathbf{r}'))$$
$$-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}'}\times\mathbf{E}^i(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'), \qquad (3.9)$$

και

$$(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi}\int_S [-ikY^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^i(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}'}\cdot\mathbf{H}^i(\mathbf{r}'))$$
$$-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}'}\times\mathbf{H}^i(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'). \qquad (3.10)$$

Οι αναπαραστάσεις (3.9)-(3.10) ισχύουν για κάθε $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$ και στο εσωτερικό υλικό μέσο V^- εφόσον απουσιάζει κάποιο εμπόδιο.
Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3.5) και (3.9) λαμβάνουμε την ακόλουθη ολοκληρωτική αναπαράσταση για το ολικό ηλεκτρικό πεδίο του εξωτερικού χωρίου V^+.

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a}(\mathbf{r})-1)\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) =$$
$$\frac{ik}{4\pi}\int_S [ikZ^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}(\mathbf{r}')) + (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}'}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}'))$$
$$-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}'}\times\mathbf{E}(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')$$
$$+\frac{ik}{4\pi}\int_S [ikZ^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')) + (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}'}\cdot\mathbf{E}^i(\mathbf{r}'))$$
$$-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}'}\times\mathbf{E}^i(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),$$

από την οποία έχουμε

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [ikZ^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))\\
+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))\\
-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'). \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Παρόμοια αν προσθέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (3.6) και (3.10) παίρνουμε για το ολικό μαγνητικό πεδίο

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a}(\mathbf{r})-1)\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) =\\
\frac{ik}{4\pi}\int_S [-ikY^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}(\mathbf{r}')) + (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r}'))\\
-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')\\
+\frac{ik}{4\pi}\int_S [-ikY^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^i(\mathbf{r}')) + (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{H}^i(\mathbf{r}'))\\
-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^i(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),
\end{aligned}
$$

από όπου

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [-ikY^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))\\
+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))\\
-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'). \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Τα ζευγάρια των αναπαραστάσεων Stratton-Chu που δίνονται από τις σχέσεις (3.7), (3.8) και (3.11), (3.12) αποτελούν τις γενικές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των εσωτερικών και του ολικών πεδίων στην σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Παρατηρούμε ότι στις (3.11), (3.12) τα πεδία μπορεί να είναι είτε τα ολικά είτε τα σκεδασμένα αρκεί να είμαστε συνεπείς στην επιλογή μας και $\mathbf{r} \in V^+$.

Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις σε δυαδική μορφή.
Χρησιμοποιούμε τη δυαδική-διανυσματική μορφή του 2ου θεωρήματος Green

$$
\begin{aligned}
\int_V [(\nabla\times\nabla\times\mathbf{f})\cdot\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{f}\cdot(\nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{F}})]dv\\
= \int_S \hat{\mathbf{n}}\cdot[(\nabla\times\mathbf{f})\times\tilde{\mathbf{F}} + \mathbf{f}\times(\nabla\times\tilde{\mathbf{F}})]ds\\
= -\int_S [(\nabla\times\mathbf{f})\cdot(\hat{\mathbf{n}}\times\tilde{\mathbf{F}}) - (\nabla\times\tilde{\mathbf{F}})\cdot(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{f})]ds, \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

όπου η τελευταία σχέση προέκυψε λαμβάνοντας υπόψη ότι το $\nabla\times$ ενός δυαδικού είναι διάνυσμα και την ταυτότητα $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\tilde{\mathbf{A}}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\tilde{\mathbf{A}})$, μπορούμε να παρατηρήσουμε τις ακόλουθες ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις συνάρτηση της θεμελιώδους λύσης σε δυαδική μορφή $\tilde{\mathbf{G}}$ για κάθε $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3\setminus S$. Η συνάρτηση Green σε δυαδική μορφή δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{k^2}(\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}} + k^2\tilde{\mathbf{I}})G(\mathbf{r},\,\mathbf{r}_0)\\
&= \frac{1}{(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)^2}\big[k^2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\\
+(1-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)\big(\tilde{\mathbf{I}} &- 3\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}\big)\big]G(\mathbf{r},\,\mathbf{r}_0)\\
&+G(\mathbf{r},\,\mathbf{r}_0)\tilde{\mathbf{I}},
\end{aligned}$$

με $\mathbf{r}_0$ η θέση της πηγής και $\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_1\hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2\hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3\hat{\mathbf{x}}_3$ το ταυτοτικό δυαδικό στον $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) - \frac{ik}{4\pi}\int_S &[(\nabla_{\mathbf{r}'}\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))\cdot(\hat{\mathbf{n}}'\times\tilde{\mathbf{G}}^+(\mathbf{r},\,\mathbf{r}'))\\
&-(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^+)\cdot(\nabla_{\mathbf{r}'}\times\tilde{\mathbf{G}}^+(\mathbf{r},\,\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),
\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) - \frac{ik}{4\pi}\int_S &[(\nabla_{\mathbf{r}'}\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))\cdot(\hat{\mathbf{n}}'\times\tilde{\mathbf{G}}^+(\mathbf{r},\,\mathbf{r}'))\\
&-(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}^+)\cdot(\nabla_{\mathbf{r}'}\times\tilde{\mathbf{G}}^+(\mathbf{r},\,\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')
\end{aligned}\tag{3.15}$$

για τα εξωτερικά ολικά πεδία και

$$\begin{aligned}
(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{E}^-(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{4\pi}\int_S &[(\nabla_{\mathbf{r}'}\times\mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))\cdot(\hat{\mathbf{n}}'\times\tilde{\mathbf{G}}^-(\mathbf{r},\,\mathbf{r}'))\\
&-(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^-)\cdot(\nabla_{\mathbf{r}'}\times\tilde{\mathbf{G}}^-(\mathbf{r},\,\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),
\end{aligned}\tag{3.16}$$

,

$$\begin{aligned}
(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{H}^-(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{4\pi}\int_S &[(\nabla_{\mathbf{r}'}\times\mathbf{H}^-(\mathbf{r}'))\cdot(\hat{\mathbf{n}}'\times\tilde{\mathbf{G}}^-(\mathbf{r},\,\mathbf{r}'))\\
&-(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}^-)\cdot(\nabla_{\mathbf{r}'}\times\tilde{\mathbf{G}}^-(\mathbf{r},\,\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),
\end{aligned}\tag{3.17}$$

για τα εσωτερικά ολικά πεδία.

Μια εναλλακτική μορφή των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων για τα εσωτερικά πεδία παρατηρείται αν στις σχέσεις (3.7), (3.8) εφαρμόσουμε τον τελεστή $\nabla\times$ και χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Maxwell. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}} \times [(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{E}^-(\mathbf{r})] = \nabla_{\mathbf{r}} \times \{\frac{ik^-}{4\pi}\int_S [ik^- Z^- G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^-(\mathbf{r}')) \\ +(\nabla_{\mathbf{r}'} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{E}^-(\mathbf{r}')) \\ -(\nabla_{\mathbf{r}'} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')) \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))] ds(\mathbf{r}')\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha(\mathbf{r})-1)\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}(\mathbf{r})-1) ik^- Z^- \mathbf{H}^-(\mathbf{r}) \\ = \frac{ik^-}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_S ik^- Z^- G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^-(\mathbf{r}')) ds(\mathbf{r}') \\ +\frac{ik^-}{4\pi}\{\int_S \nabla_{\mathbf{r}} \times [(\nabla_{\mathbf{r}} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')) \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))] \\ -\nabla_{\mathbf{r}} \times [(\nabla_{\mathbf{r}} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))]\} ds(\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Διαιρούμε όλους τους όρους με $ik^- Z^-$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned}(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{H}^-(\mathbf{r}) = \frac{ik^-}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_S G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^-(\mathbf{r}')) ds(\mathbf{r}') \\ +\frac{1}{4\pi}\frac{1}{Z^-}\int_S \{\nabla_{\mathbf{r}} \times [(\nabla_{\mathbf{r}} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')) \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))] \\ -\cancel{\nabla_{\mathbf{r}} \times (\nabla_{\mathbf{r}} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}'))}^0(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))\} ds(\mathbf{r}')\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την διανυσματική ταυτότητα $\nabla \times \nabla\psi = \mathbf{0}$ για ψ βαθμωτό πεδίο και την ιδιότητα της θεμελιώδους λύσης $\nabla_{\mathbf{r}'} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\nabla_{\mathbf{r}} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Στη συνέχεια είναι γνωστό ότι $Y^- = \dfrac{1}{Z^-}$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{H}^-(\mathbf{r}) = \frac{ik^-}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_S G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^-(\mathbf{r}')) ds(\mathbf{r}') \\ +\frac{Y^-}{4\pi}\int_S \nabla_{\mathbf{r}} \times [(\nabla_{\mathbf{r}} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')) \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))] ds(\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}} \times [(G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))] = \\ \nabla_{\mathbf{r}} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}') \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}')) + G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cancel{\nabla_{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))}^{\mathbf{0}} \\ = \nabla_{\mathbf{r}} G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}') \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}')),\end{aligned}$$

και τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned}(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{H}^-(\mathbf{r}) = \frac{ik^-}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_S G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^-(\mathbf{r}')) ds(\mathbf{r}') \\ +\frac{Y^-}{4\pi}\int_S \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times [G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))] ds(\mathbf{r}'). \quad (3.18)\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο εφαρμόζουμε τον τελεστή $\nabla\times$ στη σχέση (3.8) και παίρνουμε

$$(\alpha(\mathbf{r})-1)\mathbf{E}^-(\mathbf{r}) = \frac{ik^-}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}}\times\int_S G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))ds(\mathbf{r}')$$
$$-\frac{Z^-}{4\pi}\int_S \nabla_{\mathbf{r}}\times\nabla_{\mathbf{r}}\times[G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^-(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'). \quad (3.19)$$

Εαν τώρα εφαρμόσουμε τον τελεστή $\nabla\times$ στη σχέση (3.11) του ολικού εξωτερικού πεδίου προκύπτει με ανάλογους υπολογισμούς

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\nabla\times\int_S G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}))ds(\mathbf{r}')$$
$$+\frac{Y^+}{4\pi}\nabla\times[\nabla\times\int_S G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}))ds(\mathbf{r}') \quad (3.20)$$

και αντίστοιχα στην σχέση (3.12) προκύπτει

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\nabla\times\int_S G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}))ds(\mathbf{r}')$$
$$-\frac{Z^+}{4\pi}\nabla\times[\nabla\times\int_S G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}))ds(\mathbf{r}'). \quad (3.21)$$

Στα ολοκληρώματα (3.20)-(3.21) τα ολικά πεδία μπορούν να αντικατασταθούν από τα αντίστοιχα σκεδασμένα $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ όταν $\mathbf{r}\in V^+$.
Εαν λάβουμε υπόψη τις συνοριακές συνθήκες τότε παρατηρούμε τις ακόλουθες ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των λύσεων των βασικών προβλημάτων σκέδασης στον ηλεκτρομαγνητισμό.

3.2 Ειδικές Περιπτώσεις

Το πρόβλημα του τέλειου αγωγού

Από τις σχέσεις (3.11), (3.12) και λαμβάνοντας υπόψη τις (2.1), (2.2), (2.3) παρατηρούμε για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [ikZ^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))$$

$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{E}^+(\mathbf{r}')) - (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times\cancel{(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))}^{\mathbf{0}}]ds(\mathbf{r}')$$

$$= \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [ikZ^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}')) + (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))ds(\mathbf{r}')$$

$$= \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\int_S [i^2k^2Z^+\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') + ik\frac{1}{\varepsilon}\rho_S(\mathbf{r}')(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')$$

$$= \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\int_S [-k^2Z^+\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') + i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\omega\rho_S(\mathbf{r}')(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')$$

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\int_S [-k^2Z^+\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') + iZ^+\omega\rho_S(\mathbf{r}')(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),$$

όπου τελικά

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{Z^+}{4\pi}\int_S [-k^2\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') + i\omega\rho_S(\mathbf{r}')(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'). \tag{3.22}$$

Αντίστοιχα για τον μαγνητικό πεδίο έχουμε

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [-ikY^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cancel{(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))}^{\mathbf{0}}$$

$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\cancel{(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))}^{\mathbf{0}} - (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')$$

$$= \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) - \frac{ik}{4\pi}\int_S (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))ds(\mathbf{r}')$$

$$= \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) - \frac{ik}{4\pi}\int_S (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')ds(\mathbf{r}').$$

Επομένως,

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) - \frac{ik}{4\pi}\int_S (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')ds(\mathbf{r}'). \tag{3.23}$$

Το πρόβλημα του διηλεκτρικού

Επιφάνεια εμπέδησης

Σε αυτήν την περίπτωση κάνουμε χρήση των συνοριακών συνθηκών (2.4), (2.5) οπότε για το ηλεκτρικό πεδίο έχουμε διαδοχικά

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [ikG^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')Z^+(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{E}^+(\mathbf{r}')) - (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')$$
$$= \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [-\frac{ik}{Z_S}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{\mathbf{n}}'\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{E}^+(\mathbf{r}')) - (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),$$

τελικά προκύπτει

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [-\frac{ik}{Z_S}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{\mathbf{n}}'\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))$$
$$-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'). \quad (3.24)$$

Για το μαγνητικό πεδίο έχουμε διαδοχικά

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [-ikY^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{H}^+(\mathbf{r}')) - (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')$$
$$= \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [-ik\frac{1}{Z^+}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')Z_SZ^+\hat{\mathbf{n}}'\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{H}^+(\mathbf{r}')) - (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),$$

όπου τελικά

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [-ikG^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')Z_S\hat{\mathbf{n}}'\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))$$
$$-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'). \quad (3.25)$$

Συνθήκες Διαπερατότητας

Για το πρόβλημα διαπερατότητας χρειαζόμαστε τις εξισώσεις (3.7), (3.8) για τα ολικά εσωτερικά πεδία και τις (3.11), (3.12) για τα εξωτερικά πεδία. Οι συνθήκες διαπερατότητας (2.6), (2.8), (2.9), (2.11) μειώνουν τις άγνωστες ποσότητες στην επιφάνεια του σκεδαστή S οπότε οι σχέσεις (3.11), (3.12) γράφονται ως εξής

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [ikG^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')Z^+(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))$$

$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{E}^+(\mathbf{r}')) - (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')$$

$$= \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [ikG^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')Z^+(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^-(\mathbf{r}'))$$

$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\eta\frac{Y^-}{Y^+}(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{E}^-(\mathbf{r}')) - (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}').$$

Τελικά έχουμε

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [ikG^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')Z^+(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^-(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\eta Y^-Z^+(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))$$
$$-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'). \tag{3.26}$$

Για το μαγνητικό πεδίο

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [-ikY^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))$$

$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{H}^+(\mathbf{r}')) - (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')$$

$$= \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [-ikY^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))$$

$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\eta\frac{Z^-}{Z^+}(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{H}^-(\mathbf{r}')) - (\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^-(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),$$

επομένως

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [-ikY^+G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}^-(\mathbf{r}'))$$
$$+(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\eta Z^-Y^+(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{H}^-(\mathbf{r}'))$$
$$-(\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}^-(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'). \tag{3.27}$$

3.3 Μακρινό Πεδίο

Για το μακρινό πεδίο πρώτα εισάγουμε την ασυμπτωτική μορφή της θεμελιώδους λύσης καθώς και τις κλίσεις της

$$G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') = e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2}),\ r\to\infty \tag{3.28}$$

$$\nabla_{\mathbf{r}'}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -ik\hat{\mathbf{r}}e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2}),\ r\to\infty \tag{3.29}$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') = ik\hat{\mathbf{r}}e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2}),\ r\to\infty \tag{3.30}$$

και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην (3.11)

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [ikZ^+(e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2}))(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+(-ik\hat{\mathbf{r}}e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2}))(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+(ik\hat{\mathbf{r}}e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2})) \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}'),$$

η οποία λόγω των (3.4) και (3.30) γίνεται

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}})h(kr) + O(\frac{1}{r^2}),\ r \to \infty,\ \hat{\mathbf{r}} \in S^2, \tag{3.31}$$

όπου

$$\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{k^2}{4\pi}\int_S [-Z^+(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r}')) + (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))\hat{\mathbf{r}}$$
$$-\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))]e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}ds(\mathbf{r}') \tag{3.32}$$

είναι το ηλεκτρικό πλάτος σκέδασης.
Αντικαθιστώντας τώρα στην (3.12) έχουμε

$$\alpha(\mathbf{r})\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int_S [ikY^+(e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2}))(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+(-ik\hat{\mathbf{r}}e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2}))(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+(ik\hat{\mathbf{r}}e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2})) \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))]ds(\mathbf{r}')$$

από όπου λαμβάνουμε

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}})h(kr) + O(\frac{1}{r^2}),\ r \to \infty,\ \hat{\mathbf{r}} \in S^2, \tag{3.33}$$

με μαγνητικό πλάτος σκέδασης

$$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{k^2}{4\pi}\int_S [Y^+(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r}')) + (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))\hat{\mathbf{r}}$$
$$-\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))]e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}ds(\mathbf{r}'). \tag{3.34}$$

Η δομή των μακρινών πεδίων μας δείχνει ότι έχει ακτινική εξάρτηση ίδια σε όλους τους σκεδαστές. Επιπλέον, όλη η πληροφορία για το εμπόδιο (σκεδαστής) περιέχεται στο πλάτος σκέδασης/μακρινό πεδίο.
Εάν θεωρήσουμε τις ασυμπτωτικές μορφές των σχέσεων (3.20), (3.21), τότε

τα πλάτη σκέδασης παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{k^2}{4\pi}\hat{\mathbf{r}} \times \int_S ((\hat{\mathbf{n}'} \cdot \mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}ds(\mathbf{r}')$$
$$+\frac{k^2 Z^+}{4\pi}\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \int_S (\hat{\mathbf{n}'} \cdot \mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}ds(\mathbf{r}')] \tag{3.35}$$

και

$$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{k^2}{4\pi}\hat{\mathbf{r}} \times \int_S ((\hat{\mathbf{n}'} \cdot \mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}ds(\mathbf{r}')$$
$$-\frac{k^2 Y^+}{4\pi}\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \int_S (\hat{\mathbf{n}'} \cdot \mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}ds(\mathbf{r}')]. \tag{3.36}$$

Από τις τελευταίες μορφές είναι προφανές ότι

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}) = 0. \tag{3.37}$$

Η ερμηνεία της τελευταίας σχέσης είναι ότι τα πλάτη σκέδασης δεν έχουν ακτινικές συνιστώσες. Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}) = -Z^+\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}),\ \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}) = Y^+\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}), \tag{3.38}$$

από όπου φαίνεται ότι τα πλάτη σκέδασης είναι εφαπτομενικά.
Αν δεχθούμε ότι τα πλάτη σκέδασης δεν εξαρτώνται μόνο το $\hat{\mathbf{r}}$, αλλά από τα διανύσματα πόλωσης των προσπιπτόντων κυμάτων $\mathbf{p}$, $\mathbf{h}$ και την διεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος $\hat{\mathbf{d}}$, όπου $\mathbf{p} \times \mathbf{h} = \hat{\mathbf{d}}$, τότε η (3.38) μπορεί να γραφεί

$$\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{p}) = -Z^+\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{h}) \tag{3.39}$$
$$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{h}) = Y^+\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{p}). \tag{3.40}$$

Οι δυαδικές αναπαραστάσεις των (3.14), (3.15) μας δίνουν μία ακόμα αναπαράσταση για το πλάτος σκέδασης ή μακρινό πεδίο. Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες ασυμπτωτικές μορφές

$$\tilde{\mathbf{G}}^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2}) \tag{3.41}$$
$$\nabla_{\mathbf{r}'} \times \tilde{\mathbf{G}}^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -ik\hat{\mathbf{r}} \times (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}h(kr) + O(\frac{1}{r^2}) \tag{3.42}$$

καθώς $r \to \infty$, παρατηρούμε

$$\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{ik}{4\pi}(\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \cdot \int_S [\hat{\mathbf{n}}' \times (\nabla \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))$$
$$+ik\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r}'))]e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}ds(\mathbf{r}') \tag{3.43}$$

και

$$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{ik}{4\pi}(\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \cdot \int_S [\hat{\mathbf{n}}' \times (\nabla \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r}')) + ik\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^+(\mathbf{r}'))] e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}'). \tag{3.44}$$

Σημειώνουμε ότι όλες οι παραπάνω εκφράσεις για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πλάτος σκέδασης μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά εαν ληφθούν υπόψη και οι συνοριακές συνθήκες.

Κεφάλαιο 4

ΜΕΙΚΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται παρουσίαση ενός μεικτού προβλήματος σκέδασης για ηλεκτρομάγνητικά πεδία [4], [6], [9], [10], [12], [13], [14], [20], στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι ο σκεδαστής (δηλαδή, η επιφάνεια-σύνορο) αποτελείται απο δύο διαφορετικά υλικά. Γίνεται παρουσίαση των βασικών θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας. Έπειτα εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να μεταβούμε σε ένα πρόβλημα των δύο διαστάσεων (δηλάδη, ακουστικό) και γίνεται εκεί η απόδειξη του αντίστοιχου βασικού θεωρήματος.

4.1 Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

Για τις αποδείξεις των θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης ενός μεικτού προβλήματος συνοριακών τιμών [6], ορίζουμε τα παρακάτω

$$H(curl,\, D) = \{\mathbf{u} \in (L^2(D))^3 :\, \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2(D))^3\},$$

$$X(D,\, \partial D_I) = \{\mathbf{u} \in H(curl,\, D) : \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|_{\partial D_I} \in L^2_t(\partial D_I)\}.$$

Ο $X(D,\, \partial D_I)$ εφοδιάζεται με τη νόρμα:

$$\|\mathbf{u}\|^2_{X(D,\,\partial D_I)} = \|\mathbf{u}\|^2_{H(curl,\,D)} + \|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}\|^2_{L^2(\partial D_I)}$$

με

$$L^2_t(\partial D_I) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\partial D_I))^3 : \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{ στο } \partial D_I\}.$$

Ο $H(curl,\, D)$ εφοδιάζεται με τη νόρμα

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H(curl,\,D)} = \|\mathbf{u}\|^2_{(L^2(D))^3} + \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2_{(L^2(D))^3}.$$

Ορίζουμε ακόμα τα

$$H_{loc}(curl,\, D_e) = \{\mathbf{u} :\, \mathbf{u}|_{B_R} \in H(curl,\, B_R), \forall B_R \setminus D_e\}$$

$$X_{loc}(curl,\, \partial D_I) = \{\mathbf{u} \in H_{loc}(curl,\, D_e) : \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|_{\partial D_I} \in L_t^2(\partial D_I)\}.$$

Εισάγουμε τώρα το χώρο του ίχνους του $X(D,\, \partial D_I)$ για το συμπληρωματικό μέρος του ∂D_D ως

$$Y(\partial D_D) = \{\mathbf{f} \in (H^{-1/2}(\partial D_D))^3 : \mathbf{u} \in H_0(curl,\, B_R),$$
$$\text{με}\, \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|_{\partial D_I} \in L_t^2(\partial D_I) \text{και}\, \mathbf{f} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|_{\partial D_D}\},$$

όπου $D \subset B_R = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r}| < R\}$ και

$$H_0(curl,\, B_R) = \{\mathbf{u} \in H(curl,\, B_R) : \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|_{\partial B_R} = \mathbf{0}\}.$$

Ο χώρος του ίχνους είναι εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|\mathbf{f}\|_{Y(\partial D_D)} = inf\{\|\mathbf{u}\|^2_{H(curl,\, B_R)} + \|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}\|^2_{L_t^2(\partial D_I)}\},$$

όπου το ελάχιστο λαμβάνεται ως όλες οι συναρτήσεις $\mathbf{u} \in H_0(curl,\, B_R)$ ώστε να ισχύει $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|_{\partial D_I} \in L_t^2(\partial D_I)$ και $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|_{\partial D_D}$.
Τώρα είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε τα θεωρήματα της επόμενης παραγράφου.
Ορίζουμε ως $\Phi_\infty(\hat{\mathbf{r}},\, \mathbf{z}) = \dfrac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{z}}$, το μακρινό πεδίο της θεμελιώδους λύσης.

Λήμμα 4.1.1 *Το $\Phi_\infty(\hat{\mathbf{r}},\, \mathbf{z})$ ανήκει στην εικόνα του γραμμικού τελεστή*

$$B :\, Y(\partial D_D) \times L_t^2(\partial D_I) \to L_t^2(S^2)$$

αν και μόνον $\mathbf{z} \in D$.

Λήμμα 4.1.2 *Ο τελεστής $H :\, L^2[0,\, \pi] \to H^{-1/2}(\partial D)$ με τύπο*

$$Hg := \left(\frac{\partial v_g}{\partial \hat{\mathbf{n}}} + i\lambda v_g\right)|_{\partial D}$$

είναι φραγμένος αμφί και περιέχει πυκνή εικόνα στον $H^{-1/2}(\partial D)$.

Λήμμα 4.1.3 *'Εστω $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικό, φραγμένο σύνολο με ∂D κλάσης C^2. Τότε υπάρχει σταθερά θετική c ώστε*

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial D)} \leq c\|u\|_{H^1(D)},$$

$\forall u \in H^1(D)$, ο τελεστής $u \to u|_{\partial D}$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένος από το $H^1(D)$ στο $H^{1/2}(\partial D)$.

Λήμμα 4.1.4 *Έστω $u \in H^1(D)$ και $\Delta u \in L^2(D)$ σε ένα φραγμένο σύνολο D με σύνορο ∂D κλάσης C^2 που έχει μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$. Τότε υπάρχει θετική σταθερά c ανεξάρτητη του u ώστε*

$$\|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\|_{H^{-1/2}(\partial D)} \leq c\|u\|_{H^1(D)}.$$

4.2 Ένα μεικτό πρόβλημα σκέδασης

Θεωρούμε πρώτα τη σκέδαση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος από ένα (πιθανόν) μερικώς περιτυλιγμένο σκεδαστή D στον $\mathbb{R}^3$. Υποθέτουμε ότι D είναι φραγμένη περιοχή με σύνορο $\partial D = S$ που είναι χωρισμένο σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα $\partial D_D = S_D$ και $\partial D_I = S_I$, όπου τα S_D και S_I δεν συνδέονται συνεχώς και είναι και τα δύο ανοιχτά υποσύνολα του S (ενδεχομένως να μην έχουν κοινό σύνορο). Τα S_D, S_I θα μπορούσαν να είναι κενά σύνολα. Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης που θα μελετήσουμε ορίζεται προσδιορίζοντας τα $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ από την επίλυση του προβλήματος

$$\left.\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases}\right\} \text{για}\, x \in V^+ \tag{4.1}$$

$$\left\{\begin{matrix} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}\,\text{στο}\, S_D \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - i\lambda(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}\,\text{στο}\, S_I \end{matrix}\right\} \tag{4.2}$$

όπου $\lambda > 0$ είναι η επιφανειακή εμπέδηση που για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι είναι σταθερή (ενδεχομένως διαφορετική) σε κάθε σημείο του S_I. Στην περίπτωση του τέλειου αγωγού έχουμε ότι $S_I = \emptyset$ και στην περίπτωση του όχι-τέλειου αγωγού έχουμε ότι $S_D = \emptyset$. Ορίζουμε τα προσπίπτοντα πεδία

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \frac{i}{k}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{p})e^{ik\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{d}}} = ik(\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{d}}e^{ik\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{d}}}, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{p}e^{ik\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{d}}} = ik\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{p}e^{ik\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{d}}}, \tag{4.4}$$

όπου $k > 0$ όπως έχει ήδη αναφερθεί στο $1o$ κεφάλαιο είναι ο κυματικός αριθμός, $\hat{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^3$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση της πόλωσης και $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ είναι το διάνυσμα πόλωσης. Τα σκεδασμένα πεδία $\mathbf{E}^s$, $\mathbf{H}^s$

ορίζονται από τις

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \tag{4.5}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s \tag{4.6}$$

και ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας Silver-M$\ddot{u}$ller

$$\lim_{r\to\infty} (\mathbf{H}^s \times \mathbf{r} - r\mathbf{E}^s) = o(\frac{1}{r}) \tag{4.7}$$

ομοιόμορφα για το $\mathbf{r}$.
Το πρόβλημα σκέδασης (4.1)-(4.7) αποτελεί μία ειδική περίπτωση του μεικτού προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2\mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ στο } V^+ \tag{4.8}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{f}, \text{ στο } S_D \tag{4.9}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - i\lambda(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = \mathbf{h}, \text{ στο } S_I \tag{4.10}$$

$$\lim_{r\to\infty} (\mathbf{H}^s \times \mathbf{r} - r\mathbf{E}^s) = o(\frac{1}{r}) \tag{4.11}$$

για τις συναρτήσεις $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$ όπως περιγράφηκαν παραπάνω και $\mathbf{H} = \frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{E}$. Το πρώτο ερώτημα στο οποίο πρέπει να απαντήσουμε είναι υπό ποιές προυποθέσεις οι $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$ δίνουν μοναδική λύση για το πρόβλημα (4.8)-(4.11). Αυτό θα επιχειρήσουμε στην συνέχεια.

Θεώρημα 4.2.1 *Έστω* $\mathbf{f} \in \partial D_D$ *και* $\mathbf{h} \in L_t^2(\partial D_I)$*, τότε έχουμε μοναδική λύση* $\mathbf{E} \in X_{loc}(D_e, \partial D_I)$ *στο πρόβλημα* (4.8)-(4.11) *για την οποία ισχύει*

$$\|\mathbf{E}\|_{X(D_e \cap V_R, \partial D_I)} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{V(\partial D_D)} + \|\mathbf{h}\|_{L^2(\partial D_I)}),$$

για κάποια θετική σταθερά C*, που εξαρτάται από το* R*, αλλά όχι από τα* $\mathbf{h}$, $\mathbf{f}$.

Τώρα θα μελετήσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή, αυτό του καθορισμού των D, λ μέσω της γνώσης των δεδομένων του μακρινού πεδίου από το ηλεκτρικό πεδίο. Τα $\mathbf{E}^s$, $\mathbf{H}^s$ που επιλύουν το πρόβλημα (4.1)-(4.7) παίρνουν τις ασυμπτωτικές μορφές

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}\{\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{p}) + O(\frac{1}{r})\} \tag{4.12}$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}\{\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{p}) + O(\frac{1}{r})\} \tag{4.13}$$

καθώς $r \to \infty$, όπου $\mathbf{g}_e(\cdot;\,\hat{\mathbf{d}},\,\mathbf{p})$, $\mathbf{g}_m(\cdot;\,\hat{\mathbf{d}},\,\mathbf{p})$ είναι τα εφαπτομενικά διανυσματικά πεδία που ορίζονται στην μοναδιαία σφαίρα S^2 και είναι γνωστά ως ηλεκτρικό και μαγνητικό μακρινό πεδίο αντίστοιχα. Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τα $\lambda,\,D$ από το $\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}};\,\hat{\mathbf{d}},\,\mathbf{p})$ χωρίς καμιά άλλη πληροφορία. Η λύση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης είναι μοναδική (ακολουθούμε τα βήματα προσέγγισης του θεωρήματος 7.1 [6].

Ξεκινάμε ορίζοντας τον τελεστή μακρινού πεδίου $F:\,L_t^2(S^2) \to L_t^2(S^2)$ ως

$$(F\mathrm{g})(\hat{\mathbf{r}}) = \int_{S^2} \mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}};\,\hat{\mathbf{d}},\,\mathrm{g}(\hat{\mathbf{d}}))ds(\hat{\mathbf{d}}) \tag{4.14}$$

και την εξίσωση μακρινού πεδίου ως

$$F\mathrm{g} = \mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}};\,\hat{\mathbf{d}},\,\mathrm{g}(\hat{\mathbf{d}})) \tag{4.15}$$

όπου $\mathbf{g}_e$ είναι η μορφή του ηλεκτρικού μακρινού πεδίου του ηλεκτρικού διπόλου

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{E}_e(\mathbf{r};\,\mathbf{d},\,\mathbf{q}) = \dfrac{i}{k}\nabla_{\mathbf{r}} \times (\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{q}\Phi(\mathbf{r},\,\mathbf{z})) \\ \mathbf{H}_e(\mathbf{r};\,\mathbf{d},\,\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{q}\Phi(\mathbf{r},\,\mathbf{z}) \end{array}\right\} \tag{4.16}$$

όπου $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα και Φ είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz και δίνεται ως

$$\Phi(\mathbf{r},\,\mathbf{z}) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{z}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{z}|}. \tag{4.17}$$

'Εχουμε, λοιπόν,

$$\mathbf{g}_e(\mathbf{r};\,\mathbf{z},\,\mathbf{q}) = \frac{ik}{4\pi}(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{q}) \times \hat{\mathbf{r}}e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{z}}. \tag{4.18}$$

Σημειώνουμε ότι ο τελεστής μακρινού πεδίου της (4.15) είναι γραμμικός εφόσον το $\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}};\,\hat{\mathbf{d}},\,\mathbf{p})$ εξαρτάται γραμμικά από την πόλωση $\mathbf{p}$.

Επιστρέφουμε, τώρα, στο εξωτερικό μεικτό πρόβλημα (4.8)-(4.11) και υπενθύμιζουμε τον γραμμικό τελεστή B που ορίστηκε στο λήμμα $4.1.2$ ο οποίος απεικονίζει τα συνοριακά δεδομένα $(\mathbf{f},\,\mathbf{h})$ στην μορφή $\mathbf{g}_e$ του μακρινού ηλεκτρικού πεδίου. Ο B είναι ένα προς ένα, συμπαγής και έχει πυκνή εικόνα στον $L_t^2(S^2)$. Με την βοήθεια του B μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση του μακρινού πεδίου ως

$$-B\Lambda \mathbf{E_g}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{ik}\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{z}, \mathbf{q}) \tag{4.19}$$

όπου Λ είναι ο διανυσματικός τελεστής του ίχνους που αντιστοιχεί στο μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών, με $\Lambda \mathbf{u} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}|_{\partial D_D}$, στο ∂D_D και $\mathbf{E_g}$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο που αντιστοιχεί στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο της εξίσωσης Herglotz με πυρήνα $\mathbf{g} \in L_t^2(S^2)$, και ορίζεται ως

$$\mathbf{E_g}(\mathbf{r}) = \int_{S^2} e^{ik\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{d}}}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{d}})ds(\hat{\mathbf{d}}) \tag{4.20}$$

$$\mathbf{H_g}(\mathbf{r}) = \int_{S^2} \nabla \times \mathbf{E_g}(\mathbf{r}). \tag{4.21}$$

Σημειώνουμε ότι το $\mathbf{g}_e(\mathbf{r}; \mathbf{z}, \mathbf{q})$ είναι στην εικόνα του B αν και μόνον αν $\mathbf{z} \in D$.

Τέλος, θεωρούμε το εσωτερικό μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2\mathbf{E} = \mathbf{0}, \text{ στο } D \tag{4.22}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{f}, \text{ στο } \partial D_D \tag{4.23}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - i\lambda(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{h}, \text{ στο } \partial D_I \tag{4.24}$$

όπου $\mathbf{f} \in Y(\partial D_D)$, $\mathbf{h} \in L^2(\partial D_I)$. Λόγω του θεωρήματος (4.2.1) έχουμε ότι αν $\partial D_I \neq \emptyset$, τότε υπάρχει μοναδική λύση στο (4.22)-(4.24) στο $X(D, \partial D_I)$ και αυτό το επιβεβαιώνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.2 *Έστω $\partial D_I \neq \emptyset$. Τότε η λύση* **E** *του εσωτερικού μεικτού προβλήματος* (4.22)-(4.24) *μπορεί να αντικατασταθεί στο $X(D, \partial D_I)$ από το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού ζεύγους Herglotz.*

Η σχέση (4.16) μαζί με το θεώρημα αποδεικνύουν το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.3 *Έστω $\partial D_I \neq \emptyset$. Αν F είναι ο τελεστής μακρινού πεδίου που αντιστοιχεί στο* (4.1)-(4.7)*, τότε*

1. *Αν* $\mathbf{z} \in D$*, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνάρτηση* $\mathbf{g}_\mathbf{z}^\epsilon = \mathbf{g}_\mathbf{z} \in L_t^2(S^2)$ *που ικανοποιεί*

$$\|F\mathbf{g}_\mathbf{z} - \mathbf{g}_e(\cdot, \mathbf{z}, \mathbf{q})\|_{L_t^2(S^2)} < \epsilon,$$

καθώς

$$\lim_{\mathbf{z}\to\partial D} \|\mathbf{g_z}\|_{L_t^2(S^2)} = \infty$$

και

$$\lim_{\mathbf{z}\to\partial D} \|\mathbf{E}_{\mathbf{g_z}}\|_{X(D,\,\partial D_I)} = \infty,$$

όπου $\mathbf{E}_{\mathbf{g_z}}$ *είναι το ηλεκτρικό πεδίο του ηλεκτρομαγνητικού ζεύγους Herglotz με πυρήνα* $\mathbf{g_z}$ *και*

2. *Αν* $\mathbf{z} \in D_e$ *τότε* $\forall\epsilon > 0$, $\forall\delta > 0$ *υπάρχει* $\mathbf{g_z}^{\epsilon,\delta} = \mathbf{g_z} \in L_t^2(S^2)$ *που ικανοποιεί την*

$$\|F\mathbf{g_z} - \mathbf{g}_e(\cdot, \mathbf{z}, \mathbf{q})\|_{L_t^2(S^2)} < \epsilon + \delta,$$

καθώς

$$\lim_{\delta\to 0} \|\mathbf{g_z}\|_{L_t^2(S^2)} = \infty$$

και

$$\lim_{\delta\to 0} \|\mathbf{E}_{\mathbf{g_z}}\|_{X(D,\,\partial D_I)} = \infty,$$

όπου $\mathbf{E}_{\mathbf{g_z}}$ *είναι το ηλεκτρικό πεδίο του ηλεκτρομαγνητικού ζεύγους Herglotz με πυρήνα* $\mathbf{g_z}$.

4.3 Ένα μεικτό πρόβλημα σκέδασης

Θεωρούμε τη σκέδαση που οφείλεται σε έναν άπειρο κυλίνδρο [6], [17], [20] με διατομή και άξονα πάνω στον άξονα της x_3 συντεταγμένης, όπου $\mathbf{r} = (r_1,\, r_2,\, r_3) \in \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε $\mathbf{E} = (0,\, 0,\, E_3)$, $\mathbf{p} = (0,\, 0,\, 1)$, $\mathbf{d} = (d_1,\, d_2,\, 0)$ και έχουμε

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = e^{ik\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_3,$$

όπου $\mathbf{e}_3$ είναι το μοναδιαίο, θετικό διάνυσμα στον x_3. Τότε $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ είναι ανεξάρτητα από το x_3 και από τις εξισώσεις Maxwell με $\mathbf{H} = (H_1,\, H_2,\, 0)$, ορίζονται από τις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_3}{\partial r_2} &= ikH_1 \\ \frac{\partial E_3}{\partial r_1} &= -ikH_2 \\ \frac{\partial H_2}{\partial r_1} - \frac{\partial H_1}{\partial r_2} &= -ikE_3 \end{aligned}$$

Συγκεκριμένα,

$$\Delta E_3 + k^2 E_3 = 0, \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}. \tag{4.25}$$

Προκειμένου το E_3^s να είναι εξερχόμενο απαιτούμε να ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}(\frac{\partial}{\partial r}E_3^s - ikE_3^s) = 0. \tag{4.26}$$

Επίσης, θεωρούμε τη συνοριακή συνθήκη η οποία προκύπτει ως εξής

$$E_3(\mathbf{r}) = e^{ik\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}} + E_3^s(\mathbf{r}), \tag{4.27}$$

με $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$. Για $\mathbf{E} = (0,\, 0, E_3)$, $\hat{\mathbf{n}} = (n_1,\, n_2,\, 0)$, έχουμε $\mathbf{E} = (0,\, 0,\, -\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}}E_3)$ και $(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}$ και λόγω της $\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - i\lambda(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}}E_3 + i\lambda E_3 = 0. \tag{4.28}$$

Οι εξισώσεις (4.25)-(4.28) αποτελούν τη φόρμουλα των αρμονικά χρονικά επίπεδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων για ένα μη-τέλειο άπειρο κύλινδρο. Αντίστοιχο του θεωρήματος (4.2) ισχύει και στα ακουστικά κύματα. Θα αποδείξουμε ένα αντίστοιχο θεώρημα στις δύο διαστάσεις. Θεωρούμε το πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων στις δύο διαστάσεις

$$\Delta u + k^2 u = 0, \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{4.29}$$

$$u(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{d}}} + u^s(\mathbf{x}) \tag{4.30}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}(\frac{\partial}{\partial r}u^s - iku^s) = 0 \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}}u + i\lambda u = 0, \text{ στην } S. \tag{4.32}$$

Θεώρημα 4.3.1 *Έστω u_∞ το μακρινό πεδίο που αντιστοιχεί στο πρόβλημα σκέδασης* (4.29)-(4.32) *με τελεστή μακρινού πεδίου F.*

1. *Αν $\mathbf{z} \in D$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνάρτηση $g_{\mathbf{z}}^{\epsilon} = g_{\mathbf{z}} \in L^2[0,\, 2\pi]$ που ικανοποιεί*

$$\|Fg_{\mathbf{z}} - \Phi_\infty(\cdot, \mathbf{z})\|_{L^2[0,\, 2\pi]} < \epsilon,$$

ώστε

$$\lim_{\mathbf{z}\to S}\|g_{\mathbf{z}}\|_{L^2[0,\,2\pi]}=\infty$$

και

$$\lim_{\mathbf{z}\to S}\|v_{g_{\mathbf{z}}}\|_{H^1(D)}=\infty,$$

όπου $v_{g_{\mathbf{z}}}$ είναι η κυματική συνάρτηση Herglotz με πυρήνα $g_{\mathbf{z}}$ και

2. *Αν $\mathbf{z}\notin D$ τότε $\forall\epsilon>0$, και $\delta>0$ υπάρχει $g_{\mathbf{z}}^{\epsilon,\delta}=g_{\mathbf{z}}\in L^2[0,\,2\pi]$ που ικανοποιεί την*

$$\|Fg_{\mathbf{z}}-\Phi_\infty(\cdot,\mathbf{z})\|_{L^2[0,\,2\pi]}<\epsilon+\delta,$$

ώστε

$$\lim_{\delta\to 0}\|g_{\mathbf{z}}\|_{L^2[0,\,2\pi]}=\infty$$

και

$$\lim_{\delta\to 0}\|v_{g_{\mathbf{z}}}\|_{H^1(D)}=\infty,$$

όπου $v_{g_{\mathbf{z}}}$ είναι κυματική συνάρτηση Herglotz με πυρήνα $g_{\mathbf{z}}$.

Απόδειξη

Έστω $z\in D$. Τότε από το λήμμα (4.1.1) υπάρχει $f_{\mathbf{z}}\in H^{1/2}(\partial D)$ ώστε $Bf_{\mathbf{z}}=-\Phi_\infty(\cdot,\mathbf{z})$. από το λήμμα (4.1.2) βλέπουμε ότι $\forall\epsilon>0$, υπάρχει μία κυματική συνάρτηση Herglotz με πυρήνα $g_{\mathbf{z}}\in L^2[0,\,2\pi]$, ώστε

$$\|Hg_{\mathbf{z}}-f_{\mathbf{z}}\|_{H^{-1/2}(\partial D)}<\epsilon. \tag{4.33}$$

Από τη συνέχεια του τελεστή B υπάρχει θετική σταθερά C, ανεξάρτητη του ϵ ώστε

$$\|Hg_{\mathbf{z}}-f_{\mathbf{z}}\|_{L^2[0,\,2\pi]}<C\epsilon$$

και εφόσον $F=-BH$ έχουμε

$$\|Fg_{\mathbf{z}}-\Phi_\infty\|_{L^2[0,\,2\pi]}<C\epsilon,$$

διότι, $f_{\mathbf{z}}=-(\dfrac{\partial}{\partial\hat{\mathbf{n}}}+i\lambda)\Phi(\cdot,\mathbf{z})|_S\to\infty$, καθώς $\mathbf{z}\to\dfrac{\partial}{\partial D}\|f_{\mathbf{z}}\|_{H^{-1/2}(\partial D)}$ (citation). Από τα λήμματα (4.1.3) και (4.1.4) έχουμε ότι $\|v_{g_{\mathbf{z}}}\|_{H^1(D)}\to\infty$ και άρα, $\|g_{\mathbf{z}}\|_{L^2[0,\,2\pi]}\to\infty$. Επομένως, από την (4.33) $\|Hg_{\mathbf{z}}\|_{H^{-1/2}(\partial D)}\to\infty$.

Έστω ότι $\mathbf{z}\notin D$. Τότε $-\Phi_\infty(\cdot,\mathbf{z})$ δεν ανήκει στην εικόνα του B. Ωστόσο, η εικόνα του B είναι πυκνή στον $L^2[0,\, 2\pi]$ και άρα $\forall \delta > 0$ υπάρχει $f^a_{\mathbf{z}} = -\Sigma_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu_n}{a+\mu_n^2}(\Phi_\infty, g_n)\phi_n$ ώστε

$$\|Bf^a_{\mathbf{z}} + \Phi_\infty(\cdot, \mathbf{z})\|_{L^2[0,\, 2\pi]} < \delta. \tag{4.34}$$

Η $-\Phi_\infty(\cdot, \mathbf{z})$ δεν ανήκει στην εικόνα του B και άρα από το θεώρημα του Picard

$$\|f^a_{\mathbf{z}}\|_{H^{-1/2}(\partial D)} \to \infty, \text{ καθώς } a \to 0.$$

Για μία άλη συνάρτηση $g^a_{\mathbf{z}} \in L^2[0,\, 2\pi]$ υπάρχει $\epsilon' > 0$ αρκούντος μικρό ώστε

$$\|Bf^a_{\mathbf{z}} - Hg^a_{\mathbf{z}}\|_{L^2[0,\, 2\pi]} < \epsilon'. \tag{4.35}$$

Από (4.34) και (4.35) έχουμε ότι

$$\|Fg^a_{\mathbf{z}} - \Phi_\infty(\cdot, \mathbf{z})\|_{L^2[0,\, 2\pi]} = \|BHg^a_{\mathbf{z}} + \Phi_\infty(\cdot, \mathbf{z})\|_{L^2[0,\, 2\pi]} \leq$$

$$\|BHg^a_{\mathbf{z}} - Bf^a_{\mathbf{z}}\|_{L^2[0,\, 2\pi]} + \|Bf^a_{\mathbf{z}} + \Phi_\infty(\cdot, \mathbf{z})\|_{L^2[0,\, 2\pi]} < \epsilon' + \delta.$$

Επειδή $\|f^a_{\mathbf{z}}\|_{H^{-1/2}(\partial D)} \to \infty$ καθώς $a \to 0$ και η $f^a_{\mathbf{z}}$ προσεγίζεται από την $Hg^a_{\mathbf{z}}$ στο $H^{-1/2}(\partial D)$, λόγω των λημμάτων (4.1.3), (4.1.4) έχουμε:

$$\lim_{a\to 0} \|v^a_{g_{\mathbf{z}}}\|_{H^1(D)} = \infty$$

και άρα

$$\lim_{a\to 0} \|g^a_{\mathbf{z}}\|_{L^2[0,\, 2\pi]} = \infty.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{\delta\to 0} a(\delta) = 0$.
Το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Κεφάλαιο 5

ΘΕΩΡΙΑ ΧΑΜΗΛΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Το κεφάλαιο αυτό ξεκινάει με μία παρουσίαση όλων των ειδών διατομής σκέδασης και των θεμελιώδων θεωρημάτων που τις συνδέουν. Επίσης δίνονται αποτελέσματα για την περίπτωση των σφαιρικών κυμάτων [11], [2], [3], [17].

5.1 Διατομή Σκέδασης

Το κεφάλαιο αυτό ξεκινάει με μία παρουσίαση όλων των ειδών διατομής σκέδασης [11] και των θεμελιώδων θεωρημάτων που τις συνδέουν.Επίσης γίνεται εκτενής αναφορά για το πρόβλημα του τέλειου αγωγού, της διαπερατότητας και της εμπέδησης για πεδία χαμηλών συχνοτήτων. Στον ηλεκτρομαγνητισμό θεωρούμε την ροή ισχύος στην ζώνη ακτινοβολίας ή στο μακρινό πεδίο όπου το υλικό μέσο είναι χωρίς απώλειες. Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα η ποσότητα αυτή δίνεται ως

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = Re\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^{*}(\mathbf{r})\}. \tag{5.1}$$

Για το προσπίπτον πεδίο

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}},\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}Y^{+}e^{ik\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}},\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3}, \tag{5.2}$$

η ροή στην κατεύθυνση διάδοσης δίνεται

$$\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{S}^{i} = \hat{\mathbf{d}} \cdot (Y^{+}\hat{\mathbf{d}}) = Y^{+}. \tag{5.3}$$

Στο μακρινό πεδίο οι ασυμπτωτικές εκφράσεις (3.31) και (3.33) για τα σκεδασμένα πεδία μας επιτρέπουν να γράψουμε την ισχύ

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{r}} \cdot Re\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})\} \\ &= \hat{\mathbf{r}} \cdot Re\{(\mathbf{g}_e h) \times (\mathbf{g}_m^* h^*)\} + O(\frac{1}{r^3}) \\ &= \hat{\mathbf{r}} \cdot Re\{\frac{1}{(kr)^2}\mathbf{g}_e \times (Y^+ \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{g}_e^*)\} + O(\frac{1}{r^3}) \\ &= \frac{Y^+}{k^2 r^2}\hat{\mathbf{r}} \cdot \{|\mathbf{g}_e|^2 \mathbf{r} - (\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{r})\mathbf{g}_e^*\} + O(\frac{1}{r^3}) \\ &= \frac{Y^+}{k^2 r^2}|\mathbf{g}_e|^2 + O(\frac{1}{r^3}),\ r \to \infty, \end{aligned} \tag{5.4}$$

όπου έχουμε λάβει υπόψη ότι το $\mathbf{g}_e$ είναι εφαπτόμενο. Στη συνέχεια θα ορίσουμε το διαφορικό της διατομής σκέδασης (*differential scattering cross section*) ή τη διατομή ραντάρ (*radar cross section*) ως την ισχύ που σκεδάζεται στην διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ σχετική με την προσπίπτουσα ροή ισχύος στην διεύθυνση πρόσπτωσης

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{r \to \infty} \frac{4\pi r^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{S}^i(\mathbf{r})} = \frac{4\pi}{k^2}|\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}})|^2. \tag{5.5}$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{r \to \infty} \frac{4\pi r^2 \mathbf{r} \cdot |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2}{|\mathbf{E}^i(\mathbf{r})|^2} = \frac{4\pi}{k^2}|\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}})|^2. \tag{5.6}$$

Η διατομή σκέδασης (*scattering cross section*) ή ολική διατομή (*total cross section*) στον ηλεκτρομαγνητισμό ορίζεται ως η μέση τιμή του $\sigma(\hat{\mathbf{r}})$ προς όλες τις κατευθύνσεις

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} \sigma(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{k^2}\int_{S^2} |\mathbf{g}_e|^2 ds \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{0},\infty)} |\mathbf{E}|^2 ds = Z^+ Re \int_{\partial B(\mathbf{0},\infty)} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) ds. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Η τελευταία έκφραση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετασχηματίσουμε το ολοκλήρωμα που είναι πάνω στο σύνορο $\partial B(\mathbf{0}, \infty)$ σε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή S μέσω του θεωρήματος της απόκλισης του Gauss,

$$\int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) ds = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) dx = \int_V [\mathbf{H}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*)] dx.$$

Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\partial B \cup S} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) ds &= \int_{\partial B} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) ds - \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) ds \\ = \int_{V_R} [\mathbf{H}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*)] dx &= \int_{V_R} [\mathbf{H}^* \cdot (i\omega \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot (i\omega\varepsilon \mathbf{E}^*)] dx \\ = \int_{V_R} [i\omega\mu |\mathbf{H}|^2 - i\omega\varepsilon |\mathbf{E}|^2] dx &= i \int_{V_R} [\omega\mu |\mathbf{H}|^2 - \omega\varepsilon |\mathbf{E}|^2] dx. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το $Real$ στην παραπάνω ισότητα προκύπτει

$$\begin{aligned} Re\{\int_{\partial B} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) ds - \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) ds\} &= \cancelto{0}{Re\{i \int_{V_R} [\omega\mu |\mathbf{H}|^2 - \omega\varepsilon |\mathbf{E}|^2] dx\}} \\ Re\{\int_{\partial B} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) ds\} &= Re\{\int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) ds\}. \end{aligned}$$

Επομένως, η (5.7) μετατρέπεται

$$\sigma_s = Z^+ Re \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) ds. \tag{5.8}$$

Μία παρόμοια έκφραση που περιέχει τα ολικό και όχι το σκεδασμένο πεδίο χρησιμοποιείται για τον ορισμό της διατομής απορρόφησης (*absorption cross section*):

$$\begin{aligned} \sigma_a &= -Z^+ Re \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}^+ \times \mathbf{H}^{+^*}) ds \\ &= Z^+ Re \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}^+ \times \mathbf{E}^{+^*}) ds. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Σε έναν τέλειο αγωγό ισχύει ότι $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ και επομένως η (5.9) δίνει ότι $\sigma_a = 0$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι ένας τέλειος αγωγός δεν απορροφά ενέργεια. Για μία επιφάνεια εμπέδησης, όπου ισχύει

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+) = -\frac{1}{Z_S Z^+} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+) \tag{5.10}$$

έχουμε

$$
\begin{aligned}
\sigma_a &= Z^{+} Re \int_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{+}) \cdot \mathbf{E}^{+^*} ds \\
&= -Re \int_S \frac{1}{Z_S} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{+})] \cdot \mathbf{E}^{+^*} ds \\
&= Re \int_S \frac{1}{Z_S} (|\mathbf{E}^{+}|^2 - |\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}^{+}|^2) ds \\
&= \int_S \frac{Re Z_S}{|Z_S|^2} |\mathbf{E}_t^{+}|^2 ds
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

με $\mathbf{E}_t^{+} = (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{E}^{+}$. Για σταθερή πραγματική εμπέδηση η τελευταία σχέση μάς δίνει

$$
\begin{aligned}
\sigma_a &= \int_S \frac{Z_S}{|Z_S|^2} |\mathbf{E}_t^{+}|^2 ds \\
&= \int_S \frac{sign(Z_S)|Z_S|}{|Z_S|^2} |\mathbf{E}_t^{+}|^2 ds \\
&= \int_S \frac{sign(Z_S)}{|Z_S|} |\mathbf{E}_t^{+}|^2 ds,
\end{aligned}
$$

αφού Z_S βαθμωτή και σταθερή έχουμε

$$
\sigma_a = \frac{1}{Z_S} \int_S |\mathbf{E}_t^{+}|^2 ds, \tag{5.12}
$$

ενώ για γνήσια φανταστική εμπέδηση θα έχουμε $ReZ_S = 0$ και η (5.12) μας δίνει

$$
\sigma_a = 0. \tag{5.13}
$$

Στην περίπτωση των διαπερατών σκεδαστών χρησιμοποιούμε τις συνοριακές συνθήκες διαπερατότητας και τις εξισώσεις Maxwell

$$
\begin{aligned}
\sigma_a &= Z^+ Re \int_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+) \cdot \mathbf{E}^{+^*} ds \\
&= Z^+ Re \int_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^-) \cdot \mathbf{E}^{+^*} ds \\
&= -Z^+ Re \int_S \mathbf{H}^- \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{+^*}) ds \\
&= -Z^+ Re \int_S \mathbf{H}^- \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{-^*}) ds \\
&= Z^+ Re \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}^- \times \mathbf{E}^{-^*}) ds \\
&= Z^+ Re \int_S \frac{\hat{\mathbf{n}}}{ik\eta Z^-} \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}^-) \times \mathbf{E}^{-^*}] ds.
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

Όμως τα k, η, Z^- είναι πραγματικές σταθερές οπότε

$$
\sigma_a = \frac{Z^+}{k\eta Z^-} Im \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}^-) \times \mathbf{E}^{-^*}] ds. \tag{5.15}
$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το θεώρημα Green μετασχηματίζουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε ένα χωρικό ολοκλήρωμα στο V^- και μέσω των εξισώσεων Maxwell και των καταστατικών σχέσεων έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}^-) \times \mathbf{E}^{-^*}] ds &= \int_{V^-} \nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}^-) \times \mathbf{E}^{-^*}] dx \\
= \int_{V^-} \{\mathbf{E}^{-^*} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^-) &- (\nabla \times \mathbf{E}^-) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^{-^*})\} dx \\
&= \int_{V^-} \{\mathbf{E}^{-^*} \cdot k^{-^2} \mathbf{E}^- - |\nabla \times \mathbf{E}^-|^2\} dx \\
&= \int_{V^-} \{k^2 \eta^2 |\mathbf{E}^-|^2 - |\nabla \times \mathbf{E}^-|^2\} dx,
\end{aligned}
$$

διότι $\frac{k^-}{k} = \eta$. Παίρνουμε το Im

$$
\begin{aligned}
Im \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}^-) \times \mathbf{E}^{-^*}] ds &= Im \int_{V^-} \{k^2 \eta^2 |\mathbf{E}^-|^2 - |\nabla \times \mathbf{E}^-|^2\} dx \\
= Im \int_{V^-} \{k^2 \eta^2 |\mathbf{E}^-|^2\} dx &= \frac{Z^+ k^2}{k\eta Z^-} Im(\eta^2) \int_{V^-} |\mathbf{E}^-|^2 dx \\
&= \frac{Z^+ k}{\eta Z^-} Im(\eta^2) \int_{V^-} |\mathbf{E}^-|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Όμως, $\sigma^- = \dfrac{k}{\eta Z^-} Im(\eta^2)$ προέρχεται από το εσωτερικό του σκεδαστή και ο δείκτης διάθλασης $\eta = \dfrac{k^-}{k}$ είναι μιγαδικός αριθμός. Έτσι προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\sigma_a &= \frac{Z^+}{k\eta Z^-} Im \int_{V^-} \mathbf{E}^- \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}^{-^*}) dv \\
&= \frac{kZ^+}{\eta Z^-} (Im\eta^2) \int_{V^-} |\mathbf{E}^-|^2 dv \\
&= \sigma^- Z^+ \int_{V^-} |\mathbf{E}^-|^2 dv. \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Εάν έχουμε διαπερατό σκεδαστή χωρίς απώλειες έχουμε $\sigma_a = 0$. Η εξάλειψη της διατομής σκέδασης (*extinction cross section*) ορίζεται ως

$$\sigma_e = \sigma_s + \sigma_a. \qquad (5.17)$$

Η σ_e υπολογίζει σε μονάδες επιφάνειας την ολική ενέργεια που ο σκεδαστής μεταφέρει από το προσπίπτον κυματικό πεδίο είτε λόγω σκέδασης προς όλες τις κατευθύνσεις (σ_s) είτε λόγω απορρόφησης (σ_a).

5.2 Το πρόβλημα του τέλειου αγωγού

Αναπτύσσουμε τα κυματικά πεδία, ολικό, σκεδασμένο και προσπίπτον, σε δυναμοσειρές ως προς τον κυματικό αριθμό k.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \mathbf{E}_n(\mathbf{r})$$

Το πρόβλημα σκέδασης μετασχηματίζεται σε μία ακολουθία προβλημάτων θεωρίας δυναμικού τα οποία και επιλύονται. Υπολογίζουμε τους συντελεστές $\mathbf{E}_n$ και στη συνέχεια προσδιορίζουμε την ενεργειακή διατομή σκέδασης και το μακρινό πεδίο. Τέτοιου είδους προβλήματα έχουν επιλυθεί για τον τέλειο αγωγό, την επιφάνεια εμπέδησης και το πρόβλημα του διαπερατού σκεδαστή. Σε όλα τα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων χαμηλής συχνότητας έχουμε ότι:

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \mathbf{E}_n^+(\mathbf{r}),\ \mathbf{H}^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \mathbf{H}_n^+(\mathbf{r}),\ \mathbf{r} \in V^+. \qquad (5.18)$$

Οι πρώτοι όροι της (5.18) μας δίνουν

$$\mathbf{E}_0^+(\mathbf{r}) = \mathbf{p} - \frac{a^3}{r^3}\mathbf{p}\cdot(\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}),\ r > a \tag{5.19}$$

$$\mathbf{H}_0^+(\mathbf{r}) = Y^+\mathbf{h} + \frac{1}{2}Y^+\frac{a^3}{r^3}\mathbf{h}\cdot(\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}),\ r > a \tag{5.20}$$

$$\mathbf{E}_1^+(\mathbf{r}) = \mathbf{p}(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}(\mathbf{p}\times\mathbf{r}) + \frac{5a^5}{2r^7}\mathbf{p}\cdot\mathbf{rrr}\cdot\hat{\mathbf{d}} \tag{5.21}$$

$$-\frac{a^5}{2r^5}(\mathbf{p}\hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{d}}\mathbf{p})\cdot\mathbf{r},\ r > a$$

$$\mathbf{H}_1^+(\mathbf{r}) = Y^+\mathbf{h}(\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}) - Y^+\frac{a^3}{r^3}(\mathbf{p}\times\mathbf{r}) - \frac{5}{3}Y^+\frac{a^5}{r^7}\mathbf{p}\cdot\mathbf{rrr}\cdot\hat{\mathbf{d}} \tag{5.22}$$

$$+\frac{1}{3}Y^+\frac{a^5}{r^5}(\mathbf{p}\hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{d}}\mathbf{p})\cdot\mathbf{r},\ r > a.$$

Το ηλεκτρικό πλάτος σκέδασης είναι

$$\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ik)^{n+3}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-1)^m\{\hat{\mathbf{r}}\times\big[\hat{\mathbf{r}}\times\int_S[\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{E}_{n-m}^+(\mathbf{r}')$$

$$-Z^+\hat{\mathbf{r}}\cdot(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}_{n-m}^+(\mathbf{r}'))]\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')^m ds(\mathbf{r}')\big]\}, \tag{5.23}$$

και για το μαγνητικό πλάτος σκέδασης

$$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}) = Y^+\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}). \tag{5.24}$$

Επομένως τα μακρινά πεδία γίνονται

$$\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{d}}) = -ik^3a^3\big[\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}) - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{h}\big] + O(k^5) \tag{5.25}$$

$$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{d}}) = ik^3a^3Y^+\big[\frac{1}{2}\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{h}) + \hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}\big] + O(k^5). \tag{5.26}$$

Το διαφορικό της διατομής σκέδασης από την (5.6) γίνεται

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi k^4a^6[\frac{5}{4} - \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{d}} - (\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p})^2 - \frac{1}{4}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{h})^2] + O(k^6) \tag{5.27}$$

και η ολική διατομή σκέδασης είναι

$$\sigma_s = \frac{10\pi}{3}k^4a^6 + O(k^6) \tag{5.28}$$

ενώ σε αυτήν την περίπτωση

$$\sigma_a = 0 \tag{5.29}$$

και

$$\sigma_e = \sigma_s. \tag{5.30}$$

Σημειώνουμε ότι γνωρίζοντας τους όρους πρώτης τάξης των κοντινών πεδίων $\mathbf{E}_1^+$, $\mathbf{H}_1^+$ δεν βελτιώνεται η προσέγγιση του μακρινού πεδίου δεδομένου ότι οι όροι του k^4 στο ηλεκτρικό και μαγνητικό μακρινό πεδίο για την γεωμετρία της σφαίρας μηδενίζονται.

5.3 Το πρόβλημα της εμπέδησης

Δεν είναι γενικότερα γνωστά αποτελέσματα για τις συνοριακές συνθήκες εμπέδησης, ωστόσο, μπορούμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για την ειδική περίπτωση του σφαιρικού σκεδαστή. Μέσω της προσέγγισης Rayleigh, έχουμε

$$\mathbf{E}_0^+(\mathbf{r}) = \mathbf{p} - \frac{a^3}{r^3}\mathbf{p} \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}),\; r > a \tag{5.31}$$

$$\mathbf{H}_0^+(\mathbf{r}) = Y^+\mathbf{h} - Y^+\frac{a^3}{r^3}\mathbf{h} \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}),\; r > a. \tag{5.32}$$

Τα πλάτη σκέδασης είναι

$$\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{d}}) = -ik^3a^3\big[\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) + \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}\big] + O(k^4) \tag{5.33}$$

$$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{d}}) = ik^3a^3Y^+\big[\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} - \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})\big] + O(k^4). \tag{5.34}$$

Το διαφορικό της διατομής σκέδασης είναι

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi k^4a^6[2 + 2\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{d}} - (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{p})^2 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{h})^2] + O(k^6) \tag{5.35}$$

και η ολική διατομή σκέδασης δίνεται ως

$$\sigma_s = \frac{16\pi}{3}k^4a^6 + O(k^6). \tag{5.36}$$

Στην μέθοδο χαμηλών συχνοτήτων δεν υπάρχουν αρκετοί όροι που μπορεί κανείς να υπολογίσει για τον πρώτο όρο στην διατομή απορρόφηση αλλά επιβεβαιώνεται μέσω ενός άλλου θεωρήματος σκέδασης, του οπτικού, ότι

$$\sigma_a = O(k^2).$$

5.4 Το πρόβλημα διαπερατότητας

Το πρόβλημα διαπερατότητας χωρίς απώλειες

Για το πρόβλημα διαπερατότητας εκτός από το εξωτερικό πεδίο χρειαζόμαστε και το εσωτερικό ολικό πεδίο

$$\mathbf{E}^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \mathbf{E}_n^-(\mathbf{r}), \ \mathbf{H}^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \mathbf{H}_n^-(\mathbf{r}), \, \mathbf{r} \in V^-. \tag{5.37}$$

Οι πρώτοι όροι στις εκφράσεις χαμηλής συχνότητας των ολικών πεδίων V^+, V^- είναι

$$\mathbf{E}_0^+(\mathbf{r}) = \mathbf{p} - \frac{\mu^+\eta^2 - \mu^-}{\mu^+\eta^2 + 2\mu^-} \frac{a^3}{r^3} \mathbf{p} \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}), \, r > a \tag{5.38}$$

$$\mathbf{H}_0^+(\mathbf{r}) = Y^+\mathbf{h} + \frac{\mu^+ - \mu^-}{2\mu^+ + \mu^-} Y^+ \frac{a^3}{r^3} \mathbf{h} \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}), \, r > a \tag{5.39}$$

$$\mathbf{E}_0^-(\mathbf{r}) = \frac{3\mu^-}{\mu^+\eta^2 + 2\mu^-} \mathbf{p}, \, r < a \tag{5.40}$$

$$\mathbf{H}_0^-(\mathbf{r}) = Y^+ \frac{3\mu^+}{2\mu^+ + \mu^-} \mathbf{h}, \, r < a. \tag{5.41}$$

Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχουν απώλειες ισχύει

$$\eta^2 = \frac{\varepsilon^-\mu^-}{\varepsilon^+\mu^+}. \tag{5.42}$$

Τα μακρινά πεδία δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{d}}) = -ik^3a^3\big[\frac{\mu^+\eta^2-\mu^-}{\mu^+\eta^2+2\mu^-}\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}) \\ -\frac{\mu^+-\mu^-}{2\mu^++\mu^-}\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{h}\big] + O(k^4) \tag{5.43}$$

$$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{d}}) = ik^3a^3Y^+\big[\frac{\mu^+-\mu^-}{2\mu^++\mu^-}\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{h}) \\ +\frac{\mu^+\eta^2-\mu^-}{\mu^+\eta^2+2\mu^-}\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}\big] + O(k^4). \tag{5.44}$$

Το διαφορικό της διατομής σκέδασης είναι

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi k^4a^6\big[\big(\frac{\mu^+\eta^2-\mu^-}{\mu^+\eta^2+2\mu^-}\big)^2(1-(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p})^2) \\ +\big(\frac{\mu^+-\mu^-}{2\mu^++\mu^-}\big)^2(1-(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{h})^2) - \frac{2(\mu^+\eta^2-\mu^-)(\mu^+-\mu^-)}{(\mu^+\eta^2+2\mu^-)(2\mu^++\mu^-)}\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{d}} \\ +O(k^6) \tag{5.45}$$

και η ολική διατομή σκέδασης

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3}k^4a^6\big[\big(\frac{\mu^+\eta^2-\mu^-}{\mu^+\eta^2+2\mu^-}\big)^2+\big(\frac{\mu^+-\mu^-}{2\mu^++\mu^-}\big)^2\big] + O(k^6). \tag{5.46}$$

Στην περίπτωση που δεν έχουμε απώλειες $\sigma_a = 0$ και

$$\sigma_e = \sigma_s.$$

Το πρόβλημα διάδοσης με απώλειες
Οι προσεγγίσεις Rayleigh δίνουν για τους πρώτους όρους

$$\mathbf{E}_0^+(\mathbf{r}) = \mathbf{p} - \frac{a^3}{r^3}\mathbf{p}\cdot(\tilde{\mathbf{I}}-3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}),\ r>a \tag{5.47}$$

$$\mathbf{H}_0^+(\mathbf{r}) = Y^+\mathbf{h} + \frac{\mu^+-\mu^-}{2\mu^++\mu^-}Y^+\frac{a^3}{r^3}\mathbf{h}\cdot(\tilde{\mathbf{I}}-3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}),\ r>a \tag{5.48}$$

$$\mathbf{E}_0^-(\mathbf{r}) = \mathbf{0},\ r<a \tag{5.49}$$

$$\mathbf{H}_0^-(\mathbf{r}) = Y^+\frac{3\mu^+}{2\mu^++\mu^-}\mathbf{h},\ r<a. \tag{5.50}$$

Τα μακρινά πεδία είναι

$$\mathbf{g}_e(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{d}}) = -ik^3a^3\big[\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) - \frac{\mu^+ - \mu^-}{2\mu^+ + \mu^-}\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}\big] + O(k^4) \tag{5.51}$$

$$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{d}}) = ik^3a^3Y^+\big[\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) + \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + 2\mu^-}\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}\big] + O(k^4). \tag{5.52}$$

Το διαφορικό της διατομής σκέδασης είναι

$$\begin{aligned}\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi k^4a^6\big[1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})^2 + \big(\frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + 2\mu^-}\big)^2(1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2)\\ - 2\frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + 2\mu^-}\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{d}}\big] + O(k^6)\end{aligned} \tag{5.53}$$

και η ολική διατομή σκέδασης

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3}k^4a^6\big[1 + \big(\frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + 2\mu^-}\big)^2\big] + O(k^6). \tag{5.54}$$

Οι όροι που υπολοίπονται στην (5.54) είναι τάξης 6 και όχι 5 οι συντελεστές του μακρινού πεδίου είναι πραγματικοί. Οι πρώτοι όροι στις εκφράσεις χαμηλών συχνοτήτων δεν επαρκούν για να υπολογιστεί η διατομή απορρόφησης αλλά πάλι μέσω του οπτικού θεωρήματος σκέδασης έχουμε

$$\sigma_a = O(k^2).$$

Κεφάλαιο 6

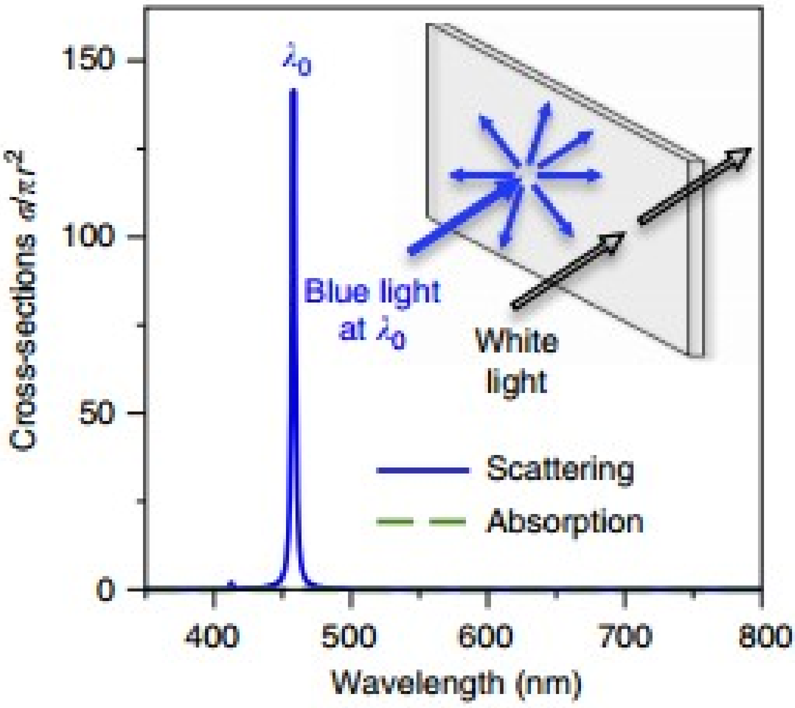
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΣΕ ΔΙΑΦΑΝΕΙΣ ΟΘΟΝΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε αποτελέσματα της εργασίας ‘‘Transparent displays enabled by resonant nanoparticle scattering” των Chia Wei Hsu, Bo Zhen, Wenjun Qiu, Ofer Shapira, Brendan G. DeLacy, John D. Joannopoulos and Marin Soljac. Γίνεται μια παρουσίαση εφαρμογής του φαινομένου της σκέδασης σε διαφανείς οθόνες. Αναλύεται διεξοδικά η σκέψη για την δημιουργια αυτών των οθονών, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα κάθε είδους οθόνης που μπορούμε να δημιουργήσουμε. Δίνουμε το μαθηματικό μοντέλο πραγματοποίησης της ιδέας αυτης. Την αποδεικνύουμε πειραματικά με μία μονοχρωματική οθόνη. Τέλος, αναφέρουμε και συζητάμε άλλες μεθόδους υλοποίησης προκειμένου να βελτιστοποιήσουμε το αποτέμεσμα.

6.1 Βασικά Χαρακτηριστικά

Διαφανείς οθόνες ενεργοποιημένες από συντονισμένη σκέδαση νανοσωματιδίων.

Εισαγωγικά στοιχεία.
Έχουμε δημιουργήσει μία διαφανή οθόνη προβάλλοντας μονοχρωματικές εικόνες επάνω σε ένα διαφανές μέσο, με ενσωματωμένα νανοσωματίδια που σκεδάζουν επιλεκτικά το φως στο προβλεπόμενο μήκος κύματος. Περιγράφουμε την βέλτιστη σχεδίαση των εν λόγω νανοσωματιδίων και πειρα-



Εικόνα 4

ματικά αποδεικνύουμε την ιδέα αυτή προβάλλοντας με μπλε χρώμα πάνω σε μία διαφανή οθόνη κατασκευασμένη από νανοσωματίδια αργύρου. Αυτή η προσέγγιση έχει ελκυστικά χαρακτηριστικά όπως απλότητα, ευρεία γωνία θέασης, δυνατότητα κλιμάκωσης σε μεγάλο μέγεθος και χαμηλό κόστος.
Η διαφανής οθόνη είναι μία ταχέως αναπτυσσόμενη τεχνολογία με πάρα πολλές χρήσιμες εφαρμογές, όπως οι πληροφορίες πλοήγησης να εμφανίζονται σε παρμπρίζ αυτοκινήτων και στα παράθυρα πιλοτήριου αεροσκάφους. Επίσης, τα τζάμια μπορούν να γίνουν μόνιτορ για ψυχαγωγία ή κάποια άλλη δουλειά.
Μία απλή εφαρμογή είναι ‘‘head up” οθόνη (οθόνη-ταβανιού). Αυτή είναι κατάλληλη για ορισμένες περιπτώσεις διότι η οπτική γωνία περιορίζεται από τη θέση του θεατή. Μια άλλη εφαρμογή είναι η οθόνη ‘‘διάχυσης” (diffusive screen). Με αυτήν επιτυγχάνεται μεγαλύτερη οπτική γωνία από την ευρύτερη σκέδαση του φωτός, όμως, η οθόνη δεν έχει επιλεκτικότητα του μήκους κύματος κατά την οποία μία μεγαλύτερη σκέδαση θα συνοδευόταν από μικρότερη διαφάνεια.

Η οθόνη “μετατροπής συχνότητας” διαθέτει μεγάλη διαφάνεια και έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- χρησιμοποιεί τα μόρια που μετατρέπουν την υπεριώδη ακτινοβολία σε ορατό φως και το υπέρυθρο φως σε ορατό φως,
- η μετατροπή είναι δύσκολο να εφαρμοστεί σε υψηλή απόδοση,
- μπορεί να δημιουργηθεί σε επίπεδες-ηλεκτρονικές οθόνες (παραδείγματος χάρην, με συνδυασμό οργανικών διοδίων εκπομπής φωτός με διαφανή ηλεκτρόνια).

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται η δημιουργία μίας διαφανούς οθόνης προβάλλοντας μονοχρωματικές εικόνες πάνω σε διαφανές μέσο με ενσωματωμένα νανοσωματίδια, που κάνουν επιλεκτική διάδοση φωτός στο προβλεπόμενο μήκος κύματος. Με το επιλεγμένο μήκος κύματος, μία τέτοια οθόνη μπορεί να εμφανίσει αποτελεσματικά την εικόνα ενώ είναι και εξαιρετικά διαφανής στο φως του περιβάλλοντος μετά την βελτιστοποίηση του σχεδιασμού αυτών των νανοσωματιδίων. (Αυτό έχει αποδειχθεί πειραματικά, με μπλέ χρώμα, ευρεία γωνία θέασης, διαφανή εμφάνιση από νανοσωματίδια σε πίνακα πολυμερούς). Αυτή η μέθοδος είναι απλή, χαμηλού κόστους και επεκτάσιμη σε μεγάλα μεγέθη. Όλα τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά την καθοστούν ελκυστική για ορισμένες από τις διάφορες διαφανείς εφαρμογές απεικονίσεων.

6.2 Λειτουργία

Αποτελέσματα.

Βασική Ιδέα

Η προσέγγιση βασίζεται στο γεγονός ότι τα νανοσωματίδια ευρύ συντονισμού μπορεί να σκεδάζουν επιλεκτικά το φως ενός συγκεκριμένου μήκους κύματος ενώ είναι σχεδόν διάφανη σε όλα τα μήκη κύματος. Με την επιλεκτική ενσωμάτωση νανοσωματιδίων σε ένα διαφανές μέσο και από την προβολη εικόνων στο συντονισμένο μήκος κύματος λ_0, μπορούμε να δημιουργήσουμε μία οθόνη που σκεδάζει το μεγαλύτερο μέρος του φωτός και να είναι σχεδόν διάφανη

Για να δημιουργηθεί μία έγχρωμη οθόνη μπορούν να χρησιμοποιηθούν τρεις τύποι νανοσωματιδίων ώστε κάθε φως να σκεδάζεται επιλεκτικά ώστε να δημιουργούνται τρία βασικά χρώματα: κόκκονο, πράσινο και μπλε. Εναλλακτικά θα μπορούσε κανείς να δημιουργήσει νανοσωματίδια που να έχουν τη δυνατότητα να συντονιστούν με κάθε ένα από τα τρία χρώματα ανάλογα με το μήκος κύματος. Η πρόκληση της καλής εκτέλεσης έγγυται στο να δημιουργηθεί ένας γρήγορος συντονισμός ο οποίος να διατηρεί τη διαφάνεια μακρυά του.

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Ένας τρόπος να πετύχει κανείς το επιλεγμένο μήκος κύματος είναι να χρησιμοποιήσει εντοπισμένους συντονισμούς πλασμονικών μεταλλικών νανοσωματιδίων. Πρώτα δίνουμε μία πρόχειρη εκτίμηση σχετικά με το ποιο μέταλλο είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε. Επιθυμητό είναι το μέγεθος του νανοσωματιδίου να είναι εξαιρετικά μικρό σε σχέση με το μήκος κύματος, με διηλεκτρική συνάρτηση $\epsilon(\lambda)$.

Για συχνότητες στο διάστημα $(\lambda_0,\, \lambda_0+\Delta\lambda)$ (όπου $\Delta\lambda$ είναι μία μικρή μεταβολή στο μήκος κύματος) εκτός συντονισμού είναι:

$$\frac{\sigma_{sc}(\lambda_0)}{\sigma_{sc}(\Delta\lambda+\lambda_0)} \cong 1+|\frac{Re[\epsilon(\lambda_0+\Delta\lambda)-\epsilon(\lambda_0)]}{Im[\epsilon(\lambda_0)]}|^2, \tag{6.1}$$

για τα σωματίδια των αυθαίρετων σχημάτων. Η ερμηνεία της σχέσης (6.1) μας δείχνει ότι για το βέλτιστο μήκος κύματος επιλεκτικής σκέδασης, το επιθυμητό υλικό θα πρέπει να έχει μικρό $Im[\epsilon]$ και γρήγορα μεταβαλλόμενο $Re[\epsilon]$ κοντά στον συντονισμό μήκους κύματος λ_0.

Ένα μέταλλο με αμελητέα απώλεια θα ήταν το ιδανικό αλλά τα περισσότερα μέταλλα έχουν σημαντικές απώλειες στο ορατό φάσμα. Ο άργυρος έχει την υψηλότερη τιμή του

$$\eta = |\frac{Re(\frac{d\epsilon}{d\lambda})}{Im(\epsilon)}|^2,$$

για το μεγαλύτερο μέρος του ορατού φάσματος έτσι ώστε να επιλέξει να συντονιστεί με νανοσωματίδια που έχουν βάση αργύρου.

Για πιο λεπτομερή βελτιστοποίηση ορίζουμε μία εικόνα ποσοστών (FOM)

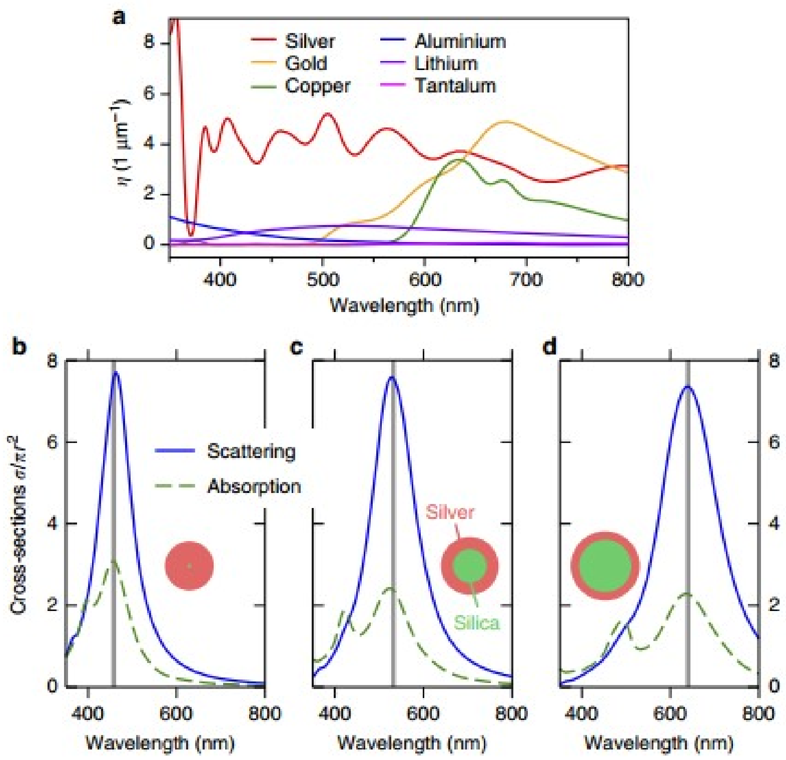
$$FOM = \frac{\sigma_{sc}(\lambda_0)}{2\bar{\sigma}_{sc}+\max\{\sigma_{abs}\}} \tag{6.2}$$

που περέχει τις επιθυμητές ιδιότητες: ομοιομορφία, χαμηλή απορρόφηση διατομής σ_{abs}, υψηλή διατομή σκέδασης σ_{sc} για μήκη κύματος λ_0 και χαμηλή αλλού. Όπου $\bar{\sigma}_{sc}=$μέση τιμή σ_{sc} $(390\eta m,\, 750\eta m)$. Ο παράγοντας 2 υπάρχει

για να εξισορροπήσει την απότομη σκέδαση και την χαμηλή απορρόφηση.
Η απόλυτη τιμή της διατομής ανά νανοσωματίδιο είναι λιγότερο σημαντική επειδή εδώ μπορεί κανείς να προσαρμόσει την επιφανειακή μοίρα των νανοσωματιδίων στην οθόνη οπότε και το (FOM) ορίζεται ως αναλογία.
Αντί να έχουμε μία άχρωμη διαφανή οθόνη προτιμάμε μία επίπεδη οθόνη απορρόφησης γι'αυτό και χρησιμοποιηούμε το max$\{\sigma_{abs}\}$ έναντι του $\bar{\sigma}_{sc}$.
Για λόγους απλότητας παραλείπουμε να προσαρμόσουμε το μήκος κύματος με τις ευαισθησίες του ανθρώπινου ματιού. Με την FOM βελτιστοποιούμε σφαιρικά νανοσωματίδια με κέλυφος αργύρου και πυρήνα πυριτίου, ενσωματωμένα σε ένα διαφανές μέσο με δείκτη διάθλασης $\eta = 1.44$. Οι διατομές σκέδασης και απορρόφησης υπολογίζονται με μεθόδους πινάκων μεταφοράς χρησιμοποιώντας $\eta = 1.45$ για το πυρίτιο και πειραματικές τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς για τον άργυρο.
Η κατανομή μεγέθους των σωματιδίων θεωρείται ότι είναι μία Gauss-κατανομή με απόκλιση 10% του μέσου όρου. Επιλέγουμε την ακτίνα του πυρήνα και το πάχος του κέλυφους που βελτιστοποιούν την (FOM) εκτελώντας καθολική βελτιστοποίηση μέσω του υπολογιστικού πακέτου NLopt. Το μήκος κύματος συντονισμού, λ_0, μπορεί να συντονίζεται με αυθαίρετα χρώματα.
Σύμφωνα με το παράδειγμα του σχεδιαγράμματος 1, κανείς θα προτιμούσε η σ_{sc} να έχει ακόμη πιο μικρό μήκος κύματος, ωστόσο, όπως θα δούμε, μπορεί κανείς να πετύχει πολύ καλή διαφάνεια ακόμα και σαν αυτή που φαίνεται στο σχεδιάγραμμα 2. Ως εκ τούτου, υπάρχουν περιθώρια περαιτέρω βελτίωσης του σχεδιασμού. Τα διηλεκτρικά νανοσωματίδια μπορεί να είναι μία πολλά υποσχόμενη κατεύθυνση το εύρος του συντονισμού του μήκους κύματος είναι περιορισμένο από απώλεια απορρόφησης σε σύγκριση με τα μέταλλα. Η εικόνα 1 αποτελεί τέτοιο παράδειγμα. Πετυχαίνοντας κανείς συντονισμούς υψηλότερης τάξης μπορεί να δημιουργήσει συντονισμούς (σε μεγάλο βαθμό) έξω από το ορατό φάσμα. Η (FOM) βελτιστοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί στις περιπτώσεις αυτές.

6.3 Πειραματική Πραγματοποίηση με Μονοχρωματικό Φως

Αρχικά ως απόδειξη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφανη οθόνη μόνο μπλε χρώματος. Χρησιμοποιούμε απλά σφαιρικά νανοσωματίδια αρ-


a
Silver
Gold
Copper
Aluminium
Lithium
Tantalum
η (1 μm⁻¹)
Wavelength (nm)
b
c
d
Scattering
Absorption
Cross-sections σ/πr²
Silver
Silica
Wavelength (nm)
Wavelength (nm)
Wavelength (nm)

Εικόνα 5

γύρου δεδομένου ότι η δομή που θα χρησιμοποιηθεί για να σκεδάσει το μπλε έχει αμελητέα μικρό πυρήνα πυριτίου.

Table 1
Βελτιωμένα μεγέθη νανοσωματιδίων με πυρήνα πυριτίου και κέλυφος αργύρου

Μήκος κύματος λ_0	Ακτίνα πυρήνα	Λεπτότητα Κέλυφους	FOM
$458nm$	$1.3nm$	$30.8nm$	1.01
$532nm$	$22.2nm$	$15.8nm$	0.91
$640nm$	$34.3nm$	$11.0nm$	0.81

Μία εικόνα μετάδοσης ηλεκτρονίων φαίνεται στο σχήμα 3 όπου η διάμετρός τους επιλέγεται από $62 \pm 4nm$ για να ταιριάζει με την βελτιστοποιημένη δομή. Για να φιλοξένησει τα νανοσωματίδια ένα διαφανές πολυμερές μήτρας ανακατεύουμε 10% κατά βάρος πολυβινυλικής αλκοόλης (PVA, 80% υδρολυμένη, Sigma-Aldrich) σε ένα υδάτινο διάλυμα από νανοσωματίδια αργύρου (συγκέντρωση $0.01\frac{mg}{ml}$). Ρίχνουμε $480ml$ αυτού του υγρού σε τετράγωνη γυάλινη πλάκα με πλάτος $25cm$, φυσαλίδες που αφαιρούν τον αέρα από το υγρό και το αφήνουν να στεγνώσει σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Παρατηρούμε ότι το υγρό έπειτα από 40 ώρες στερεοποιείται σε μία διάφανη πολυμερής ταινία πάχους $0.46nm$. Αυτή η διάφανη λεπτή ταινία αποτελεί την οθόνη μας. Η μέση διαπερατότητα της ταινίας αυτής είναι 60% στο ορατό φάσμα (κατά μέσο όρο $390 - 750nm$).

Το σχήμα $3a$ δείχνει το φάσμα μετάδοσης της ακτίνας αυτής. Για άμεση σύγκριση με τη θεωρία τα δεδομένα της μέτρησης κανονικοποιήθηκαν από την διαπερατότητα της απλής ταινίας PVA στο ίδιο πάχος (η οποία είναι υψηλότερη από το 90% στο ορατό φάσμα). Η πρόβλεψη της θεωρίας (συμπαγής γραμμή στο σχήμα $3a$) από τις υπολογισμένες διατομές και το νόμο Beer-Lambert (χωρίς τοποθέτηση μεταβλητών) συμφωνεί με τα στοιχεία των μετρήσεων σε μεγάλο βαθμό ενώ η μικρή απόκλιση από την θεωρία αποδίδεται σε μία μικρή ομαδοποίηση που έγινε στα νανοσωματίδια (εικόνα 2). Οι υπολογιζόμενες διατομές δείχνουν ότι η συντονισμένη σκέδαση είναι σημαντικά ισχυρότερη από ότι η σκέδαση που γίνεται στην απορρόφηση του συντονισμού (σχήμα $3b$), το οποίο ειναι καλό για την έρευνά μας. Το σχήμα $3c$ δείχνει τη γωνιακή κατανομή του σκεδασμένου φωτός μήκους κύματος λ_0.

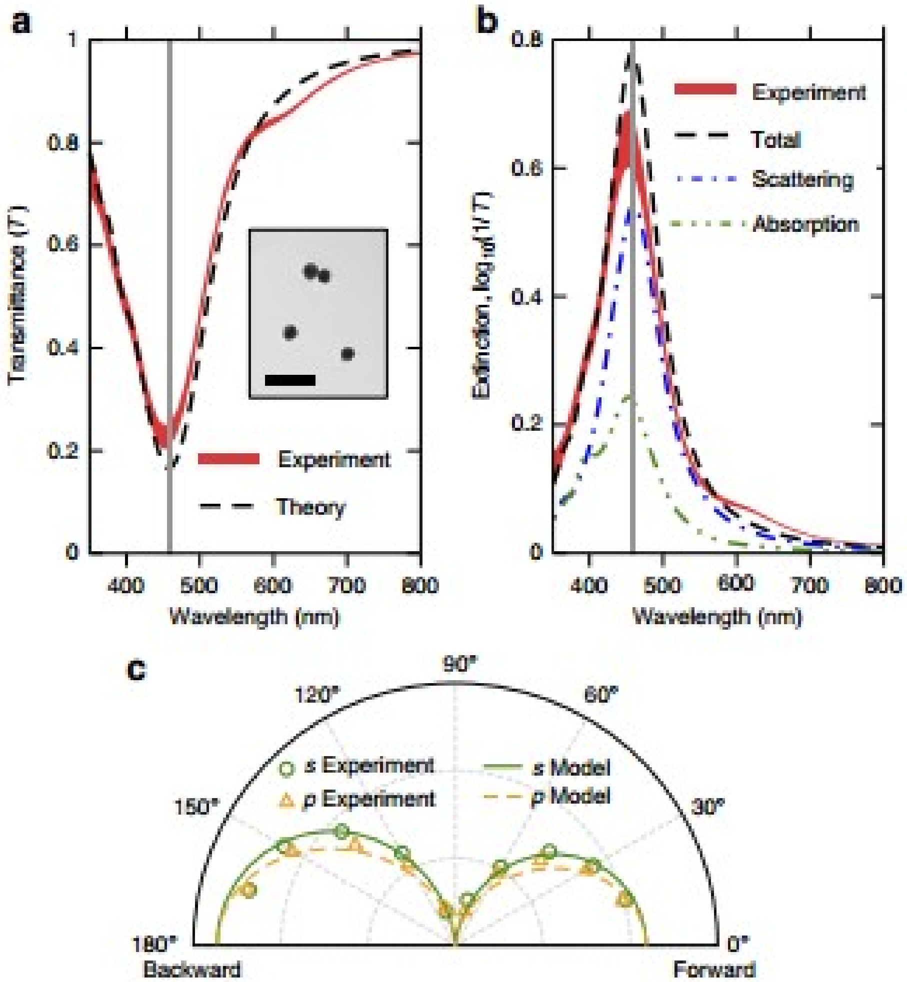
Η κατανομή που βλέπουμε προσεγγίζει την κατανομή Lambert, για μία ιδανική επιφάνεια διαχέεται, επιβεβαιώνοντας ότι η σκέδαση φωτός μπορεί να αντιμετωπισθεί ως ένα ευρύ φως. Η εξάρτηση της πόλωσης είναι χαλαρή και έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η οθόνη μπορεί να λειτουργήσει με τυχαίο φως από αυθαίρετη πόλωση. Ένα ελάχιστο πρότυπο για την γωνιακή εξάρτηση (που περιγράφεται στις μεθόδους) αποδίσει η γραμμή στο σχήμα 3.

Στο σχήμα $4a$ δείχνουμε τη διάφανη οθόνη με ένα μπλε MIT λογότυπο πάνω στην οθόνη από έναν μικρό προβολέα λέιζερ (Micro Vision SHOwwxt). Αυτός ο προβολέας είναι κατάλληλος αφού λειτουργίες προβάλλοντας μονοχρωματικό φως από τρεις διόδους λέιζερ (μπλε, πράσινο, κόκκινο), μετράμε το μήκος κύματος του μπλε φωτός να είναι $458 \pm 2nm$. Η προβαλλόμενη εικόνα εμφανίζεται με σαφήνεια στην οθόνη και είναι ορατή από όλες τις κατευθύνσεις.

Συγκρίνοντας, η ίδια εικόνα προβάλλεται πάνω σε κανονικό ποτήρι (σχήμα $4a$, φωτογραφία στα δεξιά), μπορεί μόλις να φανεί λόγω της έλλειψης σκέδασης. Η διαφάνεια της οθόνης μπορεί να αξιολογηθεί από την σύγκρισή της με ένα απλό γυαλί: η εικόνα $4a$ δείχνει ότι τα αντικείμενα πίσω από την οθόνη (τρία χρωματιστά ποτήρια) παραμένουν ορατά και τα χρώματά τους προφανή ενώ αλλάζει λίγο η φωτεινότητα. Μία καταγραφή οθόνης που εμφανίζει κινούμενες εικόνες φαίνεται στην συμπληρωματική ταινία 1. Μπορούμε επίσης να συγκρίνουμε μία εικόνα που προβάλλεται σε αυτή την οθόνη και σε ένα λευκό χαρτί: το σχέδιο $4b$ δείχνει ότι στην οθόνη η προβαλλόμενη εικόνα είναι ελαφρώς πιο σκούρα (dimmer), αλλά η αντίθεση είναι καλύτερη λόγω της μικρότερης σκέδασης του φωτός του περιβάλλοντος. Τέλος, επισημαίνουμε ότι οι εικόνες υψηλής ανάλυσης μπορεί να προβληθούν με σαφήνεια σε αυτή την οθόνη επειδή η οθόνη έχει κάτά μέσο όρο 6×10^9 νανοσωματίδια ανα cm^2 του χώρου.

6.4 Άλλες Μέθοδοι

Έχουμε αναλύσει και αποδείξει πειραματικά τι συμβαίνει με διαφανείς οθόνες που ενεργοποιούνται από το μήκος κύματος με επιλεκτική διασπορά νανοσωματιδίων. Αξιοπρόσεκτα αποτελέσματα στην διαφάνεια σκέδασης



a
Transmittance (T)
Experiment
Theory
Wavelength (nm)
b
Extinction, log10(1/T)
Experiment
Total
Scattering
Absorption
Wavelength (nm)
c
90°
120°
60°
150°
30°
180°
Backward
0°
Forward
s Experiment
p Experiment
s Model
p Model

Εικόνα 6

έχουν επιτευχθεί με την απόδειξη της ιδέας μας με αναπαράσταση. Η μέθοδος αυτή έχει πρόσθετα ελκυστικά χαρακτηριστικά όπως απλότητα, ευρεία γωνία θέασης και επεκτασιμότητα σε μεγάλα μεγέθη. Η μέθοδος είναι επιπλέον οικονομική. Στο παρόν πείραμα το πολυμερές είναι φθηνό και μόλις $7mg$ νανοσωματίδια αργύρου χρησιμοποιούνται ανά cm^2 της οθόνης. Το φυσικό επόμενο βήμα αυτής της μεθόδου είναι να επιτευχθεί μικρότερο πλάτος σκέδασης διατηρώντας παράλληλα τη διαφάνεια και θα είναι σημαντικό για την δημιουργία μίας διαφανής οθόνης με όλα τα χρώματα.
Τέλος θα επισημάνουμε μερικές προεκτάσεις αυτού του διάφανου μέσου απεικόνισης. Καταρχάς, με ένα ευέλικτο πολυμερή πίνακα μπορούμε ενδεχομένως να διακρίνουμε ευέλικτες και διαφανείς οθόνες κλίσης. Δεύτερον, το σκεδαζόμενο φως διατηρεί την σκέδαση του προσπίπτοντος φωτός. Αυτό οφείλεται στο ότι τα περισσότερα είδη φωτός υφίστανται μονή σκέδαση (το πάχος της ταινίας είναι $0.46mm$ που είναι συγκρίσιμο με ελεύθερη διαδρομή σε απήχηση $0.26mm$) αντί για πολλαπλή σκέδαση. Ως εκ τούτου, μπορεί κανείς να πετύχει τρισδιάστατο αποτέλεσμα προβολής προβάλλοντας δύο εικόνες ταυτόχρονα (ένα δεξιόστροφο κυκλικά πολωμένο και ένα αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο) και την προβολή της να τη βλέπουμε με πολωμένα γυαλιά. Τρίτον, τοποθετώντας ένα μαύρο πανί πίσω από μία τέτοια οθόνη κάποιος μπορεί να δημιουργήσει μία μαύρη μη-διαφανή οθόνη που έχει μεγαλύτερη αντίθεση από ότι μία παραδοσιακή οθόνη. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4 η παραδοσιακή λευκή οθόνη μπορεί να έχει χαμηλότερη αντίθεση κάτι που οφείλεται στη διάχυση της σκέδασης του φωτός του περιβάλλοντος ενώ η διαφανής οθόνη δεν την έχει.

Μέθοδοι.

Συντονισμός διασποράς μικρών σωματιδίων πλασμονίων

Για ένα σωματίδιο πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος λ του προσπίπτοντος φωτός το τοπικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σχεδόν δεν έχει χωρική μεταβολή. Μπορούμε να υπολογίσουμε την οπτική απόκλιση από ένα τέτοιο σωματίδιο, χρησιμοποιώντας την σχεδόν στατική προσέγγιση, που ονομάζεται διπολική προσέγγιση (dipole approximation). Εδώ εφαρμόζουμε αυτήν την μέθοδο για την εκτίμηση της ευκρίνειας της διατομής σκέδασης. Στην σχεδόν στατική (quasi-static) προσέγγιση, η διατομή σκέδασης σ_{sc}, κατά μέσο όρο ανά γωνία και πόλωση του εισερχόμενου φωτός, είναι

$$< \sigma_{sc} >= \frac{k^4}{6\pi} - \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} |a_j(t)|^2, \tag{6.3}$$

όπου $k = \dfrac{2\pi\sqrt{\epsilon_m}}{\lambda}$ είναι ο κυματικός αριθμός στο περιβάλλον μέσο και $a_{1,\,2,\,3}$ είναι τα στατικά ηλεκτρικά του σωματιδίου σε μία τρισορθογώνια πόλωση. Εντοπισμένες συντονισμοί πλασμονίων συμβαίνουν στο λ_0 μήκος κύματος για το οποίο

$$\frac{1}{a_j(Re[\epsilon(\lambda_0)])} = 0. \tag{6.4}$$

Για μία σφαίρα η προυπόθεση αυτή απλοποιείται σε $Re[\epsilon(\lambda_0)]) = -2\epsilon_m$. Πρόκειται για μία πιο γενικευμένη έκφραση που είναι εφαρμόσιμη σε αυθαίρετα σχήματα. Συμβολίζουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη επί του συντονισμού (στο λ_0) και εκτός του συντονισμού (στο $\lambda_0+\Delta\lambda$, για μικρό $\Delta\lambda$ που έχει ενδιαφέρον) διηλεκτρικών σταθερών σαν

$$\epsilon(\lambda_0) = \epsilon_r + i\epsilon_i,\; \epsilon(\lambda_0 + \Delta\lambda) = (\epsilon_r + \Delta\epsilon_r) + i(\epsilon_i + \Delta\epsilon_i), \tag{6.5}$$

όπου $\Delta\epsilon_r << \epsilon_r$ και $\Delta\epsilon_i << \epsilon_i$.
Γράφουμε την πόλωση ως μία λογική λειτουργία,

$$a_j(\epsilon) = \frac{N(\epsilon)}{D(\epsilon)},\ \text{με}\ D(\epsilon) = \sum_{n=0}^{3} c_n\epsilon^n. \tag{6.6}$$

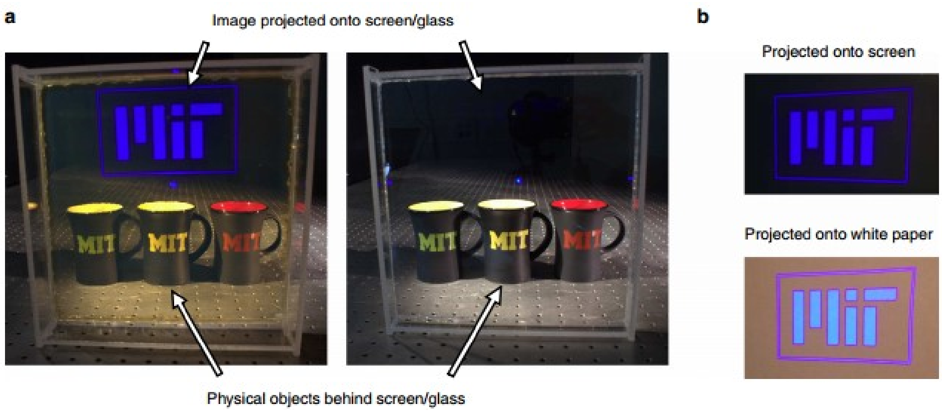
Χρησιμοποιώντας το $D(\epsilon_r) = 0$, έχουμε

$$D(\epsilon(\lambda_0+\Delta\lambda)) \approx (\Delta\epsilon_r+i\epsilon_i)[c_1+c_2(2\epsilon_r+i\epsilon_i)+c_3(3\epsilon_r^2-\epsilon_i^2+3i\epsilon_r\epsilon_i)+\cdots], \tag{6.7}$$

μας ενδιαφέρει μόνον η πρώτη αγκύλη δεδομένου ότι κανένας από τους όρους της $2^{ης}$ αγκύλης δεν εξαρτάται από το $\Delta\lambda$. Με την παρατήρηση αυτή βλέπουμε ότι η διαφορά μεταξύ των εντός-συντονισμού και των εκτός-συντονισμού διατομών σκέδασης είναι περίπου

$$\begin{aligned}\frac{< \sigma_{sc}(\lambda_0) >}{< \sigma_{sc}(\lambda_0 + \Delta\lambda) >} &\cong |\frac{a_j(\epsilon_0)}{a_j(\epsilon(\lambda_0 + \Delta\lambda))}|^2 \\ &\cong |\frac{D(\epsilon(\lambda_0 + \Delta\lambda))}{D(\epsilon(\lambda_0))} \cong 1 + |\frac{\Delta\epsilon_r}{\epsilon_i}|,\end{aligned} \tag{6.8}$$

που αποτελεί μία βελτίωση της (6.1). Με αυτόν το αποτέλεσμα μπορούμε να εκτιμήσουμε το εύρος της διατομής σκέδασης χρησιμοποιώντας μόνον την



Εικόνα 7

διηλεκτρική συνάρτηση $\epsilon(\lambda)$ του μετάλλου. Ωστόσο, οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι η συνθήκη συντονισμού (6.4) απαιτεί υλικά με αρνητικό $Re(\epsilon)$ με αποτέλεσμα να μπορεί να εφαρμοστεί μόνον στον συντονισμό πλασμονίων.

Μοντέλο γωνιακής κατανομής(angular distribution model)
Η συνολική τάση της γωνιακής κατανομής μπορεί να περιγραφεί από έναν παράγοντα $f_1 = \cos\theta$ που εξηγεί την παρατηρούμενη περιοχή υπό γωνία θ. Αυτή αποτελεί την κατανομή Lambert. Για να ληφθεί υπόψην η εξάρτηση πόλωσης θεωρούμε μία μικρή σκέδαση ενός μικρού σωματιδίου, το οποίο έχει $f_2^{\perp} = 1$ και $f_2^{\parallel} = \cos\theta'$, για διηλεκτρικό πεδίο κάθετο ή παράλληλο προς το επίπεδο σκέδασης, αντίστοιχα, όπου θ' είναι η γωνία μέσα από την ταινία PVA και $\sin\theta = \eta\sin\theta'$, όπου $\eta = 1.44$ είναι ο δείκτης διάθλασης του PVA. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τον συντελεστή μετάδοσης από τον PVA στον αέρα f_3 από τις εξισώσεις Fresnel. Τέλος, το φως που σκεδάζεται στην πίσω μεριά εξασθενεί με απορρόφηση. Εκτιμούμε ότι η απορρόφηση θα είναι της τάξης του 20% έτσι ώστε να περιλαμβάνει τον πρόσθετο παράγοντα του $f_4 = 0.8$ για $\theta < 90^o$ και $f_4 = 1$ για $\theta > 90^o$. Με τον συνδυασμό αυτών των παραγόντων έχουμε διαμορφώσει τη γωνιακή εξάρτηση ως $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4$. Πρόβλεψη αυτού του μοντέλου έχει σχεδιαστεί στο σχήμα $3c$.

Βιβλιογραφία

[1] Angell T.S. and Kirsch, A., The conductive boundary condition for Maxwell's equations, SIAM J. Appl. Math. 52, 1597-1610 (1992).

[2] Athanasiadis C. and Stratis I. G., On an infinnitely Stratified scatterer in the presence of a lox-frequency electromagnetic plane wave, The Arabian Journalist for Science and Engineering, 18, 14-47, (1993).

[3] Athanasiadis C. and Stratis I. G., The conductive problem for Maxwell's equations at low frequencies, Applied Mathematics Letters, 10, 101-5, (1997).

[4] Athaniasiadis C.E., Sevroglou V. and Skourogiannis K., The direct electromagnetic scattering problem by a mixed impedance screen in chiral media, Appl. Anal. 91, No 11, pp.2083-2093(2012).

[5] Barbatis G., Stratis I.G. and Yannacopoulos A.N., Homogenization of random elliptic systems with an application to Maxwell's equations, Math. Models Methods Appl. Sci.25(2015) 1365-1388.

[6] F. Cakoni and D. Colton, Qualititave Methods in Inverse Scattering Theory, Springer (2006).

[7] Chia Wei Hsu, Bo Zhen, Wenjun Qiu, Ofer Shapira, Brendan G. DeLacy, John D. Joannopoulos and Marin Soljac, Transparent displays enabled by resonant nanoparticle scattering, (2012).

[8] Colton D, Kress R., Integral Equation Methods in Scattering Theory, John Wiley, New York, (1983).

[9] Colton D, Kress R., Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory 2nd ed. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, (1998).

[10] Colton D, Kress R, Monk P., Inverse scattering from an orthotropic medium, J. Comp.Appl. Math. 81:269-298, (1997).

[11] G. Dassios and R. Kleinmann, Low Frequency Scettering, Oxford Mathematical Monographs (2000).

[12] Jones D.S., Acoustic and Electromagnetic Waves, Clarendon Press, Oxford 1986.

[13] Krish A., An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer Verlag, New York, (1996).

[14] Krisch A., Factorization of the far field operator for the inhomogeneous medium case and an application in inverse scattering theory, Inverse Problems 15:413-29, (1999).

[15] Kress R, Lee KM., Integral equation methods for scattering from an impedance crack, J.Comp. Appl. Math. 161:161-177, (2003).

[16] Kress R., On the boundary operator in electromagnetic scattering, Proc Royal Soc. Edinburgh 103A, 91-98 (1986).

[17] Picard R., On the low-frequency asymptotics in electromagnetic theory, Zeitschrift fur die Reine Angewandte Mathematik, 354, 50-73, (1984a).

[18] G.F.Roach, I.G.Stratis, A.N. Yannacopoulos, Mathematical Analysis of Deterministic and Stochastic Problems in Complex Media Electromagnetics, (2012).

[19] Stakgold I., Green's functions and boundary value problems (2nd end), Wiley, New York, (1998).

[20] Tikhonov A.N., Inverse acoustic wave scattering in tow dimensions from impenetrablle targets, Inverse Problems 5, 1131-1144, (1989).

[21] Ακατερίνη Στ., Καραδήμα Διάδοση και σκέδαση κυματικών πεδίων σε ανισότροπα μέσα, Διδακτορικη Διατριβή, Πάτρα Φεβρουάριος, (2010).

[22] The direct electromagnetic scattering problem by a mixed impedance screen in chiral media, Appl. Anal. 91, No 11, pp.2083-2093(2012)

Παράρτημα

Συμβολισμοί:

E: ηλεκτρικό πεδίο

H: μαγνητικό πεδίο

B: μαγνητική επαγωγή

D: ηλεκτρική μετατόπιση/ροή

J: αγωγιμότητα πυκνότητας ρεύματος

ω: γωνιακή συχνότητα

ε: διηλεκτρική σταθερά

σ: αγωγιμότητα υπολογισμένη ανά το γινόμενο μονάδα μήκους επί μονάδα χρόνου του υλικού μέσου

μ: μαγνητική διαπερατότητα υπολογισμένη σε επαγωγή ανά μονάδα μήκους

p: διάνυσμα της πόλωσης του προσπίπτοντος κυματικού πεδίου

d̂: μοναδιαίο διάνυσμα διαύθυνσης διάδοσης του προσπίπτοντος κυματικού πεδίου

r: διάνυσμα θέσης/παρατήρησης

k: κυματικός αριθμός

Z: χαρακτηριστική εμπέδηση του μέσου

Y: χαρακτηριστική αγωγιμότητα

n̂: μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του σκεδαστή

G: βαθμωτή συνάρτηση Green

a(**r**): συνάρτηση μέτρου της γωνίας που σχηματίζει το τυχαίο διάνυσμα **r** $\in S$ με το V^+

g$_e$(**r**): ηλεκτρικό μακρινό πεδίο

g$_m$(**r**): μαγνητικό μακρινό πεδίο

h: διάνυσμα πόλωσης

G̃: δυαδική συνάρτηση Green

η: δείκτης διάθλασης

Z_S: αντίσταση επιφάνειας

$S(r)$: ροή ισχύος στη ζώνη ακτινοβολίας

σ_a: διατομή απορρόφησης

σ_s: διατομή σκέδασης

$\tilde{\mathbf{I}}$: ταυτοτικό δυαδικό