

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης «Ηλεκτρονικής – Ραδιοηλεκτρολογίας»

ΜΕΛΕΤΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΥΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ FDTD

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δ. Β. ΠΕΠΟΝΗΣ
Α.Μ. 2011112
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ι.Γ. ΤΙΓΚΕΛΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2013



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης «Ηλεκτρονικής – Ραδιοηλεκτρολογίας»

ΜΕΛΕΤΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΥΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ FDTD

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δ. Β. ΠΕΠΟΝΗΣ - 2011112

Η τριμελής επιτροπή

Ι. Γ. Τίγκελης	Ε. Τσίλης	Ε. Νισταξάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής (επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής

Εξετάστηκε στην Αθήνα την .....

Μελέτη Χαρακτηριστικών Διάδοσης σε Κυματοδηγούς με τη Μέθοδο FDTD

Στην οικογένειά μου

που τόσο με στήριξε

Abstract

This study is the M.Sc. thesis in "Electronics – Radioelectronics" postgraduate program of School of Sciences of National and Kapodistrian University of Athens, and is the continuation of the B.Sc. thesis in the field of computational electromagnetism.

The subject is propagation characteristics in waveguide structures (with orthogonal and cylindrical cross-section) using the Finite Difference Time Domain (FDTD) method as well as the effect of the boundary condition of a perfect matched layer. Numerical results are presented for both geometries, conclusions are also given as well as possible extensions of this work.

Keywords: FDTD, PML, waveguide structures

Περίληψη

Η παρούσα μελέτη αποτελεί τη μεταπτυχιακή (διπλωματική) εργασία για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην «Ηλεκτρονική – Ραδιοηλεκτρολογία» του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Αποτελεί συνέχεια της προπτυχιακής διπλωματικής εργασίας του γράφοντος στην ευρύτερη περιοχή των αριθμητικών μεθόδων στον εφαρμοσμένο ηλεκτρομαγνητισμό.

Το θέμα αυτής είναι η μελέτη των χαρακτηριστικών διάδοσης σε διατάξεις κυματοδήγησης (ορθογωνικής και κυλινδρικής διατομής) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων διαφόρων στο πεδίο του χρόνου (Finite Difference Time Domain. FDTD) καθώς και η συμπεριφορά μιας κατάλληλης απορροφητικής οριακής συνθήκης, όπως αυτή του τέλεια προσαρμοσμένου στρώματος (Perfect Matched Layer, PML). Αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται και για τις δύο γεωμετρίες ενώ δίνονται και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτά. Τέλος, δίνονται πιθανές επεκτάσεις της μελέτης.

Λέξεις κλειδιά: Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου, τέλεια προσαρμοσμένο στρώμα, διατάξεις κυματοδήγησης

Πρόλογος

Η παρούσα μελέτη εκπονήθηκε με σκοπό την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην «Ηλεκτρονική – Ραδιοηλεκτρολογία» του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών των Τμημάτων Φυσικής και Πληροφορικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Παράλληλα αποτελεί και φυσική συνέχεια παρόμοιας μελέτης του γράφοντος στα πλαίσια των αριθμητικών μεθόδων στον εφαρμοσμένο ηλεκτρομαγνητισμό [1].

Η εκπόνηση της παρούσας διατριβής δε θα ήταν δυνατή χωρίς την καθοδήγηση του Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής Ι. Γ. Τίγκελη καθώς και του Διδάκτορα Γ. Π. Λάτσα, υπαλλήλου ΙΔΑΧ του ΕΚΠΑ και μέλους της ομάδας Μικροκυματικών και Οπτικών Εφαρμογών (ΜΟΕ) του Τμήματος Φυσικής, οι οποίοι βοήθησαν τόσο στο έργο αυτό όσο και στην ολοκλήρωση των σπουδών μου στο Μ.Δ.Ε.. Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον Διδάκτορα Ζ. Χ. Ιωαννίδη, μέλος επίσης της ομάδας ΜΟΕ του Τμήματος Φυσικής, του οποίου οι πολύωρες συζητήσεις πάνω σε θέματα διέγερσης κυματοδηγών ήταν πολύτιμες. Τέλος, οφείλω ένα ευχαριστώ σε όλα εκείνα τα άτομα του οικογενειακού και φιλικού μου περιβάλλοντος που βοήθησαν ηθικά στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Αθήνα, Απρίλιος 2013

Δ. Β. Πεπόνης

Περιεχόμενα

Abstract I
Περίληψη I
Πρόλογος III
Περιεχόμενα V
Πίνακας Σχημάτων VII
Εισαγωγή 11
Κεφάλαιο 1 Εισαγωγικά Στοιχεία Κυματοδήγησης 13
1.1 Εξισώσεις Maxwell και λύσεις αυτών σε κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής 13
1.1.1 Κύματα TM 15
1.1.2 Κύματα TE 15
1.2 Λύση εξισώσεων Maxwell σε κυματοδηγό κυλινδρικής διατομής 15
1.2.1 Κύματα TM 17
1.2.2 Κύματα TE 18
Κεφάλαιο 2 Ο Αλγόριθμος του Yee σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες 21
2.1 Βασικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες 21
2.2 Διακριτοποίηση εξισώσεων 23
2.3 Κριτήρια σύγκλισης 25
Κεφάλαιο 3 Ο Αλγόριθμος του Yee σε Κυλινδρικές Συντεταγμένες 29
3.1 Βασικά χαρακτηριστικά 29
3.2 Εμφάνιση ιδιάζοντος σημείου για $\rho = 0$ 31
3.2.1 Μέθοδος επέκτασης σε σειρά 31
3.2.2 Μέθοδος εφαρμογής των νόμων Ampere και Faraday 32
3.2.3 Μέθοδος μετατροπής συντεταγμένων 34
Κεφάλαιο 4 Τέλεια Προσαρμοσμένο Στρώμα 37
4.1 Βασικά χαρακτηριστικά – αναλυτικός υπολογισμός εξισώσεων 37
4.2 Διακριτοποίηση του στρώματος PML 42
Κεφάλαιο 5 Ανάπτυξη Αριθμητικών Κωδίκων 47
5.1 Βασικά χαρακτηριστικά – περιγραφή 47
5.2 Αναλυτικός τρόπος λειτουργίας αριθμητικών κωδίκων 48
Κεφάλαιο 6 Αριθμητικά Αποτελέσματα 53
6.1 Εισαγωγή 53
6.2 Κυματοδηγός ορθογωνικής διατομής 53
6.2.1 Εξέταση επίδρασης στρώματος PML 53
6.2.2 Απουσία PML 62

6.2.3 Ύπαρξη αξονικά τοποθετημένης διηλεκτρικής περιοχής 65
6.2.4 Διέγερση με ρευματική κατανομή 71
6.2.5 Παραμετρική μελέτη σύγκλισης 76
6.3 Κυματοδηγός κυλινδρικής διατομής 79
6.3.1 Διάδοση και εξασθένηση κυμάτων 79
6.3.2 Διέγερση με συγκεκριμένη κατανομή ρυθμού 81
6.3.3 Διέγερση με ρυθμό TE_{21} 86
6.3.4 Διέγερση του ρυθμού TE_{11} με εγκάρσια τοποθετημένη αζιμουθιακή κατανομή ρεύματος 92
6.3.5 Διέγερση του TE_{01} με εγκάρσια τοποθετημένη αζιμουθιακή κατανομή ρεύματος 95
Κεφάλαιο 7 Κύρια Συμπεράσματα – Επισημάνσεις - Επεκτάσεις 99
7.1 Κύρια συμπεράσματα - επισημάνσεις 99
7.1.1 Χρήση πηγών άμεσης επιβολής πεδιακής κατανομής (Hard Sources) 99
7.1.2 Λειτουργία PML 99
7.1.3 Υπολογισμός τιμών πεδιακών συνιστωσών σε σημείο που δεν ανήκει στο πλέγμα 100
7.1.4 Επιλογή μεθόδου διέγερσης κυματοδηγού 101
7.1.5 Επιλογή μεθόδου αποφυγής ιδιάζουσας συμπεριφοράς για $\rho = 0$ σε κυλινδρικό κυματοδηγό 101
7.1.6 Χρονικός παράγοντας διεγέρσεων 102
7.1.7 Συνολικός χρόνος προσομοιώσεων 103
7.2 Επεκτάσεις 103
7.2.1 Ενοποίηση κωδίκων 103
7.2.2 PML σε κυλινδρική γεωμετρία 103
7.2.3 Μελέτη PML και χρήση C-PML 103
7.2.4 Χρήση περισσότερων πηγών 103
7.2.5 Εξέταση σύγκλισης αποτελεσμάτων και μελέτη εναλλακτικών μεθόδων πεπερασμένων διαφορών 104
7.2.6 Δυνατότητα προσομοίωσης λιγότερων διαστάσεων 104
7.2.7 Δυνατότητα υπολογισμού πυκνοτήτων ενέργειας και παραγόντων ποιότητας 104
Αναφορές 105

Πίνακας Σχημάτων

Σχήμα 1: Κελί του Yee [5].....22
Σχήμα 2: Κελί του Yee σε κυλινδρικές συντεταγμένες [9]. 30
Σχήμα 3: Σχήμα υπολογισμού E_z συνιστώσας για $\rho = 0$ [9].....32
Σχήμα 4: Εφαρμογή των νόμων Ampere και Faraday για τον υπολογισμό της H_ρ συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου για $\rho = 0$ [9].....33
Σχήμα 5: Σχέση κυλινδρικών με καρτεσιανές συντεταγμένες. Το πάνω πλέγμα αναφέρεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες ενώ το κάτω πλέγμα σε καρτεσιανές συντεταγμένες [11]. 34
Σχήμα 6: Δομή λειτουργίας αλγορίθμου. 47
Σχήμα 7: Διάγραμμα ροής παράλληλου τμήματος καρτεσιανού κώδικα.....49
Σχήμα 8: Διάγραμμα ροής παράλληλου τμήματος κυλινδρικού κώδικα. 49
Σχήμα 9: Αξονική κατανομή (α) της E_x και (β) της E_y συνιστώσας.....54
Σχήμα 10:Αξονική κατανομή της E_z συνιστώσας. 54
Σχήμα 11: Φάσμα χωρικού μετασχηματισμού Fourier της E_x συνιστώσας. 55
Σχήμα 12: Κατανομή της E_x συνιστώσας. 55
Σχήμα 13: Εγκάρσια κατανομή της E_y συνιστώσας. 56
Σχήμα 14: Εγκάρσια κατανομή της E_z συνιστώσας. 56
Σχήμα 15: Χρονική εξέλιξη της E_x. 56
Σχήμα 16: Συχνοτικό φάσμα προσομοίωσης για χρόνο υπολογισμών t = 8 ns.....57
Σχήμα 17: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας (t = 80 ns). 57
Σχήμα 18: Συχνοτικό φάσμα για χρόνου υπολογισμών t = 80 ns.....58
Σχήμα 19: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας για εκθετικό παράγοντα ίσο με 4. 58
Σχήμα 20: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας για 20 κελιά στρώματος PML. 59
Σχήμα 21: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας για 20 κελιά PML τοποθετημένα εκτός του ενεργού μήκους.....59
Σχήμα 22: Συχνοτικό φάσμα για PML τοποθετημένο εκτός της ενεργής περιοχής.....59
Σχήμα 23: Αξονικές κατανομές πεδιακών συνιστωσών για t = 80 ns.....60
Σχήμα 24: Φάσμα στο πεδίο των κυματαριθμών για την περίπτωση εξωτερικής τοποθέτησης του στρώματος PML.....61
Σχήμα 25: Μεταβολή για $2 < n < 4$ της αγωγιμότητας για PML 10 κελιών. 61
Σχήμα 26: Μεταβολή για $2 < n < 4$ της αγωγιμότητας για PML 20 κελιών. 62
Σχήμα 27: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας στο άκρο του κυματοδηγού. 63
Σχήμα 28: Αξονικές κατανομές του ηλεκτρικού πεδίου απουσία PML (α) E_x, (β) E_y και (γ) E_z. 63
Σχήμα 29: Κατανομή της E_z συνιστώσας (αξονική συνιστώσα) στο εγκάρσιο επίπεδο. 64
Σχήμα 30: Κατανομή της E_x συνιστώσας στο εγκάρσιο επίπεδο. 64
Σχήμα 31: Κατανομή της E_y συνιστώσας στο εγκάρσιο επίπεδο. 64
Σχήμα 32: Ανάλυση της E_x συνιστώσας στο πεδίο των κυματαριθμών. 65
Σχήμα 33: Ανάλυση της E_x συνιστώσας στο πεδίο της συχνότητας.....65
Σχήμα 34: Αξονική τομή κυματοδηγού δύο υλικών.....66
Σχήμα 35: Αξονική κατανομή της E_x συνιστώσας για t = 200 ns. 67
Σχήμα 36: Αξονική κατανομή της E_y για t = 200 ns.....67
Σχήμα 37: Εγκάρσια κατανομή της E_x συνιστώσας (α) για z = 0.31 m και (β) για z = 0.55 m. 67
Σχήμα 38: Ανάλυση κύματος στην περιοχή του διηλεκτρικού στο πεδίο των κυματαριθμών. 68
Σχήμα 39: Αξονική κατανομή της E_z για t = 200 ns.....69
Σχήμα 40: Κατανομή κυματαριθμών της E_χ στην περιοχή του κενού κυματοδηγού.....69

Σχήμα 41: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας. 70
Σχήμα 42: Συχνοτικό φάσμα της E_x συνιστώσας. 70
Σχήμα 43: Εγκάρσιες κατανομές ηλεκτρικού πεδίου (α) E_x, (β) E_y και (γ) E_z. 72
Σχήμα 44: Εγκάρσιες κατανομές μαγνητικού πεδίου (α) H_x, (β) H_y και (γ) H_z. 73
Σχήμα 45: Αξονική κατανομή της E_x συνιστώσας. 74
Σχήμα 46: Φάσμα αξονικής κατανομής στο πεδίο των κυματαριθμών. 74
Σχήμα 47: Εξέλιξη της E_x συνιστώσας στο χρόνο. 75
Σχήμα 48: Συχνοτικό φάσμα της E_z συνιστώσας. 75
Σχήμα 49: Αξονικές κατανομές των συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου για t = 40 ns. Με μαύρο χρώμα η περίπτωση προσαρμογής του PML , με μπλε χρώμα η περίπτωση μη προσαρμογής. 76
Σχήμα 50: Αξονικές κατανομές των συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου για t = 80 ns. Με μαύρο χρώμα η περίπτωση προσαρμογής του PML , με μπλε χρώμα η περίπτωση μη προσαρμογής. 76
Σχήμα 51: Σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του μήκους κύματος μέσα στον κυματοδηγό για το ρυθμό TE_{10} με συχνότητα λειτουργίας f = 3.5 GHz και PML 10 κελιών. 77
Σχήμα 52: Σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του μήκους κύματος μέσα στον κυματοδηγό για το ρυθμό TE_{10} με συχνότητα λειτουργίας στην περιοχή [3.5 GHz, 6 GHz] και PML 10 κελιών. 78
Σχήμα 53:Σχετικό σφάλμα μήκος κύματος ρυθμού TE_{20} για συχνότητα λειτουργίας στην περιοχή [6.5 GHz, 8 GHz] και PML 10 κελιών. 78
Σχήμα 54: Σχετικό σφάλμα μήκος κύματος ρυθμού TE_{20} για συχνότητα λειτουργίας στην περιοχή [6.3 GHz, 6.7 GHz] και PML 10 κελιών. 79
Σχήμα 55: Αξονικές κατανομές του ρυθμού TE_{11} κάτω από την αποκοπή (f = 13 GHz). 81
Σχήμα 56: Αξονικές κατανομές του ρυθμού TE_{11} πάνω από την αποκοπή (f = 18 GHz). 81
Σχήμα 57: Σύγκριση των αξονικών κατανομών των E_ρ και E_φ πάνω και κάτω από την αποκοπή. 81
Σχήμα 58: Αξονικές κατανομές για διαδιδόμενο ρυθμό TE_{11} (f = 18 GHz). 82
Σχήμα 59: Αξονική κατανομή στο χώρο των κυματαριθμών για την E_ρ συνιστώσα. 83
Σχήμα 60: Η κατανομή της E_ρ στο πεδίο του χρόνου. 83
Σχήμα 61: Συχνοτικό φάσμα για την προσομοίωση του ρυθμού TE_{11}. 84
Σχήμα 62: Εγκάρσια κατανομή των (α) E_ρ και (β) E_φ συνιστωσών στο επίπεδο της διέγερσης για t = 10 ns για το ρυθμό TE_{11} 84
Σχήμα 63: Εγκάρσιες κατανομές του ηλεκτρικού πεδίου για z = 118 mm. 85
Σχήμα 64: Κατανομές του ηλεκτρικού πεδίου ως προς τη γωνία φ για z = 118 mm και ρ = 4 mm. 86
Σχήμα 65: Κατανομές του ηλεκτρικού πεδίου ως προς την ακτινική θέση ρ για z = 118 mm και φ = π/4. 86
Σχήμα 66: Εγκάρσιες κατανομές των (α) E_ρ, (β) E_φ και (γ) E_z. 88
Σχήμα 67: Αζιμουθιακές κατανομές για ρ = 4 mm και z = 50 mm των (α) E_ρ, (β) E_φ και (γ) E_z. 89
Σχήμα 68: Ακτινικές κατανομές για φ = π/6, t = 2 ns και z = 90 mm των (α) E_ρ, (β) E_φ και (γ) E_z. 89
Σχήμα 69: Αξονικές κατανομές των πεδιακών συνιστωσών για ρ = 4 mm, φ = π/6 και t = 2 ns (α) E_ρ, (β) E_φ και (γ) E_z. 89
Σχήμα 70: Φάσμα αξονικής κατανομής της E_ρ στο πεδίο των κυματαριθμών. 90
Σχήμα 71: Κατανομή της E_ρ στο πεδίο του χρόνου. 91
Σχήμα 72: Κατανομή της E_ρ στο πεδίο της συχνότητας. 91
Σχήμα 73: Χρονική εξέλιξη της E_ρ για ρ = 5 mm, φ = 0, z = 31.58 91
Σχήμα 74: Εγκάρσιες κατανομές των (α) E_ρ και (β) E_φ για t = 8 ns και z = 70 mm. 92

Σχήμα 75: Αξονικές κατανομές των (α) E_ρ, (β) E_φ και (γ) E_z για t = 10 ns. 93
Σχήμα 76: Εγκάρσια κατανομή της E_z για t = 8 ns και z = 57 mm. 93
Σχήμα 77: Φάσμα αξονικής κατανομής της E_ρ στο πεδίο των κυματαριθμών για t = 8 ns. 94
Σχήμα 78: (α) Χρονική εξέλιξη και (β) συχνοτικό φάσμα της E_ρ για z = 70 mm, ρ = 4.9 mm και φ = 0. 95
Σχήμα 79: Παράγωγος της συνάρτησης Bessel μηδενικής τάξης για 0 < ρ < 5 mm. 96
Σχήμα 80: Αξονική κατανομή της E_φ για t = 2 ns, ρ = 4.9 mm και φ = 0. 96
Σχήμα 81: Μετασχηματισμός Fourier της αξονικής κατανομής της E_φ. 96
Σχήμα 82: Εγκάρσια κατανομή της E_φ για t = 2 ns και z = 7.5 mm. 97
Σχήμα 83: Ακτινική κατανομή της E_φ για t = 2 ns, φ = 0 και z = 7.5 mm. 97
Σχήμα 84: Αζιμουθιακή κατανομή της E_φ για t = 2 ns, φ = 0 και z = 7.5 mm. 97
Σχήμα 85: Χρονική εξέλιξη της E_φ για ρ = 4.9 mm, φ = 0 και z = 7.5 mm. 98
Σχήμα 86: Συχνοτικό φάσμα της E_φ για ρ = 4.9 mm, φ = 0 και z = 7.5 mm. 98
Σχήμα 87: Συνολικός χρόνος υπολογισμών για τις τρεις μεθόδους αποφυγής της ιδιάζουσας συμπεριφοράς. 102

Εισαγωγή

Σημαντικό παράγοντα στον τομέα των τηλεπικοινωνιών αποτελούν οι τεχνολογίες ασύρματων ζεύξεων, που μεταξύ άλλων περιλαμβάνεται και η μικροκυματική τεχνολογία. Η μελέτη και η αξιολόγηση τέτοιων προβλημάτων είναι ολοένα και δυσκολότερη καθώς οι συχνότητες αυξάνουν αλλά και οι γεωμετρίες γίνονται πιο πολύπλοκες. Οι μέθοδοι, που ακολουθούνται για τη λύση τέτοιων προβλημάτων, είναι είτε αναλυτικές είτε αριθμητικές. Οι πρώτες δεν μπορούν να δώσουν αναλυτικές (κλειστές) λύσεις για πολύπλοκες γεωμετρίες, καταφεύγοντας έτσι σε σημαντικές απλοποιήσεις, ενώ οι δεύτερες αν και μπορούν να δώσουν με ικανοποιητική ακρίβεια λύση ακόμα και στο πιο περίπλοκο πρόβλημα, συνήθως απαιτούν σημαντικά μεγάλο υπολογιστικό χρόνο για τις αριθμητικές προσομοιώσεις.

Η περιοχή των μικροκυμάτων αποτελεί μια από τις πιο ενεργές ερευνητικά περιοχές. Σε αυτή τα μήκη κύματος είναι συγκρίσιμα με τις ίδιες τις διατάξεις και επομένως πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις Maxwell. Παράλληλα, η διείσδυση στην αγορά συστημάτων σε μικροκυματικές συχνότητες ενθαρρύνουν την ενασχόληση με την περιοχή αυτή.

Μέχρι πριν λίγα χρόνια η πολυπλοκότητα των συστημάτων αλλά και η έλλειψη υπολογιστικής ισχύος καθιστούσαν την επίλυση σύνθετων μικροκυματικών προβλημάτων δύσκολη. Η ανάπτυξη όμως της ολοκληρωμένης τεχνολογίας σε συνδυασμό με την παρουσία νέων αριθμητικών μεθόδων διευκόλυνε την μελέτη των προβλημάτων αυτών. Στις αριθμητικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν εντάσσονται η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, η μέθοδος των ροπών και η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών. Στην εργασία αυτή αναλύεται η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου για τη λύση των εξισώσεων Maxwell σε καρτεσιανή και κυλινδρική γεωμετρία. Αποτελεί τη συνέχεια της προπτυχιακής εργασίας του γράφοντος, με την παρούσα να εστιάζεται στην εφαρμογή απορροφητικών οριακών συνθηκών (τύπου Perfect Matched Layer, PML), αλλά και την επέκταση του αλγορίθμου του Yee σε κυλινδρικές γεωμετρίες.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια περιγραφή των εξισώσεων κυματοδήγησης καθώς και των συνθηκών κάτω από τις οποίες αυτή να επιτυγχάνεται. Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια περιγραφή του αλγορίθμου του Yee σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες, αντίστοιχα. Εξετάζονται όλες οι περιπτώσεις καθώς και εκείνες οι συνθήκες που βοηθούν στη μελέτη της ευστάθειας τέτοιων μεθόδων. Στο τέταρτο κεφάλαιο πραγματοποιείται μια μαθηματική περιγραφή του στρώματος PML για καρτεσιανή γεωμετρία και χρησιμοποιείται εκείνο το PML, που είναι καταλληλότερο για την εισαγωγή του στους αριθμητικούς κώδικες που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη των χαρακτηριστικών διάδοσης των H/M κυμάτων σε διατάξεις κυματοδήγησης.

Στο πέμπτο κεφάλαιο δίνονται τα στοιχεία των αριθμητικών κωδίκων που αναπτύχθηκαν, καθώς και τα αντίστοιχα διαγράμματα ροής, τόσο για τον κώδικα καρτεσιανής όσο και κυλινδρικής γεωμετρίας. Εξηγείται επίσης ο τρόπος παραλληλοποίησης των αλγορίθμων και πότε αυτός είναι εφικτός. Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα εκείνα μέσα από τα οποία γίνεται αντιληπτός ο τρόπος λειτουργίας του αλγορίθμου, τα προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν, ενώ γίνεται σύγκριση και με τα αντίστοιχα αναμενόμενα θεωρητικά. Γίνεται μια προσπάθεια κάλυψης των περισσότερων περιπτώσεων διέγερσης, συμπεριλαμβανομένης και αυτής της απευθείας διέγερσης με επιβολή ρυθμού κυματοδήγησης όσο και επιβολή συγκεκριμένης ρευματικής κατανομής. Οι προσομοιώσεις πραγματοποιούνται τόσο για τον καρτεσιανό όσο για τον κυλινδρικό κώδικα. Στο έβδομο κεφάλαιο περιγράφονται και συνοψίζονται όλα τα συμπεράσματα. Επιπλέον παρουσιάζονται πιθανές και κατάλληλες επεκτάσεις της μελέτης.

Κεφάλαιο 1
Εισαγωγικά Στοιχεία Κυματοδήγησης

1.1 Εξισώσεις Maxwell και λύσεις αυτών σε κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής

Οποιοδήποτε ηλεκτροδυναμικό σύστημα διέπεται από τις εξισώσεις του Maxwell, οι οποίες συνδέουν τις συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου [2]. Πρόκειται για ένα σύνολο τεσσάρων εξισώσεων, οι οποίες σε διαφορική μορφή δίνονται από τις σχέσεις:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.4}$$

όπου μ_0 και ε_0 είναι η μαγνητική διαπερατότητα και η ηλεκτρική επιτρεπτότητα του κενού, αντίστοιχα, και **J** η πυκνότητα ρεύματος.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, θεωρούμε ότι τα πεδία έχουν αρμονική εξάρτηση από το χρόνο και ότι έχουμε διάδοση στον άξονα *z*, οπότε μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x,y,z,t) &= \mathbf{e}(x,y)\exp(\pm\gamma z)\exp(j\omega t) \\ \mathbf{H}(x,y,z,t) &= \mathbf{h}(x,y)\exp(\pm\gamma z)\exp(j\omega t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Στο πεδίο της συχνότητας (δηλαδή χρησιμοποιώντας φασιθέτες – phasors), απουσία πηγών (μηδενική πυκνότητα ρεύματος και φορτίων) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $\partial/\partial t \equiv j\omega$, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν τις εξισώσεις Helmholtz, δηλαδή

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 + k_\perp^2\right)\mathbf{e}(x,y) &= 0 \\ \left(\nabla^2 + k_\perp^2\right)\mathbf{h}(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

όπου ο δεύτερος όρος μέσα στην παρένθεση είναι ο εγκάρσιος κυματάριθμος που ορίζεται ως

$$k_\perp^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 + \gamma^2 \tag{1.7}$$

και γ είναι η μιγαδική σταθερά διάδοσης.

Αναλύοντας τις εξισώσεις του Maxwell στις αντίστοιχες συνιστώσες, προκύπτουν δύο επιμέρους σύνολα εξισώσεων, τα οποία περιγράφουν το φαινόμενο της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής και δίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_z}{\partial y} + \gamma e_y &= -j\omega\mu_0 h_x & \frac{\partial h_z}{\partial y} + \gamma h_y &= j\omega\varepsilon_0 e_x \\ \frac{\partial e_z}{\partial x} + \gamma e_x &= j\omega\mu_0 h_y & \frac{\partial h_z}{\partial x} + \gamma h_x &= -j\omega\varepsilon_0 e_y \\ \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_0 h_z & \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon_0 e_z \end{aligned} \tag{1.8}$$

Με μια προσεκτικότερη ματιά, φαίνεται ότι τρεις εκ των συνιστωσών της σχέσης (1.8) δεν περιέχουν την αξονική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου ($e_z = 0$) και οι υπόλοιπες τρεις την αντίστοιχη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου ($h_z = 0$). Το είδος των πρώτων κυμάτων καλείται κύματα εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου ή Transverse Electric (TE) κύματα, ενώ το δεύτερο κύματα εγκάρσιου μαγνητικού πεδίου ή Transverse Magnetic (TM) κύματα.

Σε κάθε περίπτωση η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε να εμφανίζεται κυματοδήγηση αφορά τη συχνότητα λειτουργίας, η οποία θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από ένα συχνοτικό κατώφλι, τη συχνότητα αποκοπής. Η συχνότητα αυτή σε καρτεσιανές συντεταγμένες και για την περίπτωση του κυματοδηγού με κενό δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{1.9}$$

όπου a και b είναι οι διαστάσεις του κυματοδηγού στις δύο κατευθύνσεις x και y, αντίστοιχα, και m, n οι δείκτες που αφορούν τους τρόπους ταλάντωσης στις κατευθύνσεις x και y, αντίστοιχα. Οι τρόποι ταλάντωσης αναφέρονται και ως ρυθμοί κυματοδήγησης. Η συχνότητα αποκοπής συνδέεται και με τη μιγαδική σταθερά διάδοσης μέσω της σχέσης:

$$\gamma = \gamma_{mn} = \left(\left(\omega^2{}_{mn} - \omega^2\right)\varepsilon_0\mu_0\right)^{1/2} \tag{1.10}$$

Γνωρίζοντας ότι για την περίπτωση διάδοσης χωρίς εξασθένιση $\alpha = 0$ ισχύει:

$$\gamma_{mn} = j\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{1-(\omega_{mn}/\omega)^2} = j\beta_{mn} \tag{1.11}$$

μπορούν να υπολογιστούν η φασική ταχύτητα και η ταχύτητα ομάδας του διαδιδόμενου κύματος. Η φασική ταχύτητα ορίζεται ως ο λόγος της γωνιακής ταχύτητας προς τη σταθερά διάδοσης, δηλαδή

$$u_p = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = c\left(1-\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2\right)^{-1/2} \tag{1.12}$$

ενώ η αντίστοιχη σχέση για την ταχύτητα ομάδας ορίζεται ως η παράγωγος της γωνιακής ταχύτητας προς τη σταθερά διάδοσης, δηλαδή

$$u_g = \frac{d\omega}{d\beta_{mn}} = c\left(1-\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2\right)^{1/2} \tag{1.13}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι σχέσεις (1.9) - (1.13) ισχύουν ανεξάρτητα από τη γεωμετρία του προβλήματος καθώς συνδέουν κυματικές ποσότητες. Ο παράγοντας γεωμετρίας μπορεί να θεωρηθεί ότι εισάγεται στον υπολογισμό των συχνοτήτων αποκοπής, όπου αυτός συνδέεται άμεσα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του εκάστοτε κυματοδηγού.

1.1.1 Κύματα TM

Για τους TM ρυθμούς και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο επίλυσης χωριζόμενων μεταβλητών, οι πεδιακές συνιστώσες δίνονται από το σύνολο εξισώσεων:

$$e_z = E_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y), \qquad e_x = -\frac{j\beta_{mn}}{k_\perp^2} E_0 k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y),$$

$$e_y = -\frac{j\beta_{mn}}{k_\perp^2} E_0 k_y \sin(k_x x)\cos(k_y y), \quad h_z = 0, \tag{1.14}$$

$$h_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_\perp^2} E_0 k_y \sin(k_x x)\cos(k_y y), \qquad h_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_\perp^2} E_0 k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y)$$

Η κυματική αντίσταση μπορεί να υπολογιστεί ως ο λόγος των εγκάρσιων συνιστωσών του ηλεκτρικού προς το μαγνητικό πεδίο, κατ' αναλογία με τον νόμο του Ohm, $R = V/I$. Ειδικότερα, η κυματική αντίσταση για ρυθμούς TM δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\varepsilon_0} \tag{1.15}$$

1.1.2 Κύματα TE

Αντίστοιχα, για τους ρυθμούς TE οι πεδιακές συνιστώσες είναι:

$$e_x = \frac{j\omega\mu_0}{k_\perp^2} k_y E_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y), \quad e_y = -\frac{j\omega\mu_0}{k_\perp^2} k_x \sin(k_x x)\cos(k_y y),$$

$$e_z = 0, \quad h_x = -\frac{j\beta_{mn}}{k_\perp^2} E_0 k_x \sin(k_x x)\cos(k_y y), \tag{1.16}$$

$$h_y = \frac{j\beta_{mn}}{k_\perp^2} E_0 k_y \sin(k_x x)\cos(k_y y), \quad h_z = E_0 k_x \cos(k_x x)\cos(k_y y)$$

Οι ποσότητες k_x και k_y είναι οι εγκάρσιοι κυματάριθμοι στην κατεύθυνση x και y, αντίστοιχα, και δίνονται από τις σχέσεις:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \tag{1.17}$$

Σε αντιστοιχία με την κυματική αντίσταση για τους ρυθμούς TM, στους TE δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{TE} = -\frac{E_y}{H_y} = \frac{\omega\mu_0}{\beta_{mn}} \tag{1.18}$$

1.2 Λύση εξισώσεων Maxwell σε κυματοδηγό κυλινδρικής διατομής

Στα προβλήματα, που παρουσιάζουν κυλινδρική συμμετρία, χρησιμοποιούνται κυλινδρικές συντεταγμένες, στις οποίες οι τελεστές της απόκλισης και του στροβιλισμού είναι:

$$\nabla \cdot A \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.19}$$

και

$$\nabla \times A = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho A_\varphi\right)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{z} \tag{1.20}$$

Θεωρώντας αρμονικά μεταβαλλόμενο πεδίο, οι πεδιακές συνιστώσες στο πεδίο της συχνότητας έχουν τη μορφή:

$$\mathbf{E}\left(\rho,\varphi,z\right) = \mathbf{e}\left(\rho,\varphi\right)e^{-\gamma z}, \quad \mathbf{H}\left(\rho,\varphi,z\right) = \mathbf{h}\left(\rho,\varphi\right)e^{-\gamma z} \tag{1.21}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.21) στις (1.1)-(1.4) και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των τελεστών της απόκλισης και του στροβιλισμού, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial e_z}{\partial\varphi} + \gamma\rho e_\varphi\right) = -j\omega\mu_0 h_\rho \tag{1.22}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial h_z}{\partial\varphi} + \gamma\rho h_\varphi\right) = j\omega\varepsilon_0 e_\rho \tag{1.23}$$

$$-\gamma e_\rho - \frac{\partial e_z}{\partial\rho} = -j\omega\mu_0 h_\varphi \tag{1.24}$$

$$-\gamma h_\rho - \frac{\partial h_z}{\partial\rho} = j\omega\varepsilon_0 e_\varphi \tag{1.25}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho e_\varphi\right)}{\partial\rho} - \frac{\partial e_\rho}{\partial\varphi}\right) = -j\omega\mu_0 h_z \tag{1.26}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho h_\varphi\right)}{\partial\rho} - \frac{\partial h_\rho}{\partial\varphi}\right) = j\omega\mu_0 e_z \tag{1.27}$$

Σημειώνεται ότι λόγω της εξάρτησης των πεδίων από την αξονική απόσταση, ισχύει ο μετασχηματισμός $\partial/\partial z \equiv -\gamma$.

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν οι σχέσεις:

$$e_\rho = -\frac{1}{k_\perp^2}\left(\gamma\frac{\partial e_z}{\partial\rho} + \frac{j\omega\mu_0}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial\varphi}\right) \tag{1.28}$$

$$e_\varphi = -\frac{1}{k_\perp^2}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial e_z}{\partial\varphi} - j\omega\mu_0\frac{\partial h_z}{\partial\rho}\right) \tag{1.29}$$

$$h_\rho = -\frac{1}{k_\perp^2}\left(\gamma\frac{\partial h_z}{\partial\rho} - \frac{j\omega\varepsilon_0}{\rho}\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial\varphi}\right) \tag{1.30}$$

$$h_\varphi = -\frac{1}{k_\perp^2}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial\varphi} + j\omega\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial\rho}\right) \tag{1.31}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.28) και (1.29) στη (1.26) , αλλά και τις (1.30) και (1.31) στη (1.27) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\left[\nabla^2_{\rho,\varphi} + k_\perp^2\right] e_z(\rho,\varphi) = 0 \tag{1.32}$$

$$\left[\nabla^2_{\rho,\varphi} + k_\perp^2\right] h_z(\rho,\varphi) = 0 \tag{1.33}$$

Λόγω της απαίτησης της περιοδικότητας της λύσης ως προς τη γωνία φ, τα πεδία e_z και h_z θα πρέπει να έχουν αρμονική εξάρτηση από αυτή. Έτσι, απαιτείται τα πεδία να έχουν τη συμπεριφορά της μορφής

$$F(\rho,\varphi) = R(\rho)\exp(\pm jm\varphi) \tag{1.34}$$

Εισάγοντας την απαίτηση αυτή στη σχέση (1.32) ή (1.33), προκύπτει :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left[k_\perp^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right]R = 0 \tag{1.35}$$

Η εξίσωση (1.35) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση Bessel με λύσεις εξαρτώμενες από το πρόσημο της ποσότητας $k_\perp^2$. Για να έχει η εξίσωση αυτή περιοδικές λύσεις, όπως απαιτεί το φυσικό πρόβλημα, θα πρέπει η ποσότητα $k_\perp^2$ να είναι θετική. Τότε, τα αξονικά πεδία, στη γενικότερη μορφή τους θα παρουσιάζουν συμπεριφορά που δίνεται από τη σχέση:

$$R(\rho) = AJ_m(k_\perp\rho) + BY_m(k_\perp\rho) \tag{1.36}$$

όπου A και B είναι σταθερές και J_m και Y_m είναι οι συναρτήσεις Bessel και Neumann, αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί πως οι συναρτήσεις Neumann απειρίζονται καθώς το ρ τείνει στο μηδέν. Αυτός ο περιορισμός λαμβάνεται υπόψη σε προβλήματα όπου επιθυμείται ο υπολογισμός των πεδίων για $\rho = 0$, όπως ένας κενός κυματοδηγός, μηδενίζοντας αντίστοιχα τις σταθερές B. Στην παρούσα ανάλυση θεωρείται κούφιος κυματοδηγός, οπότε $B = 0$.

1.2.1 Κύματα TM

Για τα κύματα TM ισχύει $h_z = 0$, $e_z \neq 0$, επομένως η αξονική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει:

$$e_z(\rho,\varphi) = E_0 J_m(k_\perp\rho)\exp(jm\varphi) \tag{1.37}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (1.37) στις (1.28)-(1.31) προκύπτουν οι αντίστοιχες εγκάρσιες πεδιακές συνιστώσες:

$$e_\rho(\rho,\varphi) = \frac{-j\beta_{mn}}{k_\perp} E_0 J'_m(k_\perp\rho)\exp(jm\varphi) \tag{1.38}$$

$$e_\varphi(\rho,\varphi) = \frac{m\beta_{mn}}{k_\perp^2\rho} E_0 J_m(k_\perp\rho)\exp(jm\varphi) \tag{1.39}$$

$$h_\rho(\rho,\varphi) = -\frac{m\omega\varepsilon_0}{k_\perp^2\rho} E_0 J_m(k_\perp\rho)\exp(jm\varphi) \tag{1.40}$$

$$h_\varphi(\rho,\varphi) = \frac{-j\omega\varepsilon_0}{k_\perp} E_0 J'_m(k_\perp\rho)\exp(jm\varphi) \tag{1.41}$$

Λόγω των οριακών συνθηκών, το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο στο τοίχωμα του κυματοδηγού με ακτίνα a θα πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν. Αυτό οδηγεί στη σχέση:

$$e_z(\alpha,\varphi)=0 \Rightarrow J_m\left(k_\perp a\right)=0 \tag{1.42}$$

Η συνάρτηση Bessel μηδενίζεται σε ρίζες που χαρακτηρίζονται από δύο δείκτες, ένα για την τάξη της ίδιας της συνάρτησης (δείκτης m) και ένα για την τάξη της ρίζας (δείκτης n). Οι ρίζες αυτές για συντομία συμβολίζονται ως t_{mn}. Επομένως, θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$k_\perp a = t_{mn} \tag{1.43}$$

Ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων, για τη σταθερά διάδοσης ισχύει η σχέση:

$$\beta_{mn}=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k_\perp^2} \tag{1.44}$$

Όμως από τη σχέση (1.43) ο εγκάρσιος κυματάριθμος είναι:

$$k_{\perp,mn}^2=\left(\frac{t_{mn}}{a}\right)^2 \tag{1.45}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (1.45) στη (1.44), καθώς και για μηδενισμό της σταθεράς διάδοσης (συνθήκη αποκοπής), προκύπτει:

$$\frac{t_{mn}}{a}=\frac{\omega_c}{c} \tag{1.46}$$

και λύνοντας ως προς τη συχνότητα αποκοπής ω_c, αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_c = c\frac{t_{mn}}{a} \tag{1.47}$$

Η κυματική αντίσταση αποτελεί το λόγο της εγκάρσιας συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου προς την εγκάρσια συνιστώσα του μαγνητικού και για ρυθμούς TM_{mn} δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{mn}^{TM}=\frac{e_\rho}{h_\varphi}=-\frac{e_\varphi}{h_\rho}=\frac{\beta_{mn}}{\omega\varepsilon_0} \tag{1.48}$$

1.2.2 Κύματα TE

Ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό, μπορούν με σχετική ευκολία να υπολογιστούν και οι συνιστώσες των TE ρυθμών, στους οποίους ισχύει $e_z = 0$, $h_z \neq 0$ και επομένως η αξονική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$h_z(\rho,\varphi)=H_0 J_m\left(k_\perp\rho\right)\exp\left(jm\varphi\right) \tag{1.49}$$

όπου H_0 είναι μια σταθερά. Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.49) στις (1.28)-(1.31) προκύπτουν οι εγκάρσιες πεδιακές συνιστώσες:

$$e_\rho(\rho,\varphi)=\frac{m\omega\mu_0}{k_\perp^2\rho}H_0 J_m\left(k_\perp\rho\right)\exp\left(jm\varphi\right) \tag{1.50}$$

$$e_{\varphi}(\rho,\varphi) = \frac{j\omega\mu_0}{k_{\perp}} H_0 J'_m\left(k_{\perp}\rho\right)\exp\left(jm\varphi\right) \tag{1.51}$$

$$h_{\rho}(\rho,\varphi) = -\frac{j\beta_{mn}}{k_{\perp}} H_0 J'_m\left(k_{\perp}\rho\right)\exp\left(jm\varphi\right) \tag{1.52}$$

$$h_{\varphi}(\rho,\varphi) = \frac{m\beta_{mn}}{k_{\perp}^2\rho} H_0 J_m\left(k_{\perp}\rho\right)\exp\left(jm\varphi\right) \tag{1.53}$$

Με εφαρμογή της οριακής συνθήκης μηδενισμού των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου στα τοιχώματα μπορεί να υπολογιστεί η συχνότητα αποκοπής των ρυθμών αυτών. Έτσι πρέπει να ισχύει

$$e_z(\alpha,\varphi) = 0 \Rightarrow J'_m\left(k_{\perp}a\right) = 0 \tag{1.54}$$

Η σχέση (1.54) ισχύει όταν το όρισμα της παραγώγου της συνάρτησης Bessel ισοδυναμεί με μια από τις ρίζες της s_{mn}, όπου m η τάξη της συνάρτησης Bessel και n η τάξη του μηδενισμού αυτής. Με όμοιο συλλογισμό όπως και στην περίπτωση των TM ρυθμών, οι συχνότητες αποκοπής για τους TE ρυθμούς θα δίνονται από τη σχέση

$$\omega_c = c\frac{s_{mn}}{a} \tag{1.55}$$

όπου α η ακτίνα του κυματοδηγού και s_{mn} η νιοστή ρίζα της παραγώγου της m-ιοστής τάξης συνάρτησης Bessel.

Σε αντιστοιχία με την παράγραφο 1.2.1, η κυματική αντίσταση για τους ρυθμούς TE_{mn} δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{mn}^{TE} = \frac{e_{\rho}}{h_{\varphi}} = -\frac{e_{\varphi}}{h_{\rho}} = \frac{\omega\mu_0}{\beta_{mn}} \tag{1.56}$$

Κεφάλαιο 2
Ο Αλγόριθμος του Yee σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

2.1 Βασικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες

Σημαντικό σταθμό στην εξάπλωση των αριθμητικών μεθόδων στην επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων αποτέλεσε ο αλγόριθμος του Yee. Πρόκειται για διαδικασία, η οποία χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χώρου αλλά και του χρόνου, καταφέρνει να επιλύσει τις εξισώσεις του Maxwell σε διάφορες γεωμετρίες. Βασική αρχή του αλγορίθμου είναι ο χωρισμός του χώρου και του χρόνου σε διακριτά, πεπερασμένου αριθμού, τμήματα (για το χώρο) και χρονικής διάρκειας βήματα (για το χρόνο). Γίνεται χρήση μόνο δύο εκ των τεσσάρων εξισώσεων του Maxwell και ειδικότερα αυτών που περιγράφουν το στροβιλισμό των πεδίων:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{2.1}$$

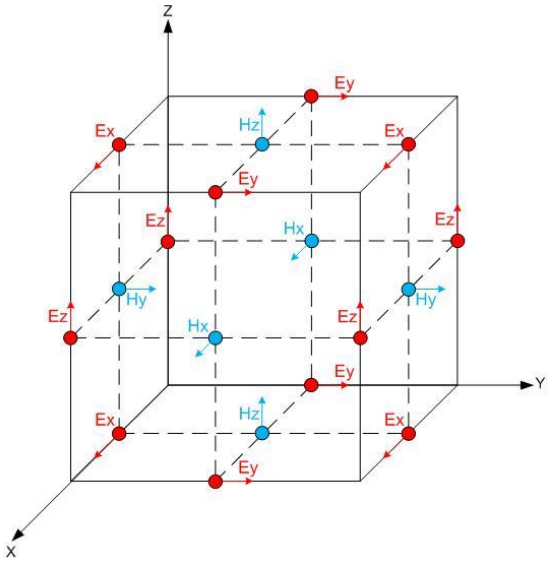
$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.2}$$

Αναλύοντας το στροβιλισμό σε συνιστώσες στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial e_z}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \right) \hat{k} \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \hat{k} \tag{2.4}$$

Αν οι παραπάνω πεδιακές συνιστώσες θεωρηθούν ότι βρίσκονται σε συγκεκριμένα σημεία του χώρου (κόμβοι), προκειμένου να ικανοποιούνται οι εξισώσεις του Maxwell προκύπτει ότι αυτά θα πρέπει να είναι διατεταγμένα με κατάλληλο τρόπο σε ένα κύβο. Ο κύβος αυτός καλείται μοναδιαίο κελί του Yee και έχει διαστάσεις *δx, δy* και *δz* σε κάθε κατεύθυνση. Τα *δx, δy* και *δz* αποτελούν τα βήματα διακριτοποίησης των εξισώσεων. Ο αλγόριθμος, που προκύπτει από αυτή τη διακριτοποίηση, καταφέρνει να επιλύσει τις εξισώσεις του Maxwell και για το μαγνητικό και για το ηλεκτρικό πεδίο, ταυτόχρονα, κάνοντας χρήση μόνο των εξισώσεων του στροβιλισμού παρά των εξισώσεων του κάθε πεδίου ξεχωριστά σε συνδυασμό με την κυματική εξίσωση. Ο αλγόριθμος είναι ανάλογος με την ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων Maxwell, όπου εφαρμόζονται και οι οριακές συνθήκες στις εκάστοτε διεπιφάνειες [3], [4]. Αυτό μεταφράζεται στις διατεταγμένες θέσεις της κάθε πεδιακής συνιστώσας στο κελί του Yee, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Κελί του Yee [5].

Το κελί προκύπτει αν κάθε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου **E** περικλείεται από 4 συνιστώσες του μαγνητικού και αντίστοιχα κάθε συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου να περικλείεται από 4 συνιστώσες του ηλεκτρικού. Με αυτό τον τρόπο ικανοποιούνται οι εξισώσεις του στροβιλισμού (εξισώσεις (2.1) και (2.2)). Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του αλγορίθμου του Yee αποτελεί η ταυτόχρονη προσομοίωση τόσο της τοπικής διαφορικής μορφής των εξισώσεων Maxwell όσο και της μακροσκοπικής ολοκληρωτικής μορφής των εξισώσεων αυτών. Με αυτό τον τρόπο οριακές συνθήκες καθώς και ιδιάζοντα σημεία στον υπολογιστικό χώρο προσομοιώνονται με σχετική απλότητα.

Αριθμητικά, οι εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών, που προκύπτουν από την διακριτοποίηση, είναι κεντρικές υπό την έννοια ότι για τον υπολογισμό του πεδίου σε ένα σημείο χρειάζονται οι τιμές του αντίστοιχου πεδίου σε απόσταση ±Δ (όπου Δ το αντίστοιχο χωρικό βήμα). Επιπλέον, οι διακριτοποιημένες εκφράσεις παρουσιάζουν ακρίβεια δεύτερης τάξης. Οι θέσεις των πεδίων **E** και **H** στο μοναδιαίο κελί του Yee καθώς και οι κεντρικές πεπερασμένες διαφορές (όπως αναφέρθηκαν προηγουμένως) έμμεσα επιβάλλουν τους δύο νόμους του Gauss, για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Έτσι, το υπολογιστικό χωρίο, που είναι κατασκευασμένο με βάση το κελί του Yee και με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν ηλεκτρικά και μαγνητικά φορτία, παρουσιάζει συνολική απόκλιση ίση με μηδέν.

Παράλληλα με τις κεντρικές πεπερασμένες διαφορές στο πεδίο του χώρου, οι αντίστοιχες διαφορές στο πεδίο του χρόνου παρουσιάζουν την διάταξη *leapfrog*. Πρόκειται για διάταξη των διαφορών, στην οποία χρησιμοποιούνται οι αντίστοιχες τιμές από το προηγούμενο χρονικό βήμα. Έτσι, σε κάθε χρονική στιγμή χρειάζεται να υπάρχουν διαθέσιμες μόνο οι τιμές των πεδίων στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Επιπλέον, η συγκεκριμένη χρονική διάταξη είναι άμεση και επιτρέπει την ταυτόχρονη επίλυση εξισώσεων και αναστροφή πινάκων, όπου αυτό είναι αναγκαίο. Παράλληλα, οι διαφορετικές διεπιφάνειες περιγράφονται χωρίς κάποιες ιδιαίτερες συνθήκες, παρά μόνο με αλλαγή των εκάστοτε διηλεκτρικών και μαγνητικών σταθερών. Αυτό οδηγεί σε μια κλιμακωτή προσέγγιση των διεπιφανειών καθώς και της εσωτερικής γεωμετρίας κάθε διάταξης, η οποία καθορίζεται αποκλειστικά από τα χωρικά βήματα (*spatial steps*).

Οι οριακές συνθήκες που εφαρμόζονται και επιβάλλονται είναι τύπου Dirichlet. Με αυτό τον τρόπο το ηλεκτρικό πεδίο τίθεται ίσο με μηδέν εκτός του υπολογιστικού χωρίου,

που ισοδυναμεί με οριακές συνθήκες τέλειου αγωγού (Perfect Electric Conductor, PEC). Αυτό έχει σαν συνέπεια την ύπαρξη ανακλάσεων σε όλες τις επιφάνειες και τελικά τη συμπεριφορά του κυματοδηγού, ή της εκάστοτε διάταξης, ως μιας κλειστής κοιλότητας, αφού τα κύματα που διαδίδονται είναι υπέρθεση οδευόντων και ανακλώμενων κυμάτων [6].

Μειονέκτημα της περιγραφής αυτής είναι η μη ταυτόχρονη γνώση των τιμών του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό, αφού οι πεδιακές συνιστώσες είναι διατεταγμένες με συγκεκριμένο τρόπο στον χώρο, αλλά ποτέ δεν είναι γνωστές στον ίδιο κόμβο ταυτόχρονα. Όμως το μικρό χωρικό βήμα που εφαρμόζεται επιτρέπει πρακτικά τη σχεδόν ταυτόχρονη γνώση των τιμών όλων των πεδίων σε κάθε σημείο του χώρου. Αν αυτό δεν είναι δυνατόν, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι παρεμβολής (*interpolation methods*), όπου η ζητούμενη τιμή προκύπτει από τη σχέση που συνδέει τις τιμές των πεδίων σε προηγούμενο και επόμενο κελί, σε σχέση πάντα με τη ζητούμενη θέση.

2.2 Διακριτοποίηση εξισώσεων

Βασική αρχή για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων του Maxwell είναι η θεώρηση ότι διαδοχικές συνιστώσες του ίδιου πεδίου απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με το εκάστοτε χωρικό βήμα. Έτσι, με βάση το γεγονός ότι κάθε συνιστώσα περικλείεται από 4 συνιστώσες του δυϊκού πεδίου, κάποιες από αυτές θα εμφανίζονται στο μισό αυτού του χωρικού βήματος. Επιπλέον, διαδοχικές χρονικές αναβαθμίσεις των ίδιων πεδίων θα απέχουν μεταξύ τους χρόνο ίσο με τη χρονική διαμέριση *δt*. Όμως, επειδή τα διαφορετικά πεδία υπολογίζονται διαδοχικά, θα υπάρχουν πεδία τα οποία είναι υπολογισμένα στο μισό αυτής της χρονικής διαμέρισης.

Θεωρώντας την ύπαρξη αγωγιμότητας καθώς και την αλλαγή των διηλεκτρικών και μαγνητικών σταθερών σε όλο το μέσο, οι εξισώσεις του Maxwell τροποποιούνται και γίνονται:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{2.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \tag{2.6}$$

Έτσι, η αγωγιμότητα καθώς και η διηλεκτρική σταθερά θα εμφανίζονται στα ίδια σημεία με την εκάστοτε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου και κατ' αντιστοιχία η μαγνητική διαπερατότητα θα εμφανίζεται στα ίδια σημεία με τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου. Οι διακριτοποιημένες πλέον συνιστώσες, όπως εμφανίζονται στο πλέγμα, δίνονται από τις σχέσεις [3]:

$$\begin{aligned} E_x^{\,n+1}\big|_{i+1/2,j,k} &= \left(1 - \frac{\sigma\big|_{i+1/2,j,k}}{\varepsilon\big|_{i+1/2,j,k}}\right) \cdot E_x^{\,n}\big|_{i+1/2,j,k} \\ &+ \frac{\delta t}{\varepsilon\big|_{i+1/2,j,k}} \left[\frac{H_z^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j+1/2,k} - H_z^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j-1/2,k}}{\delta y} - \frac{H_y^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j,k+1/2} - H_y^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j,k-1/2}}{\delta z} \right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$E_y^{\,n+1}\big|_{i,j+1/2,k} = \left(1 - \frac{\sigma\big|_{i,j+1/2,k}}{\varepsilon\big|_{i,j+1/2,k}}\right) \cdot E_y^{\,n}\big|_{i,j+1/2,k} + \frac{\delta t}{\varepsilon\big|_{i,j+1/2,k}} \left[\frac{H_x^{\,n+1/2}\big|_{i,j+1/2,k+1/2} - H_x^{\,n+1/2}\big|_{i,j+1/2,k-1/2}}{\delta z} - \frac{H_z^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j+1/2,k} - H_z^{\,n+1/2}\big|_{i-1/2,j+1/2,k}}{\delta x} \right] \tag{2.8}$$

$$E_z^{\,n+1}\big|_{i,j,k+1/2} = \left(1 - \frac{\sigma\big|_{i,j,k+1/2}}{\varepsilon\big|_{i,j,k+1/2}}\right) \cdot E_z^{\,n}\big|_{i,j,k+1/2} + \frac{\delta t}{\varepsilon\big|_{i,j,k+1/2}} \left[\frac{H_y^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j,k+1/2} - H_y^{\,n+1/2}\big|_{i-1/2,j,k+1/2}}{\delta x} - \frac{H_x^{\,n+1/2}\big|_{i,j+1/2,k+1/2} - H_x^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}}{\delta y} \right] \tag{2.9}$$

$$H_x^{\,n+1/2}\big|_{i,j+1/2,k+1/2} = H_x^{\,n+1/2}\big|_{i,j+1/2,k+1/2} - \frac{\delta t}{\mu\big|_{i,j+1/2,k+1/2}} \left[\frac{E_y^{\,n}\big|_{i,j+1/2,k+1} - E_y^{\,n}\big|_{i,j+1/2,k}}{\delta z} - \frac{E_z^{\,n}\big|_{i,j+1,k+1/2} - E_z^{\,n}\big|_{i,j,k+1/2}}{\delta y} \right] \tag{2.10}$$

$$H_y^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j,k+1/2} = H_y^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j,k+1/2} - \frac{\delta t}{\mu\big|_{i+1/2,j,k+1/2}} \left[\frac{E_z^{\,n}\big|_{i+1,j,k+1/2} - E_z^{\,n}\big|_{i,j,k+1/2}}{\delta x} - \frac{E_x^{\,n}\big|_{i+1/2,j,k+1} - E_x^{\,n}\big|_{i+1/2,j,k}}{\delta z} \right] \tag{2.11}$$

$$H_z^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j+1/2,k} = H_z^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j+1/2,k} - \frac{\delta t}{\mu\big|_{i+1/2,j+1/2,k}} \left[\frac{E_x^{\,n}\big|_{i+1/2,j+1,k} - E_x^{\,n}\big|_{i+1/2,j,k}}{\delta y} - \frac{E_y^{\,n}\big|_{i+1,j+1/2,k} - E_y^{\,n}\big|_{i,j+1/2,k}}{\delta x} \right] \tag{2.12}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου εμφανίζονται ρεύματα ως πηγές, οι εξισώσεις του Maxwell τροποποιούνται κατάλληλα. Ειδικότερα η σχέση (2.6) γίνεται:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{source} \tag{2.13}$$

Οι διακριτοποιημένες σχέσεις (2.7)-(2.9) τροποποιούνται τότε στις παρακάτω:

$$E_x^{\,n+1}\big|_{i+1/2,j,k} = \left(1 - \frac{\sigma\big|_{i+1/2,j,k}}{\varepsilon\big|_{i+1/2,j,k}}\right) \cdot E_x^{\,n}\big|_{i+1/2,j,k} + J_x^{\,n+1}\big|_{i+1/2,j,k} + \frac{\delta t}{\varepsilon\big|_{i+1/2,j,k}} \left[\frac{H_z^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j+1/2,k} - H_z^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j-1/2,k}}{\delta y} - \frac{H_y^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j,k+1/2} - H_y^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j,k-1/2}}{\delta z} \right] \tag{2.14}$$

$$E_y^{\,n+1}\big|_{i,j+1/2,k} = \left(1 - \frac{\sigma\big|_{i,j+1/2,k}}{\varepsilon\big|_{i,j+1/2,k}}\right) \cdot E_y^{\,n}\big|_{i,j+1/2,k} + J_y^{\,n+1}\big|_{i,j+1/2,k} + \frac{\delta t}{\varepsilon\big|_{i,j+1/2,k}} \left[\frac{H_x^{\,n+1/2}\big|_{i,j+1/2,k+1/2} - H_x^{\,n+1/2}\big|_{i,j+1/2,k-1/2}}{\delta z} - \frac{H_z^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j+1/2,k} - H_z^{\,n+1/2}\big|_{i-1/2,j+1/2,k}}{\delta x} \right] \tag{2.15}$$

$$E_z^{\,n+1}\big|_{i,j,k+1/2} = \left(1 - \frac{\sigma|_{i,j,k+1/2}}{\varepsilon|_{i,j,k+1/2}}\right) \cdot E_z^{\,n}\big|_{i,j,k+1/2} + J_z^{\,n+1}\big|_{i,j,k+1/2}$$
$$+ \frac{\delta t}{\varepsilon|_{i,j,k+1/2}} \left[\frac{H_y^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j,k+1/2} - H_y^{\,n+1/2}\big|_{i-1/2,j,k+1/2}}{\delta x} - \frac{H_x^{\,n+1/2}\big|_{i,j+1/2,k+1/2} - H_x^{\,n+1/2}\big|_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}}{\delta y} \right]$$

(2.16)

Οι εκάστοτε συνιστώσες της ρευματικής κατανομής βρίσκονται τοποθετημένες (στο κελί του Yee) στις ίδιες θέσεις με τις αντίστοιχες συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου. Αυτό το γεγονός απλοποιεί ιδιαίτερα τη διαδικασία διαχείρισης και αποθήκευσης αυτών, όταν ο αλγόριθμος μετατρέπεται σε αριθμητικό κώδικα.

2.3 Κριτήρια σύγκλισης

Προκειμένου ο αλγόριθμος να είναι αποδοτικός και να παρουσιάζει μια σταθερή συμπεριφορά θα πρέπει να εφαρμοστούν κάποια κριτήρια σύγκλισης και σταθερότητας. Το κυριότερο από αυτά είναι ο σωστός υπολογισμός του χρονικού βήματος που θα χρησιμοποιηθεί. Ενώ φαίνεται πως καθώς το χρονικό βήμα μειώνεται, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων αυξάνεται, κάτι τέτοιο είναι αναληθές, καθώς υπάρχει ένα κατώφλι κάτω από το οποίο, για μια δεδομένη χωρική διαμέριση, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων δεν επηρεάζεται. Το απλούστερο κριτήριο για τον υπολογισμό της μέγιστης χρονικής διαμέρισης, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί, καλείται κριτήριο σταθερότητας Courant – Lewy και για ομογενές και ισότροπο μέσο δίνεται από τη σχέση [7]:

$$\delta t < \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta z}\right)^2}} \tag{2.17}$$

όπου *c* είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και *δx*, *δy* και *δz* οι χωρικές διαμερίσεις σε κάθε κατεύθυνση. Πρακτικά πρόκειται για το χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει το κύμα τη διαγώνιο του μοναδιαίου κελιού του Yee.

Σε διατάξεις όπου εμφανίζονται περιοχές με αρκετές διαφορετικές διηλεκτρικές σταθερές, η παραπάνω σχέση θα πρέπει να τροποποιηθεί. Το μήκος κάθε χωρικής διαμέρισης καθορίζεται ουσιαστικά από την ακρίβεια που επιθυμεί ο χρήστης, η οποία εκφράζεται από τα κελιά ανά μήκος κύματος. Σε περιπτώσεις όπου η διηλεκτρική σταθερά μεταβάλλεται, μεταβάλλεται και το μήκος κύματος στις αντίστοιχες περιοχές. Έτσι, για να μπορούν να περιγραφούν αυτές οι περιοχές θα πρέπει τα κελιά να έχουν τέτοιες διαστάσεις ώστε να περιγράφονται οι αλλαγές των τιμών των πεδίων με ικανοποιητική ακρίβεια. Συνεπώς, θα πρέπει να γίνει χρήση του μικρότερου μήκους κύματος, δηλαδή οι χωρικές διαμερίσεις να υπολογιστούν με βάση το μήκος κύματος που εμφανίζεται στην περιοχή εκείνη με τη μεγαλύτερη διηλεκτρική σταθερά.

Στην ιδανική περίπτωση, όπου γίνεται χρήση της ταχύτητας διάδοσης στο μέσο με τη μεγαλύτερη διηλεκτρική σταθερά στη σχέση υπολογισμού του χρονικού βήματος καθώς και της ίδιας διηλεκτρικής σταθεράς στον υπολογισμό των χωρικών διαμερίσεων, το χρονικό βήμα δε θα έπρεπε να μεταβάλλεται σε σχέση με την τιμή που θα είχε αν δεν υπήρχε διηλεκτρικό. Αυτό προκύπτει αν τεθεί

$$\delta x' = \delta y' = \delta z' = \frac{\lambda_m}{cpw} \tag{2.18}$$

όπου λ_m το μήκος κύματος στην περιοχή με τη μεγαλύτερη διηλεκτρική σταθερά και *cpw* ο αριθμός των κελιών ανά μικρότερο μήκος κύματος. Είναι γνωστό ότι:

$$\lambda_m = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{2.19}$$

όπου λ_0 και ε_r είναι το μήκος κύματος στο κενό και η σχετική διηλεκτρική σταθερά του μέσου, αντίστοιχα. Έτσι:

$$\delta x' = \delta y' = \delta z' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{\lambda_0}{cpw} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \delta x \tag{2.20}$$

οι νέες διαμερίσεις, με βάση το μικρότερο μήκος κύματος, στο χώρο. Επιπλέον

$$u_m = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{2.21}$$

είναι η ταχύτητα του κύματος στο μέσο με σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_r. Αν αντικατασταθούν οι τιμές αυτές στη σχέση (2.17), το αντίστοιχο χρονικό βήμα θα είναι:

$$\delta t' < \frac{1}{u_m} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\delta x'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta y'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta z'}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta z}\right)^2}} = \delta t \tag{2.22}$$

Εξαιτίας όμως του γεγονότος ότι οι διατάξεις που προσομοιώνονται δεν μπορούν να περιγραφούν ως γινόμενο ενός ακεραίου πλήθους κελιών με το μήκος κάθε κελιού, λόγω των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης σε έναν πραγματικό κώδικα, η σχέση (2.22) δεν ισχύει με αποτέλεσμα να αυξάνεται εκθετικά το αριθμητικό αυτό σφάλμα και να εμφανίζονται σφάλματα στα αριθμητικά αποτελέσματα. Επιπλέον, η παραπάνω σχέση απαιτεί το μέσο να είναι ομογενές, δηλαδή να εμφανίζεται παντού η ίδια ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Επειδή όμως σε πραγματικά προβλήματα αυτό δεν ισχύει πάντα, οι ταχύτητες διάδοσης μεταβάλλονται από περιοχή σε περιοχή με διαφορετικές διηλεκτρικές σταθερές.

Ένας συστηματικός τρόπος να αποφευχθούν τέτοιας φύσης σφάλματα είναι η παραδοχή ότι δε θα πρέπει να διανύεται σε χρόνο ίσο με *δt* απόσταση μεγαλύτερη από τη διαγώνιο του κελιού του Yee. Πράγματι, όταν το κελί του Yee καθώς και ο χρόνος *δt* έχουν υπολογιστεί με βάση το μικρότερο μήκος κύματος και άρα τη μικρότερη ταχύτητα διάδοσης, στις περιοχές με μεγαλύτερες ταχύτητες διάδοσης, σε χρόνο ίσο με *δt*, το κύμα θα έχει διαδοθεί σε απόσταση μεγαλύτερη της διαγωνίου αυτής. Με χρήση της ταχύτητας του φωτός στο κενό αλλά και των διαστάσεων του πλέγματος με βάση τη ταχύτητα στο υλικό με τη μεγαλύτερη διηλεκτρική σταθερά μπορούν να περιγραφούν και οι γρήγορες μεταβολές των πεδίων στον χρόνο αλλά και στον χώρο, αφού γίνεται χρήση των δύο μικρότερων βημάτων (χώρου και χρόνου). Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και στις περιπτώσεις όπου η διάταξη αποτελείται από δύο ή περισσότερα διηλεκτρικά στρώματα, τα οποία όμως είναι διάφορα από το κενό. Τότε ως ταχύτητα που θα πρέπει να ληφθεί υπόψη σχέση του Courant είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, ενώ το μήκος κύματος που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των χωρικών διαμερίσεων είναι εκείνο που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη διηλεκτρική σταθερά. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι το χρονικό βήμα *δt* είναι μικρότερο από αυτό που ορίζεται από τη σχέση του Courant, αν η ταχύτητα που

χρησιμοποιούνταν ήταν αυτή της περιοχής με τη μικρότερη διηλεκτρική σταθερά. Πρακτικά, με αυτό τον τρόπο καλύπτεται η χειρότερη περίπτωση, όπου το κύμα διαδίδεται στο πυκνότερο μέσο με τη μεγαλύτερη ταχύτητα.

Μια διαφορετική αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού είναι η αλλαγή του μεγέθους των κελιών του Yee. Το μέγεθος των κελιών θα πρέπει να είναι διαφορετικό σε κάθε περιοχή ώστε να ισχύει η σχέση (2.17) στην κάθε περιοχή ξεχωριστά, και όχι σε όλη τη διάταξη όπως έχει γίνει έως τώρα. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε διαφορετική αντιμετώπιση, υπολογιστικά, της διαδικασίας, κάτι που ξεφεύγει από τα όρια της εργασίας αυτής.

Κεφάλαιο 3
Ο Αλγόριθμος του Yee σε Κυλινδρικές Συντεταγμένες

3.1 Βασικά χαρακτηριστικά

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε μια συστηματική μελέτη του αλγορίθμου του Yee σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Σε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα που εμφανίζουν κυλινδρική συμμετρία ο αλγόριθμος αυτός δεν είναι κατάλληλος, καθώς δεν προσομοιώνει επιτυχώς τις κυρτές και κοίλες επιφάνειες, αλλά εμφανίζει το φαινόμενο «σκάλας» (*staircase*), όπου κοντά σε αυτές τις επιφάνειες τα πεδία παρουσιάζουν μη φυσιολογικές ασυνέχειες. Συνέπεια αυτού είναι η μη ικανοποιητική προσομοίωση οριακών συνθηκών και κατά συνέπεια η μη σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Επομένως, είναι απαραίτητη η επίλυση προβλημάτων που έχουν κυλινδρική συμμετρία να γίνεται με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε τέτοιες συντεταγμένες και κατά συνέπεια και τον αλγόριθμο του Yee κατάλληλα τροποποιημένο.

Οι εξισώσεις του Maxwell σε κυλινδρικές συντεταγμένες δεν αλλάζουν μορφή σε σχέση με τις καρτεσιανές και δίνονται, στην πλήρη μορφή τους, από τις σχέσεις:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{3.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{source} \tag{3.2}$$

ενώ ο στροβιλισμός των πεδίων δίνεται από τις σχέσεις:

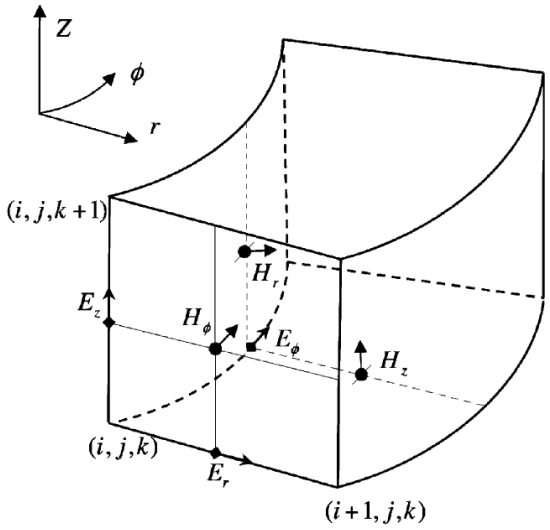
$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \left(\rho E_\rho \right)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z} \tag{3.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \left(\rho H_\rho \right)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z} \tag{3.4}$$

Όπως και στην περίπτωση της καρτεσιανής γεωμετρίας, η διακριτοποίηση θα γίνει στις σχέσεις (3.1)-(3.4).

Το κελί του Yee αλλάζει έτσι ώστε κάθε πλευρά του να εκφράζει τις στοιχειώδεις αποστάσεις σε κάθε κατεύθυνση. Η πλευρά, που αντιστοιχεί στον άξονα *z*, έχει μήκος *dz*, όσο και η διαμέριση στον άξονα αυτό, ενώ η πλευρά που αντιστοιχεί στην ακτινική απόσταση ρ έχει μήκος $d\rho$, όσο και η αντίστοιχη διαμέριση. Για την αζιμουθιακή συνιστώσα φ, η ακμή στο κελί του Yee θα έχει μήκος $d\rho d\varphi$, ενώ η απέναντι ακμή, λόγω του ότι βρίσκεται σε μεγαλύτερη ακτινική απόσταση, θα έχει μήκος $2d\rho d\varphi$. Με βάση τον παραπάνω συλλογισμό, το κελί του Yee απεικονίζεται στο Σχήμα 2 [8].

Η τακτική, που ακολουθείται στη διακριτοποίηση των εξισώσεων Maxwell, είναι όμοια με εκείνη της περίπτωσης των καρτεσιανών συντεταγμένων. Κάθε συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου θα πρέπει να περικλείεται από 4 συνιστώσες του ηλεκτρικού, τοποθετημένες στις ακμές του κελιού του Yee, και αντίστοιχα, κάθε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου θα πρέπει να περικλείεται από 4 συνιστώσες του μαγνητικού. Έτσι, οι διακριτοποιημένες πλέον εξισώσεις δίνονται στις σχέσεις:



Σχήμα 2: Κελί του Yee σε κυλινδρικές συντεταγμένες [9].

$$H_\rho\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = H_\rho\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n} + \frac{\delta t}{\mu\big|_{i,j+1/2,k+1/2}}\left(\frac{E_\varphi\big|_{i,j+1/2,k+1}^{n} - E_\varphi\big|_{i,j+1/2,k}^{n}}{\delta z} - \frac{E_z\big|_{i,j+1,k+1/2}^{n} - E_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n}}{i\,\delta\rho\,\delta\varphi}\right) \tag{3.5}$$

$$H_\varphi\big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} = H_\varphi\big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n} + \frac{\delta t}{\mu\big|_{i+1/2,j,k+1/2}}\left(\frac{E_z\big|_{i+1,j,k+1/2}^{n} - E_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n}}{\delta\rho} - \frac{E_\rho\big|_{i+1/2,j,k+1}^{n} - E_\rho\big|_{i+1/2,j,k}^{n}}{\delta z}\right) \tag{3.6}$$

$$H_z\big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} = H_z\big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n} + \frac{\delta t}{\mu\big|_{i+1/2,j+1/2,k}}\left(\frac{E_\varphi\big|_{i,j+1/2,k+1}^{n} - E_\varphi\big|_{i,j+1/2,k}^{n}}{\delta z} - \frac{E_z\big|_{i,j+1,k+1/2}^{n} - E_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n}}{i\,\delta\rho\,\delta z}\right) \tag{3.7}$$

$$E_r\big|_{i+1/2,j,k}^{n+1} = \frac{2\varepsilon\big|_{i+1/2,j,k} - \sigma\big|_{i+1/2,j,k}\,\delta t}{2\varepsilon\big|_{i+1/2,j,k} + \sigma\big|_{i+1/2,j,k}\,\delta t} E_r\big|_{i+1/2,j,k}^{n} + \frac{2\delta t}{2\varepsilon\big|_{i+1/2,j,k} + \sigma\big|_{i+1/2,j,k}\,\delta t}\left[-J_r\big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} + \frac{H_z\big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z\big|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2}}{(i+1/2)\,\delta\rho\delta\varphi} - \frac{H_\varphi\big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_\varphi\big|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\delta z}\right] \tag{3.8}$$

$$E_\varphi\big|_{i,j+1/2,k}^{n+1} = \frac{2\varepsilon\big|_{i,j+1/2,k} - \sigma\big|_{i,j+1/2,k}\,\delta t}{2\varepsilon\big|_{i,j+1/2,k} + \sigma\big|_{i,j+1/2,k}\,\delta t} E_\varphi\big|_{i,j+1/2,k}^{n} + \frac{2\delta t}{2\varepsilon\big|_{i,j+1/2,k} + \sigma\big|_{i,j+1/2,k}\,\delta t}\left[-J_\varphi\big|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} + \frac{H_\rho\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - H_\rho\big|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2}}{\delta z} - \frac{H_z\big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z\big|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}}{\delta\rho}\right] \tag{3.9}$$

$$E_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n+1}=\frac{2\varepsilon\big|_{i,j,k+1/2}-\sigma\big|_{i,j,k+1/2}\,\delta t}{2\varepsilon\big|_{i,j,k+1/2}+\sigma\big|_{i,j,k+1/2}\,\delta t}E_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n}$$
$$+\frac{2\delta t}{2\varepsilon\big|_{i,j,k+1/2}+\sigma\big|_{i,j,k+1/2}\,\delta t}\Big[-J_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} \tag{3.10}$$
$$+\frac{(i+1/2)H_\varphi\big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}-(i-1/2)H_\varphi\big|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}}{i\,\delta\rho}-\frac{H_\rho\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}-H_\rho\big|_{i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{i\,\delta\rho\,\delta\varphi}\Big]$$

Οι όροι $\varepsilon\big|_{i,j,k},\mu\big|_{i,j,k},\sigma\big|_{i,j,k},J\big|_{i,j,k}$ αναφέρονται στη διηλεκτρική σταθερά, στη μαγνητική διαπερατότητα, στην αγωγιμότητα και στην εξωτερικά εφαρμοζόμενη πυκνότητα ρεύματος, αντίστοιχα, στο σημείο με συντεταγμένες (i,j,k) του πλέγματος.

Το κριτήριο Courant, μέσω του οποίου υπολογίζεται το μέγιστο χρονικό βήμα για το οποίο επέρχεται σύγκλιση του αλγορίθμου, εκφράζεται από τη σχέση:

$$\delta t<\frac{1}{u_m\sqrt{\left(\frac{1}{\delta\rho}\right)^2+\left(\frac{2}{\delta\varphi\,\delta\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\delta z}\right)^2}} \tag{3.11}$$

όπου u_m είναι η ταχύτητα διάδοσης στο μέσο. Διαφοροποίηση σε σχέση με το αντίστοιχο κριτήριο για ανάλυση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, αποτελεί ο όρος ($2/\delta\varphi\delta\rho$), ο οποίος εκφράζει την αζιμουθιακή συνεισφορά για το κυλινδρικό κελί του Yee, η οποία είναι συνάρτηση του μισού της διαμέρισης $\delta\rho$ και της διαμέρισης της γωνίας $\delta\varphi$.

3.2 Εμφάνιση ιδιάζοντος σημείου για $\rho = 0$

Όπως γίνεται αντιληπτό από τις σχέσεις (3.5), (3.9) και (3.10) τα πεδία θα πρέπει να υπολογιστούν και για $i = 0$ που αντιστοιχεί στο $\rho = 0$. Όμως κάτι τέτοιο οδηγεί σε εμφάνιση ιδιάζοντος πεδίου για $\rho = 0$. Αυτό το γεγονός οφείλεται στη μέθοδο διακριτοποίησης που ακολουθήθηκε αποκλειστικά καθώς σε πραγματικά συστήματα, η τιμή των πεδίων για $\rho = 0$ μπορεί να υπολογιστεί και έχει πεπερασμένη τιμή. Για να ξεπεραστεί αυτή η ιδιαιτερότητα του αλγορίθμου, έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία τρεις διαφορετικές μέθοδοι.

- Μέθοδος επέκτασης σε σειρά (*series expansion*) [10].
- Μέθοδος εφαρμογής των νόμων Ampere και Faraday [8].
- Μέθοδος μετατροπής κυλινδρικών σε καρτεσιανές συντεταγμένες [11].

3.2.1 Μέθοδος επέκτασης σε σειρά

Στη μέθοδο επέκτασης σε σειρά γίνεται χρήση επέκτασης των πεδίων για $\rho = 0$ σε σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων [10] και έχει χρησιμοποιηθεί και στην υδροδυναμική. Ειδικότερα, ιδιάζουσα συμπεριφορά παρουσιάζουν οι διακριτοποιημένες εκφράσεις των H_ρ και E_φ και εκφράζονται ως ένας γραμμικός συνδυασμός μιας ημιτονικής και μιας συνημιτονικής σειράς με συντελεστές ανάπτυξης κατάλληλες πεδιακές συνιστώσες. Έτσι, τα πεδία αυτά υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$H_\rho\big|_{0,j+1/2,k}^{n+1/2}=\frac{1}{N_\varphi}\left(\sin\varphi_{j+1/2}\sum_{m=0}^{N_\varphi}\left(H_\varphi\big|_{1/2,m,k+1/2}^{n+1/2}\cos\varphi_{m+1/2}\right)+\cos\varphi_{j+1/2}\sum_{m=0}^{N_\varphi}\left(H_\varphi\big|_{1/2,m,k+1/2}^{n+1/2}\sin\varphi_{m+1/2}\right)\right) \tag{3.12}$$

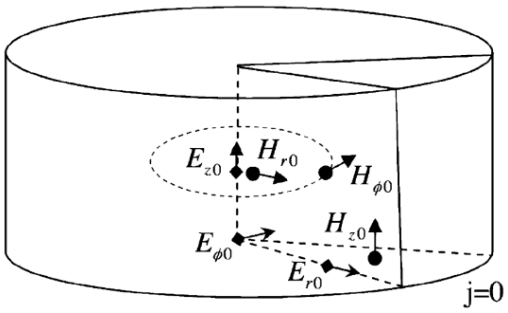
$$E_\varphi\big|_{0,j+1/2,k}^{n+1}=\frac{1}{N_\varphi}\left(\cos\varphi_{j+1/2}\sum_{m=0}^{N_\varphi}\left(E_r\big|_{1/2,m,k}^{n+1}\sin\varphi_{m+1/2}\right)+\sin\varphi_{j+1/2}\sum_{m=0}^{N_\varphi}\left(E_r\big|_{1/2,m,k}^{n+1}\cos\varphi_{m+1/2}\right)\right) \tag{3.13}$$

Αντίστοιχα, η E_z, που εμφανίζει επίσης ιδιάζουσα συμπεριφορά για $\rho = 0$, γράφεται:

$$E_z\big|_{0,j,k+1/2}^{n+1}=\frac{2\varepsilon\big|_{0,j,k+1/2}-\sigma\big|_{0,j,k+1/2}\,\delta t}{2\varepsilon\big|_{0,j,k+1/2}+\sigma\big|_{0,j,k+1/2}\,\delta t}E_z\big|_{0,j,k+1/2}^{n}+\frac{4}{\delta\rho}\frac{2\delta t}{2\varepsilon\big|_{0,j,k+1/2}+\sigma\big|_{0,j,k+1/2}\,\delta t}\frac{1}{N_\varphi}\sum_{m=0}^{N_\varphi}H_\varphi\big|_{1/2,m,k+1/2}^{n+1/2} \tag{3.14}$$

Σε αυτή την περίπτωση γίνεται χρήση του νόμου του Ampere γύρω από το σημείο $\rho = 0$. Αυτό εξηγείται καλύτερα στο Σχήμα 3. Από το νόμο του Ampere, η τιμή του E_z για $\rho = 0$ μπορεί να υπολογιστεί ως το ολοκλήρωμα της H_φ πάνω στον κύκλο με ακτίνα $0.5\delta\rho$ για κάθε γωνία φ. Το ολοκλήρωμα εκφράζεται ως άθροισμα της συνιστώσας H_φ, η οποία βρίσκεται σε απόσταση $0.5\delta\rho$ από το κέντρο αλλά και για κάθε δυνατή γωνία στην οποία αυτή εμφανίζεται ($0 \le m \le N_\varphi$).

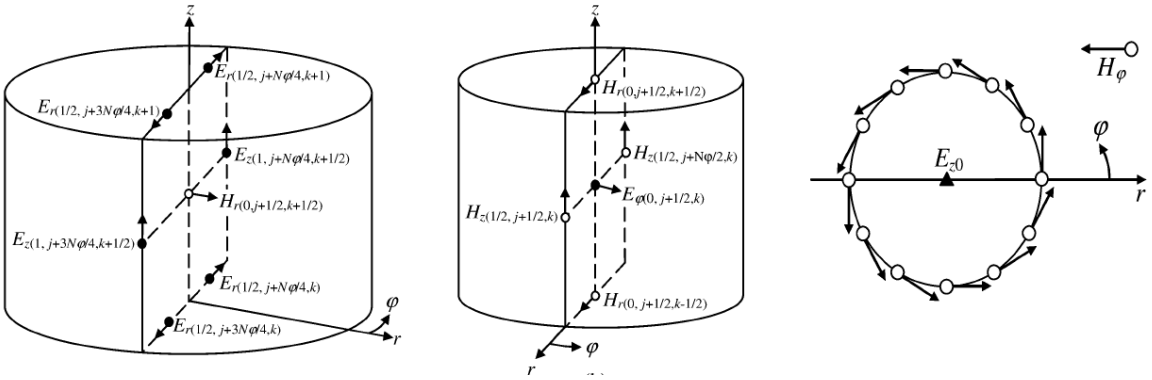
Αξίζει τέλος να τονιστεί ότι στον υπολογισμό των πεδίων δεν λαμβάνεται υπόψη τυχόν πυκνότητα ρεύματος που θα εμφανίζεται για $\rho = 0$. Εάν κάτι τέτοιο συμβαίνει, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ως ένας πρόσθετος όρος στα παραπάνω αθροίσματα.



Σχήμα 3: Σχήμα υπολογισμού E_z συνιστώσας για ρ = 0 [9].

3.2.2 Μέθοδος εφαρμογής των νόμων Ampere και Faraday

Στη μέθοδο εφαρμογής των νόμων Ampere και Faraday [8], το πρόβλημα που εμφανίζεται για $\rho = 0$ αντιμετωπίζεται εφαρμόζοντας το νόμο του Ampere για το μαγνητικό πεδίο και εκείνον του Faraday για το ηλεκτρικό. Με αυτό τον τρόπο γίνεται αντιμετώπιση του προβλήματος της εμφάνισης ιδιάζοντος πεδίου για $\rho = 0$. Αυτό γίνεται περισσότερο κατανοητό στο Σχήμα 4, όπου φαίνονται όλες οι συνιστώσες που λαμβάνουν μέρος στους κατάλληλους υπολογισμούς.



Σχήμα 4: Εφαρμογή των νόμων Ampere και Faraday για τον υπολογισμό της H_ρ συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου για $\rho = 0$ [9].

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4(α), η συνιστώσα $H_\rho|_{0,\,j+1/2,k+1/2}$, για την οποία εμφανίζεται ιδιάζουσα συμπεριφορά, περικλείεται από τέσσερα σημεία στα οποία εντοπίζονται οι συνιστώσες $E_\rho|_{1/2,\,j+N_\varphi/4,k+1}, E_\rho|_{1/2,\,j+3N_\varphi/4,k+1}, E_\rho|_{1/2,\,j+3N_\varphi/4,k}, E_\rho|_{1/2,\,j+N_\varphi/4,k}$ καθώς και οι αντίστοιχες *z*-συνιστώσες $E_z|_{1,\,j+N_\varphi/4,k+1/2}$ και $E_z|_{1,\,j+3N_\varphi/4,k+1/2}$. Με εφαρμογή του νόμου του Faraday, προκύπτει η σχέση (3.15), που ορίζει τη χρονική αναβάθμιση της H_ρ. Ο αριθμός N_φ ορίζει τον αριθμό των κελίων στο διάστημα [0, 2π] και απαραίτητα θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 4.

$$H_\rho|^{n+1/2}_{0,\,j+1/2,k+1/2} = H_\rho|^{n-1/2}_{0,\,j+1/2,k+1/2} + \frac{\delta t}{2\mu|_{0,\,j,k+1/2}}\left(\frac{E_z|^n_{i,\,j+3N_\varphi/4,k+1/2} - E_z|^n_{i,\,j+N_\varphi/4,k+1/2}}{\delta\rho} + \frac{E_\rho|^n_{1/2,\,j+N_\varphi/4,k+1} - E_\rho|^n_{1/2,\,j+3N_\varphi/4,k+1} + E_\rho|^n_{1/2,\,j+N_\varphi/4,k+1} - E_\rho|^n_{1/2,\,j+3N_\varphi/4,k}}{\delta z}\right) \tag{3.15}$$

Από το Σχήμα 4(β) φαίνεται ότι η συνιστώσα $E_\varphi|_{0,\,j+1/2,k}$ περικλείεται από τέσσερεις κόμβους όπου υπολογίζεται το μαγνητικό πεδίο $H_\rho|_{0,\,j+1/2,k+1/2}$, $H_\rho|_{0,\,j+1/2,k-1/2}$, $H_z|_{1/2,\,j+1/2,k}$ και $H_z|_{1/2,\,j+N_\varphi/2,k}$. Η εφαρμογή του νόμου του Ampere οδηγεί στη χρονική αναβάθμιση της $E_\varphi|_{0,\,j+1/2,k}$ της παρακάτω σχέσης:

$$E_\varphi|^{n+1}_{0,\,j+1/2,k} = \frac{2\varepsilon|_{0,\,j+1/2,k} - \sigma|_{0,\,j+1/2,k}\,\delta t}{2\varepsilon|_{0,\,j+1/2,k} + \sigma|_{0,\,j+1/2,k}\,\delta t} E_\varphi|^n_{0,\,j+1/2,k} + \frac{2\delta t}{2\varepsilon|_{0,\,j+1/2,k} + \sigma|_{0,\,j+1/2,k}\,\delta t}\left(\frac{H_\rho|^{n+1/2}_{0,\,j+1/2,k+1/2} - H_\rho|^{n+1/2}_{0,\,j+1/2,k-1/2}}{\delta z} - \frac{H_z|^{n+1/2}_{1/2,\,j+1/2,k} - H_z|^{n+1/2}_{1/2,\,j+N_\varphi/2,k}}{\delta\rho}\right) \tag{3.16}$$

Σε αντιστοιχία, και με βάση το Σχήμα 4(γ), η συνιστώσα $E_z|_{0,\,j,k+1/2}$ περικλείεται από τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου $H_\varphi|_{1/2,\,j,k+1/2}$ και εφαρμόζοντας το νόμο του Ampere προκύπτει η αντίστοιχη σχέση χρονικής αναβάθμισης του πεδίου:

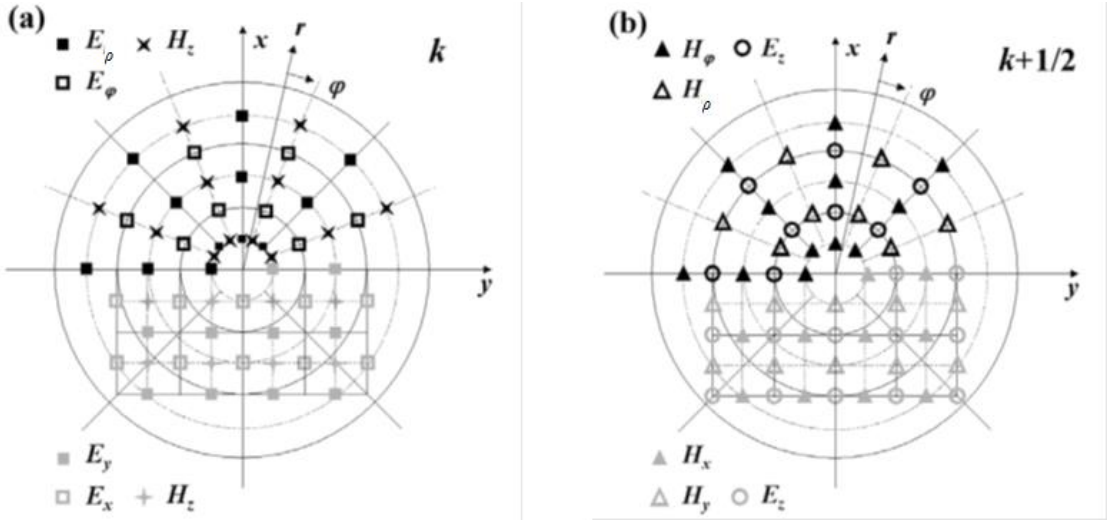
$$E_z\big|^{n+1}_{0,j,k+1/2} = \frac{2\varepsilon\big|_{0,j,k+1/2} - \sigma\big|_{0,j,k+1/2}\,\delta t}{2\varepsilon\big|_{0,j,k+1/2} + \sigma\big|_{0,j,k+1/2}\,\delta t} E_z\big|^{n}_{0,j,k+1/2} + \\ = \frac{4}{\delta\rho}\frac{2\delta t}{2\varepsilon\big|_{0,j,k+1/2} + \sigma\big|_{0,j,k+1/2}\,\delta t}\frac{1}{N_\varphi}\sum_{m=0}^{N_\varphi} H_\varphi\big|^{n+1/2}_{1/2,m,k+1/2} \tag{3.17}$$

Τυχόν πηγές πυκνότητας ρεύματος δεν έχουν συμπεριληφθεί στην ανάλυση. Αν όμως αυτές υπήρχαν, θα εμφανίζονταν ως ένας επιπλέον όρος σε κάθε μια από τις σχέσεις (3.15), (3.16) και (3.17).

3.2.3 Μέθοδος μετατροπής συντεταγμένων

Η τρίτη μέθοδος ώστε να ξεπεραστεί η ιδιάζουσα συμπεριφορά των τριών πεδιακών συνιστωσών για $\rho = 0$ χρησιμοποιεί τη μετατροπή από κυλινδρικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές [11] γύρω από τον άξονα $\rho = 0$. Ειδικότερα, για ένα διάνυσμα **e** μπορούν να υπολογιστούν οι συνιστώσες e_ρ και e_φ με βάση τις συνιστώσες e_x και e_y από τις σχέσεις:

$$e_\rho = e_x\cos\varphi + e_y\sin\varphi \\ e_\varphi = -e_x\sin\varphi + e_y\cos\varphi \tag{3.18}$$



Σχήμα 5: Σχέση κυλινδρικών με καρτεσιανές συντεταγμένες. Το πάνω πλέγμα αναφέρεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες ενώ το κάτω πλέγμα σε καρτεσιανές συντεταγμένες [11].

Οι συνιστώσες, που αντιστοιχούν στο κυλινδρικό επίπεδο για $\rho = 0$, μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των συνιστωσών του καρτεσιανού επιπέδου για $x = y = 0$, όπου ανάλογα με την περίπτωση το κέντρο του καρτεσιανού επιπέδου θα τοποθετείται στο μισό ακτινικό βήμα $\delta\rho$. Με βάση το Σχήμα 5 ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες ανάμεσα στα συστήματα συντεταγμένων, όπου οι υπογραμμισμένοι δείκτες αναφέρονται στα κελιά του καρτεσιανού πλέγματος:

$$H_x\big|^{n+1/2}_{\underline{0},\underline{\frac{1}{2}},k+\frac{1}{2}} = -H_\varphi\big|^{n+1/2}_{\frac{1}{2},\underline{\frac{\pi}{2}},k+\frac{1}{2}}, H_x\big|^{n+1/2}_{\underline{0},\underline{-\frac{1}{2}},k+\frac{1}{2}} = H_\varphi\big|^{n+1/2}_{\frac{1}{2},\underline{\frac{3\pi}{2}},k+\frac{1}{2}} \\ H_y\big|^{n+1/2}_{\underline{\frac{1}{2}},\underline{0},k+\frac{1}{2}} = H_\varphi\big|^{n+1/2}_{\frac{1}{2},0,k+\frac{1}{2}}, H_y\big|^{n+1/2}_{\underline{-\frac{1}{2}},\underline{0},k+\frac{1}{2}} = -H_\varphi\big|^{n+1/2}_{\frac{1}{2},\pi,k+\frac{1}{2}} \tag{3.19}$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τις εκφράσεις της σχέσης (3.18), η χρονική αναβάθμιση της H_ρ για $\rho = 0$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} H_\rho\big|_{0,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = &\frac{1}{2}\left(H_\varphi\big|_{1/2,0,k+1/2}^{n+1/2} - H_\varphi\big|_{1/2,\pi/2,k+1/2}^{n+1/2}\right)\sin\varphi\big|_{j+1/2} \\ &+\frac{1}{2}\left(H_\varphi\big|_{1/2,3\pi/2,k+1/2}^{n+1/2} - H_\varphi\big|_{1/2,\pi/2,k+1/2}^{n+1/2}\right)\cos\varphi\big|_{j+1/2} \end{aligned} \tag{3.20}$$

όπου $\varphi\big|_{j+1/2} = (j+1/2)\delta\varphi$. Η z-συνιστώσα μεταξύ των δύο αναπαραστάσεων δεν αλλάζει, οπότε μπορεί να γίνει χρήση των εξισώσεων αναβάθμισης του πεδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} E_z\big|_{\underline{0},\underline{0},k+1/2}^{n+1} = E_z\big|_{\underline{0},\underline{0},k+1/2}^{n} &+ \frac{\delta t}{\delta x}\left(H_y\big|_{\frac{1}{2},\underline{0},k+\frac{1}{2}}^{n+1/2} - H_y\big|_{-\frac{1}{2},\underline{0},k+\frac{1}{2}}^{n+1/2}\right) \\ &- \frac{\delta t}{\delta y}\left(H_x\big|_{\underline{0},\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1/2} - H_x\big|_{\underline{0},-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1/2}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Με χρήση των αντιστοιχίσεων της σχέσης (3.19), η (3.21) γίνεται:

$$\begin{aligned} E_z\big|_{0,j,k+1/2}^{n+1} = E_z\big|_{0,j,k+1/2}^{n} &+ \frac{\delta t}{\delta\rho}\left(H_\varphi\big|_{1/2,0,k+1/2}^{n+1/2} + H_\varphi\big|_{1/2,\pi/2,k+1/2}^{n+1/2}\right) \\ &- \frac{\delta t}{\delta\rho}\left(H_\varphi\big|_{1/2,\pi,k+1/2}^{n+1/2} - H_\varphi\big|_{1/2,3\pi/2,k+1/2}^{n+1/2}\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

όπου $\delta x = \delta y = \delta\rho$.

Ο υπολογισμός της E_φ συνιστώσας για $\rho = 0$ γίνεται με ανάλογο τρόπο με τον υπολογισμό της H_ρ στο ίδιο σημείο και προκύπτει η παρακάτω χρονική αναβάθμιση:

$$\begin{aligned} E_\varphi\big|_{0,j+1/2,k}^{n+1} = &\frac{1}{2}\left(E_\rho\big|_{1/2,\pi,k}^{n+1} - H_\varphi\big|_{1/2,0,k}^{n+1}\right)\sin\varphi\big|_{j+1/2} \\ &+\frac{1}{2}\left(E_\rho\big|_{1/2,\pi/2,k}^{n+1} - H_\varphi\big|_{1/2,3\pi/2,k}^{n+1}\right)\cos\varphi\big|_{j+1/2} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Και σε αυτή την μέθοδο, το πλήθος N_φ θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 4.

Κεφάλαιο 4
Τέλεια Προσαρμοσμένο Στρώμα

4.1 Βασικά χαρακτηριστικά – αναλυτικός υπολογισμός εξισώσεων

Σημαντικό πρόβλημα στις προσομοιώσεις με χρήση πεπερασμένων διαφορών είναι η *a priori* χρήση κατάλληλων οριακών συνθηκών για το ηλεκτρικό πεδίο. Τα τοιχώματα λόγω του πεπερασμένου υπολογιστικού χωρίου αντιμετωπίζονται ως μεταλλικά τοιχώματα και επομένως εμφανίζονται ανακλάσεις με συνέπεια την ανάπτυξη στάσιμων κυμάτων. Σε περιπτώσεις, όπου πρέπει να μελετηθούν οδεύοντα κύματα, π.χ. ένας ανοικτός κυματοδηγός ή ένας δίαυλος ηλεκτρονικής δέσμης, γίνεται χρήση μαθηματικών τεχνικών ώστε να προσομοιώνεται η οριακή συνθήκη ανοικτού άκρου. Μια από αυτές τις τεχνικές είναι το τέλεια προσαρμοσμένο στρώμα. Πρόκειται για τεχνική, όπου στα άκρα της διάταξης κατά μήκος του άξονα διάδοσης τοποθετείται υλικό, του οποίου η αγωγιμότητα μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο ώστε οποιαδήποτε ανάκλαση να περιορίζεται και μακροσκοπικά να εμφανίζονται οριακές συνθήκες ακτινοβολίας (ανοικτού άκρου). Το υλικό αυτό δεν υπάρχει στην πραγματική γεωμετρία, αλλά λαμβάνεται υπόψη για τον υπολογισμό των πεδίων στις αριθμητικές προσομοιώσεις και δρα ως προσαρμογή στη διάταξη. Χαρακτηρίζεται από ανισοτροπία στις διηλεκτρικές και στις μαγνητικές ιδιότητές του, δηλαδή μπορούν να αλλάξουν σε κάθε κατεύθυνση.

Προκειμένου να μπορεί να χρησιμοποιηθεί το αγώγιμο αυτό στρώμα, είναι ευκολότερο η ανάλυση να γίνει στο πεδίο της συχνότητας. Έτσι, χρησιμοποιούνται μόνο οι εξισώσεις του στροβιλισμού των πεδίων, και ειδικότερα οι σχέσεις [7]:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon \overline{\overline{s}}\, \tilde{\mathbf{E}} \tag{4.1}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \overline{\overline{s}}\, \tilde{\mathbf{H}} \tag{4.2}$$

όπου $\overline{\overline{s}}$ είναι ο μιγαδικός τανυστής της παρακάτω σχέσης:

$$\overline{\overline{s}} = \begin{pmatrix} s_y s_x^{-1} s_z & 0 & 0 \\ 0 & s_x s_y^{-1} s_z & 0 \\ 0 & 0 & s_x s_z^{-1} s_y \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

όπου οι ποσότητες s_x, s_y και s_z είναι:

$$s_x = \kappa_x + \frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon} \quad s_y = \kappa_y + \frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon} \quad s_z = \kappa_z + \frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon} \tag{4.4}$$

Ο μιγαδικός τανυστής $\overline{\overline{s}}$ χρησιμοποιείται προκειμένου το μέσο να είναι ανισοτροπικό. Η ανισοτροπία αυτή είναι αναγκαία έτσι ώστε να παρουσιάζεται μηδενικός συντελεστής ανάκλασης για κάθε γωνία πρόσπτωσης σε αυτό.

Οι όροι σ_x, σ_y και σ_z αναφέρονται στις απώλειες ανά διεύθυνση, ενώ οι όροι k_x, k_y και k_z στους αντίστοιχους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες ώστε οι ποσότητες s_x, s_y και s_z να εκφράζουν τις φαινομενικές διηλεκτρικές σταθερές ανά κατεύθυνση σε περίπτωση ανισοτροπικού υλικού. Στην περίπτωση ισοτροπικού υλικού οι όροι της σχέσης (4.4) πολλαπλασιασμένοι με το ε εκφράζουν τη διηλεκτρική σταθερά του μέσου.

Αναπτύσσοντας το στροβιλισμό του μαγνητικού πεδίου (σχέση (4.1)) προκύπτει το παρακάτω ανάπτυγμα:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tilde{H}_x & \tilde{H}_y & \tilde{H}_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} \right) \hat{k} \tag{4.5}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4.3) το ανάπτυγμα της (4.5) μπορεί να γραφεί σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = j\omega\varepsilon \begin{pmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_x s_z}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_y s_x}{s_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Γνωρίζοντας ότι $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, η σχέση (4.6) μπορεί να γραφεί σε συνάρτηση με την ηλεκτρική μετατόπιση. Για να γίνει η ανάλυση στο πεδίο του χρόνου, χρησιμοποιείται η πράξη της συνέλιξης. Για να αποφευχθεί μια τέτοια διαδικασία, αποδεικνύεται ότι ορίζοντας ξανά το πεδίο **D** λαμβάνονται ισοδύναμα αποτελέσματα. Ο νέος ορισμός του **D** γίνεται με τη σχέση:

$$\tilde{D}_x = \varepsilon \frac{s_z}{s_x} \tilde{E}_x \qquad \tilde{D}_y = \varepsilon \frac{s_x}{s_y} \tilde{E}_y \qquad \tilde{D}_z = \varepsilon \frac{s_y}{s_z} \tilde{E}_z \tag{4.7}$$

Έτσι, η εξίσωση (4.6) γράφεται:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = j\omega \begin{pmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{D}_x \\ \tilde{D}_y \\ \tilde{D}_z \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία $j\omega F(\omega) \overset{F^{-1}}{\rightarrow} \partial f(t)/\partial t$ του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier καθώς και τη σχέση (4.4), η (4.8) γίνεται:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \kappa_y & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_z & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί και ως σύστημα εξισώσεων ως εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_y D_x\right)+\frac{\sigma_y}{\varepsilon}D_x\\
\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_z D_y\right)+\frac{\sigma_z}{\varepsilon}D_y\\
\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_x D_z\right)+\frac{\sigma_x}{\varepsilon}D_z
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των σχέσεων (4.4) και (4.7) καθώς και πολλαπλασιάζοντας με s_x, s_y, s_z μπορεί να υπολογιστεί η σχέση του **D** με το **E**, οπότε τελικά προκύπτει το παρακάτω σύνολο εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
\left(\kappa_x+\frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon}\right)D_x&=\varepsilon\left(\kappa_z+\frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon}\right)E_x\\
\left(\kappa_y+\frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon}\right)D_y&=\varepsilon\left(\kappa_x+\frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon}\right)E_y\\
\left(\kappa_z+\frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon}\right)D_z&=\varepsilon\left(\kappa_y+\frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon}\right)E_z
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, είναι δυνατόν η σχέση (4.11) να εκφραστεί στο πεδίο του χρόνου, προκειμένου να γίνει η απαραίτητη διακριτοποίηση. Έτσι, προκύπτει το παρακάτω σύνολο σχέσεων:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_x D_x\right)+\frac{\sigma_x}{\varepsilon}D_x&=\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_z E_x\right)+\frac{\sigma_z}{\varepsilon}E_x\right]\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_y D_y\right)+\frac{\sigma_y}{\varepsilon}D_y&=\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_x E_y\right)+\frac{\sigma_x}{\varepsilon}E_y\right]\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_z D_z\right)+\frac{\sigma_z}{\varepsilon}D_z&=\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_y E_z\right)+\frac{\sigma_y}{\varepsilon}E_z\right]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Η ίδια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η αντίστοιχη σχέση του **H** με το **B** χρησιμοποιώντας το νόμο του Faraday. Ειδικότερα, από το στροβιλισμό του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει:

$$\nabla\times\mathbf{E}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k} \tag{4.13}$$

Για αποφυγή συνελικτικών ολοκληρωμάτων, ορίζονται ξανά οι σχέσεις που συνδέουν το **B** με το **H** και προκύπτει το παρακάτω σύνολο σχέσεων:

$$\tilde{B}_x=\mu\frac{s_z}{s_x}\tilde{H}_x \qquad \tilde{B}_y=\mu\frac{s_x}{s_y}\tilde{H}_y \qquad \tilde{B}_z=\mu\frac{s_y}{s_z}\tilde{H}_z \tag{4.14}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση ο στροβιλισμός του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να γραφεί με μορφή πίνακα και σε συνάρτηση με το **B**. Οι συνιστώσες B_x, B_y και B_z πολλαπλασιάζονται αντίστοιχα με τις ποσότητες s_x, s_y και s_z και τελικά προκύπτει η σχέση:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -j\omega \begin{pmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \\ \tilde{B}_z \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, η σχέση (4.15) μπορεί να εκφραστεί στο πεδίο του χρόνου και προκύπτει η εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \kappa_y & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_z & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Αναπτύσσοντας τη σχέση (4.16) σε μεμονωμένες εξισώσεις για κάθε συνιστώσα ξεχωριστά, προκύπτει το παρακάτω σύνολο εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_y B_x\right) + \frac{\sigma_y}{\mu} B_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_z B_y\right) + \frac{\sigma_z}{\mu} B_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_x B_z\right) + \frac{\sigma_x}{\mu} B_z \end{aligned} \tag{4.17}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.14) και γνωρίζοντας ότι $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, προκύπτει η τελική έκφραση που συνδέει τις χρονικές μεταβολές του **B** με αυτές του **H**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_x B_x\right) + \frac{\sigma_x}{\varepsilon} B_x &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_z H_x\right) + \frac{\sigma_z}{\varepsilon} H_x\right] \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_y B_y\right) + \frac{\sigma_y}{\varepsilon} B_y &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_x H_y\right) + \frac{\sigma_x}{\varepsilon} H_y\right] \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_z B_z\right) + \frac{\sigma_z}{\varepsilon} B_z &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa_y H_z\right) + \frac{\sigma_y}{\varepsilon} H_z\right] \end{aligned} \tag{4.18}$$

Το σύνολο των σχέσεων (4.17) και (4.18) ορίζει τόσο την εξάρτηση των πεδίων **H** και **B** όσο και την εξάρτηση της χρονικής μεταβολής του **B** με τις αντίστοιχες χωρικές μεταβολές του **E**, ώστε να εκφράζεται πλήρως η χρονική και χωρική εξέλιξη του νόμου του Faraday.

Η εισαγωγή του στρώματος του PML θα γίνει ουσιαστικά με την εισαγωγή ενός υλικού μεταβαλλόμενης αγωγιμότητας. Το υλικό αυτό στην πραγματικότητα δεν υφίσταται, αλλά τοποθετείται στο τέλος της διάταξης προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν οι ανακλάσεις και

μακροσκοπικά να εμφανίζεται διάδοση χωρίς ανάκλαση και εμφάνιση μόνο οδευόντων κυμάτων. Το υλικό, που θα χρησιμοποιηθεί εδώ, ακολουθεί την τεχνική του Uniaxial Perfect Matched Layer (UPML), όπου αυτό το οποίο μεταβάλλεται είναι η τιμή της αγωγιμότητας στις επιφάνειες από όπου επιθυμείται να ελαχιστοποιηθούν οι ανακλάσεις. Υπάρχουν και άλλα είδη τέλεια προσαρμοσμένου στρώματος, όπως αυτό του διαχωριζόμενου πεδίου (split field PML), όπου κάθε συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος στο στρώμα αυτό αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, ώστε κάθε μια από αυτές ξεχωριστά να ικανοποιεί τις συνοριακές εκείνες συνθήκες όπου παρατηρείται απώλεια αλλά όχι διασπορά. Αντίθετα, στο UPML γίνεται προσπάθεια προσομοίωσης ενός φυσικού μέσου, το οποίο θα απορροφά το προσπίπτον κύμα. Μειονέκτημα όλων των μεθόδων PML είναι τα σφάλματα λόγω διακριτοποίησης και η εμφάνιση πεπερασμένων τιμών ανακλάσεων. Το PML ικανοποιεί τις συνθήκες μηδενικής ανάκλασης και πλήρους απορρόφησης μόνο στο συνεχές όριο των εξισώσεων Maxwell και όχι στις διακριτοποιημένες εξισώσεις.

Το στρώμα PML για να ικανοποιεί τις προαναφερθείσες συνθήκες ελάχιστων ανακλάσεων θα πρέπει να παρουσιάζει βαθμιαία μεταβαλλόμενη συμπεριφορά. Αποδεικνύεται ότι ο παράγοντας ανακλάσεων δίνεται από τη σχέση:

$$R(\theta) = e^{-2n\cos\theta\int_0^d \sigma_z(z)dz} \tag{4.19}$$

για προσαρμοσμένο στρώμα στη *z* κατεύθυνση, όπου *n* είναι η σύνθετη αντίσταση του κύματος και *d* το πάχος του στρώματος PML. Στην περίπτωση που το μέσο έχει απώλειες, μεταβάλλονται και οι ποσότητες k_x, k_y, k_z ώστε να ανταποκρίνονται στις μεταβαλλόμενες τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς. Επίσης, απαραίτητα μεταβαλλόμενη θα πρέπει να είναι και η τιμή της αγωγιμότητας ανά κατεύθυνση, ώστε να επιτυγχάνεται η προσαρμογή και τελικά η εξάλειψη των ανακλάσεων. Διάφορα πρότυπα μεταβαλλόμενης αγωγιμότητας έχουν προταθεί με επικρατέστερο αυτό της πολυωνυμικής, η οποία στην περίπτωση του στρώματος PML τοποθετημένου κατά τον άξονα *z* εκφράζεται με τις σχέσεις:

$$\sigma_z(z) = (z/d)^m \sigma_{z,\max}, \qquad \kappa_z(z) = 1 + (\kappa_{z,\max} - 1)(z/d)^m \tag{4.20}$$

όπου

$$\sigma_{z,\max} = -\frac{(m+1)\ln[R(0)]}{2nd} \tag{4.21}$$

και *m* ελεύθερη παράμετρος με τυπικές τιμές $3 \le m \le 4$ [12]. Το τυπικό σφάλμα λόγω ανακλάσεων *R*(0) είναι ελεύθερη παράμετρος και επιλέγεται από το χρήστη. Παράλληλα η ποσότητα $\kappa_{z,\max}$ ορίζεται ως το μη μοναδιαίο πραγματικό μέρος της φαινομενικής διηλεκτρικής σταθεράς, η οποία σε συνήθεις περιπτώσεις τίθεται ίση με τη μονάδα.

Από εκτιμήσεις που έχουν γίνει σε θεωρητικό επίπεδο, η ιδανική τιμή της μέγιστης αγωγιμότητας για ομογενές μέσο δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{z,opt} = -\frac{(m+1)(-16)}{(2n)(10\Delta)} = \frac{0.8(m+1)}{n\Delta} \tag{4.22}$$

όπου *m* η προαναφερθείσα ελεύθερη παράμετρος, *n* η κυματική αντίσταση και Δ η διάσταση του κελιού κατά μήκος του άξονα στον οποίο τοποθετείται το στρώμα PML.

Η ύπαρξη μεταβλητής αγωγιμότητας καταφέρνει να μειώσει το πλάτος των ανακλώμενων κυμάτων αλλά όχι όμως και να το εξαφανίσει πλήρως. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως μετά το PML, όπου αυτό τοποθετηθεί, το πεδίο τίθεται εξ ορισμού ίσο με μηδέν.

Αυτό ισοδυναμεί με οριακές συνθήκες Dirichlet, που περιγράφουν έναν τέλειο ηλεκτρικό αγωγό. Αυτό έχει σαν συνέπεια την ύπαρξη δευτερογενών ανακλάσεων στη διαχωριστική επιφάνεια PML – μετάλλου, που διαδίδονται προς την αντίθετη κατεύθυνση με αυτή του κύματος που πρόκειται να μελετηθεί, καθώς και ανακλάσεων μέσα στο στρώμα του PML λόγω της μεταβλητής αγωγιμότητας. Στόχος είναι όλες αυτές οι ανακλάσεις να έχουν όσο το δυνατό μικρότερο πλάτος και τελικά οι συνολικές ανακλάσεις από το συνδυασμό PML – μέταλλου να είναι αμελητέες σε σχέση με το προσπίπτον κύμα.

4.2 Διακριτοποίηση του στρώματος PML

Το στρώμα PML προκειμένου να εισαχθεί σε κώδικα βασισμένο στον αλγόριθμο του Yee πραγματοποιείται διακριτοποιώντας τις σχέσεις (4.10), (4.12) για το πεδίο της ηλεκτρικής μετατόπισης και (4.17), (4.18) για το μαγνητικό πεδίο. Η διαδικασία διακριτοποίησης ακολουθεί το σχήμα του Yee βασισμένο σε *leapfrog* πεπερασμένες διαφορές στο χώρο και *forward time* στο χρόνο. Με βάση τη σχέση (4.10) και λύνοντας ως προς τη συνιστώσα του **D**, που πρέπει να αναβαθμιστεί χρονικά, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$D_x\big|_{i+1/2,j,k}^{n+1}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_y-\sigma_y\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_y+\sigma_y t}\right)D_x\big|_{i+1/2,j,k}^{n}+\left(\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_y+\sigma_y\Delta t}\right)\left(\frac{H_z\big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}-H_z\big|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\delta y}-\frac{H_y\big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}-H_y\big|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\delta z}\right) \tag{4.23}$$

$$D_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n+1}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_z-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_z+\sigma_z\Delta t}\right)D_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n}+\left(\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_z+\sigma_z\Delta t}\right)\left(\frac{H_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}-H_x\big|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2}}{\delta z}-\frac{H_z\big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}-H_z\big|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}}{\delta x}\right) \tag{4.24}$$

$$D_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n+1}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_x-\sigma_x\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t}\right)D_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n}+\left(\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t}\right)\left(\frac{H_y\big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}-H_y\big|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}}{\delta x}-\frac{H_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}-H_x\big|_{i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{\delta y}\right) \tag{4.25}$$

Οι αντίστοιχες σχέσεις, που συνδέουν το **D** με το **E**, προκύπτουν με διακριτοποίηση των εκφράσεων (4.12). Στο πλέγμα του Yee, τα σημεία που αντιστοιχούν στο πεδίο **E** συμπίπτουν με αυτά του **D** και προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$E_x\big|_{i+1/2,j,k}^{n+1}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_z-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_z+\sigma_z\Delta t}\right)E_x\big|_{i+1/2,j,k}^{n}+\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\varepsilon_0\kappa_z+\sigma_z\Delta t}\right)\left[\left(2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t\right)D_x\big|_{i+1/2,j,k}^{n+1}-\left(2\varepsilon_0\kappa_x-\sigma_x\Delta t\right)D_x\big|_{i+1/2,j,k}^{n}\right] \tag{4.26}$$

$$E_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n+1}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_x-\sigma_x\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t}\right)E_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n}+\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t}\right)\left[\left(2\varepsilon_0\kappa_y+\sigma_y\Delta t\right)D_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n+1}-\left(2\varepsilon_0\kappa_y-\sigma_y\Delta t\right)D_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n}\right] \tag{4.27}$$

$$E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_y-\sigma_y\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_y+\sigma_y\Delta t}\right)E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n}+\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\varepsilon_0\kappa_y+\sigma_y\Delta t}\right)\left[\left(2\varepsilon_0\kappa_z+\sigma_z\Delta t\right)D_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1}-\left(2\varepsilon_0\kappa_z-\sigma_z\Delta t\right)D_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n}\right] \tag{4.28}$$

Κατ' αντιστοιχία προκύπτουν και οι συνιστώσες του **B** και πως αυτές συνδέονται με τις αντίστοιχες συνιστώσες του **H**. Οι αναλυτικές εκφράσεις των χρονικών αναβαθμίσεων του **B** είναι:

$$B_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+3/2}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_y-\sigma_y\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_y+\sigma_y\Delta t}\right)B_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}-\left(\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_y+\sigma_y\Delta t}\right)\left(\frac{E_z\Big|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1}-E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1}}{\delta y}-\frac{E_y\Big|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1}-E_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1}}{\delta z}\right) \tag{4.29}$$

$$B_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+3/2}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_z-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_z+\sigma_z\Delta t}\right)B_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}-\left(\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_z+\sigma_z\Delta t}\right)\left(\frac{E_x\Big|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1}-E_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1}}{\delta y}-\frac{E_z\Big|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1}-E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1}}{\delta z}\right) \tag{4.30}$$

$$B_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+3/2}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_x-\sigma_x\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t}\right)B_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}-\left(\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t}\right)\left(\frac{E_y\Big|_{i+1,j+1/2,k}^{n+1}-E_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1}}{\delta x}-\frac{E_x\Big|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1}-E_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1}}{\delta y}\right) \tag{4.31}$$

Αντίστοιχα, για τις σχέσεις που συνδέουν το **B** με το **H** προκύπτουν οι εκφράσεις:

$$H_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+3/2}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_z-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_z+\sigma_z\Delta t}\right)H_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}+\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2\varepsilon_0\kappa_z+\sigma_z\Delta t}\right)\left[\left(2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t\right)B_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+3/2}-\left(2\varepsilon_0\kappa_x-\sigma_x\Delta t\right)B_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}\right] \tag{4.32}$$

$$H_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+3/2}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_x-\sigma_x\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t}\right)H_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}+\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t}\right)\left[\left(2\varepsilon_0\kappa_y+\sigma_y\Delta t\right)B_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+3/2}-\left(2\varepsilon_0\kappa_y-\sigma_y\Delta t\right)B_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}\right] \tag{4.33}$$

$$H_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+3/2}=\left(\frac{2\varepsilon_0\kappa_x-\sigma_x\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_x+\sigma_x\Delta t}\right)H_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}+\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2\varepsilon_0\kappa_y+\sigma_x\Delta t}\right)\left[\left(2\varepsilon_0\kappa_z+\sigma_z\Delta t\right)B_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+3/2}-\left(2\varepsilon_0\kappa_z-\sigma_z\Delta t\right)B_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}\right] \tag{4.34}$$

Οι σχέσεις (4.26)-(4.28) περιγράφουν τις σχέσεις χρονικής αναβάθμισης του **E** στην περίπτωση που ο χώρος είναι το κενό. Στην περίπτωση όμως, που ο χώρος αποτελείται από υλικό με διηλεκτρική σταθερά ε, οι σχέσεις αυτές θα πρέπει να τροποποιηθούν. Θεωρείται ότι ο χώρος εκτός του στρώματος PML αποτελείται από διαφορετικά υλικά χωρίς απώλειες και $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 1$. Το γεγονός αυτό επιτρέπει τη μικρότερη δυνατή αλλαγή στις σχέσεις

αυτές απλοποιώντας σημαντικά το φορμαλισμό με αποτέλεσμα τελικά να γράφονται στη μορφή:

$$E_x\big|_{i+1/2,j,k}^{n+1}=\left(\frac{2\varepsilon-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon+\sigma_z\Delta t}\right)E_x\big|_{i+1/2,j,k}^{n}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon+\sigma_z\Delta t}\right)\times\left[\left(2\varepsilon+\sigma_x\Delta t\right)D_x\big|_{i+1/2,j,k}^{n+1}-\left(2\varepsilon-\sigma_x\Delta t\right)D_x\big|_{i+1/2,j,k}^{n}\right] \tag{4.35}$$

$$E_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n+1}=\left(\frac{2\varepsilon-\sigma_x\Delta t}{2\varepsilon+\sigma_x\Delta t}\right)E_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon+\sigma_x\Delta t}\right)\times\left[\left(2\varepsilon+\sigma_y\Delta t\right)D_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n+1}-\left(2\varepsilon-\sigma_y\Delta t\right)D_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n}\right] \tag{4.36}$$

$$E_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n+1}=\left(\frac{2\varepsilon-\sigma_y\Delta t}{2\varepsilon+\sigma_y\Delta t}\right)E_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon+\sigma_y\Delta t}\right)\times\left[\left(2\varepsilon+\sigma_z\Delta t\right)D_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n+1}-\left(2\varepsilon-\sigma_z\Delta t\right)D_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n}\right] \tag{4.37}$$

Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται η προσομοίωση ομογενών διηλεκτρικών διατάξεων κυματοδήγησης χωρίς να επέλθει αλλαγή στο φορμαλισμό για το PML, πέραν της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ε στο εκάστοτε υλικό. Με αντίστοιχο τρόπο, τροποποιούνται οι σχέσεις (4.32) - (4.34) για την προσομοίωση ομογενών μέσων με διαφορετικές μαγνητικές διαπερατότητες μ:

$$H_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+3/2}=\left(\frac{2\varepsilon-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon+\sigma_z\Delta t}\right)H_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}+\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2\varepsilon+\sigma_z\Delta t}\right)\times\left[\left(2\varepsilon+\sigma_x\Delta t\right)B_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+3/2}-\left(2\varepsilon-\sigma_z\Delta t\right)B_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}\right] \tag{4.38}$$

$$H_y\big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+3/2}=\left(\frac{2\varepsilon-\sigma_x\Delta t}{2\varepsilon+\sigma_x\Delta t}\right)H_y\big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}+\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2\varepsilon+\sigma_x\Delta t}\right)\times\left[\left(2\varepsilon+\sigma_y\Delta t\right)B_y\big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+3/2}-\left(2\varepsilon-\sigma_y\Delta t\right)B_y\big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}\right] \tag{4.39}$$

$$H_z\big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+3/2}=\left(\frac{2\varepsilon-\sigma_y\Delta t}{2\varepsilon+\sigma_y\Delta t}\right)H_z\big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}+\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2\varepsilon+\sigma_y\Delta t}\right)\times\left[\left(2\varepsilon+\sigma_z\Delta t\right)B_z\big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+3/2}-\left(2\varepsilon-\sigma_z\Delta t\right)B_z\big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}\right] \tag{4.40}$$

Στις σχέσεις που αναφέρθηκαν εμφανίζονται οι παράμετροι ε, μ, σ_x, σ_y, σ_z και πρόκειται για ποσότητες που σχετίζονται με το υλικό που υπάρχει στο χώρο που γίνεται η διάδοση και φυσικά μπορεί να είναι μεταβαλλόμενες από σημείο σε σημείο του πλέγματος. Για λόγους σύμβασης με τη βιβλιογραφία οι συντεταγμένες παραλείπονται χωρίς όμως να παύουν αυτές οι ποσότητες να είναι διακριτοποιημένες κατάλληλα.

Στη σχέση (4.21) παρατηρείται η έντονη εξάρτηση της μεταβολής της αγωγιμότητας του στρώματος PML από την παράμετρο n. Πρακτικά αυτό σημαίνει πως το απορροφητικό στρώμα λειτουργεί έτσι μόνο για κύματα με συγκεκριμένη κυματική αντίσταση. Έτσι, κύματα με διαφορετική κυματική αντίσταση δεν θα μπορούν να απορροφηθούν και θα ανακλώνται, είτε μερικά ή ολικά. Έτσι μπορεί να γίνει προσομοίωση συγκεκριμένων ρυθμών κυματοδήγησης, των οποίων η κυματική αντίσταση είναι γνωστή ή μπορεί να υπολογιστεί από κλειστή σχέση, παρά να προσομοιωθούν τυχαίες διεγέρσεις των οποίων το αποτέλεσμα

δεν είναι εκ των προτέρων γνωστό. Γι' αυτό το λόγο, το στρώμα UPML αποτυγχάνει να απορροφήσει ή να μειώσει επαρκώς τις ανακλάσεις από ρυθμούς κυματοδήγησης, που βρίσκονται κάτω από την αποκοπή (*evanescent waves*). Λύση σε αυτό το πρόβλημα δίνει μια διαφορετική υλοποίηση PML, το συνελικτικό PML (*convolutionary* PML) [13].

Κεφάλαιο 5
Ανάπτυξη Αριθμητικών Κωδίκων

5.1 Βασικά χαρακτηριστικά – περιγραφή

Προκειμένου να προσομοιωθούν διάφοροι κυματοδηγοί αναπτύχθηκε ένα κατάλληλο υπολογιστικό εργαλείο με βάση στον αλγόριθμο του Yee σε καρτεσιανές και σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Ο αριθμητικός κώδικας βασίζεται σε άμεση μεταφορά του αλγορίθμου του Yee σε κατάλληλη γλώσσα προγραμματισμού. Έτσι, εκτελούνται όλες οι απαραίτητες επαναλήψεις στα χωρικά κελιά όσο και στις χρονικές διαμερίσεις προκειμένου να ληφθούν οι πεδιακές κατανομές στον κυματοδηγό. Ο κώδικας timeCOCHLEA είναι γραμμένος σε γλώσσα C, χρησιμοποιώντας βιβλιοθήκες της γλώσσας C++, ενώ είναι παραλληλοποιημένος, όπου αυτό είναι εφικτό, χρησιμοποιώντας την βιβλιοθήκη OpenMP. Η διαδικασία σύνθεσης έγινε σε περιβάλλον Linux χρησιμοποιώντας το λογισμικό GCC. Η βασική δομή λειτουργίας του φαίνεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6: Δομή λειτουργίας αλγορίθμου.

Η δομή αυτή είναι ίδια στην περίπτωση του καρτεσιανού και κυλινδρικού πλέγματος, ωστόσο αλλάζει η μορφή των εξισώσεων χρονικής αναβάθμισης των πεδίων. Αναπτύχθηκαν στην ουσία δύο διαφορετικοί κώδικες, ίδιας δομής και λογικής, ο καθένας προσαρμοσμένος στο κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Βασική διαφορά τους αποτελεί η δυνατότητα εισαγωγής προσαρμοσμένου στρώματος (PML) στην περίπτωση του καρτεσιανού κώδικα, κάτι που δεν έχει ενσωματωθεί στην παρούσα φάση στην περίπτωση του κυλινδρικού, όπου οι οριακές συνθήκες είναι αυτές του τέλειου αγωγού. Ένα άλλο κοινό χαρακτηριστικό των δύο κωδίκων είναι η δυνατότητα επιλογής του τύπου της διέγερσης. Οι διαθέσιμοι τύποι διέγερσης είναι:

- *Διέγερση με συγκεκριμένη κατανομή ρυθμού*

Ο χρήστης σε αυτή την περίπτωση έχει τη δυνατότητα να ορίσει την τάξη και το είδος του ρυθμού (TE ή TM) και η συγκεκριμένη χωρική κατανομή να χρησιμοποιηθεί ως διέγερση, πολλαπλασιασμένη με τον κατάλληλο παράγοντα χρόνου, ο οποίος μπορεί να είναι είτε αρμονικός είτε μορφής Gauss.

- *Διέγερση με ρευματική κατανομή*

Σε αυτή την περίπτωση τοποθετείται ευθύγραμμη ρευματική κατανομή, η οποία έχει σταθερό πλάτος πυκνότητας ρεύματος κατά μήκος της. Ειδικότερα για την περίπτωση της κυλινδρικής γεωμετρίας, δίνεται η δυνατότητα επιλογής και αζιμουθιακής κατανομής ρεύματος σε συγκεκριμένη ακτινική απόσταση στο εγκάρσιο επίπεδο και για συγκεκριμένη αξονική θέση. Υπάρχει η δυνατότητα επιλογής του χρόνου για τον οποίο ο αγωγός θα διεγείρεται από ρεύμα, όπως επίσης και όλα τα απαραίτητα γεωμετρικά χαρακτηριστικά

(διαστάσεις διατομής στην ορθογωνική γεωμετρία και ακτίνας στην κυλινδρική) καθώς και επιλογή η κατανομή να έχει εξάρτηση χρόνο είτε αρμονικής είτε μορφής Gauss.

- *Διέγερση με ομοιόμορφη κατανομή στην εγκάρσια επιφάνεια*

Αποτελεί την απλούστερη μορφή διέγερσης και ουσιαστικά πρόκειται για σταθερό πλάτος σε όλη την εγκάρσια επιφάνεια μιας μόνο από τις πεδιακές συνιστώσες και αρμονική εξάρτηση από τον χρόνο.

Πέρα του είδους των διεγέρσεων, ο χρήστης δύναται να εισάγει όλες τις απαραίτητες παραμέτρους για κάθε προσομοίωση. Οι παράμετροι περιλαμβάνουν:

- *Γεωμετρικές παραμέτρους*

Όλα τα απαραίτητα γεωμετρικά δεδομένα, π.χ. ύψος, πλάτος και μήκος για την περίπτωση των ορθογωνικών κυματοδηγών καθώς και μήκος και ακτίνα για την περίπτωση των κυλινδρικών.

- *Παραμέτρους προσομοίωσης και ρυθμίσεις εξαγωγής αρχείων*

Πρόκειται για τις παραμέτρους που αφορούν το συνολικό χρόνο της προσομοίωσης, τον παράγοντα ρύθμισης της αγωγιμότητας στην περίπτωση ύπαρξης στρώματος PML, τον παράγοντα σταθερότητας και ορισμού για το χρονικό βήμα καθώς και τα κελιά ανά μήκος κύματος στον ελεύθερο χώρο. Επιπλέον, ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να ορίσει τον τρόπο εξαγωγής των αποτελεσμάτων, δηλαδή το χρονικό και το χωρικό βήμα. Δηλαδή, ενώ το πεδίο υπολογίζεται σε όλο το χώρο και για κάθε χρονικό βήμα με βάση την αρχική επιλογή του χρήστη, έχει τη δυνατότητα περιορισμού του όγκου εξαγόμενων αποτελεσμάτων.

- *Παραμέτρους διέγερσης*

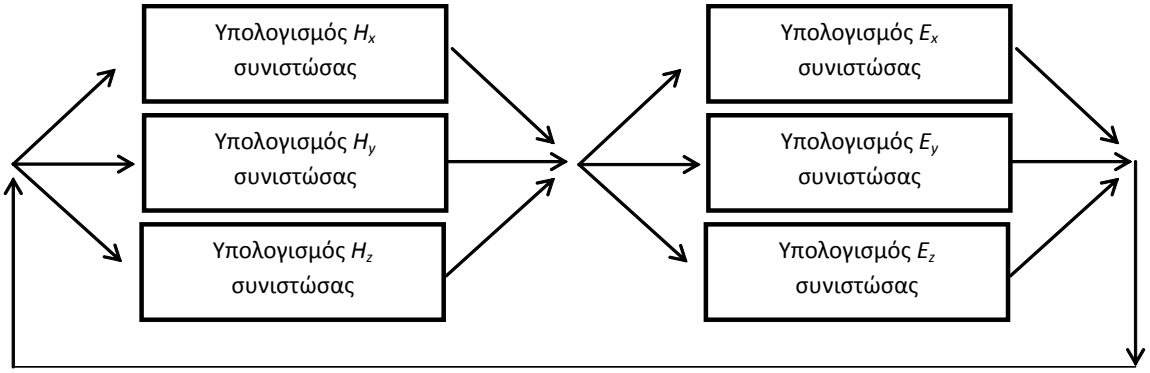
Περιλαμβάνεται το σύνολο των απαραίτητων παραμέτρων για τη διέγερση, όπως η συχνότητα αυτής, το είδος της διέγερσης, το είδος του ρυθμού (TM ή TE), οι απαραίτητοι δείκτες αυτού (δείκτες m και n για το καρτεσιανό πλέγμα και p και m για το κυλινδρικό) καθώς και το πλάτος της πυκνότητας ρεύματος, αν έχει τοποθετηθεί διέγερση με κατανομή ρεύματος.

- *Παραμέτρους κατανομής ρεύματος*

Περιλαμβάνονται το μήκος του αγωγού, τα σημεία έναρξης και τερματισμού του αγωγού καθώς και οι εγκάρσιες διαστάσεις αυτού (στην ορθογωνική γεωμετρία) καθώς και η ακτίνα της αζιμουθιακής κατανομής ρεύματος για την κυλινδρική.

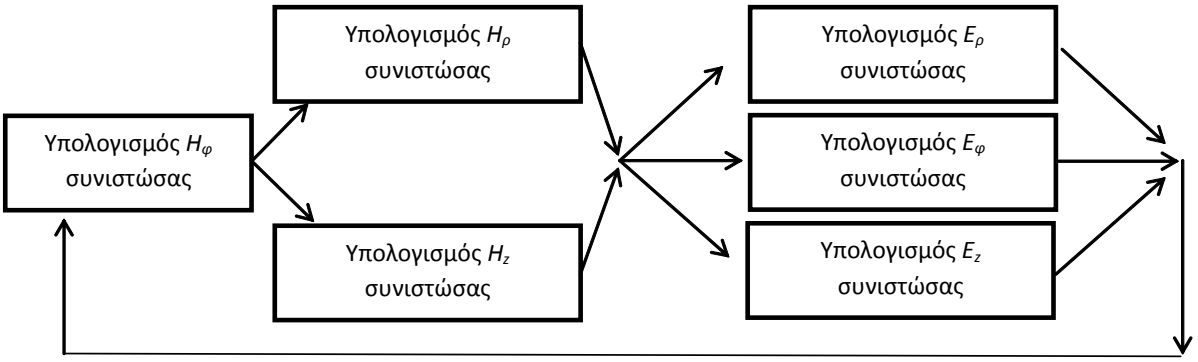
5.2 Αναλυτικός τρόπος λειτουργίας αριθμητικών κωδίκων

Οι αριθμητικοί κώδικες που αναπτύχθηκαν για τις δύο διαφορετικές γεωμετρίες ακολουθούν την ίδια βασική λογική ως προς τον τρόπο υπολογισμού των πεδίων αλλά και εξαγωγής των αποτελεσμάτων. Είναι παραλληλοποιημένοι, όπου αυτό είναι εφικτό, ακολουθώντας όμως διαφορετικό σχήμα παραλληλοποίησης ο καθένας. Ειδικότερα, το τμήμα, όπου εμφανίζονται παράλληλες διεργασίες στον καρτεσιανό κώδικα, παριστάνεται με το διάγραμμα ροής που φαίνεται στο Σχήμα 7. Λόγω της φύσης των εξισώσεων αναβάθμισης πεδίου, οι διεργασίες που δίνουν τις συνιστώσες του μαγνητικού αλλά και του ηλεκτρικού πεδίου μπορούν να εκτελεστούν παράλληλα, σε δύο ομάδες, μια ανά πεδίο.



Σχήμα 7: Διάγραμμα ροής παράλληλου τμήματος καρτεσιανού κώδικα.

Αντίθετα με τον κώδικα για το καρτεσιανό πρόβλημα, ο αντίστοιχος για το κυλινδρικό δεν επιτρέπει την παραλληλοποίηση στον ίδιο βαθμό. Αιτία είναι οι εξισώσεις αναβάθμισης του πεδίου για $\rho = 0$, όπου επιβάλλεται η μια συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου (H_φ) να έχει αποκτήσει τιμή πρωθύστερα, αφού χρησιμοποιείται για την αναβάθμιση της άλλης συνιστώσας H_ρ. Έτσι, το Σχήμα 7 τροποποιείται κατάλληλα και το διάγραμμα ροής για τον κυλινδρικό κώδικα δίνεται στο Σχήμα 8. Επιπρόσθετα, στην περίπτωση του κυλινδρικού κώδικα δίνεται στο χρήστη η δυνατότητα να διαλέξει εκείνος τη μέθοδο αποφυγής της ιδιομορφίας για $\rho = 0$ ανάμεσα στις τρεις μεθόδους που αναφέρθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 8: Διάγραμμα ροής παράλληλου τμήματος κυλινδρικού κώδικα.

Παράλληλα με τους προαναφερθέντες αριθμητικούς κώδικες, αναπτύχθηκε και κατάλληλο εργαλείο, γραμμένο σε γλώσσα C, όπου γίνεται ο υπολογισμός των συχνοτήτων αποκοπής των διαφόρων ρυθμών σε κάθε γεωμετρία (είτε κυλινδρική είτε ορθογωνική), ώστε ο χρήστης να έχει μια εποπτική εικόνα των παραμέτρων εισαγωγής πριν εκτελέσει προσομοιώσεις.

Οι σταθερές του πλέγματος (χωρικά βήματα σε κάθε κατεύθυνση) καθώς και το χρονικό βήμα υπολογίζονται με βάση το κριτήριο σταθερότητας του Courant και για τις δύο περιπτώσεις. Ειδικότερα, τα βήματα στο χώρο είναι σταθερά και τόσα ώστε το μεγαλύτερο από αυτά (στην περίπτωση του ορθογωνικού κώδικα) να είναι ίσο με λ/cpw, όπου cpw είναι τα κελιά ανά μήκος κύματος στο υλικό με τη μεγαλύτερη διηλεκτρική σταθερά (προφανώς είναι το ελάχιστο από όλα τα υλικά). Ο υπολογισμός αυτός προκύπτει καθώς στη διάταξη μπορεί να υπάρχουν υλικά με διαφορετική διηλεκτρική σταθερά. Σε διαφορετικές διηλεκτρικές σταθερές το μήκος κύματος μικραίνει και επομένως για να περιγραφεί σωστά η διάδοση στις περιοχές αυτές το πλέγμα θα πρέπει να πυκνώσει ανάλογα. Επιπλέον, το

χρονικό βήμα πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα σταθερότητας, θετικό και μικρότερο από μονάδα, ώστε σε περιπτώσεις όπου το αριθμητικό σφάλμα οδηγεί σε απειρισμούς και όχι σε σύγκλιση, ο χρήστης να έχει τη δυνατότητα να ρυθμίσει το χρονικό βήμα ώστε τα αποτελέσματα να συγκλίνουν. Στη περίπτωση του κυλινδρικού κυματοδηγού, εξαιτίας της καμπυλόγραμμης φύσης των κελιών, οι αποστάσεις αυτές υπολογίζονται λαμβάνοντας υπόψη και το αζιμουθιακό βήμα. Το τελευταίο υπολογίζεται ως το βήμα που απαιτείται ώστε η απόσταση *λ/cpw* να είναι μεγαλύτερη από την απόσταση που ορίζεται από το γινόμενο του αζιμουθιακού βήματος επί την ακτίνα του κυματοδηγού. Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζονται τα χωρικά βήματα στον άξονα διάδοσης και στην ακτίνα.

Η εισαγωγή των εκάστοτε οριακών συνθηκών σε κάθε γεωμετρία πραγματοποιείται με την εκχώρηση τιμής στα κελιά εκείνα των πινάκων, τα οποία ορίζουν γεωμετρικά την οριακή συνθήκη. Για να γίνει πιο κατανοητό, έστω κυλινδρικός κυματοδηγός ακτίνας A. Το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο (στην περίπτωση αυτή οι συνιστώσες E_z και E_φ) μηδενίζεται για $\rho = A$. Αυτό εκφραζόμενο ως στοιχείο πίνακα θα περιγράφονταν ως $E_z\left(N_\rho, j, k\right) = 0$ και $E_\varphi\left(N_\rho, j, k\right) = 0$, όπου N_ρ είναι τα κελιά που αντιστοιχούν σε απόσταση ίση με την ακτίνα. Θα πρέπει σε αυτό το σημείο κανείς να προσέξει ότι λόγω της θέσης των πεδιακών συνιστωσών στα μοναδιαία κελιά και λόγω του ότι τα στοιχεία του πίνακα ορίζονται μόνο με ακεραίους δείκτες θα πρέπει να γίνει μια μεταφορά από το συμβολισμό με τα ημι-ακέραια βήματα του αλγορίθμου του Yee σε ακέραιους δείκτες, όπως ισχύει για τους πίνακες στη γλώσσα C. Οι απαραίτητες μεταφορές στο συμβολισμό γίνονται με την εξής λογική: Έστω ένα πεδίο E_n, το οποίο θα πρέπει να υπολογιστεί στη θέση $\left(i+1/2, j-1/2, k\right)$. Θεωρούμε ότι ο υπολογισμός του πεδίου θα γίνει στο σημείο $\left(i, j, k\right)$, με τους δείκτες να «τρέχουν» κατάλληλα. Έτσι, έχει πραγματοποιηθεί μια μεταφορά κατά $\left(-1/2, +1/2, 0\right)$ για το κατάλληλο πεδίο. Για να υπάρχει συνέπεια με τις υπόλοιπες πεδιακές συνιστώσες, αυτή η μεταφορά θα πρέπει να γίνει για κάθε ανανέωση οποιασδήποτε συνιστώσας στην οποία εμφανίζεται. Για παράδειγμα, αν η συνιστώσα E_n εμφανίζεται στην ανανέωση του πεδίου H_m, θα πρέπει να πραγματοποιηθεί η μεταφορά των δεικτών που αντιστοιχεί στο E_n, όπου αυτό εμφανίζεται. Με συνεπή εφαρμογή του παραπάνω κανόνα, ο αλγόριθμος του Yee εμφανίζει μόνο ακέραιους δείκτες. Για μεταφορά από αυτό το συμβολισμό πίσω στο συμβολισμό του Yee, αρκεί να γίνει η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή να εφαρμοστεί η ίδια μεταφορά με αντίθετα πρόσημα. Συνοπτικά, οι απαραίτητες αλλαγές, που πρέπει να γίνουν ώστε ο αλγόριθμος του Yee να γραφεί ως κώδικας σε C, φαίνονται στους Πίνακες I και II.

Πίνακας I: Μεταφορά δεικτών για καρτεσιανές συντεταγμένες

Συνιστώσα με συμβολισμό Yee	**Συνιστώσα με συμβολισμό C**	**Μεταφορά δεικτών**
$E_x(i+1/2, j, k)$	$E_x(i, j, k)$	(-1/2, 0, 0)
$E_y(i, j+1/2, k)$	$E_y(i, j, k)$	(0, -1/2, 0)
$E_z(i, j, k+1/2)$	$E_z(i, j, k)$	(0, 0, -1/2)
$H_x(i, j+1/2, k+1/2)$	$H_x(i, j, k)$	(0, -1/2, -1/2)
$H_y(i+1/2, j, k+1/2)$	$H_y(i, j, k)$	(-1/2, 0, -1/2)
$H_z(i+1/2, j+1/2, k)$	$H_z(i, j, k)$	(-1/2, -1/2, 0)

Πίνακας ΙΙ: Μεταφορά δεικτών για κυλινδρικές συντεταγμένες

Συνιστώσα με συμβολισμό Yee	**Συνιστώσα με συμβολισμό C**	**Μεταφορά δεικτών**
$E_\rho(i+1/2, j, k)$	$E_\rho(i, j, k)$	(-1/2, 0, 0)
$E_\varphi(i, j+1/2, k)$	$E_\varphi(i, j, k)$	(0, -1/2, 0)
$E_z(i, j, k+1/2)$	$E_z(i, j, k)$	(0, 0, -1/2)
$H_\rho(i, j+1/2, k+1/2)$	$H_\rho(i, j, k)$	(0, -1/2, -1/2)
$H_\varphi(i+1/2, j, k+1/2)$	$H_\varphi(i, j, k)$	(-1/2, 0, -1/2)
$H_z(i+1/2, j+1/2, k)$	$H_z(i, j, k)$	(-1/2, -1/2, 0)

Αντίστοιχες μεταφορές θα γίνουν στην περίπτωση όπου υπάρχουν πυκνότητα ρεύματος, φορτία, αγωγιμότητες αλλά και αλλαγές στη μαγνητική διαπερατότητα και την διηλεκτρική σταθερά. Οι αλλαγές αυτές καθώς και οι πηγές που αναφέρθηκαν βρίσκονται στις ίδιες θέσεις με τα αντίστοιχα πεδία, στο κελί του Yee, οπότε και ισχύουν οι ίδιες σχέσεις μεταφοράς δεικτών με τα αντίστοιχα πεδία.

Η αποθήκευση των αρχείων γίνεται σε μορφή ASCII για μεγαλύτερη συμβατότητα με εφαρμογές ανάλυσης δεδομένων. Τα αρχεία ASCII αποθηκεύονται με την κατάληξη .dat. Στα δεδομένα που εξάγονται περιλαμβάνονται οι διάφορες πεδιακές συνιστώσες κατά μήκος του άξονα διάδοσης και εγκάρσια σε αυτόν, καθώς και στο χρόνο, δηλαδή οι τιμές των συνιστωσών σε ένα σημείο σε διάφορες χρονικές στιγμές. Επειδή ο κώδικας υπολογίζει τα πεδία για κάθε χρονική στιγμή και για κάθε σημείο μέσα στον υπολογιστικό χώρο, υπάρχει η δυνατότητα εξαγωγής οποιασδήποτε κατανομής θέλει ο χρήστης με κατάλληλη τροποποίηση του κώδικα.

Τα δεδομένα προσομοίωσης εισάγονται στο κυρίως πρόγραμμα με τη βοήθεια ενός αρχείου μορφής ASCII. Το αρχείο έχει τέτοια δομή, που επιτρέπει την εισαγωγή όλων των απαραίτητων παραμέτρων προσομοίωσης χωρίς να χρειάζεται επιπλέον εισαγωγή τους κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του κώδικα. Επιπλέον, το συγκεκριμένο αρχείο περιέχει και τις διάφορες επιλογές για την εξαγωγή των διαφόρων αρχείων αποτελεσμάτων.

Η επεξεργασία των δεδομένων γίνεται με τη βοήθεια του κατάλληλου πακέτου γραφικών, όπου δίνεται η δυνατότητα εξαγωγής των διάφορων γραφικών παραστάσεων των πεδιακών κατανομών, ενώ πραγματοποιούνται και οι μετασχηματισμοί Fourier για τον υπολογισμό των φασμάτων στο πεδίο της συχνότητας και στο πεδίο των κυματαριθμών.

Κεφάλαιο 6
Αριθμητικά Αποτελέσματα

6.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο δίνονται αποτελέσματα και για τις δύο γεωμετρίες (ορθογωνική και κυλινδρική) και για αρκετές περιπτώσεις που να καλύπτουν μεγάλο πλήθος διεγέρσεων και συνθηκών κυματοδήγησης. Οι προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν στον H/Y Dell Precision T5400[1].

6.2 Κυματοδηγός ορθογωνικής διατομής

6.2.1 Εξέταση επίδρασης στρώματος PML

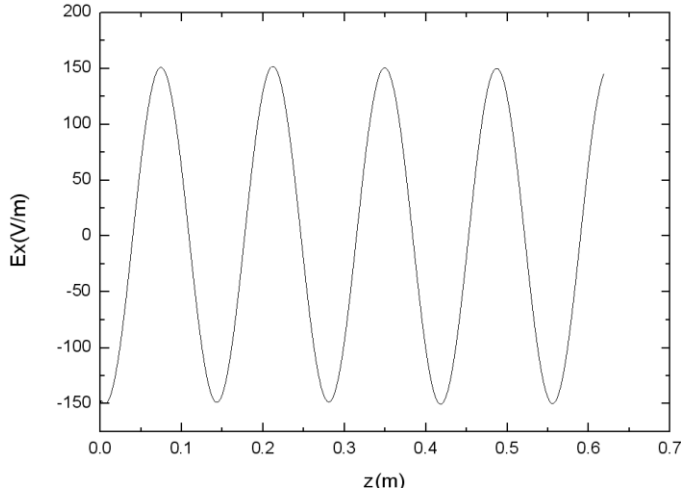
Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κυματοδηγού δίνονται στον Πίνακας ΙΙΙ με στρώμα PML, το οποίο εκτείνεται σε απόσταση μήκους 10 κελιών, αξονικά τοποθετημένο, ώστε να τερματίζει τη διάταξη. Τα στρώμα αυτό βρίσκεται μέσα στη διάταξη και κατά συνέπεια περιορίζει το ενεργό μήκος, που πρόκειται να μελετηθεί σε $L - L_{\mathrm{PML}}$. Για τις περισσότερες εφαρμογές τα 10 κελιά κρίνονται κατάλληλα, ενώ ο εκθετικός παράγοντας αύξησης της αγωγιμότητας τέθηκε ίσος με 3 [12]. Προκειμένου να ικανοποιείται η συνθήκη του Courant για το χρονικό βήμα, ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας σταθερότητας τέθηκε ίσος με 0.69 για μεγαλύτερη ασφάλεια όσον αφορά τη σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Τέλος, επιλέγεται η εξαγωγή των αξονικών κατανομών να γίνεται στο σημείο όπου μεγιστοποιούνται τα πλάτη των πεδίων στο εγκάρσιο επίπεδο σε χρόνο ίσο με 8 ns, ώστε να έχει επέλθει ισορροπία και να έχει αναπτυχθεί ο ρυθμός.

Πίνακας ΙΙΙ: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά προσομοίωσης

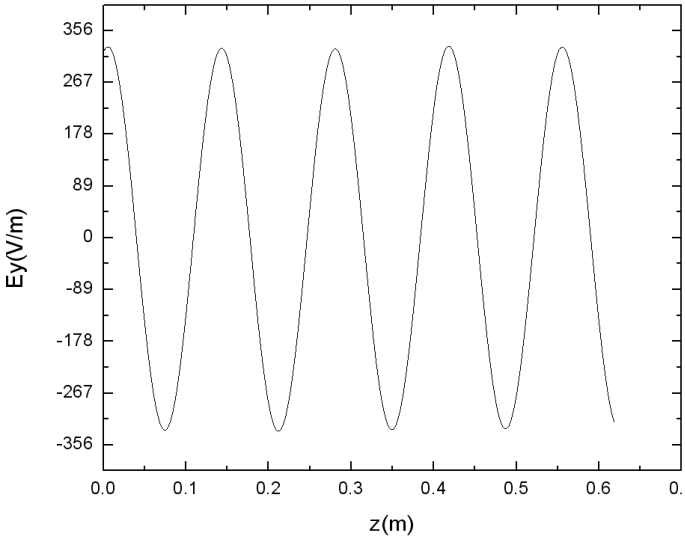
Μήκος *L* (mm)	**Πλάτος *a* (mm)**	**Ύψος *b* (mm)**	**Κελιά PML**
620	48	22	10
Συχνότητα λειτουργίας (GHz)	**Ρυθμός διέγερσης**	**Κελιά ανά μήκος κύματος**	**Συνολικός χρόνος (ns)**
7.8	TE_{11}	30	8

Οι κατανομές των E_x και E_y δίνονται στο Σχήμα 9α και Σχήμα 9β, αντίστοιχα, ενώ η αντίστοιχη της E_z παρουσιάζεται στο Σχήμα 10. Είναι προφανής μια μη αναμενόμενη εμφάνιση της E_z, η οποία δεν προβλέπεται από τη θεωρία για το ρυθμό αυτό (TE). Όμως, αν προσέξει κανείς το πλάτος αυτής είναι τουλάχιστον τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερο από το αντίστοιχο πλάτος των άλλων δύο συνιστωσών και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ως αποδεκτό αριθμητικό σφάλμα. Μάλιστα, το πλάτος της E_z είναι περίπου 56 dB μικρότερο από αυτό της E_x. Σημειώνεται ότι τα διάφορα εμπορικά προγράμματα, π.χ. το CST Studio Suite έχουν όριο τα 30 dB.

[1] 2 x Intel Xeon E5405 4-Core CPUs, 8GB RAM, openSuSE Linux 11.3 x86-64

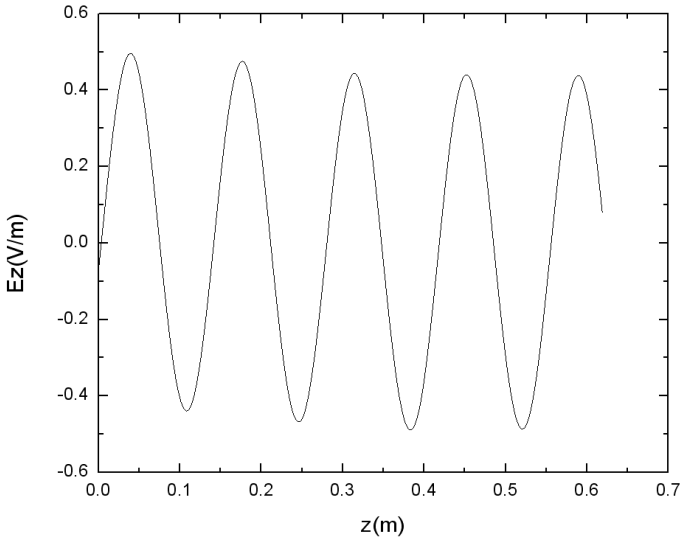


(α)



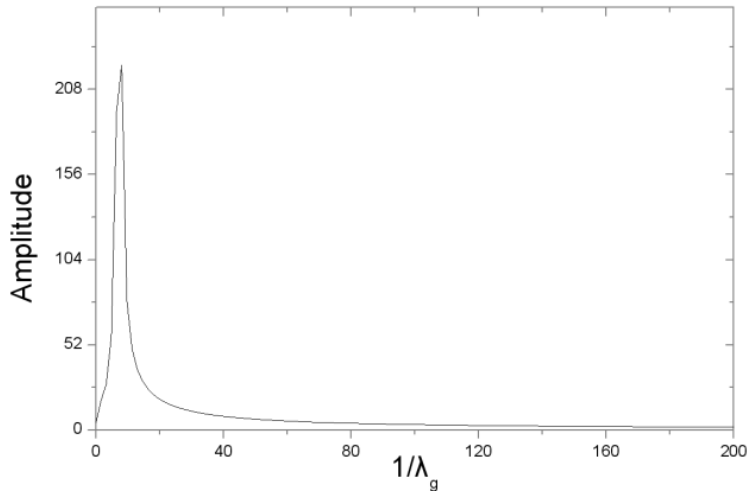
(β)

Σχήμα 9: Αξονική κατανομή (α) της E_x και (β) της E_y συνιστώσας.



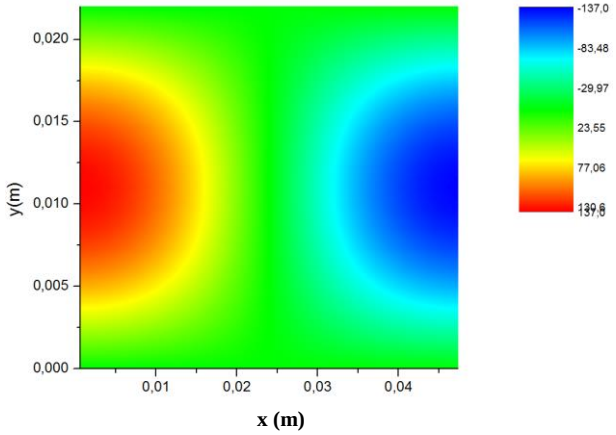
Σχήμα 10:Αξονική κατανομή της E_z συνιστώσας.

Με εφαρμογή του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (FFT) στην αξονική κατανομή της E_z προκύπτει το φάσμα της στο πεδίο των κυματαριθμών (Σχήμα 11), όπου λ_g είναι το μήκος κύματος στο κυματοδηγό. Από το σχήμα αυτό φαίνεται ένα ισχυρό μέγιστο στην τιμή $1/\lambda_g = 6.58\ \mathrm{m}^{-1}$, που αντιστοιχεί σε $\beta = 41.35\ \mathrm{m}^{-1}$, ενώ η θεωρητικά αναμενόμενη είναι $\beta = 45.3\ \mathrm{m}^{-1}$, δηλαδή έχουμε ένα μη αμελητέο σφάλμα της τάξης του 9%. Η απόκλιση αυτή πιθανώς να οφείλεται στο μικρό μήκος του κυματοδηγού καθώς και στο μικρό χρόνο προσομοίωσης που επιλέχθηκαν, με συνέπεια τα αποτελέσματα να μην έχουν συγκλίνει ικανοποιητικά. Η μορφή της αξονικής κατανομής είναι ένα ημίτονο με περίπου σταθερό πλάτος, που εμφανίζει συμμετρία ως προς το μηδέν, όπως αναμένεται από τη θεωρία για κύμα που οδεύει σε ανοικτό κυματοδηγό χωρίς ανακλάσεις.

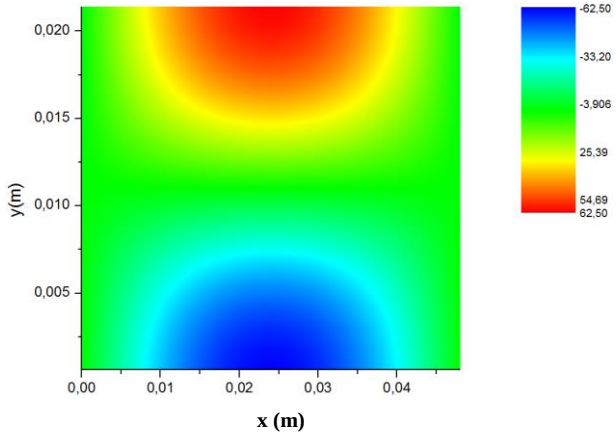


Σχήμα 11: Φάσμα χωρικού μετασχηματισμού Fourier της E_x συνιστώσας.

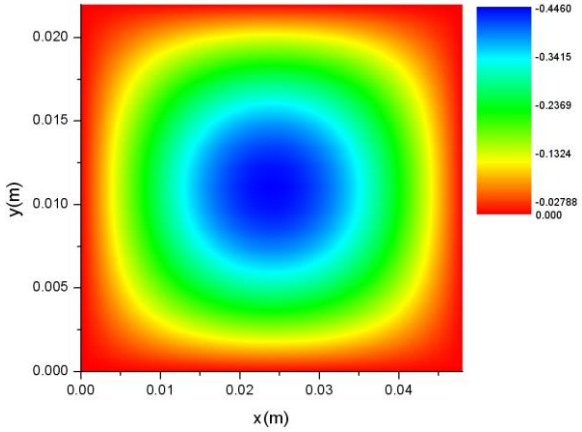
Οι εγκάρσιες κατανομές των E_x, E_y, E_z δίνονται στα Σχήμα 12, Σχήμα 13 και Σχήμα 14, αντίστοιχα, και ελήφθησαν για χρόνο ίσο με 5 ns σε αξονική απόσταση ίση με 0.31 m. Στην περίπτωση κατά την οποία δεν υπάρχει υπολογισμένη τιμή πεδίου στο σημείο αυτό (λόγω της δεδομένης επιλογής των κελιών), το πεδίο υπολογίζεται από τη γραμμική προσέγγιση μεταξύ του επόμενου και του προηγούμενου αξονικού κελιού. Από τα σχήματα αυτά είναι φανερό ότι οι εγκάρσιες κατανομές είναι οι θεωρητικά αναμενόμενες με δύο μέγιστα για κάθε συνιστώσα, αφού πρόκειται για το ρυθμό TE_{11}. Επίσης, υπάρχει και πάλι εμφάνιση μη μηδενικής E_z, όμως αυτή έχει αρκετά μικρότερο πλάτος από τις άλλες δύο.



Σχήμα 12: Κατανομή της E_x συνιστώσας.

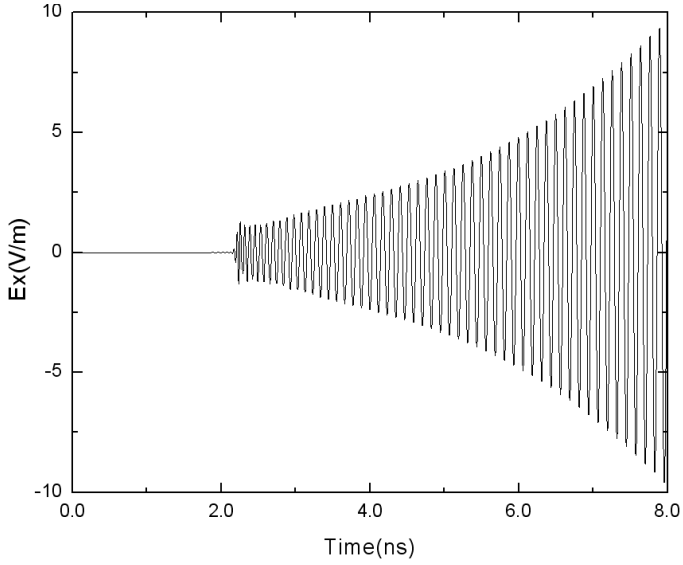


Σχήμα 13: Εγκάρσια κατανομή της E_y συνιστώσας.

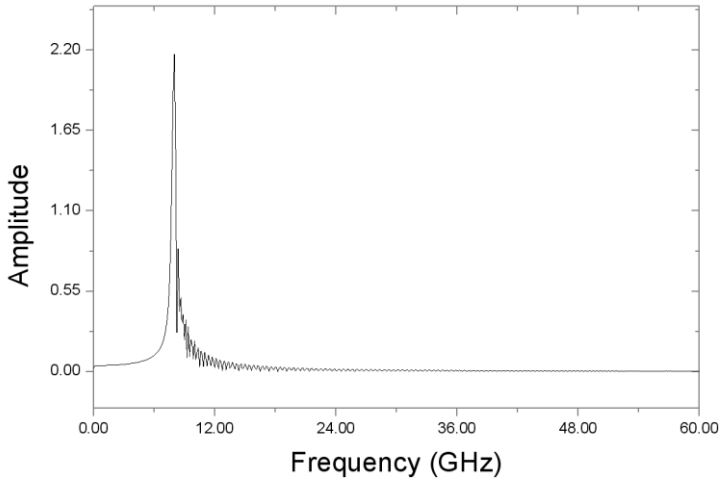


Σχήμα 14: Εγκάρσια κατανομή της E_z συνιστώσας.

Η χρονική μεταβολή της E_x σε αξονική θέση ίση με την αρχή του στρώματος PML δίνεται στο Σχήμα 15 και από το μετασχηματισμό Fourier αυτής θα προκύψει η συχνότητα λειτουργίας. Πράγματι, όπως φαίνεται από το Σχήμα 16, η συχνότητα αυτή είναι 7.99 GHz, αρκετά κοντά στη συχνότητα που τέθηκε στην προσομοίωση, αλλά όχι ακριβώς η ίδια.

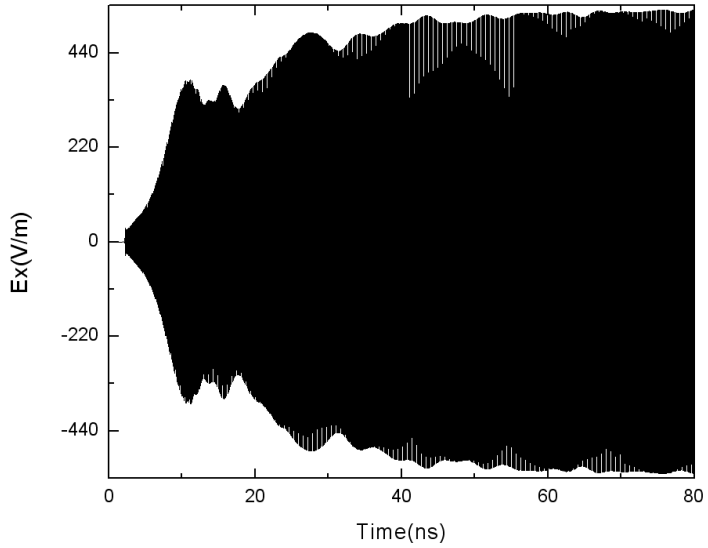


Σχήμα 15: Χρονική εξέλιξη της E_x.

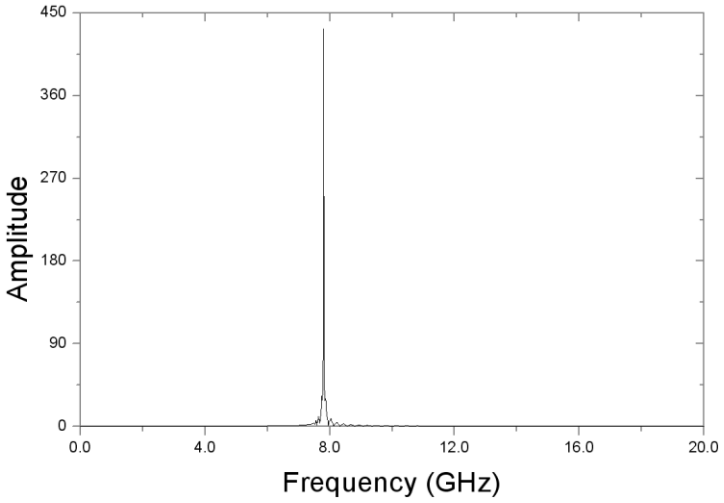


Σχήμα 16: Συχνοτικό φάσμα προσομοίωσης για χρόνο υπολογισμών *t* = 8 ns.

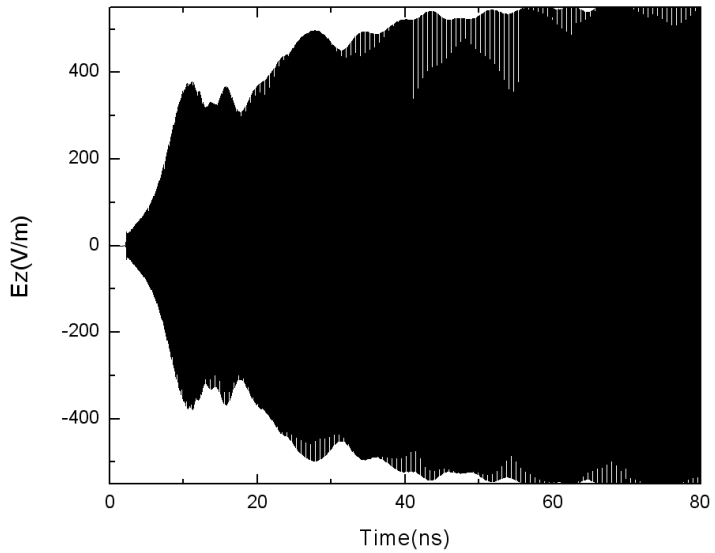
Για βελτίωση των αποτελεσμάτων, εκτελείται ξανά η προσομοίωση επιλέγοντας χρόνο ίσο με 80 ns, αρκετά μεγαλύτερο από πριν. Η χρονική εξέλιξη της E_x δίνεται στο Σχήμα 17 και το αντίστοιχο συχνοτικό φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 18. Η κορυφή του φάσματος είναι αρκετά πιο εντοπισμένη κοντά στα 7.7999 GHz, δηλαδή η επιλογή μικρού χρονικού παραθύρου (8 ns) είναι η αιτία για τη μη σωστή εύρεση της τιμής της συχνότητας λειτουργίας που βρέθηκε προηγούμενα. Επίσης, μολονότι εμφανίζονται μικρές διακυμάνσεις στο πλάτος και ειδικότερα για χρόνο μεγαλύτερο των 20 ns, αυτές μπορούν να δικαιολογηθούν ως εμφάνιση ανακλάσεων τόσο στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ κενού χώρου και PML όσο και στη μεταλλική επιφάνεια που τερματίζει το PML και κατά συνέπεια τον κυματοδηγό. Πραγματοποιώντας και πάλι την ίδια προσομοίωση αυξάνοντας όμως τώρα τον εκθετικό παράγοντα για το PML από 3 σε 4, λαμβάνεται η χρονική εξέλιξη της E_z που απεικονίζεται στο Σχήμα 19. Παρατηρούνται και πάλι οι ίδιες διακυμάνσεις και μάλιστα ακριβώς στις ίδιες χρονικές περιόδους με μειωμένο συνολικό πλάτος. Εύλογα κανείς αντιλαμβάνεται πως η αύξηση του πολυωνυμικού παράγοντα επηρεάζει μόνο το πλάτος των διαφόρων συνιστωσών, όπως φαίνεται και στα Σχήματα 8 και 10.



Σχήμα 17: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας (*t* = 80 ns).



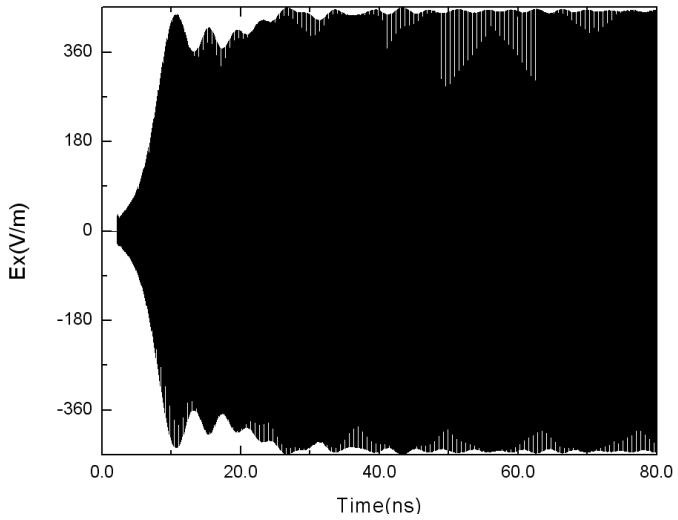
Σχήμα 18: Συχνοτικό φάσμα για χρόνου υπολογισμών *t* = 80 ns.



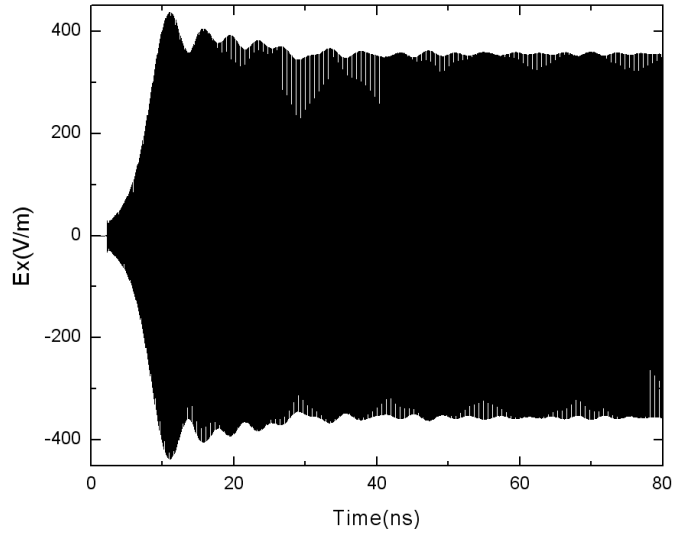
Σχήμα 19: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας για εκθετικό παράγοντα ίσο με 4.

Ο επόμενος παράγοντας που μπορεί να ρυθμιστεί για το PML είναι το πάχος (σε κελιά) του στρώματος. Επιλέγοντας πάχος 20 κελιά (Σχήμα 20) γίνεται αντιληπτό πως οι ανακλάσεις περιορίζονται και το πλάτος παραμένει σχεδόν σταθερό, όπως αναμένεται, αφού στα πρώτα 20 ns εξαλείφονται τα διάφορα μεταβατικά φαινόμενα. Μοναδικό μειονέκτημα της αύξησης του πάχους του στρώματος του PML σε 20 κελιά, αποτελεί στην παρούσα έκδοση του κώδικα, η μείωση του ενεργού μήκους του κυματοδηγού στο οποίο μελετάται η διάδοση. Για το λόγο αυτό, ο κώδικας τροποποιήθηκε ώστε τα κελιά του στρώματος PML να μην είναι μέσα στην ενεργό διάταξη αλλά εκτός αυτής. Πρακτικά αυτό σημαίνει πως αν *nz* είναι το πλήθος των αξονικών κελιών, το νέο πλήθος αυτών θα είναι $nz + n_{\mathrm{PML}}$, όπου n_{PML} το πλήθος κελιών του στρώματος PML. Αυτό γίνεται με σκοπό αφενός μεν να μη μειώνεται το μήκος της διάταξης (χωρίς το στρώμα PML) και αφετέρου να υπάρχουν αρκετά κελιά στο στρώμα ώστε να περιορίζονται παράλληλα και οι ανακλάσεις. Τότε, η χρονική εξέλιξη της E_x λίγο πριν το στρώμα PML (στην περιοχή του κυματοδηγού) φαίνεται στο Σχήμα 21. Γίνεται αντιληπτό πως τα μεταβατικά φαινόμενα σε αυτή την περίπτωση φθίνουν μετά τα 20 ns. Επιπλέον, η διαφορετική μορφή που έχει η περιβάλλουσα της κατανομής σε χρόνο μικρότερο των 20 ns οφείλεται στην διαφορετική αξονική απόσταση στην οποία λήφθηκε η χρονική

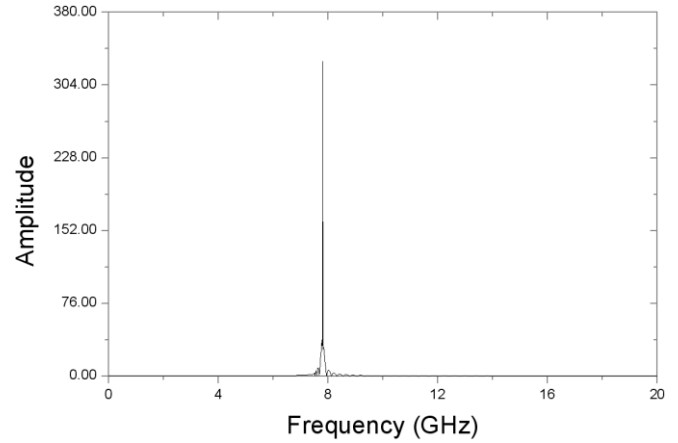
εξέλιξη και επομένως στη διαφορετική φάση με την οποία το κύμα «φθάνει» εκεί. Το συχνοτικό φάσμα προκύπτει αρκετά «καθαρό» για άλλη μια φορά, με μοναδική συχνότητα 7.7999 GHz, που οδηγεί στο συμπέρασμα πως το κύμα δεν υφίσταται κανενός είδους συχνοτικής διεύρυνσης (Σχήμα 22).



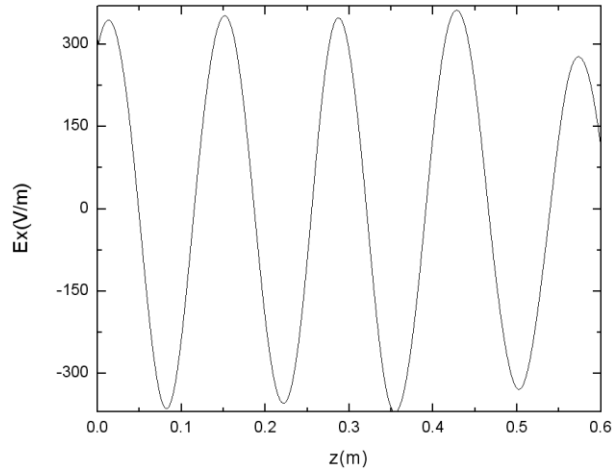
Σχήμα 20: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας για 20 κελιά στρώματος PML.



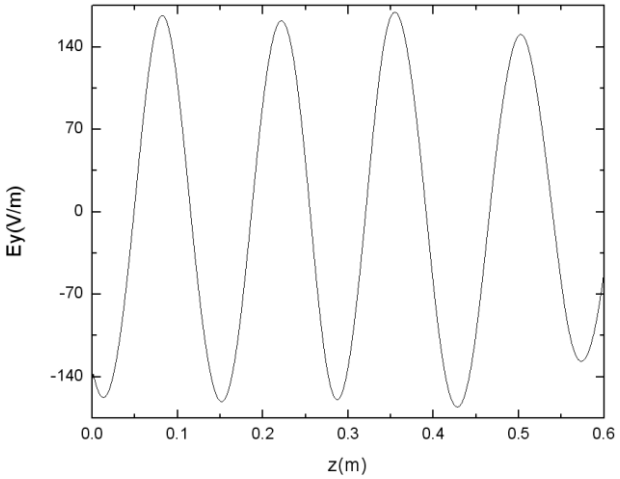
Σχήμα 21: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας για 20 κελιά PML τοποθετημένα εκτός του ενεργού μήκους.



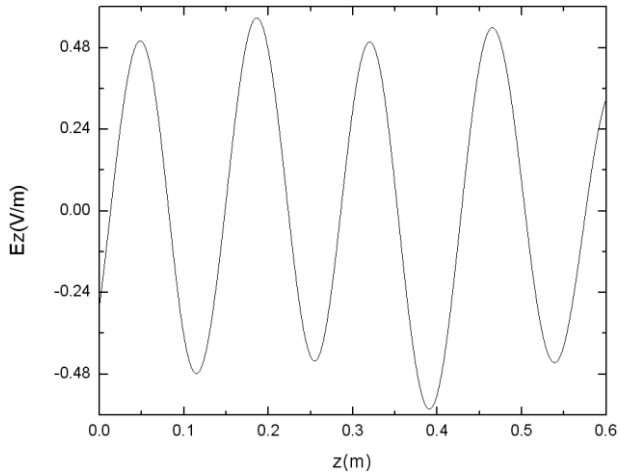
Σχήμα 22: Συχνοτικό φάσμα για PML τοποθετημένο εκτός της ενεργής περιοχής.



(α)



(β)

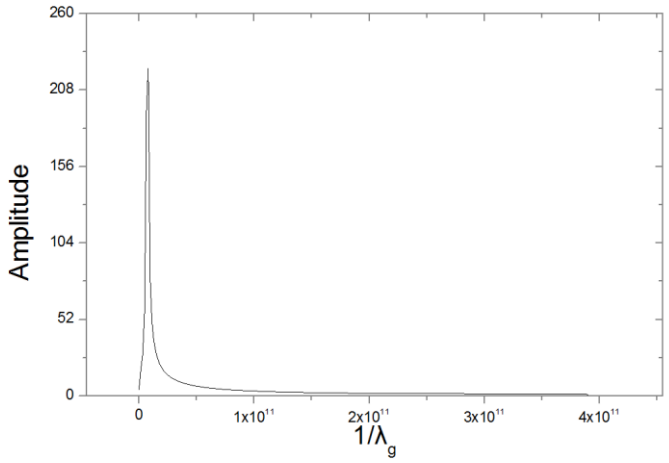


(γ)

Σχήμα 23: Αξονικές κατανομές πεδιακών συνιστωσών για *t* = 80 ns.

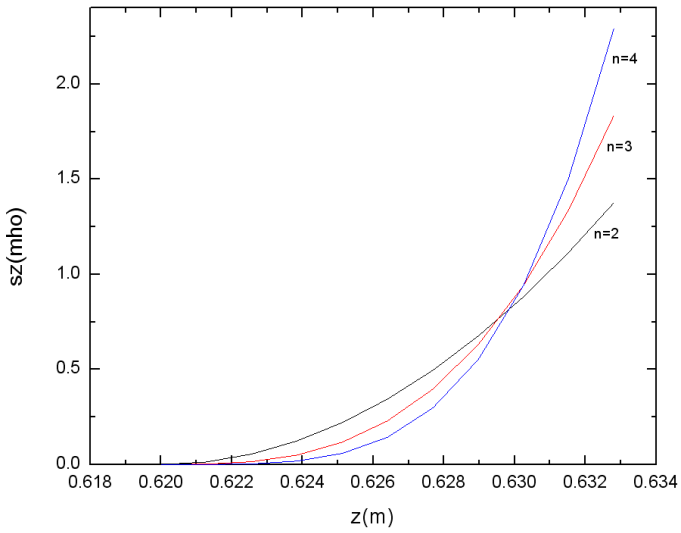
Οι αξονικές κατανομές για $t = 80$ ns φαίνονται στο Σχήμα 23. Παρατηρείται μικρή μείωση του μέγιστου πλάτους της κάθε συνιστώσας, αλλά η συνολική μορφή είναι σαφώς βελτιωμένη, παρουσιάζοντας μορφή ημιτόνου με σχεδόν σταθερό πλάτος και ίδια χωρική

συχνότητα (κυματάριθμος). Από το χωρικό μετασχηματισμό Fourier (Σχήμα 24) προκύπτει ένα μέγιστο στην τιμή $1/\lambda_g = 8.06\ \mathrm{m}^{-1}$, που αντιστοιχεί σε $\beta = 50.65\ \mathrm{m}^{-1}$, τιμή αρκετά μεγαλύτερη από τη θεωρητικά υπολογισμένη τιμή των $45.5\ \mathrm{m}^{-1}$ (σφάλμα περίπου 11%). Επομένως, με αύξηση των κελιών του PML καθώς και τοποθέτησής του εκτός της ενεργούς περιοχής, που πρόκειται να μελετηθεί, υπάρχει σαφής μεταβολή του κυματάριθμου, γεγονός όχι επιθυμητό. Προφανώς, η επιλογή του ενεργού μήκους καθώς και του αριθμού κελιών του PML επηρεάζουν την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

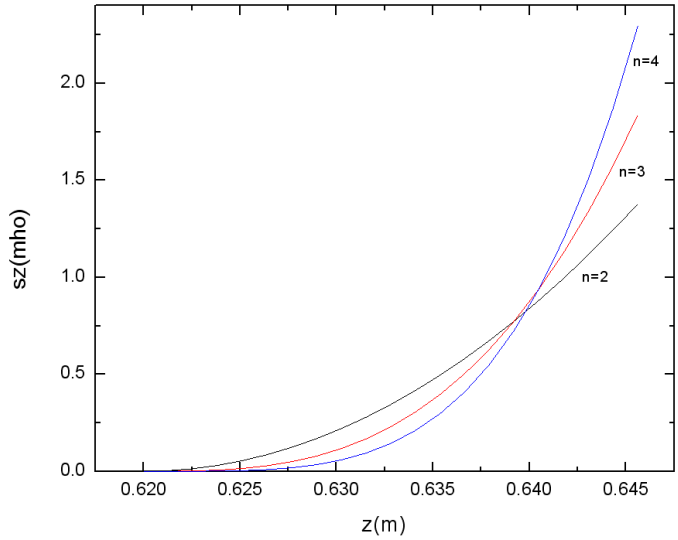


Σχήμα 24: Φάσμα στο πεδίο των κυματαριθμών για την περίπτωση εξωτερικής τοποθέτησης του στρώματος PML.

Η μεταβολή της αγωγιμότητας σε συνάρτηση της αξονικής θέσης μέσα στο PML, για 10 και 20 κελιά, απεικονίζεται στο Σχήμα 25 και Σχήμα 26, αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από τα δύο σχήματα, για μεγαλύτερο n (εκθετικό παράγοντα αύξησης της αγωγιμότητας), η αγωγιμότητα έχει μικρότερη κλίση αρχικά αλλά στη συνέχεια αυξάνει έχει μεγαλύτερη. Μειονέκτημα όμως αποτελεί η αύξηση των υπολογιστικών πόρων που απαιτούνται όταν γίνεται χρήση 20 κελιών. Έτσι, στην πράξη χρησιμοποιούνται συνήθως PML 10 κελιών με παράγοντα αύξησης $3.5 < n < 4$ [7].



Σχήμα 25: Μεταβολή για $2 < n < 4$ της αγωγιμότητας για PML 10 κελιών.



Σχήμα 26: Μεταβολή για 2 < *n* < 4 της αγωγιμότητας για PML 20 κελιών.

6.2.2 Απουσία PML

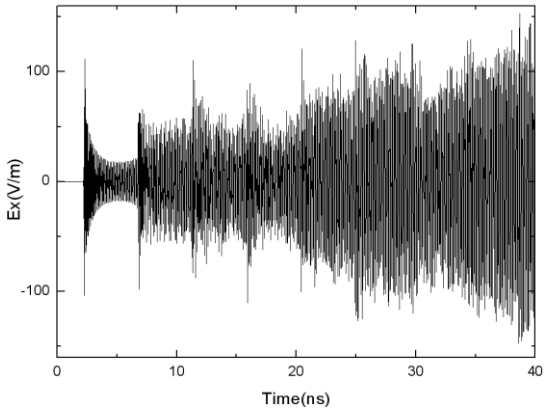
Για λόγους πληρότητας, πραγματοποιήθηκε προσομοίωση χωρίς στρώμα PML, τα αποτελέσματα της οποίας δίνονται στη συνέχεια. Στην περίπτωση αυτή, ο κυματοδηγός συμπεριφέρεται ως κοιλότητα, αφού σε όλες τις επιφάνειες του εφαρμόζονται οι ηλεκτρικές οριακές συνθήκες. Ο χώρος υπολογισμών είναι εξ ορισμού πεπερασμένος και λόγω των οριακών συνθηκών, όπου το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε μεταλλική επιφάνεια είναι μηδέν, παρουσιάζονται ανακλάσεις. Με αυτό τον τρόπο η διάταξη λειτουργεί σαν κοιλότητα στο ένα άκρο της, ενώ στο άκρο όπου εφαρμόζεται η διέγερση (z = 0) δεν ισχύει η ηλεκτρική οριακή συνθήκη, αλλά οριακή συνθήκη άμεσης επιβολής των τιμών του πεδίου. Με λίγα λόγια, σε αυτό το σημείο επιβάλλονται από τον κώδικα οι τιμές των πεδίων χωρίς αυτές να υπολογίζονται αργότερα. Παρόλο αυτά, όπως φάνηκε και στην περίπτωση ύπαρξης στρώματος PML, εμφανίζονται ανακλώμενα κύματα και από την περιοχή της διέγερσης [5]. Τα στοιχεία της προσομοίωσης δίνονται στον Πίνακας IV. Ο χρόνος που επιλέγεται για την εξαγωγή των πεδιακών κατανομών είναι μεγάλος (70 ns) ώστε να μπορούν να είναι εμφανή και τα μεταβατικά φαινόμενα αλλά και να έχει αναπτυχθεί ικανοποιητικά ο ζητούμενος ρυθμός.

Πίνακας IV:Στοιχεία προσομοίωσης απουσία PML

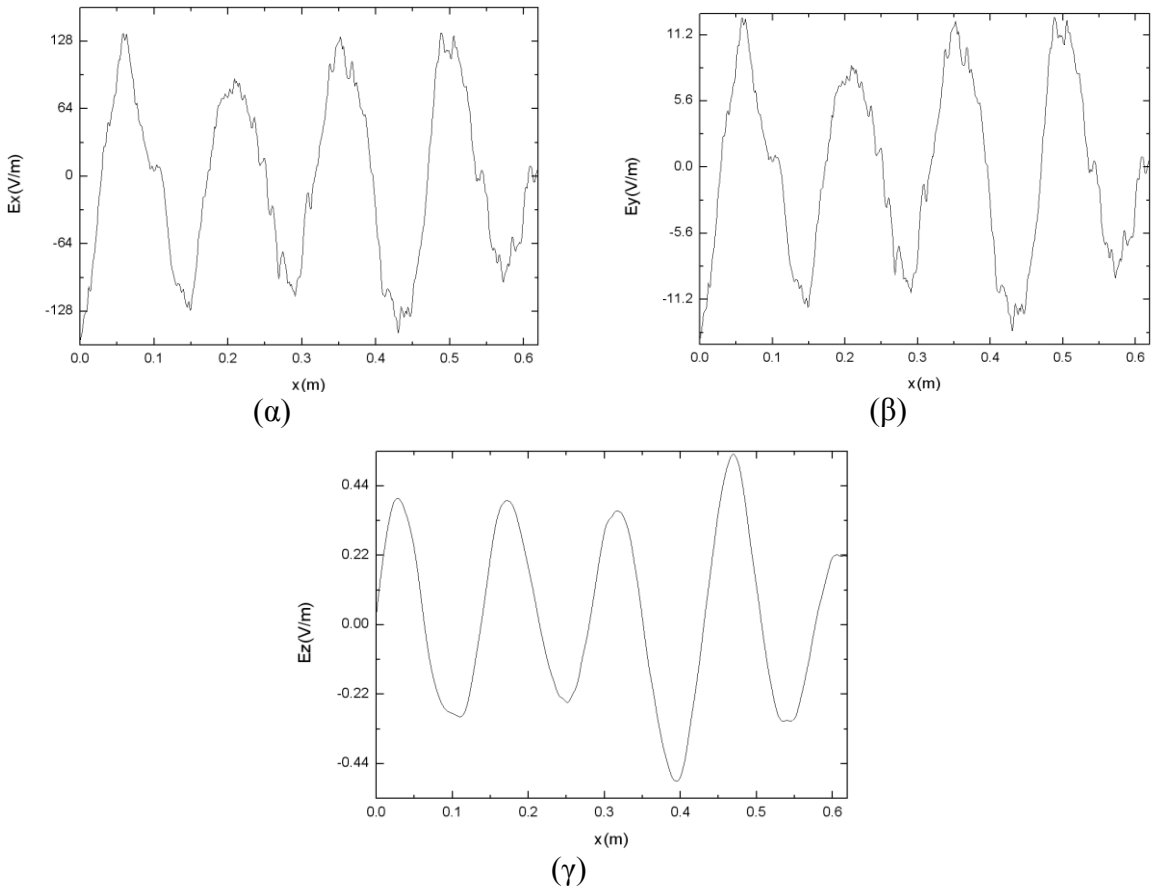
Μήκος *L* (mm)	**Πλάτος *a* (mm)**	**Ύψος *b* (mm)**	
620	48	22	
Συχνότητα λειτουργίας (GHz)	**Ρυθμός διέγερσης**	**Κελιά ανά μήκος κύματος**	**Συνολικός χρόνος (ns)**
7.8	TE_{11}	30	40

Παρατηρείται μια συνεχόμενη αύξηση του πλάτους του πεδίου, γεγονός που μπορεί να ερμηνευθεί ως συμπεριφορά κοιλότητας. Όσο διεγείρεται ο κυματοδηγός, η ενέργεια που προσδίδεται σε αυτόν παραμένει μέσα στη διάταξη και ανακλάται διαδοχικά στις επιφάνειες *z*= 0 και *z* = *L*, ώστε να δημιουργήσει τελικά στάσιμα κύματα. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τις αξονικές κατανομές των πεδίων, όπου εμφανίζεται συμπεριφορά στασίμων κυμάτων,

αλλά λόγω του γεγονότος ότι αποθηκεύεται ενέργεια μέσα στον κυματοδηγό, το πλάτος αυτών ολοένα και αυξάνεται. Συγκριτικά με την ύπαρξη PML 20 κελιών, το πλάτος των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου εμφανίζεται στην ίδια τάξη μεγέθους, χωρίς όμως να είναι ομοιόμορφο (Σχήμα 27). Παρουσιάζεται ανομοιομορφία στα μέγιστα, όπου το καθένα βρίσκεται σε διαφορετικό ύψος, έχοντας τη μορφή ενός είδους διαμόρφωσης. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει συμβολή, είτε ενισχυτική είτε καταστρεπτική, μεταξύ του οδεύοντος κύματος που προέρχεται είτε από ανάκλαση είτε απευθείας από την πηγή, και του ανακλώμενου που προέρχεται από το άκρο εκείνο όπου έχει αφαιρεθεί το PML (Σχήμα 28).

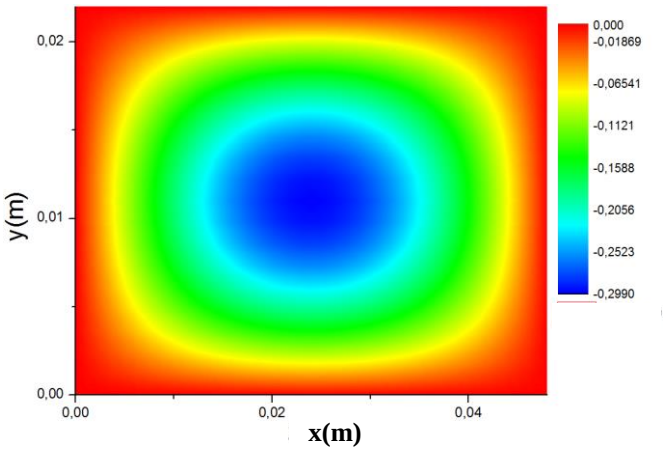


Σχήμα 27: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας στο άκρο του κυματοδηγού.

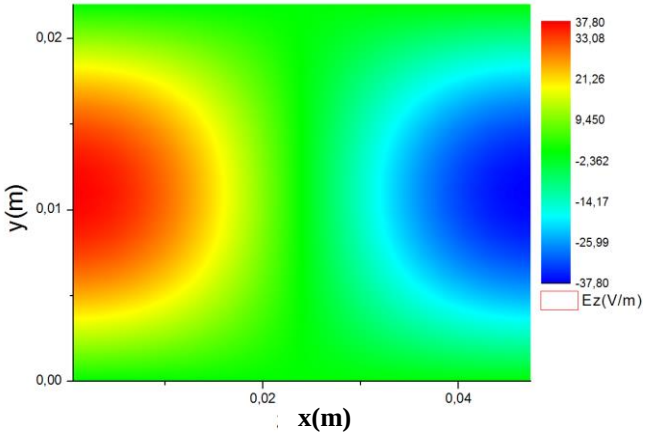


Σχήμα 28: Αξονικές κατανομές του ηλεκτρικού πεδίου απουσία PML (α) E_x, (β) E_y και (γ) E_z.

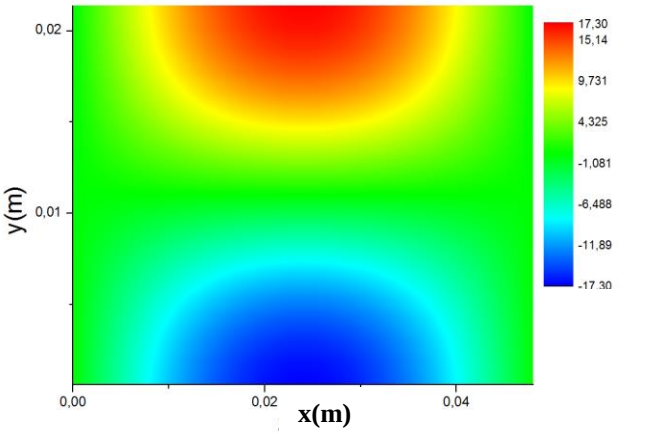
Οι εγκάρσιες κατανομές των πεδίων δεν παρουσιάζουν σημαντική διαφορά από εκείνες στην περίπτωση ύπαρξης PML, έχοντας την αναμενόμενη μορφή του ρυθμού TE_{11} (Σχήμα 29 - Σχήμα 31). Γίνεται αντιληπτό πως η μορφή των εγκάρσιων κατανομών παραμένει η ίδια, αφού οι ανακλάσεις που υπάρχουν επηρεάζουν μόνο τις διάμηκες κατανομές. Το μοναδικό που αλλάζει είναι το πλάτος των πεδίων, που οφείλεται όπως προαναφέρθηκε, στην αποθήκευση της ενέργειας και άρα στον «εγκλωβισμό» των πεδίων μέσα στον κυματοδηγό.



Σχήμα 29: Κατανομή της E_z συνιστώσας (αξονική συνιστώσα) στο εγκάρσιο επίπεδο.

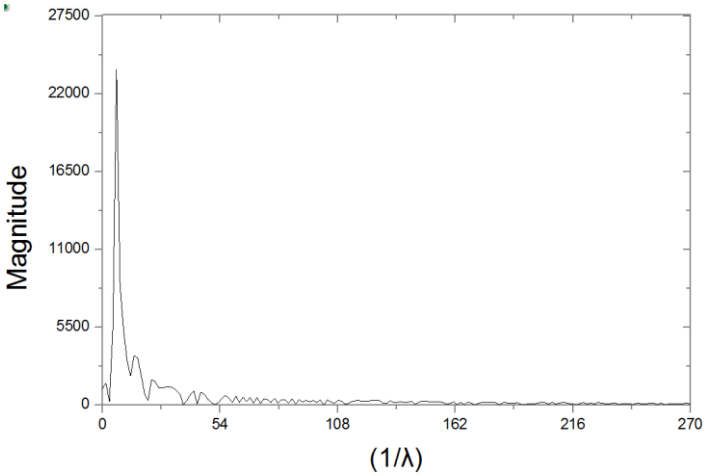


Σχήμα 30: Κατανομή της E_x συνιστώσας στο εγκάρσιο επίπεδο.

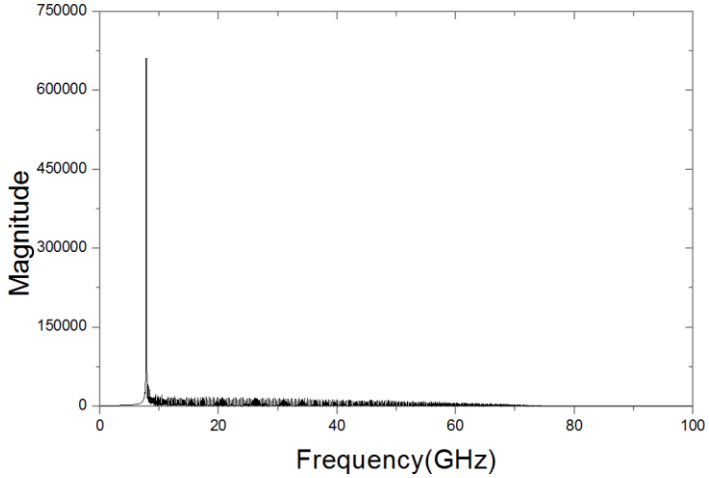


Σχήμα 31: Κατανομή της E_y συνιστώσας στο εγκάρσιο επίπεδο.

Η ανάλυση της E_z στο πεδίο των κυματαριθμών δίνεται στο Σχήμα 32. Εμφανίζεται ένα ισχυρό μέγιστο για $\beta = 40.5\ \mathrm{m}^{-1}$, που απέχει σημαντικά από τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή $\beta = 43.5\ \mathrm{m}^{-1}$. Η απόκλιση αυτή πιθανόν να οφείλεται στην έλλειψη σύγκλισης του κώδικα λόγω του περιορισμένου μήκους που επιλέχθηκε και του μικρού χρόνου υπολογισμών. Η αντίστοιχη ανάλυση της E_x στο άκρο του κυματοδηγού (Σχήμα 33) στο πεδίο της συχνότητας θα δώσει τη συχνότητα λειτουργίας. Το ισχυρό μέγιστο βρίσκεται στη συχνότητα $f = 79.9991$ GHz πρακτικά στην ίδια συχνότητα με την οποία διεγείρεται ο κυματοδηγός. Να σημειωθεί πως σημαντικό ρόλο παίζει το σημείο του εγκάρσιου επιπέδου για το οποίο λαμβάνεται το αξονικό προφίλ αλλά και ο σχετικός χρόνος που γίνεται αυτή η εξαγωγή. Αν και αυτά τα σημεία αλλάζουν από περίπτωση σε περίπτωση, αυτό που ενδιαφέρει περισσότερο είναι η γενικότερη συμπεριφορά της διάταξης, όπως η εγκάρσια μορφή του ρυθμού, η μορφή του σήματος στο χρόνο για δεδομένη αξονική απόσταση αλλά και τα φάσματα στο πεδίο της συχνότητας αλλά και των αξονικών κυματαριθμών.



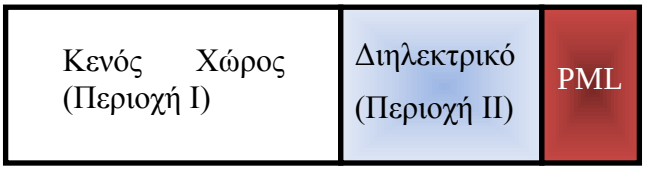
Σχήμα 32: Ανάλυση της E_x συνιστώσας στο πεδίο των κυματαριθμών.



Σχήμα 33: Ανάλυση της E_x συνιστώσας στο πεδίο της συχνότητας.

6.2.3 Ύπαρξη αξονικά τοποθετημένης διηλεκτρικής περιοχής

Το επόμενο βήμα στην επαλήθευση του αριθμητικού κώδικα θα γίνει με την τοποθέτηση ενός στρώματος με διαφορετική διηλεκτρική σταθερά, ακριβώς πριν από τα PML. Η διάταξη θα έχει έτσι το διάμηκες προφίλ που φαίνεται στο Σχήμα 34.



Σχήμα 34: Αξονική τομή κυματοδηγού δύο υλικών

Θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή καθώς για να υπάρξει συνθήκη προσαρμογής η διηλεκτρική σταθερά του υλικού και του PML, το οποίο ακολουθεί αξονικά, να είναι η ίδια. Λόγω της ύπαρξης διηλεκτρικού στρώματος αναμένονται ανακλάσεις στη διαχωριστική επιφάνεια κενού - διηλεκτρικού, με το συντελεστή ανάκλασης να υπολογίζεται από τη σχέση (στην περίπτωση κάθετης πρόσπτωσης) ([14])

$$\rho = \frac{\sqrt{\varepsilon_r} - 1}{\sqrt{\varepsilon_r} + 1} \tag{6.1}$$

όπου ε_r η σχετική διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού στρώματος. Επιπλέον, αναμένεται και μείωση του μήκους κύματος, αφού ισχύει η σχέση

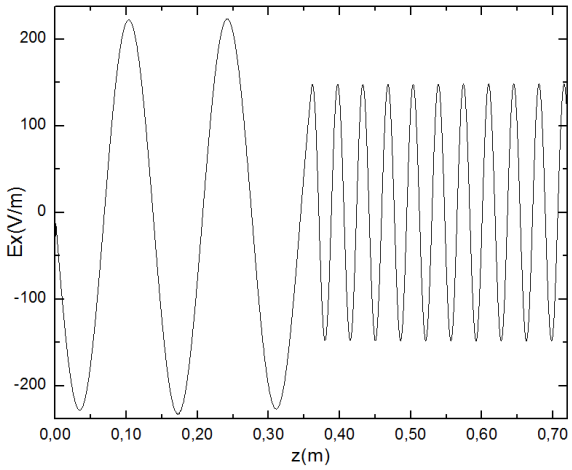
$$\lambda_m = \frac{\lambda_g}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{6.2}$$

όπου λ_m και λ_g είναι το μήκος κύματος στο διηλεκτρικό και στον κενό κυματοδηγό, αντίστοιχα. Τα στοιχεία της προσομοίωσης για $\varepsilon_r = 2.1$, που αντιστοιχεί στο εμπορικά χρησιμοποιήσιμο υλικό TEFLON, δίνονται στον Πίνακας V. Για να γίνει καλύτερη σύγκριση των αποτελεσμάτων λαμβάνονται οι εγκάρσιες πεδιακές κατανομές στα επίπεδα με αξονική απόσταση z = 0.31 m (εκτός διηλεκτρικού) και z = 0.55 m (εντός διηλεκτρικού).

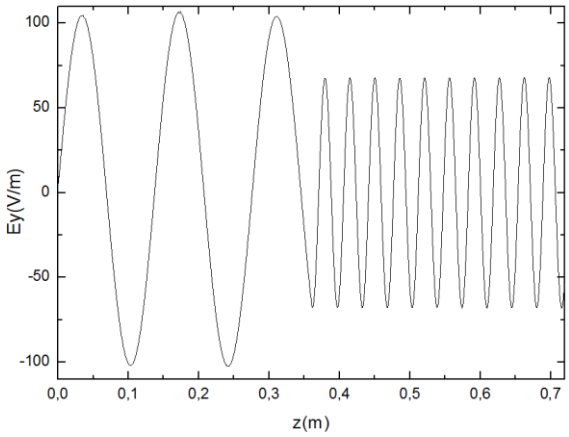
Πίνακας V: Στοιχεία προσομοίωσης με διηλεκτρικό στρώμα

Μήκος *L* (mm)	**Πλάτος *a* (mm)**	**Ύψος *b* (mm)**	**Κελιά PML**
720	48	22	10
Συχνότητα λειτουργίας (GHz)	**Ρυθμός διέγερσης**	**Κελιά / μήκος κύματος**	**Συνολικός χρόνος (ns)**
7.8	TE_{11}	30	200

Στο Σχήμα 35 φαίνεται η αξονική κατανομή της E_x για t = 200 ns, σε θέση όπου το πεδίο γίνεται μέγιστο [$E_x(x=0, y = L_y/2, z)$], όπου L_y είναι η διάσταση του κυματοδηγού στον άξονα y (ύψος). Ο χρόνος εξαγωγής των πεδίων επιλέχθηκε έτσι ώστε να έχουν εξαφανιστεί τα μεταβατικά φαινόμενα τόσο στα οδεύοντα όσο και στα ανακλώμενα κύματα Όπως είναι αναμενόμενο, το πλάτος των πεδίων στην κενή περιοχή του κυματοδηγού είναι μεγαλύτερο καθώς εκεί εμφανίζεται και το οδεύον κύμα λόγω της διέγερσης αλλά και το ανακλώμενο από την ασυνέχεια κενού-διηλεκτρικού.

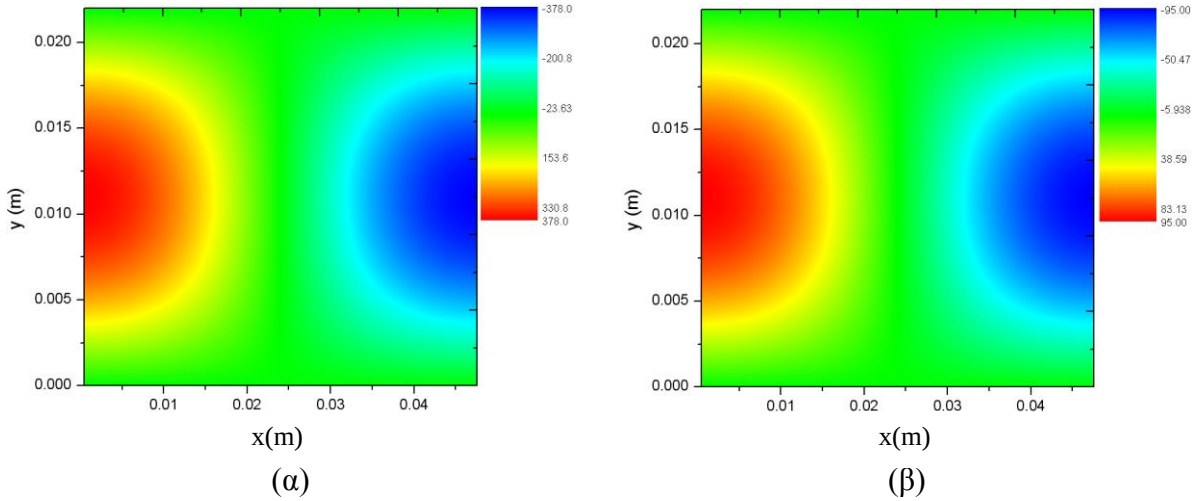


Σχήμα 35: Αξονική κατανομή της E_x συνιστώσας για t = 200 ns.



Σχήμα 36: Αξονική κατανομή της E_y για t = 200 ns.

Οι αντίστοιχες εγκάρσιες κατανομές της E_x για z= 0.2 m και z = 0.55 m σε χρόνο ίσο με 500 ns φαίνονται στο Σχήμα 37. Παρατηρείται μια ομοιομορφία στην πεδιακή κατανομή, ενώ στο διηλεκτρικό συνεχίζει να διαδίδεται ο ρυθμός TE_{11} με μικρότερο πλάτος λόγω της ύπαρξης ανακλάσεων στην διεπιφάνεια με το κενό, όπου μέρος της ισχύος επιστρέφει στην περιοχή I, όπως είναι αναμενόμενο.



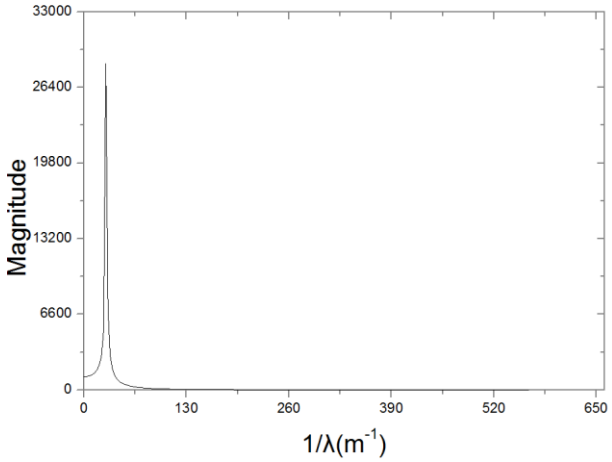
(α) (β)

Σχήμα 37: Εγκάρσια κατανομή της E_x συνιστώσας (α) για z = 0.31 m και (β) για z = 0.55 m.

Λόγω της μεγαλύτερης διηλεκτρικής σταθεράς στο επιπλέον στρώμα, που τοποθετήθηκε, υπάρχει μια μείωση των αντίστοιχων συχνοτήτων αποκοπής κάθε ρυθμού. Οι νέες συχνότητες αποκοπής υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\omega'_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{\omega_{mn}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{6.3}$$

όπου ω'_{mn} η συχνότητα αποκοπής στο διηλεκτρικό για το ρυθμό *mn* και ω_{mn} η αντίστοιχη συχνότητα αποκοπής για το κενό. Έτσι, μπορεί να αναπτυχθούν και ρυθμοί ανώτερης τάξης μέσα στο διηλεκτρικό, αφού η συχνότητα λειτουργίας που επιβλήθηκε είναι τέτοια ώστε να υπάρχει μονορυθμική λειτουργία μόνο στο κενό κυματοδηγό. Με χρήση του χωρικού μετασχηματισμού Fourier για t = 200 ns της αξονικής κατανομής της E_x μέσα στην περιοχή του διηλεκτρικού (περιοχή II) θα φανούν τυχόν μέγιστα που αντιστοιχούν στους διαδιδόμενους ρυθμούς. Ένα τέτοιο μέγιστο εντοπίζεται στο $1/\lambda_g$ = 27.6758 m^{-1}, που αντιστοιχεί σε β = 173.8921 m^{-1}, ενώ η αντίστοιχη θεωρητική τιμή για το ρυθμό TE_{11} είναι $\beta_{\theta\varepsilon\omega\rho}$ = 177.2 m^{-1} (σχετικό σφάλμα περίπου 2%).



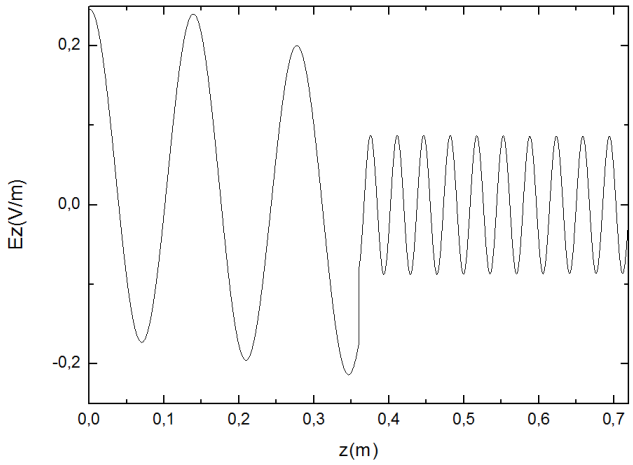
Σχήμα 38: Ανάλυση κύματος στην περιοχή του διηλεκτρικού στο πεδίο των κυματαριθμών.

Οι θεωρητικά αναμενόμενοι ρυθμοί ΤΕ, με βάση τη συχνότητα λειτουργίας, μέσα στη διηλεκτρική περιοχή δίνονται στον Πίνακας VI. Παρατηρείται ότι τελικά μόνο ο ρυθμός TE_{11} υπερισχύει και είναι αυτός που διαδίδεται, όπως φαίνεται από το χωρικό μετασχηματισμό Fourier.

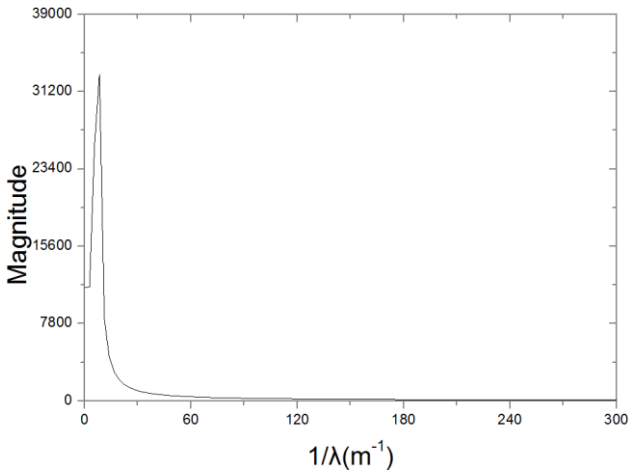
Πίνακας VI: Σταθερές διάδοσης και μήκος κύματος πιθανών εμφανιζόμενων ρυθμών μέσα στη διηλεκτρική περιοχή (Περιοχή II)

	$\beta_{mn}\left(m^{-1}\right)$	$\lambda_g(m)$	$1/\lambda_g(m^{-1})$
TE_{10}	228	0.0276	36.23
TE_{20}	197	0.0317	31.35
TE_{01}	189	0.033	30.30
TE_{11}	177	0.0355	28.17
TE_{21}	136	0.0462	24.65
TE_{30}	133	0.0473	21.14

Παρατηρώντας την αξονική κατανομή της E_z (Σχήμα 39) είναι φανερό πως δεν υπάρχει αναπτυσσόμενος ρυθμός TM καθώς το πλάτος της είναι τρεις τάξεις μικρότερο σε σχέση με αυτό της E_x. Από το χωρικό μετασχηματισμό Fourier για την περιοχή, όπου η σχετική διηλεκτρική σταθερά είναι ίση με μονάδα (Περιοχή I), προκύπτει το φάσμα κυματαριθμών, που δίνεται στο Σχήμα 40. Τέλος, οι θεωρητικές τιμές της σταθεράς διάδοσης για τη συγκεκριμένη συχνότητα λειτουργίας μέσα στην κενή περιοχή δίνονται στον Πίνακα XI. Το ισχυρό μέγιστο που φαίνεται στο Σχήμα 40 εντοπίζεται στο $1/\lambda_g = 7.12\ \mathrm{m}^{-1}$, που αντιστοιχεί σε $\beta = 44.73\mathrm{m}^{-1}$, ενώ η θεωρητικά αναμενόμενη τιμή για το ρυθμό TE_{11} είναι $45.3\ \mathrm{m}^{-1}$, δηλαδή υπάρχει σφάλμα 1.2% και είναι συγκρίσιμο με την περίπτωση της διάδοσης μέσα στο διηλεκτρικό στρώμα. Έτσι ο διαδιδόμενος ρυθμός είναι ο TE_{11} και στις δύο περιοχές, παρόλο που η συχνότητα είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει και την ανάπτυξη άλλων ρυθμών.



Σχήμα 39: Αξονική κατανομή της E_z για t = 200 ns.

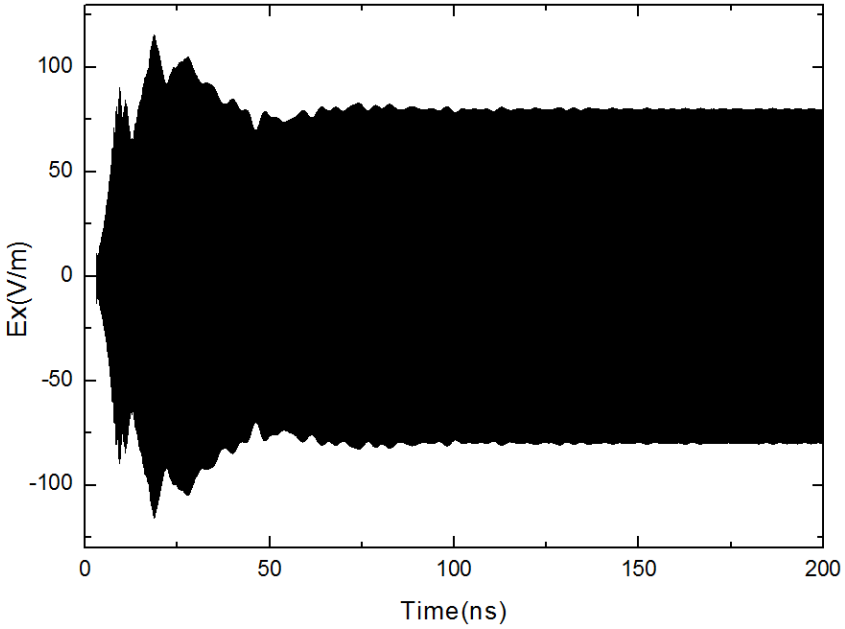


Σχήμα 40: Κατανομή κυματαριθμών της E_χ στην περιοχή του κενού κυματοδηγού.

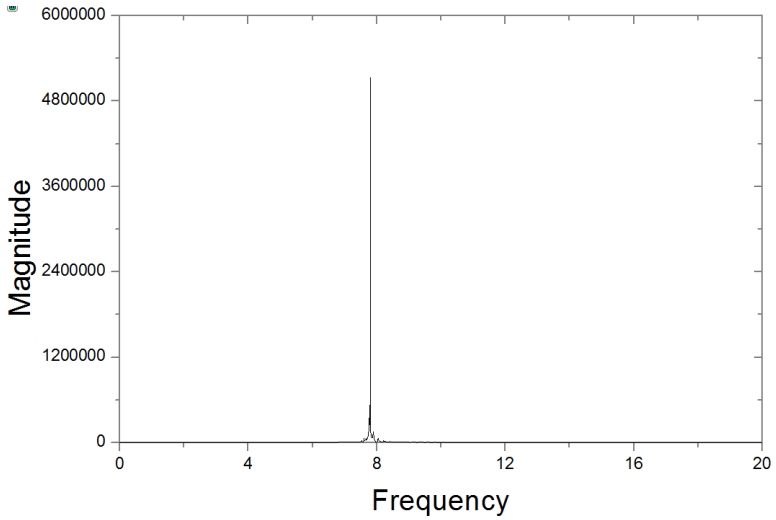
Πίνακας VII: Σταθερές διάδοσης και μήκη κύματος πιθανών εμφανιζόμενων ρυθμών μέσα στη κενή περιοχή

	$\beta_{mn}\left(m^{-1}\right)$	$\lambda_g(m)$	$1/\lambda_g(m^{-1})$
TE_{10}	150	0.0419	23.87
TE_{20}	97.9	0.0641	15.60
TE_{01}	79.6	0.0789	12.67
TE_{11}	45.3	0.1389	7.20

Η χρονική εξέλιξη της E_x καθώς και το αντίστοιχο φάσμα στο πεδίο των συχνοτήτων (ύστερα από χωρικό μετασχηματισμό Fourier) απεικονίζονται στο Σχήμα 41 και Σχήμα 42, αντίστοιχα. Να σημειωθεί πως η εξαγωγή της χρονικής εξέλιξης έγινε για το σημείο εκείνο του εγκάρσιου επιπέδου, όπου εμφανίζεται το μέγιστο της E_x και για αξονική θέση πάνω στον τερματισμό του διηλεκτρικού πριν από το PML, δηλαδή για z = 620 mm. Το συχνοτικό φάσμα της E_x είναι το αναμενόμενο, καθώς η συχνότητα, η οποία προκύπτει ύστερα από το μετασχηματισμό Fourier στο άκρο της διάταξης, είναι 7.79996 GHz, όση ακριβώς και η συχνότητα με την οποία διεγέρθηκε ο κυματοδηγός.



Σχήμα 41: Χρονική εξέλιξη της E_x συνιστώσας.



Σχήμα 42: Συχνοτικό φάσμα της E_x συνιστώσας.

Αντίθετα, ενδιαφέρον παρουσιάζει η χρονική εξέλιξη της E_x. Για χρόνο μικρότερο από τα 40 ns παρουσιάζεται μεταβατικό φαινόμενο, όπου το πλάτος του πεδίου παρουσιάζει αύξηση και κατόπιν μειώνεται έως ότου επέλθει μια σταθερή κατάσταση. Το γεγονός αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως επιρροή των ανακλάσεων καθώς στη συγκεκριμένη αξονική θέση συμβάλλουν τόσο το ανακλώμενο στο διηλεκτρικό κύμα όσο και το ανακλώμενο κύμα που

προέρχεται από ανάκλαση στη διεπιφάνεια διηλεκτρικό-PML αλλά και εκείνο που προέρχεται από ανάκλαση στη διεπιφάνεια PML-μέταλλο. Πρακτικά, η ακριβής συνεισφορά των επί μέρους ανακλάσεων στη συγκεκριμένη αξονική θέση είναι δύσκολο να εξαχθεί. Τα αποτελέσματα της συμβολής είναι ορατά ως απότομες αλλαγές στη τιμή του πλάτους του πεδίου της συγκεκριμένης συνιστώσας, που συνοπτικά αποτελεί ένα μεταβατικό φαινόμενο.

6.2.4 Διέγερση με ρευματική κατανομή

Σε αυτό το στάδιο έγινε προσπάθεια προσομοίωσης μιας περισσότερο πραγματικής διέγερσης. Οι κυματοδηγοί στις πρακτικές εφαρμογές διεγείρονται από κεραίες, τοποθετημένες κάθετα ή οριζόντια, που δεν αποτελούν τίποτε άλλο παρά κατάλληλες ρευματικές κατανομές. Σε αυτή τη περίπτωση στα κελιά που ικανοποιούν τη συνθήκη $(z = \delta z, y = L_y/2,\ \delta x \le x \le (nx - 1)\delta x)$ στο εγκάρσιο επίπεδο, τίθεται η x-συνιστώσα της πυκνότητας ρεύματος ίση με $j_x = \cos(\omega t)J_0$, όπου J_0 ένα σταθερό πλάτος πυκνότητας ρεύματος. Επιλέγεται η ρευματική κατανομή να τοποθετηθεί στο συγκεκριμένο αξονικό σημείο $z = \delta z$ καθώς αν τοποθετηθεί ακριβώς πάνω στις μεταλλικές επιφάνειες το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι αυτό ενός γειωμένου σύρματος, με αποτέλεσμα τελικά ο κυματοδηγός να μη διεγείρεται. Τα χαρακτηριστικά της προσομοίωσης δίνονται στον Πίνακας VIII. Με δεδομένη τη συχνότητα διέγερση, αναμένεται να διαδοθούν οι ρυθμοί με καθορισμένες σταθερές διάδοσης, όπως δίνονται στον Πίνακα IX.

Πίνακας VIII: Στοιχεία προσομοίωσης με ρευματική κατανομή

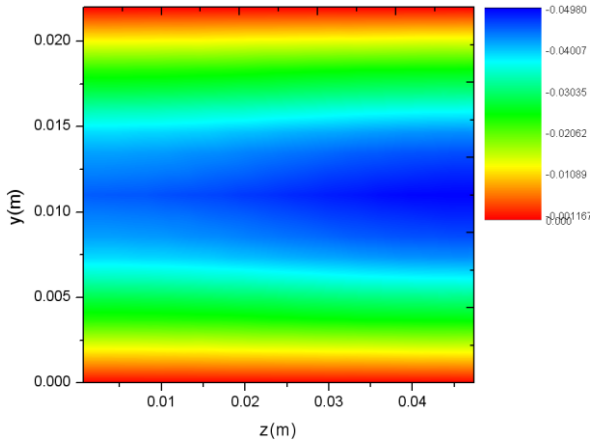
Μήκος *L* (mm)	**Πλάτος *a* (mm)**	**Ύψος *b* (mm)**	**Κελιά PML**
620	48	22	10
Συχνότητα λειτουργίας (GHz)	**Πυκνότητα ρεύματος (A/m^3)**	**Κελιά / μήκος κύματος**	**Συνολικός χρόνος (ns)**
7.8	5	30	80

Πίνακας IX: Πιθανοί ρυθμοί εμφάνισης με βάση τη συχνότητα λειτουργίας

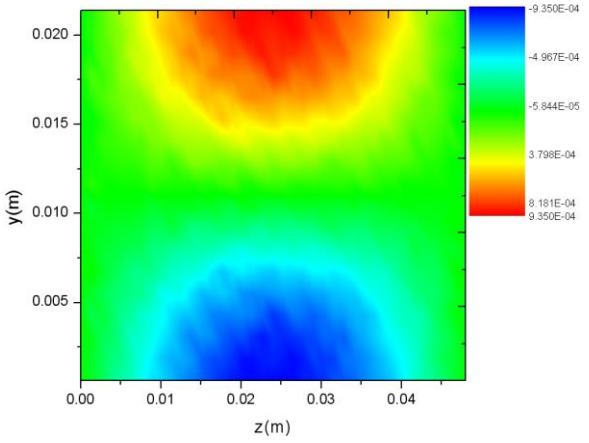
Ρυθμός	**Σταθερά διάδοσης (m^{-1})**	**Συχνότητα αποκοπής (GHz)**
TE_{01}	79.6	6.81
TE_{10}	150.2	3.12
TE_{11} ή TM_{11}	45.3	7.5
TE_{20}	97.9	6.25

Το σύρμα τοποθετείται παράλληλα στον άξονα x και έτσι δεν αναμένεται να εμφανιστούν ρυθμοί TM, αφού η επιβαλλόμενη πυκνότητα ρεύματος ορίζει ηλεκτρικό πεδίο στο ίδιο επίπεδο με αυτή (στη συγκεκριμένη περίπτωση E_x) και φυσικά όχι στον άξονα διάδοσης. Προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι η αξονική κατανομή που θα βρεθεί θα είναι σωστή, θα πρέπει από τις εγκάρσιες κατανομές να βρεθεί το σημείο μέγιστου πλάτους της κάθε συνιστώσας. Οι εγκάρσιες κατανομές εξάγονται σε χρόνο t = 80 ns ώστε να έχει επέλθει ισορροπία και σε αξονική απόσταση ίση με 550 mm για το ηλεκτρικό πεδίο (Σχήμα 43) και για το μαγνητικό (Σχήμα 44). Από τα σχήματα αυτά φαίνεται πως στον κυματοδηγό αναπτύσσονται όλες οι πεδιακές συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

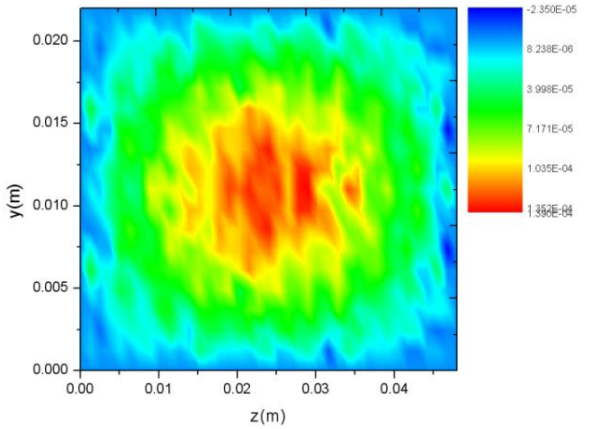
Ειδικότερα, οι κατανομές που φαίνονται στο Σχήμα 43α, στο Σχήμα 44β και στο Σχήμα 44γ αντιστοιχεί στο ρυθμό TE_{01}. Αντίθετα, οι κατανομές στο Σχήμα 43β, στο Σχήμα 43γ και στο Σχήμα 44α μπορούν να θεωρηθούν και ως αριθμητικός θόρυβος (αφού τα πλάτη τους είναι σημαντικά μικρότερα από τις προηγούμενες κατανομές), αν και οι δυο πρώτοι ταιριάζουν με τα χαρακτηριστικά του ρυθμού TM_{11}, ο οποίος με την επιλεγείσα συχνότητα λειτουργίας μπορεί να αναπτυχθεί.



(α)

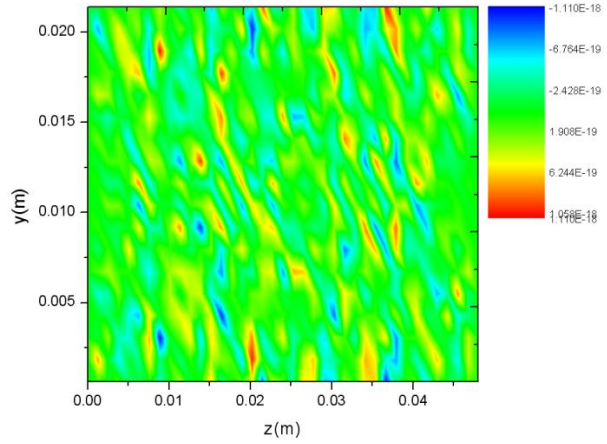


(β)

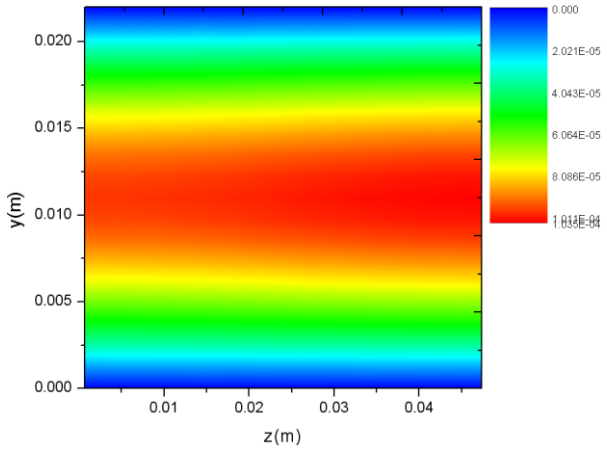


(γ)

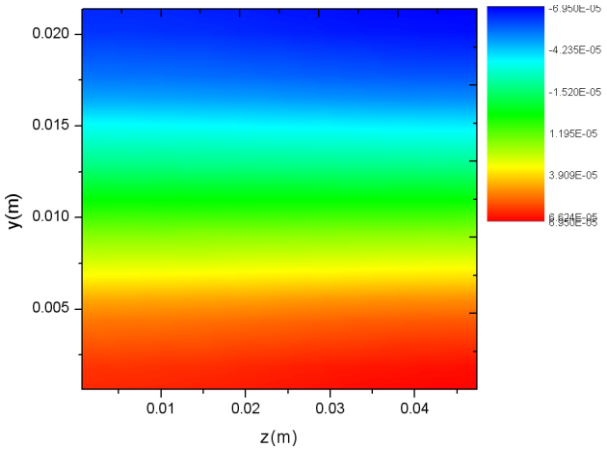
Σχήμα 43: Εγκάρσιες κατανομές ηλεκτρικού πεδίου (α) E_x, (β) E_y και (γ) E_z.



(α)



(β)

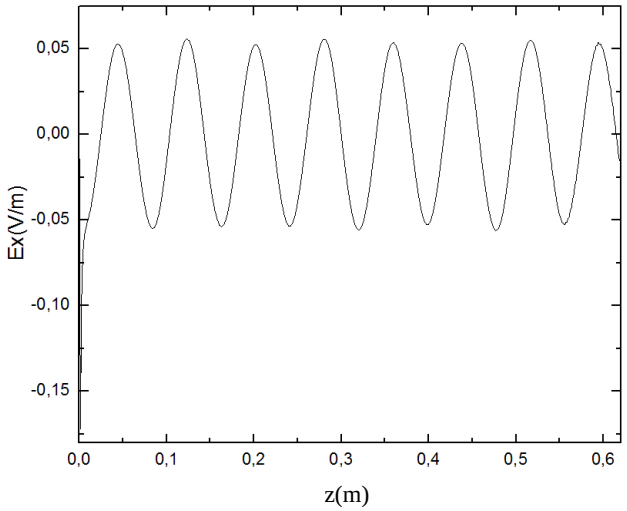


(γ)

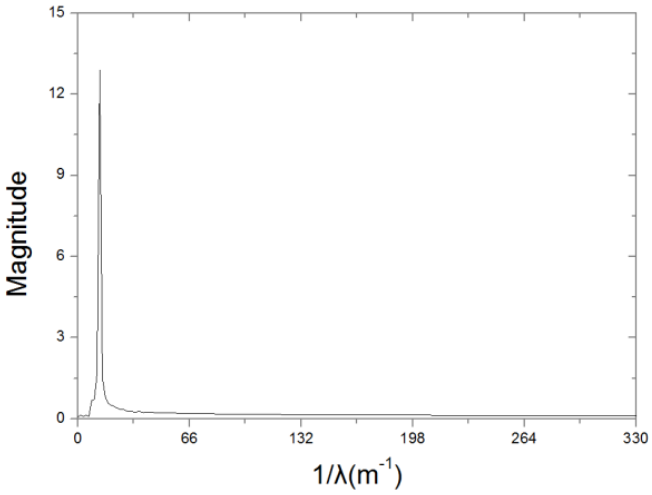
Σχήμα 44: Εγκάρσιες κατανομές μαγνητικού πεδίου (α) H_x, (β) H_y και (γ) H_z.

Σημειώνεται ότι στην τελευταία περίπτωση επιλέχθηκε η κυματική αντίσταση του ρυθμού TE_{11} να είναι αυτή, η οποία θα χρησιμοποιηθεί για τη διαβάθμιση της αγωγιμότητας του στρώματος PML. Η θεώρηση αυτή βασίστηκε στην εκ των προτέρων παραδοχή ότι θα διαδοθεί μόνο ο ρυθμός TE_{11}, ο οποίος έχει συχνότητα αποκοπής λίγο μικρότερη από αυτή της διέγερσης. Έτσι προκύπτουν ανακλάσεις από το στρώμα PML οφειλόμενες στη μη τέλεια προσαρμογή του. Στο χρόνο, για τον οποίο τα αποτελέσματα εξάγονται, θεωρείται ότι τα

μεταβατικά φαινόμενα έχουν εξαλειφθεί. Η κατανομή της E_x συναρτήσει της αξονικής θέσης για t = 80 ns δίνεται στο Σχήμα 45, ενώ από το χωρικό μετασχηματισμό Fourier προκύπτει το φάσμα στο πεδίο των κυματαριθμών (Σχήμα 46). Το ισχυρό μέγιστο εντοπίζεται για $1/\lambda_g$ = 12.9 m^{-1}, που αντιστοιχεί σε β = 81.05 m^{-1}.

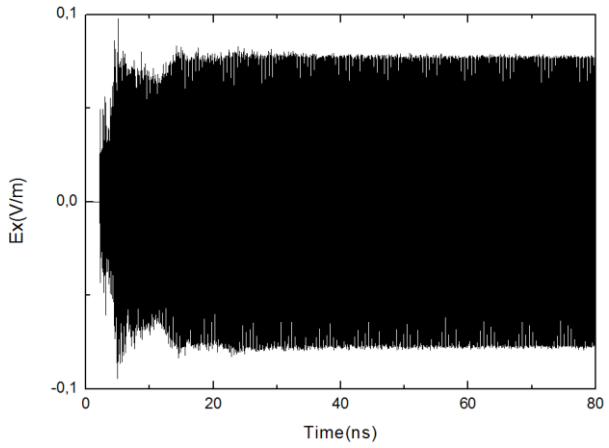


Σχήμα 45: Αξονική κατανομή της E_x συνιστώσας.

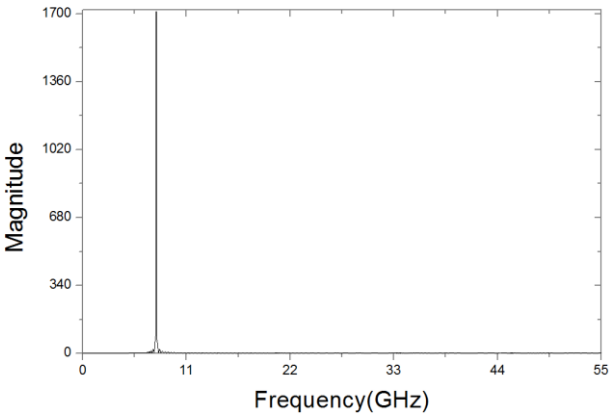


Σχήμα 46: Φάσμα αξονικής κατανομής στο πεδίο των κυματαριθμών.

Από τις θεωρητικές τιμές του Πίνακα V προκύπτει ότι η συγκεκριμένη σταθερά βρίσκεται κοντά σε αυτή του ρυθμού TE_{01}. Επιπλέον, από τη χρονική εξέλιξη της E_x (Σχήμα 47) γίνεται αντιληπτό πως το μεταβατικό φαινόμενο, λόγω των ανακλάσεων του στρώματος PML και του μετάλλου, εξαλείφεται πρακτικά για χρόνο μεγαλύτερο των 15 ns, δηλαδή για χρόνο μεγαλύτερο των 15 ns υπάρχει διάδοση απουσία ανακλάσεων. Τέλος, από το συχνοτικό φάσμα (Σχήμα 48) είναι φανερό ότι αυτό έχει μια μοναδική συχνότητα αυτή της διέγερσης (7.8 GHz – 7.7992 GHz), όπως ήταν αναμενόμενο.

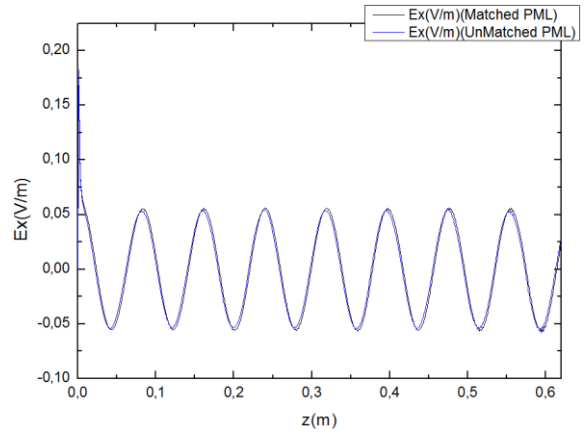


Σχήμα 47: Εξέλιξη της E_x συνιστώσας στο χρόνο.

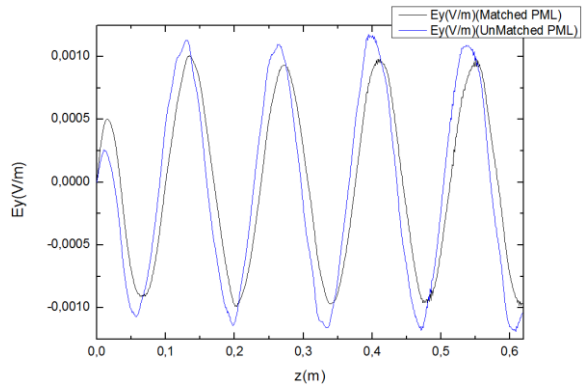


Σχήμα 48: Συχνοτικό φάσμα της E_z συνιστώσας.

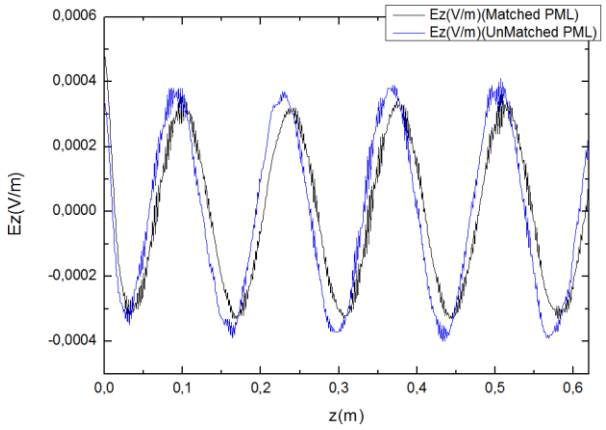
Γνωρίζοντας ότι ο διαδιδόμενος ρυθμός είναι ο TE_{01}, η κυματική αντίσταση, που επιλέγεται για την κλιμάκωση της αγωγιμότητας του PML, είναι αυτή του συγκεκριμένου ρυθμού. Τότε παρατηρείται πως για την ίδια γεωμετρία και στις ίδιες χρονικές στιγμές, το προσαρμοσμένο στο ρυθμό στρώμα PML απορροφά καλύτερα τις συνιστώσες E_y και E_z (αυτές εμφανίζονται με μικρότερο πλάτος), ενώ αφήνει ανεπηρέαστη την E_x που είναι και η μοναδική ηλεκτρική συνιστώσα του ρυθμού TE_{01}. Στο Σχήμα 49 και στο Σχήμα 50 απεικονίζονται οι αξονικές κατανομές των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο του εγκάρσιου επιπέδου, όπου το E_z μεγιστοποιείται, για 40 ns και 80 ns, αντίστοιχα. Η διαφορά που παρατηρείται ανάμεσα στις τιμές με προσαρμοσμένο το στρώμα PML και μη προσαρμοσμένο δεν είναι μεγάλες. Είναι όμως μια σαφής ένδειξη πως υπάρχει μεγαλύτερη απορρόφηση των συνιστωσών, που δεν απαρτίζουν το ρυθμό TE_{01}, ο οποίος και τελικά διαδίδεται λόγω της συγκεκριμένης τοποθέτησης της ρευματικής κατανομής. Με αυτό τον τρόπο φαίνεται πως η επιλογή του πολυωνυμικού παράγοντα m καθώς και της κυματικής αντίστασης είναι αρκετά δύσκολη και εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη διάταξη και διέγερση. Στην πράξη, όταν δεν είναι εκ των προτέρων γνωστό ποιος ρυθμός αναμένεται να διαδοθεί, τότε καλό είναι να γίνεται μια πρώτη αποτύπωση των πεδιακών συνιστωσών των διαφόρων ρυθμών και με βάση τις κατανομές τους να επιλέγεται η καταλληλότερη κυματική αντίσταση. Η τέλεια προσαρμογή με τη χρήση PML είναι δύσκολη, όμως το σφάλμα που προκύπτει από τη μη τέλεια προσαρμογή του δεν είναι τόσο μεγάλο, ειδικότερα αν η κυματική αντίσταση του ρυθμού που αναμένεται να αναπτυχθεί είναι κοντά σε αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την κλιμάκωση του στρώματος PML.



(α)

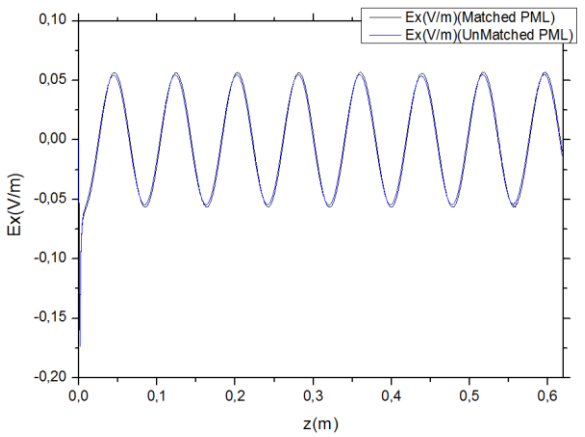


(β)

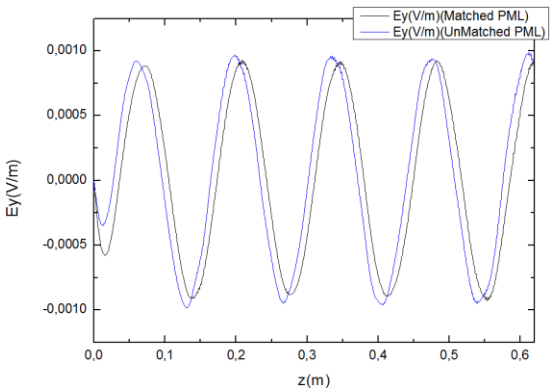


(γ)

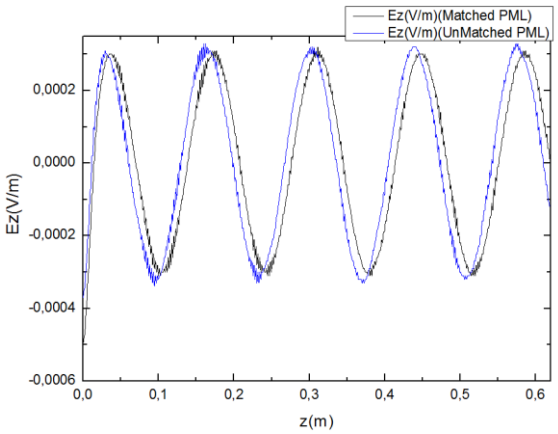
Σχήμα 49: Αξονικές κατανομές των συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου για *t* = 40 ns. Με μαύρο χρώμα η περίπτωση προσαρμογής του PML , με μπλε χρώμα η περίπτωση μη προσαρμογής.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 50: Αξονικές κατανομές των συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου για *t* = 80 ns. Με μαύρο χρώμα η περίπτωση προσαρμογής του PML , με μπλε χρώμα η περίπτωση μη προσαρμογής.

6.2.5 Παραμετρική μελέτη σύγκλισης

Όπως φάνηκε και στις προηγούμενες παραγράφους, η τιμή του κυματάριθμου που υπολογίζεται από τις προσομοιώσεις παρουσιάζει σημαντικό σφάλμα σε σχέση με την θεωρητικά αναμενόμενη. Με σκοπό την εύρεση της προέλευσης του σφάλματος αυτού, πραγματοποιήθηκε παραμετρική μελέτη για δεδομένη εγκάρσια διατομή μεταβάλλοντας το

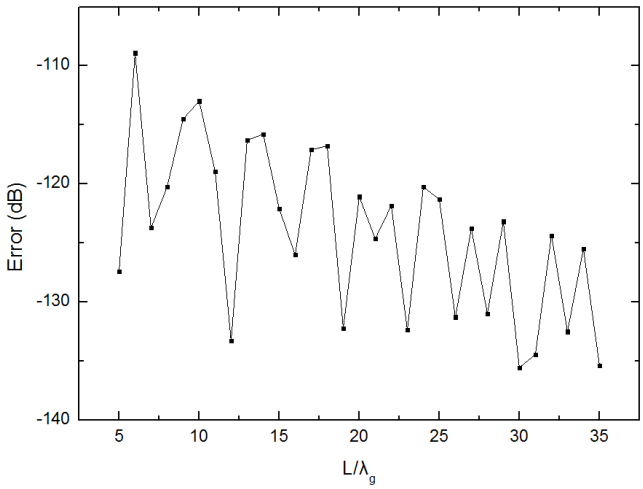
μήκος του κυματοδηγού και το πάχος του στρώματος PML. Σημειώνεται ότι το μήκος του κυματοδηγού αποτελεί σημαντική παράμετρο, καθώς με την αύξηση αυτού μειώνεται η επίδραση των εγκάρσια στον άξονα διάδοσης τοποθετημένων τοιχωμάτων και έτσι προσεγγίζεται καλύτερα η περίπτωση διάδοσης με ανοικτά άκρα. Ο κυματοδηγός της μελέτης αυτής έχει τις διαστάσεις που δίνονται στον Πίνακας Χ, ενώ στον ίδιο πίνακα δίνονται και τα δεδομένα της προσομοίωσης. Εξετάστηκε μονορυθμική λειτουργία (δηλαδή διάδοση μόνο του ρυθμού TE_{10}) ώστε να φανεί καλύτερα η επίδραση του μήκους στην τιμή του κυματάριθμου, ενώ ως διέγερση επιβλήθηκε η εγκάρσια κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου για το συγκεκριμένο ρυθμό. Σημειώνεται ότι ο αλγόριθμος εμφάνιζε σύγκλιση για χρόνο μικρότερο των 10 ns σε όλες τις περιπτώσεις, ενώ ο κυματάριθμος παρέμενε ανεξάρτητος του χρόνου υπολογισμού του μέσω του μετασχηματισμού Fourier της αξονικής κατανομής του πεδίου. Τέλος, το στρώμα PML μήκους 10 κελιών και δείκτη PML ίσο με 4 είναι τοποθετημένο εξωτερικά από το μήκος του κυματοδηγού. Η θεωρητική τιμή του μήκους κύματος μέσα στον κυματοδηγό για συχνότητα λειτουργίας 3.5 GHz είναι λ_g = 0.189686 m, ενώ το σχετικό σφάλμα σε dB υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Error\left(dB\right) = 20\log\left(\frac{\left|\lambda_g - \lambda_{g,\pi\rho o\sigma}\right|}{\lambda_g}\right) \tag{6.4}$$

όπου $\lambda_{g,\pi\rho o\varsigma}$ είναι η τιμή του μήκους κύματος που βρίσκεται από τις προσομοιώσεις. Η γραφική παράσταση του σχετικού σφάλματος παρατίθεται στο Σχήμα 51. Από αυτό είναι εμφανές ότι το σφάλμα είναι πολύ μικρό ($< 10^{-5}$) για όλες τις τιμές του μήκους. Επιπλέον, το σφάλμα εμφανίζει ταλάντωση της οποίας το πλάτος φθίνει με την αύξηση του λόγου L/λ_g. Η εμφάνιση της ταλάντωσης μπορεί να σχετίζεται με τις σχετικές στρογγυλοποιήσεις που γίνονται αναγκαστικά από τον αριθμητικό κώδικα προκειμένου το μήκος του κυματοδηγού να εκφράζεται ως ακέραιο πολλαπλάσιο κελιών διάστασης δx.

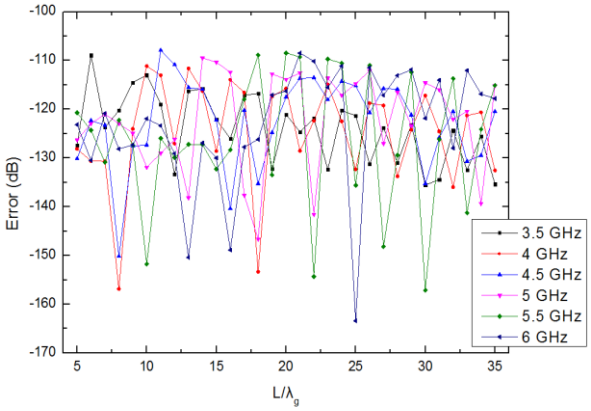
Πίνακας Χ: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά και χαρακτηριστικά προσομοίωσης παραμετρικής μελέτης

Πλάτος *a* (mm)	**Ύψος *b* (mm)**	**Συχνότητα αποκοπής TE_{10} (GHz)**	**Κελιά ανά μήκος κύματος**
48	22	3.12	20

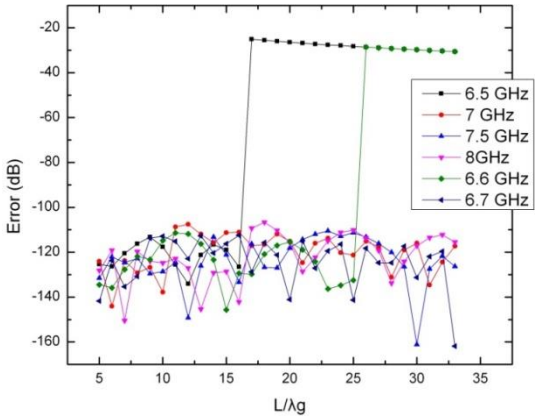


Σχήμα 51: Σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του μήκους κύματος μέσα στον κυματοδηγό για το ρυθμό TE_{10} με συχνότητα λειτουργίας *f* = 3.5 GHz και PML 10 κελιών.

Για τη διάταξη του Πίνακα Χ πραγματοποιήθηκε μελέτη της εξάρτησης της τιμής του σφάλματος στον υπολογισμό του μήκους κύματος μέσα στον κυματοδηγό από τη συχνότητα λειτουργίας. Ειδικότερα, η συχνότητα επιλέχθηκε στην περιοχή 3.5 GHz < f <6 GHz με βήμα 500 MHz ώστε να βρίσκεται κάτω από τη συχνότητα αποκοπής του TE_{20} (6.25 GHz) και αυτός να μη διεγείρεται. Τα αποτελέσματα δίνονται στο Σχήμα 52, από το οποίο προκύπτει ότι το σφάλμα βρίσκεται μεταξύ -105 dB και -120 dB, ακολουθώντας μορφή ταλάντωσης. Επίσης, παρατηρείται μια μικρή αύξηση του σφάλματος καθώς αυξάνει η συχνότητα, που πιθανότατα οφείλεται στη διαφορετική επιλογή αξονικών κελιών για τις προσομοιώσεις (σφάλματα στρογγυλοποιήσεων). Επιπλέον, είναι ορατή η εμφάνιση σημείων όπου ελαχιστοποιείται σημαντικά το σφάλμα (κάτω από τα -150 dB), πιθανή αιτία εμφάνισης των οποίων είναι η στρογγυλοποίηση που πραγματοποιείται από τον κώδικα στον αριθμό των κελιών που αντιστοιχούν στο μήκος της διάταξης. Σημειώνεται ότι το μήκος της διάταξης δεν μπορεί να αναπαρασταθεί πάντα με ακέραιο αριθμό αξονικών κελιών, με αποτέλεσμα να εισάγεται σφάλμα λόγω στρογγυλοποίησης. Τονίζεται ιδιαίτερα το γεγονός ότι όταν κάποια διάσταση του κυματοδηγού αναπαρίσταται χωρίς το σφάλμα στρογγυλοποίησης που αναφέρθηκε, τότε το σφάλμα υπολογισμού διαφόρων ποσοτήτων (π.χ. το μήκος κύματος) είναι σημαντικά μικρό, και αρκεί ο κυματοδηγός να έχει μήκος μερικά μήκη κύματος ώστε να επιτευχθεί ικανοποιητική σύγκλιση.

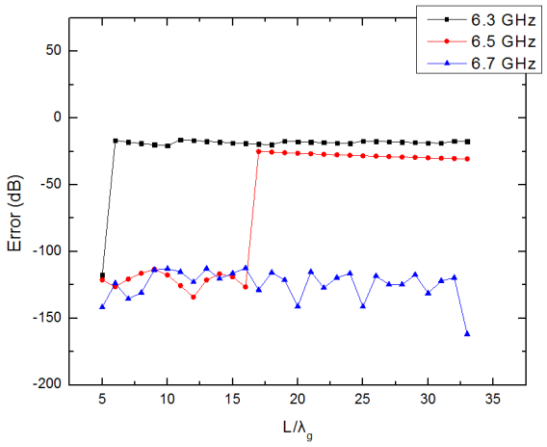


Σχήμα 52: Σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του μήκους κύματος μέσα στον κυματοδηγό για το ρυθμό TE_{10} με συχνότητα λειτουργίας στην περιοχή [3.5 GHz, 6 GHz] και PML 10 κελιών.



Σχήμα 53:Σχετικό σφάλμα μήκος κύματος ρυθμού TE_{20} για συχνότητα λειτουργίας στην περιοχή [6.5 GHz, 8 GHz] και PML 10 κελιών.

Από το Σχήμα 54 φαίνεται πως το σφάλμα στο υπολογισμό του μήκους κύματος συμπεριφέρεται ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση. Εξαίρεση αποτελεί η περιοχή συχνοτήτων μέχρι τα 7 GHz, όπου πάνω από συγκεκριμένες τιμές του λόγου L/λ_g το σφάλμα μεγαλώνει απότομα. Για την περαιτέρω μελέτη της συμπεριφοράς αυτής μελετήθηκε το ίδιο πρόβλημα, αυτή τη φορά για συχνότητες πολύ κοντά στη συχνότητα αποκοπής του συγκεκριμένου ρυθμού (f_c = 6.25 GHz), τα αποτελέσματα της οποία δίνονται στο Σχήμα 54. Από τα αποτελέσματα του σχήματος αυτού είναι εμφανές ότι όσο η συχνότητα πλησιάζει στη συχνότητα αποκοπής του ρυθμού, τόσο το σφάλμα μεγαλώνει απότομα ακόμα και για μικρές τιμές του λόγου L/λ_g. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια πρώτη ένδειξη έλλειψης προσαρμογής, η οποία οφείλεται όχι στο στρώμα PML αλλά στην πηγή, μιας και η τελευταία επιβάλλει την εγκάρσια κατανομή, δημιουργώντας με αυτό τον τρόπο ασυνέχεια στο συγκεκριμένο αξονικό σημείο. Συμπερασματικά, για μεγαλύτερη ακρίβεια αποτελεσμάτων δεν αρκεί μεγαλύτερος χρόνος υπολογισμών και μήκος διάταξης ίσο με ακέραιο αριθμό μηκών κύματος, αλλά και η συχνότητα να είναι αρκετά μεγαλύτερη από την αποκοπή του υπό μελέτη ρυθμού.



Σχήμα 54: Σχετικό σφάλμα μήκος κύματος ρυθμού TE_{20} για συχνότητα λειτουργίας στην περιοχή [6.3 GHz, 6.7 GHz] και PML 10 κελιών

6.3 Κυματοδηγός κυλινδρικής διατομής

Παράλληλα με τον κώδικα για κυματοδηγούς ορθογωνικής διατομής, αναπτύχθηκε υπολογιστικό εργαλείο για κυματοδηγούς κυλινδρικής διατομής, με τη διαφορά ότι μέχρι στιγμής δεν έχει εισαχθεί στρώμα PML. Έτσι, τα αποτελέσματα αναμένεται να εμφανίζουν συμπεριφορά κοιλότητας με ανάπτυξη στάσιμων κυμάτων στον άξονα διάδοσης. Τέλος, για την αποφυγή του ιδιάζοντος σημείου στο $\rho = 0$ χρησιμοποιείται η μέθοδος εφαρμογής των νόμων Faraday και Ampere [9] σε όλες τις προσομοιώσεις.

6.3.1 Διάδοση και εξασθένηση κυμάτων

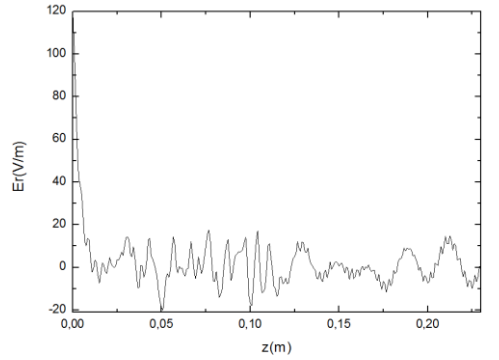
Αρχικά, επιβάλλεται διέγερση του TE_{11} με δύο διαφορετικές συχνότητες λειτουργίας, έτσι ώστε στη μια ο ρυθμός να διαδίδεται και στην άλλη να αποσβένει. Τα στοιχεία της προσομοίωσης δίνονται στον Πίνακα XI. Η διέγερση είναι αρμονική της μορφής $\sin(\omega t)$ και εφαρμόζεται στο $z = 0$ η κατάλληλη εγκάρσια κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου.

Πίνακας XI: Στοιχεία προσομοίωσης για ρυθμό κάτω από την αποκοπή

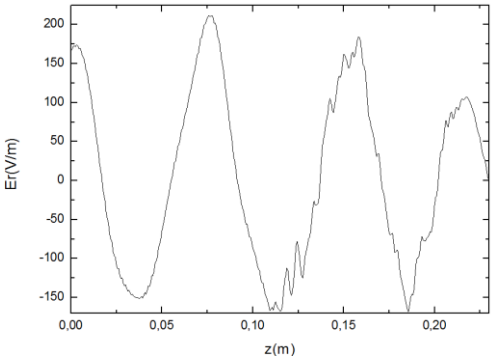
Ακτίνα κυματοδηγού *a* (mm)	**Μήκος κυματοδηγού *L* (mm)**
5	230
Ρυθμός	**Συχνότητα αποκοπής (GHz)**
TE_{11}	17.57
Κελιά ανά μήκος κύματος κενού	**Συνολικός χρόνος προσομοίωσης (ns)**
30	5
Παράγοντας σταθερότητας (stability factor)	**Συχνότητα λειτουργίας(GHz)**
0.9	13

Αρχικά, για τα σημεία στο εγκάρσιο επίπεδο, στα οποία η E_ρ εμφανίζει μέγιστο, αποτυπώνεται (Σχήμα 55) η εξέλιξη όλων των συνιστωσών στον άξονα διάδοσης για $t = 5$ ns, ώστε να έχουν εξαλειφθεί τα μεταβατικά φαινόμενα μεταξύ οδεύοντων και ανακλώμενων

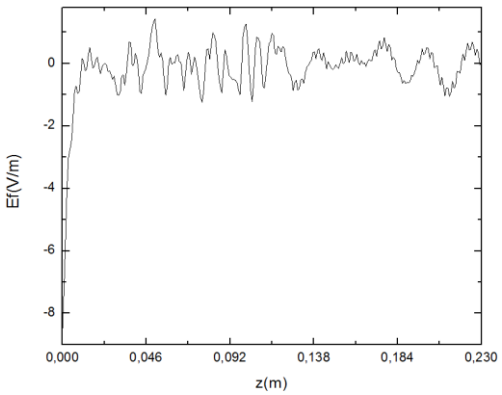
κυμάτων. Επειδή η συχνότητα λειτουργίας είναι μικρότερη από τη συχνότητα αποκοπής του συγκεκριμένου ρυθμού, αυτός δεν παρουσιάζει χαρακτηριστικά διάδοσης (δηλ. σταθερή περιοδικότητα, σταθερό πλάτος) και οι συνιστώσες του πεδίου έχουν μικρά πλάτη. Στη συνέχεια, η συχνότητα λειτουργίας αυξάνεται στα 18 GHz, διατηρώντας όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες (Σχήμα 56). Παρατηρείται μια κυματική συμπεριφορά στις αξονικές κατανομές καθώς και αρκετά μεγαλύτερες τιμές πλάτους από την προηγούμενη περίπτωση, γεγονός που αποτελεί ένδειξη ότι ο επιβαλλόμενος ρυθμός πλέον διαδίδεται. Σημειώνεται επίσης η ημιτονοειδής συμπεριφορά των E_ρ και E_φ καθώς και το πολύ μικρό πλάτος της E_z. Το τελευταίο είναι αναμενόμενο, καθώς οι ρυθμοί ΤΕ δεν έχουν αξονική συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου και κατά συνέπεια οι εμφανιζόμενες τιμές μπορούν να χαρακτηριστούν ως αριθμητικός θόρυβος. Συγκρίνοντας τις αξονικές κατανομές των E_ρ και E_φ για τις δύο περιπτώσεις (πάνω και κάτω από την αποκοπή) γίνεται εμφανές πως για συχνότητα κάτω από την αποκοπή, ο ρυθμός δεν διαδίδεται, αλλά εξασθενεί όπως είναι αναμενόμενο (Σχήμα 57).



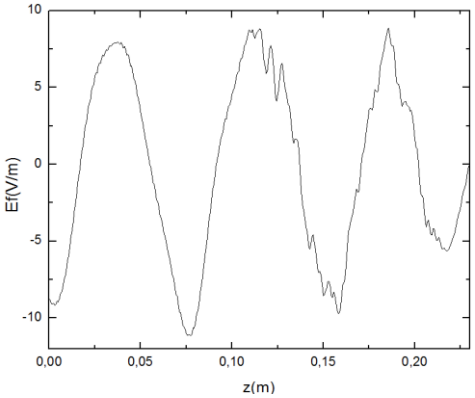
(α)



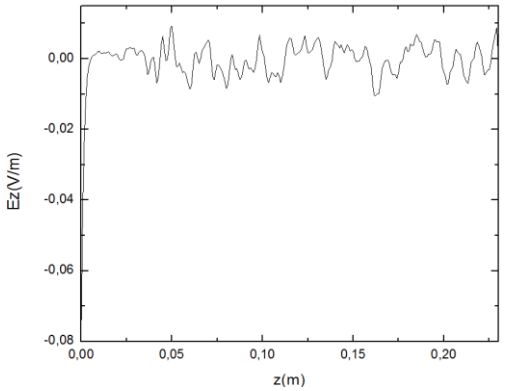
(α)



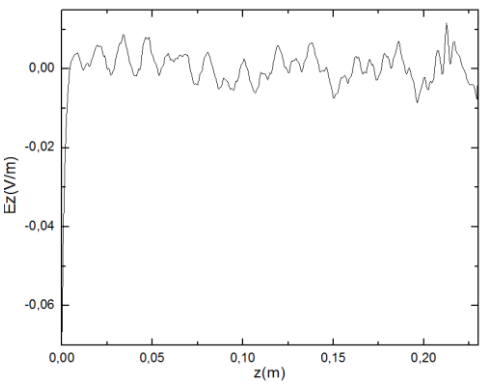
(β)



(β)

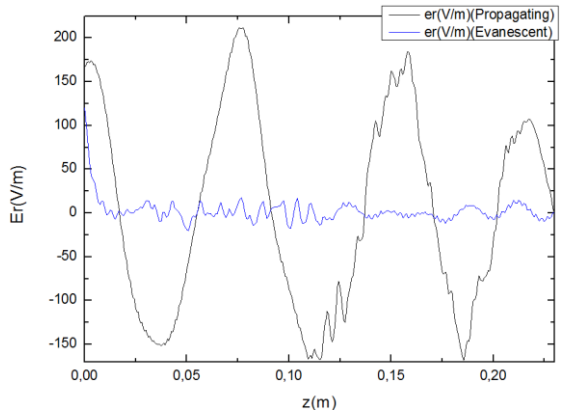


(γ)



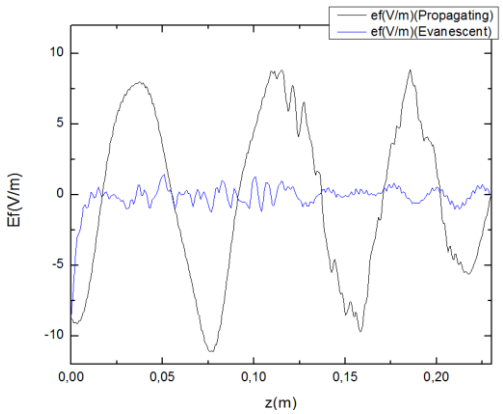
(γ)

Σχήμα 55: Αξονικές κατανομές του ρυθμού TE_{11} κάτω από την αποκοπή (f = 13 GHz).



(α)

Σχήμα 56: Αξονικές κατανομές του ρυθμού TE_{11} πάνω από την αποκοπή (f = 18 GHz).



(β)

Σχήμα 57: Σύγκριση των αξονικών κατανομών των E_ρ και E_φ πάνω και κάτω από την αποκοπή.

6.3.2 Διέγερση με συγκεκριμένη κατανομή ρυθμού

Στη συνέχεια, ο κυματοδηγός διεγείρεται εξωτερικά επιβάλλοντας την κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου του ρυθμού TE_{11}, που προβλέπεται από τη θεωρία στην αξονική θέση $z = 0$, και δίνονται από τις σχέσεις:

$$E_\rho\left(\rho,\varphi,z=0\right)=\frac{\omega\mu_0}{k_\perp^2\rho}H_0J_1\left(k_\perp\rho\right)\sin\left(\varphi\right) \tag{6.5}$$

$$E_\varphi\left(\rho,\varphi,z=0\right)=-\frac{\omega\mu_0}{k_\perp}H_0J_1'\left(k_\perp\rho\right)\cos\left(\varphi\right) \tag{6.6}$$

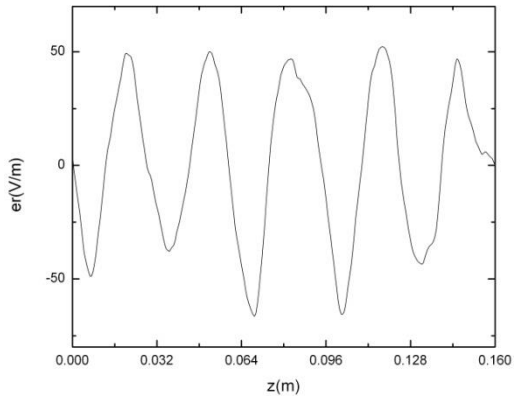
Το μήκος του κυματοδηγού για την προσομοίωση επιλέγεται τέτοιο ώστε να μπορεί να είναι ίσο με τουλάχιστον ένα μήκος κύματος μέσα στον κυματοδηγό για τον υπό μελέτη ρυθμό. Τα στοιχεία της προσομοίωσης δίνονται στον Πίνακα XII.

Πίνακας XII: Στοιχεία προσομοίωσης για TE_{11} ρυθμό

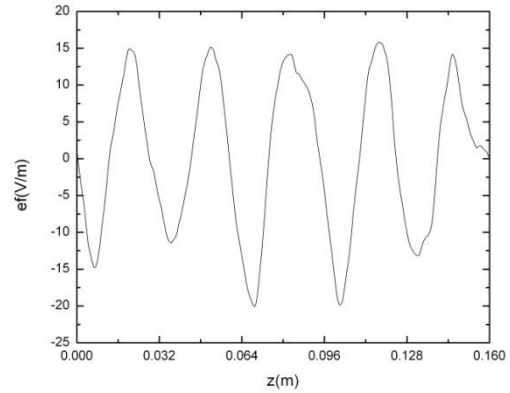
Ακτίνα κυματοδηγού a (mm)	**Μήκος κυματοδηγού L (mm)**
5	160
Κελιά ανά μήκος κύματος κενού	**Συνολικός χρόνος προσομοίωσης (ns)**
25	10
Παράγοντας σταθερότητας (stability factor)	**Συχνότητα λειτουργίας (GHz)**
0.9	20

Οι αξονικές κατανομές υπολογίζονται στη θέση μέγιστου πλάτους ως προς την ακτινική θέση της E_ρ σε αζιμουθιακή θέση $\varphi = \pi/4$ και απεικονίζονται στο Σχήμα 58. Γίνεται αντιληπτό από τη μορφή και τις τιμές των E_ρ και E_φ ότι υπάρχει διάδοση στον άξονα z. Η ημιτονοειδής μορφή είναι εμφανής με τις διακυμάνσεις που εμφανίζονται να οφείλονται στη συμβολή οδεύοντος και ανακλώμενου κύματος λόγω των δύο εγκάρσια τοποθετημένων μεταλλικών επιφανειών στις θέσεις $z = 0$ και $z = 160$ mm. Αντίθετα, η E_z παρουσιάζει

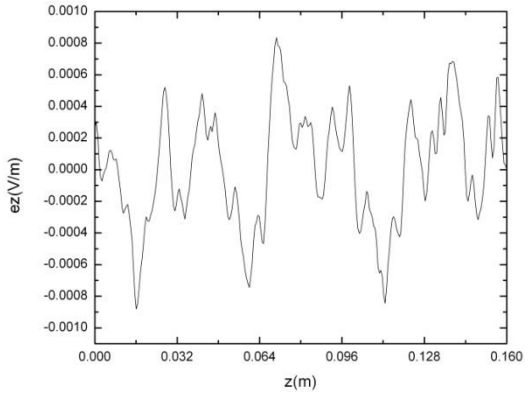
συμπεριφορά που δεν αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο ρυθμό κυματοδήγησης και έχει πολύ μικρότερο πλάτος από τις άλλες δύο, γεγονός που ήταν αναμενόμενο, αφού πρόκειται για ρυθμό TE, και μπορεί να χαρακτηριστεί ως αριθμητικός θόρυβος της μεθόδου σε αναλογία με την περίπτωση του κυματοδηγού ορθογωνικής διατομής.



(α)



(β)

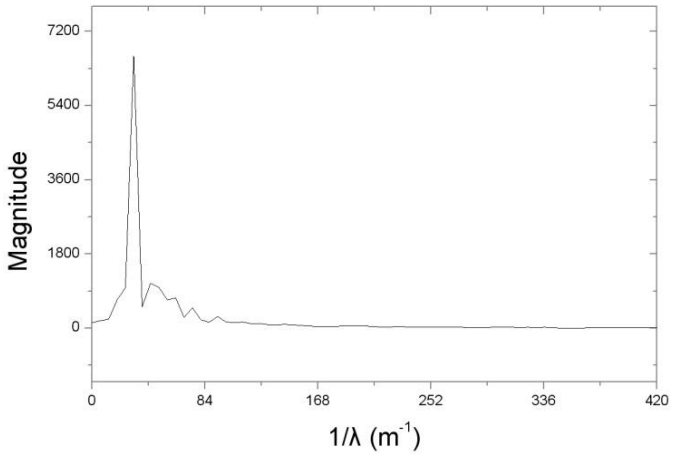


(γ)

Σχήμα 58: Αξονικές κατανομές για διαδιδόμενο ρυθμό TE_{11} (f = 18 GHz).

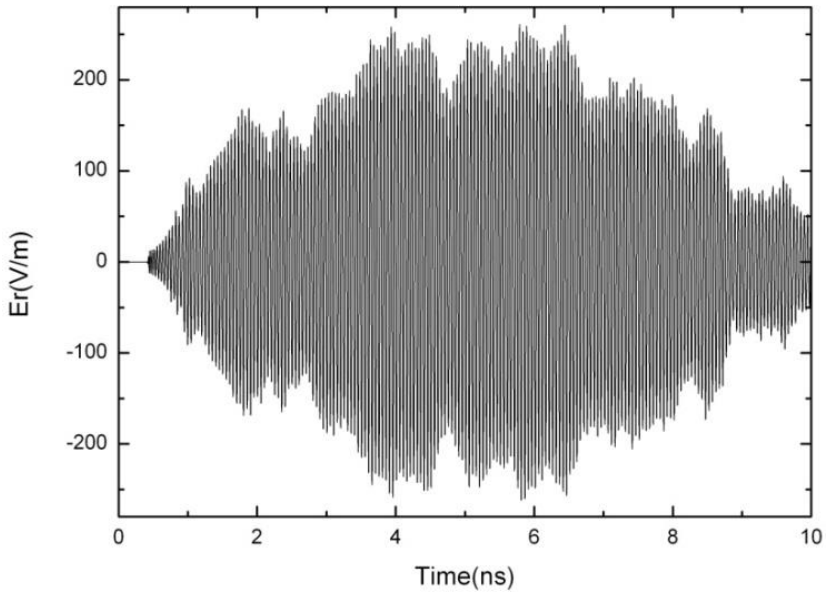
Από το αξονικό προφίλ της E_ρ στο πεδίο των κυματαριθμών (Σχήμα 59) βρίσκονται οι σταθερές διάδοσης των ρυθμών, που διαδίδονται στον κυματοδηγό. Επειδή η συχνότητα λειτουργίας είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα αποκοπής μόνο του πρώτου ρυθμού TE_{11}, αναμένεται να εμφανιστεί μόνο η σταθερά διάδοσης του ρυθμού αυτού. Το ισχυρό μέγιστο εντοπίζεται για $1/\lambda_g = 31.14\ \mathrm{m}^{-1}$, που αντιστοιχεί σε $\beta = 195.66\ \mathrm{m}^{-1}$, με τη θεωρητικά

αναμενόμενη τιμή να είναι 200.32 m^{-1}, δηλαδή υπάρχει ένα σφάλμα περίπου 2.3%. Η διαφορά αυτή οφείλεται στην έλλειψη σύγκλισης λόγω του επιλεγέντος μήκους του κυματοδηγού, όπως εξηγήθηκε λεπτομερώς στην παράγραφο 6.2.5.

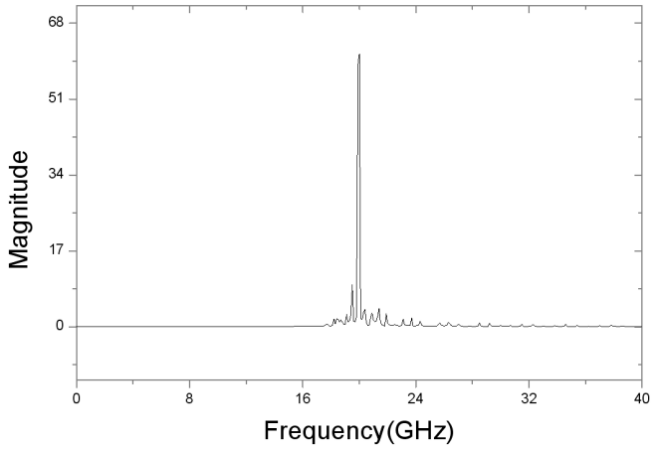


Σχήμα 59: Αξονική κατανομή στο χώρο των κυματαριθμών για την E_ρ συνιστώσα.

Η κατανομή της E_ρ στο πεδίο του χρόνου για ρ = 4 mm, $\varphi = \pi/4$ και z = 160 mm δίνεται στο Σχήμα 60, όπου ο χρόνος υπολογισμών είναι τα 10 ns. Από το συχνοτικό φάσμα (Σχήμα 61) το ισχυρό μέγιστο εντοπίζεται στη συχνότητα f = 19.99992 GHz, που είναι πρακτικά ίδια με τη συχνότητα λειτουργίας (f = 20 GHz).

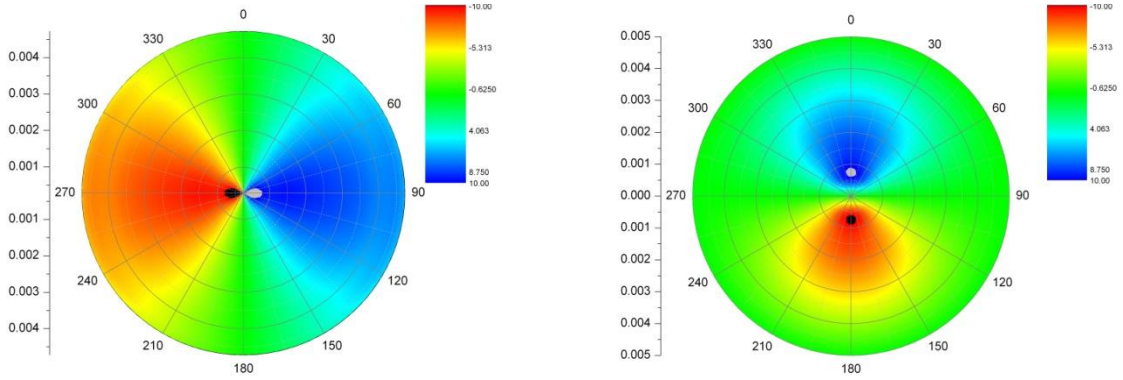


Σχήμα 60: Η κατανομή της E_ρ στο πεδίο του χρόνου.



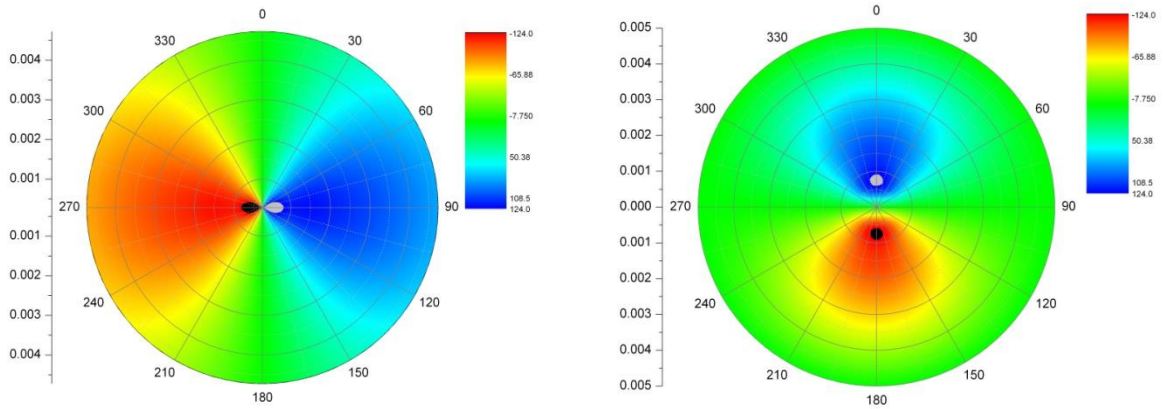
Σχήμα 61: Συχνοτικό φάσμα για την προσομοίωση του ρυθμού TE_{11}.

Στο Σχήμα 62 απεικονίζονται η εγκάρσια κατανομή των E_ρ και E_φ στο επίπεδο της διέγερσης τη χρονική στιγμή $t = 10$ ns, όπως προκύπτουν από τη θεωρία. Οι αντίστοιχες κατανομές που προκύπτουν από την προσομοίωση δίνονται στο Σχήμα 63 για $z = 118$ mm, από τις οποίες είναι φανερό ότι μόνο οι E_ρ και E_φ έχουν σημαντικά πλάτη, ενώ η E_z έχει σαφώς μικρότερο πλάτος και αποτελεί αριθμητικό θόρυβο.

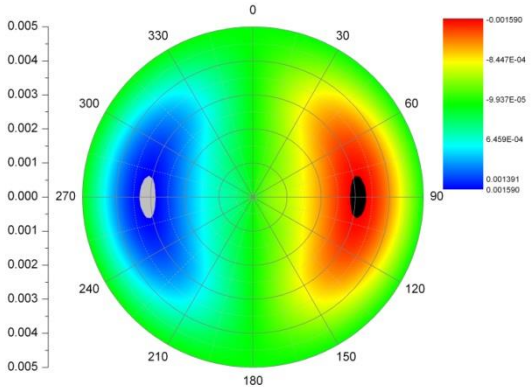


(α) (β)

Σχήμα 62: Εγκάρσια κατανομή των (α) E_ρ και (β) E_φ συνιστωσών στο επίπεδο της διέγερσης για t = 10 ns για το ρυθμό TE_{11}.



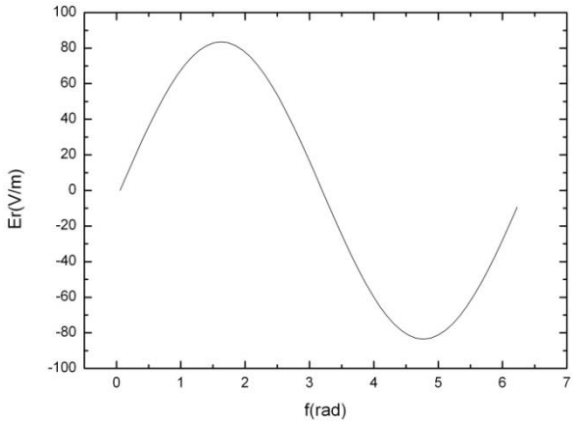
(α) (β)



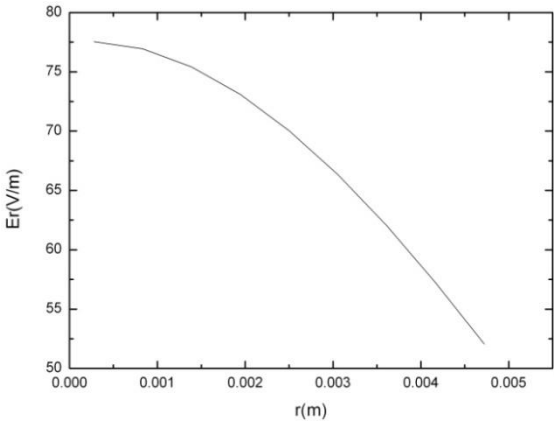
(γ)

Σχήμα 63: Εγκάρσιες κατανομές του ηλεκτρικού πεδίου για *z* = 118 mm.

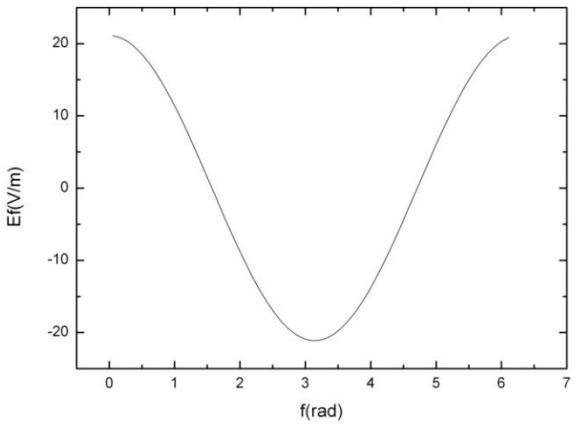
Στη συνέχεια, στην θέση *z* = 118 mm υπολογίζονται οι κατανομές των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου ως προς τη γωνία φ (για ρ = 4 mm, Σχήμα 64) και την ακτινική θέση ρ (για $\varphi = \pi/4$, Σχήμα 64). Από τις καμπύλες των Σχημάτων 64α και β προκύπτει μια αρμονική μεταβολή με τη γωνία φ, όπως αναμένεται από τις σχέσεις (6.5)-(6.6). Επιπλέον, από τα Σχήματα 65α-β προκύπτει ότι η ακτινική μεταβολή είναι της μορφής της συνάρτησης Bessel και της πρώτης παραγώγου αυτής, για τις E_ρ και E_φ, αντίστοιχα. Οι καμπύλες των Σχημάτων 64γ και 65γ έχουν πολύ μικρότερο πλάτος και μπορούν να θεωρηθούν αριθμητικός θόρυβος.



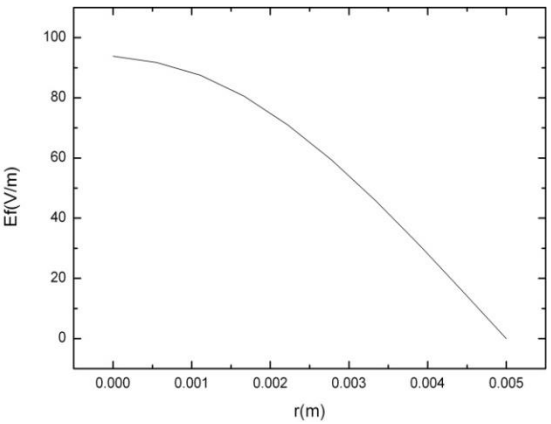
(α)



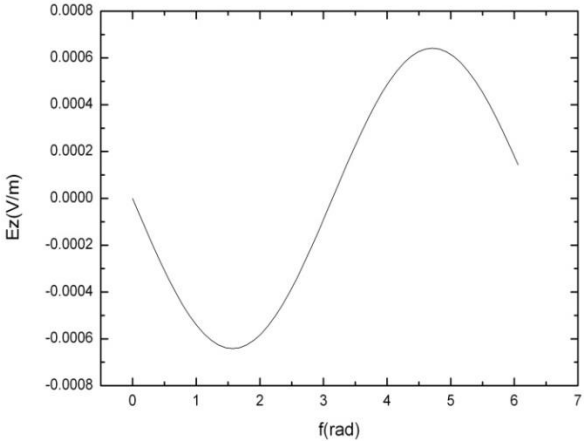
(α)



(β)

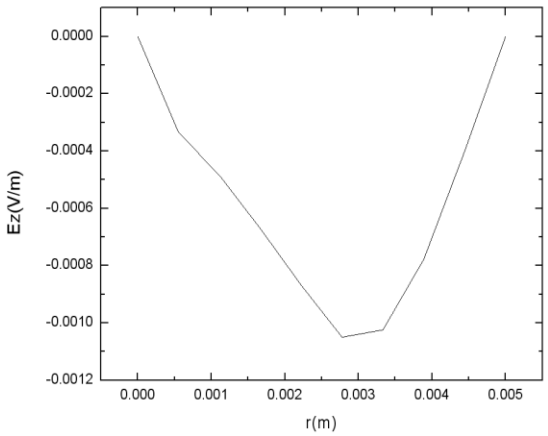


(β)



(γ)

Σχήμα 64: Κατανομές του ηλεκτρικού πεδίου ως προς τη γωνία φ για z = 118 mm και ρ = 4 mm.



(γ)

Σχήμα 65: Κατανομές του ηλεκτρικού πεδίου ως προς την ακτινική θέση ρ για z = 118 mm και φ = π/4.

6.3.3 Διέγερση με ρυθμό TE_{21}

Σε αυτό το στάδιο αυξάνεται η συχνότητα ώστε να μπορεί να διεγερθεί και ο ρυθμός TE_{21}, ενώ προφανώς το ίδιο ισχύει για τον TE_{11}, που έχει χαμηλότερη συχνότητα αποκοπής. Τα χαρακτηριστικά της προσομοίωσης δίνονται στον Πίνακα XIII.

Πίνακας XIII: Χαρακτηριστικά προσομοίωσης ρυθμού TE_{21}

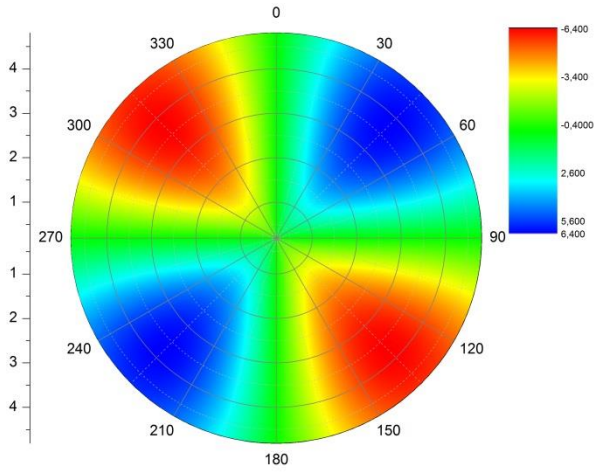
Ακτίνα κυματοδηγού a (mm)	**Μήκος κυματοδηγού L (mm)**	**Συνολικός χρόνος προσομοίωσης (ns)**
5	96	2
Ρυθμός	**Συχνότητα αποκοπής TE_{21} (GHz)**	**Συχνότητα λειτουργίας (GHz)**
TE_{21}	29.14	30
Κελιά ανά μήκος κύματος κενού	**Συνολικός χρόνος προσομοίωσης (ns)**	**Παράγοντας σταθερότητας**
25	2	0.9

Οι εγκάρσιες κατανομές για $z = 50$ mm και $t = 2$ ns δίνονται στο Σχήμα 66. Διαπιστώνεται ότι η τιμή πλάτους της E_z είναι περίπου 40 dB μικρότερη από τις αντίστοιχες των E_ρ και E_φ. Έτσι μπορεί να ειπωθεί με ασφάλεια ότι η E_z δεν υπάρχει και προκύπτει ως αποτέλεσμα αριθμητικού θορύβου. Οι αζιμουθιακές κατανομές των E_ρ και E_φ για $\rho = 4$ mm και $t = 2$ ns παρουσιάζονται στο Σχήμα 67. Η συμπεριφορά παρουσιάζει τη μορφή συνημιτόνου (E_ρ συνιστώσα) και ημιτόνου (E_φ) με αζιμουθιακό δείκτη 2 (όσες δηλαδή και οι εμφανιζόμενες περίοδοι), κάτι που έρχεται σε πλήρη συμφωνία με τις σχέσεις (6.5)-(6.6) για $m = 2$. Η αζιμουθιακή κατανομή της E_z για $\rho = 4$ mm και $t = 2$ ns παρατίθεται στο **Error! Reference source not found.**, στην οποία είναι φανερό δύο μέγιστα και η ημιτονοειδής εξάρτηση. Λόγω του ότι η συνιστώσα είναι παράλληλη στον άξονα διάδοσης, συμπεραίνεται ότι αντιστοιχεί σε ρυθμό TM_{21} και δίνεται από τη σχέση:

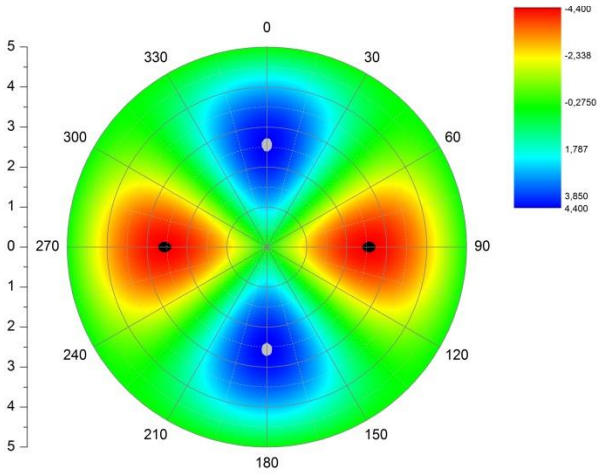
$$e_z(\rho,\varphi) = E_0 J_2\left(k_\perp \rho\right)\cos\left(2\varphi\right) \tag{6.7}$$

Η συχνότητα αποκοπής του TM_{21} είναι 12 GHz και επομένως μπορεί να διεγερθεί και ο ρυθμός αυτός. Σημειώνεται όμως ότι το πλάτος της είναι σημαντικά μικρότερο από τις E_ρ και

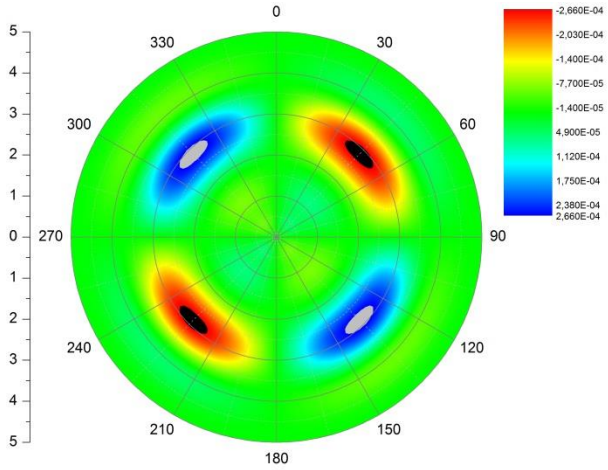
E_φ. Οι αντίστοιχες ακτινικές κατανομές για $\varphi = \pi/6$ παρατίθενται στο Σχήμα 68. Γίνεται αντιληπτό πως η μορφή των E_ρ και E_φ συνιστωσών ακολουθεί τις θεωρητικά προβλεπόμενες, οι οποίες είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης Bessel $1^{ης}$ τάξης και η συνάρτηση Bessel $1^{ης}$ τάξης, αντίστοιχα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ακτινική κατανομή της E_z συνιστώσας, που ενώ παρουσιάζει ένα ισχυρό ελάχιστο για $\rho = 3$ mm, εμφανίζει και τοπικό μέγιστο για $\rho = 0.5$ mm. Θα μπορούσε να θεωρηθεί πως η E_z αποτελεί υπέρθεση των E_z συνιστωσών εκείνων των TM ρυθμών, που διεγείρονται παρασιτικά, εφόσον η συχνότητα είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα αποκοπής τους, αλλά δε καταφέρνουν να αναπτυχθούν και να διαδοθούν καθώς δεν διεγείρονται με αρκετό πλάτος, παρά αποτελούν το αποτέλεσμα του αριθμητικού θορύβου της μεθόδου.



(α)

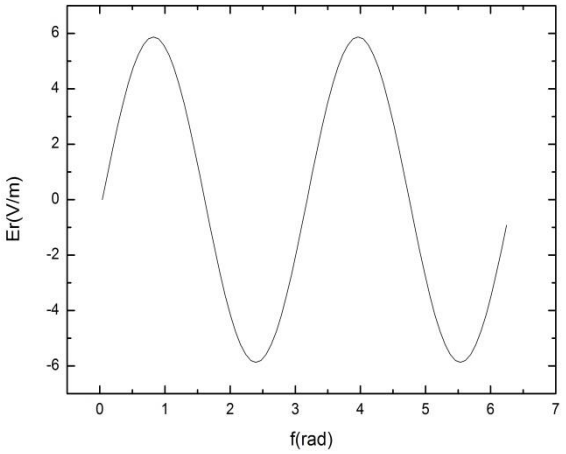


(β)

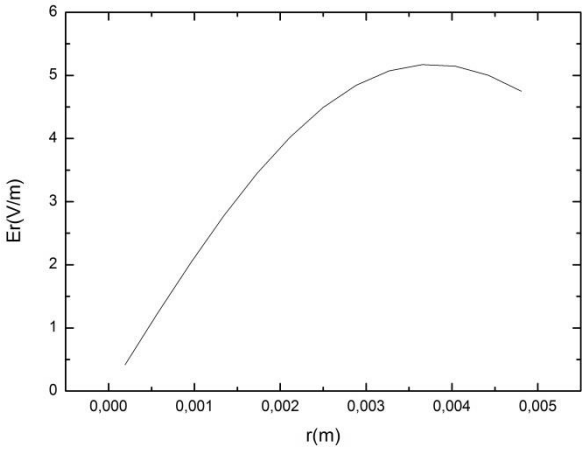


(γ)

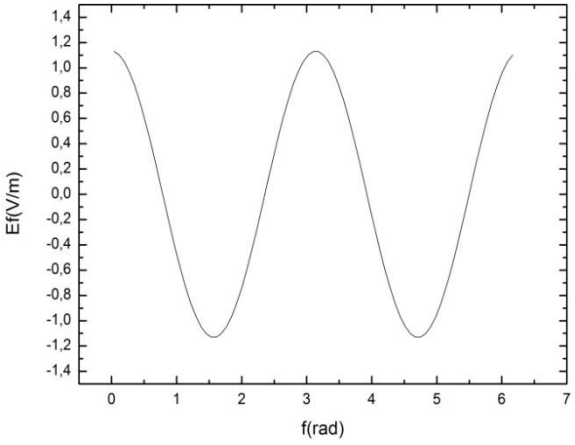
Σχήμα 66: Εγκάρσιες κατανομές των (α) E_ρ, (β) E_φ και (γ) E_z.



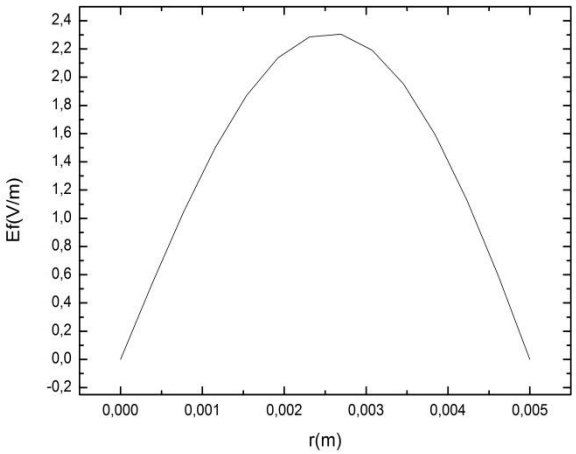
(α)



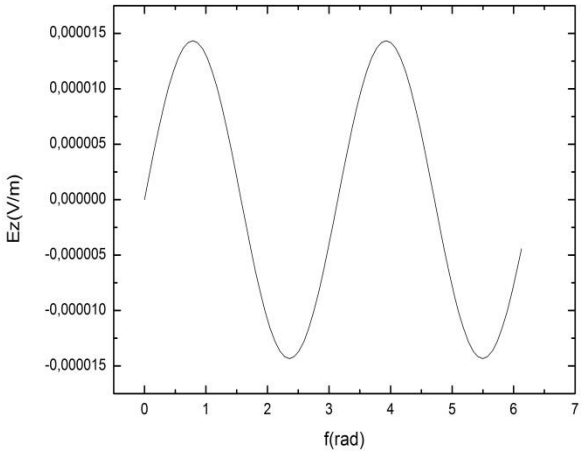
(α)



(β)

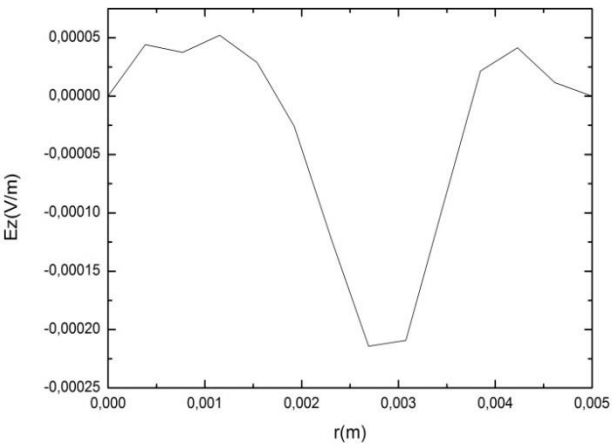


(β)



(γ)

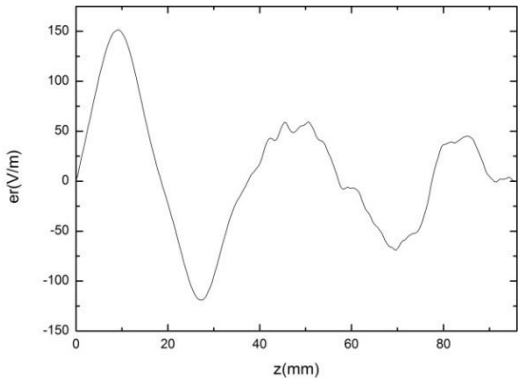
Σχήμα 67: Αζιμουθιακές κατανομές για ρ = 4 mm και z = 50 mm των (α) E_ρ, (β) E_φ και (γ) E_z.



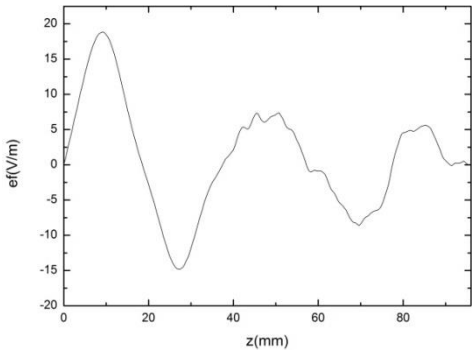
(γ)

Σχήμα 68: Ακτινικές κατανομές για $\varphi = \pi/6$, t = 2 ns και z = 90 mm των (α) E_ρ, (β) E_φ και (γ) E_z.

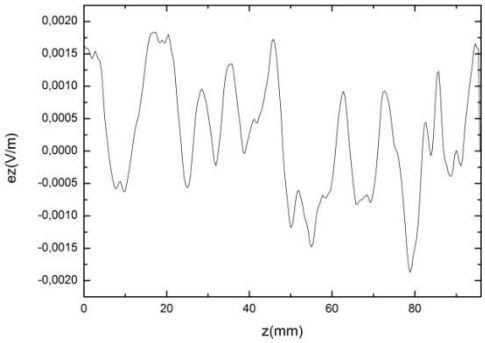
Για ρ = 4 mm και $\varphi = \pi/6$ λαμβάνεται η αξονική κατανομή των πεδιακών συνιστωσών E_ρ, E_φ και E_z (Σχήμα 69). Γίνεται αντιληπτό πως μορφή διάδοσης εμφανίζουν μόνο οι E_ρ και E_φ, με τις διακυμάνσεις να οφείλονται στο ανακλώμενο κύμα στα άκρα του κυματοδηγού. Επιπλέον, εκτός από το ρυθμό TE_{21}, υπάρχει πιθανότητα να αναπτυχθούν και ρυθμοί που δεν αναμένεται να διεγερθούν λόγω της συγκεκριμένης διέγερσης, όμως η συχνότητα αποκοπής τους είναι μικρότερη από τη συχνότητα λειτουργίας. Αντίθετα, η E_z δεν παρουσιάζει χαρακτηριστικά διάδοσης, αλλά ισχυρές διακυμάνσεις με σαφώς μικρότερο πλάτος από το αντίστοιχο των E_ρ και E_φ (περίπου 40 dB).



(α)



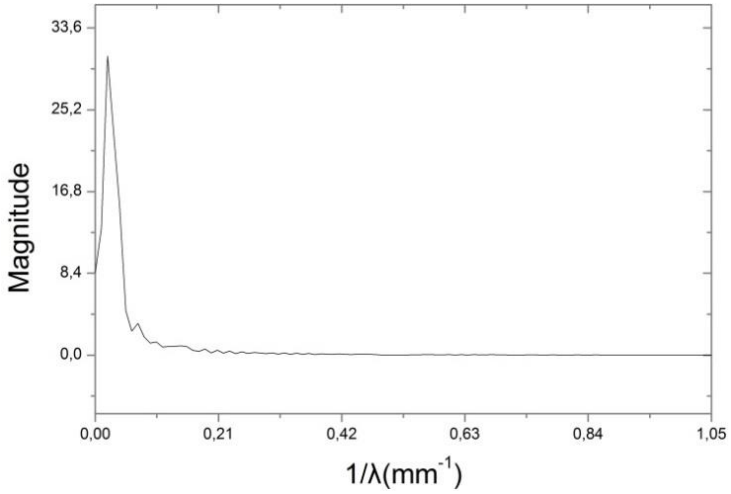
(β)



(γ)

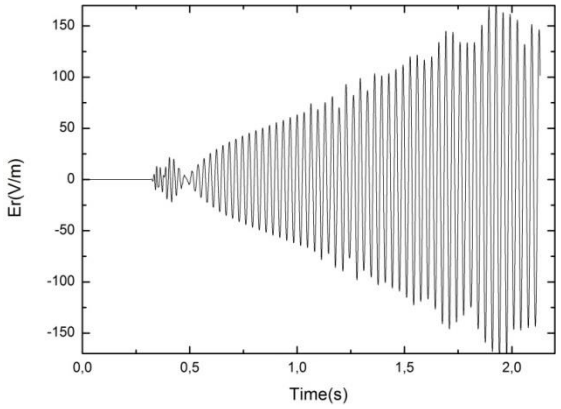
Σχήμα 69: Αξονικές κατανομές των πεδιακών συνιστωσών για ρ = 4 mm, $\varphi = \pi/6$ και t = 2 ns (α) E_ρ, (β) E_φ και (γ) E_z.

Από το χωρικό μετασχηματισμό Fourier για την αξονική κατανομή της E_ρ προκύπτει το φάσμα του κύματος στο πεδίο των κυματαριθμών (Σχήμα 70). Εντοπίζεται ένα ισχυρό μέγιστο για $1/\lambda_g = 20.8\ \mathrm{m}^{-1}$, που αντιστοιχεί σε $\beta = 130.69\ \mathrm{m}^{-1}$, με τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή να είναι $149.2\ \mathrm{m}^{-1}$. Η διαφορά αυτή μπορεί να οφείλεται στην επιλογή μικρού χωρικού παράθυρου και πιθανώς στην ύπαρξη και ανεπιθύμητων ρυθμών, οι οποίοι έχουν συχνότητα αποκοπής χαμηλότερη από τη συχνότητα λειτουργίας. Πράγματι, εντοπίζεται και ένα ακόμα μέγιστο στην περιοχή $75\ \mathrm{m}^{-1} < \lambda_g < 100\ \mathrm{m}^{-1}$, που αντιστοιχεί σε $471\ \mathrm{m}^{-1} < \beta < 628.3\ \mathrm{m}^{-1}$. Σημειώνεται ότι η σταθερά διάδοσης του ρυθμού TE_{11} είναι $\beta = 509.7\ \mathrm{m}^{-1}$, οπότε μπορεί να θεωρηθεί πως υπάρχει και διάδοση του TE_{11} ρυθμού, ως αποτέλεσμα του τρόπου διέγερσης. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται και σε πραγματικές διεγέρσεις, όπου δεν είναι δυνατή η διέγερση μόνο ενός ρυθμού υψηλής τάξης χωρίς να διεγερθούν και εκείνοι με χαμηλότερη συχνότητα αποκοπής [7].

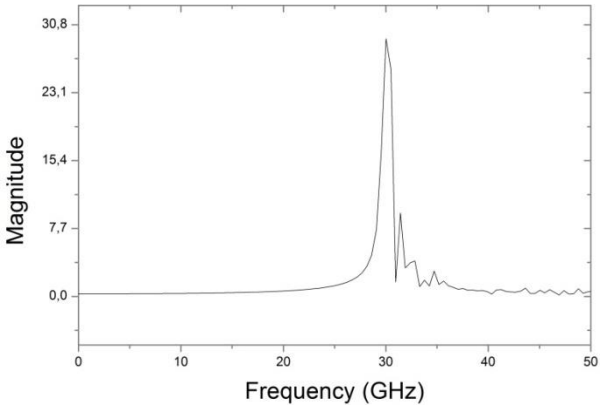


Σχήμα 70: Φάσμα αξονικής κατανομής της E_ρ στο πεδίο των κυματαριθμών.

Για $\rho = 4$ mm, $\varphi = \pi/6$ και $z = 50$ mm παρατίθεται η χρονική εξέλιξη της E_ρ στο Σχήμα 71, ενώ στο Σχήμα 72 δίνεται το αντίστοιχο φάσμα στο πεδίο της συχνότητας. Από την αξονική κατανομή στο πεδίο του χρόνου γίνονται αντιληπτές οι ανακλάσεις, αφού στην αρχή το πλάτος μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνεται. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως το αποτέλεσμα της ενισχυτικής και καταστροφικής συμβολής του οδεύοντος με το ανακλώμενο κύμα, κάτι που ισχυροποιεί ακόμα περισσότερο τα συμπεράσματα της παραγράφου 6.3.2, όπου παρουσιάζεται παρόμοια συμπεριφορά. Το φαινόμενο αυτό είναι ισχυρότερο, καθώς ανακλάσεις υπάρχουν και από την επιφάνεια της διέγερσης. Αντίθετα, το συχνοτικό φάσμα παρουσιάζει ένα μέγιστο για $f = 30$ GHz, όση είναι και η συχνότητα λειτουργίας.

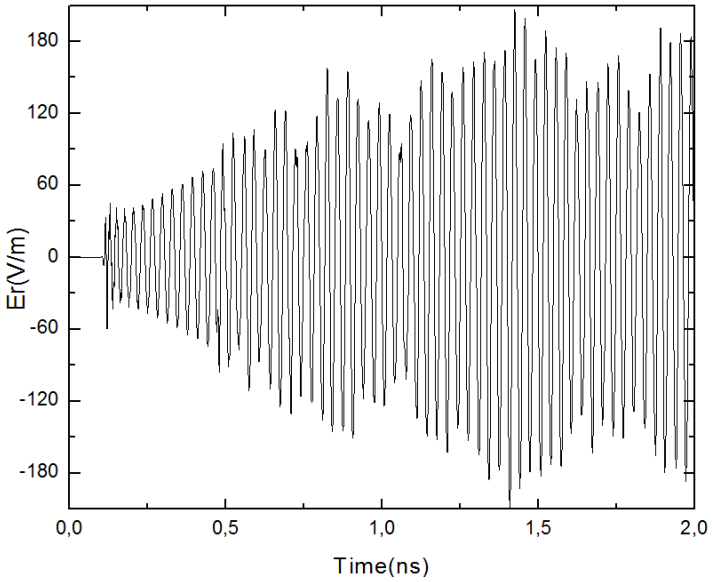


Σχήμα 71: Κατανομή της E_ρ στο πεδίο του χρόνου.



Σχήμα 72: Κατανομή της E_ρ στο πεδίο της συχνότητας.

Επιπλέον, σημαντικό ρόλο παίζει και η αξονική θέση για την επιλέγεται η εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Η συμπεριφορά κοιλότητας, που παρουσιάζει ο κυματοδηγός, φαίνεται καλύτερα αν αντί για το άκρο του κυματοδηγού επιλεγεί η αξονική εκείνη απόσταση, όπου μεγιστοποιείται το πλάτος του πεδίου. Υποθέτοντας ότι το πεδίο παρουσιάζει αρμονική εξάρτηση από το z, η μεγιστοποίηση εμφανίζεται για $z = k\lambda_g/4$, όπου $k = 1, 3, \ldots$. Επιλέγεται έτσι ως σημείο εξαγωγής η απόσταση $z = 31.58$ mm, αφού το θεωρητικό μήκος κύματος κυματοδηγού για τη συγκεκριμένη συχνότητα λειτουργίας (30 GHz) είναι $\lambda_g = 42.12$ m. Στο Σχήμα 73 παρατίθεται η χρονική εξέλιξη της E_ρ για $\varphi = 0$, η οποία παρουσιάζει τη μορφή ταλάντωσης συνεχούς αυξανόμενου πλάτους, κάτι που οδηγεί στο συμπέρασμα πως ο κυματοδηγός λειτουργεί σαν κοιλότητα. Επιβεβαιώνεται έτσι η σημασία του σημείου στο οποίο γίνονται οι διάφορες εξαγωγές των πεδιακών συνιστωσών. Συνεπώς, τα πεδία θα πρέπει να εξάγονται σε τέτοιες αποστάσεις και σε τέτοιους χρόνους ώστε τα χαρακτηριστικά της διάδοσης να έχουν επικρατήσει.



Σχήμα 73: Χρονική εξέλιξη της E_ρ για $\rho = 5$ mm, $\varphi = 0$, $z = 31.58$.

6.3.4 Διέγερση του ρυθμού TE_{11} με εγκάρσια τοποθετημένη αζιμουθιακή κατανομή ρεύματος

Στα πραγματικά συστήματα κυματοδήγησης οι διεγέρσεις πραγματοποιούνται με κατάλληλες κατανομές ρεύματος. Εδώ επιλέγεται η διέγερση να παρουσιάζει αζιμουθιακή εξάρτηση της μορφής:

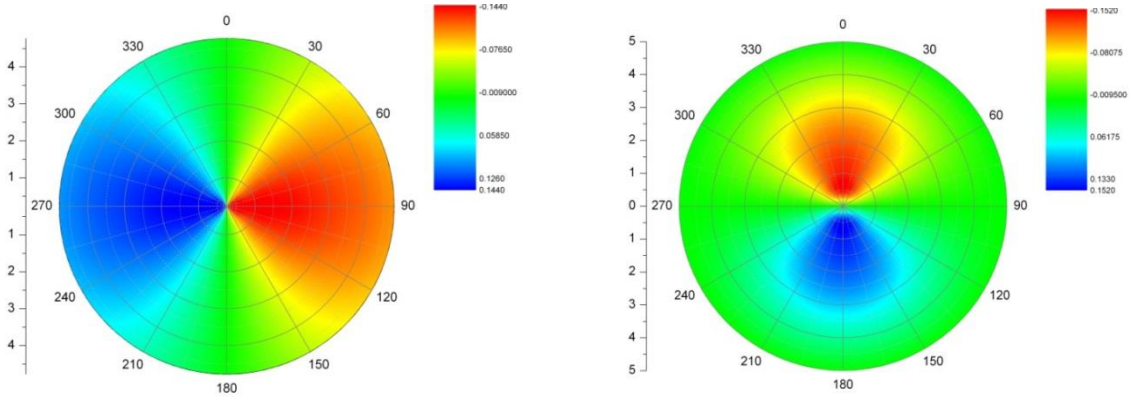
$$J_\varphi(\varphi) = J_0 e^{j\varphi} \tag{6.8}$$

όπου J_0 είναι σταθερό πλάτος. Με αυτό τον τρόπο θα υπάρχει E_φ, ώστε τελικά να αναπτυχθεί ο TE_{11}. Γνωρίζοντας την εγκάρσια κατανομή του συγκεκριμένου ρυθμού, η ρευματική κατανομή θα τεθεί για $\rho = \rho_{max}$, το ακτινικό σημείο εκείνο όπου η ακτινική κατανομή της E_φ μεγιστοποιείται. Τα χαρακτηριστικά της προσομοίωσης παρατίθενται στον Πίνακα XIV.

Πίνακας XIV: Στοιχεία προσομοίωσης με εγκάρσια τοποθετημένη αζιμουθιακή ρευματική κατανομή

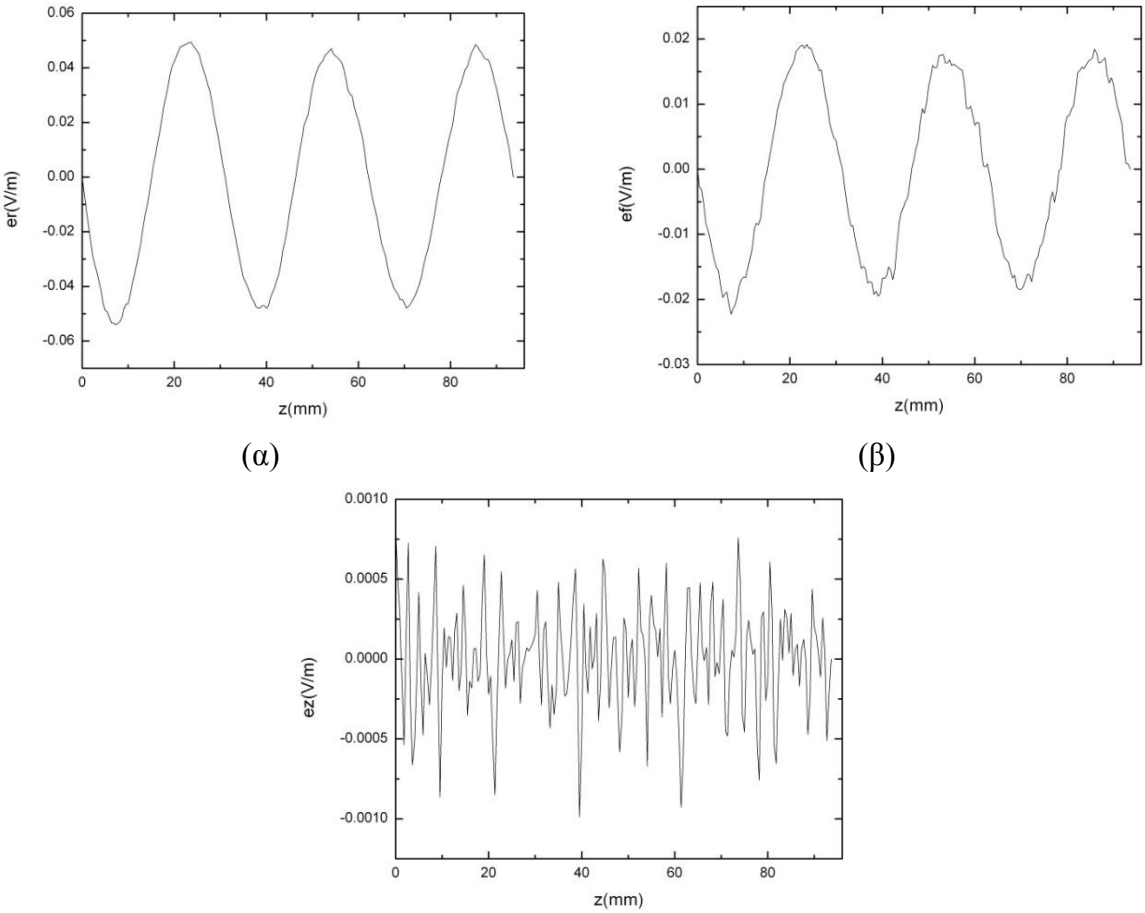
Ακτίνα κυματοδηγού *a* (mm)	**Μήκος κυματοδηγού *L* (mm)**
5	94
Κελιά ανά μήκος κύματος κενού	**Συνολικός χρόνος προσομοίωσης (ns)**
30	10
Πυκνότητα ρεύματος (A/m^2)	**Συχνότητα λειτουργίας (GHz)**
40	20
Ακτινική απόσταση ρευματικής κατανομής (mm)	**Αζιμουθιακός δείκτης m**
0.5	1

Οι εγκάρσιες κατανομές των E_ρ και E_φ (Σχήμα 74) επιβεβαιώνουν ότι διαδίδεται ο ρυθμός TE_{11}, με πολύ καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων με εκείνα που προβλέπονται από τη θεωρία και με τη μορφή του ρυθμού που επιβλήθηκε στην παράγραφο 6.3.2. Αντίθετα, η E_z εμφανίζει αρκετά μικρότερο πλάτος από τις E_ρ και E_φ, ώστε να θεωρηθεί αποτέλεσμα του αριθμητικού θορύβου. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται εξετάζοντας και τις αξονικές κατανομές των πεδίων για χρόνο ίσο με 8 ns, όπου οι συνιστώσες που διαδίδονται είναι οι E_ρ και E_φ, με ξεκάθαρη την αρμονική εξάρτηση στον άξονα διάδοσης (Σχήμα 75). Ως αξονική θέση για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων επιλέχθηκε εκείνη όπου τα πεδία αναμένεται να παρουσιάσουν μέγιστο και συγκεκριμένα το σημείο $3\lambda_g/4 = 70.56$ mm.



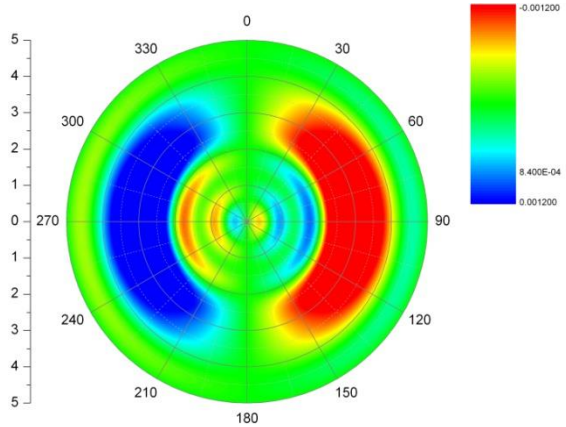
(α) (β)

Σχήμα 74: Εγκάρσιες κατανομές των (α) E_ρ και (β) E_φ για t = 8 ns και z = 70 mm.



Σχήμα 75: Αξονικές κατανομές των (α) E_ρ, (β) E_φ και (γ) E_z για t = 10 ns.

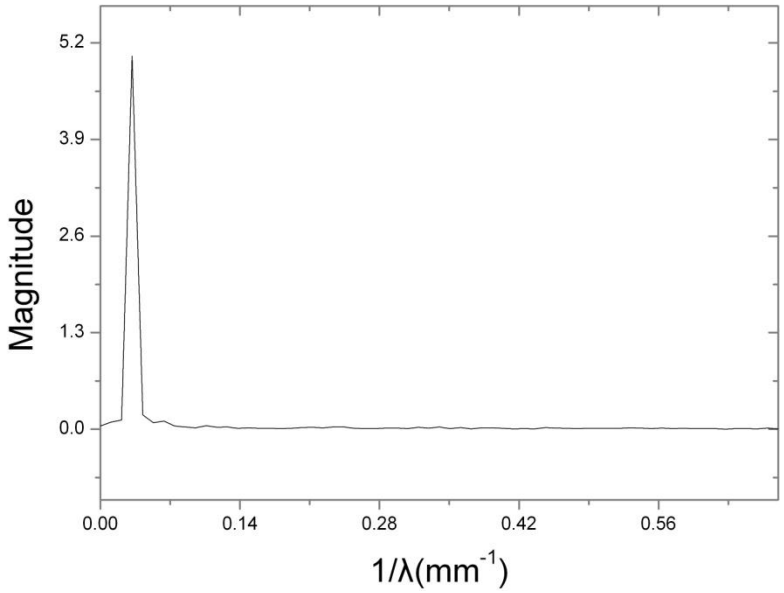
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εγκάρσια κατανομή για την E_z για $z = 57$ mm, η οποία εμφανίζει τρία ακτινικά και δύο αζιμουθιακά μέγιστα. Η συγκεκριμένη συνιστώσα, αν και ακολουθεί συγκεκριμένη κατανομή στο εγκάρσιο επίπεδο, το πλάτος της είναι αρκετά μικρό ώστε να χαρακτηριστεί αριθμητικός θόρυβος. Εξάλλου, αυτό μπορεί να φανεί και στο Σχήμα 75(γ), όπου δε παρουσιάζεται κάποια μορφή διάδοσης, αλλά τυχαίες διακυμάνσεις.



Σχήμα 76: Εγκάρσια κατανομή της E_z για t = 8 ns και z = 57 mm.

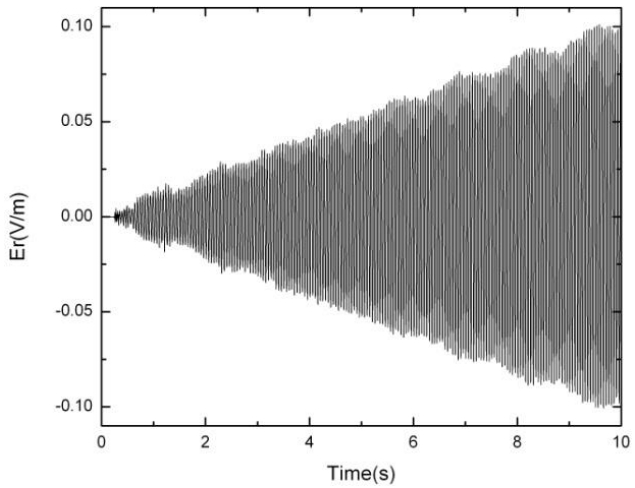
Από το χωρικό μετασχηματισμό Fourier (Σχήμα 77) προκύπτει το φάσμα στο πεδίο των κυματαριθμών. Επιλέγεται να ληφθεί το φάσμα της E_ρ, που έχει το μεγαλύτερο πλάτος. Το

ισχυρό μέγιστο εντοπίζεται για $1/\lambda_g = 31.88\ \mathrm{m}^{-1}$, που αντιστοιχεί σε $\beta = 200.33\ \mathrm{m}^{-1}$ και βρίσκεται σε καλή συμφωνία με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή ($200.32\ \mathrm{m}^{-1}$) του TE_{11}.

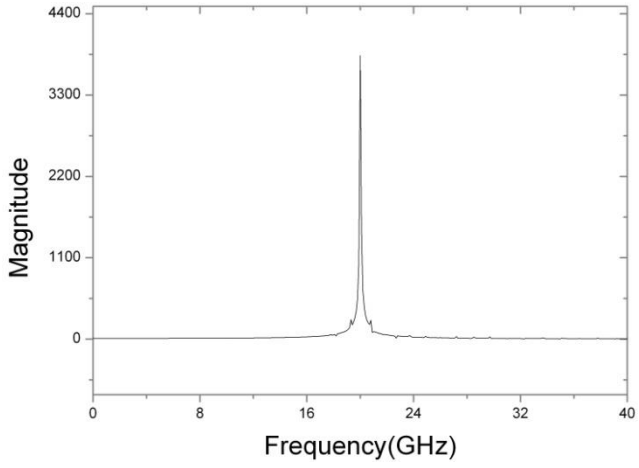


Σχήμα 77: Φάσμα αξονικής κατανομής της E_ρ στο πεδίο των κυματαριθμών για t = 8 ns.

Η χρονική εξέλιξη της E_ρ για $\rho = 4.9$ mm και $z = 70$ mm δίνεται στο Σχήμα 78(α). Παρατηρείτε και σε αυτή την περίπτωση ότι ο κυματοδηγός συμπεριφέρεται σαν κοιλότητα, αφού το πλάτος στο συγκεκριμένο σημείο συνεχώς αυξάνει και άρα η ισχύς εγκλωβίζεται μέσα στη διάταξη. Οι ανακλάσεις που παρουσιάζονται οφείλονται τόσο στο μεταλλικό τοίχωμα (άκρο του κυματοδηγού) όσο και στην ίδια την επιφάνεια της διέγερσης που λειτουργεί και εκείνη σαν ανακλαστικό τοίχωμα. Το αξονικό σημείο που επιλέχθηκε είναι εκείνο, όπου ο όρος αξονικής εξάρτησης του πλάτους μεγιστοποιείται θεωρητικά, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι ανακλάσεις από τα τοιχώματα. Ο μετασχηματισμός Fourier της χρονικής εξέλιξης θα δώσει όλες εκείνες τις αρμονικές που απαρτίζουν το κύμα στο συγκεκριμένο αξονικό σημείο (Σχήμα 78(β)). Η συχνότητα που αντιστοιχεί στο ισχυρό μέγιστο του φάσματος ισοδυναμεί με $f = 19.9991$ GHz, που βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με τη συχνότητα λειτουργίας των 20 GHz.



(α)



(β)

Σχήμα 78: (α) Χρονική εξέλιξη και (β) συχνοτικό φάσμα της E_ρ για z = 70 mm, ρ = 4.9 mm και φ = 0.

6.3.5 Διέγερση του TE_{01} με εγκάρσια τοποθετημένη αζιμουθιακή κατανομή ρεύματος

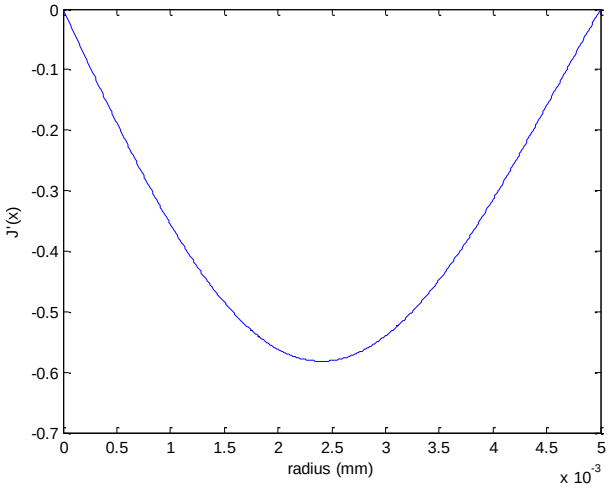
Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ρυθμοί με αζιμουθιακή συμμετρία στις μικροκυματικές πηγές ισχύος. Έτσι, προσομοιώνεται αγώγιμο σύρμα τοποθετημένο στην εγκάρσια επιφάνεια, το οποίο διαρρέεται από σταθερή πυκνότητα ρεύματος, με σκοπό να αναπτυχθούν τέτοιοι ρυθμοί. Ιδιαίτερη σημασία δίνεται στην ακτινική απόσταση της συγκεκριμένης ρευματικής κατανομής, η οποία θα πρέπει να είναι ίση με την ακτινική απόσταση που αναμένεται να παρουσιαστεί το μέγιστο της αντίστοιχης συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου. Τα χαρακτηριστικά της προσομοίωσης δίνονται στον Πίνακα XV. Η συχνότητα λειτουργίας είναι τέτοια που να επιτρέπει τη διάδοση και του ρυθμού TE_{01}. Επιπλέον ο υπολογισμένος εγκάρσιος κυματάριθμος δίνεται από τη σχέση:

$$k_{\perp,mn} = \frac{t_{01}}{a} = 766\,m^{-1} \tag{6.9}$$

όπου t_{01} είναι η 1^{η} ρίζα της παραγώγου της συνάρτησης Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης, $J_0'(x)$. Η συνάρτηση $J_0'(k_c\rho)$ για $0 < \rho < 5$ παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο ρ = 2.4 mm (Σχήμα 79), απόσταση που τίθεται ίση με την ακτίνα του σύρματος με πυκνότητα ρεύματος στη φ-συνιστώσα. Το μήκος του κυματοδηγού επιλέχθηκε ώστε να μπορέσει να αναπτυχθεί τουλάχιστον ένα μήκος κύματος, όπως και στις προηγούμενες προσομοιώσεις.

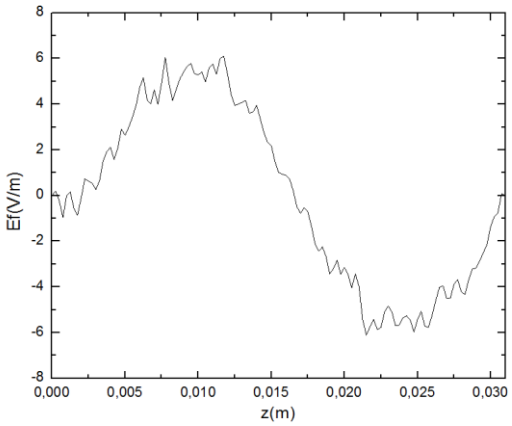
Πίνακας XV: Στοιχεία προσομοίωσης με αζιμουθιακή ρευματική κατανομή και ρυθμό TE_{01}

Ακτίνα κυματοδηγού (mm)	**Μήκος κυματοδηγού (mm)**
5	31
Κελιά ανά μήκος κύματος κενού	**Συνολικός χρόνος προσομοίωσης (ns)**
30	2
Παράγοντας σταθερότητας (stability factor)	**Συχνότητα λειτουργίας (GHz)**
0.9	38
Ακτινική απόσταση ρευματικής κατανομής (mm)	**Πυκνότητα ρεύματος (A/m^2)**
2.5	6500

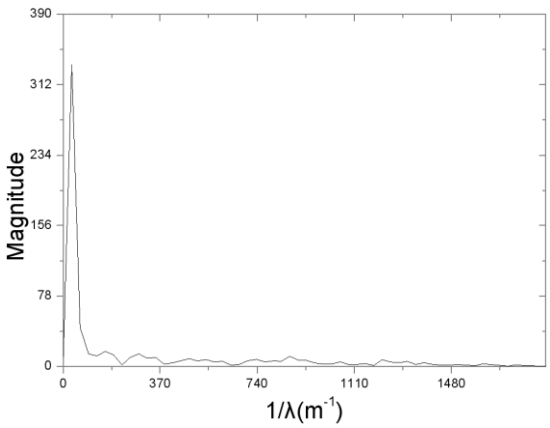


Σχήμα 79: Παράγωγος της συνάρτησης Bessel μηδενικής τάξης για $0 < \rho < 5$ mm.

Εξαιτίας της αζιμουθιακής συμμετρίας αναμένεται να αναπτυχθεί μόνο η E_φ (μοναδική μη μηδενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου), η αξονική κατανομή της οποίας για $\rho = 4.9$ mm, $\varphi = 0$ και για χρόνο $t = 2$ ns δίνεται στο Σχήμα 80. Παρατηρείται πως, αγνοώντας τις ανακλάσεις αρχικά λόγω των τοιχωμάτων τερματισμού, σχηματίζεται ένα μήκος κύματος ακολουθώντας αρμονική μορφή, σε συμφωνία με τα θεωρητικά αναμενόμενα αποτελέσματα. Από το χωρικό μετασχηματισμό Fourier (Σχήμα 81) βρίσκεται ότι η σταθερά διάδοσης είναι $\beta = 201\ \mathrm{m}^{-1}$, αντιστοιχεί στο σημείο $1/\lambda_g = 32\ \mathrm{m}^{-1}$, ενώ η αντίστοιχη θεωρητική τιμή για το ρυθμό αυτό είναι $\beta = 216\ \mathrm{m}^{-1}$. Η διαφορά μπορεί να ερμηνευθεί ως σφάλμα στον υπολογισμό του Μ/Σ Fourier λόγω της συγκεκριμένης επιλογής παραμέτρων προσομοίωσης (π.χ. χρόνος υπολογισμών, μήκος διάταξης, αριθμός κελιών). Για το λόγο αυτό, πραγματοποιείται ξανά η προσομοίωση με μήκος ίσο με δύο μήκη κύματος του ζητούμενου ρυθμού.. Ο νέος υπολογισμένος κυματάριθμος είναι $\beta = 216\ \mathrm{m}^{-1}$ παρουσιάζοντας σφάλμα σε σχέση με τη θεωρητική τιμή, -54dB, σαφώς μικρότερο από την προηγούμενη περίπτωση, ένδειξη του ότι τα αποτελέσματα έχουν συγκλίνει .

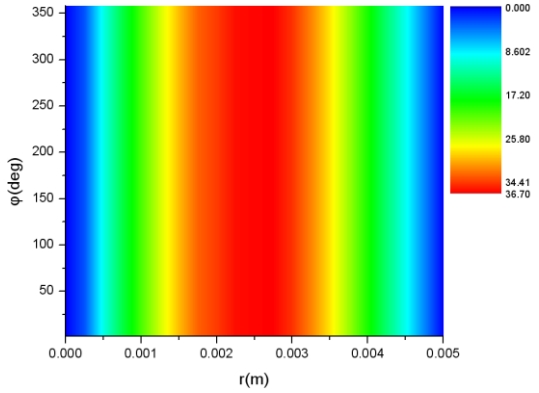


Σχήμα 80: Αξονική κατανομή της E_φ για $t = 2$ ns, $\rho = 4.9$ mm και $\varphi = 0$.

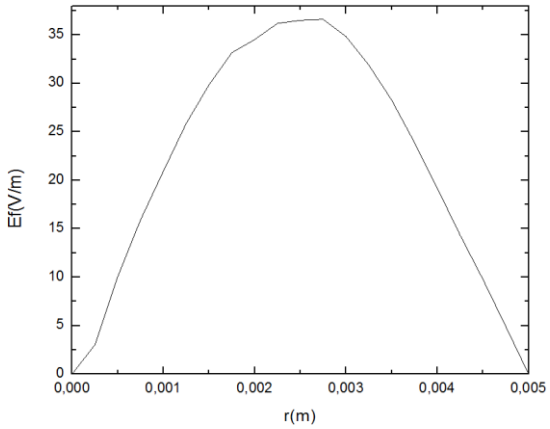


Σχήμα 81: Μετασχηματισμός Fourier της αξονικής κατανομής της E_φ.

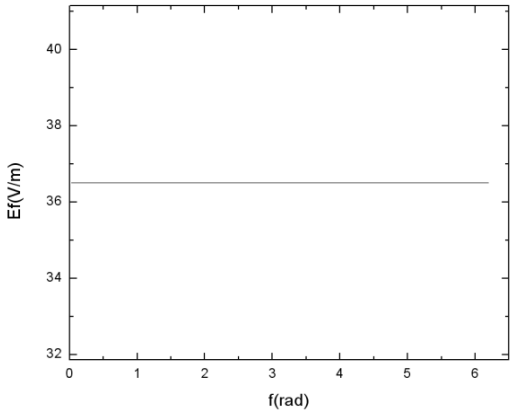
Η εγκάρσια κατανομή της E_φ παρατίθεται στο Σχήμα 82, από το οποίο γίνεται φανερή η αζιμουθιακή συμμετρία, ενώ ακτινικά η μορφή της φαίνεται στο Σχήμα 83, δηλαδή είναι ανεστραμμένη από αυτή που δίνεται στο Σχήμα 79, κάτι που δηλώνει την αλλαγή προσήμου λόγω του πολλαπλασιασμού με τον χρονικό όρο. Αζιμουθιακά η κατανομή, όπως είναι αναμενόμενο, είναι σταθερή δηλώνοντας την αζιμουθιακή συμμετρία (Σχήμα 84).



Σχήμα 82: Εγκάρσια κατανομή της E_φ για t = 2 ns και z = 7.5 mm.

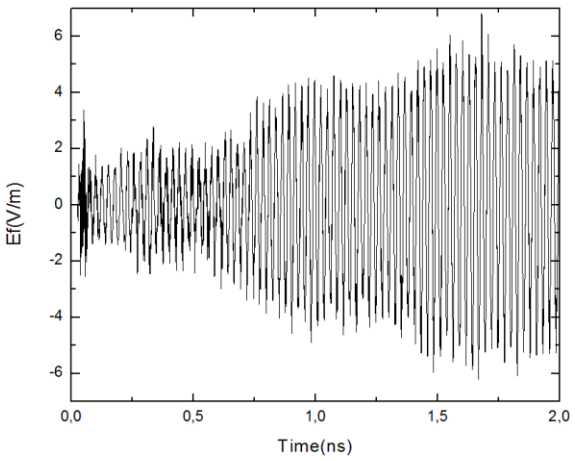


Σχήμα 83: Ακτινική κατανομή της E_φ για t = 2 ns, φ = 0 και z = 7.5 mm.

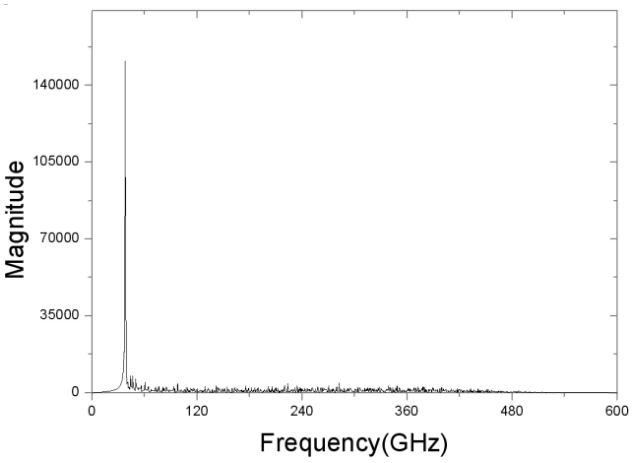


Σχήμα 84: Αζιμουθιακή κατανομή της E_φ για t = 2 ns, φ = 0 και z = 7.5 mm.

Η χρονική εξέλιξη της E_φ για ρ = 4.9 mm και z = 7.5 mm δίνεται στο Σχήμα 85. Γίνεται εμφανής η λειτουργία της διάταξης ως κοιλότητας συντονισμού λόγω της παρουσίας ανακλάσεων στα δύο εγκάρσια τοποθετημένα τοιχώματα. Η συνεχής αύξηση του πλάτους ισοδυναμεί με αποθήκευση ενέργειας στη διάταξη. Από το συχνοτικό φάσμα (Σχήμα 86) επιβεβαιώνεται η τιμή της συχνότητας λειτουργίας (f = 37.9998 GHz), ενώ οι παρασιτικές συνιστώσες, που εμφανίζονται σε αυτό, είναι στη χειρότερη περίπτωση 29 dB χαμηλότερα από την κύρια συνιστώσα.



Σχήμα 85: Χρονική εξέλιξη της E_φ για ρ = 4.9 mm, φ = 0 και z = 7.5 mm.



Σχήμα 86: Συχνοτικό φάσμα της E_φ για ρ = 4.9 mm, φ = 0 και z = 7.5 mm.

Διαπιστώνεται πως, εκτός της άμεσης διέγερσης με επιβολή χωρικής κατανομής ενός ρυθμού σε μια εγκάρσια επιφάνεια, συγκεκριμένος ρυθμός μπορεί να διεγερθεί και με συγκεκριμένη κατανομή ρεύματος. Το χαρακτηριστικό αυτό αποτελεί καλύτερη προσέγγιση για πραγματικές διεγέρσεις, όπου αυτές πραγματοποιούνται είτε από ηλεκτρονικές δέσμες είτε από κατάλληλα τοποθετημένες κεραίες, και όπως διαπιστώνεται ο αριθμητικός κώδικας δουλεύει αρκετά ικανοποιητικά σε σχέση με τα θεωρητικά αναμενόμενα αποτελέσματα. Μοναδικό πρόβλημα αποτελεί στην παρούσα φάση η έλλειψη απορροφητικού στρώματος PML στα άκρα της διάταξης, κάτι που δυσκολεύει την προσομοίωση ανοικτών οριακών συνθηκών όπου οι ανακλάσεις θα πρέπει να είναι μηδενικές.

Κεφάλαιο 7
Κύρια Συμπεράσματα – Επισημάνσεις - Επεκτάσεις

7.1 Κύρια συμπεράσματα - επισημάνσεις

7.1.1 Χρήση πηγών άμεσης επιβολής πεδιακής κατανομής (Hard Sources)

Η άμεση επιβολή των τιμών των πεδίων σε ένα εγκάρσιο επίπεδο χαρακτηρίζεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως Hard Source [7]. Η χρήση τέτοιων τύπων διεγέρσεων, είτε πρόκειται για διέγερση με ημιτονική εξάρτηση από το χρόνο είτε πρόκειται για παλμό τύπου Gauss, έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση μη φυσικής συμπεριφοράς της υπό μελέτη διάταξης. Τα ανακλώμενα κύματα, που μπορεί να προκύψουν, επιστρέφουν στο επίπεδο της πηγής. Επειδή όμως στο επίπεδο της πηγής το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο είναι σαφώς ορισμένο, δεν λαμβάνεται υπόψη η επίδραση του ανακλώμενου κύματος. Έτσι πραγματοποιείται μια ψευδοανάκλαση στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος από το επίπεδο της πηγής, που δεν αντιστοιχεί σε κάποια φυσική διαδικασία, καθώς το ανακλώμενο κύμα, που επιστρέφει στη πηγή, θα έπρεπε να οδεύει μέσω αυτής προς το άπειρο στην αντίθετη κατεύθυνση. Η συμπεριφορά αυτή επιβεβαιώνεται και στα αριθμητικά αποτελέσματα τόσο του κυματοδηγού κυλινδρικής διατομής όσο και αυτού της ορθογωνικής. Στον ορθογωνικής διατομής, με τη χρήση προσαρμοσμένου στρώματος PML στο τέλος του κυματοδηγού αποτρέπονται μερικά οι ανακλάσεις. Παρόλα αυτά, όταν δεν υπάρχει τέλεια προσαρμογή με το διαδιδόμενο ρυθμό ή διαδίδονται παραπάνω από ένας ρυθμοί, το στρώμα αποτυγχάνει να λειτουργήσει ικανοποιητικά και έτσι ανακλάσεις σημαντικού πλάτους θα εμφανίζονται. Με το μηχανισμό που περιγράφηκε παραπάνω, στην κατάσταση ισορροπίας, παρατηρείται συμπεριφορά κοιλότητας με τα πλάτη των πεδίων να αυξάνουν στα σημεία που υπάρχει ενισχυτική συμβολή οδεύοντων και ανακλώμενων κυμάτων. Η συμπεριφορά κοιλότητας εμφανίζεται ισχυρότερη στην περίπτωση του κυλινδρικού κυματοδηγού που δεν έχει στρώμα PML. Τα κύματα, αφού ανακλαστούν και στις δύο επιφάνειες αρκετές φορές, καταλήγουν να σχηματίζουν ένα στάσιμο κύμα με αρκετά μεγάλο πλάτος. Το μεγάλο πλάτος οφείλεται στη συνεχή λειτουργία της διέγερσης, κάτι που φυσικά ισοδυναμεί με συνεχή τροφοδοσία της διάταξης με ισχύ. Λύση στο πρόβλημα αυτό αποτελεί η χρήση απορροφητικών οριακών συνθηκών, όπως στην εργασία αυτή το στρώμα PML (για τον κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής). Δεν αρκεί η τοποθέτηση τέτοιου στρώματος μόνο στο ένα άκρο του κυματοδηγού, αλλά και η τοποθέτηση παρόμοιου στρώματος πριν το επίπεδο διέγερσης, ώστε να απορροφώνται οι ψευδείς ανακλάσεις όπου αυτές εμφανίζονται.

Επιπλέον πρόβλημα αποτελεί η λειτουργία του στρώματος PML για πολλούς ρυθμούς διέγερσης ή/και λειτουργίας. Κατασκευαστικά, το στρώμα PML προϋποθέτει γνώση της κυματικής αντίστασης. Σε περίπτωση πολυρυθμικής λειτουργίας ή όταν δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων η κατανομή ρυθμών που θα προκύψουν από μια διέγερση, το στρώμα PML είναι προσαρμοσμένο σε ένα μόνο ρυθμό με αποτέλεσμα να υπάρχουν ανακλάσεις των υπολοίπων ρυθμών από τη συγκεκριμένη επιφάνεια. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό και σε εμπορικά προγράμματα, όπου ζητείται εκ των προτέρων σε πόσους ρυθμούς θα γίνει προσαρμογή στο στρώμα PML.

7.1.2 Λειτουργία PML

Το PML κατασκευαστικά δεν παρουσιάζει ανακλάσεις μόνο όταν πρόκειται για την ακριβή κυματική εξίσωση. Εξαιτίας της διακριτοποίησης παρουσιάζονται σφάλματα, με

αποτέλεσμα και το PML να παρουσιάζει ανακλάσεις. Για τον περιορισμό των ανακλάσεων, η αγωγιμότητα του στρώματος μεταβάλλεται ομαλά. Ο συντελεστής ανάκλασης μπορεί να επιλεγεί από το χρήστη οσοδήποτε μικρός, αλλά διαφορετικός από το μηδέν. Οι παράμετροι αυτοί, που τίθενται κατά την κατασκευή του PML και όχι κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, καθιστούν αδύνατη την τέλεια προσαρμογή και έτσι εμφανίζονται ανακλάσεις τόσο μέσα στο PML (λόγω της διακριτής αλλαγής της αγωγιμότητας) όσο και στις διαχωριστικές επιφάνειες PML-μετάλλου και PML-χώρου κυματοδηγού. Το πρόβλημα αυτό μεγιστοποιείται στην περίπτωση που υπάρχουν παραπάνω από ένα διαφορετικά διηλεκτρικά στρώματα μέσα στον κυματοδηγό. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό μόνο μακροσκοπικά, καθώς από τη στιγμή που εξάγονται οι τιμές των πεδίων στη διάταξη δεν είναι εύκολος ο διαχωρισμός τους σε συνιστώσες λόγω των διάφορων ανακλάσεων.

Με βάση τα αριθμητικά αποτελέσματα σε αρκετές περιπτώσεις αυτό φαίνεται στο πεδίο του χρόνου ως απότομες διακυμάνσεις για μικρό χρόνο, οι οποίες μετά από κάποιο συγκεκριμένο σημείο εξαφανίζονται και το πεδίο λαμβάνεται έχοντας μια σταθερή μόνιμη συμπεριφορά. Η συμπεριφορά αυτή δεν δηλώνει απαραιτήτως οδεύον κύμα, αλλά εξισορρόπηση όλων των ανακλάσεων σε μια μόνιμη κατάσταση. Το σφάλμα λόγω των ανακλάσεων μπορεί να ελεγχθεί, ώστε να επιτευχθεί τελικά η επιθυμητή συμπεριφορά της διάταξης. Εκτός από το σφάλμα, ελέγχεται και το πάχος του στρώματος αλλά και ο παράγοντας αύξησης της αγωγιμότητας. Με αυτό τον τρόπο, για κάθε διάταξη μπορεί να βρεθεί ο ιδανικός συνδυασμός πάχους-παράγοντα αύξησης και συντελεστή ανάκλασης ώστε οι ανακλάσεις να είναι πρακτικά μηδέν. Το παραπάνω συμπέρασμα είναι θεωρητικό, καθώς στην πράξη δεν είναι γνωστό από πριν το αποτέλεσμα της κάθε διέγερσης. Έτσι το αριθμητικό σφάλμα που προκύπτει από λάθος προσαρμογή (συμπεριλαμβανομένων όλων των παραγόντων που αναφέρθηκαν) κρίνεται ως ανεκτό σε αρκετές περιπτώσεις, χωρίς να είναι απαραίτητη η κατάλληλη παραμετρική μελέτη πριν την προσομοίωση.

Εκτός του σφάλματος προσαρμογής για πολλαπλούς ρυθμούς που κυματοδηγούνται ταυτόχρονα, το PML αποτυγχάνει (στην έκδοση UPML) να απορροφήσει ρυθμούς που δεν διαδίδονται (evanescent waves). Οι ρυθμοί αυτοί μπορεί να είναι ένα μεταβατικό φαινόμενο, που εξαιτίας του γεγονότος ότι τελικά ανακλώνται στο στρώμα PML, να παραμένει ένα μέρος της ισχύς τους εντός του κυματοδηγού, χωρίς να σχηματίζεται κάποια συγκεκριμένη κατανομή, αλλά να εμφανίζονται ως αριθμητικός θόρυβος επηρεάζοντας τις τιμές των ρυθμών που διαδίδονται μέσα στη διάταξη. Λύση σε αυτό το πρόβλημα αποτελεί η χρήση διαφορετικής οριακής απορροφητικής συνθήκης γνωστότερη και στη βιβλιογραφία ως CPML (Convolutional PML), το οποίο παρουσιάζει ιδιότητες και χαρακτηριστικά ανεξάρτητα από το μέσο διάδοσης [5] [4] [7].

7.1.3 Υπολογισμός τιμών πεδιακών συνιστωσών σε σημείο που δεν ανήκει στο πλέγμα

Μεγάλο μειονέκτημα της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών αποτελεί ο υπολογισμός των πεδίων σε διακριτά σημεία μέσα σε ένα πλέγμα και όχι η ταυτόχρονη γνώση όλων των πεδιακών συνιστωσών. Αυτό αποτελεί μια απαραίτητη προσέγγιση, που γίνεται προκειμένου να διακριτοποιηθούν οι εξισώσεις Maxwell και να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος του Yee. Αποτελεί όμως ουσιαστική διαφορά από την πραγματικότητα, όπου όλες οι πεδιακές συνιστώσες υπολογίζονται ταυτόχρονα σε κάθε σημείο του χώρου. Για τον υπολογισμό των τιμών των πεδίων σε κάθε σημείο, έχοντας γνωστές τις τιμές αυτού μόνο σε συγκεκριμένους κόμβους, εφαρμόστηκε η μέθοδος γραμμικής παρεμβολής, όπου η ζητούμενη τιμή βρέθηκε με βάση τη γραμμική σχέση της μορφής $y = ax + b$, που περιγράφει την ευθεία που συνδέει τους δύο κόμβους. Σε πρώτο επίπεδο η προσέγγιση αυτή είναι ικανοποιητική για τις τιμές

που δεν βρίσκονται στο πλέγμα, δεδομένου ότι οι χωρικές διαμερίσεις είναι αρκετά μικρές και οι κόμβοι αρκετά κοντά μεταξύ τους. Για χωρικά γρήγορα κύματα, όπως σε περιοχές με μεγάλη διηλεκτρική σταθερά, όπου οι αλλαγές στις τιμές των πεδίων ανάμεσα στους κόμβους μπορεί να είναι μεγάλες, η γραμμική προσέγγιση μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένο υπολογισμό των πεδιακών τιμών, και επομένως μη γραμμικές προσεγγίσεις ανώτερης τάξης πρέπει να χρησιμοποιηθούν.

7.1.4 Επιλογή μεθόδου διέγερσης κυματοδηγού

Στις δύο γεωμετρίες που εξετάστηκαν, οι διεγέρσεις που εφαρμόστηκαν αποτελούνταν κυρίως από άμεση επιβολή των τιμών συγκεκριμένης εγκάρσιας κατανομής ρυθμού. Οι διεγέρσεις αυτές απέχουν από πραγματικά συστήματα, καθώς δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί μια συγκεκριμένη εγκάρσια χωρική κατανομή σε κυματοδηγό. Ο συνηθέστερος τρόπος διέγερσης είναι με ρευματικές κατανομές και κεραίες. Παρά το γεγονός χρήσης μη πραγματικών διεγέρσεων, η επιβολή συγκεκριμένης εγκάρσιας κατανομής επιτρέπει τον έλεγχο λειτουργίας του αριθμητικού κώδικα και πως αυτός συμπεριφέρεται σε σταθερές καταστάσεις, όπου δεν ενδιαφέρει η διέγερση αλλά η διάδοση συγκεκριμένων ρυθμών. Η προσομοίωση πραγματικών διατάξεων έγινε με επιβολή συγκεκριμένων ρευματικών κατανομών, διαδικασία που είναι πιο κοντά στις πραγματικές διεγέρσεις και διαπιστώθηκε καλύτερη συμφωνία θεωρητικών και αριθμητικών (προσομοιώσεων) αποτελεσμάτων. Το γεγονός αυτό ενθαρρύνει την προσομοίωση και άλλων τύπων διεγέρσεων, π.χ. μέσω διπόλων λ/2 ή ακόμα και ηλεκτρονικής δέσμης, που σε μια πρώτη προσέγγιση αποτελεί ένα είδος ρευματικής κατανομής.

7.1.5 Επιλογή μεθόδου αποφυγής ιδιάζουσας συμπεριφοράς για $\rho = 0$ σε κυλινδρικό κυματοδηγό

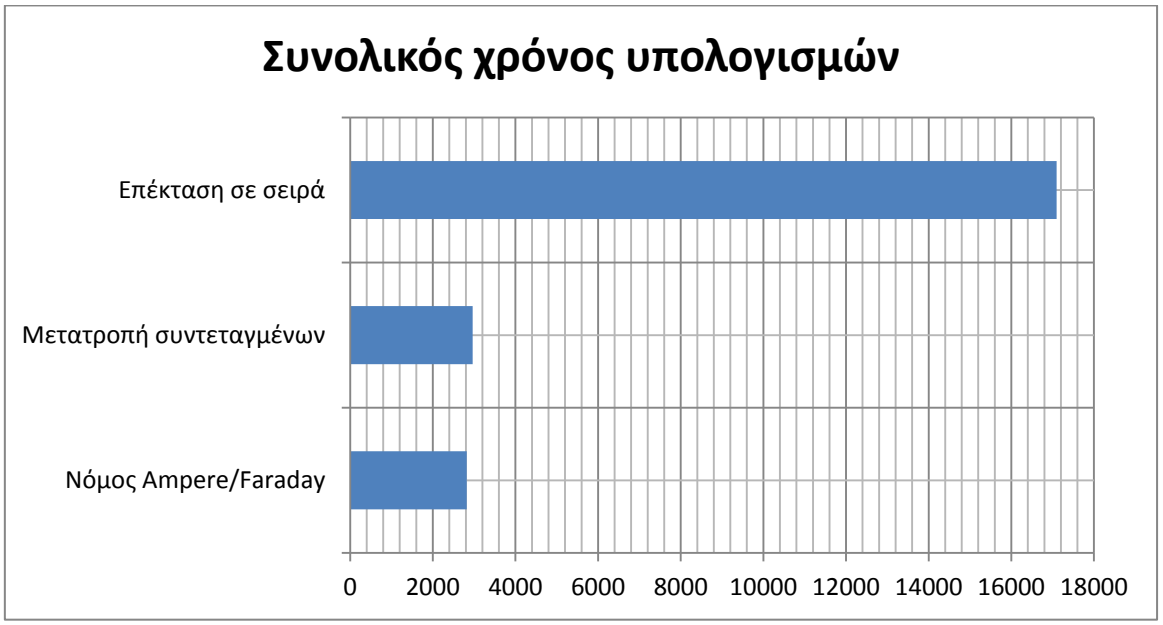
Χρησιμοποιήθηκε η τεχνική του νόμου των Ampere και Faraday ώστε να αποφευχθεί η ιδιάζουσα συμπεριφορά στο $\rho = 0$. Συγκριτικά με τις άλλες δύο μεθόδους, η συγκεκριμένη μέθοδος παρουσιάζει πλεονέκτημα, όσον αφορά το συνολικό χρόνο προσομοίωσης, κάτι το οποίο φαίνεται και στο Σχήμα 87, το οποίο αφορά κυλινδρικό κυματοδηγό με τα χαρακτηριστικά που δίνονται στον Πίνακα XVI.

Πίνακας XVI: Στοιχεία προσομοίωσης για σύγκριση μεθόδων αποφυγής ιδιάζουσας συμπεριφοράς για $\rho = 0$

Ακτίνα a (mm)	**Μήκος L (mm)**	**Συνολικός χρόνος προσομοίωσης (ns)**	**Συχνότητα λειτουργίας (GHz)**	**Ρυθμός διέγερσης**
27.79	277.9	6	4	TE_{11}

Ο συνολικός χρόνος υπολογισμών μεταξύ των μεθόδων μετατροπής συντεταγμένων και νόμων Ampere/Faraday είναι σχεδόν ο ίδιος, με το δεύτερο λίγο μικρότερο. Ωστόσο, οι αρχές, στις οποίες βασίζεται η μέθοδος νόμων Ampere/Faraday, πλησιάζουν περισσότερο τα πραγματικά συστήματα, αφού εκμεταλλεύονται τους ίδιους τους νόμους του Maxwell για να αποφευχθεί το αριθμητικό σφάλμα για $\rho = 0$. Αντίθετα, στη μέθοδο μετατροπής συντεταγμένων η μετατροπή η ίδια γίνεται τοπικά σε απόσταση ενός κελιού από τον άξονα συμμετρίας, χωρίζοντας έτσι τον κυματοδηγό σε δύο περιοχές, μια όπου εφαρμόζονται οι σχέσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες και μια άλλη όπου οι μισές σχέσεις αναβάθμισης του πεδίου (αυτές που εμφανίζουν το ιδιάζον σημείο E_φ, E_z και H_ρ) να εκφράζονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Το γεγονός αυτό δεν είναι συμβατό με την πραγματικότητα,

καθώς το σύστημα θα πρέπει να αντιμετωπίζεται συνολικά με ένα σύστημα συντεταγμένων, ειδικά στην περίπτωση όπως εδώ που είναι αρκετά απλό (κυλινδρικός λείος κυματοδηγός). Με δεδομένο ότι τα αποτελέσματα από τις δύο μεθόδους είναι πανομοιότυπα, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των νόμων Ampere/Faraday σε όλες τις προσομοιώσεις του Κεφαλαίου 5 λόγω του μικρότερου χρόνου εκτέλεσης αλλά και της ακρίβειας των αποτελεσμάτων, σε σχέση πάντα με τη μέθοδο αλλαγής συντεταγμένων αλλά και της ισχυρότερης φυσικής αρχής (νόμοι Ampere/Faraday) πάνω στην οποία είναι στηριγμένη. Αυτό δεν απαγορεύει όμως ότι σε άλλη, πιο πολύπλοκη γεωμετρία, η μια μέθοδος δε θα λειτουργεί καλύτερα από την άλλη. Έτσι, σε πιο πολύπλοκα προβλήματα η εξακρίβωση των αποτελεσμάτων και από τις δύο μεθόδους αποτελεί την καλύτερη λύση για να δώσει μια ένδειξη ποια μέθοδος είναι ιδανικότερη. Στον αντίποδα, η μέθοδος επέκτασης σε σειρές, αν και δίνει ακριβέστερα ίσως αποτελέσματα σε κάποιες ιδιαίτερες διατάξεις, ο μεγάλος χρόνος υπολογισμών καθιστά απαγορευτική τη χρήση της στις περισσότερες περιπτώσεις προσομοιώσεων.



Σχήμα 87: Συνολικός χρόνος υπολογισμών για τις τρεις μεθόδους αποφυγής της ιδιάζουσας συμπεριφοράς.

7.1.6 Χρονικός παράγοντας διεγέρσεων

Σε όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα της εργασίας η χωρική κατανομή της διέγερσης πολλαπλασιάζονταν με έναν παράγοντα της μορφής $\exp(j\omega t)$. Πράγματι, η συγκεκριμένη εξάρτηση αποτελεί λύση των εξισώσεων Maxwell στο πεδίο του χρόνου με την προϋπόθεση ότι η κατάσταση είναι μόνιμη και έχει επέλθει αρκετός χρόνος ώστε μεταβατικά φαινόμενα να εκλείψουν. Εξαιτίας όμως του γεγονότος ότι οι προσομοιώσεις ξεκινούν για $t = 0$, στην πραγματικότητα η διέγερση είναι ένας αρμονικός παλμός της μορφής $u(t)\exp(j\omega t)$, ο οποίος στο πεδίο των συχνοτήτων έχει διαφορετική φασματική κατανομή από αυτή μιας αρμονικής εξάρτησης. Αυτός είναι και ο λόγος όπου τα φάσματα των προσομοιώσεων δεν προκύπτουν δέλτα συναρτήσεις, αλλά παρουσιάζουν ευρύτερη κατανομή. Για πιο σωστή προσομοίωση και προκειμένου να μη παρουσιάζεται αυτό το φαινόμενο, ο ημιτονικός παλμός θα πρέπει να έχει χρόνο ανόδου διάφορο του μηδενός, ώστε να αντισταθμίζονται τα διάφορα μεταβατικά φαινόμενα. Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται σε αρκετά εμπορικά προγράμματα (π.χ. CST STUDIO, HFSS κ.α.). Διαφορετική προσέγγιση για τη χρονική διέγερση αποτελεί η χρήση παλμών Gauss γύρω από μια συχνότητα. Με αυτό τον τρόπο ελέγχεται η συμπεριφορά των

διατάξεων σε ένα εύρος συχνοτήτων, έτσι ώστε να διαπιστωθεί ποιοι τελικά ρυθμοί διαδίδονται και ποιοι όχι, καθώς και η συμπεριφορά του στρώματος PML κάτω από σήματα μεγάλου εύρους ζώνης

7.1.7 Συνολικός χρόνος προσομοιώσεων

Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται έστω και μια απλή προσομοίωση προκειμένου να ολοκληρωθεί είναι αρκετά μεγάλος. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη μεγάλη πολυπλοκότητα του αλγορίθμου καθώς και στο ότι δεν γίνονται κάποιου είδους απλοποιήσεις (στη γεωμετρία) ή παραδοχές (στις οριακές συνθήκες, στη διέγερση) για την επίλυση του προβλήματος. Οι αριθμητικοί κώδικες επιβαρύνονται ακόμα περισσότερο όταν χρησιμοποιούνται διατάξεις όπως το PML, το οποίο λόγω της ανισοτροπίας που παρουσιάζει αυξάνει σημαντικά τους υπολογισμούς. Στην παρούσα φάση ανάπτυξης του αριθμητικού κώδικα δεν είναι δυνατή η επιπλέον μείωση του υπολογιστικού χρόνου, καθώς ο αλγόριθμος έχει ήδη παραλληλοποιηθεί στο μέγιστο δυνατό βαθμό. Επιπλέον, οι μεγάλες απαιτήσεις σε μνήμη RAM δυσκολεύουν ακόμα περισσότερο την προσομοίωση μεγάλων διατάξεων για αρκετό χρονικό διάστημα.

7.2 Επεκτάσεις

7.2.1 Ενοποίηση κωδίκων

Στην παρούσα μορφή το αριθμητικό εργαλείο αποτελείται από δύο διαφορετικούς κώδικες, έναν για κάθε τύπο εγκάρσιας γεωμετρίας. Άμεση προτεραιότητα αποτελεί η ενοποίηση των δύο αυτών κωδίκων, έτσι ώστε να αποτελούν κομμάτια ενός ενιαίου κώδικα που θα διαχειρίζεται οποιαδήποτε γεωμετρία.

7.2.2 PML σε κυλινδρική γεωμετρία

Προκειμένου να μελετηθούν διατάξεις που έχουν ανοικτές οριακές συνθήκες, η ύπαρξη στρώματος PML είναι απαραίτητη. Η τεχνική αυτή έχει ήδη εφαρμοστεί στις καρτεσιανές συντεταγμένες και προφανώς η εφαρμογή της και για κυλινδρικές συντεταγμένες κρίνεται αναγκαία.

7.2.3 Μελέτη PML και χρήση C-PML

Εκτός από την προσθήκη στρώματος PML σε κυλινδρική γεωμετρία, απαραίτητη κρίνεται και η κατάλληλη μετατροπή του PML ώστε να απορροφούνται και μη διαδιδόμενοι ρυθμοί αλλά και να προσαρμόζει όσο το δυνατόν περισσότερους ρυθμούς. Το καταλληλότερο εργαλείο για το σκοπό αυτό αποτελεί το CPML, που είναι ανεξάρτητο από τα υλικά που εμφανίζονται στον κυματοδηγό.

7.2.4 Χρήση περισσότερων πηγών

Η χρήση περισσότερο πηγών – διεγέρσεων αποτελεί σημαντικό βήμα στην εξέλιξη του αριθμητικού εργαλείου. Στόχος είναι η προσομοίωση ηλεκτρονικής δέσμης παρουσία πεδίων, ώστε να εξεταστούν και οι αλληλεπιδράσεις πεδίων με ηλεκτρόνια. Κάτι τέτοιο θα

οδηγήσει μακροπρόθεσμα στην προσομοίωση διαφόρων μικροκυματικών πηγών, π.χ. ο δίαυλος δέσμης ή η κοιλότητα αλληλεπίδρασης σε ένα γυροτρόνιο.

7.2.5 Εξέταση σύγκλισης αποτελεσμάτων και μελέτη εναλλακτικών μεθόδων πεπερασμένων διαφορών

Στην παρούσα έκδοση του αριθμητικού κώδικα χρησιμοποιείται το απλούστερο δυνατό κριτήριο του Courant, μέσω του οποίου προκύπτει το χρονικό βήμα που πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Το βήμα αυτό για πιο πολύπλοκες διατάξεις και προκειμένου να επιτευχθεί σύγκλιση αναγκαστικά πρέπει να μειώνεται, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του συνολικού χρόνου των προσομοιώσεων. Σκοπός είναι η αύξηση του χρονικού βήματος με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται σύγκλιση. Κάτι τέτοιο παρουσιάζουν οι εναλλακτικοί κώδικες Alternating Direction Implicit FDTD (ADI-FDTD), όπου η μέθοδος διακριτοποίησης στο χρόνο είναι διαφορετική από τη μέθοδο Leapfrog των παραδοσιακών FDTD κωδίκων.

7.2.6 Δυνατότητα προσομοίωσης λιγότερων διαστάσεων

Ο αριθμητικός κώδικας που αναπτύχθηκε εντάσσεται στην κατηγορία κωδίκων πλήρους πεδίου, όπου οι εξισώσεις λύνονται στην πλήρη τους μορφή και στις τρεις διαστάσεις. Κάτι τέτοιο σε αρκετές περιπτώσεις κρίνεται μη αναγκαίο, καθώς προβλήματα, που παρουσιάζουν συμμετρία, μπορούν να λυθούν σε λιγότερες διαστάσεις. Έτσι, η δυνατότητα προσθήκης επιλυτή (solver) λιγότερων διαστάσεων, βασιζόμενο στους ήδη υπάρχοντες επιλυτές, που αναπτύχθηκαν, θα αποτελέσει μια εναλλακτική μέθοδο μελέτης προβλημάτων που παρουσιάζουν συμμετρία. Ενδεικτικά αναφέρονται η μελέτη αζιμουθιακά συμμετρικών ρυθμών (TE ή TM με $m = 0$) σε κυλινδρικό κυματοδηγό.

7.2.7 Δυνατότητα υπολογισμού πυκνοτήτων ενέργειας και παραγόντων ποιότητας

Στόχος είναι η επέκταση του αριθμητικού κώδικα, ο οποίος εκμεταλλευόμενος τα αριθμητικά αποτελέσματα που έχουν ήδη βρεθεί, να υπολογίζει τις ροές ενέργειας καθώς και τους συντελεστές ποιότητας της διάταξης. Κάτι τέτοιο απαιτεί μελέτη αριθμητικών κωδίκων που σχετίζονται με την ολοκλήρωση πεδίων σε συγκεκριμένες επιφάνειες, ώστε να αποφευχθούν αντίστοιχες αριθμητικές ολοκληρώσεις που είναι υπολογιστικά χρονοβόρες.

Αναφορές

[1] Δ. Β. Πεπόνης, «Επίλυση κυματικής εξίσωσης με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών,» Αθήνα, 2011.

[2] D. M. Pozar, «Μικροκυματική τεχνολογία,» Αθήνα, Εκδόσεις Ιών, 2004, pp. 122-157.

[3] M. Sadiku, Numerical Techniques in electromagnetics, Taylor & Francis, 2001.

[4] U. S. Inan και R. A. Marshall, Numerical Electromagnetics - The FDTD Method, Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

[5] A. Kyriacou, «FDTD Wiki,» [Ηλεκτρονικό]. Available: http://fdtd.wikispaces.com/.

[6] J. B. Schneider, Undredstanding the Finite-Difference Time-Domain Method, 2012.

[7] A. Taflove και S. Hagness, «Computational Electrodynamics,» Boston, MA, Artech House, 2005.

[8] F. Liu και S. Crozier, «An FDTD Model for Calculation of Gradient-Induced Eddy Currents in MRI System,» *IEEE Transactions on Applied Superconductivity,* τόμ. 14, αρ. 3, pp. 1983-1989, 2004.

[9] J. Chi, F. Liu, L. Xia, T. Shao και S. Crozier, «An Improved Cylindrical FDTD Algorithm and its Application to Field-Tissue Interaction Study in MRI,» *IEEE Transactions on Magnetics,* τόμ. 47, αρ. 2, pp. 466-470, 2011.

[10] A. Trakic, H. Wang, F. Liu, H. Lopez και S. Crozier, «Cylindrical 3D FDTD algorithm for the computation of low frequency transient eddy currents in MRI,» *Proceedings International Magnetic Resonance,* τόμ. 14, 2006.

[11] Z. Kancleris, «Handling of Singularity in Finite-Difference Time-Domain Procedure for Solving Maxwell's Equations in Cylindrical Coordinate System,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation,* τόμ. 56, αρ. 2, pp. 610-613, 2008.

[12] N. K. Nikolova, «The FDTD Method,» [Ηλεκτρονικό]. Available: http://www.ece.mcmaster.ca/faculty/nikolova/.

[13] J. Roden και S. Gedney, «Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS–PML for arbitrary media,» *Microwave and Optical Technology Letters,* τόμ. 27, αρ. 5, pp. 334-339, 2000.

[14] R. E. Collin, Foundations for Microwave Engineering, New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2001.

[15] S. C. Winton και C. M. Rappaport, «Specifying PML Conductivities by Considering Numerical Reflections,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation,* τόμ. 48, αρ. 7, pp. 1055-1063, Ιούλιος 2000.

[16] D. M. Sullivan, Electromagnetic Simulation Using The FDTD Method, Piscataway, NJ: IEEE Press, 2000.

[17] J. B. Schneider, «Understanding the FDTD Method,» [Ηλεκτρονικό]. Available:

http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd/.

[18] C. M. Rappaport και E. L. Miller, «Optimum PML ABC conductivity profile in FDTD,» *Magnetics, IEEE Transactions on,* τόμ. 35, αρ. 3, pp. 1506-1509, Μάιος 1999.

[19] M. Cruz-Benavides, M. Alvarez-Cabanillas, M. Enciso-Aguilar και J. Sosa-Pedroza, «Analysis of Polynomial and Geometric Conductivity Profiles in PML Layers: A Compariosn,» σε *Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings*, Xi'an,China, 2010.

[20] Y. Chen, R. Mittra και R. Harms, «Finite-difference time-domain algorithm for solving Maxwell equations in rotationally symmetric geometries,» *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on,* τόμ. 44, αρ. 6, pp. 832-839, June 1996.

[21] J.-P. Berenger, Perfectly Matched Layer (PML) for Computational Electromagnetics, Morgan & Claypool, 2007.

[22] «FDTD Demo Programms and Brief theory,» [Ηλεκτρονικό]. Available: http://dougneubauer.com/fdtd/.

[23] C. Z. Kunz και R. J. Luebbers, The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics, Boca Raton, Florida: CRC Press, 1993.

[24] C. Yuan και C. Zhizhang, «A Three-Dimensional Uncoditionally Stable ADI-FDTD Method in the Cylindrical Coordinate System,» *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques,* τόμ. 50, αρ. 10, pp. 2401-2405, October 2002.

[25] L. O. Hwa, «Cylindrical FDTD Analysis of LWD Tools Through Anisotropic Dipping Layered Earth Media,» 2005.