



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Μεταβάσεις από την εικασία στην απόδειξη στην Α' Λυκείου
με χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας**

ΣΤΡΟΥΒΑΛΗ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ

Δ201222

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΨΥΧΑΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΘΗΝΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό - Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 30^η Σεπτεμβρίου 2016 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους
:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Επικ. Καθηγητή
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την
καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Επικ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Α. Μούτσιο-Ρέντζο	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω:

- Τον κ. Ψυχάρη Γεώργιο, όχι μόνο για τη τιμή που μου έκανε να είναι επιβλέπων στην παρούσα εργασία αλλά και για τη βοήθεια και τις συμβουλές του για την εκπόνηση αυτής.
- Τους κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο και κα. Πόταρη Δέσποινα που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στη τριμελή επιτροπή αλλά και για τις γνώσεις που μου προσέφεραν μέσα από τα μαθήματά τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.
- Τον κ. Μούτσιο-Ρέντζο Ανδρέα, μέλος της συμβουλευτικής επιτροπής, για την καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές, τις διορθώσεις και γενικότερα για το άριστο κλίμα συνεργασίας που είχαμε. Χωρίς την συμβολή του, η εργασία αυτή, θα ήταν πολύ διαφορετική.
- Όλους τους καθηγητές του ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών για τα εφόδια που μου προσέφεραν.
- Τις Διονυσία Μπακογιάννη και Ελένη Κλη για τη βοήθειά τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών.
- Τους συμφοιτητές και μου για τις ώρες χαράς, διασκέδασης αγωνίας ακόμα και απογοήτευσης που μοιραστήκαμε μαζί.
- Τη φίλη μου και φιλόλογο, Ελισάβετ, για τη φιλολογική επιμέλεια της παρούσας εργασίας.
- Τους μαθητές και καθηγητές που συμμετείχαν εθελοντικά στην έρευνα αυτή.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου και τους φίλους μου Αποστολή, Ασπασία και Στέλιο για την υπομονή, τη στήριξη και τη βοήθεια που μου προσέφεραν όχι μόνο κατά τη διάρκεια το σπουδών μου αλλά και μετά το πέρας αυτών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	3
ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	5
ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ	5
ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ	6
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	8
ABSTRACT	9
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	10
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	12
2.1 ΑΠΟΔΕΙΞΗ.....	12
2.1.1 Έρευνα γύρω από την απόδειξη	12
2.1.2 Ρόλος και λειτουργίες της απόδειξης.....	14
2.1.3 Απόδειξη στη Γεωμετρία	16
2.2 ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ.....	18
2.2.1 Επιχειρηματολογία και απόδειξη.....	18
2.2.2 Επιχειρηματολογία και εικασία	24
2.3 ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (DGEs)	27
2.3.1 Χρήση των DGEs στη μάθηση της Γεωμετρίας	27
2.3.2 Απόδειξη σε DGEs	28
2.3.3 Επιχειρηματολογία σε DGEs.....	31
2.3.4 Σύρσιμο	32
2.3.5 Μέτρηση	34
2.3.6 Άλλα εργαλεία	36
3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ	38
3.1 ΣΚΟΠΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ - ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ.....	38
3.2 Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ.....	39
3.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ.....	40
3.3.1 Εξοικείωση	40
3.3.2 Δραστηριότητα 1	42
3.3.3 Δραστηριότητα 2	43
3.4 ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	44
3.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	45
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	48
4.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1 ^{ης} ΟΜΑΔΑΣ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 ^η	48
4.1.1 Φάση 1 – Παραγωγή Εικασίας	48

4.1.2	Φάση 2 – (Ακριβής) Διατύπωση Εικασίας	51
4.1.3	Φάση 3 – Προσδιορισμός Μαθηματικών Επιχειρημάτων	62
4.1.4	Φάση 4 - Επιλογή και Συνδυασμός Συνεκτικών Επιχειρημάτων.....	67
4.1.5	Φάση 5- Οργάνωση Επιχειρημάτων σύμφωνα με Πρότυπα Μαθηματικών	70
4.1.6	Φάση 6 - Πρόταση Επίσημης/Τυπικής Απόδειξης.....	71
4.1.7	Συνοπτικά Αποτελέσματα 1ης Ομάδας – Δραστηριότητα 1η	72
4.2	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2^{ης} ΟΜΑΔΑΣ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1^η	75
4.2.1	Φάση 1 – Παραγωγή Εικασίας	75
4.2.2	Φάση 2 – (Ακριβής) Διατύπωση Εικασίας	80
4.2.3	Φάση 3 – Προσδιορισμός Μαθηματικών Επιχειρημάτων	90
4.2.4	Φάση 4 - Επιλογή και Συνδυασμός Συνεκτικών Επιχειρημάτων.....	92
4.2.5	Φάση 5- Οργάνωση Επιχειρημάτων σύμφωνα με Πρότυπα Μαθηματικών	93
4.2.6	Φάση 6 - Πρόταση Επίσημης/Τυπικής Απόδειξης.....	94
4.2.7	Συνοπτικά Αποτελέσματα 2 ^{ης} Ομάδας – Δραστηριότητα 1 ^η	94
4.3	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1^{ης} & 2^{ης} ΟΜΑΔΑΣ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2^η.....	97
4.3.1	Ερώτημα 1 ^ο	97
4.3.2	Ερώτημα 2 ^ο	97
4.3.3	Συνοπτικά Αποτελέσματα 1 ^{ης} & 2 ^{ης} Ομάδας – Δραστηριότητα 2 ^η	101
4.4	ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ - ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (DGE)	103
5.	ΣΥΖΗΤΗΣΗ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	106
6.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	111

ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1 – Εικασία & Απόδειξη	10
Σχήμα 2 – Βασικό Μοντέλο Toulmin	20
Σχήμα 3 – Απαγωγικό Μοντέλο Toulmin	23
Σχήμα 4 – Εικασία & Θεώρημα	26
Σχήμα 5 – Μοντέλο Ανάλυσης 1 ^{ης} Δραστηριότητας	47

ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	48
Εικόνα 2 – Τετράγωνο (1 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	49
Εικόνα 3 – Τραπεζίο (1 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	50
Εικόνα 4 – Ρόμβος (1 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	50
Εικόνα 5 – Ορθογώνιο τραπέζιο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	52
Εικόνα 6 - Τετράγωνο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	53
Εικόνα 7 - Τετράγωνο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	54
Εικόνα 8 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	55
Εικόνα 9 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	55
Εικόνα 10 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	57
Εικόνα 11 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	59
Εικόνα 12 - Τραπεζίο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	62
Εικόνα 13 – Γραπτή απάντηση μαθητριών (6 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	72
Εικόνα 14 – Τραπεζίο (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα).....	75
Εικόνα 15 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	76
Εικόνα 16 – Παραλληλόγραμμο (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	76
Εικόνα 17 – Ρόμβος (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα).....	77
Εικόνα 18 – Τετράγωνο (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα).....	78
Εικόνα 19 – Ορθογώνιο τραπέζιο (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	80
Εικόνα 20 – Παραλληλόγραμμο (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	81
Εικόνα 21 – Παραλληλόγραμμο (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	82
Εικόνα 22 – Παραλληλόγραμμο (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	84
Εικόνα 23 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	85
Εικόνα 24 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	87
Εικόνα 25 – Τραπεζίο (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα).....	89
Εικόνα 26 – Γραπτή απάντηση μαθητών (6 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα).....	94

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1 – Ερμηνεία Μοντέλου Ανάλυσης 1 ^{ης} Δραστηριότητας.....	46
Πίνακας 2 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (1 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	49
Πίνακας 3 – Τετράγωνο (1 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	49
Πίνακας 4 – Τραπεζίο (1 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	50
Πίνακας 5 – Ρόμβος (1 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	51
Πίνακας 6 - Ορθογώνιο τραπέζιο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	52
Πίνακας 7 - Τετράγωνο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	53
Πίνακας 8 - Τετράγωνο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	54
Πίνακας 9 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	55
Πίνακας 10 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	57
Πίνακας 11 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	59
Πίνακας 12 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	61
Πίνακας 13 - Τραπεζίο (2 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	62
Πίνακας 14 - Ορθογώνιο τραπέζιο (3 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα).....	63
Πίνακας 15 - Τραπεζίο (3 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	65
Πίνακας 16 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (3 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	66
Πίνακας 17 – Τετράγωνο (3 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	67
Πίνακας 18 – Τετράγωνο (4 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	69
Πίνακας 19 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (4 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	70
Πίνακας 20 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (5 ^η Φάση : 1 ^η Ομάδα)	71
Πίνακας 21 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε εργαλεία Sketchpad (1 ^η Δραστηριότητα : 1 ^η Ομάδα) ..	74
Πίνακας 22 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε τύπους Εγγυήσεων (1 ^η Δραστηριότητα : 1 ^η Ομάδα) ..	74
Πίνακας 23 – Τραπεζίο (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	75
Πίνακας 24 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	76
Πίνακας 25 – Παραλληλόγραμμα (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	77
Πίνακας 26 – Ρόμβος (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	78
Πίνακας 27 – Τετράγωνο (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	79
Πίνακας 28 – Τετράπλευρο (1 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα).....	79
Πίνακας 29 – Ορθογώνιο τραπέζιο (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	80
Πίνακας 30 – Παραλληλόγραμμα (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	81
Πίνακας 31 – Παραλληλόγραμμα (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	83
Πίνακας 32 – Παραλληλόγραμμα (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	84
Πίνακας 33 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	87
Πίνακας 34 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	88
Πίνακας 35 – Τραπεζίο (2 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	89
Πίνακας 36 – Παραλληλόγραμμα (3 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	90
Πίνακας 37 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (3 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	91
Πίνακας 38 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (4 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	92
Πίνακας 39 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (5 ^η Φάση : 2 ^η Ομάδα)	93
Πίνακας 40 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε εργαλεία Sketchpad (1 ^η Δραστηριότητα : 2 ^η Ομάδα) ..	96
Πίνακας 41 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε τύπους Εγγυήσεων (1 ^η Δραστηριότητα : 2 ^η Ομάδα) ..	96
Πίνακας 42 – Δραστηριότητα 2 (1 ^ο Ερώτημα : 1 ^η Ομάδα).....	97
Πίνακας 43 – Δραστηριότητα 2 (1 ^ο Ερώτημα : 2 ^η Ομάδα).....	97
Πίνακας 44 – Δραστηριότητα 2 (2 ^ο Ερώτημα : 1 ^η Ομάδα).....	99
Πίνακας 45 – Δραστηριότητα 2 (2 ^ο Ερώτημα : 2 ^η Ομάδα).....	100

Πίνακας 46 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε εργαλεία Sketchpad (2 ^η Δραστηριότητα : 1 ^η & 2 ^η Ομάδα).....	102
Πίνακας 47 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε τύπους Εγγυήσεων (2 ^η Δραστηριότητα : 1 ^η & 2 ^η Ομάδα).....	102
Πίνακας 48 – Εργαλεία Sketchpad & Τύποι Εγγύησης (Ομάδα 1 ^η).....	103
Πίνακας 49 – Εργαλεία Sketchpad & Τύποι Εγγύησης (Ομάδα 2 ^η).....	104
Πίνακας 50 – Συνοπτικός Πίνακας Εργαλείων Sketchpad & Τύπων Εγγύησης	105

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο βασικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των μεταβάσεων από την εικασία στην απόδειξη από δύο ομάδες μαθητών της Α' Λυκείου στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Πιστεύουμε ότι οι μεταβάσεις αυτές χαρακτηρίζονται από έντονη επιχειρηματολογική δραστηριότητα. Για το σκοπό αυτό διαμορφώθηκαν δύο δραστηριότητες, οι οποίες απαιτούσαν χρήση περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας. Το περιβάλλον που επιλέχθηκε ήταν το Geometer's Sketchpad, το οποίο θεωρείται ως ένα σημαντικό μέσο που παρέχει τεχνολογικές ευκαιρίες στην τάξη της γεωμετρίας. Τα δεδομένα που προέκυψαν κατηγοριοποιήθηκαν ως προς το είδος των δυναμικών εργαλείων - σύρσιμο, μέτρηση και προσαρμοσμένα εργαλεία - και των τύπων εγγυήσεων - δομικές διαισθητικές, επαγωγικές και παραγωγικές - που χρησιμοποιούσαν στα επιχειρήματά τους, τα οποία αναλύθηκαν κατά Toulmin. Ακόμη για τα εργαλεία σύρσιμο και μέτρηση έγινε επιπλέον κατηγοριοποίηση ως προς τον τύπο αυτών (π.χ. περιπλανώμενο/η, καθοδηγούμενο/η κλπ). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι κατά την ενασχόληση τους με τη πρώτη δραστηριότητα, η οποία στόχευε στη μετάβαση από το σχήμα στη θεωρία, καθώς οι μαθητές παράγουν εικασίες, χρησιμοποιούν τα εργαλεία, του Sketchpad, σύρσιμο και μέτρηση και οι εγγυήσεις (δομικές διαισθητικές, επαγωγικές και παραγωγικές) των επιχειρημάτων τους για την επικύρωση αυτών, εξαρτώνται άμεσα από τα εργαλεία αυτά. Ως εκ τούτου, χαρακτηρίζονται ως «μη γλωσσικές εγγυήσεις», ενώ τα επιχειρήματα ως «instrumented arguments». Από την άλλη πλευρά, καθώς προχωρούν στην απόδειξη, παρατηρείται ότι αρχικά μειώνεται και κατόπιν σταματάει η αλληλεπίδραση των μαθητών με το Sketchpad μέσω του ποντικιού και οι εγγυήσεις των επιχειρημάτων τους προκύπτουν από τη θεωρία που έχουν διδαχτεί. Το γεγονός αυτό έρχεται σε συμφωνία με τις υπάρχουσες έρευνες που αναφέρουν ότι τα εργαλεία αυτών των περιβαλλόντων επηρεάζουν το είδος των επιχειρημάτων που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Τα ευρήματα της δεύτερης δραστηριότητας, η οποία στόχευε στην μετάβαση από τη θεωρία στο σχήμα, δείχνουν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν ως επί το πλείστον, τα προσαρμοσμένα εργαλεία με εμφάνιση του αρχείου εντολών και οι εγγυήσεις τους στηρίζονται πολύ λιγότερο στη θεωρία που έχουν διδαχτεί. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις υπάρχουσες έρευνες, οι οποίες σημειώνουν ότι τα εργαλεία αυτά υποστηρίζουν τον έλεγχο των λογικών σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων.

Λέξεις κλειδιά: εικασία, δυναμικά εργαλεία, απόδειξη, αποδεικτική διαδικασία, επιχείρημα, εγγύηση, Toulmin

ABSTRACT

The basic objective of the above work is to present the study on the transitions from the conjecture to the proof, which was conducted by two groups of first grade students of the high school in terms of the subject of Euclidean geometry. We believe that these transitions are characterized by intense argumentative activity. More specifically, two activities were formed for the purpose mentioned before, which required the utilization of a dynamic geometry environment. The chosen environment was Geometer's Sketchpad, which is considered to be a significant tool that provides technological opportunities in the field of Geometry. The resulting data were classified on the type of the tools- dragging, measurement and custom tools- and the type of guaranteed- structural intuitive, inductive, deductive- that the students used to construct their arguments which were analyzed based on Toulmin. Regarding the tools of dragging and measurement, further classification was made as to the type of these. (e. g.: wandering, guided etc). Through the results, it was indicated that during the students' occupation with the first activity, which aimed to the transition from the figure to the theory, while they were producing figures they were using tools such as Sketchpad's tools, dragging and measurement and the evidence of their arguments (structural intuitive, inductive, deductive) for the validation of them is directly depended on these tools. As a result, they are depicted as non-linguistic guarantees, while their arguments as "instrumented ones". On the other hand, as students progress in the process of proof, it is observed that the interaction of the students with Sketchpad through the mouse is initially reduced and then stops and the guarantees of their arguments arise from the theory they have been taught. This fact comes to an agreement with the existing researches which refer that the tools of these environments influence the type of arguments utilized by the students. The findings of the second activity which aimed to the transition from theory the to the figure show that the students mostly use custom tools with the appearance of the commands file and their guarantees are based less on the theory they have been taught. This fact contradicts the existing surveys, which indicate that these tools support the control of the logic relationships between the properties involved.

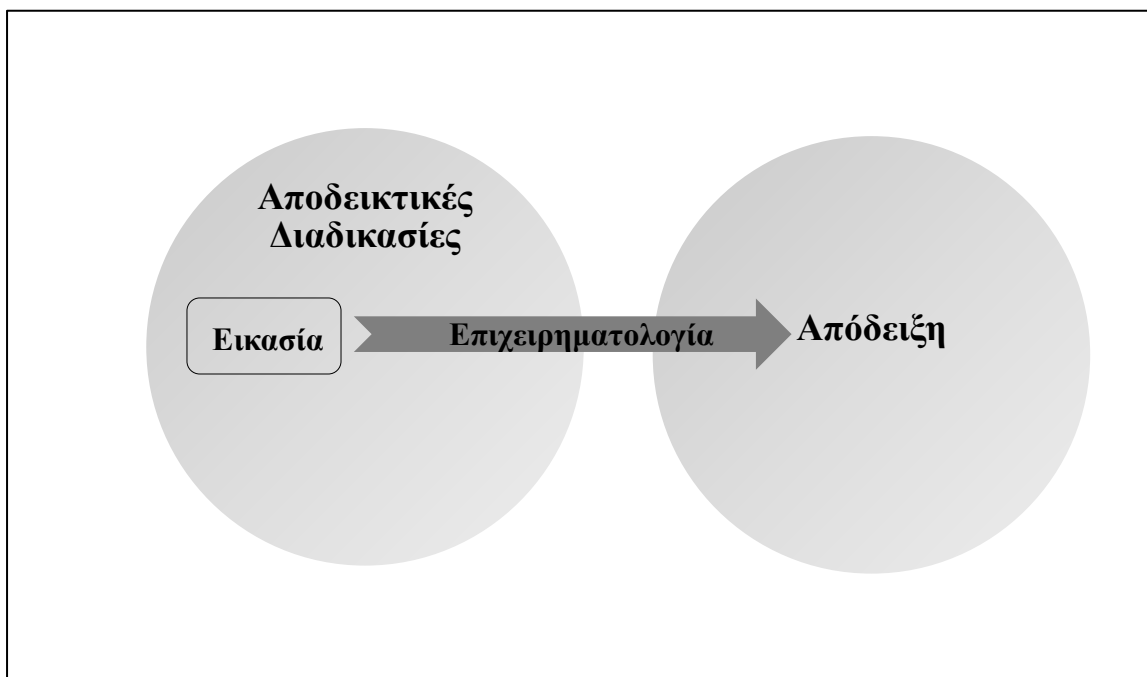
Keywords: conjecture, dynamic tools, proof, proving, argument, warrant, Toulmin

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για πολλές δεκαετίες, η έρευνα στο πεδίο των μαθηματικών, ασχολείται με την έννοια της απόδειξης, η οποία θεωρείται το προϊόν των αποδεικτικής διαδικασίας και προηγείται αυτής. Η Γιαννοπούλου (2013) σημειώνει ότι:

Η απόδειξη είναι ένα κορυφαίο επίτευγμα της ανθρώπινης δραστηριότητας με ιδιαίτερη και περίπλοκη φύση. Η απόδειξη έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της επιστήμης των μαθηματικών, αφού συνέβαλε στην θεωρητική τεκμηρίωση της επιστήμης αυτής, γεγονός που επέτρεψε την ανακάλυψη νέων μαθηματικών εννοιών και θεωριών. Η σημασία της απόδειξης στη μάθηση των μαθηματικών είναι επίσης πολύ σημαντική, καθώς σύμφωνα με τον Hanna (2000, στον Ko, 2010) αποτελεί ένα όχημα που ενισχύει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών στο άτομο. (σελ.24)

Ο Boero (1999) διακρίνει έξι φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας με σκοπό να τη διαφοροποιήσει από την απόδειξη. Οι δύο πρώτες φάσεις σχετίζονται με την παραγωγή και την ακριβή διατύπωση των εικασιών, οι επόμενες τρεις με τον προσδιορισμό, την επιλογή και την οργάνωση μαθηματικών επιχειρημάτων, ενώ η τελευταία αποτελεί το προϊόν, δηλαδή την απόδειξη. Οι Arzarello, Olivero, Paola & Robutti (1999) συμπύσσουν τις παραπάνω φάσεις σε δύο: στη διατύπωση μιας εικασίας και στην κατασκευή μιας απόδειξης. Με τον όρο εικασία, στη μελέτη αυτή, δεν θεωρούμε απλά τη διατύπωση αυτής, αλλά και όλη τη διαδικασία που οδηγεί στη διατύπωση, η οποία χαρακτηρίζεται από έντονη επιχειρηματολογική δραστηριότητα. Πιο συγκεκριμένα, υιοθετούμε ότι η μετάβαση από την εικασία στην απόδειξη γίνεται μέσω της επιχειρηματολογίας (Σχήμα 1).



Σχήμα 1 – Εικασία & Απόδειξη

Ωστόσο, στην εκπαίδευση των μαθηματικών, η έννοια της απόδειξης φαίνεται να έχει άλλη υπόσταση. Στους μαθητές¹ της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης η απόδειξη παρουσιάζεται ως μέσο

¹ Στα δύο πρώτα κεφάλαια της παρούσας εργασίας με τον όρο μαθητές εννοούμε μαθητές και μαθήτριες.

επικύρωσης της αλήθειας μιας μαθηματικής πρότασης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παρουσιάζουν δυσκολία στο να αντιληφθούν την αξία της για την ανθρώπινη σκέψη και ως εκ τούτου, αρκούνται στο να εκτελέσουν απλά την διαδικασία, ώστε να επιβεβαιώσουν την πρόταση που ήδη γνωρίζουν ότι είναι αληθής (Schoenfeld στο Γιαννοπούλου, 2013). Συνεπώς, η έρευνα στράφηκε προς τη μελέτη του πώς μπορούν οι μαθητές να κατανοήσουν την απόδειξη στα μαθηματικά, αλλά και το πώς μπορούν να ενισχυθούν οι αποδεικτικές διαδικασίες.

Τα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας ή αλλιώς DGEs, φαίνεται ότι συμβάλλουν θετικά στη μάθηση της απόδειξης, καθώς απαιτούν δράσεις από τους μαθητές για την επίτευξη ενός στόχου. Μέσα από αυτά, τους δίνεται η δυνατότητα κατασκευής σύνθετων σχεδίων, όπου μπορούν εύκολα να εκτελούν σε πραγματικό χρόνο πολλούς μετασχηματισμούς αυτών και κατά συνέπεια να έχουν πρόσβαση σε ποικιλία παραδειγμάτων που είναι δύσκολο να συνδυαστούν σε στατικά περιβάλλοντα (Marrades & Gutierrez, 2000). Επιπλέον, οι μαθητές, που χρησιμοποιούν DGEs, υιοθετούν πολυτροπικά μέσα, όπως οπτικά, λεκτικά, χειρονομίες (σύρσιμο) για να έρθουν πιο κοντά στην έννοια της απόδειξης. Ακόμα, δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να ανακαλύψουν πριν την απόδειξη (Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2000) και την παροχή πολλών δυναμικών πηγών σχεδιασμού καταστάσεων για τον εμπλουτισμό της μάθησης της απόδειξης. Η συμβολή τους είναι καθοριστική, επίσης, τόσο για την παραγωγή εικασιών από την πλευρά των μαθητών όσο και για την επιχειρηματολογία που αναπτύσσουν, με σκοπό την επικύρωση των εικασιών αυτών, οι οποίες τελικά θα οδηγήσουν στην απόδειξη. «Στη μελέτη αυτή, χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad (Jackiw, 2001) το οποίο όπως υποστηρίζουν οι Üstün & Ubuz (2004) «είναι ένα σημαντικό μέσο που παρέχει τεχνολογικές ευκαιρίες στην τάξη της γεωμετρίας [...]. Τα σχήματα αρχικά δημιουργούνται και στη συνέχεια εξερευνώνται και μετασχηματίζονται σε έννοιες». Οι μαθητές εξωτερικεύουν στην οθόνη κατασκευές που έχουν σχηματίσει νοητικά, χρησιμοποιώντας τα πρωτότυπα γεωμετρικά αντικείμενα του λογισμικού και τα εργαλεία ή εντολές του μενού, προσπαθώντας να αποκωδικοποιήσουν τις νοητικές τους αναπαραστάσεις σε ενέργειες στο λογισμικό.» (Patsiomitou, 2011, σελ.2).

Στη παρούσα εργασία θα γίνει προσπάθεια να μελετηθούν οι μεταβάσεις από την εικασία στην απόδειξη, στην Α' Λυκείου, με χρήση του περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας Geometrer's Sketchpad. Οι μέχρι τώρα έρευνες έδειξαν πως το να εικάζεις και να αποδεικνύεις (conjecturing and proving) πρέπει να αποτελούν κεντρικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης των μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000). Αν και οι μεταβάσεις από την εικασία στην απόδειξη φαίνεται να είναι πολύπλοκες πιστεύουμε ότι τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να παίξουν το ρόλο του διαμεσολαβητή, ευνοώντας τις μεταβάσεις αυτές.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 ΑΠΟΔΕΙΞΗ

2.1.1 Έρευνα γύρω από την απόδειξη

Η απόδειξη (proof) και οι αποδεικτικές διαδικασίες (proving) αποτελούν αντικείμενο μελέτης και συζήτησης για μεγάλο διάστημα, όχι μόνο στη κοινωνία της μαθηματικής εκπαίδευσης, αλλά και γενικότερα στη μαθηματική κοινωνία (Hanna στο Mariotti, 2012, σελ 163). «Πλήθος ερευνών έχουν γίνει γύρω από τις έννοιες αυτές, οι οποίες βρίσκονται στο επίκεντρο των μοντέρνων μαθηματικών, αποτελώντας τη ραχοκοκαλιά του αξιωματικού συστήματος, που καθιερώθηκε από τον Ευκλείδη.» (Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2015, σελ 1).

Η απόδειξη γενικά περιγράφεται ως η συλλογιστική διαδικασία, η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και μέσω μιας σειράς διαδοχικών συμπερασμάτων καταλήγει σ' ένα τελικό συμπέρασμα, με τέτοιο τρόπο, ώστε οποιαδήποτε αμφιβολία γύρω από το τελικό συμπέρασμα θα πρέπει να αναζητηθεί πίσω στις υποθέσεις μάλλον, παρά στην λογική αναγκαιότητα των διαδοχικών συμπερασμάτων (Τουμάσης στο Λύρη, 2014).

Η αποδεικτική διαδικασία ορίζεται από τους Harel & Sowder (όπως αναφέρεται στο Mariotti, 2012, σελ. 164) ως η:

«... διαδικασία που δουλεύεται από ένα άτομο [...] ώστε να αφαιρέσει ή να δημιουργήσει αμφιβολίες για την αλήθεια ενός ισχυρισμού και περιλαμβάνει δύο υποδιαδικασίες: να εξακριβώσει και να πείσει. Η απόδειξη αποτελεί το προϊόν της αποδεικτικής διαδικασίας.»

Ο Katz (στο Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2015) σημειώνει πως “η έννοια της απόδειξης εμφανίστηκε στην αρχαία Ελλάδα. Η λογική της εισήχθη από τους αρχαίους Έλληνες και συγκεκριμένα από τον Θαλή, που ήταν ο πρώτος που αισθάνθηκε την ανάγκη να δείξει την αλήθεια πολλών γεωμετρικών προτάσεων, χρησιμοποιώντας πλήρη αποδεικτική διαδικασία. Απέδειξε κάποια θεωρήματα, τα οποία αργότερα εντάχθηκαν σε ένα ευρύτερο πλαίσιο από τον Ευκλείδη. Μέχρι εκείνη τη στιγμή η ισχύς μίας μαθηματικής πρότασης προέκυπτε είτε εμπειρικά είτε από κάποιο πείραμα. Πολλά από τα μαθηματικά αποτελέσματα ήταν ήδη γνωστά, με τον ίδιο τρόπο που είναι κάτι γνωστό στον αισθητικο-αντιληπτικό (sensory-perceived) κόσμο. “Ως κανόνες δηλαδή που ισχύουν για όλες τις μέχρι τότε περιπτώσεις” (Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2015, σελ 5).

Μέσα σε αυτό το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο η απαίτηση για την απόδειξη μιας μαθηματικής δήλωσης φαίνεται να ταίριαζε φυσικά. Παρόλο που τα οπτικά, εμπειρικά ή μέτρησης (measurement) επιχειρήματα υπήρχαν στα προ-ελληνικά μαθηματικά, με τα ελληνικά μαθηματικά τα πράγματα άλλαξαν ριζικά, ώστε να συμπεριληφθούν οι παραγωγικές αποδείξεις. Η μαθηματική κοινότητα ως μέλος της γενικής κοινότητας απαιτεί επιχειρήματα που δεν μπορούν να αμφισβητηθούν λογικά. Ένα τέτοιο επιχείρημα δεν θα μπορούσε να βασίζεται στην αντίληψη, η οποία φιλοσοφικά αντιμετωπίζεται ως ψευδής κατά το χρόνο, ευμετάβλητη ή αναξιόπιστη. Ομοίως, δεν θα μπορούσε να βασίζεται στο κύρος (authority) ή σε συναισθηματικά γλωσσικά τεχνάσματα. Οι αποδείξεις αυτές οδήγησαν στη γέννηση της έννοιας του θεωρήματος, που επέτρεψε την ανακάλυψη/κατασκευή των μέχρι τότε άγνωστων αντικειμένων «των οποίων η

ύπαρξη δεν μπορεί να απεικονιστεί και η οποία δε μπορεί να γίνει φυσικά αντιληπτή» (Grabiner στο Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2015, σελ.333).

Ιστορικά η αξιωματική απόδειξη συνδέεται με τις αποδείξεις, που περιλαμβάνονται στην αξιωματικού τύπου δημιουργική εργασία του Ευκλείδη, *Στοιχεία Ευκλείδου*. Ωστόσο, τα Στοιχεία του Ευκλείδη δεν εμφανίστηκαν ξαφνικά στην αρχαία Ελλάδα, αλλά φαίνεται να είναι το αποτέλεσμα πολλών αιώνων μαθηματικών και πνευματικών ταξιδιών. Οι σοφιστές, οι Ελεάτες (κυρίως ο Ζήνων) και η φιλοσοφία του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη προσδιορίζονται αποφασιστικά από την απόφαση του Ευκλείδη να διοργανώσει παλιές και νέες μαθηματικές ιδέες σε μία παραγωγική δομή μέσα/κατά την οποία κάθε πρόταση προέρχεται από ήδη αποδεδειγμένες ή αποδεκτές ως αληθείς ιδέες (Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2015). Οι μαθηματικές ιδέες αναδιοργανώθηκαν για να σχηματίσουν μια πρωτόγονη εκδοχή του αξιωματικού συστήματος βασιζόμενη στην απόδειξη. Ξεκινώντας από τις κοινώς αποδεκτές αντιλήψεις/ιδέες (notions) και δηλώσεις, κάθε επόμενη πρόταση προέρχεται παραγωγικά/αφαιρετικά από τα ήδη καθιερωμένα ως μαθηματικώς αποδεκτά μέσω της απόδειξης. Πολλές από τις μαθηματικές ιδέες και τα αποδεικτικά εργαλεία στα Στοιχεία του Ευκλείδη ήταν ήδη γνωστά και αποδεδειγμένα, όπως για παράδειγμα το Πυθαγόρειο θεώρημα και οι προηγμένες αποδεικτικές τεχνικές, όπως οι μη εποικοδομητικές αποδείξεις, η εφαρμογή της αρχής αποκλειόμενου μέσου και η εις άτοπον απαγωγή (Boechemski, Kneale & Kneal στο Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2015). Ωστόσο, με τα Στοιχεία (και άλλες παρόμοιες προσπάθειες κατά καιρούς) μια νέα εποχή των ελληνικών μαθηματικών, και γενικότερα των μαθηματικών, δημιουργήθηκε.

Καθώς η απόδειξη είναι μια λέξη που χρησιμοποιούμε και στην καθημερινότητά μας, μπορεί να ερμηνευτεί με ποικίλους τρόπους και να της αποδοθούν διάφορες σημασίες σε διαφορετικά πλαίσια (Μούτσιος-Ρέντζος, 2015). Έτσι, μία απόδειξη μπορεί να πάρει πολλές διαφορετικές μορφές.

Η πιο παραδοσιακή μορφή της μαθηματικής απόδειξης είναι ότι πρόκειται για μία σφιχτά δεμένη ακολουθία προτάσεων, που συνδέονται μεταξύ τους με αυστηρούς κανόνες λογικής. Δηλαδή μια ακολουθία προτάσεων που προκύπτουν με παραγωγικό συλλογισμό (deductive reasoning) από ένα αποδεκτό σύνολο αρχικών προτάσεων.

Ο Szabò (στο Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2015) πρότεινε ότι η απόδειξη εξελίχθηκε ως μία μετατόπιση της λέξης «δείχνω»: από το να γίνει κάτι κυριολεκτικά ορατό, στο να γίνει η αλήθεια (ή η αναλήθεια) μιας μαθηματικής δήλωσης εμφανής κατά κάποιο (όχι απαραίτητα οπτικό) τρόπο.

Ο Krantz (2007) περιγράφει την απόδειξη ως ένα ρητορικό σχήμα, που σκοπό έχει να πείσει ένα άλλο μαθηματικό ότι μια πρόταση (το θεώρημα) είναι αληθής.

Ο Balacheff, όμως, αναφέρει ότι φαίνεται να υπάρχουν «ριζοσπαστικά διαφορετικές επιστημολογίες της μαθηματικής απόδειξης», το οποίο καθιστά «διόλου δυνατή την επικοινωνία ευρημάτων και, συνεπώς, την επίτευξη οποιασδήποτε πραγματικής προόδου στο πεδίο» (Μούτσιος-Ρέντζος, 2015).

Πολλοί ερευνητές επίσης διαχωρίζουν την έννοια της απόδειξης, σε μαθηματική και μη μαθηματική. Ο Hersh (1993) παρουσιάζει τρεις έννοιες της απόδειξης με τις δύο τελευταίες να αποτελούν μαθηματικές έννοιες αυτής:

- ✓ Γλωσσική έννοια: δοκιμάζω, προσπαθώ, καθορίζω την πραγματική κατάσταση των πραγμάτων.

- ✓ Ένα επιχείρημα που πείθει τους ειδικούς.
- ✓ Μια ακολουθία μετασχηματισμών επίσημων προτάσεων, που διεξάγεται σύμφωνα με τους κανόνες της λογικής.

Επιπλέον, ο Balacheff (στο Μούτσιο-Ρέντζος, 2015) διακρίνει την απόδειξη σε μαθηματική και μη μαθηματική, σημειώνοντας ότι απόδειξη είναι «μια εξήγηση η οποία είναι αποδεκτή από την κοινότητα σε ένα δεδομένο χρόνο», ενώ μαθηματική απόδειξη είναι «μια εξήγηση, η οποία είναι αποδεκτή από μαθηματικούς», που «στην παρούσα εποχή έχει μια συγκεκριμένη δομή και ακολουθεί καλά ορισμένους κανόνες, οι οποίοι έχουν επισημοποιηθεί/τυποποιηθεί (formalized) από λογικιστές».

Πολλές μελέτες έχουν, επίσης, πραγματοποιηθεί σχετικά με τη διδασκαλία της απόδειξης και τις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές καθώς εμπλέκονται με αυτή. Αρκετές εξ αυτών έχουν δείξει ότι οι μαθητές, τόσο στο Λύκειο όσο και στο Πανεπιστήμιο, δεν είναι ικανοί όχι μόνο να παράγουν αποδείξεις αλλά και να αναγνωρίσουν τι είναι απόδειξη. Οι μαθητές δεν κατανοούν γιατί χρειάζονται αποδείξεις και συνήθως δεν βλέπουν την ανάγκη για την παραγωγή λογικής απόδειξης και αν αναγνωρίσουν κάποια, αυτή θα είναι η επαλήθευση. Την βλέπουν δηλαδή ως μέσον αποβολής αμφιβολιών. Ο Balacheff (στο Zaslavsky, Nickerson, Stylianides & Winicki, 2012) ισχυρίζεται ότι ο λόγος που οι μαθητές δεν ασχολούνται με την αποδεικτική διαδικασία, δεν είναι τόσο επειδή δε μπορούν, αλλά επειδή δε βλέπουν κανένα λόγο ή ανάγκη να το κάνουν. Αυτό καθιστά και τη διδασκαλία της απόδειξης δύσκολη, που φαίνεται να γίνεται σε παγκόσμιο επίπεδο.

Οι Raman & Weber (2006) υποστηρίζουν ότι μία από τις αιτίες που οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες γύρω από την απόδειξη, είναι το γεγονός ότι δεν είναι εξοικειωμένοι να κάνουν σημαντικές μεν, αλλά δύσκολες δε συνδέσεις μεταξύ διαίσθησης και τυπικής απόδειξης. Η σύνδεση αυτή αποτελεί κεντρικό παράγοντα, όχι μόνο στη παραγωγή απόδειξης, αλλά και στην κατανόηση της έννοιας της απόδειξης.

Σύμφωνα με τους Zaslavsky κ.ά (2012) οι αποδείξεις επικοινωνούν μαθηματική γνώση και τοποθετούν αυτή τη γνώση συστηματικά σε ένα πλαίσιο. Συνεπώς, είναι μεγίστης σημαντικότητας οι μαθητές να είναι ικανοί να παράγουν αποδείξεις όχι μόνο στις σχολικές τάξεις του Λυκείου, όπου παραδοσιακά αυτή κατέχει μια σημαντική θέση, αλλά επίσης, για καλύτερη συνοχή, και σε προηγούμενες σχολικές τάξεις.

Στη παρούσα εργασία με τον όρο απόδειξη εννοούμε τη μαθηματική απόδειξη και τη θεωρούμε ως μία εξήγηση η οποία έχει μία συγκεκριμένη δομή και περιλαμβάνει τη θεωρία που έχουν διδαχτεί καθώς επίσης και ως το προϊόν της αποδεικτικής διαδικασίας. Θα ασχοληθούμε με τις αποδεικτικές διαδικασίες στο Λύκειο και θα εξετάσουμε αν μπορούν οι μαθητές να ξεπεράσουν τα εμπόδια που προκύπτουν καθώς εμπλέκονται με αυτές.

2.1.2 Ρόλος και λειτουργίες της απόδειξης

Από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα οι αποδείξεις θεωρούνται από πολλούς ως τα εργαλεία επικύρωσης μαθηματικών δηλώσεων για την παρουσίασή τους παγκοσμίως (Hadas & Hershkowitz, 1998' Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2000). Ο Leibniz (στο Hanna, 1990) πίστευε ότι η απόδειξη είναι ένα παγκόσμιο συμβολικό γραπτό, το οποίο μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε

το γεγονός από τη φαντασία, την αλήθεια από το ψέμα. Για τους μαθηματικούς οι αποδείξεις παίζουν σημαντικό ρόλο στην επιβεβαίωση μίας δήλωσης και διαφωτίζουν τους λόγους που υποστηρίζουν τη δήλωση αυτή.

Ο De Villiers (2004) αναφέρει ότι χωρίς την απόδειξη θα ήταν αδύνατο να οργανώσουμε τα αποτελέσματα της έρευνας των μαθηματικών σ' ένα παραγωγικό σύστημα αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων. Στις περισσότερες περιπτώσεις *posteriori* συστηματοποίησης, ο στόχος δεν είναι να ελέγξουμε αν τα αποτελέσματα είναι πραγματικά σωστά/αληθινά, αλλά να οργανώσουμε αυτά τα ασυσχέτιστα λογικά αποτελέσματα- τα οποία ήδη γνωρίζουμε ότι είναι σωστά/αληθινά- σε ένα συνεκτικό ενιαίο σύνολο.

Οι Hadas κ.ά. (2000) αναφέρουν ότι οι δύο κλασικοί λόγοι για τη διδασκαλία των αποδείξεων ήταν: α. η διδασκαλία του παραγωγικού συλλογισμού ως μέρος της ανθρώπινης κουλτούρας και β. η παροχή μέσου για την επαλήθευση και την παγκόσμια παρουσίαση μαθηματικών δηλώσεων. Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, η λειτουργία της απόδειξης είναι να ικανοποιήσει τις εσωτερικές «απαιτήσεις των καθηγητών» και όχι τις ψυχολογικές ανάγκες του κάθε μαθητή. Ο στόχος για τη διδασκαλία της απόδειξης είναι να θεσπίσει νόρμες μαθηματικής γνώσης στους μαθητές, ενώ ο πειραματισμός, οπτικοποίηση, μέτρηση, απαγωγικός συλλογισμός και έλεγχος παραδειγμάτων δεν θεωρούνται κανονιστικά μέσα για το σκοπό αυτό.

Πρέπει να σημειωθεί, όμως, ότι οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν την ανάγκη της λογικής απόδειξης, ειδικά αν αυτές οι αποδείξεις είναι οπτικά εμφανείς ή μπορούν εύκολα να παραχθούν εμπειρικά. Το γεγονός ότι οι αποδείξεις που συναντούν οι μαθητές στο σχολείο παρουσιάζονται συχνά πλήρεις, εντείνει τα προβλήματα τους αναφορικά με την αναγνώριση της ανάγκης για απόδειξη. Τα προβλήματα αυτά είναι γνωστά σε όλους τους εκπαιδευτικούς και εμφανίζονται ανεξαιρέτως σε όλες τις εκπαιδευτικές έρευνες ως ένα σημαντικό πρόβλημα στη διδασκαλία της απόδειξης. Κάθε εκπαιδευτικός νιώθει απογοήτευση, όταν έρχεται αντιμέτωπος με τους μαθητές να ρωτάνε: «Γιατί πρέπει να αποδειχτεί αυτό;»

Ο Balacheff (1988) επίσης σημειώνει πως οι μαθητές παράγουν αποδείξεις, γιατί το ζητάει ο καθηγητής και όχι γιατί αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα αυτών. Σύμφωνα με τον Afanasjewa στο Freudenthal (1958), τα προβλήματα των μαθητών με την απόδειξη δεν αποδίδονται απλώς σε αργή γνωστική ανάπτυξη (π.χ. ανικανότητα λογικής αιτιολόγησης), αλλά και επίσης στο ότι οι μαθητές ίσως δεν βλέπουν τη λειτουργία (ερμηνεία, σκοπό και χρησιμότητα) της απόδειξης.

Ως εκ τούτου, τα τελευταία χρόνια οι καθηγητές των μαθηματικών επέκτειναν σε σημαντικό βαθμό τους στόχους που πρέπει να εκπληρώνονται, καθώς διδάσκουν μαθηματικές αποδείξεις. Ένα θεμελιώδες ζήτημα που έχει προκύψει, το οποίο οι καθηγητές πρέπει να λαμβάνουν υπόψη, είναι η αναγνώριση των λειτουργιών της απόδειξης από την πλευρά των μαθητών, με σκοπό η απόδειξη να έχει σημασία γι' αυτούς. Ο Hersh (1993) υποστηρίζει ότι η βασική λειτουργία της απόδειξης στην τάξη πρέπει να είναι η προαγωγή της κατανόησης μέσω της επεξήγησης.

Ο De Villiers (1999) μέσα από τις έρευνες που διεξήγαγε βρήκε ένα μοντέλο περιγραφής των λειτουργιών της απόδειξης το οποίο αποτελεί μια μικρή επέκταση του μοντέλου του Bell (1976). Οι βασικές λειτουργίες της μαθηματικής απόδειξης είναι να:

- Επαληθεύσει ή αιτιολογήσει την ορθότητα μιας δήλωσης

- Εξηγήσει ή διαφωτίσει γιατί η δήλωση είναι αληθής
- Συστηματοποιήσει αποτελέσματα που λαμβάνονται από το παραγωγικό σύστημα (αξιωμάτων, ορισμών, αποδεκτών θεωρημάτων)
- Ανακαλύψει νέα θεωρήματα
- Επικοινωνήσει ή μεταδώσει μαθηματική γνώση
- Παρέχει νοητική πρόκληση στο «συγγραφέα» της απόδειξης.

Οι Hadas κ.ά. (2000) αναφέρουν πως η ανάλυση του εκπαιδευτικού υλικού δείχνει ότι οι λειτουργίες αυτές συχνά παραμένουν κρυμμένες στα σχολικά εγχειρίδια. Το παραπάνω μοντέλο παρέχει νέες προοπτικές για την αποδεικτική διαδικασία, τόσο από την πλευρά του επαγγελματία μαθηματικού όσο και από την πλευρά του έμπειρου καθηγητή. Ο De Villiers (1999) θεωρεί αυτές τις λειτουργίες, επιθυμητές, αν και αναγνωρίζει ότι δεν πληρούνται στην τάξη.

Επομένως, θεωρώντας την απόδειξη στα μαθηματικά, δε πρέπει να λάβουμε υπόψη μόνο το τελικό προϊόν, αλλά και τις ενδιάμεσες διαδικασίες που οδηγούν σε αυτήν. Άρα, ένα θεμελιώδες ζήτημα για τη διδασκαλία της απόδειξης είναι η εύρεση του κατάλληλου κινήτρου των ποικίλων λειτουργιών της απόδειξης. Με αυτόν τον τρόπο υπάρχει πιθανότητα οι μαθητές να παρουσιάσουν πρόοδο, καθώς παράγουν αποδείξεις.

Στην έρευνα που διεξάγουμε χρησιμοποιώντας κατάλληλα διαμορφωμένες δραστηριότητες θα εξετάσουμε την αναγνώριση των τριών πρώτων λειτουργιών της απόδειξης όπως περιγράφονται από το De Villiers (1999) με σκοπό η απόδειξη να έχει σημασία γι' αυτούς.

2.1.3 Απόδειξη στη Γεωμετρία

Η έννοια της απόδειξης στα μαθηματικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στο τελευταίο κεφάλαιο του Advanced Mathematical Thinking, ο Tall (1991) αναστοχάζεται (reflected) τη φύση της μαθηματικής απόδειξης και θεωρεί ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές πηγές εννοιών πριν την εισαγωγή σε τυπικό ορισμό και απόδειξη. Πιστεύει πως αν κάποιος εστιάζει στα αντικείμενα και στις ιδιότητές τους, ταξινομεί σε κατηγορίες και οδηγείται στους vanHiele τύπους ανάπτυξης της αυξανόμενης πολυπλοκότητας κτίζοντας από τις πρωταρχικές αντιλήψεις σε πιο βελτιωμένες έννοιες-περιγραφές, τότε οι ορισμοί που χρησιμοποιούνται για να γίνουν παρεμβάσεις φτιάχνουν ένα κατανοητό παραγωγικό πλαίσιο χαρακτηριστικό για την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στα αρχικά στάδια της αντίληψης και περιγραφής οι ιδιότητες συμβαίνουν την ίδια στιγμή, για παράδειγμα, ένα τρίγωνο με τρεις ίσες πλευρές έχει ίσες και τις τρεις γωνίες. Η απόδειξη ξεκινάει να εμφανίζεται σε αυτήν την ανάπτυξη στο επίπεδο ορισμού και παραγωγής, όπου το ισόπλευρο τρίγωνο ορίζεται ως το τρίγωνο που έχει τρεις πλευρές ίσες και κατ' επέκταση έχει επίσης και τρεις γωνίες ίσες (Tall & Mejia-Ramos, 2006).

Οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα εισάγονται στη παραγωγική απόδειξη στο Λύκειο, κυρίως μέσα από το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αν και από τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου μελετούν την αξιωματική θεμελίωσή της (Patsiomitou, 2011). Η παραγωγική γεωμετρία στην Ελλάδα εισάγεται στην Α' Λυκείου. Στις προηγούμενες τάξεις η γεωμετρία μελετάται, αλλά συνήθως σε διαισθητικό επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι η γεωμετρία παρουσιάζεται στους μαθητές ως μία συλλογή «ορισμών», ονομάζοντας και παρουσιάζοντας γεωμετρικά σχήματα και γεγονότα αναφέροντας συγκεκριμένες ιδιότητες (Mariotti, 2000).

Επιπλέον, από τους μαθητές δεν ζητείται ποτέ να δικαιολογήσουν την γνώση τους, η αλήθεια της οποίας θεωρείται άμεση και αυτονόητη, δηλαδή διαισθητική (Fischbein, 1987). Κατά συνέπεια, με την έναρξη του Λυκείου, οι μαθητές έχουν γενικά ένα διαισθητικό γεωμετρικό υπόβαθρο, βασισμένο στην οπτική εμπειρική επιχειρηματολογία, που πρέπει να αναδιοργανωθεί σύμφωνα με μία παραγωγική προσέγγιση, προκειμένου να επιβεβαιώσουν κάτι που ισχύει εδώ και χιλιάδες χρόνια, αλλά και μία κατάσταση που είναι «αυτονόητη» και «προφανής» σε ένα «διαισθητικό» επίπεδο (Μιχαλοπούλου, 2012). Συνεπώς είναι αναπόφευκτο οι μαθητές να μην παρουσιάζουν δυσκολίες καθώς εμπλέκονται με τις αποδεικτικές διαδικασίες στη Γεωμετρία.

Το σχολικό εγχειρίδιο της Γεωμετρίας στο Λύκειο, ωστόσο, εστιάζει στο πέραςμα από τον εμπειρικό στο θεωρητικό τρόπο σκέψης με ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική απόδειξη. Όμως, οι αποδείξεις των θεωρημάτων δίνονται έτοιμες στους μαθητές και στις περισσότερες φορές δεν γίνεται αναφορά στον προβληματισμό που οδήγησε στη συγκεκριμένη απόδειξη. Δεν δίνεται έμφαση ούτε στη διαδικασία σκέψης, αλλά ούτε στη λογική ερμηνεία των βημάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να μην κατανοούν τις γεωμετρικές αποδείξεις, καθώς δημιουργούνται κενά σε αυτούς, τα οποία πρέπει να καλυφθούν από τον διδάσκοντα.

Σύμφωνα με τους Kunimune, Fujita & Jones (2008) η κατανόηση της απόδειξης στη Γεωμετρία περιλαμβάνει δύο πτυχές. Οι μαθητές πρέπει αφενός να κατανοήσουν τη γενικότητα της απόδειξης, τη καθολικότητα και τη γενικότητα των θεωρημάτων (αποδειγμένες προτάσεις), τους ρόλους των σχημάτων, τη διαφορά ανάμεσα στην επίσημη απόδειξη και τη πειραματική επαλήθευση κ.ο.κ. Αυτήν την πτυχή την καλούμε «Γενικότητα της απόδειξης στη Γεωμετρία». Από την άλλη πλευρά, θα πρέπει επίσης να μάθουν πώς να κατασκευάζουν παραγωγικά επιχειρήματα, ορισμούς, αξιώματα, υποθέσεις, αποδείξεις, θεωρήματα, λογική κυκλικότητα (logical circularity), αξιωματικά συστήματα κ.ο.κ. Αυτήν την πτυχή την καλούμε «Κατασκευή της απόδειξης στη Γεωμετρία». (Kunimune κ.ά., 2008)

Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις δύο πτυχές, οι Kunimune κ.ά. (2008) διακρίνουν τα παρακάτω επίπεδα κατανόησης της απόδειξης στη Γεωμετρία:

Επίπεδο 1: Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές θεωρούν ότι οι πειραματικές επαληθεύσεις αρκούν για να αποδείξουν ότι οι γεωμετρικές δηλώσεις είναι αληθείς (Επίπεδο 1α: Δεν κατορθώνουν ούτε τη πτυχή της «Γενικότητας στη Γεωμετρία» ούτε τη «Κατασκευή της απόδειξης στη Γεωμετρία» και Επίπεδο 1β: Κατορθώνουν την πτυχή «Κατασκευή της απόδειξης στη Γεωμετρία» αλλά όχι τη «Γενίκευση της απόδειξης στη Γεωμετρία»)

Επίπεδο 2: Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές κατανοούν ότι η απόδειξη απαιτείται για να δείξουν ότι μια γεωμετρική πρόταση είναι αληθής (Επίπεδο 2α: Κατορθώνουν τη πτυχή της «Γενικότητας στη Γεωμετρία» αλλά δεν κατανοούν τη λογική κυκλικότητα και Επίπεδο 2β: Κατανοούν τη λογική κυκλικότητα»)

Επίπεδο 3: Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν απλές λογικές συνδέσεις μεταξύ των θεωρημάτων

Όμως οι μαθητές στο Γυμνάσιο παραμένουν στο επίπεδο 1, στο οποίο θεωρούν ότι οι πειραματικές επαληθεύσεις αρκούν για να αποδείξουν ότι οι γεωμετρικές δηλώσεις είναι αληθείς. Επιμένουν επίσης σε αυτήν την άποψη, ακόμα και μετά από εντατική καθοδήγηση για το πώς θα προχωράμε τις αποδείξεις στη Γεωμετρία (Kunimune, Fujita & Jones, 2008). Καθώς προχωρούν στην Α' Λυκείου οι μαθητές καλούνται να κάνουν μετάβαση από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2. Η μετάβαση αυτή είναι απότομη και ως εκ τούτου αποτελεί πηγή δυσκολιών. Συνεπώς η ανάγκη για

ενίσχυση-βελτίωση των αποδεικτικών διαδικασιών στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ολοένα και αυξάνεται.

Λαμβάνοντας υπόψη τις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές καθώς εμπλέκονται με την απόδειξη και τις αποδεικτικές διαδικασίες στη Γεωμετρία, αλλά και την πολυπλοκότητα της μετάβασης από το Γυμνάσιο στο Λύκειο, στη παρούσα εργασία, θα ερευνήσουμε τη δυνατότητα ενίσχυσης, αλλά και βελτίωσης των αποδεικτικών διαδικασιών.

2.2 ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

2.2.1 Επιχειρηματολογία και απόδειξη

Μέχρι το τέλος της δεκαετίας του '80 η απόδειξη και οι αποδεικτικές διαδικασίες αποτελούσαν τα βασικά αντικείμενα μελέτης των μαθηματικών. Ωστόσο, διαφορετικά σκέλη έρευνας αναπτύχθηκαν από εκείνη τη στιγμή. Οι Tall & Mejia-Ramos (2006) αναφέρουν πως θεωρώντας την απόδειξη στα μαθηματικά πρέπει να λάβουμε υπόψη όχι μόνο την τελική μορφή της απόδειξης, αλλά και τη φύση της επιχειρηματολογίας, που οδηγεί σε απόδειξη, η οποία έρχεται μαζί με διαφορετικά είδη εγγυήσεων και βαθμών εμπιστοσύνης.

Πολλοί είναι οι ερευνητές που έχουν ωθήσει την έρευνα προς αυτήν την κατεύθυνση. Θεωρούν τις σχέσεις, τάσεις και τις δυναμικές αντιθέσεις ανάμεσα στην τυπική απόδειξη και στο σημασιολογικό ή άτυπο επιχείρημα στην απόδειξη ως πολιτισμικό προϊόν, που υπόκειται σε λογικούς και επικοινωνιακούς περιορισμούς και στην αποδεικτική διαδικασία ως τη διαδικασία που στοχεύει στο προϊόν στην μαθηματική απόδειξη και στην άτυπη επιχειρηματολογία (Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010). Έτσι, τα τελευταία χρόνια το ενδιαφέρον της έρευνας φαίνεται να στρέφεται στη σύγκριση και τη μελέτη της σχέσης ανάμεσα σε επιχειρηματολογία και απόδειξη.

Ο Μούτσιος-Ρέντζος (2015) συνθέτοντας υπάρχοντες ορισμούς, για την επιχειρηματολογία και την απόδειξη προτείνει το εξής:

«Η άτυπη μαθηματική επιχειρηματολογία που χρησιμοποιείται για την κατάληξη σε ένα συμπέρασμα αφορά την πρακτική καθημερινή λογική, η οποία συνίσταται στη μελέτη, ανάλυση και αξιολόγηση της εγκυρότητας των επιχειρημάτων, κάνοντας χρήση της εμπειρίας, εικασιών, παραδειγμάτων, αντιπαραδειγμάτων, κρίσιμων πειραμάτων, γραφικών παραστάσεων».

«Η τυπική μαθηματική απόδειξη προκύπτει από τη συντακτική εφαρμογή κανόνων και παρατίθεται σαν μια παραγωγική ακολουθία συμπερασμάτων. Η μετάβαση από το ένα συμπέρασμα στο άλλο δίνει έμφαση στο νόημα των εννοιών και των τύπων που χρησιμοποιούνται».

Η διδακτική έρευνα που ασχολείται με τη σχέση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης διαφέρει σε μεγάλο βαθμό, τόσο στην εστίαση, όσο και στα συμπεράσματα που λαμβάνονται σχετικά με τη σύγκριση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης (Pedemonte, 2007). Οι κοινωνικές και επιστημολογικές προσεγγίσεις της απόδειξης προτείνουν ανομοιογένεια ανάμεσα

σε επιχειρηματολογία και απόδειξη. Η Duek (στο Prusak Hershkowitz & Schwarz, 2011) διαχωρίζει τη διαδικασία κατασκευής της απόδειξης (proving) η οποία απαιτεί έντονη επιχειρηματολογία και στο προϊόν της, την απόδειξη (proof). Αυτή η διάκριση υπογραμμίζεται και από τη γνωστική και γλωσσική πλευρά (Pedemonte, 2007).

Η διαφορά ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη βασίζεται στην ερμηνεία των διαφορετικών δηλώσεων στη σημασιολογική τους σχέση (semantic). Η επιχειρηματολογία σχετίζεται αυστηρώς με το θέμα του να κατανοήσεις το “γιατί” μια δήλωση είναι αληθής, έχοντας συνήθως μια λειτουργία επεξηγηματική (Mariotti, 2012). Ωστόσο, αυτή η λειτουργία ανήκει επίσης και στην απόδειξη χωρίς να πληρείται πάντα. Σύμφωνα με την ανάλυση που διεξήχθη από το Duval, υπάρχει ένα «δομικό κενό» ανάμεσα σε επιχειρηματολογία και απόδειξη, ακόμα και αν αυτές χρησιμοποιούν ίδιες γλωσσικές μορφές και ίδια συνδετική πρόταση (στο Pedemonte, 2007).

Συνεπώς, αξίζει να μελετήσουμε τη σχέση ανάμεσα σε επιχειρηματολογία και απόδειξη, καθώς όπως φαίνεται στα παρακάτω αποσπάσματα η επιχειρηματολογία κατέχει σημαντικό ρόλο, όχι μόνο στην απόδειξη, αλλά και στην αποδεικτική διαδικασία.

«Η αποδεικτική διαδικασία αποτελείται από την παροχή τόσο λογικών αλληλένδετων επιχειρημάτων τα οποία αναφέρονται σε μία συγκεκριμένη θεωρία όσο και από την επιχειρηματολογία η οποία μπορεί να απομακρύνει τις αμφιβολίες για την αλήθεια μιας δήλωσης» (Mariotti, 2000, σελ.30-31).

«Παιδαγωγικό ζήτημα της απόδειξης: να βρεθεί τρόπος, παιδαγωγικός/διδασκτικός, για την ανάπτυξη σύνθετων σχέσεων μεταξύ επιχειρηματολογίας, με στόχο αυτής να πείσει ή να εξηγήσει και της απόδειξης, με στόχο αυτής τη θεωρητική επικύρωση» (Mariotti, 2012, σελ. 166).

Η Pedemonte (2007) αναφέρει πως αν θέλουμε να συγκρίνουμε την επιχειρηματολογία με την απόδειξη, δύο βασικά ερωτήματα προκύπτουν: 1) Τι είναι επιχειρηματολογία στα μαθηματικά και 2) ποια η σχέση της με τη μαθηματική απόδειξη.

Ωστόσο, οι πρόσφατες έρευνες στη μαθηματική εκπαίδευση δεν δίνουν απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα. Ως εκ τούτου, γλωσσικές θεωρίες έχουν αναπτυχθεί για το προσδιορισμό των χαρακτηριστικών της επιχειρηματολογίας τα οποία διακρίνονται σε:

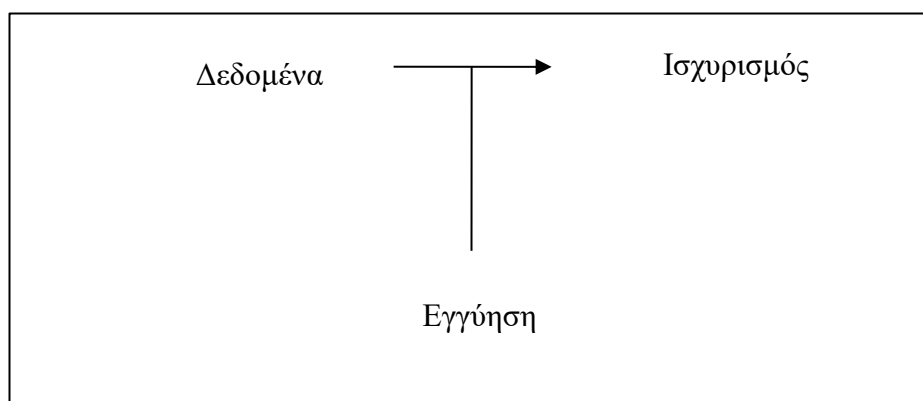
- *λειτουργικά* χαρακτηριστικά (functional characteristics): καθορίζουν το αμετάκλητο της επιχειρηματολογίας, τη χρησιμότητά της και το ρόλο της μέσα στη συζήτηση. Στα μαθηματικά η επιχειρηματολογία και η απόδειξη μπορούν να περιγραφούν από τέσσερα λειτουργικά χαρακτηριστικά:
 - ✓ Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη στα μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν ως λογικές εξηγήσεις/αιτιολογήσεις.
 - ✓ Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη στα μαθηματικά είναι εδώ για να πείσουν.
 - ✓ Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη στα μαθηματικά απευθύνονται σε ένα παγκόσμιο κοινό.
 - ✓ Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη στα μαθηματικά ανήκουν σε ένα «πεδίο» (Toulmin, 1993).
- *δομικά* χαρακτηριστικά (structural characteristics): παρέχουν ένα δομικό μοντέλο για επιχειρηματολογία. Το μοντέλο του Toulmin (1993) χρησιμοποιήθηκε για τη σύγκριση και

ανάλυση του περιεχομένου των επιχειρηματολογιών και του περιεχομένου των αποδείξεων από τη γνωστική πλευρά.

Ο Toulmin (1958, στο Tall & Mejia-Ramos, 2006) έθεσε τη προοπτική της επιχειρηματολογίας η οποία λαμβάνει υπόψη τα είδη επιχειρημάτων που μπορεί να χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή μιας απόδειξης, και αυτός εισήγαγε το σχεδιασμό για τη μοντελοποίηση ενός γενικού επιχειρήματος που διαφοροποιείται σε τρεις τύπους δηλώσεων (Tall & Mejia-Ramos, 2006).

Το βασικό μοντέλο του Toulmin συνθέτει 3 στοιχεία:

- ✓ Ισχυρισμό (claim)² : η δήλωση του ομιλητή,
- ✓ Δεδομένα (data) : δεδομένα αιτιολόγησης του ισχυρισμού (I),
- ✓ Εγγύηση (warrant) : ο κανόνας παρεμβολής ο οποίος επιτρέπει στα δεδομένα (Δ) να συνδέονται με τον ισχυρισμό (I).



Σχήμα 2 – Βασικό Μοντέλο Toulmin

(Pedemonte, 2007, σελ.28)

Ξεκινώντας από τον ισχυρισμό που κάποιος εύχεται να υποστηρίξει με δοσμένα δεδομένα, κάποια είδη αιτιολόγησης παράγονται για να συνδέσουν τα δεδομένα με τον ισχυρισμό. Αυτή η συνδετική δήλωση ονομάζεται εγγύηση του ισχυρισμού (Tall & Mejia-Ramos, 2006).

Σύμφωνα με τους Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007):

Ο ισχυρισμός (I) είναι μία δήλωση με την οποία ο ομιλητής εύχεται να πείσει το κοινό του. Τα δεδομένα (Δ) είναι η βάση πάνω στην οποία στηρίζεται το επιχείρημα, η σχετική ένδειξη (relevant evidence) του ισχυρισμού. Η εγγύηση (E) αιτιολογεί τη σύνδεση ανάμεσα στα δεδομένα και τον ισχυρισμό, για παράδειγμα, περιλαμβάνει ένα κανόνα, ένα ορισμό ή κάνοντας μία αναλογία. (σελ.4)

Ο όρος εγγύηση δεν χρησιμοποιήθηκε από τον Toulmin, όπως έχει χρησιμοποιηθεί από μερικούς στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης (Freeman, 2005· Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007· Weber, Maher, Powell & Stohl Lee, 2008· Nardi, Biza & Zachariades, 2011· Conner, 2012). Πολλοί ερευνητές βλέπουν την εγγύηση όπως ο Rodd (2000) ως απομάκρυνση της αβεβαιότητας, ενώ ο Toulmin βλέπει την εγγύηση ως μείωση της αβεβαιότητας (Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007). Ο Freeman (2005) αναφέρει πως η ερμηνεία του όρου εγγύηση από τον Toulmin είναι προβληματική. «Οι εγγυήσεις είναι κανόνες, αρχές, συμπεράσματα... γενικά

² Στη παρούσα εργασία οι όροι ισχυρισμός και συμπέρασμα νοούνται χωρίς τις διαφοροποιήσεις τους με την έννοια του συμπεράσματος.

υποθετικές καταστάσεις οι οποίες μπορούν να λειτουργήσουν ως γέφυρες.» (Johnson στο Freeman, 2005, σελ 331). Όμως οι κανόνες και τα συμπεράσματα δεν αποτελούν δηλώσεις, καθώς η αναφορά σε ένα συμπερασματικό κανόνα είναι μία γενικευμένη υποθετική δήλωση (Freeman, 2005).

Οι ερευνητές αυτοί προσπάθησαν επίσης να κατηγοριοποιήσουν τα είδη των εγγυήσεων που προκύπτουν. Ο Toulmin τις κατηγοριοποιεί ανάλογα με το πεδίο στο οποίο ανήκουν και δίνει παραδείγματα, στα οποία εξηγεί ότι σε διαφορετικά πεδία οι εγγυήσεις υποστηρίζονται με διαφορετικό τρόπο (Toulmin στο Nardi, Biza, & Zachariades, 2011, σελ.159). Ο Freeman (2005) προτείνει μία επιστημική κατηγοριοποίηση των εγγυήσεων όχι ως προς το πεδίο, αλλά «ανάλογα με τον τύπο διαίσθησης, πεποιθήσεων ή πρότερης κατανόησης που επιδρούν σε αυτές» (Nardi κ.ά στο Γιαννοπούλου, 2013, σελ.134).

Τα είδη εγγυήσεων που προκύπτουν κατά τον Freeman (2005, σελ.342) είναι:

- *εκ των προτέρων εγγυήσεις (a priori warrants)*
- *εμπειρικές εγγυήσεις (empirical warrants)*
- *θεσμικές εγγυήσεις (institutional warrants)*
- *αξιολογικές εγγυήσεις (evaluative warrants)*

Ο ίδιος ερευνητής παραθέτει, επίσης, κάποια παραδείγματα τα οποία θεωρεί ότι επιβεβαιώνουν το σχήμα του (Freeman, 2005, σελ.343):

- (W1) Αν κάτι είναι κόκκινο, δεν θα είναι μαύρο.
- (W2) Ένας άνθρωπος που έχει αποδειχθεί ότι έχει οδηγήσει με ταχύτητα πάνω από 30 km/h σε μια κατοικημένη περιοχή, μπορεί να βρεθεί ότι έχει διαπράξει αδίκημα κατά των νόμων περί οδικής κυκλοφορίας.
- (W3) Ένας Σαουδάραβας θα βρεθεί να είναι Μουσουλμάνος.
- (W4) Οι ομάδες μπάσκετ που έχουν ισχυρότερη άμυνα και έχουν και το ψυχολογικό πλεονέκτημα θα επικρατήσουν στην καλύτερη σε εφτά σειρές αγώνων.

Στη συνέχεια ο Freeman (2005, σελ.344) ερμηνεύει συνοπτικά τα μοντέλα του:

- (W1) Αποτελεί μια εκ των προτέρων εγγύηση, και αυτό που θεωρούμε πως είναι σωστά θεμελιωμένο, αντανακλάται στη δομή των χρωματικών μας εννοιών.
- (W2) Είναι μια θεσμική εγγύηση, που γίνεται αντιληπτή από τη θεσμική διαίσθηση μέσω της κατανόησης των ειδικών όρων που σχετίζονται με τις πράξεις (νομοθετικού περιεχομένου) οδικής κυκλοφορίας.
- (W3) Αναρωτιέται αν θα έπρεπε να αποτελεί εγγύηση, από τη στιγμή που θεωρούν πως εκφράζει μία περιγραφική εμπειρική γενίκευση.
- (W4) Είναι μία αιτιώδης και επίσης εμπειρικά επεξηγηματική εγγύηση, που αφορά εν μέρει ψυχολογικά αίτια. Γίνεται αντιληπτή από την εμπειρική διαίσθηση, η οποία δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι σίγουρα αξιόπιστη.

Ωστόσο, στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης και άλλοι ερευνητές ασχολήθηκαν με την κατηγοριοποίηση των ειδών των εγγυήσεων. Οι Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007) τις διακρίνουν σε:

- *επαγωγικές εγγυήσεις (inductive warrants)*: χρησιμοποιούν παρόμοια στρατηγική με την επαγωγική απόδειξη³.
- *δομικές-δαισθητικές εγγυήσεις (structural-intuitive warrants)*: ο συμμετέχοντας χρησιμοποιεί παρατηρήσεις ή πειράματα, κάποιο είδος νοερής δομής, που είτε είναι οπτικά εμφανείς είτε όχι πείθει τους άλλους για το αποτέλεσμα. Συχνά, αλλά όχι απαραίτητα πάντα, αυτό το είδος αιτιολόγησης εμφανίζεται να είναι δαισθητικό.
- *παραγωγικές εγγυήσεις (deductive warrants)*: τυπικές μαθηματικές αιτιολογήσεις χρησιμοποιούνται για να εγγυηθούν το αποτέλεσμα του επιχειρήματος. Αυτές οι αιτιολογήσεις μπορεί να ποικίλουν: προκύπτουν/παράγονται από αξιώματα, αλγεβρικούς χειρισμούς (algebraic manipulations) ή η χρήση αντιπαραδειγμάτων μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως παραγωγικές εγγυήσεις.

Αξίζει να σημειωθεί πως οι παραγωγικές εγγυήσεις χρησιμοποιούνται για την απομάκρυνση της αβεβαιότητας σε αντίθεση με τις επαγωγικές και δομικές-δαισθητικές που χρησιμοποιούνται για τη μείωση της αβεβαιότητας.

Στην εργασία αυτή θεωρούμε την εγγύηση, όπως και ο Freeman (2005, σελ 332), δηλαδή, ως ένα συμπερασματικό κανόνα, αλλά όχι απαραίτητα επίσημο ή παραγωγικά έγκυρο ενώ θα χρησιμοποιήσουμε την κατηγοριοποίηση κατά τους Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007). Η κατηγοριοποίηση αυτή περιλαμβάνει πιο γενικευμένους τύπους εγγυήσεων και θεωρούμε ότι είναι πιο «κοντά» στα πλαίσια αυτής της έρευνας.

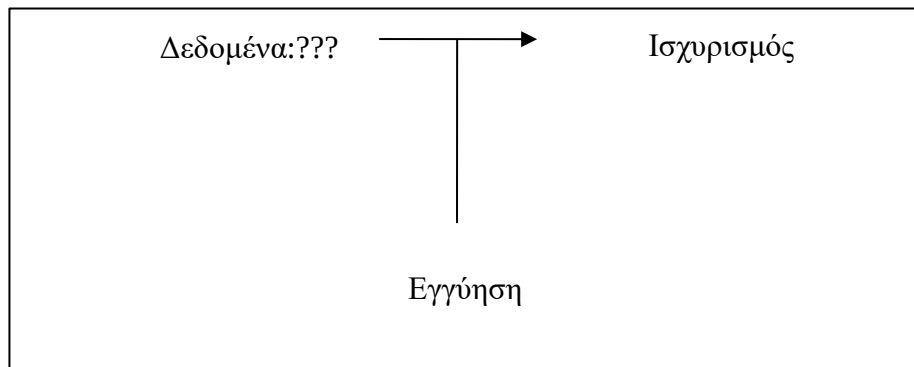
Η διάταξη του Toulmin χρησιμοποιήθηκε και στην μαθηματική εκπαίδευση για την ανάλυση της συλλογικής επιχειρηματολογίας των μαθητών στη μαθηματική τάξη, τα γραπτά των μαθητών και τα προφορικά επιχειρήματα σε συνεντεύξεις βασιζόμενες σε δραστηριότητες (Tall & Mejia-Ramos, 2006). Καθώς οι μαθητές ασχολούνται με μαθηματικές δραστηριότητες, επιχειρηματολογούν και καθώς επιχειρηματολογούν παράγουν «μαθηματικές» δηλώσεις. Η Pedemonte (2007) κατηγοριοποιεί τα είδη επιχειρηματολογίας των μαθητών που έχουν βρεθεί κατά τη διάρκεια πειραμάτων σε παραγωγικά, επαγωγικά και απαγωγικά. Το μοντέλο του Toulmin μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση απαγωγικών και παραγωγικών δομών (Pedemonte, 2007).

Παραγωγή είναι ένα συμπέρασμα που επιτρέπει την κατασκευή ενός ισχυρισμού, ξεκινώντας από τα δεδομένα και ένα κανόνα. Στο μοντέλο του Toulmin (Σχήμα 2) ένα βήμα θεωρείται παραγωγικό, αν τα δεδομένα και οι εγγυήσεις οδηγούν στον ισχυρισμό.

Επαγωγή είναι ένα συμπέρασμα, το οποίο επιτρέπει την κατασκευή ενός ισχυρισμού γενικεύοντας ορισμένες περιπτώσεις.

Απαγωγή είναι ένα συμπέρασμα που επιτρέπει την κατασκευή ενός ισχυρισμού από ένα παρατηρούμενο γεγονός. Η απαγωγή θεωρείται σε σχέση με τη μαθηματική δραστηριότητα γενικά και πιο ειδικά σε σχέση με τη μαθηματική απόδειξη (Pedemonte & Reid, 2011). Στο μοντέλο του Toulmin ένα απαγωγικό βήμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

³ Η επαγωγική απόδειξη κατά Harel & Showder (στο Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson, 2007) είναι όταν οι μαθητές βεβαιώνονται για τους ευατούς τους και πείθουν τους άλλους για την αλήθεια μιας εικασίας.



Σχήμα 3 – Απαγωγικό Μοντέλο Toulmin

(Pedemonte, 2007, σελ.29)

Ο Pierce ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια της απαγωγικής συμπερασματολογίας και τη συνέκρινε με άλλες συμπερασματολογίες, όπως τις παραγωγικές και επαγωγικές (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2009). Βλέπει την παραγωγή, επαγωγή και απαγωγή όχι μόνο σαν τρεις διακριτές λογικές μορφές, αλλά επίσης και σαν τρία βήματα του επιστημονικού συλλογισμού με την απαγωγή να είναι στην κορυφή. Τα χαρακτηριστικά στοιχεία της απαγωγής μπορούν να προσδιοριστούν:

- Το αποτέλεσμα της απαγωγής είναι αληθοφανές, όχι βέβαια σίγουρο.
- Η απαγωγή προχωράει προς τα πίσω, από το αποτέλεσμα ή τη συνέπεια σε μία κατάσταση/επιχείρημα ή προγενέστερα.
- Η απαγωγή εξηγεί το απροσδόκητο γεγονός.
- Το αποτέλεσμα της απαγωγής είναι ικανό για επαλήθευση ή απόρριψη μέσω της σύγκρισης με τα γεγονότα (Pedemonte & Reid, 2011).

Όσον αφορά την εκπαίδευση των μαθηματικών, η απαγωγή είναι ένα πεδίο έρευνας που έχει λάβει αυξανόμενη έμφαση, ιδιαίτερα την τελευταία δεκαετία, καθώς οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν απαγωγικές επιχειρηματολογίες για την παραγωγή αποδείξεων (Pedemonte & Reid, 2011). Η σύγκριση ανάμεσα στις εγγυήσεις που χρησιμοποιούνται στις επιχειρηματολογίες και στις αποδείξεις είναι σημαντική, καθώς αυτή (η σύγκριση) μπορεί να δώσει διορατικότητα στη φύση του κανόνα απαγωγής, έναντι στο θεώρημα που χρησιμοποιείται σε μία απόδειξη (Pedemonte & Reid, 2011).

Ωστόσο, η λογική σύνδεση των δηλώσεων σε μία επιχειρηματολογία διαφέρει από τη λογική σύνδεση σε μία απόδειξη. Κάθε βήμα μιας απόδειξης μπορεί να περιγραφεί ως παραγωγικό βήμα. Όμως, η δομή της επιχειρηματολογίας μπορεί να απαρτίζεται από διαφορετικά βήματα, όπως απαγωγικά και επαγωγικά (Pedemonte, 2007). Συνεπώς, η κατασκευή μίας παραγωγικής απόδειξης απαιτεί δομική αλλαγή: από απαγωγικά ή επαγωγικά βήματα σε παραγωγικά. Η αλλαγή αυτή δεν είναι πάντοτε απλή για τους μαθητές, αλλά είναι πάντοτε αναγκαία, αλλιώς η δομή της απόδειξης μπορεί να μην είναι παραγωγική (Pedemonte, 2007). Το γεγονός αυτό υποστηρίζεται και από τον Μούτσιο-Ρέντζο (2015), ο οποίος κάνει λόγο για τη μετάβαση από την άτυπη μαθηματική επιχειρηματολογία προς την απόδειξη:

«Η μετάβαση από την άτυπη μαθηματική επιχειρηματολογία προς την κατασκευή γενικότερων απαντήσεων διατυπωμένων με μαθηματικά αποδεκτό τρόπο και η κατασκευή της τυπικής

μαθηματικής απόδειξης είναι εξαιρετικά επίπονη για τους μαθητές λόγω της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν κατά την εξαντικειμενίκευση των στοιχείων που χρησιμοποιούν».

Αξίζει να σημειωθεί, ότι υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η επιχειρηματολογία έχει την ίδια δομή με την απόδειξη. Αν συμβαίνει αυτό, τότε υπάρχει δομική συνέχεια (structural continuity) ανάμεσά τους (Pedemonte, 2007).

Τέλος, αναφέρουμε ότι όσον αφορά τη μαθηματική εκπαίδευση της Γεωμετρίας στο Λύκειο, η επιχειρηματολογία αποτελεί μία από τις επαναλαμβανόμενες δραστηριότητες στην τάξη, όπως και η απόδειξη. Οι Prusak, Hershkowitz & Schwarz (2011) χαρακτηριστικά αναφέρουν πως τα μαθήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας φημίζονται για τα θεωρήματα και τις αποδείξεις τους. Σε αυτά τα μαθήματα, ζητείται από τους μαθητές να αιτιολογήσουν κάθε ισχυρισμό που κάνουν και να βρουν εγγυήσεις για την αιτιολόγηση του ισχυρισμού μέσω λογικών συνδέσεων με προηγούμενα θεωρήματα και αξιώματα. Παρόλα αυτά φαίνεται να μην υπάρχει ένας κοινός ορισμός της επιχειρηματολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση.

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως αν και η απόδειξη ως ιδανικό μπορεί να θεωρείται ότι είναι απόλυτη, καθώς εξασκείται από τους ανθρώπους, ακόμη και από τους μαθηματικούς, είναι μία ανθρώπινη κατασκευή με ανθρώπινες δυνάμεις διορατικότητας και ανθρώπινες αδυναμίες. Πρακτικά δεν είναι “όλα ή τίποτα” αλλά βασίζεται σε υπονοούμενες ή σαφείς “εγγυήσεις αλήθειας” που περιέχουν ένα μέτρο αμφιβολίας, το οποίο ποικίλει ανάμεσα στα άτομα και ανάμεσα στους τρόπους με τους οποίους οι αποδείξεις πλαισιώνονται (Tall & Mejia-Ramos, 2006).

Ολοκληρώνοντας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η επιχειρηματολογία και η απόδειξη στα μαθηματικά είναι στενά συνδεδεμένες. Στην συγκεκριμένη έρευνα υιοθετούμε τον ορισμό για την άτυπη μαθηματική επιχειρηματολογία και τη τυπική μαθηματική απόδειξη, που χρησιμοποιεί ο Μούτσιος-Ρέντζος (2015). Επίσης, θα ασχοληθούμε με την απαγωγή καθώς σχετίζεται με τη μαθηματική δραστηριότητα γενικά και πιο ειδικά με την μαθηματική απόδειξη (Arzarello, Andriano, Olivero & Robutti, 1998· Pedemonte, 2007). Τέλος, θα εξετάσουμε την απόδειξη ως επιχείρημα και θα ελέγξουμε αν μεταβάλλονται τα είδη εγγυήσεων καθώς οι μαθητές εμπλέκονται με τις αποδεικτικές διαδικασίες.

2.2.2 Επιχειρηματολογία και εικασία

Ο Lakatos (1976) πρότεινε ότι το πρώτο βήμα για να κάνει κανείς ανακαλύψεις στα μαθηματικά, είναι να παράγει εικασίες (Μιχαλοπούλου, 2012). Η ανακάλυψη μέσω της εικασίας μπορεί να οδηγήσει σε επίσημες και άτυπες αιτιολογήσεις του γιατί οι εικασίες είναι αληθείς, θέτοντας έτσι τις βάσεις για παραγωγική απόδειξη (Μιχαλοπούλου, 2012).

Σύμφωνα με τον Χαλάτση Α. (1993), η εικασία και η απόδειξη είναι συμπληρωματικές όψεις της μίας και της ίδιας πράξης, καθώς αν δεν εικάσει κάποιος, δεν θα έχει τίποτα να αποδείξει και αν δεν αποδείξει κάποιος τις εικασίες του, δεν έχει όφελος να τις διατυπώνει. Ωστόσο, δίνουμε μεγαλύτερη σημασία στην απόδειξη, αφού η εικασία δεν είναι πάντοτε ορθή και η ισχύς της κρίνεται από την απόδειξη (Χαλάτσης, 1993).

Κατά τον ίδιο ερευνητή, η εικασία ορίζεται να είναι μία άποψη, μία θέση και όχι απλώς μία πίστη: «στηριζόμενοι σε παρατηρήσεις ή/και σε νοητικά πειράματα, και με εργαλείο τη κοινή

λογική, άτυπα και πολλές φορές μάλιστα μη συνειδητά, οδηγούμαστε σε ευλογοφανείς απόψεις, δηλαδή σε εικασίες [...] Η εικασία είναι είτε ένα θεώρημα είτε μια ιδέα για την απόδειξη ενός θεωρήματος.» (Χαλάτσης, 1993, σελ. 3). Οι Harel & Sowder (στο Γιαννοπούλου, 2013, σελ 37-38) ορίζουν την εικασία ως «μια παρατήρηση που κάνει ένα άτομο που έχει αμφιβολίες για την αλήθεια της. Η παρατήρηση του ατόμου παύει να είναι εικασία και γίνεται γεγονός την στιγμή που το άτομο είναι σίγουρο για την αλήθεια της».

Σε πιο πρόσφατες έρευνες, που έχουν πραγματοποιηθεί γύρω από τη διδασκαλία των μαθηματικών, γίνεται διάκριση ανάμεσα στη διαδικασία των εικασιών και στην αποδεικτική διαδικασία με σκοπό τη μελέτη των πιθανών συνεχειών ανάμεσα στη δομή της επιχειρηματολογίας κατά τη διαδικασία εικασιών και στις πρώιμες αποδεικτικές φάσεις και τελικά στη δομή της απόδειξης (Pedemonte, 2007). Η ίδια ερευνήτρια βρήκε ότι η ασυνέχεια αυτή μπορεί να γίνει ένα εμπόδιο για τους μαθητές καθώς προσπαθούν να κατασκευάσουν την απόδειξη, τονίζοντας τη σημαντικότητα της “δομικής ενότητας των επιχειρημάτων” (Pedemonte, 2007).

Οι Boero κ.ά (στο Baccaglini-Frank & Mariotti, 2009) αναφέρουν:

Κατά τη διάρκεια της παραγωγής μίας εικασίας, ο μαθητής επεξεργάζεται σταδιακά τη δήλωσή του, μέσα από μια έντονη επιχειρηματολογική δραστηριότητα λειτουργικά αναμειγμένη με την αιτιολόγηση της αληθοφάνειας των επιλογών του: κατά τη διάρκεια του μετέπειτα αποδεικτικού σταδίου, ο μαθητής ολοκληρώνει τη διαδικασία του με ένα συνεκτικό τρόπο, οργανώνοντας μερικές από τις αιτιολογήσεις, επιχειρήματα, που παράγονται κατά τη διάρκεια της κατασκευής της δήλωσης σύμφωνα με μια λογική αλυσίδα. (σελ.238)

Έτσι, η εικασία ορίζεται ως το τρίπτυχο: μία δήλωση, μια επιχειρηματολογία και ένα σύστημα εννοιών (Balacheff & Margolinas, 2005). Η Pedemonte (2007) αναφέρει πως η εικασία δεν είναι πάντα το αποτέλεσμα μίας επιχειρηματολογίας και σε αυτή τη περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί ως “γεγονός” που προέρχεται απευθείας από ένα σχέδιο, από τη διαίσθηση και τα παρόμοια. Σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει ρητή επιχειρηματολογία που να αιτιολογεί αυτό το γεγονός.

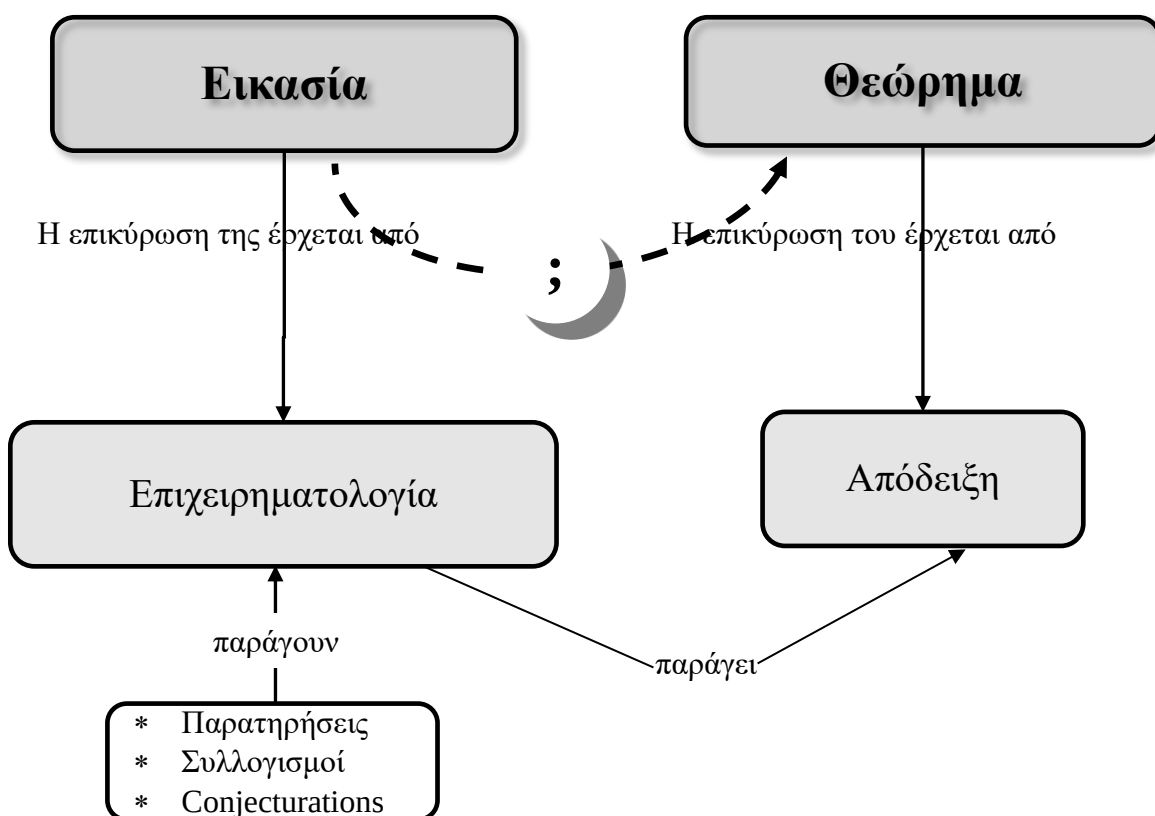
Η επιχειρηματολογία μπορεί να συσχετισθεί με την εικασία με δύο τρόπους: με τη εποικοδομητική επιχειρηματολογία (constructive argumentation), η οποία συμβάλλει στην κατασκευή μιας εικασίας και άρα προηγείται αυτής και με την δομική επιχειρηματολογία (structurant argumentation), η οποία αιτιολογεί μία εικασία και άρα έπεται αυτής (Pedemonte, 2007).

Οι Pedemonte και Buchbinder (2011, στο Γιαννοπούλου, 2013) αναφέρουν ότι συνήθως είναι παρόντα και τα δύο είδη επιχειρηματολογίας κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Πολλές φορές η απόδειξη συμπίπτει με τη δομική επιχειρηματολογία ή, αν δεν συμβαίνει αυτό, τότε έχει πολλά από τα στοιχεία της. Επιπλέον, όταν κατά την επιχειρηματολογία κατασκευάζεται ταυτόχρονα και αιτιολογείται η εικασία, τότε αυτή χαρακτηρίζεται ως κατασκευαστική και ως δομική (Γιαννοπούλου, 2013).

Στα μαθηματικά η απόδειξη είναι παραγωγική, όμως οι εξερευνητικές διαδικασίες και οι διαδικασίες εικασιών χαρακτηρίζονται συχνά από απαγωγική επιχειρηματολογία. Οι Arzarello κ.ά. (1998) ισχυρίζονται πως η απαγωγή είναι κρίσιμη για την παραγωγή εικασιών. Επίσης, οι Baccaglini-Frank&Mariotti (2009) αναφέρουν πως η απαγωγή φαίνεται να είναι το κλειδί, που επιτρέπει στους λύτες να γράψουν εικασίες σε μία λογική μορφή «αν ... τότε», μια δήλωση η

οποία είναι τώρα έτοιμη να αποδειχθεί. Η απαγωγή περιγράφεται ως μια απαραίτητη κίνηση, μετά την οποία οι εικασίες διατυπώνονται και επιτρέπει τη μετάβαση προς την απόδειξη. Ωστόσο, φαίνεται να μην υπάρχει μια απλή σύνδεση ανάμεσα στην χρήση της απαγωγής στην επιχειρηματολογία και στην κατασκευή παραγωγικής απόδειξης (Pedemonte & Reid, 2011).

Φαίνεται, λοιπόν, πως η σχέση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη σχέση μεταξύ εικασίας και έγκυρου επιχειρήματος (Καρατράσογλου, 2011). Όμως, η Pedemonte (2007) σημειώνει πως για τη σύγκριση ανάμεσα στην επιχειρηματολογία που συνδέεται μέσω μιας εικασίας με τη απόδειξη ως προϊόν στην εκπαιδευτική έρευνα, είναι σημαντικό να γίνει διάκριση μεταξύ τους, για να κατανοήσουν πότε η αποδεικτική φάση ξεκινάει για τους μαθητές. Είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στο θεώρημα⁴ και την εικασία (Σχήμα 4), η οποία μπορεί να φανεί χρήσιμη για τη διάκριση της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης (Pedemonte, 2007). Όπως εύστοχα επισημαίνει ο Balacheff (στο Καρατράσογλου, 2011, σελ 41), η επιχειρηματολογία είναι για την εικασία ότι και το μαθηματικό θεώρημα για την απόδειξη. Στην πραγματικότητα, μία εικασία μπορεί να προκύψει χωρίς την παρουσία οποιουδήποτε είδους επιχειρηματολογίας, προερχόμενη απευθείας από ένα σχήμα ή την διαίσθηση. Ιδανικά, η εικασία είναι μια δήλωση που συνδέεται με ένα σύνολο εννοιών και ορισμών μέσα στο οποίο η δήλωση είναι δυνητικά αληθής, όταν επιτρέπεται η κατασκευή ενός επιχειρήματος που να την ικανοποιεί. Η εικασία μετατρέπεται σε ένα έγκυρο επιχείρημα, όταν κάποιο μαθηματικό θεώρημα επιτρέπει την κατασκευή μιας απόδειξης που να το επαληθεύει. Συνεπώς, όταν μία δήλωση που εκφράζει μία εικασία επικυρώνεται μέσα από μια μαθηματική θεωρία, τότε μία απόδειξη έχει δομηθεί (Καρατράσογλου, 2011, σελ. 41).



Σχήμα 4 – Εικασία & Θεώρημα

(Larios-Ororio & Acuña-Soto, 2009, σελ.62)

⁴ Το θεώρημα ορίζεται ως ένα σύστημα τριών αλληλένδετων συνιστωσών: μια δήλωση, μία απόδειξη και μία μαθηματική θεωρία μέσα από την οποία η απόδειξη έχει νόημα (Mariotti, 2012).

Οι Larios-Osorio & Acuña-Soto (2009) υποστηρίζουν ότι:

Η θέση της γνωστικής ενότητας⁵ των θεωρημάτων είναι συναφής με αυτό το σχήμα αφότου η εικασία, το προϊόν της εξερεύνησης, γίνεται δεκτή ή απορρίπτεται διαμέσου της επιχειρηματολογίας και της παρατήρησης οι οποίες επιτρέπουν την κατασκευή της απόδειξης. Όταν αυτή η τελευταία έχει πραγματοποιηθεί, τότε η δήλωση που ξεκίνησε ως μια εικασία γίνεται ένα θεώρημα. (σελ.62)

Αναμφισβήτητο λοιπόν το να εικάζεις αποτελεί μια βασική δραστηριότητα. Χαρακτηριστικά η Mariotti (2012, σελ.166) αναφέρει: «Το να εικάζεις αποτελεί μία βασική δραστηριότητα στην οποία η επιχειρηματολογία και η απόδειξη πρέπει να συνδέονται...». Πολλοί ερευνητές επίσης έδειξαν πως η απόδειξη από μόνη είναι πιο προσιτή στους μαθητές αν η επιχειρηματολογική δραστηριότητα αναπτύσσεται για την κατασκευή μιας εικασίας. Γενικότερα, θεωρούμε πως η μετάβαση από την εικασία στην απόδειξη γίνεται μέσω της επιχειρηματολογίας. Επομένως, αξίζει να μελετήσουμε την απόδειξη, όχι μόνο ως τελικό προϊόν, αλλά να εξετάσουμε και τα ενδιάμεσα στάδια που την απαρτίζουν και αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι αυτής.

2.3 ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (DGEs)

2.3.1 Χρήση των DGEs στη μάθηση της Γεωμετρίας

Η γεωμετρία είναι ιδιαίτερα δύσκολη για τους μαθητές εξαιτίας της χρήσης διαγραμμάτων· ο συνδυασμός εμπειρικών στοιχείων, που παρέχονται από τα διαγράμματα και η απαίτηση των καθηγητών να καταφεύγουν μόνο σε παραγωγική σκέψη, μπερδεύει τους μαθητές (Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strasser, 2006). Εντούτοις, τα τελευταία χρόνια στους μαθητές παρέχονται ψηφιακά μέσα για τη μάθηση της Γεωμετρίας. Τα πιο συνήθη ψηφιακά μέσα που χρησιμοποιούν είναι τα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας ή DGEs.

Η συνεισφορά των DGEs στη διδασκαλία και τη μάθηση της Γεωμετρίας γίνεται κυρίως τώρα αντιληπτή, καθώς συνδέεται στενά με τη θεωρητική πλευρά της μάθησης, αλλά και με το δυναμικό χειρισμό των προβλημάτων κατασκευών. Η κυριότερη αρχή τους είναι να παρέχουν μία οικογένεια διαγραμμάτων, ως εκπρόσωπο ενός συνόλου γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεις αντί ενός στατικού διαγράμματος. Ένα από τα κίνητρα τους είναι να βοηθήσουν τους μαθητές να δουν τις γενικές πτυχές ενός στατικού διαγράμματος (Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strasser, 2006). Καθώς τα προβλήματα κατασκευής συνθέτουν το πυρήνα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με τον ερχομό των DGEs οι γεωμετρικές κατασκευές απέκτησαν μια νέα αναβίωση: το άτομο μπορεί να εξομοιώσει τη χρήση κανόνα και διαβήτη της κλασσικής Γεωμετρίας, μέσα από τη χρήση εικονικών εργαλείων που μπορούν να φέρουν γραμμές και κύκλους στην οθόνη (Mariotti, 2012). Θεωρώντας ένα DGE, ένα υποσύνολο εργαλείων είναι διαθέσιμο στο μενού που μπορεί να συσχετισθεί με τα αντίστοιχα εργαλεία κατασκευών Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

⁵ Ως γνωστική ενότητα (cognitive unity) ορίζεται η συνέχεια που υπάρχει μεταξύ της επιχειρηματολογίας ως διαδικασίας κατασκευής μιας εικασίας – πρότασης και της κατασκευής μιας απόδειξης (Garutti κ.ά στο Γιαννοπούλου, 2013).

Τέλος τα DGEs θεωρούνται ότι ευνοούν τη μάθηση της Γεωμετρίας καθώς απαιτούν δράσεις από τους μαθητές για την επίτευξη ενός στόχου και κατά τη διαδικασία αυτή «μαθαίνουν από τη συνεργασία και τον αναστοχασμό σχετικά με τη μορφή των αλληλεπιδράσεών τους» (learn by coordinating and reflecting upon the form of their interactions) (Hoyles στο Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strasser, 2006, σελ.291).

Η έρευνα που διεξάγουμε περιλαμβάνει δραστηριότητες από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, οι οποίες απαιτούν διερεύνηση και οι μαθητές να κάνουν εικασίες. Για το λόγο αυτό θα γίνει χρήση Περιβάλλοντος Δυναμικής Γεωμετρίας (DGEs), καθώς θεωρούμε πως κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών με την τεχνολογία προάγεται η κατανόηση μέσα από την αναπαράσταση θεωρητικών αντικειμένων.

2.3.2 Απόδειξη σε DGEs

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα και δύσκολα πεδία της έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι οι ανησυχίες για το πώς οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν μια απόδειξη μαθηματικών αλλά και το πώς μπορούμε να ενισχύσουμε τις αποδεικτικές διαδικασίες (Marrades & Gutierrez, 2000). Πρόσφατες μελέτες για τη βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης προτείνουν ενσωμάτωση διερευνητικών προσεγγίσεων, καθώς δίνουν αξία στο μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών. Η Hanna (στο Prusak, Hershkowitz & Schwarz, 2011) ισχυρίζεται ότι ο υψηλός και επίσημος ρόλος της απόδειξης δεν είναι πλήρως κατάλληλος για τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας στο σχολείο. Ειδικά στη γεωμετρία σε σχέση με τη μάθηση των αποδείξεων, μία ανεπίσημη προσέγγιση που περιλαμβάνει διερευνητικές δραστηριότητες (inquiry activities) γίνεται όλο και περισσότερο διάσημη.

Κατά συνέπεια, η έννοια της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά έχει αλλάξει δραματικά κατά τη διάρκεια του τελευταίου αιώνα, λόγω της ευαισθητοποίησης του τρόπου που γίνεται η απόδειξη στα μαθηματικά, αλλά και εν μέρει λόγω των παροχών των νέων τεχνολογιών, οι οποίες διευκολύνουν το πειραματισμό (Sinclair & Robutti, 2013). Αυτά τα ανοιχτά περιβάλλοντα μάθησης υποβάλλουν τους μαθητές σε μία συνεχή διαδικασία εξερεύνησης, εικασίας, εξήγησης, επαλήθευσης και αντίκρουσης δοκιμαστικών ισχυρισμών.

Ο Boero (1999) για να διαφοροποιήσει τη διαδικασία από το αποτέλεσμα της απόδειξης διακρίνει διαφορετικές φάσεις, δίνοντας με αυτόν τον τρόπο μία εικόνα των συνδυασμών εμπειρικών-επαγωγικών και υποθετικών-παραγωγικών βημάτων κατά την κατασκευή της μαθηματικής απόδειξης. Το μοντέλο, που αναφέρει ο Boero, περιγράφει την αποδεικτική διαδικασία ενός έμπειρου, αλλά θα μπορούσε επίσης να είναι επαρκές μοντέλο για να μάθουν να αποδεικνύουν. Οι πρώτες τέσσερις φάσεις θεωρούνται ιδιαίτερα σημαντικές για τους μαθητές, καθώς περιγράφουν τη διαδικασία εύρεσης μίας λύσης και την εύρεση στοιχείων για να είναι σωστή (Reiss, Heinze, Renkl & Groß, 2008).

Η πρώτη φάση που περιγράφεται σε αυτό το μοντέλο είναι η παραγωγή μίας εικασίας. Αυτή η φάση περιλαμβάνει την εξερεύνηση ενός προβλήματος που οδηγεί σε μία εικασία, καθώς επίσης και τον προσδιορισμό των επιχειρημάτων για την υποστήριξη των στοιχείων αυτής. Το στάδιο αυτό το ονομάζει «η ιδιωτική πλευρά του έργου των μαθηματικών» («the private side of

mathematicians' work»). Το έργο αυτό δε θα μοιραστεί δημοσίως στην κοινότητα των μαθηματικών, αλλά προφανώς μπορεί να γίνει βάση συζητήσεων με άλλους μαθηματικούς.

Η δεύτερη φάση ορίζεται ως η διατύπωση των δηλώσεων σύμφωνα με τις κοινές συμβάσεις κειμένων. Αυτή η φάση στοχεύει στη παροχή μίας ακριβούς διατυπωμένης εικασίας, ως βάση για όλες τις περαιτέρω δραστηριότητες. Μπορεί να αναθεωρηθεί κατά τις προσεχείς διαδικασίες, αλλά η αναθεώρηση αυτή θα έχει συνέπειες για τις περισσότερες δραστηριότητες που εκτελούνται από τον μαθηματικό.

Η τρίτη φάση συνδυάζει την εξερεύνηση της (ακριβώς διατυπωμένης) εικασίας, τον προσδιορισμό των κατάλληλων μαθηματικών επιχειρημάτων για την επικύρωσή της και την παραγωγή μίας ακατέργαστης αποδεικτικής ιδέας. Και αυτό αποτελεί μέρος του «ιδιωτικού έργου», αφού η εξερεύνηση θα μπορούσε για παράδειγμα να οδηγήσει σε λάθη ή τουλάχιστον σε προκαταρκτικές διατυπώσεις στα πλαίσια της απόδειξης.

Οι επόμενες τρεις φάσεις που ακολουθούν είναι οι μόνες που υπόκεινται σε επικοινωνία με το κοινό. Περιλαμβάνουν: η τέταρτη την επιλογή και το συνδυασμό συνεκτικών επιχειρημάτων σε μία παραγωγική αλυσίδα, η πέμπτη την οργάνωση αυτών των επιχειρημάτων σύμφωνα με τα πρότυπα των μαθηματικών και κάποιες φορές η έκτη την πρόταση της επίσημης/τυπικής απόδειξης.

Είναι προφανές, ότι η εκτέλεση της αποδεικτικής διαδικασίας κατά τις διαφορετικές φάσεις, εξαρτάται από ορισμένες προϋποθέσεις που αφορούν τη γνώση των μαθηματικών στοιχείων και διαδικασιών. Οι μαθητές που μαθαίνουν πώς να αποδεικνύουν, ίσως να μην έχουν αυτή τη γνώση και μπορεί να χρειάζονται ειδική βοήθεια όσον αφορά τα στοιχεία και τις διαδικασίες που εμπλέκονται. Επιπλέον, φαίνεται εύλογο να κάνουμε τους μαθητές να έχουν επίγνωση της αποδεικτικής διαδικασίας και των διαφορετικών φάσεων αυτής, προκειμένου να υποστηρίξουμε τη μάθηση της απόδειξης. Έτσι, τα περιβάλλοντα μάθησης για τη μαθηματική απόδειξη πρέπει να λαμβάνουν υπόψη και τις δύο πτυχές, τη διδασκαλία του σχετικού μαθηματικού περιεχομένου στην οποία τα προβλήματα απόδειξης βρίσκονται υπό εξέταση και τις διαδικασίες εξερεύνησης (Reiss, Heinze, Renkl & Groß 2008).

Οι Arzarello κ.ά. (1999) συμπύσσουν τις παραπάνω φάσεις σε δύο: τη διατύπωση μιας εικασίας και την κατασκευή μιας απόδειξης. Στην πρώτη φάση το άτομο διερευνά την κατάσταση και διατυπώνει μία εικασία, καθώς επίσης αναζητά στοιχεία (π.χ. ιδιότητες) που θα οργανώσει αργότερα, ενώ στη δεύτερη τα στοιχεία αυτά πρέπει να τοποθετηθούν σε σειρά σύμφωνα με τους κανόνες λογικής συνέπειας (Sinclair & Robutti, 2013).

Οι Baccaglini-Frank & Mariotti (2010), εντούτοις, σημειώνουν ότι ανάμεσα σ' αυτές τις δύο φάσεις υπάρχει ένα πρόβλημα κενού μεταξύ πειραματικού και θεωρητικού (experimental-theoretical gap problem), καθώς: αν και οι διαδικασίες παραγωγής εικασιών διευκολύνονται από τη δυναμική συνιστώσα, οι αποδείξεις πρέπει να κατασκευαστούν από τη θεωρία, η οποία στα παραδοσιακά μαθηματικά είναι στατική. Ωστόσο, θεωρούν ότι η χρήση των DGEs μπορεί να γίνει μία δυναμική γέφυρα ανάμεσα σε αυτές τις φάσεις. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ανακάλυψη των γεωμετρικών στοιχείων μέσω της εικασίας μπορεί να οδηγήσει σε ανεπίσημες και άτυπες αιτιολογήσεις του, γιατί οι εικασίες είναι αληθείς, θέτοντας έτσι τη βάση για την παραγωγική απόδειξη (Μιχαλοπούλου, 2012), τα DGEs φαίνεται να έχουν ιδιαίτερη σημασία, εφόσον η πρώτη φάση της διαδικασίας διαφέρει ριζικά από τα περιβάλλοντα χαρτί-μολύβι, το οποίο, με τη σειρά του, επηρεάζει τον τρόπο που εξελίσσεται η δεύτερη φάση (Sinclair & Robutti, 2013).

Η συνεισφορά ενός DGE στην αποδεικτική διαδικασία είναι ιδιαίτερα εμφανής κατά τη διάρκεια εξερεύνησης *ανοιχτών-κλειστών προβλημάτων* (open-close problems), καθώς η διαδικασία περιλαμβάνει το να κάνεις εικασίες (Mariotti, 2000). Ανοιχτό-κλειστό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα ή μία ερώτηση που εκφράζεται με μία μορφή, η οποία δεν υποδεικνύει την λύση ή την απάντηση. Συγκεκριμένα, είναι τα βήμα προς βήμα προβλήματα κατασκευής (step-by-step construction problems), που χαρακτηρίζονται από περιγραφή της σειράς των βημάτων κατασκευής, η οποία ζητείται από τους μαθητές να ακολουθήσουν για να παράγουν ένα δυναμικό σχήμα, το οποίο ακολουθείται από μία ανοιχτή ερώτηση, ζητώντας ρητά μία εικασία (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010).

Καθώς η λύση ερευνάται μέσω DGEs, αναμένεται από τον λύτη να εξερευνήσει δυναμικά τους σχηματισμούς που προκύπτουν. Για να λύσει κάποιος ένα πρόβλημα ανοιχτού-κλειστού τύπου, οι εικασίες που παράγονται συνοδεύονται και υποστηρίζονται από εξηγήσεις και επικυρώσεις, που διορθώνονται σε αυθόρμητα επιχειρήματα. Αυτό σημαίνει ότι ο λύτης πρέπει να ερμηνεύσει αντιληπτικά δεδομένα (perceptual data), τα οποία προέρχονται από την παρατηρούμενη οθόνη, καθώς το σχήμα σύρεται και μετατρέπεται σε μία γεωμετρική δήλωση. Συμπερασματικά, η διαδικασία της εξερεύνησης είναι παραγωγική, αν ο λύτης είναι ικανός να μετατρέπει αντιληπτικά δεδομένα σε μία υπό όρους σχέση μεταξύ γεωμετρικών ιδιοτήτων (Mariotti, 2012)

Ωστόσο, πολλοί είναι εκείνοι που υποστηρίζουν ότι τα DGEs εμποδίζουν την απόδειξη, καθώς οι μαθητές μπορεί να θεωρήσουν ότι τα γεγονότα είναι εμπειρικά εμφανή και δεν αισθάνονται την ανάγκη να παράξουν την απόδειξη. Όμως, πολλές έρευνες έχουν δείξει ότι οι εξερευνητικές δραστηριότητες στα DGEs, δεν θέτουν απαραίτητα σε κίνδυνο την ανάπτυξη παραγωγικής απόδειξης. Ο ρόλος των DGEs στην αποδεικτική διαδικασία εξαρτάται από τον βασικό στόχο της απόδειξης, όπως αυτός γίνεται αντιληπτός από καθηγητές και μαθητές. Ο De Villiers (1999) προτείνει, αντί να αναζητάμε την πεποίθηση που οι εμπειρικές μέθοδοι μπορούν να δώσουν, να καλούμε τους μαθητές να δεχθούν την απόδειξη και κατόπιν να τους ρωτάμε γιατί ισχύουν οι σχέσεις που βλέπουν. Για να απαντήσουν αυτήν την ερώτηση οι μαθητές, αναμένεται να βρουν μία λογική σύνδεση για την μετάβαση από την υπόθεση στη θέση.

Ας σημειωθεί ακόμη ότι ο ρόλος των εργαλείων που οι μαθητές έχουν στη διάθεσή τους σε ένα DGE μπορεί να γίνει γέφυρα ανάμεσα στο χωρο-γραφικό και θεωρητικό τρόπο που βλέπουμε τα διαγράμματα. Συγκεκριμένα, τα εργαλεία των DGEs μπορούν να συσχετισθούν με γεωμετρικά αξιώματα και θεωρήματα που απαρτίζουν τη θεωρία της Γεωμετρίας μέσα από την οποία θα πρέπει να αποδειχθεί η λύση του κάθε προβλήματος (Mariotti, 2012). Ορισμένα από αυτά μελετώνται στις επόμενες ενότητες.

Στη παρούσα εργασία θεωρούμε ότι για την υποστήριξη της μάθησης της απόδειξης πρέπει οι μαθητές να έχουν επίγνωση της αποδεικτικής διαδικασίας και των διαφορετικών φάσεων αυτής. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ανοιχτά-κλειστά ερωτήματα και απαιτούν χρήση λογισμικού. Πιστεύουμε ότι καθώς οι μαθητές εμπλέκονται με περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας, αναπτύσσουν ανεπίσημες προσεγγίσεις μέσα από τη διερεύνηση. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τις τρεις πρώτες φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας κατά Boero (1999), οι οποίες επηρεάζουν τον τρόπο που εξελίσσονται οι επόμενες.

2.3.3 Επιχειρηματολογία σε DGEs

Τις τελευταίες δεκαετίες οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών ανέπτυξαν εργαλεία τα οποία προσφέρουν συμμετοχή σε στρατηγικές που βασίζονται στην έρευνα και υποστηρίζουν την επιχειρηματολογία στη Γεωμετρία. Η παροχή νέων εργαλείων στη μάθηση της Γεωμετρίας συνεισφέρει στον επαναπροσδιορισμό των σχέσεων μεταξύ άτυπης επιχειρηματολογίας και απόδειξης. Τα εργαλεία αυτά σύμφωνα με τους Schwarz & Linchevski προωθούν την αύξηση και τον έλεγχο αντιθέσεων και ενθαρρύνουν τους μαθητές να συμμετάσχουν στην επιχειρηματολογία, καθώς η παρουσία τους στη δραστηριότητα παρέχει αντιπαραθέσεις, μεταξύ των προσδοκιών και των αντικρουόμενων στοιχείων που συγκεντρώθηκαν μέσω του ίδιου του ελέγχου (Schwarz & Linchevski στο Prusak, Hershkowitz & Schwarz, 2011). Μετά τη σύγκρουση που προκαλείται από τον έλεγχο, οι ομάδες των μαθητών μπορεί να αισθανθούν την υποχρέωση να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις εικασίες τους μέσω επιχειρηματολογικών διαδικασιών (Prusak, Hershkowitz & Schwarz, 2011). Τα DGEs αντιπροσωπεύουν μια κλάση εργαλείων για τον σκοπό αυτό (Prusak, Hershkowitz & Schwarz, 2011).

Οι Hanna κ.ά (2009) χαρακτηριστικά αναφέρουν πως:

Τα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας (DGEs) άλλαξαν ριζικά την ιδέα για το τι είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο. Τα DGEs μπορούν να χρησιμεύσουν ως πλαίσιο (context) για την παραγωγή εικασιών γύρω από τα γεωμετρικά αντικείμενα και έτσι να οδηγήσουν σε καταστάσεις παραγωγής απόδειξης. Συγκεκριμένα, μπορούν να παίξουν το ρόλο του διαμεσολαβητή στη μετάβαση από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη μέσω της «λειτουργίας συρσίματος», χάρη στην άμεση ανατροφοδότηση τους και στα σχήματα που δημιουργούνται στην οθόνη ως αποτέλεσμα των κινήσεων του συρσίματος. Η λειτουργία συρσίματος ανοίγει νέους δρόμους για τη θεωρητική γνώση σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον που έχει νόημα για τους μαθητές. Για παράδειγμα, αυτή μπορεί να εισαγάγει φαινομενικά άπειρα παραδείγματα για να υποστηρίξει μια εικασία ή μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές δείχνοντας παραδείγματα ή μεμονωμένα αντιπαραδείγματα σε μια δήλωση (π.χ. όταν μια συγκεκριμένη κατασκευή η οποία λειτουργεί για την κατασκευή ενός σχήματος εκφυλίζεται σε μεμονωμένες περιπτώσεις, παράγοντας ένα διαφορετικό σχήμα). Επιπλέον, καθώς σύρουν, οι μαθητές συχνά μεταβαίνουν από τα σχήματα στις έννοιες και από τους απαγωγικούς και επαγωγικούς στους παραγωγικούς τύπους, που τους βοηθούν να προχωρήσουν από το εμπειρικό στο θεωρητικό επίπεδο. Οι διάφοροι τύποι συρσίματος μπορούν να θεωρηθούν ως μια αντιληπτική αντίστοιχη των λογικών και αλγεβρικών σχέσεων. Στην πραγματικότητα, το σύρσιμο καθιστά τις σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων προσβάσιμες σε διάφορα επίπεδα: αντιληπτικά, λογικά και αλγεβρικά. (σελ. 1-xxiv – 1-xxv)

Οι Yerushalmy & Houde (1986) επίσης αναφέρουν πως η χρήση των DGEs καθιστά ικανή την εξέταση, τη γενίκευση, τη διεξαγωγή συμπεράσματος, την οικοδόμηση υποθέσεων/εικασιών γύρω από αυτό που θα πρέπει αργότερα να αποδειχτεί. Η χρήση των DGEs μπορεί ίσως να παρέχει ανατροφοδότηση (π.χ με το εργαλείο σύρσιμο το οποίο χρησιμεύει ως ένα εργαλείο ελέγχου υποθέσεων), η οποία επιτρέπει να σκεφτούν ξανά (rethinking) και να κάνουν νέες εικασίες για το δοσμένο πρόβλημα. Αξίζει να σημειώσουμε ότι, στην έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών υπάρχει ξεχωριστός ορισμός για τα επιχειρήματα, τα οποία παράγονται από μαθητές που χρησιμοποιούν δυναμικά εργαλεία. Συγκεκριμένα, ορίζεται ως instrumented argument, ένα επιχείρημα στο οποίο η εγγύηση προκύπτει χρησιμοποιώντας κάποιο από τα εργαλεία των DGEs (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010).

Τέλος, ο Arzarello (2008) σημειώνει πως οι διάφοροι τύποι, όπως η χρήση χαρτιού και μολυβιού ή επιλογή του συρσίματος με DGEs μπορούν να πυροδοτήσουν μια παραγωγική μετατόπιση από αυτό που αποκαλούμε διερεύνηση (enquiry), η οποία από τα φύση της είναι επιχειρηματολογική, στην αποδεικτική δραστηριότητα μέσω πλούσιων πολυτροπικών επιχειρηματολογικών διαδικασιών.

Συνεπώς με τη χρήση των εργαλείων DGEs στα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, οι καθηγητές των μαθηματικών μπορούν να εφαρμόσουν δραστηριότητες, οι οποίες να περιλαμβάνουν ανεπίσημους/άτυπους τρόπους για να κάνουν μαθηματικά και να γεφυρώσουν το κενό αυτών των τρόπων με αυτούς των επισήμων (Prusak, Hershkowitz, & Schwarz, 2011).

Στην έρευνα αυτή θα εξετάσουμε τη μετάβαση από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη μέσω της λειτουργίας συρσίματος. Για το σκοπό αυτό θα μελετήσουμε τη σχέση ανάμεσα σε σύρσιμο και επιχειρηματολογία, σημειώνοντας ποιοι τύποι συρσίματος συμμετέχουν, ως εγγύηση, άμεσα ή έμμεσα, στα επιχειρήματα που διατυπώνονται.

2.3.4 Σύρσιμο

Ένα από τα πιο βασικά εργαλεία των DGEs είναι το *σύρσιμο* (dragging). Οι Sinclair και Robutti (2013) το περιγράφουν ως το πιο βασικό και διακριτό εργαλείο των DGEs που επιτρέπει στους χρήστες να επιλέξουν ένα ή περισσότερα αντικείμενα και να τα κινήσουν συνεχόμενα στην οθόνη. Με το σύρσιμο μπορεί να αλλάξει η σχηματική πτυχή μιας κατασκευής (αναπαράσταση) αλλά όχι η εννοιολογική πτυχή (από τη στιγμή που όλες οι ιδιότητες διατηρούνται). Αυτή η διπλή φύση δεν εμφανίζεται στο στατικό περιβάλλον μολύβι-χαρτί. Δεδομένου ότι οι γεωμετρικές αποδείξεις αφορούν, θεωρητικά αντικείμενα -και όχι μόνο ειδικά σχέδια (drawings)- ο ρόλος που μπορεί να παίξει το σύρσιμο στη διαχείριση της διπλής φύσης σχηματική/εννοιολογική έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον (Sinclair & Robutti, 2013).

Στα DGEs το «σύρσιμο» γίνεται από το χρήστη μέσω του ποντικιού, που καθορίζει τη κίνηση αντικειμένων με δύο τρόπους:

- *Άμεση κίνηση (Direct motion)*: το αντικείμενο κινείται επειδή το σύρουμε
- *Έμμεση κίνηση (Indirect motion)*: το αντικείμενο κινείται, επειδή εξαρτάται από κάποιο που σύρουμε άμεσα (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010).

Γενικά, όταν κατασκευάζουμε ένα σχέδιο στα DGEs, το σχέδιο αυτό δεν περιλαμβάνει μόνο τα γεωμετρικά αντικείμενα που κατασκευάσαμε, αλλά επίσης και τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Τα σημεία τα οποία δεν κατασκευάζονται μέσω κάποιας σχέσης ονομάζονται ανεξάρτητα σημεία, ενώ αυτά που έχουν κατασκευαστεί μέσω μιας σχέσης ονομάζονται εξαρτημένα/σταθερά σημεία. Σύμφωνα με την Patsiomitou (2011):

Οι Hollebrands, Straeser & Laborde (2008) έχουν διακρίνει τρία είδη σημείων σε δυναμικό περιβάλλον: (α) ένα ελεύθερο σημείο που μπορεί να συρθεί άμεσα οπουδήποτε στο επίπεδο (βαθμός ελευθερίας 2)· (β) ένα σημείο σε ένα αντικείμενο που μπορεί να συρθεί μόνο σε αυτό το αντικείμενο (π.χ, κύκλος, γραμμή, τμήμα) (βαθμός ελευθερίας 1)· (γ) το σημείο που προκύπτει ως τομή και το οποίο δεν μπορεί να συρθεί ανεξάρτητα, αλλά μόνο

ακολουθώντας τις κινήσεις των αντικειμένων από τα οποία εξαρτάται (βαθμός ελευθερίας 0) (σελ.165). (σελ.4)

Στα περισσότερα περιβάλλοντα το κεφάλαιο «σύρσιμο» κατέχει σημαντικό ρόλο στην παραγωγή και τον έλεγχο εικασιών (Marrades & Gutierrez, 2000). Εξερευνώντας σχήματα, κινώντας τα, ψάχνοντας τους τρόπους με τους οποίους οι μορφές τους αλλάζουν (ή δεν αλλάζουν) το σύρσιμο επιτρέπει στον χρήστη να ανακαλύψει τις αμετάβλητες ιδιότητες (invariants). Η δυνατότητα του συρσίματος παρέχει ανατροφοδότηση στην εξερευνητική φάση και μ' αυτόν τον τρόπο παρέχει υποστήριξη στον ρόλο των αποδείξεων ως πραγματικές “εξηγήσεις” των εικασιών ή των ιδιοτήτων (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002). Το σύρσιμο, επίσης, αποτελεί κύριο χαρακτηριστικό στην ανάπτυξη εικασιών που προέρχονται από την εξερεύνηση ανοιχτών-κλειστών προβλημάτων κατασκευής σε DGEs. Επιπλέον, το εργαλείο σύρσιμο, λειτουργεί ως διαμεσολαβητής στις μεταβάσεις από το σχήμα στη θεωρία, αλλά και από τη θεωρία στο σχήμα (Μιχαλοπούλου, 2012).

Αντλώντας από τη βιβλιογραφία (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002· Baccaglioni-Frank & Mariotti, 2010) έχουν εντοπιστεί διαφορετικοί τύποι συρσίματος, τους οποίους οι μαθητές χρησιμοποιούν για διαφορετικούς σκοπούς κατά τη διάρκεια λύσης ανοιχτών προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας πως οι μαθητές χρησιμοποιούν το ποντίκι, καθώς επιλύουν προβλήματα σε DGEs, έχουν βρεθεί οι παρακάτω τύποι (modalities):

- *Περιπλανώμενο/Τυχαίο σύρσιμο (Wandering/Random dragging)*: κίνηση των σημείων βάσης της οθόνης τυχαία, εξετάζοντας/ψάχνοντας για ενδιαφέρουσες διατάξεις, σχηματισμούς ή κανονικότητες των σχημάτων.
- *Καθοδηγούμενο σύρσιμο (Guided dragging)*: σύρσιμο σημείων βάσης του σχεδίου με σκοπό να πάρει ένα συγκεκριμένο σχήμα.
- *Διατηρούμενο σύρσιμο (Maintaining dragging)*: σύρσιμο σημείου βάσης στην οθόνη, έτσι ώστε το σχήμα να διατηρεί μία συγκεκριμένη ιδιότητα.
- *Εικονικού τόπου σύρσιμο (Dummy locus dragging)*: κίνηση ενός βασικού σημείου, ούτως ώστε το σχέδιο να διατηρεί μία ιδιότητα που έχει ανακαλυφθεί· το σημείο το οποίο σύρεται ακολουθεί ένα τόπο ακόμα και αν οι μαθητές δεν το συνειδητοποιούν: ο τόπος δεν είναι εμφανής και δεν “μιλάει” στους μαθητές, οι οποίοι δεν συνειδητοποιούν πάντα ότι σέρνουν κατά μήκος ενός τόπου.
- *Σύρσιμο με ενεργό ίχνος (Dragging with trace activated)*: σύρσιμο σημείου βάσης με το ίχνος ενεργό.
- *Συνδεδεμένο σύρσιμο (Linked dragging)*: σύνδεση σημείου με ένα αντικείμενο και κίνηση αυτού πάνω στο αντικείμενο.
- *Σύρσιμο ελέγχου (Dragging test)*: σύρσιμο σημείου βάσης με σκοπό να ελέγξουν πότε το σχέδιο διατηρεί τις επιθυμητές ιδιότητες. Αν τις διατηρεί τότε το σχήμα περνάει τον έλεγχο, εάν όχι, το σχέδιο δεν κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις ζητούμενες γεωμετρικές ιδιότητες.

Σύμφωνα με τους Arzarello κ.ά (2002) το περιπλανώμενο, καθοδηγούμενο και διατηρούμενο σύρσιμο χρησιμοποιούνται για την ανακάλυψη και εξερεύνηση μιας δοσμένης δραστηριότητας. Το σύρσιμο εικονικού τόπου σηματοδοτεί την κατασκευή μιας εικασίας. Γενικώς, μπορεί να θεωρηθεί ως περιπλανώμενο σύρσιμο που βρίσκει τον τόπο του. Το ίχνος αναπαριστά, σε

εμπειρικό επίπεδο, έναν εικονικό τόπο, ο οποίος δεν είναι ακόμα εμφανής στο υποκείμενο. Σε αυτό το σημείο ο λύτης ξεκινάει να βλέπει μία συγκεκριμένη αμετάβλητη σχέση/ιδιότητα και προσπαθεί να την ερμηνεύσει με λογικούς όρους. Το σύρσιμο με ενεργό το ίχνος διαδέχεται το σύρσιμο εικονικού τόπου, καθώς κάνει εμφανή και ξεκάθαρο τον τόπο στην οθόνη. Το συνδεδεμένο σύρσιμο επιτρέπει στο υποκείμενο να ελέγξει την εικασία του και τέλος το σύρσιμο ελέγχου χρησιμοποιείται ως μέσον επικύρωσης της εικασίας και συγκεκριμένα εικασιών που παράγονται οπτικά ή από την κατασκευή. Συνεπώς, εξετάζοντας, το πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν το σύρσιμο, παρέχεται μία επίγνωση των γνωστικών διαδικασιών τους. Αναμφισβήτητα λοιπόν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το σύρσιμο αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό καθώς οι μαθητές εμπλέκονται με ανοιχτά κλειστά προβλήματα σε DGEs και σχετίζεται με τις φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας, όπως τις πρότεινε ο Boero (1999), οι οποίες μελετώνται σε αυτήν την έρευνα.

2.3.5 Μέτρηση

Η μέτρηση είναι ένα ισχυρό εργαλείο των περιβαλλόντων δυναμικής Γεωμετρίας. Επίσης είναι πολύπλοκη και απαιτεί κατάλληλη μεταχείριση και ερμηνεία, καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές με ποικίλους βαθμούς εμπιστοσύνης και ευαισθητοποίησης. Αναλόγως τον τρόπο που χρησιμοποιούν οι μαθητές το εργαλείο μέτρησης, μπορούν να κατασκευάσουν μαθηματικά νοήματα, να διατυπώσουν εικασίες, να τις ελέγξουν ή να τις χρησιμοποιήσουν για την κατασκευή μιας απόδειξης (Sinclair & Robutti, 2013).

Το εργαλείο της μέτρησης συνήθως χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τη δυναμική που παρέχεται μέσω του εργαλείου συρσίματος. Στο πλαίσιο των ανοιχτών προβλημάτων, ο συνδυασμός αυτός μπορεί να προσφέρει βαθιά γνώση των σχημάτων και ιδεών για τη διατύπωση των εικασιών.

Όπως και στην περίπτωση του συρσίματος, έτσι και οι διαφορετικές χρήσεις του εργαλείου μέτρησης μπορούν να αντιστοιχίζονται σε διαφορετική γνωστική δραστηριότητα, από το χωρο-γραφικό πεδίο (spatio-graphical field) στο θεωρητικό και αντίστροφα. Οι Sinclair & Robutti (2013) αναφέρουν ότι στην πραγματικότητα οι μαθητές μπορεί να χρησιμοποιούν το εργαλείο μέτρησης κάποιες φορές για να ανακαλύψουν και να εικάσουν, ενώ δεν είναι λίγες οι φορές που το χρησιμοποιούν για να επιβεβαιώσουν μία εικασία.

Ο Vadcard (1999) στη μελέτη του για τη χρήση του εργαλείου μέτρησης, διακρίνει δύο κατηγορίες μετρήσεων που πραγματοποιούν οι μαθητές καθώς εμπλέκονται με τα DGEs:

- *Διερευνητική μέτρηση (measure exploratoire)*, που χρησιμοποιείται κυρίως ως ευρετικό εργαλείο
- *Αποδεικτική μέτρηση (measure probatoire)*, που χρησιμοποιείται ως ελεγκτικό εργαλείο.

Επιπλέον, οι Olivero και Robutti (2007) χώρισαν τις παραπάνω κατηγορίες σε διάφορους τύπους (modalities). Η πρώτη κατηγορία σχετίζεται με την εναλλαγή από το χωρο-γραφικό πεδίο στο θεωρητικό και περιλαμβάνει τους εξής τύπους:

- *Περιπλανώμενη/τυχαία μέτρηση (Wandering measuring)*: οι μαθητές δεν έχουν ακριβείς ιδέες για τους σχηματισμούς, συνεπώς εξερευνούν τυχαία.
- *Καθοδηγούμενη μέτρηση (Guided measuring)*: οι μαθητές κάνουν μία καθοδηγούμενη εξερεύνηση του σχήματος εξετάζοντας συγκεκριμένες καταστάσεις τη μία πίσω από την άλλη.
- *Αντιληπτική μέτρηση (Perceptual measuring)*: οι μαθητές χρησιμοποιούν μετρήσεις ως μέσον ελέγχου της ορθότητας μίας αντίληψης. Έχουν τη διαίσθηση για μία ιδιότητα, αλλά δεν είναι σίγουροι για αυτήν. Συνεπώς χρησιμοποιούν μετρήσεις για να επαληθεύσουν την αντίληψή τους, μετασχηματίζοντας μία ποιοτική σχέση σε ποσοτική και παραμένοντας σε χωρο-γραφικό πεδίο. Οι μαθητές αυτοί ίσως να κάνουν κάποιο άλμα στο θεωρητικό πεδίο, αν μετασχηματίσουν αυτήν την αντίληψη σε εικασία.

Η δεύτερη κατηγορία σχετίζεται με την εναλλαγή από το θεωρητικό πεδίο στο χωρο-γραφικό όπου οι μαθητές χρειάζεται να ελέγξουν την ορθότητα μίας διαίσθησης, εικασίας ακόμα και απόδειξης. Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τους εξής τύπους:

- *Επικύρωση μέτρησης (Validation measuring)*: οι μαθητές χρησιμοποιούν μετρήσεις για να ελέγξουν αν η εικασία πρέπει να γίνεται δεκτή ή να απορρίπτεται. Αυτός ο τύπος είναι όμοιος με το σύρσιμο ελέγχου για τον έλεγχο μίας κατασκευής.
- *Αποδεικτική μέτρηση (Proof measuring)*: οι μαθητές, αφού έχουν κατασκευάσει μία απόδειξη, πηγαίνουν πίσω στο DGE προκειμένου να ελέγξουν ή να αποκτήσουν πεποίθηση (conviction). Ο συγκεκριμένος τύπος δεν χρησιμοποιείται συχνά από τους μαθητές. Σε αυτήν την περίπτωση, νέα πειράματα πραγματοποιούνται στο DGE και οι μετρήσεις χρησιμοποιούνται για να «επικυρώσουν» την απόδειξη, από πειραματικής πλευράς, ή να προβάλουν δεδομένα εναντίων της ίδιας της απόδειξης.

Η ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν το εργαλείο μέτρησης προδιαθέτει την προσέγγισή τους στην απόδειξη. Οι Sinclair και Robutti (2013) αναφέρουν πως αν διαβάζουν τις τιμές των μετρήσεων στα DGE, δίνοντάς τους μία σωστή προσέγγιση και ένα φάσμα αβεβαιότητας, τότε η μέτρηση θα μπορούσε να είναι χρήσιμη στην εναλλαγή από το χωρο-γραφικό στη θεωρία και αντίστροφα, διαφορετικά μπορεί να προκύψουν κάποια προβλήματα.

Στα DGE οι χρήστες μπορούν να κατασκευάσουν γεωμετρικά σχήματα σύμφωνα με τις ευκλείδειες ιδιότητες, αλλά δεν είναι ευκλείδειο επίπεδο, εφόσον δεν υπάρχει συνέχεια, αλλά πεπερασμένος αριθμός από pixels. Σε αυτό το επίπεδο οι υπολογισμοί δεν έχουν άπειρη ακρίβεια, αλλά είναι προσεγγιστικοί. Συνεπώς, η διπλή ερμηνεία της μέτρησης (στα μαθηματικά και τη φυσική) μπορεί να προκαλέσει παρανόηση ή και σύγκρουση στην αποδεικτική διαδικασία και στην αλληλεπίδραση ανάμεσα στις θεωρητικές και γραφικές πτυχές των σχημάτων (Sinclair & Robutti, 2013).

Ωστόσο, αν οι μαθητές γνωρίζουν τις επιστημολογικές επιπτώσεις της χρήσης του εργαλείου της μέτρησης σ' ένα περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας (ακρίβεια, pixels, κλπ), τότε μπορούν να δουν το σχήμα τους με θεωρητικό τρόπο και να το ερμηνεύσουν με τους περιορισμούς της χρήσης του λογισμικού. Από διδακτικής πλευράς, ο deVilliers (1997) έδειξε ότι κάποιος μπορεί επίσης να

χρησιμοποιήσει τους πεπερασμένους περιορισμούς ενός DGE για να σχεδιάσει ειδικές καταστάσεις, στις οποίες οι μαθητές δεν είναι απολύτως βέβαιοι, με σκοπό να τους «σπρώξει» στην ανάγκη για απόδειξη, ως μέσον για περεταίρω επιβεβαίωση.

Σε αυτήν την εργασία θεωρούμε ότι η μέτρηση μπορεί μεν να προκαλέσει παρανόηση, αλλά είναι ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για την επικύρωση των εικασιών που παράγουν οι μαθητές. Τέλος, θα σημειώσουμε τους τύπους μέτρησης που συμμετέχουν, ως εγγύηση, άμεσα ή έμμεσα στα επιχειρήματα που διατυπώνονται.

2.3.6 Άλλα εργαλεία

Εκτός από τα εργαλεία συρσίματος και μέτρησης, τα οποία είναι κεντρικά στα DGEs και έχουν μελετηθεί εκτενώς οι Sinclair και Robutti (2013) αναφέρουν ότι δεν είναι τα μόνα, αλλά υπάρχουν πολλά ακόμα εργαλεία στη διάθεση των μαθητευόμενων όπως είναι:

- ✓ *το ίχνος*, η σχεδίαση ίχνους μπορεί να είναι χρήσιμη για τη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο περιορίζεται η κίνηση ενός αντικειμένου ή για την κατασκευή μιας ενδιαφέρουσας καλλιτεχνικής δημιουργίας με βάση τα μαθηματικά.
- ✓ *ο τόπος*, στα DGEs, ο τόπος περιγράφει τη θέση ενός αντικειμένου, καθώς κάποιο σημείο (από το οποίο εξαρτάται το αντικείμενο) μετακινείται πάνω σε μία διαδρομή.
- ✓ *ο μετασχηματισμός*,
- ✓ *η κίνηση (animation)*,
- ✓ *τα παραμετρικά χρώματα*,
- ✓ *οι μακρο-κατασκευές*,
- ✓ *τα προσαρμοσμένα εργαλεία*, τα προσαρμοσμένα εργαλεία είναι εργαλεία που δημιουργούμε εμείς οι ίδιοι ή που δημιουργούν άλλοι χρήστες των DGEs και μας τα δίνουν. Ορίζοντας νέα προσαρμοσμένα εργαλεία, επεκτείνουμε τα ενσωματωμένα εργαλεία που μας παρέχουν τα DGEs. Καθώς κατασκευάζουμε ένα νέο προσαρμοσμένο εργαλείο έχουμε τη δυνατότητα να εμφανίσουμε το αρχείο εντολών αυτού. Το παράθυρο προβολή αρχείου εντολών εμφανίζει την αναγνώσιμη περιγραφή της μαθηματικής κατασκευής, που εκτελείται από κάποιο προσαρμοσμένο εργαλείο. Μπορούμε, επίσης, να χρησιμοποιήσουμε το αρχείο εντολών για να ελέγξουμε τις απαιτήσεις σε αντικείμενα-παραμέτρους ενός συγκεκριμένου προσαρμοσμένου εργαλείου ή για να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε αρχικά κάποιο εργαλείο. Η Mariotti (2000) θεωρεί ότι η εμφάνιση των βημάτων κατασκευής αντιπροσωπεύει ένα προσωρινό αντίγραφο της λογικής ιεραρχίας μεταξύ των ιδιοτήτων ενός σχήματος. Η προβολή του αρχείου εντολών επιτρέπει σε κάποιο να κατανοήσει τη διαδικασία κατασκευής και την εξέλιξή της και με αυτόν τον τρόπο υποστηρίζει τον έλεγχο των λογικών σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων που εμπλέκονται. Τέλος, ο δάσκαλος μπορεί με την εντολή αυτή να βρει ειδικά εργαλεία σημειωτικής

διαμεσολάβησης, που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της έννοιας της γεωμετρικής κατασκευής.

✓ η επανάληψη,

✓ τα γραφήματα κ.ά.

Τα εργαλεία αυτά όπως και τα περισσότερα εργαλεία των DGEs λειτουργούν σε συνδυασμούς. Το ίχνος και ο τόπος μπορούν να λειτουργήσουν μαζί, δίνοντας ως αποτέλεσμα τη διερευνητική απόδειξη μίας σχέσης και την επιβεβαιωμένη κατασκευή. Καθώς το ίχνος καθοδηγεί το μαθητή στη λύση του προβλήματος, ο τόπος, ο οποίος παίζει βασικό ρόλο στις απαγωγικές διαδικασίες (Baccaglioni-Frank & Mariotti, 2009), υποστηρίζει την εξερεύνηση σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του σχήματος ή σε σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του. Καθώς τα εργαλεία αυτά συμβάλλουν και συνεισφέρουν στις αποδεικτικές διαδικασίες αναμένουμε μέσα στα επόμενα χρόνια να γίνουν εκτενέστερες μελέτες γι' αυτά (Sinclair & Robutti, 2013). Στα πλαίσια της έρευνας αυτής, η χρήση των εργαλείων αυτών δε μελετάται.

Συνοψίζοντας, στην εργασία αυτή θα μελετηθούν οι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές και μαθήτριες Λυκείου διερευνούν και διατυπώνουν εικασίες καθώς επίσης και οι μεταβάσεις από αυτές τις εικασίες στην απόδειξη. Ειδικότερα, θα επικεντρωθούμε στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και στην αξιοποίηση περιβαλλόντων δυναμικής Γεωμετρίας DGEs. Μέσα από τη μελέτη της αλληλεπίδρασης των μαθητών και μαθητριών με το δυναμικό περιβάλλον και της ανάπτυξης εικασιών, καθώς και επαγωγικών, απαγωγικών και παραγωγικών συλλογισμών στοχεύουμε να αναδείξουμε, να καταγράψουμε και να κατηγοριοποιήσουμε την πολυπλοκότητα των μεταβάσεων προς μια απόδειξη.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 ΣΚΟΠΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ - ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο καταγράφεται η προϋπάρχουσα έρευνα γύρω από την απόδειξη και τις αποδεικτικές διαδικασίες, κυρίως στη Γεωμετρία, αλλά και οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές καθώς εμπλέκονται με αυτές. Η αποδεικτική διαδικασία περιλαμβάνει δύο φάσεις: τη διατύπωση μιας εικασίας και την κατασκευή μιας απόδειξης. Η μετάβαση όμως από την εικασία στην απόδειξη γίνεται μέσω της επιχειρηματολογίας. Πολλές μελέτες έχουν δείξει πως η επιχειρηματολογία και η απόδειξη είναι στενά συνδεδεμένες. Εντούτοις η μετάβαση από την επιχειρηματολογία προς την απόδειξη είναι πολλές φορές περίπλοκη και επίπονη για τους μαθητές. Συνεπώς θα πρέπει να βρεθεί τρόπος, παιδαγωγικός/διδακτικός, για την ανάπτυξη σύνθετων σχέσεων μεταξύ επιχειρηματολογίας, η οποία συχνά χαρακτηρίζεται ως άτυπη, και της απόδειξης, η οποία συχνά χαρακτηρίζεται ως τυπική. Για το σκοπό αυτό τα τελευταία χρόνια παρέχονται στους μαθητές ψηφιακά μέσα για τη μάθηση της Γεωμετρίας. Ορισμένα από αυτά είναι τα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας, γνωστά και ως DGEs τα οποία είναι εξοπλισμένα με μία πληθώρα εργαλείων. Τα εργαλεία των DGEs μπορούν να συσχετισθούν με γεωμετρικά αξιώματα και θεωρήματα που απαρτίζουν τη θεωρία της Γεωμετρίας μέσα από την οποία θα πρέπει να αποδειχθεί η λύση του κάθε προβλήματος. Συνεπώς με τη χρήση των εργαλείων DGEs στα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, οι καθηγητές των μαθηματικών μπορούν να εφαρμόσουν δραστηριότητες, οι οποίες να περιλαμβάνουν ανεπίσημους/άτυπους τρόπους για να κάνουν μαθηματικά και να γεφυρώσουν το κενό αυτών των τρόπων με αυτούς των επισήμων.

Συνθέτοντας όλα τα προηγούμενα αναδύθηκε η ανάγκη να μελετήσουμε το πώς οι μαθητές Λυκείου μπορούν να κατανοήσουν μια απόδειξη αλλά και πώς μπορούμε να ενισχύσουμε τις αποδεικτικές διαδικασίες στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αρχικά θεωρούμε πως για την υποστήριξη της μάθησης της απόδειξης οι μαθητές πρέπει να έχουν επίγνωση της αποδεικτικής διαδικασίας και των διαφορετικών φάσεων αυτής. Το γεγονός αυτό, πιστεύουμε, ότι μπορεί να συμβεί κατά την εμπλοκή τους με τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας καθώς αναπτύσσουν ανεπίσημες προσεγγίσεις μέσα από τη διερεύνηση, το οποίο συμβάλει στη γεφύρωση του κενού με τις επίσημες. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ανοιχτά-κλειστά ερωτήματα και απαιτούν χρήση DGEs, και συγκεκριμένα του Geometrer's Sketchpad. Επιπλέον, θεωρούμε την επιχειρηματολογία ως ανεπίσημη προσέγγιση και την απόδειξη ως την τυπική/επίσημη προσέγγιση και το γεγονός ότι στα μαθηματικά αυτές οι δύο είναι στενά συνδεδεμένες. Ως εκ τούτου, θα εξετάσουμε την απόδειξη ως επιχείρημα και θα ελέγξουμε αν μεταβάλλονται τα είδη εγγυήσεων, καθώς οι μαθητές εμπλέκονται με τις αποδεικτικές διαδικασίες σε DGEs. Για το σκοπό αυτό, θα μελετήσουμε τη σχέση ανάμεσα σε σύρσιμο και επιχειρηματολογία, σημειώνοντας τους τύπους συρσίματος ή/και μέτρησης συμμετέχουν, ως εγγύηση, στα επιχειρήματα που διατυπώνονται.

Προκειμένου να ερευνηθούν όλα αυτά διαμορφώθηκαν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποια εργαλεία Περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας χρησιμοποιούν οι μαθητές σε δραστηριότητες μετάβασης από το σχήμα στη θεωρία και ποια σε δραστηριότητες μετάβασης από τη θεωρία στο σχήμα;

2. Ποιους τύπους εγγυήσεων χρησιμοποιούν οι μαθητές, καθώς επιχειρηματολογούν, σε δραστηριότητες μετάβασης από το σχήμα στη θεωρία και ποιους σε δραστηριότητες μετάβασης από τη θεωρία στο σχήμα;
3. Πώς σχετίζονται τα εργαλεία Περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας με τους τύπους εγγυήσεων στις μεταβάσεις αυτές;

Για τη μελέτη αυτών των ερωτημάτων κατασκευάστηκαν δύο δραστηριότητες, τις οποίες ολοκλήρωσαν δύο ομάδες μαθητών. Οι συναντήσεις που πραγματοποιήθηκαν με τους συμμετέχοντες ηχογραφήθηκαν και οι διάλογοί τους αφού αναλύθηκαν, χρησιμοποιήθηκαν για τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της έρευνας.

3.2 Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Αρχικά πραγματοποιήθηκε πιλοτική έρευνα σε δύο μαθήτριες Α' τάξης Γενικού Λυκείου της Αθήνας, η οποία υλοποιήθηκε εκτός σχολικού χώρου και ωραρίου. Τα αποτελέσματα της πιλοτικής, δεν συμπεριλήφθηκαν στην ανάλυση, καθώς ο σκοπός της ήταν να συμβάλλει στη τελική διαμόρφωση της περιγραφής των κατασκευών και των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιήθηκαν στην κύρια έρευνα.

Μετά την πιλοτική ακολούθησαν ορισμένες τροποποιήσεις στη διατύπωση και στη σειρά εμφάνισης των ερωτημάτων, στα σημεία που έπρεπε να δοθεί περισσότερη έμφαση κατά τη διάρκεια της εξοικείωσης με το λογισμικό, καθώς επίσης και στη θέση των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή δεδομένων (η κάμερα αρχικά κατέγραφε από πίσω τους μαθητές). Στη συνέχεια ακολούθησε η κύρια έρευνα στην οποία συμμετείχαν τέσσερις μαθητές της Α' τάξης ενός Πειραματικού Λυκείου της Αθήνας και πραγματοποιήθηκε εντός σχολικού χώρου (αίθουσα) και ωραρίου το Μάιο του 2015. Οι συμμετέχοντες ήταν δύο κορίτσια και δύο αγόρια, οι οποίοι δήλωσαν οικειοθελώς την επιθυμία να συμμετάσχουν, ωστόσο ζητήθηκε και η σύμφωνη γνώμη γονέα, η οποία και δόθηκε.

Τόσο στη πιλοτική όσο και στην στη κύρια έρευνα πραγματοποιήθηκαν δύο συναντήσεις με την κάθε ομάδα. Η πρώτη είχε να κάνει με τη γνωριμία και την εξοικείωση των συμμετεχόντων με το λογισμικό ενώ οι άλλη με τις ειδικά διαμορφωμένες δραστηριότητες. Σε όλες τις περιπτώσεις οι μαθητές κάθονταν ανά δύο και είχαν μπροστά τους ένα υπολογιστή. Στον υπολογιστή ήταν εγκατεστημένα το λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας Geomrer's Sketchpad και το πρόγραμμα Hypercam 3. Πάνω στο θρανίο υπήρχαν το ποντίκι το οποίο ήταν στη μέση και επέλεγαν οι ίδιοι ποιος θα το κρατάει, ένα στυλό και ένα εγχειρίδιο που παρείχε βοήθεια σχετικά με το λογισμικό. Επιπλέον είχαν φτιαχτεί ειδικές κάρτες που περιλάμβαναν τη θεωρία που ήταν αναγκαία για να ολοκληρώσουν τις δραστηριότητες. Οι συμμετέχοντες δεν είχαν άμεση πρόσβαση σε αυτές αλλά τους παρέχονταν όταν ζητούσαν βοήθεια αναφορικά με τη θεωρία. Οι κάρτες αυτές κατασκευάστηκαν προς χρήση ως βοηθητικό υλικό, καθώς η συγκεκριμένη έρευνα δε μελετάει την ικανότητα απομνημόνευσης των θεωρημάτων από τη πλευρά των μαθητών αλλά την ικανότητα τους να τα εφαρμόζουν.

Στην πρώτη συνάντηση (γνωριμία – εξοικείωση με Geomrer's Sketchpad) δόθηκε στους συμμετέχοντες το φύλλο που περιλάμβανε τα βήματα κατασκευής και την ολοκλήρωση με

καθοδήγηση, καθώς κανένας από τους μαθητές δεν γνώριζε το συγκεκριμένο λογισμικό, αλλά και γενικά δεν είχε χρησιμοποιήσει ξανά κάποιο DGEs. Στη δεύτερη συνάντηση τα φύλλα με τις δραστηριότητες δόθηκαν ένα ένα. Το καθένα από αυτά περιλάμβανε είτε την κατασκευή είτε τα ερωτήματα. Συνολικά ολοκλήρωσαν έξι φύλλα εκ των οποίων το ένα αφορούσε τη γνωριμία – εξοικείωση, ενώ τα υπόλοιπα πέντε τις δραστηριότητες.

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι δεδομένα συλλέχθηκαν από όλες τις συναντήσεις. Ωστόσο, δεν χρησιμοποιήθηκαν για ανάλυση τα δεδομένα από την πιλοτική, αλλά και από τις συναντήσεις που πραγματοποιήθηκαν για την γνωριμία και την εξοικείωση με το λογισμικό. Ως εκ τούτου, αναλύθηκαν οι διάλογοι δύο συναντήσεων δύο ομάδων, οι οποίες αποτελούνταν από τους Βανέσσα και Σοφία και Άγγελο και Κοσμά. Τα ονόματα των μαθητών είναι πλασματικά και αληθεύουν μόνο ως προς το φύλο.

3.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Για την διερεύνηση των παραπάνω ερευνητικών ερωτημάτων διαμορφώθηκαν μία κατασκευή για την εξοικείωση των μαθητών με το Geometer's Sketchpad και δύο δραστηριότητες. Το φύλλα που δόθηκαν στους μαθητές και περιλαμβάνουν τα βήματα κατασκευής, την περιγραφή και τα ερωτήματα παρατίθενται παρακάτω.

3.3.1 Εξοικείωση

Αρχικά ζητείται από τους μαθητές να ακολουθήσουν κάποια βήματα για να φτιάξουν μία κατασκευή με σκοπό την εξοικείωσή τους με το λογισμικό.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα για να ολοκληρώσετε την ζητούμενη κατασκευή:

- ❖ Ανοίξτε το πρόγραμμα Geometer's Sketchpad  που βρίσκεται στην επιφάνεια εργασίας.
- ❖ Κατασκευάστε δύο σημεία.
- ❖ Ονομάστε τα σημεία αυτά Α και Β.
- ❖ Φέρετε το ευθύγραμμο τμήμα που να διέρχεται από τα σημεία Α και Β.
- ❖ Κατασκευάστε το μέσο του τμήματος ΑΒ και ονομάστε το Γ.
- ❖ Φέρετε κάθετη ευθεία στο τμήμα ΑΒ που να διέρχεται από το Γ.
- ❖ Ονομάστε την ευθεία αυτή (δ).

- ❖ Πάρτε ένα σημείο πάνω στην ευθεία (δ) και ονομάστε το Δ.
- ❖ Κατασκευάστε το τμήμα ΒΔ.
- ❖ Από το Α φέρτε παράλληλη στο τμήμα ΒΔ και ονομάστε την (ε).
- ❖ Ονομάστε Ε το σημείο τομής των ευθειών (δ) και (ε).
- ❖ Κρύψτε τις ευθείες (δ) και (ε).
- ❖ Κατασκευάστε τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ και ΕΑ.
- ❖ Μετρήστε τα τμήματα ΑΔ, ΔΒ, ΒΕ και ΕΑ.
- ❖ Κινείστε στο επίπεδο το σημείο Α.
- ❖ Κινήστε στο επίπεδο το σημείο Β.
- ❖ Κινήστε στο επίπεδο το σημείο Δ.
- ❖ Κινήστε στο επίπεδο το σημείο Ε.
- ❖ Ενεργοποιήστε το ίχνος του Α και κινήστε το ξανά στο επίπεδο.
- ❖ Απενεργοποιήστε τη σχεδίαση ίχνους του σημείου Α και σβήστε το ίχνος αυτού.
- ❖ Ενεργοποιήστε το ίχνος του Δ και κινήστε το ξανά στο επίπεδο.
- ❖ Απενεργοποιήστε τη σχεδίαση ίχνους του σημείου Δ και σβήστε το ίχνος αυτού.
- ❖ Με κέντρο το Γ και ακτίνα ΑΓ (ή ΒΓ) κατασκευάστε κύκλο.
- ❖ Ονομάστε (κ_1) τον κύκλο.
- ❖ Επιλέξτε ένα σημείο Ζ στο επίπεδο.
- ❖ Συγχωνεύστε το σημείο Ζ στον κύκλο (κ_1).
- ❖ Εμφανίστε όλα τα αντικείμενα που είχατε κρύψει.
- ❖ Επιλέξτε την κατασκευή σας.
- ❖ Ορίστε την ως νέο εργαλείο.
- ❖ Ονομάστε το εργαλείο και επιλέξτε να εμφανίζεται το αρχείο εντολών αυτού.
- ❖ Αποθηκεύστε το αρχείο ως ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ 1.
- ❖ Κάντε μία κατασκευή δική σας με τα εργαλεία που δείξαμε.

Βασικός στόχος αυτού του φύλλου είναι οι μαθητές να γίνουν ικανοί να κατασκευάζουν και να ονομάζουν σημεία, ευθύγραμμα τμήματα και ευθείες (παράλληλες ή κάθετες). Επίσης, να δουν τη λειτουργία του συρσίματος γενικά, αλλά και με ενεργό το ίχνος, να ξεχωρίζουν πότε ένα αντικείμενο είναι εξαρτημένο ή ανεξάρτητο, να μπορούν να κάνουν συγχώνευση σημείου σε αντικείμενο, αλλά και να γνωρίσουν τα προσαρμοσμένα εργαλεία.

3.3.2 Δραστηριότητα 1

Στη συνέχεια ακολουθεί η δραστηριότητα 1. Στην αρχή ζητείται από τους μαθητές να ακολουθήσουν κάποια βήματα για να φτιάξουν και πάλι μία κατασκευή. Στα βήματα αυτά θα κάνουν χρήση βασικών και απλών εργαλείων του Geometer's Sketchpad. Ουσιαστικά καλούνται να κατασκευάσουν και να ονομάσουν σημεία, τμήματα καθώς επίσης και ευθείες παράλληλες και κάθετες. Τέλος θα χρησιμοποιήσουν το εργαλείο συρσίματος μέσω του ποντικιού.

Δραστηριότητα 1

- Κατασκευάστε τρία σημεία A, B και Δ.
- Χαράξτε τα τμήματα που διέρχονται από αυτά τα σημεία.
- Από το σημείο B φέρτε την παράλληλη ευθεία της AΔ και ονομάστε την (ε).
- Από το σημείο Δ φέρτε την κάθετη ευθεία στην (ε) και ονομάστε την (δ).
- Ονομάστε Γ το σημείο τομής των δύο ευθειών (δ) και (ε).
- Κρύψτε τις ευθείες (δ) και (ε).
- Κατασκευάστε τα τμήματα BΓ και ΓΔ.
- ❖ Μετακινήστε στο επίπεδο το σημείο A σε διαφορετικές θέσεις και παρατηρήστε το ABΓΔ κάθε φορά. Ποια από τα γνωστά σας σχήματα μπορεί να προκύψουν;

- ❖ Μπορεί να προκύψει το ίδιο γεωμετρικό σχήμα για τις διαφορετικές θέσεις του A; Αν ναι, βρείτε τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν οι θέσεις αυτές για τις οποίες προκύπτει το ίδιο γνωστό σχήμα.

- -----
- ❖ Την απάντηση που δώσατε στο προηγούμενο ερώτημα, θα την παρουσιάζατε σ' ένα διαγώνισμα όπως είναι; Θα αλλάζατε κάτι;
- -----

Στο πρώτο ερώτημα της δραστηριότητας 1 οι μαθητές εισέρχονται στη διαδικασία της εξερεύνησης. Κινώντας το σημείο A, παρατηρούν ότι το τετράπλευρο ABΓΔ μπορεί να γίνει ένα γνωστό τους σχήμα το οποίο αναφέρουν, εκφράζοντας έτσι κάποιες εικασίες. Οι μαθητές στην Α' Λυκείου διδάσκονται τις ιδιότητες, τα κριτήρια και τα είδη παραλληλογράμμων, καθώς επίσης και τον ορισμό τραπέζιου. Τελειώνοντας τα βήματα, που πρέπει να ακολουθήσουν, οι μαθητές έχουν ήδη κατασκευάσει ένα γνωστό τους σχήμα, το τραπέζιο, εφόσον ΑΔ//ΒΓ. Ωστόσο, από τους μαθητές δεν αναμένουμε να είναι το πρώτο σχήμα που θα παρατηρήσουν. Θα προσπαθήσουν να φτιάξουν αρχικά ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή/και τετράγωνο. Αν είναι εξοικειωμένοι με τα παραλληλόγραμμο μπορεί να αναφέρουν το τετράγωνο ως μία ειδική περίπτωση του ρόμβου. Συνεπώς, οι δυνατές απαντήσεις που ενδέχεται να δώσουν οι μαθητές σε αυτήν την ερώτηση είναι: τραπέζιο, παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και ρόμβος. Η παρούσα ερώτηση στοχεύει μόνο στη διατύπωση αυτών των εικασιών, καθώς δεν ζητείται από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν κάποια επιχειρήματα για να τις υποστηρίξουν.

Στο δεύτερο ερώτημα της δραστηριότητας 1, ακολουθεί η απαγωγική διαδικασία. Χρησιμοποιώντας αρχικά το καθοδηγούμενο σύρσιμο (δηλαδή κινώντας το A με σκοπό το ABΓΔ να πάρει ένα συγκεκριμένο σχήμα) και στη συνέχεια άλλους τύπους συρσίματος, οι μαθητές καλούνται να γράψουν τις εικασίες τους με τη λογική μορφή «αν ... τότε», με μια μορφή δηλαδή η οποία είναι τώρα έτοιμη να αποδειχθεί. Η απαγωγή φαίνεται να είναι το κλειδί που τους επιτρέπει να καταλήξουν σε αυτή τη δήλωση αφού περιγράφεται ως μια απαραίτητη κίνηση μετά την οποία οι εικασίες διατυπώνονται και επιτρέπει την μετάβαση προς την απόδειξη (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2009).

Στο τρίτο ερώτημα της δραστηριότητας 1, οι μαθητές οδεύουν προς την αποδεικτική διαδικασία. Από τους συμμετέχοντες ζητείται να απαντήσουν ξανά την προηγούμενη ερώτηση, αλλά αυτή τη φορά σε ένα πιο αυστηρό πλαίσιο. Θα χρειαστεί να αιτιολογήσουν τις εικασίες τους μέσα από λογικά επιχειρήματα, τα οποία βασίζονται σε θεωρήματα και αξιώματα που έχουν διδαχθεί. Δηλαδή, θα γίνει η μετάβαση από το σχήμα στη θεωρία, μία μετάβαση η οποία πραγματοποιείται μέσα από απαγωγικές διαδικασίες και επιχειρηματολογίες. Βασικός στόχος αυτής της ερώτησης είναι οι μαθητές να αναγνωρίσουν την αναγκαιότητα της απόδειξης και να προσπαθήσουν να δώσουν μία μορφή αυτής.

3.3.3 Δραστηριότητα 2

Στη δεύτερη δραστηριότητα ζητείται από τους συμμετέχοντες να ανοίξουν ένα αρχείο Sketchpad, το οποίο περιλαμβάνει μία έτοιμη κατασκευή από κάποιο άλλο μαθητή και στη συνέχεια να κινήσουν και πάλι το σημείο A. Η διαφορά αυτού του σχήματος με το προηγούμενο είναι πως η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ πράγμα που συνεπάγεται πως η γωνία Α είναι πάντα ορθή.

Η δραστηριότητα αυτή επιλέχθηκε, διότι θέλαμε οι μαθητές να κάνουν χρήση προσαρμοσμένων εργαλείων με εμφάνιση του αρχείου εντολών.

Δραστηριότητα 2

Ανοίξτε το αρχείο Κατασκευή 1 του Sketchpad από την επιφάνεια εργασίας. Προσπαθώντας να λύσει τη δραστηριότητα 1 ένα μαθητής της Α' Λυκείου κατέληξε σε αυτή τη κατασκευή.

- ❖ Μετακινήστε στο επίπεδο το σημείο Α σε διαφορετικές θέσεις και παρατηρήστε το ΑΒΓΔ κάθε φορά. Ποια από τα γνωστά σας σχήματα μπορεί να προκύψουν;

- ❖ Τι διαφορετικό ισχύει σε σχέση με την προηγούμενη δραστηριότητα; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει;

Στο πρώτο ερώτημα της δραστηριότητας 2, όπως και στο πρώτο ερώτημα της προηγούμενης δραστηριότητας, οι μαθητές εισέρχονται στη διαδικασία της εξερεύνησης. Κινώντας το σημείο Α παρατηρούν ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ μπορεί να γίνει ένα γνωστό τους σχήμα. Η παρούσα ερώτηση έχει ως στόχο οι συμμετέχοντες να πραγματοποιήσουν μία εικασία χωρίς να χρειάζεται να την αιτιολογήσουν.

Στο δεύτερο ερώτημα της δραστηριότητας 2 θα πρέπει να επικυρώσουν την εικασία που έχουν κάνει, χρησιμοποιώντας κατάλληλα μαθηματικά επιχειρήματα. Θα προβληματιστούν σχετικά με τη διαδικασία κατασκευής και θα γίνει καθοδήγηση για να χρησιμοποιήσουν τα προσαρμοσμένα εργαλεία με εμφάνιση του αρχείου εντολών. Με αυτήν την επιλογή θα έχουν τη δυνατότητα να βλέπουν βήμα προς βήμα την κατασκευή του άλλου μαθητή. Κατ' αυτόν τον τρόπο θα γίνει η μετάβαση από τη θεωρία στο σχήμα αυτή τη φορά, η οποία και σε αυτήν την περίπτωση πραγματοποιείται μέσα από απαγωγικές διαδικασίες και επιχειρηματολογίες.

3.4 ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η συλλογή δεδομένων στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε με πολλaplούς τρόπους. Καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου. Επίσης, υπήρχε συσκευή ηχογράφησης ανάμεσα στους μαθητές, στην οποία αποθηκεύονταν οι διάλογοί τους. Επιπλέον απέναντι τους υπήρχε κάμερα η οποία βιντεοσκοπούσε αντιδράσεις, χειρονομίες κλπ. Στον υπολογιστή ήταν εγκατεστημένο το Hypercam 2 το οποίο κατέγραφε την αλληλεπίδραση των μαθητών με το λογισμικό Geometer's Sketchpad. Τέλος, δεδομένα συλλέχθηκαν και από τα φύλλα δραστηριοτήτων που δόθηκαν στους μαθητές, τα οποία απαντήθηκαν γραπτώς.

3.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στη συγκεκριμένη έρευνα είναι μελέτη περίπτωσης, εφόσον ο σκοπός της είναι η λεπτομερής εξέταση και η διεξαγωγή συμπερασμάτων για τους συμμετέχοντες χωρίς να γίνεται οποιαδήποτε γενίκευση.

Την ολοκλήρωση της έρευνας διαδέχτηκε η απομαγνητοφώνηση των ηχογραφημένων διαλόγων. Οι διάλογοι αυτοί οργανώθηκαν σε έντυπη μορφή, στην οποία συμπεριλαμβάνονταν επιπλέον ο αριθμός των σειρών και η διάρκεια των διαλόγων, χωρισμένη ανά πέντε λεπτά, καθώς επίσης και παρατηρήσεις που είτε είχαν κρατηθεί από σημειώσεις πεδίου είτε καταγράφηκαν κατά την απομαγνητοφώνηση και είχαν ρόλο κυρίως διευκρινιστικό. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα αρχεία του Hypercam 2, δίπλα στους διαλόγους προστέθηκε ένα πεδίο, στο οποίο καταγράφονταν οι τύποι συρσίματος⁶ και μέτρησης που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές, καθώς εμπλέκονταν με τις δραστηριότητες. Κατόπιν αναλύθηκαν τα επιχειρήματα των μαθητών χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Toulmin (1993) για τα επιχειρήματα. Στην περίπτωση που οι μαθητές θεωρούσαν κάτι δεδομένο χωρίς να προκύπτει από τις δραστηριότητες ή από αυτά που τους είχαν δοθεί στο σχήμα του Toulmin στην κατηγορία δεδομένα βάζαμε ερωτηματικά (;;;)⁷. Στο επόμενο στάδιο κατηγοριοποιήθηκαν οι φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας στις οποίες μετέβαιναν οι μαθητές, καθώς εμπλέκονταν με την πρώτη δραστηριότητα χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Boero (1999). Ακόμα, προστέθηκε μία στήλη η οποία περιλάμβανε τα είδη των εγγυήσεων, όπως τις κατηγοριοποιούν οι Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007), που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές, καθώς επιχειρηματολογούσαν. Από τις στήλες αυτές, δημιουργήθηκαν δύο πίνακες για κάθε δραστηριότητα⁸ και για την κάθε ομάδα ξεχωριστά, οι οποίοι περιλαμβάνουν, με νούμερα, ο πρώτος τύπους συρσίματος και ο δεύτερος τους τύπους εγγυήσεων. Τέλος, για τη κάθε ομάδα και δραστηριότητα κατασκευάστηκε και ένας τρίτος πίνακας, στον οποίο παρουσιάζεται, και πάλι με νούμερα, η κοινή εμφάνιση των εργαλείων Sketchpad (και κυρίως των τύπων συρσίματος) και των τύπων εγγυήσεων.

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, δημιουργήθηκε ένα συνθετικό μοντέλο το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω και χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση της πρώτης δραστηριότητας. Για την ερμηνεία του μοντέλου αυτού δημιουργήθηκε ο κάτωθι πίνακας.

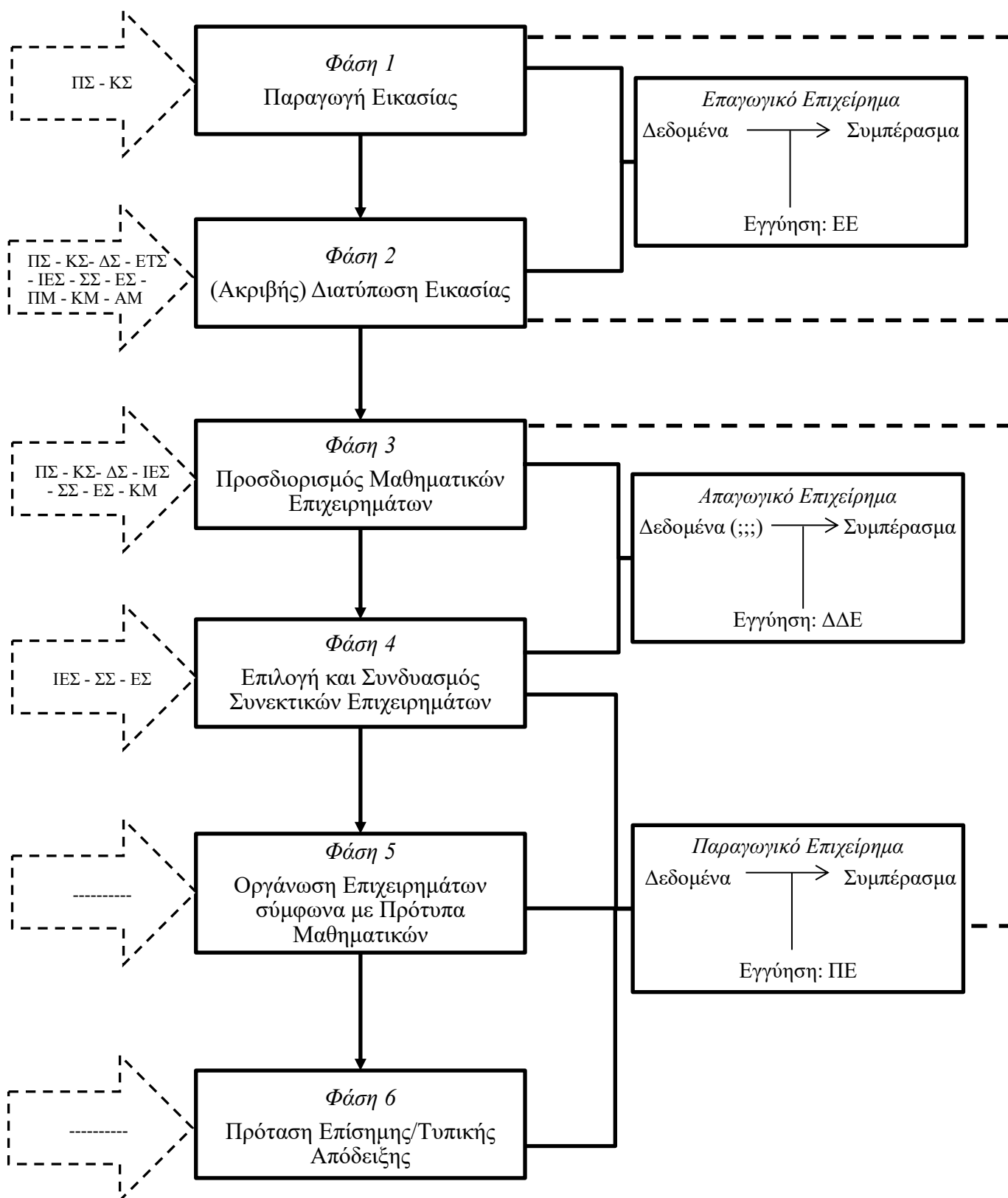
⁶ Επειδή στη συγκεκριμένη έρευνα οι μαθητές άλλαζαν συχνά σχήμα, την πρώτη φορά που κατασκεύαζαν εσκεμμένα ένα συγκεκριμένο σχήμα, το κατηγοριοποιούσαμε ως καθοδηγούμενο σύρσιμο. Αν στη συνέχεια το σχήμα αυτό το έσυραν χωρίς να αλλάξει η σχηματική πτυχή του, το κατηγοριοποιούσαμε ως διατηρούμενο σύρσιμο.

⁷ Τα συγκεκριμένα επιχειρήματα θεωρούνται ως απαγωγικά, καθώς οι μαθητές κατέληγαν σε συμπέρασμα που επιτρέπει την κατασκευή ενός ισχυρισμού από ένα παρατηρούμενο γεγονός. Οι μαθητές θεωρούσαν ως δεδομένα γεγονότα που παρατηρούσαν στο περιβάλλον Geometer's Sketchpad.

⁸ Στη πρώτη δραστηριότητα (για τους δύο πρώτους πίνακες κάθε ομάδας) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ανά φάση σύμφωνα με το Boero (1999). Στη πρώτη δραστηριότητα, επίσης, υπήρξαν επιχειρήματα τα οποία δεν μπορούσαν να κατηγοριοποιηθούν σε κάποια φάση.

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑ	ΕΡΜΗΝΕΙΑ
ΠΣ	Περιπλανώμενο Σύρσιμο
ΚΣ	Καθοδηγούμενο Σύρσιμο
ΔΣ	Διατηρούμενο Σύρσιμο
ΕΤΣ	Εικονικού Τόπου Σύρσιμο
ΙΕΣ	Ίχνος Ενεργό Σύρσιμο
ΣΣ	Συνδεδεμένο Σύρσιμο
ΕΣ	Ελέγχου Σύρσιμο
ΠΜ	Περιπλανώμενη Μέτρηση
ΚΜ	Καθοδηγούμενη Μέτρηση
ΑΜ	Αντίληπτική Μέτρηση
ΕΜ	Επικύρωσης Μέτρηση
ΔΔΕ	Δομική Διαισθητική Εγγύηση (ή Απαγωγική): Βλέπουν μόνο ένα σχηματισμό χωρίς να τον μεταβάλλουν και καταλήγουν σε ένα συμπέρασμα. Προσπαθούν να βρουν θεώρημα και να εξηγήσουν από τι προκύπτει το συμπέρασμα χωρίς να υπάρχουν δεδομένα.
ΕΕ	Επαγωγική Εγγύηση: Χρησιμοποιώντας το σύρσιμο παρατηρούν διαφορετικά σχήματα ή το ίδιο σχήμα σε διαφορετικές θέσεις και καταλήγουν σε ένα συμπέρασμα.
ΠΕ	Παραγωγική Εγγύηση: Η εγγύηση προκύπτει από τη θεωρία που έχουν διδαχτεί.

Πίνακας 1 – Ερμηνεία Μοντέλου Ανάλυσης 1^{ης} Δραστηριότητας



Σχήμα 5 – Μοντέλο Ανάλυσης 1^{ης} Δραστηριότητας

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το κεφάλαιο αυτό περιγράφει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα δεδομένα της έρευνας που διεξήχθη σε δύο ομάδες μαθητών της Α΄ Λυκείου. Αρχικά, καταγράφονται τα κρίσιμα συμβάντα που σχετίζονται με τη πρώτη δραστηριότητα σύμφωνα με το Σχήμα 5 που αποτελεί το μοντέλο ανάλυσης. Κατόπιν στη δεύτερη δραστηριότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα, τα οποία δείχνουν πως μετασχηματίζεται ο ρόλος του συρσίματος, όταν οι μαθητές κάνουν χρήση των προσαρμοσμένων εργαλείων με εμφάνιση του αρχείου εντολών. Τέλος, παρατίθενται τρεις πίνακες στους οποίους αποτυπώνεται η συσχέτιση των δυναμικών εργαλείων και της επιχειρηματολογίας.

4.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1^{ης} ΟΜΑΔΑΣ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1^η

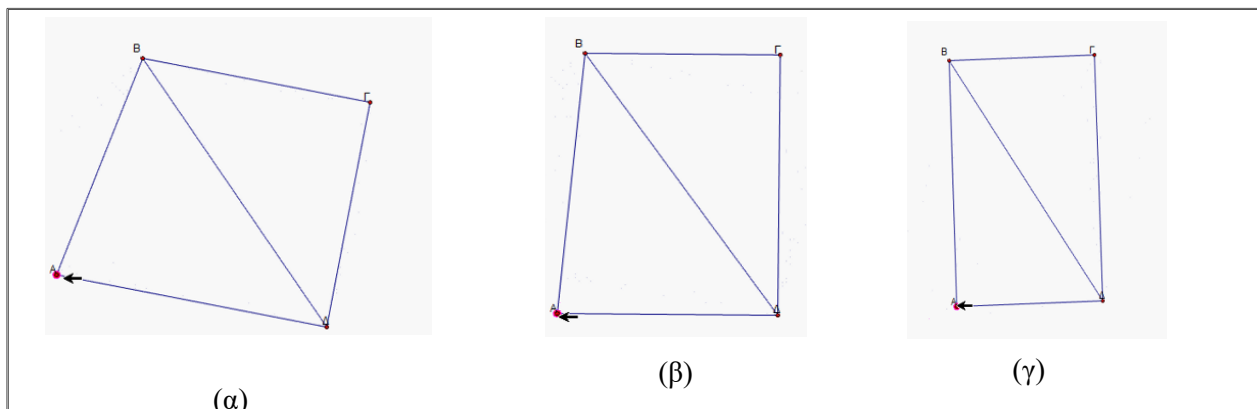
Η πρώτη ομάδα μαθητών αποτελούνταν από δύο κορίτσια, τη Βανέσσα και τη Σοφία μαθήτριες της Α΄ Λυκείου. Οι μαθήτριες δεν ήταν εξοικειωμένες με το λογισμικό και ως εκ τούτου υπάρχουν μεγάλα χρονικά διαστήματα στα οποία δεν χρησιμοποιούν καθόλου το λογισμικό παρά μόνο κοίταζαν την οθόνη.

4.1.1 Φάση 1 – Παραγωγή Εικασίας

Η πρώτη φάση για τις μαθήτριες ξεκίνησε και ολοκληρώθηκε κατά την ενασχόληση τους με το πρώτο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας. Στην αρχή αυτής της φάσης η Σοφία διάβαζε την εκφώνηση και κρατούσε το φύλλο δραστηριοτήτων, ενώ η Βανέσσα είχε το ποντίκι και αφού έφτιαξε την κατασκευή στη συνέχεια έσυρε το σημείο Α. Οι δύο μαθήτριες άλλαξαν το ποντίκι και έσυρε πλέον η Σοφία στα μέσα της φάσης. Οι μαθήτριες χρησιμοποίησαν μόνο περιπλανώμενο σύρσιμο για να εξετάσουν τα διαφορετικά σχήματα που προκύπτουν, ενώ οι εγγυήσεις των επιχειρημάτων τους ήταν επαγωγικές και ως εκ τούτου τα επιχειρήματά τους χαρακτηρίστηκαν ως επαγωγικά. Για κάθε ένα από τα σχήματα που αποτυπώθηκαν από τις μαθήτριες, με τη βοήθεια του Hypercam 2, παρατίθενται φωτογραφίες σε τρία διαφορετικά στάδια. Το τελευταίο στάδιο περιέχει το σχήμα για το οποίο οι μαθήτριες διατύπωναν το επιχείρημά τους.

Τα σχήματα που διέκριναν και κατέγραψαν ήταν:

i) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

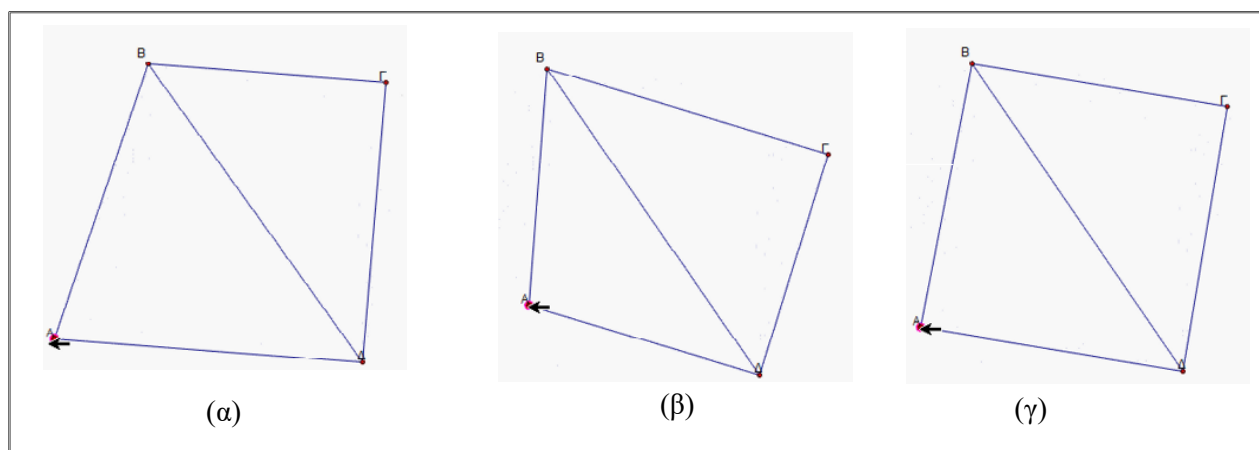


Εικόνα 1 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Σ: Μετακινήστε στο επίπεδο το σημείο Α σε διαφορετικές θέσεις και παρατηρήστε το ΑΒΓΔ κάθε φορά. Ποια από τα γνωστά σας σχήματα μπορεί να προκύψουν;... Κούνα το Α και θα δούμε. Βα: Τετράγωνο. Ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο δεν το βλέπω. Σ: Άρα γίνεται ορθογώνιο.	Περιπλανώμενο Σύρσιμο	

Πίνακας 2 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1^η Φάση : 1^η Ομάδα)

ii) Τετράγωνο

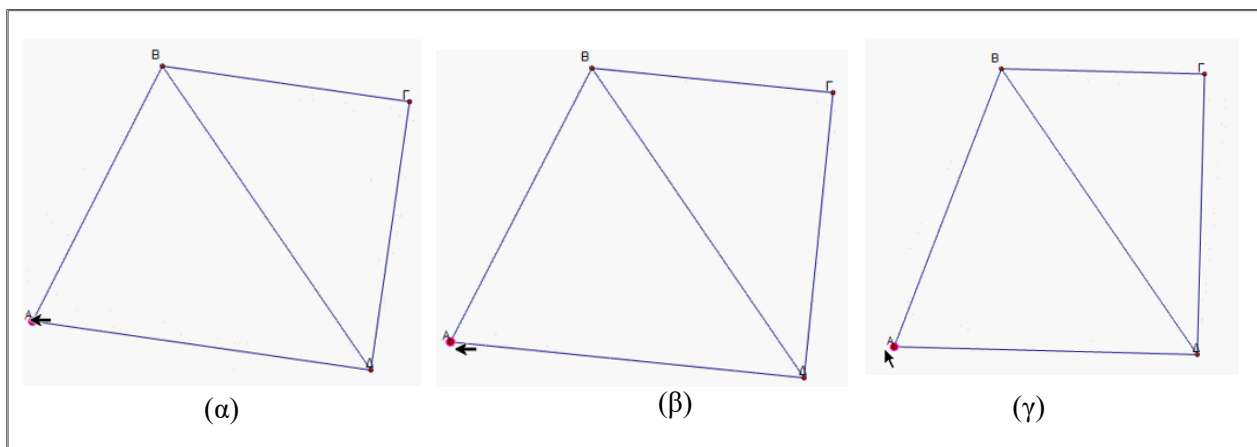


Εικόνα 2 – Τετράγωνο (1^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Πάρε το ποντίκι εσύ. (Παύση 23'') Και ρόμβος δεν μπορεί να γίνει; Βασικά με τετράγωνο μοιάζει αυτό. Σ: Ναι. Βα: Να γράψω και τετράγωνο; Σ: Ναι... Ου κοίτα είναι σαν το... δισδιάστατο. Τέλειο;	Περιπλανώμενο Σύρσιμο	

Πίνακας 3 – Τετράγωνο (1^η Φάση : 1^η Ομάδα)

iii) Τραπεζίο

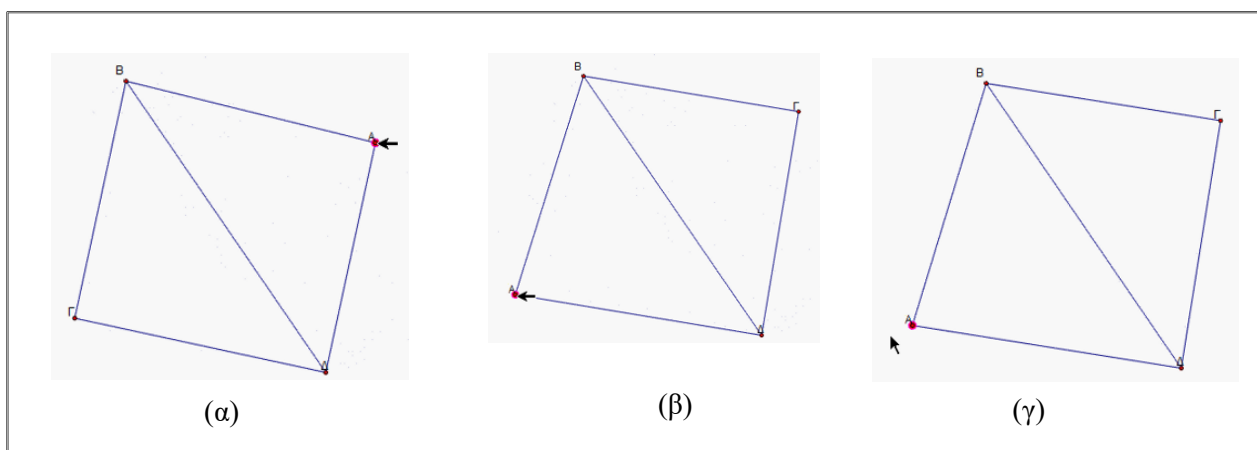


Εικόνα 3 – Τραπεζίο (1^η Φάση : 1^η Ομάδα)

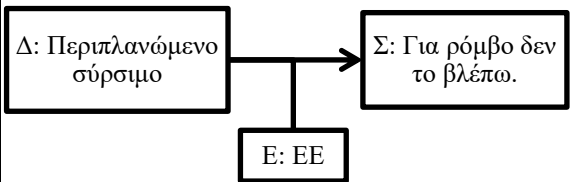
Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Αυτό μπορεί να είναι τραπέζιο όμως. Ε; Τραπεζίο ωραιότατο.	Περιπλανώμενο Σύρσιμο	Δ: Περιπλανώμενο σύρσιμο E: EE → Σ: Τραπεζίο ωραιότατο
Σ: Ναι.		

Πίνακας 4 – Τραπεζίο (1^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Τέλος οι μαθήτριες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το ΑΒΓΔ δε μπορεί να γίνει ρόμβος:



Εικόνα 4 – Ρόμβος (1^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Και αυτό τι είναι;	Περιπλανώμενο Σύρσιμο	
Σ: Κοίτα πώς πάει.		
Βα: Για ρόμβο;		
Σ: Για ρόμβο δεν το βλέπω. Δε το κόβω ούτε καν.		
Βα: Δεν νομίζω ότι γίνεται κάτι άλλο.		
Σ: Όχι δε νομίζω να γίνεται κάτι άλλο.		

Πίνακας 5 – Ρόμβος (1^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Παρατηρούμε πως με τη βοήθεια του Geometer's Sketchpad και συγκεκριμένα με το περιπλανώμενο σύρσιμο οι μαθήτριες κατάφεραν να εξερευνήσουν το πρόβλημα, να διατυπώσουν εικασίες και να προσδιορίσουν επιχειρήματα για την υποστήριξη των στοιχείων αυτών, σύμφωνα με τη πρώτη φάση της αποδεικτικής διαδικασίας κατά Boero (1999). Επιπλέον, κατέγραψαν σχεδόν όλες τις σχηματικές πτυχές που αναμέναμε κατά τη διαμόρφωση των δραστηριοτήτων. Ωστόσο, δεν βλέπουν το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση του ορθογωνίου και του ρόμβου και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να θεωρούν ότι το σχήμα δε μπορεί να γίνει ρόμβος.

4.1.2 Φάση 2 – (Ακριβής) Διατύπωση Εικασίας

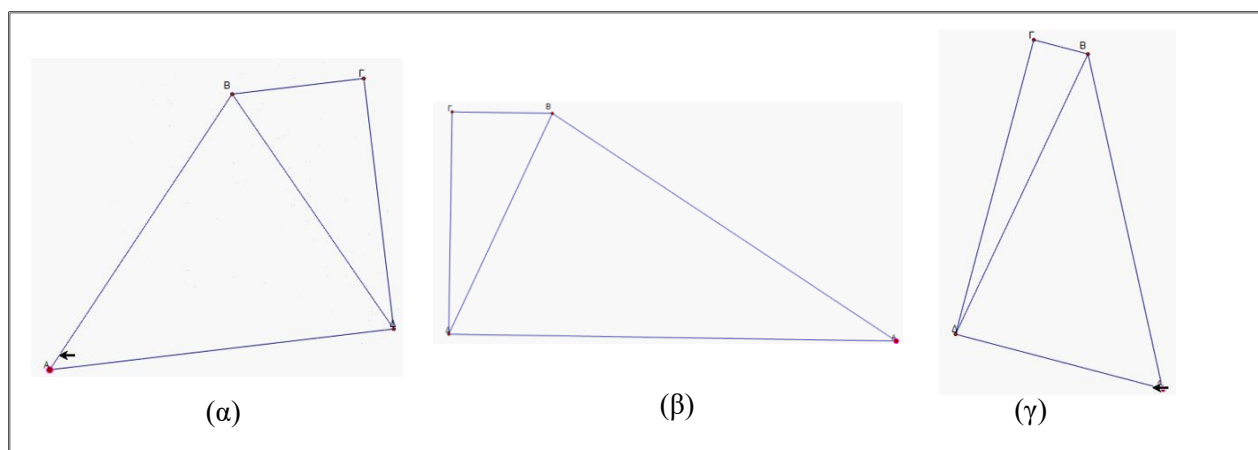
Η δεύτερη φάση για τις δύο μαθήτριες ξεκίνησε κατά ενασχόλησή τους με το πρώτο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας και ολοκληρώθηκε στα μισά περίπου του δεύτερου ερωτήματος. Στην αρχή αυτής της φάσης το ποντίκι το κρατούσε η Σοφία και η Βανέσσα έγραφε στο φύλλο δραστηριότητας. Λίγο πριν τη μέση άλλαξαν, και σε όλη την υπόλοιπη διάρκεια μέχρι και την ολοκλήρωσή της το ποντίκι εναλλασσόταν. Οι δύο μαθήτριες χρησιμοποίησαν όλους τους τύπους συρσίματος, εκτός το περιπλανώμενο, με το καθοδηγούμενο σύρσιμο να υπερέχει των υπολοίπων. Επιπλέον, έκαναν χρήση των τύπων του εργαλείου μέτρησης και συγκεκριμένα των περιπλανώμενη, καθοδηγούμενη και αντιληπτική με τη καθοδηγούμενη μέτρηση να υπερέχει και αυτή των υπολοίπων. Σε αυτή τη φάση οι εγγυήσεις τους ήταν δομικές διαισθητικές, επαγωγικές, αλλά και παραγωγικές και κατά συνέπεια τα επιχειρήματά τους χαρακτηρίστηκαν ως απαγωγικά, επαγωγικά και παραγωγικά. Αξίζει να σημειωθεί, ότι σε αυτήν τη φάση οι μαθήτριες πρόσθεσαν ακόμη μία σχηματική πτυχή, ως απάντηση του πρώτου ερωτήματος, αυτή του ορθογωνίου τραπέζιου. Όπως και στην προηγούμενη φάση, ομοίως και σε αυτήν παρατίθενται φωτογραφίες σε τρία διαφορετικά στάδια με το τελευταίο στάδιο να περιέχει το σχήμα για το οποίο οι μαθήτριες διατύπωναν το επιχειρήμα τους.

Σε γενικές γραμμές τα σχήματα με τα οποία ασχολήθηκαν οι δύο μαθήτριες στη δεύτερη φάση ήταν:

- Ορθογώνιο τραπέζιο

Σε αυτή τη φάση οι μαθήτριες αναγνώρισαν το ορθογώνιο τραπέζιο ως μια νέα σχηματική πτυχή του ΑΒΓΔ. Επίσης, έδωσαν τον ορισμό αυτού, αλλά δεν σημείωσαν το κοινό

χαρακτηριστικό των θέσεων του Α για τις οποίες το ΑΒΓΔ παραμένει ορθογώνιο, κάτι που έγινε στην επόμενη φάση.



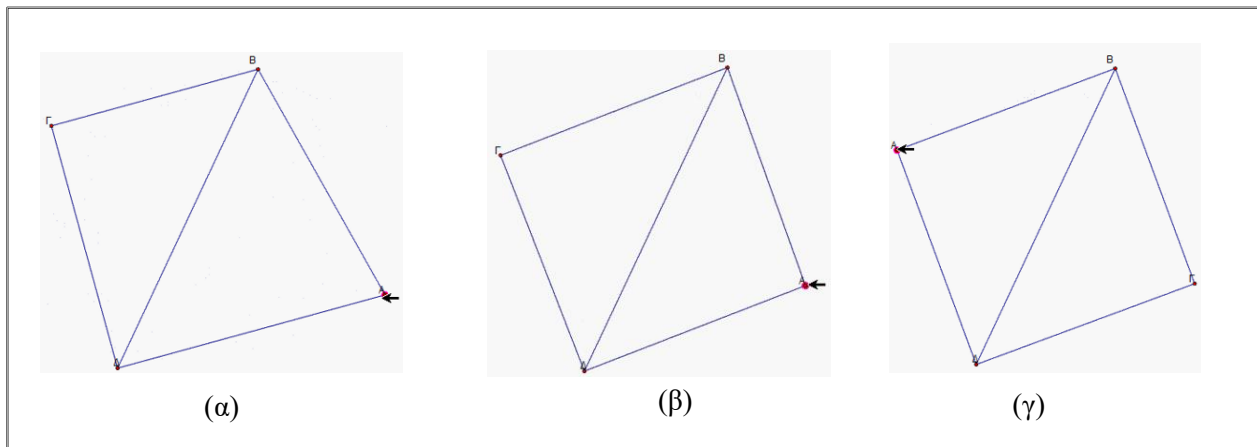
Εικόνα 5 – Ορθογώνιο τραπέζιο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Το τραπέζιο που έχει ορθή γωνία είναι ορθογώνιο τραπέζιο;		Δ: Είναι τραπέζιο. Η γωνία Γ είναι ορθή. → Σ: Άρα είναι ορθογώνιο τραπέζιο. E: (ΠΕ) [Το τραπέζιο που έχει δύο ορθές γωνίες είναι ορθογώνιο τραπέζιο.]
Καθ: Γράψτε ότι νομίζετε.		
Βα: Να! Κοίτα! Τραπέζιο ωραιότατο. Ναι, αλλά έχει αυτή εδώ πρέπει να είναι ορθή. Άρα είναι ορθογώνιο τραπέζιο.	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	
.	.	.
Βα: Αυτό ας μείνει εδώ. Ορθογώνιο τραπέζιο.	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	Δ: Καθοδηγούμενο και διατηρούμενο σύρσιμο → Σ: Ορθογώνιο τραπέζιο. E: EE
Σ: Ναι. Να το πάω και από την άλλη μεριά; Ωπ! Κοίτα ίσως από πάνω. Εδώ βγαίνει. Μπράβο.	Καθοδηγούμενο και διατηρούμενο σύρσιμο	
Βα: Πήγαινε λίγο το Α. Πάλι ορθογώνιο τραπέζιο δε θα βγει;	Διατηρούμενο σύρσιμο	
Σ: Ναι.		

Πίνακας 6 - Ορθογώνιο τραπέζιο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

ii) Τετράγωνο

Αρχικά οι μαθήτριες παρατηρούν ότι υπάρχουν δύο θέσεις του Α για τις οποίες το ΑΒΓΔ παραμένει τετράγωνο και αναφέρουν πως το κοινό τους χαρακτηριστικό είναι πως είναι συμμετρικά του Α ως προς τη ΒΔ.

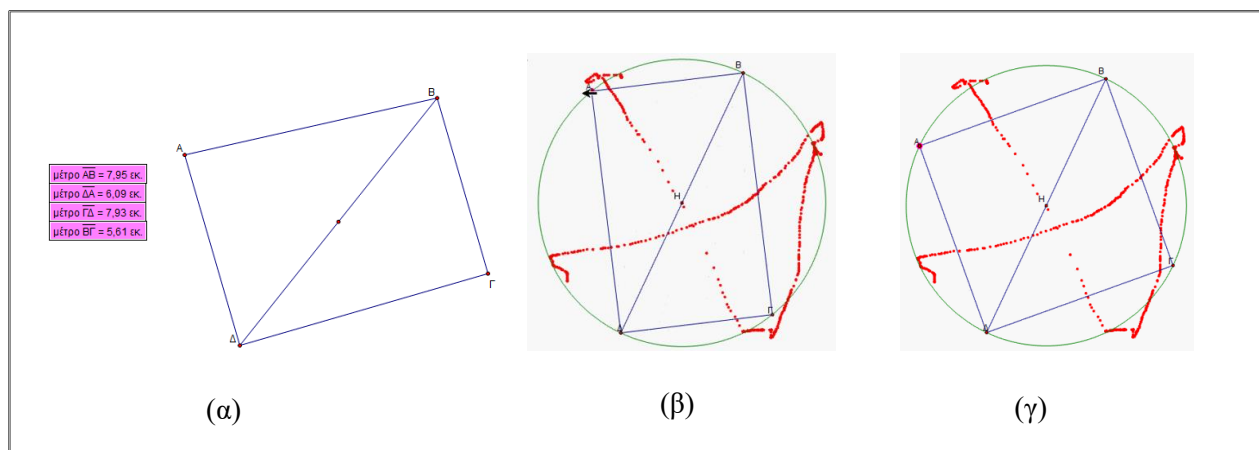


Εικόνα 6 - Τετράγωνο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Σ: Το έχω εντάξει, το κατάλαβα. Κοίτα ας πούμε εδώ είναι τετράγωνο. Και εδώ είναι τετράγωνο.	Καθοδηγούμενο και διατηρούμενο σύρσιμο	Δ: Διατηρούμενο σύρσιμο Σ: Εδώ είναι τετράγωνο και εδώ είναι τετράγωνο E: EE
Βα: Μήπως το συμμετρικό ως προς το ΒΔ;		
Σ: Ναι.		Δ: Διατηρούμενο σύρσιμο. Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Θεωρούν σημείο συμμετρικό του Α ως προς ΒΔ. Σ: Παραμένει τετράγωνο. E: EE
Βα: Να το γράψω;		
Σ: Αυτό γράψε. Μου άρεσε.		

Πίνακας 7 - Τετράγωνο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Στη συνέχεια κατά την ενασχόλησή τους με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ενεργοποιούν τη μέτρηση και επανέρχονται στο τετράγωνο. Αρχικά συμπεραίνουν ότι το ΑΒΓΔ δεν μπορεί να γίνει τετράγωνο. Ωστόσο, στο τέλος της δεύτερης φάσης, και αυτή τη φορά κατά την ενασχόλησή τους με το ορθογώνιο, αφού έχουν συνδέσει το Α πάνω στο κύκλο με κέντρο το μέσο της ΒΔ παρατηρούν ότι το ΑΒΓΔ δεν είναι παντού ορθογώνιο, αλλά σχηματίζεται και τετράγωνο σε δύο θέσεις χωρίς να αναφέρουν κάτι άλλο για το κοινό τους σημείο.



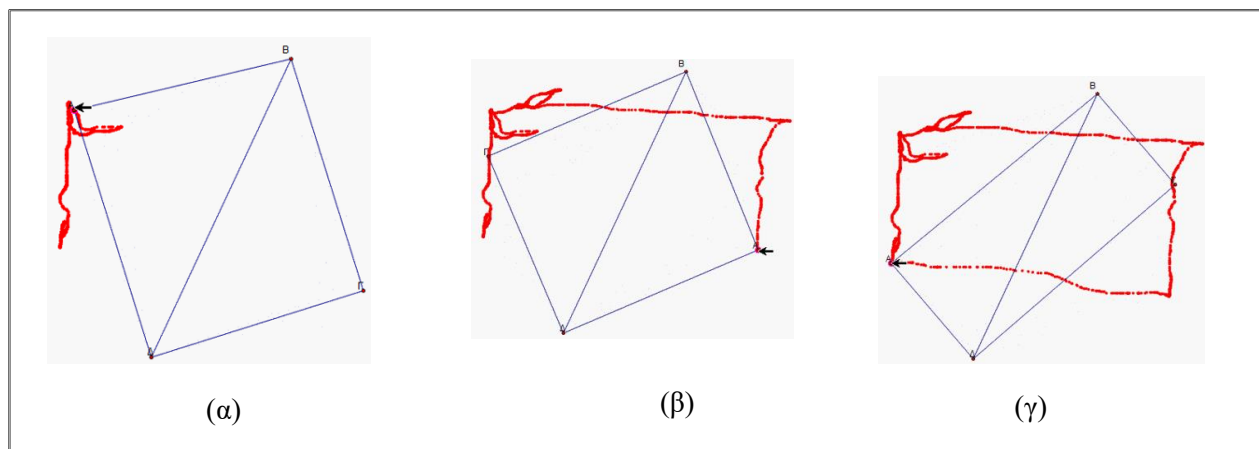
Εικόνα 7 - Τετράγωνο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Πάτα κάπου. Όχι, άστο πάτα απλά κάπου δίπλα. Φτιάξτο λίγο αν μπορείς.	Αντιληπτική μέτρηση	<pre>graph LR; A[Δ: Καθοδηγούμενη μέτρηση] --> B[Σ: Δε βγαίνει τετράγωνο.]; C[E: EE] --- A; C --- B;</pre>
Σ: Όχι, δεν βγαίνει τετράγωνο.	Καθοδηγούμενη μέτρηση και καθοδηγούμενο σύρσιμο	
Βα: Δε βγαίνει τετράγωνο;		
Σ: Όχι. Εγώ λέω, επειδή δεν βγαίνει τετράγωνο, (δ.α.κ) παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.		
· · ·	· · ·	· · ·
Σ: Άρα, πάνω στον κύκλο.	Συνδεδεμένο σύρσιμο	
Βα: Ναι. Πάνω σε αυτό;	Σύρσιμο ελέγχου	<pre>graph LR; A[Δ: Σύρσιμο ελέγχου. Δε σχηματίζει παντού ορθογώνιο.] --> B[Σ: Σχηματίζει και τετράγωνο.]; C[E: EE] --- A; C --- B;</pre>
Σ: Ναι. Πάνω στον κύκλο που έχει ακτίνα...		
Βα: Όμως κάτσε κάποια στιγμή δεν θα σχηματίζει και τετράγωνο, λογικά; Σε ένα μόνο σημείο. Και σε άλλο.		
Σ: Άρα σχηματίζει και τετράγωνο.		
Βα: Άρα τετράγωνο και ορθογώνιο ουσιαστικά. Να γράψουμε ότι είναι; Το τετράγωνο είναι...		<pre>graph LR; A[Δ: ;;] --> B[Σ: Άρα τετράγωνο και ορθογώνιο.]; C[E: ΔΔΕ] --- A; C --- B;</pre>
Σ: Μόνο με το Γ. Άμα το πας εδώ... Οπότε γράψε το τετράγωνο.		

Πίνακας 8 - Τετράγωνο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

iii) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Αρχικά οι δύο μαθήτριες επικεντρώθηκαν στο κάνουν το $AB\Gamma\Delta$ να παραμένει ορθογώνιο. Κατόπιν ενεργοποιώντας το ίχνος κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι παραμένει ορθογώνιο όταν το ίχνος του Α σχηματίζει ορθογώνιο.

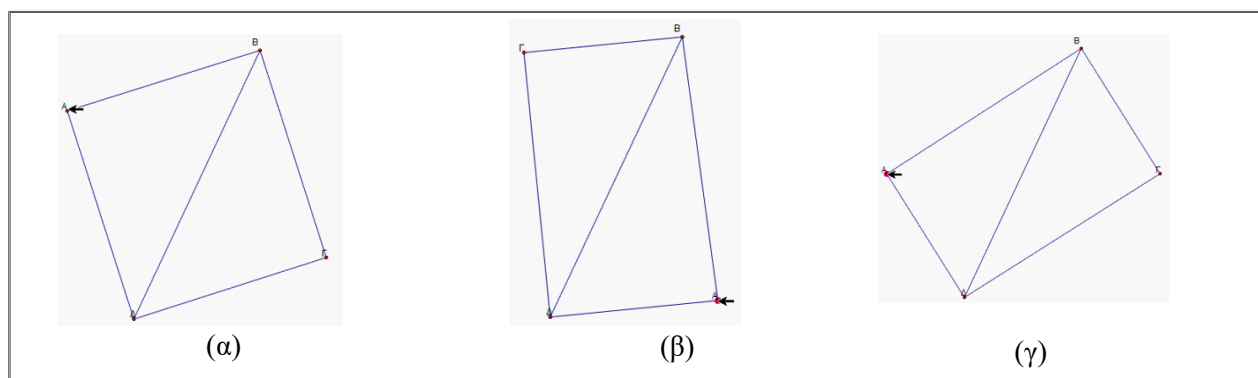


Εικόνα 8 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Αυτό ορθογώνιο δεν είναι πάλι;	Σύρσιμο με ενεργό το ίχνος και διατηρούμενο σύρσιμο	Δ: Το ίχνος του Α σχηματίζει ορθογώνιο. Σύρσιμο με ενεργό το ίχνος. Σ: Το $AB\Gamma\Delta$ παραμένει ορθογώνιο. E: EE
Σ: Ναι, αλλά πώς να διατηρείται ορθογώνιο όταν κινείται το Α;		
Βα: Τώρα θα το γυρίσω. Τώρα είναι τετράγωνο.		
Σ: Τι κάνεις; Πιο κάτω πήγαινε, πιο κάτω.		
Βα: Άρα ουσιαστικά είναι σαν σχηματίζει και το.. Το ίχνος το Α να σχηματίζει πάλι ορθογώνιο; Όχι; Δεν μοιάζει λίγο; Σε κάποιο σημείο ας πούμε θα σχηματίζει τετράγωνο.		

Πίνακας 9 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Στη συνέχεια ασχολήθηκαν με άλλα σχήματα και όταν επανήλθαν εκ νέου στο ορθογώνιο, ενεργοποίησαν τη μέτρηση για να είναι σίγουρες για το είδος. Με τη βοήθεια αυτής, βρήκαν ένα σημείο που σχηματίζεται ορθογώνιο και κατέληξαν ότι αν το Α τοποθετηθεί εκεί που είναι το Γ θα σχηματίζεται και εκεί ορθογώνιο. Δηλαδή βρήκαν δύο θέσεις και για κοινό χαρακτηριστικό αυτών είπαν ότι είναι η ίδια διαγώνιος.



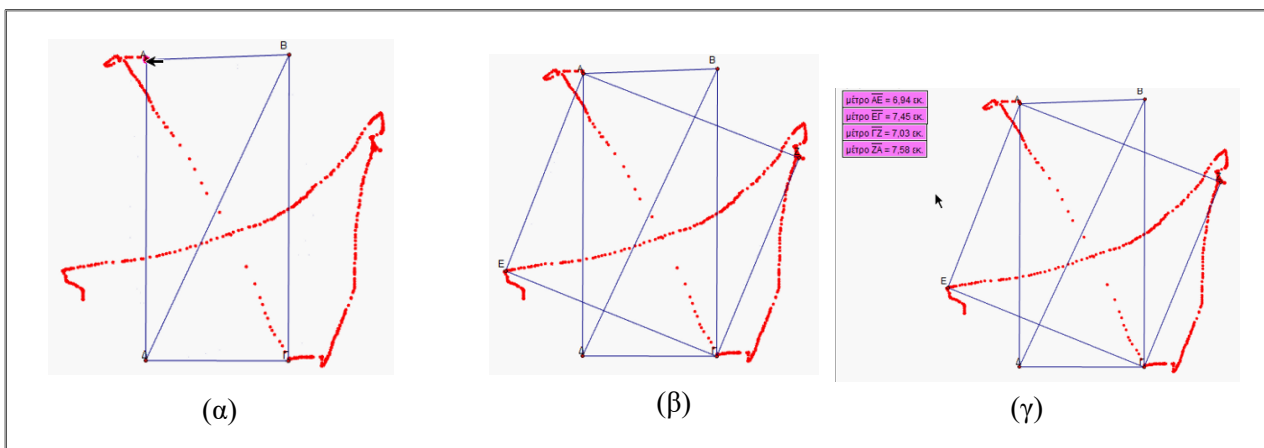
Εικόνα 9 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Τώρα μας μένει το ορθογώνιο. Είχαμε γράψει για το τετράγωνο.		
Σ: Και στο ορθογώνιο αυτό δεν είναι; Κάτσε να το κάνω ορθογώνιο. Ας το πάμε τετράγωνο.	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	
Βα: Γιατί νομίζω ότι έχουμε κάνει βλακεία; Φτιάξε λίγο πάλι τετράγωνο.	Καθοδηγούμενο και διατηρούμενο σύρσιμο	
Σ: Τετράγωνο;		
Βα: Τετράγωνο. Αυτό δεν είναι τετράγωνο είναι ορθογώνιο. Ωραία εντάζει από την άλλη πλευρά. Όχι, όχι. Δεν είναι τετράγωνο (δ.α.κ) Σωστή. Ναι, αλλά μπορεί να βγει και ρόμβος έτσι. Υπολογισμός μήπως είναι.		
Σ: Όχι. Μέτρηση.		
.	.	.
Βα: Άσ' το κάπου που να μοιάζει με ορθογώνιο.	Καθοδηγούμενο σύρσιμο και καθοδηγούμενη μέτρηση	
Σ: Δεν μοιάζει.		
Βα: Γιατί δεν μοιάζει;		
Σ: Δεν είναι όχι.		
Βα: Κοντά είμαστε. Είχαμε πει ότι αν το Α τοποθετηθεί στη θέση που είναι το Γ, μόνο που το Α δεν θα 'ναι συμμετρικό του..., για να είναι συμμετρικό πρέπει να είναι κάθετο ή διαγώνιος...		
Σ: Διαγώνιος;		
Βα: Ναι. Ξέρω γω σε όποια θέση το Α θα σχηματίσει, σε τυχαία θέση το Α θα σχηματίζει πάλι ορθογώνιο, και εδώ θα σχηματίσει πάλι ορθογώνιο αν το Α μετακινηθεί στην άλλη άκρη της διαγώνιου ΑΓ;		
Σ: Ναι.		
Βα: Αυτό θα γράψουμε;		
Σ: Ναι, λίγο πιο ανθρώπινα ναι. Εγώ το κατάλαβα, αλλά..		
Καθ: Για το ορθογώνιο μιλούσατε;		
Βα & Σ: Ναι.		

Καθ: Μόνο σε αυτές τις δύο θέσεις το έχετε παρατηρήσει;		
Σ: Όχι, το έχουμε παρατηρήσει και από την άλλη πλευρά.	Διατηρούμενο σύρσιμο (ορθογώνιο).	
Καθ: Είπατε μία θέση εκεί που ήταν πριν το Α και άλλη μία εκεί που ήταν το Γ. Μόνο σ' αυτές τις δύο θέσεις είναι ορθογώνιο;		
Σ: Όχι, απλά είπαμε ότι όποτε σχηματίζεται ορθογώνιο, όταν το Α θα πηγαίνει στη μία πλευρά της διαγώνιου ΑΓ θα είναι πάλι ορθογώνιο.		Δ: Καθοδηγούμενο σύρσιμο και μέτρηση. Σχηματίζεται ορθογώνιο. Το Α πηγαίνει στη μία πλευρά της διαγώνιου ΑΓ. → Σ: Θα είναι πάλι ορθογώνιο. E: EE
Καθ: Ωραία, και τι κοινό χαρακτηριστικό μπορούμε να βρούμε ότι έχουν αυτές οι δύο θέσεις;		
Σ: Ότι είναι η ίδια διαγώνιος; Δε νομίζω.		

Πίνακας 10 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Κατόπιν βρήκαν ένα τυχαίο σημείο που σχηματίζεται ορθογώνιο το οποίο ονόμασαν Ε, έπειτα έσυραν το Α στη θέση του Γ και παρατήρησαν ότι και εκεί σχηματίζεται ορθογώνιο και στο τέλος (όπως και οι ίδιες ανέφεραν) βρήκαν πειραματικά δύο ακόμα σημεία που να είναι ορθογώνιο τα οποία ονόμασαν Ε και Ζ. Στο τέλος ένωσαν τα σημεία ΑΓΕΖ και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το κοινό χαρακτηριστικό αυτών των σημείων είναι ότι σχηματίζουν τετράγωνο και πως αν σύρουμε το Α στις κορυφές του τετραγώνου ΑΓΕΖ το ΑΒΓΔ παραμένει ορθογώνιο. Στο συμπέρασμα ότι το κοινό χαρακτηριστικό είναι τετράγωνο κατέληξαν χρησιμοποιώντας το εργαλείο μέτρηση.



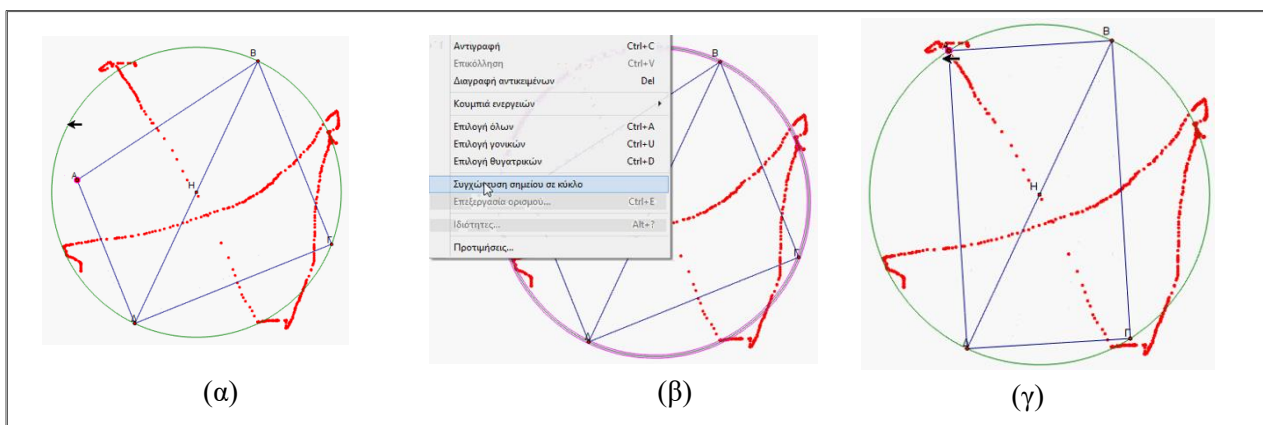
Εικόνα 10 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Σ: Θες να το μετρήσουμε κι αυτό; (Το ΑΓΕΖ)		
Βα: Για μέτρησε και αυτό.	Περιπλανώμενη μέτρηση.	
Σ: Ωραία.		
Βα: Δεν ήταν ακριβώς αυτά τα σημεία. Δεν πειράζει.		
Σ: Ωραία τι σχήμα είναι; Πλησιάζει το τετράγωνο. Όχι; Μήπως να παίρναμε τις κάθετες γραμμές; Ε;	Αντιληπτική μέτρηση.	
Βα: Περίμενε, μισό. Πες ότι αυτό είναι τετράγωνο, τώρα. Και το Α είναι εδώ. Και είπαμε άμα το πάμε εκεί που ήταν πριν το Γ θα σχηματίσει πάλι ορθογώνιο.		
Σ: Ναι.		
Βα: Μετά, άμα θέλουμε, και λέμε ότι αυτό είναι τετράγωνο. Άμα φέρουμε πάλι κάθετη στο μέσο της διαγώνιου, ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με τη διαγώνιο, θα σχηματίσει τετράγωνο. Και στα άκρα αυτού θα είναι πάνω δύο σημεία και σχηματίσει... ορθογώνιο; Όχι;		
Σ: Για πες το πάλι αυτό.		
Βα: Είπαμε ότι σε τυχαίο σημείο Α θα σχηματίσει ορθογώνιο.		(*)
Σ: Ναι.		
Βα: Και ότι άμα το Α το πάμε εκεί που ήταν το Γ, θα σχηματιστεί πάλι ορθογώνιο.		(**)
Σ: Ωραία.		
Βα: Και βρήκαμε εμείς πειραματικά ότι με τα άλλα δύο σημεία, τα σημεία που σχηματίζεται ορθογώνιο...		(***)

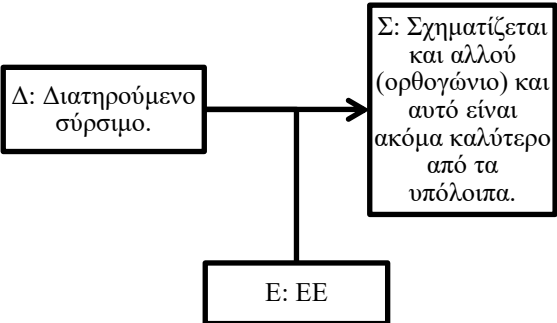
Σ: Σχηματίζουν τετράγωνο μεταξύ τους.		$\Delta: \Delta_{(*)} \rightarrow \Sigma_{(*)}$ $\Delta_{(**)} \rightarrow \Sigma_{(**)}$ $\Delta_{(***)} \rightarrow \Sigma_{(***)}$ $\Sigma: \text{Το κοινό χαρακτηριστικό των σημείων είναι ότι σχηματίζουν τετράγωνο μεταξύ τους.}$ E: EE
Βα: Σχηματίζουν, ναι, τετράγωνο μεταξύ τους. Άρα αν φέρουμε στην αρχική διαγώνιο που βρήκαμε ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο μέσο της διαγώνιου και να είναι ίση με τη διαγώνιο, θα σχηματιστεί τετράγωνο.		
Σ: Μάλιστα.		
Βα: Άρα και τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος θα είναι τα άκρα αυτού του τετραγώνου.		
Σ: Μάλιστα.		
Βα: Άρα και στα άλλα άκρα θα σχηματιστεί πάλι ορθογώνιο.		
Σ: Για τα άλλα τι έχεις να πεις;		$\Delta:$ Καθοδηγούμενο σύρσιμο. Το Α σύρεται στις κορυφές του τετραγώνου. $\Sigma: \text{Το σχήμα παραμένει ορθογώνιο.}$ E: EE
Βα: Ότι το Α είναι αυτά τα...		
Σ: Τετράγωνα		
Βα: Όχι ότι τα Α είναι οι κορυφές του τετραγώνου.		
Σ: Μάλιστα.		

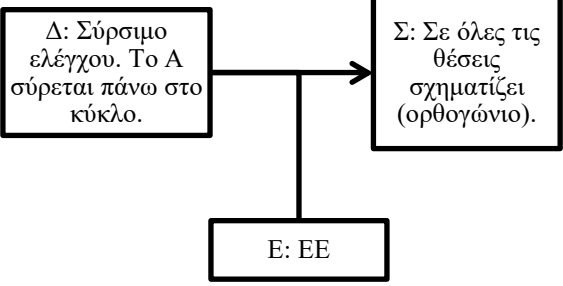
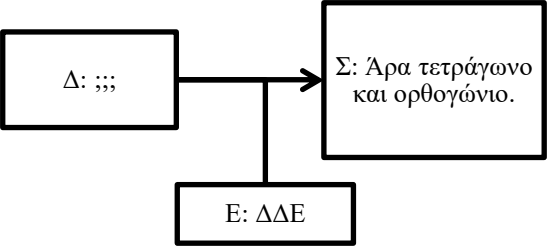
Πίνακας 11 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Στο τέλος μετά το ερώτημα της καθηγήτριας αν είναι μόνο αυτές οι τέσσερις θέσεις στις οποίες όταν βρίσκεται το Α το ΑΒΓΔ παραμένει ορθογώνιο, οι μαθήτριες σκέφτονται να φέρουν κύκλο με κέντρο το μέσο της ΒΔ. Αφού αρχικά σύρουν το Α πάνω στο κύκλο, παρατηρούν ότι σε όλες τις θέσεις σχηματίζεται ορθογώνιο. Στη συνέχεια συνδέουν το σημείο Α πάνω στο κύκλο και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι σχηματίζεται παντού ορθογώνιο και τετράγωνο.



Εικόνα 11 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

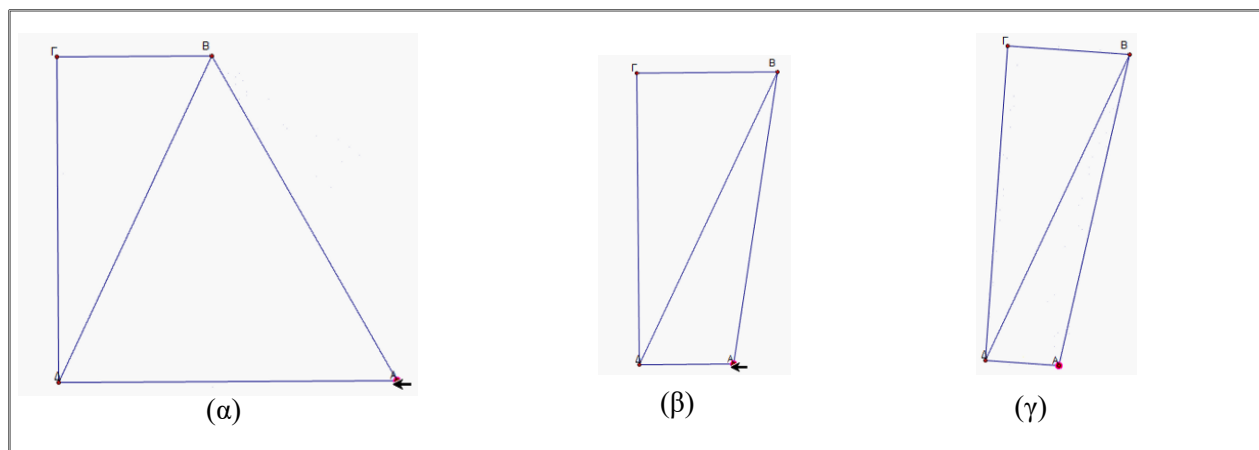
Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Καθ: Συνεπώς είναι μόνο τέσσερις οι θέσεις στις οποίες όταν βρίσκεται το Α είναι τετράγωνο, είναι ορθογώνιο συγγνώμη. Άρα δεν υπάρχουν κάποιες άλλες θέσεις στο επίπεδο, ούτως ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ορθογώνιο;		
.	.	.
Σ: Ένα, δύο, τρία, τέσσερα.		
Βα: Ωραία, αυτό το θέλουμε. Ένα, δύο, τρία, τέσσερα. Το Ε, το Ζ. Ας τα αυτά. Για προσπάθησε να δεις αν σχηματίζεται τετράγωνο εκτός από τη θέση που το έχουμε.	Διατηρούμενο σύρσιμο	
Σ: Σχηματίζεται και αλλού και αυτό είναι ακόμα καλύτερο από τα υπόλοιπα, κοίτα.		
Βα: Ναι, όντως. (Παύση) Και τι σχέση έχουν αυτά με τα προηγούμενα;		
Καθ: Προσπαθήστε να το σύρετε, ούτως ώστε να διατηρείται ή να διατηρείται στο περίπου. Μη σας μπερδεύει η μέτρηση. Καταλαβαίνετε τι εννοώ όταν σας λέω να το σύρετε ούτως ώστε να διατηρείται;		
.	.	.
Σ: Αν είναι σε κύκλο ας πούμε;		
Βα: Ναι, και εγώ αυτό σκέφτηκα. Γιατί δεν φέρνεις έναν κύκλο;	Διατηρούμενο σύρσιμο	
Σ: Να βρούμε το μέσο της διαγωνίου...		
Βα: Ναι, ας το βρούμε. Κατασκευή; Μισό λεπτό. Για πήγαινε πάλι κατασκευή. Έχει μέσο σημείο. Άρα πρέπει κάπως να το σβήσουμε αυτό.		
Σ: Αν επιλέξουμε σημείο.		
Βα: Όχι.		
Σ: Σημείο σε αντικείμενο, μέσο σημείου. Αν το επιλέξουμε μόνο του και πατήσουμε ctrl και.., το λέει κιόλας. Ορίστε.		
Βα: Ωραία. Φέρε το Γ.		

Σ: Είναι ξέμπαρκο τώρα.		
Βα: Ο μεγάλος ο κύκλος πού θα πάει;		
Σ: Πουθενά. Λοιπόν κάτσε να τα ξε- επιλέξουμε όλα.		
Βα: Άμα πάρεις... Βάλε το Α να είναι σε διάφορα σημεία του κύκλου.	Σύρσιμο ελέγχου	
Σ: Πάμε στον κύκλο. Έλα έλα πάμε στο κύκλο.		
Βα: Κοίτα είναι σε όλες τις θέσεις σχηματίζει.		
Σ: Εκτός από κάποιες...		
Καθ: Θα μπορούσαμε να κάνουμε το Α να κινείται μόνο πάνω στον κύκλο;		
Σ: Α! Επιλέγουμε τον κύκλο και το Α και κάνουμε συγχώνευση.		
.	.	.
Σ: Άρα, πάνω στον κύκλο.	Συνδεδεμένο σύρσιμο	
Βα: Ναι. Πάνω σε αυτό;	Σύρσιμο ελέγχου	
Σ: Ναι. Πάνω στον κύκλο που έχει ακτίνα...		
Βα: Όμως κάτσε κάποια στιγμή δεν θα σχηματίζει και τετράγωνο, λογικά; Σε ένα μόνο σημείο. Και σε άλλο.		
Σ: Άρα σχηματίζει και τετράγωνο.		
Βα: Άρα τετράγωνο και ορθογώνιο ουσιαστικά. Να γράψουμε ότι είναι; Το τετράγωνο είναι...		

Πίνακας 12 - Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

iv) Τραπεζίο

Σε αυτήν τη φάση οι μαθήτριες διατύπωσαν την εικασία ότι το ΑΒΓΔ μοιάζει με τραπέζιο χωρίς να αναφέρουν κάτι για τις θέσεις του Α και το κοινό τους χαρακτηριστικό, κάτι το οποίο έγινε στην επόμενη φάση.



Εικόνα 12 - Τραπεζίο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Το ότι σου άρεσε, δεν σημαίνει ότι είναι και σωστό. Πήγαινε το Α λίγο αριστερά. Λίγο πιο δεξιά. Να μην συμπίπτουν. Πάλι αυτό είναι τραπέζιο; Αυτές είναι παράλληλες;	Διατηρούμενο σύρσιμο	
Σ: Άμα το δεις ανάποδα μπορεί να είναι τραπέζιο. Μοιάζει με τραπέζιο. Πολύ ανάποδο όμως.		

Πίνακας 13 - Τραπεζίο (2^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι σε αυτή τη φάση οι μαθήτριες χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του Sketchpad και ειδικότερα το καθοδηγούμενο σύρσιμο διατύπωσαν δηλώσεις, σύμφωνα με τις κοινές συμβάσεις κειμένων. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτήν τη φάση, αφού κατέληξαν για τις σχηματικές πτυχές που μπορούν να προκύψουν κινώντας το σημείο Α, στη συνέχεια προσπάθησαν να αναφέρουν το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων για τις οποίες προκύπτει το ίδιο γνωστό σχήμα, μέσα από μία ακριβώς διατυπωμένη εικασία.

4.1.3 Φάση 3 – Προσδιορισμός Μαθηματικών Επιχειρημάτων

Η τρίτη φάση για τις μαθήτριες ξεκίνησε και ολοκληρώθηκε κατά την ενασχόλησή τους με το δεύτερο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας. Σε αυτό το σημείο, χρησιμοποίησαν το λογισμικό παρατηρώντας κυρίως την οθόνη καθώς η αλληλεπίδραση με αυτό μέσω του ποντικιού ήταν ελάχιστη. Χρησιμοποίησαν σε μικρό βαθμό μόνο καθοδηγούμενο και διατηρούμενο σύρσιμο ενώ οι εγγυήσεις τους ήταν δομικές διαισθητικές και παραγωγικές, οπότε τα επιχειρήματα χαρακτηρίστηκαν ως απαγωγικά και παραγωγικά. Σε αυτή τη φάση παρατίθενται μόνο τα επιχειρήματα των μαθητριών για κάθε σχήμα τα οποία ήταν κατά πλειοψηφία παραγωγικά.

Τα σχήματα με τα οποία προχώρησαν στη τρίτη φάση ήταν τα ίδια με αυτά της δεύτερης:

i) Ορθογώνιο τραπέζιο

Σε αυτήν τη φάση οι μαθήτριες παρατηρούν ότι το σχήμα έχει δύο ορθές, οπότε καταλήγουν με τη βοήθεια του ορισμού του ορθογωνίου τραπεζίου στο συμπέρασμα ότι όπου και να μετακινηθεί το Α, στην ευθεία της ΔΑ, θα σχηματιστεί ορθογώνιο τραπέζιο.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Πήγαινε λίγο το Α. Πάλι ορθογώνιο τραπέζιο δε θα βγει;		
Σ:Ναι.		
Βα: Άρα ουσιαστικά, όταν το Γ και το Δ σχηματίζουν ορθή γωνία, αυτή και αυτή, τότε αυτό θα σχηματίσει ορθογώνιο τραπέζιο. Και πάλι στην ευθεία του ΔΑ, όσο και αν τραβήξουμε το Α, θα παραμείνει πάλι.	Διατηρούμενο σύστημα	

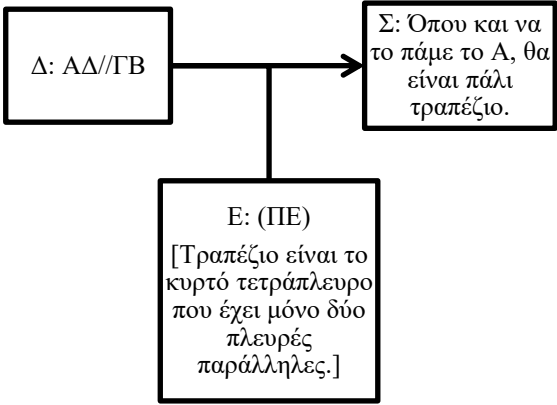
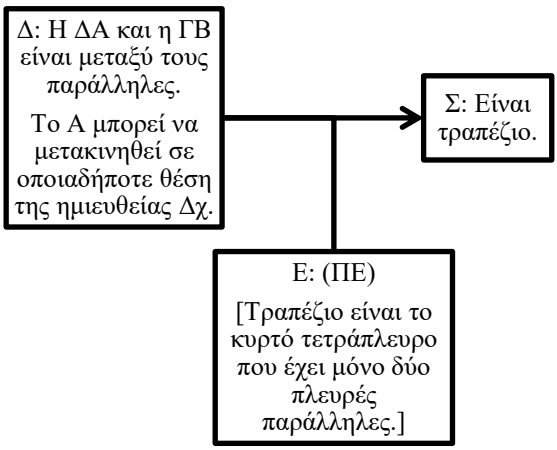
Πίνακας 14 - Ορθογώνιο τραπέζιο (3^η Φάση : 1^η Ομάδα)

ii) Τραπέζιο

Οι μαθήτριες αρχικά παρατηρούν ότι το ΑΒΓΔ έχει δύο παράλληλες, άρα σύμφωνα με τον ορισμό του τραπεζίου καταλήγουν ότι το σχήμα είναι τραπέζιο. Στη συνέχεια, υπάρχει διαφωνία μεταξύ τους για τον αν είναι τραπέζιο ή ορθογώνιο τραπέζιο. Φαίνεται να βλέπουν το ορθογώνιο τραπέζιο και το τραπέζιο ως δυο ξεχωριστά σχήματα και όχι το πρώτο ως ειδική μορφή του δεύτερου. Ωστόσο, το γεγονός αυτό δε τις αποτρέπει να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι όπου και αν μετακινηθεί το Α, πάλι τραπέζιο θα υπάρχει.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Άρα τραπέζιο ουσιαστικά θα είναι όταν η ΑΔ και η ΓΒ είναι μεταξύ τους παράλληλες.		

Σ: Ας πούμε τώρα. Όπα όχι τώρα. Τώρα δεν είναι τραπέζιο;	Διατηρούμενο σύρσιμο	
Βα: Όχι.		
Σ: Όχι;		
Βα: Όχι είναι τραπέζιο. Είναι ορθογώνιο τραπέζιο. Αυτή υποτίθεται είναι ορθή τώρα.		
Σ: Βασικά. Πιάσε λίγο το χαρτί με τις οδηγίες για να το φτιάξουμε να καταλάβουμε γιατί γίνεται αυτό.		
Βα: Το Δ είναι κάθετο. Είναι το σημείο τομής (δ.α.κ). Η Δ και η Ε τι είναι;		
Σ: Όχι; Άστο.		
.	.	.
Βα: Να μην γράψουμε ότι τραπέζιο είναι όταν η ΑΒ και η ΓΔ είναι μεταξύ τους παράλληλες;		
Σ: Γράψ' το.		
Βα: Να κάνω μουντζούρα;		
Καθ: Ναι, σβήστο. Δε πειράζει.		
Σ: Μ' αρέσει που έγραψες και τα δύο. Λες και βγαίνει άλλο τραπέζιο.		
Βα: Μα ναι άλλο είναι το τραπέζιο, άλλο το ορθογώνιο τραπέζιο.		
Σ: Για βγάλε μου εσύ το άλλο τραπέζιο, που δεν είναι ορθογώνιο.		
Βα: Αφού το βγάλαμε. Πριν δεν το βγάλαμε;	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	
Σ: Όχι, ορθογώνιο ήταν. Το Δ είναι ωραίο.		
Βα: Ας πούμε τώρα αυτό δεν είναι τραπέζιο;		
Σ: Πώς το έκανες αυτό;		
Βα: Έλα μοιάζει. Μοιάζει να είναι παράλληλες. Και δεν σχηματίζουν ορθή γωνία, άρα είναι σκέτο τραπέζιο.		
Σ: Εντάξει.		
Βα: Είπαμε πάλι όταν το ΔΑ και το ΓΒ πρέπει να είναι παράλληλα μεταξύ τους.		

Καθ: Θα σας θυμίζω, ότι αυτό που μας νοιάζει είναι χαρακτηριστικό των θέσεων του Α. Το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α.		
Βα: Καμία σχέση δηλαδή με αυτό που γράφαμε. (Γέλια)		
Σ: Τι χαρακτηριστικό έχουν οι θέσεις του Α;		
Βα: Μισό, όταν η ΑΔ και η ΓΒ θα είναι παράλληλες και στην ημιευθεία με αρχή Δ, όπου και να το πάμε το Α, θα είναι πάλι τραπέζιο. Δεν θα 'ναι; Άρα να γράψουμε αυτό για το Α;		
Βα: Για το τραπέζιο τι είχαμε πει; Θα κρατήσουμε αυτά που είχαμε γράψει; Ότι όταν η ΔΑ και η ΓΒ είναι μεταξύ τους παράλληλες, το Α μπορεί να μετακινηθεί σε οποιαδήποτε θέση της ημιευθείας Δχ. Αυτό;		
Σ: Ναι!		
Βα: Ωραία.		

Πίνακας 15 - Τραπέζιο (3^η Φάση : 1^η Ομάδα)

iii) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Σε αυτήν τη φάση αφού οι μαθήτριες στο τέλος της δεύτερης είχαν συνδέσει το Α με το κύκλο καταλήγουν στο συμπέρασμα πως όταν το Α είναι πάνω στο κύκλο θα σχηματίζει παντού ορθογώνιο εκτός από τα σημεία που θα είναι τετράγωνο. Έτσι ακολουθώντας επαγωγικό συλλογισμό παίρνουν όλα τα σημεία του κύκλου και από αυτά αφαιρούν τα σημεία που διαγώνιες είναι κάθετες, δηλαδή τα σημεία που είναι τετράγωνο.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Ορθογώνιο;		
Σ: Όχι, τετράγωνο, που είναι ένα πράγμα.		
Βα: Πως θα το γράψουμε όμως; Φέρουμε μέσο ΔΒ		

iv) Τετράγωνο

Σε αυτή τη φάση οι μαθήτριες, λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι το Α βρίσκεται πάνω στο κύκλο και άρα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, καθώς και το γεγονός ότι οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα με τη βοήθεια του ορισμού του τετραγώνου, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι σχηματίζεται τετράγωνο.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Καθ: Θυμάστε τον ορισμό του τετραγώνου;		
Βα: Ναι. Ότι το τετράγωνο είναι ρόμβος και ορθογώνιο.		
Καθ: Ωραία.	<i>Διατηρούμενο σύστημα</i>	
Βα: Μισό. Το ορθογώνιο τις διαγώνιους τις έχει ίσες. Αλλά το τετράγωνο και ο ρόμβος εκτός από τις διαγώνιους που είναι ίσες, να τέμνονται και κάθετα.		<pre> graph LR Delta["Δ: Το Α βρίσκεται πάνω στο κύκλο. Οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ είναι ίσες, διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα."] --> Sigma["Σ: Σχηματίζει τετράγωνο."] E["Ε: ΠΕ [Το ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιοι είναι κάθετες είναι τετράγωνο.]"] --> Sigma </pre>
Σ: Ναι.		
Βα: Άρα θα πούμε.		
Σ: Αυτό, αυτό θα πεις.		
Βα: Πως θα το γράψουμε; Πρέπει να πούμε ότι το Α θα σχηματίζει ορθογώνιο σε κάθε σημείο του κύκλου εκτός από όταν η διαγώνιος ΑΓ θα είναι κάθετη στο ΒΔ, οπότε θα σχηματίζει τετράγωνο.		

Πίνακας 17 – Τετράγωνο (3^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι οι μαθήτριες όχι μόνο σιγουρεύτηκαν για τα σχήματα που προκύπτουν, αλλά επίσης βρήκαν και το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α για τις οποίες το προκύπτει το ίδιο γνωστό σχήμα. Επίσης, στη διάρκεια αυτής της φάσης, κατόρθωσαν να συνδυάσουν την εξερεύνηση της ακριβώς διατυπωμένης εικασίας και τον προσδιορισμό των κατάλληλων μαθηματικών επιχειρημάτων για την επικύρωση αυτής και θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι κατάφεραν να παράξουν μία ακατέργαστη αποδεικτική ιδέα.

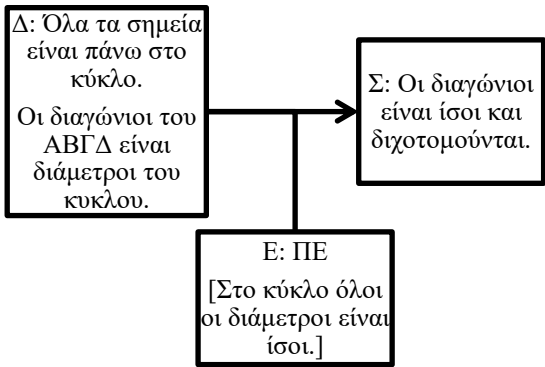
4.1.4 Φάση 4 - Επιλογή και Συνδυασμός Συνεκτικών Επιχειρημάτων

Η τέταρτη φάση για τις μαθήτριες ξεκίνησε και ολοκληρώθηκε κατά την ενασχόλησή τους με το τρίτο και τελευταίο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας. Όπως και στην τρίτη φάση, έτσι και σε αυτήν, χρησιμοποίησαν το λογισμικό παρατηρώντας κυρίως την οθόνη, καθώς η αλληλεπίδραση με αυτό μέσω του ποντικιού ήταν σχεδόν ανύπαρκτη. Χρησιμοποίησαν μία μόνο φορά συνδεδεμένο σύστημα, ενώ οι εγγυήσεις τους ήταν αποκλειστικά παραγωγικές, οπότε τα επιχειρήματα ήταν μόνο παραγωγικά. Σε αυτήν τη φάση οι μαθήτριες δεν ασχολήθηκαν με όλα τα σχήματα, όπως έκαναν στις τρεις προηγούμενες. Όμοια με τη προηγούμενη φάση παρατίθενται μόνο τα επιχειρήματα των μαθητριών για κάθε σχήμα, τα οποία ήταν παραγωγικά.

Τα σχήματα με τα οποία προχώρησαν στη τέταρτη φάση ήταν:

i) Τετράγωνο

Οι μαθήτριες σε αυτή τη φάση για να αιτιολογήσουν γιατί το σχήμα γίνεται τετράγωνο ξεκινάνε αρχικά από τις ιδιότητες του κύκλου, οι οποίες θα τις βοηθήσουν να δείξουν ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο. Στη συνέχεια η καθετότητα των διαγώνιων, τους εξασφαλίζει ότι το σχήμα είναι ρόμβος άρα και τετράγωνο. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το παρακάτω απόσπασμα θα μπορούσε να αποτελεί εκτός από την τέταρτη και την πέμπτη, αλλά και την έκτη φάση για το τετράγωνο. Ωστόσο, οι μαθήτριες όσο προχωρούν στο ερώτημα της δραστηριότητας εστιάζουν περισσότερο στο ορθογώνιο.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Καθ: Πιστεύετε ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σ' ένα διαγώνισμα τη θεωρία που είχαμε διδαχθεί;		
Βα: Μα, προφανώς. Θα το βρήκαμε λογικά με βάση κάποια θεωρία.		
Καθ: Οπότε θεωρείτε ότι μπορούμε να το αιτιολογήσουμε με βάση τη θεωρία το συγκεκριμένο;		
Βα: Ναι, αφού το βρήκαμε με βάση τη θεωρία.		
Σ: Ποια θεωρία βρήκαμε;		
Βα: Ναι, όντως.		
Σ: Δεν το κάναμε κατά λάθος.		
Βα: Όχι.		
Καθ: Πώς θα το εξηγούσατε;		
Βα: Α! Κοίτα. Ξέρουμε ότι στο κύκλο όλοι οι διάμετροι είναι ίσοι. Ωραία; Και εφόσον όλα τα σημεία είναι πάνω στον κύκλο... Όχι;		 (*)
Σ: Μμμ. Ναι, ναι.		

Βα: Ρε παιδί μου κοίτα, εφόσον το μέσο... όταν θα σχηματίσει ένα ορθογώνιο ή τετράγωνο οι διαγώνιοι θα είναι ίσοι και θα διχοτομούνται. Ωραία; Άρα το Η είναι η μέση των διαγώνιων. Και εφόσον το Η είναι και το κέντρο του κύκλου άρα οι διαγώνιοι θα είναι πάντα και οι διάμετροι του κύκλου. Άρα εφόσον οι διάμετροι είναι πάντα ίσοι, άρα και το τετράγωνο θα είναι ορθογώνιο και στο σημείο εκείνο που είπαμε θα είναι και τετράγωνο.		$\Delta: \Delta_{(*)} \rightarrow \Sigma_{(*)}$ $\Sigma: \text{Είναι ορθογώνιο.}$ Ε:ΠΕ [Το παραλληλόγραμμο που έχει ίσες διαγώνιους είναι ορθογώνιο.] (**) $\Delta: \Delta_{(*)} \rightarrow \Sigma_{(*)}$ $\Delta_{(**)} \rightarrow \Sigma_{(**)}$ Στο σημείο εκείνο που είπαμε (οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα) $\Sigma: \text{Θα είναι και τετράγωνο.}$ Ε: ΠΕ [Το ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιοι είναι κάθετες είναι τετράγωνο.]
---	--	--

Πίνακας 18 – Τετράγωνο (4^η Φάση : 1^η Ομάδα)

ii) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Όπως αναφέραμε στη περίπτωση του τετραγώνου οι μαθήτριες για να αιτιολογήσουν ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, χρησιμοποιούν τις ιδιότητες του κύκλου και στη συνέχεια το κριτήριο του ορθογώνιου που αναφέρεται στις διαγωνίες του.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Με τι θα αρχίσουμε; Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιοι...		
Σ: Πριν πεις το οτιδήποτε... (δ.α.κ)		
Βα: Άρα να γράφουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιοι είναι ίσοι και διχοτομούνται.		$\Delta: \text{Οι κορυφές του ΑΒΓΔ βρίσκονται πάνω σε κύκλο. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροι.}$ $\Sigma: \text{Το τετράπλευρο θα παραμένει πάντα ορθογώνιο.}$ Ε: ΠΕ [Το παραλληλόγραμμο που έχει ίσες διαγώνιους είναι ορθογώνιο. Οι διάμετροι στον κύκλο είναι όλες ίσες.]
Σ: Ναι.		
Βα: Άρα το μέσο της μίας διαγώνιου θα είναι και το μέσο της άλλης. Και εφόσον φτιάχνουμε κύκλο...		
Σ: ... με κέντρο αυτό το μέσο...		
Βα: ... με κέντρο αυτό το μέσο και τα άκρα της άλλης διαγώνιου είναι σημεία του κύκλου, άρα και η άλλη διαγώνιος θα είναι πάλι διάμετρος. Και εφόσον οι διάμετροι		

στον κύκλο είναι όλες ίσες, άρα και το τετράπλευρο θα παραμένει πάντα ορθογώνιο εκτός από αυτό το σημείο που είπαμε που θα, οπότε θα είναι τετράγωνο.		
Σ: Ναι.		

Πίνακας 19 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (4^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Συνοψίζοντας παρατηρούμε πως στη τέταρτη φάση οι μαθήτριες επέλεξαν και συνδύασαν τα επιχειρήματα που είχαν δημιουργήσει στις προηγούμενες φάσεις σε μία παραγωγική αλυσίδα.

4.1.5 Φάση 5- Οργάνωση Επιχειρημάτων σύμφωνα με Πρότυπα Μαθηματικών

Η πέμπτη φάση για τις μαθήτριες ξεκίνησε και ολοκληρώθηκε, όπως και η τέταρτη, κατά την ενασχόλησή τους με το τρίτο και τελευταίο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας. Σε αυτήν τη φάση χρησιμοποίησαν το λογισμικό μόνο για να παρατηρούν το σχήμα στην οθόνη και δεν υπήρξε καμία αλληλεπίδραση με το ποντίκι. Όμοια με πριν (βλ. 4.1.4) οι εγγυήσεις τους ήταν αποκλειστικά παραγωγικές, οπότε τα επιχειρήματα ήταν μόνο παραγωγικά. Σε αυτήν τη φάση οι μαθήτριες ασχολήθηκαν μόνο με το ορθογώνιο, για το οποίο παρατίθενται τα επιχειρήματά τους.

i) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Σε αυτήν τη φάση οι μαθήτριες συνειδητοποιούν ότι το κριτήριο που χρησιμοποιούσαν πριν ήταν ελλιπές, καθώς θα έπρεπε να υπάρχει στα δεδομένα ότι είναι και παραλληλόγραμμο το σχήμα και αφού οι διαγώνιες διχοτομούνται άρα είναι ορθογώνιο. Οι μαθήτριες δεν ήταν σίγουρες γι' αυτό το κριτήριο, οπότε τους δόθηκε βοήθεια από τις καρτέλες που είχαν δημιουργηθεί για τον σκοπό αυτό.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Βα: Νομίζω έχουμε κάνει ένα λάθος.		
Σ: Πως το έκανες αυτό.		
Βα: Τα κριτήρια ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το ένα δεν λέει ότι είναι παραλληλόγραμμο και έχει τις διαγώνιες ίσες. Έτσι ή είναι σκέτο τετράπλευρο;		
Σ: Μήπως να ρωτούσαμε γιατί δεν;		
Βα: Αυτό μπορείτε να μας το πείτε;		
Καθ: Για ποιο;		
Βα: Τα κριτήρια αν ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο το ένα έχει σίγουρα να κάνει		

σίγουρα με τις διαγώνιους αλλά έχει να κάνει αν το τετράπλευρο είναι απλά τετράπλευρο ή αν το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο; Αν είναι παραλληλόγραμμο; Πώς ξέρουμε εμείς ότι είναι παραλληλόγραμμο. Είναι κι αυτό ένα ζήτημα.		
Σ: Είναι και αυτό κάτι. Πως ξέρουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο;		
Βα: Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα τμήματα. Άρα αυτή η γωνία κι αυτή η γωνία είναι εγγεγραμμένες του κύκλου. Και θα ισούται με το μισό αυτής. Η οποία αυτή είναι ίση με αυτή. Άρα, αυτή όμως ισούται και με το μισό αυτής.		
Σ: Μπορείς να τα κάνεις λίγο συγκεκριμένα γιατί όπως κάνεις το χέρι σου δεν μπορώ...		
Βα: Ναι, μισό μισό. Η γωνία Δ ισούται με το μισό του τόξου ΑΓ, ως εγγεγραμμένη του κύκλου.		
Σ: Μάλιστα.		
Βα: Και η γωνία Β θα ισούται πάλι με το μισό του τόξου ΑΓ, πάλι ως εγγεγραμμένη του κύκλου. Καθώς γνωρίζουμε ότι τα δύο τόξα είναι ίσα, θα είναι και οι γωνίες ίσες. Άρα ουσιαστικά αυτές θα είναι ορθές. Εφόσον θα είναι όλες μεταξύ τους ίσες γιατί αυτό θα είναι ίσο μ' αυτό, θα 'ναι ίσο μ' αυτό.		
Σ: Άρα θα είναι όλες ορθές.		
Βα: Άρα θα είναι όλες ορθές, ωραία. Άρα θα είναι ορθογώνιο. Πρέπει να γράψουμε κι αυτό τώρα;		

Πίνακας 20 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (5^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Παρατηρούμε πως σε αυτή τη φάση οι μαθήτριες προσπάθησαν και κατάφεραν να οργανώσουν τα επιχειρήματά τους σύμφωνα με τα πρότυπα των μαθηματικών χρησιμοποιώντας τα κριτήρια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

4.1.6 Φάση 6 - Πρόταση Επίσημης/Τυπικής Απόδειξης

Η έκτη και τελευταία φάση για τις μαθήτριες ξεκίνησε και ολοκληρώθηκε, όπως και οι προηγούμενες δύο, κατά την ενασχόλησή τους με το τελευταίο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας. Σε αυτήν τη φάση και πάλι χρησιμοποίησαν το λογισμικό μόνο για να παρατηρούν το σχήμα στην οθόνη και δεν υπήρξε καμία αλληλεπίδραση με το ποντίκι. Οι εγγυήσεις τους και αυτή τη φορά ήταν αποκλειστικά παραγωγικές, οπότε τα επιχειρήματα ήταν

μόνο παραγωγικά. Σε αυτήν τη φάση και πάλι οι μαθήτριες ασχολήθηκαν μόνο με το ορθογώνιο και παρατίθεται η γραπτή απάντηση που έδωσαν στο φύλλο δραστηριότητας.

i) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

❖ Την απάντηση που δώσατε στο προηγούμενο ερώτημα, θα την παρουσιάζατε σ' ένα διαγώνισμα όπως είναι; Θα αλλάζατε κάτι;

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιοι είναι
ίσοι και διχοτομούνται. Άρα τα μισά της μιας διαγωνίου
θα είναι και το μισό της άλλης. Εφόσον λοιπόν ~~τα~~
φτιαχναίμε κύκλο βεβαιότατα το σημείο αυτό και
διάμετρο την μία διαγώνιο και εφόσον τα άλλα δύο
σημεία του κύκλου ~~θα τα~~ τότε και ανήκει η διαγώνιος
θα είναι διάμετρος. Γνωρίζοντας όμως ότι οι διάμετροι
ενός κύκλου είναι ίσες, το τετράπλευρο που θα
σχηματιστεί με κορυφές τα άκρα των διαγωνίων
θα είναι ορθογώνιο, ειπώς από την περίπτωση
που οι διαγώνιοι τέμνονται κάπου οπότε σχηματίζεται
τετράγωνο.
Οι μόνιες ως εγγεγραμμένες του κύκλου θα ισούνται
με το μισό του αντίστοιχου τόξου τους, άρα
εφόσον τα τόξα θα είναι ίσα (γιατί σχηματίζονται
από διάμετρος) και οι μόνιες θα είναι ίσες μεταξύ
τους $\Rightarrow \hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = \hat{B} = 90^\circ$

Εικόνα 13 – Γραπτή απάντηση μαθητριών (6^η Φάση : 1^η Ομάδα)

Οπότε, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ολοκλήρωσαν την έκτη φάση δίνοντας την επίσημη (και όχι απαραίτητα αυστηρή) απόδειξη, έτσι όπως θα την έδιναν και σε ένα διαγώνισμα του σχολείου.

4.1.7 Συνοπτικά Αποτελέσματα 1ης Ομάδας – Δραστηριότητα 1η

Λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση των μαθητριών με το λογισμικό αλλά και τους τύπους εγγυήσεων που επέλεξαν καθώς προχωρούσαν από τη μία φάση στην άλλη μπορούμε να παρατηρήσουμε τα κάτωθι:

- Οι μαθήτριες χρησιμοποιούσαν τα εργαλεία του Sketchpad κυρίως στις δύο πρώτες φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας.
- Από τα εργαλεία αυτά έκαναν χρήση κυρίως του συρσίματος και συγκεκριμένα των ειδικοτήτων περιπλανώμενο, καθοδηγούμενο και διατηρούμενο.
- Δεν ήταν εξοικειωμένες πλήρως με το λογισμικό Sketchpad και κυρίως με το διατηρούμενο και εικονικού τόπου σύρσιμο, γεγονός που επηρέασε την εξέλιξή τους στις επόμενες φάσεις (αφού δυσκολεύτηκαν να βρουν το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α, για τις οποίες προκύπτει το ίδιο γνωστό σχήμα).
- Από τη τρίτη φάση και μετά περιορίστηκε και στη συνέχεια σταμάτησε η αλληλεπίδραση με το λογισμικό, μέσω του ποντικιού.
- Με τη βοήθεια του συρσίματος οι εγγυήσεις των μαθητριών στις δύο πρώτες φάσεις ήταν κυρίως επαγωγικές.
- Οι παραγωγικές εγγυήσεις ξεκίνησαν από τη δεύτερη φάση, ενώ από την τρίτη φάση και μετά οι εγγυήσεις των μαθητριών, εκτός από μία περίπτωση, ήταν μόνο παραγωγικές.
- Δεν υπήρξε πληθώρα δομικών διαισθητικών εγγυήσεων και κατ' επέκταση απαγωγικών επιχειρημάτων.
- Οι μαθήτριες ολοκλήρωσαν όλες τις φάσεις μόνο για το ορθογώνιο και ίσως για το τετράγωνο.
- Τέλος, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι έδωσαν μία μορφή τυπικής απόδειξης για το ορθογώνιο, χρησιμοποιώντας τη θεωρία, αλλά χωρίς να έχει αυστηρή δομή.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα συγκεντρώθηκαν και δημιουργήθηκαν δύο πίνακες (Πίνακας 21 & Πίνακας 22), οι οποίοι περιλαμβάνουν ποσοτικά ο πρώτος τη χρήση εργαλείων του Sketchpad, ενώ ο δεύτερος τους τύπους εγγυήσεων. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι οι αριθμοί στον πρώτο πίνακα προέκυψαν από τις σειρές στην απομαγνητοφώνηση στις οποίες διπλά ήταν σημειωμένο κάποιο εργαλείο ενώ στο δεύτερο από τον αριθμό των επιχειρημάτων που αναλύθηκαν κατά Toulmin (1993).

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1</u>		ΦΑΣΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ												
		Φάση 1	Φάση 2				Φάση 3				Φάση 4		Φάση 5	Φάση 6
			Ορθ.τραπέζιο	Τετράγωνο	Ορθογώνιο	Τραπέζιο	Ορθ.τραπέζιο	Τραπέζιο	Ορθογώνιο	Τετράγωνο	Τετράγωνο	Ορθογώνιο	Ορθογώνιο	Ορθογώνιο
ΤΥΠΟΙ ΣΥΡΣΙΜΑΤΟΣ	Περιπλανώμενο	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Καθοδηγούμενο	—	3	9	11	—	—	1	—	—	—	—	—	—
	Διατηρούμενο	—	2	5	10	—	1	1	—	—	—	—	—	—
	Εικονικού Τόπου	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Τχνος Ενεργό	—	—	—	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Συνδεδεμένο	—	—	—	3	—	—	—	—	—	1	—	—	—
	Ελέγχου	—	—	—	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	Περιπλανώμενη	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Καθοδηγούμενη	—	—	4	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Αντιληπτική	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Επικύρωσης	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Πίνακας 21 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε εργαλεία Sketchpad (1^η Δραστηριότητα : 1^η Ομάδα)

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1</u>		ΦΑΣΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ												
		Φάση 1	Φάση 2				Φάση 3				Φάση 4		Φάση 5	Φάση 6
			Ορθ.τραπέζιο	Τετράγωνο	Ορθογώνιο	Τραπέζιο	Ορθ.τραπέζιο	Τραπέζιο	Ορθογώνιο	Τετράγωνο	Τετράγωνο	Ορθογώνιο	Ορθογώνιο	Ορθογώνιο
ΤΥΠΟΙ ΕΓΓΥΗΣΕΩΝ	Δομική Διαισθητική Εγγύηση [ΔΔΕ]	—	—	1	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—
	Επαγωγική Εγγύηση [ΕΕ]	4	1	6	13	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Παραγωγική Εγγύηση [ΠΕ]	—	1	2	—	—	1	5	2	1	3	1	2	1

Πίνακας 22 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε τύπους Εγγυήσεων (1^η Δραστηριότητα : 1^η Ομάδα)

4.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2^{ης} ΟΜΑΔΑΣ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1^η

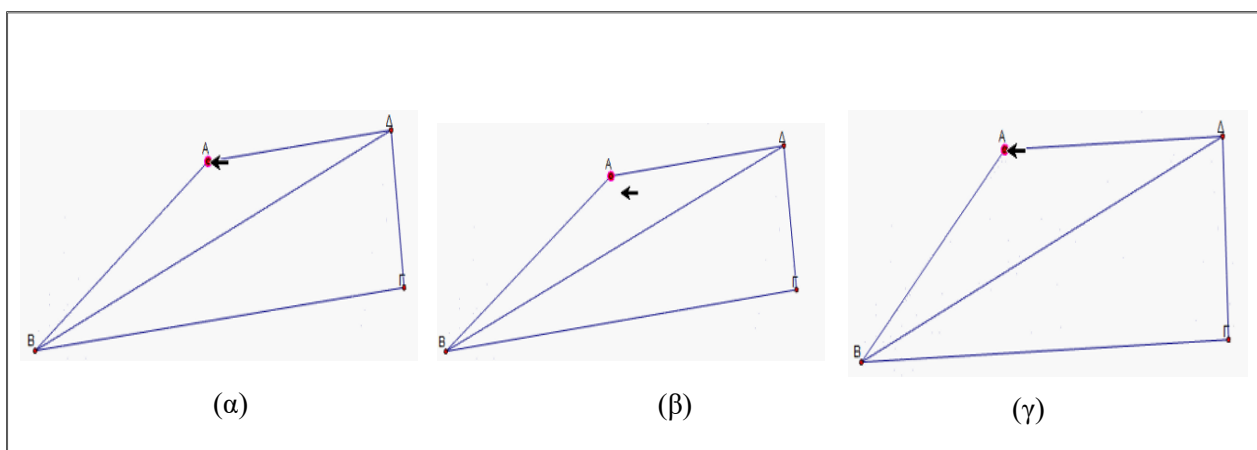
Η δεύτερη ομάδα μαθητών αποτελούνταν από δύο αγόρια, τον Άγγελο και τον Κοσμά, μαθητές της Α΄ Λυκείου. Αν και οι μαθητές φαίνεται να είναι εξοικειωμένοι με τους υπολογιστές, δε συνέβαινε το ίδιο και με το λογισμικό. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να σύρουν το ποντίκι μηχανικά καθώς μιλούσαν χωρίς να έχουν κάποιο στόχο, όπως για παράδειγμα διατύπωση εικασίας ή ολοκλήρωση ερωτήματος της δραστηριότητας.

4.2.1 Φάση 1 – Παραγωγή Εικασίας

Η πρώτη φάση και για τους μαθητές, ξεκίνησε και ολοκληρώθηκε κατά την ενασχόληση τους με το πρώτο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας. Στην αρχή αυτής της φάσης, ο Κοσμάς, αφού διάβασε την εκφώνηση, κρατώντας ο ίδιος το φύλλο δραστηριοτήτων, και ολοκλήρωσε την κατασκευή, στη συνέχεια έδωσε το ποντίκι στον Άγγελο, ο οποίος έσυρε το σημείο Α. Οι δύο μαθητές άλλαξαν το ποντίκι και έσυρε πλέον ο Κοσμάς προς το τέλος της φάσης. Οι μαθητές αρχικά χρησιμοποίησαν περιπλανώμενο σύρσιμο για να εξετάσουν τα διαφορετικά σχήματα που προκύπτουν και στη συνέχεια καθοδηγούμενο για να επιβεβαιώσουν τα σχήματα που προέκυψαν στην αρχή. Οι εγγυήσεις των επιχειρημάτων τους ήταν επαγωγικές, αλλά και παραγωγικές και ως εκ τούτου τα επιχειρήματά τους χαρακτηρίστηκαν ως επαγωγικά και παραγωγικά. Για κάθε ένα από τα σχήματα που αποτυπώθηκαν από τους μαθητές, με τη βοήθεια του Hypercam 2, παρατίθενται φωτογραφίες σε τρία διαφορετικά στάδια. Το τελευταίο στάδιο περιέχει το σχήμα για το οποίο οι μαθητές διατύπωναν το επιχείρημά τους.

Τα σχήματα που διέκριναν και κατέγραψαν ήταν:

i) Τραπεζίο

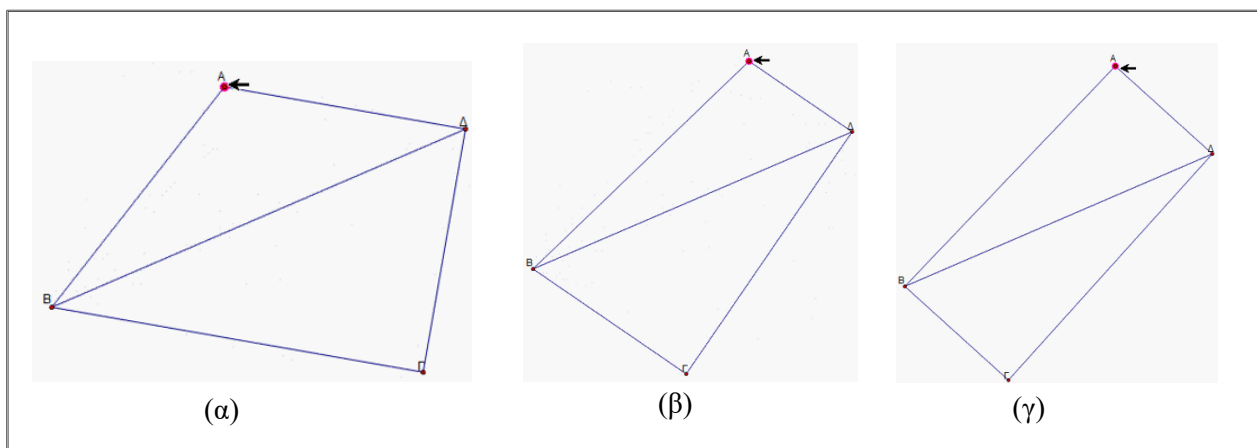


Εικόνα 14 – Τραπεζίο (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
K: Τραπεζίο.	Περιπλανώμενο Σύρσιμο	Δ: Περιπλανώμενο σύρσιμο E: EE Σ: Τραπεζίο.
A: Ναι.		

Πίνακας 23 – Τραπεζίο (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

ii) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

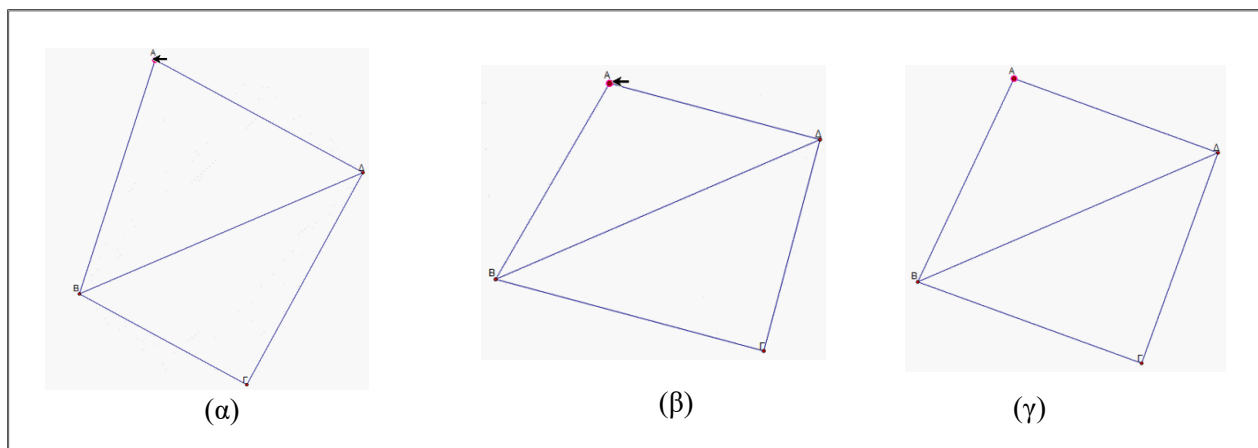


Εικόνα 15 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
K: Ορθογώνιο, παραλληλόγραμμο σκέτο.	Περιπλανώμενο Σύρσιμο	Δ: Περιπλανώμενο σύρσιμο Σ: Ορθογώνιο. E: EE
A: Ναι, εντάξει. Βασικά άμα είναι ορθές είναι ορθογώνιο.		Δ: Οι γωνίες του ABΓΔ είναι ορθές. Σ: Ορθογώνιο. E: ΠΕ [Το τετράπλευρο με 3 γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο.]

Πίνακας 24 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

iii) Παραλληλόγραμμο

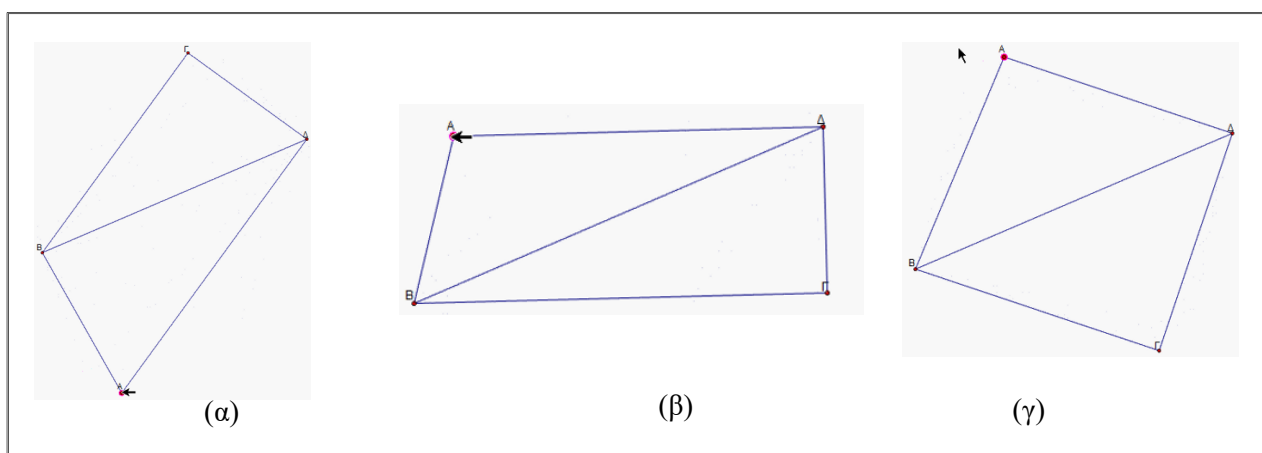


Εικόνα 16 – Παραλληλόγραμμο (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Κ: Ορθογώνιο, παραλληλόγραμμο σκέτο.	Περιπλανώμενο Σύρσιμο	Δ: Περιπλανώμενο σύρσιμο → Σ: Παραλληλόγραμμο σκέτο. E: EE
Α: Ναι, εντάξει. Βασικά άμα είναι ορθές είναι ορθογώνιο.		
Κ: Δε βγαίνουν πάντα ορθές. Άμα πας προς τα πάνω.		Δ: Δε βγαίνουν πάντα ορθές. → Σ: Δεν είναι πάντα ορθογώνιο. E: (ΠΕ) [Το τετράπλευρο με 3 γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο.]

Πίνακας 25 – Παραλληλόγραμμο (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

iv) Ρόμβος



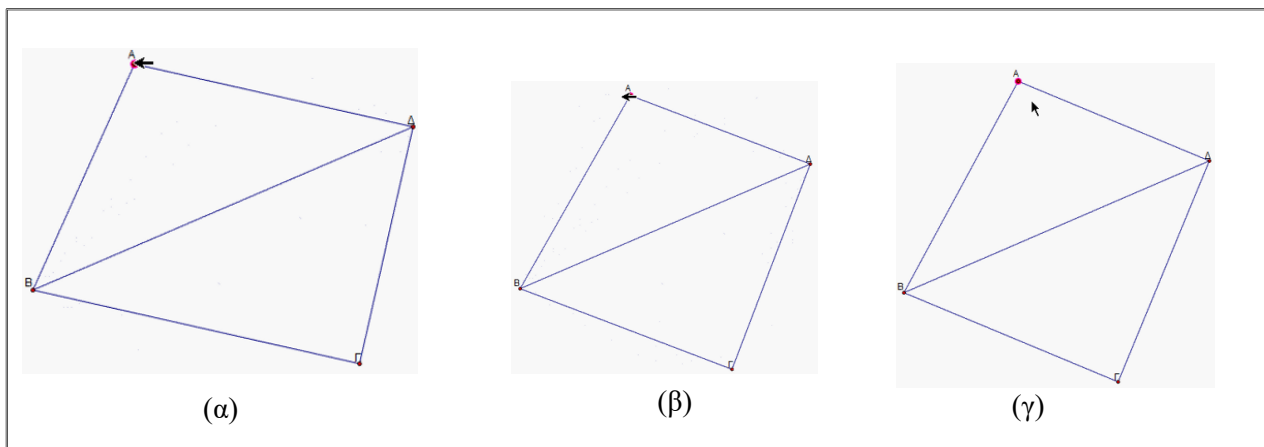
Εικόνα 17 – Ρόμβος (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Κ: Δε βγαίνουν πάντα ορθές. Άμα πας προς τα πάνω.		Δ: Δε βγαίνουν πάντα ορθές. → Σ: Δεν είναι πάντα ορθογώνιο. E: (ΠΕ) [Το τετράπλευρο με 3 γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο.]

A: Ναι ναι σωστά. Μπορεί και ρόμβος.	Περιπλανώμενο σύρσιμο.	
K: Μπορεί και ρόμβος. Τι είπες; Ποιά είπαμε;		

Πίνακας 26 – Ρόμβος (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Επιπλέον, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το ΑΒΓΔ δεν μπορεί να γίνει τετράγωνο, αν και στην αρχή το είχαν σημειώσει και μετά το έσβησαν:



Εικόνα 18 – Τετράγωνο (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
K: Ορθογώνιο τραπέζιο, τετράγωνο.		
A: Δε ξέρω για τετράγωνο.		
K: Περίμενε, είναι τρία τετράγωνα.		
A: Αυτό μοιάζει περισσότερο για ορθογώνιο παρά για τετράγωνο. Τέλος πάντων.	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	

A: Για τετράγωνο δεν είμαι σίγουρος πάντως.		
K: Το τετράγωνο να το βάλουμε σε παρένθεση.		
Καθ: Ούτως ή άλλως εγώ θέλω να μου γράψετε αυτά που πιστεύετε ότι βλέπετε. Δεν θέλω να μου αιτιολογήσετε κάτι.		
A: Δεν ξέρω αν υπάρχει κάποιο σημείο στο οποίο να είναι ίσες όλες.		
K: Ξέρεις τι; Όποτε κλείνεις αυτό προς τα κάτω, αυτό πηγαίνει προς τα πάνω τετράγωνο δεν γίνεται.	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	
A: E! Σβήστο.		

Πίνακας 27 – Τετράγωνο (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Τέλος, οι μαθητές κάνοντας καθοδηγούμενο σύρσιμο κατέγραψαν εκ νέου όλες τις σχηματικές πτυχές του ΑΒΓΔ. Ανέφεραν επιπλέον το ορθογώνιο τραπέζιο, χωρίς να το γράψουν στο φύλλο δραστηριοτήτων.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
K: Μπορεί και ρόμβος. Τι είπες; Ποια είπαμε;		
A: Ρόμβος, τραπέζιο, ορθογώνιο..	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	
K: Ορθογώνιο τραπέζιο, τετράγωνο.		

Πίνακας 28 – Τετράπλευρα (1^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Παρατηρούμε, όπως οι μαθήτριες, έτσι και οι μαθητές, με τη βοήθεια του Geometer's Sketchpad και συγκεκριμένα με το περιπλανώμενο, αλλά και καθοδηγούμενο σύρσιμο κατάφεραν να εξερευνήσουν το πρόβλημα, να διατυπώσουν εικασίες και να προσδιορίσουν επιχειρήματα για την υποστήριξη των στοιχείων αυτών, σύμφωνα με την πρώτη φάση της αποδεικτικής διαδικασίας κατά Boero (1999). Επιπλέον, κατέγραψαν σχεδόν όλες τις σχηματικές πτυχές που αναμέναμε κατά τη διαμόρφωση των δραστηριοτήτων. Ωστόσο, δεν κατόρθωσαν να αναγνωρίσουν το τετράγωνο, καθώς οπτικά δεν μπορούσαν να σιγουρευτούν αν όλα τα στοιχεία ήταν ίσα μεταξύ τους.

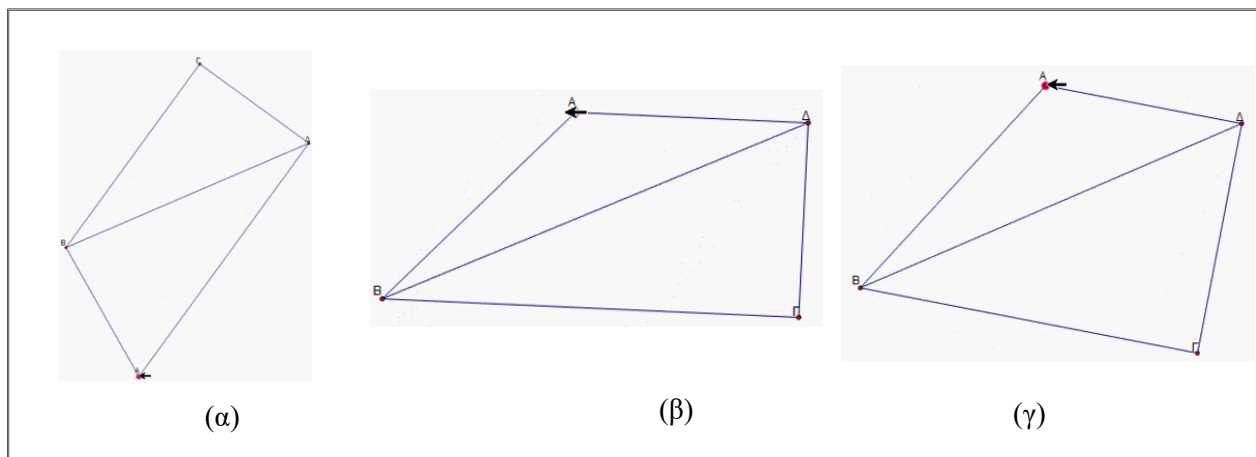
4.2.2 Φάση 2 – (Ακριβής) Διατύπωση Εικασίας

Η δεύτερη φάση για τους δύο μαθητές δεν διέφερε από αυτήν των μαθητριών. Ξεκίνησε, ομοίως, κατά την ενασχόλησή τους με το πρώτο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας και ολοκληρώθηκε στα μισά περίπου του δεύτερου ερωτήματος. Στην αρχή αυτής της φάσης το ποντίκι το κρατούσε ο Κοσμάς, ο οποίος έγραφε και στο φύλλο δραστηριότητας. Λίγο αργότερα το ποντίκι το πήρε ο Άγγελος και σε όλη την υπόλοιπη διάρκεια μέχρι και την ολοκλήρωση, εναλλασσόταν. Οι δύο μαθητές χρησιμοποίησαν όλους τους τύπους συρσίματος, ακόμη και το περιπλανώμενο, και σε αντίθεση με τα κορίτσια, το διατηρούμενο σύρσιμο υπερείχε των υπολοίπων. Ακόμα, δύο διαφορές με τις μαθήτριες ήταν ότι δεν επέλεξαν να κάνουν χρήση των τύπων του εργαλείου μέτρησης, αλλά και το γεγονός ότι οι εγγυήσεις τους ήταν επαγωγικές και παραγωγικές. Συνεπώς, τα επιχειρήματά τους χαρακτηρίστηκαν ως επαγωγικά και παραγωγικά. Όπως και στην προηγούμενη φάση, έτσι και σε αυτή παρατίθενται φωτογραφίες σε τρία διαφορετικά στάδια με το τελευταίο στάδιο να περιέχει το σχήμα για το οποίο οι μαθητές διατύπωναν το επιχείρημά τους.

Σε γενικές γραμμές τα σχήματα με τα οποία ασχολήθηκαν οι δύο μαθητές στη δεύτερη φάση ήταν:

i) Ορθογώνιο τραπέζιο

Σε αυτή τη φάση οι μαθητές αναγνώρισαν το ορθογώνιο τραπέζιο και έδωσαν τον ορισμό αυτού, αλλά δεν σημείωσαν το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α για τις οποίες το ΑΒΓΔ παραμένει ορθογώνιο, κάτι που δεν έγινε ούτε στην επόμενη φάση, καθώς οι μαθητές δεν ασχολήθηκαν ξανά με τη συγκεκριμένη σχηματική πτυχή.



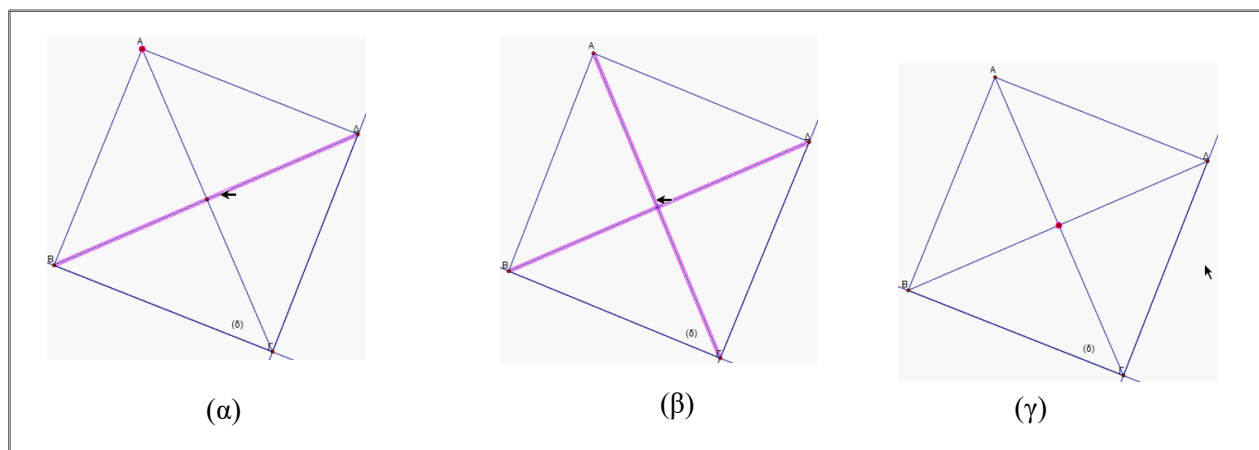
Εικόνα 19 – Ορθογώνιο τραπέζιο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
K: Ναι, ναι. Το τραπέζιο, θα είναι ορθογώνιο οπωσδήποτε. Έχει μία ορθή οπωσδήποτε. Επομένως αυτό τίποτα άλλο.	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	Δ: Έχει μία ορθή οπωσδήποτε. Σ: Το τραπέζιο, θα είναι ορθογώνιο οπωσδήποτε. Ε: (ΠΕ) [Το τραπέζιο που έχει δύο ορθές γωνίες είναι ορθογώνιο τραπέζιο.]

Πίνακας 29 – Ορθογώνιο τραπέζιο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

ii) Παραλληλόγραμμο

Αρχικά οι μαθητές χρησιμοποιούν το καθοδηγούμενο σύρσιμο για να φτιάξουν τετράγωνο τελειώνοντας όμως το σύρσιμο, συμφωνούν και οι δύο ότι αυτό που κατασκεύασαν δεν είναι τετράγωνο. Παρατηρώντας το σχήμα, θεωρούν ως δεδομένο ότι οι πλευρές είναι παράλληλες, οπότε καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο, ενώ δεν αναφέρουν κάτι για το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α.

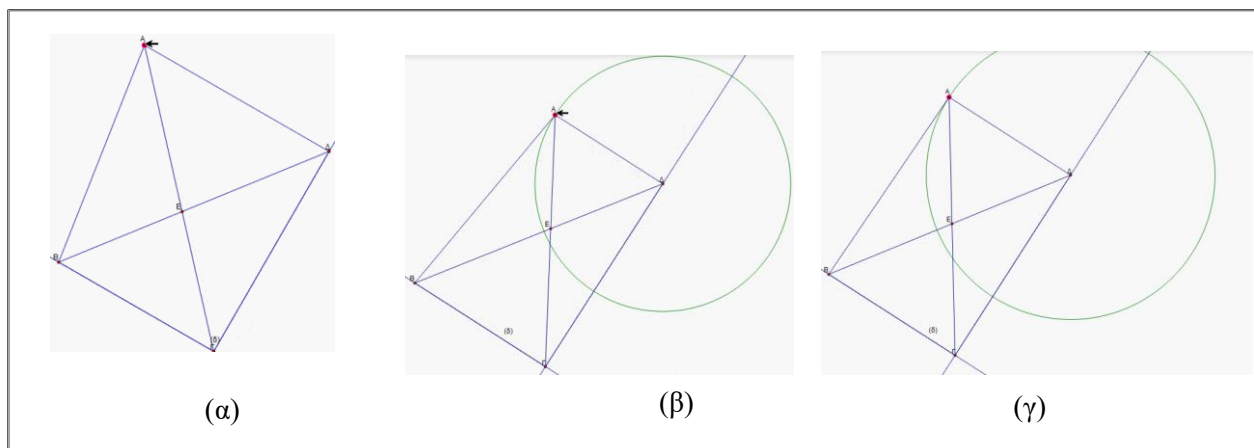


Εικόνα 20 – Παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Κ: Αυτό εδώ κάντο. Όχι αυτό εδώ δεν είναι με τίποτα. (εννοεί τετράγωνο)	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	Δ: Καθοδηγούμενο σύρσιμο. Σ: Δε είναι με τίποτα τετράγωνο. E: EE (*)
Α: Αυτές οι δύο είναι παράλληλες, ε; (εννοεί τις ΒΓ και ΑΔ)		Δ: $\Delta_{(*)} \rightarrow \Sigma_{(*)}$ Σ: ΒΓ//ΑΔ E: EE (**)
Κ: Ναι. Κι αυτές είναι παράλληλες οπωσδήποτε. (εννοεί τις ΑΒ και ΔΓ)		Δ: $\Delta_{(*)} \rightarrow \Sigma_{(*)}$ Σ: ΑΒ//ΔΓ E: EE (***)
Α: Άρα είναι παραλληλόγραμμο.		$\Delta: \Delta_{(*)} \rightarrow \Sigma_{(*)}$ $\Delta_{(**)} \rightarrow \Sigma_{(**)}$ $\Delta_{(***)} \rightarrow \Sigma_{(***)}$ Σ: Άρα είναι παραλληλόγραμμο. E: EE

Πίνακας 30 – Παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Στη συνέχεια συζητούν για άλλα σχήματα και όταν επανέρχονται στο παραλληλόγραμμο σημειώνουν πως αν το Α κινείται παράλληλα στην (ε), άρα και στη πλευρά ΔΓ, τότε θα έχουμε παραλληλόγραμμο⁹. Ωστόσο, η ΑΒ δε μπορεί να διατηρηθεί σταθερά παράλληλη στη ΔΓ και γι' αυτόν τον λόγο προσπαθούν να διατηρήσουν σταθερή σε μήκος την ΑΔ, κατασκευάζοντας κύκλο με κέντρο Δ και ακτίνα ΑΔ. Έπειτα, προσπαθούν να κάνουν συγχώνευση του Α στον κύκλο και δε παρατηρούν ότι με τον τρόπο που κατασκεύασαν τον κύκλο, το Α βρίσκεται συνέχεια πάνω σε αυτόν. Τέλος, όταν η καθηγήτρια τους αναφέρει ότι το Α βρίσκεται συνέχεια πάνω στον κύκλο καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το σχήμα είναι πάντα παραλληλόγραμμο και έμμεσα, χωρίς να το αναφέρουν, ότι το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α είναι ότι βρίσκονται πάνω στην παράλληλη της (ε).



Εικόνα 21 – Παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

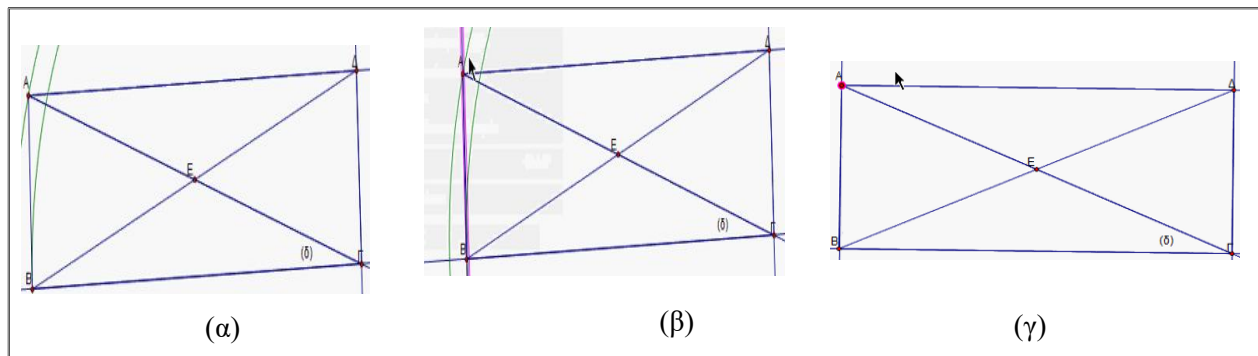
Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Κ: Τώρα δεν είναι παράλληλες; Οπότε, αυτό όσο το Α το κινούμε παράλληλα στην (ε), έχουμε παραλληλόγραμμο ή ρόμβος; Όχι παραλληλόγραμμο...	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	Δ: Το Α το κινούμε παράλληλα στην (ε). Διατηρούμενο σύρσιμο. → Σ: Έχουμε παραλληλόγραμμο. E: EE
Α: Παραλληλόγραμμο γενικά.	Διατηρούμενο σύρσιμο.	
Καθ: Οπότε ξεκινάτε πρώτα με το παραλληλόγραμμο; Αυτό που ουσιαστικά θέλουμε να κάνετε, αφού εξετάζουμε την περίπτωση του παραλληλογράμμου, είναι να ξεκινήσετε να το κινήσετε, να κινείται το Α, ούτως ώστε να διατηρείται παραλληλόγραμμο. Και μετά...		
Κ: Ναι, αυτό είπαμε τώρα ότι όσο κινούμε το Α με σταθερή την ΑΔ σε μήκος, και παράλληλη της (ε), τότε εξακολουθεί ακόμα να υπάρχει παραλληλόγραμμο.	Διατηρούμενο σύρσιμο	Δ: Κινούμε το Α με σταθερή την ΑΔ σε μήκος, και παράλληλη της (ε). Διατηρούμενο σύρσιμο. → Σ: Εξακολουθεί να υπάρχει παραλληλόγραμμο. E: EE
Καθ: Με σταθερή την ΑΔ;		

⁹ Αξίζει να σημειώσουμε ότι σε αυτό το σημείο οι μαθητές δεν έχουν φέρει την ευθεία που είναι παράλληλη στην (ε).

Κ: Δεν ξέρω. Είναι σταθερό; Δεν το βλέπεις; Εφόσον το ΑΔ είναι σταθερό και το Α το κινούμε παράλληλα πάνω κάτω στην (ε) είναι πάντα παραλληλόγραμμο.	Διατηρούμενο σύρσιμο	Δ: Το ΑΔ είναι σταθερό και το Α το κινούμε παράλληλα πάνω κάτω στην (ε). Διατηρούμενο σύρσιμο. Σ: Είναι πάντα παραλληλόγραμμο. E: EE (#)
A: Μέχρι ενός σημείου, όμως.		
Κ: Είναι παραλληλόγραμμο σκέτο. Εξετάζουμε τη γενική περίπτωση πρώτα.		
Καθ: Οπότε, εξετάζουμε την περίπτωση παραλληλογράμμου;		
A: Το θέμα είναι πώς θα διατηρήσουμε την ΑΒ σταθερή.		Δ: Η ΑΔ δε διατηρείται πάντα σταθερή. Σ: Δεν είναι πάντα παραλληλόγραμμο. E: (ΠΕ) [Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.] (##)
Κ: Η ΑΒ σταθερή δεν γίνεται. Η ΑΔ γίνεται, το ίδιο πράγμα είναι.		
A: Βασικά μπορούμε κάπως, αν και δεν είμαι σίγουρος, να πάρουμε κύκλο και να συγχωνεύσουμε το Α πάνω στον κύκλο και να είναι σταθερό το ΑΔ. Με κέντρο...		Δ: Η ΑΔ είναι σταθερή αν το Α κινείται πάνω σε κύκλο. Σ: Είναι πάντα παραλληλόγραμμο. E: (ΠΕ) [Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.] (###)
Κ: να κάνουμε αυτό που είπες. Όσο το αυξάνεις το ΑΔ είναι πάντα σταθερό γιατί αυτό που είπες με τον κύκλο.	Διατηρούμενο σύρσιμο	
A: Ναι, με τον κύκλο είναι πάντα σταθερό.		
Κ: Πάρε το κύκλο. Που είναι;		
(Παύση)		
Καθ: Καταρχήν έχετε τις οδηγίες. Τι ψάχνετε ακριβώς;		
Κ: Συγχώνευση σημείου σε κύκλο.		
Καθ: Ποιο σημείο θέλετε να συγχωνεύσετε;		
Κ: Το Α.		
Καθ: Το Α ούτως ή άλλως βλέπω ότι το έχετε βάλει πάνω στον κύκλο.	Σύρσιμο ελέγχου	Δ: Το Α είναι σημείο του κύκλου. $\Delta_{(\#)} \rightarrow \Sigma_{(\#)}$ $\Delta_{(\# \#)} \rightarrow \Sigma_{(\# \#)}$ $\Delta_{(\# \# \#)} \rightarrow \Sigma_{(\# \# \#)}$ Σ: Παραλληλόγραμμο υπάρχει πάντα. E: EE
A: Ενδιαφέρον.		
Κ: Παραλληλόγραμμο υπάρχει πάντα.		

Πίνακας 31 – Παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Στο τελευταίο στάδιο αυτής της φάσης, για το παραλληλόγραμμο, οι μαθητές έχουν κατασκευάσει την παράλληλη ευθεία στην ΔΓ, η οποία διέρχεται από το σημείο Α. Καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι έχουμε παραλληλόγραμμο, αν η πλευρά ΑΒ εφάπτεται στη παράλληλη αυτή ευθεία. Επίσης, εδώ δεν αναφέρουν κάτι άμεσα για το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α.



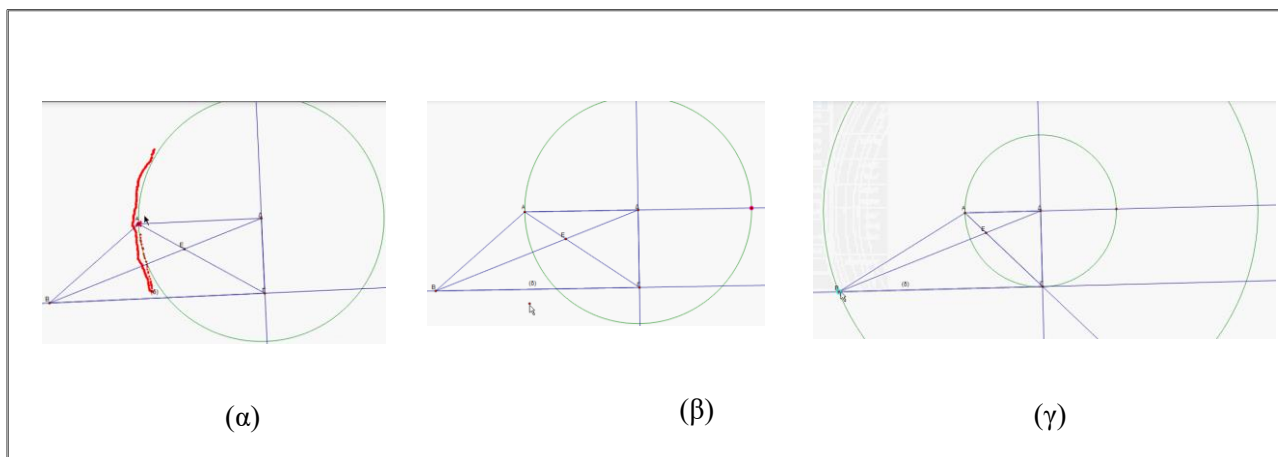
Εικόνα 22 – Παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Καθ: Ποια περίπτωση είπαμε ότι εξετάζουμε;		
Κ: Παραλληλόγραμμο.		
Καθ: Ωραία.		
Κ: Αλλά αυτό δεν είναι παραλληλόγραμμο. Αυτό είναι τραπέζιο.	Καθοδηγούμενο σύρσιμο	
Καθ: Μπορείτε, λοιπόν, να κινήσετε το Α ούτως ώστε το ΑΒΓΔ να παραμένει παραλληλόγραμμο; Για να βρούμε τις θέσεις του;		
Κ: Άμα πάρεις Α, επιλέγεις Α και αυτό, φέρνεις μια παράλληλη ευθεία, όσο κουνάς αυτό πρέπει να τέμνεται, πρέπει να εφάπτεται...	Σύρσιμο ελέγχου	
Α: Με τους κύκλους.		
Κ: Με τη παράλληλη.		
Κ: Όσο θα εφάπτεται στη παράλληλη θα έχουμε παραλληλόγραμμο.	Σύρσιμο ελέγχου	Δ: Ευθεία παράλληλη στη ΔΓ που διέρχεται από το Α. Η ευθεία εφάπτεται με την ΑΒ. Σ: Έχουμε παραλληλόγραμμο. Ε: ΠΕ [Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.]

Πίνακας 32 – Παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

iii) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα

Η δεύτερη φάση για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμα ξεκίνησε επίσημα περίπου όταν οι μαθητές ολοκλήρωναν την τρίτη φάση για το παραλληλόγραμμα. Χρησιμοποιώντας το κύκλο με κέντρο Δ και ακτίνα ΔA , τον οποίο είχαν κατασκευάσει για να διατηρείται σταθερή η ΔA , συμπεραίνουν πως το $AB\Gamma\Delta$ δεν είναι παραλληλόγραμμα γενικά, καθώς έχει δύο ορθές, συνεπώς είναι ορθογώνιο. Όμως, σύροντας το σχήμα με ενεργό το ίχνος γύρω από το κύκλο παρατηρούν ότι δεν διατηρούνταν πάντα ορθογώνιο, γι' αυτό σκέφτηκαν ότι θα πρέπει να φτιάξουν σταθερό τον κύκλο. Για να το πετύχουν αυτό αρχικά κατασκεύασαν το συμμετρικό του A ως προς Δ (πάνω στην ημιευθεία $A\Delta$), το οποίο δε τους βοήθησε, οπότε σκέφτηκαν να πάρουν ένα νέο κύκλο με κέντρο πάλι το Δ και ακτίνα ΔB . Τελικά, οι μαθητές, με το συγκεκριμένο συλλογισμό δεν κατάφεραν να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμα, οπότε επανήλθαν στην περίπτωση του παραλληλογράμμου γενικά, και αν και είχαν προχωρήσει στη τρίτη φάση του παραλληλογράμμου επέστρεψαν ξανά στη δεύτερη. Παρατηρούμε ότι σε αυτό το σημείο, ο σκοπός των μαθητών ήταν να κάνουν το $AB\Gamma\Delta$ να διατηρείται πάντα ορθογώνιο παραλληλόγραμμα και δεν κατάφεραν να παρατηρήσουν κάτι για τις διαφορετικές θέσεις του A .



Εικόνα 23 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

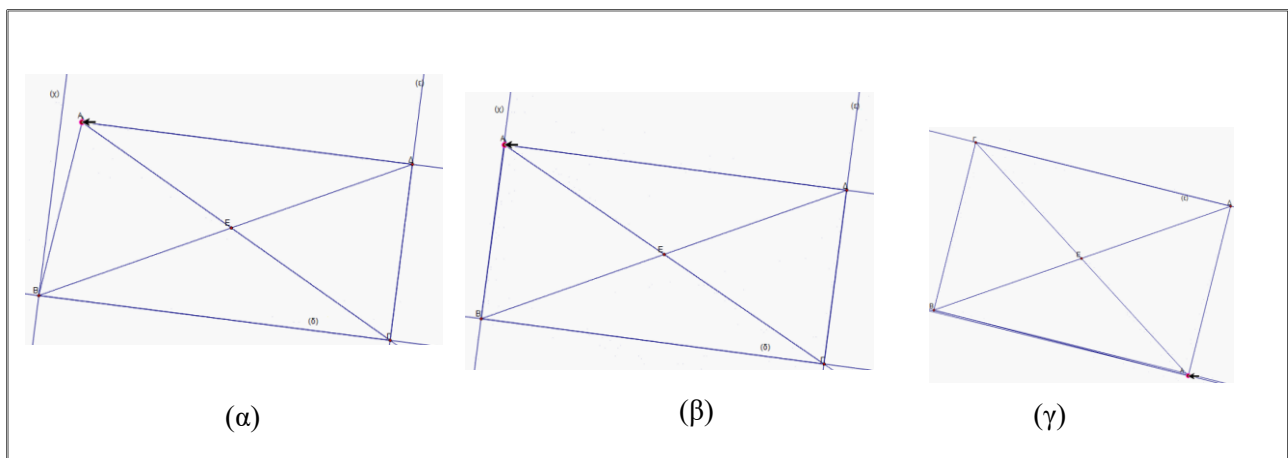
Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
K: Δεν είναι παραλληλόγραμμα γενικά. Κοίτα ουσιαστικά θα περίμενα να είναι κανονικό, έτσι; Είναι πάντοτε κανονικό.	Σύρσιμο με ενεργό το ίχνος	Δ: Έχει δύο ορθές. → Σ: Δεν είναι παραλληλόγραμμα γενικά. (Είναι ορθογώνιο.) E: (ΠΕ) [Το παραλληλόγραμμα που έχει μία γωνία ορθή είναι ορθογώνιο.]
A: Είναι πάντα κανονικό. Έχει δύο ορθές βασικά. Νομίζω, ναι.		
K: Το μόνο σταθερό είναι αυτά τα δύο. Τα μόνα που αλλάζουν είναι το AB και το AD. Ωραία;		
.	.	
.	.	
K: Θα μετακινήσουμε το A να είναι ακτίνα από δω.		

A: Ναι, κατάλαβα.		
K: Απλά πρέπει να φτιάξουμε σταθερό τον κύκλο.		
A: Αυτό εδώ πέρα δεν είναι το συμμετρικό του;		
K: Αυτό είναι το συμμετρικό του.		
A: Μετά όμως εδώ πέρα δε ξέρουμε...		
K: Μετά άμα πάρεις μία ευθεία εδώ πέρα και την προεκτείνεις, βρίσκεις το συμμετρικό.		
.	.	.
.	.	.
A: Άμα βγάλεις και δεύτερο κύκλο βρίσκεις και το B.		
K: Ξέρεις τι θέλω; Πρέπει να σταθεροποιείς αυτό. Τον πρώτο τον κύκλο τον θέλουμε σταθερό, ωραία; Και να μπορείς να γυρίσεις το ΑΔ, να πιάσεις ακτίνα εδώ πέρα και να γυρίσεις όλο το σχήμα.		
.	.	.
.	.	.
K: Βασικά άμα πιάσουμε τα ομόκεντρα Δ στο Β.....		
A: Μμμμ, δεν είμαι σίγουρος.		
Καθ: Τι πιστεύετε ότι σας ρωτάει αυτή η ερώτηση; Εννοώ τι πιστεύετε ότι πρέπει να κάνετε; Για τη συγκεκριμένη ερώτηση. Τι ακριβώς ζητάει;		
K: Να βρούμε ένα σημείο, ένα σημείο του Α, για να είναι το ίδιο.		
Καθ: Για να είναι το ίδιο σχήμα.		
A: Ναι. Σβήσε το κύκλο επομένως.		
K: Το σχήμα πώς μπαίνει; Έχεις ΑΔ εδώ πέρα, την ΑΒ τη μεταφέρεις εδώ, τη ΒΓ τη πετάς εδώ πέρα.		
Καθ: Και σ' αυτό το σημείο δεν θέλουμε να πείτε γιατί ισχύει. Θέλουμε απλά να παρατηρήσουμε αν συμβαίνει κάτι.		
K: Δε μπορούμε να πούμε ότι σχηματίζοντας δύο ομόκεντρους με κέντρο Δ; Μεταφέρουμε...		
A: Έχω ενδιαφέρον για τους ομόκεντρους. Απλά δεν νομίζω. Πρέπει να είναι σωστό.		
K: Απλά με τους ομόκεντρους αυτό που συμβαίνει είναι ότι μεταφέρεται και αυτή και αυτή. Όλες οι υπόλοιπες σχηματίζονται μόνες τους. Γιατί φτιάχνει δύο ακτίνες ΑΔ και ΔΒ άμα πεις ότι σχηματίζεται		

ομόκεντρους μεταφέρει το Α ως ακτίνα του K_1 ας πούμε αυτός και K_2 αυτός.		
.	.	.
Κ: Μεγαλώνει ο κύκλος, εξαρτώνται όλοι οι κύκλοι, οπότε... οι ομόκεντροι είναι το ίδιο. Γίνεται να βάλουμε τους κύκλους να πέφτει ο ένας πάνω στον άλλο;		
Α: Ναι αλλά δε βγάζει κάτι. Βγάζει τραπέζιο.	Σύρσιμο ελέγχου	Δ: Σύρσιμο ελέγχου. Δε βγάζει ορθογώνιο. Σ: Βγάζει τραπέζιο. Ε: ΕΕ

Πίνακας 33 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Έπειτα, αφού ολοκλήρωσαν την τρίτη φάση του παραλληλόγραμμου, στην οποία είχαν κατασκευάσει ευθεία (χ), παράλληλη στην (ϵ), άρα και στη ΔΓ συμπεραίνουν πως όταν το Α είναι πάνω στη (χ), το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμα. Παίρνοντας αυτό ως δεδομένο καταλήγουν πως το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α είναι ότι βρίσκονται πάνω στη (χ). Ωστόσο, με τη βοήθεια της καθηγήτριας η οποία ανέφερε ότι υπάρχουν και άλλα σημεία, εκτός της (χ), και ότι η ευθεία τους βοηθάει μόνο για να βλέπουν που είναι ορθογώνιο, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν και άλλες θέσεις.



Εικόνα 24 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

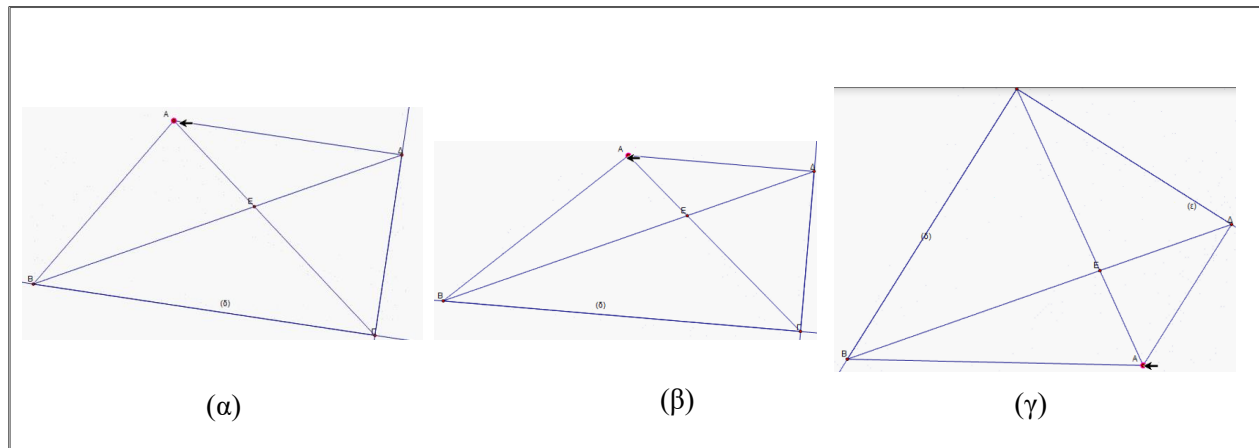
Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Κ: Τραπέζιο, τετράγωνο ρόμβος. Όπα, ορθογώνιο δεν είναι εδώ συνέχεια;		Δ: Το Α είναι πάνω στη (χ) Σ: Εδώ είναι ορθογώνιο συνέχεια. Ε: (ΠΕ) [Το παραλληλόγραμμα που έχει μία γωνία ορθή είναι ορθογώνιο.]
Α: Ναι.		

Κ: Ωραία.		
Καθ: Δεν υπάρχει άλλη θέση που να είναι ορθογώνιο; Μόνο όταν κινείται εκεί; Μόνο πάνω στην ευθεία παραμένει;		
Α: Πρέπει να υπάρχει κι άλλη. Αλλά...		
Καθ: Μόνο πάνω στην ευθεία παραμένει;		
Α: Ορθογώνιο είναι.	Καθοδηγούμενο και διατηρούμενο σύρσιμο	
.	.	.
Καθ: Καταλήξαμε σε κάτι για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;		
Κ: Ναι, έχουμε καταλήξει.		
Α: Ότι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σχηματίζεται όταν σχηματίζουμε μια νοητή ευθεία (χ) μεταξύ των Α και Β σημείων, που είναι παράλληλη στην (ε).	Διατηρούμενο σύρσιμο	
Καθ: Και το Α πού κινείται;		
Α: Πάνω σ' αυτήν.		
Καθ: Ωραία. Πιστεύετε ότι δεν υπάρχει άλλη θέση για το Α ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;	Διατηρούμενο σύρσιμο και σύρσιμο εικονικού τόπου	
Α: Θα σας απαντήσουμε απλά το ίδιο πράγμα είναι. Κινείς προς τα κάτω.		
Καθ: Αυτή η θέση που έδειξες πριν εμένα μου θύμιζε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ήταν πιο κάτω από την ευθεία.		
Κ: Πιο κάτω από τη (δ).		
Καθ: Αυτό εδώ το σημείο δεν νομίζω ότι είναι πάνω στην ευθεία το Α που είπατε, τη (χ).	Σύρσιμο εικονικού τόπου	
Α: Είναι γιατί είναι παράλληλη στην (ε).		
Κ: Έχουμε πάρει μία ευθεία η οποία ευθεία είναι παράλληλη.		

Πίνακας 34 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

iv) Τραπεζίο

Σε αυτή τη φάση οι μαθητές στη προσπάθειά τους να εξερευνήσουν τις θέσεις του A για τις οποίες το ABΓΔ παραμένει ορθογώνιο μεταπηδούν στο τραπέζιο καθώς είναι πιο εύκολο να το εξηγήσουν. Καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι είναι παντού τραπέζιο.



Εικόνα 25 – Τραπεζίο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Κ: Να πάμε στο τραπέζιο; Που είναι παντού τραπέζιο; Παντού τραπέζιο, σταντε...	Καθοδηγούμενο σύρσιμο & σύρσιμο ελέγχου	
Α: Βασικά ακόμα και σε σημείο διαφορετικό της παράλληλης. ¹⁰		
Κ: Ισχύει. Είναι πάντοτε πάντα πάντα τραπέζιο. Ξέρεις τη χαζομάρα κάναμε;		

Πίνακας 35 – Τραπεζίο (2^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι σε αυτήν τη φάση οι μαθητές, όπως και οι μαθήτριες, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του Sketchpad και ειδικότερα το διατηρούμενο σύρσιμο διατύπωσαν δηλώσεις σύμφωνα με τις κοινές συμβάσεις κειμένων. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτήν τη φάση, αφού κατέληξαν για τις σχηματικές πτυχές που μπορούν να προκύψουν κινώντας το σημείο A, στη συνέχεια προσπάθησαν να αναφέρουν, για τα περισσότερα σχήματα, το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων, για τις οποίες προκύπτει το ίδιο γνωστό σχήμα, μέσα από μία ακριβώς διατυπωμένη εικασία.

¹⁰ Εννοεί τη παράλληλη της ΑΔ η οποία διέρχεται από το Β. Την ευθεία αυτή την έφεραν στην προσπάθειά τους να βρουν τις θέσεις για τις οποίες το ABΓΔ παραμένει ορθογώνιο.

4.2.3 Φάση 3 – Προσδιορισμός Μαθηματικών Επιχειρημάτων

Η τρίτη φάση και για τους μαθητές ξεκίνησε και ολοκληρώθηκε κατά την ενασχόλησή τους με το δεύτερο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας. Εν αντιθέσει με τις μαθήτριες, χρησιμοποίησαν το λογισμικό τόσο παρατηρώντας την οθόνη, αλλά και μέσω του ποντικιού, το οποίο εναλλασσόταν καθ' όλη τη διάρκεια. Χρησιμοποίησαν σχεδόν όλους τους τύπους συρσίματος, και κυρίως το διατηρούμενο, ενώ για πρώτη φορά χρησιμοποιούν τη μέτρηση και συγκεκριμένα τη καθοδηγούμενη. Ωστόσο, οι εγγυήσεις τους ήταν μόνο παραγωγικές, οπότε τα επιχειρήματα χαρακτηρίστηκαν παραγωγικά. Σε αυτήν τη φάση επιλέχθηκαν τα κρίσιμα συμβάντα και παρατίθενται τα επιχειρήματα των μαθητών.

Τα σχήματα με τα οποία προχώρησαν στη τρίτη φάση ήταν:

i) Παραλληλόγραμμο

Σε αυτήν τη φάση οι μαθητές χρησιμοποιούν άμεσα τη θεωρία για να αιτιολογήσουν ότι το σχήμα είναι γενικά παραλληλόγραμμο. Στην αρχή απορρίπτουν την περίπτωση του ορθογωνίου αναφέροντας ότι δεν είναι όλες ορθές και στη συνέχεια το γεγονός ότι είναι πάντα παράλληλες τους βοηθάει να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι είναι παραλληλόγραμμο, ενώ δεν αναφέρουν κάτι για το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Καθ: Καταρχήν πιστεύετε ότι θα είναι ένα τυχαίο παραλληλόγραμμο, το σχήμα που θα προκύψει;	Διατηρούμενο σύρσιμο	
Κ: Ναι.		
Καθ: Ή κάποιο συγκεκριμένο είδος;		
Κ: Είναι τυχαίο γιατί δεν βγαίνουν όλες οι γωνίες ορθές και εδώ πέρα βασικά είναι παραλληλόγραμμο.		
.	.	.
.	.	.
Α: Σχεδίαση ίχνους. Παραλληλόγραμμο γενικά. Εντάξει πάντα είναι παράλληλες.		

Πίνακας 36 – Παραλληλόγραμμο (3^η Φάση : 2^η Ομάδα)

ii) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Όταν ολοκλήρωσαν τη δεύτερη φάση, οι μαθητές είχαν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι εκτός από την ευθεία (χ) (παράλληλη της (ε)) υπάρχουν και άλλες θέσεις για τις οποίες το ΑΒΓΔ διατηρείται ορθογώνιο. Στην προσπάθειά τους να τις βρουν κάνουν διατηρούμενο σύρσιμο και σύρσιμο με το ίχνος ενεργό. Οπότε παρατηρούν ότι σχηματίζεται κύκλος. Κατόπιν κατασκευάζουν Ε ως το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΔ και φέρνουν κύκλο με κέντρο Ε και ακτίνα ΕΑ. Στα παρακάτω επιχειρήματα που παραθέτουν είναι εμφανές ότι στα κριτήρια που χρησιμοποιούν υπάρχουν ελλείψεις και παρανοήσεις, αφού θεωρούν το Ε ως το μέσο των ΑΓ και ΒΔ. Τέλος, οι μαθητές δεν κάνουν καμία αναφορά για το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Κ: Αυτό, όσο η ΑΓ και η ΔΒ είναι διάμετροι αυτού του κύκλου θα έχουμε ορθογώνιο.		
Α: Ναι.		
Κ: Αυτό.		
Καθ: Ποιος κύκλος είναι μου είπατε;		
Α: Είναι ο κύκλος με κέντρο Ε και ακτίνα ΑΕ. .		
.	.	.
.	.	.
Καθ: Το Ε ήταν το μέσο της ΑΓ;		
Α: Ναι, η τομή είναι.		
Κ: Είσαι σίγουρος γι' αυτό;		
Καθ: Το Ε νομίζω ότι το είχατε πάρει τομή της ΒΔ με την ΑΓ.		
Κ: Μπορείς να πεις ότι διχοτομείται επειδή έχουν... Οπότε είναι ορθογώνιο.		
Α: Ναι. Ορθογώνιο.		

Πίνακας 37 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (3^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι μαθητές, όπως και οι μαθήτριες, σε αυτήν τη φάση σιγουρεύτηκαν για τα σχήματα που προκύπτουν, όμως δεν έκαναν καμία αναφορά στο κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α, για τις οποίες προκύπτει το ίδιο γνωστό σχήμα. Επίσης, στη διάρκεια αυτής της φάσης, κατόρθωσαν να συνδυάσουν την εξερεύνηση της ακριβώς διατυπωμένης εικασίας και τον προσδιορισμό των κατάλληλων μαθηματικών επιχειρημάτων για την επικύρωση αυτής και θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι κατάφεραν να παράξουν μία ακατέργαστη αποδεικτική ιδέα.

4.2.4 Φάση 4 - Επιλογή και Συνδυασμός Συνεκτικών Επιχειρημάτων

Η τέταρτη φάση και για τους μαθητές ξεκίνησε και ολοκληρώθηκε κατά την ενασχόλησή τους με το τρίτο και τελευταίο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας. Όπως και στη τρίτη φάση έτσι και σε αυτή, σε αντίθεση με τις μαθήτριες, χρησιμοποίησαν το λογισμικό, τόσο παρατηρώντας την οθόνη, αλλά και μέσω του ποντικιού, το οποίο εναλλασσόταν καθ' όλη τη διάρκεια. Χρησιμοποίησαν κυρίως το συνδεδεμένο σύρσιμο και το σύρσιμο ελέγχου και όμοια με τη προηγούμενη φάση οι εγγυήσεις τους ήταν μόνο παραγωγικές, οπότε τα επιχειρήματα χαρακτηρίστηκαν παραγωγικά. Λόγω περιορισμού του χρόνου ασχολήθηκαν μόνο με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμα για το οποίο παρατίθενται τα επιχειρήματα των μαθητών.

i) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα

Λίγο πριν την έναρξη της 4^{ης} φάσης στους μαθητές δόθηκε από την καθηγήτρια το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του Α, καθώς είχε περάσει ήδη πολύς χρόνος. Έτσι, αφού έχουν κάνει συγχώνευση του Α στο κύκλο με κέντρο Ε (μέσο της ΒΔ) και διάμετρο τη ΒΔ, για να αιτιολογήσουν γιατί το σχήμα είναι ορθογώνιο, επιλέγουν τα επιχειρήματα και τα κριτήρια που έχουν να κάνουν με τις γωνίες, λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι το σχήμα είναι εγγεγραμμένο.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
A: Για να δείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο ορθογώνιο, πρέπει να είναι εγγράψιμο το σχήμα, ουσιαστικά;		Δ: Το ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο Κάθε γωνία βαίνει σε ημικύκλιο. Σ: Επομένως το ΑΒΓΔ ορθογώνιο. Ε: (ΠΕ) [Το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες ίσες είναι ορθογώνιο.]
Κ: Πάμε ξανά.		
A: Για να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αυτό το τετράπλευρο, δεν πρέπει να είναι εγγράψιμο;	Συνδεδεμένο σύρσιμο	
Κ: Επομένως παρατηρούμε το ΑΒΓΔ ορθογώνιο.		

Πίνακας 38 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμα (4^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Συνοψίζοντας παρατηρούμε πως στη τέταρτη φάση και οι μαθητές επέλεξαν και συνδύασαν τα επιχειρήματα που είχαν δημιουργήσει στις προηγούμενες φάσεις σε μία παραγωγική αλυσίδα.

4.2.5 Φάση 5- Οργάνωση Επιχειρημάτων σύμφωνα με Πρότυπα Μαθηματικών

Η πέμπτη φάση, επίσης, ξεκίνησε και ολοκληρώθηκε κατά την ενασχόλησή τους με το τρίτο και τελευταίο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας. Όμοια με τις μαθήτριες, χρησιμοποίησαν το λογισμικό μόνο για να παρατηρούν το σχήμα στην οθόνη ενώ έσυραν το Α πάνω στο κύκλο μηχανικά καθώς μιλούσαν. Επιπλέον συνεχίζουν να χρησιμοποιούν αποκλειστικά παραγωγικές εγγυήσεις, οπότε τα επιχειρήματα ήταν μόνο παραγωγικά. Τέλος, και σε αυτό το σημείο ασχολήθηκαν μόνο με το ορθογώνιο.

i) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Οι μαθητές έχοντας πλέον ως δεδομένο ότι το σχήμα είναι εγγεγραμμένο, άρα θα έχει τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο καθώς έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

Διάλογος	Εργαλείο	Toulmin
Καθ: Τι εννοείτε ότι πρέπει να είναι εγγράψιμο; Και σε τι μας βοηθάει αυτό;		
Κ: Πρέπει να μπορεί να σχηματιστεί κύκλος με διάμετρο τη διαγώνιο...		
Α: Τις διαγώνιους...		
Καθ: Ωραία.		
Κ: Είναι ορθογώνιο από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι οποιοδήποτε εγγράψιμο σχήμα έχει τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές. Σωστά δε το λέω;		
Α: Ναι.		
Κ: Οπότε θα πρέπει να είναι αναγκαστικά οι γωνίες του 90.		
Καθ: Γιατί θα είναι 90;		
Κ: Διότι πρέπει οι απέναντι να είναι παραπληρωματικές, είναι η Γ και η Α... είναι παραπληρωματικές ...		

Πίνακας 39 – Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (5^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, αναφορικά με τις γωνίες του, οι μαθητές προσπάθησαν και κατάφεραν να οργανώσουν τα επιχειρήματά τους σύμφωνα με τα πρότυπα των μαθηματικών.

4.2.6 Φάση 6 - Πρόταση Επίσημης/Τυπικής Απόδειξης

Η έκτη και τελευταία φάση ξεκίνησε και ολοκληρώθηκε, όπως και οι προηγούμενες δύο, κατά την ενασχόλησή τους με το τελευταίο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας. Σε αυτήν τη φάση οι μαθητές χρησιμοποίησαν το λογισμικό μόνο για να παρατηρούν το σχήμα στην οθόνη και δεν υπήρξε καμία αλληλεπίδραση με το ποντίκι. Οι εγγυήσεις τους και αυτήν τη φορά ήταν αποκλειστικά παραγωγικές, οπότε τα επιχειρήματα ήταν μόνο παραγωγικά. Τέλος, και πάλι οι μαθητές ασχολήθηκαν μόνο με το ορθογώνιο και παρατίθεται η γραπτή απάντηση που έδωσαν στο φύλλο δραστηριότητας.

i) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

❖ Την απάντηση που δώσατε στο προηγούμενο ερώτημα, θα την παρουσιάζατε σ' ένα διαγώνισμα όπως είναι; Θα αλλάζατε κάτι;

Παρατηρούμε πως για να είναι το $AB\Gamma\Delta$ ^{ορθογώνιο} ~~απαραίτητα~~ πρέπει να είναι εγγράμιο. Σχηματίζουμε κύκλο K_1 με κέντρο E μέσον του AB και ακτίνα AE . Έχουμε:

$\Rightarrow AB\Gamma\Delta$ # γιατί BD και AC διαγώνιοι που διχοτομούνται στο κέντρο του κύκλου (E). Επίσης $AC \perp BD$ $\Rightarrow$ $AB\Gamma\Delta$ $\perp$ $\Rightarrow$ $AB\Gamma\Delta$ είναι ~~ορθογώνιο~~ ^{ορθογώνιο} ~~παραλληλόγραμμο~~ ^{παραλληλόγραμμο}

Εικόνα 26 – Γραπτή απάντηση μαθητών (6^η Φάση : 2^η Ομάδα)

Οπότε, και στη περίπτωση των μαθητών, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ολοκλήρωσαν την έκτη φάση δίνοντας τη επίσημη (και όχι απαραίτητα αυστηρή) απόδειξη, έτσι όπως θα την έδιναν και σε ένα διαγώνισμα του σχολείου.

4.2.7 Συνοπτικά Αποτελέσματα 2^{ης} Ομάδας – Δραστηριότητα 1^η

Λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση των μαθητών με το λογισμικό αλλά και τους τύπους εγγυήσεων που επέλεξαν, καθώς προχωρούσαν από τη μία φάση στην άλλη, μπορούμε να παρατηρήσουμε τα κάτωθι:

- Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τα εργαλεία του Sketchpad σε όλες σχεδόν τις φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας.

- Από τα εργαλεία αυτά έκαναν χρήση κυρίως του συρσίματος και συγκεκριμένα των ειδικοτήτων διατηρούμενο συνδεδεμένο και ελέγχου.
- Σε αντίθεση με τις μαθήτριες, οι μαθητές δεν χρησιμοποίησαν το εργαλείο της μέτρησης, παρά μόνο μία φορά.
- Όμοια με τις μαθήτριες, δεν ήταν εξοικειωμένοι πλήρως με το λογισμικό Sketchpad και κυρίως με το διατηρούμενο και εικονικού τύπου σύρσιμο, γεγονός που επηρέασε την εξέλιξή τους στις επόμενες φάσεις (αφού δεν κατάφεραν να βρουν μόνοι τους το κοινό χαρακτηριστικό των θέσεων του A, για τις οποίες προκύπτει το ίδιο γνωστό σχήμα).
- Από τη τέταρτη φάση και μετά, περιορίστηκε και στη συνέχεια σταμάτησε η αλληλεπίδραση με το λογισμικό, μέσω του ποντικιού, ενώ στη προηγούμενη ομάδα αυτό συνέβη από τη τρίτη φάση και έπειτα.
- Με τη βοήθεια του συρσίματος οι εγγυήσεις και των μαθητών στις δύο πρώτες φάσεις ήταν κυρίως επαγωγικές.
- Οι παραγωγικές εγγυήσεις ξεκίνησαν από τη πρώτη φάση ενώ από τη τρίτη φάση και μετά οι εγγυήσεις τους ήταν αποκλειστικά παραγωγικές.
- Δεν υπήρξε καμία δομική διαισθητική εγγύηση και κατ' επέκταση κανένα απαγωγικό επιχείρημα.
- Οι μαθητές ολοκλήρωσαν όλες τις φάσεις μόνο για το ορθογώνιο.
- Τέλος, και στη δεύτερη ομάδα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι έδωσαν μία μορφή τυπικής απόδειξης, χρησιμοποιώντας τη θεωρία, αλλά χωρίς να έχει αυστηρή δομή.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα συγκεντρώθηκαν και δημιουργήθηκαν δύο πίνακες (Πίνακας 40 & Πίνακας 41) οι οποίοι περιλαμβάνουν ποσοτικά ο πρώτος τη χρήση εργαλείων του Sketchpad, ενώ ο δεύτερος τους τύπους εγγυήσεων. Όμοια με τη προηγούμενη ομάδα, οι αριθμοί στο πρώτο πίνακα προέκυψαν από τις σειρές στην απομαγνητοφώνηση, στις οποίες διπλά ήταν σημειωμένο κάποιο εργαλείο, ενώ στο δεύτερο από τον αριθμό των επιχειρημάτων που αναλύθηκαν κατά Toulmin (1993).

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1</u>		ΦΑΣΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ									
		Φάση 1	Φάση 2				Φάση 3		Φάση 4	Φάση 5	Φάση 6
			Ορθ.τραπέζιο	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Τραπέζιο	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Ορθογώνιο	Ορθογώνιο	Ορθογώνιο
ΤΥΠΟΙ ΣΥΡΣΙΜΑΤΟΣ	Περιπλανώμενο	4	—	—	1	—	1	3	—	—	—
	Καθοδηγούμενο	4	1	3	4	3	—	8	—	—	—
	Διατηρούμενο	—	—	7	24	—	4	14	—	—	—
	Εικονικού Τόπου	—	—	—	6	—	—	—	—	—	—
	Τχνος Ενεργό	—	—	—	12	—	—	2	2	—	—
	Συνδεδεμένο	—	—	—	—	—	—	—	19	—	—
	Ελέγχου	—	—	3	8	3	4	8	19	—	—
ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	Περιπλανώμενη	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Καθοδηγούμενη	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—
	Αντιληπτική	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Επικύρωσης	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Πίνακας 40 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε εργαλεία Sketchpad (1^η Δραστηριότητα : 2^η Ομάδα)

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1</u>		ΦΑΣΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ									
		Φάση 1	Φάση 2				Φάση 3		Φάση 4	Φάση 5	Φάση 6
			Ορθ.τραπέζιο	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Τραπέζιο	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Ορθογώνιο	Ορθογώνιο	Ορθογώνιο
ΤΥΠΟΙ ΕΓΓΥΗΣΕΩΝ	Δομική Διαισθητική Εγγύηση [ΔΔΕ]	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Επαγωγική Εγγύηση [ΕΕ]	9	—	8	4	1	—	—	—	—	—
	Παραγωγική Εγγύηση [ΠΕ]	3	1	5	3	—	4	3	1	2	2

Πίνακας 41 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε τύπους Εγγυήσεων (1^η Δραστηριότητα : 2^η Ομάδα)

4.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1^{ης} & 2^{ης} ΟΜΑΔΑΣ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2^η

Η ενότητα αυτή περιλαμβάνει τα αποτελέσματα και των δύο ομάδων μαθητών της Α' Λυκείου (Βανέσσα-Σοφία και Άγγελος-Κοσμάς) κατά την ενασχόληση τους με τη δεύτερη δραστηριότητα η οποία πραγματοποιήθηκε αμέσως μετά τη πρώτη.

4.3.1 Ερώτημα 1^ο

Στο πρώτο ερώτημα της δεύτερης δραστηριότητας και οι δύο ομάδες ξεκίνησαν κάνοντας περιπλανώμενο σύρσιμο. Κατόπιν η πρώτη ομάδα συνέχισε κάνοντας αντιληπτική και επικύρωσης μέτρηση, ενώ η δεύτερη καθοδηγούμενο σύρσιμο. Οι δύο ομάδες ολοκλήρωσαν με σύρσιμο ελέγχου. Στο ερώτημα αυτό οι εγγυήσεις και των δύο ομάδων ήταν δομικές διαισθητικές και επαγωγικές, ενώ στο τέλος, τόσο οι μαθήτριες όσο και οι μαθητές, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το σχήμα είναι πάντα ορθογώνιο, μέσω δομικών διαισθητικών εγγυήσεων.

ΟΜΑΔΑ 1 ^Η	
Διάλογος	Toulmin
Βα: Ωχ! Ξέρεις τι; Μπορεί να το κατασκεύασε έτσι όπως καταλήξαμε εμείς με τον κύκλο, μπορεί να έκανε κι αυτός με κύκλο για να βγει αυτό το πράγμα. Όχι;	
Σ: Ίσως.	
Βα: Ωραία γράψε, ότι πάντα είναι ορθογώνιο. Μετά θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε, γιατί είναι ορθογώνιο.	

Πίνακας 42 – Δραστηριότητα 2 (1^ο Ερώτημα : 1^η Ομάδα)

ΟΜΑΔΑ 2 ^Η	
Διάλογος	Toulmin
Κ: Παντού ορθογώνιο, οκ.	
Α: Για ρόμβο δεν παίζει με τίποτα.	
Κ: Ναι ορθογώνιο.	

Πίνακας 43 – Δραστηριότητα 2 (1^ο Ερώτημα : 2^η Ομάδα)

4.3.2 Ερώτημα 2^ο

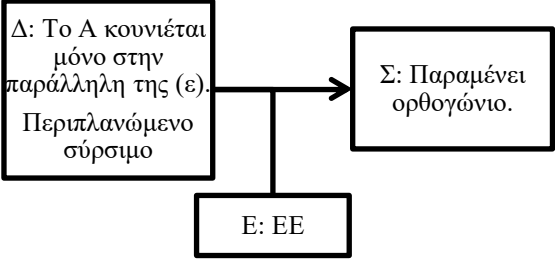
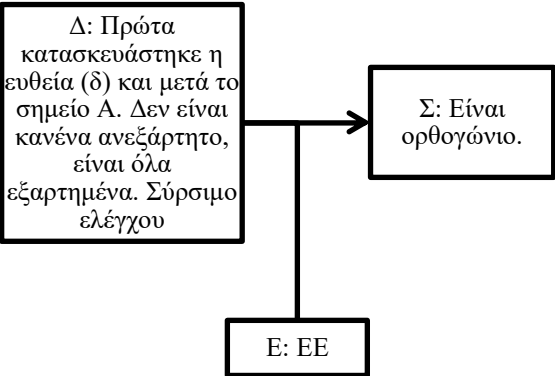
Στο δεύτερο και τελευταίο ερώτημα οι μαθήτριες (1^η ομάδα) χρησιμοποιούν μόνο το σύρσιμο ελέγχου σε μικρό βαθμό, ενώ τα προσαρμοσμένα εργαλεία με εμφάνιση του αρχείου εντολών υπερέχουν. Παρόμοια με τη πρώτη ομάδα, η δεύτερη χρησιμοποιεί περιπλανώμενο και ελέγχου σύρσιμο, καθώς επίσης και μέτρηση επικύρωσης. Όμως και πάλι τα προσαρμοσμένα εργαλεία με εμφάνιση του αρχείου εντολών κατέχουν πρωταγωνιστικό ρόλο. Σε αυτό το ερώτημα εμφανίζονται και στις δύο ομάδες και οι τρεις τύποι εγγυήσεων.

ΟΜΑΔΑ 1 ^Η	
Διάλογος	Toulmin
Βα: Εδώ ουσιαστικά το έχει φτιάξει έτσι ώστε αυτά να είναι κάθετα όλα. Ενώ εμείς εδώ έχουμε φέρει μόνο μία κάθετη. Έτσι δεν είναι; Σ: Ναι. . . . Βα: Είναι μόνο μία κάθετη ευθεία. Δεν έχουμε άλλη κάθετη. Έχουμε μόνο μία. Ενώ εδώ έχουμε και άλλες κάθετες. Σ: Εδώ είναι όλες κάθετες απλά δεν έχουμε φέρει παράλληλη δεν έχουμε φέρει κάθετη μάλλον στο Α. . . . Σ: Πρέπει να το εξηγήσω. Απλά αυτή, η ΑΔ, πρέπει να είναι οπωσδήποτε κάθετη στο Α γιατί το ΑΔ συμπίπτει με την ευθεία (κ) που έχουμε φέρει. Άρα την έχουμε κατασκευάσει να είναι κάθετη άρα δεν μπορούμε να μετακινήσουμε το Α να μην σχηματίζονται μόνο γωνίες 90°.	
. . .	. . .
Βα: Ωραία, τι διαφορετικό έχει κάνει; Είπαμε ότι εδώ υπάρχει μόνο μία ορθή γωνία αλλά εδώ έτσι όπως είναι κατασκευασμένο όλες οι γωνίες είναι ορθές, γιατί είναι όλες κάθετες μεταξύ τους. Γιατί βασικά όλες είναι παράλληλες και κάθετες.	
Σ: Ναι.	
Καθ: Ωραία, σε τι μας βοηθάει αυτό;	
Βα: Εφόσον μεταξύ τους είναι παράλληλες και κάθετες σε όποιο σημείο κι αν πάρουμε.... Άρα το κάθε σημείο εξαρτάται από το άλλο. Όχι; Άρα σε όποιο σημείο και να το κινήσουμε σε ένα σημείο.	
. . .	. . .
Βα: Ναι, μισό αφού έχουμε πει ότι αυτά τα τρία έχουν φτιαχτεί με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι κάθετα και παράλληλα. Άρα, όπου και να μετακινηθεί το Α, αυτά θα συνεχίσουν πάλι να είναι κάθετα και παράλληλα.	
Σ: Ε! Ναι.	

Βα: Άρα πάντα θα σχηματίζουν τις τέσσερις ορθές γωνίες. Άρα πάντα θα είναι ορθογώνιο. Τι διαφορετικό έχουν; Άρα αυτό δεν εξηγεί γιατί είναι πάντα ορθογώνιο;	
Σ: Ε! Αφού η (κ) είναι πάντα παράλληλη στην (ε), και η ΑΔ είναι.....	
.	.
Βα: Ότι όλα τα σημεία εξαρτώνται με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο από το Α, το οποίο είναι ανεξάρτητο.	
Σ: Ναι.	
Βα: Άρα αν μετακινήσουμε το Α, τα υπόλοιπα τρία σημεία θα συνεχίσουν να εξαρτώνται από το Α με την ίδια σχέση.	
Σ: Αυτό, μπράβο.	

Πίνακας 44 – Δραστηριότητα 2 (2^ο Ερώτημα : 1^η Ομάδα)

ΟΜΑΔΑ 2 ^Η	
Διάλογος	Toulmin
Κ: Κουνούσαμε το Α.	
Α: Και εδώ πέρα το Α κουνάμε. Ναι, αλλά εδώ ξέρεις ποιο είναι το θέμα....	
Κ: Είναι όλα σταθερά	
.	.

A: Επίσης ξέρεις ποιο άλλο είναι το θέμα; Το A κουνιέται μόνο στην παράλληλη της (ε). Πάνω στην (κ), δηλαδή. Βασικά, όχι, δεν κουνιέται πάνω στην (κ). Δε κουνιέται μισό να το πω καλύτερα. Είναι πάντα κάθετη ρε παιδί μου..	
K: Η AB είναι κάθετη στην (ε).	
A: Πως λέγεται αυτή που παίρνουμε παράλληλες και...;	E: (ΠΕ) [Το παραλληλόγραμμο με μία γωνία ορθή είναι ορθογώνιο.]
Καθ: Καταρχάς, μπορούμε να πούμε ότι το σχήμα αυτό είναι ορθογώνιο;	
K: Ναι.	
Καθ: Γιατί;	
K: Διότι έχει μία, δύο, τρεις, τέσσερις κάθετες.	E: ΠΕ [Το τετράπλευρο με τρεις ορθές γωνίες είναι ορθογώνιο.]
.	.
A: Δεν είναι κανένα ανεξάρτητο, είναι όλα εξαρτημένα. Βασικά κάπου εκεί πρέπει να κρύβεται.	
.	
K: Όταν κινούμε το σημείο A στο επίπεδο... Τέλος. Είναι το σταθερό σημείο σε αντίθεση με το προηγούμενο σχήμα.	
.	
K: Και γιατί θα μπορούσε να συμβαίνει αυτό; Μπορούμε να το εξηγήσουμε αυτό;	
A: Από την κατασκευή. Κάτι στη κατασκευή είναι.	
K: Όταν χάραξε ο τύπος την παράλληλη... Έστω το σημείο K πάνω στην (δ). Ότι πρώτα πήρε την ευθεία και μετά το A. Ενώ εμείς πήραμε πρώτα το A και μετά σχηματίσαμε την παράλληλη.	

Πίνακας 45 – Δραστηριότητα 2 (2^ο Ερώτημα : 2^η Ομάδα)

Παρατηρούμε ότι, τόσο οι Βανέσσα και Σοφία όσο και οι Άγγελος και Κοσμάς, κατόρθωσαν χρησιμοποιώντας τα προσαρμοσμένα εργαλεία να καταλήξουν στο αναμενόμενο τελικό συμπέρασμα στα μέσα περίπου της ενασχόλησής τους με το ερώτημα αυτό. Ωστόσο, το τελικό επιχείρημά τους είναι επαγωγικό και σχετίζεται με τα εξαρτημένα/σταθερά και ανεξάρτητα

σημεία τα οποία αναφέρουν συνέχεια. Αξίζει να αναφέρουμε πως προσπάθησαν να εξηγήσουν το διαφορετικό σε σχέση με την προηγούμενη δραστηριότητα, όχι με βάση τη θεωρία, αλλά με βάση τη σύνδεση των σημείων στο λογισμικό Sketchpad. Τέλος, παρατηρήθηκε ότι οι μαθήτριες αλλά και μαθητές, δεν διατύπωναν ρητά συμπεράσματα.

4.3.3 Συνοπτικά Αποτελέσματα 1^{ης} & 2^{ης} Ομάδας – Δραστηριότητα 2^η

Λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση και των δύο ομάδων μαθητών με το λογισμικό, αλλά και τους τύπους εγγυήσεων που επέλεξαν κατά την ενασχόλησή τους με τη δεύτερη δραστηριότητα μπορούμε να παρατηρήσουμε τα κάτωθι:

- Μαθήτριες και μαθητές χρησιμοποίησαν σύρσιμο, μέτρηση και προσαρμοσμένα εργαλεία κατά την ενασχόλησή τους με τη δεύτερη δραστηριότητα. Δηλαδή όλα τα εργαλεία που γνώριζαν μέχρι εκείνη τη στιγμή.
- Δεν χρησιμοποιήθηκαν ούτε από τις μαθήτριες αλλά ούτε και από τους μαθητές όλοι οι τύποι συρσίματος, αλλά ούτε και μέτρησης.
- Στο σύνολο της δεύτερης δραστηριότητας για τη πρώτη ομάδα το κύριο εργαλείο του Sketchpad παρέμεινε το σύρσιμο, ενώ η δεύτερη στράφηκε στα προσαρμοσμένα εργαλεία.
- Οι δύο ομάδες χρησιμοποίησαν όλα τα είδη εγγυήσεων.
- Η πρώτη ομάδα χρησιμοποίησε περισσότερες παραγωγικές εγγυήσεις από ότι η δεύτερη.
- Καμία ομάδα ολοκληρώνοντας τη δεύτερη δραστηριότητα δεν κατέληξε στο αναμενόμενο συμπέρασμα.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα συγκεντρώθηκαν και δημιουργήθηκαν δύο πίνακες (Πίνακας 46 & Πίνακας 47), οι οποίοι περιλαμβάνουν ποσοτικά ο πρώτος τη χρήση εργαλείων του Sketchpad, ενώ ο δεύτερος τους τύπους εγγυήσεων. Οι αριθμοί έχουν προκύψει όπως και στους προηγούμενους συγκεντρωτικούς πίνακες.

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2</u>			
		ΟΜΑΔΑ 1^η	ΟΜΑΔΑ 2^η
ΤΥΠΟΙ ΣΥΡΣΙΜΑΤΟΣ	<i>Περιπλανώμενο</i>	1	9
	<i>Καθοδηγούμενο</i>	—	2
	<i>Διατηρούμενο</i>	—	—
	<i>Εικονικού Τόπου</i>	—	—
	<i>Ίχνος Ενεργό</i>	—	—
	<i>Συνδεδεμένο</i>	—	—
	<i>Ελέγχου</i>	43	9
ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	<i>Περιπλανώμενη</i>	—	—
	<i>Καθοδηγούμενη</i>	—	—
	<i>Αντιληπτική</i>	1	—
	<i>Επικύρωσης</i>	2	3
ΠΡΟΣ. ΕΡΓΑΛΕΙΑ		29	38

Πίνακας 46 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε εργαλεία Sketchpad
(2^η Δραστηριότητα : 1^η & 2^η Ομάδα)

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2</u>			
		ΟΜΑΔΑ 1^η	ΟΜΑΔΑ 2^η
ΤΥΠΟΙ ΕΓΓΥΗΣΕΩΝ	<i>Δομική Διαισθητική Εγγύηση [ΔΔΕ]</i>	2	2
	<i>Επαγωγική Εγγύηση [ΕΕ]</i>	10	7
	<i>Παραγωγική Εγγύηση [ΠΕ]</i>	8	2

Πίνακας 47 – Συνοπτικά αποτελέσματα σε τύπους
Εγγυήσεων (2^η Δραστηριότητα : 1^η & 2^η Ομάδα)

4.4 ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ - ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (DGE)

Η ενότητα αυτή περιλαμβάνει τους πίνακες, και κάποιες παρατηρήσεις πάνω σε αυτούς, στους οποίους παρουσιάζεται η κοινή εμφάνιση των εργαλείων Sketchpad και των τύπων εγγύησης για κάθε ομάδα και για κάθε δραστηριότητα. Οι πίνακες αυτοί προέκυψαν από τα επιχειρήματα που είχαν αναλυθεί κατά Toulmin και από τα εργαλεία που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές, τα οποία εργαλεία επηρέαζαν άμεσα ή έμμεσα τα διατυπωμένα συμπεράσματα.

Ο πίνακας για τη πρώτη ομάδα είναι:

<u>ΟΜΑΔΑ 1</u>		Δραστηριότητα 1			Δραστηριότητα 2		
		ΔΔΕ	ΕΕ	ΠΕ	ΔΔΕ	ΕΕ	ΠΕ
ΤΥΠΟΙ ΣΥΡΣΙΜΑΤΟΣ	Περιπλανώμενο	—	6	—	—	—	—
	Καθοδηγούμενο	1	4	1	—	—	—
	Διατηρούμενο	1	3	1	—	—	—
	Εικονικού Τόπου	—	1	—	—	—	—
	Ίχνος Ενεργό	—	1	—	—	—	—
	Συνδεδεμένο	—	—	—	—	—	—
	Ελέγχου	1	2	—	1	6	2
ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	Περιπλανώμενη	—	—	—	—	—	—
	Καθοδηγούμενη	—	2	—	—	—	—
	Αντιληπτική	—	3	—	—	1	—
	Επικύρωσης	—	—	—	—	1	—
ΠΡΟΣ. ΕΡΓΑΛΕΙΑ		—	—	—	—	—	—
ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΔΥΟ ΕΡΓΑΛΕΙΑ		—	5	—	—	—	—
ΚΑΝΕΝΑ ΕΡΓΑΛΕΙΟ		—	1	17	1	2	6

Πίνακας 48 – Εργαλεία Sketchpad & Τύποι Εγγύησης (Ομάδα 1^η)

Για τις μαθήτριες παρατηρούμε ότι:

Δραστηριότητα 1^η

- Το καθοδηγούμενο διατηρούμενο και ελέγχου σύρσιμο συνέβαλλε στις δομικές διαισθητικές εγγυήσεις.
- Σχεδόν όλοι οι τύποι συρσίματος χρησιμοποιήθηκαν στις επαγωγικές εγγυήσεις στις οποίες καθοριστικό ρόλο παίζουν και οι τύποι μέτρησης.
- Καθώς η ομάδα αυτή χρησιμοποιούσε παραγωγικές εγγυήσεις τα εργαλεία δεν φαίνεται να είχαν άμεσα ενεργό ρόλο.
- Υπάρχει μεγάλος αριθμός παραγωγικών εγγυήσεων, ωστόσο οι επαγωγικές εγγυήσεις που σχετίζονται με τα εργαλεία του Sketchpad κατέχουν το πρωταρχικό ρόλο.

Δραστηριότητα 2^η

- Υπάρχουν δύο δομικές διαισθητικές εγγυήσεις από τις οποίες η μία στηρίζεται σε σύρσιμο ελέγχου, ενώ η άλλη δεν στηρίζεται σε κάποιο εργαλείο.
- Μόνο το σύρσιμο ελέγχου, καθώς επίσης και η αντιληπτική και επικύρωσης μέτρηση συμβάλουν στις επαγωγικές.
- Ομοίως με τη δραστηριότητα 1, στις παραγωγικές εγγυήσεις τα εργαλεία δεν φαίνεται να είχαν άμεσα ενεργό ρόλο.
- Ο αριθμός επαγωγικών και παραγωγικών εγγυήσεων είναι περίπου ο ίδιος.

Ο πίνακας για τη δεύτερη ομάδα είναι:

<u>ΟΜΑΔΑ 2</u>		<i>Δραστηριότητα 1</i>			<i>Δραστηριότητα 2</i>		
		<i>ΔΔΕ</i>	<i>ΕΕ</i>	<i>ΠΕ</i>	<i>ΔΔΕ</i>	<i>ΕΕ</i>	<i>ΠΕ</i>
ΤΥΠΟΙ ΣΥΡΣΙΜΑΤΟΣ	<i>Περιπλανώμενο</i>	—	5	—	—	2	—
	<i>Καθοδηγούμενο</i>	—	9	2	1	2	—
	<i>Διατηρούμενο</i>	—	3	3	—	—	—
	<i>Εικονικού Τόπου</i>	—	1	—	—	—	—
	<i>Ίχνος Ενεργό</i>	—	—	1	—	—	—
	<i>Συνδεδεμένο</i>	—	—	1	—	—	—
ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	<i>Ελέγχου</i>	—	4	2	—	3	1
	<i>Περιπλανώμενη</i>	—	—	—	—	—	—
	<i>Καθοδηγούμενη</i>	—	—	—	—	—	—
	<i>Αντιληπτική</i>	—	—	—	—	—	—
	<i>Επικύρωσης</i>	—	—	—	1	—	—
ΠΡΟΣ. ΕΡΓΑΛΕΙΑ		—	—	—	—	—	1
ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΔΥΟ ΕΡΓΑΛΕΙΑ		—	1	3	—	—	—
ΚΑΝΕΝΑ ΕΡΓΑΛΕΙΟ		—	—	12	—	—	—

Πίνακας 49 – Εργαλεία Sketchpad & Τύποι Εγγύησης (Ομάδα 2^η)

Για τους μαθητές παρατηρούμε ότι:

Δραστηριότητα 1^η

- Δεν χρησιμοποίησαν δομικές διαισθητικές εγγυήσεις.
- Όμοια με τις μαθήτριες και εδώ χρησιμοποιήθηκαν σχεδόν όλοι οι τύποι συρσίματος στις επαγωγικές εγγυήσεις.

- Στις παραγωγικές εγγυήσεις, συγκριτικά με τις μαθήτριες τα εργαλεία φαίνεται να συνέβαλαν άμεσα. Ωστόσο, υπήρχε μεγάλος αριθμός παραγωγικών εγγυήσεων στις οποίες δε χρησιμοποίησαν κάποιο εργαλείο.
- Ο αριθμός των παραγωγικών εγγυήσεων ήταν μεγαλύτερος από αυτόν των επαγωγικών.

Δραστηριότητα 2^η

- Υπάρχουν δύο δομικές διαισθητικές εγγυήσεις, οι οποίες στηρίζονται σε καθοδηγούμενο σύρσιμο και σε μέτρηση επικύρωσης.
- Το περιπλανώμενο, καθοδηγούμενο και ελέγχου σύρσιμο συμβάλλει στις επαγωγικές εγγυήσεις.
- Οι παραγωγικές εγγυήσεις οι οποίες στηρίζονται σε σύρσιμο ελέγχου και στα προσαρμοσμένα εργαλεία μειώνονται σε μεγάλο βαθμό.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω δημιουργήθηκε ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 50). Επιπλέον, με τη βοήθεια αυτού, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και για τις δύο ομάδες και στις δύο δραστηριότητες το καθοδηγούμενο και ελέγχου σύρσιμο συνέβαλαν περισσότερο τόσο στις δομικές διαισθητικές εγγυήσεις όσο και στις επαγωγικές, στις οποίες επαγωγικές καταγράφηκαν σχεδόν όλα τα εργαλεία. Τέλος, είναι αδιαμφισβήτητο, ότι καθώς οι μαθητές χρησιμοποιούσαν παραγωγικές εγγυήσεις, ο ρόλος των εργαλείων, στις περισσότερες περιπτώσεις δεν είναι άμεσα εμφανής.

<u>ΟΜΑΔΑ 1 & 2</u>		<i>Δραστηριότητα 1 & 2</i>		
		<i>ΔΔΕ</i>	<i>ΕΕ</i>	<i>ΠΕ</i>
ΤΥΠΟΙ ΣΥΡΣΙΜΑΤΟΣ	<i>Περιπλανώμενο</i>	—	13	—
	<i>Καθοδηγούμενο</i>	2	15	3
	<i>Διατηρούμενο</i>	1	6	4
	<i>Εικονικού Τόπου</i>	—	2	—
	<i>Τχνος Ενεργό</i>	—	1	1
	<i>Συνδεδεμένο</i>	—	—	1
	<i>Ελέγχου</i>	2	15	5
ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	<i>Περιπλανώμενη</i>	—	—	—
	<i>Καθοδηγούμενη</i>	—	2	—
	<i>Αντιληπτική</i>	—	4	—
	<i>Επικύρωσης</i>	1	1	—
ΠΡΟΣ. ΕΡΓΑΛΕΙΑ		—	—	1
ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΔΥΟ ΕΡΓΑΛΕΙΑ		—	6	3
ΚΑΝΕΝΑ ΕΡΓΑΛΕΙΟ		1	3	35
ΣΥΝΟΛΟ		7	68	53

Πίνακας 50 – Συνοπτικός Πίνακας Εργαλείων Sketchpad & Τύπων Εγγύησης

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη παρούσα εργασία μελετήθηκαν οι μεταβάσεις από την εικασία στην απόδειξη με τη βοήθεια του περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας (DGE), Geometrer's Sketchpad. Για την διεξαγωγή της έρευνας αυτής, διαμορφώθηκαν δύο δραστηριότητες, οι οποίες απαιτούσαν τη χρήση του DGE και στόχευαν η πρώτη στη μετάβαση από το σχήμα στη θεωρία, ενώ η δεύτερη από τη θεωρία στο σχήμα. Τις δραστηριότητες αυτές ολοκλήρωσαν δύο ομάδες μαθητών¹¹ της Α' Λυκείου, σε δύο διδακτικές ώρες η κάθε μία, και αφού πρωτίτερα είχε πραγματοποιηθεί εξοικείωση με το Sketchpad για μία διδακτική ώρα. Στην έρευνα αυτή εστιάζουμε στη μελέτη της απόδειξης ως επιχείρημα και θα ελέγξουμε αν μεταβάλλονται τα είδη εγγυήσεων και εργαλείων που επιλέγουν, καθώς οι μαθητές εμπλέκονται με τις αποδεικτικές διαδικασίες σε DGEs. Για το σκοπό αυτό διαμορφώθηκαν τρία ερευνητικά ερωτήματα. Τα δεδομένα που προέκυψαν αναλύθηκαν, με τρόπο που να απαντάει στα ερευνητικά ερωτήματα.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα σχετίζεται με τα εργαλεία περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη μετάβαση από το σχήμα στη θεωρία στις διαφορετικές φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας και κατά τη μετάβαση από τη θεωρία στο σχήμα και αν αυτά συμβάλλουν/ενοούν τις μεταβάσεις αυτές.

Από τα ευρήματα, συνδυάζοντας τις δύο ομάδες, για την πρώτη δραστηριότητα (σχήμα → θεωρία), διαπιστώθηκε ότι χρησιμοποιήθηκαν όλοι οι τύποι συρσίματος και μέτρησης από την πρώτη μέχρι και την τέταρτη φάση της αποδεικτικής διαδικασίας, οι οποίες περιλαμβάνουν την παραγωγή και την ακριβή διατύπωση εικασιών, καθώς επίσης και τον προσδιορισμό και την επιλογή επιχειρημάτων για την επικύρωση των εικασιών αυτών. Αντιθέτως, στις δύο επόμενες, πέμπτη και έκτη, οι οποίες περιλαμβάνουν την οργάνωση αυτών των επιχειρημάτων σύμφωνα με τα πρότυπα των μαθηματικών, αλλά και το τελικό προϊόν, δηλαδή την απόδειξη, δεν υπήρξε αλληλεπίδραση με το λογισμικό μέσω του ποντικιού. Σύμφωνα με τους Reiss κ.ά (2008) οι πρώτες τέσσερις φάσεις θεωρούνται ιδιαίτερα σημαντικές για τους μαθητές, καθώς περιγράφουν τη διαδικασία εύρεσης μίας λύσης και την εύρεση στοιχείων για να είναι σωστή. Συνεπώς, ο τρόπος προσέγγισης των τεσσάρων πρώτων φάσεων επηρεάζει την εξέλιξη των επομένων. Ακόμα, δεδομένου ότι οι πρώτες τρεις φάσεις συνδέονται με την παραγωγή και τον έλεγχο εικασίας, επιβεβαιώνεται και η αναφορά των Marrades & Gutierrez (2000) σχετικά με το ότι: «το κεφάλαιο “σύρσιμο” κατέχει σημαντικό ρόλο στην παραγωγή και τον έλεγχο εικασιών».

Στη δεύτερη δραστηριότητα (θεωρία → σχήμα) οι μαθητές χρησιμοποιούν ως επί το πλείστον και τα προσαρμοσμένα εργαλεία με προβολή του αρχείου εντολών, εκτός από τους τύπους συρσίματος και μέτρησης, με σκοπό να κατανοήσουν τη διαδικασία κατασκευής και την εξέλιξή της. Εντούτοις, δεν κατόρθωσαν πλήρως να υποστηρίξουν τον έλεγχο των λογικών σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων που εμπλέκονται (Mariotti, 2000). Το γεγονός αυτό θεωρούμε ότι συνέβη, επειδή οι μαθητές έχουν συνηθίσει να αναζητούν τη θεωρία για να υποστηρίξουν τις δηλώσεις τους για το δοσμένο σχήμα, και στις περιπτώσεις που αυτή τους δίνεται έτοιμη δημιουργείται σύγχυση.

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα σχετίζεται με τους τύπους εγγυήσεων που χρησιμοποιούν οι μαθητές, καθώς επιχειρηματολογούν, κατά τη μετάβαση από το σχήμα στη θεωρία στις

¹¹ Στο πέμπτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας με τον όρο μαθητές εννοούμε μαθητές και μαθήτριες.

διαφορετικές φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας και κατά τη μετάβαση από τη θεωρία στο σχήμα.

Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν, συνδυάζοντας και πάλι τις δύο ομάδες, παρατηρήθηκε για τη πρώτη δραστηριότητα (σχήμα $\rightarrow$ θεωρία), στις δύο πρώτες φάσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν τη παραγωγή και την ακριβή διατύπωση εικασιών, οι εγγυήσεις που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές ήταν κυρίως επαγωγικές και άρα τα επιχειρήματα τους ήταν επαγωγικά, ενώ από την τρίτη έως και την έκτη, οι οποίες περιλαμβάνουν το προσδιορισμό, την επιλογή και την οργάνωση επιχειρημάτων καθώς επίσης και τη πρόταση της επίσημης απόδειξης, παράγουν σχεδόν αποκλειστικά παραγωγικά επιχειρήματα. Δηλαδή μέχρι και την τρίτη φάση οι μαθητές παράγουν επιχειρήματα, τα οποία συμβάλλουν στη μείωση της αβεβαιότητας, ενώ από εκεί και έπειτα τα επιχειρήματά τους συμβάλλουν στην απομάκρυνση της αβεβαιότητας.

Στη δεύτερη δραστηριότητα (θεωρία $\rightarrow$ σχήμα) οι μαθητές παράγουν όλα τα είδη επιχειρημάτων. Ωστόσο υπάρχει μία αλλαγή όσον αφορά τα παραγωγικά επιχειρήματα των οποίων ο αριθμός μειώνεται σημαντικά. Γενικά, παρατηρούμε ότι οι μαθητές δεν είναι ευέλικτοι στο να εφαρμόσουν τη θεωρία που γνωρίζουν στο δοσμένο σχήμα, γεγονός που εικάζουμε ότι συμβαίνει επειδή δεν είναι εξοικειωμένοι σε αυτού του είδους τις μεταβάσεις, καθώς συνήθως ασχολούνται με τις αντίστροφες.

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα σχετίζεται με το ρόλο των περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας κατά τη μετάβαση από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη. Πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνει τη σχέση μεταξύ των DGEs και της επιχειρηματολογίας και του είδους των εργαλείων που συμμετέχουν άμεσα ή έμμεσα, ως εγγυήσεις στα επιχειρήματα που παράγουν οι μαθητές.

Από τα ευρήματα, συνδυάζοντας τις δύο ομάδες αλλά και τις δύο δραστηριότητες διαπιστώθηκε ότι τα εργαλεία DGEs έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στα επιχειρήματα των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, από τον τελευταίο πίνακα (Πίνακας 50), παρατηρούμε ότι το καθοδηγούμενο και ελέγχου σύρσιμο ήταν τα εργαλεία τα οποία συνέβαλαν περισσότερο στις δομικές διαισθητικές και επαγωγικές εγγυήσεις. Στις τελευταίες μάλιστα (επαγωγικές εγγυήσεις) καταγράφηκαν όλα τα εργαλεία που γνώριζαν οι μαθητές πλην των προσαρμοσμένων. Άρα, οι δομικές διαισθητικές εγγυήσεις και οι επαγωγικές εγγυήσεις ενθαρρύνονται άμεσα από τη δυναμική συνιστώσα αφού το σύρσιμο φαίνεται ότι λειτουργεί γι' αυτούς ως μία «μη γλωσσική εγγύηση» (Patsiomitou, 2011) η οποία βασίζεται στη παρατήρηση. Ως εκ τούτου, τα επιχειρήματα των μαθητών, μπορούν να χαρακτηριστούν ως «*instrumented arguments*» δηλαδή ως επιχειρήματα στα οποία η εγγύηση προκύπτει χρησιμοποιώντας κάποιο από τα εργαλεία DGEs (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Έτσι ενώ σε μία απόδειξη η εγγύηση μπορεί να είναι ένα αξίωμα, ένας ορισμός ή ένα θεώρημα, βλέπουμε ότι στην επιχειρηματολογία που υποστηρίζει την εικασία η εγγύηση δεν ανήκει απαραίτητα σε ένα θεωρητικό σύστημα (Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010). Επιπλέον, στην περίπτωση των παραγωγικών επιχειρημάτων, ενώ κανείς θα έλεγε ότι οι μαθητές δε χρησιμοποιούν πλέον μη «γλωσσικές εγγυήσεις», από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι σε αυτόν τον τύπο εγγυήσεων η συνεισφορά των εργαλείων δεν είναι άμεσα εμφανής.

Από τα αποτελέσματα αυτά βλέπουμε, επίσης, ότι ποσοτικά οι επαγωγικές εγγυήσεις είναι περισσότερες από τις παραγωγικές, χωρίς ωστόσο να υπάρχει μεγάλη απόκλιση. Αυτό συμβαίνει καθώς, όπως έχει καταγραφεί και σε άλλες έρευνες (Prusak, Hershkowitz & Schwarz, 2011), το Sketchpad επιτρέπει τον επαγωγικό συλλογισμό, με τη χρήση του συρσίματος, η οποία δίνει στην επαγωγή μία «γεύση» γενίκευσης. Από την άλλη πλευρά, φαίνεται ότι η χρήση των εργαλείων δεν

παρεμπόδισε τους μαθητές στη διατύπωση των παραγωγικών επιχειρημάτων, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με άλλους ερευνητές, οι οποίοι ισχυρίζονται ότι η ευκολία του να αντιλαμβάνεσαι αμέσως βέβαιες σταθερές φαίνεται να παρεμποδίζει ορισμένες διαδικασίες επιχειρηματολογίας που οδηγούν στην εύρεση χρήσιμων στοιχείων για την κατασκευή μιας απόδειξης (Baccaglioni-Frank & Mariotti, 2009). Στη μελέτη αυτή, παρατηρήθηκε ότι καθώς έσυραν, οι μαθητές συχνά μεταβαίνουν από τα σχήματα στις έννοιες και από τις απαγωγικές και επαγωγικές στις παραγωγικές ειδικότητες, γεγονός που τους βοήθησε να προχωρήσουν από το εμπειρικό στο θεωρητικό επίπεδο (Hanna κ.ά, 2009). Αξίζει να σημειώσουμε ότι δεν υπήρξαν αρκετά απαγωγικά επιχειρήματα, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τους Pedemonte & Reid (2011), οι οποίοι αναφέρουν ότι τα τελευταία χρόνια οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν απαγωγικές επιχειρηματολογίες για την παραγωγή αποδείξεων. Στη παρούσα μελέτη, εικάζουμε πως δεν υπήρξε πληθώρα παραγωγικών επιχειρημάτων, γιατί στα πρώτα ερωτήματα των δραστηριοτήτων, υπήρξε έντονη αλληλεπίδραση των μαθητών με το λογισμικό, μέσω του εργαλείου συρσίματος. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές να βλέπουν πολλές σχηματικές πτυχές, πριν καταλήξουν στο συμπέρασμα και ως εκ τούτου τα επιχειρήματά τους ήταν επαγωγικά. Καθώς προχωρούσαν στα επόμενα ερωτήματα, των οποίων η εξέλιξη ήταν βαθιά επηρεασμένη από τα προηγούμενα, οι εγγυήσεις των μαθητών στηρίζονταν στη θεωρία που είχαν διδαχτεί, συνεπώς τα επιχειρήματά τους ήταν παραγωγικά. Ακόμα με την μελέτη αυτή, επιβεβαιώθηκε, επίσης, ότι στη μάθηση της Γεωμετρίας η επιχειρηματολογία αποτελεί μία επαναλαμβανόμενη δραστηριότητα μέσα στη τάξη καθώς και για τις δύο ομάδες μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με δραστηριότητες στη γεωμετρία καταγράφηκε και αναλύθηκε μία πληθώρα επιχειρημάτων.

Επίσης, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές κατόρθωσαν να δώσουν μία μορφή τυπικής απόδειξης χωρίς να έχει απαραίτητα αυστηρή δομή. Μία απόδειξη, στην οποία χρησιμοποιήθηκαν τα εργαλεία του Sketchpad και δε περιείχε τη προτασιακή παραγωγική ακολουθία που απαιτείται στη τυπική γραπτή απόδειξη, οπότε ήταν επιστημολογικά πιο κοντά στη επεξήγηση από ότι στην επαλήθευση (Sinclair & Robutti, 2013). Ολοκληρώνοντας, αξίζει να αναφέρουμε πως στη παρούσα έρευνα τα DGEs έπαιζαν το ρόλο του διαμεσολαβητή στη μετάβαση από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη, κυρίως μέσω της «λειτουργίας συρσίματος» (Hanna κ.ά, 2009).

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι το βασικό στοιχείο της παρούσας εργασίας ήταν η ανάδειξη των ποιοτικών χαρακτηριστικών των εργαλείων ενός DGE, τα οποία έγιναν επεκτάσεις των ίδιων τους των σκέψεων (Mason στο Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strasser, 2006), παρουσιάζοντας τον τρόπο που μετασχηματίζονται κατά τις μεταβάσεις προς την απόδειξη. Είδαμε, πως οι δύο ομάδες μαθητών, ενώ χρησιμοποιούσαν μη-παραγωγικές μεθόδους, με τη χρήση των εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας, οδηγήθηκαν σε σύγκρουση και στη συνέχεια την προσπάθειά τους να εξηγήσουν γιατί είναι λάθος (Prusak, Hershkowitz, & Schwarz 2011). Άρα, το Sketchpad ευνόησε όχι μόνο τις κατασκευές των μαθητών, αλλά και τον τρόπο που σκέφτονται, και αυτό τους βοήθησε να ξεπεράσουν κάποιες γνωστικές δυσκολίες που αντιμετώπισαν, καθώς είκαζαν και αποδείκνυαν (Noss & Hoyles, 1996· Mariotti, 2002· De Villiers, 2004, στο Baccaglioni-Frank & Mariotti, 2009). Ακόμα, είδαμε και τη συμβολή του Sketchpad κατά την επικύρωση των εικασιών αυτών μέσω της επιχειρηματολογίας. Οι μαθητές αρχικά χρησιμοποιούσαν δομικές διαισθητικές και επαγωγικές εγγυήσεις, οι οποίες στη συνέχεια μετασχηματίστηκαν σε παραγωγικές, κατορθώνοντας έτσι να προχωρήσουν από το εμπειρικό στο θεωρητικό επίπεδο. Είναι σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν τις βαθιές σχέσεις ανάμεσα σε διαισθητικά (μη- παραγωγικά) επιχειρήματα και τυπικές αποδείξεις. Η διαίσθηση μπορεί να αποτελέσει τη βάση για τις τυπικές αποδείξεις και οι τυπικές αποδείξεις μπορούν να κατανοηθούν

ευκολότερα με όρους διαισθητικών επιχειρημάτων. Ως εκ τούτου, η απόδειξη θα μπορέσει να είναι πιο προσιτή στους μαθητές αν είναι ικανοί να κάνουν τη σύνδεση μεταξύ της άτυπης εξερεύνησης και της τυπικής απόδειξης. Τα ανοιχτά-κλειστά προβλήματα, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή τη μελέτη και ζητούν εικασία, εμφανίζονται εξαιρετικά αποτελεσματικά για την περίπτωση αυτή (Pedemonte, 2007). Το μοντέλο του Toulmin, ακόμα, αποδείχτηκε ότι είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την ανάλυση της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης (Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010). Επιπλέον, τα εργαλεία του Sketchpad γενικότερα, αλλά και η λειτουργία συρσίματος ειδικότερα, συνέβαλαν στο τρόπο που οι μαθητές ανέπτυσαν ανεπίσημες προσεγγίσεις μέσα από τη διερεύνηση, γεγονός που είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τα πρώιμα στάδια της αποδεικτικής διαδικασίας, τα οποία απαρτίζουν την εικασία, και αναμφισβήτητα επηρέασαν τον τρόπο που εξελίχθηκαν τα επόμενα.

Όπως σε κάθε έρευνα, έτσι και σε αυτήν υπήρξαν κάποιοι περιορισμοί, οι οποίοι καταγράφονται σε αυτήν την παράγραφο. Καθώς οι μαθητές δεν είχαν ασχοληθεί προηγουμένως με περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας, το ότι θα έκαναν μαθηματικά σε υπολογιστή τους φάνηκε ιδιαίτερα ενδιαφέρον. Ωστόσο, το γεγονός αυτό δεν λειτούργησε απαραίτητα θετικά, αφού η μία ώρα για την εξοικείωση δεν ήταν επαρκής και παρατηρήθηκε ότι από την πρώτη στιγμή οι μαθητές δεν χρησιμοποιούσαν αυθόρμητα τη λειτουργία συρσίματος (Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strasser, 2006). Επίσης, σε πολλές περιπτώσεις, οι μαθητές, αν δεν ήταν σίγουροι για τις απαντήσεις τους μιλούσαν χαμηλόφωνα, ακόμα και μετά τη νύξη του καθηγητή. Επιπλέον, το γεγονός ότι η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε σχολικό χώρο λειτούργησε και θετικά και αρνητικά. Θετικά γιατί οι μαθητές βρίσκονταν σε ένα οικείο γι' αυτούς χώρο και αρνητικά, γιατί στο διάλειμμα άκουγαν το κουδούνι και τους υπόλοιπους συμμαθητές τους έξω στον προαύλιο χώρο. Θετικό ήταν επίσης το γεγονός ότι σε κάθε ομάδα οι μαθητές ήταν φίλοι, και εκτός του ότι υπήρχε επικοινωνία μεταξύ τους, προσπαθούσαν και να εξηγήσουν ο ένας στον άλλον. Τέλος, από την ανάλυση των επιχειρημάτων κατά Toulmin (1993) παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές αν ανέφεραν κάτι μία φορά, μετά το είχαν δεδομένο και δεν το διατύπωναν ξανά. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να υπάρχουν επιχειρήματα στα οποία τα συμπεράσματα δεν ήταν ρητά διατυπωμένα. Στα επιχειρήματα αυτά τα συμπεράσματα ήταν εικασίες του ερευνητή, που προέκυπταν από το απομαγνητοφωνημένο κείμενο, δηλαδή από τα λόγια των μαθητών. Το γεγονός αυτό έχει σημειωθεί και σε άλλες έρευνες (Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007) στις οποίες παρατηρείται πως κατά τη κατηγοριοποίηση των επιχειρημάτων με το σχήμα του Toulmin σε πολλές περιπτώσεις ορισμένα μέρη του επιχειρήματος δεν εκφράζονταν ρητά από τον ομιλητή.

Ολοκληρώνοντας, θα πρότεινα να πραγματοποιηθεί μελλοντική έρευνα σε φοιτητές του τμήματος μαθηματικών και σε μεγαλύτερο δείγμα, για να παρατηρήσουμε αν επιλέγουν τους ίδιους τύπους εγγυήσεων και εργαλείων σε δραστηριότητες της γεωμετρίας, οι οποίες απαιτούν χρήση DGEs και κατά πόσο αυτές οι επιλογές ευνοούν τις μεταβάσεις προς την αυστηρά τυπική απόδειξη. Η συγκεκριμένη έρευνα πιστεύουμε ότι θα έχει νόημα, κυρίως γιατί στη τριτοβάθμια εκπαίδευση η προσέγγιση της απόδειξης είναι εντελώς διαφορετική από αυτήν της δευτεροβάθμιας, καθώς οι φοιτητές έχουν μεγαλύτερη ευελιξία στο να σκέφτονται αφαιρετικά αλλά και στο να παράγουν αποδείξεις. Επίσης, καλό θα ήταν οι μεταβάσεις αυτές να μελετηθούν και στο μάθημα της άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Θεωρούμε ότι, κατά την ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες στο μάθημα της άλγεβρας το σύρσιμο δεν θα έχει πρωταγωνιστικό ρόλο. Συνεπώς, θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον να μελετηθούν οι τύποι εγγυήσεων που επιλέγουν οι μαθητές στα επιχειρήματα που διατυπώνουν, τα οποία θα οδηγήσουν στην επικύρωση των εικασιών τους.

Συμπερασματικά, υποστηρίζεται ότι, η χρήση των εργαλείων Sketchpad ευνοούν τις μεταβάσεις από την εικασία στην απόδειξη. Οι μεταβάσεις αυτές χαρακτηρίζονται από έντονη επιχειρηματολογική δραστηριότητα και για την ανάλυσή τους χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο του Toulmin, αλλά και το μοντέλο ανάλυση της πρώτης δραστηριότητας (Σχήμα 5), τα οποία αποδείχτηκαν αποτελεσματικά εργαλεία. Ακόμα, μέρη των ευρημάτων της έρευνας αυτής έρχονται σε συμφωνία, αλλά και σε αντιπαράθεση με μέρη ευρημάτων προϋπάρχουσων ερευνών. Από τη μία πλευρά επιβεβαιώθηκε η συνεισφορά των εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας καθώς εικάζουν, επιχειρηματολογούν, αλλά και αποδεικνύουν, ενώ από την άλλη πλευρά απορρίφθηκε αφενός η συμβολή των εργαλείων αυτών κατά την απαγωγική επιχειρηματολογία και αφετέρου οι περιορισμοί που μπορούν να δημιουργήσουν τα εργαλεία αυτά, καθώς οι μαθητές εμπλέκονται με τις αποδεικτικές διαδικασίες.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Arzarello, F. (2008). The proof in the 20th century. In P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history epistemology and cognition to classroom practices* (pp. 43–64). Rotterdam: Sense Publishers.
- Arzarello, F., Andriano, V., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). Abduction and conjecturing in mathematics, *Philosophica*, 61(1), 77-94.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (1999). I problemi di costruzione geometrica con l'aiuto di Cabri, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22B (4), 309–338.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM*, 34(3), 66-72.
- Baccaglioni-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2009). Conjecturing and Proving in Dynamic Geometry: the Elaboration of Some Research Hypotheses. In Proceedings of *CERME 6*, Lyon, France.
- Baccaglioni-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225-253.
- Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Proceedings of the Second UCSMP International Conference on Mathematics Education* (pp. 284–297). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). cK ϕ Modèle de connaissances pour le calcul des situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in Mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7(8).
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-205). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Conner, A. (2012). Warrants as indications of reasoning patterns in secondary mathematics classes. Proceedings of the *12th International Congress on Mathematical Education*, Seoul, Korea.
- De Villiers, M. (1997). The role of proof in investigative, computer-based geometry: Some personal reflections. In J. King & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on* (pp. 15-24). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. In M. De Villiers (Ed.) *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad* (pp. 3-10). Key Curriculum Press.
- De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(5), 703-724.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Reidel, Dordrecht, Holland.
- Freeman, J. B. (2005). Systematizing Toulmin's warrants: An epistemic approach. *Argumentation*, 19(3), 331–346.

- Freudenthal, H. (Ed). (1958). *Report on methods of initiation into Geometry*. Groninger: Wolters.
- Hadas, N., & Hershkowitz, R. (1998). Proof in geometry as an explanatory and convincing tool. In A. Olivier & K. Newstead, (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME Conference*, (Vol. 3, pp. 25-32). Stellenbosch, South Africa.
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 127-150.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange* 21(1), 6–13.
- Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Gurrier, V., Jahnke, N., & Yvdokimov, O. (2009). Proof and proving in mathematics education: Discussion document. In F.L. Lin, F. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers, *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. xix-xxx). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics* 24(4), 389-399.
- Inglis, M., Mejia-Ramos, J., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3–21.
- Krantz, S. G. (2007). *The history and concept of mathematical proof*. Downloaded from the Internet. <http://www.math.wustl.edu/~sk/eolss.pdf>
- Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2008). Why do we have to prove this?: Fostering students understanding of proof in geometry in lower secondary school. In F. Lin, F. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds.) (2009), *ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education* (pp. 877-980). Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publisher.
- Larios-Osorio, V., & Acuña-Soto, C. (2009). Geometrical proof in the institutional classroom environment. *Mathematics Education*, 59.
- Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1/2), 25-53.
- Mariotti, M. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 163-185.
- Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.
- Moutsios-Rentzos, A., & Spyrou, P. (2015). Fostering internal need for proof: a reading of the genesis of proof in ancient Greece. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, (29).
- Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2011). ‘Warrant’ revisited: Integrating mathematics teachers’ pedagogical and epistemological considerations into Toulmin’s model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 157-173.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(2), 135–156.
- Patsiomitou, S. (2011). Theoretical dragging: A non-linguistic warrant leading to dynamic propositions. In Ubuz, B (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International*

- Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 361-368). Ankara, Turkey: PME.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23-41.
- Pedemonte, B., & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 281-303.
- Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2011). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 19-40.
- Raman, M., & Weber, K. (2006). Key ideas and insights in the context of three high school geometry proofs. *Mathematics Teacher*, 99(9), 644-649.
- Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A., & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM Mathematics Education*, 40, 455-467.
- Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of Dynamic Geometry. *Third International Handbook of Mathematics Education*, 571-596.
- Tall, D. O. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, Holland: Kluwer.
- Tall, D., & Mejia-Ramos, J. (2006). The long-term cognitive development of different types of reasoning and proof. Paper presented at the *Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp.1-4). Essen, Germany.
- Toulmin, S. E. (1993). *The use of arguments*. Cambridge: University Press.
- Vadcard, L. (1999). La validation en géométrie au collège avec Cabri-Géomètre: Mesures exploratoire et mesures probatoires. *Petit X*, 50, 5-21.
- Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Stohl Lee, H. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 247-261.
- Yerushalmy, M., & Houde, R. (1986). The Geometric Supposer: Promoting thinking and learning. *Mathematics Teacher*, 79, 418-422.
- Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A., & Winicki, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education*. New York, NY: Springer.
- Γιαννοπούλου, Ε. (2013). *Το αποδεικτικό σχήμα του Toulmin και η αξιοποίησή του στη Διδακτική των Μαθηματικών*. Διπλωματική εργασία, ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Αθήνα: ΕΚΠΑ. Ανακτήθηκε Μάρτιος 5, 2016, από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_giannopoulou.evridiki.pdf
- Καρατράσoglou, Α. (2011). *Το πέρασμα από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη στη γεωμετρία: Ο ρόλος της οπτικοποίησης*. Διπλωματική εργασία, ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Αθήνα: ΕΚΠΑ. Ανακτήθηκε Μάρτιος 5, 2016, από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_karattrasoglou%20athanasia.pdf
- Λύρη, Α. (2014). *Μαθηματική απόδειξη και επίλυση προβλήματος στο σχολείο*. Διπλωματική εργασία, ΠΜΣ Μαθηματικά και Σύγχρονες Εφαρμογές Κατεύθυνση: Διδακτική των Μαθηματικών, Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών. Ανακτήθηκε Μάιος 30, 2015, από [http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/8009/7/Nimertis_Lyri\(math\).pdf](http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/8009/7/Nimertis_Lyri(math).pdf)
- Μιχαλοπούλου, Κ. (2012). *Τρόποι με τους οποίους η εικασία μπορεί να οδηγήσει στην απόδειξη μέσω εργαλείων δυναμικού χειρισμού*. Διπλωματική εργασία, ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Αθήνα: ΕΚΠΑ. Ανακτήθηκε Ιούνιος 29, 2014, από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Michalopoulou%20Katerina.pdf

Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2015). *Σημειώσεις μαθήματος Επιχειρηματολογία και Απόδειξη στα Μαθηματικά (Δ14α)*. Αθήνα: ΕΚΠΑ. Ανακτήθηκε Ιούνιος 2, 2015, από <http://eclass.uoa.gr/>

Χαλάτσης, Α. (1993). Εικασία, απόδειξη και διδασκαλία των μαθηματικών. *10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας* (σελ.4-13). Καλαμάτα: Ε.Μ.Ε.