

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Κατεύθυνσης Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών

Μεταβολικές Ανισότητες και Εφαρμογές

Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία

Βουδούρης Σταύρος

Επιβλέπων Καθηγητής:
Στρατής Ιωάννης

ΑΘΗΝΑ 2014

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Ιωάννη Στρατή, Αθανάσιο Γιαννακόπουλο και Γρηγόρη Καλογερόπουλο για τη βοήθειά τους και τη συμβολή τους στην εκπόνηση αυτής της εργασίας.

1	Εισαγωγικά	1
2	Μεταβολικές ανισώσεις σε χώρους πεπερασμένης διάστασης	4
3	Λογισμός σε χώρους Banach	14
4	Μεταβολικές Ανισότητες σε χώρους Hilbert	27
A	Παράρτημα: Γραμμικές Απεικονίσεις	37
B	Παράρτημα: Νόρμες σε Διανυσματικούς χώρους	43
C	Παράρτημα: Χώροι Hilbert	46
D	Παράρτημα: Συνεχείς Τελεστές	50
E	Παράρτημα: Παράγωγοι	55
F	Παράρτημα: Βελτιστοποίηση Συναρτήσεων	73
G	Παράρτημα: Τύποι Green	78
H	Παράρτημα: Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις	80
I	Παράρτημα: Χώροι Συναρτήσεων	95
J	Παράρτημα: Ασθενείς Παράγωγοι Συναρτήσεων	115
K	Παράρτημα: Κατανομές	121
L	Παράρτημα: Χώροι Sobolev	128
M	Παράρτημα: Λογισμός Μεταβολών	154
N	Παράρτημα: Ασθενείς Λύσεις Π.Σ.Τ	166
O	Παράρτημα: Σταθερά Σημεία	173

Μεταβολικές Ανισότητες και Εφαρμογές

4 Ιουνίου 2014

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

Η ισορροπία (equilibrium) είναι μία κεντρική έννοια σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους συμπεριλαμβανομένων των οικονομικών, της μηχανικής και άλλων. Μεθοδολογίες που έχουν εφαρμοστεί για τη διαμόρφωση, την ποιοτική ανάλυση και τον υπολογισμό των ισορροπιών έχουν συμπεριλάβει τα συστήματα εξισώσεων, τη θεωρία βελτιστοποίησης, τη θεωρία συμπληρωματικότητας και τη θεωρία σταθερού σημείου. Η θεωρία των μεταβολικών ανισοτήτων είναι ένα ισχυρό ενοποιητικό εργαλείο για τη μελέτη των προβλημάτων ισορροπίας.

Η θεωρία των μεταβολικών ανισοτήτων εισήχθη από τους Hartman και Stampacchia (1966) ως ένα εργαλείο για τη μελέτη μερικών διαφορικών εξισώσεων με εφαρμογές που προέρχονται κυρίως από τη μηχανική. Αρχικά οι μεταβολικές ανισότητες ήταν απειροδιάστατες. Η σημαντική επέμβαση για την εφαρμογή τους σε πεπερασμένη διάσταση συνέβη το 1980 από τον Δαφέρμο. Η βασική θεωρία των μεταβολικών ανισοτήτων σε πεπερασμένη διάσταση θα μας απασχολήσει στο Κεφάλαιο 2 ενώ η θεωρία σε άπειρες διαστάσεις στο Κεφάλαιο 3.

Αναφέρουμε τη γενική μορφή των προβλημάτων που θα μας απασχολήσουν με το πρώτο (Πρόβλημα Α) να αφορά μεταβολικές ανισότητες σε πεπερασμένη διάσταση και το δεύτερο (Πρόβλημα Β) να αφορά απειροδιάστατες μεταβολικές ανισότητες.

Πρόβλημα Α. Το πεπερασμένης διάστασης πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας, έστω $VI(F, K)$ είναι να καθοριστεί ένα διάνυσμα $x^* \in K \subset \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in K$$

ή ισοδύναμα

$$\langle F(x^*)^T, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K$$

όπου F είναι μία δοσμένη συνεχής συνάρτηση από το K στο $\mathbb{R}^N$, K είναι ένα δοσμένο κλειστό και κυρτό σύνολο και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο N διαστάσεων.

Πρόβλημα Β. Αναζητούμε $u \in K$ τέτοιο ώστε

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$$

όπου K ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός ανακλαστικού χώρου Banach $\mathbb{X}$ με νόρμα $\| \cdot \|$ και A ένας τελεστής από τον $\mathbb{X}$ στο δυϊκό του $\mathbb{X}^*$.

Ας σημειωθεί ότι τα τελευταία χρόνια η θεωρία των μεταβολικών ανισοτήτων αναπτύσσεται πολύ γρήγορα, έχοντας ως πρότυπο τη μεταβολική θεωρία των προβλημάτων συνοριακών τιμών για μερικές διαφορικές εξισώσεις. Η θεωρία αντιπροσωπεύει, στην πραγματικότητα, μία πολύ φυσική γενίκευση της θεωρίας των προβλημάτων συνοριακών τιμών και μας επιτρέπει να εξετάσουμε τα νέα προβλήματα που προκύπτουν από πολλούς τομείς των εφαρμοσμένων μαθηματικών όπως η μηχανική, η φυσική και η θεωρία προγραμματισμού. Ενώ η μεταβολική θεωρία των προβλημάτων συνοριακών τιμών έχει αφετηρία της τη μέθοδο της ορθογώνιας προβολής, η θεωρία των μεταβολικών ανισοτήτων έχει σημείο εκκίνησης την προβολή σε κυρτό σύνολο.

Σε αυτήν την εργασία θα παρουσιάσουμε τα στοιχεία των μεταβολικών ανισοτήτων και των μη φραγμένων προβλημάτων με αρκετά παραδείγματα των εφαρμογών τους. Αυτό που προσφέρεται εδώ, είναι μία όψη των προβλημάτων με μεταβολικές ανισότητες και μέθοδοι οι οποίες έχουν εξελιχθεί τα τελευταία χρόνια. Δίνουμε τώρα μια στοιχειώδη περιγραφή της φύσης μίας μεταβολικής ανισότητας και του μη φραγμένου προβλήματος που ορίζει.

Παράδειγμα 1.1. Έστω f μία ομαλή συνάρτηση που παίρνει πραγματικές τιμές στο κλειστό διάστημα $I = [a, b]$. Ψάχνουμε τα σημεία $x_0 \in I$ για τα οποία ισχύει ότι

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x).$$

Άρα λοιπόν μπορούμε να δούμε ότι αν $a < x_0 < b$, τότε $f'(x_0) = 0$ ενώ αν $x_0 = a$, τότε $f'(x_0) \geq 0$ και αν $x_0 = b$, τότε $f'(x_0) \leq 0$. Τις τρεις αυτές περιπτώσεις μπορούμε να τις συνοψίσουμε γράφοντας

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in I.$$

Μία τέτοια ανισότητα θα αναφέρεται ως μεταβολική ανισότητα.

Παράδειγμα 1.2. Έστω f μία ομαλή συνάρτηση πραγματικών τιμών ορισμένη σε ένα κλειστό και κυρτό K υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Θέλουμε να χαρακτηρίσουμε και πάλι τα σημεία $x_0 \in K$ που είναι τέτοια ώστε

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x).$$

Ας υποθέσουμε ότι το x_0 είναι ένα σημείο όπου επιτυγχάνεται το ελάχιστο και ας θεωρήσουμε $x \in K$. Από τη στιγμή που το K είναι κυρτό, το τμήμα

$$(1 - t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

βρίσκεται στο K . Η συνάρτηση

$$\Phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

επιτυγχάνει το ελάχιστο της στο $t = 0$, και έτσι

$$\Phi'(x_0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0, \quad x \in K.$$

Συνεπώς, το σημείο x_0 ικανοποιεί τη μεταβολική ανισότητα

$$\nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in K.$$

Αν το K είναι φραγμένο, η ύπαρξη ενός τουλάχιστον x_0 είναι άμεση.

Παράδειγμα 1.3. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο σύνολο με σύνορο $\partial\Omega$ και έστω ϕ μία δοσμένη συνάρτηση στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ τέτοια ώστε $\max \phi \geq 0$ και $\phi \leq 0$ στο $\partial\Omega$. Ορίζουμε

$$K = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v \geq \phi \text{ στο } \Omega \text{ και } v = 0 \text{ στο } \partial\Omega\}$$

ένα κυρτό σύνολο συναρτήσεων που θεωρούμε ότι δεν είναι κενό. Αναζητούμε μία συνάρτηση $u \in K$ για την οποία

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \min_{u \in K} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Υποθέτοντας την ύπαρξη ενός τέτοιου u , επιχειρηματολογούμε κατά αναλογία με το προηγούμενο παράδειγμα στηριζόμενοι ξανά στην κυρτότητα του K . Για κάθε $v \in K$, η ακολουθία $u + t(v - u)$, $0 \leq t \leq 1$, ανήκει στο K και τότε η συνάρτηση

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla(u + t(v - u))|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq 1$$

επιτυγχάνει το ελάχιστό της στο $t = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\Phi'(0) \geq 0$, το οποίο οδηγεί στην μεταβολική ανισότητα

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla(v - u) dx \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Στο σημείο αυτό παρεμβάλλουμε το σύνολο $I = \{x \in \Omega : u(x) = \phi(x)\}$, που ονομάζεται σύνολο σύμπτωσης. Η παρουσία του διακρίνει το u από τη λύση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών. Το ένα ερμηνεύει το u ως τη συνάρτηση ύψους της θέσης ισορροπίας μίας λεπτής μεμβράνης, περιορισμένης να βρίσκεται στο σώμα $\{(x, x_{n+1}) : x_{n+1} \leq \phi(x), x \in \Omega\}$ και με σταθερό μηδενικό ύψος στο $\partial\Omega$.

Παράδειγμα 1.4. Με το Ω ως οριοθετημένο ανοικτό σύνολο όπως πριν, $\phi^1, \phi^2, \lambda_1, \lambda_2, f_1$ και f_2 , να είναι κατάλληλες ομαλές συναρτήσεις στο $\bar{\Omega}$ με $\phi^1 \leq \phi^2$, ορίζουμε το κυρτό σύνολο των ζευγών συναρτήσεων

$$K = \{v = (v^1, v^2) : v^1 \leq v^2 \text{ στο } \Omega, v^i = \phi^i \text{ στο } \partial\Omega, v^i \in C^1(\bar{\Omega}), i = 1, 2\}.$$

Αναζητούμε τη λύση, $u \in K$ τέτοια ώστε

$$\sum_i \int_{\Omega} (\nabla u^i \nabla(v^i - u^i) + \lambda_i u^i (v^i - u^i)) dx \geq \sum_i \int_{\Omega} f_i (v^i - u^i) dx,$$

για κάθε $v \in K$. Σε αυτήν την περίπτωση το u είναι ένα σημείο του K όπου το συναρτησοειδές

$$F(v) = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\Omega} (|\nabla v^i|^2 + \lambda_i (v^i)^2) dx - \sum_i \int_{\Omega} f_i v^i dx$$

αποκτά ελάχιστο.

Το ζεύγος των λύσεων $u = (u^1, u^2)$ αναπαριστά τη θέση ισορροπίας δύο μεμβρανών που υπόκεινται σε δυνάμεις που εφαρμόζονται έτσι ώστε να περιορίζονται και να μην είναι σε θέση να περάσει η μία μέσα από την άλλη. Σε αυτήν την περίπτωση το σύνολο συμπτώσεων είναι το

$$I = \{x \in \Omega : u^1(x) = u^2(x)\}$$

Κεφάλαιο 2

Μεταβολικές ανισώσεις σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Το Πρόβλημα Μεταβολικής Ανισότητας

Ορισμός 2.1. Το πεπερασμένης διάστασης πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας, έστω $VI(F, K)$, πραγματεύεται την ύπαρξη ενός διανύσματος $x^* \in K \subset \mathbb{R}^N$, τέτοιου ώστε

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in K,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\langle F(x^*)^T, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K \quad (2.1)$$

όπου $F : K \rightarrow \mathbb{R}^N$, K κλειστό και κυρτό και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ δηλώνει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^N$.

Με γεωμετρικούς όρους, η μεταβολική ανισότητα (2.1) υπονοεί ότι το $F(x^*)^T$ είναι ορθογώνιο στο σύνολο K στο σημείο x^* . Η αναπαράσταση αυτή, όπως θα παρατηρήσουμε, είναι αρκετά εύχρηστη καθώς επιτρέπει ενιαία αντιμετώπιση προβλημάτων ισορροπίας και βελτιστοποίησης.

Συστήματα Εξισώσεων

Πολλά και κλασσικά οικονομικά προβλήματα ισορροπίας έχουν αναπαρασταθεί ως συστήματα εξισώσεων, αφού οι συνθήκες ισοσκελισμού των αγορών εξισώνουν την ολική προσφορά με την ολική ζήτηση. Με όρους μεταβολικών ανισοτήτων, η αναπαράσταση ενός συστήματος εξισώσεων γίνεται ως εξής:

Πρόταση 2.2. Έστω $K = \mathbb{R}^N$ και έστω $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ μία δοσμένη συνάρτηση. Ένα διάνυσμα $x^* \in \mathbb{R}^N$ είναι λύση του $VI(F, \mathbb{R}^N)$ αν και μόνο αν

$$F(x^*) = 0.$$

Απόδειξη. Αν $F(x^*) = 0$, τότε η ανισότητα (2.1) ισχύει ως ισότητα. Αντιστρόφως, αν το x^* ικανοποιεί την (2.1), επιλέγοντας $x = x^* - F(x^*)$, παίρνουμε ότι

$$F(x^*)^T(-F(x^*)) \geq 0, \text{ ή } -\|F(x^*)\|^2 \geq 0, \quad (2.2)$$

και έτσι $F(x^*) = 0$. □

Σημειώνουμε ότι τα συστήματα εξισώσεων προϋποθέτουν την εισαγωγή ανισοτήτων, που θα μπορούσαν να χρειάζονται, π.χ, στην περίπτωση υπόθεσης μη αρνητικότητας μεταβλητών όπως οι τιμές προϊόντων.

Προβλήματα Βελτιστοποίησης

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται από μία συγκεκριμένη αντικειμενική συνάρτηση που θέλουμε είτε να μεγιστοποιήσουμε είτε να ελαχιστοποιήσουμε, ανάλογα με το πρόβλημα ή τους περιορισμούς του. Οι αντικειμενικές συναρτήσεις εμπεριέχουν πιθανώς και εκφράσεις που παριστούν κέρδος, κόστος, ρίσκο κεφαλαίου κ.τ.λ. Οι περιορισμοί θα μπορούσαν να περιγράφουν περιορισμένο κεφάλαιο ή πόρους, μη αρνητικότητα μεταβλητών κ.τ.λ. Συνήθως, ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης περιέχει μόνο μία αντικειμενική συνάρτηση. Και τα μη περιορισμένα αλλά και τα περιορισμένα προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούν να αναπαρασταθούν ως προβλήματα μεταβολικών ανισοτήτων. Οι παρακάτω προτάσεις καθώς και το θεώρημα που ακολουθεί πραγματοποιούν αυτή τη σύνδεση.

Πρόταση 2.3. Έστω x^* η λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\min_{x \in K} f(x) \quad (2.3)$$

όπου f είναι μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και K κλειστό και κυρτό. Τότε το x^* είναι λύση της μεταβολικής ανισότητας

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in K. \quad (2.4)$$

Απόδειξη. Έστω

$$\phi(t) = f(x^* + t(x - x^*)),$$

για $t \in [0, 1]$. Δεδομένου ότι η ϕ έχει ελάχιστο στο $t = 0$, δηλαδή

$$0 \leq \phi'(0) = \nabla f(x^*)^T(x - x^*),$$

έχουμε ότι το x^* είναι λύση της (2.4) □

Πρόταση 2.4. Αν η f είναι κυρτή συνάρτηση και το x^* είναι λύση του

$$VI(\nabla f, K),$$

τότε το x^* είναι λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (2.3).

Απόδειξη. Άφου η f είναι κυρτή ισχύει ότι

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*), \quad \forall x \in K. \quad (2.5)$$

Όμως

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0,$$

αφού το x^* είναι λύση του $VI(\nabla f, K)$. Άρα από την (2.5) παίρνουμε ότι

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in K,$$

που σημαίνει ότι το x^* είναι ελάχιστο του προβλήματος (2.3). $\square$

Αν $K = \mathbb{R}^N$ τότε το μη περιορισμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι και πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας. Από την άλλη, αν ικανοποιείται κάποια συνθήκη συμμετρίας, τότε το πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας μπορεί να επαναπροσδιοριστεί ως πρόβλημα βελτιστοποίησης. Με άλλα λόγια, σε περίπτωση που η μεταβολική ανισοτική έκφραση της ισορροπίας για ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται από μία συνάρτηση που έχει συμμετρικό Ιακωβιανό πίνακα, τότε η λύση του προβλήματος ισορροπίας και του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι ακριβώς οι ίδιες. Αρχικά δίνουμε έναν ορισμό και στη συνέχεια παρουσιάζουμε τη σχέση μεταξύ των δύο με ένα θεώρημα.

Ορισμός 2.5. Ένας πίνακας $N \times N$, $M(x)$ με στοιχεία τις συναρτήσεις $m_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, ορισμένες σε ένα $S \subset \mathbb{R}^N$, λέγεται θετικά ημιορισμένος στο S αν

$$v^T M(x) v \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N, x \in S.$$

Λέγεται θετικά ορισμένος στο S αν

$$v^T M(x) v > 0, \quad \forall v \neq 0, v \in \mathbb{R}^N, x \in S,$$

και λέγεται ισχυρά θετικά ορισμένος στο S αν

$$v^T M(x) v \geq a \|v\|^2, \text{ για κάποιο } a > 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N, x \in S.$$

Σημειώνουμε ότι αν $\gamma(x)$ είναι η μικρότερη ιδιοτιμή, που είναι απαραίτητα πραγματική, του συμμετρικού μέρους του $M(x)$, δηλαδή του

$$\frac{1}{2}[M(x) + M(x)^T],$$

τότε έπεται ότι:

- (i). Ο $M(x)$ είναι θετικά ημιορισμένος στο S αν και μόνο αν $\gamma(x) \geq 0$, για κάθε $x \in S$.
- (ii). Ο $M(x)$ είναι θετικά ορισμένος στο S αν και μόνο αν $\gamma > 0$, για κάθε $x \in S$.
- (iii). Ο $M(x)$ είναι ισχυρά θετικά ορισμένος στο S αν και μόνο αν $\gamma \geq a > 0$, για κάθε $x \in S$.

Θεώρημα 2.6. Έστω ότι η $F(x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο K και ότι ο Ιακωβιανός πίνακας

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Τότε υπάρχει κυρτή πραγματική συνάρτηση $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\nabla f(x) = F(x)$$

ενώ το x^* που είναι λύση του $VI(F, K)$ είναι επίσης λύση του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού

$$\min_{x \in K} f(x). \quad (2.6)$$

Απόδειξη. Βάσει της υπόθεσης συμμετρίας έπεται μέσω του θεωρήματος Green ότι

$$f(x) = \int F(x)^T dx. \quad (2.7)$$

Το ζητούμενο έπεται από την πρόταση 2.4. $\square$

Άρα, παρόλο που ένα πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας εμπεριέχει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού αν ικανοποιούνται οι συνθήκες συμμετρίας και θετικού ημιορισμού. Έπεται λοιπόν ότι το πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας είναι πιο γενικό με την έννοια ότι μπορεί να χειριστεί και συναρτήσεις με μη συμμετρικό Ιακωβιανό πίνακα.

Προβλήματα Συμπληρωματικότητας

Ένα πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας εμπεριέχει επίσης το πρόβλημα συμπληρωματικότητας. Το τελευταίο ορίζεται στο μη αρνητικό ορθομόριο. Έστω $\mathbb{R}_+^N$ το μη αρνητικό ορθομόριο στον $\mathbb{R}^N$, και έστω $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Το μη γραμμικό πρόβλημα συμπληρωματικότητας στο $\mathbb{R}_+^N$ είναι ένα σύστημα εξισώσεων και ανισοτήτων που ορίζεται ως:

Να βρεθεί $x^* \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$F(x^*) \geq 0 \text{ και } F(x^*)^T x^* = 0. \quad (2.8)$$

Αν η F είναι της μορφής $F(x) = Mx + b$, όπου M ένας $N \times N$ πίνακας και b ένα $N \times 1$ διάνυσμα, το πρόβλημα (2.8) είναι γνωστό ως το γραμμικό πρόβλημα συμπληρωματικότητας. Η σχέση του προβλήματος συμπληρωματικότητας και του προβλήματος μεταβολικής ανισότητας αναφέρεται παρακάτω.

Πρόταση 2.7. Αν υπάρχουν λύσεις των $VI(F, \mathbb{R}_+^N)$ και (2.8) τότε αυτές ταυτίζονται.

Απόδειξη. Αρχικά, είναι δεδομένο ότι αν το x^* ικανοποιεί το $VI(F, \mathbb{R}_+^N)$ τότε ικανοποιεί το πρόβλημα συμπληρωματικότητας (2.8). Θέτοντας

$$x = x^* + e_i$$

στο $VI(F, \mathbb{R}_+^N)$ καταλήγουμε στο ότι $F_i(x^*) \geq 0$ και $F(x^*) \geq 0$. Θέτοντας τώρα $x = 2x^*$ στη μεταβολική ανισότητα παίρνουμε

$$F(x^*)^T(x^*) \geq 0, \quad (2.9)$$

ενώ αντικαθιστώντας $x = 0$ στη μεταβολική ανισότητα παίρνουμε

$$F(x^*)^T(-x^*) \geq 0. \quad (2.10)$$

Από τις (2.9) και (2.10) έχουμε ότι $F(x^*)x^* = 0$. Αντίστροφα, αν το x^* ικανοποιεί το πρόβλημα συμπληρωματικότητας, τότε

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$$

αφού $x \in \mathbb{R}_+^N$ και $F(x^*) \geq 0$. □

Προβλήματα Σταθερών Σημείων

Η θεωρία σταθερών σημείων έχει χρησιμοποιηθεί για να αναπαραστήσει, να αναλύσει και να υπολογίσει λύσεις σε οικονομικά προβλήματα ισορροπίας. Η σύνδεση μεταξύ του προβλήματος μεταβολικής ανισότητας και του προβλήματος σταθερού σημείου επιτυγχάνεται μέσω του τελεστή προβολής. Αρχικά λοιπόν ορίζουμε τον τελεστή προβολής.

Λήμμα 2.8. Έστω K κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$, υπάρχει μοναδικό σημείο $y \in K$, τέτοιο ώστε

$$\|x - y\| \leq \|x - z\|, \quad \forall z \in K. \quad (2.11)$$

Το y είναι γνωστό ως η ορθογώνια προβολή του x στο K ως προς την Ευκλείδεια νόρμα, δηλαδή

$$y = P_K x = \arg \min_{z \in K} \|x - z\|.$$

Απόδειξη. Έστω x φιξαρισμένο και έστω $w \in K$. Η ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\|x - z\|$ ως προς $z \in K$ ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της ίδιας ποσότητας στο σύνολο $\{z \in K : \|x - z\| \leq \|x - w\|\}$, το οποίο είναι συμπαγές. Η συνάρτηση $g(z) = \|x - z\|^2$ είναι συνεχής. Η ύπαρξη ελαχιστοποιούντος y έπεται από το γεγονός ότι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα συμπαγές σύνολο έχει πάντοτε ελάχιστο ενώ η μοναδικότητα προκύπτει από το ότι το τετράγωνο της Ευκλείδειας νόρμας είναι γνησίως κυρτή συνάρτηση. Άρα η g είναι γνησίως κυρτή και το ελάχιστό της μοναδικό. □

Θεώρημα 2.9. Έστω K κλειστό και κυρτό σύνολο. Τότε $y = P_K x$ αν και μόνο αν

$$y^T(z - y) \geq x^T(z - y), \quad \forall z \in K$$

ή

$$(y - x)^T(z - y) \geq 0, \quad \forall z \in K. \quad (2.12)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το $y = P_K x$ είναι ο ελαχιστοποιητής της $g(z)$ ως προς όλα τα $z \in K$. Δεδομένου ότι $\nabla g(z) = 2(z - x)$, το αποτέλεσμα έπεται από τις συνθήκες βέλτιστης συμπεριφοράς για περιορισμένα προβλήματα βελτιστοποίησης. $\square$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μία ιδιότητα του τελεστή προβολής που χρησιμεύει στην ποιοτική ανάλυση και τον υπολογισμό των ισορροπιών.

Πόρισμα 2.10. Έστω K κλειστό και κυρτό. Τότε ο τελεστής προβολής είναι μη διασταλτικός, δηλαδή,

$$\|P_K x - P_K x'\| \leq \|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^N. \quad (2.13)$$

Απόδειξη. Δεδομένων $x, x' \in \mathbb{R}^N$, έστω $y = P_K x$ και $y' = P_K x'$. Τότε από το Θεώρημα 2.9 έχουμε ότι για $y \in K$

$$y^T(z - x) \geq x^T(z - y), \quad \forall z \in K, \quad (2.14)$$

ενώ για $y' \in K$

$$(y')^T(z - y') \geq (x')^T(z - y'), \quad \forall z \in K. \quad (2.15)$$

Θέτοντας $z = y'$ στην (2.14) και $z = y$ στην (2.15) και προσθέτοντας τις παραγόμενες ανισότητες παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|y - y'\|^2 &= (y - y')^T(y - y') \\ &\leq (x - x')^T(y - y') \\ &\leq \|x - x'\| \|y - y'\| \end{aligned}$$

από εφαρμογή ανισότητας του Schwarz. Άρα

$$\|y - y'\| \leq \|x - x'\|.$$

$\square$

Η σχέση του προβλήματος μεταβολικής ανισότητας και του προβλήματος σταθερού σημείου δίνεται ως εξής:

Θεώρημα 2.11. Έστω K κλειστό και κυρτό. Τότε το $x^* \in K$ είναι λύση του $VI(F, K)$ αν και μόνο αν για κάθε $\gamma > 0$, το x^* είναι σταθερό σημείο της απεικόνισης

$$P_K(I - \gamma F) : K \rightarrow K$$

με

$$x^* = P_K(x^* - \gamma F(x^*)). \quad (2.16)$$

Απόδειξη. Έστω ότι το x^* είναι λύση της μεταβολικής ανισότητας

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in K.$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ανισότητα με $-\gamma < 0$, και προσθέτοντας και στα δύο μέλη $(x^*)^T(x - x^*)$ παίρνουμε

$$(x^*)^T(x - x^*) \geq [x^* - \gamma F(x^*)]^T(x - x^*), \quad \forall x \in K. \quad (2.17)$$

Από το Θεώρημα 2.9 καταλήγουμε στην

$$x^* = P_K(x^* - \gamma F(x^*)).$$

Αντίστροφα, αν $x^* = P_K(x^* - \gamma F(x^*))$, για $\gamma > 0$, τότε

$$(x^*)^T(x - x^*) \geq (x^* - \gamma F(x^*))^T(x - x^*), \quad \forall x \in K,$$

και έτσι

$$F(x^*)^T(y - x^*) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

□

Βασικά Αποτελέσματα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Η θεωρία των μεταβολικών ανισοτήτων είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την ποιοτική ανάλυση της ισορροπίας. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε συνθήκες για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των λύσεων του $VI(F, K)$. Η ύπαρξη λύσης για ένα πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας έπεται από τη συνέχεια της συνάρτησης F και τη συμπαγεια του συνόλου K . Πράγματι, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.12. (Ύπαρξη κάτω από συμπαγεια και συνέχεια). *Αν το K είναι συμπαγές και κυρτό και η $F(x)$ είναι συνεχής στο K , τότε το $VI(F, K)$ έχει τουλάχιστον μία λύση x^* .*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer, δεδομένης μίας συνεχούς απεικόνισης $P : K \rightarrow K$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x^* \in K$, τέτοιο ώστε $x^* = Px^*$. Παρατηρούμε ότι αφού οι P_K και $(I - \gamma F)$ είναι συνεχείς, η $P_K(I - \gamma F)$ είναι επίσης συνεχής. Το ζητούμενο έπεται από τη συμπαγεια του K και το Θεώρημα 2.11. □

Στην περίπτωση ενός μη φραγμένου συνόλου K , το θεώρημα του Brouwer δεν εφαρμόζεται. Παρόλα αυτά η ύπαρξη λύσης του προβλήματος μεταβολικής ανισότητας εξασφαλίζεται μέσω της παρακάτω συνθήκης:

Έστω $B_R(0)$ η κλειστή σφαίρα με κέντρο το 0 και ακτίνα R και έστω $K_R = K \cap B_R(0)$. Τότε το K_R είναι φραγμένο. Αν λοιπόν το VI_R δηλώνει το πρόβλημα εύρεσης ενός $x_R^* \in K_R$ τέτοιου ώστε

$$F(x_R^*)^T(y - x_R^*) \geq 0, \quad \forall y \in K_R \tag{2.18}$$

έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.13. *Το πρόβλημα $VI(F, K)$ έχει λύση αν και μόνο αν υπάρχει $R > 0$ και λύση του VI_R , έστω x_R^* , τέτοια ώστε $\|x_R^*\| < R$.*

Παρόλο που η ιδιότητα $\|x_R^*\| < R$ μπορεί να είναι δύσκολο να επαληθευτεί, γενικά ίσως είναι δυνατό να βρούμε κατάλληλο R ανάλογα με την αντίστοιχη εφαρμογή.

Η ύπαρξη λύσης για ένα πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας μπορεί επίσης να εξασφαλιστεί υπό συνθήκη πιεστικότητας, όπως φαίνεται παρακάτω:

Πόρισμα 2.14. (Υπαρξη υπό πιεστικότητα). Έστω ότι η F ικανοποιεί τη συνθήκη πιεστικότητας

$$\frac{(F(x) - F(x_0))^T(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

καθώς $\|x\| \rightarrow \infty$ για $x \in K$ και για κάποιο $x_0 \in K$. Τότε το $VI(F, K)$ έχει πάντοτε λύση.

Πόρισμα 2.15. Έστω x^* λύση του $VI(F, K)$ και $x^* \in K^0$, όπου K^0 το εσωτερικό του K . Τότε $F(x^*) = 0$.

Γενικά, ποιοτικές ιδιότητες ύπαρξης και μοναδικότητας είναι εύκολο να εξαχθούν υπό συνθήκες μονοτονίας. Αρχικά δίνουμε τους ορισμούς και στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα.

Ορισμός 2.16. Η $F(x)$ είναι μονότονη στο K αν

$$[F(x^1) - F(x^2)]^T(x^1 - x^2) \geq 0, \quad \forall x^1, x^2 \in K.$$

Ορισμός 2.17. Η $F(x)$ είναι γνησίως μονότονη στο K αν

$$[F(x^1) - F(x^2)]^T(x^1 - x^2) > 0, \quad \forall x^1, x^2 \in K, \quad x^1 \neq x^2.$$

Ορισμός 2.18. Η $F(x)$ είναι ισχυρά μονότονη στο K αν για κάποιο $a > 0$

$$[F(x^1) - F(x^2)]^T(x^1 - x^2) \geq a\|x^1 - x^2\|^2, \quad \forall x^1, x^2 \in K.$$

Ορισμός 2.19. Η $F(x)$ είναι Lipschitz συνεχής στο K αν υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|F(x^1) - F(x^2)\| \leq L\|x^1 - x^2\|, \quad \forall x^1, x^2 \in K.$$

Θεώρημα 2.20. (Μοναδικότητα). Έστω ότι η $F(x)$ είναι γνησίως μονότονη στο K . Τότε αν υπάρχει λύση αυτή είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω ότι τα x^1, x^* είναι λύσεις και έστω ότι $x^1 \neq x^*$. Τότε, τα x^1 και x^* ικανοποιούν σχέσεις

$$F(x^1)^T(x' - x^1) \geq 0, \quad \forall x' \in K \quad (2.20)$$

$$F(x^*)^T(x' - x^*) \geq 0, \quad \forall x' \in K. \quad (2.21)$$

Αντικαθιστώντας όπου x' το x^* στην (2.20) και όπου x' το x^1 στην (2.21) και προσθέτοντας τις παραγόμενες ανισότητες, παίρνουμε

$$(F(x^1) - F(x^*))^T(x^* - x^1) \geq 0. \quad (2.22)$$

Όμως η (2.22) έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό της γνήσιας μονοτονίας. Άρα $x^1 = x^*$. $\square$

Θεώρημα 2.21. Έστω ότι η $F(x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο K και ότι ο Ιακωβιανός πίνακας

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

ο οποίος δε χρειάζεται να είναι συμμετρικός, είναι θετικά ημιορισμένος (θετικά ορισμένος). Τότε η $F(x)$ είναι μονότονη (γνήσιως μονότονη).

Πρόταση 2.22. Έστω ότι η $F(x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο K και ότι ο Ιακωβιανός πίνακας $\nabla F(x)$ είναι ισχυρά θετικά ορισμένος. Τότε η $F(x)$ είναι ισχυρά μονότονη.

Ισχυρότερα αποτελέσματα παίρνουμε στην περίπτωση που η $F(x)$ είναι γραμμική.

Πόρισμα 2.23. Έστω ότι $F(x) = Mx + b$, όπου M είναι ένας $N \times N$ πίνακας και b είναι ένα σταθερό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^N$. Η συνάρτηση $F(x)$ είναι μονότονη αν και μόνο αν ο M είναι θετικά ημιορισμένος. Η $F(x)$ είναι ισχυρά μονότονη αν και μόνο αν ο M είναι θετικά ορισμένος.

Πρόταση 2.24. Έστω ότι η $F : K \rightarrow \mathbb{R}^N$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$. Τότε η $F(x)$ είναι τοπικά γνήσιως (ισχυρά) μονότονη στο $\bar{x}$ αν ο $\nabla F(\bar{x})$ είναι θετικά ορισμένος (ισχυρά θετικά ορισμένος), δηλαδή

$$v^T \nabla F(\bar{x}) v > 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N, v \neq 0,$$

$$v^T \nabla F(\bar{x}) v \geq a \|v\|^2, \text{ για κάποιο } a > 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N.$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας παρέχει μία συνθήκη υπό την οποία εξασφαλίζεται η ύπαρξη αλλά και η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος μεταβολικών ανισοτήτων. Στο σημείο αυτό δεν υποθέτουμε συνθήκες συμπαγείας για το εφικτό σύνολο K .

Θεώρημα 2.25. Έστω ότι η $F(x)$ είναι ισχυρά μονότονη. Τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση x^* του $VI(F, K)$.

Απόδειξη. Η ύπαρξη έπεται από το γεγονός ότι από την ισχυρή μονοτονία παίρνουμε πιεστικότητα ενώ η μοναδικότητα εξασφαλίζεται καθώς η ισχυρή μονοτονία υπονοεί γνήσια μονοτονία. $\square$

Άρα, στην περίπτωση ενός μη φραγμένου εφικτού συνόλου K , η ισχυρή μονοτονία της συνάρτησης $F(x)$ εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα. Αν το K είναι συμπαγές, τότε η ύπαρξη εξασφαλίζεται αν η $F(x)$ είναι συνεχής, ενώ για τη μοναδικότητα αρκεί η συνθήκη της γνήσιας μονοτονίας.

Υποθέτουμε τώρα ότι η $F(x)$ είναι ισχυρά μονότονη και Lipschitz συνεχής. Τότε η προβολή $P_K[x - \gamma F(x)]$ είναι συστολή ως προς x , όπως υποδεικνύεται με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.26. Έστω $0 < \gamma \leq a/L^2$, όπου a και L είναι οι σταθερές που εμφανίζονται στους ορισμούς της ισχυρής μονοτονίας και της Lipschitz συνέχειας αντίστοιχα. Τότε

$$\|P_K(x - \gamma F(x)) - P_K(y - \gamma F(x))\| \leq \beta \|x - y\| \quad (2.23)$$

για κάθε $x, y \in K$, όπου

$$(1 - \gamma a)^{\frac{1}{2}} \leq \beta < 1$$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.26 και του Θεωρήματος σταθερού σημείου του Banach είναι το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 2.27. Ο τελεστής $P_K(x - \gamma F(x))$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο x^* .

Ευστάθεια και Ανάλυση Ευαισθησίας

Σημαντικά θέματα στην ποιοτική ανάλυση της ισορροπίας αποτελούν η ευστάθεια και η ευαισθησία των λύσεων αν υπάρξουν διαταραχές στα δεδομένα. Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει ότι μία μικρή αλλαγή στη συνάρτηση $F(x)$ στη μεταβολική ανισότητα προκαλεί μικρή αλλαγή στη λύση του προβλήματος. Συμβολίζουμε με F και x το αρχικό ζεύγος συνάρτηση-λύση του $VI(F, K)$, ενώ με F^* και x^* το αντίστοιχο διαταραγμένο ζεύγος του $VI(F^*, K)$. Υποθέτουμε ακόμα ότι η $F(x)$ είναι ισχυρά μονότονη.

Θεώρημα 2.28. Έστω a η θετική σταθερά που παρουσιάζεται στον ορισμό της ισχυρής μονοτονίας. Τότε

$$\|x^* - x\| \leq \frac{1}{a} \|F^*(x^*) - F(x^*)\|. \quad (2.24)$$

Απόδειξη. Τα διανύσματα x και x^* πρέπει να ικανοποιούν τις μεταβολικές ανισότητες

$$F(x)^T(x' - x) \geq 0, \quad \forall x' \in K \quad (2.25)$$

$$F^*(x^*)^T(x' - x^*) \geq 0, \quad \forall x' \in K. \quad (2.26)$$

Ξαναγράφοντας την (2.25) για $x' = x^*$ και την (2.26) για $x' = x$, και προσθέτοντας τις παραγόμενες ανισότητες, παίρνουμε ότι

$$[F^*(x^*) - F(x)]^T[x^* - x] \leq 0 \quad (2.27)$$

ή

$$[F^*(x^*) - F(x) + F(x^*) - F(x^*)]^T[x^* - x] \leq 0. \quad (2.28)$$

Λόγω της συνθήκης μονοτονίας και της (2.28) παίρνουμε

$$\begin{aligned} [F^*(x^*) - F(x^*)]^T[x - x^*] &\geq [F(x) - F(x^*)]^T[x - x^*] \\ &\geq a\|x - x^*\|^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Τέλος από την ανισότητα Schwarz και τη (2.29) παίρνουμε

$$a\|x^* - x\|^2 \leq \|F^*(x^*) - F(x^*)\|\|x^* - x\|, \quad (2.30)$$

από όπου έπεται η (2.24). □

Κεφάλαιο 3

Λογισμός σε χώρους Banach

Εισαγωγή

Κάποιες μερικές διαφορικές εξισώσεις, είτε γραμμικές είτε μη γραμμικές προκύπτουν ως εξισώσεις Euler-Lagrange για την ελαχιστοποίηση συναρτησιακών. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία του λογισμού των μεταβολών για να παρουσιάσουμε κομψές αποδείξεις που αφορούν στην ύπαρξη και στις ποιοτικές ιδιότητες λύσεων τέτοιων προβλημάτων. Ο στόχος του παραρτήματος αυτού είναι μία αρχική εισαγωγή στη θεωρία αυτή.

Το κίνητρο

Ξεκινάμε παρουσιάζοντας τα κίνητρα αυτής της προσέγγισης μέσω κάποιων παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 3.1. (Εξίσωση Laplace). Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

όπου Ω είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^d$ με επαρκώς ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Ορίζουμε επίσης το συναρτησιακό $J : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{X}$ είναι ένας χώρος συναρτήσεων που θα οριστεί παρακάτω, ως

$$J(u) := \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + fu) dx \quad (3.2)$$

για κάθε $u \in \mathbb{X}$ (ο χώρος $\mathbb{X}$ είναι τέτοιος ώστε το παραπάνω ολοκλήρωμα να είναι καλώς ορισμένο). Υποθέτουμε τώρα ότι διαταράσσουμε τη συνάρτηση u και προσπαθούμε να υπολογίσουμε την τιμή του συναρτησιακού J σε μία καινούρια θέση του χώρου $\mathbb{X}$, στη συνάρτηση $u + \varepsilon v$, όπου $v \in \mathbb{X}$ και $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό. Με ένα γρήγορο υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$\frac{J(u + \varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} f v dx \right) + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx,$$

ώστε καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, το κύριο μέρος της παραπάνω σχέσης να είναι ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους. Δηλαδή το όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ της παραπάνω έκφρασης είναι

$$DJ(u; v) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} f v dx \right),$$

όπου ο συμβολισμός $DJ(u; v)$ υπονοεί ότι πραγματοποιούμε μία απειροελάχιστη μεταβολή στο συναρτησιακό J στη θέση u κατά την κατεύθυνση $v \in \mathbb{X}$ (αν θεωρήσουμε το $\mathbb{X}$ ως διανυσματικό χώρο, δεν αντιμετωπίζουμε κάποιο εννοιολογικό πρόβλημα).

Επιλέγοντας v ώστε να μηδενίζεται στο $\partial\Omega$ (π.χ επιλέγοντας $v \in \mathbb{X} = \mathbb{H}_0^1$) και ολοκληρώνοντας κατά μέρη παίρνουμε

$$DJ(u; v) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \int_{\Omega} (-\Delta u + f) v dx. \quad (3.3)$$

Διαισθητικά και από την εμπειρία στους τρόπους αναζήτησης κρίσιμων σημείων για συναρτήσεις που παίρνουν πραγματικές τιμές, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ένα κρίσιμο σημείο (ασχέτως από το αν πρόκειται για μέγιστο ή ελάχιστο) για το συναρτησιακό J , θα βρίσκεται στη θέση u , αν οι τιμές του συναρτησιακού δεν αλλάζουν για μικρές διαταραχές γύρω από το $u \in \mathbb{X}$, δηλαδή αν

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι αν u είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού J , τότε $DJ(u; v) = 0$. Αυτό πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε επιτρεπτή επιλογή κατεύθυνσης $v \in \mathbb{X}$ και έτσι η (3.3) μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε το κρίσιμο σημείο u^* του J ως λύση της μη ομογενούς εξίσωσης Laplace (3.1). Δηλαδή αν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τα κρίσιμα σημεία του J τότε μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τις λύσεις της εξίσωσης (3.1).

Η μέθοδος του παραδείγματος 3.1 μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες εξισώσεις, παρουσιάζοντας ενδιαφέρον κυρίως σε μη γραμμικές ελλειπτικές εξισώσεις. Το επόμενο παράδειγμα μας δίνει μια ιδέα γύρω από αυτό.

Παράδειγμα 3.2. (Μη γραμμικές ελλειπτικές εξισώσεις). Θεωρούμε το συναρτησιακό $J : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, ως

$$J(u) := \int_{\Omega} G(x, u, \nabla u) dx \quad (3.4)$$

για κάθε $u \in \mathbb{X}$, όπου $G : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση επαρκώς ομαλή ως προς όλες τις ματεβλητές της. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $G(x, u, p)$ για να συμβολίσουμε τις τιμές της G , όπου $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, u είναι η τιμή της συνάρτησης u στο σημείο x και $p = \nabla u$, το gradient της u στο σημείο $x \in \Omega$.

Επαναλαμβάνουμε τους υπολογισμούς που κάναμε στο παράδειγμα 3.1 για να βρούμε ένα κρίσιμο σημείο του J και έχουμε

$$\frac{J(u + \varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial G}{\partial u} v + \frac{\partial G}{\partial p} \nabla v \right) dx + O(\varepsilon)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης G ενώ με $O(\varepsilon)$ συμβολίζουμε όρους τάξης ε ή μεγαλύτερης. Επίσης, δεδομένου ότι το p είναι διάνυσμα, με $\partial G/\partial p$ συμβολίζουμε το $\nabla_p G(x, u, p)$.

Ολοκληρώνουμε τώρα κατά μέρη υποθέτοντας ότι η v μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$ και έχουμε

$$\frac{J(u + \varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial G}{\partial u} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right) \right] v dx + O(\varepsilon).$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε ότι

$$DJ(u; v) := \int_{\Omega} \left[\frac{\partial G}{\partial u} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right) \right] v dx. \quad (3.5)$$

Τότε, επεκτείνοντας τα επιχειρήματα του παραδείγματος 3.1 σχετικά με τις θέσεις των κρίσιμων σημείων του J στο $\mathbb{X}$, εξάγουμε ότι ένα κρίσιμο σημείο θα βρίσκεται στη θέση $u^* \in \mathbb{X}$, αρκεί να επιλεγεί έτσι ώστε

$$DJ(u^*; v) = 0, \quad \forall v \in \mathbb{X}. \quad (3.6)$$

Μια γρήγορη σύγκριση των (3.5) και (3.6) δείχνει ότι (με κατάλληλη επιλογή του χώρου $\mathbb{X}$) τα κρίσιμα σημεία του J επιλύουν την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Ανάλογα με την επιλογή της συνάρτησης G μπορούμε να εξάγουμε μία μεγάλη ποικιλία εξισώσεων Euler-Lagrange. Π.χ

- (i). αν $G(x, u, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + fu$ τότε παίρνουμε την μη ομογενή εξίσωση Laplace $\Delta u = f$ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet.
- (ii). αν $G(x, u, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + F(u)$ όπου $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε παίρνουμε την ημιγραμμική εξίσωση Laplace $\Delta u = F'(u)$ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet.
- (iii). αν $G(x, u, p) = \frac{1}{r+2}|p|^{r+2} + fu$ τότε παίρνουμε τη μη γραμμική εξίσωση

$$\nabla \cdot (|\nabla u|^r \nabla u) = f,$$

η οποία ανάγεται στην κλασσική μη ομογενή εξίσωση Laplace για $r = 0$.

Λογισμός σε χώρο Banach

Gâteaux και Fréchet παράγωγοι

Στο σημείο αυτό θα θέσουμε σε αυστηρή μαθηματική βάση τις έννοιες των παραγώγων συναρτησιακών που χρησιμοποιήθηκαν στα παραδείγματα 3.1 και 3.2 για την εξαγωγή της εξίσωσης Euler-Lagrange. Έστω λοιπόν $\mathbb{X}$ ένας χώρος Banach και $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό.

Ορισμός 3.3. (Παράγωγος κατά κατεύθυνση). Η παράγωγος κατά κατεύθυνση του F στο $x \in \mathbb{X}$ κατά την κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ δίνεται από το όριο

$$DF(x; h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon},$$

εφόσον αυτό υπάρχει.

Ο τελεστής $h \mapsto DF(x; h)$ δεν είναι απαραίτητο να είναι γραμμικός. Αν είναι γραμμικός τότε μιλάμε για την έννοια της Gâteaux παραγώγου.

Ορισμός 3.4. (Παράγωγος Gâteaux). Ένα συναρτησιακό F καλείται ασθενώς (Gâteaux) παραγωγίσιμο στο $x \in \mathbb{X}$ αν είναι ασθενώς παραγωγίσιμο κατά κάθε κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ και ο τελεστής $h \mapsto DF(x; h)$ είναι γραμμικός και συνεχής (δηλαδή φραγμένος), δηλαδή αν υπάρχει ένας γραμμικός τελεστής $A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{\varepsilon} \frac{|F(x + \varepsilon h) - F(x) - \varepsilon Ah|}{\varepsilon} = 0, \quad \forall h \in \mathbb{X}. \quad (3.8)$$

Στην περίπτωση αυτή ο τελεστής A καλείται Gâteaux παράγωγος του F στο x , συμβολίζεται ως $DF(x)$ και ορίζεται ως

$$DF(x)h := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon}.$$

Η Gâteaux παράγωγος, αν υπάρχει, είναι μοναδική, πράγμα το οποίο προκύπτει από τη μοναδικότητα του ορίου.

Παρατήρηση 3.5. Αν ο χώρος $\mathbb{X}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, π.χ αν $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$, τότε η Gâteaux παράγωγος συμπίπτει με το gradient ενώ η Gâteaux παράγωγος κατά κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ συμπίπτει με την παράγωγο κατά κατεύθυνση $\nabla F \cdot h$.

Παρατήρηση 3.6. Η Gâteaux παράγωγος μπορεί να γενικευτεί για συναρτησιακά $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, όπου $\mathbb{Y}$ είναι χώρος Banach, διατηρώντας τον ίδιο ορισμό και με μόνες αλλαγές τις

(i). η απόλυτη τιμή στην (3.8) πρέπει να αντικατασταθεί με τη νόρμα του $\mathbb{Y}$

(ii). ο τελεστής DF είναι τέτοιος ώστε $DF : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$.

Παρατήρηση 3.7. Η Gâteaux παράγωγος ορίζει ένα γραμμικό συναρτησιακό $DF(x) \in \mathbb{X}'$ τέτοιο ώστε

$$DF(x; h) = \langle DF(x), h \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}'}, \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

Το γραμμικό αυτό συναρτησιακό καλείται gradient του F .

Η Gâteaux διαφορισμότητα (ασθενής παράγωγος) δεν είναι η μοναδική έννοια διαφορισμότητας που συναντούμε σε ένα χώρο Banach.

Ορισμός 3.8. (Fréchet διαφορισμότητα). Ο τελεστής $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται Fréchet (ισχυρά) διαφορίσιμος στο $x \in \mathbb{X}$ αν υπάρχει τελεστής $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|F(x + h) - F(x) - Ah|}{\|h\|} = 0. \quad (3.9)$$

Ο τελεστής A , που επίσης συμβολίζεται με $DF(x)$ καλείται Fréchet παράγωγος του F στο x .

Παρατήρηση 3.9. Η Fréchet παράγωγος μπορεί να γενικευτεί για συναρτήσεις $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, όπου $\mathbb{Y}$ είναι χώρος Banach, διατηρώντας τον ίδιο ορισμό και μόνες αλλαγές τις

(i). η απόλυτη τιμή στην (3.9) πρέπει να αντικατασταθεί από τη νόρμα του $\mathbb{Y}$

(ii). ο DF είναι ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής τέτοιος ώστε $DF : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$.

Αν ένα συναρτησιακό είναι Fréchet διαφορίσιμο τότε είναι και Gâteaux διαφορίσιμο αλλά το αντίθετο δεν ισχύει απαραίτητα. Επιπλέον, αν ένα συναρτησιακό είναι Fréchet διαφορίσιμο τότε παράγωγος Fréchet είναι μοναδική.

Πρόταση 3.10. Έστω $D \subset \mathbb{X}$ και έστω $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ ισχυρά διαφορίσιμο συναρτησιακό στο σημείο $x \in \text{int}(D)$. Τότε το F είναι συνεχές στο x .

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $x \in \text{int}(D)$ υπάρχει $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε $x + h \in D$ για $\|h\| \leq \varepsilon_1$. Επίσης λόγω ισχυρής διαφορισιμότητας του F , για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\varepsilon_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|F(x + h) - F(x) - DF(x)h| \leq \varepsilon \|h\|, \text{ αν } \|h\| \leq \varepsilon_2.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned} |F(x + h) - F(x)| &= |F(x + h) - F(x) - DF(x)h + DF(x)h| \\ &\leq |F(x + h) - F(x) - DF(x)h| + |DF(x)h| \\ &\leq |F(x + h) - F(x) - DF(x)h| + \|DF(x)\| \|h\| \end{aligned}$$

όπου $\|DF(x)\|$ είναι η νόρμα του τελεστή $DF \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$. Επιλέγοντας $\delta = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ η παραπάνω εκτίμηση δίνει

$$|F(x + h) - F(x)| \leq (\varepsilon + \|DF(x)\|) \|h\|,$$

σχέση η οποία ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ και μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$|F(x + h) - F(x)| \leq C \|h\|,$$

από την οποία έπεται η συνέχεια στο x . □

Παρατήρηση 3.11. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αν $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ τότε η πρόταση 3.10 ισχύει αρκεί όλες οι απόλυτες τιμές να αντικατασταθούν με τις αντίστοιχες νόρμες του χώρου $\mathbb{Y}$.

Παρατήρηση 3.12. Σε αντίθεση με το συμπέρασμα της πρότασης 3.10 η Gâteaux διαφορισιμότητα σε ένα σημείο δεν εξασφαλίζει τη συνέχεια του συναρτησιακού στο σημείο αυτό αλλά μία ασθενέστερη έννοια που καλείται ημισυνέχεια. Συγκεκριμένα αν $F : D \rightarrow \mathbb{Y}$ (όπου θα μπορούσε $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$) είναι ασθενώς διαφορίσιμο συναρτησιακό σε ένα σημείο $x \in \text{int}(D)$ τότε μπορούμε μόνο να εγγυηθούμε ότι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x + \varepsilon h) = F(x), \quad \forall h \in \mathbb{X},$$

δηλαδή ότι το F είναι ημισυνχές στο x . Εναλλακτικά η ημισυνέχεια του F είναι ισοδύναμη με τη συνέχεια της πραγματικής συνάρτησης $\phi(\varepsilon) = F(x + \varepsilon h)$ για κάθε $h \in \mathbb{X}$. Δεδομένου ότι η

ασθενής διαφορισιμότητα του F στο x είναι ισοδύναμη με τη διαφορισιμότητα της συνάρτησης ϕ , έπεται η συνέχεια της ϕ και κατ'επέκτασιν η ημισυνέχεια του F . Είναι προφανές ένα ημισυνεχές συναρτησιακό σε ένα σημείο $x \in \mathbb{X}$ δεν είναι απαραίτητο να είναι συνεχές στο x . Για παράδειγμα η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1}(x_1^2 + x_2^2), & x_1 \neq 0 \\ 0, & x_1 = 0, \end{cases}$$

η οποία είναι ημισυνεχής και ασθενώς διαφορίσιμη στο $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

Παράδειγμα 3.13. Έστω $\mathbb{X}$ χώρος Hilbert, $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ διγραμμική μορφή και $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική μορφή και έστω $F(x) = a(x, x) + L(x)$. Τότε το F είναι Gâteaux διαφορίσιμο σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{X}$ και κατά κάθε κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ και

$$DF(x; h) = a(x, h) + L(h), \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

Αν η a και η L είναι συνεχείς τότε το F είναι ισχυρά διαφορίσιμο και η παράγωγος $DF(x)$ ορίζεται ως

$$DF(x; h) := a(x, h) + L(h), \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

Παράδειγμα 3.14. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $\mathbb{X} = L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Έστω επίσης g μία C^1 συνάρτηση τέτοια ώστε $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Υπό υποθέσεις για τη g , η απεικόνιση

$$x \mapsto \int_{\Omega} g(x(t)) dt$$

ορίζει ένα συναρτησιακό $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{X}$. Το συναρτησιακό αυτό είναι ασθενώς διαφορίσιμο σε κάθε $x \in \mathbb{X}$ και κατά κάθε κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ και

$$DF(x; h) = \int_{\Omega} g'(x(t)) h(t) dt.$$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Ορισμός 3.15. Έστω $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. Το F είναι δύο φορές Gâteaux διαφορίσιμο σε ένα σημείο $x \in \mathbb{X}$ κατά τις κατευθύνσεις $h, j \in \mathbb{X}$ αν ο τελεστής $DF(x, h)$ είναι μία φορά Gâteaux διαφορίσιμος στο σημείο x κατά την κατεύθυνση j . Η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται με $D^2F(x, h, j)$, είναι στοιχείο του $\mathbb{Y}$ και δίνεται ως

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{DF(x + \varepsilon j, h) - DF(x, h)}{\varepsilon}.$$

Παράδειγμα 3.16. Αν $F(x) = a(x, x) + L(x)$ τότε

$$D^2F(x, h, j) = a(h, j) + a(j, h).$$

Παρατήρηση 3.17. Η δεύτερη παράγωγος Gâteaux ορίζει έναν τελεστή $D^2F(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X}')$ (ισοδύναμα μία διγραμμική μορφή) τέτοιον ώστε

$$D^2F(x, h, j) = \langle D^2F(x)h, j \rangle_{\mathbb{X}', \mathbb{X}}, \quad \forall h, j \in \mathbb{X}.$$

Ο τελεστής αυτός καλείται Εσσιανός.

Πρόταση 3.18. (i). Αν ένα συναρτησιακό F είναι Gâteaux διαφορίσιμο τότε υπάρχει $s \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$F(x + h) = F(x) + DF(x + sh; h),$$

ή ισοδύναμα

$$F(x + h) = F(x) + \langle DF(x + sh), h \rangle.$$

(ii). Αν το F είναι δύο φορές Gâteaux διαφορίσιμο τότε υπάρχει $s \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$F(x + h) = F(x) + DF(x, h) + \frac{1}{2}D^2F(x + sh, h, h),$$

ή ισοδύναμα

$$F(x + h) = F(x) + \langle DF(x), h \rangle + \frac{1}{2}\langle D^2F(x + sh)h, h \rangle.$$

Απόδειξη. (i). Αν το F είναι Gâteaux διαφορίσιμο τότε η πραγματική συνάρτηση

$$t \mapsto \phi(t) := F(x + th), \quad \forall h \in \mathbb{X},$$

είναι διαφορίσιμη. Τότε με εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για τη συνάρτηση ϕ παίρνουμε το ζητούμενο.

(ii). Ομοίως, με εφαρμογή του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης ϕ . □

Κυρτότητα και Διαφορισιμότητα

Η κυρτότητα παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη βελτιστοποίηση. Αρχικά δίνουμε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 3.19. Ένα υποσύνολο $U \subset \mathbb{X}$ είναι κυρτό αν για κάθε $x, y \in U$ ισχύει ότι $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$ για κάθε $\lambda \in (0, 1)$.

Ορισμός 3.20. Ένα συναρτησιακό $F : U \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτό αν για κάθε $x, y \in U$ ισχύει ότι

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y),$$

για κάθε $\lambda \in (0, 1)$.

Όπως θα δούμε παρακάτω η έννοια της κυρτότητας σχετίζεται με την αυτήν της διαφορισιμότητας.

Θεώρημα 3.21. Έστω $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ένα Gâteaux διαφορίσιμο συναρτησιακό σε ένα κυρτό και ανοικτό υποσύνολο $U \subset \mathbb{X}$. Τότε το F είναι κυρτό αν και μόνο αν ισχύει κάτι από τα παρακάτω.

(i).

$$F(y) - F(x) \geq DF(x; y - x), \quad \forall x, y \in U,$$

ή ισοδύναμα, αντιλαμβανόμενοι την Gâteaux παράγωγο ως απεικόνιση της μορφής $DF(x) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ (δηλαδή ως στοιχείο του $\mathbb{X}'$)

$$F(y) - F(x) \geq \langle DF(x), y - x \rangle, \quad \forall x, y \in U. \quad (3.10)$$

(ii). Η Gâteaux παράγωγος $DF(x) \in \mathbb{X}'$ είναι μονότονος τελεστής, δηλαδή

$$\langle DF(y) - DF(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in U. \quad (3.11)$$

Απόδειξη. (i). Θεωρούμε δύο σημεία $x, y \in U$ και παίρνουμε τον κυρτό τους συνδυασμό

$$(1 - \varepsilon)x + \varepsilon y = x + \varepsilon(y - x).$$

Από την κυρτότητα του F έχουμε τη σχέση

$$F(x + \varepsilon(y - x)) \leq (1 - \varepsilon)F(x) + \varepsilon F(y) = F(x) + \varepsilon(F(y) - F(x)), \quad \forall x, y \in U, \varepsilon \in (0, 1),$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{F(x + \varepsilon(y - x)) - F(x)}{\varepsilon} \leq F(y) - F(x).$$

Δεδομένου ότι το F είναι Gâteaux διαφορίσιμο στο $x \in \mathbb{X}$ μπορούμε να πάρουμε το όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ και έτσι έχουμε

$$\langle DF(x), y - x \rangle \leq F(y) - F(x),$$

θεωρώντας το $DF(x)$ ως στοιχείο του $\mathbb{X}'$.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι η (3.10) ισχύει για κάθε ζευγάρι $x, y \in U \times U$. Τότε θα ισχύει και για τα ζευγάρια $(x, x + \varepsilon(y - x))$ και $(y, x + \varepsilon(y - x))$, για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$. Έτσι οδηγούμαστε στις ανισότητες

$$\begin{aligned} F(x) &\geq F(x + \varepsilon(y - x)) - \varepsilon \langle DF(x + \varepsilon(y - x)), y - x \rangle \\ F(y) &\geq F(x + \varepsilon(y - x)) + (1 - \varepsilon) \langle DF(x + \varepsilon(y - x)), y - x \rangle. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με $(1 - \varepsilon)$ και τη δεύτερη με ε και προσθέτοντας παίρνουμε τη ζητούμενη κυρτότητα.

(ii). Έστω ότι το F είναι κυρτό. Τότε γράφοντας τη (3.10) δύο φορές, εναλλάσσοντας τις θέσεις των x, y και προσθέτοντας παίρνουμε την (3.11).

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (3.11). Τότε με εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής (Πρόταση 3.18) έχουμε ότι για κάθε $x, y \in U$ υπάρχει $s \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$F(y) - F(x) = \langle DF(x + s(y - x)) - DF(x), y - x \rangle + \langle DF(x), y - x \rangle.$$

Τώρα εφαρμόζοντας την (3.11) για το ζευγάρι $(x + s(y - x), x) \in U \times U$ παίρνουμε

$$\langle DF(x + s(y - x)) - DF(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall s \in (0, 1).$$

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε τη (3.10) οπότε το F είναι κυρτό. $\square$

Παρατήρηση 3.22. Αν το F είναι γνησίως κυρτό τότε οι ανισότητες (3.10) και (3.11) είναι γνήσιες.

Θεώρημα 3.23. Έστω $U \subset \mathbb{X}$ ένα κυρτό και ανοικτό σύνολο. Αν $F : U \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτό και δύο φορές Gâteaux διαφορίσιμο για κάθε κατεύθυνση στο U τότε η δεύτερη παράγωγος D^2F ορίζει μία θετικά ορισμένη μορφή, δηλαδή

$$D^2F(x, h, h) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{X}, h \in U, h \neq 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\langle D^2F(x)h, h \rangle \geq 0, \quad \forall x \in U, h \in \mathbb{X}. \quad (3.12)$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το ανάπτυγμα Taylor. (Πρόταση 3.18). $\square$

Παρατήρηση 3.24. Αν το F είναι γνησίως κυρτό τότε η ανισότητα (3.12) είναι γνήσια.

Κυρτότητα και Συνέχεια

Η κυρτότητα εγγυάται κάποιες χρήσιμες ιδιότητες συνέχειας. Αρχικά υπενθυμίζουμε κάποιους ορισμούς συνέχειας.

Ορισμός 3.25. (Κάτω ημισυνέχεια). Ένα συναρτησιακό καλείται κάτω ημισυνεχές αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ τέτοια ώστε $x_n \rightarrow x$ στον $\mathbb{X}$ ισχύει

$$\liminf_n F(x_n) \geq F(x).$$

Ορισμός 3.26. (Ασθενής κάτω ημισυνέχεια). Ένα συναρτησιακό καλείται ασθενώς κάτω ημισυνεχές αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ τέτοια ώστε $x_n \rightharpoonup x$ στον $\mathbb{X}$ ισχύει

$$\liminf_n F(x_n) \geq F(x).$$

Για κυρτά συναρτησιακά οι παραπάνω ορισμοί σχετίζονται. Προς αυτήν την κατεύθυνση υπενθυμίζουμε το λήμμα Mazur από τη συναρτησιακή ανάλυση.

Λήμμα 3.27. (Mazur). Έστω $\mathbb{X}$ ένας χώρος Banach και έστω μία ακολουθία $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ τέτοια ώστε $x_n \rightharpoonup x$ στον $\mathbb{X}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N(n)$ και ακολουθία συνόλων πραγματικών αριθμών $\{a(n)_k\}_{k=n}^{N(n)}$ με τις ιδιότητες $a(n)_k \in (0, 1)$ για κάθε k και $\sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k = 1$, τέτοια ώστε η ακολουθία

$$\bar{x}_n := \sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k x_k,$$

να έχει την ιδιότητα $\bar{x}_n \rightarrow x$ (όπου τώρα η σύγκλιση είναι ισχυρή).

Το λήμμα Mazur μας επιτρέπει να μετατρέψουμε ασθενείς συγκλίσεις σε ισχυρές, δεδομένων κατάλληλων κυρτών συνδυασμών. Έστω $x_n \rightharpoonup x$ στον $\mathbb{X}$. Τότε, από το λήμμα Mazur

μπορούμε να κατασκευάσουμε την ακολουθία $\bar{x}_n \rightarrow x$ στον $\mathbb{X}$. Δεδομένου ότι για κάθε n η $\bar{x}_n$ είναι κυρτός συνδυασμός στοιχείων της αρχικής ακολουθίας, αν το F είναι κυρτό τότε έχουμε

$$F(\bar{x}_n) = F\left(\sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k x_k\right) \leq \sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k F(x_k).$$

Η ασθενής κάτω ημισυνέχεια είναι ισχυρότερη ιδιότητα από την ισχυρή κάτω ημισυνέχεια με την έννοια ότι ένα ισχυρά κάτω ημισυνεχές συναρτησιακό δεν είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές ενώ το αντίθετο ισχύει πάντα. Παρόλα αυτά, για κυρτά συναρτησιακά, οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 3.28. Έστω $F : U \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ένα κυρτό συναρτησιακό. Τότε το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές αν και μόνο αν είναι ισχυρά κάτω ημισυνεχές.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αν το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές τότε είναι και ισχυρά κάτω ημισυνεχές (χωρίς χρήση της κυρτότητας). Υποθέτουμε τώρα ότι το F είναι ισχυρά κάτω ημισυνεχές και κυρτό. Θεωρούμε μία ακολουθία x_n τέτοια ώστε $x_n \rightarrow x$ και κατασκευάζουμε την ακολουθία $\bar{x}_n$ με $\bar{x}_n \rightarrow x$, της οποίας την ύπαρξη μας εγγυάται το λήμμα Mazur. Από την κυρτότητα του F έχουμε

$$F(\bar{x}_n) = F\left(\sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k x_k\right) \leq \sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k F(x_k), \quad (3.13)$$

για $k = n, \dots, N(n)$. Από τον ορισμό του $\liminf F(x_n)$ υπάρχει υπακολουθία $F(x_{n_r})$ τέτοια ώστε $\lim_r F(x_{n_r}) = \liminf F(x_n)$. άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$F(x_{n_r}) < \liminf F(x_n) + \varepsilon \text{ για } n > N.$$

Τότε, εφαρμόζοντας τη (3.13) για την παραπάνω υπακολουθία παίρνουμε ότι για αρκετά μεγάλα r ,

$$F(\bar{x}_{n_r}) < \liminf F(x_n) + \varepsilon.$$

άρα

$$\liminf F(\bar{x}_n) < \liminf F(x_n) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Από την ισχυρή κάτω ημισυνέχεια έχουμε ότι

$$F(x) \leq \liminf_n F(\bar{x}_n),$$

δηλαδή

$$F(x) < \liminf F(x_n) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

και έτσι

$$F(x) \leq \liminf F(x_n).$$

άρα το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές. □

Πρόταση 3.29. Αν ένα συναρτησιακό $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτό και Gâteaux διαφορίσιμο στο $x \in \mathbb{X}$ τότε το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές στο x .

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ έτσι ώστε $x_n \rightarrow$ στο $\mathbb{X}$. Δεδομένου ότι το F είναι κυρτό και Gâteaux διαφορίσιμο στο x , εφαρμόζουμε την (3.11) για $y = x$ και $x = x_n$ και παίρνουμε

$$F(x_n) - F(x) \geq \langle DF(x), x_n - x \rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Αφού $x_n \rightarrow x$ στο $\mathbb{X}$, για κάθε $v \in \mathbb{X}'$ έχουμε ότι $\langle v, x_n - x \rangle \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Επιλέγουμε $v = DF(x) \in \mathbb{X}'$ και παίρνουμε το όριο καθώς $n \rightarrow \infty$ στη (3.14) και έχουμε

$$\liminf_n F(x_n) \geq F(x),$$

δηλαδή ότι το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές. □

Παράδειγμα 3.30. Θεωρούμε το συναρτησιακό $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$F(x) = a(x, x) + L(x).$$

Η κυρτότητα του συναρτησιακού σχετίζεται με την πιεστικότητά του, δηλαδή την ύπαρξη σταθεράς $C > 0$ τέτοιας ώστε

$$|a(x, x)| \geq C \|x\|_{\mathbb{X}}^2, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Αν η παραπάνω σχέση ισχύει, το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές.

Παρατήρηση 3.31. Η πιεστικότητα δεν είναι εύκολο να ικανοποιείται σε όλο το $\mathbb{X}$. Μπορεί να ισχύει σε υποσύνολα του $\mathbb{X}$, συμπαγώς εμφυτευμένα στο $\mathbb{X}$. Ως παραδείγματα μπορούμε να θεωρήσουμε συναρτησιακά ορισμένα σε χώρους Sobolev.

Βελτιστοποίηση σε χώρο Banach

Βελτιστοποίηση σε διανυσματικό χώρο

Θεώρημα 3.32. (Weierstrass). Έστω $U \subset \mathbb{X}$ ένα φραγμένο και ασθενώς κλειστό υποσύνολο ενός ανακλαστικού χώρου Banach $\mathbb{X}$. Έστω επίσης $F : U \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ένα ασθενώς κάτω ημισυνεχές συναρτησιακό. Τότε το F δέχεται ελάχιστο στο U .

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\} \subset U$ μια ελαχιστοποιούσα ακολουθία, δηλαδή μια ακολουθία τέτοια ώστε $F(x_n) \rightarrow m$, όπου $m = \inf_{x \in U} F(x)$. Αυτή η ακολουθία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $x \in \mathbb{X}$, αφού είναι φραγμένη και ο $\mathbb{X}$ είναι ανακλαστικός. Θα δείξουμε ότι το στοιχείο x είναι τέτοιο ώστε $F(x) = m$, δηλαδή ότι το x είναι ελαχιστοποιητής. Πράγματι, λόγω ασθενούς κάτω ημισυνεχίας έχουμε $\liminf_n F(x_n) \geq F(x)$ και επειδή η $\{x_n\}$ είναι ελαχιστοποιούσα ακολουθία έχουμε τελικά ότι $F(x) = m$. □

Παρατήρηση 3.33. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση για το φραγμένο σύνολο U με την υπόθεση

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} F(x) = \infty.$$

Θεώρημα 3.34. (Συνθήκες πρώτης μεταβολής). Έστω U ανοικτό και $F : U \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux διαφορίσιμο συναρτησιακό με τοπικό ελάχιστο στο $x \in \mathbb{X}$. Τότε η συνθήκη πρώτης μεταβολής $DF(x) = 0$ ισχύει.

Απόδειξη. Αφού το F έχει τοπικό ελάχιστο στο x , για κάθε κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ ισχύει

$$F(x) \leq F(x + \varepsilon h), \quad \forall h \in \mathbb{X},$$

για μικρό ε . Έχουμε λοιπόν ότι

$$\frac{F(x + \varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon} \geq 0, \quad \forall h \in \mathbb{X},$$

και επειδή το F είναι Gâteaux διαφορίσιμο στο x έχουμε

$$\langle DF(x), h \rangle \geq 0, \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

Αφού ο $\mathbb{X}$ είναι διανυσματικός χώρος μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για $-h \in \mathbb{X}$ έτσι ώστε τελικά να πάρουμε ότι στο τοπικό ελάχιστο x ισχύει

$$\langle DF(x), h \rangle = 0, \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

□

Παρατήρηση 3.35. Η συνθήκη πρώτης μεταβολής αντιμετωπίζεται ως ισότητα στο δυϊκό χώρο $\mathbb{X}'$, δηλαδή

$$\langle DF(x), h \rangle_{\mathbb{X}', \mathbb{X}} = 0, \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

Αν θεωρηθεί ως τελεστική εξίσωση τότε βρίσκεται σε ασθενή μορφή.

Παρατήρηση 3.36. Μια εναλλακτική μορφή της συνθήκης πρώτης μεταβολής με όρους μεταβολικών ανισοτήτων είναι

$$\langle DF(x), y - x \rangle_{\mathbb{X}', \mathbb{X}} \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{X}$$

(το y πρέπει να είναι επιτρεπτό με την έννοια ότι $x + \varepsilon_n(y - x) \in U$, για κάθε όρο της ακολουθίας ε_n , με $\varepsilon_n \rightarrow 0$).

Βελτιστοποίηση και κυρτότητα

Η κυρτότητα μας οδηγεί σε κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα που αφορούν τη θεωρία βελτιστοποίησης.

Πρόταση 3.37. (i). Ένα τοπικό ελάχιστο ενός συναρτησιακού που είναι ορισμένο σε κυρτό σύνολο είναι ολικό ελάχιστο.

(ii). Αν το συναρτησιακό είναι γνησίως κυρτό τότε το ελάχιστο είναι μοναδικό

Απόδειξη. (i). Υποθέτουμε ότι το $x \in \mathbb{X}$ είναι τοπικό ελάχιστο, δηλαδή $F(x) \leq F(x')$ για κάθε $x' \in V$, όπου V είναι μία επαρκώς μικρή περιοχή του x . Για κάθε $y \in U$ θεωρούμε τον κυρτό συνδυασμό $(1 - \varepsilon)x + \varepsilon y = x + \varepsilon(y - x) \in U$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Για αρκετά μικρές τιμές των ε , $x + \varepsilon(y - x) \in V$ και επειδή το x είναι τοπικό ελάχιστο έχουμε

$$F(x) \leq F(x + \varepsilon(y - x))$$

και λόγω κυρτότητας του F παίρνουμε

$$F(x + \varepsilon(y - x)) \leq (1 - \varepsilon)F(x) + \varepsilon F(y) = F(x) + \varepsilon(F(y) - F(x)),$$

για κάθε αρκετά μικρό $\varepsilon \geq 0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$F(x) \leq F(x) + \varepsilon(F(y) - F(x)),$$

ή ισοδύναμα $F(x) \leq F(y)$ για κάθε $y \in U \subset \mathbb{X}$. Άρα το x είναι ολικό ελάχιστο.

(ii). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ δύο ολικά ελάχιστα του F τέτοια ώστε $x_1 \neq x_2$. Θεωρούμε το σημείο $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in \mathbb{X}$. Λόγω γνήσιας κυρτότητας του F έχουμε $F(x) < F(x_1) = F(x_2)$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο. $\square$

Θεώρημα 3.38. Έστω $U \subset \mathbb{X}$, κυρτό και $F : U \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux διαφορίσιμο προς όλες τις κατευθύνσεις και κυρτό συναρτησιακό. Τότε το $x \in U$ είναι ελάχιστο αν και μόνο αν $DF(x; y - x) \geq 0$, για κάθε $y \in U$, ή ισοδύναμα

$$\langle DF(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in U.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $x \in U$ είναι ελάχιστο. Τότε $F(x) \leq F(z)$, για κάθε $z \in U$. Για οποιαδήποτε $x, y \in U$, θέτουμε

$$z = (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y = x + \varepsilon(y - x) \in U \text{ για } \varepsilon \in (0, 1),$$

οπότε έχουμε

$$F(x) \leq F(x + \varepsilon(y - x)), \quad \forall y \in U, \varepsilon > 0,$$

δηλαδή

$$\frac{F(x + \varepsilon(y - x)) - F(x)}{\varepsilon} \geq 0, \quad \varepsilon > 0,$$

και παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, έχουμε

$$\langle DF(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in U.$$

Για το αντίστροφο, αφού F είναι κυρτό και Gâteaux διαφορίσιμο έχουμε

$$F(y) - F(x) \geq \langle DF(x), y - x \rangle, \quad \forall x, y \in U.$$

Επειδή για $x \in U$ έχουμε $\langle DF(x), y - x \rangle \geq 0$, για κάθε $y \in U$, παίρνουμε ότι $F(x) \leq F(y)$ για κάθε $y \in U$ και έτσι το x είναι τοπικό ελάχιστο. $\square$

Κεφάλαιο 4

Μεταβολικές Ανισότητες σε χώρους Hilbert

Προβολές

Ξεκινάμε με ένα βασικό αποτέλεσμα, το θεώρημα προβολής σε κλειστό και κυρτό υποσύνολο.

Θεώρημα 4.1. Έστω $\mathbb{X}$ χώρος Hilbert και $K \subset \mathbb{X}$ κλειστό και κυρτό. Τότε, για $x \in \mathbb{X}$ το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_{z \in K} \|x - z\|$$

έχει μοναδική λύση, x^* , που ορίζει έναν τελεστή συστολή $P_K : \mathbb{X} \rightarrow K$, ως $P_K x := x^*$. Επιπλέον το x^* χαρακτηρίζεται από τη λύση της ανισότητας

$$\langle x - x^*, y - x^* \rangle \leq 0, \quad \forall y \in K. \quad (4.1)$$

Απόδειξη. Θέτουμε $F(z) := \|x - z\|^2$. Η ύπαρξη έπεται αν πάρουμε μια ελαχιστοποιούσα ακολουθία $\{z_n\} \subset K$, δηλαδή μια ακολουθία τέτοια ώστε $F(z_n) \rightarrow m$ όπου $m = \inf_{z \in K} \|x - z\|^2$. Η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη άρα ασθενώς συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x^* \in \mathbb{X}$ ώστε $z_n \rightharpoonup x^*$. Από την κλειστότητα του K έχουμε ότι $x^* \in K$. Το όριο αυτό είναι ο ζητούμενος ελαχιστοποιητής, το οποίο έπεται από το γεγονός ότι η νόρμα είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής συνάρτηση και γνήσιως κυρτή. Η μοναδικότητα έπεται λόγω γνήσιας κυρτότητας.

Για να δείξουμε ότι ο ελαχιστοποιητής ικανοποιεί την (4.1) παρατηρούμε ότι $F(z) = \langle x - z, x - z \rangle$. Αν το x^* είναι το στοιχείο εκείνο του K που ελαχιστοποιεί την απόσταση τότε $F(x^*) \leq F(z)$ για κάθε $z \in K$. Δηλαδή το x^* είναι λύση της ανισότητας

$$\langle x - x^*, x - x^* \rangle \leq \langle x - z, x - z \rangle, \quad \forall z \in K.$$

Έστω τώρα $y \in K$. Θέτουμε

$$z = (1 - \varepsilon)x^* + \varepsilon y = x^* + \varepsilon(y - x^*), \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Αφού $z \in K$ έχουμε

$$\langle x - x^*, x - x^* \rangle \leq \langle (x - x^*) - \varepsilon(y - x^*), (x - x^*) - \varepsilon(y - x^*) \rangle, \quad \forall y \in K, \varepsilon \in (0, 1).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$0 \leq -\langle x - x^*, y - x^* \rangle + \varepsilon \|y - x^*\|^2, \quad \forall y \in K, \varepsilon \in (0, 1)$$

και παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε

$$\langle x - x^*, y - x^* \rangle \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

□

Μεταβολικές ανισότητες

Διγραμμικές μορφές

Έστω $\mathbb{X}$ ένας χώρος Hilbert.

Ορισμός 4.2. Μια απεικόνιση $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γραμμική και ως προς τις δύο μεταβλητές της καλείται διγραμμική μορφή στο $\mathbb{X}$.

Ορισμός 4.3. Μια διγραμμική μορφή καλείται συμμετρική αν $a(x, y) = a(y, x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{X}$.

Ορισμός 4.4. Μια διγραμμική μορφή καλείται συνεχής αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$|a(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Ορισμός 4.5. Μια διγραμμική μορφή καλείται πιεστική αν υπάρχει σταθερά $\alpha > 0$ τέτοια ώστε

$$\alpha \|x\|^2 \leq |a(x, x)|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Παράδειγμα 4.6. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ και $\mathbb{X} = W_0^{1,2}(\Omega)$, ο χώρος Sobolev που αποτελείται από συναρτήσεις οι οποίες έχουν πρώτης τάξης ασθενείς παραγώγους που ανήκουν στον $L^2(\Omega)$ και μηδενίζονται στο $\partial\Omega$ με την έννοια του ίχνους. Ο χώρος $\mathbb{X}$ είναι χώρος Hilbert με τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

που εξάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx.$$

Υπενθυμίζουμε την ανισότητα Poincaré, σύμφωνα με την οποία

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Αυτό σημαίνει ότι η $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ είναι ισοδύναμη νόρμα στον $W_0^{1,2}(\Omega)$. Στη συνέχεια θα θεωρούμε το χώρο $\mathbb{X}$ με αυτήν τη νόρμα, την οποία θα συμβολίζουμε με $\|\cdot\|$. Θεωρούμε τη διγραμμική μορφή $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Είναι προφανές ότι η a είναι συμμετρική. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz δίνει

$$|a(u, v)| \leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| dx \leq \|u\| \|v\|$$

και εξασφαλίζει τη συνέχεια της a . Επιπλέον

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2,$$

δηλαδή η a είναι και πιεστική.

Εισαγωγή στις μεταβολικές ανισότητες

Παρουσιάζουμε μια εισαγωγή στη θεωρία των μεταβολικών ανισοτήτων θεωρώντας $\mathbb{X}$ ένα χώρο Hilbert και $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $F(x) = 1/2 a(x, x) + L(x)$. Η a είναι συνεχής, συμμετρική και πιεστική διγραμμική μορφή ενώ η L είναι συνεχής γραμμική μορφή.

Θεώρημα 4.7. Έστω $K \subset \mathbb{X}$ κλειστό και κυρτό. Το πρόβλημα $\min_{x \in K} F(x)$ έχει μοναδική λύση που είναι ισοδύναμη με τη λύση του προβλήματος μεταβολικής ανισότητας

$$\text{να βρεθεί } x \in K, \text{ ώστε } a(x, y - x) \leq L(y - x), \quad \forall y \in K.$$

Θεώρημα 4.8. (Lax-Milgram-Stampacchia). Για δεδομένο $L \in \mathbb{X}'$ υπάρχει μοναδικό $u \in K$, τέτοιο ώστε

$$a(u, v - u) \geq \langle L, v - u \rangle, \quad \forall v \in K. \quad (4.2)$$

Επιπλέον, αν το a είναι συμμετρικό, τότε το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \langle L, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle L, v \rangle \right\},$$

δηλαδή ελαχιστοποιεί το $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = \frac{1}{2} a(x, x) + L(x)$ όπου a συνεχής και πιεστική διγραμμική μορφή και $K \subset \mathbb{X}$ κλειστό και κυρτό.

Απόδειξη. Από το θεώρημα αναπαράστασης των Riesz-Frechet, υπάρχει μοναδικό $f \in \mathbb{X}$, τέτοιο ώστε

$$\langle L, v \rangle = (f, v), \quad \forall v \in \mathbb{X}.$$

Εξ'άλλου για σταθερό $u \in \mathbb{X}$, η απεικόνιση $v \mapsto a(u, v)$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό πάνω στον $\mathbb{X}$ και σύμφωνα με το θεώρημα αναπαράστασης Riesz-Frechet υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{X}^*$, έστω Au , τέτοιο ώστε

$$a(u, v) = (Au, v), \quad \forall v \in \mathbb{X}.$$

Είναι φανερό ότι ο A είναι ένας γραμμικός τελεστής από τον $\mathbb{X}$ στον $\mathbb{X}$ και ότι

$$\begin{aligned} \|Au\|_{\mathbb{X}^*} &\leq c \|u\|_{\mathbb{X}}, \quad \forall u \in \mathbb{X} \\ (Au, u) &\geq a \|u\|_{\mathbb{X}}^2, \quad \forall u \in \mathbb{X}. \end{aligned}$$

Μετά από αυτή τη θεώρηση, το πρόβλημα ανάγεται στο να βρεθεί $u \in K$, τέτοιο ώστε

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K. \quad (4.3)$$

Έστω $\rho > 0$, σταθερό. Η ανισότητα (4.3) ισοδυναμεί με την

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in K,$$

δηλαδή $u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$. Για κάθε $v \in K$ θέτουμε $Sv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$. Θα δείξουμε ότι αν αρκετά μικρό $\rho > 0$ επιλεγεί κατάλληλα τότε το S είναι μία γνήσια συστολή, δηλαδή υπάρχει $k < 1$, τέτοιο ώστε

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq k\|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in K.$$

Από γνωστή πρόταση ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|Sv_1 - Sv_2\| &= \|P_K(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - P_K(\rho f - \rho Av_2 + v_2)\| \\ &\leq \|\rho f - \rho Av_1 + v_1 - \rho f + \rho Av_2 - v_2\| \\ &= \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \|Sv_1 - Sv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2\|Av_1 - Av_2\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2(1 - 2\rho a + \rho^2 c^2). \end{aligned}$$

Αν το $\rho > 0$ επιλεγεί ώστε $k^2 = 1 - 2\rho a + \rho^2 c^2 < 1$ (π.χ $0 < \rho < 2a/c^2$), τότε

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq k\|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in K,$$

με $k < 1$. Σύμφωνα με το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, η S έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Τέλος, έστω u τέτοιο ώστε

$$a(u, v - u) \geq \langle L, v - u \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Η συμμετρία του a υποδηλώνει ότι

$$a(v - u, u) \geq \langle L, v - u \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Θέτουμε

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle L, v \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Τότε

$$\begin{aligned} F(u) &= F(u + (v - u)) \\ &= \frac{1}{2}a(u + (v - u), u + (v - u)) - \langle L, u + (v - u) \rangle \\ &= \frac{1}{2}(u, u) - \langle L, u \rangle + a(v - u, u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) - \langle L, v - u \rangle \\ &= F(u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) + a(v - u, u) - \langle L, v - u \rangle. \end{aligned}$$

Λόγω της πιεστικότητας προκύπτει ότι

$$a(v - u, v - u) \geq 0.$$

Επίσης

$$a(v - u, u) - \langle L, v - u \rangle \geq 0,$$

οπότε $F(u) \leq F(v)$, για κάθε $v \in K$, δηλαδή το u είναι ελαχιστοποιητής του

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle L, v \rangle, \quad v \in K.$$

□

Εφαρμογή του θεωρήματος Lax-Milgram-Stampacchia

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω η συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $f \in L^2(\Omega)$. Θεωρούμε το Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (πρόβλημα Dirichlet)

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

Για δεδομένη $f \in L^2(\Omega)$ ονομάζουμε ασθενή λύση του (4.4) μία συνάρτηση $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, που είναι τέτοια ώστε

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx = \int_{\Omega} f w dx, \text{ για κάθε } w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (4.5)$$

Θεώρημα 4.9. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω η συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $f \in L^2(\Omega)$. Τότε το πρόβλημα Dirichlet (4.4) έχει μοναδική ασθενή λύση.

(Σημειώνουμε ότι, για διάκριση, την ισοδύναμη νόρμα της κλασσικής νόρμας στον χώρο Hilbert, συμβολίζουμε με $\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx \right)^{1/2}$).

Απόδειξη. Στο χώρο Hilbert $(\mathbb{H}_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)})$ θεωρούμε το διγραμμικό συναρτησιακό

$$a(\cdot, \cdot) : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

όπου

$$a(u, w) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx, \text{ για κάθε } u, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Τότε, για κάθε $u, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ ισχύει

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla w| dx \\ &\leq \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \|w\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Άρα το συναρτησιακό a είναι συνεχές. Επιπλέον, για κάθε $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ έχουμε

$$a(u, u) = \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx = \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2.$$

Οπότε το συναρτησιακό a είναι και πιεστικό. Επομένως, από το Θεώρημα 4.8, υπάρχει μοναδικό $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$a(u, w) = \langle f, w \rangle, \text{ για κάθε } w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Άρα, για δεδομένη συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ ώστε να ικανοποιείται η (4.5). Επομένως, υπάρχει μοναδική ασθενής λύση $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ για το πρόβλημα Dirichlet (4.4). $\square$

Πρόταση 4.10. Η συνάρτηση $F : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, που σε κάθε $f \in L^2(\Omega)$ αντιστοιχεί τη μοναδική λύση $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ του προβλήματος (4.4), είναι συνεχής.

Απόδειξη. Για κάθε $f \in L^2(\Omega)$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $F(f) = u$, δηλαδή

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx = \int_{\Omega} f w dx, \text{ για κάθε } w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (4.6)$$

Η συνάρτηση F είναι γραμμική αφού για κάθε $f, g \in L^2(\Omega)$ ισχύει

$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

Για $w = u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, η σχέση (4.6) γίνεται

$$\int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx = \int_{\Omega} f u dx,$$

δηλαδή

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f u dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.7)$$

Με χρήση της ανισότητας Poincare, η σχέση (4.7) γράφεται

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} C \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)},$$

δηλαδή

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.8)$$

Αλλά $u = F(f)$, οπότε από τη σχέση (4.8) έχουμε ότι για κάθε $f \in L^2(\Omega)$, ισχύει ότι

$$\|F(f)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.9)$$

με αποτέλεσμα η γραμμική συνάρτηση F να είναι συνεχής. $\square$

Παρατήρηση 4.11. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ ισχύει η σχέση

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq (C+1)\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Άρα, για $u = F(f) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ έχουμε

$$\frac{1}{C+1}\|F(f)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{C+1}\|F(f)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq \|F(f)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Έτσι, από τη σχέση (4.9), για κάθε $f \in L^2(\Omega)$ ισχύει

$$\frac{1}{C+1}\|F(f)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.10)$$

Αλλά, για κάθε $f \in L^2(\Omega)$ ισχύει

$$\|F(f)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \geq \|F(f)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Άρα, η σχέση (4.10) γράφεται, θεωρώντας $M = C(C+1) > 0$,

$$\|F(f)\|_{L^2(\Omega)} \leq M\|f\|_{L^2(\Omega)}, \text{ για κάθε } f \in L^2(\Omega),$$

δηλαδή

$$\|F\|_{L(L^2(\Omega))} \leq M. \quad (4.11)$$

Επομένως, η γραμμική συνάρτηση $F : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ είναι συνεχής.

Παράδειγμα 4.12. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο. Αν $f \in L^2(\Omega)$ και $c(x) \in L^\infty(\Omega)$ με $c(x) \geq 0$ σχεδόν παντού στο Ω , τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται σε ασθενή μορφή ως

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\Omega} c(x) v dx = \int_{\Omega} f v dx, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (4.12)$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Green, η (4.12) γίνεται

$$-\int_{\Omega} v(\nabla u n) dS + \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v) dx + \int_{\Omega} c(x) v dx = \int_{\Omega} f v dx, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

όπου n το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ είναι ασθενής λύση της (4.12), αν

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v) dx + \int_{\Omega} c(x) v dx = \int_{\Omega} f v dx, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Αν θεωρήσουμε $F : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(v) = \int_{\Omega} f v dx$, τότε το F είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό, αφού από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$F(v) = \int_{\Omega} f v dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}.$$

Επίσης, αν θέσουμε $B : \mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v) dx + \int_{\Omega} c(x) v dx,$$

τότε η B είναι φραγμένη διγραμμική μορφή αφού

$$|B(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{\infty} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Τέλος, η B είναι πιεστική αφού

$$B(u, u) \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2, \text{ για κάθε } u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Άρα από το θεώρημα Lax-Milgram-Stampacchia υπάρχει μοναδικό $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$B(u, v) = F(v), \text{ για κάθε } v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Οπότε υπάρχει μοναδική λύση της (4.12). □

Θεώρημα 4.13. (Minty). Το πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας ισοδυναμεί με το πρόβλημα

$$\text{να βρεθεί } x \in K \text{ τέτοιο ώστε } a(y, y - x) \geq \langle f, y - x \rangle, \quad \forall y \in K, f \in \mathbb{X}'. \quad (4.13)$$

Απόδειξη. Έστω $x^* \in K$ λύση της (4.2). Τότε, για κάθε $y \in K$

$$a(y, y - x^*) = a(y - x^*, y - x^*) + a(x^*, y - x^*) \geq a(x^*, y - x^*) \geq \langle f, y - x^* \rangle,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γραμμικότητα της a ως προς το πρώτο όρισμά της και την πιεστικότητα για να συμπεράνουμε ότι $a(y - x^*, y - x^*) > 0$. Άρα, μία λύση της (4.2) είναι λύση της (4.13). Υποθέτουμε τώρα ότι το $x^* \in K$ είναι λύση της (4.13). Για οποιοδήποτε $y \in K$ και $\varepsilon \in (0, 1)$, ορίζουμε $z = x^* + \varepsilon(y - x^*) \in K$ και εφαρμόζουμε την (4.13) για το ζεύγος $(x^*, z) \in K \times K$. Έτσι, έχουμε

$$a(x^* + \varepsilon(y - x^*), \varepsilon(y - x^*)) \geq \langle f, \varepsilon(y - x^*) \rangle, \quad \forall y \in K$$

το οποίο μας οδηγεί μέσω του ορίου καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ στην (4.2). □

Εφαρμογή: Πρόβλημα ελευθέρων συνοριακών τιμών

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ με επαρκώς ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$$

για όλες τις συναρτήσεις $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι τέτοιες ώστε $v \geq \phi$, όπου $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία δοσμένη ομαλή συνάρτηση. Θα δείξουμε ότι αυτό το πρόβλημα αποτελεί μέρος της γενικής κλάσης των προβλημάτων μεταβολικών ανισοτήτων και στη συνέχεια θα εξασφαλίσουμε την ύπαρξη λύσης για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Το πρόβλημα δίνεται στη μορφή

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{αν } u > \phi \\ -\Delta u > 0, & \text{αν } u = \phi, \end{cases}$$

επομένως η άγνωστη συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στα σημεία του Ω που είναι τέτοια ώστε $u(x) > \phi(x)$ και την ανισότητα $-\Delta u > 0$ στα σημεία όπου η u συμπίπτει με το εμπόδιο, δηλαδή στα σημεία του Ω που είναι τέτοια ώστε $u(x) = \phi(x)$. Θα ονομάζουμε αυτό το σύνολο, σύνολο σύμπτωσης και θα γράφουμε

$$C := \{x \in \Omega : u(x) = \phi(x)\}.$$

Δεδομένου ότι η u είναι άγνωστη, το σύνολο σύμπτωσης C , καθώς και το σύνορό του είναι άγνωστα και έτσι τέτοιου τύπου προβλήματα καλούνται προβλήματα ελευθέρων συνοριακών τιμών. Το πρόβλημα που εξετάζουμε εδώ ανήκει σε μία συγκεκριμένη κλάση προβλημάτων, αυτή των προβλημάτων εμποδίων. Τα προβλήματα εμποδίων έχουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές στη μηχανική, στις πιθανότητες και στα οικονομικά μαθηματικά.

Για να γράψουμε το πρόβλημα φορμαλιστικά, επιλέγουμε $\mathbb{X} = W_0^{1,2}(\Omega)$. Αυτός είναι χώρος Sobolev και κάθε $x \in \mathbb{X}$ θεωρείται ως $x = u$, συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας το ίχνος εξαφανίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$ και έχει ασθενείς παραγώγους με την έννοια του $L^2(\Omega)$. Από την ανισότητα Poincaré η ποσότητα $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ είναι μια ισοδύναμη νόρμα για αυτό το χώρο, ο οποίος όταν εφοδιάζεται με αυτήν είναι χώρος Hilbert. Η παρατήρηση αυτή, εξασφαλίζει ότι το συναρτησιακό $J : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πιεστικό και συνεχές.

Λήμμα 4.14. Το σύνολο

$$K := \{v \in W_0^{1,2}(\Omega) : v(x) \geq \phi(x), \text{ σ.π για } x \in \Omega\}$$

είναι κυρτό και κλειστό υποσύνολο του $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Απόδειξη. Η κυρτότητα είναι προφανής αφού αν $v_1, v_2 \in K$ τότε $\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in K$, για κάθε $\lambda \in (0, 1)$. Θα δείξουμε λοιπόν ότι το K είναι κλειστό. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{v_n\} \subset K$, τέτοια ώστε $v_n \rightarrow v$ στον $W_0^{1,2}(\Omega)$. Θα δείξουμε ότι $v \in W_0^{1,2}(K)$. Πράγματι, δεδομένου ότι $v_n \rightarrow v$ στον $W_0^{1,2}(\Omega)$, από την συμπαγή εμφύτευση $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $\{v_{n_k}\}$ τέτοια ώστε $v_{n_k} \rightarrow v$ σ.π στον $L^2(\Omega)$ και έτσι υπάρχει υπακολουθία $\{v_{n_r}\}$ τέτοια ώστε $v_{n_r} \rightarrow v$ σ.π στο Ω . Προφανώς αφού $v_{n_r} \in K$ ισχύει ότι $v_{n_r}(x) \geq \phi(x)$ σ.π στο Ω . Παίρνοντας το όριο της υπακολουθίας η ανισότητα γίνεται $v(x) \geq \phi(x)$, σ.π στο Ω . Άρα $v \in K$ και έτσι το K είναι κλειστό. $\square$

Παρατήρηση 4.15. Το παραπάνω επιχείρημα υπονοεί ότι το K είναι ασθενώς κλειστό αφού αν $v_n \rightarrow v$ στο $W_0^{1,2}(\Omega)$, η συμπαγής εμφύτευση $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ μας δίνει υπακολουθία $v_n \rightarrow v$ στον $L^2(\Omega)$ και το αποτέλεσμα έπεται.

Πρόταση 4.16. Έστω $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ τέτοια ώστε $\phi \leq 0$ στο $\partial\Omega$

(i). Τότε, υπάρχει μοναδική λύση για το πρόβλημα

$$\min_{v \in K} J(v).$$

Ο ελαχιστοποιητής $u \in K$ χαρακτηρίζεται ως λύση της μεταβολικής ανισότητας

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u)(x) dx \geq 0, \quad \forall v \in K. \quad (4.14)$$

(ii). Αν η $u - \phi$ είναι συνεχής στο Ω , ο ελαχιστοποιητής είναι λύση του προβλήματος ελευθέρων συννοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0, & \text{στο } \Omega, \\ -\Delta u = 0, & \text{στο } \Omega \setminus C \end{cases}$$

όπου C είναι το σύνολο σύμπτωσης

$$C := \{x \in \Omega : u(x) = \phi(x)\}.$$

Απόδειξη. (i). Από την κυρτότητα και την κλειστότητα του K καθώς και από την συνέχεια και την πιεστικότητα του J το αποτέλεσμα έπεται από γνωστό γενικό θεώρημα.

(ii). Έστω $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ μια συνάρτηση δοκιμής, τέτοια ώστε $\psi \geq 0$. Τότε, αν $u \in K$ έχουμε ότι $v = u + \psi \in K$. Σε αυτήν την περίπτωση η μεταβολική ανισότητα (4.14) γίνεται

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi dx \geq 0,$$

η οποία είναι η ασθενής μορφή της ανισότητας $-\Delta u \geq 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι $\psi \in C_0^\infty(\Omega \setminus C)$. Λόγω συνέχειας, αν $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό έχουμε ότι $u + \varepsilon\psi - \phi > 0$ και $u - \varepsilon\psi - \phi > 0$. Αυτό σημαίνει ότι $u + \varepsilon\psi \in K$ και έτσι η (4.14) γίνεται

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi dx \geq 0$$

και ότι $u - \varepsilon\psi \in K$, οπότε η (4.14) γίνεται

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi dx \leq 0$$

άρα

$$-\Delta u = 0, \quad x \in \Omega \setminus C.$$

□

Παράρτημα Α

Γραμμικές Απεικονίσεις

Ορισμός Γραμμικής Απεικόνισης - Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης

Ορισμός Α.1. Έστω V, U δυο διανυσματικοί χώροι πάνω στο ίδιο σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $f : V \rightarrow U$ μια απεικόνιση. Θα λέμε ότι η f είναι μια γραμμική απεικόνιση ή ένας γραμμικός μετασχηματισμός, αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad v_1, v_2 \in V,$$

$$f(\lambda v) = \lambda f(v), \quad v \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Είναι φανερό ότι οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να αντικατασταθούν με την ακόλουθη σχέση:

$$f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2), \quad v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Εξάλλου, έπεται ότι $f(0) = 0$. Μερικές φορές, αν συμβεί τα U και V , σαν σύνολα θεωρούμενα, να γίνονται διανυσματικοί χώροι και πάνω σε κάποιο άλλο σώμα $\mathbb{K}$ (λ.χ. το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών γίνεται διανυσματικός χώρος επάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και πάνω στο σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών) τότε, λέμε ότι η f είναι $\mathbb{F}$ -γραμμική απεικόνιση, για να τονίσουμε ότι τα βαθμωτά (αριθμοί) τα παίρνουμε από το σώμα $\mathbb{F}$ και όχι από το σώμα $\mathbb{K}$. Εξάλλου, η πρώτη ιδιότητα «εκφράζεται» λέγοντας ότι η απεικόνιση f «διατηρεί την πρόθεση» και η δεύτερη «εκφράζεται» λέγοντας ότι η f «διατηρεί τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό». Γενικά, αν μια απεικόνιση f μεταξύ δυο ομοειδών αλγεβρικών δομών U και V (λ.χ. ομάδων, διανυσματικών χώρων, αλγεβρών κλπ.) διατηρεί τις πράξεις των αλγεβρικών δομών τότε, λέμε ότι η f είναι ένας μορφισμός ή ομομορφισμός των θεωρούμενων αλγεβρικών δομών V και U (ειδικότερα αν $V = U$ τότε, ο μορφισμός λέγεται ενδομορφισμός του V). Αν η f είναι, επιπλέον, $1 \rightarrow 1$ λέγεται μονομορφισμός ενώ αν η f είναι απεικόνιση επί λέγεται επιμορφισμός. Τέλος, αν η f είναι $1 \rightarrow 1$ και επί τότε, μιλάμε για ένα ισομορφισμό των εν λόγω αλγεβρικών δομών, οι οποίες τότε ονομάζονται ισόμορφες. Έτσι, μία γραμμική απεικόνιση f λέμε ότι είναι ένας μορφισμός διανυσματικών χώρων, και αν είναι $1 \rightarrow 1$, επί ή και τα δύο μαζί, τότε μιλάμε, αντίστοιχα, για ένα μονομορφισμό, επιμορφισμό ή ισομορφισμό διανυσματικών χώρων. Αξίζει να σημειώσουμε ότι κάθε μορφισμός μεταξύ ομοειδών αλγεβρικών δομών στέλνει το μηδέν στο μηδέν. Τώρα αν το U συμπίπτει με το σώμα $\mathbb{F}$ τότε η γραμμική απεικόνιση λέγεται ειδικότερα

γραμμική μορφή πάνω στο V . Εξάλλου όταν $U = V$ τότε η γραμμική απεικόνιση λέγεται ένας (γραμμικός) τελεστής επάνω στο V .

Πρόταση Α.2. Έστω V, U διανυσματικοί χώροι πάνω στο ίδιο σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ μία βάση του V . Ισχύει ότι δύο γραμμικές απεικονίσεις από το V στο U παίρνουν τις ίδιες τιμές επάνω στα διανύσματα της βάσης B , αν και μόνο αν, είναι ίσες. Δηλαδή, αν $f, g \in L(V, U)$ τότε,

$$f(v_i) = g(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow f = g,$$

όπου $L(V, U)$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το V στο U και είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{F}$ αν το εφοδιάσουμε με τις κατά σημείο πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

Λήμμα Α.3. Έστω V, U διανυσματικοί χώροι πάνω στο ίδιο σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V . Έστω $W = \langle S \rangle \equiv \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ η γραμμική θήκη του S . Θεωρούμε αυθαίρετα ότι $u_1, \dots, u_r \in U$ και ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : S \rightarrow U : v_i \mapsto \phi(v_i) := u_i, i = 1, 2, \dots, r$. Τότε υπάρχει μια ακριβώς $f \in L(W, U)$ που επεκτείνει τη ϕ , δηλαδή, υπάρχει μία ακριβώς γραμμική απεικόνιση $f : W \rightarrow U$ τέτοια ώστε $f|_S = \phi$, δηλαδή ο περιορισμός της f στο $S \subseteq W$ είναι η απεικόνιση ϕ .

Θεώρημα Α.4. (γραμμικής επέκτασης). Έστω V, U διανυσματικοί χώροι στο ίδιο σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Θεωρούμε αυθαίρετα $u_1, \dots, u_n \in U$ και ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : B \rightarrow U : v_i \mapsto \phi(v_i) := u_i, i = 1, 2, \dots, n$. Τότε υπάρχει ακριβώς μία $f \in L(V, U)$ που επεκτείνει τη ϕ , δηλαδή, υπάρχει μία ακριβώς γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow U$ τέτοια ώστε $f|_B = \phi$.

Πρόταση Α.5. Έστω V, U διανυσματικοί χώροι πάνω στο ίδιο σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $f : V \rightarrow U$ μια γραμμική απεικόνιση. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i). Αν X υπόχωρος του V τότε $f(X)$ υπόχωρος του U .
- (ii). Αν Y υπόχωρος του U τότε $f^{-1}(Y)$ υπόχωρος του V .

Πυρήνας και Εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης - Ισομορφισμοί

Έστω V, U διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $f : V \rightarrow U$ μία γραμμική απεικόνιση. Δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός Α.6. Καλούμε πυρήνα (Kernel) της γραμμικής απεικόνισης f και τον συμβολίζουμε με $\ker f$, το σύνολο όλων των στοιχείων του V που έχουν εικόνα το μηδέν. Δηλαδή,

$$\ker f := \{v \in V : f(v) = 0\} \equiv f^{-1}(0).$$

Ορισμός Α.7. Καλούμε εικόνα (Image) της απεικόνισης f και τη συμβολίζουμε με $\text{Im } f$ ή με $f(V)$, το σύνολο όλων των στοιχείων του U τα οποία είναι εικόνες κάποιων στοιχείων του V . Δηλαδή,

$$\text{Im } f := \{u \in U : \exists v \in V \text{ με } f(v) = u\} \equiv f(V)$$

Πρόταση A.8. Έστω V, U διανυσματικοί χώροι πάνω στο (ίδιο) σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $f : V \rightarrow U$ μια γραμμική απεικόνιση. Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(i). η f είναι $1 - 1$ (δηλαδή, η f είναι μονομορφισμός).

(ii). $\ker f = \{0\}$.

Πρόταση A.9. Έστω V, U διανυσματικοί χώροι πάνω στο (ίδιο) σώμα $\mathbb{F}$ με $\dim U = 1$ και $\dim V = n \geq 1$. Ισχύει ότι κάθε μη μηδενική γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow U$ είναι επιμορφισμός.

Πόρισμα A.10. Κάθε μη μηδενική γραμμική μορφή είναι απεικόνιση "επί".

Πρόταση A.11. Η αντίστροφη απεικόνιση ενός ισομορφισμού διανυσματικών χώρων είναι, επίσης, ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Λήμμα A.12. Έστω V, U διανυσματικοί χώροι πάνω στο (ίδιο) σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $f : V \rightarrow U$ μια γραμμική απεικόνιση. Έστω $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια βάση του V . Τότε οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(i). η f είναι μονομορφισμός.

(ii). το σύνολο $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ είναι η βάση του $f(V) \equiv \text{Im } f$.

Θεώρημα A.13. Δύο διανυσματικοί χώροι V και U πάνω στο (ίδιο) σώμα $\mathbb{F}$ είναι ισόμορφοι αν, και μόνο αν, είναι ισοδιάστατοι. Δηλαδή,

$$V \cong U \text{ ισόμορφοι} \Leftrightarrow \dim V = \dim U.$$

Πόρισμα A.14. Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ είναι ισόμορφος με τον ευκλείδειο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ αν, και μόνο αν, έχει διάσταση n . Δηλαδή

$$V \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim V = n.$$

Θεώρημα A.15. Έστω V, U δυο n -διάστατοι διανυσματικοί χώροι πάνω στο (ίδιο) σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $f : V \rightarrow U$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(i). Η f είναι μονομορφισμός.

(ii). Η f είναι επιμορφισμός.

(iii). Η f είναι ισομορφισμός.

Πόρισμα A.16. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και έστω $f : V \rightarrow V$ ένας (γραμμικός) τελεστής. Τότε, η f είναι $1 - 1$ αν, και μόνο αν, είναι επί.

Θεώρημα τάξης και μηδενικότητας - Ταυτοδύναμοι τελεστές

Θεώρημα A.17. (τάξης και μηδενικότητας). Έστω V, U δυο διανυσματικοί χώροι πάνω στο (ίδιο) σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $f : V \rightarrow U$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε,

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

Ορίζουμε μηδενικότητα (nullity) της f την $\dim(\ker f)$ και τάξη της f την $\dim(\operatorname{Im} f)$.

Πρόταση A.18. Έστω V, U διανυσματικοί χώροι πάνω στο (ίδιο) σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $f : V \rightarrow U$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε,

$$\frac{V}{\ker f} \cong \operatorname{Im} f$$

Θεώρημα A.19. Έστω V, U διανυσματικοί χώροι πάνω στο (ίδιο) σώμα $\mathbb{F}$ και έστω $f : V \rightarrow U$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $B_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ είναι μια βάση προγεννητόρων της εικόνας της f τότε,

$$V = \ker f \oplus \mathcal{L}(B_1)$$

όπου $\mathcal{L}(B_1)$ είναι η γραμμική θήκη του B_1 .

Θεώρημα A.20. Έστω V διανυσματικός χώρος και $T : V \rightarrow V$ ένας τελεστής. Αν ο T είναι ταυτοδύναμος τότε,

$$V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T.$$

Σαν ταυτοδύναμο λέμε το γραμμικό $T : V \rightarrow V$ για τον οποίο ισχύει $T^2 = T$.

Θεώρημα A.21. Έστω V διανυσματικός χώρος και U ένας υπόχωρος του V . Υπάρχει τελεστής $q : V \rightarrow V$ τέτοιος ώστε

(i). $q^2 = q$, δηλαδή ο q είναι ταυτοδύναμος.

(ii). $U = \operatorname{Ker} q$.

(iii). $V = \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q$.

Διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής

Έστω $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ το $\vec{T}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ και είναι

$$\begin{aligned} \vec{T}(\vec{x}) &= (Pr_1(\vec{T}(\vec{x})), Pr_2(\vec{T}(\vec{x})), \dots, Pr_m(\vec{T}(\vec{x}))) \\ &= ((Pr_1 \circ \vec{T})(\vec{x}), (Pr_2 \circ \vec{T})(\vec{x}), \dots, (Pr_m \circ \vec{T})(\vec{x})), \end{aligned}$$

δηλαδή η T καθορίζεται από m πραγματικές συναρτήσεις

$$T_j := Pr_j \circ \vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

με $Pr_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ και $Pr_j(\vec{y}) = y_j$, για $1 \leq j \leq m$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Οπότε $\vec{T}(\vec{x}) = (T_1(\vec{x}), T_2(\vec{x}), \dots, T_m(\vec{x}))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Οι $T_1, T_2, \dots, T_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγονται συνιστώσες συνάρτησης.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός A.22. Η $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται γραμμικός μετασχηματισμός αν $\vec{T}(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda\vec{T}(\vec{x}) + \mu\vec{T}(\vec{y})$, για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Επίσης ισχύουν οι εξής ιδιότητες.

$$\vec{T}(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\vec{T}(-\vec{x}) = -\vec{T}(\vec{x})$$

$$\vec{T}(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{T}(\vec{x}) - \vec{T}(\vec{y}).$$

Έστω $\vec{S}, \vec{T}$ γραμμικοί μετασχηματισμοί από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^m$. Έστω επίσης γραμμικός μετασχηματισμός $\vec{R} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε

$$\vec{S} + \vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ με } (\vec{S} + \vec{T})(\vec{x}) = \vec{S}(\vec{x}) + \vec{T}(\vec{x})$$

$$\lambda\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ με } (\lambda\vec{T})(\vec{x}) = \lambda\vec{T}(\vec{x})$$

$$\vec{R} \circ \vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l \text{ με } (\vec{R} \circ \vec{T})(\vec{x}) = \vec{R}(\vec{T}(\vec{x})).$$

Πρόταση A.23. Κάθε προβολή $Pr_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $Pr_j(\vec{x}) = x_j$, $1 \leq j \leq n$ όπου $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Πρόταση A.24. Η διανυσματική συνάρτηση $\vec{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός αν οι T_i , $i = 1, \dots, m$ συνιστώσες συνάρτησεις της $\vec{T}$ είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί.

Πρόταση A.25. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε η συνάρτηση $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, με $L_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Έστω επίσης B ένας $m \times n$ πίνακας και C ένας $m \times m$ πίνακας. Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$L_{A+B} = L_A + L_B,$$

$$L_{\lambda A} = \lambda L_A,$$

$$L_{CA} = L_C \circ L_A.$$

Πρόταση A.26. Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ υπάρχει πίνακας $A_{m \times n}$ με την ιδιότητα $\vec{T}(\vec{x}) = A\vec{x}$ και είναι

$$\begin{bmatrix} T_1(\vec{e}_1) & T_1(\vec{e}_2) & \dots & T_1(\vec{e}_n) \\ T_2(\vec{e}_1) & T_2(\vec{e}_2) & \dots & T_2(\vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_m(\vec{e}_1) & T_m(\vec{e}_2) & \dots & T_m(\vec{e}_n) \end{bmatrix}$$

όπου $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, με τη μονάδα να βρίσκεται στην i -θέση.

Ορισμός A.27. (Νόρμα πίνακα). Έστω $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ πίνακας. Ορίζουμε ως νόρμα του πίνακα A την ποσότητα

$$\|A\| := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Για παράδειγμα για τον ταυτοτικό πίνακα ισχύει $\|I_n\| = \sqrt{n}$.

Η νόρμα του πίνακα A έχει τις εξής ιδιότητες.

$$\begin{aligned}\|A\| &\geq 0 \\ \|A\| = 0 &\iff A = 0 \\ |a_{ij}| &\leq \|A\|, \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \\ \|\lambda A\| &= |\lambda| \|A\|, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \|A^T\| &= \|A\| \\ \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\|, \quad A, B \text{ } m \times n \text{ πίνακες} \\ \|AC\| &\leq \|A\| \|C\|, \quad A \text{ } m \times n, C \text{ } n \times l \text{ πίνακες}.\end{aligned}$$

Πόρισμα A.28. Έστω $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμικός μετασχηματισμός. Τότε υπάρχει σταθερά $k \geq 0$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\|\vec{T}(\vec{x})\| \leq k\|\vec{x}\|, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Απόδειξη. Επειδή $\vec{T}(\vec{x}) = A\vec{x}$ έχουμε

$$\|\vec{T}(\vec{x})\| = \|A\|\|\vec{x}\| = k\|\vec{x}\|.$$

□

Πρόταση A.29. Έστω οι γραμμικοί μετασχηματισμοί $\vec{S}, \vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{R} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ με αντίστοιχους πίνακες $M_{\vec{S}}, M_{\vec{T}}, M_{\vec{R}}$. Ισχύουν τα εξής.

(i). $M_{\vec{T}+\vec{S}} = M_{\vec{T}} + M_{\vec{S}}$

(ii). $M_{\lambda\vec{T}} = \lambda M_{\vec{S}}$, για $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii). $M_{\vec{R} \circ \vec{T}} = M_{\vec{R}} M_{\vec{T}}$.

Ορισμός A.30. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ονομάζεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $\vec{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε να ισχύει $\vec{T} \circ \vec{S} = \vec{S} \circ \vec{T} = I_{\mathbb{R}^n}$. Ο γραμμικός μετασχηματισμός $\vec{S}$ ονομάζεται αντίστροφος του γραμμικού μετασχηματισμού $\vec{T}$ και συμβολίζεται με $\vec{T}^{-1}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός $\vec{T}$ είναι αντιστρέψιμος ανν είναι 1-1 και επί. Επιπλέον ο αντίστροφος $\vec{T}^{-1}$ ενός $\vec{T}$ είναι η συνήθης αντίστροφη συνάρτηση.

Θεώρημα A.31. Για έναν γραμμικό μετασχηματισμό $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(i). Ο $\vec{T}$ είναι αντιστρέψιμος.

(ii). Ο πίνακας $M_{\vec{T}}$ του $\vec{T}$ είναι αντιστρέψιμος.

Επίσης αν ο $\vec{T}$ είναι αντιστρέψιμος τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$M_{\vec{T}^{-1}} = (M_{\vec{T}})^{-1}$$

$$\vec{T}^{-1}(\vec{x}) = M_{\vec{T}^{-1}}\vec{x} = (M_{\vec{T}})^{-1}\vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Παράρτημα Β

Νόρμες σε Διανυσματικούς Χώρους

Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός Β.1. Έστω X διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i). $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$.
- (ii). $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- (iii). $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (iv). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Μπάλες και σφαίρες σε χώρους με νόρμα

Έστω $(X, \| \cdot \|)$ χώρος με νόρμα, $x \in X$ και $M \in \mathbb{R}, M > 0$. Ορίζουμε ως

- (i). ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα M το σύνολο

$$B(x, M) = \{y \in X : \|x - y\| < M\}.$$

- (ii). κλειστή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα M το σύνολο

$$B[x, M] = \{y \in X : \|x - y\| \leq M\}.$$

- (iii). σφαίρα με κέντρο x και ακτίνα M το σύνολο

$$S(x, M) = \{y \in X : \|x - y\| = M\}.$$

Παρατήρηση Β.2. Η ανοικτή μπάλα $B(x, M)$ είναι ανοικτό σύνολο στη μετρική που ορίζει η νόρμα. Η κλειστή μπάλα $B[x, M]$ ταυτίζεται με την κλειστότητα της $B(x, M)$, είναι κλειστό σύνολο, και τέλος $S(x, M) = \partial B[x, M]$ και η σφαίρα $S(x, M)$ είναι επίσης κλειστό σύνολο.

Η δομή του $(X, \|\cdot\|)$ ως μετρικού χώρου παρουσιάζει ισχυρή ομοιογένεια. Αυτό κατ' αρχάς προκύπτει από την ακόλουθη, που είναι εύκολο να διαπιστωθεί, σχέση

$$x + B(0, M) = B(x, M).$$

Δηλαδή η ανοικτή μπάλα ακτίνας M γύρω από τυχαίο x προκύπτει σαν μεταφορά κατά x της ανοικτής μπάλας με κέντρο το 0 και την ίδια ακτίνα. Αυτή η απλή ιδιότητα θα χρησιμοποιηθεί στη μελέτη των συνεχών γραμμικών τελεστών. Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει για διαστολές και συστολές μπαλών. Δηλαδή αν $\lambda > 0$ και $M > 0$ ισχύει

$$\lambda B(0, M) = B(0, \lambda M).$$

Η σχέση της αλγεβρικής και της τοπολογικής δομής χώρων με νόρμα

Πρόταση B.3. Έστω δυο ακολουθίες $\{x_n\}, \{y_n\}$ σε ένα χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$.

- (i). Αν $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, τότε $x_n + y_n \rightarrow x + y$
- (ii). Αν $x_n \rightarrow x$ και $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $\lambda_n \rightarrow \lambda$ τότε $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$
- (iii). Αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, είναι ακολουθίες Cauchy τότε και η $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Πρόταση B.4. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X .

- (i). Αν $Y^0 \neq \emptyset$ τότε $Y = X$,
- (ii). Η κλειστότητα $\overline{Y}$ του Y , είναι υπόχωρος του X .

Χώροι Banach

Ορισμός B.5. Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα. (Δηλαδή αν κάθε ακολουθία Cauchy στον X συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X .)

Ορισμός B.6. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον X . Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι συγκλίνουσα αν είναι συγκλίνουσα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(\sum_{i=1}^n x_i)_{n \in \mathbb{N}}$ δηλαδή αν υπάρχει $x \in X$ ώστε $\|\sum_{i=1}^n x_i - x\| \rightarrow 0$, καθώς $n \rightarrow \infty$. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ λέγεται απολύτως συγκλίνουσα αν $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Πρόταση B.7. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach αν και μόνο αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά στο X είναι συγκλίνουσα.

Ορισμός B.8. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και A υποσύνολο του X . Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$\rho(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$$

Πρόταση B.9. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του X , $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει

$$\rho(\lambda x, Y) = |\lambda| \rho(x, Y).$$

Θεώρημα B.10. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο X είναι χώρος Banach.

Πόρισμα B.11. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X . Τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος.

Πόρισμα B.12. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Τότε η διάσταση $\dim X$ του X είναι είτε πεπερασμένη ή υπεραριθμώσιμη.

Πρόταση B.13. Αν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.

Κλασσικά Παραδείγματα

Τα κλασσικά παραδείγματα χώρων Banach αποτελούν οι χώροι ακολουθιών $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, ο $\ell_\infty(\mathbb{N})$ καθώς και ο $C[0, 1]$, $\|\cdot\|_\infty$. Για $1 \leq p < \infty$ ο χώρος $\ell_p(\mathbb{N})$ ορίζεται ως

$$\ell_p(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

και γίνεται διανυσματικός χώρος με πράξεις κατά σημείο. Η νόρμα στον $\ell_p(\mathbb{N})$ ορίζεται για $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Το γεγονός ότι αν οι $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανήκουν στον ℓ_p τότε η ακολουθία $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανήκει επίσης στον ℓ_p καθώς και η τριγωνική ανισότητα της νόρμας $\|\cdot\|_p$ αποδεικνύεται με χρήση της ανισότητας Minkowski. Ο χώρος $\ell_\infty(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις φραγμένες πραγματικές ακολουθίες και η νόρμα $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$ για $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ ορίζεται ως

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

και είναι χώρος με νόρμα. Ο χώρος $c_0(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών ώστε $a_n \rightarrow 0$, και είναι προφανώς υπόχωρος του $\ell_\infty(\mathbb{N})$. Έτσι ο $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ είναι χώρος με νόρμα.

Πρόταση B.14. Ο χώρος $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|)$ όπου $\|\cdot\|$ είναι μια οποιαδήποτε νόρμα, είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση B.15. Οι χώροι $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, είναι διαχωρίσιμοι.

Πρόταση B.16. Ο χώρος $\ell_\infty(\mathbb{N})$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση B.17. Ο χώρος $\ell_1(\mathbb{N})$ είναι χώρος Banach.

Παράρτημα C

Χώροι Hilbert

Εσωτερικά Γινόμενα

Ορισμός C.1. Έστω E διανυσματικός χώρος. Εσωτερικό γινόμενο στον E είναι μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

(i). $\langle x, x \rangle \geq 0$, για κάθε $x \in E$.

(ii). Αν $\langle x, x \rangle = 0$ τότε $x = 0$.

(iii). $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, για κάθε $x, y \in E$.

(iv). $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ για κάθε $x, y, z \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Πρόταση C.2. (ανισότητα Cauchy-Schwarz). Αν E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε για κάθε $x, y \in E$ έχουμε

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Πρόταση C.3. Ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ σε ένα διανυσματικό χώρο E ορίζει μια νόρμα στον E από τη σχέση

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}, x \in E.$$

Πόρισμα C.4. Η ανισότητα C-S διατυπώνεται ως $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Πρόταση C.5. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}, x \in E$, η νόρμα στον E που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο. Τότε η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Πρόταση C.6. (Κανόνας παραλληλογράμμου). Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Ορισμός C.7. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Δύο στοιχεία $x, y \in E$ λέγονται κάθετα ή ορθογώνια (συμβολικά $x \perp y$), όταν $\langle x, y \rangle = 0$.

Πόρισμα C.8. Το 0 είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο του E και είναι το μοναδικό στοιχείο με την ιδιότητα αυτή.

Πρόταση C.9. (Πυθαγόρειο Θεώρημα). Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x, y \in E$ ώστε $x \perp y$. Τότε ισχύει

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Χώροι Hilbert

Ορισμός C.10. Ένας χώρος Banach $(H, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Hilbert αν η νόρμα του ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον H , δηλαδή υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον H ώστε

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

για κάθε $x \in H$.

Πρόταση C.11. Έστω H χώρος Hilbert και K κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H . Τότε για κάθε $x \in H$ υπάρχει μοναδικό $y \in K$ ώστε

$$\|x - y\| = \rho(x, K) = \inf\{\|x - z\| : z \in K\}$$

Ορισμός C.12. Έστω A μη κενό υποσύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Ένα στοιχείο $x \in E$ καλείται κάθετο στο A (συμβολικά $x \perp A$), αν για κάθε $y \in A$, είναι $\langle x, y \rangle = 0$, δηλαδή για κάθε $y \in A$, είναι $x \perp y$.

Πρόταση C.13. Έστω H χώρος Hilbert, F κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H και $x \in H \setminus F$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in F$ ώστε $x - y \perp F$.

Ορισμός C.14. Έστω H χώρος Hilbert και $A \subset H$. Το ορθογώνιο σύνολο του A είναι το σύνολο

$$A^\perp = \{x \in H : x \perp y, \forall y \in A\}.$$

Πρόταση C.15. Έστω H χώρος Hilbert και $A \subset H$. Τότε το $A^\perp$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H .

Πόρισμα C.16. Αν F γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H τότε $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Θεώρημα C.17. Έστω H χώρος Hilbert και F κλειστός υπόχωρος του H . Τότε $H = F \oplus F^\perp$ (δηλαδή $F, F^\perp$ κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του H , $F \cap F^\perp = \{0\}$ και $H = F + F^\perp$).

Πρόταση C.18. Έστω H χώρος Hilbert και F κλειστός υπόχωρος του H . Τότε υπάρχει προβολή $P : H \rightarrow F$ με $\ker P = F^\perp$ και $\|P\| = 1$.

Ορισμός C.19. Η προβολή $P : H \rightarrow F$ με $P(x) = y$ όπου $\|x - y\| = \rho(x, F)$ καλείται ορθή προβολή του H επί του F .

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Πρόταση C.20. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x \in E$. Θεωρούμε τη απεικόνιση $f_x : E \ni y \mapsto f_x(y) = \langle y, x \rangle \in \mathbb{R}$. Τότε η f_x είναι γραμμική, συνεχής και $\|f_x\| = \|x\|$.

Θεώρημα C.21. (Riesz). Έστω H χώρος Hilbert. Τότε για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλαδή $f(y) = \langle y, x \rangle, \forall y \in H$.

Πόρισμα C.22. Έστω H χώρος Hilbert. Η απεικόνιση

$$T : H \ni x \mapsto T(x) = f_x \in H^*$$

είναι γραμμική ισομετρία επί.

Ορθοκανονικά Συστήματα

Ορθοκανονικά Σύνολα

Ορισμός C.23. Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα σύνολο $S = \{e_i \in E : i \in I\}$ καλείται ορθοκανονικό αν

(i). $e_i \perp e_j, \forall i, j \in I$ με $i \neq j$.

(ii). $\|e_i\| = 1, \forall i \in I$.

Θεώρημα C.24. (Διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt). Έστω $\{x_1, x_2, \dots\}$ μια ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_1, e_2, \dots\}$ ώστε

$$\langle e_n : n = 1, 2, \dots \rangle = \langle x_n : n = 1, 2, \dots \rangle$$

όπου με $\langle e_n : n = 1, 2, \dots \rangle, \langle x_n : n = 1, 2, \dots \rangle$ συμβολίζουμε τους γραμμικούς χώρους που παράγονται από τα $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}, \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, αντίστοιχα.

Πρόταση C.25. Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και

$$S = \{e_1, \dots, e_n\}$$

ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο στον E . Θέτουμε

$$F = \langle e_1, \dots, e_n \rangle.$$

Τότε για κάθε $x \in E$, το $u = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$ είναι το πλησιέστερο στοιχείο του F στο x .

Πρόταση C.26. (Ανισότητα Bessel). Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Σειρές σε χώρους Banach

Ορισμός C.27. Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του X . Με τον όρο σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ονομάζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου

$$S_n = x_1 + \cdots + x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν η $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι συγκλίνουσα στο x και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

Πρόταση C.28. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Πρόταση C.29. (Κριτήριο Cauchy). Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ σ' ένα χώρο Banach X συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy (δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$, $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$).

Πρόταση C.30. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ συγκλίνει (στο $\mathbb{R}$) τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει (στον X).

Πρόταση C.31. Έστω H χώρος Hilbert, $\{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον H και $(\lambda_n)_n$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $(\lambda_n) \in \ell_2$.

Πόρισμα C.32. Για κάθε $x \in H$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ συγκλίνει στον H .

Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός C.33. Έστω H χώρος Hilbert και $S = \{e_i : i \in I\}$ μια ορθοκανονική οικογένεια του H . Η S καλείται ορθοκανονική βάση του H αν είναι μια μεγιστική ορθοκανονική οικογένεια του H , δηλαδή δεν περιέχεται γνήσια σε μια άλλη ορθοκανονική οικογένεια του H .

Πρόταση C.34. Έστω H χώρος Hilbert και $\mathcal{E} = \{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ μια ορθοκανονική ακολουθία του H . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (i). Η $\mathcal{E}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H .
- (ii). Αν $x \in H$ και $x \perp e_n$ για όλα τα $n = 1, 2, \dots$ τότε $x = 0$.
- (iii). Για κάθε $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.
- (iv). Για κάθε $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle$.
- (v). Για κάθε $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2$.

Θεώρημα C.35. Έστω H ένας χώρος Hilbert άπειρης διάστασης. Τότε ο H είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο H έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.

Θεώρημα C.36. Κάθε διαχωρίσιμος και απειροδιάστατος χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2 .

Παράρτημα D

Συνεχείς (ή φραγμένοι) Τελεστές

Ορισμοί-Ιδιότητες

Ορισμός D.1. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$, όπου (X, ρ) και (Y, d) είναι δυο μετρικοί χώροι, λέγεται συνεχής στο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $\rho(x_0, x) < \delta$ να ισχύει $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Θεώρημα D.2. Έστω $(X, \rho), (Y, d)$ δύο μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ μια συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i). Η f είναι συνεχής

(ii). Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο X και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$

(iii). Αν $V \subset Y$ ανοικτό τότε το $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ είναι ανοικτό στον X .

(iv). Αν $K \subset Y$ κλειστό τότε το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον X .

Ορισμός D.3. Ένα υποσύνολο A ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|_X)$ λέγεται φραγμένο αν υπάρχει $K > 0$ ώστε $\|x\| \leq K$ για κάθε $x \in A$.

Πρόταση D.4. (Χαρακτηρισμοί συνέχειας). Έστω $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$, χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i). Ο $T : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής.

(ii). Υπάρχει $x_0 \in X$ και $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $T[B(x_0, \delta)]$ να είναι φραγμένο.

(iii). Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $T[B(0_x, \delta)]$ να είναι φραγμένο.

(iv). Το $T[B(0_x, 1)]$ είναι φραγμένο.

(v). Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$.

(vi). Ο T είναι Lipschitz, δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\|T(x) - T(z)\|_Y \leq M\|x - z\|_X$$

για κάθε $x, z \in X$.

Πρόταση D.5. Έστω $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα. Αν οι $T, S : X \rightarrow Y$ είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οι $T + S$ και λT είναι επίσης φραγμένοι. Στη βιβλιογραφία οι συνεχείς γραμμικοί τελεστές αναφέρονται σαν φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και τους συμβολίζουμε με $B(X, Y)$.

Πόρισμα D.6. Ο $B(X, Y)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Η νόρμα στο χώρο $B(X, Y)$

Ο χώρος $B(X, Y)$ εκτός από το ότι είναι διανυσματικός χώρος δέχεται και μία νόρμα που ορίζεται φυσιολογικά δεδομένου ότι είναι χώρος συναρτήσεων. Ας θυμήσουμε ότι αν K είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τότε ορίζουμε $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in K\}$ και είναι $\|f\| \in \mathbb{R}$ διότι οι συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή μετρικό χώρο είναι φραγμένες. Αν τώρα $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής και $T \neq 0$ τότε $\sup\{\|T(x)\|_Y : x \in X\} = \infty$ αλλά $\sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\| \leq 1\} < \infty$, άρα μπορούμε να ορίσουμε

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\| \leq 1\}.$$

Πρόταση D.7. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $B(X, Y)$.

Πρόταση D.8. Αν X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τότε

(i). $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$.

(ii). $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X\}$.

Πρόταση D.9. Αν X, Y, Z χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y, S : Y \rightarrow Z$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τότε η σύνθεση $S \circ T : X \rightarrow Z$ των T και S είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Θεώρημα D.10. Έστω X χώρος με νόρμα και Y χώρος Banach. Τότε ο χώρος $B(X, Y)$ με τη νόρμα που έχουμε ορίσει είναι χώρος Banach.

Θεώρημα D.11. Έστω X χώρος με νόρμα, Z ένας πυκνός υπόχωρος του X και Y ένας χώρος Banach. Τότε κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : Z \rightarrow Y$, επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σ'ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή $\tilde{T} : X \rightarrow Y$. Επιπλέον θα ισχύει $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Πόρισμα D.12. Αν X, Y, Z όπως στο προηγούμενο θεώρημα τότε η απεικόνιση

$$I : B(Z, Y) \rightarrow B(X, Y)$$

που αντιστοιχεί σε κάθε συνεχή $T : Z \rightarrow Y$ τη μοναδική συνεχή επέκτασή του $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ είναι γραμμική ισομετρία.

Γραμμικά συναρτησοειδή και ο X^*

Πρόταση D.13. Έστω X διανυσματικός χώρος και Y, Z υπόχωροι του X ώστε $Y \cap Z = \{0\}$. Τότε κάθε $x \in \langle Y \cup Z \rangle$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Z$.

Ειδικότερα, αν Y είναι υπόχωρος του X και $x \in X \setminus Y$ τότε κάθε $x' \in \langle Y \cup \{x\} \rangle$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$$x' = y + \lambda x \text{ με } y \in Y \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός D.14. (i). Ένας υπόχωρος Y του X λέγεται πεπερασμένης συνδιάστασης αν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ ώστε

$$X = \langle Y \cup \{x_1, \dots, x_n\} \rangle.$$

(ii). Ένας υπόχωρος Y του X λέγεται συνδιάστασης 1 αν $Y \neq X$ και υπάρχει ένα $x \in X$ ώστε $X = \langle Y \cup \{x\} \rangle$.

(iii). Ένας υπόχωρος Y του X λέγεται συνδιάστασης n , όπου n φυσικός αριθμός, αν υπάρχουν $x_1, \dots, x_n$ στον X ώστε $\langle Y \cup \{x_1, \dots, x_n\} \rangle = X$, και n είναι ο μικρότερος φυσικός με αυτή την ιδιότητα.

Ορισμός D.15. Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται υπερεπίπεδο αν $W = x + Y$ όπου $x \in X$ και Y είναι συνδιάστασης 1 υπόχωρος του X .

Πρόταση D.16. Έστω X διανυσματικός χώρος. Τότε:

(i). Αν $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$ τότε ο $\ker f$ είναι συνδιάστασης 1.

(ii). Ένα $W \subset X$ είναι υπερεπίπεδο αν και μόνο αν υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$ και $t \in \mathbb{R}$ ώστε $W = f^{-1}(\{t\})$.

(iii). Αν $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησοειδή τότε $\ker f = \ker g$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ ώστε $f = \lambda g$.

Πρόταση D.17. (Κριτήρια συνέχειας συναρτησοειδών με υπερεπίπεδα). Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, χώρος με νόρμα και $f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \neq 0$ ένα γραμμικό συναρτησοειδές. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i). Το f είναι φραγμένο (δηλαδή συνεχές).

(ii). Το $\ker f$ είναι κλειστό.

(iii). Το $\ker f$ δεν είναι πυκνό στο X .

Πόρισμα D.18. Έστω Y υπόχωρος συνδιάστασης 1 ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|_X)$. Τότε ένα από τα ακόλουθα ισχύει αποκλειστικά

(i). Ο Y είναι κλειστός υπόχωρος

(ii). Ο Y είναι πυκνός υπόχωρος.

Ορισμός D.19. Έστω X χώρος με νόρμα. Ο δυϊκός ή συζυγής του X συμβολίζεται με X^* και είναι ο χώρος $B(X, \mathbb{R})$ των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών του X .

Πρόταση D.20. Αν X είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα τότε κάθε γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένο.

Πόρισμα D.21. Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα τότε ο αλγεβρικός δυϊκός $X^\#$ και ο δυϊκός X^* του X ταυτίζονται.

Πρόταση D.22. Αν ο X είναι απειροδιάστατος χώρος με νόρμα τότε υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό και μη φραγμένο συναρτησοειδές. άρα για X απειροδιάστατο χώρο με νόρμα ο X^* είναι γνήσιος υπόχωρος του $X^\#$.

Ισομορφισμοί και Ισομετρίες χώρων με νόρμα

Ορισμός D.23. Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, χώροι με νόρμα.

(i). Οι X, Y λέγονται **ισόμορφοι** αν υπάρχει $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός, $1-1$ και επί τελεστής ώστε οι T και T^{-1} να είναι φραγμένοι. (Ο τελεστής T λέγεται σε αυτή την περίπτωση **ισομορφισμός**).

(ii). Οι X, Y λέγονται **ισομετρικοί** αν υπάρχει $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός, $1-1$ και επί τελεστής ώστε $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. (Ο τελεστής T λέγεται σε αυτή την περίπτωση **ισομετρία**).

Πρόταση D.24. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός, $1-1$ και επί. Τα επόμενα είναι: ισοδύναμα:

(i). Ο T είναι **ισομορφισμός**.

(ii). Υπάρχουν θετικοί c, C ώστε $c\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$

Η αυτόματη συνέχεια γραμμικών τελεστών σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Πρόταση D.25. Κάθε χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρης.

Λήμμα D.26. Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης και $(e_i)_{i=1}^n$ μια Hamel βάση του X . Τότε υπάρχει $M > 0$, που εξαρτάται από τη νόρμα και τη βάση, ώστε για κάθε $x \in X$,

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \text{ με } \|x\| \leq 1$$

να ισχύει $\max\{|\lambda_i| : i = 1, \dots, n\} \leq M$.

Θεώρημα D.27. (αυτόματης συνέχειας). Έστω X, Y χώροι με νόρμα με τον X πεπερασμένης διάστασης. Τότε κάθε γραμμικός τελεστής $T : X \rightarrow Y$ είναι φραγμένος.

Πόρισμα D.28. Αν X, Y είναι χώροι με νόρμα πεπερασμένης διάστασης και $\dim X = \dim Y$ τότε οι X και Y είναι ισόμορφοι.

Πόρισμα D.29. Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης. Αν $K \subset X$ είναι κλειστό και φραγμένο τότε το K είναι συμπαγές. Ειδικότερα οι κλειστές μπάλες $B[x, M]$ και οι σφαίρες $S(x, M)$ είναι συμπαγή σύνολα.

Παράρτημα Ε

Παράγωγοι

Ι. Παράγωγοι συναρτήσεων

Μέρος ΙΑ

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε ιδιότητες των παραγώγων συναρτήσεων των τύπων

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\f &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\f &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

ΙΑα. Παράγωγος συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Θυμίζουμε μερικούς ορισμούς (ορίου και συνέχειας).

Ορισμός Ε.1. Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει όριο $l \in \mathbb{R}$ στο x^0 , όπου x^0 σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της ανν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \text{ ώστε } 0 < |x - x^0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Ορισμός Ε.2. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής στο x^0 του πεδίου ορισμού της ανν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \text{ ώστε } |x - x^0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon,$$

ή ισοδύναμα ανν $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$.

Ορισμός Ε.3. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο x^0 του πεδίου ορισμού της το οποίο είναι και σημείο συσσώρευσης ανν το

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \left(\frac{f(x) - f(x^0)}{x - x^0} \right) = l \in \mathbb{R} \text{ ή } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x^0 + h) - f(x^0)}{h} \right) = l \in \mathbb{R}$$

και συμβολίζουμε $l = f'(x^0)$ (παράγωγος αριθμός στη θέση x^0). Ορίζεται μια συνάρτηση $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου A το υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f σε κάθε στοιχείο x του οποίου είναι

παραγωγίσιμη και έχει τύπο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$ την οποία ονομάζουμε παράγωγο συνάρτησης της f .

Πρόταση Ε.4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x^0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο x^0 .

ΙΑβ. Μερικές παράγωγοι συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Ορισμός Ε.5. Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει όριο $l \in \mathbb{R}$ στο $\vec{x}^0$, όπου $\vec{x}^0$ σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \text{ ώστε } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - l| < \varepsilon.$$

Ορισμός Ε.6. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής στο $\vec{x}^0$ του πεδίου ορισμού της αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \text{ ώστε } \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)| < \varepsilon$$

Ορισμός Ε.7. Μια συνάρτηση $y = f(x_1, \dots, x_n)$ λέμε ότι έχει μερική παράγωγο ως προς x_i , $i = 1, \dots, n$ στο σημείο $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ του πεδίου ορισμού της το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης αν το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{h},$$

υπάρχει και ισούται με κάποιο πραγματικό αριθμό l . Συμβολίζουμε συνήθως με

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = l \in \mathbb{R} \text{ ή } f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) = l \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Ορισμός Ε.8. Η συνάρτηση $y = f(\vec{x})$ λέμε ότι είναι μερικώς παραγωγίσιμη ως προς x_i στο σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ αν η f έχει μερική παράγωγο ως προς x_i σε κάθε σημείο $\vec{x} \in \Omega$. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται μια πραγματική συνάρτηση

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

που ονομάζεται συνάρτηση μερικής παραγώγου ή απλά μερική παράγωγος (partial derivative) της f ως προς x_i . Να τονίσουμε ότι η μερική παράγωγος είναι συνάρτηση n μεταβλητών.

Παρατήρηση Ε.9. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η ύπαρξη παραγώγου στο σημείο x^0 του πεδίου ορισμού της συνεπάγεται την συνέχεια σε αυτό το σημείο. Αντίθετα αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, η ύπαρξη μερικών παραγώνων σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της δεν συνεπάγεται και συνέχεια στο σημείο αυτό. Αυτό συμβαίνει επειδή η ύπαρξη μερικών παραγώνων προσδιορίζει τη συμπεριφορά της συνάρτησης μόνο στις κατευθύνσεις των αξόνων και όχι προς κάθε κατεύθυνση (σε επόμενη παράγραφο θα ορίσουμε μια πιο "ισχυρή" έννοια "παραγώγου", τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης).

Όπως τονίσαμε οι n μερικές παράγωγοι συναρτήσεις $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$ μιας συνάρτησης $y = f(x_1, \dots, x_n)$ είναι επίσης συναρτήσεις n -μεταβλητών και με μερική παραγωγή τους αυτών (εφόσον πληρούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις) "παράγονται" n^2 μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης, όπως τις χαρακτηρίζουμε. Είναι

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv f_{x_j x_i}, & i \neq j \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \equiv f_{x_i x_i}, & i = j. \end{cases}$$

Με ανάλογο τρόπο "παράγονται" οι μερικές παράγωγοι τρίτης, τέταρτης, ... τάξης. Να τονίσουμε ότι οι n^2 μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης μιας $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, θεωρούμενες ως στοιχεία ενός $n \times n$ πίνακα H (Hessian)

$$Hf = \left[\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

αποδεικνύονται πολύ χρήσιμες στον χαρακτηρισμό των ακροτάτων της f .

Θεώρημα E.10. (θεώρημα Schwarz-Young). Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ και οι μικτές μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i \neq j$ μιας συνάρτησης $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή $S \subseteq X$ τότε για κάθε εσωτερικό σημείο του S ισχύει

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

Δηλαδή οι μικτές παράγωγοι είναι ανεξάρτητες από τη σειρά παραγωγίσης ως προς τις διάφορες μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή είναι προφανές ότι ο πίνακας (Hesse) Hf είναι συμμετρικός. Προφανώς το θεώρημα των μικτών παραγώγων ισχύει και για τις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης του δύο. Να θυμίσουμε ότι με $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{N}_0$ και $|a| = \sum_{i=1}^n a_i$ συμβολίζουμε το λεγόμενο πολυδείκτη και

$$D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}, \quad a_i \in \mathbb{N}.$$

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε τους χώρους συνεχών συναρτήσεων οι οποίοι είναι εξαιρετικής σημασίας και χρησιμότητας στον ορισμό και την ανάλυση πιο γενικών χώρων, όπως των χώρων Lebesgue και των χώρων Sobolev.

Ορισμός E.11. Έστω $k \in \mathbb{N}_0$ και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και a πολυδείκτης. Ορίζουμε ως

$$C_k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } D^a f \text{ συνεχής για κάθε } |a| \leq k\}$$

δηλαδή τις συναρτήσεις που είναι k -φορές συνεχώς παραγωγίσιμες. Διευκρινίζουμε ότι $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ συμβολίζει τις συνεχείς συναρτήσεις και $C^1(\Omega)$ τις συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης.

Ορισμός E.12. Με $\overline{\Omega}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Ορίζουμε ως φορέα (support) μιας συνάρτησης $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subset \overline{\Omega}.$$

Ορισμός E.13. Ορίζουμε το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα ως το σύνολο

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \text{ με } \text{supp } f \text{ συμπαγές υποσύνολο του } \Omega\}.$$

Ορίζουμε επίσης $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ με $k \in \mathbb{N}_0$ και τονίζουμε ότι $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

Παράδειγμα E.14. Έστω $\Omega = (-1, 1)$, $\varepsilon > 0$ και

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2 - \varepsilon^2}}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & \varepsilon \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

Τότε $\text{supp } f = [-\varepsilon, \varepsilon]$ και $f \in C_0^\infty(-1, 1)$.

Ερώτημα: Τι προϋποθέσεις πρέπει να πληροί μία συνάρτηση ϕ ώστε να υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x} \phi(x) dx$;

Απάντηση: Αρκεί να υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο K του $(0, 1)$ ώστε $\phi(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \setminus K$ και $\phi|_K$ να είναι φραγμένη. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \phi(x) dx = \int_K \frac{1}{x} \phi(x) dx$$

υπάρχει.

Πρόταση E.15. Έστω $f \in C_0(\Omega)$. Τότε η f επεκτείνεται συνεχώς στο $\overline{\Omega}$ με την

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

δηλαδή η $\tilde{f} \in C_0(\overline{\Omega})$.

Παρατήρηση E.16. Λόγω της πρότασης συχνά θεωρούμε ότι η συνάρτηση f μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$, κάτι το οποίο δεν είναι σωστό, αφού $\tilde{f} \in C_0(\overline{\Omega})$.

Ορισμός E.17. Ορίζουμε ως $C^k(\overline{\Omega})$ το σύνολο των συναρτήσεων $f \in C^k(\Omega)$ για τις οποίες, για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq k$, η απεικόνιση $x \mapsto D^\alpha f(x)$ έχει συνεχή επέκταση στο $\overline{\Omega}$. Διευκρινίζουμε ότι

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\overline{\Omega}).$$

Παρατήρηση E.18. Το σύνολο $C(\Omega)$ δεν είναι υποσύνολο του $C(\overline{\Omega})$. Για παράδειγμα αναφέρουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ και το σύνολο $\Omega = (0, 1)$.

Πρόταση E.19. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό. Αν $f, g \in C^1(\Omega)$ και $f \text{ ή } g \in C_0^1(\Omega)$ τότε

$$\int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Πρόταση E.20. Για $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $f \in C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{|a| \leq k} |D^a f(x)|.$$

Τότε ο χώρος $(C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})})$ είναι χώρος Banach.

Πρόταση E.21. Αν $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ τότε

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Ορισμός E.22. Το σύνολο των συναρτήσεων f που έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους τάξεως $\leq k$ θα συμβολίζουμε με C^k . Μια συνάρτηση $f \in C^k$, που ονομάζεται και C^k συνάρτηση, λέμε ότι είναι k -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (k -times continuously differentiable). Αν $k = +\infty$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ή ότι η f είναι μία C^∞ συνάρτηση και διαβάζουμε C -άπειρο. Μια συνάρτηση f που είναι απλώς συνεχής θα λέμε ότι είναι μια C συνάρτηση.

Έτσι αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι k -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή $f \in C^k$, τότε η k τάξεως μερική παράγωγός της έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^k f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}, \quad r_i \in \{0, \dots, k\} \text{ και } r_1 + \dots + r_n = k, i = 1, \dots, n.$$

Προφανώς αν κάποιο r_i είναι μηδέν τότε η f δεν έχει παραγωγηθεί ως προς τη μεταβλητή x_i . Π.χ.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^0 \partial x_2^3 \partial x_3} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^3 \partial x_3}.$$

Επειδή αρκετές φορές χρειάζεται να αναφερθούμε π.χ. στις μερικές παραγώγους τέταρτης τάξης μιας συνάρτησης f , έστω τριών ανεξάρτητων μεταβλητών, δηλαδή, $f(x_1, x_2, x_3)$ για ευκολία εισάγουμε τον πολυδείκτη $a = (a_1, \dots, a_n)$ με $a_i \in \mathbb{N}_0$ και ορίζοντας ως $|a| = a_1 + \dots + a_n$ συμφωνούμε με $D^a f$ να συμβολίζουμε την

$$\frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}.$$

Δηλαδή

$$D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}$$

για $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Με βάση τον παραπάνω ορισμό θα έχουμε για το παράδειγμα $a = (a_1, a_2, a_3)$ με $|a| = 4$ ότι

$$D^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \partial x_3^{a_3}}.$$

Η παραπάνω ποσότητα εκφράζει όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να προκύψει η τέταρτης τάξης μερική μικτή παράγωγος. Δηλαδή

$$a = (1, 1, 2), a = (2, 1, 1), a = (0, 0, 4), \text{ κ.λ.π.}$$

Διευκρινίζουμε ότι στον ορισμό του $D^a f$ αν $|a| = 0$, δηλαδή $a = (0, \dots, 0)$ τότε $D^0 f = f$. Αν $|a| = 1$, δηλαδή $a = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ με 1 στην i -θέση τότε η $D^1 f = \partial f / \partial x_i$ ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς την μεταβλητή x_i , $i = 1, \dots, n$. Τέλος αν $|a| > 1$, δηλαδή $a = (a_1, \dots, a_n)$ η $D^a f$ ονομάζεται a -τάξης μικτή παράγωγος της f και για να είμαστε πιο ακριβείς a -τάξης μικτή παράγωγος της f ως προς τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$ αντίστοιχα.

Ορισμός E.23. Αν $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι μια C^1 συνάρτηση τότε η κλίση (gradient) της f σε ένα σημείο $\vec{x}^0 \in \Omega$ συμβολίζεται με $\text{grad} f(\vec{x}^0)$ ή $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)$ και ορίζεται ως το διάνυσμα στήλη

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ο τελεστής $\vec{\nabla}(\cdot)$ ονομάζεται τελεστής Nabla ή τελεστής Hamilton ή Ανάδελτα. Το διάνυσμα $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)$ με αρχή το $\vec{x}^0 \in \Omega$ γράφεται ως

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i} \cdot \vec{e}_i$$

όπου $\vec{e}_i$ τα μοναδιαία διανύσματα. Αν η κλίση της f υπάρχει σε κάθε σημείο του Ω τότε η συνάρτηση $\vec{\nabla} f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ με

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ονομάζεται κλίση του βαθμωτού πεδίου f .

Διευκρίνιση: Ο συμβολισμός $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ χρησιμοποιείται σε αυτό το σημείο για να τονίσουμε το διανυσματικό χαρακτήρα του τελεστή $\vec{\nabla}(\cdot)$ ενώ στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον απλούστερο συμβολισμό $\nabla(\cdot)$.

Πρόταση E.24. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης είναι δηλαδή C^1 συναρτήσεις σε ένα κοινό πεδίο ορισμού τότε ισχύουν τα παρακάτω.

(i). $\vec{\nabla}(f \pm g) = \vec{\nabla} f \pm \vec{\nabla} g$

$$(ii). \vec{\nabla}(\lambda f) = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(iii). \vec{\nabla}(fg) = \vec{\nabla} f \cdot g + f \cdot \vec{\nabla} g$$

$$(iv). \vec{\nabla} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\vec{\nabla} f \cdot g - f \cdot \vec{\nabla} g}{g^2}, \quad g \neq 0.$$

ΙΑ. Μερικές παράγωγοι συναρτήσεων $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Ορισμός Ε.25. Μια συνάρτηση $\vec{f}$ λέμε ότι έχει όριο το $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$ στο $\vec{x}^0$, όπου $\vec{x}^0$ σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της ανν

$$\forall \varepsilon \exists \delta = \delta(\varepsilon) \text{ ώστε } \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{l}\| < \varepsilon.$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f_1(\vec{x}), \dots, \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f_m(\vec{x}) \right).$$

Ορισμός Ε.26. Μια συνάρτηση $\vec{f}$ λέμε ότι είναι συνεχής στο σημείο $\vec{x}^0$ του πεδίου ορισμού της ανν κάθε μια από τις "συντεταγμένες" βαθμωτές συναρτήσεις της, $f_i, i = 1, \dots, m$ είναι συνεχής στο $\vec{x}^0$.

Ορισμός Ε.27. Μια συνάρτηση

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

λέμε ότι έχει μερική παράγωγο ως προς $x_i, i = 1, \dots, n$ στο εσωτερικό σημείο $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ανν το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots, x_n^0) - \vec{f}(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{h},$$

υπάρχει και είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^m$. Συμβολίζουμε συνήθως με

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \text{ ή } \vec{f}_{x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0).$$

Τονίζουμε ότι με χρήση του θεωρήματος συνιστωσών του ορίου διανυσματικής συνάρτησης προκύπτει ότι ισχύει

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^0)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1(\vec{x}^0)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m(\vec{x}^0)}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ορισμός Ε.28. Έστω $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια C^1 διανυσματική συνάρτηση. Τότε η κλίση της $\vec{f}$ στο εσωτερικό σημείο $\vec{x}^0$ του Ω συμβολίζεται με $\square \vec{f}(\vec{x}^0)$ και ορίζεται ως

$$\square \vec{f}(\vec{x}^0) = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_m(\vec{x}^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x}^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Διευκρίνιση: Στη συνέχεια θα απλουστεύσουμε το συμβολισμό $\vec{\nabla}(\cdot)$ σε $\nabla(\cdot)$. Χρησιμοποιήσαμε στο σημείο αυτό τον προηγούμενο συμβολισμό για να τονίσουμε τον "πινακικό" χαρακτήρα του τελεστή $\nabla(\cdot)$ όταν δρα σε διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής.

Αφού ορίσαμε την κλίση διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}$ εύκολα προκύπτει ότι για βαθμωτή συνάρτηση f είναι

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}f(\vec{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} = Hf(\vec{x}).$$

Μέρος IB

IBa. Παράγωγος κατά κατεύθυνση συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Ορισμός E.29. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη στο ανοικτό διάστημα $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\vec{x}^0 \in \Omega$ και $\vec{u}$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη κατά κατεύθυνση στο $\vec{x}^0$ στην κατεύθυνση $\vec{u}$ αν υπάρχει πραγματικός αριθμός a τέτοιος ώστε

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}^0)}{t} = a.$$

Ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό a παράγωγο κατά κατεύθυνση της f στο $\vec{x}^0$ στην κατεύθυνση $\vec{u}$ και γράφουμε $D_{\vec{u}}f(\vec{x}^0) = a$ (να τονίσουμε ότι η έννοια αυτή ταυτίζεται με την κλασσική παράγωγο της f στο x_0).

IBb. Παράγωγος κατά κατεύθυνση συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (γενίκευση των μερικών παραγώγων σε τυχαία κατεύθυνση)

Θυμίζουμε ότι το

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{e}_i) - f(\vec{x}^0)}{t} \right) = l \in \mathbb{R}$$

εκφράζει τη μερική παράγωγο της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ στο $\vec{x}^0$, σε διανυσματική μορφή, δηλαδή $\partial f(\vec{x}^0)/\partial x_i = l$.

Έστω $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ με $\|\vec{u}\| = 1$ και $0 < t < 1$. Το σημείο

$$\vec{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = (x_1^0 + tu_1, \dots, x_n^0 + tu_n) = \vec{x}^0 + t\vec{u}$$

βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $\vec{x}^0$, $\vec{x}^0 + t\vec{u}$ και ισχύει

$$\|\vec{x}^0 + t\vec{u} - \vec{x}^0\| = \|t\vec{u}\| = |t|\|\vec{u}\| = |t|$$

και η διαφορά $f(\vec{x}^0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}^0)$ είναι η μεταβολή της f στην κατεύθυνση $\vec{u}$ σε ένα διάστημα μήκους t .

Ορισμός E.30. Ορίζουμε το παρακάτω όριο (αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός) ως παράγωγο κατά κατεύθυνση της f στο $\vec{x}^0$ στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ και συμβολίζουμε $D_{\vec{u}}f(\vec{x}^0)$ δηλαδή

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}^0)}{t} = A \in \mathbb{R}.$$

Αν το $\vec{u}$ δεν είναι μοναδιαίο τότε το $\vec{u}/\|\vec{u}\| = \vec{v}$ είναι μοναδιαίο και αυτό χρησιμοποιούμε ως $\vec{u}$ στο παραπάνω όριο.

Αναφέρουμε σε αυτό το σημείο τα εξής.

- (i). Πρέπει $\|\vec{u}\| = 1$.
- (ii). Αν $\vec{u} = [1]$ τότε έχουμε τον ορισμό της παραγώγου $f'(x^0)$ των μονομεταβλητών συναρτήσεων.
- (iii). Αν $\vec{u} = \vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ με μονάδα στη i -θέση τότε έχουμε τον ορισμό της μερικής παραγώγου $\partial f(\vec{x}^0)/\partial x_i, i = 1, \dots, n$.
- (iv). Μέσω του ορισμού δεν είναι απλός ο υπολογισμός της παραγώγου κατά κατεύθυνση. Για το λόγο αυτό θα εκφράσουμε την παράγωγο κατά κατεύθυνση με χρήση των μερικών παραγώγων και είναι

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(\vec{x}^0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i} u_i \\ &= \left[\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \\ &= \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{u} = \|\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)\| \|\vec{u}\| \cos(\theta) \end{aligned}$$

δηλαδή η $D_{\vec{u}}f(\vec{x}^0)$ είναι η συνιστώσα του διανύσματος κλίσης $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)$ στην κατεύθυνση $\vec{u}$. Από το σημείο $\vec{x}^0$ και το διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{u}$ ($\|\vec{u}\| = 1$) ορίζουμε τη σύνθετη συνάρτηση

$$g(t) = f(h(t)) = f(\vec{x}^0 + t\vec{u}) = f(x_1^0 + tu_1, \dots, x_n^0 + tu_n)$$

όπου $\vec{x} = \vec{h}(t) = \vec{x}^0 + t\vec{u}$. Η g είναι μονομεταβλητή συνάρτηση και μας λέει πως μεταβάλλεται η τιμή της f κατά μήκος της ευθείας $\vec{x} = \vec{x}^0 + t\vec{u}$ καθώς απομακρυνόμαστε από το $\vec{x}^0$ στην κατεύθυνση $\vec{u}$ ή στην αντίθετη κατεύθυνση $-\vec{u}$. Το γράφημα της g είναι μία καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ που προκύπτει από την τομή της υπερεπιφάνειας $y = f(\vec{x})$ με ένα υπερεπίπεδο που περνά από το σημείο $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$ και είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{u}$. Η κλίση της καμπύλης αυτής στο $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$ είναι η $g'(0)$ και η τιμή της κλίσης αυτής είναι η παράγωγος κατά κατεύθυνση. Είναι

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \frac{\partial f(\vec{x}^0 + t\vec{u})}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial f(\vec{x}^0 + t\vec{u})}{\partial x_n} u_n. \end{aligned}$$

Θέτοντας $t = 0$ έχουμε

$$g'(0) = \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n} u_n.$$

άρα

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \vec{\nabla} f(\vec{x}^0) \cdot \vec{u}.$$

Επαναλαμβάνουμε ότι αν $\vec{u} = \vec{e}_i, i = 1, \dots, n$, τότε

$$D_{\vec{e}_i} f(\vec{x}^0) = \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Δηλαδή οι μερικές παράγωγοι της f στο $\vec{x}^0$ είναι οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της f στο $\vec{x}^0$ στις κατευθύνσεις των $\vec{e}_i$, μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων. Από γνωστή ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου και το γεγονός ότι $\|\vec{u}\| = 1$ έχουμε

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{u} = \|\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)\| \|\vec{u}\| \cos \theta = \|\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)\| \cos \theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)$ και $\vec{u}$ στο $\vec{x}^0$. Προφανώς

$$\min D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) = -\|\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)\| \leq D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) \leq \|\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)\| = \max D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0)$$

και $D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) = 0$ όταν $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0) \perp \vec{u}$. Το $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)$ δείχνει την κατεύθυνση στην οποία ένα μονοπάτι που περνά από το $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$ του γραφήματος της f αυξάνει γρηγορότερα. Είναι το μονοπάτι της πιο απόκρυμνης αναρρίχησης (path of steepest ascent).

Θεώρημα E.31. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση. Τότε σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f στο οποίο $\vec{\nabla} f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ το $D_{\vec{u}} f(\vec{x})$ μεγιστοποιείται όταν

$$\vec{u} = \frac{\vec{\nabla} f(\vec{x})}{\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\|}$$

και

$$\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\| = \max \{ D_{\vec{u}} f(\vec{x}) : \vec{u} \text{ μοναδιαίο διάνυσμα} \}.$$

Δηλαδή το $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ δείχνει στην κατεύθυνση στην οποία η f "αυξάνει γρηγορότερα".

Το παρακάτω θεώρημα χρησιμοποιεί την έννοια της διαφορισιμότητας που ορίζεται σε επόμενη παράγραφο και πρέπει να ξαναδιαβαστεί αφού οριστεί η διαφορισιμότητα. Αναφέρεται σε αυτό το σημείο διότι εκφράζει ένα μάλλον απρόσμενο αποτέλεσμα που αφορά στη σχέση παραγώγου κατά κατεύθυνση και της συνέχειας.

Θεώρημα E.32. (Ικανή συνθήκη ύπαρξης παραγώγου κατά κατεύθυνση). Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{x}$ τότε υπάρχει παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο $\vec{x}$ κατά την κατεύθυνση οποιουδήποτε μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$ και ισχύει

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x})^T \cdot \vec{u}.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει και είναι μάλλον απρόσμενο αποτέλεσμα, π.χ.

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Έστω $\vec{u} = (u_1, u_2)$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Τότε έχουμε

$$\frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + tu_2^4}$$

οπότε $D_{\vec{u}}f(0, 0) = \frac{u_2^2}{u_1}$ αν $u_1 \neq 0$. Αν $u_1 = 0$ τότε $D_{\vec{u}}f(0, 0) = 0$. Συνεπώς η $D_{\vec{u}}f(0, 0)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη σε κάθε κατεύθυνση αν και η f είναι ασυνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

ΙΒc. Παράγωγος κατά κατεύθυνση συνάρτησης $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Ορισμός Ε.33. Αν $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ και $\vec{u}$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ θα λέμε ότι η $\vec{f}$ έχει στο σημείο $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ παράγωγο κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}$ όταν υπάρχουν οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση, στην κατεύθυνση $\vec{u}$, των συναρτήσεων f_i , $i = 1, \dots, m$ όπου $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ και $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ δηλαδή να υπάρχουν οι $D_{\vec{u}}f_i(\vec{x}^0)$ για $i = 1, \dots, m$. Τότε γράφουμε

$$D_{\vec{u}}\vec{f}(\vec{x}^0) = (D_{\vec{u}}f_1(\vec{x}^0), \dots, D_{\vec{u}}f_m(\vec{x}^0))$$

ή αλλιώς, όταν υπάρχει η οριακή τιμή,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}^0 + t\vec{u}) - \vec{f}(\vec{x}^0)}{t} = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^0)}{\partial \vec{u}}.$$

Η παράγωγος κατά κατεύθυνση εκφράζει το ρυθμό μεταβολής (μεταβολή ανα μονάδα μήκους) της συνάρτησης $\vec{f}$ κατά μήκος της ευθείας $\vec{x}(t) = \vec{x}^0 + t\vec{u}$. Προτρέχουμε να αναφέρουμε ότι η παράδοση αυτή εγκαταλείπεται στην περίπτωση απεικονίσεων μεταξύ απειροδιάστατων χώρων.

Θεώρημα Ε.34. (Ικανή συνθήκη ύπαρξης παραγώγου κατά κατεύθυνση). Αν μια $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο $\vec{x}$ κατά την κατεύθυνση οποιουδήποτε μοναδιαίου διανύσματος και ισχύει

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x})^T \cdot \vec{u}$$

Παρατήρηση Ε.35. Η ύπαρξη όλων των παραγώγων κατά κατεύθυνση σε ένα σημείο αποτυγχάνει να μας εξασφαλίσει συνέχεια της συνάρτησης σε αυτό το σημείο. Για το λόγο αυτό, η παράγωγος κατά κατεύθυνση (άρα και οι μερικές παράγωγοι) δεν αποτελεί κατά κάποιον τρόπο την καλύτερη επέκταση της έννοιας της παραγώγου των μονομεταβλητών συναρτήσεων. Αντίθετα όπως θα δούμε στη συνέχεια το διαφορικό γενικεύει κατά τρόπο ικανοποιητικό την επέκταση αυτή από τη μία σε πολλές διαστάσεις.

Μέρος IC

ICa. Διαφορισιμότητα-προσέγγιση-εφαπτόμενη ευθεία-ολικό διαφορικό και ολική παράγωγος συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Ορισμός E.36. Μια συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Omega$ όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός a που εξαρτάται από το x_0 και είναι ανεξάρτητος του h έτσι ώστε για κάθε $(x_0 + h) \in \Omega$ να ισχύει

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + r(h) \text{ με } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah - r(h)}{h} = 0$$

ή

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a + \frac{r(h)}{h}$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(a + \frac{r(h)}{h} \right).$$

Τον πραγματικό αριθμό a τον έχουμε ορίσει ως παράγωγο της f στο x_0 και συμβολίζουμε με $f'(x_0) = a$.

Πρόταση E.37. Ισχύει ότι μία συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη σε ένα x_0 ανν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Ορισμός E.38. Ονομάζουμε τη γραμμική συνάρτηση

$$L(h) = f'(x_0)h = df(x_0), \quad h \in \mathbb{R}$$

διαφορικό της f στο x_0 με αύξηση h . Ονομάζουμε τη γραμμική συνάρτηση

$$P(h) = f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + df(x_0), \quad h \in \mathbb{R}$$

εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f . Θέτουμε $h = dx$, οπότε $df(x_0) = f'(x_0)dx$. Μπορούμε να θεωρήσουμε την παράγωγο $f'(x_0)$ της f στο σημείο x_0 όχι μόνο ως έναν πραγματικό αριθμό αλλά και ως έναν τελεστή $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που στέλνει το h στο $f'(x_0)h$. Πρέπει να τονίσουμε ότι το διαφορικό είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών με διαφορετικό ρόλο η καθεμία. Το x_0 ανήκει στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f στο οποίο η $f'(x_0)$ υπάρχει ενώ το h είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Για αυτό καλύτερος συμβολισμός είναι $df(x_0, dx)$ ή $df(x_0, h)$. Σύμφωνα με την

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = r(h) \text{ με } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0,$$

το σφάλμα με το οποίο η γραμμική συνάρτηση $P(h)$ προσεγγίζει την τιμή $f(x_0 + h)$ μικραίνει καθώς $h \rightarrow 0$. Συνάγεται λοιπόν ότι η διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης και η δυνατότητα προσέγγισής της από μία γραμμική συνάρτηση είναι ιδιότητες ισοδύναμες.

ICb. Διαφορισιμότητα-προσέγγιση-εφαπτόμενο υπερεπίπεδο-ολικό διαφορικό και ολική παράγωγος συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Ορισμός E.39. Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση, $\vec{x}^0$ ένα εσωτερικό σημείο του Ω και $\vec{x}^0 + \vec{h} \in \Omega$ όπου $\vec{h} \neq \vec{0}$. Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0$ όταν υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $\vec{x}^0 + \vec{h} \in \Omega$ να ισχύει

$$f(\vec{x}^0 + \vec{h}) - [f(\vec{x}^0) + L(\vec{h})] = r(\vec{h}) \text{ με } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

ή

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{x}^0 + \vec{h}) - [f(\vec{x}^0) + L(\vec{h})]}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Θέτουμε $L(\vec{h}) = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n$ και $r(\vec{h}) = \varepsilon_1 h_1 + \dots + \varepsilon_n h_n$.

Θεώρημα E.40. (προσέγγισης). Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση, $\vec{x}^0$ ένα εσωτερικό σημείο του Ω και $\vec{x}^0 + \vec{h} \in \Omega$. Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} f(\vec{x}^0 + \vec{h}) &= f(\vec{x}^0) + \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n} h_n + r(\vec{h}) \\ &= f(\vec{x}^0) + \nabla f(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{h} + r(\vec{h}) \end{aligned}$$

όπου ο όρος σφάλματος $r(\vec{h})$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim_{h_i \rightarrow 0, i=1, \dots, n} \frac{\varepsilon_1 h_1 + \dots + \varepsilon_n h_n}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}}.$$

Συνδυάζοντας το θεώρημα και τον ορισμό προκύπτει ότι οι συντελεστές a_i της $L(\vec{h})$ είναι οι

$$a_i = \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i}, \text{ για } i = 1, \dots, n.$$

Ορισμός E.41. Ορίζουμε

$$L(\vec{h}) = df(\vec{x}^0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{h} = \left[\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

ως το ολικό διαφορικό της f στο $\vec{x}^0$,

$$f'(\vec{x}^0) = Df(\vec{x}^0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T = \left[\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \right]$$

ως τον Ιακωβιανό πίνακα της f στο $\vec{x}^0$ και

$$\begin{aligned} P(\vec{h}) &= f(\vec{x}^0) + L(\vec{h}) \\ &= f(\vec{x}^0) + \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{h} = f(\vec{x}^0) + df(\vec{x}^0) \\ &= f(\vec{x}^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i} h_i \end{aligned}$$

ως το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της f στο $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$.

Θέτοντας $\vec{h} = \vec{dx} = (x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0) = (h_1, \dots, h_n)$ η $P(\vec{h})$ γράφεται ως

$$P(\vec{h}) = f(\vec{x}^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0)$$

και αν $n = 2$ ονομάζεται εφαπτόμενο επίπεδο. Το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο σημείο $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$ της υπερεπιφάνειας της f , που είναι άμεσο αποτέλεσμα της διαφορισιμότητας της f στο $\vec{x}^0$, αποτελεί την καλύτερη δυνατή γραμμική προσέγγιση της f τοπικά στο σημείο $\vec{x}^0$ μεταξύ όλων των υπερεπιπέδων που διέρχονται από το $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$ και μας παρέχει τη δυνατότητα απόκτησης γνώσεων για την συμπεριφορά μιας μη γραμμικής συνάρτησης μέσω μιας τοπικής γραμμικής προσέγγισής της.

Θεώρημα E.42. Αν η $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0 \in \Omega$ τότε είναι συνεχής στο $\vec{x}^0$.

Απόδειξη. Αφού η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0$ ισχύει ότι

$$f(\vec{x}^0 + \vec{h}) = f(\vec{x}^0) + f'(\vec{x}^0)\vec{h} + r(\vec{h}).$$

Όμως $f'(\vec{x}^0)\vec{h}$ και $r(\vec{h})$ τείνουν στο 0 καθώς $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$, άρα

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}^0 + \vec{h}) = f(\vec{x}^0) + \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f'(\vec{x}^0)\vec{h} + \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} r(\vec{h}) = f(\vec{x}^0).$$

□

Παρατήρηση E.43. Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει αφού για παράδειγμα αν $f(x) = |x|$, γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι διαφορίσιμη στο 0.

Θεώρημα E.44. (Ικανή συνθήκη ύπαρξης παραγώγου κατά κατεύθυνση). Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{x}$ τότε υπάρχει παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο $\vec{x}$ κατά την κατεύθυνση οπουδήποτε μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$ και ισχύει

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x})^T \cdot \vec{u}.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει και είναι μάλλον απρόσμενο αποτέλεσμα, π.χ.

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Έστω $\vec{u} = (u_1, u_2)$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Τότε έχουμε

$$\frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + tu_2^4}$$

οπότε $D_{\vec{u}}f(0, 0) = \frac{u_2^2}{u_1}$ αν $u_1 \neq 0$. Αν $u_1 = 0$ τότε $D_{\vec{u}}f(0, 0) = 0$. Συνεπώς η $D_{\vec{u}}f(0, 0)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη σε κάθε κατεύθυνση αν και η f είναι ασυνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

Αν όμως οι μερικές παράγωγοι έχουν μια επιπλέον ιδιότητα, πέραν της ύπαρξης, καταφέρνουν να εξασφαλίσουν διαφορισιμότητα όπως μας διαβεβαιώνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα E.45. (ικανή συνθήκη διαφορισιμότητας). Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει όλες τις μερικές παραγώγους συνεχείς σε μία γειτονιά του $\vec{x}^0 \in \Omega$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0$.

ICc. Διαφορισιμότητα-ολικό διαφορικό-ολική παράγωγος συνάρτησης $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Γενικεύουμε τις παραπάνω έννοιες που ήδη ορίσαμε για $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ στις συναρτήσεις $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$$

όπου $f_i(\vec{x})$ είναι συναρτήσεις από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$, για $i = 1, \dots, m$.

Ορισμός E.46. Έστω $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^0 \in \Omega$ και $\vec{x}^0 + \vec{h} \in \Omega$ όπου $\vec{h} \neq \vec{0}$. Θα λέμε ότι η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0$ όταν υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε για κάθε $\vec{x}^0 + \vec{h} \in \Omega$ να ισχύει

$$\vec{f}(\vec{x}^0 + \vec{h}) - [\vec{f}(\vec{x}^0) + L(\vec{h})] = \vec{r}(\vec{h}) \text{ με } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\vec{r}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

ή

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\|\vec{f}(\vec{x}^0 + \vec{h}) - [\vec{f}(\vec{x}^0) + L(\vec{h})]\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Ορισμός E.47. Ονομάζουμε την

$$\vec{L}(\vec{h}) = d\vec{f}(\vec{x}^0) = D\vec{f}(\vec{x}^0)\vec{h} = \vec{f}'(\vec{x}^0)\vec{h} = \overset{\square}{\nabla} \vec{f}(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{h}$$

Ολικό διαφορικό της f στο $\vec{x}^0$ και την

$$\begin{aligned}\vec{f}'(\vec{x}^0) &= D\vec{f}(\vec{x}^0) = \stackrel{\square}{\nabla} \vec{f}(\vec{x}^0)^T \\ &= \begin{bmatrix} \vec{\nabla} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_m(\vec{x}^0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x}^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}\end{aligned}$$

Ιακωβιακό πίνακα της f στο $\vec{x}^0$.

Θεώρημα E.48. Αν η $\vec{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0 \in \Omega$ τότε είναι και συνεχής στο $\vec{x}^0$.

Θεώρημα E.49. (ικανή συνθήκη διαφορισιμότητας). Έστω $\vec{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο Ω . Τότε είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του Ω .

Ανακεφαλαιώνοντας τα παραπάνω, η διαφορισιμότητα είναι σημαντικότερη έννοια στη μελέτη των μη γραμμικών πολυμεταβλητών συναρτήσεων αφού μας επιτρέπει τη γραμμικοποίησή τους τοπικά. Το διαφορικό είναι η θεμελιώδης έννοια στη μελέτη πολυμεταβλητών συναρτήσεων και όχι η έννοια της μερικής παραγώγου και αυτό γιατί η ύπαρξη διαφορικού συνεπάγεται την ύπαρξη μερικών παραγώγων ενώ το αντίθετο δεν ισχύει πάντα. Το γεγονός αυτό είναι απρόσμενο αποτέλεσμα αφού συνηθισμένοι από τις μονομεταβλητές συναρτήσεις διαφορισιμότητα και παραγωγισιμότητα είναι έννοιες ισοδύναμες.

II. Παράγωγοι απεικονίσεων-τελεστών

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε ιδιότητες των παραγώγων απεικονίσεων-τελεστών των τύπων

$$\begin{aligned}F : X &\rightarrow Y, \quad X, Y \text{ γενικοί χώροι} \\ F : X &\rightarrow \mathbb{R} \text{ (συναρτησιακά)}\end{aligned}$$

IIA. Παράγωγος κατά κατεύθυνση απεικόνισης μεταξύ απειροδιάστατων χώρων-Gateaux παράγωγος

Ορισμός E.50. Έστω τελεστής $F : D_F \subseteq X \rightarrow Y$ όπου X, Y διανυσματικοί τοπολογικοί χώροι και x_0 εσωτερικό σημείο του D_F , $h \in X$ με $h \neq 0_X$. Θεωρούμε $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ με $\varepsilon > 0$

τέτοιο ώστε $(x_0 + th) \in D_F$ για κάθε $t \in I_\varepsilon$ οπότε ορίζεται μια απεικόνιση $f : I_\varepsilon \rightarrow Y$ με τύπο $f(t) = F(x_0 + th)$. Αν η "αφηρημένη" συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $t = 0$ θα λέμε ότι ο τελεστής F είναι παραγωγίσιμος στο x_0 κατά την κατεύθυνση h και συμβολίζουμε $\delta F(x_0; h) = f'(0)$ την παράγωγο του τελεστή F κατά την κατεύθυνση h στο x_0 . Δηλαδή

$$\delta F(x_0; h) = f'(0) = \frac{dF(x_0 + th)}{dt} \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t}$$

αν υπάρχει στο Y , όπου το όριο εννοείται με την τοπολογία (μετρική, νόρμα) του χώρου Y . Αν $h = 0_X$ τότε ορίζουμε $\delta F(x_0; 0_X) = 0_Y$. Την παράγωγο κατά κατεύθυνση h του τελεστή F , $\delta F(x_0; h)$, ονομάζουμε εναλλακτικά μεταβολή πρώτης τάξης του τελεστή F στο x_0 κατά την κατεύθυνση h , Gateaux μεταβολή ή Gateaux διαφορικό πρώτης τάξης του τελεστή F στο x_0 κατά την κατεύθυνση h ή πρώτη μεταβολική παράγωγο κατά Lagrange.

Ορισμός E.51. Αν η $\delta F(x_0; h)$ υπάρχει για όλες τις κατευθύνσεις $h \in X$ την απεικόνιση $\delta F(x_0; \cdot) : D_F \rightarrow Y$ καλούμε πρώτη μεταβολή της F στο x_0 . Αν η πρώτη μεταβολή της F στο x_0 συνιστά ένα γραμμικό φραγμένο τελεστή, αυτόν τον τελεστή ονομάζουμε Gateaux παράγωγο της F στο x_0 και η F λέγεται Gateaux διαφορίσιμη στο x_0 . Η Gateaux παράγωγος της F στο x_0 συμβολίζεται με $\delta F(x_0)$ ή $F'_G(x_0)$. Η F θα καλείται Gateaux διαφορίσιμη ανν είναι Gateaux διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του D_F . (Υπάρχουν περιπτώσεις που η πρώτη μεταβολή δεν είναι γραμμικός τελεστής οπότε η F δεν είναι Gateaux διαφορίσιμη).

Ιδιότητες και σχόλια για την πρώτη μεταβολή και την Gateaux παράγωγο:

(1). Ισχύουν τα εξής.

$$\begin{aligned} \delta(aF)(x_0; h) &= a\delta F(x_0; h), \quad a \in \mathbb{R} \\ (aF)'_G(x_0) &= aF'_G(x_0), \quad a \in \mathbb{R} \\ \delta(F + R)(x_0; h) &= \delta F(x_0; h) + \delta R(x_0; h) \\ (F + R)'_G(x_0) &= F'_G(x_0) + R'_G(x_0) \end{aligned}$$

όπου F, R απεικονίσεις.

(2). Η $\delta F(x_0; h)$ του τελεστή F είναι ένας τελεστής δύο ορισμάτων του τύπου

$$\delta F(\cdot, \cdot) : U \times V \rightarrow Y$$

όπου

$$\begin{aligned} U &= \{x \in X : \exists \delta F(x; h) \text{ ως προς κάποιες κατευθύνσεις}\} \\ V &= \{h \in X : h \text{ κατεύθυνση ώστε να ορίζεται η } \delta F(x; h)\}. \end{aligned}$$

(3). Η $\delta F(x; h)$ είναι ομογενής ως προς h , δηλαδή για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\delta F(x; ah) = a\delta F(x; h)$.

(4). Η $\delta F(x_0; h)$ δεν είναι σίγουρα γραμμικός τελεστής ή συνεχής γραμμικός τελεστής δηλαδή δεν είναι πάντοτε αθροιστικός τελεστής ως προς h .

- (5). Η $\delta F(x_0; h)$ υπολογίζεται εύκολα με αναγωγή σε παραγωγή συναρτήσεων μιας μεταβλητής και στη συνέχεια η γνώση της $\delta F(x_0; h)$ είναι σημαντική διότι
- (a). Αν υπάρχει και η Frechet παράγωγος (ορίζεται σε επόμενη παράγραφο) $F'_{\mathcal{F}}(x_0)$ του τελεστή F τότε ισχύει $\delta F(x_0; h) = F'_{\mathcal{F}}(x_0)(h)$.
- (b). Υπάρχουν απλά θεωρήματα για τον έλεγχο της αθροισμότητας και της συνέχειας της $\delta F(x_0; h)$ ως προς h .
- (d). Η ύπαρξη της παραγώγου κατά κατεύθυνση είναι αρκετή για την διατύπωση χρήσιμων μεταβολικών αρχών στη Μαθηματική Φυσική, αναγκαίων συνθηκών βελτιστοποίησης συναρτησιακών και αλγορίθμων εύρεσης ακροτάτων κυρτών συναρτησιακών.

II.B. Ολική παράγωγος απεικόνισης μεταξύ απειροδιάστατων χώρων-παράγωγος Frechet

Ορισμός E.52. Θεωρούμε τους χώρους με νόρμα $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$, μια απεικόνιση $F : X \rightarrow Y$ και $x_0 \in X, h \in X$. Η F θα καλείται Frechet διαφορίσιμη στο x_0 ανν υπάρχει A γραμμικός και φραγμένος τελεστής $A : X \rightarrow Y$ έτσι ώστε

$$\lim_{h \neq 0_X, \|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - A(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0, \quad \forall h \in X.$$

Τον γραμμικό και φραγμένο (είναι και συνεχής) τελεστή A ονομάζουμε Frechet παράγωγο της απεικόνισης F στο x_0 και συμβολίζουμε με $DF(x_0)$ ή $F'_{\mathcal{F}}(x_0)$ και το στοιχείο $A(h) = DF(x_0)(h)$ ονομάζουμε διαφορικό κατά Frechet του τελεστή F στο x_0 . Η F θα καλείται Frechet διαφορίσιμη ανν είναι Frechet διαφορίσιμη σε κάθε $x_0 \in X$.

Ιδιότητες και σχόλια για τη Frechet παράγωγο:

- (1). Ισχύουν τα παρακάτω.

$$\begin{aligned} (aF)'_{\mathcal{F}}(x_0) &= aF'_{\mathcal{F}}(x_0) \\ (F + R)'_{\mathcal{F}}(x_0) &= F'_{\mathcal{F}}(x_0) + R'_{\mathcal{F}}(x_0) \\ (R \circ F)'_{\mathcal{F}}(x_0) &= R'_{\mathcal{F}}(F(x_0))F'_{\mathcal{F}}(x_0). \end{aligned}$$

- (2). Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι κάθε γραμμικός και φραγμένος τελεστής F μεταξύ των χώρων X, Y είναι Frechet διαφορίσιμος και ισχύει

$$F'_{\mathcal{F}}(x_0) = F(x_0).$$

- (3). Αν η Frechet παράγωγος ενός τελεστή F στη θέση x_0 υπάρχει τότε υπάρχει και η Gateaux παράγωγος του τελεστή F στο x_0 και ισχύει $F'_{\mathcal{F}}(x_0) = F'_G(x_0)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
- (4). Αν ένας τελεστής F έχει Frechet παράγωγο στο $x_0 \in \text{int}D_F$ τότε είναι και συνεχής στο x_0 , κάτι που δεν ισχύει όταν έχει Gateaux παράγωγο στο x_0 .

Παράρτημα F

Βελτιστοποίηση Συναρτήσεων

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Με τον όρο βελτιστοποίηση (optimization) συναρτήσεων αναφερόμαστε στον προσδιορισμό και την μελέτη των ακροτάτων (μεγίστων ή ελαχίστων) τιμών τους τοπικά ή σφαιρικά με ή χωρίς περιορισμούς. Δεσμευμένη βελτιστοποίηση (constrained optimization) ή βελτιστοποίηση υπο συνθήκη είναι η διαδικασία προσδιορισμού βέλτιστων σημείων (τιμών) μιας αντικειμενικής συνάρτησης όταν το πεδίο ορισμού της περιορίζεται σε ένα σύνολο σημείων που ικανοποιούν ένα σύστημα ανισοεξισωτικών περιορισμών. Μη δεσμευμένη βελτιστοποίηση είναι προφανές ότι είναι η διαδικασία προσδιορισμού βέλτιστων σημείων (τιμών) μιας συνάρτησης σε ελεύθερο πεδίο ορισμού (απαλλαγμένο ανισοεξισωτικών περιορισμών).

Το γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ της διανυσματικής μεταβλητής $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\max \text{ ή } \min \text{ της } z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n), \quad \vec{x} \in \Omega,$$

ενώ το γενικό πρόβλημα δεσμευμένης βελτιστοποίησης μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\max \text{ ή } \min \text{ της } z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n), \quad \vec{x} \in \Omega,$$

όπου

$$\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\vec{x}) = b_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Σε πρώτη φάση θα ασχοληθούμε με τη μη δεσμευμένη βελτιστοποίηση. Αναφερόμαστε αρχικά σε ορισμένες έννοιες οι οποίες παίζουν θεμελιώδη ρόλο στη βελτιστοποίηση και αυτές είναι οι *τετραγωνικές μορφές* που αποτελούν ειδική κατηγορία πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού της οποίας κάθε όρος είναι μονώνυμο δευτέρου βαθμού.

- (1). Η πιο απλή πολυωνυμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η γραμμική της οποίας ο τύπος είναι

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

όπου $\vec{a}$ είναι κάποιο συγκεκριμένο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$.

- (2). Η μη γραμμική πολυωνυμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ δευτέρου βαθμού έχει τύπο

$$\begin{aligned}
Q(x_1, \dots, x_n) &= \vec{x}^T A \vec{x} \\
&= [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \dots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{21} & a_{22} & \dots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{n1} & \frac{1}{2}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j
\end{aligned}$$

όπου A είναι ένας μοναδικός συμμετρικός πίνακας και λέγεται τετραγωνική μορφή. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε με μία απλή τεχνική έστω και αν ο A δεν είναι συμμετρικός να τον μετατρέψουμε σε μοναδικό συμμετρικό δεδομένου ότι κάθε τετραγωνική μορφή μπορεί να εκφραστεί με άπειρους τρόπους μέσω πινάκων. Ένα παράδειγμα τετραγωνικής μορφής είναι το

$$Q(x, y, z) = ax^2 + bxy + cxz + ly^2 + myz + nz^2$$

με τον αντίστοιχο συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} & l & \frac{m}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{m}{2} & n \end{bmatrix}$$

και

$$[x \ y \ z] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q(x, y, z).$$

Ορισμός F.1. Αν A είναι ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας τότε η τετραγωνική μορφή $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ καθώς και ο αντίστοιχος πίνακας A λέμε ότι είναι

- (i). θετικά ορισμένη-ος αν $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$,
- (ii). θετικά ημιορισμένη-ος αν $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$,
- (iii). αρνητικά ορισμένη-ος αν $\vec{x}^T A \vec{x} < 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$,
- (iv). αρνητικά ημιορισμένη-ος αν $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$,
- (v). αόριστη-ος αν $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$, για κάποια $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$ για κάποια άλλα $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Είναι φανερό ότι αν A είναι ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας τότε ο $-A$ είναι αρνητικά ορισμένος και αντίστροφα.

Ορισμός F.2. (1). Αν από ένα $n \times n$ πίνακα A απομακρύνουμε $n - k$ σειρές και τις αντίστοιχες $n - k$ στήλες προκύπτει μια υπομήτρα που ονομάζεται κύρια υπομήτρα τάξης k την ορίζουσα της οποίας ονομάζουμε κύρια ελάσσονα τάξης k .

(2). Ειδικά ονομάζεται ηγετική κύρια ελάσσονα βαθμού k η ορίζουσα $\det(A_k)$ όπου

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Το παρακάτω θεώρημα προσφέρει έναν εναλλακτικό τρόπο χαρακτηρισμού ενός πίνακα ως προς την οριστικότητα μέσω κυρίων ελασσόνων τάξης k . Έστω ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \dots, A_n = A$$

τις ηγετικές κύριες ελάσσονες τάξης $1, 2, 3, \dots, n$ αντίστοιχα.

Θεώρημα F.3. Ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας A είναι

- (i). θετικά ορισμένος αν όλες οι ηγετικές κύριες ελάσσονες της A είναι θετικές, δηλαδή $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n| > 0$.
- (ii). θετικά ημιορισμένος αν οι κύριες ελάσσονες της A είναι μη αρνητικές.
- (iii). αρνητικά ορισμένος αν τα πρόσημα των ηγετικών κυρίων ελασσόνων της A εναλλάσσονται αρχίζοντας με αρνητικό, δηλαδή $|A_1| < 0, |A_2| > 0, \dots, (-1)^n |A_n| > 0$.
- (iv). αρνητικά ημιορισμένος αν κάθε κύρια ελάσσονα περιττής τάξης είναι μη θετική και κάθε κύρια ελάσσονα άρτιας τάξης είναι μη αρνητική.
- (v). αόριστος σε κάθε άλλη περίπτωση.

Το ακόλουθο θεώρημα προσφέρει έναν εναλλακτικό τρόπο χαρακτηρισμού της οριστικότητας ενός πίνακα A μέσω των ιδιοτιμών του.

Θεώρημα F.4. Η τετραγωνική μορφή $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ και ο αντίστοιχος πίνακας A που την ορίζει είναι

- (i). θετικά ορισμένη αν όλες οι ιδιοτιμές λ_i της A είναι θετικές.
- (ii). θετικά ημιορισμένη αν όλες οι ιδιοτιμές λ_i της A είναι μη αρνητικές και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda_i = 0$.

- (iii). αρνητικά ορισμένη ανν όλες οι ιδιοτιμές λ_i της A είναι αρνητικές.
- (iv). αρνητικά ημιορισμένη ανν όλες οι ιδιοτιμές λ_i της A είναι μη θετικές και υπάρχει τουλάχιστον ένας $\lambda_i = 0$.
- (v). αόριστη ανν έχει τουλάχιστον μια θετική και τουλάχιστον μια αρνητική ιδιοτιμή.

Πόρισμα F.5. Η τετραγωνική μορφή $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένη ανν $\det(A) = 0$.

Κριτήρια χαρακτηρισμού ακροτάτων

Έστω $y = f(x_1, \dots, x_n) = f(\vec{x})$. Τότε

$$Df(\vec{x}) = \vec{\nabla} f^T(\vec{x}) = \left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right]$$

και

$$D^2 f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{0}$ λέγονται στάσιμα σημεία και ως ικανές συνθήκες χαρακτηρισμού ενός στάσιμου σημείου, έστω x^* έχουμε τις εξής:

- (1). Αν ο $Hf(x^*)$ είναι θετικά ορισμένος τότε το x^* είναι τοπικό ελάχιστο.
- (2). Αν ο $Hf(x^*)$ είναι αρνητικά ορισμένος τότε το x^* είναι τοπικό μέγιστο.
- (3). Αν ο $Hf(x^*)$ είναι αόριστος τότε το x^* είναι σαγματικό σημείο.

Δηλαδή το είδος της τετραγωνικής μορφής $Q(\vec{h}) = \vec{h}^T \cdot Hf(x^*) \cdot \vec{h}$ και ειδικότερα το είδος του πίνακα $Hf(x^*)$ χαρακτηρίζει το είδος των τοπικών ακροτάτων της f στο στάσιμο σημείο x^* . Π.χ. αν $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση τότε αν $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ στάσιμο σημείο της f , δηλαδή $\partial f(x^*)/\partial x_1 = 0$ και $\partial f(x^*)/\partial x_2 = 0$, ισχύουν τα παρακάτω.

- (1). Το x^* είναι τοπικό ελάχιστο αν

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 > 0.$$

- (2). Το x^* είναι τοπικό μέγιστο αν

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 > 0.$$

(3). Το x^* είναι σαγματικό σημείο αν

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 < 0.$$

(4). Δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το x^* αν

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = 0.$$

Παράρτημα G

Τύποι Green

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) ανοικτό και φραγμένο. Με $\partial\Omega$ συμβολίζουμε το σύνορο του Ω το οποίο υποθέτουμε ότι είναι λείο. Με $\vec{n} = (n_1, \dots, n_N)$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο, κάθετο στο $\partial\Omega$, διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα έξω. Υποθέτουμε επίσης συναρτήσεις $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ οι οποίες έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης δηλαδή ανήκουν στο $C^1(\Omega)$. Τότε ισχύει ο λεγόμενος τύπος Gauss-Green (παραγοντική ολοκλήρωση)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} u v n_i(x) dS - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

για $i = 1, \dots, N$. Έχουμε επίσης τους εξής συμβολισμούς.

$$\vec{\nabla} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \nabla u$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \text{ (τελεστής Laplace)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \text{ (κατευθυνόμενη παράγωγος στην κατεύθυνση του } \vec{n} \text{.)}$$

Πρόταση G.1. Αν $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $v \in C^1(\bar{\Omega})$ τότε

(i). Ο πρώτος τύπος του Green δίνεται ως

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS = \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

(ii). Ο δεύτερος τύπος του Green δίνεται ως

$$\int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS = \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx.$$

Απόδειξη. (i). Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u \Delta v dx &= \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_N^2} \right) dx \\
&= \int_{\Omega} u \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} u dx \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u n_i dS - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u n_i dS - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i} u n_i \right) dS - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\
&= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.
\end{aligned}$$

άρα

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS = \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

(ii). Λόγω του (i) ισχύουν οι

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u \Delta v dx &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \\
\int_{\Omega} v \Delta u dx &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.
\end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS.$$

□

Πρόταση G.2. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Αν $f, g \in C^1(\Omega)$ και f ή $g \in C_0^1(\Omega)$ τότε

$$\int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_i} f dx, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Παράρτημα Η

Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις

Άτυπα ένα σύνολο λέμε ότι είναι κυρτό (convex) αν και μόνο αν το ευθύγραμμο τμήμα, που ενώνει δυο οποιαδήποτε σημεία του, ανήκει στο σύνολο αυτό. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι κυρτή αν και μόνο αν τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος, που ενώνει οποιαδήποτε σημεία του γραφήματος της, βρίσκονται επί ή πάνω από τα αντίστοιχα σημεία του γραφήματος. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κοίλη (concave) αν και μόνο αν η συνάρτηση $-f$ είναι κυρτή και αντίστροφα.

Η τεράστια σημασία των κοίλων και κυρτών συναρτήσεων γενικά στην εφαρμοσμένη θεωρία βελτιστοποίησης, οφείλεται κατά κύριο λόγο στις εξής δύο σημαντικές ιδιότητές τους, που θα αναφέρουμε στη συνέχεια.

- (i). Ένα κρίσιμο σημείο μίας κοίλης (κυρτής) συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αυτόματα ένα μέγιστο (ελάχιστο) και στην πραγματικότητα ένα σφαιρικό μέγιστο (ελάχιστο) σημείο της, και
- (ii). Αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία C^1 κοίλη συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$, τότε οι γνωστές αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης που χαρακτηρίζουν τη λύση ενός γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης είναι επίσης ικανές συνθήκες.

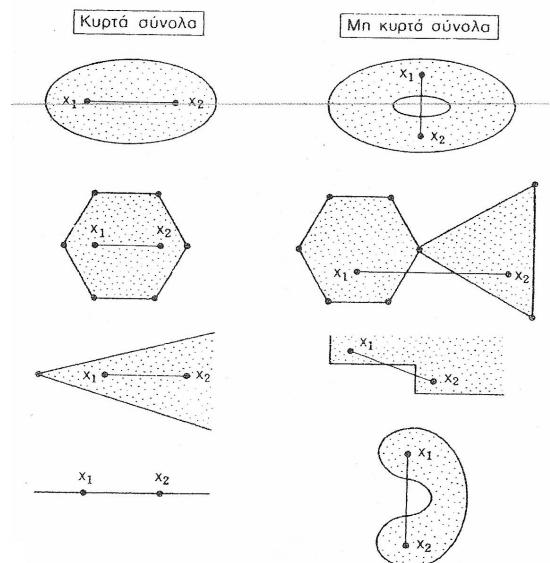
Στη συνέχεια, παράλληλα με τις κυρτές συναρτήσεις θα παρουσιάσουμε και στοιχεία από την περιοχή της θεωρίας των κυρτών συνόλων που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των κοίλων (κυρτών) συναρτήσεων και που παίζουν σημαντικό ρόλο στον μαθηματικό προγραμματισμό, στη θεωρία παιγνίων και στη θεωρία αποφάσεων μεταξύ πολλών άλλων.

Βασικές έννοιες της θεωρίας των κυρτών συνόλων

Ορισμός Η.1. Ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι κυρτό αν και μόνο αν για οποιαδήποτε σημεία $x^1, x^2 \in X$ κάθε σημείο,

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \lambda \in [0, 1]$$

που ονομάζεται κυρτός συνδυασμός (convex combination) των x^1 και x^2 , ανήκει στο X .



Σχήμα Η.1:

Ορισμός Η.2. Ένα σημείο x ονομάζεται *ακραίο σημείο* (*extreme point*) ενός κυρτού συνόλου X αν και μόνο αν $x \in X$ και δεν υπάρχουν δύο σημεία $x^1, x^2 \in X$ τέτοια ώστε

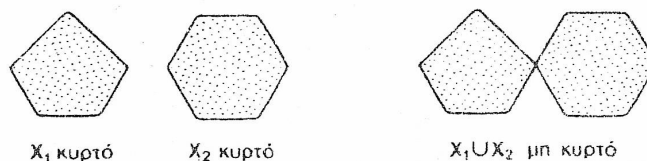
$$x = \lambda x^2 + (1 - \lambda)x^1, \quad 0 < \lambda < 1$$

Άλγεβρα κυρτών συνόλων

Τα σύνολα μιας οικογένειας $\{X_i\}$, $i \in I$ κυρτών συνόλων μπορούν να συνδυάζονται με διάφορους τρόπους για να παράξουν άλλα κυρτά σύνολα. Ειδικότερα έχουμε το

Θεώρημα Η.3. Αν $X_1, \dots, X_k$ είναι κυρτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε η τομή τους $X = \bigcap_{i=1}^k X_i$ είναι επίσης κυρτό σύνολο.

Ας σημειωθεί ότι αντίθετα με την τομή η ένωση κυρτών συνόλων δεν είναι κυρτό σύνολο. Το γεγονός αυτό παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



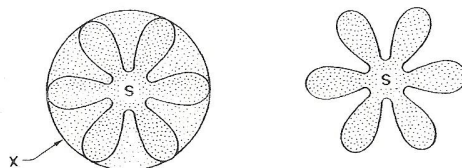
Θεώρημα Η.4. Το άθροισμα καθώς και η διαφορά κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.

Ορισμός Η.5. Αν $x^1, \dots, x^k$ είναι σημεία του $\mathbb{R}^n$ τότε το σημείο

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k \text{ και } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

ονομάζεται *κυρτός συνδυασμός (convex combination)* των σημείων $x^1, \dots, x^k$.

Όταν έχουμε ένα μη κυρτό σύνολο S είναι δυνατό να το τοποθετήσουμε σε ένα άλλο σύνολο X που είναι κυρτό έτσι ώστε κάθε σημείο του S να είναι σημείο του X όπως στο σχήμα που ακολουθεί.



Το μικρότερο κυρτό σύνολο X το οποίο περιέχει ένα μη κυρτό σύνολο S ονομάζεται *κυρτή θήκη* ή *κυρτό κέλυφος (convex hull)* του S . Πιο αυστηρά η κυρτή θήκη μπορεί να οριστεί ως εξής:

Ορισμός Η.6. Η κυρτή θήκη ενός συνόλου S ορίζεται ως η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το S και συμβολίζεται με $\text{Conv}(S)$.

Π.χ. το κυρτό κέλυφος δύο σημείων x και y είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{xy}$ που τα ενώνει. Η κυρτή θήκη ενός πεπερασμένου αριθμού σημείων $x^1, x^2, \dots, x^k$ του $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των σημείων αυτών. Είναι δηλαδή το σύνολο,

$$\text{Conv}(x^1, \dots, x^k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Κυρτά πολύεδρα - πολύτοπα

Ορισμός Η.7. Το κυρτό κέλυφος ενός πεπερασμένου αριθμού σημείων λέγεται *κυρτό πολύεδρο (convex polyhedron)* που ζευγνύεται από τα σημεία αυτά. Ένα κυρτό πολύεδρο το οποίο είναι φραγμένο ονομάζεται *κυρτό πολύτοπο (convex polytope)*.

Θεώρημα Η.8. (Krein - Milman) Αν ένα αυστηρώς κλειστό και φραγμένο σύνολο X του $\mathbb{R}^n$ έχει ένα πεπερασμένο αριθμό ακραίων σημείων, τότε κάθε μη ακραίο σημείο του μπορεί να εκφραστεί ως κυρτός συνδυασμός των ακραίων σημείων του.

Υποστηρίζοντα και διαχωρίζοντα επίπεδα

Παρουσιάζουμε ορισμένα αποτελέσματα κυρτότητας που παίζουν σημαντικό ρόλο σε πολλές περιοχές της σύγχρονης οικονομικής θεωρίας, στη θεωρία παιγνίων και στη θεωρία αποφάσεων.

Ορισμός Η.9. Έστω X ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Τότε το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = b\}$ είναι ένα φράσσον υπερεπίπεδο (bounding hyperplane) αν και μόνο αν για $y \in H$, δηλαδή $c^T y = b$, κάθε σημείο του X ανήκει σε έναν από τους δυο ανοικτούς ημιχώρους που γεννώνται από τον H . Ισχύει δηλαδή

$$c^T y = b \text{ και είτε } c^T u > b, \text{ είτε } c^T u < b, \quad \forall u \in X$$

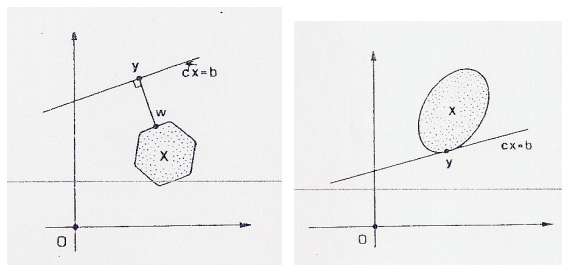
Η ύπαρξη φράσσοντος υπερεπιπέδου δίνεται από το

Θεώρημα Η.10. Αν X ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $y \notin X$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα φράσσον υπερεπίπεδο στο σημείο y .

Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Η.10 παρουσιάζεται στο σχήμα 8.2. Στο σχήμα αυτό σείρουμε μία ευθεία που περνά από το σημείο $y \in X$ έτσι ώστε το X να βρίσκεται σε έναν από τους δύο ανοικτούς ημιχώρους που γεννώνται από την ευθεία $c^T x = b$. Ένας τρόπος κατασκευής της ευθείας αυτής, είναι να προσδιορίσουμε ένα σημείο $w \in X$ και να ενώσουμε το y με το w με ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο προς την ευθεία $c^T u = b$. Στην περίπτωση που το y είναι ένα συνοριακό σημείο ενός κλειστού κυρτού υποσυνόλου X του $\mathbb{R}^n$, τότε το φράσσον υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = b\}$ που περνά από το y , δηλαδή $c^T y = b$, λέγεται ότι είναι ένα υποστηρίζον υπερεπίπεδο (supporting hyperplane) στο y . Η ύπαρξη υποστηρίζοντος υπερεπιπέδου δίνεται από το

Θεώρημα Η.11. Αν y ένα συνοριακό σημείο ενός κλειστού κυρτού υποσυνόλου X του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα υποστηρίζον υπερεπίπεδο στο y .

Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος αυτού παρουσιάζεται στο σχήμα 8.2. Ένα ακόμη



Σχήμα Η.2:

σημαντικό αποτέλεσμα κυρτότητας είναι αυτό του διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου και δίνεται από το

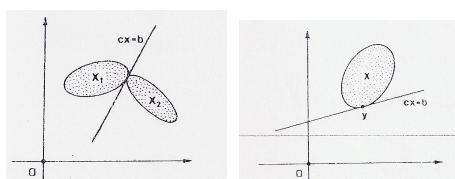
Θεώρημα Η.12. Αν X_1, X_2 δύο μη κενά διαξευγμένα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει ένα υπερεπίπεδο $H \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = b\}$ το οποίο τα διαχωρίζει. Δηλαδή υπάρχει ένα διάνυσμα $c \in \mathbb{R}^n$ και ένα βαθμωτό b , έτσι ώστε

$$\forall x \in X_1 \text{ ισχύει } c^T x > b \text{ και } \forall x \in X_2 \text{ ισχύει } c^T x \leq b.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα X_1 και X_2 διαχωρίζονται ασθενώς, όπως στο σχήμα 8.3. Όταν ισχύουν οι ανισώσεις

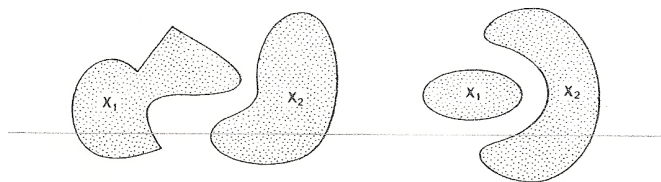
$$c^T x < b, \forall x \in X_1 \text{ και } c^T x > b, \forall x \in X_2$$

τότε λέμε ότι τα X_1 και X_2 διαχωρίζονται αυστηρώς από το H όπως φαίνεται στο σχήμα 8.3. Ας σημειωθεί τέλος ότι όταν το X_1 ή το X_2 ή και τα δύο δεν είναι κυρτά σύνολα, το Θεώρημα



Σχήμα Η.3:

Η.12 δεν ισχύει. π.χ. στο σχήμα 8.4.



Σχήμα Η.4:

Κυρτοί κώνοι

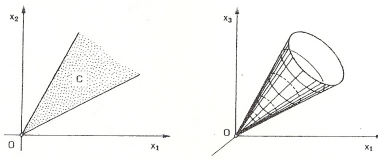
Θα εξετάσουμε μία κατηγορία κυρτών συνόλων που παίζουν σημαντικό ρόλο σε προβλήματα γραμμικής βελτιστοποίησης. Θα ξεκινήσουμε με την έννοια του κώνου που ορίζεται ως εξής:

Ορισμός Η.13. Ένας κώνος (cone) C είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ για το οποίο ισχύει:

Αν $x \in C$, τότε κάθε μη αρνητικό βαθμωτό πολλαπλάσιο του x ανήκει στο C . Δηλαδή αν $x \in C$ τότε $\lambda x \in C$, $\forall \lambda \geq 0$.

Στο σχήμα 8.5 παρουσιάζονται δύο κώνοι στους χώρους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$.

Κάθε κώνος έχει ένα σημείο $0 \in \mathbb{R}^n$ που ονομάζεται και κορυφή του. Το αρνητικό ενός κώνου C ορίζεται ως ο κώνος $C^- \equiv \{-x : x \in C\}$. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με κώνους που είναι κυρτά σύνολα.

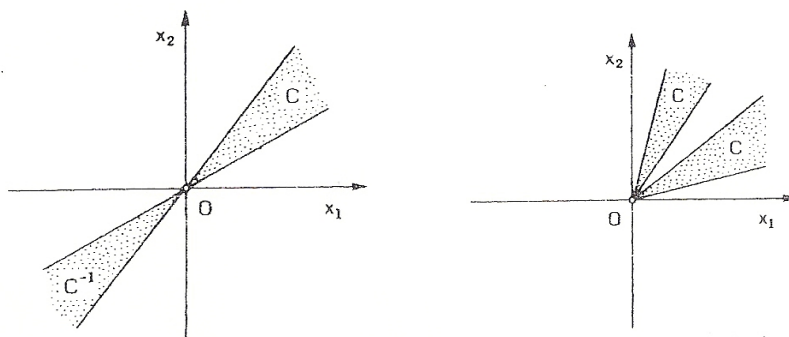


Σχήμα Η.5:

Ορισμός Η.14. Ένας κώνος C λέγεται ότι είναι κυρτός κώνος (convex cone) αν και μόνο αν είναι κλειστός ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με ένα μη αρνητικό βαθμωτό. Δηλαδή ο C είναι ένα κυρτός κώνος αν και μόνο αν

$$\forall x, y \in C \text{ και } \forall \lambda, \mu \in [0, +\infty) \text{ προκύπτει } \lambda x + \mu y \in C.$$

Προφανώς κάθε κώνος δεν είναι αναγκαστικά κυρτός κώνος π.χ. ο κώνος του σχήματος 8.6 δεν είναι κυρτός αφού αποτελείται από ξεχωριστά μέρη.



Σχήμα Η.6:

Παραδείγματα κυρτών κώνων είναι:

- Η ημιευθεία $(x) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda x, \lambda \geq 0, x \neq 0\}$ που ονομάζεται και ακτίνα.
- Το σύνολο των μη αρνητικών σημείων του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$.
- Ένα υπερεπίπεδο $\{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = 0, c \neq 0\}$ που περνά από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, καθώς και οι ημιχώροι

$$H^+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq 0, c \neq 0\} \text{ και } H^- \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \geq 0, c \neq 0\}$$

- Το σύνολο των λύσεων $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0\}$ όπου A ένας $m \times n$ πίνακας.

Άλγεβρα κυρτών κώνων

Σε ένα σύνολο κυρτών κώνων διακρίνουμε τις διμελείς πράξεις του αθροίσματος και της τομής και τις μονομελείς πράξεις της πόλωσης δυικοποίησης και ορθογωνοποίησης. Οι πράξεις αυτές ορίζονται ως εξής:

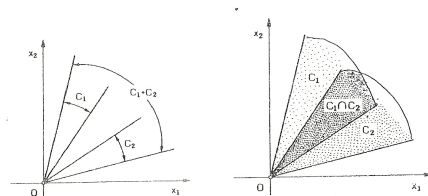
Ορισμός H.15. Το άθροισμα των κυρτών κώνων $C_1, \dots, C_k$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ο κυρτός κώνος του $\mathbb{R}^n$.

$$C = C_1 + \dots + C_k \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=1}^k x^j, \quad x^j \in C_j, j = (1, \dots, k)\}.$$

Το άθροισμα δυο κυρτών κώνων του $\mathbb{R}^2$ παρουσιάζεται στο σχήμα 8.7. Η τομή των κυρτών κώνων $C_1, \dots, C_k$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ο κυρτός κώνος του $\mathbb{R}^n$,

$$C = C_1 \cap \dots \cap C_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in C_1, \dots, x \in C_k\}$$

Η τομή δυο κυρτών κώνων του $\mathbb{R}^2$ παρουσιάζεται στο σχήμα 8.7.



Σχήμα H.7:

Πριν προχωρήσουμε στις μονομελείς πράξεις κυρτών κώνων χρειαζόμαστε την έννοια του πεπερασμένου κυρτού κώνου που ονομάζεται και πολυεδρικός κυρτός κώνος και μπορεί να οριστεί ως εξής:

Ορισμός H.16. Ένας κυρτός κώνος C του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται πεπερασμένος (finite) ή πολυεδρικός (polyhedrae) αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του είναι ένας μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός ενός πεπερασμένου αριθμού διανυσμάτων. Αν δηλαδή έχουμε τα διανύσματα $a_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, m$ τότε,

$$C \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = A\lambda = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j, \lambda_j \geq 0 \right\}$$

όπου $A = [a_1, \dots, a_m]$, και λέμε ότι ο κυρτός κώνος C γεννάται ή ζευγνύεται από τα διανύσματα $a_j, j = 1, \dots, m$.

Από τον ορισμό H.15 συνάγεται ότι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων $Ax = b$ έχει μία μη αρνητική λύση $x \geq 0$ αν και μόνο αν το διάνυσμα b είναι στοιχείο του πολυεδρικού κώνου που ζευγνύεται από τα διανύσματα του πίνακα A .

Παράδειγμα Η.17. Το διάνυσμα $x = (3/4, -3/4, 11/2)$ ανήκει στο κυρτό πολυεδρικό κώνο που ζευγνύεται από τα διανύσματα $a_1 = (1, 0, 1/2)$, $a_2 = (3/4, -3/4, 3)$ και $a_3 = (-1, 0, 2)$. Αυτό γιατί αν λύσουμε το σύστημα

$$x = A\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & -1 \\ 0 & -3/4 & 0 \\ 1/2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -3/4 \\ 11/2 \end{bmatrix}$$

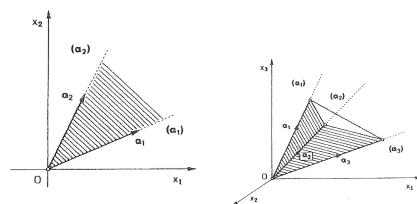
παίρνουμε $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 3/4, 2) \geq 0$, οπότε έχουμε:

$$x = a_1 + \frac{3}{4}a_2 + 2a_3$$

Μία ακόμη βασική έννοια ενός πολυεδρικού κώνου είναι η διάστασή του που εκφράζει την γραμμική εξάρτηση (ανεξαρτησία) των διανυσμάτων που τον γεννούν και η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός Η.18. Η διάσταση ενός πολυεδρικού κώνου C συμβολίζεται με $\dim(C)$ και ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που γεννούν το C . Έτσι αν $C = \{b \in \mathbb{R}^n : b = Ax, x \geq 0\}$, τότε $\dim(C) = \text{βαθμός της } A \equiv r(A)$.

Π.χ. οι πολυεδρικοί κώνοι των σχημάτων 8.8 έχουν διαστάσεις 2 και 3 αντίστοιχα. Ερχό-



Σχήμα Η.8:

μαστε τέλος στις πράξεις της πόλωσης, δυικοποίησης και ορθογωνοποίησης που ορίζονται ως εξής:

Ορισμός Η.19. Αν C ένας κυρτός κώνος του $\mathbb{R}^n$ τότε ο πολικός κώνος (polar cone) του C είναι ο κυρτός κώνος

$$C^+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x^T y \geq 0, \forall y \in C\}$$

Με άλλα λόγια ο πολικός κώνος C^+ ενός κυρτού κώνου C αποτελείται από όλα τα διανύσματα $x \notin C$ που σχηματίζουν μία οξεία γωνία θ , δηλαδή $\theta \leq \pi/2$, με όλα τα διανύσματα του C . Η γεωμετρική ερμηνεία ενός πολικού κώνου C^+ δίνεται στο σχήμα 8.9. Στην περίπτωση που ο C είναι ένας κυρτός πολυεδρικός κώνος που ορίζεται από ένα $m \times n$ πίνακα A , δηλαδή

$$C = \{x \in \mathbb{R}^m : x = A\lambda, \lambda \geq 0\},$$

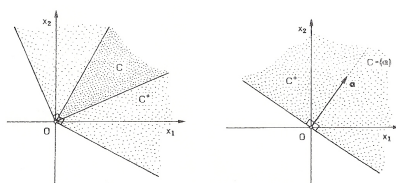
τότε ο πολικός του κώνος είναι ο πολυεδρικός κώνος

$$C = \{y \in \mathbb{R}^n : A^T y \geq 0, y \in C\}.$$

Προφανώς ο πολικός κώνος

$$C^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq 0, \forall x \in C = (a)\}$$

του κώνου $C = (a)$, που είναι μία ημιευθεία, είναι ένας κλειστός ημίχωρος. Ο κώνος $C = (a)$ και ο πολικός του κώνος C^+ παρουσιάζονται στο σχήμα 8.9.



Σχήμα H.9:

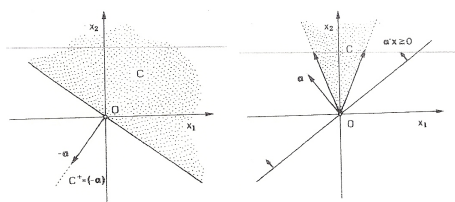
Προφανώς ο πολικός κώνος ενός κυρτού συνόλου

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq 0, a \in \mathbb{R}^n \text{ με } a \neq 0\}$$

είναι το σύνολο $C^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda(-a), \lambda \geq 0\} = (-a)$, που είναι μία ημιευθεία. Η γεωμετρική ερμηνεία της περίπτωσης αυτής στο χώρο $\mathbb{R}^2$ δίνεται στο σχήμα 8.10. Μία ακόμη χρήσιμη έννοια είναι αυτή του περιέχοντος ημιχώρου που ορίζεται ως εξής:

Ορισμός H.20. Αν C ένας κυρτός κώνος του $\mathbb{R}^n$ και $a \neq 0$ είναι στοιχείο του αντίστοιχου πολικού κώνου C^+ τότε το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq 0\}$ λέγεται ότι είναι ένας περιέχων ημιχώρος (containing half-space) για τον C .

Η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού H.20 για τον $\mathbb{R}^2$ δίνεται από το σχήμα 8.10.



Σχήμα H.10:

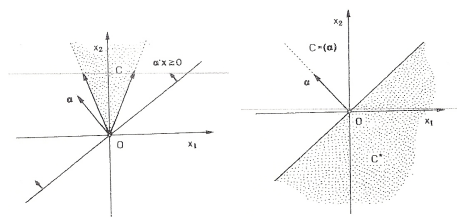
Βασικές ιδιότητες των πολικών κώνων δίνονται από το

Θεώρημα H.21. Αν C_1, C_2 δύο κυρτοί κώνοι, τότε ισχύουν:

- (i). $C_1 \subset C_2 \Leftrightarrow C_2^+ \subset C_1^+$,
- (ii). $(C^+)^+ = C$
- (iii). $(C_1 + C_2)^+ = C_1^+ \cap C_2^+$,
- (iv). $(C_1 \cap C_2)^+ = C_1^+ \cap C_2^+$

Ορισμός Η.22. Αν C ένας κυρτός κώνος, τότε ο δυϊκός κώνος (dual cone) του C είναι ο κυρτός κώνος $C^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T y \leq 0, \forall y \in C\}$. Με άλλα λόγια ο δυϊκός κώνος C^* ενός κυρτού κώνου C αποτελείται από όλα τα διανύσματα που σχηματίζουν αμβλεία γωνία, με κάθε διάνυσμα του C . Η γεωμετρική ερμηνεία ενός δυϊκού κώνου του $\mathbb{R}^2$ παρουσιάζεται στο σχήμα 8.11.

Όταν $C = \{x \in \mathbb{R}^m : x = A\lambda, \lambda \geq 0\}$ είναι κυρτός πολυεδρικός κώνος που ορίζεται από ένα $m \times n$ πίνακα A , τότε ο δυϊκός του κώνος είναι ο πολυεδρικός κώνος $C^* = \{x \in \mathbb{R}^n : Ay \leq 0, \forall y \in C\}$. Προφανώς ο δυϊκός κώνος C^* του κώνου $C = (a)$, $a \neq 0$ που είναι μία ημιευθεία είναι ο κλειστός ημιχώρος $C^* = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq 0, \forall x \in C\}$ που περιέχει το 0 στο φράσσον υπερεπίπεδο του. Η γεωμετρική ερμηνεία αυτού δίνεται στο σχήμα 8.11 για τον χώρο $\mathbb{R}^2$.



Σχήμα Η.11:

Αν τώρα ο κυρτός κώνος C είναι ένας κλειστός ημιχώρος, τότε ο δυϊκός του κώνος είναι μία ημιευθεία. Αυτό παρουσιάζεται γεωμετρικά στο σχήμα 8.12. Οι βασικές ιδιότητες των δυϊκών κώνων δίνονται από το

Θεώρημα Η.23. Αν C_1, C_2 είναι δύο δυϊκοί κώνοι του $\mathbb{R}^n$, τότε

- (i). $C_1 \subset C_2 \Leftrightarrow C_1^* \supset C_2^*$,
- (ii). $(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$
- (iii). $(C_1 \cap C_2)^* = C_1^* + C_2^*$
- (iv). $(C_1^*)^* = C_1$
- (v). $C_1^* + C_2^* \subset (C_1 \cap C_2)^*$

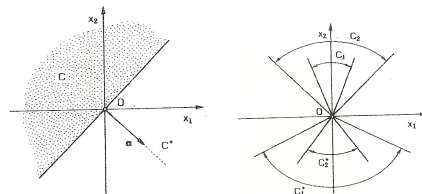
Η γεωμετρική ερμηνεία της ιδιότητας (i) δίνεται από το σχήμα 8.12.

Τέλος έχουμε τη μονομελή πράξη της ορθογωνοποίησης με την οποία σε κάθε κυρτό κώνο C αντιστοιχεί ένας κυρτός κώνος $C^\perp$ που ονομάζεται ορθογώνιος του C και ο οποίος ορίζεται ως εξής:

Ορισμός Η.24. Αν C ένας κυρτός κώνος του $\mathbb{R}^n$, τότε ο κυρτός κώνος $C^\perp$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία $x \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε x να είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα $y \in C$, δηλαδή το σύνολο

$$C^\perp \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x^T y = 0, \forall y \in C\}$$

ονομάζεται ορθογώνιος κώνος.

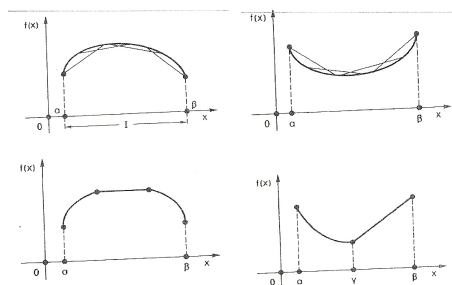


Σχήμα Η.12:

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Οι γραμμικές συναρτήσεις είναι ελκυστικές επειδή ο μαθηματικός τους χειρισμός είναι εύκολος, οι γραφικές τους παραστάσεις ιδιαιτέρως απλές (ευθείες, επίπεδα κτλ.) και παίζουν σημαντικό ρόλο στα εφαρμοσμένα μαθηματικά (π.χ. γραμμικός προγραμματισμός). Το αμέσως επόμενο επίπεδο δυσκολίας είναι οι κυρτές και κοίλες συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές περιλαμβάνουν και την κατηγορία των γραμμικών συναρτήσεων αλλά έχουν πολύ πιο ευρύ πεδίο εφαρμογών από αυτό των γραμμικών συναρτήσεων. Θα ξεκινήσουμε με ένα γεωμετρικό ορισμό των κυρτών (κοίλων) συναρτήσεων, ο οποίος εισηγείται ένα αλγεβρικό χαρακτηρισμό πιο γενικό και άμεσα επεκτάσιμο σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Ειδικότερα ορίζουμε

Ορισμός Η.25. Μια συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη πάνω σε ένα διάστημα $I = [a, \beta]$ είναι κοίλη αν και μόνο αν η χορδή που ενώνει οποιοδήποτε ζεύγος σημείων $(x^1, f(x^1))$ και $(x^2, f(x^2))$ του γραφήματος της $f(x)$ κείται επί ή κάτω από το γράφημα της $f(x)$. Αν κάθε τέτοια χορδή κείται επί ή πάνω από το γράφημα της $f(x)$, τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι κυρτή.



Σχήμα Η.13:

Τα γραφήματα κοίλων ή κυρτών συναρτήσεων μπορεί να έχουν χορδές που ενώνουν δύο σημεία του γραφήματος τους και οι οποίες συμπίπτουν με τα αντίστοιχα τμήματα των γραφημάτων αυτών, π.χ. η κοίλη συνάρτηση του σχήματος 8.13. Αν το γράφημα μίας συνάρτησης $f(x)$ δεν έχει τέτοιες χορδές τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι αυστηρώς κοίλη (strictly concave) ή αυστηρώς κυρτή (strictly convex) ανάλογα με το αν είναι κοίλη ή κυρτή αντίστοιχα. Τέλος μία κυρτή ή μια κοίλη συνάρτηση δεν απαιτείται να είναι αναγκαστικά διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Π.χ. η κυρτή συνάρτηση του σχήματος 8.13 δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο γ του πεδίου ορισμού της. Μετά από αυτά ο Ορισμός Η.25 μπορεί να επαναδιατυπωθεί στην εξής αλγεβρική μορφή:

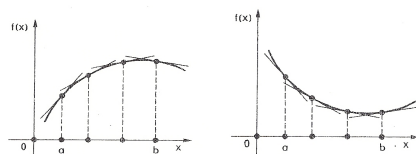
Ορισμός H.26. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σε ένα διάστημα I είναι κοίλη αν και μόνο αν $\forall a, b \in I$ και $\forall \lambda \in [0, 1]$, ισχύει

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \geq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a) \quad (H.1)$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή πάνω στο διάστημα I αν και μόνο αν $\forall a, b \in I$ και $\forall \lambda \in [0, 1]$ ισχύει

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \leq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a) \quad (H.2)$$

Αν στις (H.1) και (H.2) οι ανισώσεις είναι αυστηρές για $a \neq b$ και για $0 < \lambda < 1$, τότε η f λέμε ότι είναι αυστηρώς κοίλη και αυστηρώς κυρτή αντίστοιχα. Η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω ανισώσεων παρουσιάζεται στο σχήμα 8.14.



Σχήμα H.14:

Ορισμός H.27. Από τον Ορισμό H.26 είναι προφανές ότι μία συνάρτηση f είναι κοίλη αν και μόνο αν η $-f$ είναι κυρτή και αντίστροφα.

Επιπλέον για κάθε ιδιότητα των κυρτών συναρτήσεων υπάρχει μια αντίστοιχη ιδιότητα των κοίλων συναρτήσεων. Θα πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι οι κυρτές καθώς και οι κοίλες συναρτήσεις ορίζονται μόνο σε κυρτά σύνολα. Από το συνδυασμό του γεωμετρικού χαρακτηρισμού των κυρτών (κοίλων) συναρτήσεων με τον αντίστοιχο αλγεβρικό χαρακτηρισμό προκύπτει το εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα H.28. Αν $f(x)$ είναι μία κυρτή (κοίλη) συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα ανοιχτό διάστημα (a, b) , τότε η $f(x)$ είναι συνεχής στο (a, b) .

Εναλλακτικοί χαρακτηρισμοί κοίλων συναρτήσεων

Θα παρουσιάσουμε δύο εναλλακτικούς χαρακτηρισμούς κοιλότητας που χρησιμοποιούν την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο μιας C^1 και C^2 συνάρτησης αντίστοιχα.

Χαρακτηρισμός μέσω της πρώτης παραγώγου

Θεώρημα H.29. Μια C^1 συνάρτηση f ορισμένη πάνω σε ένα διάστημα I είναι κοίλη αν και μόνο αν ισχύει

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \geq f(x), \quad \forall x, x_0 \in I$$

Ορισμός Η.30. Μια C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σε ένα διάστημα I είναι αυστηρώς κοίλη (κυρτή) αν και μόνο αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες του γραφήματος της κείνται εξ ολοκλήρου πάνω (κάτω) από το γράφημα της $f(x)$. Δηλαδή $\forall x_1, x_2 \in I$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) > f(x_2) \text{ αυστηρώς κοίλη}$$

και

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) < f(x_2) \text{ αυστηρώς κυρτή}$$

Χαρακτηρισμός μέσω της δεύτερης παραγώγου

Θεώρημα Η.31. Μία C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σε ένα διάστημα I είναι κοίλη, αν και μόνο αν $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$.

Χαρακτηρισμός μέσω Κυρτών Συνόλων

Ορισμός Η.32. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σε ένα διάστημα I είναι κοίλη αντίστοιχα κυρτή, αν και μόνο αν το σύνολο

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \leq f(x)\}$$

αντίστοιχα το

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \leq f(x)\}$$

είναι κυρτό.

Κοίλες (κυρτές) συναρτήσεις $n \geq 2$ μεταβλητών

Ορισμός Η.33. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ είναι κοίλη, αν και μόνο αν, $\forall x^1, x^2 \in X$ και $\forall \lambda \in [0, 1]$ ισχύει

$$f[\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2] \geq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2) \quad (H.3)$$

Η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αυστηρώς κοίλη επί του κυρτού υποσυνόλου X του $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\forall x^1, x^2 \in X$ με $x^1 \neq x^2$ και $\forall \lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$f[\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2] > \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2) \quad (H.4)$$

Αν αντιστρέψουμε τις φορές των ανισώσεων (H.3) και (H.4) παίρνουμε αντίστοιχα τους ορισμούς της κυρτής και της αυστηρά κυρτής συνάρτησης αντίστοιχα.

Θεώρημα Η.34. Αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία κοίλη συνάρτηση πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$, τότε η f είναι συνεχής στο X .

Χαρακτηρισμός κοίλων (κυρτών) συναρτήσεων με παραγώγους

Θυμίζουμε ότι το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο $L(x)$ του γραφήματος της $f(x)$ στο x είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$L(x) \equiv \{(y, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x) + \nabla f(x)(y - x)\}$$

Θεώρημα Η.35. Μία C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι κοίλη, αν και μόνο αν

$$f(x) + \nabla f(x)(y - x) \geq f(y), \quad \forall x, y \in X$$

ή

$$f(y) - f(x) \leq \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}(y_1 - x_1) + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}(y_n - x_n) \quad (\text{H.5})$$

Με τον ίδιο τρόπο η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν

$$f(x) + \nabla f(x)(y - x) \leq f(y) \quad (\text{H.6})$$

Αυστηρώς κοίλη (αυστηρώς κυρτή) είναι μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν

$$f(x) + \nabla f(x)(y - x) > f(y)$$

(αντίστοιχα)

$$f(x) + \nabla f(x)(y - x) < f(y)$$

$\forall x, y \in X, x \neq y$.

Πόρισμα Η.36. Αν η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία C^1 κοίλη συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ και $x^0 \in X$ τότε

$$\nabla f(x^0)(x - x^0) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(x^0)$$

Ειδικότερα αν

$$\nabla f(x^0)(x - x^0) \leq 0, \quad \forall x \in X$$

τότε το x^0 είναι ένα σφαιρικό μέγιστο της f .

Θεώρημα Η.37. Έστω η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία C^2 συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα ανοικτό κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$. Τότε η f είναι μία κοίλη συνάρτηση αν και μόνο αν ο πίνακας Hesse $Hf(x) = \nabla^2 f(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος $\forall x \in X$. Η f είναι μία κυρτή συνάρτηση αν και μόνο αν η $\nabla^2 f(x)$ είναι θετικά ημιορισμένη $\forall x \in X$. Η f είναι αυστηρά κοίλη (αντίστοιχα αυστηρά κυρτή) αν και μόνο αν η $\nabla^2 f(x)$ είναι αρνητικά (αντίστοιχα θετικά) ορισμένη, $\forall x \in X$.

Ιδιότητες κοίλων (κυρτών) συναρτήσεων

Θεώρημα Η.38. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία κοίλη (κυρτή) συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα ανοικτό κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$. Αν x^0 είναι ένα τοπικό ακρότατο της f , δηλαδή $\nabla f(x^0) = 0$, τότε $x^0 \in X$ είναι ένα σφαιρικό μέγιστο (ελάχιστο) της f επί του X . Επιπλέον αν η f είναι αυστηρά κοίλη (κυρτή) πάνω στο X , τότε το σημείο $x^0 \in X$ με $\nabla f(x^0) = 0$ είναι το μοναδικό μέγιστο (ελάχιστο) της f .

Στην πραγματικότητα ισχύει ακόμη πιο ισχυρό αποτέλεσμα από αυτό του Θεωρήματος Η.38. Συγκεκριμένα στο θεώρημα αυτό υποθέσαμε ως πεδίο ορισμού της $f(x)$ το ανοικτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ οπότε αναφερόμαστε ουσιαστικά σε ακρότατο x^0 που είναι εσωτερικό σημείο του συνόλου X . Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα Η.36 για να αποδείξουμε το

Θεώρημα Η.39. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$. Αν η f είναι μία κοίλη συνάρτηση και αν x^0 είναι ένα σημείο του X που ικανοποιεί την $\nabla f(x^0)(y - x^0) \leq 0, \forall y \in X$, τότε το x^0 είναι σφαιρικό μέγιστο της f επί του X . Αν η f είναι μία κυρτή συνάρτηση και αν x^0 είναι ένα σημείο του X που ικανοποιεί την $\nabla f(x^0)(y - x^0) \geq 0, \forall y \in X$, τότε το x^0 είναι σφαιρικό ελάχιστο της f επί του X .

Θεώρημα Η.40. Έστω οι $f_1(x), \dots, f_k(x)$ κοίλες (κυρτές) συναρτήσεις κάθε μία από τις οποίες ορίζεται πάνω στο ίδιο κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$. Τότε,

- (i). Η συνάρτηση $f(x) = f_1(x) + \dots + f_k(x)$ είναι κοίλη (κυρτή). Επιπλέον αν τουλάχιστον μία $f_i(x)$ είναι αυστηρώς κοίλη (αυστηρώς κυρτή) πάνω στο X , τότε το άθροισμα $f(x)$ είναι αυστηρώς κοίλη (αυστηρώς κυρτή) συνάρτηση.
- (ii). Αν $f(x)$ είναι κοίλη (κυρτή) πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ και αν a θετικός αριθμός τότε η $af(x)$ είναι κοίλη (κυρτή).
- (iii). Αν $f(x)$ είναι μία κοίλη (κυρτή) συνάρτηση πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $g(y)$ είναι μία αύξουσα κοίλη (κυρτή) συνάρτηση (δηλαδή $g'(y) \geq 0$) ορισμένη στο πεδίο τιμών της $f(x)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $g(f(x))$ είναι κοίλη (κυρτή).

Οι (i) και (ii) μπορούν να ενσωματωθούν σε μία ως εξής:

Αν $f_1(x), \dots, f_k(x)$ είναι κοίλες (κυρτές) συναρτήσεις κάθε μία από τις οποίες είναι ορισμένη πάνω στο ίδιο κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ και $a_1, \dots, a_k$ θετικοί αριθμοί, τότε ο γραμμικός συνδυασμός $a_1 f_1(x) + \dots + a_k f_k(x)$ είναι μία κοίλη (κυρτή) συνάρτηση. Η τρίτη ιδιότητα των κοίλων συναρτήσεων αφορά τη μορφολογία των ισοσταθμικών τους. Ειδικότερα οι ισοσταθμικές κοίλων συναρτήσεων οριοθετούν κυρτά υποσύνολα από κάτω όπως μας λέει το

Θεώρημα Η.41. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$. Αν η f είναι κοίλη, τότε για κάθε $x^0 \in X$ το σύνολο

$$C^+(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq f(x^0)\}$$

είναι ένα κυρτό σύνολο. Αν η f είναι κυρτή, τότε για κάθε $x^0 \in X$, το σύνολο

$$C^-(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^0)\}$$

είναι ένα κυρτό σύνολο.

Παράρτημα I

Χώροι Συναρτήσεων

Στοιχεία θεωρίας μέτρου

Ορισμός I.1. Μία οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X λέγεται σ -άλγεβρα στο X αν ικανοποιεί τις ιδιότητες

- (i). $X \in \mathcal{A}$
- (ii). αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \setminus A = A^c \in \mathcal{A}$
- (iii). αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση I.2. Αν η (iii) αντικατασταθεί από την

- (iii)'. αν $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$, η οικογένεια $\mathcal{A}$ λέγεται άλγεβρα.

Ορισμός I.3. Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο X . Μία συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ λέγεται αριθμήσιμα προσθετικό ή σ -προσθετικό μέτρο αν ικανοποιεί τις ιδιότητες

- (i). $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii). $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i)$, αν $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ (αριθμήσιμη προσθετικότητα ή σ -προσθετικότητα).

Το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ λέγεται μετρήσιμος χώρος και η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου λέμε ότι το μ είναι μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ή απλά στον X . Σε αυτήν την περίπτωση τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ λέγονται $\mathcal{A}$ -μετρήσιμα ή απλά μετρήσιμα σύνολα.

Ορισμός I.4. Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ άλγεβρα στο X . Μία συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ λέγεται πεπερασμένα προσθετικό μέτρο αν ικανοποιεί τις ιδιότητες

- (i). $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii). $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ αν $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ πεπερασμένη ακολουθία ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$. (πεπερασμένη προσθετικότητα)

Παρατήρηση 1.5. Είναι σαφές ότι κάθε μέτρο μ σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ είναι και πεπερασμένα προσθετικό μέτρο.

Παραδείγματα

(i). Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Ορίζουμε για κάθε $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \begin{cases} n, & \text{αν το } A \text{ έχει ακριβώς } n \text{ στοιχεία } (n = 0, 1, \dots) \\ +\infty, & \text{αν το } A \text{ είναι άπειρο σύνολο} \end{cases}$$

και

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ +\infty, & \text{αν } A \neq \emptyset \end{cases}$$

και

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και για κάθε $x \in X$. Το μ λέγεται αριθμητικό μέτρο και το δ_x λέγεται μέτρο Dirac στο σημείο x .

(ii). Πιο ενδιαφέροντα μέτρα είναι το μέτρο Lebesgue λ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ με σπουδαία ιδιότητα το μέτρο κάθε διαστήματος του $\mathbb{R}$ να είναι ισό με το μήκος του και η γενίκευση του λ_n στον $\mathbb{R}^n$. Η $B(\mathbb{R})$ είναι η σ -άλγεβρα Borel του $\mathbb{R}$ και $B(\mathbb{R}^n)$ είναι η σ -άλγεβρα Borel του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το μ λέγεται

(i). πεπερασμένο, αν $\mu(X) < +\infty$

(ii). μέτρο πιθανότητας, αν $\mu(X) = 1$ και

(iii). σ -πεπερασμένο, αν υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \text{ και } \mu(A_n) < +\infty \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και αντιστοίχως ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται χώρος πεπερασμένου μέτρου, χώρος μέτρου πιθανότητας, χώρος σ -πεπερασμένου μέτρου.

Οι μετρήσιμες συναρτήσεις που ορίζουμε στη συνέχεια είναι μια κλάση συναρτήσεων θεμελιώδους στη θεωρία ολοκλήρωσης, όπως είναι ο ρόλος των μετρήσιμων συνόλων στη μελέτη των μέτρων.

Ορισμός 1.7. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ λέγεται μετρήσιμη ως προς $\mathcal{A}$ ή $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη ή απλά μετρήσιμη αν για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ το $[f \leq \beta] = f^{-1}([-\infty, \beta])$ είναι μετρήσιμο, δηλαδή ανήκει στην $\mathcal{A}$. Αν μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ μια συνάρτηση $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ $\mathcal{A}_\mu$ -μετρήσιμη λέγεται μ -μετρήσιμη. Ειδικά μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$ λ -μετρήσιμη λέγεται Lebesgue μετρήσιμη. Αν ο X είναι μετρικός χώρος μια συνάρτηση $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ $B(X)$ -μετρήσιμη λέγεται Borel μετρήσιμη.

Ορισμός I.8. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $S : X \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται απλή αν το σύνολο $S(X)$ των τιμών της είναι πεπερασμένο. Αν η S είναι απλή τότε υπάρχει μια μοναδική πεπερασμένη μετρήσιμη διαμέριση $\{A_1, \dots, A_n\}$ του X , δηλαδή $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$, $\cup_{i=1}^n A_i = X$ και τα A_i είναι μη κενά, ξένα ανα δύο και μοναδικοί αριθμοί $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ με $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$ ώστε $S = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$. Αυτή η παράσταση λέγεται κανονική μορφή της S και προκύπτει θέτοντας $A_i = S^{-1}(\{a_i\})$ για $i = 1, \dots, n$.

Ορισμός I.9. Έστω $f : X \rightarrow [0, +\infty)$ απλή συνάρτηση. Αν η f σε κανονική μορφή γράφεται $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, το ολοκλήρωμα (Lebesgue) της f (ως προς μ) ορίζεται να είναι ο αριθμός $\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$ και συμβολίζεται με

$$\int f d\mu.$$

Αν εμφανιστεί στο παραπάνω άθροισμα ο όρος $0 \cdot (+\infty)$ τότε θέτοντας $0 \cdot (+\infty) = 0$ προκύπτει ότι $\int f d\mu \in [0, +\infty]$.

Πρόταση I.10. Έστω $f, g \geq 0$ απλές συναρτήσεις και $a \geq 0$. Τότε

- (i). $\int a f d\mu = a \int f d\mu$.
- (ii). $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
- (iii). Αν $f \leq g$ τότε $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Ορισμός I.11. Έστω $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς μ ορίζεται ως

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \text{ απλή με } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε το ολοκλήρωμα της f στο A ορίζεται ως

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu$$

και είναι σαφές ότι $\int_A f d\mu \in [0, +\infty]$.

Πρόταση I.12. Έστω $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις, $A, B \in \mathcal{A}$ και $a \geq 0$. Τότε

- (i). $\int a f d\mu = a \int f d\mu$
- (ii). αν $f \leq g$ τότε $\int f d\mu \leq \int g d\mu$
- (iii). αν $A \subset B$ τότε $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$
- (iv). αν $\mu(A) = 0$ ή αν $f = 0$ στο A τότε $\int_A f d\mu = 0$

Θεώρημα I.13. (Μονότονης σύγκλισης του Lebesgue). Έστω $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$, $n = 1, 2, \dots$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$. Θέτουμε $\lim_n f_n = f$. Τότε

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Πόρισμα I.14. Έστω $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Πόρισμα I.15. (Θεώρημα Βερρο Levi). Έστω $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$, $n = 1, 2, \dots$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Τότε

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Πόρισμα I.16. (Λήμμα Fatou). Έστω $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε

$$\int (\liminf_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Πόρισμα I.17. Έστω $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε $\nu = \nu(f, \mu) : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ με

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{A}$$

(Το ν λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς μ). Τότε

(i). Το ν είναι μέτρο

(ii). αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$ (λέμε τότε ότι το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς μ και γράφουμε $\nu \ll \mu$)

(iii). αν $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε

$$\int g d\nu = \int g f d\mu$$

$$\text{και } \nu(fg, \mu) = \nu(g, \nu(f, \mu)) = \nu(f, \nu(g, \mu)).$$

Ορισμός I.18. Μια ιδιότητα P των σημείων του X λέμε ότι ισχύει μ -σχεδόν παντού στο X ή μ -σχεδόν για κάθε $x \in X$ αν το σύνολο $\{x \in X : \text{το } x \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P\}$ είναι μ -μηδενικό. Για συντομία γράφουμε μ -σ.π αντί για μ -σχεδόν παντού.

Ορισμός I.19. Αν f, g συναρτήσεις στο X τότε $f = g$ μ -σ.π σημαίνει ότι το σύνολο $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ είναι μ -μηδενικό. Ανάλογα αν οι f, g παίρνουν τιμές στο $[-\infty, +\infty]$ τότε $f \leq g$ μ -σ.π (αντ. $f < g$ μ -σ.π) σημαίνει ότι το σύνολο $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$ (αντ. το σύνολο $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$) είναι μ -μηδενικό.

Πρόταση I.20. Έστω $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ (αντ. $\mathbb{C}$) μ -μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε

(i). Κάθε συνάρτηση $g : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ (αντ. $\mathbb{C}$) ώστε $f = g$ μ -σ.π είναι μ -μετρήσιμη.

(ii). υπάρχει $g : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ (αντ. $\mathbb{C}$) $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη ώστε $f = g$ μ -σ.π.

Πρόταση I.21. Έστω $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε

(i). Αν $f = g$ μ -σ.π. τότε $\int f d\mu = \int g d\mu$

(ii). Ισχύει $f = 0$ μ -σ.π. αν και μόνο αν $\int f d\mu = 0$.

Ορισμός I.22. Έστω p και q δυο θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Οι αριθμοί p, q θα λέγονται συζυγείς εκθέτες αν $1/p + 1/q = 1$, δηλαδή $p + q = pq$.

Παρατήρηση I.23. (1). Αν ο αριθμός p τείνει στο 1 τότε ο q τείνει στο ∞ οπότε αν $p = 1$ και $q = \infty$ τους θεωρούμε επίσης συζυγείς εκθέτες.

(2). Μια πιο ειδική περίπτωση, αλλά σημαντική, συζυγών εκθετών αποτελεί η $p = q = 2$.

Λήμμα I.24. (Ανισότητα Young). Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a, b \geq 0$ και $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$. Τότε ισχύει

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Η ισότητα ισχύει αν $a^p = b^q$. Επίσης αν $\varepsilon > 0$ τότε

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^q q}.$$

Ειδικά για $p = q = 2$ η ανισότητα Young είναι προφανής, αφού

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

δηλαδή $(a - b)^2 \geq 0$.

Πρόταση I.25. (Ανισότητα Hölder). Έστω p, q συζυγείς εκθέτες με $1 < p < +\infty$ και $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε

$$\int f g d\mu \leq \left(\int f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Για $p = q = 2$ η ανισότητα Hölder λέγεται Cauchy-Schwarz-Buniakowski.

Ειδική περίπτωση της ανισότητας Hölder αποτελεί η παρακάτω ανισότητα. Αν

$$X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \text{ για } p = q = 2, \mathcal{X} = \{1, \dots, n\},$$

$$\mathcal{A} = P(\mathcal{X}), \mu(\{i\}) = 1, f(i) = |x_i|, g(i) = |y_i| \text{ για } i = 1, \dots, n$$

έχουμε

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Πρόταση I.26. (Ανισότητα Minkowski). Έστω $1 < p < +\infty$ και $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε

$$\left(\int (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ειδική περίπτωση της ανισότητας Minkowski αποτελεί η παρακάτω ανισότητα. Αν

$$X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \text{ για } p = q = 2, \mathcal{X} = \{1, \dots, n\},$$

$$\mathcal{A} = P(\mathcal{X}), \mu(\{i\}) = 1, f(i) = |x_i|, g(i) = |y_i| \text{ για } i = 1, \dots, n$$

έχουμε

$$\left| \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \right|^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ορισμός I.27. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται *Lebesgue ολοκληρώσιμη* αν $\int |f| d\mu < \infty$. Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα ορίζεται αφού η $|f|$ είναι θετική μετρήσιμη συνάρτηση.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^1(\mu)$ (αντ. $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$) το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων ως προς μ συναρτήσεων με τιμές μιγαδικές (αντ. πραγματικές). Ορίζουμε ολοκλήρωμα για μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ θέτοντας

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu, \text{ για } A \in \mathcal{A}$$

με την προϋπόθεση ότι τουλάχιστον ένα από τα ολοκλήρωματα $\int_A f^+ d\mu$ και $\int_A f^- d\mu$ είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση αυτή $\int_A f d\mu \in [-\infty, +\infty]$.

Στη συνέχεια επιχειρούμε να εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο εισάγονται και ορίζονται οι χώροι συναρτήσεων $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Προτρέχουμε να πούμε ότι προκύπτουν, με ένα συγκεκριμένο τρόπο που θα περιγράψουμε, από ένα σύνολο $\mathcal{L}^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ και μ είναι ένα μέτρο σε ένα γενικό χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ για αυτό και συχνά συμβολίζουμε $\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Αρχικά θα αναφερθούμε στον $\mathcal{L}^1$ και τον σχετιζόμενο προκύπτοντα L^1 και στη συνέχεια στον $\mathcal{L}^p$ και τον σχετιζόμενο προκύπτοντα L^p , $1 \leq p \leq \infty$. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ημινόρμας την οποία υπενθυμίζουμε. Για λόγους σύγκρισης υπενθυμίζουμε και την έννοια της νόρμας.

Ορισμός I.28. Έστω $E(\mathbb{R})$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μια πραγματική συνάρτηση $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται *νόρμα* αν

(i). $N(v) \geq 0$ για κάθε $v \in E$.

(ii). $N(v) = 0$ ανν $v = 0$.

(iii). $N(av) = |a|N(v)$ για κάθε $v \in E$ και για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(iv). $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ για κάθε $u, v \in E$.

Αν η συνθήκη (ii) αντικατασταθεί από τη συνθήκη

(ii)'. $v = 0 \Rightarrow N(v) = 0$

τότε η N λέγεται ημινόρμα. Στη συνέχεια τη νόρμα θα συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_{(\cdot)}$ και την ημινόρμα με $\|\cdot\|_{(\cdot)}$ με ενδεχόμενο υποδείκτη και στη μία περίπτωση και στην άλλη για περισσότερη ακρίβεια.

Α Μέρος.

Ορισμός I.29. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ορίζουμε και συμβολίζουμε $\mathcal{L}^1(\mu)$ το χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που ορίζονται επί του X και των οποίων το θετικό και το αρνητικό μέρος έχουν πεπερασμένο ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο μ , δηλαδή

$$\int f \mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

και αν $E \subset \mathcal{A}$ τότε

$$\int_E f \mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ορίζουμε την ποσότητα

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \int |f| d\mu.$$

Αν η f παίρνει μιγαδικές τιμές συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mu)$ και αν παίρνει πραγματικές τιμές με $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$.

Λήμμα I.30. Ο χώρος $\mathcal{L}^1(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος ως προς τις πράξεις

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (af)(x) &= af(x) \end{aligned}$$

και η $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$ είναι ημινόρμα επί του $\mathcal{L}^1(\mu)$. Επιπλέον η $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = 0$ ανν $f(x) = 0$ σ.π. επί του X και όχι για κάθε $x \in X$.

Για να μετατρέψουμε το χώρο $\mathcal{L}^1(\mu)$ σε χώρο με νόρμα θα ταυτίζουμε δύο συναρτήσεις που συμπίπτουν σ.π, δηλαδή, χρησιμοποιούμε κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων.

Ορισμός I.31. Δυο συναρτήσεις του $\mathcal{L}^1(\mu)$ θα λέγονται μ -ισοδύναμες αν είναι ίσες μ -σ.π. Η κλάση ισοδυναμίας που προσδιορίζεται από την $f \in \mathcal{L}^1$ συμβολίζεται με $[f]$ και αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις του $\mathcal{L}^1$ που είναι μ -ισοδύναμες προς την f .

Ο χώρος L^1 αποτελείται από όλες τις μ -ισοδύναμες κλάσεις του $\mathcal{L}^1$. Αν η $[f] \in L^1$ ορίζουμε την ποσότητα

$$\|f\|_{L^1} = \int |f| d\mu.$$

Θεώρημα I.32. Ο χώρος Lebesgue L^1 είναι γραμμικός χώρος με νόρμα.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι τα στοιχεία του L^1 είναι κλάσεις συναρτήσεων που ανήκουν στον $\mathcal{L}^1$. Γράφουμε συνήθως $\|f\|_{L^1}$ αντί για $\|[f]\|_{L^1}$ και συχνά την κλάση $[f]$ την αναφέρουμε σαν στοιχείο f του L^1 .

Πρόταση I.33. Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $a, b \in \mathbb{C}$ τότε

(i). $af + bg \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(ii). $\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$

Πρόταση I.34. Αν $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ και $f \leq g$ τότε $\int f d\mu \leq \int g d\mu.$

Πρόταση I.35. Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ τότε $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu.$

Πρόταση I.36. $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu).$

(i). Αν $f = g$ μ -σ.π, τότε $\int f d\mu = \int g d\mu$

(ii). Αν $f = 0$ μ -σ.π αν και μόνο αν $\int_A f d\mu = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}.$

Θεώρημα I.37. (Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue). Έστω $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $f = \lim_n f_n$. Έστω ότι υπάρχει $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ για $n = 1, 2, \dots$. Τότε $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ για $n = 1, 2, \dots$ και ισχύουν

$$\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0$$

και

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Ορισμός I.38. (Πραγματική ή μιγαδική άλγεβρα Banach). Ένας $(V, \|\cdot\|)$ χώρος Banach ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια πράξη πολλαπλασιασμού $\cdot : V \times V \rightarrow V$ και έχει τις ιδιότητες

(i). $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w.$

(ii). $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w.$

(iii). $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w.$

(iv). $a(u \cdot v) = (au) \cdot v = u \cdot (av).$

(v). $\|u \cdot v\| \leq \|u\| \|v\|$

για κάθε $u, v, w \in V$ και $a \in \mathbb{R}$ ή $a \in \mathbb{C}$ λέγεται άλγεβρα Banach. Αν επιπλέον ισχύει η

(vi). $u \cdot v = v \cdot u$

τότε λέγεται μεταθετική άλγεβρα Banach.

Πρόταση I.39. Ο $L^1(\lambda)$ με την συνέλιξη σαν πολλαπλασιασμό είναι μεταθετική άλγεβρα Banach.

Ορισμός I.40. Συνέλιξη των συναρτήσεων $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, όπου λ το μέτρο Lebesgue ορίζουμε την

$$h(x) = (f * g)(x) = \begin{cases} \int f(x-y)g(y)d\lambda(y), & \text{αν } \int |f(x-y)g(y)|d\lambda(y) < \infty \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Θεώρημα I.41. Η $h \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ και

$$\int |h|d\lambda \leq \int |f|d\lambda \int |g|d\lambda,$$

δηλαδή $\|f * g\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1}\|g\|_{\mathcal{L}^1}$, οπότε $f * g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$.

Πρόταση I.42. Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, τότε $f * g = g * f$.

Στη συνέχεια αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$, με $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1([a, b])$ και $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1([a, b])$ συμβολίζουμε τους $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\lambda)$ και $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\lambda)$ αντίστοιχα, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο διάστημα $[a, b]$. Ανάλογοι συμβολισμοί ισχύουν και για $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό.

Ορισμός I.43. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Η f λέγεται ολοκληρώσιμη αν $f \in L^1(\Omega)$.

Ορισμός I.44. Η f λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη αν για κάθε $K \subset \Omega$ συμπαγές ο περιορισμός της f στο K είναι $L^1(K)$, δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη πάνω από κάθε K συμπαγές υποσύνολο του Ω . Το σύνολο των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο Ω συμβολίζεται με $L_{loc}^1(\Omega)$.

Παράδειγμα I.45. Έστω $\Omega = (0, 1)$ και $f(x) = 1/x$. Η $f \in L_{loc}^1(0, 1)$ αλλά η $f \notin L^1(0, 1)$ αφού $\int_0^1 f(x)dx = \infty$. Είναι $L^1(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$.

Χρήσιμα αποτελέσματα της θεωρίας ολοκλήρωσης

Θεώρημα I.46. (Μονότονης σύγκλισης Beppo Levi). Έστω αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$\sup_n \int_{\Omega} f_n dx < \infty.$$

Τότε η $f_n(x)$ συγκλίνει σ.π. στο Ω σε κάποια $f(x)$, η οποία ανήκει στον $L^1(\Omega)$ και $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$.

Θεώρημα I.47. (Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue). Έστω ακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συναρτήσεων του $L^1(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ σ.π. στο Ω και ότι υπάρχει μια συνάρτηση $g \in L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|f_n(x)| \leq g(x)$ σ.π. στο Ω (η g λέμε τότε ότι είναι ένα ολοκληρώσιμο άνω φράγμα των συναρτήσεων f_n για $n \in \mathbb{N}$). Τότε η $f \in L^1(\Omega)$ και

$$\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Λήμμα I.48. (Fatou). Έστω ακολουθία $\{f_n\}$ συναρτήσεων του $L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $f_n(x) \geq 0$ σ.π στο Ω και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sup_n \int_{\Omega} f_n < \infty$. Θέτουμε για κάθε $x \in \Omega$

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Τότε $f \in L^1(\Omega)$ και

$$\int_{\Omega} f dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Θεώρημα I.49. (πυκνότητας). Ο χώρος $C_0(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^1(\Omega)$, δηλαδή για κάθε $f \in L^1(\Omega)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $f_1 \in C_0(\Omega)$ ώστε $\|f - f_1\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$.

Θεώρημα I.50. (Tonelli). Έστω $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ ανοικτά και $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in \Omega_1$ και

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty.$$

Τότε $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Θεώρημα I.51. (Fubini). Υποθέτουμε ότι $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Τότε

(i). για σχεδόν κάθε $x \in \Omega_1$ ισχύει $F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2)$ και

$$\int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

(ii). για σχεδόν κάθε $y \in \Omega_2$ ισχύει $F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1)$ και

$$\int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

(iii). Ισχύει ότι

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

Β Μέρος.

Ορισμός I.52. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $1 \leq p \leq \infty$.

- Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε την ποσότητα

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Για $p = \infty$ ορίζουμε την ποσότητα

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \inf \{C \in [0, +\infty] : \mu(|f| > C) = 0\}$$

η οποία λέγεται ουσιαστικά *supremum* της f (και είναι καλά ορισμένη διότι το σύνολο του οποίου παίρνουμε το *infimum* περιέχει το ∞ οπότε είναι μη κενό).

Ορισμός I.53. Ορίζουμε και συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ και $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$, το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές μιγαδικές, πραγματικές αντίστοιχα, ώστε $\|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$.

Ορισμός I.54. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leq p < \infty$. Ορίζουμε και συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^p(\mu) \equiv \mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ που είναι τέτοιες ώστε η $|f|^p$ να είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ δηλαδή $|f|^p \in L^1(\mu)$.

Παρατήρηση I.55. (i). Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$ συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p([a, b])$ τον $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\lambda)$ και με $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p([a, b])$ τον $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(\lambda)$ όπου λ το μέτρο Lebesgue στο διάστημα $[a, b]$.

(ii). Για $p = 1$ έχουμε $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mu)$ και $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ περίπτωση που έχουμε ήδη εξετάσει.

Σχέση μεταξύ των χώρων $L^p(\mu)$ για μ πεπερασμένο ή μη

Πρόταση I.56. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Αν $\mu(X) < \infty$, $1 \leq r < s \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}^s(\mu)$, τότε

$$\|f\|_r \leq \begin{cases} \|f\|_s \mu(X)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}, & s < \infty \\ \|f\|_s \mu(X)^{\frac{1}{r}}, & s = \infty \end{cases}$$

Θεώρημα I.57. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε

(i). Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη ανν το

$$A(f) = \{x \in [a, b] : \eta \ f \text{ δεν είναι συνεχής στο } x\}$$

έχει μέτρο Lebesgue 0 (δηλαδή η f είναι λ-σ.π συνεχής στο $[a, b]$).

(ii). Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη (ως προς λ) και

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Παράδειγμα I.58. Ισχύει ότι

$$\mathcal{L}^2[0, 1] \subsetneq \mathcal{L}^1[0, 1].$$

Π.χ αν $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} |f| d\lambda &= \lim_n \int_{[\frac{1}{n},1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) \\ &= \lim_n \int_{[\frac{1}{n},1]} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_n \left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 2\end{aligned}$$

και

$$\int_{[0,1]} |f|^2 d\lambda = \lim_n \int_{[\frac{1}{n},1]} \frac{1}{x} dx = \infty.$$

άρα $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$ ενώ $f \notin \mathcal{L}^2[0,1]$.

Είναι τελείως διαφορετική η σχέση των $\mathcal{L}^p(\mu)$ όταν το μ δεν είναι πεπερασμένο. Αυτό φαίνεται από τα παραδείγματα των χώρων $\ell^p(\Gamma)$ που ορίζουμε στη συνέχεια.

Ορισμός I.59. Έστω Γ ένα σύνολο και $1 \leq p \leq \infty$. Ορίζουμε ως

$$\ell^p(\Gamma) = \mathcal{L}^p(\mu)$$

όπου μ το αριθμητικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(\Gamma, P(\Gamma))$. Αν $\Gamma = \mathbb{N}$ τότε $\ell^p(\mathbb{N}) \equiv \ell^p$. Ορίζουμε επίσης ως νόρμες τις ποσότητες

$$\begin{aligned}\|f\|_{\ell^p} &= \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{\ell^\infty} &= \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|,\end{aligned}$$

όπου

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} |f(\gamma)|^p : F \subset \Gamma, F \text{ πεπερασμένο} \right\}.$$

Πρόταση I.60. Έστω Γ σύνολο και $1 \leq r < s \leq \infty$. Τότε $\ell^r(\Gamma) \subset \ell^s(\Gamma)$.

Παράδειγμα I.61. Ισχύει ότι

$$\ell^1 \subsetneq \ell^2.$$

Π.χ αν $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(n) = 1/n$ τότε

$$\|f\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

και

$$(\|f\|_{\ell^2})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

άρα $f \in \ell^2$ αλλά $f \notin \ell^1$ οπότε $\ell^1 \subset \ell^2$.

Πρόταση I.62. (Ανισότητα Hölder). Έστω p, q συζυγείς εκθέτες με $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ και $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.

(i). $\|fg\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$.

(ii). $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Πρόταση I.63. (Ανισότητα Minkowski). Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.

(i). $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}$.

(ii). $(f + g) \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Λήμμα I.64. Ο χώρος $\mathcal{L}^p(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ ως προς τις πράξεις $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ και $(af)(x) = af(x)$.

Πρόταση I.65. Η συνάρτηση $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p} : \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f \rightarrow \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}}$ είναι ημινόρμα στο γραμμικό χώρο $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ και το ζεύγος $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}})$ είναι μιγαδικός χώρος με ημινόρμα. Όμοια ο $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ είναι πραγματικός χώρος με ημινόρμα.

Παρατήρηση I.66. Επισημαίνουμε ότι αν $f = 0$ είναι φανερό ότι $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$, ενώ από την $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$ δεν προκύπτει ότι $f = 0$ αφού η τελευταία ισχύει μόνο μ -σ.π. Για να μετατρέψουμε το χώρο $\mathcal{L}^p(\mu)$ σε χώρο με νόρμα θα ταυτίζουμε δυο συναρτήσεις του που συμπίπτουν σχεδόν παντού, δηλαδή χρησιμοποιούμε κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων, αντί των συναρτήσεων.

Ορισμός I.67. Αν $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ (αντίστοιχα $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$) όπου $1 \leq p \leq \infty$ ορίζουμε $f \sim g$ αν $f = g$ μ -σ.π και αποδεικνύεται ότι είναι σχέση ισοδυναμίας δημιουργώντας κλάσεις ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^p(\mu)$. Ο χώρος $L^p(\mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις που προσδιορίζονται από τις $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ και συμβολίζουμε $[f] \in L^p(\mu)$. Αν η $[f] \in L^p(\mu)$ ορίζουμε την ποσότητα

$$\|[f]\|_{L^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

για $1 \leq p < \infty$ και

$$\|[f]\|_{L^\infty} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \inf\{C \geq 0 : \mu(|f| > C) = 0\}.$$

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε πραγματικό ή μιγαδικό χώρο με νόρμα $(V, \|\cdot\|)$ η συνάρτηση $\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ με $\rho(x, y) = \|x - y\|$ είναι μια μετρική. Ο $(V, \|\cdot\|)$ λέγεται μιγαδικός ή πραγματικός χώρος Banach αν ο μετρικός χώρος (V, ρ) είναι πλήρης. Στον $L^p(\mu)$ ορίζεται η μετρική $(f, g)_{L^p} \rightarrow \|f - g\|_{L^p}$. Έτσι λέγοντας ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f στον $L^p(\mu)$ θα εννοούμε ότι $f_n, f \in L^p(\mu)$ και $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ και θα γράφουμε $f_n \rightarrow f$ στον $L^p(\mu)$. Όμοια λέγοντας ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική στον $L^p(\mu)$ θα εννοούμε ότι $f_n \in L^p(\mu)$ και

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_{L^p} = 0.$$

Λήμμα I.68. Έστω $\{f_n\}$ στον $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ με $\|f_n - f_{n+1}\|_{L^p} \leq 1/2^{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$ Τότε υπάρχει μετρήσιμη f ώστε $f_n \rightarrow f$ μ -σ.π.

Θεώρημα I.69. (Riesz-Fischer). Οι $L^p(\mu)$ για $1 \leq p \leq \infty$ είναι χώροι Banach.

Πρόταση I.70. Έστω $f, f_n \in L^p(\mu)$, $n = 1, 2, \dots$ και $1 \leq p < \infty$. Έστω επίσης $f_n \rightarrow f$ στον $L^p(\mu)$. Τότε $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πρόταση I.71. Έστω $f, f_n \in L^p(\mu)$, $n = 1, 2, \dots$ και $1 \leq p \leq \infty$. Έστω επίσης $|f| \leq g$ και $|f_n| \leq g$ με $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ για $n = 1, 2, \dots$. Αν $f_n \rightarrow f$ μ -σ.π ή κατά μέτρο τότε $f_n \rightarrow f$ στον $L^p(\mu)$.

Πρόταση I.72. Το σύνολο των απλών συναρτήσεων στον $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ είναι πυκνό υποσύνολο του $L^p(\mu)$.

Θεώρημα I.73. Έστω p, q συζυγείς εκθέτες με $1 \leq p < \infty$. Η συνάρτηση $T : L^q(\mu) \rightarrow (L^p(\mu))^*$ με

$$T_g(f) = \int f g d\mu, \quad \forall g \in L^q(\mu) \text{ και } f \in L^p(\mu)$$

είναι ισομετρία και επί. Δηλαδή οι χώροι $(L^p(\mu))^*$ και $L^q(\mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι

(i). αν $p = 1$ και το μ είναι σ -πεπερασμένο.

(ii). αν $1 < p < \infty$ και το μ είναι αυθαίρετο μέτρο.

Παρατήρηση I.74. Από το γεγονός ότι οι $(L^p(\mu))^*$ και $L^q(\mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι προήλθε ο όρος συζυγείς εκθέτες για τους p, q .

Το πιο σημαντικό συμπέρασμα του προηγούμενου θεωρήματος είναι ότι η T είναι επί οπότε κάθε γραμμικό συνεχές συναρτησιακό του $L^p(\mu)$ αναπαρίσταται με ένα ολοκλήρωμα. Της ίδιας μορφής είναι το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz που θα δούμε σε επόμενη παράγραφο. Αυτά τα αποτελέσματα είναι η βάση για πολλές εφαρμογές της θεωρίας μέτρου στη συναρτησιακή ανάλυση αφού επιτρέπουν τη μελέτη συνεχών γραμμικών συναρτησιακών με μεθόδους της θεωρίας μέτρου.

Πρόταση I.75. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και μ πεπερασμένο μέτρο Borel στο X . Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στον $L^p(\mu)$ είναι πυκνό υποσύνολο του $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$.

Ορισμός I.76. Μια $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ λέγεται κλιμακωτή αν υπάρχει διαμέριση $[a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b]$ του $[a, b]$ ώστε η f να είναι σταθερή σε κάθε διάστημα (t_{i-1}, t_i) $i = 1, \dots, n$. Αν η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ θα λέγεται κλιμακωτή αν $f|_{[a,b]}$ είναι κλιμακωτή για κάθε διάστημα $[a, b]$.

Πρόταση I.77. Έστω μ κανονικό μέτρο στον $\mathbb{R}$ που ορίζεται σε μία σ -άλγεβρα $\mathcal{A}$ με $B(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Τότε καθένα από τα εξής δύο σύνολα είναι πυκνό στον $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$.

(i). Το σύνολο των κλιμακωτών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ που μηδενίζονται στο συμπλήρωμα ενός φραγμένου διαστήματος.

(ii). Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ που μηδενίζονται στο συμπλήρωμα ενός φραγμένου διαστήματος.

Πρόταση I.78. Ο $L^1(\lambda)$ με την συνέλιξη σαν πολλαπλασιασμό είναι μεταθετική άλγεβρα Banach.

Στην συνέχεια αντιμετωπίζουμε τους χώρους $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, κατά κάποιον τρόπο ανεξάρτητα από την προέλευσή τους, ορίζοντάς τους εκ νέου. Μας ενδιαφέρουν οι ιδιότητες τους και οι μεταξύ τους σχέσεις και εννοείται ότι αρκετές ιδιότητες που θα αναφέρουμε μας είναι ήδη γνωστές από τον προηγούμενο τρόπο θεώρησης. Δεν ασχολούμαστε με τους χώρους $L^p(\Omega)$ με $0 < p < 1$ διότι αποδεικνύεται ότι ο δυϊκός τους χώρος $(L^p(\Omega))^*$ είναι φτωχός αφού ισχύει ότι $(L^p(\Omega))^* = \{0\}$.

Ορισμός I.79. Έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Ορίζουμε ως

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f \text{ μετρήσιμη και } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

και

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Παρατήρηση I.80. Ο $L^1(\Omega)$ που ήδη ορίσαμε είναι ειδική περίπτωση των χώρων $L^p(\Omega)$ και μία $f \in L^1(\Omega)$ λέγεται ολοκληρώσιμη.

Ορισμός I.81. Έστω $p = \infty$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Ορίζουμε ως

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f \text{ μετρήσιμη για την οποία} \\ \text{υπάρχει } C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \text{ σ.π στο } \Omega \}$$

και

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \text{ σ.π στο } \Omega\}.$$

Παρατήρηση I.82. (i). Ισχύει $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ για κάθε $x \in \Omega \setminus A$ όπου A σύνολο μέτρου 0.

(ii). Η $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ λέγεται ουσιώδες supremum (essential supremum) της f .

Ορισμός I.83. Αν $f, g \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ ορίζουμε $f = g$ ανν $f = g$ σ.π στο Ω .

Ορισμός I.84. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Ορίζουμε ως

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f \text{ μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη} \\ \text{στα συμπαγή υποσύνολα } K \text{ του } \Omega \}$$

και η $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση I.85. (i). Τα συμπαγή υποσύνολα έχουν πεπερασμένο μέτρο.

(ii). Στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι τα συμπαγή είναι κλειστά και φραγμένα και αντίστροφα.

(iii). Έστω συνάρτηση $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Τότε ο περιορισμός της f στο K ανήκει στον $L^1(K)$ όπου K συμπαγές υποσύνολο του Ω .

Θεώρημα I.86. (Ανισότητα Hölder για ολοκληρώματα). Έστω $f \in L^p(\Omega)$ και $g \in L^q(\Omega)$ με p, q συζυγείς εκθέτες. Τότε η $fg \in L^1(\Omega)$ και

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Παρατήρηση I.87. (i). Ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα της ανισότητας Hölder για ολοκληρώματα περιγράφεται στη συνέχεια. Έστω $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ με $1 \leq i \leq k$ και

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1,$$

για $p \geq 1$, τότε η $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_k \in L^p(\Omega)$ και

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

(ii). Αν $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ με $1 \leq p \leq q \leq \infty$ τότε η $f \in L^r(\Omega)$ για κάθε r με $p \leq r \leq q$ και $\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^a \|f\|_{L^q}^{1-a}$ (ανισότητα παρεμβολής) όπου $1/r = a/p + (1-a)/q$ για $0 \leq a \leq 1$.

Για παράδειγμα αν $p = 3/2$ τότε $q = 3$ και η f με βάση το συμπέρασμα της ανισότητας παρεμβολής ανήκει στους L^r με $3/2 \leq r \leq 3$. Αν θεωρήσουμε $r = 5/2$ τότε $a = 1/5$ οπότε έχουμε

$$\|f\|_{L^{5/2}} \leq \|f\|_{L^{3/2}}^{1/5} \|f\|_{L^3}^{4/5}.$$

Θεώρημα I.88. Αν οι $f, g \in L^p(\Omega)$ τότε η $f + g \in L^p(\Omega)$ ενώ η fg δεν ανήκει γενικά στον $L^p(\Omega)$.

Θεώρημα I.89. Οι $L^p(\Omega)$ είναι γραμμικοί χώροι και η $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ είναι νόρμα για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.

Θεώρημα I.90. Οι $L^p(\Omega)$ είναι χώροι Banach για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.

Θεώρημα I.91. Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία του $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ και $f \in L^p(\Omega)$ ώστε $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ ώστε

(i). $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ σ.π στο Ω .

(ii). $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και σ.π στο Ω με $h \in L^p(\Omega)$.

Ορισμός I.92. Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Η $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέμε ότι ανήκει στον $L_{loc}^p(\Omega)$ αν $f|_{\chi_K}$ ανήκει στον $L^p(\Omega)$ για κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$.

Θεώρημα I.93. Αν $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ και $\phi \in C_0(\Omega)$ τότε η $f\phi \in L^1(\Omega)$.

Λήμμα I.94. Έστω συνάρτηση $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $\int_{\Omega} f\phi = 0$ για κάθε $\phi \in C_0(\Omega)$ ή $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Τότε $f = 0$ σ.π στο Ω .

Πρόταση I.95. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό και $p_1, p_2 \in [1, \infty]$ με $p_1 \leq p_2$. Τότε $L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$.

Πρόταση I.96. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό. Τότε

- (i). $L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.
- (ii). $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ με $1 \leq p \leq \infty$.

Πρόταση I.97. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό. Τότε

- (i). ο $C(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ για $1 \leq p \leq \infty$ μόνο αν το Ω είναι φραγμένο.
- (ii). ο $C_0(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ για $1 \leq p \leq \infty$.
- (iii). ο $C_0(\Omega)$ είναι πυκνός στους $L^p(\Omega)$ με $1 \leq p < \infty$ ως προς την $\|\cdot\|_{L^p}$ ενώ κάτι τέτοιο δεν ισχύει για $p = \infty$.
- (iv). ο $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στους $L^p(\Omega)$ με $1 \leq p < \infty$ δηλαδή για κάθε $f \in L^p(\Omega)$ υπάρχει $\{f_n\}$ στον $C_0^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.
- (v). ο $C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.
- (vi). ο $C(\Omega) \not\subset L^1(\Omega)$.
- (vii). $C([a, b]) \subset L^1([a, b])$.

Συνέλιξη

Θεώρημα I.98. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ με $1 \leq p \leq \infty$. Τότε σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $y \rightarrow f(x - y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

Τότε

- (i). $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
- (ii). $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Πρόταση I.99. (Ορισμός του φορέα μετρήσιμης συνάρτησης). Να θυμίσουμε ότι ο φορέας μιας συνεχούς συνάρτησης είναι το συμπλήρωμα του μεγαλύτερου ανοικτού συνόλου στο οποίο η συνάρτηση μηδενίζεται. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και f μια συνάρτηση ορισμένη στο Ω με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την οικογένεια $\{w_i\}_{i \in I}$ όλων των ανοικτών υποσυνόλων του Ω τέτοιων ώστε $f = 0$ σ.π στο w_i για κάθε $i \in I$. Θέτουμε $w = \cup_{i \in I} w_i$. Τότε $f = 0$ σ.π στο Ω και ορίζουμε ως φορέα της f το $\Omega \setminus w$, δηλαδή $\text{supp } f = \Omega \setminus w$.

Παρατήρηση I.100. (i). Αν $f_1 = f_2$ σ.π στο Ω τότε $\text{supp } f_1 = \text{supp } f_2$ οπότε μπορούμε να αναφερόμαστε στο φορέα μιας συνάρτησης $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ χωρίς να διευκρινίζουμε ποιον αντιπρόσωπο επιλέγουμε στην κλάση ισοδυναμίας.

(ii). Αν η f είναι συνεχής στο Ω τότε αυτός ο ορισμός συμπίπτει με τον συνήθη ορισμό.

Πρόταση I.101. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ τότε

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp } f \cup \text{supp } g.$$

Παρατήρηση I.102. Αν οι f, g έχουν και οι δύο συμπαγή φορέα τότε και η $f * g$ έχει συμπαγή φορέα. Γενικά αν ο ένας μόνο από τους φορείς είναι συμπαγής τότε η $f * g$ δεν έχει συμπαγή φορέα.

Πρόταση I.103. Έστω $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, k ακέραιος. Τότε

(i). $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

(ii). $D^k(f * g) = (D^k f) * g$.

Ειδικά αν $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ τότε $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ομαλοποιητικές ακολουθίες

Ορισμός I.104. Καλούμε ομαλοποιητική ακολουθία, κάθε ακολουθία συναρτήσεων $\{\rho_n\}$ τέτοια ώστε

(i). $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(ii). $\text{supp } \rho_n \subset B(0, 1/n)$.

(iii). $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x) dx = 1$.

(iv). $\rho_n \geq 0$ στο $\mathbb{R}^N$.

Π.χ, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{|x|^2}-1}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

και

$$\rho_n(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x) dx \right)^{-1} n^N \rho(nx).$$

Η $\{\rho_n\}$ είναι ομαλοποιητική.

Πρόταση I.105. Έστω $f \in C(\mathbb{R}^N)$. Τότε $\rho_n * f \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$.

Πρόταση I.106. Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. Τότε $\rho_n * f \rightarrow f$ στον $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Πρόταση I.107. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό. Τότε ο χώρος $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Ο χώρος $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$

Θεώρημα I.108. Οι $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ είναι ανακλαστικοί.

Θεώρημα I.109. (Αναπαράστασης του Riesz). Έστω $1 < p < \infty$ και $\phi \in (L^p(\Omega))^*$. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in L^q(\Omega)$ (ο q είναι ο συζυγής εκθέτης του p) τέτοια ώστε

$$\langle \phi, f \rangle = \int_{\Omega} u(x)f(x)dx, \text{ για κάθε } f \in L^p(\Omega).$$

Επιπλέον ισχύει $\|u\|_{L^q} = \|\phi\|_{(L^p)^*}$.

Παρατήρηση I.110. Κάθε γραμμικό συνεχές συναρτησιακό στον $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, παρίστανται μέσω μιας συνάρτησης u του $L^q(\Omega)$. Η απεικόνιση $\phi \rightarrow u$ είναι γραμμικός τελεστής ισομετρικός και επί ο οποίος μας επιτρέπει να ταυτίζουμε τον $(L^p)^*$ με τον $L^q(\Omega)$. Στη συνέχεια πορευόμαστε με βάση την ταύτιση αυτή.

Θεώρημα I.111. (Πυκνότητας). Ο χώρος $C_0(\Omega)$ είναι πυκνός στους $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Ορισμός I.112. Οι χώροι $L^p(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμοι για $1 < p < \infty$.

Παρατήρηση I.113. Θεωρούμε $u \in L^p(\Omega)$. Με τη βοήθεια της u ορίζουμε ένα συναρτησιακό f_u επί του $L^q(\Omega)$ δηλαδή $f_u : L^q(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_u(v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad v \in L^q(\Omega)$$

και αποδεικνύεται ότι το f_u είναι γραμμικό και συνεχές, οπότε είναι στοιχείο του $(L^q)^*$. Έχουμε δείξει ότι το $f_u \in (L^q(\Omega))^*$ αλλά γράφουμε $u \in (L^q(\Omega))^*$ αφού η απεικόνιση $T : u \rightarrow f_u$ είναι γραμμική ισομετρία όπως μας εξασφαλίζει το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Θα γράφουμε

$$\langle u, v \rangle_{L^p, L^q} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

το οποίο ορίζουμε ως δυϊκό γινόμενο. Άρα $L^p(\Omega) \subset (L^q(\Omega))^*$ και ακόμα πιο ισχυρά ισχύει $(L^q(\Omega))^* = L^p(\Omega)$ σύμφωνα με το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Είναι γνωστό ότι η ασθενής σύγκλιση $v_n \rightharpoonup v$ στον $L^q(\Omega)$ ισοδυναμεί με την έκφραση

$$\langle u, v_n \rangle_{L^p, L^q} \rightarrow \langle u, v \rangle_{L^p, L^q}, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Έχουμε δηλαδή σύγκλιση ολοκληρωμάτων χωρίς κυριαρχημένη σύγκλιση, λήμμα Fatou κ.λ.π.

Παρατήρηση I.114. Έστω $f, g \in L^2(\Omega)$. Ορίζουμε την ποσότητα

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

η οποία αποδεικνύεται ότι είναι εσωτερικό γινόμενο με αποτέλεσμα η ανισότητα Cauchy-Schwarz να παίρνει τη μορφή

$$|(f, g)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Αφού οι χώροι $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ με $1 \leq p \leq \infty$ είναι Banach, είναι πλήρεις ως προς τη μετρική ρ που επάγει η νόρμα $\|\cdot\|_{L^p}$, δηλαδή $\rho(f, g) = \|f - g\|_{L^p}$. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, στον $L^2(\Omega)$ η $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ μπορεί να προκύψει από το εσωτερικό γινόμενο $(f, g)_{L^2}$. Άρα ο $L^2(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert και λόγω αυτής της ιδιότητας είναι ο καταλληλότερος χώρος-πλαίσιο στον οποίο επιχειρούμε να αναζητήσουμε λύσεις γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Ο χώρος $L^1(\Omega)$

Θεώρημα I.115. Έστω $\phi \in (L^1(\Omega))^*$. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in L^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\langle \phi, f \rangle = \int_{\Omega} u(x) f(x) dx \text{ για κάθε } f \in L^1(\Omega).$$

Επιπλέον ισχύει

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^1(\Omega))^*}.$$

Παρατήρηση I.116. (i). Κάθε γραμμικό συνεχές συναρτησιακό στον $L^1(\Omega)$, παριστάνεται μέσω μιας συνάρτησης u του $L^\infty(\Omega)$. Η απεικόνιση $\phi \mapsto u$ είναι επί ισομετρία και μας επιτρέπει να ταυτίζουμε τον $(L^1(\Omega))^*$ με τον $L^\infty(\Omega)$.

(ii). Ο $L^1(\Omega)$ δεν είναι ανακλαστικός.

Ο χώρος $L^\infty(\Omega)$

Παρατήρηση I.117. Από την ταύτιση $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$ προκύπτει ότι

(i). Η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B[0, 1]_{L^\infty(\Omega)}$ είναι συμπαγής για την ασθενή* τοπολογία $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$.

(ii). Εάν $\{f_n\}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $L^\infty(\Omega)$ τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε μια υπακολουθία της η οποία συγκλίνει στον $L^\infty(\Omega)$ για την ασθενή* τοπολογία $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$.

Πρόταση I.118. Ο χώρος $L^\infty(\Omega)$ δεν είναι ανακλαστικός. Αυτό προκύπτει από τον απλό συλλογισμό ότι αν ίσχυε το αντίθετο, θα έπρεπε και ο $L^1(\Omega)$ να είναι ανακλαστικός, το οποίο δεν ισχύει.

Τίθεται το εξής ερώτημα. Με τι μοιάζει ο $(L^\infty(\Omega))^*$; Με χρήση της αντιμεταθετικής C^* άλγεβρας Banach αποδεικνύεται ότι ο $(L^\infty(\Omega), \mathbb{C})^*$ ταυτίζεται με το χώρο μέτρων (Radon) πάνω στον K (με τιμές στον $\mathbb{C}$) όπου K συμπαγής τοπολογικός χώρος. Ο $(L^\infty(\Omega), \mathbb{R})^*$ ταυτίζεται με το χώρο μέτρων (Radon) πάνω στο K (με τιμές στο $\mathbb{R}$).

Λήμμα I.119. Έστω X χώρος Banach και $(\Omega_i)_{i \in I}$ ώστε

(i). Για κάθε $i \in I$ το Ω_i είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X .

(ii). $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ αν $i \neq j$.

(iii). Το I δεν είναι αριθμήσιμο.

Τότε ο X δεν είναι διαχωρίσιμος.

Θεώρημα I.120. Ο χώρος $L^\infty(\Omega)$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Παράρτημα J

Ασθενείς Παράγωγοι Συναρτήσεων

Υπενθυμίζουμε από το Παράρτημα Παράγωγοι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα J.1. (μικτών παραγώγων ή θεώρημα Schwarz-Young). Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}$ και οι μικτές μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, i \neq j$ μιας συνάρτησης $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή $S \subseteq X$ τότε για κάθε εσωτερικό σημείο του S ισχύει

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

Δηλαδή οι μικτές παράγωγοι είναι ανεξάρτητες από τη σειρά παραγωγίσης ως προς τις διάφορες μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή είναι προφανές ότι ο πίνακας Hesse, Hf , είναι συμμετρικός. Προφανώς το θεώρημα των μικτών παραγώγων ισχύει και για τις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης του δύο.

Ορισμός J.2. Το σύνολο των συναρτήσεων f που έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους τάξεως $\leq k$ θα συμβολίζουμε με C^k . Μια συνάρτηση $f \in C^k$, που ονομάζεται και C^k συνάρτηση, λέμε ότι είναι k -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (k -times continuously differentiable). Αν $k = +\infty$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ή ότι η f είναι μία C^∞ συνάρτηση και διαβάζουμε " C -άπειρο". Μια συνάρτηση f που είναι απλώς συνεχής θα λέμε ότι είναι μια C συνάρτηση.

Έτσι αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι k -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή $f \in C^k$, τότε η k τάξεως μερική παράγωγός της έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^k f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}, \quad r_i \in \{0, \dots, k\} \text{ και } r_1 + \dots + r_n = k.$$

Προφανώς αν κάποιο r_i είναι μηδέν τότε η f δεν έχει παραγωγηθεί ως προς τη μεταβλητή x_i . Π.χ.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^0 \partial x_2^3 \partial x_3} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^3 \partial x_3}.$$

Επειδή αρκετές φορές χρειάζεται να αναφερθούμε π.χ. στις μερικές παραγώγους τέταρτης τάξης μιας συνάρτησης f , έστω τριών ανεξάρτητων μεταβλητών, δηλαδή $f(x_1, x_2, x_3)$ για ευκολία εισάγουμε τον πολυδείκτη $a = (a_1, \dots, a_N)$ με $a_i \in \mathbb{N}_0$ και ορίζοντας ως $|a| = a_1 + \dots + a_N$ συμφωνούμε με $D^a f$ να συμβολίζουμε την

$$\frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_N^{a_N}}.$$

Δηλαδή

$$D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_N^{a_N}}$$

για $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό θα έχουμε για το παράδειγμα $a = (a_1, a_2, a_3)$ με $|a| = 4$ ότι

$$D^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \partial x_3^{a_3}}.$$

Η παραπάνω ποσότητα εκφράζει όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να προκύψει η τέταρτης τάξης μερική παράγωγος. Δηλαδή

$$a = (1, 1, 2), a = (2, 1, 1), a = (0, 0, 4), \text{ κ.λ.π.}$$

Διευκρινίζουμε ότι στον ορισμό του $D^a f$ αν $|a| = 0$, δηλαδή $a = (0, \dots, 0)$ τότε $D^0 f = f$. Αν $|a| = 1$, δηλαδή $a = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ με 1 στην i -θέση τότε η $D^1 f = \partial f / \partial x_i$ ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς την μεταβλητή x_i , $i = 1, \dots, N$. Τέλος αν $|a| > 1$, δηλαδή $a = (a_1, \dots, a_N)$ η $D^a f$ ονομάζεται a -τάξης μικτή παράγωγος της f και για να είμαστε πιο ακριβείς a -τάξης μικτή παράγωγος της f ως προς τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_N$ αντίστοιχα.

Υπενθυμίζουμε επίσης την παρακάτω πρόταση (βλέπε Παράρτημα Τύποι Green)

Πρόταση J.3. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Αν $f, g \in C^1(\Omega)$ και f ή $g \in C_0^1(\Omega)$ τότε

$$\int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_i} f dx, \quad i = 1, \dots, m$$

Επίσης ισχύει η εξής πρόταση.

Πρόταση J.4. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Αν $f \in C(\Omega)$ και υπάρχει συνάρτηση $g_i(x) \in C(\Omega)$ με $i = 1, \dots, m$ ώστε για κάθε $\phi \in C_0^1(\Omega)$ να ισχύει

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i(x) \phi(x) dx \quad (J.1)$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη ως προς τη μεταβλητή x_i και ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i.$$

Ορισμός J.5. Στηριζόμενοι στην ισότητα (J.1) μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της κλασσικής μερικής παραγώγου ως προς τη μεταβλητή x_i , $i = 1, \dots, m$ για οποιαδήποτε $f \in C(\Omega)$ ορίζοντας ως ασθενή μερική παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή x_i τη συνάρτηση $g_i \in C(\Omega)$ για την οποία ισχύει η (J.1). Συχνά χρησιμοποιείται ο γνωστός κλασσικός συμβολισμός $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ για την g_i αλλά πρέπει να διευκρινίζεται ότι πρόκειται για την ασθενή μερική παράγωγο της f ως προς x_i .

Πρόταση J.6. Έστω συνάρτηση u παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in I$ και $u' \in L^1(I)$, I διάστημα του $\mathbb{R}$. Τότε η κλασσική u' είναι και ασθενής παράγωγος της u , δηλαδή οι δύο έννοιες ταυτίζονται όταν η u είναι παραγωγίσιμη. Είναι φανερό ότι αν $u' \in C(I)$ το συμπέρασμα ισχύει κατά μείζονα λόγο αφού $C(I) \subset L^1(I)$.

Απόδειξη. Για να δείξουμε την πρόταση θα χρησιμοποιήσουμε το γενικευμένο θεώρημα του διαφορικού λογισμού το οποίο αναφέρει:

Θεώρημα J.7. Αν w είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε κάθε $x \in I$ και η κλασσική παράγωγός της είναι ολοκληρώσιμη στο I , δηλαδή $w' \in L^1(I)$ τότε για κάθε $a, b \in I$ με $a < b$ ισχύει

$$\int_a^b w'(t)dt = w(b) - w(a).$$

Έστω συνάρτηση u παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in I$ με $u' \in L^1(I)$ όπου $I = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$. Έστω επίσης $\phi \in C_0^1(I)$. Έχουμε

$$\int_a^b (u\phi)' = [u(x)\phi(x)]_a^b = u(b)\phi(b) - u(a)\phi(a) = 0.$$

Επίσης

$$\int_a^b (u\phi)' = \int_a^b u'\phi + \int_a^b u\phi'.$$

άρα

$$\int_a^b u'\phi + \int_a^b u\phi' = 0,$$

οπότε

$$\int_a^b u\phi' = - \int_a^b u'\phi.$$

Επομένως με βάση τον ορισμό της ασθενούς παραγώγου η κλασσική παράγωγος u' της u είναι και ασθενής παράγωγός της. $\square$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν η $u \in C^1(\Omega)$, τότε οι ασθενείς μερικές παράγωγοι της u είναι ίσες με τις κλασσικές μερικές παραγώγους της.

Ορισμός J.8. Αν δεχτούμε ότι οι συναρτήσεις f και g_i δεν είναι συνεχείς, ότι ανήκουν στον $L^2(\Omega)$ και ότι για κάθε $\phi \in C_0^1(\Omega)$ ισχύει η ισότητα

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \phi,$$

μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της κλασσικής μερικής παραγώγου στον ευρύτερο χώρο συναρτήσεων $L^2(\Omega)$ ορίζοντας την g_i ως ασθενή (ή γενικευμένη) μερική παράγωγο της $f \in L^2(\Omega)$ ως προς τη μεταβλητή x_i .

Ορισμός J.9. Έστω $f \in L^2(\Omega)$. Την συνάρτηση $g \in L^2(\Omega)$ που ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_{\Omega} f(x) D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx$$

για κάθε $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ή για κάθε $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ονομάζουμε a -τάξης ασθενή (γενικευμένη) μικτή παράγωγο της f ως προς τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_N$ αντίστοιχα.

Συχνά χρησιμοποιείται ο γνωστός κλασσικός συμβολισμός $D^a f$ ή και $f^{(a)}$ για την g αλλά πρέπει να διευκρινίζεται ότι πρόκειται για την ασθενή παράγωγο της f . Θα μας διευκολύνει, όπως θα φανεί στο παράρτημα των κατανομών, να καθιερώσουμε τον χαρακτηρισμό ασθενούς παράγωγος και να κρατήσουμε τον χαρακτηρισμό γενικευμένη παράγωγο για την παράγωγο μιας συνάρτησης με την έννοια των κατανομών. Τονίζουμε ότι πρόκειται για μια απλή σύμβαση, η οποία γενικά στην βιβλιογραφία δεν ισχύει.

Παρατήρηση J.10. (i). Αν η $f \in L^2(\Omega)$ έχει a -τάξης ασθενή παράγωγο $D^a f = F$ και η F έχει b -τάξης ασθενή παράγωγο Φ τότε υπάρχει η $a+b$ -τάξης ασθενούς παράγωγος $D^{a+b} f = \Phi$ της f .

(ii). Ισχύει $D^a (\sum_{k=1}^n c_k f_k) = \sum_{k=1}^n c_k D^a f_k$.

(iii). Η $D^a f$ δεν εξαρτάται από τη σειρά των $\partial^{a_k} f / \partial x_k^{a_k}$, $k = 1, \dots, n$.

(iv). Η $D^1(f_1 f_2) = (D^1 f_1) f_2 + f_1 (D^1 f_2)$ ισχύει αν υποθέσουμε ότι οι $f_1, f_2, D^1 f_1, D^1 f_2$ ανήκουν στον $L^2(\Omega)$.

(v). Στην κλασσική περίπτωση, αν η συνάρτηση δεν έχει κατώτερης τάξης παράγωγο τότε δεν μπορεί να έχει ανώτερης τάξης παράγωγο. Στις ασθενείς παραγώγους κάτι τέτοιο δεν ισχύει.

(vi). Η ασθενής παράγωγος σαν συνάρτηση του $L^2(\Omega)$ ορίζεται σ.π στο Ω .

Συνοψίζουμε και γενικεύουμε τα προηγούμενα με τους δύο παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός J.11. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in C^k(\Omega)$. Τότε

$$D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_N^{a_N}}, \quad a_i \in \mathbb{N},$$

όπου $D^0 f = f$ και $|a| = a_1 + \dots + a_N = k$.

Ορισμός J.12. Έστω $f \in L_{loc}^1(\Omega)$. Τότε η $D^a f = g$ με $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ λέγεται a -τάξης ασθενής παράγωγος της f αν

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial^{|a|} \phi}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_N^{a_N}} dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} g \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(Διατηρούμε τον ίδιο συμβολισμό είτε $f \in C^k(\Omega)$ είτε $f \in L_{loc}^1(\Omega)$).

Παρατήρηση J.13. Η ασθενής παράγωγος δεν είναι τοπική ιδιότητα αλλά αναφέρεται σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και δεν είναι μοναδική με την αυστηρή έννοια αφού π.χ. αν $\int_0^1 v\phi = 0$ για κάθε $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ τότε $v = 0$ σ.π. στο Ω .

Παράδειγμα J.14. Έστω $u(x) = |x|$, $x \in I = (-1, 1)$. Θεωρούμε $\phi \in C_0^1((-1, 1))$. Τότε έχουμε

$$\int_{-1}^1 u\phi' = - \int_{-1}^1 g\phi,$$

όπου

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0) \\ +1, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

$Hg \in L_{loc}^1(-1, 1)$, και είναι η πρώτης τάξης ασθενής παράγωγος της u .

Παράδειγμα J.15. Έστω $\Omega = (-1, 1)$ και

$$u(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$Hu \in L^1(-1, 1) \subset L_{loc}^1(-1, 1)$. Θεωρούμε $\phi \in C_0^1(-1, 1)$. Τότε έχουμε

$$\int_{-1}^1 u\phi' = - \int_{-1}^1 H\phi,$$

όπου

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

η μοναδιαία κλιμακωτή συνάρτηση Heaviside. Η συνάρτηση $H \in L_{loc}^1(-1, 1)$ είναι η πρώτης τάξης ασθενής παράγωγος της u .

Το παρακάτω παράδειγμα αποτελεί παεάδειγμα συνάρτησης που ανήκει στον $L_{loc}^1(\Omega)$ και δεν έχει ασθενή παράγωγο που ανήκει στον $L_{loc}^1(\Omega)$.

Παράδειγμα J.16. Έστω $\Omega = (-1, 1)$ και

$$u(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι η u έχει ασθενή παράγωγο $u' \in L_{loc}^1(-1, 1)$. Τότε για κάθε $\phi \in C_0^1(-1, 1)$ πρέπει να ισχύει

$$\int_{-1}^1 u\phi' = - \int_{-1}^1 u'\phi.$$

Έστω $0 < \varepsilon < 1$ και $\phi_\varepsilon \in C_0^1(-1, 1)$ ώστε

$$\text{supp } \phi_\varepsilon \subset (-\varepsilon, \varepsilon), \phi_\varepsilon(0) = 1 \text{ και } 0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 u(x) \phi'_\varepsilon(x) dx &= - \int_{-1}^1 u'(x) \phi_\varepsilon(x) dx \\
\int_{-1}^0 u(x) \phi'_\varepsilon(x) dx + \int_0^1 u(x) \phi'_\varepsilon(x) dx &= - \int_{-\varepsilon}^\varepsilon u'(x) \phi_\varepsilon(x) dx \\
\int_{-1}^0 (-1) \phi'_\varepsilon(x) dx + \int_0^1 \phi'_\varepsilon(x) dx &= - \int_{-\varepsilon}^\varepsilon u'(x) \phi_\varepsilon(x) dx \\
- [\phi_\varepsilon(x)]_{-1}^0 + [\phi_\varepsilon(x)]_0^1 &= - \int_{-\varepsilon}^\varepsilon u'(x) \phi_\varepsilon(x) dx \\
- \phi_\varepsilon(0) + \phi_\varepsilon(-1) + \phi_\varepsilon(1) - \phi_\varepsilon(0) &= - \int_{-\varepsilon}^\varepsilon u'(x) \phi_\varepsilon(x) dx \\
2 &= \int_{-\varepsilon}^\varepsilon u'(x) \phi_\varepsilon(x) dx
\end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned}
2 &= \left| \int_{-\varepsilon}^\varepsilon u'(x) \phi_\varepsilon(x) dx \right| \leq \int_{-\varepsilon}^\varepsilon |u'(x) \phi_\varepsilon(x)| dx \\
&= \int_{-\varepsilon}^\varepsilon |u'(x)| |\phi_\varepsilon(x)| dx \leq \int_{-\varepsilon}^\varepsilon |u'(x)| dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0,
\end{aligned}$$

άτοπο. άρα η u δεν έχει ασθενή παράγωγο $u' \in L^1_{loc}(-1, 1)$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f \in L^1(\Omega)$ τότε $\int_E |f| d\mu \rightarrow 0$ καθώς $\mu(E) \rightarrow 0$. Αυτό το κενό, την μη ύπαρξη α -τάξης ασθενούς παραγώγου για κάποιες συναρτήσεις του $L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, θα συμπληρώσει η έννοια της παραγώγου συνάρτησης με την έννοια των κατανομών, (βλέπε Παράρτημα Κατανομές) την οποία (για λόγους διάκρισης) θα αποκαλούμε γενικευμένη παράγωγο.

Παράρτημα Κ

Κατανομές

Προσεγγίζοντας τις γενικευμένες συναρτήσεις και τις παραγώγους τους

Έστω μια διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $0 \leq x \leq \pi$. Γνωρίζουμε ότι η f μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως από τους ημιτονικούς της συντελεστές Fourier

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx,$$

δηλαδή από τη "δράση" της πάνω στο βοηθητικό σύνολο συναρτήσεων

$$\sin(x), \sin(2x), \dots$$

. Ο παραπάνω τρόπος περιγραφής της f δεν εστιάζει στη σημειακή συμπεριφορά της, δηλαδή στην αντιστοίχιση σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενός πραγματικού αριθμού $y = f(x)$, την τιμή της στο x , αλλά στηρίζεται στην ολική συμπεριφορά της, δηλαδή στη δράση της, όπως προαναφέραμε, πάνω στο βοηθητικό σύνολο συναρτήσεων $\sin(x), \sin(2x), \dots$

Η βασική ιδέα της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων στηρίζεται σε μία τέτοια θεώρηση μιας συνάρτησης f και στην περιγραφή της με αυτόν τον έμμεσο τρόπο. Αντί λοιπόν να αντιστοιχούμε τις τιμές της σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}^n$, αντιστοιχούμε τον πραγματικό αριθμό $\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) \phi(\vec{x}) d\vec{x}$ για κάθε συνάρτηση ϕ που ανήκει σε μία κλάση K βοηθητικών συναρτήσεων, οι οποίες χρησιμεύουν ως μέσο ορισμού της f . Αντιμετωπίζοντας με αυτόν τον τρόπο την συνάρτηση f λέμε ότι είναι ένα συναρτησιακό στο σύνολο K .

Ορισμός Κ.1. Ονομάζουμε δοκιμαστικές συναρτήσεις (*test functions*) τις συναρτήσεις που είναι άπειρες φορές διαφορίσιμες και μηδενίζονται έξω από κάποιο φραγμένο χωρίο. Το σύνολο των δοκιμαστικών συναρτήσεων συμβολίζουμε με C_0^∞ ή C_c^∞ . Ονομάζουμε φορέα της δοκιμαστικής συνάρτησης ϕ και συμβολίζουμε με $\text{supp } \phi$, το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει τα σημεία x για τα οποία $\phi(x) \neq 0$. Δηλαδή

$$\text{supp } \phi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \text{ τέτοια ώστε } \phi(x) \neq 0\}},$$

όπου με την παύλα συμβολίζουμε το τοπολογικό κάλυμμα του συνόλου. Ως ένα παράδειγμα δοκιμαστικής συνάρτησης αναφέρουμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Ορισμός Κ.2. Ονομάζουμε γενικευμένη συνάρτηση ή κατανομή κάθε γραμμικό και συνεχές συναρτησιακό T που δρα πάνω σε ένα σύνολο των δοκιμαστικών συναρτήσεων. Δηλαδή κάθε συνεχή απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε δοκιμαστική συνάρτηση ϕ (μέσα από ένα συγκεκριμένο νόμο, σχετιζόμενο με μια συνάρτηση f , τον οποίο ας συμβολίσουμε T_f) έναν πραγματικό αριθμό, δηλαδή $T_f : C_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}$. Την εικόνα του T συμβολίζουμε με $T_f(\phi) = \langle T_f, \phi \rangle$.

Παρατήρηση Κ.3. (i). Το ότι η T_f είναι γραμμική σημαίνει ότι

$$\langle T_f, a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \rangle = a_1\langle T_f, \phi_1 \rangle + a_2\langle T_f, \phi_2 \rangle,$$

όπου $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

(ii). Το ότι η T_f είναι συνεχής σημαίνει ότι αν πάρουμε μία ακολουθία $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ όπου όλες οι συναρτήσεις μηδενίζονται έξω από ένα κοινό σύνολο και οι ϕ_n και όλες οι παράγωγοί τους συγκλίνουν ομοιόμορφα στο μηδέν τότε

$$\langle T_f, \phi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Θα αναφέρουμε δύο παραδείγματα γενικευμένων συναρτήσεων ή κατανομών, τα οποία κατηγοριοποιούν κατά κάποιο τρόπο τις γενικευμένες συναρτήσεις σε ομαλές (regular) και σε ιδιάζουσες (singular).

Παράδειγμα Κ.4. Θεωρούμε μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ στον $\mathbb{R}^n$ (μια συνάρτηση που ολοκληρώνεται σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$). Ορίζουμε μέσω της f , μια γενικευμένη συνάρτηση που περιγράφεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \langle T_f, \phi \rangle &= \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n)\phi(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

όπου $\phi \in C_0^\infty$, δηλαδή σε κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f αντιστοιχεί μια μοναδική γενικευμένη συνάρτηση T_f . Η T λέγεται ομαλή.

Παράδειγμα Κ.5. Ορίζουμε στο $\mathbb{R}$ την γενικευμένη συνάρτηση δ με

$$\langle \delta, \phi \rangle = \delta(\phi) = \phi(0), \quad \phi \in C_0^\infty,$$

δηλαδή ένα συναρτησιακό που απεικονίζει κάθε δοκιμαστική συνάρτηση ϕ στην τιμή της στο μηδέν. Αντίστοιχα ορίζουμε και την μετατοπισμένη γενικευμένη συνάρτηση δ_{x_0} με

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \delta_{x_0}(\phi) = \delta(x - x_0) = \phi(x_0).$$

Γράφουμε επίσης

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_{x_0}(x) \phi(x) dx = \phi(x_0).$$

Η δ λέγεται *ιδιάζουσα*.

Συνεχίζουμε με την εισαγωγή των γενικευμένων παραγώγων των γενικευμένων συναρτήσεων. Πώς μπορεί να οριστεί μία τέτοια έννοια; Ας θεωρήσουμε αρχικά μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε η f' να είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, δηλαδή $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Μπορούμε να ορίσουμε τη γενικευμένη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \langle T_{f'}, \phi \rangle &= \langle f', \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \phi(x) dx \\ &= [f(x) \phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi'(x) dx \\ &= -\langle f, \phi' \rangle = -\langle T_f, \phi' \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty. \end{aligned}$$

Εξασφαλίζοντας ότι το δεξιό μέλος ορίζει μία γενικευμένη συνάρτηση, πράγμα το οποίο είναι εύκολο να δείξουμε, η παραπάνω ισότητα μας δίνει την ιδέα για τον ορισμό της γενικευμένης παραγώγου.

Ορισμός K.6. Η γενικευμένη παράγωγος n -τάξης της γενικευμένης συνάρτησης T ορίζεται από τον τύπο

$$\langle T^{(n)}, \phi \rangle = T^{(n)}(\phi) = (-1)^n T(\phi^{(n)}) = (-1)^n \langle T, \phi^{(n)} \rangle,$$

δηλαδή η $T^{(n)}$ είναι η γενικευμένη συνάρτηση που απεικονίζει τη δοκιμαστική συνάρτηση ϕ στην τιμή που η T απεικονίζει τη δοκιμαστική συνάρτηση $(-1)^n \phi^{(n)}$. Ειδικά για το συναρτησιακό του Dirac έχουμε

$$\delta^{(n)}(\phi) = (-1)^n \delta(\phi^{(n)}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Παρατήρηση K.7. Με την απαίτηση κάθε δοκιμαστική συνάρτηση να μηδενίζεται έξω από κάποιο φραγμένο σύνολο, ώστε να εξαλείψουμε τη συνεισφορά από τους συνοριακούς όρους στην παραγοντική ολοκλήρωση, μπορούμε να ορίσουμε κάθε τάξης παράγωγο της γενικευμένης συνάρτησης αφού υπάρχει κάθε τάξης παράγωγος της $\phi \in C_0^\infty$.

Η έννοια της κατανομής γενικεύει την έννοια της συνάρτησης. Έτσι όλες οι τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν ως κατανομές ενώ υπάρχουν κατανομές που δεν προέρχονται από τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και μια τέτοια είναι η συνάρτηση δ .

Για τη θεωρία κατανομών εισάγεται επίσης μια καινούργια έννοια παραγωγίσιμης. Η γενικευμένη αυτή παραγωγή εισήχθη αρχικά από τον S.L. Sobolev το 1937 και χρησιμοποιήθηκε πολύ αργότερα στη θεωρία κατανομών από τον L. Schwarz το 1947. Το πλεονέκτημα της γενικευμένης παραγώγου είναι ότι επιτρέπει την παραγωγή και συναρτήσεων που με την κλασική έννοια δεν είναι παραγωγίσιμες όπως για παράδειγμα όλων των συνεχών συναρτήσεων.

Έτσι η γενικευμένη παράγωγος της μοναδιαίας κλιμακωτής συνάρτησης του Heaviside με

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση δ . Επίσης πολύ σημαντική για τις εφαρμογές είναι η επέκταση της έννοιας του μετασχηματισμού Fourier και στις κατανομές. Διατυπώνοντας πιο αυστηρά τα προηγούμενα έχουμε

Ορισμός Κ.8. (i). Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε το σύνολο των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα ως,

$$\mathbb{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$$

δηλαδή $f \in \mathbb{D}(\Omega)$ σημαίνει ότι $\text{supp } f \subset \Omega$ και υπάρχουν όλες οι παράγωγοι,

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}}, \quad \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

όπου $|\alpha| = a_1 + \dots + a_n$ και $a_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \dots, n$. Επίσης $D^{(0, \dots, 0)} f = f$.

(ii). Στο $\mathbb{D}(\Omega)$ ορίζουμε την εξής έννοια σύγκλισης: Έστω (f_n) ακολουθία, $f_n \in \mathbb{D}(\Omega)$ και $f \in \mathbb{D}(\Omega)$. Θα λέμε ότι

$$f_n \rightarrow f \text{ στο } \mathbb{D}$$

αν

(1). οι f_n και f έχουν κοινό φορέα, δηλαδή $\exists K \subset \Omega$ συμπαγές, τέτοιο ώστε $\text{supp } f_n, \text{supp } f \subset K$ και

(2). $D^\alpha f_n \rightarrow D^\alpha f$ ομοιόμορφα για κάθε πολυδείκτη $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Ορισμός Κ.9. Το σύνολο των κατανομών επί του Ω είναι το σύνολο όλων των συνεχών (με την προηγούμενη έννοια) γραμμικών συναρτησιακών του $\mathbb{D}(\Omega)$, δηλαδή

$$\mathbb{D}'(\Omega) := \{\phi : C_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \phi \text{ συνεχές}\}$$

Το $\phi \in \mathbb{D}'(\Omega)$ είναι συνεχές αν για κάθε $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τετοια ώστε $u_n \rightarrow u$, στο $\mathbb{D}$ έπεται ότι

$$\phi(u_n) \rightarrow \phi(u).$$

Ο $\mathbb{D}'(\Omega)$ είναι γραμμικός χώρος και είναι τοπολογικός δυϊκός και όχι δυϊκός ενός χώρου με νόρμα.

Παράδειγμα Κ.10. Κάθε $f \in L^p(\Omega)$ είναι κατανομή. Πράγματι ορίζουμε το συναρτησιακό

$$T(u) = \int_{\Omega} u f dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Θα δείξουμε ότι το T είναι συνεχές. Έστω $u_n \rightarrow u$, στο $\mathbb{D}$. Τότε υπάρχει συμπαγές $K \subset \Omega$ τέτοιο ώστε $\text{supp } u, \text{supp } u_n \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_n - u) f dx &\leq \left(\int_{\Omega} |u_n - u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_K |u_n - u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u_n - u\|_K |K|^{1/2} \|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

όπου $\|u_n - u\|_K = \sup_{x \in K} |u_n(x) - u(x)|$ και $|K|$ ο όγκος του K με $|K| < \infty$. Επειδή από την υπόθεση $u_n \rightarrow u$ στο $\mathbb{D}$, έπεται ότι $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ (δηλαδή $u_n \rightarrow u$ ομοιόμορφα στο K) και παίρνουμε

$$\int_{\Omega} u_n f dx \rightarrow \int_{\Omega} u f dx \Rightarrow T(u_n) \rightarrow T(u)$$

Επομένως $T \in \mathbb{D}'(\Omega)$.

Παράδειγμα Κ.11. Ορίζουμε την γενικευμένη συνάρτηση $\delta : C_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\delta(u) = u(0), \quad u \in C_0^\infty$$

Έστω $u_n \rightarrow u$ στο $\mathbb{D}$, $\text{supp } u_n \subset K$, $\text{supp } u \subset K$. Τότε

$$\delta(u_n) = u_n(0) \rightarrow u(0) = \delta(u)$$

διότι $u_n \rightarrow u$ ομοιόμορφα στο K , (αν $0 \notin K$ τότε $u_n(0) = 0 = u(0)$). άρα $\delta \in \mathbb{D}'(\Omega)$.

Ορισμός Κ.12. (Σύγκλιση Κατανομών) Έστω μία ακολουθία κατανομών $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Θα λέμε ότι η T_n συγκλίνει σε μία κατανομή T αν για κάθε $u \in \mathbb{D}(\Omega)$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, u \rangle = \langle T, u \rangle$$

όπου $\langle T, u \rangle := T(u)$.

Παράδειγμα Κ.13. Έστω ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^n$ με $x_n \rightarrow x$. Ορίζουμε $T := \delta_{x_n}$ (δηλαδή $\delta_a(\phi) := \phi(a)$). Ισχύει, $T_n \rightarrow \delta_x$. Πράγματι, έστω $u \in \mathbb{D}(\Omega)$, είναι

$$\langle T_n, u \rangle = \langle \delta_{x_n}, u \rangle = u(x_n) \rightarrow u(x) = \delta_x(u) = \langle \delta_x, u \rangle.$$

άρα $T_n \rightarrow \delta_x$.

Παράδειγμα Κ.14. Έστω $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία κατανομών με $T_n \in L^p(\Omega)$, δηλαδή υπάρχει $f_n \in L^p(\Omega)$, τέτοια ώστε $T_n(u) = \int_{\Omega} f_n u dx$ για $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Αν υπάρχει $f \in L^p(\Omega)$ τέτοια ώστε $f_n \rightarrow f$, στον L^p τότε $T_n \rightarrow T$, όπου T είναι η κατανομή που αντιστοιχεί στην f , δηλαδή,

$$T(u) = \int_{\Omega} f u dx$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (f_n - f) u dx \right| &\leq \int_{\Omega} |f_n - f| |u| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{1/q} \\ &= \|f_n - f\|_p \|u\|_q \rightarrow 0 \end{aligned}$$

για $n \rightarrow \infty$. Είναι $\|u\|_q < \infty$ διότι $\int_{\Omega} |u|^q dx = \int_K |u|^q dx$ όπου $K \subset \Omega$ συμπαγές ($K = \text{supp } u$). Το q ορίζεται από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ορισμός K.15. Ορίζεται η παράγωγος α -τάξης μίας κατανομής T , ως η κατανομή $D^\alpha T$, η οποία δίνεται από τη σχέση,

$$\langle D^\alpha T, u \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha u \rangle, \quad u \in \mathbb{D}(\Omega)$$

και α πολυδείκτης (κατά κάποιο τρόπο μμείται την παραγοντική ολοκλήρωση). Με αυτήν την έννοια της παραγώγου κάθε κατανομή είναι απειρίσιστα διαφορίσιμη.

Πρόταση K.16. Ο τελεστής της παραγώγισης D^α είναι συνεχής στον $\mathbb{D}'(\Omega)$.

Απόδειξη. Έστω μία ακολουθία κατανομών $T_n \rightarrow T \in \mathbb{D}'(\Omega)$. Θα δείξουμε ότι $D^\alpha T_n \rightarrow D^\alpha T$. Έχουμε

$$\langle D^\alpha T_n, u \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, D^\alpha u \rangle \rightarrow \langle D^\alpha T, u \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha u \rangle,$$

για κάθε $u \in \mathbb{D}(\Omega)$. άρα $D^\alpha T_n \rightarrow D^\alpha T$. Σημειώνεται ότι αν $u \in \mathbb{D}(\Omega)$ τότε και $D^\alpha u \in \mathbb{D}(\Omega)$. $\square$

Παρατήρηση K.17. Για μία συνάρτηση $f \in L^p$, η παράγωγος α -τάξης ορίζεται πάντα με την έννοια των κατανομών. Επίσης άπειρα αθροίσματα και παράγωγοι εναλλάσσονται ελεύθερα χωρίς περιορισμούς με την έννοια των κατανομών.

Παρατήρηση K.18. (1). Αν $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ τότε η $T_u : \mathbb{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$T_u(\phi) = \int_{\Omega} u \phi$$

αποδεικνύεται ότι είναι στοιχείο του $\mathbb{D}'(\Omega)$ και η απεικόνιση $u \mapsto T_u$ είναι 1-1 το οποίο αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού των μεταβολών:

Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι $\int_{\Omega} u \phi = 0$ για κάθε $\phi \in \mathbb{D}(\Omega)$. Τότε είναι $u(x) = 0$ σ.π. στο Ω .

άρα $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathbb{D}'(\Omega)$ με την έννοια ότι κάθε στοιχείο του $L^1_{loc}(\Omega)$ δίνει μια διαφορετική κατανομή στο $\mathbb{D}'(\Omega)$, δηλαδή ο $L^1_{loc}(\Omega)$ εμψυτεύεται στον $\mathbb{D}'(\Omega)$. Για αυτόν το λόγο πολλές φορές γράφουμε (λανθασμένα) ότι $u \in \mathbb{D}'(\Omega)$ αντί $T_u \in \mathbb{D}'(\Omega)$.

(2). Αν μ ένα μέτρο Borel πεπερασμένο πάνω στα συμπαγή υποσύνολα του Ω ορίζουμε $T_\mu : \mathbb{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\langle T_\mu, \phi \rangle = \int_\Omega \phi(x) d\mu$ και αποδεικνύεται ότι $T_\mu \in \mathbb{D}'(\Omega)$ αν και συχνά γράφουμε $\mu \in \mathbb{D}'(\Omega)$.

(3). Έστω $u \in C^1(\Omega)$, οπότε $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ και $\partial u / \partial x_i \in L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$. Τότε

$$\frac{\partial T_u}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

Παρατηρούμε ότι οι γενικευμένες μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι ίσες με τις κλασσικές μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

(4). Έστω $\Omega = (-1, 1)$ και

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $u \in L^1((-1, 1)) \subset L^1_{loc}((-1, 1))$. Επομένως η u ορίζει μια κατανομή T_u με

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_{-1}^1 u \phi \text{ με } \phi \in \mathbb{D}((-1, 1)).$$

Είναι

$$\langle T_u^{(1)}, \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle = -\int_{-1}^1 u \phi' = \int_{-1}^1 H \phi',$$

όπου H είναι η συνάρτηση Heaviside. άρα $T_u^{(1)} = u' = H$ ή $D^1 T_u = u' = H$ και γράφουμε $u' = H$ με την έννοια των κατανομών. Παρατηρούμε επίσης ότι η $u' = H \in L^1_{loc}((-1, 1))$.

(5). Ισχύει ότι $H' = \delta$ με την έννοια των κατανομών αφού

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = \int_{-1}^1 H \phi' = \langle \delta, \phi \rangle$$

για κάθε $\phi \in \mathbb{D}((-1, 1))$. Παρατηρούμε ότι η $H' = \delta \notin L^1_{loc}((-1, 1))$ και αποτελεί κλασσικό παράδειγμα για το γεγονός ότι δεν έχουν όλες οι $L^1_{loc}(\Omega)$ συναρτήσεις γενικευμένη παράγωγο.

Παράρτημα L

Χώροι Sobolev

Ορισμός L.1. Οι χώροι Sobolev είναι χώροι συναρτήσεων των οποίων οι ασθενείς παραγωγοί βρίσκονται σε κάποιο χώρο L^p , $1 \leq p \leq \infty$ Δηλαδή,

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ για κάθε } |\alpha| \leq m\}$$

Π.χ για $m = 0$, είναι $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, για $p = 2$, είναι $W^{m,2} = H^m(\Omega)$ και για $p = \infty$, είναι $W^{m,\infty}(\Omega)$.

Στους χώρους $W^{m,p}$ ορίζεται η νόρμα,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

όπου

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Πρόταση L.2. Οι χώροι $W^{m,p}$ εφοδιασμένοι με τη νόρμα $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ είναι χώροι Banach.

Απόδειξη. Έστω (u_n) μία ακολουθία Cauchy στον $W^{m,p}(\Omega)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|u_n - u_k\|_{W^{m,p}} < \varepsilon, \text{ για κάθε } n, k \geq N$$

δηλαδή

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_k\|_{L^p} < \varepsilon, \text{ για κάθε } n, k \geq N, \text{ και } |\alpha| \leq m.$$

□

Αυτό σημαίνει ότι οι ακολουθίες $(D^\alpha u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $L^p(\Omega)$, για κάθε $|\alpha| \leq m$. Από την πληρότητα του $L^p(\Omega)$ παίρνω την ύπαρξη συνάρτησης $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ τέτοιας ώστε

$$D^\alpha u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^p} u_\alpha, \text{ για κάθε } |\alpha| \leq m$$

Ειδικά για $\alpha = 0$, έχουμε $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^p} u$, όπου $a = 0$ σημαίνει ότι $\alpha = (0, 0, 0, \dots, 0)$. Τις συναρτήσεις του $L^p(\Omega)$ μπορούμε να τις δούμε σαν κατανομές. Επειδή οι τελεστές D^α είναι συνεχείς σε χώρους κατανομών παίρνουμε (από την $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^p} u$ καθώς $k \rightarrow \infty$),

$$D^\alpha u_k \xrightarrow{\mathbb{D}'} D^\alpha u.$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου έπεται,

$$D^\alpha u = u_\alpha \in L^p(\Omega).$$

Επομένως η u έχει παραγώγους τάξης μέχρι m στον $L^p(\Omega)$, άρα $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Το ότι

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{W^{m,p}} u,$$

έπεται από τις σχέσεις

$$\|D^\alpha u_k - D^\alpha u\|_{L^p} = \|D^\alpha u_k - u_\alpha\|_{L^p} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \text{ για κάθε } |\alpha| \leq m.$$

Παρατήρηση L.3. Ο χώρος $W_0^{k,p}(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ανοιχτό), ορίζεται ως το κλειστο περιβλημα του $C_0^\infty(\Omega)$ στον $W^{k,p}(\Omega)$, δηλαδή

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Παρατήρηση L.4. Οι χώροι $H^m(\Omega)$ είναι χώροι Hilbert με εσωτερικό γινόμενο,

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

όπου $(\cdot, \cdot)$ είναι το εσωτερικό γινόμενο του $L^2(\Omega)$, δηλαδή

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \text{ (όπου } \bar{v} \text{ ο μιγαδικός συζυγής του } v).$$

Προσέγγιση από λείες συναρτήσεις

Τα στοιχεία των χώρων $W^{m,p}$ μπορούν να προσεγγιστούν από λείες (απείρως διαφορίσιμες) συναρτήσεις. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση της τεχνικής της ομαλοποίησης. Έστω $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, για παράδειγμα

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \\ c \cdot \exp(\frac{1}{|x|^2-1}), & |x| < 1 \end{cases}$$

Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων,

$$\eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

Ορισμός L.5. Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f,$$

δηλαδή

$$f^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon f(x-y)dy.$$

Το σύνολο των συναρτήσεων $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ λέγεται ομαλοποιητική ακολουθία της f .

Θεώρημα L.6. (Βασικές ιδιότητες της ομαλοποιητικής ακολουθίας) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Ισχύουν τα εξής.

(i). $f^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

(ii). $f^\varepsilon \rightarrow f$ (σημειακά), σχεδόν παντού για $\varepsilon \rightarrow 0$.

(iii). $f^\varepsilon \rightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή $K \subset \Omega$, καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$.

(iv). Αν $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ τότε $f^\varepsilon \xrightarrow{L^p_{loc}(\Omega)} f$.

Παρατήρηση L.7. Έστω $(f_n), f_n \in L^p_{loc}(\Omega)$ και $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, ώστε

$$f_n \xrightarrow{L^p_{loc}(\Omega)} f,$$

τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p(K)} = 0$, (δηλ. $f_n \xrightarrow{L^p(K)} f$), για κάθε $K \subset \Omega$ συμπαγές.

Θεώρημα L.8. (Τοπική προσέγγιση από λείες συναρτήσεις) Έστω $u \in W^{k,p}(\Omega)$ και $1 \leq p < \infty$,

$$u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u.$$

Τότε $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ και $u^\varepsilon \xrightarrow{W^{k,p}_{loc}(\Omega)} u$, καθώς $(\varepsilon \rightarrow 0)$.

Απόδειξη. Ισχύει $D^\alpha u^\varepsilon = (D^\alpha u)^\varepsilon \quad \forall |\alpha| \leq k$, διότι

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= \int_{\Omega} D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha [\eta_\varepsilon(x-y)]u(y)dy \\ &= \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy \\ &= (D^\alpha u)^\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Η εναλλαγή της διαφόρισης με την ολοκλήρωση στη δευτερη ισότητα γίνεται διότι $|D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)| \leq M_\alpha |u(y)|$ και η $u(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στην $B(x, \varepsilon)$. Η τέταρτη ισότητα έπεται

από τον ορισμό της παραγώγου με την έννοια των κατανομών (ασθενούς παραγώγου). Από το (i) του θεωρήματος L.6 έπεται ότι $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Από το (iv) του ίδιου θεωρήματος έχουμε

$$(D^\alpha u)^\varepsilon \xrightarrow{L^p_{loc}(\Omega)} D^\alpha u, \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0$$

και επειδή

$$D^\alpha u^\varepsilon = (D^\alpha u)^\varepsilon, \quad D^\alpha u^\varepsilon \xrightarrow{L^p_{loc}(\Omega)} D^\alpha u, \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ για κάθε } |\alpha| \leq k$$

έχουμε

$$u^\varepsilon \xrightarrow{W^{k,p}_{loc}(\Omega)} u \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0.$$

□

Θεώρημα L.9. (Προσέγγιση από λείες συναρτήσεις) Έστω Ω φραγμένο και $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία (u_n) από λείες συναρτήσεις $u_n \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$u_n \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} u.$$

Παρατήρηση L.10. Οι συναρτήσεις u_n δεν είναι απαραίτητα φραγμένες στο Ω .

Πόρισμα L.11. Ο $C^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $W^{k,p}(\Omega)$.

Θεώρημα L.12. (Προσέγγιση από λείες συναρτήσεις μέχρι το σύνορο) Έστω Ω φραγμένο και $\partial\Omega \in C^1$. Έστω $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία λείων συναρτήσεων (u_n) με $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$, τέτοια ώστε

$$u_n \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} u$$

Επέκταση

Θεώρημα L.13. Έστω Ω φραγμένο και $\partial\Omega \in C^1$. Έστω V ανοιχτό και φραγμένο σύνολο, το οποίο περιέχει συμπαγώς το Ω δηλαδή $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset V$. Τότε υπάρχει γραμμικός φραγμένος τελεστής,

$$E : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

τέτοιος ώστε

(i). $Eu = u$ σχεδόν παντού στο Ω ,

(ii). $\text{supp}(Eu) \subset V$.

Ορισμός L.14. Η Eu λέγεται επέκταση της u στον $\mathbb{R}^n$.

Ίχνος

Θεώρημα L.15. Έστω Ω φραγμένο και $\partial\Omega \in C^1$. Τότε υπάρχει γραμμικός φραγμένος τελεστής,

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

τέτοιος ώστε

$$Tu = u|_{\partial\Omega} \text{ για } u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Ορισμός L.16. Η Tu λέγεται ίχνος της u στο $\partial\Omega$.

Εμφυτεύσεις Sobolev

Ορισμός L.17. Έστω $1 \leq p < n$ ($n = \dim\Omega$). Ο συζυγής κατά Sobolev p^* του p ορίζεται από τη σχέση,

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

Παρατήρηση L.18. Ισχύει $p^* > p$.

Θεώρημα L.19. (Ανισότητα Gagliardo - Nirenberg - Sobolev (G.N.S)) Έστω $1 \leq p < n$. Τότε υπάρχει σταθερά $c = c(p, n)$ τέτοια ώστε

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{για κάθε } u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$$

Θεώρημα L.20. (Εμφύτευση του Sobolev) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και φραγμένο, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leq p < n$ και $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Τότε $u \in L^{p^*}(\Omega)$ και υπάρχει σταθερά $c = c(p, n, \Omega)$ τέτοια ώστε

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

δηλαδή η εμφύτευση του $W^{1,p}(\Omega)$ στον $L^{p^*}(\Omega)$ είναι συνεχής. Συμβολικά γράφουμε,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Απόδειξη. Θα επεκτείνουμε την ανισότητα G.N.S σε στοιχεία του $W^{1,p}(\Omega)$. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα προσέγγισης από λείες συναρτήσεις μέχρι το σύνορο, υπάρχει ακολουθία (u_n) τέτοια ώστε $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ και

$$u_n \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega)} u$$

Για να εφαρμόσουμε την ανισότητα G.N.S πρέπει να επεκτείνουμε τις u_n στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $V \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και φραγμένο τέτοιο ώστε $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset V$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα επέκτασης και παίρνουμε $\bar{u}_n := Eu_n$,

$$\|\bar{u}_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c_{ext} \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

και $\text{supp } \bar{u}_n \subset V$. Τώρα εφαρμόζουμε την ανισότητα G.N.S και προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq \|\bar{u}_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c_{g.n.s} \|\bar{u}_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c_{g.n.s} c_{ext} \|\bar{u}_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &= c_{g.n.s} c_{ext} \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

Τελικά

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad (\text{L.1})$$

Το όριο στο δεξιό μέλος για $n \rightarrow \infty$ είναι $\|\bar{u}_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Ήρα αρκεί να δείξουμε ότι $u_n \xrightarrow{L^{p^*}(\Omega)} u$ οπότε και $u \in L^{p^*}(\Omega)$ και $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Γράφουμε την (L.1) για $u_m - u_n$ στη θέση του u_n οπότε

$$\|u_m - u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c \|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ καθώς } m, n \rightarrow \infty.$$

Επομένως η (u_n) είναι Cauchy στον $L^{p^*}(\Omega)$, άρα υπάρχει $u \in L^{p^*}(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$u_n \xrightarrow{L^{p^*}(\Omega)} u$$

Θα δείξουμε ότι $u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} v$. Πράγματι αν $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = 1$ με $a = \frac{p^*}{p} > 1$ από την ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει

$$\int_{\Omega} |u_n - v|^p \leq \left(\int_{\Omega} |u_n - v|^{pa} \right)^{\frac{1}{a}} \left(\int_{\Omega} 1^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\int_{\Omega} |u_n - v|^{p^*} \right)^{\frac{p}{p^*}} |\Omega|^{1 - \frac{p}{p^*}}$$

δηλαδή

$$\|u_n - v\|_{L^p} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}} \|u_n - v\|_{L^{p^*}} = |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|u_n - v\|_{L^{p^*}} \rightarrow 0.$$

Επομένως $u_n \xrightarrow{L^p} v$ και επειδή $u_n \xrightarrow{L^p} u$ έπεται ότι $u = v$ σχεδόν παντού, δηλαδή $u \in L^{p^*}(\Omega)$ και $u_n \xrightarrow{L^{p^*}(\Omega)} v = u$. $\square$

Συμπαγείς εμφυτεύσεις

Ορισμός L.21. Έστω X, Y χώροι Banach. Θα λέμε ότι ο X εμφυτεύεται συμπαγώς στον Y αν υπάρχει απεικόνιση $j : X \rightarrow Y$, $1 - 1$ η οποία είναι συμπαγής. Θα συμβολίζουμε με

$$X \xhookrightarrow{c} Y.$$

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι οι εμφυτεύσεις της παρ. 6 για $1 \leq q < p^*$ είναι επιπλέον συμπαγείς.

Θεώρημα L.22. (Rellich-Kondrachov) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, $1 \leq p < n$ και $\partial\Omega \in C^1$. Τότε

$$W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega) \text{ για κάθε } 1 \leq q < p^*.$$

Ανισότητες Poincaré

Ορισμός L.23. Ορίζουμε τη μέση τιμή μιας συνάρτησης u στο Ω , ως εξής.

$$\langle u \rangle_{\Omega} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx.$$

Θεώρημα L.24. (Ανισότητα Poincaré) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό και $\partial\Omega \in C^1$. Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Τότε υπάρχει σταθερά $c = c(n, p, \Omega)$ τέτοια ώστε

$$\|u - \langle u \rangle_{\Omega}\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Θεώρημα L.25. (Ανισότητα Poincaré-Friedrichs) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $1 \leq p \leq \infty$. Τότε ισχύει

(i). $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c \|Du\|_{L^p(\Omega)}$, για κάθε $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, για κάθε $q \in [1, p^*]$, όπου $c = c(p, q, n, \Omega)$,

(ii). $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|Du\|_{L^\infty(\Omega)}$, για κάθε $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$.

Παρατήρηση L.26. (1). Η (i) ισχύει και για όλα τα σύνολα Ω που είναι φραγμένα προς μία κατεύθυνση, δηλαδή υπάρχει $v \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\Omega \subset S_a := \{x \in \mathbb{R}^n : |xv| \leq a\},$$

(2). Επειδή $p \in [1, p^*]$, ισχύει

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{L^p(\Omega)} \text{ για κάθε } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Αναλυτική αντιμετώπιση και παρατηρήσεις

Οι ορισμοί που ακολουθούν διακρίνονται από μια γενικότητα και ορίζουν συνοπτικά τους χώρους Sobolev.

Ορισμός L.27. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό, $(k, p) \in \mathbb{N}_0 \times [1, +\infty]$. Ορίζουμε ως

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \text{ που έχουν } D^a f \text{ και κείνται μέσα στον } L^p(\Omega) \forall a \text{ με } |a| \leq k\}$$

τους οποίους καλούμε χώρους Sobolev. Θέτουμε $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$. Για $f \in W^{k,p}(\Omega)$, $p < \infty$, ορίζουμε

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|a| \leq k} \int_{\Omega} |D^a f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|a| \leq k} \|D^a f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Για $f \in W^{k,\infty}(\Omega)$, ορίζουμε

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max \{ \|D^a f\|_{\infty} : a \in \mathbb{N}_0^n, |a| \leq k \}.$$

Ορισμός L.28. Ορίζουμε

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}} := W_0^{k,p}(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}^n,$$

Ω ανοικτό και $(k, p) \in \mathbb{N}_0 \times [1, +\infty]$. Για $p = 2$ θέτουμε $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$ και για $k = 1$ είναι $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Μία πολύ βασική ιδιότητα των χώρων Sobolev περιγράφεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα L.29. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό. Για κάθε $(k, p) \in \mathbb{N}_0 \times [1, +\infty]$ ο Sobolev χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach. Ειδικότερα κάθε $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|a| \leq k} \int_{\Omega} D^a f D^a g = \sum_{|a| \leq k} (D^a f, D^a g)_{L^2(\Omega)}.$$

Λόγω του πλήθους των αποτελεσμάτων στους χώρους Sobolev για μια αναλυτική και λεπτομερέστερη ταξινόμησή τους, στη συνέχεια, αντιμετωπίζουμε τους χώρους Sobolev διακρίνοντας δύο βασικές περιπτώσεις Α και Β με τις ανάλογες υποπεριπτώσεις.

AI. $W^{1,p}(I)$, $I = (a, b)$ διάστημα φραγμένο ή μη, $1 \leq p \leq \infty$.

AII. $W^{k,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, $k \geq 2$.

AIII. $W_0^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$.

AIV. $W_0^{k,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$, $k \geq 2$.

A*. $(W_0^{1,p}(I))^* = W^{-1,q}$.

BI. $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $1 \leq p \leq \infty$, $N \geq 2$.

BII. $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $k \geq 2$.

BIII. $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

BIV. $W_0^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $k \geq 2$.

B*. $(W_0^{1,p}(\Omega))^* = W^{-1,q}$.

AI. Χώροι Sobolev $W^{1,p}(I)$ ($1 \leq p \leq \infty$), I διάστημα φραγμένο ή μη

Ορισμός L.30. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} W^{1,p}(I) &= \{u \in L^p(I) \text{ με } u \text{ να έχει ασθενή παράγωγο πρώτης τάξης στον } L^p(I)\} \\ &= \left\{ u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ ώστε } \int_I u \phi' = - \int_I g \phi, \forall \phi \in C_0^1(I) \right\} \end{aligned}$$

τον οποίο ονομάζουμε χώρο Sobolev $W^{1,p}(I)$. Αν $u \in W^{1,p}(I)$ την g του ορισμού συμβολίζουμε με u' δηλαδή $g = u'$.

Ορισμός L.31. Ορίζουμε νόρμα στο χώρο Sobolev $W^{1,p}(I)$ ως εξής:

Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} = \left(\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Για $p = \infty$ ορίζουμε

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(I)} := \|u\|_{L^\infty(I)} + \|u'\|_{L^\infty(I)}.$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} W^{1,2}(I) &= H^1(I) \\ &= \left\{ u \in L^2(I) : \exists u' \in L^2(I) \text{ ώστε } \int_I u \phi' = - \int_I u' \phi, \forall \phi \in C_0^1(I) \right\} \end{aligned}$$

και είναι

$$\|u\|_{W^{1,2}(I)} = \|u\|_{H^1(I)} = \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)} = \left(\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ένα παράδειγμα συνάρτησης που ανήκει στον $W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$ είναι η συνάρτηση $u(x) = (x + |x|)/2$ ορισμένη στο $I = (-1, 1)$ και είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$u'(x) = H(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ένα παράδειγμα συνάρτησης που δεν ανήκει στον $W^{1,p}(I)$ είναι η συνάρτηση H .

Παρατήρηση L.32. (1). Ισχύει ότι $W^{1,p}(I) \subset L^p(I)$ για $1 \leq p \leq \infty$.

(2). Αν $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ και η $u' \in L^p(I)$ τότε η $u \in W^{1,p}(I)$.

(3). Αν το I είναι φραγμένο ισχύει $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$ για $1 \leq p \leq \infty$.

(4). Μια συνάρτηση συνεχής στο $\bar{I}$ και με παράγωγο συνεχή κατά τμήματα στο $\bar{I}$ ανήκει στον $W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$.

(5). Ο χώρος $W^{1,2}(I) = H^1(I)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(\cdot, \cdot)_{H^1(I)} : H^1(I) \times H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

όπου

$$(u, v)_{H^1(I)} := (u, v)_{L^2(I)} + (u', v')_{L^2(I)}$$

και την αντίστοιχη επαγόμενη νόρμα

$$\|\cdot\|_{H^1(I)} : H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

όπου

$$\|u\|_{H^1(I)} = \left(\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

για κάθε $u \in H^1(I)$, η οποία είναι ισοδύναμη με την κλασσική νόρμα του $W^{1,2}(I)$.

Πρόταση L.33. Ο χώρος $W^{1,p}(I)$ είναι ένας χώρος Banach για $1 \leq p \leq \infty$. Ο χώρος $W^{1,p}(I)$ είναι ανακλαστικός για $1 < p < \infty$ και διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$. Ο χώρος H^1 είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

Παρατήρηση L.34. Αν $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία του $W^{1,p}(I)$ με $u_n \rightarrow u$ στον $L^p(I)$ και $u'_n \rightarrow v \in L^p(I)$ τότε η $u \in W^{1,p}(I)$ και $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \rightarrow 0$. Αρκεί η (u'_n) να παραμένει φραγμένη στον $L^p(I)$.

Τα λήμματα που ακολουθούν βοηθούν στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

Λήμμα L.35. Έστω $f \in L^1_{loc}(I)$ τέτοια ώστε

$$\int_I f \phi' = 0, \quad \forall \phi \in C_0^1(I).$$

Τότε υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $f = C$ σ.π. στο I .

Λήμμα L.36. Έστω $g \in L^1_{loc}(I)$. Για y_0 σταθερό στο I , θέτουμε

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t) dt, \quad x \in I.$$

Τότε $v \in C(I)$ και

$$\int_I v \phi' = - \int_I g \phi, \quad \forall \phi \in C_0^1(I).$$

Θεώρημα L.37. Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ τέτοια ώστε

$$u = \tilde{u} \text{ σ.π. στο } I$$

και

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Παρατήρηση L.38. (1). Από το θεώρημα αυτό συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις του $W^{1,p}(I)$ είναι χονδρικά παράγουσες συναρτήσεων του $L^p(I)$.

(2). Είναι γνωστό ότι αν $u \in W^{1,p}(I)$ και η συνάρτηση v είναι τέτοια ώστε $u = v$ σ.π. στο I τότε η $v \in W^{1,p}(I)$. Από το παραπάνω θεώρημα διαπιστώνουμε ότι κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(I)$ έχει μοναδικό συνεχή αντιπρόσωπο, δηλαδή υπάρχει μόνο μία συνεχής συνάρτηση που ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας της u . Όταν χρειαζόμαστε το $u(x)$ να έχει νόημα για κάθε $x \in \bar{I}$ θα αντικαθιστούμε την u με τον συνεχή αντιπρόσωπό της $\tilde{u}$ συμβολίζοντας όμως πάλι με u .

(3). Αν $u \in W^{1,p}(I)$ και $u' \in C(\bar{I})$ τότε η $\tilde{u} \in C^1(\bar{I})$ και σύμφωνα με το παραπάνω θα γράφουμε $u \in C^1(\bar{I})$.

Πρόταση L.39. Έστω $u \in L^p$ με $1 < p \leq \infty$. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

(1). $u \in W^{1,p}$.

(2). Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\left| \int_I u \phi' \right| \leq C \|\phi\|_{L^q(I)}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I).$$

(3). Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε, για κάθε ανοικτό $\omega \subset\subset I$ και κάθε $h \in \mathbb{R}$, με $|h| < \text{dist}(\omega, CI)$, να ισχύει

$$\|r_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

Επιπλέον μπορούμε να επιλέξουμε $C = \|u'\|_{L^p}$ στις (2) και (3).

Παρατήρηση L.40. Όταν $p = 1$, ισχύουν επίσης οι ακόλουθες συνεπαγωγές.

$$(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3).$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι το I είναι φραγμένο. Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1), δηλαδή οι συναρτήσεις του $W^{1,1}$, είναι οι απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις. Αυτές χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε πεπερασμένη ακολουθία ξένων μεταξύ τους διαστημάτων (a_k, b_k) του I με $\sum |b_k - a_k| < \delta$, να ισχύει $\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Ενώ οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την (2) (ή την (3)) με $p = 1$ είναι οι συναρτήσεις φραγμένης μεταβολής. Οι συναρτήσεις αυτές μπορεί να χαρακτηριστούν με διάφορους τρόπους:

- είναι διαφορές αυξουσών και φραγμένων (ενδεχομένως ασυνεχών) συναρτήσεων στο I ,
- είναι οι συναρτήσεις u για τις οποίες υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\sum_{i=0}^{k-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \leq C,$$

για κάθε ακολουθία $t_0 < \dots < t_k$ του I ,

-είναι οι συναρτήσεις $u \in L^1(I)$, των οποίων η παράγωγος-κατανομή είναι ένα φραγμένο μέτρο.

Πόρισμα L.41. Μια συνάρτηση $u \in L^\infty$ ανήκει στον $W^{1,\infty}(I)$, αν υπάρχει σταθερά C , τέτοια ώστε

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \text{ σ.π. για } x, y \in I.$$

Θεώρημα L.42. (Τελεστής Επεκτάσεως). Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Υπάρχει ένας τελεστής επέκτασης $P : W^{1,p}(I) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$, γραμμικός και συνεχής, τέτοιος ώστε

(1).

$$Pu|_I = u, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$$

(2).

$$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$$

(3).

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$$

(όπου το C εξαρτάται μόνο από το $|I| \leq \infty$).

Λήμμα L.43. Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε

$$\eta \tilde{u} \in W^{1,p}(0, \infty) \text{ και } (\eta \tilde{u})' = \eta' \tilde{u} + \eta \tilde{u}'.$$

Λήμμα L.44. Έστω $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ με $1 \leq p \leq \infty$. Τότε

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \text{ και } (\rho * v)' = \rho * v'.$$

Θεώρημα L.45. (Πυκνότητα). Έστω $u \in W^{1,p}(I)$ με $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία (u_n) στον $C_0^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $u_n|_I \rightarrow u$ στον $W^{1,p}(I)$.

Παρατήρηση L.46. Ο $C_0(I)$ δεν είναι πυκνός στον $W^{1,p}(I)$ εκτός αν $I = \mathbb{R}$.

Θεώρημα L.47. Υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται μόνο από το $|I| \leq \infty$), τέτοια ώστε

(1).

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

δηλαδή ισχύει ότι $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ με συνεχή ενσφήνωση, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.
Επιπλέον, αν το I είναι φραγμένο, έχουμε

(2). η ενσφήνωση

$$W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$$

είναι συμπαγής για $1 < p \leq \infty$,

(3). η ενσφήνωση

$$W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$$

είναι συμπαγής για $1 \leq q < \infty$.

Παρατήρηση L.48. (i). Η ενσφήνωση $W^{1,1}(I) \subset C(\bar{I})$ είναι συνεχής αλλά ποτέ συμπαγής ακόμα και αν το διάστημα I είναι φραγμένο. Αλλά αν η (u_n) είναι φραγμένη στον $W^{1,1}(I)$ (με I φραγμένο ή μη), υπάρχει υπακολουθία (u_{n_k}) τέτοια ώστε η $u_{n_k}(x)$ να συγκλίνει για κάθε $x \in I$ (θεώρημα Helly). Όταν το I είναι μη φραγμένο και $1 < p \leq \infty$, η ενσφήνωση $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ είναι συνεχής αλλά όχι συμπαγής. Ωστόσο αν η (u_n) είναι φραγμένη στον $W^{1,p}(I)$ με $1 < p \leq \infty$ υπάρχει υπακολουθία (u_{n_k}) και $u \in W^{1,p}(I)$ τέτοια ώστε $u_{n_k} \rightarrow u$ στον $L^\infty(J)$ για κάθε J φραγμένο υποσύνολο του I .

(ii). Έστω I ένα φραγμένο διάστημα και $1 \leq q \leq \infty$. Από το (ii) εύκολα αποδεικνύεται ότι η νόρμα

$$|||u||| = \|u'\|_{L^p} + \|u\|_{L^q}$$

είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,p}(I)$.

(iii). Έστω I ένα μη φραγμένο διάστημα. Αν $u \in W^{1,p}(I)$, τότε $u \in L^q(I)$ για κάθε $q \in [p, \infty]$ αφού

$$\int |u|^q \leq \|u\|_{L^\infty}^{q-p} \|u\|_{L^p}^p.$$

Γενικά, όμως, $u \notin L^q(I)$ για κάθε $q \in [1, p)$.

Πόρισμα L.49. Υποθέτουμε το I μη φραγμένο και έστω $u \in W^{1,p}(I)$ όπου $1 \leq p < \infty$. Τότε έχουμε

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \rightarrow \infty}} u(x) = 0.$$

Πόρισμα L.50. (Παραγωγήγιση γινομένου). Έστω $u, v \in W^{1,p}(I)$, όπου $1 \leq p \leq \infty$. Τότε $uv \in W^{1,p}(I)$ και

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Επιπλέον ισχύει ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv', \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Πόρισμα L.51. (Παραγωγήγιση σύνθετης συνάρτησης). Έστω $G \in C^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $G(0) = 0$ και έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \text{ και } (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

ΑΙΙ. Οι χώροι $W^{k,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, $k \geq 2$

Ορισμός L.52. Αν $k \geq 2$ ακέραιος και $1 \leq p \leq \infty$ πραγματικός, τότε ορίζουμε αναδρομικά τον χώρο

$$W^{k,p}(I) = \left\{ u \in W^{k-1,p}(I) : u' \in W^{k-1,p}(I) \right\}.$$

Θέτουμε

$$H^k(I) = W^{k,2}.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι $u \in W^{k,p}(I)$ αν υπάρχουν k συναρτήσεις $g_1, \dots, g_k \in L^p(I)$ τέτοιες ώστε

$$\int u D^j \phi = (-1)^j \int g_j \phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I), \forall j = 1, \dots, k,$$

όπου το $D^j \phi$ συμβολίζει την παράγωγο τάξεως j της συνάρτησης ϕ . Όταν $u \in W^{k,p}(I)$, μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τις διαδοχικές παραγώγους $u' = g_1, (u')' = g_2, \dots$ μέχρι την τάξη k , τις οποίες συμβολίζουμε με $Du, D^2u, \dots, D^k u$. Ο χώρος $W^{k,p}$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{a=1}^k \|D^a u\|_{L^p}$$

και ο χώρος H^k είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^k} = (u, v)_{L^2} + \sum_{a=1}^k (D^a u, D^a v).$$

Αποδεικνύεται ότι η νόρμα $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ είναι ισοδύναμη με την

$$|||u||| = \|u\|_{L^p} + \|D^k u\|_{L^p}.$$

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι αν $1 \leq j \leq k-1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από το ε και το $|I| \leq \infty$), τέτοια ώστε

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq \varepsilon \|D^k u\|_{L^p} + C \|u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W^{k,p}.$$

Επεκτείνονται και στους χώρους $W^{k,p}$ οι ιδιότητες που παρουσιάστηκαν για τον $W^{1,p}$. Για παράδειγμα $W^{k,p}(I) \subset C^{k-1}(\bar{I})$ με συνεχή ενσφήνωση.

ΑΙΙΙ. Οι χώροι $W_0^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$

Ορισμός L.53. Για $1 \leq p < \infty$, συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(I)$ το κλειστό περίβλημα του $C_0^1(I)$ στον $W^{1,p}(I)$. Γράφουμε $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$. Ο χώρος $W_0^{1,p}$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγει ο $W^{1,p}$. Ο χώρος H_0^1 είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο που επάγει ο H^1 . Ο χώρος $W_0^{1,p}$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach. Είναι, επιπλέον, ανακλαστικός για $1 < p < \infty$. Ο χώρος H_0^1 είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

Παρατήρηση L.54. (i). Όταν $I = \mathbb{R}$, γνωρίζουμε ότι ο $C_0^1(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\mathbb{R})$ και επομένως $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.

(ii). Χρησιμοποιώντας μια ομαλοποιητική ακολουθία (ρ_n) , εύκολα επαληθεύουμε ότι

(a). Ο $C_0^\infty(I)$ είναι πυκνός στον $W_0^{1,p}(I)$,

(b). αν $u \in W^{1,p}(I) \cap C_0(I)$, τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει έναν ουσιώδη χαρακτηρισμό των συναρτήσεων του $W_0^{1,p}(I)$.

Θεώρημα L.55. Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$ ανν $u = 0$ στο ∂I .

Παρατήρηση L.56. Το θεώρημα εξηγεί το σημαντικό ρόλο που παίζει ο χώρος $W_0^{1,p}$. Πράγματι, οι συνήθειες (ή μερικές) διαφορικές εξισώσεις είναι συζευγμένες με συνοριακές συνθήκες, δηλαδή συνθήκες που καθορίζουν την τιμή της u στο σύνολο ∂I .

Πρόταση L.57. (Ανισότητα Poincaré). Υποθέτουμε ότι το διάστημα I είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από το $|I|$) τέτοια ώστε

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Με άλλα λόγια, στον $W_0^{1,p}(I)$ η έκφραση $\|u'\|_{L^p}$ είναι μια νόρμα ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,p}$.

Παρατήρηση L.58. Αν το I είναι φραγμένο, η έκφραση $(u', v')_{L^2}$ ορίζει στον H_0^1 ένα εσωτερικό γινόμενο και η αντίστοιχη νόρμα, δηλαδή η $\|u'\|_{L^2}$, είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του H^1 .

AIV. Οι χώροι $W_0^{k,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$, $k \geq 2$

Ορισμός L.59. Για δεδομένο ακέραιο $k \geq 2$ και πραγματικό $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε τον χώρο $W_0^{k,p}(I)$ ως το κλειστό περίβλημα του $C_0^k(I)$ στον $W^{k,p}(I)$. Αποδεικνύεται ότι

$$W_0^{k,p}(I) = \{u \in W^{k,p}(I) : u = Du = \dots = D^{k-1}u = 0 \text{ στο } \partial I\}.$$

Πρέπει να διακρίνεται ο χώρος

$$W_0^{2,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I) : u = Du = 0 \text{ στο } \partial I\}$$

από τον χώρο

$$W_0^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I) : u = 0 \text{ στο } \partial I\}.$$

A*. Ο δυϊκός του $W_0^{1,p}(I)$ - $W^{-1,q}$

Ορισμός L.60. Σημειώνουμε με $W^{-1,q}(I)$ τον δυϊκό χώρο του $W_0^{1,p}(I)$ με $1 \leq p < \infty$ και με $H^{-1}(I)$ τον δυϊκό χώρο του $H_0^1(I)$. Συνηθίζουμε να ταυτίζουμε τον L^2 με τον δυϊκό του, αλλά δεν ταυτίζουμε τον H_0^1 με τον δυϊκό του. Ισχύουν οι εγκλεισμοί

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις. Αν το I είναι φραγμένο, έχουμε

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,q}, \quad \forall 1 \leq p < \infty,$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις. Αν το I δεν είναι φραγμένο, έχουμε

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,q}, \quad \text{μόνο για κάθε } 1 \leq p \leq 2$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις. Τα στοιχεία του $W^{-1,q}$ μπορεί να παρασταθούν μέσω συναρτήσεων του L^q . Συγκεκριμένα έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση L.61. Έστω $F \in W^{-1,q}$. Τότε υπάρχουν $f_0, f_1 \in L^q$ τέτοιες ώστε

$$\langle F, v \rangle = \int f_0 v + \int f_1 v', \quad \forall v \in W_0^{1,p}$$

και

$$\|F\| = \max\{\|f_0\|_{L^q}, \|f_1\|_{L^q}\}.$$

Όταν το I είναι φραγμένο μπορούμε να πάρουμε $f_0 = 0$.

Παρατήρηση L.62. (1). Οι συναρτήσεις f_0 και f_1 δεν είναι μοναδικές.

(2). Συνηθίζεται να ταυτίζεται η F με την κατανομή $f_0 - f_1'$, όπου εξ' ορισμού, η $f_0 - f_1'$ είναι το γραμμικό συναρτησιακό

$$v \mapsto \int f_0 v + \int f_1 v'$$

πάνω στον C_0^∞ .

(3). Το συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης ισχύει επίσης για συνεχή γραμμικά συναρτησιακά πάνω στον $W^{1,p}$.

ΒΙ. Οι χώροι $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό, $N \geq 2$

Ορισμός L.63. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &= \{u \in L^p : \eta \text{ } u \text{ } \acute{\epsilon}\chi\epsilon\text{ } \gamma\epsilon\nu\iota\kappa\epsilon\nu\acute{\epsilon}\nu\epsilon\varsigma \text{ } \mu\epsilon\rho\iota\kappa\acute{\epsilon}\varsigma \text{ } \pi\alpha\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\gamma\omicron\upsilon\varsigma \\ &\quad \text{1ης τάξης στον } L^p(\Omega)\} \\ &= \{u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ } \acute{\omega}\sigma\tau\epsilon \text{ } \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ } \nu\alpha \text{ } \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\epsilon\iota \\ &\quad \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \phi = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi, i = 1, \dots, N\} \end{aligned}$$

τον οποίο ονομάζουμε χώρο Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Αν $u \in W^{1,p}(\Omega)$ τις g_i , $i = 1, \dots, N$ συμβολίζουμε με $\partial u / \partial x_i$. Επίσης $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_N)$.

Ορισμός L.64. Ορίζουμε νόρμα στο χώρο $W^{1,p}(\Omega)$ ως εξής. Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \quad \acute{\eta} \quad \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Για $p = \infty$ ορίζουμε

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max_{|a| \leq 1} \|D^a u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Ειδικά για $p = 2$ θέτουμε

$$W^{1,2}(\Omega) \equiv H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq N \right\}$$

και είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

και επομένως η νόρμα του $H^1(\Omega)$ είναι

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \equiv \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

που επάγεται από το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο και είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,2}(\Omega)$.

Πρόταση L.65. Ο χώρος $W^{1,p}$ είναι χώρος Banach για $1 \leq p \leq \infty$. Είναι ανακλαστικός για $1 < p < \infty$ και διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$. Ο χώρος H^1 είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

Λήμμα L.66. Έστω $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ και έστω $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ με $1 \leq p \leq \infty$. Τότε

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ και } \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * v) = \rho * \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Θεώρημα L.67. (Friedrichs). Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία (u_n) του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε

(i). $u_n|_\Omega \rightarrow u$ στον $L^p(\Omega)$.

(ii). $\nabla u_n|_\Omega \rightarrow \nabla u|_\Omega$ στον $L^p(\omega)^N$ για κάθε $\omega \subset\subset \Omega$.

Υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός $\omega \subset\subset \Omega$ σημαίνει ότι το ω είναι ένα ανοικτό τέτοιο ώστε $\bar{\omega} \subset \Omega$ και το $\bar{\omega}$ να είναι συμπαγές).

Παρατήρηση L.68. Αποδεικνύεται (θεώρημα Meyers-Serrin) ότι αν $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, τότε υπάρχει ακολουθία (u_n) τέτοια ώστε $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ και $u_n \rightarrow u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$. Γενικά, αν το Ω είναι ένα τυχαίο ανοικτό σύνολο και αν $u \in W^{1,p}(\Omega)$, δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία (u_n) στον $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε $u_n \rightarrow u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$.

Πρόταση L.69. Έστω $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

(i). $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(ii). Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\phi\|_{L^{p'}}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, N$$

(iii). Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε, για κάθε ανοικτό $\omega \subset\subset \Omega$ και κάθε $h \in \mathbb{R}^N$, με $|h| < \text{dist}(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, να ισχύει

$$\|r_h u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq C|h|.$$

Επιπλέον, μπορούμε να πάρουμε $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ στις δύο τελευταίες.

Παρατήρηση L.70. Όταν $p = 1$, οι ακόλουθες συνεπαγωγές επίσης ισχύουν:

$$1. \Rightarrow 2. \Leftrightarrow 3.$$

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την 2. (ή την 3.) με $p = 1$ είναι οι συναρτήσεις φραγμένης μεταβολής (στη γλώσσα των κατανομών πρόκειται για τις συναρτήσεις του L^1 , των οποίων όλες οι πρώτες παράγωγοι με την έννοια των κατανομών είναι φραγμένα μέτρα). Ο χώρος αυτός παίζει σημαντικότερο ρόλο από το χώρο $W^{1,1}$. Συναντούμε συναρτήσεις φραγμένης μεταβολής (ή ιδίας φύσεως) στη θεωρία ελαχιστικών επιφανειών, σε προβλήματα πλαστικότητας (συναρτήσεις φραγμένης παραμορφώσεως) και στις σχεδόν γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, που έχουν ασυνεχείς λύσεις, ή κύματα κρούσεως.

Παρατήρηση L.71. Από το θεώρημα Fréchet-Kolmogorov και την πρόταση L.69 προκύπτει ότι αν F συμβολίζει τη μοναδιαία μπάλα του $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ (Ω τυχαίο ανοικτό σύνολο), τότε το $F|_\Omega$ είναι σχετικά συμπαγές στον $L^p(\Omega)$, για κάθε $\omega \subset\subset \Omega$. (Θα δούμε αργότερα, στο θεώρημα Relligh-Kondrachov, αν το Ω είναι φραγμένο και με ομαλό σύνορο, τότε η F είναι σχετικά συμπαγής στον $L^p(\Omega)$). Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να μην ισχύει αν το Ω δεν είναι φραγμένο ή αν το Ω δεν έχει ομαλό σύνορο). Έπεται ότι, αν η (u_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία του $W^{1,p}(\Omega)$ με $1 \leq p \leq \infty$ και Ω είναι τυχαίο και ανοικτό, μπορούμε να εξαγάγουμε μια υπακολουθία (u_{n_k}) τέτοια ώστε $u_{n_k}(x)$ να συγκλίνει σ.π στο Ω .

Παρατήρηση L.72. Η προηγούμενη πρόταση δείχνει ότι αν $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ και το Ω είναι ένα συνεκτικό και ανοικτό σύνολο, τότε έχουμε

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty} \text{dist}_\Omega(x, y), \text{ σ.π για } x, y \in \Omega,$$

όπου $\text{dist}_\Omega(x, y)$ συμβολίζει τη γεωδαισιακή απόσταση του x από το y στο Ω . Προκύπτει ότι η u έχει ένα συνεχή αντιπρόσωπο που ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα για κάθε $x, y \in \Omega$. Συμπεραίνουμε ότι αν $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, και το Ω είναι ένα τυχαίο ανοικτό σύνολο, και αν $\nabla u = 0$ σ.π στο Ω , τότε η u είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του Ω . Τέλος, ως σημειώσουμε ότι αν $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ και Ω είναι ανοικτό και κυρτό, τότε ισχύει

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty} |x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Πρόταση L.73. (Παραγωγή γινομένου). Έστω $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Τότε $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ και

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Πρόταση L.74. (Παραγωγή σύνθετης συνάρτησης). Έστω $G \in C^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $G(0) = 0$ και $|G'(s)| \leq M$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, τότε

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ και } \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Πρόταση L.75. (Τύπος αλλαγής μεταβλητών). Έστω Ω και Ω' δυο ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^N$ και έστω $H : \Omega' \rightarrow \Omega$ μια απεικόνιση αμφιμονοσήμαντη και επί, $x = H(y)$, τέτοια ώστε

$$H \in C^1(\Omega'), \quad H^{-1} \in C^1(\Omega), \quad \text{Jac} H \in L^\infty(\Omega'), \quad \text{Jac} H^{-1} \in L^\infty(\Omega).$$

Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, τότε $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ και

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ H)(y) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H}{\partial y_i}(y) \quad \forall j = 1, \dots, N,$$

όπου $\text{Jac} H$ συμβολίζει τον Ιακωβιανό πίνακα $\frac{\partial H_i}{\partial y_i}$ και είναι στοιχείο του $L^\infty(\Omega')^{N \times N}$.

Συμβολισμοί. Για δεδομένο $x \in \mathbb{R}^N$, γράφουμε

$$x = (x', x_N) \text{ με } x' \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ και } x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$$

και θέτουμε

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Συμβολίζουμε

$$\mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x_N) : x_N > 0\}$$

$$Q = \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \text{ και } |x_N| < 1\}$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^N$$

$$Q_0 = \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \text{ και } x_N = 0\}.$$

Ορισμός L.76. Λέμε ότι ένα ανοικτό Ω είναι τάξεως C^1 αν για κάθε $x \in \Gamma = \partial\Omega$ υπάρχει περιοχή U του x στον $\mathbb{R}^N$ και μια απεικόνιση $H \rightarrow Q \rightarrow U$ αμφιμονοσήμαντη και επί, τέτοια ώστε

$$H \in C^1(\bar{Q}), \quad H^{-1} \in C^1(\bar{U}), \quad H(Q_+) = U \cap \Omega \text{ και } H(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

Λήμμα L.77. Για δεδομένη $u \in W^{1,p}(Q_+)$, ορίζουμε πάνω στο Q τη συνάρτηση u^* επεκτεταμένη με ανάκλαση, δηλαδή

$$u^*(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N), & x_N > 0 \\ u(x', -x_N), & x_N < 0. \end{cases}$$

Τότε $u^* \in W^{1,p}(Q)$ και

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \leq 2\|u\|_{L^p(Q_+)}, \quad \|u\|_{W^{1,p}(Q)} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

Λήμμα L.78. (Διαμέριση της μονάδας). Έστω Γ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και $U_1, \dots, U_k$ ανοικτά τέτοια ώστε $\Gamma \subset \cup_{i=1}^k U_i$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $\theta_0, \dots, \theta_k$ του $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ τέτοιες ώστε

(i). $0 \leq \theta_i \leq 1$, για κάθε $i = 0, \dots, k$ και $\sum_{i=0}^k \theta_i = 1$ στο $\mathbb{R}^N$.

(ii). $\text{supp } \theta_i$ είναι συμπαγής και $\text{supp } \theta_i \subset U_i$ για κάθε $i = 1, \dots, k$. Επίσης $\text{supp } \theta_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$.

Όταν το Ω είναι φραγμένο ανοικτό και $\Gamma = \partial\Omega$, τότε $\theta_0|_\Omega \in C_0^\infty(\Omega)$.

Θεώρημα L.79. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^1 με Γ φραγμένο (ή $\Omega = \mathbb{R}_+^N$). Τότε υπάρχει ένας τελεστής επέκτασης

$$P : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

γραμμικός τέτοιος ώστε, για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$, να ισχύει

(i). $Pu|_\Omega = u$.

(ii). $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$.

(iii). $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

όπου το C εξαρτάται μόνο από το Ω .

Πόρισμα L.80. (Πυκνότητα). Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^1 . Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία (u_n) του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, τέτοια ώστε $u_n|_\Omega \rightarrow u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$. Με άλλα λόγια, οι περιορισμοί στο Ω των συναρτήσεων του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ αποτελούν έναν πυκνό υπόχωρο του $W^{1,p}(\Omega)$.

ΒΙΙ. Οι χώροι $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $N \geq 2$, $k \geq 2$

Ορισμός L.81. Έστω $K \geq 2$ ένας ακέραιος και p ένας πραγματικός με $1 \leq p \leq \infty$. Ορίζουμε αναδρομικά το χώρο

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{k-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{k-1,p}(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}.$$

Ισοδύναμα, ο χώρος αυτός ορίζεται με

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : \forall a \text{ με } |a| \leq k \exists g_a \in L^p(\Omega) \text{ τέτοιο ώστε} \\ \int_{\Omega} u D^a \phi = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} g_a \phi, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \}.$$

Συμβολίζουμε $D^a u = g_a$. Ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$, εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |a| \leq k} \|D^a u\|_{L^p(\Omega)}$$

είναι χώρος Banach. Ειδικά για $p = 2$ θέτουμε $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Ο $H^k(\Omega)$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{0 \leq |a| \leq k} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)}$$

είναι χώρος Hilbert.

Παρατήρηση L.82. Αποδεικνύεται ότι, αν το Ω είναι "αρκετά ομαλό", με $\partial\Omega$ φραγμένο, τότε η νόρμα του $W^{k,p}(\Omega)$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα

$$\|u\|_{L^p} + \sum_{|a|=k} \|D^a u\|_{L^p}.$$

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι για κάθε πολυδείκτη a , με $0 < |a| < k$, και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από τα Ω, ε, a) τέτοια ώστε

$$\|D^a u\|_{L^p} \leq \varepsilon \sum_{|\beta|=k} \|D^\beta u\|_{L^p} + C \|u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega).$$

Ανισότητες Sobolev

Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Θεώρημα L.83. (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg). Έστω $1 \leq p < N$, τότε

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

όπου το p^* δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Λήμμα L.84. Έστω $N \geq 2$ και $f_1, \dots, f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Για $x \in \mathbb{R}^N$ και $1 \leq i \leq N$, θέτουμε

$$\tilde{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Τότε η συνάρτηση

$$f(x) = f_1(\tilde{x}_1) \cdots f_N(\tilde{x}_N), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^N)$ και

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Πόρισμα L.85. Έστω $1 \leq p < N$. Τότε

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

με συνεχή ενσφήνωση.

Πόρισμα L.86. (Οριακή περίπτωση $p = N$). Ισχύει

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty)$$

με συνεχή ενσφήνωση.

Θεώρημα L.87. (Morrey). Έστω $p > N$, τότε

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

με συνεχή ενσφήνωση. Επιπλέον, για κάθε $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ισχύει

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^a \|\nabla u\|_{L^p} \quad \sigma.π \text{ για } x, y \in \mathbb{R}^N,$$

με $a = 1 - N/p$ και C μια σταθερά (που εξαρτάται μόνο από το p και το N).

Παρατήρηση L.88. (i). Από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει η ύπαρξη μιας συνάρτησης $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^N)$ τέτοιας ώστε $u = \tilde{u}$ σ.π στον $\mathbb{R}^N$. (Πράγματι, έστω $A \subset \mathbb{R}^N$ ένα σύνολο μέτρου μηδέν τέτοιο ώστε να ισχύει η ανισότητα για $x, y \in \mathbb{R}^N \setminus A$. Επειδή το $\mathbb{R}^N \setminus A$ είναι πυκνό στον $\mathbb{R}^N$, η $u|_{\mathbb{R}^N \setminus A}$ έχει μια (μοναδική) συνεχή επέκταση στον $\mathbb{R}^N$). Με άλλα λόγια, κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}$, $p > N$, έχει ένα συνεχή αντιπρόσωπο. Στη συνέχεια, θα αντικαθιστούμε συστηματικά την u με τον συνεχή αντιπρόσωπό της όταν αυτό φανεί χρήσιμο.

(ii). Από τη σχέση εγκλεισμού προκύπτει ότι αν $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $N < p < \infty$, τότε

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Πράγματι, υπάρχει ακολουθία (u_n) του $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε $u_n \rightarrow u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Η u είναι επίσης ομοιόμορφο όριο στον $\mathbb{R}^N$ της ακολουθίας u_n .

Πόρισμα L.89. Έστω $k \geq 1$ ένας ακέραιος και $1 \leq p < \infty$. Ισχύουν

(i). αν $1/p - k/N > 0$, τότε $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^t(\mathbb{R}^N)$, όπου $1/t = 1/p - k/N$,

(ii). αν $1/p - k/N = 0$, τότε $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^t(\mathbb{R}^N)$, για κάθε $t \in [p, \infty)$,

(iii). αν $1/p - k/N < 0$, τότε $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

με συνεχείς ενσφηνώσεις. Επιπλέον, αν ο $k - N/p > 0$ δεν είναι ακέραιος, θέτουμε

$$m = \left[k - \frac{N}{p} \right] \text{ και } \theta = \left(k - \frac{N}{p} \right) - m, (0 < \theta < 1).$$

Έχουμε, για κάθε $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\|D^a u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{k,p}}, \quad \forall a \text{ με } |a| \leq m$$

και

$$|D^a u(x) - D^a u(y)| \leq C \|u\|_{W^{k,p}} |x - y|^\theta \text{ σ.π για } x, y \in \mathbb{R}^N, \forall a, |a| = m.$$

Ειδικά, $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^m(\mathbb{R}^N)$.

Παρατήρηση L.90. Η περίπτωση $p = 1$ και $k = N$ είναι αρκετά ειδική. Ισχύει $W^{N,1} \subset L^\infty$. Πράγματι, έστω $u \in C_0^\infty$. Έχουμε

$$u(x_1, \dots, x_N) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_N} \frac{\partial^N u}{\partial x_1 \dots \partial x_N}(t_1, \dots, t_N) dt_1 \dots dt_N$$

και άρα

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{W^{N,1}} \quad \forall u \in C_0^\infty.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένα ανοικτό τάξεως C^1 , με Γ φραγμένο, ή ότι $\Omega = \mathbb{R}_+^N$.

Πόρισμα L.91. Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Ισχύουν

(i). αν $1 \leq p < N$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, όπου $1/p^* = 1/p - 1/N$,

(ii). αν $p = N$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega)$ για κάθε $t \in [p, +\infty)$,

(iii). αν $p > N$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

με συνεχείς ενσφηνώσεις. Επιπλέον, αν $p > N$, έχουμε, για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}} |x - y|^a \text{ σ.π για } x, y \in \Omega,$$

όπου το $a = 1 - N/p$ και το C εξαρτώνται μόνο από τα Ω, p και N . Ειδικά,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}).$$

Πόρισμα L.92. Το συμπέρασμα του πορίσματος L.89 ισχύει αν αντικαταστήσουμε τον $\mathbb{R}^N$ με το Ω .

Θεώρημα L.93. (Rellich-Kondrachov). Υποθέτουμε ότι το Ω είναι φραγμένο και τάξεως C^1 . Τότε

(i). αν $p < N$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega)$ για κάθε $t \in [1, p^*)$, όπου $1/p^* = 1/p - 1/N$,

(ii). αν $p = N$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega)$ για κάθε $t \in [1, +\infty)$,

(iii). αν $p > N$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$,

με συμπαγείς ενσφηνώσεις. Ειδικά

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

με συμπαγή ενσφηνωση για κάθε p .

Παρατήρηση L.94. Το θεώρημα Rellich-Kondrachov είναι σχεδόν βέλτιστο με την εξής έννοια.

(i). Αν το Ω δεν είναι φραγμένο, η ενσφηνωση $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ δεν είναι γενικά συμπαγής.

(ii). Η ενσφηνωση $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ δεν είναι ποτέ συμπαγής, ακόμα και αν το Ω είναι φραγμένο και ομαλό.

Παρατήρηση L.95. Έστω Ω ένα φραγμένο ανοικτό τάξεως C^1 . Τότε η νόρμα

$$|||u||| = \|\nabla u\|_{L^p} + \|u\|_{L^t}$$

είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,p}$, αρκεί να ισχύει

$$1 \leq t \leq p^* \text{ αν } 1 \leq p < N$$

$$1 \leq t < \infty \text{ αν } p = N$$

$$1 \leq t \leq \infty \text{ αν } p > N$$

Παρατήρηση L.96. (Οριακή περίπτωση $p = N$). Έστω Ω ένα φραγμένο ανοικτό τάξεως C^1 και $u \in W^{1,N}(\Omega)$. Τότε γενικά $u \notin L^\infty(\Omega)$. Για παράδειγμα, αν

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1/2\}$$

η συνάρτηση

$$u(x) = \left(\log \frac{1}{|x|} \right)^a \text{ με } 0 < a < 1 - 1/N$$

ανήκει στον $W^{1,N}(\Omega)$ αλλά δεν είναι φραγμένη, λόγω της ανωμαλίας στο $x = 0$. Ισχύει όμως η ανισότητα Trudinger

$$\int_{\Omega} e^{|u|^{N/(N-1)}} < \infty \quad \forall u \in W^{1,N}(\Omega).$$

ΒΙΙΙ. Οι χώροι $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $N \geq 2$

Ορισμός L.97. Έστω $1 \leq p < \infty$. Συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(\Omega)$ το κλειστό περίβλημα του $C_0^1(\Omega)$ στον $W^{1,p}(\Omega)$. Γράφουμε

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$, εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγει ο $W^{1,p}(\Omega)$, είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach. Είναι ανακλαστικός, αν $1 < p < \infty$. Ο H_0^1 είναι ένας χώρος Hilbert για το εσωτερικό γινόμενο του H^1 .

Παρατήρηση L.98. Επειδή ο $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ έχουμε

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Αντίθετα, αν $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, τότε γενικά $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$. Αλλά αν το $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ είναι "αρκετά ισχνό" και $p < N$ έχουμε $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. Για παράδειγμα, αν $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ και $N \geq 2$, αποδεικνύεται ότι $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Παρατήρηση L.99. Επαληθεύεται μέσω μιας ομαλοποιητικής ακολουθίας (ρ_n) ότι ο $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ισοδύναμα τον $C_0^\infty(\Omega)$ αντί του $C_0^1(\Omega)$ στον ορισμό του $W_0^{1,p}(\Omega)$. Οι συναρτήσεις του $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι "χονδρικά" συναρτήσεις του $W^{1,p}(\Omega)$ που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$.

Οι ακόλουθοι χαρακτηρισμοί υπονοούν ότι πρόκειται για συναρτήσεις που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$.

Λήμμα L.100. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο Ω , τότε $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Θεώρημα L.101. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^1 . Έστω

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \text{ με } 1 \leq p < \infty.$$

Τότε οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

(i). $u = 0$ στο $\partial\Omega = \Gamma$.

(ii). $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Πρόταση L.102. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^1 . Έστω $u \in L^p(\Omega)$, με $1 < p < \infty$. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

(i). $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(ii). Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\phi\|_{L^{p'}} \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^N), \forall i = 1, \dots, N.$$

(iii). Η συνάρτηση

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

ανήκει στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ και στην περίπτωση αυτή,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Πόρισμα L.103. (Ανισότητα Poincaré). Υποθέτουμε ότι το ανοικτό Ω είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από το Ω και το p) τέτοια ώστε

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

Ειδικά η έκφραση $\|\nabla u\|_{L^p}$ είναι μια νόρμα πάνω στον $W_0^{1,p}(\Omega)$ που είναι ισοδύναμη με τη νόρμα $\|u\|_{W^{1,p}}$. Η έκφραση $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο πάνω στον $H_0^1(\Omega)$ που επάγει τη νόρμα $\|\nabla u\|_{L^2}$, ισοδύναμη με τη νόρμα $\|u\|_{H^1}$.

Παρατήρηση L.104. Η ανισότητα Poincaré ισχύει επίσης αν το Ω είναι πεπερασμένου μέτρου ή αν το Ω είναι φραγμένο σε μία τουλάχιστον κατεύθυνση.

BIV. Οι χώροι $W_0^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $k \geq 2$

Ορισμός L.105. Για ακέραιο $k \geq 2$ και $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε τον $W_0^{k,p}(\Omega)$ ως το κλειστό περίβλημα του $C_0^k(\Omega)$ στον $W^{k,p}(\Omega)$.

Παρατήρηση L.106. "Χονδρικά" μια συνάρτηση u ανήκει στον $W_0^{k,p}(\Omega)$, αν $u \in W^{k,p}(\Omega)$ και αν $D^a u = 0$ στο $\partial\Omega$ για κάθε πολυδείκτη a , τέτοιον ώστε $|a| \leq k-1$. Πρέπει να διακρίνονται οι χώροι $W_0^{k,p}(\Omega)$ και $W^{k,p}(\Omega) \cap W_0^{k,p}(\Omega)$ για $k \geq 2$.

B*. Ο δυϊκός χώρος του $W_0^{1,p}(\Omega)$ - $W^{-1,q}(\Omega)$

Ορισμός L.107. Με $W^{-1,q}(\Omega)$ συμβολίζουμε το δυϊκό χώρο του $W_0^{1,p}(\Omega)$, με $1 \leq p < \infty$, και με $H^{-1}(\Omega)$ τον δυϊκό του $H_0^1(\Omega)$. Ταυτίζουμε τον $L^2(\Omega)$ με τον δυϊκό του, αλλά δεν ταυτίζουμε τον $H_0^1(\Omega)$ με τον δυϊκό του. Έχουμε τον ακόλουθο εγκλεισμό.

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

με συνεχείς πυκνές ενσφηνώσεις. Αν το Ω είναι φραγμένο, έχουμε

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega), \text{ αν } \frac{2N}{N+2} \leq p < \infty$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις. Αν το Ω δεν είναι φραγμένο, έχουμε

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega), \text{ αν } \frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2.$$

Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα στοιχεία του $W^{-1,q}(\Omega)$ με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση L.108. Έστω $F \in W^{-1,q}(\Omega)$. Τότε υπάρχουν $f_0, \dots, f_N \in L^q(\Omega)$, τέτοιες ώστε

$$\langle F, v \rangle = \int f_0 v + \sum_{i=1}^N \int f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}$$

και

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|f_i\|_{L^q} = \|F\|.$$

Αν το Ω είναι φραγμένο, μπορούμε να πάρουμε $f_0 = 0$.

Παράρτημα Μ

Λογισμός Μεταβολών

Στοιχειώδεις έννοιες

Υπενθυμίζουμε ότι,

1. μια συνάρτηση f που ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα I έχει τοπικό ή σχετικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_0 του I αν ισχύει $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε x τέτοιο ώστε $|x_0 - x| < \delta$, για κάποιο δ .
2. Επίσης αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 του I και η f είναι διαφορίσιμη στο I τότε $f'(x_0) = 0$ η οποία είναι αναγκαία συνθήκη. Ανάλογα ισχύουν όταν η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .
3. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .

Ορισμός Μ.1. Συναρτησοειδές ή συναρτησιακό ονομάζουμε μια απεικόνιση η οποία σε κάθε συνάρτηση $y(t)$ μιας καλώς ορισμένης κλάσης A αντιστοιχεί ένα πραγματικό αριθμό. Δηλαδή

$$J : A \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ο λογισμός των μεταβολών είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης ή της μεγιστοποίησης ενός συναρτησιακού J επί του συνόλου A , το οποίο καλείται μεταβολικό πρόβλημα. Κατά κάποιο τρόπο ο λογισμός των μεταβολών μπορεί να χαρακτηριστεί ως ο λογισμός των συναρτησιακών. Σύνολο των αποδεκτών συναρτήσεων, δηλαδή εκείνων των συναρτήσεων που ανταγωνίζονται για να ελαχιστοποιήσουν ή να μεγιστοποιήσουν ένα συναρτησιακό J , ονομάζουμε ένα καλώς ορισμένο σύνολο συναρτήσεων A , δηλαδή ένα σύνολο το οποίο είναι εφοδιασμένο με ένα τρόπο εγγύτητας των στοιχείων του π.χ. ένας γραμμικός χώρος με νόρμα.

Ορισμός Μ.2. Έστω συναρτησιακό $J : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq V$, V ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$. Θα λέμε ότι το J παίρνει τοπικά ελάχιστη τιμή στο $y_0 \in A$ αν $J(y_0) \leq J(y)$ για κάθε $y \in A$ με $\|y - y_0\| < \delta$ και $\delta > 0$.

Παράγωγοι συναρτησιακών

Θυμίζουμε ότι ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο x_0 παίρνει τη μορφή

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

όπου το $o(\Delta x)$ συμβολίζει όρους υψηλότερης τάξης ως προς Δx που έχουν την ιδιότητα

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = 0$$

δηλαδή συγκλίνουν στο 0 "ταχύτερα" από το Δx . Συμβολίζουμε με $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ την ολική μεταβολή και παρατηρούμε ότι το διαφορικό της f στο x_0 , που ορίζεται ως $df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$, είναι ο γραμμικός όρος ως προς τη μεταβολή Δx της ολικής μεταβολής Δf . Ακολουθώντας ένα ανάλογο σκεπτικό θεωρούμε ένα συναρτησιακό $J : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου A είναι υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου V με νόρμα. Έστω $y_0 \in A$ και $h \in V$ τέτοιο ώστε $y_0 + \varepsilon h$ να ανήκει στο A για κάθε αρκετά μικρό πραγματικό αριθμό ε . Θέτουμε $\delta y_0 = \varepsilon h$, το οποίο ονομάζουμε μεταβολή της συνάρτησης y_0 και συμβολίζουμε με $\Delta J = J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)$ την ολική μεταβολή του συναρτησιακού J που οφείλεται στη μεταβολή εh του y_0 .

Την τιμή του συναρτησιακού J επί της μονοπαραμετρικής οικογένειας συναρτήσεων $y_0 + \varepsilon h$ αντιμετωπίζουμε ως συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής ε και θέτουμε για αυτό $\mathcal{J}(\varepsilon) = J(y_0 + \varepsilon h)$ οπότε $\mathcal{J}(0) = J(y_0)$. Αναπτύσσουμε την $\mathcal{J}$ με το θεώρημα Taylor υποθέτοντας ότι είναι επαρκώς διαφορίσιμη και έχουμε

$$\mathcal{J}(\varepsilon) = \mathcal{J}(0) + \mathcal{J}'(0)\varepsilon + \frac{\mathcal{J}''(0)}{2!}\varepsilon^2 + \dots$$

ή

$$J(y_0 + \varepsilon h) = J(y_0) + \mathcal{J}'(0)\varepsilon + \frac{\mathcal{J}''(0)}{2!}\varepsilon^2 + \dots$$

ή

$$J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0) = \mathcal{J}'(0)\varepsilon + \frac{\mathcal{J}''(0)}{2!}\varepsilon^2 + \dots$$

ή

$$\Delta J = \mathcal{J}'(0)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Ορισμός Μ.3. Έστω $J : A \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτησιακό επί του A όπου $A \subset V$ και V γραμμικός χώρος με νόρμα. Έστω $y_0 \in A$ και $h \in V$ τέτοια ώστε $y_0 + \varepsilon h$ να ανήκει στο A για κάθε αρκετά μικρό ε . Ορίζουμε ως πρώτη μεταβολή (ή μεταβολή Gateaux) του J στο y_0 κατά την κατεύθυνση h το $\mathcal{J}'(0)$ την οποία συμβολίζουμε $\delta J(y_0, h)$ δηλαδή

$$\delta J(y_0, h) = \mathcal{J}'(0) = \frac{d}{d\varepsilon} J(y_0 + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)}{\varepsilon} \right) \quad (M.1)$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχει η παράγωγος. Μια κατεύθυνση h για την οποία υπάρχει η (M.1) ονομάζεται αποδεκτή μεταβολή στο y_0 .

Παρατήρηση Μ.4. 1. Η πρώτη μεταβολή $\delta J(y_0, h)$ πληροί τη συνθήκη ομογένειας

$$\delta J(y_0, ah) = a\delta J(y_0, h), \quad a \in \mathbb{R}.$$

2. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το $\delta J(y_0, h)\varepsilon$, όπως ορίστηκε το $\delta J(y_0, h)$, μοιάζει με διαφορικό της ΔJ και υπάρχει επίσης μια αναλογία με την κατευθυνόμενη παράγωγο.

Για τον υπολογισμό της πρώτης μεταβολής ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1. Υπολογίζουμε το J στο $y_0 + \varepsilon h$, δηλαδή το $J(\varepsilon)$, με h τέτοιο ώστε $y_0 + \varepsilon h$ να ανήκει στο A .
2. Παραγωγίζουμε την $J(\varepsilon)$ ως προς ε .
3. Υπολογίζουμε την παραπάνω ευρεθείσα παράγωγο για $\varepsilon = 0$, δηλαδή το $J'(0)$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει μια αναγκαία συνθήκη για το τοπικό ελάχιστο ενός συναρτησιακού.

Θεώρημα Μ.5. (αναγκαία συνθήκη για το τοπικό ελάχιστο). Έστω $J : A \rightarrow \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό, $A \subseteq V$ όπου V ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$. Αν το $y_0 \in A$ είναι σημείο όπου το J έχει τοπικό ελάχιστο ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ τότε

$$\delta J(y_0, h) = 0 \tag{M.2}$$

για όλες τις αποδεκτές μεταβολές h .

Παρατήρηση Μ.6. Η συνθήκη (M.2) ισχύει για όλες τις αποδεκτές μεταβολές h οπότε μας επιτρέπει να απαλείψουμε το h από τη συνθήκη και να πάρουμε μία εξίσωση μόνο ως προς y_0 η οποία γενικά είναι μια διαφορική εξίσωση. Οι λύσεις y_0 της (M.2) είναι υποψήφιος για ακρότατα και λέγονται στάσιμες συναρτήσεις. Αν $\delta J(y_0, h) = 0$, συχνά λέμε ότι το J είναι στάσιμο στο y_0 κατά την κατεύθυνση h .

Υπάρχει μια ποικιλία προβλημάτων βελτιστοποίησης συναρτησιακών ανάλογα με τον τύπο μορφή του συναρτησιακού. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε διάφορες περιπτώσεις με τον τύπο του συναρτησιακού να δίνεται με ένα ή πολλά ολοκληρώματα στα οποία εμπλέκονται μία ή πολλές συναρτήσεις καθώς και παράγωγοί τους υψηλότερης τάξης, διότι αυτοί οι τύποι συναρτησιακών παρουσιάζουν ενδιαφέρον στον κλασσικό λογισμό μεταβολών. Γενικά υπάρχει ένας συγκεκριμένος τρόπος αντιμετώπισης αλλά με τις ιδιαιτερότητές του ανα περίπτωση. Την εμφανιζόμενη συνάρτηση L ονομάζουμε Λαγκρανζιανή.

1. (Μεταβολικό πρόβλημα τάξης 1)

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx$$

όπου $y \in C^2[a, b]$, $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, L δύο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα του $C^2[a, b]$. Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και για $y \in C^1[a, b]$ αλλά η υπόθεση της αυξημένης ομαλότητας απλουστεύει τη διαδικασία. (Το παραπάνω είναι το λεγόμενο απλούστατο πρόβλημα)

2. (Μεταβολικό πρόβλημα τάξης 2)

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', y'') dx, y \in A$$

όπου A είναι το σύνολο των $C^4[a, b]$ συναρτήσεων που πληρούν τις συνοριακές συνθήκες

$$y(a) = A_1, y'(a) = A_2, y(b) = B_1, y'(b) = B_2.$$

3. (Μεταβολικό πρόβλημα τάξης n)

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx, y \in A$$

όπου A είναι το σύνολο των συναρτήσεων του $C^{2n}[a, b]$ που πληρούν τις $2n$ συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} y(a) &= A_1, y'(a) = A_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = A_n \\ y(b) &= B_1, y'(b) = B_2, \dots, y^{(n-1)}(b) = B_n. \end{aligned}$$

4. (Γενίκευση σε διαφορετική κατεύθυνση)

$$J(y_1, y_2) = \int_a^b L(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2) dx$$

όπου $y_1, y_2 \in C^2[a, b]$ με συνοριακές συνθήκες

$$y_1(a) = A_1, y_2(a) = A_2, y_1(b) = B_1, y_2(b) = B_2.$$

5.

$$J(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

όπου $y_i \in C^2[a, b]$ με συνοριακές συνθήκες

$$y_i(a) = A_i, y_i(b) = B_i, i = 1, \dots, n.$$

6.

$$J(u) = \int \int_R L(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy, \quad u \in A$$

όπου R κλειστό χωρίο στο επίπεδο xy και A το σύνολο των συναρτήσεων του $C^2(R)$ των οποίων οι τιμές είναι δεδομένες επί της καμπύλης C που αποτελεί το σύνορο του χωρίου R . Συνεπώς, $u \in A$ αν $u \in C^2(R)$ και $u(x, y) = f(x, y)$, (x, y) επί της C , όπου $f(x, y)$ δεδομένη συνάρτηση που ορίζεται πάνω στη C και που οι τιμές της σχηματίζουν μια συγκεκριμένη καμπύλη Γ , που αποτελεί το σύνορο της επιφάνειας u .

7. Όταν $u = u(x_1, \dots, x_m)$

$$J(u) = \int \cdots \int_{R_m} L \left(x_1, \dots, x_m, u(x_1, \dots, x_m), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) dx_1 \cdots dx_m$$

όπου R_m κλειστό χωρίο στον m -διάστατο ευκλείδειο χώρο.

8. Όταν $u^1 = u^1(x_1, \dots, x_m), \dots, u^n = u^n(x_1, \dots, x_m)$

$$J(u^1, \dots, u^n) = \int \cdots \int_{R_m} L(\vec{x}, \vec{u}, \nabla u^1, \dots, \nabla u^n) dx_1 \cdots dx_m$$

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στις περιπτώσεις 1 έως 8 παραθέτοντας έτοιμα αποτελέσματα από την πλήρη και αναλυτική αντιμετώπισή τους. Τελευταία αναφέρουμε μια περίπτωση που χαρακτηρίζουμε ως γενική και παρουσιάζει μεγάλη πολυπλοκότητα.

(Περίπτωση 1). Το απλούστατο πρόβλημα - Η εξίσωση Euler-Lagrange

Έστω μία συνάρτηση $y \in C^2[a, b]$ με $y(a) = y_0, y(b) = y_1$ και μια συνάρτηση L δύο φορές διαφορίσιμη και ορισμένη στο $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx$$

και αναζητούμε αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου του συναρτησιακού J . Την εύρεση ενός τοπικού ελαχίστου του συναρτησιακού J ονομάζουμε συχνά ως απλούστατο πρόβλημα. Το λήμμα που ακολουθεί αποτελεί μια εκδοχή του ονομαζόμενου θεμελιώδους λήμματος του λογισμού των μεταβολών και χρησιμεύει στο επόμενο θεώρημα.

Λήμμα Μ.7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν

$$\int_a^b f h = 0$$

για κάθε δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση h με $h(a) = h(b) = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Μία συνθήκη, ανάλογη της αναγκαίας συνθήκης $F'(x_0) = 0$ για την ύπαρξη ελαχίστου της F στο x_0 του διαφορικού λογισμού, αναγκαία για τοπικό ελάχιστο αποτελεί η εξίσωση Euler-Lagrange, που εκφράζει το παρακάτω θεώρημα, η οποία είναι Σ.Δ.Ε και γενικά μη γραμμική.

Θεώρημα Μ.8. Αν η συνάρτηση y είναι το σημείο όπου το συναρτησιακό

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx$$

λαμβάνει ελάχιστο, όπου $y \in C^2[a, b]$ και $y(a) = y_0$ και $y(b) = y_1$ τότε η y πληροί την εξίσωση Euler-Lagrange

$$L_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} L_{y'}(x, y, y') = 0, \quad x \in [a, b], \quad (M.3)$$

όπου με L_y συμβολίζεται η $\partial L / \partial y$ και με $L_{y'}$ συμβολίζεται η $\partial L / \partial y'$.

Παρατήρηση Μ.9. (1). Οι λύσεις της (Μ.3) δεν είναι αναγκαστικά τοπικά ελάχιστα αν και γενικά τις χαρακτηρίζουμε (τοπικά) ακρότατα. Πιο σωστά πρέπει να χαρακτηριστούν ως πιθανά (τοπικά) ακρότατα. Αν κάποιο y είναι ακρότατο τότε $\delta J(y, h) = 0$ για κάθε h τότε λέμε ότι το J είναι στάσιμο στο y και συχνά αυτό το y το χαρακτηρίζουμε και ως στάσιμη συνάρτηση για το J .

(2). Εκτελώντας την παραγώγιση ως προς x στο δεύτερο μέλος της (Μ.3), η εξίσωση γίνεται

$$L_y - L_{y'x} - L_{y'y'}y' - L_{y'y''}y'' = 0$$

και με την προϋπόθεση ότι $L_{y'y'} \neq 0$ διαπιστώνουμε ότι είναι δεύτερης τάξης.

Η εξίσωση Euler-Lagrange είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με τη λύση της να περιέχει, ως γνωστόν, δύο αυθαίρετες σταθερές και απλοποιείται η μορφή της στις περιπτώσεις που η Λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται ευθέως από μια από τις μεταβλητές x, y, y' .

1. Αν $L = L(x, y)$ τότε η εξίσωση Euler-Lagrange είναι η $L_y(x, y) = 0$ η οποία είναι αλγεβρική εξίσωση.
2. Αν $L = L(x, y')$ τότε η εξίσωση Euler-Lagrange είναι της μορφής $L_{y'}(x, y') = C$.
3. Αν $L = L(y, y')$ τότε η εξίσωση Euler-Lagrange είναι της μορφής

$$L(y, y') - y' L_{y'}(y, y') = C.$$

Θυμίζουμε ότι πρώτο ολοκλήρωμα μιας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

είναι μια συνάρτηση της μορφής $g(x, y, y')$ η οποία είναι σταθερή όταν η y είναι λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης. Συνεπώς η $g = C$ συνιστά ένα πρώτο ολοκλήρωμα. Έτσι οι εξισώσεις των περιπτώσεων 2. και 3. αποτελούν πρώτα ολοκληρώματα της εξίσωσης Euler-Lagrange.

Περίπτωση 2

(Μεταβολικό πρόβλημα τάξης 2).

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', y'') dx, y \in A$$

όπου A είναι το σύνολο των $C^4[a, b]$ συναρτήσεων που πληρούν τις συνοριακές συνθήκες

$$y(a) = A_1, y'(a) = A_2, y(b) = B_1, y(b) = B_2.$$

Το λήμμα που ακολουθεί αποτελεί μια άλλη εκδοχή του λήμματος του Lagrange, του ονομαζόμενου και θεμελιώδους λήμματος του λογισμού μεταβολών και χρησιμεύει στο επόμενο θεώρημα.

Λήμμα M.10. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$. Αν ισχύει $\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$ για κάθε $h \in C^4[a, b]$ με $h(a) = h'(a) = h(b) = h'(b) = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Θεώρημα M.11. Αν η y είναι σημείο όπου το συναρτησιακό

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', y'')dx$$

λαμβάνει τοπικό ελάχιστο και $y(a) = A_1, y'(a) = A_2, y(b) = B_1, y'(b) = B_2$, τότε η y πληροί την εξίσωση Euler-Lagrange

$$L_y - \frac{d}{dx}L_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}L_{y''} = 0 \quad a \leq x \leq b.$$

Παρατήρηση M.12. Η εξίσωση Euler-Lagrange του μεταβολικού προβλήματος τάξης 2 είναι τέταρτης τάξης και η γενική της λύση θα περιλαμβάνει τέσσερις σταθερές αυθαίρετες που θα υπολογιστούν από τις συνοριακές συνθήκες.

Περίπτωση 3

(Μεταβολικό πρόβλημα τάξης n)

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})dx, \quad y \in A$$

όπου A είναι το σύνολο των συναρτήσεων του $C^{2n}[a, b]$ που πληρούν τις $2n$ συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} y(a) &= A_1, y'(a) = A_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = A_n \\ y(b) &= B_1, y'(b) = B_2, \dots, y^{(n-1)}(b) = B_n. \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση Euler-Lagrange είναι η

$$L_y - \frac{d}{dx}L_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}L_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}L_{y^{(n)}} = 0$$

η οποία είναι συνήθης διαφορική εξίσωση τάξης $2n$.

Περίπτωση 4

(Γενίκευση σε διαφορετική κατεύθυνση).

$$J(y_1, y_2) = \int_a^b L(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx$$

όπου $y_1, y_2 \in C^2[a, b]$ με συνοριακές συνθήκες

$$y_1(a) = A_1, y_2(a) = A_2, y_1(b) = B_1, y_2(b) = B_2.$$

Υποθέτοντας ότι οι y_1, y_2 ελαχιστοποιούν τοπικά το J , με ανάλογη αλλά πολύπλοκη διαδικασία καταλήγουμε στο ότι οι y_1 και y_2 πρέπει να ικανοποιούν το σύστημα των δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} L_{y_1} - \frac{d}{dx} L_{y_1'} = 0 \\ L_{y_2} - \frac{d}{dx} L_{y_2'} = 0 \end{cases}$$

που είναι γνωστές ως εξισώσεις Euler-Lagrange του προβλήματος. Οι τέσσερις αυθαίρετες σταθερές που εμφανίζονται στην γενική λύση μπορούν να προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες.

Περίπτωση 5

$$J(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

όπου $y_i \in C^2[a, b]$ με συνοριακές συνθήκες

$$y_i(a) = A_i, y_i(b) = B_i, i = 1, \dots, n.$$

Μια αναγκαία συνθήκη για να έχουμε στο $y_1, \dots, y_n$ τοπικό ελάχιστο του συναρτησιακού J είναι να πληρείται το σύστημα των n συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$L_{y_i} - \frac{d}{dx} L_{y_i'} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

που είναι γνωστές ως εξισώσεις Euler-Lagrange του μεταβολικού προβλήματος.

Περίπτωση 6

$$J(u) = \int \int_R L(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy, u \in A$$

όπου R κλειστό χωρίο στο επίπεδο x, y και A το σύνολο των συναρτήσεων του $C^2(R)$ των οποίων οι τιμές είναι δεδομένες επί της καμπύλης C που αποτελεί το σύνορο του χωρίου R . Συνεπώς, $u \in A$ αν $u \in C^2(R)$ και $u(x, y) = f(x, y)$, (x, y) επί της C , όπου $f(x, y)$ δεδομένη συνάρτηση που ορίζεται πάνω στη C και που οι τιμές της σχηματίζουν μια συγκεκριμένη καμπύλη Γ , που αποτελεί το σύνορο της επιφάνειας u . Ακολουθώντας τα βήματα για τον υπολογισμό της πρώτης μεταβολής θεωρούμε την οικογένεια των αποδεκτών συναρτήσεων $u(x, y) + \varepsilon h(x, y)$ όπου $h \in C^2(R)$ και $h(x, y) = 0$ για $(x, y) \in C$ και υπολογίζουμε το

$$\delta J(u, h) = \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0}$$

το οποίο είναι

$$\int \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (h L_{u_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (h L_{u_y}) \right] dx dy.$$

Μετασχηματίζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα σε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα επί της C , με χρήση του θεωρήματος Green, το οποίο αναφέρει ότι αν P και Q είναι συναρτήσεις του $C^1(R)$, τότε

$$\int \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy$$

προκύπτει ότι

$$\delta J(u, h) = \int \int_R \left[L_u - \frac{\partial}{\partial x} L_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y} \right] h dx dy.$$

Αν το u είναι τοπικό ελάχιστο τότε $\delta J(u, h) = 0$ για κάθε $h \in C^2(R)$ με $h(x, y) = 0$ επί της C . Το λήμμα που ακολουθεί αποτελεί γενικευμένη εκδοχή του θεμελιώδους λήμματος του λογισμού μεταβολών και μας βοηθάει να βρούμε τη ζητούμενη αναγκαία συνθήκη.

Λήμμα M.13. Αν $g \in C(R)$ και

$$\int \int_R g(x, y) h(x, y) dx dy = 0$$

για κάθε $h \in C^2(R)$ με $h(x, y) = 0$ επί της C τότε $g(x, y) = 0$ για $(x, y) \in R$.

Από τη συνθήκη $\delta J(u, h) = 0$ παίρνουμε την αναγκαία συνθήκη

$$L_u - \frac{\partial}{\partial x} L_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y} = 0$$

που είναι η εξίσωση Euler-Lagrange του μεταβολικού προβλήματος και είναι μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης για τη $u = u(x, y)$. Οι λύσεις της λέγονται ακρότατα ή ακρότατες επιφάνειες.

Περίπτωση 7

Όταν $u = u(x_1, \dots, x_m)$

$$J(u) = \int \cdots \int_{R_m} L \left(x_1, \dots, x_m, u(x_1, \dots, x_m), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) dx_1 \cdots dx_m$$

όπου R_m κλειστό χωρίο στον m -διάστατο ευκλείδειο χώρο. Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση Euler-Lagrange είναι

$$L_u - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{x_1}} \right) - \cdots - \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{x_m}} \right) = 0,$$

όπου $u_{x_i} = \partial u / \partial x_i$, $i = 1, \dots, m$.

Περίπτωση 8

Όταν $u^1 = u^1(x_1, \dots, x_m), \dots, u^n = u^n(x_1, \dots, x_m)$

$$J(u^1, \dots, u^n) = \int \cdots \int_{R_m} L(\vec{x}, \vec{u}, \nabla u^1, \dots, \nabla u^n) dx_1 \cdots dx_m.$$

Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις Euler-Lagrange του μεταβολικού προβλήματος είναι

$$L_{u^i} - \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{x_j}^i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Γενική περίπτωση

Υπόθεση 1 Έστω η συνάρτηση $G : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχουν σταθερές $a \geq 0$ και $b \geq 0$ τέτοιες ώστε

$$G(x, u, P) \geq a|P|^p - b, \quad \forall x \in \Omega, \forall u \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathbb{R}^d$$

για κάποιο ακέραιο $p \in (1, +\infty)$.

Υπόθεση 2 Η απεικόνιση $P \mapsto G(x, u, P)$ είναι κυρτή και C^1 για κάθε $x \in \Omega$ και για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα M.14. Με τις υποθέσεις 1 και 2 το συναρτησιακό $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$J(u) = \int_{\Omega} G(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

έχει ελάχιστο στον $W^{1,p}(\Omega)$.

Παρατήρηση M.15. Αν η G είναι αυστηρά κυρτή τότε είναι και το J είναι αυστηρά κυρτό με αποτέλεσμα το ελάχιστο να είναι μοναδικό.

Ορισμός M.16. Μια συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ θα λέγεται συνάρτηση Καραθεοδωρή αν

1. η απεικόνιση $P \mapsto f(x, P)$ είναι συνεχής σχεδόν παντού για κάθε x .
2. η απεικόνιση $x \mapsto f(x, P)$ είναι μετρήσιμη για κάθε $P \in \mathbb{R}^m$.

Θεώρημα M.17. Υποθέτουμε ότι το $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ είναι φραγμένο και μετρήσιμο και το $S \subset \mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές. Εάν η f είναι συνάρτηση Καραθεοδωρή τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_\varepsilon \subset \Omega$ τέτοιο ώστε το $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ και η συνάρτηση

$$f : K_\varepsilon \times S \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι συνεχής.

Με την G να είναι στη συνέχεια συνάρτηση Καραθεοδωρή υποθέτουμε επιπλέον τα παρακάτω.

Υπόθεση 3 1. η απεικόνιση $P \mapsto G(x, u, P)$ είναι κυρτή συνάρτηση για κάθε $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

2. Υπάρχουν $1 \leq q < p$ και $C_1 > 0, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$G(x, u, P) \geq C_1|P|^p + C_2|u|^q + C_3$$

για κάθε $(x, u, P) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Είναι χρήσιμη για τη συνέχεια η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση Μ.18. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ανοικτό σύνολο $q \geq 1$ και q' τέτοιο ώστε $1/q + 1/q' = 1$. Έστω επίσης η συνάρτηση Καραθεοδωρή $G : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ώστε

$$G(x, P) \geq a(x)P + b(x)$$

για κάθε $P \in \mathbb{R}^d, x \in \Omega$, όπου $a \in L^{q'}(\Omega; \mathbb{R}^d), b \in L^1(\Omega)$ και "·" είναι το βαθμωτό γινόμενο στο $\mathbb{R}$. Εάν η $P \mapsto f(x, P)$ είναι κυρτή, τότε το συναρτησιακό

$$J : L^q(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$J(P) := \int_{\Omega} G(x, P(x)) dx,$$

ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα κάτω ημισυνέχειας.

Εάν $P_n \rightharpoonup P$ στο $L^q(\Omega)$ τότε

$$\liminf_n J(P_n) \geq J(P).$$

Θεώρημα Μ.19. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ανοικτό σύνολο $p, q \geq 1$ και q' τέτοιο ώστε $1/q + 1/q' = 1$. Έστω επίσης η συνάρτηση Καραθεοδωρή $G : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ώστε

$$G(x, P) \geq a(x)P + b(x) + c|u|^p$$

για κάθε $(u, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, x \in \Omega$, όπου $a \in L^{q'}(\Omega; \mathbb{R}^d), b \in L^1(\Omega)$ και "·" είναι το βαθμωτό γινόμενο στο $\mathbb{R}$. Εάν η $P \mapsto f(x, u, P)$ είναι κυρτή, τότε το συναρτησιακό

$$J : L^p(\Omega) \times L^q(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$J(u, P) := \int_{\Omega} G(x, u, P(x)) dx,$$

ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα κάτω ημισυνέχειας.

Εάν $u_n \rightarrow u$ στο $L^p(\Omega)$ και $P_n \rightharpoonup P$ στον $L^q(\Omega)$ τότε

$$\liminf_n J(u_n, P_n) \geq J(u, P).$$

Λήμμα M.20. Εάν το Ω είναι φραγμένο, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει σύνολο $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ και υπακολουθία $n_k \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ και

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |G(x, u_{n_k}(x), P_{n_k}(x)) - G(x, u(x), P_{n_k}(x))| dx < \varepsilon \mu(\Omega)$$

όπου μ είναι το μέτρο Lebesgue.

Θεώρημα M.21. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ φραγμένο με Lipschitz σύνορο. Υποθέτουμε ότι η G ικανοποιεί την

$$G(x, u, P) \geq a(x)P + b(x) + c|u|^r,$$

για κάθε $P \in \mathbb{R}^d$, $x \in \Omega$, με $a \in L^{p'}(\Omega)$, $b \in L^1(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}$ και $r \in [1, dp/(d-p)]$ εάν $p < d$ και $r \in [1, +\infty)$ αν $p \geq d$. Αν $P \mapsto G(x, u, P)$ είναι κυρτή τότε το $J : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$J(u) = \int_{\Omega} G(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής.

Η εξίσωση Euler-Lagrange

Υπόθεση 4 (Growth condition). Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\partial G/\partial u$, $\partial G/\partial P$ είναι συναρτήσεις Καραθεοδωρή και ικανοποιούν τις παρακάτω αυξητικές συνθήκες

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G}{\partial u} \right| &< a(x) + b(|u|^r + |P|^r) \\ \left| \frac{\partial G}{\partial P} \right| &< a(x) + b(|u|^r + |P|^r) \end{aligned}$$

όπου $a \in L^{\frac{p}{r}}(\Omega)$ και $b > 0$.

Θεώρημα M.22. Με ισχύουσα την αυξητική υπόθεση 4 και για $r = p$ ο ελαχιστοποιητής u ικανοποιεί την εξίσωση Euler-Lagrange στην ασθενή μορφή της, για συναρτήσεις δοκιμής $v \in C_0^\infty(\Omega)$, η οποία είναι

$$0 = \langle DJ(u), v \rangle = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial u} G(x, u, \nabla u) v(x) + \frac{\partial}{\partial P} G(x, u, \nabla u) v(x) \right) dx$$

για κάθε $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Παράρτημα N

Ασθενείς Λύσεις Π.Σ.Τ

Αρχίζουμε με μια παρατήρηση η οποία περιγράφει ένα σύνηθες σκεπτικό ανάλογο του οποίου χρησιμοποιούμε στη συνέχεια.

Παρατήρηση N.1. (i). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και αναζητούμε λύση x_0 της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x_0 \in \mathbb{Q}$. Αν περιοριστούμε στο σύνολο $\mathbb{Q}$, επειδή ως γνωστόν δεν είναι πλήρες, δεν διαθέτουμε εργαλεία όπως για παράδειγμα το θεώρημα Bolzano ώστε με τη χρήση του να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία λύση. Για το λόγο αυτό μπορούμε να επεκταθούμε αναζητώντας λύση σε όλο το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να δείξουμε, με κάποιον τρόπο, ότι η λύση που βρήκαμε είναι ρητός αριθμός.

(ii). Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει μια λύση της $h(x) = 0$ και γνωρίζουμε ότι κάποιο x_0 ελαχιστοποιεί μια συνάρτηση g η οποία είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Άρα θα ισχύει $g'(x_0) = 0$. Αν διαθέτουμε με κάποιον τρόπο την ισότητα $h(x) = g'(x)$ τότε είναι φανερό ότι ο ελαχιστοποιητής x_0 της g είναι η ζητούμενη λύση της $h(x) = 0$.

Στο παράρτημα περί λογισμού σε χώρους Banach αναφέρθηκε η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση N.2. Έστω $\mathbb{X}$ ανακλαστικός χώρος Banach και έστω συναρτησιακό $I : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, πιεστικό και ασθενώς κάτω ημισυνεχές. Τότε το συναρτησιακό I λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

Στη συνέχεια μέσα από ένα συγκεκριμένο παράδειγμα επίλυσης ενός Π.Σ.Τ θα αντιληφθούμε τη θέση και τη σημασία της "λεγόμενης" ασθενούς λύσης του Π.Σ.Τ. Γενικά μιλώντας, η ασθενής λύση ενός Π.Σ.Τ είναι μία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί μια σχέση ασφαλώς συσχετιζόμενη με τη διαφορική εξίσωση του προβλήματος που όμως υπακούει σε "χαλαρότερες" συνθήκες.

Πρόβλημα (αρχέτυπο Π.Σ.Τ Dirichlet).

Δοθείσης συνάρτησης $f \in L^2(\Omega)$ ζητείται συνάρτηση $u \in H_0^1(\Omega)$ η οποία να ικανοποιεί το Π.Σ.Τ

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{N.1})$$

Παρατήρηση Ν.3. Υπενθυμίζουμε ότι $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}}}$. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι αν $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $1 \leq p < \infty$ και αν το σύνορο του Ω είναι C^1 τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(i). $u(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega$.

(ii). $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Είναι λογικό λοιπόν να αναζητούμε λύσεις του προβλήματος (N.1) στο χώρο Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ για κατάλληλο p που στην περίπτωση μας είναι $p = 2$ οπότε έχουμε $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Η συνοριακή συνθήκη ενσωματώνεται στο χώρο $W_0^{1,p}$. Μία συνάρτηση $u \in C^2(\overline{\Omega})$ η οποία ικανοποιεί το (N.1) καλείται κλασσική λύση. Η εύρεση κλασσικής λύσης είναι μία ιδιαίτερα δύσκολη υπόθεση ακόμα και αν αυτή υπάρχει. Θέλουμε επομένως να χαλαρώσουμε την υπόθεση $u \in C^2$. Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τη διαφορική εξίσωση με μία συνάρτηση $v \in C_0^1(\Omega)$ και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε παίρνουμε

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

που με χρήση του τύπου Gauss-Green έχουμε

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

και επειδή $v(x) = 0$ στο $\partial\Omega$ προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (\text{N.2})$$

Μία συνάρτηση u που ικανοποιεί την εξίσωση (N.2) για κάθε $v \in C_0^1(\Omega)$ θα καλείται ασθενής λύση του προβλήματος (N.1).

Η απαίτηση να είναι η u ασθενής λύση αυξάνει τις δυνατότητες επιλογής αλλά είμαστε υποχρεωμένοι στη συνέχεια να δείξουμε ότι η ασθενής λύση που βρήκαμε ικανοποιεί το πρόβλημά μας. Στη συνέχεια γίνεται προσπάθεια εύρεσης μίας ασθενούς λύσης του (N.1). Όπως θα φανεί από τις προτάσεις που ακολουθούν αυτή η αναζήτηση σχετίζεται άμεσα με το αν το συναρτησιακό

$$I(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} f w dx$$

λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Η πρόταση που ακολουθεί είναι πολύ σημαντική διότι μεταθέτει το πρόβλημα εύρεσης ασθενούς λύσης του Π.Σ.Τ στην ελαχιστοποίηση ενός συναρτησιακού ταυτίζοντας την ασθενή λύση με τη θέση ελαχίστου του εν λόγω συναρτησιακού.

Μεταβολικές μέθοδοι

Πρόταση Ν.4. Θεωρούμε $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό και φραγμένο και $f \in L^2(\Omega)$. Τότε η συνάρτηση $u \in H_0^1(\Omega)$ είναι ασθενής λύση του προβλήματος (N.1) αν και μόνο αν ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx.$$

Απόδειξη. ($\Leftarrow$). Έστω ότι η $u \in H_0^1(\Omega)$ ελαχιστοποιεί το I , δηλαδή $I(w) \geq I(u)$, για κάθε $w \in H_0^1(\Omega)$. Θα δείξουμε ότι η u είναι ασθενής λύση του (N.1), δηλαδή ότι

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Έστω λοιπόν $v \in H_0^1$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(t) = I(u + tv)$. Μετά τους σχετικούς υπολογισμούς έχουμε ότι

$$g(t) = I(u) + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + t \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx \right).$$

Η g είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς t συνεπώς η παράγωγός της θα δίνεται ως

$$g'(t) = t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

Αφού η u ελαχιστοποιεί το I θα έχουμε ότι

$$g(t) = I(u + tv) \geq I(u) = g(0).$$

άρα, $g'(0) = 0$, δηλαδή ικανοποιείται η σχέση (N.2) που σημαίνει ότι η u είναι ασθενής λύση του (N.1).

($\Rightarrow$). Έστω ότι η $u \in H_0^1$ είναι ασθενής λύση του (N.1). Θα δείξουμε ότι ελαχιστοποιεί το I . Προς αυτήν την κατεύθυνση έστω $w \in H_0^1$. Θέτουμε $v = u - w$ και ορίζουμε πάλι τη συνάρτηση g όπως στο πρώτο σκέλος της απόδειξης. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} g(t) &= I(u + tv) \\ &= I(u) + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + t \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx \right) \\ &\geq I(u), \end{aligned}$$

αφού η u είναι ασθενής λύση. άρα, $g(t) \geq I(u)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Για $t = -1$ έχουμε

$$g(-1) = I(w) = I(u - u + w) \geq I(u).$$

άρα η u ελαχιστοποιεί το I . □

Το ερώτημα αν το πρόβλημα (N.1) έχει ασθενή λύση παραμένει. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα δοθεί από την πρόταση N.4 αν καταφέρουμε να δείξουμε ότι το συναρτησιακό I λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Αυτό επιτυγχάνεται δείχνοντας ότι το I είναι κάτω φραγμένο, δηλαδή ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\lambda = \inf\{I(w) : w \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει $\{w_n\}$ ακολουθία στον $H_0^1(\Omega)$ ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(w_n) = \lambda$$

και η $\{I(w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ως συγκλίνουσα θα είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$ με αποτέλεσμα επειδή ο $H_0^1(\Omega)$ είναι ανακλαστικός να υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $\{w_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ της $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στον $H_0^1(\Omega)$ με $\lim_{k \rightarrow \infty} w_{n_k} = u$, και μάλιστα $\lambda = I(u)$.

Πρόταση Ν.5. Έστω το συναρτησιακό $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$I(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} f w dx.$$

Τότε το I είναι κάτω φραγμένο.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} I(w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} f w dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |w|^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} -\varepsilon C \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \varepsilon C \right) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 dx \\ &\geq -\frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 dx, \end{aligned}$$

επιλέγοντας $\varepsilon > 0$ ώστε $\frac{1}{2} - \varepsilon C > 0$ και χρησιμοποιώντας τις ανισότητες ε -Young και Poincaré. Δηλαδή

$$-\frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 dx \leq I(w).$$

άρα το σύνολο τιμών του I είναι κάτω φραγμένο. □

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτουν τα εξής.

A. Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda = \inf\{I(w) : w \in H_0^1\}.$$

B. άρα υπάρχει $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1$ ώστε

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} I(w_n).$$

C. Η $\{I(w_n)\}$ ως συγκλίνουσα θα είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$.

D. Επειδή ο $H_0^1(\Omega)$ είναι ανακλαστικός υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $\{w_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ της $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε

$$w_{n_k} \rightharpoonup u \text{ στον } H_0^1.$$

Θα δείξουμε ότι $I(u) = \lambda$ οπότε το u θα είναι το infimum του συνόλου τιμών του I με αποτέλεσμα να το ελαχιστοποιεί. Έχουμε λοιπόν ότι

$$0 \leq |\nabla w_{n_k} - \nabla u|^2 = |\nabla w_{n_k}|^2 + |\nabla u|^2 - 2\nabla w_{n_k} \cdot \nabla u.$$

άρα

$$|\nabla w_{n_k}|^2 \geq |\nabla u|^2 + 2(\nabla w_{n_k} - \nabla u) \nabla u.$$

άρα

$$\begin{aligned} I(w_{n_k}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_{n_k}|^2 dx - \int_{\Omega} f w_{n_k} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{\Omega} (\nabla w_{n_k} - \nabla u) \nabla u dx - \int_{\Omega} f w_{n_k} dx. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $k \rightarrow \infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} I(w_{n_k}) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx = I(u).$$

Όμως $\lambda = \inf\{I(w) : w \in H_0^1(\Omega)\}$, άρα $I(u) = \lambda$. Δηλαδή το u ελαχιστοποιεί το I και σύμφωνα με την πρόταση N.4 είναι ασθενής λύση του προβλήματος (N.1). άρα με τη βοήθεια των προτάσεων N.2, N.4 και N.5, το πρόβλημα Dirichlet (N.1) έχει ασθενή λύση. Απομένει να δείξουμε ότι η ασθενής λύση u είναι και κλασσική λύση του (N.1). Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι $u \in C^2(\bar{\Omega})$ και ότι $u(x) = 0$ στο $\partial\Omega$ (να παρατηρήσουμε ότι εν γένει τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα). Αφού η u είναι ασθενής λύση του (N.1) ικανοποιεί την

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

με $v \in C^1(\bar{\Omega})$ και $v(x) = 0$ στο $\partial\Omega$ οπότε με χρήση του τύπου Gauss-Green έχουμε

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

ή

$$- \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

ή

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) v dx = 0,$$

από όπου με χρήση ενός επιχειρήματος πυκνότητας προκύπτει ότι

$$-\Delta u = f \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega.$$

Συνοψίζουμε την προηγούμενη διαδικασία επίλυσης του Π.Σ.Τ (N.1) στο ακόλουθο πρόγραμμα που περιγράφει τις γενικές γραμμές της μεταβολικής μεθόδου στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Βήμα 1ο. Δίνουμε τον ακριβή ορισμό της ασθενούς λύσης ο οποίος χρησιμοποιεί ως βασικά του εργαλεία τους χώρους Sobolev.

Βήμα 2ο. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας ασθενούς λύσης με μεταβολικές μεθόδους (δηλαδή εύρεση συναρτήσεων που ελαχιστοποιούν κάποιο συναρτησιακό ή μηδενίζουν κάποια παράγωγο).

Βήμα 3ο. Δείχνουμε ότι η ασθενής λύση είναι π.χ τάξεως C^2 . Αυτό αποτελεί ένα αποτέλεσμα ομαλότητας το οποίο να τονίσουμε ότι είναι πολύ λεπτό θέμα.

Βήμα 4ο. Επιστροφή στις κλασσικές λύσεις. Δείχνουμε ότι μια ασθενής λύση π.χ τάξεως C^2 είναι και κλασσική λύση.

Παρατήρηση Ν.6. Η μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω είναι ευέλικτη και εφαρμόζεται σε ένα πλήθος προβλημάτων, τονίζοντας ότι κάθε πρόβλημα έχει την ιδιαιτερότητά του ανα βήμα. Θα επιμείνουμε όμως ότι είναι απολύτως βασικό να κάνουμε τη σωστή επιλογή του συναρτησιακού χώρου στον οποίο ζητείται η ασθενής λύση.

Στο πρόβλημα που ακολουθεί θα περιγράψουμε έναν άλλο τρόπο προσέγγισης της ασθενούς λύσης, μέσω του θεωρήματος του Riesz.

Πρόβλημα.

Έστω $f \in L^2(\Omega)$. Τότε το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{N.3})$$

έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in H_0^1(\Omega)$.

Λύση.

Αρχικά πρέπει να βρούμε τη σχέση που πρέπει να ισχύει ώστε μια u να είναι ασθενής λύση του (N.3). Προς αυτήν την κατεύθυνση πολλαπλασιάζουμε τη διαφορική εξίσωση με μία $v \in C_0^1(\Omega)$ και ολοκληρώνουμε στο Ω . Έχουμε λοιπόν ότι

$$-\int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} v u dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Από το θεώρημα Gauss-Green παίρνουμε ότι

$$-\int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} v u dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

δηλαδή ότι

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega). \quad (\text{N.4})$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

η οποία θα αποδείξουμε ότι είναι ένα φραγμένο και γραμμικό συναρτησιακό. Πράγματι, εύκολα βλέπουμε ότι το F είναι γραμμικό ενώ είναι φραγμένο αφού

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \int_{\Omega} |f v| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Riesz υπάρχει μοναδικό $u \in H_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$\langle u, v \rangle = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

δηλαδή

$$\int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

άρα το u είναι μοναδική ασθενής λύση του (N.3).

Παράρτημα Ο

Σταθερά Σημεία

Γενικά μιλώντας, σταθερά σημεία μίας $F : A \rightarrow A$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $F(x) = x$. Πολλά προβλήματα της μη γραμμικής ανάλυσης μπορούν να επιλυθούν με τη βοήθεια θεωρημάτων σταθερού σημείου.

Ορισμός Ο.1. (i). Μία συνάρτηση $f : M \rightarrow M$ όπου (M, ρ) μετρικός χώρος λέγεται συστολή (Contraction) αν υπάρχει $0 < a < 1$ έτσι ώστε $\forall x, y \in M$ να ισχύει

$$\rho(Ax, Ay) \leq a\rho(x, y)$$

(ii). Μία συνάρτηση $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ όπου $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ χώρος με νόρμα λέγεται μη διασταλτική (non expansive) αν

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathcal{X}} \leq \|x - y\|_{\mathcal{X}}, \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$$

(iii). Μία συνάρτηση $r : \mathcal{X} \rightarrow M$ όπου $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ χώρος με νόρμα και $M \subset \mathcal{X}$ ονομάζεται περιστολή (retraction) αν r συνεχής και $r(x) = x$ για κάθε $x \in M$.

Θεώρημα Ο.2. (Συστολή του Banach). Έστω S πλήρης μετρικός χώρος και $f : S \rightarrow S$ συστολή. Τότε η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει ένα και μόνο ένα $x \in S$ τέτοιο ώστε $f(x) = x$. Επιπλέον

$$x = \lim f^n(x_0)$$

με x_0 τυχαίο στοιχείο του S .

Απόδειξη. Έστω (S, ρ) ο πλήρης μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in S$. Σχηματίζουμε την ακολουθία

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots$$

Θα δείξουμε ότι η $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Έστω $m \neq n$ ($m < n$). Εφαρμόζοντας συνεχώς την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\rho(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq \rho(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) + \rho(f^{m+1}(x_0), f^n(x_0))$$

$$\begin{aligned} \rho(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \rho(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) \\ &\quad + \dots + \rho(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)). \end{aligned} \tag{Ο.1}$$

Επειδή η f είναι συστολή ισχύει

$$\begin{aligned}\rho(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) &= \rho(f(f^{m-1}(x_0)), f(f^m(x_0))) \\ &\leq a\rho(f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) &\leq a^2\rho(f^{m-2}(x_0), f^{m-1}(x_0)) \\ &\leq \dots \leq a^m\rho(x_0, f(x_0)).\end{aligned}\tag{O.2}$$

Από τις (O.1) και (O.2) έχουμε

$$\begin{aligned}\rho(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq a^m\rho(x_0, f(x_0)) + a^{m+1}\rho(x_0, f(x_0)) \\ &\quad + \dots + a^{n-1}\rho(x_0, f(x_0)) \\ &= a^m(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-m-1})\rho(x_0, f(x_0))\end{aligned}$$

άρα

$$\rho(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq \frac{a^m}{1-a}\rho(x_0, f(x_0)).$$

Επειδή $0 < a < 1$ η $\{a^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική. άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N(\varepsilon)$ ώστε

$$\rho(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq \frac{a^m}{1-a}\rho(x_0, f(x_0)) < \varepsilon, \quad \forall n > m > N(\varepsilon).$$

Οπότε η $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική και λόγω πληρότητας του S θα συγκλίνει σε κάποιο $x \in S$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f^n(x_0), x) = 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x) = x$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\rho(f(x), x) &\leq \rho(f(x), f^n(x_0)) + \rho(f^n(x_0), x) \\ &\leq a\rho(x, f^{n-1}(x_0)) + \rho(f^n(x_0), x) \quad \forall n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Όμως $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f^n(x_0), x) = 0$ οπότε $\rho(f(x), x) = 0$ και έτσι $f(x) = x$. Τέλος θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλο σταθερό σημείο. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει $y \neq x$ ώστε $f(y) = y$. Τότε

$$\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leq a\rho(x, y),$$

δηλαδή $(1-a)\rho(x, y) \leq 0$, και επειδή $\rho(x, y) > 0$, προκύπτει ότι $a > 1$. Καταλήξαμε σε άτοπο και έτσι το σταθερό σημείο x είναι μοναδικό. □

Παρατήρηση O.3. Αν το U είναι κλειστό υποσύνολο του S τότε ο (U, ρ) θα είναι επίσης πλήρης μετρικός χώρος οπότε η $f : U \rightarrow U$ έχει ένα σταθερό σημείο στο U .

Θεώρημα O.4. (Brouwer σε σφαίρα του $\mathbb{R}^N$) Έστω Σ κλειστή σφαίρα του $\mathbb{R}^N$ και $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ συνεχής. Τότε η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Έστω $\Sigma = \bar{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^N$. Για την απόδειξη του θεωρήματος Brouwer θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίο αναφέρουμε χωρίς απόδειξη: (Retraction Theorem). Δεν υπάρχει περιστολή της μπάλας $\bar{B}(x_0, R) \subset \mathbb{R}^N$ στο σύνορό της $\partial B(x_0, R)$. Δηλαδή δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση

$$r : \bar{B}(x_0, R) \rightarrow \partial B(x_0, R),$$

τέτοια ώστε $r(x) = x$ για κάθε $x \in \partial B(x_0, R)$.

Έστω ότι η f δεν έχει σταθερό σημείο. Τότε $x - f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \bar{B}(0, 1)$. Θεωρούμε την ημιευθεία που ενώνει το σημείο $F(x)$ με το σημείο x . Η ημιευθεία αυτή τέμνει την επιφάνεια-σύνορο σε ένα σημείο και δημιουργείται μία

$$r(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x)),$$

με $\lambda(x) > 0$ και $\|r(x)\| = 1$ όπου $r : \bar{B}(0, 1) \rightarrow \partial B(0, 1)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η r είναι περιστολή. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \|r(x)\|^2 &= 1 \\ \|x - f(x)\|^2 \lambda^2(x) + 2(f(x), x - f(x))\lambda(x) + \|f(x)\|^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τριώνυμο ως προς $\lambda(x)$ και μας δίνει ότι για κάθε $x \in \bar{B}(0, 1)$

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{-(f(x), x - f(x))}{\|x - f(x)\|^2} \\ &\pm \frac{\sqrt{(f(x), x - f(x))^2 + (1 - \|f(x)\|^2)\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}. \end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση λ είναι συνεχής και δεδομένου ότι και η συνάρτηση f είναι συνεχής παίρνουμε τελικά τη συνέχεια της συνάρτησης r . Επιπλέον από την κατασκευή της r ισχύει ότι $r(x) = x$ για κάθε $x \in \partial B(0, 1)$. Δηλαδή είδαμε ότι η $r(x)$ είναι περιστολή το οποίο είναι άτοπο λόγω του Retraction Theorem. άρα πρέπει να υπάρχει ένα τουλάχιστον x τέτοιο ώστε $x - f(x) = 0$ οπότε η f έχει σταθερό σημείο.

Έστω τώρα $\Sigma = \bar{B}(0, R) \subset \mathbb{R}^N$. Θεωρούμε την $G(x) = f(Rx)/R$, $x \in \bar{B}(0, 1)$ με $G : \bar{B}(0, 1) \rightarrow \bar{B}(0, 1)$ η οποία είναι προφανώς συνεχής. Σύμφωνα με τα προηγούμενα η G έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in \bar{B}(0, 1)$ τέτοιο ώστε $G(x_0) = x_0$. άρα $f(Rx_0)/R = x_0$ οπότε $f(Rx_0) = Rx_0$ από όπου προκύπτει ότι η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο. $\square$

Θεώρημα O.5. (Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer). Κάθε συνεχής συνάρτηση από την μπάλα $B(0, 1)$ του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό της έχει σταθερό σημείο.

Πόρισμα O.6. Αν $f : B(0, R) \rightarrow B(0, R)$ συνεχής, τότε έχει σταθερό σημείο.

Πόρισμα O.7. Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και κυρτό και $f : K \rightarrow K$ συνεχής συνάρτηση τότε η f έχει σταθερό σημείο.

Πόρισμα O.8. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| = R > 0$ ισχύει ότι $(f(x), x) \geq 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_0\| \leq R$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Ισχύει ακριβώς το ίδιο αν $(f(x), x) \leq 0$.

Το Θεώρημα Schauder

Πρόταση Ο.9. Έστω $\mathcal{X}$ χώρος Banach, $K \subset \mathcal{X}$ συμπαγές. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος $\mathcal{X}_\varepsilon \subset \mathcal{X}$ και συνεχής απεικόνιση $g_\varepsilon : K \rightarrow \mathcal{X}_\varepsilon$ τέτοια ώστε

$$\|g_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in K.$$

Αν επιπλέον το K είναι κυρτό, τότε $g_\varepsilon : K \rightarrow K$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το K είναι συμπαγές σύνολο, υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ τέτοια ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Θεωρούμε

$$\mathcal{X}_\varepsilon = [\{x_1, x_2, \dots, x_n\}] \subset \mathcal{X}$$

και ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$b_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & x \in B(x_i, \varepsilon), i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

και

$$g_\varepsilon(x) = \frac{b_1(x)x_1 + b_2(x)x_2 + \dots + b_n(x)x_n}{b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_n(x)}, \quad x \in K.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon(x) - x\| &= \left\| \frac{b_1(x)x_1 + \dots + b_n(x)x_n}{b_1(x) + \dots + b_n(x)} - x \right\| \\ &= \left\| \frac{b_1(x)x_1 + \dots + b_n(x)x_n}{b_1(x) + \dots + b_n(x)} - \frac{b_1(x)x + \dots + b_n(x)x}{b_1(x) + \dots + b_n(x)} \right\| \\ &= \left\| \frac{b_1(x)(x_1 - x)}{b_1(x) + \dots + b_n(x)} + \dots + \frac{b_n(x)(x_n - x)}{b_1(x) + \dots + b_n(x)} \right\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Τέλος, αν το K είναι κυρτό, τότε η $g_\varepsilon : K \rightarrow K$ ως κυρτός συνδυασμός. □

Θεώρημα Ο.10. (Schauder). Έστω $\mathcal{X}$ χώρος Banach, K κλειστό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και $f : K \rightarrow K$ συνεχής. Τότε η f έχει σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$, $g_\varepsilon : K \rightarrow K$. Θεωρούμε το

$$K_\varepsilon = \text{Conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{X}_\varepsilon$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση $f_\varepsilon : K_\varepsilon \rightarrow K_\varepsilon$, με

$$f_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(f(x)).$$

Για την $f_\varepsilon(x)$ ισχύει το Θεώρημα Brouwer, οπότε υπάρχει x_ε , τέτοιο ώστε $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Όταν το $\varepsilon \rightarrow 0$, το $x_\varepsilon \rightarrow x \in K$, επειδή το $x_\varepsilon \in K$ και το K είναι συμπαγές. Ισχύει επίσης ότι

$$\begin{aligned} \|f(x) - x\| &= \|f(x) - x + x_\varepsilon - x_\varepsilon + f(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)\| \\ &\leq \|x_\varepsilon - x\| + \|x_\varepsilon - f(x_\varepsilon)\| + \|f(x_\varepsilon) - f(x)\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, διότι

$$\|x_\varepsilon - f(x_\varepsilon)\| = \|f_\varepsilon(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)\| = \|g_\varepsilon(f(x_\varepsilon)) - f(x_\varepsilon)\|.$$

άρα $\|f(x) - x\| \leq 0$, οπότε $f(x) = x$.

□

Πόρισμα Ο.11. Έστω $\mathcal{X}$ χώρος Banach, $K \subset \mathcal{X}$ κλειστό, φραγμένο και κυρτό. Έστω επίσης $f : K \rightarrow K$ συνεχής και συμπαγής. Τότε η f έχει σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Το $\hat{K} = \overline{\text{Conv}}f(K)$ είναι κυρτό και συμπαγές. Θεωρούμε την $f : \hat{K} \rightarrow \hat{K}$. Ισχύει ότι $\hat{K} \subset K$, οπότε

$$f(\hat{K}) \subset f(K) \subset \overline{\text{Conv}}f(K) = \hat{K}.$$

άρα υπάρχει $x_0 \in \hat{K} \subset K$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

□

Βιβλιογραφία

- [1] Bershchanskii, Y. M., and Meerov, M. V., The complementarity problem: theory and methods of solution, *Automation and remote Control* 44 (1983) 687-710
- [2] Brder, K. C., *Fixed point Theorems with applications to Economics and Game theory*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1985.
- [3] Dafermos, S., Traffic equilibria and variational inequalities, *Transportation Science* 14 (1980) 42-54.
- [4] Dafermos, S., Sensitivity analysis in variational inequalities, *Mathematics of Operations Research* 13 (1988) 421-434.
- [5] Dafermos, S. C., and McKelvey, S. C., Partitionable variational inequalities with applications to network and economic equilibria, *Journal of Optimization Theory and Applications* 73 (1992) 243-268.
- [6] Dafermos, S., and Nagurney, A., Sensitivity analysis for the asymmetric network equilibrium problem, *Mathematical Programming* 28 (1984a) 174-184.
- [7] Dafermos, S., and Nagurney, A., Sensitivity analysis for the general spatial economic equilibrium problem, *Operations Research* 32 (1984b) 1069-1086.
- [8] Dupuis, P., and Ishii, H., On Lipschitz continuity of the solution mapping to the Skorokhod Problem, with applications, *Stochastic and Stochastic Reports* 35 (1991) 31-62.
- [9] Dupuis, P., and Nagurney, A., Dynamical systems and variational inequalities, *Annals of Operations Research* 44 (1993) 9-42.
- [10] Hartman, P., and Stampacchia, G., On some nonlinear elliptic differential functional equations, *Acta Mathematica* 115 (1966) 271-310.
- [11] Karamardian, S., The nonlinear complementarity problem with applications, part 1, *Journal of Optimization Theory and Applications* 4 (1969) 87-98.
- [12] Kelley, J. L., *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1955.
- [13] Kinderlehrer, D., and Stampacchia, G., *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York, 1980.

- [14] Kostreva, M. M., Recent results on complementarity models for engineering and economics, *INFOR* 28 (1990) 324-334.
- [15] Kyparisis, J., Sensitivity analysis framework for variational inequalities, *Mathematical Programming* 38 (1987) 203-213.
- [16] Lemke, C. E., Recent results on complementarity problems, in nonlinear programming, pp. 349-384, J. B. Rosen, O. L. Mangasarian, and K. Ritter, editors, Academic Press, New York, 1970.
- [17] Lemke, C. E., A survey of complementarity problems, in variational inequalities and complementarity problems, pp. 213-239, R. Q. Cottle, F. Giannessi, and J. L. Lions, editors, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1980.
- [18] Mancino, O., and Stampacchia, G., Convex programming and variational inequalities, *Journal of Optimization theory and applications* 9 (1972) 3-23.
- [19] McKelvey, S.C., Partitionable variational inequalities and an application to the market equilibrium problem, Ph. D. thesis, Division of applied Mathematics, Brown University, Providence, Rhode Island, 1989.
- [20] Nagurney, A., editor, *Advances in equilibrium modeling, Analysis, and Computation*, *Annals of operations research* 44, J. C. Baltzer AG Scientific Publishing Company, Basel, Switzerland, 1993.
- [21] Nagurney, A., and Zhang, D., *Projected dynamical systems and variational inequalities with applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, 1996.
- [22] Qiu, Y., and Magnanti, T. L., Sensitivity analysis for variational inequalities, *Mathematics of Operations research* 17 (1992) 61-70.
- [23] Robinson, S. M., Strongly regular generalized equations, *Mathematics of Operations research* 5 (1980) 43-62.
- [24] Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [25] Smith, M. J., Existence, uniqueness, and stability of traffic equilibria, *Transportation research* 13B (1979) 295-304.
- [26] Tobin, R. L., Sensitivity analysis for variational inequalities, *Journal of Optimization Theory and Applications* 48 (1986) 191-204.
- [27] Zhang, D., and Nagurney, A., On the stability of projected dynamical systems, *Journal of Optimization theory and applications* 85 (1995) 97-124.