

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Μαθηματικών

Λήδα Ι. Σαριδάκη

Μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων για υπερβολικά και άλλα συναφή  
συστήματα σε μία και δύο χωρικές διαστάσεις.

Επιβλέπων Καθηγητής: κ. Β. Δουγαλής  
Α.Μ. 293003

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης στα  
*Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*

Αθήνα, Μάρτιος 2013



## **Τριμελής επιτροπή**

1. Δουγαλής Βασίλειος: Καθηγητής.
2. Νοτάρης Σωτήριος: Αναπληρωτής Καθηγητής.
3. Δρακόπουλος Μιχάλης: Επίκουρος Καθηγητής

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάμε Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων για υπερβολικά και άλλα συναφή συστήματα σε μία και δύο χωρικές διαστάσεις. Παρουσιάζουμε γραφικά αποτελέσματα καθώς και αποτελέσματα για την τάξη ακρίβειας σε διάφορα προβλήματα αρχικών/συννοριακών τιμών.

## Abstract

In the present work we are studying Finite Element Methods for hyperbolic and other similar systems in one and two dimensions. We are presenting graphs of the approximate solution and results about the order of accuracy for a number of initial/boundary value problems.

## Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω :

- Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Β. Δουγαλή για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του.
- Τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Γ. Κουνάδη για την αμέριστη βοήθειά του.
- Τα μέλη Δ.Ε.Π. του τμήματος Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α., κ.κ. Μ. Δρακόπουλο και Σ. Νοτάρη για την τιμή που μου έκαναν συμμετέχοντας στην τριμελή επιτροπή μου.
- Τους γονείς μου και την αδερφή μου για την συνεχή στήριξη και συμπαράσταση.

# Περιεχόμενα

|                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Κεφάλαιο 1 .....                                                                                    | 8  |
| Εισαγωγή.....                                                                                       | 8  |
| Κεφάλαιο 2 .....                                                                                    | 9  |
| Η κυματική εξίσωση σε μία διάσταση .....                                                            | 9  |
| 2.1 Ημιδιακριτό πρόβλημα σε μορφή συστήματος 1ης τάξης .....                                        | 9  |
| 2.1.1 Ευστάθεια ημιδιακριτού προβλήματος.....                                                       | 10 |
| 2.2 Πλήρως διακριτό πρόβλημα σε μορφή συστήματος 1ης τάξης .....                                    | 11 |
| 2.2.1 Σύστημα σε μορφή πινάκων .....                                                                | 11 |
| 2.3 Διακριτοποίηση του συστήματος ως προς $t$ .....                                                 | 13 |
| 2.3.1 Πλήρης διακριτοποίηση του συστήματος με την άμεση μέθοδο του Euler .....                      | 13 |
| 2.3.2 Πλήρης διακριτοποίηση του συστήματος με την κλασσική μέθοδο <i>Runge-Kutta</i> 4ης τάξης..... | 13 |
| 2.4 Ευστάθεια των πλήρως διακριτών μεθόδων .....                                                    | 14 |
| 2.5 Μέθοδος <i>Galerkin</i> για την εξίσωση 2ης τάξης .....                                         | 19 |
| 2.5.1 Ασθενής μορφή προβλήματος και η ημιδιακριτοποίησή του.....                                    | 19 |
| 2.5.2 Το πρόβλημα σε μορφή πινάκων .....                                                            | 20 |
| 2.5.3 Πλήρης διακριτοποίηση στον χρόνο με την κλασσική μέθοδο δύο βημάτων .....                     | 21 |
| 2.6 Αριθμητικά παραδείγματα .....                                                                   | 22 |
| 2.6.1 Επίλυση του συστήματος 1ης τάξης με την άμεση μέθοδο του <i>Euler</i> .....                   | 22 |
| 2.6.2 Επίλυση του συστήματος 1ης τάξης με την κλασσική μέθοδο <i>Runge-Kutta</i> 4ης τάξης.....     | 26 |
| 2.6.3 Επίλυση της κυματικής εξίσωσης 2ης τάξης με την κλασσική μέθοδο δύο βημάτων.....              | 30 |
| Κεφάλαιο 3 .....                                                                                    | 33 |
| Το κλασσικό σύστημα <i>Boussinesq</i> σε μία διάσταση .....                                         | 33 |
| 3.1 Γραμμικοποιημένο σύστημα .....                                                                  | 33 |
| 3.1.1 Ημιδιακριτό πρόβλημα .....                                                                    | 34 |
| 3.1.2 Σύστημα σε μορφή πινάκων .....                                                                | 34 |
| 3.1.3 Πλήρης διακριτοποίηση με την κλασσική μέθοδο <i>Runge-Kutta</i> 4ης τάξης ....                | 35 |
| 3.1.4 Αριθμητικό παράδειγμα .....                                                                   | 36 |
| 3.2 Αριθμητικά πειράματα με το γραμμικοποιημένο σύστημα <i>Boussinesq</i> .....                     | 39 |
| 1 <sup>η</sup> Περίπτωση : $\alpha = 0$ , Κυματική εξίσωση .....                                    | 39 |
| 2 <sup>η</sup> Περίπτωση : $\alpha = 1/3$ .....                                                     | 44 |
| 3.3 Μη γραμμικό κλασσικό σύστημα <i>Boussinesq</i> .....                                            | 50 |
| 3.3.1 Ημιδιακριτό πρόβλημα .....                                                                    | 50 |
| 3.3.2 Σύστημα σε μορφή πινάκων .....                                                                | 50 |
| 3.4 Αριθμητικά πειράματα με το κλασσικό σύστημα <i>Boussinesq</i> .....                             | 52 |
| Κεφάλαιο 4 .....                                                                                    | 61 |
| Η κυματική εξίσωση στο επίπεδο, σε μορφή υπερβολικού συστήματος 1ης τάξης.....                      | 61 |
| 4.1 Διατήρηση της ενέργειας .....                                                                   | 61 |
| 4.2 Πεπερασμένα στοιχεία P1 .....                                                                   | 63 |
| 4.3 Ημιδιακριτό πρόβλημα.....                                                                       | 64 |
| 4.3.1 Ευστάθεια ημιδιακριτού προβλήματος.....                                                       | 65 |

|                                                                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.4 Πλήρως διακριτό πρόβλημα σε μορφή συστήματος 1 <sup>ης</sup> τάξης .....                                             | 66  |
| 4.4.1 Σύστημα σε μορφή πινάκων .....                                                                                     | 66  |
| 4.4.1 Πλήρης διακριτοποίηση με την κλασσική μέθοδο <i>Runge-Kutta</i> 4 <sup>ης</sup> τάξης ....                         | 68  |
| 4.5 Αριθμητικά παραδείγματα .....                                                                                        | 68  |
| 4.5.1 Επίλυση του συστήματος 1 <sup>ης</sup> τάξης με την κλασσική μέθοδο <i>Runge-Kutta</i> 4 <sup>ης</sup> τάξης ..... | 68  |
| Κεφάλαιο 5 .....                                                                                                         | 77  |
| Το κλασσικό σύστημα <i>Boussinesq</i> σε δύο διαστάσεις .....                                                            | 77  |
| 5.1 Γραμμικοποιημένο σύστημα .....                                                                                       | 77  |
| 5.1.1 Ημιδιακριτό πρόβλημα .....                                                                                         | 77  |
| 5.1.1.1 Ευστάθεια ημιδιακριτού προβλήματος .....                                                                         | 78  |
| 5.1.2 Πλήρως διακριτό πρόβλημα σε μορφή συστήματος 1 <sup>ης</sup> τάξης .....                                           | 79  |
| 5.1.2.1 Σύστημα σε μορφή πινάκων .....                                                                                   | 79  |
| 5.1.2.2 Πλήρης διακριτοποίηση με την κλασσική μέθοδο <i>Runge-Kutta</i> 4 <sup>ης</sup> τάξης .....                      | 81  |
| 5.1.3 Αριθμητικά παραδείγματα.....                                                                                       | 82  |
| 5.2 Μη γραμμικό κλασσικό σύστημα <i>Boussinesq</i> σε δύο διαστάσεις .....                                               | 95  |
| 5.2.1 Ημιδιακριτό πρόβλημα .....                                                                                         | 95  |
| 5.2.2 Πλήρως διακριτό πρόβλημα σε μορφή συστήματος 1 <sup>ης</sup> τάξης .....                                           | 96  |
| 5.2.2.1 Σύστημα σε μορφή πινάκων .....                                                                                   | 96  |
| 5.2.2.2 Πλήρης διακριτοποίηση με την κλασσική μέθοδο <i>Runge-Kutta</i> 4 <sup>ης</sup> τάξης .....                      | 97  |
| 5.2.3 Αριθμητικά παραδείγματα.....                                                                                       | 98  |
| Βιβλιογραφία.....                                                                                                        | 107 |

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή μελετάμε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων για υπερβολικά και άλλα συναφή συστήματα σε μία και δύο χωρικές διαστάσεις.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων για την κυματική εξίσωση σε μια χωρική διάσταση. Συγκεκριμένα, μελετάμε την τάξη ακρίβειας και την ευστάθεια των μεθόδων *Euler* και *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης ως προς τον χρόνο, καθώς και της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε αποτελέσματα ορισμένων αριθμητικών παραδειγμάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο, ασχολούμαστε με το κλασσικό σύστημα *Boussinesq* σε μία χωρική διάσταση. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού, εξετάζουμε τα σφάλματα και την τάξη ακρίβειας της αριθμητικής μεθόδου *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης ως προς τον χρόνο, η οποία θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του συστήματος *Boussinesq* με μη γραμμικό όρο διασποράς. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, εκτελούμε πειράματα με το προαναφερθέν σύστημα, μεταβάλλοντας την τιμή του συντελεστή του μη γραμμικού όρου διασποράς και στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα γραφικά αποτελέσματα. Στο τελευταίο μέρος του τρίτου κεφαλαίου, επιλύουμε αριθμητικά το μη γραμμικό σύστημα *Boussinesq* με την παραπάνω μέθοδο, εκτελούμε πειράματα μεταβάλλοντας τις τιμές των σταθερών συντελεστών των μη γραμμικών όρων και παρουσιάζουμε τα αντίστοιχα γραφικά αποτελέσματα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, εξετάζουμε συστήματα σε δύο χωρικές διαστάσεις, συνεχίζουμε με τη αριθμητική τους επίλυση με τη μέθοδο *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης ως προς τον χρόνο καθώς και με την ανάλυση των σφαλμάτων και την τάξης ακρίβειας της μεθόδου και ολοκληρώνουμε με την παρουσίαση γραφικών απεικονίσεων της προσεγγιστικής λύσης των συστημάτων. Επικεντρώνουμε την προσοχή μας στην επίλυση της κυματικής εξίσωσης σε δύο διαστάσεις.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, ασχολούμαστε με το κλασσικό σύστημα *Boussinesq* στις δύο χωρικές διαστάσεις. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού, εξετάζουμε τα σφάλματα και την τάξη ακρίβειας της αριθμητικής μεθόδου *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης ως προς τον χρόνο, η οποία θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του συστήματος *Boussinesq* με μη γραμμικό όρο διασποράς. Στη συνέχεια, εκτελούμε πειράματα μεταβάλλοντας τον συντελεστή του μη γραμμικού όρου διασποράς και κάποιους όρους των αρχικών συνθηκών. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου αυτού, ασχολούμαστε με την αριθμητική επίλυση του μη γραμμικού συστήματος *Boussinesq* με την παραπάνω μέθοδο και παρουσιάζουμε τα αντίστοιχα γραφικά αποτελέσματα.



## Κεφάλαιο 2

### Η κυματική εξίσωση σε μία διάσταση

Κυματικά φαινόμενα εμφανίζονται σε πολλούς κλάδους της φυσικής όπως για παράδειγμα στην ακουστική, στον ηλεκτρομαγνητισμό αλλά μπορούν να παρουσιαστούν και ως κύματα στην επιφάνεια ή στο εσωτερικό της θάλασσας ή κάποιου άλλου υγρού. Σε ορισμένες περιπτώσεις, είναι εύκολο να μελετήσουμε τις έννοιες της κυματικής διάδοσης χρησιμοποιώντας απλά μοντέλα για κίνηση σε μία διάσταση.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε ένα από αυτά τα μοντέλα που είναι η συνήθης κυματική εξίσωση σε μία χωρική διάσταση που γράφεται ως

$$\eta_{xx} - \frac{1}{c^2} \eta_{tt} = 0, c > 0 \quad (2.1)$$

ή σε μορφή υπερβολικού συστήματος πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} \eta_t + cu_x &= 0, \\ u_t + c\eta_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Αρχικά, επικεντρωνόμαστε στην αριθμητική επίλυση του συστήματος (2.2), εφοδιασμένου με κατάλληλες αρχικές συνθήκες και συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* για τη συνιστώσα  $u$ , με μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων στο χώρο και με τις μεθόδους *Euler* και *Runge-Kutta* 4ης τάξης ως προς τον χρόνο και στην υπολογιστική μελέτη των σφαλμάτων. Τέλος, θα μελετήσουμε τη συνήθη μέθοδο *Galerkin*/πεπερασμένων στοιχείων για την κυματική εξίσωση στη μορφή δεύτερης τάξης (2.1).

#### 2.1 Ημιδιακριτό πρόβλημα σε μορφή συστήματος 1ης τάξης

Θεωρούμε το σύστημα (2.2) με  $c = 1$  για απλούστευση

$$\begin{aligned} \eta_t + u_x &= 0, \\ u_t + \eta_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

για  $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, t > 0$ , εφοδιασμένο με αρχικές συνθήκες

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b], \quad (2.4)$$

όπου  $\eta_0$ ,  $u_0$  είναι δεδομένες πραγματικές συναρτήσεις, και με ομογενείς συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* για τη συνάρτηση  $u$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 . \quad (2.5)$$

Υποθέτουμε για λόγους συμβατότητας ότι  $u_0(a) = u_0(b) = 0$ .

Οι μεταβλητές  $x$  και  $t$  στις εξισώσεις (2.3), (2.4) αντιπροσωπεύουν τη θέση του κύματος κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , ενώ οι  $\eta(x, t)$  και  $u(x, t)$  είναι η ανύψωση της επιφάνειας και η οριζόντια ταχύτητα διάδοσης του κύματος αντίστοιχα, σε ένα απλό μοντέλο διάδοσης γραμμικών κυμάτων επιφάνειας, δηλαδή κυμάτων πολύ μικρού πλάτους και πολύ μεγάλου μήκους κύματος, σε μία χωρική διάσταση.

Έστω  $h > 0$  και  $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N + 1$ , όπου  $N$  θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε  $(N + 1)h = b - a$ .

Θεωρούμε τον πεπερασμένης διάστασης χώρο  $S_h$  των συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων ως προς τη διαμέριση  $\{x_i\}$  του διαστήματος  $[a, b]$ , δηλαδή τον χώρο

$$S_h = \{\varphi \in C[a, b] : \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq i \leq N\},$$

$$\text{και θέτουμε } S_{h,0} := S_h \cap H_0^1(a, b),$$

$$\text{όπου } H_0^1(a, b) = \{\varphi \in H^1 : \varphi(a) = \varphi(b) = 0\} \text{ και } H^1(a, b) = \left\{ u \in L^2(a, b) : \exists g \in L^2(a, b) : \int_a^b u \varphi' = - \int_a^b g \varphi, \forall \varphi \in C_c^1(a, b) \right\}.$$

Η συνήθης ημιδιακριτοποίηση *Galerkin*/πεπερασμένων στοιχείων του προβλήματος (2.3)-(2.5) ορίζεται ως εξής:

Αναζητούμε  $\eta_h : [0, T] \rightarrow S_h$ ,  $u_h : [0, T] \rightarrow S_{h,0}$  που ικανοποιούν την ασθενή μορφή του συστήματος (2.3) για  $t \geq 0$ , δηλαδή τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} (\eta_{h_t}, \varphi) + (u_{h_x}, \varphi) &= 0, \quad \forall \varphi \in S_h, \\ (u_{h_t}, \chi) + (\eta_{h_x}, \chi) &= 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

όπου  $\eta_h(x, 0) \in S_h$ ,  $u_h(x, 0) \in S_{h,0}$  είναι κατάλληλες προσεγγίσεις των  $\eta_0$  και  $u_0$  αντίστοιχα. Στην εργασία αυτή, επιλέγουμε ως προσεγγίσεις των  $\eta_0$  και  $u_0$  τις συναρτήσεις  $\eta_h(x, 0) = I_h \eta_0$ ,  $u_h(x, 0) = I_{h,0} u_0$ , όπου  $I_h, I_{h,0}$  είναι οι παρεμβάλλουσες στους χώρους  $S_h$  και  $S_{h,0}$  αντίστοιχα. Στην (2.6) συμβολίζουμε με  $(\cdot, \cdot)$  το  $L^2$  εσωτερικό γινόμενο στο  $[a, b]$ , δηλαδή  $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ . Θέτουμε  $\|\cdot\|^2 = (\cdot, \cdot)$ .

### 2.1.1 Ευστάθεια ημιδιακριτού προβλήματος

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την ευστάθεια του συστήματος (2.6) στον  $L^2 \times L^2$ .

Για σταθεροποιημένο  $t > 0$  θέτουμε στο σύστημα (2.6)  $\varphi = \eta_h$  και  $\chi = u_h$ . Επομένως,

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \eta_{h_t} \eta_h dx + \int_a^b u_{h_x} \eta_h dx &= 0, \\ \int_a^b u_{h_t} u_h dx + \int_a^b \eta_{h_x} u_h dx &= 0, \end{aligned} \right\}$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε την σχέση

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (||\eta_h||^2 + ||u_h||^2) + \int_a^b \partial_x (u_h \eta_h) dx = 0. \quad (2.7)$$

Αφού  $u_h \in S_{h,0} \Rightarrow \int_a^b \partial_x (u_h \eta_h) dx = 0$ . Άρα,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (||\eta_h||^2 + ||u_h||^2) = 0, \quad \forall t > 0 \Rightarrow$$

$$||\eta_h||^2 + ||u_h||^2 = ||\eta_h(0)||^2 + ||u_h(0)||^2. \quad (2.8)$$

Άρα το ημιδιακριτό πρόβλημα είναι ευσταθές, γιατί εύκολα μπορούμε να δούμε ότι  $||\eta_h(0)||^2 + ||u_h(0)||^2 = ||I_h \eta_0||^2 + ||I_{h,0} u_0||^2 \leq C(\eta_0, u_0)$ , με  $C$  σταθερά ανεξάρτητη του  $h$ .

## 2.2 Πλήρως διακριτό πρόβλημα σε μορφή συστήματος 1ης τάξης

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο διακριτοποιούμε το σύστημα (2.6) στη χρονική μεταβλητή  $t$  και θα συνεχίσουμε με τη διακριτοποίησή του με δύο μεθόδους.

### 2.2.1 Σύστημα σε μορφή πινάκων

Οι λύσεις  $\eta_h$  και  $u_h$  του ημιδιακριτού προβλήματος (2.6) ανήκουν στους χώρους  $S_h$  και  $S_{h,0}$  αντίστοιχα  $\forall t \geq 0$ , επομένως γράφονται στη μορφή :

$$\begin{aligned} \eta_h(x, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} H_i(t) \varphi_i(x), \\ u_h(x, t) &= \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi_i(x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

όπου τα σύνολα  $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N+1}$  και  $\{\chi_i\}_{i=1}^N$  είναι οι βάσεις των χώρων  $S_h$  και  $S_{h,0}$ , που ορίζονται από τις σχέσεις  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ,  $0 \leq i, j \leq N+1$  και  $\chi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ .

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό :

$$\dot{f} = \frac{d}{dt}f \quad , \quad g' = \frac{d}{dx}g \quad .$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.9) στο σύστημα (2.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=0}^{N+1} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi \right) + \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi'_i, \varphi \right) &= 0, \quad \forall \varphi \in S_h, \\ \left( \sum_{i=1}^N \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi \right) + \left( \sum_{i=0}^{N+1} H_i(t) \varphi'_i, \chi \right) &= 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Επομένως οι εξισώσεις (2.10) θα ισχύουν για όλες τις συναρτήσεις βάσης των χώρων  $S_h$  και  $S_{h,0}$ . Δηλαδή, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=0}^{N+1} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi'_i, \varphi_j \right) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, N+1, \\ \left( \sum_{i=1}^N \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=0}^{N+1} H_i(t) \varphi'_i, \chi_j \right) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την μορφή :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N+1} (\varphi_i, \varphi_j) \dot{H}_i(t) + \sum_{i=1}^N (\chi'_i, \varphi_j) U_i(t) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, N+1, \\ \sum_{i=1}^N (\chi_i, \chi_j) \dot{U}_i(t) + \sum_{i=0}^{N+1} (\varphi'_i, \chi_j) H_i(t) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Κατασκευάζουμε τους χρονικά ανεξάρτητους πίνακες

$$\begin{aligned} G &\in \mathbb{R}^{(N+2) \times (N+2)}, \quad \text{με } G_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i) \text{ και } i, j = 0, 1, \dots, N+1, \\ \tilde{G} &\in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \text{με } \tilde{G}_{ij} = (\chi_j, \chi_i) \text{ και } i, j = 1, \dots, N, \\ S &\in \mathbb{R}^{(N+2) \times N} \quad \text{με } S_{ji} = (\varphi_j, \chi'_i) \text{ και } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 0, 1, \dots, N+1, \end{matrix} \\ \tilde{S} &\in \mathbb{R}^{N \times (N+2)} \quad \text{με } \tilde{S}_{ji} = (\chi_j, \varphi'_i) \text{ και } \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, N+1, \\ j = 1, \dots, N, \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.12a)$$

και ορίζουμε τα διανύσματα για  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} H(t) &= [H_0(t), H_1(t), \dots, H_{N+1}(t)]^T, \\ U(t) &= [U_1(t), U_2(t), \dots, U_N(t)]^T, \\ \dot{H}(t) &= [\dot{H}_0(t), \dot{H}_1(t), \dots, \dot{H}_{N+1}(t)]^T, \end{aligned} \quad (2.12b)$$

$$\dot{U}(t) = [\dot{U}_1(t), \dot{U}_2(t), \dots, \dot{U}_N(t)]^T.$$

Αν αντικαταστήσουμε τους παραπάνω πίνακες στις σχέσεις του (2.11), το σύστημα  $\forall t \geq 0$  θα πάρει την μορφή:

$$\begin{aligned} G\dot{H} + SU &= 0, \\ \tilde{G}\dot{U} + \tilde{S}H &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

με  $H(0), U(0)$  δεδομένα διανύσματα.

Οι σχέσεις (2.13) απεικονίζουν το σύστημα σε μορφή πινάκων.

## 2.3 Διακριτοποίηση του συστήματος ως προς t

Θεωρούμε  $t^n = nk$ ,  $n = 0, 1, \dots, M$  όπου  $M$  ακέραιος τέτοιος ώστε  $kM = T$ , όπου  $T$  το άνω όριο της χρονικής ολοκλήρωσης και  $k = t^{n+1} - t^n$  μία ομοιόμορφη διακριτοποίηση του χρόνου. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον χρονικό διαμερισμό για τη διακριτοποίηση στο χρόνο του συστήματος (2.13).

### 2.3.1 Πλήρης διακριτοποίηση του συστήματος με την άμεση μέθοδο του Euler

Προσεγγίζουμε τη λύση  $H(t^n), U(t^n)$  για  $n \geq 0$  του συστήματος (2.13) από τις πλήρως διακριτές προσεγγίσεις  $H^n, U^n$  με  $H^0 = H(0), U^0 = U(0)$  ως εξής:

Προσεγγίζουμε τους όρους  $\dot{H}(t^n)$  και  $\dot{U}(t^n)$  από τα πηλίκια  $\frac{H^{n+1}-H^n}{k}$  και  $\frac{U^{n+1}-U^n}{k}$  αντίστοιχα και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στη (2.13):

$$\begin{aligned} G \frac{H^{n+1}-H^n}{k} + SU^n &= 0, \\ \tilde{G} \frac{U^{n+1}-U^n}{k} + \tilde{S}H^n &= 0, \\ H^0, U^0 &\text{ γνωστά.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Συνεπώς, για  $n = 0, 1, \dots, M$  ζητούμε  $H^n, U^n \in S_h \times S_{h,0}$ , τέτοια ώστε για  $n = 0, 1, \dots, M-1$ :

$$\begin{aligned} GH^{n+1} &= GH^n - kSU^n, \\ \tilde{G}U^{n+1} &= \tilde{G}U^n - k\tilde{S}H^n, \\ \text{με } H^0, U^0 &\text{ γνωστά.} \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.3.2 Πλήρης διακριτοποίηση του συστήματος με την κλασσική μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς προκύπτει το πλήρως διακριτό σύστημα αν χρησιμοποιήσουμε τη λεγόμενη κλασσική μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης

ακρίβειας, η οποία για τη διαφορική εξίσωση  $y' = F(t, y), 0 \leq t \leq T, y(0) = y^0$ , δίνεται από το παρακάτω σχήμα :

$$\begin{aligned} &\text{Δεδομένων } y^n, t^n, \\ &y^{n,1} = y^n, \quad t^{n,1} = t^n, \\ &\quad \text{για } i = 2, 3, 4, \\ &y^{n,i} = y^n + k a_i F(t^{n,i-1}, y^{n,i-1}), \quad t^{n,i} = t^n + \tau_i k, \\ &y^{n+1} = y^n + k \sum_{j=1}^4 b_j F(t^{n,j}, y^{n,j}), \end{aligned}$$

όπου  $a_2 = a_3 = 1/2, a_4 = 1, \tau_2 = \tau_3 = 1/2, b_1 = b_4 = 1/6, b_2 = b_3 = 1/3$ . Είναι γνωστό ότι η μέθοδος είναι 4<sup>ης</sup> τάξης ακρίβειας.

Εφαρμόζουμε το παραπάνω σχήμα στο σύστημα (2.13) :

Δεδομένων των  $H^0, U^0$   
Για  $n = 0, 1, \dots, M-1$ :

$$\begin{aligned} &H^{n,1} = H^n, U^{n,1} = U^n, \\ &\quad \text{για } i = 2, 3, 4, \\ &GH^{n,i} = GH^n - k a_i S U^{n,i-1}, \\ &\tilde{G}U^{n,i} = \tilde{G}U^n - k a_i \tilde{S} H^{n,i-1}, \\ &GH^{n+1} = GH^n - k S \sum_{i=1}^4 b_i U^{n,i}, \\ &\tilde{G}U^{n+1} = \tilde{G}U^n - k \tilde{S} \sum_{i=1}^4 b_i H^{n,i}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

## 2.4 Ευστάθεια των πλήρως διακριτών μεθόδων

Θεωρούμε το ημιδιακριτό σύστημα (2.13) και το γράφουμε στην παρακάτω μορφή:

$$\mathcal{G}\dot{V} + \mathcal{S}V = 0, \tag{2.17}$$

όπου  $\mathcal{G}, \mathcal{S}$  είναι οι σύνθετοι πίνακες  $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{pmatrix}$  και  $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & S \\ \tilde{S} & 0 \end{pmatrix}$  αντίστοιχα, και  $V$  το διάνυσμα  $V = \begin{pmatrix} H \\ U \end{pmatrix}$ . Οι πίνακες  $G, \tilde{G}$ , οι οποίοι ορίζονται στη σχέση (2.12a), είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι, επομένως έχουν θετικές ιδιοτιμές και αντιστρέφονται. Από γνωστό λήμμα της γραμμικής άλγεβρας αντιστρέφεται και ο σύνθετος πίνακας  $\mathcal{G}$  με  $\mathcal{G}^{-1} = \begin{pmatrix} G^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{G}^{-1} \end{pmatrix}$ . Άρα η (2.17) παίρνει την μορφή:

$$\dot{V} + \mathcal{G}^{-1}\mathcal{S}V = 0. \tag{2.18}$$

Στην παράγραφο αυτή, μελετάμε τις περιοχές απόλυτης ευστάθειας των μεθόδων *Euler* και της κλασσικής *Runge-Kutta* και βρίσκουμε τις συνθήκες ευστάθειας που απαιτούν οι αντίστοιχες πλήρως διακριτές μέθοδοι.

Για αυτόν τον σκοπό, θα πρέπει πρώτα να μελετήσουμε τις ιδιότητες των ιδιοτιμών του πίνακα  $\mathcal{G}^{-1}\mathcal{S}$  της σχέσης (2.18).

Γνωρίζουμε ότι ο σύνθετος πίνακας  $\mathcal{G}$  είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος και επομένως έχει θετικές ιδιοτιμές  $\mu_i, i = 1, 2, \dots, 2(N+1)$ , κάθε μία από τις οποίες ικανοποιεί μία σχέση της μορφής  $\mathcal{G}x_i = \mu_i x_i$ , όπου  $x_i$  τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ . (Συμβολίζουμε με  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο για πραγματικά διανύσματα.) Η δράση του  $\mathcal{G}$  σε ένα διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^{2(N+1)}$  δίδεται από τους τύπους:

$$\mathcal{G}x = \sum_{i=1}^{2(N+1)} \langle x, x_i \rangle \mathcal{G}x_i = \sum_{i=1}^{2(N+1)} \mu_i \langle x, x_i \rangle x_i, \quad (2.19)$$

όπου  $\langle x, x_i \rangle$  οι αντίστοιχοι συντελεστές *Fourier*. Ορίζουμε τον πίνακα  $\mathcal{G}^{1/2}$ , του οποίου η δράση σε ένα διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^{2(N+1)}$  θα είναι:

$$\mathcal{G}^{1/2}x = \sum_{i=1}^{2(N+1)} \sqrt{\mu_i} \langle x, x_i \rangle x_i, \quad (2.20)$$

και για τον οποίο ισχύει ότι  $\mathcal{G}^{1/2}\mathcal{G}^{1/2} = \mathcal{G}$ . (Γενικά, θα ορίζαμε μία συνάρτηση  $f$  του πίνακα  $\mathcal{G}$  ως εξής:

$$f(\mathcal{G})x = \sum_{i=1}^{2(N+1)} f(\mu_i) \langle x, x_i \rangle x_i, \quad (2.21)$$

αρκεί να ορίζονται οι συντελεστές  $f(\mu_i) \forall i = 1, 2, \dots, 2(N+1)$ .) Γράφουμε την σχέση (2.17) με τη βοήθεια του πίνακα  $\mathcal{G}^{1/2}$  στην παρακάτω μορφή:

$$\mathcal{G}^{1/2}\mathcal{G}^{1/2}\dot{V} + \mathcal{S}V = 0. \quad (2.22)$$

Ο αντίστροφος του  $\mathcal{G}^{1/2}$  ορίζεται ως  $(\mathcal{G}^{1/2})^{-1} = \mathcal{G}^{-1/2}$ . Επομένως, η σχέση (2.22) γράφεται ως:

$$\mathcal{G}^{1/2}\dot{V} + \mathcal{G}^{-1/2}\mathcal{S}V = 0. \quad (2.23)$$

Στη συνέχεια θέτουμε  $y = \mathcal{G}^{1/2}V$  και αντικαθιστώντας στην (2.23) έχουμε ότι:

$$\dot{y} + \mathcal{G}^{-1/2}\mathcal{S}\mathcal{G}^{-1/2}y = 0. \quad (2.24)$$

Θέτουμε  $B = \mathcal{G}^{-1/2}\mathcal{S}\mathcal{G}^{-1/2}$ . Επομένως η σχέση (2.24) γίνεται:

$$\dot{y} + By = 0. \quad (2.25)$$

Η παραπάνω διαδικασία πραγματοποιήθηκε διότι είναι απλό, όπως φαίνεται στη συνέχεια, να δείξουμε ότι ο πίνακας  $B$  είναι αντισυμμετρικός και επομένως έχει φανταστικές ιδιοτιμές της μορφής  $\lambda_i = id_i$ ,  $d_i \in \mathbb{R}$ . Πράγματι, από τον ορισμό των πινάκων  $S$  και  $\tilde{S}$  παρατηρούμε ότι  $S^T = -\tilde{S}$ . Επομένως, ισχύει ότι ο πίνακας  $S$  είναι πραγματικός αντισυμμετρικός, δηλαδή  $S^T = -S$ . Άρα για τον πίνακα  $B$  έχουμε ότι:

$$B^T = \left( G^{-\frac{1}{2}} S G^{-\frac{1}{2}} \right)^T = \left( G^{-\frac{1}{2}} \right)^T S^T \left( G^{-\frac{1}{2}} \right)^T = -(G^T)^{-\frac{1}{2}} S (G^T)^{-\frac{1}{2}} = -G^{-\frac{1}{2}} S G^{-\frac{1}{2}} = -B.$$

Άρα, ο πίνακας  $B$  είναι αντισυμμετρικός, συνεπώς έχει φανταστικές ιδιοτιμές.

Έστω  $x \in \mathbb{C}^{2(N+1)}$  ιδιοδιάνυσμα του  $B$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ . Τότε, ικανοποιείται η παρακάτω εξίσωση:

$$Bx = \lambda x \Rightarrow G^{-1/2} S G^{-1/2} x = \lambda x \Rightarrow S G^{-1/2} x = \lambda G^{1/2} x. \quad (2.26)$$

Θέτουμε  $z = G^{1/2} x$  και αντικαθιστώντας στην σχέση (2.26) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} S G^{-1} z &= \lambda z \Rightarrow \\ S z &= \lambda G z. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B$  είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $G^{-1} S$ . Η σχέση (2.27) παριστάνει ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών από το οποίο μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέτρο των ιδιοτιμών του πίνακα  $B$ . Στην (2.27) έστω  $z = (z_1, z_2, \dots, z_{2(N+1)})^T \in \mathbb{C}^{2(N+1)}$ . Συμβολίζοντας με  $\bar{z}$  τον συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού  $z$ , έχουμε από την (2.27), παίρνοντας συζυγείς και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι  $\lambda = id$ , ότι

$$\sum_{l=1}^{2(N+1)} S_{jl} \bar{z}_l = -id \sum_{l=1}^{2(N+1)} G_{jl} \bar{z}_l, \quad 1 \leq j \leq 2(N+1).$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη αυτής της σχέσης επί  $z_j$  και αθροίζοντας ως προς  $j$  παίρνουμε

$$\sum_{j,l=1}^{2(N+1)} z_j \bar{z}_l S_{jl} = -id \sum_{l=1}^{2(N+1)} z_j \bar{z}_l G_{jl}. \quad (2.28)$$

Συνεπώς, αν

$$\varphi = \sum_{j=1}^{2(N+1)} z_j \Phi_j, \quad (2.29)$$

όπου  $\Phi_j = \varphi_{j-1}$  για  $1 \leq j \leq N+2$  και  $\Phi_{N+2+j} = \chi_j$  για  $1 \leq j \leq N$ , τότε

$$(\varphi, \bar{\varphi}') = -id(\varphi, \bar{\varphi}), \quad (2.30)$$



όπου  $\bar{\varphi} = \sum_j \bar{z}_j \Phi_j$ . (Οι συναρτήσεις βάσης είναι πραγματικές.)

Έστω ότι  $\varphi = \psi + i\omega$ , όπου  $\psi, \omega$  πραγματικές συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής (2.29) με πραγματικούς συντελεστές. Τότε από την (2.30) έχουμε

$$(\psi + i\omega, \psi' - i\omega') = -id(\|\psi\|^2 + \|\omega\|^2),$$

δηλαδή

$$(\psi, \psi') + (\omega, \omega') + i[(\omega, \psi') - (\psi, \omega')] = -id(\|\psi\|^2 + \|\omega\|^2).$$

Άρα

$$d = \frac{(\psi, \omega') - (\omega, \psi')}{\|\psi\|^2 + \|\omega\|^2}. \quad (2.31)$$

Επειδή οι  $\psi$  και  $\omega$  είναι συναρτήσεις στον χώρο  $S_h + S_{h,0}$ , πληρούν τις αντίστροφες ανισότητες (που ισχύουν, ως γνωστόν, για γενικούς ημι-ομοιόμορφους διαμερισμούς του  $[a, b]$ )

$$\|\psi'\| \leq \frac{C_I}{h} \|\psi\|, \|\omega'\| \leq \frac{C_I}{h} \|\omega\|, \quad (2.32)$$

όπου  $C_I$  σταθερά ανεξάρτητη του  $h$ .

Συνεπώς στην (2.31) έχουμε

$$|d| \leq \frac{\|\psi\| \|\omega'\| + \|\omega\| \|\psi'\|}{\|\psi\|^2 + \|\omega\|^2} \leq \frac{C_I}{h} \frac{2\|\psi\| \|\omega\|}{\|\psi\|^2 + \|\omega\|^2} \leq \frac{C_I}{h}. \quad (2.33)$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$|\lambda| \leq \frac{C_I}{h}, \quad (2.34)$$

δηλαδή ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B$  του συστήματος (2.25) είναι  $O(1/h)$ .

Προχωρούμε τώρα στον προσδιορισμό των περιοχών απόλυτης ευστάθειας στον φανταστικό άξονα των μεθόδων *Euler* και κλασσικής *Runge-Kutta*, ως αριθμητικών μεθόδων για προβλήματα αρχικών τιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} y' = i\lambda y, \lambda \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (2.35)$$

που έχει την λύση  $y(t) = e^{i\lambda t}$ , η οποία είναι φραγμένη αφού  $|y(t)| = 1, \forall t \geq 0$ . Έστω  $t^n = nk, n = 0, 1, \dots$ . Η άμεση μέθοδος του *Euler* για αυτό το πρόβλημα παράγει μία ακολουθία  $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , όπου

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + i\lambda k y^n, n \geq 0, \\ y^0 = 1, \end{cases}$$

δηλαδή την ακολουθία

$$y^n = (1 + i\lambda k)^n, n = 0, 1, \dots \quad (2.36)$$

Άρα για σταθερό  $k$ , καθώς  $n \rightarrow \infty$  θα έχουμε ότι η  $y^n$  είναι φραγμένη όταν  $|(1 + i\lambda k)| \leq 1 \Rightarrow (k\lambda)^2 \leq 0$ . Άρα το διάστημα απόλυτης ευστάθειας στον φανταστικό άξονα της άμεσης μεθόδου *Euler* είναι  $\{0\}$ .

Η κλασσική μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης για το πρόβλημα (2.35) έχει την εξής μορφή:

Δεδομένου του  $y^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{n,1} = y^n, \\ y^{n,2} = \left(1 + \frac{k\lambda}{2}i\right)y^n, \\ y^{n,3} = \left(1 + \frac{k\lambda}{2}i - \frac{k^2\lambda^2}{4}\right)y^n, \\ y^{n,4} = \left(1 + i\lambda k - \frac{k^2\lambda^2}{2} - \frac{k^3\lambda^3}{4}i\right)y^n, \\ y^{n+1} = \left(1 + i\lambda k - \frac{k^2\lambda^2}{2} - \frac{k^3\lambda^3}{3!}i + \frac{k^4\lambda^4}{4!}\right)y^n. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Επομένως, η κλασσική μέθοδος *Runge-Kutta* για αυτό το πρόβλημα παράγει μία ακολουθία  $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , όπου

$$y^n = \left(1 + i\lambda k - \frac{k^2\lambda^2}{2} - \frac{k^3\lambda^3}{3!}i + \frac{k^4\lambda^4}{4!}\right)^n, n = 0, 1, \dots \quad (2.39)$$

Άρα για σταθερό  $k$ , καθώς  $n \rightarrow \infty$  θα έχουμε ότι  $|y^n| \leq 1$  όταν

$$\begin{aligned} & \left| \left(1 - \frac{k^2\lambda^2}{2} + \frac{k^4\lambda^4}{4!}\right) + (k\lambda - \frac{k^3\lambda^3}{3!})i \right| \leq 1 \Rightarrow \\ & \left(1 - \frac{k^2\lambda^2}{2} + \frac{k^4\lambda^4}{4!}\right)^2 + (k\lambda - \frac{k^3\lambda^3}{3!})^2 \leq 1 \Rightarrow \\ & 1 - \frac{k^6\lambda^6}{72} + \frac{k^8\lambda^8}{576} \leq 1 \stackrel{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} k^2\lambda^2 \leq 8 \Rightarrow \\ & -2\sqrt{2} \leq k\lambda \leq 2\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Άρα, από την σχέση (2.40) έχουμε ότι το διάστημα απόλυτης ευστάθειας της κλασσικής μεθόδου *Runge-Kutta* είναι το  $\bar{I} = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ .

Από τη θεωρία της απόλυτης ευστάθειας των συνήθων διαφορικών εξισώσεων ([A-Δ]), επειδή ο πίνακας  $B$  της σχέσης (2.25) είναι αντισυμμετρικός, συμπεραίνουμε κατ' αρχάς ότι η πλήρως διακριτή μέθοδος *Galerkin* – κλασσική *Runge-Kutta* θα είναι ευσταθής όταν  $k|d_i| \leq 2\sqrt{2}$ , όπου  $\lambda_i(B) = id_i$ . Όμως, από την σχέση (2.33) έχουμε  $|d_i| \leq C_I/h$ . Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ικανή συνθήκη για την ευστάθεια του σχήματος (2.16) είναι

$$C_I \frac{k}{h} \leq 2\sqrt{2}. \quad (2.41)$$

Για την άμεση μέθοδο του Euler, που δεν έχει διάστημα απόλυτης ευστάθειας στον φανταστικό άξονα, μπορεί ναδειχθεί [βλ. A-Δ] ότι η μέθοδος είναι ευσταθής όταν  $k = O(h^2)$ .

## 2.5 Μέθοδος *Galerkin* για την εξίσωση 2ης τάξης

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= g(x), \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

όπου  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [0, T]$  ανεξάρτητες μεταβλητές οι οποίες αντιπροσωπεύουν την χωρική μεταβλητή και τον χρόνο, αντίστοιχα. Η λύση  $u(x, t)$  του (2.42) θα θεωρήσουμε ότι μας δίνει την ανύψωση του κύματος στη θέση  $x$  την χρονική στιγμή  $t$ .

### 2.5.1 Ασθενής μορφή προβλήματος και η ημιδιακριτοποίησή του

Όπως και στην περίπτωση του συστήματος, θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό στο διάστημα  $[a, b]$ . Έστω, λοιπόν,  $h > 0$  και  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , όπου  $N$  θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε  $(N + 1)h = b - a$ ,  $x_0 = a$  και  $x_{N+1} = b$ .

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του (2.42) με  $\varphi \in S_{h,0}$ , όπου  $S_{h,0} := S_h \cap H_0^1(a, b)$  και  $S_h = \{\varphi \in C[a, b] : \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq i \leq N\}$ , και ολοκληρώνουμε στο  $[a, b]$ :

$$(u_{tt}, \varphi) = c^2(u_{xx}, \varphi), \quad \forall \varphi \in S_{h,0}. \quad (2.43)$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, το δεύτερο μέλος θα γίνει:

$$(u_{xx}, \varphi) = [u_x \varphi]_{x=a}^{x=b} - (u_x, \varphi') = -(u_x, \varphi'), \quad \forall \varphi \in S_{h,0}.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.43) παίρνουμε την ασθενή μορφή του προβλήματος η οποία είναι :

$$(u_{tt}, \varphi) = -c^2(u_x, \varphi'), \quad \forall \varphi \in S_{h,0}. \quad (2.44)$$

Άρα η συνήθης ημιδιακριτοποίηση *Galerkin* για το πρόβλημα (2.42) διατυπώνεται ως εξής:

Αναζητούμε  $u_h : [0, T] \rightarrow S_{h,0}$  έτσι ώστε:

$$(u_{h,tt}, \varphi) + c^2(u_{h,x}, \varphi') = 0, \quad \forall \varphi \in S_{h,0}. \quad (2.45)$$

Επιλέγουμε ως προσεγγίσεις των αρχικών συνθηκών, π.χ. τις συναρτήσεις παρεμβολής στον  $S_{h,0}$ , δηλαδή

$$u_h(x, 0) = I_{h,0}f \text{ και } u_{t,h}(x, 0) = I_{h,0}g.$$

Μπορεί να αποδειχθεί, ([D], [B]) ότι:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_h - u\| \leq Ch^2, \quad (2.46)$$

όπου  $C$  σταθερά ανεξάρτητη του  $h$ .

### 2.5.2 Το πρόβλημα σε μορφή πινάκων

Η λύση *Galerkin*  $u_h$  που αναζητούμε ανήκει στον χώρο  $S_{h,0} \forall t \in [0, T]$ , επομένως θα γράφεται στη μορφή

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi_i(x),$$

όπου το σύνολο  $\{\chi_i\}_{i=1}^N$  είναι η γνωστή βάση του χώρου  $S_{h,0}$ . Αντικαθιστούμε την παραπάνω σχέση στην ασθενή μορφή του προβλήματος (2.45):

$$\left( \sum_{i=1}^N \ddot{U}_i(t) \chi_i, \chi \right) + c^2 \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi'_i, \chi' \right) = 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}. \quad (2.47)$$

Γράφουμε την (2.47) στην ισοδύναμη μορφή της :

$$\left( \sum_{i=1}^N \ddot{U}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + c^2 \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi'_i, \chi'_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.48)$$

Ορίζουμε τους πίνακες

$$G \in \mathbb{R}^{N \times N}, \text{ με } G_{ji} = (\chi_i, \chi_j) \text{ και } i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.49a)$$

$$S \in \mathbb{R}^{N \times N}, \text{ με } S_{ji} = (\chi'_i, \chi'_j) \text{ και } i, j = 1, 2, \dots, N,$$

και το διάνυσμα για  $t \geq 0$

$$U(t) = [U_1(t), U_2(t), \dots, U_N(t)]^T. \quad (2.49b)$$

Με χρήση των πινάκων που ορίσαμε, το πρόβλημα αρχικών τιμών σε μορφή πινάκων γίνεται:

$$\left. \begin{aligned} G\ddot{U} + c^2 S U &= 0, \quad \forall t > 0, \\ U(0), \dot{U}(0) &\text{ δεδομένα.} \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

### 2.5.3 Πλήρης διακριτοποίηση στον χρόνο με την κλασσική μέθοδο δύο βημάτων

Θεωρούμε  $t^n = nk, n = 0, 1, \dots, M$  όπου  $Mk = T$ , το άνω όριο του χρονικού διαστήματος που μας ενδιαφέρει, και  $k > 0$  το χρονικό βήμα. Η πλήρως διακριτή προσέγγιση *Galerkin* τη χρονική στιγμή  $t^n$  είναι της μορφής

$$U^n(x) = \sum_{i=1}^N d_i^n \chi_i(x),$$

για  $x \in [a, b]$ . Επειδή χρησιμοποιούμε συνεχείς, κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις στον  $S_{h,0}$  έχουμε  $d_i^n = U^n(x_i)$ . Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:  $d^n = [d_1^n, d_2^n, \dots, d_N^n]^T$ .

Το πλήρως διακριτό πρόβλημα κατασκευάζεται ως εξής:

Αντικαθιστούμε τον όρο  $\ddot{U}(t^n)$  στο (2.50) από προσέγγιση κεντρικών διαφορών, τελικά δηλαδή από το πηλίκο  $\frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{k^2}$ , και τον όρο  $U(t^n)$  από την τιμή  $d^n$ . Επομένως, το πρόβλημα θα πάρει την μορφή:

$$G \frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{k^2} + c^2 S d^n = 0, \quad \text{για } n = 2, 3, \dots, M-1,$$

όπου  $d^0, d^1$  θεωρούνται γνωστά.

Εκτελώντας μερικές πράξεις καταλήγουμε στο κλασσικό σχήμα δύο βημάτων:

$$\begin{aligned} G d^{n+1} &= [2G - k^2 c^2 S] d^n - G d^{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, M-1, \\ d^0, d^1 &\text{ γνωστά.} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Τις αρχικές προσεγγίσεις  $d^0$  και  $d^1$ , μπορούμε να τις υπολογίσουμε ως εξής:

Για το  $d^0$  έχουμε :  $d^0 = [I_{h,0} f]$ , δηλαδή  $d_i^0 = f(x_i)$  για  $i = 1, 2, \dots, N$ . Για να υπολογίσουμε το  $d^1$ , από ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε:

$$u(k) = u(0) + ku_t(0) + \frac{k^2}{2!} u_{tt}(0) + O(k^3).$$

Άρα θέτουμε :

$$d_i^1 = f(x_i) + kg(x_i) + \frac{c^2 k^2}{2} f''(x_i), \quad \text{για } 1 \leq i \leq N.$$

Μπορεί να αποδειχθεί, [Δ], ότι :

$$\max_{0 \leq n \leq M} \|U^n - u(t^n)\| \leq C(k^2 + h^2),$$

όπου  $C$  σταθερά ανεξάρτητη των  $k$  και  $h$ , υπό τη συνθήκη ευστάθειας ότι  $c \frac{k}{h} \leq C_*$  για κάποια αρκετά μικρή σταθερά  $C_*$  ανεξάρτητη των  $k$  και  $h$ .

## 2.6 Αριθμητικά παραδείγματα

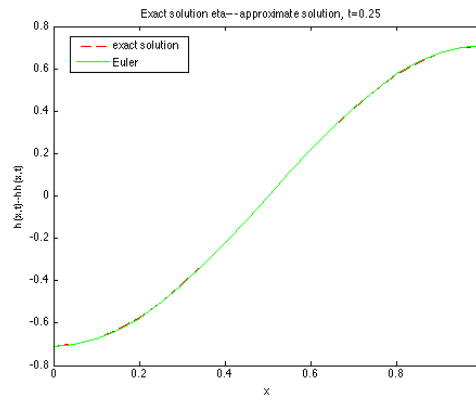
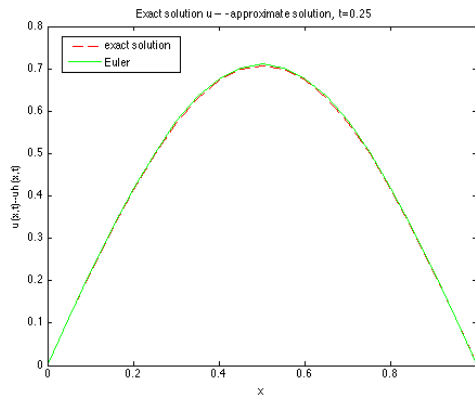
### 2.6.1 Επίλυση του συστήματος 1ης τάξης με την άμεση μέθοδο του Euler

Το παράδειγμα που θεωρούμε στην παράγραφο αυτή είναι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

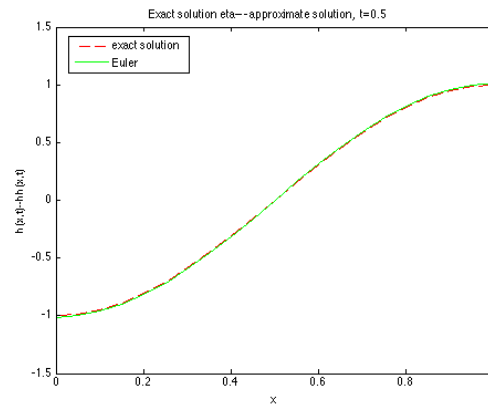
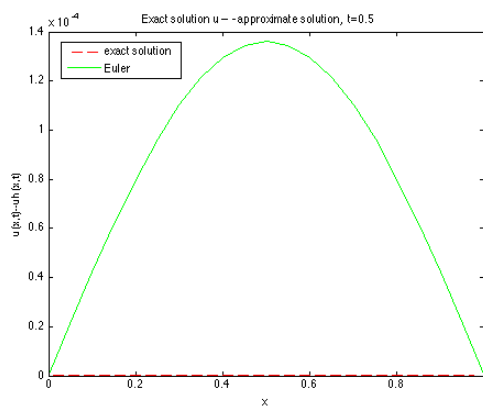
$$\begin{cases} \eta_t + u_x = 0, \\ u_t + \eta_x = 0, \\ u(x, 0) = \sin \pi x, \\ \eta(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \end{cases} \quad (2.52)$$

όπου  $x \in [0, 1]$  και  $0 \leq t \leq T$  με  $T = 1$ . Η λύση του συστήματος (2.52) είναι το ζευγάρι συναρτήσεων :  $u(x, t) = \sin \pi x \cos \pi t$ ,  $\eta(x, t) = -\cos \pi x \sin \pi t$ . Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.4, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη ευστάθειας για την άμεση μέθοδο Euler, η οποία απαιτεί  $k = O(h^2)$ . Η αναμενόμενη  $L^2$  τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι  $O(k + h^2)$  (βλ. [Α-Δ]), δηλαδή  $O(h^2)$ .

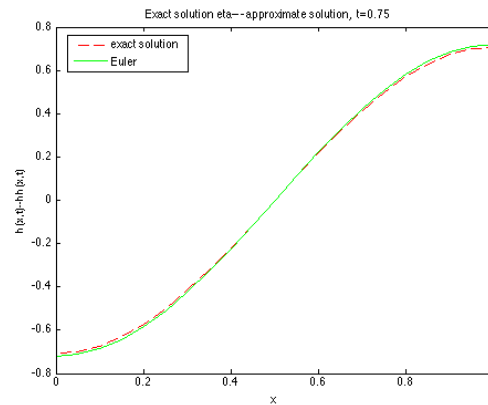
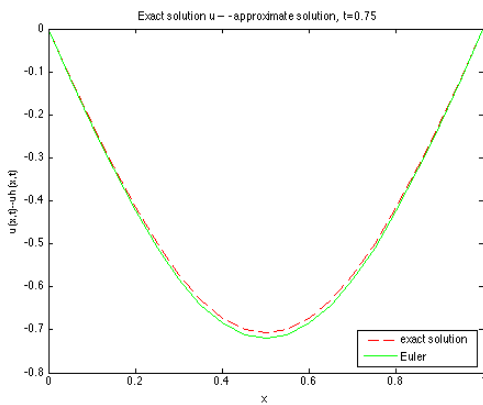
Η προσεγγιστική λύση, με την άμεση μέθοδο Euler, και η ακριβής λύση φαίνονται στα σχήματα (2.1 a-d) σε τέσσερις χρονικές στιγμές, όπου  $h = 0.05$  και  $k = 0.005$ .



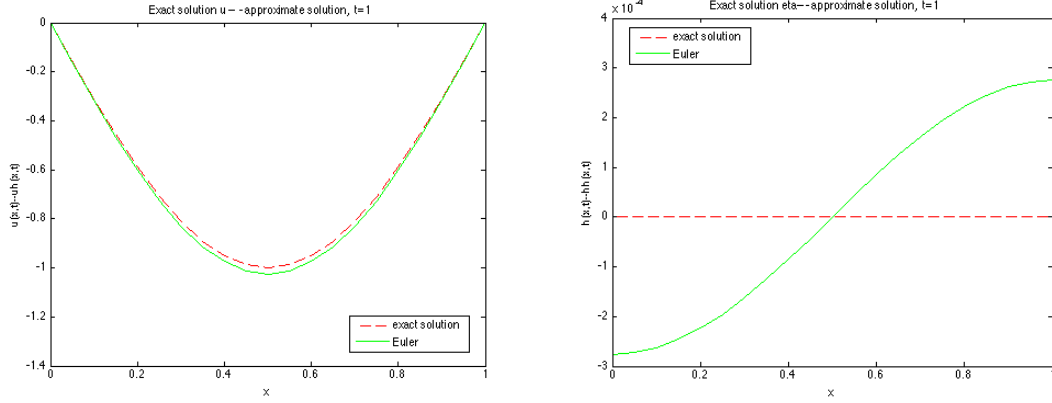
Σχήμα 2.1a: Λύση του (2.52) τη χρονική στιγμή  $t = 0.25$  . Μέθοδος *Euler*.



Σχήμα 2.1b: Λύση του (2.52) τη χρονική στιγμή  $t = 0.50$  . Μέθοδος *Euler*.



Σχήμα 2.1c: Λύση του (2.52) τη χρονική στιγμή  $t = 0.75$  . Μέθοδος *Euler*.



Σχήμα 2.1d: Λύση του (2.52) τη χρονική στιγμή  $t = T = 1$ . Μέθοδος *Euler*.

Τα σφάλματα και η τάξη ακρίβειας για τη διακριτή  $L^\infty$  – νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$  και τη διακριτή  $L^2$  νόρμα  $\|\cdot\|_{l^2}$  τη χρονική στιγμή  $t = T = 1$  φαίνονται στους πίνακες 2.1 και 2.2 αντίστοιχα. (Πήραμε  $k = 2h^2$ .)

| $h$     | $k$      | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ u\ _\infty$ | Τάξη ακρ. $u$ | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \eta\ _\infty$ | Τάξη ακρ. $\eta$ |
|---------|----------|----------------------------------------------------------|---------------|-------------------------------------------------------------|------------------|
| 0.05    | 0.005    | 0.0247                                                   | -             | 0.0135                                                      | -                |
| 0.025   | 0.00125  | 0.00617                                                  | 2.00          | 0.00326                                                     | 2.05             |
| 0.0125  | 3.13e-04 | 0.00154                                                  | 2.00          | 8.10e-04                                                    | 2.01             |
| 0.00625 | 7.81e-05 | 3.86e-04                                                 | 2.00          | 2.02e-04                                                    | 2.00             |
| 0.00313 | 1.95e-05 | 9.64e-05                                                 | 2.00          | 5.05e-05                                                    | 2.00             |
| 0.00156 | 4.88e-06 | 2.41e-05                                                 | 2.00          | 1.26e-05                                                    | 2.00             |

Πίνακας 2.1:  $L^\infty$ - Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (2.52) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και την άμεση μέθοδο *Euler*.

| $h$     | $k$      | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ u\ _{l^2}$ | Τάξη ακρ. $u$ | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \eta\ _{l^2}$ | Τάξη ακρ. $\eta$ |
|---------|----------|---------------------------------------------------------|---------------|------------------------------------------------------------|------------------|
| 0.05    | 0.005    | 0.0175                                                  | -             | 0.0100                                                     | -                |
| 0.025   | 0.00125  | 0.00436                                                 | 2.00          | 0.00237                                                    | 2.08             |
| 0.0125  | 3.13e-04 | 0.00109                                                 | 2.00          | 5.80e-04                                                   | 2.03             |
| 0.00625 | 7.81e-05 | 2.73e-04                                                | 2.00          | 1.44e-04                                                   | 2.01             |
| 0.00313 | 1.95e-05 | 6.82e-05                                                | 2.00          | 3.58e-05                                                   | 2.01             |
| 0.00156 | 4.88e-06 | 1.70e-05                                                | 2.00          | 8.94e-06                                                   | 2.00             |

Πίνακας 2.2:  $l^2$ - Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (2.52) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και την άμεση μέθοδο *Euler*.

Τα σφάλματα υπολογίσθηκαν ως προς τις διακριτές νόρμες

$$\|u\|_\infty = \max_i |u_i|$$

και

$$\|u\|_{l^2} = \left( \sum_i h u_i^2 \right)^{1/2}.$$



Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της ποσότητας  $\varphi(n)$  όπου

$$\varphi(n) = (\|H^n\|^2 + \|U^n\|^2)^{1/2}, \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (2.53)$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα  $\varphi(n)$  δε διατηρείται αλλά αυξάνει αργά με το  $t^n$ . Δηλαδή, για την άμεση μέθοδο του *Euler* φαίνεται να ισχύει μία σχέση της μορφής

$$\max_{0 \leq n \leq M} \varphi(n) \leq C, \quad (2.54)$$

όπου  $C$  μία σταθερά η οποία είναι αύξουσα συνάρτηση του  $T$ . (Για τις ακριβείς λύσεις του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών (2.52), η ποσότητα  $(\|u\|^2 + \|\eta\|^2)^{1/2}$  είναι σταθερά για  $0 \leq t \leq T$  και ίση με  $\sqrt{2}/2$ .) Το ότι πρέπει να ισχύει μία ανισότητα της μορφής (2.54) μπορούμε να το δούμε από το εξής απλό πρόβλημα-μοντέλο:

$$\begin{cases} y' = i\lambda y, \lambda \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (2.55)$$

που έχει γενική λύση την  $y(t) = e^{i\lambda t}$ . Έστω  $t^n = nk, n = 0, 1, \dots$ . Η μέθοδος του *Euler* για αυτό το πρόβλημα παράγει μία ακολουθία  $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , όπου

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + i\lambda h y^n, n \geq 0, \\ y^0 = 1, \end{cases}$$

δηλαδή την ακολουθία

$$y^n = (1 + i\lambda h)^n, n = 0, 1, \dots. \quad (2.56)$$

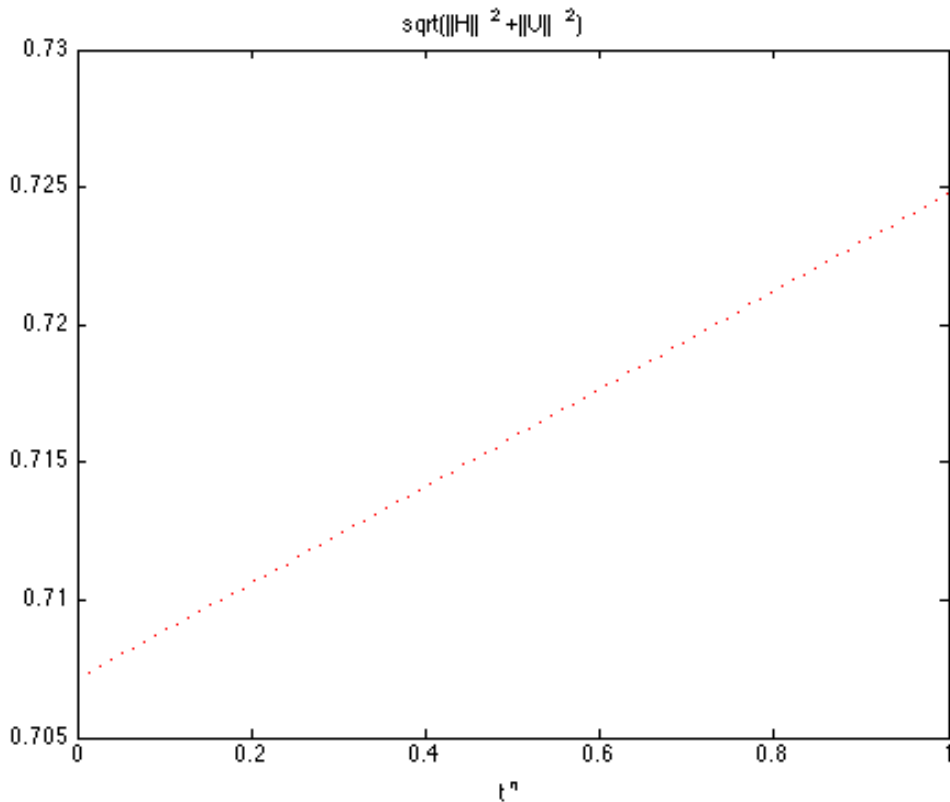
Επομένως,

$$|y^n| = |1 + i\lambda h|^n = \left(\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}\right)^n > 1.$$

Συνεπώς, η ποσότητα  $|y^n|$  πράγματι αυξάνει.

(Στη διακριτοποίηση του υπερβολικού συστήματος έχουμε  $\lambda \sim \frac{1}{h}$ . Άρα με  $k \cong h^2$  έχουμε

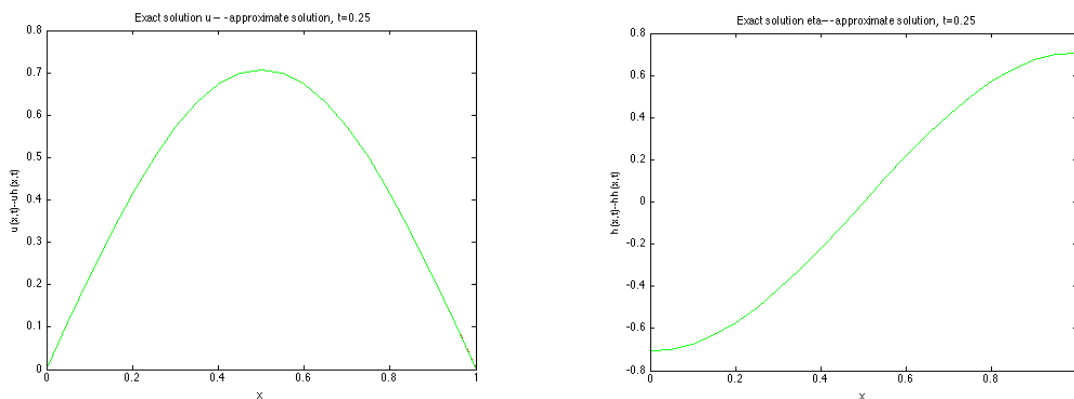
$$\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} \cong \sqrt{1 + h^2} \cong \sqrt{1 + k} \cong 1 + \frac{k}{2}. \quad \text{Επομένως,} \quad \max_{0 \leq n \leq M} |y^n| \cong \left(1 + \frac{k}{2}\right)^M \leq \left(e^{\frac{k}{2}}\right)^{\frac{T}{k}} = e^{\frac{T}{2}}, \text{ ποσότητα που είναι φραγμένη αλλά αυξάνει με το } T.)$$



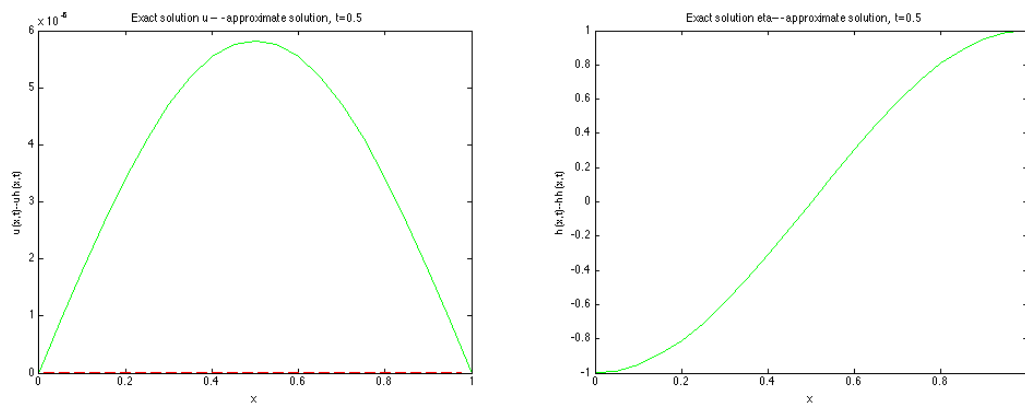
Σχήμα 2.2: Η συνάρτηση  $\varphi(n)$  για  $h = 0.05$  και  $k = 0.005$ .

### 2.6.2 Επίλυση του συστήματος 1ης τάξης με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης

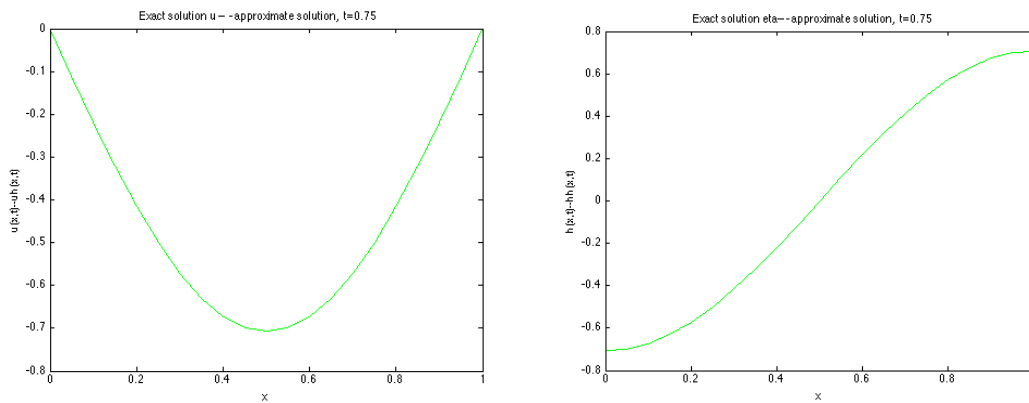
Στην παράγραφο αυτή λύνουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.52) με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta*, η οποία είναι άμεση και 4ης τάξης ως προς τον χρόνο. Είναι γνωστό (βλ. [Α-Δ]) ότι υπό συνθήκη της μορφής  $\frac{k}{h} \leq a$  το πλήρες διακριτό σχήμα είναι ευσταθές και έχει σφάλμα  $\max_n \|U^n - u^n\| = O(h^2 + k^4)$ . Η προσεγγιστική λύση και η ακριβής λύση φαίνονται στα σχήματα (2.3 a-d) σε τέσσερις χρονικές στιγμές, όπου  $h = 0.05$  και  $k = 0.025$ .



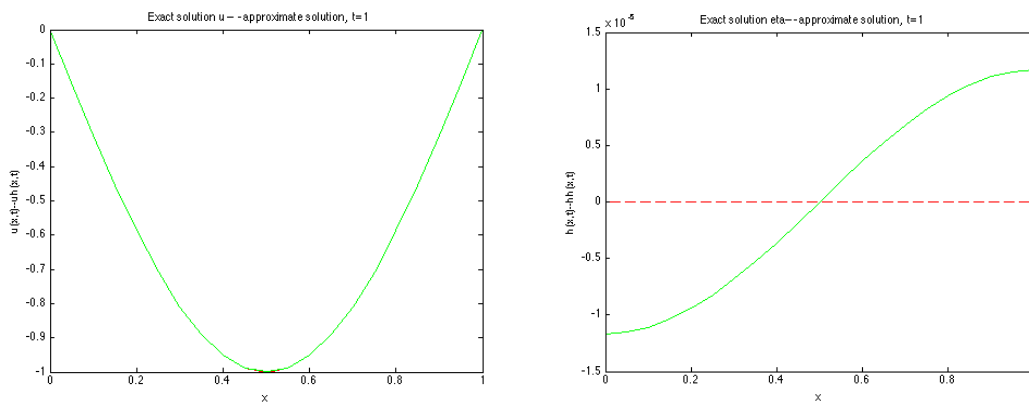
Σχήμα 2.3a: Λύση του (2.52) τη χρονική στιγμή  $t = 0.25$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 2.3b: Λύση του (2.52) τη χρονική στιγμή  $t = 0.50$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 2.3c: Λύση του (2.52) τη χρονική στιγμή  $t = 0.75$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 2.3d: Λύση του (2.52) τη χρονική στιγμή  $t = T = 1$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

Τα σφάλματα και η τάξη ακρίβειας για τη διακριτή  $L^\infty$  – νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$  και τη διακριτή  $L^2$  νόρμα  $\|\cdot\|_{l^2}$  τη χρονική στιγμή  $t = 0.5$  φαίνονται στους πίνακες 2.3 και 2.4 αντίστοιχα.

| $h$     | $k$     | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ u\ _{\infty}$ | Τάξη ακρ. $u$ | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \eta\ _{\infty}$ | Τάξη ακρ. $\eta$ |
|---------|---------|------------------------------------------------------------|---------------|---------------------------------------------------------------|------------------|
| 0.05    | 0.05    | 4.95e-04                                                   | -             | 3.03e-03                                                      | -                |
| 0.025   | 0.025   | 6.13e-05                                                   | 3.01          | 7.68e-04                                                      | 1.98             |
| 0.0125  | 0.0125  | 7.62e-06                                                   | 3.01          | 1.93e-04                                                      | 2.00             |
| 0.00625 | 0.00625 | 9.49e-07                                                   | 3.00          | 4.82e-05                                                      | 2.00             |
| 0.00313 | 0.00313 | 1.18e-07                                                   | 3.00          | 1.20e-05                                                      | 2.00             |
| 0.00156 | 0.00156 | 1.48e-08                                                   | 3.00          | 3.01e-06                                                      | 2.00             |

Πίνακας 2.3:  $L^{\infty}$  - Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (2.52) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και την άμεση μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

| $h$     | $k$     | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ u\ _{l^2}$ | Τάξη ακρ. $u$ | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \eta\ _{l^2}$ | Τάξη ακρ. $\eta$ |
|---------|---------|---------------------------------------------------------|---------------|------------------------------------------------------------|------------------|
| 0.05    | 0.05    | 3.51e-04                                                | -             | 2.15e-03                                                   | -                |
| 0.025   | 0.025   | 4.34e-05                                                | 3.02          | 5.43e-04                                                   | 1.99             |
| 0.0125  | 0.0125  | 5.39e-06                                                | 3.01          | 1.36e-04                                                   | 2.00             |
| 0.00625 | 0.00625 | 6.71e-07                                                | 3.00          | 3.41e-05                                                   | 2.00             |
| 0.00313 | 0.00313 | 8.38e-08                                                | 3.00          | 8.52e-06                                                   | 2.00             |
| 0.00156 | 0.00156 | 1.05e-08                                                | 3.00          | 2.13e-06                                                   | 2.00             |

Πίνακας 2.4:  $l^2$  - Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (2.52) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και την άμεση μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

Στην περίπτωση της κλασσικής μεθόδου *Runge-Kutta* η ποσότητα  $\varphi(n)$  φθίνει πολύ αργά με το  $n$ , δηλαδή, σε αντίθεση με την άμεση μέθοδο *Euler*, η μέθοδος παρουσιάζει απόσβεση. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι για το σύστημα της κυματικής εξίσωσης η κλασσική μέθοδος *Runge-Kutta* είναι πράγματι αποσβεστική, όπως φαίνεται από μία απλή ανάλυση του προβλήματος-μοντέλου (2.55). Για το πρόβλημα αυτό, η κλασσική μέθοδος *Runge-Kutta*, όπως είδαμε στην παράγραφο 2.4, παράγει την ακολουθία

$$y^n = \left( 1 + ik\lambda - \frac{k^2\lambda^2}{2} - \frac{k^3\lambda^3}{3!}i + \frac{k^4\lambda^4}{4!} \right)^n, n = 0, 1, \dots$$

Επομένως,

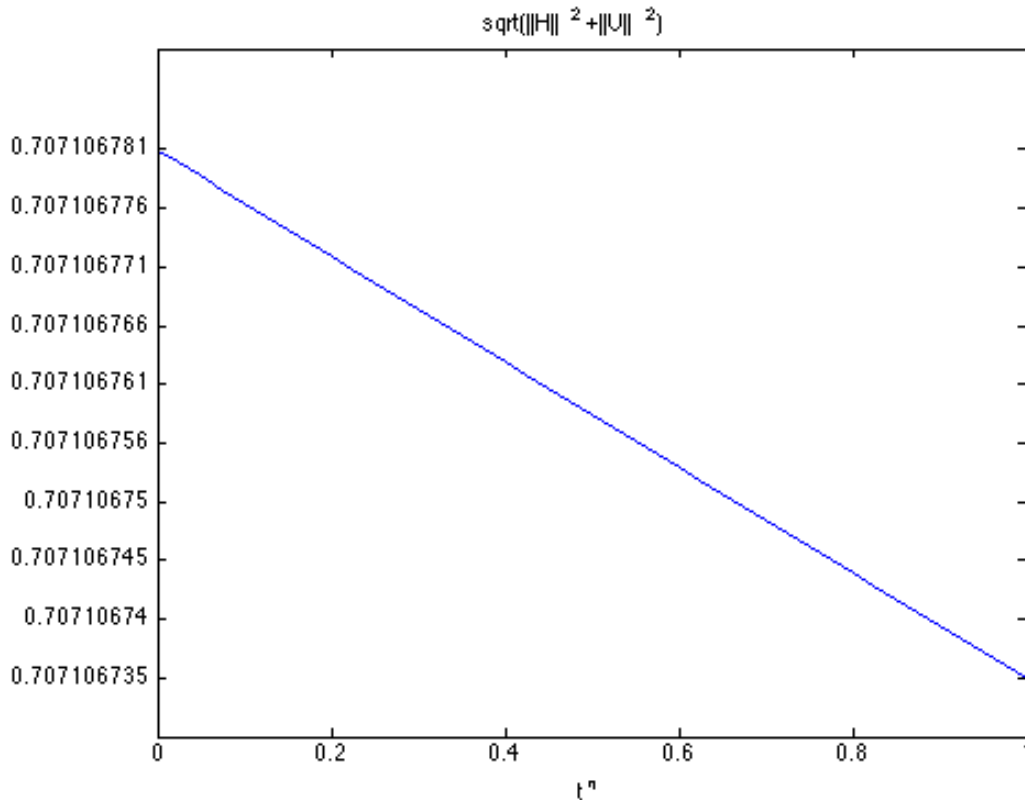
$$|y^n| = \left( \sqrt{\left( 1 - \frac{k^2\lambda^2}{2} + \frac{k^4\lambda^4}{4!} \right)^2 + \left( k\lambda - \frac{k^3\lambda^3}{3!} \right)^2} \right)^n. \quad (2.57)$$

Εκτελώντας μερικές πράξεις στη (2.57), καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$|y^n| = \left(1 - \frac{k^6 \lambda^6}{72} + \frac{k^8 \lambda^8}{576}\right)^{\frac{n}{2}}. \quad (2.58)$$

Υπό τη συνθήκη ευστάθειας, έχουμε από τη (2.58) ότι  $|y^n| < 1$  και ότι η απόσβεση θα είναι  $O(k^6)$ .

Στην παρακάτω γραφική παράσταση (Σχήμα 2.4), επαληθεύουμε το παραπάνω αποτέλεσμα, δηλαδή ότι η κλασσική μέθοδος Runge-Kutta παρουσιάζει απόσβεση της ποσότητας  $\varphi(n)$ , η οποία φθίνει πολύ αργά με το  $n$ .



Σχήμα 2.4: Η συνάρτηση  $\varphi(n)$  για  $h = 0.05$  και  $k = 0.025$ .

Παρατηρούμε στους πίνακες 2.3 και 2.4 ότι έχουμε ένα φαινόμενο υπερσύγκλισης, αφού βλέπουμε ότι η τάξη ακρίβειας στις  $L^\infty$  και  $L^2$  νόρμες για την προσέγγιση του  $u$  σε αυτήν την περίπτωση είναι ίση με τρία. Στη συνέχεια, λύνουμε ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta*, που μας δίνει την αναμενόμενη τάξη ακρίβειας για τις προσεγγίσεις των  $u$  και  $\eta$ .

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} \eta_t + u_x = 0, \\ u_t + \eta_x = 0, \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x \cos 1, \\ \eta(x, 0) = -\cos 2\pi x \sin 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \end{cases} \quad (2.52a)$$

όπου  $x \in [0, 1]$  και  $0 \leq t \leq T$  με  $T = 1$ . Η λύση του συστήματος (2.52a) είναι το ζευγάρι συναρτήσεων :

$u(x, t) = \sin 2\pi x \cos(2\pi t + 1)$ ,  $\eta(x, t) = -\cos 2\pi x \sin(2\pi t + 1)$ . Λύνουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.52a) με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta*. Τα σφάλματα και η τάξη ακρίβειας για τη διακριτή  $L^\infty$  – νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$  και τη διακριτή  $L^2$  νόρμα  $\|\cdot\|_{l^2}$  τη χρονική στιγμή  $t = 0.5$  φαίνονται στους πίνακες 2.3a και 2.4a αντίστοιχα.

| $h$     | $k$     | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ u\ _\infty$ | Τάξη ακρ. $u$ | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \eta\ _\infty$ | Τάξη ακρ. $\eta$ |
|---------|---------|----------------------------------------------------------|---------------|-------------------------------------------------------------|------------------|
| 0.05    | 0.05    | 2.67e-03                                                 | -             | 1.19e-02                                                    | -                |
| 0.025   | 0.025   | 1.21e-03                                                 | 1.14          | 2.83e-03                                                    | 2.08             |
| 0.0125  | 0.0125  | 3.63e-04                                                 | 1.74          | 6.80e-04                                                    | 2.06             |
| 0.00625 | 0.00625 | 9.67e-05                                                 | 1.89          | 1.66e-04                                                    | 2.03             |
| 0.00313 | 0.00313 | 2.52e-05                                                 | 1.95          | 4.11e-05                                                    | 2.02             |
| 0.00156 | 0.00156 | 6.41e-06                                                 | 1.98          | 1.02e-05                                                    | 2.01             |

Πίνακας 2.3a:  $L^\infty$ - Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (2.52a) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και την άμεση μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

| $h$     | $k$     | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ u\ _{l^2}$ | Τάξη ακρ. $u$ | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \eta\ _{l^2}$ | Τάξη ακρ. $\eta$ |
|---------|---------|---------------------------------------------------------|---------------|------------------------------------------------------------|------------------|
| 0.05    | 0.05    | 1.91e-03                                                | -             | 8.55e-03                                                   | -                |
| 0.025   | 0.025   | 8.59e-04                                                | 1.15          | 2.01e-03                                                   | 2.09             |
| 0.0125  | 0.0125  | 2.57e-04                                                | 1.74          | 4.81e-04                                                   | 2.06             |
| 0.00625 | 0.00625 | 6.90e-05                                                | 1.89          | 1.18e-04                                                   | 2.03             |
| 0.00313 | 0.00313 | 1.78e-05                                                | 1.95          | 2.90e-05                                                   | 2.02             |
| 0.00156 | 0.00156 | 4.53e-06                                                | 1.98          | 7.21e-06                                                   | 2.01             |

Πίνακας 2.4a:  $l^2$ - Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (2.52a) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και την άμεση μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

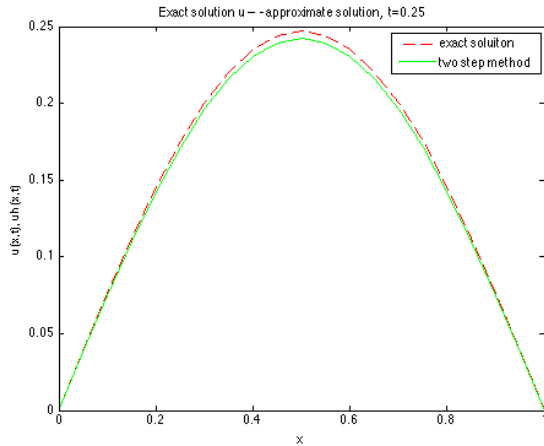
Συμπεραίνουμε από το αριθμητικό πείραμα ότι η τάξη ακρίβειας στις  $L^\infty$  και  $L^2$  νόρμες είναι ίση με 2 για τις προσεγγίσεις των  $u$  και  $\eta$ , όπως αναμένεται.

### 2.6.3 Επίλυση της κυματικής εξίσωσης 2ης τάξης με την κλασσική μέθοδο δύο βημάτων

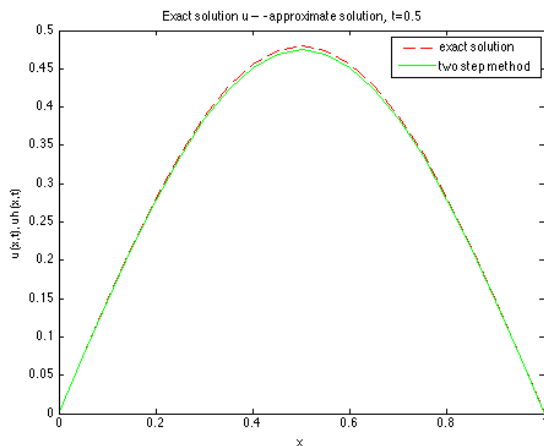
Στην παράγραφο αυτή θα προσεγγίσουμε με την κλασσική πλήρως διακριτή μέθοδο δύο βημάτων τη λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\pi^2} u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \sin \pi x, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \end{cases} \quad (2.59)$$

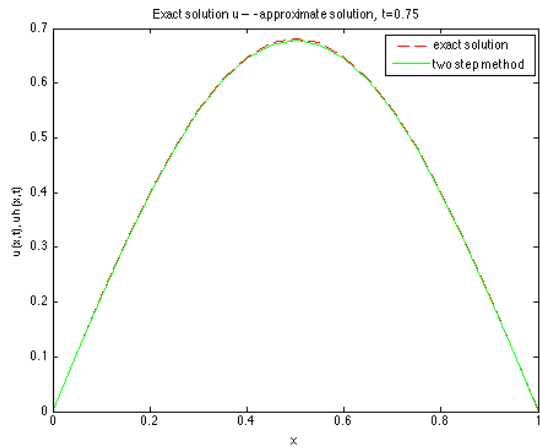
όπου  $x \in [0,1]$  και  $0 \leq t \leq T$  με  $T = 1$ . Η ακριβής λύση του προβλήματος (2.59) είναι η  $u(x,t) = \sin \pi x \sin t$ . Είναι γνωστό, [βλ. Δ.], ότι η μέθοδος είναι ευσταθής υπό συνθήκη της μορφής  $\frac{k}{h} \leq a$ , όπου  $a$  αρκετά μικρό. Με κατάλληλες προσεγγίσεις των  $U^0, U^1$  η μέθοδος (2.51) δίνει σφάλμα  $\max_n \|U^n - u^n\| \leq O(k^2 + h^2)$ . Η προσεγγιστική λύση, που πήραμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο (2.51) με αρχικές προσεγγίσεις των  $U^0, U^1$  όπως υπολογίζονται στην παράγραφο 2.5.3, και η ακριβής λύση φαίνονται στα σχήματα (2.5 a-d) σε τέσσερις χρονικές στιγμές, όπου  $h = 0.05$  και  $k = 0.005$ .



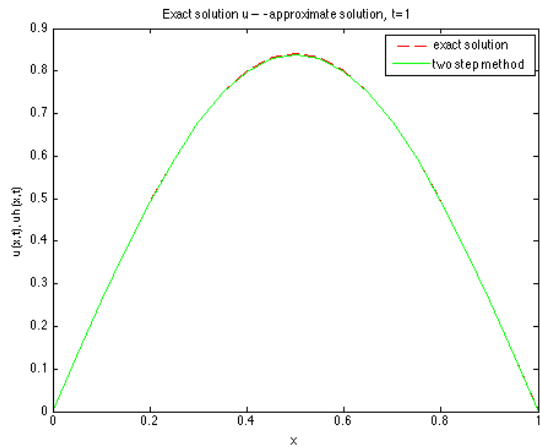
Σχήμα 2.5a: Λύση του (2.59) τη χρονική στιγμή  $t = 0.25$ . Μέθοδος δύο βημάτων.



Σχήμα 2.5b: Λύση του (2.59) τη χρονική στιγμή  $t = 0.50$ . Μέθοδος δύο βημάτων.



Σχήμα 2.5c: Λύση του (2.59) τη χρονική στιγμή  $t = 0.75$ . Μέθοδος δύο βημάτων.



Σχήμα 2.5d: Λύση του (2.59) τη χρονική στιγμή  $t = T = 1$ . Μέθοδος δύο βημάτων.

Τα σφάλματα και η τάξη ακρίβειας για τη διακριτή  $L^\infty$  – νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$  και τη διακριτή  $L^2$  νόρμα  $\|\cdot\|_{l^2}$  τη χρονική στιγμή  $t = T = 1$  φαίνονται στον πίνακα 2.5. (Πήραμε  $\frac{k}{h} = \frac{1}{5}$ .)

| $h$     | $k$      | $\ \sigmaφάλμα\ u\ _\infty$ | Τάξη ακρ. $u$ | $\ \sigmaφάλμα\ u\ _{l^2}$ | Τάξη ακρ. $u$ |
|---------|----------|-----------------------------|---------------|----------------------------|---------------|
| 0.05    | 0.01     | 3.14e-04                    | -             | 2.22e-04                   | -             |
| 0.025   | 0.005    | 7.95e-05                    | 1.98          | 5.62e-05                   | 1.98          |
| 0.0125  | 0.0025   | 2.00e-05                    | 1.99          | 1.42e-05                   | 1.99          |
| 0.00625 | 0.00125  | 5.02e-06                    | 2.00          | 3.55e-06                   | 2.00          |
| 0.00313 | 6.25e-04 | 1.26e-06                    | 2.00          | 8.90e-07                   | 2.00          |
| 0.00156 | 3.13e-04 | 3.36e-07                    | 1.91          | 2.36e-07                   | 1.92          |

Πίνακας 2.5:  $L^\infty$  και  $l^2$ -Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (2.59) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και τη μέθοδο δύο βημάτων.



## Κεφάλαιο 3

### Το κλασσικό σύστημα *Boussinesq* σε μία διάσταση

Βασικό κίνητρο για τη μελέτη των συστημάτων *Boussinesq* της θεωρίας των κυμάτων επιφανείας στο νερό, είναι η μελέτη λύσεων τους της μορφής των μοναχικών κυμάτων που προκύπτουν από την αλληλεπίδραση των μη γραμμικών όρων τους και των όρων διασποράς.

Στο κεφάλαιο αυτό, επιλύουμε αριθμητικά, με μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων ως προς  $x$  και με τη μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης ως προς τον χρόνο, πρώτα το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + u_x &= 0, \\ u_t + \eta_x - \alpha u_{xxt} &= f(x, t), \quad \alpha \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

εφοδιασμένο με κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Στη συνέχεια, μελετάμε το κλασσικό σύστημα *Boussinesq* [AD]

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + u_x + \varepsilon(\eta u)_x &= 0, \quad \varepsilon > 0, \\ u_t + \eta_x + \varepsilon u u_x - \alpha u_{xxt} &= 0, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Στο φυσικό πρόβλημα οι σταθερές των μη γραμμικών όρων  $\varepsilon$  και  $\alpha$  είναι τέτοιες ώστε  $\varepsilon \sim \alpha \ll 1$ . Οι συναρτήσεις  $\eta$ ,  $u$  παριστάνουν αντίστοιχα την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας του νερού από ένα επίπεδο ηρεμίας και την οριζόντια ταχύτητα του βυθού σε κάποιο βάθος. Τα κύματα που προσομοιώνονται από ένα σύστημα όπως το (3.2) είναι κύματα μεγάλου μήκους κύματος και μικρού πλάτους σχετικά με το βάθος ενός πραγματικού, μονοδιάστατου καναλιού μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η κίνηση.

#### 3.1 Γραμμικοποιημένο σύστημα

Μελετάμε πρώτα το σύστημα (3.1) για  $x \in [a, b], t \geq 0$ , εφοδιασμένο με αρχικές συνθήκες

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.3)$$

όπου  $\eta_0$ ,  $u_0$  είναι δεδομένες πραγματικές συναρτήσεις στο  $[a, b]$  και με συνοριακές συνθήκες *Dirichlet*

$$u(a, t) = u(b, t) = 0. \quad (3.4)$$

Υποθέτουμε για συμβατότητα ότι  $u_0(a) = u_0(b) = 0$ .

### 3.1.1 Ημιδιακριτό πρόβλημα

Έστω  $h > 0$  και  $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N$ , όπου  $N$  θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε  $Nh = b - a$ .

Η συνήθης ημιδιακριτοποίηση *Galerkin* του συστήματος (3.1) ορίζεται ως ακολούθως. Έστω  $S_h$  ο χώρος των συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων στο  $[a, b]$  ως προς το διαμερισμό  $\{x_i\}$  και  $S_{h,0}$  ο χώρος των στοιχείων του  $S_h$  τα οποία μηδενίζονται στα  $a$  και  $b$ . Αναζητούμε  $\eta_h : [0, T] \rightarrow S_h$ ,  $u_h : [0, T] \rightarrow S_{h,0}$  που ικανοποιούν το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\left. \begin{aligned} (\eta_{h_t}, \varphi) + (u_{h_x}, \varphi) &= 0, \quad \forall \varphi \in S_h, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (u_{h_t}, \chi) + (\eta_{h_x}, \chi) + \alpha(u_{h_{xt}}, \chi') &= (f(x, t), \chi), \quad \forall \chi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \eta_h(0) &= I_h \eta_0, \quad u_h(0) = I_{h,0} u_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

όπου  $I_h, I_{h,0}$  είναι οι τελεστές παρεμβολής στους χώρους  $S_h$  και  $S_{h,0}$  αντίστοιχα. (Χρησιμοποιήσαμε τη συνήθη ασθενή μορφή του συστήματος (3.1), παρατηρώντας ότι  $(u_{xxt}, \chi) = -(u_{xt}, \chi')$   $\forall \chi \in S_{h,0}$ .)

### 3.1.2 Σύστημα σε μορφή πινάκων

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις της σχέσης (2.9) στη σχέση (3.5) :

$$\left. \begin{aligned} \left( \sum_{i=0}^{N+1} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi \right) + \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi'_i, \varphi \right) &= 0, \quad \forall \varphi \in S_h, \\ \left( \sum_{i=1}^N \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi \right) + \left( \sum_{i=0}^{N+1} H_i(t) \varphi'_i, \chi \right) + \\ + a \left( \sum_{i=1}^N \dot{U}_i(t) \chi'_i, \chi' \right) &= (f(x, t), \chi), \quad \forall \chi \in S_{h,0}. \end{aligned} \right\}$$

Επομένως για τις συναρτήσεις βάσης των χώρων  $S_h$  και  $S_{h,0}$  θα έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} \left( \sum_{i=0}^{N+1} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi'_i, \varphi_j \right) &= 0, \quad \forall j = 0, 1, \dots, N+1, \\ \left( \sum_{i=1}^N \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=0}^{N+1} H_i(t) \varphi'_i, \chi_j \right) + \\ + a \left( \sum_{i=1}^N \dot{U}_i(t) \chi'_i, \chi'_j \right) &= (f(x, t), \chi_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \right\}$$

ή

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{N+1} (\varphi_i, \varphi_j) \dot{H}_i + \sum_{i=1}^N (\chi'_i, \varphi_j) U_i &= 0, \quad \forall j = 0, 1, \dots, N+1, \\ \sum_{i=1}^N (\chi_i, \chi_j) \dot{U}_i + \sum_{i=0}^{N+1} (\varphi'_i, \chi_j) H_i + \\ + a \sum_{i=1}^N (\chi'_i, \chi'_j) \dot{U}_i &= (f(x, t), \chi_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Επιπλέον των πινάκων  $G, S, \tilde{G}, \tilde{S}$  που ορίστηκαν από τις σχέσεις (2.12a), θεωρούμε και τον πίνακα

$$\hat{S} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ με } \hat{S}_{ji} = (\chi'_j, \chi'_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

Αντικαθιστούμε τους πίνακες των σχέσεων (2.12a) και (3.7), καθώς και τα διανύσματα της σχέσης (2.12b), στην (3.6) και παίρνουμε το σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων για  $t \geq 0$ :

$$\left. \begin{aligned} G\dot{H} + SU &= 0, \\ (\tilde{G} + a\hat{S})\dot{U} + \tilde{S}H &= F, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

όπου

$$F(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_N(t)]^T \quad \text{με} \quad F_i(\cdot, t) = (f(\cdot, t), \chi_i).$$

Η σχέση (3.8) παριστάνει το πρόβλημα (3.5) σε μορφή πινάκων. Οι αρχικές συνθήκες  $H(0), U(0)$  είναι οι συντελεστές των  $\eta_h(0), u_h(0)$  ως προς τις βάσεις των  $S_h, S_{h,0}$ , αντίστοιχα.

### 3.1.3 Πλήρης διακριτοποίηση με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης

Θεωρούμε ομοιόμορφη διαμέριση του χρονικού διαστήματος  $[0, T]$  με βήμα  $k$ , με  $t^n = nk, n = 0, 1, \dots, M$ , όπου  $Mk = T$  και  $k = t^{n+1} - t^n$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό της παραγράφου 2.3.3, το διακριτό σύστημα που δίνει η κλασσική μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης θα έχει την παρακάτω μορφή:

Δεδομένων  $H^0, U^0$ ,  
για  $n = 0, 1, \dots, M-1$

$$\left. \begin{aligned} H^{n,1} &= H^n, U^{n,1} = U^n \\ &\text{για } i = 2, 3, 4 \\ GH^{n,i} &= GH^n - ka_i SU^{n,i-1}, \\ (\tilde{G} + a\hat{S})U^{n,i} &= (\tilde{G} + a\hat{S})U^n - ka_i \tilde{S}H^{n,i-1} + ka_i F(t^{n,i-1}), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} GH^{n+1} &= GH^n - kS \sum_{i=1}^4 b_i U^{n,i}, \\ (\tilde{G} + a\hat{S})U^{n+1} &= (\tilde{G} + a\hat{S})U^n - k\tilde{S} \sum_{i=1}^4 b_i H^{n,i} + k \sum_{i=1}^4 b_i F(t^{n,i}). \end{aligned} \right\}$$

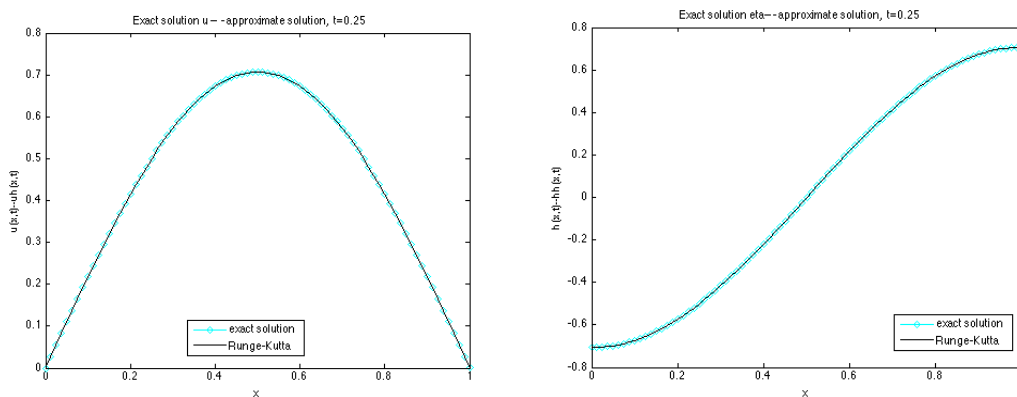
Πριν εξετάσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος *Boussinesq*, παραθέτουμε την αριθμητική επίλυση ενός συστήματος της μορφής (3.1), του οποίου γνωρίζουμε την ακριβή λύση, για να ελέγξουμε τα σφάλματα και την τάξη ακρίβειας της μεθόδου που εφαρμόζουμε. Οι αναμενόμενες τάξεις ακρίβειας της μεθόδου, υπό την συνθήκη ευστάθειας  $k = O(h)$  είναι  $O(h^2)$  για το  $L^2$ -σφάλμα του  $u$  και  $O(h^{1.5})$  για το  $L^2$ -σφάλμα του  $\eta$ , [AD].

### 3.1.4 Αριθμητικό παράδειγμα

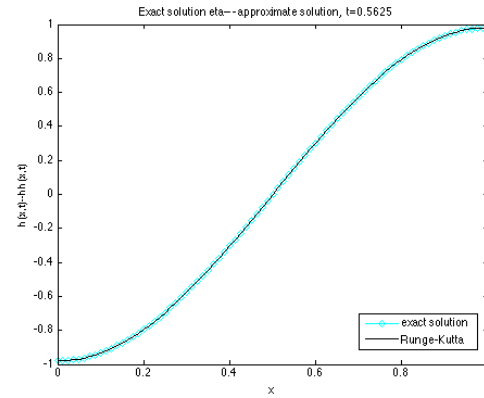
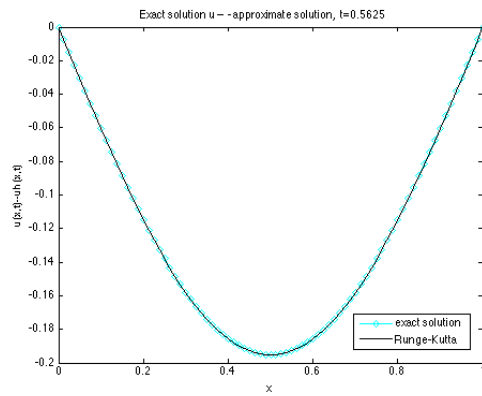
Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που μελετάμε στην παράγραφο αυτή είναι το:

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + u_x &= 0, \\ u_t + \eta_x - \alpha u_{xxt} &= -\alpha \pi^3 \sin \pi x \sin \pi t, \\ u(x, 0) &= \sin \pi x, \\ \eta(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

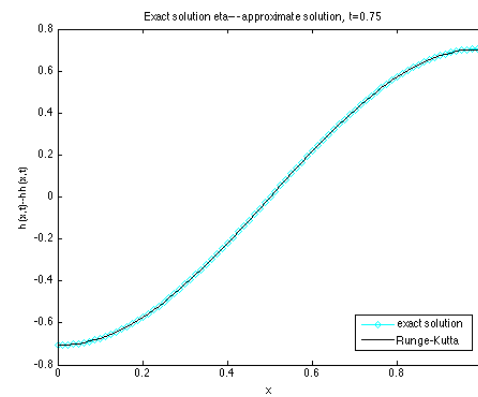
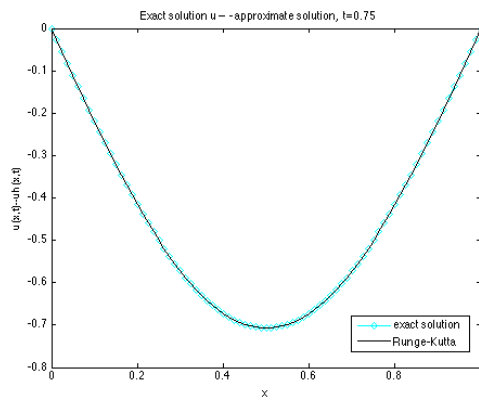
όπου  $x \in [0,1]$  και  $0 \leq t \leq T$  με  $T = 1$ . Η ακριβής λύση του συστήματος (3.9) είναι το ζευγάρι συναρτήσεων :  $u(x, t) = \sin \pi x \cos \pi t$ ,  $\eta(x, t) = -\cos \pi x \sin \pi t$ . Η προσεγγιστική λύση για  $\alpha = 1$  και η ακριβής λύση φαίνονται στα σχήματα (3.1 a-e) σε πέντε χρονικές στιγμές, όπου  $h = 0.0125$  και  $k = 0.00625$ .



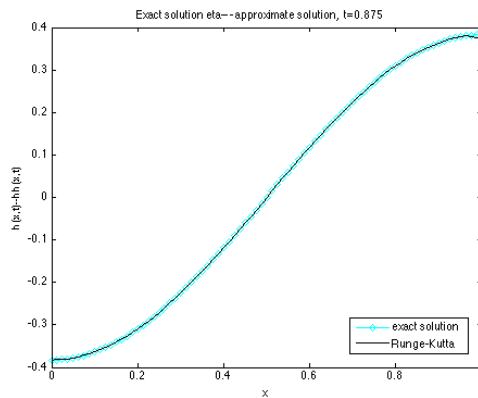
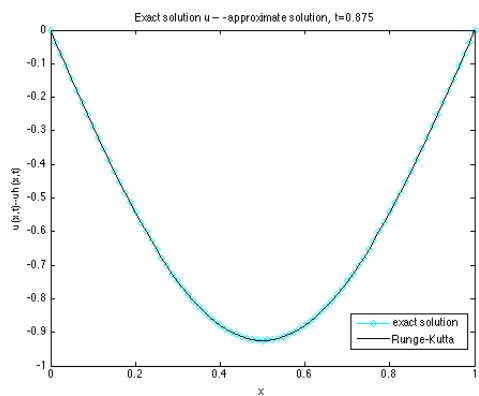
Σχήμα 3.1a: Λύση του (3.9) τη χρονική στιγμή  $t = 0.25$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



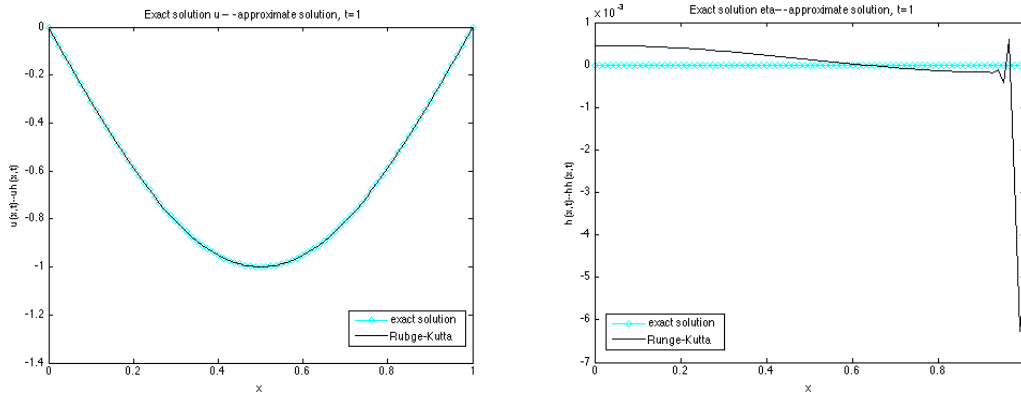
Σχήμα 3.1b: Λύση του (3.9) τη χρονική στιγμή  $t = 0.5625$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.1c: Λύση του (3.9) τη χρονική στιγμή  $t = 0.75$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.1d: Λύση του (3.9) τη χρονική στιγμή  $t = 0.875$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.1e: Λύση του (3.9) τη χρονική στιγμή  $t = T = 1$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

Τα σφάλματα και η τάξη ακρίβειας για τη διακριτή  $L^\infty$  – νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$  και τη διακριτή  $L^2$  νόρμα  $\|\cdot\|_{l^2}$  τη χρονική στιγμή  $t = T = 1$  φαίνονται στους πίνακες 3.1 και 3.2 αντίστοιχα. (Πήραμε  $\frac{k}{h} = \frac{1}{5}$ ). Παρατηρούμε ότι στην  $L^2$  νόρμα τα σφάλματα έχουν την αναμενόμενη τάξη ακρίβειας, ενώ στην  $L^\infty$  – νόρμα φαίνεται να είναι  $O(h^2)$  για το  $u$  και  $O(h)$  για το  $\eta$ .

| $h$     | $k$      | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ u\ _\infty$ | Τάξη ακρ. $u$ | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \eta\ _\infty$ | Τάξη ακρ. $\eta$ |
|---------|----------|----------------------------------------------------------|---------------|-------------------------------------------------------------|------------------|
| 0.05    | 0.025    | 2.50e-03                                                 | -             | 3.09e-02                                                    | -                |
| 0.025   | 0.0125   | 6.71e-04                                                 | 1.90          | 1.35e-02                                                    | 1.19             |
| 0.0125  | 0.00625  | 1.73e-04                                                 | 1.96          | 6.27e-03                                                    | 1.11             |
| 0.00625 | 0.00313  | 4.38e-05                                                 | 1.98          | 3.01e-03                                                    | 1.06             |
| 0.00313 | 0.00156  | 1.10e-05                                                 | 1.99          | 1.47e-03                                                    | 1.03             |
| 0.00156 | 7.81e-04 | 2.76e-06                                                 | 2.00          | 7.28e-04                                                    | 1.02             |

Πίνακας 3.1:  $L^\infty$ - Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (3.9) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και την άμεση μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

| $h$     | $k$      | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ u\ _{l^2}$ | Τάξη ακρ. $u$ | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \eta\ _{l^2}$ | Τάξη ακρ. $\eta$ |
|---------|----------|---------------------------------------------------------|---------------|------------------------------------------------------------|------------------|
| 0.05    | 0.025    | 1.64e-03                                                | -             | 1.06e-02                                                   | -                |
| 0.025   | 0.0125   | 4.50e-04                                                | 1.87          | 3.13e-03                                                   | 1.76             |
| 0.0125  | 0.00625  | 1.17e-04                                                | 1.95          | 9.90e-04                                                   | 1.66             |
| 0.00625 | 0.00313  | 2.97e-05                                                | 1.98          | 3.28e-04                                                   | 1.59             |
| 0.00313 | 0.00156  | 7.49e-06                                                | 1.99          | 1.12e-04                                                   | 1.55             |
| 0.00156 | 7.81e-04 | 1.88e-06                                                | 1.99          | 3.89e-05                                                   | 1.53             |

Πίνακας 3.2:  $l^2$ - Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (3.9) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και την άμεση μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

## 3.2 Αριθμητικά πειράματα με το γραμμικοποιημένο σύστημα *Boussinesq*

Στην παράγραφο αυτή εκτελούμε αριθμητικά πειράματα με το σύστημα

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + u_x &= 0, \\ u_t + \eta_x - \alpha u_{xxt} &= 0, \quad \alpha \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \\ \eta(x, 0) &= A \exp\{-\beta(x - \gamma)^2\}, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

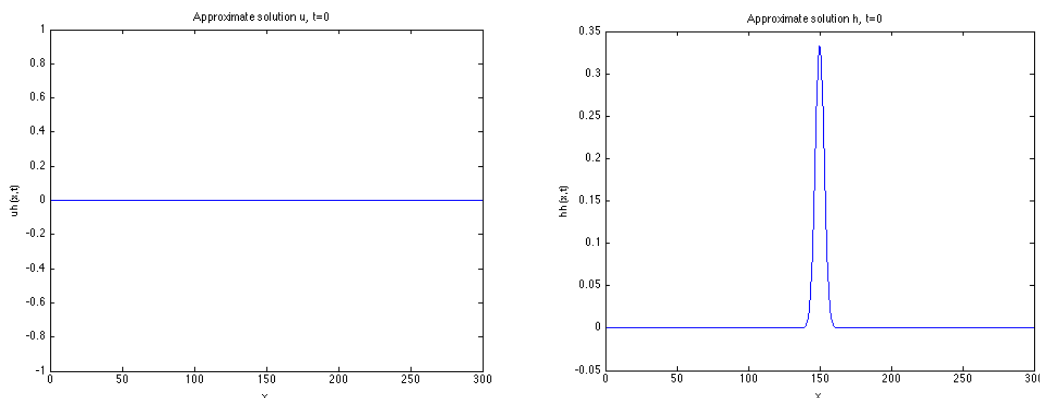
όπου  $A, \beta$  θετικές σταθερές και  $\gamma$  το μέσον του διαστήματος  $\Omega$ . Μεταβάλλοντας την τιμή του σταθερού συντελεστή  $\alpha$  εξετάζουμε πώς εξελίσσεται η αριθμητική λύση στον χρόνο.

### 1<sup>η</sup> Περίπτωση : $\alpha = 0$ , Κυματική εξίσωση

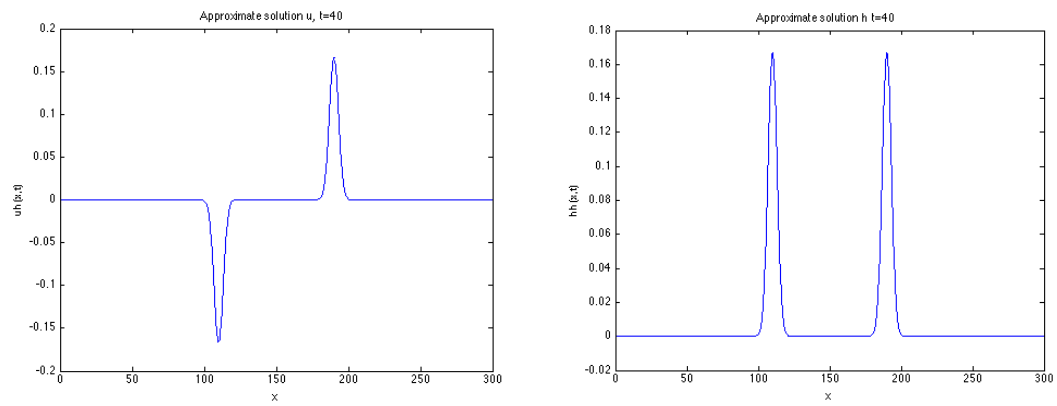
Για  $\alpha = 0$  και ταχύτητα  $c = 1$ , το σύστημα το οποίο λύνουμε είναι το:

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + u_x &= 0, \\ u_t + \eta_x &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \\ \eta(x, 0) &= A \exp\{-\beta(x - \gamma)^2\}, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.10a)$$

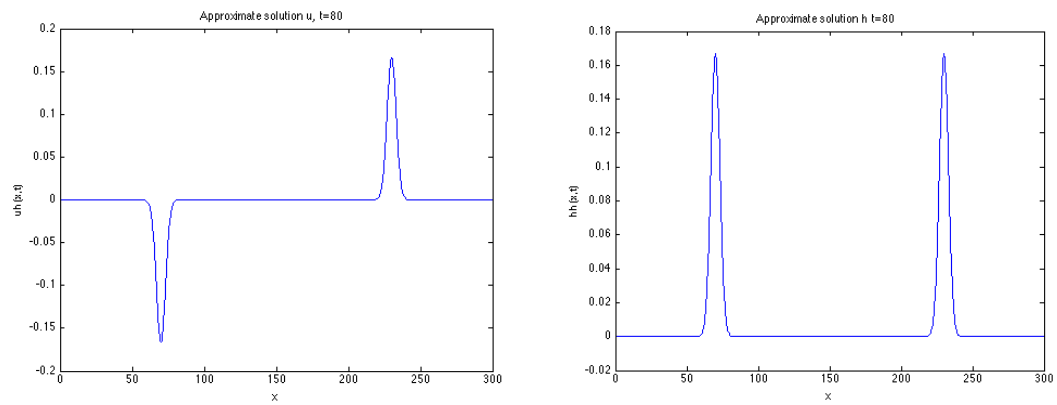
και αντιπροσωπεύει, όπως είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, την κυματική εξίσωση σε μορφή συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης. Όπως αναμένεται από την στοιχειώδη θεωρία της κυματικής εξίσωσης, η αριθμητική λύση του (3.10a) είναι η δημιουργία δύο παλμών με ύψος το μισό του αρχικού πλάτους  $A$ , που κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση και με ίση, κατά μέτρο, ταχύτητα. Τη χρονική στιγμή  $t = 150$  περίπου 'χτυπάνε' το σύνορο και ανακλώνται αυτούσια ως προς τον οριζόντιο άξονα κίνησής τους. Τα παρακάτω αποτελέσματα προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση του (3.10a) για  $\Omega = [0, 300]$ ,  $\gamma = 150$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $A = 1/3$ ,  $h = 0.2$ ,  $k = 0.02$ ,  $T = 300$ .



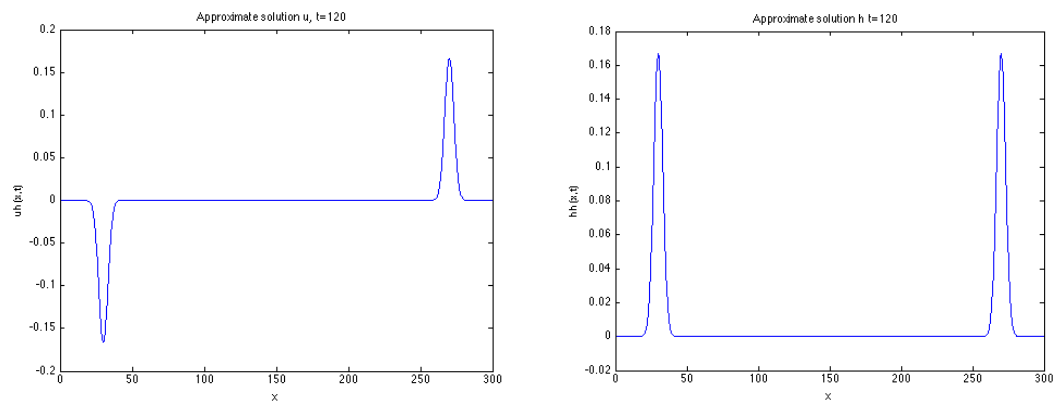
Σχήμα 3.2a: Λύση του (3.10a) τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης.



Σχήμα 3.2b: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 40$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

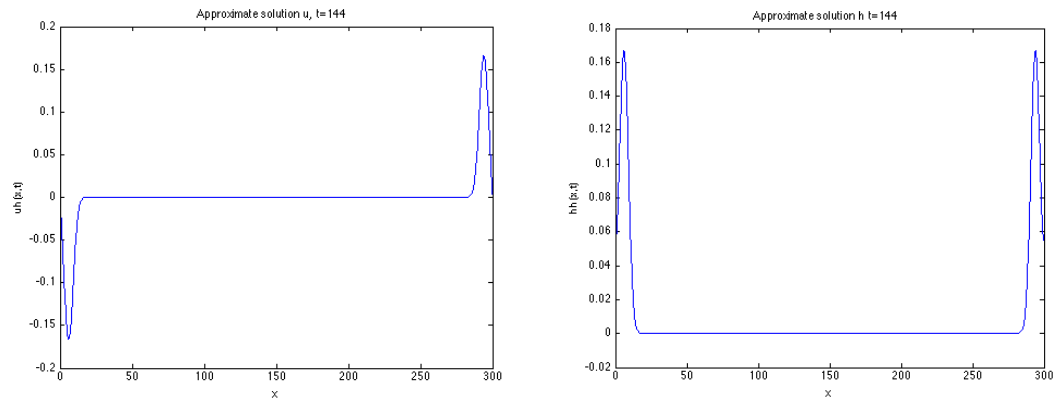


Σχήμα 3.2c: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 80$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

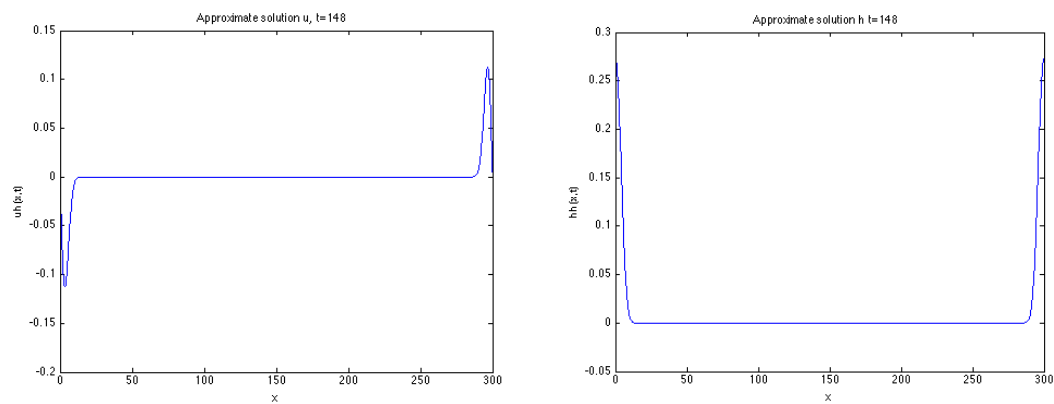


Σχήμα 3.2d: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 120$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

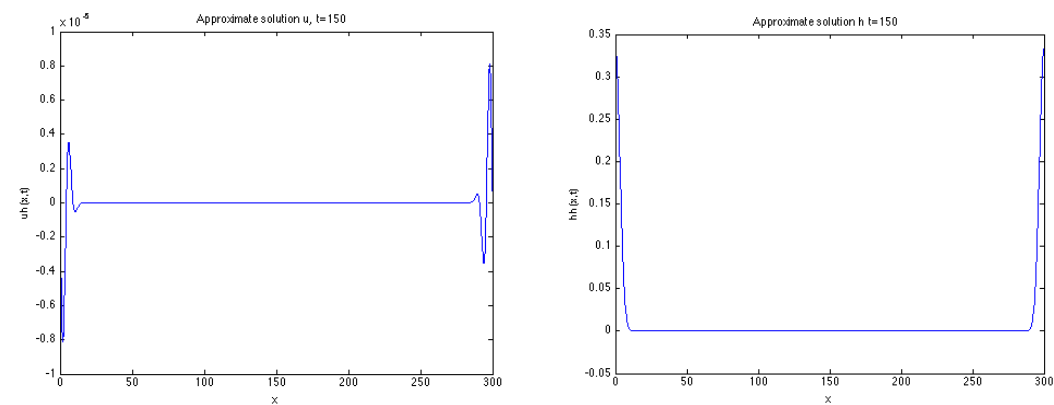




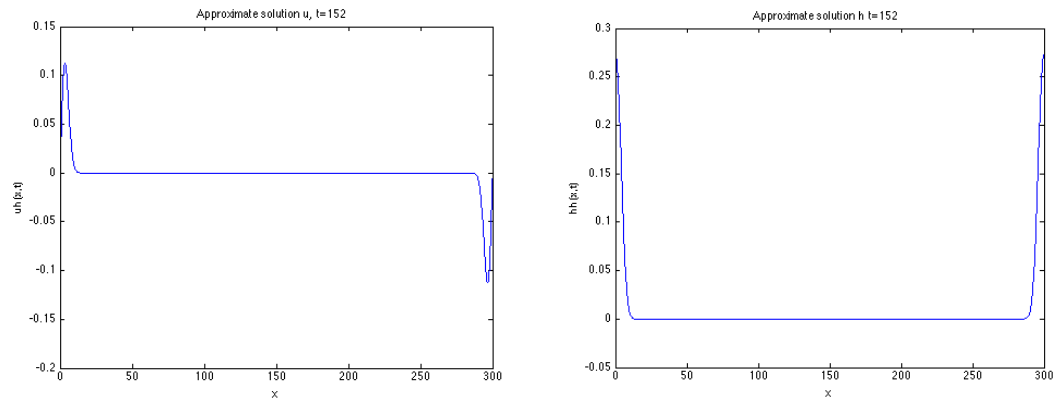
Σχήμα 3.2e: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 144$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



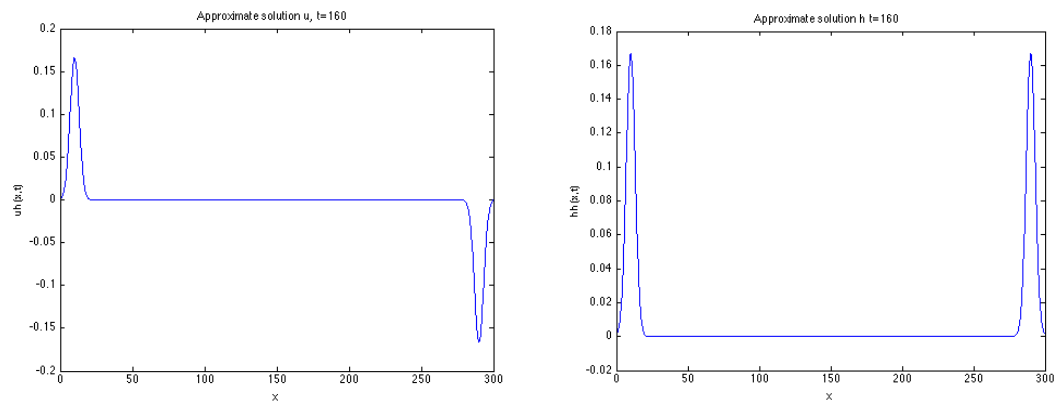
Σχήμα 3.2f: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 148$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



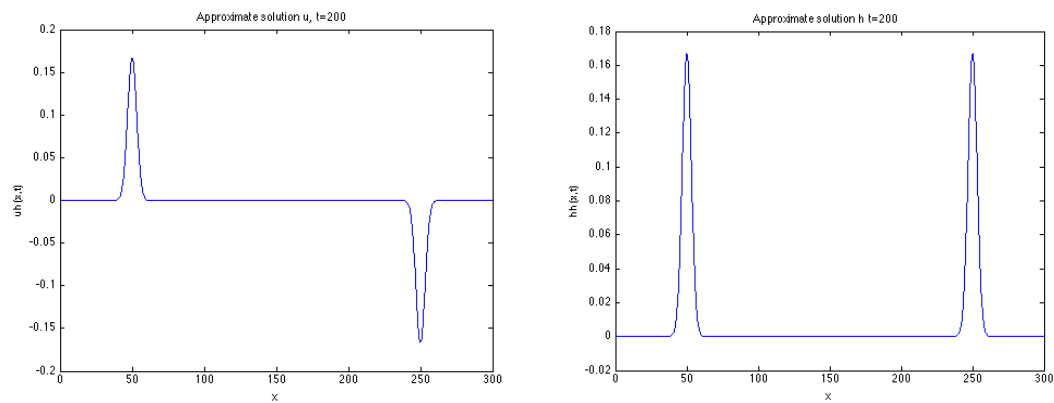
Σχήμα 3.2g: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 150$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



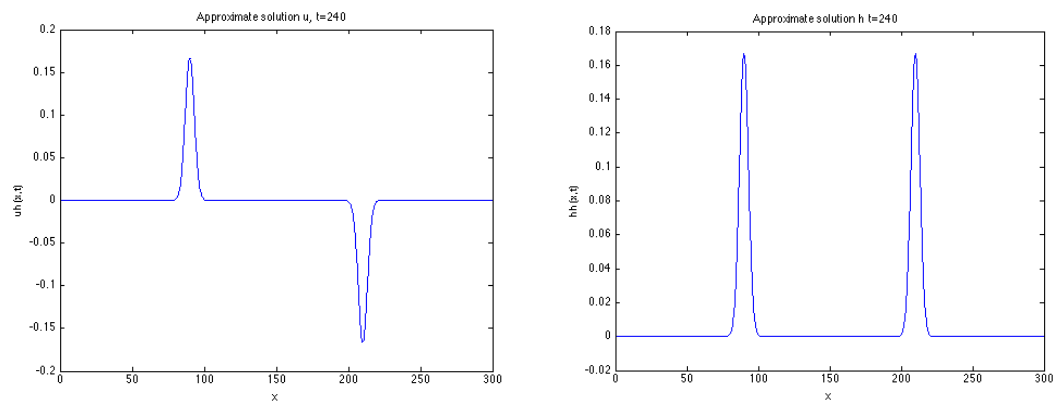
Σχήμα 3.2h: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 152$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



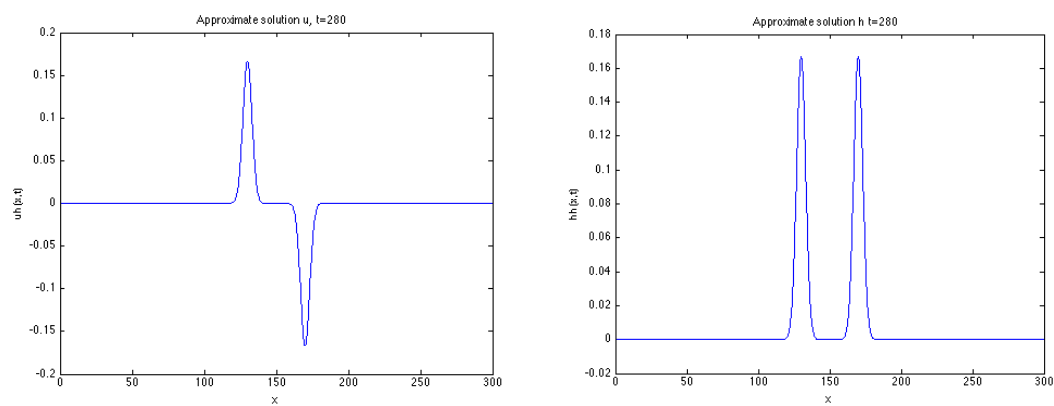
Σχήμα 3.2i: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 160$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



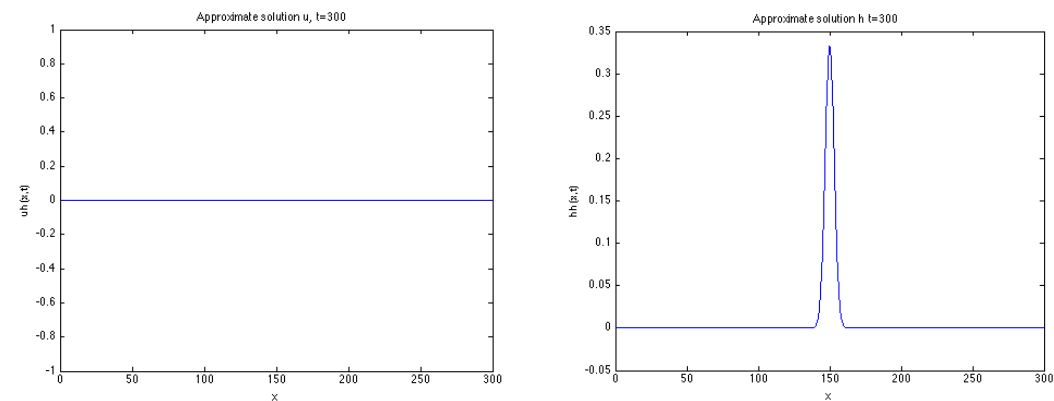
Σχήμα 3.2j: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 200$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.2k: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 240$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.2l: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = 280$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.2m: Λύση του (3.10α) τη χρονική στιγμή  $t = T = 300$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

## 2<sup>η</sup> Περίπτωση : $\alpha = 1/3$

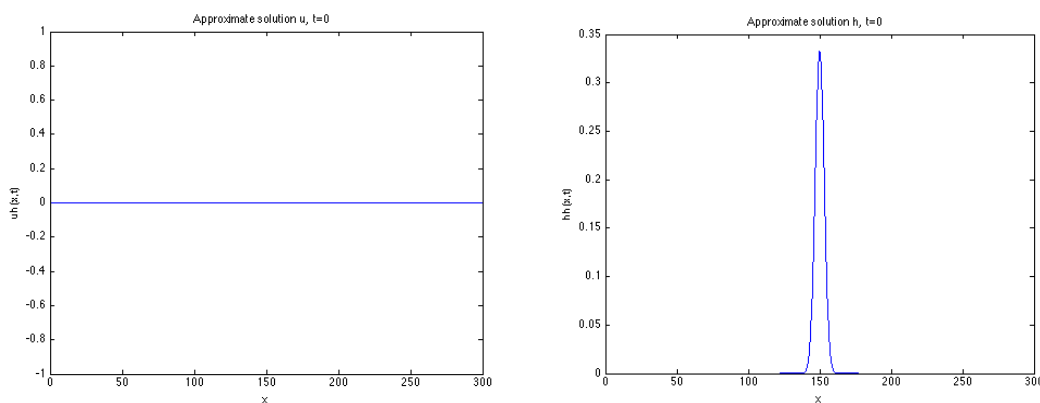
Εξετάζουμε, στην περίπτωση αυτή, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση του συστήματος (3.10) όταν ο σταθερός συντελεστής του όρου διασποράς  $-u_{xxt}$  είναι  $\alpha=1/3$ . Το πρόβλημα το οποίο λύνουμε αριθμητικά είναι το:

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + u_x &= 0, \\ u_t + \eta_x - \frac{1}{3}u_{xxt} &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \\ \eta(x, 0) &= A \exp\{-\beta(x - \gamma)^2\}, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.10b)$$

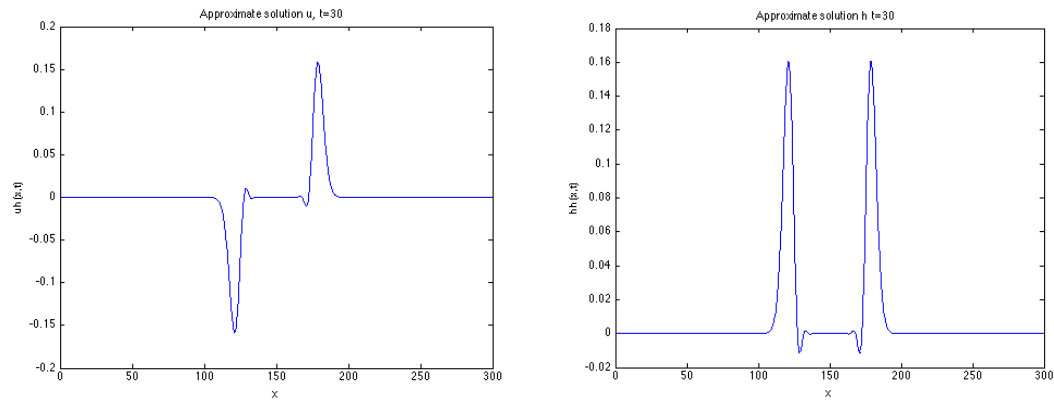
όπου  $\Omega = [0, 300]$ .

Τα δεδομένα που πήραμε για το πείραμα αυτό είναι:  $\gamma = 150, \beta = 0.05, A = 1/3, h = 0.2, k = 0.02, T = 300$ .

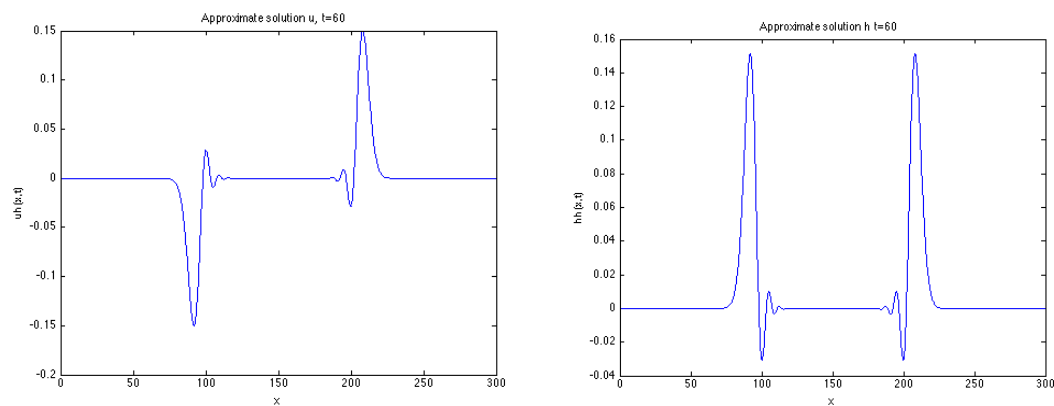
Στο πείραμα αυτό, βλέπουμε αρχικά να δημιουργούνται δύο συμμετρικοί παλμοί της συνιστώσας  $\eta$ , οι οποίοι ταξιδεύουν με σταθερές αλλά αντίθετες ταχύτητες προς τα δεξιά και αριστερά. Σε αντίθεση με την περίπτωση του συστήματος της κυματικής εξίσωσης ( $\alpha = 0$ ), οι παλμοί ακολουθούνται από μία “ουρά διασποράς” (ουρά ταλαντώσεων μικρού πλάτους που αποσβένεται καθώς απομακρυνόμαστε από τον κυρίως παλμό και μεγάλης συχνότητας, που ακολουθεί τους κυρίους παλμούς). Παρόμοια εικόνα βλέπουμε και για τους δύο παλμούς της ταχύτητας  $u$ . Τα κύματα ανακλώνται περί την χρονική στιγμή  $t = 150$  από τα “τοιχώματα” του συνόρου, όπου  $u = 0$ , και ταξιδεύουν προς το εσωτερικό. Τα κύματα διασπείρονται, με την έννοια ότι ο κύριος παλμός ελαττώνεται κατά πλάτος ενώ αυξάνει το πλήθος και το πλάτος των ταλαντώσεων της ουράς διασποράς.



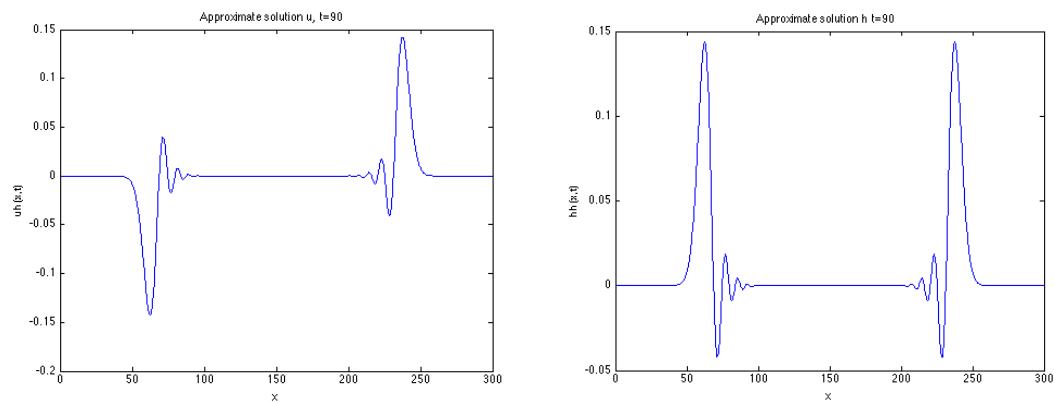
Σχήμα 3.3a: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης.



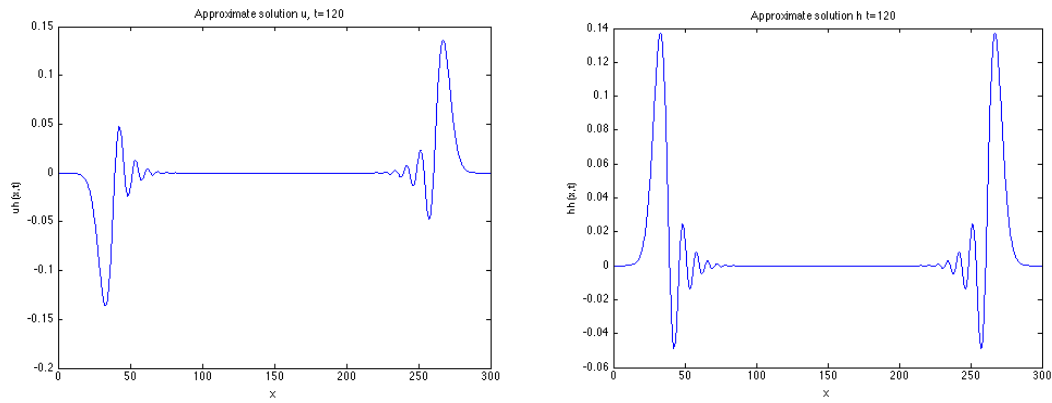
Σχήμα 3.3b: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 30$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



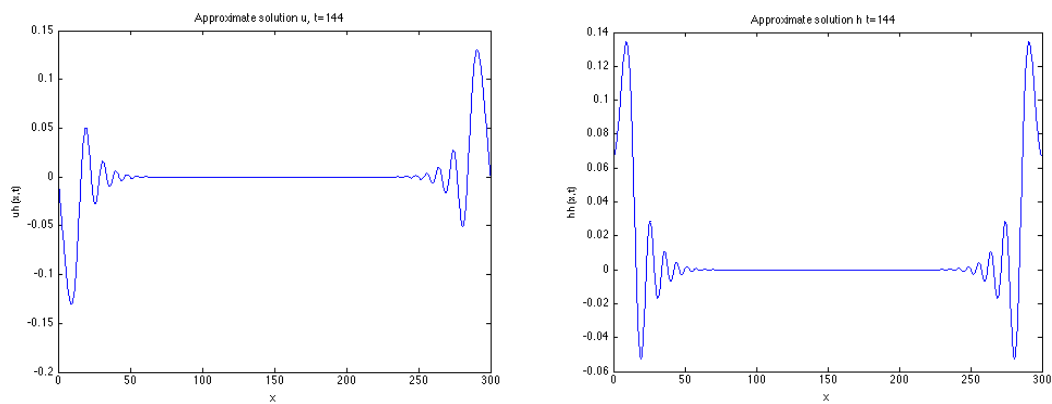
Σχήμα 3.3c: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 60$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



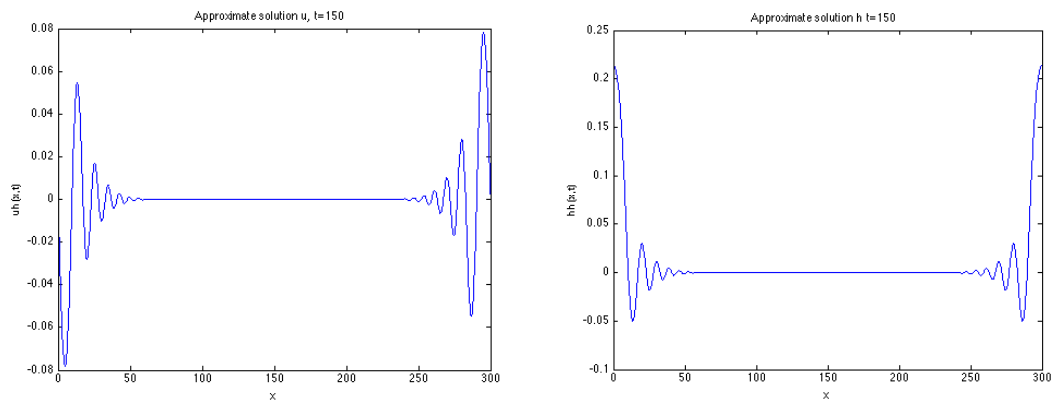
Σχήμα 3.3d: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 90$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



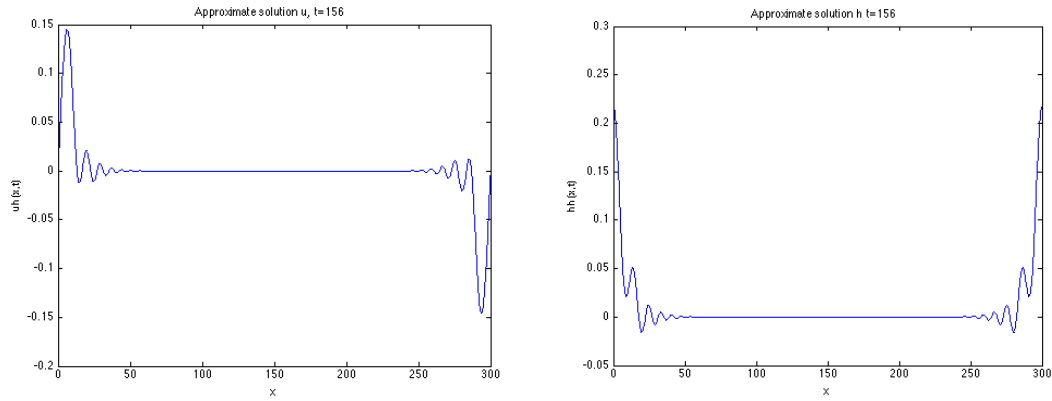
Σχήμα 3.3e: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 120$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



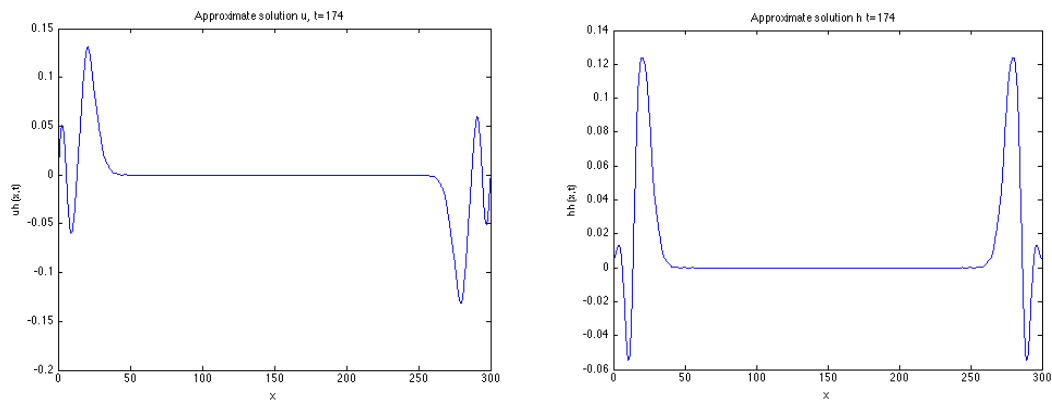
Σχήμα 3.3f: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 144$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



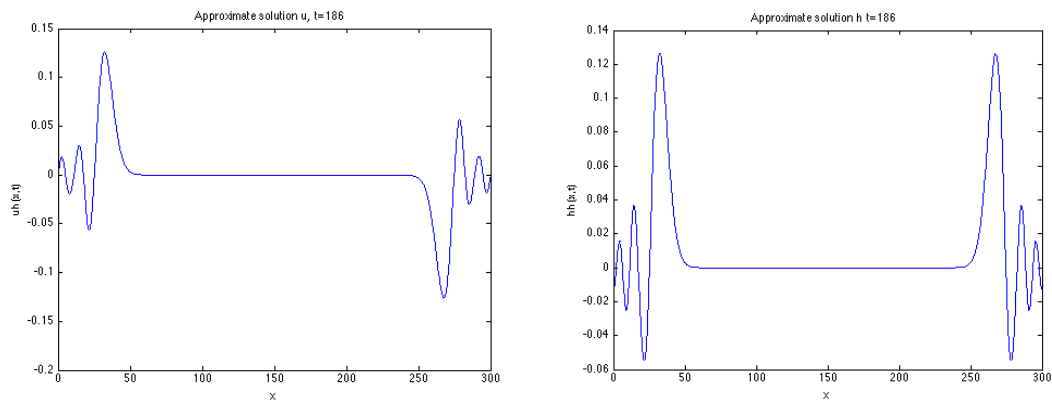
Σχήμα 3.3g: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 150$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



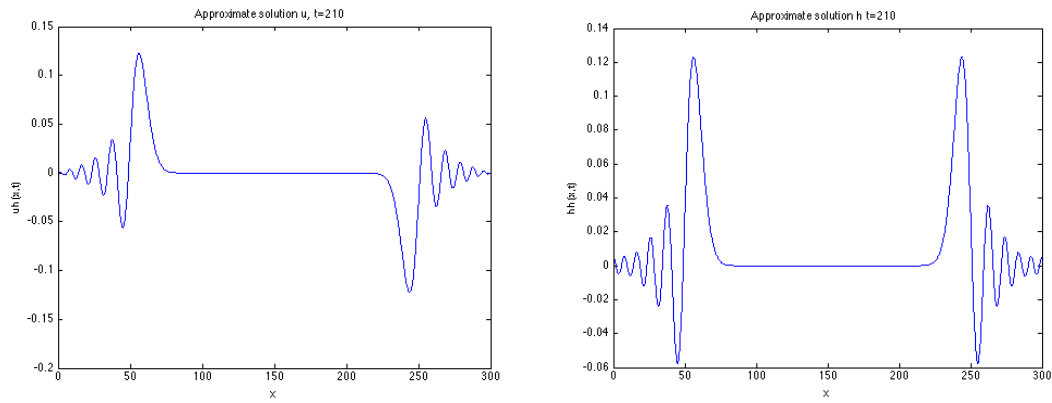
Σχήμα 3.3h: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 156$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



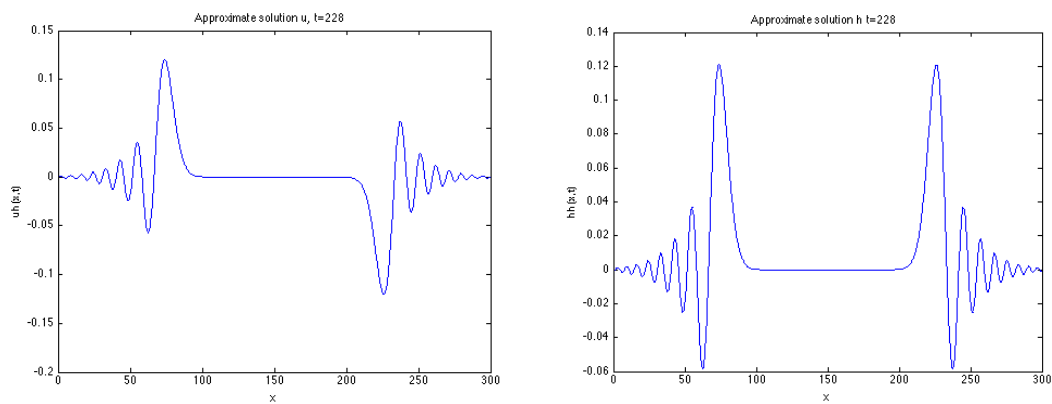
Σχήμα 3.3i: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 174$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



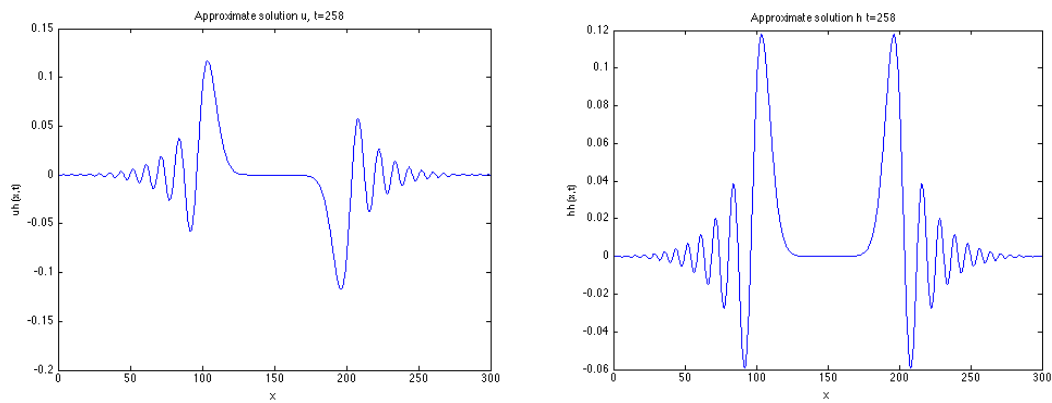
Σχήμα 3.3j: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 186$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.3k: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 210$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

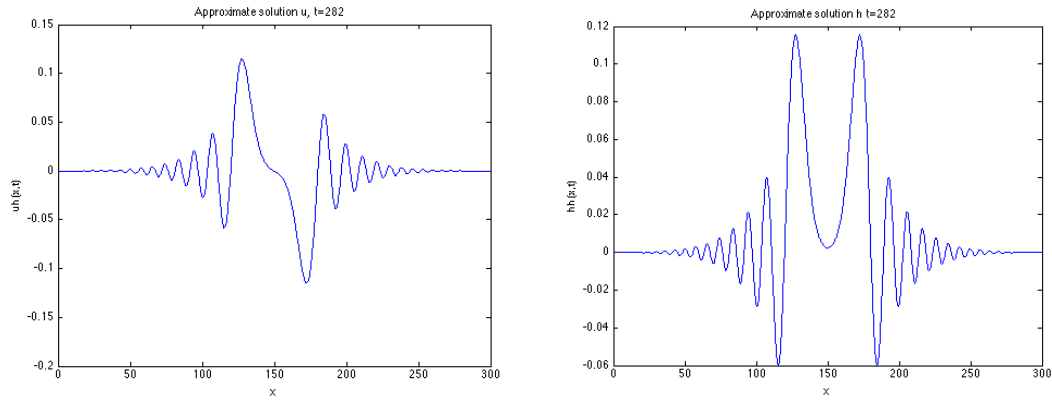


Σχήμα 3.3l: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 228$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

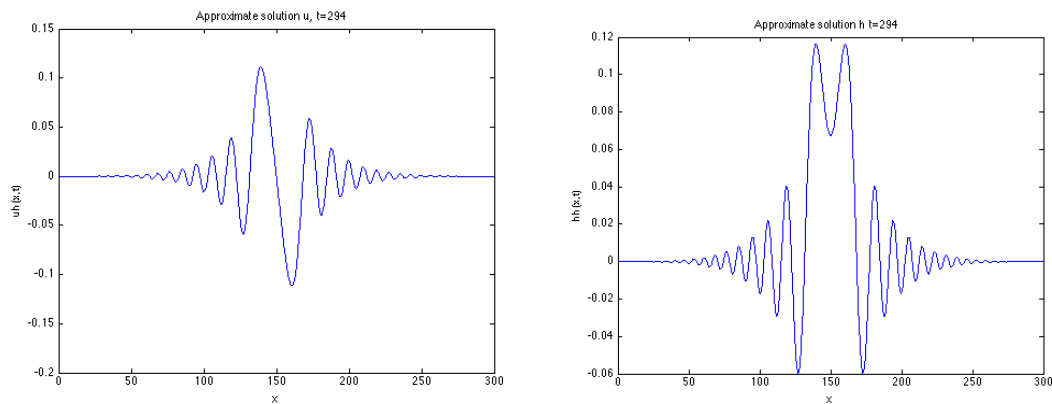


Σχήμα 3.3m: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 258$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

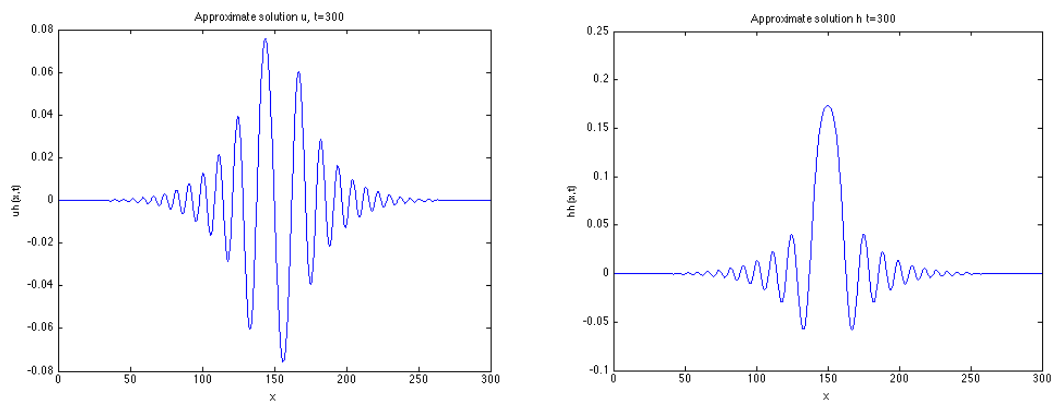




Σχήμα 3.3n: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 282$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.3o: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = 294$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.3p: Λύση του (3.10b) τη χρονική στιγμή  $t = T = 300$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

Στο ανάλογο αριθμητικό πείραμα για  $\alpha = 1/6$  παρατηρούμε ίδια ποιοτικά συμπεριφορά αλλά με ουρά διασποράς μικρότερου πλάτους.

### 3.3 Μη γραμμικό κλασσικό σύστημα *Boussinesq*

Στην παράγραφο αυτή μελετάμε αριθμητικά το σύστημα (3.2) για  $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, t > 0$ , εφοδιασμένο με τις αρχικές συνθήκες της σχέσης (3.3) και με συνοριακές συνθήκες (3.4).

#### 3.3.1 Ημιδιακριτό πρόβλημα

Έστω  $h > 0$  και  $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N$ , όπου  $N$  θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε  $Nh = b - a$ , μία ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος  $[a, b]$ .

Η συνήθης ημιδιακριτοποίηση *Galerkin* του συστήματος (3.2) με συνεχείς, κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις ορίζεται ως ακολούθως. Αναζητούμε  $\eta_h : [0, T] \rightarrow S_h, u_h : [0, T] \rightarrow S_{h,0}$  που ικανοποιούν την ασθενή μορφή του συστήματος (3.2) για  $0 \leq t \leq T$ , δηλαδή τέτοιες ώστε

$$\left. \begin{aligned} (\eta_{h_t}, \varphi) + (u_{h_x}, \varphi) + \varepsilon((\eta_h u_h)_x, \varphi) &= 0, \quad \forall \varphi \in S_h, \\ (u_{h_t}, \chi) + (\eta_{h_x}, \chi) + \varepsilon(u_h u_{h_x}, \chi) - \alpha(u_{h_{xt}}, \chi) &= 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$((\eta_h u_h)_x, \varphi) = [\eta_h u_h \varphi]_a^b - (\eta_h u_h, \varphi') = -(\eta_h u_h, \varphi'), \quad \forall \varphi \in S_h, \quad (3.12)$$

και

$$(u_h u_{h_x}, \chi) = \left( \left( \frac{u_h^2}{2} \right)_x, \chi \right) = - \left( \frac{u_h^2}{2}, \chi' \right), \quad \forall \chi \in S_{h,0}. \quad (3.13)$$

Επομένως, η ασθενής μορφή του συστήματος (3.11) παίρνει την μορφή

$$\left. \begin{aligned} (\eta_{h_t}, \varphi) + (u_{h_x}, \varphi) - \varepsilon(\eta_h u_h, \varphi') &= 0, \quad \forall \varphi \in S_h, \\ (u_{h_t}, \chi) + (\eta_{h_x}, \chi) - \frac{\varepsilon}{2}(u_h^2, \chi') + \alpha(u_{h_{xt}}, \chi') &= 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Επιλέγουμε ως προσεγγίσεις των  $\eta_0$  και  $u_0$  τα  $\eta_h(x, 0) = I_h \eta_0, u_h(x, 0) = I_{h,0} u_0$  όπου  $I_h, I_{h,0}$  είναι οι τελεστές παρεμβολής πρώτης τάξης στους χώρους  $S_h$  και  $S_{h,0}$  αντίστοιχα.

#### 3.2.2 Σύστημα σε μορφή πινάκων

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (2.9) στις σχέσεις (3.14) :

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=0}^{N+1} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi \right) + \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi'_i, \varphi \right) - \\ & - \varepsilon \left( \sum_{i=0}^{N+1} H_i(t) \varphi_i \sum_{k=1}^N U_k(t) \chi_k, \varphi' \right) = 0, \quad \forall \varphi \in S_h, \\ & \left( \sum_{i=1}^N \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi \right) + \left( \sum_{i=0}^{N+1} H_i(t) \varphi'_i, \chi \right) - \\ & \frac{\varepsilon}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi_i \right)^2, \chi' \right) + a \left( \sum_{i=1}^N \dot{U}_i(t) \chi'_i, \chi' \right) = 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}. \end{aligned} \right\}$$

Επομένως θα έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=0}^{N+1} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi'_i, \varphi_j \right) - \\ & - \varepsilon \left( \sum_{i=0}^{N+1} H_i(t) \varphi_i \sum_{k=1}^N U_k(t) \chi_k, \varphi'_j \right) = 0, \quad \forall j = 0, 1, \dots, N+1, \\ & \left( \sum_{i=1}^N \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=0}^{N+1} H_i(t) \varphi'_i, \chi_j \right) - \\ & - \frac{\varepsilon}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi_i \right)^2, \chi'_j \right) + a \left( \sum_{i=1}^N \dot{U}_i(t) \chi'_i, \chi'_j \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \right\}$$

ή

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N+1} (\varphi_i, \varphi_j) \dot{H}_i + \sum_{i=1}^N (\chi'_i, \varphi_j) U_i - \\ & - \varepsilon \sum_{i=0}^{N+1} H_i \left( \sum_{k=1}^N U_k (\varphi_i \chi_k, \varphi'_j) \right) = 0, \quad \forall j = 0, 1, \dots, N+1, \\ & \sum_{i=1}^N (\chi_i, \chi_j) \dot{U}_i + \sum_{i=0}^{N+1} (\varphi'_i, \chi_j) H_i - \\ & - \frac{\varepsilon}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^N U_i(t) \chi_i \right)^2, \chi'_j \right) + a \sum_{i=1}^N (\chi'_i, \chi'_j) \dot{U}_i = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} G\dot{H} + SU - \varepsilon F_1(H, U) &= 0, \\ (\tilde{G} + a\hat{S})\dot{U} + \tilde{S}H - \frac{\varepsilon}{2}F_2(U) &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου οι πίνακες  $G, S, \tilde{G}, \hat{S}$  και  $\tilde{S}$  ορίστηκαν από τις σχέσεις (2.12a) και (3.7). Μπορεί να αποδειχθεί, [βλ. Α-Δ], ότι για ομοιόμορφο χωρικό διαμερισμό η λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών (3.14) πληροί τις εκτιμήσεις σφαλμάτων  $\max_{t \in [0, T]} \|\eta_h - \eta\| = O(h^{3/2})$  και  $\|u_h - u\| = O(h^2)$ .

### 3.4 Αριθμητικά πειράματα με το κλασσικό σύστημα *Boussinesq*

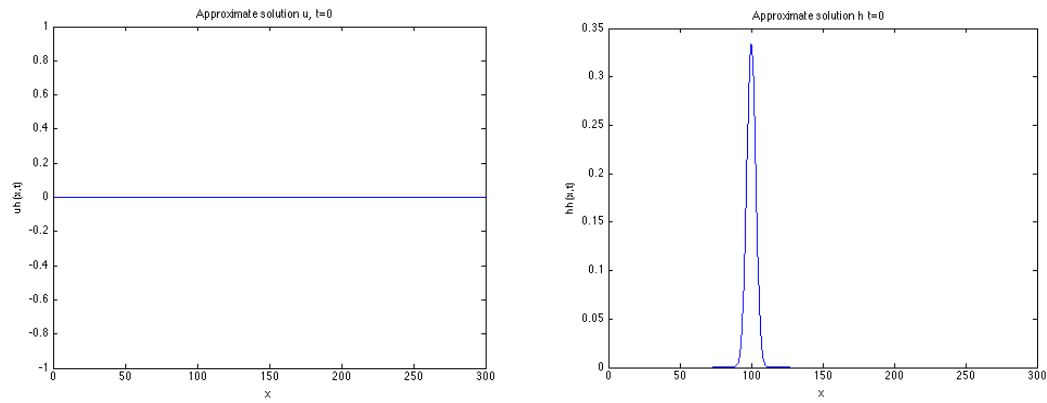
Στην παράγραφο αυτή ασχολούμαστε με την αριθμητική επίλυση του παρακάτω συστήματος

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + u_x + \varepsilon(\eta u)_x &= 0, & \varepsilon &\geq 0, \\ u_t + \eta_x + \varepsilon u u_x - \alpha u_{xxt} &= 0, & \alpha &\geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \\ \eta(x, 0) &= A \exp\{-\beta(x - \gamma)^2\}, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

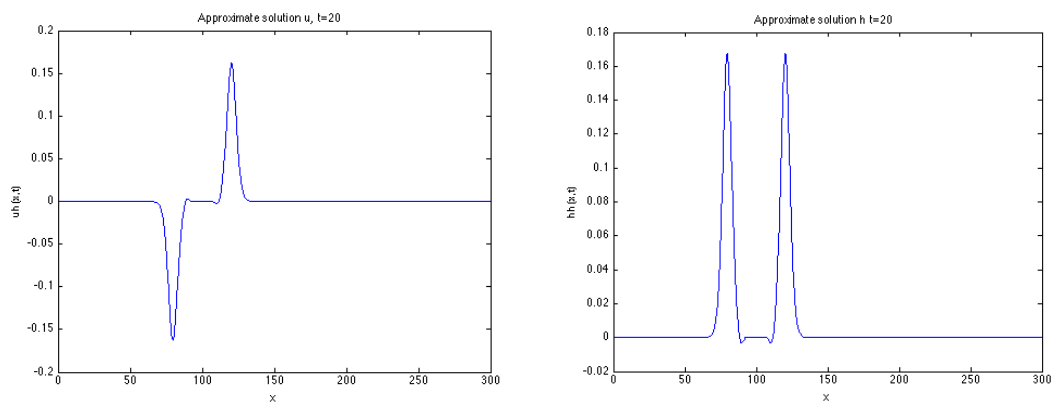
δίνοντας διαφορετικές τιμές στους σταθερούς συντελεστές των μη γραμμικών όρων. Διακριτοποιούμε, όπως προηγουμένως, το ημιδιακριτό σύστημα (3.16) ως προς τον χρόνο με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης, η οποία μπορεί ναδειχθεί, [βλ. Α-Δ], ότι είναι ευσταθής για  $\frac{k}{h} \leq a$  και δίνει τάξεις ακρίβειας που είναι όπως στην ημιδιακριτή περίπτωση ως προς  $h$  και  $O(k^4)$  ως προς  $k$ .

Τα δεδομένα που πήραμε για το πείραμα αυτό είναι:  $\gamma = 100, \beta = 0.05, A = 1/3, h = 0.2, k = 0.02, T = 600, \alpha = 1/3, \varepsilon = 1/6$  και  $\Omega = [0, 300]$ .

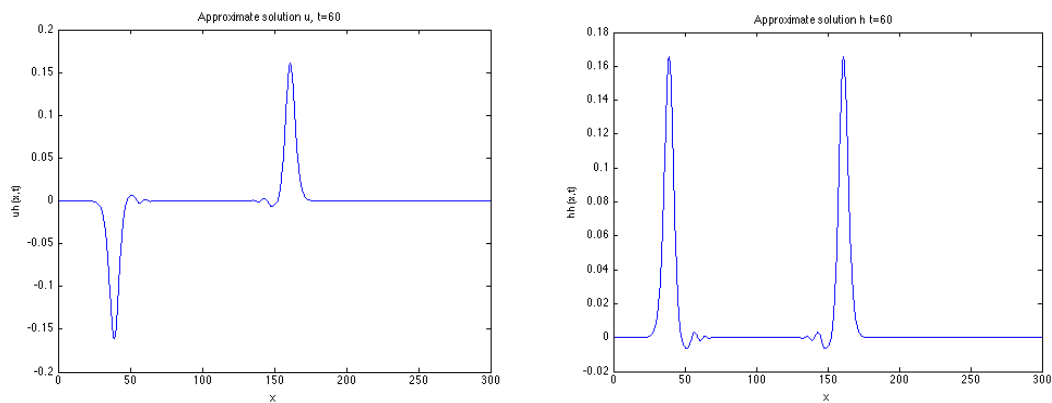
Στο παρακάτω πείραμα, βλέπουμε αρχικά τη δημιουργία δύο συμμετρικών μοναχικών κυμάτων τα οποία κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση. Καθένα από τα δύο κύματα ακολουθούνται από μικρές σε μέγεθος ουρές διασποράς. Το κύμα που κινείται με κατεύθυνση προς τα αριστερά φτάνει πρώτο στο σύνορο, και ανακλάται. Τα δύο κύματα κινούνται με την ίδια κατεύθυνση μέχρι να φτάσει και το δεύτερο κύμα στο δεξιό σύνορο και ανακλαστεί. Τη χρονική στιγμή  $t = 300$  τα δύο κύματα συγκρούονται. Μετά τη σύγκρουση τα μοναχικά κύματα συνεχίζουν να κινούνται αμετάβλητα με τις αντίστοιχες κατευθύνσεις τους.



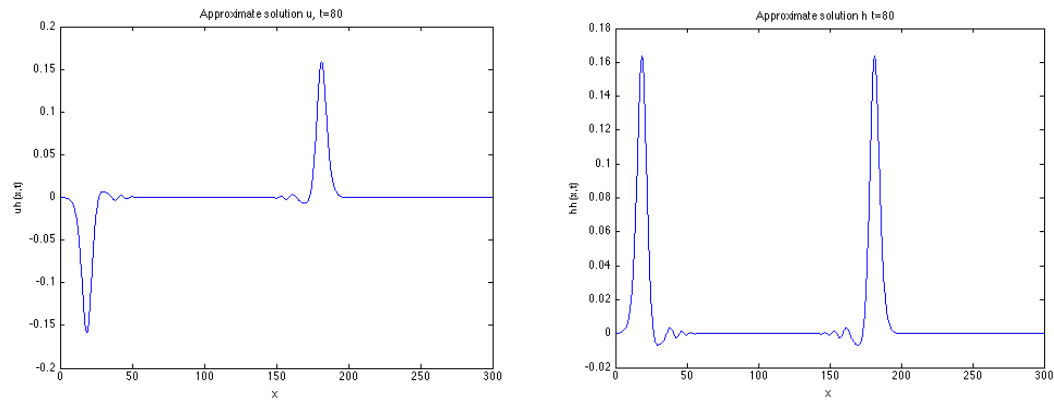
Σχήμα 3.6a: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



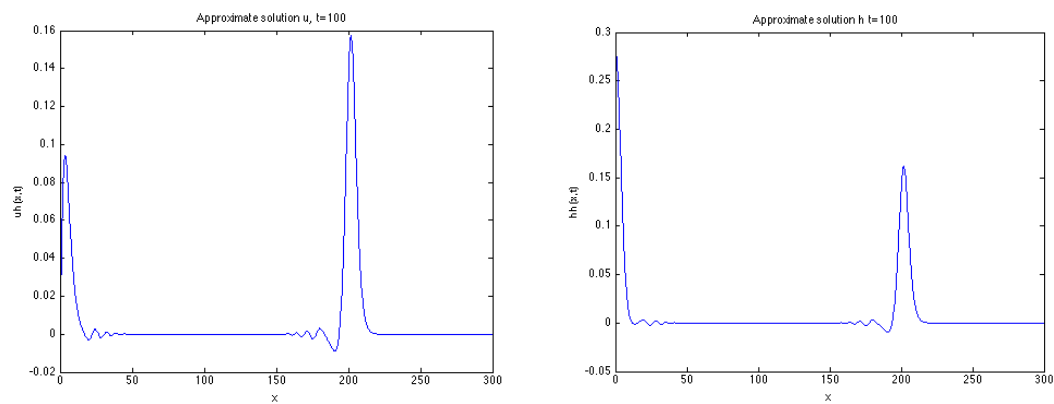
Σχήμα 3.6b: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 20$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



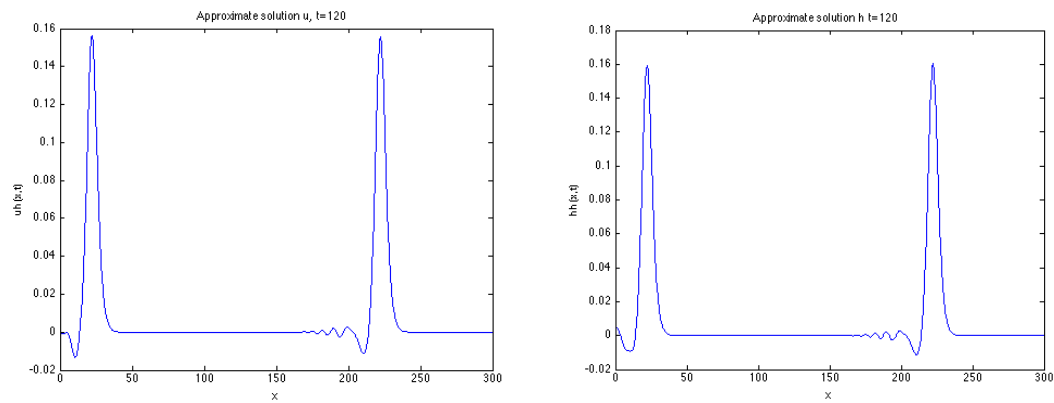
Σχήμα 3.5c: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 60$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



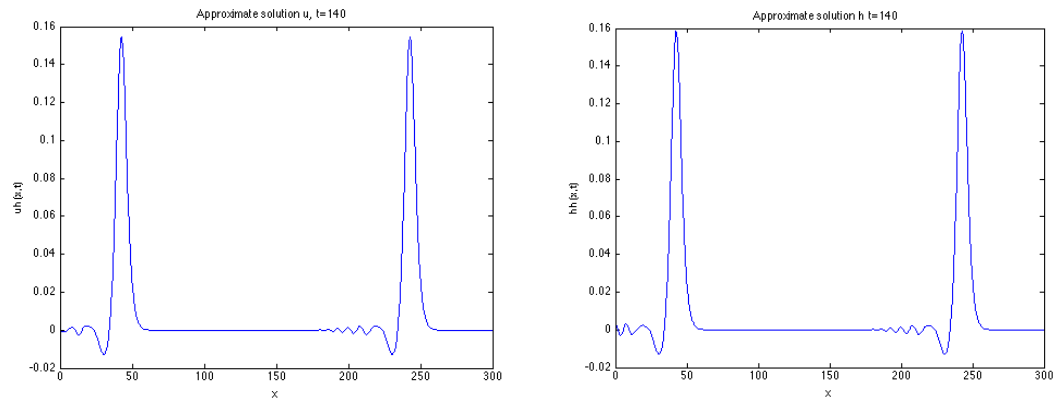
Σχήμα 3.5d: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 80$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



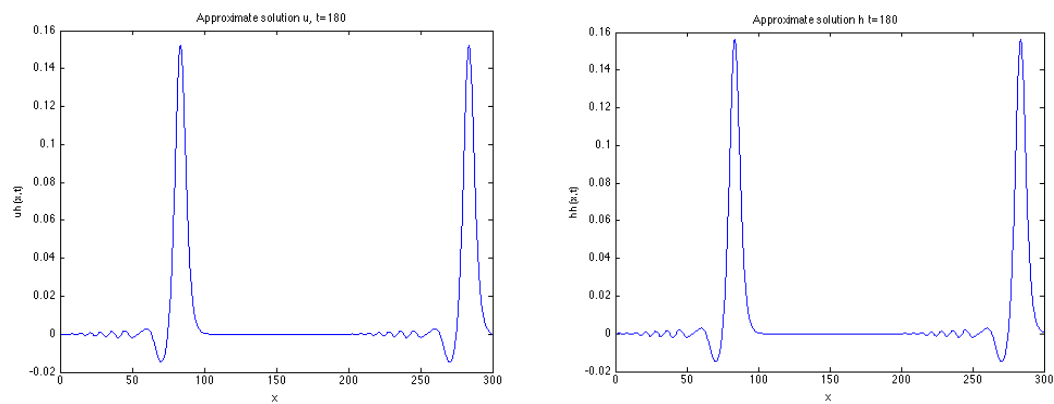
Σχήμα 3.5e: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 100$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



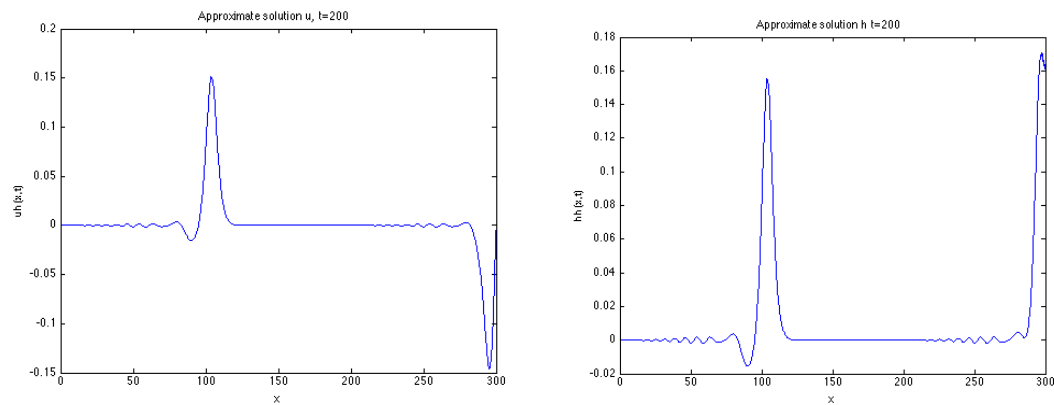
Σχήμα 3.5f: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 120$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



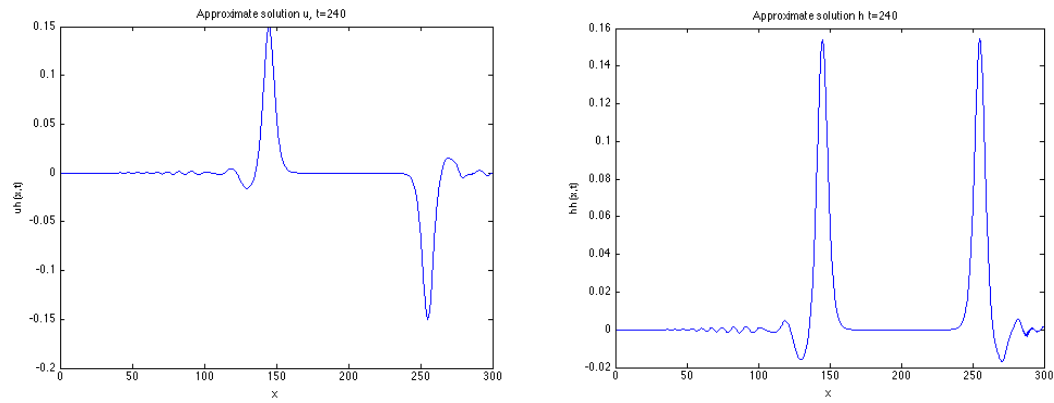
Σχήμα 3.5g: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 140$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



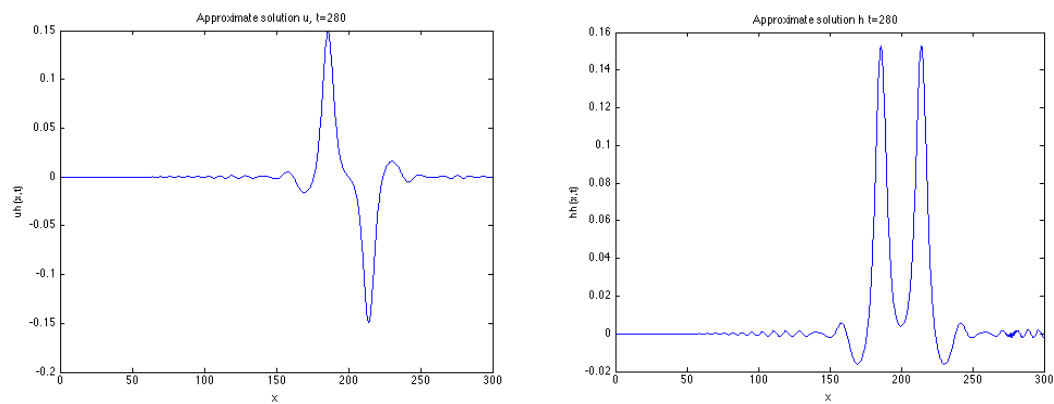
Σχήμα 3.5h: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 180$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



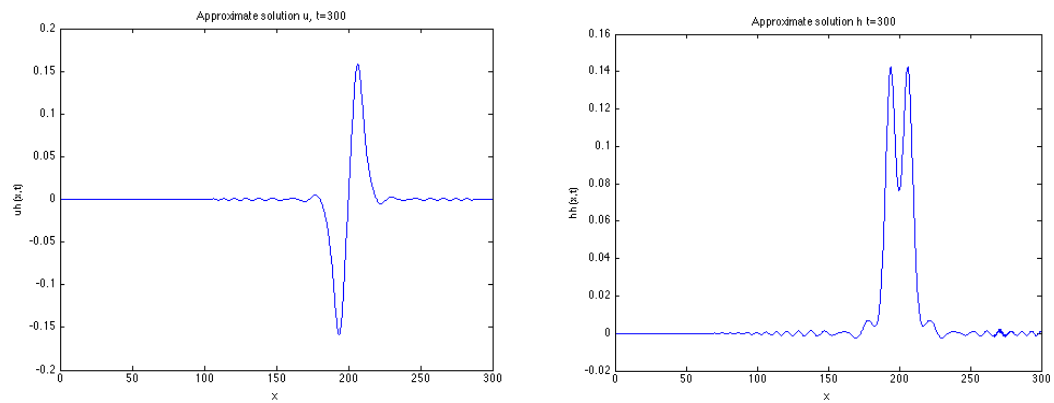
Σχήμα 3.5i: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 200$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.5j: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 240$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

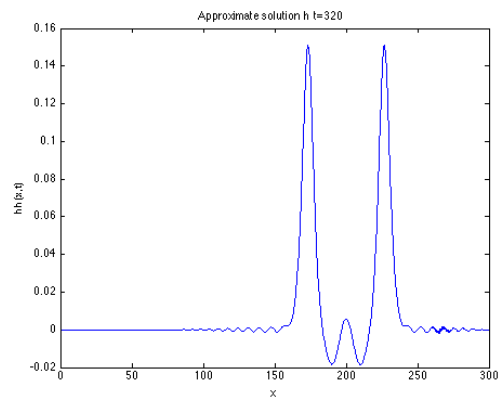
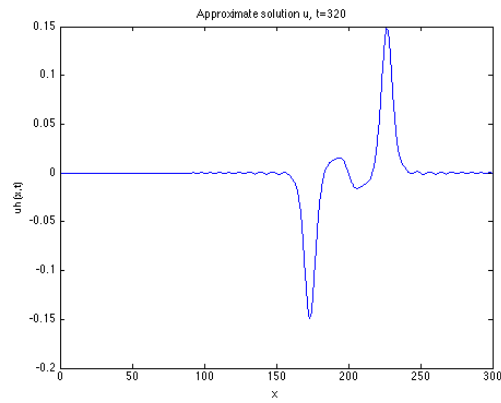


Σχήμα 3.5k: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 280$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

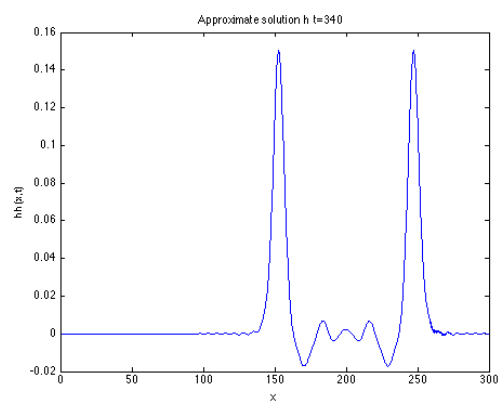
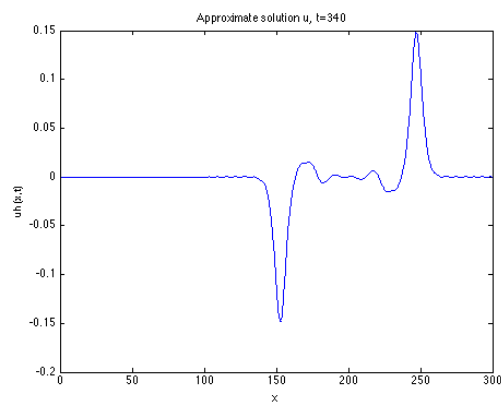


Σχήμα 3.5l: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 300$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

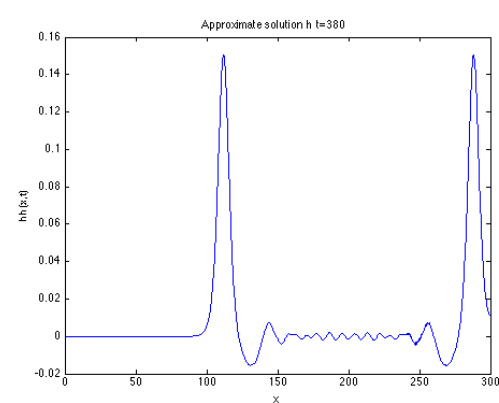
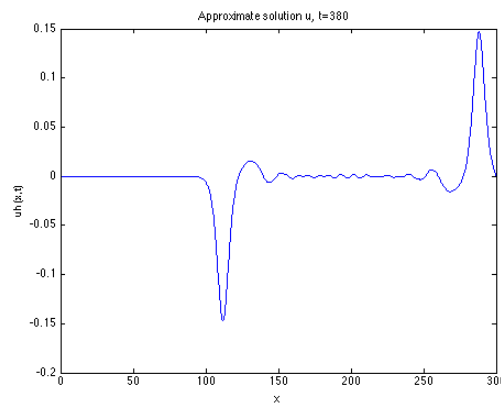




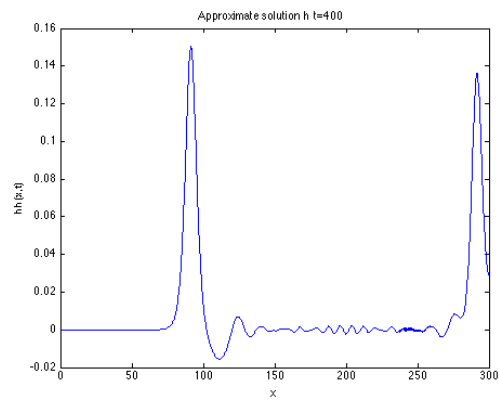
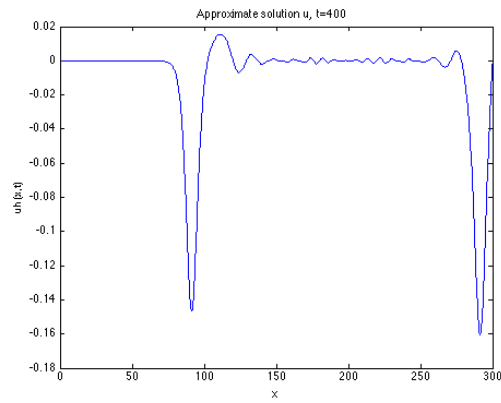
Σχήμα 3.5m: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 320$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



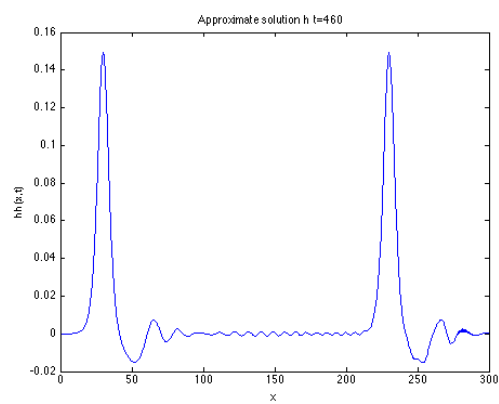
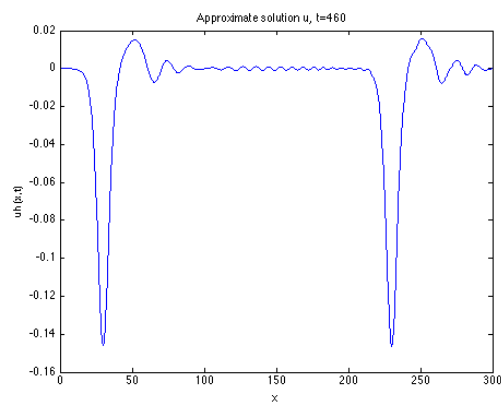
Σχήμα 3.5n: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 340$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



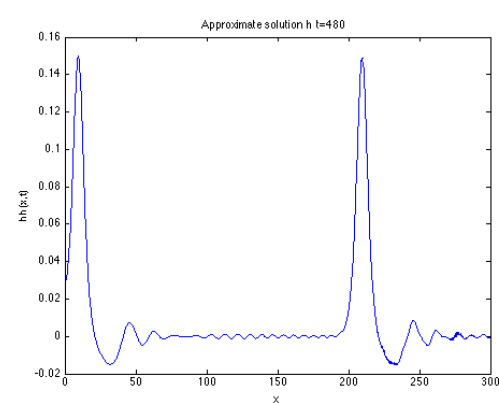
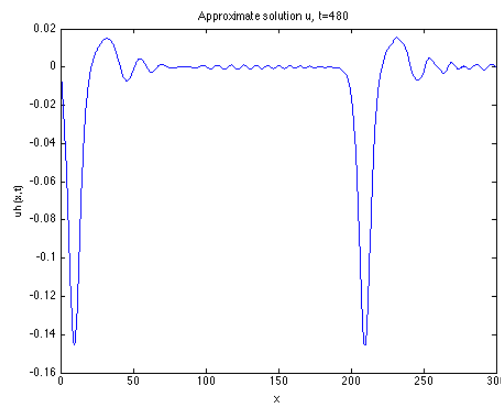
Σχήμα 3.5o: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 380$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



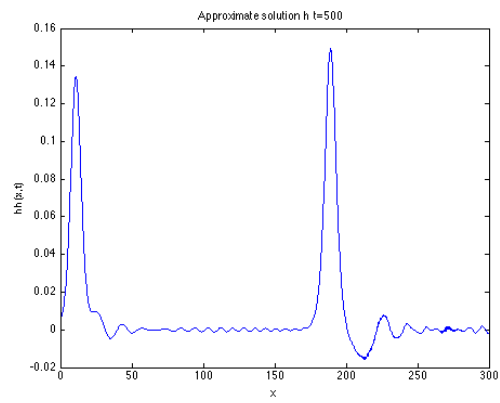
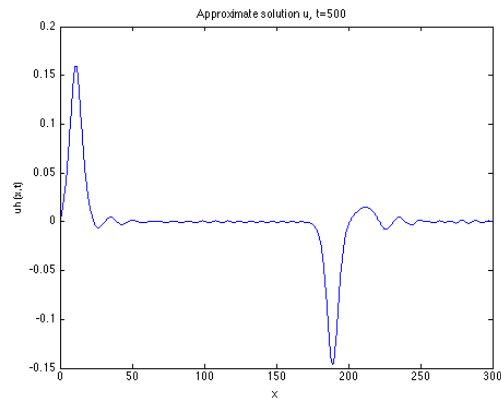
Σχήμα 3.5p: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 400$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



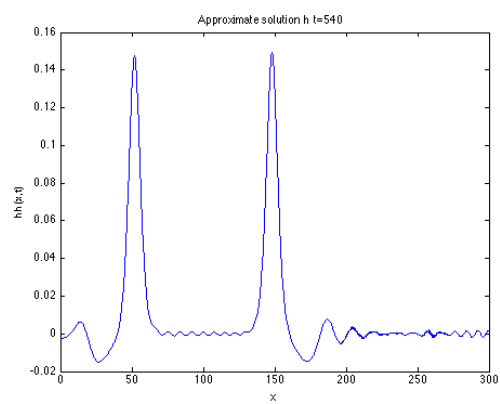
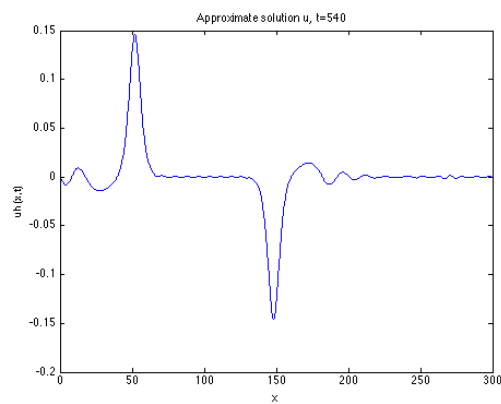
Σχήμα 3.5q: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 460$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



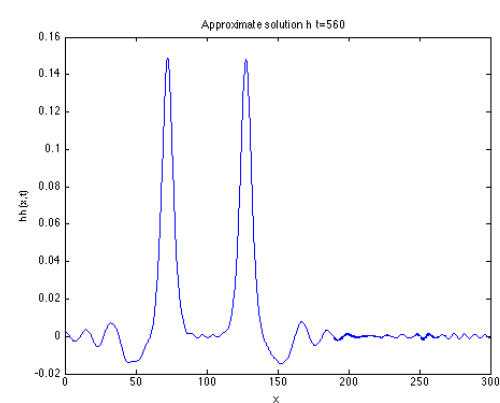
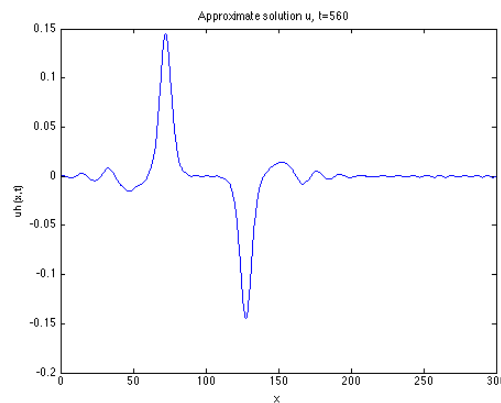
Σχήμα 3.5r: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 480$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



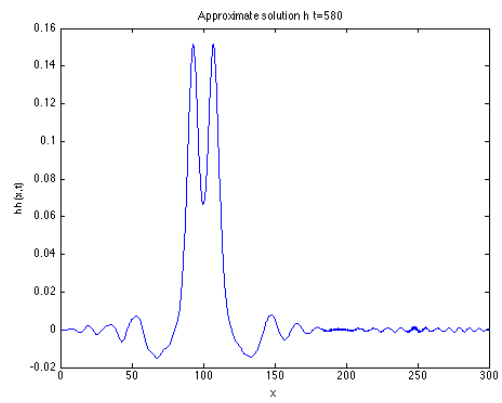
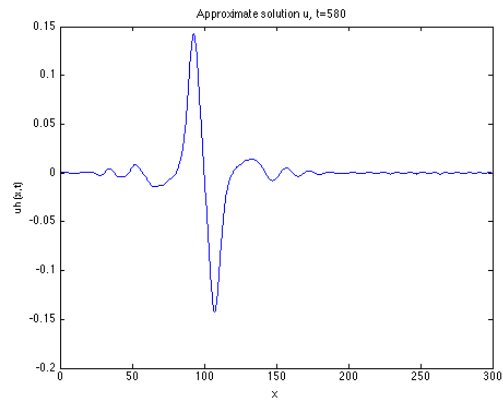
Σχήμα 3.5s: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 500$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



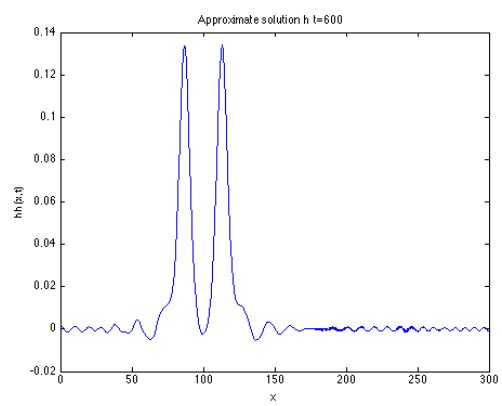
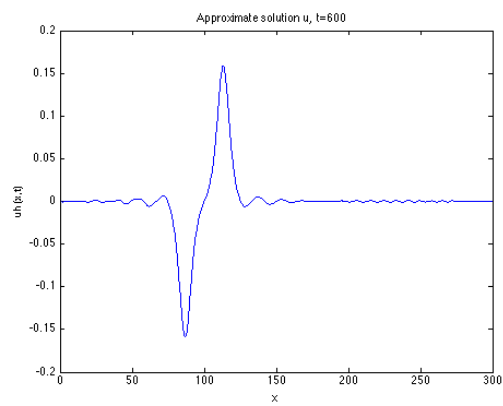
Σχήμα 3.5t: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 540$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.5u: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 560$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.5v: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = 580$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 3.5w: Λύση του (3.17) τη χρονική στιγμή  $t = T = 600$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

## Κεφάλαιο 4

### Η κυματική εξίσωση στο επίπεδο, σε μορφή υπερβολικού συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης.

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την κυματική εξίσωση στην ακουστική σε δύο χωρικές διαστάσεις

$$\begin{cases} \eta_t + \nabla \cdot \vec{v} = f, \\ \vec{v}_t + \nabla \eta = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

όπου  $\vec{v} = (u, v)$ .

Αναλυτικότερα, επιλύουμε αριθμητικά με πλήρως διακριτή μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων το σύστημα (4.1), το οποίο γράφεται στη μορφή

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + v_y = f, \\ u_t + \eta_x = 0, \\ v_t + \eta_y = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

εφοδιασμένο με κατάλληλες αρχικές συνθήκες και συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* για τις συνιστώσες  $u$  και  $v$ . Θα επικεντρωθούμε στην υπολογιστική ανάλυση των σφαλμάτων και στην εύρεση της τάξης ακρίβειας της μεθόδου για το πρόβλημα αυτό.

#### 4.1 Διατήρηση της ενέργειας

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα (4.1), εφοδιασμένο με ομογενείς *Dirichlet* συνοριακές συνθήκες για τις συνιστώσες  $u$  και  $v$  στο σύνολο ενός επιπέδου χωρίου  $\Omega$ , είναι καλώς τοποθετημένο. Για απλούστευση, θεωρούμε ότι  $f = 0$ .

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του (4.1) με  $\eta$ , ολοκληρώνουμε στο  $\Omega$  και παίρνουμε:

$$\int_{\Omega} \eta \eta_t + \int_{\Omega} \eta \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (4.3)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι:

$$\int_{\Omega} \eta \eta_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta^2, \quad (4.4)$$

και

$$\operatorname{div}(\eta \vec{v}) = \eta (\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla \eta \cdot \vec{v}. \quad (4.5)$$

Επομένως, η (4.4) γίνεται

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta^2 + \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\eta \vec{v}) - \nabla \eta \cdot \vec{v}) = 0. \quad (4.6)$$

Παίρνουμε στη δεύτερη εξίσωση της (4.1) το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο με το  $\vec{v}$  και ολοκληρώνουμε στο  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \vec{v}_t \cdot \vec{v} + \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \vec{v} = 0. \quad (4.7)$$

Είναι προφανές όμως ότι

$$\int_{\Omega} \vec{v}_t \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\vec{v}|^2, \quad (4.8)$$

όπου  $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ .

Αντικαθιστώντας την (4.8) στην (4.7) έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\vec{v}|^2 + \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \vec{v} = 0. \quad (4.9)$$

Στη συνέχεια, προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (4.6) και (4.9):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\eta^2 + |\vec{v}|^2) + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\eta \vec{v}) = 0. \quad (4.10)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης για το δεύτερο ολοκλήρωμα της (4.10) έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\eta^2 + |\vec{v}|^2) + \int_{\partial \Omega} \eta \vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \quad (4.11)$$

όπου  $\vec{n}$  είναι το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στο  $\partial \Omega$ .

Ορίζουμε ως “ενέργεια”  $E(t)$  την ποσότητα:

$$E(t) = \int_{\Omega} (\eta^2 + |\vec{v}|^2),$$

και το ολοκλήρωμα “ροής”  $J$  ως εξής:

$$J = \int_{\partial \Omega} \eta \vec{v} \cdot \vec{n}.$$

Για να διατηρείται η ενέργεια θα πρέπει

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0,$$

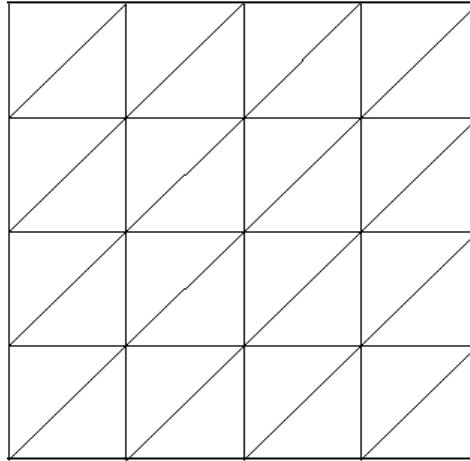
δηλαδή από τη (4.11) θα πρέπει

$$J = \int_{\partial\Omega} \eta \vec{v} \cdot \vec{n} = 0. \quad (4.12)$$

Είναι προφανές ότι η (4.12) ισχύει για ομογενείς συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* για τις συναρτήσεις  $u$  και  $v$  και επομένως διατηρείται η ενέργεια στην περίπτωση αυτή. Συμπερασματικά, το πρόβλημα (4.1) που ορίσαμε, εφοδιασμένο με ομογενείς *Dirichlet* συνοριακές συνθήκες για τις συνιστώσες  $u$  και  $v$  είναι καλώς τοποθετημένο.

## 4.2 Πεπερασμένα στοιχεία $\mathbb{P}_1$

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό του ημιδιακριτού και στη συνέχεια του πλήρους διακριτού προβλήματος, θα δούμε συνοπτικά το διαμερισμό του χωρίου  $\Omega$  με τρίγωνα. Το χωρίο  $\Omega$  που θεωρούμε στα παραδείγματά μας θα είναι ένα τετράγωνο. Η διαμέριση  $\mathcal{T}_h$  του  $\Omega$  με τρίγωνα θα έχει τη μορφή του σχήματος 4.1 .



Σχήμα 4.1: Ένας διαμερισμός του χωρίου  $\Omega$  με τρίγωνα.

Συμβολίζουμε με  $\{c_1, c_2, \dots, c_{N_c}\}$ , το σύνολο των κόμβων στο σύνορο με συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* (δεσμευμένοι κόμβοι) και με  $\{z_1, z_2, \dots, z_{N_f}\}$  το σύνολο των υπόλοιπων κόμβων του διαμερισμού (ελεύθεροι κόμβοι). Είναι προφανές ότι αν συμβολίσουμε με  $N_v$  το πλήθος όλων των κόμβων, ισχύει ότι  $N_v = N_f + N_c$ . Επιπλέον συμβολίζουμε με  $N_{el}$  το πλήθος των τριγωνικών στοιχείων του διαμερισμού. Βάσει των παραπάνω συμβολισμών έχουμε ότι  $\Omega = \mathcal{T}_h = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} \{T_i\}$ .

Ορίζουμε τον χώρο  $P_h$  των συνεχών, κατά τμήματα  $\mathbb{P}_1$  συναρτήσεων ως προς τον τριγωνισμό  $\mathcal{T}_h$  του  $\Omega$  με βάση  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_v}\}$  που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\varphi_i(z_j) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } i = j \\ 0, & \text{εάν } i \neq j \end{cases}.$$

Κάθε στοιχείο της βάσης μπορεί να γραφτεί ως:

$$\varphi_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y, \quad (x, y) \in T_i,$$

όπου τα  $a_i, b_i, c_i$  προσδιορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου  $T_i$ .

Οι χώροι πεπερασμένων στοιχείων που χρειαζόμαστε για το πρόβλημα (4.2) εφοδιασμένο με Dirichlet συνοριακές συνθήκες για τις συνιστώσες  $u$  και  $v$  είναι ο  $P_h$  και ο

$$S_{h,0} = \{v \in P_h: v = 0 \text{ στο } \partial\Omega\}. \quad (4.13)$$

Είναι προφανές ότι ισχύει ότι:

$$P_h \subset H^1(\Omega) \text{ και } S_{h,0} \subset H_0^1(\Omega),$$

όπου  $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega): v = 0 \text{ στο } \partial\Omega\}$ .

Η βάση του  $P_h$  είναι η  $\{\varphi_i(x, y)\}_{i=1}^{N_v}$  ενώ του  $S_{h,0}$  η  $\{\chi_i(x, y)\}_{i=1}^{N_f}$ .

(Αναλυτικότερα στοιχεία για διαμέριση με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία (βλ. [M.G.])).

### 4.3 Ημιδιακριτό πρόβλημα

Θεωρούμε το σύστημα (4.2) για  $(x, y) \in \bar{\Omega} = [a, b] \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2, t \geq 0$ , εφοδιασμένο με αρχικές συνθήκες

$$\eta(x, y, 0) = \eta_0(x, y), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (4.14)$$

όπου  $x, y \in \bar{\Omega}$  και  $\eta_0, u_0, v_0$  είναι δεδομένες πραγματικές συναρτήσεις στο  $\bar{\Omega}$ , και με ομογενείς συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* για τις συναρτήσεις  $u$  και  $v$ . Υποθέτουμε για λόγους συμβατότητας ότι  $u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \partial\Omega$ . Οι μεταβλητές στις εξισώσεις (4.2) και (4.14)  $(x, y)$  και  $t$  αντιπροσωπεύουν τη θέση του κύματος κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , ενώ οι  $\eta = \eta(x, y, t)$  και το διανυσματικό πεδίο  $\vec{v} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$  περιγράφουν την ακουστική πίεση και την ταχύτητα του ρευστού, αντίστοιχα.

Η συνήθης ημιδιακριτοποίηση *Galerkin*/πεπερασμένων στοιχείων του προβλήματος (4.2) με αρχικές και συνοριακές συνθήκες όπως έχουν οριστεί



παραπάνω, ορίζεται ως ακολούθως. Αναζητούμε  $\eta_h: [0, T] \rightarrow P_h$ ,  $u_h: [0, T] \rightarrow S_{h,0}$  και  $v_h: [0, T] \rightarrow S_{h,0}$  που ικανοποιούν το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\left. \begin{aligned} (\eta_{h_t}, \varphi) + (u_{h_x}, \varphi) + (v_{h_y}, \varphi) &= (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in P_h, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (u_{h_t}, \chi) + (\eta_{h_x}, \chi) &= 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (v_{h_t}, \psi) + (\eta_{h_y}, \psi) &= 0, \quad \forall \psi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \eta_h(0) &= I_h \eta_0, \quad u_h(0) = I_{h,0} u_0, \quad v_h(0) = I_{h,0} v_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

όπου  $P_h, S_{h,0}$  είναι οι χώροι που ορίσαμε στην παράγραφο 4.2 και  $I_h, I_{h,0}$  είναι οι τελεστές παρεμβολής στους χώρους  $P_h$  και  $S_{h,0}$  αντίστοιχα.

#### 4.3.1 Ευστάθεια ημιδιακριτού προβλήματος

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την ευστάθεια του συστήματος (4.15) όταν  $f = 0$ .

Για σταθεροποιημένο  $t > 0$  θέτουμε στο σύστημα (4.15)  $\varphi = \eta_h$ ,  $\chi = u_h$  και  $\psi = v_h$ . Επομένως,

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_{h_t} \eta_h + \int_{\Omega} u_{h_x} \eta_h + \int_{\Omega} v_{h_y} \eta_h &= 0, \\ \int_{\Omega} u_{h_t} u_h + \int_{\Omega} \eta_{h_x} u_h &= 0, \\ \int_{\Omega} v_{h_t} v_h + \int_{\Omega} \eta_{h_y} v_h &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Αφού  $u_h \in S_{h,0}$  έχουμε ότι:

$$\int_{\Omega} \eta_{h_x} u_h = \int_{\Omega} \partial_x (\eta_h u_h) - \int_{\Omega} u_{h_x} \eta_h = \int_{\partial\Omega} \eta_h u_h \eta_x - \int_{\Omega} u_{h_x} \eta_h = - \int_{\Omega} u_{h_x} \eta_h,$$

όπου  $\vec{\eta} = (\eta_x, \eta_y)$  η μοναδιαία εσωτερική κάθετος στο  $\partial\Omega$  ορισμένη στις τέσσερις πλευρές του  $\partial\Omega$ . Παρόμοια,

$$\int_{\Omega} \eta_{h_y} v_h = - \int_{\Omega} v_{h_y} \eta_h.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (4.16) και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_{h_t} \eta_h + \int_{\Omega} u_{h_t} u_h + \int_{\Omega} v_{h_t} v_h &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\eta_h\|^2 + \|u_h\|^2 + \|v_h\|^2) &= 0, \quad \forall t > 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|\eta_h\|^2 + \|u_h\|^2 + \|v_h\|^2 = \|\eta_h(0)\|^2 + \|u_h(0)\|^2 + \|v_h(0)\|^2. \quad (4.17)$$

Άρα το ημιδιακριτό πρόβλημα είναι ευσταθές, γιατί εύκολα μπορούμε να δούμε ότι  $\|\eta_h(0)\|^2 + \|u_h(0)\|^2 + \|v_h(0)\|^2 = \|I_h \eta_0\|^2 + \|I_{h,0} u_0\|^2 + \|I_{h,0} v_0\|^2 \leq c$ , με  $c(\eta_0, u_0, v_0)$  σταθερά ανεξάρτητη της διαμέρισης.

## 4.4 Πλήρως διακριτό πρόβλημα σε μορφή συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης

Στην παράγραφο αυτή θα γράψουμε το πρόβλημα (4.15) σε μορφή πινάκων και θα συνεχίσουμε με την διακριτοποίησή του με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης ως προς τον χρόνο.

### 4.4.1 Σύστημα σε μορφή πινάκων

Οι λύσεις  $\eta_h, u_h$  και  $v_h$  του ημιδιακριτού προβλήματος (4.15) ανήκουν στους χώρους  $P_h$  και  $S_{h,0}$  αντίστοιχα  $\forall t \geq 0$ , επομένως γράφονται στη μορφή:

$$\begin{cases} \eta_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) \varphi_i(x, y), \\ u_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) \chi_i(x, y), \\ v_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) \chi_i(x, y). \end{cases} \quad (4.18)$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις της σχέσης (4.18) στο σύστημα (4.15):

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{N_v} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) (\chi_i)_x, \varphi \right) + \\ & + \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) (\chi_i)_y, \varphi \right) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in P_h, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_x, \chi \right) = 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) \chi_i, \psi \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_y, \psi \right) = 0, \quad \forall \psi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\}$$

Επομένως για τις συναρτήσεις βάσης των χώρων  $P_h$  και  $S_{h,0}$  θα έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{N_v} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) (\chi_i)_x, \varphi_j \right) + \\ & + \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) (\chi_i)_y, \varphi_j \right) = (f, \varphi_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_v, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_x, \chi_j \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_y, \chi_j \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\}$$

ή

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{N_v} (\varphi_i, \varphi_j) \dot{H}_i \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} ((\chi_i)_x, \varphi_j) U_i \right) + \\ & + \left( \sum_{i=1}^{N_f} ((\chi_i)_y, \varphi_j) V_i \right) = (f, \varphi_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_v, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} (\chi_i, \chi_j) \dot{U}_i \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} ((\varphi_i)_x, \chi_j) H_i \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} (\chi_i, \chi_j) \dot{V}_i \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} ((\varphi_i)_y, \chi_j) H_i \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Κατασκευάζουμε τους χρονικά ανεξάρτητους πίνακες

$$\begin{aligned} M_1 &\in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}, \quad \mu\epsilon \quad M_{1ij} = (\varphi_j, \varphi_i) \text{ και } i, j = 1, 2, \dots, N_v, \\ M_2 &\in \mathbb{R}^{N_f \times N_f}, \quad \mu\epsilon \quad M_{2ij} = (\chi_j, \chi_i) \text{ και } i, j = 1, 2, \dots, N_f, \\ S_x &\in \mathbb{R}^{N_v \times N_f} \quad \mu\epsilon \quad S_{xji} = (\varphi_j, (\chi_i)_x) \text{ και } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N_f, \\ j = 1, 2, \dots, N_v, \end{matrix} \\ S_y &\in \mathbb{R}^{N_v \times N_f} \quad \mu\epsilon \quad S_{yji} = (\varphi_j, (\chi_i)_y) \text{ και } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N_f, \\ j = 1, 2, \dots, N_v, \end{matrix} \\ \tilde{S}_x &\in \mathbb{R}^{N_f \times N_v} \quad \mu\epsilon \quad \tilde{S}_{xji} = (\chi_j, (\varphi_i)_x) \text{ και } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N_v, \\ j = 1, 2, \dots, N_f, \end{matrix} \\ \tilde{S}_y &\in \mathbb{R}^{N_f \times N_v} \quad \mu\epsilon \quad \tilde{S}_{yji} = (\chi_j, (\varphi_i)_y) \text{ και } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N_v, \\ j = 1, 2, \dots, N_f, \end{matrix} \end{aligned} \quad (4.20a)$$

και ορίζουμε τα διανύσματα για  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} H(t) &= [H_1(t), H_2(t), \dots, H_{N_v}(t)]^T, \\ U(t) &= [U_1(t), U_2(t), \dots, U_{N_f}(t)]^T, \\ V(t) &= [V_1(t), V_2(t), \dots, V_{N_f}(t)]^T, \\ \dot{H}(t) &= [\dot{H}_1(t), \dot{H}_2(t), \dots, \dot{H}_{N_v}(t)]^T, \\ \dot{U}(t) &= [\dot{U}_1(t), \dot{U}_2(t), \dots, \dot{U}_{N_f}(t)]^T, \\ \dot{V}(t) &= [\dot{V}_1(t), \dot{V}_2(t), \dots, \dot{V}_{N_f}(t)]^T. \end{aligned} \quad (4.20b)$$

Αν αντικαταστήσουμε τους πίνακες της σχέσης (4.20a), καθώς και τα διανύσματα της σχέσης (4.20b), στις σχέσεις του (4.19), το σύστημα θα πάρει την μορφή:

$$\begin{cases} M_1 \dot{H} + S_x U + S_y V = F, \\ M_2 \dot{U} + \tilde{S}_x H = 0, \\ M_2 \dot{V} + \tilde{S}_y H = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.21)$$

όπου

$F(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_{N_v}(t)]$ , με  $F_i(\cdot, t) = (f(\cdot, t), \varphi_i)$ , και  $H(0), U(0)$  και  $V(0)$  δεδομένα διανύσματα του  $\mathbb{R}^{N_v}, \mathbb{R}^{N_f}, \mathbb{R}^{N_f}$ , αντίστοιχα.

Το (4.21) παριστάνει το πρόβλημα (4.15) σε μορφή πινάκων.

#### 4.4.1 Πλήρης διακριτοποίηση με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης

Θεωρούμε ομοιόμορφη διαμέριση του χρονικού διαστήματος  $[0, T]$  με βήμα  $k$ , με  $t^n = nk, n = 0, 1, \dots, M$  όπου  $Mk = T$  και  $k = t^{n+1} - t^n$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό της παραγράφου 2.3.3, το διακριτό σύστημα που δίνει η κλασσική μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης θα έχει την παρακάτω μορφή:

Δεδομένων  $H^0, U^0, V_0$ ,  
για  $n = 0, 1, \dots, M-1$

$$\left. \begin{aligned} H^{n,1} &= H^n, U^{n,1} = U^n, V^{n,1} = V^n \\ &\text{για } i = 2, 3, 4 \\ M_1 H^{n,i} &= M_1 H^n - k a_i S_x U^{n,i-1} - k a_i S_y V^{n,i-1} + k a_i F(t^{n,i-1}), \\ M_2 U^{n,i} &= M_2 U^n - k a_i \tilde{S}_x H^{n,i-1}, \\ M_2 V^{n,i} &= M_2 V^n - k a_i \tilde{S}_y H^{n,i-1}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 H^{n+1} &= M_1 H^n - k S_x \sum_{i=1}^4 b_i U^{n,i} - k S_y \sum_{i=1}^4 b_i V^{n,i} + k \sum_{i=1}^4 b_i F(t^{n,i}), \\ M_2 U^{n+1} &= M_2 U^n - k \tilde{S}_x \sum_{i=1}^4 b_i H^{n,i}, \\ M_2 V^{n+1} &= M_2 V^n - k \tilde{S}_y \sum_{i=1}^4 b_i H^{n,i}, \end{aligned} \right\}$$

όπου  $a_2 = a_3 = 1/2, a_4 = 1, \tau_2 = \tau_3 = 1/2, b_1 = b_4 = 1/6, b_2 = b_3 = 1/3$ .

### 4.5 Αριθμητικά παραδείγματα

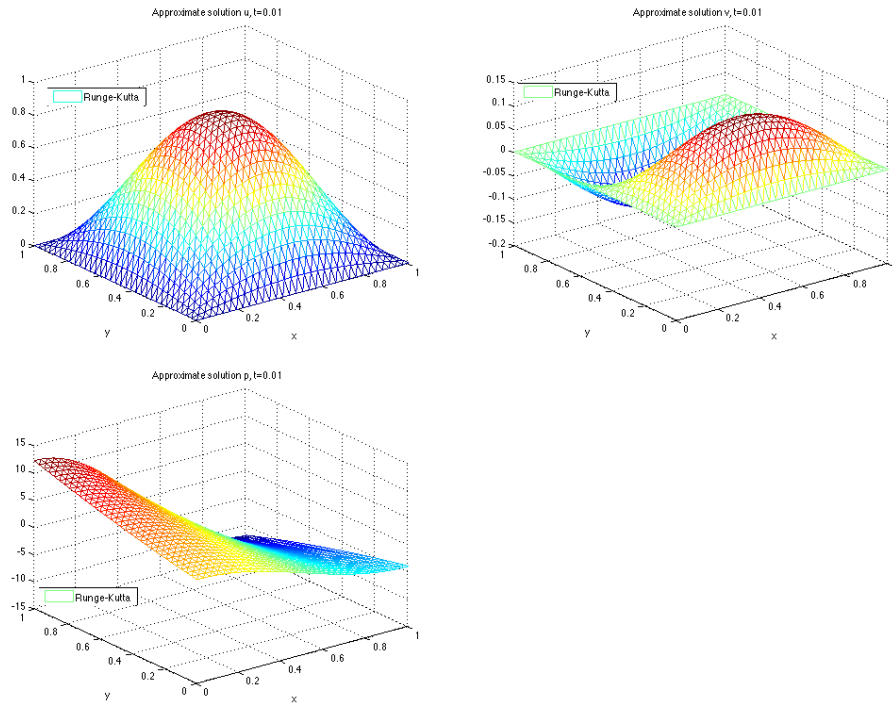
#### 4.5.1 Επίλυση του συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης

Το πρώτο παράδειγμα που θεωρούμε στην παράγραφο αυτή είναι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

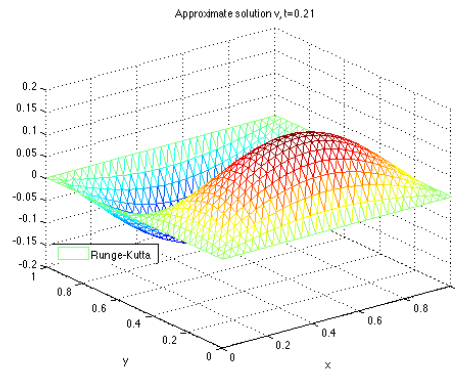
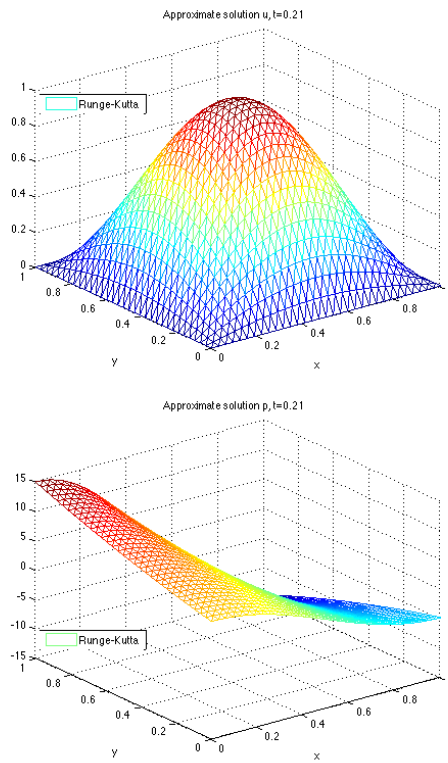
$$\begin{cases} p_t + u_x + v_y = f_1, \\ u_t + p_x = f_2, \\ v_t + p_y = f_3, \\ u(x, y, 0) = \sin(1) \sin \pi x \sin \pi y, \\ v(x, y, 0) = y(1 - y) \sin \pi x \cos \pi y, \\ p(x, y, 0) = 2(y + 1)(y + 2) \cos \pi x, \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (4.22)$$

όπου  $(x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$  και  $0 \leq t \leq T$  με  $T = 1$ . Η ακριβής λύση του συστήματος (4.22) είναι οι συναρτήσεις:  $u(x, y, t) = \sin(\pi t + 1) \sin \pi x \sin \pi y$ ,  $v(x, y, t) = e^t y(1 - y) \sin \pi x \cos \pi y$ ,  $p(x, y, t) = 2e^t (y + 1)(y + 2) \cos \pi x$ .

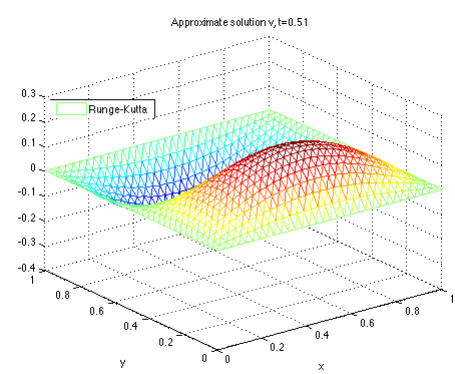
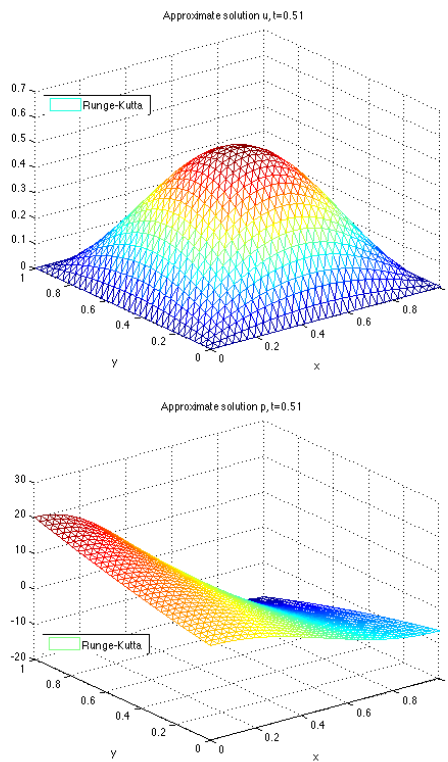
Λύνουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (4.22) με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta*, η οποία είναι άμεση και 4<sup>ης</sup> τάξης ως προς τον χρόνο. Η προσεγγιστική λύση φαίνεται στα σχήματα (4.2 a-e) σε πέντε χρονικές στιγμές, όπου  $h = 0.03$  και  $k = 0.01$ .



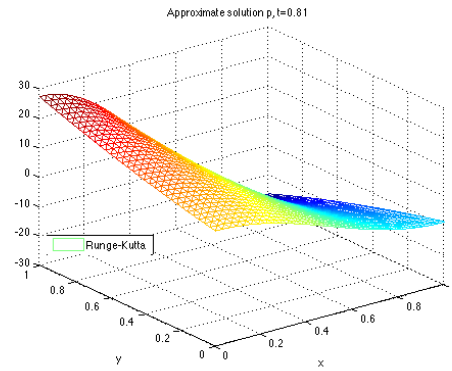
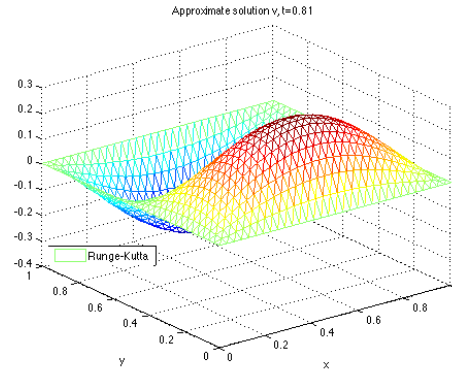
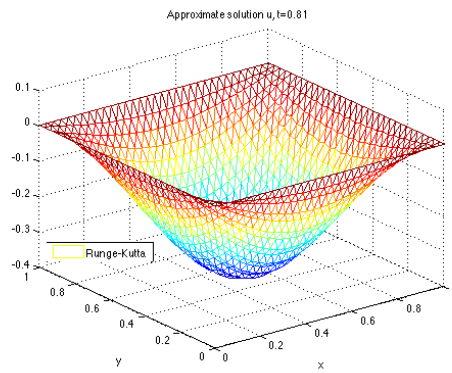
Σχήμα 4.2a: Λύση του (4.22) την χρονική στιγμή  $t = 0.01$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης.



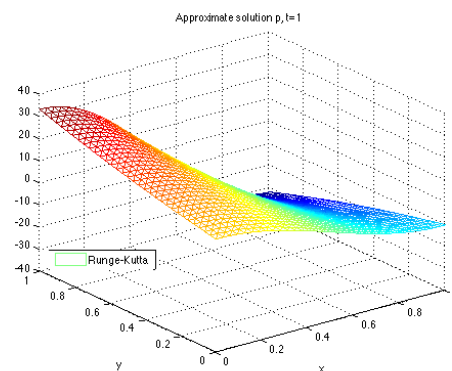
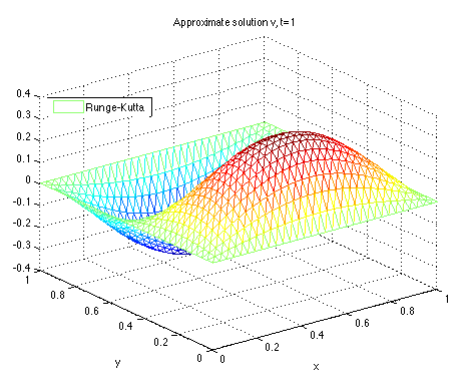
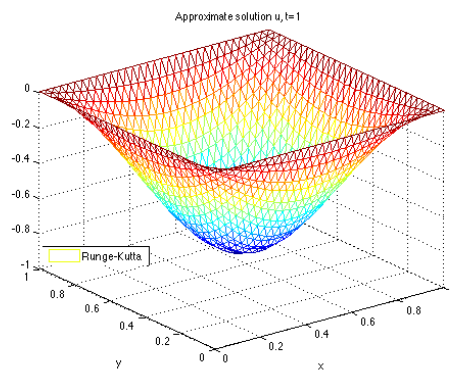
Σχήμα 4.2b: Λύση του (4.22) την χρονική στιγμή  $t = 0.21$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 4.2c: Λύση του (4.22) την χρονική στιγμή  $t = 0.51$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 4.2d: Λύση του (4.22) την χρονική στιγμή  $t = 0.81$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 4.2e: Λύση του (4.22) την χρονική στιγμή  $t = T = 1$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

Τα σφάλματα και η τάξη ακρίβειας για τη διακριτή  $L^2$  – νόρμα  $\|\cdot\|_{l^2}$  τη χρονική στιγμή  $t = 0.5$  φαίνονται στον πίνακα 4.1, όπου  $h = 1/N$  με  $N$  να είναι αριθμός διαστημάτων της διαμέρισης του  $x$ -άξονα. (Ο υπολογισμός των σφαλμάτων γίνεται με συνάρτηση από το βιβλίο του *Mark S. Gockenbach* (βλ. [G]).)

| $h$    | $k$     | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ p\ _{l^2}$ | Τάξη<br>ακρ. $p$ | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ u\ _{l^2}$ | Τάξη<br>ακρ. $u$ | $\ \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ v\ _{l^2}$ | Τάξη<br>ακρ. $v$ |
|--------|---------|---------------------------------------------------------|------------------|---------------------------------------------------------|------------------|---------------------------------------------------------|------------------|
| 0.5    | 0.05    | 0.1615                                                  | -                | 0.0891                                                  | -                | 0.1087                                                  | -                |
| 0.25   | 0.025   | 0.0390                                                  | 2.05             | 0.0309                                                  | 1.53             | 0.0269                                                  | 2.01             |
| 0.125  | 0.0125  | 0.0091                                                  | 2.10             | 0.0088                                                  | 1.81             | 0.0084                                                  | 1.68             |
| 0.0625 | 0.00625 | 0.0022                                                  | 2.05             | 0.0027                                                  | 1.70             | 0.0027                                                  | 1.64             |
| 0.0313 | 0.00313 | 5.50e-004                                               | 2.00             | 9.13e-004                                               | 1.56             | 9.04e-004                                               | 1.58             |
| 0.0156 | 1.56e-4 | 1.41e-004                                               | 1.96             | 3.43e-004                                               | 1.41             | 3.68e-004                                               | 1.30             |

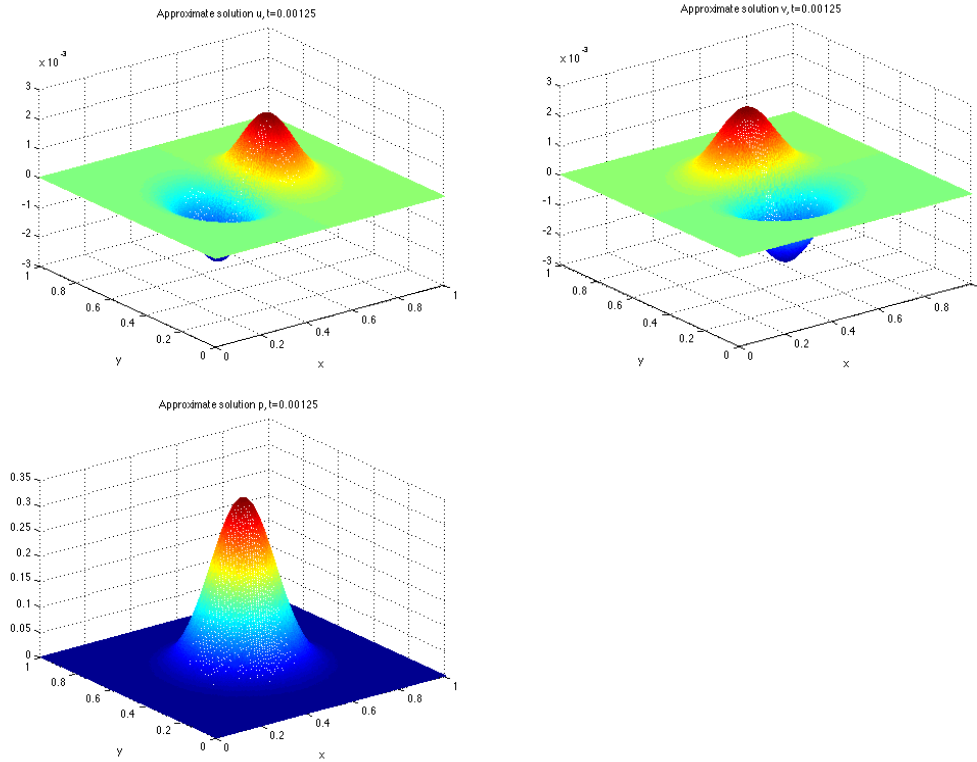
Πίνακας 4.1:  $l^2$ - Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (4.22) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και την άμεση μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

Το δεύτερο παράδειγμα που μελετάμε στην παράγραφο αυτή είναι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

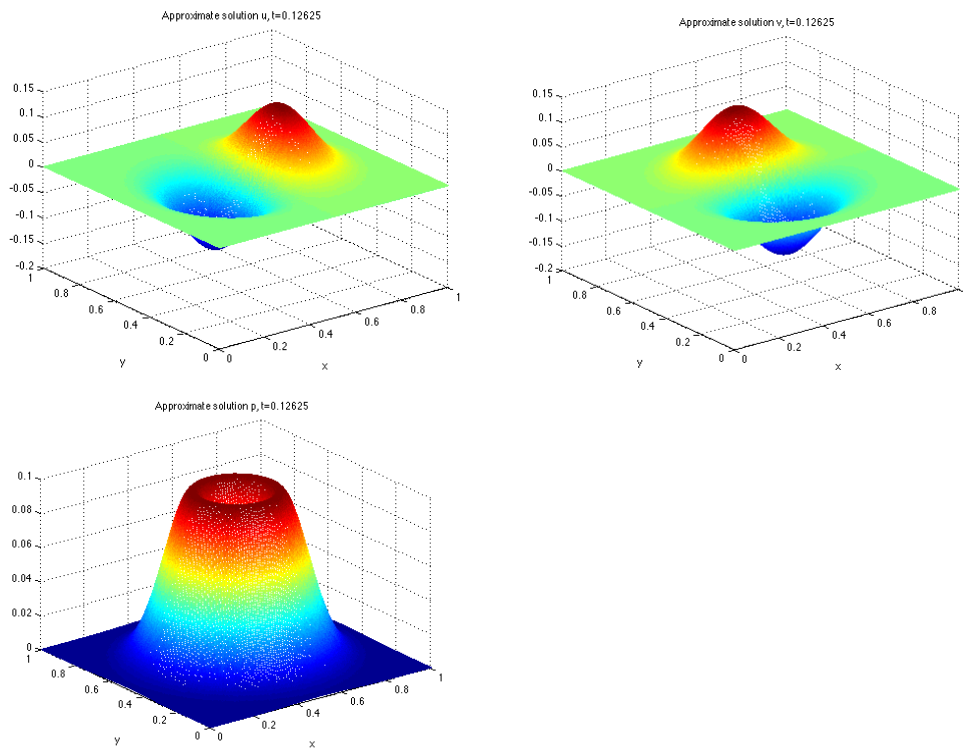
$$\left\{ \begin{array}{l} p_t + u_x + v_y = 0, \\ u_t + p_x = 0, \\ v_t + p_y = 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \\ v(x, y, 0) = 0, \\ p(x, y, 0) = A \exp\{-\beta[(x - \gamma)^2 + (y - \gamma)^2]\}, \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \end{array} \right. \quad (4.23)$$

όπου  $(x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$  και  $0 \leq t \leq T$  με  $T = 1$ . Λύνουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (4.23) με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta*. Η προσεγγιστική λύση φαίνεται στα σχήματα (4.3 a-h) σε οχτώ χρονικές στιγμές, όπου  $h = 0.03, k = 0.00125, \gamma = 0.5, A = 1/3, \beta = 40$ .

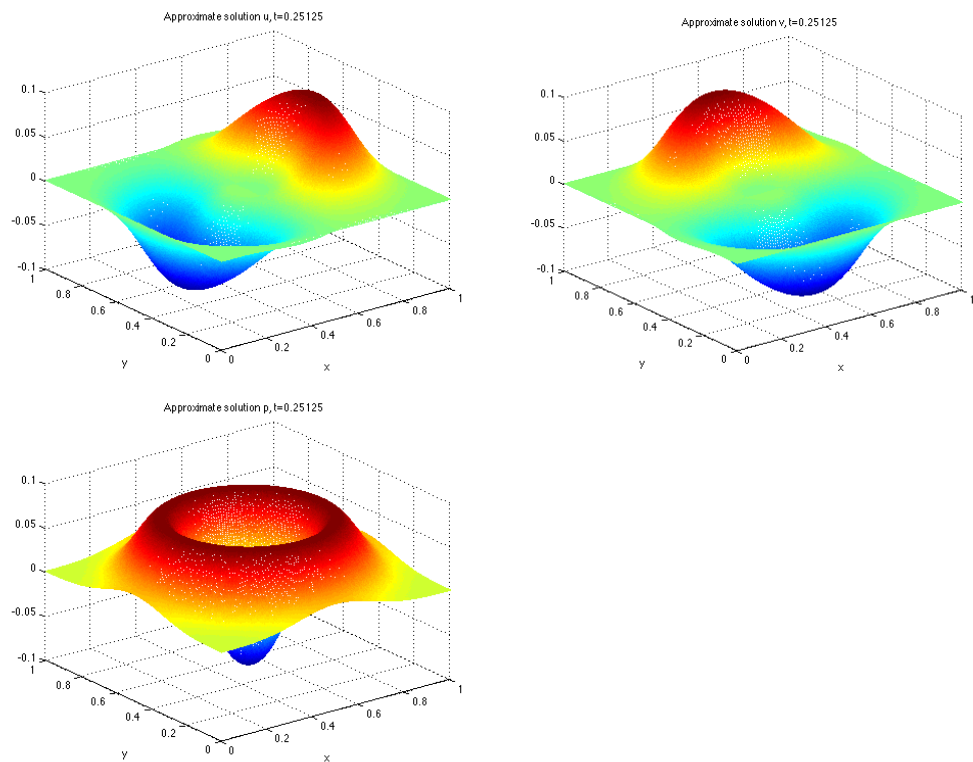




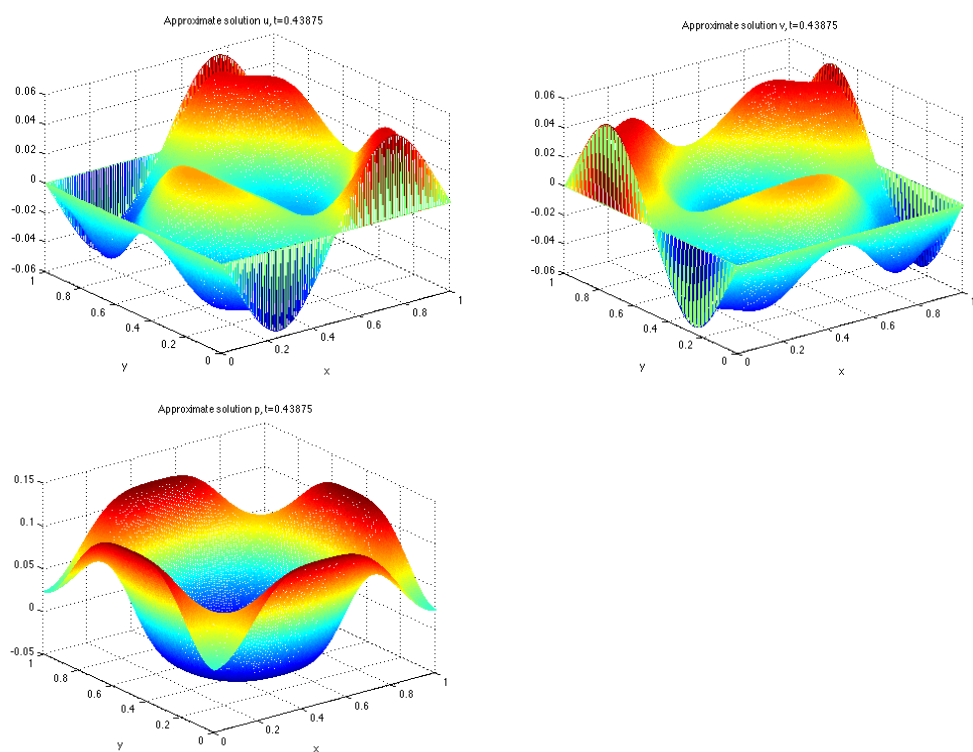
Σχήμα 4.3a: Λύση του (4.23) την χρονική στιγμή  $t = 0.00125$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης.



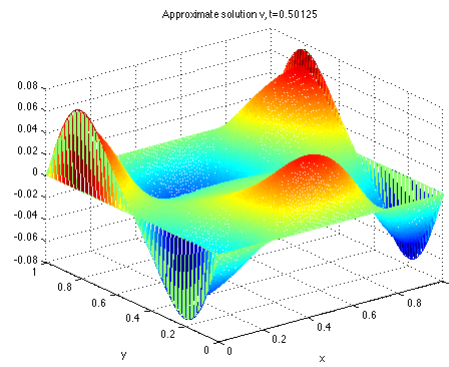
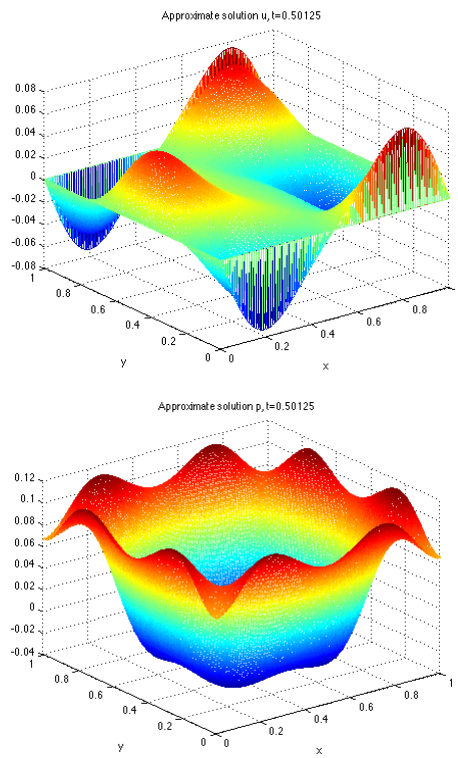
Σχήμα 4.3b: Λύση του (4.23) την χρονική στιγμή  $t \approx 0.12$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης.



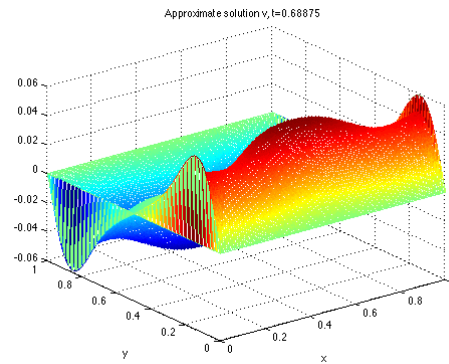
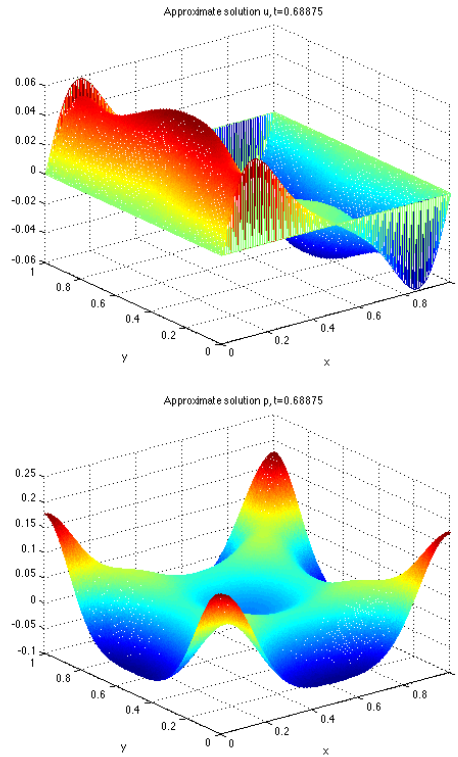
Σχήμα 4.3c: Λύση του (4.23) την χρονική στιγμή  $t \approx 0.25$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



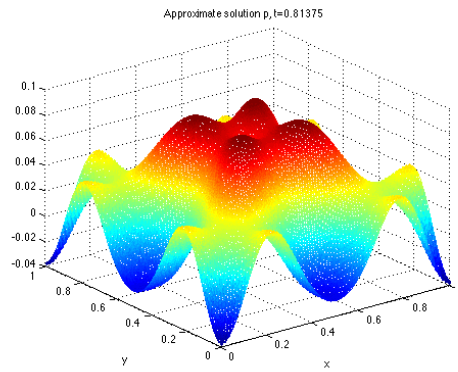
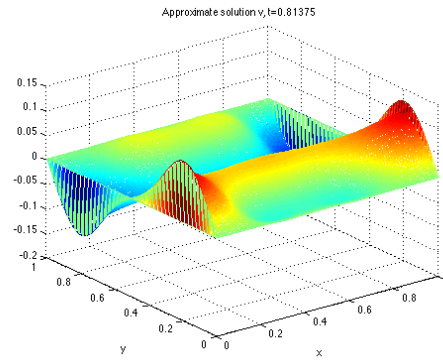
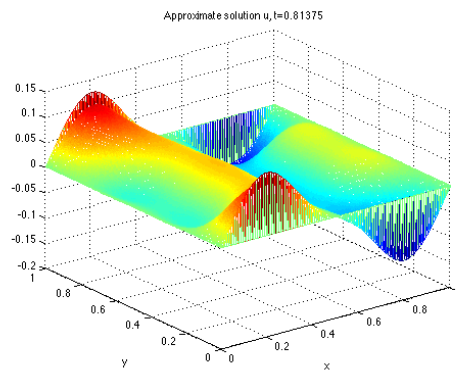
Σχήμα 4.3d: Λύση του (4.23) την χρονική στιγμή  $t \approx 0.44$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



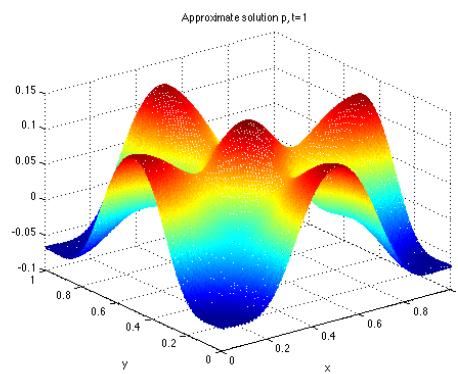
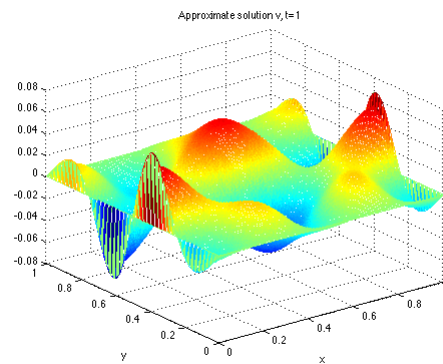
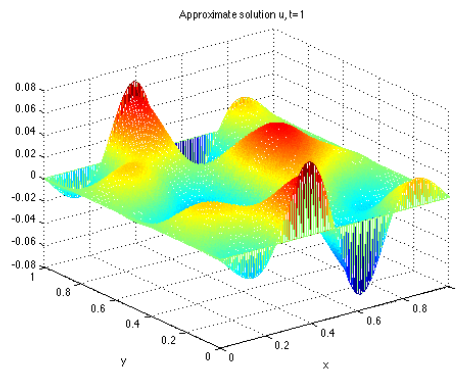
Σχήμα 4.3ε: Λύση του (4.23) την χρονική στιγμή  $t \approx 0.5$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 4.3φ: Λύση του (4.23) την χρονική στιγμή  $t \approx 0.69$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 4.3g: Λύση του (4.23) την χρονική στιγμή  $t \approx 0.81$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 4.3h: Λύση του (4.23) την χρονική στιγμή  $t = T = 1$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

## Κεφάλαιο 5

### Το κλασσικό σύστημα *Boussinesq* σε δύο διαστάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό, επιλύουμε αριθμητικά με πλήρως διακριτή μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και με τη μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης ως προς τον χρόνο πρώτα το γραμμικοποιημένο σύστημα *Boussinesq* επιφανειακών κυματισμών σε δύο διαστάσεις

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + v_y = f_1, \\ u_t + \eta_x - \alpha(u_{xxt} + u_{yyt}) = f_2, \\ v_t + \eta_y - \alpha(v_{xxt} + v_{yyt}) = f_3, \end{cases} \quad (5.1)$$

για  $(x, y) \in \bar{\Omega} = [a, b] \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2, t \geq 0$ , εφοδιασμένο με αρχικές συνθήκες

$$\eta(x, y, 0) = \eta_0(x, y), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (5.2)$$

όπου  $x, y \in \bar{\Omega}$  και  $\eta_0, u_0, v_0$  είναι δεδομένες πραγματικές συναρτήσεις στο  $\bar{\Omega}$ , και με ομογενείς συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* για τις συναρτήσεις  $u$  και  $v$ . Υποθέτουμε για λόγους συμβατότητας ότι  $u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \partial\Omega$ . Οι μεταβλητές στις εξισώσεις (5.1) και (5.2)  $(x, y)$  και  $t$  αντιπροσωπεύουν τη θέση του κύματος κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , ενώ οι  $\eta = \eta(x, y, t)$  και το διανυσματικό πεδίο  $\vec{v} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$  περιγράφουν την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας από την κατάσταση ηρεμίας και την ταχύτητα του ρευστού, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, μελετάμε το κλασσικό, μη γραμμικό σύστημα *Boussinesq* σε δύο διαστάσεις [AD]

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + v_y + (\eta u)_x + (\eta v)_y = 0, \\ u_t + \eta_x + uu_x + vv_x - \alpha(u_{xxt} + u_{yyt}) = 0, \\ v_t + \eta_y + uu_y + vv_y - \alpha(v_{xxt} + v_{yyt}) = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

εφοδιασμένο με τις ίδιες αρχικές και συνοριακές συνθήκες που αναφέραμε παραπάνω.

### 5.1 Γραμμικοποιημένο σύστημα

#### 5.1.1 Ημιδιακριτό πρόβλημα

Η συνήθης ημιδιακριτοποίηση *Galerkin*/πεπερασμένων στοιχείων του προβλήματος (5.1) με αρχικές και συνοριακές συνθήκες όπως παραπάνω, ορίζεται ως ακολούθως. Αναζητούμε  $\eta_h: [0, T] \rightarrow P_h, u_h: [0, T] \rightarrow S_{h,0}$  και  $v_h: [0, T] \rightarrow S_{h,0}$  που ικανοποιούν το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\left. \begin{aligned} (\eta_{h_t}, \varphi) + (u_{h_x}, \varphi) + (v_{h_y}, \varphi) &= (f_1, \varphi), \quad \forall \varphi \in P_h, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (u_{h_t}, \chi) + (\eta_{h_x}, \chi) - \alpha(u_{h_{xt}}, \chi) - \\ - \alpha(u_{h_{yt}}, \chi) &= (f_2, \varphi), \quad \forall \chi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (v_{h_t}, \psi) + (\eta_{h_y}, \psi) - \alpha(v_{h_{xt}}, \psi) - \\ - \alpha(v_{h_{yt}}, \psi) &= (f_3, \psi), \quad \forall \psi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \eta_h(0) &= I_h \eta_0, \quad u_h(0) = I_{h,0} u_0, \quad v_h(0) = I_{h,0} v_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

ή χρησιμοποιώντας την συνήθη ασθενή μορφή του συστήματος (5.1) και παρατηρώντας ότι  $(u_{h_{xt}}, \chi) = -(u_{xt}, \chi_x), \forall \chi \in S_{h,0}$

$$\left. \begin{aligned} (\eta_{h_t}, \varphi) + (u_{h_x}, \varphi) + (v_{h_y}, \varphi) &= (f_1, \varphi), \quad \forall \varphi \in P_h, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (u_{h_t}, \chi) + (\eta_{h_x}, \chi) + \alpha(u_{h_{xt}}, \chi_x) + \\ + \alpha(u_{h_{yt}}, \chi_y) &= (f_2, \chi), \quad \forall \chi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (v_{h_t}, \psi) + (\eta_{h_y}, \psi) + \alpha(v_{h_{xt}}, \psi_x) + \\ + \alpha(v_{h_{yt}}, \psi_y) &= (f_3, \psi), \quad \forall \psi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \eta_h(0) &= I_h \eta_0, \quad u_h(0) = I_{h,0} u_0, \quad v_h(0) = I_{h,0} v_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

όπου  $P_h, S_{h,0}$  είναι οι χώροι που ορίσαμε στην παράγραφο 4.2 και  $I_h, I_{h,0}$  είναι οι τελεστές παρεμβολής στους χώρους  $P_h$  και  $S_{h,0}$  αντίστοιχα.

#### 5.1.1.1 Ευστάθεια ημιδιακριτού προβλήματος

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την ευστάθεια του συστήματος (5.5) όταν  $f_i = 0, i = 1, 2, 3$ .

Για σταθεροποιημένο  $t > 0$  θέτουμε στο σύστημα (5.5)  $\varphi = \eta_h, \chi = u_h$  και  $\psi = v_h$ . Επομένως,

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_{h_t} \eta_h + \int_{\Omega} u_{h_x} \eta_h + \int_{\Omega} v_{h_y} \eta_h &= 0, \\ \int_{\Omega} u_{h_t} u_h + \int_{\Omega} \eta_{h_x} u_h + \alpha \int_{\Omega} u_{h_{xt}} u_{h_x} + \alpha \int_{\Omega} u_{h_{yt}} u_{h_y} &= 0, \\ \int_{\Omega} v_{h_t} v_h + \int_{\Omega} \eta_{h_y} v_h + \alpha \int_{\Omega} v_{h_{xt}} v_{h_x} + \alpha \int_{\Omega} v_{h_{yt}} v_{h_y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Αφού  $u_h \in S_{h,0}$  έχουμε ότι:

$$\int_{\Omega} \eta_{h_x} u_h = \int_{\Omega} \partial_x (\eta_h u_h) - \int_{\Omega} u_{h_x} \eta_h = - \int_{\Omega} u_{h_x} \eta_h,$$

επειδή  $u_h$  μηδενίζεται στο σύνορο. Παρόμοια,

$$\int_{\Omega} \eta_{h_y} v_h = - \int_{\Omega} v_{h_y} \eta_h.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (5.6) και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι  $\forall t > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\eta_h\|^2 + \|u_h\|^2 + \|v_h\|^2 + \alpha(\|u_{h_x}\|^2 + \|u_{h_y}\|^2 + \|v_{h_x}\|^2 + \|v_{h_y}\|^2) \right) &= 0, \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} (\|\eta_h\|^2 + \|u_h\|_{1,\alpha}^2 + \|v_h\|_{1,\alpha}^2) &= 0, \Rightarrow \\ \|\eta_h\|^2 + \|u_h\|_{1,\alpha}^2 + \|v_h\|_{1,\alpha}^2 &= \|\eta_h(0)\|^2 + \|u_h(0)\|_{1,\alpha}^2 + \|v_h(0)\|_{1,\alpha}^2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

όπου  $\|w_h\|_{1,\alpha} = (\|w\|^2 + \alpha(\|w_x\|^2 + \|w_y\|^2))^{1/2}$ .

Άρα το ημιδιακριτό πρόβλημα είναι ευσταθές στη νόρμα του  $L^2 \times H^1 \times H^1$ , γιατί εύκολα μπορούμε να δούμε ότι  $\|\eta_h(0)\|^2 + \|u_h(0)\|_{1,\alpha}^2 + \|v_h(0)\|_{1,\alpha}^2 = \|I_h \eta_0\|^2 + \|I_{h,0} u_0\|_{1,\alpha}^2 + \|I_{h,0} v_0\|_{1,\alpha}^2 \leq c$ , με  $c(\eta_0, u_0, v_0)$  σταθερά ανεξάρτητη της διαμέρισης.

### 5.1.2 Πλήρως διακριτό πρόβλημα σε μορφή συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης

Στην παράγραφο αυτή θα γράψουμε το πρόβλημα (5.5) σε μορφή πινάκων και θα συνεχίσουμε με την διακριτοποίησή του με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης ως προς τον χρόνο.

#### 5.1.2.1 Σύστημα σε μορφή πινάκων

Οι λύσεις  $\eta_h, u_h$  και  $v_h$  του ημιδιακριτού προβλήματος (5.5) ανήκουν στους χώρους  $P_h$  και  $S_{h,0}$  αντίστοιχα  $\forall t \geq 0$ , επομένως γράφονται στη μορφή:

$$\begin{cases} \eta_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_\eta} H_i(t) \varphi_i(x, y), \\ u_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) \chi_i(x, y), \\ v_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) \chi_i(x, y). \end{cases} \quad (5.8)$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις της σχέσης (5.8) στο σύστημα (5.5):

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{N_v} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) (\chi_i)_x, \varphi \right) + \\ & + \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) (\chi_i)_y, \varphi \right) = (f_1, \varphi), \quad \forall \varphi \in P_h, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_x, \chi \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) (\chi_i)_x, \chi_x \right) + \\ & + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) (\chi_i)_y, \chi_y \right) = (f_2, \chi), \quad \forall \chi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) \chi_i, \psi \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_y, \psi \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) (\chi_i)_x, \psi_x \right) + \\ & + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) (\chi_i)_y, \psi_y \right) = (f_3, \psi), \quad \forall \psi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\}$$

Επομένως θα έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{N_v} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) (\chi_i)_x, \varphi_j \right) + \\ & + \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) (\chi_i)_y, \varphi_j \right) = (f_1, \varphi_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_v, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_x, \chi_j \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) (\chi_i)_x, (\chi_j)_x \right) + \\ & + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) (\chi_i)_y, (\chi_j)_y \right) = (f_2, \chi_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_y, \chi_j \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) (\chi_i)_x, (\chi_j)_x \right) + \\ & + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) (\chi_i)_y, (\chi_j)_y \right) = (f_3, \chi_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\}$$

ή

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{N_v} (\varphi_i, \varphi_j) \dot{H}_i \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} ((\chi_i)_x, \varphi_j) U_i \right) + \\ & + \left( \sum_{i=1}^{N_f} ((\chi_i)_y, \varphi_j) V_i \right) = (f_1, \varphi_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_v, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} (\chi_i, \chi_j) \dot{U}_i \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} ((\varphi_i)_x, \chi_j) H_i \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} ((\chi_i)_x, (\chi_j)_x) \dot{U}_i \right) + \\ & + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} ((\chi_i)_y, (\chi_j)_y) \dot{U}_i \right) = (f_2, \chi_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} (\chi_i, \chi_j) \dot{V}_i \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} ((\varphi_i)_y, \chi_j) H_i \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} ((\chi_i)_x, (\chi_j)_x) \dot{V}_i \right) + \\ & + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} ((\chi_i)_y, (\chi_j)_y) \dot{V}_i \right) = (f_3, \chi_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Κατασκευάζουμε τους χρονικά ανεξάρτητους πίνακες

$$\begin{aligned} M_1 & \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}, \quad \mu \varepsilon M_{1ij} = (\varphi_j, \varphi_i) \text{ και } i, j = 1, 2, \dots, N_v, \\ M_2 & \in \mathbb{R}^{N_f \times N_f}, \quad \mu \varepsilon M_{2ij} = (\chi_j, \chi_i) \text{ και } i, j = 1, 2, \dots, N_f, \\ S_x & \in \mathbb{R}^{N_v \times N_f} \quad \mu \varepsilon S_{xji} = (\varphi_j, (\chi_i)_x) \text{ και } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N_f, \\ j = 1, 2, \dots, N_v, \end{matrix} \end{aligned}$$

$$S_y \in \mathbb{R}^{N_v \times N_f} \quad \mu \varepsilon S_{xji} = (\varphi_j, (\chi_i)_y) \text{ και } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N_f, \\ j = 1, 2, \dots, N_v, \end{matrix} \quad (5.10a)$$

$$\tilde{S}_x \in \mathbb{R}^{N_f \times N_v} \quad \mu \varepsilon \tilde{S}_{xji} = (\chi_j, (\varphi_i)_x) \text{ και } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N_v, \\ j = 1, 2, \dots, N_f, \end{matrix}$$



$$\tilde{S}_y \in \mathbb{R}^{N_f \times N_v} \text{ με } \tilde{S}_{yji} = (\chi_j, (\varphi_i)_y) \text{ και } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N_v, \\ j = 1, 2, \dots, N_f, \end{matrix}$$

$$\hat{S}_x \in \mathbb{R}^{N_f \times N_f} \text{ με } \hat{S}_{xji} = ((\chi_j)_x, (\chi_i)_x) \text{ και } i, j = 1, 2, \dots, N_f,$$

$$\hat{S}_y \in \mathbb{R}^{N_f \times N_f} \text{ με } \hat{S}_{yji} = ((\chi_j)_y, (\chi_i)_y) \text{ και } i, j = 1, 2, \dots, N_f,$$

και ορίζουμε τα διανύσματα για  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} H(t) &= [H_1(t), H_2(t), \dots, H_{N_v}(t)]^T, \\ U(t) &= [U_1(t), U_2(t), \dots, U_{N_f}(t)]^T, \\ V(t) &= [V_1(t), V_2(t), \dots, V_{N_f}(t)]^T, \\ \dot{H}(t) &= [\dot{H}_1(t), \dot{H}_2(t), \dots, \dot{H}_{N_v}(t)]^T, \\ \dot{U}(t) &= [\dot{U}_1(t), \dot{U}_2(t), \dots, \dot{U}_{N_f}(t)]^T, \\ \dot{V}(t) &= [\dot{V}_1(t), \dot{V}_2(t), \dots, \dot{V}_{N_f}(t)]^T. \end{aligned} \quad (5.10b)$$

Αν αντικαταστήσουμε τους πίνακες της σχέσης (5.10a), καθώς και τα διανύσματα της σχέσης (5.10b), στις σχέσεις του (5.9), το σύστημα θα πάρει την μορφή:

$$\begin{cases} M_1 \dot{H} + S_x U + S_y V = F_1, \\ (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) \dot{U} + \tilde{S}_x H = F_2, \\ (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) \dot{V} + \tilde{S}_y H = F_3, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.11)$$

όπου

$$\begin{aligned} F_1(t) &= [F_{11}(t), F_{12}(t), \dots, F_{1N_v}(t)], \quad \text{με} \quad F_{1i}(\cdot, t) = (f_1(\cdot, t), \varphi_i), \\ F_j(t) &= [F_{j1}(t), F_{j2}(t), \dots, F_{jN_f}(t)], \quad \text{με } F_{ji}(\cdot, t) = (f_j(\cdot, t), \chi_i) \text{ για } j=1, 2 \text{ και } H(0), U(0) \\ &\text{και } V(0) \text{ δεδομένα διανύσματα του } \mathbb{R}^{N_v}, \mathbb{R}^{N_f}, \mathbb{R}^{N_f}, \text{ αντίστοιχα.} \end{aligned}$$

Το (5.11) παριστάνει το πρόβλημα (5.5) σε μορφή πινάκων.

#### 5.1.2.2 Πλήρης διακριτοποίηση με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης

Θεωρούμε ομοιόμορφη διαμέριση του χρονικού διαστήματος  $[0, T]$  με βήμα  $k$ , με  $t^n = nk$ ,  $n = 0, 1, \dots, M$  όπου  $Mk = T$  και  $k = t^{n+1} - t^n$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό της παραγράφου 2.3.3, το διακριτό σύστημα που δίνει η κλασσική μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} &\text{Δεδομένων } H^0, U^0, V^0 \\ &\text{για } n = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{n,1} &= H^n, U^{n,1} = U^n, V^{n,1} = V^n \\
&\quad \gamma \text{ για } i = 2, 3, 4 \\
\left. \begin{aligned}
M_1 H^{n,i} &= M_1 H^n - k a_i S_x U^{n,i-1} - k a_i S_y V^{n,i-1} + k a_i F_1(t^{n,i-1}), \\
(M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) U^{n,i} &= (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) U^n - k a_i \tilde{S}_x H^{n,i-1} + k a_i F_2(t^{n,i-1}), \\
(M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) V^{n,i} &= (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) V^n - k a_i \tilde{S}_y H^{n,i-1} + k a_i F_3(t^{n,i-1}),
\end{aligned} \right\} \\
\left. \begin{aligned}
M_1 H^{n+1} &= M_1 H^n - k S_x \sum_{i=1}^4 b_i U^{n,i} - k S_y \sum_{i=1}^4 b_i V^{n,i} + k \sum_{i=1}^4 b_i F_1(t^{n,i}), \\
(M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) U^{n+1} &= (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) U^n - k \tilde{S}_x \sum_{i=1}^4 b_i H^{n,i} + k \sum_{i=1}^4 b_i F_2(t^{n,i}), \\
(M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) V^{n+1} &= (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) V^n - k \tilde{S}_y \sum_{i=1}^4 b_i H^{n,i} + k \sum_{i=1}^4 b_i F_3(t^{n,i}),
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

όπου  $a_2 = a_3 = 1/2, a_4 = 1, \tau_2 = \tau_3 = 1/2, \tau_4 = 1, b_1 = b_4 = 1/6, b_2 = b_3 = 1/3$ .

### 5.1.3 Αριθμητικά παραδείγματα

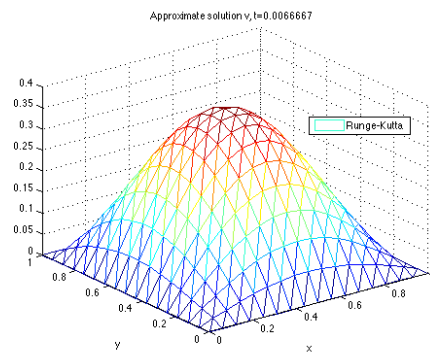
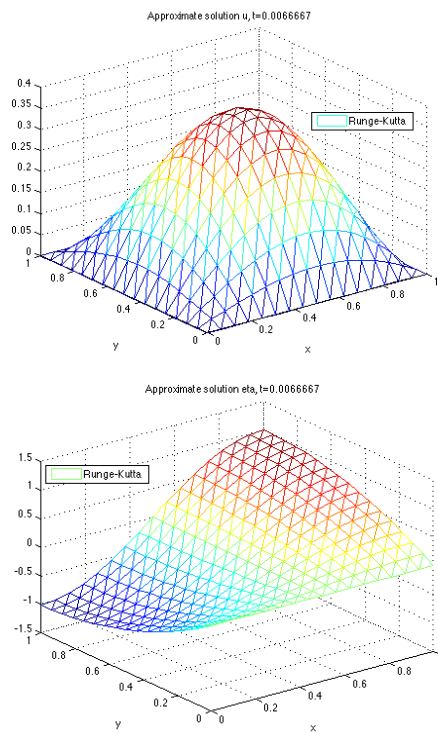
Το πρώτο παράδειγμα που θεωρούμε στην παράγραφο αυτή είναι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\eta_t + u_x + v_y = f_1, \\
&u_t + \eta_x - \alpha(u_{xxt} + u_{yyt}) = f_2, \\
&v_t + \eta_y - \alpha(v_{xxt} + v_{yyt}) = f_3, \\
&u(x, y, 0) = x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin \pi y, \\
&v(x, y, 0) = y \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \sin \pi x, \\
&\eta(x, y, 0) = (y^2 - 2y) \cos \pi x, \\
&u|_{\partial \Omega} = v|_{\partial \Omega} = 0,
\end{aligned} \right. \quad (5.12)$$

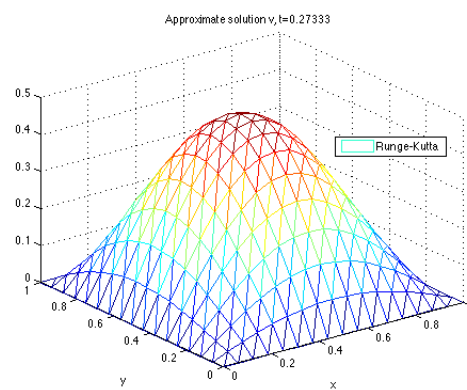
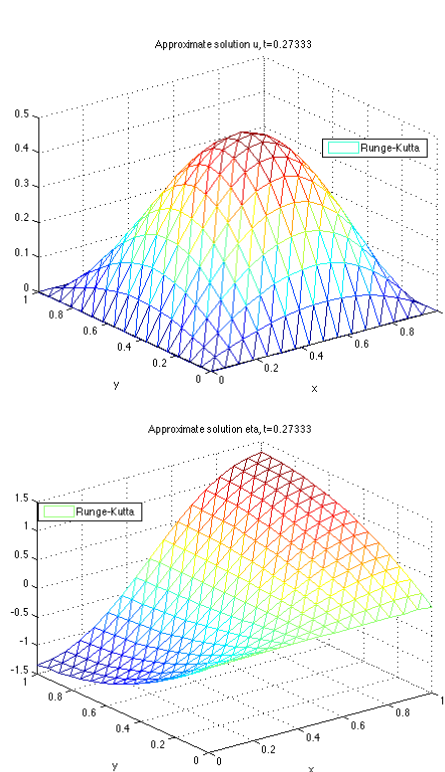
όπου  $(x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$  και  $0 \leq t \leq T$  με  $T = 1$  και  $\alpha = 1/8$ . Η ακριβής λύση του συστήματος (5.12) είναι οι συναρτήσεις:

$$u(x, y, t) = e^t x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin \pi y, \quad v(x, y, t) = e^t y \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \sin \pi x, \quad \eta(x, y, t) = e^t (y^2 - 2y) \cos \pi x.$$

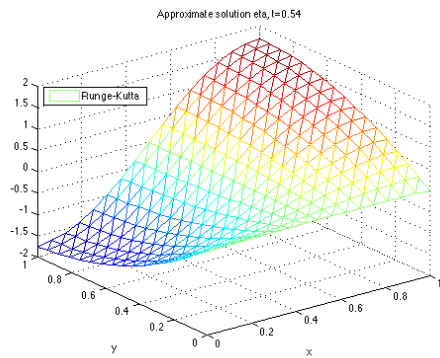
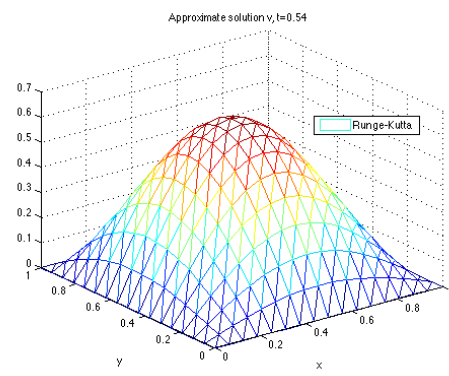
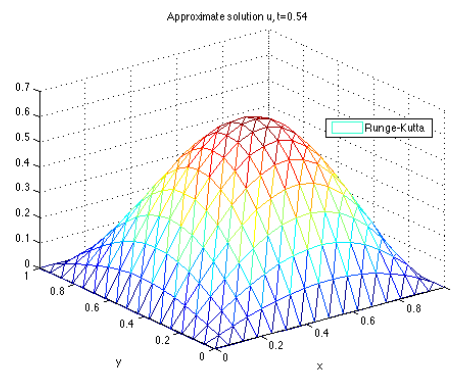
Λύνουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.12) με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta*, η οποία είναι άμεση και 4ης τάξης ως προς τον χρόνο. Η προσεγγιστική λύση φαίνεται στα σχήματα (5.1 α-ε) σε πέντε χρονικές στιγμές, όπου  $h = 0.0625$  και  $k \cong 0.007$ .



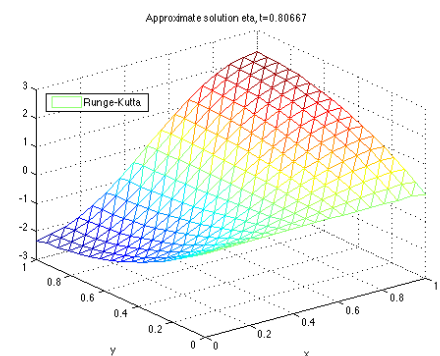
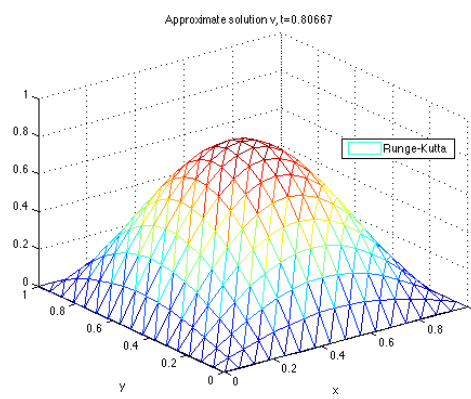
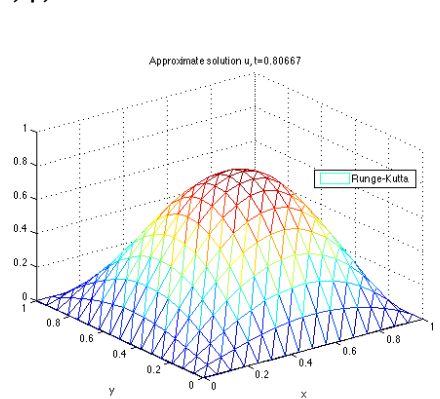
Σχήμα 5.1a: Λύση του (5.12) την χρονική στιγμή  $t = k$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



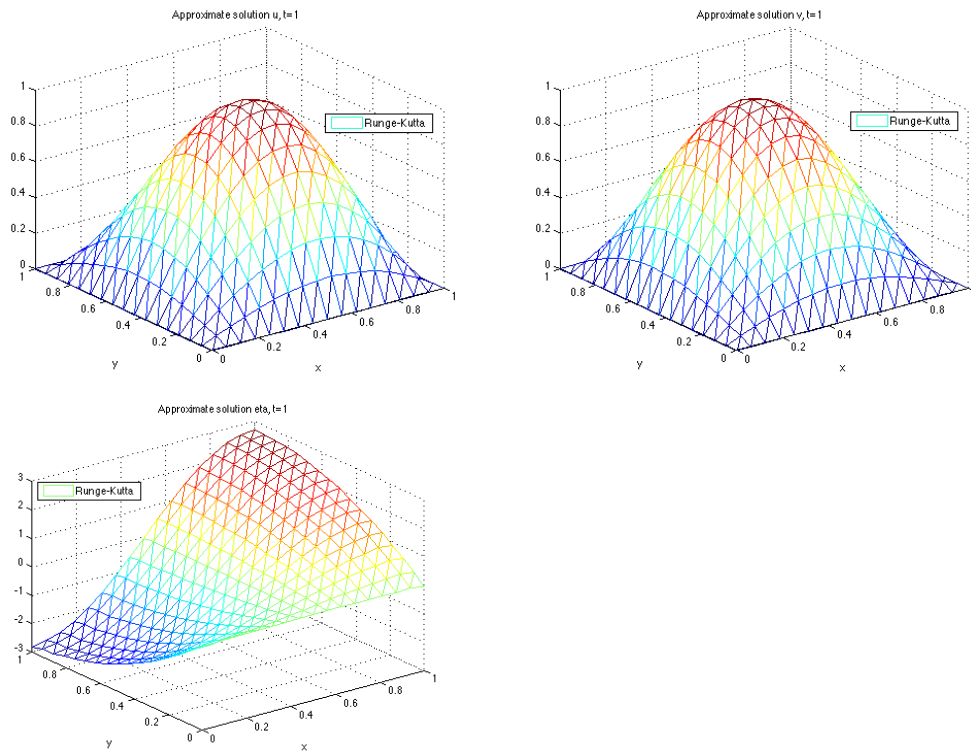
Σχήμα 5.1b: Λύση του (5.12) την χρονική στιγμή  $t \cong 0.27$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 5.1c: Λύση του (5.12) την χρονική στιγμή  $t = 0.54$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 5.1d: Λύση του (5.12) την χρονική στιγμή  $t \cong 0.81$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 5.1e: Λύση του (5.12) την χρονική στιγμή  $t = T = 1$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

Τα σφάλματα και η τάξη ακρίβειας για τη διακριτή  $L^2$  – νόρμα  $\|\cdot\|_{l^2}$  τη χρονική στιγμή  $t = 0.5$  φαίνονται στον πίνακα 5.1, όπου  $h = 1/N$  με  $N$  να είναι αριθμός διαστημάτων της διαμέρισης του  $x$  – άξονα.

| $h$    | $k$      | $\ \sigmaφάλμα \eta\ _{l^2}$ | Τάξη<br>ακρ. $\eta$ | $\ \sigmaφάλμα u\ _{l^2}$ | Τάξη<br>ακρ. $u$ | $\ \sigmaφάλμα v\ _{l^2}$ | Τάξη<br>ακρ. $v$ |
|--------|----------|------------------------------|---------------------|---------------------------|------------------|---------------------------|------------------|
| 0.5    | 0.05     | 0.3231                       | -                   | 0.1185                    | -                | 0.1285                    | -                |
| 0.25   | 0.025    | 0.0871                       | 1.89                | 0.0284                    | 2.06             | 0.0324                    | 1.99             |
| 0.125  | 0.0125   | 0.0226                       | 1.94                | 0.0068                    | 2.06             | 0.0079                    | 2.04             |
| 0.0625 | 0.00625  | 0.0060                       | 1.91                | 0.0017                    | 2.03             | 0.0019                    | 2.02             |
| 0.0313 | 0.00313  | 0.0017                       | 1.84                | 4e-004                    | 2.01             | 5e-004                    | 2.01             |
| 0.0156 | 1.7e-004 | 5e-004                       | 1.77                | 1e-004                    | 2.00             | 1.2e-004                  | 2.01             |
| 0.0104 | 1.2e-004 | 2.65-004                     | 1.57                | 4.44e-005                 | 2.00             | 5.31e-005                 | 2.01             |

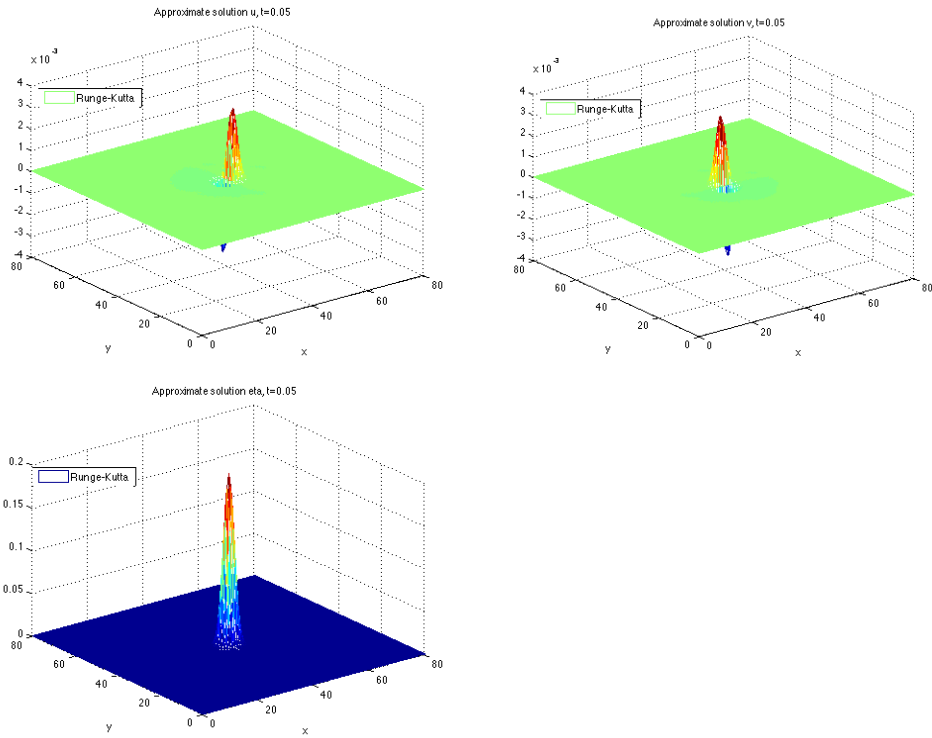
Πίνακας 5.1:  $l^2$ - Σφάλματα και τάξη ακρίβειας για τη διακριτοποίηση του (5.12) με κατά τμήματα γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και την άμεση μέθοδο *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

Συμπεραίνουμε από το αριθμητικό πείραμα ότι η τάξη ακρίβειας στην  $l_2$  νόρμα φαίνεται να είναι ίση με 1.5, 2, 2 για τις προσεγγίσεις των  $\eta, u, v$  αντίστοιχα.

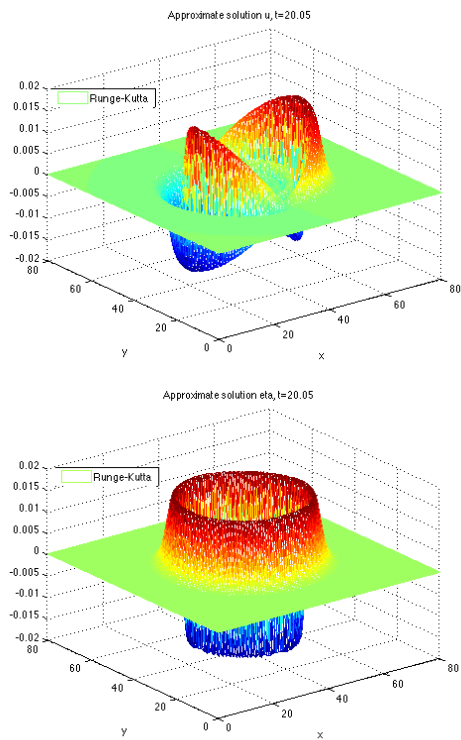
Το δεύτερο παράδειγμα που θεωρούμε στην παράγραφο αυτή είναι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + u_x + v_y = 0, \\ u_t + \eta_x - \alpha(u_{xxt} + u_{yyt}) = 0, \\ v_t + \eta_y - \alpha(v_{xxt} + v_{yyt}) = 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \\ v(x, y, 0) = 0, \\ \eta(x, y, 0) = (A \exp\{-\beta[(x - \gamma)^2 + (y - \gamma)^2]\}), \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \end{array} \right. \quad (5.13)$$

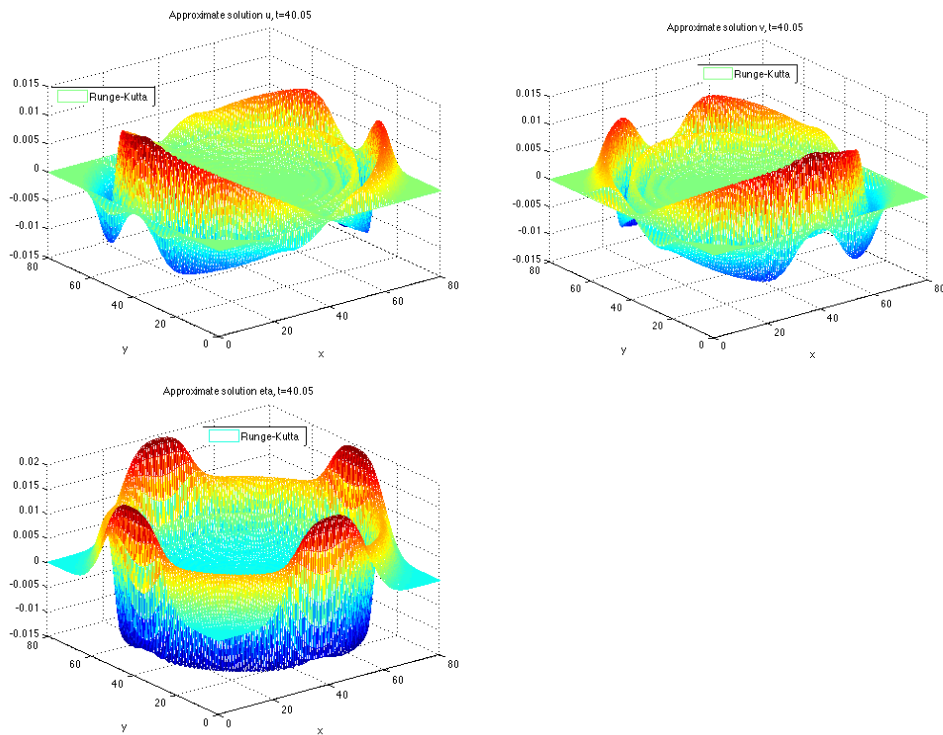
όπου  $(x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 80] \times [0, 80]$  και  $0 \leq t \leq T$  με  $T = 80$  και  $\alpha = 1/8$ . Λύνουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.13) με την ίδια αριθμητική μέθοδο. Η προσεγγιστική λύση φαίνεται στα σχήματα (5.2 a-e) σε πέντε χρονικές στιγμές, όπου  $h = 0.3, k = 0.05, \gamma = 40, A = 0.2, \beta = 1/5$ .



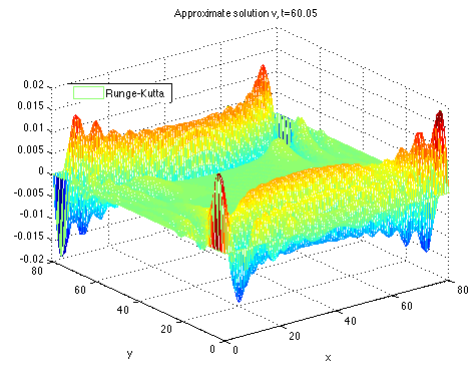
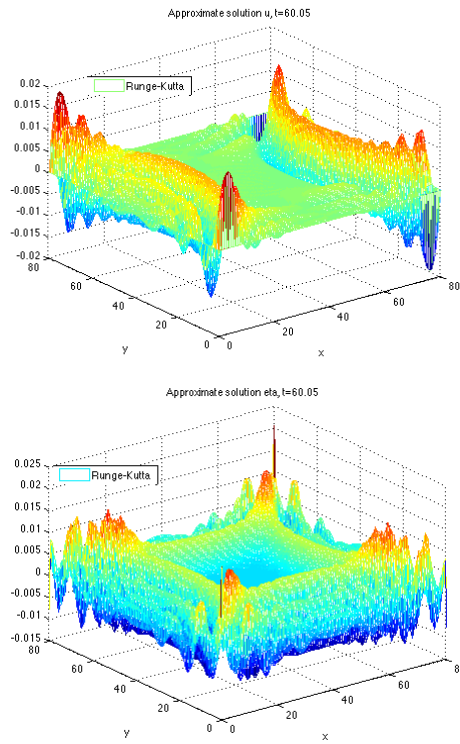
Σχήμα 5.2a: Λύση του (5.13) την χρονική στιγμή  $t = k$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



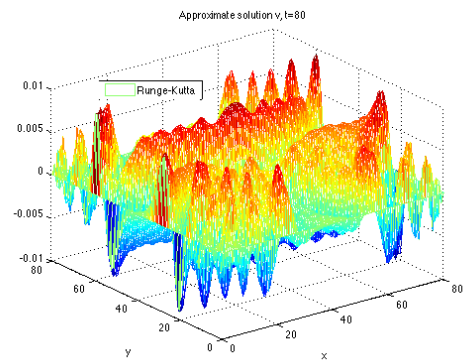
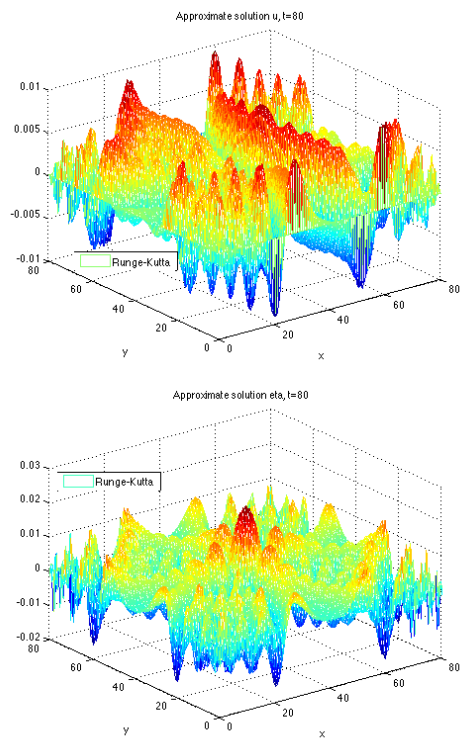
Σχήμα 5.2b: Λύση του (5.13) την χρονική στιγμή  $t \cong 20$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 5.2c: Λύση του (5.13) την χρονική στιγμή  $t \cong 40$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



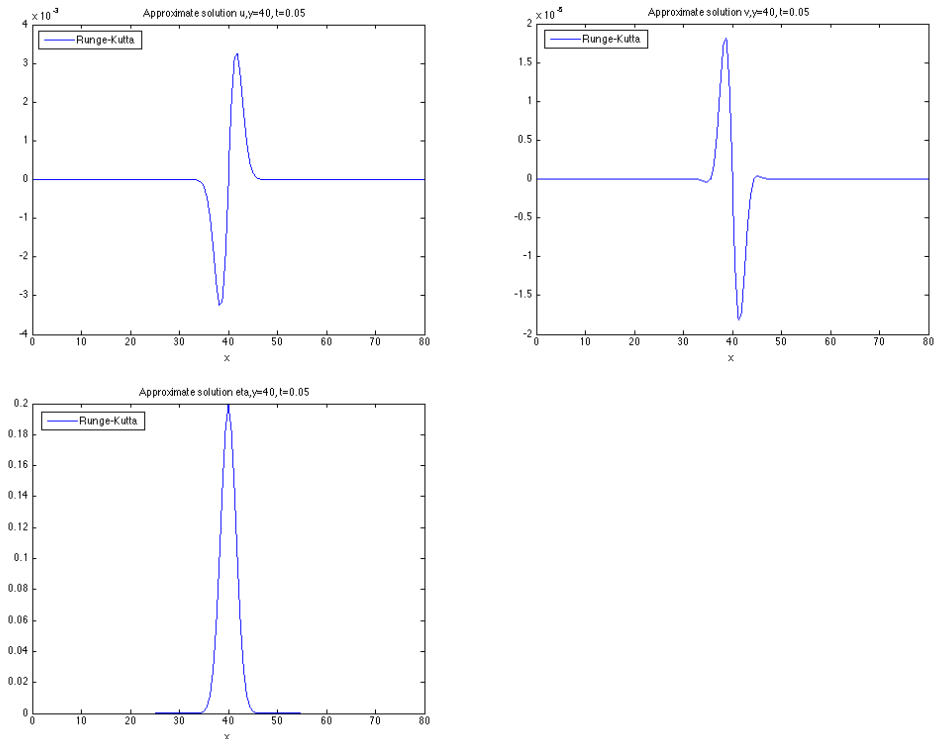
Σχήμα 5.2d: Λύση του (5.13) την χρονική στιγμή  $t \cong 60$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



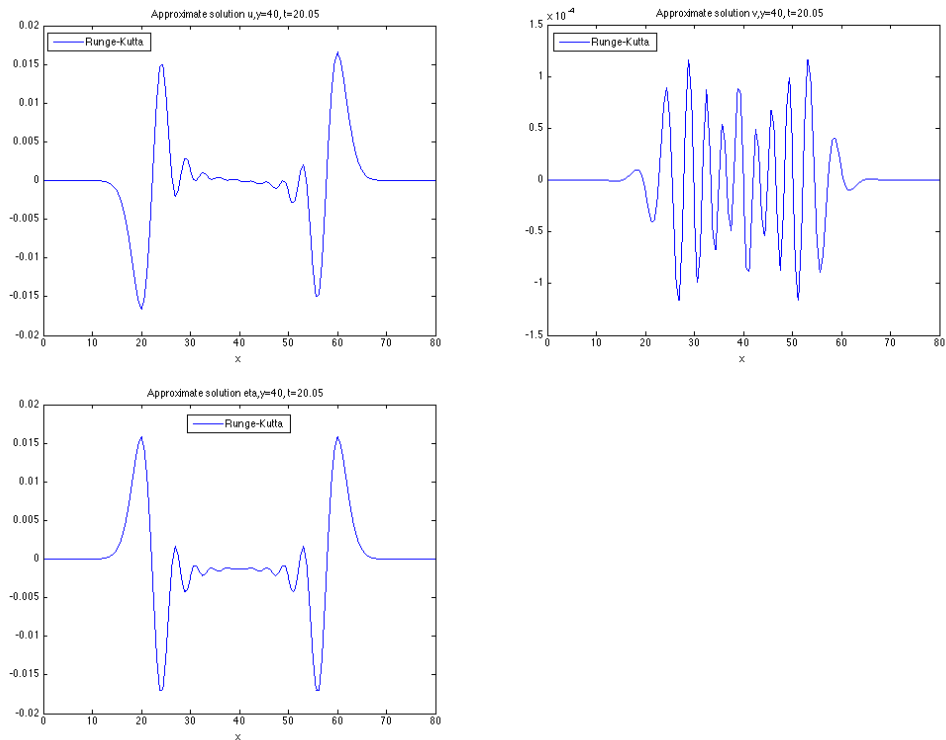
Σχήμα 5.2e: Λύση του (5.13) την χρονική στιγμή  $t = T = 80$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



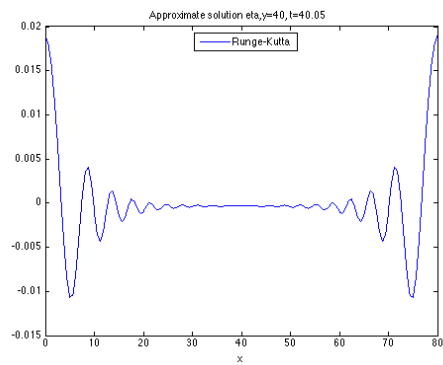
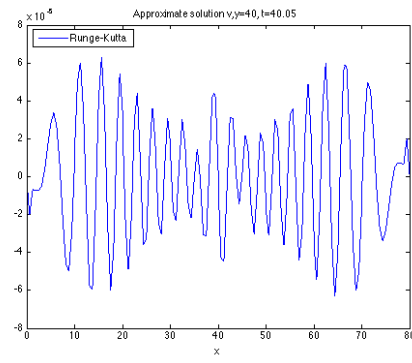
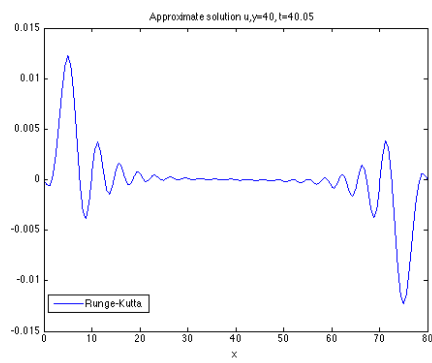
Στις μονοδιάστατες γραφικές παραστάσεις των σχημάτων (5.2 f-j), παρουσιάζουμε τις εγκάρσιες τομές της προσεγγιστικής λύσης του συστήματος (5.13) όταν  $y = 40$ , σε πέντε χρονικές στιγμές.



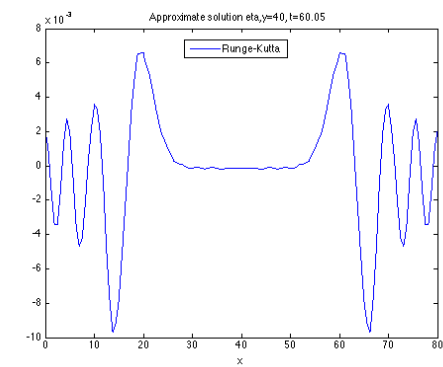
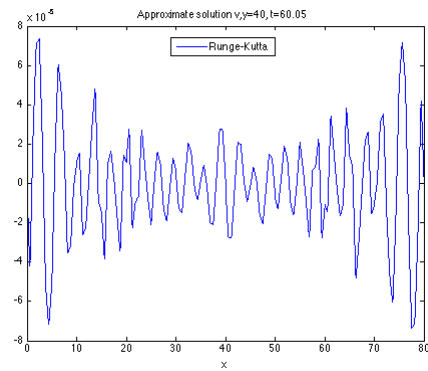
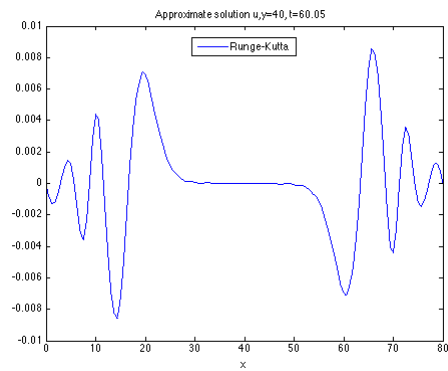
Σχήμα 5.2f: Εγκάρσιες τομές για  $t = k$ .



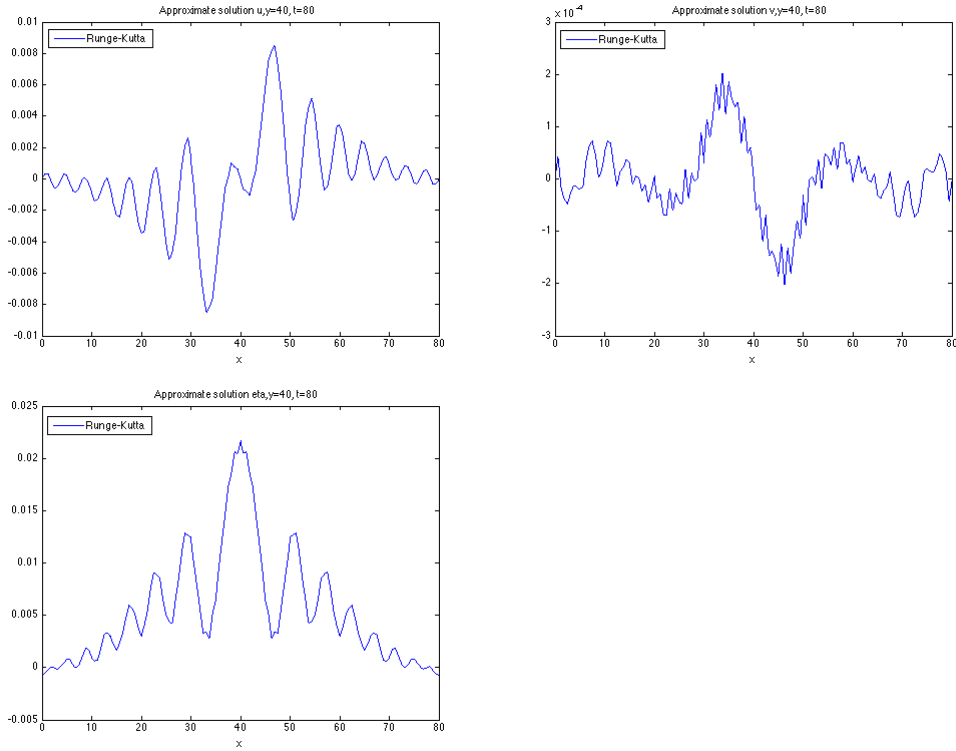
Σχήμα 5.2g: Εγκάρσιες τομές για  $t \cong 20$ .



Σχήμα 5.2h: Εγκάρσιες τομές για  $t = 40$ .



Σχήμα 5.2i: Εγκάρσιες τομές για  $t = 60$ .

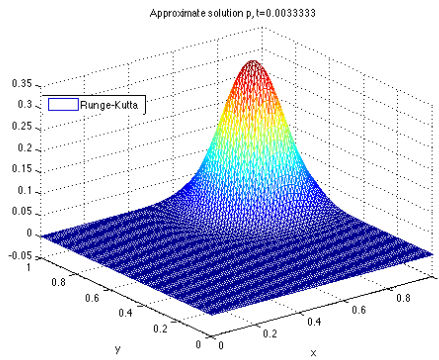
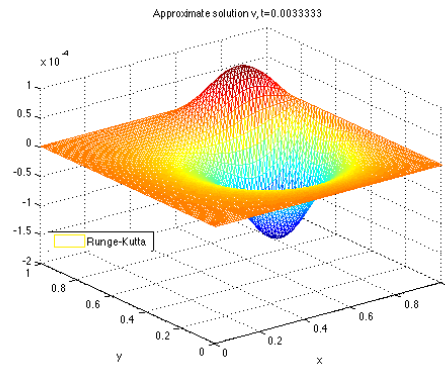
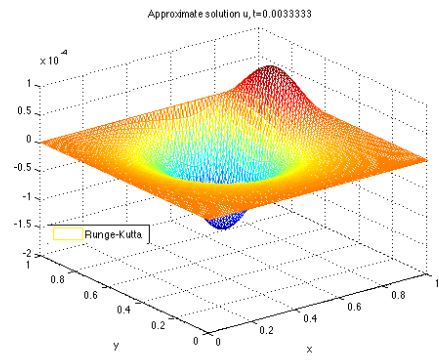


Σχήμα 5.2j: Εγκάρσιες τομές για  $t = T = 80$ .

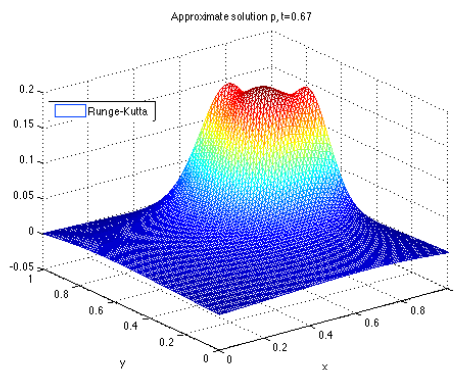
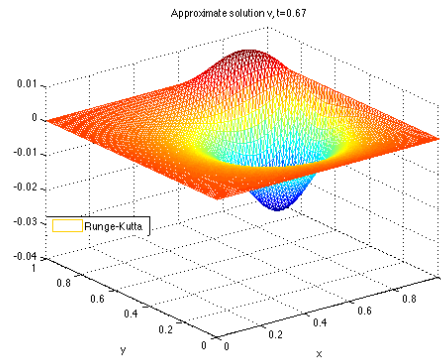
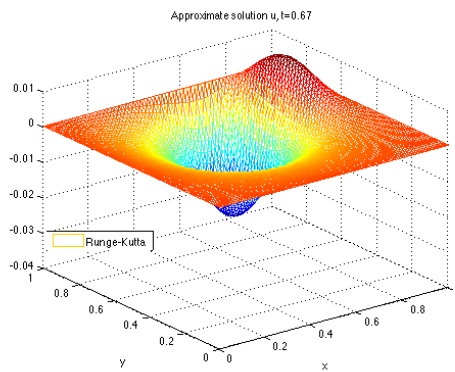
Το τελευταίο παράδειγμα που εξετάζουμε στην παράγραφο αυτή, είναι το παρακάτω πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + u_x + v_y = 0, \\ u_t + \eta_x - \alpha(u_{xxt} + u_{yyt}) = 0, \\ v_t + \eta_y - \alpha(v_{xxt} + v_{yyt}) = 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \\ v(x, y, 0) = 0, \\ \eta(x, y, 0) = (A \exp\{-\beta[(x - \gamma)^2 + (y - \gamma)^2]\}), \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \end{array} \right. \quad (5.14)$$

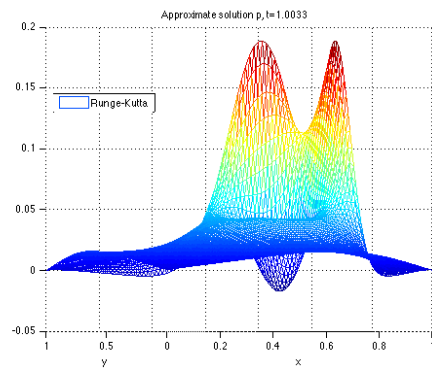
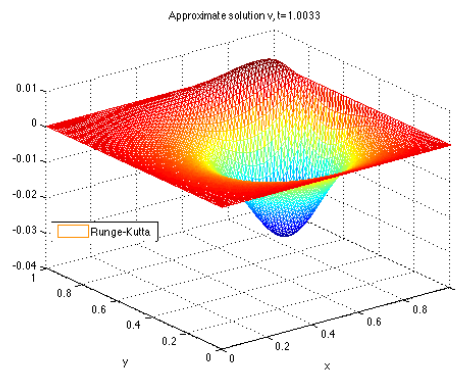
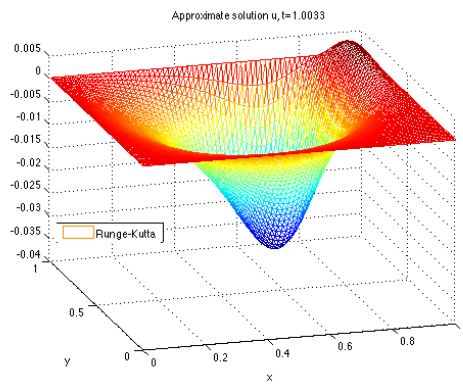
όπου  $(x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$  και  $0 \leq t \leq T$  με  $T = 4$  και  $\alpha = 1/4$ . Λύνουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.14) με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta*. Η προσεγγιστική λύση φαίνεται στα σχήματα (5.3 a-g) σε επτά χρονικές στιγμές, όπου  $h \cong 0.03$ ,  $k \cong 0.0033$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $A = 1/3$ ,  $\beta = 40$ .



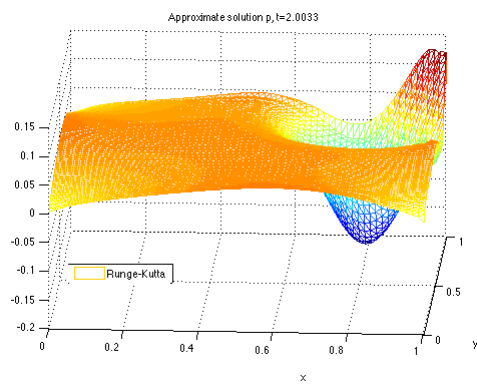
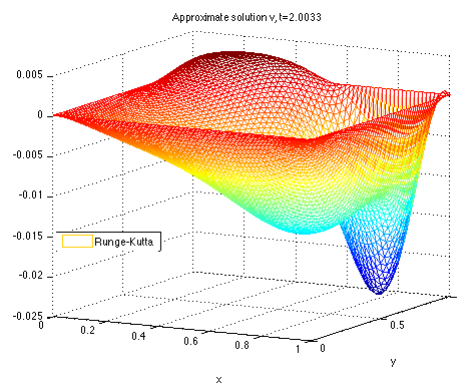
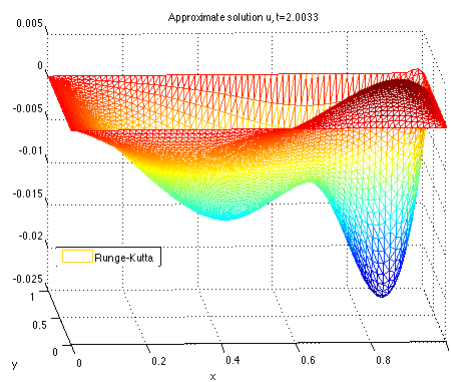
Σχήμα 5.3a: Λύση του (5.14) την χρονική στιγμή  $t = k$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



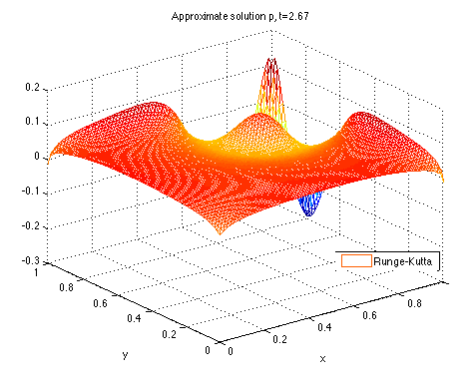
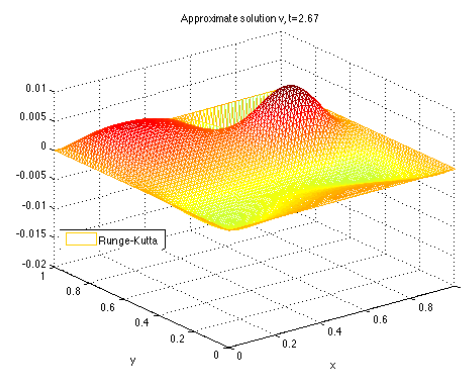
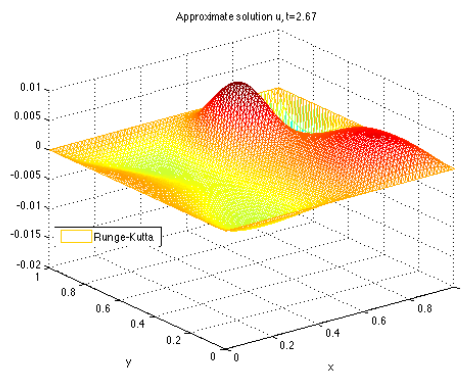
Σχήμα 5.3b: Λύση του (5.14) την χρονική στιγμή  $t = 0.67$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



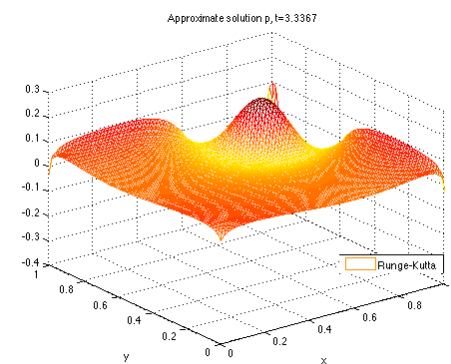
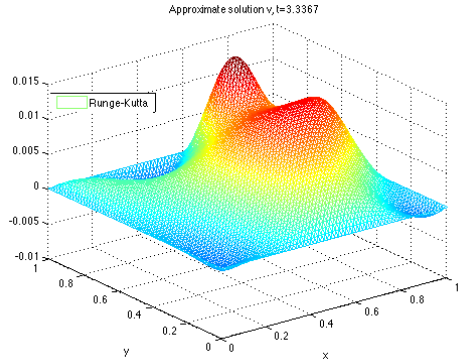
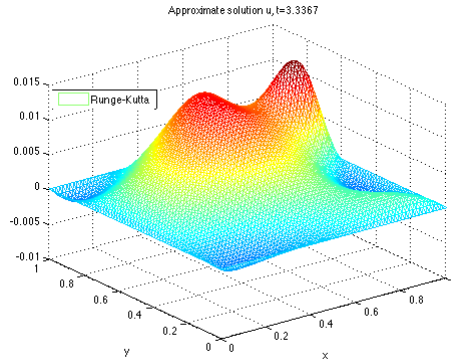
Σχήμα 5.3c: Λύση του (5.14) την χρονική στιγμή  $t \cong 1$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



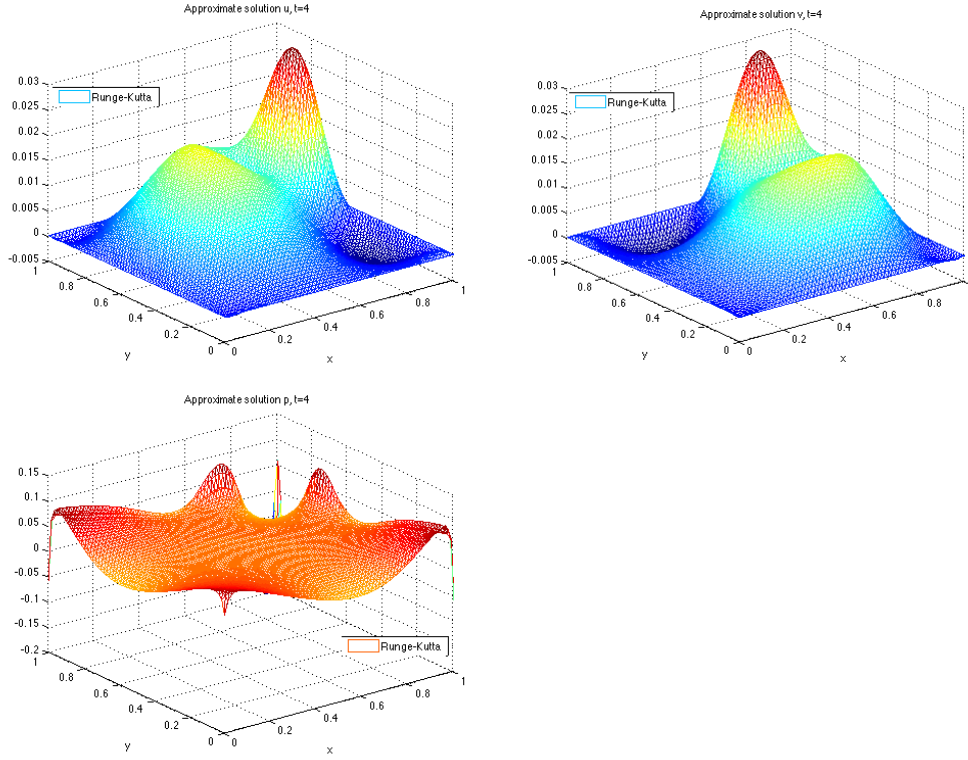
Σχήμα 5.3d: Λύση του (5.14) την χρονική στιγμή  $t \cong 2$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 5.3ε: Λύση του (5.14) την χρονική στιγμή  $t = 2.67$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 5.3φ: Λύση του (5.14) την χρονική στιγμή  $t \cong 3.34$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



Σχήμα 5.3g: Λύση του (5.14) την χρονική στιγμή  $t = T = 4$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

## 5.2 Μη γραμμικό κλασσικό σύστημα *Boussinesq* σε δύο διαστάσεις

### 5.2.1 Ημιδιακριτό πρόβλημα

Η συνήθης ημιδιακριτοποίηση *Galerkin*/πεπερασμένων στοιχείων του προβλήματος (5.3) με αρχικές και συνοριακές συνθήκες όπως έχουν οριστεί στην σχέση (5.2), ορίζεται ως ακολούθως. Αναζητούμε  $\eta_h: [0, T] \rightarrow P_h$ ,  $u_h: [0, T] \rightarrow S_{h,0}$  και  $v_h: [0, T] \rightarrow S_{h,0}$  που ικανοποιούν το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\left. \begin{aligned} & (\eta_{h_t}, \varphi) + (u_{h_x}, \varphi) + (v_{h_y}, \varphi) + \\ & + ((\eta_h u_h)_x, \varphi) + ((\eta_h v_h)_y, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in P_h, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & (u_{h_t}, \chi) + (\eta_{h_x}, \chi) + (u_h u_{h_x}, \chi) + (v_h v_{h_x}, \chi) - \\ & - \alpha \left( (u_{h_{xxt}}, \chi) + (u_{h_{yyt}}, \chi) \right) = 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & (v_{h_t}, \psi) + (\eta_{h_y}, \psi) + (u_h u_{h_y}, \psi) + (v_h v_{h_y}, \psi) - \\ & - \alpha \left( (v_{h_{xxt}}, \psi) + (v_{h_{yyt}}, \psi) \right) = 0, \quad \forall \psi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \eta_h(0) = I_h \eta_0, \quad u_h(0) = I_h u_0, \quad v_h(0) = I_h v_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

ή χρησιμοποιώντας την συνήθη ασθενή μορφή του συστήματος (5.3) παρατηρώντας ότι  $(u_{xxt}, \chi) = -(u_{xt}, \chi_x), \forall \chi \in S_{h,0}$ ,  $(u_h u_{h_x}, \chi) = -(\frac{u_h^2}{2}, \chi_x), \forall \chi \in S_{h,0}$  και  $((\eta_h u_h)_x, \varphi) = -(\eta_h u_h, \varphi_x), \forall \varphi \in P_h$

$$\left. \begin{aligned} & \left( \eta_{h_t}, \varphi \right) + \left( u_{h_x}, \varphi \right) + \left( v_{h_y}, \varphi \right) - \\ & - \left( \eta_h u_h, \varphi_x \right) - \left( \eta_h u_h, \varphi_y \right) = 0, \quad \forall \varphi \in P_h, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( u_{h_t}, \chi \right) + \left( \eta_{h_x}, \chi \right) - \left( \frac{u_h^2}{2}, \chi_x \right) - \left( \frac{v_h^2}{2}, \chi_x \right) + \\ & + \alpha \left( u_{h_{xt}}, \chi_x \right) + \alpha \left( u_{h_{yt}}, \chi_y \right) = 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \left( v_{h_t}, \psi \right) + \left( \eta_{h_y}, \psi \right) - \left( \frac{u_h^2}{2}, \psi_y \right) - \left( \frac{v_h^2}{2}, \psi_y \right) + \\ & + \alpha \left( v_{h_{xt}}, \psi_x \right) + \alpha \left( v_{h_{yt}}, \psi_y \right) = 0, \quad \forall \psi \in S_{h,0}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \eta_h(0) = I_h \eta_0, \quad u_h(0) = I_{h,0} u_0, \quad v_h(0) = I_{h,0} v_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

όπου  $P_h, S_{h,0}$  είναι οι χώροι που ορίσαμε στην παράγραφο 4.2 και  $I_h, I_{h,0}$  είναι οι τελεστές παρεμβολής στους χώρους  $P_h$  και  $S_{h,0}$  αντίστοιχα.

### 5.2.2 Πλήρως διακριτό πρόβλημα σε μορφή συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης

Στην παράγραφο αυτή θα γράψουμε το πρόβλημα (5.15) σε μορφή πινάκων και θα συνεχίσουμε με την διακριτοποίησή του με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης ως προς τον χρόνο.

#### 5.2.2.1 Σύστημα σε μορφή πινάκων

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις της σχέσης (5.8) στο σύστημα (5.15) για  $0 \leq t \leq T$ :

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{N_v} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) (\chi_i)_x, \varphi \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) (\chi_i)_y, \varphi \right) - \\ & - \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) \varphi_i \sum_{j=1}^{N_f} U_j(t) \chi_j, \varphi_x \right) - \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) \varphi_i \sum_{j=1}^{N_f} V_j(t) \chi_j, \varphi_y \right) = 0, \quad \forall \varphi \in P_h, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_x, \chi \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) \chi_i \right)^2, \chi_x \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) \chi_i \right)^2, \chi_x \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) (\chi_i)_x, \chi_x \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) (\chi_i)_y, \chi_y \right) = 0, \quad \forall \chi \in S_{h,0}, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) \chi_i, \psi \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_y, \psi \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) \chi_i \right)^2, \chi_y \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) \chi_i \right)^2, \chi_y \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) (\chi_i)_x, \psi_x \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) (\chi_i)_y, \psi_y \right) = 0, \quad \forall \psi \in S_{h,0}. \end{aligned} \right\}$$

Επομένως για τις συναρτήσεις βάσης των χώρων  $P_h$  και  $S_{h,0}$  θα έχουμε ότι:



$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{N_v} \dot{H}_i(t) \varphi_i, \varphi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) (\chi_i)_x, \varphi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) (\chi_i)_y, \varphi_j \right) - \\ & - \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) \varphi_i \sum_{k=1}^{N_f} U_k(t) \chi_k, (\varphi_j)_x \right) - \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) \varphi_i \sum_{k=1}^{N_f} V_k(t) \chi_k, (\varphi_j)_y \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_v, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_x, \chi_j \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) \chi_i \right)^2, (\chi_j)_x \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) \chi_i \right)^2, (\chi_j)_x \right) + \\ & + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) (\chi_i)_x, (\chi_j)_x \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) (\chi_i)_y, (\chi_j)_y \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_y, \chi_j \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) \chi_i \right)^2, (\chi_j)_y \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) \chi_i \right)^2, (\chi_j)_y \right) + \\ & + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) (\chi_i)_x, (\chi_j)_x \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) (\chi_i)_y, (\chi_j)_y \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f. \end{aligned} \right\}$$

ή

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{N_v} (\varphi_i, \varphi_j) \dot{H}_i \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} ((\chi_i)_x, \varphi_j) U_i \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_f} ((\chi_i)_y, \varphi_j) V_i \right) - \\ & - \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i \left( \sum_{k=1}^{N_f} U_k (\chi_k \varphi_i, (\varphi_j)_x) \right) \right) - \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i \left( \sum_{k=1}^{N_f} V_k (\chi_k \varphi_i, (\varphi_j)_y) \right) \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_v, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_x, \chi_j \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) \chi_i \right)^2, (\chi_j)_x \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) \chi_i \right)^2, (\chi_j)_x \right) + \\ & + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) (\chi_i)_x, (\chi_j)_x \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{U}_i(t) (\chi_i)_y, (\chi_j)_y \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f, \\ & \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) \chi_i, \chi_j \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_v} H_i(t) (\varphi_i)_y, \chi_j \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} U_i(t) \chi_i \right)^2, (\chi_j)_y \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^{N_f} V_i(t) \chi_i \right)^2, (\chi_j)_y \right) + \\ & + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) (\chi_i)_x, (\chi_j)_x \right) + \alpha \left( \sum_{i=1}^{N_f} \dot{V}_i(t) (\chi_i)_y, (\chi_j)_y \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_f. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Οι εξισώσεις της (5.17) είναι της μορφής

$$\left\{ \begin{aligned} & M_1 \dot{H} + S_x U + S_y V - F_1(H, U) - F_2(H, V) = 0, \\ & (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) \dot{U} - \frac{1}{2} F_3(U) - \frac{1}{2} F_4(V) + \tilde{S}_x H = 0, \\ & (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) \dot{V} - \frac{1}{2} F_5(U) - \frac{1}{2} F_6(V) + \tilde{S}_y H = 0, \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.18)$$

όπου οι πίνακες  $M_1, M_2, S_x, S_y, \hat{S}_x, \hat{S}_y, \tilde{S}_x$  και  $\tilde{S}_y$  καθώς και τα διανύσματα  $\dot{H}, \dot{U}, \dot{V}, H, U, V$  ορίστηκαν από τις σχέσεις (5.10a) και (10b) αντίστοιχα.

Το (5.18) παριστάνει το πρόβλημα (5.16) σε μορφή πινάκων.

#### 5.2.2.2 Πλήρης διακριτοποίηση με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης

Θεωρούμε ομοιόμορφη διαμέριση του χρονικού διαστήματος  $[0, T]$  με βήμα  $k$ , με  $t^n = nk$ ,  $n = 0, 1, \dots, M$  όπου  $Mk = T$  και  $k = t^{n+1} - t^n$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό της παραγράφου 2.3.3, το διακριτό σύστημα που δίνει η κλασσική μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης θα έχει την παρακάτω μορφή:

Δεδομένων  $H^0, U^0, V_0$ ,  
για  $n = 0, 1, \dots, M - 1$

$$H^{n,1} = H^n, U^{n,1} = U^n, V^{n,1} = V^n$$

$$\gamma \alpha \ i = 2,3,4$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 H^{n,i} &= M_1 H^n - k a_i S_x U^{n,i-1} - k a_i S_y V^{n,i-1} + \\ &\quad + k a_i F_1(H^{n,i-1}, U^{n,i-1}) + k a_i F_2(H^{n,i-1}, V^{n,i-1}), \\ (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) U^{n,i} &= (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) U^n + \frac{1}{2} k a_i F_3(U^{n,i-1}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} k a_i F_4(V^{n,i-1}) - k a_i \tilde{S}_x H^{n,i-1}, \\ (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) V^{n,i} &= (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) V^n + \frac{1}{2} k a_i F_5(U^{n,i-1}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} k a_i F_6(V^{n,i-1}) - k a_i \tilde{S}_y H^{n,i-1}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 H^{n+1} &= M_1 H^n - k S_x \sum_{i=1}^4 b_i U^{n,i} - k S_y \sum_{i=1}^4 b_i V^{n,i} + \\ &\quad + k \sum_{i=1}^4 b_i (F_1(H^{n,i}, U^{n,i}) + F_2(H^{n,i}, V^{n,i})), \\ (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) U^{n+1} &= (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) U^n + \\ &\quad + \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^4 b_i (F_3(U^{n,i}) + F_4(V^{n,i})) - k \tilde{S}_x \sum_{i=1}^4 b_i H^{n,i}, \\ (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) V^{n+1} &= (M_2 + \alpha \hat{S}_x + \alpha \hat{S}_y) V^n + \\ &\quad + \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^4 b_i (F_5(U^{n,i}) + F_6(V^{n,i})) - k \tilde{S}_y \sum_{i=1}^4 b_i H^{n,i}, \end{aligned} \right\}$$

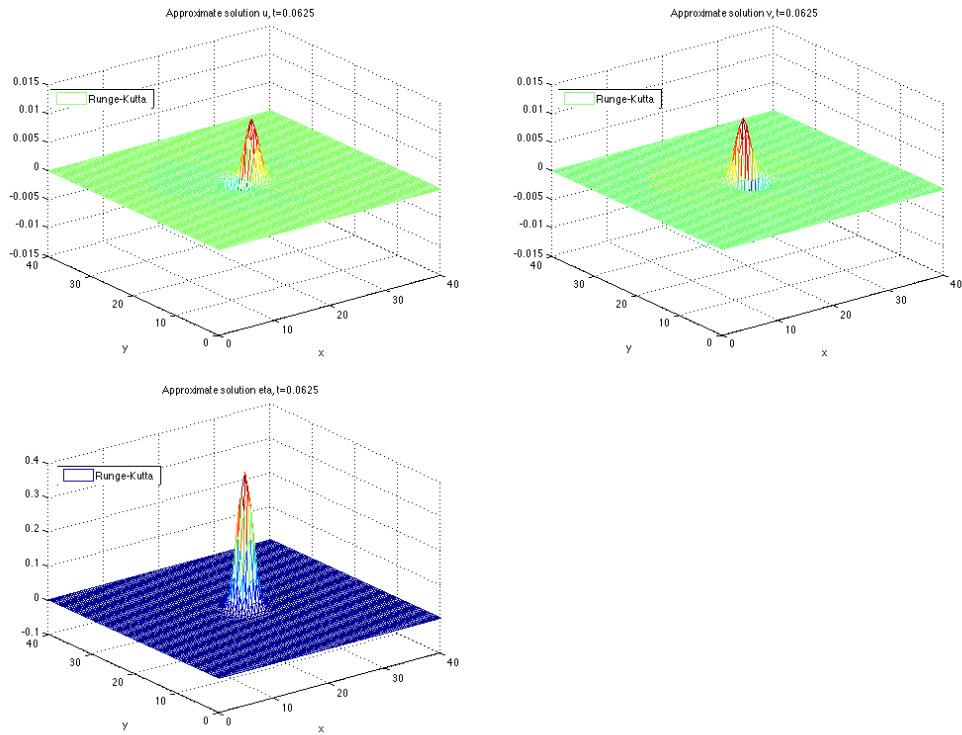
όπου  $a_2 = a_3 = 1/2$ ,  $a_4 = 1$ ,  $\tau_2 = \tau_3 = 1/2$ ,  $\tau_4 = 1$ ,  $b_1 = b_4 = 1/6$ ,  $b_2 = b_3 = 1/3$ .

### 5.2.3 Αριθμητικά παραδείγματα

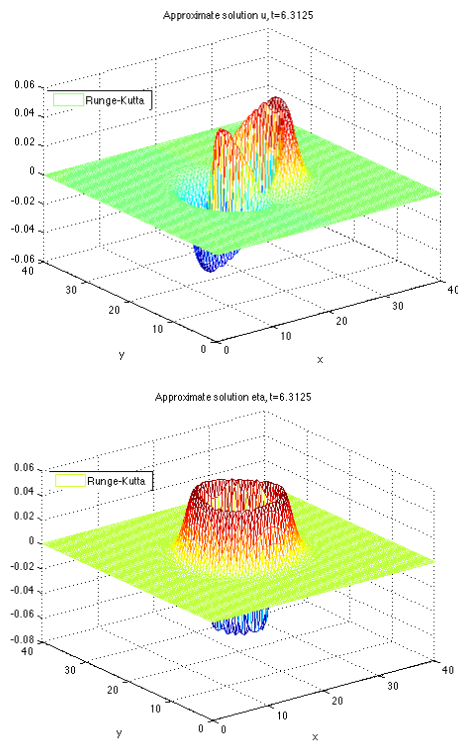
Το πρώτο παράδειγμα που θεωρούμε στην παράγραφο αυτή είναι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_t + u_x + v_y + (\eta u)_x + (\eta v)_y &= 0, \\ u_t + \eta_x + u u_x + v v_x - \alpha(u_{xxt} + u_{yyt}) &= 0, \\ v_t + \eta_y + u u_y + v v_y - \alpha(v_{xxt} + v_{yyt}) &= 0,, \\ u(x, y, 0) &= 0, \\ v(x, y, 0) &= 0, \\ \eta(x, y, 0) &= (A \exp\{-\beta[(x - \gamma)^2 + (y - \gamma)^2]\}), \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (5.19)$$

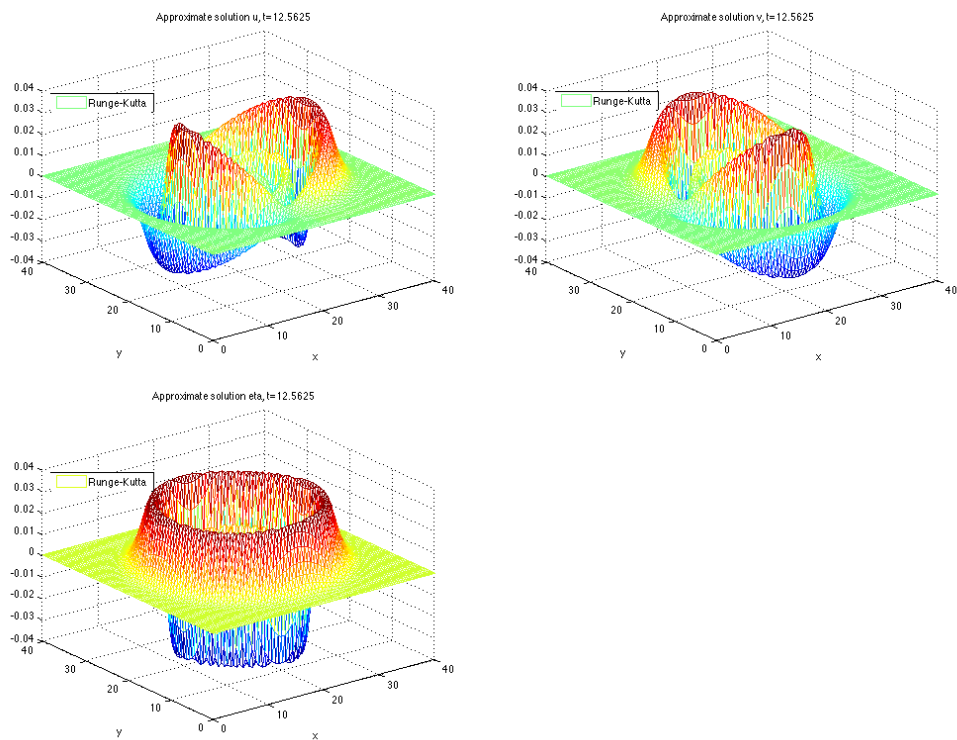
όπου  $(x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 40] \times [0, 40]$  και  $0 \leq t \leq T$  με  $T = 40$  και  $\alpha = 1/8$ . Λύνουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.19) με την κλασσική μέθοδο *Runge-Kutta*. Η προσεγγιστική λύση φαίνεται στα σχήματα (5.4 a-f) σε έξι χρονικές στιγμές, όπου  $h = 0.625$ ,  $k = 0.0625$ ,  $\gamma = 20$ ,  $A = 0.4$ ,  $\beta = 2/5$ .



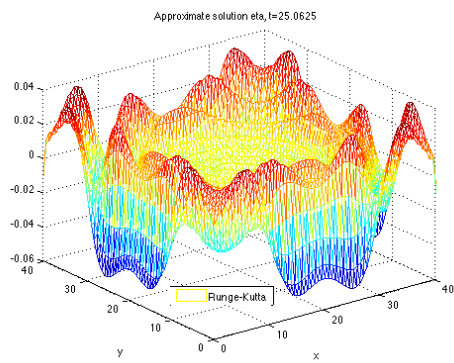
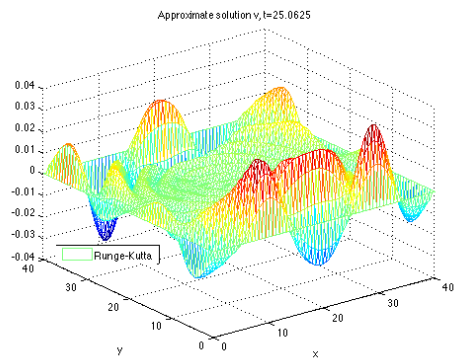
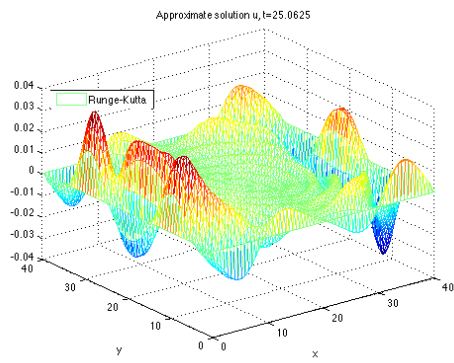
Σχήμα 5.4a: Λύση του (5.19) την χρονική στιγμή  $t = k$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.



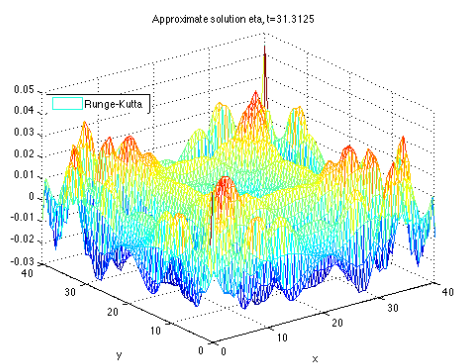
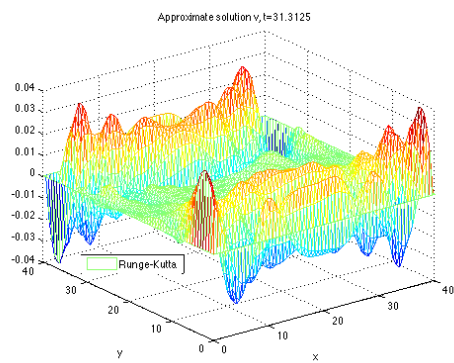
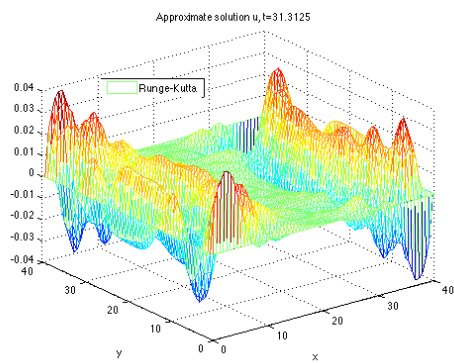
Σχήμα 5.4b: Λύση του (5.19) την χρονική στιγμή  $t = 6.31$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης.



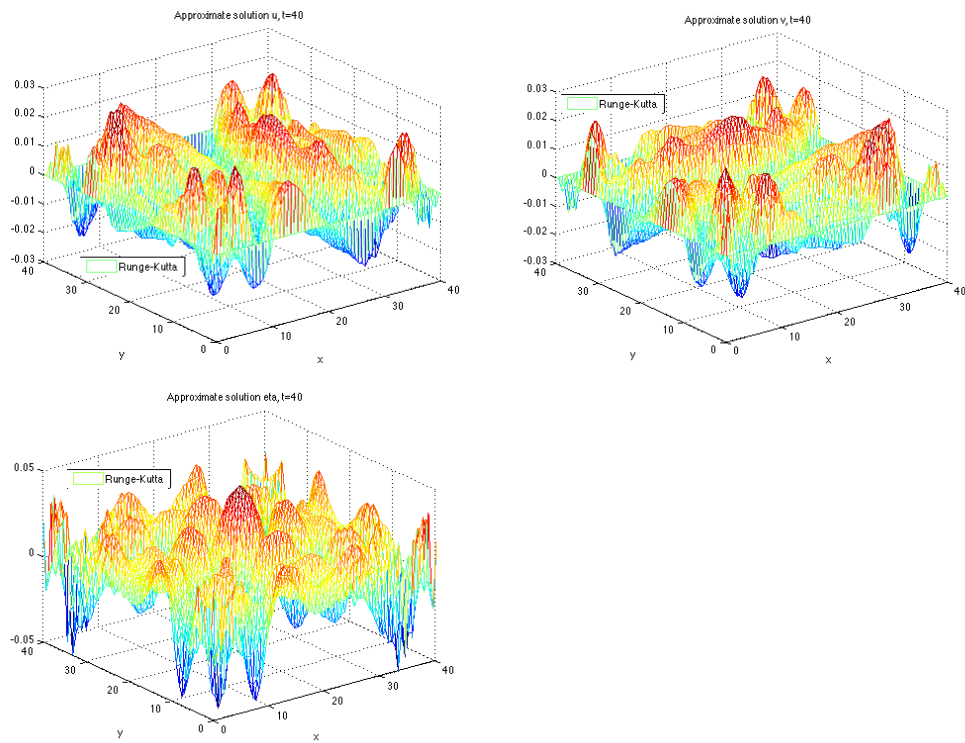
Σχήμα 5.4c: Λύση του (5.19) την χρονική στιγμή  $t \cong 12.56$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4<sup>ης</sup> τάξης.



Σχήμα 5.4d: Λύση του (5.19) την χρονική στιγμή  $t \cong 25.06$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

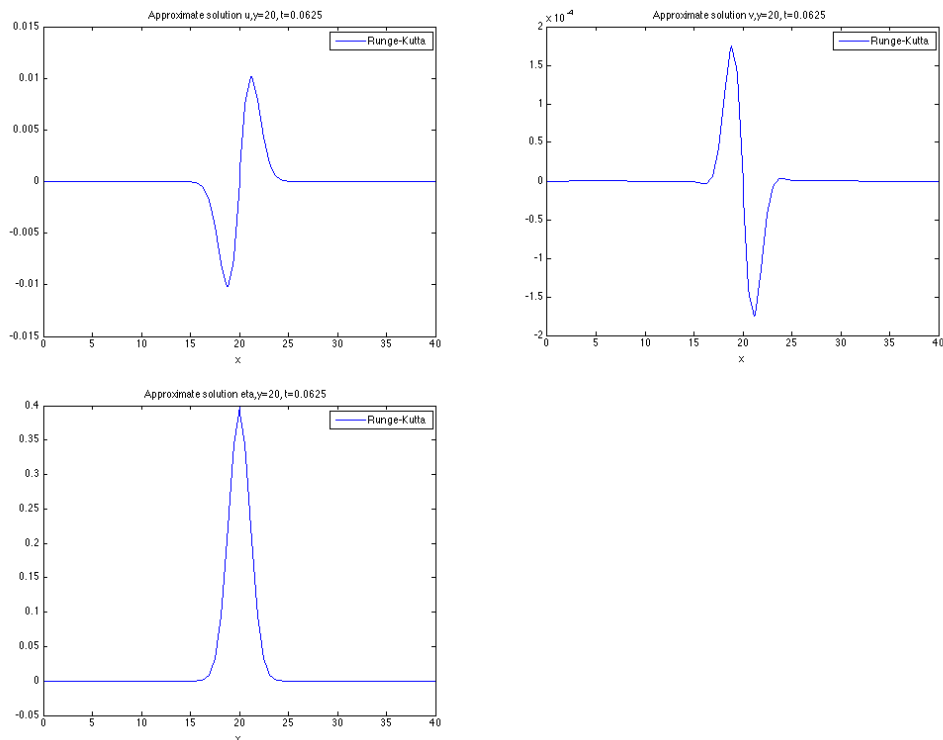


Σχήμα 5.4e: Λύση του (5.19) την χρονική στιγμή  $t \cong 31.31$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

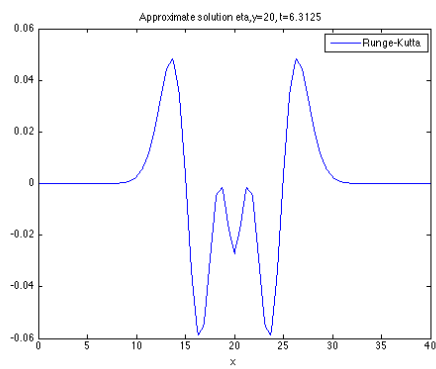
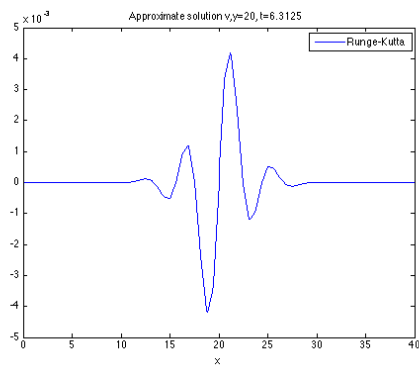
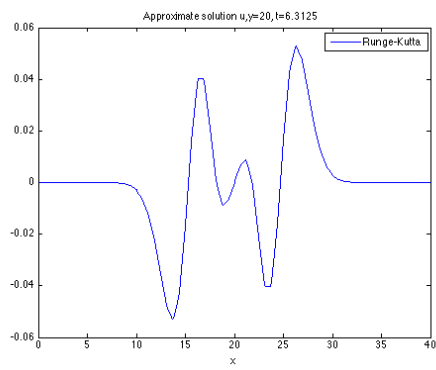


Σχήμα 5.4f: Λύση του (5.19) την χρονική στιγμή  $t = T = 40$ . Μέθοδος *Runge-Kutta* 4ης τάξης.

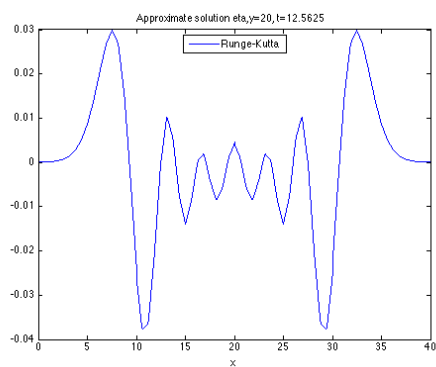
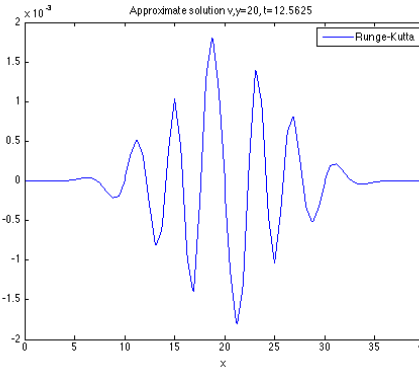
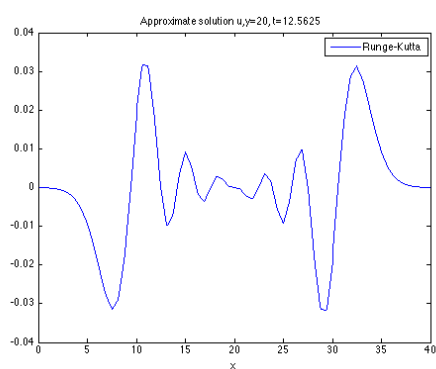
Στις μονοδιάστατες γραφικές παραστάσεις των σχημάτων (5.5 a-h), παρουσιάζουμε τις εγκάρσιες τομές της προσεγγιστικής λύσης του συστήματος (5.13) όταν  $y = 20$ , σε οχτώ χρονικές στιγμές.



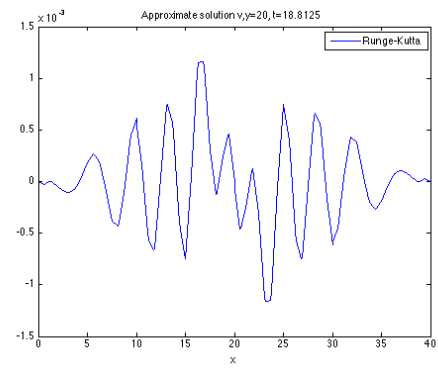
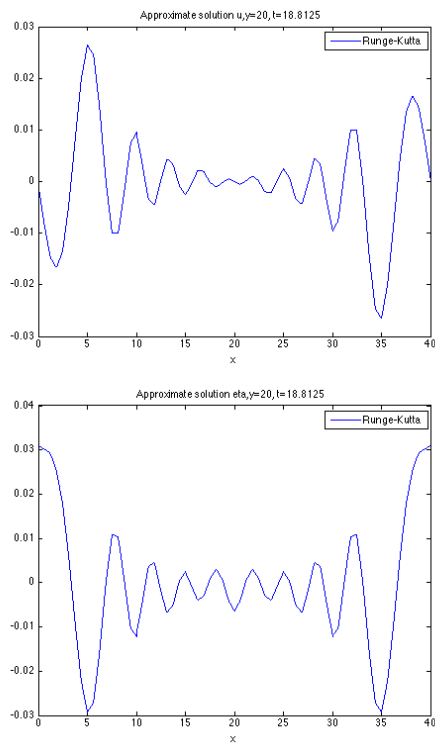
Σχήμα 5.5a: Εγκάρσιες τομές για  $t = k$ .



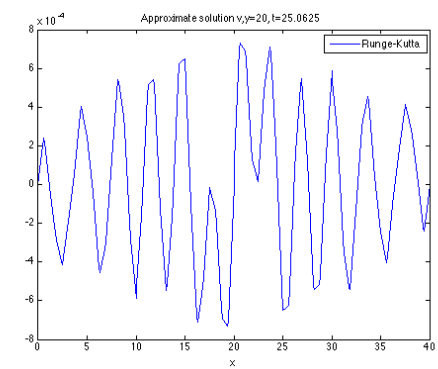
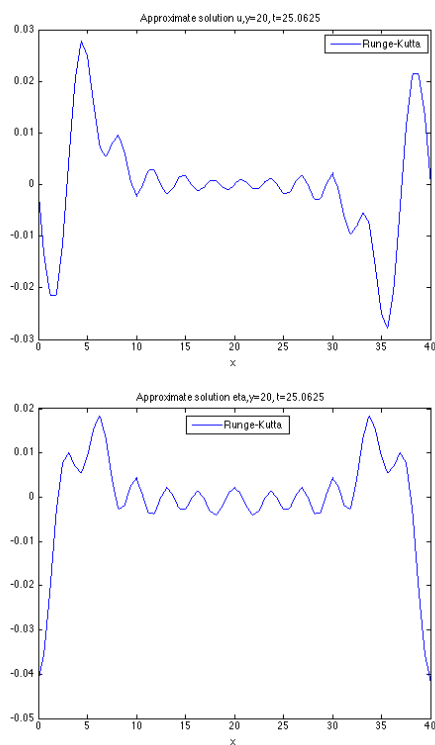
Σχήμα 5.5b: Εγκάρσιες τομές για  $t \cong 6.31$ .



Σχήμα 5.5c: Εγκάρσιες τομές για  $t = 12.56$ .

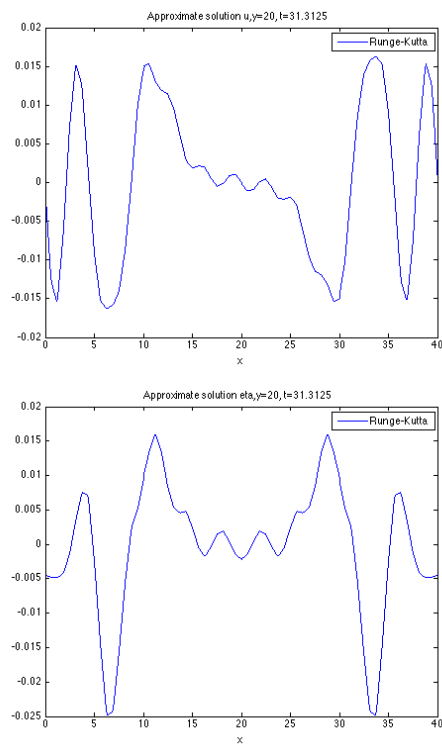


Σχήμα 5.5d: Εγκάρσιες τομές για  $t \cong 18.81$ .

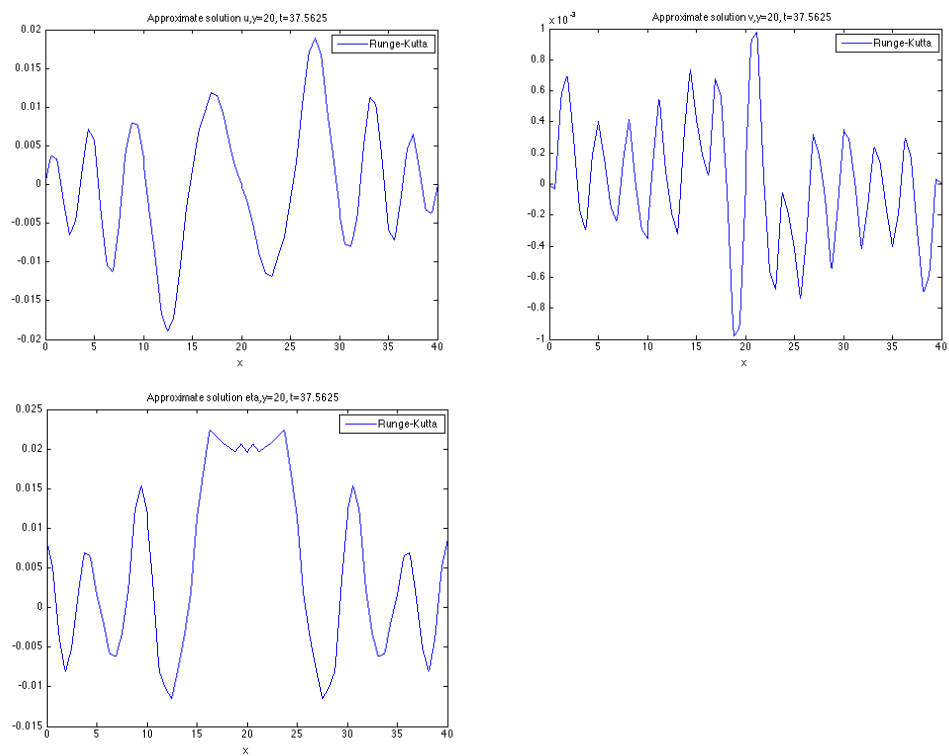


Σχήμα 5.5e: Εγκάρσιες τομές για  $t \cong 25.06$ .

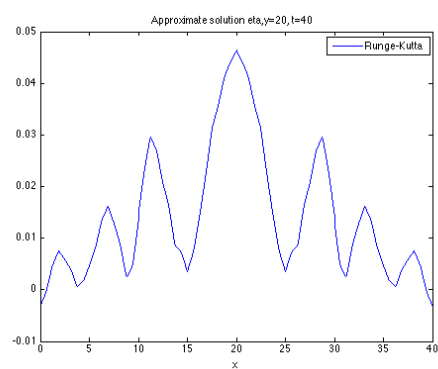
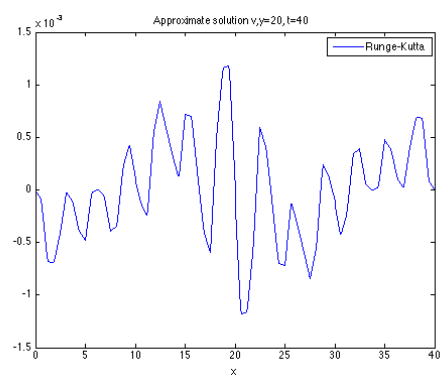
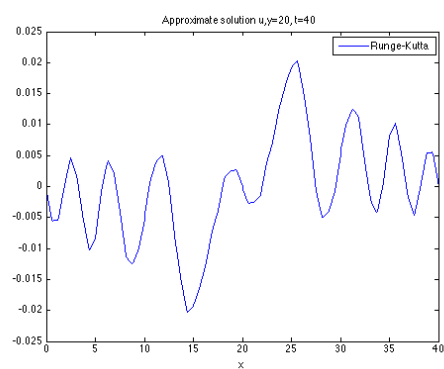




Σχήμα 5.5f: Εγκάρσιες τομές για  $t \cong 31.31$ .



Σχήμα 5.5g: Εγκάρσιες τομές για  $t \cong 37.56$ .



Σχήμα 5.5h: Εγκάρσιες τομές για  $t = T = 40$ .

## Βιβλιογραφία

1. [Δ] Βασίλειος Α. Δουγαλής, Σημειώσεις σεμιναρίου ‘Αριθμητικές Μέθοδοι για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις’, Αθήνα, Ακ. Έτος 2011-2012.
2. [B] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer 2010.
3. [D] T. Dupont, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Volume 10, Issue 5, pp. 890-899, 1973.
4. [G] M.S. Gockenbach *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, SIAM 2006.
5. [A-Δ] D.C. Antonopoulos and V.A. Dougalis, *Error estimates for Galerkin approximations of the ‘classical’ Boussinesq system*. (To appear in Math. Comp. Extended version in arXiv:1008.4248.)
6. [A-Δ-M] D.C. Antonopoulos, V.A. Dougalis and D.E. Mitsotakis , *Initial-boundary-value problems for the Bona-Smith family of Boussinesq systems*, Adv. Differential Equations, 14 (2009), 27-53.
7. [Δ-M-S] V.A. Dougalis, D.E. Mitsotakis and J.-C Saut, *On initial-boundary value problems for a Boussinesq system of BBM-BBM type in a plane domain*, Discrete Contin. Dyn. Syst, 23(2009), 1191–1204.
8. [Δ-M-S] V.A. Dougalis, D.E. Mitsotakis and J.-C Saut, *On some Boussinesq systems in two space dimensions: Theory and numerical analysis*, Math. Model. Num. Anal., 41(2007), 825–854.