

Διπλωματική Εργασία

«Μη γραμμικές διεγέρσεις του διακριτού αρμονικού ταλαντωτή με αυτοαλληλεπίδραση

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

Βάσος Αχιλλέως

A.M: 200808

Επιβλέπων: Επικ. Καθ. κ. Φ. Διάκονος

Επιτροπή: Αναπλ. Καθ. κ. Δ.Φραντζεσκάκης, Επ. Καθ. κ. Ξ. Μαϊντάς

ΑΘΗΝΑ 2011

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	4
2	Το μοντέλο και οι μέθοδοι	7
2.1	Το Φυσικό κίνητρο	7
2.2	Γραμικοποίηση- Ανάλυση γραμμικής ευστάθειας	10
3	Το γραμμικό πρόβλημα	11
3.1	Ανάλυση του διακριτού ΓΑΤ	11
3.2	Αριθμητικά αποτελέσματα	12
4	Λύσεις του μη-γραμμικού προβλήματος	15
4.1	Συνέχεια από το γραμμικο όριο	15
4.2	Συνέχεια από το αντι-συνεχές όριο	22
5	Ευστάθεια των μη-γραμμικών καταστάσεων	24
5.1	Η πρώτη διεγερμένη κατάσταση	24
5.2	Δεύτερη διεγερμένη κατάσταση	26
6	Συμπεράσματα	29

Abstract

In this work we study a discrete nonlinear Schrödinger lattice with a parabolic trapping potential. The model, describing, e.g., an array of repulsive Bose-Einstein condensate droplets confined in the wells of an optical lattice, is analytically and numerically investigated. Starting from the linear limit of the problem, we use global bifurcation theory to rigorously prove that - in the discrete regime - all linear states lead to nonlinear generalizations thereof, which assume the form of a chain of discrete dark solitons (as the density increases). The stability of the ensuing nonlinear states is studied and it is found that the ground state is stable, while the excited states feature a chain of stability/instability bands. We illustrate the mechanisms under which discreteness destabilizes the dark-soliton configurations, which become stable only in the continuum regime. Continuation from the anti-continuum limit is also considered, and a rich bifurcation structure is revealed.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετάμε τοδιακριτό μοντέλο της μη γραμμικής εξίσωσης Schroödinger στο πλέγμα με παραβολικό δυναμικό παγίδευσης. Το μοντέλο, που περιγράφει, π.χ., μια σειρά από σταγονίδια συμπυκνωμάτων Bose-Einstein παγιδευμένα στα πηγάδια ενός οπτικού πλέγματος, θα μελετηθεί αναλυτικά και αριθμητικά. Ξεκινώντας από το γραμμικό όριο του προβλήματος, έχουμε χρησιμοποιήσει την καθολική θεωρία διακλαδώσεων και αποδυνκνείουμε αυστηρά - στο διακριτό όριο - όλες οι γραμμικές καταστάσεις, οδηγούν σε μη γραμμικ γενικεύσεις τους, οι οποίες έχουν τη μορφή μιας αλυσίδας διακριτών σκοτεινών σολιτονίων (καθώς αυξάνεται η πυκνότητα). Η ευστάθεια των σχετικών καταστάσεων που ακολούθησε έχει μελετηθεί και διαπιστώθηκε ότι η βασική κατάσταση είναι ευσταθής, ενώ η διεγερμένες καταστάσεις εμφανίζουν μια αλυσίδα από μπάντες ευστάθειας / αστάθειας μπάντες. Έχουμε παρουσιάσει τους μηχανισμούς βάσει των οποίων η διακριτότητα αποσταθεροποιεί τις διατάξεις 'γκρίζων' σολιτονίων, οι οποίες καθίστανται σταθερές μόνο στο συνεχές όριο. Στη συνέχεια μελετάται το αντι-συνεχές όριο, επίσης, και αποκαλύπτεται μια πλούσια δομή διακλάδωσης.

1 Εισαγωγή

Η πειραματική υλοποίηση των ατομικών συμπυκνωμάτων Bose-Einstein (BEC) [1] αποτέλεσε το έναυσμα για μια έντονη δραστηριότητα στη μελέτη των αμιγώς κβαντικών συστημάτων σχεδόν σε μακροσκοπικές κλίμακες. Από θεωρητικής πλευράς, πολλά φαινόμενα που σχετίζονται με τη φυσική των BEC μπορούν να περιγραφούν από τη πρώτης τάξης θεωρία μέσου πεδίου, δηλαδή την εξίσωση Gross-Pitaevskii (GPE) [2, 3]. Η τελευταία είναι μια μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS), που εμπεριέχει ένα εξωτερικό δυναμικό παγίδευσης των ατόμων, και η μη γραμμικότητα περιγράφει ενεργά τις ατομικές αλληλεπιδράσεις. Ελλείψει των μη γραμμικών όρων, η GPE ανάγεται στη γραμμική εξίσωση Schrödinger και περιγράφει μια χωρικά περιορισμένη μονοατομική κατάσταση. Σε αυτό το όριο, και στην περίπτωση, π.χ., ενός αρμονικού εξωτερικού δυναμικού, το γραμμικό πρόβλημα, γίνεται η εξίσωση για τον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή (ΓΑΤ) που χαρακτηρίζεται από διακριτές ενεργειακές στάθμες και τις αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις [4]. Στη συνέχεια, μπορεί κανείς να γενικεύσει αυτή την απλή φυσική εικόνα, και να θεωρήσει την GPE ως ένα μοντέλλο για έναν αυτό-αλληλεπιδρώντα μακροσκοπικό κβαντικό ταλαντωτή. Σε μια τέτοια περίπτωση, η χρήση αναλυτικών ή / και αριθμητικών τεχνικών για την συνέχιση των γραμμικών ιδιοκαταστάσεων (που υποστηρίζονται από το αρμονικό δυναμικό παγίδευσης) οδηγεί σε καθαρά μη γραμμικές καταστάσεις του αυτό-αλληλεπιδρώντα μακροσκοπικού κβαντικού ταλαντωτή. Τέτοιες μη γραμμικές καταστάσεις μπορούν να βρεθούν τόσο σε μονοδιάστατα (1D) [5, 6, 7, 8] όσο και σε υψηλότερων διαστάσεων μοντέλα [9, 10, 11, 12, 13]. Αξίζει να πούμε ότι σε μονοδιάστατα μοντέλα, για BECs με αποστικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων, οι μη γραμμικές καταστάσεις μπορούν να λάβουν τη μορφή των σκοτεινών *solitonίων*, τα οποία έχουν μελετηθεί εκτενώς στη φυσική των ατομικών συμπυκνωμάτων BECs [14] και στην μη γραμμική οπτική [15].

Στην παρούσα εργασία, θα θεωρήσουμε και θα αναλύσουμε την διακριτή μορφή του μοντέλου GPE, δηλαδή την διακριτή NLS (DNLS) εξίσωση [16], που εμπεριέχει ένα (διακριτό) αρμονικό δυναμικό. Το μοντέλο αυτό υπαγορεύεται από την φυσική ενός BEC που είναι παγιδευμένο σε μια αρμονική παγίδα συνδυασμένη με ένα ισχυρό περιοδικό δυναμικό, το λεγόμενο οπτικό πλέγμα, το οποίο έχει βρεθεί ότι κατέχει πλούσιες φυσικές ιδιότητες και μη γραμμική δυναμική [3, 17, 18, 19]. Το οπτικό πλέγμα παράγεται από ένα ζευγάρι ακτίνων λέιζερ που σχηματίζουν ένα στάσιμο κύμα δημιουργώντας ένα περιοδικό δυναμικό: επομένως, για ένα παγιδευμένο συμπύκνωμα στην παρουσία οπτικού πλέγματος, το δυναμικό στην GPE μπορεί να θεωρηθεί ως μια υπέρθεση ενός αρμονικού και ενός περιοδικού δυναμικού. Εάν η αρμονική παγίδα είναι πολύ ασθενείς σε σύγκριση με το οπτικό πλέγμα, μπορεί κατά προσέγγιση να αγνοηθεί. Τότε, η στάσιμες καταστάσεις της GPE (η οποία περιλαμβάνει αποκλειστικά και μόνο το περιοδικό δυναμικό) μπορούν να βρεθούν με τη μορφή γραμμικών κυμάτων Bloch, που έχουν την περιοδικότητα του οπτικού πλέγματος (π.χ. Κεφ. 6 στην αναφορά [3]). Στην ίδια περίπτωση (δηλαδή, απουσία του αρμονικού δυναμικού), εφόσον το οπτικό πλέγμα είναι αρκετά βαθύ (σε σύγκριση με το χημικό δυναμικό), η έντονα εντοπισμένες χωρικές κυματοσυναρτήσεις σε κάθε θέση του πλέγματος μπορούν να προσεγγιστούν από συναρτήσεις Wannier (π.χ. στην αναφορά [20]) και η προσέγγιση στενής σύζευξης (tight binding approximation) μπορεί να εφαρμοστεί. Όταν ισχύει η πιο πάνω προσέγγιση, τότε η συνεχής εξίσωση GPE ανάγεται στην εξίσωση DNLS [3, 17, 18, 20], ένα μοντέλο που έχει ήδη μια μακρά ιστορία στη φυσική και τα μαθηματικά των μη

γραμμικών πλέγματων [16]. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ισχύς του μοντέλου αυτού προϋποθέτει την συνοχή της φάσης σε κάθε θέση του πλέγματος και, κατά συνέπεια, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις όπως στην αλλαγή φάσης από υπέρρευστο σε μονωτή-Mott (superfluid-to-Mott insulator) [21] ή γενικότερα, όταν ισχυρές αλληλεπιδράσεις έρχονται στο προσκήνιο (π.χ. αναφορά [22]). Παρ' όλα αυτά, το υπό εξέταση μοντέλο, εκτός του ότι υπαγορεύεται από τη φυσική των BECs στη παρουσία οπτικού πλέγματος - όπου μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μακροσκοπικός κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή σε ένα πλέγμα - μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και σε άλλους τομείς, συμπεριλαμβανομένων της διακριτής, μη γραμμικής οπτικής [23] και των μη γραμμικών θεωριών στο πλέγμα [16].

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε την ύπαρξη, τις διακλαδώσεις και την ευστάθεια των μη γραμμικών καταστάσεων που προκύπτουν σε αυτό το διακριτό μοντέλο, για τιμές της απόστασης του πλέγματος a που κυμαίνονται από το διακριτό όριο ($a = O(1)$) μέχρι το αντι-συνεχές (AC) όριο ($a \rightarrow \infty$). Αρχικά, θα επανεξετασθεί το γραμμικό όριο του προβλήματος (έχει μελετηθεί παλιότερα, αναφορά [24]) και θα γενικευθεί η σχετική ανάλυση για την εξεύρεση των μη-γραμμικών καταστάσεων που υποστηρίζονται από το σύστημα, αναλυτικά και αριθμητικά. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την καθολική θεωρία διακλαδώσεων [25, 26] θα αποδείξουμε αυστηρά ότι - στο διακριτό όριο - κάθε γραμμική ιδιοκατάσταση του συστήματος μπορεί να συνεχιστεί σε μια μη γραμμική. Με αυτόν τον τρόπο, θα βρούμε όλες αυτές τις μη-γραμμικές καταστάσεις, ήτοι τη βασική κατάσταση, καθώς και διεγερμένες καταστάσεις οι οποίες, στην έντονα μη-γραμμική περιοχή, μπορούν να αποκτήσουν τη μορφή μιας αλυσίδας σκοτεινών σολιτονίων. Ακόμα, μελετάμε τη συνέχιση των καταστάσεων από το όριο του αντι-συνεχούς, μέσα από μια λεπτομερή αριθμητική ανάλυση διακλαδώσεων, όπου διαπιστώνεται ότι υπάρχουν καταστάσεις που δεν διαθέτουν γραμμικό ανάλογο.

Επίσης, θα μελετήσουμε την ευστάθεια των μη γραμμικών καταστάσεων στο πλαίσιο της γραμμικής ανάλυση ευστάθειας [λεγόμενη, ανάλυση Bogoliubov - de Gennes (BDG), στη περιοχή των BECs] εστιάζοντας στην επίδραση της διακριτοποίησης. Θα αποκαλύψουμε μια θεμελιώδη διαφορά του διακριτού συστήματος σε σχέση με το συνεχές ανάλογό του: βρίσκουμε ότι η διακριτότητα καθιστά τις διεγερμένες καταστάσεις πιο ασταθείς (μόνο η βασική κατάσταση βρίσκεται είναι πάντα ευσταθής) μέσα από την ανάδειξη ζωνών αστάθειας. Η σχετική δομή των ζωνών εξαρτάται από την απόσταση του πλέγματος και την ισχύ της μη-γραμμικότητας (όπως αυτή μετράται από το χημικό δυναμικό μ). Αντίθετα, στην περίπτωση του συνεχούς ορίου, όχι μόνο η βασική κατάσταση, αλλά ακόμη και ορισμένες διεγερμένες καταστάσεις (όπως η πρώτη και δεύτερη) είναι ευσταθείς βαθιά στο εσωτερικό του μη-γραμμικού ορίου [27].

Πραγματοποιούμε επίσης αριθμητικές προσομοιώσεις για να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη των δύο πρώτων (ασταθών) διεγερμένων καταστάσεων, δηλαδή του ενός διακριτού σκοτεινού σολιτονίου και του ζεύγος σκοτεινών σολιτονίων. Θα δείξουμε ότι η (ταλαντωτική) αστάθεια εκδηλώνεται θέτοντας σε ταλαντευτική κίνηση ένα αρχικά ακίνητο σολιτόνιο, πράγμα που εξηγείται από το φαινόμενο του συντονισμού μεταξύ των ιδιοσυχνοτήτων μεταξύ των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του σολιτονίου και των εγγενών συχνότητων διέγερσης του υποκείμενου συστήματος.

Η εργασία είναι οργανωμένη ως εξής: Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζουμε το μοντέλο, όπως υπογορεύεται από τη φυσική των BECs στην παρουσία οπτικού πλέγματος, αν και, όπως αναφέρεται ανωτέρω, η ανάλυσή μας μπορεί να σχετίζεται και με άλλους τομείς εφαρμογών, όπως η μη γραμμική οπτική. Στο Κεφάλαιο 3, μελετάμε αναλυτικά και αριθμητικά το γραμμικό όριο του μοντέλου. Στο Κεφάλαιο 4, θεωρούμε το πλήρως μη γραμμικό πρόβλημα και αποδεικνύουμε, συγκεκριμένα, πως μη γραμμικές ιδιοκαταστάσεις προκύπτουν από τις αντίστοιχες γραμμικές. Το αντι-συνέχες όριο του συστήματος μελετάται επίσης σε αυτό το κεφάλαιο. Στο Κεφάλαιο 5, αναλύουμε την ευστάθεια των διεγερμένων μη-γραμμικών καταστάσεων (δηλαδή, των καταστάσεων ενός και δύο σκοτεινών σολιτονίων) και, τέλος, στο Κεφάλαιο 6, παρουσιάζουμε συνοπτικά τα συμπεράσματά μας.

2 Το μοντέλο και οι μέθοδοι

2.1 Το Φυσικό κίνητρο

Θεωρούμε ότι ένα ατομικό BEC βρίσκεται παγιδευμένο σε μια εξαιρετικά ανισοτροπική αρμονική παγίδα, V_{HT} , με συχνότητες ω_x και $\omega_{\text{perp}} \equiv \omega_y = \omega_z$, έτσι ώστε $\omega_x \ll \omega_{\text{perp}}$. Στην προσέγγιση μέσου πεδίου, καθώς και για αρκετά χαμηλές θερμοκρασίες (έτσι ώστε οι θερμικές και κβαντικές διακυμάνσεις να μπορούν να αγνοηθούν), η δυναμική του συμπυκνώματος μπορεί να περιγραφεί με το ακόλουθο, ουσιαστικά μονοδιάστατο (1D) GPE μοντέλο [3],

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V_{\text{ext}}(x)\Psi + g_{1D}|\Psi|^2\Psi, \quad (1)$$

όπου $\Psi(x, t)$ είναι η μακροσκοπική κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το BEC, κανονικοποιημένη στον αριθμό των ατόμων, δηλαδή $\int |\Psi|^2 dx = N$, ενώ $g_{1D} = 2\hbar\omega_{\perp}a$, είναι η ενεργός μονοδιάστατη σταθερά ζεύξης, m είναι η ατομική μάζα και a το μήκος σκέδασης s -κύματος, που εδώ θεωρείται θετική (δηλαδή, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων είναι αποοστικές). Τέλος, το εξωτερικό δυναμικό $V_{\text{ext}}(x)$, στην εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή

$$V_{\text{ext}}(x) \equiv V_{HT}(x) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2. \quad (2)$$

Η εξίσωση (1) μπορεί να εκφραστεί στην ακόλουθη αδιάστατη μορφή:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi + |\psi|^2\psi, \quad (3)$$

όπου $|\psi|^2 = 2a|\Psi|^2$ είναι η κανονικοποιημένη πυκνότητα, ενώ το μήκος, ο χρόνος και η ενέργεια υπολογίζονται, αντιστοίχως, σε μονάδες των $2a$, $a_{\perp}$, $\omega_{\perp}^{-1}$ και $\hbar\omega_{\perp}$. Το δυναμικό παγίδευσης $V(x)$ στην εξίσωση (3) δίνεται από τον τύπο:

$$V(x) = \frac{1}{2}\Omega^2 x^2, \quad (4)$$

όπου $\Omega \equiv \omega_x/a_{\perp}$ είναι η κανονικοποιημένη συχνότητα της παγίδας. Σημειώστε ότι πέραν από το πλαίσιο των ατομικών συμπυκνωμάτων, η εξίσωση (3) εμφανίζεται επίσης σε μελέτες στο πλαίσιο της μη γραμμικής οπτικής (π.χ. αναφορά [28]). Εκεί, Ψ είναι το κανονικοποιημένο ηλεκτρικό πεδίο, το t δηλώνει την κατεύθυνση διάδοσης, ενώ η παράμετρος Ω δηλώνει τη μεταβολή του δείκτη διάθλασης στο μέσο, στη x -κατεύθυνση (εγκάρσια προς την διάδοση).

Στην ανάλυσή μας παρακάτω, θεωρούμε τη διακριτοποιημένη μορφή της εξίσωσης (3), και συγκεκριμένα το ακόλουθο μοντέλο DNLS:

$$i\dot{\psi}_j = -\frac{1}{2\alpha^2}\Delta_2\psi_j + \frac{1}{2}\Omega^2(\alpha j)^2\psi_j + |\psi_j|^2\psi_j, \quad (5)$$

όπου η άνω τελεία δηλώνει τη χρονική παράγωγο, α είναι το διάστημα πλέγματος, και $\Delta_2\psi_j \equiv \psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}$ είναι η διακριτή Λαπλασιανή. Στο όριο $\alpha \rightarrow 0$, η εξίσωση (5) ανάγεται στο συνεχές GP μοντέλο της εξίσωσης (3). Σημειώστε ότι σε περίπτωση απουσίας του μη γραμμικού όρου, η Εξ. (5) είναι η χρονο-ανεξάρτητη εξίσωση του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή (ΓΑΤ) στο πλέγμα. Από την άλλη, με την παρουσία των γραμμικών όρων, το μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί ως ένας αυτό-αλληλεπιδρών μακροσκοπικός ΓΑΤ στο πλέγμα.

Η εξίσωση (5), εκτός από το να είναι ενδιαφέρουσα από μόνη της, είναι επίσης σημαντική για τη φυσική των ατομικών συμπυκνωμάτων που είναι παγιδευμένα σε ισχυρά οπτικά πλέγματα. Για την περαιτέρω επεξεργασία των ανωτέρω, ας υποθέσουμε ότι το εξωτερικό δυναμικό V_{ext} της εξίσωσης (1) περιέχει και ένα περιοδικό οπτικό δυναμικό, V_{OL} , που δημιουργήθηκε από δύο ακτίνες λέιζερ σε αντίθετη διεύθυνση, μήκους κύματος λ [18, 19], σε μια τέτοια περίπτωση, $V_{\text{ext}}(x) = V_{HT}(x) + V_{OL}(x)$, όπου το οπτικό δυναμικό του πλέγματος δίνεται από τη σχέση:

$$V_{OL}(x) = V_0 \sin^2(kx), \quad (6)$$

όπου V_0 και $k = 2\pi/\lambda$ χαρακτηρίζουν το πλάτος και τον κυματάριθμο του οπτικού πλέγματος, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη την ειδική περίπτωση ενός αρκετά ισχυρού οπτικού πλέγματος, τέτοιο ώστε $V_0 \gg \mu$ (όπου μ το χημικό δυναμικό), μπορεί κανείς να ακολουθήσει την ανάλυση της αναφοράς [20] και να δείξει ότι η εξίσωση (1) μπορεί να προσεγγισθεί από ένα μοντέλο DNLS για τις κυματοσυναρτήσεις $\psi_j(t)$ στα διάφορα πηγάδια (που υποδεικνύονται από το δείκτη j). Συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι η ενεργή συχνότητα σε κάθε πηγάδι, $\tilde{\omega}_x \equiv \sqrt{2V_0 k^2/m}$, είναι τέτοια έτσι ώστε να ισχύει ότι $\tilde{\omega}_x \gg \omega_x$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη προσέγγιση tight-binding approximation και να αποσυνθέσουμε τη κυματοσυνάρτηση του συμπυκνώματος $\Psi(x, t)$, ως άθροισμα των κυματοσυναρτήσεων $\Phi_j(x - x_j)$ που είναι εντοπισμένες γύρω από το κέντρο κάθε πηγαδιού, δηλαδή:

$$\Psi(x, t) = \sum_j \psi_j(t) \Phi_j(x - x_j), \quad (7)$$

όπου η κυματοσυναρτήσεις Φ_j , είναι κανονικοποιημένες στη μονάδα, ενώ ο συνολικός αριθμός των ατόμων στο συμπύκνωμα διατυπώνεται ως εξής: $N = \sum_j N_j = \sum |\psi_j|^2$ (όπου N_j είναι ο αριθμός των ατόμων στο αντίστοιχο πηγάδι j). Αντικαθιστώντας την εξίσωση (7) στην εξίσωση (1), πολλαπλασιάζοντας με Ψ^* και ολοκληρώνοντας πάνω στα x , προκύπτουν οι εξής εξισώσεις για τις κυματοσυναρτήσεις ψ_j [20, 29]),

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = & - K(\psi_{j+1} + \psi_{j-1}) + E_j \psi_j \\ & + \frac{1}{2} m \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \omega_x^2 j^2 \psi_j + \tilde{g} |\psi_j|^2 \psi_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Για τον προσδιορισμό της πιο πάνω εξίσωσης, έχουμε χρησιμοποιήσει την (οιωνεί) σχέση ορθογωνιότητας $\int dx \Phi_i \Phi_j \approx \delta_{ij}$, και κρατήσαμε μόνο τους όρους με χωρικά ολοκληρώματα κυματοσυναρτήσεων

πρώτων γειτόνων, ενώ έχουμε παραλήψει όρους ανάλογους με $\int dx \Phi_j^2 \Phi_{i\pm 1}^2$ και $\int dx \Phi_j^3 \Phi_{i\pm 1}$. Έτσι οι σταθερές K και E_j της εξίσωσης (8) δίνονται προσεγγιστικά από τις παρακάτω εκφωράσεις:

$$K \approx \int dx \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_{j\pm 1}}{\partial x} + \Phi_j V_{ext}(x) \Phi_{j\pm 1} \right], \quad (9)$$

$$E_j \approx \int dx \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right|^2 + |\Phi_j|^2 V_{ext}(x) \right], \quad (10)$$

όπου $\tilde{g} = g_{1D} \int dx \Phi_j^4$. Η εξίσωση (8) μπορεί εύκολα να γίνει αδιάστατη αν μετράμε μήκος, χρόνο και ενέργεια σε μονάδες, απόστασης του πλέγματος $a = \lambda/2$, $\omega_\perp^{-1} = \hbar/E_\perp$ και $E_\perp = 2E_R = \hbar^2/m\alpha$ (όπου E_R η ενέργεια ανάκρουσης), αντίστοιχα. Σε αυτές τις μονάδες, και με τη χρήση του μετασχηματισμού,

$$\psi_j \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{\tilde{g}}} \psi_j \exp \left[-i \left(\frac{E_j - 2K}{\hbar\omega_L} \right) t \right], \quad (11)$$

μπορούμε να εκφράσουμε την εξίσωση (8), ως εξής:

$$i\dot{\psi}_j = -\epsilon \Delta_2 \psi_j + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}^2 j^2 \psi_j + |\psi_j|^2 \psi_j, \quad (12)$$

όπου $\epsilon = K/E_L$ και $\tilde{\Omega} = \omega_x/\omega_L$, αντίστοιχα. Τυπικά, η DNLS [εξίσωση (12)] είναι μια παραλλαγή της εξίσωσης (5), αλλά υπάρχουν και ορισμένες διαφορές που προκύπτουν από την εξάρτηση του πλάτους της παγίδας και των συντελεστών των κινητικών όρων από την απόσταση του οπτικού πλέγματος α . Από φυσικής πλευράς, η (12) ισχύει για τις περιοχές που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες τιμές του α : αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι υποθέσεις για την εξαγωγή της (12) καθίστανται άκυρες για μικρές ή μεγάλες τιμές της απόστασης του πλέγματος. Παρ' όλα αυτά, μπορεί να διαπιστωθεί ότι υπάρχει μια ορισμένη περιοχή των τιμών του α (για δεδομένη συχνότητα της παγίδας Ω), όπου η εξίσωση (12) είναι ισοδύναμη με την (5) - άμεση διακριτοποίηση της εξίσωσης (3): χρησιμοποιώντας πειραματικά σχετικές παραμέτρους [30] για ένα συμπίκνωμα ρουβιδίου (^{87}Rb) παγιδευμένο σε αρμονικό δυναμικό με συχνότητες $\omega_x = 2\pi \times 10$ Hz και $\omega_\perp = 2\pi \times 100$ Hz, και με συνολικό αριθμό ατόμων $N \approx 2.000$, μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι ο λόγος $\tilde{\Omega}^2/K$ λαμβάνει τιμές στο διάστημα $0.001 \lesssim \tilde{\Omega}^2/K \lesssim 0.01$. Συνεπώς, για την σταθερή τιμή της κανμονικοποιημένης παγίδας $\Omega = 0.1$ (που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια), αν η απόσταση του πλέγματος παίρνει τιμές στο διάστημα $0.25 \lesssim \alpha \lesssim 0.6$, τότε οι εξισώσεις (5) και (12) γίνονται ισοδύναμες.

Έτσι, το μοντέλο της εξίσωσης (5) σχετίζεται με το συνεχές μοντέλο της εξίσωσης (3) (για $\alpha \rightarrow 0$), που περιγράφει τη δυναμική αρμονικά παγιδευμένων BECs ή τη δυναμική δεσμών σε κυματοδηγούς βαθμιαίου δείκτη διάθλασης, ενώ μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί - στο έντονα διακριτό όριο ($\alpha \lesssim 1$) - για να περιγράψει τη δυναμική συστοιχιών από BECs σε βαθιά οπτικά πλέγματα.

Θα πρέπει να σημειωθεί εν παρόδω ότι, στην ανάλυσή που ακολουθεί, καθώς ο αριθμός των ατόμων τείνει στο μηδέν, τα κβαντικά φαινόμενα (που έχουν μελετηθεί σε μια σειρά πρόσφατων εργασιών [31, 32, 33]) γίνονται σημαντικά. Σε μια τέτοια περίπτωση, η δυνατότητα εφαρμογής της προσέγγισης

μέσου-πεδίο γίνεται αμφίβολη. Παρ' όλα αυτά, ο στόχος μας εδώ είναι να χρησιμοποιήσουμε το συγκεκριμένο μοντέλο - ως ένα σχετικό μαθηματικό όριο - το οποίο μπορεί να διερευνηθεί για τον προσδιορισμό των μη γραμμικών καταστάσεων που προκύπτουν από τις γραμμικές, στην περιοχή όπου η περιγραφή μέσου πεδίου είναι κατάλληλη (δηλαδή, για αρκετά μεγάλο αριθμό ατόμων).

2.2 Γραμικοποίηση- Ανάλυση γραμμικής ευστάθειας

Παρακάτω, θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα σχετικά με την ευστάθεια των μη γραμμικών καταστάσεων της εξίσωσης (5). Στην πραγματικότητα, θα εφαρμόσουμε τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας, βάση των εξισώσεων BdG [2, 3] (στα πλαίσια των BECs). Ειδικότερα, εφόσον μια πραγματική, στάσιμη κατάσταση $\psi_j^{(0)}$, ευρεθεί μέσω ενός αλγορίθμου σταθερού σημείου (εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Newton-Raphson), θα θεωρήσουμε μικρές διαταραχές της κατάστασης, με τη μορφή:

$$\psi_j(t) = [\psi_j^{(0)} + (u_j e^{-i\omega t} + v_j^* e^{i\omega t})] e^{-i\mu t}, \quad (13)$$

όπου ο αστερίσκος δηλώνει το μιγαδικό συζυγή. Αντικαθιστώντας αυτό το ανσατζ στην εξίσωση (5), και γραμμικοποιώντας σε σχέση με τα u_j και v_j , παίρνουμε τις γραμμικές εξισώσεις ευστάθειας (BdG)

$$\left[\hat{H} - \mu + 2|\psi_j^{(0)}|^2 \right] u_j + (\psi_j^{(0)})^2 v_j = \omega u_j, \quad (14)$$

$$\left[\hat{H} - \mu + 2|\psi_j^{(0)}|^2 \right] v_j + (\psi_j^{(0)*})^2 u_j = -\omega v_j, \quad (15)$$

όπου ο μονο-ατομικός τελεστής $\hat{H}$ δίνεται από την έκφραση $\hat{H} = -(1/2\alpha^2)\Delta_2 + \frac{1}{2}(\Omega\alpha)^2$. Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να βρούμε τις ιδιοσυχνότητες $\omega \equiv \omega_r + i\omega_i$ και τα πλάτη u_j και v_j των τρόπων ταλάντωσης του συστήματος. Λόγω της Χαμιλτονιανής φύσης του συστήματος, αν η ω είναι μια ιδιοσυχνότητα του φάσματος Bogoliubov τότε είναι και οι $-\omega$, ω^* και $-\omega^*$. Είναι φανερό ότι μια σταθερή (ασταθής) ιδιοκατάσταση αντιστοιχεί σε $\omega_i = 0$ ($\omega_i \neq 0$).

Μια σημαντική ποσότητα που προκύπτει από την BdG ανάλυση είναι η *ενέργεια* που μεταφέρεται από την ιδιοκατάσταση με ιδιοσυχνότητα ω , που δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$E = \int dx (|u|^2 - |v|^2) \omega. \quad (16)$$

Το πρόσημο αυτής της ποσότητας, γνωστής και ως σημείο Krein [34], είναι μια τοπολογική ιδιότητα. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι, εάν δυο ιδιοσυχνότητες, ιδιοκαταστάσεων με αντίθετα πρόσημα ενέργειας (Krein), βρίσκονται σε συντονισμό τότε, κατά κανόνα, εμφανίζονται μιγαδικές συχνότητες στο φάσμα διέγερσης, δηλαδή, παρουσιάζεται μια δυναμική αστάθεια [34]. Για να αναλύσουμε ακόμη περισσότερο αυτή τη συμπεριφορά στο φάσμα, οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι ιδιοκαταστάσεις με μιγαδικές ή φανταστικές συχνότητες φέρουν μηδενική ενέργεια, ενώ οι *ανώμαλες καταστάσεις* - που σχετίζονται με την παρουσία των σκοτεινών σολιτονίων - έχουν αρνητική ενέργεια (βλ. [2]). Η παρουσία ανώμαλων ιδιοκαταστάσεων στο φάσμα διέγερσης είναι η άμεση υπογραφή μιας ενεργητικής αστάθειας ή, με άλλα λόγια, είναι μια απόδειξη ότι η στάσιμη κατάσταση στην οποία εφαρμόζεται η ανάλυση BdG, δεν είναι η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος.

Η παραπάνω ανάλυση θα χρησιμοποιηθεί στα Κεφάλαια 4 και 5 παρακάτω.

3 Το γραμμικό πρόβλημα

3.1 Ανάλυση του διακριτού ΓΑΤ

Ας ξεκινήσουμε την ανάλυση μας, εξετάζοντας πρώτα το γραμμικό ανάλογο της εξίσωσης (5) που προκύπτει με την αντικατάσταση $\psi_j \rightarrow \psi_j \exp(-iEt)$ (όπου E η ενέργεια), πιο συγκεκριμένα,

$$-\frac{1}{2\alpha^2}\Delta_2\psi_j + \frac{1}{2}\Omega^2(\alpha j)^2\psi_j = E\psi_j. \quad (17)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η διακριτή εκδοχή του προβλήματος ιδιοτιμών που περιγράφει έναν κβαντικό ΓΑΤ στο ένα πλέγμα. Το φάσμα της ενέργειας, καθώς και το προφίλ των σχετικών ιδιοκαταστάσεων, θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για την κατασκευή λύσεων (αριθμητικά) του πλήρους μη γραμμικού προβλήματος. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία της αναφοράς [24], είναι δυνατή η επίλυση του διακριτού προβλήματος ιδιοτιμών του ΓΑΤ, χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο (συνεχή) Χαμιλτονιανό τελεστή που δρα στην κυματοσυνάρτηση $\tilde{\Psi}(x, t)$ ως ακολούθως:

$$\hat{H}\tilde{\Psi} \equiv -A(e^{i\alpha\hat{p}} + e^{-i\alpha\hat{p}})\tilde{\Psi} + \frac{1}{2}\Omega^2 x^2 \tilde{\Psi} = E'\tilde{\Psi}, \quad (18)$$

όπου $\hat{p} = -i\partial/\partial x$ είναι ο τελεστής της ορμής, A η σταθερά **στενής δέσμευσης**, α τυχαί προς το παρών σταθερά, και E' η ενέργεια. Η εξίσωση (18), είναι ταυτόσημη με την εξίσωση (17) σε ένα διακριτοποιημένο χώρο θέσεων: πράγματι, καθώς το $\tilde{\Psi}(x, t) \rightarrow \psi_j(t)$, $x \rightarrow \alpha j$ και $V(x) \rightarrow \frac{1}{2}\Omega^2(\alpha j)^2$, ο τελεστής μετάθεσης $\exp(\pm i\alpha\hat{p})$ δρα στις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις ως $\exp(\pm i\alpha\hat{p})\psi_j = \psi_{j\pm 1}$ όπου τώρα η σταθερά α αντιστοιχεί στην απόσταση του πλέγματος. Στη συνέχεια, προσθέτοντας στις δύο πλευρές της εξίσωσης (18) τον όρο $2A\psi_j$, βρίσκουμε ότι

$$-A(\psi_{j+1} + \psi_{j-1} - 2\psi_j) + \frac{1}{2}\Omega^2(\alpha j)^2\psi_j = E\psi_j, \quad (19)$$

και μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα $A = 1/2\alpha^2$ και $E = E' + 2A$. Επομένως πρέπει να λύσουμε το συνεχές πρόβλημα ιδιοτιμών της εξίσωσης (18), περνώντας στο χώρο των ορμών (δηλ., $\hat{p} \equiv p$ και $\hat{x} \equiv i\partial/\partial p$) και γράφοντάς την ως μια εξίσωση τύπου Mathieu [24],

$$\frac{d^2\phi(v)}{dv^2} + [b - 2q \cos(2v)]\phi(v) = 0, \quad (20)$$

όπου

$$v = \frac{\alpha p}{2}, \quad q = -\frac{8A}{\Omega^2\alpha^2}, \quad b = \frac{8E'}{\Omega^2\alpha^2} \quad (21)$$

και $\phi(v)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $\tilde{\Psi}$. Το ενεργειακό φάσμα καθώς και οι λύσεις της εξίσωσης (20) είναι ήδη γνωστά (π.χ. [35]). Προβάλλοντας τις ανωτέρω συνεχές λύσεις στον χώρο Hilbert όπου $x/\alpha = n$ ($n = 1, 2, \dots$) παίρνουμε τις λύσεις της διακριτής εξίσωσης (18).

Οι λύσεις της εξίσωσης (20), δηλαδή,

$$\phi_n^{(even)}(v) = N_{e\text{ce}_{2n}}(v; q), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

$$\phi_n^{(odd)}(v) = N_{o\text{se}_{2n}}(v; q), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

καλούνται συναρτήσεις *Mathieu* και είναι περιοδικές με περίοδο π . Για διαφορετικές τιμές του q , αντιστοιχούν σε χαρακτηριστικές τιμές των b , που θα ονομάζουμε $\mathcal{A}_{2n}$ και $\mathcal{B}_{2n}$ για τις άρτιες και τις περιττές ιδιοσυναρτήσεις αντίστοιχα, για τις οποίες συνάγεται το ακόλουθο ενεργειακό φάσμα:

$$E_n^{(even)} = \frac{1}{8} \Omega^2 \alpha^2 \mathcal{A}_{2n}(q), \quad (24)$$

$$E_n^{(odd)} = \frac{1}{8} \Omega^2 \alpha^2 \mathcal{B}_{2n}(q). \quad (25)$$

Το ενεργειακό φάσμα έχει απλή μορφή τόσο στο συνεχές όριο που αντιστοιχεί σε $\alpha \rightarrow 0$, όσο και στο αντι-συνεχές που αντιστοιχεί σε $\alpha \rightarrow \infty$, και οι αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις για τα $\mathcal{A}_{2n}(q)$ και $\mathcal{B}_{2n}(q)$ υπάρχουν στην αναφορά [35]. Όπως είναι αναμενόμενο, στο συνεχές όριο, αναπαράγουμε το γνωστό ισαπέχων ενεργειακό φάσμα του ΓΑΤ με ενέργειες

$$E'_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

ενώ στο αντι-συνεχές όριο, το φάσμα γίνεται παραβολικό και έχει την μορφή

$$E'_n = \frac{1}{2} \Omega^2 \alpha^2 n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (27)$$

Τα ιδιοδιανύσματα στο χώρο των θέσεων λαμβάνονται μέσω μετασχηματισμού Fourier των αντίστοιχων συναρτήσεων *Mathieu* των εξισώσεων (22)-(23). Όπως φαίνεται και στην αναφορά [24], αυτές οι ιδιοσυναρτήσεις είναι παρόμοιες με τα πολυώνυμα *Hermite* και συμπίπτουν στο συνεχές όριο.

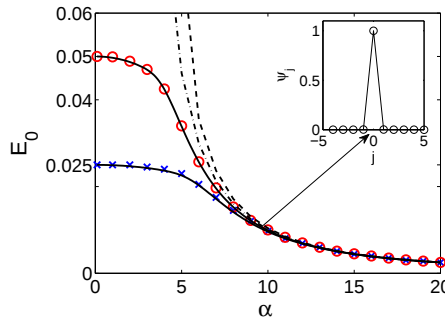
3.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Τα αναλυτικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν ανωτέρω μπορούν να συγκριθούν απευθείας με αριθμητικά. Μελετάμε πρώτα την θεμελιώδη ενεργειακή κατάσταση, για δύο διαφορετικές συχνότητες του ταλαντωτή, καλύπτοντας το σύνολο των επιτρεπόμενων τιμών του α , από το συνεχές όριο ($\alpha \rightarrow 0$) στο αντι-συνεχές ($\alpha \rightarrow \infty$). Η ενέργεια που δίνεται από την εξίσωση (24) έχει την εξής προσεγγιστική αναλυτική μορφή :

$$\mathcal{A}_0 = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 - \frac{29}{2304}q^6 + \dots, \quad (28)$$

για αρκετά μικρές τιμές του q .

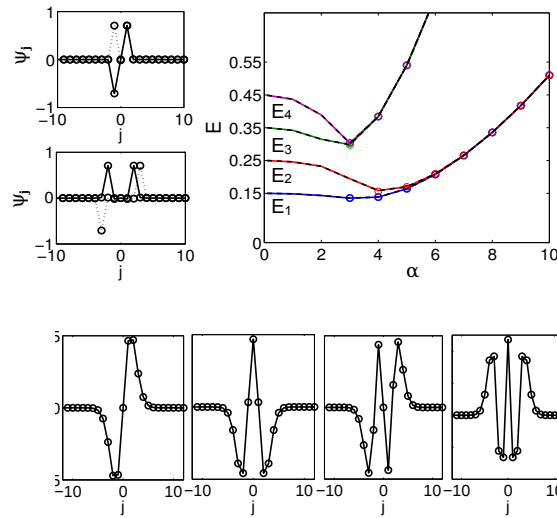
Στο Σχήμα 1 συγκρίνουμε την εξάρτηση της ενέργειας της θεμελιώδους κατάστασης σε σχέση με την απόσταση του πλέγματος α για δυο διαφορετικούς τρόπους: α) λύνοντας αριθμητικά το πρόβλημα



Σχήμα 1: Η ενέργεια E_0 της θεμελιώδους στάθμης του ΓΑΤ, συναρτήσει της απόστασης του πλέγματος α , για δύο διαφορετικές τιμές της συχνότητας, $\Omega = 0.1$ και $\Omega = 0.05$. Οι συνεχείς και διακεκομμένες γραμμές δείχνουν το φάσμα της ενέργειας, από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών του Γ.Α.Τ, ενώ οι (κόκκινοι) κύκλοι και οι (μπλε) σταυροί αντιστοιχούν στις λύσεις που λαμβάνονται από την εξίσωση Mathieu (20). Η διακεκομμένη και η διακεκομμένη-εστιγμένη γραμμή, δείχνουν το προσεγγιστικό αναλυτικό αποτέλεσμα των εξισώσεων (28). Το εσωτερικό πλαίσιο δείχνει το προφίλ της αντίστοιχης κυματοσυνάρτησης για $\alpha = 10$

ιδιοτιμών του Γ.Α.Τ, β) λύνοντας την εξίσωση Μαθιευ (20). Στο ίδιο σχήμα δείχνουμε και την προσεγγιστική αναλυτική λύση της εξίσωσης (24) όπου φαίνεται ότι είναι καλή προσέγγιση μόνο για αρκετά μεγάλο α - ή για μικρές τιμές της παραμέτρου q . Όπως ήταν αναμενόμενο, η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης στο συνεχές όριο $\alpha \rightarrow 0$, είναι ίση με $\Omega/2$, ενώ στο αντι-συνεχές όριο, $\alpha \rightarrow \infty$, η ενέργεια είναι ανεξάρτητη από την παγίδα [βλέπε εξίσωση (27)]. Το αποτέλεσμα στο αντι-συνεχές όριο, μπορεί να γίνει κατανοητό και από το χωρικό προφίλ της κυματοσυνάρτησης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Σε αυτό το όριο, το μόνο διεγερμένο σημείο του πλέγματος είναι το $j = 0$, το οποίο σύμφωνα με την εξίσωση (17), έχει ενέργεια $E = \alpha^{-2}$ άρα δεν εξαρτάται από την παγίδα και πηγαίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

Στη συνέχεια, μελετάμε το φάσμα για τις τέσσερις πρώτες διεγερμένες καταστάσεις. Το ισαπέχων φάσμα του ταλαντωτή, στο συνεχές όριο (βλέπε Σχήμα 2), γίνεται παραβολικό στη πλήρως διακριτή περιοχή. Στο αντι-συνεχές όριο παρατηρούμε ότι οι διεγερμένες καταστάσεις εκφυλίζονται ανά ζεύγος. Και πάλι το προφίλ των κυματοσυναρτήσεων εξηγεί αυτό το αποτέλεσμα: σε αυτό το όριο, $\epsilon \rightarrow 0$, όπως φαίνεται από την εξίσωση (17) η ενέργεια εξαρτάται αποκλειστικά από το δυναμικό που είναι τετραγωνικό. Όπως φαίνεται στο πάνω αριστερά πλαίσιο του Σχήματος 2 (όπου το προφίλ των τεσσάρων πρώτων διεγερμένων καταστάσεων φαίνεται για $\alpha = 10$), η ενέργεια που απαιτείται για να διεγερθεί, συμμετρικά ή αντι-συμμετρικά (σε σχέση με το κέντρο), το πρώτο γειτονικό σημείο, είναι ακριβώς η ίδια, λόγω της τετραγωνικής φύσης του δυναμικού. Από την άλλη πλευρά, στη διακριτή περιοχή, το προφίλ των κυματοσυναρτήσεων, χαρακτηρίζεται από τον αριθμό των κόμβων, δηλαδή, παρατηρούμε N -κόμβους για τη n -οστή διεγερμένη κατάσταση. Τα συναφή προφίλ, για τις τέσσερις πρώτες διεγερμένες καταστάσεις, παρουσιάζονται στο κάτω πλαίσιο του σχήματος 2 (για $\alpha = 1$, και την ίδια συχνότητα της παγίδας, $\Omega = 0.1$).



Σχήμα 2: Επάνω δεξιά πλαίσιο: Η ενέργεια για τις τέσσερις πρώτες διεγερμένες καταστάσεις, συναρτήσει της πλεγματικής απόστασης α , για συχνότητα παγίδας $\Omega = 0.1$. Οι συνεχείς γραμμές (μπλε, κόκκινο, πράσινο, ματζέντα) αντιστοιχούν στη 1η-, 2η-, 3η-και 4η-διεγερμένη κατάσταση, αντίστοιχα και δείχνουν την ενέργεια όπως δίνεται από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών του ΓΑΤ. Οι αντίστοιχες διακεκομμένες γραμμές είναι οι λύσεις που λαμβάνονται επιλύοντας την εξίσωση Ματθιευ (20). Τέλος οι κύκλοι δείχνουν το προσεγγιστικό αναλυτικό αποτέλεσμα της εξίσωσης (25). Επάνω αριστερά πλαίσιο: το χωρικό προφίλ της 1ης-, 2ης-, 3ης-και 4ης-διεγερμένης κατάστασης για $\alpha = 10$ (που αντιστοιχεί στο αντι-συνεχές όριο). Οι συνεχείς γραμμές απεικονίζουν τη 1η-(άνω) και 3η-(κάτω) διεγερμένη κατάσταση, ενώ οι διακεκομμένες γραμμές τη 2η-(άνω) και 4η-(κάτω) διεγερμένη κατάσταση, αντίστοιχα. Κάτω πλαίσιο:(από αριστερά προς τα δεξιά): χωρικό προφίλ της 1ης-, 2ης-, 3ης-και 4ης-διεγερμένης κατάστασης για $\alpha = 1$ (που αντιστοιχεί στη διακριτή περιοχή).

4 Λύσεις του μη-γραμμικού προβλήματος

4.1 Συνέχεια από το γραμμικό όριο

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την πλήρως μη-γραμμική περίπτωση. Στην ανάλυσή μας θεωρούμε αυθαίρετο αριθμό από $K + 2$ ταλαντωτές που καταλαμβάνουν ένα διάστημα $[-L, L]$ μήκους $2L$, και η μεταξύ τους απόσταση $a = \frac{2L}{K+1}$. Έτσι, οι ταλαντωτές καταλαμβάνουν τα σημεία $x_j = -L + ja$, $j = 0, 1, 2, \dots, K + 1$ από το διάστημα $[-L, L]$, που διακριτοποιείται ως

$$-L = x_0 < x_1 < \dots < x_{K+1} = L. \quad (29)$$

Για τη διακριτή κυματοσυνάρτηση σε κάθε σημείο x_j , $j = 0, \dots, K + 1$, της (29), χρησιμοποιούμε την πρότυπη συντόμευση $\psi(x_j) = \psi_j$. Πρώτα, χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $\Psi_j \rightarrow \psi_j \exp(-i\mu t)$ (όπου μ το χημικό δυναμικό) για τη μετατροπή της εξίσωσης (5) στην χρονοανεξάρτητη ομολογία της,

$$-\frac{1}{2a^2}\Delta_2\psi_j + \frac{1}{2}\Omega^2(\alpha j)^2\psi_j + |\psi_j|^2\psi_j = \mu\psi_j, \quad (30)$$

για $j = 1, \dots, K$, και υποθέτουμε ότι το κυματοσυναρτήσεις ικανοποιούν συνοριακές συνθήκες Dirichlet στα όρια $x_0 = -L$ και $x_{K+1} = L$, ήτοι:

$$\psi_0 = \psi_{K+1} = 0. \quad (31)$$

Στόχος μας είναι να χρησιμοποιήσουμε τις λύσεις του γραμμικού προβλήματος που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, προκειμένου να βρούμε κατάλληλες λύσεις στο μη-γραμμικό πρόβλημα. Η ανάλυσή μας ξεκινά με την απόδειξη ότι το ενεργειακό φάσμα του μη-γραμμικού προβλήματος, προκύπτει από το σχετικό φάσμα που βρέθηκε στην γραμμική περιοχή. Πριν προχωρήσουμε, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η εξίσωση (30), με τις συνοριακές συνθήκες (31), διαθέτει δύο διατηρούμενες ποσότητες: τη χαμιλτονιανή H (η ενέργεια του συστήματος) και τον αριθμό των ατόμων N , που αντίστοιχα δίνονται από τις σχέσεις:

$$H = \frac{1}{2}\alpha \sum_{j=1}^K \left[\frac{1}{a^2}|\psi_j - \psi_{j-1}|^2 + |\psi_j|^4 + \Omega^2(\alpha j)^2|\psi_j|^2 \right], \quad (32)$$

$$N = \alpha \sum_{j=1}^K |\psi_j|^2. \quad (33)$$

Παρατηρήστε ότι η παρουσία του συντελεστή α στους ορισμούς των H και N , δείχνει ότι στο όριο $\alpha \rightarrow 0$ οι εξισώσεις (32) και (33), αντιστοιχούν στην χαμιλτονιανή και τον αριθμό των ατόμων της συνεχούς GPE [εξίσωση (3)].

Η συνέχιση στη μη-γραμμική περιοχή από τις γραμμικές καταστάσεις (17), δηλαδή η διακλάδωση των λύσεων της εξίσωσης (30) από τις λύσεις του αντίστοιχου γραμμικού προβλήματος μπορεί να δικαιολογηθεί αναλυτικά με τη χρήση της καθολικής θεωρίας διακλαδώσεων [αναφορά [25] και [26]]. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα καθολικής διακλάδωσης του Rabinowitz (που υπάρχει στο [25] και στο [26]), τα οποία θα ανακαλέσουμε για λόγους πληρότητας:

Θεώρημα 1 Έστω ότι X χώρος Banach με νόρμα $\|\cdot\|_X$. Η απεικόνιση $\mathcal{F}(\mu, \cdot) : X \rightarrow X$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mu, \cdot) = \mu \mathcal{L} \cdot + \mathcal{H}(\mu, \cdot)$, όπου $\mathcal{L} : X \rightarrow X$ είναι συμπαγής γραμμική απεικόνιση και $\mathcal{H}(\mu, \cdot) : X \rightarrow X$ είναι συμπαγής και ικανοποιεί

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{H}(\mu, u)\|_X}{\|u\|_X} = 0. \quad (34)$$

Αν $\frac{1}{\lambda^*}$ είναι μια απλή ιδιοτιμή του $\mathcal{L}$, τότε η κλειστότητα του συνόλου

$$C = \{(\mu, u) \in \mathbb{R} \times X : (\mu, u) \text{ λύνει την } u - \mathcal{F}(\mu, u) = 0, u \neq 0\},$$

διαθέτει ένα μέγιστο συνεχές (δηλαδή συνδεδεμένο κλάδο) λύσεων C , που διακλαδώνεται από το $(\lambda^*, 0)$ και το σύνολο C είτε:

- (i) συναντάει το άπειρο όταν $\mathbb{R} \times X$ ή,
- (ii) συναντάει το $u = 0$ σε ένα σημείο $(\hat{\mu}, 0)$ όπου $\hat{\mu} \neq \lambda^*$ και $\frac{1}{\hat{\mu}}$ είναι ιδιοτιμή του $\mathcal{L}$.

Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1, χρειαζόμαστε κάποια προεργασία, προκειμένου να ξαναγράψουμε την (30) στη μορφή $\Psi - \mu \mathcal{L}(\psi) + \mathcal{H}(\mu, \psi) = 0$ που χρειάζεται για το θεώρημα. Ως πρώτο βήμα, θα προσδιορίσουμε (και θα συζητήσουμε) τις ιδιότητες του γραμμικού τελεστή $\mathcal{L}$, μέσω του γραμμικού προβλήματος ιδιοτιμών (17)-(31) για τον γραμμικό τελεστή

$$\mathcal{T}(\psi)_j = -\frac{1}{2\alpha^2} \Delta_2 \psi_j + \frac{1}{2} \Omega^2 (\alpha j)^2 \psi_j, \quad (35)$$

$j = 1, \dots, K$, με συνοριακές συνθήκες Dirichlet (31). Θα συζητήσουμε, επίσης, ορισμένες ιδιότητες των ιδιοκαταστάσεων της (35) που σχετίζονται με τον αριθμό των αλλαγών προσίμου, των διακριτών ιδιοσυναρτήσεων. Οι ιδιότητες αυτές θα είναι χρήσιμες για τη διάκριση μεταξύ των δυνατοτήτων (i) και (ii) που περιγράφονται από το Θεώρημα 1.

Ως δεύτερο βήμα, θα καθοριστεί ο μη-γραμμικός τελεστής $\mathcal{H}$, μέσω της μη-γραμμικότητας της (30). Ο τελεστής (35) είναι ισχυρά θετικός και αυτοσυζυγής στο χώρο Hilbert

$$Q = \{\psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{j=K+1} \in \mathbb{R}^{K+2} : \Psi_0 = \psi_{K+1} = 0\},$$

και διαθέτει K απλές ιδιοτιμές,

$$0 < E_0 < E_2 < \dots < E_{K-1}. \quad (36)$$

Επιπλέον, το θεώρημα Krein-Rutman ([36],[26]), συνεπάγεται ότι η κύρια ιδιοκατάσταση που συνδέεται με την κύρια ιδιοτιμή E_0 είναι θετική με την έννοια ότι το $\psi_j^0 \geq 0$ για όλα τα $j = 0, \dots, K+1$, και το ψ^0 έχει τουλάχιστον μια θετική συνιστώσα και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (31).

Από την άλλη, το πρόβλημα ιδιοτιμών για τον τελεστή (35) με οριακές συνθήκες (31), είναι το διακριτό ανάλογο του προβλήματος Sturm-Liouville για τον ΓΑΤ

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{1}{2}\Omega^2 x^2 \psi(x) = \lambda\psi, \quad -L < x < L \quad (37)$$

$$\psi(-L) = \psi(L) = 0, \quad (38)$$

για το οποίο ισχύει το κλασσικό θεώρημα Sturm-Liouville [37]. Για παράδειγμα, για τις (37)-(38) υπάρχει μια αριθμήσιμη ακολουθία ιδιοτιμών $\lambda_0 < \lambda_2 < \dots$, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$, και η κάθε ιδιοσυνάρτηση $\psi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, έχει ακριβώς n μηδενικά (κομβικά σημεία) στο διάστημα $(-L, L)$. Συνεχίζοντας τη συζήτηση, οι διακριτές ιδιοκαταστάσεις ψ^n , $n = 0, 1, \dots, K-1$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές (36) περιβάλλουν τις συνεχείς ιδιοσυναρτήσεις $U_0(x)$, $n = 0, 1, \dots, K$, και έχουν ακριβώς n κομβικά σημεία, $n = 0, 1, \dots, K-1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ η παρεμβολή αυτή και ο αριθμός των κόμβων των διακριτών ιδιοσυναρτήσεων της (35) έχουν περιγραφεί στις αναφορές [24, 38]. Σύμφωνα με αυτές τις παρατηρήσεις, για κάθε $n = 0, \dots, K-1$, μπορούμε να ορίσουμε τα ακόλουθα σύνολα στο X ,

$$S_n := \{\psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{j=K+1} \in \mathbb{R}^{K+2} : \psi_0 = \psi_{K+1} = 0, \text{ και έχει ακριβώς } n \text{ μηδενικά}\}. \quad (39)$$

Τα σύνολα S_n είναι ανοικτά, καθώς μια μικρή διαταραχή του $\psi \in S_n$ οδηγεί σε μια μικρή διαταραχή στις συντεταγμένες του.

Για να ολοκληρώσουμε την προεργασία, γράφουμε το μη-γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών (30) στη μορφή μιας εξίσωσης τελεστών στον χώρο X , ως εξής:

$$\mathcal{T}(\psi) - \mu(\psi) + \mathcal{F}(\psi) = 0, \quad \psi \in X, \quad (40)$$

όπου $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ είναι ο μη-γραμμικός τελεστής

$$\mathcal{F}(\psi)_j = |\psi_j|^2 \psi_j.$$

Ο γραμμικός τελεστής $\mathcal{T} : X \rightarrow X$ είναι αναστρέψιμος. Ο ανάστροφός του $\mathcal{T}^{-1} : X \rightarrow X$ είναι επίσης συμμετρικός και προκύπτει εύκολα ότι τα $\nu_n := \frac{1}{E_n}$, $n = 0, 1, \dots, K-1$, είναι επίσης απλές ιδιοτιμές του $\mathcal{T} : X \rightarrow X$. Μπορούμε ακόμα να γράψουμε την εξίσωση (40) στην μορφή:

$$\psi - \mu \mathcal{T}^{-1}(\psi) + \mathcal{T}^{-1} \mathcal{F}(\psi) = 0 \quad (41)$$

Η εξίσωση (41) είναι στην πραγματικότητα με τη μορφή που απαιτεί το Θεώρημα 1

$$\psi - \mu \mathcal{L}(\psi) + \mathcal{H}(\psi) = 0, \quad (42)$$

όπου ο γραμμικός τελεστής $\mathcal{L} := \mathcal{T}^{-1} : X \rightarrow X$ και ο μη-γραμμικός τελεστής $\mathcal{H} := \mathcal{T}^{-1} \mathcal{F} : X \rightarrow X$ είναι συμπαγείς, δεδομένου ότι δρουν στον πεπερασμένο διαστατικά χώρο X . Η απεικόνιση $\mathcal{F}$ ορίζεται από την κυβική μη-γραμμικότητα και, ως εκ τούτου, δεν είναι δύσκολο να εξακριβωθεί ότι ο $\mathcal{H}$ πληροί τον όρο (34) του Θεωρήματος 1. Ως εκ τούτου, όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1 ικανοποιούνται, δικαιολογώντας το γεγονός ότι $(E_n, 0)$, $n = 0, 1, \dots, K-1$ είναι ένα σημείο διακλάδωσης για το πρόβλημα (30). Μπορούμε να συνοψίσουμε ως εξής:

Πρόταση 1 Για κάθε $\alpha > 0$, υπάρχει ένα μέγιστο συνεχές (δηλαδή συνδεδεμένος κλάδος) λύσεων C_{E_n} της (30), $n = 0, 1, \dots, K - 1$, που διακλαδώνεται από την $(E_n, 0)$ και το C_{E_n} είτε:

- (i) συναντάει το άπειρο στον $\mathbb{R} \times X$, ή
- (ii) συναντάει το $\psi = 0$ σε κάποιο σημείο $(\hat{\mu}, 0)$ όπου $\hat{\mu} \neq E_n$ και $\frac{1}{\hat{\mu}}$ είναι ιδιοτιμή του $\mathcal{L}$.

Συνεχίζουμε συζητώντας την κοιλότητα των κλάδων C_{E_n} . Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιοκαταστάσεις Ψ^n της εξίσωσης (;;) που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές E_n , το τοπικό θεώρημα διακλάδωσης και το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης [[36]] εγγυάται ότι ο κλάδος C_{E_n} μπορεί να περιγραφεί τοπικά από την C^1 καμπύλη

$$(\mu, \psi) : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \times X,$$

τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \mu(0) &= E_n, \quad \chi(0) = 0, \\ (\mu(s), \psi(s)) &= (\mu(s), s(\psi^n + \chi(s))), \quad |s| < \delta. \end{aligned} \quad (43)$$

Επιπλέον, υπάρχει μια γειτονιά του $(E_n, 0)$, έτσι ώστε τα μηδενικά της εξίσωσης (ρεφ βιβλίου) βρίσκεται σε αυτή την καμπύλη, ή είναι της μορφής $(E_n, 0)$.

Πρόταση 2 ;Εστω η τοπική αναπαράσταση (43) του κλάδου C_{E_n} . Τότε, $\mu'(0) = 0$, $\mu''(0) > 0$ και ο κλάδος έχει (τοπικά) τα κοίλα προς τα πάνω.

Απόδειξη: Εισάγουμε την έκφραση $((\mu(s), \psi(s)) = (\mu(s), s\psi^n + s\chi(s))$ της εξίσωσης (30) και διαιρούμε με s . Στη συνέχεια παίρνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} \mu(s)(\psi_j^n + \chi_j(s)) &= -\frac{1}{2\alpha^2} \Delta_2(\psi_j^n + \chi_j(s)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega^2 (\alpha j)^2 (\psi_j^n + \chi_j(s)) \\ &\quad + s^2 |\psi_j^n + \chi_j(s)|^2 (\psi_j^n + \chi_j(s)). \end{aligned} \quad (44)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την εξίσωση (44) ως προς s και παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\alpha^2} \Delta_2 \chi_j'(0) &+ \frac{1}{2} \Omega^2 (\alpha j)^2 \chi_j'(0) \\ &= \mu'(0) \psi_j^n + E_n \chi_j'(0). \end{aligned} \quad (45)$$

όπου αν θέσουμε $s = 0$ στην εξίσωση (45) και χρησιμοποιήσουμε την (43) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\alpha^2} \Delta_2 \chi_j'(0) &+ \frac{1}{2} \Omega^2 (\alpha j)^2 \chi_j'(0) \\ &= \mu'(0) \psi_j^n + E_n \chi_j'(0). \end{aligned} \quad (46)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (46) με ψ^n και αθροίζοντας κατά μέρη καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{j=0}^{K+1} \Delta_2 \chi'_j(0) \psi_j^n + \frac{1}{2} \alpha^2 \Omega^2 \sum_{j=0}^{K+1} j^2 \chi'_j(0) \psi_j^n \\
& = - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{j=0}^{K+1} \chi'_j(0) \Delta_2 \psi_j^n + \frac{1}{2} \alpha^2 \Omega^2 \sum_{j=0}^{K+1} \chi'_j(0) j^2 \psi_j^n \\
& = \sum_{j=0}^{K+1} \mu'(0) |\psi_j^n|^2 + \sum_{j=0}^{K+1} \chi'(0)_j E_n \psi_j^n
\end{aligned} \tag{47}$$

Επειδή E_n και ψ_j^n λύνουν την εξίσωση (17), καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{j=0}^{K+1} \chi'_j(0) \Delta_2 \psi_j^n + \frac{1}{2} \alpha^2 \Omega^2 \sum_{j=0}^{K+1} \chi'_j(0) j^2 \psi_j^n \\
& = \sum_{j=0}^{K+1} \chi'(0)_j E_n \psi_j^n.
\end{aligned}$$

Έτσι, από την (47) θα πάρουμε

$$\sum_{j=0}^{K+1} \mu'(0) |\psi_j^n|^2 = 0,$$

που συνεπάγεται ότι $\mu'(0) = 0$. Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας την (45) ως προς s , και θέτοντας $s = 0$, κανείς πέρνει την εξίσωση

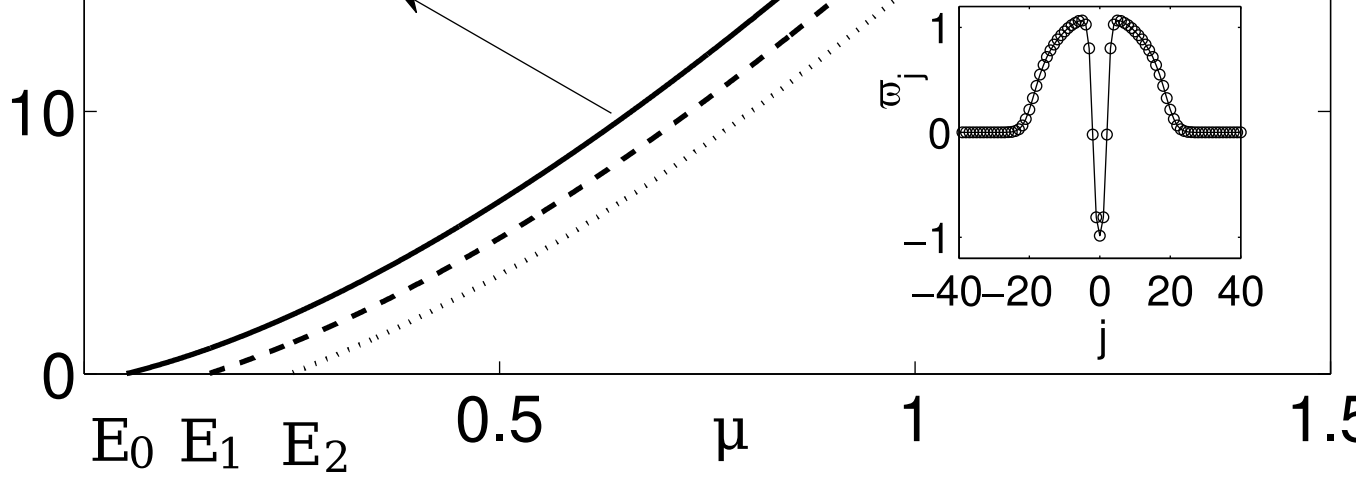
$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\alpha^2} \Delta \chi''_j(0) + \frac{1}{2} \Omega^2 (\alpha j)^2 \chi''_j(0) + 2 |\psi_j^n|^2 \psi_j^n \\
& = \mu''(0) \psi_j^n + E_n \chi''_j(0).
\end{aligned}$$

Κάνοντας ότι και πιο, αυτή τη φορά καταλήγουμε στην

$$2 \sum_{j=0}^{K+1} |\psi_j^n|^4 = \mu''(0) \sum_{j=0}^{K+1} |\psi_j^n|^2.$$

Επομένως, $\mu''(0) > 0$. $\diamond$ Η πρόταση 2, πράγματι αναφέρει ότι, τουλάχιστον σε τοπικό επίπεδο, η γραφική παράσταση της C^1 συνάρτησης $\mu(N)$ (C^1 καμπύλη) έχει τα κοίλα προς τα πάνω και είναι μονότονη, με αποτέλεσμα να είναι τοπικά μη-αντιστρέψιμη. Με την εναλλαγή των αξόνων και σχεδιάζοντας το διάγραμμα του N ως συνάρτηση του μ , παίρνουμε ότι το $N(\mu)$ έχει σε τοπικό επίπεδο την ίδια συμπεριφορά των κοίλων ([36]), όπως αναφέρεται στην Πρόταση 2.

Μένει να αποδειχθεί ότι οι κλάδοι C_{E_n} είναι καθολικοί, δηλαδή, ότι η επιλογή (ii) του Θεωρήματος 1, αποκλείεται να ισχύει.



Σχήμα 3: Ο αριθμός των ατόμων N σαν συνάρτηση του χημικού δυναμικού μ , (για τιμή της σταθεράς του πλέγματος $\alpha = 0.8$ και για $\Omega = 0.1$) για τις πρώτες τρεις καταστάσεις: την βασική κατάσταση (συνεχής), τη πρώτη διεγερμένη (εστιγμένη) και την δεύτερη διεγερμένη (εστιγμένη). Ο κάθε κλάδος ξεκινά στο γραμμικό όριο από την αντίστοιχη ενέργεια του ΓΑΤ. Τα εσωτερικά πλαίσια δείχνουν τα αντίστοιχα χωρικά προφίλ των μη-γραμμικών καταστάσεων για $\mu = 1.2$.

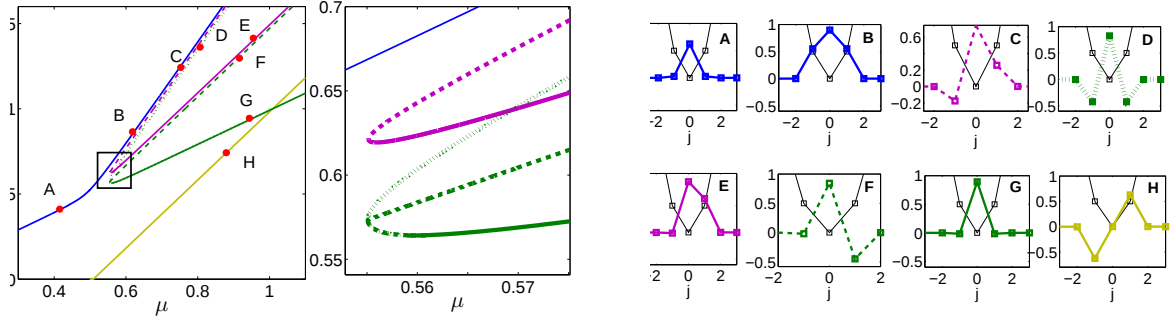
Θεώρημα 2 Για κάθε $\alpha > 0$, το μέγιστο συνεχές (συνδεδεμένος κλάδος) των λύσεων C_{E_n} της εξίσωσης (30) που διακλαδώνεται από το $(E_n, 0)$ συναντάει το άπειρο στο $\mathbb{R}$, και έχει τα κοίλα προς τα πάνω.

Απόδειξη: (α) Υπενθυμίζουμε ότι η όποια λύση (μ, ψ) κοντά στο $(E_n, 0)$ έχει τον ίδιο αριθμό κομβικών σημείων όσα και η ιδιοκατάσταση ψ^n που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή E_n . Αυτό οφείλεται στην C^1 -ιδιότητα του κλάδου και στην αναπαράσταση της λύσης ψ σαν $\psi_j(s) = s\psi_j^n + s\chi_j(s)$. Για παράδειγμα, εφόσον η ψ^n ανήκει στο σύνολο S_n που αρίζεται στην (39), συνεπάγεται ότι για $|s| < \delta$, $\psi \in S_n$. (β) Τώρα για όλα τα $(\mu, \psi) \in C_{E_n}$ και κάθε $n = 0, 1, \dots, K-1$ θεωρούμε μια συνάρτηση δείκτη

$$f(\mu, \psi) = \begin{cases} 1, & \alpha \ \psi \in S_n, \\ 0, & \alpha \text{χω} \ \psi = 0, \ \mu = E_m, \ m \neq n. \end{cases} \quad (48)$$

έτσι ώστε το $f(\mu, \psi) = 0$ όταν ο κλάδος C_{E_n} συναντάει τον άξονα $(\mu, 0)$ σε μια άλλη ιδιοτιμή $E_m \neq E_n$. Παρατηρήστε ότι η f είναι καλά ορισμένη λόγω των δυο δυνατοτήτων του Θεωρήματος 1. Από το (α) έχουμε ότι αν το (μ, ψ) βρίσκεται σε μια μικρή γειτονική περιοχή του $(E_n, 0)$, τότε $f(\mu, \psi) = 1$. Επομένως η συνάρτηση f είναι σταθερή (και ίση με 1) σε αυτή την μικρή περιοχή του $(E_n, 0)$, και δεν μπορεί να αλλάξει τιμή σε αυτή τη περιοχή, δηλαδή η, f είναι τοπικά σταθερή. Το σύνολο S_n είναι ανοιχτό, πράγμα που σημαίνει ότι μικρές διαταραχές του $\psi \in S_n$ παραμένουν στο S_n , και η συνάρτηση f είναι τοπικά σταθερή στο συνδεδεμένο σύνολο C_{E_n} . Τα δυο αυτά στοιχεία προϋποθέτουν σαφώς ότι η f είναι συνεχής. Επομένως η, $f(C_{E_n})$ πρέπει να είναι συνδεδεμένη, αφού η εικόνα ενός συνδεδεμένου συνόλου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης πρέπει να είναι συνδεδεμένη. Παρόλα αυτά η, f έχει ακέραια τιμή, και οτ γεγονός ότι η $f(C_{E_n})$ είναι συνδεδεμένη, προϋποθέτει ότι η f πρέπει να είναι σταθερή, $f = 1$, για όλα τα $(\mu, \psi) \in C_{E_n}$. Επομένως, το C_{E_n} δεν μπορεί να εμπεριέχει το $(E_m, 0)$ με $E_m \neq E_n$ και το C_{E_n} πρέπει να είναι μη φραγμένο.

Όσον αφορά τα κοίλα, λόγω της Πρότασης 2, κάθε κλάδος C_{E_n} έχει τα κοίλα προς τα πάνω τουλάχιστον για $|s| < \delta$. Για να αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει σε καθολικό επίπεδο, ας υποθέσουμε την αντίφαση, ότι ο κλάδος C_{E_n} έχει τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο. Στη συνέχεια, λόγω της C^1 -ιδιότητας του, και δεδομένου ότι ο κλάδος είναι συνδεδεμένος και μη φραγμένος, προκύπτει ότι ο C_{E_n} θα πρέπει να διαθέτει ένα τοπικό ελάχιστο. Ωστόσο, όπως φαίνεται στο θεώρημα 3 στο



Σχήμα 4: Πάνω αριστερά πλαίσιο: Ο κανονικοποιημένος αριθμός ατόμων N/α σαν συνάρτηση του χημικού δυναμικού μ , για $\alpha = 10$, δηλαδή στο αντι-συνεχές όριο. Το εσωτερικό πλαίσιο υποδεικνύει την περιοχή που φαίνεται στο μεσαίο πλαίσιο μεγεθυμένη. Τα γραμμάτια A,B,...,H αναφέρονται στα σημεία του διαγράμματος για τα οποία η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση φαίνεται στο δεξιά πλαίσιο. Οι ευσταθείς και ασταθείς καταστάσεις συμβολίζονται σε όλα τα πλαίσια με συνεχείς και διακεκομμένες ή εστιγμένες γραμμές αντίστοιχα.

Παράρτημα, ένα τέτοιο ελάχιστο (που μπορεί να υπάρχει για κάποιο μ), υπάρχει στην περίπτωση της εξίσωσης DNLS (5) σε πλέγμα μεγαλύτερης διάστασης $\mathbb{Z}^N$, $N \geq 1$, με μη-γραμμικότητα της μορφής, $F(z) = |z|^{2\sigma} z$, μόνο στην περίπτωση $\sigma \geq \frac{2}{N}$. Ως εκ τούτου ένα τέτοιο ελάχιστο σε περίπτωση του μονοδιάστατου (1D) πλέγματος μπορεί να υπάρξει μόνο όταν $\sigma \geq 2$, που αποκλείεται για την χρωνοανεξάρτητη DNLS (Ρεφερχ3) με την κυβική μη-γραμμικότητα όπου $\sigma = 1$. $\diamond$. Έχουμε αποδείξει αυστηρά ότι μια μη-γραμμική κατάσταση της εξίσωσης (5) μπορεί να δημιουργηθεί από τη συνέχιση γραμμικών καταστάσεων στο μ . Τα αποτελέσματα της ανάλυσής μας μπορούν να συγκριθούν απευθείας με τα αριθμητικά: πράγματι, με τη χρήση της μεθόδου Newton-Raphson, μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιες μη-γραμμικές καταστάσεις που αρχίζουν από τις αντίστοιχες γραμμικές τους. Στο Σχήμα 3, δίνεται ο αριθμός των ατόμων $N = \sum_j |\psi_j|^2$ για τις χαμηλότερες καταστάσεις, και συγκεκριμένα για τη βασική κατάσταση (στερεά γραμμή), τη πρώτη διεγερμένη κατάσταση (διακεκομμένη γραμμή) και τη δεύτερη διεγερμένη κατάσταση (εστιγμένη γραμμή), ως συνάρτηση του χημικού δυναμικού μ . Οι αντίστοιχοι κλάδοι αρχίζουν από το γραμμικό όριο ($N = 0$), όπου μ ισούται με την ενέργεια της αντίστοιχης γραμμικής κατάστασης, και έχουν τα κοίλα προς τα πάνω, σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάσαμε ανωτέρω. Τα ένθετά του σχατος 3 δείχνουν το προφίλ αυτών των μη-γραμμικών καταστάσεων για $\mu = 1, 2$. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, όπως και στην συνεχή περίπτωση [6, 5, 39, 27], βαθιά στο μη-γραμμικό όριο, οι διεγερμένες μη-γραμμικές καταστάσεις μετατρέπονται σε μια αλυσίδα διακριτών σκούρων σολιτονίων: η πρώτη διεγερμένη κατάσταση αντιστοιχεί σε ένα σκοτεινό σολιτόνιο (ένας κόμβος στο προφίλ- βλέπε ένθετο στη μέση του Σχήματος 3), η δεύτερη διεγερμένη κατάσταση αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι από σκοτεινά σολιτόνια (δύο κόμβοι στο προφίλ - βλέπε το δεξιό ένθετο του Σχήματος 3), και ούτω καθεξής.

4.2 Συνέχεια από το αντι-συνεχές όριο

Πριν συζητήσουμε λεπτομερώς τη σταθερότητα των γραμμικών μελών με τη μορφή διακριτών σκοτεινών σολιτονίων, στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την ύπαρξη και την ευστάθεια των μη-γραμμικών καταστάσεων κοντά στο A^- όριο προκειμένου να εκτιμήσουμε την αναδυόμενη δομή διακλάδωσης.

Κοντά στο αντι-συνεχές όριο, που αντιστοιχεί σε απόσταση του πλέγματος $\alpha \rightarrow \infty$, είναι εύκολο να βρεθούν λύσεις της εξίσωσης (ρεφ EX3) στην παρακάτω μορφή:

$$\psi_j = \exp(i\theta_j) \sqrt{\mu - \frac{1}{2}\Omega^2(\alpha j)^2}, \quad (49)$$

όπου θ_j δηλώνει την φάση. Η πυκνότητα $|\psi_j|^2$ της παραπάνω λύσης μοιάζει με το προφίλ πυκνότητας που λαμβάνει κανείς, στο όριο Τηρομασ-Φερμι [2], από τη συνεχή εξίσωση ΓΠΕ (3). Έτσι, όλες οι λύσεις για οποιοδήποτε αριθμό n διεγερμένων σημείων μπορεί να κατασκευαστεί σύμφωνα με την εξίσωση (49). Μπορεί κανείς να βρει την αναλυτική έκφραση για το χημικό δυναμικό σε σχέση με τον αριθμό των ατόμων για κάθε τέτοια διάταξη n διεγερμένων σημείων: πράγματι, με τη χρήση της (33) και τις λύσεις (49), ο κανονικοποιημένος αριθμός ατόμων N/α έχει ως εξής:

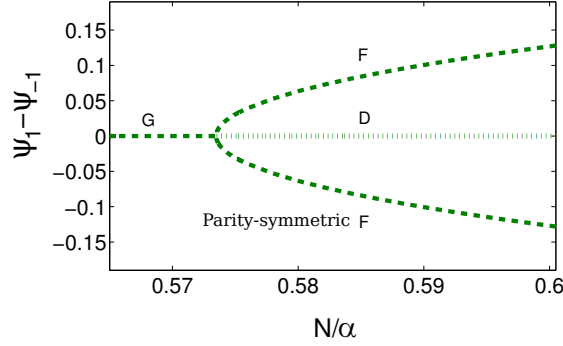
$$N/\alpha = n\mu - \sum_j \Omega^2(\alpha j)^2, \quad (50)$$

όταν το άθροισμα τρέχει πάνω από τα διεγερμένα σημεία. Από το παραπάνω αποτελέσματα, μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι η κλίση $\eta \equiv \partial(N/\alpha)/\partial\mu = n$ (για καθορισμένο n) δεν εξαρτάται από το j - δηλαδή, ποια συγκεκριμένα σημεία είναι διεγερμένα - αλλά μόνο από τον αριθμό των τους. Στα αριστερά του Σχήματος 4, φαίνεται η εξάρτηση τωου N/α από το χημικό δυναμικό μ , για καταστάσεις που έχουν έως και τρία διεγερμένα σημεία. Σημειώστε ότι σε αυτό το σχήμα έχουμε χρησιμοποιήσει την τιμή $\alpha = 10$, αλλά έχουμε ελέγξει ότι τα αποτελέσματα είναι ποιοτικά παρόμοια και για μεγαλύτερες τιμές του διαστήματος του πλέγματος. Όπως παρατηρείται στο σχήμα, το N/α εξαρτάται γραμμικά από το μ κοντά στο AC όριο, σε συμφωνία με την αναλυτική πρόβλεψη της εξίσωσης (50). Σημειώστε ότι η τελευταία, αυστηρά ομιλούντες, ισχύει μόνο στο όριο των $\alpha \rightarrow \infty$, αλλά η γραμμική εξάρτηση του N/α για μ παραμένει και για την επιλεγείσα πεπερασμένη τιμή του α , εκτός από κάποια κριμα σημεία που αλλάζει απότομα η κλίση και θα εξηγήσουμε παρακάτω. Ας περιγράψουμε το αποτέλεσμα του Σχήματος 4 με περισσότερες λεπτομέρειες. Ξεκινάμε με το κλάδο (μπλε συνεχή γραμμή), που αντιστοιχεί στην απλούστερη δυνατή διαμόρφωση, με μόνο το κεντρικό σημείο ($j = 0$) διεγερμένο. Ένα παράδειγμα μιας κατάστασης αυτού του κλάδου εμφανίζεται στο δεξιο κομμάτι του σχήματος 4 (κατάσταση A, όπου το 'A' πάνω αριστερά του γραφήματος υποδεικνύει την αντίστοιχη τιμή του N/α και μ . παρόμοια σημειογραφία χρησιμοποιείται για τους άλλους κλάδους παρακάτω). Ο κλάδος αυτός ξεκινά από την αρχή των αξόνων, με κλίση $\eta = 1$, αλλά για τιμές του χημικού δυναμικού $\mu > \mu_c^{(1)} \equiv \frac{1}{2}\Omega^2(\alpha j)^2 = 0.5$ (για $j = \pm 1$) αλλάζει κλίση, δηλαδή $\eta = 3$, καθώς άλλα δυο σημεία διεγείρονται. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας κατάστασης που ανήκει σε αυτόν τον κλάδο για $\mu > \mu_{c1}$ είναι η κατάσταση B (δεξιό κομμάτι του σχήματος 4). Παρατηρήστε ότι περαιτέρω αύξηση του μ

οδηγεί σε μια παρόμοια κατάσταση για υψηλότερες τιμές του j (δεν απεικονίζεται), δηλαδή, αυτός ο κλάδος αλλάζει κλίση σε κάποιες χαρακτηριστικές τιμές του χημικού δυναμικού $\mu_c^{(m)} \equiv \frac{1}{2}\Omega^2(\alpha j)^2$ (για $j = \pm m$), όσο μεγαλώνει ο αριθμός των διεγερμένων σημείων. Αυτός ο κλάδος (θεμελιώδης) λύσεων βρίσκεται να είναι σταθερός καθ' όλη τη συνέχισή στα μ . Ένας άλλος κλάδος, με κλίση $\eta = 3$, και με τα τρία διεγερμένα σημεία που χαρακτηρίζεται όμως από ασύμμετρη διάταξη (κατάσταση C στο σχήμα 4), υπάρχει και για τιμές του N/α μικρότερες από αυτές που αφορούν το (μπλε) κλάδο B . Οι καταστάσεις αυτού του κλάδου, η οποίες απεικονίζονται με διακεκομμένη μοβ καμπύλη, είναι ασταθής και τα αντίστοιχα φάσματα διέγερσης χαρακτηρίζονται από ένα ζευγάρι φανταστικών ιδιοτιμών. Ο κλάδος αυτός συνυπάρχει και με έναν άλλο, με δύο διεγερμένα σημεία, δηλαδή τον κλάδο E (απεικονίζεται με συνεχή μοβ καμπύλη), η οποία έχει κλίση $\eta = 2$. Οι καταστάσεις που ανήκουν σε αυτο το κλάδο είναι ευσταθείς. (βλέπε π.χ., το παράδειγμα E στα δεξιά του Σχήματος 4). Και οι δύο κλάδοι, C και E , συνεχίζουν (φθίνοντας του N και μ), μέχρι μια ορισμένη τιμή του χημικού δυναμικού, $\mu = 0,555$, όπου συγκρούονται και καταστρέφονται από μια διακλάδωση σαγματικού-κέντρου. Σημειώστε ότι υπάρχει ακόμα ένας κλάδος με κλίση $\eta = 2$, ο (κίτρινος) κλάδος H , ο οποίος ξεκινά από το γραμμικό όριο (σε $\mu = 0.5$), και παραμένει ευσταθείς, τουλάχιστον μέχρι τα $\mu = 1, 2$, όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Οι καταστάσεις αυτού του κλάδου είναι αντι-συμμετρικές -όπως φαίνεται στο το παράδειγμα ζH στα δεξιά του σχήματος 4.

Μπορούμε τώρα να επικεντρωθούμε σε έναν άλλο κλάδο, με κλίση $\eta = 1$ (με το σημείο $j = 0$ διεγερμένο), ο οποίος υπάρχει για τιμές του N/α μικρότερες από εκείνες που αφορούν τον (μπλε) κλάδο A . Ένα παράδειγμα μιας κατάστασης που ανήκουν σε αυτή (πράσινη) υποκατάσταση κατάσταση Γ - βλ. τρίτη κάτω πάνελ του σχ. ρεφ. ενεργήσατομς. Όσο μειώνεται το μ , οι καταστάσεις που ανήκουν σε αυτόν τον κλάδο είναι σταθερές μέχρι και την τιμή $\mu = 0.557$: στο σημείο αυτό, η κλίση η αλλάζει πρόσημο, δηλαδή $\eta < 0$, και ο κλάδος G γίνεται ασταθής, όπως επίσης προβλέπεται από το γνωστό Vakhitov-Kolokolov (VK) κριτήριο [40]. Σημειώστε ότι το φάσμα διέγερσης των καταστάσεων που ανήκουν στο κλάδο G για $\mu < 0,557$ χαρακτηρίζεται από ένα ζευγάρι φανταστικών ιδιοσυχνοτήτων.

Στη συνέχεια, η μείωση των μ (και αύξηση του N/α) μέχρι το σημείο $\mu = 0.55$ οδηγεί σε μια διακλάδωση τύπου 'διχάλας', αν και αυτό είναι λιγότερο εμφανές στις μεταβλητές που έχει το διάγραμμα διακλάδωσης στο κέντρο του Σχήματος 4 (πιο κάτω θα δείξουμε τις μεταβλητές που η διακλάδωση είναι προφανής). Οι τρεις κλάδοι που προκύπτουν από αυτό τη διακλάδωση σπασίματος συμμετρίας, είναι ο ασύμμετρος Φ κλάδος (πράσινη διακεκομμένη γραμμή), - και οκατοπτρικός του που έχει τον ίδιο άτομο αριθμό N/α - και τον κλάδο D (διακεκομμένη πράσινη γραμμή). Η ο συμμετρικά σπασμένος Φ κλαδος κληρονομεί την ευστάθεια του αρχικού κλάδου, από τον οποίο προήλθε (δηλαδή, τον Z), ενώ η συμμετρική συνέχεια του κλάδου G , δηλαδή ο κλάδος D είναι, στην πραγματικότητα, ασταθής, με το φάσμα διέγερσης των σχετικών καταστάσεων να χαρακτηρίζονται από δύο ζεύγη φανταστικών ιδιοσυχνοτήτων. Οι παραπάνω διακλάδωση τύπου 'διχάλας' φαίνεται πιο ξεκάθαρα στο Σχήμα ;;, όπου η διαφορά $\psi_1 - \psi_{-1}$ των δυο εξωτερικών σημείων αναπαρίσταται ως συνάρτηση του κανονικοποιημένου αριθμού ατόμων N/α (ο συμβολισμός, όσον αφορά τη χρήση των διακεκομμένες και διακεκομμένες γραμμές, είναι ίδιος με εκείνο που χρησιμοποιείται στο σχήμα 4) Κλείνοντας αυτή την ενότητα, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η μελέτη της πλούσιας δομής διακλάδωσης που παρουσιάστηκε παραπά-



Σχήμα 5: Η διακλάδωση pitchfork που παρουσιάζουν οι πράσινοι κλάδοι D, F και ο κατοπτρικός G , όπως αναδύεται από την μεταβλητή $\psi_1 - \psi_{-1}$, δηλαδή τη διαφορά των δυο εξωτερικών σημείων, σαν συνάρτηση του αριθμού των ατόμων N/α .

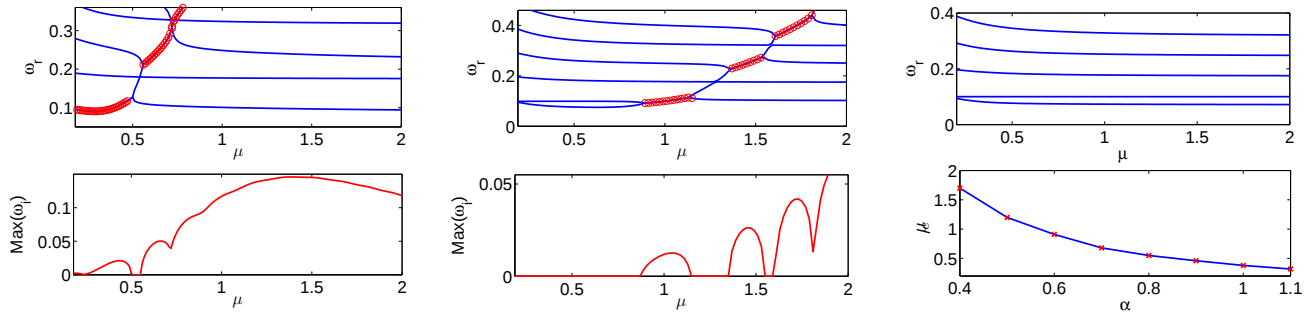
νω τονίζει την ύπαρξη μη-γραμμικών καταστάσεων (όπως αυτά που αντιστοιχούν στους διάφορους κλάδους C , G και E στο Σχήμα 4) χωρίς γραμμικό ανάλογο.

5 Ευστάθεια των μη-γραμμικών καταστάσεων

5.1 Η πρώτη διεγερμένη κατάσταση

Όπως συζητήθηκε προηγουμένως, η βασική κατάσταση του συστήματος έχει βρεθεί ότι στη διακριτή περίπτωση είναι πάντα ευстаθής (δηλαδή, για κάθε τιμή του α). Από την άλλη πλευρά, όσον αφορά την ευστάθεια των διεγερμένων μη γραμμικών καταστάσεων (που σχετίζονται με διακριτά σολιτόνια καθώς αυξάνεται η μη-γραμμικότητα), σημειώνουμε τα ακόλουθα. Δεδομένου ότι μας ενδιαφέρει η διερεύνηση της επίδρασης της διακριτοποίησης, στην ευστάθεια των καταστάσεων αυτών, έχουμε πραγματοποιήσει την ανάλυση ΒΔΓ για τρεις διαφορετικές τιμές της απόστασης του πλέγματος (κρατώντας σταθερή τιμή της συχνότητας της παγίδας, $\Omega = 0.1$). Πιο συγκεκριμένα, εξετάσαμε τις ακόλουθες περιπτώσεις: $\alpha = 1.2$ (που αντιστοιχεί σε μια έντονα διακριτή περίπτωση), $\alpha = 0.6$ (που αντιστοιχεί σε μια μέτρια διακριτότητα), και $\alpha = 0.1$ (που αντιστοιχεί σε σχεδόν-συνεχή διάταξη). τα αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 6 και 8 για την πρώτη και δεύτερη διεγερμένη κατάσταση, αντίστοιχα.

Στο πάνω αριστερό πλαίσιο του Σχήματος 6 δείχνουμε το πραγματικό μέρος από τις μικρότερες (τέσσερις) ιδιοτιμές, ενώ στο κάτω αριστερό πλαίσιο δείχνουμε το μέγιστο του φανταστικό μέρος των ιδιοτιμών, για $\alpha = 1, 2$ (έντονα διακριτή περίπτωση). Ο κλάδος που υποδεικνύεται με κύκλους (κόκκινο χρώμα) προέκυψε από τη σύγκρουση δύο 'τρόπων' με αντίθετα πρόσημα Κρειν, δηλαδή αυτό που αποκαλούμε 'μη-ομαλοanomalous τρόπο' και το χαμηλότερο ενεργειακά τρόπο, και είναι ασταθής μέχρι την τιμή $\mu = 0.5$ του χημικού δυναμικού. Όταν αυτός ο ασταθής κλάδος συγκρούεται με τον επόμενο δεν παράγει καμία αστάθεια, αλλά από την τιμή $\mu = 0.55$ και μετά, ο μη-ομαλός τρόπος ξεκινά να συγκρούεται με ανώτερης τάξης τρόπους, δημιουργώντας έτσι ένα νέο διάστημα το οποίο είναι

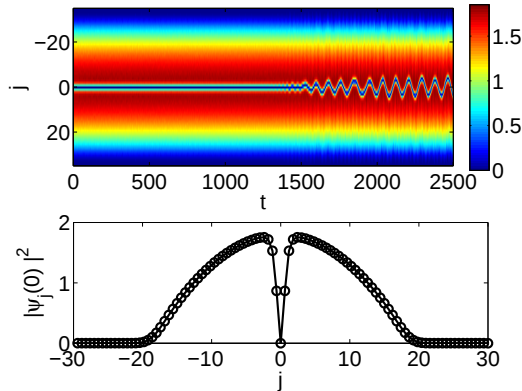


Σχήμα 6: (όλορ ονλινε) Η ανάλυση γραμμικής ευστάθειας, για την κατάσταση ενός διακριτού σολιτονίου. Τα πάνω πλαίσια δείχνουν το πραγματικό κομμάτι των χαμηλότερων ενεργειακά ιδιοτιμών, και τα δυο πρώτα κάτω πλαίσια δείχνουν αντίστοιχα το μιγαδικό, όλα σαν συνάρτηση του χημικού δυναμικού μ . Το τελευταίο κάτω πλαίσιο δείχνει την εξάρτηση της κρίσιμης τιμής του χημικού δυναμικού μ_c όπου εμφανίζεται αστάθεια, σαν συνάρτηση του α . Οι κλάδοι που συμβολίζονται με κύκλους (κόκκινο) στα δυο πάνω πλαίσια υποδυκνείουν τους ασταθείς τρόπους, που έχουν δημιουργηθεί λόγω σύγκρουσης δυο τρόπων με αντίθετο σημείο Krein. Οι παραμέτρους που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι $\alpha = 1.2$ (αριστερά στήλη), $\alpha = 0.6$ (μεσαία στήλη), ανδ $\alpha = 0.1$ (δεξιά στήλη)· η παγίδα είναι σταθερή και ίση με $\Omega = 0.1$.

ασταθές για όλες τις τιμές του $\mu < 0.55$. Κατά συνέπεια, ένα μικρό παράθυρο ευστάθειας φαίνεται να υπάρχει στο κάτω αριστερά πλαίσιο του Σχήματος 6 (για $0.5 < \mu < 0.55$). Για μια μικρότερη τιμή της απόστασης πλέγματος, $\alpha = 0.6$ (δηλαδή, για μέτρια διακριτότητα), η σύγκρουση μεταξύ του μη-ομαλού και του πρώτου θετικού τρόπου συμβαίνει για μεγαλύτερη τιμή του χημικού δυναμικού, δηλαδή, για $\mu = 0.86$. Έτσι, η διάταξη είναι αρχικά ευσταθής, στη συνέχεια χαρακτηρίζεται από ένα παράθυρο αστάθειας για $0.86 < \mu < 1.15$, και γίνεται και πάλι ευσταθής για $1.15 < \mu < 1.35$ (βλέπε κάτω μεσαίο πλαίσιο του Σχήματος 6). Μετά από το μικρό παράθυρο ευστάθειας (για το $1.35 < \mu < 1.6$), ο μη ομαλός κλάδος συγκρούεται συνεχώς με ανώτερης τάξης τρόπους, με αποτέλεσμα να υπάρχει αστάθεια για όλες τις τιμές του $\mu > 1.6$. Παρατηρήστε ότι η ύπαρξη τέτοιων παραθύρων ευ(α)στάθειας έχουν ήδη αναφερθεί στην [41], όπου μια παρόμοια BDG ανάλυση έγινε (μόνο για την περίπτωση ενός μονού διακριτού σολιτονίου σε αρμονική παγίδα).

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι για ακόμα μικρότερη τιμή της απόστασης του πλέγματος, δηλαδή, για $\alpha = 0.1$ (κοντά σε μια σχεδόν συνεχή διάταξη), ο "ανώμαλος τρόπος" δεν συγκρούεται ποτέ με το πρώτο θετικό τρόπο και, ως εκ τούτου, η πρώτη διεγερμένη κατάσταση (που αντιστοιχεί σε ένα οιονεί συνεχές σκούρο σολιτονίο) είναι πάντα ευσταθής, - βλέπε πάνω δεξιά πλαίσιο του Σχήματος 6 - σύμφωνα με τα πορίσματα της αναφοράς [;]. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί επίσης να αναχθεί παρατηρώντας την καμπύλη στο κάτω δεξιά πλαίσιο του 6, όπου η κρίσιμη τιμή μ_c του χημικού δυναμικού όπου εμφανίζεται η αστάθεια (εκεί που συμβαίνει η σύγκρουση μεταξύ του "ανώμαλου" τρόπου και του Κοην), είναι μια μονότονα φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης του πλέγματος α : αυτό δείχνει ότι η σταθερότητα (αστάθεια), αναμένεται στην στο συνεχές(διακριτό) όριο του μοντέλου.

Για να ολοκληρωθεί η μελέτη της ευστάθειας της πρώτης διεγερμένης κατάστασης, θα μελετήσουμε τη δυναμική των ασταθών διατάξεων. Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα ;, δείχνουμε την χρονική



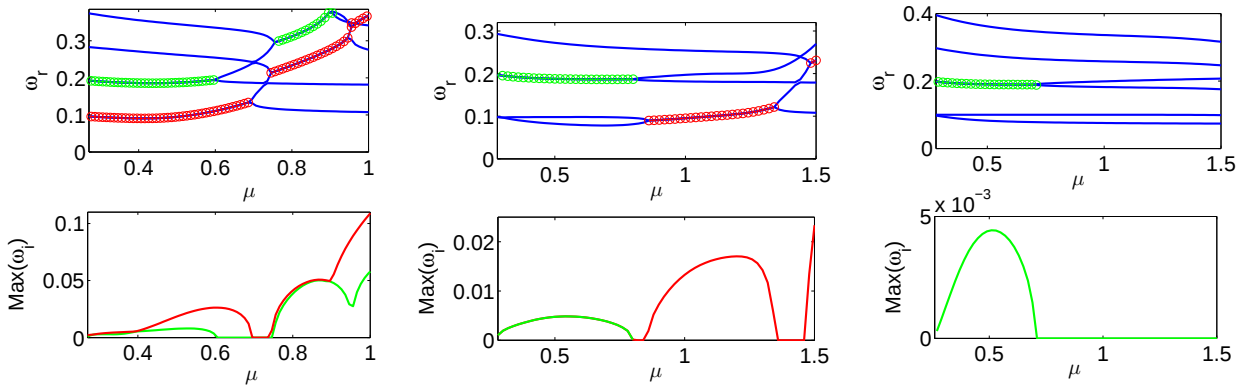
Σχήμα 7: Το πάνω πλαίσιο δείχνει ένα χωρο-χρονικό διάγραμμα της πυκνότητας της πρώτης διεγερμένης κατάστασης (που αντιστοιχεί σε ένα σκοτεινό σολιτόνιο), για παραμέτρους $\mu = 1$, $\alpha = 1.2$, και $\Omega = 0.1$. Το σολιτόνιο μένει ακίνητο ακόμη και μέχρι το $t \approx 1500$, όπου εκδηλώνεται η αστάθεια και το σολιτόνιο ξεκινάει να ταλαντώνεται με αυξανόμενο πλάτος. Το κάτω πλαίσιο δείχνει την αρχική συνθήκη.

εξέλιξη ενός ασταθούς διακριτού σκοτεινού σολιτονίου, που αντιστοιχεί σε τιμές των παραμέτρων $\mu = 1$, $\alpha = 1.2$, και $\Omega = 0.1$, όπως προκύπτει από την άμεση αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης DNLS (5). Η αρχική κατάσταση, που επιλέγεται από μια ασταθή περιοχή με σχετικά υψηλό ρυθμό εκδήλωσης της αστάθειας (κάτω αριστερά πλαίσιο του Σχήματος 6), και είναι ένα διακριτό σκοτεινό σολιτόνιο όπως φαίνεται στο κάτω μέρος του Σχήματος 7. Όπως φαίνεται στο επάνω πλαίσιο του Σχήματος 7, το διακριτό σκοτεινό σολιτόνιο είναι ακίνητο μέχρι $t \approx 1500$. Τότε, η αστάθεια εκδηλώνεται (λόγω του ψηφιακού θορύβου που προκαλείται από την αριθμητική παραγωγή) και το σολιτόνιο αρχίζει να εκτελεί ταλαντώσεις αυξανόμενης έντασης - ένα τυπικό σενάριο που συμβαίνει όταν ένα σκοτεινό σολιτόνιο υπόκειται σε ταλαντωτική αστάθεια (βλέπε π.χ., [41]).

5.2 Δεύτερη διεγερμένη κατάσταση

Προχωρούμε με την ανάλυση της ευστάθειας της δεύτερης διεγερμένης κατάστασης, που αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος σκοτεινών σολιτονίων όπου τα βασικά αποτελέσματα συνοψίζονται στο σχήμα 8. Πρώτα, σημειώνουμε ότι μια θεμελιώδης διαφορά της παρούσας περίπτωσης σε σχέση με την προηγούμενη είναι η ύπαρξη ενός δεύτερου 'ανώμαλου' τρόπου (υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός των 'ανώμαλων' τρόπων στο φάσμα ισούται με τον αριθμό των σκοτεινών σολιτονίων [27, 39, ;]). Ο πρώτος ανώμαλος τρόπος (με τη μικρότερη ιδιοσυχνότητα, αντιστοιχεί στην συφασική κίνηση των δύο σολιτονίων [27] - δείτε τον κόκκινο κλάδο στα πάνω πλαίσια του Σχήματος 8) - ακολουθεί μια συμπεριφορά παρόμοια με εκείνη που παρατηρήθηκε στην περίπτωση του ενός σκοτεινού σολιτονίου. Έτσι, η αστάθεια που προκαλείται από τη διακριτότητα παρουσιάζεται και στην περίπτωση των δυο σολιτονίων.

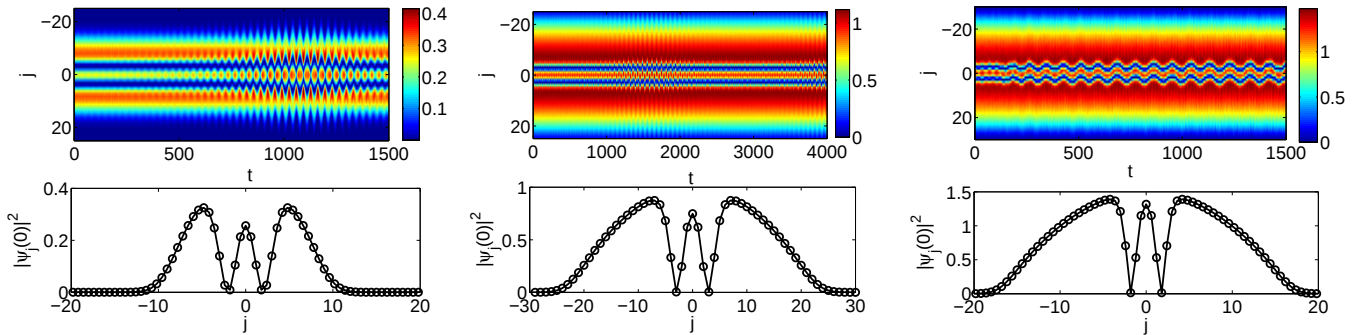
Όσον αφορά τη συμπεριφορά του δεύτερου ανώμαλου τρόπου (αυτού με τη μεγαλύτερη ιδιοσυχνότητα που αντιστοιχεί σε κίνηση των σολιτονίων με αντίθετη φάση [27] - δείτε τον πράσινο κλάδο στα πάνω πλαίσια του Σχήματος 8) σημειώνονται τα ακόλουθα. Ξεκινώντας με την πρώτη από αριστερά



Σχήμα 8: Η ανάλυση BdG για τη δεύτερη διεγερμένη κατάσταση, που αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος σκοτεινών σολιτονίων. Το πάνω (κάτω) πλαίσιο δείχνει τις πραγματικές (μιγαδικές) ιδιοτιμές σαν συναρτήσεις του χημικού δυναμικού μ . Οι κλάδοι που συμβολίζονται με κύκλους (με κόκκινο ή πράσινο) αντιστοιχούν στους ασταθείς κλάδους, που προκύπτουν από την σύγκρουση τρόπων ταλάντωσης με αντίθετο σημείο Krein. Οι παράμετροι του σχήματος είναι $\alpha = 1.2$ (αριστερά στήλη), $\alpha = 0.6$ (μεσαία στήλη), και $\alpha = 0.1$ (δεξιά στήλη). Συχνότητα της παγίδας $\Omega = 0.1$.

στήλη (για $\alpha = 1.2$), παρατηρείται ότι το δεύτερος ανώμαλος τρόπος συνυπάρχει με τον δεύτερο κανονικό τρόπο του συστήματος και έτσι αναδύεται ένα ασταθές κουαρτέτο ιδιοσυχνοτήτων (πράσινο χρώμα). Αυτή η συμπεριφορά παραμένει μέχρι το $\mu = 0.6$, όπου οι δυο αυτοί τρόποι διαχωρίζονται και αναιρείται η αστάθεια. Τότε δημιουργείται ένα μικρό παράθυρο ευστάθειας για αυτούς τους τρόπους όπως φαίνεται στο κάτω πλαίσιο της πρώτης στήλης του Σχήματος 8 που όμως κυριαρχείται ακόμα από την αστάθεια του πρώτου ανώμαλου. Στην πραγματικότητα το παράθυρο σταθερότητας αντιστοιχεί σε $0.7 < \mu < 0.74$ όπου όλοι οι κλάδοι είναι διαχωρισμένοι. Εν συνεχεία, η δεύτερη ανώμαλη κατάσταση συγκρούεται με την κατάσταση ανώτερης τάξης που δεν έχουν καμία αστάθεια, αλλά, τελικά, οι συγκρούσεις με υψηλότερες τρόπους οδηγεί σε αστάθεια.

Για μικρότερη τιμή της απόστασης του πλέγματος ($\alpha = 0.6$), σε αντίθεση τη πιο πάνω ανάλυση (στο πολύ διακριτό όριο για $\alpha = 1.2$, ο πρώτος ‘‘ανώμαλος’’ κλάδος είναι αρχικά ευσταθείς, και γίνεται ασταθής στο $\mu = 0.85$. Από την άλλη, το κουαρτέτο που προέκυψε από το δεύτερο ‘‘ανώμαλο’’ κλάδο και το κλάδο του δεύτερου κανονικού τρόπου, (τα οποία είναι αρχικά ασταθή όπως και πριν) χωρίζουν για $\mu = 0.8$. Έτσι, ένα μικρό παράθυρο ευστάθειας δημιουργείται για $0.8 < \mu < 0.85$ (κάτω μεσαίο πλαίσιο του Σχήματος 8), ενώ για $\mu > 0.85$ η κατάσταση γίνεται ασταθής λόγω του πρώτου ‘‘ανώμαλου’’ κλάδου. Τέλος, για $\alpha = 0.1$ (που αντιστοιχεί σε μια οιονεί συνεχή διάταξη), η δεξιά στήλη του Σχήματος 8 μας δείχνει ότι η αρχική αστάθεια λόγω συνύπαρξης του δεύτερου ανώμαλου με τον δεύτερο κανονικό τρόπο εξακολουθεί να υπάρχει, αλλά εξαφανίζεται για $\mu > 0.7$. Σε αντίθεση όμως με τις προηγούμενες περιπτώσεις μετά από αυτό το σημείο η διάταξη των δυο σκοτεινών σολιτονίων είναι ευσταθείς. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με τα πορίσματα της αναφοράς [27, 45], από τα οποία διαφαίνεται ότι στο συνεχές όριο η λύσεις πολλαπλών σολιτονίων είναι ασταθείς κοντά στο γραμμικό όριο (λόγω του δεύτερου ανώμαλου τρόπου) και μπορεί να έχει μετά, ασταθή παραμετρικά



Σχήμα 9: Όπως στο Σχήμα 7, αλλά για την δεύτερη διεγερμένη κατάσταση, που αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος σκοτεινών σολιτονίων, στην πρώτη περιοχή αστάθειας (μεσαία στήλη του Σχήματος 8 με παραμέτρους $\mu = 0.5$ (αριστερά), $\mu = 1$ (μέση) και $\mu = 1.5$ (δεξιά) ενώ η απόσταση του πλέγματος σε όλα τα πλαίσια είναι $\alpha = 0.6$ και η συχνότητα της παγίδας $\Omega = 0.1$.

παράθυρα μόνο λόγω συγκρούσεων του τρόπου αυτού με υψηλότερους ενεργειακά τρόπους.

Στο αριστερό πλαίσιο του Σχήματος 9 δείχνουμε τη δυναμική των για μια ασταθή διατάξη δυο σκοτεινών σολιτονίων, που αντιστοιχεί σε τιμές των παραμέτρων $\mu = 0.5$, $\alpha = 0.6$, και $\Omega = 0.1$, όπως προκύπτει από την άμεση αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης DNLS (5). Η αρχική κατάσταση αποτελείται από δύο διακριτά σκοτεινά σολιτόνια όπως φαίνεται στο κάτω αριστερά πλαίσιο του Σχήματος 9. Με την πάροδο του χρόνου ενώ τα σολιτόνια φαίνεται να είναι αρχικά ακίνητα η αστάθεια εκδηλώνεται περίπου για $t \approx 500$, και η αντίθετης φάσης κίνηση των δύο σολιτονίων διεγείρεται μαζί με το δεύτερο κανονικό τρόπο (που συχνά αναφέρεται ως τετραπολικός στην περίπτωση του συνεχούς [2]). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα σε μια κίνηση αναπνοής (breathing) από τη διάταξη. Αυτού του είδους αστάθεια, βρέθηκε επίσης στο ανάλογο συνεχές σύστημα (βλέπε σχήμα. 5 (c) στην [27]). Σημειώστε ότι αυτή η συγκεκριμένη προσομοίωση αντιστοιχεί στην πρώτη ζώνη αστάθειας που φαίνεται στο μεσαίο κάτω πλαίσιο του Σχήματος 8. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που πραγματοποιήθηκαν για τις τιμές του μ που αντιστοιχούν στη δεύτερη και τρίτη ζώνη αστάθειας, δηλαδή, για $\mu = 1$ και $\mu = 1.5$, αντίστοιχα, φαίνονται στο μεσαίο και το δεξιό πλαίσιο του Σχήματος 9. Και στις δύο περιπτώσεις, η αρχικά στατική κατάσταση δύο σκοτεινών σολιτονίων γίνεται ασταθής και τα σολιτόνια αρχίζουν να κινούνται, εκτελώντας μια κίνηση σε φάση. Γίνεται σαφές από το σχήμα ότι η αστάθεια εκδηλώνεται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή σε $t \approx 800$ και $t \approx 180$ για το μεσαίο και δεξιό πλαίσιο αντίστοιχα. Επιπλέον, το πλάτος της ταλάντωσης των σκοτεινών σολιτονίων στην πρώτη περίπτωση είναι πολύ μικρότερο από αυτό που παρατηρείται στην τελευταία. Έτσι, παρόλο που και οι δύο περιπτώσεις αντιστοιχούν σε γραμμικά ασταθείς διατάξεις των δύο σολιτονίων, αυτή που φαίνεται στο το μεσαίο πλαίσιο φαίνεται να είναι πιο ισχυρή από ό,τι εκείνη στο δεξιό. Αυτό μπορεί εν μέρει να συνδεθεί με το ρυθμό αύξησης της αστάθειας (το μέτρο του μιγαδικού κομματιού της ιδιοτιμής), αλλά ίσως, το πιο σημαντικό, με τους διάφορους τρόπους ταλάντωσης του υποβάθρου με τους οποίους η συφανική σολιτονική κίνηση έρχεται σε συντονισμό, στις διάφορες περιπτώσεις.

6 Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία, παρουσιάσαμε μια συστηματική μελέτη της ύπαρξης, της ευστάθειας και τη διακλάδωση μη-γραμμικών καταστάσεων του αυτο-αλληλεπιδρώντα κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή (XHO) στο πλέγμα. Το υπό εξέταση μοντέλο, ήτοι η διακριτή εξίσωση NLS με ενσωματωμένη (διακριτή) αρμονική παγίδα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τη δυναμική μιας σειράς από σταγονίδια συμπυκνωμάτων (BEC) σε βαθύ οπτικό πλέγμα, αλλά και διακριτών μη-γραμμικών οπτικών συστημάτων από κυματοδηγούς. Αρχικά ξεκινήσαμε με την ανάλυση του σχετικού γραμμικού προβλήματος. Παρουσιάσαμε το ενεργειακό φάσμα και τις ιδιοκαταστάσεις του γραμμικού προβλήματος, σαν συνάρτηση της πλεγματικής απόστασης α . Με αυτό τον τρόπο, σαρώσαμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις, ξεκινώντας από το συνεχές όριο (δηλαδή, το Γ.Α.Τ για $\alpha \rightarrow 0$) προς την αντι-συνεχές ($\alpha \rightarrow \infty$), όπου η βασική στάθμη πηγαίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, ενώ η διεγερμένες καταστάσεις παρουσιάζουν ένα παραβολικό ενεργειακό φάσμα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την καθολική θεωρία διακλάδωσης (και χρησιμοποιώντας, ειδικότερα, ένα συναρτησιακό-αναλυτικό θεώρημα από το έργο του Rabinowitz), αποδείξαμε αυστηρά ότι - στο διακριτό όριο - όλες οι ιδιοκαταστάσεις του γραμμικού προβλήματος μπορούν να συνεχιστούν σε αντίστοιχες μη-γραμμικές, έτσι ώστε κάθε γραμμική κατάσταση κατέχει μια μη-γραμμική ανάλογη. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, ήμασταν σε θέση να κατασκευάσουμε αριθμητικά τις μη-γραμμικές καταστάσεις που προέκυψαν από τις γραμμικές συζυγής τους. Με αυτόν τον τρόπο, βρήκαμε τη θεμελιώδη κατάσταση του μη-γραμμικού συστήματος (το οποίο αποκτά το προφίλ Thomas-Fermi στο αντι-συνεχές όριο), ενώ οι διεγερμένες καταστάσεις μπορούν να λάβουν τη μορφή μιας αλυσίδας διακριτών σκοτεινών σολιτονίων. Ακόμα μελετήθηκε το αντι-συνεχές όριο και βρέθηκε ότι οι λύσεις παρουσιάζουν πολύπλοκη δομή διακλάδωσης, η οποία διευκρινίστηκε, μαζί με την ευστάθεια των αντίστοιχων καταστάσεων. Το σχετικό διάγραμμα διακλάδωσης αποκάλυψε, επίσης, την ύπαρξη μη-γραμμικών καταστάσεων που δεν διαθέτουν γραμμικό ανάλογο. Πραγματοποιήθηκε επίσης μια λεπτομερή ανάλυση γραμμικής ευστάθειας των διάφορων μη-γραμμικών λύσεων που προκύπτουν για διαφορετικές τιμές της απόστασης του πλέγματος α , με την επίλυση των εξισώσεων ΒΔΓ. Αυτή έγινε για την βασική κατάσταση, καθώς και για την πρώτη και δεύτερη διεγερμένη (οι τελευταίοι, αντιστοιχούν σε ένα σκοτεινό σολιτονίο και σε ένα ζευγάρι σκοτεινών σολιτονίων, αντίστοιχα, στο βαθύ μη-γραμμικό όριο). Ενώ η βασική κατάσταση βρέθηκε να είναι εντελώς ευσταθής σε μικρές διαταραχές για όλες τις τιμές της απόστασης του πλέγματος, αυτό δεν ισχύει για τα διακριτά σκοτεινά σολιτόνια, τα οποία αποκάλυψαν ένα πολύ πλούσιο φάσμα ευστάθειας. Στο έντονα διακριτό όριο, το ένα σκοτεινό σολιτόνιο βρέθηκε να είναι δυνητικά ασταθές, λόγω των συγκρούσεων του πρώτου ανώμαλου τρόπου με τους υπόλοιπους κανονικούς τρόπους του συστήματος, με την αύξηση του χημικού δυναμικού μ . Δεδομένου ότι το σύστημα γίνεται πιο "συνεχές", δηλαδή, με τη μείωση της απόστασης α εμφανίζονται παράθυρα ευστάθειας. Τελικά, στο συνεχές όριο, ο "ανώμαλος" κλάδος παραμένει χαμηλότερα από το πρώτο κανονικό για όλες τις τιμές του μ , και το σολιτόνιο γίνεται ευσταθές. Μια παρόμοια συμπεριφορά (από την έντονα διακριτή περιοχή μέχρι την συνεχή), αλλά με πρόσθετες πηγές αστάθειας (από τον συμπληρωματικό "ανώμαλη" κλάδο) παρατηρήθηκαν για τη διακριτή διάταξη δύο σκοτεινών σολιτονίων. Ο "ανώμαλος" τρόπος, υπεύθυνος για κίνησης μεταξύ των σολιτονίων σε αντίθετη φάση είναι αρχικά σε συντονισμό με το δεύτερο κανονικό τρόπο, δημιουργώντας έτσι μια αστάθεια, όμως παροδικά οι δυο κλάδοι χωρίζουν και δημιουργούνται

μικρά παράθυρα ευστάθειας (στη διακριτή περιοχή). Στο σχεδόν συνεχές όριο, ο πρώτος "ανώμαλος" τρόπος δεν προκαλεί καμιά αστάθεια, ενώ ο δεύτερος οδηγεί σε παράθυρα αστάθειας (που είναι πιο έντονα κοντά στο γραμμικό όριο). Και στις δυο περιπτώσεις, η ανάλυσή μας έδειξε ότι η επίδραση της διακριτοποίησης είναι βασικά η πρόσθεση πηγών αστάθειας στα σκοτεινά σολιτόνια για περιοχές του μ όπου στη συνεχή περίπτωση θα ήταν ευσταθής. Αυτό οφείλεται στην έντονη εξάρτηση του "ανώμαλου" σολιτονικού τρόπου από το χημικό δυναμικό, καθώς και λόγω της διακριτοποίησης που καταστρέφει κάποιες συμμετρίες (όπως η διπολική συμμετρία της πρώτης συλλογικής διέγερσης) που υπάρχει στο συνεχές όριο. Θα ήταν ενδιαφέρον να επεκτείνουμε το σκεπτικό μας και σε διαφορετικά σχήματα, όπως αυτά που εμπλέκουν διαφορετικά είδη δυναμικών παγίδευσης, πολυδιάστατα συστήματα (π.χ για την περίπτωση σκοτεινών σολιτονίων και δινών σε δισδιάστατες διατάξεις), καθώς και σε συστήματα αποτελούμενα από συστατικά (διαφορετικά αέρια). Εργασίες σε αυτές τις κατευθύνσεις βρίσκονται ήδη σε εξέλιξη και τα σχετικά αποτελέσματα θα παρουσιαστούν σε μελλοντικές εργασίες.

Παράρτημα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε την τη απόδειξη της ύπαρξης ενός κατωφλίου διεγέρσεως με την έννοια της αναφοράς [47], για την εξίσωση DNLS σε ένα πλέγμα $\mathbb{Z}^N, N \geq 1$. Για τεχνικούς λόγους είναι βολικό να δουλέψουμε στην εστιάζουσα εκδοχή της DNLS της εξίσωσης (5), έχοντας το αντίθετο πρόσημο στη μη-γραμμικότητα. Μπορούμε να παράγουμε την αποεστιάζουσα περίπτωση χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό *staggering*. Ο μετασχηματισμός αυτός ορίζεται ως [46]:

$$\psi_j \rightarrow (-1)^p \psi_j, \quad p = \sum_{i=1}^N j_i, \quad (51)$$

για $j := (j_1, j_2, \dots, j_N) \in \mathbb{Z}^N$ (χρειάζεται και ένας πολλαπλασιασμός με ένα κατάλληλο παράγοντα φάσης για να φτιαχτεί ο αντίστοιχος τοπικός όρος από την διακριτή Λαπλασιανή). Επομένως, κάτω από την εξίσωση (51), η N -διάστατη, εστιάζουσα εκδοχή του συστήματος (5) με γενική μη-γραμμικότητα δύναμης, $|\psi_j|^{2\sigma} \psi_j$, μπορεί να γραφεί ως (αξιοποιώντας την συμμετρία της αντιστροφής του χρόνου)

$$i\dot{\psi}_j + \frac{1}{2\alpha^2} \Delta_2 \psi_j + \frac{1}{2} \alpha^2 \Omega^2 |j|^2 \psi_j + |\psi_j|^{2\sigma} \psi_j = 0, \quad (52)$$

δεδομένη σε ένα N -διάστατο κύβο $\mathbb{Z}^N$ με πλευρές μήκους $2L$,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{Q}} &= \{(x_{j_1}, \dots, x_{j_N}) : 0 \leq j_1, \dots, j_N \leq K+1\}, \\ x_{j_i} &= -L + j_i \alpha, \quad \alpha = \frac{2L}{K+1}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Οι διακριτές ιδιοτιμές πάνω στον $\overline{\mathcal{Q}}$ ενδείκνυνται ως

$$\psi_j(t) = \psi(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_N}, t).$$

Το εσωτερικό του κύβου $\overline{\mathcal{Q}}$ δίνεται

$$\mathcal{Q} = \{(x_{j_1}, \dots, x_{j_N}) : 1 \leq j_1, \dots, j_N \leq K\},$$

και η (52) εμπλουτίζεται με συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$\psi_j = 0, \text{ ον } \partial\mathcal{Q} := \overline{\mathcal{Q}} \setminus \mathcal{Q}. \quad (53)$$

Λύσεις $\psi_j \rightarrow \psi_j \exp(-i\mu t)$, των (52)-(53), είναι ισοδύναμα, λύσεις του περιορισμένου προβλήματος ελαχιστοποίησης :

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = \{H[\psi] : N[\psi] = \mathcal{R}\}, \quad (54)$$

όπου το χημικό δυναμικό μ εμφανίζεται ως πολλαπλασιασής Lagrange συναφής με την ελαχιστοποίηση της (54). Στην (54), το H δηλώνει την Χαμιλτονιανή

$$\begin{aligned} H[\psi] = \frac{1}{2\alpha^2}(-\Delta_2\psi, \psi)_2 &+ \frac{1}{2}\alpha^2\Omega^2 \sum_{\overline{\mathcal{Q}}} |j|^2 |\psi_j|^2 \\ &- \frac{1}{\sigma+1} \sum_{\overline{\mathcal{Q}}} |\psi_j|^{2\sigma+2}, \end{aligned}$$

καθώς

$$N[\psi] := \sum_{\overline{\mathcal{Q}}} |\psi_j|^2,$$

είναι η νόρμα του χώρου Hilbert ℓ^2 των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών, και αναπαριστά τον αριθμό των ατόμων ή την οπτική ισχύ (33). Επομένως :

Πρόταση 3 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} \geq 0$ αν και μόνο αν $\mathcal{R}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\begin{aligned} \sum_{\overline{\mathcal{Q}}} |\psi_j|^{2\sigma+2} &\leq (\sigma+1)\mathcal{R}^{-\sigma} \left(\sum_{\overline{\mathcal{Q}}} |\psi_j|^2 \right)^{\sigma} \\ &\times \left[\frac{1}{2\alpha^2}(-\Delta_2\psi, \psi)_2 + \frac{1}{2}\alpha^2\Omega^2 \sum_{\overline{\mathcal{Q}}} |j|^2 |\psi_j|^2 \right], \end{aligned} \quad (55)$$

για όλα τα $\psi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}(K+2)}$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ στην (54) έπεται ότι $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} \geq 0$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma+1} \sum_{\overline{\mathcal{Q}}} |\psi_j|^{2\sigma+2} &\leq \frac{1}{2\alpha^2}(-\Delta_2\psi, \psi)_2 \\ &+ \frac{1}{2}\alpha^2\Omega^2 \sum_{\overline{\mathcal{Q}}} |j|^2 |\psi_j|^2, \end{aligned} \quad (56)$$

για όλα τα $\psi \in \mathbb{R}^{N(K+2)}$. Έστω τώρα $\psi \in \mathbb{R}^{N(K+2)}$, $\psi \neq 0$ αυθαίρετο, και θεωρήστε το στοιχείο $z = \sqrt{\mathcal{R}} \|\psi\|_2^{-1} \psi$. Παρατηρώντας ότι $N[z] = \|z\|_2^2 = R$, αντικαθιστώντας το z στην (56) παίρνουμε (55). $\diamond$

Από την Πρόταση 4.2, σελ. 680 της αναφοράς [47], ακολουθεί ότι αν το $\sigma \geq \frac{2}{N}$, το ϵ υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\epsilon > 0$, η ανισότητα

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^N} |\psi_j|^{2\sigma+2} \leq C \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^N} |\psi_j|^2 \right)^\sigma \times \frac{1}{2\alpha^2} (-\Delta_2 \psi, \psi)_2, \quad (57)$$

ισχύει για όλα τα $\psi \in \ell^2$. Επομένως, είναι μια άμεση συνέπεια ότι υπάρχει ένα $C > 0$, τέτοιο ώστε

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^N} |\psi_j|^{2\sigma+2} \leq C \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^N} |\psi_j|^2 \right)^\sigma \times \left[\frac{1}{2\alpha^2} (-\Delta_2 \psi, \psi)_2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \Omega^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}^N} |j|^2 |\psi_j|^2 \right], \quad (58)$$

για όλα τα $\psi \in \ell^2$ και $\sigma \geq \frac{2}{N}$. Ορίζουμε για λόγους συντομίας το συναρτησιακό

$$E[\psi] := \frac{1}{2\alpha^2} (-\Delta_2 \psi, \psi)_2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \Omega^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}^N} |j|^2 |\psi_j|^2.$$

Σε αναλογία με την εξίσωση (4.2), σελ. 680 της αναφοράς [47], αν C_* είναι το ανώτατο για όλες τις σταθερές για τις οποίες ισχύει η (58), τότε το C_* μπορεί να χαρακτηριστεί

$$\frac{1}{C_*} = \inf \frac{\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^N} |\psi_j|^2 \right)^\sigma E[\psi]}{\sum_{j \in \mathbb{Z}^N} |\psi_j|^{2\sigma+2}}. \quad (59)$$

Επομένως, το κατώφλι διέγερσης $\mathcal{R}_{\text{thresh}}$ για την DNLS (52) θα οριστεί μέσω της σύγκρισης των (55) και (58) σαν:

$$(\sigma + 1)(\mathcal{R}_{\text{thresh}})^{-\sigma} = C_*. \quad (60)$$

Καταλήγουμε στο επόμενο θέρημα:

Θεώρημα 3 Έστω $\sigma \geq \frac{2}{N}$.

A. Υποθέτουμε ότι $\|\psi\|_2^2 = \mathcal{R}$. Τότε

$$\mathcal{H}[\psi] \geq E[\psi] \left[1 - \left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_{\text{thresh}}} \right)^\sigma \right]. \quad (61)$$

B. Αν $\mathcal{R} < \mathcal{R}_{\text{thresh}}$ τότε $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = 0$ και δεν υπάρχει βασική κατάσταση που να ελαχιστοποιεί την (54).

C. Αν $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{\text{thresh}}$ τότε $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} < 0$ και υπάρχει ένα ελάχιστο για το πρόβλημα μεταβολών (54).

Απόδειξη: Α. Πρώτα παρατηρούμε ότι η (57) κατέχει για κάθε $\psi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}(K+2)}$ με την ίδια άριστη σταθερά C_* , αφού ο $\mathbb{R}^{\mathcal{N}(K+2)}$ είναι διαστατικά πεπερασμένος υπόχωρος του ℓ^2 . Τότε χρησιμοποιώντας την (57) με τη βέλτιστη σταθερά C_* παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} H[\psi] &= E[\psi] - \frac{1}{\sigma+1} \sum_{\bar{\mathcal{Q}}} |\psi_j|^{2\sigma+2} \\ &\geq E[\psi] - (\mathcal{R}_{\text{thresh}})^{-\sigma} \mathcal{R}^\sigma E[\psi], \end{aligned}$$

της (61).

Β. Έστω ότι $\mathcal{R} < \mathcal{R}_{\text{thresh}}$, έπεται από την (61) ότι $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} \geq 0$. Από την άλλη, μπορούμε να υποθέσουμε κάποια $\tilde{\psi} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}(K+2)}$ τέτοια ώστε

$$\|\tilde{\psi}\|_{\ell^2} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\lambda}, \text{ ωηερε } \lambda > 0 \text{ αρβιτραρψ.}$$

Θεωρώντας το στοιχείο $z_\lambda = \sqrt{\mathcal{R}} \|\tilde{\psi}\|_2^{-1} \tilde{\psi}$ παρατηρούμε ότι

$$\|z_\lambda\|_{\ell^2}^2 = \mathcal{R}$$

και

$$H[z_\lambda] = \lambda^2 E[\tilde{\psi}] - \frac{\lambda^{2\sigma+2}}{\sigma+1} \sum_{\bar{\mathcal{Q}}} |\tilde{\psi}_j|^{2\sigma+2}.$$

Για λ αρκούντως μεγάλο, παίρνουμε ότι $H[z_\lambda] < 0$. Επομένως αν $\mathcal{R} < \mathcal{R}_{\text{thresh}}$ θα πρέπει $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = 0$. Θεωρώντας ότι αυτό το μέγιστο επιτυγχάνεται σε μια κατάσταση $\hat{\phi}$, τότε $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = 0$ σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} E[\hat{\phi}] &= \frac{1}{\sigma+1} \sum_{\bar{\mathcal{Q}}} |\hat{\phi}_n|^{2\sigma+2}, \\ N[\hat{\phi}] &= \sum_{\bar{\mathcal{Q}}} |\hat{\phi}_j|^2 = \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{62}$$

Τότε, η ανισότητα (57) με τη βέλτιστη σταθερά C_* , αν εισαχθεί στην (62), καταλήγει στην αντίφαση

$$E[\hat{\phi}] \leq \frac{1}{\sigma+1} \sum_{\bar{\mathcal{Q}}} |\hat{\phi}_j|^{2\sigma+2} \leq \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_{\text{thresh}}} \right)^\sigma < E[\hat{\phi}].$$

Γ. Από τους ορισμούς (59), (60) των C^* και $\mathcal{R}_{\text{thresh}}$ αντίστοιχα, ακολουθεί ότι εαν $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{\text{thresh}}$ τότε κάποιο $\phi^* \in \ell^2$ πρέπει να υπάρχει που να μην ικανοποιεί την ανισότητα (55), επομένως $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} < 0$. Όντος ένα τέτοιο ελάχιστο υπάρχει εφόσον η $H[\psi]$ είναι φραγμένη από κάτω στο φραγμένο διαστατικό χώρο $\mathbb{R}^{\mathcal{N}(K+2)}$ **the infimum $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} < 0$ is attained.** $\diamond$

Να σημειώσουμε ότι τα συμπληρωματικά αυτά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, είναι γενικού ενδιαφέροντος αφού αποδεικνύουν την ύπαρξη μη-γραμμικών λύσεων για την DNLS άμεσα, μαζί με την ύπαρξη κατώφλιου για την “ενεργοποίησή” τους. Είναι επίσης σημαντικό να πούμε ότι στο συνεχές όριο $\alpha \rightarrow \infty$, το κατώφλι αυτό υπάρχει μόνο για την περίπτωση $\sigma = \frac{2}{N}$. Ακόμα σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα αυτά εξακολουθούν να ισχύουν και στην περίπτωση ενός άπειρου πλέγματος φτάνει να λάβουμε υπόψιν επιχειρήματα concentration compactness arguments [47, 48]

Αναφορές

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995); K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995); C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [2] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [3] P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González (eds.) *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates: Theory and Experiment* (Springer, Heidelberg, 2007); R. Carretero-González, D. J. Frantzeskakis, and P. G. Kevrekidis, *Nonlinearity* **21**, R139 (2008).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1987).
- [5] Yu. S. Kivshar, T. J. Alexander, and S. K. Turitsyn, *Phys. Lett. A* **278**, 225 (2001).
- [6] P. G. Kevrekidis, V. V. Konotop, A. Rodrigues, and D. J. Frantzeskakis, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38**, 1173 (2005).
- [7] G. L. Alfimov and D. A. Zezyulin, *Nonlinearity* **20**, 2075 (2007).
- [8] D. A. Zezyulin, G. L. Alfimov, V. V. Konotop and V. M. Pérez-García, *Phys. Rev. A* **76**, 013621 (2007).
- [9] Yu. S. Kivshar and T. J. Alexander, in *Proceeding of the APCTP-Nankai Symposium on Yang-Baxter Systems, Nonlinear Models and Their Applications*, edited by Q-Han Park *et al.* (World Scientific, Singapore, 1999).
- [10] G. Herring, L. D. Carr, R. Carretero-González, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, *Phys. Rev. A* **77**, 023625 (2008).
- [11] K. J. H. Law, P. G. Kevrekidis, B. P. Anderson, R. Carretero-González, and D. J. Frantzeskakis, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41**, 195303 (2008).

- [12] T. Kapitula, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, *Chaos* **18**, 023101 (2008).
- [13] D. Zezyulin, *Phys. Rev. A* **79**, 033622 (2009).
- [14] D. J. Frantzeskakis, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 213001 (2010).
- [15] Yu. S. Kivshar and B. Luther-Davies, *Phys. Rep.* **298**, 82 (1998).
- [16] P. G. Kevrekidis, K. Ø. Rasmussen, and A. R. Bishop, *Int. J. Mod. Phys. B* **15**, 2833 (2001);
P. G. Kevrekidis, *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation: Mathematical Analysis, Numerical Computations, and Physical Perspectives* (Springer: Berlin and Heideleberg, 2009).
- [17] P. G. Kevrekidis and D. J. Frantzeskakis, *Mod. Phys. Lett. B* **18**, 173 (2004).
- [18] V. A. Brazhnyi and V. V. Konotop, *Mod. Phys. Lett. B* **18**, 627 (2004).
- [19] O. Morsch and M. K. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
- [20] F. Kh. Abdullaev, B. B. Baizakov, S. A. Darmanyany, V. V. Konotop, and M. Salerno, *Phys. Rev. A* **64**, 043606 (2001); E. G. Alfimov, P. G. Kevrekidis, V. V. Konotop, and M. Salerno, *Phys. Rev. E* **66**, 046608 (2002).
- [21] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, and I. Bloch, *Nature* **415**, 39 (2002);
D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).
- [22] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen(De), and U. Sen, *Adv. Phys.* **56**, 243 (2007).
- [23] F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Y. Silberberg, *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
- [24] E. Chalbaud, J.-P. Gallinar, and G. Mata, *J. Phys. A: Math. Gen.* **19**, L385 (1986).
- [25] P. H. Rabinowitz, *J. Funct. Anal.* **7**, 487 (1971).
- [26] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed Point Theorems* (Springer-Verlag, New-York, 1986).
- [27] G. Theocharis, A. Weller, J. P. Ronzheimer, C. Gross, M. K. Oberthaler, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, *Phys. Rev. A* **81**, 063604 (2010).
- [28] S. Raghavan and G. P. Agrawal, *Opt. Commun.* **180**, 377 (2000); T. P. Horikis and H. E. Nistazakis, *Opt. Commun.* **283**, 1467 (2010).
- [29] A. Trombettoni, P. G. Kevrekidis, H. E. Nistazakis, and D. J. Frantzeskakis, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39**, S231 (2006).

- [30] Th. Anker, M. Albiez, R. Gati, S. Hunsmann, B. Eiermann, A. Trombettoni, and M. K. Oberthaler, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 020403 (2005).
- [31] R. V. Mishmash and L. D. Carr, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 140403 (2009).
- [32] R. V. Mishmash, I. Danshita, C. W. Clark, and L. D. Carr, *Phys. Rev. A* **80**, 053612 (2009).
- [33] K. V. Krutitsky, J. Larson, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. A* **82**, 033618 (2010).
- [34] R. S. MacKay, in *Stability of Equilibrium of Hamiltonian Systems*, R. S. MacKay and J. D. Meiss (eds.) (Hilger, Bristol, 1987) p.137.
- [35] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions* (Dover, New York, 1972).
- [36] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, (Springer-Verlag, New-York, 1994).
- [37] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics I* (Intescience Publishers, New-York, 1953).
- [38] J.-P. Gallinar and E. Chalbaud, *Phys. Rev. B* **43**, 2322 (1991).
- [39] D. A. Zezyulin, G. L. Alfimov, V. V. Konotop, V. M. Pérez-García, *Phys. Rev. A* **78**, 013606 (2008).
- [40] N. G. Vakhitov and A. A. Kolokolov, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz.* **16**, 1020 (1973) [*Radiophys. Quantum Electron.* **16**, 783 (1973)].
- [41] P. G. Kevrekidis, R. Carretero-González, G. Theocharis, D. J. Frantzeskakis, and B. A. Malomed, *Phys. Rev. A* **68**, 035602 (2003).
- [42] A. E. Muryshev, H. B. van Linden van den Heuvel, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **60**, R2665 (1999); D. L. Feder, M. S. Pindzola, L. A. Collins, B. I. Schneider, and C. W. Clark, *ibid.* **62**, 053606 (2000).
- [43] L. D. Carr, J. N. Kutz, and W. P. Reinhardt, *Phys. Rev. E* **63**, 066604 (2001).
- [44] C. K. Law, P. T. Leung, and M.-C. Chu, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35**, 3583 (2002).
- [45] M. P. Coles, D. E. Pelinovsky, and P.G. Kevrekidis, *Nonlinearity* **23**, 1753 (2010).
- [46] P. G. Kevrekidis, H. Susanto, and Z. Chen, *Phys. Rev. E* **74**, 066606 (2006).
- [47] M. Weinstein, *Nonlinearity* **12**, 673 (1999).
- [48] J. Cuevas, N. I. Karachalios, and F. Palmero, *Appl. Anal.* **89** no. 9, 1351•1385, (2010).