



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία

«Ο Διόφαντος και η Διδακτική της Άλγεβρας»



Βλάχου Αγγελική

A.M. 201202

Επιβλέπων καθηγητής: Διονύσιος Λάμπας

ΑΘΗΝΑ 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών
Σπουδών**

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε τηναπό Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη

από τους :

Ονοματεπώνυμο

Βαθμίδα

Υπογραφή

1)Διονύσιος Λάμπας (επιβλέπων Καθηγητής)

Αναπληρωτής

Καθηγητής

2)Γιάννης Θωμαΐδης

Διδάκτορας

3)Θεοδόσης Ζαχαριάδης

Καθηγητής

Ευχαριστίες

Σε αυτή την προκλητική και δύσκολη διαδρομή από το παρόν στο παρελθόν και αντίστροφα θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- ο τον επιβλέποντα Καθηγητή μου **Διονύση Λάππα** για την πολύτιμη στήριξη και βοήθεια στα δύσκολα αλλά και στην δομή της εργασίας
- ο τον καθηγητή μου **Γιάννη Θωμαΐδη** του οποίου οι διαλέξεις στο μάθημα «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους» ήταν η έμπνευση και η αφετηρία της ιδέας για την εργασία, επίσης για την πολύτιμη βοήθεια του τόσο στην παροχή υλικού όσο και στην οργάνωση και στην δομή του θεωρητικού υπόβαθρου της εργασίας
- ο τον καθηγητή **Θεοδόση Ζαχαριάδη** που με τίμησε με τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή
- ο τη **Διονυσία Μπακογιάννη** για τη βοήθειά της τα δυο αυτά χρόνια των σπουδών μου στο ΠΜΣ
- ο τους **Ηλία Μπάρμπα** και **Μπάμπη Μουσαδάκο** για τα «Μαθηματικά μας ταξίδια»



«Η ψυχή σου Διόφαντε είη μετά του Σατανά

ένεκα της δυσκολίας των τε άλλων σου θεωρημάτων

και δη και του παρόντος θεωρήματος»

Επιθυμώ να αφιερώσω «το ταξίδι» αυτό σε εκείνους που με ξεχωριστό και ιδιαίτερο τρόπο γέμισαν με σκέψεις και χρώματα τη μικρή μου μαθηματική αποσκευή και μου έδειξαν το **δρόμο** ίσως και τον **τρόπο**.



Στη Cecilia και στον Λάμπη

στη γιαγιά μου τη Στέλλα

Στους καθηγητές μου: Γιάννη Θωμαΐδη

Διονύση Λάππα

Θεοδόση Ζαχαριάδη

Ευάγγελο Ράπτη

Στέλιο Νεγρεπόντη

Βάσω Φαρμάκη

Στέλλα Βοσνιάδου

Νίκο Κλαουδάτο

Ε.Βασιλείου

Περιεχόμενα

Σελίδα

Πρόλογος	6
Σκοπός και μεθοδολογία της έρευνας	8
Περιγραφή κεφαλαίων	9
Abstract	11
Κεφάλαιο 1^ο: Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση	
1.1. Παιδαγωγική-παιδεία/μόρφωση-μαθηματικά	12
1.2. Η διεθνής ομάδα “History and Pedagogy of Mathematics”	16
1.3. Επιχειρήματα υπέρ της χρήσης των μαθηματικών στην διδασκαλία	19
1.4. Αντιρρήσεις για τη χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών	23
1.5. Επιστημολογικά εμπόδια, εννοιολογική αλλαγή, ιστορικός παραλληλισμός	25
Κεφάλαιο 2^ο: Από την Αριθμητική στην Άλγεβρα	
Α΄ μέρος: Ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας -από το Διόφαντο έως τον Euler	
2.1. Η Αρχαία Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου-Alexandria ad Aegyptum	40
2.2. Ο «αόρατος» Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς	45
2.3. Η στρατηγική και ο συμβολισμός στα μαθηματικά προβλήματα των Αριθμητικών του Διόφαντου	50
2.4. Επίδραση του έργου του Διόφαντου στην εξέλιξη της Άλγεβρας	57
Β΄ μέρος: Η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα στα Π.Σ.	
2.5. Η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα-ένα πρόβλημα της διδακτικής	67
2.6. Ο ρόλος της ιστορίας της Άλγεβρας στην αντιμετώπιση του προβλήματος	74
Κεφάλαιο 3^ο	
Διδακτικές όψεις του έργου του Διόφαντου	86
Κεφάλαιο 4^ο: Αξιοποίηση των «Αριθμητικών του Διόφαντου» στη διδακτική και παιδαγωγική πράξη	
4.1. Τα μαθηματικά προβλήματα του Διόφαντου στη διδασκαλία της έννοιας της εξίσωσης	90
4.2. Αξιοποίηση του προβλήματος I 1 των Αριθμητικών στη διδασκαλία της Άλγεβρας- ένα παράδειγμα στη σχολική τάξη	96
4.3. Συμπεράσματα- συζήτηση	108
Παράρτημα	114

Ο Διόφαντος και η Διδακτική της Άλγεβρας

Πρόλογος

Η διδασκαλία των μαθηματικών έπαιζε πρωτεύοντα ρόλο από την εποχή της Αρχαίας Ελλάδας και εθεωρείτο, όπως και σήμερα, ότι συμβάλλει με τον καλύτερο τρόπο στη διαμόρφωση της προσωπικότητας, στην κατανόηση, στην ένταξη και στην προσαρμογή του εκπαιδευόμενου στο φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον.

Στη σχολή του Πυθαγόρα (586πΧ.-500πΧ) μαζί με τη φιλοσοφία, τη μουσική, την αστρονομία και την αριθμητική καλλιεργείται και η γεωμετρία. Οι Πυθαγόρειοι αναζητώντας τη συμμετρία και την αρμονία του κόσμου αναγνωρίζουν ουσιαστικά την ύπαρξη μιας γεωμετρικής δομής σε αυτόν και προσπαθούν να τον κατανοήσουν. Σύμφωνα με τη φιλοσοφία των Πυθαγορείων τα δομικά υλικά του κόσμου είναι αριθμοί και οι δομικές τους σχέσεις μπορούσαν να εκφραστούν σαν σχέσεις λόγων φυσικών αριθμών.

Η έρευνα των μαθηματικών και της γεωμετρίας κορυφώνεται στην Ακαδημία του Πλάτωνα (427πΧ-347πΧ) Ο ίδιος ο Πλάτωνας ήταν κυρίως φιλόσοφος, όμως οι διάλογοι του είναι γεμάτοι από αναφορές στα μαθηματικά.

Η συμβολή του Ευκλείδη (300πΧ) ήταν καταλυτική στη διαμόρφωση της μελέτης του 2-διαστατου χώρου. Ο Ευκλείδης με το έργο του «Στοιχεία» συγκαταλέγεται μεταξύ των μεγάλων μαθηματικών της αρχαιότητας, είναι αξιοσημείωτο ότι παρά τις αδυναμίες που παρουσιάζονται σε κάποιες προτάσεις του καμία δεν είναι λάθος και αποτελεί στην ολότητά του ένα έργο άψογα παιδαγωγικό. Μετά το 260πΧ-200πΧ (Αρχιμήδης-Απολλώνιος) ακολουθεί μια κάμψη του Αρχαίου Ελληνικού πνεύματος, όμως η μεγάλη παράδοση θα συνεχιστεί με τους Νικομήδη (σύμφωνα με τον Πρόκλο επινόησε την κογχοειδή καμπύλη και με τη βοήθεια αυτής έλυσε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και της τριχοτόμησης της γωνίας), Διοκλή (επινόησε την κισσοειδή καμπύλη η οποία τον βοήθησε στη λύση των προβλημάτων διπλασιασμού του κύβου, τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας και ακόμα στον Διοκλή αποδίδονται προβλήματα που αναφέρονται στη διαίρεση σφαίρας από επίπεδο), Διόφαντο (τα συγγράμματά του τον ανέδειξαν ως μεγάλο μαθηματικό στη σχολή της Αλεξάνδρειας, τα «Αριθμητικά» του αποτελούν σταθμό στην εξέλιξη της μαθηματικής διανόησης, ίσως τελικά δικαίως σήμερα τον ονομάζουμε πατέρα της Άλγεβρας), Μενέλαο (δίδασκε στη σχολή της Αλεξάνδρειας, προήγαγε τη σφαιρική γεωμετρία) και Πάππο (σχολίαζε τους μεγάλους γεωμέτρους με ακρίβεια και λεπτολογία, ο Πρόκλος αναφέρει πως έγραψε σχόλια στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη).

Μετά από τους παραπάνω και πολύ αργότερα, μετά τον τραγικό θάνατο της Υπατίας, που θεωρείται η τελευταία μαθηματικός της αρχαιότητας, επήλθε πλήρης στασιμότητα έως τον 16^ο αιώνα. (Υπατία: 370μΧ-412μΧ έγραψε σχόλια για τα Αριθμητικά του Διόφαντου, ανέπτυξε τις Διοφαντικές εξισώσεις, εκτός από τα μαθηματικά και την Αστρονομία δίδαξε και φιλοσοφία μαθηματικών).¹ Είναι αδιαμφισβήτητο ότι τα μαθηματικά καλλιεργούν την ελεύθερη σκέψη, την αίσθηση της αρμονίας και της συμμετρίας, αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την αντίληψη, την προσοχή, την κριτική σκέψη λύνουν απορίες και προβλήματα, είναι το εργαλείο για να κατανοήσουμε τον κόσμο που μας περιβάλλει καθώς και την εξέλιξή του.

« Όταν ακούμε τη λέξη μαθηματικά το πρώτο πράγμα που μας έρχεται στο μυαλό είναι οι αριθμοί. Οι αριθμοί είναι η καρδιά των μαθηματικών, οι πρώτες ύλες με τις οποίες χαλκεύεται μεγάλο μέρος των μαθηματικών. Ζούμε σε ένα έντονα μαθηματικό κόσμο αλλά συχνά κρύβουμε τα μαθηματικά σαν τη σκόνη κάτω από το χαλί»² .Όμως ποια ήταν η απάντηση μιας μαθήτριας από την Α τάξη γυμνασίου στην ερώτηση του καθηγητή των μαθηματικών «τι είναι για εσάς τα μαθηματικά;» Μαθήτρια: «κύριε εγώ είμαι σκράπας στα μαθηματικά, δεν καταλαβαίνω για ποιο πράγμα μιλάνε, δεν ξέρω ποτέ τι ακριβώς πρέπει να κάνω για να λύσω ένα πρόβλημα, στο δημοτικό ο δάσκαλος με έβαλε να γράψω 20 φορές την προπαίδεια γιατί; Που θα μου χρειαστεί; Τα μαθηματικά κύριε είναι πολύ θάρβαρα». Για την εν λόγω μαθήτρια και ίσως για πολλούς μαθητές τα μαθηματικά είναι σκόνες κρυμμένες κάτω από το χαλί.

Είναι αναγκαίο να δεχτούμε ότι τα μαθηματικά δεν είναι μια μηχανή που μας παρέχει ορισμούς, κανόνες, αλγόριθμους και αναρίθμητες πληροφορίες, αλλά είναι μια διαδικασία σύλληψης, απόδειξης, οργάνωσης του ίδιου του περιεχομένου των μαθηματικών. Η επιλογή της μεθόδου που θα ακολουθήσει ο εκπαιδευτικός για να πραγματοποιήσει μια ή περισσότερες διαδικασίες μάθησης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την κατανόηση των διαδικασιών που θα χρησιμοποιήσει και αυτές οι διαδικασίες μπορούν να πραγματοποιηθούν, μοναδικά ίσως, με την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών.

«Η γενική ιδέα της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Μαθηματική Εκπαίδευση είναι αρκετά παλιά. Εκφάνσεις αυτής της ιδέας εφαρμόστηκαν σταδιακά στην πράξη με ποικίλους τρόπους, έτσι ώστε στις τρεις τελευταίες δεκαετίες να διαμορφωθεί ένας ενεργός ερευνητικός κλάδος στα πλαίσια της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, ο οποίος οδήγησε στην δημιουργία και ανάπτυξη μιας διεθνούς ομάδας μελέτης πάνω στα θέματα αυτά, η οποία είναι γνωστή ως η ομάδα HPM (The International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics)»³.

«Πολύ σωστά έχει παρατηρηθεί ότι η πολυμορφία είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό της σχέσης μεταξύ της ιστορίας των μαθηματικών και της παιδαγωγικής των μαθηματικών»⁴. Στην διπλωματική εργασία «ο Διόφαντος και η Διδακτική της Άλγεβρας» επιχειρούμε να αναδείξουμε ότι η ύπαρξη Ιστορικού πλαισίου στη διδασκαλία των Μαθηματικών μπορεί όχι μόνο να λύσει τα προβλήματα κατανόησης που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας των Μαθηματικών, αλλά και να οδηγήσει τους μαθητές στην ίδια την κατασκευή της γνώσης. Ο καθηγητής των μαθηματικών καλείται να λάβει υπόψη του ένα σύνολο παραγόντων τα οποία απαρτίζουν κάθε διδακτική ενότητα και κάθε μαθηματική έννοια. Καλείται όχι μόνο να πείσει τους μαθητές του για την ισχύ και την αλήθεια αυτών που διδάσκει, αλλά να προκαλέσει το ενδιαφέρον, την εμπλοκή, τη δράση των μαθητών, να τους οδηγήσει έξω από την απορία, από το περίπλοκο στο απλό και αντίστροφα.

Σκοπός και μεθοδολογία της έρευνας

Ο βασικός **σκοπός** της έρευνάς μας είναι να εξετάσει κατά πόσον η ύπαρξη ιστορικού πλαισίου στη διδασκαλία των μαθηματικών και μάλιστα κατά την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, μπορεί από τη μια μεριά να συμβάλλει στην βελτίωση της διδασκαλίας και από την άλλη μεριά να οδηγήσει τους μαθητές στην κατανόηση τελικά δύσκολων εννοιών της άλγεβρας. Για παράδειγμα η χρήση των γραμμάτων, οι σημασίες της μεταβλητής, οι σημασίες της ισότητας, η έννοια της εξίσωσης αποτελούν κομβικά σημεία για τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα και την εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης των μαθητών μας. Όπως θα δούμε στο 2^ο κεφάλαιο από την πρώτη εξίσωση στην ιστορία των μαθηματικών (Διόφαντος, 250μΧ) έως την εισαγωγή και την καθιέρωση των αγνώστων x, y και των παραμέτρων a, b (Euler, 1707-1783) πέρασαν πάρα πολλά χρόνια. Η Ιστορική εξέλιξη των αλγεβρικών εννοιών είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως μια ιεραρχία σταδίων; Τα εμπόδια για την κατανόηση και την απόκτηση μιας έννοιας παραλληλίζονται με εκείνα τα οποία μας αποκαλύπτει η μελέτη της ιστορικής διαδρομής της έννοιας; Με ποιο τρόπο ο μαθητής θα μεταβεί από τον κόσμο της Αριθμητικής σε αυτόν της Άλγεβρας;

Στα νέα σχολικά βιβλία υπάρχουν δραστηριότητες με ιστορικό περιεχόμενο. Βελτιώνουν τη διαδικασία στη διδασκαλία της έννοιας της αντίστοιχης διδακτικής ενότητας; Προκαλούν το ενδιαφέρον του μαθητή; Προετοιμάζουν το μαθητή με άμεσο τρόπο για την ανάπτυξη κάποιας ικανότητας και την προσέγγιση του αντίστοιχου μαθηματικού αντικειμένου; Ο μαθητής ανακαλύπτει τελικά τη γνώση; Δίνεται η δυνατότητα στον ενημερωμένο εκπαιδευτικό να χρησιμοποιήσει τις ιστορικές δραστηριότητες στην τάξη του και ή μήπως πρέπει να τις διαμορφώσει ώστε να είναι τελικά διδακτικά αποτελεσματικές, ή μήπως δεν θα ασχοληθεί;

Μεθοδολογία έρευνας: η παρούσα εργασία θα προσπαθήσει να απαντήσει στα παραπάνω ερωτήματα με **κύριο** και **μοναδικό σκοπό** την **εξαγωγή** συμπερασμάτων τα οποία μπορούν να συμβάλλουν στη **βελτίωση** της διδασκαλίας των μαθηματικών στη σχολική τάξη, κατά την μετάβαση από την αριθμητική στη σχολική άλγεβρα. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε στην ερευνά μας περιλαμβάνει τα εξής:

- Ανάλυση ιστορικών κειμένων σχετικών με την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα
- Κριτική ανάλυση των αναλυτικών προγραμμάτων και των διδακτικών βιβλίων σχετικά με την αξιοποίηση των ιστορικών δραστηριοτήτων που προτείνονται
- Εμπειρική έρευνα σε τάξη 58 μαθητών της Α΄ Λυκείου

➤ Περιγραφή των κεφαλαίων της διπλωματικής

Κεφάλαιο 1^ο : Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση

Στο 1^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλία τους. Η ιστορία ως εργαλείο στις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης μπορεί να μας προετοιμάσει για τα σημεία εκείνα στα οποία οι μαθητές θα συναντήσουν δυσκολίες και εμπόδια και επομένως να βελτιώσει ένα σχέδιο διδασκαλίας και τον τρόπο που μαθαίνουν οι μαθητές.

1.1.Παιδαγωγική: Αγωγή-Παιδεία-μόρφωση-Μαθηματικά

1.2.Η διεθνής ομάδα “History and Pedagogy of Mathematics
--

1.3.Επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία
--

1.4.Αντιρρήσεις για τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία
--

1.5.Επιστημολογικά εμπόδια, εννοιολογική αλλαγή, ιστορικός παραλληλισμός
--

Κεφάλαιο 2^ο: Από την Αριθμητική στην Άλγεβρα

Στο 2^ο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στην Αλεξάνδρεια και στο έργο του Διόφαντου. Επίσης θα εξετάσουμε ιστορικά το πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα (επίδραση του έργου του Διόφαντου στους μεταγενέστερους) και στη συνέχεια θα μελετήσουμε το ίδιο ζήτημα στη σημερινή μαθηματική εκπαίδευση, δηλαδή τη μετάβαση από την αριθμητική στη σχολική άλγεβρα.

Α' μέρος: Ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας -από το Διόφαντο έως τον Euler

2.1. Η Αρχαία Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου - Alexandria ad Aegyptum

2.2. Ο «αόρατος» Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς

2.3. Η στρατηγική και ο συμβολισμός στα μαθηματικά προβλήματα των Αριθμητικών του Διόφαντου

2.4. Επίδραση του έργου του Διόφαντου στην εξέλιξη της Άλγεβρας

Β' μέρος: Η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα στα Π.Σ.

2.5. Η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα-ένα πρόβλημα της διδακτικής

2.6. Ο ρόλος της ιστορίας της Άλγεβρας στην αντιμετώπιση του προβλήματος

Κεφάλαιο 3^ο

Στο τρίτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη διδακτική όψη του έργου του Διόφαντου η οποία αναδεικνύεται κυρίως μέσα από την εισαγωγή των Αριθμητικών, αλλά και το ρόλο του Διόφαντου ως Διδάσκοντα και όχι μόνο ως συντάκτη ενός μαθηματικού έργου.

Διδακτικές όψεις του έργου του Διόφαντου

Κεφάλαιο 4^ο: Αξιοποίηση των «Αριθμητικών του Διόφαντου» στη διδακτική και παιδαγωγική πράξη

Στο 4^ο κεφάλαιο θα εξηγήσουμε πως φτάσαμε στη χρήση μαθηματικού προβλήματος από τα Αριθμητικά του Διόφαντου (διδακτική προσέγγιση τύπου Γ) για τη διδασκαλία της εξίσωσης πρώτου βαθμού ως προς έναν άγνωστο και στη συνέχεια θα περιγράψουμε την εν λόγω διδασκαλία η οποία πραγματοποιήθηκε σε σχολική τάξη.

4.1 Τα μαθηματικά προβλήματα του Διόφαντου στη διδασκαλία της έννοιας της εξίσωσης

4.2. Αξιοποίηση του προβλήματος I 1 των Αριθμητικών στη διδασκαλία της Άλγεβρας- ένα παράδειγμα στη σχολική τάξη

4.3. Συμπεράσματα -συζήτηση

Παράρτημα

Η διπλωματική εργασία ολοκληρώνεται με ένα παράρτημα, το οποίο περιέχει τα βασικά σημεία της εισαγωγής των Αριθμητικών, καθώς και αριθμητικά προβλήματα «των Αριθμητικών» του Διόφαντου, τα οποία μπορούν να χρησιμεύσουν όχι μόνο για την διδασκαλία εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού, στις τάξεις της Α΄ Λυκείου αλλά και του Γυμνασίου.

Λέξεις κλειδιά

Παραλληλισμός, Διόφαντος, αριθμητική, άλγεβρα, πρόβλημα, διδασκαλία,

Abstract

The first chapter of “*Diophantus and Algebra’s instruction*” presents strong aspects and arguments about using history of mathematical meanings on Mathematics instruction. Historical evolution, analysis and empirical evidence on mathematical meanings, could prepare us for those items where students face cognitive difficulties and obstacles.

The second chapter consists of two parts. The first one is historical and presents “*Alexandria by Egypt*” as learning center. It also presents Algebra’s historical evolution from Diophantus to Euler. The second part covers the transition from the world of arithmetic to the world of school algebra.

In the third chapter we discuss about Diophantus not only as creator of his work but also as a teacher. We are studying the introductory part of *Diophantus Arithmetica*.

In the fourth chapter we describe the realization of classroom teaching concerning linear equation in the first class of Lyceum Saint Theodorus. For teaching we used the problem I.1 of “*Diophantus Arithmetica*”.

Finally in the supplement we propose some problems of “*Diophantus Arithmetica*” for teaching linear equations and equations of second grade.

Keywords

Parallelism, Diophantus, arithmetic, algebra, problem, teaching

Κεφάλαιο 1^ο

1.1. Παιδαγωγική: Αγωγή – Παιδεία/Μόρφωση - Μαθηματικά

Ο όρος «**παιδαγωγική**» εμφανίζεται για πρώτη φορά στην Ελληνική Αρχαιότητα και συνδέεται με την αρχαία Ελληνική λέξη **παις**. Τόσο για τους αρχαίους Έλληνες όσο και για τους Ρωμαίους ο παιδαγωγός (παιδαγωγός: άγω τον παίδα), ήταν ένας μορφωμένος σκλάβος, που συνόδευε τα παιδιά από το σπίτι στο σχολείο, αργότερα στους Ελληνιστικούς χρόνους (323πΧ-31πΧ) ο όρος παιδαγωγός άρχισε να σημαίνει ανατρέφω, εκπαιδεύω. Η «παιδαγωγική» στην Ελληνική αλλά και στη Ρωμαϊκή Αρχαιότητα (31πΧ- 324μΧ) είναι η καθοδήγηση, η συνοδεία, η **τέχνη** της ανατροφής των παιδιών με την καθοδήγηση να είναι το κύριο χαρακτηριστικό της **αγωγής**.

Τη **σημασία** της λέξης αγωγής, με την έννοια της παιδευτικής ενέργειας στον άνθρωπο, την συναντάμε για πρώτη φορά στον ορισμό που δίνει ο Πλάτων στην παιδεία: «*Παιδεία είναι η προσέλευση και η καθοδήγηση των παιδιών προς τις αρχές (της συμπεριφοράς), που ο νόμος χαρακτηρίζει σαν ορθές, από την πείρα των πιο ώριμων και συνετών ανθρώπων*» (Πλάτων-Νόμοι-659d) ⁵. Ο Πλάτων (427πΧ-346πΧ) χαρακτηρίζεται ως ο πρώτος παιδαγωγός στην ιστορία, ο οποίος είχε ασχοληθεί με την αναγνώριση ειδικών περιστάσεων στις οποίες επιβάλλεται η παιδαγωγική ενέργεια, με τις απαιτήσεις στις οποίες ανταποκρίνεται και με τις συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι δυνατή. Ο Πλάτων δημιούργησε τη φιλοσοφία της αγωγής, υποστήριξε πως κανένα άλλο μάθημα δεν έχει τόσο μεγάλη παιδευτική δύναμη όσο τα μαθηματικά. Σύμφωνα με τον Πλάτωνα τα μαθηματικά ξυπνάνε αυτόν που από τη φύση του νυστάζει και τον κάνουν να είναι δεκτικός στη μάθηση και καλλιεργούν τη μνήμη και την οξύτητα του πνεύματος. Στα πρώτα χρόνια του 4^{ου}πΧ αιώνα η αγωγή είχε γίνει μια ειδική λειτουργία. Στην προηγούμενη εποχή από εκείνην του Πλάτωνα (μέσα 5^{ου}πΧ αιώνα) συναντάμε τους **Σοφιστές**, δηλαδή ειδικούς της γνώσης. Γυρίζουν από πόλη σε πόλη, δίνουν ομιλίες με μεγάλη επιτυχία και στρατολογούν μαθητές για τα ειδικά μαθήματα για τα οποία πληρώνονται. Είναι μια διδασκαλία γενική και δημόσια, χωρίς ειδικότητα, φαίνεται σαν μια καινούργια μορφή κοινωνικής δραστηριότητας. Ποιά είναι τα οφέλη της διδασκαλίας των Σοφιστών, ποια είναι η ύλη και το περιεχόμενό της; Από τους Σωκρατικούς διαλόγους του Πλάτωνα φαίνεται πως είναι διδασκαλία εγκυκλοπαιδικής φύσης η οποία αντιπροσωπεύεται από τον Ιππία τον Ηλείο.

Ο Ιππίας ο Ηλείος (2^ο μισό του 5^{ου}πΧ αιώνα), σοφιστής, μαθηματικός, δάσκαλος της αριστοκρατίας των Αθηνών, θεωρείται ως ο θεμελιωτής της **μαθηματικής αγωγής**, αφού φαίνεται ότι σε αυτόν ανήκει η τιμή του ότι αναγνώρισε πως τα

μαθηματικά, είναι η επιστήμη της οποίας η εφαρμογή μπορεί να απλωθεί σε όλους τους τομείς της σκέψης και της εργασίας ⁶. Ο Διόφαντος (3^{ος} αιώνας μΧ) χωρίς αμφιβολία ήταν εξοικειωμένος με την καλλιέργεια της παιδείας. Αν και αρχικά, όπως είδαμε, ο όρος αυτός σήμαινε την «ανατροφή των παιδιών», στη συνέχεια ταυτίστηκε με την καλλιέργεια, την καθαρά πνευματική ωρίμανση, την αφομοίωση και τις εκπαιδευτικές αξίες τα οποία αποκτούσε κανείς με την σχολική εκπαίδευση. Η παιδεία δεν στηριζόταν μόνο στη διδασκαλία της λογοτεχνίας, στην Αλεξάνδρεια οι πολίτες οι οποίοι είχαν μόνιμη θέση στα πολιτικά δρώμενα συμμετείχαν και στον πολιτιστικό βίο του τόπου. Η Αλεξάνδρεια προσέφερε υψηλό επίπεδο πολιτικής και πολιτιστικής ζωής. Το Μουσείο και η Βιβλιοθήκη όπως θα δούμε παρακάτω ήταν πόλος έλξης επιφανών διανοούμενων, μελετητών και συγγραφέων. Αν και στην Αλεξάνδρεια έζησαν και εργάστηκαν μεγάλοι έλληνες Μαθηματικοί, δεν υπάρχουν οι αποδείξεις για να ισχυριστεί κανείς ότι η Αλεξάνδρεια ήταν ένα «σχολείο μαθηματικών». Το επάγγελμα του δασκάλου χαρακτήριζε κυρίως άνδρες εκείνης της εποχής, με εξαίρεση την Ερμιόνη και την Υπατία.

Από τις πρώτες σημασίες της παιδαγωγικής έως και σήμερα όπου η παιδαγωγική είναι ένας αυτοδύναμος επιστημονικός κλάδος, η παιδαγωγική ακολούθησε μια μεγάλη πορεία. Αρχικά η ανθρωπιστική διάσταση της παιδείας (αρχαία Ελλάδα, Σοφιστές, Πλάτωνα) προσδιόριζε το ανθρώπινο ενδιαφέρον για την **πολυμάθεια** και την **δημιουργικότητα**. Σήμερα η παιδαγωγική προσδιορίζεται ως η κοινωνική επιστήμη η οποία έχει ως αντικείμενο τις επιδράσεις της **αγωγής** και της **μάθησης** στη νοητική, στη συναισθηματική και στη βουλητική συμπεριφορά του παιδιού και του έφηβου.

Η **αγωγή** συνιστά από τη μια πλευρά τη σκόπιμη ενέργεια που έχει ως σκοπό τη διαμόρφωση της συμπεριφοράς του παιδιού ή του εφήβου και από την άλλη πλευρά εξετάζει τους κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες οι οποίοι ενισχύουν και βελτιώνουν τη συμπεριφορά του νέου. Σ' αυτή τη διαδικασία ο νέος συμμετέχει ενεργά, δραστηριοποιείται με σκοπό να αποκτήσει όλα τα απαραίτητα εφόδια για την ολόπλευρη ανάπτυξη της προσωπικότητας του και για την προσαρμογή του στο κοινωνικοπολιτιστικό περιβάλλον. Η νέα αυτή διαδικασία πραγματοποιείται παράλληλα με τις ενέργειες της αγωγής και ορίζεται ως **μάθηση**. Κατά καιρούς έχουν δοθεί διάφοροι ορισμοί για τη μάθηση, όμως τα φαινόμενα της μάθησης είναι και **ποικιλόμορφα** και **διαφορετικά** και επομένως είναι δύσκολη η ένταξη τους σε μια κατηγορία, αλλά είναι επίσης δύσκολο να δοθούν ακριβείς ορισμοί.

Στο χώρο της παιδαγωγικής αναφέρονται τρεις τάσεις, η **παλιά** (αρχαίοι χρόνοι έως 18^ο αιώνα), η **νεώτερη** (18^{ος} αιώνας έως τέλη 19^{ου} –αρχές 20^{ου} αιώνα, J. J.

Rousseau- Montaigne- Κομένιος) και η **σύγχρονη παιδαγωγική** (νέο σχολείο, σχολείο δράσης, νέα αγωγή)

Οι παιδαγωγικές έρευνες ταξινομούνται σε τέσσερις μεγάλες κατηγορίες:

1) ιστορικές έρευνες, 2) περιγραφικές έρευνες, 3) έρευνες συσχέτισης και 4) πειραματικές έρευνες.

Οι **ιστορικές έρευνες** στοχεύουν να εξετάσουν ποια **προγενέστερα** γεγονότα οδηγούν σε μια **μεταγενέστερη** σειρά καταστάσεων και αναλύουν γραπτές ή εικονογραφημένες πηγές παλαιότερων ιδεών, γεγονότων ή καταστάσεων. Στα παλιά μπορούμε να βρούμε διασυνδέσεις με το σήμερα, μπορούμε να βρούμε παρόμοιους προβληματισμούς, χωρίς αυτό να σημαίνει απαραίτητα ότι το παλιό (το αρχαίο) καθορίζει το μεταγενέστερο. Για παράδειγμα θα μπορούσε κανείς να εξετάσει και να ανακαλύψει τους λόγους για τους οποίους στα βιβλία των μαθηματικών του γυμνασίου και του λυκείου υπάρχουν τα ιστορικά σημειώματα ή κάποια ιστορικά προβλήματα ή ακόμα να εξετάσει και να ανακαλύψει τους λόγους για τους οποίους πολλά σχολικά συστήματα χρησιμοποιούν σήμερα τα οπτικοακουστικά μέσα στη διδασκαλία ⁷. Είναι γενικά αποδεκτό ότι η παιδεία είναι το σύνολο των γνώσεων και των επιρροών που οδηγούν στη **μόρφωση** (μορφώνω: δίνω μορφή σε κάτι αμόρφωτο-παρέχω πνευματική καλλιέργεια –το σχολείο πρέπει όχι μόνο να μορφώνει αλλά και να παιδαγωγεί), με αυτή τη θεώρηση η παιδεία είναι διαδικασία και αποτέλεσμα. Θεωρούμε παιδευτική εκείνη τη διδασκαλία που οδηγεί το άτομο στο να αποκτήσει αξιόλογες, χρήσιμες γνώσεις και επιθυμητές αξίες που προάγουν τη ζωή⁸. Τα μαθηματικά αποτελούν ένα μεγάλο μέρος του ανθρώπινου πολιτισμού, έχουν ανθρωπιστικά χαρακτηριστικά και προάγουν τις ανθρωπιστικές αξίες. Η αναφορά στην ανθρωπιστική διάσταση των μαθηματικών μας μεταφέρει πίσω στην αρχαία Ελλάδα, στους Σοφιστές, στον Πλάτωνα, στη διδασκαλία και στα «Αριθμητικά» του Διόφαντου και στην Αναγέννηση όπου ο όρος Humanity αποβλέπει σε μια καλύτερη ζωή μέσα από την φιλοσοφική ευδαιμονία.

Στον αιώνα που διανύουμε η Μαθηματική επιστήμη έχει αναπτυχθεί σε ένα υψηλό επίπεδο θεωρητικής σκέψης, που είναι αποτέλεσμα της εξέλιξης και του σύγχρονου πολιτισμού. Με ποιο τρόπο θα διαμορφωθεί η μαθηματική κουλτούρα του σημερινού μαθητή και αυριανού πολίτη και πως το γεγονός της μεγάλης ανάπτυξης των μαθηματικών θα βρει απήχηση στη μαθηματική διαμόρφωση της σκέψης των μαθητών μας; Η ανθρωπιστική διάσταση της παιδείας έχει σκοπό να προκαλέσει το ενδιαφέρον του μαθητή για μάθηση, να αναπτύξει την ευαισθησία του, τη φαντασία του, την εκφραστικότητά του, την αντίληψή του και γενικότερα θέτει ως επίκεντρο την πνευματική, την ηθική ολοκλήρωση. Οι σκοποί αυτοί δεν είναι εύκολο να πραγματοποιηθούν, ακόμα κι

αν διδάξουμε με επιτυχία μια μαθηματική ενότητα δεν είναι σίγουρο ότι θα έχουμε και την ίδια επιτυχία στην αλλαγή της στάσης των μαθητών για τα μαθηματικά. Αυτό που σίγουρα μπορούμε να κάνουμε είναι να εμπλουτίσουμε τη διδασκαλία μας ώστε να πείσουμε το μαθητή να έρθει κοντά στα μαθηματικά και να πειραματιστεί ο ίδιος σε κάθε νέα μαθηματική ενότητα και σε κάθε νέα μαθηματική έννοια. Η Ιστορία των μαθηματικών είναι πλούσια και γεμάτη περιπέτειες για αυτούς που δημιούργησαν τα ίδια τα μαθηματικά, περιλαμβάνουν μικρές και μεγάλες στιγμές των μαθηματικών εννοιών με πρωταγωνιστές μεγάλους μαθηματικούς της ιστορίας. Θαλής, Πυθαγόρας, Ίππασος, Ευκλείδης, Αρχιμήδης, Διόφαντος, Υπατία, το τραγικό τέλος του E. Galois (1811-1830) και του Abel (1802-1829), η περιπέτεια του G. Cantor (1845 - 1918) όταν μαθηματικοί ομότιμοι του απέρριψαν την εργασία του, η δίκη του Γαλιλαίου (1564-1641) κλπ.

*«Η επιλογή **βιογραφιών** προκαλεί το ενδιαφέρον του μαθητικού ακροατηρίου και μπορεί να λειτουργήσει ως αντιστάθμισμα στις βιογραφίες **ηρώων** της καθημερινότητας»⁹.* Σπουδαίο ρόλο στη διδασκαλία μπορούν να διαδραματίσουν απόψεις, εκφράσεις μεγάλων μαθηματικών καθώς επίσης και ο σχολιασμός επιστολών. Για παράδειγμα η ανώνυμη επιστολή (απάντηση σε ερώτηση του Γιόχαν Μπερνούλλι) του Νεύτωνα μέσω της Βασιλικής Εταιρείας, της οποίας ήταν μέλος, προς τον Λάιμπνιτς ο οποίος προσπαθούσε να τον παγιδεύσει με διάφορα προβλήματα τα οποία του έθετε, ανάγκασε τον Γιόχαν Μπερνούλλι να αναφωνήσει «αναγνωρίζω το λέοντα από τον όνυχά του». Επρόκειτο δε για ένα πρόβλημα βολής στη φυσική το οποίο ανάγεται στα μαθηματικά και στον υπολογισμό μέγιστου –ελάχιστου συνάρτησης.

Ο Weierstrass (1815-1897) σε επιστολή του προς το Σουηδό μαθηματικό Mittag Leffler (1846-1927) γράφει «..είναι αλήθεια ότι αν ασχολείσαι με τα μαθηματικά και δεν είσαι κάτι σαν ποιητής ποτέ δεν είσαι τέλειος στα μαθηματικά»

*«Οι **επιστολές** δεν έχουν μόνο ηθοπλαστική αξία αλλά αποτελούν ιστορικά κείμενα γιατί είχαν επίπτωση στην εξέλιξη της κοινωνίας»¹⁰.* Η μελέτη **αυθεντικών** ιστορικών κειμένων μπορεί να εξελιχθεί σε ένα σημαντικό **αρωγό** στην προσπάθεια των μαθητών να δημιουργήσουν **συνδέσεις** μέσα στα μαθηματικά, μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών, μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου. Έτσι η μελέτη ενός αυθεντικού ιστορικού κειμένου μπορεί να αναδείξει τις διαφορετικές όψεις μιας μαθηματικής έννοιας¹¹, δηλαδή:

- την πρώτη εμβρυακή εμφάνιση, μέχρι τη σύγχρονη μορφή που γίνεται αντικείμενο διδασκαλίας στο σχολείο

- τα προβλήματα και τις εφαρμογές που έκαναν αναγκαία τη γέννηση και την εξέλιξή της
- τα εμπόδια και τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι επιστήμονες στην προσπάθεια να την εντάξουν μέσα στο σώμα της επιστημονικής γνώσης κάθε εποχής.

Αυτός που διδάσκει ή που θα διδάξει μαθηματικά πρέπει να είναι εξοπλισμένος εκτός από το γνωστικό χαρακτήρα των μαθηματικών, εκτός από τη φιλοσοφική προσέγγιση των μαθηματικών, με την **ιστορία** των μαθηματικών.

Ο εκδημοκρατισμός της εκπαίδευσης, η υποχρεωτική εκπαίδευση έως και το 15^ο έτος της ηλικίας, η αναβάθμιση των στόχων της εκπαίδευσης, έχουν αναβαθμίσει τα τελευταία χρόνια τις προσπάθειες ανάπτυξης αποτελεσματικών προσεγγίσεων και μαθησιακών δραστηριοτήτων στο πεδίο της διδακτικής γενικά και ειδικότερα στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών. Η διδακτική των μαθηματικών απασχόλησε τους φιλοσόφους, τους ψυχολόγους και τους παιδαγωγούς από την κλασσική εποχή έως και σήμερα. Τα δε τελευταία χρόνια, μαθηματικοί από όλο τον κόσμο ερευνούν και συζητούν για το ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους.

1.2. Η διεθνής ομάδα “History and Pedagogy of Mathematics”

Το 1972 στο 2^ο διεθνές συνέδριο για τη μαθηματική εκπαίδευση (ICME- International Congress on Mathematical Education) το οποίο πραγματοποιήθηκε στην πόλη Έξετερ της Αγγλίας δημιουργήθηκε από τους Phillip S.Jones (University of Michigan US) και Leo Rogers (Roehampton Institute of Higher Education UK) μια ομάδα εργασίας με το όνομα **HPM**, ιστορία και παιδαγωγική των μαθηματικών, “**History and Pedagogy of Mathematics**”. Η ομάδα αυτή αναγνωρίστηκε επίσημα από τη διεθνή επιτροπή για την διδακτική των μαθηματικών (ICMI- International Commission on Mathematical Instruction) και συμμετέχει οργανωμένα στο μεγάλο διεθνές συνέδριο που διεξάγεται κάθε 4 χρόνια. Παράλληλα η ομάδα οργανώνει τοπικά συνέδρια στην Ευρώπη, τη Β. Αμερική κ.α.

Οι προτάσεις της ομάδας HPM, όχι μόνο έγιναν αποδεκτές από τη διεθνή επιτροπή για την διδακτική των μαθηματικών, αλλά συνεργάστηκαν η διδακτική των μαθηματικών, η ιστορία και η παιδαγωγική των μαθηματικών. **Ποιοι ήταν όμως οι βασικοί στόχοι της ομάδας HPM¹²;**

- Ανάπτυξη διεθνών επαφών και ανταλλαγή απόψεων σχετικών με προγράμματα ιστορίας των μαθηματικών στα Πανεπιστήμια, στα κολλέγια και στα σχολεία. Ενεργοποίηση και προώθηση της διεπιστημονικής διερεύνησης, φέρνοντας σε επαφή ιστορικούς των

μαθηματικών, παιδαγωγούς, καθηγητές μαθηματικών, κοινωνικούς επιστήμονες και όσους ενδιαφέρονται και χρησιμοποιούν τα μαθηματικά.

- Προώθηση της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών
- Προώθηση απόψεων σχετικών με την ιστορία των μαθηματικών και τη μαθηματική εκπαίδευση σε όλες τις βαθμίδες.
- Περαιτέρω βαθύτερη κατανόηση της μαθηματικής εξέλιξης και των παραγόντων που συμβάλλουν σε αυτήν.
- Σύνδεση της διδασκαλίας των μαθηματικών και της ιστορίας ώστε να βελτιωθεί η διδασκαλία και να αναπτυχθούν κατάλληλα προγράμματα σπουδών.
- Παραγωγή κατάλληλων εργαλείων από την ιστορία των μαθηματικών που θα βοηθήσουν τους καθηγητές των μαθηματικών στη διδασκαλία και διευκόλυνση της πρόσβασης σε υλικό σχετικά με την ιστορία των μαθηματικών.
- Προώθηση της επίγνωσης ότι η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί σημαντικό κομμάτι της εξέλιξης των διάφορων πολιτισμικών παραδόσεων.

Στο 6^ο συνέδριο για τη μαθηματική εκπαίδευση (ICME 6) η Evelyn Barbin από τη Γαλλία ανακοίνωσε ότι από το 1986 το επίσημο πρόγραμμα της διδασκαλίας των μαθηματικών στη Γαλλία δέχτηκε ότι η **εισαγωγή** μιας **ιστορικής προοπτικής** στο μάθημα θα **επιτρέψει** στους μαθητές να **αντιληφθούν** καλύτερα το νόημα των διδασκομένων εννοιών και προβλημάτων και να **κατανοήσουν** καλύτερα τη διαδικασία της επιστημονικής προόδου. Το πρόγραμμα περιελάμβανε **διδασκαλίες** με βάση την ιστορική προσέγγιση των μαθηματικών, **ανάγνωση** αυθεντικών ιστορικών μαθηματικών κειμένων από τους μαθητές και **επεξεργασία** γνωστών ιστορικών προβλημάτων. Η προσπάθεια να συνδεθεί η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών με το γενικότερο επιστημονικό, φιλοσοφικό και πολιτιστικό κλίμα οδήγησε σε μια γόνιμη διεπιστημονική συνεργασία στην οποία συμμετείχαν καθηγητές διάφορων ειδικοτήτων όπως μαθηματικών, φυσικής, φιλοσοφίας, ιστορίας κλπ.

Στη συνέχεια η Helena Pycior από τις Η.Π.Α. (Πανεπιστήμιο Milwaukee) παρουσίασε το ερευνητικό πρόγραμμα “Mathematics Teaching with History” το οποίο είχε ως σκοπό να **εκτιμήσει** τις αντιλήψεις των καθηγητών, για **το διδακτικό ρόλο** της ιστορίας των μαθηματικών αλλά και να **εξετάσει** την επίδραση της ιστορίας στην μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών.

Ο Γερμανός Hans Wussing συγγραφέας των βιβλίων «Βιογραφίες σπουδαίων μαθηματικών» και «Παραδόσεις ιστορίας των μαθηματικών» υπογράμμισε τη

μεγάλη σημασία της ιστορίας των μαθηματικών για την **εκπαίδευση** και την **επιμόρφωση** των καθηγητών που διδάσκουν μαθηματικά στη μέση εκπαίδευση, ανέφερε δε ότι στη χώρα του πολλά χρόνια πριν η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί **υποχρεωτικό** μάθημα για τους μελλοντικούς καθηγητές. Το μάθημα αυτό όχι μόνο **συμβάλλει** αποφασιστικά στη γενική μόρφωση των φοιτητών αλλά **αποτελεί** ένα διδακτικό-μεθοδολογικό **εργαλείο**, ιδιαίτερα χρήσιμο στη μελλοντική τους επαγγελματική σταδιοδρομία.

Ο Ούγγρος A. Szabo (ερευνητής της ιστορίας των αρχαιοελληνικών μαθηματικών) στη δική του παρέμβαση χρησιμοποίησε δυο παραδείγματα από την ιστορία των μαθηματικών, στο πρώτο παράδειγμα ο Σωκράτης διδάσκει ένα δούλο την κατασκευή τετραγώνου με εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν δοσμένου τετραγώνου-απόσπασμα από τον Πλατωνικό διάλογο «Μένων» - και το δεύτερο παράδειγμα αφορά τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς με την βοήθεια των οποίων οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί υπολόγιζαν τις ρητές προσεγγίσεις άρρητων λόγων¹³. Το ζήτημα των σχέσεων ιστορίας-διδακτικής των μαθηματικών, τόσο σε επίπεδο εκπαίδευσης, επιμόρφωσης εκπαιδευτικών, όσο και σε επίπεδο εφαρμογής στην τάξη απασχολεί έντονα ερευνητές και θεωρητικούς της διδακτικής των μαθηματικών τα τελευταία χρόνια.

Η θεώρηση της ιστορίας των μαθηματικών ως συστατικού στοιχείου της διδακτικής πράξης απαιτεί ένα σαφές θεωρητικό πλαίσιο το οποίο να συνδέει την εννοιολογική ανάπτυξη των μαθηματικών όπως καταγράφεται ιστορικά, με τη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές μέσω μιας αποδοτικής μεθοδολογίας και διδασκαλίας. (Radford, Katz, Dorier, Sierpinska κ. ά. 2000).

Δημιουργούνται βέβαια βασικά ερωτήματα σύμφωνα με την Furinghetti (2002) που είναι τα εξής:

- ποια εκπαιδευτικά οφέλη επιτυγχάνονται μέσω της ιστορίας των μαθηματικών;
- ποιες διδακτικές στρατηγικές είναι δυνατόν να εφαρμοστούν;
- πως είναι προετοιμασμένοι οι δάσκαλοι (καθηγητές) των μαθηματικών για μια τέτοια εισαγωγή στη διδασκαλία των μαθηματικών;

Ο Γερμανός μαθηματικός Felix Klein (1849-1925) χρησιμοποίησε ευρέως την ιστορία των μαθηματικών σε διαλέξεις που έδωσε για πρώτη φορά το 1907, στα πλαίσια της επιμόρφωσης των μαθηματικών και αποτέλεσαν το περιεχόμενο του βιβλίου του “elementary mathematics from an advanced standpoint”, (στοιχειώδη μαθηματικά από ανώτερη σκοπιά). Σε αυτό το έργο ο Felix Klein αναφέρει: «ένα ουσιαστικό εμπόδιο στην ανάδυση τόσο μιας φυσικής όσο και αληθινά επιστημονικής μεθόδου διδασκαλίας είναι η έλλειψη ιστορικής γνώσης

που τόσο συχνά γίνεται αισθητή. Για να το καταπολεμήσω αυτό αποφάσισα να εισάγω ιστορικές παρατηρήσεις στην παρουσίαση μου και με αυτό τον τρόπο πιστεύω ότι σας έχω ξεκαθαρίσει πόσο αργά γεννήθηκαν όλες οι μαθηματικές ιδέες, πως πάντοτε σχεδόν εμφανίζονται πρώτα σε προφητικές μάλλον μορφές και μόνο μετά από μακριά χρονικά ανάπτυξη πήραν την τελική και αυστηρή τους μορφή.»

1.3. Επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία

Η ιδέα της αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη είναι αρκετά παλιά όμως ουσιαστική και συστηματική ανάπτυξη εμφανίζεται όπως είδαμε με την ίδρυση της ομάδας ΗΡΜ. Η βασική ιδέα για την επιχειρηματολογία της αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών είναι η **επιστημολογική θέση** ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο το **αποτέλεσμα** της διαδικασίας και της ανάπτυξης θεωριών απαγωγικά δομημένων, δεν είναι μόνο η χρήση μιας εξειδικευμένης συμβολικής γλώσσας, τα οποία αυξάνονται συσσωρευτικά και παρουσιάζονται στην **τελική** τους μορφή, αλλά είναι οι ίδιες οι διαδικασίες που οδηγούν στο τελικό αποτέλεσμα και περιλαμβάνουν ενέργειες για την **απόδοση νοήματος** στις **λογικές κατασκευές**, περιλαμβάνουν **αναστοχαστικές διαδικασίες** που οδηγούν στην κατασκευή νοήματος συνδέοντας τη νέα γνώση με την ήδη υπάρχουσα ή και ακόμα **διευρύνοντας, εμβαθύνοντας** και **επεκτείνοντας** τα ήδη υπάρχοντα **εννοιολογικά** πλαίσια.

Η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών δεν μπορεί να περιορίζεται στην παρουσίαση και εκμάθηση **τελικών προϊόντων** της μαθηματικής κοινότητας, αλλά πρέπει να δίνει τη δυνατότητα στο διδασκόμενο να κάνει ο ίδιος μαθηματικά ανάλογα με το επίπεδο γνώσεών του και ανάλογα με τη νοητική ανάπτυξη που βρίσκεται και έτσι να αποκτά ο ίδιος **εμπειρίες μαθηματικής δημιουργίας**. Με αυτήν την οπτική η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί ένα φυσιολογικό πλαίσιο για να ειπωθούν τα μαθηματικά **εν τω γεννάσθαι**, ώστε να αντιληφθεί ο διδασκόμενος τα μαθηματικά ως νοητική κατασκευή με εργαλειακή αξία, ως ανθρώπινη δραστηριότητα με ότι συνεπάγεται, αδυναμίες, ατέλειες κλπ.

Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να εμπλουτίσει τη διδασκαλία και τη μάθηση τους από πολλές πλευρές, θα αναφερθούν οι πιο σημαντικές.

Α. Η εκμάθηση των μαθηματικών

- Η ιστορική διάσταση των μαθηματικών αντιπαραβαλλόμενη με το τελικό «στιλβωμένο» προϊόν, το οποίο σήμερα είναι αποδεκτό από την

επιστημονική κοινότητα. Όπως επισημαίνει ο Freudenthal (1983), «καμία μαθηματική ιδέα δεν έχει ποτέ δημοσιευτεί με τον τρόπο που ανακαλύφθηκε». Το γεγονός αυτό αγνοείται συστηματικά σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, με αποτέλεσμα να στερεί τη δυνατότητα από το διδασκόμενο να αντιληφθεί την ανθρώπινη διάσταση της μαθηματικής δημιουργίας και να αναπτύξει μέσα από αυτήν τις μεταγνωστικές δεξιότητες.

- *Η ιστορία ως πηγή πληροφοριών:* η ιστορία αποτελεί βασική πηγή παραδειγμάτων, καταστάσεων, προβλημάτων, τα οποία μπορούν να εμπλουτίσουν τη διαδικασία της μάθησης και να κινητοποιήσουν τον διδάσκοντα και τον διδασκόμενο.
- *Η ιστορία ως γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών πεδίων:* τα μαθηματικά εξελίχθηκαν και εξελίσσονται σε μεγάλο βαθμό σε μια διαρκή και γόνιμη αλληλεπίδραση με άλλες επιστήμες, όμως η διδασκαλία τους πραγματοποιείται χωρίς αναφορά στην παραπάνω συσχέτιση, αν και σήμερα τα σύνορα μεταξύ των επιστημών έχουν σχεδόν εξαφανιστεί.
- *Η γενικότερη παιδευτική σημασία της ιστορίας:* με την ενασχόληση των διδασκομένων με εργασίες ιστορικού προσανατολισμού μπορούν να αναπτυχθούν γενικότερες δεξιότητες, όπως αναζήτηση και διερεύνηση πηγών, γραπτή απεικόνιση των αποτελεσμάτων της διερεύνησης, λεκτική ανάπτυξη επιχειρηματολογίας, απόδοση στη σημερινή γλώσσα κειμένου γραμμένου σε γλώσσα παλαιότερης περιόδου, μετατροπή των κειμένων στη μαθηματική γλώσσα κλπ.

B. Η ανάπτυξη απόψεων για τη φύση των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας

- *Το περιεχόμενο των μαθηματικών:* με συγκεκριμένα παραδείγματα από την ιστορία των μαθηματικών, είναι σε θέση ο διδασκόμενος να **αντιληφτεί** ότι οι ευρετικές διαδικασίες, οι εικασίες, οι αποδείξεις, τα λάθη, τα αδιέξοδα κλπ αποτελούν κομμάτι της μαθηματικής δημιουργίας και είναι αναπόσπαστο μέρος των ίδιων των μαθηματικών και της εξέλιξης. Με την παραπάνω λειτουργία της ιστορίας των μαθηματικών ο διδασκόμενος μπορεί να **διατυπώσει** τις δικές του εικασίες, να **αντιληφτεί** τις δικές του ατέλειες, να **δει** τα λάθη του και να **αναπτύξει** αυτοδιορθωτικές πρακτικές.
- *Η μορφή των μαθηματικών:* Ο **μαθηματικός συμβολισμός** είναι ένα εξαιρετικά σημαντικό ζήτημα **εντός** και **εκτός** των μαθηματικών. Με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών γίνεται κατανοητός ο **εξελικτικός** χαρακτήρας του μαθηματικού συμβολισμού και επίσης **συγκρίσεις**

μεταξύ διαφορετικών συμβολισμών, διαφορετικών ιστορικών περιόδων για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο οδηγούν στη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών και των μεθόδων που περιγράφονται με διαφορετικούς συμβολικούς τρόπους. Για παράδειγμα η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του αγνώστου όπως θα δούμε στο τελευταίο κεφάλαιο.

Γ. Το διδακτικό και παιδαγωγικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών

- *Προσδιορισμός κινήτρων:* η αναφορά στον τρόπο με τον οποίο εξελίχθηκε μια έννοια ή μια μέθοδος ή μια θεωρία εμπεριέχει τα κίνητρα, τα προβλήματα και τις προσπάθειες που οδήγησαν σε αυτήν.
- *Δυσκολίες και εμπόδια:* ο διδάσκων μπορεί να αντιληφθεί και να συνειδητοποιήσει τις δυσκολίες και τα εμπόδια που υπάρχουν σε μια μαθηματική έννοια και να ευαισθητοποιηθεί απέναντι στο γεγονός ότι ανάλογες δυσκολίες και εμπόδια μπορούν να εμφανιστούν στην τάξη.
- *Εμπλοκή και συνειδητοποίηση της δημιουργικής διαδικασίας **κάνω μαθηματικά**:* η ενασχόληση με εργασίες που έχουν **προσανατολισμό** προς την ιστορία και η προσπάθεια ανακατασκευής μιας μεθόδου ή της λύσης ενός προβλήματος με βάση πρωτογενείς ή και δευτερογενείς πηγές, είναι μια **διαδικασία προσομοίωσης** στο χώρο των μαθηματικών με ευεργετικά αποτελέσματα για τον διδάσκοντα αλλά και το διδασκόμενο.
- *Εμπλουτισμός διδακτικού ρεπερτορίου:* μέσω της ιστορίας των μαθηματικών ο διδάσκων μπορεί να έχει μια ευρεία δεξαμενή προβλημάτων, ερωτημάτων, καταστάσεων κλπ για τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας του, ώστε να πραγματοποιείται ευχάριστα και να προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών.
- *Αποκωδικοποίηση και κατανόηση μη συμβατικά διατυπωμένων, αλλά εν τέλει «σωστών» μαθηματικών:* η επαφή με πρωτογενείς ή δευτερογενείς πηγές, αναγκαστικά εμπεριέχει και την προσπάθεια **αποκωδικοποίησης** «σωστών» μαθηματικών, με τα σημερινά δεδομένα, τα οποία είναι διατυπωμένα σε μια ιδιοσυγκρασιακή γλώσσα, είτε από πλευράς συμβολισμού, είτε από πλευράς τρόπου διατύπωσης και ανάπτυξης. Το **φαινόμενο** αυτό είναι πολύ συχνό και στους μαθητές σήμερα, έτσι ο διδάσκων έχει τη δυνατότητα να είναι ευαισθητοποιημένος στον **τρόπο έκφρασης** των μαθητών του, που εν τέλει μπορεί να είναι **σωστός**, ακόμα κι αν δεν είναι προσαρμοσμένος σε αυτό που η μαθηματική κοινότητα θεωρεί αποδεκτό.

Δ. Η συναισθηματική θετική προδιάθεση προς τα μαθηματικά

- Η θεώρηση των μαθηματικών ως ανθρώπινης προσπάθειας: η **ιστορική διάσταση** των μαθηματικών είναι ο κατ'εξοχήν κύριος τρόπος για να δει κανείς τα μαθηματικά ως μια **ανθρώπινη** προσπάθεια και όχι ως ένα **σύστημα** άκαμπτων κανόνων.
- Επιμονή σε ιδέες, διατύπωση ερωτημάτων, προώθηση ερευνητικής δραστηριότητας: η ιστορική εξέλιξη κάθε επιστημονικού πεδίου περιέχει πάρα πολλά παραδείγματα από ιδέες και ερωτήματα που δεν οδήγησαν απαραίτητα κάπου και δεν αποτελούν οργανικό κομμάτι των μαθηματικών όπως τα αντιλαμβανόμαστε σήμερα, αλλά αποτέλεσαν απαραίτητα βήματα της ιστορικής εξέλιξης, η οποία οδήγησε στο σήμερα. Επομένως ο διδασκόμενος μπορεί να **ενθαρρυνθεί** και να τολμήσει να **διατυπώσει** τις δικές του ιδέες, τα δικά του ερωτήματα και να αναπτύξει τη δραστηριότητα του, όπως ακριβώς συνέβη στο παρελθόν.
- Η αποφυγή της απογοήτευσης λόγω λαθών, αποτυχιών, αβεβαιότητας ή παρανοήσεων: η ιστορία των μαθηματικών παρέχει τη δυνατότητα στο διδασκόμενο να αντιληφθεί το **δημιουργικό ρόλο** που μπορεί να υπάρχει στο **λάθος** ή σε μια **αποτυχημένη** προσπάθεια, με αποτέλεσμα να προσπαθεί ξανά στη δική του περιπέτεια έρευνας, αποδεχόμενος τον **κίνδυνο** της αποτυχίας και του λάθους και έτσι να οδηγηθεί ευκολότερα στη μαθηματική του ωρίμανση.

Ε. Η αναγνώριση των μαθηματικών ως μιας πολιτιστικής- ανθρώπινης προσπάθειας

- Τα μαθηματικά εξελισσόμενα για εσωτερικούς λόγους: μέσα από την ιστορία διαπιστώνουμε ότι τα μαθηματικά δεν αναπτύσσονται μόνο για **εξωτερικούς λόγους** (πρακτικοί, ωφελιμιστικοί σκοποί, κοινωνικές ανάγκες), αλλά αναπτύσσονται καθαρά και για **εσωτερικούς λόγους**, αισθητικές αναζητήσεις (συμμετρία, ταξινόμηση, λογική πληρότητα, σαφής και κομψή έκφραση), διανοητική περιέργεια και πρόκληση καθώς και καθαρή ευχαρίστηση.
- Τα μαθηματικά εξελίσσονται υπό την επίδραση κοινωνικών και πολιτιστικών παραγόντων: διαπιστώνουμε ότι τα μαθηματικά εξελίσσονται μέσω εξωγενών παραγόντων οι οποίοι προέρχονται από άλλα **επιστημονικά** πεδία, από συγκεκριμένες πρακτικές **ανάγκες** της κοινωνίας και από τους **περιορισμούς** που έθετε το εκάστοτε πολιτισμικό πλαίσιο.
- Τα μαθηματικά αποτελούν μέρος της τοπικής πολιτιστικής παράδοσης: τα μαθηματικά σήμερα έχουν ένα διεθνιστικό χαρακτήρα, ο οποίος είναι

στενά συνυφασμένος με το σύγχρονο δυτικό πολιτισμό, όμως η εξέλιξή τους προέκυψε ως η συνισταμένη πολλών διαφορετικών τάσεων και παραδόσεων οι οποίες αναπτύχθηκαν και ίσως να υπάρχουν ακόμα σε κάποια μορφή. Σήμερα που οι τάξεις είναι πολιτισμικές ο διδάσκων και ο διδασκόμενος μπορεί να έλθει σε επαφή με λιγότερο γνωστές όψεις των μαθηματικών ή με άλλες μορφές που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο των διαφορετικών πολιτισμικών παραδόσεων ^{14α}

1.4. Αντιρρήσεις για τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία

Αν και τα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση είναι ποικίλα και σοβαρά, έχουν προκύψει και επιχειρήματα εναντίων μιας τέτοιας διδακτικής προσέγγισης. Ας δούμε πως κατηγοριοποιούνται τα εν λόγω επιχειρήματα τα οποία έχουν κατά καιρούς διατυπωθεί ^{14β} :

A. Ενστάσεις επιστημολογικού- φιλοσοφικού χαρακτήρα

1. Σχετικά με τη φύση των μαθηματικών

- Αυτά **δεν** είναι μαθηματικά. Δεν μπορεί να αποφευχθεί η σειρά: **πρώτα** διδάσκω το θέμα και **μετά** την ιστορία του.
- Η **πρόοδος** στα μαθηματικά συνίσταται στο να γίνονται τα δύσκολα προβλήματα υπόθεση ρουτίνας. Άρα γιατί να ασχολούμαστε με το τι έγινε στο **παρελθόν**;
- Αυτά που συνέβησαν στο παρελθόν μπορεί να ήταν περίπλοκα. Άρα η ενσωμάτωση τους στη διδασκαλία μπορεί να προκαλέσει σύγχυση μάλλον, παρά αποσαφήνιση.

Η πρώτη ένσταση παραπέμπει ρητά στην επιστημολογική θέση ότι τα μαθηματικά ταυτίζονται με τα **αποτελέσματα** στα οποία οδηγείται η επιστημονική κοινότητα, χωρίς να ενδιαφέρεται για τις **διαδικασίες** που οδήγησαν στα αποτελέσματα αυτά. Οι άλλες δυο ενστάσεις έμμεσα θεωρούν ότι η ενσωμάτωση της ιστορίας στην μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί εισαγωγή της ιστορίας με όλες της τις λεπτομέρειες και την πολυπλοκότητα της.

2. Σχετικά με τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρήματος

- Η ανάγνωση **πρωτοτύπων** κειμένων είναι **δύσκολος στόχος** και δεν βοηθά
- Δεν είναι σωστό να καλλιεργούμε πολιτισμικό σωβινισμό και στενόμυαλο εθνικισμό.

- Τουλάχιστον μέχρι το γυμνάσιο, οι μαθητές έχουν αποσπασματική αίσθηση του ιστορικού χρόνου.

Πράγματι η διδακτική αξιοποίηση πρωτότυπων πηγών είναι μια δύσκολη υπόθεση και απαιτεί προσεχτικό σχεδιασμό και λεπτομερή έλεγχο. Όμως γύρω από αυτό το θέμα έχουν αναπτυχθεί συγκεκριμένες μεθοδολογικές προσεγγίσεις και έχουν γίνει διεθνώς εφαρμογές σε διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών και για διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες. Για τις άλλες δυο ενστάσεις αφ ενός δεν είναι σωστό να απορρίψει κανείς τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας από φόβο ότι αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί απερίσκεπτα και αφ ετέρου η χρήση της ιστορίας προφανώς πρέπει να είναι συμβατή με την γνωστική ωριμότητα και το επίπεδο των διδασκομένων.

B. Ενστάσεις πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα

1. Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκόντων

- Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία απαιτεί πολύ **διδακτικό χρόνο** ο οποίος δεν είναι **διαθέσιμος**.
- Δεν είμαι ιστορικός, άρα **δεν** μπορώ να **ξέρω** ότι παρουσιάζω το θέμα σωστά.
- Δεν υπάρχει κατάλληλο **διαθέσιμο** διδακτικό υλικό.
- Οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν την **κατάλληλη επιμόρφωση**.

Οι παραπάνω ενστάσεις έχουν καθαρά πρακτικό χαρακτήρα και δηλώνουν τις πραγματικές ανάγκες στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών και τις υποχρεώσεις της ερευνητικής κοινότητας στην περιοχή αυτή απέναντι στην εκπαίδευση. Στην βιβλιογραφία έχει τονιστεί η ανάγκη της σχετικής επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών στη φάση της βασικής πανεπιστημιακής μόρφωσης καθώς και στην μεταγενέστερη επιμόρφωσή τους εντός υπηρεσίας, η ανάγκη ύπαρξης κατάλληλου βοηθητικού υλικού με παραδείγματα εφαρμογής της ιστορίας μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση και η ανάγκη του σχεδιασμού εκείνων των ενοτήτων οι οποίες είναι δυνατόν να διδαχθούν με βάση την ιστορική προσέγγιση.

2. Διαδικασίες αξιολόγησης

- Πως μπορεί να ενσωματωθεί η ιστορική διάσταση σε τεστ ή **εξετάσεις**;
- Υπάρχει πράγματι **εμπειρική τεκμηρίωση** ότι η ιστορική διάσταση στη μαθηματική εκπαίδευση βελτιώνει την εκμάθηση των μαθηματικών;

Το ζήτημα της αξιολόγησης είναι υπαρκτό και δεν είναι εύκολο να απαντηθεί, επειδή η εισαγωγή της ιστορικής προσέγγισης στη διδασκαλία έχει από τη φύση της ένα ποιοτικό χαρακτήρα, ποικίλει ανάλογα με το θέμα και τη βαθμίδα

εκπαίδευσης και επομένως οι όποιες διδακτικές συνέπειες της είναι δύσκολο να απομονωθούν από την επίδραση άλλων παραγόντων και να αξιολογηθούν. Τα τελευταία χρόνια υπάρχει σοβαρή προσπάθεια προς την κατεύθυνση αυτή, αλλά υπάρχει και πολύς δρόμος για να τεκμηριωθεί επαρκώς και εκτεταμένα η αποτελεσματικότητα της εισαγωγής μιας ιστορικής διάστασης στη μαθηματική εκπαίδευση.

3. Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκομένων

- Δεν αρέσει στους διδασκόμενους
- Οι διδασκόμενοι το θεωρούν μάθημα ιστορίας και δεν αγαπούν την ιστορία!
- Οι διδασκόμενοι το βρίσκουν εξίσου βαρετό με τα μαθηματικά!
- Οι διδασκόμενοι δεν έχουν ικανοποιητική ευρύτερη παιδεία ώστε να το εκτιμήσουν.

Οι παραπάνω ενστάσεις υποδεικνύουν τα προβλήματα και τις ευρύτερες δυσλειτουργίες της εκπαίδευσης και δεν περιορίζονται στην μαθηματική εκπαίδευση. Τονίζουν όμως την **αναγκαιότητα** παρέμβασης στην διδασκαλία και της ιστορίας, άρα έμμεσα παραπέμπουν σε μια διαθεματική προσέγγιση, τουλάχιστον ενός μέρους της διδακτέας ύλης.

1.5. Επιστημολογικά εμπόδια, εννοιολογική αλλαγή, ιστορικός παραλληλισμός
--

1.5.1. Επιστημολογικά εμπόδια

Μετά την **αποτυχία** του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας το οποίο χαρακτηρίζεται από **δυο** βασικές αρχές, το **Μαθηματικό Ρεαλισμό** (διαχωρίζει το υποκείμενο από τη γνώση: Πλατωνικός ιδεαλισμός, Αριστοτελικός εμπειρισμός) και τον **Διδακτικό Φορμαλισμό** (νομιμοποιεί τη γνώση σ' ένα πλαίσιο σύμφωνα με τα standards που ορίζει η μαθηματική κοινότητα σε κάθε εποχή), πραγματοποιείται μια **στροφή** και οι ερευνητές εξετάζουν **τι είναι** η γνώση και **πώς λειτουργεί** ο ανθρώπινος νους (Γνωσιακή Επιστήμη). Αυτή η στροφή σηματοδοτεί την ανάπτυξη του Constructivism, (επανεξετάζεται το έργο του Piaget) και επίσης αναπτύσσεται η Γνωσιακή Επιστήμη. Σύμφωνα με τη θεωρία κατασκευής της γνώσης (Constructivism) τα μαθηματικά αντικείμενα δεν κατοικούν σ' έναν εξωτερικό κόσμο ως προς το γνώστη, αλλά **κατασκευάζονται** με τις διαδικασίες της **αφομοίωσης** και της **συμμόρφωσης**. Οι γενικές αρχές στις οποίες στηρίζονται τα νέα διδακτικά μοντέλα είναι οι ακόλουθες:

- Η **γνώση** είναι πάντα **συνδεδεμένη** με τον γνώστη, κατασκευάζεται από τον ίδιο και **δεν μεταφέρεται**

- Η **νέα** γνώση βασίζεται στα ήδη υπάρχοντα **γνωστικά Σχήματα** του υποκειμένου (η χωρητικότητα της ανθρώπινης μνήμης είναι περιορισμένη, οι πληροφορίες πρέπει να «αποθηκευθούν» ως οργανωμένα συστήματα-chunks- πολλά τέτοια συστήματα συνδεόμενα μεταξύ τους σχηματίζουν ένα Γνωστικό Σχήμα)
- Η **νέα** γνώση **θεσμοθετείται** ως «επίσημη» γνώση μέσα στο **περιβάλλον** της μαθητικής κοινότητας η οποία δρα ως «επιστημονική» κοινότητα (κοινωνικός Constructivism)

Σύμφωνα λοιπόν με τον Constructivism η μάθηση είναι ενεργητική διαδικασία και όχι παθητική. Σε ένα γενικό σχήμα γνωστικής ανάπτυξης μπορούμε να δούμε:

- αρχίζουμε από την ήδη **υπάρχουσα** γνώση την οποία ονομάζουμε **«σταθερή κατάσταση»**
- μέσα από νέα **ερεθίσματα** ή νέες **πληροφορίες**, που δίνονται από το δάσκαλο στους μαθητές, οι μαθητές βρίσκονται μπροστά σε μια **νέα κατάσταση**
- αν η ήδη υπάρχουσα γνώση (σταθερή κατάσταση) **δεν επαρκεί** για τη διαπραγμάτευση της **νέας κατάστασης**, τότε προκύπτει μια **αντιπαράθεση** και **παλινδρόμηση** ανάμεσα στην υπάρχουσα γνώση και στη νέα κατάσταση και τότε ο μαθητής αισθάνεται **αποδιοργανωμένος**.

Η **αντιπαράθεση** προκαλείται από εμπόδια. Ένα εμπόδιο είναι μια **αντίληψη**, πιθανώς μια **γνώση**, η οποία ενώ είναι αποτελεσματική για την επίλυση ενός τύπου προβλημάτων αποτυγχάνει στην επίλυση άλλου τύπου προβλημάτων. Η παρουσία των εμποδίων γίνεται αντιληπτή από τα λάθη των μαθητών και προκαλούνται από τη χρησιμοποίηση της προηγούμενης γνώσης σε καταστάσεις που δεν μπορεί να εφαρμοστεί¹⁵

Ο Brousseau εισάγει στη διδακτική την έννοια του εμποδίου με το **επιχείρημα** ότι η εξέλιξη της γνώσης δεν είναι ούτε συνεχής, ούτε αθροιστική αλλά σημαδεύεται από εμπόδια, ρήξεις και αδιέξοδα. Όλη η γνώση είναι στρωμένη με εμπόδια. Ο Brousseau διακρίνει **τα εξής** είδη εμποδίων που συναντώνται στην μαθηματική εκπαίδευση:

- εμπόδια **οντογενετικής** προέλευσης τα οποία συνδέονται με τους περιορισμούς των γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών
- εμπόδια **διδακτικής** προέλευσης που συνδέονται με τις επιλογές του εκπαιδευτικού συστήματος. **Προκύπτουν** δε είτε από **Φορμαλιστική** διδασκαλία (οι μαθητές μαθαίνουν σύμβολα, ορισμούς, κανόνες αλλά δεν κατανοούν το νόημα τους), είτε από τη **διδακτική μεταφορά**

(προκειμένου ένα σύνθετο θέμα ή μια έννοια να απλουστευτεί εκλογικεύεται με βάση την αρχή: από το απλό στο σύνθετο, από το μερικό στο γενικό και έτσι προκαλούνται πρόσθετα εμπόδια διδακτικού τύπου) και τέλος προκύπτουν από την **αντίληψη** «ότι ο καλός δάσκαλος βοηθά τους μαθητές του να υπερβούν τα γνωστικά εμπόδια», για παράδειγμα μετά από τη διδασκαλία των γραμμικών εξισώσεων γίνεται η διδασκαλία των γραμμικών συναρτήσεων, μετά από τη διδασκαλία εξισώσεων 2^{ου} βαθμού γίνεται η διδασκαλία των τετραγωνικών συναρτήσεων.

- εμπόδια **επιστημολογικής** προέλευσης που συνδέονται με την επίμονη αντίσταση της προϋπάρχουσας γνώσης να προσαρμοστεί στις νέες συνθήκες. Έχουν σχέση με την ιστορία και την εξέλιξη των επιστημών και σύμφωνα με τον Bachelard έχουν σχέση με τη διαδικασία ανάπτυξης της γνώσης
- εμπόδια **γνωστικά** είναι το αντίστοιχο των επιστημολογικών εμποδίων σε ατομικό επίπεδο, σύμφωνα με τη Γενετική Επιστημολογία υπάρχει μια παράλληλη πορεία ανάμεσα στην εξέλιξη των επιστημών και την ανάπτυξη της σκέψης στο επίπεδο του κάθε ανθρώπου (παραλληλισμός). Τα γνωστικά εμπόδια στο επίπεδο της διδακτικής αναφέρονται στους μαθητές. **Είναι πολύ πιθανόν όταν μια γνώση έχει αναγνωριστεί ως επιστημολογικό εμπόδιο, τότε θα υπάρχει και το αντίστοιχο γνωστικό εμπόδιο στο επίπεδο του μαθητή.**
- εμπόδια **πολιτιστικά** που σχετίζονται με κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες¹⁶

Για **παράδειγμα** η έννοια της **ισότητας**, η οποία αποτελεί μια από τις θεμελιώδεις έννοιες για την ανάπτυξη του αλγεβρικού τρόπου σκέψης, για τους μαθητές του γυμνασίου αλλά και του λυκείου **περιορίζεται** στη γνώση του δημοτικού, δηλαδή σημαίνει μια υπολογιστική **διαδικασία** (εμπόδιο διδακτικής προέλευσης), η οποία θα δώσει **ένα αποτέλεσμα**, δεν γνωρίζουν ή δεν αποδέχονται το σύμβολο της ισότητας ως σύμβολο **ισοδυναμίας**. Μαθητής της Β΄ τάξης του γυμνασίου λύνει την εξίσωση:

$$2x - 8 = x + 9$$

$$2x - 8 = x + 9$$

$$2x - 8 + 8 = x + 9 + 8$$

$$2x = x - x + 17 = 2x = 17$$

$$\text{Άρα } x = \frac{17}{2}$$

Τα επιστημολογικά εμπόδια είναι **εσωτερικές αναπαραστάσεις** που περιέχουν το προφανώς σωστό, σε ορισμένες δε περιπτώσεις μπορεί να είναι χρήσιμες αλλά τελικώς **μπλοκάρουν** τη διαδικασία **οικοδόμησης** της γνώσης. Για παράδειγμα επιστημολογικά εμπόδια ήταν **βεβαιότητες** και **συμπεράσματα** του παρελθόντος τα οποία στη συνέχεια αποδείχτηκαν **επιστημονικά** μη αποδεκτά.

Το «να ξέρεις» μπορεί να υπονομεύσει το «να μάθεις» διότι η γνώση είναι ένα φως που δημιουργεί πάντοτε τις δικές του σκιές ^{16α}.

Όπως είδαμε πιο πάνω ο Brousseau μεταφέρει στη διδακτική την έννοια του εμποδίου και έτσι το εμπόδιο γίνεται εργαλείο της διδακτικής με σκοπό να δημιουργηθούν καταστάσεις οι οποίες θα το καταστήσουν αναποτελεσματικό και θα επιτρέψουν την αναθεώρηση του ή την απόρριψη του. Τα εμπόδια έχουν την ίδια φύση με μια γνώση και αποτελούν **εσωτερικές αναπαραστάσεις**, οι οποίες αναφέρονται σε συγκεκριμένες τυπικές έννοιες που περιέχουν το **προφανώς** σωστό, αλλά υπονομεύουν τη διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης των συγκεκριμένων τυπικών εννοιών. Αλλά ας δούμε τι σημαίνει η έννοια εσωτερική αναπαράσταση. Πρόσφατα **συμπεράσματα** ερευνών πάνω στην έννοια της αναπαράστασης οδήγησαν στην εξής **διάκριση** ανάμεσα στο υλικό σημείο δηλαδή το σύμβολο της αναπαράστασης (το σημαίνον) και στην έννοια η οποία αναπαρίσταται με το σύμβολο (το σημαινόμενο). Το γεγονός ότι ένα σύμβολο οδηγεί σε μια έννοια του νου, με τη σειρά του οδηγεί στη διάκριση ανάμεσα στην **Εξωτερική** Αναπαράσταση και την **Εσωτερική** αναπαράσταση. Οι Εξωτερικές Αναπαραστάσεις δρουν ως **ερεθισμοί** στις αισθήσεις (διαγράμματα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις, διάφορα μοντέλα, γραφικά υπολογιστών, τυπικά σύμβολα και άλλες παραστάσεις της μαθηματικής γλώσσας). Οι Εσωτερικές Αναπαραστάσεις **δεν** είναι **σαφείς** και **δεν** είναι εύκολο να παρατηρηθούν απευθείας, αλλά γίνονται αντιληπτές **μόνο** από παρατηρήσεις επί των μαθητών όταν εργάζονται. Η Εσωτερική Αναπαράσταση (νοητική αναπαράσταση) είναι ο προσωπικός τρόπος με τον οποίο ο μαθητής κινητοποιεί τις γνώσεις του και αποτελεί **προϊόν** νοητικής δραστηριότητας, μέσω της οποίας ανασυντάσσεται η πραγματικότητα που αντιμετωπίζουμε και σε αυτήν την πραγματικότητα προσδίδουμε ένα συγκεκριμένο νόημα.

Οι Εσωτερικές Αναπαραστάσεις και οι Εξωτερικές Αναπαραστάσεις συνδέονται μεταξύ τους με δύο τρόπους:

Ομωνυμία: Εξωτερική Αναπαράσταση → $\begin{cases} \text{Εσωτερική Αναπαράσταση 1} \\ \text{Εσωτερική Αναπαράσταση 2} \end{cases}$

Για παράδειγμα η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 = \alpha^2$ μπορεί να παράγει ορθογώνιο τρίγωνο και μπορεί να παράγει κύκλο.

Συνωνυμία: $\begin{cases} \text{Εξωτερική Αναπαράσταση 1} \\ \text{Εξωτερική Αναπαράσταση 2} \end{cases} \rightarrow \text{Εσωτερική Αναπαράσταση}$

Για παράδειγμα το μονώνυμο $2x$ μπορεί να σημαίνει το διπλάσιο ενός ευθυγράμμου τμήματος μήκους x ή τα εμβαδόν ορθογωνίου με διαστάσεις 2 και x .

Η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου στη διδακτική των μαθηματικών θεωρείται από τις πλέον δύσκολες έννοιες και εντάσσεται στο πεδίο αναζήτησης εκείνων των επιστημολογικών αναγκών της διδακτικής που προσδιορίζονται ως γνώσεις των διαδικασιών με τις οποίες συγκροτούνται και αναπτύσσονται οι μαθηματικές έννοιες και γενικότερα εκείνων των διαδικασιών που χαρακτηρίζουν τις μαθηματικές δραστηριότητες^{16β}. Όμως η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου μπορεί να γίνει ένα εξαιρετικά **χρήσιμο εργαλείο** καθώς διαφοροποιεί τη συμπεριφορά, τη στάση του διδάσκοντα και απέναντι στα λάθη των μαθητών αλλά και απέναντι στην ίδια την επιστήμη που διδάσκει. Ο G. Brousseau **επανατοποθετεί** την υφή και το ρόλο του λάθους και τα τοποθετεί στο πλαίσιο του επιστημολογικού εμποδίου σημειώνοντας ότι: «*το λάθος και η αποτυχία στη μαθηματική εκπαίδευση δεν μπορούν να θεωρούνται απλά ως αποτέλεσμα άγνοιας, αβεβαιότητας ή κακοτυχίας όπως τα προσδιορίζουν οι εμπειρικές και συμπεριφοριστικές θεωρίες της μάθησης, αλλά και ως αποτέλεσμα μιας προγενέστερης γνώσης, η οποία είχε το ενδιαφέρον της και τις επιτυχίες της, αλλά τώρα αποκαλύπτεται λανθασμένη ή απλά μη προσαρμόσιμη, ακατάλληλη. Τα λάθη αυτού του τύπου δεν είναι τυχαία, συνίστανται σε εμπόδια. Τόσο στη λειτουργία του διδάσκοντα όσο και στη λειτουργία του μαθητή, αυτά τα λάθη οικοδομούν τις διαφορετικές κάθε φορά σημασίες της γνώσης*»

Ο όρος επιστημολογικό εμπόδιο συναντάται πρώτη φορά στα γραπτά του Gaston Bachelard (1884-1962) στο τέλος της δεκαετίας του '30 και αφορά κυρίως παγιωμένες αντιλήψεις για τα φυσικά φαινόμενα και όταν αποδεικνύονται ανεπαρκείς οδηγούν στη ριζική αναθεώρηση των θεωριών που υποκρύπτουν. «*Τελικά αποκτούμε γνώση εναντίον μιας παλαιότερης γνώσης, καταστρέφοντας κακοφτιαγμένες γνώσεις, υπερβαίνοντας εκείνο που αποτελούσε εμπόδιο στην πνευματική πρόοδο, μια γνώση που κατακτήθηκε με επιστημονική προσπάθεια μπορεί και αυτή να παρακμάσει*»^{16γ}. Ο Bachelard **διαφοροποιεί** τη Μαθηματική επιστήμη από τον παραπάνω όρο αφού θεωρεί ότι η ιστορία των μαθηματικών είναι ένα θαύμα κανονικότητας, γνωρίζει περιόδους παύσης αλλά δεν γνωρίζει περιόδους λαθών.

Η εισαγωγή του παραπάνω όρου και η επεξεργασία του απασχόλησε πολλούς ερευνητές (Brousseau, Glaeser, Bouvier, Balacheff, Zawadowski, Sierpiska), οι

οποίοι θεώρησαν σημαντικό τον προβληματισμό σχετικά με την παραπάνω έννοια για τη βαθύτερη ερμηνεία των φαινομένων της μάθησης των μαθηματικών και για τη βελτίωση των τρόπων διδασκαλίας.

Η έρευνα γύρω από τα επιστημολογικά εμπόδια στη διδακτική των μαθηματικών στηρίζεται στη θέση ότι, όταν η μαθησιακή δραστηριότητα πραγματοποιείται σε κατάλληλα επεξεργασμένες διδακτικές συνθήκες, ώστε να μοιάζει με τη δραστηριότητα του **μαθηματικού-ερευνητή**, τότε ορισμένα επιστημολογικά εμπόδια της **ιστορίας** των μαθηματικών ενδέχεται να **αναπαράγονται** στην πνευματική πορεία του μαθητή και επομένως μπορούν να **εντοπίζονται** ως μαθησιακές δυσκολίες και να **αξιοποιούνται** διδακτικά. Είναι φανερό ότι έχουμε να διαπραγματευτούμε με δυο **κοινές περιοχές** (εμπόδια τότε και τώρα) σε δυο **διαφορετικές πορείες**, την ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης και την επιστημονική προσπάθεια.

1.5.2.Εννοιολογική αλλαγή

Ο όρος εννοιολογική αλλαγή σχετίζεται με τις κονστρουκτιβιστικές ιδέες της μάθησης και υποδηλώνει ότι «**η διδασκαλία της επιστήμης εμπεριέχει συχνά μια εκ θεμελίων αναδόμηση της προϋπάρχουσας γνώσης**». (Βοσνιάδου, 1994)

Ένα σοβαρό πρόβλημα στη μάθηση των μαθηματικών αποτελεί η **κατανόηση** μιας μαθηματικής **έννοιας** και ο **τρόπος** που πραγματοποιείται. Όπως κάθε **λέξη** στον συνήθη καθημερινό λόγο αποκτά ένα **διαφοροποιημένο** νόημα, ανάλογα με την πρόταση μέσα στην οποία βρίσκεται, ένα αριθμητικό ψηφίο έχει αξία ανάλογα με τη θέση του σε έναν αριθμό, έτσι και μια μαθηματική έννοια αποκτά ένα διαφορετικό νόημα ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο ανήκει.

Η συνειδητοποίηση του ρόλου μιας μαθηματικής έννοιας και η κατανόηση της από τους διδάσκοντες και τους διδασκόμενους απαιτεί μια διπλή νοητική διαδρομή, δηλαδή η **συνειδητοποίηση** του νοήματος της έννοιας **πραγματοποιείται** όταν κανείς μπορεί να **εισέλθει** στο πλαίσιο στο οποίο βρίσκεται και να κατανοήσει τη σημασία της και στη συνέχεια να **υπερβεί** το συγκεκριμένο πλαίσιο με στόχο να ανασυγκροτήσει την έννοια σ ένα διαφορετικό πλαίσιο.

Ένα **παράδειγμα** είναι η δυσκολία της **κατανόησης** των αρνητικών αριθμών, τι είναι τελικά ένας αρνητικός αριθμός; Ποια είναι η φύση του; Γιατί «μείον» επί «μείον» κάνει «συν»; Πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια ποσότητα με αρνητικό αριθμό (π.χ. το χρέος); Προβληματισμοί 1600 ετών μέχρι να θεμελιωθεί η έννοια του αρνητικού αριθμού και κυρίως προβληματισμοί και δυσκολίες για τους μαθητές της Α' και Β' τάξης του γυμνασίου οι οποίοι καλούνται από το σύνολο των φυσικών αριθμών και των δεκαδικών να

μεταβούν στο σύνολο των αρνητικών αριθμών, όπου αποσταθεροποιούνται τελείως οι καθιερωμένες αντιλήψεις για το νόημα των αριθμητικών πράξεων, που είχαν αποκτήσει οι μαθητές στο δημοτικό και σε ένα μέρος της ύλης των μαθηματικών της Α' τάξης του γυμνασίου, έτσι τώρα:

- η πρόσθεση μπορεί να προκαλεί ελάττωση
- η αφαίρεση μπορεί να προκαλεί αύξηση
- ο πολλαπλασιασμός μπορεί να προκαλεί ελάττωση
- η διαίρεση μπορεί να προκαλεί αύξηση

Ο Stendhal (ψευδώνυμο του Marie-Henri Beyle) στο βιβλίο *Vie de Henry Brulard* 1835, επανέκδοση: Gallimard, Paris 1973, όχι μόνο εκφράζει τον προβληματισμό του και την αδυναμία του να κατανοήσει τον κανόνα «μείον» επί «μείον» κάνει «συν», αλλά ασκεί κριτική στο δάσκαλο του λέγοντας: «το χειρότερο είναι πως όσοι προσπάθησαν να μου το εξηγήσουν, χρησιμοποίησαν επιχειρήματα τα οποία προφανώς δεν καταλάβαιναν ούτε οι ίδιοι» ¹⁹.

Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών, εξελίχθηκε σε μείζον πρόβλημα και για τη θεμελίωση τους απαιτήθηκε μια σημαντική **εννοιολογική αλλαγή** (19^{ος} αιώνας-αρχή της διατήρησης) ²⁰.

Ένα χρήσιμο εργαλείο στην κατανόηση της σημασίας μιας μαθηματικής έννοιας, στο φαινόμενο της κρίσης της κατανόησης, αλλά και γενικότερα στην ερμηνεία φαινομένων της μάθησης των μαθηματικών εκτός από την **αναγνώριση** των επιστημολογικών εμποδίων και το ρόλο τους στη διδασκαλία, είναι και η **αναγνώριση** της αλλαγής του νοήματος μιας έννοιας όταν από ένα **προγενέστερο** θεωρητικό πλαίσιο, υπάγεται σε ένα **μεταγενέστερο** θεωρητικό πλαίσιο, στο οποίο και αλλάζει νόημα.

Ο όρος εννοιολογική αλλαγή χρησιμοποιήθηκε για να αναδείξει την ιδέα ότι οι επιστημονικοί όροι νοηματοδοτούνται στα πλαίσια μιας θεωρίας και η σημασία τους αλλάζει ως συνέπεια της αλλαγής της θεωρίας. Το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής ερμηνεύεται υπό το πρίσμα της **θεωρίας πλαισίου**, οι εννοιολογικές αλλαγές συμβαίνουν όταν οι μαθητές έρχονται **αντιμέτωποι** με διαισθητικές έννοιες των μαθηματικών αλλά και των φυσικών επιστημών. Περισσότερο σημαντικές θεωρούνται οι εννοιολογικές αλλαγές που επιφέρει η συστηματική διδασκαλία, παρά οι εννοιολογικές αλλαγές που συμβαίνουν αυτογενώς στη διάρκεια της ανάπτυξης. Υποστηρίζεται ότι πολλές επιστημονικές **έννοιες** είναι δύσκολες για τους μαθητές διότι είναι **ενταγμένες** σε επιστημονικές θεωρίες, οι οποίες **παραβιάζουν** θεμελιώδεις αρχές των αφελών θεωριών στις οποίες υπάγονται οι αντίστοιχες έννοιες του **κοινού νου**. Στο θέμα της **θεωρητικής προσέγγισης** της εννοιολογικής αλλαγής **υποστηρίζεται** ότι οι

αρχικές εξηγήσεις των μαθητών για τα φυσικά φαινόμενα σχηματίζουν ένα **συνεκτικό σώμα**, μια **θεωρία πλαισίου**, η οποία βασίζεται στην **εμπειρία** των παιδιών, επομένως είναι ένα σύστημα με συνοχή το οποίο διαρκώς **επιβεβαιώνεται** από την εμπειρία και είναι δύσκολη η **αλλαγή** της θεωρίας πλαισίου. Από την άλλη πλευρά οι εξηγήσεις για τα φυσικά φαινόμενα είναι προϊόν **μακράς ιστορικής ανάπτυξης** της επιστήμης που σημαδεύεται από ριζικές αλλαγές θεωρίας^{21α}. Η **προσέγγιση** της εννοιολογικής αλλαγής εφαρμόζεται στην περίπτωση της μάθησης των μαθηματικών εννοιών, είναι δε ένας από τους **βασικούς** λόγους ο οποίος βρίσκεται πίσω από την **αποτυχία** των μαθητών να κατανοήσουν έννοιες των μαθηματικών, η **αναποτελεσματικότητα** δε των διδακτικών παρεμβάσεων οφείλεται στο ότι **δεν έχει ληφθεί** σοβαρά υπ' όψιν το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής.

Ένα ακόμα παράδειγμα είναι η μετάβαση από τους φυσικούς αριθμούς στους ρητούς:

- Οι μαθητές έχουν μια αρχική έννοια για τον αριθμό (που είναι κοντά στην έννοια του φυσικού αριθμού) και αντιμετωπίζουν με επιτυχία σχετικά προβλήματα απαρίθμησης, απλών πράξεων, πριν μπου στη συστηματική διδασκαλία
- Η αρχική κατανόηση για τον αριθμό είναι συμβατή με τις πληροφορίες τις οποίες λαμβάνουν μέσω της διδασκαλίας
- Οι αριθμοί είναι διακριτοί και έχουν έναν επόμενο αριθμό
- Οι αριθμοί όσο περισσότερα ψηφία έχουν τόσο μεγαλύτεροι είναι
- Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός «μεγαλώνουν» έναν αριθμό ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση «μικραίνουν» έναν αριθμό
- Ο πολλαπλασιασμός ερμηνεύεται ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση

Οι μαθητές έχουν σχηματίσει μια θεωρία μέσα από την εμπειρία τους η οποία ενισχύεται και από τη διδασκαλία. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι ρητοί αριθμοί:

- οι ρητοί αριθμοί δεν βασίζονται στην αρίθμηση και είναι πυκνοί, δηλαδή δεν έχουν έναν επόμενο
- υπάρχουν άπειροι ρητοί ανάμεσα σε δυο άνισους ρητούς
- οι ρητοί δεν έχουν μόνο μια συμβολική αναπαράσταση μπορούν να γραφούν ως δεκαδικοί ή ως κλάσματα, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί είναι εναλλακτικές αναπαραστάσεις των ρητών και όχι διαφορετικοί αριθμοί
- ο πολλαπλασιασμός δεν ερμηνεύεται πάντα ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση για παράδειγμα $0,5 \times 1,2$, ενώ η διαίρεση προκαλεί αύξηση $2 : 0,5 = 4$

Όλοι εμπειρικά γνωρίζουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με το σύνολο των ρητών αριθμών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, αφού η νέα γνώση (ρητοί και ιδιότητες ρητών) δεν είναι συμβατή με την προηγούμενη γνώση των μαθητών.

Για να **αντιμετωπιστούν** τα προβλήματα, τα λάθη, οι παρανοήσεις, η κρίση κατανόησης κατά τη μετάβαση από την προϋπάρχουσα γνώση στη νέα γνώση πρέπει να **προκληθεί** εννοιολογική αλλαγή, δηλαδή η **διδασκαλία** να έχει ως **στόχο** την εννοιολογική αλλαγή. Οι εκπαιδευτικοί συχνά **πιστεύουν** ότι οι μαθητές έρχονται στην τάξη με μικρή ή και καθόλου προϋπάρχουσα γνώση, ή **θεωρούν** ότι η νέα γνώση μπορεί να δομηθεί στην βάση της προϋπάρχουσας μέσω **μηχανισμών** εμπλουτισμού. Δεν συνειδητοποιούν ότι η **προϋπάρχουσα** γνώση μπορεί να σταθεί **σοβαρό εμπόδιο** στην περαιτέρω μάθηση.

«Αν θεωρήσουμε τις δομές γνώσεων ως θεωρίες, τότε η εννοιολογική αλλαγή μπορεί να ειπωθεί είτε ως προϊόν εμπλουτισμού μιας θεωρίας, είτε ως προϊόν αναδιοργάνωσης μιας θεωρίας»²¹⁶.

Η **κατασκευή** της νέας γνώσης συνοδεύεται πάντα από τη **«ρήξη»** της με την προηγούμενη γνώση, αυτό σημαίνει ότι ο ρόλος του επιστημολογικού εμποδίου είναι ταυτόχρονα θετικός και αρνητικός, θετικός διότι είναι το έδαφος πάνω στο οποίο ενεργούμε και αν θέλουμε να διευρύνουμε τις γνώσεις των μαθητών μας αλλά και τις δικές μας γνώσεις, πρέπει να ενεργήσουμε αντίθετα με τα πιστεύω και τις αντιλήψεις τις δικές μας αλλά και των μαθητών μας. Η διδασκαλία με στόχο την εννοιολογική αλλαγή προϋποθέτει ότι οι εκπαιδευτικοί λαμβάνουν υπ' όψιν την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών και πραγματοποιούν όχι μόνο τον εμπλουτισμό της αλλά και την αναδιοργάνωση της, έτσι ώστε να προκύψουν νέες εννοιολογικές δομές. Πως θα πετύχουμε τη διαδικασία αλλοίωσης των εναλλακτικών ιδεών των μαθητών και επομένως μια επιτυχή εννοιολογική αλλαγή; Πως θα πετύχουμε αλλαγή στην αρχική θεωρία πλαισίου και θα περάσουμε στη νέα θεωρία; Σε αυτή την κατεύθυνση ο **ρόλος** του διδάσκοντα είναι **καθοριστικός**, αφού θα πρέπει να αναζητήσει και να βρει **τρόπους** που φέρνουν στην επιφάνεια τις παρανοήσεις των μαθητών, επομένως θα πρέπει να γνωρίζει και τους τρόπους που σκέφτονται οι μαθητές του, η **άγνοια** του τρόπου που μπορεί να σκεφτεί ένας μαθητής είναι ένας σκοτεινός δρόμος χωρίς φως στη διαδικασία της μετάβασης από την προϋπάρχουσα γνώση στη νέα γνώση.

Η εννοιολογική αλλαγή επιτυγχάνεται:

- μέσα σε κατάλληλο κλίμα το οποίο ενθαρρύνει την **εκμείωση** των ιδεών των μαθητών και **προκαλεί** το ενδιαφέρον των μαθητών για το αντικείμενο της διδασκαλίας (Hewso 1981)
- μέσα από ειδικές **στρατηγικές** όπως η **γνωστική σύγκρουση** και η **στρατηγική της μη ρήξης**. (Nussbaum & Novic 1982)

Σύμφωνα με τη στρατηγική της γνωστικής σύγκρουσης, ο εκπαιδευτικός μέσα σε ένα κλίμα εμπιστοσύνης, **κρίνει** και **επικρίνει** την ιδέα των μαθητών που έχει εκμείψει, με σκοπό να προκαλέσει **σύγκρουση** και οι μαθητές να οδηγηθούν σε έναν **συμβιβασμό** δηλαδή να προσαρμόσουν την αρχική τους ιδέα σε εκείνη που προτείνει η επιστήμη. Όμως η γνωστική σύγκρουση δεν είναι **πανάκεια**, αφού **θεωρεί** ότι η εννοιολογική αλλαγή μπορεί να πραγματοποιηθεί σε **σύντομο** χρόνο και ακόμα θεωρεί την εννοιολογική αλλαγή ως απλή ορθολογική **διαδικασία** αντικατάστασης, εννοιών. Επιπλέον ορισμένες έρευνες (Guzetti & Glass 1993) έδειξαν ότι οι μαθητές, όπως εξάλλου και οι επιστήμονες, δεν αλλάζουν εύκολα την **αρχική** τους ιδέα και δεν **αναγνωρίζουν** εύκολα μια επιχειρηματολογία ορθολογικού χαρακτήρα, αλλά ούτε και η **κριτική** του διδάσκοντα τους πείθει (Cleminson 1990). Παρατηρήθηκε δε ότι η εκμείωση και η συζήτηση στη συνέχεια οδήγησαν στην ισχυροποίηση των αρχικών ιδεών των μαθητών.

Για τους **παραπάνω λόγους** αναζητήθηκαν στρατηγικές οι οποίες αποφεύγουν τη γνωστική σύγκρουση, όπως η στρατηγική της **μη ρήξης**. Μια τέτοιου τύπου στρατηγική είναι η εξής:

Προκαλείται εκμείωση της ιδέας των μαθητών. Οι μαθητές πρέπει να νοιώσουν **μη ικανοποιημένοι** από την αρχική τους ιδέα και στη συνέχεια η νέα ιδέα να τους φανεί έξυπνη, εύλογη και γόνιμη. Σε αυτό το στάδιο ο διδάσκων δίνει **έμφαση** στο ότι η αρχική ιδέα των μαθητών δεν είναι και για «πέταμα». Διατηρώντας έτσι μια στάση που δεν είναι **απαξιωτική** τονίζει ότι η ιδέα των μαθητών **ερμηνεύει** κάποια φαινόμενα, **αλλά** δεν μπορεί να τα ερμηνεύσει όλα, πράγμα που **συμβαίνει** με την νέα ιδέα η οποία παρουσιάζεται, έτσι δημιουργείται **κλίμα** εμπιστοσύνης και **ανοχής**²²

1.5.3. Ιστορικός παραλληλισμός

Ιστορικός παραλληλισμός είναι η σχέση ανάμεσα στην ιστορία και στη μαθηματική εκπαίδευση. Αναπτύχθηκε ολόκληρος κλάδος μεταξύ ιστορίας μαθηματικών και διδασκαλίας. Ο παραλληλισμός στηρίχτηκε σε μια **μεταφορά** του λεγόμενου «**βιογενετικού νόμου**» στο χώρο της εκπαίδευσης. Η μεταφορά αυτή χρησιμοποιήθηκε από μαθηματικούς. Οι Piaget, Garcia αναφέρονται στον παραλληλισμό με την έννοια της **ανακεφαλαίωσης**.

Σύμφωνα με τη θεωρία της ανακεφαλαίωσης του Ernst Haeckel (1834-1919) η βιολογική ανάπτυξη (οντογένεση) ενός οργανισμού είναι παράλληλη και συνοψίζει ολόκληρη την εξελικτική ανάπτυξη (φυλογένεση). Μια ερμηνεία του νόμου της ανακεφαλαίωσης δίνει ο ίδιος ο Haeckel: «η σειρά των μορφών μέσα από τις οποίες διέρχεται ένας οργανισμός κατά την ανάπτυξη του από το ωάριο μέχρι την πλήρη σωματική του διάπλαση, είναι μια συνοπτική επανάληψη της μακράς σειράς μορφών από τις οποίες διήλθαν οι προγονοί του, από την αρχική περίοδο της ζωής του έως σήμερα» (Furinghetti & Radford 2008).

Η μεταφορά του παραπάνω νόμου στην παιδαγωγική σημαίνει ότι, η γένεση της γνώσης σ ένα άτομο ακολουθεί την ίδια πορεία που ακολούθησε η γένεση της γνώσης στους προγόνους του ατόμου. Επομένως η ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης του ατόμου ακολουθεί την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών.

Κατά την άποψη του H.Poincare (1854-1912) καθήκον κάθε δασκάλου είναι να έχει ως οδηγό την ιστορία της επιστήμης. Για να εξηγήσουμε μια έννοια πρέπει να αναφερθούμε στη γέννηση της²³.

Επιστρέψτε στη βάση των ιδεών θα πουν οι Rene Thom και Hans Freudenthal.

Ακολουθεί κάποιος τις αδρές γραμμές της ιστορικής εξέλιξης, η ιστορία γίνεται έτσι μια ανεξάντλητη πηγή γνώσης για τη διδακτική μέθοδο²⁴.

Επίσης το έργο του Lakatos (1922-1974) επηρέασε πολλούς φιλοσόφους των επιστημών και αποτελεί πλέον σημείο αναφοράς στην ιστορία και στη φιλοσοφία των μαθηματικών, «η φιλοσοφία των επιστημών χωρίς την ιστορία των επιστημών είναι άδεια. Η ιστορία των μαθηματικών και η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης, δηλαδή η φυλογένεση και η οντογένεση της μαθηματικής σκέψης, δεν μπορούν να παρουσιαστούν χωρίς την κριτική και την τελική απόρριψη του φορμαλισμού».

Βασικό γνώρισμα όλων των προηγούμενων κορυφαίων μαθηματικών είναι η **αντίθεση** στην τάση των σχεδιαστών των αναλυτικών προγραμμάτων, των συγγραφέων των διδακτικών βιβλίων και των διδασκόντων να δίνουν έμφαση μόνο στην τελική επεξεργασμένη μορφή της γνώσης και να αδιαφορούν για τα προβλήματα που οδήγησαν στις μαθηματικές ανακαλύψεις και διαμόρφωσαν με αργά βήματα τη σημερινή όψη των μαθηματικών. Το φαινόμενο αυτό ήταν ιδιαίτερα έντονο την περίοδο της λεγόμενης «μεταρρύθμισης των νέων μαθηματικών» με την είσοδο στα σχολικά μαθηματικά της θεωρίας συνόλων, της αξιωματικής θεμελίωσης και

των αλγεβρικών δομών. Δόθηκε δηλαδή έμφαση στις μαθηματικές δομές, όπως η θεωρία συνόλων και πραγματοποιήθηκε η αλγεβροποίηση της Γεωμετρίας. Συγχρόνως οι απόψεις των Otto Toeplitz (1881-1940), J. Piaget (1896-1980), R. Garcia (1949), Freudenthal (1905-1990), G. Brousseau και άλλων ειδικών πλαισιώνουν την ψυχολογική και παιδαγωγική στήριξη του μαθήματος των μαθηματικών ως προς τη διδασκαλία, μέσω της σύνδεσης της ιστορίας με τη διαδικασία της μάθησης.

Ο Otto Toeplitz σε μια διάλεξη του το 1926, πρωτοπαρουσίασε την ιστορική-γενετική μέθοδο. Σύμφωνα με τον Jankivist (2009) μεταξύ άλλων ανέφερε και τα εξής: *«όλες οι μαθηματικές γνώσεις πρέπει να τύχουν μιας συναρπαστικής διερεύνησης, μιας δράσης που θα ταράξει τα νερά, μέσα στα χρονικά πλαίσια στα οποία οι μαθηματικές γνώσεις δημιουργήθηκαν και εξελίχθηκαν...αν κάποιος επιστρέψει στις ρίζες των εννοιών και τινάξει τη σκόνη του χρόνου από πάνω τους, τότε οι έννοιες θα εμφανιστούν μπροστά στα μάτια μας σαν να είναι ζωντανοί οργανισμοί. Και τότε υπάρχουν δυο διαφορετικοί δρόμοι τους οποίους μπορούμε να πάρουμε: στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να παρουσιάσουμε την ανακάλυψη και την εξέλιξη των μαθηματικών με όλες τις λεπτομέρειες και μ' αυτό τον τρόπο οι μαθητές μας θα δουν τα προβλήματα, τα ερωτήματα και τα γεγονότα να αναδύονται μπροστά στα μάτια τους (άμεση ή ευθεία γενετική μέθοδος). Στη δεύτερη περίπτωση μπορούμε να κάνουμε μια ιστορική ανάκληση εννοιών προκειμένου να εντοπίσουμε την πραγματική σημασία, τον πυρήνα της μαθηματικής έννοιας και να βγάλουμε συμπεράσματα για τη διδασκαλία της έννοιας, χωρίς περαιτέρω αναφορά στην ιστορία της έννοιας (έμμεση γενετική μέθοδος)».*

Η αντίληψη αυτή του Otto Toeplitz επικρίθηκε από πολλούς γνωστικούς ψυχολόγους.

Στον J. Piaget οφείλουμε την κατάρριψη της **αντίληψης** που επικρατούσε στις αρχές του 19^{ου} αιώνα: **«τα παιδιά σκέπτονται όπως και οι μεγάλοι»**. Βασική αρχή του Piaget είναι η εξής:

Η γνωστική ανάπτυξη ακολουθεί μια καλά προκαθορισμένη πορεία η οποία χαρακτηρίζεται από τέσσερα διαφορετικά στάδια, αναπόσπαστα μεταξύ τους:

α. αισθησιοκινητικό στάδιο

β. προσυλλογιστικό στάδιο

γ. στάδιο συγκεκριμένων νοητικών ενεργειών

δ. στάδιο αφηρημένων νοητικών ενεργειών

Το κάθε στάδιο αποτελείται από μια διαφορετική δομή γνώσης και η χρονολογική περίοδος εμφάνισης του διαφέρει από άτομο σε άτομο. Επίσης θεωρεί ότι η ανθρώπινη νοημοσύνη είναι μια διαδικασία προσαρμογής η οποία συντελείται σε τρεις φάσεις τις εξής: αφομοίωση, συμμόρφωση, εξισορρόπηση. Ο Piaget έδωσε ιδιαίτερη σημασία στην έννοια της προσαρμογής και υποστηρίζει ότι υπάρχουν αναλογίες ανάμεσα στην φυλογενετική ανάπτυξη και την οντογενετική ανάπτυξη. Κατά τη φυλογενετική ανάπτυξη δημιουργούνται νέα, ποιοτικά διαφορετικά είδη ως το αποτέλεσμα των διαδικασιών βιολογικής προσαρμογής στο περιβάλλον, ενώ η οντογενετική ανάπτυξη χαρακτηρίζεται από τη δημιουργία διαφορετικών δομών γνώσεων που πηγάζουν από την ενεργητική προσπάθεια του ανθρώπου να προσαρμόσει τη συμπεριφορά του στις απαιτήσεις του περιβάλλοντος²⁵. Σύμφωνα με τους J. Piaget και R. Garcia «οι πρόοδοι που έγιναν στην πορεία της επιστημονικής σκέψης από τη μια περίοδο στην επόμενη δεν ακολουθούν, εκτός από σπάνιες περιπτώσεις, η μια την άλλη με τυχαίο τρόπο, αλλά μπορούν να διαταχθούν κατά σειρά, όπως στην ψυχογένεση, υπό μορφή διαδοχικών **σταδίων**». Δηλαδή οι **μηχανισμοί μετάβασης** από τη μια ιστορική περίοδο στην άλλη, είναι **ανάλογοι** προς εκείνους της μετάβασης από ένα ψυχογενετικό στάδιο στο επόμενο. Για παράδειγμα, δεν είναι τυχαίο που οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες εμφανίστηκαν πολύ αργότερα από τις Ευκλείδειες, ή ακόμα και η περίπτωση εκείνη στην εξέλιξη της άλγεβρας, η οποία αρχίζει με τις ομάδες Galois, στη συνέχεια έρχονται μια σειρά από κατασκευές, καθόλου τυχαίες, κάθε μια κατασκευή με τη σειρά της προετοιμάζει εκείνες που ακολουθούν²⁶. Οι J. Piaget και R. Garcia (1989), υποστήριξαν ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ ψυχολογικών και ιστορικών εξελίξεων και αυτή η σχέση πρέπει να εξεταστεί από την άποψη των μηχανισμών που μεσολαβούν κατά τη μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο και όχι από την άποψη του περιεχομένου. Χαρακτηριστικό κάθε σταδίου είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνονται αντιληπτά τα αντικείμενα και ο συσχετισμός τους με το υποκείμενο. Ο Piaget γράφει σ' ένα σημείο της Γενετικής Επιστημολογίας «η θεμελιώδης υπόθεση της γενετικής επιστημολογίας είναι ότι υπάρχει ένας παραλληλισμός μεταξύ της προόδου που σημειώνεται στη λογική και ορθολογική οργάνωση της γνώσης, στην ιστορία της επιστήμης και των αντίστοιχων διαμορφωτικών ψυχολογικών διαδικασιών». Οι **J Piaget και R Garcia** αναφέρονται σε αυτόν τον **παραλληλισμό** με την έννοια της **ανακεφαλαίωσης**.

Η **αντίληψη** του Piaget «η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση» συνδέεται με τη **θεωρία των επιστημολογικών** εμποδίων του Brousseau,

σύμφωνα με την οποία τα εμπόδια με πραγματική επιστημονική προέλευση μπορούν να εντοπιστούν στη ίδια την ιστορία των εννοιών. Οι επιστημολογικές έρευνες εντοπίζουν τα εμπόδια στα μαθηματικά κείμενα περασμένων εποχών και συμπληρώνουν τις πειραματικές μεθόδους, οι οποίες εντοπίζουν λάθη και εμπόδια σε σημερινά γραπτά μαθητών. Αποδεικνύεται ότι μαθηματικές έννοιες που δυσκόλεψαν για αιώνες μεγάλους μαθηματικούς όπως για παράδειγμα οι δεκαδικοί αριθμοί, οι αρνητικοί αριθμοί, οι μεταβλητές, η έννοια της ισότητας κλπ. προκαλούν και σήμερα δυσκολίες στους μαθητές.

Μια άλλη θεωρία για τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών είναι η φιλοσοφική θεωρία του Freudenthal με βασικό αξίωμα **«την αρχή της εκ νέου επινόησης»**. Ο Freudenthal (1973) εμπνευσμένος από τη μαιευτική μέθοδο του Σωκράτη μιλά για **«καθοδηγούμενη επανα-ανακάλυψη»**. Στο βιβλίο του “Mathematics as an Educational task” αναφέρει: *«προτείνοντας ότι οι μαθηματικές ιδέες πρέπει να διδάσκονται με γενετικό τρόπο, δεν σημαίνει ότι πρέπει να παρουσιάζονται με τη σειρά που εμφανίζονται ιστορικά, ούτε να παρουσιάζονται με τα αδιέξοδα τα οποία υπήρξαν και τις παρακάμψεις των αδιεξόδων που άνοιξαν οι μαθηματικοί του παρελθόντος. Δεν πρέπει να ακολουθούμε τα βήματα των μαθηματικών που έδρασαν στο παρελθόν, αλλά μια βελτιωμένη και καλύτερη καθοδηγούμενη πορεία της ιστορίας»*

Η προσέγγιση του Freudenthal είναι διαφορετική από αυτήν του Toeplitz, δεν χρησιμοποιεί τον όρο γενετική μέθοδος, αλλά διατυπώνει την άποψη ότι οι μαθητές θα πρέπει να **επαναλάβουν** τη διαδικασία κατάκτησης της γνώσης από το ανθρώπινο γένος όχι με το τρόπο που συνέβη στο παρελθόν, αλλά πρέπει να καθοδηγούνται από το διδάσκοντα σε μια δραστηριότητα έτσι ώστε να **επανα-ανακαλύπτουν** τη διαδικασία του **«κάνω μαθηματικά»** και όχι να **επαναλαμβάνουν** τα ίδια τα μαθηματικά. Έχει την άποψη ότι η ιστορία δεν θα πρέπει να διαμορφώνει τη βάση της εκπαίδευσης, οι μαθητές από μόνοι τους πρέπει να είναι το αρχικό σημείο, υποστηρίζει ότι ο κάθε μαθητής πρέπει να κάνει μαθηματικά τη δική του ατομική πραγματικότητα, όπως αυτή φανερώνεται με την καθοδήγηση του δασκάλου.

Κοινό σημείο αναφοράς των παραπάνω ερευνητών είναι η αξία που αποδίδουν στην **ιστορία της επιστήμης των μαθηματικών**, σχετικά με τη συμβολή της στη διδασκαλία και αναγνωρίζουν πως υπάρχει μια σειρά, όχι τυχαία, στην εξέλιξη της επιστημονικής γνώσης και ενδιαφέρονται για τον τρόπο εξέλιξης της εν λόγω σειράς.

Οι Brousseau και Freudenthal συμφωνούν, ότι το άτομο δεν είναι αναγκαίο ούτε και πρέπει να ακολουθήσει τα στάδια εξέλιξης της ιστορίας των μαθηματικών, αλλά μια βελτιωμένη πορεία της ιστορίας, έχουν ανακαλύψει στάδια στην ιστορία της επιστήμης των μαθηματικών και τα **παραλληλίζουν** με την εξέλιξη της ατομικής ανάπτυξης της γνώσης, ενώ ο Piaget έχει αναγνωρίσει τα στάδια εξέλιξης του ανθρώπινου νου και αναζητεί αντιστοιχίες με τα στάδια εξέλιξης της ιστορίας της επιστήμης. Οι έρευνες του Piaget δεν αφορούν αποκλειστικά τη μάθηση μαθηματικών εννοιών, όπως συμβαίνει με τις έρευνες των Brousseau και Freudenthal. Έρευνες της διδακτικής σε συνδυασμό με εμπειρικές μελέτες σχετικές με την κατανόηση βασικών εννοιών της άλγεβρας από τους μαθητές (οι έννοιες είχαν κοινό χαρακτηριστικό περίπλοκη ιστορική εξέλιξη και η τελική θεμελίωσή τους απαίτησε την υπέρβαση σημαντικών εμποδίων) ανέδειξαν δυο όψεις του ιστορικού παραλληλισμού:

Μια θετική όψη, η οποία αποτυπώνεται στις απαντήσεις εκείνων των μαθητών οι οποίοι αν και αγνοούν λόγω σχολικού επιπέδου τη χρήση των σύγχρονων εννοιών και των μέσων αναπαράστασης, κατορθώνουν να εκφραστούν με ορθό τρόπο, ο οποίος εμφανίζει αναλογίες με ορισμένες ιστορικές αντιλήψεις.

Μια αρνητική όψη, η οποία αποτυπώνεται στις απαντήσεις εκείνων των μαθητών που αν και συμπίπτουν με ιστορικές αντιλήψεις, αντανακλούν την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης και ακόμα απόλυτη εξάρτηση από αλγοριθμικές διαδικασίες.

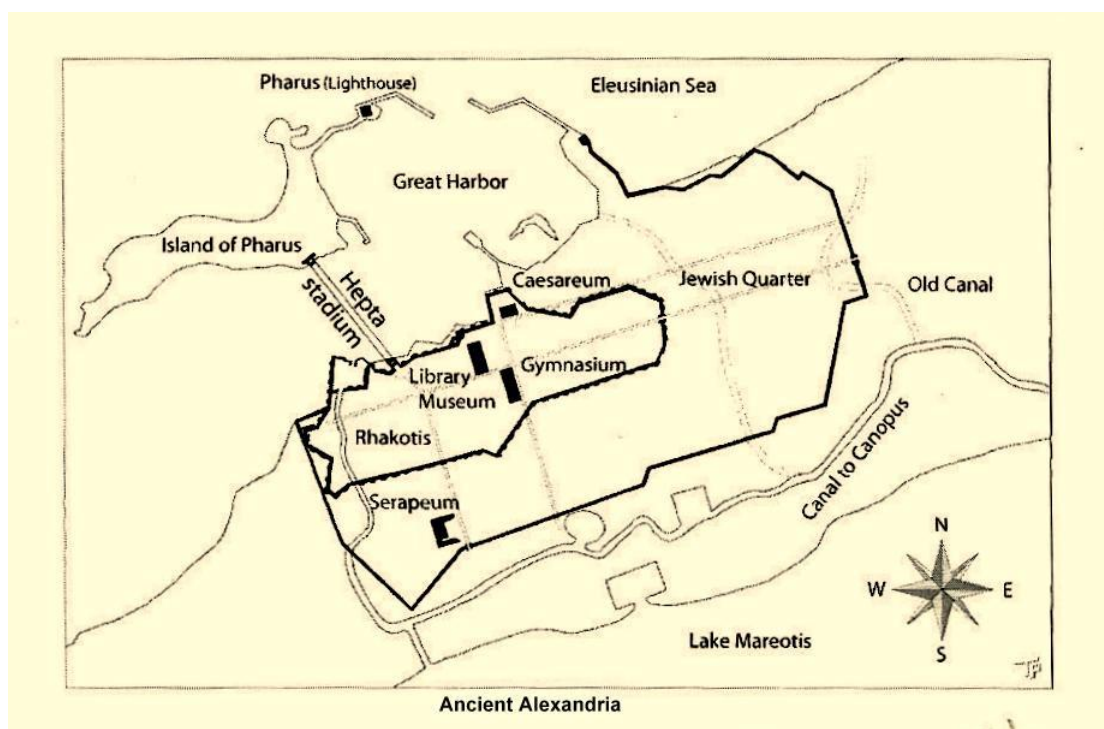
Όμως η έννοια «παραλληλισμός» πρέπει να **αναθεωρηθεί**. Δεν πρέπει να ακολουθείται ιστορικός παραλληλισμός στην κυριολεξία αφού από τη μια πλευρά το μαθησιακό περιβάλλον σήμερα είναι διαφορετικό απ' αυτό στο παρελθόν και από την άλλη πλευρά οι σύγχρονοι όροι κάτω από τους οποίους μαθαίνει μια έννοια ένα άτομο ή μια ομάδα ατόμων είναι αρκετά διαφορετικοί από εκείνους τους όρους κάτω από τους οποίους οι μαθηματικοί στο παρελθόν έχουν συλλάβει, έχουν διατυπώσει και έχουν διαμορφώσει την εν λόγω έννοια^{27α}. Οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η ιστορία των μαθηματικών είναι ένα εργαλείο οδηγός, που βοηθά στη βαθύτερη κατανόηση και σύλληψη των μαθηματικών εννοιών, στον προσδιορισμό των εμποδίων κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας μιας μαθηματικής έννοιας, στη συγκέντρωση παραδειγμάτων, προβλημάτων με σκοπό το σχεδιασμό δραστηριοτήτων για τους μαθητές και το πιο σημαντικό μέσω της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών μπορούμε να κατανοήσουμε τις διαδικασίες κάτω από τις οποίες οι μαθητές μαθαίνουν και κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες.

Κεφάλαιο 2^ο

Α' μέρος: ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας

Από το Διόφαντο έως τον Euler

2.1. Η Αρχαία Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου-Alexandria ad Aegyptum



Σήμερα γνωρίζουμε ότι μεταξύ του 6^{ου} πΧ (Κλασική περίοδος) και 550μΧ (περίοδος σχολιαστών 30πΧ-550μΧ), οι Αρχαίοι Έλληνες ανέδειξαν την **ουσία** των μαθηματικών και με λογικά συμπεράσματα και με την παραγωγική μέθοδο **κατασκεύασαν** τη μαθηματική γνώση. **Οι σχολές** στις οποίες **αναπτύχθηκε** η μαθηματική γνώση είναι η Ιωνική (Θαλής), η Πυθαγόρειος, η Ακαδημία του Πλάτωνα, η Ελεατική του Ζήνωνα, το Λύκειο του Αριστοτέλη και η Αλεξανδρινή σχολή. **Οι κυριότερες** κατακτήσεις στον κλάδο των μαθηματικών ήταν: η θεμελίωση της Γεωμετρίας, η αφηρημένη έννοια του αριθμού, η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών και η κρίση της ασυμμετρίας αργότερα, τα παράδοξα, τα τρία φημισμένα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα και οι προσπάθειες λύσης τους αργότερα, η μέθοδος της εξάντλησης του Ευδόξου, η εξέταση του απείρου, οι πολύ έξυπνες αναλογίες του Ευδόξου, η αυστηρή λογική απόδειξη, η αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας και τέλος **οι απαρχές της άλγεβρας** στο έργο του Διόφαντου κατά την περίοδο των σχολιαστών. Το **ερμηνευτικό σχόλιο** (υπόμνημα) και η **ιστορική σύνοψη** αποτελούν τους βασικούς φορείς της σκέψης και του

στοχασμού πάνω στα αρχαία κείμενα, όμως οι σχολιαστές δεν προσπάθησαν μόνο να ερμηνεύσουν τα κείμενα των αρχαίων αλλά σε πολλές περιπτώσεις διατύπωσαν νέες δικές τους ιδέες και επιχειρήματα. (πχ Διόφαντος 3^{ος} μΧ αι., Πάππος αρχές 4^{ου} μΧ αι., Πρόκλος 5^{ος} μΧ αι.). Ένα **σπουδαίο σύγγραμμα** που **δεν έχει** τη μορφή τη μορφή υπομνήματος πάνω σε κάποιο παλαιότερο κείμενο είναι **«τα Αριθμητικά»** του Διόφαντου του Αλεξανδρέως, ο οποίος έζησε στην Αλεξάνδρεια πιθανότατα τον 3^ο αιώνα μΧ. Όπως θα δούμε στα Αριθμητικά ο Διόφαντος δεν συστηματοποίησε την υπάρχουσα γνώση αλλά πρόσθεσε πολλά νέα στοιχεία, το έργο αυτό θεωρείται τόσο σπουδαίο για την ιστορία της αρχαίας ελληνικής άλγεβρας όσο και τα στοιχεία του Ευκλείδη. Το **σπουδαιότερο κέντρο έρευνας στα μαθηματικά, στην αστρονομία και στη βιολογία** κατά τον 3^οπΧ αιώνα είναι η Αλεξάνδρεια, ενώ η Αθήνα διατηρεί τα πρωτεία στη φιλοσοφία^{27β}. **Πως** όμως η Αρχαία Ελληνική επιστήμη **μετατοπίστηκε** στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, η οποία **αναδείχθηκε** όχι μόνο σε σημαντικό κέντρο επιστημονικής έρευνας, αλλά **αναπτύχθηκε** σε όλους τους τομείς;

Όλα αρχίζουν με το Μακεδόνα βασιλιά Αλέξανδρο το Μέγα (356πΧ-323πΧ). Η Αυτοκρατορία του (335πΧ-323πΧ) διαμόρφωσε το πολιτικό και πολιτιστικό τοπίο, προκαλώντας ριζική αναδιάταξη στα θεμέλια του τότε Ελληνικού κόσμου, και έθεσε υπό ενιαία αρχή τα κράτη τα οποία κατέκτησε. Ο κατακτητής Αλέξανδρος, μαθητής του Αριστοτέλη και πρώτος διεθνιστής πολιτικός (φτάνει έως τον Ινδικό ποταμό), φαίνεται ότι είχε θέσει υψηλά προχωρημένους και πρωτότυπους στόχους, όπως την ειρηνική συνύπαρξη νικητών και ηττημένων, τη διάδοση του Ελληνικού πολιτισμού και της Ελληνικής γλώσσας, τη συνάντηση αντίθετων πολιτισμών, με **συνέπεια** την ανάπτυξη πνευματικών επαφών μεταξύ των λαών. Η ενότητα των κρατών δεν θα διατηρηθεί μετά το θάνατο του (323πΧ) και η Αυτοκρατορία του θα διαιρεθεί σε ανεξάρτητα Βασίλεια, με σημαντικότερο το **Βασίλειο των Πτολεμαίων στην Αίγυπτο**. Οι Πτολεμαίοι σκληροί μεν σχετικά με τις εκτάσεις που εξουσίαζαν, ενθουσιώδεις δε και **υπερασπιστές** των τεχνών, της λογοτεχνίας και της επιστήμης. Η ισχύς της Αθήνας και της Σπάρτης, ο πολιτισμός, η επιστήμη μεταφέρονται στις πρωτεύουσες των Βασιλείων που προέκυψαν μετά τη διαίρεση. Η Αλεξάνδρεια, η Ελληνική πρωτεύουσα της Αιγύπτου από την ίδρυση της 331πΧ έως το 641μΧ (υποτάχθηκε στους Άραβες) υπήρξε κέντρο μάθησης, πολιτιστικό και πνευματικό κέντρο και ήταν το μεγαλύτερο διεθνές εμπορικό λιμάνι. Τα δυο ιδρύματα της Αλεξάνδρειας, η **σχολή ή ινστιτούτο** γνωστό ως Μουσείο και η **Βιβλιοθήκη** έδωσαν μεγάλη ώθηση στην εξέλιξη της Αλεξάνδρειας ως το σημαντικότερο κέντρο επιστημονικής έρευνας κατά τον 3^οπΧ αιώνα.

Έγινε γνωστή ως η **Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου** για να διακρίνεται από τις υπόλοιπες 31 Αλεξάνδρειες και ιδρύθηκε το 331πχ από τον Μέγα Αλέξανδρο στην τοποθεσία της αρχαίας Αιγυπτιακής πόλης «Ρακώτης». Ο Αλέξανδρος εμπιστεύτηκε τον Έλληνα αρχιτέκτονα Δεινοκράτη το Ρόδιο για να κτίσει την πόλη της Αλεξάνδρειας με βάση ορθογώνιο πολεοδομικό σχέδιο (όπως το σχήμα της Μακεδονικής χλαμύδας) εμπνευσμένο από τον ίδιο τον Αλέξανδρο. Στο λιμάνι βρισκόταν το νησί Φάρος, με το γνωστό του φάρο, ένα από τα επτά θαύματα του τότε κόσμου (λέγεται ότι έδωσε το όνομα του στους φάρους που φωτίζουν τις θάλασσες σε όλο τον κόσμο). Το νησί συνδεόταν με την πόλη με μια γέφυρα τεχνητή, η οποία ονομαζόταν Επταστάδιο και ταυτόχρονα δημιουργούσε τα δυο μεγάλα λιμάνια της Αλεξάνδρειας, το ένα Ανατολικά και το άλλο Δυτικά. **Σημεία αναφοράς** στην Αλεξάνδρεια ήταν τα Βασιλικά ανάκτορα, το θέατρο, η αγορά, ο ναύσταθμος με τις τεράστιες αποθήκες του, οι Βασιλικοί κήποι, το Μουσείο, η Βιβλιοθήκη και ο Φάρος. Ο πληθυσμός της Αλεξάνδρειας ήταν περίπου μισό εκατομμύριο και η πόλη χωριζόταν σε τρεις συνοικίες την Εβραϊκή, την Ελληνική και την Αιγυπτιακή. Η Εβραϊκή συνοικία είχε δικά της τείχη και πύλες και οι εχθροπραξίες μεταξύ Εβραίων και Ελλήνων ήταν συνηθισμένες.

Μετά το θάνατο του μεγάλου Αλεξάνδρου η πόλη πέρασε στον στρατηγό του τον **Πτολεμαίο Α΄ το Λάγο**, η δε βασιλεία των Πτολεμαίων των Λαγιδών κράτησε έως το 31πΧ με το θάνατο της Κλεοπάτρας της 7^{ης}. Ο Πτολεμαίος ο Α΄ καλός στρατιωτικός και ευφυής ηγέτης, με ανοιχτούς πνευματικούς ορίζοντες, όταν εγκαταστάθηκε στην Αλεξάνδρεια άρχισε να προσκαλεί από διάφορα μέρη του Ελληνισμού ανθρώπους της τέχνης και των γραμμάτων (Ευκλείδης, Σράτωνα, Δημήτριος ο Φαληρεύς κλπ). Στην Αλεξάνδρεια άρχισε να καταφθάνει πλήθος κόσμου από όλα τα μέρη της γης, ωστόσο οι πολυπληθέστερες κοινότητες ήταν των Ελλήνων, των Αιγυπτίων και των Εβραίων. Ο Πτολεμαίος τότε πολύ έξυπνα σκεπτόμενος μεθόδευσε την ένωση του Αιγύπτου Όσιρη και του Έλληνα Διονύσου σ' έναν Θεό, τον **Σέραπη**, ώστε να μπορέσει να επιβληθεί στο ανομοιογενές πλήθος των υπηκόων του. Ο φιλόσοφος και πολιτικός **Δημήτριος ο Φαληρεύς** (350-283πΧ), έβαλε ως στόχο την ανάδειξη του Ελληνικού πνεύματος σε παγκόσμιο επίπεδο. Με τις προτροπές του ο Πτολεμαίος ο Α΄ δημιούργησε στην Αλεξάνδρεια το Μουσείο και τη Βιβλιοθήκη, όπου θα συγκεντρωνόταν τα βιβλία του τότε γνωστού κόσμου. Ο Δημήτριος ο Φαληρεύς είχε θητεύσει επιτηρητής της Αθήνας και γνώριζε καλά τη λειτουργία της Ακαδημίας του Πλάτωνα και το Λύκειο του Αριστοτέλη, ίσως να γνώριζε καλά την οργάνωση μιας βιβλιοθήκης από τον ίδιο τον Αριστοτέλη του οποίου ήταν μαθητής. Ίσως γι αυτό το λόγο ο Στράβωνας να αναφέρει ότι ο Αριστοτέλης εθεωρείτο ο πνευματικός πατέρας του **Μουσείου** και της **Βιβλιοθήκης**. Ο Δημήτριος ο

Φαληρεύς μετέδωσε τον ενθουσιασμό του για την συγκέντρωση και την οργάνωση της γνώσης στο Βασιλιά Πτολεμαίου τον Α΄ και αυτός με τη σειρά του στους διαδόχους του.

Την περίοδο των Πτολεμαίων η Αλεξάνδρεια αναπτύχθηκε σε όλους τους τομείς. Η περίοδος αυτή αναφέρεται ως χρυσή περίοδος αφού κτίστηκαν μέγαρα, μνημεία, η βασιλική συνοικία με τους βοτανικούς κήπους, ναοί, τάφοι, το φημισμένο μουσείο, το μοναδικό ερευνητικό κέντρο του Αρχαίου κόσμου και η Αλεξανδρινή βιβλιοθήκη πραγματική πηγή γνώσης, η οποία συγκέντρωσε σπουδαίους λόγιους και ανθρώπους του πνεύματος εκείνης της εποχής. Η **Βασιλική συνοικία** ή **Ελληνική συνοικία** περιελάμβανε τα πιο ενδιαφέροντα δημόσια κτίρια, κήπους με πλούσια βλάστηση και τα Βασιλικά παλάτια. Εδώ **βρισκόταν** το **Μουσείο** αφιερωμένο στις 9 Μούσες, προστάτιδες των τεχνών και των επιστημών (πιστεύεται ότι το Μουσείο ανεγέρθη το 300πΧ, από τον Πτολεμαίο τον Α, 367-283πΧ) καθώς επίσης και η πολύ-φημισμένη **Βιβλιοθήκη**. Η Βιβλιοθήκη (πιθανώς για μερικούς, για κάποιους άλλους είναι σίγουρο) χτίστηκε από τον Πτολεμαίο τον Β (309-247πΧ), οι εκτιμήσεις για το μέγεθος της συλλογής είναι μεταξύ 400000 και 700000 τόμους χωρίς να είναι σαφής ο διαχωρισμός μεταξύ των βιβλίων, των κυλίνδρων και των κεφαλαίων των βιβλίων. Η Βιβλιοθήκη είχε στην κατοχή της έργα συγγραφέων Ελλήνων, Ρωμαίων, Εβραίων, Περσών, Αιθιόπων, Βαβυλώνιων, Ινδών και Φοινίκων. Αρχικός σκοπός του Μουσείου ήταν η έρευνα και σε συνδυασμό με τη Βιβλιοθήκη η καταγραφή των πορισμάτων της έρευνας. Το Μουσείο ήταν ένα ημι-θρησκευτικό ερευνητικό ίδρυμα, βασισμένο στο μοντέλο της Ακαδημίας του Πλάτωνα και στο Λύκειο του Αριστοτέλη, είχε ως πρότυπο τη φιλοσοφική σχολή των Αθηνών. Η βιβλιοθήκη δεν άργησε να γεμίσει και ο **Πτολεμαίος ο Γ** ο **Ευεργέτης** αναγκάστηκε να κατασκευάσει ένα **παράρτημα** της στο Σεράπειο, που ονομάστηκε κόρη (θυγάτηρ) της μεγάλης Βιβλιοθήκης. Η συγκέντρωση των βιβλίων γινόταν έναντι μεγάλων αμοιβών, αλλά και με αθέμιτους τρόπους, όταν η συγκέντρωση ήταν δύσκολο να πραγματοποιηθεί. Ο Πτολεμαίος ο Γ έδωσε ένα μεγάλο χρηματικό ποσό στους Αθηναίους και ζήτησε προς αντιγραφή τα πρωτότυπα κείμενα των μεγάλων τραγικών, οι Αθηναίοι προσέφεραν τα έργα και ο Πτολεμαίος τους επέστρεψε τα αντίγραφα και κράτησε τα πρωτότυπα. Ένας άλλος τρόπος συγκέντρωσης ήταν η κατάσχεση βιβλίων από τους επισκέπτες και τα πλοία που ερχόταν στην Αλεξάνδρεια.

Το Μουσείο ήταν υπό τον έλεγχο των Βασιλέων και των Αυτοκρατόρων, τα μέλη του δεν είναι όλα γνωστά και λειτουργούσε κάτω από καθιερωμένους νόμους. Τα μέλη δεν ήταν υποχρεωμένα να διδάσκουν, όμως λέγεται ότι περιστοιχιζόταν από ομάδα μαθητών. Στο Μουσείο έγιναν οι πρώτες

προσπάθειες ανάπτυξης της κριτικής λογοτεχνίας, οι λόγιοι ντόπιοι και καλεσμένοι ζούσαν και εργαζόταν στο Μουσείο και αμειβόταν από το Βασιλικό Ταμείο το οποίο αποτελούσε σπουδαίο κίνητρο τόσο να ζουν εκεί όσο και συνυπάρχουν αρμονικά. Ανάμεσα στους βιβλιοθηκάρχους αναφέρονται μερικοί φημισμένοι, όπως ο Απολλώνιος από τη Σαμοθράκη, ο Ερατοσθένης από την Κυρήνεια, ο Αρίσταρχος ο Ρόδιος. Η Βιβλιοθήκη είχε πλούσια εκδοτική δραστηριότητα, της είχε παραχωρηθεί το δικαίωμα να δημιουργεί αντίγραφα για κάθε χειρόγραφο που εμφανιζόταν και λέγεται πως διέθετε ειδικά εκπαιδευμένο προσωπικό αντιγραφέων (το σύστημα αυτό εφαρμόστηκε και στο Μεσαίωνα σε πολλά μοναστήρια της Ευρώπης και έτσι διασώθηκαν πολλά Αρχαία συγγράμματα). Η δουλειά των βιβλιοθηκάρων ήταν πολύ δύσκολη, αφού έπρεπε να δημιουργήσουν αντίγραφα από τα κείμενα τα οποία δεχόταν και τα οποία είχαν ατέλειες. Αναφέρουν καταστροφές στα τυποποιημένα κείμενα για τα οποία ανέπτυξαν αναγνωστικά βοηθήματα που περιείχαν σημεία στίξης και σημεία τονισμού. Δεν υπάρχουν σαφείς λεπτομέρειες για την καθημερινή ζωή του Μουσείου και της Βιβλιοθήκης, οι περισσότερες έμμεσες πληροφορίες έρχονται από τις βιογραφίες των Βασιλέων και των Αυτοκρατόρων. Μετά το θάνατο της Κλεοπάτρας της 7^{ης} και το τέλος της δυναστείας των Πτολεμαίων (31πΧ), οι Ρωμαίοι δεν διέθεταν ούτε το ανάλογο ενδιαφέρον αλλά ούτε και τα ανάλογα χρηματικά ποσά και έτσι η λειτουργία και ο σκοπός των βιβλιοθηκών υποβαθμίστηκε.

Διάφορες ιστορίες αναφέρονται για την **καταστροφή της βιβλιοθήκης** της Αλεξάνδρειας, οι οποίες χρονολογούνται από τον 1^ο μΧ αιώνα. Αλλά ποιά απ' όλες τις βιβλιοθήκες; Ιστορικές πηγές αναφέρουν ως υπεύθυνο της πρώτης καταστροφής τον Ιούλιο Καίσαρα, τον Αυτοκράτορα Καρακάλλα στη συνέχεια, τους εμφυλίους πολέμους που ξέσπασαν μεταξύ των συνοικιών κατά εποχές, τον πατριάρχη της Αλεξάνδρειας Θεόφιλο ο οποίος θεωρούσε το Σεράπειο ειδωλολατρικό ναό και την τεράστια γνώση και σοφία των Αρχαίων εχθρό της Χριστιανισμού και της Αγίας γραφής και τέλος τους καταστροφικούς σεισμούς οι οποίοι χτύπησαν τα παράλια της Αιγύπτου από το 320 έως το 1303μΧ.

Στην Αλεξάνδρεια έζησαν, σπούδασαν, δίδαξαν, έγραψαν και εργάστηκαν σπουδαίοι Μαθηματικοί όπως: Ευκλείδης ο Αλεξανδρεύς (Αλεξάνδρεια 365-300πΧ), Κόνων ο Σάμιος (Σάμος 280πΧ-Αλεξάνδρεια 220πΧ), Ερατοσθένης από την Κυρήνεια (Κυρήνεια Λιβύης 276πΧ-Αλεξάνδρεια 197πΧ), Υψικλής ο Αλεξανδρεύς (Αλεξάνδρεια 180πΧ-120πΧ), Ήρωνας ο Αλεξανδρεύς (Αλεξάνδρεια 65μΧ-125μΧ), Μενέλαος ο Αλεξανδρεύς (Αλεξάνδρεια 70μΧ-130μΧ), Κλαύδιος ο Πτολεμαίος (Αίγυπτος 85μΧ-Αλεξάνδρεια 165μΧ),

Πάππος ο Αλεξανδρεύς (Αλεξάνδρεια 290μΧ-350μΧ), ο **Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς** (Αλεξάνδρεια 200μΧ-284μΧ), για τη ζωή του Διόφαντου λίγα είναι γνωστά, είναι περισσότερο γνωστός για τα **Αριθμητικά** του και είναι ο πρώτος που εισήγαγε το συμβολισμό του αγνώστου και χρησιμοποίησε ένα είδος αλγεβρικών συμβολισμών και τέλος η **Υπατία** (Αλεξάνδρεια 370μΧ-415μΧ), κόρη του Θέωνα, πολυταξιδεμένη δίδαξε στη φιλοσοφική σχολή της Αλεξάνδρειας μαθηματικά και φιλοσοφία. Διακρίθηκε στην Άλγεβρα στην Αστρονομία και στη Γεωμετρία. Λέγεται ότι πέθανε βίαια, συρόμενη από τον όχλο που την εκτέλεσε, ο δε θάνατος της περιγράφεται ως πολιτική δολοφονία πράγμα που υπονοεί ότι η Υπατία βρέθηκε στη μέση ενός ανταγωνισμού ανάμεσα στον αρχιεπίσκοπο Κύριλλο της Αλεξάνδρειας και στον Ορέστη πολιτικό αρμόδιο της πόλης. Η επιρροή της Υπατίας στον Ορέστη θεωρήθηκε ότι υπονόμει το έργο του Κύριλλου.

Όμως **τι απέγιναν τα χειρόγραφα** των βιβλιοθηκών της Αλεξάνδρειας; Κάποια στάλθηκαν στη Ρώμη, κάποια άλλα βρέθηκαν στην κατοχή των μοναστηριών και στη συνέχεια πήγαν στις βιβλιοθήκες του Βυζαντίου όπου τα διέσωσαν και τα αντέγραψαν από πάπυρους σε περγαμηνές. Κάποια βρέθηκαν στην Πατριαρχική βιβλιοθήκη στο Κάιρο, κάποια άλλα τα έκρυψαν Άραβες λόγιοι για να γλυτώσουν από την καταστροφή και άλλα βρέθηκαν σε ιδιωτικές συλλογές. Η Βιβλιοθήκη ακολούθησε μια δύσκολη πορεία μέσα από κοινωνικές, πολιτικές και θρησκευτικές αντιθέσεις, η καταστροφή της έγινε σταδιακά και τελικά η βιβλιοθήκη δεν άντεξε μπροστά από το κύμα των κοινωνικών αλλαγών που συντελέστηκαν εκείνη την εποχή.

Η πραγματικότητα είναι μια: είτε υπήρχαν, είτε δεν υπήρχαν τόσα βιβλία στις βιβλιοθήκες και στις αποθήκες της Αλεξάνδρειας, όσα αναφέρουν οι Αρχαίοι συγγραφείς η μυθική της ύπαρξη και μόνο ήταν αρκετή για την φαντασία κάποιων συλλεκτών βιβλίων την εποχή της Αναγέννησης. Αυτή η φαντασία έβαλλε τα θεμέλια για να ξαναγεννηθούν ιδέες όπως οι ιδέες του Διόφαντου^{28α}.

2.2. Ο «αόρατος» Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς

Λίγα είναι αυτά τα οποία γνωρίζουμε για τη ζωή του Διόφαντου, επίσης δεν γνωρίζουμε αν ο Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια ή αν κατοικούσε μόνιμα στην Αλεξάνδρεια και είχε τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις ως νόμιμος πολίτης της πόλης. Ο όρος Αλεξανδρεύς ήταν ένας όρος που χρησιμοποιούσαν οι κάτοικοι της Αλεξάνδρειας και δεν είναι απαραίτητα συνώνυμος με το όνομα Διόφαντος, στο δε ιστορικό πρόβλημα **«πότε έζησε ο Διόφαντος»**, θα δούμε μια απάντηση παρακάτω. Στα δυο σωζόμενα έργα του Διόφαντου **Αριθμητικά** και **Περί Πολυγώνων Αριθμών**

(σώζεται ένα μικρό τμήμα του και όχι όλο το έργο) δεν δίνεται καμία πληροφορία για το Διόφαντο ή για την εποχή που γράφτηκαν. Προϊόντα αλληπάλληλων αντιγραφών τα παραπάνω χειρόγραφα βρίσκονται σε διάφορες Ευρωπαϊκές βιβλιοθήκες, το αρχαιότερο δε είναι του 13^{ου} αιώνα. Η επεξεργασία κλασσικών κειμένων με σκοπό την άντληση πληροφοριών και στοιχείων ακριβείας απαιτεί να βρει κανείς χειρόγραφα και να προσδιορίσει όλους τους παράγοντες, τις μεταξύ τους αλληλεξαρτήσεις έτσι ώστε να πλησιάσει όσο πιο κοντά και καθαρά τα γνήσια κείμενα μέσα από τη σύγκριση με τα υπάρχοντα χειρόγραφα και τα τεμάχια των παπύρων. Στην περίπτωση του Διόφαντου, εικάζεται ότι η **αόρατη μορφή** του Διόφαντου για την οποία γνωρίζουμε πολύ λίγα είναι πιθανόν να έζησε τον 3^ο αιώνα και κάτω από την σκληρή διοίκηση της Αλεξάνδρειας από τον Αυτοκράτορα Καρακάλλα. Μια ολοκληρωμένη δουλειά (Αριθμητικά) αποδίδεται σίγουρα στον Διόφαντο, ενώ για τις άλλες δυο δουλειές του (πορίσματα, περί πολυγώνων αριθμών) εικάζεται ότι ανήκουν στο Διόφαντο^{28β}.

Πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι τα πρωτότυπα αρχαία κείμενα και τα γράμματα των αρχαίων χειρογράφων είχαν μεγάλη δυσκολία στη μετάφραση και στην αντιγραφή κατά το Μεσαίωνα. Ένας κύλινδρος από πάπυρο μπορούσε να διατηρηθεί έως και 300 χρόνια, το μεγάλο πρόβλημα ήταν ότι έσπαγε εύκολα και η χρήση των μεγάλων κυλίνδρων προκαλούσε βλάβες κατά το δίπλωμα και ξεδίπλωμα, η υγρασία σκούραινε το χρώμα του και αυτό είχε ως αποτέλεσμα τη δυσκολία της ανάγνωσης των κειμένων, ο σκόρος και τα ποντίκια προκαλούσαν επίσης φθορές. Στο βασίλειο της Περγάμου χρησιμοποιήθηκε εναλλακτικά η περγαμηνή, όταν διακόπηκε η εισαγωγή παπύρου από την Αίγυπτο λόγω υψηλού κόστους και αφού το φυτό από το οποίο παραγόταν ο πάπυρος σπάνιζε στο Δέλτα του Νείλου. Αυτό οδήγησε στην αντικατάσταση του παπύρου από την περγαμηνή. Η περγαμηνή χρησιμοποιείται συστηματικά τον 2^ο πΧ αιώνα. Κατά τον Μεσαίωνα η περγαμηνή χρησιμοποιείται ως υλικό γραφής, όμως η μεγαλογράμματη γραφή κατά τον Μεσαίωνα η οποία είχε φτάσει σε ένα στάδιο ωρίμανσης, περιόριζε την ποσότητα του κειμένου που θα μπορούσε να γραφεί σε κάθε σελίδα. Η περγαμηνή ήταν ευαίσθητη στην υγρασία και οι απότομες μεταβολές του καιρού προκαλούσαν το ζάρωμα ή συρρίκνωση της.

Κατά τη διαδικασία της μετάφρασης έγιναν πολλά λάθη λόγω της δυσκολίας της ανάγνωσης των γραμμάτων, αυτό βέβαια δεν είχε τόσο μεγάλη σημασία για χειρόγραφα όπως τα «Στοιχεία του Ευκλείδη» ή τα «Αριθμητικά του Διόφαντου», όπου ένα γράμμα συμβολίζει ένα σημείο ή έναν αριθμό, το πρόβλημα ήταν μεγαλύτερο στα λογοτεχνικά χειρόγραφα.

Τα Ελληνικά χειρόγραφα σχετικά με τα Αριθμητικά του Διόφαντου αποτελούν ένα πολύ ιδιαίτερο σημείο στην ιστορία των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών και είναι πολύ δύσκολο να ανασυγκροτήσουμε τον τρόπο με τον οποίο επηρέασαν αμέσως μετά την συγγραφή τους. Οι παραφράσεις που έχουμε σήμερα σχετικά με τα Αριθμητικά του Διόφαντου και τη στρατηγική του ανήκουν σε δυο διαφορετικές κατηγορίες, αυτή των Βυζαντινών λογίων του 13^{ου} και 14^{ου} αιώνα (Πλανούδης, Παχυμέρης), και Αράβων μαθηματικών από τον 9^ο αιώνα έως τον 11^ο αιώνα, μαθηματικών της Αναγέννησης και της Πρώιμης Νεότερης εποχής στη Δυτική Ευρώπη (Bombelli, Viete, Bachet de Meziriac, Fermat, Descartes) ²⁹.

Αλλά ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα σχετικά με τη χρονολόγηση του Διόφαντου. Το πρώτο έμμεσο συμπέρασμα προκύπτει από μια αναφορά του ίδιου του Διόφαντου στο *Περί Πολυγώνων Αριθμών* και το οποίο μεταφρασμένο αναφέρει: «και αποδείχθηκε αυτό που λέει ο Υψικλής σε ορισμό ότι, αν υπάρχουν αριθμοί με αφετηρία τη μονάδα και με σταθερή διαφορά οποιαδήποτε [δηλαδή αποτελούν αριθμητική πρόοδο], τότε όταν η διαφορά είναι 1, το άθροισμα είναι τρίγωνος [αριθμός], όταν είναι 2, τετράγωνος, όταν είναι 3, πεντάγωνος. Το πλήθος των γωνιών ονομάζεται σύμφωνα με τον αριθμό που είναι κατά δυο μεγαλύτερος από τη διαφορά, οι δε πλευρές είναι το πλήθος των εκτεθέντων [όρων της προόδου] μαζί με τη μονάδα»

Αν ο Υψικλής στον οποίο αναφέρεται ο Διόφαντος είναι ο Αλεξανδρινός γεωμέτρης (Αλεξάνδρεια 180πΧ-120πΧ) και ο οποίος έγραψε μια μικρή πραγματεία για τα κανονικά πολύεδρα, η οποία για πολλούς αιώνες συνόδευε τα στοιχεία του Ευκλείδη ως 14^ο βιβλίο, τότε έχουμε ένα κάτω φράγμα για το χρονικό διάστημα που έζησε ο Διόφαντος, δηλαδή δεν μπορεί να έζησε πριν το 150πΧ. Η πιο ασφαλής μαρτυρία για τον προσδιορισμό ενός άνω φράγματος για την ηλικία του Διόφαντου είναι η αναφορά του Θέωνος, επίσης Αλεξανδρινός. Ο Θέων, του οποίου η δράση χρονολογείται στο δεύτερο μισό του 4^{ου} μΧ αιώνα, είναι κυρίως γνωστός ως επιμελητής μιας νέας έκδοσης των στοιχείων του Ευκλείδη και επίσης είναι γνωστός ως συγγραφέας ενός υπομνήματος στο έργο του Κλαύδιου του Πτολεμαίου **Μεγίστη σύνταξις** (Αλμαγέστη). Στο υπόμνημα ο Θέων επιχειρεί έναν παραλληλισμό της αριθμητικής μονάδας με τη μοίρα, (δηλαδή τη μονάδα μέτρησης γωνιών στο εξηκονταδικό σύστημα), αναφέρει μεταξύ άλλων και τα εξής: «Όπως λέει και ο Διόφαντος, επειδή η μονάδα είναι αμετάθετη και αμετάβλητη, το είδος που πολλαπλασιάζεται με αυτήν θα παραμείνει το αυτό...[ενώ] στους πολλαπλασιασμούς των μερών της μονάδος τα είδη διαφοροποιούνται»

Στην αναφορά του Θέωνος μπορούμε να προσθέσουμε και την μαρτυρία της κόρης του Υπατίας (Αλεξάνδρεια 370μΧ-415μΧ), η οποία έγραψε ένα υπόμνημα για τα έργα του Διόφαντου (δεν διασώθηκε) και συγκεκριμένα στο λεξικό Σούδα αναφέρονται τα εξής: «Υπατία, κόρη του Θέωνος, γεωμέτρη και φιλοσόφου από την Αλεξάνδρεια και αυτή φιλόσοφος... Έγραψε υπόμνημα στο Διόφαντο, στον Αστρονομικό κανόνα και στα Κωνικά του Απολλώνιου».

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο Διόφαντος δεν μπορεί να έζησε μετά το 400μΧ, και το σπουδαιότερο είναι ότι προσδιορίζεται ένα μικρό χρονικό διάστημα περίπου μιας γενιάς, δηλαδή τέλη 4^{ου} αιώνα και αρχές 5^{ου} αιώνα μΧ, όπου τα έργα του Διόφαντου αποτελούσαν αντικείμενο μελέτης και σημείο αναφοράς. Το Βυζαντινό Εγκυκλοπαιδικό λεξικό Σούδα ή Σουίδα³⁰ του 10^{ου} μΧ αιώνα τοποθετεί την ακμή του Θέωνος στα χρόνια του Αυτοκράτορα Θεοδόσιου του Ι, δηλαδή από το 379μΧ έως το 395μΧ. Από την εποχή του Υψικλή μέχρι την εποχή του Θέωνα δεν έχουμε καμία άλλη αρχαία μαρτυρία για το Διόφαντο ή το έργο του, έτσι **εικάζεται** ότι ο Διόφαντος μπορεί να ήταν σύγχρονος ή λίγο αρχαιότερος από το Θέωνα. Η *εικασία* αυτή για την χρονολογία του Διόφαντου συμπληρώνεται από ορισμένα βιογραφικά στοιχεία από μια μάλλον απροσδόκητη πηγή³¹. Πρόκειται για το γνωστό μας έμμετρο αριθμητικό πρόβλημα από τη Βυζαντινή συλλογή επιγραμμάτων με το όνομα Παλατινή Ανθολογία³² και ανήκει σε μια ομάδα 46 παρόμοιων προβλημάτων τα οποία είχε συλλέξει ή είχε συνθέσει ο γραμματικός Μητρόδωρος. Η ζωή του Διόφαντου περιγράφεται στο εν λόγω επίγραμμα είναι το εξής:

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἃ μέγα θαῦμα,
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὥπασε μοῖρην,
δωδεκάτην δ' ἐπιθείς μῆλα πόρην χλοαῖν·
τῇ δ' ἄρ' ἔφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἤψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει·
αἷ αἷ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
τοῦδε καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
πένθος δ' αὖ πυσύρεσσι παρηγορέων ἑνιαυτοῖς,
τῇδε πόσον σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

Μια ελεύθερη μετάφραση του επιγράμματος είναι η εξής:

«Σε αυτόν εδώ τον τάφο κείται ο Διόφαντος, τι θαυμαστός τάφος! Και με αριθμητική τέχνη μας λέει ο τάφος την ηλικία του. Το 1/6 της ζωής του έχαρισε ο Θεός να είναι παιδί, το 1/2 δε μετά απ' αυτό να βγάλει τρίχες παρά

τα μήλα [να είναι, δηλαδή, νεανίας] μετά το επόμενο δε 1/7 νυμφεύθηκε, πέντε δε έτη μετά τον γάμο του εχάρισε υιό. Αλλοίμονο, αργογεννημένο ατυχές παιδί! Στο ήμισυ της ηλικίας του πατέρα όταν έφτασε, αφού απέθανε, κρύο πτώμα εκάη, παρηγορώντας δε το πένθος του από τότε επί τέσσερα έτη με την σοφία των αριθμών, έτσι τερμάτισε τον βίο». ³³

Από την ύπαρξη του επιγράμματος προκύπτει ότι ο Διόφαντος είχε μεγάλη φήμη κατά την αρχαιότητα, η οποία διατηρήθηκε και μετά το θάνατο του για πολύ καιρό. Υπάρχει βέβαια το ερώτημα αν το επίγραμμα προκύπτει πραγματικά από μια επιτύμβια στήλη ή είναι δημιούργημα μιας μαθηματικής-ποιητικής φαντασίας. Η πρώτη εκδοχή είναι πιθανότερη, διότι στο επίγραμμα περιλαμβάνεται το τραγικό γεγονός του θανάτου του γιού του Διόφαντου.

Αν συμβολίσουμε με x τα χρόνια που έζησε ο Διόφαντος κατασκευάζουμε σήμερα την εξίσωση $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$, από την οποία προκύπτει ότι η τιμή του x είναι 84. Συμπεραίνουμε ότι ο Διόφαντος πέθανε 84 ετών. Αν αυτός ο γρίφος είναι ιστορικά αληθής τότε ο Διόφαντος πέθανε 84 ετών. (Boyer, p. 198). Αρκετοί ιστορικοί των μαθηματικών έχουν χρησιμοποιήσει το παραπάνω πρόβλημα, ελλείπει άλλων ιστορικών στοιχείων προσδιορισμού της ηλικίας του Διόφαντου.

Ο Thomas L.Heath αναφέρει ότι η εποχή του Διόφαντου μπορεί να καθοριστεί με αρκετή βεβαιότητα. Υπήρξε μεταγενέστερος του Υψικλή από τον οποίο παραθέτει έναν ορισμό ενός πολύγωνου αριθμού και προγενέστερος του Θέωνα του Αλεξανδρέως, ο οποίος παραθέτει μερικούς από τους ορισμούς του Διόφαντου. Επομένως τα πιθανά χρονολογικά του όρια είναι μεταξύ 150πΧ και 350μΧ. (Heath, p. 512, 2001). Ο Βυζαντινός λόγιος και ιστορικός Μιχαήλ Ψελλός (1018-1081μΧ), σε μια επιστολή του αναφέρει ότι ο λογιώτατος Ανατόλιος, (ο οποίος σύμφωνα με τον εκδότη των έργων του Διόφαντου P. Tannery, είναι ο ίδιος με τον Ανατόλιο της Αλεξάνδρειας και επίσκοπο της Λαοδικείας το 270μΧ), αφιέρωσε την πραγματεία του: «η Μέθοδος των Αιγυπτίων για τους αριθμούς» στον Διόφαντο. Ο Ανατόλιος είναι γνωστό ότι συνέγραψε πραγματείες περί των μαθηματικών, όμως έχουν διατηρηθεί ελάχιστα κομμάτια από αυτές. Υπήρξε μαθητής του Διονύσιου από την Αλεξάνδρεια (αργότερα ονομάστηκε Άγιος Διονύσιος). Εάν πραγματικά υπήρξε αυτός ο Διονύσιος τότε σύμφωνα με τον Tannery πρόκειται για το Διονύσιο στον οποίο ο Διόφαντος αφιέρωσε την εισαγωγή των Αριθμητικών του. Αυτό οδηγεί επίσης στη σκέψη ότι ο Διόφαντος έζησε πιθανότατα περί το 250 μΧ³⁴.

2.3. Η στρατηγική και ο συμβολισμός στα μαθηματικά προβλήματα των Αριθμητικών του Διόφαντου



(Εξώφυλλο της έκδοσης του 1621 που μεταφράστηκε στα Λατινικά από τον C. G. B. De Meziriac)

Όπως είδαμε στο 1^ο κεφάλαιο ο όρος εκπαίδευση σήμαινε την ανατροφή των παιδιών, αλλά τελικά έγινε συνώνυμος του όρου της καθαρά πνευματικής ωρίμανσης και των εκπαιδευτικών αξιών οι οποίες αποκτώνται με την σχολική εκπαίδευση. Η παιδεία είχε μια σφαιρική έννοια, η οποία θα μπορούσε να εκληφθεί ως ένας κώδικας συμπεριφοράς, ένα τρόπος ζωής και δικτύωσης, τον οποίο δεν μπορούσε να αποκτήσει κανείς μόνο μέσα από την εκπαίδευση και τη διδασκαλία της λογοτεχνίας, αλλά οι ίδιοι οι άνδρες της κουλτούρας και του πολιτισμού επέβαλλαν έναν συμπεριφοριστικό κώδικα. Η Αλεξάνδρεια πρόσφερε πολιτική και πολιτιστική ζωή αλλά και ένα υψηλό επίπεδο πολιτισμού. Όπως είδαμε το μουσείο και η βιβλιοθήκη ήταν πόλος έλξης επιφανών διανοούμενων, μελετητών, συγγραφέων, οι οποίοι έστελναν επιστολές και πραγματείες σε φίλους και συνομήλικους στην πόλη. Είδαμε επίσης ότι δεν επεδίωκαν μια γενική κυκλοφορία των πραγματειών και σύμφωνα με τις συνήθειες οι παραλήπτες τις αντέγραφαν και τις έστελναν στο δικό τους φιλικό κύκλο. Για εκείνους οι οποίοι δεν είχαν την τύχη να συμμετέχουν σε ιδιωτικά μαθήματα, η πρώτη εκπαίδευση (δημοτικό σχολείο) πραγματοποιείτο σε ανοιχτούς χώρους, ήταν μια μέτρια εκπαίδευση και στόχευε στην βασική ανάγνωση και σε δεξιότητες γραφής. Η διδασκαλία επίσης της Αριθμητικής ακολούθησε τη στρατηγική που υπήρχε, δηλαδή οι μαθητές έπρεπε να είναι εξοικειωμένοι με τις βασικές ιδιότητες των πράξεων (ίσως χρησιμοποιούσαν για την πρόσθεση τα δάχτυλα ή το αβάκιο). Όμως στα εξειδικευμένα σχολεία γραφής η απόκτηση βαθιάς

γνώσης των πράξεων κυρίως πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ήταν ενσωματωμένη στο πρόγραμμα σπουδών. Η μέση εκπαίδευση ήταν μόνο για τους πλούσιους, οι φοιτητές εδιδάσκοντο αρετές και ιδέες τις οποίες αναμενόταν να ασπαστούν. Οι προσπάθειες του Ελληνικού μέρους της Αλεξάνδρειας να μιμηθεί το Αθηναϊκό μοντέλο εκπαίδευσης είχε ως αποτέλεσμα τη μελέτη και σπουδή των μαθηματικών.

Ο Διόφαντος αναμφίβολα ήταν εξοικειωμένος με την εκπαίδευση και την καλλιέργεια της παιδείας. Το περιβάλλον στην Αλεξάνδρεια ευνόησε την ανάπτυξη των Αριθμητικών του Διόφαντου, πιθανώς και την παράδοση ιδιωτικών μαθημάτων για εκείνους που είχαν τη δυνατότητα. Η διδασκαλία των μαθηματικών και των άλλων επιστημών συχνά αγνοείται από τους συγγραφείς, όμως αν λάβουμε υπόψη μας ότι μεγάλοι ηγεμόνες και όχι μόνο, ήταν μαθητές μεγάλων φιλοσόφων, τότε είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι τα ιδιωτικά μαθήματα ήταν και στην Αλεξάνδρεια διαδεδομένα. Για παράδειγμα είδαμε ότι ο Μέγας Αλέξανδρος ήταν μαθητής του Αριστοτέλη, ο Δημήτριος ο Φαληρεύς επίσης. Μπορούμε λοιπόν να εικάσουμε ότι ο Διόφαντος παρέδιδε ιδιωτικά μαθήματα στον μαθητή του Διονύσιο (βλέπε παράρτημα). Έγραψε τα Αριθμητικά του 500 χρόνια περίπου μετά την συγγραφή των Στοιχείων του Ευκλείδη από τον Ευκλείδη, σε αυτό το διάστημα τα Στοιχεία είχαν γίνει γνωστά, ο Αρχιμήδης, ο Απολλώνιος, ο Πάππος, ο Μενέλαος και άλλοι κοντά σε αυτούς μεγάλοι μαθηματικοί τα χρησιμοποιούσαν. Ίσως η σκέψη του Διόφαντου να συμπεριλάβει σε 13 βιβλία (κεφάλαια) την άλγεβρα των Ελλήνων, ήταν επηρεασμένη από το γεγονός του ότι ο Ευκλείδης συμπεριέλαβε σε 13 βιβλία τα μαθηματικά γενικώς.

Ο Διόφαντος είναι πρωτοπόρος ως συντάκτης και ως δάσκαλος της αριθμητικής για την εποχή του (βλέπε κεφάλαιο 3^ο). Τα έργα στα οποία στηρίζεται η φήμη του Διόφαντου είναι:

- Τα **Αριθμητικά** αρχικά 13 κεφάλαια, σώζονται 6 αντίγραφα του έργου σε αρχαιοελληνική μετάφραση και 4 αντίγραφα σε μια μεσαιωνική αραβική μετάφραση του 9^{ου} αιώνα.
- Μια μελέτη **περί πολυγώνων αριθμών** είναι πολύ παλιό και σώζεται μόνο ένα απόσπασμα, τα χαρακτηριστικά του είναι διαφορετικά από τα χαρακτηριστικά των Αριθμητικών. Η μέθοδος απόδειξης είναι αυστηρά γεωμετρική, μακροσκελής και περίπλοκη. Ο Διόφαντος αναφέρεται δυο φορές στον Υψικλή, περίπου 170πΧ, ως συγγραφέα ενός μόνο ορισμού ενός πολύγωνου αριθμού, ο οποίος ισοδυναμεί με τη δήλωση ότι ο ν-οστός α-γωνος αριθμός είναι ο $\frac{n[2+(n-1)(\alpha-2)]}{2}$.

- Μια συλλογή προτάσεων με τίτλο **Πορίσματα**. Στα Αριθμητικά υπάρχουν δηλώσεις που υπαινίσσονται την ύπαρξη πορισμάτων, στις προτάσεις 3,5,6 του κεφαλαίου V όπου ο Διόφαντος παραθέτει ως γνωστές κάποιες συγκεκριμένες προτάσεις της Θεωρίας Αριθμών, γράφοντας πριν τη διατύπωση τους τη φράση «έχουμε στα Πορίσματα ότι...») ³⁵.
- Μια ακόμα απολεσθείσα πραγματεία του Διόφαντου αναφέρεται από έναν σχολιαστή του Ιάμβλιχου με τίτλο **Μοριαστικά** (περί μορίων δηλαδή περί κλασμάτων).

Βασικό εργαλείο στη διδασκαλία των Αριθμητικών του Διόφαντου είναι το μαθηματικό (αφηρημένο) πρόβλημα. Σήμερα η λύση προβλήματος θεωρείται ο πιο ισχυρός τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών. Αλλά ποια ήταν η στρατηγική που χρησιμοποιούσε ο Διόφαντος; Πολλές είναι οι απόψεις που υποστηρίζουν ότι η **ειδική στρατηγική** στην Ευκλείδεια θεωρία και η **στρατηγική** του Διόφαντου στη λύση προβλήματος είναι συγκρίσιμες. Η εν λόγω στρατηγική περιγράφεται από τον Πρόκλο. Σε κάθε πρόταση και στην απόδειξη της διακρίνουμε έξι μέρη τα εξής:

Πρόταση: η πρόταση αρχίζει με τη διατύπωση μιας ιδανικής έκφρασης για μια κατάσταση και το συμπέρασμα που ακολουθεί την κατάσταση

Έκθεση: καθορίζεται μια ειδική συνθήκη

Διορισμός: καθορίζεται μια σχέση την οποία ζητούμε

Κατασκευή: κατασκευάζονται τα αντικείμενα τα οποία θα αποτελέσουν την απόδειξη

Απόδειξη: η απόδειξη είναι πλήρης, όταν έχει ληφθεί το αποτέλεσμα που αναφέρεται στον διορισμό.

Συμπέρασμα: μετά την απόδειξη διατυπώνεται το τελικό συμπέρασμα.

Αν και ο Διόφαντος ποτέ δεν παρέχει μια γενική μέθοδο στη λύση των προβλημάτων του, αρχικά δίνει το πρόβλημα χωρίς αριθμητικά δεδομένα (πρότασις), στη συνέχεια παρέχει μια λύση με αριθμούς (έκθεσις) και ορίζει μια εξίσωση, σε πολλές περιπτώσεις δε είναι ίση με ένα τετράγωνο ή ένα κύβο (κατασκευή). Η τελευταία έκφραση (εξίσωση) μπορεί να λυθεί με κανόνες που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος και οι οποίοι καθορίζουν την απόδειξη. Ας δούμε αυτή την **ειδική στρατηγική** σε ένα από τα φημισμένα προβλήματα του Διόφαντου, του οποίου η λύση έχει αποδοθεί σε σύγχρονη μετάφραση:

Βιβλίο 2^ο – πρόβλημα 8 Να διαιρεθεί δοθέν τετράγωνο αριθμού σε δύο τετράγωνα Προτείνω να διαιρεθεί το 16 σε δυο τετράγωνα. Βάζουμε τον πρώτο αριθμό να είναι τετράγωνο, δηλαδή χ^2, τότε ο άλλος θα είναι $16 - \chi^2$. Είναι αναγκαίο το $16 - \chi^2$ να είναι τετράγωνο Παίρνω το τετράγωνο από έναν τυχαίο αριθμό πολλαπλασιαζόμενο με τον άγνωστο χ, από τον οποίο έχει αφαιρεθεί η ρίζα του 16. Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε παράμετρο α, για να ερμηνεύσουμε πως ο Διόφαντος καταλήγει στην τελική του εξίσωση, αφού ο Διόφαντος δεν χρησιμοποιούσε γράμματα ως γενικούς αριθμούς ή ως παραμέτρους δηλαδή θα πάρουμε το τετράγωνο $(\alpha\chi - 4)^2$. Για παράδειγμα αν $\alpha = 2$ τότε το $(2\chi - 4)^2$, θα είναι ίσο με $4\chi^2 + 16 - 16\chi$ και αυτό θα είναι ίσο με το αρχικό $16 - \chi^2$ Εάν προσθέσουμε τους αριθμούς που λείπουν και από τα δυο μέρη και αφαιρέσουμε από τα ίσα, ίσα θα βρούμε τον άγνωστο χ ίσο με $\frac{16}{5}$, έτσι συνάγεται ότι ο ένας αριθμός είναι ο $\frac{256}{25}$ και ο άλλος $\frac{144}{25}$ Επομένως το άθροισμα των αριθμών είναι $\frac{400}{25}$	πρότασις έκθεσις διορισμός κατασκευή απόδειξις συμπέρασμα
---	---

Αν και όπως διαπιστώσαμε δεν έχουμε πολλά βιογραφικά στοιχεία για το συγγραφέα των Αριθμητικών, σήμερα γνωρίζουμε ότι ένα από τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων των Αριθμητικών είναι ότι ο Διόφαντος απαιτεί πάντα η λύση στην οποία οδηγεί η παραμετροποίηση του, να είναι εκφράσιμη δηλαδή ρητή. Ποτέ δεν χρησιμοποιεί τους όρους σύμμετρος ή ασύμμετρος όπως ο Ευκλείδης. Για το Διόφαντο φαίνεται ότι ο ρητός και ο σύμμετρος είναι το ίδιο, πράγμα που τον διαφοροποιεί από τον Ευκλείδη.

Η εισαγωγή του πρώτου βιβλίου των Αριθμητικών απευθύνεται σε κάποιον «τιμιότατο Διονύσιο», ο οποίος ενδιαφέρεται «σπουδαίως» να μάθει «την εύρεσιν των εν τοις αριθμοίς προβλημάτων». (Ενδέχεται η εισαγωγή να είναι αφιερωμένη στον επίσκοπο Διονύσιο όπως έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 2.2). Ο Διόφαντος υπόσχεται ότι αυτή του η επιθυμία μαζί με τη δική του διδασχή θα κάνουν το αντικείμενο «ευκατάληπτον» και θα

οδηγήσουν σε ταχεία μάθηση³⁶. Στην εισαγωγή του ο Διόφαντος εξηγεί επίσης την ονοματολογία που θα χρησιμοποιήσει, το συμβολισμό και τις βασικές αρχές της μεθοδολογίας που θα χρησιμοποιήσει. Αρχίζει με τον ορισμό του αριθμού, όλοι οι αριθμοί αποτελούνται από μονάδες, ο δε αριθμός των αριθμών που μπορεί να σχηματιστεί είναι άπειρος. **Ονομάζει** τον αριθμό που κατέχει άγνωστο αριθμό μονάδων **άγνωστο** και τον συμβολίζει **συντομογραφικά** με ένα κατοπτρικό **ς**, στη συνέχεια δίνει την ονοματολογία των δυνάμεων των αριθμών και των δυνάμεων του αγνώστου μέχρι την έκτη δύναμη, ενώ τις διαδοχικές δυνάμεις του αγνώστου τις **ονομάζει «είδη»**. Στη συνέχεια παρουσιάζει τα **αντίστροφα των δυνάμεων του αγνώστου** τα οποία θα χρειαστούν στη λύση των προβλημάτων του. Οι αριθμητικοί συντελεστές που δηλώνουν κάθε φορά το πλήθος των ειδών, γράφονται με το γνωστό αλφαβητικό αριθμητικό σύστημα και ακολουθούν την συντομογραφία του είδους. Ας δούμε τους πιο σπουδαίους συμβολισμούς και τις συντομογραφίες του Διόφαντου:

- Το χ^2 , ονομάζεται δύναμις και αναπαρίσταται με Δ^Y
- Το χ^3 , ονομάζεται κύβος και αναπαρίσταται με K^Y
- Το χ^4 , ονομάζεται δυναμοδύναμις και αναπαρίσταται με $\Delta^Y \Delta$
- Το χ^5 , ονομάζεται δυναμόκυβος και αναπαρίσταται με ΔK^Y
- Το χ^6 , ονομάζεται κυβόκυβος και αναπαρίσταται με $K^Y K$
Ο Διόφαντος δεν προχωρεί πέρα από την έκτη δύναμη.
- Το σύμβολο που τοποθετείται μπροστά από συγκεκριμένους αριθμούς, οι οποίοι διαφοροποιούνται από τον άγνωστο, αναπαρίσταται με το $\overset{0}{M}$
- Για την αφαίρεση χρησιμοποιούσε το σύμβολο  (λείψις) ενώ για την πρόσθεση δεν χρησιμοποιεί σύμβολο, δηλώνει την πρόσθεση με απλή παράθεση των προσθετέων
- Για το ίσον χρησιμοποιούσε το ισ
- Οι αριθμητικοί συντελεστές που δηλώνουν το πλήθος των «ειδών» κάθε φορά, έπονται κάθε φορά της συντομογραφίας στο εκάστοτε «είδος»
- Για τις αντίστροφες δυνάμεις των αγνώστων χρησιμοποιεί τους παρακάτω συμβολισμούς:
αριθμοστόν $\varsigma \chi$ για το $\frac{1}{\chi}$, δυναμοστόν $\Delta^Y \chi$ για το $\frac{1}{\chi^2}$, κυβοστόν $K^Y \chi$ για $\frac{1}{\chi^3}$,
δυναμοδυναμοστόν για το $\frac{1}{\chi^4}$, δυναμοκυβοστόν για το $\frac{1}{\chi^5}$ και
κυβοκυβοστόν για το $\frac{1}{\chi^6}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συμβολική έκφραση $\Delta^{\gamma} \bar{\alpha} \zeta \bar{\kappa} \delta \iota \sigma^{\circ} \bar{M} \pi \alpha$ σημαίνει :

μια δύναμη (α) και 24 (κδ) άγνωστοι αριθμοί (ς) είναι ίσοι με ογδόντα μια (πα) μονάδες

Εάν κάποιος αριθμός είναι αριθμητής και έχει παρονομαστή πολυώνυμο λέγεται **αριθμός τάδε εν μορίω τάδε** για παράδειγμα:

$\bar{M}$ ις (μονάδες 16) εν μορίω $\Delta^{\gamma} \bar{\Delta} \bar{M} \lambda \zeta K^{\gamma} \iota \beta$ είναι ο αριθμός $\frac{16}{\chi^4 + 36 + 12\chi^3}$

Ο Διόφαντος χρησιμοποιεί το Ελληνικό αλφάβητο με τα 24 γράμματα, τα οποία αυξάνει προσθέτοντας τρία απαρχαιωμένα γράμματα, έτσι χρησιμοποιεί 27 σύμβολα. Χωρίζει τα 27 σύμβολα σε ομάδες των 9. Τα πρώτα 9 σύμβολα αναπαριστούν τα ψηφία από 1 ως 9, τα επόμενα 9 σύμβολα αναπαριστούν τις δεκάδες από 10 έως 90 και τα επόμενα 9 τις εκατοντάδες από 100 έως 900. Για παράδειγμα ο αριθμός 1 γράφεται ως $\bar{\alpha}$, ο αριθμός 10 γράφεται ως $\bar{\iota}$ (οι μπάρες πάνω από τα γράμματα χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν ότι αυτά τα γράμματα αναπαριστούν νούμερα). Στη συνέχεια ο Διόφαντος δίνει **δυο αλγεβρικούς κανόνες**:

- **«από ομοίων όμοια»:** αν από κάποιο πρόβλημα προκύψουν ορισμένα «είδη» ίσα με όμοια «είδη», αλλά διαφορετικού πλήθους, είναι αναγκαίο να αφαιρεθούν και από τα δυο μέρη τα όμοια από τα όμοια, μέχρι να παραμείνει ένα «είδος» ίσο προς ένα «είδος»
- **«κοινή προσκείσθω η λείψις»:** αν συμβεί να υπάρχει στο ένα μέρος ή και στα δυο μέρη έλλειψη κάποιων ειδών, είναι αναγκαίο να προστεθούν και στα δυο μέρη τα είδη που λείπουν, μέχρι να γίνουν τα είδη και στα δυο μέρη υπάρχοντα και ύστερα πάλι να αφαιρεθούν τα όμοια από τα όμοια, μέχρι να παραμείνει ένα μόνο είδος σε κάθε μέρος.

Οι παραπάνω κανόνες υποδηλώνουν αντίστοιχα την αφαίρεση ομοίων και ίσου πλήθους όρων και από τα δύο μέλη μιας εξίσωσης ή την πρόσθεση ενός αφαιρούμενου όρου σε αυτά.

Ο λογισμός με τα «είδη» συμπληρώνεται με τη διατύπωση του κανόνα για τον πολλαπλασιασμό μεταξύ «ειδών» που προστίθενται και αφαιρούνται: **«Λείψις επί λείψιν ποιεί ύπαρξιν, λείψις δε επί ύπαρξιν ποιεί λείψιν»**. Ο κανόνας αυτός **δεν πρέπει** να ερμηνεύεται ως κανόνας προσήμων μεταξύ αρνητικών και θετικών αριθμών, στον αριθμητικό κόσμο του Διόφαντου οι αρνητικοί δεν είχαν θέση. Ο παραπάνω κανόνας **εξυπηρετούσε** την εκτέλεση πολλαπλασιασμών της μορφής $(\alpha \pm \beta)(\gamma \pm \delta)$ όπου τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ήταν είδη.

Εκτός από τους παραπάνω κανόνες ο Διόφαντος χρησιμοποιεί και άλλους τρόπους απλοποίησης των εξισώσεων, για παράδειγμα στην εξίσωση $25\chi^2 = 200\chi$ (βιβλίο Ι πρόβλημα 26) εφαρμόζεται ο κανόνας «**πάντα παρά χ** » που σημαίνει όλα να διαιρεθούν με το χ ³⁷.

Σχεδόν όλα τα προβλήματα του 1^{ου} κεφαλαίου του Διόφαντου ανάγονται σε εξισώσεις σημερινής μορφής $\alpha\chi = \beta$ ή $\alpha\chi^2 = \beta$, οι οποίες έχουν μια ακριβώς θετική (ρητή) λύση. Στα υπόλοιπα κεφάλαια υπάρχουν εξισώσεις 2^{ου} βαθμού της μορφής $\alpha\chi^2 + \beta\chi = \gamma$ ή $\alpha\chi^2 + \gamma = \beta\chi$ ή $\alpha\chi^2 = \beta\chi + \gamma$. Οι εξισώσεις δεν ταξινομούνται από το Διόφαντο σύμφωνα με το βαθμό, αλλά χωρίζονται σε αυτές που έχουν μόνο ένα «είδος» σε κάθε μέρος και σε αυτές που έχουν δυο «είδη» στο ένα μέρος και ένα «είδος» στο άλλο μέρος. Οι λύσεις που δίνει ο Διόφαντος είναι μόνο θετικές ρητές, δεν μας εξηγεί όμως πως τις βρήκε. Μεγάλο ενδιαφέρουν παρουσιάζουν οι απροσδιόριστες εξισώσεις, οι οποίες περιέχονται στα Αριθμητικά, έχουν περισσότερους από έναν άγνωστους και συνήθως έχουν άπειρες λύσεις, οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως «Διοφαντικές εξισώσεις», αφού ο Διόφαντος είναι ο πρώτος μαθηματικός που μελέτησε αυτό το είδος των εξισώσεων. Υπάρχουν αντικρουόμενες απόψεις για το αν ο Διόφαντος χρησιμοποιούσε μια και μόνο μέθοδο για τις απροσδιόριστες εξισώσεις ή δεν είχε καμία μέθοδο και για το κάθε πρόβλημα χρησιμοποιούσε μια ιδιαίτερη τεχνική επίλυσης. Ο χαρακτήρας του έργου του Διόφαντου είναι φανερό ότι είναι αλγεβρικός και αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο στάδιο εξέλιξης στην Άλγεβρα, το οποίο έχει ονομαστεί από τους ιστορικούς των Μαθηματικών «συγκεκριμένη» Άλγεβρα. Ο Boyer³⁸, αναφέρει ότι η «Αριθμητική» του Διόφαντου χαρακτηρίζεται από υψηλό βαθμό πρωτοτυπίας και δεξιότητας και δεν έχει τίποτα κοινό με οποιοδήποτε άλλο μαθηματικό παραδοσιακό κείμενο. Παρουσιάζει ένα καινούργιο κλάδο και ένα διαφορετικό χειρισμό των προβλημάτων. Η «Αριθμητική» του Διόφαντου δεν έχει καμία σχέση με τα έργα του Νικόμαχου (νεοπυθαγόρειος), του Θέωνα και του Βοήθιου. Η «εισαγωγή» του Νικόμαχου δεν ήταν μια πραγματεία υπολογισμών ούτε μια πραγματεία της άλγεβρας, αλλά ένα εγχειρίδιο (μαθηματικών) κατανόησης της Πυθαγόρειας και της Πλατωνικής φιλοσοφίας και έτσι χρησιμοποιήθηκε αργότερα ως μοντέλο από μεταγενέστερους σχολιαστές και μιμητές. Οι πιο γνωστοί είναι ο Θέων από τη Σμύρνη (125μΧ) ο οποίος έγραψε την «έκθεση» του στα Ελληνικά και ο Βοήθιος (πέθανε το 542μΧ) και έγραψε στα Λατινικά την «Arithmetica». Οι παραπάνω άνδρες ενδιαφερόταν περισσότερο για τις εφαρμογές της αριθμητικής στη μουσική και στην Πλατωνική θεωρία. Επίσης στην Αρχαία Ελλάδα η Αριθμητική σήμαινε τη θεωρία των αριθμών όχι υπολογισμούς, είχε περισσότερη συγγένεια και σχέση με τη φιλοσοφία,

παρά με καθαρά Μαθηματικά. Ο Νικόμαχος ενδιαφερόταν για τις στοιχειώδεις ιδιότητες των αριθμών και οι μαθηματικές του ικανότητες ήταν μάλλον περιορισμένες.

Η Αριθμητική του Διόφαντου όπως έφτασε στα χέρια μας είναι αφιερωμένη ολόκληρη στις ακριβείς ρητές λύσεις εξισώσεων, ορισμένων (έχουν πεπερασμένο πλήθος λύσεων) και απροσδιόριστων, έχοντας πάρει διαζύγιο από τη Γεωμετρία, μοιάζει με τη βαβυλωνιακή άλγεβρα με μια ουσιαστική διαφορά, οι Βαβυλώνιοι μαθηματικοί ενδιαφερόταν κυρίως για προσεγγιστικές λύσεις εξισώσεων έως και 3^{ου} βαθμού. Από την άλλη μεριά η άποψη ότι ο Διόφαντος είναι σαν τους Βαβυλώνιους αλγεβριστές, σίγουρα αδικεί το Διόφαντο. Οι αριθμοί του είναι αφηρημένοι, όπως και τα μαθηματικά του προβλήματα και δεν αναφέρονται σε μετρήσεις σιταριού ή διαστάσεις χωραφιών ή χρηματικές μονάδες όπως συνέβαινε στην άλγεβρα της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Σήμερα η Αριθμητική του Διόφαντου μας δίνει την εντύπωση ότι είναι ιδιαίτερα πρωτότυπη. Αν σκεφτούμε μόνο το θέμα της εισαγωγής και του συμβολισμού του αγνώστου, το θέμα των συντομογραφιών που εισάγει, αν αντικαταστήσουμε τους συμβολισμούς σε ένα από τα προβλήματα των Αριθμητικών του Διόφαντου με σύγχρονους συμβολισμούς και διαβάσουμε δυνατά το πρόβλημα ή το λύσουμε στον πίνακα, τότε θα συμφωνήσουμε ότι πρόκειται για έναν επιτυχημένο δάσκαλο από τη μια και για προχωρημένα μαθηματικά από την άλλη. Σύγχρονοι μελετητές των Αριθμητικών του Διόφαντου θεωρούν όχι μόνο προχωρημένα τα Μαθηματικά του Διόφαντου για την εποχή του, αλλά συχνά τον ονομάζουν πατέρα της άλγεβρας.

2.4 Επίδραση του έργου του Διόφαντου στην εξέλιξη της Άλγεβρας

Η **εισαγωγή** στα **Αριθμητικά** του Διόφαντου έχει χαρακτηριστεί από πολλούς ιστορικούς των μαθηματικών ως το **αρχαιότερο εγχειρίδιο άλγεβρας**. Οι συντομογραφίες που χρησιμοποίησε, η εισαγωγή του αγνώστου με το σύμβολο ς , οι συντελεστές στο εκάστοτε «είδος» (πχ $\Delta^{\gamma}\Delta\epsilon^{\prime}$ είναι το σημερινό $5x^4$), $\blacktriangle$ το ειδικό σύμβολο για να δηλώσει αφαίρεση «ειδών», οι κανόνες που χρησιμοποίησε για τη λύση εξισώσεων, η ανάλυση και ανακατασκευή των λύσεων των προβλημάτων του, φανερώνουν τον αλγεβρικό χαρακτήρα του έργου του Διόφαντου. Το έργο του Διόφαντου αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο στάδιο ανάπτυξης της άλγεβρας, το οποίο ονομάστηκε από τους ιστορικούς των Μαθηματικών «συγκεκριμένη» άλγεβρα. Σύμφωνα με τον Nesselmann³⁹ διακρίνουμε τρεις φάσεις ανάπτυξης των αλγεβρικών θεωριών, τις εξής:

- **Ρητορικό ή αρχικό στάδιο**, κατά το οποίο τα πάντα γράφονται πλήρως με λέξεις, οι υπολογισμοί γίνονται με τον λόγο αφού λείπει ο συμβολισμός. Τα αριθμητικά κείμενα των νέο-πλατωνικών και των νέο-πυθαγόρειων σχολών ανήκουν στο ρητορικό στάδιο. Χρονικά είναι η περίοδος πριν το Διόφαντο (περίπου 250μΧ). Το μόνο αποδεκτό αφηρημένο είδος αντικειμένων είναι οι αριθμοί.
- **Συγκεκριμένο ή ενδιάμεσο στάδιο**, χρησιμοποιείται ο λόγος, αλλά παρεμβάλλονται συντομογραφίες, ώστε οι συλλογισμοί και οι υπολογισμοί να γίνουν συνοπτικότεροι και ευκολότεροι. Χρονικά αυτή η περίοδος εκφράζεται από το Διόφαντο και διαρκεί έως το τέλος του 16^{ου} αιώνα.
- **Συμβολικό ή τελικό στάδιο**, εισάγονται ειδικά σύμβολα για την αναπαράσταση των δεδομένων, των ζητούμενων και των πράξεων και αυτή η χρονική περίοδος χαρακτηρίζεται από τον Viete περίπου στο 1600

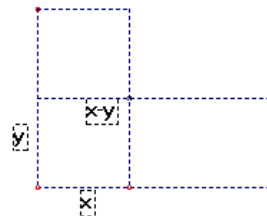
Τα παραπάνω στάδια μελετήθηκαν μέσα από ιστορικά κείμενα (προβλήματα), τα οποία προέρχονται από διαφορετικές χρονικές περιόδους, στα πλαίσια του μαθήματος «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους» (Θωμάϊδης, ΠΜΣ 2013). Ας δούμε αναλυτικά κάποια αντιπροσωπευτικά κείμενα από την παραπάνω μελέτη, σε σύγχρονη απόδοση καθώς και τα συμπεράσματα που προέκυψαν.

Πρώτο κείμενο

Το πρόβλημα 1 της Βαβυλωνιακής πινακίδας ΑΟ 8862 (περίπου 1800πΧ)

Μήκος, πλάτος. Πολλαπλασίασα το μήκος και το πλάτος κι έτσι βρήκα την επιφάνεια. Κατόπιν πρόσθεσα στην επιφάνεια την υπεροχή του μήκους από το πλάτος: το αποτέλεσμα είναι 183. Επίσης πρόσθεσα το μήκος και το πλάτος: 27. Ζητούνται το μήκος, το πλάτος και η επιφάνεια.

θα εξετάσουμε πρώτα τη σύγχρονη συμβολική αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος για την πληρέστερη κατανόηση της λύσης του βαβυλώνιου:



$$\begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases} \quad \text{προσθέτουμε κατά μέλη και στη}$$

συνέχεια προσθέτουμε το 2 και στα δυο μέλη της δεύτερης εξίσωσης:

$$\begin{cases} x(y + 2) = 210 \\ x + y + 2 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 210 \\ x + z = 29 \end{cases} \quad \text{όπου } z = y + 2, \text{ εμείς σήμερα ξέρουμε} \\ \text{πως θα λύσουμε το σύστημα, δηλαδή}$$

$$x = \frac{1}{2}(\alpha\theta\rho\acute{o}\iota\sigma\mu\alpha\tau\omicron\varsigma) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\alpha\theta\rho\acute{o}\iota\sigma\mu\alpha\tau\omicron\varsigma\right)^2 - \gamma\iota\nu\acute{o}\mu\epsilon\nu\omicron} \text{ και}$$

$$z = \frac{1}{2}(\alpha\theta\rho\acute{o}\iota\sigma\mu\alpha\tau\omicron\varsigma) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\alpha\theta\rho\acute{o}\iota\sigma\mu\alpha\tau\omicron\varsigma\right)^2 - \gamma\iota\nu\acute{o}\mu\epsilon\nu\omicron}$$

Ανακατασκευή της λύσης του Βαβυλώνιου	Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός
Θα ακολουθήσεις ετούτη τη μέθοδο: $183+27=210$ $2+27=29$ Πάρε το μισό του 29 $29 \div 2 = 14,5$ Πολλαπλασίασε το αποτέλεσμα με τον εαυτό του $14,5 \times 14,5 = 210,25$ $210,25 - 210 = 0,25$ $0,25 = 0,5 \times 0,5$ $14,5 + 0,5 = 15$ (μήκος) $14,5 - 0,5 = 14$ (πλάτος) $15 \cdot 14 = 210$ η επιφάνεια	$x + z = 29$ $\frac{x + z}{2} = 14,5$ $\left(\frac{x + z}{2}\right)^2 = 210,25$ $\left(\frac{x + z}{2}\right)^2 - xz = \left(\frac{x - z}{2}\right)^2 = 0,25$ $\frac{x - z}{2} = \sqrt{0,25}$ $x = \frac{x + z}{2} + \frac{x - z}{2} = 15$ $z = \frac{x + z}{2} - \frac{x - z}{2} = 14$

Σχολιασμός: Ο Βαβυλώνιος ακολούθησε μια γνωστή συνταγή, η οποία εμφανίζεται σε πολλά κείμενα και η οποία εξηγείται με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Η λύση του Βαβυλώνιου υποδεικνύει μια γενικευμένη Αριθμητική, τα νούμερα 183 και 27 είναι προεπιλεγμένα ώστε να βγαίνουν οι πράξεις, η διαδικασία του είναι τυποποιημένη. Το πρόβλημα είναι ένα υπολογιστικό πρόβλημα Γεωμετρίας χωρίς σχήμα. Επίσης δεν διστάζει στο εμβαδόν να προσθέσει μήκος. Οι Ιστορικοί για να καταλάβουν το συλλογισμό έβαλαν x και y , ενώ οι Βαβυλώνιοι είχαν αριθμούς. Ο ίδιος τρόπος επίλυσης ακολουθείται και στο πρόβλημα 3 της Βαβυλωνιακής πινακίδας ΑΟ 8862.

Δεύτερο κείμενο

Το πρόβλημα Ι-1 από τα Αριθμητικά του Διόφαντου (περίπου 250μΧ)

Να διασπαστεί ένας αριθμός δυο αριθμούς που να έχουν δοθείσα διαφορά

Η λύση του Διόφαντου	Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός
- Έστω ότι ο δοθείς αριθμός είναι το 100 η δε διαφορά 40 (επιλογή αριθμητικών δεδομένων) - Ας τεθεί x ο μικρότερος τότε ο μεγαλύτερος είναι $x + 40$, άρα οι δυο μαζί είναι $2x + 40$ (εισάγει άγνωστο, δημιουργεί υποστάσεις) - Δόθηκε όμως ότι $100 = 2x + 40$ (κατασκευή εξίσωσης) - Από ομοίων όμοια, αφαιρώ από το 100 το 40 και από το $2x + 40$ το 40. (μετασχηματισμός και επίλυση εξίσωσης) - Μένουν $2x$ ίσοι με 60 - Άρα ο καθένας γίνεται 30 - Έρχομαι στις υποστάσεις - Άρα ο μικρότερος είναι 30 και ο μεγαλύτερος 70 - Η απόδειξη είναι φανερή. (κάνει επαλήθευση)	$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$ γενικό πρόβλημα $\begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 40 \end{cases}$ επιλογή αριθμητικών δεδομένων $\begin{cases} 2x + 40 = 100 \\ y = x + 40 \end{cases}$ επίλυση συστήματος με αντικατάσταση $\begin{cases} 2x = 60 \\ y = x + 40 \end{cases}$ διαδικασία επίλυσης $\begin{cases} x = 30 \\ y = 70 \end{cases}$ λύση του συστήματος

Σχολιασμός: Ο Διόφαντος δημιούργησε την πρώτη εξίσωση στην Ιστορία των μαθηματικών:

Ἄρα ῥ' ἴσαι εἰσὶν ζβΜῖ

Μονάδες 100 είναι ίσες με αγνώστους 2 μονάδες 40

Παρατηρούμε εδώ μια ανατροπή, δεν έχουμε Γεωμετρία αλλά Αριθμητική. Ποια είναι η καινοτομία του Διόφαντου; Εισαγωγή αγνώστου, δημιουργεί υποστάσεις των ζητούμενων με τη βοήθεια του αγνώστου και κατασκευάζει εξίσωση. Κάνει μετασχηματισμούς για να λύσει την εξίσωση και τελειώνει με την επαλήθευση των λύσεων που βρήκε. Ο Διόφαντος δεν χρησιμοποιεί παραμέτρους αφού με τα γράμματα συμβολίζει αριθμούς.

Το πρόβλημα Ι-27 από τα Αριθμητικά του Διόφαντου (περίπου 250μΧ)

Να βρεθούν δυο αριθμοί τέτοιοι ώστε το άθροισμα και το γινόμενό τους να είναι δοθέντες αριθμοί

Η λύση του Διόφαντου	Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός
- Πρέπει το μισό του τετραγώνου του αθροίσματος των ευρισκομένων να ξεπερνά το γινόμενό τους κατά ένα τετράγωνο (θέτει περιορισμό). Αυτό είναι πλάσματικόν. - Έστω το άθροισμα 20, το δε γινόμενο 96 (δεν	$x + y = S, xy = P$ (γενικό πρόβλημα) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = L^2$ (γενική συνθήκη) $x + y = 20, xy = 96$ (επιλογή αριθμητικών

έχει παραμέτρους, επιλέγει αριθμητικά δεδομένα) • Ας τεθεί $2x$ η διαφορά τους. Επειδή το άθροισμα είναι 20, αν το χωρίσω σε δυο ίσα μέρη, το καθένα θα είναι 10-μας πάει στο Βαβυλωνιακό άθροισμα- και αν το μισό της διαφοράς, δηλαδή το x, το προσθέσω στο ένα και το αφαιρέσω από το άλλο, θα είναι πάλι το άθροισμα 20 και η διαφορά $2x$. Ας τεθεί λοιπόν ο μεγαλύτερος $10+x$, οπότε ο μικρότερος $10-x$. (εισάγει άγνωστο, δημιουργεί υποστάσεις) • Έχουμε ότι το γινόμενο τους είναι 96, αλλά το γινόμενο τους είναι $100 - x^2$. Αυτά είναι ίσα με 96 (κατασκευή εξίσωσης) • Και ο x γίνεται ίσος με 2, άρα είναι ο μεγαλύτερος 12 και ο μικρότερος 8 και επαληθεύουν την πρόταση (επίλυση, επαλήθευση)	δεδομένων) $x - y = 2l \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = l \text{ (εισαγωγή αγνώστου } l)$ $\frac{x+y}{2} = 10, x = 10 + l, y = 10 - l$ (αναπαράσταση ζητούμενων) $xy = 96 \Leftrightarrow 100 - l^2 = 96 \text{ (κατασκευή εξίσωσης)}$ $l = 2 \text{ (λύση εξίσωσης)}$ $x = 12, y = 8 \text{ (λύση προβλήματος)}$
--	--

Σχολιασμός: Το πρόβλημα I-27 μοιάζει με το πρόβλημα των Βαβυλωνίων αλλά είναι προχωρημένη αναπαράσταση, ο Διόφαντος συνδέει 3 αντικείμενα, ξέρει τα 2, δηλαδή $x + y = S$, $xy = P$ και ψάχνει το τρίτο, δηλαδή $\frac{x-y}{2}$. Επίσης ο Διόφαντος χρησιμοποιεί τον περιορισμό $(\frac{x+y}{2})^2 - xy = L^2$, για τα ζητούμενα και όχι για τα δεδομένα. Δεν διευκρινίζει τι ακριβώς είναι το L^2 . Άρα ο περιορισμός έχει τη δομή ανισοτικής σχέσης και όχι την έννοια ταυτότητας, πράγμα που ενισχύει την άποψη ότι πρόκειται για περιορισμό με τη σημερινή έννοια, δηλαδή πρόταση που υποδεικνύει τη συνθήκη επίλυσης του προβλήματος (εδώ ύπαρξη ρητών λύσεων). Γιατί ο Διόφαντος κάνει αυτό τον περιορισμό στα ζητούμενα και όχι στα δεδομένα; Δυο είναι οι επικρατέστερες υποθέσεις που εξηγούν το συγκεκριμένο ζήτημα. Η πρώτη υποστηρίζει ότι ο Διόφαντος είναι υποχρεωμένος μετά τη διατύπωση του προβλήματος να χρησιμοποιήσει αριθμητικά δεδομένα που θα τον οδηγήσουν σε ρητή θετική λύση. Δηλαδή τα δεδομένα του είναι τέτοια ώστε να τον οδηγήσουν σε εξίσωση $\alpha x = \beta$ ή $x^2 = \kappa$ με κ να είναι τέλειο τετράγωνο (προβλήματα I.27, I.28 και I.30). Η δεύτερη υπόθεση είναι ότι θέλει να δημιουργήσει κατάλληλες υποστάσεις των ζητούμενων αριθμών οι οποίες θα τον οδηγήσουν στις παραπάνω μορφές εξισώσεων (II.8, II.9). Σε πολλές περιπτώσεις όμως η επιλογή κατάλληλων δεδομένων είναι πολύ δύσκολη. Τότε, ο Διόφαντος επιλέγει σκοπίμως δεδομένα που θα τον οδηγήσουν σε αδύνατες εξισώσεις και στην συνέχεια κατασκευάζει **υποπρόβλημα**, (το οποίο ενσωματώνει στη λύση), δηλαδή μια διαδικασία εύρεσης αριθμητικών δεδομένων τα οποία θα τον οδηγήσουν σε εξισώσεις με μια θετική και ρητή λύση. Στη διαδικασία αυτή χρησιμοποιεί σχέσεις ανάλογες με τους περιορισμούς των προβλημάτων I.27, I.28 και I.30. Δηλαδή οδηγούμαστε στην

υπόθεση ότι οι περιορισμοί αποτελούσαν τις συνθήκες επίλυσης ενός υποπροβλήματος, δηλαδή **οι ευρισκόμενοι** που αναφέρονται στη διατύπωση των περιορισμών δεν είναι οι θετικές ρητές λύσεις, αλλά τα κατάλληλα δεδομένα για να επιτευχθούν τέτοιες λύσεις⁴⁰. Το επίθετο **πλασματικών** προκύπτει από το **πλάσσω** που μια ερμηνεία του είναι δίνω σχήμα και μορφή, σύμφωνα με την άποψη του Γ. Θωμαΐδη το «πλασματικών» **χαρακτηρίζει** το αντίστοιχο **υποπρόβλημα** ως **τυποποιημένο ή κατασκευάσιμο**. Οι περισσότεροι ιστορικοί **παραπέμπουν** σε μια γεωμετρική ερμηνεία των σχέσεων που εκφράζουν οι αντίστοιχοι περιορισμοί στις προτάσεις του βιβλίου II του Ευκλείδη και μάλιστα στην πρόταση II.5, την οποία ο Nesselman την έδωσε στη μορφή: $\alpha\beta + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$, ο δε Simson αξιοποιώντας την πρόταση II.5 καταλήγει στην εξίσωση $\alpha\chi - \chi^2 = \beta^2$, η οποία αλγεβρικά δίνει δυο λύσεις, αλλά η γεωμετρική της επίλυση δίνει μόνο μια λύση. (Στοιχεία Ευκλείδη τόμος I, 2001, σ.223, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.)

ΤΡΙΤΟ ΚΕΙΜΕΝΟ

Ένα πρόβλημα από το βιβλίο Al-kitāb al-muhtaṣar fī hisāb al-jabr wa-l-mugābala (Συνοπτικό βιβλίο υπολογισμού με al-Jabr και al-Mugabala) του Abū Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (Βαγδάτη 820 μ.Χ.)

Αν κάποιος πει: «χώρισε το δέκα σε δυο μέρη, πολλαπλασίασε το ένα με τον εαυτό του. Θα γίνει ίσο με ογδόντα μια φορές το άλλο.

Υπολογισμός	Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός
➤ Λέγεις, δέκα μείον το πράγμα, πολλαπλασιασμένο επί τον εαυτό του, γίνεται εκατό συν ένα τετράγωνο μείον είκοσι πράγματα και αυτό ισούται με ογδόντα ένα πράγματα. (συνταγή) ➤ Ξεχώρισε τα είκοσι πράγματα από το εκατό και το τετράγωνο και πρόσθεσε το στα ογδόντα ένα. ➤ Θα γίνουν τότε εκατό συν ένα τετράγωνο, που θα είναι ίσο με εκατό και μια ρίζες. ➤ Χώρισε τις ρίζες σε δυο ίσα μέρη. Το μισό τους είναι πενήντα και ένα δεύτερο ➤ Πολλαπλασίασε αυτό με τον εαυτό του, γίνονται δυο χιλιάδες πεντακόσια πενήντα και ένα τέταρτο ➤ Αφαίρεσε από αυτό εκατό, το υπόλοιπο είναι δυο χιλιάδες τετρακόσια πενήντα και ένα τέταρτο ➤ Βγάλε τη ρίζα του, είναι σαράντα εννέα και ένα δεύτερο. ➤ Αφαίρεσε από αυτό το μισό των ριζών, που είναι πενήντα και μισό. παραμένει ένα και αυτό είναι το ένα από τα δυο μέρη.	χ και $10 - \chi$ ο διαχωρισμός του 10 $(10 - \chi)^2 = 81\chi$ (γνωρίζει την ταυτότητα) $100 + \chi^2 - 20\chi = 81\chi$ $100 + \chi^2 = 101\chi$ $\frac{101}{2} = 50\frac{1}{2}$ $(50\frac{1}{2})^2 = 2550\frac{1}{4}$ $2550\frac{1}{4} - 100 = 2450\frac{1}{4}$ $\sqrt{2450\frac{1}{4}} = 49\frac{1}{2}$ $50\frac{1}{2} - 49\frac{1}{2} = 1$

Σχολιασμός: Ο *Al – Khwārizmī* είναι γνωστός ως σπουδαίος μαθηματικός από το Μεσαίωνα, όμως για τη ζωή του γνωρίζουμε πολύ λίγα. Ο A – K έγραψε δυο βιβλία αριθμητικής και άλγεβρας που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην ιστορία των μαθηματικών. Περιέγραψε με ακρίβεια τα ινδικά ψηφία και πολλοί αναγνώστες θεώρησαν λανθασμένα ότι το σημερινό σύστημα αρίθμησης έχει αραβική προέλευση. Το βιβλίο από το οποίο προέρχεται το πρόβλημα του τρίτου κειμένου είναι από τη διατριβή του A-K με τίτλο *Al Kitāb al muhtasar fī hisāb al jabr wa l muqābala* (συνοπτικό βιβλίο υπολογισμού με al Jabr και al Muqābala). Ο όρος al jabr (δεν μεταφράστηκε και έτσι έφθασε να γίνει το όνομα της ίδιας της επιστήμης, δηλαδή της Άλγεβρας) μπορεί να αποδοθεί ως «**αποκατάσταση**» ή «**συμπλήρωση**» και φαίνεται ότι αναφερόταν στη μεταφορά των ποσοτήτων στο άλλο μέλος της εξίσωσης, ενώ ο όρος al muqābala μπορεί να αποδοθεί ως «**ελάττωση**» ή «**εξισορρόπηση**» και φαίνεται ότι αναφερόταν στην απαλοιφή των ίδιων ποσοτήτων στα δύο μέλη τις εξίσωσης. Η al jabr έχει φτάσει σε εμάς σε ένα λατινικό και ένα αραβικό αντίτυπο. Από τη λατινική μετάφραση λείπει ένα μεγάλο μέρος του έργου το οποίο περιέχεται στο αραβικό χειρόγραφο, για παράδειγμα δεν έχει εισαγωγή, ίσως επειδή ο πρόλογος του συγγραφέα στα αραβικά εξυμνούσε τον Μωάμεθ τον προφήτη και τον χαλίφη Αλ Μαμούν (813-833μΧ). Ο *Al Khwārizmī* αναφέρει ότι ο τελευταίος τον ενθάρρυνε «να...συνθέσει ένα μικρό έργο για τους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας al jabr και al muqābala και να το περιορίσει στο πιο εύκολο και χρήσιμο τμήμα αριθμητικής, αυτό που χρειάζονται και ζητούν οι άνθρωποι σε περιπτώσεις κληρονομιάς, μοιρασιάς περιουσίας, δικαστικών αγωγών και εμπορικών συναλλαγών καθώς και στις συναλλαγές μεταξύ τους, στη διάνοιξη καναλιών, στους γεωμετρικούς υπολογισμούς και σε άλλα αντικείμενα διάφορων ειδών».

Ας επανέλθουμε στο κείμενο το οποίο εξετάζουμε. Ο A- K αν και είναι μεταγενέστερος του Διόφαντου εργάζεται ρητορικά (δεν έχουμε πληροφορίες αν ο A-K γνώριζε το έργο του Διόφαντου), αποκαλεί δε τον άγνωστο shay (αραβική λέξη) δηλαδή **πράγμα** και παρατηρούμε ένα πισωγύρισμα. Σύμφωνα με μερικές απόψεις το έργο του A-K αποτελεί ένα «αναμάσημα» του έργου του Διόφαντου και είναι υποδεέστερο αφού δεν χρησιμοποιεί καμία συντόμευση ή σύντμηση. Βέβαια η al jabr βρίσκεται πολύ πιο κοντά στη σημερινή στοιχειώδη άλγεβρα από το έργο του Διόφαντου, διότι δεν περιέχει δύσκολα προβλήματα της απροσδιόριστης ανάλυσης αλλά μια απλή περιγραφή της επίλυσης των εξισώσεων κυρίως δευτέρου βαθμού. (Boyer pp. 253-257, 1997)

Στη συνέχεια μελετήσαμε τέσσερα προβλήματα ακόμα (βλέπε παράρτημα), τα εξής:

Προβλήματα	Έτος
1)I-1 από το De numeris Datis του Jordanus de Nemore 2)I-3 από το De numeris Datis	Περίπου 1250μΧ
3)I-1 από το Zeteticorum Libri του Francois Viete (1540-1603)	1593μΧ
4)“άθροισμα και διαφορά” από την Άλγεβρα του Leonhard Euler	1770μΧ

Μελετήσαμε το μαθηματικό έργο όλων των παραπάνω και είδαμε τα εξής:

Για τον **Jordanus de Nemore** δεν έχουμε σχεδόν καμία πληροφορία για τη ζωή του, όπως άλλωστε και για το Διόφαντο. Πιστεύεται ότι δίδαξε στο Παρίσι γύρω στα 1220μΧ. Με βάση τα χειρόγραφα που σώζονται φαίνεται ότι η Αριθμητική του διαβάστηκε πολύ, το βιβλίο του De numeris Datis (Περί δεδομένων αριθμών) κυκλοφόρησε πολύ στη Μεσαιωνική Ευρώπη. Στο βιβλίο το αυτό περιέχονται προβλήματα όπου από ορισμένες δοθείσες ποσότητες προσδιορίζονται άλλες ποσότητες. Ο Nemore είναι επηρεασμένος από τους άραβες, τα προβλήματα του είναι λεκτικά διατυπωμένα και οι βασικές αριθμητικές πράξεις γράφονται επίσης λεκτικά. Κάθε πρόταση του είναι γραμμένη σε τυπική μορφή, όπως έκανε και ο Ευκλείδης. Χρησιμοποιεί γράμματα για να αναπαραστήσει αριθμούς, πράγμα που υποδεικνύει την έννοια της παραμέτρου (αγνοήθηκε από τους διαδόχους του), αλλά ο συμβολισμός του είναι σε εμβρυακή μορφή, παρατηρείται ένα πισωγύρισμα όσον αφορά την αναπαράσταση του. Προφανώς ήταν επηρεασμένος από τον Ευκλείδη που χρησιμοποίησε αντίστοιχους συμβολισμούς για μήκη ευθυγράμμων τμημάτων. Πολλές φορές παριστάνει έναν αριθμό με δυο γράμματα και άλλες φορές ένα ζεύγος αριθμών ab παριστάνει το άθροισμα των αριθμών $a + b$. Αυτό προκαλούσε σύγχυση. Οι αποδείξεις του είναι αριθμητικές και στο τέλος λύνει ένα αριθμητικό παράδειγμα με βάση το σχήμα της αφηρημένης λύσης που έχει ήδη διαπραγματευτεί. Έτσι διατυπώνει λεκτικά το πρόβλημα I-1 καθώς και το πρόβλημα I-3 από το De numeris Datis, δίνει ρητορική λύση με αφηρημένο τρόπο και στο τέλος λύνει ένα αριθμητικό παράδειγμα για κάθε πρόβλημα.

Ο **Francois Viete** έχει χαρακτηριστεί σαν ένας από τους «ευφυέστατους άνδρες» ο οποίος προσπάθησε να ταυτίσει την Ελληνική ανάλυση με τη νέα άλγεβρα και το πιο σπουδαίο αυτή τη νέα άλγεβρα να την διαχειρίζεται με ευκρίνεια και απλότητα. Γεννήθηκε σε ένα χωριό στη δυτική Γαλλία και

σπούδασε δικηγόρος. Προσωπικός σύμβουλος του βασιλιά Ερρίκου του τρίτου και του τετάρτου αποκρυπτογραφούσε κείμενα στρατιωτικά και έδινε πληροφορίες, τα μαθηματικά ήταν πάρεργο για τον Viète. Είχε μελετήσει τα Αριθμητικά του Διόφαντου στην πρώτη έκδοση τους (όπως δημοσιεύτηκαν από τον Claude Gaspar Bachet). Στα τέλη του 16ου αιώνα συνέγραψε πολλές πραγματείες, που είναι ως σύνολο γνωστές με το όνομα «Αναλυτική τέχνη». Ταξινομεί και κωδικοποιεί τα μαθηματικά και έτσι προσφέρει περισσότερο στην άλγεβρα, αφού πλησιάζει τις σύγχρονες απόψεις. Ο Viète χρησιμοποιεί σύμφωνα για τα δεδομένα ενός προβλήματος και φωνήεντα για τα ζητούμενα. Βέβαια οι συμβολισμοί και οι συντομεύσεις υπήρχαν και ο Viète τα χρησιμοποιεί κατά κόρον. Κακολογεί το Διόφαντο διότι θεωρούσε ότι απέκρυπτε τις μεθόδους του και μας έδινε μόνο συνταγές. Για πρώτη φορά υπάρχει διαχωρισμός ανάμεσα στην έννοια της παραμέτρου και στην άγνωστη ποσότητα. Ήταν η αλγεβρική του δουλειά συμβολική; Μάλλον ήταν συγκεκριμένη αφού για παράδειγμα χρησιμοποιούσε:

Για το τετράγωνο $\rightarrow A \text{ quadratus}$

Για τον κύβο $\rightarrow A \text{ cubus}$

Για πρόσθεση και αφαίρεση $\rightarrow + \text{και} -$ γερμανικά σύμβολα

Για τον πολλαπλασιασμό $\rightarrow in$ (λατινική λέξη)

Για το ίσον $\rightarrow$ σύντμηση του λατινικού *aequalis*

Για τη διαίρεση $\rightarrow$ την κλασματική γραμμή

Ο Viète αντιπαθούσε τον αραβικό όρο άλγεβρα και προσπάθησε να αντικαταστήσει τον όρο αυτό, όμως παρατηρώντας αυτό που έκαναν οι αλγεβριστές στα προβλήματα με αγνώστους, δηλαδή ξεκινούσαν από την υπόθεση ότι ο άγνωστος είναι δοσμένος και κατέληγαν σε ένα αναγκαίο συμπέρασμα, από το οποίο υπολόγιζαν τελικά τον άγνωστο (δηλαδή δεν ξεκινούσαν από τα δεδομένα του προβλήματος), ονόμασε αυτό τον κλάδο «Αναλυτική τέχνη». Ο Viète αρχίζει τα κείμενα του (στα 5 βιβλία της Ζητητικής) με το ίδιο σχεδόν πρόβλημα που αρχίζουν ο Διόφαντος και ο Nemoine, «δίνεται το άθροισμα και η διαφορά δυο ριζών (αγνώντων) να βρεθούν οι ρίζες». Προσεγγίζει άμεσα το πρόβλημα, συμβολίζει με B τη διαφορά και με D το άθροισμα και προχωρώντας στη λύση βρίσκει τελικά τη μια ρίζα ίση με $\frac{1}{2}D + \frac{1}{2}B$ και την άλλη ρίζα $\frac{1}{2}D - \frac{1}{2}B$. Για πρώτη φορά βγήκαν μαθηματικοί τύποι. Στη συνέχεια διατυπώνει το συμπέρασμα: «το ημιάθροισμα των ριζών μείον την ημιδιαφορά τους είναι ίσο με τη μικρότερη ρίζα, ενώ το ημιάθροισμα των ριζών συν την ημιδιαφορά τους είναι ίσο με τη

μεγαλύτερη ρίζα», αυτό είναι που κάνει φανερό η Ζητητική, επιστήμη που εξηγεί γιατί το αποτέλεσμα είναι αληθές. Την «Αναλυτική τέχνη», ο Viète την ονομάζει λογιστική επί των ειδών, *logistica speciosa*.

Ο Leonhard Euler (1707-1783) γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας και από πολύ νωρίς φάνηκε η ευφυΐα του. Ο ίδιος έπεισε τον Johann Bernoulli να του κάνει ιδιαίτερα μαθήματα στα μαθηματικά. Το 1726 δέχεται τη θέση της ιατρικής και της φυσιολογίας στην Ακαδημία επιστημών στην Αγία Πετρούπολη και το 1773 διορίζεται ως Αρχιμαθηματικός στην Ακαδημία. Θεωρείται ο πιο παραγωγικός μαθηματικός στην ιστορία των μαθηματικών. Πολλά έχουν λεχθεί για τον αποκαλούμενο «Πρίγκιπα των μαθηματικών». Ο Laplace έλεγε: «διαβάστε, διαβάστε Euler, είναι ο καθηγητής όλων μας».

Ο Euler στο πρόβλημα που μελετήσαμε, «ζητείται να διασπασθεί ο αριθμός α σε δυο μέρη ώστε το μεγαλύτερο να υπερβαίνει το μικρότερο κατά β », εισάγει μεταβλητές x, y και την παράμετρο b , στη συνέχεια χρησιμοποιεί τη μέθοδο σύγκρισης για την επίλυση του δηλαδή: $x = \alpha - y$, $x = b + y$ και η βρίσκει την λύση: $x = \frac{\alpha+b}{2}$, $y = \frac{\alpha-b}{2}$, (σχέσεις στα βαβυλωνιακά μαθηματικά). Και τελειώνει με μια γενική διατύπωση: «όταν το άθροισμα δυο αριθμών είναι α και η διαφορά τους είναι b , τότε ο μεγαλύτερος των αριθμών θα είναι το ημιάθροισμα συν την ημιδιαφορά, ενώ ο μικρότερος των αριθμών θα είναι το ημιάθροισμα μείον την ημιδιαφορά», βγάζει τύπους αλλά δίνει και γενική διατύπωση πρότασης.

Ο Euler **αξιοποίησε** με μεγάλη τέχνη την παράδοση και χρησιμοποίησε σύμβολα, ιδέες και ορολογία στην άλγεβρα, στην τριγωνομετρία και στη γεωμετρία, που χρησιμοποιούμε και σήμερα και μάλιστα ο σημερινός συμβολισμός οφείλεται κυρίως στον Euler, ας δούμε μερικά από αυτά:

- Το e για να δηλώσει τη βάση του συστήματος των φυσικών λογαρίθμων
- Το γράμμα π για το λόγο του μήκους κύκλου προς τη διάμετρο
- Για πρώτη φορά το γράμμα i για την $\sqrt{-1}$
- Το σύμβολο $\ln x$ για το γνωστό μας λογάριθμο
- Το Σ για το άθροισμα
- Το $f(x)$ για τη συνάρτηση.

Το έργο του Euler άφησε εποχή διότι πίσω από τα σύμβολα βρίσκονται οι έννοιες οι οποίες είναι όχι μόνο σημαντικές αλλά οικοδομούν την σημερινή μαθηματική γνώση.

Συμπεράσματα

Μπορεί η παραπάνω εξέλιξη και γενικότερα η εξέλιξη των αλγεβρικών εννοιών να θεωρηθεί ως μια ιεραρχία σταδίων; Ας δούμε τι έχουμε από την μελέτη μας:

- Από Βαβυλωνιακές πινακίδες→ συγκεκριμένα δεδομένα και αριθμητικές πράξεις σε προβλήματα υπολογισμών, δεν υπάρχει κανένας συμβολισμός, προεπιστημονική σκέψη
- Διόφαντος→ γενική διατύπωση προβλημάτων, μοναδικός άγνωστος x , συντομογραφικές αναπαραστάσεις, οι ειδικές λύσεις του Διόφαντου, συμβολισμός (διαφορά από το σημερινό αλγεβρικό συμβολισμό: δεν υπάρχουν σύμβολα για τις πράξεις, για τις σχέσεις και τον εκθετικό συμβολισμό), ο τρόπος που χρησιμοποιεί την άλγεβρα για την επίλυση προβλημάτων μεγάλη καινοτομία στο έργο του Διόφαντου, συνέπεια αυτού είναι η ρήξη με την παλαιά λογιστική παράδοση⁴¹.
- *Al – Kḥwārizmī* → αμιγώς ρητορική διατύπωση και επίλυση
- Nemore→ γενική διατύπωση αλλά γενική και ρητορική η λύση
- Viète→ εγγράμματος συμβολισμός, διάκριση ζητούμενων και δεδομένων, το έργο του τοποθετείται κοντά στη σύγχρονη άλγεβρα.
- Euler→ συμβολική άλγεβρα ποσοτήτων, χρήση σημερινής γλώσσας και σημερινών συμβόλων.

Είναι φανερό η διάκριση των τριών σταδίων της άλγεβρας που προαναφέραμε αν εξαιρέσουμε το πισωγύρισμα του *Al – Kḥwārizmī* και του Nemore στο ρητορικό στάδιο, πράγμα που δεν εμποδίζει την τελική διαμόρφωση των σταδίων. Επίσης είναι φανερό και αδιαμφισβήτητη η μεγάλη συμβολή του Διόφαντου στην μετάβαση από το ενδιάμεσο στάδιο στο τελικό στάδιο της άλγεβρας.

Β' μέρος: Η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα στα Προγράμματα Σπουδών

2.5. Η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα-ένα πρόβλημα της διδακτικής

Με αφετηρία το έργο του Viète στα τέλη του 16^{ου} αιώνα, η **συμβολική άλγεβρα** καθιερώθηκε ως **κυρίαρχο εργαλείο** έρευνας και αναπαραστάσης στα μαθηματικά κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα, με τη βοήθεια του οποίου **αναπτύχθηκαν** νέοι κλάδοι όπως η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός. Στη συνέχεια ο Euler **αξιοποιεί** αριστοτεχνικά όλη αυτή την παράδοση, επιβάλλει την **οριστική μορφή** των **συμβόλων** και για αυτό το λόγο το έργο του Euler είναι ιδιαίτερα προσιτό στο σημερινό αναγνώστη. Πίσω από

τα σύμβολα βρίσκονται οι μαθηματικές έννοιες, οι οποίες οικοδομούν τη σημερινή μαθηματική σκέψη. Τα ερευνητικά ερωτήματα βέβαια παραμένουν τόσο στο χώρο της Ψυχολογίας όσο και στο χώρο της διδακτικής. Με ποιο τρόπο ο μαθητής θα κάνει σωστή αναγνώριση των συμβόλων; Με ποιο τρόπο κατανοεί τις μαθηματικές έννοιες; Με ποιο τρόπο διαπραγματεύεται σωστά την **προηγούμενη γνώση** του και πως κατασκευάζει και δομεί σωστά τη **νέα μαθηματική γνώση**; Με ποια βήματα και με ποια μαθηματικά αντικείμενα θα οδηγηθεί σωστά ο μαθητής από το **εμπειρικό** και **συγκεκριμένο** προς το **αφηρημένο** και **γενικό**; Με ποιο τρόπο και με ποια διδακτέα ύλη ο μαθητής του δημοτικού θα προετοιμαστεί για την άλγεβρα του γυμνασίου, πως θα οδηγηθεί στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης και στη μαθηματική επικοινωνία; **Όλες οι εργασίες** σχετικά με τα παραπάνω ερωτήματα, μοιράζονται τον ίδιο **προβληματισμό**, δηλαδή εξετάζουν τον πιο κατάλληλο τρόπο, ώστε να εισέλθει κάποιος στον κόσμο της άλγεβρας προερχόμενος από τον κόσμο της αριθμητικής. Η έρευνα προσανατολίστηκε σε τρεις κατευθύνσεις σχετικά με τον παραπάνω προβληματισμό:

- Ιστορική ανάλυση της άλγεβρας, όπου δεν υπήρχε κατάλληλος και αποδοτικός συμβολισμός
- Ανάλυση εκείνων των καταστάσεων όπου η άλγεβρα εμφανίζεται ως αποτελεσματικό εργαλείο επίλυσης προβλημάτων
- Ανάλυση μιας ισχυρής συνεισφοράς της άλγεβρας, βασισμένης στην μοντέρνα τεχνολογία των υπολογιστών

Η πολυμορφία των διαδρομών, που ακολούθησε η ερευνητική κοινότητα αποδεικνύει πόσο **παλιό, δύσκολο** και **σύνθετο** είναι το πρόβλημα της μετάβασης από την αριθμητική (αριθμοί, υπολογισμοί, μετρήσεις, στοιχειώδεις έννοιες από τη θεωρία αριθμών) στην άλγεβρα καθώς επίσης και το πρόβλημα της διδασκαλίας της άλγεβρας. Σήμερα αναγνωρίζεται ότι η άλγεβρα δεν είναι μόνο μια συμβολική γλώσσα για την καταγραφή και τη γενίκευση των ιδιοτήτων της αριθμητικής, αλλά είναι μια μέθοδος ανακάλυψης και έκφρασης σχέσεων η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών μας ⁴². Είναι κοινά αποδεκτό ότι η άλγεβρα χαρακτηρίζεται «από την αναγνώριση και την περιγραφή γενικών κανόνων οι οποίοι περιγράφουν μοτίβα» ⁴³, «η άλγεβρα συνίσταται από τη μελέτη δομών και σχέσεων» ⁴⁴ και τέλος υπάρχει ακόμα μια πλατιά παραδοχή ότι «η άλγεβρα χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες και τις λειτουργίες των αριθμών, είναι κατά μια έννοια γενικευμένη αριθμητική». Αν βέβαια αυτό που έχει σημασία είναι το θεωρητικό σχήμα επίλυσης προβλημάτων της άλγεβρας, τότε δεν μπορούμε να αποφύγουμε την εξήγηση ότι η άλγεβρα είναι ένα δυναμικό εργαλείο επίλυσης προβλημάτων. Εδώ εγείρεται ένα θεμελιώδες και καθαρό πρόβλημα διδασκαλίας μεταξύ δομικών

προσεγγίσεων και αναφορικών προσεγγίσεων. Οι μεν δομικές προσεγγίσεις βασίζονται σε εσωτερικές έννοιες που δημιουργούνται από τις εσωτερικές συνδέσεις μέσα σε ένα συντακτικά δομημένο σύστημα, ενώ οι αναφορικές προσεγγίσεις εισαγωγικών εννοιών δημιουργούνται μέσα σε ένα σύστημα συμβόλων από εξωτερικούς τομείς αναφοράς⁴⁵. Πέρα από τη κλασσική διάσταση μεταξύ μορφής και περιεχομένου, ή μεταξύ συντακτικού και σημασιολογικού, τα οποία δυσκολεύουν την κατανόηση και την μάθηση, η **μεγαλύτερη αντίσταση και δυσκολία** περιγράφεται σαν **εμπόδιο της ίδιας της αριθμητικής** στη μάθηση της άλγεβρας. Είναι επίσης κοινά αποδεκτό το πρόβλημα της διδασκαλίας της άλγεβρας, το οποίο αρχίζει όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν γράμματα για να αναπαραστήσουν διάφορες εκφράσεις και πρέπει να εξηγούν και να μετασχηματίζουν αυτές τις εκφράσεις. Η εισαγωγή και η χρήση των συμβόλων δεν σχετίζονται μόνο με το συντακτικό σχήμα της άλγεβρας (δηλαδή τη χρήση κανόνων για τη συναρμολόγηση λέξεων, φράσεων, προτάσεων) αλλά και με το σημασιολογικό (δηλαδή ένα σύστημα κανόνων για την εξήγηση και τη συναρμολόγηση των εννοιών). Η προηγούμενη γνώση και εμπειρία των μαθητών (αριθμοί, επίλυση λεκτικών ή αριθμητικών προβλημάτων) δεν οδηγεί τόσο απλά στην μάθηση της άλγεβρας, είναι απαραίτητο να μπορούν να αναγνωρίζουν διαδικασίες, σχέσεις μεταξύ των αριθμών και να διατυπώνουν μεθόδους της αριθμητικής. Ένας τρόπος για να **κατανοήσει** κανείς τη σύνδεση μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας είναι να **εξετάσει** την ιστορική γένεση της άλγεβρας, έτσι ώστε να **ανακαλύψει** τις καλύτερες συνθήκες **μάθησης** και **διδασκαλίας** της άλγεβρας. Ο αριθμητικός τρόπος σκέψης **των Βαβυλωνίων και των Μεσοποτάμιων**, η μέθοδος δοκιμής και λάθους (μέθοδος χρησιμοποιούμενη σε όχι τόσο παλιά βιβλία του 19^{ου} αιώνα), η εισαγωγή του αγνώστου «**ς**» από το **Διόφαντο**, υπήρξε **αποβλεπτικό ορόσημο**^{46α} για την εξέλιξη της άλγεβρας. Ένα ταξίδι στο αρχαίο παρελθόν για την ανακάλυψη της πρώτης αλγεβρικής σκέψης μπορεί να είναι μάλλον ένα κλασσικό ταξίδι, όμως λιγότερο κλασσικό θα ήταν να ερευνήσει κανείς **την αντίσταση της αριθμητικής στην εξέλιξη της άλγεβρας**.

Από την άλλη μεριά η άποψη ότι η άλγεβρα είναι ένα εργαλείο μοντελοποίησης δημιουργεί ένα σοβαρό ζήτημα. Σε μια διαδικασία μοντελοποίησης, η επικύρωση της αιτιολογίας καθώς επίσης και το αποτέλεσμα δεν είναι εσωτερικό θέμα των μαθηματικών, εν προκειμένω της άλγεβρας αλλά πρέπει να λάβουμε υπόψη εξωτερικούς περιορισμούς. Για παράδειγμα, αν λάβουμε έναν αρνητικό αριθμό ως λύση μιας εξίσωσης αυτό ίσως αποσταθεροποιήσει το λύτη του προβλήματος. Ας μην ξεχνάμε ότι οι αρνητικές λύσεις ήταν η κύρια δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί του Μεσαίωνα. Στην περίπτωση της μοντελοποίησης, ο λύτης του προβλήματος πρέπει να λαμβάνει υπόψη:

- τα συναφή νοήματα μιας έκφρασης
- τα ιδεογραφικά χαρακτηριστικά της αλγεβρικής γλώσσας (δηλαδή εκείνα τα γραφικά σημεία, τα οποία αντιστοιχούν σε έννοιες ή εικόνες αντικειμένων)
- τις συμβολικές αλγεβρικές αναπαραστάσεις και τα μέσα για να τις χειριστεί

Παρόλα αυτά στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος δεν πρέπει να παραβλέπουμε τους εξωτερικούς παράγοντες οι οποίοι επισυνάπτονται στην κατάσταση του προβλήματος. Η διαδικασία της μοντελοποίησης δεν είναι άλγεβρα ή αυτό που ίσως θα μπορούσαμε να πούμε αριθμητική με σύμβολα, η οποία έχει τους δικούς της κανόνες και εγκυρότητα στον τομέα της. Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να διδάξουμε το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου και επιθυμούμε ο μαθητής της Β΄ τάξης του γυμνασίου να ανακαλύψει τον τύπο που θα μας δώσει το εμβαδόν οποιουδήποτε ορθογωνίου. Θα χρησιμοποιήσουμε κάποιο λογισμικό το οποίο θα δίνει: 1)το μήκος και πλάτος διαφορετικών ορθογωνίων, 2)το γινόμενο μήκος επί πλάτος σε κάθε ορθογώνιο 3)το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου και περιμένουμε οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι πάντα: μήκος . πλάτος = εμβαδόν. Αυτή η διαδικασία σίγουρα δεν είναι διαδικασία άλγεβρας, λείπει η διαδικασία της απόδειξης, με ότι αυτό συνεπάγεται για την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η αριθμητική είναι για την άλγεβρα ότι είναι οι ποσότητες για τους αριθμούς. Αριθμητική και άλγεβρα χρησιμοποιούν το ίδιο σύστημα αναπαραστάσεων και ακόμα κοινά εργαλεία, αλλά το σύστημα ελέγχου είναι διαφορετικό. Χωρίς αυτό το ρητό διαχωρισμό η διδασκαλία στρέφεται μόνο στη συμβολική άλγεβρα σαν μια τετελεσμένη και δεδομένη κατάσταση και αυτή είναι μια επιλογή των παιδαγωγών των ρεαλιστικών μαθηματικών. **Μια διέξοδος στο ζήτημα από την αριθμητική στην άλγεβρα και πως θα πραγματοποιηθεί η διδασκαλία είναι να αναζητήσει κανείς την άλγεβρα στις αρχαίες μαθηματικές πρακτικές, για παράδειγμα ο Διόφαντος μεταχειρίζεται γνήσια (αφηρημένα) αλγεβρικά προβλήματα, χωρίς να έχει διαθέσιμο μοντέρνο αλγεβρικό συμβολισμό^{46β}.**

Οι ερευνητές της διδακτικής επιβεβαιώνουν την σύνδεση ανάμεσα στην αριθμητική και στην άλγεβρα, αλλά παράλληλα αναγνωρίζουν και ένα χάσμα κατά την μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο και προβάλλουν ένα νέο στάδιο, το οποίο το ονομάζουν στάδιο προ-άλγεβρας. Εστιάζουν επίσης τις έρευνες τους στις δυσκολίες της ανάπτυξης των εννοιών της άλγεβρας. Αυτές οι δυσκολίες προκαλούνται είτε από το γνωστικό χάσμα ανάμεσα σε δυο έννοιες, είτε από το διδακτικό άλμα ανάμεσα σε δυο έννοιες. Για παράδειγμα:

Οι μαθητές του δημοτικού αντιλαμβάνονται το **σύμβολο της ισότητας** (κοινό σύμβολο αριθμητικής και άλγεβρας) ως **αποτέλεσμα** και στη συνέχεια δεν αντιλαμβάνονται τη σημασία της ισότητας ως **ισοδυναμία** ή **ταυτότητα** ή **προσδιορισμό**. Ανάλογα στο δημοτικό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του αγνώστου και στη συνέχεια αδυνατούν να κατανοήσουν την έννοια της παραμέτρου ή την έννοια του δείκτη, οι συμβολισμοί με γράμματα παίζουν το ρόλο του αγνώστου για το μαθητή όχι μόνο των τάξεων του γυμνασίου αλλά και των τάξεων του λυκείου.

Οι μαθητές στην Α τάξη γυμνασίου εισάγονται στις πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών (μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου σελίδες 122- 133) με παραδείγματα και στη συνέχεια μετά από τα παραδείγματα δίνονται οι κανόνες των πράξεων.
Ακολουθείται η πορεία:

λυμένο παράδειγμα της πράξης

παραδείγματα πράξης όπου ο μαθητής βρίσκει το αποτέλεσμα

διατύπωση κανόνα για την πράξη (γνωστικό χάσμα και διδακτικό άλμα).

Το γνωστικό χάσμα και το διδακτικό άλμα κατά την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα εντοπίζεται επίσης και μεταξύ των γνώσεων που απαιτούνται για να υπολογιστεί μια αριθμητική παράσταση καθώς επίσης και μεταξύ των γνώσεων που απαιτούνται για να λυθεί μια εξίσωση. Στα Μαθηματικά της Στ΄ τάξης του δημοτικού υπάρχει η τάση να λύνονται με εξίσωση τετριμμένα αριθμητικά προβλήματα, στα μαθηματικά της Α΄ τάξης γυμνασίου προβλήματα δύσκολα των 4 πράξεων λύνονται επίσης με εξίσωση (Μαθηματικά Α΄ γυμνασίου, σελίδες 76-78) και τέλος στα Μαθηματικά της Β΄ τάξης του γυμνασίου πολύπλοκα προβλήματα των 4 πράξεων λύνονται με εξίσωση και πρακτική αριθμητική (Μαθηματικά Β΄ γυμνασίου, σελίδα 27). Η επίλυση ενός προβλήματος των 4 πράξεων της πρακτικής αριθμητικής δεν είναι απλή υπόθεση, ακόμα και αν πρόκειται για εύκολο πρόβλημα. Αυτού του είδους τα προβλήματα απαιτούν όλο και πιο εξεζητημένους λογικούς συνδυασμούς, δυσχεραίνουν τους τρόπους σκέψης και αναπαράστασης, άρα δημιουργείται η ανάγκη νέων εννοιολογικών εργαλείων για να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες. Αρχίζει δηλαδή το πέρασμα στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης και στον αλγεβρικό τρόπο αναπαράστασης.

Οι ερευνητές της διδακτικής, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ομιλούν για ένα νέο στάδιο και το ονομάζουν προ- αλγεβρικό στάδιο, θεωρείται δε ως εκείνο το στάδιο της μαθηματικής γνώσης όπου οι μαθητές οικοδομούν την άλγεβρα από την αριθμητική, δηλαδή κατασκευάζουν έννοιες για τα σύμβολα και τις πράξεις στην άλγεβρα μέσα από τις αριθμητικές γνώσεις τις οποίες κατέχουν. Η προ-

άλγεβρα δεν θεωρείται ένα ξεχωριστό στάδιο αλλά εκλαμβάνεται ως μεταβατικό στάδιο όπου **αναπτύσσονται** ικανότητες και **οικοδομούνται** οι γνώσεις για την κατανόηση των εννοιών της άλγεβρας. Πριν την συστηματική μελέτη της άλγεβρας είναι σημαντικό να ενισχυθούν οι προ- αλγεβρικές έννοιες στους μαθητές και να αναπτυχθούν κατάλληλοι μέθοδοι ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν στην άλγεβρα χωρίς γνωστικά χάσματα και διδακτικά άλματα. Είναι απαραίτητο, ένα σύγχρονο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών να περιλαμβάνει προβλήματα με τα οποία οι μαθητές θα εμπλακούν, θα εκφραστούν, θα επικοινωνήσουν μαθηματικά με το δάσκαλο ή τον καθηγητή και τους συμμαθητές τους, θα κάνουν αριθμητικούς ή αλγεβρικούς συλλογισμούς, θα οδηγηθούν σε μοντέλα διαφορετικών προβληματικών καταστάσεων και τέλος θα προετοιμαστούν για την τυπική χρήση των συμβόλων και τη συστηματική μάθηση της άλγεβρας.

Η σύγχρονη έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών υποστηρίζει ότι η μάθηση της άλγεβρας έχει τις ρίζες της στις πρώτες τάξεις της εκπαίδευσης όπου οι μαθητές εργάζονται με τους αριθμούς και είτε τους χρησιμοποιούν για να δηλώσουν ποσότητα, χρόνο, μέγεθος, είτε τους χρησιμοποιούν για να δηλώσουν σειρά, θέση, το μεγαλύτερο και το μικρότερο. Επίσης προτείνει **πέντε τομείς της γνώσης** των αριθμών που είναι απαραίτητοι για τη μάθηση της άλγεβρας και αυτοί είναι:

- Κατανόηση της ισότητας
- Αισθητοποίηση των πράξεων (πολλαπλασιασμός επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, αντίθετη σχέση ανάμεσα στην πρόσθεση και αφαίρεση, αντίστροφη σχέση ανάμεσα στον πολλαπλασιασμό και διαίρεση, ο πολλαπλασιασμός ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και η διαίρεση ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση βασικές προ-αλγεβρικές ιδέες για την επιτυχημένη επίλυση εξισώσεων)
- Χρήση ποικιλίας αριθμών (ακέραιοι, κλασματικοί, δεκαδικοί, πράξεις με αρνητικούς αριθμούς)
- Κατανόηση των βασικών ιδιοτήτων των αριθμών, για παράδειγμα γιατί $1 \cdot \alpha = \alpha, 0 + \alpha = \alpha$, κατανόηση του αντίθετου και του αντίστροφου, γιατί $\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma$
- Χρήση μεταβλητών, περιγραφή μοντέλων και συναρτήσεων⁴⁷.

Το γεγονός ότι η άλγεβρα ιστορικά προέκυψε ως συνέχεια της αριθμητικής και συνιστά γενίκευση της αριθμητικής, είχε ως συνέπεια την πρόταση αρκετών ερευνητών οι οποίοι ήθελαν την άλγεβρα **να ακολουθεί** την αριθμητική στα σχολικά προγράμματα. Προφανώς μπορεί κάποιος να ισχυριστεί το παραπάνω, αλλά μπορεί και να δει **διαφορετικά** το ζήτημα, για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι η αριθμητική ασχολείται με συγκεκριμένους

αριθμούς και διαπραγματεύεται ιδιότητες και λειτουργίες συγκεκριμένων αριθμών, ενώ η άλγεβρα χρησιμοποιεί γενικευμένους αριθμούς, γράμματα, μεταβλητές και συναρτήσεις τότε **αυτός ο διαχωρισμός** επιτρέπει τη δημιουργία ενός προγράμματος σπουδών στο οποίο τα εξεταζόμενα αντικείμενα της αριθμητικής και της άλγεβρας θα ακολουθούν μια **τακτοποιημένη** σειρά. Στο δημοτικό οι μαθητές θα πρέπει να διδάσκονται τους αριθμούς μέσα από πραγματικές καταστάσεις, θα πρέπει να εξασκούνται στην υπολογιστική ευχέρεια και σε λεκτικά προβλήματα με συγκεκριμένους αριθμούς, ενώ τα γράμματα θα χρησιμοποιηθούν αργότερα για την αναπαράσταση αριθμών ή για την αναπαράσταση των συνόλων. Αυτός ο διαχωρισμός είναι φανερό ότι οδηγεί σε **μεγάλη απόσταση** τα όρια μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας. Για αυτό το λόγο πολλοί παιδαγωγοί των μαθηματικών (Fillooy & Rojano 1989, Herscovics & Kieran 1980, Kieran 1985, Rojano 1996, Sutherland & Rojano 1993) έχουν **εστιάσει** την προσοχή τους στην μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, δηλαδή στη μετάβαση **της σκέψης** από την αριθμητική στην άλγεβρα, η οποία εμφανίζεται κατά την χρονική περίοδο όπου η αριθμητική «τελειώνει» και «αρχίζει» η άλγεβρα. Είναι το μεταβατικό στάδιο που προαναφέραμε και ονομάζεται στάδιο προ-άλγεβρας. Σε αυτό το στάδιο γίνεται μια προσπάθεια βελτίωσης και προσέγγισης της ποικιλίας των προβλημάτων που προκύπτουν από τον άκαμπτο και απότομο διαχωρισμό μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας. Όπως υποστηρίζεται αυτές οι προσπάθειες είναι πολύ φτωχές και ουσιαστικά η γενίκευση της αριθμητικής μετατίθεται ακριβώς εκεί που αρχίζει η άλγεβρα. Οι ίδιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι η **αριθμητική** έχει εκ φύσεως **αλγεβρικό χαρακτήρα**, υπό την έννοια ότι περιλαμβάνει γενικές περιπτώσεις και στρατηγικές οι οποίες μπορούν να **αναπαρασταθούν** συνοπτικά με αλγεβρικό συμβολισμό. Τα **αλγεβρικά νοήματα** των ιδιοτήτων της αριθμητικής δεν είναι «το κερασάκι στην τούρτα» αλλά **ουσιώδεις συστατικό** για την μετάβαση στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Υπό αυτή την έννοια πιστεύουν ότι οι αλγεβρικές έννοιες και οι αλγεβρικοί συλλογισμοί δεν πρέπει να θεωρούνται ως ξεχωριστά ζητήματα σχετικά με τα μαθηματικά του δημοτικού. Η άλγεβρα θα μπορούσε να αρχίζει στην 2^η ή στην 3^η τάξη του δημοτικού. Ο Vergnaud (1988) εισηγήθηκε ότι η διδασκαλία της άλγεβρας ή της προ-άλγεβρας στο δημοτικό σχολείο **προετοιμάζει καλύτερα** τους μαθητές σε επιστημολογικά ζητήματα τα οποία αφορούν την εν λόγω μετάβαση και ακόμα ότι οι έννοιες είναι **άρρηκτα** συνδεδεμένες και όχι ξεχωριστές. **Τίθεται το ερώτημα αν οι νεαροί μαθητές έχουν την ικανότητα να μαθαίνουν τις αλγεβρικές έννοιες.** Όταν οι μαθητές παρουσιάζουν έντονες δυσκολίες στην μάθηση της άλγεβρας γεννιέται το ερώτημα αν αυτές οι δυσκολίες **οφείλονται** στους εξελικτικούς περιορισμούς ή στο γεγονός ότι

οι μαθητές δεν είχαν την κατάλληλη προετοιμασία. Οι εξελικτικοί περιορισμοί συνδέονται με την πορεία της γνωστικής ικανότητας των μαθητών, οι οποίοι μέχρι να κατορθώσουν να φτάσουν σε ένα ορισμένο αναπτυξιακό επίπεδο δεν είναι σε θέση να καταλάβουν ορισμένα πράγματα αλλά ούτε και να τα χρησιμοποιήσουν στο άμεσο μέλλον. Πρέπει δηλαδή να υπάρχει **εξελικτική ετοιμότητα και σκοπιμότητα**. Η άλγεβρα μερικές φορές θεωρείται εξελικτικά ακατάλληλη για τους νέους μαθητές διότι βρίσκεται μπροστά από τις τρέχουσες δυνατότητές τους. **Από την άλλη μεριά ο παραλληλισμός μεταξύ ιστορικής εξέλιξης της άλγεβρας και της πορείας της μάθησης των μαθητών μας παρέχει μια στήριξη και ένα πλαίσιο για τις δυσκολίες των μαθητών με την άλγεβρα. Οι δυσκολίες αυτές είναι δυνατόν να ξεπεραστούν με κατάλληλη οργάνωση της διδασκαλίας στο βαθμό που ο διδάσκων είναι γνώστης των εμποδίων που αναδύθηκαν ιστορικά, σε αυτή τη βάση η ιστορική εξέλιξη προσφέρει τη δυνατότητα κατανόησης των εν λόγω εμποδίων και επομένως είναι δυνατόν να κατασκευάσει κανείς δραστηριότητες ανάλογες με την δυσκολία της έννοιας**⁴⁸.

2.6. Ο ρόλος της ιστορίας της Άλγεβρας στην αντιμετώπιση του προβλήματος

Οι μεταρρυθμίσεις που πραγματοποιούνται τα τελευταία χρόνια στη μαθηματική εκπαίδευση στη χώρα μας αλλά και σε παγκόσμιο επίπεδο, έχουν ως στόχο την αλλαγή του τρόπου διδασκαλίας των μαθηματικών.

Μια πρώτη μεγάλη μεταρρύθμιση έγινε στην Ευρώπη και στις ΗΠΑ στις δεκαετίες 1960 και 1970 όπου επικράτησε ο όρος **«Νέα ή Μοντέρνα Μαθηματικά»**

Η διδασκαλία των Μαθηματικών **πριν** από την παραπάνω μεταρρύθμιση χαρακτηρίζεται με τον όρο **«παραδοσιακά μαθηματικά»**, όπου η ύλη των μαθηματικών παραμένει σταθερή, ο διδάσκων είναι κυρίαρχος και παραδίδει τη νέα γνώση στους μαθητές οι οποίοι είναι παθητικοί δέκτες, ενώ η μάθηση πραγματοποιείται με επανάληψη και αποστήθιση. Οι αλλαγές που έφερε η μεταρρύθμιση των νέων μαθηματικών ήταν σημαντική όχι μόνο ως προς το περιεχόμενο της ύλης αλλά και ως προς τον τρόπο διδασκαλίας. Έγινε προσπάθεια να μειωθεί η απόσταση μεταξύ της επιστήμης των μαθηματικών και της διδασκομένης γνώσης και δόθηκε έμφαση στους ακριβείς ορισμούς, στην έκφραση των μαθηματικών ιδεών, στις μαθηματικές δομές μέσω αφηρημένων εννοιών, όπως για παράδειγμα η θεωρία συνόλων, η αλγεβροποίηση της γεωμετρίας στην οποία απαλείφθηκαν τα σχήματα και η θεώρηση του Ευκλείδη.

Από τα μέσα της δεκαετίας του 1970 τα νέα ή μοντέρνα μαθηματικά θεωρήθηκαν υπεύθυνα για τις αποτυχίες και την πτώση των επιδόσεων των

μαθητών σε διεθνείς και εθνικούς διαγωνισμούς, έτσι εκδηλώθηκε έντονη δυσφορία για τα νέα μαθηματικά. Προς το τέλος του 20^{ου} αιώνα εμφανίζονται μεταρρυθμίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών, οι οποίες φέρνουν στο κέντρο της μάθησης το μαθητή (μαθητοκεντρική λογική), όπως για παράδειγμα στην Ολλανδία με τα Ρεαλιστικά μαθηματικά, στην Αμερική (Standards 2000), Αγγλία (Αριθμητισμός) κλπ. Επικρατεί η άποψη ότι ο μαθητής **κατασκευάζει τη γνώση** με βάση το προϋπάρχον γνωστικό του επίπεδο και κατά τη διαδικασία της μάθησης των μαθηματικών θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη το κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον.

Στη χώρα μας διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις περιόδους σχετικές με τη διδασκαλία των μαθηματικών:

1900-1960: παραδοσιακό μοντέλο (πρώτη περίοδος)

1960-1975: νέα ή μοντέρνα μαθηματικά (δεύτερη περίοδος)

1975 έως σήμερα (τρίτη περίοδος)

Η τρίτη περίοδος^{49α} διακρίνεται σε δυο φάσεις. Η πρώτη φάση έχει ως κύριο χαρακτηριστικό την απαλλαγή των σχολικών μαθηματικών από τις προηγούμενες αντιλήψεις και την προσπάθεια για βελτίωση των διδακτικών μεθόδων και στροφή περισσότερο προς τις μαθητοκεντρικές διαδικασίες. Η δεύτερη φάση **σηματοδοτείται** με τη **σύνταξη**, στις αρχές του 1996, από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο του Ενιαίου Πλαισίου Προγράμματος Σπουδών (Ε. Π. Π. Σ.), το οποίο αντιμετωπίζει ενιαία τα μαθηματικά από την προσχολική ηλικία έως και τη Γ' τάξη του Λυκείου. **Κύριες θέσεις** του Ε. Π. Π. Σ. είναι:

- η διαδικασία της μάθησης των μαθηματικών είναι μια δραστηριότητα κατασκευαστική
- οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης εκφράζονται πληρέστερα με όρους δραστηριοτήτων παρά με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών
- ο μαθητής πρέπει να αναπτύξει την ικανότητα χρήσης της μαθηματικής συμβολικής γλώσσας και να κατανοήσει τις σημασίες που περικλείει ένα σύμβολο ή μια έννοια.

Μετά το 2000 δίνεται βάρος **στη διαθεματικότητα**, έτσι θεωρήθηκε ότι τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών πρέπει να λειτουργήσουν σε δυο άξονες, στον άξονα της διαθεματικότητας (η γνώση αντιμετωπίζεται ενιαία) και στον άξονα των διακριτών μαθηματικών. Έτσι από το Ε. Π. Π. Σ οδηγούμαστε στο Δ. Ε. Π. Π. Σ. η στροφή προς τη διαθεματικότητα κατοχυρώθηκε από τη συγγραφή των νέων βιβλίων μαθηματικών στο δημοτικό και στο γυμνάσιο. Οι καινοτομίες που εισάγουν τα νέα αναλυτικά προγράμματα σπουδών στηρίζονται σε σύγχρονες

απόψεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση και τα βιβλία των μαθηματικών του γυμνασίου συνοδεύονται από τα αντίστοιχα βιβλία του εκπαιδευτικού και έχουν σκοπό την ενεργητική προσέγγιση της γνώσης με δραστηριότητες και με την διαθεματικότητα. Όμως τίθεται ένα σημαντικό ερώτημα: **κατά πόσον ο παραπάνω σκοπός πραγματοποιείται και με ποιά εφόδια οι εκπαιδευτικοί θα το πετύχουν;** Είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι; Από σχετική έρευνα που αφορούσε τη σχολική χρονιά 2007-2008 με θέμα «Οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τα νέα βιβλία μαθηματικών στο γυμνάσιο» τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η θετική στάση υπέρ των καινοτομιών στο χώρο της διδακτικής πράξης παραμένει σε θεωρητικό επίπεδο καθώς δεν εκδηλώνεται αλλαγή συμπεριφοράς από τη μεγάλη πλειοψηφία των εκπαιδευτικών. Οι δραστηριότητες και η διαθεματικότητα δεν έγιναν τόσο εύκολα αποδεκτές από τους εκπαιδευτικούς όπως θα περίμεναν ίσως οι σχεδιαστές των Α. Π. Σ. ^{49β}. Αλλά ας δούμε **τα βασικά σημεία** των προτάσεων που προτείνονται από τους σχεδιαστές των Α. Π. Σ, σχετικά με τη διδακτική μεθοδολογία. (ΦΕΚ Β' 303, 13/3^{ου}/2003, σελίδες 4036-4037):

- ✚ Οι σύγχρονες αντιλήψεις σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών **θεωρούν** τα μαθηματικά όχι μόνο **ως το αποτέλεσμα**, αλλά και τη δραστηριότητα μέσω της οποίας **παράγεται** αυτό το αποτέλεσμα. (Το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας αμφισβητείται)
- ✚ Οι **στόχοι** της μαθηματικής εκπαίδευσης **εκφράζονται** πληρέστερα με όρους δραστηριοτήτων παρά με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών
- ✚ Η **επιλογή** των δραστηριοτήτων γίνεται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια που αναφέρονται στους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και η διατύπωση τους επιτρέπει την εμπλοκή του συνόλου των μαθητών. Για τους **μαθητές** αυτό σημαίνει ότι έχουν την ευκαιρία να σκεφτούν και να ενεργήσουν στο δικό τους προσωπικό επίπεδο και να διατυπώσουν τους δικούς τους επιμέρους στόχους. Για τον **δάσκαλο** σημαίνει υψηλό βαθμό αυτενέργειας και πρωτοβουλίας, πρέπει να είναι ικανός να διακρίνει πίσω από τη διατύπωση μιας δραστηριότητας τους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και να τους προσαρμόσει στο επίπεδο της τάξης του.

Για τη σωστή επιλογή μιας δραστηριότητας πρέπει η δραστηριότητα:

1. Να είναι **κατανοητή** στους μαθητές και να μην αφήνει παρανοήσεις και υπονοούμενα
2. Να **αφήνει** περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια
3. Να **ενθαρρύνει** τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία **προτρέποντας** τους μαθητές και τις ομάδες σε νοητικό ανταγωνισμό
4. Να **μην επιτρέπει** άμεση προσέγγιση σε μια μοναδική λύση

5. Το **πρόβλημα** από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα πρέπει να είναι **πλούσιο** σε εμπλεκόμενες έννοιες, αρκετά **σημαντικό** αλλά **όχι δύσκολο** για τους μαθητές

Είναι σημαντικό να παρέχονται στους μαθητές δικλίδες ασφαλείας στην αναζήτηση της γνώσης. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν τη δυνατότητα πολλαπλής προσέγγισης μιας έννοιας όπως:

- ✚ Μέσω διαφόρων τύπων αναπαραστάσεων της έννοιας (συμβολικά, γραφικές παραστάσεις, πίνακες, γεωμετρικά)
- ✚ Διαθεματικά
- ✚ Με αναφορά στην ιστορία των μαθηματικών. Η ιστορία των μαθηματικών είναι ένα πεδίο πλούσιο σε ιδέες για τη διδακτική προσέγγιση μιας έννοιας

Νέα βιβλία μαθηματικών γυμνασίου και η ενσωμάτωση ιστορικών σημειωμάτων: ας εξετάσουμε την εφαρμογή όλων των παραπάνω στα βιβλία των μαθηματικών του γυμνασίου, αλλά και στα βιβλία του καθηγητή και για το ζήτημα που μας απασχολεί, «από την αριθμητική του δημοτικού στην σχολική άλγεβρα»

Βιβλίο εκπαιδευτικού για την Α΄ τάξη Γυμνασίου (σελίδα :31)

Σε ορισμένες ενότητες υπάρχουν **ιστορικά σημειώματα** που έχουν σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον και την αγάπη των μαθητών για τα Μαθηματικά και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης. Η αξιοποίησή τους στη διδασκαλία εξαρτάται από τις πρωτοβουλίες και ιδέες που θα αναπτύξουν οι διδάσκοντες.

Σχολιασμός: Η προσέγγιση μιας δύσκολης μαθηματικής έννοιας, μέσω της ιστορικής της πορείας αφήνεται στη γνώση, στη φαντασία και στην διάθεση του διδάσκοντα ώστε να κατασκευάσει μια αντίστοιχη και χρήσιμη διδακτικά δραστηριότητα.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το πρώτο μέρος του βιβλίου περιλαμβάνει **7 κεφάλαια** Άλγεβρας και υπάρχουν **13 ιστορικά σημειώματα και αναδρομές**, το δεύτερο μέρος του βιβλίου περιλαμβάνει **3 κεφάλαια** Γεωμετρίας και υπάρχουν **5 ιστορικά σημειώματα και αναδρομές**

Ας εξετάσουμε κάποια από τα ιστορικά σημειώματα-αναδρομές και ας αναρωτηθούμε κατά πόσον πληρούν τον προαναφερθέντα στόχο των συγγραφέων:

Η πρώτη εμφάνιση των συμβόλων $+$ και $-$ χρονολογείται από τα τέλη του 15ου αιώνα, αλλά η γενικευμένη χρήση τους εμφανίζεται τον 19ο αιώνα. Αρχικά για την αφαίρεση χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο «:». Λέγεται ότι η καταγωγή των συμβόλων αυτών οφείλεται στους εμπόρους που τα χρησιμοποιούσαν για να δηλώσουν ότι ένα βάρος βρέθηκε πιο πολύ ή πιο λίγο, αντίστοιχα, από το κανονικό. Τα σύμβολα x και $=$ καθιερώθηκαν από Άγγλους μαθηματικούς το 1632 και το 1557 αντίστοιχα.

Στη σελίδα 16 και στο κεφάλαιο 1^ο οι φυσικοί αριθμοί διαβάζουμε:

Σχολιασμός: Η αναδρομή αναφέρεται στα σύμβολα + , − και = αλλά δεν διευκρινίζεται αν πρόκειται για σύμβολα πράξεων ή για πρόσημα αριθμών, το δε κεφάλαιο διαπραγματεύεται το σύνολο των φυσικών και πράξεις στους φυσικούς.

1. Ποια είναι η διδακτική αξία της παραπάνω αναδρομής;
2. Να κάνουμε την υπόθεση ότι ο εκπαιδευτικός με βάσει την παραπάνω αναδρομή θα πρέπει να κατασκευάσει μια δραστηριότητα από την οποία ο μαθητής θα είναι σε θέση να κατανοήσει τη διπλή σημασία των + και − και τις σημασίες του συμβόλου της ισότητας;

Στη σελίδα 17- Φυσικοί αριθμοί διαβάζουμε:



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



Μερικές φορές ένας απλός συλλογισμός κάποιου ανθρώπου αξίζει πιο πολύ απ' όλο το χρυσάφι του κόσμου. Με κάποιες έξυπνες ιδέες κερδίζονται μάχες, γίνονται μνημειώδη έργα και δοξάζονται άνθρωποι, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται η επιστήμη, εξελίσσεται η τεχνολογία, διαμορφώνεται η ιστορία και αλλάζει η ζωή.

Ένα μικρό παράδειγμα είναι η "έξυπνη πρόσθεση" που σκέφτηκε να κάνει ο Γκάους (Karl Friedrich Gauss, 1777 - 1855), όταν σε ένα χωριό της Γερμανίας γύρω στα 1784, στην πρώτη τάξη του σχολείου, άρχισε να μαθαίνει για τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις. Όταν ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το άθροισμα:

$$1+2+3+\dots+98+99+100,$$

πριν οι υπόλοιποι αρχίσουν τις πράξεις, ο μικρός Γκάους το είχε ήδη υπολογίσει. Ο δάσκαλος έκπληκτος τον ρώτησε πώς το βρήκε. Τότε εκείνος έγραψε στον πίνακα:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (48 + 53) + (49 + 52) + (50 + 51) =$$
$$= 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 = 101 \cdot 50 = 5.050$$

50 φορές

Προσπάθησε να υπολογίσεις με τον τρόπο του Γκάους το άθροισμα $1+2+3+\dots+998+999+1000$ και να μετρήσεις το χρόνο που χρειάστηκες. Πόσο χρόνο θα έκανες άραγε να το υπολογίσεις με κανονική πρόσθεση;

Σχολιασμός: Ο Gauss γεννήθηκε στο Braunschweig, το οποίο ανήκε στο δουκάτο Brunswick-Luneburg και σημερινό μέρος της κάτω Σαξονίας. Οι ιστορίες για την ιδιοφυΐα του Gauss είναι όλες αναπόδεικτες. Παιδί φτωχής οικογένειας, είχε μόνο την υποστήριξη της μητέρας του για να σπουδάσει, ενώ ο πατέρας του τον προόριζε να γίνει κατασκευαστής ξύλινων κατοικιών. Ο Δούκας του Braunschweig του χορηγεί υποτροφία και έτσι αρχικά θα σπουδάσει στο Πανεπιστήμιο από το 1792-1795, δηλαδή στο σημερινό Πολυτεχνείο του Braunschweig.

1. Πως θα αξιοποιήσουμε διδακτικά το παραπάνω ιστορικό σημείωμα αφού δίνεται έτοιμη η σκέψη του Gauss;
2. Θα τονίσουμε την ιδιοφυΐα του, ώστε να προκαλέσουμε το θαυμασμό των μαθητών μας από τη μια μεριά για το παιδί θαύμα και από την άλλη για την κορυφαία ιδιότητα των φυσικών, ή μήπως αντί για θαυμασμό εντείνουμε το φόβο των μαθητών μας για τα βάρβαρα μαθηματικά που είναι κρυμμένα καλά κάτω από το χαλί και μόνο μια ιδιοφυΐα των μαθηματικών μπορεί να τα παράγει;

3. Μήπως το εν λόγω ιστορικό σημείωμα θα αφορούσε την άλγεβρα της Α Λυκείου, στην οποία διδάσκεται η αριθμητική πρόοδος;
4. Θα μπορούσαμε ίσως να το αξιοποιήσουμε διδακτικά για να προετοιμάσουμε τους μαθητές για μια έννοια που θα έρθει μετά από 2 χρόνια διδακτικής εκπαίδευσης;

Στη σελίδα 115 και στο κεφάλαιο 7^ο – Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί διαβάζουμε:

Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται για πρώτη φορά σε ένα Κινέζικο μαθηματικό βιβλίο, με τίτλο "Μαθηματικά σε εννέα Βιβλία" ("Τσιου-τσανγκ-σουάν σου"), που τοποθετείται χρονικά στην περίοδο της δυναστείας των Χαν (206 π.Χ. - 220 μ.Χ.). Στην Ευρωπαϊκή παράδοση ο μεγάλος Έλληνας μαθηματικός Διόφαντος, που άκμασε στην Αλεξάνδρεια γύρω στα 250 μ.Χ. και έγραψε το ογκώδες έργο του (13 βιβλία) τα "Αριθμητικά", χρησιμοποιεί πρώτος τους αρνητικούς αριθμούς στους ενδιάμεσους υπολογισμούς του, ενώ ως λύση ενός προβλήματος αναζητεί πάντα θετικό ρητό αριθμό.

Σχολιασμός: Η αναδρομή αναφέρεται στους αρνητικούς αριθμούς, μια έννοια με ιστορία περίπου 1600 περίπου χρόνων έως την αποδοχή της και την μαθηματική θεμελίωση της. Πως και εδώ αξιοποιείται διδακτικά το εν λόγω ιστορικό σημείωμα; Τι ακριβώς θα πρέπει να κάνει ο εκπαιδευτικός; Να το διαβάσει απλώς στην τάξη ή να καταφύγει στην οργάνωση ενός πιο πληρέστερου υλικού μέσα από την ιστορία των αρνητικών αριθμών, το οποίο θα είναι αρχικά χρήσιμο στον ίδιο και στη συνέχεια θα μπορεί να διαχειριστεί το αιώνιο πρόβλημα της κατανόησης της έννοιας των αρνητικών αριθμών;

Το «ογκώδες» έργο του Διόφαντου: πρόκειται για 13 κεφάλαια. Πως γνώριζε ο Διόφαντος τους αρνητικούς αριθμούς και με ποιο τρόπο τους χρησιμοποίησε;

Στη σελίδα 47 και στο κεφάλαιο 2^ο – Κλάσματα διαβάζουμε:

Η συνάντησή της Μουσικής με τα Μαθηματικά πραγματοποιείται μέσα από την αίσθηση, που έχουμε για τον χρόνο και εντοπίζεται σε δύο βασικούς άξονες κάθε μουσικής έκφρασης, το Ρυθμό και την Αρμονία. Ο άνθρωπος έχει την ικανότητα να εντοπίζει και να απομονώνει τις χρονικές στιγμές. Το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο στιγμών, δημιουργεί την αίσθηση της διάρκειας. Ο χωρισμός του χρόνου από τα γεγονότα δημιουργεί ένα πυκνό σύνολο από στιγμές. Έτσι, ο ρυθμός και ο αριθμός έχουν κοινή καταγωγή, το χωρισμό του χρόνου σε στιγμές και την αντιστοίχιση των χρονικών στιγμών με γεγονότα. Ο ρυθμός είναι από τις πρώτες μουσικές ανθρώπινες κατακτήσεις, όπως ακριβώς ο αριθμός είναι από τις πρώτες θεμελιώδεις Μαθηματικές ανθρώπινες επινοήσεις. Ο ρυθμός, λοιπόν, είναι το πρώτο είδος μουσικής που δημιούργησε ο άνθρωπος. Το μουσικό μέτρο, το οποίο είναι απαραίτητο για την εκτέλεση ενός μουσικού θέματος, δηλώνεται με ένα κλάσμα που καθορίζει το ρυθμό. Σήμερα οι δύο αυτές έννοιες, του ρυθμού και του αριθμού - κλάσματος, συνυπάρχουν στον τρόπο με τον οποίο γράφεται η Δυτική Μουσική. Ας δούμε ένα παράδειγμα: Στο σχήμα φαίνεται ένα μέρος ενός μουσικού κομματιού. Η χρονική αξία του πρώτου και δεύτερου συμβόλου είναι $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα, ενώ κάθε ένα από τα σύμβολα (νότες), που είναι ενωμένα έχουν εξ ορισμού αξία $\frac{1}{8}$. Το κλάσμα $\frac{4}{4}$ στην αρχή καθορίζει πως κάθε μέτρο, κάθε διάστημα δηλαδή, το οποίο περιέχει μια μουσική φράση, πρέπει να περιέχει σύμβολα (νότες) συνολικής αξίας $\frac{4}{4}$. Πράγματι $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{4}$. Με αυτόν τον τρόπο ο αριθμός - κλάσμα καθορίζει το ρυθμό και επιτρέπει να εκτελείται ένα μουσικό κομμάτι συγχρονισμένα από τους μουσικούς.

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

- Βρες παρτιτούρες από τραγούδια με διαφορετικούς ρυθμούς και γράψε τα κλάσματα, που αντιστοιχούν στους ρυθμούς των τραγουδιών αυτών.
- Αναζήτησε και βρες ορισμένα χαρακτηριστικά τραγούδια με διαφορετικούς ρυθμούς και προσπάθησε να συσχετίσεις τα κλάσματα, που αντιστοιχούν στους ρυθμούς αυτούς, με την ονομασία του εκάστοτε συγκεκριμένου ρυθμού.



Σχολιασμός: Το κείμενο περιγράφει με απόλυτα δυσνόητο τρόπο τη σχέση μουσικής και κλασμάτων και δεν βοηθάει στην εκτέλεση της εργασίας που ακολουθεί, όχι μόνο τον εκπαιδευτικό αλλά σε καμιά περίπτωση τον μαθητή. Χρησιμοποιεί εκφράσεις και όρους όπως:

1. η αρίθμηση είναι μια πολιτιστική αναγκαιότητα
2. το μουσικό μέτρο δηλώνεται με ένα κλάσμα
3. πυκνό σύνολο
4. οι έννοιες του ρυθμού και του κλάσματος συνυπάρχουν

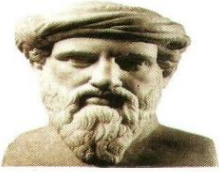
Το ερώτημα παραμένει. Ποιος είναι ο διδακτικός στόχος; Αποτελεί δραστηριότητα την οποία μπορούμε να αξιοποιήσουμε μέσα από την ιστορία των μαθηματικών; Με ποιο τρόπο;

Στη σελίδα 94 και στο κεφάλαιο 6^ο – ανάλογα ποσά διαβάζουμε:

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ



Οι μαθηματικές έννοιες διαμορφώθηκαν και εξελίχθηκαν παράλληλα με την ανθρώπινη σκέψη. Φυσικά μεγέθη, όπως το βάρος, το μήκος, η επιφάνεια και ο όγκος, έδιναν αφορμές για μέτρηση και για σύγκριση, δηλαδή για λόγους και αναλογίες. Η συστηματική, όμως, μελέτη των εννοιών αυτών άρχισε στην αρχαία Ελλάδα τον 6ο π.Χ. αιώνα.



Ο **Πυθαγόρας**, που έζησε από το 580 π.Χ. μέχρι πιθανόν το 490 π.Χ., ήταν από τους πρώτους Έλληνες που ασχολήθηκε με τους λόγους και τις αναλογίες των φυσικών αριθμών. Υπάρχει μια παράδοση που αναφέρει τον τρόπο με τον οποίο ο Πυθαγόρας οδηγήθηκε σε αυτήν την έρευνα. Στην Αλεξάνδρεια, όπου έζησε αρκετά χρόνια, βρέθηκε μια μέρα κοντά σε κάποιο σιδηρουργείο όπου τέσσερις τεχνίτες κτυπούσαν με τα σφυριά τους ένα πυρακτωμένο μέταλλο. Ο ήχος από τα κτυπήματα ήταν παράξενα μελωδικός. Αυτό κέντρισε την περιέργεια του Πυθαγόρα, που αναζήτησε το λόγο της απροσδόκητης μελωδίας αυτών των ήχων.

Ζήτησε από τους τεχνίτες να εξετάσει τα σφυριά τους. Παρατήρησε ότι το βάρος τους δεν ήταν το ίδιο. Συγκρίνοντας το πιο βαρύ με τα υπόλοιπα, βρήκε τους λόγους $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Σκέφτηκε ότι οι λόγοι αυτοί, πιθανόν, να είχαν κάποια σχέση με τους ήχους που άκουσε. Πήρε τότε τέσσερις μεταλλικές χορδές και τις τέντωσε έτσι, ώστε τα μήκη τους να έχουν αντίστοιχους λόγους. Δηλαδή, η δεύτερη είχε μήκος ίσο με τα $\frac{3}{4}$ του μήκους της πρώτης. Η τρίτη $\frac{2}{3}$ και η τέταρτη είχε μήκος ίσο με το $\frac{1}{2}$ της πρώτης.

Έκρουσε τις χορδές και διαπίστωσε ότι οι ήχοι είχαν την ίδια μελωδική σχέση με αυτήν που άκουσε στο σιδηρουργείο. Ήταν μια "αρμονία" ήχων (συγχορδία). Με τον τρόπο αυτό, ο Πυθαγόρας ανακάλυψε αρμονικούς τόνους της μουσικής κλίμακας.

Έτσι, οι λόγοι των φυσικών αριθμών ερμήνευαν φαινόμενα που κανείς μέχρι τότε δεν μπόρεσε να συσχετίσει και να εξηγήσει. Ο δρόμος για την αναζήτηση της γνώσης είχε ανοίξει. Η έρευνα και η ερμηνεία των φαινομένων της φύσης είχε ήδη διαμορφώσει στο νου των ανθρώπων ένα νέο κώδικα, μια νέα "παγκόσμια" γλώσσα: τα μαθηματικά.

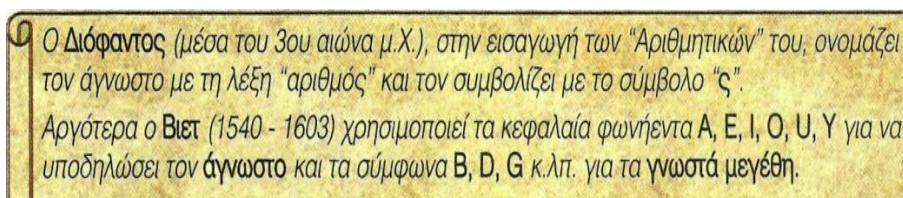
Σχολιασμός: Η Ιστορική αναδρομή της σελίδας 94 (αντίστοιχο κεφάλαιο ανάλογα ποσά) κάνει μια προσπάθεια να συνδέσει την έννοια της αναλογίας με τη μουσική των Πυθαγορείων. Σύμφωνα με τον Boyer (History of Mathematics, σ. 50) ο Πυθαγόρας έζησε από το 580πΧ-500πΧ, ενώ σημαντικός αριθμός ιστορικών ισχυρίζεται ως σίγουρη ημερομηνία γέννησης του το 585πΧ και πιθανή χρονολογία θανάτου το 510πΧ. Οι Πυθαγόρειοι με τα ακουστικά πειράματα δημιούργησαν έναν **εμπειρικό ορισμό** της αναλογίας σύμφωνα με

τον οποίο δυο ζεύγη χορδών είναι ισοδύναμα (ανάλογα) αν παράγουν το ίδιο μουσικό διάστημα. **Μεταβλητή** στις χορδές είναι το μήκος της χορδής (τάση), **το μουσικό διάστημα** (συστατικό μιας μελωδίας) **παράγεται** από τη σύγχρονη πλήξη δυο χορδών, ενώ τις χορδές τις **αντιστοιχούσαν** σε φυσικούς αριθμούς. Ο Ιάμβλιχος υποστήριζε ότι η ανακάλυψη του εμπειρικού ορισμού της αναλογίας έγινε από τον Πυθαγόρα^{49γ}.

Τα βασικά ερωτήματα που προκύπτουν στην εν λόγω ιστορική αναδρομή είναι:

1. πόσο βρίσκεται κοντά στην πραγματικότητα των γεγονότων και πως αυτό το κείμενο με αυτή τη μορφή θα αξιοποιηθεί διδακτικά; Ήταν τελικά μόνο ο Πυθαγόρας που πραγματοποίησε ακουστικά πειράματα και κατασκεύασε έναν εμπειρικό ορισμό για το λόγο μεγεθών;
2. Ο εκπαιδευτικός θα αναζητήσει τρόπους ώστε να αξιοποιήσει, να εμπλουτίσει το παραπάνω ιστορικό σημείωμα και να το ενσωματώσει σε μια κατάλληλη και χρήσιμη διδασκαλία, σύμφωνη με του στόχους που έχουν θέσει οι σχεδιαστές των προγραμμάτων σπουδών για τα Μαθηματικά;
3. Μήπως ο εκπαιδευτικός θα το παραβλέψει ή μήπως θα πάρει μια καλή ιδέα και θα το αξιοποιήσει με την προοπτική της δημιουργίας ενός project ;

Στη σελίδα 77 και στο κεφάλαιο 4^ο – εξισώσεις και προβλήματα διαβάζουμε:



Σχολιασμός: Από το Διόφαντο στον Βιέτ. Ο Διόφαντος εισάγει τον άγνωστο ς και ο Βιέτ τα γράμματα, με τα οποία ξεχωρίζει τα άγνωστα μεγέθη από τα γνωστά.

1. Πως βελτιώνει τη διδασκαλίας μας στην ενότητα εξισώσεις και προβλήματα η παραπάνω αναδρομή και ακριβώς στο σημείο που καλείται ο μαθητής να περάσει από την αριθμητική στην σχολική άλγεβρα;
2. Με ποιο τρόπο θα αξιοποιηθεί ώστε να πετύχουμε την κατανόηση δυο δύσκολων εννοιών, αυτής του αγνώστου και αυτής της χρήσης παραμέτρων;

Βρισκόμαστε ξανά μπροστά στο ίδιο ερώτημα ως προς το πώς θα ενεργήσει ο εκπαιδευτικός, ή δεν θα δώσει καμία σημασία και θα προχωρήσει παρακάτω, ή θα διαβάσει απλώς το σημείωμα στους μαθητές του και στην καλύτερη των

περιπτώσεων, ίσως κατασκευάσει μια αντίστοιχη δραστηριότητα αξιοποιώντας το έργο του Διόφαντου και του Βιέτ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το πρώτο μέρος του βιβλίου περιλαμβάνει 4 κεφάλαια Άλγεβρας και υπάρχουν 4 ιστορικά σημειώματα και αναδρομές, το δεύτερο μέρος του βιβλίου περιλαμβάνει 4 κεφάλαια Γεωμετρίας και υπάρχουν 7 ιστορικά σημειώματα και αναδρομές. Ας εξετάσουμε και εδώ κάποια από τα παραπάνω ιστορικά σημειώματα ή (σύντομες) αναδρομές.

Εισαγωγικό σημείωμα του 1^{ου} κεφαλαίου στο 1^ο μέρος του βιβλίου:

 ίνα πράγματα είναι γνωστά για τη ζωή του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού Διόφαντου, που έζησε στην Αλεξάνδρεια τον 3ο μ.Χ. αιώνα. Οι εργασίες του όμως είχαν τεράστια σημασία για τη θεμελίωση της Άλγεβρας και εκτιμήθηκαν πολύ τους επόμενους αιώνες. Από τα 13 έργα που έγραψε σώθηκαν μόνο τα 10 (τα 6 σε ελληνικά χειρόγραφα και τα 4 σε αραβική μετάφραση). Το πιο διάσημο από τα έργα του είναι τα «Αριθμητικά» (6 βιβλία). Πρόκειται για το αρχαιότερο ελληνικό έργο στο οποίο για πρώτη φορά χρησιμοποιείται μεταβλητή για την επίλυση προβλήματος. Προς τιμήν του μια ειδική κατηγορία εξισώσεων ονομάζεται «Διοφαντικές εξισώσεις».

Όταν πέθανε, οι μαθητές του -κατά παραγγελίαν του- αντί άλλου επιγράμματος, συνέθεσαν ένα γρίφο και τον έγραψαν πάνω στον τάφο του. Ιδού λοιπόν το Επίγραμμα του Διόφαντου.

«ΔΙΑΒΑΘΗ ΕΞ ΑΥΤΟ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΕΞ ΕΞΕΝΑ ΠΟΥ ΕΙΣΑΙ ΕΟΦΟΣ, Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΥΣΕ

- Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΥΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΝΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.
- ΑΚΟΜΗ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΕΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΜΙ ΤΟΥ.
- ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ.
- ΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟ ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ.
- ΤΙ ΚΡΙΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΣΗΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΜΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ.
- ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ».

Σύμφωνα μ' αυτό το επίγραμμα, πόσα χρόνια έζησε ο Διόφαντος; Αν x παριστάνει την ηλικία του Διόφαντου, όταν πέθανε, τότε το παραπάνω πρόβλημα παριστάνεται από την

$$\text{εξίσωση: } \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Σχολιασμός: Τα έργα του Διόφαντου δεν είναι 13, αλλά πρόκειται για ένα έργο με 13 κεφάλαια. Για τη ζωή του Διόφαντου δεν γνωρίζουμε πολλά, αλλά ούτε και γνωρίζουμε αν οι μαθητές του έγραψαν κατά παραγγελίαν του επίγραμμα στον τάφο του. Εδώ παρατηρούμε τα εξής:

Δίνεται έτοιμη η εξίσωση του επιγράμματος. Πρόκειται για δραστηριότητα χωρίς ερώτηση. **Ποιος είναι ο στόχος τελικά;**

- ✚ Να γνωρίσουμε την αξία του έργου του Διόφαντου;
- ✚ Να μάθουμε για τα τραγικά περιστατικά της ζωής του;
- ✚ Να λύσουμε την εξίσωση, η οποία θα μας πληροφορήσει για την ηλικία του Διόφαντου;

Βιβλίο εκπαιδευτικού στη σελίδα 24:

Δραστηριότητα 2

Γεωμετρικές κατασκευές άρρητων αριθμών με τη βοήθεια ορθογώνων τριγώνων

- Στα διπλάνα σχήματα έχουμε κατασκευάσει ευθύγραμμα τμήματα μήκους $\sqrt{2}$ και $\sqrt{10}$. Στις πλευρές των ορθογώνων μετράμε πρώτα τη διατέτλητη μήκη των καθέτων πλευρών και μετά φέρνουμε την υποτείνουσα.



Ισχύουν: $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$ και $1^2 + 3^2 = 10 = (\sqrt{10})^2$.
Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$ και $\sqrt{20}$; Ποιους άλλους άρρητους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με αυτόν τον τρόπο;
- Πολλοί από εμάς έχουμε μάθει να κατασκευάζουμε με τον προηγούμενο τρόπο. Για παράδειγμα ο αριθμός $\sqrt{3}$ μπορεί να κατασκευαστεί μόνο αν χρησιμοποιήσουμε δύο ορθογώνια τρίγωνα. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, κατασκευάζουμε πρώτα το ορθογώνιο ένα ορθογώνιο τριγώνιο με κάθετες πλευρές 1 και 1, οπότε η υποτείνουσα είναι $\sqrt{2}$ και στη συνέχεια ένα ορθογώνιο τριγώνιο με κάθετες πλευρές 1 και $\sqrt{2}$, οπότε η υποτείνουσα είναι $\sqrt{3}$, γιατί $1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2$.



Παρομοίως στο διπλανό σχήμα έχουμε μια κατασκευή του αριθμού $\sqrt{14}$ (ισχύει $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = (\sqrt{14})^2$). Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$ και $\sqrt{15}$. Ποιους άλλους άρρητους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με αυτόν τον τρόπο;


- Για την κατασκευή ορισμένων άρρητων μπορεί να χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τρία ορθογώνια τρίγωνα! Για παράδειγμα, ο αριθμός $\sqrt{7}$ μπορεί να κατασκευαστεί όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ισχύει $1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 = 7 = (\sqrt{7})^2$.



Σχολιασμός: Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι όλοι οι άρρητοι κατασκευάζονται!!!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το πρώτο μέρος του βιβλίου περιλαμβάνει 5 **κεφάλαια** Άλγεβρας και υπάρχουν **3 ιστορικά σημειώματα**, το δεύτερο μέρος του βιβλίου περιλαμβάνει 2 **κεφάλαια** Γεωμετρίας και υπάρχουν **2 ιστορικά σημειώματα**.

Στο βιβλίο του εκπαιδευτικού στις σελίδες 10 και 11 διαβάζουμε:

Σε ορισμένες ενότητες παρουσιάζονται θέματα από την ιστορία των μαθηματικών στα οποία επιχειρείται να δοθεί η περιγραφή του προβλήματος που τέθηκε και η παρουσίαση εννοιολογικών εργαλείων που εφαρμόστηκαν προκειμένου να λυθεί. Τα θέματα αυτά μαζί με τα συνοδευτικά ερωτήματα έχουν ως στόχο να αξιοποιηθεί με τον καλύτερο δυνατό τρόπο η ιστορία των Μαθηματικών. Η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών έχει γίνει διεθνώς αντικείμενο συστηματικών μελετών. Η θετική συμβολή στοιχείων από την ιστορία των Μαθηματικών τεκμηριώνεται σε τρεις κατηγορίες επιχειρημάτων: Α) προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών και συμβάλλει στη συγκρότηση μιας θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά. Β) αναδεικνύει και υπογραμμίζει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας ανά τους αιώνες. Γ) συνεισφέρει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων, αναδεικνύοντας όχι μόνο τα πλαίσια και τις συνθήκες προέλευσης τους αλλά και τους όρους εξέλιξης τους.

Ας δούμε ένα από τα 3 ιστορικά θέματα-δραστηριότητες, όπως παρουσιάζεται στη σελίδα 52 του βιβλίου:

ΕΝΔ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πυθαγόρειες τριάδες

Αν οι αριθμοί α, β, γ εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε όπως γνωρίζουμε, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad (1)$$

Πόσα όμως ορθογώνια τρίγωνα μπορούμε να βρούμε που τα μήκη των πλευρών τους εκφράζονται με ακέραιους αριθμούς;
 Μια τριάδα θετικών ακέραιων αριθμών α, β, γ , για την οποία ισχύει η σχέση (1), λέμε ότι αποτελεί **Πυθαγόρεια τριάδα**. Την απλούστερη Πυθαγόρεια τριάδα σχηματίζουν οι αριθμοί 5, 4, 3 αφού $5^2 = 4^2 + 3^2$. Υπάρχουν, άραγε, τρόποι να σχηματίζουμε Πυθαγόρειες τριάδες;

Ο Πυθαγόρας (6ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής

$$\frac{\mu^2 + 1}{2}, \frac{\mu^2 - 1}{2}, \mu, \quad \text{όπου } \mu \text{ περιττός } (\mu = 3, 5, 7, \dots)$$
 σχηματίζουν μια Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;
 β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Πυθαγόρα.

Ο Πλάτωνας (5ος – 4ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής

$$\frac{\mu^2}{4} + 1, \frac{\mu^2}{4} - 1, \mu, \quad \text{όπου } \mu \text{ άρτιος } (\mu = 4, 6, 8, \dots)$$
 σχηματίζουν μια Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;
 β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Πλάτωνα.

Ο Διόφαντος (3ος αιώνας μ.Χ.) στηρίζοντας σε μία ταυτότητα την οποία γνώριζε και ο Ευκλείδης, έδωσε μια γενικότερη λύση στο πρόβλημα κατασκευής Πυθαγορείων τριάδων από οποιουδήποτε αριθμούς (άρτιους ή περιττούς). Ανασάλυνε ότι ο αριθμός της μορφής $\lambda^2 + \mu^2, \lambda^2 - \mu^2, 2\lambda\mu$, όπου λ, μ θετικοί άραιοι ασέριτοι αριθμοί, σχηματίζουν Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;
 β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Διόφαντου.

Σχολιασμός: Ποια ήταν η ταυτότητα που στηρίχθηκε ο Διόφαντος και την οποία γνώριζε και ο Ευκλείδης; Στους μαθητές δίνονται 3 διαφορετικές τριάδες αριθμών στις οποίες οι αριθμοί αναπαρίστανται με μεταβλητές και ουσιαστικά εκείνο που ζητείται είναι να κάνουν εφαρμογή των ταυτοτήτων και να επαληθεύσουν αν ισχύει ή όχι το Πυθαγόρειο θεώρημα σε Πυθαγόρειες τριάδες! Το ερώτημα που προκύπτει παραμένει, πρόκειται για δραστηριότητα ή όχι τελικά;

Τα **συμπεράσματα** που προκύπτουν από την παραπάνω μελέτη της χρήσης της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών του Γυμνασίου είναι τα εξής:

- ιστορικές ανακρίβειες
- δεν υπάρχουν ιστορικές δραστηριότητες, απλώς οι συγγραφείς των βιβλίων παρουσιάζουν θέματα από την ιστορία των μαθηματικών από τα οποία λείπει η εμβάθυνση και η σχέση με την ιστορική ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών
- δεν υπάρχουν θέματα κατάλληλα τα οποία θα καθοδηγήσουν τον εκπαιδευτικό να κατασκευάσει δραστηριότητες, αλλά θα πρέπει να αναζητήσει μόνος του το δρόμο και τον τρόπο.
- είναι αδύνατον οι μαθητές να εκτιμήσουν τη συμβολή των Ελλήνων μαθηματικών στην εξέλιξη των μαθηματικών
- είναι αδύνατον οι μαθητές να εννοήσουν τη συνεχή και βαθμιαία πρόοδο των μαθηματικών
- δεν δίνεται καμία σημασία στην έννοια του επιστημολογικού εμποδίου και επομένως δεν μπορεί να αξιοποιηθεί ως εργαλείο για την κατανόηση των νέων εννοιών που περιλαμβάνουν τα μαθηματικά του γυμνασίου
- δεν δίνεται καμία σημασία στη μετάβαση από την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών στη νέα γνώση (επννοιολογική αλλαγή)

Τελικά **δεν είναι ευνόητο** ότι οι δραστηριότητες ιστορικού περιεχομένου οι οποίες έχουν ενσωματωθεί στα βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου, προετοιμάζουν και συμβάλλουν με άμεσο τρόπο στην ανάπτυξη κάποιας ικανότητας των μαθητών σχετική με τους σκοπούς που τίθενται από τους σχεδιαστές των προγραμμάτων σπουδών. Επίσης από την παραπάνω μελέτη, διαπιστώθηκε η ανεπάρκεια και τα λάθη των εν λόγω ιστορικών σημειωμάτων-δραστηριοτήτων και αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δυσκολία να αξιοποιηθούν από τον διδάσκοντα για τη διδασκαλία των εννοιών στις οποίες αναφέρονται. Αυτή η άποψη μας ενισχύεται από τα αποτελέσματα της έρευνας η οποία πραγματοποιήθηκε τη σχολική χρονιά 2007-2008, σχετικά με την στάση των εκπαιδευτικών για τα νέα σχολικά βιβλία του γυμνασίου^{49δ} και έδειξε ότι τελικά οι περισσότεροι διδάσκοντες δεν κάνουν χρήση των ιστορικών σημειωμάτων. Οι ερευνητές διέκριναν τις παρακάτω τρεις τάσεις σχετικά με τη χρήση των δραστηριοτήτων :

- το 27,7% των εκπαιδευτικών αγνοεί τις δραστηριότητες και ακολουθεί το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας
- το 53,4% των εκπαιδευτικών λύνουν οι ίδιοι τις δραστηριότητες στον πίνακα, κάνοντας ταυτόχρονα ερωτήσεις στους μαθητές και ακολουθούν το δασκαλοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας
- το 21,3% των εκπαιδευτικών ζητούν από τους μαθητές να επεξεργαστούν ατομικά τις δραστηριότητες, ενώ μόνο το 8,3% των εκπαιδευτικών επιλέγει την ομαδοσυνεργατική μέθοδο

Κεφάλαιο 3^ο

Διδακτικές όψεις του έργου του Διόφαντου

Η μάθηση είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη **διδασκαλία** (διδάσκων) και αποσκοπεί όχι στο να μεταδώσει γνώσεις σ' ένα παθητικό και αμέτοχο δέκτη (μαθητής) αλλά απευθύνεται σ' έναν ενεργητικό δέκτη, έναν μετασχηματιστή πληροφοριών, μέσα σε κλίμα πνευματικής ελευθερίας, ελευθερίας δράσης και έκφρασης, με το αντικείμενο της διδασκαλίας να είναι **σύμφωνο** με τα ενδιαφέροντα, τις ικανότητες, τις κλίσεις των μαθητών (διδακτικοί στόχοι) και τους σκοπούς οι οποίοι είναι καθορισμένοι (οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία).

Όπως είδαμε στην εισαγωγή η διδασκαλία των μαθηματικών αλλά και τα ίδια τα μαθηματικά είχαν πρωτεύοντα ρόλο από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Η Μαθηματική επιστήμη άρχισε να αναπτύσσεται από τους προελληνικούς χρόνους και συνεχίζει να εξελίσσεται με τρομακτικά γρήγορους ρυθμούς μέχρι και σήμερα. Τα μαθηματικά σήμερα είναι απαραίτητο στοιχείο στην εκπαιδευτική μας δομή, αν και στα διάφορα σχολικά βιβλία παρουσιάζονται απρόσωπα και ξένα από κάθε κοινωνική και ανθρώπινη πλευρά. Ο ανθρώπινος και κοινωνικός χαρακτήρας των μαθηματικών δεν είναι δυνατόν να υποτιμηθεί αφού είναι μέρος της κοινωνικής ανάπτυξης, είναι δημιουργήματα των κοινωνικών αναγκών και έχουν εξελιχθεί σε θεμελιώδη συστατικά της κοινωνίας. Για να γίνει κατανοητή αυτή η όψη των μαθηματικών είναι απαραίτητο να κοιτάξουμε την ιστορία τους. Η ιστορία των μαθηματικών δεν είναι το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας που μας έδωσε κανόνες, τύπους, αλγορίθμους, αλλά είναι το αποτέλεσμα των αναγκών, των ιδεών, των ανταγωνισμών των μελών των εκάστοτε κοινωνιών και επομένως είναι ένα **πολιτισμικό** και **κοινωνικό** προϊόν. Η μαθηματική γνώση είναι κοινωνική δραστηριότητα και κατασκευή. Αυτή η άποψη για την προέλευση της μαθηματικής γνώσης έχει σημαντικές συνέπειες στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι κανόνες, τα θεωρήματα και οι αποδείξεις τους, οι μαθηματικοί τύποι, οι αλγοριθμικές διαδικασίες, **τυποποιούνται** και παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία, όμως είναι αποτέλεσμα μιας **διανοητικής διαδρομής** και περιλαμβάνει δυσκολίες, πισωγυρίσματα, αδιέξοδα, επιτυχίες, αποτυχίες και δυστυχώς αυτή η μαγευτική διαδρομή δεν περιγράφεται στα σχολικά βιβλία. Αυτό που φαίνεται είναι ένα τυποποιημένο τελικό προϊόν, το οποίο στα μάτια των μαθητών μας φαίνεται σαν σύνολο από κανόνες, **χωρίς νόημα** γι αυτούς.

«Τα σχολικά μαθηματικά είναι ένα σύνολο κανόνων και ορθών απαντήσεων και βρίσκεται σε πλήρη αντίθεση με την πραγματική φύση της μαθηματικής

επιστήμης. Μιας φύσης που σκιαγραφείται ανάγλυφα στο πλαίσιο της κατασκευαστικής επιστημολογίας για τη μάθηση και τη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών»⁵⁰. Ακόμα και σήμερα τα αποτελέσματα των μαθηματικών παρουσιάζονται έτοιμα στους μαθητές μας και ξεκομμένα από την πορεία τους, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην έχουν την ευκαιρία να ακολουθήσουν την πορεία της ανακάλυψης, να μην γνωρίζουν τη μαγευτική διαδρομή των μαθηματικών και να μην αποκτούν ποτέ τη μαθηματική κουλτούρα, αντίθετα τα μαθηματικά είναι βάρβαρα στο μυαλό κάποιων μαθητών

Ένα από τα βασικά ζητήματα της σύγχρονης διδακτικής των μαθηματικών είναι η κατασκευή κατάλληλων δραστηριοτήτων, έτσι ώστε οι μαθητές να ενδιαφερθούν πραγματικά για τα μαθηματικά, να αναπτύξουν την μαθηματική τους ικανότητα και να κατανοήσουν σε βάθος αυτή τη μυστική γλώσσα. Είδαμε στις παραγράφους 1.2 και 1.3 ότι η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική μπορεί να συμβάλλει θετικά στη διδασκαλία και στη μάθηση και να εμπλουτίσει τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Το ζήτημα μεταξύ **της σχέσης της ιστορίας και της παιδαγωγικής** των μαθηματικών είναι **πολύμορφο**^{51α}. Ας δούμε αναλυτικά τι ακριβώς σημαίνει αυτό. Η μελέτη ιστορικών πηγών σχετικών με τα μαθηματικά έχει σκοπό να εξετάσει σε βάθος **τα διδακτικά προβλήματα**. Με την μελέτη και την αξιοποίηση αυθεντικών ιστορικών κειμένων, τα οποία αναφέρονται στη γέννηση μιας έννοιας, ή μιας μαθηματικής ιδέας συχνά φέρνουν στο φως όψεις αυτής της έννοιας, οι οποίες δεν φαίνονται αν αυτή παρουσιαστεί με το σύγχρονο καθαρό ορισμό της. Ο H. M. Edwards ⁵² προτείνει να διαβάσουμε και να μάθουμε για τους μεγάλους μαθηματικούς μέσα από τα ίδια τα κείμενα τους. Η διδασκαλία μια έννοιας είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί με βάση την ιστορική της πορεία. Αυτός ο τρόπος διδασκαλίας δίνει τη δυνατότητα:

- στο μεν διδάσκοντα ή στη διδάσκουσα να αποκτήσει ολοκληρωμένη και πλατιά άποψη για την εν λόγω έννοια, να αντιληφθεί τις δυσκολίες, τα λάθη και τα εμπόδια μέχρι τον τελικό και επιστημονικά αποδεκτό ορισμό της έννοιας και επομένως να είναι σε θέση να προβλέψει τα αντίστοιχα λάθη, εμπόδια και δυσκολίες των μαθητών του
- στο δε μαθητή ή μαθήτρια δίνεται η δυνατότητα να κατανοήσει εις βάθος τη σημασία της έννοιας και την ανάγκη της κατασκευής της, να εκτιμήσει τις προσπάθειες των προγενέστερων στη διαδικασία επίλυσης μιας προβληματικής κατάστασης και να αναπτύξει τη μαθηματική γλώσσα μέσα από όλη αυτή τη διαδικασία.

Ένα σπουδαίο όφελος από τη χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία είναι το εξής: μερικά **μαθηματικά συγγράμματα**, από την ιστορία των μαθηματικών έχουν καταγραφεί ως **ορόσημο** είτε γιατί υπήρξαν το «**όχημα**» για μια ριζική επιστημολογική αλλαγή, είτε γιατί άσκησαν **καθοριστική επίδραση** στην ανάπτυξη ενός μαθηματικού πεδίου, είτε γιατί **διαδόθηκαν** και **υιοθετήθηκαν**. Τα εν λόγω συγγράμματα γράφτηκαν από κορυφαίους μαθηματικούς, οι οποίοι θεώρησαν ως καθήκον τους να εκθέσουν τις ιδέες τους για τη διδασκαλία και τη μάθηση του αντικειμένου το οποίο διαπραγματευόταν. **Ας εξετάσουμε** ένα παράδειγμα το οποίο μας έρχεται από τη **ύστερη αρχαιότητα**. Μελετώντας την εισαγωγή των Αριθμητικών του Διόφαντου (γραμμένα περίπου το 250 μ.Χ.) μπορούμε να κατανοήσουμε αυτό που θα ονομάζαμε σήμερα συγκοπτόμενη άλγεβρα-αλγεβρική επίλυση προβλημάτων, με ποιο τρόπο ο Διόφαντος έχει οργανώσει τη διδασκαλία του και με ποιο τρόπο το αντικείμενο της διδασκαλίας του θα γίνει κατανοητό, «ευκατάληπτον» στον πρόθυμο μαθητή του και θα τον οδηγήσει σε ταχεία μάθηση^{51β}. Στην **εισαγωγή των Αριθμητικών ο Διόφαντος** (βλέπε παράρτημα) απευθυνόμενος σ' έναν πρόθυμο και ανυπόμονο ίσως μαθητή κάνει κάποιες παρατηρήσεις ψυχολογικής, διδακτικής και μεθοδολογικής φύσεως. Τονίζει το γεγονός ότι στο μυαλό ενός αρχάριου μαθητή η επιτυχία δεν είναι σίγουρη (ο αρχάριος μαθητής αμφιβάλλει για τις ικανότητές του), αλλά η επιθυμία για μάθηση και παράλληλα η κατάλληλη διδασκαλία θα εξασφαλίσει τη γρήγορη λήψη της νέας γνώσης (δηλαδή την κατανόηση των διδασκόμενων). Από την άλλη μεριά ο μεγάλος όγκος της νέας γνώσης επιβραδύνει την αφομοίωση και παρεμποδίζει την απομνημόνευση. Για να αντιμετωπίσει αυτή τη δυσκολία ο Διόφαντος επισημαίνει τη σπουδαιότητα δυο προϋποθέσεων:

A) Θα **παροτρύνει** το μαθητή του σε **εξάσκηση** (πρακτική), ώστε να μάθει τέλεια τη βασική θεωρία των Αριθμητικών (αριθμοί, τετράγωνοι αριθμοί, κύβοι, δυναμοδυνάμεις, δυναμοκύβοι, κυβόκυβοι αριθμοί, άγνωστος αριθμός και ιδιότητες αυτών) και τη **βασική μέθοδο** (δηλαδή τη διαμόρφωση της εξίσωσης από τα δεδομένα του προβλήματος)

B) Ως προς το περιεχόμενο της μάθησης των Αριθμητικών θα διδάξει πρώτα τα **εύκολα** και μετά θα προχωρήσει στα πιο **δύσκολα**.

Ο Διόφαντος ισχυρίζεται ότι οι δυο παραπάνω προϋποθέσεις εξασφαλίζουν ευκολότερα την **κατανόηση** και την **αποτύπωση** στη μνήμη. Είναι φανερό ότι ο Διόφαντος **αντανακλά την παραδοσιακή αξία** της διδασκαλίας και της μάθησης της εποχής του. Δηλαδή η **οργανωμένη** διδασκαλία ενός αντικειμένου, μαζί με **επιθυμία** για μάθηση (ενδιαφέρον μαθητή), παράλληλα η **πρακτική εξάσκηση** (η άσκηση του μαθητή στα διδασκόμενα), έχουν ως αποτέλεσμα την **απόκτηση** σταθερής γνώσης.

Μας είναι γνωστό βέβαια ότι η μοντέρνα διδακτική με την επίδραση του Κονστρουκτιβισμού έθεσε υπό αμφισβήτηση τη μέθοδο του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας, άρα και τη μέθοδο διδασκαλίας του Διόφαντου. Όμως από την εισαγωγή των Αριθμητικών θα μπορούσαμε σήμερα να χαρακτηρίσουμε το Διόφαντο ως **ενημερωμένο εκπαιδευτικό**. (Συνειδητή επιλογή του τρόπου διδασκαλίας).

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι το ζήτημα της διδακτικής των μαθηματικών είναι πολυσύνθετο. Συνοψίζοντας θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι τόσο **η μελέτη των έργων** μεγάλων μαθηματικών όσο και η **κατασκευή δραστηριοτήτων** μέσα από την ιστορία των μαθηματικών μας επιτρέπει να δούμε την αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών και κοινωνίας και να αντιληφθούμε ότι είναι δυνατόν να καταργήσουν το χρόνο, όπως η ζωγραφική και η μουσική, μας βοηθάει να οργανώσουμε μια αξιόλογη και ευχάριστη διδασκαλία σε πολλές εισαγωγικές έννοιες των μαθηματικών οι οποίες απασχόλησαν από τη γέννηση τους έως τη θεμελίωσή σπουδαίους μαθηματικούς, παιδαγωγούς και κριτικούς της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Κεφάλαιο 4^ο

4.1. Τα μαθηματικά προβλήματα του Διόφαντου στη διδασκαλία της έννοιας της εξίσωσης

Πως φτάσαμε όμως στη χρήση μαθηματικού προβλήματος από τα *Αριθμητικά του Διόφαντου* για τη διδασκαλία της εξίσωσης πρώτου βαθμού ως προς έναν άγνωστο;

Γνωρίζουμε ότι οι έρευνες σχετικά με τη διδακτική των μαθηματικών επηρεασμένες από τη θεωρία του Piaget πέρασαν από διάφορα στάδια, μέχρι να πάρουν τη σημερινή μορφή. Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1970 βασικός στόχος των ερευνών ήταν να δείξουν ότι **οι μαθηματικές δομές** θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν ως μοντέλα περιγραφής **των μαθηματικών γνώσεων** του μαθητή όπως ακριβώς συνέβαινε με τις **γενετικές δομές** του Piaget, οι οποίες ήταν τα αντίστοιχα μοντέλα για τη **νοητική ανάπτυξη**. Σταδιακά διαπιστώθηκε ότι οι γενετικές δομές του Piaget ήταν μοντέλα ερμηνείας της συμπεριφοράς του παιδιού και όχι ένα υποθετικό-παραγωγικό σύστημα. Αυτό οδήγησε τους ερευνητές να κατασκευάσουν τα δικά τους μοντέλα προκειμένου να εξυπηρετήσουν τους σκοπούς τους. Αυτή η καμπή με τη σειρά της οδήγησε στη **Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης** (Constructivism), όπου οι ερευνητές παρατηρούν και περιγράφουν τους μηχανισμούς με τους οποίους ο μαθητής **οικοδομεί** τις μαθηματικές του **γνώσεις**, μέσα σε ένα συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον (βιβλίο, πρόβλημα, συμμαθητές, καθηγητής, κλπ). Τυπικά η αρχή του Κονστρουκτιβισμού τοποθετείται στο 1975, όπου ο Von Glaserfeld παρουσιάζει τις ιδέες του στην εταιρεία Jan Piaget της Philadelphia των Η.Π.Α. Οι ιδέες του Glaserfeld, στηριγμένες στην Γενετική επιστημολογία του Piaget οδήγησαν στον «Ριζοσπαστικό Κονστρουκτιβισμό» και άνοιξαν το δρόμο για μια νέα εποχή στη μαθηματική εκπαίδευση.

Η αποδοχή του Ριζοσπαστικού Κονστρουκτιβισμού είχε σοβαρή επίδραση στην έρευνα, το έργο του ερευνητή συνίσταται στην ανάπτυξη μοντέλων που περιγράφουν και ερμηνεύουν τις ενέργειες του μαθητή σε μια συγκεκριμένη στιγμή και για ένα συγκεκριμένο έργο. Τα αποτελέσματα των ερευνών οδηγούν στην **ανάπτυξη της λύσης προβλήματος** κατά τη διαδικασία της διδακτικής πρακτικής (μικρές ομάδες μαθητών, δραστηριότητες μέσα στην τάξη, ο δάσκαλος βοηθάει, ερμηνεύει και παρατηρεί).

Η **λύση προβλήματος** έχει μετατραπεί σε κριτήριο μάθησης, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την θεωρία του Piaget και του Vygotsky αφού και οι δυο βλέπουν το μαθητή να συνδέεται ενεργητικά με τη γνώση. Ακόμα και στο

Παραδοσιακό Μοντέλο διδασκαλίας το πρόβλημα είναι κριτήριο μάθησης, δηλαδή σου βάζω ένα πρόβλημα για να δω αν κατάλαβες αυτά που σου δίδαξα.

Πως φτάσαμε όμως στην λύση προβλήματος; Ποιος είναι ο στόχος της διδασκαλίας; Να είμαστε πιο αποτελεσματικοί, δηλαδή να κάνουμε συνειδητές επιλογές στην τάξη (ενημερωμένος καθηγητής), να μπορούμε να αναγνωρίζουμε και να ερμηνεύουμε φαινόμενα που παρουσιάζονται κατά την διάρκεια της διδασκαλίας και τα οποία πολλές φορές δεν αντιλαμβανόμαστε. Η τάξη είναι ο χώρος μέσα στον οποίο δημιουργείται και αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση και δεν παρουσιάζεται ως τελικό αποτέλεσμα. Η μαθηματική κοινότητα δρα ως επιστημονική κοινότητα, η νέα γνώση θεσμοθετείται ως επίσημη γνώση μέσα στην τάξη. Σε αυτό το πλαίσιο τα μαθηματικά θεωρούνται ως δραστηριότητες (βασικές αρχές των νέων διδακτικών μοντέλων).

Ποια είναι τα εργαλεία που χρησιμοποιεί ο διδάσκων; ερωτήσεις, ασκήσεις, προβλήματα

Τι σημαίνει μαθαίνω; Σημαίνει συμμετέχω. Η μαθηματική γνώση μπορεί να κατανοηθεί μόνο διαμέσου της συμμετοχής σε δραστηριότητες (επίλυση προβλημάτων)

Τι σημαίνει συμμετοχή μαθητή; Ακούω, ομιλώ, σκέπτομαι, συζητώ, συνεργάζομαι για τη λύση ενός προβλήματος, αναπτύσσω εικασίες, υπολογίζω, μετρώ, αποδεικνύω κλπ.

Τι θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως πρόβλημα και τι ως άσκηση; Ας δούμε αρχικά έναν υποκειμενικό διαχωρισμό:

Ως πρόβλημα θεωρείται κάθε ερώτημα που δημιουργεί δυσκολία, κάθε μαθηματική πρόταση που δεν έχει μεθοδολογία, αλγόριθμους και δεν ξέρουμε εξ αρχής πώς να απαντήσουμε προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα. Ως άσκηση θεωρούμε μια μαθηματική πρόταση την οποία ξέρουμε πώς να τη λύσουμε, έχουμε μεθοδολογία, αλγόριθμους που αν τους ακολουθήσουμε θα λυθεί η άσκηση⁵³.

Λύση μαθηματικού προβλήματος- οριοθέτηση της έννοιας: αναφερόμαστε στη «λύση μαθηματικού προβλήματος» όταν αντιμετωπίζουμε μια μη οικεία κατάσταση, από την οποία δεν μπορούμε να βρούμε άμεσα τρόπους για να την διαπραγματευτούμε. Έτσι θα πρέπει να βρούμε έναν δρόμο για την επίλυση του προβλήματος και όχι μια γνωστή τεχνική ή έναν αλγόριθμο. Κατά τη διαδικασία της λύσης του προβλήματος ο λύτης έχει μεγάλο βαθμό αυτονομίας και αναζητεί διάφορες δυνατότητες και αποφασίζει κατάλληλα με βάση το απόθεμα των γνώσεών του.

Ο Polya (1994) στο βιβλίο του «Πώς να το λύσω» προτείνει ένα σχέδιο τεσσάρων φάσεων για την επίλυση προβλήματος:

1. Κατανόηση προβλήματος
2. Εύρεση ενός σχεδίου για την επίλυση
3. Εκτέλεση σχεδίου
4. Ανασκόπηση, εξέταση της λύσης που βρέθηκε

Σύμφωνα με τον Polya ο δάσκαλος βοηθάει το μαθητή αποτελεσματικά και με φυσικό τρόπο με στόχο ο μαθητής να λύσει το πρόβλημα και να είναι σε θέση να λύνει μόνος του μελλοντικά προβλήματα. Ο μαθητής πρέπει να αποκτήσει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη πείρα και πρακτική επιδεξιότητα. Αποκτούμε δε πρακτική επιδεξιότητα με μίμηση και εξάσκηση (όπως στο κολύμπι).

Στην δεκαετία του '90 αναπτύσσεται η επικοινωνιακή προσέγγιση του Vygotsky (οι μαθηματικές έννοιες αναπτύσσονται στην τάξη με βάση τα επικοινωνιακά φαινόμενα και την αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλου μαθητών και μαθητών μεταξύ τους) και μια ειδική εκδοχή της είναι «η πλαισιοθετημένη μάθηση» (η γνώση είναι εγκατεστημένη σε ιδιαίτερες μορφές εμπειρίας που προκύπτουν σε συγκεκριμένες περιστάσεις και γίνεται κατανοητή με σχεσιακό τρόπο, ως κάτι που κατανέμεται μεταξύ ανθρώπων, δραστηριοτήτων και περιβαλλόντων και όχι ως ατομικό και σταθερό χαρακτηριστικό. Lave & Wenger-1991). Όμως η επικοινωνιακή προσέγγιση και η πλαισιοθετημένη μάθηση αναδεικνύει ένα μεγάλο ζήτημα σχετικά με την ισχύουσα αντίληψη για τη λύση προβλήματος και ακόμα για τις φάσεις του Polya. Με την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, όπου οι μαθητές συνεργάζονται **διαπιστώθηκε** ότι η λύση προβλήματος είναι μια μαθηματική διαδικασία που γίνεται στον **πραγματικό κόσμο**, δηλαδή με **πραγματικούς ανθρώπους**, τους μαθητές μας, με τις αβεβαιότητες, τους δισταγμούς, τα λάθη, τις παραλείψεις και δεν μπορεί να ακολουθεί συγκεκριμένα **σενάρια** λύσης προβλήματος αμετακίνητα και πλήρως προδιαγραφμένα. Αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος του Polya μπορεί να είναι επιτυχής, αλλά μπορεί και να μην είναι, εξαρτάται από την τροπή που θα πάρει ο διάλογος κατά την επίλυση του προβλήματος στην τάξη. Βέβαια η μέθοδος του Polya μας δίνει έναν τρόπο να **συνδέσουμε** την υπάρχουσα γνώση με τη νέα γνώση προκειμένου να λύσουμε ένα πρόβλημα που το συναντάμε πρώτη φορά και από αυτήν την άποψη είναι χρήσιμη και μπορεί να συνδεθεί με το πλαίσιο στήριξης (scaffolding).

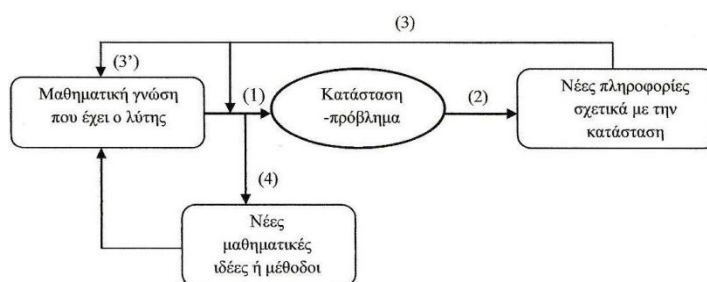
Οι Schroeder & Lester (1989) προτείνουν μια διάκριση **τριών πτυχών** σχετικά με το σκοπό και το ρόλο της λύσης προβλήματος στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών τις εξής^{54α}:

Teaching for problem solving: διδασκαλία περιεχομένου μέσω λύσης μαθηματικού προβλήματος. Ο εκπαιδευτικός επικεντρώνεται στους τρόπους με τους οποίους τα διδασκόμενα μπορούν να εφαρμοστούν στην επίλυση απλών ή σύνθετων προβλημάτων. Στους μαθητές προσφέρονται πολλά παραδείγματα για τις έννοιες και τις δομές που μελετούν και πολλές ευκαιρίες για την εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων.

Teaching about problem solving: διδασκαλία της διαδικασίας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος-στρατηγικές, ευρετικές (τέσσερις φάσεις του ευρετικού πλάνου του Polya)

Teaching via problem solving: διδασκαλία νέων μαθηματικών εννοιών μέσω επίλυσης μαθηματικού προβλήματος

Ο Nunokawa (2005)^{54β} διευρύνει το σχήμα των **τριών πτυχών** σχετικά με το σκοπό και το ρόλο της λύσης προβλήματος των Schroeder & Lester, **διακρίνοντας τέσσερις τύπους** προσέγγισης στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος και **δίνει** έναν πλατύ ορισμό για το τι εννοούμε λέγοντας επίλυση προβλήματος: «μια διαδικασία σκέψης κατά την οποία ο λύτης προσπαθεί να κατανοήσει μια κατάσταση πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μαθηματική γνώση που έχει και επιχειρεί να αποκτήσει νέες πληροφορίες σχετικά με την κατάσταση, ώσπου να επιλύσει την ένταση και την αμφιβολία που του προκαλείται». Αυτή η αντίληψη του Nunokawa αποτυπώνεται σχηματικά ως εξής:



Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα η επίλυση μαθηματικού προβλήματος έχει δυο κύριες φάσεις:

- προσπάθεια για **εφαρμογή** της προϋπάρχουσας μαθηματικής γνώσης μέσω διερεύνησης της κατάστασης πρόβλημα (1)
- **απόκτηση** νέων πληροφοριών σχετικά με την κατάσταση (2)

Αν η ένταση και η αμφιβολία δεν έχει επιλυθεί πλήρως ακολουθεί περαιτέρω διερεύνηση της κατάστασης-πρόβλημα με τη βοήθεια των νέων πληροφοριών που αποκτήθηκαν στη φάση (2) και αυτό φαίνεται στη διαδρομή (3).

Αν ο λύτης αναγνωρίζει κάποιες μαθηματικές οντότητες στην κατάσταση-πρόβλημα και βρίσκει νέες πληροφορίες σχετικά με αυτές, τότε οι αποκτηθείσες πληροφορίες μπορούν να ενσωματωθούν στην μαθηματική γνώση των μαθητών, αυτό φαίνεται στη διαδρομή (3').

Σε μερικές περιπτώσεις αν οι χρησιμοποιούμενες μέθοδοι και ο αναστοχασμός δεν οδηγήσουν στην αντιμετώπιση του προβλήματος μπορεί ο λύτης να οδηγηθεί σε νέες μεθόδους ή στην οικοδόμηση νέων μαθητικών ιδεών, διαδρομή (4).

Οι τύποι των τεσσάρων διδακτικών προσεγγίσεων του Nunokawa μας βοηθούν να ξεκαθαρίσουμε τι είδους μάθημα θα κάνουμε και να απαντάμε κάθε φορά στα εξής:

- Ποιο **είδος** μάθησης περιμένουμε να αναπτύξουν οι μαθητές μας δια μέσου των εμπειριών τους με τη λύση προβλήματος;
- Ποιο **είδος εμπειριών** θα παρουσιάσουμε και με ποιο τρόπο θα τις υποστηρίξουμε προκειμένου να μεγιστοποιήσουμε αυτό το είδος μάθησης;
- Η μάθηση αυτή θα **στοχεύει** στην ανάπτυξη και στη βελτίωση των ικανοτήτων των μαθητών μας ή θα πρέπει να χρησιμοποιούμε την οπτική της λύσης προβλήματος για να **διαπραγματευτούμε** νέα μαθηματικά θέματα;

Ας δούμε τους τέσσερις τύπους προσέγγισης:

Τύπος Α: δίνουμε έμφαση στην **εφαρμογή** των υπαρχουσών γνώσεων των μαθητών μας (διαδικασία 1 του σχήματος). Δίνουμε ασκήσεις ή προβλήματα στους μαθητές μας πάνω σε αυτά που έχουμε διδάξει. Στόχος είναι να **παγιώσουμε** ή να **εμπλουτίσουμε** τις υπάρχουσες γνώσεις και τις εμπειρίες των μαθητών μας πάνω σε ένα θέμα που έχουν διδαχθεί πρόσφατα.

Τύπος Β: Δίνεται έμφαση στην κατανόηση της προβληματικής κατάστασης (διαδικασία 2). Παρουσιάζουμε ένα σύνθετο πρόβλημα και δίνουμε εξηγήσεις στους μαθητές μας, αν δεν δώσουμε εξηγήσεις αυτό θα είναι τραγωδία για τη σκέψη και τους συλλογισμούς των μαθητών μας. Οι μαθητές θα αναζητήσουν νέες πληροφορίες οι οποίες ή θα τους οδηγήσουν σε νέες ενδιαφέρουσες πληροφορίες ή θα τους οδηγήσουν σε απροσδόκητα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τη μαθηματική τους γνώση ή χρησιμοποιώντας artefacts (artefacts αντικείμενα πολιτιστικού χαρακτήρα, που ανήκουν στο πεδίο των εμπειριών μας και έχουν ενσωματώσει μαθηματικές γνώσεις οι οποίες είναι προσβάσιμες δια μέσου αλληλεπίδρασης με αυτά, πχ υπολογιστής).

Τύπος Γ: η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιείται στην αρχή μιας διδακτικής ενότητας, όταν εισάγουμε νέες μαθηματικές ιδέες με σκοπό την αναδιοργάνωση της πρότερης γνώσης των μαθητών ή τον μετασχηματισμό της άτυπης γνώσης τους σε τυπική μαθηματική γνώση (διαδικασία 4). Δηλαδή η διδασκαλία πραγματοποιείται μέσω προβλημάτων. Βέβαια είναι δύσκολο να έχουμε ένα πρόβλημα για κάθε μαθηματική ιδέα. Ο τύπος αυτός ονομάζεται και διερευνητική προσέγγιση, δίνει έμφαση σε νέες μεθόδους και ιδέες ώστε να δώσουμε νόημα στην κατάσταση, αφήνουμε τους μαθητές μας να αναπτύξουν τη βασική ιδέα ή τις βασικές ιδέες, να τις συνδέσουν με την προϋπάρχουσα γνώση τους, δίνοντας απαντήσεις στα ερωτήματα του προβλήματος.

Τύπος Δ: δίνουμε έμφαση στη διδασκαλία λύσης προβλήματος (διαδικασία $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ή $1 \rightarrow 4$) Στόχος μας είναι οι μαθητές να αναπτύξουν συγκεκριμένους τρόπους σκέψης και ενεργειών, όταν επιχειρούν να λύσουν ένα πρόβλημα διαμέσου συγκεκριμένων διαδικασιών, για παράδειγμα τα 4 βήματα της μεθόδου του Polya είναι προσέγγιση τύπου Δ. Αυτό που αναμένεται να αναπτύξουν οι μαθητές μας είναι η γνώση του πως θα χειρίζονται καταστάσεις προβλήματα^{54v}.

Στηριζόμενοι στην ισχύ της χρήσης μαθηματικού προβλήματος, αποφασίσαμε να διδάξουμε την εξίσωση πρώτου βαθμού σε μαθητές τις Α΄ τάξης Λυκείου χρησιμοποιώντας το αφηρημένο μαθηματικό πρόβλημα Ι 1 των Αριθμητικών του Διόφαντου (προσέγγιση τύπου Γ).

Αλλά ποια είναι **τα ισχυρά σημεία** του προβλήματος Ι. 1 των αριθμητικών;

1)Οι 4 τρόποι λύσεις του προβλήματος (Διόφαντος, Nemoire, Viete και Euler, βλέπε παράρτημα) παρέχουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό, χωρίς να είναι ιστορικός των μαθηματικών να διαπιστώσει **την αξία και τη χρησιμότητα** της ιστορίας στη διδασκαλία της σχολικής άλγεβρας.

2)Μας κατευθύνει **στην οργάνωση διδακτικών στόχων** όπως: αναδεικνύει τη σημασία του συμβολισμού, από την απλή εξάσκηση (δοκιμή και λάθος) οδηγεί στην εισαγωγή αγνώστου και παραμέτρων, οδηγεί στην έννοια της εξίσωσης (Διόφαντος) και τέλος οδηγεί στη γενίκευση (Viete, Euler)

3)Αναδεικνύονται οι εξής **σημασίες της μεταβλητής**: η μεταβλητή ως σύμβολο, η μεταβλητή ως άγνωστος, η μεταβλητή ως παράμετρος

4)Με τους κανόνες του Διόφαντου, αλλά και με τον τρόπο του Διόφαντου όπως θα δούμε στο διδακτικό μας πείραμα, όχι μόνο αναδεικνύεται **η σημασία** της ισότητας ως **ισοδυναμίας**, αλλά **φάνηκε ευκολότερη στους μαθητές ως προς την κατανόηση της**. Το μοντέλο της ζυγαριάς για την εξήγηση των ιδιοτήτων της

ισότητας (μαθηματικά ΣΤ τάξης δημοτικού σελίδα 64, μαθηματικά Β γυμνασίου σελίδες 15,16), όπου οι ιδιότητες της ισότητας αναπαρίστανται με την ισορροπία της ζυγαριάς και ο μαθητής καλείται να αναπαραστήσει τον άγνωστο με ένα βάρος που δεν γνωρίζει και τους γνωστούς με γνωστά βάρη, δεν φαίνεται να αποτελεί ένα καλό μοντέλο για τους μαθητές, όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω.

4.2.Αξιοποίηση του προβλήματος I 1 των Αριθμητικών στη διδασκαλία της Άλγεβρας- ένα παράδειγμα στη σχολική τάξη

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε όλα τα βήματα του διδακτικού μας πειράματος σχετικά με την εξίσωση πρώτου βαθμού σε μαθητές της Α τάξης λυκείου με χρήση του προβλήματος I.1 των Αριθμητικών του Διόφαντου καθώς και τα συμπεράσματα που προέκυψαν σε σχέση με τους αρχικούς μας στόχους που ήταν:

Μετάβαση από τη γλώσσα ενός αφηρημένου αριθμητικού προβλήματος στη **μαθηματική γλώσσα**

Οι σημασίες της μεταβλητής ως σύμβολο, ως άγνωστος και ως παράμετρος

Εισαγωγή στην **έννοια της εξίσωσης** μέσα από την ιστορική της εξέλιξη, η σημασία της **ισότητας ως ισοδυναμίας** και τέλος **γενίκευση**.

Πριν το πείραμα: Σεπτέμβριος σχολικό έτος 2013-2014

Αρχικά θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις 58 μαθητών της Α τάξης του λυκείου σε ένα διαγνωστικό τεστ το οποίο εξέταζε τις γνώσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά του γυμνασίου.

Στους 58 μαθητές της Α τάξης (τμήματα A_1, A_2, A_3) του Λυκείου Αγίων Θεοδώρων δόθηκε ένα διαγνωστικό τεστ το οποίο περιελάμβανε 21 ασκήσεις και ένα πρόβλημα ($\rightarrow$ ο Πυθαγόρας απαντά στον Πολυκράτη για τον αριθμό των μαθητών που φοιτούν στη σχολή του), με βάση την ύλη των μαθηματικών του γυμνασίου.

Από τις απαντήσεις των μαθητών **διαπιστώθηκαν** τα εξής:

A) Από τους **58** μαθητές **εργάστηκαν** οι **33** (ποσοστό 56,89%). Οι υπόλοιποι **25** (οι 11 ήταν από το τμήμα A_3) **επέστρεψαν** το διαγνωστικό απαντώντας μόνο στο τελευταίο μέρος του τεστ στο οποίο τους ζητούσαμε το εξής : «γράψε εδώ με λίγα λόγια ποιες ερωτήσεις ήταν δύσκολες για σένα (περιλαμβάνονται και αυτές που δεν απάντησες) και δικαιολόγησε γιατί τις θεωρείς δύσκολες (π.χ. τι δεν

καταλαβαίνεις καλά, τι δε θυμόσουν, τι δεν είχες διδαχτεί κλπ.). Οι απαντήσεις των 25 μαθητών ήταν:

- Δεν θυμάμαι να απαντήσω μερικές από τις ερωτήσεις
- Δεν ξέρω καμία από τις ασκήσεις
- Δεν ξέρω καθόλου μαθηματικά
- Στο γυμνάσιο κάναμε λίγα μαθηματικά

B) Από τις απαντήσεις των 33 μαθητών διαπιστώθηκαν τα εξής (τα ποσοστά αφορούν το σύνολο των 33 μαθητών):

- Σε όλα τα ερωτήματα του τεστ απαντούν σωστά 6 μαθητές (10,34%)
- Κάνουν λάθος στις πράξεις ρητών 10 μαθητές (30,3%)
- Δεν τοποθετούν σωστά ρητούς σε άξονα 7 μαθητές (21,21%)
- Δεν κάνουν σωστά παραγοντοποίηση με χρήση επιμεριστικής 6 μαθητές (18,18%)
- Δεν κάνουν σωστά παραγοντοποίηση με χρήση της ταυτότητας διαφοράς τετραγώνων 6 μαθητές (18,18%)
- Δεν λύνουν απλή πρωτοβάθμια ανίσωση με έναν άγνωστο 7 μαθητές (21,21%)
- Δεν δίνουν καμία απάντηση στο πρόβλημα 21 μαθητές (63,63%)
- Λύνουν λάθος το πρόβλημα 6 μαθητές (18,18%)

Τα αποτελέσματα του διαγνωστικού τεστ ήταν απογοητευτικά (κυρίως για το τρίτο τμήμα της Α τάξης Λυκείου). Έγινε επανάληψη 8 διδακτικών ωρών πάνω στα ζητήματα τα οποία διαπραγματεύονταν το διαγνωστικό τεστ. Στη συνέχεια δόθηκε ιδιαίτερη σημασία στη διδασκαλία με εργασία σε ομάδες και στην επίλυση προβλημάτων στα δυο τμήματα, στο δε τρίτο τμήμα ο τρόπος διδασκαλίας που απέδιδε καλύτερα ήταν ένα είδος αλληλοδιδασκτικής μεθόδου, αφού οι μαθητές επικοινωνούσαν καλύτερα και συνεργαζόταν μόνον όταν δυο μαθητές (ή τρεις μερικές φορές) από αυτούς αναλάμβαναν την προετοιμασία και τη διδασκαλία της παρακάτω ενότητας, πάντα με τη βοήθεια και τις οδηγίες του καθηγητή. Να σημειωθεί εδώ ότι οι μέσοι όροι γραπτών ωριαίων εξετάσεων στο μάθημα της άλγεβρας από τον Οκτώβριο του 2013 έως Μάρτιο 2014 ήταν οι εξής:

- Τμήμα: A_1 αρχικός 10,38 τελικός 11,09
- Τμήμα: A_2 αρχικός 9,53 τελικός 12,25
- Τμήμα: A_3 αρχικός 3,7 τελικός 7,7.

Το συμπέρασμα έως εδώ είναι ότι έχουμε να κάνουμε με 58 μαθητές, με μεγάλο πρόβλημα στο σύνολο, όσον αφορά το γνωστικό τους υπόβαθρο ως προς την ύλη των μαθηματικών του γυμνασίου και μια **θετική παράμετρο** την προθυμία

όλων των μαθητών **για συμμετοχή** στο μάθημα, **την προτίμηση** τους να εργάζονται σε ομάδες (τα δυο πρώτα τμήματα) ενώ το τρίτο τμήμα και πιο αδύνατο προτιμά την **αλληλοδιδασκτική** μέθοδο.

Στην επανάληψη 8 διδακτικών ωρών την 6^η και 7^η διδακτική ώρα εργαστήκαμε πάνω στο παρακάτω φύλλο εργασίας:

ΓΕΛ Αγίων Θεοδώρων

Εργασία προετοιμασίας στην Άλγεβρα της Α΄ Τάξης Λυκείου

Ενότητα: επανάληψη

Ομάδα:

Ημερομηνία:

Μέλη:

A) Να εξηγήσετε τι σημαίνει η λέξη **μεταβλητή** στη γλώσσα μας;

B) Τι ονομάζουμε **μεταβλητή** στα μαθηματικά και τι μπορεί να σημαίνει μεταβλητή στα μαθηματικά;

Γ) Να γράψετε δυο παραδείγματα χρησιμοποιώντας μεταβλητή και για τις περιπτώσεις όπου η μεταβλητή δηλώνει:

Ένα σύμβολο

Μια παράμετρο

Έναν άγνωστο

Μια ανεξάρτητη μεταβλητή και μια εξαρτημένη

Έναν δείκτη

Δ) Τι σημαίνει άσκηση και τι πρόβλημα στα μαθηματικά; Να γράψετε ένα παράδειγμα άσκησης και ένα παράδειγμα προβλήματος

Να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα:

Πολυκράτης: «Ευτυχισμένε Πυθαγόρα, Ελικώνιε απόγονε των μουσών, πες μου σε παρακαλώ πόσοι φοιτούν στη σχολή σου;»

«Βεβαίως θα σου πω Πολυκράτη: οι μισοί ασχολούνται με τα μαθηματικά. Το τέταρτο εξάλλου καταπιάνεται με την έρευνα της αθάνατης φύσης, ενώ το ένα έβδομο παραμένει αμίλητο τελείως και σκέφτεται παραμύθια. Υπάρχουν και τρεις γυναίκες από τις οποίες ξεχωρίζει η Θεανώ.»

Παλατινή Ανθολογία

Σχολιασμός: Οι μαθητές απάντησαν με δυσκολία στην παραπάνω εργασία παίρνοντας βοήθεια από τον καθηγητή, από το βιβλίο των μαθηματικών τους και από το συμβουλευτικό τους φάκελο (φάκελος προαπαιτούμενων γνώσεων).

Όμως είχαν μια ουσιαστική επαφή και μια πρώτη εισαγωγή σε έννοιες που θα μας απασχολούσαν στη συνέχεια.

Το πείραμα: Ιανουάριος 2014

Ας δούμε τώρα πως οι μαθητές των τμημάτων A_1 και A_2 στις 16/1^{ου}/2014 εισήχθησαν στο 3^ο κεφάλαιο, «εξισώσεις» του σχολικού τους βιβλίου (το τμήμα A_3 διδάχτηκε την ενότητα σύμφωνα με τις οδηγίες του υπουργείου). Η διδασκαλία στην έννοια της εξίσωσης πραγματοποιήθηκε με το πρόβλημα 1.1 των Αριθμητικών του Διόφαντου και είχε τους **στόχους** οι οποίοι αναφέρθηκαν στην αρχή της ενότητας.

1^η διδακτική ώρα

Στις 13/1^{ου}/2014 δίνεται στους μαθητές των τμημάτων A_1 και A_2 το παρακάτω φύλλο εργασίας:

Εργασία 1 στην Άλγεβρα της Α τάξης Λυκείου- ΓΕΛ Αγίων Θεοδώρων

Ενότητα: Κεφάλαιο 3^ο

Ημερομηνία:

Ομάδα:

Μέλη:

Το πρώτο πρόβλημα από τα Αριθμητικά του Διόφαντου

Αλεξάνδρεια περίπου 250 μΧ

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.

1. Να μεταφράσετε στη μαθηματική γλώσσα το παραπάνω πρόβλημα
2. Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα

Αρχικές ερωτήσεις των εκπροσώπων κάθε ομάδας:

- Ποιος ήταν ο Διόφαντος;
- Τι θέλει να πει ο Διόφαντος;
- Πως θα μεταφράσουμε το πρόβλημα; Μπορούμε να πάμε στη φιλόλογο;

Έγινε αναφορά για τη ζωή, το έργο του Διόφαντου και για την Αλεξάνδρεια και στη συνέχεια οι εκπρόσωποι των ομάδων απευθύνθηκαν στις φιλόλογους του σχολείου για να τους μεταφράσουν το πρόβλημα. Οι ερωτήσεις συνεχίστηκαν:

- **Ομάδα (τετράδα)²:** να διαιρεθεί τι πάει να πει; Να τον διαιρέσουμε ή να τον χωρίσουμε;

- **Ομάδα Ευκλείδης και ΣΙΑ:** μπορεί να είναι ίδιοι αριθμοί, δηλαδή αν έχω το 100 να πάρω 50 και 50, ή όχι;
- **Ομάδα άγνωστοι χ:** έχει συγκεκριμένες λύσεις ή άπειρες;
- **Ομάδα $4κ + Α$:** δεν μας δίνει αριθμούς, πρέπει να βάλλω αγνώστους ή παραμέτρους ή και τα δυο;
- **Ομάδα $4κ + α$:** αυτό είναι πολύ μεγάλο πρόβλημα, σαν πρόβλημα δεν μας δίνει τίποτα
- **Ομάδα το ξέχασα:** διαιρώ και χωρίζω είναι το ίδιο;

Ο καθηγητής εξηγεί τι πάει να πει διαιρώ και χωρίζω, ενώ στις άλλες ερωτήσεις των εκπροσώπων των ομάδων παροτρύνει τους μαθητές να καταφύγουν στο συμβουλευτικό τους φάκελο.

Στη συνέχεια θα δούμε τις τελικές οκτώ απαντήσεις κάθε ομάδας χωριστά.

Ομάδα $4κ + Α$

1. Να μεταφράσετε το παραπάνω πρόβλημα.
 Ο αριθμός που έχει δοθεί να διαιρεθεί σε δύο άλλους αριθμούς που έχουν τη δοσμένη διαφορά.

2. Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα
 Ο αριθμός είναι 100
 Η διαφορά είναι 20
 $100 - α = 20 + α$
 $100 - 20 = α + α$
 $80 = 2α$
 $40 = α$

Σχολιασμός: οι 5 μαθητές παίρνουν τον αριθμό που δίνεται ίσο με 100, τη διαφορά των ζητούμενων 20, τον ένα άγνωστο $α$ (τον μικρότερο) και θέτουν τον άλλο $100 - α$ ή $20 + α$, κατασκευάζουν εξίσωση $100 - α = 20 + α$ και βρίσκουν το μικρότερο ίσο με 40.

Ομάδα Ευκλείδης και ΣΙΑ

1. Να μεταφράσετε το παραπάνω πρόβλημα.
 Δοσέντες αριθμοί να διαιρεθεί σε 2 άλλους που έχουν δοσμένη διαφορά

2. Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα
 Έστω δοσέντος αριθμός είναι 100 η διαφορά είναι 40
 Να βρούμε οι 2 αριθμοί
 Ο ένας είναι 100 το άλλο 40
 Ο μικρότερος είναι 60
 Νέα σκέψη
 Έστω k ο αριθμός που διαιρείται και y η διαφορά και μεγαλύτερου από τον μεγαλύτερο
 Αν x ο μικρός και a μεγάλες $x + y$
 Πρέπει $x + y + y = k$
 $x + x = k - y$
 $2x = k - y$
 a μικρά είναι $k - y$
 2

Σχολιασμός: Η πρώτη τους σκέψη είναι ο τρόπος του Διόφαντου, δοθείς αριθμός 100 και διαφορά 40 (σβησμένο). Η δεύτερη σκέψη είναι να χρησιμοποιήσουν γράμματα για τον δοθέντα αριθμό και τη δοθείσα διαφορά και για τον μικρότερο άγνωστο μεταβλητή x και φαίνεται πως ακολουθούν τον τρόπο σκέψης του Διόφαντου. Βρίσκουν το **μικρό** αριθμό $\frac{\kappa-\gamma}{2}$ αλλά δεν βρίσκουν το μεγάλο.

Ομάδα άγνωστοι χ

1. Να μεταφράσετε το παραπάνω πρόβλημα.
- Ο Αργύρης έχει αριθμούς να διαιρέσει σε δύο αριθμούς και έναν συν συν διαφορά
- Να διαφραστεί τον αριθμό σε δύο με την διαφορά του 2 να φέρει
2. Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα
- Μας δίνεται ο αριθμός 10 να χωριστεί σε 2 μέρη να έχουν ~~από~~ 2 μονάδες διαφορά
- π.χ 10
6 4
7 3
8 2
9 1
- Μη του έχουν 0 μονάδες διαφορά
- π.χ 10
5 5
- Αντικαθιστούμε στο συν αριθμό από την διαφορά και από τον διαμεριστή χωρίζουμε το μέγεθος της προέτασης την διαφορά σε από τον από τους 2 αριθμούς της προέτασης
- π.χ 10 - 2 = 8, μας δίνει ο αριθμός 10 να χωριστεί σε 2 μέρη με 2 μονάδες διαφορά
- $10 - 2 = \frac{8}{2} = 4$ και προσέτασε την διαφορά
- $4 + 2 = 6 \Rightarrow 10 - 4$

Σχολιασμός: Λύνουν το πρόβλημα με δοκιμές και ξεχωρίζουν δυο περιπτώσεις για τη διαφορά, να είναι μηδέν και να είναι διαφορετική από το μηδέν

Ομάδα (τετράδα)²

$\rightarrow$ γνωστός
Δίνονται ένας αριθμός να χωριστεί
σε 2 άλλους που ~~είναι~~ να έχουν
δοθείσα διαφορά.
 $\downarrow$ γνωστή

Παίρνουμε τον αριθμό 19 και τον δια-
ποιούμε και το αποτέλεσμα του θα βρού-
με με το 19 είναι $\begin{matrix} 19 : 4 \\ 19 : 3 \end{matrix}$

Όποτε μέσα το αποτέλεσμα θα
είναι $\begin{matrix} 4 \cdot 2 = 8 \\ 3 \cdot 2 = 6 \end{matrix}$

Αλλά δεν :

$5 = 3 + 2$

Παίρνουμε έναν αριθμό (5) και τον
χωρίζουμε σε δύο άλλους (3) και
(2). Έχουν γνωστή διαφορά γιατί το
(3) είναι μεγαλύτερο από το (2)

Σχολιασμός: η ομάδα αυτή είχε εξ αρχής την απορία για τη διαφορά μεταξύ διαιρώ και χωρίζω, φαίνεται ότι επηρεάζει την αρχική τους σκέψη, αφού πρώτα ξεκινούν **διαιρώντας** τον αριθμό που παίρνουν, το 12. Στη συνέχεια παίρνουν τις δυνάμεις των αριθμών 4 και 3 με τους οποίους διαίρεσαν το 12, δίνοντας την εξήγηση ότι η διαίρεση είναι αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού, αρα έχει σχέση με το πρόβλημα. Επίσης ενώ υπολογίζουν σωστά τη δύναμη 3^2 , δεν υπολογίζουν σωστά τη δύναμη 4^2 που την γράφουν ίση με 8 δηλαδή $4+4=4 \times 4$. Κάνουν και μια δεύτερη προσπάθεια να απαντήσουν στο πρόβλημα με βάση το **χωρίζω** έναν αριθμό το οποίο τους πάει στη διάσπαση του αριθμού και προφανώς το χωρίζω τους βοηθάει καλύτερα να απαντήσουν από ότι το διαιρώ, παίρνοντας εδώ τον αριθμό 5. Διαπιστώνεται επίσης πρόβλημα μεταφοράς ορολογίας με λέξη κλειδί το «**διελεῖν**».

Ομάδα 4κ+α

1. Να μεταφράσετε το παραπάνω πρόβλημα.

Ο αριθμός που έχει δοθεί να διαιρεθεί σε 2 αριθμούς που έχουν σταθερή διαφορά.

2. Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα

Ο αριθμός είναι 10
 Η διαφορά είναι 2
 $10 - 2 = 8$
 $8 : 2 = 4$
 $2 \times 4 = 8$

Σχολιασμός: προσεγγίζουν τον τρόπο του Διόφαντου

Ομάδα «το ξέχασα»

1. Να μεταφράσετε το παραπάνω πρόβλημα.

Δοθέντος αριθμός να διαχθεί σε 2 άλλους που έχουν σταθερή διαφορά.

η γ. έχω ο.τι ο δοθείς αριθμός είναι 10 η δε δωρο 2. να βρούμε οι 2 αριθμοί

2. Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα

1η λύση: ο δοθέντος αριθμός είναι ο 10 και οι δύο άλλοι είναι οι 7, 3. Τότε, εάν κάνουμε $7 - 3 = 4$ βρίσκουμε την διαφορά από το αρχικό, το 10, βρίσκουμε $10 - 4 = 6$. Το αποτέλεσμα το διαιρούμε με το 2 $6 : 2 = 3$ και έτσι βρίσκουμε το ένα από τους δύο αριθμούς που έχουν προκύψει από την διάσπαση του 10. Τέλος, αν αφαιρέσουμε το 3 από το 10 βρίσκουμε το άλλο αριθμό $10 - 3 = 7$. Επαληθεύεται.

2η λύση: Έστω 10 ε η λύση έχει 2 ε παραπάνω από τον Διόφαντο. Άρα δείχνει ο Διόφαντος: $10 - 2 = 8$, $8 : 2 = 4$ ε. Άρα ο Διόφαντος βγαίνει 2 + 4, ε. η λύση έχει 6 ε

Σχολιασμός: λύνουν το πρόβλημα με δοκιμές

Ομάδα 7

1. Να μεταφράσετε το παραπάνω πρόβλημα.

Ο αριθμός που έχει 50% να διαφέρει σε δύο (2) άλλους που έχουν τη δασική διαφορά

2. Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα

* ~~180~~ έχω τον αριθμό 180 και τον αριθμό 43.
Πρέπει να βρω ποιοι αριθμοί έχουν άθροισμα 180 και η διαφορά τους είναι 43. οι αριθμοί είναι ~~137 και 43~~
* Η λύση βρέθηκε με βάση την εφ'εξ. βασίδια.
αριθμοί 10 και 2. Να βρεθούν οι αριθμοί με άθροισμα 10 και διαφορά 2. οι αριθμοί είναι οι 6 και 4.

Σχολιασμός: λύνουν το πρόβλημα με δοκιμές

Ομάδα 8

Πρώτη περίπτωση: να χωριστεί σε δύο ισόσους
 $x = \frac{100}{2} + \frac{100}{2}$ η.χ. $100 = 50 + 50$
διαφορά = 0 με διαφορά 0

Δεύτερη περίπτωση: να χωριστεί σε δύο ατόμους αριθμούς
 $x = 40 + 4$ διαφορά = $40 - 4$ η.χ. $100 = 40 + 60$ διαφορά = 20
η.χ. $100 = 40 + 60$ διαφορά = 20

Τρίτη περίπτωση: ~~να χωριστεί σε δύο αριθμούς~~
να χωριστεί σε αριθμούς 100 με 101
εστιά του και ημελν
 $x = x + 0$ διαφορά = 0 η.χ. $100 = 100 + 0$
διαφορά = 0

Σχολιασμός: Διακρίνουν τρεις περιπτώσεις, επαληθεύουν με δοκιμές και προφανώς στο μυαλό τους έχουν μόνο τους φυσικούς αριθμούς και εργάζονται στο σύνολο των φυσικών, επομένως η διαίρεση του αριθμού σε δυο άλλους και η διαφορά των δυο άλλων θα πρέπει να είναι φυσικοί.

Συμπεράσματα

A) Λύνουν το πρόβλημα με δοκιμές οι 4 ομάδες:

Δοθείς αριθμός	Δοθείσα διαφορά	Ζητούμενοι αριθμοί
100	40	Δεν βρίσκουν αριθμούς
10	2	6, 4
10	0	5, 5
12	διαιρούν	4, 3 (12:4=3 και 12:3=4) δεν ολοκληρώνουν τη σκέψη τους
5	1	3, 2
10	4	7, 3
10	2	8, 2 (κάνουν λάθος)
180	43	137, 43
10	2	6, 4

Β) προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα με εξίσωση και μια ομάδα προσπαθεί να δημιουργήσει σύστημα:

Δοθείς αριθμός	Δοθείσα διαφορά	Άγνωστος	Εξίσωση	Ζητούμενοι αριθμοί
100	20	α	$100 - \alpha = 20 + \alpha$	40, 60
κ	γ	χ ο μικρός, $\chi + \gamma$ ο μεγάλος	$\chi + \chi + \gamma = \kappa$	Ο μικρός είναι: $\frac{\kappa - \gamma}{2}$ (δεν βρίσκουν τον μεγάλο)
100	20	α	$100 - \alpha = 20 + \alpha$	40 δεν βρίσκουν τον άλλο ζητούμενο
100 χ $\chi, \chi = y + \lambda$ 100 χ	0 0 $y - \lambda$ 0 0	$\frac{\chi}{2}, \frac{\chi}{2}$ Άγνωστοι y και λ	Το πάνε για σύστημα,	50, 50 $\frac{\chi}{2}, \frac{\chi}{2}$ Δεν ολοκληρώνουν τη σκέψη τους 100, 0 $\chi, 0$

Παρατηρούμε τελικά τα εξής:

- Οι 4 από τις 8 ομάδες εργάζονται με παραδείγματα, (προσέγγιση τρόπου δοκιμής και λάθους)
- Οι 3 από τις 8 ομάδες εργάζονται με έναν άγνωστο και κατασκευάζουν εξίσωση (προσέγγιση Διοφαντικού τρόπου)
- Η μια ομάδα προσπαθεί να κατασκευάσει σύστημα χωρίς να ολοκληρώνει τη λύση (προσέγγιση του τρόπου του Viète)

Μέχρις εδώ διαπιστώνονται τα εξής από τη συνολική εικόνα και την μαθησιακή πορεία των μαθητών της Α τάξης του εν λόγω Λυκείου:

- Οι μαθητές έχουν διδαχτεί τα εξής στις τάξεις του δημοτικού και του γυμνασίου, στο ζήτημα που ερευνούμε :
Μαθηματικά Δ δημοτικού $\Delta = \delta \cdot \pi + \nu$ (σ. 35)
μαθηματικά Ε δημοτικού αριθμόλεξο, σελίδα 10 , μήκος κύκλου: $\pi \cdot \delta = \pi \cdot 2\alpha$ (σ. 137)
μαθηματικά ΣΤ δημοτικού $\Delta = \delta \cdot \pi$, σελίδα 22, έννοια της μεταβλητής εξισώσεις, ζυγαριά (σ. 61 και 64)
μαθηματικά 1^{ης} τάξης του γυμνασίου: εισάγονται στη χρήση γραμμάτων και αγνώστων
μαθηματικά 2^{ης} τάξης του γυμνασίου χρησιμοποιούν γράμματα στις εξισώσεις και στις συναρτήσεις

μαθηματικά 3^{ης} τάξης του γυμνασίου εισάγονται στην έννοια της μεταβλητής και στη χρήση της για τη λύση εξισώσεων και προβλημάτων, επίσης έχουν διδαχθεί και συστήματα στη ίδια τάξη

Στην Α τάξη Λυκείου παρουσιάζουν μεγάλη δυσκολία στη χρήση και στις εφαρμογές της μεταβλητής. Επίσης αδυνατούν να μεταβούν από την γλώσσα της διατύπωσης του προβλήματος στην γλώσσα των μαθηματικών (βλέπε και αποτελέσματα διαγνωστικού τεστ)

- Οι μαθητές διδάχτηκαν στα μαθήματα επανάληψης τις σημασίες της μεταβλητής, κι όμως φάνηκε από τις απαντήσεις τους στο πρόβλημα 1 Ι του Διόφαντου, ότι ο χρόνος δεν ήταν αρκετός ώστε να σχηματιστεί ένα σταθερό γνωστικό υπόβαθρο για τις έννοιες μεταβλητή, εξίσωση, επίλυση προβλήματος ή ότι η διδασκαλία ήταν ακατάλληλη.
- Οι ομάδες εργάστηκαν χωρίς τη βοήθεια και την καθοδήγηση του καθηγητή στο μέρος που αφορούσε τη λύση του προβλήματος Ι 1, είχαν στη διαθεση τους μόνο το συμβουλευτικό τους φάκελλο και το σχολικό τους βιβλίο. Το αποτέλεσμα **δεν ήταν αυτό που περιμέναμε**, ο ρόλος και η καθοδήγηση του καθηγητή τελικά **κρίνεται** απαραίτητη στην πορεία του μαθητή προς την ανακάλυψη της γνώσης.
- Υπάρχει παραλληλισμός (η απόκτηση μιας εννοιας και η κατανόηση της παραλληλίζεται με εκείνην την οποία μας αποκαλύπτει η μελέτη της ιστορικής διαδρομής και εξέλιξης της έννοιας)

Ας δούμε τώρα τη συνέχεια του μαθήματος στις επόμενες δυο διδακτικές και τα αποτελέσματα της διδασκαλίας:

2^η και 3^η διδακτική ώρα

Εργασία 2 – Κεφάλαιο 3^ο

Το ταξίδι της εξίσωσης $\alpha x = \beta$ με $\alpha \neq 0$

Πρόβλημα 1 (Διόφαντος περίπου 250μΧ)

Δοσμένος αριθμός να διασπασθεί σε δυο αριθμούς, οι οποίοι να έχουν δοσμένη διαφορά

Πρόβλημα 2 (Nemore 1250μΧ)

Αν ένας δεδομένος αριθμός χωρίζεται σε δυο μέρη των οποίων δίνεται η διαφορά, τότε καθένα από τα μέρη προσδιορίζεται.

Πρόβλημα 3 (Viète 1593)

Αν δοθεί η διαφορά ανάμεσα σε δυο ρίζες (αγνώστους) και το άθροισμά τους να βρεθούν οι ρίζες.

Πρόβλημα 4 (Euler 1770)

Ζητείται να διασπαστεί ο α σε δύο μέρη, ώστε το μεγαλύτερο να υπερβαίνει το μικρότερο κατά b.

Ερωτήσεις

A) Να συγκρίνετε ως προς τη διατύπωση τα 4 παραπάνω προβλήματα και να τα λύσετε

B) Να λυθούν τα 4 προβλήματα με τον τρόπο με τον οποίο επιλύθηκαν από τους Διόφαντο, Nemore, Viete και Euler. (πραγματοποιείται προβολή των λύσεων)

B) Να συγκρίνετε τους 4 τρόπους λύσεων ως προς τις ομοιότητες και τις διαφορές τους. (Οι απαντήσεις δίνονται με καθοδήγηση του διδάσκοντα)

Γ) Ποια είναι τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το ταξίδι της εξίσωσης του Διόφαντου; (Οι απαντήσεις δίνονται με καθοδήγηση του διδάσκοντα)

Οι μαθητές με **καθοδήγηση** οδηγήθηκαν στην σύγκριση και στην επίλυση των προβλημάτων σύμφωνα με τον τρόπο του Διόφαντου, Nemore, Viete και Euler

Μέσα από τη μεθοδολογία του Διόφαντου αναδείχθηκαν οι κανόνες της ισότητας, οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την επίλυση εξισώσεων 1^{ου} βαθμού

Διαπιστώσαμε το ρόλο των συμβόλων και την εξέλιξη τους μέσα στο χρόνο

Καθοδηγήθηκαν μέσα από την πρώτη εξίσωση στην ιστορία των μαθηματικών, ώστε να δώσουν τη γενική μορφή της εξίσωσης 1^{ου} βαθμού και επίσης να τονίστηκε η χρήση των γραμμάτων (άγνωστος, παράμετρος) στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Στη συνέχεια τους δόθηκε η παρακάτω εργασία με στόχο την εφαρμογή και την εμπέδωση των εννοιών που διαπραγματευτήκαμε.

Εργασία για το σπίτι

Να επιλύσετε τα προβλήματα που ακολουθούν A) με τον τρόπο του Διόφαντου και B) με σύγχρονο τρόπο

Πρόβλημα 1 (I.2 των Αριθμητικών Διόφαντου)

Δοσμένος αριθμός να διαιρεθεί σε δυο άλλους οι οποίοι έχουν δοσμένο λόγο

Πρόβλημα 2 (I.3 των Αριθμητικών Διόφαντου)

Δοσμένος αριθμός να διαιρεθεί σε δυο άλλους οι οποίοι έχουν λόγο και διαφορά δοσμένη

Πρόβλημα 3 (I.4 των Αριθμητικών Διόφαντου)

Δοσμένος αριθμός να διαιρεθεί σε δυο άλλους οι οποίοι έχουν δοσμένο λόγο και διαφορά δοσμένα

**Παρατηρήσεις- συμπεράσματα από το παράδειγμα στην τάξη της Α Λυκείου,
«Δραστηριότητα- πρόβλημα, διδασκαλία εξίσωσης»**

Οι επίσημες διδακτικές οδηγίες προβλέπουν 9 διδακτικές ώρες για την διδασκαλία της εξίσωσης 1^{ου} βαθμού, της εξίσωσης $ax + b = 0$ και της εξίσωσης 2^{ου} βαθμού (Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων, Α γενικού λυκείου, σελίδες 79-93). Δεν υπάρχει ιστορική δραστηριότητα σχετική με την πρωτοβάθμια εξίσωση και στις οδηγίες για τη διδασκαλία της ενότητας προτείνονται οι διδακτικοί στόχοι:

E1.Διερευνούν τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης $ax + b = 0$.

E2.Αναγνωρίζουν το ρόλο της παραμέτρου σε μια παραμετρική εξίσωση

E3.Επιλύουν απλές παραμετρικές εξισώσεις (με μια παράμετρο) 1^{ου} βαθμού.

Το μάθημα «εξίσωση 1^{ου} βαθμού» πραγματοποιήθηκε μέσα σε 5 διδακτικές ώρες σε τρεις αντίστοιχες φάσεις:

1^η φάση: (μια διδακτική ώρα) οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες με το πρόβλημα I.1 των *Αριθμητικών* του Διόφαντου με μοναδική βοήθεια τον συμβουλευτικό τους φάκελο. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η λύση του Διόφαντου, ο κανόνας του Διόφαντου «από ομοίων όμοια», εξετάζεται η έννοια της ισότητας ως ισοδυναμίας και τέλος το πρόβλημα λύνεται με το σύγχρονο τρόπο.

2^η φάση: (δυο διδακτικές ώρες) μέσα από την ιστορική εξέλιξη της πρώτης εξίσωσης στην ιστορία των μαθηματικών (εξίσωση Διόφαντου) και την επίλυση του προβλήματος I σε διαφορετικές ιστορικές περιόδους (Διόφαντος, Nemo, Viète, Euler) δίνεται ο ορισμός της εξίσωσης 1^{ου} βαθμού, οι σημερινοί κανόνες για τις ιδιότητες της ισότητας ως ισοδυναμίας και τέλος τονίζεται και αναγνωρίζεται η αξία της χρήσης των μαθηματικών συμβόλων σήμερα, μέσα από την ιστορική εξέλιξη τους.

3^η φάση: οι μαθητές εργάστηκαν στο σπίτι με αντίστοιχα ιστορικά προβλήματα, τα οποία εξετάστηκαν στον πίνακα την 4^η διδακτική ώρα.

4^η φάση: (μια διδακτική ώρα) επανάληψη της ισότητας ως ισοδυναμίας, εξισώσεις που ανάγονται στη μορφή $ax + b = 0$, διερεύνηση, παραμετρικές εξισώσεις με μια παράμετρο.

Μετά το πείραμα: Μάιος 2014

Σημαντικά οφέλη: Στις επαναλήψεις της Άλγεβρας στο τέλος του σχολικού έτους, σχεδόν όλοι οι μαθητές όχι μόνο απαντούσαν κατ' ευθείαν ποιος ήταν ο άγνωστος και ποια η παράμετρος στην περίπτωση των εξισώσεων, αλλά ήταν σε θέση:

1. Να εφαρμόσουν τη σημασία της ισότητας ως ισοδυναμίας και όχι μόνο στις εξισώσεις πρώτου βαθμού αλλά και σε προβλήματα πιθανοτήτων και ακολουθιών (αριθμητική, γεωμετρική) στα οποία ο άγνωστος δεν ήταν το γνωστό τους x αλλά πιθανότητα ενδεχομένου ή όρος κάποιας προόδου κλπ.

2. Να ξεχωρίσουν την παράμετρο από τον άγνωστο (παραμετρικές εξισώσεις πρώτου βαθμού)

3. Να βρουν σωστά τη διακρίνουσα εξίσωσης δευτέρου βαθμού χωρίς να συγχέουν τους συντελεστές με τον άγνωστο x

4. Να διερευνούν την ίδια τη διακρίνουσα στις ασκήσεις στις οποίες δεν κατέληγαν σε αριθμό αλλά σε παραμετρική έκφραση, πρώτου βαθμού ή δευτέρου βαθμού ως προς την παράμετρο.

4. Να πραγματοποιούν με σχετική ευκολία τη μετάφραση μαθηματικών προβλημάτων στην μαθηματική γλώσσα και να προχωρούν στην κατασκευή εξίσωσης

5. Να αναγνωρίζουν με ευκολία τη χρήση της μεταβλητής ως δείκτη, στο κεφάλαιο των ακολουθιών και της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου. Γράφουν σωστά a_n , αντί του an , που συνήθως γράφουν και αναγνωρίζουν σωστά τη συμβολική σειρά των όρων μιας ακολουθίας.

Ιούνιος 2014: Οι 40 μαθητές των τμημάτων Α1 και Α2 λύνουν σωστά το θέμα Β στο διαγώνισμα των προαγωγικών εξετάσεων του Ιουνίου (σε αντίθεση με τους μαθητές του Α3, δυο μόνο το λύνουν), το οποίο κληρώθηκε από την τράπεζα θεμάτων και το οποίο ήταν το εξής:

Θέμα Β

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ . (13 μ.)

Β2. Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση. (12 μ.)

4.3..Συμπεράσματα – συζήτηση

Είναι γενικά αποδεκτή η **αναγκαιότητα** και η **προτεραιότητα** της Μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως επίσης αναγνωρίζεται η συμβολή της στο δύσκολο έργο της **μόρφωσης** και της **διαπαιδαγώγησης** των μαθητών μας. Από την άλλη μεριά είναι έντονος ο φόβος, η ανασφάλεια, η αρνητική φόρτιση των μαθητών μας, συναισθηματικές καταστάσεις που έχουν ως αποτέλεσμα την **αμφισβήτηση** της

χρησιμότητας των μαθηματικών από τους ίδιους τους μαθητές μας και τα επαναλαμβανόμενα λάθη. «Γιατί τα κάνουμε όλα αυτά; Που θα μας χρειαστούν;» Ποια όμως είναι τα **πραγματικά εμπόδια** τα οποία ενισχύουν όλα τα παραπάνω και δημιουργούν δυσκολίες στους μαθητές μας; Όπως είδαμε και όπως έχουν αποδείξει οι έρευνες πολλές από τις δυσκολίες εμπνευσμένων μαθηματικών αποτελούν και σημερινές δυσκολίες για τους μαθητές μας αλλά ακόμα και για εμάς που διδάσκουμε μαθηματικά στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στην εργασία μας προσπαθήσαμε να προβάλλουμε και να τονίσουμε τη διδακτική αξία της χρήσης ιστορικού πλαισίου στη διδασκαλία δύσκολων εννοιών της άλγεβρας, εξετάσαμε το ζήτημα του ιστορικού παραλληλισμού κατά τη διαδικασία της απόκτησης και της κατανόησης μιας νέας έννοιας από τους μαθητές, πραγματοποιήσαμε μια κριτική ανάλυση σχετικά με το πώς αξιοποιείται η ιστορία στη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω των ιστορικών δραστηριοτήτων που έχουν ενσωματωθεί στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών και τέλος εξετάσαμε το ζήτημα της μετάβασης από την αριθμητική στην άλγεβρα και με ποιο τρόπο και σε ποιο βαθμό οι μαθητές είναι σε θέση να κατασκευάσουν τη γνώση. Επίσης είδαμε ότι οι ερευνητές της διδακτικής έχουν στρέψει την προσοχή τους **στην ιστορική εξέλιξη** των μαθηματικών, με σκοπό να μελετήσουν ορισμένα διδακτικά φαινόμενα. Πολλοί βέβαια είναι εκείνοι που πιστεύουν ότι αυτό που είναι σημαντικό είναι το **τελικό προϊόν** της γνώσης, όπου μια έννοια έχει καθοριστεί και παραμένει अपαραάλλακτη.

Η διδακτική πορεία **«αξίωμα ορισμός, θεώρημα, πόρισμα, ασκήσεις, προβλήματα ενίστε»** μάλλον απευθύνεται σε μια κλειστή και απομονωμένη σκέψη, η οποία αποκλείει την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης από την εμπειρία, τη συμμετοχή και τελικά από τη χαρά και την ευτυχία της δημιουργίας. Όταν δε αυτό εφαρμόζεται στη διδασκαλία των μαθηματικών τότε μπροστά μας θα έχουμε μια τραγωδία με τα μαθηματικά να είναι οι βάρβαροι και μισητοί πρωταγωνιστές στο μυαλό και στη σκέψη των μαθητών μας. Και ποιος είναι αλήθεια εκείνος που θα μας βεβαιώσει ότι αυτή η καθορισμένη και απαραάλλακτη έννοια σε κάποιο μελλοντικό χρόνο δεν θα επαναπροσδιοριστεί και δεν θα λύνει άλλου είδους προβλήματα από αυτά που λύνει σήμερα; Έχουμε πολλά τέτοια παραδείγματα στα Μαθηματικά.

Κατά τη γνώμη μας η ιστορία των μαθηματικών όχι μόνο αποτελεί οδηγό για την **οργάνωση** της διδασκαλίας μιας δύσκολης έννοιας των μαθηματικών, όπως τις έννοιες που σχετίζονται με τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, αλλά μας δίνει διεξόδους και ιδέες σχετικά με τους στόχους και τους σκοπούς που θέτουμε για την παρουσίαση μιας διδασκαλίας στη σχολική τάξη. Αν κανείς ανατρέξει στη γένεση και στην εξέλιξη, ενός σημερινού κανόνα, (ή έννοιας ή

θεωρήματος κλπ), ο οποίος αν διδαχτεί μετωπικά μάλλον θα δημιουργήσει ένα θολό και σκοτεινό τοπίο στο νου των μαθητών μας με όλες τις δυσάρεστες συνέπειες που σχετίζονται με την κατανόηση, τότε θα έχει έναν σπουδαίο οδηγό για μια πετυχημένη διδασκαλία, δηλαδή:

- Πληροφορίες για την ιστορική εξέλιξη της έννοιας και τις δυσκολίες μέχρι τον καθορισμό της
- Υποστήριξη και βοήθεια στην οργάνωση μιας διδασκαλίας η οποία όχι μόνο δεν θα απομακρύνεται από τις δυνατότητες των μαθητών μας, αλλά θα εμπλέκει ενεργά τους μαθητές, θα προκαλεί το ενδιαφέρον τους και θα τους επιτρέπει να δημιουργούν και να εκφράζουν τις δικές τους σκέψεις και ιδέες.
- Ανάδειξη των εμποδίων που θα συναντήσουν οι μαθητές μας και ικανότητα για πρόβλεψη, επομένως δυνατότητα να αντιμετωπίσουμε αυτό που στη γλώσσα των μαθητών μας εκφράζεται ως «δεν καταλαβαίνω», «είναι δύσκολα», «έχω άγχος», «είναι μπερδευτικά», «έχω διακόψει τις σχέσεις μου με τα μαθηματικά» κλπ
- Τελικά βοήθεια και έμπνευση για την ανάπτυξη ενός κατάλληλου διδακτικού πλαισίου, για παράδειγμα μιας δραστηριότητας η οποία όχι μόνο θα προκαλέσει ευχάριστα όλους τους μαθητές, αλλά ίσως πετύχει και μια σημαντική ανατροπή ως προς την αρνητική στάση των μαθητών μας για τα μαθηματικά.

Ο διδακτικός σχεδιασμός δεν πρέπει να περιορίζεται απλώς στην ενσωμάτωση ιστορικών σημειωμάτων ή στην παρουσίαση της λύσης ιστορικών προβλημάτων ή ασκήσεων στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, τότε έχουμε να κάνουμε μόνο με μια έκθεση κατάστασης και όχι με δραστηριότητα και όπως διαπιστώσαμε τα εν λόγω σημειώματα όχι μόνο δεν βοηθούν στην κατασκευή μιας διδασκαλίας αλλά ή αγνοούνται ή διαβάζονται στην τάξη ή ίσως κάποιος εκπαιδευτικός να προβληματιστεί και να τα αξιοποιήσει διδακτικά.

Ας δούμε όμως τι προέκυψε συνολικά από όσα παρουσιάσαμε στην παράγραφο 4.2. και με βάση τον αρχικό στόχο, ο οποίος ήταν: να διδάξουμε την αξία των μαθηματικών συμβόλων, την εξίσωση πρώτου βαθμού και τις ιδιότητες της ισότητας με το πρόβλημα Ι.1 των Αριθμητικών του Διόφαντου:

Αρχικά διαπιστώθηκαν ορισμένες ενδείξεις για την ύπαρξη ιστορικού παραλληλισμού, αφού 4 από τις 8 ομάδες λύνουν το πρόβλημα με παραδείγματα αριθμών (προσέγγιση τρόπου δοκιμής και λάθους), 3 από τις 8 ομάδες λύνουν το πρόβλημα με χρήση αγνώστου (προσέγγιση Διοφαντικού τρόπου) και μια ομάδα προσπαθεί να δημιουργήσει σύστημα (προσέγγιση τρόπου Βιέτ).

Στα ερωτήματα: «**οι μαθητές χρησιμοποιούν τα γράμματα ως αγνώστους ή ως παραμέτρους για την επίλυση του προβλήματος 1.1 των Αριθμητικών και τελικά ανακαλύπτουν τη γνώση;**» παρατηρήθηκαν και διαπιστώθηκαν τα παρακάτω:

Οι μαθητές ξεκινούν την επίλυση του προβλήματος έχοντας διδαχτεί στο παρελθόν:

- εξισώσεις στα μαθηματικά του δημοτικού και του γυμνασίου
- μαθήματα επανάληψης σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν στο διαγνωστικό τεστ στην αρχή της σχολικής χρονιάς
- φύλλο εργασίας σχετικό με τις έννοιες που ήταν αναγκαίες για να απαντήσουν στο πρόβλημα του Διόφαντου. Επίσης **δεν τους παρέχεται καμία βοήθεια** από το διδάσκοντα κατά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος στην 1^η φάση της δραστηριότητας, αφού **κρίθηκε** ότι είχαν τα εφόδια ώστε να φτάσουν στην επίλυση του προβλήματος.

Οι μαθητές αν και είναι προετοιμασμένοι ώστε στην **1^η φάση** να οδηγηθούν σε εξίσωση πρώτου βαθμού και να λύσουν το πρόβλημα **δεν ολοκληρώνουν** και επομένως δεν δίνουν τελικά σωστή απάντηση όλες οι ομάδες όπως περιμέναμε. Προφανώς η προηγούμενη εμπειρία και η διδασκαλία δεν ήταν αρκετή. Η πεποίθησή μας ότι «**οι μαθητές ανακαλύπτουν τη γνώση**» σημαίνει στην περίπτωση μας «**οι μαθητές δεν ανακάλυψαν τη γνώση αλλά οδηγήθηκαν στη γνώση**» αφού το πρόβλημα λύθηκε ολοκληρωμένα στον πίνακα με τις οδηγίες του καθηγητή, (1^η φάση και 2^η φάση της διδασκαλίας). Δεν είναι απλή η διαδικασία της κατασκευής της γνώσης πολύ δε περισσότερο αυτό που προβάλλεται ως: «ο μαθητής ανακαλύπτει τη γνώση». Στη δική μας περίπτωση **θεωρήθηκε αρχικά** ότι οι μαθητές είχαν όλα τα **εφόδια** και το κατάλληλο **γνωστικό υπόβαθρο** για να οδηγηθούν στη λύση του προβλήματος. Αυτό δεν πραγματοποιήθηκε παρά μόνο με συνεχείς παρεμβάσεις και διάλογο μεταξύ μαθητών και καθηγητή (τέλος 1^{ης} φάσης και 2^η φάση διδασκαλίας).

Το ερώτημα με ποιο τρόπο πραγματοποιείται η μετάβαση από την αριθμητική στη σχολική άλγεβρα από τη σκοπιά της διδακτικής παραμένει, η επιλογή δε του τρόπου με τον οποίο θα διερευνήσει κανείς το εν λόγω ζήτημα και θα οργανώσει τη διδασκαλία της σχολικής άλγεβρας έχει σοβαρές επιπτώσεις στην ίδια τη διδασκαλία της. Η πορεία της διδασκαλίας αριθμητική, μεταβατικό στάδιο προ-άλγεβρας, άλγεβρα είναι ο καταλληλότερος τρόπος ώστε να οικοδομηθούν οι γνώσεις των εννοιών που εμποδίζουν την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα και εν συνεχεία να ακολουθήσει η συστηματική μελέτη της άλγεβρας; Μια απάντηση στο δίλημμα αυτό δίνεται από τον N.Balacheff. Κατ' αρχάς ο ρόλος, η καθοδήγηση, η υποστήριξη του διδάσκοντα είναι ουσιαστικά και

αποφασιστικής σημασίας για τις στάσεις και τις ενέργειες των μαθητών μας. Το «διδακτικό συμβόλαιο» είναι αυτό που θα επιτρέψει στους μαθητευόμενους όχι μόνο να καταλάβουν «το είδος των κανόνων» που θα επιτρέψει ο διδάσκων, αλλά «να τοποθετήσουν σωστά τη σκέψη τους» και «να παίξουν σωστά το παιγνίδι της άλγεβρας». Η μετάβαση από τη αριθμητική στη σχολική άλγεβρα συνεπάγεται **διαπραγμάτευση** και αποδοχή της **ρήξης** με την αριθμητική. Όπως στην περίπτωση της γραμμικής άλγεβρας και γενικά της μαθηματικής απόδειξης δεν υπάρχει δυνατή είσοδος στον κόσμο της άλγεβρας χωρίς δυνατή ώθηση και καθοδήγηση από τον διδάσκοντα. **Δεν υπάρχει φυσικός τρόπος μετάβασης ούτε και εύκολη πρόσβαση, ώστε από τον προβληματισμό του μαθητή να μεταβούμε στον μαθηματικό προβληματισμό**⁵⁵. Φαίνεται ότι στην έρευνά μας επαληθεύονται οι ενδοιασμοί του Balacheff σχετικά με τη δυνατότητα των μαθητών να «**ανακαλύψουν**» το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα, καθώς επίσης και με την άποψη ότι μια διέξοδος στο ζήτημα αριθμητική – σχολική άλγεβρα και πως θα πραγματοποιηθεί η διδασκαλία είναι να αναζητήσει κανείς την αριθμητική και τις απαρχές της άλγεβρας στις αρχαίες μαθηματικές πρακτικές, δηλαδή να αξιοποιήσει τη διδακτική ισχύ που μας παρέχει η ύπαρξη ιστορικού πλαισίου σε εκείνες τις έννοιες που είναι πλέον διαπιστωμένα εμπόδια και απαιτούν ρήξη με την προηγούμενη γνώση.

Στάσεις και συναισθήματα των μαθητών μετά το διδακτικό μας πείραμα

Ακολουθώντας αντίθετη πορεία από την συνηθισμένη ορισμός, κανόνες, αλγόριθμος, εφαρμογές, για την εισαγωγή στην πρωτοβάθμια εξίσωση, δηλαδή ακολουθώντας τα στάδια εξέλιξης της εξίσωσης πετύχαμε τη συναισθηματική φόρτιση και το ενδιαφέρον των μαθητών μας ως προς την ανθρώπινη πλευρά των μαθηματικών. Εντυπωσιάστηκαν όταν είδαν ότι ο Διόφαντος ξεκίνησε όπως και εκείνοι (4 ομάδες) με τον αριθμό 100, «*πήραμε το 100 όπως και ο Διόφαντος!!!*» και αυτό ήταν η αφορμή για πολλά σχόλια και συζητήσεις μεταξύ τους, αλλά και μερικοί από αυτούς ταύτισαν τη σκέψη τους με εκείνη του Διόφαντου, αναγνώρισαν ότι και οι ίδιοι έχουν μαθηματικές ικανότητες. Αυτό κατά τη γνώμη μας είχε σαν αποτέλεσμα στη συνέχεια να προτιμούν τη χρήση του «**από ομοίων όμοια**» και να το επαναλαμβάνουν, παρά τη συνταγή που ήδη γνώριζαν από το γυμνάσιο «χωρίζω γνωστούς από αγνώστους».

Οι μαθητές διατυπώνοντας τις ερωτήσεις τους και τις απόψεις τους, όπως για παράδειγμα, «*για ποιο λόγο ο Διόφαντος δεν σκέφτηκε όπως ο Βιέτ; Ο Euler ήταν πιο έξυπνος από τους προηγούμενους;*», φαίνεται πως αναγνώρισαν ότι η μαθηματική γλώσσα και η μαθηματική σκέψη δεν αναπτύσσεται από τη μια στιγμή στην άλλη, επίσης ότι τα μαθηματικά σύμβολα όπως διατυπώθηκε από έναν μαθητή μας βοηθούν «*να γράφουμε σύντομα και έξυπνα και να περιγράφουμε (τα μαθηματικά)*». Ένας άλλος μαθητής δε έκανε την εξής

σύγκριση: «στην έκθεση για να εξηγήσουμε κάτι γράφουμε 100 λέξεις και περισσότερες, γεμίζουμε σελίδες, ενώ στα μαθηματικά γράφουμε ένα σύμβολο και εξηγούμε 100 λέξεις!!!!»

Είναι φανερό ότι αν και ακολουθήσαμε την εξίσωση «εν τω γεννάσθαι», όσον αφορά το σχεδιασμό της διδασκαλίας, όχι μόνο αυτός ο τρόπος για τη συγκεκριμένη διδακτική ενότητα δεν κούρασε τους μαθητές και δεν χαρακτηρίστηκε τελικά ως υπερβολικός, χρονοβόρος και άσκοπος τρόπος προσέγγισης της πρωτοβάθμιας εξίσωσης, **αλλά:**

οι μαθητές και των δυο τμημάτων ζήτησαν τα μαθήματα άλγεβρας και γεωμετρίας να γίνονται με αυτόν τον τρόπο, πράγμα που μας επιτρέπει να σκεφτούμε και να αναρωτηθούμε αν θα ήταν σκόπιμο να υπάρχει στο ωρολόγιο πρόγραμμα χωριστό μάθημα σε κάθε τάξη του γυμνασίου και για τις τάξεις Α και Β λυκείου, το οποίο θα περιελάμβανε δραστηριότητες μέσα από την ιστορία των μαθηματικών και μέσα από τις οποίες θα διδάσκονται ακριβώς οι έννοιες που εδώ και χρόνια αποτελούν σκοτεινό τοπίο για τους μαθητές. Στη βάση δε όπου η μαθηματική εκπαίδευση κρίνεται αναγκαία, η ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες, με αφετηρία το απλό και προσανατολισμό προς το πιο σύνθετο λειτουργεί σίγουρα ως μαθηματική προπόνηση της σκέψης των μαθητών μας. Αυτό θα βοηθούσε πραγματικά τους μαθητές μας όχι μόνο να ξεκαθαρίσουν όλες εκείνες τις μαθηματικές έννοιες που και στο παρελθόν δεν ήταν φωτεινές, αλλά και να είναι σε θέση να επιλύουν προβλήματα που αφορούν όχι μόνο τα μαθηματικά αλλά και οποιονδήποτε κλάδο.

Τελικά στα σχολεία μας **διδάσκουμε** πολλά μαθηματικά σε όλες τις βαθμίδες, αυτό δεν είναι απαραίτητα αρνητικό όταν υπάρχει το κατάλληλο διδακτικό υλικό και η κατάλληλη διδασκαλία. Η βασική **εικόνα** των μαθητών μας είναι ότι τα μαθηματικά είναι μόνο τύποι, κανόνες, σχήματα, θεωρήματα, προτάσεις και τα συναισθήματα τους αρνητικά εκτός ελάχιστων εξαιρέσεων. Είναι θλιβερό οι μαθητές μας να μην γνωρίζουν και να μη δικαιολογούν για παράδειγμα πως φτάσαμε και γιατί φτάσαμε στον άγνωστο x και στην εξίσωση, πως φτάσαμε στον αρνητικό αριθμό, τι είναι ο αριθμός π , πως φτάσαμε στον τύπο $2\pi r$ κλπ.

«Όπως όλοι οι μαθητές στον κόσμο, ο Ιωνάθαν είχε συναντηθεί με το Θαλή αρκετές φορές. Κάθε φορά όμως, ο καθηγητής του μιλούσε για το θεώρημα, ποτέ για τον άνθρωπο. Άλλωστε στο μάθημα των μαθηματικών δεν συζητούσαν ποτέ για ανθρώπους. Που και που έβγαине κάποιο όνομα στην επιφάνεια, Θαλής, Πυθαγόρας, Πασκάλ, Ντεκάρτ ήταν όμως ένα σκέτο όνομα. Ξαν όνομα τυριού ή σταθμού μετρό. Δεν μιλούσαν ποτέ για το πότε ή το που συνέβη κάτι. Οι μαθηματικοί τύποι και οι αποδείξεις απλώς

προσγειωνόντουσαν στον πίνακα. Σαν να μην τους είχε ποτέ κανείς δημιουργήσει, σαν να ήταν πάντα εκεί όπως τα βουνά και τα ποτάμια. Εδώ και τα βουνά και τα ποτάμια είχαν κάποια ιστορία, κάποια αρχή. Θα έλεγε κανείς ότι τα θεωρήματα ήταν διαχρονικότερα από τα βουνά και τα ποτάμια!»⁵⁶.

Παράρτημα-Πρόταση

Οι μεταφράσεις του έργου του Διόφαντου (βλέπε παράγραφο 2.2,) στα Λατινικά έδωσαν ισχυρή ώθηση στην εξέλιξη των μαθηματικών καθώς επηρέασαν σημαντικά πρωτοπόρους επιστήμονες όπως οι Γάλλοι Francois Viete (1540-1603), Rene Descartes (1596-1650) και Pierre Fermat (1601-1655). Είναι χαρακτηριστικό ότι το έργο του Διόφαντου ταυτίστηκε άμεσα με την άλγεβρα που είχε αρχίσει να γίνεται γνωστή στη Δυτική Ευρώπη. Οι Ευρωπαίοι επιστήμονες την εποχή του Ουμανισμού, όπου η αρχαία Ελληνική σκέψη αναβιώνει σε όλους τους τομείς, αισθάνονται αμηχανία για τη θεώρηση της Ισλαμικής προέλευσης της Άλγεβρας και στρέφουν το ενδιαφέρον τους στη μελέτη του έργου του Διόφαντου. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο Jacob Klein⁵⁷ (1899-1978) αναφέρει τις απόψεις του Simon Stevin (1548-1620) για την Αστρονομία, την Άλγεβρα, τη Γεωμετρία, τη χημεία κλπ. . Ειδικά για την Άλγεβρα γράφει: «η Άλγεβρα όπως την έχουμε γνωρίσει μέσα από τα Αραβικά βιβλία και η οποία εκπροσωπεί παράξενα απομεινάρια μιας σοφής εποχής, δεν άφησε ίχνη στα γραπτά των Χαλδαίων, των Εβραίων, των Ρωμαίων, ούτε ακόμα στα γραπτά των Ελλήνων» και προσθέτει ρητά: **«ο Διόφαντος είναι μοντέρνος»**. Στις αναφορές του για την προέλευση της άλγεβρας εξαιρεί το Διόφαντο. Ο Stevin είχε μια συγκεκριμένη άποψη για την άλγεβρα την οποία απέδιδε κυρίως στους Έλληνες. Αργότερα ο Luis Lagrange (1736-1813) ανακηρύσσει το Διόφαντο **«πατέρα της άλγεβρας»** Ίσως αυτοί οι χαρακτηρισμοί είναι υπερβολικοί για το Διόφαντο, ίσως εκ των υστέρων αποδειχθούν **φτωχοί**. Έως σήμερα συνεχίζεται η μελέτη του Διόφαντου καθώς επίσης και η επίδραση του έργου του.

Αρχικά θα εξετάσουμε μερικά σημεία της εισαγωγής των Αριθμητικών, στα οποία αναδεικνύεται η μέθοδος διδασκαλίας του Διόφαντου. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε κάποια από τα προβλήματα των Αριθμητικών του Διόφαντου ακολουθώντας το δικό του τρόπο διδασκαλίας όπως περιγράφεται στην εισαγωγή των Αριθμητικών με σκοπό την αξιοποίηση του έργου του στη διδασκαλία της σχολικής άλγεβρας. Παραθέτουμε το Αρχαίο κείμενο και την αντίστοιχη μετάφραση όπως αποδίδεται από τον Ε. Σ. Σταμάτη⁵⁸.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Α.

Τὴν εὕρεσιν τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς προβλημάτων, τιμιώτατέ μοι Διονύσιε, γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, [ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον] ἐπειράσθην, ἀρξάμενος ἀπ' ὧν συνέστηκε τὰ πράγματα θεμελίων, ὑποστήσαι τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν.

Ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γινώριμόν ἐστιν, δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσιν εἰσιν αἱ τῶν ἀρχομένων ψυχαί, ὅμως δ' εὐκατάληπτόν σοι γενήσεται, διὰ τε τὴν σὴν προθυμίαν καὶ τὴν ἐμὴν ἀπόδειξιν· ταχέϊα γὰρ εἰς μάθῃσιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδάχῃν.

καλῶς οὖν ἔχει ἐναρχόμενον τῆς πραγματείας συνθέσει καὶ ἀφαιρέσει καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἶδη γεγενησθῆναι, καὶ πῶς εἶδη ὑπάρχοντα καὶ λείποντα μὴ ὁμοπληθῆ προσθῆς ἑτέροις εἶδεσιν,

Φιλοτεχνείσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδεχῇται, ἕως ἂν ἐν εἶδος ἐνὶ εἶδει ἴσον καταλειφθῇ· ἥστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἶδων ἴσων ἐν καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται.

Νῦν δ' ἐπὶ τὰς προτάσεις χωρήσωμεν ὁδόν, πλείστην ἔχοντες τὴν ἐπ' αὐτοῖς τοῖς εἶδεσι συνηθροισμένην ὕλην. πλείστον δ' ὄντων τῶ ἀριθμῷ καὶ μεγίστων τῶ ὄγκῳ, καὶ διὰ τοῦτο βραδέως βεβαιουμένων ὑπὸ τῶν παραλαμβανόντων αὐτὰ καὶ ὄντων ἐν αὐτοῖς δυσμνημονεύτων, ἐδοκίμασα τὰ ἐν αὐτοῖς ἐπιδεχόμενα διαιρεῖν, καὶ μάλιστα τὰ ἐν ἀρχῇ ἔχοντα στοιχειωδῶς ἀπὸ ἀπλουστέρων ἐπὶ σκολιώτερά διελεῖν ὥς προσήκεν. οὕτως γὰρ εὐόδοντα γενήσεται τοῖς ἀρχομένοις, καὶ ἡ ἀγωγή αὐτῶν μνημονευθήσεται, τῆς πραγματείας αὐτῶν ἐν τρισκαίδεκα βιβλίοις γεγενημένης.

Μετάφραση

Φίλιτατέ μου Διονύσιε, γνωρίζων τὸ ἐνδιαφέρον σου νὰ μάθῃς τὴν λύσιν τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, προσεπάθησα, ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν ἀπλῶν στοιχείων ἀπὸ τῶν ὁποίων συνίστανται τὰ πράγματα, νὰ ἐκθέσω τὴν φύσιν καὶ τὴν δύναμιν, ἣ ὁποία ὑπάρχει εἰς τοὺς ἀριθμούς.

Ἴσως μὲν λοιπὸν τὸ πρᾶγμα νὰ φαίνεται δυσκολώτερον, ἐπειδὴ δὲν σοῦ εἶναι ἀκόμη γινώριμον, διότι αἱ ψυχαὶ τῶν ἀρχαρίων ἀμφιβάλλουσι εἰς τὴν ἐπιτυχίαν, ὅμως δὲ θὰ σοῦ γίνη εὐκατάληπτον, καὶ διὰ τὴν προθυμίαν σου καὶ διὰ τὴν ἀπόδειξίν μου· διότι ὁ ἐπιθυμῶν ἀντιλαμβάνεται ταχέως, ὅταν τύχῃ διδάχῃς.

Εἶναι καλὸν λοιπόν, ἐν ᾧ ἀρχίζεις νὰ μελετᾷς τὴν πραγματείαν νὰ ἀσκηθῇς εἰς τὴν πρόσθεσιν, τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τοὺς συναφεῖς πρὸς τὰς ἀνωτέρω παραστάσεις, καὶ πῶς δύνασαι νὰ προσθέσῃς παραστάσεις ἀλγεβρικὰς θετικὰς

Νὰ ἀσκηθῇς δὲ κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἰς τοὺς μετασχηματισμοὺς τῶν ἐξισώσεων, ἐὰν παρίσταται ἀνάγκη, μέχρις ὅτου εἰς ἕκαστον μέλος τῆς ἐξισώσεως ἀπομένῃ ἀνὰ εἰς ἕρος· ὕστερον δὲ θὰ σοῦ δείξωμεν πῶς λύεται ἡ ἐξισώσις, ἐὰν εἰς ἕκαστον μέλος (τῆς ἰσότητος) ἔχει ἀπομένει ἀνὰ εἰς ἕρος.

Τώρα δὲ θὰ προχωρήσωμεν εἰς τὰ προβλήματα, ἔχοντες συνηθροισμένον πολὺ συναφὲς ὕλικόν. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι πολλοὺς ὁ ἀριθμὸς τούτων καὶ εἶναι λίαν ἐκτεταμένα, καὶ ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου εἶναι βραδέως ἀφομοιώσιμα καὶ δυσμνημόνευτα, προσεπάθησα νὰ διαιρέσω τὰ δυνάμενα νὰ διαιρεθῶν, καὶ μάλιστα τὰ ἐν ἀρχῇ ἐκτιθέμενα, νὰ διαιρέσω ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν ἀπλουστέρων πρὸς τὰ δυσκολώτερα, ὥς ἦτο πρέπον. Διότι τοιουτοτρόπως θὰ γίνουσι εὐκολονόητα εἰς τοὺς ἀρχαρίους, καὶ ἡ προέλευσις αὐτῶν θὰ ἀποτυπωθῇ εἰς τὴν μνήμην, ἐν ᾧ ἡ διαπραγμάτευσις αὐτῶν ἔχει γίνεῃ εἰς δέκα τρία βιβλία.

Αλλά ποια εἶναι τα ἰσχυρά σημεῖα τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ Διόφαντου;

1. Απευθύνεται σ' ἓναν μαθητὴ με ἐντονὴ τὴν ἐπιθυμίαν νὰ μάθῃ νὰ λύνει προβλήματα

2. Θα του δείξει αρχικά τη δύναμη των αριθμών και όλα τα εργαλεία (συμβολισμούς, πράξεις, κανόνες) που θα του χρειαστούν για να μάθει να λύνει προβλήματα
3. Με την προθυμία του μαθητή και την διδαχή του Διόφαντου η μάθηση θα γίνει εύκολη υπόθεση για το μαθητή
4. Προτρέπει το μαθητή του να εξασκηθεί στα παραπάνω, ώστε όταν προκύψει μια εξίσωση και να είναι σε θέση να την λύσει
5. Τέλος θα προχωρήσει στη λύση προβλημάτων τα οποία είναι πολλά στον αριθμό και εκτεταμένα στα 13 κεφάλαια, όμως θα ξεκινήσει από τα απλά και θα προχωρήσει στα δύσκολα, όπως τα έχει χωρίσει προκειμένου να τα διδάξει, ώστε να είναι ευκολονόητα στους αρχάριους και να αποτυπωθούν στην μνήμη.

Ο Διόφαντος όπως είχε υποσχεθεί στον Διονύσιο (κατά πάσα πιθανότητα πρόκειται για τον επίσκοπο της Αλεξάνδρειας, ο οποίος έζησε τα μέσα του 3^{ου} αιώνα), ξεκινάει με απλά προβλήματα και προχωράει στα δύσκολα. Οι εξισώσεις του ταξινομούνται σε δυο κατηγορίες, αυτές που έχουν μόνο ένα είδος σε κάθε μέλος (είναι γραμμικές αλλά και της μορφής $x^2 = 4$) και σε αυτές που έχουν δυο είδη στο ένα μέλος και ένα είδος στο άλλο μέλος για παράδειγμα: $6x^2 + 3x = 7$. Εμείς θα ασχοληθούμε με εκείνα τα προβλήματα του Διόφαντου, τα οποία είναι δυνατόν να τα χρησιμοποιήσουμε στη διδασκαλία της μεταβλητής και των εξισώσεων 1^{ου} βαθμού και 2^{ου} βαθμού και θα συγκρίνουμε τον τρόπο του Διόφαντου με τον τρόπο των μεταγενέστερων^{27α}

Πρόβλημα Ι-1

Α μέρος: γενική διατύπωση του προβλήματος

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.

Δοσμένος αριθμός να διασπασθεί σε δυο αριθμούς, οι οποίοι να έχουν δοσμένη διαφορά

Β μέρος: Επιλογή αριθμητικών δεδομένων

Ἐστω δὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ $\overline{\varrho}$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ $\overline{M\mu}$. εὑρεῖν τοὺς ἀριθμοὺς.

Ἐστω ότι ο δοσμένος αριθμός είναι 100, η δε διαφορά είναι 40. Να βρεθούν οι αριθμοί.

Γ μέρος: εισαγωγή του αγνώστου, κατασκευή υποστάσεων και δημιουργία εξίσωσης

Τετάρχθω ὁ ἐλάσσων $\leq \bar{a}$. ὁ ἄρα μείζων ἔσται $\leq \bar{a}\bar{M}\bar{\mu}$. συναμφοτέροισι ἄρα γίνονται $\leq \bar{\beta}\bar{M}\bar{\mu}$. δέδονται δὲ $\bar{M}\bar{\varrho}$.

$\bar{M}$ ἄρα $\bar{\varrho}$ ἴσαι εἰσὶν $\leq \bar{\beta}\bar{M}\bar{\mu}$.

Ας τεθεῖ $1x$ ο μικρότερος, τότε ο μεγαλύτερος θα είναι $1x + 40$, ἄρα το ἄθροισμά τους είναι $2x + 40$, δόθηκε δε ἴσο με 100. Ἄρα είναι $100 = 2x + 40$

Η πρώτη εξίσωση στην ιστορία των μαθηματικών:

$\bar{M}$ ἄρα $\bar{\varrho}$ ἴσαι εἰσὶν $\leq \bar{\beta}\bar{M}\bar{\mu}$.

Δ μέρος: μετασχηματισμός και επίλυση της εξίσωσης

καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν $\bar{\varrho}$, $\bar{M}\bar{\mu}$, [καὶ <ἀπὸ> τῶν $\bar{\beta}$ ἀριθμῶν καὶ τῶν $\bar{\mu}$ μονάδων ὁμοίως μονάδας $\bar{\mu}$.] λοιποὶ $\leq \bar{\beta}$ ἴσοι $\bar{M}\bar{\xi}$. ἕκαστος ἄρα γίνεται $\leq$, $\bar{M}\lambda$.

Και ἀπὸ ὅμοια ἀφαιρῶ τα ὅμοια. Αφαιρῶ και ἀπὸ τα δυο μέλη τις 40 μονάδες. Μένουν οι $2x$ ἴσοι με 60 ἄρα ο καθένας γίνεται 30

Ε μέρος : η λύση του προβλήματος

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $\bar{M}\lambda$, ὁ δὲ μείζων $\bar{M}\varrho$, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

Έρχομαι στις υποστάσεις. Ο μικρότερος είναι το 30, ο μεγαλύτερος το 70 και η ἀπόδειξη φανερή. Είδαμε μια πρώτη ἀνάλυση του προβλήματος στην παράγραφο 2.3, στη συνέχεια θα συγκρίνουμε ως προς τη διατύπωση και την επίλυση του παραπάνω προβλήματος με την διατύπωση και την επίλυση που δίνουν οι Nemore (περίπου 1250μΧ), F. Viete (1593) και L. Euler (1770)

Πρόβλημα I.1 – Διατύπωση και επίλυση ἀπὸ τον Nemore

Αν ἓνας δεδομένος ἀριθμὸς χωρίζεται σε δυο μέρη των οποίων δίνεται η διαφορά, τότε καθένα ἀπὸ τα μέρη προσδιορίζεται.

Σύγχρονος συμβολισμός:
$$\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha - \beta = d \end{cases}$$

Επίλυση ἀπὸ τον Nemore (επίλυση προβλήματος ἀπὸ ἓναν Δυτικό-Ευρωπαϊό)	Σύγχρονος συμβολισμός- σχόλια
Επειδὴ το μικρότερο μέρος και η διαφορά δίνουν το μεγαλύτερο, ἔτσι το μικρότερο μέρος μαζί με τη διαφορά δίνουν το σύνολο	$\begin{aligned} \beta + d &= a \\ \beta + \beta + d &= s \end{aligned}$
Αφαιρούμε λοιπὸν τη διαφορά ἀπὸ το σύνολο και μένει το διπλάσιο του μικρότερου μέρους	$2\beta = s - d$
Απὸ αὐτό ὅταν διαιρεθεῖ με το δύο, θα προσδιοριστεῖ το μικρότερο μέρος, επομένως και το μεγαλύτερο	$\beta = (s - d) : 2$
Παράδειγμα: ἔστω ὅτι το 10 διαιρεῖται σε δυο μέρη η	Εἶναι ἐπηρεασμένος ἀπὸ τους Ἀραβες

διαφορά των οποίων είναι 2. Όταν αυτή αφαιρείται από το 10 μένει 8, το μισό του οποίου είναι 4 και είναι το μικρότερο μέρος.	και διαπιστώνεται πισωγύρισμα στην αναπαράστασή του. Όμως η λύση του είναι καλύτερη από αυτήν του Διόφαντου.
--	--

Πρόβλημα Ι.1 – Διατύπωση και επίλυση από τον Viète

Αν δοθεί η διαφορά ανάμεσα σε δυο ρίζες (αγνώστους) και το άθροισμά τους να βρεθούν οι ρίζες.

Επίλυση προβλήματος από τον Viète	Σχόλια
Έστω B η διαφορά ανάμεσα στους αριθμούς και D το άθροισμά τους. Πρόκειται να βρεθούν οι αριθμοί. Έστω A ο μικρότερος αριθμός, τότε ο μεγαλύτερος θα είναι $A + B$ Άρα το άθροισμα των αριθμών θα είναι $2A + B$ Αλλά αυτό δόθηκε ως D. Επομένως $2A + B = D$ και με αντίθεση (δηλαδή μεταφορά από το ένα μέρος στο άλλο) $2A = D - B$. Διαιρώντας με το 2 βρίσκουμε $A = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}B$ ή έστω E ο μεγαλύτερος αριθμός. Τότε ο μικρότερος θα είναι $E - B$. Άρα το άθροισμα θα είναι $2E - B$. Αλλά αυτό δόθηκε ως D. Επομένως $2E - B = D$ και με αντίθεση $2E = D + B$. Διαιρώντας με το 2 βρίσκουμε $E = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}B$ Κανόνας: Άρα δεδομένης της διαφοράς μεταξύ δυο ριζών και του αθροίσματός τους οι ρίζες μπορούν να βρεθούν επειδή: «το ημιάθροισμα των ριζών μείον η ημιδιαφορά τους είναι ίσο με τη μικρότερη ρίζα και το ημιάθροισμα των ριζών συν η ημιδιαφορά τους είναι ίσο με τη μεγαλύτερη ρίζα» Αν το B είναι 40 και το D 100, τότε το A είναι 30 και το E 70.	Ο Viète είχε μάθει πολύ καλά Αρχαία Ελληνικά και είχε μελετήσει το Διόφαντο. Συμβολίζει με σύμφωνα τα δεδομένα και με φωνήεντα τα ζητούμενα στην προσπάθεια του να ερμηνεύσει τον Διόφαντο (κατηγορεί το Διόφαντο για τον οποίο θεωρεί ότι έδινε μόνο λύσεις). Η λύση του προβλήματος δίνεται τώρα με αλγεβρικούς τύπους. Αντί για επανάληψη της διαδικασίας επίλυσης με αριθμητικά δεδομένα, αρκεί τώρα μια αντικατάσταση των δεδομένων σε τύπους. Βέβαια δεν επιλέγει τυχαία τους αριθμούς 40 και 100 για να επαληθεύσει τη δική του λύση, όπως επίσης δεν είναι τυχαίο ότι επιλέγει προβλήματα από τα Αριθμητικά του Διόφαντου. Αυτό που θέλει είναι να δείξει την ανωτερότητα της δικής του μεθόδου και στην πραγματικότητα έχει συμβεί ένα επιστημολογικό άλμα

Πρόβλημα Ι.1 – Διατύπωση και επίλυση από τον Euler

Ζητείται να διασπαστεί ο a σε δύο μέρη, ώστε το μεγαλύτερο να υπερβαίνει το μικρότερο κατά b .

Επίλυση προβλήματος από τον Euler	Σχόλια
Έστω ότι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς εκφράζεται με το x και ο μικρότερος με το y. Θα έχουμε: $\begin{aligned}x + y &= a \\ x - y &= b\end{aligned}$ Η πρώτη εξίσωση δίνει $x = a - y$ και η δεύτερη $x = b + y$ Επομένως $a - y = b + y, a = b + 2y, 2y = a - b$ Τελικά $y = \frac{a-b}{2}$ και $x = a - y = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$ Έχουμε λοιπόν το επόμενο θεώρημα: Όταν το άθροισμα δυο οποιονδήποτε αριθμών είναι a και η διαφορά τους είναι b, τότε ο μεγαλύτερος των δυο αριθμών θα είναι το ημιάθροισμα συν η ημιδιαφορά, ενώ ο μικρότερος των δυο αριθμών θα είναι το ημιάθροισμα μείον η ημιδιαφορά.	Euler: Μέγας μαθηματικός, τα βιβλία του είναι σαν να διαβάζεις σημερινά βιβλία. Εισάγει την έννοια του συστήματος Κάνει μέθοδο σύγκρισης Κάνει αντικατάσταση $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$ (αρχαία Βαβυλωνιακή ταυτότητα) Γενική διατύπωση.

Συμπέρασμα:

Ο Διόφαντος κάνει αριθμητική θεωρία (είναι αριθμητική), οι περισσότεροι ιστορικοί ισχυρίζονται ότι το έργο του ανήκει στην ιστορία της άλγεβρας. Ο Διόφαντος με την αριθμητική θεωρία χειρίζεται αριθμητικού τύπου προβλήματα.

Ο Viète είχε μάθει πολύ καλά το Διόφαντο, κάνει συμβολική άλγεβρα, πρόθεση του είναι να μην αφήσει κανένα άλυτο πρόβλημα (διαφορετική από την πρόθεση του Διόφαντου), τα προβλήματα του είναι αριθμητικά, γεωμετρικά κάθε είδους πρόβλημα.

Ο Euler εισάγει σύμβολα, χρησιμοποιεί μεταβλητές x και y για τους αγνώστους, ακολουθεί τη μέθοδο σύγκρισης και εξάγει τύπους .

Πρόβλημα Ι.3

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν π διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἵνα ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος γὰρ ἢ καὶ ἔτι $M\delta$ ὑπερέχῃ.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων $\leq \alpha$, ὁ μείζων ἄρα $\leq \gamma$ καὶ $M\delta$ καὶ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὧν γὰρ ἔτι καὶ $M\delta$ ὑπερέχει. λοιπὸν τοὺς δύο θέλω ἴσους εἶναι $M\pi$. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες $\leq$ εἰσι δ καὶ $M\delta$.

$\leq$ ἄρα δ καὶ $M\delta$ ἴσοι $M\pi$.

καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ ὁμοίων ὁμοία· λοιπαὶ ἄρα $M\pi$ ἴσοι $\leq \delta$ καὶ γίνεται $\delta \leq M\delta$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ἄρα ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς $M\delta$. ὁ δὲ μείζων $M\alpha$, [προστιθεμένων τῶν δM ὧν ἀφείλον ἀπὸ τῶν πM . ἀφείλον γὰρ ὥστε εὑρεῖν πόσων M ἔσται ἕκαστος ἀριθμὸς, ἕστερον δὲ τῷ μείζονι ἀριθμῷ προστίθῃ τὰς δM , μετὰ τὸ γινῶναι πόσων ἕκαστος].

Δοσμένος αριθμός να χωρισθεῖ σε δυο αριθμούς με λόγο και διαφορά δοσμένη.

Επίλυση Διόφαντου

Σύγχρονη μετάφραση

Ἐστω να χωριστεί ο αριθμός 80 σε δυο αριθμούς, ὥστε ο μεγαλύτερος να εἶναι τριπλάσιος του μικρότερου και να υπερέχει του μικρότερου κατὰ 4.

Αν ονομάσω x τον μικρότερο, ο μεγαλύτερος θα εἶναι $3x + 4$ και ο μεγαλύτερος θα εἶναι τριπλάσιος του μικρότερου και θα υπερέχει ἀκόμα κατὰ 4 του μικρότερου. Θέλω λοιπὸν και οι δυο να εἶναι ἴσοι προς 80. Αλλά αν προσθέσω και τους δυο θα εἶναι $4x + 4$.

Εἶναι ἄρα: $4x + 4 = 80$.

Και αφαιρῶ και ἀπὸ τα δυο μέλη τα ἴσα, ἄρα μένει $76 = 4x$, ἀπὸ την οποία $x = 19$. Επὶ των δεδομένων. Θα εἶναι ἄρα ο μικρότερος ἀριθμὸς 19, ο δε μεγαλύτερος 61 (προστιθεμένων των 4 μονάδων τις οποίες ἀφαίρεσα ἀπὸ το 80. Διότι ἀφαίρεσα για να βρω ἀπὸ πόσες μονάδες θα εἶναι κάθε ἀριθμὸς, ὥστερα δε προσθέτω στον μεγαλύτερο τις 4 μονάδες, ἀφού μάθω πόσες εἶναι ο καθένας).

Συμπέρασμα: Ο Διόφαντος εργάζεται ὅπως και στο πρόβλημα Ι.1. Αν θέσουμε α τον ἀρχικὸ ἀριθμὸ, λ τον λόγο και δ τη διαφορά (προσοχή: οι ἀριθμοὶ βρίσκονται σε λόγο και διαφορά δοθείσα), θέτοντας με x το μικρότερο μέρος, ὁπότε το μεγαλύτερο θα εἶναι $\lambda x + \delta$, καταλήγουμε σε μια εξίσωση με ἕναν ἀγνώστο, η οποία εἶναι: $\lambda x + \delta + x = \alpha$ και ἔχουμε τις λύσεις: $x = \frac{\alpha - \delta}{\lambda + 1}$ ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος $\lambda x + \delta = \lambda \frac{\alpha - \delta}{\lambda + 1} + \delta$

Θα συνεχίσουμε με δυο προβλήματα του Διόφαντου ἀπὸ τα κεφάλαια Ι και ΙΙ με σκοπὸ την αξιοποίηση τους στην διδασκαλία των εξισώσεων 2^{ου} βαθμοῦ.

Πρόβλημα Ι 27

κζ.

Εὐρεῖν δύο ἀριθμούς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν καὶ ὁ πολλαπλασιασμός ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Δεῖ δὴ τῶν εὐρισκομένων τὸν ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετραγώνου τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν.

Να βρεθούν δυο αριθμοί, ώστε η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός τους να δίνει δοθέντες αριθμούς. Ο Διόφαντος δίνει **περιορισμό** για την **επίλυση του προβλήματος**: πρέπει το τετράγωνο του ημισθροίσματος των δυο αριθμών να υπερέχει του γινομένου κατά τετράγωνο. Είναι δε αυτό πλασματικό.

Λύση Διόφαντου

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν $M\kappa$, τὸν δὲ πολλαπλασιασμόν ποιεῖν $M\eta\zeta$.

Τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν $\Sigma\beta$. καὶ ἐπεὶ τὸ σύνθεμα αὐτῶν ἐστὶ $M\kappa$, ἐὰν τοῦτο τέμω δίχα, ἔσται ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως, τοῦ L τοῦ συνθέματος, $M\iota$. καὶ τὸ ἡμισυ τῆς ὑπεροχῆς, τουτέστιν $\Sigma\alpha$ ἐνὶ μὲν τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως προσθῶ, τοῦ δὲ λοιποῦ ἀφέλω, μένει πάλιν τὸ σύνθεμα $M\kappa$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ $\Sigma\beta$. τετάχθω οὖν ὁ μείζων $\Sigma\alpha$ καὶ $M\iota$ τῶν ἡμίσεων τοῦ συνθέματος· ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται $M\iota \wedge \Sigma\alpha$. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα $M\kappa$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ $\Sigma\beta$.

λοιπὸν ἐστὶ καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν $M\eta\zeta$. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστὶ $M\rho \wedge \Delta\psi$ α . ταῦτα ἴσα $M\eta\zeta$. καὶ γίνεται ὁ Σ $M\beta$.

ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων $M\iota\beta$, ὁ δὲ ἐλάσσων $M\iota\eta$. καὶ ποιούσι τὰ τῆς προτάσεως.

Μετάφραση λύσης

Ας επιταχθεί, το μεν άθροισμα να γίνεται 20 το δε γινόμενο 96

Έστω η διαφορά αυτών 2χ και επειδή το άθροισμα αυτών είναι 20, το ημιάθροισμα αυτών είναι 10 και αν το ήμισυ της διαφοράς δηλαδή το χ, προσθέσω μεν εις το εν ημιάθροισμα, από του άλλου δε αφαιρέσω, θα μέινει πάλι το άθροισμα 20, η δε διαφορά 2χ. Έστω λοιπόν ο μεγαλύτερος χ + 10, άρα ο μικρότερος θα είναι 10 - χ και είναι (10 + χ) + (10 - χ) = 20, (10 + χ) - (10 - χ) = 2χ.

Υπολείπεται να είναι το γινόμενο αυτών 96, αλλά το γινόμενο αυτών είναι 100 - χ², και αυτά είναι ίσα με 96. Επομένως χ = 2

Θα είναι ο μεν μεγαλύτερος 12 ο δε μικρότερος 8 και ποιούν τα της πρότασης.

Συμπεράσματα: Έχουμε τα εξής διαδοχικά βήματα:

- Γενική διατύπωση- δίνει περιορισμό για τη λύση, ο Διόφαντος αποφεύγει τις αρνητικές τιμές των αγνώστων, έτσι δίνει περιορισμό για να έχει μόνο θετική ρητή λύση

- Επιλέγει αριθμητικά δεδομένα, αφού δεν έχει παραμέτρους (άθροισμα 20, γινόμενο 96)
- Κάνει εισαγωγή αγνώστου ($2x$) και δημιουργεί υποστάσεις (μεγαλύτερος $x + 10$, μικρότερος $10 - x$ έχουν άθροισμα 20 και διαφορά $2x$)
- Κατασκευάζει και επιλύει μια εξίσωση ($100 - x^2 = 96$)
- Εξετάζει αν η λύση του ικανοποιεί το πρόβλημα (επαλήθευση)

Ο Διόφαντος έχει τα εξής:

$x + y = s$ (1), $x \cdot y = p$ (2) . Γνωρίζει την ταυτότητα $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$,
 άρα $p = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ (3) (Ο Διόφαντος είναι πολύ μεταγενέστερος των Βαβυλωνίων, γνωρίζει την αυστηρή παράδοση του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη και την συνεχίζει)

Έχει λοιπόν τρία αντικείμενα που συνδέονται τα (1), (2), (3), γνωρίζει τα 2 και ψάχνει το τρίτο (τη διαφορά)

$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p \leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$ άρα $x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$ η οποία μας παραπέμπει σε θετική λύση εξίσωσης 2^{ου} βαθμού.

Γεννάται το ερώτημα: θα μπορούσε ο Διόφαντος να λύσει το σύστημα $x + y = 20$, $x \cdot y = 96$, με αναγωγή στην εξίσωση: $x^2 + 96 = 20x$;

Αν έβαζε x και $20 - x$ τους δυο αγνώστους, τότε $x(20 - x) = 96$ και θα είχε την εξίσωση $x^2 + 96 = 20x$, φαίνεται όμως ότι στο πρώτο βιβλίο ήθελε να αποφύγει τη χρήση τριωνύμων εξισώσεων (στα επόμενα βιβλία λύνει τέτοιες εξισώσεις). Αν επιχειρήσουμε να δώσουμε στα s και p τιμές 1000 και 229000 αντίστοιχα ή 1000 και 228975 αντίστοιχα, ποιο από αυτά θα οδηγήσει σε θετική ρητή λύση; Πράγμα που σημαίνει ότι η συνθήκη του περιορισμού είναι απαραίτητη.

Σύγχρονη άλγεβρα- συμβολική αναπαράσταση

- Το γενικό πρόβλημα: $x + y = s$, $x \cdot y = p$
- Γενική συνθήκη: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \kappa^2$ ($\rightarrow$ περιορισμός, ο Διόφαντος χρησιμοποιεί αμέσως μετά τη διατύπωση του προβλήματος συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα τα οποία πρέπει να τον οδηγήσουν σε θετική ρητή λύση. Τα δεδομένα του πρέπει να είναι τέτοια ώστε να οδηγηθεί σε εξίσωση της μορφής $x^2 = \mu$, όπου το μ θα είναι τέλειο τετράγωνο).
- Επιλογή αριθμητικών δεδομένων: $x + y = 20$, $x \cdot y = 96$

- Εισαγωγή αγνώστου (διαφορά των αριθμών): $x - y = 2l \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = l$
- Αναπαράσταση ζητούμενων: $\frac{x+y}{2} = 10$, $(x = 10 + l, y = 10 - l)$.

Η αναπαράσταση μοιάζει με των Βαβυλωνίων, $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$, $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$, ο Διόφαντος αξιοποιεί τις ταυτότητες $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$, $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$ αλλά η αναπαράσταση της γενικής συνθήκης παραπέμπει στην $xy = (\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x-y}{2})^2$ η οποία είναι προχωρημένη μορφή.

- Κατασκευή εξίσωσης: $x \cdot y = 96 \rightarrow 100 - l^2 = 96$
- Λύση εξίσωσης: $\rightarrow l = 2$
- Λύση προβλήματος: $x = 12, y = 8$

Βιβλίο II- πρόβλημα 8

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Δοθέν τετράγωνο αριθμού να διασπασθεί σε άθροισμα δυο τετραγώνων.

Λύση Διόφαντου

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{\iota\varsigma}$ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Καὶ τετάχθω ὁ $\alpha\sigma\varsigma$ $\Delta^{\Psi}\overline{\alpha}$, ὁ ἄρα ἕτερος ἔσται $\overline{Μ\iota\varsigma} \wedge \Delta^{\Psi}\overline{\alpha}$ · δεῖσει ἄρα $\overline{Μ\iota\varsigma} \wedge \Delta^{\Psi}\overline{\alpha}$ ἴσας εἶναι $\square\varphi$.

πλάσσω τὸν $\square\varphi$ ἀπὸ $\varsigma\omega\gamma$ ὅσων δῆποτε $\wedge$ τοσούτων $\overline{Μ}$ ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν $\overline{\iota\varsigma}\overline{Μ}$ πλευρά· ἔστω $\varsigma\beta \wedge \overline{Μ\delta}$. αὐτὸς ἄρα ὁ $\square\varphi$ ἔσται $\Delta^{\Psi}\overline{\delta\overline{Μ\iota\varsigma}} \wedge \varsigma\overline{\iota\varsigma}$ · ταῦτα ἴσα $\overline{Μ\iota\varsigma} \wedge \Delta^{\Psi}\overline{\alpha}$. κοινὴ προσκεῖσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὁμοία. Δ^{Ψ} ἄρα $\overline{\epsilon}$ ἴσαι $\varsigma\overline{\iota\varsigma}$, καὶ γίνεται ὁ $\varsigma\overline{\iota\varsigma}$ πέμπτων.

ἔσται ὁ μὲν $\frac{\kappa\epsilon}{\sigma\nu\varsigma}$, ὁ δὲ $\rho\mu\delta$, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιῶσι $\frac{\kappa\epsilon}{\nu}$, ἥτοι $\overline{Μ\iota\varsigma}$, καὶ ἔστιν ἐκάτερος τετράγωνος.

Αναπαράσταση λύσης (Ε. Σ. Σταμάτης- Διόφαντου Αριθμητικά, σελίδα 421)

Ἐστω ὅτι ὁ δοθεὶς τετράγωνος εἶναι 16 καὶ ὁ ἕνας ἐκ τῶν ζητούμενων τετραγώνων χ^2 . Ὁ ἄλλος θα εἶναι $16 - \chi^2$. Θέτω αὐτὸν ἴσον πρὸς $(\mu\chi - 4)^2$ (μείνῃ τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ δοθέντος). Λαμβάνουμε $\mu = 2$, ὁπότε;

$$(2\chi - 4)^2 = 4\chi^2 + 16 - 16\chi = 16 - \chi^2$$

$$5\chi^2 = 16\chi$$

$$\chi = \frac{16}{5}$$

Ὁ ἕνας τετράγωνος θα εἶναι $(\frac{16}{5})^2$ καὶ ὁ ἄλλος τετράγωνος θα εἶναι $16 - \frac{256}{25} = \frac{144}{25}$

Πολλοὶ ἱστορικοὶ ἔχουν προσπαθήσει νὰ ἐξηγήσουν πῶς ὁ Διόφαντος σκέφτηκε τὸν μετασχηματισμὸ $2\chi - 4$, τὸν ὁποῖο εἰσάγει ὡς ἐξῆς: «κατασκευάζω τὸ τετράγωνο ἀπὸ ὅσουςδήποτε ἀριθμοὺς (χ), ἐλαττωμένους κατὰ τόσες μονάδες

όσες περιέχονται στην πλευρά των 16 μονάδων, έστω δυο αριθμοί μείον 4 μονάδες $2x - 4$. Ας δούμε μια **πιθανή** ερμηνεία για τον τρόπο που ίσως σκέφτηκε ο Διόφαντος ⁴¹.

0	$X^2 + Y^2 = 16$	
1	$X^2 = x^2$	
2	$Y^2 = 16 - X^2$	
3		$x^2 = 16 - Y^2$
4		$x \cdot x = (4 - Y)(4 + Y)$
5		$\frac{4 + Y}{x} = \frac{4 - Y}{x}$
6		$\frac{4 + Y}{x} = m, \quad \text{π.χ. } m = 2$
7		$4 + Y = 2x$
8	$Y = 2x - 4$	
9	$Y^2 = 4x^2 + 16 - 16x$	
10	$4x^2 + 16 - 16x = 16 - x^2$	
11	$5x^2 = 16x$	
12	$x = \frac{16}{5}$	
13	$X^2 = \frac{256}{25}, Y^2 = \frac{144}{25}$	

Στην πρώτη στήλη καταγράφονται τα βήματα της διαδικασίας επίλυσης του Διόφαντου και στη δεύτερη στήλη τα **πιθανά** βήματα (δεν απαιτούν γνώσεις οι οποίες υπερβαίνουν το γνωστικό ορίζοντα των Αρχαίων), που οδήγησαν τον Διόφαντο στον μετασχηματισμό $2x - 4$. Τα γράμματα X, Y δεν δηλώνουν εδώ αλγεβρικούς αγνώστους, αλλά τους ζητούμενους αριθμούς του προβλήματος οι οποίοι είναι δυο, **ο άγνωστος συμβολίζεται με x** και ο Διόφαντος **χρησιμοποιεί έναν άγνωστο**. Η τέχνη του Διόφαντου είναι ακριβώς η εξής: να εκφράσει τους X, Y ως συνάρτηση του x . Προκύπτει όμως το εξής ερώτημα: Γιατί η παραγοντοποίηση γίνεται στο βήμα 3 και δεν γίνεται στο βήμα 2; Αν κανείς χειριστεί από την αρχή το πρόβλημα ως αλγεβρική εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 = 16$, τότε το ερώτημα είναι δικαιολογημένο. Δεν υπάρχει κανένας λόγος η εξίσωση $y^2 = 16 - x^2$ να γραφτεί ως $x^2 = 16 - y^2$, η πρώτη μορφή θα μας οδηγούσε σε εξίσωση ως προς y και θα τη λύναμε. Όμως ο Διόφαντος **διδάσκει ένα ουσιαστικό στοιχείο** για να λύνουμε αριθμητικά προβλήματα και **αυτό είναι** ότι όλα τα μεταφράζουμε με τη βοήθεια του αλγεβρικού αγνώστου και των δυνάμεων του αγνώστου. Αυτό φαίνεται στο βήμα 1 και στο βήμα 8, η δε μετάφραση που πραγματοποιήθηκε στα βήματα 3-7 και έχει ως αποτέλεσμα την έκφραση $2x - 4$, η οποία μας βοηθάει να κατανοήσουμε πως πιθανά σκέφτηκε ο Διόφαντος, ώστε να οδηγηθεί στην έκφραση $2x - 4$.

Για ποιο λόγο όμως προτείνουμε την ιδέα «διδασκαλία πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης» με διδακτικό εργαλείο κατάλληλα προβλήματα των Αριθμητικών του Διόφαντου;

1. Έχουμε ήδη αναφέρει και εξηγήσει γιατί η λύση προβλήματος είναι ισχυρός τρόπος διδασκαλίας.

2. Ο Διόφαντος μας παρέχει έναν γενικό τρόπο, ένα πρόγραμμα, μια στρατηγική διδασκαλίας (βλέπε διδακτικές όψεις του έργου του Διόφαντου), παρέχει τη δυνατότητα του ανακαλώ και ανακαλύπτω, ώστε αξιοποιώντας διδακτικά τα προβλήματα I.1 ή I.3 ή I.27 ή I.28 ή I.30 ή II.28 να οδηγηθούμε σε πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια εξίσωση ακολουθώντας κομψά την οδό του Διόφαντου (μάθηση διδακτικών εργαλείων, από τα απλά στα δύσκολα και πρακτική και εξάσκηση)

3. Ένα επιπλέον σημαντικό και χρήσιμο στοιχείο είναι ακριβώς αυτό για το οποίο ο Διόφαντος έχει αμφισβητηθεί, δηλαδή δεν μας δείχνει ακριβώς τα βήματα που ακολουθεί και πως ακριβώς σκέφτεται στην επίλυση των προβλημάτων του. Για παράδειγμα στο πρόβλημα I.3 ονομάζει x τον μικρότερο αριθμό (που αναζητεί) και τον μεγαλύτερο $3x + 4$, χωρίς να δίνει εξήγηση, θέλει δε το άθροισμά τους να είναι 80. Ο αριθμός 80 είναι αυτός που οδηγεί τη σκέψη του να πάρει τον μεγαλύτερο αριθμό $3x + 4$, ώστε το 80 να είναι πολλαπλάσιο του αθροίσματος $x + 3x + 4$. Σε αυτό το σημείο ο μαθητής οδηγείται στην αναγνώριση και στη χρήση της έννοιας του πολλαπλασίου και στην έννοια της τέλεια διαίρεσης. Στο πρόβλημα II.28 είμαστε υποχρεωμένοι να ανακαλύψουμε τον τρόπο μετάβασης από το βήμα 2 στο βήμα 8. Τα κρυμμένα βήματα 3, 4, 5, 6 στο πρόβλημα II.8 μπορούμε να πούμε ότι «προπονούν» την μαθηματική μας σκέψη και φέρνουν ουσιαστική αλλαγή στην ικανότητα μας να σκεφτούμε διαφορετικά και τελικά να δώσουμε σωστή απάντηση. Είναι δε ακριβώς αυτά τα σημεία των λύσεων του Διόφαντου, όπου τόσο ο διδάσκων επομένως και ο μαθητής θα εξασκήσουν και θα χρησιμοποιήσουν τη φαντασία τους, ο δε μαθητής θα ανακαλέσει γνώσεις προηγούμενες και όχι μόνο θα χρησιμοποιήσει τη μαθηματική του ικανότητα αλλά τελικά θα την αναπτύξει. Αντίστοιχα αξιοποιούνται διδακτικά και τα προβλήματα I.3, I.27, I.28 μέσα από την «κρυμμένη» Διοφαντική σκέψη.

4. Ένα δύσκολο πρόβλημα του Διόφαντου, ιδωμένο από την πλευρά της διδακτικής αξιοποίησης του δεν διαφέρει από ένα σύγχρονο μαθηματικό πρόβλημα ή μια σύγχρονη άσκηση, όπου ο μαθητής καλείται να οικοδομήσει τη λύση ανακαλώντας και συνδυάζοντας προηγούμενες μαθηματικές έννοιες και γνώσεις, σε μερικές δε περιπτώσεις η ίδια η απάντηση μπορεί να μας οδηγήσει στον ορισμό μιας νέας έννοιας.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

- [1] Ε. Ε. Βασιλείου 2012. Σημειώσεις «Γεωμετρία για τη διδακτική», σελ. 2-6. Διαλέξεις στο ΠΜΣ 2012-2013 στο μάθημα Δ27
- [2] Ian Stewart 1996. « Οι αριθμοί της Φύσης», σελ. .45. Εκδόσεις Κάτοπτρο
- [3] Κ. Τζανάκης 2009. Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Σελίδα 17. Εκδόσεις ΖΗΤΗ
- [4] Υ. Thomaidis 2005. *Two questions on Historical conceptions on teaching and learning Mathematics*
- [5] Δημήτριος Λαγός 2008. Εισαγωγή στην παιδαγωγική επιστήμη
- [6] J. Chateau κ.α. 1983. Οι μεγάλοι παιδαγωγοί, σελ. 27. Εκδόσεις Γλάρος
- [7] Χ. Φράγκος 1999. Ψυχοπαιδαγωγική, σελ. 22-23. Εκδόσεις Gutenberg
- [8] Π. Πολυχρονόπουλος. Η μορφωτική αξία των μαθηματικών στη μέση εκπαίδευση. Κεφάλαιο 05, τόμος 3
- [9], [10] Γ. Καλογεράκη 1995. Τα μαθηματικά και η ιστορία τους διδακτικές προσεγγίσεις, σελ 115. 12^ο συνέδριο ΕΜΕ.
- [11] Γ. Θωμαΐδης 2012-2013. Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική τους. Σημειώσεις μαθήματος Δ12. ΠΜΣ εαρινό εξάμηνο 2012-2013.
- [12] <http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/>
- [13] Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης κ.ά. 1989. Οι σχέσεις ιστορίας και διδακτικής των μαθηματικών. Ευκλείδης Γ, σελ. 11-17, τεύχος 23
- [14^α, 14^β] Κ. Τζανάκης 2009. Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών, σελ. 18-26. Εκδόσεις ΖΗΤΗ
- [15] Ν. Κλαουδάτος 2013. Σημειώσεις του μαθήματος Δ1. «Γνωστικές διαστάσεις της λύσης προβλήματος», κεφάλαιο 2^ο σελ. 22
- [16] Γ. Θωμαΐδης 2013. Διάλεξη 1^η και 2^η μαθήματος Δ12 στο ΠΜΣ, εαρινό εξάμηνο 2013
- [16^α] Α. Κασσέτας Επιστημολογικά εμπόδια
<http://users.sch.gr/kassetas/edu04obstacle.htm>

[17],[18] Φ. Καλαβάσης 1993. *Η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου στη διδακτική των Μαθηματικών*, σελ. 14-17. 10^ο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας Καλαμάτα. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε.

[19] Γ. Θωμαΐδης 2013. Σημειώσεις στο ΠΜΣ 2012-2013. Μέρος τρίτο σελίδα 33

[20] Γ. Θωμαΐδης 2013. *Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών*. ΠΜΣ, Τρίτος άξονας μαθημάτων, σελ. 33.

[21^α] Σ. Βοσνιάδου, Ξ. Βαμβακούση, Ειρ. Σκοπελίτη, 2008. *Το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής στην ψυχολογία*, σελ. 137-180 . Νόησις

[21^β] Σ. Βοσνιάδου 2007. *Εισαγωγή στην ψυχολογία*, σελ. 215. Εκδόσεις Gutenberg

[22] Α. Κασσέτας. *Εννοιολογική αλλαγή*.

<http://users.sch.gr/kassetas/edu07comChange.htm>

[23] Γ. Θωμαΐδης 2013. 1^η διάλεξη στο ΠΜΣ, 15/2^{ου}/2013. Μάθημα Δ12

[24] Γ. Θωμαΐδης 2^ο13. 1^η διάλεξη στο ΠΜΣ, 15/2^{ου}/2013. Μάθημα Δ12. W. Popp. *The calculus, a genetic approach* 1963, πηγή: *History of mathematics. Topics for schools*

[16β], [16γ], [25] Σ. Βοσνιάδου 2012. *Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Διαλέξεις στο ΠΜΣ 2012

[26] Γ. Θωμαΐδης 2012. Σημειώσεις του μαθήματος Δ12 στο ΠΜΣ 2012-2013. Πρώτο κείμενο σελίδα 12

[27α] Γ. Θωμαΐδης 2013. Διαλέξεις. ΠΜΣ 2012-2013

[27β] G.E.R. Lloyd 2003. *Η Ελληνική επιστήμη μετά τον Αριστοτέλη*, pp. 13, 20, 21, 192. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

[28α], [28β], [29] Ad Meskens 2000 *Travelling Mathematics The fate of Diofanto's Arithmetic* p.p. 27-32

<http://www.hellinon.net/VivliothikiAlexandreias.htm>. Η βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας

<http://www.olympia.gr> . Ποιος κατέστρεψε τη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας

<http://www.pi-schools.gr> Αλεξανδρινοί μαθηματικοί

www.academy. edu.gr *Ο Αλέξανδρος, το Ελληνικό κοσμοσύστημα και η σύγχρονη παγκόσμια κοινωνία*

[31],[36],[37],[40] Γ. Θωμαΐδης 2011. *Εξιιώσεις και Ανισώσεις δευτέρου βαθμού στα Αριθμητικά του Διόφαντου*, σελ. 156-159, 41, 36-37 και 55 . Εκδόσεις ΖΗΤΗ

[30] **Σούδα ή Σουίδα** είναι ένα από τα σημαντικότερα Ελληνικά λεξικά ή εγκυκλοπαίδειες που γράφτηκαν τον 10^ομΧ αιώνα, πιθανά το όνομα Σούδας ή Σουίδας να είναι το όνομα του συντάκτη του. Το έργο απαρτίζεται από 31.342 λήμματα και αν εξαιρέσουμε τις μεταγενέστερες επεμβάσεις και τον εμπλουτισμό του, οι χρησιμοποιούμενες πηγές για τη συγκρότηση του έργου διακρίνονται σε: α) λεξικογραφικές πηγές, β) υπομνήματα και συλλογές αρχαίων σχολίων, γ) παροιμίες, δ) ιστορικά έργα, ε) βιογραφίες και φιλοσοφικά κείμενα, στ) θεολογικές πηγές και λογοτεχνικά έργα. (Σ. Ματθαίου. Ο χαρακτήρας και η δύναμη ενός Βυζαντινού εγκυκλοπαιδικού λεξικού. Πανεπιστήμιο Κύπρου)

[32] Ο τίτλος **Παλατινή Ανθολογία** έχει δοθεί σε μια συλλογή από 15 βιβλία (κεφάλαια), η οποία περιλαμβάνει 3700 Βυζαντινά και Ελληνικά επιγράμματα με περισσότερους από 23000 στίχους, τα οποία γράφτηκαν από τον 6^οπΧ αιώνα έως τον 10^ομΧ αιώνα ή κατά μια άλλη άποψη γράφτηκαν την περίοδο από τον 7^οπΧ αιώνα μέχρι το 600μΧ. Σύμφωνα με τη δεύτερη άποψη η συλλογή των εν λόγω επιγραμμάτων βρέθηκε σε χειρόγραφο το 1606 και συντάχθηκε πιθανώς με βάση την ανθολογία του Κεφαλά. Μαζί με την ανθολογία του Μάξιμου Πλανούδη απαρτίζει τη συμβατικά ονομαζόμενη **Ελληνική Ανθολογία**. Τα είδη των επιγραμμάτων ποικίλουν είναι επιδεικτικά, προτρεπτικά, ερωτικά, επιγραφές αγαλμάτων, αριθμητικά προβλήματα κλπ. Μερικά μαθηματικά επιγράμματα της Παλατινής συλλογής παρουσιάζουν μαθηματικό ενδιαφέρον και αποδίδονται στον γραμματικό Μητρόδωρο. Μερικά από αυτά ίσως επινοήθηκαν και από τον ίδιο τον Μητρόδωρο. Η Παλατινή ανθολογία διασώζεται σε ένα χειρόγραφο με δυο μέρη (κώδικες) και το ένα περιλαμβάνει 13 κεφάλαια και βρίσκεται στην Παλατινή βιβλιοθήκη της Χαϊδελεβέργης (για αυτό ολόκληρη η συλλογή ονομάστηκε Παλατινή), το άλλο μέρος, δηλαδή τα δυο κεφάλαια βρίσκονται στο Παρίσι. (Γ. Δημάκης, Παλατινή ανθολογία, <http://www.homouniversligr.blogspot.gr>)

[33] Van Der Waerden 2007. *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, σ. 325. 3^η έκδοση. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

[34] Ad Meskens 2000 *Travelling Mathematics* pp. 47

[35] Th. Heath, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, τόμος II, σελίδα 515

[38]C. B. Boyer 1968 *A history of Mathematics* p. 201

[39] G. Loria. *Ιστορία των Μαθηματικών* σελ. 152. Εκδόσεις ΕΜΕ

[41] Γ. Χριστιανίδης 2009. *Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών*, σ. 112. Εκδόσεις ΖΗΤΗ

[42] Β. Αλεξάνδρου & Γ. Φιλίππου 2001. *Προ-άλγεβρα και επίλυση μαθηματικού προβλήματος*, σ. 249, 18^ο Συνέδριο ΕΜΕ. Ρόδος

[43], [44], [45], [46β], [55] *Perspectives on school Algebra* M.E.L. Vol. 22 2001

[46α] Ο όρος **αποβλεπτικότητα** (όρος κυρίως της φιλοσοφίας), σύμφωνα με τους εμπνευστές του, αποτελεί βασική ιδιότητα της συνείδησης, χαρακτηρίζει κάθε **συνειδητή** νοητική λειτουργία και σαν τέτοια λειτουργία υπάρχει. Παίζει αποφασιστικό ρόλο στις νοητικές λειτουργίες, δημιουργεί νοητικές αναπαραστάσεις και αποδίδει νοήματα μέσα από τα οποία το υποκείμενο προσπαθεί να κατανοήσει. Είναι βασικός παράγοντας για την κατανόηση και τη νοητική εξέλιξη του ατόμου και απασχολεί κάθε επιστήμη η οποία αναφέρεται στη συνείδηση αλλά και στους μηχανισμούς της γνώσης. Ο Brentano (τέλος 19^{ου} αι.) ονόμασε αποβλεπτικότητα την ιδιότητα των όντων με νόηση τα οποία μπορούν να αναφέρονται σε άλλα πράγματα και σε άλλα όντα και αποτελούσε για αυτόν τον δείκτη ύπαρξης νοητικής διαδικασίας και αργότερα στον επαναπροσδιορισμό του όρου σήμαινε όλη τη διαδικασία εξέλιξης του νου. Ένα παράδειγμα αποβλεπτικής δραστηριότητας είναι να ψάχνει κανείς για κάτι το οποίο είναι σχετικό με το να στοχεύει σε κάτι. Ένας μαθητής με συγκεκριμένο επαγγελματικό στόχο καθοδηγεί τις πράξεις του και συντονίζει τις ενέργειες του και έτσι έχει καλύτερα αποτελέσματα σε αυτό που θέλει να πετύχει. Το υποκείμενο προ-τίθεται του αντικειμένου στο οποίο αναφέρεται συνειδητά με συγκεκριμένη στάση, έχοντας επιλέξει τον τρόπο αναφοράς, αναφέρεται με συγκεκριμένη προοπτική και αποβλέπει σε συγκεκριμένο απώτερο σκοπό. Αυτή η δυνατότητα είναι καθοριστική στα μαθηματικά και στη μαθηματική εκπαίδευση. (Χασκόπουλος 2004)

[47] N. Herscovics & L. Linchevski 1994 *A cognitive gap between arithmetic and algebra* pp. 59-78 M.E.L. Volume 27

[48] D. Carraher & A. Schliemann & B. Brizuela 2006 *"Arithmetic and Algebra in early Education"* p.p. 89-91 Journal for research in Mathematics Education, vol. 37, No 2

[49α] Σ. Φερεντίνος «Νέα βιβλία μαθηματικών του γυμνασίου»

[49β], [49δ] Ε. Δημητριάδου, Σ. Σταφυλίδου 2009. «Οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τα νέα βιβλία μαθηματικών στο γυμνάσιο» σ. 345-354. 26^ο συνέδριο Ε. Μ. Ε Θεσσαλονίκη

[49γ] Σ. Νεγρεπόντης ΠΜΣ 2012-2013. Διαλέξεις του μαθήματος Δ14. « Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών» και κείμενα από TLG

Ακουστικά πειράματα Πυθαγορείων

Ο Λάσος ο Ερμιονεύς, όπως λένε οι γύρω από τον Ίππασο τον Μεταποντίνο, είναι Πυθαγόρειος, έτσι αυτός και οι ακόλουθοί του συνέχισαν να μελετούν την ταχύτητα και την βραδύτητα των κινήσεων μέσα από τις οποίες αναδύονται οι αρμονίες, κατασκεύασε δε λόγους αριθμών πάνω σε αγγεία. Επειδή τα αγγεία είναι ίσα και όμοια, άφησε ένα αγγείο άδειο, ένα άλλο αγγείο το γέμισε με υγρό μέχρι τη μέση και παρήγαγε ήχο στο καθένα. Ύστερα πάλι άφησε ένα αγγείο άδειο, γέμισε ένα άλλο κατά το ένα τέταρτο και κτυπώντας τα προέκυψε η τέταρτη συμφωνία, όπως προέκυψε η πέμπτη συμφωνία όταν γέμισε το ένα αγγείο κατά το ένα τρίτο. Τα κενά μέρη είχαν τη σχέση του δύο προς ένα στην οκτάβα, του τρία προς δύο στην Πέμπτη και του τέσσερα προς τρία στην Τετάρτη.

Ο Ιάμβλιχος υποστηρίζει ότι η ανακάλυψη της μουσικής έγινε από τον **Πυθαγόρα** με τρόπο μαγικά συμπτωματικό και λέει τα εξής:<< τη στιγμή που ο Πυθαγόρας περνούσε έξω από ένα σιδηρουργείο, άκουσε διαδοχικούς ήχους (διαστηματικές σχέσεις) οι οποίοι προερχόταν από τα χτυπήματα των σφυριών πάνω στο αμόνι. Εκεί για πρώτη φορά αντιλήφθηκε ότι οι διαφορές του ήχου (αυτό που σήμερα προφανώς το λέμε συχνότητες ήχου) εξαρτώνται από τον όγκο των σφυριών και όχι από τη διαφορετική δύναμη που ασκείται μέσω των σφυριών πάνω στο παλλόμενο αμόνι. Αφού λοιπόν ανέλυσε προσεκτικά τις διαφορές βάρους και όγκου που τα σφυριά αυτά παρουσίαζαν μεταξύ τους, επέστρεψε στο σπίτι του επιχειρώντας να προσαρμόσει τα ίδια βάρη στα άκρα τεσσάρων πανομοιότυπων χορδών, οι οποίες ήταν στηριγμένες σε μια σταθερή ξύλινη βάση, η οποία λειτουργούσε ως ηχείο. Στη συνέχεια κτυπώντας ανά δυο τις χορδές, είδε ότι η χορδή με τη μεγαλύτερη τάση, σε συνδυασμό με εκείνη τη χορδή που είχε τη μικρότερη τάση απ' όλες, έδινε το ιδιαίτερο ευχάριστο διάστημα της ογδός. Τα βάρη που είχε τοποθετήσει ο Πυθαγόρας ήταν ισοδύναμα με 12 και 6 αριθμητικές μονάδες, αντίστοιχα. Επομένως, βρισκόταν σε αναλογία 2:1 . Αμέσως μετά, συνέκρινε την αρχική χορδή των 12 βαρών με μια άλλη, η οποία βρισκόταν ακριβώς δίπλα σε εκείνη των 6 βαρών, με τάση ισοδύναμη 8 βαρών. Η νέα αυτή συνήχηση 12:8 (δηλαδή το νέο άκουσμα ήχου προφανώς) δεν ήταν άλλη από το σύμφωνο διάστημα της πέμπτης του, που στην απλή του μορφή, αντιστοιχεί στον αριθμητικό λόγο 3:2. Τέλος το πείραμα των συσχετισμών φαίνεται πως έκλεισε με τη διαπίστωση ότι η χορδή με τη μέγιστη τάση των 12 βαρών, σε συνδυασμό με αυτήν των 9 βαρών, παρήγαγε το διάστημα 12:9 δηλαδή 4:3 , δηλαδή το διάστημα της τετάρτης.

Ο Ίππασος ο Μεταποντίνος έφτιαξε τέσσερις χάλκινους δίσκους με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουν ίσες διαμέτρους, αλλά να έχουν διαφορετικό πάχος, δηλαδή η λεπτότητα του πρώτου δίσκου να είναι το επίτριτον (4:3) του δεύτερου δίσκου, το ημιόλιο (3:2) της λεπτότητας του τρίτου δίσκου και διπλάσια σε σχέση με τη λεπτότητα του τέταρτου δίσκου, με αποτέλεσμα κατά την κρούση τους να παράγεται αρμονία. (Από το βιβλίο του Barker, μέσα από τα λόγια του Πλάτωνα προς το Φαίδωνα)

«καὶ λέγεται Γλαῦκον ἰδόντα τοὺς ἐπὶ τῶν δίσκων φθόγγους, πρῶτον ἐγγχειρῆσαι δι' αὐτῶν χειρουργεῖν, καὶ ἀπὸ ταύτης τῆς πραγματείας ἔτι καὶ νῦν λέγεσθαι τὴν καλουμένην Γλαύκου τέχνην. μέμνηται δὲ τούτων Ἀριστοῦξενος ἐν τῷ περὶ τῆς μουσικῆς ἀκροάσεως καὶ <Νι>κοκλῆς ἐν τῷ περὶ θεωρίας»

Λέγεται, ότι όταν **ο Γλαύκος** παρατήρησε τις νότες που παρήγαγαν οι δίσκοι, ήταν ο πρώτος που καταπιάστηκε με τη σύνθεση της μουσικής με τις παραπάνω νότες και σαν αποτέλεσμα της εμβάθυνσής του αυτής, οι άνθρωποι μιλούν για **την τέχνη του Γλαύκου**. Από τα λόγια του Πλάτωνα προς το Φαίδωνα φαίνεται πως ο Πλάτωνας αμφισβητεί την εγκυρότητα των πειραμάτων του Πυθαγόρα και αποδέχεται το πείραμα του Ίππασου. <<Η τέχνη του Γλαύκου λέγεται είτε για πράγματα που δεν επιτυγχάνονται εύκολα, είτε για πράγματα που φτιάχνονται με μεγάλη ικανότητα και φροντίδα>>.

[50] Von Glasersfeld 1990 *An exposition of constructivism: Journal for research on mathematics education*

[51α],[51β] Y. Thomaidis 2005 «*Problematique- Two Questions on Historical Conceptions on Teaching and Learning Mathematics*» HPM Newsletter No 60.

[52] Harold M. Edwards “*Read the masters*” In L.A. Steen *Mathematics tomorrow*

[53] Ν. Κλαουδάτος 2013. Διάλεξη 1^η 17-12^{ου}-2013. Διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων

[54α],[54β],[54γ] Ν. Κλαουδάτος 2011. Σημειώσεις του μαθήματος Δ1. Γνωστικές διαστάσεις της λύσης προβλήματος σ. 25-26. Κεφάλαιο 2^ο.

[55] Ν. Balacheff 2001 *Perspectives on school algebra* MEL vol. 22 pp. 258-259.

[56] Ν. Guedji 2001. *Το Θεώρημα του παπαγάλου* p. 35. Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ

[57] Jacob Klein (1899-1978) *Greek Mathematical Thought and the origin of Algebra* p. 188, translated by Eva Brann, Dover Publications New York 1968

[58] Ε. Σ. Σταμάτη, «Διόφαντου Αριθμητικά» (σελ. 54), ΟΕΔΒ 1963 .

Βιβλιογραφία

- Β. Αλεξάνδρου κ.ά. 2001. «Προ- άλγεβρα και επίλυση μαθηματικού προβλήματος». 18^ο συνέδριο ΕΜΕ, Ρόδος 2001
- Ε. Ε. Βασιλείου 2011. «Γεωμετρία για τη Διδακτική» σημειώσεις και διαλέξεις του μαθήματος Δ27, Πανεπιστήμιο Αθηνών
- Σ. Βοσνιάδου 2001. «Εισαγωγή στην Ψυχολογία», 2001, εκδόσεις Gutenberg
- Σ. Βοσνιάδου, Ξ. Βαμβακούση και Ειρ. Σκοπελίτη, 2008. Το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής στην ψυχολογία. Νόησις
- Σ. Βοσνιάδου 2012. Διαλέξεις στο μάθημα «Φιλοσοφία των μαθηματικών», ΠΜΣ. Πανεπιστήμιο Αθηνών
- Γ. Δημάκης. Παλατινή ανθολογία. <http://www.homouniversligr.blogspot.gr>
- Ε. Δημητριάδου, Σ. Σταφυλίδου 2009. «Οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τα νέα βιβλία μαθηματικών στο γυμνάσιο». 26^ο συνέδριο Ε. Μ. Ε, Θεσσαλονίκη
- Γ. Θωμαΐδης 2011. «Εξιιώσεις και ανισιώσεις δευτέρου βαθμού στα Αριθμητικά του Διόφαντου». Εκδόσεις ΖΗΤΗ
- Γ. Θωμαΐδης 2012-2013. «Αξιοποίηση της Ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική τους». Σημειώσεις του μαθήματος Δ12 στο ΠΜΣ. Πανεπιστήμιο Αθηνών
- Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης κ.ά. 1989. «Οι σχέσεις της ιστορίας και διδακτικής μαθηματικών». Ευκλείδης Γ', τεύχος 26. Εκδόσεις ΕΜΕ
- Γ. Θωμαΐδης 2011. «Η διδασκαλία της λογικής και της απόδειξης στο Λύκειο». Επιστημονική έκδοση για τη διδακτική των μαθηματικών. Εκδόσεις ΖΗΤΗ
- Υ. Thomaidis 2005. «*Problematique- Two Questions on Historical Conceptions on Teaching and Learning Mathematics*». HPM, Newsletter No 60
- Φ. Καλαβάσης 1993. Η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου στη διδακτική των Μαθηματικών, σελ. 14-17. 10^ο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας Καλαμάτα. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε.
- Γ. Καλογεράκης 1995. «Τα μαθηματικά και η ιστορία τους, διδακτικές προσεγγίσεις». 12^ο συνέδριο ΕΜΕ. Ηράκλειο Κρήτης
- Α. Κασσέτας. «Εννοιολογική αλλαγή»
<http://users.sch.gr/kassetas/edu07comChange.htm>

N. Κλαουδάτος 2011. «Σημειώσεις του μαθήματος διδακτική Ι», στο ΠΜΣ και διαλέξεις του μαθήματος Δ1 στο ΠΜΣ. Πανεπιστήμιο Αθηνών

N. Κλαουδάτος 2013. «Γνωστικές διαστάσεις της λύσης προβλήματος». Σημειώσεις μαθήματος Δ1 στο ΠΜΣ. Πανεπιστήμιο Αθηνών

Δ. Λαγός 2008. «Εισαγωγή στην παιδαγωγική επιστήμη». Παιδαγωγική επιμόρφωση εκπαιδευτικών. Αθήνα 2008

Σ. Ματθαίου. «Ο χαρακτήρας και η δύναμη ενός Βυζαντινού εγκυκλοπαιδικού λεξικού». Πανεπιστήμιο Κύπρου

www.greek-language.gr/greekLang/files/document

Σ. Νεγρεπόντης ΠΜΣ 2012-2013. Διαλέξεις του μαθήματος Δ14. « Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών» και κείμενα από TLG

Π. Πολυχρονόπουλος. «Η μορφωτική αξία των μαθηματικών στη μέση εκπαίδευση». Εκπαίδευση και επιστήμη , τόμος 3, κεφάλαιο 05

Ε. Σ. Σταμάτη. Διόφαντου Αριθμητικά. ΟΕΔΒ ΑΘΗΝΑ 1963

Κ. Τζανάκης 2009. «Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ ιστορίας των μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης». Εκδόσεις ΖΗΤΗ

Χ. Φράγκος 1999. «Ψυχοπαιδαγωγική». Εκδόσεις Gutenberg

Σ. Φερεντίνος «Νέα βιβλία μαθηματικών του γυμνασίου». Users.uoa.gr/-spapast/SynedrKozan/Praktika/03STbiblia/Ferentinos.doc

Α. Χασκόπουλος. Αποβλεπτικότητα και επικοινωνία. Διπλωματική εργασία 2004

Γ. Χριστιανίδης 2009 .«Από την λογιστική στην άλγεβρα, μερικές διευκρινήσεις για το εγχείρημα του Διόφαντου». Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

C. B. Boyer 1968. *A history of Mathematics*

D. Carraher, A. Schliemann, B. Brizuela 2006 “*Arithmetic and Algebra ion early Education*”.Journal for research in Mathematics Education.Volume 37.

H. M. Edwards. “*Read the masters*”, In L.A. Steen. Mathematics tomorrow

Th. Heath. «*Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*». Τόμος 2. Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Αθήνα 2001

Jacob Klein (1899-1978) *Greek Mathematical Thought and the origin of Algebra* translated by Eva Brann, Dover Publications New York 1968

R. Sutherland, T.Rojano, A. Bell, R. Lins 2001. *Perspectives on school Algebra* M.E.L. Vol. 22

N. Herscovics & L. Linchevski 1994. Educational Studies in mathematics: «*A cognitive gap between arithmetic and algebra*». Volume 27

N. Guedji 1999. *Το θεώρημα του παπαγάλου*. Μετάφραση Τ. Μιχαηλίδης. Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ

Von Glasersfeld 1990. *An exposition of constructivism*. Journal for research on mathematics education

G. Loria. *Ιστορία των Μαθηματικών*. Εκδόσεις ΕΜΕ

G.E.R. Lloyd 2003. *Η Ελληνική επιστήμη μετά τον Αριστοτέλη*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

A. Meskens 2000. *Travelling Mathematics «The fate of Diofanto's Arithmetic»*

G. Polya 1994. *Πώς να το λύσω*. Μετάφραση Λ. Σιαδήμας. Εκδόσεις Σπηλιώτη.

Van Der Waerden 2007. *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 3^η έκδοση