

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ  
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΜΣ «ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ»

*Ο ΦΡΕΓΚΕ ΚΑΙ ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Α. Δ. ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ

Α.Μ. 002/12

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Κ. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2016

**Ο Φρέγκε και οι αριθμοί**

**Αντώνιος Δ. Αναπολιτάνος**

## **Μέρος Ι.**

### **Το φιλοσοφικό πλαίσιο**

Αποτελεί κοινοτοπία το να λεχθεί ότι η φιλοσοφία γεννήθηκε στην Αρχαία Ελλάδα. Τότε, όμως, διαμορφώθηκαν οι προϋποθέσεις εμφάνισης της και τότε διατυπώθηκαν οι θεμελιώδεις απόψεις, που επρόκειτο να καθορίσουν το βασικό πλαίσιο της φιλοσοφικής συζήτησης. Οι απόψεις αυτές εμφανίστηκαν ως προσπάθειες ανάγνωσης και ερμηνείας του κόσμου, που μας περιβάλλει, υλικού και άυλου. Η χρήση του όρου «άυλος» δεν προϋποθέτει ούτε αναγκαία συνεπαγεται την αποδοχή της υπαρξης οντοτήτων θεολογικού περιεχομένου, παρά το ότι μία τέτοια αποδοχή δεν αποκλείεται εντελώς.

Τα λεγόμενα προσωκρατικά φιλοσοφικά συστήματα, που αναπτύχθηκαν πριν από την εμφάνιση του πλατωνικού συστήματος, απετέλεσαν τον προπομπό της διαμόρφωσης του τοπίου σύγκρουσης ανάμεσα στον Πλάτωνα και, λίγο αργότερα, στον Αριστοτέλη, που έμελλε να καθορίσει στις πλέον βασικές της γραμμές την φιλοσοφική συζήτηση από τότε μέχρι σήμερα.

Φαίνεται ότι για τους Αρχαίους, στο πλαίσιο της πολιτισμικής ατμόσφαιρας, που αναπτύχθηκε, το πρόβλημα της ρευστότητας και της μεταβλητότητας των αντικειμένων της γνώσης υπήρξε κεντρικό στις φιλοσοφικές συζητήσεις τους. Ένα ρευστό και μεταβλητό γνωσιακό πλαίσιο δεν θα μπορούσε να διασφαλίσει μια ανάγνωση του υπαρκτού ασφαλή και έγκυρη. Θα πρέπει να τονίσουμε ό,τι η φιλοσοφία αναπτύχθηκε δίπλα-δίπλα με την γεωμετρία η μελέτη της οποίας απαιτούσε την ανάγνωση σταθερών σημείων και σχέσεων.

Θεωρούμε ότι σ' αυτό το πολιτισμικό σκηνικό εμφανίσθηκε το πλατωνικό φιλοσοφικό σύστημα, κυρίαρχο στοιχείο του οποίου είναι η απάντηση στο ερώτημα της φύσης των ιδεών, δηλαδή , όπως θα λέγαμε σήμερα, της φύσης των ιδιοτήτων και των σχέσεων. Η πλατωνική απάντηση φαίνεται να καθορίζεται από την ανάγκη ύπαρξης σταθερού πλαισίου ανάγνωσης του κόσμου. Σύμφωνα με τον Δ.Α. Αναπολιτάνο:

*Χαρακτηριστικό στοιχείο της αρχαιοελληνικής σκέψης φαίνεται να είναι η συνειδητοποίηση της ανάγκης ύπαρξης ενός γνωσιολογικού αιτήματος σταθερότητας για τα αντικείμενα γνώσης και τις σχέσεις τους....Οι Αρχαίοι είναι γνωστό ότι δεν ανέπτυξαν μίαν αντίληψη πειράματος, ως του απαραίτητου γνωσιακού ακολούθου των θεωρητικών τους συλλήψεων και έτσι οι εμπειρικές επιστήμες παρέμειναν σε στάδιο υπανάπτυξης συγκρινόμενες, επί παραδείγματι, με τα μαθηματικά. Είναι χαρακτηριστικό ότι ακόμη και η αστρονομία τους ήταν,σε μεγάλο βαθμό, αστρονομία δωματίου υπαγόμενη στην υπέρτερη αυτής επιστήμη της γεωμετρίας. Η αρχαιοελληνική πνευματική περιρρέουσα ατμόσφαιρα, όπως αυτή διαμορφώνεται και από τούς Ελεάτες αλλά και εν μέρει από τους Πυθαγόρειους, χαρακτηρίζεται λοιπόν, από το στοιχείο της ανάγκης ύπαρξης γνωσιολογικών και οντολογικών σταθερών και από το συνακόλουθο στοιχείο της λατρείας της θεωρίας, με την έννοια της καθολικής θέασης χωροχρονικά ανεξάρτητων εννοιολογικών πεδίων... Θεωρούμε ότι η πλατωνική φιλοσοφική σκέψη, ως λόγος, αρθρώνεται στο πλαίσιο μιας θεωριοκεντρικής πνευματικής παράδοσης, όπως την περιγράψαμε παραπάνω.<sup>1</sup>*

Το βασικό χαρακτηριστικό του πλατωνικού συστήματος είναι η αποδοχή της σταθερότητας του οντολογικού πλαισίου των ιδεών, με την έννοια ότι οι ιδέες υπάρχουν ως χωροχρονικά ανεξάρτητες και οντολογικά πρότερες των επί μέρους αντικειμένων. Όταν όμως λέμε «οντολογικά πρότερες» τι ακριβώς εννοούμε; Ή μάλλον, τι θεωρούμε ότι εννοεί ο Πλάτων; Ας ξεκαθαρίσουμε, όμως, πρώτα, ότι για τον Πλάτωνα, οι ιδέες υπάρχουν, ως χωροχρονικά ανεξάρτητες με την έννοια ότι δεν υπόκεινται σε χωροχρονική γενεση και φθορά και αποτελούν το εξωχρονικό και εξωχωρικό πλαίσιο στήριξης του κόσμου. Ως προς τον χαρακτηρισμό τους ως οντολογικά προτέρων των επιμέρους αντικειμένων, το θεμελιώδες, που πρέπει να τονίσουμε είναι ότι τα όντως όντα είναι οι ιδέες και αποτελούν ένα είδος λογικού αιτίου ύπαρξης των επιμέρους. Για παράδειγμα, ο Γιώργος είναι δίκαιος διότι *μετέχει* της ιδέας της δικαιοσύνης. Η σκοτεινή έννοια της *μέθεξης* αποτελεί τον πλατωνικό ομφάλιο λώρο οντολογικής ένδυσης του συγκεκριμένου Γιώργου με το ένδυμα (την ιδιότητα) του δικαίου. Ο Γιώργος υπάρχει ως δίκαιος Γιώργος γιατί μετέχει της ιδέας της δικαιοσύνης.<sup>2</sup>

Αυτή η έννοια της μέθεξης χρησιμοποιείται από τον Πλάτωνα για να τονισθεί η εξάρτηση του επιμέρους από το καθόλου με την έννοια του οντολογικού καθορισμού του τρόπου ύπαρξης του επιμέρους από το αντίστοιχο καθόλου. Παρά την σκοτεινή πλευρά της έννοιας της μέθεξης αυτός ο πλατωνικός τρόπος οντολογικής εξάρτησης, επιτρέπει την σχετικώς εύκολη διαδικασία σύγκρισης επιμέρους αντικειμένων, ως προς την ομοιότητά τους, επειδή μετέχουν, αν μετέχουν, της αυτής ιδέας. Είναι, βεβαίως, αλγοριθμικά δύσκολος έως αδύνατος ο καθορισμός της μέθεξης δύο διαφορετικών επί μέρους στην αυτή ιδέα. Παρά τούτα, αν κάτι τέτοιο ήταν εφικτό, θα μπορούσαμε, επί παραδείγματι, να ισχυριστούμε ότι ο Γιώργος και ο Γιάννης είναι ή όχι ταυτοσήμως δίκαιοι. Αυτή η ταυτοποίηση θα

ήταν δυνατή γιατί θα είχε ως συγκριτικό της διάμεσο την αμετάβλητη ιδέα της δικαιοσύνης.

Το αριστοτελικό φιλοσοφικό σύστημα αναπτύχθηκε και διαμορφώθηκε στον αντίποδα του πλατωνικού. Ο Αριστοτέλης, ως προσωπικότητα, πολυσχιδής με ενδιαφέροντα ποικίλα και ιδιαίτερη αγάπη για το συγκεκριμένο, ασχολήθηκε ακόμη και με αντικείμενα φυσιοδιφικού χαρακτήρα, μη περιφρονώντας το επιμέρους, το χωροχρονικά προσδιορίσιμο και υποκείμενο σε γένεση και φθορά. Οι ιδέες για αυτόν δεν υπήρχαν πέραν και έξω του κόσμου των συγκεκριμένων αντικειμένων. Τουναντίον, αποτελούσαν τον απαραίτητο μορφοποιητή των αντικειμένων, που, πάντως, δεν υπήρχε ούτε και λειτουργούσε ως ανεξάρτητη από τα συγκεκριμένα αντικείμενα οντότητα. Έτσι διεμόρφωσε την γνωστή, πλέον, στην φιλοσοφική κοινότητα θεωρία περί *υλομορφισμού*, σύμφωνα με την οποία τα συγκεκριμένα επί μέρους αντικείμενα, ως τα μόνα υπαρκτά, αποτελούντο από ύλη και μορφή.

Κατά τον Δ. Α. Αναπολιτάνο<sup>3</sup>:

*Σύμφωνα με την αριστοτελική φιλοσοφία κάθε αντικείμενο, μια καρέκλα, ένα τραπέζι, ένα βιβλίο, ένας κόκκος άμμου, αποτελείται από δύο διαφορετικής υφης συστατικά. Το πρώτο συστατικό είναι το υλικό υπόστρωμα του εμπειρικού αντικειμένου, που, για τον Αριστοτέλη έχει την μοναδική ιδιότητα να χαρακτηρίζεται και όχι να χαρακτηρίζει. Το υλικό υπόστρωμα ή η ύλη του εμπειρικού αντικειμένου μπορεί να είναι κόκκινη ή γαλάζια, να έχει κυβικό ή σφαιρικό σχήμα, να έχει μεγαλύτερη ή μικρότερη σκληρότητα κτλ., μπορεί, δηλαδή, όπως είπαμε να χαρακτηρίζεται χωρίς να χαρακτηρίζει. Για να ήταν δυνατόν να χαρακτηρίσει, θα έπρεπε να υπάρχουν διαφορετικά ήδη ύλης ή να υπάρχει ένα μόνο είδος ύλης,*

αλλά, δύο τουλάχιστον είδη εμπειρικών αντικειμένων υλικά και άυλα. Δεδομένου όμως πως δεν υπάρχουν άυλα εμπειρικά αντικείμενα και πως ύπαρξη διαφορετικών ειδών ύλης σημαίνει απλή απόδοση διαφορετικών χαρακτηριστικών ιδιοτήτων σε ένα κοινό υπόστρωμα, κάτι τέτοιο εμφανίζεται ως αδύνατο. Το δεύτερο συστατικό του εμπειρικού αντικειμένου είναι η μορφή του. Ένα εμπειρικό αντικείμενο, όπως για παράδειγμα μία χάλκινη σφαίρα<sup>4</sup> χαρακτηρίζεται από τη μορφή του. Η μορφή χαρακτηρίζει το υλικό υπόστρωμα πού, με τη σειρά του, χαρακτηρίζεται και δέν χαρακτηρίζεται. Βλέποντας μία συγκεκριμένη χάλκινη σφαίρα δε σημαίνει πως με διάμεσο την αισθητηριακή αντίληψη αποκτούμε την δυνατότητα νοητικής σύλληψης της ιδέας της σφαιρικότητας. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, οι ιδέες δεν έχουν ανεξάρτητη ύπαρξη. Και στην περίπτωση, που με την αφορμή την οπτική εικόνα της χάλκινης σφαίρας, διαλογιζόμαστε πάνω στις ιδιότητες της σφαιρικότητας, δεν κάνουμε τίποτε άλλο παρα να δουλεύουμε με ένα νοητό ομοίωμα της υλικής σφαίρας που απετέλεσε το αίτιο της αρχικής οπτικής συλληψης. Η διαδικασία δημιουργίας νοητών ομοιωμάτων είναι μία διαδικασία αφαίρεσης που δεν συνεπαγεται αναγκαστικά την ύπαρξη ενός αναλλοίωτου σύμπαντος ιδεών, τα αντικείμενα του οποίου συλλαμβάνονται νοητικά. Η αφαιρετική διαδικασία είναι, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, μία διαδικασία δημιουργίας νοητών ομοιωμάτων, που δεν προσφέρει ούτε αφαιρεί τίποτε από την υλική πραγματικότητα της χάλκινης σφαίρας. Τα βασικά χαρακτηριστικά της –ύλη και μορφή- δεν μπορούν να διαχωριστούν, η δε μελέτη της δεν συνεπάγεται τον διαχωρισμό τους.

Το πρόβλημα, που ανακύπτει με το αριστοτελικό φιλοσοφικό σύστημα έχει να κάνει με την αδυναμία ακριβούς συγκρισιμότητας ομοίων αντικειμένων. Είναι ο δίκαιος Γιώργος όμοιος δίκαιος με τον δίκαιο Γιάννη; Στο πλατωνικό σύστημα κάτι τέτοιο είναι, καταρχήν, δυνατόν να πιστοποιηθεί, παρότι δεν υπάρχει πρακτικός αλγόριθμος διαπίστωσης της ομοιότητας της μέσω της αναγωγής του δίκαιου Γιάννη και του δίκαιου Γιώργου δια της μέθεξης τους στην ιδέα της δικαιοσύνης. Στην περίπτωση του αριστοτελικού συστήματος η ιδιότητα του δικαίου στον Γιάννη δεν μπορεί να συγκριθεί με την ιδιότητα του δικαίου στον Γιώργο διότι αυτές δεν μπορούν να υπάρξουν μόνες τους και να αποκολληθούν από τα υλικά τους υποστρώματα, ούτε να αναχθούν σε κάτι κοινό και υπέρτερο στον χώρο των ιδεών, γιατί κάτι τέτοιο δεν υπάρχει. Έτσι, για τον Αριστοτέλη, ανακύπτει το πρόβλημα της ύπαρξης των εμπειρικών αντικειμένων. Στον Πλάτωνα ο δίκαιος Γιώργος υπάρχει, ως δίκαιος, διότι μετέχει της ιδέας της δικαιοσύνης. Στον Αριστοτέλη δεν υπάρχει τέτοια μεταφυσική υπαρκτική δυνατότητα. Για αυτό τον λόγο ο Αριστοτέλης οικοδομεί, κατασκευάζει, υιοθετεί μιά θεωρία περί *γένεσης* και *φθορας*, σύμφωνα με την οποία τα εμπειρικά αντικείμενα γεννώνται, φθείρονται και πεθαίνουν, αναπαραγόμενα κατά την διάρκεια της εμπειρικής παρουσίας τους.

Κατά τον Αριστοτέλη υπάρχουν δύο διαδικασίες γένεσης, οι οποίες είναι δυνατόν να κατανοηθούν με τα εξής δύο παραδείγματα. Η βιολογική μετάδοση μορφής λαμβάνει χώρα κατά τα συνήθη. Δηλαδή ένα φυτό τριανταφυλλιάς παράγει σπόρους οι οποίοι εμπεριέχουν την δυνατότητα, κάτω από τις κατάλληλες συνθήκες, μετατροπής τους σε φυτά τριανταφυλλιάς. Καμιά άλλη δυνατότητα δεν υπάρχει. Οι σπόροι τριανταφυλλιάς θα παραγάγουν τριανταφυλλιές και τίποτε άλλο. Η ενσωματωμένη στους σπόρους τριανταφυλλιάς δυνατότητα μετατροπής τους σε φυτά τριανταφυλλιάς είναι μονοσημάντως καθορισμένη. Από την άλλη

μεριά ένα δεύτερο παράδειγμα μετάδοσης μορφής δίδεται στο πλαίσιο της καλλιτεχνικής δημιουργίας. Ένα τεμάχιο ακατέργαστου μαρμάρου εμπεριέχει τη δυνατότητα μορφοποίησης του σε συγκεκριμένο άγαλμα. Ακόμη περισσότερο, οι δυνατότητες μετατροπής του σε συγκεκριμένα αγάλματα είναι άπειρες ως προς το πλήθος τους. Η συγκεκριμένοποίηση μιας ορισμένης δυνατότητας περνάει από τα χέρια του καλλιτέχνη-δημιουργού. Το συγκεκριμένο άγαλμα, που θα προκύψει, αποτελεί το, κατα την αριστοτελική ορολογία, *ενεργεία* άγαλμα, που αποκαλύφθηκε από τον καλλιτέχνη δημιουργό, καθώς αυτός οραματικά αλλά και εμπειρικά ενεργοποίησε την συγκεκριμένη κρυμμένη δυνατότητα στο ακατέργαστο τεμάχιο μαρμάρου. Μετέτρεψε, δηλαδή, την *δυνάμει* ύπαρξη του αγάλματος σε *ενεργεία* ύπαρξή του. Έτσι, εν χώρῳ και χρόνῳ, παίζεται το αριστοτελικό υπαρκτικό παίγνιο της γένεσης και της φθοράς. Οι μορφές επενδύουν την ύλη, όχι ως αποτελέσματα μέθεξης του συγκεκριμένου στο ιδεατό, αλλά ως γεννήματα διαδικασιών μετάδοσής τους, που είτε έχουν βιολογικό είτε δημιουργικό χαρακτήρα. Έτσι ο Αριστοτέλης δεν έχει την ανάγκη να εξηγήσει την ύπαρξη των εμπειρικών δεδομένων μέσω της σκοτεινής πλατωνικής μέθεξης, χάνοντας, από την άλλη μεριά, τη δυνατότητα διαπίστωσης της μορφικής ταυτότητας δύο μορφικά ομοίων εμπειρικών αντικειμένων.

Τα δύο μεγάλα φιλοσοφικά συστήματα της αρχαιότητας έμελλε να καθορίσουν το μετέπειτα πλαίσιο στο οποίο αναπτύχθηκε η περαιτέρω φιλοσοφική δραστηριότητα και σκέψη. Παρείχαν τις δύο θεμελιώδεις απαντήσεις στο κυρίαρχο, όπως απεδείχθη, φιλοσοφικό πρόβλημα του όντος και της γνώσης του. Τί είναι αυτό που υπάρχει, πώς γνωρίζεται και ποιο είναι το είδος της γέφυρας μεταξύ του όντος και της γνώσης του; Το πλατωνικό φιλοσοφικό σύστημα έθεσε, ως κεντρικό του στοιχείο, την απόρριψη του εμπειρικού φαίνεσθαι, ως κυρίαρχου, για την απάντηση του

ερωτήματος τί είναι οντολογικά πρότερο. Έτσι ο κόσμος των φαινομένων, καθώς διολισθαίνει και μεταβάλλεται, είναι δυνατόν να μας βοηθήσει στην αποκάλυψη οντοτήτων και αληθειών βαθιά κρυμμένων κάτω από τον μανδύα των φθαρτών φαινομένων. Τα ίδια, όμως, αυτά φαινόμενα έχουν την ανάγκη εξηγήσεων, ως προς την χωροχρονική δομή τους, στηριγμένων στο άχρονο και αμετάβλητο των αληθειών μιάς άχρονης και αμετάβλητης πραγματικότητας, αυτής των ιδεών. Η μέθεξη είναι ο μηχανισμός μετάγγισης της αλήθειας από τον χώρο των ιδεών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων, που υπάρχουν ανεξάρτητα από τα εμπειρικά συγκεκριμένα και τα εμπειρικά σχετιζόμενα, στον χώρο, ακριβώς, των εμπειρικά συγκεκριμένων και εμπειρικά σχετιζομένων. Είναι αυτή η μέθεξη του συγκεκριμένου δίκαιου Παύλου στην ιδέα της δικαιοσύνης, που τον καθιστά δίκαιο και που έχει ως συνέπειά της (με αδήριτη οντολογική αναγκαιότητα) να καθίσταται αληθής η πρόταση «ο Παύλος είναι δίκαιος». Από την άλλη μεριά, το αριστοτελικό φιλοσοφικό σύστημα στο ερώτημα τι είναι οντολογικώς πρότερο, απαντά απορρίπτοντας την οντολογική ανεξαρτησία των ιδεών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων. Η εμπειρική πραγματικότητα είναι η μόνη πραγματικότητα, και ο συγκεκριμένος δίκαιος Παύλος είναι δίκαιος, διότι η ιδιότητα του είναι να είναι δίκαιος. Είναι απολύτως συνυφασμένη με την υλική φύση του. Ο δίκαιος Παύλος υπάρχει, ως δίκαιος, επειδή το να είναι δίκαιος δεν οφείλεται σε κάποια μυστηριώδη μέθεξή του στην ιδέα της δικαιοσύνης αλλά οφείλεται σε αυτή καθ' εαυτήν την ιδιοσυστασία του. Τα εμπειρικά αντικείμενα αποτελούνται, κατά τον Αριστοτέλη, από ύλη και μορφή,<sup>5</sup> που προσιδιάζουν στο εκάστοτε συγκεκριμένο εμπειρικό αντικείμενο και δεν υπάρχουν ανεξάρτητα απ' αυτό. Η αριστοτελική αυτή άποψη, που είναι γνωστή, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, και ως υλομορφισμός, αποτελεί τον οντολογικό αντίποδα του πλατωνισμού και της υποστασιοποίησης των ιδιοτήτων και σχέσεων.

Ο ανταγωνισμός των δύο συστημάτων για κυριαρχία στον φιλοσοφικό στίβο οδήγησε, μακροπροθέσμως, στην οριστική δημιουργία, δύο αντίπαλων σχολών, που μορφοποιήθηκαν ως τέτοιες κυρίως κατά τον 17ο αιώνα και κατά το πρώτο ήμισυ του 18ου αιώνα. Η πρώτη σχολή με κυρίαρχες μορφές τους Descartes, Leibniz και Spinoza, είναι γνωστή πλέον ως η σχολή των *ρασιοναλιστών* και η δεύτερη με κυρίαρχες μορφές τους Locke, Berkeley και Hume ως η σχολή των *εμπειριοκρατών* ή *εμπειριστών*. Η σχολή των ρασιοναλιστών θεωρείται απολύτως συνδεδεμένη με τον πλατωνισμό, ενώ η σχολή των εμπειριοκρατών φιλοσόφων με τον αριστοτελισμό.

Τα δύο βασικά προβλήματα, κεντρικά στο φιλοσοφικό στάτους του ερωτήματος περί του όντος και της γνώσης του, που αντιμετώπισαν με απολύτως διαφορετικούς τρόπους οι εμπειριοκράτες και οι ρασιοναλιστές φιλόσοφοι, ήταν, πρώτον, αυτό του ερωτήματος του τί υπάρχει ως όντως ον και, δεύτερον, αυτό του ερωτήματος ποιά είναι η θεμελιώδης πηγή της γνώσης μας. Το είδος της απάντησης σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα καθόρισε την ταξινόμηση των φιλοσόφων, ιδίως του 17ου και των αρχών του 18ου αιώνα, στην, εκ των υστέρων, αποτίμησή τους, είτε στους ρασιοναλιστές είτε στους εμπειριοκράτες ή εμπειριστές φιλοσόφους.

Ποιά ήταν, λοιπόν, σε γενικές γραμμές, η απάντηση στο πρώτο ερώτημα των ρασιοναλιστών φιλοσόφων; Η ύπαρξη της εμπειρικής πραγματικότητας δεν αμφισβητείται, έστω και αν υποβαθμίζεται στο επίπεδο του φαινομένου, το οποίο θεωρείται ότι υπάρχει, αλλά δευτερογενώς, και ίσως, παρασιτικώς με την έννοια ότι τα όντως όντα ανήκουν στη σφαίρα των ιδεών που, στην καλύτερη περίπτωση, κατοικοεδρεύουν στην περιοχή του νου (ratio). Η πλατωνική επίδραση είναι προφανής, παρότι το πλατωνικό σύμπαν ιδεών, στην περίπτωση των ρασιοναλιστών φιλοσόφων,

μεταφέρεται πρωτογενώς στον νου του Δημιουργού και δευτερογενώς στον νου των ελλόγων όντων, δηλαδή, των ανθρώπων. Το βασικό πρόβλημα είναι αυτό του τρόπου ύπαρξης των γενικών αφηρημένων ιδεών, δηλαδή των καθόλου, των λατινικών δηλαδή *universalia* ή των αγγλοσαξονικών *universals*. Αυτά, κατά το σχήμα των ρασιοναλιστών, υπάρχουν στον νου των ελλόγων όντων ως ομοιώματα των αντιστοίχων τους, που υπάρχουν στο νου του Δημιουργού και δεν προσλαμβάνονται μέσω της αισθητηριακής αντίληψης. Η θέση αυτή αποτελεί τη βασική συνιστώσα της απάντησης των ρασιοναλιστών στο δεύτερο ερώτημα, δηλαδή, στο ερώτημα ποιά είναι η θεμελιώδης πηγή της γνώσης μας. Με τρόπο απόλυτο και χωρίς εξαιρέσεις οι ρασιοναλιστές αρνούνται την αισθητηριακή αντίληψη, ως πηγή της γνώσης, και θεωρούν ότι κάθε τι, που ταξινομείται ως αντικείμενο της γνώσης, προϋπάρχει στον ανθρώπινο νου, έστω μή συνειδητοποιούμενο, ή, εν πάσει περιπτώσει, εν υπνώσει. Τί ακριβώς θα πεί *εν υπνώσει*; Θα πει ότι η πραγματική πηγή του είναι ο νους και ότι διαδικασίες, όπως αυτή της αισθητηριακής αντίληψης, απλώς υποβοηθούν ώστε να αναδυθεί στην συνειδητή επιφάνεια του νου από τα άδυτα του ιδίου του νου. Δεν είναι, λοιπόν, η αισθητηριακή αντίληψη και η, εκάστοτε, χωροχρονικά προσδιορισμένη, εμπειρική πραγματικότητα οι γνήσιες πηγές της γνώσης, αλλά ο ίδιος ο νους του ελλόγου όντος. Ο άνθρωπος, το έλλογον, δεν μαθαίνει την έννοια της δικαιοσύνης από την εμπειρία του, ούτε τη συγκροτεί μέσω αυτής. Κατά τους ρασιοναλιστές απλώς υποβοηθείται από την αισθητηριακή του αντίληψη, κατά κύριο λόγο, στο να συνειδητοποιήσει κάτι, στην προκειμένη περίπτωση την έννοια της δικαιοσύνης, που ήδη προϋπήρχε εν υπνώσει στον νου του.

Οι απαντήσεις των εμπειριοκρατών φιλοσόφων στα ερωτήματα, που προαναφέραμε, βρίσκονται στον αντίποδα των απαντήσεων

που δόθηκαν από τους ρασιοναλιστές. Για αυτούς, χωρίς εξαιρέσεις, ο ανθρώπινος νους δεν είναι ο ουσιαστικός και πρωτογενής φορέας της γνώσης.

Πριν, όμως, μιλήσουμε για τη γνωσιακή διαδικασία που υιοθετούν οι εμπειριοκράτες,ας δούμε τί ακριβώς πρεσβεύουν ως προς τα όντως όντα. Για αυτούς, με παραλλαγές, που δεν μεταβάλλουν αισθητώς την συνολική εικόνα,η μόνη πραγματικότητα είναι αυτή, που καθορίζεται από την εσωτερική ή εξωτερική αντίληψη. Δεν υπάρχει τίποτε άλλο πέραν της εμπειρικής πραγματικότητας. Δεν υπάρχουν γενικές αφηρημένες ιδέες γιατί, όπως μας λέει ο Berkeley: «Οι ποιότητες ή ιδιότητες των αντικειμένων δεν υπάρχουν ποτέ κάθε μία μόνη της και χωριστά από όλες τις άλλες, αλλά ανακατεμένες και αποτελώντας ένα εννοιαίο σύνολο στα πλαίσια του ιδίου του αντικειμένου.»<sup>6</sup>

Σύμφωνα με τον Δ. Α. Αναπολιτάνο:

*Μία από τις βασικές θέσεις του Berkeley είναι πως δεν υπάρχουν αφηρημένες γενικές ιδέες, όχι μόνον σαν a priori ταξινομητικές και ερμηνευτικές δυνατότητες του ανθρώπινου νου, αλλά ούτε σαν a posteriori κατασκευές που εδράζονται στην καθημερινή εμπειρία. (...) Για τον Berkeley (...) η ιδιότητα του τριγωνικού δεν μπορεί να αποτελέσει ξεχωριστή εικόνα-ιδέα και να απομονωθεί από συγκεκριμένα φυσικά ή νοητά τρίγωνα. Σύμφωνα με τον Berkeley, όταν σκεφτόμαστε ένα τρίγωνο έχουμε στο νου μας ένα συγκεκριμένο νοητό αντικείμενο που δεν μπορεί να μην είναι την ώρα που το σκεφτόμαστε ούτε ισόπλευρο, ούτε ισοσκελές, ούτε ένα τρίγωνο με άνισες πλευρές. Κοντολογίς, δεν μπορούμε να έχουμε στον νου μας την εικόνα-ιδέα ενός γενικού τριγώνου, γιατί μία τέτοια εικόνα*

θα πρέπει να συνδυάζει αλληλοαναιρούμενα χαρακτηριστικά.<sup>7</sup>

Κατά τους εμπειριοκράτες, λοιπόν, φιλοσόφους δεν υπάρχουν αφηρημένες ιδέες και η πρόσβαση στη γνώση λαμβάνει χώρα μόνο μέσω εμπειρικών δίοδων. Όπως μας λέει ο Locke:

*Όσο προσποιούμαι τον δάσκαλο το μόνο που κάνω είναι να ερευνώ και επομένως δεν μπορώ παρά να ομολογήσω εδώ ξανά ότι η εξωτερική και εσωτερική αντίληψη είναι οι μόνες δίοδοι που μπορώ να βρω, από τις οποίες διοχετεύεται γνώση στον νου. Αυτές μόνο, όσο μπορώ να δω, είναι τα παράθυρα από τα οποία μπορεί να μπει φώς σε αυτό το σκοτεινό δωμάτιο.<sup>8</sup>*

Παρά τις επιμέρους διαφορές, λοιπόν, οι εμπειριοκράτες φιλόσοφοι, πιστοί στην αριστοτελική παράδοση, απαντούν στα δύο θεμελιώδη ερωτήματα που ετέθησαν παραπάνω με παρόμοιο τρόπο. Δεν υπάρχουν, στην θεμελιώδη εκδοχή τους, γενικές αφηρημένες ιδέες, η μόνη πραγματικότητα είναι η εμπειρική και οι μόνες αντίστοιχες δίοδοι για τη γνώση είναι εμπειρικά προσδιορισμένες. Ο ανθρώπινος νους, ο νους δηλαδή του ελλόγου όντος, είναι άδειος γνωσιακού περιεχομένου και μορφοποιείται γνωσιακά ανάλογα με τα εμπειρικά ερεθίσματα, που φθάνουν μέσω των αισθήσεων, και των προεκτάσεών τους, σε αυτόν. Ο ανθρώπινος νους, για να χρησιμοποιήσουμε την πολύ γνωστή λατινική έκφραση, είναι *tabula rasa*, έτοιμος να δεχθεί τα εμπειρικά ερεθίσματα, που θα καθορίσουν τη μορφή και το γνωσιακό του περιεχόμενο.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε την ύπαρξη μιάς τάσης που υποβοηθείται από την υιοθέτηση εμπειριοκρατικών θέσεων, και, που οδηγεί σε φιλοσοφικές απόψεις, οι οποίες είναι γνωστές ως *φαινομεναλιστικές*. Από τους εμπειριοκράτες φιλοσόφους του 17<sup>ου</sup>

και των αρχών του 20<sup>ου</sup> αιώνα η τάση αυτή εμφανίζεται περισσότερο έντονη στον Berkeley, υπάρχουν ίχνη στον Hume και ανιχνεύεται δύσκολα στο έργο του Locke. Ο κατεξοχήν, λοιπόν, εμπειριοκράτης, φαινομεναλιστής φιλόσοφος είναι ο Berkeley. Ποιά είναι τα βασικά στοιχεία του, κατά Berkeley, φαινομεναλισμού; Πρώτο και καλύτερο αυτό της απόρριψης ακόμη και της ύπαρξης της εμπειρικής πραγματικότητας, ως ανεξάρτητης από τον γνώστη της. Η μόνη αποδεκτή από τον Berkeley πραγματικότητα είναι αυτή των εμπειρικών μας δεδομένων, τα οποία, ρέουν με τρόπο συνεχή και συνεπή και συλλαμβάνονται ομοιοτρόπως από τον ανθρώπινο πληθυσμό. Σύμφωνα με τον φιλόσοφο, δεν είναι απαραίτητη η αποδοχή της ύπαρξης μιάς εμπειρικής πραγματικότητας από την οποία δεχόμαστε σήματα σχετικά με την ύπαρξή της. Είναι οντολογικά επαρκής, αυτή καθ' εαυτήν η αποδοχή της ύπαρξης μόνον των σημάτων, αρκεί αυτά να έχουν μία δομή, που να επιτρέπει την αίσθηση μιας εσωτερικά συνεπούς αιτιοκρατικά και χωροχρονικά ρέουσας εμπειρικής πραγματικότητας. Σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο:

*Το βασικότερο επιχείρημα του Berkeley για την απόρριψη της ανεξάρτητης υλικής παρουσίας των φυσικών αντικειμένων μπορεί να περιγραφεί περιληπτικά ως εξής: Τα αντικείμενα που αντιλαμβανόμαστε σαν υπαρκτά δεν είναι αντικείμενα καθ' εαυτά αλλά εικόνες, συγκεκριμένες δηλαδή πολυπλοκότητες αισθητηριακών δεδομένων. Σύμφωνα με την καρτεσιανή παράδοση, οι εικόνες αυτές είναι φορείς αλήθειας, στο βαθμό που κατοπτρίζουν μία ανεξάρτητη από εμάς υλική πραγματικότητα. Η υλική όμως αυτή πραγματικότητα δεν μπορεί να γνωσθεί καθ'εαυτήν. Ακόμη και εαν υπάρχει, δεν έχουμε τη δυνατότητα να συγκρίνουμε μαζί της τις εικόνες που έχουμε γι'αυτήν. Σύμφωνα με τον Berkeley, η δυνατότητα συγκρίσεων*

πρέπει να περιορίζεται μεταξύ, ομοειδών πραγμάτων. Έτσι μπορούμε να συγκρίνουμε μόνο εικόνες με εικόνες ή, γενικότερα, ιδέες με ιδέες. Αν κάτι τέτοιο είναι σωστό, η δυνατότητα μη λανθασμένων συγκρίσεων, που εξασφαλίζεται από την συνεπή και νομοτελειακά καθορισμένη, ροή των αισθητηριακών μας δεδομένων και από τη λογική νοητική μας δομή, μπορεί από μόνη της να αποτελέσει μία αδιάψευστη πηγή αλήθειας. Έτσι, για τη στήριξη της ορθότητας των γνωστικών μας λειτουργιών δε χρειαζόμαστε την αβέβαιη, περιττή, και μεταφυσικά αμφισβητήσιμη υπόθεση της ανεξάρτητης ύπαρξης μίας υλικής φυσικής πραγματικότητας. Αντ'αυτής μπορούμε να δεχθούμε την πραγματικότητα της δικής μας παρουσίας για την οποία είμαστε βέβαιοι, λόγω του ότι μπορούμε να την ταυτίσουμε με την σκεπτικού χαρακτήρα αυτοσυνείδησή μας και την πραγματικότητα των εσωτερικών στοιχείων αυτής της αυτοσυνείδησης, που δεν είναι άλλα από το σύνολό των εικόνων και των ιδεών μας. Οι ταξινομήσεις των ιδεών μας, σε άμεσης αισθητηριακής προέλευσης και μή, έχουν εσωτερικό χαρακτήρα και δεν είναι απαραίτητα δηλωτικές ή βεβαιωτικές της ύπαρξης μιας πραγματικότητας ανεξάρτητης από μάς.<sup>9</sup>

Ο φαινομεναλισμός έχει ως συνέπεια του ένα ιδιαίτερο τρόπο θέασης ακόμη και θεμελιωδών μαθηματικών αντικειμένων, όπως, επί παραδείγματι, της μονάδας. Αυτό οδηγεί τον Berkeley σε οντολογική απόρριψη ή, εν πάσει περιπτώσει, σε διαφορετική θέαση τέτοιων θεμελιωδών μαθηματικών αντικειμένων, όπως θα δούμε και σε επόμενο κεφάλαιο. Παρά ταύτα παραθέτουμε συγκεκριμένο εδάφιο από το έργο του Berkeley, *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge* για του λόγου το αληθές:

*Γνωρίζω πως μερικοί θεωρούν τη μονάδα σαν μια απλή ή μη σύνθετη ιδέα, που συνοδεύει όλες τις άλλες ιδέες μέσα στο νου. Δεν βρίσκω όμως να έχω καμία τέτοια ιδέα, που να αντιστοιχεί στη λέξη «μονάδα». Σκέπτομαι πως αν την είχα δεν υπήρχε περίπτωση να μη την βρω. Αντίθετα, θα έπρεπε να μου ήταν η περισσότερη οικεία επειδή λέγεται ότι συνοδεύει όλες τις άλλες ιδέες και γίνεται αντιληπτή μ' όλους τους δυνατούς τρόπους που διαθέτουν οι αισθήσεις και η αυτοπαρατηρησία. Για να μην πω περισσότερα. Πρόκειται για μία αφηρημένη ιδέα.<sup>10</sup>*

Πάνω στο στέρεο φιλοσοφικό έδαφος, που δημιουργήθηκε κατά τον 17<sup>ο</sup> αιώνα, και τις αρχές του 18<sup>ου</sup> ξεδιπλώθηκε το φιλοσοφικό έργο του Kant. Ο Kant εργαζόμενος δημιουργικά κατά το δεύτερο ήμισυ του 18<sup>ου</sup> αιώνα με σαφείς και, ίσως, ανομολόγητες επιδράσεις στο έργο του από τον Leibniz και ομολογημένες από τον Hume, οικοδομεί ένα φιλοσοφικό σύστημα πέραν των δύο συστημάτων, που αναπτύχθηκαν κατά το προηγούμενο διάστημα. Θα επικεντρωθούμε σε δύο βασικές συμβολές του στη φιλοσοφία, επειδή αυτές, και ιδιαιτέρως η δεύτερη, σχετίζονται με το υπό διαπραγμάτευση θέμα μας.

Η πρώτη αναφέρεται στην περίφημη κοπερνίκεια επανάσταση στη φιλοσοφία. Η κρατούσα ισχυρή καρτεσιανή άποψη εμπεριέχει την έννοια της *αναπαράστασης*<sup>11</sup>. Σύμφωνα με αυτήν η πηγή όλων των ουσιών είναι ο Δημιουργός. Ό,τι υπάρχει, είτε ως αντικείμενο της εμπειρικής πραγματικότητας είτε ως αντικείμενο της νοητικής μας πραγματικότητας, αποτελεί προϊόν αναπαράστασης θεϊκών ουσιών που υπάρχουν πρωτογενώς στο νου του δημιουργού. Τα δύο αυτά είδη πραγματικότητας αποτελούν αναπαραστασιακές εκφάνσεις των θεϊκών ουσιών. Η χρησιμοποιούμενη από τον Descartes ορολογία έχει μεσαιωνική-θεολογική προέλευση

και διαφέρει απ'αυτή που χρησιμοποιούμε σήμερα. Έτσι η πραγματικότητα του έξω από μας φυσικού δένδρου χαρακτηρίζεται σαν μορφική πραγματικότητα και η πραγματικότητα των εικόνων μας σαν αντικειμενική πραγματικότητα. Σύμφωνα με τον Descartes υπάρχουν ουσίες-αντικείμενα δηλαδή θεϊκής γνώσης- που μπορούν να αναπαριστάνονται μόνο στο επίπεδο της αντικειμενικής πραγματικότητας. Όλες οι αφηρημένες ιδέες ανήκουν σε αυτή την κατηγορία. Τα μαθηματικά αντικείμενα σαν αφηρημένες ιδέες υπακούουν σε αυτού του είδους τον καθορισμό. Το ότι βλέποντας ένα τρίγωνο σχεδιασμένο σε κάποιον πίνακα φέρνουμε στο μυαλό μας την ιδέα του τριγώνου δεν πρέπει να μας δημιουργεί προβλήματα, γιατί άλλο πράγμα είναι η εικόνα του συγκεκριμένου τριγώνου και άλλο η γενική ιδέα του τριγώνου. Υπάρχουν βέβαια και ιδέες που δύσκολα θα μπορούσαμε να τις χαρακτηρίσουμε σαν γενικές και αφηρημένες, για τις οποίες επίσης δεν υπάρχει αντίστοιχη μορφική πραγματικότητα. Παραδείγματα τέτοιων ιδεών υπάρχουν πάμπολα· Η μυθολογική σφίγγα, ο πήγασος, ο μονόκερως και οι κένταυροι είναι μερικά απ'αυτά<sup>12</sup>.

Ο Kant αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα της απόδειξης της ύπαρξης της εξωτερική πραγματικότητας, της πραγματικότητας, δηλαδή, των εξωτερικών αντικειμένων, και μη θέλοντας να υιοθετήσει την ύπαρξη του δημιουργού ως μεσεγγυητή για την συμφωνία μεταξύ της καρτεσιανής μορφικής πραγματικότητας και της καρτεσιανής αντικειμενικής πραγματικότητας, υιοθετεί μία άποψη που φαίνεται να έχει φαινομεναλιστικό χαρακτήρα χωρίς να έχει. Δηλαδή θεωρεί ως γνωσιακώς ελέγξιμα μόνον τα περιεχόμενα του φαίνεσθαι. Για να μην κατηγορηθεί, όμως, ως φαινομεναλιστής δέχεται την ύπαρξη των καθ'εαυτά πραγμάτων τα οποία

παραμένουν σε γνωσιακό σκοτάδι και δεν είναι δυνατόν να αποτελούν αντικείμενα γνώσης. Έτσι κατορθώνει ή, μάλλον, θεωρεί ότι κατορθώνει να συμβιβάζει το καρτεσιανό σχήμα των καθ' εαυτά πραγμάτων και των εικόνων τους, χωρίς να είναι υποχρεωμένος να απολογηθεί ή να περιγράψει φιλοσοφικά την γνωσιακή γέφυρα μεταξύ των δύο αυτών ειδών πραγματικότητας. Αυτή η φιλοσοφική θέση συνιστά την *καντιανή κοπερνίκεια επανάσταση στη φιλοσοφία*.

Η δεύτερη ενδιαφέρουσα συμβολή του Kant στην φιλοσοφία σχετίζεται με την διάκριση, που εισήγαγε ο Leibniz, μεταξύ αναλυτικών και ενδεχομενικών αληθειών. Κατά τον Leibniz οι αναλυτικές αλήθειες είναι αυτές, που η αλήθεια τους πιστοποιείται σε κάθε δυνατό κόσμο ή, εναλλακτικά, αυτές που αποδεικνύονται ως αληθείς με πεπερασμένα ως προς το πλήθος τους βήματα. Σύμφωνα με τον ίδιο όλες οι μαθηματικές αλήθειες είναι αναλυτικές. Οι ενδεχομενικές αλήθειες από την άλλη μεριά, είναι αυτές των οποίων η αλήθεια πιστοποιείται μόνον σε ορισμένους δυνατούς κόσμους ή, εναλλακτικά, αυτές των οποίων η αλήθεια μπορεί να αποδειχθεί με άπειρα ως προς το πλήθος τους βήματα. Ένα παράδειγμα μίας αληθούς ενδεχομενικής πρότασης θα ήταν η πρόταση «ο αναπτήρας μου είναι μαύρος» στην περίπτωση, που πράγματι θα συνέβαινε ο αναπτήρας μου να είναι μαύρος.

Κατά τον Kant η διάκριση αυτή δεν εξαντλεί τον κόσμο των αληθειών ή, μάλλον, κατά τη δική του ορολογία, των αληθών κρίσεων. Έτσι εισάγει δύο κριτήρια ελέγχου των κρίσεων. Το πρώτο αναφέρεται στη διάκρισή τους σε αναλυτικές και συνθετικές (όπου ο όρος «συνθετικές» αντιστοιχεί στον όρο «ενδεχομενικές») και το δεύτερο στην διάκρισή τους σε *a priori* αληθείς και *a posteriori* αληθείς. Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση εξετάζουμε τις συνθετικές και *a posteriori* αληθείς κρίσεις. Τέτοιες είναι όλες οι προτάσεις-κρίσεις με εμπειρικό

περιεχόμενο, που συμβαίνει να είναι αληθείς. Μία τέτοια θα μπορούσε να είναι η πρόταση «ο αναπτήρας μου είναι μαύρος». Στην δεύτερη περίπτωση εξετάζουμε τις *a posteriori* αναλυτικές αληθείς κρίσεις. Τέτοιες κατά τον Kant δεν υπάρχουν, δεδομένου ότι η αναλυτικότητα ξεπερνά την χρονικότητα. Ό,τι είναι αναλυτικό είναι *a priori* χωρίς να συμβαίνει το αντίθετο. Στην τρίτη περίπτωση εξετάζουμε τις *a priori* αναλυτικές. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν, επί παραδείγματι, όλες οι ταυτολογίες. Τέλος στην τέταρτη περίπτωση, που είναι και η πιο ενδιαφέρουσα εξετάζουμε τις συνθετικές *a priori* αληθείς κρίσεις. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν όλες οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις καθώς και όλες οι αληθείς προτάσεις, που αναφέρονται σε νόμους της φύσης. Η σπουδαία αυτή διαφορά ανάμεσα στην ταξινόμηση του Leibniz και στην ταξινόμηση του Kant απελευθερώνει τα μαθηματικά από τον χώρο των ταυτολογιών και των λογικά έγκυρων τύπων και καθιστά τις μαθηματικές αλήθειες ενδεχομενικού μεν χαρακτήρα, ανεξάρτητες όμως από την χωροχρονικότητα και, εν πάσει περιπτώσει, μη ταυτολογικά ή τετριμμένα αληθείς<sup>13</sup>. Θα πρέπει, επίσης, να τονισθεί ότι οι αληθείς προτάσεις, που αφορούν στη χωροχρονικότητα αποτελούν ενδεχομενικές (συνθετικές) και συγχρόνως *a priori* αληθείς προτάσεις γιατί είναι προτάσεις που περιγράφουν το αναλλοίωτο πλαίσιο αναφοράς της επιστημολογικής μας πρόσβασης στον κόσμο.

Οι προτάσεις αυτές είναι, πρώτον, οι αληθείς προτάσεις της ευκλείδειας γεωμετρίας, γιατί, κατά Kant, ευκλείδειος είναι ο χώρος που μας περιβάλλει, και δεύτερον, οι αληθείς προτάσεις της αριθμητικής και κατ'επέκταση της πραγματικής ευθείας γιατί ο χρόνος κυλάει γραμμικά και μετράται με τα υλικά που μας παρέχει η εξιδανικευμένη γραμμικότητα των πραγματικών αριθμών. Η αντίληψη αυτή του Kant απεδείχθη λανθασμένη, δεδομένων των εξελίξεων που έλαβαν χώρα κατά το τέλος του 19<sup>ου</sup> αιώνα και τις

αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα στην περιοχή της φυσικής. Είναι πλέον, πέραν πάσης αμφιβολίας, γεγονός ότι ο χωροχρόνος δεν είναι ευκλείδειος. Ο Kant, βεβαίως, δεν μπορούσε αυτό να το γνωρίζει, δεδομένου ότι μέχρι τις μέρες του η μόνη γνωστή γεωμετρία ήταν η ευκλείδεια. Είναι γνωστό ότι οι πρώτες μη-ευκλείδειες γεωμετρίες εμφανίσθηκαν στις αρχές του 19<sup>ου</sup> αιώνα και αληθείς προτάσεις, που τις αφορούσαν, εμφανίστηκαν, ως θεωρήματα των μαθηματικών θεμελιώσεων που υποδείχθηκαν γι' αυτές, επίσης, κατά την διάρκεια του 19<sup>ου</sup> αιώνα.

Η κριτική, λοιπόν, του καντιανού φιλοσοφικού συστήματος σε σχέση με τον κεντρικό ρόλο που παίζει σ' αυτό η ευκλείδεια χωροχρονικότητα είναι άδικη για δύο λόγους. Ο πρώτος, όπως ήδη επισημάνθηκε, έχει να κάνει με την αδυναμία του Kant να γνωρίζει πράγματα που ανακαλύφθηκαν μετά τον θάνατο του. Ο δεύτερος, που είναι και ο ουσιαστικότερος, έχει να κάνει με την άποψη ότι το καντιανό σχήμα θα μπορούσε να τροποποιηθεί κατάλληλα, περιλαμβάνοντας τις νεότερες αντιλήψεις, περί δομής της χωροχρονικότητας, χωρίς να αλλάξει τίποτε στην καντιανή φιλοσοφική θεώρηση του κόσμου.

## Μέρος II.

### Οι φιλοσοφικές αντιλήψεις του Frege

Στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα και στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αναπτύχθηκαν απόψεις για την φιλοσοφία των μαθηματικών, που διαμόρφωσαν κατά τρόπο, σχεδόν, οριστικό το πλαίσιο εντός του οποίου έκτοτε αναπτύσσεται το συγκεκριμένο αντικείμενο. Οι απόψεις αυτές μορφοποιήθηκαν συγχρόνως με την εμφάνιση των παραδόξων στα θεμέλια της καντοριανής θεωρίας των συνόλων και ιδιαίτερα αυτών, τα οποία αναφέρονται στην πίστη πως αρκεί μία ιδιότητα για την περιγραφή ενός αντικειμένου, που δεν είναι άλλο από το σύνολο των αντικειμένων, που ικανοποιούν την ιδιότητα. Το παράδοξο του Russell είναι το χαρακτηριστικότερο τέτοιο παράδοξο, σύμφωνα με το οποίο αν σχηματίσεις το σύνολο των συνόλων, που δεν ανήκουν στον εαυτό τους τότε έχεις περιέλθει σε κατάσταση λογικού αδιεξόδου διότι αν υποθέσεις ότι το σύνολο αυτό ανήκει στον εαυτό του τότε έχει την ιδιότητα των στοιχείων του, δηλαδή δεν ανήκει στον εαυτό του, και αν υποθέσεις ότι το σύνολο αυτό δεν ανήκει στον εαυτό του, τότε έχοντας την ιδιότητα των στοιχείων του οφείλει να ανήκει στον εαυτό του. Ο Frege υπέστη τις συνέπειες της εμφάνισης των παραδόξων και ιδιαιτέρως του παραδόξου του Russell με τρόπο οδυνηρό γιατί όπως ο ίδιος ομολογούσε σε ένα συγκλονιστικό σημείωμά του στο τέλος του δευτέρου τόμου του έργου του *Grundgesetze der Arithmetik*<sup>14</sup>:

*Δεν υπάρχει μεγαλύτερη ατυχία, που μπορεί να συμβεί σε έναν συγγραφέα επιστημονικού συγγράμματος, απ'αυτήν του να δει κάποιο από τα θεμέλια του οικοδομήματός του*

*να τρέμει μετά το τέλος της οικοδόμησης .*

*Αυτή ήταν η θέση στην οποία περιήλθα μετά από ένα γράμμα του κ. Russell, ακριβώς τη στιγμή που το τύπωμα αυτού του τόμου ήταν κοντά στο τέλος του. Σχετίζεται με το αξίωμα μου (V). Ποτέ δεν έκρυψα από τον εαυτό μου την έλλειψη προφάνειας του, κάτι που ανήκει στα υπόλοιπα αξιώματα και που πρέπει καθαρά να απαιτείται από κάθε νόμο της λογικής<sup>15</sup>....*

Το αξίωμα στο οποίο αναφέρεται ο Frege είναι αυτό σύμφωνα με το οποίο κάθε ιδιότητα περιγράφει ένα σύνολο εκείνων, ακριβώς, των αντικειμένων που ικανοποιούν την ιδιότητα. Το πρόβλημα, σε επίπεδο μαθηματικών, λύθηκε εκ των υστέρων με την υιοθέτηση, του λεγόμενου *αξιωματικού σχήματος διαχωρισμού*, σύμφωνα με το οποίο μία ιδιότητα περιγράφει το σύνολο των αντικειμένων, τα οποία ικανοποιούν την ιδιότητα, μόνο εφόσον αυτά τα αντικείμενα ανήκουν ήδη σε κάποιο άλλο ήδη υπάρχον σύνολο. Σε επίπεδο φιλοσοφίας, το πρόβλημα οδήγησε στην φρενιτώδη ανάπτυξη της φιλοσοφίας των μαθηματικών και την δημιουργία τριών διακριτών σχολών φιλοσοφίας των μαθηματικών. Οι σχολές αυτές είναι η σχολή των Λογικιστών των Frege και Russell, η σχολή των Φορμαλιστών του Hilbert και η σχολή των Ιντουσιονιστών του Brouwer.

Η συμβολή του Frege στην διαμόρφωση της σχολής των Λογικιστών υπήρξε θεμελιώδης και θα αναλυθεί παρακάτω κατά την παράθεση των βασικών στοιχείων της φιλοσοφίας του. Εν τούτοις θα πρέπει να τονισθεί ότι ο πρώτος που διετύπωσε, έστω με τον δικό του ιδιάζοντα τρόπο την βασική θέση του Λογικισμού δεν ήταν ούτε ο Frege ούτε ο Russell αλλά ο Leibniz.

Όπως έχει ήδη λεχθεί, σύμφωνα με τον Leibniz, οι αληθείς προτάσεις χωρίζονται στις αναλυτικές αληθείς προτάσεις και στις

ενδεχομενικές αληθείς προτάσεις, κάτι που ορθώς συζήτησε διεξοδικά και κριτικά ο Kant επισημαίνοντας ότι ο Leibniz είχε πολύ περιορισμένη αντίληψη των βασικών διακρίσεων, προσθέτοντας ο ίδιος την ταξινομική διάκριση των *a priori* και *a posteriori* αληθών προτάσεων. Σύμφωνα με την ταξινόμησή του αυτή ο Leibniz τοποθετούσε τις αληθείς προτάσεις των μαθηματικών στις αναλυτικές αληθείς προτάσεις. Αυτό τον υπεχρέωνε, σχεδόν, και ίσως τον διευκόλυνε στο να υποστηρίξει την άποψη ότι δεν υπήρχε ουσιώδης διαφορά μεταξύ των αληθών προτάσεων της Λογικής και των αληθών προτάσεων των Μαθηματικών. Έτσι ήταν απολύτως φυσιολογικό γι' αυτόν να συνηγορήσει υπέρ της θέσης, ότι οι μαθηματικές αλήθειες είναι λογικές αλήθειες και, επομένως, ότι τα Μαθηματικά ήταν ένας σημαντικός, ο σημαντικότερος, ίσως, κλάδος της Λογικής. Να ισχυρισθεί δηλαδή ότι τα Μαθηματικά, είναι αναγώγιμα στη Λογική και ότι η Λογική είναι γνωσιακά πρότερη των Μαθηματικών.

Η βασική αυτή θέση της αναγωγιμότητας των Μαθηματικών στη Λογική αποτελεί το βασικό δόγμα της σχολής των Λογικιστών. Όλοι οι εκφραστές του δόγματος αυτού, δηλαδή κατά βάση οι Russell και Frege, με διαφορετική, ο καθένας, επιχειρηματολογία, προσπάθησαν να αντιμετωπίσουν την θεμελίωση αυτής της αναγωγιμότητας με μέσα και τρόπους ενδιαφέροντες. Ιδιαίτερως ο Frege για να πετύχει κάτι τέτοιο επεχείρησε μία συζητήσιμη διεύρυνση των λογικών εργαλείων του, περιλαμβάνοντας σ' αυτά την έννοια της συνάρτησης την οποία θεώρησε λογικής και όχι μαθηματικής προέλευσης. Κάτι τέτοιο είναι συζητήσιμο γιατί η έννοια της συνάρτησης, κατά πολλούς, δεν έχει λογική προέλευση, δεν ανήκει δηλαδή στον χώρο των εννοιών που βοηθούν την ταξινόμηση των κλασικών λογικών αληθειών, που είναι, κατά τον Αναπολιτάνο<sup>17</sup>, οι *ταυτολογίες* και οι *λογικά έγκυροι τύποι*. Η έννοια της συνάρτησης ανήκει στον χώρο των Μαθηματικών, που, κατά

τον Kant, είναι χώρος, οι αλήθειες του οποίου δεν είναι λογικές αλήθειες, αλλά αλήθειες ενδεχομενικού (συνθετικού) και a priori χαρακτήρα.

Είναι απαραίτητο να λεχθεί σε αυτό το σημείο, ότι η πίστη των Frege και Russell στον Λογικισμό είναι πιθανόν να οφείλεται σε μία απέχθεια τους προς τον Πλατωνισμό με την έννοια ότι δεν φαίνεται να δέχονται την ανεξάρτητη ύπαρξη των μαθηματικών αληθειών. Έτσι φαίνεται να επιδιώκουν την αναγωγή των μαθηματικών αντικειμένων μέσω γλωσσικών σχηματισμών, οι οποίοι έχουν λογική προέλευση και, καταφανώς, εμπειριοκρατικό χαρακτήρα. Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν αποτελούν, δηλαδή, γι'αυτούς οντότητες πέραν και έξω της γλωσσικής λογικής εμπειρίας και δεν συνιστούν οντολογικά πρότυπα της μαθηματικής πρακτικής.

Η γλωσσική λογική εμπειρία είναι θεμελιώδης συνιστώσα και στο φιλοσοφικό σύστημα του Russell και στο φιλοσοφικό σύστημα του Frege. Ο,τι κατασκευάζεται γλωσσικά δεν προϋπάρχει αυτής της κατασκευής. Για τον Frege, ιδιαίτερα, είναι ακριβώς αυτή η γλωσσική κατασκευή, που καθιστά το περιγραφόμενο μαθηματικό αντικείμενο υπαρκτό. Δηλαδή, στοιχείο υπαρκτικό του μαθηματικού αντικειμένου είναι η γλωσσική λογική περιγραφή. Είναι σχεδόν, σαν η γλωσσική αυτή περιγραφή, ή μάλλον, η δυνατότητα αυτής της γλωσσικής περιγραφής του να ταυτίζεται με την ύπαρξή του. Αυτή η αντιπλατωνική εμπειριοκρατική προδιάθεση του, κατά Frege, Λογικισμού του θα διαπιστώσουμε ότι προδίδεται λόγω αναγκών που ανακύπτουν κατά την οικοδόμηση του λοιπού φιλοσοφικού έργου του και ιδιαιτέρως της θεωρίας νοήματος την οποία αναπτύσσει στο άρθρο του *Über Sinn und Bedeutung*<sup>17</sup>. Η κατά Frege θεωρία νοήματος αποτελεί βασικό συστατικό της, φαινομενικά, εμπειριοκρατικής φιλοσοφικής θέσης του.

Θεμελιώδης στόχος της είναι η γλωσσοκεντρική άποψη που εκφράζεται, σύμφωνα με την οποία ότι είναι οντολογικά σημαντικό προέρχεται από και εστιάζεται στη γλώσσα.

Σύμφωνα λοιπόν, με την κατά Frege θεωρία νοήματος το νόημα ενός γλωσσικού σήματος αποτελείται από δύο μέρη, αυτό που μπορούμε να ονομάσουμε *σημασία* και αυτό που μπορούμε να ονομάσουμε *αναφορά*. Η αναφορά ενός σήματος δεν παρουσιάζει προβλήματα. Για παράδειγμα ο όρος «Αυγερινός» όπως και ο όρος «Αποσπερίτης» αναφέρονται στο αυτό ουράνιο αντικείμενο<sup>18</sup>. Πιο συγκεκριμένα αναφέρονται στον πλανήτη Αφροδίτη. Ομοίως αν χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις AA', BB', ΓΓ' για τις διαμέσους ενός ευκλείδειου τριγώνου ABΓ τότε οι εκφράσεις «το σημείο τομής των διαμέσων AA' και BB'» και «το σημείο τομής των διαμέσων BB' και ΓΓ'» έχουν την αυτή αναφορά, δηλαδή έχουν ως αναφορά τους ένα κοινό σημείο Χ του τριγώνου. Αυτό σημαίνει ότι έχουν ως κοινή αναφορά το κοινό σημείο τομής των διαμέσων AA', BB' και ΓΓ'. Το γεγονός ότι έχουν την ίδια αναφορά οι προηγούμενες δύο εκφράσεις αποτελεί μία σημαντική αλήθεια της ευκλείδειας γεωμετρίας. Είναι γνωστό πως αποτελεί θεώρημα της ευκλείδειας γεωμετρίας η πρόταση «Οι διάμεσοι AA', BB' και ΓΓ' ενός τριγώνου ABΓ τέμνονται στο αυτό σημείο». Ο Frege στην ανάλυση του της έννοιας της αναφοράς είναι απολύτως σαφής. Η κατά Frege αναφορά δεν είναι τίποτε άλλο από την προέκταση της συνήθους αναφοράς, που χρησιμοποιείται για την σήμανση κυρίων ονομάτων. Τα ονόματα «Αντώνης», «Σπύρος», «Ελένη», «Αναστασία» αναφέρονται, όταν συνήθως χρησιμοποιούνται, σε συγκεκριμένα πρόσωπα χωρίς αμφισημίες και συγχίσεις. Τα συμφραζόμενα είναι συνήθως υπεραρκετά για να καθορίσουν τα αναφερόμενα με τρόπο μοναδικό. Η, κατά Frege, έννοια της αναφοράς έχει στέρεο διαισθητικό υπόβαθρο, κάτι που όπως θα δούμε, δεν ισχύει για την, κατά Frege, έννοια της σημασίας. Πριν

όμως προχωρήσουμε στην ανάλυση της, κατά Frege, έννοιας της σημασίας θα πρέπει να προσθέσουμε δύο τρείς ακόμη λεπτομέρειες για την, κατά Frege, έννοια της αναφοράς.

Αν ξεφύγουμε από την περιοχή των κυρίων ονομάτων και προσπαθήσουμε να δούμε ποιές είναι οι απόψεις του Frege για τον διαχωρισμό του νοήματος, σε αναφορά και σημασία όταν το νόημα αποτελεί βασικό συστατικό προτάσεων, τότε θα συναντήσουμε κάτι που συνδέεται με την έννοια της συνάρτησης ή, καλύτερα, του συναρτησιακού μηχανισμού, που, όπως ήδη είπαμε, αποτελεί για τον Frege στοιχείο της λογικής μας υποδομής και απαραίτητο χαρακτηριστικό του τρόπου με τον οποίο επιτυγχάνεται η αναγωγή των Μαθηματικών στην Λογική. Έτσι η αναφορά της πρότασης «το πουκάμισό μου είναι λευκό», από τη στιγμή που φοράω πουκάμισο και είναι πράγματι λευκό, είναι, στο πλαίσιο μίας δίτιμης λογικής, η αληθοτιμή *αληθής*. Στην περίπτωση που το πουκάμισο, που φοράω δεν είναι λευκό η αναφορά της συγκεκριμένης πρότασης είναι η αληθοτιμή *ψευδής*. Τέλος στην περίπτωση που δεν φοράω πουκάμισο η συγκεκριμένη πρόταση στερείται αναφοράς και επομένως είναι άνευ νοήματος<sup>20</sup>.

. Η δεύτερη συνιστώσα της, κατά Frege, έννοιας του νοήματος είπαμε ήδη ότι είναι αυτή της σημασίας. Η έννοια της σημασίας παρά την σχετική προφάνειά της, δεν έχει την απαιτούμενη διάυγεια, που να την καθιστά μοναδική και αναμφισβήτητη. Ο Frege προσπαθεί εναγωνίως να της δώσει χαρακτηριστικά διυποκειμενικής αναγνωρισιμότητας και αντικειμενικότητας προκειμένου να ξεφύγει από την κατηγορία της υιοθέτησης πλατωνικών θέσεων και απόψεων. Τι όμως ακριβώς είναι η σημασία ενός σήματος; Έχει σίγουρα να κάνει είτε με τον τρόπο θέασης και παρουσίασης του αντικειμένου της αναφοράς του σήματος, όταν το σήμα αυτό είναι, για παράδειγμα, ένα κύριο

ονομα, είτε με τον κοινό τρόπο αντίληψης της κατάστασης πραγμάτων που εκφράζει μία συγκεκριμένη πρόταση. Σε οποιαδήποτε περίπτωση το αίτημα της αντικειμενικότητας της σημασίας ενός σήματος είναι αίτημα πλατωνικό, κάτι που ο Frege δεν επιθυμεί να αποδεχθεί, γιατί κάτι τέτοιο θα κατέστρεφε το εμπειριοκρατικό και γλωσσοκεντρικό πρόγραμμα αναγωγής της γνωσιακής διαδικασίας στην Λογική. Έτσι προσπαθεί εναγωνίως να μας πείσει ότι η σημασία είναι διυπόκειμενική και αντικειμενική, χωρίς να ταυτίζεται με τις συγκεκριμένες ιδέες και εικόνες που δημιουργούνται σε κάθε έναν συγκεκριμένο άνθρωπο κατά την κατανόηση της σημασίας ενός σήματος. Όλοι κατανοούμε κάτι που είναι αντικειμενικό στοιχείο του συγκεκριμένου σήματος χωρίς το περιεχόμενο της συγκεκριμένης κατανόησής μας να αποτελεί τη σημασία του σήματος αυτού. Το μόνο επιχείρημα για την αντικειμενικότητα των σημασιών που θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει ο Frege θα μπορούσε να είναι το ομοιότροπο της κατανόησης του από το έλλογο όν. Όλοι μας, κοντολογίς, καταλαβαίνουμε και κατανοούμε ομοιοτρόπως. Όμως κάτι τέτοιο, είτε στηρίζεται ιστορικά είτε στηρίζεται ανθρωπολογικά, δεν μπορεί να αποτελέσει τρόπο αποφυγής του φιλοσοφικού δόγματος της αντικειμενικότητας, που από την ίδια του την φύση είναι δόγμα πλατωνικό. Ας δούμε όμως πως ο ίδιος ο Frege προσπαθεί να μας πείσει για μια αντιπλατωνική, εμπειριοκρατική και γλωσσοκεντρική αντικειμενικότητα των σημασιών:

*Η αναφορά και η σημασία ενός σήματος θα πρέπει να μη συγχέονται με την ιδέα που τους αντιστοιχεί. Αν η αναφορά ενός σήματος είναι ένα αντικείμενο αντιληπτό μέσω των αισθήσεων, η ιδέα που σχηματίζω γι' αυτό είναι μία εσωτερική εικόνα που προκύπτει από μνήμες αισθητηριακών εντυπώσεων που είχα, και από εσωτερικές ή εξωτερικές πράξεις που έκανα. Μία ιδέα,*

έτσι σχηματισμένη, είναι συχνά συναισθηματικά διαποτισμένη η καθαρότητα των διαφόρων μερών της υπόκειται σε μεταβολές και αυξομειώσεις. Ακόμη και στον ίδιο άνθρωπο δεν είναι αλήθεια πως η ίδια σημασία είναι πάντα συνδεδεμένη με την ίδια ιδέα. Η ιδέα είναι υποκειμενική: η ιδέα που έχει ένας άνθρωπος δεν ταυτίζεται με την ιδέα που έχει ένας άλλος. Ως αποτέλεσμα έχουμε ένα μεγάλο πλήθος παραλλαγών και διαφορών στις ιδέες που συνδέονται με την ίδια σημασία. Ένας ζωγράφος, ένας άνθρωπος που ασχολείται με τα άλογα, και ένας ζωολόγος θα είχαν πιθανότατα συνδέσει με το όνομα «Βουκεφάλας» τελείως διαφορετικές ιδέες. Έτσι στοιχειοθετείται μία θεμελιώδης διάκριση ανάμεσα στην ιδέα και την σημασία ενός σήματος. Η σημασία είναι ίσως η κοινή ιδιότητα πολλών ιδεών και επομένως δεν είναι μέρος και ούτε εξαρτάται ως προς την ύπαρξή της από τον εξατομικευμένο νου. Άλλωστε δεν μπορούμε να αρνηθούμε ότι το ανθρώπινο γένος έχει μία κοινή παρακαταθήκη σκέψεων οι οποίες μεταβιβάζονται από γεννεά σε γεννεά.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, δεν χρειάζεται να έχει κανείς ενδοιασμούς όταν θέλει να μιλήσει απλά για την σημασία ενώ στην περίπτωση κάποιας ιδέας θα πρέπει, για να μιλήσουμε αυστηρά, να προσθέσει σε ποιόν ανήκει και σε ποιά χρονική στιγμή αναφέρεται. Ίσως θα μπορούσε κάποιος να συνδέσει αυτή την σημασία και κάποιος άλλος μία άλλη. Παρά ταύτα υπάρχει μία σημαντική διαφορά που σχετίζεται με τον τρόπο που διενεργείται η σύνδεσή τους. Διαφορετικοί άνθρωποι μπορούν να συλλάβουν την ίδια σημασία χωρίς να υπάρξει ποτέ η δυνατότητα να έχουν την ίδια ιδέα... Αν

δύο άνθρωποι σχηματίζουν την εικόνα του ιδίου πράγματος, καθένας θα εξακολουθήσει να έχει την δική του ιδέα. Είναι πράγματι δυνατό πολλές φορές να διαπιστώσουμε διαφορές στις ιδέες ή ακόμη και στις αισθητηριακές εμπειρίες διαφορετικών ανθρώπων, ακριβής σύγκριση όμως δεν είναι δυνατή, γιατί δεν μπορούν, ιδέες που ανήκουν σε διαφορετικούς ανθρώπους να υπάρξουν συγχρόνως στα πλαίσια της ίδιας συνείδησης<sup>21</sup>.

Η έμφαση στο προηγούμενο εκτεταμένο εδάφιο από το *Über Sinn und Bedeutung* βρίσκεται στην αντιμετώπιση της αντικειμενικότητας των σημασιών κυρίων ονομάτων και καθορισμένων περιγραφών (definite descriptions). Παρεμφερής είναι η αντιμετώπιση από τον Frege του προβλήματος της αντικειμενικότητας των σημασιών προτάσεων που διαθέτουν νόημα. Εδώ θα πρέπει να τονισθεί ότι ο χειρισμός των προτάσεων από τον Frege γίνεται στο πλαίσιο της τεχνικής επεξεργασίας, που σχετίζεται με την, κατά Frege, λογική έννοια της συνάρτησης ή του συναρτησιακού μηχανισμού. Στο επόμενο μέρος θα δούμε λεπτομερειακότερα το τεχνικό αυτό πλαίσιο. Προς το παρόν αρκεί να πούμε ότι για τον Frege οι προτάσεις με νόημα διαθέτουν σημασία που είναι αντικειμενική, υπερβαίνοντας τις δυσκολίες ψυχολογικής υφής που έχουν να κάνουν με τις διαφορές και τις ομοιότητες ιδεών και νοητικών προτάσεων στο νου διαφορετικών ανθρώπων. Η απλή πρόταση «έξω βρέχει», που θα ειπωθεί σε ένα κλειστό δωμάτιο χωρίς πρόσβαση στην εκτός δωματίου πραγματικότητα, θα γίνει εύκολα κατανοητή από τα εντός του δωματίου άτομα γιατί μπορούν να συλλάβουν την σημασία της χωρίς να γνωρίζουν αν είναι αληθής ή ψευδής, χωρίς δηλαδή να γνωρίζουν την αναφορά της<sup>22</sup>.



## **Μέρος III .**

### **Ο Frege, τα μαθηματικά αντικείμενα και οι αριθμοί.**

Το πρόβλημα της φύσης των μαθηματικών αντικειμένων είναι τόσο παλιό όσο και η φιλοσοφία. Γεννήθηκε, σχεδόν, μαζί με την φιλοσοφία διότι τα μαθηματικά γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν κατά την Αρχαιότητα περίπου ταυτόχρονα με την φιλοσοφική σκέψη. Τα μαθηματικά χωρίς άμεση αναφορά στο πείραμα, που όπως γνωρίζουμε αποτελούσε και αποτελεί απαραίτητο συστατικό της συνθετικής ανάπτυξης των εμπειρικών επιστημών (φυσικών και μη), αναπτύχθηκαν κατά την Αρχαιότητα με ταχύτητα και ορμή μετά την ανακάλυψη της έννοιας της απόδειξης, που, μάλλον, έλαβε χώρα κατά την περίοδο των Πυθαγορείων. Η έννοια της απόδειξης, από την άλλη μεριά, σχετίζεται άμεσα με λογική τεκμηρίωσης πραγμάτων, που λέγονται ή πραγμάτων που γίνονται. Η λογική αυτή τεκμηρίωση, συνδέεται άμεσα με την έννοια του επιχειρήματος, που είναι πλέον σαφές ότι κατά την Αρχαιότητα απετέλεσε το βασικό μεθοδολογικό εργαλείο για την ανάπτυξη της φιλοσοφίας. Φιλοσοφία, και μάλιστα καλή φιλοσοφία, που να αποτελεί το πλαίσιο αναφοράς ή το πλαίσιο ευρύτερου σχολιασμού των επιστημονικών επιτευγμάτων δεν νοείται χωρίς τη μεθοδολογική άμεση βοήθεια του επιχειρήματος. Έτσι η Αρχαιότητα, η Ελληνική Αρχαιότητα, και τα νοητικά και λοιπά επιτεύγματα της, στηρίχθηκαν στην ανάπτυξη του ορθού λόγου, που εμπεριέχει την χρήση επιχειρημάτων και προϋποθέτει την ανακάλυψη της έννοιας της απόδειξης. Είναι αυτή η λογική προϋπόθεση, που μας οδηγεί να σκεφθούμε ότι η ανακάλυψη της απόδειξης από τους αρχαίους ήταν, σχεδόν, μονόδρομος για την ανθρωπότητα στην διαδικασία της εκλογίκευσης της γνώσης.

Δηλαδή, θεωρούμε ότι η ανθρωπότητα κατά την περίοδο της ενηλικίωσης και ωρίμασής της (και κάτι τέτοιο ήταν η περίοδος της Ελληνικής Αρχαιότητας) θα πέρανε απαραίτητως στο στάδιο της χρήσης επιχειρημάτων και στην ανακάλυψη της έννοιας της απόδειξης. Η αλματώδης ανάπτυξη, λοιπόν, των μαθηματικών, κατά την Αρχαιότητα, ενώ κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τις εμπειρικές επιστήμες, ήταν άμεσα συνδεδεμένη με την εκλογίκευση της ανθρώπινης γνώσης. Άλλωστε είναι ενδεικτικό ότι η πρώτη σημαντική συμβολή στην ανάπτυξη της λογικής έλαβε χώρα κατά την περίοδο της Ελληνικής Αρχαιότητας. Η αριστοτελική λογική και η περαιτέρω ανάπτυξή της από τους επιγόνους του Αριστοτέλους, αποτελεί αρχαιοελληνικό επίτευγμα πρώτης γραμμής, ενδεικτικό της γνωσιακής ωριμότητας της περιόδου αυτής· επίτευγμα που δεν θα μπορούσε να λάβει χώρα, αν δεν είχαν προηγηθεί κάποιοι αιώνες ανάπτυξης της επιχειρηματολογίας, θεμελιώδους στοιχείου της λογικής επεξεργασίας ισχυρισμών και θέσεων σε έναν συνεχώς διευρυνόμενο δημόσιο διάλογο.

Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό της αρχαιοελληνικής περιόδου ήταν αυτό της συνειδητοποίησης της ανάγκης ύπαρξης σταθερών κόμβων στην αποτύπωση της πραγματικότητας εμπειρικής και μή (νοητικής, δηλαδή). Η ανάγκη αυτή είναι που οδήγησε στην δημιουργία ισχυρών φιλοσοφικών συστημάτων, όπως του πλατωνικού, σταθερό χαρακτηριστικό του οποίου είναι η αποδοχή της ύπαρξης ενός αμετάβλητου, άχρονου και θεμελιακού για τη γνώση πλαισίου, που συνιστά τον πλατωνικό κόσμο των ιδεών. Οι ιδέες υπάρχουν εκεί έξω, ανεξάρτητα από τον γνώστη τους, και απλώς συλλαμβάνονται απ' αυτόν κατά τη διαδικασία γνωσιακής προσπέλασης του κόσμου. Οι αριθμοί, λοιπόν, για τον Πλάτωνα και το πλατωνικό σύστημα, καθώς και τα λοιπά μαθηματικά αντικείμενα αποτελούν μέρος του πλατωνικού σύμπαντος των ιδεών<sup>23</sup>. Δεν κατασκευάζονται, δεν υπόκεινται σε χωροχρονικές

αλλοιώσεις, δεν εξαρτώνται από τον γνώστη τους, δεν εφευρίσκονται αλλά ανακαλύπτονται<sup>24</sup> εν χρόνω, χωρίς να ανήκουν σ' αυτόν.

Τον αντίποδα στο πλατωνικό φιλοσοφικό σύστημα είναι γνωστό ότι απετέλεσε το αριστοτελικό φιλοσοφικό σύστημα, το οποίο διατυπώθηκε από τον Αριστοτέλη λίγο αργότερα από το πλατωνικό. Για τον Αριστοτέλη οι αριθμοί δεν είναι αντικείμενα με την πλατωνική έννοια αλλά τρόποι προσδιορισμού πλήθους με την μέθοδο της μέτρησης. Είναι, κατά κάποιον τρόπο, ιδιάζουσες μορφής κατηγορήματα, ιδιότητες ειδικής κατηγορίας, που αποδίδονται σε πάντοντε συγκεκριμένα πλήθη αντικειμένων. Ο αριθμός 10 ως ανεξάρτητη οντότητα δεν έχει, κατά τον Αριστοτέλη, νόημα. Τουναντίον οι εκφράσεις «10 μήλα», «10 πορτοκάλια», και ούτω καθεξής, νοηματοδοτούνται αυτομάτως, αφού ο αριθμός 10 αποτελεί, κατά κάποιον τρόπο, ιδιόρρυθμη ιδιότητα του συγκεκριμένου πλήθους μήλων ή πορτοκαλιών. Η εξέταση της δομής των αριθμών δεν αποτελεί για τον Αριστοτέλη πρόβλημα γιατί, για κάτι τέτοιο, δεν είναι απαραίτητη η υποστασιοποίηση των αριθμών, ως οντοτήτων. Αυτό, που είναι απαραίτητο είναι η αντιμετώπισή τους ως εάν ήσαν ανεξάρτητες οντότητες. Για κάτι τέτοιο είναι αρκετή και γνωσιακά επαρκής η αφαιρετική διαδικασία, η οποία δημιουργεί προσομοιώσεις νοητικών αντικειμένων. Έτσι το παιχνίδι της μαθηματικής γνώσης παίζεται με αντικείμενα, που είναι αφαιρετικά φαντάσματα αντικειμένων ή, αλλιώς, αφαιρετικά υποκατάστατα ανύπαρκτων οντοτήτων.

Είναι κοινοτοπία να λεχθεί ότι πιο κοντά στον Πλάτωνα βρίσκονται οι ρασιοναλιστές φιλόσοφοι Descartes, Leibniz και Spinoza ενώ πιο κοντά στον Αριστοτέλη οι εμπειριστές ή εμπειριοκράτες Locke, Berkeley και Hume. Έτσι για το σύνολο των ρασιοναλιστών φιλοσόφων η μαθηματική γνώση είναι έμφυτη και δεν αποκτάται από την εμπειρία. Επίσης οι αριθμοί και τα

μαθηματικά αντικείμενα δεν αποτελούν κατασκευές ή προϊόντα νοητικής αφαίρεσης αλλά οντότητες κυριολεκτικά ανεξάρτητες από τον γνώστη και χρήστη τους. Οι αριθμοί και τα μαθηματικά αντικείμενα, γενικότερα, είναι οντότητες, που ενυπάρχουν στην νοητική παρακαταθήκη των ανθρώπων, δεν υπόκεινται σε μεταβολές και, όταν ανακαλύπτονται, δεν κατασκευάζονται αλλά συνειδητοποιείται η ανεξάρτητη από τον ανθρώπινο νου ύπαρξή τους.

Επίσης για το σύνολο των εμπειριοκρατών φιλοσόφων, με μικρές διαφορές μεταξύ τους, οι αριθμοί και γενικότερα τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι ανεξάρτητες οντότητες αλλά δημιουργήματα επεξεργασίας της εμπειρίας από τον ανθρώπινο νου. Η επεξεργασία αυτή μπορεί να έχει απεικονιστικό χαρακτήρα ή ακόμη και κατασκευαστικό. Σε οποιαδήποτε περίπτωση ο νους μπορεί να δράσει αφαιρετικά χωρίς απαραίτητως να ανακαλύπτει προϋπάρχουσες οντότητες από έναν νου που, έτσι και αλλιώς, αν πιστέψουμε τον Locke, είναι κενός περιεχομένου καθώς η γνώση διοχετεύεται σ' αυτόν μέσω της εξωτερικής ή της εσωτερικής εμπειρίας:

*Δεν προσποιούμαι τον δάσκαλο, το μόνο που κάνω είναι να ερευνώ και επομένως δεν μπορώ παρά να ομολογήσω εδώ ξανά ότι η εξωτερική και εσωτερική αντίληψη είναι οι μόνες δίοδοι που μπορώ να βρώ, από τις οποίες διοχετεύεται γνώση στο νου. Αυτές μόνο, όσο μπορώ να δω, είναι τα παράθυρα από τα οποία μπορεί να μπει φως σ' αυτό το σκοτεινό δωμάτιο<sup>25</sup>.*

Ο Frege, όπως έχει ήδη υπονοηθεί, δημιουργεί το φιλοσοφικό του σύστημα με σαφή αντιπλατωνικό προσανατολισμό, παρά το ότι, όπως έχουμε ήδη συζητήσει, προσπαθώντας να αντικειμενοποιήσει την έννοια της σημασίας στη θεωρία νοήματος

που οικοδομεί, φαίνεται να αναγκάζεται να υποκύψει στην υιοθέτηση λύσεων πλατωνικού χαρακτήρα. Παρά ταύτα, το σύστημα που οικοδομεί έχει, μάλλον, εμπειριοκρατικό και γλωσσοκεντρικό χαρακτήρα. Ένα δεύτερο στοιχείο που χαρακτηρίζει το σύστημά του είναι η προσπάθειά του να αποδείξει φιλοσοφικά ότι η μαθηματική δραστηριότητα ανάγεται στη λογική δραστηριότητα και ότι τα μαθηματικά και οι οντότητές τους είναι αναγώγιμες στην λογική. Το δόγμα αυτό είναι βασικό για το φιλοσοφικό σύστημα, που οικοδομεί. Όμως η τεκμηρίωσή του δόγματος απαιτεί φιλοσοφικές θυσίες, οι οποίες είναι απολύτως συζητήσιμο αν είναι θεμιτές ή ανεκτές στην φιλοσοφική συζήτηση. Η μεγαλύτερη θυσία, στην προκείμενη περίπτωση, είναι η αποδοχή, εκ μέρους του, της επέκτασης των λογικών εργαλείων προκειμένου να επιτύχει την αναγωγή των μαθηματικών στη λογική. Έτσι υιοθετεί την άποψη ότι η έννοια της συνάρτησης δεν είναι μαθηματικού αλλά λογικού περιεχομένου προκειμένου να την χρησιμοποιήσει ως εργαλείο για την προαναφερθείσα αναγωγή. Η λογική οικειοποίηση της έννοιας της συνάρτησης από τον Frege τον βοηθά να διευρύνει την, κατ' αυτόν, λογική έννοια του αντικειμένου προς την κατεύθυνση οντοτήτων μη εμπειρικού χαρακτήρα. Σύμφωνα με τον Δ. Α. Αναπολιτάνο<sup>26</sup>:

*Στην εργασία του “Funktion und Begriff” ο Frege επιχειρεί την σύνδεση της έννοιας της συνάρτησης με αυτή του αντικειμένου. Ξεκινώντας με την μαθηματική έκφραση  $2x^3+x$  ισχυρίζεται ότι αυτή αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο είναι το ελλειπές και το δεύτερο το πλήρες. Το ελλειπές μέρος είναι το  $2()^3+()$  και το πλήρες η μεταβλητή  $x$  που συνδυασμένη κατάλληλα με το  $2()^3+()$  μας δίνει την τελική έκφραση  $2x^3+x$ . Η μεταβλητή  $x$  θεωρείται πλήρης γιατί από μόνη της μπορεί να σταθεί ως αυτοδύναμη έκφραση κάτι που δεν ισχύει για την  $2()^3+()$ . Το πρώτο,*

*ελλειπές μέρος της αρχικής έκφρασης είναι ένα συγκεκριμένο παράδειγμα συμβολισμού ενός μηχανισμού που θα μπορούσαμε να τον καλέσουμε συναρτησιακό. Ο μηχανισμός αυτός τίθεται σε λειτουργία από τη στιγμή που θα αρχίσει να τροφοδοτείται με αντικείμενα τα οποία αντιπροσωπεύονται από την μεταβλητή  $x$ . Σύμφωνα με τον Frege η συνάρτηση, ως έννοια, είναι λογικά πρότερη της έννοιας του αντικειμένου και ταυτίζεται με αυτό που σήμερα θα λέγαμε συναρτησιακό μηχανισμό.*

Στο παραπάνω παράθεμα εκφράζεται η άποψη ότι η έννοια του αντικειμένου είναι εξηρημένη από την έννοια της συνάρτησης ή του συναρτησιακού μηχανισμού, έτσι ώστε, κατά Frege, οποιαδήποτε έννοια νοητικού αντικειμένου να μην συνεπάγεται την πλατωνική αντίληψη του αντικειμένου αυτού, αλλά την λογική του εκμαίευση και, τελικώς, εξάρτηση, από τον εκάστοτε συγκεκριμένο συναρτησιακό μηχανισμό.

Η έννοια του αντικειμένου για τον Frege έχει ένα αρνητικό προσδιορισμό. Ορίζεται ως αυτό που δεν είναι συνάρτηση<sup>27</sup>. Από την άλλη μεριά σύμφωνα με τον Frege η λογική μήτρα δημιουργίας ή κατάδειξης αντικειμένων είναι η συνάρτηση. Μία συνάρτηση έχει ως παρακολούθημά της ένα σύνολο αντικειμένων που αποτελεί το πεδίο τιμών της και, βεβαίως, υπαρκτική προϋπόθεση αυτού του συνόλου αντικειμένων, αποτελεί για την συνάρτηση αυτή, ένα άλλο σύνολο, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Τα σύνολα αυτά αποτελούν, ως ολότητες, αντικείμενα. Ένα άλλο σπουδαίο εργαλείο, που εισάγει ο Frege, για να μπορέσει να στηρίξει τεχνικά την άποψη του ότι τα μαθηματικά είναι αναγώγιμα στην λογική είναι αυτό της έννοιας (*Begriff, concept*). Κατά τον Frege, έννοια λέγεται κάθε συνάρτηση της οποίας το πεδίο τιμών συμπίπτει με το δισύνολο αληθοτιμών  $\{T, F\}$ . Ο ορισμός αυτός απαιτεί

επεξηγηματικά σχόλια. Σύμφωνα με τον Δ. Α. Αναπολιτάνο<sup>28</sup>,  
αρκούν δύο παραδείγματα:

(α) Ας θεωρήσουμε την έννοια «Γαλάζιος» και ας την παραστήσουμε με το κατηγορηματικό σύμβολο  $\Gamma$ . Για να είμαστε ακριβέστεροι, μπορούμε να την θεωρήσουμε ως ένα συναρτησιακό μηχανισμό  $\Gamma()$ , ο οποίος μπορεί να συμπληρωθεί με την μεταβλητή  $x$  έτσι ώστε να προκύψει η πλήρης έκφραση  $\Gamma(x)$ . Αν η μεταβλητή  $x$  παριστάνει ή αντιπροσωπεύει έγχρωμα φυσικά αντικείμενα και αν  $\alpha$  είναι ένα τέτοιο αντικείμενο, η  $\Gamma(\alpha)$  αντιπροσωπεύει την πρόταση «το αντικείμενο  $\alpha$  είναι γαλάζιο» που με τη σειρά της είναι αληθής ή ψευδής ανάλογα με τον χρωματισμό του συγκεκριμένου αντικειμένου  $\alpha$ . Η αληθοτιμή που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη πρόταση «το αντικείμενο  $\alpha$  είναι γαλάζιο» μπορεί να θεωρηθεί ως η τιμή της συνάρτησης  $\Gamma()$  όταν αυτή δράσει πάνω στο αντικείμενο  $\alpha$ .

(β) Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις  $(x+1)^2$  και  $2(x+1)$ . Ας θεωρήσουμε επίσης την σχέση, που δίδεται από την εξίσωση  $(x+1)^2 = 2(x+1)$ . Η σχέση αυτή που είναι ένας τύπος μίας πρωτοβάθμιας γλώσσας, αν η μεταβλητή  $x$  αντιπροσωπεύει μαθηματικά αντικείμενα και όχι σχέσεις ή ιδιότητές τους, μετατρέπεται σε μία αληθή ή ψευδή πρόταση ανάλογα με την συγκεκριμένη τιμή που θα δώσουμε στη  $x$ . Έτσι η εξίσωση  $(x+1)^2 = 2(x+1)$  παριστάνει στην ουσία μία συνάρτηση που παίρνει την αληθοτιμή  $T$  αν αντικατασταθεί από τον αριθμό  $1$  ή  $-1$  και την αληθοτιμή  $F$  αν αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Για τους εξοικειωμένους με την μαθηματική πρακτική, ο

συναρτησιακός μηχανισμός στον οποίον αναφερόμαστε δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο μηχανισμός που σε σύγχρονη γλώσσα ονομάζουμε *χαρακτηριστική συνάρτηση της αντίστοιχης σχέσης*.

Από τα παραπάνω συνάγεται άμεσα, ότι κατά τον Frege οι έννοιες αποτελούν ιδιάζουσες μορφές γενικών σχέσεων, που μορφοποιούμενες και συγκεκριμενοποιούμενες παράγουν αντικείμενα τα οποία συνδέονται με την ικανοποιησιμότητα της παραγόμενης συγκεκριμένης σχέσης. Δηλαδή τα παραγόμενα αντικείμενα είναι αυτά για τα οποία η συγκεκριμένη σχέση αληθεύει. Για να συνδέσουμε το όλο τεχνικό σχήμα με την κατά Frege θεωρία νοήματος και τις συνιστώσες του, δηλαδή την αναφορά και την σημασία ενός σήματος, θα λέγαμε ότι η αναφορά των εννοιών, ως ειδικών μορφών συναρτήσεων είναι το σύνολο των αληθοτιμών  $\{T, F\}$  ενώ η σημασία είναι αυτό που γίνεται κοινά αντιληπτό ως το συγκεκριμένο περιεχόμενο της εκάστοτε προκύπτουσας συγκεκριμένης απόδοσης ιδιότητας ή σχέσης. Δηλαδή αν γυρνάγαμε στην έννοια «Γαλάζιος» η αναφορά της πρότασης «το αντικείμενο α είναι γαλάζιο» θα ήταν η αληθοτιμή T αν το αντικείμενο α πραγματι ήταν γαλάζιο και η σημασία της η κοινά αντιληπτή, ως νοηματικό περιεχόμενο της πρότασης, κατάσταση πραγμάτων σύμφωνα με την οποία το αντικείμενο α είναι πράγματι γαλάζιο.

Όπως ήδη ελέχθη, η προσπάθεια του Frege για την αναγωγή των μαθηματικών στην λογική περνάει μέσα από την διαδικασία της υιοθέτησης της άποψης ότι τα λογικά εργαλεία, που διαθέτει ο άνθρωπος είναι περισσότερα αυτών, τα οποία, συνήθως, φανταζόμαστε. Είναι εντελώς προφανές ότι κάτι τέτοιο έχει στοιχεία, που υπαγορεύονται από την φιλοσοφική και, τελικά για τον Frege, τεχνική ανάγκη κατάδειξης ότι η αναγωγή αυτή δεν είναι απλώς επιβεβλημένη, αλλά η μόνη δυνατή. Έτσι η αναγωγή αυτή

επιτυγχάνεται με την αποδοχή των συναρτήσεων και ιδιαιτέρως των εννοιών ως λογικών, δηλαδή ως αναλυτικών και όχι ενδεχομενικών εργαλείων, Τα λογικά εργαλεία δεν αποτελούν αντικείμενα ενδεχομενικού (ή για να χρησιμοποιήσουμε την καντιανή ορολογία συνθετικού χαρακτήρα) και σε καμμία περίπτωση δεν είναι εργαλεία που αποκτά κανείς εν χρόνω. Προϋπάρχουν ή αλλιώς είναι σύμφυτα με τον άνθρωπο και αποκαλύπτονται εν χρόνω. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, ο Frege επιθυμεί να καταστήσει σαφές ότι, κατ'αυτόν, οι συναρτήσεις και οι έννοιες είναι εκεί και μας περιμένουν να τις χρησιμοποιήσουμε για να μπορέσουμε να παραγάγουμε λογικά τα αντικείμενα και τις σχέσεις των μαθηματικών. Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν κατοικοεδρεύουν σε κάποιο πλατωνικό υπερσύμπαν, το οποίο εμείς ανακαλύπτουμε (και δεν παράγουμε, εφευρίσκουμε ή κατασκευάζουμε). Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι, κατά τον Frege, *λογικά αντικείμενα*<sup>29</sup>. Δεν προϋπάρχουν πριν κατασκευαστούν λογικά ή, αν προϋπάρχουν, προϋπάρχουν ως λογικές δυνατότητες παραγωγής ή κατασκευής των. Η λογική προτερότητα των μαθηματικών αντικειμένων και σχέσεων στηρίζεται στην λογική προτερότητα των, κατά Frege, συναρτήσεων και εννοιών οι οποίες, όχι αυθαιρέτως, αλλά με τεχνικό τρόπο και σε συμφωνία με την ανάγκη της λογικής αναγωγής των μαθηματικών αντικειμένων και σχέσεων, αποτελούν το εργαλείο της λογικής εκμαίευσης και ανάδυσής τους.

Η, κατά Frege, αριθμητική είναι η επιστήμη που έχει ως αντικείμενό της τους πληθικούς αριθμούς. Οι πληθικοί αριθμοί, ως μαθηματικές εκφράσεις των πληθικοτήτων συλλογών αντικειμένων, διαθέτουν για τον Frege, την μαγεία των λογικών αντικειμένων που έχουν για τα μαθηματικά μια προτερότητα. Η έμφυτη δυνατότητα αρίθμησης, που διαθέτει ο άνθρωπος δεν μπορεί παρά να έχει λογικό χαρακτήρα και μάλιστα πρωτογενή λογικό χαρακτήρα. Δεν

μαθαίνεις να αριθμείς, μαθαίνεις, μόνον, να συστηματοποιείς την δυνατότητα αρίθμησης, δίνοντας της, φαινομενικά κατά Frege, μαθηματικό και όχι λογικό χαρακτήρα. Η φιλοσοφική προσπάθεια του Frege έγκειται, λοιπόν, στην επιθυμία του να αποκαταστήσει αυτή την αντιστροφή, πιστεύοντας, τεχνικά στην αναγωγή της αριθμητικής στη λογική.

Παρά ταύτα, η προσπάθεια του Frege για την αναγωγή των μαθηματικών στην λογική, σκόνταψε ακριβώς πάνω στον τρόπο με τον οποίο επεχείρησε να αποδείξει ότι οι αριθμοί δεν είναι μαθηματικά, αλλά, τελικώς, λογικά παράγωγα. Για να το κάνει αυτό χρησιμοποίησε μία διαδικασία, που θεώρησε ότι είναι λογικού χαρακτήρα. Δηλαδή θεώρησε ότι η έννοια της αντιστοιχίας και μάλιστα της αμφιμονοσήμαντης μεταξύ δύο συνόλων αντικειμένων ανήκει στον χώρο της λογικής. Έτσι όρισε ότι δύο σύνολα αντικειμένων μπορούν να χαρακτηρισθούν ως *όμοια* αν βρίσκονται σε μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία έτσι ώστε σε κάθε αντικείμενο του πρώτου συνόλου να αντιστοιχεί ένα ακριβώς αντικείμενο του δεύτερου συνόλου και σε κάθε αντικείμενο του δεύτερου συνόλου να αντιστοιχεί ένα ακριβώς αντικείμενο του πρώτου συνόλου. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι κάθε *έννοια* (με την κατά Frege σημασία του όρου) χαρακτηρίζεται από το σύνολο των αντικειμένων που ανήκουν σ' αυτήν, αυτών των αντικειμένων, δηλαδή, που την ικανοποιούν. Έτσι, με παρόμοιο τρόπο, και επεκτείνοντας τον προηγούμενο ορισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δύο έννοιες είναι *όμοιες* αν τα σύνολα αντικειμένων, που τις χαρακτηρίζουν, είναι όμοια. Προχωρώντας μπορούμε να θεωρήσουμε την έννοια (που είναι μία έννοια δεύτερου επιπέδου γιατί αναφέρεται σε έννοιες) “*η x είναι μία έννοια όμοια με την έννοια α*” που την συμβολίζουμε με  $f(x)$  και την έννοια “*η x είναι μία έννοια όμοια με την έννοια b*” που την συμβολίζουμε με  $y(x)$ . Στην περίπτωση, που υπάρχει μία έννοια  $\gamma$

που ανήκει και στην έννοια  $f(x)$  και στην έννοια  $y(x)$ , αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει κάποιο χαρακτηριστικό αριθμητικού χαρακτήρα, που μοιράζεται ή  $\gamma$  με τις  $f(x)$  και  $y(x)$ . Κατά τον Frege, το αριθμητικό αυτό χαρακτηριστικό είναι σαφώς ένα λογικό αντικείμενο και «καλείται ο *αριθμός* της έννοιας»  $\gamma$  που ορίζεται ως το σύνολο όλων των εννοιών που ανήκουν στην έννοια «η  $x$  είναι όμοια με την  $\gamma$ »<sup>30</sup>.

Η διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω οδηγεί στον ορισμό των αριθμών, οι οποίοι μ' αυτόν τον τρόπο (και πάντα κατά τον Frege) αναδύονται ως λογικά και όχι απλώς ως μαθηματικά αντικείμενα. Η έννοια του αριθμού αναδύεται έχουσα, ως βασικό της χαρακτηριστικό την πληθικότητα ταυτιζόμενη με την έννοια του πληθικού αριθμού. Κάτι τέτοιο είναι τεχνικά άρτιο. Άλλωστε αυτή η οπτική, έστω με περιορισμένο τρόπο, θα χρησιμοποιηθεί από τους θεμελιωτές της θεωρίας συνόλων για τον ορισμό των πληθαρίσμων και θα αναγνωρισθεί ότι η αμφιμονοσήμαντη (και *επι*<sup>31</sup> όπως λέγεται στα καθαρά μαθηματικά) αντιστοιχία μεταξύ συνόλων αντικειμένων αποτελεί την βάση της έννοιας της ισοπληθικότητας.

Παρά τις αντιρρήσεις φιλοσοφικής υφής που μπορεί να έχει κανείς στην αντιμετώπιση των αριθμών από τον Frege, ως λογικών αντικειμένων, εξαιτίας της χρήσης εργαλείων, όπως αυτό της συνάρτησης ή της αντιστοιχίας, ως λογικών εργαλείων, θα πρέπει να παραδεχθεί ότι η όλη κατασκευή είναι τεχνικώς εντυπωσιακή. Υπάρχουν, όμως, αδυναμίες στην προσέγγιση του Frege, που σχετίζονται με την εμφάνιση των παραδόξων και ιδιαιτέρως του παραδόξου του Russell. Η προσέγγιση αυτή προϋποθέτει την αποδοχή της θέσης ότι μία ιδιότητα (μία κατά Frege *έννοια* στην προκείμενη περίπτωση) είναι αρκετή για την περιγραφή ενός συνόλου αντικειμένων, που δεν είναι άλλα απ' αυτά που την ικανοποιούν. Σύμφωνα με το παράδοξο του Russell αν κάποιος θεωρήσει το σύνολο  $\alpha$  των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό

τους τότε βρίσκεται μπροστά σε ένα τραγικό αδιέξοδο. Αν το σύνολο  $\alpha$  ανήκει στον εαυτό του τότε έχοντας την ιδιότητα των στοιχείων του  $\alpha$  δεν ανήκει στον εαυτό του. Αν από την άλλη μεριά το  $\alpha$  δεν ανήκει στον εαυτό του έχει την ιδιότητα των στοιχείων του  $\alpha$  και επομένως ανήκει στον εαυτό του. Όπως πια γνωρίζουμε, το παράδοξο αυτό (όπως και τα υπόλοιπα συνολοθεωρητικά παράδοξα) αντιμετωπίζεται με δραστικό περιορισμό της χρήσης μίας ιδιότητας για τον ορισμό ενός συνόλου. Πλέον μία ιδιότητα για να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό ενός συνόλου θα πρέπει να εφαρμόζεται επί των στοιχείων ενός ήδη υπάρχοντος συνόλου. Πιο γενικά δεν αρκεί ένας συναρτησιακός μηχανισμός για τον ορισμό ενός συνόλου. Απαιτείται για κάτι τέτοιο εκτός του συναρτησιακού μηχανισμού και ένα ήδη υπάρχον σύνολο, το οποίο να χρησιμοποιηθεί ως πεδίο ορισμού της προκύπτουσας συνάρτησης, έτσι ώστε το πεδίο τιμών της να είναι το νέο σύνολο, του οποίου την ύπαρξη εγγυάται αυτός ο μηχανισμός.

Η διορθωτική αυτή κίνηση, πάνω στην ανεξέλεγκτη χρήση μιας ιδιότητας ή ενός συναρτησιακού μηχανισμού, απετέλεσε την αρχή ανάπτυξης της σύγχρονης θεωρίας των συνόλων και την έναρξη της νέας εποχής για την φιλοσοφία των μαθηματικών. Είναι σαφές ότι οι διορθωτικές παρεμβάσεις που έγιναν για την αντιμετώπιση των παραδόξων δεν έχουν λογικό αλλά περιστασιακά μαθηματικό χαρακτήρα. Και μόνον αυτό θα αρκούσε για την απόρριψη της βασικής θέσης του Frege περί αναγωγής των μαθηματικών στην λογική.

Παρά ταύτα θα πρέπει να του αναγνωρισθεί ότι πάνω στην τεχνική δουλειά, που έκανε για να προασπίσει την άποψή του, στηρίχθηκε όλη η σύγχρονη θεωρία συνόλων με την ρηξικέλευθα νέα αντιμετώπιση των αριθμών, ως πληθαρίων, στηριγμένων σε μία κατάλληλα τροποποιημένη έννοια αμφιμονοσήμαντης και επί αντιστοιχίας.

## Σημειώσεις

1. Βλέπε Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος «Η φύση των μαθηματικών αντικειμένων και το πληροφοριακό περιεχόμενο των μαθηματικών αληθειών» σ.2, στο Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος (Επιμ.) *Στιγμές και διάρκειες*, εκδ. Νεφέλη, Αθήνα, 2009.
2. Στο ίδιο, σ.3.
3. Βλέπε Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, εκδ. Νεφέλη, Αθήνα, 1985, σ.54.
4. Για αντίστοιχο παράδειγμα από τον Αριστοτέλη βλέπε *Των Μετά Τα Φυσικά*, Z, 1033b 1-25.
5. Όπως παραπάνω, σσ. 54-55.
6. Βλέπε A.A. Luke, T.E.Jessop *The Works of George Berkeley, Bishop of Cloyne*, 9 Vols., Thomas Nelson and Sons Ltd., London, 1948-56. Το παράθεμα ανήκει στο έργο *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge*, παράγρ.7.
7. Όπως παραπάνω, σσ. 128-129.
8. J. Locke *An Essay Concerning Human Understanding*, Edited by A.C Frazer, Dover, 1959, Vol 1, σσ. 211-212.
9. Όπως παραπάνω, σσ. 127-128.
10. Όπως παραπάνω, παράγρ. 13.
11. Βλέπε Αναπολιτάνος *Εισαγωγή*.... σ.79.
12. Στο ίδιο, σσ. 79-80.
13. Βλέπε το άρθρο που αναφέρεται στην σημείωση 1 όπου καταδεικνύεται το μη-τετριμμένο των μαθηματικών αληθειών καθώς επισημαίνεται η ύπαρξη σ'αυτές σημαντικού πληροφοριακού περιεχομένου.
14. Βλέπε Frege, G. *Grundgesetze der Arithmetik* , Jena Vol. 1 1893, Vol.2 1903.

15. 15. Βλέπε W. Kneale and M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford Un. Press, London, σσ. 653-654 και Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος, *Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Εκδ. Νεφέλη, Αθήνα, 1985, σ 204.
16. Όπως παραπάνω, σσ. 167,176
17. Frege, G., *Über Sinn und Bedeutung* Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik, 100, 1892 σσ. 25-50
18. Βλέπε Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος *Εισαγωγή...* σ.220.
19. Ομοίως βλέπε Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος *Εισαγωγή...* σ. 219-220.
20. Η τελευταία παρατήρηση δεν προκαλεί πρόβλημα στον τρόπο που αντιμετωπίζει ο Frege την έννοια του νοήματος για την περίπτωση των προτάσεων. Για να διαθέτουν αναφορά και επομένως αληθοτιμή οι προτάσεις απαιτείται να έχουν νόημα. Ενδεχομενικές προτάσεις όπως, για παράδειγμα, «το πουκάμισό μου είναι λευκό» έχουν αληθοτιμή, διαθέτουν δηλαδή αναφορά μόνον όταν υπάρχει πουκάμισο που φορώ, μόνον όταν υπάρχει, δηλαδή, υποκείμενο στο οποίο να αναφέρεται ο κατηγορηματικός προσδιορισμός «είναι λευκό».
21. *Über Sinn und Bedeutung* σσ. 29-30
22. Το απλό αυτό παράδειγμα βοηθά στην κατανόηση της βασικής θέσης του Frege για την αντικειμενικότητα των σημασιών των προτάσεων με νόημα. Παρά ταύτα η απλότητα του δεν μπορεί να υποκρύψει την οντολογική δυσκολία που ανακύπτει, αν σκεφθούμε ότι η σημασία την οποία αντιλαμβανόμαστε δεν ταυτίζεται με την ιδέα ή τις ιδέες, που έχουμε και ότι τι είδους αντικειμενικά μοναδικό είναι κάτι που πολλαπλασιάζεται οντολογικά μέσω των πολλαπλών γνωσιακών του αναγνώσεων;

23. Εδώ θα πρέπει να τονισθεί ότι υπάρχει μία μικρή ένσταση για το απολύτως ακριβές του ισχυρισμού αυτού με την έννοια ότι μαθηματικά αντικείμενα, όπως, για παράδειγμα, το τρίγωνο έχουν μία εμφανισιακή πολλαπλότητα, που δεν συνηγορεί υπέρ της μοναδικότητας, που απαιτείται για τις ιδέες. Παρά ταύτα οι αριθμοί και τα λογικά μαθηματικά αντικείμενα έχουν όλα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά των πλατωνικών ιδεών με προεξάρχοντα αυτά της αμεταβλητότητας και της αχρονικότητας.
24. Βλέπε Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος *Η φύση των μαθηματικών αντικειμένων και το πληροφοριακό περιεχόμενο των μαθηματικών αληθειών...*
25. Βλέπε J. Locke *An Essay Concerning Human Understanding* Edited by A.C. Frazer, 1959, Vol1, σσ, 211-212
26. Βλέπε Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος *Εισαγωγή...* σ.224
27. «Αντικείμενο είναι οτιδήποτε δεν είναι συνάρτηση έτσι, ώστε μία έκφραση γι'αυτό να μην περιέχει άδειες θέσεις.» Βλ. *Funktion und Begriff* σ. 18.
28. Βλέπε Δ. Α. Αναπολιτάνος *Εισαγωγή...*σσ. 225-226
29. «Οι συναρτήσεις και οι έννοιες είναι, σύμφωνα με τον Frege, λογικά πρότερες των αντικειμένων. Μπορούν δηλαδή, να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή νέων αντικειμένων, κάθε ένα από τα οποία προκύπτει, για την περίπτωση των εννοιών, ως συλλογή όλων των αντικειμένων που ήδη υπάρχουν και που ανήκουν στην έννοια. Η πίστη του Frege στη λογική προτερότητα των εννοιών και των συναρτήσεων είχε σαν αποτέλεσμα την, εκ μέρους του, χρήση του όρου *λογικά αντικείμενα* για όλες εκείνες τις οντότητες, που προκύπτουν με τον παραπάνω τρόπο.» Στο ίδιο, σσ. 227-228.

30. Στο ίδιο σ. 229.

31. Μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ενός συνόλου  $\alpha$  επί ενός συνόλου  $\beta$  είναι μία συνάρτηση του  $\alpha$  στο  $\beta$  τέτοια ώστε για κάθε στοιχείο του  $\alpha$  να αντιστοιχεί μέσω της συνάρτησης ένα ακριβώς στοιχείο του  $\beta$  και σε κάθε στοιχείο του  $\beta$  να υπάρχει ένα ακριβώς στοιχείο του  $\alpha$  στο οποίο αυτό το στοιχείο του  $\beta$  να αντιστοιχείται μέσω της συνάρτησης.