Πολυωνυμικές επεκτάσεις του Θεωρήματος van der Waerden

Δημήτρης Καραγεώργος

Διπλωματική εργασία ειδίκευσης στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Τμήμα Μαθηματικών

Εθνικό και Καποδιστριακό

Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα 2012

στους γονείς μου

Περιληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τις διάφορες μορφές του θεωρήματος van der Waerden και τις επεκτάσεις που ακολούθησαν, κυρίως τις πολυωνυμικές επεκτάσεις.

Αναλυτικότερα, διατυπώνουμε το κλασικό Θεώρημα van der Waerden Θεώρημα και αποδεικνύουμε κάποιες από τις ισοδύναμες μορφές του. Έπειτα διατυπώνουμε τις ισοδύναμες μορφές μιας επέκτασης του Θεωρήματος van der Waerden σε περισσότερες διαστάσεις, που αναφέρεται ως Πολυδιάστατο Θεώρημα van der Waerden ή ως Θεώρημα Gallai. Δίνουμε τη βασική θεωρία των Τοπολογικών Δυναμικών Συστημάτων και αποδεικνύουμε το Θεώρημα Birkhoff. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το Θεώρημα Furstenberg-Weiss, που αναφέρεται σε τοπολογικά δυναμικά συστήματα, και ακολούθως την ισοδυναμία του με το Θεωρήμα Gallai. Τέλος αποδεικνύουμε μια πολυωνυμική επέκταση του Θεωρήματος van der Waerden στην τοπολογική του μορφή, που οφείλεται στους Bergelson και Leibman.

Λέξεις κλειδιά: van der Waerden, Gallai, Furstenberg, Weiss, Πολυωνυμικό Θεώρημα van der Waerden.

Abstract

The theme of this Master Thesis is the fundamental combinatorial theorem of van der Waerden. We present equivalent forms of this theorem as well as improvements and extentions, as the polynomial van der Waerden Theorem proved by Bergelson and Leibman (1996).

We include a proof of the topological form of van der Waerden's Theorem in its multidimensional form given by Furstenberg and Weiss with the help of the theory of topological dynamical systems and the equivalent Gallai's Theorem. Also we give the analogous proof of the topological equivalent form of the polynomial van der Waerden Theorem given by Bergelson and Leibman.

Key words: van der Waerden, Gallai, Furstenberg, Weiss, Polynomial van der Waerden Theorem.

Εισαγωγη

Η παρούσα διπλωματική, που εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών μου για το μεταπτυχιακό δίπλωμα ειδίκευσης στα Θεωρητικά Μαθηματικά, πραγματεύεται τις διάφορες μορφές του θεωρήματος van der Waerden και τις επεκτάσεις που ακολούθησαν, κυρίως τις πολυωνυμικές επεκτάσεις.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της Θεωρίας των Διατακτικών Αριθμών. Συγκεκριμένα ορίζονται τα καλά διατεταγμένα σύνολα και αποδεικνύεται η αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής για καλά διατεταγμένα σύνολα. Στη συνέχεια ορίζονται και χαρακτηρίζονται οι διατακτικοί αριθμοί, συνδέονται τα καλά διατεταγμένα σύνολα με τους διατακτικούς αριθμούς και αποδεικνύεται η αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής για τους διατακτικούς αριθμούς. Τέλος ορίζεται η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός και οι δυνάμεις διατακτικών αριθμών και αποδεικνύεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της Cantor κανονικής αναπαράστασης ενός διατακτικού αριθμού.

Στο Κεφάλαιο 2 διατυπώνεται το κλασικό Θεώρημα van der Waerden Θεώρημα (2.1) και κάποιες από τις ισοδύναμες μορφές του Θεωρήματος van der Waerden Πρόταση (2.2). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η ισοδυναμία του καθαρά απειροσυνδυαστικού Θεωρήματος van der Waerden με ένα καθαρά τοπολογικό αποτέλεσμα Πρόταση (2.2(vi)) που οφείλεται στους Furstenberg- Weiss [FW]. Το 1927, ο Ολλανδός μαθηματικός Bartel Leendert van der Waerden δημοσίευσε το άρθρο του *Beweis einer Baudetschen Vermutung* [vdW] στο οποίο απέδειξε αυτό που λέμε Θεώρημα van der Waerden. Αυτό που απέδειξε ο van der Waerden ήταν:

> «Για κάθε $k, r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N = N(k, r)$ τέτοιο ώστε αν διαμερίσουμε το σύνολο $\{1, ..., N\}$ σε r χρώματα τότε υπάρχει μονοχρωματική πρόοδος μήκους k».

Στο άρθρο του ο van der Waerden αναφέρει το θεώρημα ως εικασία του Baudet. Το 1954 δημοσίευσε ένα άρθρο στα γερμανικά και το 1971 το ίδιο άρθρο [vdW1] δημοσιεύτηκε και στα αγγλικά για το πως η εικασία του Baudet αποδείχθηκε. Αναφέρει ότι σε σε ένα γεύμα του με τους μαθηματικούς Emil Artin και Otto Schreier τους είπε ότι ένας Ολλανδός μαθηματικός ο Baudet διατύπωσε το εξής:

> «Αν η ακολουθία των ακεραίων $1, 2, 3, \ldots$ διαιρεθεί σε δύο κλάσεις τότε τουλάχιστον μία από τις κλάσεις περιέχει αριθμητική πρόοδο k όρων $a, a + b, \ldots, a + (k - 1)b$ όσο μεγάλο και αν είναι το k».

Έπειτα πήγαν στο γραφείο του Artin και την απέδειξε με τη συμβολή τους. Αναφέρεται ότι ο van der Waerden η πρώτη φορά που άκουσε για την εικασία, το όνομα της οποίας οφείλεται στον μαθηματικό Pierre Joseph Henry Baudet, ήταν το 1926, πέντε χρόνια μετά τον θάνατο του Baudet, από τον μαθηματικό Frederick Schuh ή από κάποιους που την άκουσαν από τον Schuh και του την μετέφεραν. Ο Schuh ήταν μέντορας και φίλος του Baudet, οπότε είχε λάβει γνώση για την εικασία από τον ίδιο την περίοδο από το 1916 έως το 1920.

Όμως το 1960 ο μαθηματικός Alfred Brauer, μαθητής του Γερμανού μαθηματικού Issai Schur, αναφέρει ότι το 1916 ο Schur δουλεύοντας πάνω στα τετραγωνικά υπόλοιπα του $\mathbb{Z}_p$, διατύπωσε την εικασία. Τέλος, ο μαθηματικός Alexander Soifer αναφέρει στο βιβλίο του [Soi] ότι η εικασία διατυπώθηκε και από τους δύο ανεξάρτητα η μία από την άλλη και θα έπρεπε να αναφέρεται σαν εικασία Baudet-Schur. Το Θεώρημα van der Waerden έγινε ευρέως γνωστό το 1952, όταν δημοσιεύτηκε στο βιβλίο, *Three Pearls of Number Theory* [Khi], του Ρώσου μαθηματικού Aleksandr Yakovlevich Khinchin, όπου περιέχεται μια ελαφρώς διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος που οφείλεται στη μαθήτριά του M. A. Lukomskaja. Το Θεώρημα van der Waerden αποτελεί ένα σημαντικό αποτέλεσμα της Συνδυαστικής Θεωρίας Αριθμών και υπήρξε ο σπόρος για την ανάπτυξη της Θεωρίας Ramsey.

Στην επόμενη παράγραφο διατυπώνουμε τις ισοδύναμες μορφές μιας επέκτασης του Θεωρήματος van der Waerden σε περισσότερες διαστάσεις όπου αναφέρεται σαν Πολυδιάστατο Θεώρημα van der Waerden, η απόδειξη του οποίου οφείλεται στον Ούγγρο μαθηματικό Tibor Gallai. Ο Gallai, που το κανονικό του όνομά ήταν Tibor Grünwald, απέδειξε το θεώρημά του προς τα τέλη της δεκαετίας του 1930, αλλά δε δημοσίευσε ποτέ την απόδειξή του. Πρώτη φορά εμφανίστηκε στο άρθρο του Richard Rado [Rad] αναφέροντας ότι οφείλεται στον Grünwald, που ήταν το όνομα του Gallai εκείνη την εποχή.

Στο Κεφάλαιο 3 εισαγάγουμε και μελετάμε την έννοια του τοπολογικού δυναμικού συστήματος, που αποτελείται από ένα συμπαγή μετρικό χώρο και μια ημιομάδα συνεχών συναρτήσεων, από τον χώρο στον εαυτό του. Τα τοπολογικά δυναμικά συστήματα αποτελούν γενίκευση των δυναμικών συστημάτων που εισήγαγε ο Ισαάκ Νεύτωνας και για δύο αιώνες αποτελούσαν τμήμα της θεωρίας διαφορικών εξισώσεων. Στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα ο Poincaré γενίκευσε την έννοια του δυναμικού συστήματος ορίζοντάς το να είναι το ζεύγος που αποτελείται από ένα συμπαγή μετρικό χώρο και μια συνεχή συνάρτηση του χώρου, ενώ το 1978 ο Hillel Furstenberg επεξέτεινε την έννοια του τοπολογικού δυναμικού συστήματος ορίζοντάς το όπως αναφέραμε παραπάνω. Έπειτα διατυπώνουμε τις έννοιες της τροχιάς, του minimal δυναμικού συστήματος και αποδεικνύουμε ένα θεώρημα, που αναφέρεται στην ύπαρξη "recurrent" σημείου σε ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Το θεώρημα αυτό απεδείχθει από τον

Αμερικανό μαθηματικό George David Birkhoff το 1927 στο άρθρο του [Bir].

Στο κεφάλαιο 4 επεκτείνουμε την έννοια του recurrent σημείου στο πολλαπλώς recurrent Ορισμός (4.1). Έπειτα αποδεικνύουμε το θεώρημα των Furstenberg, Weiss Θεώρημα (4.8), το οποίο αποτελεί μια γενίκευση του Θεωρήματος Birkhoff στην περίπτωση του οποίου έχουμε περισσότερες από μία συνεχείς συναρτήσεις στον συμπαγή μετρικό χώρο που μετατίθενται μεταξύ τους και ένα σημείο του χώρου που είναι recurrent ως προς κάθε συνάρτηση ξεχωριστά. Γι' αυτόν τον λόγο το Θεώρημα Furstenberg-Weiss αναφέρεται στην βιβλιογραφία και ως Θεώρημα Multiple Birkhoff Recurrence. Το Θεώρημα Furstenberg-Weiss αποδείχθηκε το 1978 από τους μαθηματικούς Hillel Furstenberg και Benjamin Weiss στο άρθρο τους *Topological dynamics and combinatorial number theory* [FW]. Στη γενική του μορφή το Θεώρημα Furstenberg-Weiss αποτελεί την τοπολογική έκφραση του Πολυδιάστατου Θεωρήματος van der Waerden, Θεώρημα (2.3) Gallai.

Στο Κεφάλαιο 5 αναφερόμαστε σε μια πολυωνυμική εκδοχή του Θεωρήματος van der Waerden στην τοπολογική του μορφή, που στην ουσία είναι επέκταση του Θεωρήματος Furstenberg-Weiss για συναρτήσεις, που μετατίθενται μεταξύ τους και έχουν για εκθέτες ακέραια πολυώνυμα, Θεώρημα (5.1). Το Θεώρημα αυτό αποδείχθηκε το 1996 από τους Bergelson-Leibman και δημοσιεύτηκε στο άρθρο τους [BL]. Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε την έννοια των πολυωνυμικών παραστάσεων Ορισμός (5.2) και του βάρους των πολυωνυμικών παραστάσεων Ορισμός (5.5). Στην επόμενη παράγραφο περιγράφουμε την επαγωγική διαδικασία, που χρησιμοποίησαν στην απόδειξή τους, την οποία ονόμασαν PET-επαγωγή, που είναι στην ουσία μια υπερπεπερασμένη επαγωγή σε ένα σύνολο πινάκων. Έπειτα αποδεικνύουμε την ειδική περίπτωση του θεωρήματος για μία συνάρτηση και για το πολυώνυμο $p(n) = n^2$. Τέλος δίνουμε την απόδειξη του θεωρήματος στην οποία οι συγγραφείς χρησιμοποιούν το Θεώρημα Furstenberg-Weiss ως επαγωγική υπόθεση και στη συνέχεια ακολουθούν σε αρκετά σημεία την απόδειξη του Πολυδιάστατου Θεωρήματος van der Waerden των Furstenberg-Weiss.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πάρα πολύ τους γονείς μου τόσο για την ηθική, όσο και για την οικονομική στήριξη καθώς και για τη συνεχή συμπαράστασή τους και ιδιαίτερα τον πατέρα μου που έκανε διορθώσεις στο αρχικό κείμενο. Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Αγγελική για την στήριξη που μου παρείχε τα τελευταία χρόνια και για την υπομονή που έδειξε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια κ. Β.Φαρμάκη για τα ενδιαφέροντα μαθηματικά που με δίδαξε, για την πολύτιμη βοήθειά της και συμβουλές που μου παρείχε καθώς και για το χρόνο που αφιέρωσε για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Κατάβολο και κ. Παπαναστασίου για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής μου.

Δημήτρης Καραγεώργος

Αθήνα, Απρίλιος 2012

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές Έννοιες

1.1 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

Στην παράγραφο αυτή γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της Θεωρίας των Διατακτικών Αριθμών. Συγκεκριμένα στην πρώτη παράγραφο ορίζονται τα καλά διατεταγμένα σύνολα και αποδεικνύεται η αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής για καλά διατεταγμένα σύνολα. Στη δεύτερη παράγραφο ορίζονται και χαρακτηρίζονται οι διατακτικοί αριθμοί, συνδέονται τα καλά διατεταγμένα σύνολα με τους διατακτικούς αριθμούς και αποδεικνύεται η αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής. Στην τρίτη παράγραφο ορίζεται η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός και οι δυνάμεις διατακτικών και αποδεικνύεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της Cantor κανονικής αναπαράστασης διατακτικού αριθμού.

Συμβολισμός. Με $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z} = \{\pm n : n \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο των ακεραίων, με $\mathbb{Q} = \{k/l\ k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ το σύνολο των ρητών αριθμών, με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών και με $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Αν X είναι υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών με $0 \in X$, θέτουμε $X^* = X \setminus \{0\}$.

Ορισμός 1.1. Δύο σύνολα A, B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει αντιστοιχία $f : A \to B$ 1-1 και επί και γράφουμε $A =_c B$.

Ορισμός 1.2. Ένα σύνολο A είναι **πεπερασμένο** αν υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε

$$A =_c \{i \in \mathbb{N} : i < n\} = \{0, ..., n-1\},$$

αλλιώς το A είναι **άπειρο**.

Το σύνολο A είναι **αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, αλλιώς είναι **υπεραριθμήσιμο**.

Παρατήρηση 1.3. Το κενό σύνολο, $\emptyset$, είναι πεπερασμένο, αφού
$\emptyset = \{i \in \mathbb{N} : \ i < 0\}$.

Ορισμός 1.4. Το **δυναμοσύνολο** $\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A, δηλαδή

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \text{ είναι σύνολο και } X \subseteq A\}.$$

Ορισμός 1.5. Έστω X ένα σύνολο και $\leqslant$ μια διμελής σχέση με τις ιδιότητες

(i) $x \leqslant x$ για κάθε $x \in X$(**αυτοπαθής**).

(ii) Αν $x \leqslant y$ και $y \leqslant z$ τότε $x \leqslant z$ για κάθε $x, y, z \in X$ (**μεταβατική**).

(iii) Αν $x, y \in X$ με $x \leqslant y$ και $y \leqslant x$ τότε $x = y$ (**αντισυμμετρική**).

(iv) Για κάθε $x, y \in X$ ή $x \leqslant y$ ή $y \leqslant x$ (**γραμμική**).

Αν ισχύουν οι (i),(ii), τότε το $(X, \leqslant)$ λέγεται **προδιατεταγμένο**.
Αν ισχύουν οι (i),(ii),(iii), τότε το $(X, \leqslant)$ λέγεται **μερικά διατεταγμένο**.
Αν ισχύουν οι (i),(ii),(iii),(iv), τότε το $(X, \leqslant)$ λέγεται **ολικά διατεταγμένο**.

Ορισμός 1.6. Έστω $(X, \leqslant)$ ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο. Το X λέγεται **καλά διατεταγμένο σύνολο**, αν κάθε μη κενό υποσύνολο A του X έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή αν υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε για κάθε $x \in A$ να έχουμε $x_0 \leqslant x$.

Πρόταση 1.7. Έστω $(A, \leqslant)$ ολικά διατεταγμένο σύνολο. Τότε το A είναι καλά διατεταγμένο σύνολο αν και μόνο αν δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία στοιχείων του A.

Απόδειξη. Έστω ότι A είναι καλά διατεταγμένο σύνολο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A γνησίως φθίνουσα, άρα

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots.$$

Θεωρούμε το σύνολο $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}$. Τότε το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, γιατί αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το x_{n_0} να είναι το ελάχιστο στοιχείο του B έχουμε ότι $x_{n_0+1} < x_{n_0}$ και $x_{n_0+1} \in B$ άτοπο.
Έστω τώρα ότι το $(A, \leqslant)$ δεν είναι καλά διατεταγμένο. Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A, που είναι γνησίως φθίνουσα. Έστω $B \subseteq A$ μη κενό που δεν έχει ελάχιστο στοιχείο και έστω $x_1 \in B$. Τότε υπάρχει $x_2 \in B$ με $x_2 < x_1$. Έστω ότι έχουμε βρει $x_1 > \ldots > x_n$. Τότε $B\setminus\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μη κενό και μπορούμε να επιλέξουμε $x_{n+1} \in B$ με $x_{n+1} < x_n$, διότι το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. □

Παράδειγμα 1.8. Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο, αφού κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο στοιχείο. Από την άλλη τα σύνολα των ακεραίων $\mathbb{Z}$ και των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ δεν είναι καλά διατεταγμένα, αφού υπάρχουν υποσύνολά τους που δεν έχουν ελάχιστο στοιχείο.

Ορισμός 1.9. Έστω $(X, \leqslant)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται **αλυσίδα**, αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει ή $x \leqslant y$ ή $y \leqslant x$, δηλαδή αν το A είναι ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του X.

Ορισμός 1.10. Έστω $(X, \leqslant)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Τότε για κάθε $x \in X$ ορίζουμε το σύνολο των προηγουμένων στοιχείων του x.

$$P(x) = \{y \in X : y < x\}$$

Ορισμός 1.11. Έστω $(X, \leqslant)$,$(Y, \leqslant)$ μερικά διατεταγμένα σύνολα. Μια συνάρτηση $f : (X, \leqslant) \to (Y, \leqslant)$ λέγεται **εμφύτευση** (ως προς $\leqslant$), αν η f είναι 1-1 και αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ ισχύει

$$x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Δηλαδή η f διατηρεί τη διάταξη. Αν η εμφύτευση f είναι επιπλέον επί, τότε λέγεται **ισομορφισμός διάταξης**.

Παρατήρηση 1.12. Αν $f : (X, \leqslant) \to (Y, \leqslant)$ είναι εμφύτευση τότε επειδή η f είναι 1-1 τότε για κάθε $x_1, x_2 \in X$ ισχύει $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Θεώρημα 1.13. (**Υπερπεπερασμένης Επαγωγής**) Έστω $(A, \leqslant)$ ένα καλά διατεταγμένο σύνολο και $B \subseteq A$. Υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$a \in A \text{ και } P(a) \subseteq B \Rightarrow a \in B.$$

Τότε $A = B$.

Απόδειξη. Έστω ότι $B \neq A$ τότε $A \setminus B \neq \emptyset$ και $A \setminus B \subseteq A$. Το $(A, \leqslant)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο, άρα υπάρχει $a_0 \in A \setminus B$ ελάχιστο στοιχείο. Τότε $P(a_0) \subseteq B$ και από υπόθεση έχουμε ότι $a_0 \in B$, άτοπο. Άρα $A = B$. $\square$

Πόρισμα 1.14. Έστω $(A, \leqslant)$ καλά διατεταγμένο σύνολο και $f : (A, \leqslant) \to (A, \leqslant)$ μια εμφύτευση. Τότε η f είναι μη φθίνουσα, δηλαδή $a \leqslant f(a)$ για κάθε $a \in A$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{a \in A : a \leqslant f(a)\}$. Θα δείξουμε ότι $B = A$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι, αν $a \in A$ και $P(a) \subseteq B$, τότε $a \in B$. Έστω $a \in A$ με $P(a) \subseteq B$ και υποθέτουμε ότι $a \notin B$. Τότε $f(a) < a$ και άρα $f(a) \in P(a) \subseteq B$. Επομένως $f(a) \leqslant f(f(a))$. Όμως η f είναι εμφύτευση και επειδή $f(a) < a$ έχουμε ότι $f(f(a)) < f(a)$. Άτοπο, άρα $A = B$ οπότε $a \leqslant f(a)$ για κάθε $a \in A$. □

Πόρισμα 1.15. Έστω $(A, \leqslant), (B, \leqslant)$ καλά διατεταγμένα σύνολα και έστω $f : (A, \leqslant) \to (B, \leqslant)$ ισομορφισμός διάταξης. Τότε ο ισομορφισμός αυτός είναι μοναδικός.

Απόδειξη. Έστω $f : (A, \leqslant) \to (B, \leqslant), \quad g : (A, \leqslant) \to (B, \leqslant)$ ισομορφισμοί διάταξης. Τότε η $g^{-1} \circ f : (A, \leqslant) \to (A, \leqslant)$ είναι εμφύτευση και από το Πόρισμα (1.14) έχουμε ότι $a \leqslant g^{-1}(f(a))$ για κάθε $a \in A$ και άρα $g(a) \leqslant f(a)$ για κάθε $a \in A$. Από την άλλη η $f^{-1} \circ g : (A, \leqslant) \to (A, \leqslant)$ είναι εμφύτευση οπότε πάλι από Πόρισμα (1.14) έχουμε ότι $a \leqslant f^{-1}(g(a))$ για κάθε $a \in A$, οπότε έχουμε ότι $f(a) \leqslant g(a)$ για κάθε $a \in A$. Άρα δείξαμε ότι $f(a) = g(a)$ για κάθε $a \in A$ και επομένως η f είναι μοναδική. □

Πόρισμα 1.16. Έστω $(A, \leqslant)$ καλά διατεταγμένο σύνολο. Τότε δεν είναι ισόμορφο με ένα αρχικό τμήμα $P(x) = \{a \in A : a < x\}$ για κάθε $x \in A$.

Απόδειξη. Έστω $x \in A$ και $f : (A, \leqslant) \to (P(x), \leqslant)$ ισομορφισμός. Τότε η f είναι εμφύτευση και άρα $a \leqslant f(a)$ για κάθε $a \in A$, άρα και $x \leqslant f(x)$. Όμως $f(a) \in P(x)$ για κάθε $a \in A$ άρα και $f(x) \in P(x)$. Οπότε $f(x) < x$ άτοπο. □

1.2 Διατακτικοί Αριθμοί

Ορισμός 1.17 (**von Neumann**). Ένα σύνολο ξ λέγεται **διατακτικός αριθμός** (**ordinal**) αν ισχύουν:

i Αν $\zeta \in \xi$, τότε $\zeta \subseteq \xi$.

ii Αν $\zeta, \eta \in \xi$, τότε είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$.

iii Για κάθε $A \subseteq \xi$ μη κενό υπάρχει $\zeta \in A$, ώστε $\zeta \cap A = \emptyset$.

Παράδειγμα 1.18. Η κατασκευή των φυσικών αριθμών:
$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$

Λήμμα 1.19. Έστω ξ ένας διατακτικός αριθμός. Τότε δεν υπάρχουν σύνολα ξ', ξ'', ξ''' τέτοια ώστε

$$\xi' \in \xi''' \in \xi'' \in \xi' \in \xi \tag{1.1}$$

Ιδιαίτερα $\xi \notin \xi$ και δεν υπάρχουν σύνολα ξ', ξ'' τέτοια ώστε

$$\xi' \in \xi'' \in \xi' \in \xi \tag{1.2}$$

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν σύνολα ξ', ξ'', ξ''' που να ικανοποιούν την (1.1). Θέτουμε $A = \{\xi', \xi'', \xi'''\}$. Επειδή $\xi' \in \xi$ έχουμε ότι $\xi' \subseteq \xi$. Επειδή $\xi'' \in \xi'$, έχουμε ότι $\xi'' \in \xi$ και άρα $\xi'' \subseteq \xi$. Επειδή $\xi''' \in \xi''$ έχουμε ότι $\xi''' \in \xi$ και άρα $\xi''' \subseteq \xi$. Επομένως το A είναι μη κενό υποσύνολο του ξ και άρα υπάρχει $\eta \in A$ με $\eta \cap A = \emptyset$. Όμως $\xi'' \in A \cap \xi' \neq \emptyset$, $\xi''' \in A \cap \xi'' \neq \emptyset$, $\xi' \in A \cap \xi''' \neq \emptyset$. Άρα δεν υπάρχει $\eta \in A$ με $\eta \cap A = \emptyset$, άτοπο.
Ιδιαίτερα $\xi \notin \xi$ αλλιώς θα μπορούσαμε να πάρουμε $\xi = \xi' = \xi'' = \xi'''$.
Αν τώρα υπάρχουν σύνολα ξ', ξ'' με $\xi' \in \xi'' \in \xi' \in \xi$ τότε θέτοντας $A = \{\xi', \xi''\}$ έχουμε ότι $A \subseteq \xi$ και έχουμε ότι $\xi' \in \xi'' \cap A \neq \emptyset$ και $\xi'' \in \xi' \cap A \neq \emptyset$, άτοπο. Άρα δεν υπάρχουν τέτοια ξ', ξ''. □

Λήμμα 1.20. Έστω ξ διατακτικός αριθμός και ζ με $\zeta \in \xi$. Τότε ο ζ είναι διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Έστω $\zeta \neq \emptyset$ και $\eta \in \zeta$. Τότε για $\theta \in \eta$ έχουμε $\theta \in \eta \in \zeta \in \xi$. Αφού ο ξ είναι διατακτικός αριθμός και $\zeta \in \xi$ έχουμε ότι $\zeta \subseteq \xi$ οπότε $\eta \in \xi$ άρα $\eta \subseteq \xi$ και τελικά έχουμε $\theta \in \xi$. Αφού $\theta, \zeta \in \xi$, από τη δεύτερη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών, έχουμε είτε $\theta = \zeta$, είτε $\theta \in \zeta$, είτε $\zeta \in \theta$.
Αν $\theta = \zeta$, τότε $\zeta \in \eta \in \zeta \in \xi$ και από Λήμμα (1.19) έχουμε άτοπο.
Αν $\zeta \in \theta$, τότε $\zeta \in \theta \in \eta \in \zeta \in \xi$ και πάλι από Λήμμα (1.19) έχουμε άτοπο.
Επομένως $\theta \in \zeta$ και άρα $\eta \subseteq \zeta$.
Έστω $\eta, \theta \in \zeta$. Τότε αφού $\zeta \in \xi$ έχουμε ότι $\zeta \subseteq \xi$ και άρα $\eta, \theta \in \xi$. Επομένως, αφού ο ξ είναι διατακτικός αριθμός έχουμε ότι είτε $\theta = \eta$, είτε $\theta \in \eta$, είτε $\eta \in \theta$.
Τέλος έστω $A \subseteq \zeta \subseteq \xi$ μη κενό. Τότε αφού ο ξ είναι διατακτικός υπάρχει $\eta \in A$ με $\eta \cap A = \emptyset$. Άρα ο ζ είναι διατακτικός αριθμός. □

Ορισμός 1.21. Έστω ξ, ζ διατακτικοί αριθμοί. Τότε ορίζουμε

$$\zeta \leqslant \xi \Leftrightarrow \zeta \subseteq \xi$$

$$\zeta < \xi \Leftrightarrow \zeta \subsetneq \xi$$

Επίσης ορίζουμε $P(\xi) = \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός αριθμός με } \zeta \subsetneq \xi\}$

Λήμμα 1.22. Έστω ξ, ζ διατακτικοί αριθμοί. Τότε

$$\zeta \subsetneq \xi \Leftrightarrow \zeta \in \xi.$$

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Επειδή ο ξ είναι διατακτικός αριθμός και και $\zeta \in \xi$ έχουμε ότι $\zeta \subseteq \xi$ και μάλιστα $\zeta \subsetneq \xi$ γιατί αν $\zeta = \xi$ τότε $\zeta = \xi \notin \xi$, άτοπο.
($\Rightarrow$) Έστω, $\zeta \subsetneq \xi$. Τότε $\xi \setminus \zeta \neq \emptyset$ και $\xi \setminus \zeta \subseteq \xi$. Επειδή ο ξ είναι διατακτικός αριθμός υπάρχει $\eta \in \xi \setminus \zeta$ με $\eta \cap (\xi \setminus \zeta) = \emptyset$, άρα $\eta \subseteq \zeta$. Αφού $\eta \in \xi$ τότε

$\eta \subseteq \xi$. Θα δείξουμε ότι $\zeta = \eta$.

Πράγματι έστω $\eta \neq \zeta$. Τότε $\eta \subsetneq \zeta$ και άρα $\zeta \setminus \eta \neq \emptyset$ και $\zeta \setminus \eta \subseteq \zeta$. Τότε αφού ζ είναι διατακτικός αριθμός, υπάρχει $\theta \in \zeta \setminus \eta$ με $\theta \cap (\zeta \setminus \eta) = \emptyset$ και άρα $\theta \subseteq \eta$. Επειδή $\theta \in \zeta$ έχουμε $\theta \subseteq \zeta$. Αφού $\eta \in \xi$, $\theta \in \zeta \subsetneq \xi$ και επειδή ο ξ είναι διατακτικός αριθμός από τη δεύτερη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών έχουμε ότι είτε $\theta = \eta$, είτε $\eta \in \theta$, είτε $\theta \in \eta$.

Αν $\theta = \eta$, τότε $\eta = \theta \in (\zeta \setminus \eta) \cap (\xi \setminus \zeta) = \emptyset$, άτοπο.

Αν $\theta \in \eta \in \xi \setminus \zeta$ τότε $\theta \in \xi \setminus \zeta$, άτοπο αφού $\theta \in \zeta$.

Αν $\eta \in \theta$ και επειδή $\theta \in \zeta$ έχουμε $\eta \in \zeta$, άτοπο αφού $\eta \in \xi \setminus \zeta$.

Επομένως $\zeta = \eta \in \xi$. □

Πρόταση 1.23. Έστω ξ διατακτικός αριθμός. Τότε $\xi = P(\xi)$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα (1.19) έχουμε ότι $\xi \notin \xi$ και επειδή αν $\zeta \in \xi$ ισχύει $\zeta \subseteq \xi$ τότε από Λήμμα (1.20) έχουμε

$$\xi \subseteq \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός με } \zeta \subsetneq \xi\} = \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός με } \zeta < \xi\} = P(\xi).$$

Από το Λήμμα (1.22) παρατηρούμε ότι έχουμε

$$P(\xi) = \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός με } \zeta < \xi\} = \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός με } \zeta \subsetneq \xi\} \subseteq \xi$$

και άρα

$$\xi = \{\zeta : \zeta \text{ διατακτικός με } \zeta < \xi\} = P(\xi).$$

□

Γράφοντας $P(\xi) = [0, \xi)$ τότε έχουμε $\xi = [0, \xi)$. Δηλαδή τα στοιχεία ενός διατακτικού αριθμού ξ είναι ακριβώς οι διατακτικοί αριθμοί που είναι γνήσια μικρότεροι από τον ξ.

Πόρισμα 1.24. Έστω ξ, ζ διατακτικοί αριθμοί με $\zeta \subsetneq \xi$. Τότε $\zeta \in \xi$ και $\zeta = \{\eta \in \xi : \eta < \zeta\}$, δηλαδή ο ζ είναι ένα αρχικό τμήμα του ξ.

Απόδειξη. Επειδή $\zeta = \{\eta \in \xi : \eta < \zeta\}$ έχουμε ότι $\zeta \subseteq \{\eta \in \xi : \eta < \zeta\}$. Έστω $\eta \in \xi$ με $\eta < \zeta$, τότε η διατακτικός αριθμός με $\eta < \zeta$ και άρα $\eta \in \zeta$ οπότε $\{\eta \in \xi : \eta < \zeta\} \subseteq \zeta$. Άρα $\zeta = \{\eta \in \xi : \eta < \zeta\}$. □

Πρόταση 1.25. Αν ξ είναι διατακτικός αριθμός τότε το $(\xi, \leqslant)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο.

Απόδειξη. Η σχέση $\leqslant$ είναι καλά ορισμένη στο ξ, αφού το ξ είναι το σύνολο των μικρότερων διατακτικών αριθμών, αφού για κάθε $\zeta \in \xi$ έχουμε $\zeta \subseteq \xi$ και άρα $\zeta \leqslant \xi$.
Για κάθε $\zeta \in \xi$ έχουμε $\zeta \subseteq \zeta$ και άρα $\zeta \leqslant \zeta$.
Έστω $\zeta, \eta, \theta \in \xi$ με $\zeta \leqslant \eta$ και $\eta \leqslant \theta$ άρα $\zeta \subseteq \eta$ και $\eta \subseteq \theta$ οπότε έχουμε ότι $\zeta \subseteq \theta$ και άρα $\zeta \leqslant \theta$.
Έστω $\zeta, \eta \in \xi$ με $\zeta \leqslant \eta$ και $\eta \leqslant \zeta$ τότε $\zeta \subseteq \eta$ και $\eta \subseteq \zeta$ και άρα $\zeta = \eta$.
Έστω $\zeta, \eta \in \xi$. Τότε από δεύτερη ιδιότητα διατακτικών αριθμών έχουμε ότι είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$. Οπότε έχουμε ότι είτε $\zeta \subseteq \eta$, είτε $\eta \subseteq \zeta$, και άρα είτε $\zeta \leqslant \eta$, είτε $\eta \leqslant \zeta$.
Επομένως δείξαμε ότι το $(\xi, \leqslant)$ είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο.
Έστω $A \subseteq \xi$ μη κενό. Τότε από τρίτη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών έχουμε ότι υπάρχει $\zeta \in A$ με $\zeta \cap A = \emptyset$. Έστω τώρα $\eta \in A$. Τότε $\zeta, \eta \in \xi$ και από δεύτερη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών έχουμε ότι είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$.
Αν $\eta \in \zeta$ τότε $\eta \in \zeta \cap A = \emptyset$ άτοπο.
Οπότε έχουμε ότι είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$ δηλαδή $\zeta \subseteq \eta$ για κάθε $\eta \in A$ άρα $\zeta \leqslant \eta$ για κάθε $\eta \in A$ οπότε ο ζ είναι ελάχιστο στοιχείο του A.
Επομένως το $(\xi, \leqslant)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο. □

Πρόταση 1.26. Έστω ξ, ζ διατακτικοί αριθμοί. Τότε ο $\xi \cap \zeta$ είναι διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Έστω $\eta \in \xi \cap \zeta$. Τότε $\eta \in \xi$ και $\eta \in \zeta$ οπότε $\eta \subseteq \zeta$ και $\eta \subseteq \xi$ και άρα $\eta \subseteq \xi \cap \zeta$.
Έστω $\eta, \theta \in \xi \cap \zeta$. Τότε $\eta, \theta \in \xi$ και $\eta, \theta \in \zeta$ και επειδή ζ, ξ είναι διατακτικοί αριθμοί από δεύτερη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών έχουμε ότι είτε $\eta = \theta$ είτε $\eta \in \theta$ είτε $\eta \in \theta$.
Έστω $A \subseteq \zeta \cap \xi$ μη κενό. Τότε $A \subseteq \zeta$ και $A \subseteq \xi$ και από τρίτη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών υπάρχει $\theta \in A$ με $\theta \cap A = \emptyset$.
Οπότε $\zeta \cap \xi$ είναι διατακτικός αριθμός. □

Πρόταση 1.27. Έστω ζ, ξ διατακτικοί αριθμοί. Τότε έχουμε ότι ή $\zeta \subseteq \xi$ ή $\xi \subseteq \zeta$. Δηλαδή κάθε σύνολο από διατακτικούς αριθμούς είναι ολικά διατεταγμένο.

Απόδειξη. Έστω ότι $\zeta \subsetneq \xi$ και $\xi \subsetneq \zeta$. Τότε από Πρόταση (1.26) έχουμε ότι ο $\zeta \cap \xi$ είναι διατακτικός αριθμός και επίσης $\zeta \cap \xi \subsetneq \xi$ και $\zeta \cap \xi \subsetneq \zeta$ και από Λήμμα (1.22) έχουμε ότι $\zeta \cap \xi \in \xi$ και $\zeta \cap \xi \in \zeta$. Επομένως, $\zeta \cap \xi \in \zeta \cap \xi$ άτοπο. □

Πρόταση 1.28. Έστω ξ, ζ διατακτικοί αριθμοί με $\xi \neq \zeta$. Τότε τα σύνολα $(\xi, \leqslant), (\zeta, \leqslant)$ δεν είναι ισόμορφα με ισομορφισμό διάταξης.

Απόδειξη. Από Πρόταση (1.27) έχουμε ότι ή $\xi \subsetneq \zeta$ ή $\zeta \subsetneq \xi$.
Έστω ότι $\zeta \subsetneq \xi$ τότε από Λήμμα (1.22) και Πρόταση (1.23) έχουμε ότι το ζ είναι αρχικό τμήμα του ξ, δηλαδή $\zeta = \{\eta \in \xi : \eta \leqslant \zeta\}$. Έτσι από Πόρισμα (1.16) το ξ δεν είναι ισόμορφο με το ζ. □

Πρόταση 1.29. Έστω ξ διατακτικός αριθμός. Τότε ο $\xi \cup \{\xi\}$ είναι διατακτικός αριθμός και $\xi \cup \{\xi\} = \xi + 1$ που είναι ο αμέσως επόμενος του ξ. Δηλαδή αν η διατακτικός αριθμός με $\xi < \eta$ τότε $\xi + 1 \leqslant \eta$.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι ο $\xi \cup \{\xi\} = \xi + 1$ είναι διατακτικός αριθμός.
Έστω $\zeta \in \xi + 1$. Τότε ή $\zeta \in \xi$ ή $\zeta = \xi$.
Αν $\zeta \in \xi$ τότε $\zeta \subseteq \xi \subseteq \xi + 1$.
Αν $\zeta = \xi$ τότε $\zeta = \xi \subseteq \xi + 1$.
Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $\zeta \subseteq \xi + 1$.
Έστω $\zeta, \eta \in \xi + 1$ με $\zeta \neq \eta$. Τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.
Αν $\zeta, \eta \in \xi$, επειδή ο ξ είναι διατακτικός αριθμός, έχουμε ότι είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$.
Αν $\zeta = \xi$, τότε έχουμε $\eta \in \xi = \zeta$.
Αν $\eta = \xi$, τότε $\zeta \in \xi = \eta$.
Άρα για κάθε $\zeta, \eta \in \xi + 1$ έχουμε ότι είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$.
Έστω $A \subseteq \xi + 1$ μη κενό.
Αν $A \subseteq \xi$, επειδή ο ξ είναι διατακτικός αριθμός, από τρίτη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών υπάρχει $\eta \in A$ με $\eta \cap A = \emptyset$.
Έστω $\xi \in A$, τότε αν $\xi \cap A = \emptyset$ έχουμε ότι $A = \xi$, οπότε θέτουμε $\eta = \xi$ και έχουμε $\eta \cap A = \emptyset$. Στην περίπτωση που $\xi \cap A \neq \emptyset$ έχουμε ότι $\xi \cap A \subseteq \xi$ και από τρίτη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών (για τον ξ) υπάρχει $\eta \in \xi \cap A$ με $\eta \cap \xi \cap A = \emptyset$. Όμως $\eta \in \xi$ και άρα $\eta \cap A = \eta \cap \xi \cap A = \emptyset$.
Επομένως ο $\xi \cup \{\xi\}$ είναι διατακτικός αριθμός.
Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο $\xi \cup \{\xi\} = \xi + 1$ είναι ο επόμενος του ξ. Έστω η διατακτικός αριθμός με $\xi < \eta$. Τότε έχουμε ότι $\xi \subsetneq \eta$ και από Λήμμα (1.22) έχουμε ότι $\xi \in \eta$. Οπότε έχουμε ότι $\xi + 1 = \xi \cup \{\xi\} \subseteq \eta$ και άρα $\xi + 1 \leqslant \eta$. $\square$

Πρόταση 1.30. Έστω A μη κενό σύνολο διατακτικών αριθμών, τότε το σύνολο $\cup A = \{\zeta \in \xi : \xi \in A\}$ είναι διατακτικός αριθμός και μάλιστα ο $\cup A$ είναι το supremum του A με την έννοια ότι $\xi \leqslant \cup A$ για κάθε $\xi \in A$ και αν η διατακτικός αριθμός με $\xi \leqslant \eta$ για κάθε $\xi \in A$ τότε $\cup A \leqslant \eta$.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι ο $\cup A$ είναι διατακτικός αριθμός.
Έστω $\zeta \in \cup A$. Τότε υπάρχει $\xi \in A$ με $\zeta \in \xi \in A$ άρα $\zeta \subseteq \xi$. Οπότε αν $x \in \zeta$, τότε $x \in \xi$ και άρα $x \in \cup A$. Δηλαδή $\zeta \subseteq \cup A$.
Έστω $\zeta, \eta \in \cup A$. Τότε υπάρχουν $\xi, \xi' \in A$ με $\zeta \in \xi \in A$ και $\eta \in \xi' \in A$. Από Πρόταση (1.27) έχουμε οτι ή $\xi \subseteq \xi'$ ή $\xi' \subseteq \xi$. Οπότε έχουμε ότι ή $\zeta, \eta \in \xi$ ή $\zeta, \eta \in \xi'$. Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι είτε $\zeta = \eta$, είτε $\zeta \in \eta$, είτε $\eta \in \zeta$.
Έστω $B \subseteq \cup A$ μη κενό. Στη συνέχεια θεωρούμε $\zeta \in B \in \cup A$. Αν $\zeta \cap B = \emptyset$, τότε ικανοποιείται η τρίτη ιδιότητα των διατακτικών αριθμών. Έστω ότι $\zeta \cap B \neq \emptyset$. Τότε $\zeta \cap B \subseteq \zeta$. Επομένως επειδή ζ είναι διατακτικός αριθμός, υπάρχει η διατακτικός αριθμός με $\eta \in \zeta \cap B$ και $\eta \cap \zeta \cap B = \emptyset$. Όμως $\eta \in \zeta$ και άρα $\eta \subseteq \zeta$. Οπότε $\eta \cap B = \eta \cap \zeta \cap B = \emptyset$. Άρα ο $\cup A$ είναι διατακτικός αριθμός.
Έστω η διατακτικός αριθμός τέτοιος ώστε $\xi \leqslant \eta$ για κάθε $\xi \in A$ και άρα $\xi \subseteq \eta$ για κάθε $\xi \in A$ και άρα $\cup A \subseteq \eta$ και έτσι $\cup A$ είναι το supremum του A. □

Πρόταση 1.31. Κάθε μη κενό σύνολο διατακτικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη. Έστω A μη κενό σύνολο διατακτικών αριθμών και $\xi \in A$. Τότε $\cup A$ είναι διατακτικός αριθμός και επειδή $\xi \in A$ έχουμε ότι $\xi \subseteq \cup A + 1 = \cup A \cup \{\cup A\}$. Επομένως, $A \subseteq \cup A + 1$. Επειδή το $\cup A + 1$ είναι διατακτικός αριθμός, είναι καλά διατεταγμένο σύνολο και το σύνολο A έχει ελάχιστο στοιχείο. □

Πρόταση 1.32. Δεν υπάρχει σύνολο που να περιέχει όλους τους διατακτικούς αριθμούς

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σύνολο A και στη συνέχεια θέτουμε $B = \{\xi \in A :$ ξ διατακτικός αριθμός $\}$. Το B είναι σύνολο και θα δείξουμε ότι υπάρχει διατακτικός αριθμός, που δεν ανήκει στο B. Από Πρόταση (1.30) έχουμε ότι το $\cup B$ είναι διατακτικός αριθμός, άρα και ο $\zeta = \cup B \cup \{\cup B\}$ είναι ο επόμενος διατακτικός αριθμός. Τότε $\zeta \notin B$ γιατί για κάθε $\xi \in B$ έχουμε ότι $\xi \leqslant \cup B < \zeta$, δηλαδή αν $\zeta \in B$ έχουμε ότι $\zeta \leqslant \cup B$ άτοπο, αφού $\cup B < \zeta$. Οπότε αν υπήρχε το σύνολο $\mathscr{A}$ όλων των διατακτικών αριθμών θα θα υπήρχε διατακτικός αριθμός που δε θα ανήκε στο $\mathscr{A}$, άτοπο. □

Ορισμός 1.33. Ένας διατακτικός αριθμός ξ είναι **επόμενος διατακτικός αριθμός** αν $\xi = \zeta + 1 = \zeta \cup \{\zeta\}$ για κάποιον διατακτικό αριθμό ζ. Αν ο ξ δεν είναι επόμενος, τότε λέγεται **οριακός διατακτικός αριθμός**.

Πρόταση 1.34. Υπάρχει μη μηδενικός οριακός διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σύνολο A τέτοιο ώστε $\emptyset \in A$ και αν $b \in A$ τότε $b \cup \{b\} \in A$. Θέτουμε $B = \{\eta \in A : \eta$ διατακτικός αριθμός $\}$ και παρατηρούμε ότι $B \subseteq A$ και αφού $\emptyset \in B$ έχουμε ότι $\emptyset \cup \{\emptyset\} \in B$. Στη συνέχεια θέτουμε $\xi = \cup B$. Θα δείξουμε ότι ο ξ δεν είναι επόμενος διατακτικός αριθμός. Έστω ότι ο ξ είναι επόμενος, τότε υπάρχει διατακτικός αριθμός ζ με $\xi = \zeta \cup \{\zeta\} = \cup B$. Τότε επειδή $\emptyset \in B$ έχουμε ότι $\emptyset \in \xi$ και άρα $\xi \neq \emptyset$. Επειδή $\xi = \cup B$ έχουμε ότι υπάρχει $\eta \in B$ με $\zeta \in \eta$ και άρα $\zeta \subsetneq \eta$. Επομένως έχουμε $\xi = \zeta \cup \{\zeta\} \subseteq \eta \subsetneq \eta \cup \{\eta\} = \eta + 1$, δηλαδή $\xi \in \eta + 1$. Όμως $\eta + 1 \in B$ και επομένως $\eta + 1 \in \xi$ και άρα $\eta + 1 \subsetneq \xi$, ισοδύναμα $\eta + 1 < \xi$, άτοπο. Άρα ο ξ δεν είναι επόμενος διατακτικός αριθμός. □

Παρατήρηση 1.35. Με ω θα συμβολίζουμε τον ελάχιστο οριακό διατακτικό αριθμό. Τότε $\omega = \mathbb{N}$ ικανοποιεί τα αξιώματα του Peano και τα στοιχεία του λέγονται πεπερασμένοι διατακτικοί αριθμοί και είναι οι φυσικοί αριθμοί.

Θεώρημα 1.36. Έστω $(A, \leqslant)$ ένα καλά διατεταγμένο σύνολο. Τότε είναι ισόμορφο ως προς ισομορφισμό διάταξης με μοναδικό διατακτικό αριθμό.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε τη μοναδικότητα. Έστω ότι υπάρχουν διατακτικοί αριθμοί ξ, ζ με $\xi \neq \zeta$, που είναι ισόμορφοι με το A. Τότε όμως και το ξ θα είναι ισόμορφο με το ζ και αυτό είναι άτοπο σύμφωνα με την Πρόταση (1.28).
Θεωρούμε το σύνολο $B = A \cup \{t\}$ όπου $t \notin A$. Επεκτείνουμε τη διάταξη του A στο B θέτοντας $a < t$ για κάθε $a \in A$. Τότε το $(B, \leqslant)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο. Θεωρούμε το σύνολο $P(x) = \{y \in B : y < x\}$ για κάθε $x \in B$ και θέτουμε

$$C = \{x \in B : P(x) \text{ να είναι διατακτικά ισόμορφο με ένα διατακτικό αριθμό } \}$$

Θα αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι $B = C$.
Πράγματι αρκεί να δείξουμε ότι αν $x \in B$ με $P(x) \subseteq C$ τότε $x \in C$.
Έστω $x \in B$ με $P(x) \subseteq C$. Τότε για κάθε $y \in P(x)$ υπάρχει διατακτικός αριθμός ξ_y και μοναδικός ισομορφισμός διάταξης $f_y : P(y) \to \xi_y$. Θέτουμε

$$f : \bigcup_{y<x} P(y) \to \bigcup_{y<x} \xi_y = \xi.$$

Τότε η f είναι ισομορφισμός διάταξης.
Πράγματι η f είναι καλά ορισμένη αφού αν $y_1, y_2 \in P(x) \subseteq B$ με $y_1 < y_2$, τότε $P(y_1) \subseteq P(y_2)$ και $f_{y_2}|_{P(y_1)} = f_{y_1}$.
Η f είναι 1-1, αφού αν $x_1, x_2 \in \bigcup_{y<x} P(y)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε έχουμε ότι $x_1 \in P(y_1)$ και $x_2 \in P(y_2)$. Αν $y_1 \leqslant y_2$, έχουμε ότι $P(y_1) \subseteq P(y_2)$ οπότε έχουμε ότι $f_{y_2}(x_1) = f(x_1) = f(x_2) = f_{y_2}(x_2)$ και επειδή f_{y_2} είναι 1-1, έχουμε ότι $x_1 = x_2$. Αν $y_2 \leqslant y_1$, έχουμε ότι $P(y_2) \subseteq P(y_1)$, οπότε έχουμε ότι $f_{y_1}(x_1) = f(x_1) = f(x_2) = f_{y_1}(x_2)$ και επειδή f_{y_1} είναι 1-1, έχουμε ότι $x_1 = x_2$.
Η f είναι επί, αφού αν $z \in \bigcup_{y<x} \xi_y = \xi$ τότε $z \in \xi_y$ για κάποιο $y < x$. Οπότε

επειδή f_y είναι επί υπάρχει $x' \in P(y)$ με $f_y(x') = z$ και άρα $f(x') = z$.
Η f διατηρεί τη διάταξη. Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in \bigcup_{y<x} P(y)$ με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε ότι $x_1 \in P(y_1)$ και $x_2 \in P(y_2)$. Αν $y_1 \leqslant y_2$ έχουμε ότι $P(y_1) \subseteq P(y_2)$ οπότε $x_1, x_2 \in P(y_2)$ και άρα $f(x_1) = f_{y_2}(x_1) < f_{y_2}(x_2) = f(x_2)$. Αν $y_2 \leqslant y_1$ έχουμε ότι $P(y_2) \subseteq P(y_1)$ οπότε $x_1, x_2 \in P(y_1)$ και άρα $f(x_1) = f_{y_1}(x_1) < f_{y_1}(x_2) = f(x_2)$.
Άρα η f είναι ισομορφισμός διάταξης.
Αν το σύνολο $P(x)$ έχει maximum, έστω x_0 τότε $P(x) = \bigcup_{y<x} P(y) \cup \{x_0\}$ και άρα το $P(x)$ είναι διατακτικά ισόμορφο με τον $\xi \cup \{\xi\} = \xi + 1$, δηλαδή $x \in C$.
Αν το $P(x)$ δεν έχει maximum, τότε $P(x) = \bigcup_{y<x} P(y)$ και άρα το $P(x)$ είναι διατακτικά ισόμορφο με τον ξ, δηλαδή $x \in C$.
Άρα αποδείχθηκε ότι $B = C$ και επομένως $t \in C$, οπότε το $P(t) = A$ είναι ισόμορφο με ένα διατακτικό αριθμό. □

Θεώρημα 1.37 (Υπερπεπερασμένης Επαγωγής για Διατακτικούς Αριθμούς). Έστω $\mathscr{C}$ μια κλάση διατακτικών αριθμών τέτοια ώστε

(i) $0 \in \mathscr{C}$,

(ii) αν $\alpha \in \mathscr{C}$, τότε $\alpha + 1 \in \mathscr{C}$,

(iii) αν α είναι μη μηδενικός οριακός διατακτικός αριθμός και $\beta \in \mathscr{C}$ για κάθε $\beta < \alpha$, τότε $\alpha \in \mathscr{C}$.

Τότε $\mathscr{C}$ είναι η κλάση όλων των διατακτικών αριθμών.

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει το θεώρημα και έστω α ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $\alpha \notin \mathscr{C}$.
Αν $\alpha = 0$ από το (i) έχουμε ότι $\alpha \in \mathscr{C}$ άτοπο.
Αν α είναι επόμενος, τότε υπάρχει β διατακτικός αριθμός με $\beta + 1 = \alpha$ οπότε

$\beta < \alpha$ και επειδή ο α είναι ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός με $\alpha \notin \mathscr{C}$ έχουμε ότι $\beta \in \mathscr{C}$ και από το (ii) έχουμε ότι $\alpha = \beta + 1 \in \mathscr{C}$ άτοπο.

Αν α είναι οριακός διατακτικός αριθμός και επειδή για κάθε $\beta < \alpha$ έχουμε $\beta \in \mathscr{C}$ τότε από (iii) έχουμε $\alpha \in \mathscr{C}$ άτοπο.

Άρα η κλάση $\mathscr{C}$ περιέχει όλους τους διατακτικούς αριθμούς. $\square$

1.3 Αριθμητική Διατακτικών Αριθμών

Ορισμός 1.38 (Πρόσθεση Διατακτικών Αριθμών). Για κάθε διατακτικό αριθμό α ορίζουμε

(i) $\alpha + 0 = \alpha$

(ii) $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ για κάθε β διατακτικό αριθμό

(iii) $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\} = \lim\limits_{\xi \to \beta}(\alpha + \xi)$ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό $\beta \neq 0$

Παρατήρηση 1.39. Αν στο (ii) θέσουμε $\beta = 0$, τότε έχουμε την ισότητα $\alpha + 1 = \alpha + 1$ όπου στο αριστερό μέρος έχουμε την πρόσθεση των διατακτικών αριθμών α και 1, ενώ στο δεξιό μέρος της ισότητας έχουμε τον επόμενο διατακτικό αριθμό του α.

Παρατήρηση 1.40. Παρατηρούμε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό α έχουμε ότι $(\alpha + 1) + 1 = \alpha + 2$ και γενικά $(\alpha + n) + 1 = \alpha + (n + 1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση 1.41. Αν θεωρήσουμε τον διατακτικό αριθμό ω, τότε έχουμε

$$\omega + \omega = \sup\{\omega + n : n < \omega\}.$$

Τώρα θεωρούμε το άθροισμα $m + \omega$ για κάποιον $m < \omega$. Τότε έχουμε

$$m + \omega = \sup\{m + n : n < \omega\} = \omega$$

επειδή m είναι φυσικός αριθμός, οπότε και $m+n$ είναι φυσικός αριθμός για κάθε $n < \omega$. Άρα έχουμε ότι $\omega + m \neq m + \omega$ οπότε η πρόσθεση των διατακτικών αριθμών δεν μεταθετική. Επίσης παρατηρούμε επειδή $1 \neq 2$ και επειδή $1 + \omega = 2 + \omega = \omega$ έχουμε ότι δεν ισχύει ο κανόνας της διαγραφής για την πρόσθεση από δεξιά.

Πρόταση 1.42. Έστω α, γ διατακτικοί αριθμοί όπου γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός. Τότε και ο $\alpha + \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Έστω $\zeta < \alpha + \gamma$. Επειδή $\alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \gamma\}$ υπάρχει $\xi < \gamma$ με $\zeta \leqslant \alpha + \xi$. Τότε

$$\zeta + 1 \leqslant (\alpha + \xi) + 1 = \alpha + (\xi + 1) < \alpha + \gamma.$$

Άρα $\alpha + \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός. □

Πρόταση 1.43. Έστω $(A_1, \leqslant_1), (A_2, \leqslant_2)$ ολικά διατεταγμένα σύνολα με $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Τότε το άθροισμα των A_1 και A_2 είναι το σύνολο $A = A_1 \cup A_2$ με διάταξη $\leqslant$ που ορίζεται ως εξής $a \leqslant b$ αν και μόνο αν

(i) $a, b \in A_1$ και $a \leqslant_1 b$ ή

(ii) $a, b \in A_2$ και $a \leqslant_2 b$ ή

(iii) $a \in A_1$ και $b \in A_2$

και μάλιστα είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο.

Απόδειξη. *Αυτοπαθής.* Έστω $a \in A$, τότε $a \in A_1$ ή $a \in A_2$, άρα $a \leqslant_1 a$ ή $a \leqslant_2 a$, οπότε $a \leqslant a$.

Μεταβατική. Έστω $a, b, c \in A$ με $a \leqslant b$ και $b \leqslant c$. Τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις.
Αν $a, b, c \in A_1$, τότε $a \leqslant_1 c$ και άρα $a \leqslant c$.
Αν $a, b, c \in A_2$, τότε $a \leqslant_2 c$ και άρα $a \leqslant c$.
Αν $a \in A_1$ και $c \in A_2$, τότε από τον ορισμό της $\leqslant$ είτε $b \in A_1$, είτε $b \in A_2$ έχουμε ότι $a \leqslant c$.

Αντισυμμετρική. Έστω $a, b \in A$ με $a \leqslant b$ και $b \leqslant a$, τότε αναγκαστικά θα έχουμε ή $a, b \in A_1$ ή $a, b \in A_2$, γιατί αν $a \in A_1$ και $b \in A_2$, τότε δεν ισχύει $b \leqslant a$ και αν $b \in A_1$ και $a \in A_2$ δεν ισχύει $a \leqslant b$. Αν $a, b \in A_1$, τότε $a =_1 b$ και άρα $a = b$. Αν $a, b \in A_2$, τότε $a =_2 b$ και άρα $a = b$.

Γραμμική. Έστω $a, b \in A$. Αν $a, b \in A_1$, τότε ή $a \leqslant_1 b$ ή $b \leqslant_1 a$ και άρα $a \leqslant b$ ή $b \leqslant a$. Αν $a, b \in A_2$, τότε ή $a \leqslant_2 b$ ή $b \leqslant_2 a$ και άρα $a \leqslant b$ ή $b \leqslant a$. Αν $a \in A_1$ και $b \in A_2$, τότε $a \leqslant b$ ενώ αν $a \in A_2$ και $b \in A_1$ τότε $b \leqslant a$.

□

Πρόταση 1.44. Έστω $(A_1, \leqslant_1), (A_2, \leqslant_2)$ ολικά διατεταγμένα σύνολα. Τότε το γινόμενο των A_1 και A_2 είναι το σύνολο $A = A_1 \times A_2$ με διάταξη $\leqslant$ που ορίζεται ως εξής: $(a_1, a_2) \leqslant (b_1, b_2)$ αν και μόνο αν $a_1 <_1 b_1$ ή αν $a_1 =_1 b_1$, τότε $a_2 <_2 b_2$ και μάλιστα είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο.

Απόδειξη. *Αυτοπαθής.* Έστω $(a_1, a_2) \in A$, τότε $a_1 \leqslant_1 a_1$ και $a_2 \leqslant_2 a_2$ άρα $(a_1, a_2) \leqslant (a_1, a_2)$.

Μεταβατική. Έστω $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in A$ με $(a_1, a_2) \leqslant (b_1, b_2)$ και $(b_1, b_2) \leqslant (c_1, c_2)$.
Αν $a_1 <_1 b_1$ και $b_1 \leqslant_1 c_1$ έχουμε $a_1 \leqslant_1 c_1$ και άρα $(a_1, a_2) \leqslant (c_1, c_2)$.
Αν $a_1 =_1 b_1$ και $b_1 =_1 c_1$, τότε $a_2 \leqslant_2 b_2$ και $b_2 \leqslant_2 c_2$ και άρα $(a_1, a_2) \leqslant (c_1, c_2)$.
Αν $a_1 =_1 b_1$ και $b_1 \leqslant_1 c_1$ έχουμε $a_1 \leqslant_1 c_1$, οπότε $(a_1, a_2) \leqslant (c_1, c_2)$.

Αντισυμμετρική. Έστω $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A$ με $(a_1, a_2) \leqslant (b_1, b_2)$ και $(b_1, b_2) \leqslant (a_1, a_2)$.
Έχουμε $a_1 \leqslant_1 b_1$ και $b_1 \leqslant_1 a_1$ οπότε $a_1 =_1 b_1$ και άρα $a_2 \leqslant_2 b_2$ και $b_2 \leqslant_2 a_2$ οπότε $a_2 =_2 b_2$ και έχουμε $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

Γραμμική. Έστω $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A$. Τότε ισχύει μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις.
Αν $a_1 <_1 b_1$, έχουμε $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$
Αν $b_1 <_1 a_1$, έχουμε $(b_1, b_2) < (a_1, a_2)$
Αν $a_1 =_1 b_1$ και $a_2 <_2 b_2$, έχουμε $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$
Αν $a_1 =_1 b_1$ και $b_2 <_2 a_2$, έχουμε $(b_1, b_2) < (a_1, a_2)$
Αν $a_1 =_1 b_1$ και $a_2 =_2 b_2$, έχουμε $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$
οπότε σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι τα $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ είναι συγκρίσιμα. Άρα δείξαμε ότι το $(A, \leqslant)$ είναι ολικά διατεταγμένο. $\square$

Λήμμα 1.45. (i) Έστω α, β και γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\alpha < \beta$ αν και μόνο αν $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$

(ii) Έστω α, β και γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

(iii) Έστω α, β και γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε ισχύει $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$

Απόδειξη. (i) Θα το αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο β.
Έστω $\beta = \alpha + 1$, τότε $\gamma + \alpha < (\gamma + \alpha) + 1 = \gamma + (\alpha + 1) = \gamma + \beta$.
Έστω τώρα $\alpha < \beta$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $\xi < \beta$ με $\alpha < \xi$ ότι ισχύει $\gamma + \alpha < \gamma + \xi$.
Αν β είναι επόμενος υπάρχει διατακτικός αριθμός ξ με $\alpha \leqslant \xi$ και $\beta = \xi + 1$. Τότε από επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\gamma + \alpha \leqslant \gamma + \xi < (\gamma + \xi) + 1 = \gamma + (\xi + 1) = \gamma + \beta.$$

Αν β είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε για κάθε $\alpha < \xi < \beta$ ισχύει

$$\gamma + \alpha < \gamma + \xi \leqslant \sup\{\gamma + \xi : \xi < \beta\} = \gamma + \beta.$$

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$. Αν $\beta < \alpha$, τότε έχουμε $\gamma + \beta < \gamma + \alpha$ άτοπο. Αν $\alpha = \beta$, τότε έχουμε $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$ άτοπο.
Οπότε από τη γραμμικότητα της $\leqslant$ έχουμε ότι $\alpha < \beta$.

(ii) Έστω ότι ισχύει $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$. Αν $\alpha \neq \beta$ έχουμε ότι ή $\alpha < \beta$ ή $\beta < \alpha$ και από το (i) έχουμε ότι ή $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ ή $\gamma + \beta < \gamma + \alpha$ αντίστοιχα, άτοπο.
Άρα $\alpha = \beta$.
Αν $\alpha = \beta$, τότε προφανώς $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$.

(iii) Θα το αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ.
Για $\gamma = 0$ έχουμε ότι $(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0)$.
Έστω ότι ισχύει η υπόθεση για κάθε διατακτικό αριθμό $\xi < \gamma$.
Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος και έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= (\alpha + \beta) + (\xi + 1) = [(\alpha + \beta) + \xi] + 1 = [\alpha + (\beta + \xi)] + 1 \\ &= \alpha + [(\beta + \xi) + 1] = \alpha + [\beta + (\xi + 1)] = \alpha + (\beta + \gamma).\end{aligned}$$

Αν ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε ότι

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \sup\{(\alpha+\beta)+\delta : \delta < \gamma.\} = \sup\{\alpha+(\beta+\delta) : \delta < \gamma\}$$

Παρατηρούμε ότι $\beta+\gamma = \sup\{\beta+\delta : \delta < \gamma\}$ και από Πρόταση (1.42) ο $\beta+\gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και άρα $\beta+\gamma = \sup\{\xi : \xi < \beta+\gamma\}$. Επομένως,

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \sup\{\alpha+(\beta+\delta) : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha+\xi : \xi < \beta+\gamma\} = \alpha+(\beta+\gamma)$$

□

Θεώρημα 1.46. Έστω $(A_1, \leqslant_1), (A_2, \leqslant_2)$ καλά διατεταγμένα σύνολα με $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ισόμορφα ως προς διατακτικούς αριθμούς α_1 και α_2 αντίστοιχα. Τότε το άθροισμα $A = A_1 \cup A_2$ των A_1 και A_2 είναι ισόμορφο με τον διατακτικό αριθμό $\alpha_1 + \alpha_2$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με υπερπεπερασμένη επαγωγή στον α_2. Αν $\alpha_2 = 0$, τότε για $A_2 = \emptyset$ έχουμε ότι $\emptyset = 0$, οπότε έχουμε ότι

$$A_1 \cup \emptyset = A_1 \simeq \alpha_1 = \alpha_1 + 0.$$

Αν $\alpha_2 = \xi + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός. Επειδή $A_2 \simeq \alpha_2 = \xi + 1$ έχουμε ότι το A_2 έχει μέγιστο στοιχείο, έστω $x_0 \in A_2$. Οπότε $A_2 \setminus \{x_0\} \simeq \xi < \alpha_2$. Από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει διατακτικός ισομορφισμός $f_0 : A_1 \cup (A_2 \setminus \{x_o\}) \to \alpha_1 + \xi$, γιατί $\xi < \alpha_2$. Επεκτείνουμε το $A_1 \cup (A_2 \setminus \{x_o\})$ στο $A_1 \cup (A_2 \setminus \{x_o\}) \cup \{x_0\} = A_1 \cup A_2$ και τον ισομορφισμό f_0 στον ισομορφισμό f αντιστοιχίζοντας το $\{x_0\}$ στον διατακτικό αριθμό $\alpha_1 + \xi$, οπότε

$$f : A_1 \cup A_2 \to (\alpha_1 + \xi) \cup \{\alpha_1 + \xi\} = (\alpha_1 + \xi) + 1.$$

Όμως $(\alpha_1 + \xi) + 1 = \alpha_1 + (\xi + 1) = \alpha_1 + \alpha_2$, άρα $A_1 \cup A_2 \simeq \alpha_1 + \alpha_2$.
Έστω ότι α_2 είναι οριακός διατακτικός αριθμός. Τότε επειδή $A_2 \simeq \alpha_2$ έχουμε

ότι το A_2 δεν έχει μέγιστο στοιχείο και άρα $A_2 = \bigcup_{x \in A_2} P(x)$. Οπότε για κάθε $x \in A_2$ υπάρχει διατακτικός αριθμός ξ_x τέτοιος ώστε $P(x) \simeq \xi_x$ και από επαγωγική υπόθεση και επειδή $\xi_x < \alpha_2$ έχουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $f_x : A_1 \cup P(x) \to \alpha_1 + \xi_x$ και άρα η

$$f : \bigcup_{x \in A_2} (A_1 \cup P(x)) \to \bigcup_{x \in A_2} (\alpha_1 + \xi_x)$$

είναι ισομορφισμός. Παρατηρούμε ότι $\bigcup_{x \in A_2} (A_1 \cup P(x)) = A_1 \cup A_2$ και ότι $\bigcup_{x \in A_2} \xi_x = \alpha_2 = \sup\{\xi : \xi < \alpha_2\}$ γιατί αν ισχύει $\bigcup_{x \in A_2} \xi_x = \xi < \alpha_2$, τότε έχουμε ότι $A_2 \simeq \xi < \alpha_2$, άτοπο. Επίσης από Πρόταση (1.42) ο $\alpha_1 + \alpha_2$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, οπότε έχουμε ότι $\alpha_1 + \alpha_2 = \sup\{\zeta : \zeta < \alpha_1 + \alpha_2\} = \sup\{\alpha_1 + \xi : \xi < \alpha_2\}$ και άρα

$$\bigcup_{x \in A_2} (\alpha_1 + \xi_x) = \sup\{\alpha_1 + \xi : \xi < \alpha_2\} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Δηλαδή $A_1 \cup A_2 = \alpha_1 + \alpha_2$. □

Λήμμα 1.47. Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί με $\alpha \leqslant \beta$. Τότε υπάρχει μοναδικός διατακτικός αριθμός ξ με $\beta = \xi + \alpha$.

Απόδειξη. Επειδή $\alpha \leqslant \beta$ έχουμε ότι $\alpha \subseteq \beta$. Θέτουμε $A = \{\zeta : \alpha \leqslant \zeta < \beta\}$. Το A είναι καλά διατεταγμένο σύνολο και από Θεώρημα (1.36) έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός διατακτικός αριθμός ξ ισόμορφος με το A. Από Θεώρημα (1.46) έχουμε ότι

$$\beta = \alpha \cup A \simeq \alpha + \xi$$

και άρα $\beta = \alpha + \xi$ □

Ορισμός 1.48 (Πολλαπλασιασμός Διατακτικών Αριθμών). Για κάθε διατακτικό αριθμό α ορίζουμε

(i) $\alpha \cdot 0 = 0$

(ii) $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$ για κάθε β διατακτικό αριθμό

(iii) $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\} = \lim\limits_{\xi \to \beta}(\alpha \cdot \xi)$ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό $\beta \neq 0$.

Παρατήρηση 1.49. (i) $\alpha \cdot 1 = \alpha \cdot (0 + 1) = \alpha \cdot 0 + \alpha = \alpha$

(ii) $\alpha \cdot 2 = \alpha \cdot (1+1) = \alpha \cdot 1 + \alpha = \alpha + \alpha$ ιδιαίτερα έχουμε ότι $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$.

(iii) $\alpha \cdot 3 = \alpha \cdot (2 + 1) = \alpha \cdot 2 + \alpha = \alpha + \alpha + \alpha$

(iv) $\alpha \cdot \omega = \sup\{\alpha \cdot n : n < \omega\}$

(v) $1 \cdot \alpha = \alpha$. Πράγματι με υπερπεπερασμένη επαγωγή έχουμε.
$1 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot (\alpha + 1) = 1 \cdot \alpha + 1 = \alpha + 1$
Αν α είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε

$$1 \cdot \alpha = \sup\{1 \cdot \xi : \xi < \alpha\} = \sup\{\xi : \xi < \alpha\} = \alpha.$$

(vi) $2 \cdot \omega = \sup\{2 \cdot n : n < \omega\} = \omega$ ενώ $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$ και άρα $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$, οπότε συμπεραίνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός δεν είναι εν γένει μεταθετικός.

Πρόταση 1.50. Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί όπου ο β είναι οριακός διατακτικός αριθμός. Τότε και ο $\alpha \cdot \beta$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Έστω $\zeta < \alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \gamma\}$, τότε υπάρχει διατακτικός αριθμός $\xi < \gamma$ με $\zeta \leqslant \alpha \cdot \xi$. Οπότε $\zeta + 1 \leqslant (\alpha \cdot \xi) + 1 \leqslant (\alpha \cdot \xi) + \alpha = \alpha \cdot (\xi + 1) < \alpha \cdot \gamma$. Άρα ο $\alpha \cdot \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός. □

Λήμμα 1.51. (i) Έστω α, β και $\gamma > 0$ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\alpha < \beta$ αν και μόνο αν $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$.

(ii) Έστω α, γ διατακτικοί αριθμοί με $\alpha > 0$. Τότε $\alpha \cdot \gamma \geqslant \gamma$.

(iii) Έστω α, β και $\gamma > 0$ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

(iv) Έστω α, β και $\gamma > 0$ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

(v) Έστω α, β και γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

(vi) Αν α, γ διατακτικοί αριθμοί με $0 < \alpha \leqslant \gamma$, τότε υπάρχει μέγιστος διατακτικός αριθμός β με $\alpha \cdot \beta \leqslant \gamma$.

(vii) Έστω α, γ διατακτικοί αριθμοί με $\alpha > 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικοί διατακτικοί αριθμοί β και ρ με $\rho < \alpha$ τέτοιοι ώστε $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho$

Απόδειξη. (i) Θα το αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο β. Έστω διατακτικός αριθμός α με $\alpha < \beta$. Υποθέτουμε ότι για $\xi < \beta$ αν ισχύει $\alpha < \xi$, τότε $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \xi$ για κάθε $\gamma > 0$.
Αν $\beta = \xi + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός με $\alpha \leqslant \xi$, τότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε για κάθε $\gamma > 0$

$$\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \xi < (\gamma \cdot \xi) + 1 \leqslant (\gamma \cdot \xi) + \gamma = \gamma \cdot (\xi + 1) = \gamma \cdot \beta.$$

Αν β είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε για $\alpha < \xi < \beta$ έχουμε

$$\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \xi \leqslant \sup\{\gamma \cdot \xi : \xi < \beta\} = \gamma \cdot \beta$$

για κάθε $\gamma > 0$.
Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$. Αν $\beta < \alpha$, τότε έχουμε $\gamma \cdot \beta < \gamma \cdot \alpha$, άτοπο. Αν $\alpha = \beta$, τότε έχουμε $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$, άτοπο. Οπότε από τη γραμμικότητα

της $\leqslant$ έχουμε ότι $\alpha < \beta$.

(ii) Έστω $\alpha > 0$. Για $\gamma = 1$ έχουμε $\alpha \cdot 1 = \alpha \geqslant 1$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\xi < \gamma$ ισχύει $\alpha \cdot \xi \geqslant \xi$.
Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος και έχουμε

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\xi + 1) = \alpha \cdot \xi + \alpha \geqslant \xi + \alpha \geqslant \xi + 1 = \gamma.$$

Αν γ είναι οριακός διατακτικός έχουμε

$$\alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \gamma\} \geqslant \sup\{\xi : \xi < \gamma\} = \gamma.$$

(iii) Έστω ότι ισχύει $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$ για $\gamma > 0$. Αν $\alpha \neq \beta$ έχουμε ότι είτε $\alpha < \beta$, είτε $\beta < \alpha$ και από το (i), έχουμε ότι είτε $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$, είτε $\gamma \cdot \beta < \gamma \cdot \alpha$ αντίστοιχα, άτοπο. Άρα $\alpha = \beta$.
Αν $\alpha = \beta$, τότε έχουμε προφανώς $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$.

(iv) Έστω διατακτικοί αριθμοί α, β. Για $\gamma = 0$ έχουμε $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0$.
Έστω $\gamma > 0$ διατακτικός αριθμός και έστω ότι ισχύει $\alpha \cdot (\beta + \xi) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi$ για κάθε $\xi < \gamma$.
Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος από Λήμμα (1.45(iii)) έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot [\beta + (\xi + 1)] = \alpha \cdot [(\beta + \xi) + 1] = \alpha \cdot (\beta + \xi) + \alpha \\ &= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi) + \alpha = \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \xi + \alpha) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot (\xi + 1) \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma\end{aligned}$$

Αν ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός τότε από Πρόταση (1.42) ο $\beta + \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός,

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta + \gamma\} = \sup\{\alpha \cdot (\beta + \delta) : \delta < \gamma\} \\ &= \sup\{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\}$ και από Πρόταση (1.50) ο $\alpha \cdot \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, άρα έχουμε ότι $\alpha \cdot \gamma = \sup\{\xi : \xi < \alpha \cdot \gamma\}$. Οπότε,

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \sup\{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha \cdot \beta + \xi : \xi < \alpha \cdot \gamma\} = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

(v) Θα το αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ. Έστω $\alpha, \beta \neq 0$ διατακτικοί αριθμοί. Για $\gamma = 0$ έχουμε ότι $(\alpha \cdot \beta) \cdot 0 = 0 = \alpha \cdot (\beta \cdot 0)$. Έστω διατακτικός αριθμός γ και ότι ισχύει η υπόθεση για κάθε διατακτικό αριθμό $\xi < \gamma$.
Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma &= (\alpha \cdot \beta) \cdot (\xi + 1) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \xi + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta \cdot \xi) + \alpha \cdot \beta \\ &= \alpha \cdot (\beta \cdot \xi + \beta) = \alpha \cdot [\beta \cdot (\xi + 1)] = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)\end{aligned}$$

Αν ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε ότι

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \sup\{(\alpha \cdot \beta) \cdot \delta : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) : \delta < \gamma\}.$$

Από Πρόταση (1.50) ο $\beta \cdot \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και άρα έχουμε ότι $\beta \cdot \gamma = \sup\{\xi : \xi < \beta \cdot \gamma\} = \sup\{\beta \cdot \delta : \delta < \gamma\}$. Επομένως,

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta \cdot \gamma\} = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

(vi) Από το (ii) έχουμε ότι $\alpha \cdot (\gamma + 1) \geqslant \gamma + 1$ και άρα $\alpha \cdot (\gamma + 1) > \gamma$. Οπότε υπάρχει ξ διατακτικός αριθμός ώστε $\alpha \cdot \xi > \gamma$. Εφόσον κάθε υποσύνολο των διατακτικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο υπάρχει ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $\alpha \cdot \xi > \gamma$. Παρατηρούμε ότι ο ελάχιστος αυτός είναι επόμενος, γιατί αν είναι οριακός, τότε για κάθε $\zeta < \xi$ θα έχουμε $\alpha \cdot \zeta \leqslant \gamma$ άρα και $\alpha \cdot \xi = \sup\{\alpha \cdot \zeta : \zeta < \xi\} \leqslant \gamma$, άτοπο. Οπότε $\xi = \beta + 1$ για κάποιον διατακτικό αριθμό β και άρα ο β είναι ο μέγιστος διατακτικός αριθμός για τον οποίο έχουμε $\alpha \cdot \beta \leqslant \gamma$

(vii) Έστω β ο μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός τέτοιος ώστε $\alpha \cdot \beta \leqslant \gamma$. Από Λήμμα (1.47) έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός διατακτικός αριθμός ρ, ώστε $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho$. Επίσης ισχύει $\rho < \alpha$ γιατί αν $\rho \geqslant \alpha$ έχουμε ότι $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho \geqslant \alpha \cdot \beta + \alpha = \alpha \cdot (\beta + 1)$, άτοπο, γιατί β είναι ο μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός, ώστε $\alpha \cdot \beta \leqslant \gamma$.
Έστω ότι υπάρχουν β_1, β_2 και $\rho_1, \rho_2 < \alpha$ διατακτικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\gamma = \alpha \cdot \beta_1 + \rho_1 = \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2$. Υποθέτουμε ότι $\beta_1 < \beta_2$. Τότε $\beta_1 + 1 \leqslant \beta_2$ και έχουμε $\alpha \cdot \beta_1 + (\alpha + \rho_2) = (\alpha \cdot \beta_1 + \alpha) + \rho_2 = \alpha \cdot (\beta_1 + 1) + \rho_2 \leqslant \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2 = \alpha \cdot \beta_1 + \rho_1$ και άρα $\rho_1 \geqslant \alpha + \rho_2 \geqslant \alpha$, άτοπο. Οπότε $\beta_1 = \beta_2$ και $\rho_1 = \rho_2$. □

Θεώρημα 1.52. Έστω $(A_1, \leqslant_1), (A_2, \leqslant_2)$ διαφορετικά και μη κενά καλά διατεταγμένα σύνολα ισόμορφα ως προς διατακτικούς αριθμούς α_1 και α_2 αντίστοιχα. Τότε το γινόμενο $A = A_1 \times A_2$ των A_1 και A_2 με τη λεξικογραφική διάταξη είναι ισόμορφο με τον διατακτικό αριθμό $\alpha_1 \cdot \alpha_2$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με υπερπεπερασμένη επαγωγή στον α_2. Επειδή $A_1 \simeq \alpha_1$ και $A_2 \simeq \alpha_2$ υπάρχουν διατακτικοί ισομορφισμοί $f_1 : A_1 \to \alpha_1$ και $f_2 : A_2 \to \alpha_2$ αντίστοιχα.
Αν $\alpha_2 = 0$, τότε για $A_2 = \emptyset$ έχουμε ότι $\emptyset \simeq 0$ και

$$\emptyset = A_1 \times \emptyset \simeq \alpha_1 \cdot 0 = 0.$$

Έστω ότι $\alpha_2 > 0$. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε $\zeta < \alpha_2$. Έστω ότι α_2 είναι επόμενος. Τότε υπάρχει διατακτικός αριθμός $\zeta < \alpha_2$ τέτοιος ώστε $\alpha_2 = \zeta + 1$. Επειδή $A_2 \simeq \alpha_2 = \zeta + 1$ έχουμε ότι το A_2 έχει μέγιστο στοιχείο, έστω $x_0 \in A_2$. Τότε $A_2 \setminus \{x_0\} \simeq \zeta$ και από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $f_0 : A_1 \times (A_2 \setminus \{x_0\}) \to \alpha_1 \cdot \zeta$. Επεκτείνουμε τον ισομορφισμό f_0 στην $f : A_1 \times A_2 \to \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \zeta + \alpha_1$, όπου για κάθε $x \in A_1$ το $(x, x_0) \in A_1 \times A_2$ το αντιστοιχούμε στο διατακτικό αριθμό $a_1 \cdot \zeta + f_1(x)$, όπου $f_1(x) = \xi_x < \alpha_1$. Η f είναι καλά ορισμένη. Πράγματι αν $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ με $x_2 = x_0$, τότε $f((x_1, x_0)) = \alpha_1 \cdot \zeta + f_1(x_1) < \alpha_1 \cdot \alpha_2$. Αν $x_2 \neq x_0$ τότε $f((x_1, x_2)) = f_0((x_1, x_2)) < \alpha_1 \cdot \alpha_2$ οπότε η f είναι καλά ορισμένη.

Η f είναι εμφύτευση. Πράγματι η f στο $A_1 \times (A_2 \setminus \{x_0\})$ είναι εμφύτευση. Έστω, τώρα $(x, x_0), (y, x_0) \in A_1 \times A_2$ με $(x, x_0) \neq (y, x_0)$. Τότε $x \neq y$ και άρα $x < y$ ή $y < x$. Αν $x < y$ τότε $f_1(x) < f_1(y)$, οπότε $\alpha_1 \cdot \zeta + f_1(x) < \alpha_1 \cdot \zeta + f_1(y)$, δηλαδή $f((x, x_0)) < f((y, x_0))$ και επομένως $f((x, x_0)) \neq f((y, x_0))$. Έστω $(x_1, x_2), (y, x_0) \in$ με $x_2 \neq x_0$ τότε $x_2 < x_0$ και έχουμε $f((x_1, x_2)) = \alpha_1 \cdot \zeta < \alpha_1 \cdot \zeta + f_1(y) = f((y, x_0))$ οπότε η f είναι εμφύτευση.

Η f είναι επί. Πράγματι έστω $\eta \in \alpha_1 \cdot \alpha_2$.

Αν $\eta \in \alpha_1 \cdot \zeta$ από επαγωγική υπόθεση η f_0 είναι επί οπότε υπάρχουν $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ με $f_0((x_1, x_2)) = \eta$ και άρα

$$f((x_1, x_2)) = f_0((x_1, x_2)) = \eta.$$

Αν $\eta \in \alpha_1 \cdot \alpha_2 \setminus \alpha_1 \cdot \zeta = (\alpha_1 \cdot \zeta + \alpha_1) \setminus \alpha_1 \cdot \zeta$, τότε $\eta = \alpha_1 \cdot \zeta + \xi$, όπου $\xi \in \alpha_1$. Επειδή η f_1 είναι επί υπάρχει $x_1 \in A_1$ με $f_1(x_1) = \xi$ οπότε

$$f((x_1, x_0)) = \alpha_1 \cdot \zeta + f_1((x_1)) = \alpha_1 \cdot +\xi = \eta$$

Επομένως η f είναι επί.

Έστω ότι ο α_2 είναι οριακός. Τότε επειδή $A_2 \simeq \alpha_2$ το A_2 δεν έχει μέγιστο στοιχείο και άρα $A_2 = \bigcup\limits_{x \in A_2} P(x)$. Οπότε για κάθε $x \in A_2$ υπάρχει διατακτικός αριθμός ξ_x τέτοιος ώστε $P(x) \simeq \xi_x$ και από επαγωγική υπόθεση και επειδή $\alpha_1 \cdot \xi_x < \alpha_1 \cdot \alpha_2$ έχουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $f_x : A_1 \times P(x) \to \alpha_1 \cdot \xi_x$ και άρα η $f : \bigcup\limits_{x \in A_2} (A_1 \times P(x)) \to \bigcup\limits_{x \in A_2} (\alpha_1 \cdot \xi_x)$ είναι ισομορφισμός. Παρατηρούμε ότι $\bigcup_{x\in A_2}(A_1\times P(x)) = A_1\times A_2$ και ότι $\bigcup_{x\in A_2}\xi_x=\alpha_2$, γιατί αν $\bigcup_{x\in A_2}\xi_x=\xi<\alpha_2$ έχουμε ότι $A_2\simeq\xi<\alpha_2$ άτοπο. Από Πρόταση (1.50) παρατηρούμε ότι ο $\alpha_1\cdot\alpha_2$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός. Οπότε έχουμε ότι

$$\alpha_1\cdot\alpha_2=\sup\{\zeta:\zeta<\alpha_1\cdot\alpha_2\}=\sup\{\alpha_1\cdot\xi:\xi<\alpha_2\}$$

και άρα

$$\bigcup_{x\in A_2}(\alpha_1\cdot\xi_x)=\sup\{\alpha_1\cdot\xi_x:\xi_x<\alpha_2\}=\alpha_1\cdot\alpha_2.$$

Δηλαδή $A_1\times A_2=\alpha_1\cdot\alpha_2$ □

Ορισμός 1.53. Για κάθε διατακτικό αριθμό α ορίζουμε

(i) $\alpha^0=\alpha$

(ii) $\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta+\alpha$ για κάθε β διατακτικό αριθμό

(iii) $\alpha^\beta=\sup\{\alpha^\xi:\xi<\beta\}=\lim_{\xi\to\beta}(\alpha^\xi)$ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό $\beta\neq 0$

Παρατήρηση 1.54. (i) $\alpha^1=\alpha^{0+1}=\alpha^0\cdot\alpha=\alpha$

(ii) $\alpha^2=\alpha^{1+1}=\alpha^1\cdot\alpha^1=\alpha\cdot\alpha$ ιδιαίτερα έχουμε ότι $\omega^2=\omega\cdot\omega$.

(iii) $\alpha^3=\alpha^{2+1}=\alpha^2+\alpha=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$

(iv) $\alpha^\omega=\sup\{\alpha^n:n<\omega\}$

(v) $1^\alpha=\alpha$. Πράγματι με υπερπεπερασμένη επαγωγή έχουμε.

$1^0=1$

$1^{\alpha+1}=1^\alpha\cdot 1=1$

Αν α είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε

$$1^\alpha=\sup\{1^\xi:\xi<\alpha\}=\sup\{1:\xi<\alpha\}=1.$$

ιδιαίτερα έχουμε ότι $1^\omega=1$

(vi) $2^\omega = \sup\{2^n : n < \omega\} = \omega$ και γενικότερα $m^\omega = \sup\{m^n : n < \omega\} = \omega$ για κάθε $m \in \omega$ ενώ $\omega^\omega = \sup\{\omega^n : n < \omega\} > \omega$

(vii) Τέλος ορίζουμε $\varepsilon = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}} \ldots\}$ και μπορούμε να ορίσουμε τους $\varepsilon + 1, \varepsilon + \omega, \varepsilon^\omega, \varepsilon^\varepsilon, \varepsilon^{\varepsilon^\varepsilon}, \ldots$

(viii) Παρατηρούμε ότι εν γένει δεν ισχύει $(\alpha \cdot \beta)^\gamma \neq \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$, επειδή δεν ισχύει η μεταθετικότητα στον πολλαπλασιασμό.

Πρόταση 1.55. Έστω α, γ διατακτικοί αριθμοί. Αν $\alpha > 1$ και γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε ο α^γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Επειδή ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε ότι $\alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \gamma\}$. Έστω $\zeta < \alpha^\gamma$. Τότε υπάρχει $\xi < \gamma$ ώστε $\zeta < \alpha^\xi$ και άρα

$$\zeta + 1 \leqslant \zeta + \zeta = \zeta \cdot 2 \leqslant \zeta \cdot \alpha < \alpha^\xi \cdot \alpha = \alpha^{\xi+1} < \alpha^\gamma.$$

□

Λήμμα 1.56. (i) Έστω α, β, γ διατακτικοί αριθμοί με $\gamma > 0$. Τότε $\alpha \leqslant \beta$ αν και μόνο αν $\alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma$.

(ii) Έστω α, β, γ διατακτικοί αριθμοί με $\alpha > 1$. Τότε $\beta < \gamma$ αν και μόνο αν $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

(iii) Έστω α, β, γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

(iv) Έστω α, β, γ διατακτικοί αριθμοί. Τότε ισχύει $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

(v) Αν α, γ διατακτικοί αριθμοί με $1 < \alpha \leqslant \gamma$, τότε υπάρχει μέγιστος διατακτικός αριθμός β με $\alpha^\beta \leqslant \gamma$

Απόδειξη. (i) Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί με $\alpha \leqslant \beta$. Θα αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ ότι $\alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma$.
Για $\gamma = 1$ είναι $\alpha^1 = \alpha \leqslant \beta = \beta^1$ άρα ισχύει.
Υποθέτουμε ότι για κάθε $\xi < \gamma$ ισχύει $\alpha^\xi \leqslant \beta^\xi$.
Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός και έχουμε

$$\alpha^\gamma = \alpha^{\xi+1} = \alpha^\xi \cdot \alpha \leqslant \beta^\xi \cdot \alpha \leqslant \beta^\xi \cdot \beta = \beta^{\xi+1} = \beta^\gamma.$$

Έστω γ οριακός διατακτικός αριθμός. Τότε από επαγωγική υπόθεση για κάθε $\xi < \gamma$ έχουμε ότι $\alpha^\xi \leqslant \beta^\xi$. Οπότε για κάθε $\xi < \gamma$ έχουμε

$$\alpha^\xi \leqslant \beta^\xi \leqslant \sup\{\beta^\xi : \xi < \gamma\} = \beta^\gamma$$

και άρα

$$\alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \gamma\} \leqslant \beta^\gamma.$$

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma$. Αν $\beta < \alpha$ τότε έχουμε $\beta^\gamma < \alpha^\gamma$ άτοπο.

(ii) Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί με $\alpha > 1$. Θα δείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ ότι αν $\beta < \gamma$, τότε $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.
Έστω $\gamma = \beta + 1$. Τότε $\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha > \alpha \cdot 1 = \alpha^\beta$.
Υποθέτουμε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό ξ με $\beta < \xi \leqslant \gamma$ ισχύει $\alpha^\beta < \alpha^\xi$.
Αν $\gamma = \xi + 1 > \xi > \beta$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός και έχουμε

$$\alpha^\beta < \alpha^\xi < \alpha^\xi \cdot \alpha = \alpha^{\xi+1} = \alpha^\gamma.$$

Αν γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός τότε υποθέτουμε ότι για κάθε $\beta < \xi < \gamma$ ισχύει

$$\alpha^\beta < \alpha^\xi \leqslant \sup\{\alpha^\xi : \xi < \gamma\} = \alpha^\gamma.$$

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\alpha^\gamma < \alpha^\beta$. Αν $\beta \leqslant \gamma$, τότε έχουμε $\alpha^\beta \leqslant \alpha^\gamma$, άτοπο.

(iii) Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί. Θα δείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ ότι $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$.
Για $\gamma = 0$ έχουμε $\alpha^{\beta+0} = \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{0}$.
Υποθέτουμε ότι για κάθε $\xi < \gamma$ ισχύει $\alpha^{\beta+\xi} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\xi}$.
Αν $\gamma = \xi + 1$, είναι επόμενος οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta+\gamma} &= \alpha^{\beta+(\xi+1)} = \alpha^{(\beta+\xi)+1} = \alpha^{\beta+\xi} \cdot \alpha = (\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\xi}) \cdot \alpha \\ &= \alpha^{\beta} \cdot (\alpha^{\xi} \cdot \alpha) = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\xi+1} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}\end{aligned}$$

Αν ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε από Πρόταση (1.42) ο $\beta + \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και άρα

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \sup\{\alpha^{\xi} : \xi < \beta + \gamma\} = \sup\{\alpha^{\beta+\delta} : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\delta} : \delta < \gamma\}.$$

Επίσης $\alpha^{\gamma} = \sup\{\alpha^{\delta} : \delta < \gamma\}$ και από Πρόταση (1.55) έχουμε ότι ο α^{γ} είναι οριακός διατακτικός αριθμός και άρα $\alpha^{\gamma} = \sup\{\xi : \xi < \alpha^{\gamma}\}$. Οπότε

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \sup\{\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\delta} : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha^{\beta} \cdot \xi : \xi < \alpha^{\gamma}\} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$$

(iv) Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί, θα αποδείξουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ ότι $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.
Για $\gamma = 0$ έχουμε ότι $(\alpha^{\beta})^{0} = 1 = \alpha^{\beta \cdot 0}$.
Έστω ότι για κάθε διατακτικό αριθμό $\xi < \gamma$ ισχύει $(\alpha^{\beta})^{\xi} = \alpha^{\beta \cdot \xi}$.
Αν $\gamma = \xi + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός και τότε έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha^{\beta})^{\gamma} &= (\alpha^{\beta})^{\xi+1} = (\alpha^{\beta})^{\xi} \cdot \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta \cdot \xi} \cdot \alpha^{\beta} \\ &= \alpha^{\beta \cdot \xi + \beta} = \alpha^{\beta \cdot (\xi+1)} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}\end{aligned}$$

Αν ο γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε ότι

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \sup\{(\alpha^{\beta})^{\delta} : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha^{\beta \cdot \delta} : \delta < \gamma\}$$

Από Πρόταση (1.50) ο $\beta \cdot \gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και από Πρόταση (1.55) ο $\alpha^{\beta \cdot \gamma}$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός επομένως $\alpha^{\beta \cdot \gamma} = \sup\{\xi : \xi < \alpha^{\beta \cdot \gamma}\}$. Οπότε

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \sup\{\alpha^{\beta \cdot \delta} : \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha^{\zeta} : \zeta < \beta \cdot \gamma\} = \sup\{\xi : \xi < \alpha^{\beta \cdot \gamma}\} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$$

(v) Έστω α, γ διατακτικοί αριθμοί με $1 < \alpha \leqslant \gamma$. Παρατηρούμε ότι $\alpha^{\gamma+1} \geqslant \gamma+1 > \gamma$. Πράγματι αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $1 < \alpha \leqslant \xi$ ισχύει $\alpha^{\xi} \geqslant \alpha \cdot \xi$.
Αν $\xi = \alpha$, έχουμε $\alpha^{\xi} = \alpha^{\alpha} \geqslant \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot \xi$.
Αν $\xi = \zeta + 1$ είναι επόμενος διατακτικός αριθμός και έχουμε $\alpha^{\xi} = \alpha^{\zeta+1} = \alpha^{\zeta} \cdot \alpha \geqslant (\alpha \cdot \zeta) \cdot \alpha \geqslant (\alpha \cdot \zeta) \cdot 2 = \alpha \cdot \zeta \cdot (1+1) = \alpha \cdot \zeta + \alpha \cdot \zeta \geqslant \alpha \cdot \zeta + \alpha = \alpha \cdot (\zeta + 1) = \alpha \cdot \xi$.
Έστω ότι ξ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και έστω ότι για κάθε $\zeta < \xi$ ισχύει $\alpha^{\zeta} \geqslant \alpha \cdot \zeta$, άρα και

$$\alpha^{\xi} = \sup\{\alpha^{\zeta} : \zeta < \xi\} \geqslant \sup\{\alpha \cdot \zeta : \zeta < \xi\} = \alpha \cdot \xi.$$

Άρα για $\xi = \gamma + 1$ έχουμε $\alpha^{\gamma+1} \geqslant \alpha \cdot (\gamma + 1) \geqslant \gamma + 1 > \gamma$. Οπότε υπάρχει ξ διατακτικός αριθμός, ώστε $\alpha^{\xi} > \gamma$. Εφόσον κάθε υποσύνολο των διατακτικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο υπάρχει ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $\alpha^{\xi} > \gamma$. Επίσης παρατηρούμε ότι ο ελάχιστος αυτός είναι επόμενος γιατί αν είναι οριακός, τότε για κάθε $\zeta < \xi$ θα έχουμε $\alpha^{\zeta} \leqslant \gamma$ άρα και $\alpha^{\xi} = \sup\{\alpha^{\zeta} : \zeta < \xi\} \leqslant \gamma$. Οπότε $\xi = \beta + 1$ για κάποιον διατακτικό αριθμό β και άρα ο β είναι ο μέγιστος διατακτικός αριθμός για τον οποίο έχουμε $\alpha^{\beta} \leqslant \gamma$

$\square$

1.4 Cantor Κανονική Αναπαράσταση Διατακτικών Αριθμών

Θεώρημα 1.57 (**Cantor Κανονική Αναπαράσταση Διατακτικών Αριθμών**). Κάθε διατακτικός αριθμός $\alpha > 0$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

όπου $n \geqslant 1, \alpha \geqslant \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ διατακτικοί αριθμοί και $k_1, k_2, \ldots, k_n$ μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί. Αυτή η γραφή των διατακτικών αριθμών λέγεται **Cantor κανονική Αναπαράσταση**.

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε την ύπαρξη της Cantor κανονικής αναπαράστασης με επαγωγή στον α.
Αν $\alpha = 1$, τότε $1 = \omega^0 \cdot 1$.
Έστω $\alpha > 0$ τυχαίος διατακτικός αριθμός και υποθέτουμε ότι κάθε διατακτικός αριθμός μικρότερος από τον α έχει Cantor κανονική αναπαράσταση. Από Λήμμα(1.56(v)) υπάρχει μέγιστος διατακτικός αριθμός β, ώστε $\omega^\beta \leqslant \alpha$. Από Λήμμα(1.51(vii)) έχουμε ότι υπάρχουν μοναδικοί διατακτικοί αριθμοί ξ και ρ με $\rho < \omega^\beta$ τέτοιοι ώστε $\alpha = \omega^\beta \cdot \xi + \rho$. Επειδή $\omega^\beta \leqslant \alpha$ έχουμε ότι $\xi > 0$ και $\rho < \alpha$. Παρατηρούμε ότι ο ξ είναι πεπερασμένος. Πράγματι αν ξ άπειρος, τότε $\alpha \geqslant \omega^\beta \cdot \xi \geqslant \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1}$, άτοπο αφού ο β είναι ο μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $\alpha \geqslant \omega^\beta$.
Αν $\rho = 0$, τότε $\alpha = \omega^\beta \cdot \xi$ οπότε θέτοντας $\beta = \beta_1$ και $\xi = k_1$ έχουμε ότι ο α έχει Cantor κανονική αναπαράσταση.
Αν $\rho > 0$, τότε επειδή $\rho < \alpha$ από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχουν διατακτικοί αριθμοί $\beta_2 > \ldots > \beta_n$ και μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί ώστε

$$\rho = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n.$$

Θέτουμε $\beta = \beta_1$ και $\xi = k_1$. Επειδή $\rho < \omega^{\beta_1}$, έχουμε $\omega^{\beta_2} \leqslant \rho < \omega^{\beta_1}$ και άρα $\beta_2 < \beta_1$. Επομένως

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

άρα ο α έχει Cantor κανονική αναπαράσταση.

Θα αποδείξουμε την μοναδικότητα της Cantor κανονική αναπαράστασης διατακτικών αριθμών με επαγωγή στον α.

Αν $\alpha = 1$, τότε $\alpha = \omega^0 \cdot 1$ που είναι μοναδική αυτή η γραφή.

Έστω $\alpha > 1$ και υποθέτουμε ότι ισχύει η μοναδικότητα της Cantor κανονικής αναπαράστασης για κάθε διατακτικό αριθμό μικρότερο του α. Έστω ότι υπάρχουν διατακτικοί αριθμοί $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_m$ και μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$, ώστε

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m.$$

Έστω ότι $\beta_1 > \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_m$, τότε θα έχουμε

$$\omega^{\beta_1} > \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m.$$

Πράγματι αν $\beta_1 = \gamma_1 + 1$, τότε $\omega^{\beta_1} = \omega^{\gamma_1+1} = \omega^{\gamma_1} \cdot \omega > \omega^{\gamma_1} \cdot (\ell_1 + 1) = \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_1} > \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε $\gamma_1 < \zeta < \beta_1$ ισχύει $\omega^{\zeta} > \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$.

Αν $\beta_1 = \zeta + 1$ είναι επόμενος και έχουμε $\omega^{\beta_1} = \omega^{\zeta+1} = \omega^{\zeta} \cdot \omega > \omega^{\gamma_1} \cdot \omega > \omega^{\gamma_1} \cdot (\ell_1 + 1) = \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_1} > \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$.

Αν β_1 είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε $\omega^{\beta_1} = \sup\{\omega^{\zeta} : \zeta < \beta_1\} > \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$ και άρα έχουμε.

$$\omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n > \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$$

άτοπο. Ομοίως δείχνουμε ότι αν αν $\beta_1 < \gamma_1$ έχουμε ότι

$$\omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n < \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$$

άτοπο άρα $\beta_1 = \gamma_1$.

Θέτουμε $\xi = \omega^{\beta_1} = \omega^{\gamma_1}$, $\rho = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ και $\sigma = \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$. Τότε $\alpha = \xi \cdot k_1 + \rho = \xi \cdot \ell_1 + \sigma$ και επειδή $\rho < \xi$ και $\sigma < \xi$ από Λήμμα (1.51(vii)) έχουμε ότι $k_1 = \ell_1$ και $\rho = \sigma$. Από επαγωγική υπόθεση για τον ρ έχουμε ότι η Cantor κανονική αναπαράσταση είναι μοναδική οπότε $m = n, \beta_2 = \gamma_2, \ldots \beta_n = \gamma_n, k_2 = \ell_2, \ldots, k_n = \ell_n$ και άρα η Cantor κανονική αναπαράσταση του α είναι μοναδική. $\square$

Κεφάλαιο 2

Θεώρημα van der Waerden

Στην πρώτη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου διατυπώνεται το κλασικό Θεώρημα van der Waerden Θεώρημα (2.1) και κάποιες από τις ισοδύναμες μορφές του Θεωρήματος van der Waerden Πρόταση (2.2). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η ισοδυναμία του καθαρά απειροσυνδυαστικού θεωρήματος van der Waerden με ένα καθαρά τοπολογικό αποτέλεσμα Πρόταση (2.2(vi)) που οφείλεται στους Furstenberg, Weiss [FW]. Στη δεύτερη παράγραφο διατυπώνεται μια επέκταση του Θεωρήματος van der Waerden σε περισσότερες διαστάσεις, όπου αναφέρεται ως Πολυδιάστατο Θεώρημα van der Waerden η απόδειξη του οποίου οφείλεται στον Ούγγρο μαθηματικό Tibor Gallai Θεώρημα (2.3). Στην Πρόταση (2.4) που ακολουθεί διατυπώνονται οι ισοδύναμες μορφές αυτού του θεωρήματος.

2.1 Θεώρημα van der Waerden

Θεώρημα 2.1 (van der Waerden). Έστω $k, r \in \mathbb{N}$. Αν $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών, τότε υπάρχει $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ τέτοιο ώστε το C_{i_0} να περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k. Δηλαδή υπάρχουν $a, b \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a + jb \in C_{i_0}$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant k-1$.

Πρόταση 2.2. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) Θεώρημα (2.1)

(ii) Έστω $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών για $r \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ τέτοιο ώστε το C_{i_0} να περιέχει οσοδήποτε μεγάλη αριθμητική πρόοδο.

(iii) Έστω $k, r \in \mathbb{N}$. Αν $\mathbb{Z} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των ακεραίων αριθμών, τότε υπάρχει $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ τέτοιο ώστε το C_{i_0} να περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k.

(iv) Έστω $k, r \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $N = N(k,r) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα για κάθε διαμέριση του $\{1, \ldots, N\} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ υπάρχει $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ τέτοιο ώστε το C_{i_0} να περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k.

(v) Έστω $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών για $r \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε πεπερασμένο σύνολο F του $\mathbb{N}$ υπάρχουν $1 \leqslant i_0 \leqslant r$, $a, b \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a + bF \subseteq C_{i_0}$.

(vi) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος , $T : X \to X$ συνεχής συνάρτηση, $k \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $x_0 \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\rho(T^{in_0}x_0, x_0) < \varepsilon$, για κάθε $i = 1, \ldots, k$.

Απόδειξη. (i)$\Rightarrow$ (ii). Έστω $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών για $r \in \mathbb{N}$. Από υπόθεση για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $i_k \in \{1, \ldots, r\}$, ώστε το C_{i_k} να περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k. Από την Αρχή του Περιστερεώνα υπάρχει $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ τέτοιο ώστε $i_k = i_0$ για άπειρα το πλήθος k. Άρα το C_{i_0} περιέχει οσοδήποτε μεγάλη αριθμητική πρόοδο.

(ii)⇒ (i). Προφανής.

(i)⇒ (iii). Έστω $\mathbb{Z} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των ακεραίων αριθμών, τότε $\mathbb{N} = (C_1 \cap \mathbb{N}) \cup \ldots \cup (C_r \cap \mathbb{N})$ είναι μια διαμέριση των φυσικών αριθμών και από την υπόθεση υπάρχει $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ τέτοιο ώστε το $C_{i_0} \cap \mathbb{N}$ να περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k, άρα και το C_{i_0} περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k.

(iii)⇒ (i). Έστω $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ με $f(n) = \begin{cases} 2n & \text{αν } n > 0 \\ -2n+1 & \text{αν } n \leqslant 0 \end{cases}$. Η f είναι 1-1 και επί οπότε επάγεται μέσω της f μια διαμέριση $\mathbb{Z} = f^{-1}(C_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(C_r)$ των ακεραίων αριθμών. Από υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος μήκους $2k$. Δηλαδή υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ και $1 \leqslant i_0 \leqslant r$, ώστε $a + jb \in f^{-1}(C_{i_0})$ για κάθε $j = 0, \ldots, 2k-1$.

Αν $a + jb > 0$ για κάθε $j = 0, \ldots, 2k-1$, τότε $f(a+jb) = 2(a+jb) = 2a + j(2b) \in C_{i_0}$, οπότε έχουμε μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο μήκους k στο $\mathbb{N}$.

Αν $a + jb \leqslant 0$ για κάθε $j = 0, \ldots, 2k-1$ τότε $f(a+jb) = -2(a+jb)+1 = (-2a+1) + j(-2b) \in C_{i_0}$, οπότε έχουμε μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο μήκους k στο $\mathbb{N}$.

Αν υπάρχουν και θετικοί και αρνητικοί όροι στην πρόοδο τότε υπάρχει $0 \leqslant \ell \leqslant 2k-1$ τέτοιο ώστε $a + jb \leqslant 0$ για κάθε $j = 0, \ldots, \ell$ και $a + jb > 0$ για κάθε $j = \ell+1, \ldots, 2k-1$ ή αντίστροφα. Από την Αρχή του Περιστερεώνα σε κάθε περίπτωση υπάρχουν k το πλήθος όροι της προόδου θετικοί ή αρνητικοί, οπότε έχουμε μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο μήκους k στο $\mathbb{N}$.

(i)⇒ (iv). Έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{1, \ldots, n\} =$

$C_1^n \cup \ldots \cup C_r^n$ του $\{1, \ldots, n\}$ σε r χρώματα, όπου κανένα από αυτά δεν περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε τέτοια διαμέριση ορίζουμε συναρτήσεις

$$c^n : \{1 \ldots, n\} \to \{1 \ldots, r\} \text{ με } c^n(j) = i \Leftrightarrow j \in C_i^n.$$

Επεκτείνουμε τις c^n στο $\mathbb{N}$ θέτοντας $\tilde{c}^n(j) = c^n(j)$ για $j \in \{1, \ldots, n\}$ και $\tilde{c}^n(j) = 1$ για $j > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε έτσι κατασκευάζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $(\tilde{c}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ την οποία βλέπουμε ως ακολουθία στο χώρο $\{1, \ldots, r\}^{\mathbb{N}}$. Ο $\{1, \ldots, r\}$ με τη διακριτή τοπολογία είναι συμπαγής μετρικός χώρος και από το Θεώρημα Tychonoff ο $\{1, \ldots, r\}^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Άρα υπάρχει υπακολουθία $(\tilde{c}^{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ της $(\tilde{c}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\tilde{c}_0 \in \{1, \ldots, r\}^{\mathbb{N}}$ ώστε $\tilde{c}^{n_m} \to \tilde{c}_0$. Η $\tilde{c}_0$ επάγει μια διαμέριση του $\mathbb{N} = \tilde{c}_0^{-1}(1) \cup \ldots \cup \tilde{c}_0^{-1}(r)$ σε r χρώματα, οπότε από υπόθεση υπάρχει μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος μήκους k. Δηλαδή υπάρχουν $a, b \in \mathbb{N}$ και $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ τέτοια ώστε $a + jb \in \tilde{c}_0^{-1}(i_0)$ για κάθε $j = 0, \ldots, k-1$ άρα και $\tilde{c}_0(a + jb) = i_0$ για κάθε $j = 0, \ldots, k-1$. Επειδή $\tilde{c}^{n_m} \to \tilde{c}_0$ έχουμε ότι $\tilde{c}^{n_m}(a + jb) \to \tilde{c}_0(a + jb)$ για κάθε $j = 0, \ldots, k-1$ και επειδή ο $\{1, \ldots, r\}$ είναι εφοδιασμένος με τη διακριτή τοπολογία έχουμε ότι είναι τελικά σταθερές. Οπότε υπάρχουν $n_0, \ldots, n_{k-1}$ ώστε $\tilde{c}^n(a + jb) = \tilde{c}_0(a + jb) = i_0$ για κάθε $j = 0, \ldots, k-1$ και $n \geqslant n_j$. Επιλέγουμε N_0 αρκετά μεγάλο ώστε $a + jb \in \{1, \ldots, N_0\}$ και $N_0 \geqslant N_j$ για κάθε $j = 0, \ldots k-1$. Τότε $\tilde{c}^{N_0} = \tilde{c}_0 = i_0$ και περιορίζοντας την $\tilde{c}^{N_0}$ στο $\{1, \ldots, N_0\}$ παίρνουμε την απεικόνιση $c^{N_0} : \{1, \ldots, N_0\} \to \{1, \ldots, r\}$ με $\tilde{c}^{N_0} = c^{N_0}$ στο $\{1, \ldots, N_0\}$. Η c^{N_0} επάγει μια διαμέριση του $\{1, \ldots, N_0\}$ σε r χρώματα και επειδή $c^{N_0}(a+jb) = \tilde{c}^{N_0}(a+jb) = i_0$ για κάθε $j = 0, \ldots, k-1$ το $\{1, \ldots, N_0\}$ έχει μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο μήκους k, άτοπο.

(iv)$\Rightarrow$ (i). Έστω $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών σε r χρώματα και $N \in \mathbb{N}$. Τότε $\{1, \ldots, N\} = (C_1 \cap \{1, \ldots, N\}) \cup \ldots \cup (C_r \cap \{1, \ldots, N\})$, είναι μια διαμέριση σε r χρώματα του $\{1, \ldots, N\}$ και από την υπόθεση υπάρχει $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ τέτοιο ώστε το $C_{i_0} \cap \{1, \ldots, N\}$ να περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k, άρα και το C_{i_0} περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k.

(i)$\Rightarrow$ (v). Έστω $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών σε r χρώματα και F πεπερασμένο υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Από υπόθεση υπάρχει $k \geqslant \max F$, $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ και $a, b \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a + jb \in C_{i_0}$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Επειδή $F \subseteq \{1, \ldots, k\}$ έχουμε ότι για κάθε $x \in F$, $a + xb \in C_{i_0}$ και άρα $a + Fb \subseteq C_{i_0}$.
(v)$\Rightarrow$ (i). Έστω $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών σε r χρώματα και $k \in \mathbb{N}$. Θεωρώ το πεπερασμένο σύνολο $F = \{1, \ldots, k\}$ και από υπόθεση έχουμε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{N}$ και $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ τέτοια ώστε $a + Fb \subseteq C_{i_0}$, άρα έχουμε ότι $a + jb \in C_{i_0}$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ δηλαδή έχουμε μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο μήκους k.

(i)$\Rightarrow$ (vi). Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, υπάρχουν $r \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_r \in X$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{i=1}^{r} S(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Θέτουμε $A_1 = S(x_1, \frac{\varepsilon}{2})$, $A_2 = S(x_2, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus A_1$, $\ldots$, $A_r = S(x_r, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus \bigcup_{i=1}^{r} A_i$. Θεωρούμε ένα $x \in X$ και θέτουμε $C_i = \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in A_i\}$. Τα C_i ορίζουν μια διαμέριση του $\mathbb{N}$ σε r χρώματα. Πράγματι αν $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $T^n x \in X$, οπότε υπάρχει $1 \leqslant j_0 \leqslant r$ με $n \in C_{j_0}$ και άρα $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$.
Από υπόθεση υπάρχουν $1 \leqslant i_0 \leqslant r$ και $a, b \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a + jb \in C_{i_0}$ για κάθε $j = 0, \ldots, k$ και άρα $T^{a+jb} x \in A_{i_0}$ για κάθε $j = 0, \ldots, k$. Θέτουμε $x_0 = T^a x$. Τότε $T^{jb} x_0 \in A_{i_0}$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ και άρα $T^{jb} x_0 \in S(x_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2})$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Επειδή $x_0 = T^a x \in A_{i_0}$ έχουμε $\rho(x_0, x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ και άρα

$$\rho(T^{jb} x_0, x_0) \leqslant \rho(T^{jb} x_0, x_{i_0}) + \rho(x_{i_0}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Θέτουμε $b = n_0$ και έχουμε $\rho(T^{jn_0} x_0, x_0) < \varepsilon$ για κάθε

$j = 1, \ldots, k$.

(vi)$\Rightarrow$ (i). Έστω $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών σε r χρώματα. Θεωρούμε το το σύνολο $\Omega = \{1, \ldots, r\}^{\mathbb{Z}}$ που γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος, αν το εφοδιάσουμε με τη μετρική

$$\rho(\omega, \omega') = \inf \left\{ \frac{1}{k+1} : \omega(n) = \omega'(n) \text{ για } |n| < k \right\}.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $T : \Omega \to \Omega$ με $T\omega = \xi$, όπου $\omega = (\omega(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, $\xi = (\xi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ με $\xi(n) = \omega(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η οποία είναι ομοιομορφισμός.
Ορίζουμε $\omega_0 \in \Omega$ με

$$\omega_0(n) = \begin{cases} j & \text{αν } n \geqslant 1 \text{ και } n \in C_j \\ 0 & \text{αν } n \leqslant 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε το σύνολο $\{T^n \omega_0 : n \geqslant 1\}$ και θέτουμε $X = \overline{\{T^n \omega_0 : n \geqslant 1\}}$ την κλειστή θήκη του συνόλου. Τότε το X είναι κλειστό και $T(X) \subseteq X$. Πράγματι αν $y \in T(X)$, υπάρχει $x \in X$ με $y = Tx$. Επειδή $x \in X$ υπάρχει ακολουθία $(T^{n_k}\omega_0)_{k \in \mathbb{N}}$ του X με $T^{n_k}\omega_0 \to x$. Από τη συνέχεια της T έχουμε ότι $TT^{n_k}\omega_0 \to Tx$ και άρα $T^{n_k+1}\omega_0 \to y$. Οπότε $y \in X$.

Έστω $k \geqslant 1$. Τότε από υπόθεση για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ και $x \in X$ τέτοιο ώστε $\rho(T^{in_0}x, x) < \frac{1}{2}$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Οπότε έχουμε ότι

$$x(0) = x(n_0) = \ldots = x(kn_0).$$

Επίσης για $\varepsilon = \frac{1}{kn_0+1}$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $\rho(T^{m_0}\omega, x) < \frac{1}{kn_0+1}$. Οπότε έχουμε

$$\omega_0(m_0) = x(0), \ldots, \omega(m_0 + kn_0) = x(kn_0)$$

και άρα

$$\omega_0(m_0) = \omega_0(m_0 + n_0) = \ldots = \omega_0(m_0 + kn_0).$$

Επομένως έχουμε ότι $m_0 + jn_0 \in C_{\omega_0(m_0)}$ για κάθε $j = 0, \ldots, k$. Θέτουμε $a = m_0$ και $b = n_0$ και άρα έχουμε $a + jb \in C_{\omega_0(a)}$ για κάθε $j = 0, \ldots, k$ και άρα έχουμε αριθμητική πρόοδο μήκους k. $\square$

2.2 Πολυδιάστατο Θεώρημα van der Waerden

Το θεώρημα van der Waerden αναφέρεται σε αριθμητικές προόδους του $\mathbb{N}$ ή του $\mathbb{Z}$. Ο Gallai, που στη βιβλιογραφία αναφέρεται και ως Grünwald, επεξέτεινε το θεώρημα van der Waerden στο $\mathbb{N}^m$, όπου m φυσικός αριθμός. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε κάποιες ισοδύναμες μορφές του θεωρήματος Gallai.

Θεώρημα 2.3 (**Gallai**). Έστω $m, r \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{N}^m = C_1 \cup \ldots \cup C_r$, μια διαμέριση του $\mathbb{N}^m$ σε r χρώματα. Τότε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του $\mathbb{N}^m$ υπάρχουν $1 \leqslant i_0 \leqslant r$, $a \in \mathbb{N}^m$ και $b \in \mathbb{N}$, ώστε $a + Fb \subseteq C_{i_0}$.

Πρόταση 2.4. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Θεώρημα (2.3)

(ii) Έστω $m, k, r \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{N}^m = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ μια διαμέριση του $\mathbb{N}^m$ σε r χρώματα. Τότε υπάρχουν $1 \leqslant i_0 \leqslant r$, $a \in \mathbb{N}^m$, $b \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a + (x_1, \ldots, x_m)b \in C_{i_0}$ για κάθε $0 \leqslant x_j \leqslant k - 1$ και $1 \leqslant j \leqslant m$.

(iii) Έστω $m, r \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}^m = C_1 \cup \ldots \cup C_r$, μι διαμέριση του $\mathbb{Z}^m$ σε r χρώματα. Τότε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του $\mathbb{Z}^m$ υπάρχουν $1 \leqslant i_0 \leqslant r$, $a \in \mathbb{Z}^m$ και $b \in \mathbb{Z}$, ώστε $a + Fb \subseteq C_{i_0}$.

(iv) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, $T_1, T_2, \ldots, T_k : X \to X$ συνεχείς συναρτήσεις που ανά δύο μετατίθενται και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $x_0 \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\rho(T_i^{n_0} x_0, x_0) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$.

Κεφάλαιο 3

Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα

Στο παρόν κεφάλαιο εισαγάγουμε και μελετάμε την έννοια του τοπολογικού δυναμικού συστήματος, που αποτελείται από ένα συμπαγή μετρικό χώρο και μια ημιομάδα συνεχών συναρτήσεων, από τον χώρου στον εαυτό του. Διατυπώνουμε την έννοια του minimal δυναμικού συστήματος και με τη βοήθειά του αποδεικνύουμε το Θεώρημα Birkchoff, που αναφέρεται στην ύπαρξη ενός "recurrent" σημείου σε ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα.

Ορισμός 3.1. Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και G μια ημιομάδα συνεχών συναρτήσεων από το X στο X. Τότε το ζεύγος (X,G) λέγεται **τοπολογικό δυναμικό σύστημα**. Αν επιπλέον η G είναι μια ομάδα ομοιομορφισμών του X, τότε το ζεύγος (X,G) λέγεται **αντιστρέψιμο τοπολογικό δυναμικό σύστημα**.
Αν G είναι κυκλική ημιομάδα δηλαδή $G=\{T^n : n\in\mathbb{N}\}$ όπου $T: X\to X$ συνεχής συνάρτηση τότε το σύστημα (X,G) θα το συμβολίζουμε με(X,T).

Ορισμός 3.2. Έστω (X,G) τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Αν Y υποσύνολο του X τέτοιο ώστε Y κλειστό και $G-$αναλλοίωτο, δηλαδή $T(Y) \subseteq Y$ για κάθε $T \in G$, τότε το ζεύγος $(Y, G|_Y)$ είναι τοπολογικό δυναμικό σύστημα και λέγεται υποσύστημα του (X, G) (με τη σχετική τοπολογία).

Ορισμός 3.3. Έστω (X, G) τοπολογικό δυναμικό σύστημα και $x_0 \in X$. Θα λέμε **τροχιά** του x_0 το σύνολο $\mathcal{O}(x_0) = \{gx_0 : g \in G\}$. Αν (X, T) τοπολογικό δυναμικό σύστημα θα λέμε τροχιά του x_0 το σύνολο $\mathcal{O}_T(x_0) = \{T^n x_0 : n \in \mathbb{N}\}$.

Πρόταση 3.4. Έστω (X, G) τοπολογικό δυναμικό σύστημα και $x_0 \in X$. Αν $Y = \overline{\mathcal{O}(x_0)}$ τότε το ζεύγος $(Y, G|_Y)$ είναι υποσύστημα του (X, G).

Απόδειξη. Επειδή $Y = \overline{\mathcal{O}(x_0)}$ το Y είναι κλειστό, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι Y είναι $G-$αναλλοίωτο, δηλαδή $g(Y) \subseteq Y$ για κάθε $g \in G$. Έστω $y \in \overline{\mathcal{O}(x_0)}$, τότε υπάρχει ακολουθία $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της G ώστε $g_n x_0 \to y$.
Έστω $g \in G$. Επειδή g είναι συνεχής, έχουμε ότι $gg_n x_0 \to gy$.
Τότε $gy \in \overline{\mathcal{O}(x_0)} = Y$ οπότε $g(Y) \subseteq Y$. Άρα το $(Y, G|_Y)$ είναι υποσύστημα του (X, G). □

Πόρισμα 3.5. Έστω (X, T) τοπολογικό δυναμικό σύστημα και $x_0 \in X$. Αν $Y = \overline{\mathcal{O}_T^{\mathbb{N}}(x_0)}$ τότε το ζεύγος $(Y, T|_Y)$ είναι υποσύστημα του (X, T).

Απόδειξη. Θέτοντας $G = \{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ από Πρόταση (3.4) έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 3.6. Έστω (X, G) τοπολογικό δυναμικό σύστημα και $(Y, G|_Y)$ ένα υποσύστημά του. Τότε το $(Y, G|_Y)$ λέγεται minimal υποσύστημα αν για κάθε Z κλειστό και $G-$αναλλοίωτο υποσύνολο του Y ισχύει $Z = \emptyset$ ή $Z = Y$.
Το (X, G) είναι minimal σύστημα αν για κάθε $(Y, G|_Y)$ υποσύστημα του (X, G) ισχύει $Y = \emptyset$ ή $Y = X$.

Πρόταση 3.7. Κάθε τοπολογικό δυναμικό σύστημα (X, G) με X μη κενό έχει τουλάχιστον ένα minimal υποσύστημα.

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathscr{F} = \{Y \subseteq X : Y \neq \emptyset, Y \text{ κλειστό και } G - \text{αναλλοίωτο }\}$$

Τότε $\mathscr{F} \neq \emptyset$, αφού $X \in \mathscr{F}$.
Στη συνέχεια ορίζουμε διάταξη στην $\mathscr{F}$ με $Y_1 \leqslant Y_2 \Leftrightarrow Y_1 \subseteq Y_2$ για κάθε $Y_1, Y_2 \in \mathscr{F}$. Τότε η $\mathscr{F}$ είναι μερικά διατεταγμένη. Έστω $\mathscr{G}$ υποοικογένεια της $\mathscr{F}$ ολικά διατεταγμένη. Η $\mathscr{G}$ ως ολικά διατεταγμένη έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, δηλαδή αν $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathscr{G}$, τότε $\bigcap\limits_{i=1}^{k} Y_i \in \mathscr{G}$.
Επειδή Y συμπαγής ισχύει ότι $Y_0 = \bigcap\limits_{Y \in \mathscr{G}} Y \neq \emptyset$.
Τότε $Y_0 \in \mathscr{F}$, διότι $Y_0 \neq \emptyset$, κλείστό ως τομή κλειστών και $G-$αναλλοίωτο αφού για κάθε $g \in G$ έχουμε $g(Y_0) = g(\bigcap\limits_{Y \in \mathscr{G}} Y) \subseteq \bigcap\limits_{Y \in \mathscr{G}} g(Y) \subseteq \bigcap\limits_{Y \in \mathscr{G}} Y = Y_0$. Άρα το Y_0 είναι κάτω φράγμα της $\mathscr{G}$ στην $\mathscr{F}$. Οπότε από το Λήμμα του Zorn η $\mathscr{F}$ έχει ελαχιστικό στοιχείο έστω Z. Τότε το $(Z, G|_Z)$ είναι minimal υποσύστημα του (X, G).
Πράγματι αφού $Z \in \mathscr{F}$, τότε $(Z, G|_Z)$ είναι υποσύστημα του (X, T). Έστω $Y \subseteq Z$ κλειστό και $G-$αναλλοίωτο. Αν $Y \neq \emptyset$, τότε $Y \in \mathscr{F}$. Όμως επειδή Z είναι minimal στοιχείο της $\mathscr{F}$, έπεται ότι $Y = Z$.
Άρα $(Z, G|_Z)$ είναι minimal σύστημα και άρα minimal υποσύστημα του (X, G).

□

Πρόταση 3.8. Έστω (X, G) τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) (X, G) είναι minimal.

(ii) $X = \overline{\mathcal{O}(x)}$ για κάθε $x \in X$.

(iii) $X = \bigcup_{g \in G} g^{-1}(U)$ για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό.

Απόδειξη. (i)$\Rightarrow$ (ii). Έστω (X, G) minimal σύστημα και $x \in X$. Τότε $(\overline{\mathcal{O}(x)}, G|_{\overline{\mathcal{O}(x)}})$ είναι μη κενό υποσύστημα οπότε $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$.

(ii)$\Rightarrow$ (i). Έστω Y κλειστό υποσύνολο του X με Y μη κενό και $G-$ αναλλοίωτο. Τότε για $y \in Y$ έχουμε $X = \overline{\mathcal{O}(y)} \subseteq Y$ οπότε $Y = X$. Άρα (X, G) είναι minimal.

(ii)$\Leftrightarrow$ (iii). Έχουμε ότι $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$ για κάθε $x \in X \Leftrightarrow$
για κάθε $x \in X$ και $U \subseteq X$ ανοικτό έχουμε ότι $U \cap \mathcal{O}(x) \Leftrightarrow$
για κάθε $x \in X$ και $U \subseteq X$ ανοικτό υπάρχει $g \in G$, ώστε $gx \in U \Leftrightarrow$
για κάθε $x \in X$ και $U \subseteq X$ ανοικτό υπάρχει $g \in G$, ώστε $x \in g^{-1}(U) \Leftrightarrow$
για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό $X \subseteq \bigcup_{g \in G} g^{-1}(U) \subseteq X \Leftrightarrow$
$X = \bigcup_{g \in G} g^{-1}(U)$. □

Πόρισμα 3.9. Έστω (X, T) τοπολογικό δυναμικό σύστημα.Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) (X, T) είναι minimal.

(ii) $X = \overline{\mathcal{O}_T(x)}$ για κάθε $x \in X$.

(iii) $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(U)$ για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό.

Θεώρημα 3.10 (Birkhoff). Έστω (X, T) τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Τότε υπάρχει $x_0 \in X$ και ακολουθία $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $T^{n_k} x_0 \to x_0$ όταν $n_k \to \infty$.

Απόδειξη. Έστω ένα minimal υποσύστημα $(Y, T|_Y)$ του (X, T). Τότε για κάθε $y \in Y$ έχουμε $Y = \overline{\mathcal{O}_T(y)}$. Έστω $x_0 \in Y$. Επειδή το Y είναι minimal έχουμε ότι $Y = \overline{\mathcal{O}_T(x_0)}$ και επειδή $x_0 \in \overline{\mathcal{O}_T(x_0)}$ υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ώστε $T^{n_k}(x_0) \to x_0$ όταν $n_k \to \infty$. □

Ορισμός 3.11. Έστω (X, T) τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Ένα $x \in X$ λέγεται **recurrent**, αν υπάρχει ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $T^{n_k}x_0 \to x_0$ όταν $n_k \to \infty$.

Παρατήρηση 3.12. Παρατηρούμε ότι από το θεώρημα Birkhoff σε ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα (X, T) πάντα υπάρχει κάποιο στοιχείο του X που να είναι recurrent.

Κεφάλαιο 4

Θεώρημα Furstenberg-Weiss

Στο παρόν κεφάλαιο επεκτείνουμε την έννοια του recurrent σημείου στο πολλαπλώς recurrent Ορισμός (4.1). Έπειτα αποδεικνύουμε το Θεώρημα των Furstenberg-Weiss Θεώρημα(4.8), το οποίο αποτελεί, μια γενίκευση του Θεωρήματος Birkhoff στην περίπτωση του οποίου έχουμε περισσότερες από μία συνεχείς συναρτήσεις στον συμπαγή μετρικό χώρο που μετατίθενται μεταξύ τους και ένα σημείο του χώρου που είναι recurrent ως προς κάθε συνάρτηση ξεχωριστά. Γι΄ αυτόν τον λόγο το Θεώρημα Furstenberg-Weiss αναφέρεται στην βιβλιογραφία και ως Multiple Birkhoff Recurrence. Στη γενική του μορφή, που διατυπώνουμε παρακάτω το Θεώρημα Furstenberg-Weiss αποτελεί την τοπολογική ισοδύναμη έκφραση του Πολυδιάστατου Θεωρήματος van der Waerden, Θεώρημα (2.3) Gallai. Άρα η απόδειξη του Θεωρήματος Furstenberg-Weiss μας δίνει και μια απόδειξη του θεωρήματος Gallai και κατ΄ επέκταση του θεωρήματος van der Waerden.

Θεώρημα (Furstenberg-Weiss). Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, T_2, \ldots, T_l : X \to X$ συνεχείς συναρτήσεις που ανά δύο μετατίθενται. Τότε υπάρχει $x \in X$ και ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών με $n_k \to \infty$ τέτοια ώστε $T_1^{n_k}x \to x, T_2^{n_k}x \to x, \ldots, T_l^{n_k}x \to x$ όταν $n_k \to \infty$ ταυτόχρονα.

Ορισμός 4.1. Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, T_2, \ldots, T_l : X \to X$ συνεχείς συναρτήσεις. Θα λέμε ότι ένα $x \in X$ είναι **πολλαπλώς recurrent** (**multiple recurrent**) ως προς τις $T_1, T_2, \ldots, T_l$, αν υπάρχει ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών με $n_k \to \infty$ τέτοια ώστε $T_1^{n_k}x \to x, T_2^{n_k}x \to x, \ldots, T_l^{n_k}x \to x$, όταν $n_k \to \infty$.

4.1 Λήμμα του Bowen

Το πρώτο βήμα για την απόδειξη του θεωρήματος Furstenberg-Weiss είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα του οποίου η απόδειξη οφείλεται στον Rufus Bowen.

Λήμμα 4.2 (Bowen). Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ συνεχής συνάρτηση. Έστω $A \subseteq X$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ με $\rho(T^n y, x) < \varepsilon$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $z \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ με $\rho(T^n z, z) < \varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και $z_0 \in A$. Για $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ από υπόθεση υπάρχει $z_1 \in A$ και $n_1 \in A$ ώστε

$$\rho(T^{n_1} z_1, z_0) < \varepsilon_1.$$

Έστω τώρα (από ομοιόμορφη συνέχεια του T^{n_1}) ε_2 με $0 < \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$ τέτοιο ώστε οποτεδήποτε $\rho(z, z_1) < \varepsilon_2$ να έχουμε

$$\rho(T^{n_1} z, T^{n_1} z_1) < \varepsilon_1 - \rho(T^{n_1} z_1, z_0).$$

Άρα οποτεδήποτε $\rho(z, z_1) < \varepsilon_2$ έχουμε

$$\rho(T^{n_1} z, z_0) \leqslant \rho(T^{n_1} z, T^{n_1} z_1) + \rho(T^{n_1} z_1, z_0) < \varepsilon_1 - \rho(T^{n_1} z_1, z_0) + \rho(T^{n_1} z_1, z_0) = \varepsilon_1.$$

Πάλι από υπόθεση βρίσκουμε $z_2 \in A$ και $n_2 \in \mathbb{N}$ με

$$\rho(T^{n_2} z_2, z_1) < \varepsilon_2.$$

Έστω τώρα (από ομοιόμορφη συνέχεια του T^{n_2}) ε_3 με $0 < \varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_2$ τέτοιο ώστε οποτεδήποτε $\rho(z, z_2) < \varepsilon_3$ να έχουμε

$$\rho(T^{n_2}z, T^{n_2}z_2) < \varepsilon_2 - \rho(T^{n_2}z_2, z_1).$$

Άρα οποτεδήποτε $\rho(z, z_2) < \varepsilon_3$ έχουμε

$$\rho(T^{n_2}z, z_1) \leqslant \rho(T^{n_2}z, T^{n_2}z_2) + \rho(T^{n_2}z_2, z_1) < \varepsilon_2 - \rho(T^{n_2}z_2, z_1) + \rho(T^{n_2}z_2, z_1) = \varepsilon_2.$$

Ανάλογα ορίζουμε $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_k \in A$, $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$, ώστε $\rho(T^{n_i}z_i, z_{i-1}) < \varepsilon_i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$.
Ορίζουμε $0 < \varepsilon_{k+1} \leqslant \varepsilon_k$ τέτοιο ώστε οποτεδήποτε $\rho(z, z_k) < \varepsilon_{k+1}$ να έχουμε

$$\rho(T^{n_k}z, z_{k-1}) < \varepsilon_k.$$

Από υπόθεση βρίσκουμε $z_{k+1} \in A$ και $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\rho(T^{n_k}z_k, z_{k-1}) < \varepsilon_k.$$

Επαγωγικά κατασκευάζουμε $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ακολουθία της A, $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ακολουθία φυσικών αριθμών και $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \frac{\varepsilon}{2})$ που ικανοποιούν τις προηγούμενες υποθέσεις. Τότε για $i < j$ ισχύει ότι

$$\rho(T^{n_j + n_{j-1} + \ldots + n_{i+1}}z_j, z_i) < \varepsilon_{i+1} \leqslant \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Πράγματι επειδή $\rho(T^{n_j}z_j, z_{j-1}) < \varepsilon_j$ και όταν $\rho(z, z_{j-1}) < \varepsilon_j$ ισχύει ότι $\rho(T^{n_{j-1}}z, z_{j-2}) < \varepsilon_{j-1}$, τότε για $z = T^{n_j}z_j$ έχουμε

$$\rho(T^{n_j + n_{j-1}}z_j, z_{j-2}) = \rho(T^{n_{j-1} + n_j}z_j, z_{j-2}) = \rho(T^{n_{j-1}}(T^{n_j}z_j), z_{j-2}) = \varepsilon_{j-1}.$$

Οπότε επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, προκύπτει το ζητούμενο

$$\rho(T^{n_j + n_{j-1} + \ldots + n_{i+1}}z_j, z_i) < \varepsilon_{i+1} \leqslant \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ο X είναι συμπαγής, άρα και ακολουθιακά συμπαγής, οπότε μπορούμε να βρούμε $i < j$ με $\rho(z_i, z_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Οπότε

$$\rho(T^{n_j+n_{j-1}+\ldots+n_{i+1}} z_j, z_j) \leqslant \rho(T^{n_j+n_{j-1}+\ldots+n_{i+1}} z_j, z_i) + \rho(z_i, z_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Θέτουμε $z = z_j$ και $n = n_j + n_{j-1} + \ldots + n_{i+1}$ και έχουμε το συμπέρασμα του λήμματος. □

4.2 Homogeneous Σύνολα

Στη συνέχεια ορίζουμε την έννοια του homogeneous ως προς T υποσυνόλου ενός τοπολογικού διανυσματικού χώρου (X, T). Θα δείξουμε ότι, όταν ένα σύνολο A είναι homogeneous, τότε μπορούμε να εξασθενήσουμε τις υποθέσεις του προηγούμενου λήμματος παίρνοντας ταυτόχρονα ισχυρότερο συμπέρασμα.

Ορισμός 4.3. Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, $T : X \to X$ συνεχής συνάρτηση και A κλειστό υποσύνολο του X. Το A καλείται **homogeneous ως προς** T, αν υπάρχει ομάδα G από ομοιομορφισμούς του X, καθένας από τους οποίους μετατίθεται με την T και αφήνουν το A αναλλοίωτο έτσι ώστε το υποσύστημα (A, G) να είναι minimal. Δηλαδή κανένα γνήσιο κλειστό υποσύνολο του A δεν είναι αναλλοίωτο μέσω της δράσης της G.

Ορισμός 4.4. Έστω (X, T) τοπολογικό δυναμικό σύστημα και A κλειστό υποσύνολο του X. Το A λέγεται **recurrent ως προς** T αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ με $\rho(T^n y, x) < \varepsilon$.

Στο επόμενο Λήμμα διατυπώνεται μια συνθήκη, ώστε ένα homogeneous σύνολο να είναι recurrent.

Λήμμα 4.5. Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, $T : X \to X$ συνεχής συνάρτηση και A homogeneous ως προς T υποσύνολο του X. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x, y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ με $\rho(T^n y, x) < \varepsilon$ τότε το A είναι recurrent.

Απόδειξη. Επειδή A homogeneous ως προς T υπάρχει G ομάδα ομοιομορφισμών καθένας από τους οποίους μετατίθεται με την T και αφήνουν το A αναλλοίωτο έτσι ώστε το υποσύστημα (A, G) να είναι minimal.
Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο F της G τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in A$ να ισχύει

$$\min_{g \in F} \rho(gx, y) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1}$$

Πράγματι αν $\{U_i\}_{i=1}^k$ πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του A από σύνολα με διάμετρο μικρότερη από $\frac{\varepsilon}{2}$, τότε για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ η οικογένεια $\{g^{-1}U_i : g \in G\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του A και επομένως έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα το $\{g_{i_1}^{-1}U_i, g_{i_2}^{-1}U_i, \ldots, g_{i_k}^{-1}U_i\}$. Δηλαδή

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} g_{i_j}^{-1} U_i.$$

Τότε το σύνολο $F = \{g_{i_j}\}_{i,j} \subseteq G$ ικανοποιεί τη σχέση (4.1) για κάθε $x, y \in A$. Πράγματι αν $x, y \in A$, τότε $y \in U_{i_0}$ για κάποιο $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ και $x \in g_{i_{0_{j_0}}}^{-1} U_{i_0}$ για κάποιο $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ και για το ίδιο i_0. Οπότε $g_{i_{0_{j_0}}} x \in U_{i_0}$ και επειδή το U_{i_0} έχει διάμετρο μικρότερη από $\frac{\varepsilon}{2}$, έχουμε

$$\min_{g \in F} \rho(gx, y) < \rho(g_{i_{0_{j_0}}} x, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από ομοιόμορφη συνέχεια των στοιχείων του F υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, όταν $\rho(x_1, x_2) < \delta$ να έχουμε $\rho(gx_1, gx_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $g \in F$ και $x_1, x_2 \in A$. Από υπόθεση υπάρχουν $x, y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\rho(T^n y, x) < \delta$. Έστω τώρα $z \in A$. Από τον ισχυρισμό υπάρχει $g \in F$ με $\rho(gx, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ο g μετατίθεται με τον T άρα

$$\rho(T^n gy, gx) = \rho(gT^n y, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

καθώς $\rho(T^n y, x) < \delta$. Οπότε

$$\rho(T^n gy, z) \leqslant \rho(T^n gy, gx) + \rho(gx, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και από αυτό έχουμε ότι το A είναι recurrent. □

Πρόταση 4.6. Με τις υποθέσεις του προηγούμενου λήμματος υπάρχει $x \in A$ και ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ με $n_k \to \infty$ και $T^{n_k}x \to x$.
Δηλαδή ένα recurrent homogeneous σύνολο περιέχει ένα recurrent σημείο.

Απόδειξη. Έστω G ομάδα ομοιομορφισμών του X που τα στοιχεία της μετατίθενται με την T και αφήνει το A αναλλοίωτο ώστε (A, G) minimal. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τα σύνολα

$$E_n = \left\{ x \in A : \inf_k \rho(T^k x, x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

Αν το A δεν περιέχει κανένα recurrent σημείο, έχουμε ότι $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
Θα δείξουμε ότι ${E_n}^o = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έτσι θα έχουμε αντίφαση από το θεώρημα κατηγορίας του Baire, καθώς κάθε E_n είναι κλειστό.
Πράγματι αν ${E_n}^o \neq \emptyset$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε από minimality του (A, G) έχουμε ότι $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} g_j^{-1}{E_n}^o$ για κάποια $g_1, g_2, \ldots, g_r \in G$. Από ομοιόμορφη συνέχεια των $g_1, g_2, \ldots, g_r$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε αν $\rho(x_1, x_2) < \delta$, τότε $\rho(g_j x_1, g_j x_2) < \frac{1}{n}$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant r$. Θα δείξουμε ότι αν $x \in g_j^{-1}{E_n}^o$ για κάποιο $1 \leqslant j \leqslant r$, τότε

$$\inf_k \rho(T^k x, x) \geqslant \delta \tag{4.2}$$

Πράγματι, έστω $x \in g_j^{-1}{E_n}^o$ για κάποιο $1 \leqslant j \leqslant r$ και έστω ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(T^k x, x) < \delta$, τότε

$$\rho(T^k g_j x, g_j x) = \rho(g_j T^k x, g_j x) < \frac{1}{n}$$

για κάθε $1 \leqslant j \leqslant r$.
Δηλαδή δείξαμε ότι $\rho(T^k y, y) < \frac{1}{n}$ για κάποιο $y \in E_n{}^o$, άτοπο.
Επειδή για κάθε $x \in A$, υπάρχει $1 \leqslant j \leqslant r$ ώστε $x \in g_j^{-1} E_n{}^o$, λόγω της (4.2), έχουμε ότι $\inf_k \rho(T^k x, x) \geqslant \delta$ για κάθε $x \in A$. Άτοπο με βάση το Λήμμα (4.5) και το Λήμμα του Bowen (4.2). □

4.3 Απόδειξη Θεωρήματος Furstenberg-Weiss

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το θεώρημα των Furstenberg-Weiss, δηλαδή σκοπός μας είναι, αν έχουμε $T_1, T_2, \ldots, T_l$ συνεχείς συναρτήσεις σ′ ένα συμπαγή μετρικό χώρο να βρούμε ένα σημείο τέτοιο ώστε να είναι κοντά στο σημείο που προκύπτει από τη δράση της ίδιας δύναμης των $T_1, T_2, \ldots, T_l$. Στην αρχή θα αποδείξουμε το θεώρημα για την ειδική περίπτωση που οι συναρτήσεις είναι ομοιομορφισμοί. Η κεντρική ιδέα που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη είναι ότι το x είναι ταυτόχρονα recurrent ως προς $T_1, T_2, \ldots, T_l$ όταν το $(x, \ldots, x) \in X^l$ είναι recurrent ως προς τη συνάρτηση $T_1 \times \cdots \times T_l$. Επομένως, αυτό που πρέπει να αποδείξουμε είναι ότι το διαγώνιο υποσύνολο του X^l περιέχει ένα recurrent σημείο ως προς την $T_1 \times \cdots \times T_l$.

Θεώρημα 4.7. Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, T_2, \ldots, T_l : X \to X$ ομοιομορφισμοί που ανά δύο μετατίθενται. Τότε υπάρχει $x \in X$ και ακολουθία $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών με $n_k \to \infty$ τέτοια ώστε $T_1^{n_k} x \to x, T_2^{n_k} x \to x, \ldots, T_l^{n_k} x \to x$ όταν $n_k \to \infty$ ταυτόχρονα.

Απόδειξη. Έστω G η ομάδα ομοιομορφισμών του X που παράγεται από τους $T_1, T_2, \ldots, T_l$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι (X, G) minimal. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο l.
Για $l = 1$ ισχύει σύμφωνα με το το Θεώρημα Birkhoff.
Έστω ότι ισχύει το θεώρημα για οποιοδήποτε σύνολο $l - 1$ ομοιομορφισμών

που ανά δύο μετατίθενται και έστω $T_1, T_2, \ldots, T_l : X \to X$ ομοιομορφισμοί που ανά δύο μετατίθενται. Θεωρούμε τον συμπαγή μετρικό χώρο $X^l = X \times \cdots \times X$ και έστω Δ^l το διαγώνιο υποσύνολο του X^l, δηλαδή $\Delta^l = \{(x, \ldots, x) \in X \times \cdots \times X : x \in X\}$. Θέτουμε $T = T_1 \times \cdots \times T_l$ και θεωρούμε την G να δρα στον X^l ταυτίζοντας κάθε στοιχείο g της G με το $g \times \cdots \times g$. Δηλαδή $g(x_1, \ldots, x_l) = (gx_1, \ldots, gx_l)$. Είναι προφανές ότι αυτές οι συναρτήσεις μετατίθενται και ότι το (Δ^l, G) είναι minimal. Επομένως το Δ^l είναι homogeneous ως προς T υποσύνολο του X^l.
Ισχυριζόμαστε ότι το Δ^l ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος (4.5).
Πράγματι θέτουμε $R_i = T_i T_l^{-1}$ για $i = 1, \ldots, l-1$ και από επαγωγική υπόθεση βρίσκουμε $x \in X$ και ακολουθία $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών με $n_k \to \infty$ ώστε $R_i^{n_k} x \to x$ για κάθε $i = 1, \ldots, l-1$. Έστω $\varepsilon > 0$ και θέτουμε

$$\begin{aligned} x^* &= (x, x, \ldots, x) \in \Delta^l, \\ y_k^* &= \left(T_l^{-n_k} x, T_l^{-n_k} x, \ldots, T_l^{-n_k} x\right) \in \Delta^l \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \rho(T^{n_k} y_k^*, x^*) &= \rho(T_1^{n_k} \times T_2^{n_k} \times \cdots \times T_l^{n_k} y_k^*, x^*) \\ &= \rho\left((T_1^{n_k} T_l^{-n_k} x, \ldots, T_{l-1}^{n_k} T_l^{-n_k} x, x), (x, \ldots, x, x)\right) \\ &= \rho\left(\left(R_1^{n_k} x, \ldots, R_{l-1}^{n_k} x, x\right), (x, \ldots, x, x)\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Οπότε με κατάλληλη επιλογή του k η (4.3) είναι μικρότερη από ε.
Άρα από την Πρόταση (4.6) έχουμε το συμπέρασμα, δηλαδή υπάρχει $(x, \ldots, x) \in \Delta^l$ που είναι recurrent ως προς την $T = T_1 \times \cdots \times T_l$ και τελικά το x είναι recurrent ως προς τις $T_1, T_2, \ldots, T_l$ ταυτόχρονα. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα των Furstenberg-Weiss στη γενική του μορφή χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (4.7).

Θεώρημα 4.8 (Furstenberg-Weiss). Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, T_2, \ldots, T_l : X \to X$ συνεχείς συναρτήσεις που ανά δύο μετατίθενται. Τότε υπάρχει $x \in X$ και ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών με $n_k \to \infty$ τέτοια ώστε $T_1^{n_k}x \to x$, $T_2^{n_k}x \to x$,…,$T_l^{n_k}x \to x$ όταν $n_k \to \infty$ ταυτόχρονα.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα επιχείρημα που αντικαθιστά τη δράση μιας ημιομάδας με τη δράση μιας ομάδας. Έστω $\Omega = X^{\mathbb{Z}^l}$ και θεωρούμε τους ομοιομορφισμούς $S_1, \ldots, S_l : X \to X$ με

$$S_i\omega(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_l) = \omega(n_1, \ldots, n_i + 1, \ldots, n_l), \text{ για } i = 1, \ldots, l.$$

Έστω $\widetilde{X} \subseteq \Omega$ το σύνολο των στοιχείων $\omega \in \Omega$ που ικανοποιούν την ισότητα

$$S_i\omega(n_1, \ldots, n_l) = T_i\omega(n_1, \ldots, n_l), \text{ για } i = 1, \ldots, l \tag{4.4}$$

για κάθε $(n_1, \ldots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$. Τότε το $\widetilde{X}$ είναι κλειστό και μη κενό.

Πράγματι, για $x \in X$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\omega_n \in \Omega$ θέτοντας $\omega_n(n_1, \ldots, n_l) = T_1^{n_1+n} \cdots T_l^{n_l+n}x \in X$ για $n_1, \ldots, n_l \geqslant -n$ και ορίζοντας μια οποιαδήποτε τιμή στα άλλα σημεία. Το στοιχείο ω_n ικανοποιεί την (4.4) αν $n_i \geqslant -n$. Πράγματι

$$\begin{aligned}
T_i\omega_n(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_l) &= T_iT_1^{n_1+n} \cdots T_i^{n_i+n} \cdots T_l^{n_l+n}x \\
&= T_1^{n_1+n} \cdots T_i^{n_i+1+n} \cdots T_l^{n_l+n}x \\
&= \omega(n_1, \ldots, n_i + 1, \ldots, n_l) \\
&= S_i\omega(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_l)
\end{aligned}$$

για $i = 1, \ldots, l$. Άρα ένα οριακό σημείο της $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο Ω θα ανήκει στο $\widetilde{X}$ και άρα $\widetilde{X}$ είναι μη κενό. Ακόμα, το $\widetilde{X}$ είναι αναλλοίωτο από τους S_i, S_i^{-1} για κάθε $i = 1, \ldots, l$. Από Θεώρημα (4.7) έχουμε ότι υπάρχει $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ πολλαπλώς recurrent σημείο ως προς $S_1, \ldots, S_l$, δηλαδή υπάρχει $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία φυσικών αριθμών με $n_k \to \infty$, ώστε $S_i^{n_k}\widetilde{x} \to \widetilde{x}$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Δηλαδή για κάθε $(n_1, \ldots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$ και $i = 1 \ldots, l$ έχουμε $\widetilde{x}(n_1, \ldots, n_i + n_k, \ldots, n_l) \to$

$\widetilde{x}(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_l)$ καθώς $n_k \to \infty$. Οπότε $T_i^{n_k}\widetilde{x} \to \widetilde{x}$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Από την ισχύ της (4.4) έχουμε ότι κάθε συνιστώσα του $\widetilde{x}$ είναι πολλαπλώς recurrent σημείο ως προς $T_1, \ldots, T_l$. □

Από το Θεώρημα Furstenberg-Weiss παίρνουμε ως πόρισμα την τοπολογική έκφραση του πολυδιάστατου θεωρήματος van der Waerden.

Πόρισμα 4.9. Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, $T_1, T_2, \ldots, T_l : X \to X$ συνεχείς συναρτήσεις που ανά δύο μετατίθενται και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $x_0 \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\rho(T_i^{n_0}x_0, x_0) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, l$.

Πρόταση 4.10. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) Θεώρημα (2.3) Gallai

(ii) Πόρισμα (4.9)

Απόδειξη. (i)⇒ (ii). Για να δείξουμε το ζητούμενο αρκεί για δοσμένο πεπερασμένο υποσύνολο F του $\mathbb{N}^m$ να βρούμε C_i που να ικανοποιεί το συμπέρασμα. Πράγματι, υπάρχουν μόνο πεπερασμένες επιλογές για το C_i και επειδή μια ακολουθία F_n πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}^m$ μπορεί να επιλεγεί ώστε τα στοιχεία της να περιέχει όλα τα προηγούμενα (για παράδειγμα $F_n = \{1, \ldots, n\}^m$) και κάθε πεπερασμένο F περιέχεται σε κάποιο από αυτά. Ένα σύνολο C_j που ικανοποιεί το συμπέρασμα για άπειρα F_n (υπάρχει από αρχή του περιστερώνα) θα κάνει για όλα F.

Έστω $F = \{e_1, \ldots, e_l\} \subseteq \mathbb{N}^m$. Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, \ldots, r\}^{\mathbb{N}^m}$ που γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος, αν εφοδιαστεί με τη μετρική

$$\rho(\omega, \omega') = \inf \left\{ \frac{1}{k} : \omega(i_1, \ldots, i_m) = \omega'(i_1, \ldots, i_m) \text{ για } 1 \leqslant i_1, \ldots, i_m < k \right\}.$$

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $T_i : \Omega \to \Omega$ με $T_i\omega(n) = \omega(n + e_i)$, όπου $i = 1, \ldots, l$ και $n \in \mathbb{N}^m$.
Στη συνέχεια ορίζουμε ένα σημείο $\omega \in \Omega$ με $\omega(n) = i \Leftrightarrow n \in C_i$ και θέτουμε $X = \overline{\{T_1^{n_1} \cdots T_l^{n_l}\omega : n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}\}} \subseteq \Omega$, που είναι το μικρότερο $(T_1, \ldots, T_l)-$αναλλοίωτο κλειστό υποσύνολο του Ω που περιέχει το ω. Τότε από Θεώρημα Furstenberg-Weiss υπάρχουν $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\rho(T_1^n x, x) < 1, \ldots, \rho(T_l^n x, x) < 1$$

από το οποίο για $e = (1, \ldots, 1)$ έχουμε

$$x(e) = x(e + ne_1) = \ldots = x(e + ne_l).$$

Το x είναι στοιχείο του X, άρα θα είναι κοντά σε ένα στοιχείο της μορφής $T_1^{n_1} \cdots T_l^{n_l}\omega$ για κάποια $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ από το οποίο αν θέσουμε $a = e + n_1e_1 + \cdots + n_le_l$ έχουμε ότι αν $\omega(a) = j_0$, τότε

$$\omega(a) = \omega(a + ne_1) = \ldots = \omega(a + ne_l) \Leftrightarrow a + nF \subseteq C_{j_0}.$$

(i)$\Rightarrow$ (ii). Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, υπάρχουν $r \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_r \in X$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{i=1}^{r} S(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$.
Θέτουμε $A_1 = S(x_1, \frac{\varepsilon}{2})$, $A_2 = S(x_2, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus A_1$, $\ldots$, $A_r = S(x_r, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus \bigcup_{i=1}^{r} A_i$.
Θεωρούμε ένα $x \in X$ και θέτουμε $C_i = \{(n_1, \ldots, n_l) \in \mathbb{N}^l : T_1^{n_1} \cdots T_l^{n_l}x \in A_i\}$. Τα C_i ορίζουν μια διαμέριση του $\mathbb{N}^l$ σε r χρώματα. Θεωρούμε το $F = \{0, e_1, \ldots, e_l\} \subseteq \mathbb{N}^l$, όπου $0 = (0, \ldots, 0)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_l = (0, 0 \ldots, 1)$. Από υπόθεση υπάρχουν $1 \leqslant i_0 \leqslant r$, $a = (a_1, \ldots, a_l) \in \mathbb{N}^l$ και $b \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a + Fb \subseteq C_{i_0}$. Οπότε έχουμε ότι $T_1^{a_1} \cdots T_l^{a_l}x$, $T_1^{a_1+b} \cdots T_l^{a_l}x$, $\ldots$, $T_1^{a_1} \cdots T_l^{a_l+b}x \in A_{i_0}$ και άρα $T_1^{a_1} \cdots T_l^{a_l}x$, $T_1^{a_1+b} \cdots T_l^{a_l}x$, $\ldots$, $T_1^{a_1} \cdots T_l^{a_l+b}x \in S(x_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2})$. Θέτουμε $x_0 = T_1^{a_1+b} \cdots T_l^{a_l}x$ και έχουμε

$x_0, T_1^b x_0, \ldots, T_l^b x_0 \in S(x_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2})$. Οπότε

$$\rho(T_j^b x_0, x_0) \leqslant \rho(T_j^b x_0, x_{i_0}) + \rho(x_{i_0}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

για κάθε $j = 1, \ldots, l$. Θέτοντας $b = n_0$ έχουμε ότι $\rho(T_j^{n_0} x_0, x_0) < \varepsilon$ για κάθε $j = 1, \ldots, l$. □

Πόρισμα 4.11. Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ ομοιομορφισμός.Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, $l \in \mathbb{N}$ και $c_0, c_1, \ldots, c_{l-1} \in \mathbb{Z}$ υπάρχουν $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\rho(T^{c_i n} x, x) < \varepsilon$ για $i = 1, \ldots, l-1$ ταυτοχρόνως.

Απόδειξη. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Furstenberg-Weiss θέτοντας όπου $T_i = T^{c_i}$ για κάθε $i = 0, \ldots, l-1$. □

Παρατήρηση 4.12. Παρατηρούμε ότι από το Πόρισμα (4.11) θέτοντας $c_i = i+1$ για κάθε $i = 0, \ldots, l$ έχουμε την τοπολογική έκφραση του θεωρήματος van der Waerden.

Πόρισμα 4.13. Έστω (X, T) minimal τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο των σημείων που ικανοποιεί το Πόρισμα (4.11) είναι πυκνό στο X.

Απόδειξη. Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό μη κενό.Αφού το (X, T) είναι minimal από Πρόταση (3.8) έχουμε $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(U)$. Οπότε επειδή X είναι συμπαγής μετρικός χώρος μπορούμε να επιλέξουμε πεπερασμένη υποκάλυψη του X. Άρα $X = \bigcup_{j=1}^{k} T^{-n_j}(U)$.

Έστω τώρα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε όταν $\rho(y_1, y_2) < \delta$ για $y_1, y_2 \in X$ τότε $\rho(T^{n_j} y_1, T^{n_j} y_2) < \varepsilon$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ από ομοιόμορφη συνέχεια των T^{n_j}. Από Πόρισμα (4.11) μπορούμε να βρούμε $y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ με $\rho(T^{c_i n} y, y) < \delta$ για $i = 0, \ldots, l-1$. Τότε $y \in T^{-n_j}(U)$ για κάποιο $1 \leqslant j \leqslant k$ και θέτοντας $x = T^{n_j} y$ έχουμε ότι $x \in U$ και $\rho(T^{c_i n} x, x) < \varepsilon$ για κάθε $i = 0, \ldots, l-1$. □

Κεφάλαιο 5

Πολυωνυμικό Θεώρημα van der Waerden

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να αποδείξουμε μια πολυωνυμική εκδοχή του Θεωρήματος van der Waerden στην τοπολογική του μορφή, που στην ουσία είναι επέκταση του Θεωρήματος Furstenberg-Weiss για συναρτήσεις που μετατίθενται μεταξύ τους και έχουν για εκθέτες ακέραια πολυώνυμα Θεώρημα (5.1). Το Θεώρημα αυτό αποδείχθηκε το 1996 από τους Bergelson, Leibman χρησιμοποιώντας μια επαγωγική διαδικασία την οποία ονόμασαν PET-επαγωγή, η οποία στην ουσία είναι μια υπερπεπερασμένη επαγωγή σε ένα σύνολο πινάκων. Οι συγγραφείς στην απόδειξή τους χρησιμοποιούν το Θεώρημα Furstenberg-Weiss ως επαγωγική υπόθεση και στη συνέχεια ακολουθούν σε αρκετά σημεία την απόδειξη του Πολυδιάστατου Θεωρήματος van der Waerden των Furstenberg- Weiss.

Θεώρημα 5.1 (Πολυωνυμικό Θεώρημα van der Waerden). Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, $T_1, T_2, \ldots, T_t : X \to X$ ομοιομορφισμοί που ανά δύο μετατίθενται και $p_{1,1}(n), \ldots,$ $p_{1,t}(n)$, $p_{2,1}(n)$, $\ldots$, $p_{2,t}(n), \ldots,$ $p_{k,1}(n), \ldots,$ $p_{k,t}(n)$ πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές και χωρίς σταθερό όρο, δηλαδή $p_{i,j}(0) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, t$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\rho(T_1^{p_{i,1}(n)} T_2^{p_{i,2}(n)} \cdots T_t^{p_{i,t}(n)} x, x) < \varepsilon \tag{5.1}$$

για όλα τα $i = 1, \ldots, k$ ταυτοχρόνως.

5.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη του Πολυωνυμικού Θεωρήματος van der Waerden. Κατ' αρχήν θα λέμε **ακέραια πολυώνυμα** τα πολυώνυμα με ρητούς συντελεστές, που δίνουν ακέραιες τιμές στους ακεραίους και μηδέν στο μηδέν. Στη συνέχεια θέτουμε t το μέγιστο αριθμό συναρτήσεων που εμφανίζονται στην παράσταση της σχέσης (5.1) και έστω D ο μέγιστος βαθμός των πολυωνύμων $p_{i,j}(n), i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, t$, που εμφανίζονται στην ίδια σχέση.

Ορισμός 5.2. Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, $T_1, T_2, \ldots, T_t : X \to X$ ομοιομορφισμοί που ανά δύο μετατίθενται και $p_1(n), p_2(n) \ldots, p_t(n)$ ακέραια πολυώνυμα με $\deg(p_i(n)) \leqslant D, i = 1, \ldots, t$. Τότε παραστάσεις της μορφής $g(n) = T_1^{p_1(n)} T_2^{p_2(n)} \cdots T_t^{p_t(n)}$ θα τις λέμε **πολυωνυμικές παραστάσεις**.

Παρατήρηση 5.3. Το γινόμενο και τα αντίστροφα των πολυωνυμικών παραστάσεων είναι επίσης πολυωνυμικές παραστάσεις. Πράγματι αν $g(n) = T_1^{p_1(n)} \cdots T_t^{p_t(n)}$ και $h(n) = T_1^{q_1(n)} \cdots T_t^{q_t(n)}$ πολυωνυμικές παραστάσεις, τότε

$$gh(n) = T_1^{p_1(n)+q_1(n)} \cdots T_t^{p_t(n)+q_t(n)}$$

και

$$g^{-1}(n) = T_1^{-p_1(n)} \cdots T_t^{-p_t(n)}$$

είναι πολυωνυμικές παραστάσεις. Το σύνολο των πολυωνυμικών παραστάσεων είναι ομάδα και θα το συμβολίζουμε με **PE**.

Παρατηρούμε επίσης ότι η σύνθεση μιας πολυωνυμικής παράστασης με τη συνάρτηση μεταφοράς στο $\mathbb{Z}$ μας δίνει πάλι πολυωνυμική παράσταση. Πράγματι αν $g(n) = T_1^{p_1(n)} \cdots T_t^{p_t(n)} \in \mathbf{PE}$ τότε για κάθε $n_0 \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι

$$g^{-1}(n_0)g(n+n_0) = T_1^{p_1(n+n_0)-p_1(n_0)} \cdots T_t^{p_t(n+n_0)-p_t(n_0)} \in \mathbf{PE}$$

οπότε για κάθε $n_0 \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι,

$$g(n+n_0) = T_1^{p_1(n+n_0)} \cdots T_t^{p_t(n+n_0)} \in \mathbf{PE}.$$

Ορισμός 5.4. Έστω $g(n) = T_1^{p_1(n)} \cdots T_t^{p_t(n)}$ μια πολυωνυμική παράσταση. Ορίζουμε ως **βαθμό** της $g(n)$ και συμβολίζουμε με $\deg(g(n))$ την ποσότητα $\deg(g(n)) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant t}\{\deg(p_i(n))\}$.

Ορισμός 5.5. Έστω $g(n) = T_1^{p_1(n)} \cdots T_t^{p_t(n)}$ μια πολυωνυμική παράσταση. **Βάρος** της $g(n)$ θα λέμε το ζεύγος των ακεραίων (r,d) που ορίζεται από τη συνθήκη $\deg(p_{r+1}(n)) = \ldots = \deg(p_t(n)) = 0, \deg(p_r(n)) = d \geqslant 1$ και θα το συμβολίζουμε με $w(g(n))$. Επίσης θα λέμε ότι το βάρος (r,d) είναι μεγαλύτερο από το (s,e) αν $r > s$ ή αν $r = s$ τότε $d > e$.

Παράδειγμα 5.6. Η πολυωνυμική παράσταση $T_1^n T_2^0 \cdots T_t^0$ έχει βαθμό 1 και βάρος $(1,1)$.

Παράδειγμα 5.7. Η πολυωνυμική παράσταση $T_1^{9n^2+4n} T_2^{3n^7+7n^4} T_3^{3n^2+19n} T_4^0 T_5^0$ έχει βαθμό 7 και βάρος $(3,2)$.

Ορισμός 5.8. Έστω δύο πολυωνυμικές παραστάσεις $g(n) = T_1^{p_1(n)} \cdots T_t^{p_t(n)}$ και $h(n) = T_1^{q_1(n)} \cdots T_t^{q_t(n)}$. Θα λέμε ότι είναι **ισοδύναμες**, αν έχουν το ίδιο βάρος (r, d) και αν οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των πολυωνύμων $p_r(n), q_r(n)$ ταυτίζονται επίσης.

Ορισμός 5.9. Έστω C ένα σύνολο ισοδύναμων πολυωνυμικών παραστάσεων. Ορίζουμε σαν **βάρος** του C και θα το συμβολίζουμε με $w(C)$ βάρος των στοιχείων του.

Ορισμός 5.10. Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του του **PE** θα το λέμε **σύστημα**. **Βαθμό** ενός συστήματος θα λέμε το μέγιστο βαθμό των στοιχείων του και για κάθε σύστημα ορίζουμε τον **πίνακα βάρους** του συστήματος

$$\begin{pmatrix} N_{1,1} & \cdots & N_{1,D} \\ \vdots & N_{r,d} & \vdots \\ N_{t,1} & \cdots & N_{t,D} \end{pmatrix}$$

όπου D είναι ο βαθμός του συστήματος, t είναι το πλήθος των ομοιομορφισμών που εμφανίζονται και $N_{r,d}$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας που σχηματίζονται από τα στοιχεία του συστήματος που έχουν βάρος (r, d).

Παράδειγμα 5.11. Θεωρούμε το σύστημα $\{T_1^{19n}T_2^0, T_1^{6n^2}T_2^0, T_1^{7n^2+19n}T_2^0,$ $T_1^{7n^2}T_2^0, T_1^{4n^2}T_2^{n^2}, T_1^{n^2}T_2^{3n^3}, T_1^{n^2}T_2^{3n^3+2n}, T_1^nT_2^{2n^3+3n}, T_1^{10n^5}T_2^{n^3+4n^2+4n}, T_1^0T_2^{n^3+2n}$ $, T_1^{n^5}T_2^{n^3+n^2}\}$ με μέγιστο αριθμό συναρτήσεων $t = 2$. Τότε το σύστημα έχει βαθμό $D = 5$ και ο πίνακας βάρους του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.2 PET-Επαγωγή

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την PET-επαγωγή η οποία είναι στην ουσία μια επαγωγή σ' ένα καλά διατεταγμένο σύνολο. Συγκεκριμένα το σύνολο πινάκων βάρους.

Πρόταση 5.12. Το σύνολο πινάκων βάρους συστημάτων είναι καλά διατεταγμένο σύνολο.

Απόδειξη. Θα καθορίσουμε τη διάταξη των πινάκων σύμφωνα με την παρακάτω συνάρτηση h. Θεωρούμε την αντιστοιχία $h : M_{tD}(\mathbb{N}) \to \omega^{tD}$ όπου

$$M_{tD} = \{ \text{ Το σύνολο των } tD \text{ πινάκων με στοιχεία από το } \mathbb{N}\}$$

και

$$\omega^{tD} = \{\eta \text{ διατακτικός αριθμός } : \eta < \omega^{tD}\}.$$

Οπότε σε κάθε πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,D} \\ \vdots & a_{r,d} & \vdots \\ a_{t,1} & \cdots & a_{t,D} \end{pmatrix}$$

αντιστοιχούμε ένα διατακτικό αριθμό της μορφής $\xi = \omega^{tD-1} \cdot a_{t,D} + \ldots + \omega^{D(t-1)} \cdot a_{t,1} + \ldots + \omega^{D(r-1) \cdot a_{r,d} + d-1} + \ldots + \omega^{D-1} \cdot a_{1,D} + \ldots + \omega^2 \cdot a_{1,3} + \omega \cdot a_{1,2} + a_{1,1}$. Η αντιστοιχία h είναι καλά ορισμένη. Πράγματι αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,D} \\ \vdots & a_{r,d} & \vdots \\ a_{t,1} & \cdots & a_{t,D} \end{pmatrix}$$

ένας πίνακας τότε $h(A) = \omega^{tD-1} \cdot a_{t,D} + \ldots + \omega^{D(t-1)} \cdot a_{t,1} + \ldots + \omega^{D(r-1) \cdot a_{r,d} + d-1} + \ldots + \omega^{D-1} \cdot a_{1,D} + \ldots + \omega^2 \cdot a_{1,3} + \omega \cdot a_{1,2} + a_{1,1}$ που είναι διατακτικός αριθμός και $h(A) < \omega^{tD}$. Οπότε, $h(A) \in \omega^{tD}$.

Η h είναι 1-1 και επί. Πράγματι κάθε διατακτικός αριθμός $\xi < \omega^k$ έχει μοναδική Cantor κανονική αναπαράσταση $\xi = \omega^{k-1}\cdot a_{k-1}+\ldots+\omega\cdot a_1+a_0$ όπου $a_i \in \mathbb{N}$ για κάθε $i = 1, \ldots k-1$. Στην περίπτωσή μας για $k = tD$ αν $\xi = \omega^{tD-1}\cdot a_{tD-1}+\ldots+\omega^{D(t-1)}\cdot a_{(Dt-1)}+\ldots+\omega^{D(r-1)+d-1}\cdot a_{D(r-1)+d-1}+\ldots+\omega^{D-1}\cdot a_{D-1}+\ldots+\omega\cdot a_1+a_0$ ένας διατακτικός αριθμός τότε θεωρώντας τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,D} \\ \vdots & a_{r,d} & \vdots \\ a_{t,1} & \cdots & a_{t,D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_{D-1} \\ \vdots & a_{D(r-1)+d-1} & \vdots \\ a_{D(t-1)} & \cdots & a_{tD-1} \end{pmatrix}$$

έχουμε ότι $h(A) = \xi$ άρα η h είναι επί. Επίσης από τη μοναδικότητα της Cantor κανονικής αναπαράστασης διατακτικού αριθμού έχουμε ότι η h είναι 1-1.

Έστω τώρα ένας πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,D} \\ \vdots & b_{r,d} & \vdots \\ b_{t,1} & \cdots & b_{t,D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_{D-1} \\ \vdots & b_{D(r-1)+d-1} & \vdots \\ b_{D(t-1)} & \cdots & b_{tD-1} \end{pmatrix}.$$

Στον B αντιστοιχούμε τον διατακτικό αριθμό

$$\eta = \omega^{tD-1} \cdot b_{tD-1} + \ldots + \omega^{D(r-1)+d-1} \cdot b_{D(r-1)+d-1} + \ldots + \omega \cdot b_1 + b_0.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε διάταξη στο σύνολο των πινάκων βάρους ως εξής

$$A < B \Leftrightarrow h(A) < h(B) \Leftrightarrow \xi < \eta$$

όπου $\xi < \eta$ σημαίνει ότι για το $\max\{0 \leqslant i \leqslant tD-1 : a_i \neq b_i\}$ έχουμε $a_i < b_i$.

Το ω^{tD} είναι καλά διατεταγμένο σύνολο, οπότε το σύνολο των πινάκων βάρους είναι καλά διατεταγμένο σύνολο. $\square$

Παρατήρηση 5.13. Σύμφωνα με τη διάταξη που ορίσαμε στο σύνολο των πινάκων έχουμε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_{D-1} \\ \vdots & a_{D(r-1)+d-1} & \vdots \\ a_{D(t-1)} & \cdots & a_{tD-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_{D-1} \\ \vdots & a_{D(r-1)+d-1} & \vdots \\ b_{D(t-1)} & \cdots & b_{tD-1} \end{pmatrix}$$

τότε $A < B \Leftrightarrow$ για το $\max\{0 \leqslant i \leqslant tD-1 : a_i \neq b_i\}$ έχουμε $a_i < b_i$.

Οπότε οι πίνακες διατάσσονται $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} <$

$$\ldots < \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} <$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < \ldots < \begin{pmatrix} * & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < \ldots <$$

$$\begin{pmatrix} * & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < \ldots < \begin{pmatrix} * & * & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < \ldots < \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Θα αποδείξουμε το Πολυωνυμικό Θεώρημα van der Waerden στην ειδική περίπτωση για $t = 1$ με $p_{1,1} = n^2$.

Θεώρημα 5.14. Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, $T : X \to X$ ομοιομορφισμός και $p(n) = n^2$ ένα πολυώνυμο. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(T^{p(n)}x, x) < \varepsilon$.

Απόδειξη. Θα βρούμε ακολουθία $x_0, x_1, \ldots$ σημείων του X και ακολουθία $n_1, n_2, \ldots$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\rho(T^{(n_m+\ldots+n_{l+1})^2}x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } l, m \in \mathbb{N}, l < m.$$

Επιλέγουμε ένα $x_0 \in X$ τυχόν και θέτουμε $x_1 = T^{-n_1{}^2}x_0$ για $n_1 = 1$ οπότε $\rho(Tx_1, x_0) = \rho(x_0, x_0) = 0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Έστω τώρα $0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ τέτοιο ώστε να έχουμε $\rho(T^{n_1^2}y, x_o) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $y \in X$ με $\rho(y, x_1) < \varepsilon_1$. Από Πόρισμα (4.11) (για $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}, l = 1, c_0 = 2n_1$) βρίσκουμε $y_1 \in X$ και $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\rho(y_1, x_1) < \frac{\varepsilon_1}{2}$ και $\rho(T^{2n_1n_2}y_1, y_2) < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Θέτοντας $x_2 = T^{-n_2{}^2}y_1$ παίρνουμε

$$\rho(T^{n_2^2}x_2, x_1) = \rho(y_1, x_1) < \frac{\varepsilon_1}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

επίσης,

$$\rho(T^{2n_1n_2+n_2^2}x_2, x_1) \leqslant \rho(T^{2n_1n_2}y_1, y_1) + \rho(y_1, x_1) < \varepsilon_1$$

και επομένως από την επιλογή του ε_1

$$\rho(T^{(n_1+n_2)^2}x_2, x_0) = \rho(T^{n_1^2}T^{2n_1n_2+n_2^2}x_2, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έστω ότι έχουν βρεθεί x_m, n_m στη συνέχεια θα βρούμε x_{m+1}, n_{m+1}. Επιλέγουμε ε_m, με $0 < \varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2}$ τέτοιο ώστε όταν $\rho(y, x_m) < \frac{\varepsilon_m}{2}$, τότε

$$\rho(T^{(n_m+\ldots+n_{l+1})^2}y, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}, l = 1, \ldots, m-1,$$

από ομοιόμορφη συνέχεια βρίσκουμε χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (4.11) (για $\varepsilon = \frac{\varepsilon_m}{2}, l = m, c_i = 2(n_m + \ldots + n_{i+1}$ για κάθε $l = 0, 1, \ldots, m-1)y_m, n_{m+1}$ τέτοια ώστε

$$\rho(y_m, x_m) < \frac{\varepsilon_m}{2}, \rho(T^{2(n_m+\ldots+n_{l+1})n_{m+1}}y_m, y_m) < \frac{\varepsilon_m}{2}, l = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Θέτοντας $x_{m+1} = T^{-n_{m+1}^2}y_m$ παίρνουμε

$$\rho(T^{2(n_m+\ldots+n_{l+1})n_{m+1}+n_{m+1}^2}x_{m+1}, x_m) \leqslant \rho(T^{2(n_m+\ldots+n_{l+1})n_{m+1}}y_m, y_m) + \rho(y_m, x_m) < \varepsilon_m, l = 0, 1, \ldots, m-1$$

και επομένως από την επιλογή του ε_m έχουμε,

$$\rho(T^{n_{m+1}^2}x_{m+1}, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

και την ομοιόμορφη συνέχεια του $T^{(n_{m+1}+\ldots+n_{l+1})^2}$ παίρνουμε

$$\rho(T^{(n_{m+1}+\ldots+n_{l+1})^2}x_{m+1}, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για } l = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Οπότε δείξαμε ότι

$$\rho(T^{(n_m+\ldots+n_{l+1})^2}x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } l, m \in \mathbb{N} \text{ για } l < m. \tag{5.2}$$

Αφού ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος για $l < m$ έχουμε ότι

$$\rho(x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.3}$$

Οπότε από τις (5.2) και (5.3) έχουμε

$$\rho(T^{(n_m+\ldots+n_{l+1})^2}x_m, x_m) \leqslant \rho(T^{(n_m+\ldots+n_{l+1})^2}x_m, x_l) + \rho(x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{5.4}$$

Θέτοντας στην (5.4) όπου $x_m = x$ και $n = n_m + \ldots + n_{l+1}$ έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή

$$\rho(T^{n^2}x, x) < \varepsilon.$$

□

Παρατήρηση 5.15. Παρατηρούμε ότι στο παραπάνω Θεώρημα το σύστημα $\{T^{n^2}\}$ έχει πίνακα βάρους $(0, 1)$ ενώ το σύστημα $\{T^{c_0 n}, \ldots, T^{c_{l-1}n}\}$ έχει πίνακα βάρους $(l, 0)$.

5.3 Απόδειξη Πολυωνυμικού Θεωρήματος van der Waerden

Είδαμε ότι κάθε σε κάθε σύστημα αντιστοιχούμε ένα πίνακα βάρους $t \times D$. Εφόσον το σύνολο των $t \times D$ πινάκων με τη διάταξη που ορίσαμε είναι καλά διατεταγμένο σύνολο, θα αποδείξουμε το θεώρημα (5.1) με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο ω^{tD}. Αυτή η επαγωγή αντιστοιχεί στην PET-επαγωγή των Bergelson-Leibman [BL].

Θεώρημα (Πολυωνυμικό Θεώρημα van der Waerden). Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, $T_1, T_2, \ldots, T_t : X \to X$ ομοιομορφισμοί που ανά δύο μετατίθενται και $p_{1,1}(n)$, …,$p_{1,t}(n)$, $p_{2,1}(n)$, …, $p_{2,t}(n)$, …, $p_{k,1}(n)$, …, $p_{k,t}(n)$ πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές και χωρίς σταθερό όρο,δηλαδή $p_{i,j}(0) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, t$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\rho(T_1^{p_{i,1}(n)} T_2^{p_{i,2}(n)} \cdots T_t^{p_{i,t}(n)} x, x) < \varepsilon$$

για όλα τα $i = 1, \ldots, k$ ταυτοχρόνως.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη μεταθετική ομάδα G που παράγεται από τους $T_1, T_2, \ldots,$ T_t και μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι (X, G) είναι minimal

Πρώτα απ' όλα παρατηρούμε ότι το θεώρημα ισχύει τετριμμένα αν στις πολυωνυμικές παραστάσεις $g_i(n) = T_1^{p_{i,1}(n)} T_2^{p_{i,2}(n)} \cdots T_t^{p_{i,t}(n)}, i = 1, \ldots, k$ τα πολυώνυμα $p_{i,j}$ είναι μηδενικά για κάθε $i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, t$

Θα δείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε σύστημα. Θεωρούμε ένα σύστημα $A = \{g_1(n), g_2(n), \ldots, g_k(n)\}$, όπου $g_i(n) = T_1^{p_{i,1}(n)} T_2^{p_{i,2}(n)} \cdots T_t^{p_{i,t}(n)}, i = 1, \ldots, k$. Θα δείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει για το A υποθέτοντας ότι το θεώρημα ισχύει για συστήματα με πίνακες βάρους μικρότερους από αυτόν του A.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι το $g_1(n)$ είναι το στοιχείο του A με το μικρότερο δυνατό βάρος. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το A δεν περιέχει τετριμμένες πολυωνυμικές παραστάσεις, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w(g_1(n)) \geqslant (1,1)$. Θεωρούμε το σύστημα

$$A_0 = \{g_2(n)g_1^{-1}(n), g_3(n)g_1^{-1}(n) \ldots, g_k(n)g_1^{-1}(n)\} \subseteq \mathbf{PE}.$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του A που δεν είναι ισοδύναμα με το

$$g_1(n) = T_1^{p_{1,1}(n)} T_2^{p_{1,2}(n)} \cdots T_t^{p_{1,t}(n)}$$

δεν αλλάζουν το βάρος τους και την ισοδυναμία με τα άλλα στοιχεία, όταν τα πολλαπλασιάσουμε με το

$$g_1^{-1}(n) = T_1^{-p_{1,1}(n)} T_2^{-p_{1,2}(n)} \cdots T_t^{-p_{1,t}(n)}.$$

Πράγματι έστω $w(g_1(n)) = (r,d) \geqslant (1,1)$. Στη συνέχεια θεωρούμε ένα $g_i(n) = T_1^{p_{i,1}(n)} T_2^{p_{i,2}(n)} \cdots T_t^{p_{i,t}(n)} \in A$ που δεν είναι ισοδύναμο με το $g_1(n)$ τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

1. $w(g_i(n)) = (r,d)$.

   Δηλαδή $g_i(n)$ και $g_1(n)$ έχουν το ίδιο βάρος. Τότε

$$\begin{aligned} \deg(p_{i,r+1}(n)) = \ldots = \deg(p_{i,t}(n)) &= 0 \\ \deg(p_{1,r+1}(n)) = \ldots = \deg(p_{1,t}(n)) &= 0 \end{aligned}$$

   και

$$\deg(p_{i,r}(n)) = d = \deg(p_{1,r}(n))$$

   Επειδή $g_i(n)$ δεν είναι ισοδύναμο με το $g_1(n)$, έπεται ότι οι μεγιστοβάθμιοι όροι των $p_{i,r}(n)$ και $p_{1,r}(n)$ είναι διαφορετικοί, οπότε αν $p_{i,r}(n) = a_{i,d}n^d + \ldots + a_{i,1}n$ και $p_{1,r}(n) = a_{1,d}n^d + \ldots + a_{1,1}n$, τότε $a_{i,r} \neq a_{1,r}$. Άρα

$$g_i(n)g_1^{-1}(n) = T_1^{p_{i,1}(n)-p_{1,1}(n)} T_2^{p_{i,2}(n)-p_{1,2}(n)} \cdots T_r^{p_{i,r}(n)-p_{1,r}(n)}$$

όπου $p_{i,r}(n)-p_{1,r}(n) = (a_{i,d}-a_{1,d})n^d+\ldots+(a_{i,1}-a_{1,1})n$, άρα $\deg(g_i(n)g_1^{-1}(n)) = d$ και $w(g_i(n)g_1^{-1}(n)) = (r,d)$.

2. $w(g_i(n)) = (s,e)$

   (α′) Έστω $s > r$.
   Τότε αν $g_i(n) = T_1^{p_{i,1}(n)}T_2^{p_{i,2}(n)}\cdots T_s^{p_{i,s}(n)}$, έχουμε ότι

   $$g_i(n)g_1^{-1}(n) = T_1^{p_{i,1}(n)-p_{1,1}(n)}T_2^{p_{i,2}(n)-p_{1,2}(n)}\cdots T_r^{p_{i,r}(n)-p_{1,r}(n)}\cdots T_s^{p_{i,s}(n)}.$$

   Οπότε $w(g_i(n)g_1^{-1}(n)) = (s,e)$.

   (β′) Αν $s = r$ τότε $e > d$. Τότε $g_1(n) = T_1^{p_{1,1}(n)}T_2^{p_{1,2}(n)}\cdots T_r^{p_{1,r}(n)}$ με $\deg(p_{i,r}(n)) = e > d$. Οπότε $p_{i,r}(n) = a_{i,e}n^e+\ldots+a_{i,d}n^d+\ldots+a_{i,1}n$ και $p_{1,r}(n) = a_{1,d}n^d+\ldots+a_{1,1}n$. Τότε

   $$g_i(n)g_1^{-1}(n) = T_1^{p_{i,1}(n)-p_{1,1}(n)}T_2^{p_{i,2}(n)-p_{1,2}(n)}\cdots T_r^{p_{i,r}(n)-p_{1,r}(n)}$$

   και

   $$p_{i,r}(n)-p_{1,r}(n) = a_{i,e}n^e+\ldots+(a_{i,d}-a_{1,d})n^d+\ldots+(a_{i,1}-a_{1,1})n.$$

   Άρα $\deg(p_{i,r}(n)-p_{1,r}(n)) = e = \deg(p_{i,r}(n))$ και ο μεγιστοβάθμιος όρος του $p_{i,r}(n)-p_{1,r}(n)$ είναι ίδιος μ' αυτόν του $p_{i,r}(n)$. Οπότε $w(g_i(n)g_1^{-1}(n)) = (s,e) = w(g_i(n))$.

Από την άλλη τα βάρη των στοιχείων του A που είναι ισοδύναμα με το $g_1(n)$ μειώνονται, αφού πολλαπλασιαστούν με το $g_1^{-1}(n)$.
Πράγματι αν $g_i(n) = T_1^{p_{i,1}(n)}T_2^{p_{i,2}(n)}\cdots T_r^{p_{i,r}(n)} \in A$ ισοδύναμο με το $g_1^{-1}(n)$ τότε

$$g_i(n)g_1^{-1}(n) = T_1^{p_{i,1}(n)-p_{1,1}(n)}T_2^{p_{i,2}(n)-p_{1,2}(n)}\cdots T_r^{p_{i,r}(n)-p_{1,r}(n)}$$

όπου

$$\deg(p_{i,r}(n)) = d = \deg(p_{1,r}(n))$$

και οι μεγιστοβάθμιοι όροι των αντίστοιχων πολυωνύμων είναι ίσοι. Τότε $\deg(p_{i,r}(n) - p_{1,r}(n)) < \deg(p_{i,r}(n)) = d$, άρα και $w(g_i(n)g_1^{-1}(n)) < w(g_i(n)) = (r, d)$. Οπότε σε κάθε περίπτωση το βάρος θα μειωθεί. Επομένως ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας με το ελάχιστο βάρος θα μειωθεί κατά ένα.

Έτσι αν το σύστημα A έχει πίνακα βάρους της μορφής

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_{r,d} & N_{r,d+1} & \cdots & N_{r,D} \\ N_{r+1,1} & \cdots & N_{r+1,d-1} & N_{r+1,d} & N_{r+1,d+1} & \cdots & N_{r+1,D} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{t,1} & \cdots & N_{t,d-1} & N_{t,d} & N_{t,d+1} & \cdots & N_{t,D} \end{pmatrix}$$

τότε το A_0 έχει πίνακα βάρους της μορφής

$$M_0 = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & N_{r,d}-1 & N_{r,d+1} & \cdots & N_{r,D} \\ N_{r+1,1} & \cdots & N_{r+1,d-1} & N_{r+1,d} & N_{r+1,d+1} & \cdots & N_{r+1,D} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{t,1} & \cdots & N_{t,d-1} & N_{t,d} & N_{t,d+1} & \cdots & N_{t,D} \end{pmatrix}$$

Ο M αντιστοιχεί σε ένα διατακτικό αριθμό

$$\xi_M = \sum_{i=0}^{tD-1} \omega^i \cdot N_i$$

όπου $N_i = 0$ για $1 \leqslant i < D(r-1)+d-1$ και $N_i = N_{s,e}$ αν $i = D(s-1)+e-1$ για $1 \leqslant e \leqslant D$ και $1 \leqslant s \leqslant t$ και ο M_0 αντιστοιχεί σε ένα διατακτικό αριθμό

$$\xi_{M_0} = \sum_{i=0}^{tD-1} \omega^i \cdot N_i'$$

όπου $N_i' = N_i$ για $D(r-1)+d-1 < i \leqslant tD-1$, $N_i' = N_{r,d}-1$ για $i = D(r-1)+d-1$ και $N_i' = *$ για $0 \leqslant i < D(r-1)+d-1$, όπου $* \in \mathbb{N}$ και κάποια από αυτά μη μηδενικά.
Οπότε $\max\{0 \leqslant i \leqslant tD-1 : N_i \neq N_i'\} = D(r-1)+d-1$ και

$$N'_{D(r-1)+d-1} = N_{r,d} - 1 < N_{r,d} = N_{D(r-1)+d-1}.$$

Άρα έχουμε ότι $\xi_{M_0} < \xi_M$ και άρα $M_0 < M$.
Οπότε από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι το Θεώρημα (5.1) ισχύει για το σύστημα A_0. Άρα υπάρχει $y_0 \in X$ και $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\rho(g_i(n_1)g_1^{-1}(n_1)y_0, y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για } i = 2, \ldots, k.$$

Παρατηρούμε ότι αν $k = 1$ ισχύει για κάθε $y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$.
Θέτουμε $x_0 = y_0$ και $x_1 = g_1^{-1}(n_1)y_0$. Τότε $g_1(n_1)x_1 = x_0$ και

$$\rho(g_i(n_1)x_1, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για } i = 2, \ldots, k.$$

Θα κατασκευάσουμε ακολουθία σημείων $x_0, x_1, x_2 \ldots \in X$ και ακολουθία φυσικών αριθμών $n_1, n_2, \ldots$ τέτοια ώστε για κάθε $l, m \in \mathbb{N}$ με $l < m$ να έχουμε

$$\rho(g_i(n_m + \ldots + n_{l+1})x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για } i = 1, \ldots, k. \tag{5.5}$$

Έστω ότι έχουμε βρει $x_0, x_1, \ldots, x_m \in X$ και $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ που να ικανοποιούν την (5.5). Επίσης η (5.5) ισχύει και για κάθε σημείο που είναι ε_m κοντά στα x_m για κάποιο $\varepsilon_m, 0 < \varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2}$.
Πράγματι έστω $0 < \varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2}$ και $y \in X$ με $\rho(y, x_m) < \varepsilon_m$, τότε από ομοιόμορφη συνέχεια των πολυωνυμικών παραστάσεων $g_i(n_m, + \ldots n_{l+1})$ έχουμε ότι

$$\rho(g_i(n_m, + \ldots + n_{l+1})y, g_i(n_m, + \ldots + n_{l+1})x_m) < \frac{\varepsilon}{2} - \rho(g_i(n_m, + \ldots + n_{l+1})x_m, x_l).$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\rho(g_i(n_m,+\ldots+n_{l+1})y,x_l)\leqslant&\rho(g_i(n_m,+\ldots+n_{l+1})y,g_i(n_m,+\ldots+n_{l+1})x_m)\\&+\rho(g_i(n_m,+\ldots+n_{l+1})x_m,x_l)\\\leqslant&\frac{\varepsilon}{2}-\rho(g_i(n_m+\ldots+n_{l+1})x_m,x_l)\\&+\rho(g_i(n_m+\ldots+n_{l+1})x_m,x_l)=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Αφού (X,G) είναι minimal από απόδειξη του Λήμματος (4.5) έχουμε ότι υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο στοιχείων του G , έστω $S_1,\ldots,S_r\in G$, τέτοια ώστε για κάθε $y\in X$ υπάρχει $t=t(y)\leqslant r$ ώστε να έχουμε

$$\rho(S_ty,x_m)<\frac{\varepsilon_m}{2}$$

Στη συνέχεια από ομοιόμορφη συνέχεια του S_t επιλέγουμε $\delta_m>0$ ώστε αν $y'\in X$ με $\rho(y,y')<\delta_m$, να έχουμε

$$\rho(S_ty,S_ty')<\frac{\varepsilon_m}{2}$$

Άρα όταν $\rho(y,y')<\delta_m$ έχουμε

$$\rho(S_ty',x_m)\leqslant\rho(S_ty,S_ty')+\rho(S_ty,x_m)<\frac{\varepsilon_m}{2}+\frac{\varepsilon_m}{2}=\varepsilon_m \tag{5.6}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε το σύστημα

$$A_m = \left\{ \begin{array}{rcl} g_{1,m}(n) & = & g_1(n)g_1^{-1}(n), \\ g_{2,m}(n) & = & g_2(n)g_1^{-1}(n), \\ & \vdots & \\ g_{k,m}(n) & = & g_k(n)g_1^{-1}(n), \\ g_{1,m-1}(n) & = & g_1^{-1}(n_m)g_1(n+n_m)g_1^{-1}(n), \\ g_{2,m-1}(n) & = & g_2^{-1}(n_m)g_2(n+n_m)g_1^{-1}(n), \\ & \vdots & \\ g_{k,m-1}(n) & = & g_k^{-1}(n_m)g_k(n+n_m)g_1^{-1}(n), \\ & \vdots & \\ g_{1,0}(n) & = & g_1^{-1}(n_m+\ldots+n_1)g_1(n+n_m+\ldots+n_1)g_1^{-1}(n), \\ g_{2,0}(n) & = & g_2^{-1}(n_m+\ldots+n_1)g_2(n+n_m+\ldots+n_1)g_1^{-1}(n), \\ & \vdots & \\ g_{k,0}(n) & = & g_k^{-1}(n_m+\ldots+n_1)g_k(n+n_m+\ldots+n_1)g_1^{-1}(n), \end{array} \right\}$$

Αν μια πολυωνυμική παράσταση $g_{i_0}(n) = T_1^{p_{i_0,1}(n)}T_2^{p_{i_0,2}(n)}\cdots T_s^{p_{i_0,s}(n)}$ δεν είναι ισοδύναμη με την $g_1(n) = T_1^{p_{1,1}(n)}T_2^{p_{1,2}(n)}\cdots T_r^{p_{1,r}(n)}$, τότε οι πολυωνυμικές παραστάσεις $g_{i_0,0}(n),\ldots g_{i_0,m}(n) \in A_m$ έχουν το ίδιο βάρος με την $g_{i_0}(n)$. Πράγματι διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1. $w(g_{i_0}(n)) = (r,d)$.
   Αν $j = 1,\ldots m$, έχουμε ότι

   $$g_{i_0,j}(n) = g_{i_0}^{-1}(n_m+\ldots+n_{j+1})g_{i_0}(n+n_m+\ldots+n_{j+1})g_1^{-1}(n),$$

   οπότε
   $$g_{i_0,j}(n) = T_1^{q_{i_0,1}^j(n)}\cdots T_r^{q_{i_0,r}^j(n)}$$

   όπου $q_{i_0,\kappa}^j(n) = p_{i_0,\kappa}(n+n_m\ldots+n_{j+1}) - p_{i_0,\kappa}(n_m+\ldots+n_{j+1}) - p_{1,\kappa}(n)$ για $\kappa = 1,\ldots,r$. Επειδή $w(g_{i_0}(n)) = (r,d) = w(g_1(n))$ έχουμε ότι

$\deg(p_{i_0,r}(n)) = \deg(p_{1,r}(n))$. Επίσης $\deg(p_{i_0,r}(n)) = \deg(p_{i_0,r}(n + n_m + \ldots + n_{j+1}))$ και επειδή $g_{i_0}(n)$ δεν είναι ισοδύναμη με την $g_1(n)$ έχουμε ότι τα πολυώνυμα $p_{i_0,r}(n)$ και $p_{1,r}(n)$ έχουν διαφορετικούς μεγιστοβάθμιους όρους, οπότε $\deg(q^j_{i_0,r}(n)) = d$. Άρα η $g_{i_0}(n)$ έχει το ίδιο βάρος με τις $g_{i_0,0}(n), \ldots g_{i_0,m}(n)$.

2. $w(g_{i_0}(n)) = (s, e)$.

   (α′) $s > r$.

   Τότε για $j = 1, \ldots m$ έχουμε ότι

   $$g_{i_0,j}(n) = g^{-1}_{i_0}(n_m + \ldots + n_{j+1})g_{i_0}(n + n_m + \ldots + n_{j+1})g^{-1}_1(n)$$

   οπότε

   $$g_{i_0,j}(n) = T_1^{q^j_{i_0,1}(n)} \cdots T_r^{q^j_{i_0,r}(n)} \cdots T_s^{q^j_{i_0,s}(n)}$$

   όπου

   $$q^j_{i_0,\kappa}(n) = p_{i_0,\kappa}(n + n_m \ldots + n_{j+1}) - p_{i_0,\kappa}(n_m + \ldots + n_{j+1}) - p_{1,\kappa}(n)$$

   για $\kappa = 1, \ldots, r$ και

   $$q^j_{i_0,\kappa}(n) = p_{i_0,\kappa}(n + n_m \ldots + n_{j+1}) - p_{i_0,\kappa}(n_m + \ldots + n_{j+1})$$

   για $\kappa = r + 1, \ldots, s$.

   Οπότε $\deg(q^j_{i_0,r}(n)) = \deg(p_{i_0,r}(n + n_m + \ldots + n_{j+1}))$ και επειδή $\deg(p_{i_0,r}(n)) = \deg(p_{i_0,r}(n+n_m+\ldots+n_{j+1}))$ έχουμε ότι $w(g_{i_0}(n)) = w(g_{i_0,j}(n))$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$.

   (β′) Αν $s = r$, τότε $e > d$.

   Οπότε

   $$g_{i_0,j}(n) = T_1^{q^j_{i_0,1}(n)} \cdots T_r^{q^j_{i_0,r}(n)}$$

για $j = 1, \ldots, m$,όπου

$$q^j_{i_0,\kappa}(n) = p_{i_0,\kappa}(n + n_m \ldots + n_{j+1}) - p_{i_0,\kappa}(n_m + \ldots + n_{j+1}) - p_{1,\kappa}(n)$$

για $\kappa = 1, \ldots, r$. Τότε επειδή $\deg(p_{i_0,r}(n)) > \deg(p_{1,r}(n))$ έχουμε ότι $\deg(q^j_{i_0,r}(n)) = \deg(p_{i_0,r}(n)$ και άρα $w(g_{i_0}(n)) = w(g_{i_0,j}(n))$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$.

Επίσης αν $g_{i_0}(n)$ είναι ισοδύναμη με κάποια $g_l(n)$, τότε $g_{i_o,\kappa}$ είναι ισοδύναμες με τις $g_{i_0,\lambda}$ για κάθε $\kappa, \lambda = 1, \ldots, m$.
Πράγματι αν $w(g_{i_0}(n)) = (s, e)$ και επειδή $g_{i_0}(n)$ είναι ισοδύναμη με την $g_l(n)$, τότε $w(g_{i_0}(n)) = w(g_l(n))$ και άρα $w(g_{i_0,\kappa}(n)) = w(g_{i_0}(n)) = w(g_l(n)) = w(g_{l,\lambda}(n))$ για κάθε $\kappa, \lambda = 1, \ldots, m$. Οπότε αν

$$g_{i_0}(n) = T_1^{p_{i_0,1}(n)} T_2^{p_{i_0,2}(n)} \cdots T_s^{p_{i_0,s}(n)}$$

και

$$g_l(n) = T_1^{p_{l,1}(n)} T_2^{p_{l,2}(n)} \cdots T_s^{p_{l,s}(n)}$$

Τότε $\deg(p_{i_0,s}(n)) = \deg(p_{l,s}(n))$ και τα $p_{i_0,s}(n), p_{l,s}(n)$ έχουν τον ίδιο μεγιστοβάθμιο όρο. Επειδή

$$g_{i_0,\kappa}(n) = T_1^{q^\kappa_{i_0,1}(n)} \cdots T_s^{q^\kappa_{i_0,s}(n)}$$

για $\kappa = 1, \ldots, m$,όπου

$$q^\kappa_{i_0,\mu}(n) = p_{i_0,\mu}(n + n_m \ldots + n_{\kappa+1}) - p_{i_0,\mu}(n_m + \ldots + n_{\kappa+1}) - p_{1,\mu}(n)$$

για $\mu = 1, \ldots, s$ και

$$g_{l,\lambda}(n) = T_1^{q^\lambda_{l,1}(n)} \cdots T_s^{q^\lambda_{l,s}(n)}$$

για $\lambda = 1, \ldots, m$,όπου

$$q^\lambda_{l,\mu}(n) = p_{l,\mu}(n + n_m \ldots + n_{\lambda+1}) - p_{l,\mu}(n_m + \ldots + n_{\lambda+1}) - p_{1,\mu}(n)$$

για $\mu = 1, \ldots, s$, $w(g_{i_0,\kappa}(n)) = w(g_{l,\lambda}(n))$ για κάθε $\kappa, \lambda = 1, \ldots, m$ και επειδή έχουμε ότι τα $p_{i_0,s}(n), p_{l,s}(n)$ έχουν τον ίδιο μεγιστοβάθμιο όρο συμπεραίνουμε ότι και τα $q^{\kappa}_{i_0,s}(n), q^{\lambda}_{l,s}(n)$ έχουν τον ίδιο μεγιστοβάθμιο όρο για κάθε $\kappa, \lambda = 1, \ldots, m$, οπότε $g_{i_0,\kappa}$ και $g_{i_0,\lambda}$ είναι ισοδύναμες για κάθε $\kappa, \lambda = 1, \ldots, m$.
Αν $g_{i_0}(n)$ είναι ισοδύναμο με το $g_1(n)$, τότε τα βάρη των των πολυωνυμικών παραστάσεων $g_{i_0,j}(n)$ είναι μικρότερα από το βάρος του $g_{i_0}(n)$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$.
Πράγματι αφού $g_{i_0}(n)$ είναι ισοδύναμο με το $g_1(n)$ έχουμε ότι $w(g_{i_0}(n)) = w(g_1(n))$, οπότε $g_{i_0}(n) = T_1^{p_{i_0,1}(n)} T_2^{p_{i_0,2}(n)} \cdots T_r^{p_{i_0,r}(n)}$ όπου $\deg(p_{i_0,r}(n)) = \deg(p_{1,r}(n))$ και $p_{i_0,r}(n), p_{1,r}(n)$ έχουν τον ίδιο μεγιστοβάθμιο όρο. Οπότε επειδή

$$g_{i_0,j}(n) = g_{i_0}^{-1}(n_m + \ldots + n_{j+1}) g_{i_0}(n + n_m + \ldots + n_{j+1}) g_1^{-1}(n),$$

τότε

$$g_{i_0,j}(n) = T_1^{q^j_{i_0,1}(n)} \cdots T_r^{q^j_{i_0,r}(n)}$$

όπου $q^j_{i_0,\kappa}(n) = p_{i_0,\kappa}(n + n_m \ldots + n_{j+1}) - p_{i_0,\kappa}(n_m + \ldots + n_{j+1}) - p_{1,\kappa}(n)$ για $\kappa = 1, \ldots, r$ και για $j = 1, \ldots, m$.
Άρα $\deg(q^j_{i_0,r}(n)) < \deg(p_{i_0,r}(n))$ και $w(g_{i_0,j}(n)) < w(g_1(n))$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$.
Επομένως το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας που έχουν βάρος μεγαλύτερο από το βάρος της $g_1(n)$ δεν αλλάζει, ενώ το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας που έχουν το ίδιο βάρος με το βάρος της $g_1(n)$ μειώνεται κατα ένα.

Έτσι αν το σύστημα A αντιστοιχεί σε ένα πίνακα βάρους της μορφής

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_{r,d} & N_{r,d+1} & \cdots & N_{r,D} \\ N_{r+1,1} & \cdots & N_{r+1,d-1} & N_{r+1,d} & N_{r+1,d+1} & \cdots & N_{r+1,D} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{t,1} & \cdots & N_{t,d-1} & N_{t,d} & N_{t,d+1} & \cdots & N_{t,D} \end{pmatrix}$$

τότε το σύστημα A_m έχει πίνακα βάρους της μορφής

$$M_m = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & N_{r,d}-1 & N_{r,d+1} & \cdots & N_{r,D} \\ N_{r+1,1} & \cdots & N_{r+1,d-1} & N_{r+1,d} & N_{r+1,d+1} & \cdots & N_{r+1,D} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{t,1} & \cdots & N_{t,d-1} & N_{t,d} & N_{t,d+1} & \cdots & N_{t,D} \end{pmatrix}$$

Οπότε σύμφωνα με τη διάταξη που ορίσαμε στους πίνακες βάρους έχουμε ότι ο M_m είναι μικρότερος από τον M και άρα από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι ισχύει το Θεώρημα (5.1) για το σύστημα A_m.

Επομένως μπορούμε να βρούμε $y_m \in X$ και $n_{m+1} \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\rho(h(n_{m+1})y_m, y_m) < \delta_m$$

για κάθε $h \in A_m$. Επιλέγουμε $1 \leqslant t \leqslant r$ ώστε να ισχύει η (5.6) για κάθε $y' \in X$ με $\rho(y', y_m) < \delta_m$ και θέτουμε $x_{m+1} = g_1^{-1}(n_{m+1})S_t y_m$. Τότε αφού για κάθε $1 \leqslant i \leqslant k$ και κάθε $1 \leqslant l \leqslant m$ ισχύει,

$$\rho(g_{i,l}(n_{m+1})y_m, y_m) < \delta_m$$

και έχουμε

$$\rho(S_t g_{i,l}(n_{m+1})y_m, x_m) < \varepsilon_m \Leftrightarrow$$
$$\rho(S_t g_i^{-1}(n_m + \ldots + n_{l+1})g_i(n_{m+1} + n_m + \ldots + n_{l+1})g_1^{-1}(n_{m+1})y_m, x_m) < \varepsilon_m \Leftrightarrow$$
$$\rho(g_i^{-1}(n_m + \ldots + n_{l+1})g_i(n_{m+1} + n_m + \ldots + n_{l+1})g_1^{-1}(n_{m+1})S_t y_m, x_m) < \varepsilon_m \Leftrightarrow$$
$$\rho(g_i^{-1}(n_m + \ldots + n_{l+1})g_i(n_{m+1} + n_m + \ldots + n_{l+1})x_{m+1}, x_m) < \varepsilon_m \quad (5.7)$$

για κάθε $l = 0, \ldots, m-1$ και

$$\rho(g_i(n_{m+1})x_{m+1}, x_m) < \varepsilon_m. \quad (5.8)$$

Από ομοιόμορφη συνέχεια των $g_i(n_m + \ldots + n_{l+1})$ για κάθε $l = 0, \ldots, m-1$ λόγω των (5.7)και (5.8)έχουμε ότι

$$\rho(g_i(n_{m+1} + n_m + \ldots + n_{l+1})x_{m+1}, g_i(n_m + \ldots + n_{l+1})x_m) < \varepsilon' \quad (5.9)$$

όπου $\varepsilon' = \varepsilon_m - \rho(g_i(n_{m+1})x_{m+1}, x_m) > 0$. Οπότε από (5.9) και επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\rho(g_i(n_{m+1} + n_m + \ldots + n_{l+1})x_{m+1}, x_l) \leqslant$$
$$\rho(g_i(n_{m+1} + n_m + \ldots + n_{l+1})x_{m+1}, g_i(n_m + \ldots + n_{l+1})x_m)$$
$$+\rho(g_i(n_m + \ldots + n_{l+1})x_m, x_l) <$$
$$\varepsilon_m - \rho(g_i(n_{m+1})x_{m+1}, x_m) + \rho(g_i(n_{m+1})x_{m+1}, x_m) = \varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.10)$$

για κάθε $l = 0, \ldots, m-1$ και

$$\rho(g_i(n_{m+1})x_{m+1}, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.11)$$

Αφού ο X είναι συμπαγής τότε υπάρχουν $l, m \in \mathbb{N}$ με $l < m$ τέτοια ώστε $\rho(x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε $n = n_m + \ldots + n_{l+1}$. Τότε από την (5.5) έχουμε ότι $\rho(g_i(n)x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$ και επομένως

$$\rho(g_i(n)x_m, x_m) \leqslant \rho(g_i(n)x_m, x_l) + \rho(x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Δηλαδή, θέτοντας $x_m = x$ έχουμε,

$$\rho(T_1^{p_{i,1}(n)} T_2^{p_{i,2}(n)} \cdots T_t^{p_{i,t}(n)} x, x) < \varepsilon$$

για όλα τα $i = 1, \ldots, k$ ταυτοχρόνως. □

Πόρισμα 5.16. Έστω (X, G) minimal τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Τότε σχεδόν για όλα (με την έννοια της κατηγορίας) τα σημεία $x \in X$ υπάρχει ακολουθία $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών με $n_m \to \infty$ τέτοια ώστε $g_i(n_m)x \to x$ ταυτόχρονα για όλα τα $i = 1, \ldots, k$.

Απόδειξη. Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη θα λέμε ένα σημείο $x \in X$ ότι είναι ε-recurrent αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\rho(g_i(n)x, x) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Οπότε ένα σημείο θα είναι recurrent, αν είναι ε-recurrent για κάθε $\varepsilon > 0$.
Έστω W_ε το σύνολο των ε-recurrent. Θα πρέπει να δείξουμε ότι το σύνολο των recurrent σημείων είναι δεύτερης κατηγορίας, δηλαδή ότι το συμπλήρωμά του είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών πουθενά πυκνών συνόλων.
Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό σύνολο. Αφού (X, G) είναι minimal τότε $X = \bigcup_{S\in G} S^{-1}(U)$. Επειδή X είναι συμπαγής υπάρχουν $r \in \mathbb{N}$ και $S_1, \ldots, S_r \in G$ ώστε $X = \bigcup_{j=1}^{r} S_j^{-1}(U)$. Έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $y_1, y_2 \in X$ με $\rho(y_1, y_2) < \delta$ από ομοιόμορφη συνέχεια της S_t να έχουμε $\rho(S_t y_1, S_t y_2) < \varepsilon$ για κάθε $t = 1, \ldots, r$. Από Πολυωνυμικό Θεώρημα van der Waerden(5.1) έχουμε ότι υπάρχει $y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ με $\rho(g_i(n)y, y) < \delta$ για $i = 1, \ldots, k$. Τότε υπάρχει $1 \leqslant j \leqslant k$, ώστε $y \in S_j^{-1}(U)$ και θέτουμε $x = S_j y$. Οπότε έχουμε $x \in U$ και αφού $\rho(g_i(n)y, y) < \delta$ έχουμε ότι

$$\rho(g_i(n)x, x) = \rho(g_i(n)S_j y, S_j y) = \rho(S_j g_i(n)y, S_j y) < \varepsilon$$

για όλα τα $i = 1, \ldots, k$.
Άρα δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $U \subseteq X$ έχουμε ότι $U \cap W_\varepsilon \neq \emptyset$.

Δηλαδή ότι το σύνολο W_ε των ε-recurrent σημείων είναι πυκνό στο X για κάθε $\varepsilon > 0$. Επίσης από τη συνέχεια της ρ τα W_ε είναι ανοικτά για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα τα σύνολα $Z_n = X \backslash W_{1/n}$ είναι κλειστά και πουθενά πυκνά στο X για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως το σύνολο $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_{1/n} = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ των recurrent σημείων είναι δεύτερης κατηγορίας. $\square$

Βιβλιογραφία

[Ber] Bergelson, V., *Weakly mixing PET*, Ergodic Theory Dynamical Systems 7 (1987), 337-349.

[Ber1] Bergelson, V., *Combinatorial and Diophantine applications of ergodic theory, in Handbook of dynamical systems*. Vol. 1B, pp. 745-869, Elsevier B. V., Amsterdam, (2006). Appendix A by A. Leibman and Appendix B by Anthony Quas and Máté Wierdl.

[BL] Bergelson, V., Leibman, A., *Polynomial extensions of van der Waerden and Szemerédi theorems*, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996) 725-753.

[Bir] Birkhoff, G. D., *Dynamnical systems*, American Maththematical Society Colloq. Publ. vol 9, American Maththematical Society Providence RI (1927).

[CN] Comfort, W., Negrepontis, S., *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin (1974).

[Fur] Furstenberg, H., *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. 31 (1977), 204-256.

[Fur1] Furstenberg, H., *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1981). M. B. Porter Lectures.

[FW] Furstenberg, H., Weiss, B., *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. Analyse Math. 34 (1978), 61-85 (1979).

[HJ] Hrbacek, K., Jech, T., *Introduction to set theory*, Third Edition, Revised and Expanded, Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Marcel Dekker, Inc, New York (1999).

[Jec] Jech, T., *Set Theory*, The Third Millennium Edition, revised and expanded, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin. (2003)

[Khi] Khinchin, A. Y., Three Pearls of Number Theory, Graylock, Rochester, New York, (1952).

[McC] McCutcheon, R., *Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory*, Lecture Notes in Math., Vol. 1722, Springer-Verlag, Berlin (1999).

[Pet] Petersen, K., *Ergodic theory*, in Cambridge Studies in Advanced Mathematics 2, Cambridge University Press, Cambridge, (1989). Corrected reprint of the 1983 original.

[Rad] Rado, R., *Note on Combinatorial Analysis*, Proc. London Math. Soc. 48(2) (1943), 122-160.

[Soi] Soifer, A., *The Mathematical Coloring Book*, Springer-Verlag, New York, (2009).

[vdW] Waerden, B. L. van der, *Beweis einer Baudetschen, Vermutung*, Nieuw Archief voor Wiskunde 15 (1927), 212-216.

[vdW1] Waerden, B. L. van der, *How the proof of Baudet's conjecture was found*. In L. Mirsky (ed.), Studies in Pure Mathematics, Academic Press, London, (1971), 251-260.

[Wal] Walters, P., *An introduction to ergodic theory*, in Graduate Texts in Mathematics 79, Springer-Verlag, New York, (1982).

[Μος] Μοσχοβάκης, Γ.Ν., *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*, Νεφέλη, Αθήνα, (1993).

[Νεγ] Νεγρεπόντης, Σ., Ζαχαριάδης, Θ., Καλαμίδας, Ν., Φαρμάκη, Β., *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Συμμετρία, Αθήνα, 1997.

[Φαρ] Φαρμάκη, Β., *Εργοδική Θεωρία*, Σημειώσεις μαθήματος του Π. Μ. Σ. Θεωρητικών Μαθηματικών του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, Αθήνα, 2010.

[Φαρ1] Φαρμάκη, Β., *Συνολοθεωρητική Τοπολογία*, Σημειώσεις μαθήματος του Π. Μ. Σ. Θεωρητικών Μαθηματικών του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, Αθήνα, 2011.