



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ ΜΗΤΡΟΕΙΔΗ ΚΑΙ ΥΠΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ :
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Κ. ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Μ. ΘΗΛΥΚΟΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2012

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Θεωρητικά Μαθηματικά που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών, της Σχολής Θετικών Επιστημών, του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Μέρος των σπουδών μου για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης, χρηματοδοτήθηκε από το Κληροδότημα του Ευεργέτη του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, Αντώνιου Παπαδάκη.

Συγγραφέας είναι ο φοιτητής Γεώργιος Κ. Σταθόπουλος με αριθμό μητρώου 283001. Επιβλέπων Καθηγητής είναι ο Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, Δημήτριος Θηλυκός. Μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής είναι: ο επιβλέπων, ο Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του ΕΚΠΑ, Σταύρος Κωλλιόπουλος και ο Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας του ΟΠΑ, Ιωάννης Μούρτος.

Αθήνα, 2012

Ευχαριστίες

Με την παρούσα διπλωματική εργασία ολοκληρώνονται οι σπουδές μου στο Μαθηματικό Τμήμα του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Θέλω να ευχαριστήσω ειλικρινά το εκπαιδευτικό προσωπικό του Τμήματος, για τις υψηλού επιπέδου σπουδές που προσφέρει τόσο στο Προπτυχιακό όσο και στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών, με τις πολυάριθμες και εξαιρετικές επιλογές μαθημάτων που αυτό περιέχει και το απaráμιλλο εκπαιδευτικό έργο των διδασκόντων.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω το προσωπικό της Γραμματείας του Τμήματος για την ουσιαστική και άμεση εξυπηρέτηση σε όλες μου τις συναλλαγές με αυτό.

Ακόμα, ευχαριστώ την τριμελή εξεταστική επιτροπή: τον κύριο Θηλυκό για τις συμβουλές και την πολύτιμη βοήθειά του· τον κύριο Μούρτο για την εξαιρετική μας συνεργασία, για την υποστήριξή του και για την διαρκή και την επί της ουσίας καθοδήγησή του· τον κύριο Κολλιόπουλο που μου έκανε την τιμή να είναι μέλος της επιτροπής· τέλος πρέπει να ευχαριστήσω τον κύριο Δημήτριο Μάγο με τον οποίο συζήτησα πολλές ενότητες του παρόντος κειμένου, του οποίου η συγγραφή θα ήταν πολύ δυσκολότερη, δίχως τις συμβουλές και την καθοδήγησή του.

Ευχαριστώ τον στενό φίλο και συνάδελφο, Στέφανο Αϊθαζίδη, για την μετάφραση μεγάλου μέρους του κειμένου από τα αγγλικά, και την οικογένειά μου για τη στήριξή της σε όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Περίληψη

Στο παρόν κείμενο επιχειρούμε μία εκτενή επισκόπηση των βασικών αποτελεσμάτων της Πολυεδρικής Συνδυαστικής. Το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού, καθιστά πολύ σημαντική την μελέτη των πολυέδρων, τα οποία, χρησιμοποιούνται εξίσου και στον Ακέραιο Γραμμικό Προγραμματισμό. Μελετάμε ακόμα τα Μητροειδή και τη σχέση τους με τα πολύεδρα καθώς και τις εφαρμογές της δυϊκής εξίσωσης του Γραμμικού Προγραμματισμού, στον Ακέραιο Γραμμικό Προγραμματισμό και στα Υπομετρικά Συστήματα.

ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ : πολύεδρα, ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός, γραμμικός προγραμματισμός, μητροειδή και πολυμητροειδή, υπομετρικά συστήματα

Περιεχόμενα

Συμβολισμός	1
1 Προαπαιτούμενα	3
2 Πολύεδρα και Γραμμικός Προγραμματισμός	5
2.1 Βασικά Αποτελέσματα στις Γραμμικές Ανισότητες	5
2.2 Βασικά Αποτελέσματα στα Πολύεδρα	7
2.3 Γραμμικός Προγραμματισμός	10
2.4 Η Δομή των Πολυέδρων	14
2.4.1 Χαρακτηριστικός Κώνος, Χαρακτηριστικός Γραμμικός Χώρος και Διάσταση	14
2.4.2 Προσώσεις και Μεγιστοτικές Προσώσεις	17
2.4.3 Ελαχιστοτικές Προσώσεις, Ακραία σημεία, Ακμές και Ακραίες Ακτίνες	20
2.4.4 Μοναδική Αποσύνθεση	22
2.4.5 Πολικότητα	23
2.4.6 Πολύεδρα Παρεμπόδισης και Άντι-Παρεμπόδισης	26
2.5 Παρατηρήσεις στο Κεφάλαιο 2	31
3 Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός	33
3.1 Ακέραια πολύεδρα	33
3.2 Πλήρης Μονομετρικότητα	36
3.3 Πλήρως Δυϊκά Ακέραια Συστήματα	39
3.3.1 Βάσεις Hilbert και Ελαχιστοτικά TDI Συστήματα	40
3.3.2 Κυβικά-TDI Συστήματα	42
3.4 Αποτελέσματα Πολυπλοκότητας	43
4 Μητροειδή	45
4.1 Παραδείγματα Μητροειδών	49
4.2 Εναλλακτικοί χαρακτηρισμοί μητροειδών	50
4.3 Ο Άπληστος Αλγόριθμος	51
4.4 Τομές Μητροειδών	53
5 Πολυμητροειδή και Υπομετρικά Συστήματα	55
5.1 Ο Άπληστος Αλγόριθμος στα Πολυμητροειδή	56
5.2 Πολυμητροειδή και Πλήρως Δυϊκά Ακέραια Συστήματα	57
5.3 Μοναδικότητα της ρ	58
5.4 Η δομή του P_ρ	58
5.5 Τομές Πολυμητροειδών	59
5.6 Υπομετρικά Συστήματα	59
5.6.1 Πράξεις στα Υπομετρικά Συστήματα	62
5.7 Υπομετρικά Συστήματα σε Οικογένειες Τομών και Διασταυρώσεων	62
Βιβλιογραφία	65

Συμβολισμός

Q.E.D.

$x :=$ ορισμός

$\forall$

$\exists$

$\in$

ανν

$\mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{Z}$

X_+ όπου $X \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$

X^n

X^Y

$\mathcal{P}(X)$

$|X|$

$X \setminus Y$

$X + Y$

$\mathbf{x}$

$\mathbf{x}_i$

$\mathbf{x}'$

$A' \text{ or } A^T$

$\|\mathbf{x}\|$

$\text{lin.hull}(X)$

$\text{aff.hull}(X)$

$\text{cone}(X)$

$\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$

$\mathbf{x} \perp X$

$X^\perp$

$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Συντομογραφία για το Quod Erat Demonstrandum,

Μετάφραση: Αυτό που ήταν προς απόδειξη.

Το x ορίζεται όπως στον ορισμό

για κάθε

υπάρχει(ουν)

ανήκει(ουν)

αν και μόνο αν

Το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Το σύνολο των ρητών.

Το σύνολο των πραγματικών.

Το σύνολο των ακεραίων.

Το σύνολο των μη αρνητικών αριθμών $\in X$

Το Καρτεσιανό γινόμενο n αντιγράφων του X (όταν X είναι σύνολο και $n \in \mathbb{N}$).

$\{f \mid f : Y \rightarrow X\}$, αν X, Y , σύνολα.

Το δυναμοσύνολο του X , όταν X σύνολο.

Η πληθικότητα του X (όταν X σύνολο).

$\{x \in X \mid x \notin Y\}$ (όταν X, Y , σύνολα).

$\{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$

(όταν X, Y , σύνολα και το $x + y$ ορίζεται).

Ένα διάνυσμα-στήλη.

Η i -οστή συντεταγμένη του $\mathbf{x}$.

Ο ανάστροφος του $\mathbf{x}$ δηλαδή, ένα διάνυσμα-γραμμή.

Ο ανάστροφος του πίνακα A .

Η ευκλείδια νόρμα του $\mathbf{x}$.

$\{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_t x_t \mid t \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i, x_i \in X, \forall i\}$

$\{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_t x_t \mid t \geq 1, \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i, x_i \in X, \forall i, \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1\}$

$\{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_t x_t \mid t \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \forall i, x_i \in X, \forall i\}$

$\mathbf{x}' \mathbf{y} = 0$

$\mathbf{x}' \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{y} \in X$

$\{\mathbf{y} \mid \mathbf{y}' \mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{x} \in X\}$

$\mathbf{x}_i \leq \mathbf{y}_i$ για όλες τις συντεταγμένες $\mathbf{x}_i$ και $\mathbf{y}_i$ των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενα

Ορισμός 1.1. Έστω A πίνακας. Τότε,

$\text{rank}(A) :=$ Το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών (ή γραμμών) του A .

Ορισμός 1.2. Έστω $x_1, \dots, x_k$, διανύσματα¹ $\in \mathbb{R}^n$. Τότε, τα $x_1, \dots, x_k$ θα καλούνται **γραμμικά ανεξάρτητα** αν

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i \implies \lambda_i = 0, \forall i.$$

Τα $x_1, \dots, x_k$ θα καλούνται **αφινικά ανεξάρτητα** αν

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i \implies \lambda_i = 0, \forall i.$$

Πρόταση 1.3. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \neq \emptyset$

(2) $\text{rank}(A) = \text{rank}[A \ b]$

όπου A είναι ένας $m \times n$ πίνακας και b είναι ένα $m \times 1$ διάνυσμα.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει το (1) και έστω a^i , $i \in \{1, \dots, n\}$ οι στήλες του A . Τότε, $b = \sum_{i=1}^n x_i a^i$.

Επομένως, το b είναι γραμμικά εξαρτημένο από τα a^i και $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \ b)$. Αντίστροφα αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \ b)$, τότε, το b είναι γραμμικά εξαρτημένο από τις στήλες a^i , άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n : Ax = b$. **Q.E.D.**

¹Όλα τα διανύσματα είναι διανύσματα στήλες, εκτός κι αν αναφέρουμε ρητά το αντίθετο.

Πρόταση 1.4. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

- (α) Τα $x_1, \dots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα.
- (β) Τα $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- (γ) Τα $(x'_1 - 1), \dots, (x'_k - 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. ((α)→(β)) Έστω $\sum_{i=2}^k \lambda_i (x_i - x_1) = 0$. Τότε

$$\sum_{i=2}^k \lambda_i x_i - \sum_{i=2}^k \lambda_i x_1 = 0 \text{ και } \sum_{i=2}^k \lambda_i + \left(- \sum_{i=2}^k \lambda_i \right) = 0 \xrightarrow{x_i \text{ είναι αφ. ανεξ.}} \lambda_i = 0, 2 \leq i \leq k, \sum_{i=2}^k \lambda_i = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

((β)→(γ)) Έστω $\sum_{i=1}^k \lambda_i (x'_i - 1) = 0$. Τότε, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ και $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$, που σημαίνει ότι $\lambda_1 = - \sum_{i=2}^k \lambda_i \xrightarrow{(\beta)} \lambda_i = 0, 1 \leq i \leq k$.

((γ)→(α)) Έστω $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ και $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$. Τότε, $\xrightarrow{(\gamma)} \lambda_i = 0, 1 \leq i \leq k$ **Q.E.D.**

Παρατήρηση 1.5. Παρατηρούμε ότι το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξαρτήτων σημείων στο $\mathbb{R}^n$ είναι $n + 1$ γιατί

τα $x_1 - 0, \dots, x_n - 0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα σημεία $\xLeftrightarrow{\text{Προτ. 1.4}}$ τα $0, x_1, \dots, x_n$ είναι αφινικά ανεξάρτητα σημεία.

Πρόταση 1.6. Αν $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \neq \emptyset$, το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξαρτήτων λύσεων του $Ax = b$ είναι $n + 1 - \text{rank}(A)$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.4 έχουμε ότι τα $x_1, \dots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητες λύσεις του $Ax = b$ αν τα $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του $Ax = 0$. Άρα το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξαρτήτων λύσεων του $Ax = b$ ισούται με το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξαρτήτων λύσεων του $Ax = 0$ συν 1. Τώρα από το γνωστό Rank-Nullity θεώρημα της Άλγεβρας έχουμε ότι ο πυρήνας του A , δηλαδή, $\text{Ker}(A) = \{x \mid Ax = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ με διάσταση $n - \text{rank}(A)$. **Q.E.D.**

Ορισμός 1.7. Ένα σύνολο, X , είναι κυρτό, αν $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1, x, y \in X\} \subseteq X$

Κεφάλαιο 2

Πολύεδρα και Γραμμικός Προγραμματισμός

Καλούμε ένα πρόβλημα, πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, αν θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε (ή ελαχιστοποιήσουμε) μία συνάρτηση, ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$, δεδομένων κάποιων γραμμικών περιορισμών. Η συνάρτηση καλείται η **αντικειμενική συνάρτηση** και οι περιορισμοί, περιορίζουν το πεδίο ορισμού της σε ένα γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ το οποίο καλούμε **εφικτή περιοχή**. Επομένως, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση, εντός της εφικτής περιοχής που όπως θα δούμε είναι ένα πολύεδρο. Τα πολύεδρα είναι η γεωμετρική πλευρά των γραμμικών περιορισμών που είναι αλγεβρικές γραμμικές εξισώσεις ή ανισότητες, με μεταβλητές, αυτές της αντικειμενικής συνάρτησης. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου ισχύουν για πραγματικούς και ρητούς χώρους. Στην δεύτερη περίπτωση περιορίζουμε όλα τα στοιχεία των διανυσμάτων, των πινάκων και τις μεταβλητές, στους ρητούς.

2.1 Βασικά Αποτελέσματα στις Γραμμικές Ανισότητες

Διατυπώνουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα των Γραμμικών ανισοτήτων (μία γενίκευση του Λήμματος του Farkas) και δίνουμε ένα περίγραμμα της απόδειξης η οποία μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο του Schrijver, σελ.85 [Sch98].

Θεώρημα 2.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα Γραμμικών Ανισοτήτων). Έστω $a_1, \dots, a_m, b$, διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

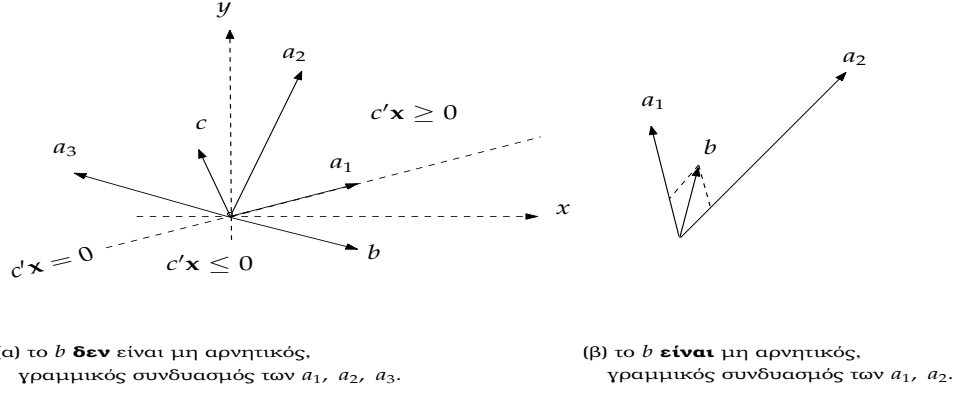
- (α) Το b είναι μη αρνητικός, γραμμικός συνδυασμός κάποιων γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων από τα $a_1, \dots, a_m$.
- (β) $\exists c \in \mathbb{R}^n$ ώστε το **υπερεπίπεδο** $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c'x = 0\}$ περιέχει $t - 1$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα από τα $a_1, \dots, a_m$, και $c'b < 0, c'a_1, \dots, c'a_m \geq 0$ όπου $t := \text{rank}\{a_1, \dots, a_m, b\}$ ¹.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν ισχύει το (α) και το (β), τότε, $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$ ωιτη $\lambda_i \geq 0, \forall i$ και επιπλέον:

$$0 > c'b = c'(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m) \geq 0$$

δηλαδή άτοπο. Άρα, το πολύ ένα από τα (α), (β), ισχύει. Για να δείξουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα (α), (β), ισχύει, επιλέγουμε ένα μεγιστοτικό $D = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_\rho}\}$ γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων από τα $a_1, \dots, a_m$ και αν $\rho < n$ επιλέγουμε το σύνολο $D' = \{a_{i_{\rho+1}}, \dots, a_{i_n}\}$ των διανυσμάτων όπου $i_k > m, \forall k > \rho$, ώστε το $D \cup D'$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^n$. Έπειτα, ακολουθούμε την επαναληπτική διαδικασία (1)-(4).

¹ Όπου ο βαθμός (rank) ενός συνόλου διανυσμάτων είναι το μέγιστο πλήθος από αυτά που είναι γραμμικά ανεξάρτητα.



Σχήμα 2.1: Μία γραφική αναπαράσταση του Θεωρήματος 2.1 στις δύο διαστάσεις

- (1) Γράφουμε $b = \lambda_{i_1} a_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} a_{i_n}$. Αν $\lambda_{i_k} \geq 0, \forall k < \rho + 1$ και $\lambda_{i_k} = 0, \forall k > \rho$ τότε το (α) ισχύει.
- (2) Αν όχι, τότε, $h = \min\{i_k \mid \lambda_{i_k} < 0, 1 \leq k \leq \rho, \lambda_{i_k} \neq 0, \rho < k \leq n\}$. Έστω επίσης, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c'x = 0\}$ να είναι το υπερεπίπεδο με βάση το $D \cup D' \setminus \{a_h\}$. Κανονικοποιούμε το c ώστε $c'a_h = -\frac{\lambda_h}{|\lambda_h|}$ (αυτό γίνεται αφού $c \perp \text{lin.hull}(D \cup D' \setminus \{a_h\})$ οπότε, $c'a_h \neq 0$) και άρα $c'b = -|\lambda_h| < 0$.
- (3) Αν $c'a_1, \dots, c'a_m \geq 0$ τότε ισχύει το (β).
- (4) Αλλιώς, επιλέγουμε το μικρότερο s ώστε $c'a_s < 0$. Έπειτα αντικαθιστούμε το $D \cup D'$ με το $(D \cup D' \setminus \{a_h\}) \cup \{a_s\}$ και επαναλαμβάνουμε από το βήμα (1).

Μπορεί να δειχθεί ότι η παραπάνω επαναληπτική διαδικασία είναι καλά ορισμένη, δηλαδή πάντα τερματίζει. Φυσικά, στον τερματισμό έχουμε το ζητούμενο. **Q.E.D.**

Πόρισμα 2.2 (Το Λήμμα του Farkas). Έστω A, b , ένας $m \times n$ πίνακας και ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$, αντίστοιχα. Τότε $\exists x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0$ και $Ax = b$ **ανν** $y'b \geq 0$, για κάθε διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^m : y'A \geq 0$.

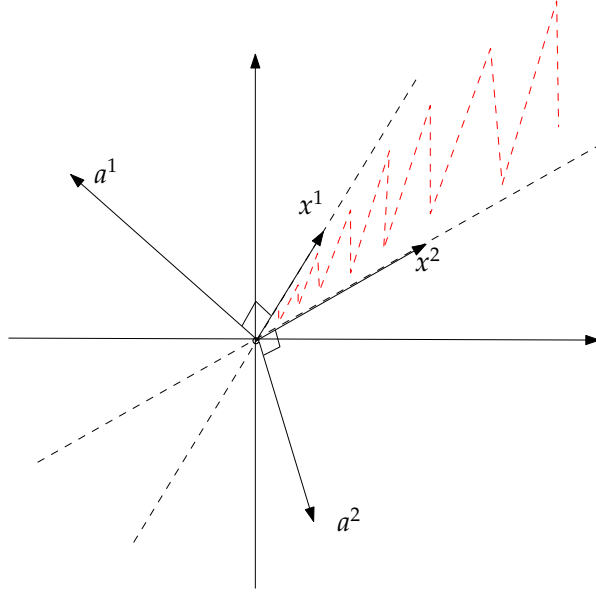
Απόδειξη. $(\Rightarrow) y'b = y'Ax \geq 0$

$(\Leftarrow)$ Έστω $a^1, \dots, a^n$, οι στήλες του A . Αν $y'b \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^m : y'a^1, \dots, y'a^n \geq 0$, τότε, από το

Θεώρημα 2.1, έχουμε ότι $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i a^i$, όπου $\lambda_i \geq 0$ το οποίο σημαίνει ότι αν $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$, έχουμε $\lambda \geq 0$ και $A\lambda = b$. **Q.E.D.**

Πόρισμα 2.3 (Λήμμα του Farkas (παραλλαγή)). Έστω A ένας πίνακας και b ένα διάνυσμα. Τότε, το σύστημα $Ax \leq b$ έχει μία λύση $x \geq 0$ **ανν** $y'b \geq 0$ για κάθε διάνυσμα $y \geq 0$ με $y'A \geq 0$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε γραμμική ανισότητα $a_i x \leq b_i$, όπου a_i είναι μία γραμμή του A και b_i είναι η i -οστή συντεταγμένη του b , μπορεί να μετατραπεί σε ισότητα προσθέτοντας μία καινούρια μεταβλητή x^i (δηλαδή $a_i x + x^i = b_i$) και απαιτώντας $x^i \geq 0$. Επομένως μπορούμε να ξαναγράψουμε το σύστημα ανισοτήτων ως $[A \ I]y = b$ όπου το y έχει m περισσότερες συντεταγμένες από το x , όπου m είναι το πλήθος των γραμμών του A . Τώρα, το σύστημα των ανισοτήτων έχει μία λύση $x \geq 0$ **ανν** το σύστημα των ισοτήτων έχει μία λύση, $y \geq 0$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 2.2, έχουμε το ζητούμενο. **Q.E.D.**



$$\text{cone}\{x^1, x^2\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} (a^1)' \\ (a^2)' \end{bmatrix} x \leq 0\} = \text{Η περιοχή σκιασμένη με κόκκινο.}$$

Σχήμα 2.2: Ένας πολυεδρικός κώνος στις δύο διαστάσεις

2.2 Βασικά Αποτελέσματα στα Πολύεδρα

Ορισμός 2.4. Ένα μη κενό υποσύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$ θα καλείται **κυρτός κώνος**, αν

$$\{\lambda x + \mu y \mid \lambda, \mu \geq 0, x, y \in C\} \subseteq C.$$

Προφανώς, ένας κυρτός κώνος είναι κυρτό σύνολο. Ένας κυρτός κώνος θα καλείται **πολυεδρικός** αν $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$, για κάποιο πίνακα A . Προφανώς, ένας πολυεδρικός κώνος είναι η τομή πεπερασμένων το πλήθος **γραμμικών ημιχώρων**, δηλαδή, $\{x \mid a_i x \leq 0\}$ όπου a_i είναι γραμμή του A . Ο τετριμμένος πολυεδρικός κώνος είναι η τομή μίας κενής οικογένειας γραμμικών ημιχώρων, δηλαδή ο $\mathbb{R}^n$ (φυσικά, ο άλλος τετριμμένος πολυεδρικός κώνος είναι το $\{0\}$). Ο κώνος που **παράγεται** από τα διανύσματα $x_1, \dots, x_m$, είναι το σύνολο

$$\text{cone}\{x_1, \dots, x_m\} := \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \mid \lambda_i \geq 0, \forall i\}.$$

Τα ακόλουθα είναι πορίσματα του Θεωρήματος 2.1:

Πόρισμα 2.5 (Carathéodory). Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $x \in \text{cone}(X)$. Τότε $x \in \text{cone}\{x_1, \dots, x_d\}$ για κάποια γραμμικά ανεξάρτητα $x_1, \dots, x_d \in X$.

Απόδειξη. Αν $x \in \text{cone}(X)$ τότε

$$\exists x_1, \dots, x_t \in X, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}_+ : x = \sum_{i=1}^t \lambda_i x_i.$$

Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα c τέτοιο ώστε $c'x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, t\} \Rightarrow c'x \geq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 2.1 $x \in \text{cone}\{x_1, \dots, x_d\}$ για κάποια γραμμικά ανεξάρτητα

$$x_1, \dots, x_d \in \{x_1, \dots, x_t\} \subseteq X. \quad \text{Q.E.D.}$$

Πόρισμα 2.6 (Θεώρημα των Farkas-Minkowski-Weyl). Ένας κυρτός κώνος είναι πολυεδρικός **ανν** είναι πεπερασμένα παραγόμενος.

Απόδειξη. Για την απόδειξη ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το [Sch98] (στο Σχήμα 2.2 φαίνεται μία γραφική αναπαράσταση). **Q.E.D.**

Ορισμός 2.7. Ένα σύνολο P διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ θα καλείται **πολύεδρο** αν

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

για κάποιο $m \times n$ πίνακα A και ένα $m \times 1$ διάνυσμα b .

Πρόταση 2.8. Ένα πολύεδρο είναι κυρτό σύνολο.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in P$, τότε

$$A(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay \leq \lambda b + (1 - \lambda)b = b, \quad \forall 0 < \lambda < 1. \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

Ορισμός 2.9. Έστω τα διανύσματα $x_1, \dots, x_k$ · ορίζουμε το **κυρτό κύτος** τους, ως:

$$\text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i \right\}.$$

Ορισμός 2.10. Ένα σύνολο διανυσμάτων θα καλείται **πολύτοπο** αν είναι το κυρτό κύτος πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων.

Θεώρημα 2.11 (Motzkin-Θεώρημα Αποσύνθεσης Πολυέδρων). Ένα σύνολο P διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ είναι πολύεδρο **ανν** $P = Q + C$ για κάποιο πολύτοπο Q και κάποιον πολυεδρικό κώνο C .

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ένα πολύεδρο. Από το Πόρισμα 2.6, ο πολυεδρικός κώνος

$$C' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq 0, \begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq 0 \right\}$$

είναι πεπερασμένα παραγόμενος, έστω από τα $\begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Κανονικοποιώντας αυτά τα διανύσματα, αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε λ_i είναι είτε 0 ή 1. Έστω Q το κυρτό κύτος των x_i με $\lambda_i = 1$, και έστω C να είναι ο κώνος παραγόμενος από τα x_i με $\lambda_i = 0$. Τώρα, $x \in P$, ανν $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ ανήκει στον

$$C' = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} \right\},$$

που σημαίνει ότι $P = Q + C$.

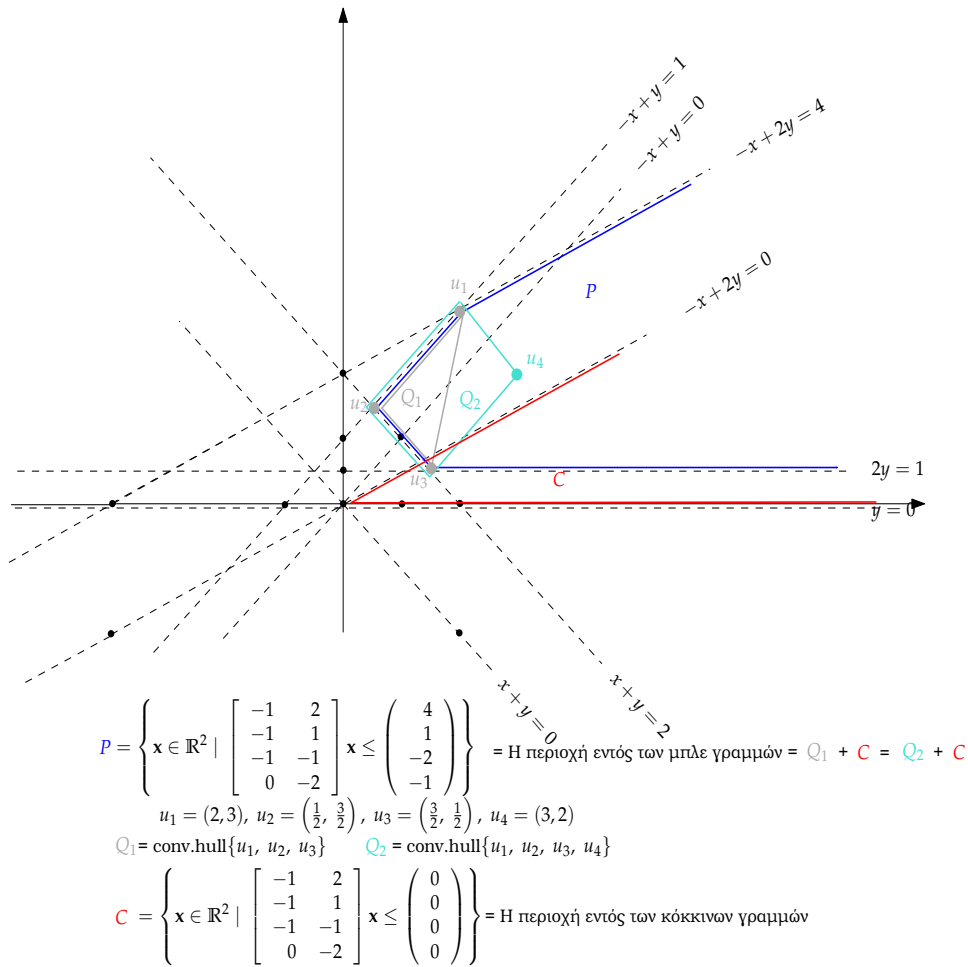
($\Leftarrow$) Έστω $P = Q + C$ για κάποιο πολύτοπο Q και κάποιον πολυεδρικό κώνο C . Ας υποθέσουμε ότι $Q = \text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_k\}$ και $C = \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$. Τότε $x_0 \in P$ ανν

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \in C' = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Από το Πόρισμα 2.6, ο C' είναι πολυεδρικός, που σημαίνει ότι

$$C' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \mid (A \ b) \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq 0 \right\}$$

για κάποιο $m \times n$ πίνακα A και κάποιο $m \times 1$ διάνυσμα b . Επομένως $x_0 \in P$ ανν $Ax_0 + b \leq 0$ που σημαίνει ότι το P είναι πολύεδρο. **Q.E.D.**



Σχήμα 2.3: Μία γραφική αναπαράσταση του θεωρήματος αποσύνθεσης.

Ορισμός 2.12. Θα λέμε ότι το πολύεδρο P **παράγεται** από τα **σημεία** $x_1, \dots, x_k$ και τις **κατευθύνσεις** $y_1, \dots, y_t$ αν

$$(2.1) \quad P = \text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_k\} + \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$$

Παρατήρηση 2.13. Ένα πολύεδρο, P , μπορεί να έχει περισσότερες από μία αποσυνθέσεις. Αρχικά αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε σε επόμενη ενότητα, δηλαδή ότι, σε κάθε αποσύνθεση ενός πολυέδρου $P = Q + C$, ο C είναι ο χαρακτηριστικός κώνος του P , δηλαδή $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$. Όμως, μπορούμε να επιλέξουμε το Q , με διάφορους τρόπους. Αυτό φαίνεται και από το παράδειγμα στο Σχήμα 2.3 όπου έχουμε ζωγραφίσει ένα πολύεδρο και δύο αποσυνθέσεις του.

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος αποσύνθεσης είναι το:

Πόρισμα 2.14 (Minkowski-Steinitz-Weyl-Θεώρημα πεπερασμένης βάσης πολυτόπων). Ένα σύνολο P είναι πολύτοπο **ανν** είναι φραγμένο πολύεδρο.

2.3 Γραμμικός Προγραμματισμός

Τυπικά το **Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού** εκφράζεται ως:

$$(2.2) \quad z_{LP} = \max\{c'x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}_+^n\}$$

όπου c είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα, A είναι ένας $m \times n$ πίνακας και b είναι ένα $m \times 1$ διάνυσμα. Τα A, b, c καλούνται τα **δεδομένα** του προβλήματος και υποθέτουμε ότι έχουν ρητά στοιχεία αφού θέλουμε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους αλγόριθμους μας, επίλυσης γραμμικών προγραμμάτων, σε ψηφιακό υπολογιστή. Το σύνολο

$$P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq b\}$$

καλείται **εφικτή περιοχή** και, προφανώς, είναι ένα πολύεδρο. Κάθε $x \in P$ καλείται **εφικτή λύση**. Ένα στιγμιότυπο που ορίζεται από τα A, b, c θα καλείται **εφικτό** αν $P \neq \emptyset$. Η συνάρτηση $z = c'x$ καλείται αντικειμενική συνάρτηση. Ένα εφικτό σημείο, x , για το οποίο, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μέγιστη, θα καλείται **βέλτιστη λύση**. Αν το x είναι μία βέλτιστη λύση, τότε το $c'x$ **βέλτιστο βάρος** ή **τιμή** της λύσης. Ένα εφικτό στιγμιότυπο του (2.2) μπορεί να μην έχει βέλτιστη λύση. Θα λέμε ότι ένα στιγμιότυπο είναι **μη φραγμένο** αν για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$ υπάρχει ένα $x \in P$ τέτοιο ώστε $c'x > \omega$. Ένα στιγμιότυπο θα καλείται **φραγμένο** αν δεν είναι μη φραγμένο.

Θεώρημα 2.15. Αν ένα Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού είναι φραγμένο, έχει βέλτιστη λύση.

Πριν αποδείξουμε το Θεώρημα 2.15 αναφέρουμε (χωρίς απόδειξη) ένα γνωστό θεώρημα του Weierstrass.

Θεώρημα 2.16 (Weierstrass). Αν το F είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και η $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε $\exists x^* \in F : f(x^*) \geq f(x), \forall x \in F$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.15. Αφού το z_{LP} είναι φραγμένο $\exists \omega \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\forall x \in P : c'x < \omega$. Άρα, το P είναι φραγμένο. Θα δείξουμε ότι το P είναι και κλειστό και άρα συμπαγές. Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία στοιχείων του P , και έστω $x_n \xrightarrow{n} x$.

- (1) $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim x_n = x \Rightarrow x \geq 0$.
- (2) Επίσης, $Ax_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Ax = A \lim x_n = \lim Ax_n \leq b$.

Από τα (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $x \in P$ και άρα το P είναι κλειστό. Παρατηρούμε επίσης ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι συνεχής ως γραμμική. Από το Θεώρημα 2.16 προκύπτει το ζητούμενο. **Q.E.D.**

Το Θεώρημα 2.15 μας λέει ότι ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι καλά ορισμένος. Παρατηρούμε ότι δεν είναι απαραίτητο να έχουμε δεδομένα στους ρητούς για την εγκυρότητα του Θεωρήματος 2.15.

Ορισμός 2.17. Για κάθε Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού:

$$z_{LP} = \max\{c'x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}_+^n\},$$

ορίζουμε το **δυϊκό** του ως

$$w_{LP} = \min\{u'b \mid u'A \geq c', u \in \mathbb{R}_+^m\} = \min\{b'u \mid A'u \geq c, u \in \mathbb{R}_+^m\}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση αναφερόμαστε στο z_{LP} ως το **πρωτεύον** και στο δυϊκό ως το δυϊκό ή ως το **δευτερεύον**.

Πρόταση 2.18. Το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον.

Απόδειξη. Αναδιατυπώνοντας το w_{LP} ως πρόβλημα μεγιστοποίησης και έχοντας στο νου μας πως $\max(f(x)) = -\min(-f(x))$ προκύπτει το ζητούμενο. **Q.E.D.**

Πρόταση 2.19 (Ασθενής Δυϊκότητα). Αν το x^* εφικτή λύση για το πρωτεύον και το u^* είναι εφικτή λύση για το δευτερεύον,

$$c'x^* \leq z_{LP} \leq w_{LP} \leq (u^*)'b$$

Απόδειξη. $c'x^* \leq (u^*)'Ax^*$, αφού το u^* είναι εφικτή λύση για το δευτερεύον και $x^* \in \mathbb{R}_+^n$. Επίσης, $(u^*)'Ax^* \leq (u^*)'b$, αφού το x^* είναι εφικτή λύση για το πρωτεύον και $u^* \in \mathbb{R}_+^m$. Άρα για κάθε x^* , εφικτή λύση για το πρωτεύον, και για κάθε u^* , εφικτή λύση για το δευτερεύον, έχουμε ότι $c'x^* \leq (u^*)'b$ οπότε συμπεραίνουμε το ζητούμενο. **Q.E.D.**

Πόρισμα 2.20. Αν το πρωτεύον είναι μη φραγμένο, τότε το δευτερεύον είναι μη εφικτό.

Πόρισμα 2.21. Αν το δευτερεύον είναι εφικτό τότε το πρωτεύον είναι φραγμένο.

Πρόταση 2.22. Αν το z_{LP} είναι φραγμένο τότε είναι εφικτό.

Απόδειξη. Έστω z_{LP} να είναι μη εφικτό και $P = \emptyset$ η εφικτή του περιοχή. Τότε $\forall \omega \in \mathbb{R} \forall x \in P \ c'x \geq \omega$, άρα το z_{LP} είναι μη φραγμένο. **Q.E.D.**

Θεώρημα 2.23 (Ισχυρή Δυϊκότητα). Αν το z_{LP} ή το w_{LP} είναι πεπερασμένο, τότε και τα δύο είναι πεπερασμένα και ίσα.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν κάποιο από τα δύο είναι πεπερασμένο τότε το άλλο είναι πεπερασμένο και άρα εφικτό. Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει $x \in P$, στην εφικτή περιοχή του πρωτεύοντος, και $u \in Q$, στην εφικτή περιοχή του δευτερεύοντος, τέτοιο ώστε $c'x \geq u'b$. Δηλαδή, υπάρχουν διανύσματα $x \in \mathbb{R}_+^n$ και $u \in \mathbb{R}_+^m$ τέτοια ώστε

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -c' & b' \\ \mathbf{0} & -A' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}.$$

Από το Πόρισμα 2.3 το παραπάνω σύστημα έχει λύση αν $y_m'b - y_n'c \geq 0$, για κάθε διάνυσμα $y = \begin{pmatrix} y_m \\ y_0 \\ y_n \end{pmatrix}$ (όπου y_m είναι $m \times 1$ διάνυσμα, $y_0 \in \mathbb{R}$ και y_n είναι $n \times 1$ διάνυσμα) τέτοιο ώστε $y \geq 0$ και

$$[y_m' \ y_0 \ y_n'] \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -c' & b' \\ \mathbf{0} & -A' \end{bmatrix} \geq 0.$$

Από την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε $y_m'A - y_0c' \geq 0$ και $y_0b' - y_n'A' \geq 0$. Τώρα αν $y_0 = 0$, τότε

$$\begin{aligned} y_m'b - y_n'c &\geq y_m'Ax - y_n'A'u, \text{ για κάποιο } x \in P, u \in Q \\ &\geq y_0c'x - y_0b'u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Αλλιώς,

$$\begin{aligned} y_m'b - y_n'c &\geq \frac{1}{y_0}(y_0y_m'b - y_0y_n'c) \\ &\geq \frac{1}{y_0}(y_m'Ay_n - y_n'A'y_m) \\ &= 0 \text{ διότι αφού ο } y_m'Ay_n \text{ είναι } 1 \times 1, \text{ ισούται με τον ανάστροφό του. } \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Όπως είδαμε, η Ισχυρή Δυϊκότητα είναι συνέπεια του Λήμματος του Farkas και άρα του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ανισοτήτων. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να συνεπάγουμε το Λήμμα του Farkas από την Ισχυρή και Ασθενή Δυϊκότητα (για την απόδειξη αυτού ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το βιβλίο των Nemhauser και Wolsey [NW99]).

Πόρισμα 2.24. Για ένα δυϊκό ζεύγος Γραμμικών Προγραμμάτων ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει:

(α) Τα z_{LP} και w_{LP} είναι πεπερασμένα και ίσα.

(β) $z_{LP} = \infty$ και το w_{LP} είναι μη εφικτό.

(γ) Και τα δύο είναι μη εφικτά.

Θεώρημα 2.25. Τα $x \in \mathbb{R}_+^n$ και $u \in \mathbb{R}_+^m$ είναι βέλτιστες λύσεις για το πρωτεύον και το δευτερεύον, αντίστοιχα, **ανν** ικανοποιούν τις συνθήκες *Khun-Tucker*. Δηλαδή,

$$(2.3a) \quad Ax \leq b$$

$$(2.3b) \quad u' A \geq c'$$

$$(2.3\gamma) \quad u'(b - Ax) = 0$$

$$(2.3\delta) \quad x'(A'u - c) = 0$$

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Έστω ότι τα x, u ικανοποιούν τις συνθήκες *Khun-Tucker*. Τότε $u'b = u'Ax = x'A'u = x'c$ όπου χρησιμοποιήσαμε τις συνθήκες (2.3γ) και (2.3δ) και το γεγονός ότι $x'A'u$ είναι ένας 1×1 πίνακας και άρα ισούται με τον ανάστροφό του. Άρα, αν τα x, u , ικανοποιούν τις συνθήκες *Khun-Tucker* είναι βέλτιστες λύσεις.

($\Rightarrow$) Αν τα x, u , είναι βέλτιστες λύσεις προφανώς ικανοποιούν τις συνθήκες (2.3a) και (2.3b) αφού πρέπει να είναι εφικτές λύσεις. Τώρα,

$$\begin{aligned} c'x &= x'A'u - x'(A'u - c) \\ &= u'Ax - x'(A'u - c) \\ &= u'b - u'(b - Ax) - x'(A'u - c). \end{aligned}$$

Αλλά, αφού τα x, u είναι βέλτιστα, έχουμε $c'x = u'b$ και αφού $x, A'u - c, b - Ax, u \geq 0$, πρέπει να ισχύει ότι τα x, u , ικανοποιούν τις (2.3γ) και (2.3δ). **Q.E.D.**

Παρατήρηση 2.26. Παρατηρούμε ότι αν το u_i , δηλαδή, η i -οστή συντεταγμένη της βέλτιστης λύσης του δευτερεύοντος είναι > 0 , τότε η αντίστοιχη i -οστή ανισότητα $b_i \geq a_i x$ ικανοποιείται από το x (τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος) με ισότητα. Αυτό το φαινόμενο καλείται **συμπληρωματική χαλαρότητα (complementary slackness)**.

Λήμμα 2.27. Έστω z_{LP}, w_{LP} όπως στον Ορισμό 2.17. Αν το πρωτεύον έχει βέλτιστη λύση, τότε το δευτερεύον έχει βέλτιστη λύση u_0 τέτοια ώστε $A'u_0 = c$.

Απόδειξη. Έστω $\delta = z_{LP}$. Θέλουμε το σύστημα
$$\begin{aligned} A'u &\leq c \\ -A'u &\leq -c \\ b'u &\leq \delta \\ -b'u &\leq -\delta \end{aligned}, \text{ δηλαδή, τη σφιστεμ}$$

$$\begin{bmatrix} A' \\ -A' \\ b' \\ -b' \end{bmatrix} u \leq \begin{pmatrix} c \\ -c \\ \delta \\ -\delta \end{pmatrix}$$
 να έχει λύση $u_0 \geq 0$. Ισοδύναμα θέλουμε μία λύση $u_0 \geq 0$ για το

σύστημα

$$\begin{bmatrix} A' & -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \\ -A' & \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \\ b' & 0 & 1 \\ -b' & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c - \mathbf{1}_n \\ -c + \mathbf{1}_n \\ \delta + 1 \\ -\delta - 1 \end{pmatrix}$$

όπου $\mathbf{1}_n$ είναι η $n \times 1$ στήλη-διάνυσμα με όλα τα στοιχεία να είναι 1 και $\mathbf{0}_n$ είναι αντίστοιχα η $n \times 1$

στήλη διάνυσμα με μηδενικά. Έστω $y = \begin{bmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \\ y_0^1 \\ y_0^2 \end{bmatrix}$ ένα διάνυσμα με y_n^1, y_n^2 να είναι $n \times 1$ διανύσματα

και $y_0^1, y_0^2 \in \mathbb{R}$. Έστω επίσης, $y \geq 0$ και $y' \begin{bmatrix} A' & -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \\ -A' & \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \\ b' & 0 & 1 \\ -b' & 0 & -1 \end{bmatrix} \geq 0$. Δηλαδή,

$$(y_n^1)' A' - (y_n^2)' A' + y_0^1 b' - y_0^2 b' \geq 0 \Rightarrow A(y_n^2 - y_n^1) \leq b(y_0^1 - y_0^2) \Rightarrow A \begin{pmatrix} y_n^2 - y_n^1 \\ y_0^1 - y_0^2 \end{pmatrix} \leq b$$

και ακόμα $-y_n^1 + y_n^2 \geq 0$ και $y_0^1 - y_0^2 \geq 0$. Από αυτά έχουμε ότι αν $y_0^1 - y_0^2 > 0$, τότε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} y_n^2 - y_n^1 \\ y_0^1 - y_0^2 \end{pmatrix}$ είναι εφικτή λύση για το πρωτεύον και άρα $c' \begin{pmatrix} y_n^2 - y_n^1 \\ y_0^1 - y_0^2 \end{pmatrix} \leq \delta$. Αν δείξουμε ότι

$$y' \begin{pmatrix} c - \mathbf{1}_n \\ -c + \mathbf{1}_n \\ \delta + 1 \\ -\delta - 1 \end{pmatrix} \geq 0, \text{ τότε από το Πόρισμα 2.3 συμπεραίνουμε την πρόταση.}$$

Ισοδύναμα θέλουμε

$$\begin{aligned} (y_n^1)'(c - \mathbf{1}_n) + (y_n^2)'(-c + \mathbf{1}_n) + y_0^1(\delta + 1) + y_0^2(-\delta - 1) &\geq 0 \iff \\ c'(y_n^1 - y_n^2) + (y_n^2 - y_n^1) + \delta(y_0^1 - y_0^2) + (y_0^1 - y_0^2) &\geq 0 \iff \\ c'(y_n^2 - y_n^1) + (y_n^1 - y_n^2) + (y_0^2 - y_0^1) &\leq \delta(y_0^1 - y_0^2), \end{aligned}$$

και η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού $(y_n^1 - y_n^2) \leq 0$, $(y_0^2 - y_0^1) \leq 0$ και $c' \begin{pmatrix} y_n^2 - y_n^1 \\ y_0^1 - y_0^2 \end{pmatrix} \leq \delta$. Αν $y_0^1 = y_0^2$, έχουμε $A(y_n^2 - y_n^1) \leq 0$. Έστω u_0 εφικτή λύση για το δευτερεύον, τότε όπως πριν θέλουμε

$$c'(y_n^1 - y_n^2) + (y_n^2 - y_n^1) \geq 0.$$

Έχουμε

$$c'(y_n^1 - y_n^2) + (y_n^2 - y_n^1) \geq u_0' A(y_n^1 - y_n^2) + (y_n^2 - y_n^1) \geq 0,$$

συνεπώς $u_0', A(y_n^1 - y_n^2), (y_n^2 - y_n^1) \geq 0$

Q.E.D.

Το Λήμμα 2.27 μας επιτρέπει να θεωρούμε το δευτερεύον ως $w_{LP} = \min\{b'u \mid A'u = c, u \in \mathbb{R}_+^m\}$.

2.4 Η Δομή των Πολυέδρων

Σε αυτήν την ενότητα εξετάζουμε περαιτέρω τη γεωμετρική φύση των πολυέδρων. Υπενθυμίζουμε ότι ένα πολυέδρο είναι ένα σύνολο διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο όπως: $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.

2.4.1 Χαρακτηριστικός Κώνος, Χαρακτηριστικός Γραμμικός Χώρος και Διάσταση

Ορισμός 2.28. Μία ανισότητα $a_i x \leq b_i$ που εμφανίζεται στην περιγραφή του P (δηλαδή η a_i είναι η i -οστή γραμμή του A) θα καλείται **υποννοούμενη ισότητα (implicit equality)** αν $a_i x = b_i, \forall x \in P$. Μετά, ίσως, από κάποιες ανακατατάξεις των γραμμών του $[A \ b]$ χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$[A \ b] = \begin{bmatrix} A^= & b^= \\ A^< & b^< \end{bmatrix},$$

όπου, $A^=x = b^= \forall x \in P$ και $\forall$ γραμμή $[a_i^< \ b_i^<]$ του $[A^< \ b^<]$ $\exists x \in P : a_i^< x < b_i^<$.

Πρόταση 2.29. Έστω $S^= = \{1, \dots, \rho\}$ το σύνολο των δεικτών των γραμμών $[A^= \ b^=]$ (ώστε οι δείκτες του $[A^< \ b^<]$ είναι $S^< = \{\rho + 1, \dots, m\}$). Τότε υπάρχει $x \in P$ τέτοιο ώστε $a_i^< x < b_i^<, \forall i \in S^<$. Ένα τέτοιο x θα λέμε ότι είναι **εντός του P (inner point of P)**.

Απόδειξη. Για κάθε $i \in S^<$ έστω x_i σημείο στο P τέτοιο ώστε $a_i^< x_i < b_i^<$. Έστω $\lambda_{\rho+1}, \dots, \lambda_m > 0$ τέτοια ώστε $\sum_{i=\rho+1}^m \lambda_i = 1$. Τότε από την Πρόταση 2.8, $x = \sum_{i=\rho+1}^m \lambda_i x_i \in P$ και προφανώς $\forall i \in S^< : a_i^< x < b_i^<$. Q.E.D.

Παρατήρηση 2.30. Παρατηρούμε ότι καμία ανισότητα από τις γραμμές του $[A^< \ b^<]$ δεν μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του $[A^= \ b^=]$ γιατί αν π.χ.

$$[a_i^< \ b_i^<] = \sum_{i \in S^=} \lambda_i [a_i^= \ b_i^=]$$

τότε για κάθε σημείο εντός του P , $x \in P$ έχουμε ότι

$$a_i^< x = \sum_{i \in S^=} \lambda_i a_i^= x = \sum_{i \in S^=} \lambda_i b_i^= = b_i^= ,$$

που είναι αντίφαση.

Ορισμός 2.31. Ο **χαρακτηριστικός κώνος** του P , συμβολίζεται $\text{char.cone}(P)$ και είναι ο πολυεδρικός κώνος

$$\text{char.cone}(P) := \{y \mid x + y \in P, \forall x \in P\} = \{y \mid Ay \leq 0\}.$$

Για να δείξουμε την τελευταία ισότητα, έστω $y \in \text{char.cone}(P)$. Αν $Ay \not\leq 0$ τότε υπάρχει μία γραμμή του A , έστω η, a_i τέτοια ώστε $\epsilon = a_i y > 0$. Αφού $y \in \text{char.cone}(P)$ έχουμε ότι αν $x \in P \Rightarrow x + y \in P \Rightarrow x + 2y \in P \Rightarrow \dots \Rightarrow x + ky \in P, k \in \mathbb{N}$. Έστω $x \in P$ την $z = x + \left\lceil \frac{|b_i| + 2|a_i x| + 1}{\epsilon} \right\rceil y \in P$. Βut $a_i z > |b_i| + |a_i x| > b_i$, άτοπο. Η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι προφανής.

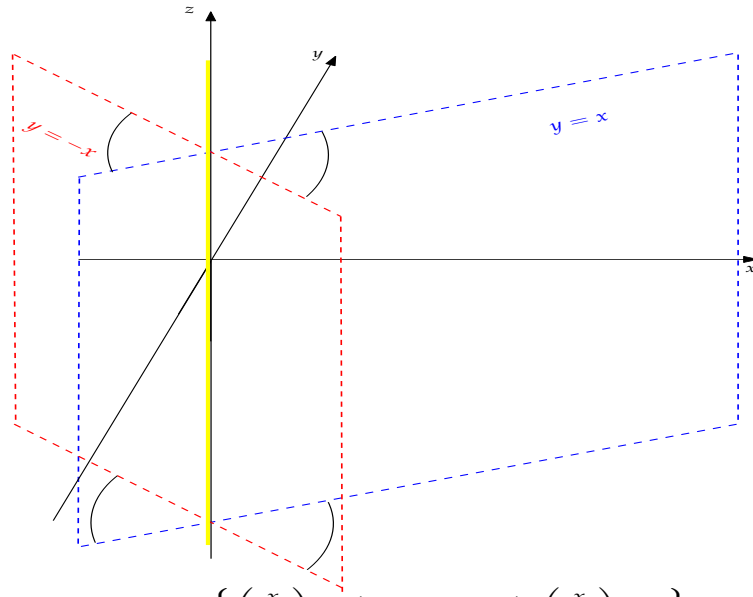
Πρόταση 2.32.

(1) $y \in \text{char.cone}(P)$ αν $\exists x \in P : x + \lambda y \in P \forall \lambda \geq 0$.

(2) $P + \text{char.cone}(P) = P$.

(3) Το P είναι φραγμένο αν $\text{char.cone}(P) = \{0\}$.

(4) Αν $P = Q + C$ είναι μία αποσύνθεση του P (όπως στο Θεώρημα 2.11) τότε $C = \text{char.cone}(P)$



$$\begin{aligned} \text{char.cone}(P) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq 0 \right\} \\ \text{lin.space}(P) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = 0 \right\} \\ &= \text{Η κίτρινη ευθεία} = \text{Ο άξονας των } z \end{aligned}$$

Σχήμα 2.4: Ένας χαρακτηριστικός γραμμικός χώρος.

Απόδειξη.

- (1) $(\Rightarrow) \forall x \in P \forall \lambda \geq 0$ έχουμε $A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay \leq b$.
 $(\Leftarrow)$ Έστω $\epsilon = a_i y > 0$ για κάποιο i . Τότε $a_i(x + \frac{(b_i + 2|a_i x| + 1)}{\epsilon} y) > b + |a_i x| > b_i$.
- (2) Έστω $x \in P$ και $y \in \text{char.cone}(P)$ τότε προφανώς $x + y \in P$. Όμως, $0 \in \text{char.cone}(P)$, άρα, $P \subseteq P + \text{char.cone}(P)$.
- (3) Αν $0 \neq y \in \text{char.cone}(P)$ προφανώς το P δεν είναι φραγμένο. Αν $\text{char.cone}(P) = \{0\}$ τότε σε κάθε αποσύνθεση του P σε ένα πολύτοπο και έναν πολυεδρικό κώνο, ο κώνος πρέπει να είναι το $\{0\}$, ειδικά, κάθε $0 \neq y \in \text{κώνο}$ ανήκει στον χαρακτηριστικό κώνο. Πράγματι έστω ένα τέτοιο y και $x \in P$. Τότε $x = z + q$ για κάποιο z στον πολυεδρικό κώνο και κάποιο q στο πολύτοπο. Όμως, τότε $\omega = \lambda y + z + q$, $\forall \lambda \geq 0$, που είναι αντίφαση.
- (4) Έχουμε ήδη δείξει στο (3) ότι κάθε $y \in C$ ανήκει στον χαρακτηριστικό κώνο. Τώρα, έστω $0 \neq y \in \text{char.cone}(P)$ και έστω $x \in Q$. $x + y \in P$ και αφού $x \in Q$, το y πρέπει να ανήκει στον C . Q.E.D.

Ορισμός 2.33. Τα μη μηδενικά διανύσματα στον $\text{char.cone}(P)$ καλούνται οι **άπειρες κατευθύνσεις** του P . Ο **χαρακτηριστικός γραμμικός χώρος (lineality space)** του P ορίζεται ως:

$$\text{lin.space}(P) := \text{char.cone}(P) \cap -\text{char.cone}(P) = \{x \mid Ax = 0\}$$

Αν ο χαρακτηριστικός γραμμικός χώρος (ή Χ.Γ.Χ.) έχει διάσταση μηδέν, τότε το P καλείται **σημειακό**.

Πρόταση 2.34. Αν ένα πολύεδρο, P , είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}_+^n$ τότε είναι σημειακό.

Απόδειξη. Αν $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ τότε

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\},$$

ώστε, $\dim(\text{lin.space}(P))=0$.

Q.E.D.

Στο Σχήμα 2.4 μπορούμε να δούμε ένα Χ.Γ.Χ. διάστασης 1.

Θεώρημα 2.35. Ένα μη κενό πολύεδρο, P , μπορεί να αναπαρασταθεί μοναδικά ως $P = H + Q$, όπου ο H είναι γραμμικός χώρος και το Q είναι ένα μη κενό σημειακό πολύεδρο, με $Q \subseteq H^\perp$

Απόδειξη. Έστω $H = \text{lin.space}(P)$, και $Q = H^\perp \cap P$. Έχουμε ότι $x \in H^\perp$ αν $x'y = 0$, $\forall y \in H = \text{char.cone}(P) \cap -\text{char.cone}(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$. Ωστε $x \in H^\perp \cap P$ αν

$$x'y = 0, \forall y \in \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\} \text{ και } x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

Έστω $y \in \text{lin.space}(P)$ και $x \in H^\perp \cap P$ τότε $A(y+x) = Ay + Ax = 0 + Ax \leq b$ ώστε $x+y \in P$. Τώρα, έστω $z \in P$, αν $Az = 0$ τότε $z \in \text{lin.space}(P)$ ώστε $0 \in H^\perp \cap P$ ανδ $z = z+0 \in H+H^\perp \cap P$. Αν $b \geq Az = \omega \neq 0$ τότε έστω z_0 η προβολή του z στον $\text{lin.space}\{a_1, \dots, a_m\}$ δηλαδή, $z - z_0 \in (\text{lin.space}\{a_1, \dots, a_m\})^\perp$ και $z_0 \in \text{lin.space}\{a_1, \dots, a_m\}$. Τότε για κάθε $y \in \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\} \Rightarrow z_0'y = 0$ και αφού $z - z_0 \in (\text{lin.space}\{a_1, \dots, a_m\})^\perp \Rightarrow A(z - z_0) = 0 \Rightarrow Az_0 = Az \leq b$. Άρα, $z_0 \in H^\perp \cap P$, $z - z_0 \in \text{lin.space}$ και $z = z_0 + z - z_0$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, πρέπει να δείξουμε ότι αυτή η αποσύνθεση είναι μοναδική, ότι ο H είναι γραμμικός χώρος, που είναι προφανές και ότι το Q είναι μη κενό σημειακό πολύεδρο. Το Q είναι η τομή ενός πολυέδρου και ενός γραμμικού χώρου άρα είναι πολύεδρο. Επίσης έχουμε δείξει ότι το Q είναι μη κενό αφού το P είναι μη κενό. Για να δείξουμε ότι το Q είναι σημειακό παρατηρούμε ότι $\text{lin.space}(Q) = \text{lin.space}(P) \cap H^\perp$ ώστε $\text{lin.space}(Q) = H \cap H^\perp = \{0\}$. Τώρα έστω μία άλλη αποσύνθεση: $P = H_* + Q_*$ όπως στην εκφώνηση του θεωρήματος. Έστω $z \in P$ και έστω z_Q, z_{Q_*} , οι προβολές του στους Q, Q_* , αντίστοιχα. Τότε οι **αφινικοί ημιχώροι** $z_Q + H, z_{Q_*} + H_*$, είναι υπούνολα του P , και είναι ίσα. Τότε η μόνη επιλογή είναι $z_Q = z_{Q_*}$ και $H = H_*$. Q.E.D.

Ορισμός 2.36. Ορίζουμε τη **διάσταση** ενός πολυέδρου, $\dim(P)$, να είναι το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξαρτήτων σημείων στο P μείον 1.

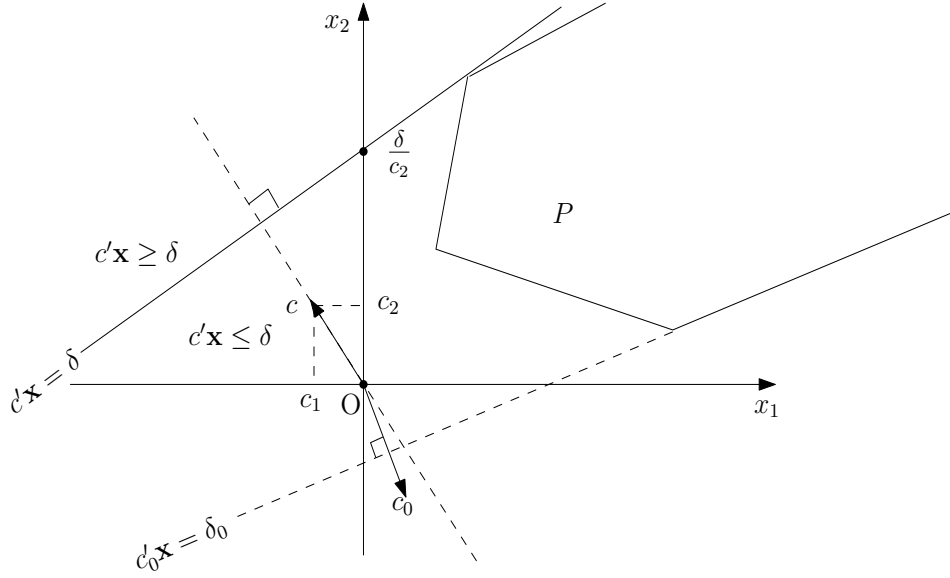
Θα δείξουμε ότι αν ένα πολύεδρο δεν είναι **πλήρους διάστασης (full-dimensional)**, δηλαδή αν $\dim(P) < n$, όταν $P \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε τουλάχιστον μία από τις ανισότητες $a_i x \leq b_i$ είναι υποννοούμενη ιδιότητα. Ακολουθούμε τη σύμβαση $\dim(\emptyset) = -1$.

Πρόταση 2.37. Αν $P \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα πολύεδρο, τότε

$$(2.4) \quad \dim(P) + \text{rank}(A^\top b^\top) = n.$$

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $P = \emptyset$. Τότε για κάθε $x \in P$, έχουμε $a_i x = b_i$ ώστε $(A \ b) = (A^\top b^\top)$. Επίσης, το σύστημα $A^\top x = b^\top$ δεν έχει λύση το οποίο σημαίνει ότι $\text{rank}(A^\top, b^\top) > \text{rank}(A^\top)$. Όμως, $\text{rank}(A^\top) = n$ ειδικά το σύστημα $A^\top x = b^\top$ έχει λύση. Επομένως, $\text{rank}(A^\top b^\top) = n+1$ και έχουμε την (2.4). Τώρα έστω $P \neq \emptyset$, τότε $\exists x : A^\top x = b^\top$ οπότε από την Πρόταση 1.3 έχουμε $\text{rank}(A^\top) = \text{rank}(A^\top b^\top) = n-k$, όπου $0 \leq k \leq n$. Τώρα, από την Πρόταση 1.6 έχουμε ότι υπάρχουν $k+1$ αφινικά ανεξάρτητες λύσεις του $A^\top x = 0$. Έστω $y^1, \dots, y^{k+1}$ να είναι τέτοιες λύσεις και x_0 ένα σημείο εντός του P . Έστω $i \in \{1, \dots, k+1\}$, τότε $A^\top(x_0 + \epsilon^i y^i) = A^\top x_0 + \epsilon^i A^\top y^i = A^\top x_0 + \epsilon^i A^\top y^i \leq b^\top$, για αρκετά μικρό ϵ^i . Έστω $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_i, 1 \leq i \leq k+1\}$. Τότε τα σημεία $x_0 + \epsilon y^i$ είναι αφινικά ανεξάρτητα σημεία στο P έτσι ώστε $\dim(P) \geq k$ και άρα, $\text{rank}(A^\top b^\top) + \dim(P) \geq n$.

Τώρα, έστω $\dim(P) = k$ και $x^1, \dots, x^{k+1}$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία στο P . Αφού, τα x^i είναι αφινικά ανεξάρτητες λύσεις του $A^\top x = b^\top$, από τις Προτάσεις 1.3, 1.6, έχουμε $k+1 \leq n+1 - \text{rank}(A^\top b^\top) \Rightarrow \text{rank}(A^\top b^\top) + \dim(P) \leq n - k + k = n$. Q.E.D.


 Σχήμα 2.5: Δύο υπερεπίπεδα υποστήριξης για το P , τα, $c'x = \delta$ και $c'_0x = \delta_0$

Δεδομένου ότι ενδιαφερόμαστε κυρίως για πολυέδρα ορισμένα από Γραμμικά Προγράμματα περιοριζόμενα σε πολυέδρα που είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}_+^n$ για τα επόμενα, όμως, όλα τα αποτελέσματα επεκτείνονται σε τυχαία πολυέδρα.

2.4.2 Προσόψεις και Μεγιστοτικές Προσόψεις

Για αυτήν την ενότητα θεωρούμε $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq b\}$. Αν $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα διάνυσμα και $\max\{c'x \mid x \in P\} = \delta \in \mathbb{R}$, τότε, το **αφινικό υπερεπίπεδο** $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c'x = \delta\}$ θα καλείται **υπερεπίπεδο υποστήριξης (supporting hyperplane)** του P . Το Σχήμα 2.5 δίνει μια γραφική αναπαράσταση του επιπέδου υποστήριξης. Ένα υποσύνολο, F , του P θα καλείται **πρόσοψη** του P αν $F = P$ ή αν είναι η τομή του P με ένα υπερεπίπεδο υποστήριξης του P . Εναλλακτικά, το F είναι πρόσοψη του P αν $F \neq \emptyset$ και

$$(2.5) \quad F = \{x \in P \mid A_*x = b_*\}$$

για κάποιο πίνακα $[A_* \ b_*]$ που αποτελείται από ένα υποσύνολο των γραμμών του $[A \ b]$. Για να δούμε ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι, έστω $F = \{x \in P \mid c'x = \delta\}$ μία πρόσοψη του P . Τότε $\delta = \max\{c'x \mid x \in P\}$. Από την Ισχυρή Δυϊκότητα (Θεώρημα 2.23) και το Λήμμα 2.27

$$\delta = \min\{b'u \mid u \in \mathbb{R}_+^m, A'u = c\}.$$

Έστω ότι το u_0 επιτυγχάνει αυτό το minimum και $A_*x \leq b_*$ το υποσύστημα του $Ax \leq b$ που αποτελείται από εκείνες τις ανισότητες του $Ax \leq b$ που αντιστοιχούν σε θετικά στοιχεία του u_0 .

$$x \in P \text{ και } x'c = \delta \iff x \in P \text{ και } x'A'u_0 = b'u_0 \xrightarrow{\text{Παρατήρηση 2.26}} x \in P \text{ και } A_*x = b_*$$

αντίστροφα, αν $F = \{x \in P \mid A_*x = b_*\} \neq \emptyset$ όπου το $[A_* \ b_*]$ αποτελείται από ένα υποσύνολο των σειρών του $[A \ b]$, είναι υπερσύνολο του $[A = b =]$ και c' είναι το άθροισμα των σειρών του A_* , τότε $c'x \geq c'y$ για κάθε $x \in F$ και για κάθε $y \in P$. Για να δούμε ότι αυτό ισχύει έστω S_* το σύνολο που περιέχει τους δείκτες των σειρών του A_* και παρατηρούμε ότι

$$c'x = \sum_{i \in S_*} a_i x = \sum_{i \in S_*} b_i \geq \sum_{i \in S_*} a_i y = c'y, \quad \forall y \in P \quad \forall x \in F.$$

Αυτό φυσικά σημαίνει ότι $F = \{x \in P \mid c'x = \max\{c'x \mid x \in P\}\}$.

Αμεσα προκύπτουν τα παρακάτω:

Πρόταση 2.38.

- (α) το P έχει πεπερασμένο αριθμό προσόψεων·
- (β) κάθε πρόσοψη είναι μη κενό πολύεδρο·
- (γ) αν το F είναι πρόσοψη του P και $F' \subseteq F$, τότε το F' είναι πρόσοψη του P **ανν** το F' είναι πρόσοψη του F .

Απόδειξη. Για να ελέγξουμε το (γ) παρατηρούμε ότι $F' \subseteq F = \{x \in P \mid A_*x = b_*\}$ σημαίνει πως $x_0 \in F' \Rightarrow A_*x_0 = b_*$ έτσι ώστε το F' είναι πρόσοψη του $P \Leftrightarrow F' = \{x \in P \mid A_0x = b_0\}$ για κάποιο υποσύστημα $A_0x \leq b_0$ του $Ax \leq b$ που περιέχει το $A_*x \leq b_*$ έτσι ώστε το F' είναι πρόσοψη του $P \Leftrightarrow$ το F' είναι πρόσοψη του F . **Q.E.D.**

Ορισμός 2.39. Μία **μεγιστοτική πρόσοψη (facet)**, F , είναι μία πρόσοψη του P που

- είναι γνήσιο υποσύνολο του P ·
- είναι μεγιστοτικό ως προς την σχέση του περιέχεσθαι, δηλαδή αν F' είναι μία πρόσοψη του P με $F' \supseteq F$ και $F' \neq P$, τότε $F = F'$.

Ορισμός 2.40. Μία ανισότητα του συστήματος $Ax \leq b$ θα καλείται **πλεονάζουσα (redundant)** αν υπονοείται από τις άλλες ανισότητες του συστήματος. Άρα, το σύστημα είναι **μη πλεονάζον (irredundant)** αν δεν έχει πλεονάζουσες ανισότητες.

Παρατήρηση 2.41. Παρατηρούμε ότι αν μία ανισότητα $[a_i \ b_i]$ είναι μη πλεονάζουσα, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $a_ix > b_i$ και $ax \leq b$ για κάθε άλλη ανισότητα του συστήματος $Ax \leq b$. Πράγματι αν ίσχυε το αντίθετο, θα είχαμε ότι η ανισότητα $a_ix \leq b_i$ θα υπονοούταν από τις άλλες ανισότητες του συστήματος, όντας πλεονάζουσα.

Θεώρημα 2.42. Αν καμία ανισότητα του $A^<x \leq b^<$ δεν είναι πλεονάζουσα στο $Ax \leq b$ τότε υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των μεγιστοτικών προσόψεων του P και των ανισοτήτων $A^<x \leq b^<$, που δίνεται από την (2.6)

$$(2.6) \quad F = \{x \in P \mid a_i^<x = b_i^<\}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί σε δύο βήματα:

- (α) Μία μεγιστοτική πρόσοψη είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του P και μία πρόσοψη του P . Άρα, αν F είναι μία πρόσοψη του P , $F = \{x \in P \mid A_*x = b_*\}$, για κάποιο $A_*x \leq b_*$ υποσύστημα του $A^<x \leq b^<$. Έστω $a_i^*x \leq b_i^*$ μία ανισότητα του συστήματος $A_*x \leq b_*$. Τότε $F' = \{x \in P \mid a_i^*x = b_i^*\}$ είναι μία πρόσοψη του P τέτοια ώστε $x \in F \Rightarrow x \in F'$. Επιπλέον, $F' \neq P$, αφού $a_i^*x \leq b_i^*$ δεν είναι υπονοούμενη ανισότητα. Οπότε,

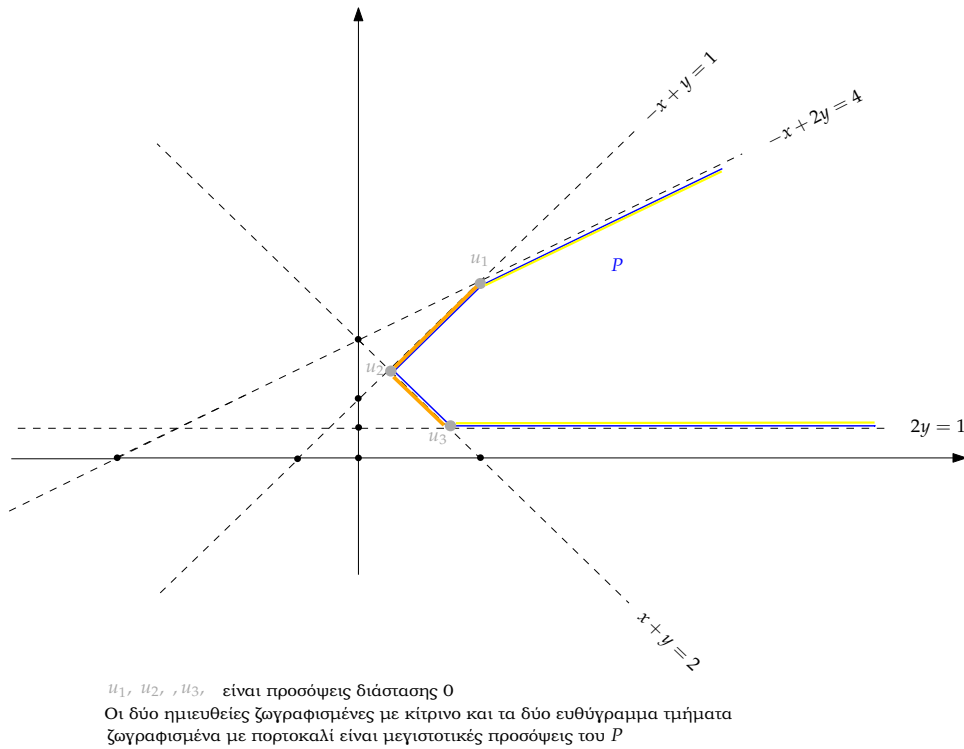
$$F' = F = \{x \in P \mid a_i^*x = b_i^*\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε μεγιστοτική πρόσοψη του P έχει μία αναπαράσταση (2.6) ώστε κάθε ανισότητα $a_i^<x \leq b_i^<$ ορίζει μία μεγιστοτική πρόσοψη.

- (β) Τώρα δείχνουμε ότι

$$F_i = \{x \in P \mid a_i^<x = b_i^<\}, F_j = \{x \in P \mid a_j^<x = b_j^<\}, i \neq j \implies F_i \neq F_j$$

Έστω $a^<x \leq \beta^<$ μία ανισότητα του $A^<x \leq b^<$ και έστω $A_*x \leq b_*$ οι υπόλοιπες ανισότητες του $A^<x \leq b^<$. Τότε υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $A^<x_0 = b^<$, $a^<x_0 = \beta^<$, $A_*x_0 < b_*$. Για να δειχθεί αυτό έστω x_1 ένα σημείο εντός του P αφού η $a^<x \leq \beta^<$ δεν είναι πλεονάζουσα, έστω x_2 τέτοιο ώστε $A^<x_2 = b^<$, $A_*x_2 \leq b_*$ και $a^<x_2 > \beta^<$. Τότε το x_0 είναι ένας κυρτός συνδυασμός των x_1, x_2 . **Q.E.D.**



Σχήμα 2.6: Προσόψεις και μεγιστοποιτικές προσόψεις του πολυέδρου του Σχήματος 2.3

Όταν μία πρόσοψη ορίζεται από την (2.6) θα λέμε ότι η $a_i^< x \leq b_i^<$ ορίζει το F . Στο Σχήμα 2.6 δείχνουμε μία γραφική αναπαράσταση προσόψεων και μεγιστοποιτικών προσόψεων. Άμεσα έχουμε

Πρόταση 2.43.

- (α) Η (2.5) και η (2.6) υποννοούν ότι κάθε πρόσοψη του P , εκτός από το P είναι τομή μεγιστοποιτικών προσόψεων του P .
- (β) Το P δεν έχει προσόψεις διαφορετικές από τον εαυτό του $\mathbf{anv} [A^= b^=] = [A \ b]$.
- (γ) Η διάσταση οποιασδήποτε μεγιστοποιτικής πρόσοψης είναι ένα λιγότερο από την διάσταση του P
- (δ) Αν το P είναι πλήρους διάστασης και $Ax \leq b$ είναι το σύνολο των ανισοτήτων που ορίζουν τις μεγιστοποιτικές προσόψεις, τότε $Ax \leq b$ είναι η μοναδική ελαχιστοτική περιγραφή του P (όπου μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε ανισότητα με οποιαδήποτε σταθερά και τότε θεωρούμε ότι έχουμε την ίδια περιγραφή).

Απόδειξη. Για να ελέγξουμε την (γ) υπενθυμίζουμε την (2.4), ώστε, $\dim(F) = n - \text{rank} \begin{bmatrix} A^= & b^= \\ a_i^< & b_i^< \end{bmatrix}$ που από την Παρατήρηση 2.30 σημαίνει ότι $\dim(F) = n - (\text{rank}[A^= b^=] + 1) = \dim(P) - 1$. Για την (δ) υπενθυμίζουμε ότι αν το P είναι πλήρους διάστασης τότε $\text{rank}([A^= b^=]) = 0$ και μία ανισότητα ορίζει μεγιστοτική πρόσοψη $\mathbf{anv}$ είναι μη πλεονάζουσα ανάμεσα στις ανισότητες του $[A^< b^<]$ που ορίζουν μεγιστοποιτικές προσόψεις (Θεώρημα 2.42) ώστε όλες οι ανισότητες που ορίζουν μεγιστοποιτικές προσόψεις είναι απαραίτητες για την περιγραφή του P και κάθε άλλη ανισότητα που περιγράφει το P είναι πλεονάζουσα. Q.E.D.

Θεώρημα 2.44. Οι ανισότητες στο $A^< \mathbf{x} \leq b^<$ είναι μη πλεονάζουσες στο $A\mathbf{x} \leq b$ ανν για όλες τις διακεκριμένες $a_i^< \mathbf{x} \leq b_i^<$ και $a_j^< \mathbf{x} \leq b_j^<$ υπάρχει ένα διάνυσμα x_0 που ικανοποιεί τα

$$Ax_0 \leq b, a_i^< x_0 = b_i^<, a_j^< x_0 < b_j^<.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Κάθε δύο διακεκριμένες $a_i^< \mathbf{x} \leq b_i^<$ και $a_j^< \mathbf{x} \leq b_j^<$ είναι ανισότητες που ορίζουν διακεκριμένες μεγιστοτικές προσόψεις, έτσι ώστε $\{\mathbf{x} \in P \mid a_i^< \mathbf{x} = b_i^<\} \neq \{\mathbf{x} \in P \mid a_j^< \mathbf{x} = b_j^<\}$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι η $a_i^< \mathbf{x} \leq b_i^<$ είναι πλεονάζουσα. Τότε δεν ορίζει μεγιστοτική πρόσοψη, που σημαίνει ότι $\{\mathbf{x} \in P \mid a_i^< \mathbf{x} = b_i^<\} \subseteq F = \{\mathbf{x} \in P \mid a_j^< \mathbf{x} = b_j^<\}$ για κάποια μεγιστοτική πρόσοψη, F , οφ P . Αυτό αντικρούει την ύπαρξη κάποιου x_0 τέτοιου που

$$Ax_0 \leq b, a_i^< x_0 = b_i^<, a_j^< x_0 < b_j^<. \quad \text{Q.E.D.}$$

Δίνουμε τώρα ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό για τις ανισότητες που ορίζουν μεγιστοτικές προσόψεις.

Θεώρημα 2.45. Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων τέτοιο που το $P = \text{conv.hull}(S)$ είναι πλήρους διάστασης. Τότε κάθε ανισότητα $c' \mathbf{x} \leq \delta$ ορίζει μεγιστοτική πρόσοψη του P ανν

- η $c' \mathbf{x} \leq \delta$ είναι έγκυρη για όλα τα $\mathbf{x} \in S$.
- για κάθε διάνυσμα, d , που είναι μη αρνητικό πολλαπλάσιο του c , υπάρχουν $x_1, x_2 \in S$ τέτοια ώστε $d'x_1 < d'x_2$ και $c'x_1 = \delta$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν η $c' \mathbf{x} \leq \delta$ ορίζει μία μεγιστοτική πρόσοψη του P τότε προφανώς, $c' \mathbf{x} \leq \delta, \forall \mathbf{x} \in S$. Έστω $d \neq \lambda c, \forall \lambda \geq 0$. Έστω $\beta := \max\{d' \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S\}$ το οποίο επιτυγχάνεται από το $x_2 \in S$. Αφού το $F = \{\mathbf{x} \in P \mid c' \mathbf{x} = \delta\}$ είναι μία μεγιστοτική πρόσοψη του P και $F' = \{\mathbf{x} \in P \mid d' \mathbf{x} = \beta\}$ είναι μία πρόσοψη του P διαφορετική από την F , έχουμε ότι $F \not\subseteq F'$ που σημαίνει ότι υπάρχει $x_1 \in F$ τέτοιο ώστε $d'x_1 < \beta = d'x_2$.

($\Leftarrow$) Αν το $F = \{\mathbf{x} \in P \mid c' \mathbf{x} = \delta\}$ δεν είναι μεγιστοτική πρόσοψη τότε έστω $d \notin \{\lambda c \mid \lambda \geq 0\}$. Αφού υπάρχουν x_1, x_2 , τέτοια ώστε $d'x_1 < d'x_2$ και $c'x_1 = \delta$ έχουμε ότι $F \neq \emptyset$. Άρα, F είναι πρόσοψη του P . Έστω $F' = \{\mathbf{x} \in P \mid e' \mathbf{x} = \beta\}$ μία μεγιστοτική πρόσοψη του P τέτοια που $F \subset F'$, όπου $e' \mathbf{x} \leq \beta$ είναι μία έγκυρη ανισότητα για το P (δηλαδή ικανοποιείται από όλα τα σημεία του P). Τότε $e \neq \lambda c$ για κάθε $\lambda \geq 0$. Οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in S$, με $e'x_1 < e'x_2$ και $c'x_1 = \delta$. Αυτό σημαίνει ότι $\beta \geq d'x_2 > d'x_1$ έτσι ώστε $x_1 \in F \setminus F'$, που είναι άτοπο. Q.E.D.

2.4.3 Ελαχιστοτικές Προσόψεις, Ακραία σημεία, Ακμές και Ακραίες Ακτίνες

Για τις υπόλοιπες ενότητες του κεφαλαίου θεωρούμε ξανά τυχαία πολύεδρα, δηλαδή όχι περιορισμένα στον $\mathbb{R}_+^n$.

Ορισμός 2.46. Ορίζουμε μία *ελαχιστοτική πρόσοψη*, (*minimal face*) να είναι μία πρόσοψη που δεν περιέχει άλλη πρόσοψη πλην του εαυτού της.

Από την Πρόταση 2.38(γ) έχουμε ότι μία πρόσοψη, F , δεν περιέχει άλλη πρόσοψη αν κάθε πρόσοψη της F ισούται με την F . Αυτό σημαίνει ότι

$$(2.7) \quad F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A_* \mathbf{x} = b_*\}$$

αλλιώς αν υπάρχει μία μη πλεονάζουσα ανισότητα $a\mathbf{x} \leq \beta$ τέτοια που

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a\mathbf{x} \leq \beta, A_* \mathbf{x} = b_*\}$$

τότε η F θα περιείχε μία πρόσοψη διαφορετική του εαυτού της δηλαδή, $F' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a\mathbf{x} = \beta, A_* \mathbf{x} = b_*\}$. Καλούμε μία F που ορίζεται από την (2.7), *αφινικό υπόχωρο*.

Θεώρημα 2.47 (Hoffman-Kruskal). Η F είναι ελαχιστοτική πρόσοψη του P ανν $\emptyset \neq F \subseteq P$ και $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_*x = b_*\}$ για κάποιο υποσύστημα, $A_*x \leq b_*$, του $Ax \leq b$.

Απόδειξη. Αν η F έχει μία αναπαράσταση όπως παραπάνω, είναι αφινικός υπόχωρος και άρα ελαχιστοτική πρόσοψη. Αντίστροφα έστω F μία ελαχιστοτική πρόσοψη του P . Τότε

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1x \leq b_1, A_2x = b_2\}$$

για κάποια υποσυστήματα $A_1x \leq b_1, A_2x = b_2$ του $Ax \leq b$. Αφού η F δεν έχει μεγιστοτικές προσόψεις και μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι ανισότητες στο $A_1x \leq b_1$ είναι μη πλεονάζουσες, συμπεραίνουμε ότι το $A_1x \leq b_1$ είναι κενό. **Q.E.D.**

Πρόταση 2.48. Αν το F είναι ελαχιστοτική πρόσοψη, τότε $\text{lin.space}(F) = \text{lin.space}(P)$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \Rightarrow x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_*x = 0\}$, έτσι ώστε, $\text{lin.space}(F) \supseteq \text{lin.space}(P)$. Έστω $\text{lin.space}(F) \neq \text{lin.space}(P)$, τότε υπάρχει ένα x τέτοιο ώστε $A_*x = 0, Ax \neq 0$, που σημαίνει ότι υπάρχει μία γραμμή a_i , στο $A \setminus A_*$, που είναι γραμμικά ανεξάρτητη από τις γραμμές του A_* . Όμως, τότε $F' = \{x \in P \mid A_*x = b_*, a_ix = b_i\} \subset F$ και η F' είναι μία πρόσοψη του P που είναι αντίφαση. **Q.E.D.**

Πόρισμα 2.49. Κάθε ελαχιστοτική πρόσοψη είναι μεταφορά του χαρακτηριστικού γραμμικού χώρου του P .

Πόρισμα 2.50. Κάθε ελαχιστοτική πρόσοψη είναι της μορφής (2.7), όπου το $A_*x = b_*$ είναι ένα μεγιστοτικό σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων ισοτήτων από το $Ax = b$.

Απόδειξη. Το γεγονός ότι είναι μεγιστοτικό φαίνεται εύκολα από την Πρόταση 2.48. Αν δεν είναι όλες οι ισότητες γραμμικά ανεξάρτητες μπορούμε να αφαιρέσουμε διαδοχικά όσες χρειάζεται ώστε το εναπομείναν σύνολο να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. **Q.E.D.**

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι όλες οι ελαχιστοτικές προσόψεις έχουν την ίδια διάσταση, δηλαδή $n - \text{rank}(A) = \dim(\text{lin.space}(P))$. Τώρα, αν το P είναι σημειακό, τότε $\text{rank}(A) = n$ (από το Rank-Nullity Θεώρημα), ώστε, όλες οι ελαχιστοτικές προσόψεις έχουν διάσταση 0 και άρα είναι σημεία. Κάθε τέτοιο σημείο καλείται **ακραίο σημείο** του P . Είναι σχεδόν προφανές ότι κάθε ακραίο σημείο καθορίζεται από n γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις από τις $Ax = b$. Στο Σχήμα 2.6, τα u_1, u_2, u_3 , είναι ελαχιστοτικές προσόψεις και ακραία σημεία.

Πρόταση 2.51. Το x είναι ακραίο σημείο του P ανν δεν γίνεται να γραφτεί ως κυρτός συνδυασμός (δηλαδή, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, 0 < \lambda < 1$) δύο σημείων $x_1, x_2 \in P$.

Απόδειξη. Έστω $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ για κάποια $x_1, x_2 \in P$, με $0 < \lambda < 1$. Αφού $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_*x = b_*\} = F$ έχουμε ότι $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in F$. Τώρα τα x_1, x_2 , είναι σημεία στο πολύεδρο που σημαίνει ότι $A_*x_1, A_*x_2 \leq b_*$. Αν για κάθε $i \in \{1, 2\}$ έχουμε ότι $A_*x_i < b_*$ τότε $A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < b_*$, δηλαδή άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι $x_1, x_2 \in F$, ώστε $\dim(F) > 0$ και το x δεν είναι ακραίο σημείο.

Αντίστροφα έστω x το οποίο δεν είναι ακραίο σημείο του P . Έστω $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_*x = b_*\}$ μία ελαχιστοτική πρόσοψη που περιέχει το x . η διάσταση της F είναι μεγαλύτερη του μηδενός, που σημαίνει ότι, $\text{rank}(A_*) < n$ (διότι αν $\text{rank}(A_*) = n$ τότε το $A_*x = b_*$ έχει το πολύ μία λύση). Επιλέγουμε ένα σημείο $0 \neq z \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_*x = 0\}$. Τότε για αρκετά μικρό ϵ , έχουμε $x + \epsilon z, x - \epsilon z \in P$ και $x = \frac{1}{2}(x + \epsilon z) + \frac{1}{2}(x - \epsilon z)$. **Q.E.D.**

Ορισμός 2.52. Δύο ακραία σημεία θα καλούνται **γειτονικά** αν περιέχονται στην ίδια πρόσοψη διάστασης 1.

Παρατηρούμε ότι αν το P είναι σημειακό, τότε κάθε πρόσοψη διάστασης 1 είναι είτε ημιευθεία είτε ευθύγραμμο τμήμα. Αυτό ισχύει διότι κάθε πρόσοψη διάστασης 1 δεν είναι ελαχιστοτική πρόσοψη οπότε θα έχει τουλάχιστον μία μεγιστοτική πρόσοψη (ελαχιστοτική πρόσοψη του P) ένα ακραίο σημείο. Καλούμε κάθε τέτοια πρόσοψη (διάστασης 1) ακμή αν περιέχει δύο ακραία σημεία και ακραία ακτίνα αν περιέχει ένα ακραίο σημείο. Μπορεί ναδειχθεί ότι κάθε ακραία ακτίνα είναι μεταφορά ακραίας ακτίνας του χαρακτηριστικού κώνου του P (δηλαδή του $C = \{x \mid Ax \leq 0\}$). Ακόμα, αν ο C είναι σημειακός και $y_i \in R_i$, $1 \leq i \leq t$, όπου R_i , $1 \leq i \leq t$ είναι οι ακραίες ακτίνες του C τότε $C = \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$ (για την απόδειξη ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το [Sch98]).

2.4.4 Μοναδική Αποσύνθεση

Πρόταση 2.53. Έστω $F_1, \dots, F_r$, οι ελαχιστοτικές προσόψεις του πολυέδρου P . Για κάθε $x_i \in F_i$, $1 \leq i \leq r$ έχουμε ότι

$$(2.8) \quad P = \text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_r\} + \text{char.cone}(P)$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $P \subseteq \text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_r\} + \text{char.cone}(P)$ (η αντίστροφη ανισότητα είναι προφανής). Θα κάνουμε επαγωγή στην διάσταση k του P . Έστω $t = \dim(\text{lin.space}(P))$. Αν $k = t$, τότε

$$\text{rank}(A) = n - \dim(F_i) = n - \dim(\text{lin.space}(P)) = n - t = n - k = \text{rank}(A^\circ)$$

ώστε όλα τα F_i είναι ίσα με το P και το P είναι αφινικός υπόχωρος. Φυσικά σ' αυτήν την περίπτωση $P = x + \text{char.cone}(P)$, για κάθε $x \in P$. Τώρα, ας υποθέσουμε ότι $k > t$. Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι κάθε μεγιστοτική πρόσοψη του P είναι υποσύνολο του

$$\text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_r\} + \text{char.cone}(P)$$

(πράγματι, όλες οι ελαχιστοτικές προσόψεις κάθε μεγιστοτικής πρόσοψης του P είναι και ελαχιστοτικές προσόψεις του P και ο χαρακτηριστικός κώνος παραμένει ο ίδιος). Τώρα, αν $x \in P$ και $x - x_1 \in \text{char.cone}(P)$, τότε $x \in \{x_1\} + \text{char.cone}(P)$ έτσι ώστε

$$x \in \text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_r\} + \text{char.cone}(P).$$

Αλλιώς, αν $x - x_1 \notin \text{char.cone}(P)$, τότε έστω $\lambda_0 = \max\{\lambda \geq 0 \mid x + \lambda(x - x_1) \in P\}$. Έχουμε ότι το $x + \lambda_0(x - x_1)$ θα βρίσκεται στο σύνορο του P , που σημαίνει ότι θα ικανοποιεί τουλάχιστον μία ανισότητα του $Ax \leq b$ με ισότητα. Άρα, ανήκει σε κάποια μεγιστοτική πρόσοψη του P και συνεπώς, ανήκει στο $\text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_r\} + \text{char.cone}(P)$. Παρατηρούμε ότι

$$x = \frac{1}{1 + \lambda_0}(x + \lambda_0(x - x_1)) + \left(1 - \frac{1}{1 + \lambda_0}\right)x_1,$$

ώστε το x ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα x_1 και $x + \lambda_0(x - x_1)$, το οποίο σημαίνει ότι $x \in \text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_r\} + \text{char.cone}(P)$, αφού το τελευταίο είναι κυρτό σύνολο. **Q.E.D.**

Πόρισμα 2.54. Αν το $\max\{c'x \mid x \in P\}$ είναι πεπερασμένο, όπου $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, τότε το maximum επιτυγχάνεται σε κάποιο $x \in F$ όπου F είναι ελαχιστοτική πρόσοψη του P .

Απόδειξη. Έστω P όπως στην (2.8) και έστω $x^* \in P$ τέτοιο ώστε $c'x^* = \max\{c'x \mid x \in P\}$. Τότε

$$x^* = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^t \mu_j y_j$$

όπου $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$, $\text{char.cone}(P) = \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$ και $\lambda_i, \mu_j \geq 0, \forall i, j$. Αν κάποιο $\mu_j > 0$, τότε είναι προφανές ότι το $z_{LP} = \max\{c'x \mid x \in P\}$ είναι μη φραγμένο. Άρα,

$$\begin{aligned} c'x^* &= c' \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i \\ &\leq c'x_{i_0}, \text{ όπου } c'x_{i_0} \geq c'x_i, \forall i \in \{1, \dots, r\}, \end{aligned}$$

και επιπλέον, $c'x^* \geq c'x_{i_0}$, αφού $x_{i_0} \in P$. Αυτό σημαίνει ότι $x^* = x_{i_0}$.

Q.E.D.

Από το Θεώρημα 2.35 έχουμε ότι $P = \text{lin.space}(P) + P \cap (\text{lin.space}(P))^\perp$ και ότι το $P \cap (\text{lin.space}(P))^\perp$ είναι ένα σημειακό πολύεδρο έτσι ώστε το P έχει μοναδική ελαχιστοτική αναπαράσταση

$$P = \text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_r\} + \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\} + \text{lin.space}(P)$$

όπου τα σημεία $x_1, \dots, x_r$ είναι μοναδικά και ορθογώνια με τον $\text{lin.space}(P)$ και τα $y_1, \dots, y_t$ είναι μοναδικά (πλην πολλαπλασιασμού με θετική σταθερά) και ορθογώνια με τον $\text{lin.space}(P)$. Συνοψίζοντας έχουμε ότι

Θεώρημα 2.55. Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ένα μη κενό πολύεδρο.

- Επιλέγουμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων $\{z_1, \dots, z_t\}$, το οποίο παράγει τον $\text{lin.space}(P) = \{x \mid Ax = 0\}$.
- Βρίσκουμε τα ακραία σημεία, $\{x_1, \dots, x_r\}$, του $P \cap (\text{lin.space}(P))^\perp$.
- Επιλέγουμε μία αυθαίρετη συλλογή από σημεία $y_F \in F$ για όλες τις προσόψεις, F , διάστασης 1 του χαρακτηριστικού κώνου του $P \cap (\text{lin.space}(P))^\perp$.

Τότε

$$\begin{aligned} P &= \text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_r\} + \\ &\quad + \text{cone}\{y_F \mid y_F \in F, F \text{ προσοψη διάστ. 1 του χαρ.κώνου του } P \cap (\text{lin.space}(P))^\perp\} + \\ &\quad + \text{lin.hull}\{z_1, \dots, z_t\}. \end{aligned}$$

2.4.5 Πολικότητα

Ορισμός 2.56. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε το **πολικό (polar)** του, X^* , ως

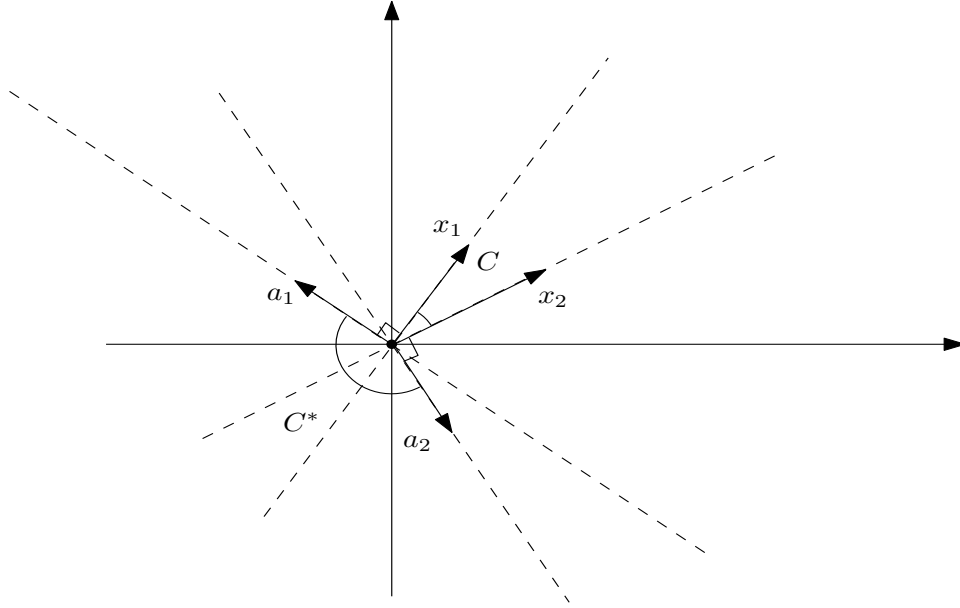
$$X^* := \{x \in \mathbb{R}^n \mid y'x \leq 1, \forall y \in X\}$$

Πρόταση 2.57. Αν ο C είναι πολυεδρικός κώνος το C^* είναι επίσης πολυεδρικός κώνος με

$$C^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y'x \leq 0 \forall y \in C\}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το επόμενο θεώρημα, δηλαδή το Θεώρημα 2.58.

Q.E.D.



$$C = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \right\}$$

$$C^* = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \right\}$$

Σχήμα 2.7: Ένας πολυεδρικός κώνος και το πολικό του.

Στο Σχήμα 2.7 δείχνουμε ένα πολυεδρικό κώνο και το πολικό του. Ο τρόπος που έχει γίνει η κατασκευή δικαιολογείται πλήρως από το Θεώρημα 2.58. Είναι φανερό από το Σχήμα 2.7 και μπορεί να αποδειχθεί με χρήση του Λήμματος του Farkas ότι το πολικό ενός πολυεδρικού κώνου παράγεται από τις γραμμές του πίνακά του. Επομένως, για ένα πολυεδρικό κώνο, C , έχουμε ότι $C = C^{**}$.

Θεώρημα 2.58. Έστω P ένα πολύεδρο στον $\mathbb{R}^n$, που περιέχει την αρχή των αξόνων. Τότε:

(α) Το P^* είναι πολύεδρο.

(β) $P^{**} = P$.

(γ) $\mathbf{x} \in P \iff \forall \mathbf{y} \in P^* : \mathbf{y}'\mathbf{x} \leq 1$.

(δ) $P = \text{conv.hull}\{0, x_1, \dots, x_m\} + \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$ ανν

$$(2.9) \quad P^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y}'x_i \leq 1, \forall 1 \leq i \leq m \text{ ανδ } \mathbf{y}'y_j \leq 0, \forall 1 \leq j \leq t\}.$$

Απόδειξη. ((δ)⇒) Αν $P = \text{conv.hull}\{0, x_1, \dots, x_m\} + \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$ τότε

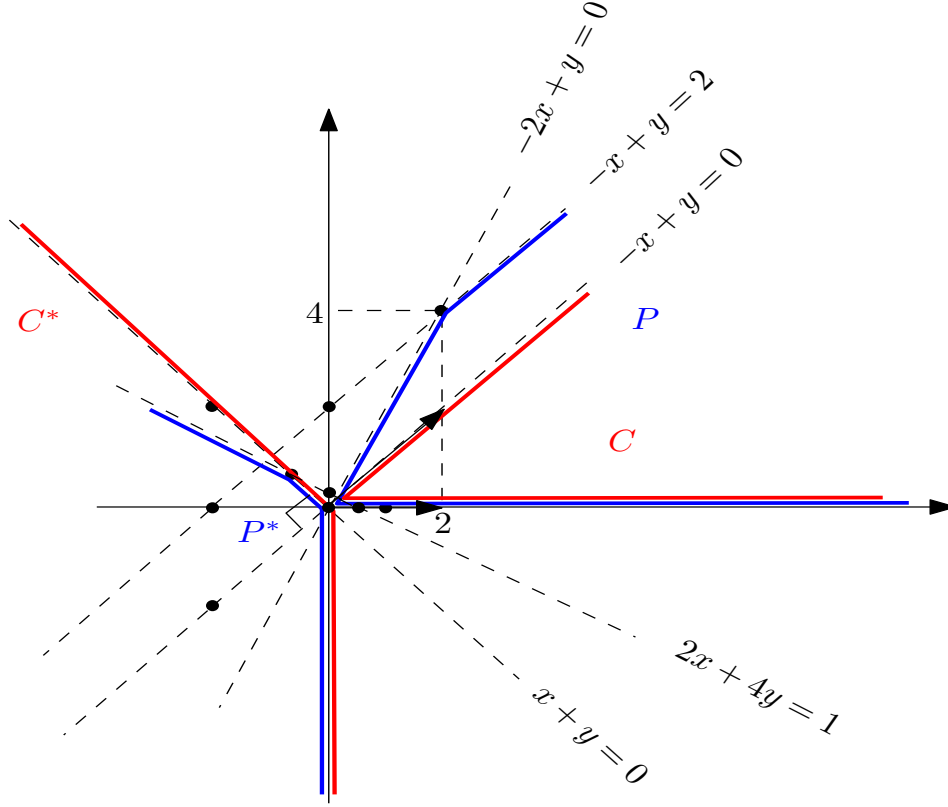
$$P^* = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^t \mu_j y_j \right)' \mathbf{x} \leq 1, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \mu_j \in \mathbb{R}_+, \forall 1 \leq j \leq t \right\}$$

Αυτό, όμως, συμβαίνει μόνο αν $x'_i \mathbf{x} \leq 1, \forall 1 \leq i \leq m$, και $y'_j \mathbf{x} \leq 0, \forall 1 \leq j \leq t$.

(α) Άμεσα, ο παραπάνω ορισμός δίνει το ζητούμενο.

(β) Έστω $x \in P$, τότε για να δείξουμε ότι $x \in P^{**}$ αρκεί να δείξουμε ότι $x'y \leq 1, \forall y \in P^*$.

Αλλά, αν $y \in P^*$ τότε $y'z \leq 1, \forall z \in P$, άρα, $x'y \leq 1$. Υποθέτουμε ότι $P^{**} \not\subseteq P$ ανδ $\text{let } y \in P^{**} \setminus P$.



$$P = \text{conv.hull}\{(0,0), (2,4)\} + \text{cone}\{(2,2), (2,0)\}$$

$$P^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 4y \leq 1, 2x + 2y \leq 0, x \leq 0\}$$

Σχήμα 2.8: Ένα πολυέδρο και το πολικό του.

Αφού το y δεν είναι σημείο του πολυέδρου πρέπει να υπάρχει μία ανισότητα $a_i x \leq b_i$ του συστήματος $Ax \leq b$ τέτοια ώστε $a_i y > b_i$. Αφού $0 \in P$ έχουμε ότι $b_i \geq 0$. Αν $b_i > 0$ τότε $\frac{1}{b_i} a_i x \leq 1, \forall x \in P$ έτσι ώστε $\frac{1}{b_i} a_i' \in P^*$. Όμως, αφού $y \in P^{**}$ έχουμε ότι $z'y \leq 1, \forall z \in P^*$, που είναι αντίφαση. Αν $b_i = 0$, τότε $\lambda a_i' \in P^*, \forall \lambda \geq 0$ που σημαίνει ότι $\lambda a_i y \leq 1, \forall \lambda \geq 0$ αφού $y \in P^{**}$. Όμως, $a_i y > b_i = 0$ επομένως $\exists \lambda : \lambda a_i y \geq 1$, άτοπο.

(γ) Είναι συνέπεια του (β).

((δ) ⇐) Έστω P^* όπως στην (2.9) και έστω $Q = \text{conv.hull}\{0, x_1, \dots, x_m\} + \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$ τότε από την δεξιά συνεπαγωγή της (δ) έχουμε ότι

$$Q^* = P^* \Rightarrow Q^{**} = P^{**} \stackrel{(b)}{\Rightarrow} Q = P. \quad \text{Q.E.D.}$$

Στο Σχήμα 2.8 έχουμε ζωγραφίσει ένα πολυέδρο στις δύο διαστάσεις και το πολικό του. Σημειώνουμε ότι το C^* , δηλαδή το πολικό του C , (του χαρακτηριστικού κώνου του P), δεν είναι ο χαρακτηριστικός κώνος του P^* . Όμως το Θεώρημα 2.58 έχει ενδιαφέρουσες συνέπειες που καταδεικνύουν τη συμμετρική δυϊκότητα μεταξύ πολυέδρων ή κώνων και των πολικών τους.

Πόρισμα 2.59. Έστω P ένα πολύεδρο που περιέχει την αρχή των αξόνων,

(α) το P έχει διάσταση $k \iff$ ο $\text{lin.space}(P^*)$ έχει διάσταση $n - k$.

(β) το P είναι πλήρους διάστασης $\iff$ το P^* είναι σημειακό.

(γ) το $\mathbf{0}$ είναι εσωτερικό¹ σημείο του $P \iff$ το P^* είναι φραγμένο.

Απόδειξη.

(α) Έστω P, P^* , όπως στο Θεώρημα 2.58(δ). Για να ελέγξουμε αυτήν την ισότητα, παρατηρούμε ότι η διάσταση του P ισούται με τον βαθμό του συνόλου των διανυσμάτων: $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t$. Πράγματι, αν έχουμε k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ανάμεσα στα παραπάνω, τότε από την Παρατήρηση 1.5 έχουμε ότι αυτά τα διανύσματα συν το μηδενικό διάνυσμα είναι αφινικά ανεξάρτητα. Επιπλέον, αν το P περιέχει τουλάχιστον k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε υπάρχουν τουλάχιστον k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ανάμεσα στα $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t$, από τον ορισμό του P . Ακόμα, από τον ορισμό του P^* και τον ορισμό του χαρακτηριστικού γραμμικού χώρου έχουμε ότι

$$\text{rank}\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t\} + \dim(\text{lin.space}(P^*)) = n.$$

(β) Είναι συνέπεια του (α).

(γ) Αν το $\mathbf{0}$ είναι εσωτερικό σημείο του P^* τότε ο χαρακτηριστικός κώνος του P πρέπει να είναι το σύνολο $\{\mathbf{0}\}$, έτσι ώστε το P είναι φραγμένο. Q.E.D.

2.4.6 Πολύεδρα Παρεμπόδισης και Άντι-Παρεμπόδισης

Εκτός από την κλασική έννοια πολικότητας της προηγούμενης ενότητας υπάρχουν ακόμα άλλες δύο έννοιες πολικότητας τα πολύεδρα παρεμπόδισης και άντι-παρεμπόδισης (blocking and anti-blocking polyhedra). Αυτές οι έννοιες, όπως και η κλασική πολικότητα, παίζουν σημαντικό ρόλο στην πολυεδρική συνδυαστική.

Ορισμός 2.60. Ένα πολύεδρο, P , είναι **τύπου παρεμπόδισης** αν $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ και $y \geq x \in P$ συνεπάγεται ότι $y \in P$. Προκύπτει άμεσα ότι ο χαρακτηριστικός κώνος ενός πολυέδρου, τύπου παρεμπόδισης είναι ο $\mathbb{R}_+^n$, έτσι ώστε κάθε πολύεδρο τύπου παρεμπόδισης είναι της μορφής

$$P = \text{conv.hull}\{c_1, \dots, c_m\} + \mathbb{R}_+^n.$$

Συμβολίζουμε κάθε τέτοιο πολύεδρο με $\{c_1, \dots, c_m\}^\uparrow$.

Πρόταση 2.61. Το P είναι τύπου παρεμπόδισης **ανν** υπάρχουν $d_1, \dots, d_t \in \mathbb{R}_+^n$ τέτοια ώστε

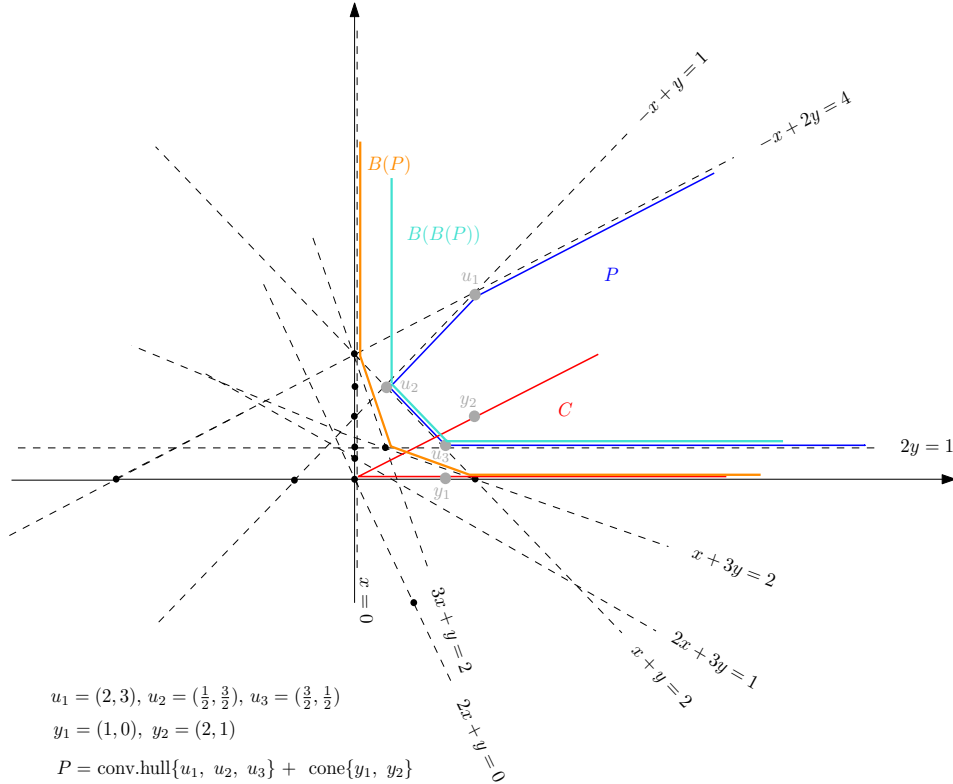
$$(2.10) \quad P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid d'_j x \geq 1, \forall 1 \leq j \leq t\}$$

Απόδειξη. Αν το P δίνεται από την (2.10) τότε αφού $d_j \in \mathbb{R}_+^n$, $\forall j$ έχουμε ότι για κάθε

$$y \geq x \in P \Rightarrow d'_j y \geq d'_j x \geq 1.$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι το P είναι τύπου παρεμπόδισης. Τότε το $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ για κάποιο πίνακα A και κάποιο διάνυσμα b . Αφού αν $x \in P$ τότε για κάθε $y \geq x$ έχουμε ότι $y \in P$, πρέπει να ισχύει ότι $a_i \geq \mathbf{0}$ για κάθε γραμμή a_i του A . Επιπλέον, αφού $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ μπορούμε να θεωρήσουμε όλα τα $b_i > 0$, έτσι ώστε με κανονικοποίηση προκύπτει το ζητούμενο. Q.E.D.

¹Το $x \in P$ είναι εσωτερικό σημείο του P αν $a_i x < b_i$ για όλες τις ανισότητες $[a_i \ b_i]$ του $[A \ b]$



$$u_1 = (2, 3), u_2 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), u_3 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$

$$y_1 = (1, 0), y_2 = (2, 1)$$

$$P = \text{conv.hull}\{u_1, u_2, u_3\} + \text{cone}\{y_1, y_2\}$$

$$B(P) = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid u'_i x \geq 1, 1 \leq i \leq 3, y'_j x \geq 0, 1 \leq j \leq 2\}$$

$$B(B(P)) = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \geq 2, x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2}\}$$

Σχήμα 2.9: Το πολύεδρο παρεμπόδισης του πολυέδρου του Σχήματος 2.3.

Ορισμός 2.62. Για κάθε πολύεδρο, P , ορίζουμε το πολύεδρο παρεμπόδισής του, $B(P)$, ως

$$(2.11) \quad B(P) = \{z \in \mathbb{R}_+^n \mid z'x \geq 1, \forall x \in P\}$$

Αν $P = \text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_m\} + \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$ τότε

$$B(P) = \{z \in \mathbb{R}_+^n \mid x'_i z \geq 1, y'_j z \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq j \leq t\}$$

Για να ελέγξουμε ότι αυτό ισχύει παρατηρούμε ότι

$$\{z \in \mathbb{R}_+^n \mid x'_i z \geq 1, y'_j z \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq j \leq t\} \subseteq \{z \in \mathbb{R}_+^n \mid z'x \geq 1, \forall x \in P\}$$

και ότι αν η αντίστροφη ανισότητα δεν ισχύει τότε υπάρχει ένα z τέτοιο ώστε $y'_j z < 0$ για κάποιο j ή $x'_i z < 1$ για κάποιο i . όμως, $z'x \geq 1$ για κάθε $x \in P$. Τότε στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να διαλέξουμε ένα αρκετά μεγάλο συντελεστή μ_j για το y_j μπορούμε να βρούμε ένα x_0 τέτοιο ώστε $x_0 \in P$ και $z'x_0 < 1$. στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $x'_i z < 1$, που είναι αντίφαση.

Στο Σχήμα 2.9 έχουμε ζωγραφίσει ένα πολύεδρο, P , το πολύεδρο παρεμπόδισής του, $B(P)$ και το $B(B(P))$. Αφού ο χαρακτηριστικός κώνος ενός πολυέδρου τύπου παρεμπόδισης είναι ο $\mathbb{R}_+^n$ έπεται ότι κάθε πολύεδρο τύπου παρεμπόδισης είναι σημειακό. Για την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το [Sch98].

Θεώρημα 2.63 (Fulkerson). Έστω $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ ένα πολύεδρο τύπου παρεμπόδισης, τότε

(i) το $B(P)$ είναι επίσης τύπου παρεμπόδισης.

(ii) $B(B(P)) = P$.

(iii) $x \in P$ ανν $x \geq 0$ και $\forall z \in B(P) : z'x \geq 1$.

(i) $P = \{c_1, \dots, c_m\}^\uparrow$ ανν $B(P) = \{z \in \mathbb{R}_+^n \mid z'c_i \geq 1, 1 \leq i \leq m\}$.

Για κάθε πολύεδρο P , τύπου παρεμπόδισης, το ζευγάρι $P, R = B(P)$, θα καλείται **ζεύγος πολυέδρων παρεμπόδισης**.

Πόρισμα 2.64.

$$(2.12) \quad \{c_1, \dots, c_m\}^\uparrow = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid d'_j x \geq 1, 1 \leq j \leq t\}$$

$$(2.13) \quad \text{ανν} \quad \{d_1, \dots, d_t\}^\uparrow = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid c'_i x \geq 1, 1 \leq i \leq m\}$$

$$\text{Απόδειξη. (2.12)} \iff \{c_1, \dots, c_m\}^\uparrow = B(\{d_1, \dots, d_t\}^\uparrow) \implies \{d_1, \dots, d_t\}^\uparrow = B(B(\{d_1, \dots, d_t\}^\uparrow)) = B(\{c_1, \dots, c_m\}^\uparrow) \iff (2.13) \quad \text{Q.E.D.}$$

Πόρισμα 2.65.

$$(2.14) \quad \forall w \in \mathbb{R}_+^n : \min\{w'c_1, \dots, w'c_m\} = \max\{y'1 \mid y \geq 0, y'D \leq w\}$$

$$(2.15) \quad \text{ανν} \quad \forall w \in \mathbb{R}_+^n : \min\{w'd_1, \dots, w'd_t\} = \max\{y'1 \mid y \geq 0, y'C \leq w\}$$

για ένα πίνακα C που έχει γραμμές $c'_1, \dots, c'_m \geq 0$, ένα πίνακα D που έχει γραμμές $d'_1, \dots, d'_t \geq 0$ και 1 ένα διάνυσμα με όλες τις συντεταγμένες 1 .

Απόδειξη. Από την Ισχυρή Δυσκότητα έχουμε ότι

$$\max\{y'1 \mid y \geq 0, y'D \leq w\} = \min\{w'v \mid v \geq 0, Dv \geq 1\}.$$

Άρα,

$$(2.16) \quad (2.14) \iff \min\{w'c_1, \dots, w'c_m\} = \min\{w'v \mid v \geq 0, Dv \geq 1\}, \forall w \in \mathbb{R}_+^n.$$

Αλλά, αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με την (2.12). Για να δειχθεί αυτό, παρατηρούμε ότι αν η δεξιά πλευρά της (2.16) ισχύει και

$$\{c_1, \dots, c_m\}^\uparrow \neq \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid d'_j x \geq 1, 1 \leq j \leq t\},$$

την ιφ $x_0 \in \{c_1, \dots, c_m\}^\uparrow \setminus \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid d'_j x \geq 1, 1 \leq j \leq t\}$, υπάρχει $d_i : d'_i x_0 < 1$, έτσι ώστε,

$$\begin{aligned} 1 &> d'_i x_0 \\ &= d'_i \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i c_i + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \right), \quad \text{όπου} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \text{ και } e_i \text{ είναι το διάνυσμα με παντού μηδενικά} \\ &\quad \text{εκτός από την } i\text{-οστή συντεταγμένη που είναι } 1 \\ &\geq d'_i \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i \\ &\geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \min\{d'_i c_1, \dots, d'_i c_m\} \\ &= \min\{d'_i c_1, \dots, d'_i c_m\} \\ &= \min\{d'_i z \mid z \geq 0, Dz \geq 1\} \\ &\geq 1 \end{aligned} \quad , \text{ που είναι αντίφαση.}$$

Αντίστροφα αν $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid d'_j x \geq 1, 1 \leq j \leq t\} \setminus \{c_1, \dots, c_m\}^\uparrow$ υπάρχει μία συντεταγμένη $x_0(i)$ του x_0 που είναι μικρότερη από όλες τις αντίστοιχες συντεταγμένες $c_j(i)$, $\forall 1 \leq j \leq m$. Τότε

$$\begin{aligned} \min\{e_i z \mid z \geq 0, Dz \geq 1\} &\leq e_i x_0 \\ &= x_0(i) \\ &< \min\{e_i c_1, \dots, e_i c_m\} \\ &= \min\{e_i z \mid z \geq 0, Dz \geq 1\} \quad , \text{ που είναι αντίφαση.} \end{aligned}$$

Τώρα, αν ισχύει η (2.12), τότε έστω $w \in \mathbb{R}_+^n$,

$$\begin{aligned} \min\{w'c_1, \dots, w'c_m\} &\geq \min\{w'z \mid z \in \{c_1, \dots, c_m\}^\uparrow\} \\ &= \min\{w'z \mid z \geq 0, Dz \geq 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως, } \min\{w'z \mid z \in \{c_1, \dots, c_m\}^\uparrow\} &= w'z_0 \\ &= w' \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i c_i + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \right) \\ &\geq w' \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i \\ &\geq \min\{w'c_1, \dots, w'c_m\}. \end{aligned}$$

Ομοίως, (2.15) $\iff$ (2.13) έτσι ώστε ((2.12) $\iff$ (2.13)) $\implies$ ((2.14) $\iff$ (2.15)) Q.E.D.

Σε αυτό το σημείο τονίζουμε το γεγονός ότι λόγω συνέχειας μπορούμε να περιορίσουμε το w στην (2.14) και στην (2.15) στους ρητούς (και επομένως στους ακεραίους) δίχως να αλλάξουμε τις συνθήκες. Άρα, στην πράξη, μπορούμε να αποδείξουμε μία από αυτές τις συνθήκες με επαγωγή και να συνεπάγουμε τη δυϊκή της συνθήκη. Υπάρχουν διάφορες εφαρμογές αυτής της δυϊκότητας, π.χ. το Max-Flow - Min-Cut θεώρημα μπορεί να προκύψει έτσι [Sch98].

Η περίπτωση των πολυέδρων άντι-παρεμπόδισης είναι εντελώς ανάλογη και μπορεί να προκύψει κύριως με αντιστροφή σημείων. Οφείλεται και αυτή στον Fulkerson.

Ορισμός 2.66. Ένα πολύεδρο, P , θα καλείται **τύπου άντι-παρεμπόδισης** αν $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ και

$$x \in P \Rightarrow (0 \leq y \leq x \rightarrow y \in P).$$

Πρόταση 2.67. Το P είναι τύπου άντι-παρεμπόδισης **ανν** $P \neq \emptyset$ και υπάρχουν $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}_+^n$ και $M \subseteq \{1, \dots, n\}$ ώστε

$$(2.17) \quad P = \{c_1, \dots, c_m\}_M^\downarrow := \mathbb{R}_+^n \cap (\text{conv.hull}\{c_1, \dots, c_m\} + \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i \leq 0 \text{ για } i \notin M\})$$

Απόδειξη. Αν το P ορίζεται από την (2.17) τότε $0 \leq y \leq x \in P$ συνεπάγεται ότι $y = x - \xi$ για κάποιο $\xi \geq 0$ έτσι ώστε $y \in P$. Τώρα, αν το P είναι τύπου άντι-παρεμπόδισης, είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}_+^n$ και γράφεται $P = \text{conv.hull}\{x_1, \dots, x_m\} + \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$ οπότε πρέπει να ισχύει ότι κάποια από τα $y_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x > 0\}$ που συνεπάγεται την (2.17). Q.E.D.

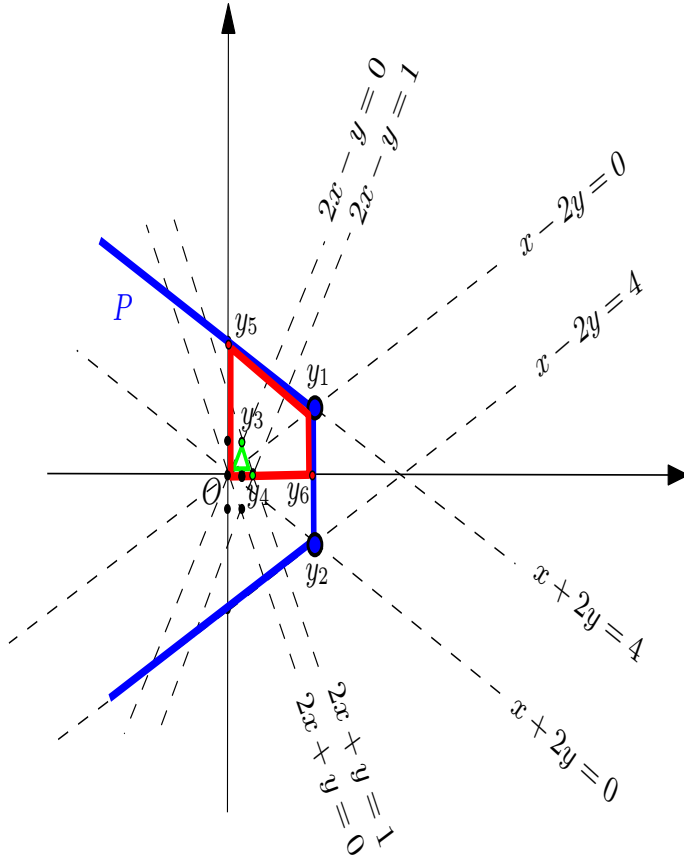
Ισοδύναμα το P είναι τύπου άντι-παρεμπόδισης **ανν** υπάρχουν $d_1, \dots, d_t \in \mathbb{R}_+^n$ και $L \subseteq \{1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε

$$(2.18) \quad P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid d'_j x \leq 1, 1 \leq j \leq t, x_i = 0, \forall i \in L\}$$

Για κάθε πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το **πολύεδρο άντι-παρεμπόδισης του** $A(P)$ ως:

$$(2.19) \quad A(P) = \{z \in \mathbb{R}_+^n \mid z'x \leq 1, \forall x \in P\}$$

Είναι προφανές ότι το πολύεδρο άντι-παρεμπόδισης ενός πολυέδρου που περιέχει την αρχή των αξόνων είναι το πολικό του περιορισμένο στο $\mathbb{R}_+^n$.



$$y_1 = (2, 1), y_2 = (2, -1), y_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), y_4 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), y_5 = (0, 2), y_6 = (2, 0)$$

$$P = \text{conv.hull}\{y_1, y_2\} + \text{cone}\{(-2, 1), (-2, -1)\}$$

$$A(P) = \{(x, y)' \in \mathbb{R}_+^2 \mid 2x + y \leq 1, 2x - y \leq 1, -2x + y \leq 0, -2x - y \leq 0\} = \text{conv.hull}\{O, y_3, y_4\}$$

$$A(A(P)) = \{(x, y)' \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + 2y \leq 4, x \leq 2\} = \text{conv.hull}\{O, y_6, y_1, y_5\}$$

Σχήμα 2.10: Ένα πολύεδρο, P , το πολύεδρο αντί-παρεμπόδισής του, $A(P)$ και το $A(A(P))$.

Θεώρημα 2.68 (Fulkerson). Έστω $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ ένα πολύεδρο τύπου άντι-παρεμπόδισης. Τότε

- (i) το $A(P)$ είναι τύπου άντι-παρεμπόδισης.
- (ii) $A(A(P)) = P$.
- (iii) $x \in P \iff x \geq 0$ ανδ $\forall z \in A(P) : z'x \leq 1$.
- (iv) $P = \{c_1, \dots, c_m\}_M^\downarrow$ ανν

$$A(P) = \{z \in \mathbb{R}_+^n \mid z'c_j \leq 1, 1 \leq j \leq m, z_i = 0, \forall i \in M\}$$

Αν το P είναι τύπου άντι-παρεμπόδισης τότε το ζευγάρι $P, A(P)$, καλείται **ζεύγος πολυέδρων άντι-παρεμπόδισης**. Στο Σχήμα 2.10 έχουμε ζωγραφίσει ένα πολύεδρο, P , το πολύεδρο άντι-παρεμπόδισής του, $A(P)$, καθώς και το $A(A(P))$. Παρατηρούμε ότι αφού το P δεν είναι τύπου παρεμπόδισης, δεν είναι ούτε και το $A(P)$, παρ' όλα αυτά το $A(A(P))$ είναι τύπου άντι-παρεμπόδισης. Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα παρόμοια με αυτά για τα πολύεδρα τύπου παρεμπόδισης μπορούμε να συνεπάγουμε ένα δυϊκό ζευγάρι min-max σχέσεων οι οποίες έχουν εφαρμογές στην συνδυαστική:

$$\begin{aligned} \forall w \in \mathbb{R}_+^n : \max\{w'c_1, \dots, w'c_m\} &= \min\{y'1 \mid y \geq 0, y'D \geq w\} \\ \text{ιφφ} \quad \forall w \in \mathbb{R}_+^n : \max\{w'd_1, \dots, w'd_t\} &= \min\{y'1 \mid y \geq 0, y'C \geq w\} \end{aligned}$$

2.5 Παρατηρήσεις στο Κεφάλαιο 2

Είναι ευρέως γνωστό ότι το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού έχει λυθεί ικανοποιητικά. Ο αλγόριθμος Simplex, αν και εκθετικού χρόνου στη χειρότερη περίπτωση, συμπεριφέρεται πολύ καλά στην πράξη. Επιπλέον υπάρχουν και άλλοι, πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμοι.

Από το Πόρισμα 2.54 προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού βρίσκεται σε ένα ακραίο σημείο του αντίστοιχου πολυέδρου (αν αυτό έχει ακραία σημεία· αν δεν έχει μπορούμε να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα ώστε το πολύεδρο να έχει ακραία σημεία). Σε αυτό το πνεύμα, ο αλγόριθμος Simplex (που οφείλεται στον Dantzig) ξεκινά από ένα ακραίο σημείο και διαδοχικά μετακινείται σε ακραία σημεία μεγαλύτερου βάρους, έως ότου φτάσει σε ένα ακραίο σημείο με βέλτιστο βάρος. Αυτή η διαδικασία καλείται pivoting.

Η Μέθοδος του Ελλειψοειδούς είναι ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος που ελέγχει αν μία λύση είναι εφικτή για το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού. Εν συντομία, ξεκινάμε με ένα ελλειψοειδές το οποίο γνωρίζουμε ότι περιέχει όλες τις εφικτές λύσεις· σε κάθε επανάληψη k , ελέγχουμε αν το κέντρο x_k είναι εφικτή λύση· αν δεν είναι επιλέγουμε ένα υπερεπίπεδο που περιέχει το x_k και στην μία πλευρά του οποίου βρίσκονται όλες οι εφικτές λύσεις· έπειτα παίρνουμε το μικρότερο ελλειψοειδές που περιέχει το μισό-ελλειψοειδές που έχει προκύψει από την επιλογή του υπερεπιπέδου και που όλες οι λύσεις βρίσκονται σ' αυτό. Η Μέθοδος του Ελλειψοειδούς αναπτύχθηκε από τους Iudin, Nemirovskii και Shor για μη γραμμική βελτιστοποίηση, όμως, ο Khachiyan την τροποποίησε για να κατασκευάσει ένα πολυωνυμικό αλγόριθμο για το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού. Φυσικά αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται μόνο για φραγμένα και πλήρους διάστασης πολύεδρα και μπορεί να αποφασίσει αν ένα δοσμένο σύνολο από ανισότητες παράγει το κενό σύνολο ή ένα σύνολο από εφικτές λύσεις. Αυτή είναι και η ιδιότητα που χρησιμοποίησε ο Khachiyan για να λύσει το πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, μειώνοντας διαδοχικά το πλήθος των ανισοτήτων του εκάστοτε προβλήματος.

Επιπρόσθετα, ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί, υπό προϋποθέσεις, να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο ακόμα και αν η ελαχιστοτική αναπαράσταση του προβλήματος είναι εκθετικά μεγάλη. Αυτό γίνεται όταν έχουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος, δοσμένου ενός διανύσματος x , αποφασίζει αν το $x \in P$ και αν όχι, επιστρέφει ένα υπερεπίπεδο διαχωρισμού, δηλαδή ένα διάνυσμα a τέτοιο που $ax > \max\{ay : y \in P\}$. Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή ως Μέθοδος διαχωρισμού και

Κεφάλαιο 2. Πολλύεδρα και Γραμμικός Προγραμματισμός

οφείλεται στους Grötschel, Lovász και Schrijver και ανεξάρτητα στους Karp και Papadimitriou και στους Padberg και Rao.

Οδηγοί γι' αυτό το κεφάλαιο ήταν , κυρίως τα βιβλία [[KV08](#), [NW99](#), [Sch98](#), [Sch03](#)].

Κεφάλαιο 3

Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός

Το πρόβλημα του Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού (ή ILP πρόβλημα, εν συντομία) τυπικά είναι το:

$$(3.1) \quad z_{ILP} = \max\{c'x \mid x \in \mathbb{Z}_+^n, Ax \leq b\}$$

όπου A είναι $m \times n$ ρητός πίνακας, b είναι $m \times 1$ ρητό διάνυσμα και c είναι $n \times 1$ ρητό διάνυσμα. Σε αντίθεση με τον Γραμμικό Προγραμματισμό, πρέπει να περιορίσουμε τα A, b , και c στους ρητούς αλλιώς το βέλτιστο μπορεί να μην υπάρχει. Αυτό αποδεικνύεται με το εξής αντιπαράδειγμα:

Παρατηρούμε ότι $\sup\{x - \frac{\sqrt{2}}{n} \mid x, n \in \mathbb{Z}_+, x - \frac{\sqrt{2}}{n} \leq 1\} = 1$ αλλά δεν υπάρχουν $x, n \in \mathbb{Z}_+$ που να επιτυγχάνουν το μέγιστο.

Ορισμός 3.1. Η **LP-χαλάρωση** της (3.1) είναι η (2.2).

Είναι σαφές ότι η LP-χαλάρωση του z_{ILP} δίνει ένα άνω φράγμα για το z_{ILP} .

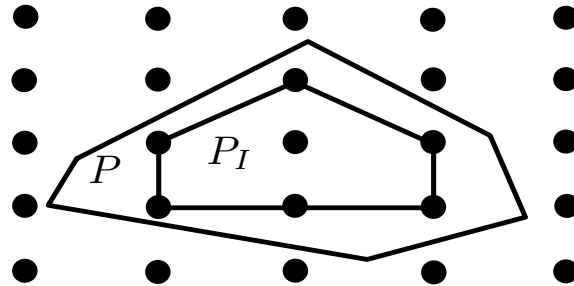
3.1 Ακέραια πολύεδρα

Ορισμός 3.2. Για κάθε πολύεδρο, P , ορίζουμε το **ακέραιο κύτος** του, P_I , ως το κυρτό κύτος των ακεραίων διανυσμάτων στο P (μία γραφική αναπαράσταση φαίνεται στο Σχήμα 3.1).

Έτσι, η σχέση (3.1) είναι ισοδύναμη με την σχέση:

$$(3.2) \quad z_{ILP} = \max\{c'x \mid x \in P_I\},$$

όπου, $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq b\}$. Δείχνουμε τώρα ένα αποτέλεσμα του Meyer:



Σχήμα 3.1: Ένα πολύεδρο, P , και το κυρτό του κύτος, P_I .

Θεώρημα 3.3 (Meyer). Για κάθε ρητό πολύεδρο, P , το σύνολο P_I είναι ρητό πολύεδρο. Αν το P_I είναι μη κενό, τότε $\text{char.cone}(P_I) = \text{char.cone}(P)$.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι για κάθε ρητό πολυεδρικό κώνο, C , έχουμε ότι, $C_I = C$. Αυτό ισχύει, δεδομένου ότι ο C παράγεται από πεπερασμένα το πλήθος ρητά διανύσματα και παράγεται επίσης από τα ακέραια διανύσματα που προκύπτουν από τον πολ/μο των ρητών διανυσμάτων με ένα κατάλληλο $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ακόμα ότι αν το P είναι φραγμένο, τότε κατά τετριμμένο τρόπο το P_I είναι πολύεδρο· υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος ακέραια διανύσματα στο P ώστε το κυρτό τους κύτος είναι πάλι πολύτοπο. Τώρα, έστω $P = Q + C$ όπως στο Θεώρημα 2.11 και έστω ότι ο C παράγεται από το σύνολο $\{y_1, \dots, y_t\}$, ακεραίων διανυσμάτων. Αν

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^t \lambda_i y_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, 1 \leq i \leq t \right\},$$

τότε θα δείξουμε ότι $P_I = (Q + B)_I + C$ που σημαίνει ότι αν $P_I \neq \emptyset$ τότε ο C είναι ο χαρακτηριστικός του κώνος και ότι το P_I είναι ένα ρητό πολύεδρο αφού το $Q + B$ είναι πολύτοπο. Έστω $p \in P$ ένα ακέραιο διάνυσμα. Τότε $p = q + c^1$, με $q \in Q$, $c^1 \in C$. Επιπλέον, αν $c^1 = \sum_{i=1}^t \lambda_i y_i$ και $c = \sum_{i=1}^t \lfloor \lambda_i \rfloor y_i$, $b = c^1 - c$ τότε $c^1 = c + b$, με $b \in B$ και c ακέραιο διάνυσμα στο C . Άρα, $p = (q + b) + c$, με $q + b = p - c$ ακέραιο. Αυτό συνεπάγεται ότι $P_I \subseteq (Q + B)_I + C$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (Q + B)_I + C &\subseteq P_I + C, \text{ σινσε } Q + B \subseteq P \\ &= P_I + C_I \\ &\subseteq (P + C)_I, \text{ σινσε αν } p \in P_I + C_I \text{ ις αν ιντεγραλ εστορ ιν } P + C \\ &= P_I. \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Το γενικό ILP πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί ικανοποιητικά, δηλαδή, είναι NP-πλήρες, έτσι ώστε το γεγονός ότι μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικό πρόβλημα:

$$z_{ILP} = \max\{x \mid x \in Q\}$$

όπου το Q είναι πολύεδρο, μπορεί μόνο να σημαίνει πως, γενικά, είναι δύσκολο να παράγουμε αυτήν την έκφραση για το z_{ILP} .

Ορισμός 3.4. Κάθε πολύεδρο P , τέτοιο που $P = P_I$, καλείται **ακέραιο πολύεδρο**

Λήμμα 3.5. Έστω A ένας ρητός πίνακας και b ρητό διάνυσμα. Τότε το $Ax = b$ έχει ακέραια λύση **ανν** το $y'b$ είναι ακέραιος για κάθε ρητό διάνυσμα y τέτοιο που το διάνυσμα $y'A$ είναι ακέραιο.

Απόδειξη. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Sch98], σελ. 46, ή στο [KV08], σελ. 106. **Q.E.D.**

Δίνουμε μερικούς χρήσιμους χαρακτηρισμούς για τα ακέραια πολύεδρα:

Πρόταση 3.6. Έστω P ρητό πολύεδρο· τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) το P είναι ακέραιο·
- (β) κάθε πρόσοψη του P περιέχει ακέραια διανύσματα·
- (γ) κάθε ελαχιστοτική πρόσοψη του P περιέχει ακέραια διανύσματα·
- (δ) κάθε υπερεπίπεδο υποστήριξης του P περιέχει ακέραια διανύσματα·
- (ε) κάθε ρητό υπερεπίπεδο υποστήριξης του P περιέχει ακέραια διανύσματα·

(ζ) το $\max\{c'x \mid x \in P\}$ επιτυγχάνεται από ακέραιο διάνυσμα, για κάθε c για το οποίο το $\max$ είναι πεπερασμένο·

(η) το $\max\{c'x \mid x \in P\}$ είναι ακέραιος για κάθε ακέραιο διάνυσμα c για το οποίο το $\max$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη.

((α)→(β)) Έστω F πρόσοψη ελαχίστης διάστασης η οποία δεν περιέχει ακέραιο σημείο. Αν $\dim(F) > 0$, τότε κάθε πρόσοψη της F περιέχει ακέραιο σημείο, που σημαίνει ότι η F περιέχει ακέραιο σημείο, άτοπο. Άρα $\dim(F) = 0$. Όμως αφού $P = P_I =$ το κυρτό κύτος των ακεραίων σημείων στο P , έπεται ότι κάθε ακραίο σημείο στο P είναι ακέραιο σημείο, που πάλι είναι αντίφαση.

((β)→(γ)) Αυτή η συνεπαγωγή είναι προφανής.

((γ)→(ζ)) Αυτή η συνεπαγωγή έπεται από το Πόρισμα 2.54.

((ζ)→(α)) Σαφώς, αν ισχύει το (ζ), τότε από το Πόρισμα 2.54, ισχύει το (γ), άρα, από την (2.8) και το γεγονός ότι $\text{char.cone}(P) = \text{char.cone}(P_I)$ έχουμε πως το P είναι ακέραιο.

((β)→(δ)) Αυτό είναι προφανές από τον ορισμό μίας πρόσοψης του P .

((δ)→(ε)) Επίσης τετριμμένο.

((ε)→(γ)) Έστω $P = \{x \mid Ax \leq b\}$, όπου, αφού τα A και b έχουν υποτεθεί ρητά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι ακέραια. Έστω $F = \{x \mid A_*x \leq b_*\}$ μία ελαχιστοτική πρόσοψη του P . Αν η F δεν περιέχει ακέραιο διάνυσμα, από το Λήμμα 3.5, υπάρχει ρητό διάνυσμα y τέτοιο ώστε το $c = y'A_*$ είναι ακέραιο αλλά το $\delta = y'b_*$ δεν είναι ακέραιο. Προσθέτοντας ακεραίους στα στοιχεία του y δεν αλλοιώνει αυτήν την ιδιότητα (αφού τα A_* , b_* , είναι ακέραια), άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y > 0$. Τώρα, το ρητό υπερεπίπεδο $H = \{x \mid c'x = \delta\}$ δεν περιέχει ακέραιο διάνυσμα. Επίσης, κατά τετριμμένο τρόπο έχουμε ότι $H \cap P \supseteq F$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρούμε ότι αν $x \in H \cap P$, τότε $y'A_*x = c'x\delta = y'b_* \Rightarrow y'(A_*x - b_*) = 0$. Αφού $y > 0$ και $A_*x \leq b_*$ έχουμε ότι $A_*x = b_*$ ώστε $x \in F$.

((γ)→(β)) Αυτό είναι τετριμμένο.

((ζ)→(η)) Επίσης τετριμμένο.

((η)→(ε)) Έστω $H = \{x \mid c'x = \delta\}$ ένα ρητό υπερεπίπεδο υποστήριξης του P , ώστε $\max\{c'x \mid x \in P\} = \delta$. Ας υποθέσουμε ότι το H δεν περιέχει ακέραια διανύσματα. Τότε από το Λήμμα 3.5 υπάρχει ένας αριθμός γ τέτοιος που το γc είναι ακέραιο αλλά το $\gamma \delta$ δεν είναι ακέραιο. Τότε

$$\max\{(\gamma c)'x \mid x \in P\} = \gamma \max\{c'x \mid x \in P\} = \gamma \delta \notin \mathbb{Z},$$

άτοπο.

Q.E.D.

Μπορεί να δειχθεί ότι χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Khachiyan, ένα ILP πρόβλημα που σχετίζεται με ένα ακέραιο πολυέδρο λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Οπότε:

Θεώρημα 3.7. Υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που, δοθέντος ενός ακεραίου πολυέδρου, $P = P_I$, και ενός ακεραίου διανύσματος c , υπολογίζει τη βέλτιστη λύση για το ILP πρόβλημα $\max\{c'x \mid x \in P \cap \mathbb{Z}_+^n\}$.

Σε αντίθεση με το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να δειχθεί ότι:

Θεώρημα 3.8. Το πρόβλημα (3.1) είναι NP-πλήρες.

Αυτό σημαίνει ότι είναι από τα πιο δύσκολα προβλήματα στην κλάση NP των πολυωνυμικά αλλά μη ντετερμινιστικά επιλύσιμων προβλημάτων. Εικάζεται ευρέως, ότι τα NP-πλήρη προβλήματα δεν μπορούν να λυθούν, ντετερμινιστικά, σε πολυωνυμικό χρόνο, παρόλο που δεν έχει αποδειχθεί κάτι τέτοιο ακόμα.

Απόδειξη. Για άμεση απόδειξη ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το [Sch98]· για απόδειξη μέσω αναγωγής από το Τρισδιάστατο-Ταίριασμα (3-Dimensional-Matching), μπορεί κανείς να συμβουλευτεί το βιβλίο των Dasgupta et al. [DPV06]. **Q.E.D.**

3.2 Πλήρης Μονομετρικότητα

Γενικά, το να αποδείξει κανείς την ακεραιότητα ενός πολυέδρου και συνεπώς, της πολυωνυμικής επιλυσιμότητας, είναι δύσκολο. Έτσι, έχουν αναπτυχθεί διάφορες ικανές συνθήκες για την ακεραιότητα πολυέδρων που καταδεικνύουν πως αν τα A και b ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες τότε το πολύεδρο $\{x \mid Ax \leq b\}$ είναι ακέραιο. Μία από αυτές τις συνθήκες είναι η πλήρης μονομετρικότητα (total unimodularity). Αρχικά ας δούμε την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 3.9. Έστω A ένας ακέραιος, τετραγωνικός μη ιδιάζων πίνακας. Τότε ο $A^{-1}b$ είναι ακέραιος για όλα τα ακέραια διανύσματα b ανν $\det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη. Αν $\det(A) = \pm 1$ τότε σαφώς, ο $\text{adj}(A)$ είναι ακέραιος (αφού ο A είναι ακέραιος), έτσι ώστε ο A^{-1} είναι ακέραιος και για όλα τα ακέραια b , το $A^{-1}b$ είναι ακέραιο. Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το $A^{-1}b$ είναι ακέραιο για κάθε ακέραιο διάνυσμα b . Τότε για κάθε

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-οστή θέση} ,$$

έχουμε πως $A^{-1}e_i$ είναι ακέραιο που σημαίνει ότι ο A^{-1} είναι ακέραιος. Επομένως, και τα δύο $\det(A)$, $\det(A^{-1})$ είναι ακέραιοι και $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1$, ώστε $\det(A) = \pm 1$. **Q.E.D.**

Ορισμός 3.10. Έστω πίνακας A τέτοιος που $\text{ρανκ}(A) = m$. Τότε κάθε συλλογή από m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A θα καλείται **βάση** του A .

Ορισμός 3.11. Ένας πίνακας A θα καλείται **πλήρους βαθμού γραμμών (full row rank)**, αν όλες οι γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ορισμός 3.12. Ένας πίνακας A πλήρους βαθμού γραμμών, θα καλείται **μονομετρικός (unimodular)** αν είναι ακέραιος και κάθε βάση του έχει ορίζουσα 1 ή -1 .

Μετά από αυτούς τους ορισμούς μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την Πρόταση 3.9 ως εξής:

Πρόταση 3.13. Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Τότε ο A είναι μονομετρικός ανν ο A είναι ακέραιος και το $A^{-1}b$ είναι ακέραιο για κάθε ακέραιο διάνυσμα b .

Θεώρημα 3.14 (Veinott και Dantzig). Έστω A ένας $m \times n$, ακέραιος, πίνακας πλήρους βαθμού γραμμών. Τότε το πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax = b\}$ είναι ακέραιο για κάθε $b \in \mathbb{Z}^m$ ανν ο A είναι μονομετρικός.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο A είναι μονομετρικός. Από την Πρόταση 2.34, το P είναι σημειακό. Έστω $b \in \mathbb{Z}^m$ και έστω $\bar{x}$ ένα ακραίο σημείο του P . Τότε n γραμμικά ανεξάρτητες ανισότητες από τις

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix},$$

ικανοποιούνται από το $\bar{x}$ με ισότητα. Αυτό σημαίνει ότι ο $n \times n$ υποπίνακας του $\begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix}$, που αποτελείται από τις n ανισότητες έχει βαθμό n και άρα, τα μη μηδενικά στοιχεία του $\bar{x}$ αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A . Επεκτείνουμε αυτές τις στήλες σε μία βάση B του A και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A = [B \ N]$. Τότε προκύπτει ότι

$$\begin{bmatrix} B & N \\ -B & -N \\ -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\bar{x}_N = 0$, και επίσης, κάποια από τα στοιχεία του $\bar{x}_B$ μπορεί να είναι ίσα με 0. Όμως, $\bar{x}_B = B^{-1}b$ και οι μη μηδενικές συντεταγμένες του $\bar{x}$ περιέχονται στο ακέραιο διάνυσμα $B^{-1}b$. Οπότε, το $\bar{x}$ είναι ακέραιο και από την Πρόταση 3.6, και το P είναι ακέραιο.

Αντίστροφα, έστω P ακέραιο για κάθε $b \in \mathbb{Z}^m$. Έστω B μία βάση του A . Από την Πρόταση 3.13 και τον Ορισμό 3.12 αρκεί να δείξουμε ότι το $B^{-1}v$ είναι ακέραιο για όλα τα $v \in \mathbb{Z}^m$. Έστω $y \in \mathbb{Z}^m : y + B^{-1}v \geq 0$ και έστω $b = B(y + B^{-1}v)$. Προφανώς το b είναι ακέραιο και επεκτείνοντας το $y + B^{-1}v$ σε ένα διάνυσμα z του $\mathbb{R}_+^n$, προσθέτοντας μηδενικά έχουμε ότι $Az = b$ (αφού μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A = [B \ N]$). Τότε το z ικανοποιεί n περιορισμούς του P με ισότητα και είναι συνεπώς ένα ακραίο σημείο του P . Άρα το z είναι ακέραιο και το ίδιο και το $B^{-1}v$. **Q.E.D.**

Προχωρώντας στην κλάση των **πλήρως μονομετρικών** πινάκων ή TU πινάκων, έχουμε:

Ορισμός 3.15. Ένας πίνακας, A , είναι TU πίνακας αν κάθε υποορίζουσα του A είναι 0, 1, ή -1 . Τότε, κάθε στοιχείο του πίνακα A είναι 0, 1, ή -1 , αφού μετράμε την απόλυτη τιμή κάθε στοιχείου του A , $|a_{ij}|$, ως υποορίζουσα.

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι ένας χαρακτηρισμός των TU πινάκων από τους Hoffman και Kruskal:

Θεώρημα 3.16 (Hoffman-Kruskal Theorem). Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) Το $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq b\}$ είναι ακέραιο $\forall b \in \mathbb{Z}^m$.
- (β) Ο A είναι TU.

Πριν δώσουμε την απόδειξη, αποδεικνύουμε ένα απαραίτητο λήμμα.

Λήμμα 3.17. Ένας $m \times n$ πίνακας A είναι TU ανν ο $[A \ I]$ είναι μονομετρικός.

Απόδειξη. Έστω ότι ο A είναι TU. Σίγουρα ο $[A \ I]$ είναι πλήρους βαθμού γραμμών, και, αν B είναι μία βάση του $[A \ I]$ τότε είναι μη ιδιάζουσα και αφού όλα τα στοιχεία του $[A \ I]$ είναι 1, -1 , ή 0 πρέπει να ισχύει ότι $|B| = \pm 1$. Αντίστροφα, αν $[A \ I]$ είναι μονομετρικός, τότε όλες οι βάσεις του $[A \ I]$ έχουν ορίζουσα 1 ή -1 που σημαίνει ότι αν πάρουμε οποιαδήποτε στήλη του A και για οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο αυτής της στήλης πάρουμε τις αντίστοιχες $n - 1$ στήλες του I έτσι ώστε οι n να αποτελούν βάση, όλες οι εισοδοί του A πρέπει να είναι 1, -1 , ή 0. Επιπλέον όλες οι βάσεις του A έχουν ορίζουσα ± 1 , που σημαίνει ότι όλες οι υποορίζουσες του A είναι 1, -1 , ή 0. **Q.E.D.**

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.16. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \} \text{ είναι ακέραιο } \forall \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m & \iff \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n+m} \mid [A \ I] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \right\} \\ & \text{είναι ακέραιο } \forall \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m \\ & \xLeftrightarrow{\text{Θεώρημα 3.14}} [A \ I] \text{ είναι μονομετρικός} \\ & \xLeftrightarrow{\text{Λήμμα 3.17}} A \text{ είναι TU.} \end{aligned}$$

Q.E.D.

Θεώρημα 3.18. Έστω A ένας TU πίνακας και $\mathbf{b}$ ακέραιο διάνυσμα. Τότε το πολύεδρο $P = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \}$ είναι ακέραιο.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.6, αρκεί να δειχθεί ότι κάθε ελαχιστοτική πρόσοψη του P περιέχει ακέραιο διάνυσμα. Έστω $F = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A_* \mathbf{x} = \mathbf{b}_* \}$ μία ελαχιστοτική πρόσοψη του P . Από το Πόρισμα 2.50 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $A_* \mathbf{x} = \mathbf{b}_*$ είναι μεγιστοτικό σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων. Ακόμα, A_* είναι ένας υποπίνακας του A έτσι ώστε πρέπει να είναι της μορφής: $[A_*^1 \ A_*^2]$ όπου A_*^1 είναι τετραγωνικός πίνακας και $\det(A_*^1) = 1$, ή -1 . Σε αυτό το πλαίσιο έχουμε ότι $A_*^1 \mathbf{x}^1 + A_*^2 \mathbf{x}^2 = \mathbf{b}_* \Rightarrow \mathbf{x}^1 + (A_*^1)^{-1} A_*^2 \mathbf{x}^2 = (A_*^1)^{-1} \mathbf{b}_*$, έτσι ώστε, $\begin{bmatrix} (A_*^1)^{-1} \mathbf{b}_* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in F$ και είναι ακέραιο. **Q.E.D.**

Είναι άμεσο από τα Θεωρήματα 3.7, 3.18, ότι το ILP πρόβλημα που σχετίζεται με ένα πολύεδρο όπου ο A είναι TU και το $\mathbf{b}$ είναι ακέραιο, μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Πόρισμα 3.19. Έστω A ένας TU πίνακας και $\mathbf{b}, \mathbf{c}$, ακέραια διανύσματα. Αν το

$$\delta = z_{LP} = \max \{ \mathbf{c}' \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \},$$

είναι πεπερασμένο, τότε η Πρόταση 3.6, το γεγονός ότι ο ανάστροφος ενός TU πίνακα είναι TU και η Ισχυρή Δυϊκότητα εξασφαλίζουν ότι $\delta = u_{LP} = \min \{ \mathbf{b}' \mathbf{u} \mid A' \mathbf{u} \geq \mathbf{c}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \}$, και ότι τα z_{LP} και u_{LP} έχουν ακέραιες βέλτιστες λύσεις.

Μία άλλη σημαντική κλάση πινάκων που σχετίζεται με τους πλήρως μονομετρικούς πίνακες είναι η κλάση των πινάκων δικτύου (network matrices). Ένα βασικό αποτέλεσμα του Seymour είναι ότι όλοι οι TU πίνακες προκύπτουν από τους πίνακες δικτύου, δύο συγκεκριμένους 5×5 πίνακες και κάποιες βασικές πράξεις. Έτσι, οι πίνακες δικτύου είναι οι δομικοί λίθοι των TU πινάκων. Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι οι πίνακες δικτύου είναι TU και πως μπορούμε να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν ένας πίνακας είναι δικτύου ή TU, σε πολυωνυμικό χρόνο. Για λεπτομερή ανάλυση αυτών των θεμάτων ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [Sch98].

3.3 Πλήρως Δυϊκά Ακέραια Συστήματα

Ένα γεγονός που μπορεί να μην έχουμε τονίσει αρκετά είναι πως ένα βασικό μοτίβο της πολυεδρικής συνδυαστικής είναι η εφαρμογή της δυϊκής ισότητας του Γραμμικού Προγραμματισμού:

$$(3.3) \quad \max\{c'x \mid x \geq 0, Ax \leq b\} = \min\{b'u \mid u \geq 0, A'u \geq c\},$$

σε συνδυαστικά προβλήματα. Αυτό συνήθως σημαίνει πως αποδεικνύουμε ότι το $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq b\}$ είναι ακέραιο πολύεδρο του οποίου τα ακραία σημεία αντιστοιχούν σε κάποια συνδυαστικά αντικείμενα. Όταν είμαστε επιτυχείς στο στόχο μας, συνήθως παράγουμε ένα min-max θεώρημα για τα συνδυαστικά αντικείμενα. Ένα παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση που ο A είναι TU. Τότε το Πόρισμα 3.19 μας δίνει ένα min-max θεώρημα. Σε αρκετά βιβλία συνδυαστικής βελτιστοποίησης το πρωτεύον ορίζεται ως $z_{LP} = \max\{c'x \mid Ax \leq b\}$ και το δυϊκό με τον ίδιο τρόπο που το έχουμε ορίσει. Η θεωρία που αναπτύσσεται τότε δεν διαφέρει ουσιαστικά σε τίποτα από την θεωρία που έχουμε εκθέσει ως τώρα. Σε αυτό το πνεύμα δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 3.20. Ένα ρητό γραμμικό σύστημα $Ax \leq b$ θα καλείται *πλήρως δυϊκά ακέραιο (totally dual integral)* ή TDI εν συντομία, αν το minimum στην (3.3) (όπου μπορούμε να αφαιρέσουμε την απαίτηση ότι $x \geq 0$) επιτυγχάνεται από ακέραιο διάνυσμα u για κάθε ακέραιο c για το οποίο το minimum είναι πεπερασμένο.

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ορισμό και το επόμενο θεώρημα μπορούμε να εκμαιεύσουμε πως το πρωτεύον είναι ακέραιο.

Θεώρημα 3.21 (Edmonds and Giles). Έστω $Ax \leq b$ ένα TDI σύστημα. Αν το b είναι ακέραιο, και το maximum στην (3.3) είναι πεπερασμένο τότε το maximum επιτυγχάνεται από ακέραιο διάνυσμα.

Απόδειξη. Αφού το b είναι ακέραιο και τα βέλτιστα είναι πεπερασμένα στην εξίσωση (3.3), έπεται από τον ορισμό του TDI συστήματος πως η βέλτιστη τιμή είναι ακέραιος για κάθε ακέραιο διάνυσμα c . Επομένως, από Πρόταση 3.6 έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. **Q.E.D.**

Πόρισμα 3.22. Αν το $Ax \leq b$ είναι TDI σύστημα και το b είναι ακέραιο, τότε το πολύεδρο $\{x \mid Ax \leq b\}$ είναι ακέραιο.

Απόδειξη. Απ' ευθείας από το προηγούμενο θεώρημα και την Πρόταση 3.6. **Q.E.D.**

Πρόταση 3.23. Αν ο A είναι TU τότε το $Ax \leq b$ είναι TDI για κάθε ρητό διάνυσμα b .

Απόδειξη. Έστω ότι ο A είναι TU. Τότε ο $-A'$ είναι TU ώστε από το Θεώρημα 3.16, το πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid -A'x \leq -c\}$ είναι ακέραιο $\forall (-c) \in \mathbb{Z}^n$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι το σύστημα $Ax \leq b$ είναι TDI για όλα τα ρητά b . **Q.E.D.**

Είναι χρήσιμο να τονίσουμε το γεγονός πως το να είναι ένα σύστημα TDI είναι ιδιότητα του συστήματος και όχι του πολυέδρου. Για την ακρίβεια, ένα πολύεδρο μπορεί να έχει περισσότερες από μία αναπαραστάσεις και ενώ κάποια μπορεί να είναι TDI μπορεί κάποια άλλη να μην είναι. Συνήθως, ένα TDI σύστημα περιέχει περισσότερους περιορισμούς απ' ότι είναι απαραίτητοι για τον προσδιορισμό του εκάστοτε πολυέδρου.

Βάσει του Πορίσματος 3.22 το να είναι ένα σύστημα TDI είναι μία "καλή ιδιότητα" που συνεπάγεται πως το αντίστοιχο πολύεδρο είναι ακέραιο (αν το b είναι ακέραιο). Επομένως είναι λογικό να περιμένουμε πως, γενικά, είναι δύσκολο να δείξουμε πως ένα σύστημα είναι TDI. Στην επόμενη ενότητα δίνουμε ένα χαρακτηρισμό των TDI συστημάτων.

3.3.1 Βάσεις Hilbert και Ελαχιστοτικά TDI Συστήματα

Ορισμός 3.24. Ένα σύνολο διάνυσμάτων $\{a_1, \dots, a_k\}$ θα καλείται **βάση Hilbert** αν κάθε ακέραιο διάνυσμα στον $\text{cone}\{a_1, \dots, a_k\}$ είναι μη αρνητικός ακέραιος γραμμικός συνδυασμός των $a_1, \dots, a_k$. Αν όλα τα a_i είναι ακέραια τότε αναφερόμαστε στη βάση ως **ακέραια Hilbert βάση**.

Θεώρημα 3.25. Κάθε ρητός πολυεδρικός κώνος, C , παράγεται από μία ακέραια Hilbert βάση. Αν ο C είναι σημειακός, τότε υπάρχει μία μοναδική ελαχιστοτική ακέραια Hilbert βάση που παράγει τον C .

Απόδειξη. Ενότητα 16.4 στο [Sch98].

Q.E.D.

Οι βάσεις Hilbert χαρακτηρίζουν τα TDI συστήματα:

Θεώρημα 3.26. Το ρητό σύστημα $Ax \leq b$ είναι TDI ανν για κάθε πρόσοψη F του πολυέδρου $P = \{x \mid Ax \leq b\}$, οι γραμμές του A που είναι ενεργές στην F , δηλαδή, που ικανοποιούνται με ισότητα για κάθε $x \in F$, σχηματίζουν μία Hilbert βάση.

Απόδειξη. Έστω $Ax \leq b$ ένα TDI σύστημα. Έστω F μία πρόσοψη του P και έστω $a_1, \dots, a_t$ οι γραμμές του A που είναι ενεργές στην F . Έστω επίσης, $c \in \mathbb{Z}^n \cap \text{cone}\{a_1, \dots, a_t\}$. Τώρα, ας επεξεργαστούμε την δυϊκή ισότητα

$$(3.4) \quad \max\{c'x \mid Ax \leq b\} = \min\{y'b \mid y \in \mathbb{R}_+^m, A'y = c\}.$$

Είναι σαφές πως το maximum επιτυγχάνεται από όλα τα $x \in F$. Πράγματι, έστω $x_0 \in F$ και $x_1 \in P$.

Αφού, $c = \sum_{i=1}^t \mu_i a_i$, όπου $\forall i \in \{1, \dots, t\} : \mu_i \geq 0$, έχουμε πως

$$c'x_1 = \sum_{i=1}^t \mu_i a_i x_1 \leq \sum_{i=1}^t \mu_i b_i = \sum_{i=1}^t \mu_i a_i x_0 = c'x_0.$$

Τώρα, το minimum έχει ακέραια βέλτιστη λύση έστω την y_0 . Από την Παρατήρηση 2.26 έχουμε πως οι συντεταγμένες του y_0 που αντιστοιχούν σε γραμμές μη ενεργές στην F είναι 0. Άρα, από την δεξιά πλευρά της (3.4) και τη προαναφερθείσα ιδιότητα της y_0 , έχουμε ότι το c είναι μη αρνητικός ακέραιος γραμμικός συνδυασμός των $a_1, \dots, a_t$.

Αντίστροφα, έστω c ένα ακέραιο διάνυσμα για το οποίο τα βέλτιστα στην (3.4) είναι πεπερασμένα. Έστω F μία ελαχιστοτική πρόσοψη του P τέτοια που κάθε διάνυσμα στην F επιτυγχάνει το maximum στην (3.4). Έστω $a_1, \dots, a_t$ οι γραμμές ενεργές στην F . Τότε το c ανήκει στον $\text{cone}\{a_1, \dots, a_t\}$, από την Παρατήρηση 2.26. Έχουμε υποθέσει πως τα $a_1, \dots, a_t$ σχηματίζουν μία βάση Hilbert, άρα, $c = \sum_{i=1}^t \lambda_i a_i$, όπου $\forall i : \lambda_i \in \mathbb{Z}_+$. Επεκτείνοντας με μηδενικά το διάνυσμα $(\lambda_1, \dots, \lambda_t)'$, κατασκευάζουμε μία ακέραια βέλτιστη λύση, y_0 , για το minimum στην (3.4). Πράγματι, είναι προφανές πως $A'y_0 = c$ και επιπλέον $y_0'b = y_0'Ax = x'A'y = x'c = c'x$ για κάθε $x \in F$. Q.E.D.

Κατά μία έννοια, κάθε πρόσοψη ενός TDI συστήματος, είναι πάλι TDI:

Πόρισμα 3.27. Έστω $Ax \leq b$, $\alpha x \leq \beta$ ένα TDI σύστημα. Τότε το σύστημα $Ax \leq b$, $\alpha x = \beta$ είναι επίσης TDI.

Απόδειξη. Κάθε πρόσοψη του πολυέδρου $Q = \{x \mid Ax \leq b, \alpha x = \beta\}$ είναι πρόσοψη του πολυέδρου $P = \{x \mid Ax \leq b, \alpha x \leq \beta\}$, άρα, από το Θεώρημα 3.26, οι γραμμές που είναι ενεργές σε κάθε τέτοια πρόσοψη σχηματίζουν μία βάση Hilbert. Q.E.D.

Για την ακρίβεια, το Θεώρημα 3.26 ισχύει ακόμα κι αν περιορίσουμε την F , στην διατύπωση του θεωρήματος, μόνο σε ελαχιστοτικές προσόψεις. Αυτό μας δίνει το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 3.28. Οι γραμμές του ρητού πίνακα A σχηματίζουν μία βάση Hilbert, **ανν**, το σύστημα $Ax \leq 0$ είναι TDI.

Απόδειξη. Θεωρώντας το $b = 0$ στο Θεώρημα 3.26, περιοριζόμενοι σε ελαχιστοτικές προσόψεις και παίρνοντας υπ' όψη το Πόρισμα 2.49 (το οποίο εγγυάται ότι όλες οι γραμμές είναι ενεργές σε μία ελαχιστοτική πρόσοψη), συμπεραίνουμε το ζητούμενο. **Q.E.D.**

Ορισμός 3.29. Ένα TDI σύστημα, $Ax \leq b$, θα καλείται **ελαχιστοτικό TDI σύστημα**, ή **ελαχιστοικά TDI**, αν κάθε γνήσιο υποσύστημά του, που ορίζει το ίδιο πολύεδρο, δεν είναι TDI.

Πρόταση 3.30. Το $Ax \leq b$ είναι ελαχιστοτικά TDI **ανν** κάθε περιορισμός, ορίζει ένα υπερεπίπεδο υποστήριξης του $\{x \mid Ax \leq b\}$ και δεν είναι μη αρνητικός, ακέραιος, γραμμικός συνδυασμός των άλλων περιορισμών.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας περιορισμός, $a_i x \leq b_i$, που δεν ορίζει ένα υπερεπίπεδο υποστήριξης του $P = \{x \mid Ax \leq b\}$, και πως το $Ax \leq b$ είναι ελαχιστοτικά TDI. Σαφώς ο $a_i x \leq b_i$ είναι πλεονάζων περιορισμός. Θα δείξουμε πως αφαιρώντας τον περιορισμό $a_i x \leq b_i$ το σύστημα παραμένει TDI, που είναι άτοπο. Υποθέτουμε πως υπάρχει μία ελαχιστοτική πρόσοψη, F , του $\{x \mid A_* x \leq b_*\} = P = \{x \mid Ax \leq b\}$ - όπου $A_* x \leq b_*$ είναι το ελαττωμένο σύστημα - τέτοια που οι γραμμές που είναι ενεργές στην F δεν σχηματίζουν βάση Hilbert. Αυτό πρέπει να σημαίνει πως ο $a_i x \leq b_i$ ήταν ενεργός στην F πριν τον αφαιρέσουμε. Όμως αν δεν ορίζει υπερεπίπεδο υποστήριξης δεν μπορεί να είναι ενεργός σε καμία πρόσοψη, αφού $\max\{a_i x \mid x \in P\} < b_i$.

Αν υπάρχει ένας περιορισμός $a_i x \leq b_i$ που είναι μη αρνητικός, ακέραιος γραμμικός συνδυασμός, κάποιων άλλων γραμμών του $Ax \leq b$, τότε σαφώς, είναι πλεονάζων. Έστω $A_* x \leq b_*$ το σύστημα που προκύπτει από το $Ax \leq b$ αν αφαιρέσουμε τον $a_i x \leq b_i$. Τότε για κάθε c για το οποίο τα βέλτιστα στην (3.4) είναι πεπερασμένα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \min\{b'_* y_* \mid A'_* y_* = c, y_* \geq 0\} &= \max\{c'x \mid A_* x \leq b_*\} \\ &= \max\{c'x \mid Ax \leq b\} \\ &= \min\{b'y \mid A'y = c, y \geq 0\} \end{aligned}$$

Τώρα, μπορούμε να μετασχηματίσουμε κάθε ακέραια βέλτιστη λύση του minimum στην δεξιά πλευρά της παραπάνω εξίσωσης σε μία ακέραια βέλτιστη λύση του minimum στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης. Συνεπώς, το ελαττωμένο σύστημα παραμένει TDI, που είναι αντίφαση.

Για να δείξουμε το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι κάθε ανισότητα:

(α) ορίζει ένα υπερεπίπεδο υποστήριξης του $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

(β) δεν είναι μη αρνητικός, ακέραιος, γραμμικός συνδυασμός κάποιων άλλων ανισοτήτων

και πως το $Ax \leq b$ είναι TDI. Θα δείξουμε ότι αφαιρώντας κάποια ανισότητα, το σύστημα παύει να είναι TDI. Υποθέτουμε πως αφαιρούμε την $a_m x \leq b_m$ και πως $P = \{x \mid a_i x \leq b_i, 1 \leq i \leq m-1\}$, όπου $a_i, 1 \leq i \leq m$, είναι οι γραμμές του A . Έστω ότι το ελαττωμένο σύστημα είναι TDI. Αφού η $a_m x \leq b_m$ ορίζει ένα υπερεπίπεδο υποστήριξης του P , υπάρχει μία ελαχιστοτική πρόσοψη του P τέτοια ώστε για κάθε $x \in F$: $a_m x = b_m = \max\{a_m x \mid x \in P\}$. Έστω $\{a_k, k \in I \subseteq \{1, \dots, m-1\}\}$ οι γραμμές ενεργές στην F . Αφού το ελαττωμένο σύστημα είναι TDI, από την σχέση δυϊκότητας: $(b_* = (b_1, \dots, b_{m-1})', A_* = [a_1, \dots, a_{m-1}]')$,

$$\max\{a_m x \mid x \in P\} = \min\{y'_* b_* \mid A'_* y_* = a_m, y_* \geq 0\}$$

έπεται πως η a_m είναι μη αρνητικός, ακέραιος, γραμμικός συνδυασμός των $\{a_k, k \in I\}$, άτοπο. **Q.E.D.**

Θεώρημα 3.31. (α) Για κάθε ρητό πολυέδρο P υπάρχει ένα TDI σύστημα $Ax \leq b$ με τον A ακέραιο και $P = \{x \mid Ax \leq b\}$, όπου το b μπορεί να επιλεγεί ακέραιο **ανν** το P είναι ακέραιο.

(β) Αν το P είναι πλήρους διάστασης, υπάρχει ένα μοναδικό ελαχιστοτικό TDI σύστημα, με ιδιότητες όπως στο (α).

Απόδειξη. Ενότητα 22.3 στο [Sch98].

Q.E.D.

Πόρισμα 3.32. Ένα ρητό πολυέδρο, P , είναι ακέραιο **ανν** υπάρχει ένα TDI σύστημα $Ax \leq b$ τέτοιο ώστε $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ και το b είναι ακέραιο.

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονίσουμε το γεγονός πως το ελαχιστοτικό TDI σύστημα που αναφέρεται στο Θεώρημα 3.31 μπορεί να είναι εκθετικά μεγάλο σε σχέση με το μέγεθος της ελαχιστοτικής αναπαράστασης του πολυέδρου που ορίζει.

3.3.2 Κυβικά-TDI Συστήματα

Μία άλλη χρήσιμη έννοια είναι αυτή ενός **κυβικά-πλήρως δυϊκά ακεραίου (box-totally dual integral)**, ή απλά, **κυβικά-TDI (box-TDI)** συστήματος.

Ορισμός 3.33. Ένα ρητό σύστημα, $Ax \leq b$, είναι κυβικά-TDI αν το σύστημα:

$$(3.5) \quad Ax \leq b, \quad m \leq x \leq M,$$

είναι TDI για κάθε ζεύγος ρητών διανυσμάτων, m και M .

Θεώρημα 3.34. Αν ένα σύστημα είναι κυβικά-TDI, τότε είναι TDI.

Απόδειξη. Έστω πως το $Ax \leq b$ είναι κυβικά-TDI, και έστω c ένα ακέραιο διάνυσμα, τέτοιο ώστε το $\max\{c'x \mid Ax \leq b\}$ είναι πεπερασμένο και ίσο με το δ . Έστω x^* μία βέλτιστη λύση γι' αυτό το Γραμμικό Πρόβλημα και ας επιλέξουμε m και M τέτοια ώστε $m < x^* < M$. Τότε

$$(3.6) \quad \delta = c'x^* = \max\{c'x \mid Ax \leq b, m \leq x \leq M\},$$

και αφού το $Ax \leq b$ είναι κυβικά-TDI, η (3.6) έχει μία ακέραια, βέλτιστη, δευτερεύουσα λύση οι συντεταγμένες της οποίας, που αντιστοιχούν στους περιορισμούς $m \leq x \leq M$, είναι 0, από την Παρατήρηση 2.26. Έπεται, ότι το $\max\{c'x \mid Ax \leq b\}$ έχει επίσης μία ακέραια, βέλτιστη, δευτερεύουσα λύση (δηλαδή λύση για το δευτερεύον). **Q.E.D.**

Μπορεί ναδειχθεί, πως αν το $Ax \leq b$ είναι κυβικά-TDI, τότε το (3.5) είναι TDI ακόμα και αν κάποιες από τις συντεταγμένες των m ή/και M είναι $-\infty$ ή/και $+\infty$, αντίστοιχα. Αυτό έχει το επόμενο θεώρημα ως πόρισμα:

Θεώρημα 3.35. Ο A είναι TU **ανν** το $Ax \leq b$ είναι κυβικά-TDI για κάθε ρητό διάνυσμα b .

Απόδειξη. Αν ο A είναι TU τότε ο $[I \ -I \ -A]'$ είναι TU που, από την Πρόταση 3.23, σημαίνει ότι για όλα τα ρητά διανύσματα $M, -m, b$, το σύστημα $[I \ -I \ -A]'x \leq [M \ -m \ b]'$ είναι TDI. Αυτό όμως σημαίνει ότι το σύστημα $Ax \leq b$ είναι κυβικά-TDI για όλα τα ρητά b .

Αντίστροφα, αν το $Ax \leq b$ είναι κυβικά-TDI για κάθε ρητό διάνυσμα b , τότε το σύστημα $Ax \leq b, x \geq 0$ είναι TDI σύστημα για κάθε b ακέραιο. Έπεται από το Πόρισμα 3.22 ότι το πολυέδρο $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax \leq b\}$ είναι ακέραιο για κάθε ακέραιο b . Συνεπώς από το Θεώρημα 3.16, έχουμε πως ο A είναι TU. **Q.E.D.**

Για περαιτέρω μελέτη στα κυβικά-TDI συστήματα ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο [Sch98].

3.4 Αποτελέσματα Πολυπλοκότητας

Μετά την μέχρι τώρα ανάλυση, είναι αναμενόμενο να ισχύει το επόμενο θεώρημα :

Θεώρημα 3.36. *Αν το $Ax \leq b$ είναι TDI σύστημα με τον A ακέραιο και το c είναι ακέραιο διάνυσμα, τότε μία ακέραια βέλτιστη λύση για το *minimum* στην εξίσωση δυϊκότητας του Γραμμικού Προγραμματισμού, μπορεί να βρεθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Απόδειξη. Ενότητα 22.14 στο [Sch98].

Q.E.D.

Όπως η NP κλάση προβλημάτων είναι η κλάση των προβλημάτων για τα οποία μπορούμε να ελέγχουμε αν μία λύση είναι έγκυρη σε πολυωνυμικό χρόνο, η co-NP κλάση, είναι η κλάση των προβλημάτων για τα οποία μπορούμε να ελέγχουμε ότι μία λύση δεν είναι έγκυρη σε πολυωνυμικό χρόνο.

Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι τα παρακάτω προβλήματα ανήκουν στο co-NP:

- (3.7) Δοθέντος ενός ρητού συστήματος, $Ax \leq b$,
ορίζει αυτό ένα ακέραιο πολύεδρο;
- (3.8) Δοθέντος ενός ακεραίου πίνακα, A , και ενός ρητού διανύσματος, b ,
είναι το σύστημα, $Ax \leq b$ TDI;
- (3.9) Δοθέντος ενός ακεραίου πίνακα, A , και ενός ρητού διανύσματος, b ,
είναι το σύστημα, $Ax \leq b$, κυβικά-TDI;
- (3.10) Δοθέντων των διανυσμάτων: $a_1, \dots, a_t$,
αποτελούν βάση Hilbert;

Δεν γνωρίζουμε αν αυτά τα προβλήματα ανήκουν στο NP. Αν όμως, σταθεροποιήσουμε το βαθμό, r , του A , υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι που ελέγχουν αν ένα σύστημα όπως στην (3.8) ορίζει ένα ακέραιο πολύεδρο ή αν κάποιες γραμμές του A ορίζουν βάση Hilbert ή αν ένα σύστημα όπως στην (3.9) είναι TDI.

Σε αυτό το κεφάλαιο, ακολουθήσαμε τις αντίστοιχες παρουσιάσεις των βιβλίων [CCPS97, KV08, Sch98].

Κεφάλαιο 4

Μητροειδή

Εκτός της εγγενούς σημασίας τους και των εφαρμογών τους, τα μητροειδή συνδέουν τα υπομετρικά συστήματα και την θεωρία των πολυέδρων. Σε αυτό το κεφάλαιο δίνουμε βασικούς ορισμούς, παραδείγματα και ιδιότητες των μητροειδών όπως επίσης και μερικά σχετικά αποτελέσματα. Επί της ουσίας τα μητροειδή είναι δομές οι οποίες γενικεύουν την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας.

Ορισμός 4.1 (Whitney). Ένα ζευγάρι $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ θα καλείται **μητροειδές** αν το $\mathcal{S}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και η $\mathcal{I}$ είναι μία μη κενή συλλογή υποσυνόλων του $\mathcal{S}$ τέτοια ώστε:

$$(4.1a') \quad \text{αν } I \in \mathcal{I} \text{ και } J \subseteq I, \text{ τότε } J \in \mathcal{I};$$

$$(4.1b') \quad \text{αν } I, J \in \mathcal{I} \text{ και } |I| < |J|, \text{ τότε } I \cup \{z\} \in \mathcal{I} \text{ για κάποια } z \in J \setminus I.$$

Σε κάποια εγχειρίδια το γεγονός ότι η $\mathcal{I}$ πρέπει να είναι μη κενή αντικαθίσταται από την ισοδύναμη συνθήκη $\emptyset \in \mathcal{I}$. Μερικές φορές θα γράφουμε $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ και $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ αντί του $\mathcal{I}$ και $\mathcal{S}$, αντίστοιχα σε ένα μητροειδές $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Έστω $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ μητροειδές. Τότε

Ορισμοί 4.2.

- (i) ένα υποσύνολο I του $\mathcal{S}$ καλείται **ανεξάρτητο** όταν $I \in \mathcal{I}$. Αν $\mathcal{S} \supseteq I \notin \mathcal{I}$, τότε το I καλείται **εξαρτημένο**.
- (ii) αν $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ και $B \subseteq \mathcal{U}$, τότε η B καλείται **βάση** του $\mathcal{U}$ αν η B είναι ανεξάρτητη και για κάθε ανεξάρτητη $B \subseteq C \subseteq \mathcal{U}$ έχουμε ότι $B = C$. αν B είναι βάση του του $\mathcal{S}$ τότε την καλούμε απλά βάση.

Πρόταση 4.3. Αν η (4.1a') ισχύει, τότε

$$(4.1b') \iff \text{για κάθε υποσύνολο, } \mathcal{U} \text{ του } \mathcal{S} \text{ όλες οι βάσεις του } \mathcal{U} \text{ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.}$$

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Έστω ότι υπάρχουν δύο βάσεις B, C , του $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ με διαφορετικό πλήθος στοιχείων, δηλαδή $|B| < |C|$. Τότε υπάρχει ένα $z \in C$ τέτοιο ώστε $B \subset B \cup \{z\} \subseteq \mathcal{U}$, οπότε το $B \cup \{z\}$ είναι ανεξάρτητο, άτοπο.

$(\Leftarrow)$ Έστω $I, J \in \mathcal{I}$ και $|I| < |J|$. Τότε $I, J \subseteq I \cup (J \setminus I) \subseteq \mathcal{S}$, έτσι ώστε αφού κάθε βάση του $V = I \cup (J \setminus I)$ είναι ένα ανεξάρτητο υποσύνολο του V , μεγιστοτικό ως προς την σχέση του περιέχονται, και όλες οι βάσεις έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, η I δεν είναι βάση του V . Οπότε υπάρχει ένα C τέτοιο ώστε $C \in \mathcal{I}$ και $I \subset C \subseteq V$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένα $z \in J \setminus I$ τέτοιο ώστε $I \cup \{z\} \subseteq C$. Επομένως $I \cup \{z\} \in \mathcal{I}$. **Q.E.D.**

Ορισμοί 4.4. Το κοινό μέγεθος των βάσεων ενός υποσυνόλου $\mathcal{U}$ του $\mathcal{S}$ καλείται η **τάξη** του $\mathcal{U}$ και θα την συμβολίζουμε με $r_{\mathcal{M}}(\mathcal{U})$, ή απλώς $r(\mathcal{U})$. Η τάξη του μητροειδούς $\mathcal{M}$ είναι το κοινό μέγεθος όλων των βάσεων του και θα το συμβολίζουμε με $r(\mathcal{M})$. Ένα υποσύνολο του $\mathcal{S}$ καλείται **spanning** αν περιέχει μία βάση του $\mathcal{S}$ ως υποσύνολό του. Σε αυτό το πλαίσιο οι βάσεις είναι τα ελαχιστοτικά ως προς την σχέση του περιέχεσθαι spanning σύνολα, ή τα ανεξάρτητα spanning σύνολα. Ένα σύνολο C καλείται **κύκλωμα** αν είναι ένα εξαρτημένο σύνολο, ελαχιστοτικό ως προς την σχέση του περιέχεσθαι, δηλαδή αν το C είναι εξαρτημένο, και αν $I \subset C \subseteq \mathcal{S}$, τότε το I είναι ανεξάρτητο. Ένα στοιχείο $c \in \mathcal{S}$ καλείται **βρόχος**, αν το $\{c\}$ είναι κύκλωμα. Δύο στοιχεία c, d θα λέγονται **παράλληλα** αν το $\{c, d\}$ είναι κύκλωμα.

Λήμμα 4.5. Για κάθε υποσύνολο $\mathcal{U}$ του $\mathcal{S}$ υπάρχει μία βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{S}$ τέτοια ώστε το $\mathcal{U} \cap \mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{U}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ βάση του $\mathcal{U}$ και $\mathcal{B}$ βάση του $\mathcal{S}$. Μπορούμε διαδοχικά να προσθέτουμε στοιχεία του $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ στο $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ έως ότου δημιουργήσουμε μία βάση του $\mathcal{S}$ που να περιέχει το $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$. **Q.E.D.**

Ένα δυϊκό μητροειδές $\mathcal{M}^*$ μπορεί να συσχετισθεί με κάθε μητροειδές $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$, ούτως ώστε $(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}$. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε:

$$(4.2) \quad \mathcal{I}^* := \{I \subseteq \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \setminus I \text{ είναι ένα spanning σύνολο του } \mathcal{M}\}.$$

Τότε

Θεώρημα 4.6 (Whitney). το $\mathcal{M}^* := (\mathcal{S}, \mathcal{I}^*)$ είναι μητροειδές.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι το $\mathcal{I}^*$ είναι μία συλλογή υποσυνόλων του $\mathcal{S}$ και $\emptyset \in \mathcal{I}^*$. Έστω $I \subseteq J \in \mathcal{I}^*$. Τότε $\mathcal{S} \setminus J \subseteq \mathcal{S} \setminus I$, έτσι ώστε $I \in \mathcal{I}^*$. Για να ελέγξουμε τη δεύτερη ιδιότητα του μητροειδούς, έστω $I, J \in \mathcal{I}^*$ με $|I| < |J|$. Λόγω της (4.2), το $\mathcal{S} \setminus J$ περιέχει μια βάση B του $\mathcal{M}$. $B \setminus I \subseteq \mathcal{S} \setminus I$, και αφού $B \setminus I$ είτε ισοϋται με το B είτε δεν είναι βάση του $\mathcal{M}$ και εφ' όσον το $\mathcal{S} \setminus I$ περιέχει μία βάση, έχουμε ότι υπάρχει βάση B' του $\mathcal{S} \setminus I$ η οποία είναι επίσης βάση του $\mathcal{M}$, με $B \setminus I \subseteq B' \subseteq \mathcal{S} \setminus I$. Τότε $J \setminus I \not\subseteq B'$ αλλιώς:

$$\begin{aligned} |B| &= |B \cap I| + |B \setminus I|, \text{ αφού τα } B \cap I \text{ και } B \setminus I \text{ είναι ξένα μεταξύ τους} \\ &\quad \text{και η ένωσή τους είναι το } B, \\ &\leq |I \setminus J| + |B \setminus I|, \text{ αφού } B \cap I \subseteq I \setminus J, \\ &< |J \setminus I| + |B \setminus I|, \text{ εφ' όσον } |I \cap J| + |J \setminus I| = |J| > |I| = |I \cap J| + |I \setminus J|, \\ &\leq |B'|, \text{ εφ' όσον } B \setminus I \text{ και } J \setminus I \text{ είναι ξένα μεταξύ τους } (B \subseteq \mathcal{S} \setminus J) \\ &\quad \text{και λόγω της υπόθεσης ότι } J \setminus I \subseteq B'. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα $z \in J \setminus I$ τέτοιο ώστε $z \notin B'$. Οπότε το B' είναι ξένο με το $I \cup \{z\}$. Επομένως $B' \subseteq \mathcal{S} \setminus (I \cup \{z\})$, το οποίο σημαίνει ότι $I \cup \{z\} \in \mathcal{I}^*$. **Q.E.D.**

Το $\mathcal{M}^*$ θα καλείται το **δυϊκό μητροειδές** του $\mathcal{M}$.

Πρόταση 4.7. Αν η B είναι βάση του $\mathcal{M}$, τότε η $\mathcal{S} \setminus B$ είναι βάση του $\mathcal{M}^*$.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι $\mathcal{S} \setminus B \in \mathcal{I}^*$ αφού το B είναι ένα spanning σύνολο. Έστω $\mathcal{S} \supseteq C \supseteq \mathcal{S} \setminus B$ με $C \in \mathcal{I}^*$. Τότε $\mathcal{S} \setminus C \subseteq B$ και $\mathcal{S} \setminus C$ είναι ένα spanning σύνολο. Αλλά το B είναι ένα ελαχιστοτικό spanning σύνολο ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι, επομένως $\mathcal{S} \setminus C = B$ και $C = \mathcal{S} \setminus B$ που σημαίνει ότι η $\mathcal{S} \setminus B$ είναι βάση του $\mathcal{M}^*$. **Q.E.D.**

Πρόταση 4.8. $(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}$.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mathcal{I} = (\mathcal{I}^*)^*$. Έστω $S \in (\mathcal{I}^*)^*$. Τότε $\mathcal{S} \setminus S$ είναι ένα spanning σύνολο του $\mathcal{M}^*$, το οποίο συνεπάγεται ότι μία βάση B^* του $\mathcal{M}^*$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{S} \setminus S$. Τότε $S \subseteq \mathcal{S} \setminus B^*$ και $\mathcal{S} \setminus B^*$ είναι βάση του $\mathcal{M}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το S είναι ανεξάρτητο στο $\mathcal{M}$. Αντίστροφα έστω $S \in \mathcal{I}$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{S} \setminus S$ είναι ένα spanning σύνολο του $\mathcal{M}^*$. Αν S είναι ένα spanning σύνολο του $\mathcal{M}$, αφού είναι ανεξάρτητο στο $\mathcal{M}$, έπεται ότι είναι βάση του $\mathcal{M}$. Αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{S} \setminus S$ είναι βάση του $\mathcal{M}^*$, επομένως είναι ένα spanning σύνολο του $\mathcal{M}^*$. Αν η S δεν είναι βάση του $\mathcal{M}$, τότε υπάρχει ένα $I \in \mathcal{I}$ τέτοιο ώστε $S \subset I \subseteq \mathcal{S}$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι η I είναι βάση του $\mathcal{M}$ διαφορετικά επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα έως ότου πάρουμε μία βάση (αφού το $\mathcal{S}$ είναι πεπερασμένο). Τότε $\mathcal{S} \setminus I \subset \mathcal{S} \setminus S$ και $\mathcal{S} \setminus I$ είναι ένα spanning σύνολο του $\mathcal{M}^*$. **Q.E.D.**

Θεώρημα 4.9. Η συνάρτηση τάξης $r_{\mathcal{M}^*}$ του δυϊκού μητροειδούς $\mathcal{M}^*$ ικανοποιεί για $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$:

$$(4.3) \quad r_{\mathcal{M}^*}(\mathcal{U}) = |\mathcal{U}| + r_{\mathcal{M}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{U}) - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}).$$

Απόδειξη. Έστω

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{I} \mid B \text{ είναι μία βάση του } \mathcal{M}\}, \quad \mathcal{B}^* = \{B \in \mathcal{I}(\mathcal{M}^*) \mid B \text{ είναι μία βάση του } \mathcal{M}^*\}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{M}^*}(\mathcal{U}) &= \max \{|\mathcal{U} \cap A| \mid A \in \mathcal{B}^*\}, \quad \text{από Λήμμα 4.5} \\ &= \max \{|\mathcal{U} \cap (\mathcal{S} \setminus B)| \mid B \in \mathcal{B}\}, \quad \text{από Πρόταση 4.7} \\ &= \max \{|\mathcal{U} \setminus B| \mid B \in \mathcal{B}\} \\ &= \max \{|\mathcal{U}| - |\mathcal{U} \cap B| \mid B \in \mathcal{B}\} \\ &= |\mathcal{U}| - \min \{|\mathcal{U} \cap B| \mid B \in \mathcal{B}\} \\ &= |\mathcal{U}| - \min \{|B| - |B \setminus \mathcal{U}| \mid B \in \mathcal{B}\} \\ &= |\mathcal{U}| - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) + \max \{|B \cap (\mathcal{S} \setminus \mathcal{U})| \mid B \in \mathcal{B}\} \\ &= |\mathcal{U}| - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) + r_{\mathcal{M}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{U}). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Ορισμοί 4.10. Τα κυκλώματα του $\mathcal{M}^*$ καλούνται **συγκυκλώματα** του $\mathcal{M}$. Οι βρόχοι του $\mathcal{M}^*$ καλούνται **σύβροχοι** ή **γέφυρες** του $\mathcal{M}$ και τα παράλληλα στοιχεία του $\mathcal{M}^*$ καλούνται **συμπαράλληλα** ή **σε σειρά** στο $\mathcal{M}$.

Παρατήρηση 4.11. Ένα κύκλωμα του $\mathcal{M}^*$ είναι ένα ελαχιστοτικό ως προς τη σχέση του περιέχεται εξαρτημένο σύνολο του $\mathcal{M}^*$, που σημαίνει ότι είναι ένα ελαχιστοτικό σύνολο που δεν περιέχεται σε καμία βάση του $\mathcal{M}^*$, δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα συμπλήρωμα βάσης του $\mathcal{M}$. Με άλλα λόγια είναι ένα ελαχιστοτικό σύνολο το οποίο τέμνει κάθε βάση του $\mathcal{M}$.

Παρατήρηση 4.12. Έστω ότι έχουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο ο οποίος αποφαινεται κατά πόσο ένα σύνολο είναι ανεξάρτητο στο $\mathcal{M}$. Τότε αυξάνοντας διαδοχικά από το $\emptyset$ σε ένα μεγιστοτικό ως προς τη σχέση του περιέχεται ανεξάρτητο σύνολο του $\mathcal{U}$, μπορούμε να υπολογίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο το $r_{\mathcal{M}}(\mathcal{U})$ για όλα τα $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$. Επομένως μπορούμε να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο κατά πόσο ένα σύνολο είναι ανεξάρτητο στο $\mathcal{M}^*$.

Ορισμός 4.13. Ένα μητροειδές είναι **συνεκτικό** αν $r_{\mathcal{M}}(\mathcal{U}) + r_{\mathcal{M}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{U}) > r_{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$ για κάθε $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$.

Μπορεί ναδειχθεί ότι το $\mathcal{M}$ είναι συνεκτικό αν το $\mathcal{M}^*$ είναι συνεκτικό.

Ορίζουμε δύο πράξεις στα μητροειδή: την διαγραφή και τη συστολή. Έστω $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ μητροειδές και $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{S}$. Ορίζουμε:

$$(4.4) \quad \mathcal{I}' := \{Z \in \mathcal{I} \mid Z \subseteq \mathcal{Y}\}; \quad \mathcal{M}' := (\mathcal{Y}, \mathcal{I}').$$

Τότε το $\mathcal{M}'$ είναι μητροειδές. Το $\mathcal{M}'$ καλείται ο **περιορισμός** του $\mathcal{M}$ στο $\mathcal{Y}$ και συμβολίζεται ως $\mathcal{M}|_{\mathcal{Y}}$. Αν $\mathcal{Y} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{Z}$ με $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{S}$, λέμε ότι το $\mathcal{M}'$ προκύπτει με **διαγραφή** του $\mathcal{Z}$ και το συμβολίζουμε με $\mathcal{M} \setminus \mathcal{Z}$.

Παρατήρηση 4.14. Η συνάρτηση τάξης του $\mathcal{M}|_{\mathcal{Y}}$ είναι ο περιορισμός της συνάρτησης τάξης του $\mathcal{M}$ στα υποσύνολα του $\mathcal{Y}$.

Η συστολή είναι η δυϊκή πράξη της διαγραφής, δηλαδή **συστέλλοντας** το $\mathcal{Z}$ σημαίνει αντικατάσταση του $\mathcal{M}$ με $(\mathcal{M}^* \setminus \mathcal{Z})^*$. Συμβολίζουμε αυτό το μητροειδές ως $\mathcal{M}/\mathcal{Z}$. Ακόμα, αν $\mathcal{Y} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{Z}$, γράφουμε $\mathcal{M} \cdot \mathcal{Y} := \mathcal{M}/\mathcal{Z}$.

Θεώρημα 4.15. Η συνάρτηση τάξης συστολής ικανοποιεί:

$$(4.5) \quad r_{\mathcal{M}/\mathcal{Z}}(X) = r_{\mathcal{M}}(X \cup \mathcal{Z}) - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{Z})$$

για $X \subseteq \mathcal{S} \setminus \mathcal{Z}$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{M}/\mathcal{Z}}(X) &= |X| + r_{\mathcal{M}^* \setminus \mathcal{Z}}((\mathcal{S} \setminus \mathcal{Z}) \setminus X) - r_{\mathcal{M}^* \setminus \mathcal{Z}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{Z}), \quad \text{από (4.3)} \\ &= |X| + r_{\mathcal{M}^*}(\mathcal{S} \setminus (X \cup \mathcal{Z})) - r_{\mathcal{M}^*}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{Z}), \quad \text{από Παρατήρηση 4.14} \\ &= |X| + |\mathcal{S} \setminus (X \cup \mathcal{Z})| + r_{\mathcal{M}}(X \cup \mathcal{Z}) - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) - |\mathcal{S} \setminus \mathcal{Z}| - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{Z}) + r_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) \\ &= r_{\mathcal{M}}(X \cup \mathcal{Z}) - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{Z}), \quad \text{αφού } X \text{ και } \mathcal{S} \setminus \mathcal{Z} \text{ είναι ξένα. } \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Για καλύτερη κατανόηση της έννοιας της συστολής, δίνουμε την παρακάτω πρόταση η οποία χαρακτηρίζει τα ανεξάρτητα σύνολα του $\mathcal{M}/\mathcal{Z}$.

Πρόταση 4.16. Έστω ότι η $\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$ είναι μία βάση του $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{S}$ και $I \subseteq \mathcal{S} \setminus \mathcal{Z}$. Τότε,

$$(4.6) \quad \text{το } I \text{ είναι ανεξάρτητο στο } \mathcal{M}/\mathcal{Z} \text{ αν το } I \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}} \text{ είναι ανεξάρτητο στο } \mathcal{M}.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $I \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}} \in \mathcal{I}(\mathcal{M})$. Τότε προφανώς η $I \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$ είναι μία βάση του $I \cup \mathcal{Z}$, σο, $r_{\mathcal{M}}(I \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}) = r_{\mathcal{M}}(I \cup \mathcal{Z})$. Από την (4.5) έχουμε ότι $r_{\mathcal{M}/\mathcal{Z}}(I) = r_{\mathcal{M}}(I \cup \mathcal{Z}) - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{Z})$ άρα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{M}/\mathcal{Z}}(I) &= r_{\mathcal{M}}(I \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}) - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}), \quad \text{αφού οι } I \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}} \text{ και } \mathcal{B}_{\mathcal{Z}} \text{ είναι οι βάσεις} \\ &\quad \text{του } I \cup \mathcal{Z} \text{ και του } \mathcal{Z} \text{ αντίστοιχα} \\ &= |I \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}| - |\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}| \\ &= |I|, \quad \text{αφού τα } I \text{ και } \mathcal{B}_{\mathcal{Z}} \text{ είναι ξένα.} \end{aligned}$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι το I είναι ανεξάρτητο στο $\mathcal{M}/\mathcal{Z}$.

Αντίστροφα έστω ότι $I \in \mathcal{I}(\mathcal{M}/\mathcal{Z})$. Τότε

$$\begin{aligned} |I| &= r_{\mathcal{M}/\mathcal{Z}}(I) \\ &= r_{\mathcal{M}}(I \cup \mathcal{Z}) - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{Z}), \quad \text{από την (4.5)} \\ &= r_{\mathcal{M}}(I \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}) - |\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}|. \end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρούμε ότι αφού το $\mathcal{B}_Z$ είναι ανεξάρτητο στο $I \cup \mathcal{B}_Z$, υπάρχει μία βάση $\mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}_Z$ του $I \cup \mathcal{B}_Z$ η οποία περιέχει το $\mathcal{B}_Z$. Έστω ότι η $\mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}_Z$ δεν είναι βάση του $I \cup Z$. Τότε υπάρχει ένα z στο $Z \setminus \mathcal{B}_Z$ τέτοιο που το $\mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}_Z \cup \{z\}$ είναι ανεξάρτητο στο $I \cup Z$. Τότε όμως το $\mathcal{B}_Z \cup \{z\}$ είναι ανεξάρτητο στο Z , άτοπο. Οπότε έχουμε ότι $|I| + |\mathcal{B}_Z| = r_{\mathcal{M}}(I \cup \mathcal{B}_Z)$ και αφού τα $I, \mathcal{B}_Z$ είναι ξένα, προκύπτει ότι το $I \cup \mathcal{B}_Z$ είναι ανεξάρτητο στο $\mathcal{M}$. **Q.E.D.**

Προκύπτει λοιπόν αμέσως ότι :

Πόρισμα 4.17. Έστω $\mathcal{B}_Z$ βάση του Z και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S} \setminus Z$. Τότε

$$(4.7) \quad \eta \mathcal{B} \text{ είναι μία βάση του } \mathcal{M}/Z \text{ ανν } \mathcal{B} \cup \mathcal{B}_Z \text{ είναι μία βάση του } \mathcal{M}$$

Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα της διαγραφής και της συστολής είναι ότι αντιμετωπίζονται όπως φαίνεται από την επόμενη πρόταση :

Πρόταση 4.18. Έστω $x, y \in \mathcal{S}$ με $x \neq y$ και $Z \subseteq \mathcal{S} \setminus \{x, y\}$. Τότε

$$r_{(\mathcal{M} \setminus \{x\})/\{y\}}(Z) = r_{(\mathcal{M}/\{y\}) \setminus \{x\}}(Z).$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} r_{(\mathcal{M} \setminus \{x\})/\{y\}}(Z) &= r_{\mathcal{M} \setminus \{x\}}(Z \cup \{y\}) - r_{\mathcal{M} \setminus \{x\}}(\{y\}) \quad , \quad \text{από την (4.5),} \\ &= r_{\mathcal{M}}(Z \cup \{y\}) - r_{\mathcal{M}}(\{y\}) \quad , \quad \text{από την Παρατήρηση 4.14,} \\ &= r_{\mathcal{M}/\{y\}}(Z) \quad , \quad \text{από την (4.5),} \\ &= r_{(\mathcal{M}/\{y\}) \setminus \{x\}}(Z) \quad , \quad \text{από την Παρατήρηση 4.14.} \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Ορισμός 4.19. Αν το $\mathcal{M}'$ προκύπτει από το $\mathcal{M}$ μέσω μίας σειράς διαγραφών και συστολών, τότε το $\mathcal{M}'$ καλείται **ελάσσον** του $\mathcal{M}$.

Μπορεί ναδειχθεί ότι τα κυκλώματα του $\mathcal{M}|Y$ είναι ακριβώς τα κυκλώματα του $\mathcal{M}$ που περιέχονται στο Y και τα κυκλώματα του $\mathcal{M}/Z$ είναι ακριβώς τα ελαχιστοτικά μη κενά μέλη του

$$\{C \cap (\mathcal{S} \setminus Z) \mid \text{όπου το } C \text{ είναι ένα κύκλωμα του } \mathcal{M}\}.$$

4.1 Παραδείγματα Μητροειδών

Ας δούμε τώρα μερικές βασικές κλάσεις και παραδείγματα μητροειδών :

- **Ομοιόμορφα Μητροειδή.** Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύνολο πληθικότητας $n \geq k$. Τότε εάν ορίσουμε τα ανεξάρτητα υποσύνολα του $\mathcal{S}$ να είναι τα υποσύνολα του $\mathcal{S}$ με πληθάρημο το πολύ k , έχουμε το k **ομοιόμορφο μητροειδές**, το οποίο συμβολίζεται με U_n^k .
- **Γραμμικά Μητροειδή** Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας και $\mathcal{S} := \{1, \dots, n\}$. Ορίζουμε το $\mathcal{I}$ να είναι εκείνη η συλλογή υποσυνόλων του $\mathcal{S}$ τέτοια ώστε όποτε $I \in \mathcal{I}$ οι στήλες του A με δείκτες από το I είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Τότε το $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ είναι ένα μητροειδές (Grassmann, Steinitz). Οποιοδήποτε τέτοιο μητροειδές (ή ισόμορφο αντίτυπό του) λέγεται **γραμμικό μητροειδές**. Αν το A έχει τιμές στο σώμα $\mathbb{F}$, τότε το $\mathcal{M}$ λέμε ότι **δύναται να αναπαρασταθεί υπέρ του $\mathbb{F}$** και λέμε ότι το $\mathcal{M}$ **έχει αναπαρασταθεί** από το A και ότι το A είναι μία **αναπαράσταση** του $\mathcal{M}$. Το δυϊκό μητροειδές του $\mathcal{M}$, όταν το $\mathcal{M}$ δύναται να αναπαρασταθεί υπέρ του $\mathbb{F}$, μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί υπέρ του $\mathbb{F}$. Ακόμα, η κλάση των μητροειδών τα οποία δύναται να αναπαρασταθούν υπέρ του $\mathbb{F}$ είναι κλειστή ως προς τα ελάσσονα. Τέλος έχει αποδειχθεί ότι υπάρχουν μη γραμμικά μητροειδή.

- **Δυαδικά Μητροειδή.** Ένα μητροειδές είναι **δυαδικό** αν δύναται να αναπαρασταθεί υπέρ του $GF(2)$, δηλαδή του σώματος με δύο στοιχεία.

Θεώρημα 4.20 (Tutte). Ένα μητροειδές είναι δυαδικό αν δεν περιέχει το U_4^2 ως έλασσον.

Απόδειξη. Δες [Sch03].

Q.E.D.

Ένα μητροειδές καλείται **κανονικό** αν αναπαρίσταται από κάθε σώμα, ή ισοδύναμα αν δύναται να αναπαρασταθεί υπέρ του $\mathbb{R}$ από τις στήλες ενός TU πίνακα. Ο Tutte έδωσε τον χαρακτηρισμό των κανονικών μητροειδών ως εκείνων των δυαδικών μητροειδών που δεν περιέχουν το F_7 ή το F_7^* ως έλασσον, όπου το F_7 είναι το **μητροειδές του Fano** το οποίο αναπαρίσταται από τα μη μηδενικά διανύσματα του $GF(2)^3$.

- **Γραφικά Μητροειδή.** Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και έστω $\mathcal{I}$ η συλλογή όλων των υποσυνόλων του E τα οποία σχηματίζουν δάσος. Τότε το $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G) = (E, \mathcal{I})$ είναι ένα μητροειδές και ονομάζεται το **μητροειδές κύκλου** του G . Η ονομασία δικαιολογείται από το γεγονός ότι κάθε βάση του $\mathcal{M}$ είναι ένα μεγιστοτικό ως προς την σχέση του περιέχεσθαι δάσος του G , δηλαδή ένα σύνολο το οποίο σχηματίζει ένα spanning δέντρο σε κάθε συνιστώσα του G . Εν ολίγοις είναι ένα μεγιστοτικό υποσύνολο του E που δεν περιέχει κύκλους. Ένα μητροειδές (ή ισόμορφό με αυτό) το οποίο λαμβάνεται δι' αυτού του τρόπου καλείται **γραφικό μητροειδές**. Τα γραφικά μητροειδή είναι κανονικά.
- **Συγγραφικά Μητροειδή.** Το δυϊκό του μητροειδούς κύκλου $\mathcal{M}(G)$ ενός γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται **συγκυκλικό μητροειδές** του G και συμβολίζεται ως $\mathcal{M}^*(G)$. Οποιοδήποτε μητροειδές (ή ισόμορφό με αυτό) το οποίο λαμβάνεται δι' αυτού του τρόπου καλείται **συγγραφικό μητροειδές**.

Για λεπτομερέστερη ανάλυση των παραπάνω κλάσεων μητροειδών όπως επίσης και για άλλες κλάσεις οι οποίες δεν αναφέρονται καθώς περιέχουν επιχειρήματα από την αφηρημένη άλγεβρα, προτιρούμε τον αναγνώστη να συμβουλευτεί το βιβλίο του Oxley [Oxl11], ή το [Sch03].

4.2 Εναλλακτικοί χαρακτηρισμοί μητροειδών

Υπάρχουν εναλλακτικά αξιωματικά συστήματα για τον ορισμό του μητροειδούς τα οποία είναι ισοδύναμα με το (4.1).

Η επόμενη πρόταση καθιστά σαφές ότι ένα μητροειδές χαρακτηρίζεται πλήρως από το σύνολο των βάσεων του

Πρόταση 4.21. Έστω $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ ένα μητροειδές και έστω $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{I}$ το οποίο περιέχει τις βάσεις του $\mathcal{M}$. Τότε ένα σύνολο $I \subseteq S$ είναι ανεξάρτητο στο $\mathcal{M}$ αν υπάρχει ένα $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ τέτοιο ώστε $I \subseteq B$.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι αν $I \subseteq B$ για κάποιο $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, τότε είναι ανεξάρτητο. Αντίστροφα, έστω ότι το I είναι ανεξάρτητο και έστω B βάση του $\mathcal{M}$. Τότε προσθέτοντας διαδοχικά στοιχεία του $B \setminus I$ στο I μπορούμε να κατασκευάσουμε βάση του $\mathcal{M}$ η οποία να περιέχει το I . Q.E.D.

Ένα μητροειδές καθορίζεται πλήρως από την συλλογή των κυκλωμάτων του όπως δείχνει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 4.22. $I \in \mathcal{I}$ αν το I δεν περιέχει κύκλωμα.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι αν $I \in \mathcal{I}$, τότε δεν περιέχει κανένα κύκλωμα αφού όλα τα υποσύνολά του είναι ανεξάρτητα σύνολα. Αντιστρόφως, αν το I δεν περιέχει κύκλωμα, τότε όλα τα υποσύνολά του είναι ανεξάρτητα, οπότε και το I , αφού είναι υποσύνολο του εαυτού του. Q.E.D.

Ένα μητροειδές καθορίζεται πλήρως από την συνάρτηση τάξης του όπως δείχνει η επόμενη πρόταση:

Πρόταση 4.23. Το I είναι ανεξάρτητο στο $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ αν $r_{\mathcal{M}}(I) = |I|$.

Απόδειξη. Αυτή η πρόταση είναι τετριμμένη.

Q.E.D.

Το σύνολο $\mathcal{B}$ των βάσεων του $\mathcal{M}$ ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

$$(4.8\alpha) \quad \mathcal{B} \neq \emptyset;$$

$$(4.8\beta) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \setminus B_2, \exists y \in B_2 \setminus B_1 : (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{C}$ των κυκλωμάτων ενός μητροειδούς $\mathcal{M}$ ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

$$(4.9\alpha) \quad \mathcal{C} \neq \{\emptyset\};$$

$$(4.9\beta) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathcal{C} : C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2;$$

$$(4.9\gamma) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}, \text{ με } C_1 \neq C_2, \forall x \in C_1 \cap C_2, \exists C \in \mathcal{C} : C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}.$$

Η συνάρτηση τάξης $r_{\mathcal{M}}$ ενός μητροειδούς $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

$$(4.10\alpha) \quad \forall X \subseteq \mathcal{S} : 0 \leq r_{\mathcal{M}}(X) \leq |X|;$$

$$(4.10\beta) \quad X \subseteq Y \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow r_{\mathcal{M}}(X) \leq r_{\mathcal{M}}(Y);$$

$$(4.10\gamma) \quad \forall X, Y \subseteq \mathcal{S} : r_{\mathcal{M}}(X) + r_{\mathcal{M}}(Y) \geq r_{\mathcal{M}}(X \cup Y) + r_{\mathcal{M}}(X \cap Y).$$

Αντίστροφα, μία οποιαδήποτε οικογένεια $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του συνόλου $\mathcal{S}$ που ικανοποιεί τα αξιώματα (4.8), ή μία οποιαδήποτε οικογένεια $\mathcal{C}$ υποσυνόλων ενός συνόλου $\mathcal{S}$ που ικανοποιεί τα αξιώματα (4.9), ή ακόμα μία οποιαδήποτε συνάρτηση $r_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{N}$ η οποία ορίζεται στο δυναμοσύνολο του συνόλου $\mathcal{S}$ και ικανοποιεί τα αξιώματα (4.10), είναι αντίστοιχα η οικογένεια βάσεων, κυκλωμάτων ή η συνάρτηση τάξης που ορίζει μονοσήμαντα ένα μητροειδές (για αποδείξεις των αποτελεσμάτων που αναφέρονται σε αυτήν την παράγραφο ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί το [Oxl11]).

Ορισμός 4.24. Μία οποιαδήποτε συνάρτηση η οποία ορίζεται σε οικογένεια συνόλων και ικανοποιεί την ιδιότητα (4.10γ) καλείται **υπομετρική συνάρτηση**.

4.3 Ο Άπληστος Αλγόριθμος

Ο άπληστος αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος ο οποίος, όπως θα δούμε στη συνέχεια, χαρακτηρίζει την δομή των μητροειδών. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

ΕΙΣΟΔΟΣ: Έστω $\mathcal{I}$ μη κενή συλλογή υποσυνόλων ενός συνόλου $\mathcal{S}$ και $w : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία αντιστοιχίζει ένα βάρος σε κάθε στοιχείο του $\mathcal{S}$.

Ορίζουμε για κάθε $I \in \mathcal{I}$ το βάρος του $w(I)$ να είναι:

$$w(I) = 0, \text{ αν } I = \emptyset$$

$$w(I) = \sum_{i \in I} w(i), \text{ αν } I \neq \emptyset$$

ΕΞΟΔΟΣ: Μεγιστοτικό στοιχείο B του $\mathcal{I}$ το οποίο έχει μέγιστο βάρος.

Ο **άπληστος αλγόριθμος** ορίζεται ως εκείνος ο αλγόριθμος ο οποίος, ξεκινώντας από το $\emptyset$ προσθέτει διαδοχικά στοιχεία μέγιστου βάρους

τα οποία παράγουν ένα σύνολο στο $\mathcal{I}$ και συνεχίζει έως ότου δεν μπορεί να προστεθεί άλλο τέτοιο στοιχείο και ταυτόχρονα (το αντίστοιχο παραγόμενο σύνολο)

να παραμένει εντός του $\mathcal{I}$. Τυπικά ο άπληστος αλγόριθμος για την τριάδα $(\mathcal{S}, \mathcal{I}, w)$ ακολουθεί την εξής διαδικασία :

1. Θέσε $X_0 = \emptyset$ και $j = 0$.
2. Αν το $\mathcal{S} \setminus X_j$ περιέχει στοιχείο x τέτοιο ώστε $X_j \cup \{x\} \in \mathcal{I}$, επίλεξε ένα στοιχείο $x_{j+1} \in \mathcal{S} \setminus X_j$ μέγιστου βάρους, θέσε $X_{j+1} = X_j \cup \{x_{j+1}\}$, και πήγαινε στο βήμα 3, αλλιώς θέσε $X_j = B_G$ και πήγαινε στο βήμα 4.
3. πρόσθεσε 1 στο j και πήγαινε στο βήμα 2.
4. σταμάτα.

Είναι σαφές ότι ο άπληστος αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου.

Λήμμα 4.25. Αν το $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ είναι ένα μητροειδές, τότε η B_G είναι βάση μέγιστου βάρους του $\mathcal{M}$.

Απόδειξη. Είναι σαφές εκ κατασκευής ότι η B_G είναι βάση του $\mathcal{M}$. Έστω $B_G = \{b_1^G, \dots, b_r^G\}$ και $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ μία άλλη βάση του $\mathcal{M}$. Μετονομάζοντας τα στοιχεία της B , αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w(b_1) \geq w(b_2) \geq \dots \geq w(b_r)$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $1 \leq j \leq r$: $w(b_j^G) \geq w(b_j)$. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο δεν ισχύει. Έστω k ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο $w(b_k) > w(b_k^G)$. Παίρνουμε $B_G^k = \{b_1^G, \dots, b_{k-1}^G\}$ και $B^{k+1} = \{b_1, \dots, b_k\}$. Αφού $|B_G^k| < |B^{k+1}|$ και $B^{k+1} \in \mathcal{I} \Rightarrow \exists x \in B^{k+1} \setminus B_G^k$, έχουμε ότι $B_G^k \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Αλλά $w(x) \geq w(b_k) > w(b_k^G)$, το οποίο σημαίνει ότι ο αλγόριθμος δεν θα είχε επιλέξει το b_k^G , άτοπο. **Q.E.D.**

Δείχνουμε τώρα το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας, δηλαδή ότι τα μητροειδή είναι εκείνες ακριβώς οι δομές για τις οποίες ο άπληστος αλγόριθμος επιστρέφει την βέλτιστη λύση.

Θεώρημα 4.26. Έστω $\mathcal{S}$ ένα πεπερασμένο σύνολο και $\mathcal{I}$ μία μη κενή συλλογή υποσυνόλων οφ $\mathcal{S}$. Τότε το $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ είναι ένα μητροειδές αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες :

(α) (4.1α) .

(β) για όλες τις συναρτήσεις βάρους $w : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, ο άπληστος αλγόριθμος παράγει ένα μεγιστοτικό μέλος του $\mathcal{I}$ μέγιστου βάρους.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει ότι αν $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ είναι ένα μητροειδές, τότε ισχύει η (β) και προφανώς και η (α). Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύουν οι (α) και (β). Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ ικανοποιεί την (4.1β). Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ με $|I_1| < |I_2|$ και $I_1 \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ για κάθε $x \in I_2 \setminus I_1$. Έχουμε ότι $|I_1 \setminus I_2| < |I_2 \setminus I_1|$ και $I_1 \setminus I_2 \neq \emptyset$ επομένως μπορούμε να διαλέξουμε

$$\epsilon > 0 : 0 < a_1 := \frac{1 + \epsilon}{|I_2 \setminus I_1|} < a_2 := \frac{1}{|I_1 \setminus I_2|}.$$

Ορίζουμε $w : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής :

$$w(x) = \begin{cases} 2, & \text{Αν } x \in I_1 \cap I_2, \\ a_2, & \text{Αν } x \in I_1 \setminus I_2, \\ a_1, & \text{Αν } x \in I_2 \setminus I_1, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ο άπληστος αλγόριθμος θα επιλέξει όλα τα στοιχεία στο $I_1 \cap I_2$, ακολούθως όλα τα στοιχεία στο $I_1 \setminus I_2$ και μετά δεν θα μπορεί να προσθέσει κανένα στοιχείο στο $I_2 \setminus I_1$. Οπότε όλα τα άλλα στοιχεία της B_G θα είναι στο $\mathcal{S} \setminus I_1 \cup I_2$. Άρα

$$\begin{aligned} w(B_G) &= 2|I_1 \cap I_2| + |I_1 \setminus I_2|a_2 \\ &= 2|I_1 \cap I_2| + 1. \end{aligned}$$

Όμως το I_2 είναι ανεξάρτητο. Επομένως υπάρχει βάση B του $\mathcal{M}$ τέτοια ώστε: $I_2 \subseteq B \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} w(B) \geq w(I_2) &= 2|I_1 \cap I_2| + |I_2 \setminus I_1|a_1 \\ &= 2|I_1 \cap I_2| + 1 + \epsilon, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι ο άπληστος αλγόριθμος δεν βρίσκει το βέλτιστο, άτοπο.

Q.E.D.

4.4 Τομές Μητροειδών

Έστω $\mathcal{M}_1 = (\mathcal{S}, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (\mathcal{S}, \mathcal{I}_2)$ δύο μητροειδή. Εν γένει το $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$ δεν είναι μητροειδές. Αν όμως θεωρήσουμε το σύνολο $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ των κοινών ανεξάρτητων συνόλων, τότε

Θεώρημα 4.27 (Edmonds, matroid intersection theorem). *Αν r_1, r_2 είναι οι συναρτήσεις τάξης των $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ αντίστοιχα, τότε το μέγιστο μέγεθος ενός συνόλου στο $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ ισούται με*

$$(4.11) \quad \min_{U \subseteq \mathcal{S}} (r_1(U) + r_2(\mathcal{S} \setminus U)),$$

όπου η συνάρτηση $\rho(U) = r_1(U) + r_2(\mathcal{S} \setminus U)$ είναι υπομετρική.

Απόδειξη. Δείχνουμε μόνο την υπομετρικότητα της ρ . Η υπόλοιπη απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Sch03]. Έχουμε ότι

$$r_1(T) + r_1(U) \geq r_1(U \cup T) + r_1(U \cap T), \text{ αφού η } r_1 \text{ είναι υπομετρική,}$$

$$\begin{aligned} r_2(\mathcal{S} \setminus T) + r_2(\mathcal{S} \setminus U) &\geq r_2((\mathcal{S} \setminus T) \cup (\mathcal{S} \setminus U)) + r_2((\mathcal{S} \setminus T) \cap (\mathcal{S} \setminus U)), \text{ αφού η } r_2 \text{ είναι υπομετρική,} \\ &= r_2(\mathcal{S} \setminus (T \cap U)) + r_2(\mathcal{S} \setminus (T \cup U)), \end{aligned}$$

που συνεπάγεται ότι και η ρ είναι υπομετρική.

Q.E.D.

Το θεώρημα τομών μητροειδών έχει πολλές εφαρμογές στην συνδυαστική θεωρία. Μπορούμε επίσης να βρούμε κοινό ανεξάρτητο σύνολο (δύο μητροειδών) μεγίστου μεγέθους, ή μεγίστου βάρους, σε πολυωνυμικό χρόνο. Το ίδιο πρόβλημα για τρία μητροειδή είναι NΠ-πλήρες.

Για αυτό το κεφάλαιο έχουμε χρησιμοποιήσει κυρίως το [Oxl11, Sch03] και το βιβλίο του Fujishige [Fuj05].

Κεφάλαιο 5

Πολυμητροειδή και Υπομετρικά Συστήματα

Έστω $\mathcal{S}$ ένα πεπερασμένο σύνολο και $\rho : \mathcal{P}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνολοσυνάρτηση στο $\mathcal{S}$ η οποία ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} (5.1\alpha) \quad & \rho(\emptyset) = 0 ; \\ (5.1\beta) \quad & X \subseteq Y \subseteq \mathcal{S} \implies \rho(X) \leq \rho(Y) ; \\ (5.1\gamma) \quad & \forall X, Y \subseteq \mathcal{S} : \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y). \end{aligned}$$

δηλαδή η ρ είναι μία αύξουσα, υπομετρική συνάρτηση με $\rho(\emptyset) = 0$. Τότε:

Ορισμός 5.1. το ζεύγος $(\mathcal{S}, \rho)$ καλείται **πολυμητροειδές** και η ρ καλείται η **συνάρτηση τάξης** του πολυμητροειδούς. Σίγουρα κάθε συνάρτηση τάξης ενός μητροειδούς ικανοποιεί την (5.1), αφού ικανοποιεί τα (4.10). Όταν η ρ είναι η συνάρτηση τάξης ενός μητροειδούς, το αντίστοιχο πολυμητροειδές καλείται **μητροειδικό**.

Για κάθε συνάρτηση $w : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ και για κάθε υποσύνολο U του $\mathcal{S}$ ορίζουμε

$$w(U) := \sum_{s \in \mathcal{S}} w(s).$$

Με κάθε πολυμητροειδές $(\mathcal{S}, \rho)$ συνδέεται ένα πολύεδρο P_ρ , το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$P_\rho := \{x \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}} \mid x \geq \mathbf{0}, \forall X \subseteq \mathcal{S} : x(X) \leq \rho(X)\}.$$

Είναι σαφές ότι $P_\rho \neq \emptyset$ αν $\rho \geq \mathbf{0}$. Θα χρησιμοποιούμε συχνά τον όρο πολυμητροειδές για το P_ρ . Ένα άλλο πολύεδρο που συνδέεται με το $(\mathcal{S}, \rho)$ είναι το B_ρ :

$$B_\rho := \{x \in P_\rho \mid x(\mathcal{S}) = \rho(\mathcal{S})\}.$$

Ορισμός 5.2. Το P_ρ καλείται το **πολύεδρο ανεξαρτησίας** του πολυμητροειδούς $(\mathcal{S}, \rho)$ και το B_ρ καλείται το **πολύεδρο βάσης** του πολυμητροειδούς $(\mathcal{S}, \rho)$.

Ο Edmonds έδειξε ότι το πολύεδρο ανεξαρτησίας και το πολύεδρο βάσης συμπίπτουν με το κυρτό κύτος των διανυσμάτων πρόσπτωσης των ανεξάρτητων συνόλων και των βάσεων αντίστοιχα εντός του $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ (γνωστό και ως το **πολύτοπο ανεξαρτήτων συνόλων (βάσεων)**), όταν το $(\mathcal{S}, \rho)$ είναι μητροειδικό.

Ορισμός 5.3. Κάθε $x \in P_\rho$ καλείται **ανεξάρτητο διάνυσμα** και κάθε $x \in B_\rho$ ένα **διάνυσμα βάσης** του πολυμητροειδούς $(\mathcal{S}, \rho)$.

5.1 Ο Άπληστος Αλγόριθμος στα Πολυμητροειδή

Από τον Edmonds έχουμε ότι ο άπληστος αλγόριθμος μπορεί να γενικευθεί ώστε να βελτιστοποιεί μία γραμμική συνάρτηση $w'x$ υπέρ ενός πολυέδρου ανεξαρτησίας ενός πολυμητροειδούς $(\mathcal{S}, \rho)$. Υποθέτουμε ότι η τιμή της υπομετρικής συνάρτησης $\rho(U)$ σε ένα οποιοδήποτε υποσύνολο U του $\mathcal{S}$ δίνεται από ένα μαντείο, δηλαδή ένα μαντείο που επιστρέφει την $\rho(U)$, όταν τροφοδοτείται με το U .

Οπότε, έστω $w : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι $P_\rho \neq \emptyset$. Μπορούμε ακόμα να υποθέσουμε ότι $w \geq \mathbf{0}$, διότι, αν $w(s) < 0$ για κάποιο $s \in \mathcal{S}$, γνωρίζουμε ότι η βέλτιστη λύση x_0 θα έχει $x_0(s) = 0$. Έστω $s_1, \dots, s_n$ μία αρίθμηση των στοιχείων του $\mathcal{S}$ τέτοια ώστε $w(s_1) \geq w(s_2) \geq \dots \geq w(s_n)$. Ορίζουμε επίσης $U_i = \{s_1, \dots, s_i\}$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ και $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \ni x_0 : x_0(s_i) = \rho(U_i) - \rho(U_{i-1})$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Θα δείξουμε ότι το x_0 μεγιστοποιεί το $w'x$ υπέρ του P_ρ . Στην απόδειξή μας θα θεωρήσουμε την ακόλουθη LP εξίσωση δυϊκότητας: $A = B$, όπου

$$(5.2) \quad \begin{aligned} A &= \max \left\{ w'x \mid x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}, \forall X \subseteq \mathcal{S} : x(X) \leq \rho(X) \right\} \\ &= \max \left\{ w'x \mid x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}, \mathcal{P}x \leq (\rho(U_1), \dots, \rho(U_{|\mathcal{P}(\mathcal{S})|}))' \right\}, \text{ όπου } \mathcal{P} \text{ είναι ο πίνακας} \\ &\quad \text{με } |\mathcal{P}(\mathcal{S})| \text{ γραμμές:} \\ &\quad \text{τα διανύσματα πρόσπτωσης} \\ &\quad \text{των υποσυνόλων του } \mathcal{S} \end{aligned}$$

$$(5.3) \quad B = \min \left\{ \sum_{T \subseteq \mathcal{S}} \rho(T)y(T) \mid y \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}(\mathcal{S})}, \mathcal{P}'y = w \right\}.$$

Θα δείξουμε ακόμα ότι $\mathbb{R}_+^{\mathcal{P}(\mathcal{S})} \ni y_0 : \begin{aligned} y_0(U_i) &:= w(s_i) - w(s_{i+1}), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ y_0(\mathcal{S}) &:= w(s_n), \\ y_0(T) &:= 0, \quad \text{Αν } T \neq U_i, \forall i, \end{aligned}$ τέτοιο ώστε το y_0 είναι η βέλτιστη λύση στο LP πρόβλημα (5.3).

Αφού $U_{i-1} \subseteq U_i$, έχουμε ότι $x_0 \geq \mathbf{0}$. Δείχνουμε με επαγωγή στο $|T|$ ότι $x_0(T) \leq \rho(T)$, $\forall T \subseteq \mathcal{S}$, οπότε, $x_0 \in P_\rho$. Η βάση της επαγωγής όπου $T = \emptyset$ είναι τετριμμένη. Έστω $k = \max\{i \mid s_i \in T\}$. Τότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x_0(T \setminus \{s_k\}) \leq \rho(T \setminus \{s_k\}) &\implies x_0(T) = x_0(T \setminus \{s_k\}) + x_0(s_k) \\ &\leq \rho(T \setminus \{s_k\}) + x_0(s_k) \\ &= \rho(T \setminus \{s_k\}) + \rho(U_k) - \rho(U_{k-1}). \end{aligned}$$

Αλλά από την υπομετρικότητα της ρ έχουμε ότι

$$\rho(T) + \rho(U_{k-1}) \geq \rho(T \cup U_{k-1}) + \rho(T \cap U_{k-1}) = \rho(U_k) + \rho(T \setminus \{s_k\}),$$

που σημαίνει ότι $x_0(T) \leq \rho(T)$ και $x_0 \in P_\rho$. Για να δείξουμε ότι η y_0 είναι εφικτή για το (5.3), πρώτα παρατηρούμε ότι αφού $w(s_n) \geq 0$ και εκ κατασκευής: $y_0 \geq \mathbf{0}$. Τώρα,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'y_0 &= \sum_{T \subseteq \mathcal{S}} \chi_T y_0(T), \quad \text{όπου } \chi_T \text{ είναι το διάνυσμα πρόσπτωσης του } T. \\ &= \begin{bmatrix} w(s_n) + (w(s_{n-1}) - w(s_n)) + \dots + (w(s_1) - w(s_2)) \\ w(s_n) + (w(s_{n-1}) - w(s_n)) + \dots + (w(s_2) - w(s_3)) \\ \vdots \\ w(s_n) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{, αφού όλα τα } U_i \text{ περιέχουν το } s_1, \\ \vdots \\ \text{, αφού μόνο το } U_n = \mathcal{S} \\ \text{περιέχει το } s_n, \end{array} \\ &= w. \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι τα x_0 και y_0 είναι βέλτιστα, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} w'x_0 &= \sum_{s \in \mathcal{S}} w(s)x_0(s) \\ &= \sum_{i=1}^n w(s_i)(\rho(U_i) - \rho(U_{i-1})) \\ &= w(s_n)\rho(\mathcal{S}) + \sum_{i=1}^{n-1} \rho(U_i)(w(s_i) - w(s_{i+1})) \\ &= \sum_{T \subseteq \mathcal{S}} y_0(T)\rho(T). \end{aligned}$$

Παρατήρηση 5.4. Σε αυτό το σημείο τονίζουμε ότι αν η ρ είναι ακέραια, τότε εξ ορισμού το x_0 είναι ακέραιο. Αν το w είναι ακέραιο, τότε πάλι εξ ορισμού το y_0 είναι ακέραιο. Επίσης, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι, δοθέντος ενός μαντιείου για την ρ , ο παραπάνω αλγόριθμος τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο.

Δοθείσης μιας γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης w με $w(s_1) \geq \dots \geq w(s_n)$, ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να ιδωθεί γεωμετρικά ως εξής: ξεκινώντας από την αρχή, πηγαίνει όσο μακρύτερα γίνεται στο P_ρ , στην θετική κατεύθυνση του s_1 , έστω στην κορυφή x_1 . Έπειτα πηγαίνει από την x_1 όσο μακρύτερα γίνεται στο P_ρ , στην θετική κατεύθυνση του s_2 , έστω στην κορυφή x_2 . Επανάλαβε μέχρι, έπειτα από n βήματα, να φτάσεις σε μία κορυφή x_n η οποία μεγιστοποιεί το $w'x$ στο P_ρ . Όπως και στα μητροειδή, μπορεί να δειχθεί ότι η αποτελεσματικότητα αυτού του αλγορίθμου χαρακτηρίζει τα πολυμητροειδή.

5.2 Πολυμητροειδή και Πλήρως Δυϊκά Ακέραια Συστήματα

Έπεται άμεσα από την Παρατήρηση 5.4 ότι

Πόρισμα 5.5. Το σύστημα των ανισοτήτων:

$$(5.4\alpha') \quad x_s \geq 0 \quad \forall s \in \mathcal{S},$$

$$(5.4\beta') \quad x(U) \leq \rho(U) \quad \forall U \subseteq \mathcal{S},$$

είναι TDI.

Επίσης ένα παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και για το πολύεδρο βάσης:

Πόρισμα 5.6. Το σύστημα των ανισοτήτων:

$$(5.5\alpha') \quad (5.4),$$

$$(5.5\beta') \quad x(\mathcal{S}) = \rho(\mathcal{S}),$$

είναι TDI.

Κατά μείζονα λόγο το σύστημα των ανισοτήτων (5.4β') είναι κυβικά-TDI [Sch03]. Από αυτό το αποτέλεσμα παίρνουμε ότι

Πόρισμα 5.7. Αν η ρ είναι ακέραια, τότε και το P_ρ είναι ακέραιο.

5.3 Μοναδικότητα της ρ

Θεώρημα 5.8. Αν η ρ είναι η συνάρτηση τάξης ενός πολυμητροειδούς, τότε

$$(5.6) \quad \rho(U) = \max\{x(U) \mid x \in P_\rho\}, \quad \forall U \subseteq \mathcal{S}.$$

Απόδειξη. Έστω $w = \chi_U$, δηλαδή το διάνυσμα πρόσπτωσης του U στο $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$. Τότε

$$\max\{w'x \mid x \in P_\rho\} = \max\{x(U) \mid x \in P_\rho\} = \rho(U).$$

Για να ελέγξουμε την τελευταία ισότητα, παρατηρούμε ότι αν s_k είναι το στοιχείο του $\mathcal{S}$ in U με τον μέγιστο δείκτη (εδώ ακολουθούμε τον συμβολισμό της Ενότητας 5.1), τότε $\chi_U(s_{k+1}) = w(s_{k+1}) = 0$, έτσι ώστε,

$$w'x_0 = x(U) \geq \rho(U_k) = (w(s_k) - w(s_{k+1}))\rho(U_k).$$

Αλλά $U \subseteq U_k$, που σημαίνει ότι $x(U) \leq \rho(U) \leq \rho(U_k) \leq x(U)$.

Q.E.D.

Πόρισμα 5.9. Για κάθε ακέραιο πολυμητροειδές P , υπάρχει μοναδική μη φθίνουσα, υπομετρική συνάρτηση ρ με $\rho(\emptyset) = 0$, τέτοια ώστε $P = P_\rho$.

Απόδειξη. Κατ' ευθείαν από το Πόρισμα 5.7 και την (5.6).

Q.E.D.

5.4 Η δομή του P_ρ

Μπορεί ναδειχθεί, χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά της Ενότητας 5.1, ότι οι κορυφές του P_ρ δίνονται από

$$(5.7) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x(s_{\pi(i)}) = \begin{cases} \rho(\{s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(i)}\}) - \rho(\{s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(i-1)}\}) & , \text{ Av } i \leq k, \\ 0 & , \text{ Av } i > k, \end{cases}$$

όπου π είναι μία μετάθεση του συνόλου $\{1, \dots, n\}$ και $k \in \{0, \dots, n\}$.

Επίσης, είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι

$$(5.8) \quad \begin{aligned} P_\rho \text{ είναι πλήρους διάστασης} & \iff \text{υπάρχουν } |\mathcal{S}| + 1 \text{ αφινικώς ανεξάρτητα σημεία στο } P_\rho \\ & \iff \rho(\{s\}) > 0, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Ορισμοί 5.10. Έστω $U \subseteq \mathcal{S}$. Τότε το U καλείται

ρ -επίπεδο: αν $\rho(U \cup \{s\}) > \rho(U)$ για κάθε $s \in \mathcal{S} \setminus U$,

ρ -αδιαχώριστο: αν δεν υπάρχει διαμέριση του U σε $U_1, U_2 \neq \emptyset$ τέτοια ώστε

$$\rho(U) = \rho(U_1) + \rho(U_2).$$

Θεώρημα 5.11. [Edmonds] Έστω ρ η συνάρτηση τάξης ενός πολυμητροειδούς $(\mathcal{S}, \rho)$. Τότε, αν το P_ρ είναι πλήρους διάστασης, δηλαδή $\rho(\{s\}) > 0, \quad \forall s \in \mathcal{S}$, το ακόλουθο σύστημα είναι ένα ελαχιστοτικό σύστημα που καθορίζει το P_ρ .

$$(5.9a) \quad (5.4a')$$

$$(5.9b) \quad x(U) \leq \rho(U) \quad , \quad \forall U \subseteq \mathcal{S} \text{ που είναι } \rho\text{-αδιαχώριστο και } \rho\text{-επίπεδο.}$$

Απόδειξη. Ο αναγνώστης ας συμβουλευτεί την Ενότητα 44.6c του [Sch03].

Q.E.D.

Είναι σαφές ότι, αν το P_ρ είναι πλήρους διάστασης, τότε η (5.9) καθορίζει τις προσόψεις του P_ρ .

5.5 Τομές Πολυμητροειδών

Ας θεωρήσουμε την τομή δύο μητροειδικών πολυέδρων ανεξαρτησίας, δηλαδή την $P_{\rho_1} \cap P_{\rho_2}$, όπου ρ_1, ρ_2 είναι οι συναρτήσεις τάξης δύο μητροειδών τα οποία ορίζονται στο κοινό σύνολο $\mathcal{S}$. Είναι τετριμμένο ότι το κυρτό κύτος των διανυσμάτων πρόσπτωσης των κοινών ανεξάρτητων συνόλων των $\mathcal{M}_1 = (\mathcal{S}, \mathcal{I}_1), \mathcal{M}_2 = (\mathcal{S}, \mathcal{I}_2)$ περιέχεται στο πολύτοπο που ορίζεται από:

(5.10α)

(5.4α)

(5.10β)

$$x(U) \leq \rho_i(U) \quad \forall U \subseteq \mathcal{S} \text{ και } i = 1, 2$$

Ο Edmonds έδειξε το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.12. Το σύστημα ανισοτήτων (5.10) είναι κυβικά-TDI.

Πόρισμα 5.13. Το κυρτό κύτος των διανυσμάτων πρόσπτωσης των κοινών ανεξάρτητων συνόλων δύο μητροειδών είναι η τομή των δύο πολυέδρων ανεξαρτησίας τα οποία συνδέονται με αυτά τα μητροειδή, δηλαδή ορίζεται από την (5.10)

Πόρισμα 5.14. Είναι σαφές ότι, αφού το πολύεδρο ανεξαρτησίας των κοινών ανεξάρτητων συνόλων των δύο μητροειδών $\mathcal{M}_1 = (\mathcal{S}, \mathcal{I}_1), \mathcal{M}_2 = (\mathcal{S}, \mathcal{I}_2)$, με συναρτήσεις τάξης ρ_1 και ρ_2 , είναι το $P_{\rho_1} \cap P_{\rho_2}$, κάθε ανισότητα του $P_{\rho_1} \cap P_{\rho_2}$ που επάγει όψη, επάγει όψη για τουλάχιστον ένα από τα P_{ρ_1}, P_{ρ_2} .

Θεώρημα 5.15 (Giles). Αν το πολύεδρο ανεξαρτησίας των κοινών ανεξάρτητων συνόλων δύο μητροειδών $P_{\rho_1} \cap P_{\rho_2}$ είναι πλήρους διάστασης, τότε κάθε ανισότητα της μορφής (5.4α) επάγει όψη. Αν ορίσουμε $\rho(U) := \min\{\rho_1(U), \rho_2(U)\}$, τότε κάθε ανισότητα $x(U) \leq \rho(U)$ επάγει όψη αν δεν υπάρχει διαμέριση του U σε μη κενά γνήσια υποσύνολα U_1, U_2 , με $\rho(U) \geq \rho_1(U) + \rho_2(U)$ όπως επίσης δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο U' του U με $\rho(U') \leq \rho(U)$.

Ο Edmonds έχει δείξει επίσης ότι ακόμα κι όταν οι ρ_1, ρ_2 είναι τυχαίες συναρτήσεις τάξης πολυμητροειδών, τα οποία ενδεχομένως να μην είναι μητροειδικά (για την ακρίβεια μόνο η υποκανονικότητα των ρ_1, ρ_2 αρκεί), το σύστημα ανισοτήτων (5.10β) είναι κυβικά-TDI. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι η τομή δύο ακεραίων πολυμητροειδών είναι ένα **κυβικά-ακέραιο πολύεδρο**, δηλαδή ένα πολύεδρο του οποίου η τομή με οποιονδήποτε **κύβο**: $\{x \mid d \leq x \leq c\}$ είναι ένα ακέραιο πολύεδρο για κάθε επιλογή ακεραίων διανυσμάτων d, c .

Η τομή πολυμητροειδών έχει επίσης αλγοριθμική ισχύ. Συγκεκριμένα, υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι οι οποίοι βρίσκουν

- ένα μεγίστου μεγέθους διάνυσμα στο $P_{\rho_1} \cap P_{\rho_2}$.
- ένα κοινό διάνυσμα βάσης x που μεγιστοποιεί το $x(s)$ για κάποιο $s \in \mathcal{S}$.
- ένα κοινό διάνυσμα βάσης μεγίστου βάρους.

5.6 Υπομετρικά Συστήματα

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε ένα υπομετρικό σύστημα $(\mathcal{D}, \rho)$ ως εξής. Έστω E ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο και $\mathcal{D}$ μία συλλογή υποσυνόλων του E η οποία σχηματίζει ένα επιμεριστικό πλέγμα¹ με την ένωση και τομή συνόλων ως πράξεις του πλέγματος, ένωση και τομή. Έστω $\rho : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ μία υπομετρική συνάρτηση στο επιμεριστικό πλέγμα $\mathcal{D}$, δηλαδή

$$\forall X, Y \in \mathcal{D} : \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y).$$

¹ Ένα επιμεριστικό πλέγμα είναι μία μερική διάταξη στην οποία κάθε ζεύγος στοιχείων a, b , έχει μέγιστο κάτω φράγμα που συμβολίζεται με $a \wedge b$ και ελάχιστο άνω φράγμα που συμβολίζεται με $a \vee b$. Επίσης ισχύουν οι επιμεριστικοί νόμοι:

- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Στην περίπτωσή μας η σχέση μερικής διάταξης είναι η σχέση του περιέχεται.

Τότε :

Ορισμός 5.16. Το ζεύγος $(\mathcal{D}, \rho)$ καλείται **υπομετρικό σύστημα**.

Για κάθε ανεξάρτητο διάνυσμα $x \in P_\rho$, ορίζουμε :

$$(5.11) \quad \mathcal{D}(x) := \{X \subseteq E \mid x(X) = \rho(X)\}.$$

Τότε

Θεώρημα 5.17. Το $\mathcal{D}(x)$ είναι κλειστό ως προς τις τομές και τις ενώσεις. Άρα το $\mathcal{D}(x)$ είναι ένα επιμεριστικό πλέγμα, με την ένωση και τομή συνόλων σαν τις πράξεις του πλέγματος, ένωση και τομή αντίστοιχα.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x(T) = \rho(T)$ και $x(U) = \rho(U)$. Τότε

$$\begin{aligned} \rho(T) + \rho(U) &\geq \rho(T \cup U) + \rho(T \cap U), \text{ αφού η } \rho \text{ είναι υπομετρική,} \\ &\geq x(T \cup U) + x(T \cap U), \text{ αφού } x \in P_\rho \text{ και } T \cup U, T \cap U \subseteq E, \\ &= x(T) + x(U), \text{ αφού } x : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ και } x(T) + x(U) = \sum_{i \in T} x(i) + \sum_{i \in U} x(i) \\ &= x(U \cup T) + x(U \cap T) \\ &= \rho(T) + \rho(U), \end{aligned}$$

που συνεπάγεται ότι $x(T \cup U) = \rho(T \cup U)$ και $x(T \cap U) = \rho(T \cap U)$.

Q.E.D.

Ένα παράδειγμα υπομετρικού συστήματος είναι το $(\mathcal{D}(x), \rho)$ όπως στην (5.11). Φυσικά τα μητροειδή και τα πολυμητροειδή είναι υπομετρικά συστήματα. Υπάρχουν όμως και μη-πολυμητροειδικά υπομετρικά συστήματα. Για σχετικά παραδείγματα ο αναγνώστης ας συμβουλευτεί το [Fuj05].

Μία γενίκευση της θεωρίας που αναπτύξαμε στις προηγούμενες ενότητες μπορεί να επιτευχθεί αν θεωρήσουμε το πολύεδρο που συνδέεται με το υπομετρικό σύστημα $(\mathcal{D}, \rho)$, δηλαδή το

$$P(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid \forall X \in \mathcal{D} : x(X) \leq \rho(X)\}.$$

Καλούμε το $P(\rho)$ το **υπομετρικό πολύεδρο** που συνδέεται με το $(\mathcal{D}, \rho)$. Φυσικά, υπάρχει το **πολύεδρο βάσης** που συνδέεται με το $(\mathcal{D}, \rho)$, δηλαδή

$$B(\rho) = \{x \in P(\rho) \mid x(E) = \rho(E)\}.$$

Ας θεωρήσουμε το πρωτεύον πρόβλημα της μεγιστοποίησης του $w'x$, για $w \in \mathbb{R}^E$, όταν το x κινείται στο $P(\rho)$, και το αντίστοιχο δευτερεύον πρόβλημα :

$$(5.12) \quad \min \left\{ \sum_{U \in \mathcal{D}} y(U) \rho(U) \mid y \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{D}}, \sum_{U \in \mathcal{D}} y(U) \chi_U = w \right\}, \quad \text{όπου } \chi_U \text{ είναι το χαρακτηριστικό διάνυσμα του } U \text{ στο } E.$$

Θεώρημα 5.18. Η (5.12) έχει βέλτιστη λύση, τέτοια ώστε το σύνολο $\mathcal{F} := \{U \in \mathcal{D} \mid y(U) > 0\}$ είναι αλυσίδα.¹

Απόδειξη. Η (5.12) έχει πράγματι βέλτιστη λύση, αφού

$$\forall x \in P(\rho) : w'x \leq \max\{w(s_i) \mid s_i \in E\} |E| \sum_{U \in \mathcal{D}} \rho(U)$$

¹Ένα υποσύνολο ενός συνόλου εφοδιασμένου με μία μερική διάταξη θα καλείται **αλυσίδα**, αν όλα τα στοιχεία του είναι συγκρίσιμα ανά δύο.

και άρα το πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού που έχουμε είναι φραγμένο. Έστω y_0 μία βέλτιστη λύση της (5.12) τέτοια που το

$$(5.13) \quad \sum_{U \in \mathcal{D}} y_0(U) |U| |E \setminus U|$$

να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Υποθέτουμε πως το $\mathcal{F}$ δεν είναι αλυσίδα και επιλέγουμε $U, T \in \mathcal{F} : T \not\subseteq U$ και $U \not\subseteq T$. Έστω $a = \min\{y_0(T), y_0(U)\}$. Έστω $z : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε

$$z(V) = \begin{cases} y_0(V) - a & , \text{ αν } V = U \text{ ή } T, \\ y_0(V) + a & , \text{ αν } V = T \cap U \text{ ή } T \cup U, \\ y_0(V) & , \text{ αλλιώς.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το z είναι βέλτιστη λύση για την (5.12). Πράγματι έχουμε πως

$$\bullet z \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{D}}.$$

•

$$\begin{aligned} \sum_{U \in \mathcal{D}} z(U) \rho(U) &= z(U) \rho(U) + z(T) \rho(T) + z(U \cap T) \rho(U \cap T) + z(U \cup T) \rho(U \cup T) + \\ &\quad + \sum_{\substack{V \in \mathcal{D} \\ V \neq U, T, U \cap T, U \cup T}} z(V) \rho(V) \\ &= a(\rho(U \cap T) + \rho(U \cup T) - \rho(U) - \rho(T)) + \sum_{V \in \mathcal{D}} y_0(V) \rho(V) \\ &\leq \sum_{V \in \mathcal{D}} y_0(V) \rho(V) \end{aligned}$$

$$\bullet \sum_{V \in \mathcal{D}} z(V) \chi_V = \sum_{V \in \mathcal{D}} y_0(V) \chi_V = w, \text{ αφού } \chi_{T \cap U} + \chi_{T \cup U} = \chi_T + \chi_U.$$

Όμως μπορεί να δειχθεί πως αφού το $\mathcal{F}$ δεν είναι αλυσίδα, το άθροισμα στην (5.13) είναι μικρότερο αν θέσουμε όπου y_0 το z , άτοπο. Q.E.D.

Πόρισμα 5.19. Το σύστημα

$$(5.14) \quad x(U) \leq \rho(U), \quad \forall U \in \mathcal{D},$$

είναι κυβικά-TDI.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο προηγούμενο θεώρημα· για τις λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [Sch03]. Αναφέρουμε απλά πως το γεγονός πως η F είναι αλυσίδα, μας εξασφαλίζει πως οι περιορισμοί που αντιστοιχούν σε θετικές συντεταγμένες της βέλτιστης λύσης y της (5.12), σχηματίζουν έναν ΤΥ πίνακα και πως όταν οι περιορισμοί που αντιστοιχούν σε θετικές συντεταγμένες της λύσης του δευτερεύοντος σχηματίζουν έναν ΤΥ πίνακα, οι περιορισμοί που ορίζουν το πολύεδρο του πρωτεύοντος, ορίζουν ένα κυβικά-TDI σύστημα. Q.E.D.

Μία ακόμα συνέπεια είναι πως το πολύεδρο $P(\rho)$ είναι κυβικά-ακέραιο.

Η μέχρι τώρα αντιστοιχία με τα πολυμετροειδή επεκτείνεται με την τομή δύο υπομετρικών συστημάτων:

Έστω $E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$, πεπερασμένο σύνολο και δύο πλέγματα ορισμένα στο δυναμοσύνολο του E αντίστοιχα. Έστω επίσης $\rho_i : E \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$, δύο υπομετρικές συναρτήσεις στο E . Τότε το σύστημα

$$(5.15) \quad x(U) \leq r_i(U), \quad \forall U \in \mathcal{D}_i, \quad i = 1, 2,$$

είναι κυβικά-TDI. Έπεται ότι η τομή των υπομετρικών πολυέδρων, $P(\rho_1), P(\rho_2)$, είναι κυβικά ακέραιο πολύεδρο.

5.6.1 Πράξεις στα Υπομετρικά Συστήματα

Για κάθε $A \in \mathcal{D}$ ορίζουμε:

$$(5.16\alpha) \quad \mathcal{D}^A := \{X \in \mathcal{D} \mid X \subseteq A\},$$

$$(5.16\beta) \quad \rho^A(X) := \rho(X) \text{ , } \forall X \in \mathcal{D}^A.$$

Τότε το $(\mathcal{D}^A, \rho^A)$ είναι ένα υπομετρικό σύστημα επί του A , το οποίο καλείται η **αναγωγή**, ή ο **περιορισμός** του $(\mathcal{D}, \rho)$ στο A . Επίσης, ορίζουμε για κάθε $A \in \mathcal{D}$:

$$(5.17\alpha) \quad \mathcal{D}_A := \{X \setminus A \mid A \subseteq X \in \mathcal{D}\},$$

$$(5.17\beta) \quad \rho_A(X) := \rho(X \cup A) - \rho(A) \text{ , } \forall X \in \mathcal{D}_A.$$

Τότε το $(\mathcal{D}_A, \rho_A)$ είναι ένα υπομετρικό σύστημα επί του $E \setminus A$, το οποίο καλείται η **συστολή** του $(\mathcal{D}, \rho)$ υπό το A .

Ένα υπομετρικό σύστημα το οποίο προκύπτει από μία σειρά αναγωγών και συστολών ξεκινώντας από το $(\mathcal{D}, \rho)$ καλείται **ελάσσον** του $(\mathcal{D}, \rho)$.

Υπάρχουν επίσης και άλλες πράξεις στα υπομετρικά συστήματα [Fuj05]. Ο McDiarmid όρισε το δυϊκό ενός πολυμητροειδούς επομένως και του συνδεόμενου με αυτό πολυέδρου [Sch03].

5.7 Υπομετρικά Συστήματα σε Οικογένειες Τομών και Διασταυρώσεων

Είδαμε ότι τα πολυμητροειδή γενικεύονται στα υπομετρικά συστήματα· θα δούμε τώρα ότι και τα υπομετρικά συστήματα γενικεύονται.

Ορισμοί 5.20. Μία οικογένεια $\mathcal{C}$ συνόλων θα καλείται **οικογένεια τομών** αν για κάθε $U, T \in \mathcal{C}$:

$$T \cap U \neq \emptyset \implies T \cup U, T \cap U \in \mathcal{C}$$

Μία συνάρτηση $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη σε μία οικογένεια τομών θα καλείται **υπομετρική σε ζευγάρια τομής**, αν

$$\rho(U) + \rho(T) \geq (\rho(U \cap T) + \rho(U \cup T)) \text{ , } \forall T, U \in \mathcal{C} : T \cap U \neq \emptyset$$

Ισχύουν και εδώ τα αναμενόμενα, δηλαδή, το σύστημα

$$x(U) \leq \rho(U) \text{ , } \forall U \in \mathcal{C}$$

είναι κυβικά-TDI, και αν $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \rho_1, \rho_2$, δύο οικογένειες τομών ορισμένες στο ίδιο σύνολο, E , και δύο υπομετρικές συναρτήσεις σε ζευγάρια τομών αντίστοιχα, το σύστημα

$$x(U) \leq r_i(U) \text{ , } \forall U \in \mathcal{D}_i \text{ , } i = 1, 2,$$

είναι κυβικά-TDI. Φυσικά, η τομή των δύο υπομετρικών πολυέδρων τομής (που ορίζονται εντελώς ανάλογα με την περίπτωση των υπομετρικών συστημάτων) είναι κυβικά ακέραιο πολυέδρο.

Θα λέμε ότι μία οικογένεια συνόλων $\mathcal{C}$ είναι **οικογένεια διασταύρωσης** αν

$$T \cap U \neq \emptyset, T \cup U \neq \emptyset \implies T \cup U, T \cap U \in \mathcal{C}.$$

Μία συνάρτηση $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ θα καλείται **υπομετρική σε ζευγάρια διασταύρωσης** αν

$$T \cap U \neq \emptyset, T \cup U \neq \emptyset \implies \rho(U) + \rho(T) \geq \rho(U \cap T) + \rho(U \cup T).$$

Σε αυτήν την πιο γενική περίπτωση, γενικά, δεν ισχύει ότι το σύστημα

$$x(U) \leq \rho(U) , \quad \forall U \in \mathcal{C}$$

είναι TDI. Όμως για κάθε $k \in \mathbb{R}$, το σύστημα

$$x(U) \leq \rho(U) , \quad \forall U \in \mathcal{C} , \quad x(E) = k$$

είναι κυβικά-TDI.

Για περισσότερα αποτελέσματα και αναλυτικότερη έκθεση των θεμάτων αυτού του κεφαλαίου μπορεί κανείς να ανατρέξει στα βιβλία που ακολουθήσαμε για την παρουσίαση του κεφαλαίου: [\[Fuj05, Sch03\]](#).

Βιβλιογραφία

- [CCPS97] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1997. ↑[43](#)
- [DPV06] S. Dasgupta, C. H. Papadimitriou, and U. V. Vazirani, *Algorithms*, McGrawHill, 2006. ↑[36](#)
- [Fuj05] S. Fujishige, *Submodular Functions and Optimization*, 2nd ed., Annals of Discrete Mathematics, vol. 58, Elsevier Science, 2005. ↑[53](#), [60](#), [62](#), [63](#)
- [KV08] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization, Theory and Algorithms*, 4th ed., Algorithms and Combinatorics, vol. 21, Springer, 2008. ↑[32](#), [34](#), [43](#)
- [NW99] G. L. Nemhauser and L. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1999. ↑[12](#), [32](#)
- [Oxl11] J. G. Oxley, *Matroid Theory*, 2nd ed., Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford University Press, 2011. ↑[50](#), [51](#), [53](#)
- [Sch98] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1998. ↑[5](#), [8](#), [22](#), [27](#), [29](#), [32](#), [34](#), [36](#), [38](#), [40](#), [42](#), [43](#)
- [Sch03] ———, *Combinatorial Optimization, Polyhedra and Efficiency*, Algorithms and Combinatorics, vol. 24, Springer, 2003. ↑[32](#), [50](#), [53](#), [57](#), [58](#), [61](#), [62](#), [63](#)