Σημειακή σύγκλιση σειρών Fourier: το θεώρημα του Carleson

Διπλωματική Εργασία

Νικόλαος Σκαρμόγιαννης

Επιβλέπων: Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2016

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η εικασία του Luzin

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Η *σειρά Fourier* της f είναι η σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{1.1.1}$$

όπου οι *συντελεστές Fourier* c_k ορίζονται από τις

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \tag{1.1.2}$$

Γράφουμε συνήθως $\widehat{f}(k) := c_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Οι σειρές αυτές είχαν μελετηθεί στον 18ο αιώνα από τους D. Bernoulli, Euler, Lagrange και άλλους. Γνώριζαν ότι αν μια συνάρτηση αναπτύσσεται όπως στην (1.1.1) τότε οι συντελεστές υπολογίζονται από την (1.1.2). Ο Bernoulli, μελετώντας την κίνηση μιας χορδής που είναι στερεωμένη στα άκρα της, έδωσε τη σχέση

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} \cos(\rho k t)$$

για τη θέση της, όπου ℓ είναι το μήκος της χορδής και ο συντελεστής ρ εξαρτάται από τις φυσικές της ιδιότητες. Το 1753, ο Euler παρατήρησε ότι η σχέση αυτή έχει μια παράδοξη συνέπεια: η αρχική θέση της χορδής θα έπρεπε να δίνεται από την

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{\pi k x}{\ell}.$$

Εκείνη την εποχή, οι καμπύλες ονομάζονταν *συνεχείς* αν ορίζονταν από τύπο, και *γεωμετρικές* αν μπορούσε κανείς να τις σχεδιάσει με το χέρι. Ο Bernoulli πίστευε ότι κάθε συνάρτηση μπορούσε να αναπαρασταθεί με αυτόν τον τρόπο, και ο Fourier επιβεβαίωσε στο βιβλίο του *Théorie analytique de la Chaleur* (1822) ότι κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει σε πολύ γενικό πλαίσιο. Γενικά, το θέμα αυτό συνδέεται στενά με τον ορισμό της έννοιας της συνάρτησης.

Πυρήνας Dirichlet και κριτήρια Dini-Jordan

Ο Dirichlet μελέτησε (το 1829) τη σύγκλιση της σειράς (1.1.1). Απέδειξε ότι η σειρά συγκλίνει στο

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

για κάθε τμηματικά συνεχή και μονότονη συνάρτηση. Για να μελετήσουμε τη σημειακή σύγκλιση θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα

$$s_n(x;f)=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx},$$

τα οποία γράφονται στη μορφή

$$s_n(x;f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)\,dt, \tag{1.1.3}$$

όπου D_n είναι ο *πυρήνας του Dirichlet*, ο οποίος ορίζεται από την

$$D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Για σταθερό x, η $f\mapsto s_n(x;f)$ είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, ορισμένο στον $L^1[-\pi,\pi]$. Ο πυρήνας του Dirichlet είναι 2π-περιοδική συνάρτηση, και το ολοκλήρωμά του είναι ίσο με 1, όμως

$$\|D_n\|_1\simeq\log n\to\infty$$

δηλαδή η $\{\|D_n\|_1\}_{n\geqslant 1}$ δεν είναι φραγμένη.

Με τη βοήθεια της ολοκληρωτικής αναπαράστασης (1.1.3) και του *λήμματος Riemann-Lebesgue*, μπορούμε να δείξουμε τις παρακάτω βασικές συνθήκες που εξασφαλίζουν τη σημειακή σύγκλιση της σειράς Fourier της f στην f.

Θεώρημα 1.1.1 (κριτήριο Dini). *Αν $f\in L^1[-\pi,\pi]$ και*

$$\int_0^{\pi}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,\frac{dt}{t}<\infty,$$

τότε $s_n(x;f)\to f(x)$ όταν $n\to\infty$.

Θεώρημα 1.1.2 (κριτήριο Jordan). *Αν η $f \in L^1[-\pi,\pi]$ έχει φραγμένη κύμανση σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το x, τότε $s_n(x;f) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ όταν $n \to \infty$.*

Σημειώνουμε ότι οι δύο αυτές συνθήκες (Dini και Jordan) εξαρτώνται μόνο από τις τιμές της f σε μια αυθαίρετα μικρή περιοχή του x. Αυτό είναι ένα γενικό φαινόμενο και είναι γνωστό ως *αρχή τοπικότητας του Riemann*: η σύγκλιση της σειράς Fourier στο $f(x)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές της f σε μια περιοχή του x.

Αξίζει επίσης τον κόπο να σημειώσουμε ότι τα δύο κριτήρια είναι ανεξάρτητα. Η $f(x) = 1/|\log(x/2\pi)|$ ικανοποιεί την συνθήκη του Jordan αλλά όχι αυτήν του Dini, ενώ η $g(x) = x^\alpha \sin(1/x)$ στο $(0,\pi)$, όπου $0 < \alpha < 1$, ικανοποιεί τη συνθήκη του Dini αλλά όχι αυτήν του Jordan.

Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Οι συνθήκες Dini και Jordan εξασφαλίζουν ότι η σειρά Fourier μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f συγκλίνει σημειακά στην f. Αυτό δεν είναι σωστό για τις συνεχείς συναρτήσεις. Ο Du Bois Reymond κατασκεύασε μια συνεχή συνάρτηση που η σειρά Fourier της αποκλίνει σε ένα σημείο.

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να δείξουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα Banach-Steinhaus. Θεωρούμε τον $T_n(f) = s_n(0;f)$ σαν γραμμικό συναρτησοειδές στο χώρο $C(\mathbb{T})$ των συνεχών συναρτήσεων στο $[-\pi,\pi]$ που παίρνουν την ίδια τιμή στα άκρα $-\pi$ και π. Από το θεώρημα Banach-Steinhaus έχουμε $\sup_n \|T_n\| < \infty$ αν και μόνο αν για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ ισχύει $\sup_n |T_n(f)| < \infty$. Όμως, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι

$$\|T_n\| = \|D_n\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1),$$

και αυτό αποδεικνύει ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε

$$\limsup_n |s_n(0;f)| = \infty.$$

Από το άνω φράγμα για την $\|D_n\|_1$ προκύπτει άμεσα το εξής.

Πρόταση 1.1.3. *Αν $f \in L^\infty[-\pi,\pi]$ τότε, για κάθε x,*

$$|s_n(x;f)| \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2}\log n + C\right)\|f\|_\infty.$$

Ο Hardy απέδειξε το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.1.4 (Hardy). *Αν $f \in L^1[-\pi,\pi]$ τότε, για κάθε σημείο Lebesgue της f έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n(x;f)}{\log n} = 0.$$

Επιπλέον, αν η f είναι συνεχής σε κάποιο ανοικτό διάστημα I, η σύγκλιση αυτή είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό $J \subset I$.

Ένα γενικό θεώρημα των Menshov και Rademacher για ορθοκανονικά συστήματα δίνει μια ικανή συνθήκη για την σύγκλιση σχεδόν παντού της σειράς Fourier μιας συνάρτησης f στην f.

Θεώρημα 1.1.5 (Menshov-Rademacher)**.** *Έστω (γ_n) μια αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: για κάθε $f \in L^2[-\pi, \pi]$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n(x; f)}{\gamma_{n+1}} = 0$$

σχεδόν για κάθε x. Τότε, αν η $f \in L^1[-\pi, \pi]$ ικανοποιεί την $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)\gamma_{|k|}|^2 < \infty$, έχουμε

$$s_n(x; f) \to f(x) \ \ \text{σχεδόν παντού.}$$

Από το προηγούμενο θεώρημα του Hardy η υπόθεση του Θεωρήματος 1.1.5 ικανοποιείται με $\gamma_n = \log n$. Η υπόθεση ότι $\lim_n s_n(x; f)/\gamma_{n+1} \to 0$ στο Θεώρημα 1.1.5 μπορεί να αντικατασταθεί από την

$$\sup_n \frac{|s_n(x; f)|}{\gamma_{n+1}} < \infty \ \ \text{σχεδόν παντού.}$$

Αυτό προκύπτει από ένα γενικό επιχείρημα του Banach, και ανάγει το πρόβλημα της (σχεδόν παντού) σημειακής σύγκλισης μιας σειράς Fourier στο να δοθούν κατά σημείο άνω φράγματα για το μεγιστικό τελεστή

$$\sup_n |s_n(x; f)|.$$

Αθροισιμότητα

Παρόλο που ο Du Bois Reymond είχε κατασκευάσει μια συνεχή συνάρτηση που η σειρά Fourier της αποκλίνει σε κάποιο σημείο, ο Féjer απέδειξε ότι μπορούμε να «βρούμε» μια συνεχή συνάρτηση από τη σειρά Fourier της. Ο Féjer θεώρησε τους μέσους όρους των μερικών αθροισμάτων

$$\sigma_n(x; f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(x; f).$$

Έδειξε μια ολοκληρωτική αναπαράσταση γι' αυτούς τους μέσους όρους:

$$\sigma_n(x; f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x - t)\, dt,$$

όπου F_n είναι ο πυρήνας του Féjer

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)e^{ikt}.$$

Η σημαντική ιδιότητα του πυρήνα F_n είναι ότι μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2, \tag{1.1.4}$$

δηλαδή είναι μια θετική συνάρτηση με $\|F_n\|_1 = 1$, και για κάθε $\delta > 0$ έχουμε $\lim_n F_n(t) = 0$ ομοιόμορφα ως προς $\delta < |t| \leqslant \pi$.

Γενικότερα, λέμε ότι μια ακολουθία (k_n) περιοδικών συναρτήσεων είναι *πυρήνας αθροισιμότητας* αν:

(i) Για κάθε n ισχύει $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(t)\,dt = 1$.

(ii) Υπάρχει $C > 0$ τέτοιος ώστε $\|k_n\|_1 \leqslant C$ για κάθε n.

(iii) Για κάθε $\delta > 0$ ισχύει
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leqslant\pi}|k_n(t)|\,dt = 0.$$

Το θεώρημα του Féjer μπορεί να διατυπωθεί για κάθε πυρήνα αθροισιμότητας.

Θεώρημα 1.1.6 (Féjer). *Έστω (k_n) ένας πυρήνας αθροισιμότητας. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι μια συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε $(k_n * f)(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα. Επιπλέον, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και για κάθε $f \in L^p[-\pi,\pi]$ έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty}\|k_n * f - f\|_p = 0.$$

Ένα άλλο σημαντικό παράδειγμα πυρήνα αθροισιμότητας μας δίνει ο *πυρήνας του Poisson*. Ο πυρήνας αυτός εμφανίζεται όταν θεωρούμε τη σειρά Fourier της f ως τις συνοριακές τιμές μιας μιγαδικής συνάρτησης που ορίζεται στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο. Για κάθε $f \in L^1[-\pi,\pi]$ η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(k)z^k + \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(-k)\overline{z}^k$$

συγκλίνει στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο και ορίζει μια μιγαδική αρμονική συνάρτηση $u(z)$. Τότε,

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)r^{|k|}e^{ik\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta - t)\,dt,$$

όπου $P_r(\theta)$ είναι ο πυρήνας του Poisson που δίνεται από την

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}. \tag{1.1.5}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η οικογένεια $(P_r(\theta))$ είναι πυρήνας αθροισιμότητας (εδώ η μεταβλητή r παίζει το ρόλο του n, και αντί για $n \to \infty$ παίρνουμε $r \to 1^-$). Έχουμε έτσι την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.1.7. *Αν $f \in L^p[-\pi,\pi]$, $1 \leqslant p < \infty$, ή $f \in C(\mathbb{T})$, οπότε την θεωρούμε σαν συνάρτηση στον $L^\infty[-\pi,\pi]$, έχουμε*

$$\lim_{r\to 1^-} \|P_r * f - f\|_p = 0.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε $f \in L^1[-\pi,\pi]$ και εξετάζουμε αν $(F_n * f)(x) \to f(x)$ ή $(P_r * f)(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού. Από την Πρόταση 1.1.7 έπεται ότι αυτό ισχύει για κάποια υπακολουθία $F_{k_n} * f$ ή $P_{r_n} * f$.

Η συνάρτηση $u(re^{i\theta}) = (P_r * f)(\theta)$ είναι αρμονική συνάρτηση στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο. Αυτό που θα θέλαμε είναι κάποιο θεώρημα το οποίο να εξασφαλίζει ακτινική σύγκλιση μιας αρμονικής συνάρτησης στην $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta})$. Το πρώτο θεώρημα αυτού του τύπου αποδείχτηκε από τον Fatou το 1905: μια φραγμένη και αναλυτική συνάρτηση στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο έχει ακτινικά όρια σχεδόν σε κάθε σημείο του συνόρου. Το ίδιο ισχύει για την περίπτωση των $\sigma_n(x;f)$:

Θεώρημα 1.1.8. *Έστω $f \in L^1[-\pi,\pi]$. Σχεδόν για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ έχουμε*

$$\lim_{r\to 1^-} (P_r * f)(x) = f(x) \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x;f) = f(x).$$

Η συζυγής συνάρτηση

Δεδομένου ότι η $\{e^{ikt}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι πλήρες ορθοκανονικό σύστημα του $L^2[-\pi,\pi]$, έχουμε την ταυτότητα Parseval

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\|_2 = 0.$$

Αποδεικνύεται ότι το ίδιο ισχύει για κάθε $1 < p < \infty$.

Θεώρημα 1.1.9. *Έστω $1 < p < \infty$. Για κάθε $f \in L^p[-\pi,\pi]$ ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\|_p = 0.$$

Στην περίπτωση $p = 1$ αυτό δεν ισχύει. Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.1.9 αρκεί να αποδείξουμε ότι οι νόρμες των τελεστών $s_n : L^p[-\pi,\pi] \to L^p[-\pi,\pi]$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Γιατί, αν $\sup_n \|s_n\|_{p\to p} \leqslant C$, για κάθε f και $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο p_ε τέτοιο ώστε $\|f - p_\varepsilon\|_p < \varepsilon$ και, για n μεγαλύτερο από τον βαθμό του p_ε έχουμε

$$\|f - s_n(f)\|_p \leqslant \|f - p_\varepsilon\|_p + \|s_n(p_\varepsilon) - s_n(f)\|_p \leqslant \varepsilon + C\varepsilon.$$

Το γεγονός ότι $\sup_n \|s_n\|_{p\to p} < \infty$ αποδείχτηκε από τον M. Riesz το 1928. Θεώρησε τον τελεστή που ορίζεται στο χώρο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων από την

$$\mathcal{R}\Big(\sum_k c_k e^{ikt}\Big) = \sum_{k\geqslant 0} c_k e^{ikt}.$$

Ο τελεστής $\mathcal{R}$ είναι ορθογώνια προβολή στον $L^2[-\pi,\pi]$. Η αξιοσημείωτη ιδιότητα του $\mathcal{R}$ είναι ότι μπορούμε να γράψουμε

$$s_n(f) = e^{-int}\mathcal{R}(e^{int}f) - e^{i(n+1)t}\mathcal{R}(e^{-i(n+1)t}f).$$

Αν λοιπόν καταφέρουμε να δείξουμε ότι ο $\mathcal{R}$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή στον $L^p[-\pi,\pi]$, τότε έπεται ότι οι νόρμες των s_n είναι ομοιόμορφα φραγμένες, όπως θέλαμε.

Ο τελεστής $\mathcal{R}$ συνδέεται στενά με τη συζυγή αρμονική συνάρτηση. Θεωρούμε μια δυναμοσειρά

$$\sum_{k>0} (a_k + ib_k) z^k.$$

Το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος, για $z = e^{it}$, είναι οι

$$u(t) = \sum_{k>0} (a_k \cos kt - b_k \sin kt) \quad \text{και} \quad v(t) = \sum_{k>0} (a_k \sin kt + b_k \cos kt).$$

Λέμε ότι η $v = \tilde{u}$ είναι η συζυγής σειρά της u. Ο τελεστής $\mathcal{H}$ που απεικονίζει την u στην $\tilde{u} = v$ πρέπει να ικανοποιεί τις

$$\mathcal{H}(\cos kt) = \sin kt \quad \text{και} \quad \mathcal{H}(\sin kt) = -\cos kt,$$

ή ισοδύναμα,

$$\mathcal{H}(e^{ikt}) = (-i)\,\mathrm{sign}(k) e^{ikt}.$$

Οι δύο τελεστές συνδέονται μέσω της

$$\mathcal{R}(f(\theta)) + e^{i\theta}\mathcal{R}(e^{-i\theta} f(\theta)) = f(\theta) + i\mathcal{H}(f(\theta)).$$

Συνεπώς, ο $\mathcal{H}$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή στον $L^2[-\pi,\pi]$.

Μπορούμε να δώσουμε μια ολοκληρωτική αναπαράσταση για τον $\mathcal{H}$. Έστω $f \in L^1[-\pi,\pi]$, με σειρά Fourier την

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Θα λέμε ότι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-i)\,\mathrm{sign}(k)\widehat{f}(k)e^{ikx}$$

είναι η συζυγής σειρά της. Αν $f \in L^2[-\pi,\pi]$ τότε από τα παραπάνω είναι σαφές ότι η συζυγής σειρά είναι η σειρά Fourier της $\mathcal{H}(f)$.

Μπορούμε να εκφράσουμε τα μερικά αθροίσματα της συζυγούς σειράς σαν συνέλιξη

$$\tilde{s}_n(x;f) = \sum_{k=-n}^{n} (-i)\mathrm{sign}(k)\widehat{f}(k)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\tilde{D}_n(x-t)\,dt,$$

όπου $\tilde{D}_n$ είναι ο συζυγής πυρήνας Dirichlet

$$\tilde{D}_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n}\sin kt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ένα κριτήριο σύγκλισης, όμοιο με το κριτήριο Dini.

Θεώρημα 1.1.10 (Pringsheim). *Έστω $f \in L^1[-\pi,\pi]$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $x \in [-\pi,\pi]$ τέτοιο ώστε*

$$\int_0^{\pi} |f(x+t) - f(x-t)|\,\frac{dt}{t} < \infty.$$

Τότε, η συζυγής σειρά συγκλίνει στο σημείο x.

Έχουμε επίσης

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{s}_n(x;f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x+t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt.$$

Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.1.10 αποδεικνύεται ότι υπάρχει η πρωτεύουσα τιμή, και

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{s}_n(x;f) = \frac{1}{2\pi}\,(\mathrm{pv})\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt.$$

Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση βλέπουμε έτσι ότι

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi}\,(\mathrm{pv})\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt.$$

Ο Luzin απέδειξε το 1918 ότι, αν $f \in L^2[-\pi,\pi]$ τότε η πρωτεύουσα τιμή υπάρχει και είναι ίση με $\mathcal{H}f(x)$ σχεδόν παντού. Αργότερα, το 1919, ο Privalov απέδειξε ότι αν $f \in L^1[-\pi,\pi]$ τότε η πρωτεύουσα τιμή υπάρχει σχεδόν παντού.

Μετασχηματισμός Hilbert στο $\mathbb{R}$

Είναι ευκολότερο να μελετήσουμε το μετασχηματισμό Hilbert στο $\mathbb{R}$ παρά στο μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$. Όλα όσα έχουμε πει για τις σειρές Fourier έχουν το ανάλογο τους στο $\mathbb{R}$. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f ορίζεται ως εξής:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

Αυτό αντιστοιχεί στους συντελεστές Fourier $\widehat{f}(k)$. Τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier έχουν ως ανάλογο την

$$S_a(x;f) = \int_{-a}^{a} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi = \int f(t)D_a(x-t)dt,$$

όπου

$$D_a(t) = \frac{\sin(2\pi a t)}{\pi t}.$$

Οι μέσοι Féjer έχουν ως ανάλογο το

$$\sigma_a(x;f) = \frac{1}{a}\int_0^a S_t(x;f)\,dt = \int f(x-\xi)F_a(\xi)\,d\xi,$$

όπου

$$F_a(\xi) = \frac{1}{a}\left(\frac{\sin(\pi\xi a)}{\pi\xi}\right)^2.$$

Το ρόλο του μοναδιαίου δίσκου παίζει το ημιεπίπεδο $\{(x,y) : y > 0\}$ στο $\mathbb{R}^2$. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε, σε αυτό το ημιεπίπεδο, την αναλυτική συνάρτηση

$$F(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

Αν η f είναι πραγματική συνάρτηση τότε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της F είναι οι

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}f(t)\,dt$$

και

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}f(t)\,dt.$$

Για μια γενική f, οι συναρτήσεις u και v που ορίζονται από αυτά τα ολοκληρώματα είναι αρμονικές συζυγείς συναρτήσεις.

Ο μετασχηματισμός Hilbert ορίζεται από την

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\,(\mathrm{pv})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}\,dt.$$

Η μελέτη αυτού του μετασχηματισμού είναι ισοδύναμη με αυτήν του μετασχηματισμού στο μοναδιαίο κύκλο. Πράγματι, αν $f \in L^1[-\pi,\pi]$ και αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f^\circ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ η οποία μηδενίζεται έξω από το $[-2\pi, 2\pi]$ και είναι ίση με την περιοδική επέκταση της f στο $[-2\pi, 2\pi]$, τότε για κάθε $x \in (-\pi,\pi)$ ισχύει

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi}\,(\mathrm{pv})\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^\circ(x-t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^\circ(x-t)\left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} - \frac{2}{t}\right)dt + \frac{1}{\pi}\,(\mathrm{pv})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^\circ(x-t)}{t}\,dt \\ - \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\pi}\frac{f^\circ(x-t)}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ και $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}$ τους δύο μετασχηματισμούς, παίρνουμε

$$|\mathcal{H}_{\mathbb{R}}f(x) - \mathcal{H}_{\mathbb{T}}f^\circ(x)| \leqslant C\|f\|_1,$$

και έτσι μπορούμε να μεταφέρουμε αποτελέσματα που ισχύουν από τον ένα μετασχηματισμό στον άλλον.

Η εικασία του Luzin

Όταν ο Luzin δημοσίευσε την εργασία του, γνώριζε το θεώρημα του Fatou: για κάθε $f \in L^1[-\pi,\pi]$, το ολοκλήρωμα Poisson

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}f(t)\,dt$$

συγκλίνει σχεδόν παντού στην $f(x)$. Γνώριζε επίσης το θεώρημα Riesz-Fischer: αν

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) < \infty$$

τότε υπάρχει συνάρτηση $f \in L^2[-\pi,\pi]$ με σειρά Fourier την

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Μπορούσε να συμπεράνει, με τις ίδιες υποθέσεις, ότι υπάρχει η συζυγής συνάρτηση $g \in L^2[-\pi,\pi]$ με σειρά Fourier την

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-b_k\cos kx + a_k\sin kx).$$

Συνεπώς, οι συντελεστές a_k και b_k έχουν ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις συναρτήσει της f και συναρτήσει της g. Η αναλυτική συνάρτηση $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - ib_k)(re^{ix})^k$ έχει δύο αναπαραστάσεις, τις

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)f(t)}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\,dt \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2rg(t)\sin(t-x)}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\,dt.$$

Το θεώρημα του Fatou μας δίνει ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει σχεδόν παντού στην $f(x)$ όταν $r \to 1^-$.

Ο Luzin απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.11 (Luzin). *Έστω $f \in L^2[-\pi,\pi]$. Τότε,*

$$\lim_{r\to 1^-}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2rg(t)\sin(t-x)}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\eta<|t|<\pi}\frac{g(x-t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt\right) = 0$$

σχεδόν παντού, όπου $\eta = \eta(r)$ είναι η μοναδική λύση της $\cos x = 2r/(1+r^2)$ στο διάστημα $(0,\pi/2)$.

Έτσι, είχε αποδείξει ότι για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{2\pi}\,(\mathrm{pv})\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(x-t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt = f(x)$$

σχεδόν παντού. Στη συνέχεια παρατήρησε ότι

$$\begin{aligned} s_n(x;f) &= \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+t)\left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right)dt. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η $s_n(x;f) \to f(x)$ σχεδόν παντού ισχύει αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{pv})\int_{-\pi}^{\pi} g(x+t)\frac{\cos nt}{t}\,dt = 0 \ \text{ σχεδόν παντού.} \tag{1.1.6}$$

Γνώριζε επίσης ότι για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R})$ η πρωτεύουσα τιμή

$$(\mathrm{pv})\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(x+t)}{t}\,dt \tag{1.1.7}$$

υπάρχει σχεδόν παντού. Παρατήρησε ότι αυτό δεν οφείλεται στο ότι η $g(x+t)/t$ είναι «μικρή». Άλλωστε, είχε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης f για την οποία υπάρχει σύνολο A θετικού μέτρου, τέτοιο ώστε

$$\int\left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\right|dt = +\infty$$

για κάθε $x \in A$.

Όμως, η απόδειξη που διέθετε για την (1.1.7) χρησιμοποιούσε μιγαδικές μεθόδους. Μέσα από αυτήν την απόδειξη δεν μπορούσε να δει με ποιόν τρόπο η αλληλοεξουδετέρωση θετικών και αρνητικών τιμών είχε ως αποτέλεσμα την ύπαρξη της πρωτεύουσας τιμής. Έκανε την εικασία ότι μια πιο κατασκευαστική απόδειξη θα εξηγούσε αυτό το φαινόμενο και ότι δεν θα επηρεαζόταν από την παρουσία του όρου $\cos nt$ στην (1.1.6). Έκανε έτσι την εικασία ότι κάθε $f \in L^2[-\pi, \pi]$ έχει σειρά Fourier που συγκλίνει σχεδόν παντού, δηλαδή

$$s_n(x; f) \to f(x) \text{ σχεδόν παντού στο } [-\pi, \pi].$$

Ο Carleson απέδειξε την εικασία του Luzin, το 1966. Αργότερα, ο Hunt απέδειξε ότι το ίδιο ισχύει για κάθε $f \in L^p[-\pi, \pi]$ αν $1 < p \leqslant \infty$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αποδείξεις της ύπαρξης της $\mathcal{H}f$, για $f \in L^p(\mathbb{R})$, με πραγματικές μεθόδους είχαν δοθεί: πρώτα από τον Besikovitch το 1926 για $p = 2$, μετά από τον Titchmarsh το 1926 για $p > 1$, και τέλος από τον Besikovitch για $p = 1$. Όμως αυτές οι αποδείξεις δεν ικανοποιούσαν τον Luzin γιατί ήταν πολύπλοκες. Όπως αποδείχτηκε, αυτή ήταν η σωστή πορεία. Τα αποτελέσματα και οι τεχνικές που ανέπτυξαν αυτοί οι συγγραφείς, χρειάζονται στην απόδειξη του θεωρήματος του Carleson.

1.2 Το θεώρημα του Carleson

Σκοπός μας σε αυτήν την εργασία είναι να παρουσιάσουμε την απόδειξη του θεωρήματος του Carleson. Σε αυτήν την σύντομη παράγραφο δίνουμε την εισαγωγή της διάσημης εργασίας του 1966:

> «Σε αυτήν την εργασία εισάγουμε μια νέα μέθοδο για να εκτιμήσουμε τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς Fourier. Η μέθοδος δίνει πολύ ακριβή αποτελέσματα και, ειδικότερα, μας επιτρέπει να λύσουμε το επί πολλά χρόνια ανοικτό πρόβλημα της σύγκλισης σχεδόν παντού για συναρτήσεις στον L^2. Συμβολίζουμε με $s_n(x; f)$ το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^1[-\pi, \pi]$, και αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.
>
> **Θεώρημα 1.2.1.** (α) *Αν για κάποιον $\delta > 0$ ισχύει*
>
> $$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \left(\log^+ |f(x)|\right)^{1+\delta} dx < \infty, \tag{1.2.1}$$
>
> *τότε*
>
> $$s_n(x; f) = o(\log \log n), \quad \textit{σχεδόν παντού.}$$
>
> (β) *Αν $f \in L^p$, $1 < p < 2$, τότε*
>
> $$s_n(x; f) = o(\log \log \log n), \quad \textit{σχεδόν παντού.}$$

(γ) *Αν* $f \in L^2$, *τότε η* $s_n(x;f)$ *συγκλίνει σχεδόν παντού.*

Παρατηρήσεις 1.2.2. (α) Το αποτέλεσμα αυτό πρέπει να συγκριθεί με το παράδειγμα του Kolmogorov μιας σχεδόν παντού αποκλίνουσας σειράς Fourier συνάρτησης στον L^1. Αν μελετήσουμε λεπτομερώς την κατασκευή των Hardy-Rogosinski, βλέπουμε ότι στην πραγματικότητα ισχύει το εξής. Για δοθείσα $\varepsilon(n) \to 0$, $n \to \infty$, υπάρχει συνάρτηση $f \in L^1$ τέτοια ώστε

$$s_n(x;f) \neq O(\varepsilon(n) \log\log n) \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Το καλύτερο ως τώρα γνωστό αποτέλεσμα σε αυτήν την περίπτωση είναι $o(\log n)$.

(β) Το καλύτερο ως τώρα γνωστό αποτέλεσμα εδώ είναι το θεώρημα Littlewood-Paley, το οποίο δίνει

$$s_n(x;f) = o((\log n)^{1/p}) \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Είναι μάλλον φανερό από την απόδειξη του (γ) ότι στην πραγματικότητα έχουμε σύγκλιση σχεδόν παντού και σε αυτήν την περίπτωση, οπότε θα δώσουμε μόνο το περίγραμμα της απόδειξης του (β).

(γ) Αυτό το αποτέλεσμα ήταν εικασία του Luzin. Το καλύτερο προηγούμενο αποτέλεσμα ήταν το θεώρημα Kolmogorov-Seliverstov-Plessner, το οποίο έδινε

$$s_n(x;f) = o(\sqrt{\log n}) \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Η απόδειξη είναι πολύ τεχνική και είναι χρήσιμο να δώσουμε εδώ μια πολύ σύντομη περιγραφή της ιδέας πίσω από την απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η f είναι πραγματική συνάρτηση, και επεκτείνουμε την f περιοδικά. Στη συνέχεια θεωρούμε τον τροποποιημένο τύπο Dirichlet

$$s_n^*(x;f) = \int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{e^{-int} f(t)}{x-t}\, dt, \qquad -\pi < x < \pi. \tag{1.2.2}$$

Αν ω είναι ένα υποδιάστημα του $(-4\pi, 4\pi)$, συμβολίζουμε με $E_\omega(f)$ τη μέση τιμή της f πάνω από το ω. Θεωρούμε κατάλληλη ξένη κάλυψη $\Omega = \{\omega_\nu\}$ του $(-4\pi, 4\pi)$. Αν $x \in \omega_\nu = \omega^*(x)$, γράφουμε

$$\begin{aligned} s_n^*(x;f) = \int_{\omega^*(x)} \frac{e^{-int} f(t)}{x-t}\, dt + \sum_{\mu\neq\nu} \int_{\omega_\mu} \frac{E_{\omega_\mu}(e^{-int} f)}{x-t}\, dt \\ + \sum_{\mu\neq\nu} \int_{\omega_\mu} \frac{e^{-int} f(t) - E_{\omega_\mu}(e^{-int} f)}{x-t}\, dt. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Αν το x βρίσκεται «γνήσια» μέσα στο ω^*, τότε η κύρια συνεισφορά προέρχεται από τον πρώτο όρο. Αν το ω^* έχει μήκος $2\pi \cdot 2^{-s}$, όπου s είναι ένας ακέραιος, τροποποιούμε σε αυτόν τον όρο τον n, παίρνοντας τον πλησιέστερο προς αυτόν ακέραιο της μορφής $h \cdot 2^s$. Αυτό δίνει μικρή μόνο μεταβολή στην τιμή του ολοκληρώματος, Μετά από αυτήν την τροποποίηση και μια αλλαγή μεταβλητής $x = 2^s\xi$, $t = 2^s\tau$, έχουμε ένα ολοκλήρωμα που έχει την ίδια μορφή με το $s_n^*(x; f)$ αλλά είναι περιορισμένο στο ω^*. Τώρα, μπορούμε να επαναλάβουμε το επιχείρημα.

Για να αποδείξουμε ότι ο δεύτερος όρος είναι μικρός, επιλέγουμε την κάλυψη Ω έτσι ώστε οι μέσες τιμές $E_{\omega_\mu}(e^{-int}f)$ να είναι όλες μικρές, και συγκεκριμένα της ίδιας τάξης μεγέθους με το $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}f(t)\,dt$.

Στον τρίτο όρο, τέλος, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο αριθμητής έχει ολοκλήρωμα ίσο με 0 πάνω σε κάθε ω_μ. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μετατρέψουμε μια ιδιομορφία πρώτου βαθμού σε ιδιομορφία δεύτερου βαθμού, την οποία μπορούμε να χειριστούμε ευκολότερα. Η κατάσταση θα έπρεπε να συγκριθεί με την διαφορά των παρακάτω τετριμμένων τύπων:

$$\int_\delta^1 \frac{dt}{t} = \log(\delta^{-1}) \quad \text{αλλά} \quad \delta \int_\delta^1 \frac{dt}{t^2} < 1.$$

Για κάθε συνδυασμό διαστημάτων $\omega^*(x)$ και ακεραίων n στη σχέση (1.2.3) παίρνουμε ένα ειδικό σύνολο στο οποίο οι όροι που περισσεύουν δεν είναι μικροί. Στην απόδειξη του (α), την οποία παρουσιάζουμε πρώτη, επιτρέπουμε με μια έννοια όλους τους συνδυασμούς (n, ω^*). Η βελτίωση που χρειάζεται για να πάρουμε το (γ) είναι μια προσεκτική μελέτη και επιλογή εκείνων των(n, ω^*) τα οποία είναι απαραίτητα. Η ταυτότητα του Parseval παίζει θεμελιώδη ρόλο και για να πάρουμε το αποτέλεσμα για τον L^p χρειάζεται ένα αρκετά καλό υποκατάστατό της. Όπως θα δούμε, ένα επιχείρημα παρεμβολής θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε το (β).»

Σε αυτή την εργασία θεωρούμε γνωστά βασικά αποτελέσματα της Θεωρίας Μέτρου (μεταξύ αυτών και το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue). Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε κάποια θεωρήματα παρεμβολής και αποδεικνύουμε το θεώρημα Carleson-Hunt κάνοντας την υπόθεση ότι κάποιος τελεστής M είναι τύπου p για $1 < p < \infty$. Στα υπόλοιπα κεφάλαια αποδεικνύουμε ότι αυτή η υπόθεση ισχύει. Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε το μετασχηματισμό Hilbert και αποδεικνύουμε κάποιες εκθετικές εκτιμήσεις που θα χρειαστούν στη συνέχεια. Το Κεφάλαιο 4 είναι πιο τεχνικό: σε αυτό εισάγονται τα δυαδικά διαστήματα και οι γενικευμένοι συντελεστές Fourier. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5, το οποίο είναι πολύ τεχνικό, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μόνο ένα μικρό σύνολο στο οποίο δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι η σειρά Fourier μιας L^2-συνάρτησης f συγκλίνει σημειακά στην f. Αποδεικνύοντας ότι αυτό το σύνολο έχει μηδενικό μέτρο παίρνουμε το θεώρημα.

Η παρουσίασή μας βασίζεται στο βιβλίο [5] των O. G. Jørsboe και L. Mejlbro, το οποίο με τη σειρά του δίνει μια λεπτομερή και εκτεταμένη παρουσίαση του αρχικού άρθρου του Carleson. Έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει το βιβλίο [1] του J. Arias de Reyna, το οποίο είναι κι αυτό αφιερωμένο στην απόδειξη του θεωρήματος του Carleson.

Κεφάλαιο 2

Το θεώρημα Carleson-Hunt

Στην Παράγραφο 2.1 εισάγουμε την έννοια του ασθενούς και ισχυρού τύπου ενός τελεστή και αποδεικνύουμε ένα θεώρημα παρεμβολής το οποίο είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Marcinkiewicz. Στην Παράγραφο 2.2 εισάγουμε τον μεγιστικό τελεστή των Hardy-Littlewood Θ και αποδεικνύουμε ότι ο Θ είναι τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$. Στην Παράγραφο 2.3 αποδεικνύουμε ένα άλλο κλασικό θεώρημα παρεμβολής, το θεώρημα Stein-Weiss. Τέλος, στην Παράγραφο 2.4 αποδεικνύουμε το θεώρημα Carleson-Hunt κάνοντας την υπόθεση ότι κάποιος τελεστής M, ο οποίος ορίζεται εκεί, είναι τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$.

Για τεχνικούς λόγους θεωρούμε μόνο πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες είναι ορισμένες σε κάποιο φραγμένο διάστημα, γράφουμε όμως τους συντελεστές Fourier τους χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις. Αυτή η υπόθεση απλουστεύει πολύ την δουλειά που απαιτείται για τις εκτιμήσεις στα επόμενα κεφάλαια, και δεν χάνουμε σε γενικότητα διότι, αν f είναι μια μιγαδική συνάρτηση, μπορούμε να θεωρήσουμε τις δύο πραγματικές συναρτήσεις $\mathrm{Re}(f)$ και $\mathrm{Im}(f)$ στη θέση της. Θα υποθέτουμε πάντα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $f \in L^1(I)$, όπου I είναι ένα φραγμένο διάστημα.

Τα περισσότερα από τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου ισχύουν για συναρτήσεις $f \in L^1(\mathbb{R})$. Οι αποδείξεις τους όμως είναι συχνά διαφορετικές, και ίσως πιο πολύπλοκες. Για το λόγο αυτό, αποφεύγουμε να αποδείξουμε αυτά τα θεωρήματα στην πιο γενική τους μορφή.

2.1 Θεωρήματα παρεμβολής

Έστω f μια συνάρτηση με πραγματικές τιμές, ορισμένη σε ένα διάστημα $[-A,A]$, και ας υποθέσουμε ότι $f\in L^1[-A,A]$. Για κάθε $y\geqslant 0$ θεωρούμε το σύνολο

$$E_y := \{x\in[-A,A] : |f(x)|>y\}. \tag{2.1.1}$$

Ορισμός 2.1.1. Η *συνάρτηση κατανομής* λ_f της f είναι η συνάρτηση $\lambda_f : [0,\infty)\longrightarrow [0,2A]$ που ορίζεται από την

$$\lambda_f(y)=m(E_y)=m(\{x\in[-A,A] : |f(x)|>y\}), \tag{2.1.2}$$

όπου m είναι το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$.

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι $0\leqslant\lambda_f(y)\leqslant 2A$ για κάθε $y\geqslant 0$, $\lambda_f(y)\to 0$ όταν $y\to+\infty$, και η λ_f είναι φθίνουσα συνάρτηση. Επιπλέον, η λ_f είναι συνεχής από δεξιά: αυτό φαίνεται από την

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{y+\frac{1}{n}} = E_y,$$

που ισχύει για κάθε $y\geqslant 0$. Έπεται ότι η λ_f έχει το πολύ αριθμήσιμα το πλήθος σημεία ασυνέχειας. Ειδικότερα, η λ_f είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Έστω T ένας τελεστής από τον $L^1[-A,A]$ στον $\mathcal{M}[-A,A]$, την κλάση όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[-A,A]$. Ο τελεστής T δεν είναι αναγκαστικά ορισμένος σε ολόκληρο τον $L^1[-A,A]$, θα είναι όμως πάντα ορισμένος στις απλές συναρτήσεις, δηλαδή τους πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς των χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων υποσυνόλων του $[-A,A]$, καθώς και στις συνεχείς συναρτήσεις. Ειδικότερα, το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(T)$ του T θα είναι πυκνό στον $L^1[-A,A]$.

Σε ό,τι ακολουθεί, ο T θα είναι είτε γραμμικός τελεστής (δηλαδή το $\mathcal{D}(T)$ θα είναι γραμμικός χώρος και θα ισχύει $T(af+bg)=aT(f)+bT(g)$ για κάθε $f,g\in\mathcal{D}(T)$ και για κάθε $a,b\in\mathbb{R}$ ή $a,b\in\mathbb{C}$) ή υπογραμμικός τελεστής (δηλαδή το $\mathcal{D}(T)$ θα είναι γραμμικός χώρος και θα ισχύουν οι $|T(af)|=|a|\,|T(f)|$ και $|T(f+g)|\leqslant|T(f)|+|T(g)|$ για κάθε $f,g\in\mathcal{D}(T)$ και για κάθε $a\in\mathbb{R}$ ή $a\in\mathbb{C}$).

Ορισμός 2.1.2. Λέμε ότι ο τελεστής T είναι *ισχυρού τύπου* p για κάποιον $1\leqslant p\leqslant\infty$ αν υπάρχει σταθερά $A_p>0$ τέτοια ώστε

$$\|Tf\|_p\leqslant A_p\|f\|_p \tag{2.1.3}$$

για κάθε $f\in\mathcal{D}(T)$.

Παρατήρηση 2.1.3. Συχνά θεωρούμε τελεστές T ισχυρού τύπου (p,q), όπου $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$. Λέμε ότι ο τελεστής T είναι *ισχυρού τύπου* (p,q) αν υπάρχει σταθερά $A_{p,q} > 0$ τέτοια ώστε

$$\|Tf\|_q \leqslant A_{p,q}\|f\|_p$$

για κάθε $f \in \mathcal{D}(T)$. Σε αυτήν την εργασία μας είναι αρκετό να θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση $p = q$. Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για τους επόμενους ορισμούς.

Παρατηρήστε ότι αν ένας τελεστής T είναι ισχυρού τύπου p για κάποιον $1 \leqslant p < \infty$ τότε ο T μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο τον $L^p[-A,A]$ λόγω συνέχειας, αφού το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(T)$ του T θα είναι πυκνό στον $L^p[-A,A]$, και ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής στον $L^p[-A,A]$.

Ορισμός 2.1.4. Λέμε ότι ο τελεστής T είναι *ασθενούς τύπου* p για κάποιον $1 \leqslant p < \infty$ αν υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ τέτοια ώστε

$$\lambda_{Tf}(y) \leqslant \left(\frac{A_p}{y}\right)^p \|f\|_p^p \tag{2.1.4}$$

για κάθε $f \in \mathcal{D}(T)$ και για κάθε $y > 0$.

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $y > 0$,

$$\|Tf\|_p^p = \int |Tf(x)|^p dx \geqslant y^p \lambda_{Tf}(y).$$

Συνεπώς, αν ο T είναι ισχυρού τύπου p για κάποιον $1 \leqslant p < \infty$, τότε

$$\lambda_{Tf}(y) \leqslant \frac{1}{y^p}\|Tf\|_p^p \leqslant \left(\frac{A_p}{y}\right)^p \|f\|_p^p, \tag{2.1.5}$$

δηλαδή ο T είναι αθενούς τύπου p.

Αργότερα θα δώσουμε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι το αντίστροφο δεν είναι γενικά σωστό.

Θα χρειαστούμε επίσης τις ακόλουθες σχετικές έννοιες.

Ορισμός 2.1.5. Λέμε ότι ο τελεστής T είναι *περιορισμένου τύπου* p για κάποιον $1 \leqslant p < \infty$ αν υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ τέτοια ώστε

$$\|T\chi_E\|_p \leqslant A_p\|\chi_E\|_p = A_p(m(E))^{1/p} \tag{2.1.6}$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [-A,A]$.

Ορισμός 2.1.6. Λέμε ότι ο τελεστής T είναι *περιορισμένου ασθενούς τύπου* p για κάποιον $1 \leqslant p < \infty$ αν υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ τέτοια ώστε

$$\lambda_{T\chi_E}(y) \leqslant \left(\frac{A_p}{y}\right)^p \|\chi_E\|_p^p = \left(\frac{A_p}{y}\right)^p m(E) \tag{2.1.7}$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [-A, A]$.

Είναι φανερό ότι αν ο T είναι ισχυρού τύπου p τότε ο T είναι περιορισμένου τύπου p, και αν ο T είναι ασθενούς τύπου p τότε ο T είναι περιορισμένου ασθενούς τύπου p. Επιπλέον, αν ο T είναι περιορισμένου τύπου p τότε ο T είναι περιορισμένου ασθενούς τύπου p.

Για την απόδειξη των θεωρημάτων παρεμβολής αυτής της παραγράφου θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα, που συνδέει τη συνάρτηση κατανομής λ_f της f με την $\|f\|_p$.

Λήμμα 2.1.7. *Έστω $f \in L^1[-A, A]$. Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ έχουμε*

$$\|f\|_p^p = \int |f(x)|^p dx = \int_0^\infty p y^{p-1} \lambda_f(y)\, dy. \tag{2.1.8}$$

Ειδικότερα,

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty \lambda_f(y)\, dy. \tag{2.1.9}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}\int |f(x)|^p dx &= \int \left(\int_0^{|f(x)|} p y^{p-1} dy\right) dx \\ &= \int_0^\infty p y^{p-1} m(\{x \in [-A, A] : |f(x)| > y\})\, dy \\ &= \int_0^\infty p y^{p-1} \lambda_f(y)\, dy.\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι αν $f \notin L^p[-A, A]$ τότε τα δύο μέλη της (2.1.8) απειρίζονται. □

Το επόμενο λήμμα είναι το πρώτο αποτέλεσμα παρεμβολής που αποδεικνύουμε.

Λήμμα 2.1.8. *Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 < \infty$. Αν ο T είναι περιορισμένου ασθενούς τύπου p_0 και p_1 τότε ο T είναι περιορισμένου τύπου p για κάθε $p \in (p_0, p_1)$.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με λ την συνάρτηση κατανομής της $T\chi_E$. Από τις υποθέσεις γνωρίζουμε ότι υπάρχουν σταθερές A_0 και A_1, τέτοιες ώστε

$$\lambda(y) \leqslant \left(\frac{A_0}{y}\right)^{p_0} m(E) \quad \text{και} \quad \lambda(y) \leqslant \left(\frac{A_1}{y}\right)^{p_1} m(E)$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E και για κάθε $y > 0$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1.7 έχουμε

$$\begin{aligned}\|T\chi_E\|_p^p &= p\int_0^1 y^{p-1}\lambda(y)\,dy + p\int_1^\infty y^{p-1}\lambda(y)\,dy \\ &\leqslant p\cdot m(E)\left(\int_0^1 y^{p-p_0-1}A_0^{p_0}\,dy + \int_1^\infty y^{p-p_1-1}A_1^{p_1}dy\right) \\ &= p\cdot m(E)\left(A_0^{p_0}\frac{1}{p-p_0} + A_1^{p_1}\frac{1}{p_1-p}\right),\end{aligned}$$

άρα

$$\|T\chi_E\|_p \leqslant A_p(m(E))^{1/p},$$

όπου

$$A_p = p^{1/p}\left(A_0^{p_0}\frac{1}{p-p_0} + A_1^{p_1}\frac{1}{p_1-p}\right)^{1/p},$$

για κάθε $p \in (p_0, p_1)$. □

Παρατηρήστε ότι η σταθερά A_p είναι φραγμένη όταν το $p \in (p_0, p_1)$ είναι «μακρυά» από τα p_0 και p_1.

Πολύ σχετικό είναι το επόμενο θεώρημα, το οποίο είναι ειδική περίπτωση ενός θεωρήματος του Marcinkiewicz.

Θεώρημα 2.1.9. *Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 < \infty$ και έστω T ένας υπογραμμικός τελεστής ασθενούς τύπου p_0 και p_1. Τότε, ο T είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $p \in (p_0, p_1)$. Πιο συγκεκριμένα, αν*

$$\lambda_{Tf}(y) = m(\{x : |Tf(x)| > y\}) \leqslant \left(\frac{A_0}{y}\right)^{p_0} \|f\|_{p_0}^{p_0}$$

και

$$\lambda_{Tf}(y) = m(\{x : |Tf(x)| > y\}) \leqslant \left(\frac{A_1}{y}\right)^{p_1} \|f\|_{p_1}^{p_1}$$

για κάθε $y > 0$, τότε

$$\|Tf\|_p^p \leqslant K_p\|f\|_p^p,$$

όπου

$$K_p = p\cdot 2^p\left(\frac{1}{p-p_0} + \frac{1}{p_1-p}\right)A_0^{p_0\frac{p_1-p}{p_1-p_0}}A_1^{p_1\frac{p-p_0}{p_1-p_0}}.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε

$$A = A_0^{\frac{p_0}{p_1-p_0}}A_1^{-\frac{p_1}{p_1-p_0}}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$A_0^{p_0}A^{p_0-p} = A_1^{p_1}A^{p_1-p} = A_0^{p_0\frac{p_1-p}{p_1-p_0}}A_1^{p_1\frac{p-p_0}{p_1-p_0}}. \tag{2.1.10}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σταθερά A ορίζουμε, για κάθε $y > 0$, τις συναρτήσεις

$$f^y(x) = f(x)\cdot\chi_{|f(x)|\leqslant Ay}(x)$$

και

$$f_y(x) = f(x)\cdot\chi_{|f(x)|>Ay}(x).$$

Προφανώς έχουμε $f(x) = f_y(x) + f^y(x)$ και, από την υπογραμμικότητα του T έχουμε

$$\lambda_{Tf}(2y) \leqslant \lambda_{Tf_y}(y) + \lambda_{Tf^y}(y),$$

που λόγω των υποθέσεων φράσσεται από

$$A_0^{p_0}y^{-p_0}\int |f_y(x)|^{p_0}dx + A_1^{p_1}y^{-p_1}\int |f^y(x)|^{p_1}dx.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini και τον ορισμό της σταθεράς A γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= \int_0^\infty p(2y)^{p-1}\lambda_{Tf}(2y)\,d(2y) = p\cdot 2^p\int_0^\infty y^{p-1}\lambda_{Tf}(2y)\,dy\\
&\leqslant p\cdot 2^p\int_0^\infty A_0^{p_0}y^{-p_0}y^{p-1}\left(\int_{\{|f(x)|>Ay\}}|f(x)|^{p_0}dx\right)dy\\
&\qquad + p\cdot 2^p\int_0^\infty A_1^{p_1}y^{-p_1}y^{p-1}\left(\int_{\{|f(x)|\leqslant Ay\}}|f(x)|^{p_1}dx\right)dy\\
&= p\cdot 2^pA_0^{p_0}\int |f(x)|^{p_0}\left(\int_0^{|f(x)|/A}y^{p-p_0-1}dy\right)dx\\
&\qquad + p\cdot 2^pA_1^{p_1}\int |f(x)|^{p_1}\left(\int_{|f(x)|/A}^\infty y^{p-p_1-1}dy\right)dx\\
&= p\cdot 2^p\left(A_0^{p_0}A^{p_0-p}\frac{1}{p-p_0}\int |f(x)|^pdx + A_1^{p_1}A^{p_1-p}\frac{1}{p_1-p}\int |f(x)|^pdx\right)\\
&= p\cdot 2^pA_0^{p_0\frac{p_1-p}{p_1-p_0}}A_1^{p_1\frac{p-p_0}{p_1-p_0}}\left(\frac{1}{p-p_0}+\frac{1}{p_1-p}\right)\|f\|_p^p,
\end{aligned}$$

όπου, στο τέλος, χρησιμοποιήσαμε την (2.1.10). □

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.10. *Έστω $1 \leqslant p_0 < \infty$ και έστω T ένας υπογραμμικός τελεστής ασθενούς τύπου p_0 και ισχυρού τύπου $+\infty$. Τότε, ο T είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $p \in (p_0, +\infty)$. Πιο συγκεκριμένα, αν*

$$\lambda_{Tf}(y) = m(\{x : |Tf(x)| > y\}) \leqslant \left(\frac{A_0}{y}\right)^{p_0} \|f\|_{p_0}^{p_0}$$

για κάθε $y > 0$, και

$$\|Tf\|_\infty \leqslant A_\infty \|f\|_\infty,$$

τότε

$$\|Tf\|_p^p \leqslant p \cdot 2^p A_0^{p_0} A_\infty^{p-p_0} \cdot \frac{1}{p-p_0} \|f\|_p^p.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό με αυτόν της απόδειξης του Θεωρήματος 2.1.10. Επιλέγουμε σαν A τον $\frac{1}{A_\infty}$. Τότε,

$$\|f^y\|_\infty \leqslant \frac{1}{A_\infty} y \quad \text{και} \quad \|Tf^y\|_\infty \leqslant y,$$

άρα $\lambda_{Tf^y}(y) = 0$. Έτσι έχουμε

$$\lambda_{Tf}(2y) \leqslant \lambda_{Tf_y}(y) \leqslant A_0^{p_0} y^{-p_0} \int |f(x)|^{p_0} dx,$$

και (ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.9)

$$\|Tf\|_p^p \leqslant p \cdot 2^p A_0^{p_0} \left(\frac{1}{A_\infty}\right)^{p_0-p} \frac{1}{p-p_0} \|f\|_p^p,$$

το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα. □

2.2 Ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood

Σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε τον μεγιστικό τελεστή των Hardy-Littlewood και θα αποδείξουμε εκτιμήσεις γι' αυτόν, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1.10.

Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε τον μεγιστικό τελεστή Θ ως εξής:

(2.2.1) $$\Theta f(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(y)|\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση Θf είναι μετρήσιμη: πράγματι, είναι κάτω ημισυνεχής ως supremum συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, ο τελεστής $f \mapsto \Theta f$, ορισμένος στον $L^1(\mathbb{R})$, είναι υπογραμμικός.

Θεώρημα 2.2.1. *Ο τελεστής* Θ *είναι ισχυρού τύπου* $+\infty$ *και ασθενούς τύπου* 1. *Πιο συγκεκριμένα, ο* Θ *ικανοποιεί τις*

$$\|\Theta f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \tag{2.2.2}$$

και

$$\lambda_{\Theta f}(y) = m(\{x : \Theta f(x) > y\}) \leqslant \frac{4}{y}\|f\|_1 \tag{2.2.3}$$

για κάθε $y > 0$.

Από το Θεώρημα 2.2.1 και το Θεώρημα 2.1.10 συμπεραίνουμε αμέσως ότι ο τελεστής Θ είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$.

Απόδειξη. Στις εφαρμογές που θα μας απασχολήσουν αργότερα, χρειαζόμαστε μόνο συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, ας υποθέσουμε λοιπόν για την απόδειξη ότι η f έχει συμπαγή φορέα. Είναι φανερό ότι η (2.2.2) ικανοποιείται. Για την απόδειξη της (2.2.3) μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η f είναι μη αρνητική.

Έστω $y > 0$. Για κάθε $x \in \{t : \Theta f(t) > y\}$ μπορούμε να βρούμε ένα διάστημα I_x (με κέντρο το x) τέτοιο ώστε

$$\int_{I_x} f(t)\, dt > y \cdot m(I_x).$$

Δείχνουμε πρώτα ότι το σύνολο $\{\Theta f > y\}$ είναι φραγμένο. Υποθέτουμε ότι ο φορέας της f περιέχεται στο διάστημα $[-M, M]$ για κάποιον $M > 0$, θεωρούμε τυχόν $x \in \{\Theta f > y\}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $x < -M$ τότε για κάθε $0 < t < -M - x$ έχουμε

$$\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(z)\, dz = 0,$$

ενώ αν $t \geqslant -M - x$ έχουμε

$$\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(z)\, dz = \frac{1}{2t}\int_{-M}^{x+t} f(z)\, dz \leqslant \frac{1}{-2(M+x)}\int_{-M}^{x+t} f(z)\, dz \leqslant \frac{1}{-2(M+x)}\|f\|_1,$$

απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\Theta f(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(z)\, dz \leqslant \frac{1}{2|M+x|}\|f\|_1.$$

Έτσι,

$$\{\Theta f > y\} \cap (-\infty, -M) = \{x < -M : 2|M+x|y < \|f\|_1\} = \left(-\frac{\|f\|_1}{2y} - M, -M\right),$$

το οποίο είναι φραγμένο σύνολο.

(β) Αν $x > M$ τότε για κάθε $0 < t < x - M$ έχουμε

$$\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(z)\,dz = 0,$$

ενώ αν $t \geqslant x - M$ έχουμε

$$\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(z)\,dz = \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{M} f(z)\,dz \leqslant \frac{1}{2(x-M)}\int_{x-t}^{M} f(z)\,dz \leqslant \frac{1}{2(x-M)}\|f\|_1,$$

απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\Theta f(x) = \sup_{t>0}\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(z)\,dz \leqslant \frac{1}{2(x-M)}\|f\|_1.$$

Έτσι,

$$\{\Theta f > y\}\cap (M,+\infty) = \{x > M : 2(x-M)y < \|f\|_1\} = \left(M, M + \frac{\|f\|_1}{2y}\right),$$

το οποίο είναι φραγμένο σύνολο.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι το $\{\Theta f > y\}$ είναι φραγμένο. Χρησιμοποιώντας αυτό, βλέπουμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα διαστήματα I_x περιέχονται σε κάποιο διάστημα $[-B, B]$. Έστω x τέτοιο ώστε $\Theta f(x) > y$. Τότε υπάρχει διάστημα $I_x = (a_x, b_x)$ με

$$\frac{1}{m(I_x)}\int_{I_x} f(z)\,dz > y.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $u \in I_x$ ισχύει

$$\frac{1}{b_x - a_x}\int_{a_x}^{b_x} f(z)\,dz \leqslant 2\Theta f(u).$$

Πράγματι, αν $u - a_x < b_x - u$ έχουμε $I_x \subseteq (u - (b_x - u), u + (b_x - u))$ άρα

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_x - a_x}\int_{a_x}^{b_x} f(z)\,dz &\leqslant \frac{1}{b_x - a_x}\int_{u-(b_x-u)}^{u+(b_x-u)} f(z)\,dz \leqslant \frac{1}{b_x - u}\int_{u-(b_x-u)}^{u+(b_x-u)} f(z)\,dz \\ &= 2\frac{1}{2(b_x-u)}\int_{u-(b_x-u)}^{u+(b_x-u)} f(z)\,dz \leqslant 2\Theta f(u),\end{aligned}$$

ενώ αν $b_x - u < u - a_x$ όμοια παίρνουμε

$$\frac{1}{b_x - a_x}\int_{a_x}^{b_x} f(z)\,dz \leqslant 2\frac{1}{2(u-a_x)}\int_{u-(u-a_x)}^{u+(u-a_x)} f(z)\,dz \leqslant 2\Theta f(u).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι
$$I_x \subseteq \left\{ u : \Theta f(u) > \frac{y}{2} \right\}$$
και το τελευταίο σύνολο περιέχεται όπως είδαμε σε κάποιο διάστημα $[-B, B]$, όπου το $B = B_y$ εξαρτάται από το y.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι υπάρχει μια ακολουθία (I_n) (που επιλέγεται από την κλάση των διαστημάτων I_x που ορίσαμε παραπάνω) ξένων ανά δύο διαστημάτων, τέτοια ώστε
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) \geqslant \frac{1}{4} m\left(\bigcup_x I_x \right).$$
Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι αυτός ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί. Τότε, ολοκληρώνουμε την απόδειξη γράφοντας
$$\begin{aligned} m(\{x : \Theta f(x) > y\}) &\leqslant m\left(\bigcup_x I_x \right) \leqslant 4m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) = 4\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \\ &\leqslant \frac{4}{y} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} f(y)\,dy = \frac{4}{y} \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} f(y)\,dy \leqslant \frac{4}{y} \|f\|_1. \end{aligned}$$
Αποδεικνύουμε τώρα τον ισχυρισμό (ο οποίος είναι ένα θεώρημα τύπου Besicovitch). Έστω $\mathcal{S}_1$ η κλάση των διαστημάτων που θεωρήσαμε παραπάνω. Θέτουμε $a_1 = \sup\{m(I_x) : I_x \in \mathcal{S}_1\}$ και επιλέγουμε ένα διάστημα I_1 από την $\mathcal{S}_1$ τέτοιο ώστε $m(I_1) > \frac{3a_1}{4}$. Θεωρούμε τώρα την κλάση $\mathcal{S}_2$ των διαστημάτων I_x που είναι ξένα προς το I_1, θέτουμε $a_2 = \sup\{m(I_x) : I_x \in \mathcal{S}_2\}$, και επιλέγουμε I_2 από την $\mathcal{S}_2$ τέτοιο ώστε $m(I_2) > \frac{3a_2}{4}$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Αν η διαδικασία σταματήσει μετά από πεπερασμένα το πλήθος βήματα τότε το συμπέρασμα ισχύει προφανώς, υποθέτουμε λοιπόν ότι προκύπτει μια ακολουθία (a_k) πραγματικών αριθμών με $a_k \to 0$ και μια ακολουθία ξένων διαστημάτων (I_k) με $m(I_k) \to 0$ όταν $k \to \infty$. Θεωρούμε ένα διάστημα I_x και τον μικρότερο k για τον οποίο $I_x \notin \mathcal{S}_k$. Τότε, $I_x \cap I_{k-1} \neq \emptyset$ και $m(I_{k-1}) \geqslant \frac{3}{4} m(I_x)$. Έπεται ότι $I_x \subset J_{k-1}$, όπου J_{k-1} είναι το διάστημα που έχει το ίδιο κέντρο με το I_{k-1} και μήκος $m(J_{k-1}) = 4m(I_{k-1})$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση βλέπουμε ότι
$$m\left(\bigcup_x I_x \right) \leqslant 4m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right),$$
και η απόδειξη είναι πλήρης. Σημειώνουμε ότι η σταθερά 4 που εμφανίζεται στην (2.2.3) δεν είναι η καλύτερη δυνατή. □

Σημείωση. Ο τελεστής Θ δεν είναι ισχυρού τύπου 1. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$ τότε η Θf δεν είναι καν ολοκληρώσιμη. Αν $x < 0$ και $0 < t \leqslant -x$ έχουμε
$$\frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f(s)\,ds \leqslant \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{0} f(s)\,ds = 0.$$

Αν $x < 0$ και $-x \leqslant t < 1 - x$ έχουμε

$$\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(s)\,ds = \frac{1}{2t}\int_{0}^{x+t} f(s)\,ds = \frac{x+t}{2t}.$$

Τέλος, αν $x < 0$ και $t \geqslant 1 - x$ έχουμε

$$\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(s)\,ds = \frac{1}{2t}\int_{0}^{1} f(s)\,ds = \frac{1}{2t}.$$

Κάνοντας την γραφική παράσταση βλέπουμε ότι

$$\Theta f(x) = \sup_{t>0}\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(s)\,ds = \frac{1}{2(1-x)}$$

για κάθε $x < 0$. Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{0} \Theta f(x)\,dx = \infty.$$

Πόρισμα 2.2.2. *Ο τελεστής Θ είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε*

$$\|\Theta f\|_p^p \leqslant 2^p \frac{4p}{p-1}\|f\|_p^p \tag{2.2.4}$$

για κάθε $1 < p < \infty$.

Απόδειξη. Συνδυάζουμε το Θεώρημα 2.2.1 και το Θεώρημα 2.1.10, με $p_0 = 1$, $A_0 = 4$ και $A_\infty = 1$. □

Στα επόμενα, αν $g(x)$ είναι μια συνάρτηση με πραγματικές τιμές, ορίζουμε το θετικό μέρος της $g(x)$ να είναι η συνάρτηση

$$g^+(x) = \max\{g(x), 0\}.$$

Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα είναι η συνάρτηση $\log^+$.

Θεώρημα 2.2.3. *Ο τελεστής Θ ικανοποιεί την*

$$\int (\Theta f(x) - 2)^+ dx \leqslant 8 \int |f(x)|\, \log^+(|f(x)|)\,dx. \tag{2.2.5}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \geqslant 0$ και ότι η $f\log^+ f$ είναι ολοκληρώσιμη. Για κάθε $y > 0$ θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f^y(x) = f(x)\cdot \chi_{f(x)\leqslant y}(x) \quad \text{και} \quad f_y(x) = f(x)\cdot\chi_{f(x)>y}(x).$$

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $\Theta f^y \leqslant y$, άρα

$$m(\{x : \Theta f(x) > 2y\}) \leqslant m(\{x : \Theta f_y(x) > y\}).$$

Χρησιμοποιώντας την (2.2.3) για τη συνάρτηση f_y παίρνουμε

$$m(\{x : \Theta f(x) > 2y\}) \leqslant \frac{4}{y} \int f_y(x)\, dx. \tag{2.2.6}$$

Ολοκληρώνοντας την (2.2.6) στο $[1, \infty)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty m(\{x : \Theta f(x) > 2y\})\, dy &\leqslant \int_1^\infty \frac{4}{y} \left(\int_{\mathbb{R}} f_y(x)\, dx \right) dy \\
&= \int_1^\infty \frac{4}{y} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{\{f(x)>y\}}(x)\, dx \right) dy \\
&= 4 \int_{\{f(x)>1\}} f(x) \left(\int_1^{f(x)} \frac{1}{y}\, dy \right) dx \\
&= 4 \int_{\{f(x)>1\}} f(x) \log f(x)\, dx \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}} f(x) \log f(x) \chi_{\{\log f>0\}}(x)\, dx \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}} f(x) \log^+(f(x))\, dx.
\end{aligned}$$

Το αριστερό μέλος ισούται με

$$\frac{1}{2} \int_2^\infty m(\{x : \Theta f(x) > t\})\, dt = \frac{1}{2} \int (\Theta f(x) - 2)^+ dx,$$

και έτσι έπεται το ζητούμενο. □

Αργότερα θα χρειαστούμε τα επόμενα δύο απλά λήμματα.

Λήμμα 2.2.4. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε μια συνάρτηση $F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$F_x(t) = \int_0^t f(x+y)\, dy.$$

Τότε,

$$|F_x(t)| \leqslant 2|t|\, \Theta f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}|F_x(t)| &= \left|\int_x^{x+t} f(y)\,dy\right| \leqslant \left|\int_x^{x+t} |f(y)|\,dy\right| \leqslant \int_{x-|t|}^{x+|t|} |f(y)|\,dy \\ &\leqslant 2|t|\cdot\Theta f(x).\end{aligned}$$

□

Λήμμα 2.2.5. *Έστω $f\in L^1(\mathbb{R})$. Τότε,*

$$|f(x)|\leqslant \Theta f(x)$$

σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έπεται από το γεγονός ότι

$$\Theta f(x)\geqslant \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}|f(y)|\,dy$$

για κάθε $t>0$, και από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, από το οποίο έχουμε

$$\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}|f(y)|\,dy\to|f(x)|$$

όταν $t\to 0^+$, σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$. □

Σημείωση. Από το Λήμμα 2.2.5 και το Θεώρημα 2.2.1 έπεται ότι: αν $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$ τότε

$$\|f\|_\infty=\|\Theta f\|_\infty.$$

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια εκθετική εκτίμηση για την Θf, στην περίπτωση που $f\in L^\infty$ και η $f(x)$ μηδενίζεται έξω από ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω $c>0$ και έστω f μια ουσιωδώς φραγμένη συνάρτηση που ο φορέας της περιέχεται σε ένα διάστημα I μήκους A. Τότε, για κάθε $y>0$ έχουμε*

$$\lambda_{\Theta f}(y)=m(\{x:\Theta f(x)>y\})\leqslant 2e^cA\,\frac{\|f\|_\infty}{y}\exp\left(-c\frac{y}{\|f\|_\infty}\right). \tag{2.2.7}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε $\|\Theta f\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$ (μάλιστα, σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ισότητα). Αν λοιπόν $y\geqslant\|f\|_\infty$ τότε το αριστερό μέλος της (2.2.7) μηδενίζεται και η εκτίμηση που ζητάμε ισχύει τετριμμένα.

Έστω $0 < y < \|f\|_\infty$. Αν $x \in \{t : \Theta f(t) > y\}$ και $\mathrm{dist}(x, I) = d > 0$, τότε εφαρμόζοντας την (2.2.1) παίρνουμε

$$y < \Theta f(x) \leqslant \frac{1}{2d}\int_I |f(s)|\,ds \leqslant \frac{A}{2d}\|f\|_\infty,$$

δηλαδή

$$d = \mathrm{dist}(x, I) \leqslant \frac{A}{2}\,\frac{\|f\|_\infty}{y},$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$m(\{x : \Theta f(x) > y\}) \leqslant A + 2\cdot\frac{A}{2}\,\frac{\|f\|_\infty}{y} = A\left(1 + \frac{\|f\|_\infty}{y}\right).$$

Θέτουμε $t = \frac{y}{\|f\|_\infty} \in (0,1)$. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$1 + \frac{1}{t} \leqslant 2e^c \cdot \frac{1}{t}e^{-ct}, \qquad t \in (0,1),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με την απλή ανισότητα

$$(1+t)e^{ct} \leqslant 2e^c, \qquad t \in (0,1)$$

άρα η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. □

2.3 Θεώρημα Stein-Weiss

Σε αυτήν την παράγραφο υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις που μελετάμε είναι ορισμένες σε ένα σταθερό διάστημα $[-A, A]$. Έστω T ένας τελεστής περιορισμένου τύπου p, όπου $1 < p < \infty$. Δηλαδή, υπάρχει μια σταθερά $A_p > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [-A, A]$,

(2.3.1) $$\|T\chi_E\|_p \leqslant A_p\|\chi_E\|_p = A_p(m(E))^{1/p}.$$

Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, και έστω $f \in L^q[-A, A]$. Ορίζουμε μια συνολοσυνάρτηση γ στην κλάση όλων των Borel συνόλων E που περιέχονται στο $[-A, A]$, θέτοντας

(2.3.2) $$\gamma(E) = \int (T\chi_E) f\,dx.$$

Από την ανισότητα του Holder βλέπουμε ότι η γ είναι καλά ορισμένη, και εύκολα ελέγχουμε ότι η γ είναι μια αριθμήσιμα προσθετική συνολοσυνάρτηση που είναι απολύτως συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue. Πράγματι,

$$\gamma(\emptyset) = \int_{-A}^{A} T\chi_\emptyset(x) f(x)\,dx = \int_{-A}^{A} T(\mathbf{0})(x) f(x)\,dx = 0$$

διότι $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ αφού ο T είναι γραμμικός. Έστωσαν $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένα ανά δύο Borel υποσύνολα του $[-A, A]$. Θα δείξουμε ότι $\gamma\left(\cup_{=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(E_n)$, ή ισοδύναμα

$$\int_{-A}^{A} \left(T\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n}\right)(x) f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-A}^{A} T\chi_{E_n}(x) f(x)\, dx.$$

Θέτουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\chi_E - \chi_{\cup_{n=1}^{k} E_n} = \chi_{\cup_{n=k+1}^{\infty} E_n}.$$

Άρα,

$$\|\chi_E - \chi_{\cup_{=1}^{k} E_n}\|_p = \|\chi_{\cup_{n=k+1}^{\infty} E_n}\|_p = m\left(\cup_{n=k+1}^{\infty} E_n\right)^{1/p} \to 0$$

όταν $k \to \infty$, διότι

$$m\left(\cup_{n=k+1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} m(E_n)$$

και $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \leqslant 2A < \infty$. Έπεται ότι

$$\|T\chi_E - T\chi_{\cup_{=1}^{k} E_n}\|_p = \|T\chi_{\cup_{n=k+1}^{\infty} E_n}\|_p \leqslant A_p \|\chi_{\cup_{n=k+1}^{\infty} E_n}\|_p \to 0,$$

δηλαδή $T\chi_{\cup_{=1}^{k} E_n} \to T\chi_E$ στον $L^p[-A, A]$, και αφού $f \in L^2[-A, A]$ από την ανισότητα Holder συμεραίνουμε ότι $(T\chi_{\cup_{=1}^{k} E_n})f \to (T\chi_E)f$ στον $L^1[-A, A]$. Με άλλα λόγια,

$$\sum_{n=1}^{k} \int_{-A}^{A} T\chi_{E_n}(x) f(x)\, dx = \int_{-A}^{A} (T\chi_{\cup_{=1}^{k} E_n})(x) f(x)\, dx \to \int_{-A}^{A} (T\chi_E)(x) f(x)\, dx,$$

δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{k} \gamma(E_n) \to \gamma(E),$$

το οποίο αποδεικνύει την

$$\gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(E_n).$$

Άρα, το γ είναι προσημασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}([-A, A])$.

Τέλος, αν E είναι ένα Borel υποσύνολο του $[-A, A]$ με $m(E) = 0$ τότε $\chi_E = 0$ στον $L^1[-A, A]$ και από την γραμμικότητα του T έχουμε $T\chi_E = 0$, απ' όπου βλέπουμε αμέσως ότι

$$\gamma(E) = \int_{-A}^{A} (T\chi_E)(x) f(x)\, dx = 0.$$

Δηλαδή, το γ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Από το θεώρημα Radon-Nikodym μπορούμε να βρούμε μια (μονοσήμαντα ορισμένη σχεδόν παντού) συνάρτηση h τέτοια ώστε

$$\gamma(E) = \int_E h(x)dx = \int \chi_E \cdot h\,dx = \int T\chi_E \cdot f\,dx \tag{2.3.3}$$

για κάθε Borel σύνολο $E \subseteq [-A, A]$.

Ξεκινώντας από αυτή τη σχέση, ορίζουμε έναν τελεστή T^* στον $L^q[-A, A]$ θέτοντας

$$T^* f = h. \tag{2.3.4}$$

Ο T^* είναι γραμμικός και συμπεριφέρεται τυπικά σαν τον συζυγή τελεστή του T. Για παράδειγμα, αν g είναι μια απλή συνάρτηση, τότε

$$\int_{-A}^{A} Tg \cdot f\,dx = \int_{-A}^{A} g \cdot T^* f\,dx. \tag{2.3.5}$$

Λήμμα 2.3.1. *Υποθέτουμε ότι ο γραμμικός τελεστής T είναι περιορισμένου τύπου p για κάποιον $1 < p < \infty$. Τότε, ο T^* είναι αθενούς τύπου q, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ τέτοια ώστε

$$\|T\chi_E\|_p \leqslant A_p \|\chi_E\|_p = A_p (m(E))^{1/p} \tag{2.3.6}$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [-A, A]$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $B_q > 0$ τέτοια ώστε

$$\lambda_{T^* f}(y) \leqslant \left(\frac{B_q}{y}\right)^q \|f\|_q^q \tag{2.3.7}$$

για κάθε $f \in L^q[-A, A]$ και για κάθε $y > 0$.

Έστω $f \in L^q[-A, A]$ και έστω $h := T^* f$. Ορίζουμε $\lambda(y) = \lambda_h(y) = m(E_y)$ όπου, ως συνήθως, $E_y = \{x : |h(x)| > y\}$. Γράφουμε $E_y = E_y^+ \cup E_y^-$, όπου

$$E_y^+ = \{x : h(x) > y\} \quad \text{και} \quad E_y^- = \{x : h(x) < -y\}.$$

Τέλος, ορίζουμε

$$\lambda^+(y) = m(E_y^+) \quad \text{και} \quad \lambda^-(y) = m(E_y^-).$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(y) = \lambda^+(y) + \lambda^-(y).$$

Για την $\lambda^+(y)$ έχουμε την εξής εκτίμηση:

$$\begin{aligned} y\lambda^+(y) &= y\int \chi_{E_y^+}\,dx = \int \chi_{E_y^+}\cdot y\,dx \leqslant \int \chi_{E_y^+}\cdot h\,dx = \int \chi_{E_y^+}\cdot T^*f\,dx \\ &= \int T\chi_{E_y^+}\cdot f\,dx \leqslant \|T\chi_{E_y^+}\|_p\|f\|_q \leqslant A_p\|\chi_{E_y^+}\|_p\|f\|_q \\ &= A_p(m(E_y^+))^{1/p}\|f\|_q = A_p(\lambda^+(y))^{1-\frac{1}{q}}\|f\|_q, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του T^*, την ανισότητα Holder και την (2.3.6). Από αυτήν την ανισότητα προκύπτει ότι είτε $\lambda^+(y)=0$ ή

$$(\lambda^+(y))^{1/q} \leqslant \frac{A_p}{y}\|f\|_q.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ανάλογη ανισότητα για την $\lambda^-(y)$, άρα

$$\lambda(y) = \lambda^+(y) + \lambda^-(y) \leqslant 2\left(\frac{A_p}{y}\right)^q \|f\|_q^q,$$

που είναι ακριβώς η (2.3.7) με $B_q = 2^{1/q}A_p$. □

Θεώρημα 2.3.2 (Stein-Weiss). *Έστω $1<p_0<p_1<\infty$. Αν ο γραμμικός τελεστής T είναι περιορισμένου τύπου p_0 και p_1 τότε ο T είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $p\in(p_0,p_1)$.*

Απόδειξη. Έστω $p\in(p_0,p_1)$. Από το Λήμμα 2.1.8 έχουμε ότι ο T είναι περιορισμένου τύπου p' για κάθε $p'\in(p_0,p_1)$ και εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.3.1 βλέπουμε ότι ο T^* είναι αθενούς τύπου q' για κάθε $q'\in(q_1,q_0)$, όπου q_i είναι ο συζυγής εκθέτης του p_i. Επιλέγουμε $p_0'<p_1'$ με $p_0<p_0'<p<p_1'<p_1$. Τότε, ο T^* είναι ασθενούς τύπου q_1' και q_0', όπου q_i' είναι ο συζυγής εκθέτης του p_i'. Από το θεώρημα του Marcinkiewicz (Θεώρημα 2.1.9) συμπεραίνουμε ότι ο T^* είναι ισχυρού τύπου q, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Ειδικότερα, ο T^* είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής στον $L^q[-A,A]$, άρα ο συζυγής γραμμικός τελεστής $(T^*)^{\mathrm{adj}}$ είναι φραγμένος γραμμμικός τελεστής στον $L^p[-A,A]$. Επίσης, για κάθε απλή συνάρτηση f έχουμε $Tf,(T^*)^{\mathrm{adj}}\in L^p[-A,A]$ και για κάθε $g\in L^q[-A,A]$ ισχύει

$$\int (T^*)^{\mathrm{adj}}f\cdot g\,dx = \int f(T^*g)\,dx$$

και

$$\int (Tf)g\,dx = \int f\cdot T^*g\,dx.$$

Αφού

$$\int_{-A}^{A}(Tf-(T^*)^{\mathrm{adj}})g\,dx = 0$$

για κάθε $g \in L^q[-A, A]$, συμπεραίνουμε ότι $Tf = (T^*)^{\mathrm{adj}} f$ για κάθε απλή f. Όμως, οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^p[-A, A]$ και από τη συνέχεια του $(T^*)^{\mathrm{adj}}$ και τη γραμμικότητα των T και $(T^*)^{\mathrm{adj}}$ έχουμε ότι ο T είναι ομοιόμορφα συνεχής στις απλές συναρτήσεις, αφού αν f_1, f_2 είναι απλές συναρτήσεις έχουμε

$$\|Tf_1 - Tf_2\|_p = \|T(f_1 - f_2)\|_p = \|(T^*)^{\mathrm{adj}}(f_1 - f_2)\|_p \leqslant \|(T^*)^{\mathrm{adj}}\| \cdot \|f_1 - f_2\|_p.$$

Συνεπώς, ο T επεκτείνεται σε φραγμένο γραμμικό τελεστή σε ολόκληρο τον $L^p[-A, A]$, που δεν είναι άλλος από τον $(T^*)^{\mathrm{adj}}$. Αφού ο $(T^*)^{\mathrm{adj}}$ είναι ισχυρού τύπου p, έπεται ότι το ίδιο ισχύει και για τον T. $\square$

2.4 Θεώρημα Carleson-Hunt

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το θεώρημα Carleson-Hunt κάνοντας την υπόθεση ότι ο τελεστής M που θα οριστεί παρακάτω είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι ο στόχος της εργασίας.

Θα θεωρήσουμε συναρτήσεις f που ορίζονται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Χρησιμοποιούμε κάποια πολύ γνωστά αποτελέσματα για τους χώρους $L^p[-\pi, \pi]$, τα οποία δεν θα αποδείξουμε:

(i) Αν $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ τότε

$$L^p[-\pi, \pi] \subseteq L^q[-\pi, \pi]. \tag{2.4.1}$$

(ii) Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $f \in L^p[-\pi, \pi]$, $1 \leqslant p < \infty$, μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο p_ε τέτοιο ώστε

$$\|f - p_\varepsilon\|_p < \varepsilon. \tag{2.4.2}$$

(iii) Έστω $1 \leqslant p \leqslant \infty$, έστω $f \in L^p[-\pi, \pi]$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L^p[-\pi, \pi]$ τέτοια ώστε $\|f_n - f\|_p \to 0$ όταν $n \to \infty$. Τότε, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) τέτοια ώσττε

$$f_{k_n}(x) \to f(x) \;\text{ σχεδόν για κάθε } x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.4.3}$$

Από τον εγκλεισμό (2.4.1) έπεται ότι $L^p[-\pi, \pi] \subseteq L^1[-\pi, \pi]$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Έστω $f \in L^1[-\pi, \pi]$. Τότε, οι συντελεστές Fourier c_n, $n \in \mathbb{Z}$, ορίζονται καλά από την σχέση

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Συμβολίζουμε με $s_n(x; f)$ το μερικό άθροισμα

$$s_n(x; f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \qquad n \geqslant 0$$

της σειράς Fourier της f.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση όπου $1 < p < \infty$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ την κλάση των συναρτήσεων με τιμές στο $[0, \infty]$. Ορίζουμε έναν τελεστή $M : L^p[-\pi, \pi] \longrightarrow \mathcal{F}$ ως εξής:

$$Mf(x) = \sup\{|s_n(x; f)| : n \geqslant 0\}. \tag{2.4.4}$$

Είναι φανερό ότι ο M είναι υπογραμμικός, δηλαδή

$$M(f + g) \leqslant Mf + Mg.$$

Όπως θα δούμε, ισχύει το εξής πολύ βαθύ θεώρημα:

Θεώρημα 2.4.1. *Ο τελεστής M είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$. Ακριβέστερα, για κάθε $1 < p < \infty$ υπάρχει σταθερά $C_p > 0$ τέτοια ώστε*

$$\|Mf\|_p \leqslant C_p \|f\|_p \tag{2.4.5}$$

για κάθε $f \in L^p[-\pi, \pi]$.

Δεχόμενοι το Θεώρημα 2.4.1 μπορούμε εύκολα να δείξουμε το θεώρημα Carleson-Hunt.

Θεώρημα 2.4.2 (Carleson-Hunt)**.** *Έστω $1 < p \leqslant \infty$. Για κάθε $f \in L^p[-\pi, \pi]$ έχουμε*

$$s_N(x; f) \to f(x) \ \ \text{σχεδόν για κάθε } x \in [-\pi, \pi]$$

όταν $N \to \infty$.

Απόδειξη. Αφού $L^\infty[-\pi, \pi] \subseteq L^p[-\pi, \pi]$ για κάθε $1 < p < \infty$, μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση $1 < p < \infty$. Θεωρούμε ακολουθία (g_n) στον $C^2[-\pi, \pi]$ τέτοια ώστε $\|f - g_n\|_p \to 0$.

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ έχουμε

$$s_N(f; x) = s_N(f - g_n; x) + s_N(g_n; x).$$

Άρα,

$$|s_N(f; x) - f(x)| \leqslant |s_N(f - g_n; x)| + |s_N(g_n; x) - f(x)|.$$

Αφού η g_n είναι C^2-συνάρτηση στο $[-\pi,\pi]$ έχουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} s_N(g_n;x) = g(x)$$

για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$. Άρα, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ έχουμε

$$\begin{aligned} h(x) := \limsup_{N\to\infty} |s_N(f;x)-f(x)| &\leqslant \limsup_{N\to\infty} |s_N(f-g_n;x)| + |g_n(x)-f(x)| \\ &\leqslant \sup_n |s_N(f-g_n;x)| + |g_n(x)-f(x)| \\ &\leqslant M(f-g_n)(x) + |g_n(x)-f(x)|. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $0\leqslant h\leqslant M(f-g_n)+|g_n-f|$. Ειδικότερα,

$$\|h\|_p \leqslant \|M(f-g_n)\|_p + \|g_n-f\|_p.$$

Από το Θεώρημα 2.4.1 έχουμε $\|M(f-g_n)\|_p \leqslant C_p\|f-g_n\|_p$ (ο M είναι ισχυρού τύπου p). Συνεπώς,

$$\|h\|_p \leqslant C_p\|f-g_n\|_p + \|f-g_n\|_p = (C_p+1)\|f-g_n\|_p \to 0$$

όταν $n\to\infty$. Έπεται ότι $\|h\|_p=0$, άρα $h(x)=0$ σχεδόν για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$. Δηλαδή,

$$\limsup_{N\to\infty} |s_N(f;x)-f(x)| = h(x) = 0$$

σχεδόν για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$, το οποίο αποδεικνύει ότι $s_N(f;x)\to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$. $\square$

Κεφάλαιο 3

Μετασχηματισμός Hilbert

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε τον μετασχηματισμό Hilbert και τον μεγιστικό μετασχηματισμό Hilbert. Ακολουθούμε το βιβλίο [3] του Garsia (η κλασική αναφορά είναι το βιβλίο [10] του Titchmarsh).

Οι δύο μετασχηματισμοί ορίζονται τυπικά στην Παράγραφο 3.1. Από τον ορισμό έπεται άμεσα ότι ο μεγιστικός μετασχηματισμός Hilbert είναι καλά ορισμένος. Το γεγονός όμως ότι ο μετασχηματισμός Hilbert είναι επίσης καλά ορισμένος, δεν είναι και τόσο προφανές. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού δίνεται στην Παράγραφο 3.2. Χρησιμοποιούμε δύο βοηθητικούς μετασχηματισμούς P_y και Q_y, οι οποίοι σε συνδυασμό με τον μεγιστικό τελεστή των Hardy-Littlewood μας βοηθούν να αποδείξουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Hilbert. Επιπλέον, αποδεικνύουμε ότι ο μετασχηματισμός Hilbert και ο μεγιστικός μετασχηματισμός Hilbert είναι τελεστές τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$.

Τέλος, στην Παράγραφο 3.3 αποδεικνύουμε κάποιες εκθετικές εκτιμήσεις για τον μετασχηματισμό Hilbert και τον μεγιστικό μετασχηματισμό Hilbert. Τα αποτελέσματα αυτά είναι της ίδιας φύσης με την εκθετική εκτίμηση που αποδείξαμε στο Θεώρημα 2.2.6 για τον μεγιστικό τελεστή των Hardy-Littlewood.

3.1 Οι τελεστές P_y και Q_y

Ορισμός 3.1.1. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $y > 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση $H_y f$ που ορίζεται από την

(3.1.1)
$$H_y f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\{|x-t| \geqslant y\}} \frac{f(t)}{x-t} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ο *μετασχηματισμός Hilbert* Hf της f ορίζεται κατόπιν ως εξής:

(3.1.2)
$$Hf(x) = \lim_{y \to 0^+} H_y f(x) = \frac{1}{\pi}\, (\mathrm{pv}) \int \frac{f(t)}{x-t}\, dt,$$

όπου (pv) σημαίνει «κύρια τιμή» (principal value). Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η συνάρτηση $Hf(x)$ ορίζεται σχεδόν παντού.

Θεωρούμε επίσης τον *μεγιστικό μετασχηματισμό Hilbert* H^*f της f, ο οποίος ορίζεται από την

$$H^*f(x) = \sup\{|H_y f(x)| : y > 0\}. \tag{3.1.3}$$

Στις εφαρμογές θα θεωρούμε συναρτήσεις f που ορίζονται σε κάποιο φραγμένο διάστημα. Έτσι, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέτουμε στη συνέχεια ότι όλες οι συναρτήσεις $f, g, \ldots$ που εξετάζουμε έχουν συμπαγή φορέα. Αν κάνουμε αυτήν την υπόθεση, κάποιες από τις αποδείξεις γίνονται απλούστερες. Αξίζει όμως τον κόπο να σημειώσουμε ότι τα αποτελέσματα ισχύουν γενικότερα.

Ορισμός 3.1.2. Για κάθε $y > 0$ ορίζουμε δύο γραμμικούς τελεστές P_y και Q_y, που σχετίζονται με τον H_y, ως εξής:

$$P_y f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.1.4}$$

και

$$Q_y f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}dt, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.1.5}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι οι $P_y f(x)$ και $Q_y f(x)$ είναι καλά ορισμένες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και *τυπικά* έχουμε $Q_0 f(x) = Hf(x)$. Πράγατι, έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $y > 0$ και για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant \frac{y}{(x-t)^2+y^2} \leqslant \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y},$$

άρα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{y}\,dt = \frac{1}{y}\|f\|_1 < \infty,$$

δηλαδή η $P_y f(x)$ ορίζεται καλά. Η γραμμικότητα του P_y είναι προφανής.

Επίσης, για κάθε $y>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\frac{|x-t|}{(x-t)^2+y^2}\,dt &= \int_{\{|x-t|\geqslant y\}}|f(t)|\,\frac{|x-t|}{(x-t)^2+y^2}\,dt\\
&\quad+\int_{\{|x-t|<y\}}|f(t)|\,\frac{|x-t|}{(x-t)^2+y^2}\,dt\\
&\leqslant \int_{\{|x-t|\geqslant y\}}|f(t)|\,\frac{|x-t|}{(x-t)^2}\,dt+\int_{\{|x-t|<y\}}|f(t)|\,\frac{|x-t|}{y^2}\,dt\\
&\leqslant \int_{\{|x-t|\geqslant y\}}|f(t)|\,\frac{1}{|x-t|}\,dt+\int_{\{|x-t|<y\}}|f(t)|\,\frac{1}{y}\,dt\\
&\leqslant \frac{1}{y}\int_{\{|x-t|\geqslant y\}}|f(t)|\,dt+\frac{1}{y}\int_{\{|x-t|<y\}}|f(t)|\,dt\\
&= \frac{1}{y}\|f\|_1<\infty,
\end{aligned}$$

δηλαδή για κάθε $y>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται καλά το ολοκλήρωμα

$$Q_yf(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}dt.$$

Η γραμμικότητα του Q_y ελέγχεται εύκολα.

Παρατηρήσεις 3.1.3. (α) Για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R})$ και για κάθε $y>0$ ισχύει ότι $P_yf\in L^1(\mathbb{R})$. Πράγματι, από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dx\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dx\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{u^2+y^2}\,du\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\left[\arctan\frac{u}{y}\right]_{u=-\infty}^{\infty}\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\cdot\pi\,dt\\
&= \|f\|_1<\infty.
\end{aligned}$$

Άρα, ο τελεστής P_y ορίζεται καλά από τον $L^1(\mathbb{R})$ στον $L^1(\mathbb{R})$ και για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\|P_yf\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}|P_yf(x)|\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt\right|\,dx\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt\,dx\leqslant\|f\|_1.
\end{aligned}$$

(β) Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $P_y f(x)$ είναι η συνέλιξη $P_y f(x) = (f * k_y)(x)$ της f με την ολοκληρώσιμη συνάρτηση

$$k_y(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(z^{-1}),$$

όπου $z = x + iy$. Η k_y παίρνει θετικές τιμές, είναι άρτια, φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, και

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_y(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{y}\Big|_{x=-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.$$

Η οικογένεια $(k_y)_{y>0}$ είναι προσέγγιση της μονάδας καθώς $y \to 0^+$. Πράγματι, αφού $\|k_y\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} k_y(x)\, dx = 1$ για κάθε $y > 0$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $y > 0$ ισχύουν οι ανισότητες

$$|k_y(x)| = k_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2} = \frac{1}{\pi y}$$

και

$$|k_y(x)| = k_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2} = \frac{y}{\pi x^2}.$$

Έπεται ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει

$$P_y f(x) = (f * k_y)(x) \longrightarrow f(x)$$

καθώς το $y \to 0^+$, για κάθε σημείο Lebesgue x της f. Δηλαδή,

$$\lim_{y \to 0^+} P_y f(x) = f(x)$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Αντίστοιχα, η $Q_y f(x)$ είναι η συνέλιξη $P_y f(x) = (f * \ell_y)(x)$ της f με τη συνάρτηση

$$\ell_y(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}(z^{-1}).$$

Όμως, η ℓ_y δεν είναι ολοκληρώσιμη. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} |\ell_y(x)|\, dx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{|x|}{x^2 + y^2}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2 + y^2}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \log(x^2 + y^2)\Big|_{x=0}^{\infty} = +\infty.\end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.1.4. Έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχής L^∞-συνάρτηση. Τότε, μπορούμε να ελέγξουμε ότι η

$$\varphi(x, y) = P_y f(x) = (f * k_y)(x)$$

είναι η μοναδική *φραγμένη* λύση του προβλήματος Dirichlet στο άνω ημιεπίπεδο για τον τελεστή Laplace

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi(x,y)=0, \qquad x\in\mathbb{R}, y>0\\ &\varphi(x,0)=f(x), \qquad x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Πράγματι, έχουμε

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt.$$

Σταθεροποιούμε $x_0\in\mathbb{R}$, $y_0>0$, και θέτουμε

$$g(t;x,y)=f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}\times(0,\infty).$$

Τότε, για κάθε $h>0$ έχουμε

$$\frac{g(t;x_0,y_0+h)-g(t;x_0,y_0)}{h}\longrightarrow f(t)\frac{(x_0-t)^2-y_0^2}{((x_0-t)^2+y_0^2)^2}.$$

Επίσης, εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{(x_0-t)^2-y_0^2}{((x_0-t)^2+y_0^2)^2}\,dt$$

και

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{x_0-t}{((x_0-t)^2+y_0^2)^2}\,dt.$$

Με παρόμοιο τρόπο ελέγχουμε ότι

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y^2}(x_0,y_0)=-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{3(x_0-t)^2-y_0^2}{((x_0-t)^2+y_0^2)^3}\,dt$$

και

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{3(x_0-t)^2-y_0^2}{((x_0-t)^2+y_0^2)^3}\,dt.$$

Συνεπώς,

$$\Delta\varphi(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)(x_0,y_0)=0.$$

Επίσης,

$$\varphi(x,0)=\lim_{y\to 0^+}\varphi(x,y)=\lim_{y\to 0^+}P_yf(x)=\lim_{y\to 0^+}(f*k_y)(x)=f(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού η f είναι συνεχής και τα σημεία συνέχειας της f είναι σημεία Lebesgue της f.

Τέλος, ελέγχουμε ότι η φ είναι φραγμένη στο άνω ημιεπίπεδο: πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $y > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}|\varphi(x,y)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt\\ &= \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\cdot\pi = \|f\|_\infty,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\sup\{|\varphi(x,y)| : x \in \mathbb{R}, y > 0\} \leqslant \|f\|_\infty < +\infty.$$

Οι ταυτότητες (3.1.7), (3.1.8) και (3.1.9) που ακολουθούν (και θα χρησιμοποιηθούν αργότερα) αποδεικνύονται με διάφορους τρόπους. Θα χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο που βασίζεται στην προηγούμενη παρατήρηση σχετικά με το πρόβλημα Dirichlet (3.1.6). Μαντεύοντας κάθε φορά μια φραγμένη αρμονική συνάρτηση $\varphi(x,y)$ στο άνω ημιεπίπεδο, η οποία ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $\varphi(x,0) = f(x)$, και χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα της φραγμένης λύσης της (3.1.6), μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε ότι αυτή η συνάρτηση $\varphi(x,y)$ είναι ίση με το ολοκλήρωμα στην (3.1.4).

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_2}{(t-x_2)^2+y_2^2}\cdot\frac{y_1}{(x_1-t)^2+y_1^2}\,dt = \frac{y_1+y_2}{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}. \tag{3.1.7}$$

Έστω $z = x + iy$, $y \geqslant 0$. Θεωρούμε την

$$\varphi(x,y) = -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z-x_2+iy_2}\right) = \frac{y+y_2}{(x-x_2)^2+(y+y_2)^2}.$$

Η $\varphi(x,y)$ είναι φραγμένη και αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$. Πράγματι, για κάθε $z \in H$,

$$|\varphi(z)| = \left|\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z-x_2+iy_2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{|z-(x_2-iy_2)|} \leqslant \frac{1}{y_2},$$

δηλαδή $\|\varphi\|_\infty \leqslant \frac{1}{y_2} < +\infty$. Η συνάρτηση $z \mapsto -\frac{1}{z-x_2+iy_2}$ είναι ολόμορφη στο H, συνεπώς η $\varphi(z)$ είναι αρμονική ως το φανταστικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης. Επίσης, η συνάρτηση

$$\varphi(x,0) = f(x) = \frac{y_2}{(x-x_2)^2+y_2^2}$$

είναι συνεχής (ως ρητή) και φραγμένη (από $1/y_2$) άρα η $\varphi(x,y)$ είναι η φραγμένη λύση της (3.1.6). Έπεται ότι $\varphi(x_1,y_1) = (f * k_{y_1})(x_1)$, και αυτό μας δίνει ακριβώς την (3.1.7).

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t-x_2}{(t-x_2)^2+y_2^2}\cdot\frac{y_1}{(x_1-t)^2+y_1^2}\,dt = \frac{x_1-x_2}{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}. \tag{3.1.8}$$

Σε αυτήν την περίπτωση επιλέγουμε σαν $\varphi(x,y)$ την

$$\varphi(x,y) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z - x_2 + iy_2}\right) = \frac{x - x_2}{(x-x_2)^2 + (y+y_2)^2}.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{x_1 - iy_1 - z} \cdot \frac{1}{z - x_2 - iy_2},$$

η οποία είναι αναλυτική στο άνω ημιεπίπεδο, με την εξαίρεση του απλού πόλου $x_2 + iy_2$. Χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικά υπόλοιπα παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x_1 - iy_1 - t} \cdot \frac{1}{t - x_2 - iy_2}\, dt &= 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{x_1 - iy_1 - z} \cdot \frac{1}{z - x_2 - iy_2}; x_2 + iy_2\right] \\ &= \frac{2\pi i}{x_1 - x_2 - i(y_1+y_2)}.\end{aligned}$$

Παίρνοντας τα πραγματικά μέρη σε αυτήν την ισότητα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1 - t}{(x_1-t)^2 + y_1^2} \cdot \frac{t - x_2}{(t-x_2)^2 + y_2^2}\, dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1}{(x_1-t)^2 + y_1^2} \cdot \frac{y_2}{(t-x_2)^2 + y_2^2}\, dt \\ &= -2\pi \frac{y_1 + y_2}{(x_1-x_2)^2 + (y_1+y_2)^2}.\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας αυτό το αποτέλεσμα με την (3.1.7) καταλήγουμε στην ταυτότητα

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t - x_1}{(x_1-t)^2 + y_1^2} \cdot \frac{t - x_2}{(t-x_2)^2 + y_2^2}\, dt = \frac{y_1 + y_2}{(x_1-x_2)^2 + (y_1+y_2)^2}. \tag{3.1.9}$$

Λήμμα 3.1.5. *Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ισχύουν οι*

$$Q_{y_1}(Q_{y_2} f) = -P_{y_1+y_2} f \tag{3.1.10}$$

και

$$P_{y_1}(Q_{y_2} f) = Q_{y_1+y_2} f. \tag{3.1.11}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini και την (3.1.9) έχουμε

$$\begin{aligned}Q_{y_1}(Q_{y_2} f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q_{y_2} f(t) \cdot \frac{x - t}{(x-t)^2 + y_1^2}\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot \frac{t-u}{(t-u)^2 + y_2^2}\, du\right] \frac{x-t}{(x-t)^2 + y_1^2}\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y_1^2} \cdot \frac{t-u}{(t-u)^2 + y_2^2}\, dt\right] du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot \frac{-(y_1+y_2)}{(x-u)^2 + (y_1+y_2)^2} du \\ &= -P_{y_1+y_2} f(x).\end{aligned}$$

Όμοια, εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini και την (3.1.8) έχουμε

$$\begin{aligned}
P_{y_1}(Q_{y_2}f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q_{y_2}f(t)\cdot\frac{y_1}{(x-t)^2+y_1^2}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot\frac{t-u}{(t-u)^2+y_2^2}\,du\right]\frac{y_1}{(x-t)^2+y_1^2}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_1}{(x-t)^2+y_1^2}\cdot\frac{t-u}{(t-u)^2+y_2^2}\,dt\right]du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot\frac{x-u}{(x-u)^2+(y_1+y_2)^2}du \\
&= Q_{y_1+y_2}f(x).
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 3.1.6. *Για κάθε* $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ *ισχύουν οι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\cdot Q_y g\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} Q_y f\cdot g\,dx \tag{3.1.12}$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty}[Q_{y_1+y_2}f - Q_{y_1}f]^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\cdot[P_{2y_1+2y_2}f - 2P_{2y_1+y_2}f + P_{2y_1}f]\,dx. \tag{3.1.13}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)Q_y(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}dt\right]dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\frac{t-x}{(t-x)^2+y^2}dx\right]dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} g(t)Q_y f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε την (3.1.13) γράφουμε

(3.1.14)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} Q_{y_1+y_2}f\cdot Q_{y_1+y_2}f\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+(y_1+y_2)^2}dt\right]\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{x-u}{(x-u)^2+(y_1+y_2)^2}du\right]dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-t}{(x-t)^2+(y_1+y_2)^2}\frac{x-u}{(x-u)^2+(y_1+y_2)^2}dx\right)du\right]dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{2y_1+2y_2}{(t-u)^2+(2y_1+2y_2)^2}du\right]dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)P_{2y_1+2y_2}(t)dt,
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini και την ταυτότητα (3.1.9). Όμοια δουλεύουμε με τους άλλους όρους. □

Το επόμενο λήμμα συνδέει τον τελεστή P_y με τον μεγιστικό τελεστή Θ.

Λήμμα 3.1.7. *Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ και για κάθε $y > 0$,*

$$|P_y f(x)| \leqslant (P_y|f|)(x) \leqslant \Theta f(x) = (\Theta|f|)(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.1.15}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
P_y f(x) = (f * k_y)(x) &= \int_{\infty}^{\infty} f(x-t) k_y(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \left[\int_0^{k_y(t)} du \right] dt = \int_0^{\infty} \left[\int_{\{|t| \leqslant k_y^{-1}(u)\}} f(x-t)\, dt \right] du \\
&= \int_0^{\infty} 2k_y^{-1}(u) \left[\frac{1}{2k_y^{-1}(u)} \int_{\{|t| \leqslant k_y^{-1}(u)\}} f(x-t)\, dt \right] du \\
&\leqslant \int_0^{\infty} 2k_y^{-1}(u) \Theta f(x)\, du = \Theta f(x),
\end{aligned}$$

όπου k_y^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της k_y στο $[0, \infty)$. □

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, *τυπικά* έχουμε $Q_0 f(x) = Hf(x)$. Αυτό που ισχύει είναι το εξής:

Λήμμα 3.1.8. *Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει*

$$\lim_{y \to 0^+} \big(H_y f(x) - Q_y f(x) \big) = 0 \ \text{ σχεδόν παντού.} \tag{3.1.16}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
H_y f(x) - Q_y f(x) = &\frac{1}{\pi} \int_{\{|x-t| \geqslant y\}} f(t) \left[\frac{1}{x-t} - \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} \right] dt \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{\{|x-t| < y\}} f(t) \cdot \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2}\, dt,
\end{aligned}$$

και, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|x - t| \geqslant y$ στο πρώτο ολοκλήρωμα και $|x - t| < y$ στο δεύτερο, γράφουμε

$$\begin{aligned}
&|H_y f(x) - Q_y f(x)| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{\{|x-t| \geqslant y\}} \frac{|f(t)| y^2}{|x-t|((x-t)^2 + y^2)}\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\{|x-t| < y\}} \frac{|f(t)| y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{\{|x-t| \geqslant y\}} \frac{|f(t)| y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\{|x-t| < y\}} \frac{|f(t)| y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \\
&\quad = (P_y|f|)(x).
\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι

$$|H_y f(x) - Q_y f(x)| \leqslant (P_y|f|)(x). \tag{3.1.17}$$

Από την ολοκληρωτική αναπαράσταση της $H_y f - Q_y f$ βλέπουμε ότι ο τελεστής $H_y - Q_y$ επεκτείνεται στις σταθερές συναρτήσεις α και ότι $(H_y - Q_y)(\alpha) = 0$. Συνεπώς, το αριστερό μέλος της (3.1.17) δεν μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε την f με την $f - \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Επιλέγοντας $\alpha = f(x)$ βλέπουμε ότι στο δεξιό μέλος της (3.1.17) μπορούμε να αντικαταστήσουμε την $f(t)$ με την $f(t) - f(x)$. Έτσι, παίρνουμε

$$|H_y f(x) - Q_y f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(x)| \cdot \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt. \tag{3.1.18}$$

Για την (3.1.16) αρκεί πλέον να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(x)| \cdot \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \longrightarrow 0 \tag{3.1.19}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η (3.1.19) προκύπτει εύκολα αν η f είναι συνεχής με συμπαγή φορέα. Για να αποδείξουμε την (3.1.19) στη γενική περίπτωση, θέτουμε

$$\Omega f(x) = \limsup_{y \to 0^+} |H_y f(x) - Q_y f(x)|.$$

Από τις (3.1.17) και (3.1.15) έχουμε ότι

$$\Omega f(x) \leqslant \Theta f(x),$$

οπότε το Θεώρημα 2.2.1 μας δίνει

$$m(\{x : \Omega f(x) > y\}) \leqslant \frac{4}{y}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx. \tag{3.1.20}$$

Τώρα, το αριστερό μέλος της (3.1.20) παραμένει αμετάβλητο αν από την f αφαιρέσουμε κάποια συνεχή συνάρτηση g με συμπαγή φορέα. Συνεπώς,

$$m(\{x : \Omega f(x) > y\}) \leqslant \frac{4}{y}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η κλάση των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνή στον $L^1(\mathbb{R})$ καταλήγουμε στην

$$m(\{x : \Omega f(x) > y\}) = 0$$

για κάθε $y > 0$, απ' όπου έπεται ότι $\Omega f(x) = 0$ σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Θεώρημα 3.1.9. *Έστω $1 < p \leqslant \infty$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R})$ τότε $P_y f \in L^p(\mathbb{R})$ και*

$$\|P_y f\|_p \leqslant \|f\|_p. \tag{3.1.21}$$

Δηλαδή, ο τελεστής P_y είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p \leqslant \infty$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $1 < p < \infty$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
|P_y f(x)|^p &\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} k_y(x-t)|f(t)|\,dt\right)^p \\
&= \left(\int_{\infty}^{\infty} k_y(x-t)^{1/p}|f(t)| \cdot k_y(x-t)^{1/q} dt\right)^p \\
&\leqslant \left(\int_{\infty}^{\infty} k_y(x-t)|f(t)|^p dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} k_y(x-t) dt\right)^{p/q} \\
&= \int_{\infty}^{\infty} k_y(x-t)|f(t)|^p dt.
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x παίρνουμε

$$\|P_y f\|_p^p \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p \left(\int_{-\infty}^{\infty} k_y(x-t) dx\right) dt = \|f\|_p^p.$$

Στην περίπτωση $p = \infty$ έχουμε

$$|P_y f(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} k_y(x-t)|f(t)| dt \leqslant \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} k_y(x-t) dt = \|f\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\|P_y f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. □

Το γεγονός ότι ο τελεστής P_y είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $p > 1$ προκύπτει και από την (3.1.15) αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.2.1 και το Πόρισμα 2.2.2. Η απόδειξη όμως που δώσαμε πιο πάνω δείχνει επιπλέον ότι η σταθερά στην ανισότητα (3.1.21) μπορεί να επιλεγεί ίση με 1.

Ένα πόρισμα του Θεωρήματος 3.1.9 είναι το εξής.

Πόρισμα 3.1.10. *Έστω $1 < p \leqslant \infty$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R})$ τότε*

$$\lim_{y \to 0^+} \|P_y f - f\|_p = 0 \tag{3.1.22}$$

και

$$\lim_{y \to 0^+} P_y f(x) = f(x) \ \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{3.1.23}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι οι (3.1.22) και (3.1.23) ισχύουν αν η f είναι συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Έστω $f \in L^p(\mathbb{R})$ και $\varepsilon > 0$. Υπάχει συνεχής συνάρτηση g_ε με συμπαγή φορέα, τέτοια ώστε $\|f - g_\varepsilon\|_p < \varepsilon$. Από την ανισότητα Minkowski έχουμε

$$\begin{aligned}\|P_y f - f\|_p &\leqslant \|P_y(f - g_\varepsilon)\|_p + \|P_y g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p + \|g_\varepsilon - g\|_p \\ &\leqslant 2\|f - g_\varepsilon\|_p + \|P_y g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p < 2\varepsilon + \|P_y g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p,\end{aligned}$$

άρα

$$\limsup_{y \to 0^+} \|P_y f - f\|_p \leqslant 2\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται η (3.1.22).

Για να αποδείξουμε την (3.1.23) θέτουμε

$$\Omega f(x) = \limsup_{y \to 0^+} |P_y f(x) - f(x)|.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\Omega f(x) \leqslant \Theta f(x) + |f(x)|,$$

και ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης της (3.1.19) παίρνουμε το ζητούμενο. □

Δυστυχώς, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1.9 για να εκτιμήσουμε την $\|Q_y f\|_p$, γιατί η συνάρτηση ℓ_y δεν είναι ολοκληρώσιμη. Ομοίως, δεν μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να εκτιμήσουμε την $\|H_y f\|_p$.

3.2 Ύπαρξη του μετασχηματισμού Hilbert

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να αποδείξουμε ότι το όριο

$$Hf(x) = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\{|x-t| \geqslant y\}} \frac{f(t)}{x - t}\, dt \tag{3.2.1}$$

υπάρχει σχεδόν παντού αν η f είναι ολοκληρώσιμη, και να αποδείξουμε εκτιμήσεις για τον μετασχηματισμό Hilbert H και τον μεγιστικό μετασχηματισμό Hilbert H^* που ορίστηκε στην (3.1.3).

Ξεκινάμε με ένα λήμμα του Loomis.

Λήμμα 3.2.1. *Έστω $c_1, c_2, \ldots, c_n$ θετικές πραγματικές σταθερές και έστω $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί. Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{x - x_j}.$$

Τότε, για κάθε $\lambda > 0$,

$$m(\{x : g(x) > \lambda\}) = m(\{x : g(x) < -\lambda\}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} c_j. \tag{3.2.2}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος για το $m(\{x : g(x) > \lambda\})$. Παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύει τον ισχυρισμό για το $m(\{x : g(x) < -\lambda\})$.

Η συνάρτηση $g(x)$ φθίνει από το $+\infty$ προς το $-\infty$ σε καθένα από τα διαστήματα (x_j, x_{j+1}), $j = 1, \ldots, n-1$. Στο $(-\infty, x_1)$ η $g(x)$ φθίνει από το 0 προς το $-\infty$, ενώ στο $(x_n, +\infty)$ φθίνει από το $+\infty$ προς το 0. Έτσι, αν $a_1(\lambda), \ldots, a_n(\lambda)$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$g(x) = \lambda, \tag{3.2.3}$$

όπου $a_j(\lambda) \in (x_j, x_{j+1})$ αν $j = 1, \ldots, n-1$ και $a_n(\lambda) \in (x_n, +\infty)$, έχουμε

$$m(\{x : g(x) > \lambda\}) = \sum_{j=1}^{n}(a_j(\lambda) - x_j). \tag{3.2.4}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (3.2.3) με

$$\frac{1}{\lambda}\prod_{j=1}^{n}(x - x_j),$$

βλέπουμε ότι οι $a_1(\lambda), \ldots, a_n(\lambda)$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\prod_{j=1}^{n}(x - x_j) - \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} c_j \prod_{k\neq j}(x - x_k). \tag{3.2.5}$$

Αφού το άθροισμα των ριζών του πολυωνύμου ισούται με τον αντίθετο του συντελεστή του x^{n-1}, τελικά παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} x_j + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} c_j, \tag{3.2.6}$$

δηλαδή

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j(\lambda) - x_j) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} c_j. \tag{3.2.7}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (3.2.4) παίρνουμε την (3.2.2). □

Θεώρημα 3.2.2. *Ο τελεστής $H^*f(x) = \sup\{|H_y f(x)| : y > 0\}$ είναι ασθενούς τύπου 1.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι

$$m(\{x : H^*f(x) > \lambda\}) \leqslant \frac{128}{\lambda\pi}\|f\|_1 \tag{3.2.8}$$

για κάθε $\lambda > 0$ και για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα.

Γενικά, μπορούμε να γράψουμε $f = f^+ - f^-$, όπου $f^+, f^- \geqslant 0$ και $|f| = f^+ + f^-$. Επιπλέον,

$$m(\{x : H^*f(x) > \lambda\}) \leqslant m(\{x : H^*(f^+)(x) > \lambda/2\}) + m(\{x : H^*(f^-)(x) > \lambda/2\}), \tag{3.2.9}$$

άρα μπορούμε στη συνέχεια να υποθέτουμε ότι $f \geqslant 0$.

Έστω $\lambda > 0$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε τα σύνολα

$$E_\varepsilon^+ = \left\{x : \sup_{y \geqslant \varepsilon} H_y f(x) > \lambda\right\} \quad \text{και} \quad E_\varepsilon^+ = \left\{x : \sup_{y \geqslant \varepsilon}(-H_y f(x)) > \lambda\right\}. \tag{3.2.10}$$

Παρατηρήστε ότι, ακόμα κι αν η f είναι μη αρνητική, η $H_y f$ δεν είναι αναγκαστικά μη αρνητική – βλέπε (3.1.1).

Θα θεωρήσουμε μόνο το σύνολο E_ε^+ και θα αποδείξουμε ότι

$$m(E_\varepsilon^+) \leqslant \frac{32}{\lambda\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt.$$

Η απόδειξη για το E_ε^- είναι παρόμοια.

Για κάθε φραγμένο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ συμβολίζουμε με $c(I)$ το μέσο του I και με I^c το συμπλήρωμα του I.

Θεωρούμε την οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων I για τα οποία

$$\frac{1}{\pi}\int_{I^c} f(t)\cdot\frac{1}{c(I) - t}\,dt > \lambda. \tag{3.2.11}$$

Από τον ορισμό του E_ε^+ αυτά τα διαστήματα I καλύπτουν το E_ε^+, και καθώς το E_ε^+ είναι φραγμένο (εδώ χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι η f έχει συμπαγή φορέα) πεπερασμένα το πλήθος από αυτά τα διαστήματα καλύπτουν το E_ε^+. Χρησιμοποιώντας το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 2.2.1 μπορούμε να βρούμε ξένα διαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ τέτοια ώστε

$$m(E_\varepsilon^+) \leqslant 4\sum_{j=1}^n m(I_j) \tag{3.2.12}$$

και

$$\frac{1}{\pi}\int_{I_j^c} f(t)\cdot\frac{1}{c(I_j) - t}\,dt > \lambda, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3.2.13}$$

Η συνάρτηση $g_x(t) = \frac{1}{x-t}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\{t : |x-t| \geqslant \varepsilon\}$ και τείνει στο 0 όταν $|t| \to +\infty$. Συνεπώς, για κάθε $\delta \in (0,1)$ μπορούμε να βρούμε μια διάσπαση της πραγματικής ευθείας σε πεπερασμένα το πλήθος μικρά διαστήματα J και δύο ημιευθείες έτσι ώστε, για καθένα από τα μικρά διαστήματα J και για κάθε $j = 1, \dots, n$,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{I_j^c} f(t) \cdot \frac{1}{c(I_j) - t}\, dt - \frac{1}{\pi} \sum_{J \cap I_j = \emptyset} \int_J f(t)\, dt \cdot \frac{1}{c(I_j) - c(J)} \right| < \delta\lambda. \tag{3.2.14}$$

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε τα διαστήματα J με τέτοιον τρόπο ώστε για κάθε I_j να έχουμε είτε $J \subseteq I_j$ ή $J \cap I_j = \emptyset$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι τα διαστήματα J έχουν αυτήν την ιδιότητα. Αφού η f έχει συμπαγή φορέα και η $g_x(t)$ τείνει στο 0 όταν $|t| \to +\infty$, δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τις δύο ημιευθείες.

Ορίζουμε

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \sum_J \int_J f(t)\, dt \cdot \frac{1}{x - c(J)} \tag{3.2.15}$$

και

$$g_j(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{J \subseteq I_j} \int_J f(t)\, dt \cdot \frac{1}{x - c(J)}. \tag{3.2.16}$$

Η συνάρτηση

$$g(x) - g_j(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{J \cap I_j = \emptyset} \int_J f(t)\, dt \cdot \frac{1}{x - c(J)} \tag{3.2.17}$$

είναι φθίνουσα στο διάστημα I_j, και από τις (3.2.13) και (3.2.14) παίρνουμε, για $x = c(I_j)$,

$$g(c(I_j)) - g_j(c(I_j)) > (1-\delta)\lambda, \tag{3.2.18}$$

άρα

$$g(x) - g_j(x) > (1-\delta)\lambda \tag{3.2.19}$$

για όλα τα x στο αριστερό μισό του I_j. Έπεται ότι

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m(I_j) \leqslant m(\{x : g(x) > (1-\delta)\lambda/2\}) + \sum_{j=1}^n m(\{x : g_j(x) < -(1-\delta)\lambda/2\}). \tag{3.2.20}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.2.1 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m(I_j) &\leqslant \frac{2}{(1-\delta)\lambda} \sum_J \frac{1}{\pi} \int_J f(t)\, dt + \sum_{j=1}^n \frac{2}{(1-\delta)\lambda} \sum_{J \subseteq I_j} \frac{1}{\pi} \int_J f(t)\, dt \\ &\leqslant \frac{4}{(1-\delta)\lambda} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt. \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την (3.2.12) και αφήνοντας το $\delta \to 0^+$ παίρνουμε

$$m(E_\varepsilon^+) \leqslant \frac{32}{\lambda\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt. \tag{3.2.22}$$

Με παρόμοιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$m(E_\varepsilon^-) \leqslant \frac{32}{\lambda\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt. \tag{3.2.23}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε (για $f \geqslant 0$)

$$m(\{x : H^*f(x) > \lambda\}) = m\left(\left\{x : \sup_{y>0}|H_yf(x)| > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{64}{\lambda\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt. \tag{3.2.24}$$

Τέλος, γράφοντας $f = f^+ - f^-$ και χρησιμοποιώντας την (3.2.9) βλέπουμε ότι

$$m(\{x : H^*f(x) > \lambda\}) \leqslant \frac{128}{\lambda\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^+(t)\,dt + \frac{128}{\lambda\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^-(t)\,dt = \frac{128}{\lambda\pi}\|f\|_1. \tag{3.2.25}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.2.8), δηλαδή ότι ο H^* είναι ασθενούς τύπου 1. $\square$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι

$$Hf(x) = \lim_{y\to 0^+} H_yf(x) \tag{3.2.26}$$

σχεδόν παντού. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και έχει συμπαγή φορέα, από την

$$H_yf(x) = \frac{1}{\pi}\int_y^{\infty} \frac{f(x-t) - f(x+t)}{t}\,dt \tag{3.2.27}$$

έπεται ότι το όριο στην (3.2.26) υπάρχει για κάθε x. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ θέτουμε

$$\Omega f(x) = \limsup_{y_1,y_2\to 0^+} |H_{y_1}f(x) - H_{y_2}f(x)| \tag{3.2.28}$$

και από το Θεώρημα 3.2.2 έχουμε

$$m(\{x : \Omega f(x) > y\}) \leqslant \frac{c}{y}\|f\|_1. \tag{3.2.29}$$

Τώρα, η $\Omega f(x)$ δεν μεταβάλλεται αν αφαιρέσουμε μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με συμπαγή φορέα από την f. Άρα, καταλήγουμε στην

$$m(\{x : \Omega f(x) > y\}) = 0 \tag{3.2.30}$$

για κάθε $y > 0$, απ' όπου έπεται ότι $\Omega f(x) = 0$ σχεδόν παντού. Αυτό σημαίνει ότι το όριο στην (3.2.26) υπάρχει σχεδόν παντού, άρα έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη του μετασχηματισμού Hilbert, και εύκολα ελέγχουμε ότι είναι γραμμικός τελεστής.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.7 παρατηρούμε επίσης ότι

$$Hf(x) = \lim_{y \to 0^+} Q_y f(x) \text{ σχεδόν παντού.} \tag{3.2.31}$$

Θεώρημα 3.2.3. *Αν $f \in L^2(\mathbb{R})$ τότε $Hf \in L^2(\mathbb{R})$ και ισχύουν τα εξής:*

$$\lim_{y \to 0^+} \|Hf - Q_y f\|_2 = 0, \tag{3.2.32}$$

$$\lim_{y \to 0^+} \|Hf - H_y f\|_2 = 0, \tag{3.2.33}$$

$$\|Hf\|_2 = \|f\|_2, \tag{3.2.34}$$

$$H(Hf) = -f \text{ σχεδόν παντού.} \tag{3.2.35}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα την (3.2.32). Παίρνοντας $y_1 \to 0^+$ στην (3.1.13) βλέπουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} [Q_y f - Hf]^2 dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f| \cdot |P_{2y_2} f - 2P_{y_2} f + f| \, dx, \tag{3.2.36}$$

χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fatou, την (3.2.31) και το Πόρισμα 3.1.10. Εφαρμόζοντας ξανά το Πόρισμα 3.1.10 παίρνουμε την (3.2.32).

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την (3.2.33). Από το Λήμμα 3.1.7 έχουμε

$$\lim_{y \to 0^+} [H_y f(x) - Q_y f(x)] = 0$$

σχεδόν παντού. Επίσης, από τις (3.1.17), (3.1.15) και το Πόρισμα 2.2.2 έχουμε

$$\|H_y f - Q_y f\|_2^2 \leqslant \|\Theta f\|_2^2 \leqslant 32 \|f\|_2^2 < \infty, \tag{3.2.37}$$

άρα

$$\lim_{y \to 0^+} \|H_y f - Q_y f\|_2 = 0$$

από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Η τελευταία σχέση, μαζί με την (3.2.32) μας δίνει την (3.2.33).

Για την (3.2.34) παρατηρούμε ότι

$$\|Q_y f\|_2^2 = \int |Q_y f|^2 dx = \int f \cdot P_{2y} f \, dx \tag{3.2.38}$$

από την (3.1.14), και στη συνέχεια εφαρμόζουμε το Πόρισμα 3.1.10 και την (3.2.32).

Τέλος, αποδεικνύουμε την (3.2.35). Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Minkowski παίρνουμε

(3.2.39)
$$\|H(Hf)+f\|_2 \leqslant \|H(Hf)-Q_y(Hf)\|_2 + \|Q_y(Hf)-Q_y(Q_yf)\|_2 + \|Q_y(Q_yf)+f\|_2.$$

Από το Θεώρημα 3.1.9 και την (3.2.38) συμπεραίνουμε ότι

(3.2.40)
$$\|Q_yf\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P_{2y}f(x)\,dx \leqslant \|f\|_2\cdot\|P_{2y}f\|_2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

Εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα και την (3.1.10) στην (3.2.39) παίρνουμε

(3.2.41)
$$\|H(Hf)+f\|_2 \leqslant \|H(Hf)-Q_y(Hf)\|_2 + \|Hf-Q_yf\|_2 + \|-P_{2y}f+f\|_2.$$

Από το Πόρισμα 3.1.10 έχουμε $\|P_{2y}f-f\|_2\to 0$ και από την (3.2.32) έχουμε $\|Q_yf-Hf\|_2\to 0$ όταν $y\to 0^+$. Έπεται ότι $\|H(Hf)+f\|_2=0$, δηλαδή έχουμε την (3.2.35). □

Θεώρημα 3.2.4. *Αν $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ τότε*

(3.2.42)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f\cdot Hg\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} g\cdot Hf\,dx.$$

Απόδειξη. Ξεκινώντας από την ταυτότητα (3.1.12), παίρνουμε το όριο καθώς $y\to 0^+$ και χρησιμοποιούμε την (3.2.32). □

Από το Θεώρημα 3.2.2 έχουμε ότι ο H είναι ασθενούς τύπου 1. Από την (3.2.34) του Θεωρήματος 3.2.3 έχουμε ότι ο H είναι ισχυρού τύπου 2, άρα και ασθενούς τύπου 2. Από το θεώρημα του Marcinkiewicz (Θεώρημα 2.1.9) έπεται ότι ο H είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1<p<2$. Δηλαδή, για κάθε $1<p\leqslant 2$ υπάρχει σταθερά $c_p>0$ τέτοια ώστε

(3.2.43)
$$\|Hf\|_p \leqslant c_p\|f\|_p$$

για κάθε $f\in L^p(\mathbb{R})$.

Αν $f\in L^p(\mathbb{R})$, $1<p\leqslant 2$, και $g\in L^q(\mathbb{R})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, τότε η ταυτότητα (3.1.12) εξακολουθεί να ισχύει. Άρα, αφήνοντας το $y\to 0^+$ και χρησιμοποιώντας την

$$\left|\int g\cdot Hf\,dx\right| \leqslant c_p\|f\|_p\|g\|_q$$

συμπεραίνουμε ότι η (3.2.42) ισχύει αν $f\in L^p(\mathbb{R})$ και $g\in L^q(\mathbb{R})$. Ειδικότερα, έχουμε

(3.2.44)
$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f\cdot Hg\,dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} g\cdot Hf\,dx\right| \leqslant c_p\|f\|_p\|g\|_q,\qquad 1<p\leqslant 2,$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$ και $g \in L^q(\mathbb{R})$, άρα

$$\|Hg\|_q \leqslant \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot Hg \, dx \right| \leqslant c_p \|g\|_q. \tag{3.2.45}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο H είναι ισχυρού τύπου $q \geqslant 2$, με $c_q = c_p$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Δηλαδή, έχουμε δείξει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.5. *Ο τελεστής H είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$.*

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι ο μεγιστικός μετασχηματισμός Hilbert H^* είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$. Θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 3.2.6. *Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$,*

$$H^* f(x) \leqslant \Theta f(x) + \Theta(Hf)(x), \tag{3.2.46}$$

όπου Θ είναι ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood.

Απόδειξη. Από την (3.1.11) του Λήμματος 3.1.5 παίρνουμε

$$P_y(Q_{y_2} f)(x) = Q_{y+y_2} f(x). \tag{3.2.47}$$

Αν $f \in L^2(\mathbb{R})$ τότε, από την (3.2.32) του Θεωρήματος 3.2.3, παίρνοντας $y_2 \to 0$ στην (3.2.47) βλέπουμε ότι

$$Q_y f(x) = P_y H f(x). \tag{3.2.48}$$

Από την (3.1.17) έχουμε

$$\begin{aligned} |H_y f(x)| &\leqslant |H_y f(x) - Q_y f(x)| + |Q_y f(x)| = |H_y f(x) - Q_y f(x)| + |P_y H f(x)| \\ &\leqslant P_y(|f|)(x) + P_y(|Hf|)(x). \end{aligned} \tag{3.2.49}$$

Εφαρμόζοντας την (3.1.15) παίρνουμε το ζητούμενο, πρώτα για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ και μετά για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$. □

Από το Λήμμα 3.2.6, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι τελεστές H και Θ είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$, παίρνουμε άμεσα το εξής.

Θεώρημα 3.2.7. *Ο μεγιστικός μετασχηματισμός Hilbert H^* είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$.*

3.3 Εκθετικές εκτιμήσεις για τον μετασχηματισμό Hilbert

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε κάποιες εκθετικές εκτιμήσεις, παρόμοιες με αυτές του Θεωρήματος 2.2.6 για τον μεγιστικό τελεστή των Hardy-Littlewood. Θεωρούμε μόνο ουσιωδώς φραγμένες συναρτήσεις που μηδενίζονται έξω από κάποιο διάστημα μήκους α.

Θεώρημα 3.3.1. *Υπάρχουν θετικές σταθερές c_1 και c_2 με την ακόλουθη ιδιότητα: αν f είναι μια ουσιωδώς φραγμένη συνάρτηση που ο φορέας της περιέχεται σε κάποιο διάστημα μήκους α, τότε*

$$m(\{x : |Hf(x)| > \lambda\}) \leqslant c_1\alpha\frac{\|f\|_\infty}{\lambda}\exp\left(-c_2\frac{\lambda}{\|f\|_\infty}\right) \tag{3.3.1}$$

για κάθε $\lambda > 0$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_\infty = 1$. Ορίζουμε

$$E_\lambda^+ = \{x : Hf(x) > \lambda\} \quad \text{και} \quad E_\lambda^- = \{x : Hf(x) < -\lambda\}. \tag{3.3.2}$$

Θα δώσουμε μια εκτίμηση για το $m(E_\lambda^+)$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο παίρνουμε την ίδια εκτίμηση για το $m(E_\lambda^-)$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.4 παίρνουμε

$$\lambda m(E_\lambda^+) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{E_\lambda^+}(x)Hf(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty}f(x)H\chi_{E_\lambda^+}(x)dx. \tag{3.3.3}$$

Αφού ο H είναι ασθενούς τύπου 1 και ισχυρού τύπου 2 (στο Θεώρημα 3.2.2 είδαμε ότι $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$) από το θεώρημα του Marcinkiewicz (Θεώρημα 2.1.9) έχουμε ότι, για κάθε $1 < p < 2$,

$$\begin{aligned}\|H\chi_{E_\lambda^+}\|_p^p &\leqslant 2^p\left(\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2-p}\right)\left(\frac{128}{\pi}\right)^{2-p}m(E_\lambda^+)\\ &\leqslant \frac{512}{\pi}\left(q+\frac{q}{q-2}\right)m(E_\lambda^+) \leqslant \frac{1024}{\pi}qm(E_\lambda^+),\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

όπου, για την τελευταία ανισότητα, υποθέτουμε επιπλέον ότι $q > 3$.

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την ανισότητα Holder, από την (3.3.3) παίρνουμε, για $q > 3$,

$$\lambda m(E_\lambda^+) \leqslant \alpha^{1/q}\|H\chi_{E_\lambda^+}\|_p \leqslant \alpha^{1/q}\left(\frac{1024}{\pi}q\right)^{1/p}\left(m(E_\lambda^+)\right)^{1/p}, \tag{3.3.5}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$m(E_\lambda^+) \leqslant \alpha \left(\frac{1}{\lambda}\right)^q \left(\frac{1024}{\pi} q\right)^{q/p} = \frac{\alpha\pi}{1024q}\left(\frac{1024}{\lambda\pi} q\right)^q. \tag{3.3.6}$$

Αν $\lambda > 3e\frac{1024}{\pi}$ τότε μπορούμε να επιλέξουμε $q = \frac{\pi\lambda}{1024e} > 3$, και έχουμε

$$m(E_\lambda^+) \leqslant \frac{\alpha e}{\lambda} \exp\left(-\frac{\pi\lambda}{1024e}\right). \tag{3.3.7}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι

$$m(E_\lambda^-) \leqslant \frac{\alpha e}{\lambda} \exp\left(-\frac{\pi\lambda}{1024e}\right), \tag{3.3.8}$$

και παίρνοντας τις δύο ανισότητες μαζί συμπεραίνουμε ότι, για μεγάλες τιμές του λ,

$$m(\{x : |Hf(x)| > \lambda\}) \leqslant \frac{2e\alpha}{\lambda} \exp\left(-\frac{\pi\lambda}{1024e}\right). \tag{3.3.9}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda \leqslant 3e\frac{1024}{\pi}$. Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} m(\{|Hf| > \lambda\}) &\leqslant \frac{128}{\lambda\pi}\|f\|_1 = \frac{128}{\lambda\pi}\int_{\mathrm{supp}(f)} |f(t)|\,dt \leqslant \frac{128}{\lambda\pi}\|f\|_\infty m(\mathrm{supp}(f)) \\ &\leqslant \frac{128}{\lambda\pi}\|f\|_\infty \alpha \leqslant \frac{128}{\pi}\frac{\alpha}{\lambda}. \end{aligned}$$

Ζητάμε σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $\lambda \leqslant 3e\frac{1024}{\pi}$,

$$\exp\left(\frac{\pi\lambda}{1024e}\right) \leqslant c.$$

Μια τέτοια σταθερά είναι η $c := e^3$. Τότε, για κάθε $\lambda \leqslant 3e\frac{1024}{\pi}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{128}{\pi}\frac{\alpha}{\lambda} \leqslant \frac{128e^3}{\pi}\frac{\alpha}{\lambda}\exp\left(-\frac{\pi\lambda}{1024e}\right),$$

το οποίο μας δίνει

$$m(\{|Hf| > \lambda\}) \leqslant \frac{128c_1}{\pi}\frac{\alpha}{\lambda}\exp\left(-\frac{\pi\lambda}{1024e}\right).$$

Τώρα, αν ορίσουμε

$$c_1 = \max\left\{2e, \frac{128e^3}{\pi}\right\} = \frac{128e^3}{\pi} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{\pi}{1024e}$$

έχουμε την (3.3.1) για κάθε $\lambda > 0$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Θεώρημα 3.3.2. *Υπάρχουν θετικές σταθερές c_1 και c_2 με την ακόλουθη ιδιότητα: αν f είναι μια ουσιωδώς φραγμένη συνάρτηση που ο φορέας της περιέχεται σε κάποιο διάστημα μήκους α, τότε*

$$m(\{x : |H^*f(x)| > \lambda\}) \leqslant c_1\alpha\frac{\|f\|_\infty}{\lambda}\exp\left(-c_2\frac{\lambda}{\|f\|_\infty}\right) \tag{3.3.10}$$

για κάθε $\lambda > 0$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \geqslant 0$ (γράφοντας $f = f^+ - f^-$) και ότι $\|f\|_\infty = 1$. Ορίζουμε

$$E_\varepsilon^+ = \left\{x : \sup_{y\geqslant\varepsilon} H_y f(x) > \lambda\right\} \quad \text{και} \quad E_\varepsilon^- = \left\{x : \sup_{y\geqslant\varepsilon}(-H_y f(x)) > \lambda\right\}, \tag{3.3.11}$$

όπου $\lambda > 0$ και $\varepsilon > 0$. Θα δώσουμε μια εκτίμηση για το $m(E_\varepsilon^+)$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο παίρνουμε την ίδια εκτίμηση για το $m(E_\varepsilon^-)$.

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2, μπορούμε να βρούμε ξένα διαστήματα $I_1, I_2, \ldots, I_n$, τέτοια ώστε

$$m(E_\varepsilon^+) \leqslant 4\sum_{j=1}^n m(I_j) \tag{3.3.12}$$

και

$$\frac{1}{\pi}\int_{I_j^c} f(t)\frac{1}{c(I_j) - t}\,dt > \lambda, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3.3.13}$$

Ορίζουμε

$$f_j(x) = f(x)\chi_{I_j}(x), \qquad j = 1, \ldots, n \tag{3.3.14}$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g_j(x) = Hf(x) - Hf_j(x) = \frac{1}{\pi}\int_{I_j^c}\frac{f(t)}{x - t}\,dt. \tag{3.3.15}$$

Η g_j είναι φθίνουσα στο I_j (διότι $f \geqslant 0$) και $g_j(c(I_j)) > \lambda$ από την (3.3.13), άρα έχουμε $g_j(x) > \lambda$ στο αριστερό μισό J_j του I_j. Τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και για κάθε $x \in J_j$ έχουμε

$$g_j(x) = Hf(x) - Hf_j(x) > \lambda,$$

άρα $Hf(x) > \frac{\lambda}{2}$ ή $Hf_j(x) < -\frac{\lambda}{2}$. Με άλλα λόγια,

$$J_j \subseteq \{Hf > \lambda/2\} \cup \{|Hf_j| > \lambda/2\},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\bigcup_{j=1}^{n} J_j \subseteq \{|Hf| > \lambda/2\} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{|Hf_j| > \lambda/2\}.$$

Έπεται ότι

(3.3.16)

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m(I_j) = \sum_{j=1}^{n} m(J_j) \leqslant m(\{x : Hf(x) > \lambda/2\}) + \sum_{j=1}^{n} m(\{x : |Hf_j(x)| > \lambda/2\}).$$

Από το Θεώρημα 3.3.1 συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m(I_j) &\leqslant c_1\alpha \cdot \frac{2}{\lambda}\exp\left(-c_2\frac{\lambda}{2}\right) + \sum_{j=1}^{n} m(I_j)\cdot\frac{2c_1}{\lambda}\exp\left(-c_2\frac{\lambda}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{2c_1}{\lambda}\alpha\exp\left(-\frac{c_2}{2}\lambda\right) + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} m(I_j),\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

αν το $\lambda \geqslant \lambda_0$ όπου το λ_0 είναι αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει η

$$\frac{2c_1}{\lambda_0}\exp\left(-c_2\frac{\lambda_0}{2}\right) < \frac{1}{4}.$$

Συνεπώς, για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$ έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} m(I_j) \leqslant \frac{8c_1}{\lambda}\alpha\exp\left(-\frac{c_2}{2}\lambda\right). \tag{3.3.18}$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την (3.3.12) παίρνουμε

$$m(E_\varepsilon^+) \leqslant \frac{32c_1}{\lambda}\alpha\exp\left(-\frac{c_2}{2}\lambda\right). \tag{3.3.19}$$

Έχουμε την ίδια εκτίμηση και για το $m(E_\varepsilon^-)$, άρα

$$m\left(\left\{x : \sup_{y\geqslant\varepsilon}|H_y f(x)| > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{64c_1}{\lambda}\alpha\exp\left(-\frac{c_2}{2}\lambda\right). \tag{3.3.20}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι αν $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$ τότε

$$m(\{x : H^*f(x) > \lambda\}) \leqslant \frac{128}{\lambda\pi}\|f\|_1 \leqslant \frac{128}{\lambda\pi}\,\alpha\|f\|_\infty = \frac{128\alpha}{\pi\tau}\frac{1}{\lambda}\tau \leqslant \frac{128\alpha}{\pi\tau}\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{c_2}{2}\lambda\right),$$

όπου

$$\tau = \min\left\{\exp\left(-\frac{c_2}{2}\lambda\right) : 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0\right\}.$$

Συνεπώς, η (3.3.10) ισχύει για κάθε $\lambda > 0$ αν επιλέξουμε σαν (νέα) τιμή της c_1 την σταθερά

$$c_1' = \max\left\{64c_1, \frac{128}{\pi\tau}\right\},$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Κεφάλαιο 4

Τροποποιημένος μετασχηματισμός Hilbert

Θεωρούμε τώρα συναρτήσεις $f \in L^1(-\pi, \pi]$. Για τεχνικούς λόγους τις επεκτείνουμε περιοδικά στο διάστημα $(-4\pi, 4\pi]$. Δεδομένου ότι μια βασική ιδέα είναι να θεωρήσουμε ολοένα πιο μικρά διαστήματα, στην Παράγραφο 4.1 εισάγουμε τα λεγόμενα δυαδικά διαστήματα, τα οποία εξαρτώνται από μια συγκεκριμένη διαμέριση του διαστήματος. Επειδή χρειάζεται να ελέγχουμε τι συμβαίνει στα γειτονικά τους διαστήματα, εισάγουμε κάποια άλλη κλάση διαστημάτων, τα λεγόμενα smoothing διαστήματα. Αυτή η διαμέριση του $(-4\pi, 4\pi]$ σε δυαδικά διαστήματα είναι πολύ χρήσιμη, μας επιβάλλει όμως να τροποποιήσουμε τον ορισμό των διαφόρων μετασχηματισμών Hilbert που έχουμε ορίσει. Αυτό γίνεται επίσης στην Παράγραφο 4.1.

Στην Παράγραφο 4.2 γενικεύουμε την έννοια των συντελεστών Fourier. Αποδεικνύουμε κάποιες εκτιμήσεις για τους γενικευμένους συντελεστές Fourier και για τις σταθερές που εμπλέκονται σε αυτές.

Τέλος, στην Παράγραφο 4.4 επανερχόμαστε στον τελεστή M που ορίστηκε στην Παράγραφο 2.4. Για να δώσουμε μια εκτίμηση για τον M, ορίζουμε ένα νέο τελεστή M^*, ο οποίος προκύπτει από κάποιες συναρτήσεις $S_n^*(x; f; \omega^*)$ (στον ορισμό τους χρησιμοποιούνται τα smoothing διαστήματα της Παραγράφου 4.1 και ο μετασχηματισμός Hilbert). Όπως θα δούμε, αρκεί πλέον να μελετήσουμε τον τελεστή M^*, και δίνουμε κάποιες αρχικές εκτιμήσεις για την $S_n^*(x; f; \omega^*)$. Αυτές δεν είναι αρκετές – θα επανέλθουμε με άλλες, πιο ισχυρές, στο επόμενο κεφάλαιο.

4.1 Δυαδικά διαστήματα και τροποποιημένος μετασχηματισμός Hilbert

Από την διατύπωση του Θεωρήματος 2.4.1, που είναι ο τελικός μας στόχος, φαίνεται ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π, άρα κατ' αρχήν θα μας έφτανε να θεωρήσουμε τους χώρους $L^p(-\pi,\pi]$. Όταν όμως χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Hilbert μιας συνάρτησης f, κάνουμε εμμέσως συνέλιξη, και γι' αυτό το λόγο θα χρειαστεί να θεωρήσουμε την περιοδική επέκταση της f στο $(-2\pi, 2\pi]$. Μάλιστα, για κάποιους άλλους τεχνικούς λόγους, επεκτείνουμε την f στο ακόμα μεγαλύτερο διάστημα $(-4\pi, 4\pi]$.

Για κάθε $\nu \geqslant 0$ χωρίζουμε το $(-2\pi, 2\pi]$ σε $2 \cdot 2^\nu = 2^{\nu+1}$ ημιανοικτά διαστήματα ίσου μήκους, τα

$$\omega_{j\nu} = (-2\pi + 2\pi(j-1)2^{-\nu}, -2\pi + 2\pi j \cdot 2^{-\nu}], \qquad j = 1, 2, \ldots, 2^{\nu+1}, \tag{4.1.1}$$

με $m(\omega_{j\nu}) = 2\pi \cdot 2^{-\nu}$. Αυτά τα ω-διαστήματα ονομάζονται στη συνέχεια *δυαδικά διαστήματα του επιπέδου* $\nu \geqslant 0$.

Είναι φυσιολογικό να ορίσουμε το $\omega_{1,-1} = \omega_{-1} = (-2\pi, 2\pi]$ ως το δυαδικό διάστημα του επιπέδου -1. Αυτό το διάστημα θα χρησιμοποιηθεί μόνο πολύ αργότερα, για όσα λοιπόν αναπτύσσουμε εδώ θα υποθέτουμε ότι $\nu \geqslant 0$.

Είναι φανερό ότι κάθε $\omega_{j\nu}$ είναι η ένωση δύο γειτονικών δυαδικών διαστημάτων του επιπέδου $\nu + 1$. Από την άλλη πλευρά, η ένωση δύο γειτονικών δυαδικών διαστημάτων του επιπέδου $\nu + 1$ δεν είναι απαραίτητα δυαδικό διάστημα του επιπέδου ν. Εισάγουμε λοιπόν τα λεγόμενα *smoothing διαστήματα* του επιπέδου ν (τα οποία τα λέμε και ω^*-διαστήματα) θέτοντας

$$\omega^*_{j\nu} = \omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,\nu} = (-2\pi + 2\pi(j-1)2^{-\nu}, -2\pi + 2\pi(j+1)2^{-\nu}], \tag{4.1.2}$$

όπου $\nu \geqslant 0$ και $j = 1, 2, \ldots, 2^{\nu+1} - 1$. Τότε,

$$m(\omega^*_{j\nu}) = 4\pi \cdot 2^{-\nu}. \tag{4.1.3}$$

Για $\nu = -1$ ορίζουμε $\omega^*_{-1} = (-4\pi, 4\pi]$. Παρατηρήστε ότι $m(\omega^*_{-1}) = 8\pi$, κάτι που συμφωνεί με την (4.1.3) αν θέσουμε $\nu = -1$.

Στη συνέχεια, συχνά θα χρησιμοποιούμε, για συντομία, το συμβολισμό ω για οποιοδήποτε δυαδικό διάστημα και το συμβολισμό ω^* για οποιοδήποτε smoothing διάστημα.

Από την κατασκευή είναι φανερό ότι για κάθε διάστημα ω^* του επιπέδου $\nu \geqslant -1$ μπορούμε να βρούμε ένα διάστημα ω του επιπέδου $\nu + 1$, τέτοιο ώστε

$$\omega \subset \omega^* \quad \text{και} \quad 4m(\omega) = m(\omega^*). \tag{4.1.4}$$

Επιπλέον, μπορούμε να επιλέξουμε το ω ως ένα από τα δύο «μεσαία» υποδιαστήματα του ω^*. Αυτή η παρατήρηση θα μας φανεί χρήσιμη στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1.

Γράφοντας ότι «το x ανήκει στο μεσαίο μισό του ω» εννοούμε ότι το x ανήκει σε κάποιο από τα δύο μεσαία υποδιαστήματα τύπου ω που ικανοποιούν την (4.1.4).

Στη συνέχεια ορίζουμε τους τροποποιημένους μετασχηματισμούς Hilbert. Αυτοί είναι απαραίτητοι για δύο λόγους. Ο πρώτος αντιμετωπίζεται χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες. Μάλιστα, θα θεωρούμε μόνο ένα πεπερασμένο διάστημα αντί για την πραγματική ευθεία, και αυτό απαιτεί μόνο μικρές διορθώσεις στα αποτελέσματα που έχουμε ήδη αποδείξει. Ο δεύτερος όμως λόγος είναι πιο ουσιαστικός για την απόδειξη, και μας δημιουργεί περισσότερες δυσκολίες στην απόδειξη των κρίσιμων εκτιμήσεων. Σχετίζεται με τη μέθοδο που θα ακολουθήσουμε, γιατί θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τα δυαδικά και τα smoothing διαστήματα που ορίσαμε παραπάνω, και έτσι οι συγκεκριμένες διαμερίσεις του $(-2\pi, 2\pi]$ θα επιφέρουν αντίστοιχες αλλαγές στον ορισμό του μετασχηματισμού Hilbert.

Έστω $f \in L^1(-\pi, \pi]$ και έστω f° η περιοδική της επέκταση στο $(-4\pi, 4\pi]$. Έστω ω^* ένα smoothing διάστημα από το επίπεδο $\nu \geqslant 0$. Ορίζουμε το *μετασχηματισμό Hilbert* $H_{\omega^*} f$ *της* f *που αντιστοιχεί στο* ω^* θέτοντας

$$H_{\omega^*} f = H(f^\circ \cdot \chi_{\omega^*}), \tag{4.1.5}$$

και το *μεγιστικό μετασχηματισμό Hilbert* $H^*_{\omega^*} f$ *της* f *που αντιστοιχεί στο* ω^* θέτοντας

$$H^*_{\omega^*} f = H^*(f^\circ \cdot \chi_{\omega^*}). \tag{4.1.6}$$

Από το Θεώρημα 3.2.5 και το Θεώρημα 3.2.7 έπεται άμεσα ότι οι τελεστές H_{ω^*} και $H^*_{\omega^*}$ είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$, και μάλιστα οι σταθερές είναι ανεξάρτητες από το ω^*.

Ορίζουμε έναν ακόμα τελεστή που σχετίζεται με τους προηγούμενους και τον οποίο θα συμβολίζουμε με $\overline{H}$. Για κάθε $f \in L^1(-\pi, \pi]$ θέτουμε

$$\overline{H} f(x) = \sup_{\delta > 0} \left| \frac{1}{\pi} (\mathrm{pv}) \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f^\circ(t)}{x-t}\, dt \right|. \tag{4.1.7}$$

Λήμμα 4.1.1. *Ο τελεστής* $\overline{H}$ *είναι ισχυρού τύπου* p *για κάθε* $1 < p < \infty$.

Απόδειξη. Από την ταυτότητα

$$\frac{1}{\pi} (\mathrm{pv}) \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f^\circ(t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} (\mathrm{pv}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^\circ(t)}{x-t} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\{|x-t| \geqslant \delta\}} \frac{f^\circ(t)}{x-t} dt \tag{4.1.8}$$

προκύπτει ότι

$$\overline{H} f(x) \leqslant |H f^\circ(x)| + H^* f^\circ(x). \tag{4.1.9}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\|Hf^\circ\|_p \leqslant C_p\|f^\circ\|_p \quad \text{και} \quad \|H^*f^\circ\|_p \leqslant C_p^*\|f^\circ\|_p \tag{4.1.10}$$

για κάποιες σταθερές $C_p, C_p^* > 0$ που εξαρτώνται μόνο από το p, και

$$\|f^\circ\|_p = 4^{1/p}\|f\|_p. \tag{4.1.11}$$

Συνεπώς, από την (4.1.9) παίρνουμε

$$\|\overline{H}f\|_p \leqslant \|Hf^\circ\|_p + \|H^*f^\circ\|_p \leqslant 4^{1/p}(C_p + C_p^*)\|f\|_p \tag{4.1.12}$$

για κάθε $1 < p < \infty$. □

Τέλος, ορίζουμε τον τροποποιημένο μεγιστικό μετασχηματισμό Hilbert $\widehat{H}$ που αντιστοιχεί στα δυαδικά διαστήματα που ορίσαμε.

Θεωρούμε τυχόν διάστημα $\omega^* = \omega^*_{j\nu}$ και ένα εσωτερικό σημείο x του $\omega^*_{j\nu}$. Υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένη ακολουθία $(\sigma^r_x)_{r\geqslant\mu}$ διαστημάτων, τέτοια ώστε κάθε σ^r_x να είναι smoothing διάστημα του επιπέδου r, να ισχύει $\sigma^r_x \subset \omega^*$ και το x να ανήκει στο μεσαίο μισό του σ^r_x. Το $\mu = \mu(x)$ εξαρτάται από το x, και $\mu \geqslant \nu$.

Πρώτα δείχνουμε ότι υπάρχουν $\mu \geqslant \nu$ και διάστημα τύπου ω^*, έστω σ^μ_x, ώστε το x να ανήκει στο μεσαίο μισό του σ^μ_x. Πράγματι, αν π.χ. $x \in \omega_1$ τότε υπάρχει δυαδικό υποδιάστημα του ω_1 ώστε το x να ανήκει στο δεξιό μισό του υποδιαστήματος αυτού. Έστω $\omega_{\mu+1}$ το δεξιό αυτό μισό, όπου μ είναι το επίπεδο του υποδιαστήματος του ω_1 στο δεξιό μισό του οποίου ανήκει το x. Αν τώρα ονομάσουμε σ^μ_x το διαστημα τύπου ω^* που αποτελείται από το δυαδικό διάστημα επιπέδου $\mu+1$ που βρίσκεται ακριβώς αριστερά από το $\omega_{\mu+1}$, το $\omega_{\mu+1}$ και τα δύο επόμενα δυαδικά διαστήματα του $\omega_{\mu+1}$ του ιδίου επιπέδου με αυτό, είναι σαφές ότι το x ανήκει στο μεσαίο μισό του σ^μ_x, και $\mu \geqslant \nu$ λόγω των υποδιπλασιασμών του ω_1 που ενδεχομένως έγιναν μέχρι να βρούμε το $\omega_{\mu+1}$.

Η δεύτερη σημαντική παρατήρηση είναι ότι αν $\omega^*_{j\nu}$ είναι ένα smoothing διάστημα και $x \in \omega^*_{j\nu}$ τότε το $\omega^*_{j\nu}$ είναι το μοναδικό διάστημα τύπου ω^* και επιπέδου ν που περιέχει το x στο μεσαίο μισό του. Πράγματι, έστω $\omega^*_{j\nu} = \omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,\nu}$ ώστε το x να ανήκει στο μεσαίο μισό του $\omega^*_{j\nu}$, και έστω $\omega^*_{i\nu}$ ένα άλλο διάστημα τύπου ω^* και επιπέδου ν που περιέχει το x στο μεσαίο μισό του. Τότε, $\omega^*_{i\nu} = \omega_{i\nu} \cup \omega_{i+1,\nu}$ και $x \in \omega^*_{i\nu}$, άρα $x \in \omega_{i\nu}$ ή $x \in \omega_{i+1,\nu}$. Ταυτόχρονα, $x \in \omega_{j\nu}$ ή $x \in \omega_{j+1,\nu}$. Αν $x \in \omega_{i\nu}$ τότε $\omega_{i\nu} = \omega_{j\nu}$ ή $\omega_{i\nu} = \omega_{j+1,\nu}$. Αν όμως $\omega_{i\nu} = \omega_{j+1,\nu}$ τότε $i = j+1$, άρα $\omega^*_{i\nu} = \omega_{j+1,\nu} \cup \omega_{j+2,\nu}$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο, γιατί το x ανήκει στο μεσαίο μισό του $\omega^*_{j\nu}$ άρα ανήκει στο αριστερό μισό του $\omega_{j+1,\nu}$ και το x ανήκει στο μισό του $\omega^*_{i\nu}$ άρα ανήκει στο δεξιό μισό του $\omega_{j+1,\nu}$, και τα δύο αυτά μισά του $\omega_{j+1,\nu}$ είναι ξένα ημιανοικτά διαστήματα. Συνεπώς, $\omega_{i\nu} = \omega_{j\nu}$, αυτό δείχνει ότι $i = j$ και έπεται ότι $\omega^*_{j\nu} = \omega^*_{i\nu}$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι αν $x \in \omega_{i+1,\nu}$ τότε $\omega_{i+1,\nu} = \omega_{j+1,\nu}$, αυτό δείχνει ότι $i = j$ και έπεται ότι $\omega^*_{j\nu} = \omega^*_{i\nu}$.

Τέλος, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν το x ανήκει στο μεσαίο μισό του $\omega^*_{j\nu}$ τότε, ανάλογα με το ποιό είναι αυτό από τα τέσσερα υποδιαστήματα του $\omega^*_{j\nu}$ στο οποίο ανήκει το x, βρίσκουμε το smoothing διάστημα επιπέδου $\nu + 1$ το οποίο περιέχει το x στο μεσαίο μισό του. Δηλαδή, από το σ^ν_x βρίσκουμε το $\sigma^{\nu+1}_x$, και μαλιστα $\sigma^{\nu+1}_x \subset \sigma^\nu_x$.

Σημείωση. Ο μ θα επιλεγεί ως ο ελάχιστος $\mu \in \mathbb{N}$ για τον οποίο το x ανήκει στο μεσαίο μισό smoothing διαστήματος επιπέδου μ.

Ο *τροποποιημένος μεγιστικός μετασχηματισμός Hilbert* $\widehat{H}_{j\nu}$ *ως προς το* $\omega^*_{j\nu}$ ορίζεται από την

$$\widehat{H}_{j\nu} f(x) = \sup_{r \geqslant \mu} \left| \frac{1}{\pi} (\mathrm{pv}) \int_{\sigma^r_x} \frac{f^\circ(t)}{x-t} dt \right|, \qquad x \in \mathrm{int}(\omega^*_{j\nu}), \tag{4.1.13}$$

όπου $f \in L^1(-\pi, \pi]$ και f° είναι η περιοδική επέκταση της f στο $(-4\pi, 4\pi]$. Μερικές φορές θα γράφουμε την (4.1.13) στην πιο σύντομη μορφή

$$\widehat{H} f(x) = \sup_{\sigma_x} \left| \frac{1}{\pi} (\mathrm{pv}) \int_{\sigma_x} \frac{f^\circ(t)}{x-t} dt \right|. \tag{4.1.14}$$

Θα αποδείξουμε ότι ο $\widehat{H}$ είναι κι αυτός τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$. Καθώς το σ^r_x δεν έχει απαραίτητα κέντρο το x, θα χρειαστούμε το επόμενο τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 4.1.2. *Έστω $f \in L^1(-\pi, \pi]$ και έστω f° η περιοδική επέκταση της f στο $(-4\pi, 4\pi]$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{J}$ την οικογένεια των διαστημάτων $\Delta = (-a, b)$, $-\pi \leqslant -a < 0 < b \leqslant \pi$, που ικανοποιούν την*

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 3,$$

και με $\mathcal{J}^*$ την οικογένεια των συμμετρικών διαστημάτων $I = (-\delta, \delta)$ που περιέχονται στο $(-\pi, \pi)$. Τότε,

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{J}} \left| \frac{1}{\pi} (\mathrm{pv}) \int_\Delta \frac{f^\circ(x+t)}{t} \, dt \right| \leqslant \sup_{I \in \mathcal{J}^*} \left| \frac{1}{\pi} (\mathrm{pv}) \int_I \frac{f^\circ(x+t)}{t} \, dt \right| + 3\Theta f^\circ(x). \tag{4.1.15}$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta = (-a, b) \in \mathcal{J}$, όπου $0 < a < b$ και ας υποθέσουμε ότι $1 < \frac{b}{a} \leqslant 3$.

Τότε,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\Delta}\frac{f^\circ(x+t)}{t}dt\right| &\leqslant \left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{-a}^{a}\frac{f^\circ(x+t)}{t}dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{f^\circ(x+t)}{t}dt\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{-a}^{a}\frac{f^\circ(x+t)}{t}dt\right| + \frac{1}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{|f^\circ(x+t)|}{t}dt \\
&\leqslant \widehat{H}f(x) + \frac{1}{\pi a}\int_{a}^{b}|f^\circ(x+t)|\,dt \\
&\leqslant \widehat{H}f(x) + \frac{1}{\pi a}\int_{-b}^{b}|f^\circ(x+t)|\,dt \\
&\leqslant \widehat{H}f(x) + \frac{1}{\pi a}\,2b\Theta f^\circ(x) \\
&= \widehat{H}f(x) + \frac{2}{\pi}\,\frac{b}{a}\,\Theta f^\circ(x) \\
&\leqslant \widehat{H}f(x) + \frac{2}{\pi}\,3\Theta f^\circ(x) \\
&\leqslant \widehat{H}f(x) + 3\Theta f^\circ(x).
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Για την περίπτωση όπου $1 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 3$ δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο. □

Θεώρημα 4.1.3. *Ο τροποποιημένος μετασχηματισμός Hilbert $\widehat{H}$ που αντιστοιχεί στο ω^* είναι ισχυρού τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{int}(\omega^*)$ και έστω σ_x οποιοδήποτε από τα διαστήματα που αντιστοιχούν στο ω^* και στο x και εμφανίζονται στην (4.1.13). Τότε, το $\Delta = \sigma_x - x$ είναι ένα διάστημα της οικογένειας $\mathcal{J}$ που ορίσαμε στο Λήμμα 4.1.2. Χρησιμοποιώντας το λήμμα, συμπεραίνουμε ότι

$$\widehat{H}f(x) \leqslant \overline{H}f^\circ(x) + 3\Theta f^\circ(x). \tag{4.1.17}$$

Γνωρίζουμε ότι οι τελεστές $\overline{H}$ (Λήμμα 4.1.1) και Θ είναι τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$, άρα συμπεραίνουμε ότι ο $\widehat{H}$ είναι επίσης τύπου p ακολουθώντας το επιχείρημα της απόδειξης του Λήμματος 4.1.1. □

Από την (4.1.9) και την (4.1.17) έπεται άμεσα ότι

$$\widehat{H}_{\omega^*}f(x) \leqslant |Hf^\circ(x)| + H^*f^\circ(x) + 3\Theta f^\circ(x) \tag{4.1.18}$$

για κάθε $\omega^* \neq \omega^*_{-1}$, άρα το $\{x \in \omega^* : \widehat{H}f(x) > \lambda\}$ περιέχεται στην ένωση

$$\{x \in \omega^* : |Hf^\circ(x)| > \lambda/3\} \cup \{x \in \omega^* : H^*f^\circ(x) > \lambda/3\} \cup \{x \in \omega^* : \Theta f^\circ(x) > \lambda/9\}. \tag{4.1.19}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει για το $\omega^* = \omega^*_{-1}$. Έτσι, αν $f \in L^\infty$ τότε από το Θεώρημα 2.2.6, το Θεώρημα 3.3.1 και το Θεώρημα 3.3.2 παίρνουμε εκθετική εκτίμηση για τον $\widehat{H}_{\omega^*}$.

Θεώρημα 4.1.4. *Υπάρχουν θετικές σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε: αν f είναι μια ουσιωδώς φραγμένη συνάρτηση και $\widehat{H}$ είναι ο τροποποιημένος μετασχηματισμός Hilbert που αντιστοιχεί στο ω^*, τότε*

$$m(\{x \in \omega^* : \widehat{H}f(x) > \lambda\}) \leqslant c_1 m(\omega^*) \frac{\|f\|_\infty}{\lambda} \exp\left(-c_2 \frac{\lambda}{\|f\|_\infty}\right). \tag{4.1.20}$$

Παρατηρήστε ότι για $\lambda > \|f\|_\infty$ έχουμε

$$\begin{aligned} m(\{x \in \omega^* : \widehat{H}f(x) > \lambda\}) &\leqslant c_1 m(\omega^*) \frac{\|f\|_\infty}{\lambda} \exp\left(-c_2 \frac{\lambda}{\|f\|_\infty}\right) \\ &\leqslant c_1 m(\omega^*) \exp\left(-c_2 \frac{\lambda}{\|f\|_\infty}\right). \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

ενώ αν $\lambda \leqslant \|f\|_\infty$ τότε

$$\begin{aligned} m(\{x \in \omega^* : \widehat{H}f(x) > \lambda\}) &\leqslant m(\omega^*) \cdot 1 = \exp(c_2) m(\omega^*) \exp(-c_2) \\ &\leqslant \exp(c_2) m(\omega^*) \exp\left(-c_2 \frac{\lambda}{\|f\|_\infty}\right) \\ &\leqslant c_1 m(\omega^*) \exp\left(-c_2 \frac{\lambda}{\|f\|_\infty}\right) \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

αν τροποποιήσουμε τις σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε να ικανοποιούν την $c_1 \geqslant e^{c_2}$. Μπορούμε λοιπόν να παραλείψουμε τον όρο $\frac{1}{t} = \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}$ μπροστά από την εκθετική συνάρτηση στο δεξιό μέλος της (4.1.20), και να διατυπώσουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.1.5. *Υπάρχουν θετικές σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε: αν f είναι μια ουσιωδώς φραγμένη συνάρτηση και $\widehat{H}$ είναι ο τροποποιημένος μεγιστικός μετασχηματισμός Hilbert που αντιστοιχεί στο ω^*, τότε*

$$m(\{x \in \omega^* : \widehat{H}f(x) > \lambda\}) \leqslant c_1 m(\omega^*) \exp\left(-c_2 \frac{\lambda}{\|f\|_\infty}\right). \tag{4.1.23}$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 δεν εξαρτώνται από την επιλογή του ω^*.

4.2 Γενικευμένοι συντελεστές Fourier

Σε αυτήν την παράγραφο θα συμβολίζουμε με ω ένα δυαδικό διάστημα, όπως αυτά ορίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, και με $\omega_{j\nu}$ θα συμβολίζουμε ένα από τα δυαδικά διαστήματα μήκους $2\pi \cdot 2^{-\nu}$ που περιέχονται στο $(-2\pi, 2\pi]$. Όμοια, συμβολίζουμε με ω^* ένα smoothing διάστημα (σαν τέτοιο θεωρούμε και το $\omega^*_{-1} = (-4\pi, 4\pi]$), και με $\omega^*_{j\nu}$ θα συμβολίζουμε ένα από τα smoothing διαστήματα μήκους $4\pi \cdot 2^{-\nu}$.

Για κάθε $\nu \geqslant 0$ και για κάθε δυαδικό διάστημα $\omega_{j\nu}$ ορίζουμε

$$\psi(n; \omega_{j\nu}) = \Big\lfloor \frac{n}{2\pi} m(\omega_{j\nu}) \Big\rfloor = \lfloor n \cdot 2^{-\nu} \rfloor, \tag{4.2.1}$$

όπου $\lfloor u \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του u.

Έστω $\omega^*_{j\nu}$ ένα smoothing διάστημα του επιπέδου $\nu \geqslant 0$, και έστω $\omega_{k,\nu+1}$ ένα από τα τέσσερα δυαδικά διαστήματα που ικανοποιούν την (4.1.4). Ορίζουμε

$$\psi^*(n; \omega^*_{j\nu}) = \psi(n; \omega_{k,n+1}) = \lfloor n \cdot 2^{-\nu-1} \rfloor = \Big\lfloor \frac{n}{8\pi} m(\omega^*_{j\nu}) \Big\rfloor. \tag{4.2.2}$$

Στην περίπτωση που $\omega^* = \omega^*_{-1}$, ορίζουμε $\psi^*(n; \omega^*_{-1}) = n$, το οποίο συμφωνεί με την (4.2.2).

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega = \omega_{j\nu}$ και $f \in L^1(-\pi, \pi]$, ορίζουμε τον *α-οστό γενικευμένο συντελεστή Fourier* $c_\alpha(\omega; f)$ θέτοντας

$$c_\alpha(\omega; f) = \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega f^\circ(x) \exp(-i2^\nu \alpha x)\, dx = \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega f^\circ(x) \exp\Big(-i\frac{2\pi\alpha x}{m(\omega)}\Big)\, dx. \tag{4.2.3}$$

Σημειώνουμε ότι αν $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ τότε η (4.2.3) δίνει το συνηθισμένο συντελεστή Fourier της f ως προς το διάστημα ω, όμως στη συνέχεια θα χρειαστεί να ασχοληθούμε και με τους γενικευμένους συντελεστές, ειδικά με την περίπτωση όπου $\alpha = \frac{\mu}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\begin{aligned} |c_\alpha(\omega; f)| &\leqslant \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega |f^\circ(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{m(\omega)} \int_{-2\pi}^{2\pi} |f^\circ(x)|\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 2^{-\nu}}\, 2 \int_{-\pi}^{\pi} |f^\circ(x)|\, dx = \frac{2^{\nu+1}}{2\pi} \|f\|_1. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Από την

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\mu^2} < 10 \tag{4.2.5}$$

βλέπουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ μπορούμε να ορίσουμε

$$C_n(\omega; f) = \frac{1}{10} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \big| c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f) \big| \frac{1}{1+\mu^2}, \tag{4.2.6}$$

και από τις προηγούμενες ανισότητες έχουμε

$$0 \leqslant C_n(\omega; f) \leqslant \sup_{\mu \in \mathbb{Z}} \big| c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f) \big| \leqslant \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega |f^\circ(x)|\, dx. \tag{4.2.7}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τις σταθερές $C_n^*(\omega; f)$ με τον ακόλουθο τρόπο. Πρώτα θεωρούμε το ω_{-1}^* και θέτουμε

(4.2.8)
$$C_n^*(\omega_{-1}^*; f) = C_n(\omega_{1,0}; f) = C_n(\omega_{2,0}; f).$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει ως εξής: χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f° είναι περιοδική επέκταση της f και ότι $\omega_{1,0} = (-2\pi, 0]$ και $\omega_{2,0} = (0, 2\pi]$, για κάθε $\mu \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega_{1,0}; f) &= \frac{1}{m(\omega_{1,0})} \int_{\omega_{1,0}} f^\circ(x) e^{-\frac{2\pi i}{m(\omega_{1,0})}(n+\mu/3)x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{0} f^\circ(x) e^{-i(n+\mu/3)x} dx \\
&= \frac{e^{2\pi i(n+\mu/3)}}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f^\circ(y) e^{-i(n+\mu/3)y} dy \\
&= e^{2\pi i(n+\mu/3)} c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega_{2,0}; f).
\end{aligned}$$

Άρα,

(4.2.9)
$$\begin{aligned}
C_n(\omega_{1,0}; f) &= \frac{1}{10} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left| c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega_{1,0}; f) \right| \frac{1}{1+\mu^2} \\
&= \frac{1}{10} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left| c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega_{2,0}; f) \right| \frac{1}{1+\mu^2} \\
&= C_n(\omega_{2,0}; f).
\end{aligned}$$

Για όλα τα άλλα ω^*-διαστήματα θέτουμε

(4.2.10)
$$C_n^*(\omega^*; f) = \max\{C_n(\omega; f) : \omega \subset \omega^*,\ 4m(\omega) = m(\omega^*)\},$$

δηλαδή, ο $C_n^*(\omega^*; f)$ είναι ο μεγαλύτερος από τους τέσσερις αριθμούς $C_n(\omega; f)$ που αντιστοιχούν στα τέσσερα ω-διαστήματα που ικανοποιούν την (4.1.4).

Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις $\psi(n; \omega)$ και $\psi^*(n; \omega^*)$, $n \geqslant 0$, που ορίστηκαν στις (4.2.1) και (4.2.2) έχουν οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει η

(4.2.11)
$$C_{\psi^*(n;\omega^*)}^*(\omega^*; f) = \max\{C_{\psi(n;\omega)}(\omega; f) : \omega \subseteq \omega^*,\ 4m(\omega) = m(\omega^*)\}.$$

Αν η συνάρτηση f είναι ίση με 0 σχεδόν παντού στο ω, τότε όλοι οι συντελεστές $c_\alpha(\omega; f)$ και όλοι οι $C_n(\omega; f)$ είναι ίσοι με 0. Αντίστροφα, αν για κάποιον $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε $C_n(\omega; f) = 0$ τότε, από την (4.2.6) συμπεραίνουμε ότι $c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f) = 0$ για κάθε $\mu \in \mathbb{Z}$. Έστω $m, \mu \in \mathbb{Z}$. Γράφουμε

$$m + \frac{\mu}{3} = n + m - n + \frac{\mu}{3} = n + \frac{3(m-n)+\mu}{3}.$$

Αφού $3(m-n)+\mu \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$c_{m+\frac{\mu}{3}}(\omega; f) = c_{n+\frac{3(m-n)+\mu}{3}}(\omega; f) = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $C_m(\omega; f) = 0$ *για κάθε* $m \in \mathbb{Z}$ αν έστω και ένας από τους $C_n(\omega; f)$ ισούται με 0.

Επιπλέον, από την συνθήκη $c_{m+\frac{\mu}{3}}(\omega; f) = 0$ για κάθε $m, \mu \in \mathbb{Z}$, θέτοντας $\mu = 0$ βλέπουμε ότι $c_m(\omega; f) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, δηλαδή η $f^\circ \in L^1(\omega)$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier της ίσους με μηδέν, άρα $f^\circ(x) = 0$ σχεδόν παντού στο ω.

Έχουμε έτσι αποδείξει ότι οι παρακάτω τρεις συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(4.2.12) $\quad f^\circ(x) = 0$ σχεδόν παντού στο ω.

(4.2.13) $\quad$ Υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $C_n(\omega; f) = 0$.

(4.2.14) $\quad C_n(\omega; f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε κάποια αποτελέσματα για τους συντελεστές $C_n(\omega; f)$, τα οποία θα χρειαστούμε αργότερα. Για να συντομεύσουμε το συμβολισμό μερικές φορές στις αποδείξεις θα γράφουμε c_α ή $c_\alpha(\omega)$ αντί για $c_\alpha(\omega; f)$, και C_n ή $C_n(\omega)$ αντί για $C_n(\omega; f)$, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος παρανόησης.

Αρχικά αποδεικνύουμε ένα γενικό λήμμα. Ο συμβολισμός $c_1, c_2, \ldots$ για θετικές σταθερές δεν πρέπει να συγχέεται με το συμβολισμό c_α ή c_n για τους γενικευμένους συντελεστές Fourier.

Λήμμα 4.2.1. *Για κάθε* $\varphi \in C^2[0, 2\pi]$ *υπάρχουν πολυώνυμα* $p_1(t)$ *και* $p_2(t)$ *τέτοια ώστε η συνάρτηση* $\Phi(t)$ *που ορίζεται από την*

$$\Phi(t) = \begin{cases} p_1(t), & x \in [-2\pi, 0] \\ \varphi(t), & x \in [0, 2\pi] \\ p_2(t), & x \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

να ικανοποιεί τις συνθήκες

(4.2.15) $$\Phi \in C^2[-2\pi, 4\pi], \qquad \Phi^{(d)}(-2\pi) = \Phi^{(d)}(4\pi) = 0 \ \text{ για } d = 0, 1, 2,$$

και

(4.2.16) $$\max_{[-2\pi,4\pi]} |\Phi(t)| + \max_{[-2\pi,4\pi]} |\Phi''(t)| \leqslant c_1(\|\varphi\|_\infty + \|\varphi''\|_\infty)$$

για κάποια σταθερά $c_1 > 1$, *όπου* $\|\psi\|_\infty = \max\limits_{[0,2\pi]} |\psi(t)|$ *για κάθε συναρτηση* $\psi \in C^0[0, 2\pi]$.

Απόδειξη. Δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε ένα πολυώνυμο $p_1(t)$ βαθμού 5 στο $[-2\pi, 0]$, τέτοιο ώστε $p_1^{(d)}(-2\pi) = 0$ για $d = 0, 1, 2$ και $p_1^{(d)}(0) = \varphi^{(d)}(0)$ για $d = 0, 1, 2$, και έτσι η Φ είναι της κλάσης C^2 και στο 0. Θα δούμε ότι το πολυώνυμο $p_1(t)$ εξαρτάται μόνο από τους αριθμούς $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ και $\varphi''(0)$, άρα υπάρχουν σταθερές τέτοιες ώστε

$$|p_1(t)| \leqslant c_0'|\varphi(0)| + c_1'|\varphi'(0)| + c_2'|\varphi''(0)| \tag{4.2.17}$$

και

$$|p_1''(t)| \leqslant c_0''|\varphi(0)| + c_1''|\varphi'(0)| + c_2''|\varphi''(0)|. \tag{4.2.18}$$

Πράγματι, αφού $p_1^{(d)}(-2\pi) = 0$ για $d = 0, 1, 2$, ο -2π είναι τριπλή ρίζα του p_1, άρα υπάρχει πολυώνυμο q_1 τέτοιο ώστε $p_1(t) = (t + 2\pi)^3 q_1(t)$. Το q_1 είναι βαθμού 2, άρα θα γράφεται στη μορφή $q_1(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. Υπολογίζοντας τις p_1', p_2' μέσω των $q_1(t), q_1'(t) = 2\alpha t + \beta$ και $q_1''(t) = 2\alpha$, και αντικαθιστώντας στις $p_1^{(d)}(0) = \varphi^{(d)}(0)$ για $d = 0, 1, 2$, παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= (2\pi)^3\gamma \\
\varphi'(0) &= 3(2\pi)^2\gamma + (2\pi)^3\beta \\
\varphi''(0) &= 6\,(2\pi)\gamma + 6\,(2\pi)^2\beta + 2\,(2\pi)^3\alpha.
\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\varphi(0)}{(2\pi)^3} \\
\beta &= \frac{2\pi\varphi'(0) - 3\varphi(0)}{((2\pi)^4} \\
\alpha &= \frac{2\pi^2\varphi''(0) + 12\varphi(0) - 12\pi\varphi'(0)}{2(2\pi)^5}.
\end{aligned}$$

Έτσι, προσδιορίζεται το $p_1(t) = (t + 2\pi)^3 q_1(t)$ μέσω των $\varphi(0), \varphi'(0)$ και $\varphi''(0)$. Γράφοντας τελικά

$$\begin{aligned}
p_1(t) = \frac{1}{16\pi^3}&(t + 2\pi)^3 t^2 \varphi''(0) + \frac{1}{16\pi^4}(t + 2\pi)^3 t(2\pi - 3t)\varphi'(0) \\
&+ \frac{1}{16\pi^5}(t + 2\pi)^3(3t^2 - 3\pi t + 2\pi^2)\varphi(0),
\end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι η (4.2.17) ισχύει με σταθερές

$$\begin{aligned}
c_2' &= \max_{t\in[-2\pi,0]} \frac{1}{16\pi^3}(t + 2\pi)^3 t^2 \\
c_1' &= \max_{t\in[-2\pi,0]} \frac{1}{16\pi^4}(t + 2\pi)^3|t(2\pi - 3t)| \\
c_0' &= \max_{t\in[-2\pi,0]} \frac{1}{16\pi^5}(t + 2\pi)^3|3t^2 - 3\pi t + 2\pi^2|.
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, οι σταθερές c_2'', c_1'' και c_0'' στην (4.2.18) είναι οι μέγιστες τιμές των απολύτων των δευτέρων παραγώγων των συναρτήσεων που εμφανίζονται στους τύπους για τις c_2', c_1' και c_0'.

Για να εκτιμήσουμε την $|\varphi'(0)|$ χρησιμοποιούμε την ακόλουθη τεχνική τύπου Poincaré. Από την ισότητα

$$\int_0^{2\pi}(t-2\pi)\varphi''(t)\,dt = (t-2\pi)\varphi'(t)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\varphi'(t)\,dt = 2\pi\varphi'(0) - [\varphi(2\pi)-\varphi(0)]$$

παίρνουμε

$$|\varphi'(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(2\|\varphi\|_\infty + \|\varphi''\|_\infty + \int_0^{2\pi}|t-2\pi|\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\|\varphi\|_\infty + \pi^2\|\varphi''\|_\infty\right).$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την ανισότητα και τις $|\varphi(0)| \leqslant \|\varphi\|_\infty$ και $|\varphi''(0)| \leqslant \|\varphi''\|_\infty$ στις (4.2.17) και (4.2.18) παίρνουμε την (4.2.16) στο διάστημα $[-2\pi, 0]$ για κατάλληλη σταθερά $c_1 > 1$.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε το $p_2(t)$ στο $[2\pi, 4\pi]$, και έτσι το λήμμα έχει αποδειχθεί. □

Παρατήρηση 4.2.2. Κάνοντας προσεκτικά τις πράξεις στην προηγούμενη απόδειξη βλέπουμε ότι η Φ ικανοποιεί την

(4.2.19) $$\max_{[-2\pi,4\pi]}|\Phi(t)| + \max_{[-2\pi,4\pi]}|\Phi''(t)| \leqslant 2\|\varphi\|_\infty + 8\|\varphi''\|_\infty.$$

Λήμμα 4.2.3. *Έστω $\varphi \in C^2(\overline{\omega})$, όπου $\omega = \omega_{j\nu}$. Τότε,*

(4.2.20) $$\varphi(t) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\gamma_\mu \exp\left(i2^\nu\frac{\mu}{3}t\right), \qquad t \in \omega,$$

όπου

(4.2.21) $$(1+\mu^2)|\gamma_\mu| \leqslant c_2\left(\max_\omega|\varphi| + 2^{-2\nu}\max_\omega|\varphi''|\right)$$

για κάποια σταθερά $c_2 > 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\overline{\omega} = [0, 2\pi]$. Έστω Φ η συνάρτηση που ορίσαμε στο Λήμμα 4.2.1. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(t) = \Phi(3t)$, $t \in I := \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ είναι C^2, άρα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier:

$$f(t) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\gamma_\mu e^{i\frac{2\pi}{m(I)}t} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{i\mu t},$$

αφού $m(I) = 2\pi$. Άρα, μπορούμε να αναπτύξουμε την Φ σε σειρά Fourier στο $[-2\pi, 4\pi]$ γράφοντας

$$\Phi(t) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \gamma_\mu \exp\left(i\frac{\mu}{3}t\right), \qquad t \in [-2\pi, 4\pi]. \tag{4.2.22}$$

Ειδικότερα,

$$\varphi(t) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \gamma_\mu \exp\left(i\frac{\mu}{3}t\right), \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{4.2.23}$$

Αφού $\Phi''(t) = \frac{1}{9}f''(t/3)$, ο μ-οστός συντελεστής Fourier της Φ'' είναι

$$\begin{aligned}\frac{1}{6\pi}\int_{-2\pi}^{4\pi} \Phi''(t)e^{-i\frac{2\pi}{6\pi}\mu t}\,dt &= \frac{1}{6\pi}\int_{-2\pi}^{4\pi} \frac{1}{9}f''(t/3)e^{-i\frac{\mu}{3}t}\,dt\\ &= \frac{1}{18\pi}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} f''(u)e^{-i\mu u}\,du = -\frac{\mu^2}{9}\gamma_\mu.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\Phi''(t) = -\sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \frac{\mu^2}{9} \exp\left(i\frac{\mu}{3}t\right), \qquad t \in [-2\pi, 4\pi]. \tag{4.2.24}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$|\gamma_\mu| \leqslant \max_{[-2\pi,4\pi]}|\Phi| \quad \text{και} \quad \frac{\mu^2}{9}|\gamma_\mu| \leqslant \max_{[-2\pi,4\pi]}|\Phi''| \tag{4.2.25}$$

για κάθε $\mu \in \mathbb{Z}$, και από το Λήμμα 4.2.1 έχουμε

$$\begin{aligned}(1+\mu^2)|\gamma_\mu| &\leqslant 9\left(\max_{[-2\pi,4\pi]}|\Phi| + \max_{[-2\pi,4\pi]}|\Phi''|\right)\\ &\leqslant 9c_1\left(\max_{[0,2\pi]}|\varphi| + \max_{[0,2\pi]}|\varphi''|\right),\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

άρα μπορούμε να επιλέξουμε $c_2 = 9c_1$.

Αν $\overline{\omega} \neq [0, 2\pi]$ και $\varphi \in C^2(\overline{\omega})$ τότε η συνάρτηση

$$\varphi_1(t) = \varphi\left(\frac{t}{2^\nu} + a\right), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\overline{\omega} = a + \frac{1}{2^\nu}[0, 2\pi]$, αναπτύσσεται σε σειρά Fourier όπως προηγουμένως:

$$\varphi_1(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \gamma_\mu e^{i\frac{\mu}{3}t},$$

με

$$(1+\mu^2)|\gamma_\mu| \leqslant 9c_1\left(\max_{[0,2\pi]}|\varphi_1| + \max_{[0,2\pi]}|\varphi_1''|\right)$$

για κάθε $\mu \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $t \in \overline{\omega}$ έχουμε

$$\varphi(t) = \varphi_1(2^\nu(t-a)) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \gamma_\mu e^{-i\frac{\mu}{3}2^\nu a}\, e^{i\frac{\mu}{3}2^\nu t} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \gamma'_\mu e^{i2^\nu \frac{\mu}{3}t},$$

και για κάθε $\mu \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$(1+\mu^2)|\gamma'_\mu| = (1+\mu^2)|\gamma_\mu| \leqslant 9c_1\left(\max_{[0,2\pi]}|\varphi_1| + \max_{[0,2\pi]}|\varphi_1''|\right).$$

Όμως, για κάθε $t \in [0,2\pi]$ έχουμε

$$|\varphi_1(t)| = \left|\varphi\left(\frac{t}{2^\nu}+a\right)\right| \leqslant \max_{\overline{\omega}}|\varphi|.$$

Επίσης,

$$|\varphi''(t)| = \left|\frac{1}{2^\nu}\varphi''\left(\frac{t}{2^\nu}+a\right)\right| \leqslant 2^{-2\nu}\max_{\overline{\omega}}|\varphi''|.$$

Άρα,

$$(1+\mu^2)|\gamma'_\mu| \leqslant 9c_1\left(\max_{\overline{\omega}}|\varphi| + 2^{-2\nu}\max_{\overline{\omega}}|\varphi''|\right)$$

για κάθε $\mu \in \mathbb{Z}$. □

Λήμμα 4.2.4. *Υπάρχει σταθερά $c_3 > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 0$ και $\omega = \omega_{j\nu}$ να ισχύει*

(4.2.27) $$|c_{n\cdot 2^{-\nu}}(\omega, f)| \leqslant c_3 \cdot C_{\psi(n;\omega)}(\omega, f).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\beta = n - \psi(n;\omega)2^\nu = n - 2^\nu[n\cdot 2^{-\nu}]$. Τότε έχουμε $0 \leqslant \beta < 2^\nu$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.3 για τη συνάρτηση $\varphi(t) = e^{-i\beta t}$ και το $\omega = \omega_{j\nu}$ παίρνουμε, για $t \in \omega_{j\nu}$,

(4.2.28) $$\begin{aligned}\varphi(t) = e^{-i\beta t} &= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \gamma_\mu \exp\left(i2^\nu\frac{\mu}{3}t\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma_{-j}\exp\left(-i2^\nu\frac{j}{3}t\right)\\ &= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\gamma_{-\mu}\exp\left(-i2^\nu\frac{\mu}{3}t\right),\end{aligned}$$

με

(4.2.29) $$\begin{aligned}(1+\mu^2)|\gamma_{-\mu}| = (1-(-\mu)^2)|\gamma_{-\mu}| &\leqslant c_2\left(\max_{\omega}|\varphi| + 2^{-2\nu}\max_{\omega}|\varphi''|\right)\\ &\leqslant c_2(1+2^{-2\nu}\beta^2) \leqslant c_2(1+2^{-2\nu}2^{2\nu}) = 2c_2.\end{aligned}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας και την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς Fourier της φ παίρνουμε

(4.2.30)
$$\begin{aligned} c_{n2^{-\nu}}(\omega; f) &= \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega e^{-int} f^\circ(t)dt = \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega e^{-i\beta t} \exp(-i\psi(n;\omega)2^\nu t) f^\circ(t)dt \\ &= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \gamma_{-\mu} c_{\psi(n;\omega)+\frac{\mu}{3}}(\omega; f), \end{aligned}$$

άρα

(4.2.31)
$$\begin{aligned} |c_{n2^{-\nu}}(\omega; f)| &\leqslant \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} |\gamma_{-\mu}|\, |c_{\psi(n;\omega)+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)| \\ &\leqslant 20c_2 \cdot \frac{1}{10} \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} |c_{\psi(n;\omega)+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)| \cdot \frac{1}{1+\mu^2} \\ &= 20c_2 C_{\psi(n;\omega)}(\omega; f), \end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Λήμμα 4.2.5. *Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και $f \in L^2(\omega)$, όπου $\omega = \omega_{j\nu}$. Έστω $A, B > 0$ και $M \geqslant 2$ σταθερές τέτοιες ώστε*

(4.2.32)
$$\int_\omega |f(t)|^2 dt \leqslant A^2 m(\omega)$$

και

(4.2.33)
$$|c_m(\omega; f)| \leqslant B \;\; \text{αν}\; |n - m| \leqslant M.$$

Τότε, έχουμε

(4.2.34)
$$C_n(\omega; f) \leqslant 9 \left[\frac{A}{\sqrt{M}} + B \log M \right].$$

Απόδειξη. Έχουμε

(4.2.35)
$$C_n(\omega; f) = \frac{1}{10} \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} |c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)| \cdot \frac{1}{1+\mu^2}$$

και

(4.2.36)
$$\begin{aligned} c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f) &= \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega f(x) \exp\left(-i2^\nu(n+\mu/3)x\right) dx \\ &= \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega f(x) \exp(-ia_\mu x) dx, \end{aligned}$$

όπου

$$a_\mu = 2^\nu \left(n + \frac{\mu}{3}\right).$$

Γράφουμε

$$\exp(ia_\mu x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{\mu,k} \exp(i2^\nu kx), \tag{4.2.37}$$

όπου

$$a_{\mu,k} = \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega \exp\left(i(a_\mu - 2^\nu k)x\right) dx = \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega \exp\left(-i2^\nu(k-(n+\mu/3)x\right) dx. \tag{4.2.38}$$

Ολοκληρώνοντας βλέπουμε ότι $a_{\mu,k} = 0$ αν $k-(n+\mu/3) \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, ότι $a_{\mu,k} = 1$ αν $k-(n+\mu/3) = 0$ και ότι

$$|a_{\mu,k}| \leqslant \frac{2}{2\pi}|k-(n+\mu/3)|^{-1} \ \text{ αν } k-(n+\mu/3)\notin\mathbb{Z}. \tag{4.2.39}$$

Για την τελευταία ανισότητα γράφουμε

$$\begin{aligned} |a_{\mu,k}| &= \left| \frac{1}{m(\omega)} \left[\frac{\exp(-i2^\nu(k-(n+\mu/3))x)}{-i2^\nu(k-(n+\mu/3))} \right]_{\min(\omega)}^{\max(\omega)} \right| \\ &\leqslant \frac{1}{m(\omega)} \frac{2}{2^\nu|k-n-\mu/3|} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{|k-n-\mu/3|}. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας με τις άλλες δύο περιπτώσεις έχουμε

$$|a_{\mu,k}| \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{1}{1+|k-(n+\mu/3)|}, \qquad \mu,k\in\mathbb{Z}. \tag{4.2.40}$$

Αφού $f(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\omega;f)\exp(i2^\nu kx)$ με την L^2-έννοια, παίρνουμε

$$\begin{aligned} c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega;f) &= \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\omega;f)\exp(i2^\nu kx)\overline{\exp(ia_\mu x)}dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega c_k(\omega;f)\exp(i2^\nu kx) \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \overline{a}_{\mu,\ell}\exp(-i2^\nu \ell x)dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_\mu(\omega;f)\overline{a}_{\mu,k}, \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

και έχουμε την εκτίμηση

$$|c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega;f)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\omega;f)|\cdot|a_{\mu,k}| \leqslant \frac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\omega;f)|\cdot\frac{1}{1+|k-(n+\mu/3)|}. \tag{4.2.42}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $\left|\frac{\mu}{3}\right| \leqslant \frac{M}{2}$, αφού $M \geqslant 2$ έχουμε

(4.2.43)
$$\begin{aligned}\sum_{|k-n|\leqslant M} |c_k(\omega;f)| \cdot \frac{1}{1+|k-n-\mu/3|} &\leqslant B \sum_{|k-n|\leqslant M} \frac{1}{1+|k-n-\mu/3|} \\ &\leqslant B \sum_{1\leqslant|\ell|\leqslant 2M} \frac{1}{|\ell|} \leqslant 2B(1+\log 2M).\end{aligned}$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\mu > 0$ τότε

$$\begin{aligned}\sum_{|k-n|\leqslant M} \frac{1}{1+|k-n-\mu/3|} &= \sum_{|j|\leqslant M} \frac{1}{1+|j-\mu/3|} \\ &= \sum_{\mu/3\leqslant j\leqslant M} \frac{1}{1+j-\frac{\mu}{3}} + \sum_{-M\leqslant j\leqslant \frac{\mu}{3}} \frac{1}{1-j+\frac{\mu}{3}} \\ &\leqslant \sum_{\lfloor \mu/3\rfloor+1\leqslant j\leqslant M} \frac{1}{1+j-\frac{\mu}{3}} + \sum_{-M\leqslant j\leqslant \lfloor\frac{\mu}{3}\rfloor} \frac{1}{1-j+\frac{\mu}{3}} \\ &\leqslant \sum_{\ell=1}^{M} \frac{1}{\ell} + \sum_{\ell=1}^{1+M+\lfloor\frac{\mu}{3}\rfloor} \frac{1}{\ell} \\ &\leqslant 2\sum_{\ell=1}^{2M} \frac{1}{\ell} = \sum_{1\leqslant|\ell|\leqslant 2M} \frac{1}{|\ell|}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\sum_{|k-n|\leqslant M} |c_k(\omega;f)| \cdot \frac{1}{1+|k-n-\mu/3|} &\leqslant B \sum_{1\leqslant|\ell|\leqslant 2M} \frac{1}{|\ell|} \\ &\leqslant 2B\left(1+\int_1^{2M} \frac{1}{x}\,dx\right) = 2B\log(2M)+2B \\ &\leqslant 8B\log M,\end{aligned}$$

αν λάβουμε υπόψη μας και την $M \geqslant 2$ (από την οποία έπεται ότι $6\log M \geqslant 6\log 2 \geqslant 3$).

Ομοίως,

(4.2.44)
$$\begin{aligned}&\sum_{|k-n|>M} |c_k(\omega;f)| \cdot \frac{1}{1+|k-n-\mu/3|} \\ &\leqslant \left(\sum_{k} |c_k(\omega;f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|k-n|>M} \frac{1}{(1+|k-n-\mu/3|)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant A\left(2\sum_{\ell>\frac{M}{2}} \frac{1}{\ell^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{8}A\,\frac{1}{\sqrt{M}},\end{aligned}$$

διότι: αν $M \geqslant 4$ τότε

$$\sum_{\ell > \frac{M}{2}} \frac{1}{\ell^2} \leqslant \sum_{\ell \geqslant \lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1} \left(\frac{1}{\ell - 1} - \frac{1}{\ell} \right) \leqslant \frac{1}{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \leqslant \frac{1}{\frac{M}{2} - 1} \leqslant \frac{4}{M},$$

ενώ αν $2 \leqslant M \leqslant 4$ και πάλι έχουμε

$$\sum_{\ell > \frac{M}{2}} \frac{1}{\ell^2} \leqslant \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 \leqslant 1 \leqslant \frac{4}{M}.$$

Σε κάθε περίπτωση,

$$A \left(2 \sum_{\ell > \frac{M}{2}} \frac{1}{\ell^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant A \sqrt{\frac{8}{M}} = \sqrt{8} A \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Έτσι παίρνουμε

$$|c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)| \leqslant 8 \left(\frac{A}{\sqrt{M}} + B \log M \right) =: q \tag{4.2.45}$$

αν $\left|\frac{\mu}{3}\right| \leqslant \frac{M}{2}$.

(β) Αν $\left|\frac{\mu}{3}\right| > \frac{M}{2}$ χρησιμοποιούμε την εκτίμηση

$$|c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)| \leqslant A.$$

Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} C_n(\omega; f) &\leqslant \frac{1}{10} \sum_{\left|\frac{\mu}{3}\right| \leqslant \frac{M}{2}} |c_{n+\frac{\mu}{3}}| \cdot \frac{1}{1+\mu^2} + \sum_{\left|\frac{\mu}{3}\right| > \frac{M}{2}} |c_{n+\frac{\mu}{3}}| \cdot \frac{1}{1+\mu^2} \\ &\leqslant q \cdot \frac{1}{10} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+\mu^2} + A \cdot \frac{1}{10} \sum_{\left|\frac{\mu}{3}\right| > \frac{M}{2}} \frac{1}{1+\mu^2} \\ &\leqslant q + \frac{1}{5} \frac{A}{M} \leqslant q + \frac{1}{5} A \frac{1}{\sqrt{M}}. \end{aligned} \tag{4.2.46}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του q παίρνουμε

$$C_n(\omega; f) \leqslant 9 \left(\frac{A}{\sqrt{M}} + B \log M \right), \tag{4.2.47}$$

και έχουμε αποδείξει το λήμμα. □

Λήμμα 4.2.6. *Αν $f(x) = e^{i\lambda x}$ και $\omega = \omega_{j\nu}$ τότε*

$$|2^{-\nu}\lambda - n| \, C_n(\omega; f) \leqslant 1. \tag{4.2.48}$$

Απόδειξη. Αφού $|f(x)| = 1$ έχουμε $|c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)| \leqslant 1$, άρα και $C_n(\omega; f) \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $|2^{-\nu}\lambda - n| \geqslant 1$.

(α) Αν $\left|\frac{\mu}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}|2^{-\nu}\lambda - n|$ τότε

$$
\begin{aligned}
|c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)| &= \left|\frac{1}{m(\omega)}\int_\omega \exp(i\lambda x)\exp\left(-i2^\nu(n+\mu/3)x\right)dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{m(\omega)}\int_\omega \exp\big(i2^\nu(2^{-\nu}\lambda - n - \mu/3)x\big)\,dx\right| \\
&\leqslant \frac{1}{m(\omega)}\left|\int_\omega \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{i2^\nu(2^{-\nu}\lambda - n - \mu/3)}\right)dx\right| \\
&= \frac{1}{m(\omega)}\left|\frac{1}{i2^\nu(2^{-\nu}\lambda - n - \mu/3)}\exp\big(i2^\nu(2^{-\nu}\lambda - n - \mu/3)\big)\Big|_{\min(\omega)}^{\max(\omega)}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{m(\omega)}\frac{1}{2^\nu|2^{-\nu}\lambda - n - \mu/3|}\cdot 2 \leqslant \frac{2}{m(\omega)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{|2^{-\nu}\lambda - n| - |\mu/3|} \\
&\leqslant \frac{2}{2\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}|2^{-\nu}\lambda - n|} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{|2^{-\nu}\lambda - n|},
\end{aligned} \tag{4.2.49}
$$

άρα παίρνουμε

$$
|2^{-\nu}\lambda - n|\,|c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)| \leqslant |2^{-\nu}\lambda - n|\,\frac{2}{2\pi}\frac{1}{|2^{-\nu}\lambda - n|} \leqslant \frac{2}{\pi}. \tag{4.2.50}
$$

(β) Αν $\left|\frac{\mu}{3}\right| > \frac{1}{2}|2^{-\nu}\lambda - n|$ τότε χρησιμοποιούμε την $\left|c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)\right| \leqslant 1$ και παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
|2^{-\nu}\lambda - n|C_n(\omega; f) &\leqslant |2^{-\nu}\lambda - n|\cdot\frac{1}{10}\sum_{\left|\frac{\mu}{3}\right|\leqslant\frac{1}{2}|2^{-\nu}\lambda - n|}|c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)|\cdot\frac{1}{1+\mu^2} \\
&+ |2^{-\nu}\lambda - n|\cdot\frac{1}{10}\sum_{\left|\frac{\mu}{3}\right|>\frac{1}{2}|2^{-\nu}\lambda - n|}|c_{n+\frac{\mu}{3}}(\omega; f)|\cdot\frac{1}{1+\mu^2} \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\frac{1}{10}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+\mu^2} + |2^{-\nu}\lambda - n|\cdot\frac{1}{10}\sum_{\left|\frac{\mu}{3}\right|>\frac{1}{2}|2^{-\nu}\lambda - n|}\frac{1}{1+\mu^2}.
\end{aligned} \tag{4.2.51}
$$

Για το τελευταίο άθροισμα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{10}\sum_{\left|\frac{\mu}{3}\right|>\frac{1}{2}|2^{-\nu}\lambda - n|}\frac{1}{1+\mu^2} &= \frac{1}{5}\sum_{\mu>\frac{3}{2}|2^{-\nu}\lambda - n|}\frac{1}{1+\mu^2} \leqslant \frac{1}{5}\sum_{\mu>|2^{-\nu}\lambda - n|}\frac{1}{1+\mu^2} \\
&\leqslant \frac{1}{5}\int_{\lfloor|2^{-\nu}\lambda - n|\rfloor}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \leqslant \frac{1}{5}\int_1^\infty\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{20} < \frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

Έπεται ότι

$$
|2^{-\nu}\lambda - n|C_n(\omega; f) \leqslant \frac{2}{\pi} + \frac{1}{5} < 1,
$$

το οποίο αποδεικνύει το λήμμα. □

4.3 Οι συναρτήσεις $S_n^*(x;f;\omega^*)$ και ο τελεστής M^*

Έστω $p \in (1,\infty)$ και έστω $\mathcal{M}$ η κλάση των μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο $[0,\infty]$. Στην Παράγραφο 2.4 ορίσαμε έναν τελεστή $M : L^p[-\pi,\pi] \to \mathcal{M}$ θέτοντας

$$Mf(x) = \sup_{n \geqslant 0} |S_n(x;f)|,$$

όπου $S_n(x;f)$ είναι το μερικό άθροισμα

$$S_n(x;f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \qquad x \in [-\pi,\pi], \ \ n \geqslant 0,$$

της σειράς Fourier της f. Παρατηρήστε ότι

$$S_n(x;f) - S_{n-1}(x;f) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.3.1}$$

Έχουμε ακόμα την εκκρεμότητα να δείξουμε το Θεώρημα 2.4.1, δηλαδή ότι ο M είναι τύπου p για κάθε $p \in (1,\infty)$. Αντί να δώσουμε ευθεία απόδειξη θα ορίσουμε σε αυτήν την παράγραφο έναν άλλο τελεστή $M^* : L^p[-\pi,\pi] \to \mathcal{M}$ και θα αποδείξουμε ότι

$$\|Mf\|_p \leqslant 5\|f\|_p + \|M^* f\|_p, \tag{4.3.2}$$

όπου, όπως πάντα, με $\|\cdot\|_p$ συμβολίζουμε την p-νόρμα στον $L^p[-\pi,\pi]$. Με τον τελεστή M^* θα ασχοληθούμε στο Κεφάλαιο 5. Σημειώνουμε ότι δεν θα αποδείξουμε ότι ο M^* είναι τύπου p, αλλά μόνο ότι είναι περιορισμένου τύπου p για κάθε $p \in (1,\infty)$.

Έστω $f \in L^1(-\pi,\pi]$ μια πραγματική συνάρτηση στον L^1. Γράφοντας $f^\circ \in L^1(-4\pi,4\pi]$ εννοούμε την περιοδική επέκταση της f στο $\omega_{-1}^* = (-4\pi,4\pi]$.

Ο ορισμος του M^* εξαρτάται ισχυρά από το μετασχηματισμό Hilbert. Έστω ω^* ένα smoothing διάστημα, του τύπου που ορίστηκε στην Παράγραφο 4.1, και έστω $n \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $S_n^*(x;f;\omega^*)$ στο $(-\pi,\pi]$ θέτοντας

$$S_n^*(x;f;\omega^*) = \frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\omega^*} \frac{e^{-int} f^\circ(t)}{x-t}\,dt, \qquad x \in (-\pi,\pi]. \tag{4.3.3}$$

Δηλαδή, η $S_n^*(x;f;\omega^*)$ είναι ο μετασχηματισμός Hilbert της $e^{-inx} f^\circ(x)\chi_{\omega^*}(x)$.

Αφού η f παίρνει πραγματικές τιμές, παίρνουμε αμέσως

$$\overline{S_{-n}^*(x;f;\omega^*)} = S_n^*(x;f;\omega^*), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

όπου $\overline{z}$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του z. Ειδικότερα,

$$|S_{-n}^*(x;f;\omega^*)| = |S_n^*(x;f;\omega^*)|, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Ο τελεστής $M^* : L^p(-\pi,\pi] \to \mathcal{M}$ ορίζεται τώρα ως εξής:

$$M^*f(x) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |S_n^*(x;f;\omega_{-1}^*)| = \sup_{n\geqslant 0} |S_n^*(x;f;\omega_{-1}^*)|. \tag{4.3.4}$$

Σημειώνουμε ότι ο M^* ορίζεται μόνο μέσω του $\omega_{-1}^* = (-4\pi, 4\pi]$, αλλά για να εκτιμήσουμε τον M^* θα χρειαστεί να μελετήσουμε την $S_n^*(x;f;\omega^*)$ για γενικά ω^*.

Έστω $D_n(y)$, $n \geqslant 0$, ο *πυρήνας του Dirichlet*, ο οποίος ορίζεται από την

$$D_n(y) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}$$

για $y \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, και την $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$.

Ένα κλασικό αποτέλεσμα, το οποίο επαληθεύεται εύκολα, μας λέει ότι, για κάθε $n \geqslant 0$,

$$S_n(x;f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|<\pi} f^\circ(t) D_n(x-t)\,dt.$$

Για να αποδείξουμε την (4.3.2) θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε το $|S_n(x;f)|$ μέσω των $\|f\|_1 \leqslant (2\pi)^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_p$ και $|S_n^*(x;f;\omega_{-1}^*)|$. Για το σκοπό αυτό εισάγουμε έναν άλλο πυρήνα $F_n(y)$, $n \geqslant 0$, θέτοντας

$$F_n(y) = \frac{\sin ny}{y}$$

για $y \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, και $F_n(0) = n$.

Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in (-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|<\pi} f^\circ(t) F_n(x-t)\,dt &= \frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{|x-t|<\pi} \frac{e^{in(x-t)} - e^{-in(x-t)}}{2i(x-t)} f^\circ(t)\,dt \\ &= \frac{e^{inx}}{2\pi i}(\mathrm{pv})\int_{|x-t|<\pi} \frac{e^{-int}f^\circ(t)}{x-t}\,dt - \frac{e^{-inx}}{2\pi i}(\mathrm{pv})\int_{|x-t|<\pi} \frac{e^{int}f^\circ(t)}{x-t}\,dt.\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Τώρα, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{|x-t|<\pi} \frac{e^{-imt}f^\circ(t)}{x-t}\,dt = S_m^*(x;f;\omega_{-1}^*) - \frac{1}{\pi}\int_{\substack{|x-t|\geqslant\pi\\ |t|<4\pi}} \frac{e^{-imt}f^\circ(t)}{x-t}\,dt,$$

και από την (4.3.5) παίρνουμε την εκτίμηση

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|<\pi} f^\circ(t)F_n(x-t)\,dt\right| \leqslant |S_n^*(x;f;\omega_{-1}^*)| + \frac{4}{\pi^2}\|f\|_1. \tag{4.3.6}$$

Λήμμα 4.3.1. *Για κάθε $y \in [-\pi,\pi]$ και για κάθε $n \geqslant 0$ έχουμε*

$$|D_n(y) - F_n(y)| < 1.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε μια συνάρτηση $g(y)$ με

$$g(y) = \frac{1}{2}\cot\frac{y}{2} - \frac{1}{y}$$

για $y \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, και $g(0) = 0$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η g είναι συνεχής και φθίνουσα. Ειδικότερα, $|g(y)| \leqslant \frac{1}{\pi}$ για κάθε $y \in [-\pi, \pi]$. Στην περίπτωση $y = 0$ το λήμμα ισχύει τετριμμένα. Για $y \neq 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} D_n(y) &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}\sin(ny)\cot\frac{y}{2} + \frac{1}{2}\cos(ny) \\ &= \sin(ny)\left(\frac{1}{2}\cot\frac{y}{2} - \frac{1}{y}\right) + \frac{\sin(ny)}{y} + \frac{1}{2}\cos(ny) \\ &= g(y)\cdot\sin(ny) + F_n(y) + \frac{1}{2}\cos(ny), \end{aligned}$$

άρα

$$|D_n(y) - F_n(y)| \leqslant |g(y)| + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} < 1.$$

□

Θεώρημα 4.3.2. *Αν $f \in L^p(-\pi, \pi]$, $1 < p \leqslant \infty$, τότε*

$$\|Mf\|_p \leqslant 5\|f\|_p + \|M^*f\|_p.$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \geqslant 0$ και για κάθε $x \in (-\pi, \pi]$ έχουμε

$$\begin{aligned} S_n(x; f) &= \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|<\pi} f^\circ(t) D_n(x-t)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|<\pi} f^\circ(t)(D_n(x-t) - F_n(x-t))\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|<\pi} f^\circ(t) F_n(x-t)\, dt. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3.1 και την (4.3.6) παίρνουμε λοιπόν την ακόλουθη εκτίμηση σχεδόν για κάθε $x \in (-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} |S_n(x; f)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\cdot 1 \cdot \|f\|_1 + |S_n^*(x; f; \omega_{-1}^*)| + \frac{4}{\pi^2}\|f\|_1 \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{4}{\pi}\right)\cdot (2\pi)^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_p + |S_n^*(x; f; \omega_{-1}^*)|, \end{aligned}$$

άρα

$$Mf(x) = \sup_{n\geqslant 0}|S_n(x; f)| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{4}{\pi}\right)\cdot (2\pi)^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_p + M^*f(x)$$

σχεδόν παντού, απ' όπου παίρνουμε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski,

$$\begin{aligned}\|Mf\|_p &\leqslant \frac{1}{\pi}\left(1+\frac{4}{\pi}\right)\cdot(2\pi)^{1-\frac{1}{p}}(2\pi)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p+\|M^*f\|_p\\ &=2\left(1+\frac{4}{\pi}\right)\|f\|_p+\|M^*f\|_p\leqslant 5\|f\|_p+\|M^*f\|_p.\end{aligned}$$

□

Θα δώσουμε τώρα κάποιες εκτιμήσεις για την $S_n^*(x;f;\omega^*)$, όπου $\omega^*=\omega_{j\nu}\cup\omega_{j+1,\nu}$ είναι οποιοδηποτε smoothing διάστημα που αποτελείται από δύο γειτονικά δυαδικά διαστήματα $\omega_{j\nu}$ και $\omega_{j+1,\nu}$, με καθένα από αυτά μήκους $2\pi\cdot 2^{-\nu}$. Έστω $f\in L^1(-\pi,\pi]$. Σε αυτήν την παραγραφο θεωρούμε την

$$S_n^*(x;f;\omega^*)=\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\omega^*}\frac{e^{-int}f^\circ(t)}{x-t}\,dt$$

για διάφορες τιμές του n. Λόγω της $\overline{S_{-n}^*(x;f;\omega^*)}=S_n^*(x;f;\omega^*)$, μπορούμε στα επόμενα να θεωρήσουμε μόνο $n,n_0\geqslant 0$.

Λήμμα 4.3.3. *Έστω $n,n_0\in\mathbb{N}$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $m_0\geqslant 0$ τέτοιος ώστε $n_0=2^{\nu+1}m_0$. Αν $|n-n_0|\leqslant 2^{\nu+1}$ τότε*

$$\begin{aligned}&|e^{inx}S_n^*(x;f;\omega^*)-e^{in_0x}S_{n_0}^*(x;f;\omega^*)|\\ &\qquad\leqslant c_4\max\left\{C_{\psi(n_0;\omega_{j\nu})}(\omega_{j\nu};f),C_{\psi(n_0;\omega_{j+1,\nu})}(\omega_{j+1,\nu};f)\right\}\end{aligned}$$

όπου c_4 είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από τα n,n_0,m_0,ν και ω^*.

Απόδειξη. Σημειώνουμε ότι (βλέπε (4.2.1)) ισχύει $\psi(n_0;\omega_{j\nu})=\psi(n_0;\omega_{j+1,\nu})=2m_0$. Πρώτα θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(u)$ που ορίζεται από την

$$\Phi(u)=\frac{e^{iu}-1}{u}$$

για $u\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, και την $\Phi(0)=i$. Τότε, $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\Phi(u)\to 0$ και $\Phi''(u)\to 0$ όταν $u\to\pm\infty$, άρα $\|\Phi\|_\infty,\|\Phi''\|_\infty\leqslant c_1'$ για κάποια σταθερά $c_1'>0$.

Τώρα, ορίζουμε

$$\varphi(t)=\frac{1}{t}\left(\exp(i(n-n_0)t)-1\right)=(n-n_0)\Phi((n-n_0)t),$$

με την τετριμμένη τροποποίηση όταν $t=0$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_\infty&=|n-n_0|\cdot\|\Phi\|_\infty\leqslant 2\cdot 2^\nu c_1'\\ \|\varphi''\|_\infty&=|n-n_0|^3\cdot\|\Phi''\|_\infty\leqslant 8\cdot 2^{3\nu}\cdot c_1'.\end{aligned}$$

Ας θεωρήσουμε το $\omega_{j\nu}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.3 έχουμε

$$\varphi(t)=\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\gamma_\mu\exp\left(i2^\nu\cdot\frac{\mu}{3}t\right),\qquad t\in\{x\}-\omega_{j\nu},$$

όπου

$$\begin{aligned}(1+\mu^2)|\gamma_\mu|&\leqslant c_2\left(\max_{\omega_{j\nu}}|\varphi|+2^{-2\nu}\max_{\omega_{j\nu}}|\varphi''|\right)\\&\leqslant c_2\left(2\cdot 2^\nu c_1'+8\cdot 2^\nu c_1'\right)=c_2'\cdot 2^\nu.\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\Delta_j&=e^{inx}\int_{\omega_{j\nu}}\frac{e^{-int}f^\circ(t)}{x-t}\,dt-e^{in_0x}\int_{\omega_{j\nu}}\frac{e^{-in_0t}f^\circ(t)}{x-t}\,dt\\&=\int_{\omega_{j\nu}}\left(e^{in(x-t)}-e^{in_0(x-t)}\right)\frac{f^\circ(t)}{x-t}\,dt\\&=\int_{\omega_{j\nu}}e^{in_0(x-t)}\varphi(x-t)f^\circ(t)\,dt\\&=\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\gamma_\mu\int_{\omega_{j\nu}}\exp\left(i\left(n_0+2^\nu\frac{\mu}{3}\right)(x-t)\right)f^\circ(t)\,dt\\&=\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\gamma_\mu\exp\left(i\left(n_0+2^\nu\frac{\mu}{3}\right)x\right)\int_{\omega_{j\nu}}\exp\left(-i\left(n_0+2^\nu\frac{\mu}{3}\right)t\right)f^\circ(t)\,dt\\&=\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\gamma_\mu\exp\left(i\left(n_0+2^\nu\frac{\mu}{3}\right)x\right)\cdot c_{2m_0+\frac{\mu}{3}}(\omega_{j\nu};f)\cdot m(\omega_{j\nu}),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (4.2.3). Άρα, από την (4.3.7),

$$\begin{aligned}|\Delta_j|&\leqslant m(\omega_{j\nu})\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}|\gamma_\mu|\cdot\left|c_{2m_0+\frac{\mu}{3}}(\omega_{j\nu};f)\right|\\&\leqslant m(\omega_{j\nu})\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\frac{c_2'\cdot 2^\nu}{1+\mu^2}\cdot\left|c_{2m_0+\frac{\mu}{3}}(\omega_{j\nu};f)\right|\\&=2\pi\cdot 10c_2'\cdot C_{2m_0}(\omega_{j\nu};f)=20\pi\cdot c_2'\cdot C_{2m_0}(\omega_{j\nu};f).\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

Όμοια, αν

$$\Delta_{j+1}=e^{inx}\int_{\omega_{j+1,\nu}}\frac{e^{-int}f^\circ(t)}{x-t}\,dt-e^{in_0x}\int_{\omega_{j+1,\nu}}\frac{e^{-in_0t}f^\circ(t)}{x-t}\,dt,$$

έχουμε και την

$$|\Delta_{j+1}|\leqslant 20\pi\cdot c_2'\cdot C_{2m_0}(\omega_{j+1,\nu};f),$$

άρα

$$\begin{aligned}|e^{inx}S_n^*(x;f;\omega^*) - e^{in_0x}S_{n_0}^*(x;f;\omega^*)|& \\ \leqslant 40c_2' \max\{C_{2m_0}(\omega_{j\nu};f), C_{2m_0}(\omega_{j+1,\nu};f)\}&,\end{aligned}$$

και έχουμε αποδείξει το λήμμα με $c_4 = 40c_2'$. □

Παρατήρηση 4.3.4. Εξετάζοντας προσεκτικά τη συνάρτηση Φ της προηγούμενης απόδειξης βλέπουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε $c_4 = 13500$.

Παρατήρηση 4.3.5. Για μελλοντική χρήση σημειώνουμε ότι η (4.3.8) εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $\omega_{j\nu}$ με ένα από τα δυαδικά του υποδιαστήματα του επιπέδου $\nu+1$. Αν $\omega_{k,\nu+1}$ είναι ένα από αυτά τα υποδιαστήματα, τότε

$$\begin{aligned}\left|e^{inx}\int_{\omega_{k,\nu+1}}\frac{e^{-int}f^\circ(t)}{x-t}\,dt - e^{in_0x}\int_{\omega_{k,\nu+1}}\frac{e^{-in_0t}f^\circ(t)}{x-t}\,dt\right|& \\ \leqslant 20\pi\cdot c_2'\cdot C_{m_0}(\omega_{k,\nu+1};f).&\end{aligned}\tag{4.3.9}$$

Πόρισμα 4.3.6. *Έστω $\omega^* = \omega_{j\nu}\cup\omega_{j+1,\nu}$ και $n_0 = m_0 2^{\nu+1}$ για κατάλληλο $m_0 \geqslant 0$. Έστω $F \subseteq (-\pi,\pi]$ ένα μετρήσιμο σύνολο. Αν $|n-n_0| \leqslant 2^{\nu+1}$ τότε*

$$\Big|\,|S_n^*(x;\chi_F;\omega^*)| - |S_{n_0}^*(x;\chi_F;\omega^*)|\,\Big| \leqslant c_4 \max\{C_{2m_0}(\omega_{j\nu};\chi_F), C_{2m_0}(\omega_{j+1,\nu};\chi_F)\},$$

όπου $c_4 > 0$ είναι η σταθερά στο Λήμμα 4.3.3.

Απόδειξη. Το πόρισμα προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 4.3.3, αφού

$$\begin{aligned}\Big|\,|S_n^*(x;\chi_F;\omega^*)| - |S_{n_0}^*(x;\chi_F;\omega^*)|\,\Big| &= \Big|\,|e^{inx}S_n^*(x;\chi_F;\omega^*)| - |e^{in_0x}S_{n_0}^*(x;\chi_F;\omega^*)|\,\Big| \\ &\leqslant |e^{inx}S_n^*(x;\chi_F;\omega^*) - e^{in_0x}S_{n_0}^*(x;\chi_F;\omega^*)|.\end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.3.7. *Υποθέτουμε ότι $n_0 = 2^{\nu+1}m_0$ για κατάλληλο $m_0\in\mathbb{N}$. Αν $|n-n_0|\leqslant 2^{\nu+1}$ τότε*

$$|e^{inx}S_n^*(x;f;\omega^*) - e^{in_0x}S_{n_0}^*(x;f;\omega^*)| \leqslant c_5\, C_{\psi^*(n_0;\omega^*)}(\omega^*;f) = c_5\, C_{m_0}^*(\omega^*;f).$$

Απόδειξη. Έστω $\omega^* = \omega_1\cup\omega_2\cup\omega_3\cup\omega_4$, όπου $4m(\omega_j) = m(\omega^*) = 4\cdot 2\pi\cdot 2^{-(\nu+1)}$, $1\leqslant j\leqslant 4$, δηλαδή το ω_j ανήκει στο επίπεδο $\nu+1$. Τότε, από την (4.2.11),

$$C_{m_0}^*(\omega^*;f) = \max\{C_{m_0}(\omega_j;f) : j = 1,\dots,4\},$$

άρα, χρησιμοποιώντας την (4.3.9) παίρνουμε

$$|e^{inx}S_n^*(x;f;\omega^*) - e^{in_0x}S_{n_0}^*(x;f;\omega^*)| \leqslant 4\cdot 20c_2'\,C_{m_0}^*(\omega^*;f).$$

□

Παρατήρηση 4.3.8. Χρησιμοποιώντας την ακριβή τιμή της c_2' παίρνουμε $c_5 = 80c_2' \leqslant 27000$.

Λήμμα 4.3.9. *Έστω ω^* ένα smoothing διάστημα και έστω $m,n\in\mathbb{Z}$. Αν το x ανήκει στο μεσαίο μισό του ω^*, τότε*

$$|S_n^*(x;e^{imx};\omega^*)| \leqslant 3.$$

Απόδειξη. Έστω ϖ^* το μεγαλύτερο υποδιάστημα του ω^* της μορφής $\varpi^* = (x-a, x+a]$. Τότε, ένα εκ των $x-a$ και $x+a$ είναι άκρο του ω^*. Έτσι, το $\omega^*\setminus\varpi^*$ είναι διάστημα και έχουμε τα ακόλυθα για το $S_n^*(x;e^{imx};\omega^*)$:

$$\begin{aligned}
|S_n^*(x;e^{imx};\omega^*)| &= \left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\omega^*}\frac{e^{-int}e^{imt}}{x-t}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\varpi^*}\frac{e^{-int}e^{imt}}{x-t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\omega^*\setminus\varpi^*}\frac{e^{-int}e^{imt}}{x-t}\,dt\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\varpi^*}\frac{e^{-int}e^{imt}}{x-t}\,dt\right| + \frac{1}{\pi}\int_{\omega^*\setminus\varpi^*}\frac{1}{|x-t|}\,dt.
\end{aligned}$$

Για να εκτιμήσουμε τον δεύτερο όρο παρατηρούμε ότι αν $t\in\omega^*\setminus\varpi^*$ τότε $|x-t|\geqslant a$, και

$$a = \mathrm{dist}(x,\partial(\omega^*)) \geqslant \frac{1}{4}m(\omega^*)$$

γιατί το x βρίσκεται στο μεσαίο μισό του ω^*. Άρα,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{\omega^*\setminus\varpi^*}\frac{1}{|x-t|}\,dt &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\omega^*\setminus\varpi^*}\frac{1}{a}\,dt = \frac{m(\omega^*\setminus\varpi^*)}{\pi a} = \frac{m(\omega^*)-2a}{\pi a} \\
&\leqslant \frac{4a-2a}{\pi a} = \frac{2}{\pi} < 1.
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Για να εκτιμήσουμε τον πρώτο όρο γράφουμε

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\overline{\omega}^*}\frac{e^{i(m-n)t}}{x-t}\,dt\right| &= \left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\overline{\omega}^*}\frac{e^{i(m-n)t}}{x-t}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}e^{i(m-n)x}(\mathrm{pv})\int_{\overline{\omega}^*}\frac{e^{i(m-n)(t-x)}}{x-t}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{-a}^{a}\frac{e^{i(m-n)t}}{-t}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{-a}^{a}\frac{\sin((m-n)t)}{t}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{2}{\pi}(\mathrm{pv})\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{a(m-n)}\frac{\sin u}{u}\,du\right| \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\cdot\pi = 2.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $|S_n^*(x; e^{imx}; \omega^*)| \leqslant 3$. $\square$

Κεφάλαιο 5

Απόδειξη του θεωρήματος Carleson-Hunt

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα αποδείξουμε το Θεώρημα 2.4.1, και έτσι θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος Carleson-Hunt. Χρειαζόμαστε όμως, προηγουμένως, αρκετά τεχνικά αποτελέσματα. Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή της Παραγράφου 4.3, θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής M^* που ορίστηκε στην (4.3.4) είναι περιορισμένου τύπου p για κάθε $1 < p < \infty$, για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τα θεωρήματα παρεμβολής του Κεφαλαίου 2. Στόχος μας είναι λοιπόν να αποδείξουμε ότι, για κάθε $1 < p < \infty$, υπάρχει μια σταθερά $B_p > 0$ τέτοια ώστε

$$m(\{x \in (-\pi, \pi] : M^*\chi_F^\circ(x) > y\}) \leqslant B_p^p y^{-p} m(F) \tag{5.1.1}$$

για κάθε $y > 0$ και για κάθε μετρήσιμο σύνολο $F \subseteq (-\pi, \pi]$. Θα ορίσουμε ένα σύνολο $E_N \subseteq (-4\pi, 4\pi]$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$|S_n^*(x; \chi_F; \omega_{-1}^*)| \leqslant y \tag{5.1.2}$$

για κάθε $x \in (-\pi, \pi] \setminus E_N$ και $|n| \leqslant N$, και

$$m(E_N) \leqslant B_p^p y^{-p} m(F). \tag{5.1.3}$$

Είναι φανερό ότι η (5.1.1) προκύπτει από τις (5.1.2) και (5.1.3). Το σύνολο E_N θα προκύψει ως ένωση άλλων συνόλων: των S^* και V_L^* που ορίζονται στην Παράγραφο 5.2, των Y^* και X^* που ορίζονται στην Παράγραφο 5.3, και των T^* και U^* που ορίζονται στην παράγραφο 5.6. Για καθένα από αυτά τα σύνολα αποδεικνύουμε μια εκτίμηση όμοια με την (5.1.3).

Για να ορίσουμε το X^* πρέπει να εισάγουμε κάποιες βοηθητικές συναρτήσεις $P_k(x;\omega)$ στην Παράγραφο 5.3 και να αποδείξουμε κάποιες εκτιμήσεις γι' αυτές στην Παράγραφο 5.4. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις συναρτήσεις για να ορίσουμε κάποια σύνολα δεικτών G_k^* και $\tilde{G}$, τα οποία θα χρειαστούν για να ορίσουμε μια διάσπαση $\Omega(p^*;k)$ του διαστήματος ω^* σε ξένα υποδιαστήματα, στα οποία η $C^*_{\psi^*(n;\omega^*)}(\omega^*;\chi_F^\circ)$ συμπεριφέρεται αρκετά καλά. Στην Παράγραφο 5.8 δίνουμε την τελική εκτίμηση για το $S_n^*(x;\chi_F;\omega_{-1}^*)$, η οποία μας βοηθάει να δείξουμε ότι ο M^* είναι περιορισμένου τύπου p, πριν όμως από αυτό, στην Παράγραφο 5.7 έχουμε δώσει μια αρκετά τεχνική απόδειξη κάποιων εκτιμήσεων για τα στοιχεία που δεν περιέχονται στο G_{kL}^*.

Αν το F έχει μηδενικό μέρο τότε $S_n^*(x;\chi_F;\omega_{-1}^*)=0$, άρα $M^*\chi_F=0$. Στις επόμενες παραγράφους υποθέτουμε λοιπόν ότι μας έχουν δοθεί $N\in\mathbb{N}$, $1<p<\infty$, $y>0$ και ένα μετρήσιμο σύνολο $F\subseteq(-\pi,\pi]$ με $m(F)>0$.

5.2 Κατασκευή των συνόλων S^* και V_L^*

Συμβολίζουμε με ω τα δυαδικά διαστήματα και με ω^* τα smoothing διαστήματα. Για δοθέν ω θεωρούμε το διάστημα

$$I_\omega := \{x\in(-2\pi,2\pi] : \operatorname{dist}(x,\omega)\leqslant 3m(\omega)\}$$

και συμβολίζουμε με $\tilde{\omega}$ το διάστημα

$$\tilde{\omega} = I_\omega \setminus \{x_{I_\omega}\}, \tag{5.2.1}$$

όπου x_{I_ω} είναι το αριστερό άκρο του I_ω. Δηλαδή, φυσιολογικά το $\tilde{\omega}$ είναι η ένωση επτά γειτονικών δυαδικών διαστημάτων του ιδίου επιπέδου, με το ω να είναι το μεσαίο από αυτά. Αν το ω βρίσκεται πολύ κοντά σε κάποιο από τα άκρα του $(-2\pi,2\pi]$, τότε το $\tilde{\omega}$ είναι και πάλι η ένωση κάποιων γειτονικών δυαδικών διαστημάτων, όμως το πλήθος τους ενδέχεται να είναι μικρότερο από επτά.

Ορίζουμε

$$S=\bigcup\left\{\omega : \frac{1}{y^p}\int_\omega \chi_F^\circ(x)\,dx \geqslant m(\omega)\right\} \quad \text{και} \quad S^*=\bigcup_{\omega\subseteq S}\tilde{\omega}. \tag{5.2.2}$$

Παρατηρήστε ότι αν $y>1$ τότε $S=\emptyset$, άρα και $S^*=\emptyset$. Πράγματι, αν $y>1$ τότε προφανώς ισχύει

$$\frac{1}{y^p}\int_\omega \chi_F^\circ(x)\,dx < 1\cdot m(\omega).$$

Γενικά, έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση:

Θεώρημα 5.2.1. *Ισχύει η ανισότητα*

$$m(S^*) \leqslant 14y^{-p}m(F).$$

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι το S είναι ξένη ένωση δυαδικών διαστημάτων ω που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$y^{-p}\int_\omega \chi_F^\circ(x)\,dx \geqslant m(\omega).$$

Ορίζουμε

$$\mathcal{F} = \left\{\omega : \omega \text{ δυαδικό διάστημα και } y^{-p}\int_\omega \chi_F^\circ(x)\,dx \geqslant m(\omega)\right\}.$$

Τότε, $S = \bigcup\{\omega : \omega \in \mathcal{F}\}$. Θέτουμε

$$S_1 = \bigcup\left\{\omega : y^{-p}\int_\omega \chi_F^\circ(x)\,dx \geqslant m(\omega) \text{ και } m(\omega) = \pi\right\}$$

και

$$S_2 = \bigcup\left\{\omega \in \mathcal{F} : m(\omega) = \frac{2\pi}{2^2} \text{ και } \omega \cap S_1 = \emptyset\right\}.$$

Δηλαδή, το S_2 είναι η ένωση των διαστημάτων της οικογένειας $\mathcal{F}$ του επιπέδου $\nu = 2$ για τα οποία δεν υπάρχει κάποιο άλλο δυαδικό διάστημα το οποίο να βρίσκεται γνήσια υπεράνω αυτού και να ικανοποιεί τη συνθήκη ορισμού της $\mathcal{F}$. Με άλλα λόγια, για κάθε $\omega \in S_2$ έχουμε $\omega \in \mathcal{F}$ και δεν υπάρχει δυαδικό διάστημα $\omega' \in S_1$ τέτοιο ώστε $\omega' \supset \overline{\omega}$.

Στη συνέχεια, επαγωγικά ορίζουμε

$$S_n = \bigcup\left\{\omega \in \mathcal{F} : m(\omega) = \frac{2\pi}{2^n} \text{ και } \omega \cap (S_1 \cup \cdots \cup S_{n-1}) = \emptyset\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι, από τον ορισμό τους, τα σύνολα S_n είναι ξένα και

$$S = \bigcup_{n=1}^\infty S_n.$$

Πράγματι, αν $\omega \in \mathcal{F}$ τότε θεωρούμε το δυαδικό διάστημα $\omega' \subseteq \omega$ το οποίο ανήκει στην $\mathcal{F}$ και έχει το μέγιστο δυνατό μήκος. Τότε, δεν υπάρχει δυαδικό διάστημα το οποίο να περιέχει γνήσια το ω' και να ανήκει στην $\mathcal{F}$. Έτσι, αν ν είναι το επίπεδο του ω' έχουμε $\omega' \in S_\nu \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty S_n$, άρα $\omega \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty S_n$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$S = \bigcup\{\omega : \omega \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty S_n.$$

Αντίστροφα, για κάθε n έχουμε $S_n \subseteq \{\omega : \omega \in \mathcal{F}\}$, άρα $S_n \subseteq S$. Έπεται ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subseteq S.$$

Προφανώς, κάθε S_n είναι ξένη ένωση δυαδικών διαστημάτων αφού το S_n είναι ένωση δυαδικών διαστημάτων του ιδίου επιπέδου n. Αν ονομάσουμε $\mathcal{F}'$ την (αριθμήσιμη) οικογένεια όλων των στοιχείων της $\mathcal{F}$ που η ένωσή τους δίνει το S, τότε $S = \bigcup_{\omega\in\mathcal{F}'} \omega$, άρα

$$S^* = \bigcup_{\omega\subseteq S} \tilde{\omega} = \bigcup_{\omega\in\mathcal{F}} \tilde{\omega} = \bigcup_{\omega\in\mathcal{F}'} \tilde{\omega}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} m(S^*) &\leqslant \sum_{\omega\in\mathcal{F}'} m(\tilde{\omega}) \leqslant \sum_{\omega\in\mathcal{F}'} 7m(\omega) = 7\sum_{\omega\in\mathcal{F}'} m(\omega) \\ &= 7\sum_{\omega\in\mathcal{F}'} y^{-p}\int_{\omega} \chi_F^{\circ}(x)\,dx = 7y^{-p}\int_{\bigcup\omega:\omega\in\mathcal{F}'} \chi_F^{\circ}(x)\,dx \\ &\leqslant 7y^{-p}\int_{-2\pi}^{2\pi} \chi_F^{\circ}(x)\,dx = 14y^{-p}\int_{-\pi}^{\pi} \chi_F(x)\,dx = 14y^{-p}m(F). \end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια θεωρούμε μόνο τα δυαδικά διαστήματα ω τα οποία δεν περιέχονται στο S. Με $\|\cdot\|_{p,\omega}$ συμβολίζουμε την L_p-νόρμα πάνω από το ω.

Λήμμα 5.2.2. *Αν $\omega \not\subseteq S$ τότε*

$$\|\chi_F^{\circ}\|_{p,\omega} < [m(\omega)]^{1/p} y \tag{5.2.3}$$

και

$$C_n(\omega;\chi_F^{\circ}) < y \tag{5.2.4}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Από την (5.2.2) έχουμε ότι αν $\omega \not\subseteq S$ τότε

$$\frac{1}{y^p}\int_{\omega} \chi_F^{\circ}(x)\,dx < m(\omega),$$

και από την $|\chi_F^{\circ}(x)|^p = \chi_F^{\circ}(x)$ προκύπτει αμέσως η (5.2.3).

Χρησιμοποιώντας την (4.2.7), την ανισότητα του Holder και την (5.2.3) παίρνουμε

$$0 \leqslant C_n(\omega;\chi_F^{\circ}) \leqslant \frac{1}{m(\omega)}\int_{\omega} |\chi_F^{\circ}(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{m(\omega)}[m(\omega)]^{1/q}\|\chi_F^{\circ}\|_{p,\omega} < y.$$

□

Λήμμα 5.2.3. *Υποθέτουμε ότι $\omega^* \not\subset S^*$ και $\chi_F^\circ \cdot \chi_{\omega^*} \not\equiv 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ μπορούμε να βρούμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε*

$$2^{-k}y \leqslant C_n^*(\omega^*; \chi_F^\circ) < 2 \cdot 2^{-k}y. \tag{5.2.5}$$

Απόδειξη. Παίρνοντας υπόψη την ισοδυναμία των (4.2.12) και (4.2.13) και τον ορισμό της $C_n^*(\omega^*; \chi_F)$ βλέπουμε ότι $C_n^*(\omega^*; \chi_F) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Είναι λοιπόν φανερό ότι υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ωστε να ικανοποιείται η (5.2.5). Μένει να δείξουμε ότι $k \in \mathbb{N}$.

Από τη συνθήκη $\omega^* \not\subset S^*$ βλέπουμε ότι $\omega \not\subset S$ για καθένα από τα τέσσερα υποδιαστήματα $\omega \subset \omega^*$ για τα οποία $4m(\omega) = m(\omega^*)$. Από το Λήμμα 5.2.2 έπεται ότι $C_n(\omega; \chi_F^\circ) < y$ για καθένα από αυτά τα υποδιαστήματα, άρα

$$0 < C_n^*(\omega^*; \chi_F^\circ) = \max\{C_n(\omega; \chi_F^\circ) : \omega \subset \omega^*, 4m(\omega) = m(\omega^*)\} < y,$$

και η (5.2.5) μπορεί να ισχύει μόνο για κάποιον $k \in \mathbb{N}$. □

Λήμμα 5.2.4. *Αν $\omega^* \not\subset S^*$ τότε για κάθε $p \in (1, \infty)$ υπάρχει φυσικός $L = L(p) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε*

$$2^{-k}y \leqslant C_n^*(\omega^*; \chi_F^\circ) \quad \Longrightarrow y^{p/2} \leqslant 2^{Lk/4}y.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε

$$L = L(p) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2}{p-1} \right\rfloor & , \quad \text{αν } 1 < p < \frac{51}{50} \\ 100 & , \quad \text{αν } \frac{51}{50} \leqslant p \leqslant 50 \\ \lfloor 2p \rfloor & , \quad \text{αν } 50 < p < \infty. \end{cases} \tag{5.2.6}$$

Απόδειξη. Αν $\omega^* \not\subset S^*$ τότε $\omega \not\subset S$ για καθένα από τα τέσσερα υποδιαστήματα $\omega \subset \omega^*$ για τα οποία $4m(\omega) = m(\omega^*)$. Άρα,

$$C_n(\omega; \chi_F^\circ) \leqslant \frac{1}{m(\omega)} \int_\omega \chi_F^\circ(x)\, dx < y^p,$$

από την (4.2.7) και τον ορισμό του S. Έπεται ότι

$$2^{-k}y \leqslant C_n^*(\omega^*; \chi_F^\circ) = \max\{C_n(\omega; \chi_F^\circ) : \omega \subset \omega^*, 4m(\omega) = m(\omega^*)\} < y^p. \tag{5.2.7}$$

Από την (5.2.7) συμπεραίνουμε ότι $y > 2^{-k/(p-1)}$.

(α) Αν $1 < p \leqslant 2$ τότε $\frac{p}{2} - 1 \leqslant 0$, άρα

$$y^{\frac{p}{2}-1} \leqslant 2^{-\frac{k}{p-1}\frac{p-2}{2}} = 2^{\frac{2-p}{2(p-1)}k},$$

άρα το Λήμμα έπεται σε αυτήν την περίπτωση αν $L(p) \geqslant \frac{2(2-p)}{p-1}$, για παράδειγμα αν θέσουμε

$$L(p) = \max\left\{ \left\lfloor \frac{2}{p-1} \right\rfloor, 100 \right\}, \qquad 1 < p \leqslant 2.$$

(β) Αν $2 < p < \infty$, χρησιμοποιώντας την

$$C_n(\omega;\chi_F^\circ) \leqslant \frac{1}{m(\omega)}\int_\omega \chi_F^\circ(x)\,dx \leqslant 1$$

βλέπουμε ότι $2^{-k}y \leqslant C_n^*(\omega;\chi_F^\circ) \leqslant 1$, απ' όπου βλέπουμε ότι $y \leqslant 2^k$. Αφού $\frac{p}{2}-1 \geqslant 0$, παίρνουμε

$$y^{\frac{p}{2}-1} \leqslant 2^{\frac{p-2}{2}k}.$$

Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε $L(p) \geqslant 2(p-2)$, για παράδειγμα $L(p) = \max\{\lfloor 2p\rfloor, 100\}$. □

Σημείωση. Οι λόγοι για τους οποίους επιλέγουμε τον $L(p)$ να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 100 είναι τεχνικοί και θα φανούν αργότερα. Εξετάζοντας πιο προσεκτικά τα σημεία στα οποία αυτή η συνθήκη θα χρειαστεί, μπορούμε να δούμε ότι θα μας αρκούσε η $L(p) \geqslant 36$.

Αφού η συνάρτηση $h_1(p) = \frac{2}{p-1}$, $p \in (1,\infty)$, φθίνει από το $+\infty$ στο 0, μπορούμε να επιλέξουμε την τιμή $p = \frac{51}{50}$ για την οποία $h_1(p) = 100$. Από την άλλη πλευρά, η συνάρτηση $h_2(p)$, $p \in (1,\infty)$, αυξάνει από το 2 στο $+\infty$, άρα μπορούμε να επιλέξουμε την τιμη $p = 50$ για την οποία $h_2(p) = 100$. Για να συμβιβάσουμε τους δύο κλάδους ορίζουμε $L(p) = 100$ για κάθε $\frac{51}{50} < p < 50$, έτσι ώστε να έχουμε $L(p) \geqslant 100$ για κάθε $1 < p < \infty$.

Ορίζουμε

$$V_L^* = \{x \in \omega_{-1}^* : \widehat{H}\chi_F^\circ(x) > Ly\}, \tag{5.2.8}$$

όπου $L = L(p)$ είναι η σταθερά που ορίστηκε στην (5.2.6), και $\widehat{H}\chi_F^\circ$ είναι ο τροποποιημένος μεγιστικός μετασχηματισμός Hilbert της χ_F° ως προς το ω_{-1}^*.

Θεώρημα 5.2.5. *Ισχύει η ανισότητα*

$$m(V_L^*) \leqslant 4\left(\frac{A_p^*}{L}\right)^p y^{-p} m(F).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.1.3 έπεται ότι ο $\widehat{H}$ είναι τύπου p για κάθε $p \in (1,\infty)$, δηλαδή

$$\|\widehat{H}f\|_p \leqslant A_p^*\|f\|_p,$$

άρα και ασθενούς τύπου p. Αφού $m(V_L^*) = \lambda_{\widehat{H}\chi_F^\circ}(Ly)$, βλέπουμε ότι

$$m(V_L^*) \leqslant (A_p^*)^p (Ly)^{-p}\|\chi_F^\circ\|_{p,\omega_{-1}^*}^p = 4\left(\frac{A_p^*}{L}\right)^p y^{-p} m(F).$$

□

5.3 Τα σύνολα G_k, Y^*, X_k^* και X^*

Σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε το σύνολο στο οποίο οι συντελεστές Fourier της χ_F (χοντρικά) είναι αρκετά μεγάλοι, και θα αποδείξουμε ότι αυτό το σύνολο ικανοποιεί μια εκτίμηση παρόμοια με αυτήν που αποδείξαμε στο Θεώρημα 5.2.1 για το S^*.

Πρώτα θεωρούμε τα ω_{r0}, $r = 1, 2$, όπου $\omega_{10} = (-2\pi, 0]$ και $\omega_{20} = (0, 2\pi]$ (βλέπε (4.1.1)). Αν $f \in L^2(-\pi, \pi]$, έχουμε μια σειρά Fourier για την f, η οποία συγκλίνει στον $L^2(-\pi, \pi]$, άρα

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\omega_{r0}; f)|^2 < \infty.$$

Έτσι, για κάθε $\alpha > 0$, η ανισότητα $|c_n(\omega_{r0}; f)| \geqslant \alpha$ ισχύει για πεπερασμένους (μόνο) το πλήθος από τους συντελεστές Fourier της f.

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$G_k(\omega_{r0}) = \{(n, \omega_{r0}) : n \in \mathbb{Z}, |c_n(\omega_{r0}; \chi_F^{\circ})| \geqslant 2^{-k} y^{p/2}\}. \tag{5.3.1}$$

Από τα παραπάνω, το σύνολο $G_k(\omega_{r0})$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Επιπλέον, αφού

$$|c_n(\omega_{r0}; \chi_F^{\circ})| = |c_{-n}(\omega_{r0}; \chi_F^{\circ})|,$$

έπεται ότι $(n, \omega_{r0}) \in G_k(\omega_{r0})$ αν και μόνο αν $(-n, \omega_{r0}) \in G_k(\omega_{r0})$.

Έχοντας ορίσει το $G_k(\omega_{r0})$, ορίζουμε δύο συναρτήσεις $R_k(x; \omega_{r0})$ και $P_k(x; \omega_{r0})$, πολυώνυμα ως προς e^{ix} και e^{-ix}, θέτοντας

$$R_k(x; \omega_{r0}) = \sum_{(n,\omega_{r0})\in G_k(\omega_{r0})} c_n(\omega_{r0}; \chi_F^{\circ}) e^{inx}$$

και

$$P_k(x; \omega_{r0}) = R_k(x; \omega_{r0})$$

για κάθε $x \in (-2\pi, 2\pi]$. Αν $G_k(\omega_{r0}) = \emptyset$ τότε θέτουμε $R_k(x; \omega_{r0}) \equiv 0$. Συνοψίζοντας, για τον ορισμό την $R_k(x; \omega_{r0})$ έχουμε απλώς επιλέξει τους όρους της σειράς Fourier της χ_F° οι οποίοι είναι, με κάποια έννοια, μεγάλοι.

Στη συνέχεια θεωρούμε τα διαστήματα ω_{s1} του επιπέδου $\nu = 1$. Έστω $\omega_{s1} \subset \omega_{r0}$. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $\chi_F^{\circ} - P_k(\cdot; \omega_{r0})$ σαν σειρά Fourier στο ω_{s1} και ορίζουμε

$$G_k(\omega_{s1}) = \{(n, \omega_{s1}) : n \in \mathbb{Z}, |c_n(\omega_{s1}; \chi_F^{\circ} - P_k(\cdot; \omega_{r0}))| \geqslant 2^{-k} y^{p/2}\}.$$

Είναι φανερό ότι το $G_k(\omega_{s1})$ είναι πεπερασμένο σύνολο, άρα μπορούμε να ορίσουμε

$$R_k(x; \omega_{s1}) = \sum_{(n,\omega_{s1})\in G_k(\omega_{s1})} c_n(\omega_{s1}; \chi_F^{\circ} - P_k(\cdot; \omega_{r0})) e^{i2nx}$$

και

$$P_k(x;\omega_{s1}) = P_k(x;\omega_{r0}) + R_k(x;\omega_{s1}) = R_k(x;\omega_{r0}) + R_k(x;\omega_{s1})$$

για κάθε $x \in (-2\pi, 2\pi]$.

Γενικά, ας υποθέσουμε ότι $\omega_{j\nu} \subset \omega_{\ell,\nu-1}$, και ας υποθέσουμε ότι έχει οριστεί η συνάρτηση $P_k(x;\omega_{\ell,\nu-1})$. Ορίζουμε

$$G_k(\omega_{j\nu}) = \{(n,\omega_{j\nu}) : n \in \mathbb{Z}, |c_n(\omega_{j\nu};\chi_F^\circ - P_k(\cdot;\omega_{\ell,\nu-1}))| \geqslant 2^{-k}y^{p/2}\}. \tag{5.3.2}$$

Το $G_k(\omega_{j\nu})$ είναι πεπερασμένο σύνολο, άρα μπορούμε να ορίσουμε

$$R_k(x;\omega_{j\nu}) = \sum_{(n,\omega_{j\nu})\in G_k(\omega_{j\nu})} c_n(\omega_{j\nu};\chi_F^\circ - P_k(\cdot;\omega_{\ell,\nu-1}))e^{i2^\nu nx} \tag{5.3.3}$$

και

$$P_k(x;\omega_{j\nu}) = P_k(x;\omega_{\ell,\nu-1}) + R_k(x;\omega_{j\nu}) \tag{5.3.4}$$

για κάθε $x \in (-2\pi, 2\pi]$. Αν $\omega_{j\nu} \subset \cdots \subset \omega_{s1} \subset \omega_{r0}$, εύκολα ελέγχουμε ότι

$$P_k(x;\omega_{j\nu}) = R_k(x;\omega_{r0}) + R_k(x;\omega_{s1}) + \cdots + R_k(x;\omega_{\ell,\nu-1}) + R_k(x;\omega_{j\nu}). \tag{5.3.5}$$

Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο και βλέπουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε δυαδικό διάστημα ω παίρνουμε ένα πεπερασμένο σύνολο $G_k(\omega)$ και δύο συναρτήσεις $P_k(x;\omega)$ και $R_k(x;\omega)$ οι οποίες είναι πολυώνυμα ως προς e^{ix} και e^{-ix}.

Παρατήρηση 5.3.1. Από την κατασκευή της $R_k(x;\omega_{j\nu})$ στην (5.3.3), όλοι οι μεγάλοι όροι της σειράς Fourier της $\chi_F^\circ - P_k(\cdot,\omega_{\ell,\nu-1})$ στο $\omega_{j\nu}$ έχουν αφαιρεθεί, άρα από τις (5.3.4) και (5.3.2) προκύπτει ότι

$$|c_n(\omega_{j\nu};\chi_F^\circ - P_k(\cdot;\omega_{j\nu}))| < 2^{-k}y^{p/2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση 5.3.2. Γενικά, ο συμβολισμός που έχει προκύψει είναι κάπως βαρύς, γι' αυτό συχνά θα γράφουμε $a_n(\omega)$ αντί για $c_n(\omega_{j\nu};\chi_F^\circ - P_k(\cdot;\omega_{\ell,\nu-1}))$, δηλαδή θα έχουμε

$$R_k(x;\omega) = \sum_{(n,\omega)\in G_k(\omega)} a_n(\omega)e^{i2\pi m(\omega)^{-1}nx}, \qquad x \in (-2\pi, 2\pi],$$

όπου, φυσικά, ο συντελεστής $a_n(\omega)$ εξαρτάται και από τα k και F. Μερικές φορές, για ακόμα μεγαλύτερη συντομία, θα γράφουμε $ae^{i\lambda x}$ αντί για $a_n(\omega)e^{i2^knx}$. Αυτό απλοποιεί πολύ τον συμβολισμό στα επόμενα. Θα πρέπει όμως να θυμόμαστε ότι, όταν θεωρούμε κάποιον συγκεκριμένο όρο $ae^{i\lambda x}$ του $P_k(x;\omega)$, υποθετουμε πάντα ότι προέρχεται από ένα και μοναδικό $R_k(x;\omega')$, όπου $\omega' \supseteq \omega$, δηλαδή δεν συμπεριλαμβάνουμε ποτέ όρους από διαφορετικές R_k-συναρτήσεις, παρόλο που όροι με το ίδιο λ μπορεί να εμφανίζονται σε περισσότερες από μία από τις R_k-συναρτήσεις.

Μαζεύουμε τώρα όλα τα σύνολα που ορίστηκαν στην (5.3.2), και ορίζουμε

$$G_k = \bigcup_{\omega \subset (-2\pi, 2\pi]} G_k(\omega), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{5.3.6}$$

Παρατηρήστε ότι τα σύνολα της παραπάνω ένωσης είναι ξένα ανά δύο. Ειδικότερα, κάθε $(n,\omega) \in G_k$ προσδιορίζει μονοσήμαντα έναν όρο $a_n(\omega)$, τον συντελεστή του $e^{i2\pi m(\omega)^{-1}nx}$ στο $R_k(x;\omega)$.

Λήμμα 5.3.3. *Ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{(n,\omega)\in G_k} |a_n(\omega)|^2\, m(\omega) \leqslant 2m(F).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $\nu \geqslant 0$ και υποθέτουμε ότι $\omega_{j\nu} \subset \omega_{\ell,\nu-1}$, όπου στην περίπτωση $\nu = 0$ θέτουμε $\omega_{\ell,-1} = \omega_{-1} = (-2\pi, 2\pi]$ και $P_k(x;\omega_{\ell-1}) = 0$. Χρησιμοποιώντας την (5.3.4) παίρνουμε

$$\int_{\omega_{j\nu}} |\chi_F^\circ(x) - P_k(x;\omega_{j\nu})|^2 dx = \int_{\omega_{j\nu}} |\chi_F^\circ(x) - P_k(x;\omega_{\ell,\nu-1}) - R_k(x;\omega_{j\nu})|^2 dx. \tag{5.3.7}$$

Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier της $\chi_F^\circ(x) - P_k(x;\omega_{\ell,\nu-1})$ και της $R_k(x;\omega_{j\nu})$ στο $\omega_{j\nu}$, όπου η τελευταία σειρά δίνεται από την (5.3.3), συμπεραίνουμε ότι οι $R_k(x;\omega_{j\nu})$ και $\chi_F^\circ(x) - P_k(x;\omega_{\ell,\nu-1}) - R_k(x;\omega_{j\nu})$ είναι κάθετες στον $L^2(\omega_{j\nu})$, άρα

$$\begin{aligned}\int_{\omega_{j\nu}} |\chi_F^\circ(x) - P_k(x;\omega_{\ell,\nu-1}) - R_k(x;\omega_{j\nu})|^2 + \int_{\omega_{j\nu}} |R_k(x;\omega_{j\nu})|^2 dx \\ = \int_{\omega_{j\nu}} |\chi_F^\circ(x) - P_k(x;\omega_{\ell,\nu-1})|^2 dx.\end{aligned}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους αυτής της ισότητας και χρησιμοποιώντας την (5.3.7) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{(n,\omega_{j\nu})\in G_k(\omega_{j\nu})} |a_n(\omega_{j\nu})|^2 m(\omega_{j\nu}) &= \int_{\omega_{j\nu}} |R_k(x;\omega_{j\nu})|^2 dx \\ &= \int_{\omega_{j\nu}} |\chi_F^\circ(x) - P_k(x;\omega_{\ell,\nu-1})|^2 dx - \int_{\omega_{j\nu}} |\chi_F^\circ(x) - P_k(x;\omega_{j\nu})|^2 dx.\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Στην περίπτωση που $\nu = 0$, ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (5.3.8) ισούται με

$$\int_{\omega_{r0}} |\chi_F^\circ(x) - 0|^2 dx = m(F),$$

αν λοιπόν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το $\omega_{\ell,\nu-1}$ περιέχει δύο διαστήματα του επιπέδου ν, προσθέτοντας τις (5.3.8) πάνω από όλα τα ω του ιδίου επιπέδου ν παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(n,\omega)\in G_k(\omega)\\ m(\omega)=2\pi\cdot 2^{-\nu}}} |a_n(\omega)|^2 m(\omega) &= \sum_{m(\omega)=2\pi\cdot 2^{-(\nu-1)}} \int_\omega |\chi_F^\circ(\omega) - P_k(x;\omega)|^2 dx \\ &\quad - \sum_{m(\omega)=2\pi\cdot 2^{-\nu}} \int_\omega |\chi_F^\circ(x) - P_k(x;\omega)|^2 dx,\end{aligned}$$

συνεπώς,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(n,\omega)\in G_k(\omega)\\ m(\omega)\geqslant 2\pi\cdot 2^{-\nu}}} |a_n(\omega)|^2 m(\omega) &= \int_{-2\pi}^{2\pi} |\chi_F^\circ(\omega)|^2 dx \\ &\quad - \sum_{m(\omega)=2\pi\cdot 2^{-\nu}} \int_\omega |\chi_F^\circ(x) - P_k(x;\omega)|^2 dx \leqslant 2m(F).\end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\nu \geqslant 0$, αφήνοντας το $\nu \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{(n,\omega)\in G_k} |a_n(\omega)|^2 m(\omega) \leqslant 2m(F).$$

□

Πόρισμα 5.3.4. *Ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{(n,\omega)\in G_k} m(\omega) \leqslant 2^{2k+1} y^{-p} m(F).$$

Απόδειξη. Αν $(n,\omega) \in G_k$ τότε $|a_n(\omega)| \geqslant 2^{-k} y^{p/2}$, άρα

$$1 \leqslant 2^{2k} y^{-p} |a_n(\omega)|^2.$$

Από το Λήμμα 5.3.3 έπεται ότι

$$\sum_{(n,\omega)\in G_k} m(\omega) \leqslant 2^{2k} y^{-p} \sum_{(n,\omega)\in G_k} |a_n(\omega)|^2 m(\omega) \leqslant 2^{2k+1} y^{-p} m(F).$$

□

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τα σύνολα X^* και Y^*. Χρησιμοποιώντας τα σύνολα G_k, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε μια συνάρτηση $A_k(x)$ στο $(-2\pi, 2\pi]$ θέτοντας

(5.3.9) $$A_k(x) = \sum_{(n,\omega)\in G_k} |a_n(\omega)|^2 \chi_\omega(x),$$

και ορίζουμε το σύνολο X_k θέτοντας

$$X_k = \{x \in (-2\pi, 2\pi] : A_k(x) > 2^k y^p\}. \tag{5.3.10}$$

Αν $x \in X_k$, μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο I του συνόλου δεικτών G_k, τέτοιο ώστε

$$\sum_{(n,\omega)\in I} |a_n(\omega)|^2 \chi_\omega(x) > 2^k y^p,$$

και αφού το αριστερό μέλος είναι κλιμακωτή συνάρτηση, υπάρχει κάποιο δυαδικό διάστημα ω' τέτοιο ώστε $x \in \omega'$ και $A_k(z) > 2^k y^p$ για κάθε $z \in \omega'$. Δηλαδή, υπάρχει ένα δυαδικό διάστημα ω' τέτοιο ώστε $x \in \omega' \subseteq X_k$, το οποίο σημαίνει ότι το X_k είναι ένωση δυαδικών διαστημάτων. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της (5.2.1) ορίζουμε

$$X_k^* = \bigcup_{\omega \subset X_k} \tilde{\omega} \quad \text{και} \quad X^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k^*. \tag{5.3.11}$$

Θεώρημα 5.3.5. *Ισχύει η ανισότητα*

$$m(X^*) \leqslant 14 y^{-p} m(F).$$

Απόδειξη. Το θεώρημα προκύπτει από τον ακόλουθο απλό υπολογισμό:

$$\begin{aligned} m(X^*) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(X_k^*) \leqslant 7 \sum_{k=1}^{\infty} m(X_k) \\ &\leqslant 7 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-2\pi}^{2\pi} 2^{-k} y^{-p} A_k(x)\, dx \\ &= 7 y^{-p} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{(n,\omega)\in G_k} |a_n(\omega)|^2 m(\omega) \\ &\leqslant 7 y^{-p} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot 2m(F) = 14 y^{-p} m(F), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και το Λήμμα 5.3.3. □

Έστω $\omega = (2\pi j \cdot 2^{-\nu}, 2\pi(j+1)\cdot 2^{-\nu}]$ ένα δυαδικό διάστημα. Γράφοντας $F_\omega^k, k \in \mathbb{N}$, θα εννοούμε το σύνολο

$$\begin{aligned} F_\omega^k = &\Big(\{2\pi j \cdot 2^{-\nu}\} + (-2\pi \cdot 2^{-\nu-3k}, 2\pi \cdot 2^{-\nu-3k}]\Big) \\ &\cup \Big(\{2\pi (j+1) \cdot 2^{-\nu}\} + (-2\pi \cdot 2^{-\nu-3k}, 2\pi \cdot 2^{-\nu-3k}]\Big), \end{aligned}$$

δηλαδή, το F_ω^k είναι η ένωση των δύο δυαδικών διαστημάτων του επιπέδου $\nu+3k$ που έχουν κοινό άκρο το αριστερό άκρο του ω, και των δύο δυαδικών διαστημάτων του επιπέδου $\nu+3k$ που έχουν κοινό άκρο το δεξιό άκρο του ω. Ειδικότερα,

$$m(F_\omega^k) = 4 \cdot 2^{-3k} m(\omega).$$

Ορίζουμε

$$Y^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{(n,\omega)\in G_k} F_\omega^k. \tag{5.3.12}$$

Θεώρημα 5.3.6. *Ισχύει η ανισότητα*

$$m(Y^*) \leqslant 8y^{-p} m(F).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 5.3.4 παίρνουμε

$$\begin{aligned} m(Y^*) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(n,\omega)\in G_k} m(F_\omega^k) = 4\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-3k} \sum_{(n,\omega)\in G_k} m(\omega) \\ &\leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-3k} \cdot 2^{2k+1} y^{-p} m(F) = 8y^{-p} m(F). \end{aligned}$$

□

5.4 Εκτιμήσεις για την $P_k(x;\omega)$ και το σύνολο δεικτών G_k^*

Για δοθέν μετρήσιμο σύνολο F έχουμε κατασκευάσει τις συναρτήσεις $P_k(x;\omega)$ και τα σύνολα X_k, όπου το $P_k(x;\omega)$ είναι πολύ μεγάλο. Αυτές οι βοηθητικές συναρτήσεις $P_k(x;\omega)$ δεν ορίζουν, όμως, τους όρους $S_n^*(x;\chi_F^\circ;\omega_{-1}^*)$ που αντιστοιχούν στην χ_F° (θυμηθείτε τον ορισμό (4.3.4) του M^*) και έτσι θα χρειαστούμε μια μέθοδο για να εκτιμήσουμε εκείνους τους όρους οι οποίοι με κάποια έννοια δεν είναι πολύ μακρυά από τους όρους του $P_k(x;\omega)$. Αυτό γίνεται ακριβές μέσω του μεγέθους του συνόλου ω και του αντίστοιχου παράγοντα λ στον εκθέτη κάθε όρου $ae^{i\lambda x}$ από το $P_k(x;\omega)$, άρα γενικά θα θεωρούμε ζεύγη $(n,\omega)\in\mathcal{P}$, όπου $n\in\mathbb{Z}$ και το ω είναι δυαδικό διάστημα, και θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε τι εννοούμε λέγοντας ότι το $(n,\omega)\in\mathcal{P}$ είναι κοντά σε κάποιο στοιχείο από το G_k, δηλαδή το σύνολο δεικτών για τις συναρτήσεις P_k.

Δεδομένου ότι τα σύνολα X^* και X_k έχουν ήδη οριστεί ως exceptional σύνολα, θα ασχοληθούμε μόνο με τα δυαδικά διαστήματα ω τα οποία δεν περιέχονται στο σύνολο X_k που ορίστηκε στην (5.3.10). Αρχικά χρειαζόμαστε μια εκτίμηση για το ίδιο το $P_k(x;\omega)$ καθώς και για το πλήθος των όρων στο $P_k(x;\omega)$.

Λήμμα 5.4.1. *Αν $\omega \not\subset X_k$ τότε*

$$\text{το } P_k(x;\omega) \text{ έχει το πολύ } 2^{3k} \text{ όρους} \tag{5.4.1}$$

και

$$|P_k(x;\omega)| \leqslant \sum_{j=1}^{J} |a_j| \leqslant 2^{2k} y^{p/2} \text{ για κάθε } x \in (-2\pi, 2\pi], \tag{5.4.2}$$

όπου

$$P_k(x;\omega) = \sum_{j=1}^{J} a_j \exp(i\lambda_j x). \tag{5.4.3}$$

Απόδειξη. Από τις (5.3.2)-(5.3.4) προκύπτει ότι $|a_j| \geqslant 2^{-k} y^{p/2}$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant J$, άρα $1 \leqslant |a_j|^2 2^{2k} y^{-p}$. Έπεται ότι

$$J \leqslant \sum_{j=1}^{J} |a_j|^2 \, 2^{2k} y^{-p} = 2^{2k} y^{-p} \sum_{j=1}^{J} |a_j|^2.$$

Επιλέγουμε τυχόν $x_0 \in \omega \setminus X_k$. Από την (5.3.9) έχουμε

$$\sum_{j=1}^{J} |a_j|^2 \leqslant A_k(x_0), \tag{5.4.4}$$

και από την (5.3.10) παίρνουμε

$$A_k(x_0) \leqslant 2^k y^p, \tag{5.4.5}$$

άρα

$$J \leqslant 2^{2k} y^{-p} A_k(x_0) \leqslant 2^{3k},$$

το οποίο αποδεικνύει την (5.4.1).

Τώρα, $1 \leqslant |a_j| \cdot 2^k y^{-p/2}$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant J$, από την κατασκευή, άρα από τις (5.4.3)-(5.4.5) παίρνουμε, για τυχόν $x_0 \in \omega \setminus X_k$, ότι

$$\begin{aligned} |P_k(x;\omega)| &\leqslant \sum_{j=1}^{J} 1 \cdot |a_j| \leqslant 2^k y^{-p/2} \sum_{j=1}^{J} |a_j|^2 \leqslant 2^k y^{-p/2} A_k(x_0) \\ &\leqslant 2^{2k} y^{p/2}. \end{aligned}$$

□

Έστω $\omega = \omega_{j\nu}$ ένα δυαδικό διάστημα του επιπέδου ν, το οποίο δεν περιέχεται στο X_k. Αν $ae^{i\lambda x}$ είναι κάποιος όρος του $P_k(x;\omega_{j\nu})$, τότε από την κατασκευή βλέπουμε ότι ο $\overline{a}e^{-i\lambda x}$ είναι επίσης όρος του $P_k(x;\omega_{j\nu})$. Αυτό σημαίνει ότι στη συνέχεια μπορούμε να θεωρούμε μόνο εκθέτες $\lambda \geqslant 0$. Επίσης, πάλι από την κατασκευή, υπάρχει κάποιο άλλο δυαδικό διαστημα $\omega_{\ell\mu} \supseteq \omega_{j\nu}$, $\mu \leqslant \nu$, τέτοιο ώστε ο $ae^{i\lambda x}$ να είναι όρος του $R_k(x;\omega_{\ell\mu})$. Άρα, υπάρχει ακέραιος $n \geqslant 0$ τέτοιος ώστε $\lambda = 2^\mu n$, δηλαδή (βλέπε (4.2.1))

$$\psi(\lambda;\omega_{\ell\mu}) = n = \frac{\lambda}{2\pi} m(\omega_{\ell\mu})$$

και

$$(\psi(\lambda;\omega_{\ell\mu}),\omega_{\ell\mu}) = (n,\omega_{\ell\mu}) \in G_k.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $(n;\omega_{\ell\mu}) \in G_k$ τότε το $P_k(x;\omega_{\ell\mu})$ περιέχει έναν όρο $ae^{i\lambda x}$ όπου $\lambda = 2^\mu n$.

Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο $\tilde{G}_k$ των δεικτών από το $\mathcal{P}$ που είναι με κάποια έννοια κοντά στο σύνολο G_k που αντιστοιχεί στις συναρτήσεις $P_k(x;\omega)$.

Ορισμός 5.4.2. Συμβολίζουμε με $\tilde{G}_k^1$ το σύνολο των $(n,\omega) \in \mathcal{P}$, όπου $n \geqslant 0$ και $\omega \not\subset X_k$, για τα οποία υπάρχουν δυαδικό διάστημα $\omega' \supseteq \omega$ και ένας όρος $a'e^{i\lambda' x}$ από το $R_k(x;\omega')$, δηλαδή $(\psi(\lambda';\omega'),\omega') \in G_k$, τέτοια ώστε

$$|n - \psi(\lambda';\omega)| < 2^{10k} \tag{5.4.6}$$

και

$$m(\omega) > 2^{-10k} m(\omega'). \tag{5.4.7}$$

Παρατηρήστε ότι γράφουμε

$$\psi(\lambda';\omega) = \psi(\lambda';\omega')\frac{m(\omega)}{m(\omega')}$$

στην (5.4.6). Επιπλέον, αν $\omega = \omega_{j\nu}$ και $\omega' = \omega_{\ell\mu}$ τότε από την (5.4.7) έχουμε $\mu \leqslant \nu < \mu + 10k$, άρα σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν μόνο $10k$ δυνατές επιλογές για το δυαδικό διάστημα ω'. Από την άλλη πλευρά, για δεδομένο $(\psi(\lambda';\omega'),\omega') \in G_k$, δηλαδή για δεδομένα λ' και ω', για κάθε $\omega \subseteq \omega'$ που ικανοποιεί την (5.4.7) μπορούμε να βρούμε το πολύ $2 \cdot 2^{10k} - 1$ μη αρνητικούς ακεραίους n που ικανοποιούν την (5.4.6). Αν λοιπόν $\tilde{G}_k(\lambda',\omega')$ είναι το σύνολο όλων των $(n,\omega) \in \tilde{G}_k^1$ που σχετίζονται με ένα συγκεκριμένο ζεύγος (λ', ω'), τότε

$$\begin{aligned}\sum_{(n,\omega)\in\tilde{G}_k^1(\lambda',\omega')} m(\omega) &= \sum_{\nu=\mu}^{\mu+10k-1} \sum_{\substack{(n,\omega)\in\tilde{G}_k^1(\lambda',\omega')\\ m(\omega)=2\pi\cdot 2^{-\nu}}} m(\omega)\\ &\leqslant \sum_{\nu=\mu}^{\mu+10k-1} (2\cdot 2^{10k}-1)m(\omega')\\ &< 10k\cdot 2\cdot 2^{10k}m(\omega') < 20\cdot 2^{11k}m(\omega'),\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι όλα τα διαφορετικά ω από το ίδιο επίπεδο ν είναι ξένα και περιέχονται στο ω'. Άρα,

$$\begin{aligned}\sum_{(n,\omega)\in\tilde{G}_k^1} m(\omega) &= \sum_{(\psi(\lambda';\omega'),\omega')\in G_k} \sum_{(n,\omega)\in\tilde{G}_k^1(\lambda',\omega')} m(\omega)\\ &< 20\cdot 2^{11k} \sum_{(r,\omega')\in G_k} m(\omega') \leqslant 40\cdot 2^{13k}y^{-p}m(F),\end{aligned} \tag{5.4.8}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 5.3.4.

Όταν συγκρίνουμε στοιχεία από το $\mathcal{P}$ με στοιχεία από το G_k, η συνθήκη $|n-\psi(\lambda';\omega)| < 2^{10k}$ θα μπορούσε να ικανοποιείται για κάποιο $(\psi(\lambda';\omega'),\omega') \in G_k$, ενώ το ω' είναι πολύ μεγάλο σε σύγκριση με το ω. Σε αυτήν την περίπτωση θα ψάχνουμε για κάποιον άλλο όρο $(\psi(\lambda'';\omega''),\omega'') \in G_k$ τέτοιον ώστε, χοντρικά, να έχουμε

$$2^{10k} \leqslant |n-\psi(\lambda'';\omega)| < 2^{20k}, \tag{5.4.9}$$

δηλαδή επεκτείνουμε το εύρος τιμών του εκθέτη, όταν το σύνολο ω είναι πολύ μικρό. Αυτό είναι το ουσιαστικό σημείο στον ορισμό που ακολουθεί, όπου «προσεγγίζουμε» με έναν εκθέτη στο $[0, 2^{10k})$ και με άλλον έναν στο $[2^{10k}, 2^{20k})$. Για τεχνικούς όμως λόγους, θα προτιμήσουμε μια διαφορετική περιγραφή.

Ορισμός 5.4.3. Συμβολίζουμε με $\tilde{G}_k^2$ το σύνολο των $(n,\omega)\in\mathcal{P}$, όπου $n\geqslant 0$ και $\omega\not\subset X_k$, για τα οποία υπάρχουν δυαδικό διάστημα $\omega'\supseteq\omega$ και δύο όροι $a'e^{i\lambda' x}$ και $a''e^{i\lambda'' x}$ από το $P_k(x;\omega')$, τέτοιοι ώστε

$$|n-\psi(\lambda';\omega)| < 2^{10k}$$

και

$$2^{-10k} \leqslant |\lambda'-\lambda''|\,\frac{m(\omega)}{2\pi} < 2^{20k}. \tag{5.4.10}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και το γεγονός ότι ο $\psi(\lambda''; \omega)$ είναι ακέραιος, βλέπουμε εύκολα ότι η (5.4.9) προκύπτει από την (5.4.10). Δεν θα χρειαστούμε όμως αυτήν την παρατήρηση.

Αν $\omega \not\subset X_k$, από το Λήμμα 5.4.1 προκύπτει ότι το $P_k(x; \omega')$ περιέχει το πολύ 2^{3k} όρους, άρα το πολύ 2^{6k} ζεύγη εκθετών (λ', λ'') όπως αυτά στον Ορισμό 5.4.3. Από την (5.4.10) παίρνουμε ένα υποκατάστατο της συνθήκης (5.4.7) στον Ορισμό 5.4.2, γιατί από την (5.4.10) προκύπτει ότι για κάθε ζεύγος (λ', λ'') εκθετών το δυαδικό διάστημα ω μπορεί να ανήκει σε $30k$ το πολύ επίπεδα, ας πούμε τα $\mu+1, \dots, \mu+30k$, όπου ο μ εξαρτάται επίσης από το (λ', λ''). Χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική με αυτήν της απόδειξης της (5.4.8), δηλαδή θεωρώντας πρώτα όλα τα $(n, \omega) \in \tilde{G}_k^2$ που προέρχονται από το ίδιο ζεύγος (λ', λ''), όπου επιπλέον όλα τα ω ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, κατόπιν μαζεύοντας όλα τα $30k$ επίπεδα, και τέλος χρησιμοποιώντας ξανά το Πόρισμα 5.3.4, παίρνουμε

$$\sum_{(n,\omega) \in \tilde{G}_k^2} m(\omega) \leqslant 120 \cdot 2^{19k} y^{-p} m(F). \tag{5.4.11}$$

Ο πρόσθετος όρος 2^{6k} προκύπτει από το πλήθος των ζευγών (λ', λ'').

Για συντομία γράφουμε

$$\tilde{G}_k = \tilde{G}_k^1 \cup \tilde{G}_k^2. \tag{5.4.12}$$

Λήμμα 5.4.4. *Ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{(n,\omega) \in \tilde{G}_k} m(\omega) \leqslant 125 \cdot 2^{19k} y^{-p} m(F).$$

Απόδειξη. Αφού $k \in \mathbb{N}$, το λήμμα προκύπτει άμεσα από τις (5.4.8) και (5.4.11). □

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G_k^* = \{(n, \omega^*) : \exists \omega : (n, \omega) \in \tilde{G}_k, \omega \subset \omega^*, 4m(\omega) = m(\omega^*)\}, \tag{5.4.13}$$

όπου το ω^* είναι, όπως πάντα, ένα smoothing διάστημα.

Λήμμα 5.4.5. *Ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{(n,\omega^*) \in G_k^*} m(\omega^*) \leqslant 500 \cdot 2^{19k} y^{-p} m(F).$$

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 5.4.4 και της (5.4.13). □

Παρατήρηση 5.4.6. Αν το ω δεν βρίσκεται πολύ κοντά σε κάποιο από τα -2π και 2π τότε υπάρχουν ακριβώς δύο smoothing διαστήματα που περιέχουν το ω στο μεσαίο μισό τους και ικανοποιούν την $m(\omega^*) = 4m(\omega)$.

Επιπλέον, αν $\omega^* \not\subset X_k^*$ και $(n,\omega^*) \notin G_k^*$, τότε $\omega \not\subset X_k$ και $(n,\omega) \notin \tilde{G}_k$ για καθένα από τα τέσσερα διαστήματα $\omega \subset \omega^*$ για τα οποία $4m(\omega) = m(\omega^*)$.

Παρατηρήστε ότι $(n,\omega^*_{-1}) \in G_k^*$ αν και μόνο αν $(n,\omega_{10}) \in \tilde{G}_k$ και $(n,\omega_{20}) \in \tilde{G}_k$, όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την περιοδικότητα της χ_F°.

Έστω ότι $(n,\omega) \notin \tilde{G}_k$. Τότε,

$$P_k(x;\omega) = Q_0^k(x;\omega) + Q_1^k(x;\omega),$$

όπου το $Q_0^k(x;\omega)$ περιέχει εκείνους τους όρους $a' e^{i\lambda' x}$ από το $P_k(x;\omega)$ για τους οποίους

$$|n - \psi(\lambda';\omega)| < 2^{10k},$$

δηλαδή εκείνους που ικανοποιούν την (5.4.6). Αφού $(n,\omega) \notin \tilde{G}_k^2$, η συνθήκη (5.4.10) δεν ικανοποιείται, άρα είτε $|\lambda' - \lambda''| \frac{m(\omega)}{2\pi} < 2^{-10k}$ ή $|\lambda' - \lambda''| \frac{m(\omega)}{2\pi} > 2^{20k}$ για όλους τους εκθέτες λ' και λ'' που εμφανίζονται στο $Q_0^k(x;\omega)$. Όμως,

$$\begin{aligned} |\lambda' - \lambda''| \frac{m(\omega)}{2\pi} = \left| \lambda' \frac{m(\omega)}{2\pi} - \lambda'' \frac{m(\omega)}{2\pi} \right| &\leqslant |\psi(\lambda';\omega) - \psi(\lambda'';\omega)| + 1 \\ &\leqslant |n - \psi(\lambda';\omega)| + |n - \psi(\lambda'';\omega)| + 1 < 2 \cdot 2^{10k} + 1 < 2^{20k}, \end{aligned}$$

άρα το τελευταίο ενδεχόμενο αποκλείεται, και έτσι παίρνουμε

$$|\lambda' - \lambda''| \frac{m(\omega)}{2\pi} < 2^{-10k}. \tag{5.4.14}$$

Μπορούμε φυσικά να γράψουμε

$$Q_0^k(x;\omega) = \sum_{j=1}^{I} a_j e^{i\lambda_j x}, \qquad P_k(x;\omega) = \sum_{j=1}^{J} a_j e^{i\lambda_j x},$$

όπου $I \leqslant J$, άρα οι όροι με δείκτη $j = I+1, \dots, J$ ανήκουν στο $Q_1^k(x;\omega)$.

Λήμμα 5.4.7. *Έστω λ κάποιος εκθέτης που εμφανίζεται στο $Q_0^k(x;\omega)$. Τότε, υπάρχει μια σταθερά ρ τέτοια ώστε*

$$|Q_0^k(x;\omega) - \rho e^{i\lambda x}| \leqslant 23 \cdot 2^{-8k} y^{p/2}$$

για κάθε $x \in \tilde{\omega}$, όπου $\tilde{\omega}$ είναι το διάστημα που ορίστηκε στην (5.2.1).

Απόδειξη. Έστω x_0 το μέσο του ω, και ας υποθέσουμε ότι $\lambda = \lambda_1$. Για κάθε $x \in \tilde{\omega}$ και $j = 1, \ldots, I$ έχουμε το ανάπτυγμα

$$\exp[i(\lambda_j - \lambda_1)(x - x_0)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n [(\lambda_j - \lambda_1)(x - x_0)]^n.$$

Χρησιμοποιώντας την (5.4.14) βλέπουμε ότι αν $x \in \tilde{\omega}$ τότε

$$|\lambda_j - \lambda_1|\, |x - x_0| \leqslant \frac{7}{2} |\lambda_j - \lambda_1|\, m(\omega) < \frac{7}{2} \cdot 2^{-10k} \cdot 2\pi < 22 \cdot 2^{-10k},$$

άρα

(5.4.15)
$$\begin{aligned} \left| e^{i(\lambda_j - \lambda_1)(x - x_0)} - 1 \right| &< 22 \cdot 2^{-10k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{7}{2} \cdot 2^{-10k} \right)^n \\ &< 23 \cdot 2^{-10k}, \qquad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} Q_0^k(x; \omega) &= \left(\sum_{j=1}^{I} a_j e^{i(\lambda_j - \lambda_1) x_0} \right) e^{i\lambda_1 x} \\ &\quad + e^{i\lambda_1 x} \sum_{j=1}^{I} a_j e^{i(\lambda_j - \lambda_1) x_0} \left(e^{i(\lambda_j - \lambda_1)(x - x_0)} - 1 \right), \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} \left| Q_0^k(x; \omega) - \left(\sum_{j=1}^{I} a_j e^{i(\lambda_j - \lambda_1) x_0} \right) e^{i\lambda_1 x} \right| &\leqslant \sum_{j=1}^{I} |a_j| \cdot \left| e^{i(\lambda_j - \lambda_1)(x - x_0)} - 1 \right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{I} |a_j| \cdot 23 \cdot 2^{-10k} \\ &\leqslant 23 \cdot 2^{-10k} \sum_{j=1}^{I} |a_j| \\ &\leqslant 23 \cdot 2^{-10k} 2^{2k} y^{p/2} \\ &= 23 \cdot 2^{-8k} y^{p/2}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις (5.4.15) και (5.4.2). Θέτοντας

$$\rho = \sum_{j=1}^{I} a_j e^{i(\lambda_j - \lambda_1) x_0},$$

έχουμε αποδείξει το λήμμα. □

Λήμμα 5.4.8. *Αν $(n,\omega^*) \notin G_k^*$ και $\omega^* \not\subset X_k^* \cup Y^*$, τότε οι συναρτήσεις $Q_0^k(x;\omega)$ που αντιστοιχούν σε καθένα από τα τέσσερα υποδιαστήματα ω του ω^*, για τα οποία $4m(\omega) = m(\omega^*)$, ταυτίζονται.*

Απόδειξη. Έστω ω_0 και ω δύο από αυτά τα υποδιαστήματα. Ας υποθέσουμε ότι $ae^{i\lambda x}$ είναι ένας όρος από το $Q_0^k(x;\omega)$, δηλαδή υπάρχει ω' τέτοιο ώστε $\omega_0 \subseteq \omega'$ και $(\psi(\lambda;\omega'),\omega') \in G_k$ και $|n - \psi(\lambda;\omega_0)| < 2^{10k}$, άρα η (5.4.6) στον Ορισμό 5.4.2 του $\tilde{G}_k^1$ ικανοποιείται για το (n,ω_0). Αφού όμως $(n,\omega_0) \notin \tilde{G}_k$ (βλέπε Παρατήρηση 5.4.6) η συνθήκη (5.4.7) δεν ικανοποιείται, άρα

$$m(\omega') > 2^{10k} m(\omega). \tag{5.4.16}$$

Αν $\omega \not\subset \omega'$ τότε $\omega \subseteq Y^*$. Μάλιστα, το $F_{\omega'}^k$ αποτελείται από δύο διαστήματα μήκους $2 \cdot 2^{-3k} m(\omega') > 2 \cdot 2^{7k} m(\omega_0)$ και αφού $\omega_0 \subset \omega'$ και $\omega \not\subset \omega'$ και $\omega_0 \cup \omega \subset \omega^*$, όπου $m(\omega^*) = 4m(\omega_0) < 2 \cdot 2^{7k} m(\omega_0)$, το smoothing διάστημα ω^* πρέπει να περιέχει κάποιο άκρο του ω', και συμπεραίνουμε ότι $\omega^* \subseteq F_{\omega'}^k \subseteq Y^*$, το οποίο αντιφάσκει προς την υπόθεσή μας. Συνεπώς, $\omega' \supset \omega^*$ και ειδικότερα $\omega' \supset \omega$, άρα ο όρος $ae^{i\lambda x}$ πρέπει να ανήκει και στο $P_k(x;\omega)$. Αφού τα ω_0 και ω ήταν τυχόντα, η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης. □

Από τα δύο τελευταία λήμματα έπεται ότι ο προσεγγιστικός όρος $\rho e^{i\lambda x}$ στο Λήμμα 5.4.7 μπορεί να επιλεγεί με τα ίδια ρ και λ για (όλα) τα τέσσερα υποδιαστήματα.

5.5 Η διάσπαση $\Omega(p^*, r)$ του ω^*

Για κάθε $n \geqslant 0$ θα γράφουμε $p^* = (\psi^*(n;\omega^*),\omega^*)$ για συντομία στα επόμενα. Σταθεροποιούμε $r \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $L = L(p) \in \mathbb{N}$ τη σταθερά που ορίστηκε στην (5.2.6), και G_r^* το σύνολο δεικτών που ορίστηκε στην (5.4.13). Αφού $L \cdot r \in \mathbb{N}$, μπορούμε να ορίσουμε

$$\tilde{G}(r) = \{p^* = (\psi^*(n;\omega^*),\omega^*) \in G_{rL}^* : C^*_{\psi^*(n;\omega^*)}(\omega^*;\chi_F^\circ) < 2 \cdot 2^{-r} y\}. \tag{5.5.1}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το υποσύνολο $\tilde{G}(r)$ του συνόλου δεικτών G_{rL}^* θα ορίσουμε μια διασπαση $\Omega(p^*, r)$ του ω^*, δηλαδή θα ορίσουμε μια κάλυψη του ω^* από ξένα διαστήματα.

Αν $p^* = (\psi^*(n;\omega^*),\omega^*) \in \tilde{G}(r)$ βλέπουμε αμέσως ότι

$$C_{\psi(n;\omega)}(\omega;\chi_F^\circ) < 2 \cdot 2^{-r} y \tag{5.5.2}$$

για καθένα από τα τέσσερα δυαδικά υποδιαστήματα $\omega \subset \omega^*$ για τα οποία $4m(\omega) = m(\omega^*)$. Έστω ω οποιοδήποτε από αυτά τα υποδιαστήματα. Θα θεωρήσουμε τα δύο δυαδικά υποδιαστήματα ω_1' και ω_2' του ω για τα οποία $2m(\omega_i') = m(\omega)$, $i = 1, 2$. Αν τα ω_1' και

ω_2' ικανοποιούν και τα δύο τη συνθήκη (5.5.2), θα επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία σε καθένα από τα διαστήματα ω_1' και ω_2'.

Αν κάποιο από τα διαστήματα ω_1' και ω_2' δεν ικανοποιεί την (5.5.2) τότε θα λέμε ότι το ω είναι ένα διάστημα της διάσπασης $\Omega(p^*, r)$.

Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο μέχρι είτε να βρούμε κάποιο ω που ικανοποιεί την (5.5.2) και τέτοιο ώστε η (5.5.2) να μην ικανοποιείται από τουλάχιστον ένα από τα δύο υποδιαστήματα ω_1' και ω_2', ή μέχρι να φτάσουμε στο επίπεδο N, δηλαδή $m(\omega) = 2\pi \cdot 2^{-N}$, όπου N είναι ένας φυσικός αριθμός, αρχικά αυθαίρετος, που θα επιλεγεί στην Παράγραφο 5.8. Γι' αυτά τα διαστήματα του επιπέδου N, τα οποία θα συμπεριλάβουμε επίσης στη διάσπαση $\Omega(p^*, r)$, γνωρίζουμε φυσικά ότι η συνθήκη (5.5.2) ικανοποιείται. Είναι σαφές ότι η οικογένεια $\Omega(p^*, r)$ είναι μια ξένη κάλυψη του ω^*. Πράγματι,

$$\omega^* = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant 2^{N+1}} \omega_{j_N}.$$

Έστω $j \in \{1, 2, \ldots, 2^{N+1}\}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακολουθία

$$(\omega_{j_{N,N}}, \omega_{j_{N-1,N-1}}, \ldots, \omega_{j_{2,2}}, \omega_{j_{1,1}})$$

ώστε $\omega_{j_{N,N}} =: \omega_{j_N} \subseteq \omega_{j_{N-1,N-1}} \subseteq \cdots \subseteq \omega_{j_{2,2}} \subseteq \omega_{j_{1,1}}$. Αν για καποιον $k \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ έχουμε $\omega_{j_{k,k}} \in \Omega(p^*, r)$, τότε $\omega_{j_N} \subseteq \omega_{j_{k,k}} \subseteq \Omega(p^*, r)$. Αν για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ έχουμε $\omega_{k_{k,k}} \notin \Omega(p^*, r)$ τότε για κάθε k τα δύο δυαδικά διαστήματα $\omega_{k,i}$, $i = 1, 2$ για τα οποία $2m(\omega_{k,i}) = m(\omega_{j_{k,k}})$ ικανοποιούν την συνθήκη (5.5.2), συνεπώς εξ ορισμού της διάσπασης $\Omega(p^*, r)$ είναι $\omega_{j_N} \in \Omega(p^*, r)$, δηλαδή $\omega_{j_N} \subseteq \omega_{j_{N,N}} \in \Omega(p^*, r)$. Άρα,

$$\omega^* = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant 2^{N+1}} \omega_{j_N} \subseteq \bigcup_{\omega \in \Omega(p^*, r)} \omega.$$

Αν τώρα $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(p^*, r)$ και $\omega_1 \cap \omega_2 \neq \emptyset$ τότε τα ω_1, ω_2 είναι του ιδίου επιπέδου. Διαφορετικά, αν π.χ. το επίπεδο του ω_2 είναι μεγαλύτερο από αυτό του ω_1 θα έχουμε $\omega_1 \subset \omega_2$. Αφού όμως $\omega_2 \in \Omega(p^*, r)$, οι υποδιπλασιασμοί του ω_2 σταματούν σε αυτό, άρα δεν μπορεί να υπάρχει $\omega_1 \in \Omega(p^*, r)$ το οποίο να είναι γνήσιο υποσύνολο του ω_2. Έτσι, τα δυαδικά διαστήματα ω_1, ω_2 είναι του ιδίου επιπέδου και αφού τέμνονται πρέπει να ταυτίζονται.

Τα διαστήματα $\omega \in \Omega(p^*, r)$ χαρακτηρίζονται από το ακόλουθο προφανές λήμμα.

Λήμμα 5.5.1. *Έστω $\omega \in \Omega(p^*, r)$. Τότε, ικανοποιούνται οι παρακάτω τρεις συνθήκες:*

(i) $m(\omega) \geqslant 2\pi \cdot 2^{-N}$.

(ii) *Αν $\frac{1}{4}m(\omega^*) \geqslant m(\omega) \geqslant 2 \cdot 2\pi \cdot 2^{-N}$ τότε μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον ένα δυαδικό διάστημα $\omega' \subset \omega$, τέτοιο ώστε $2m(\omega') = m(\omega)$, για το οποίο η* (5.5.2) *δεν ικανοποιείται, δηλαδή*

$$C_{\psi(n;\omega')}(\omega'; \chi_F^\circ) \geqslant 2 \cdot 2^{-r} \cdot y.$$

(iii) *Αν ω' είναι ένα δυαδικό διάστημα τέτοιο ώστε $\omega \subseteq \omega' \subseteq \omega^*$ και $4m(\omega') \leqslant m(\omega^*)$, τότε το ω' ικανοποιεί την* (5.5.2).

Έστω x ένα σημείο το οποίο ανήκει στο μεσαίο μισό του ω^*. Θεωρούμε την κλάση των smoothing διαστημάτων $\tilde{\omega}^* = \omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,\nu}$, όπου είτε $\omega_{j\nu} \in \Omega(p^*, r)$ ή $\omega_{j+1,\nu} \in \Omega(p^*, r)$. Αφού το $\Omega(p^*, r)$ δίνει μια ξένη κάλυψη του ω^* με δυαδικά (ημιανοικτά) διαστήματα, υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο διάστημα $\tilde{\omega}^*$ που περιέχει το x στο μεσαίο μισό του. Πράγματι, το x ανήκει στο μεσαίο μισό του ω^*. Ας ονομάσουμε $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ τα τέσσερα υποδιαστήματα του ω^* για τα οποία ισχύει $4m(\omega_i) = m(\omega^*)$, και ας υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $x \in \omega_2$. Αφού η οικογένεια $\Omega(p^*, r)$ συνιστά διάσπαση του ω^*, υπάρχει μοναδικό $\omega = \omega_{j\nu} \in \Omega(p^*, r)$ ώστε $x \in \omega$. Όμως τα ω, ω_2 είναι δυαδικά διαστήματα και $x \in \omega \cap \omega_2$, δηλαδή $\omega \cap \omega_2 \neq \emptyset$, και $m(\omega) \leqslant \frac{1}{4}m(\omega^*) = m(\omega_2)$, άρα $\omega \subseteq \omega_2$, απ' όπου έπεται ότι $j > 1$ (υπάρχει κομμάτι του ω^* πίσω από το ω) και $j \leqslant 2^{\nu+1} - 2$ (διότι τα ω_3, ω_4 είναι δεξιά του ω.

Έτσι, θέτοντας $\tilde{\omega}^* = \omega_{j-1,\nu} \cup \omega_{j\nu}$ στην περίπτωση που το x ανήκει στο αριστερό μισό του $\omega = \omega_{j\nu}$, παρατηρούμε ότι το x ανήκει στο μεσαίο μισό του $\tilde{\omega}^*$. Στην περίπτωση που το x ανήκει στο δεξιό μισό του ω, θέτουμε $\omega^* = \omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,\nu}$ και πάλι το x ανήκει στο μεσαίο μισό του $\tilde{\omega}^*$.

Ορίζουμε $\omega^*(x)$ εκείνο το διάστημα $\tilde{\omega}^*$ που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες, για το οποίο το $m(\tilde{\omega}^*)$ είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Θα λέμε ότι αυτό το διάστημα $\omega^*(x)$ είναι το *κεντρικό διάστημα ως προς το x και την διάσπαση $\Omega(p^*, r)$*.

Λήμμα 5.5.2. *Το κεντρικό διάστημα $\omega^*(x)$ ως προς το x και την διάσπαση $\Omega(p^*, r)$, όπου $p^* = (\psi^*(n; \omega^*), \omega^*)$ και το x ανήκει στο μεσαίο μισό του ω^*, ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

(i) $2m(\omega^*(x)) \leqslant m(\omega^*)$.

(ii) *Το x ανήκει στο μεσαίο μισό του $\omega^*(x)$.*

(iii) *Το $\omega^*(x)$ είναι ένωση διαστημάτων από το $\Omega(p^*, r)$.*

(iv) *Αν $\omega \in \Omega(p^*, r)$ και $\omega \subseteq \omega^* \setminus \omega^*(x)$ τότε $\mathrm{dist}(x; \omega) \geqslant \frac{1}{2}m(\omega)$.*

Απόδειξη. Αφού το μεγαλύτερο διάστημα της $\Omega(p^*, r)$ έχει μέτρο $\leqslant \frac{1}{4}m(\omega^*)$ και το $\omega^*(x)$ είναι η ένωση ενός διαστήματος από το $\Omega(p^*, r)$ και ενός γειτονικού του διαστήματος του ιδίου επιπέδου (και άρα του ιδίου μήκους) έχουμε

$$\begin{aligned} m(\omega^*(x)) &= m(\omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,\nu}) \leqslant m(\omega_{j\nu}) + m(\omega_{j+1,\nu}) \\ &\leqslant \frac{1}{4}m(\omega^*) + \frac{1}{4}m(\omega^*) = \frac{1}{2}m(\omega^*), \end{aligned}$$

δηλαδή η συνθήκη (i) ικανοποιείται. Επιπλέον, η (ii) έπεται από τον ορισμό.

Υποθέτουμε ότι $\omega^*(x) = \omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,\nu}$, όπου π.χ. $\omega_{j\nu} \in \Omega^*(p^*, r)$. Θα δείξουμε ότι το $\omega^*(x)$ είναι ένωση διαστημάτων από το $\Omega(p^*, r)$. Πρώτα δείχνουμε ότι το $\omega_{j+1,\nu}$ δεν μπορεί να περιέχεται σε κάποιο διάστημα $\omega' \in \Omega(p^*, r)$. Πράγματι, αν $\omega' \in \Omega(p^*, r)$ και $\omega_{j+1,\nu} \subset \omega'$ τότε $\omega_{j\nu} \cap \omega' = \emptyset$, αλλιώς, αφού $m(\omega_{j\nu}) \leqslant m(\omega')$ θα είχαμε $\omega_{j\nu} \subsetneq \omega'$ ενώ $\omega_{j\nu}, \omega' \in \Omega(p^*, r)$, το οποίο είναι άτοπο από την κατασκευή της διάσπασης. Έτσι, το γειτονικό δυαδικό διάστημα ω'' από τα αριστερά, του ιδίου επιπέδου, ικανοποιεί την $\omega_{j\nu} \subsetneq \omega''$. Άρα,

$$\omega^*(x) = \omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,\nu} \subsetneq \omega'' \cup \omega'.$$

Το $\omega_{j+1,\nu}$ περιέχεται στο αριστερό μισό του ω', ενώ το $\omega_{j\nu}$ περιέχεται στο δεξιό μισό του ω'', άρα το x ανήκει στο μεσαίο μισό του $\omega' \cup \omega''$. Επίσης,

$$m(\omega^*(x)) = 2m(\omega_{j+1,\nu}) < 2m(\omega') = m(\omega' \cup \omega''),$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι το $\omega^*(x)$ έχει μέγιστο μήκος. Συνεπώς, αν το $\omega_{j+1,\nu}$ περιέχεται σε διάστημα της διάσπασης, τότε ταυτίζεται με αυτό, άρα τότε $\omega_{j+1,\nu} \in \Omega(p^*, r)$.

Γενικότερα, αν το $\omega_{j+1,\nu}$ τέμνεται με κάποιο διάστημα της διάσπασης, έστω ω, τότε $\omega_{j+1,\nu} \supset \omega$ ή $\omega_{j+1,\nu} = \omega$, και σε κάθε περίπτωση $\omega_{j+1,\nu} \cap \omega = \omega$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \omega^*(x) &= \omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,nu} = \omega_{j\nu} \cup (\omega_{j+1,\nu} \cap \omega^*)\omega_{j\nu} \cup (\omega_{j+1,\nu} \cap (\cup_{\omega\in\Omega(p^*,r)}\omega)) \\ &= \omega_{j\nu} \cup \big(\cup_{\omega\in\Omega(p^*,r)}(\omega_{j+1,\nu} \cap \omega)\big) = \omega_{j\nu} \cup \{\omega : \omega \in \Omega(p^*, r), \omega_{j+1,\nu} \cap \omega \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

δηλαδή το $\omega^*(x)$ είναι ένωση διαστημάτων της διάσπασης $\Omega(p^*, r)$. Αυτό αποδεικνύει την (iii).

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι $\omega \in \Omega(p^*, r)$ και $\omega \subsetneq \omega^* \setminus \omega^*(x)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathrm{dist}(x, \omega) \geqslant \frac{1}{2}m(\omega)$. Αν υποθεσουμε ότι αυτό δεν ισχύει τότε το x ανήκει σε ένα γειτονικό δυαδικό διάστημα ω' του ω, του ιδίου επιπέδου. Τότε το x βρίσκεται στο μεσαίο μισό του $\omega' \cup \omega = \tilde{\omega}^*$. Αν $\omega^*(x) = \omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,\nu}$, όπου $\omega_{j\nu} \in \Omega(p^*, r)$ ή $\omega_{j+1,\nu} \in \Omega(p^*, r)$, τότε το ω' τέμνεται με κάποιο από τα $\omega_{j\nu}, \omega_{j+1,\nu}$ (αφού κάποιο από τα δύο περιέχει το x) οπότε από τη μεγιστική ιδιότητα του $\omega^*(x)$ έχουμε $\omega' \subsetneq \omega_{j\nu}$ ή $\omega' \subsetneq \omega_{j+1,\nu}$. Αν $\omega' \subsetneq \omega_{j\nu}$ τότε στην περίπτωση που το ω «προηγείται» του ω' βλέπουμε ότι το αριστερό μισό του ω' περιέχεται στο δεξιό μισό του ω (διότι το x ανήκει στο μεσαίο μισό του $\omega\cup\omega'$ και του $\omega_{j\nu}\cup\omega_{j+1,\nu}$) άρα $\omega\cap\omega_{j\nu}\neq\emptyset$, απ' όπου παίρνουμε $\omega\subseteq\omega_{j\nu}\subseteq\omega^*(x)$ και οδηγούμαστε σε άτοπο λόγω της $\omega\subseteq\omega^*\setminus\omega^*(x)$. Αν $\omega'\subseteq\omega_{j+1,\nu}$ και βρισκόμαστε στην περίπτωση που το ω «προηγείται» του ω' τότε το αριστερό μισό του ω' περιέχεται στο αριστερό μισό του $\omega_{j+1,\nu}$, άρα το ω θα τμηθεί με το $\omega_{j\nu}$ ή το $\omega_{j+1,\nu}$, συνεπώς $\omega\subseteq\omega_{j\nu}\cup\omega_{j+1,\nu}=\omega^*(x)$, το οποίο είναι άτοπο. Αν $\omega'\subseteq\omega_{j\nu}$ και βρισκόμαστε στην περίπτωση που το ω «έπεται» του ω' τότε το δεξιό μισό του ω' περιέχεται στο δεξιό μισό του $\omega_{j\nu}$, οπότε $\omega\cap\omega_{j\nu}\neq\emptyset$ ή $\omega\cap\omega_{j+1,\nu}\neq\emptyset$ και συμπεραίνουμε ότι $\omega\subseteq\omega^*(x)$, το οποίο είναι άτοπο. Τέλος, αν $\omega'\subseteq\omega_{j+1,\nu}$ και βρισκόμαστε στην περίπτωση που το ω «έπεται» του ω' τότε το δεξιό μισό του ω' περιέχεται στο αριστερό μισό του $\omega_{j+1,\nu}$, και έτσι $\omega\cap\omega_{j+1,\nu}\neq\emptyset$, άρα $\omega\subseteq\omega_{j+1,\nu}\subseteq\omega^*(x)$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το λήμμα έχει αποδειχθεί. □

Λήμμα 5.5.3. *Έστω $\omega^*(x)$ το κεντρικό διάστημα ως προς το x και την διάσπαση $\Omega(p^*, r)$. Αν $\omega^*(x)=\omega_{j\nu}\cup\omega_{j+1,\nu}$, και τουλάχιστον ένα από τα διαστήματα $\omega_{j\nu}$ και $\omega_{j+1,\nu}$ ανήκει στο $\Omega(p^*, r)$, τότε*

$$\max\{C_{\psi(n;\omega_{j\nu})}(\omega_{j\nu};\chi_F^\circ), C_{\psi(n;\omega_{j+1,\nu})}(\omega_{j+1,\nu};\chi_F^\circ)\}<2\cdot 2^{-r}y. \tag{5.5.3}$$

Αν $m(\omega^*(x))>2\cdot 2\pi\cdot 2^{-N}$, τότε

$$C^*_{\psi^*(n;\omega^*(x))}(\omega^*(x);\chi_F^\circ)\geqslant 2\cdot 2^{-r}y. \tag{5.5.4}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\omega_{j\nu}\in\Omega(p^*, r)$. Τότε, από την κατασκευή,

$$C_{\psi(n;\omega_{j\nu})}(\omega_{j\nu};\chi_F^\circ)<2\cdot 2^{-r}y.$$

Από την (iii) του Λήμματος 5.5.2, το άλλο διάστημα $\omega_{j+1,\nu}$ είναι ένωση διαστημάτων από την $\Omega(p^*, r)$. Έστω $\omega'\in\Omega(p^*, r)$ το οποίο ικανοποιεί τις $\omega'\subseteq\omega_{j+1,\nu}\subseteq\omega^*$ και $4m(\omega_{j+1,\nu})\leqslant m(\omega^*)$. Τότε, από την (iii) του Λήμματος 5.5.1,

$$C_{\psi(n;\omega_{j+1,\nu})}(\omega_{j+1,\nu};\chi_F^\circ)<2\cdot 2^{-r}y,$$

και έπεται η (5.5.3).

Τέλος, αν $m(\omega^*(x))>2\cdot 2\pi\cdot 2^{-N}$ και $\omega^*(x)=\omega_1\cup\omega_2$, τότε τα ω_1 και ω_2 δεν ανήκουν στο επίπεδο N. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\omega_1\in\Omega(p^*, r)$. Χρησιμοποιώντας την (ii) του Λήμματος 5.5.1 βλέπουμε ότι υπάρχει ένα δυαδικό διάστημα $\omega'\subset\omega_1$, τέτοιο ώστε $2m(\omega')=m(\omega_1)$ και

$$C_{\psi(n;\omega_{j\nu})}(\omega_{j\nu};\chi_F^\circ)\geqslant 2\cdot 2^{-r}y.$$

Καθώς το ω' είναι ένα από τα τέσσερα δυαδικά υποδιαστήματα του $\omega^*(x)$ για τα οποία $4m(\omega') = m(\omega^*(x))$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} C^*_{\psi^*(n;\omega^*(x))}(\omega^*(x);\chi_F^\circ) &= \max\{C_{\psi(n;\omega'')}(\omega'';\chi_F^\circ) : \omega'' \subset \omega^*(x), 4m(\omega'') = m(\omega^*(x))\} \\ &\geqslant 2\cdot 2^{-r}y, \end{aligned}$$

και έχουμε αποδείξει την (5.5.4), άρα και το λήμμα. □

5.6 Τα σύνολα T^*, U^* και E_N

Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε το σύνολο E_N και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $C_p > 0$, ανεξάρτητη από τα N, y και F, τέτοια ώστε

$$m(E_N) \leqslant C_p^p y^{-p} m(F).$$

Το σύνολο E_N είναι η ένωση των συνόλων S^*, V_L^*, X^* και Y^* που έχουν ήδη οριστεί, και δύο ακόμα συνόλων T^* και U^*, τα οποία θα ορίσουμε εδώ.

Έστω $r \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $p^* = (\psi^*(n;\omega^*),\omega^*) \in \tilde{G}(r)$, όπου $n \geqslant 0$ και το ω^* είναι ένα smoothing διάστημα το οποίο σταθεροποιούμε στη συνέχεια. Έστω $\Omega(p^*,r)$ η διάσπαση του ω^* ως προς τα n και χ_F°, που ορίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

Αν $\omega_j \in \Omega(p^*,r)$. συμβολίζουμε με t_j το μέσο του ω_j και θέτουμε $\delta_j = m(\omega_j)$, δηλαδή $\delta_j \geqslant 2\pi\cdot 2^{-N}$. Για κάθε $x \in \omega^*$ ορίζουμε ένα υποσύνολο $\Omega(x)$ του $\Omega(p^*,r)$ θέτοντας

(5.6.1) $$\Omega(x) = \left\{\omega_j \in \Omega(p^*,r) : \forall\, t\in\omega_j,\ |x-t| \geqslant \frac{1}{2}\delta_j\right\}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το υποσύνολο $\Omega(x)$ ξένων διαστημάτων, ορίζουμε μια συνάρτηση $\Delta(x)$ για $x \in \omega^*$, θέτοντας

(5.6.2) $$\Delta(x) = \Delta(x;\Omega) = \sum_{\omega_j\in\Omega(x)} \frac{\delta_j^2}{(x-t_j)^2+\delta_j^2}.$$

Λήμμα 5.6.1. *Για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει η εκτίμηση*

$$m(\{x\in\omega^* : \Delta(x) \geqslant \lambda\}) \leqslant \frac{40}{\lambda}\exp(-\lambda/40)\cdot m(\omega^*).$$

Απόδειξη. Αφού το t_j είναι το μέσο του ω_j και $\mathrm{dist}(t_j;\omega_j^c) = \frac{1}{2}\delta_j$, από την (5.6.1) έπεται ότι, για κάθε $\omega_j \in \Omega(x)$,

(5.6.3) $$|x-t_j| \geqslant \delta_j, \qquad \omega_j \in \Omega(x),$$

απ' όπου βλέπουμε ότι

(5.6.4)
$$|x-t| \leqslant |x-t_j| + |t_j - t| \leqslant 2|x-t_j|$$

για κάθε $t \in \omega_j$. Αν

$$g_\Omega(x) = \sum_{\omega_j \in \Omega(x)} \int_{\omega_j} \frac{\delta_j}{(x-t)^2+\delta_j^2}\,dt,$$

χρησιμοποιώντας την (5.6.4) παίρνουμε

$$\begin{aligned} g_\Omega(x) &\geqslant \sum_{\omega_j \in \Omega(x)} \int_{\omega_j} \frac{\delta_j}{4(x-t_j)^2+\delta_j^2}\,dt \\ &\geqslant \frac{1}{4} \sum_{\omega_j \in \Omega(x)} \frac{\delta_j^2}{(x-t_j)^2+\delta_j^2} = \frac{1}{4}\Delta(x), \end{aligned}$$

άρα

(5.6.5)
$$\{x \in \omega^* : \Delta(x) \geqslant \lambda\} \subseteq \left\{x \in \omega^* : g_\Omega(x) \geqslant \frac{\lambda}{4}\right\} = \Gamma_\lambda.$$

Έστω φ μια μη αρνητική συνάρτηση με $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \omega^*$ και

$$\int \varphi(x) \log^+ \varphi(x)\,dx < \infty.$$

Από τις (3.1.4), (3.1.15) και το Θεώρημα 2.2.3,

(5.6.6)
$$\begin{aligned} \int_{\omega^*} \varphi(x) g_\Omega(x)\,dx &= \sum_{\omega_j \in \Omega(x)} \int_{\omega_j} \int_{\omega^*} \frac{\varphi(x)\delta_j}{(x-t)^2+\delta_j^2}\,dx\,dt \\ &= \sum_{\omega_j \in \Omega(x)} \int_{\omega_j} (P_{\delta_j}\varphi)(t)\,dt \\ &\leqslant \sum_{\omega_j \in \Omega(x)} \int_{\omega_j} (\Theta\varphi)(t)\,dt \leqslant \int_{\omega^*} (\Theta\varphi)(t)\,dt \\ &\leqslant 2m(\omega^*) + 8 \int_{\omega^*} \varphi(x) \log^+ \varphi(x)\,dx. \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $\varphi(x) = \exp(\lambda/40) \cdot \chi_{\Gamma_\lambda}(x)$, από την (5.6.6) έπεται ότι

$$\begin{aligned} \exp(\lambda/40) \cdot \frac{\lambda}{4} m(\Gamma_\lambda) &\leqslant \int_{\omega^*} \varphi(x) g_\Omega(x)\,dx \\ &\leqslant 2m(\omega^*) + 8 \cdot \frac{\lambda}{40} \cdot \exp(\lambda/40) \cdot m(\Gamma_\lambda), \end{aligned}$$

απ' όπου, αναδιατασσοντας τους όρους και χρησιμοποιώντας την (5.6.5), παίρνουμε

$$m(\{x \in \omega^* : \Delta(x) \geqslant \lambda\}) \leqslant m(\Gamma_\lambda) \leqslant \frac{40}{\lambda} \exp(-\lambda/40) \cdot m(\omega^*).$$

$\square$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\Omega(p^*, r)$ είναι ξένη κάλυψη του ω^*, ορίζουμε

(5.6.7)
$$f_n(t) = \frac{1}{m(\omega(t))} \int_{\omega(t)} \chi_F^\circ(y) e^{-iny} dy, \qquad t \in \omega^*,$$

όπου το $\omega(t) \in \Omega(p^*, r)$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τη συνθήκη $t \in \omega(t)$. Είναι φανερό ότι $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$. Στο Λήμμα 5.6.2 θα αποδείξουμε άλλη μία εκτίμηση για την $\|f_n\|_\infty$, η οποία θα χρειαστεί αργότερα. Σημειώνουμε ότι αφού τα διαστήματα $\omega \in \Omega(p^*, r)$ είναι ξένα και ικανοποιούν την ανισότητα $m(\omega) \geqslant 2\pi \cdot 2^{-N}$, έχουμε το πολύ 2^N στοιχεία στο $\Omega(p^*, r)$, άρα η $f_n(t)$ είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση που προσδιορίζει η διάσπαση $\Omega(p^*, r)$ του ω^*.

Λήμμα 5.6.2. *Για την $f_n(t)$ ισχύει η εκτίμηση*

$$|f_n(t)| \leqslant c_6 y \cdot 2^{-r}, \qquad t \in \omega^*$$

δηλαδή $\|f_n\|_\infty \leqslant c_6 y \cdot 2^{-r}$. Εδώ, $c_6 = 2c_3$ όπου c_3 είναι η σταθερά στο Λήμμα 4.2.4.

Απόδειξη. Έστω $t \in \omega_{j\nu}$, όπου το $\omega_{j\nu} = \omega(t) \in \Omega(p^*, r)$ ανήκει στο επίπεδο ν. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (4.2.3) των γενικευμένων συντελεστών Fourier, το Λήμμα 4.2.4 και τη συνθήκη (5.5.2), η οποία ικανοποιείται από τα διαστήματα του $\Omega(p^*, r)$, παίρνουμε

$$|f_n(t)| = |c_{n\cdot 2^{-\nu}}(\omega_{j\nu})| \leqslant c_3 \cdot C_{\psi(n;\Omega)}(\omega; \chi_F^\circ) < 2c_3 \cdot 2^{-r} y.$$

□

Παρατήρηση 5.6.3. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 4.2.2 και εξετάζοντας προσεκτικά τις αποδείξεις των Λημμάτων 4.2.3 και 4.2.4 βλέπουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε $c_6 = 2880$.

Ορίζουμε

(5.6.8)
$$C = 20 \cdot \log 2 \cdot \max\left\{40, \frac{c_1}{c_2}\right\},$$

όπου c_2 είναι η θετική σταθερά που εμφανίζεται στον εκθέτη στο Πόρισμα 4.1.5 και c_3 είναι η σταθερά στο Λήμμα 4.2.4. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\Delta(x)$ που ορίστηκε στην (5.6.2) ορίζουμε

(5.6.9)
$$U^*(p^*) = \{x \in \omega^* : \Delta(x) > CLr\},$$

όπου $L = L(p)$ είναι η σταθερά που εισήχθη στην (5.2.6). Σημειώνουμε ότι η $\Delta(x)$ εξαρτάται από την επιλογή του p^*.

Έστω

$$\widehat{h}_n(x) = \widehat{H}_{\omega^*} f_n(x) = \sup_{\sigma_x} \left| \frac{1}{\pi} (\mathrm{pv}) \int_{\sigma_x} \frac{f_n^\circ(t)}{x-t}\, dt \right|, \tag{5.6.10}$$

όπου $\widehat{H}_{\omega^*}$ είναι ο τροποποιημένος μετασχηματισμός Hilbert ως προς το ω^*, ο οποίος εισήχθη στην (4.1.13), δηλαδή το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα smoothing διαστήματα $\sigma_x \subseteq \omega^*$ για τα οποία το x ανήκει στο μεσαίο μισό του σ_x. Ορίζουμε

$$T^*(p^*) = \{x \in \omega^* : \widehat{h}_n(x) > 2CLr \cdot 2^{-r} y\}. \tag{5.6.11}$$

Επίσης, θέτουμε $c_7 = \max\left\{\frac{1}{20\log 2}, c_1\right\}$, όπου η σταθερά c_1 είναι αυτή του Πορίσματος 4.1.5.

Λήμμα 5.6.4. *Τα σύνολα $T^*(p^*)$ και $U^*(p^*)$ ικανοποιούν τις εκτιμήσεις*

$$m(T^*(p^*)) \leqslant c_7 \cdot 2^{-20Lr} m(\omega^*)$$

και

$$m(U^*(p^*)) \leqslant c_7 \cdot 2^{-20Lr} m(\omega^*).$$

Απόδειξη. Πρώτα θεωρούμε το σύνολο $T^*(p^*)$. Από το Λήμμα 5.6.2 έπεται ότι

$$-c_2 \frac{y 2^{-r}}{\|f_n\|_\infty} \cdot 2CLr \leqslant -\frac{c_2}{2c_3} \cdot 2CLr,$$

άρα, σύμφωνα με το Πόρισμα 4.1.5 και τον ορισμό (5.6.8) της σταθεράς C, έχουμε

$$\begin{aligned} m(T^*(p^*)) &\leqslant c_1 m(\omega^*) \exp\left(-c_2 \frac{1}{\|f_n\|_\infty} \cdot 2CLr 2^{-r} y\right) \\ &\leqslant c_1 m(\omega^*) \exp\left(-\frac{c_2}{c_3} CLr\right) \\ &\leqslant c_7 \cdot 2^{-20Lr} m(\omega^*). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.6.1 παίρνουμε για το $U^*(p^*)$

$$m(U^*(p^*)) \leqslant \frac{40}{CLr} \exp\left(-\frac{CLr}{40}\right) m(\omega^*) \leqslant c_7 \cdot 2^{-20Lr} m(\omega^*).$$

□

Ορίζουμε τώρα τα σύνολα T^* και U^* θέτοντας

$$T^* = \bigcup_{r=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{p^* \in \tilde{G}(r)} T^*(p^*) \right\} \quad \text{και} \quad U^* = \bigcup_{r=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{p^* \in \tilde{G}(r)} U^*(p^*) \right\}.$$

Θεώρημα 5.6.5. *Ισχύει η ανισότητα*

$$m(T^* \cup U^*) \leqslant c_8 y^{-p} m(F),$$

όπου $c_8 = 1000c_7$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό (5.5.1) του $\tilde{G}(r)$ έχουμε $\tilde{G}(r) \subseteq G^*_{rL}$ για κάθε $r \in \mathbb{N}$. Από το Λήμμα 5.4.5 έπεται ότι αν θεσουμε $p^* = (\psi^*(n;\omega^*), \omega^*)$ για συντομία, τότε

$$\sum_{p^* \in \tilde{G}(r)} m(\omega^*) \leqslant \sum_{p^* \in G^*_{rL}} m(\omega^*) \leqslant 500 \cdot 2^{19rL} y^{-p} m(F).$$

Από το Λήμμα 5.6.4 έπεται ότι

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{p^* \in \tilde{G}(r)} \left[T^*(p^*) \cup U^*(p^*) \right] \right) &\leqslant 2c_7 \cdot 2^{-20Lr} \sum_{p^* \in \tilde{G}(r)} m(\omega^*) \\ &\leqslant 2c_7 \cdot 2^{-20Lr} \cdot 500 \cdot 2^{19Lr} y^{-p} m(F) \\ &= 1000c_7 \cdot 2^{-Lr} y^{-p} m(F), \end{aligned}$$

άρα

$$m(T^* \cup U^*) \leqslant 1000c_7 y^{-p} m(F) \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-rL} \leqslant 1000c_7 y^{-p} m(F).$$

□

Τέλος, ορίζουμε το σύνολο E_N θέτοντας

$$E_N = S^* \cup T^* \cup U^* \cup V_L^* \cup X^* \cup Y^*. \tag{5.6.12}$$

Θεώρημα 5.6.6. *Υπάρχει μια σταθερά $C_p > 0$ τέτοια ώστε*

$$m(E_N) \leqslant C_p^p y^{-p} m(F).$$

Απόδειξη. Το θεώρημα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 5.2.1, το Θεώρημα 5.2.5, το Θεώρημα 5.3.5, το Θεώρημα 5.3.6 και το Θεώρημα 5.6.5. □

Για τα $x \notin T^*(p^*) \cup U^*(p^*)$ θα χρειαστεί να συγκρίνουμε το $|S_n^*(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)|$ με το $|S_n^*(x;\chi_F^\circ;\omega^*(x))|$, όπου $\omega^*(x) \subseteq \omega_0^* \subseteq \omega^*$. Αυτή η σύγκριση γίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.6.7. *Έστω $x \in (-\pi, \pi]$ και $x \notin T^*(p^*) \cup U^*(p^*)$. Έστω $\omega^*(x)$ το κεντρικό διάστημα ως προς το x και τη διάσπαση $\Omega(p^*, r)$, και έστω ω_0^* ένα smoothing διάστημα που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

(i) *Το x ανήκει στο μεσαίο μισό του ω_0^*.*

(ii) $\omega^*(x) \subseteq \omega_0^* \subseteq \omega^*$.

(iii) *Το $\omega_0^* \setminus \omega^*(x)$ είναι ένωση διαστημάτων από την $\Omega(p^*, r)$.*

Τότε, υπάρχει μια σταθερά $c_9 > 0$ τέτοια ώστε

$$\Big| |S_n^*(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| - |S_n^*(x;\chi_F^\circ;\omega^*(x))| \Big| \leqslant c_9 Lr \cdot 2^{-r} y. \tag{5.6.13}$$

Απόδειξη. Η ανισότητα (5.6.13) είναι προφανής αν $\omega_0^* = \omega^*(x)$, υποθέτουμε λοιπόν στη συνέχεια ότι $\omega^*(x) \subset \omega_0^*$ και $\omega^*(x) \neq \omega_0^*$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \Big| |S_n^*(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| - |S_n^*(x;\chi_F^\circ;\omega^*(x))| \Big| &\leqslant |S_n^*(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*) - S_n^*(x;\chi_F^\circ;\omega^*(x))| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\omega_0^*\setminus\omega^*(x)} \frac{e^{-int}\chi_F^\circ(t)}{x-t}\, dt \right|, \end{aligned} \tag{5.6.14}$$

(θυμηθείτε την (4.3.3)) άρα θα εκτιμήσουμε το

$$\int_{\omega_0^*\setminus\omega^*(x)} \frac{e^{-int}\chi_F^\circ(t)}{x-t}\, dt = h_n(x) + r_n(x),$$

όπου

$$h_n(x) = \int_{\omega_0^*\setminus\omega^*(x)} \frac{f_n(t)}{x-t}\, dt = (\mathrm{pv}) \int_{\omega_0^*} \frac{f_n(t)}{x-t}\, dt - (\mathrm{pv}) \int_{\omega^*(x)} \frac{f_n(t)}{x-t}\, dt$$

και

$$r_n(x) = \int_{\omega_0^*\setminus\omega^*(x)} \frac{e^{-int}\chi_F^\circ(t) - f_n(t)}{x-t}\, dt. \tag{5.6.15}$$

Η $f_n(t)$ είναι η συνάρτηση που ορίστηκε στην (5.6.7). Γνωρίζουμε (βλέπε (5.6.10)) ότι τα ω_0^* και $\omega^*(x)$ είναι διαστήματα σ_x-τύπου, και αφού $x \notin T^*(p^*)$ βλέπουμε ότι

$$|h_n(x)| \leqslant 2\widehat{h}_n(x) \leqslant 4CLr \cdot 2^{-r} y. \tag{5.6.16}$$

Εξετάζουμε τώρα την $r_n(x)$, η οποία ορίστηκε στην (5.6.15). Όπως προηγουμένως, θέτουμε $\delta_j = m(\omega_j)$ για κάθε $\omega_j \in \Omega(p^*, r)$ και γράφουμε t_j για το μέσο του ω_j. Από την υπόθεση, το $\omega_0^* \setminus \omega^*(x)$ είναι ένωση διαστημάτων από την $\Omega(p^*, r)$. Δηλαδή,

$$\omega_0^* \setminus \omega^*(x) = \bigcup_{\omega_j \in \Omega'(x)} \omega_j, \qquad \Omega'(x) \subset \Omega(p^*, r).$$

Χρησιμοποιώντας την (iv) στο Λήμμα 5.5.2, παίρνουμε $\mathrm{dist}(x, \omega_j) \geqslant \frac{1}{2}\delta_j$ για κάθε $\omega_j \in \Omega'(x)$, άρα το σύνολο δεικτών $\Omega(x)$ περιέχεται στο σύνολο δεικτών $\Omega(x)$ που ορίστηκε στην (5.6.1). Ειδικότερα, από το Λήμμα 5.6.2 έχουμε

$$|f_n(t)| \leqslant c_6 \cdot 2^{-r} y \tag{5.6.17}$$

για κάθε $t \in \omega^*$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{x-t} = \frac{1}{x-t_j} + \frac{t-t_j}{(x-t)(x-t_j)},$$

και αφού

$$\int_{\omega_j} \big(e^{-int}\chi_F^\circ(t) - f_n(t)\big)\, dt = \int_{\omega_j} e^{-int}\chi_F^\circ(t)\, dt - \frac{1}{m(\omega_j)} \int_{\omega_j} \chi_F^\circ(y) e^{-iny} dy \cdot m(\omega_j) = 0,$$

καταλήγουμε στην

$$\int_{\omega_j} \frac{e^{-int}\chi_F^\circ(t) - f_n(t)}{x-t_j}\, dt = 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \int_{\omega_0^*\setminus\omega^*(x)} \frac{e^{-int}\chi_F^\circ(t) - f_n(t)}{x-t}\, dt \\
&= \sum_{\omega_j\in\Omega'(x)} \int_{\omega_j} \left(\frac{1}{x-t_j} + \frac{t-t_j}{(x-t)(x-t_j)}\right) \big(e^{-int}\chi_F^\circ(t) - f_n(t)\big)\, dt \\
&= \sum_{\omega_j\in\Omega'(x)} \int_{\omega_j} \frac{t-t_j}{(x-t)(x-t_j)} e^{-int}\chi_F^\circ(t)\, dt \\
&\quad - \sum_{\omega_j\in\Omega'(x)} \int_{\omega_j} \frac{t-t_j}{(x-t)(x-t_j)} f_n(t)\, dt.
\end{aligned} \tag{5.6.18}$$

Αφού $|x-t| \geqslant \frac{1}{2}\delta_j$ για κάθε $t \in \omega_j$, παίρνουμε $|x-t| \geqslant |x-t_j| - \frac{1}{2}\delta_j$ και έτσι, από την (5.6.3),

$$\begin{aligned}
|(x-t)(x-t_j)| &\geqslant (x-t_j)^2 - \frac{1}{2}\delta_j|x-t_j| \geqslant (x-t_j)^2 - \frac{1}{2}(x-t_j)^2 \\
&= \frac{1}{2}(x-t_j)^2 \geqslant \frac{1}{4}[(x-t_j)^2 + \delta_j^2],
\end{aligned} \tag{5.6.19}$$

απ' όπου παίρνουμε, για $t \in \omega_j$,

$$\left|\frac{t-t_j}{(x-t)(x-t_j)}\right| \leqslant \frac{1}{2}\delta_j \frac{1}{\frac{1}{4}[(x-t_j)^2 + \delta_j^2]} = \frac{2\delta_j}{(x-t_j)^2 + \delta_j^2}. \tag{5.6.20}$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανισότητα, μαζί με την (5.6.17), παίρνουμε για τον τελευταίο όρο στην (5.6.18), καθώς $x \notin U^*(p^*)$,

$$\left|\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)} \int_{\omega_j} \frac{t-t_j}{(x-t)(x-t_j)} f_n(t) dt\right| \leqslant c_6 \cdot 2^{-r} y \sum_{\omega_j\in\Omega'(x)} \frac{2\delta_j^2}{(x-t_j)^2 + \delta_j^2} \tag{5.6.21}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant c_6 \cdot 2^{-r} y \sum_{\omega_j\in\Omega(x)} \frac{2\delta_j^2}{(x-t_j)^2 + \delta_j^2} \\
&\leqslant 2c_6 \cdot 2^{-r} y\, \Delta(x) \leqslant 2c_6 \cdot CLr \cdot 2^{-r} y.
\end{aligned} \tag{5.6.22}$$

Τέλος, θα αποδείξουμε παρόμοια εκτίμηση για τον πρώτο όρο στην (5.6.18), δηλαδή το

$$\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)}\int_{\omega_j}\frac{t-t_j}{(x-t)(x-t_j)}e^{-int}\chi_F^{\circ}(t)\,dt. \tag{5.6.23}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi_j(t)=\frac{t-t_j}{(x-t)(x-t_j)}\exp\left(-i\Big\{n-\frac{2\pi}{m(\omega_j)}\psi(n;\omega_j)\Big\}t\right),\qquad t\in\omega_j, \tag{5.6.24}$$

όπου $\omega_j\in\Omega'(x)$. Για ευκολία θέτουμε $\delta_j=m(\omega_j)=2\pi\cdot 2^{-\nu}$, δηλαδή $\frac{2\pi}{m(\omega_j)}=2^{\nu}$. Αφού $x\notin\tilde{\omega}_j$, είναι φανερό ότι $\varphi\in C^2(\overline{\omega}_j)$, άρα χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.3 βλέπουμε ότι

$$\varphi_j(t)=\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\overline{\gamma}_{j-\mu}exp\left(-i\cdot 2^{\nu}\frac{\mu}{3}t\right),\qquad t\in\omega_j,$$

όπου

$$(1+\mu^2)|\gamma_{j-\mu}|\leqslant c_2\left(\max_{\omega_j}|\varphi_j|+2^{-2\nu}\max_{\omega_j}|\varphi''|\right). \tag{5.6.25}$$

Από τις (5.6.24) και (5.6.20) έπεται ότι

$$|\varphi_j(t)|\leqslant\frac{2\delta_j}{(x-t_j)^2+\delta_j^2}, \tag{5.6.26}$$

και χρησιμοποιώντας την $|n-2^{\nu}\psi(n;\omega_j)|\leqslant 2^{\nu}$, μετά από ένα μικρό υπολογισμό παίρνουμε

$$\begin{aligned}|\varphi''(t)|\leqslant 2^{2\nu}|\varphi_j(t)|+2\cdot 2^{\nu}\,\frac{1}{|x-t_j|\,|x-t|}+2\cdot 2^{\nu}\left|\frac{t-t_j}{(x-t)^2(x-t_j)}\right|\\ +2\left|\frac{1}{(x-t)^2(x-t_j)}\right|+2\left|\frac{t-t_j}{(x-t)^3(x-t_j)}\right|,\end{aligned}$$

άρα από τις (5.6.19), (5.6.20), (5.6.26) και την $|x-t|\geqslant\frac{1}{2}\delta_j=\pi\cdot 2^{-\nu}$ παίρνουμε

$$2^{-2\nu}|\varphi''(t)|\leqslant\left(2+\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\right)\frac{\delta_j}{(x-t_j)^2+\delta_j^2}\leqslant 6\cdot\frac{\delta_j}{(x-t_j)^2+\delta_j^2}.$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την ανισότητα και την (5.6.26) στην (5.6.25) παίρνουμε

$$(1+\mu^2)|\gamma_{j-\mu}|\leqslant c_{10}\frac{\delta_j}{(x-t_j)^2+\delta_j^2}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανισότητα παίρνουμε το εξής φράγμα για την ποσότητα της

(5.6.23):

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)}\int_{\omega_j}\frac{t-t_j}{(x-t)(x-t_j)}e^{-int}\chi_F^{\circ}(t)\,dt\right|\\
&=\left|\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)}\int_{\omega_j}\frac{t-t_j}{(x-t)(x-t_j)}\exp\left(-i\{n-2^{\nu}\psi(n;\omega_j)\}t\right)\cdot\exp\left(-i2^{\nu}\psi(n;\omega_j)t\right)\chi_F^{\circ}(t)\,dt\right|\\
&=\left|\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)}\int_{\omega_j}\varphi_j(t)\exp\left(-i2^{\nu}\psi(n;\omega_j)t\right)\chi_F^{\circ}(t)\,dt\right|\\
&=\left|\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)}\int_{\omega_j}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\overline{\gamma}_{j\mu}\exp\Big(-i2^{\nu}\Big\{\psi(n;\omega_j)+\frac{\mu}{3}\Big\}t\Big)\chi_F^{\circ}(t)\,dt\right|\\
&=\left|\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\overline{\gamma}_{j\mu}m(\omega_j)\cdot c_{\psi(n;\omega_j)+\frac{\mu}{3}}(\omega_j;\chi_F^{\circ})\right|\\
&=\left|\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}(1+\mu^2)\overline{\gamma}_{j\mu}\delta_j\cdot\frac{1}{1+\mu^2}\cdot c_{\psi(n;\omega_j)+\frac{\mu}{3}}(\omega_j;\chi_F^{\circ})\right|\\
&\leqslant c_{10}\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)}\left(\frac{\delta_j^2}{(x-t_j)^2+\delta_j^2}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+\mu^2}\left|c_{\psi(n;\omega_j)+\frac{\mu}{3}}(\omega_j;\chi_F^{\circ})\right|\right)\\
&\leqslant 10c_{10}\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)}\frac{\delta_j^2}{(x-t_j)^2+\delta_j^2}\cdot C_{\psi(n;\omega_j)}(\omega_j;\chi_F^{\circ})\\
&\leqslant 10c_{10}\cdot 2\cdot 2^{-r}y\cdot\sum_{\omega_j\in\Omega'(x)}\frac{\delta_j^2}{(x-t_j)^2+\delta_j^2}\\
&\leqslant 10c_{10}\cdot 2\cdot 2^{-r}y\cdot\sum_{\omega_j\in\Omega(x)}\frac{\delta_j^2}{(x-t_j)^2+\delta_j^2}\\
&=20c_{10}\cdot 2^{-r}y\Delta(x)\leqslant 20c_{10}\cdot 2^{-r}\cdot CLr\cdot y,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $C_{\psi(n;\omega_j)}(\omega_j;\chi_F^{\circ})<2\cdot 2^{-r}y$ από την (5.5.2) και το ότι η υπόθεση $x\notin U^*(p^*)$ δίνει $\Delta(x)\leqslant CLr$. Άρα, από τις (5.6.14), (5.6.16), (5.6.21) και από την τελευταία μας εκτίμηση παίρνουμε

$$\Big|\,|S_n^*(x;\chi_F^{\circ};\omega_0^*)|-|S_n^*(x;\chi_F^{\circ};\omega^*(x))|\,\Big|\leqslant c_9\,CLr\cdot 2^{-r}y.$$

□

Παρατήρηση 5.6.8. Χρησιμοποιώντας όλες τις σταθερές που έχουμε ορίσει ως τώρα, μπορούμε να ελέγξουμε ότι το προηγούμενο θεώρημα ισχύει με $c_9 = 32$.

5.7 Εκτιμήσεις για τα στοιχεία $p^* \notin G^*_{rL}$

Στην (5.6.12) ορίσαμε το σύνολο E_N και αποδείξαμε μια εκτίμηση για το μέτρο του στο Θεώρημα 5.6.6. Τώρα, θεωρούμε ένα σημείο $x \notin E_N$ και υποθέτουμε ότι το x ανήκει στο μεσαίο μισό ενός smoothing διαστήματος ω_0^*, όπου $m(\omega_0^*) = 2 \cdot 2\pi \cdot 2^{-\nu}$ και $\nu \leqslant N-1$. Έστω n_0 τυχούσα συχνότητα που αντιστοιχεί στο ω_0^*, δηλαδή υπάρχει $m_0 \geqslant 0$ τέτοιος ώστε $n_0 = m_0 \cdot 2^{\nu+1}$, όπου ο πρόσθετος όρος 2 προέρχεται από το γεγονός ότι θεωρούμε ένα smoothing διάστημα που αποτελείται από δύο δυαδικά διαστήματα του επιπέδου ν. Αυτό σημαίνει ότι $\psi(n_0;\omega_0^*) = m_0$. Αν $(m_0,\omega_0^*) \in G^*_{rL}$ για κάποιον r, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις P_{rL} που ορίσαμε στην Παράγραφο 5.3. Βέβαια, αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται γενικά, γι' αυτό σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε δύο θεωρήματα, τα οποία μας εξασφαλίζουν ότι αν $p_0^* = (m_0;\omega_0^*) \notin G^*_{rL}$ τότε μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο $\tilde{p}^* \in G^*_{rL}$, που με κάποια έννοια δεν βρίσκεται «πολύ μακρυά» από το δοσμένο στοιχείο $p_0^* \notin G^*_{rL}$. Σε αυτό το σημείο παίζει ουσιαστικό ρόλο το γεγονός ότι στην (5.2.6) ορίσαμε τον $L \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε να ικανοποιεί την $L \geqslant 100$.

Θεώρημα 5.7.1. *Έστω $x \notin E_N$ και ας υποθέσουμε ότι το x ανήκει στο μεσαίο μισό ενός smoothing διαστήματος ω_0^*, όπου $m(\omega_0^*) = 2 \cdot 2\pi \cdot 2^{-\nu}$, $\nu \leqslant N-1$. Έστω $n_0 = m_0 \cdot 2^{\nu+1}$, $m_0 \geqslant 0$ και έστω ότι υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $p_0^* = (m_0,\omega_0^*) \notin G^*_{rL}$ και*

$$2^{-r}y \leqslant C^*(p^*) = C^*_{m_0}(\omega_0^*;\chi_F^\circ) < 2 \cdot 2^{-r}y. \tag{5.7.1}$$

Τότε, υπάρχει ένα smoothing διάστημα $\tilde{\omega}^* \supseteq \omega_0^*$ που περιέχει το x στο μεσαίο μισό του και έχει μήκος $m(\tilde{\omega}^*) = 2\cdot 2\pi \cdot 2^{-\mu}$, $\mu \leqslant \nu$, και υπάρχουν δύο ακέραιοι $\tilde{n}$ και $\tilde{m}$ που ικανοποιούν την $\tilde{m} = \psi^*(\tilde{n};\tilde{\omega}^*)$, δηλαδή $\tilde{n} = \tilde{m} \cdot 2^{\mu+1}$, τέτοιοι ώστε $\tilde{p}^* = (\tilde{m},\tilde{\omega}^*) \in G^*_{rL}$ και

$$|\psi^*(\tilde{n};\omega_0^*) - \psi^*(n_0;\omega_0^*)| = |\lfloor \tilde{m} \cdot 2^{\mu-\nu} \rfloor - m_0| \leqslant 60 \cdot 2^{-r}. \tag{5.7.2}$$

Επιπλέον, αν $\tilde{p}_0^* = (\psi^*(\tilde{n};\omega_0^*),\omega_0^*)$, τότε για κάθε n που ικανοποιεί την

$$|\psi^*(n;\omega_0^*) - \psi^*(n_0;\omega_0^*)| = |\psi^*(n;\omega_0^*) - m_0| \leqslant 120 \cdot 2^{2r} \tag{5.7.3}$$

έχουμε

$$\Big| |S^*_{n_0}(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| - |S^*_n(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| \Big| \leqslant 200 \cdot \left(C^*_{\psi^*(\tilde{n};\omega_0^*)}(\omega_0^*;\chi_F^\circ) + 2 \cdot 2^{-r}y \right). \tag{5.7.4}$$

Απόδειξη. Αφού $x \notin E_N$, έχουμε $\omega_0^* \not\subset S^*$, και από το Λήμμα 5.2.3 βλέπουμε ότι η (5.7.1) ικανοποιείται για κάποιον $r \in \mathbb{N}$.

Έστω $\omega_0' \subseteq \omega_0^*$, με $4m(\omega_0') = m(\omega_0^*)$, κάποιο από τα υποδιαστήματα του ω_0^*, για το οποίο

$$C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0'; \chi_F^\circ) = C_{m_0}^*(\omega_0^*; \chi_F^\circ),$$

και έστω $\omega' \subset \omega_0^*$ οποιοδήποτε άλλο υποδιάστημα του ω_0^*, για το οποίο $4m(\omega') = m(\omega_0^*)$. Αν γράψουμε P_0 και P για τις συναρτήσεις

$$P_0 = P_{rL}(\cdot; \omega_0') \quad \text{και} \quad P = P_{rL}(\cdot; \omega')$$

που εισήχθησαν στην Παράγραφο 5.2, από το Λήμμα 5.4.8 βλέπουμε ότι $P = P_0$.

Τώρα, από την Παρατήρηση 5.3.1,

$$|c_m(\omega'; \chi_F^\circ - P)| \leqslant 2^{-rL} y^{p/2} \ \text{ για κάθε } m. \tag{5.7.5}$$

Αφού $\omega_0^* \not\subset S^*$ και $2^{-r}y \leqslant C_{m_0}^*(\omega_0^*; \chi_F^\circ)$, από το Λήμμα 5.2.4 έπεται ότι $y^{p/2} \leqslant 2^{Lr/4}y$.

Από την κατασκευή της P είναι φανερό ότι $\chi_F^\circ - P \in L^2(\omega')$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 4.2.5. Από την (5.7.5) προκύπτει ότι $B = 2^{-rL}y^{p/2}$ και ότι ο M μπορεί να είναι οποιοσδήποτε φυσικός. Επιλέγουμε $M = 2^{10rL}$. Για να βρούμε το A στο Λήμμα 4.2.5 θα χρησιμοποιήσουμε την (5.2.3) του Λήμματος 5.2.2 με $p = 2$. Παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{m(\omega')}\int_{\omega'} |\chi_F^\circ - P|^2 dx\right)^{1/2} &\leqslant \left(\frac{1}{m(\omega')}\int_{\omega'} |\chi_F^\circ|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{m(\omega')}\int_{\omega'} |P|^2 dx\right)^{1/2}\\ &\leqslant y + \left(\frac{1}{m(\omega')}\int_{\omega'} |P|^2 dx\right)^{1/2},\end{aligned}$$

άρα χρησιμοποιώντας την (5.4.2) του Λήμματος 5.4.1 (παρατηρήστε ότι $\omega' \not\subset X_k$ διότι $x \notin E_N$) παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{m(\omega')}\int_{\omega'} |\chi_F^\circ - P|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant y + 2^{2rL}y^{p/2} = A.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.5 παίρνουμε, για κάθε n,

$$\begin{aligned}C_n(\omega'; \chi_F^\circ - P) &\leqslant 9\left(B \log M + \frac{A}{\sqrt{M}}\right)\\ &\leqslant 9\left(2^{-rL}y^{p/2} \cdot 10rL \cdot \log 2 + 2^{-5rL}y + 2^{-5rL} \cdot 2^{2rL}y^{p/2}\right)\\ &\leqslant 9\left(10 \log 2 \cdot rL \cdot 2^{-rL} + 2^{-3rL}\right) 2^{rL/4}y + 9 \cdot 2^{-5rL}y\\ &\leqslant 2^{-rL/2}y,\end{aligned} \tag{5.7.6}$$

όπου, στο τέλος, πήραμε υπόψη τις $L \geqslant 100$ και $r \in \mathbb{N}$. Αφού $C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0';\chi_F^\circ) = C^*_{m_0}(\omega_0^*;\chi_F^\circ) \geqslant 2^{-r}y$ και $P = P_0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0';P_0) + 2^{-rL/2}y &\geqslant C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0';P_0) + C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0';\chi_F^\circ - P) \\ &\geqslant C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0';\chi_F^\circ) \geqslant 2^{-r}y, \end{aligned}$$

και αναδιατάσσοντας τους όρους παίρνουμε

$$C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0';P_0) \geqslant (2^{-r} - 2^{-rL/2})y. \tag{5.7.7}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι υπάρχει μια συχνότητα λ στο P_0, τέτοια ώστε

$$|\psi(\lambda;\omega_0') - \psi(n_0;\omega_0')| < 2^{5rL}.$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή $|\psi(\lambda;\omega_0') - \psi(n_0;\omega_0')| \geqslant 2^{5rL}$. Από το Λήμα 4.2.6 και από την δεύτερη ανισότητα στην (5.4.2) παίρνουμε, εφαρμόζοντας πάλι και την $y^{p/2} \leqslant 2^{Lr/4}y$,

$$C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0';P_0) \leqslant 2^{-5rL}\sum |a_n| \leqslant 2^{-5rL}\cdot 2^{2rL}y^{p/2} \leqslant 2^{-2rL}y,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την (5.7.7), άρα έχουμε αποδείξει ότι για κάποιο λ που εμφανίζεται σαν συχνότητα στο P_0 έχουμε

$$|\psi(\lambda;\omega_0') - \psi(n_0;\omega_0')| < 2^{5rL}.$$

Επιλέγουμε έναν τέτοιο λ και τον συμβολίζουμε με $\tilde{n}$. Από την κατασκευή του P_{rL} στην Παράγραφο 5.3 έπεται ότι ο λ πρέπει να αντιστοιχεί σε κάποιο διάστημα $\tilde{\omega}' \supseteq \omega_0'$ τέτοιο ώστε $(\psi(\tilde{n};\tilde{\omega}'),\tilde{\omega}') \in G_{rL}$. Έστω $\tilde{\omega}^*$ ένα smoothing διάστημα, τέτοιο ώστε $4m(\tilde{\omega}') = m(\tilde{\omega}^*)$ και τέτοιο ώστε το $x(\in \tilde{\omega}')$ να περιέχεται στο μεσαίο μισό του $\tilde{\omega}^*$. Τότε,

$$\tilde{\omega}^* \supset \omega_0^*, \quad m(\tilde{\omega}^*) = 4\cdot 2\pi\cdot 2^{-\mu}, \quad \psi^*(\tilde{n};\tilde{\omega}^*) = \tilde{m} \quad \text{και} \quad \tilde{n} = \tilde{m}\cdot 2^{\mu},$$

και $\tilde{p}^* = (\tilde{m},\tilde{\omega}^*) \in G^*_{rL}$. Θα αποδείξουμε την (5.7.2) γι' αυτό το στοιχείο $\tilde{p}^* = (\tilde{m},\tilde{\omega}^*)$.

Αφού $p_0^* \notin G^*_{rL}$ μπορούμε να γράψουμε

$$P = \rho e^{i\tilde{n}x} + Q_0'(x) + Q_1(x),$$

όπου το $Q_1(x)$ περιέχει όλους τους όρους του P για τους οποίους οι αντίστοιχες συχνότητες λ' ικανοποιούν την

$$|\psi(n_0;\omega_0') - \psi(\lambda';\omega_0')| \geqslant 2^{10rL},$$

και το $Q_0'(x)$ από το Λήμμα 5.4.7 ικανοποιεί (γιατί έχουμε ήδη αφαιρέσει τον όρο $\rho e^{i\tilde{n}x}$) την εκτίμηση

$$|Q_0'(x)| \leqslant 23 \cdot 2^{-8rL} y^{p/2} \leqslant 4 \cdot 2^{-7rL} y,$$

όπου ξανά χρησιμοποιήσαμε την $y^{p/2} \leqslant 2^{rL/4} y$. Άρα,

$$C_{\psi(n;\omega')}(\omega'; P - \rho e^{i\tilde{n}x}) \leqslant 4 \cdot 2^{-7rL} y \quad \text{αν} \quad |\psi(n;\omega') - \psi(n_0;\omega')| \leqslant 2^{9rL},$$

όπου ω' είναι οποιοδήποτε από τα τέσσερα υποδιαστήματα του ω_0^*. Τότε, από την (5.7.6) έχουμε

$$\begin{aligned} C_{\psi(n;\omega')}(\omega'; \chi_F^\circ - \rho e^{i\tilde{n}x}) &\leqslant C_{\psi(n;\omega')}(\omega'; \chi_F^\circ - P) + C_{\psi(n;\omega')}(\omega'; P - \rho e^{i\tilde{n}x}) \\ &\leqslant 2^{-rL/2} y + 4 \cdot 2^{-7rL} y \leqslant 2 \cdot 2^{-rL/2} y \end{aligned} \tag{5.7.8}$$

αν $|\psi(n;\omega') - \psi(n_0;\omega')| \leqslant 2^{9rL}$, και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.4.8 και την (5.7.7) παίρνουμε

$$\begin{aligned} C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0'; \rho e^{i\tilde{n}x}) &\leqslant C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0'; P_0) + C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0'; P - \rho e^{i\tilde{n}x}) \\ &\geqslant (2^{-r} - 2^{-rL/2}) y - 4 \cdot 2^{-7rL} y \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2^{-r} y \end{aligned} \tag{5.7.9}$$

αν $|\psi(n;\omega') - \psi(n_0;\omega')| \leqslant 2^{9rL}$.

Τώρα,

$$\begin{aligned} |\rho| &\leqslant 10 \cdot C_{\psi(\tilde{n};\omega')}(\omega'; \rho e^{i\tilde{n}x}) \\ &\leqslant 10 \left(C_{\psi(\tilde{n};\omega')}(\omega'; \chi_F^\circ - \rho e^{i\tilde{n}x}) + C_{\psi(\tilde{n};\omega')}(\omega'; \chi_F^\circ) \right) \\ &\leqslant 10 \left(2 \cdot 2^{-rL/2} y + C_{\psi(\tilde{n};\tilde{\omega})}(\tilde{\omega}; \chi_F^\circ) \right), \end{aligned} \tag{5.7.10}$$

αν θυμηθούμε ότι η (5.7.8) ισχύει και για $n = \tilde{n}$.

Χρησιμοποιώντας την (5.2.4) του Λήμματος 5.2.2 παίρνουμε αμέσως

$$|\rho| \leqslant 10 \left(2 \cdot 2^{-rL/2} y + y \right) < 30y. \tag{5.7.11}$$

Χρησιμοποιώντας την (5.7.9) και το Λήμμα 4.2.6 (σημειώνουμε ότι, εδώ, $f(x) = \rho e^{i\tilde{n}x}$) παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{-r} y \leqslant C_{\psi(n_0;\omega_0')}(\omega_0'; \rho e^{i\tilde{n}x}) \leqslant |\rho| \cdot |\psi(n_0;\omega_0') - \psi(\tilde{n};\omega_0')|^{-1},$$

άρα από την (5.7.11) παίρνουμε

$$|\psi(n_0;\omega_0') - \psi(\tilde{n};\omega_0')| \leqslant 2 \cdot |\rho| \cdot 2^r \cdot \frac{1}{y} \leqslant 60 \cdot 2^r,$$

το οποίο αποδεικνύει την (5.7.2).

Υποθέτουμε ότι ο n ικανοποιεί τη συνθήκη

$$|\psi^*(n;\omega_0^*) - \psi^*(n_0;\omega_0^*)| \leqslant 120 \cdot 2^{2r}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}(5.7.12)\qquad &|e^{inx}S_n^*(x;\omega_0^*;\chi_F^\circ) - e^{in_0x}S_{n_0}^*(x;\omega_0^*;\chi_F^\circ)|\\ &\leqslant |e^{inx}S_n^*(x;\omega_0^*;\chi_F^\circ - \rho e^{i\tilde{n}x}) - e^{in_0x}S_{n_0}^*(x;\omega_0^*;\chi_F^\circ - \rho e^{i\tilde{n}x})|\\ &+ |S_n^*(x;\omega_0^*;\rho e^{i\tilde{n}x})| + |S_{n_0}^*(x;\omega_0^*;\rho e^{i\tilde{n}x})|.\end{aligned}$$

Φράσσουμε τους τελευταίους δύο όρους χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3.9 και την (5.7.10) (για την $f(x) = \rho e^{i\tilde{n}x}$):

$$\begin{aligned}|S_n^*(x;\omega_0^*;\rho e^{i\tilde{n}x})| + |S_{n_0}^*(x;\omega_0^*;\rho e^{i\tilde{n}x})| &\leqslant 2 \cdot |\rho| \cdot 10\\ &\leqslant 200\left(2 \cdot 2^{-rL/2}y + C^*_{\psi^*(\tilde{n};\tilde{\omega})}(\tilde{\omega};\chi_F^\circ)\right).\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (5.7.12) φράσσεται με εφαρμογή του Λήμματος 4.3.7 το πολύ $120 \cdot 2^{2r}$ φορές, όπου κάθε φορά χρησιμοποιούμε την (5.7.8). Άρα,

$$\begin{aligned}&|e^{inx}S_n^*(x;\omega_0^*;\chi_F^\circ - \rho e^{i\tilde{n}x}) - e^{in_0x}S_{n_0}^*(x;\omega_0^*;\chi_F^\circ - \rho e^{i\tilde{n}x})|\\ &\qquad \leqslant 120 \cdot 2^{2r} \cdot 2 \cdot 2^{-rL/2} \cdot y \cdot c_5,\end{aligned}$$

και από την (5.7.12) έχουμε

$$\begin{aligned}&|e^{inx}S_n^*(x;\omega_0^*;\chi_F^\circ) - e^{in_0x}S_{n_0}^*(x;\omega_0^*;\chi_F^\circ)|\\ &\qquad \leqslant 240 \cdot c_5 \cdot 2^{2r-rL/2}y + 400 \cdot 2^{-rL/2}y + 200 \cdot C^*_{\psi^*(\tilde{n};\tilde{\omega})}(\tilde{\omega};\chi_F^\circ).\end{aligned}$$

Έπεται η (5.7.4), διότι $L \geqslant 100$, και η σταθερά c_5 μπορεί να επιλεγεί ίση με 85000. □

Στο επόμενο θεώρημα βελτιώνουμε αυτά τα αποτελέσματα, προσθέτοντας μια εκτίμηση για το $C^*(\overline{p}^*)$ και παίρνοντας υπόψη την διάσπαση $\Omega(\overline{p}^*;r)$ για το $\overline{p}^*$. Οι υποθέσεις είναι οι ίδιες με αυτές του Θεωρήματος 5.7.1.

Θεώρημα 5.7.2. *Έστω $x \notin E_N$ και ας υποθέσουμε ότι το x ανήκει στο μεσαίο μισό ενός smoothing διαστήματος ω_0^*, όπου $m(\omega_0^*) = 2 \cdot 2\pi \cdot 2^{-\nu}$, $\nu \leqslant N-1$. Έστω $n_0 = m_0 \cdot 2^{\nu+1}$, $m_0 \geqslant 0$ και έστω ότι υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $p_0^* = (m_0, \omega_0^*) \notin G^*_{rL}$ και*

$$2^{-r}y \leqslant C^*(p_0^*) = C^*_{m_0}(\omega_0^*;\chi_F^\circ) < 2 \cdot 2^{-r}y.$$

Τότε, υπάρχει ένα smoothing διάστημα $\overline{\omega}^* \supseteq \omega_0^*$ που περιέχει το x στο μεσαίο μισό του και έχει μήκος $m(\overline{\omega}^*) = 2 \cdot 2\pi \cdot 2^{-\mu}$, $\mu \leqslant \nu$, και υπάρχουν δύο ακέραιοι $\overline{n}$ και $\overline{m}$ που ικανοποιούν την $\overline{m} = \psi^*(\overline{n}; \overline{\omega}^*)$, δηλαδή $\overline{n} = \overline{m} \cdot 2^{\mu+1}$, και ένας άλλος ακέραιος $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, τέτοιοι ώστε $\overline{p}^* = (\overline{m}, \overline{\omega}^*) \in G_{kL}^*$. Για το $\tilde{p}_0^* = (\tilde{m}, \tilde{\omega}_0^*) \in G_{rL}^*$ του Θεωρήματος 5.7.1 έχουμε

$$C^*(\tilde{p}_0^*) = C_{\tilde{m}}^*(\omega_0^*; \chi_F^\circ) < 2^{-(k-1)} y. \tag{5.7.13}$$

Επιπλέον,

$$C^*(\overline{p}^*) = C_{\overline{m}}^*(\overline{\omega}^*; \chi_F^\circ) < 2^{-(k-1)} y, \tag{5.7.14}$$

και η διάσπαση $\Omega(\overline{p}^*; k)$ του $\overline{\omega}^*$ ορίζεται. Αν $\overline{\omega}(x)$ είναι το κεντρικό διάστημα ως προς το x και την $\Omega(\overline{p}^*; k)$, τότε $\overline{\omega}^*(x) \subseteq \omega_0^*$, και $\overline{\omega}^*(x) \neq \omega_0^*$ αν το x δεν είναι άκρο κάποιου από τα δύο δυαδικά διαστήματα που ορίζουν το μεσαίο μισό του ω_0^*, και το $\omega_0^* \setminus \overline{\omega}^*(x)$ είναι ένωση διαστημάτων της $\Omega(\overline{p}^*; k)$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με Σ το σύνολο όλων των τριάδων (n, ω^*, ℓ), όπου $n \in \mathbb{N}$, ω^* είναι ένα smoothing διάστημα και $\ell \in \{1, 2, \dots, r\}$, που ικανοποιούν τις παρακάτω τέσσερις συνθήκες:

(i) $\omega^* \supseteq \omega_0^*$ και το x ανήκει στο μεσαίο μισό του ω^*, και αν $m(\omega^*) = 4 \cdot 2\pi \cdot 2^{-\tau}$ τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n = m \cdot 2^\tau$, δηλαδή $\psi^*(n; \omega^*) = m$.

(ii) $C^*(\tilde{p}_0^*) = C_{\tilde{m}}^*(\omega_0^*; \chi_F^\circ) < 2^{-(\ell-1)} y$, όπου το $\tilde{p}_0^*$ ορίζεται από το Θεώρημα 5.7.1.

(iii) $|\psi^*(n; \omega_0^*) - \psi^*(n_0; \omega_0^*)| \leqslant 60 \sum_{j=1}^r 2^j < 120 \cdot 2^r$.

(iv) $(\psi^*(n; \omega^*), \omega^*) \in G_{\ell L}^*$.

Ισχυριζόμαστε πρώτα ότι $\Sigma \neq \emptyset$. Έστω $\tilde{n}$ και $\tilde{\omega}^*$ όπως στο Θεώρημα 5.7.1. Αν $C^*(\tilde{p}_0^*) = C_{\tilde{m}}^*(\omega_0^*; \chi_F^\circ) < 2^{-(r-1)} y$, τότε έχουμε αμέσως $(\tilde{n}, \tilde{\omega}^*, r) \in \Sigma$. Ας υποθέσουμε ότι $C^*(\tilde{p}_0^*) \geqslant 2^{-(r-1)} y$. Από το Λήμμα 5.2.3 μπορούμε να βρούμε $\ell \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ τέτοιο ώστε

$$2^{-\ell} y \leqslant C^*(\tilde{p}_0^*) < 2^{-(\ell-1)} y.$$

Αν $\tilde{p}_0^* \in G_{\ell L}^*$ ορίζουμε $\tilde{n}' = \frac{4 \cdot 2\pi}{m(\omega_0^*)} \psi^*(\tilde{n}; \omega_0^*)$, και εύκολα ελέγχουμε ότι $(\tilde{n}', \omega_0^*, \ell) \in \Sigma$.

Μένει λοιπόν η περίπτωση $\tilde{p}_0^* \notin G_{\ell L}^*$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.7.1 αντικαθιστώντας τα n_0 και r με τα $\tilde{n}'$ και ℓ, παίρνοντας ένα νέο ζεύγος $(\tilde{n}_1, \tilde{\omega}_1^*)$, και ισχυριζόμαστε ότι η τριάδα $(\tilde{n}_1, \tilde{\omega}_1^*, \ell)$ ανήκει στο Σ. Οι πρώτες τρεις συνθήκες του ορισμού του Σ ισχύουν τετριμμένα, αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε την τέταρτη. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned} |\psi^*(\tilde{n}_1; \omega_0^*) - \psi^*(n_0; \omega_0^*)| &\leqslant |\psi^*(\tilde{n}_1; \omega_0^*) - \psi^*(\tilde{n}'; \omega_0^*)| + |\psi^*(\tilde{n}'; \omega_0^*) - \psi^*(n_0; \omega_0^*)| \\ &\leqslant |\psi^*(\tilde{n}_1; \tilde{\omega}_1^*) - \psi^*(\tilde{n}'; \tilde{\omega}_1^*)| + |\psi^*(\tilde{n}'; \omega_0^*) - \psi^*(n_0; \omega_0^*)|, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία εκτίμηση έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\tilde{\omega}_1^* \supset \omega_0^*$, άρα

$$\begin{aligned}|\psi^*(n_1;\omega_0^*) - \psi^*(n';\omega_0^*)| &= \left| \left\lfloor \frac{1}{8\pi} \cdot \tilde{n}_1 \cdot m(\omega_0^*) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{8\pi} \cdot \tilde{n}_1' \cdot m(\omega_0^*) \right\rfloor \right| \\ &\leqslant \left| \left\lfloor \frac{1}{8\pi} \cdot \tilde{n}_1 \cdot m(\tilde{\omega}_1^*) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{8\pi} \cdot \tilde{n}' \cdot m(\omega_0^*) \right\rfloor \right| \\ &= |\psi^*(\tilde{n}_1;\tilde{\omega}_1^*) - \psi^*(\tilde{n}';\tilde{\omega}_1^*)|,\end{aligned}$$

αφού $\frac{m(\omega_1^*)}{m(\omega_0^*)} = 2^s$ για κάποιον $s \in \mathbb{N}$, και το ακέραιο μέρος μπορεί να αλλάξει το μέγεθος της ψ^* κατά μία μονάδα το πολύ. Τώρα, από την (5.7.2) του Θεωρήματος 5.7.1 έχουμε

$$|\psi^*(\tilde{n}';\omega_0^*) - \psi^*(n_0;\omega_0^*)| \leqslant 60 \cdot 2^r$$

και

$$|\psi^*(\tilde{n}_1;\tilde{\omega}_1^*) - \psi^*(\tilde{n}';\tilde{\omega}_1^*)| \leqslant 60 \cdot 2^\ell,$$

όπου $\ell < r$, άρα μια χοντρική εκτίμηση δίνει

$$|\psi^*(\tilde{n}_1;\omega_0^*) - \psi^*(n_0;\omega_0^*)| \leqslant 60 \sum_{j=1}^{r} 2^j < 120 \cdot 2^r.$$

Αυτό αποδεικνύει την τρίτη συνθήκη, και έχουμε δείξει ότι $\Sigma \neq \emptyset$.

Αν επιλέξουμε $(\overline{n}, \overline{\omega}^*, k) \in \Sigma$ τέτοια ώστε ο k να είναι ο μικρότερος δυνατός, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα (5.7.13) και τους ισχυρισμούς για την $\Omega(\overline{p}^*; k)$.

Ας υποθέσουμε ότι η (5.7.13) δεν ικανοποιείται, δηλαδή ας υποθέσουμε ότι $C^*(\overline{p}^*) \geqslant 2^{-(k-1)}y$. Χρησιμοποιώντας πάλι το Λήμμα 5.2.3 μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό $\ell \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ τέτοιον ώστε

$$2^{-\ell}y \leqslant C^*(\overline{p}^*) < 2^{-(\ell-1)}y.$$

Αν $\overline{p}^* \in G^*_{\ell L}$ συμπεραίνουμε ότι $(\overline{n}, \overline{\omega}^*, \ell) \in \Sigma$, το οποίο αντιφάσκει προς τον ορισμό του k, άρα πρέπει να έχουμε $\overline{p}^* \notin G^*_{\ell L}$. Όμως, σε αυτήν την περίπτωση εφαρμόζουμε πάλι το Θεώρημα 5.7.1 αντικαθιστώντας τα ω_0^*, n_0, ℓ με τα $\overline{\omega}^*, \overline{n}, \ell$. Αυτό μας δίνει ένα νέο ζεύγος $(\tilde{n}_1, \tilde{\omega}_1^*)$ τέτοιο ώστε (βλέπε την παραπάνω κατασκευή) $(\tilde{n}_1, \tilde{\omega}_1^*, \ell) \in \Sigma$, και αφού $\ell \leqslant k-1$ αυτό έρχεται πάλι σε αντίθεση με τον ορισμό του k. Έτσι έχουμε αποδείξει την (5.7.13).

Από την παραπάνω κατασκευή έπεται ότι η διάσπαση $\Omega(\overline{p}^*; k)$ του $\overline{\omega}^*$ που εισήχθη στην Παράγραφο 5.5 ορίζεται. Έστω $\overline{\omega}^*(x)$ το κεντρικό διάστημα ως προς το x και την $\Omega(\overline{p}^*; k)$ και έστω

$$\overline{p}^*(x) = (\psi^*(\overline{n}; \overline{\omega}^*(x)), \overline{\omega}^*(x)).$$

Τότε, το x ανήκει στο μεσαίο μισό τόσο του ω_0^* όσο και του $\overline{\omega}^*(x)$, και αν το x δεν είναι άκρο κάποιου από τα δύο δυαδικά διαστήματα στο μεσαίο μισό του ω_0^*, τότε $\overline{\omega}^*(x) \neq \omega_0^*$. Από την κατασκευή του $\overline{\omega}^*(x)$ στην Παράγραφο 5.5, αυτό σημαίνει ότι είτε $\overline{\omega}^*(x) \supset \omega_0^*$ ή $\overline{\omega}^*(x) \subset \omega_0^*$ (γνήσια).

Έστω ότι $\overline{\omega}^*(x) \supset \omega_0^*$. Τότε $m(\overline{\omega}^*(x)) > 2 \cdot 2\pi \cdot 2^{-N}$, και από την (5.5.4) του Λήμματος 5.5.3 έχουμε

$$C^*(\overline{p}^*(x)) = C^*_{\psi^*(\overline{n};\overline{\omega}^*(x))}(\overline{\omega}^*(x); \chi_F^\circ) \geqslant 2^{-(k-1)}y.$$

Από το Λήμμα 5.2.3 υπάρχει ακέραιος $\ell \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ τέτοιος ώστε

$$2^{-\ell}y \leqslant C^*(\overline{p}^*(x)) < 2^{-(\ell-1)}y.$$

Αν $\overline{p}^*(x) \in G^*_{\ell L}$, τότε $(\overline{n}, \overline{\omega}^*(x), \ell) \in \Sigma$, και αυτό έρχεται σε αντίφαση με το ότι ο k είναι ο μικρότερος δυνατός, άρα $\overline{p}^*(x) \notin G^*_{\ell L}$. Όμως σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε πάλι το Θεώρημα 5.7.1 αντικαθιστώντας τα ω_0^*, n_0, r με τα $\overline{\omega}^*(x), \overline{n}, \ell$, κατασκευάζοντας ένα άλλο στοιχείο $(\hat{n}, \hat{\omega}^*, \ell) \in \Sigma$, το οποίο έρχεται πάλι σε αντίφαση με το ότι ο k είναι ο μικρότερος δυνατός. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\overline{\omega}^*(x) \subset \omega_0^*$ (γνήσια).

Τέλος, αφού το $\overline{\omega}^*(x)$ είναι ένωση διαστημάτων από την $\Omega(\overline{p}^*; k)$ μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση που το ω_0^* είναι ένωση διαστημάτων από την $\Omega(\overline{p}^*; k)$. Αυτό έπεται από την κατασκευή του $\overline{\omega}^*(x)$, από την (5.7.13) και από το γεγονός ότι $\overline{\omega}^*(x) \subset \omega_0^*$, δηλαδή $\overline{\omega}^*(x) \setminus \omega_0^* = \emptyset$. $\square$

5.8 Η τελική εκτίμηση για την $S_n^*(x; \chi_F^\circ; \omega_{-1}^*)$

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε την εκτίμηση για το $S_n^*(x; \chi_F^\circ; \omega_{-1}^*)$ για $x \in (-\pi, \pi) \setminus E_N$ και $|n| \leqslant N$, την οποία αναφέραμε στην εισαγωγή αυτού του Κεφαλαίου. Η απόδειξη, η οποία θα χρησιμοποιήσει ισχυρά τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων, χρησιμοποιεί μια επαναληπτική διαδικασία που περιγράφεται στο Λήμμα 5.8.3 παρακάτω. Αν αποδειχθεί αυτό το λήμμα, τα υπόλοιπα είναι εύκολα.

Αρχικός μας στόχος είναι να ορίσουμε μια *πεπερασμένη ακολουθία* $\omega_{-1}^*, \omega_0^*, \omega_1^*, \ldots, \omega_J^*$ smoothing διαστημάτων και αντίστοιχες πεπερασμένες ακολουθίες μη αρνητικών ακεραίων

$$n = n_{-1}, n_0, n_1, \ldots, n_J = 0, \qquad 0 \leqslant n_j \leqslant N$$

και

$$m_{-1} > m_0 > m_1 > \cdots > m_J,$$

τέτοιες ώστε

$$|S^*_{n_j}(x; \chi_F^\circ; \omega_j^*)| = |S^*_{n_{j+1}}(x; \chi_F^\circ; \omega_{j+1}^*)| + O(Lm_j \cdot 2^{1-m}y)$$

για κάθε $j=-1,0,1,\dots,J-1$. Αφού η ακολουθία των n_j δεν είναι αναγκαστικά φθίνουσα, για τεχνικούς λόγους θα αποδείξουμε την ύπαρξη μιας άλλης πεπερασμένης ακολουθίας $k_{-1},k_0,k_1,\dots,k_J$ που αποτελείται από μη αρνητικούς ακεραίους, τέτοιας ώστε

$$k_{j+1}<m_j\leqslant k_j \quad \text{και} \quad n_{j+1}\leqslant(1+2^{-k_j})n_j, \qquad j=-1,0,1,\dots,J-1.$$

Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα συγκεκριμένο ω_j^* και ας θέσουμε $n_j\geqslant 0$ τον αντίστοιχο ακέραιο. Αν το ω_j^* αποτελείται από δύο δυαδικά διαστήματα του επιπέδου ν, και το $n\geqslant 0$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\psi^*(n;\omega_j^*)=n_j\cdot 2^{-\nu-1},$$

τότε, φυσικά,

$$0\leqslant n-n_j<2^{\nu+1} \quad \text{και} \quad \psi^*(n;\omega_j^*)=\psi^*(n_j;\omega_j^*). \tag{5.8.1}$$

Αν από την άλλη πλευρά μας δώσουν $n\in\mathbb{N}$, απλώς ορίζουμε τον n_j θέτοντας

$$n_j=\frac{4\cdot 2\pi}{m(\omega_j^*)}\,\psi^*(n;\omega_j^*), \tag{5.8.2}$$

και η τριάδα (n,n_j,ω_j^*) έχει τις ιδιότητες που περιγράφονται στην (5.8.1).

Αν ο $n_j\geqslant 0$ μας δίνεται και θέλουμε να ικανοποιείται η (5.8.2) για $n=n_j$, τότε φυσικά ο $\psi^*(n_j;\omega_j^*)$ ορίζει έναν αριθμό επιπέδου $\nu\geqslant 0$ τέτοιον ώστε το ω_j^* να αποτελείται από δύο δυαδικά διαστήματα του επιπέδου ν και να ισχύει $\psi^*(n_j;\omega_j^*)=n_j\cdot 2^{-\nu-1}$. Ειδικότερα, $n_j=0$ αν και μόνο αν $\psi^*(n_j;\omega_j^*)=0$. Αφού το x πρέπει να ανήκει στο μεσαίο μισό του ω_j^*, έχουμε μόνο δύο επιλογές του ω_j^* για δεδομένο n_j. Έστω ω_j^* μία από αυτές.

Λήμμα 5.8.1. *Έστω $N\geqslant 7$. Αν $n_j\neq 0$ τότε $m(\omega_j^*)>8\cdot 2\pi\cdot 2^{-N}$.*

Απόδειξη. Αφού $\sum_{i=1}^\infty \log(1+2^{-i})<\sum_{i=1}^\infty 2^{-i}=1$, έχουμε

$$\prod_{i=1}^\infty (1+2^{-i})<e.$$

Αν $n_{-1}=n$ τότε οι συνθήκες $k_{j+1}<k_j$ και $n_{j+1}\leqslant(1+2^{-k_j})n_j$ εξασφαλίζουν ότι για $N\geqslant 7$ έχουμε

$$n_j\leqslant\prod_{i=1}^\infty(1+2^{-i})N<eN\leqslant\frac{1}{6}2^N,$$

άρα αν $m(\omega_j^*)\leqslant 8\cdot 2\pi\cdot 2^{-N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\psi^*(n_j;\omega_j^*)\cdot 2^{N+1}&\leqslant\Big(\frac{n_j}{8\pi}m(\omega_j^*)\Big)\cdot 2^{N+1}\leqslant\Big(\frac{n_j}{8\pi}\cdot 8\cdot 2\pi\cdot 2^{-N}\Big)\cdot 2^{N+1}\\ &\leqslant 4n_j\leqslant\frac{2}{3}\cdot 2^N.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\psi^*(n_j;\omega_j^*) \leqslant \frac{1}{3}$, και αφού $\psi^*(n_j;\omega_j^*) \geqslant 0$ παίρνουμε $\psi^*(n_j;\omega_j^*) = 0$. Με βάση τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν έχουμε $n_j = 0$ και έπεται το λήμμα. $\square$

Αν μας δοθούν τα $n_{-1} = n$ και $\omega_{-1}^* = (-4\pi, 4\pi]$, από το Λήμμα 5.2.3 βλέπουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$2^{-k}y \leqslant C_n^*(\omega_{-1}^*;\chi_F^\circ) < 2^{-(k-1)}y. \tag{5.8.3}$$

Λήμμα 5.8.2. *Αν ο $k \in \mathbb{N}$ είναι ο φυσικός που ορίστηκε στην* (5.8.3) *και* $(-2\pi, 2\pi] \not\subset S^*$, *τότε*

$$(\psi^*(n_{-1};\omega_{-1}^*), \omega_{-1}^*) \in G_{kL}^*.$$

Απόδειξη. Στην Παράγραφο 4.2 ορίσαμε $\psi^*(n;\omega_{-1}^*) = n$, δηλαδή ζητάμε $(n_{-1}, \omega_{-1}^*) \in G_{kL}^*$. Ας υποθέσουμε ότι $(\psi^*(n_{-1};\omega_{-1}^*), \omega_{-1}^*) \notin G_{kL}^*$. Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε

$$|m - n_{-1}| = |m - n| = |m - \psi^*(n;\omega_{-1}^*)| < 2^{10kL}.$$

Τότε $(m, \omega_{r0}) \notin G_{kL}$, και από τον ορισμό (5.3.1) του $G_k(\omega_{r0})$ βλέπουμε ότι

$$|c_m(\omega_{r0};\chi_F^\circ)| < 2^{-kL}y^{p/2}. \tag{5.8.4}$$

Αφού $(-2\pi, 2\pi] \not\subset S^*$, έχουμε $\omega_{r0} \not\subset S$, και από την (5.2.2) έπεται ότι

$$\left(\frac{1}{m(\omega_{r0})}\int_{\omega_{r0}} |\chi_F^\circ(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{m(\omega_{r0})}\int_{\omega_{r0}} \chi_F^\circ(x) dx\right)^{1/2} < y^{p/2}. \tag{5.8.5}$$

Τώρα, οι (5.8.5) και (5.8.4) είναι ακριβώς οι υποθέσεις του Λήμματος 4.2.5, άρα αν επιλέξουμε $A = y^{p/2}$, $B = 2^{-kL}y^{p/2}$ και $M = 2^{10kL}$, το λήμμα μας δίνει

$$C_n(\omega_{r0};\chi_F^\circ) \leqslant 9\left(2^{-kL}y^{p/2} \cdot 10kL \cdot \log 2 + y^{p/2} \cdot 2^{-5kL}\right) < 2^{-kL/2}y < 2^{-k}y,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $L = L(p) \geqslant 100$ (βλέπε (5.2.6)). Όμως, αυτή η ανισότητα αντιφάσκει προς τον ορισμό (5.8.3) του k. $\square$

Περνάμε τώρα στο κρίσιμο λήμμα, στο οποίο γίνεται πιο συγκεκριμένος ο ρόλος των πεπερασμένων ακολουθιών που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Λήμμα 5.8.3. *Έστω $N \geqslant 7$, $1 < p < \infty$ και $y > 0$ δοσμένες σταθερές, και έστω $F \subseteq (-\pi, \pi]$ ένα μετρήσιμο σύνολο. Τότε, υπάρχει ένα άλλο μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq (-4\pi, 4\pi]$ τέτοιο ώστε*

$$m(E) \leqslant C_p^p y^{-p} m(F),$$

και επιπλέον το E ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: Για κάθε $x \in (-\pi,\pi] \setminus E$ και για κάθε $n \in \{0,1,\dots,N\}$ μπορούμε να βρούμε μια πεπερασμένη ακολουθία

$$\omega_{-1}^*, \omega_0^*, \omega_1^*, \dots, \omega_J^*$$

από smoothing διαστήματα, και τρεις ακολουθίες

$$n = n_{-1}, n_0, n_1, \dots, n_J = 0, \quad m_{-1}, m_0, m_1, \dots, m_J, \quad k_{-1}, k_0, k_1, \dots, k_J,$$

μη αρνητικών ακεραίων, που ικανοποιούν τις

$$n_j = \frac{4\cdot 2\pi}{m(\omega_j^*)}\psi^*(n_j;\omega_j^*), \quad n_{j+1} \leqslant (1+2^{-k_j})n_j, \quad k_{j+1} < m_j \leqslant k_j,$$

και

$$|S_{n_j}^*(x;\chi_F^\circ;\omega_j^*)| \leqslant |S_{n_{j+1}}^*(x;\chi_F^\circ;\omega_{j+1}^*)| + c_{12}Lm_j\cdot 2^{-(m_j-1)}y \tag{5.8.6}$$

και

$$|S_0^*(x;\chi_F^\circ;\omega_j^*)| \leqslant Ly. \tag{5.8.7}$$

Έδώ, $L = L(p) \geqslant 100$ είναι η σταθερά που εισήχθη στην (5.2.6), *και c_{12} είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από τα N,p,y και F. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι θα μπορούσαμε να πάρουμε την c_{12} ίση με $2\cdot 10^4$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m(F)>0$. Έστω $n_{-1}=n$, $\omega_{-1}^* = (-4\pi,4\pi]$ και έστω $k\in\mathbb{N}$ ο οποίος ορίζεται από την (5.8.3), δηλαδή

$$2^{-k}y \leqslant C_{n_{-1}}^*(\omega_{-1}^*;\chi_F^\circ) < 2^{-(k-1)}y.$$

Από το Λήμμα 5.8.2 έχουμε

$$(\psi^*(n_{-1};\omega_{-1}^*),\omega_{-1}^*) \in G_{kL}^*,$$

άρα η διάσπαση $\Omega((\psi^*(n;\omega_{-1}^*),\omega_{-1}^*);k)$ του ω_{-1}^* είναι καλά ορισμένη.

Επιλέγουμε σαν E το σύνολο E_N που ορίστηκε στην (5.6.12). Αφού $x\notin E$, από το Θεώρημα 5.6.7 έχουμε

$$|S_{n_{-1}}^*(x;\chi_F^\circ;\omega_{-1}^*)| \leqslant |S_{n_{-1}}^*(x;\chi_F^\circ;\omega^*(x))| + c_9\cdot Lk\cdot 2^{-(k-1)}y. \tag{5.8.8}$$

Ορίζουμε

$$k_{-1} = m_{-1} = k, \quad \omega_0^* = \omega^*(x) \quad \text{και} \quad n_0 = \frac{4\cdot 2\pi}{m(\omega_0^*)}\psi(n_{-1};\omega_0^*).$$

Αν το $\omega^*(x)$ αποτελείται από δύο δυαδικά διαστήματα του επιπέδου ν, δηλαδή $\omega_0^* = \omega^*(x) = \omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,\nu}$, από τις (5.8.2) και (5.8.1) προκύπτει ότι $0 \leqslant n_{-1} - n_0 < 2^{\nu+1}$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 4.3.3 και έχουμε

$$\begin{aligned} &|S^*_{n_{-1}}(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| \\ &\leqslant |S^*_{n_0}(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| + c_4 \max\{C_{\psi(n_0;\omega_{j\nu})}(\omega_{j\nu};\chi_F^\circ), C_{\psi(n_0;\omega_{j+1,\nu})}(\omega_{j+1,\nu};\chi_F^\circ)\}. \end{aligned}$$

Τώρα, από τον ορισμό του $\omega^*(x)$ στην Παράγραφο 5.5, τουλάχιστον ένα από τα διαστήματα $\omega_{j\nu}$ και $\omega_{j+1,\nu}$ ανήκει στη διάσπαση, άρα από την (5.5.3) του Λήμματος 5.5.3 παίρνουμε

$$\begin{aligned} |S^*_{n_{-1}}(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| &\leqslant |S^*_{n_0}(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| + c_4 \cdot 2^{-(k-1)}y \\ &\leqslant |S^*_{n_0}(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| + 10^{-2}c_4 \cdot Lk \cdot 2^{-(k-1)}y, \end{aligned}$$

αφού $Lk \geqslant 100$. Αντικαθιστώντας αυτήν την ανισότητα στην (5.8.8) βλέπουμε ότι

$$|S^*_{n_{-1}}(x;\chi_F^\circ;\omega_{-1}^*)| \leqslant |S^*_{n_0}(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| + c_{13} \cdot Lk \cdot 2^{-(k-1)}y. \tag{5.8.9}$$

Αν $n_0 = 0$ τότε η διαδικασία σταματάει. Αν $n_0 \neq 0$, από το Λήμμα 5.8.1 έχουμε $m(\omega_0^*) > 8 \cdot 2\pi \cdot 2^{-N}$, και από την (ii) του Λήμματος 5.5.1 έχουμε ότι είτε

$$C^*_{\psi^*(n_0;\omega_0^*)}(\omega_0^*;\chi_F^\circ) \geqslant 2^{-(k-1)}y, \tag{5.8.10}$$

ή $\chi_F^\circ \cdot \chi_{\omega_0^*} \equiv 0$. Στην τελευταία περίπτωση έχουμε $S^*_{n_0}(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*) = 0$ και οι (5.8.6) και (5.8.7) ισχύουν τετριμμένα για το ω_0^*, άρα μπορούμε να υποθέσουμε την (5.8.10). Τότε, από το Λήμμα 5.2.3 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$2^{-k_0}y \leqslant C^*_{\psi^*(n_0;\omega_0^*)}(\omega_0^*;\chi_F^\circ) \leqslant 2^{-(k_0-1)}y,$$

και έπεται άμεσα από την (5.8.10) ότι $k_0 < k = m_{-1}$.

Για τη συνέχεια, ορίζουμε $p_0^* = (\psi^*(n_0;\omega_0^*), \omega_0^*)$.

Αν $p_0^* \in G^*_{k_0L}$, τότε η διάσπαση $\Omega(p_0^*;k_0)$ του ω_0^* ορίζεται, και χρησιμοποιώντας την διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω για την απόδειξη της (5.8.10) (εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3.3 και το Λήμμα 5.5.3) παίρνουμε

$$|S^*_{n_0}(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| \leqslant |S^*_{n_1}(x;\chi_F^\circ;\omega_1^*)| + c_{13} \cdot Lm_0 \cdot 2^{-(m_0-1)}y, \tag{5.8.11}$$

όπου έχουμε θέσει

$$\omega_1^* = \omega_0^*(x), \quad m_0 = k_0 \quad \text{και} \quad n_1 = \frac{4 \cdot 2\pi}{m(\omega_1^*)}\psi^*(n_0;\omega_1^*).$$

Αν $p_0 \notin G_{k_0L}^*$ και $\psi^*(n_0;\omega_0) > 120\cdot 2^{2k_0}$, τότε επιλέγουμε το $\tilde{n}$ σύμφωνα με το Θεώρημα 5.7.1 και τα $\overline{n}, \overline{\omega}^*, r$ σύμφωνα με το Θεώρημα 5.7.2. Ειδικότερα, $r \leqslant k_0$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.6.7 παίρνουμε

$$|S_{\overline{n}}^*(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| \leqslant |S_{\overline{n}}^*(x;\chi_F^\circ;\overline{\omega}^*(x))| + c_9\cdot Lr\cdot 2^{-(r-1)}y. \tag{5.8.12}$$

Αφού

$$|\psi^*(\overline{n};\omega_0^*) - \psi^*(n_0;\omega_0^*)| < 120\cdot 2^{k_0} < 120\cdot 2^{2k_0},$$

από το Θεώρημα 5.7.1 έχουμε

$$|S_{n_0}^*(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| \leqslant |S_{\overline{n}}^*(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*(x))| + 200\left(C_{\psi^*(\tilde{n};\omega_0^*)}^*(\omega_0^*;\chi_F^\circ) + 2^{-(k_0-1)}y\right). \tag{5.8.13}$$

Από την άλλη πλευρά, από το Θεώρημα 5.7.2 παίρνουμε

$$C_{\psi^*(\tilde{n};\omega_0^*)}^*(\omega_0^*;\chi_F^\circ) < 2^{-(r-1)}y,$$

οπότε, αντικαθιστώντας αυτήν την ανισότητα και την (5.8.12) στην (5.8.13), και χρησιμοποιώντας την $Lr \geqslant 100$, παίρνουμε

$$|S_{n_0}^*(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*)| \leqslant |S_{\overline{n}}^*(x;\chi_F^\circ;\omega_0^*(x))| + c_{14}\cdot Lr\cdot 2^{-(r-1)}y. \tag{5.8.14}$$

Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε

$$\omega_1^* = \overline{\omega}^*(x), \quad m_0 = m \quad \text{και} \quad n_1 = \frac{4\cdot 2\pi}{m(\omega_1^*)}\psi^*(\overline{n};\omega_1^*). \tag{5.8.15}$$

Δεν έχουμε όμως ολοκληρώσει την κατασκευή σε αυτήν την περίπτωση, διότι ο n_1 μπορεί να μην είναι ίσος με τον $\overline{n}$, και ο $\overline{n}$ μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον n_0. Θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5.8.4. *Έστω* $n_1 = \frac{4\cdot 2\pi}{m(\omega_1^*)}\psi^*(\overline{n};\omega_1^*)$ *και* $\psi^*(n_0;\omega_0^*) > 120\cdot 2^{2k_0}$. *Τότε,*

$$n_1 \leqslant \overline{n} \leqslant (1+2^{-k_0})n_0.$$

Απόδειξη. Αν $\overline{n} \leqslant n_0$ τότε ο ισχυρισμός είναι προφανής, υποθέτουμε λοιπόν ότι $n_0 < \overline{n}$. Αν το ω_0^* αποτελείται από δύο διαστήματα του επιπέδου ν, από την υπόθεση παίρνουμε

$$\begin{aligned}\overline{n}\cdot 2^{-(\nu+1)} - n_0\cdot 2^{-(\nu+1)} &< 120\cdot 2^{k_0} = 2^{-k_0}\cdot 120\cdot 2^{2k_0}\\ &< 2^{-k_0}\cdot n_0\cdot 2^{-(\nu+1)},\end{aligned}$$

απ' όπου, με αναδιάταξη των όρων, βλέπουμε ότι $\overline{n} < (1+2^{-k_0})n_0$. □

Χρησιμοποιώντας αυτό το λήμμα, την (5.5.3) του Λήμματος 5.5.3 και το Πόρισμα 4.3.6, παίρνουμε από την (5.8.14), χρησιμοποιώντας και πάλι την $Lr \geqslant 100$,

(5.8.16)
$$\begin{aligned}|S^*_{n_0}(x;\chi^\circ_F;\omega^*_0)| &\leqslant |S^*_{\tilde n}(x;\chi^\circ_F;\omega^*_1)| + c_{14}Lr\cdot 2^{-(r-1)}y\\ &\leqslant |S^*_{n_1}(x;\chi^\circ_F;\omega^*_1)| + c_4\max\{C_{m_0}(\omega_{j\nu};\chi^\circ_F), C_{m_0}(\omega_{j+1,\nu};\chi^\circ_F)\} + c_{14}Lr\cdot 2^{-(r-1)}y\\ &\leqslant |S^*_{n_1}(x;\chi^\circ_F;\omega^*_1)| + c_{15}Lr\cdot 2^{-(r-1)}y,\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει την (5.8.6) σε αυτήν την περίπτωση.

Τέλος, θεωρούμε την περίπτωση που $p^*_0 \notin G^*_{k_0L}$ και $\psi^*(n_0;\omega^*_0) \leqslant 120\cdot 2^{k_0}$. Πάλι, επιλέγουμε το $\tilde n$ όπως στο Θεώρημα 5.7.1 και τα $\overline{n}, \overline{\omega}^*, r$ όπως στο Θεώρημα 5.7.2. Από το Θεώρημα 5.7.1, για $n = 0$, παίρνουμε

$$(5.8.17)\qquad |S^*_{n_0}(x;\chi^\circ_F;\omega^*_0)| \leqslant |S^*_0(x;\chi^\circ_F;\omega^*_0)| + 200\cdot\left(C^*_{\psi^*(\tilde n;\omega^*_0)}(\omega^*_0;\chi^\circ_F) + 2^{-(k_0-1)}y\right),$$

και χρησιμοποιώντας την (5.7.13) του Θεωρήματος 5.7.2 παίρνουμε

$$|S^*_{n_0}(x;\chi^\circ_F;\omega^*_0)| \leqslant |S^*_0(x;\chi^\circ_F;\omega^*_0)| + 200\cdot\left(2^{-(r-1)}y + 2^{-(k_0-1)}y\right).$$

Τώρα, το $\omega^*_0 = \omega^*(x)$ είναι ένα διάστημα σ_x-τύπου, και αφού $x \notin V^*_L$ (βλέπε (5.2.8)), δηλαδή

$$\sup_{\sigma_x}\left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\sigma_x}\frac{\chi^\circ_F(t)}{x-t}\,dt\right| \leqslant Ly,$$

παίρνουμε

$$|S^*_0(x;\chi^\circ_F;\omega^*_0)| = \left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\omega^*_0}\frac{\chi^\circ_F(t)}{x-t}\,dt\right| \leqslant \sup_{\sigma_x}\left|\frac{1}{\pi}(\mathrm{pv})\int_{\omega^*_0}\frac{\chi^\circ_F(t)}{x-t}\,dt\right| \leqslant Ly,$$

το οποίο αποδεικνύει την (5.8.7) (καθώς μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ω^*_0 με το ω^*_j, όποτε το ω^*_j ορίζεται). Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε $m_0 = m = 1$, $n_1 = 0$ και $\omega^*_0 = \omega^*_1$, και παίρνουμε

$$(5.8.18)\qquad |S^*_{n_0}(x;\chi^\circ_F;\omega^*_0)| \leqslant |S^*_0(x;\chi^\circ_F;\omega^*_0)| + c_{12}Lm_0\cdot 2^{-(m_0-1)}y.$$

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να πάρουμε την (5.8.18) ή να πάρουμε τόσο μικρά διαστήματα στην (5.8.14) ή την (5.8.16) που από το Λήμμα 5.8.1 να μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $n_J = 0$. Κάτι από τα παραπάνω θα συμβεί μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, και έτσι το Λήμμα 5.8.3 έχει αποδειχθεί. □

Τελικά, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.8.5. *Έστω $N \geqslant 7$, $1 < p < \infty$ και $y > 0$ δοσμένες σταθερές, και έστω $F \subseteq (-\pi, \pi]$ ένα μετρήσιμο σύνολο. Τότε, υπάρχει ένα άλλο μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq (-4\pi, 4\pi]$ τέτοιο ώστε*

$$m(E) \leqslant C_p^p y^{-p} m(F),$$

και τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ με $|n| \leqslant N$ και για κάθε $x \in (-\pi, \pi] \setminus E$,

$$|S_n^*(x; \chi_F^\circ; \omega_{-1}^*)| \leqslant 5c_{12} \cdot Ly,$$

όπου C_p, $L = L(p)$ και c_{12} είναι οι σταθερές στο Λήμμα 5.8.3.

Απόδειξη. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $(n = 0)$. Από το Λήμμα 5.8.3 έχουμε

$$|S_0^*(x; \chi_F^\circ; \omega_{-1}^*)| \leqslant c_{12} \cdot Ly.$$

Περίπτωση 2. $(0 < n \leqslant N)$. Από το Λήμμα 5.8.3 έχουμε

$$\begin{aligned}
|S_n^*(x; \chi_F^\circ; \omega_{-1}^*)| &= |S_{n_{-1}}^*(x; \chi_F^\circ; \omega_{-1}^*)| \\
&\leqslant |S_{n_0}^*(x; \chi_F^\circ; \omega_0^*)| + c_{12} \cdot Ly \cdot m_{-1} 2^{-(m_{-1}-1)} \\
&\leqslant \cdots \\
&\leqslant |S_{n_J}^*(x; \chi_F^\circ; \omega_J^*)| + c_{12} \cdot Ly \cdot \sum_{j=-1}^{J-1} m_j 2^{-(m_j-1)} \\
&\leqslant c_{12} \cdot Ly + c_{12} \cdot Ly \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot 2^{-(i-1)} \\
&= 5c_{12} Ly,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $k_{j+1} < m_j \leqslant k_j$, που ειδικότερα εξασφαλίζει ότι οι m_j είναι διακεκριμένοι.

Περίπτωση 3. $(-N \leqslant n < 0)$. Αφού $|S_n^*(x; \chi_F^\circ; \omega_{-1}^*)| = |S_{-n}^*(x; \chi_F^\circ; \omega_{-1}^*)|$, η περίπτωση αυτή προκύπτει άμεσα από την Περίπτωση 2. □

5.9 Απόδειξη του θεωρήματος

Στην Παράγραφο 2.4 αποδείξαμε το θεώρημα Carleson-Hunt υποθέτοντας ότι ισχύει το Θεώρημα 2.4.1. Όλα τα αποτελέσματα που αποδείξαμε στη συνέχεια είχαν ως στόχο να μας επιτρέψουν να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.4.1, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του θεωρήματος Carleson-Hunt.

Στην Παράγραφο 4.3 ορίσαμε τον τελεστή $M^* : L^p[-\pi,\pi] \to \mathcal{M}$ μέσω της

(5.9.1) $$M^* f(x) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |S_n^*(x; f; \omega_{-1}^*)| = \sup_{n\geqslant 0} |S_n^*(x; f; \omega_{-1}^*)|.$$

Σχετικά με αυτόν τον τελεστή θα αποδείξουμε το εξής.

Θεώρημα 5.9.1. *Ο τελεστής M^* είναι περιορισμένου ασθενούς τύπου p, για κάθε $p \in (1,\infty)$.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μια σταθερά A_p τέτοια ώστε

(5.9.2) $$m(\{x \in (-\pi,\pi] : M^*\chi_F(x) > y\}) \leqslant A_p^p y^{-p} m(F)$$

για κάθε $y > 0$, για κάθε $p \in (1,\infty)$ και για κάθε μετρήσιμο σύνολο $F \subseteq (-\pi,\pi]$. Έστω y, p και F όπως παραπάνω. Ορίζουμε

$$E_N^* = \left\{ x \in (-\pi,\pi] : \sup_{|n|\leqslant N} |S_n^*(x; \chi_F^\circ; \omega_{-1}^*)| > y \right\}, \qquad N \in \mathbb{N}$$

και

$$E^* = \{x \in (-\pi,\pi] : M^*\chi_F(x) > y\}.$$

Είναι φανερό ότι $E_N^* \uparrow E^*$, για την απόδειξη λοιπόν της (5.9.2) αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια σταθερά A_p τέτοια ώστε

$$m(E_N^*) \leqslant A_p^p y^{-p} m(F) \quad \text{για κάθε } N \in \mathbb{N}.$$

Από τον ορισμό του E_N^* έχουμε

$$\sup_{|n|\leqslant N} |S_n^*(x; \chi_F^\circ; \omega_{-1}^*)| \leqslant y \quad \text{για κάθε } x \in (-\pi,\pi] \setminus E_N^*.$$

Θέτουμε $y = 5c_{12}Ly_1$ (δηλαδή, ορίζουμε $y_1 = \frac{1}{5}c_{12}^{-1}L^{-1}y$), όπου c_{12} και L είναι οι σταθερές στο Θεώρημα 5.8.5. Γράφοντας E_N για το σύνολο του Θεωρήματος 5.8.5 που αντιστοιχεί στα παραπάνω y_1 και N, έχουμε

$$(-\pi,\pi] \setminus E_N^* \supseteq (-\pi,\pi] \setminus E_N,$$

δηλαδή $E_N^* \subseteq E_N$. Από το Θεώρημα 5.8.5 παίρνουμε

$$m(E_N^*) \leqslant m(E_N) \leqslant C_p^p y_1^{-p} m(F) \leqslant (5c_{12}C_p)^p y^{-p} m(F),$$

το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα με $A_p = 5c_{12}LC_p$. □

Πόρισμα 5.9.2. *Ο τελεστής M^* είναι περιορισμένου τύπου p, για κάθε $p \in (1, \infty)$.*

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.9.1 και του Λήμματος 2.1.8: κάνουμε παρεμβολή μεταξύ p_0 και p_1 για κάποιους $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$. □

Πόρισμα 5.9.3. *Ο τελεστής M είναι περιορισμένου τύπου p, για κάθε $p \in (1, \infty)$. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $p \in (1, \infty)$ υπάρχει σταθερά A_p τέτοια ώστε*

$$\|M\chi_E\|_p \leqslant A_p \|\chi_E\|_p$$

για όλα τα μετρήσιμα σύνολα $E \subseteq (-\pi, \pi]$.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.3.2 και του Πορίσματος 5.9.2. □

Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και θέτουμε

$$M_N f(x) = \max_{0 \leqslant n \leqslant N} |S_n(x; f)|.$$

Έστω $\alpha : (-\pi, \pi] \to \{0, 1, \ldots, N\}$ μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση. Μια τέτοια συνάρτηση θα λέγεται *απλή τάξης N*.

Ορίζουμε έναν τελεστή T_α στον L^p θέτοντας

$$T_\alpha f(x) = S_{\alpha(x)}(x; f), \qquad x \in (-\pi, \pi]. \tag{5.9.3}$$

Ο T_α είναι καλά ορισμένος και γραμμικός τελεστής στον L^p (για κάθε απλή συνάρτηση α τάξης N). Πράγματι, αν θεωρήσουμε μια $f \in L^p(-\pi, \pi]$ τότε για κάθε $x \in (-\pi, \pi]$ έχουμε

$$T_\alpha f = \sum_{j=0}^{N} s_j(f) \chi_{\alpha^{-1}(\{j\})}.$$

Για κάθε $j = 0, 1, \ldots, N$ η $s_j(f)$ είναι συνεχής, άρα ανήκει στον $L^\infty(-\pi, \pi]$ και η $\chi_{\alpha^{-1}(\{j\})}$ είναι επίσης φραγμένη και μετρήσιμη (αφού η α είναι μετρήσιμη). Έπεται ότι $s_j(f)\chi_{\alpha^{-1}(\{j\})} \in L^p(-\pi, \pi]$ για κάθε $j = 0, 1, \ldots, N$, άρα $T_\alpha(f) \in L^p(-\pi, \pi]$.

Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα: αν $f, g \in L^p(-\pi, \pi]$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε

$$\begin{aligned} T_\alpha(f + \lambda g) &= \sum_{j=0}^{N} s_j(f + \lambda g)\chi_{\alpha^{-1}(\{j\})} = \sum_{j=0}^{N} [s_j(f) + \lambda s_j(g)]\chi_{\alpha^{-1}(\{j\})} \\ &= \sum_{j=0}^{N} s_j(f)\chi_{\alpha^{-1}(\{j\})} + \lambda \sum_{j=0}^{N} s_j(g)\chi_{\alpha^{-1}(\{j\})} = T_\alpha(f) + \lambda T_\alpha(g). \end{aligned}$$

Λήμμα 5.9.4. *Έστω α μια απλή συνάρτηση τάξης N. Για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq (-\pi, \pi]$ και για κάθε $p \in (1, \infty)$,*

$$\|T_\alpha \chi_E\|_p \leqslant A_p \|\chi_E\|_p,$$

όπου A_p είναι η σταθερά στο Πόρισμα 5.9.3.

Απόδειξη. Από την $Mf(x) = \sup_{n \geqslant 0} |S_n(x; f)|$ είναι φανερό ότι $|T_\alpha f(x)| \leqslant Mf(x)$, άρα και $\|T_\alpha f\|_p \leqslant \|Mf\|_p$. Άρα, το Λήμμα είναι άμεση συνέπεια του Πορίσματος 5.9.3. □

Λήμμα 5.9.5. *Για κάθε $p \in (1, \infty)$ υπάρχει σταθερά C'_p τέτοια ώστε: για κάθε απλή συνάρτηση $f \in L^p(-\pi, \pi]$ και για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση α τάξης N,*

$$\|T_\alpha f\|_p \leqslant C'_p \|f\|_p.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.9.4 ο τελεστής T_α είναι περιορισμένου τύπου p για κάθε $p \in (1, \infty)$. Θεωρούμε $p \in (1, \infty)$ και επιλέγουμε p_0, p_1 τέτοιους ώστε $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$. Τότε, ο T_α είναι περιορισμένου τύπου p_0 και p_1. Άρα, από το θεώρημα Stein-Weiss ο T_α είναι ισχυρού τύπου p και με σταθερά C'_p που εξαρτάται μόνο από το p και όχι από την α, αφού οι σταθερές A_{p_0} και A_{p_1} στο Λήμμα 5.9.4 δεν εξαρτώνται από την α και τα p_0, p_1 εξαρτώνται μόνο από το p. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.4.1.

Θεώρημα 2.4.1. *Ο τελεστής M είναι τύπου p, για κάθε $p \in (1, \infty)$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^p(-\pi, \pi]$. Από τον ορισμό του τελεστή M_N έπεται ότι υπάρχει απλή μετρήσιμη συνάρτηση α_0 τάξης N (η α_0 εξαρτάται από την f) τέτοια ώστε

$$|T_{\alpha_0} f(x)| = \max_{0 \leqslant n \leqslant N} |S_n(x; f)| = M_N f(x)$$

για κάθε $x \in (-\pi, \pi]$. Τότε, από το Λήμμα 5.9.5 παίρνουμε $\|M_n f\|_p \leqslant C'_p \|f\|_p$. Αφού η ακολουθία $M_N f(x)$ είναι αύξουσα και $\lim_{N \to \infty} M_N f(x) = Mf(x)$ για κάθε $x \in (-\pi, \pi]$, έχουμε το Θεώρημα. □

Βιβλιογραφία

[1] J. Arias de Reyna, *Pointwise convergence of Fourier series*, Springer, Lecture Notes in Mathematics **1785**, Berlin, 2002.

[2] L. Carleson, *Convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. **116** (1966), 135-157.

[3] A. Garsia, *Topics in almost everywhere convergence*, Markham Publishing Company, Chicago, 1970.

[4] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics **471**, Springer, 1975.

[5] O. G. Jørsboe and L. Mejlbro, *The Carleson-Hunt theorem on Fourier Series*, Springer, Lecture Notes in Mathematics **911**, Berlin, 1982.

[6] R. A. Hunt, *On the convergence of Fourier series*, Orthogonal expansions and their continuous analogues, Proc. Conf. Edwardsville III (1967), 235-255. Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, III (1968).

[7] L. Loomis, *A note on the Hilbert transform*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 1082-1086.

[8] J. Marsden, *Basic complex analysis*, Freeman and Company, San Francisco, 1973.

[9] Ch. J. Mozzochi, *On the pointwise convergence of Fourier series*, Lecture Notes in Mathematics **199**, Springer, 1971.

[10] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1962.

[11] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Vol. I and II, Cambridge University Press, 1959.