

ΚΙΟΥΛΑΦΑ ΚΥΡΑΝΝΑ

***ΣΧΕΔΟΝ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΕΣ
ΣΥΓΚΛΙΣΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ***

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ :Ν.ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ

Π.Μ.Σ.- ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ- Ε.Κ.Π.Α.

ΑΘΗΝΑ 2014

Αντί Προλόγου

Θεωρώ απαραίτητο να εκφράσω τις εγκάρδιες ευχαριστίες μου:

Στον καθηγητή κ. Νικόλαο Παπαναστασίου για το θερμό ενδιαφέρον του, για την αμέριστη συμπαράστασή του και για την σημαντική, πολύπλευρη, ουσιαστική και ανεκτίμητη βοήθεια που μου προσέφερε με την εις βάθος κατανόηση μαθηματικών εννοιών στη συγγραφή της διπλωματικής μου εργασίας.

Στους καθηγητές κ.κ. Γεώργιο Κουμουλή και Αθανάσιο Τσαρπαλιά που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή κρίσης της εργασίας μου.

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2014

ΚΥΡΑΝΝΑ ΚΙΟΥΛΑΦΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	4
Κεφάλαιο 1 Η σύγκλιση κατά Arzela και σχετικές με αυτήν συγκλίσεις	14
1.1. Σύγκλιση κατά Arzela	15
1.2 Συγκλίσεις σχετικές με την Arzela	44
1.3. Almost uniform και countable uniform σύγκλιση	57
Κεφάλαιο 2 Uniform Equal σύγκλιση	68
2.1. Arzela-ισοσυνέχεια και Exhaustiveness	70
2.2 Άλφα σύγκλιση	76
2.3. Equal και Uniform Equal σύγκλιση	88
2.4. Strong Equal , Strong Uniform Equal και Strong Uniform σύγκλιση	95
Κεφάλαιο 3 Έννοιες συγκλίσης για partial functions	101
Κεφάλαιο 4 Βαθύτερη μελέτη των συγκλίσεων-Νέα αποτελέσματα	112
4.1. Semi uniform σύγκλιση	113
4.2. Είδη Exhaustiveness	118
4.3. Σύγκλιση σχετική με την Gageff	121
4.4. Ideal και statistical σύγκλιση	122
4.5. Partial functions	128

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της σύγκλισης είναι χρήσιμη σχεδόν σε όλους τους κλάδους της ανάλυσης. Το πρόβλημα ξεκινάει τον 19^ο αιώνα όταν ο A.Cauchy δημοσίευσε μια λανθασμένη απόδειξη του λανθασμένου ισχυρισμού ότι οι Baire 1 συναρτήσεις είναι πάντα συνεχείς. Ο Fourier και ο Niels βρήκαν αντιπαραδείγματα στο πλαίσιο της θεωρίας Fourier αποδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο τον λανθασμένο ισχυρισμό του A.Cauchy. Στην συνέχεια ο Dirichlet επισημαίνει ότι η κατά σημείο σύγκλιση πρέπει να αντικατασταθεί από την ομοιόμορφη σύγκλιση την οποία σύμφωνα με τον G.H.Handy εισήγαγε ο C.Weierstrass το 1860. Η αποτυχία του κατά σημείου ορίου μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων να είναι συνεχής συνάρτηση δείχνει τη σημασία διάκρισης μεταξύ των διάφορων τύπων σύγκλισης. Ο C.Arzela το 1884 επηρεασμένος από τον C.Weierstrass στην προσπάθειά του να μελετήσει πότε το κατά σημείο όριο μια ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση εισήγαγε ένα νέο τύπο σύγκλισης, την σύγκλιση κατά Arzela. Αυτή η έννοια σύγκλισης είναι γνήσια ασθενέστερη από την ομοιόμορφη σύγκλιση και γνήσια ισχυρότερη από την κατά σημείο σύγκλιση. Στη συνέχεια το 1932 ο B.Gageff τροποποιώντας την σύγκλιση κατά Arzela εισήγαγε ένα νέο είδος σύγκλισης, την σύγκλιση κατά Gageff. Το 1970 ο H.Porpe εισήγαγε μια νέα έννοια σύγκλισης η οποία είναι γνήσια ασθενέστερη από την quasi-uniform σύγκλιση που εισήγαγε η M.Predoi TO 1979. Αργότερα το 1993 η Ewert αναφέρει μια νέα έννοια σύγκλισης την almost uniform σύγκλιση η οποία είναι ισχυρότερη από την quasi-uniform.

Κεφάλαιο 1: Η σύγκλιση κατά Arzela και σχετικές με αυτήν συγκλίσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις έννοιες σύγκλισης που αναφέραμε προηγουμένως οι οποίες χαρακτηρίζουν τοπολογικούς χώρους σύμφωνα με αποτελέσματα των Iseki, Bukovska, Bukovsky, Ewert και Sirvint. Επιπλέον με αυτές τις έννοιες σύγκλισης επιτυγχάνεται η διατήρηση της συνέχειας στο κατά σημείο όριο.

Κεφάλαιο 2: Uniform Equal σύγκλιση

Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την έννοια της exhaustiveness την οποία εισήγαγε το 2008 ο καθηγητής Ν.Παπαναστασίου και η οποία συνδέεται με την έννοια

της ισοσυνέχειας. Επιπλέον μελετάμε και άλλες έννοιες σύγκλισης όπως η άλφα σύγκλιση που είναι γνήσια ισχυρότερη από την κατά σημείο και η οποία συνδέεται με την έννοια της exhaustiveness αλλά και την uniform equal σύγκλιση που εισήχθη το 2002 από τον Ν.Παπαναστασίου.

Κεφάλαιο 3: Έννοιες σύγκλισης για partial functions

Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τις έννοιες σύγκλισης για μερικές συναρτήσεις (partial functions). Εφόσον οι μερικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις που δεν έχουν κοινό πεδίο ορισμού οι έννοιες σύγκλισης που μελετάμε στα προηγούμενα κεφάλαια δεν έχουν νόημα γι' αυτού του είδους τις συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 4: Βαθύτερη μελέτη των συγκλίσεων-Νέα αποτελέσματα

Στο τελευταίο κεφάλαιο επεκτείνουμε κάποιες από τις έννοιες που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια και παρουσιάζουμε ορισμένα ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ορισμένες έννοιες, θεωρήματα, προτάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στην εργασία αυτή.

0.1.Ορισμός Έστω X σύνολο, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *κατά σημείο* (pointwise) στην συνάρτηση f αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \forall n \geq n_0$ και θα γράφουμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ (ή $f_n \xrightarrow{p.w.} f$)

0.2.Ορισμός Έστω X σύνολο, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *ομοιόμορφα* (uniformly) στην συνάρτηση f αν για κάθε $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \forall n \geq n_0$ και $\forall x \in X$ και θα γράφουμε ότι $f_n \xrightarrow{o.μ.} f$ (ή $f_n \xrightarrow{u} f$)

0.3. Παρατηρήσεις

1. Έστω X σύνολο, (Y, ρ) μετρικός χώρος, $f_n, f: X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \xrightarrow{o.μ.} f \Leftrightarrow$

$$\sup\{\rho(f_n(x), f(x)): x \in X\} \rightarrow 0$$

Πράγματι, $(\Rightarrow)$ Έστω $\varepsilon > 0$ εφόσον $f_n \xrightarrow{o.μ.} f$ συνεπώς $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0 \text{ και } \forall x \in X \text{ οπότε } \sup\{\rho(f_n(x), f(x)): x \in X\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

δηλαδή $\sup\{\rho(f_n(x), f(x)): x \in X\} \rightarrow 0$

$(\Leftarrow)$ Έστω $\varepsilon > 0$ εφόσον $\sup\{\rho(f_n(x), f(x)): x \in X\} \rightarrow 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$$\sup\{\rho(f_n(x), f(x)): x \in X\} < \varepsilon \text{ δηλαδή } \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Άρα $f_n \xrightarrow{o.μ.} f$.

2. Από την παρατήρηση 1 γίνεται φανερό ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο αφού εάν $x_0 \in X$ (τυχαίο) τότε

$$\rho(f_n(x_0), f(x_0)) \leq \sup\{\rho(f_n(x), f(x)): x \in X\}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ οπότε εάν } f_n \xrightarrow{o.μ.} f$$

συνεπάγεται ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$

Σχόλιο: Με το παρακάτω παράδειγμα αποδεικνύεται ότι η κατά σημείο σύγκλιση είναι γνήσια ασθενέστερη από την ομοιόμορφη.

0.4. Παράδειγμα Έστω $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ η οποία ορίζεται ως εξής $f_n(x) = x^n$

συγκλίνει κατά σημείο στην συνάρτηση f , $f = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ και δεν συγκλίνει

ομοιόμορφα στην f .

Πράγματι, έστω $x \in [0,1]$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) Εάν $x \in [0,1)$ τότε $f_n(x) = x^n \rightarrow 0$

ii) Εάν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 1 \rightarrow 1$

δηλαδή για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει το $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = f(x)$ και είναι $f = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Άρα $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$

Όμως, η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f εφόσον $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \sup\{x^n : x \in [0,1]\} = 1$

0.5.Θεώρημα Αν $f_n, f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ ώστε:

1. f_n : συνεχής, $\forall n \in \mathbb{N}$
2. $f_n \xrightarrow{o.\mu} f \Rightarrow f$ συνεχής

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in X$ θα δείξουμε ότι f συνεχής στο x_0 . Έστω $\varepsilon > 0$ αφού $f_n \xrightarrow{o.\mu} f$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in X$. Επίσης, επειδή f_{n_0} συνεχής στο x_0 $\exists \delta > 0$ ώστε εάν $x \in B_d(x_0, \delta)$ τότε $\rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Έστω $x \in B_d(x_0, \delta)$ τότε $\rho(f(x), f(x_0)) \leq \rho(f(x), f_{n_0}(x)) + \rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + \rho(f_{n_0}(x_0), f(x_0))$. Από (1) έχουμε ότι:

$$\rho(f(x), f_{n_0}(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και} \quad \rho(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και από (2)} \quad \rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Άρα $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Εφόσον ε τυχόν και δείξαμε ότι $\exists \delta > 0$ ώστε

$\forall x \in B_d(x_0, \delta) \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ τότε f συνεχής.

0.6.Παρατήρηση Έχουμε ότι αν $f_n \xrightarrow{o.\mu} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ το αντίστροφο ισχύει με κάποιες προϋποθέσεις και είναι το θεώρημα Dini.

0.7.Θεώρημα Dini. Έστω $f_n, f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ και

1. X συμπαγής
2. f_n, f συνεχείς, $\forall n \in \mathbb{N}$
3. (f_n) μονότονη
4. $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$

Τότε $f_n \xrightarrow{o.\mu} f$

Απόδειξη: Έστω (f_n) αύξουσα δηλαδή $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in X$ και $\forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι:

$$\forall x \in X \exists n_x \in \mathbb{N}, \delta_x > 0 \text{ ώστε } |f_{n_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ και } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in B(x, \delta_x) \quad (2). \text{ Πράγματι, έστω } x \in X \text{ εφόσον}$$

$$f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f \text{ τότε } f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ δηλαδή υπάρχει } n_x \in \mathbb{N} : |f_{n_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\forall n \geq n_x \text{ Για } n = n_x \text{ έχουμε ότι } |f_{n_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ εφόσον } f_{n_x}, f \text{ συνεχείς στο } x$$

$$\exists \delta_x > 0 \text{ ώστε εάν } y \in B_d(x, \delta_x) \quad |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ και } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έστω $A = \{B(x, \delta_x) : x \in X\}$ το A είναι ανοικτό κάλυμμα του X και εφόσον X

$$\text{συμπαγής υπάρχουν } x_1, x_2, \dots, x_k \in X \quad X = \bigcup_{\rho=1}^k B(x_\rho, \delta_{x_\rho}).$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_k}\}$ και παρατηρούμε ότι εάν $n \geq n_0$ τότε

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall y \in X. \text{ Πράγματι, έστω } n \geq n_0 \text{ και } y \in X.$$

Από (3) έχουμε ότι υπάρχει $\rho_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$ ώστε $y \in B(x_{\rho_0}, \delta_{x_{\rho_0}})$.

Παρατηρούμε ότι:

$$0 \leq |f(y) - f_n(y)| \stackrel{(f_n) \text{ αύξουσα}}{=} f_n(y) - f_n(y) \stackrel{n \geq n_0 \geq n_{x_{\rho_0}}}{=} f(y) - f_{n_{x_{\rho_0}}}(x) \leq$$

$$|f(y) - f_{n_{x_{\rho_0}}}(x)| \leq |f(y) - f(x_{\rho_0})| + |f(x_{\rho_0}) - f_{n_{x_{\rho_0}}}(x)| \leq |f_{n_{x_{\rho_0}}}(x_{\rho_0}) - f_{n_{x_{\rho_0}}}(y)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \text{ Άρα, αφού } \varepsilon > 0 \text{ τυχόν και δ.ο. } \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$$

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall y \in X.$$

0.8.Ορισμός. Έχουμε $f: (X, \tau_d) \rightarrow (Y, \tau_\rho)$ η f καλείται *Baire-1* $\Leftrightarrow$ είναι κατά σημείο όριο συνεχών f_n . Συμβολίζουμε $B_1(X, Y)$ το σύνολο των *Baire-1* συναρτήσεων από έναν τοπολογικό χώρο X σ' έναν Y .

0.9. Παρατηρήσεις

1. $C \subseteq B_1$, C σύνολο συνεχών συναρτήσεων. Εάν f συνεχής τότε αν θέσουμε $f_n = f$, $\forall n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ και άρα $f \in B_1$
2. Είναι ενδιαφέρον να δούμε τι είδος συνόλου είναι το σύνολο που αποτελείται από τα σημεία ασυνέχειας των Baire-1 συναρτήσεων.

0.10.Ορισμός. Α καλείται πυκνό υποσύνολο του $X \Leftrightarrow \forall x \in X$ και $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A: d(y, x) < \varepsilon$

Ισοδύναμοι ορισμοί. Α πυκνό υποσύνολο του $X \Leftrightarrow$

1. $\forall G \neq \emptyset$ ανοικτό και $G \subset X \quad G \cap A \neq \emptyset$
2. $\bar{A} = X$

Απόδειξη: Έστω $G \neq \emptyset$ ανοικτό υποσύνολο του X . Έστω $x \in G$ εφόσον Α πυκνό τότε $\bar{A} = X$ οπότε $x \in \bar{A} \Rightarrow G \cap A \neq \emptyset$ αφού $G \in \tau$, $x \in G$.

0.11.Ορισμός. Ένα σύνολο $A \subseteq X$ θα καλείται *πυθηνά πυκνό* ή *αραιό* εάν $X \setminus \bar{D}$ είναι πυκνό στον X $\xLeftrightarrow{\text{Ισοδύναμα}} \overline{(X \setminus \bar{D})} = X \Leftrightarrow (\bar{D}^c) = X \Leftrightarrow X \setminus (\bar{D})^0 = X \Leftrightarrow (\bar{D})^0 = \emptyset$

0.12.Ορισμός. Το Α καλείται *πρώτης κατηγορίας* εάν υπάρχει $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πυθηνά πυκνών υποσυνόλων του X ώστε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Το Α καλείται *δεύτερης κατηγορίας* εάν δεν είναι πρώτης.

0.13. Παρατηρήσεις.

1. Η αριθμήσιμη ένωση συνόλων πρώτης κατηγορίας είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας.
2. Κάθε υποσύνολο B κάποιου συνόλου A πρώτης κατηγορίας είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας

Απόδειξη: Έστω $B \subseteq A$, A πρώτης κατηγορίας τότε υπάρχει $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πουθενά πυκνών υποσυνόλων του X ώστε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $B_n = B \cap A_n$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n) = B \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) =$

$B \cap A \stackrel{B \subseteq A}{=} B \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad B \cap A_n \subseteq A_n \Rightarrow \overline{B \cap A_n} \subseteq \overline{A_n} \text{ και } (\overline{B \cap A_n})^0 \subseteq (\overline{A_n})^0 = \emptyset,$
επειδή $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πουθενά κλειστών. $(\overline{B_n})^0 = \emptyset$ οπότε B_n ακολουθία πουθενά κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$, B πρώτης κατηγορίας.

0.14.Ορισμός. Έστω X τοπολογικός χώρος καλείται *χώρος του Baire* $\Leftrightarrow \forall (G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από ανοικτά και πυκνά σύνολα, το σύνολο $\bigcap G_n$ είναι πυκνό.

0.15.Ορισμός. Έστω (X, d) μ.χ και $A \subseteq X$ $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ καλείται *διάμετρος* του A .

0.16.Ορισμός. Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι, $f: X \rightarrow Y, x_0 \in X$ τότε ορίζουμε την *ταλάντωση της f στο x_0* να είναι ο αριθμός $\tau_{f(x_0)} = \inf\{\text{diam} f(B(x_0, \delta)) : \delta > 0\} \Leftrightarrow$

$$\tau_{f(x_0)} = \lim_n \text{diam} f\left(B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)\right)$$

0.17.Πρόταση. Έστω $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ συνάρτηση και $x_0 \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. $H f$ είναι συνεχής στο x_0 .
2. $\tau_{f(x_0)} = 0$

Απόδειξη: $1 \Rightarrow 2$

Για να δείξουμε ότι $\tau_{f(x_0)} = 0$ αρκεί να δείξουμε ότι – από τον ορισμό του infimum -
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ ώστε $\text{diam} f(B(x_0, \delta)) < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Αφού f είναι συνεχής στο $x_0 \exists \delta > 0$ ώστε εάν $x \in B_d(x_0, \delta)$ το

$$f(x) \in B_\rho(f(x_0), \frac{\varepsilon}{4}) \quad f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_\rho\left(f(x_0), \frac{\varepsilon}{4}\right) \Rightarrow \text{diam}\left(f(B_d(x_0, \delta))\right) \leq$$

$$\text{diam}\left(B_\rho\left(f(x_0), \frac{\varepsilon}{4}\right)\right) < 2 \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\tau_{f(x_0)} = 0$ δηλαδή $\inf\{\text{diam} f(B(x_0, \delta)) : \delta > 0\}$ έχουμε ότι
 $\exists \delta > 0$ ώστε $\text{diam}\left(f(B(x_0, \delta))\right) < \varepsilon$.

Εάν $x \in B(x_0, \delta)$ τότε $x, x_0 \in B(x_0, \delta)$ οπότε $f(x), f(x_0) \in f(B(x_0, \delta))$ τότε

$\rho(f(x), f(x_0)) \leq \text{diam} f(B(x_0, \delta)) < \varepsilon$ δηλαδή $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ και άρα f
 συνεχής στο x_0 .

0.18.Ορισμός Ο τοπολογικός χώρος X είναι

- i) *ψευδοσυμπαγής* αν κάθε συνεχή πραγματική ακολουθία που ορίζεται στον X είναι φραγμένη.
- ii) *ακολουθιακά συμπαγής* αν κάθε ακολουθία στοιχείων του X έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία
- iii) *αριθμήσιμο συμπαγής* αν κάθε αριθμήσιμο ανοιχτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

0.19.Ορισμός Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) είναι

- i) T_1 αν $\forall x, y \in X, x \neq y \exists G \in \tau$ ώστε $x \in G$ και $y \notin G$
- ii) φυσιολογικός (T_4) αν για κάθε F_1, F_2 κλειστά υποσύνολα του X ώστε $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ υπάρχουν $G_1, G_2 \in \tau$ ώστε $F_1 \subseteq G_1, F_2 \subseteq G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$
- iii) τελείως κανονικός (completely regular) αν για κάθε F κλειστό και για κάθε $x \notin F$ τότε υπάρχει $f \in C(X)$ τέτοια ώστε $f(x) = 0$ και $\forall y \in F, f(y) = 1$
- iv) Hausdorff (T_2) αν $\forall x, y \in X, x \neq y \exists G_1, G_2 \in \tau$ ώστε $x \in G_1$ και $y \in G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$
- v) Tychonoff ($T_{3,5}$) αν είναι completely regular και Hausdorff

0.20.Πρόταση Έστω X T_4 και T_1 χώρος. Εάν ο X είναι ψευδοσυμπαγής τότε είναι και αριθμήσιμα συμπαγής.

Απόδειξη: [1] Σ.Νεγρεπόντης, Θ.Ζαχαριάδης, Ν.Καλαμίδας και Β.Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία (1997)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

Η ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΤΑ ARZELA ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΑΥΤΗΝ ΣΥΓΚΛΙΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε έννοιες συγκλίσεων οι οποίες επιτυγχάνουν την συνέχεια του κατά σημείου ορίου μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον μέσω αυτών των συγκλίσεων δίνονται χαρακτηρισμοί για την έννοια της ψευδοσυμπάγειας αλλά και ικανές και αναγκαίες συνθήκες κάτω από τις οποίες τα διάφορα είδη συγκλίσεων που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο συμπίπτουν.

1.1. Σύγκλιση κατά Arzela

Ο C.Arzela [1] στην προσπάθεια του να εξετάσει πότε το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση εισήγαγε το 1884 ένα νέο είδος σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων που ονομάστηκε αργότερα από τον E.Borel quasi-uniform. Αυτή η έννοια σύγκλισης είναι μεταξύ της κατά σημείο σύγκλισης και της ομοιόμορφης σύγκλισης επομένως η ονομασία που έδωσε ο E.Borel είναι δικαιολογημένη. Ωστόσο τις τελευταίες δεκαετίες έχουν δοθεί νέες έννοιες σύγκλισης οι οποίες είναι μεταξύ της ομοιόμορφης και της quasi-uniform σύγκλισης με αποτέλεσμα η quasi-uniform σύγκλιση να μην είναι τόσο κοντά στην ομοιόμορφη σύγκλιση γι' αυτό όταν θα αναφερόμαστε σε αυτή την έννοια σύγκλισης θα χρησιμοποιούμε τη ονομασία Arzela σύγκλιση.

Το βασικό και ιδιαίτερα ενδιαφέρον αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι το θεώρημα Arzela 1.1.3. το οποίο αποτελεί γενίκευση του αποτελέσματος C.Arzela στην εργασία [1] αφού οι ακολουθίες συνεχών συναρτήσεων είναι ορισμένες σε συμπαγείς τοπολογικούς χώρους. Το θεώρημα Arzela 1.1.3. είναι σημαντικό, καθώς επιτυγχάνεται η συνέχεια του κατά σημείου ορίου μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων με μια πιο ασθενή σύγκλιση (υπόθεση) από την ομοιόμορφη που εισήγαγε ο Weierstrass. Στη συνέχεια με το θεώρημα 1.1.17. επιτυγχάνεται ένας χαρακτηρισμός της ψευδοσυμπάγειας μέσω της σύγκλισης κατά Arzela. Επιπλέον μέσω του παραδείγματος

1.1.24. γίνεται φανερό ότι εάν μια ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει κατά Arzela δεν ισχύει πάντα ότι και κάθε υπακολουθία της συγκλίνει κατά Arzela.

Το 1934 οι G.Fitchtenholz και L.Kantorovitch [5] εισήγαγαν μια νέα έννοια σύγκλισης που την ονόμασαν almost uniform σύμφωνα με την οποία μια ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει almost uniform εάν συγκλίνει κατά Arzela αλλά και κάθε υπακολουθία της να συγκλίνει κατά Arzela. Ωστόσο το 1993 η J.Ewert [11] χρησιμοποιεί την ίδια ονομασία για να περιγράψει μια διαφορετική έννοια σύγκλισης που μελετάμε στην παράγραφο 1.3. αυτού του κεφαλαίου, γι' αυτό όταν θα αναφερόμαστε στην almost uniform σύγκλιση των G.Fitchtenholz και L.Kantorovitch θα χρησιμοποιούμε την ονομασία strong Arzela. Κλείνουμε αυτή την ενότητα με την πρόταση 1.1.31. όπου δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η κατά σημείο σύγκλιση να συμπίπτει με την strong Arzela σύγκλιση.

1.1.1.Ορισμός Έστω X σύνολο, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow (Y, \rho)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά Arzela στην f στον X αν:

1. f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f στον X και
2. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν φυσικοί $n \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \dots < \kappa_m$ $m \in \mathbb{N}$

$$\text{ώστε } \forall x \in X \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \rho \left(f_{\kappa_i}(x), f(x) \right) \right\} < \varepsilon.$$

Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $f_n \xrightarrow{Arz} f$. Αν ικανοποιείται μόνο το 2 του ορισμού τότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f_n, f ικανοποιούν την συνθήκη Arzela.

1.1.2 Παρατηρήσεις

1. Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

Εάν X σύνολο, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $\forall n \in \mathbb{N} \quad \eta \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

συγκλίνει κατά Arzela στην f στον X αν:

I. Η f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f και

II. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν φυσικοί $n \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \dots < \kappa_m$

$m \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall x \in X \quad \exists \kappa_{i_x} \in \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m\}$ ώστε $\rho(f_{\kappa_{i_x}}(x), f(x)) < \varepsilon$

2. Είναι προφανές από τον ορισμό 1.1.1 ότι η σύγκλιση κατά Arzela είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο και πιο ασθενής από την ομοιόμορφη σύγκλιση,

δηλαδή εάν $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{Arz} f$ όπου $f_n, f : X \rightarrow (Y, \rho)$.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ αφού $f_n \xrightarrow{ομ} f \Rightarrow$

$\sup \left\{ \rho(f_n(x), f(x)) : x \in X \right\} \rightarrow 0$ δηλαδή $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n > n_1$

$\sup \left\{ \rho(f_{k_i}(x), f(x)) : x \in X \right\} < \varepsilon$. Θέτουμε $n^* = \max\{n_0, n_1\}$ τότε

$m < n^*$ και έχουμε ότι:

$$\rho(f_{n^*}(x), f(x)) \leq \sup \left\{ \rho(f_{k_i}(x), f(x)) : x \in X \right\} < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Άρα $f_n \xrightarrow{Arz} f$.

Συμβολικά δείξαμε ότι $u \Rightarrow Arz \Rightarrow \kappa\sigma$. Με τα παραδείγματα 1.1.4 και 1.1.5 θα δείξουμε ότι οι παραπάνω συγκλίσεις δεν είναι ισοδύναμες.

3. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνθήκη Arzela δεν εμπερικλείει την κατά σημείο σύγκλιση όπως γίνεται φανερό από το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα

Έστω X σύνολο και $g_n, f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n \xrightarrow{u} f$ και $f \neq g$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

ορίζουμε $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής: $f_n = g_n$ όταν n άρτιος και $f_n = g$ όταν n περιττός.

Τότε f_n, f ικανοποιούν την συνθήκη Arzela ενώ η $f_n \not\xrightarrow{\kappa\sigma} f$ αφού από την υπόθεση $f \neq g$.

Όμως f_n, f ικανοποιούν την συνθήκη Arzela.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$ εφόσον $f_{2n} \xrightarrow{o\mu} f$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$|f_{2n}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Θέτουμε $\kappa_1 = \max\{m, n_0\}$ τότε $m < 2\kappa_1 < 2\kappa_1 + 1$ και $\forall x \in X$

$|f_{2\kappa_1}(x) - f(x)| < \varepsilon$ αφού $2\kappa_1 > n_0$.

4. Μια επιπλέον παρατήρηση που αφορά την συνθήκη Arzela είναι ότι ενώ το Arzela όριο είναι μοναδικό θα θεωρούσαμε ότι και η f είναι η μοναδική όταν f_n, f ικανοποιούν την συνθήκη Arzela κάτι το οποίο δεν ισχύει σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα.

Παράδειγμα

Έστω X_A η χαρακτηριστική συνάρτηση του A $X_A = \begin{cases} 1, & \text{εάν } x \in A \\ 0, & \text{εάν } x \notin A \end{cases}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής: $f_n = X_{[0, \frac{1}{2}]}$ όταν n άρτιος και

$f_n = X_{[\frac{1}{2}, 1]}$ όταν n περιττός. Ορίζουμε επιπλέον $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ και $g(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1]$. Τότε f_n, f και f_n, g ικανοποιούν την

συνθήκη Arzela αφού εάν $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν φυσικοί αριθμοί

$\kappa_1 = 2n < 2n + 1 = \kappa_2$, $\kappa_1, \kappa_2 \geq n$ ώστε $\forall x \in [0, 1] = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

$\min_{i=1,2} |f_{\kappa_i}(x) - f(x)| = \min_{i=1,2} |f_{\kappa_i}(x)| = \min \left\{ X_{[0, \frac{1}{2}]}(x), X_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) \right\} = 0 < \varepsilon$

$$\text{Αφού } \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right] = \emptyset \Rightarrow \text{ή } X_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}(x) = 0 \text{ ή } X_{\left(\frac{1}{2}, 1\right]}(x) = 0$$

$$\text{Και } \min_{i=1,2} |f_{k_i}(x) - g(x)| = \min \left\{ \left| X_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}(x) - 1 \right|, \left| X_{\left(\frac{1}{2}, 1\right]}(x) - 1 \right| \right\} = 0 < \varepsilon$$

Σχόλιο : Το παρακάτω θεώρημα είναι πολύ σημαντικό και ιδιαίτερα ενδιαφέρον, διότι επιτυγχάνεται η συνέχεια του κατά σημείου ορίου μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων ορισμένων σε ένα τοπολογικό χώρο με μια πιο ασθενή υπόθεση – πιο ασθενή σύγκλιση, την σύγκλιση κατά Arzela- από αυτή (την ομοιόμορφη σύγκλιση) που έδωσε ο Weierstrass.

1.1.3. Θεώρημα Arzela[1], [2] Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος, (Y, ρ) μετρικός

χώρος και $f_n, f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \rho) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Εάν f_n συνεχής και $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$ Τότε

$$f_n \xrightarrow{Arz} f \Leftrightarrow f \text{ συνεχής.}$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής

$$\text{Έστω } \varepsilon > 0 \text{ και } x_0 \in X. \text{ Επειδή } f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \rho(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

Και αφού $f_n \xrightarrow{Arz} f$ οι f_n, f ικανοποιούν την συνθήκη Arzela οπότε έχουμε ότι υπάρχουν

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m, n_1 \geq n_0 \text{ ώστε } \forall x \in X \quad \min_{1 \leq i \leq m} \rho(f_{n_i}(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ θέτουμε $N_i(x_0) = \left\{ x \in X : \rho(f_{n_i}(x), f_{n_i}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \right\}$ Παρατηρούμε ότι :

$N_i(x_0) = f_{n_i}^{-1}\left(B_\rho\left(f_{n_i}(x_0), \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$ ανοικτό $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ αφού f_n συνεχής και

$$B_\rho\left(f_{n_i}(x_0), \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Ανοικτό υποσύνολο του Y .

Θέτουμε $N(x_0) = \bigcap_{i=1}^m N_i(x_0)$ ανοιχτό ως πεπερασμένη τομή ανοικτών. Για κάθε

$x \in N(x_0)$ $\rho(f(x), f(x_0)) \leq \rho(f(x), f_{n_j}(x)) + \rho(f_{n_j}(x), f(x_0)) + \rho(f_{n_j}(x_0), f(x_0))$ όπου

$j \leq m$ και $\rho(f_{n_j}(x), f(x)) = \min_{1 \leq i \leq m} \rho(f_{n_i}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ αφού $j \leq m \Rightarrow n_j \geq n_0$

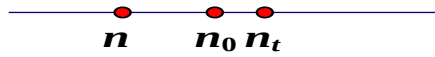
οπότε από (1) $\rho(f_{n_j}(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ και αφού $x \in N(x_0)$ τότε $x \in N_j(x_0)$ οπότε

$$\rho(f_{n_j}(x), f_{n_j}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{Άρα } \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in N(x_0).$$

Συνεπώς f συνεχής

($\Leftarrow$) Θέλουμε να δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{Arz} f$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$



Αφού $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ τότε για κάθε $t \in X$ $\exists n_t \geq n$ ώστε $\rho(f_{n_t}(t), f(t)) < \varepsilon$ (1)

Από την αρχή της καλής διάταξης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$n_t = \min \{k \geq n : \rho(f_k(t), f(t)) < \varepsilon\}$. Θέτουμε

$$N(t) = \{x \in X : \rho(f_{n_k}(x), f(x)) < \varepsilon\}$$

Παρατηρούμε ότι:

- I. Για κάθε $t \in X$ από την επιλογή του n_t το $t \in N(t)$.
- II. $N(t)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X .

Πράγματι, έστω $x_0 \in N(t)$ και $r = \varepsilon - \rho(f_{n_t}(x_0), f(x_0)) > 0$. Εφόσον f_{n_t}, f

συνεχείς στο x_0 $\exists V \in \tau, x_0 \in V : \forall x \in V \quad \rho(f_{n_t}(x), f_{n_t}(x_0)) < \frac{r}{2}$ και

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \frac{r}{2} \text{ οπότε εάν } x \in V$$

$$\rho(f_{n_t}(x), f(x)) \leq \rho(f_{n_t}(x), f_{n_t}(x_0)) + \rho(f_{n_t}(x_0), f(x_0)) + \rho(f(x_0), f(x)) < r + \rho(f_{n_t}(x_0), f(x_0)) = \varepsilon$$

δηλαδή $x \in N(t)$ οπότε $x_0 \in V \subseteq N(t)$

Από την παρατήρηση (I) έχουμε ότι $X = \bigcup_{t \in X} N(t)$

Επειδή X συμπαγής και $N(t)$ ανοιχτό υπάρχουν $t_1, t_2, \dots, t_m \in X$ ώστε $X = \bigcup_{i=1}^m N(t_i)$.

Θεωρούμε τους αντίστοιχους φυσικούς αριθμούς $n_{t_1}, n_{t_2}, \dots, n_{t_m} \geq n$ και $\forall x \in X$

$\Rightarrow x \in N(t_j)$ για κάποιο $1 \leq j \leq m$ και

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \rho(f_{n_{t_i}}(x), f(x)) \right\} \leq \rho(f_{n_{t_j}}(x), f(x)) < \varepsilon, \text{ αφού } x \in N(t_j).$$

Σχόλιο : Τα παρακάτω παραδείγματα έχουν ως στόχο να μας δείξουν ότι η κατά σημείο σύγκλιση, η σύγκλιση κατά Arzela και η ομοιόμορφη σύγκλιση δεν είναι ισοδύναμες δηλαδή συμβολικά $u \not\Leftarrow \text{Arz} \not\Leftarrow pw$ ενώ από την παρατήρηση 1.1.2 (2) έχουμε δείξει ότι $u \Rightarrow \text{Arz} \Rightarrow pw$

1.1.4. Παράδειγμα Έστω $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$. Τότε f_n συγκλίνει κατά σημείο στην $f, f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$ αλλά όχι Arzela.

Πράγματι, εάν $x \in [0,1]$ τότε η $f_n(x) = x^n \rightarrow 0$ δηλαδή $\forall x \in [0,1]$ υπάρχει το

$$\lim f_n(x) = f(x), f(x) = 0, \quad \forall x \in [0,1] \text{ οπότε } f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f. \text{ Όμως } f_n \not\xrightarrow{\text{Arz}} f$$

Έστω $0 < \varepsilon < 1$ (οποιοδήποτε) και $n_0 \in \mathbb{N}$ και $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m$ και $z \in [0,1]$.

Θέτουμε $n^*(z) = \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log z} \right\rceil + 1$. Τότε $\forall n \geq n^*(z)$ η $f_n(z) = z^n < \varepsilon$ οπότε $\forall n \leq n^*(z)$

$$\eta \quad f_n(z) = z^n \geq \varepsilon \quad (I)$$

Εφόσον $n^*(z) \rightarrow +\infty \exists x$ κοντά στο 1 και $x \neq 1$ ώστε $n^*(x) > n_m$ αφού

$$n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m < n^*(x) \text{ από την (I) έχουμε ότι: } f_{n_i}(x) \geq \varepsilon, \forall i=1,2,\dots,m$$

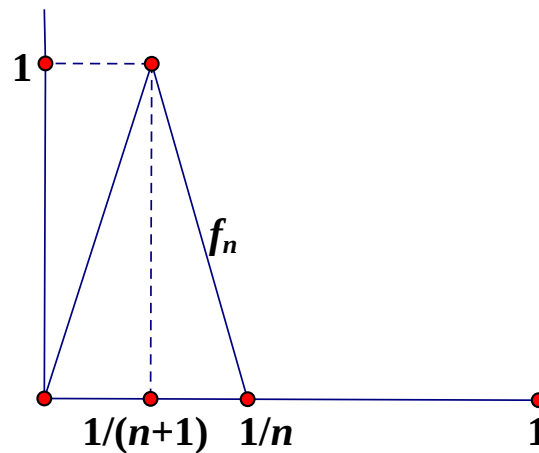
Συνεπώς $f_n \xrightarrow{Arz} f$

1.1.5. Παράδειγμα Έστω $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε το γράφημα της f_n είναι η καμπύλη C, C={ Ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει

τα $(0,0), \left(\frac{1}{n+1}, 1\right) \} \cup \{ \text{Ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα } \left(\frac{1}{n}, 0\right), (1,0) \}$. Δηλαδή

σχεδιαστικά



Οπότε εύκολα έχουμε ότι:

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & , \text{εάν } x \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right] \\ -(n+1)nx + (n+1) & , \text{εάν } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & , \text{εάν } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Τότε η f_n συγκλίνει κατά Arzela στην f όμως η f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στη f .

Πράγματι, καταρχάς έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} 0$.

Έστω $x \in [0,1]$ Διακρίνουμε περιπτώσεις:

I. Εάν $x = 0 \Rightarrow f_n(0) = 0$

II. Εάν $x \in (0,1]$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n_0} < x$ οπότε εάν $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < x$ δηλαδή

$$x > \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) = 0.$$

Συνεπώς $\forall x \in (0,1]$ υπάρχει το $\lim f_n(x)$ και μάλιστα $f = \lim f_n(x) = 0$.

Παρατηρούμε ότι $[0,1]$ συμπαγής χώρος και εφόσον f_n, f συνεχείς τότε από το θεώρημα

Arzela 1.1.3 $f_n \xrightarrow{Arz} 0$. Όμως $f_n \not\xrightarrow{ομ} 0$ αφού

$$\sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \sup \{|f_n(x)| : x \in [0,1]\} = 1 \rightarrow 1 \neq 0$$

Σχόλιο : Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα zero και cozero sets. Η μελέτη αυτή κρίνεται απαραίτητη ώστε να οδηγηθούμε σ' ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα της σύγκλισης κατά Arzela.

1.1.6 Ορισμός Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται *zero set* αν υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $A = f^{-1}\{0\}$ και το σύνολο B λέγεται *cozero set* αν υπάρχει $A \subseteq X$ zero set ώστε $B = X \setminus A$

1.1.7 Παρατήρηση Έστω X τοπολογικός χώρος $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ και $K \subseteq X$ κλειστό $\Rightarrow f^{-1}(K)$ zero set.

Πράγματι έστω $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = d(f(x), K)$ τότε φ συνεχής και $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : f(x) \in \overline{K}\}$

$\stackrel{K \text{ κλειστό}}{=} \stackrel{K = \overline{K}}{=} \{x \in X : f(x) \in K\} = f^{-1}(K)$. Δηλαδή υπάρχει $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$A = f^{-1}(K) = \varphi^{-1}(\{0\})$ οπότε εξ' ορισμού 1.1.6 το A είναι zero set.

Σχόλιο : Τα παρακάτω δυο βασικά θεωρήματα αφορούν ξένα zero sets

1.1.8. Θεώρημα[3] Εάν Z_1, Z_2 zero sets και $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset \Rightarrow \exists f \in C(X) : 0 \leq f(x) \leq 1,$

$\forall x \in X, Z_1 = f^{-1}\{0\}$ και $Z_2 = f^{-1}\{1\}$

Απόδειξη: Αφού Z_1, Z_2 zero sets εξ' ορισμού

$\exists g_1, g_2 \in C(X) : Z_1 = g_1^{-1}\{0\}$ και $Z_2 = g_2^{-1}\{1\}$

Θέτουμε $f : X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{g_1^2(x)}{g_1^2(x) + g_2^2(x)}$ Παρατηρούμε τα εξής:

- I. Η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη. Πράγματι $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ οπότε $g_1^{-1}\{0\} \cap g_2^{-1}\{1\} = \emptyset$ δηλαδή $\{x \in X : g_1(x) = 0\} \cap \{x \in X : g_2(x) = 0\} = \emptyset$
- II. Η συνάρτηση f είναι συνεχής αφού $g_1, g_2 \in C(X)$
- III. $0 \leq f(x) \leq 1$
- IV. $f^{-1}\{0\} = \{x \in X : f(x) = 0\} = \{x \in X : g_1^2(x) = 0\} = \{x \in X : g_1(x) = 0\} = Z_1$

$$\begin{aligned} \text{V.} \quad f^{-1}\{1\} &= \{x \in X : f(x) = 1\} = \{x \in X : g_1^2(x) = g_1^2(x) + g_2^2(x)\} = \{x \in X : g_2^2(x) = 0\} = \\ &= \{x \in X : g_2(x) = 0\} = Z_2 \end{aligned}$$

Σχόλιο : Εάν ορίσουμε Z F-Zero set, F χώρος Banach αν $f : X \rightarrow F$ συνεχής ώστε $Z = f^{-1}\{0\}$ τότε έχουμε μια παραλλαγή της παραπάνω πρότασης όπως δίδεται ακολούθως:

Έστω Z_1, Z_2 F-zero sets και $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset \Rightarrow \exists f : X \rightarrow F$, ώστε $\|f(x)\| \leq 1$ και $\forall x \in X, Z_1 = f^{-1}\{0\}$ και $Z_2 = \{x \in X : \|f(x)\| = 1\}$

Απόδειξη: Εφόσον Z_1, Z_2 zero sets τότε εξ' ορισμού υπάρχουν $g_1, g_2 : X \rightarrow F$ συνεχείς ώστε $Z_1 = g_1^{-1}\{0\}$ και $Z_2 = g_2^{-1}\{0\}$.

Θέτουμε $f : X \rightarrow F \quad f(x) = \frac{g_1(x)}{\|g_1(x)\| + \|g_2(x)\|}$ Παρατηρούμε τα εξής:

- I. Η συνάρτηση $f : X \rightarrow F$ είναι καλά ορισμένη. Πράγματι αφού $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$
 $g_1^{-1}\{0\} \cap g_2^{-1}\{0\} = \emptyset$ δηλαδή $\{x \in X : g_1(x) = 0\} \cap \{x \in X : g_2(x) = 0\} = \emptyset$
 άρα $\{x \in X : \|g_1(x)\| = 0\} \cap \{x \in X : \|g_2(x)\| = 0\} = \emptyset$
- II. Η $f : X \rightarrow F$ συνεχής αφού $g_1, g_2 : X \rightarrow F$ συνεχείς
- III. $\|f(x)\| = \frac{\|g_1(x)\|}{\|g_1(x)\| + \|g_2(x)\|} \leq 1$
- IV. $f^{-1}\{0\} = \{x \in X : f(x) = 0\} = \{x \in X : g_1(x) = 0\} = Z_1$
- V. $Z_2 = g_2^{-1}\{0\} = \{x \in X : g_2(x) = 0\} = \{x \in X : \|f(x)\| = 1\}$

1.1.9 Θεώρημα[3] Έστω Z_1, Z_2, Z_3 zero sets σύνολα και $Z_i \cap Z_j = \emptyset, \forall i \neq j$

$i, j=1,2,3$ και $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f \in C(X)$:

1. $a \leq f(x) \leq \beta \quad \forall x \in X, \quad a = \min\{c_1, c_2, c_3\}$ και $\beta = \max\{c_1, c_2, c_3\}$
2. $f|_{Z_1} = c_1, \quad f|_{Z_2} = c_2, \quad f|_{Z_3} = c_3$

Απόδειξη: Εφόσον $Z_1 \cap (Z_2 \cup Z_3) = (Z_1 \cap Z_2) \cup (Z_1 \cap Z_3) = \emptyset$ και

$Z_2 \cap (Z_1 \cup Z_3) = \emptyset$ και $Z_3 \cap (Z_1 \cup Z_2) = \emptyset$ τότε από το θεώρημα 1.1.8 υπάρχουν

$f_1, f_2, f_3 \in C(X)$ με $0 \leq f_1, f_2, f_3 \leq 1$ και $Z_1 = f_1^{-1}\{1\}, \quad Z_2 = f_2^{-1}\{1\},$

$Z_3 = f_3^{-1}\{1\}$

$Z_1 \cup Z_2 = f_3^{-1}\{0\}, \quad Z_2 \cup Z_3 = f_1^{-1}\{0\}, \quad Z_1 \cup Z_3 = f_2^{-1}\{0\}$

Θέτουμε $g = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3$

Παρατηρούμε ότι:

- I. Εάν $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ τότε $0 \leq g(x) \leq c_1 + c_2 + c_3$
- II. Εάν $c_1, c_2, c_3 \leq 0$ τότε $c_1 + c_2 + c_3 \leq g(x) \leq 0$ θέτουμε

$f = \max\{a, \min(g, \beta)\}$ Παρατηρούμε ότι:

1. $a \leq f(x) \leq \beta$. Πράγματι, εάν ισχύει η ι) τότε $0 \leq g(x) \leq c_1 + c_2 + c_3$ οπότε $a \leq f(x) \leq \beta$ και εάν ισχύει η ΙΙ) τότε $c_1 + c_2 + c_3 \leq g(x) \leq 0$ οπότε $a \leq f(x) \leq \beta$ συνεπώς και στις δυο περιπτώσεις $a \leq f(x) \leq \beta$.
2. $f|_{Z_1} = c_1$ πράγματι έχουμε ότι $g|_{Z_1} = c_1 f_1|_{Z_1} + c_2 f_2|_{Z_1} + c_3 f_3|_{Z_1}$ όμως $f_1|_{Z_1} = 1$ διότι $Z_1 = \{x \in X : f_1(x) = 1\}$,
 $f_2|_{Z_1} = 0$ διότι $Z_1 \subseteq Z_1 \cup Z_3 = \{x \in X : f_2(x) = 0\}$
 $f_3|_{Z_1} = 0$ διότι $Z_1 \subseteq Z_1 \cup Z_2 = \{x \in X : f_3(x) = 0\}$ Άρα $g|_{Z_1} = c_1$
 Οπότε $f|_{Z_1} = \max\{a, \min(g|_{Z_1}, \beta)\} = \max\{a, \min(c_1, \beta)\}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

1. Εάν $c_1 < c_2 < c_3$ τότε $\min(c_1, \beta) = c_1$ οπότε $\max\{a, c_1\} = \max\{c_1, c_1\} = c_1$ δηλαδή $f|_{Z_1} = c_1$
2. Εάν $c_2 < c_1 < c_3$ τότε $\min(c_1, \beta = c_3) = c_1$ οπότε $\max\{a, c_1\} = \max\{c_2, c_1\} = c_1$ δηλαδή $f|_{Z_1} = c_1$
3. Εάν $c_2 < c_3 < c_1$ τότε $\min(c_1, \beta = c_1) = c_1$ οπότε $\max\{a, c_1\} = c_1$ δηλαδή $f|_{Z_1} = c_1$ Όμοια $f|_{Z_2} = c_2$ και $f|_{Z_3} = c_3$

1.1.10. Ορισμός Μια ακολουθία από zero sets $\{Z_n\}$ είναι *regular* αν ικανοποιεί τα παρακάτω:

1. $Z_n \uparrow X$
2. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\exists U_n$ cozero set: $Z_{n_0} \subset U_n \subset Z_{n_0+1}$ Η Z_n *τερματίζεται* εάν $\exists n_0 \in \mathbb{N} : Z_{n_0} = Z_{n_0+1} = \dots = X$

1.1.11. Θεώρημα[3] Έστω $\{Z_n\}$ regular. Τότε εάν X τοπολογικός χώρος $C \subset X$ κλειστό $\Leftrightarrow C \cap Z_n$ κλειστό $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$

Επειδή C κλειστό και Z_n zero sets έπεται ότι Z_n κλειστά $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε όμως $C \cap Z_n$ κλειστό $\forall n \in \mathbb{N}$.

$(\Leftarrow)$

Θα δείξουμε ότι το C κλειστό προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι $X \setminus C$ ανοικτό. Έστω $x \in X \setminus C \Rightarrow x \notin C$. Αφού Z_n regular τότε $Z_n \uparrow X$ δηλαδή $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = X$ και $\forall n \in \mathbb{N} \exists U_n$ cozero set ώστε $Z_n \subset U_n \subset Z_{n+1}$ άρα $U_n \uparrow X$ οπότε $\exists N \in \mathbb{N} : x \in U_N$
 $C \cap Z_{N+1}$ κλειστό από υπόθεση και $x \notin C \cap Z_{N+1}$ αφού $x \notin C$ οπότε $\exists G$ ανοικτό, $x \in G : G \cap (C \cap Z_{N+1}) = \emptyset$ (I) Θέτουμε $G_1 = G \cap U_N$ τότε G_1 ανοικτό, αφού U_N cozero set και άρα ανοικτό και $x \in G_1$ και $G_1 \cap C = \emptyset$ αφού $G_1 \cap C = G \cap U_N \cap C \subset G \cap Z_{N+1} \cap C = \emptyset$ λόγω της (I). Άρα $G_1 \subset X \setminus C$ οπότε $X \setminus C$ ανοικτό συνεπώς C κλειστό.

Σχόλιο : Η παρακάτω πρόταση αποτελεί συνέπεια του θεωρήματος 1.1.11 και είναι πολύ ενδιαφέρουσα διότι μας εξασφαλίζει τη συνέχεια μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν η f είναι συνεχής πάνω σε μια $Z_n \subset X$ regular ακολουθία.

1.1.12. Πρόταση[3] Εάν $\{Z_n\}$ regular ακολουθία και X τοπολογικός χώρος τότε: $f|_X$ συνεχής $\Leftrightarrow f|_{Z_n}$ συνεχής $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη: $f|_X$ συνεχής $\Leftrightarrow \forall F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό $f^{-1}(F) \subseteq X$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό $f^{-1}(F) \cap Z_n$ κλειστό $\Leftrightarrow f|_{Z_n}$ συνεχής $\forall n = 1, 2, \dots$

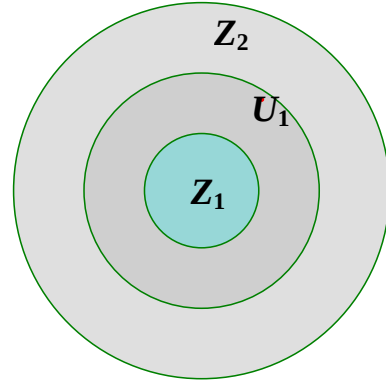
1.1.13. Θεώρημα [3] Έστω $\{Z_n\}$ regular ακολουθία και $\{t_n\}$ αύξουσα $\Rightarrow$
 $\exists g \in C(X) : Z_n = \{x \in X : g(x) \leq t_n\}$

Απόδειξη: Επειδή $\{Z_n\}$ regular ακολουθία τότε $\forall n \in \mathbb{N} \exists U_n$ cozero set ώστε

$$Z_n \subset U_n \subset Z_{n+1}$$

Θα κατασκευάσουμε $\{f_n\}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $f_1|_{Z_1} = t_1$
2. $f_n|_{Z_n}$ και συνεχής και $f_n|_{Z_n \setminus U_{n-1}} = t_n$
3. $t_i = f_n|_{U_i \setminus Z_i} \leq t_{i+1}$
4. $f_n|_{Z_{n-1}} = f_{n-1}$



Παρατηρούμε ότι: $Z_n \cap (Z_{n+1}|_{U_n}) = \emptyset \quad \forall n=1,2,\dots$

και $Z_n, Z_{n+1}|_{U_n} = Z_{n+1} \cap U_n^c$ zero set οπότε από το θεώρημα 1.1.9

$$\exists g_0 \in C(X) : g_0|_{Z_n} = t_n \text{ και } g_0|_{Z_{n+1} \setminus U_n} = t_{n+1}$$

$$\text{Θέτουμε } f_{n+1} = \begin{cases} g_0 & , f_{n+1}|_{Z_{n+1} \setminus Z_n} \\ f_n & , f_{n+1}|_{Z_n} \end{cases}$$

Έχουμε $f_{n+1}|_{Z_n} = f_n$ δηλαδή ισχύει η 4 ιδιότητα και από το σχήμα μπορούμε να δούμε ότι ισχύουν και οι υπόλοιπες 1,2, και 3 ιδιότητες.

Θέτουμε $g|_{Z_n}(x) = f_n \quad \forall x \in X$ είναι καλά ορισμένη λόγω της 4 ιδιότητας και

$g \in C(X)$ επειδή $f_n|_{Z_n}$ συνεχής οπότε από την πρόταση 1.1.12 $f_n|_X$ συνεχής.

$$\text{Άρα } Z_n = \{x \in X : g(x) \leq t_n\}$$

Σχόλιο : Το παρακάτω θεώρημα συνδέει την regular ακολουθία με την ακολουθία zero sets

1.1.14.Θεώρημα[3] Έστω $\{Z_n\} \downarrow \emptyset \Rightarrow \exists Z_n^*$ regular ακολουθία $Z_n^* \subset X \setminus Z_n$

Απόδειξη: Αφού Z_n zero sets εξ' ορισμού $\exists g_n \in C(X) : Z_n = g_n^{-1}\{0\}$

Θέτουμε $\varphi_n(x) = g_n(x) + 1$ συνεχής και $\varphi_n|_{Z_n} = 1 \neq 0 = g_n|_{Z_n}$

Οπότε $\theta_n \cap Z_n = \emptyset \quad \forall n=1,2,\dots$ όπου $\theta_n = \varphi_n^{-1}\{0\}$ zero set άρα από το θεώρημα

1.1.8. υπάρχει $\exists f_n \in C(X) : 0 \leq f_n(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$ και $Z_n = f_n^{-1}\{0\}$

Θέτουμε $f_n^* = \max\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ τότε παρατηρούμε ότι:

1. $0 \leq f_n^*(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$, αφού $0 \leq f_n(x) \leq 1$
2. f_n^* αύξουσα
3. $f_n^* \in C(X)$, αφού $f_n \in C(X)$
4. $Z_n = f_n^{*-1}\{0\}$

Πράγματι, από υπόθεση $Z_n \downarrow$ οπότε $Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq Z_1$ ή

$$f_3^{-1}\{0\} \subseteq f_2^{-1}\{0\} \subseteq f_1^{-1}\{0\}$$

Τότε $Z_3 \subseteq f_1^{-1}\{0\}$ και $f_3^* = \max\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_3^* = f_1 > f_2, f_3$

$$f_1^{-1}\{0\} = \{x \in X : f_1(x) = 0\} \stackrel{f_1 > f_2, f_3}{\subseteq} \{x \in X : f_3(x) = 0\}$$

δηλαδή $f_1^{-1}\{0\} \subseteq Z_3$ Άρα $Z_3 = f_1^{-1}\{0\} = f_3^{*-1}\{0\}$

Θέτουμε $Z_n^* = \left\{x \in X : f_n^*(x) \geq \frac{1}{n}\right\} = f_n^{*-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right)\right)$ zero set και

$$U_n^* = \left\{x \in X : f_n^*(x) > \frac{1}{n+1}\right\} = X \setminus f_n^{*-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n+1}\right]\right) \text{ cozero set}$$

Παρατηρούμε ότι $Z_n^* \subset U_n^* \subset Z_{n+1}^*$, αφού f_n^* αύξουσα. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $Z_n^* \uparrow X$ και θα έχω ότι Z_n^* regular.

Έστω $x_0 \in X$ τότε $\exists k_0 \in \mathbb{N} : f_{k_0}^*(x_0) > 0$ διαφορετικά εάν $f_k^*(x_0) = 0 \ \forall k$

τότε $x_0 \in Z_k, \forall k=1,2, \dots, x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k$ άτοπο επειδή $Z_k \downarrow \emptyset$ και άρα $\bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k = \emptyset$

οπότε εάν $k > k_0 \xRightarrow{f_n^* \uparrow} f_k^*(x_0) \geq f_{k_0}^*(x_0) > 0$ Θέτουμε $\delta = f_{k_0}^*(x_0) > 0$

Επιλέγουμε k_1 αρκετά μεγάλο : $\frac{1}{k_1} < \delta$ και $k_1 \geq k_0 \Rightarrow f_{k_1}^*(x_0) \geq \delta > \frac{1}{k_1} \Rightarrow x_0 \in Z_{k_1}^*$

Άρα $Z_n^* \uparrow X$

$Z_n^* \subset X \setminus Z_n$ αφού

$$\begin{aligned} X \setminus Z_n &= \{x \in X : f_n^*(x) \neq 0\} = \{x \in X : f_n^*(x) > 0\} \cup \{x \in X : f_n^*(x) < 0\} \supseteq \\ &\supseteq \{x \in X : f_n^*(x) \neq 0\} \supset \left\{x \in X : f_n^*(x) \geq \frac{1}{n} \cdot 0\right\} = Z_n^* \end{aligned}$$

1.1.15.Θεώρημα[3] Έστω $\{Z_n\}$ regular $\Rightarrow \exists f_n \in C(X) :$

1. $f_n \downarrow 0$ και $0 \leq f_n \leq 1$
2. $Z_n = f_n^{-1}\{0\}$ και $X \setminus Z_{n+1} \subset f_n^{-1}\{1\}$

Απόδειξη: Εφόσον Z_n regular τότε $\forall n=1,2, \dots \exists U_n$ cozero set έτσι ώστε

$Z_n \subset U_n \subset Z_{n+1}$. Οπότε $Z_n \cap X \setminus U_n = \emptyset$ και $Z_n, X \setminus U_n$ zero sets. Από το

θεώρημα 1.1.8 υπάρχει

$$g_n \in C(X) : 0 \leq g_n(x) \leq 1, \ \forall x \in X, \ Z_n = g_n^{-1}\{0\} \text{ και } X \setminus U_n = g_n^{-1}\{1\}$$

Θέτουμε $f_n(x) = \min \{g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\}$. Παρατηρούμε ότι:

1. $f_n \downarrow 0$ και $0 \leq f_n(x) \leq 1, \forall x \in X$. Πράγματι $0 \leq f_n(x) \leq 1$ διότι

$0 \leq g_n(x) \leq 1, \forall x \in X$. Έστω $x \in X$ επειδή Z_n regular τότε $Z_n \uparrow X$ οπότε

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : x \in Z_{n_0} \Rightarrow g_{n_0}(x) = 0 \Rightarrow g_k(x) = 0 \forall k \geq n_0$ δηλαδή $g_k \rightarrow 0$

και $0 \leq f_k \leq g_k$ οπότε $f_k \rightarrow 0$

2. $Z_n = f_n^{-1}\{0\}$ και $X \setminus U_n = f_n^{-1}\{1\}$ Πράγματι έχουμε:

$Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_n \subset Z_{n+1} \subset \dots \subset X$. Εάν $t \in Z_3$

$$\left. \begin{array}{l} g_3(t) = 0 \\ g_2(t) \geq 0 \\ g_1(t) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f_3(t) = \min \{g_1(t), g_2(t), g_3(t)\} = 0$$

Άρα $Z_3 \subseteq f_3^{-1}\{0\}$ (α)

Εάν $t \in f_3^{-1}\{0\} \Rightarrow f_3(t) = 0$ αφού

Εάν $t \in Z_1$ τότε $g_1 = 0, g_2 = 0$ και $g_3 = 0$

Εάν $t \in Z_2 \setminus Z_1$ τότε $g_1 > 0, g_2 = 0$ και $g_3 = 0$

Εάν $t \in Z_3 \setminus Z_2$ τότε $g_1 > 0, g_2 > 0$ και $g_3 = 0$

Άρα $g_3(t) = 0 \Rightarrow t \in Z_3$ Οπότε $f_3^{-1}\{0\} \subseteq Z_3$ (β)

Από (α) και (β) $Z_3 = f_3^{-1}\{0\}$. Όμοια $X \setminus U_n = f_n^{-1}\{1\}$

3. $X \setminus Z_{n+1} \subset f_n^{-1}\{1\}$ Πράγματι επειδή Z_n regular $\forall n = 1, 2, \dots \exists U_n$ cozero set έτσι ώστε $Z_n \subset U_n \subset Z_{n+1} \Rightarrow X \setminus Z_{n+1} \subset X \setminus U_n = f_n^{-1}\{1\}$.

Σχόλιο: Το παρακάτω θεώρημα Glicksberg ισχύει σε έναν οποιοδήποτε τοπολογικό χώρο και είναι ιδιαίτερα σημαντικό διότι συνδέει την ψευδοσυμπάγεια με τα zero cozero sets και με το θεώρημα Dini.

1.1.16. Θεώρημα Glicksberg[3] Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. X Ψευδοσυμπαγής
2. Κάθε regular ακολουθία ακολουθία τερματίζεται.
3. Για κάθε $Z_n \neq \emptyset, Z_n \downarrow \text{zero sets} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} Z_n \neq \emptyset$
4. Για κάθε $U_n \text{ cozero set} : X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \Rightarrow \exists$ πεπερασμένη υποκάλυψη.
5. Κάθε $g \in C(X)$ παίρνει μέγιστη τιμή.
6. Ισχύει το θεώρημα Dini.

Απόδειξη: $1 \Rightarrow 2$

Έστω Z_n regular τότε από το θεώρημα 1.1.13. $\exists g \in C(X) : Z_n = \{x \in X : g(x) \leq n\}$.
Αφού X ψευδοσυμπαγής και $g(x) \in C(X)$ τότε g φραγμένη δηλαδή $\exists M > 0 : -M \leq g(x) \leq M$ και $Z_n \uparrow X$. Άρα $X = Z_{\mu} = Z_{M+\kappa}, \forall \kappa = 1, 2, \dots$ δηλαδή Z_n τερματίζεται
 $2 \Rightarrow 1$

Έστω $g \in C(X)$ θέτουμε $Z_n = \{x \in X : g(x) \leq n\} = g^{-1}(-\infty, n])$ zero set.

Παρατηρούμε ότι Z_n regular αφού

- I. $Z_n \uparrow X$ Πράγματι έστω $x \in X \Rightarrow g(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n^* \in \mathbb{N} : g(x) < n^* \Rightarrow x \in Z_{n^*}$
- II. Για κάθε $n \in \mathbb{N} \exists U_n \text{ cozero set}$ ώστε $Z_n \subset U_n \subset Z_{n+1}$ Πράγματι
θέτουμε $U_n = \{x \in X : g(x) < n + 1\}$ τότε $Z_n \subset U_n \subset Z_{n+1}$ άρα από
υπόθεση $X = Z_n = Z_{n+\kappa}, \forall \kappa = 1, 2, \dots$ δηλαδή g φραγμένη. Άρα X
ψευδοσυμπαγής.

$2 \Rightarrow 3$

Έστω $Z_n \downarrow$ και $Z_n \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ και έστω $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n = \emptyset \Rightarrow Z_n \downarrow \emptyset$ και άρα από το
θεώρημα 1.1.14. $\exists Z_n^* \text{ regular } Z_n^* \subset X \setminus Z_n \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα από υπόθεση Z_n^* τερματίζεται

οπότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}: Z_{n_0}^* = X \Rightarrow X = Z_{n_0}^* \subset X \setminus Z_{n_0}$ δηλαδή $X \subset X \setminus Z_{n_0} \Rightarrow Z_{n_0} = \emptyset$

Άτοπο αφού $Z_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3 $\Rightarrow$ 2

Έστω θ_n regular τότε εξ' ορισμού $\theta_n \uparrow X$ και $\theta_n \subset U_n \subset \theta_{n+1}$ U_n cosero set. Αφού $\theta_n \uparrow X$ τότε $U_n \uparrow X$ δηλαδή $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ (I). Θέτουμε $Z_n = X \setminus U_n$ zero set και $Z_n \downarrow$. Αν $Z_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$ τότε από υπόθεση $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \emptyset \Rightarrow X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subsetneq X$ Άτοπο λόγω της (I). Άρα $\exists n^*: Z_{n^*} = \emptyset \Rightarrow X \setminus U_{n^*} = \emptyset \Rightarrow U_{n^*} = X \Rightarrow \theta_{n^*+1} = X$ δηλαδή για n^*+1 $\theta_{n^*+1}=X$ άρα θ_n τερματίζεται.

3 $\Rightarrow$ 4

Έστω U_n cosero set $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ και ότι δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη δηλαδή $\bigcup_{m=1}^k U_{n_m} \subsetneq X \quad \forall n_m, m=1,2,\dots,k$ (II)

Θέτουμε $Z_n = X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$ τότε $Z_n \neq \emptyset$ λόγω της (II), Z_n zero set και $Z_n \downarrow$ τότε από υπόθεση $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i \neq \emptyset \Rightarrow X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^n U_i) \neq \emptyset \Rightarrow X \setminus X \neq \emptyset$ Άτοπο.

Άρα $\forall U_n$ cosero set : $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

4 $\Rightarrow$ 3

Έστω $Z_n \neq \emptyset$ zero set και $Z_n \downarrow$ και έστω $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n = \emptyset \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus Z_n)$, $X \setminus Z_n$ cosero set τότε από υπόθεση $\exists n_1, n_{n_1}, \dots, n_k : X = \bigcup_{i=1}^k (X \setminus Z_{n_i})$ δηλαδή

$X = X \setminus \bigcap_{i=1}^k Z_{n_i} \stackrel{Z_{n_i} \downarrow}{=} X \setminus Z_{n_k}$ δηλαδή $X = X \setminus Z_{n_k} \Rightarrow Z_{n_k} = \emptyset$ Άτοπο.

Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \emptyset$

3 $\Rightarrow$ 5

Έστω $g \in C(X)$ και $\lambda = \sup_{x \in X} g(x)$. Θέτουμε $Z_n = \left\{ x \in X : g(x) \geq \lambda - \frac{1}{n} \right\}$ Τότε

$Z_n \neq \emptyset, \forall n = 1, 2, \dots$ Από τον ορισμό του supremum και $Z_n \downarrow$ τότε από υπόθεση

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} g^{-1}\left(\left[\lambda - \frac{1}{n}, +\infty\right)\right) \neq \emptyset \Rightarrow g^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\lambda - \frac{1}{n}, +\infty\right)\right) \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$g^{-1}([\lambda, +\infty)) \neq \emptyset \text{ άρα } x \in X: g(x) = \lambda \text{ δηλαδή } \lambda = \max_{x \in X} g(x)$$

5 $\Rightarrow$ 2

Έστω Z_n regular και δεν τερματίζεται δηλαδή $X \neq Z_n \ \forall n = 1, 2, \dots \Rightarrow X \setminus Z_n \neq \emptyset \Rightarrow$
 $\exists x_n \in X \setminus Z_n (*)$ Αφού Z_n regular από το θεώρημα 11.13. $\exists g \in C(x)$:

$$Z_n = \left\{x \in X: g(x) \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}. \text{ Παρατηρούμε ότι } \sup g(x) = 1, \text{ αφού από } (*)$$

$$\text{έχουμε } \forall n \ \exists x \in X: g(x) > 1 - \frac{1}{n} \text{ όμως } g^{-1}\{1\} = \emptyset \text{ διότι εάν } g^{-1}\{1\} \neq \emptyset \text{ τότε}$$

$$\exists x \in X: g(x) = 1 \xrightarrow{Z_n \uparrow} x \in Z_{n_0} \text{ και } g(x) = 1 \Rightarrow g(x) \leq 1 - \frac{1}{n_0} \text{ και } g(x) = 1 \Rightarrow$$

$$g(x) \leq 1 - \frac{1}{n_0} < 1 \text{ άτοπο.}$$

2 $\Rightarrow$ 5

Έστω $f_n \in C(x)$ και $f_n \downarrow 0$. Θέτουμε $Z_n = \{x \in X: f_n(x) \geq \varepsilon\}$ Τότε $Z_n \downarrow \emptyset$. Από
 θεώρημα 1.1.14. $\exists Z_n^*$ regular : $Z_n^* \subset X \setminus Z_n, \ \forall n = 1, 2, \dots$

$$\text{Αφού } Z_n^* \text{ regular από υπόθεση τερματίζεται δηλαδή } \exists n_0 \in \mathbb{N} : Z_{n_0}^* = X \text{ οπότε}$$

$$X = Z_{n_0}^* \subset X \setminus Z_{n_0} \Rightarrow X \subset X \setminus Z_{n_0} \Rightarrow Z_{n_0} = \emptyset. \text{ Άρα, αφού } Z_{n_0} \downarrow \emptyset \text{ και } Z_{n_0} = \emptyset \text{ τότε}$$

$$Z_n = \emptyset \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{o.\mu} 0.$$

5 $\Rightarrow$ 2

Έστω Z_n regular και έστω ότι δεν τερματίζεται. Εφόσον Z_n regular από το θεώρημα
 1.1.15 $\exists f_n \in C(x): 0 \leq f_n(x) \leq 1, f_n \downarrow 0$ και $X \setminus Z_{n+1} \subset f_n^{-1}\{1\}$. Εάν $X \setminus Z_{n+1} = \emptyset \Rightarrow$
 $X = Z_{n+1}$. Άτοπο, αφού Z_n δεν τερματίζεται.

$$\text{Άρα } X \setminus Z_{n+1} \neq \emptyset \ \forall n = 1, 2, \dots \text{ Οπότε } \exists x_n \in X \setminus Z_{n+1} \subset f_n^{-1}\{1\} \text{ δηλαδή } x_n \in f_n^{-1}\{1\}$$

$$\text{Άρα, } f_n(x_n) = 1 (**). \text{ Οπότε το } \sup\{|f_n(x) - f(x)|: x \in X\} = \sup\{|f_n(x)|: x \in X\}^{**} = 1$$

Σχόλιο : Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί εφαρμογή του θεωρήματος Glicksberg 1.1.16 και συνδέει την σύγκλιση κατά Arzela με την ψευδοσυμπάγεια σε έναν τοπολογικό χώρο.

1.1.17. Θεώρημα[8] Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Κάθε $f_n \in C(X)$, $n = 1, 2, \dots$ με f_n να συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση f , η f_n συγκλίνει κατά Arzela.
2. X ψευδοσυμπαγής.

Απόδειξη : $2 \Rightarrow 1$

Έστω X ψευδοσυμπαγής και $f_n \in C(X)$, $n = 1, 2, \dots$ με f_n να συγκλίνει κατά σημείο στην $f \in C(X)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{Arz} f$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$

Αφού $f_n \xrightarrow{κ.σ} f \Rightarrow \forall x \in X \exists n_x \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_x \geq n_0$.

Θέτουμε $A_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$

Τότε A_n cozero sets, $n \in \mathbb{N}$ και $X = \bigcup_{n \geq n_0} A_n$.

$$A_n = \{x \in X : -\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon\} \stackrel{g_n = f_n - f}{=} \stackrel{g_n \text{ συνεχής}}{=} \{x \in X : -\varepsilon < g_n(x) < \varepsilon\} =$$

$X \setminus g_n^{-1}((-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)) = X \setminus g_n^{-1}(K)$ αφού g_n συνεχής και K κλειστό από την παρατήρηση 1.1.7. $g_n^{-1}(K)$ zero set οπότε A_n cozero sets.

Εφόσον X ψευδοσυμπαγής και $X = \bigcup_{n \geq n_0} A_n$, A_n cozero sets από το θεώρημα

Glicksberg 1.1.16. υπάρχουν $k_1, k_2, \dots, k_m \geq n_0$ ώστε $X = \bigcup_{i=1}^m A_{k_i}$. Οπότε εάν

$$x \in X \Rightarrow \exists k_{i_x} \in \{k_1, k_2, \dots, k_m\} \text{ ώστε } x \in A_{k_{i_x}} \text{ δηλαδή } |f_{k_{i_x}}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Συνεπώς $f_n \xrightarrow{Arz} f$

$1 \Rightarrow 2$

Έστω X όχι ψευδοσυμπαγής τότε $\exists f \in C(X)$ όχι φραγμένη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f \geq 0$.

Θέτουμε $g_n(x) = \left(1 - \frac{1}{f(x)+1}\right)^n$ τότε g_n συνεχής και ισχύει: $0 \leq 1 - \frac{1}{f(x)+1} < 1$

Οπότε από το παράδειγμα 1.1.4 έχουμε ότι $g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} 0$. Όμως $f_n \not\xrightarrow{Arz} 0$. Άτοπο αφού g_n συνεχής και $g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} 0$ από υπόθεση θα έπρεπε $g_n \xrightarrow{Arz} 0$.

1.1.18. Παρατήρηση Με βάση το [21] ένας χώρος που ικανοποιεί την συνθήκη 1 του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να ονομαστεί ArQU-χώρος. Επομένως, το θεώρημα 1.1.17 μας λέει ότι ένας τοπολογικός χώρος είναι ArQU-χώρος αν και μόνο αν είναι ψευδοσυμπαγής.

Σχόλιο : Τα παρακάτω θεωρήματα δίνουν επιπλέον χώρους όπου η κατά σημείο και Arzela σύγκλιση συμπίπτουν.

1.1.19. Θεώρημα[8] Έστω X παρασυμπαγής τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. X συμπαγής
2. Κάθε $f_n \in C(X)$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f \in C(X)$ συγκλίνει και κατά Arzela.

Απόδειξη: Έχουμε ότι ένας παρασυμπαγής τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής αν και μόνον αν είναι ψευδοσυμπαγής επομένως από το θεώρημα 1.1.17 έχουμε το ζητούμενο.

Σχόλιο : Το παρακάτω λήμμα συνδέει την ομοιόμορφη σύγκλιση με την σύγκλιση κατά Arzela.

1.1.20. Λήμμα Έστω X σύνολο, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Αν

$f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ και υπάρχει $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ υπακολουθία της f_n ώστε $f_{n_k} \xrightarrow{o.\mu} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{Arz} f$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον $f_{n_k} \xrightarrow{o.\mu} f \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m \geq n_0$ και $\forall x \in X \rho(f_{k_m}, f(x)) < \varepsilon$ (I). Θέτουμε $N = \max\{n, n_0\}$ τότε $\kappa_N \geq N \geq n$ και $N \geq n_0$ οπότε λόγω της (I) $\forall x \in X \rho(f_{k_N}, f(x)) < \varepsilon$ και άρα $f_n \xrightarrow{Arz} f$.

1.1.21. Παρατήρηση Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Πράγματι αν θεωρήσουμε

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ την ακολουθία συναρτήσεων του παραδείγματος 1.1.5 έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{Arz} 0$ όμως για κάθε $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ υπακολουθία της f_n έχουμε ότι $f_n \not\xrightarrow{o.\mu} 0$

1.1.22. Θεώρημα[6] Έστω X τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος για τον οποίο κάθε ακολουθία στοιχείων του έχει σημείο συσσώρευσης. Τότε για κάθε $f_n, f \in C(X) n \in \mathbb{N}$ με $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ ισχύει $f_n \xrightarrow{Arz} f$.

Απόδειξη: Έστω ότι $f_n, f \in C(X) n \in \mathbb{N}$ και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ και $f_n \not\xrightarrow{Arz} f$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η συνθήκη Arzela οπότε $\exists \varepsilon_0 > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall m \in \mathbb{N} \exists x_m \in X$ ώστε $\min_{1 \leq i \leq m} |f_{n_0+i}(x_m) - f(x_m)| \geq \varepsilon_0$ (I). Θεωρούμε μια ακολουθία $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ όπως στην (I). Εφόσον $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq X$ από υπόθεση έχει σημείο συσσώρευσης, έστω $x_0 \in X$. Επιπλέον X τοπικά συμπαγής επομένως $\exists U \in \mathcal{B}_{x_0}$ συμπαγής. Θεωρούμε $g = f|_U$,

$g_n = f_n|_U, n \in \mathbb{N}$. Τότε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων g και g_n είναι συμπαγές και $g, g_n \in C(X)$ με $g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} g$. Εφόσον $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ στον X τότε από το θεώρημα Arzela έχουμε ότι $g_n \xrightarrow{Arz} g$. Οπότε g_n, g ικανοποιούν την συνθήκη Arzela και επομένως $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $n \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r$ ώστε $\forall x \in U$

$\min_{1 \leq i \leq r} |f_{k_i}(x) - f(x)| < \varepsilon$ Οπότε αν $\varepsilon = \varepsilon_0$ και $n = n_0 + 1$ υπάρχουν $n_0 + 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r$ ώστε $\forall x \in U \quad \min_{1 \leq i \leq r} |f_{k_i}(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ (II) .

Επειδή $x_0 \in U$ σημείο συσσώρευσης της $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ και $U \in M_{x_0}$ τότε υπάρχει G ανοικτό με $x_0 \in G \subseteq U$. Τότε G περιέχει άπειρους όρους της x_m συνεπώς υπάρχει $m_0 > k_r$ ώστε $x_{m_0} \in U$. Από την κατασκευή της $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ έχουμε από την (I) ότι

$\min_{1 \leq i \leq m_0} |f_{n_0+i}(x_{m_0}) - f(x_{m_0})| \geq \varepsilon_0$ (III). Εφόσον $m_0 \geq \max\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ και $k_i \geq n_0 + 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r$ τότε $\{k_1, k_2, \dots, k_r\} \subseteq \{n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n_0 + m_0\}$ άρα

$\min_{1 \leq i \leq m_0} |f_{n_0+i}(x_{m_0}) - f(x_{m_0})| \leq \min_{1 \leq i \leq r} |f_{k_i}(x_{m_0}) - f(x_{m_0})| \stackrel{II}{<} \varepsilon_0$ Άτοπο λόγω (III)

Σχόλιο: Το παρακάτω λήμμα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Arzela [1]

1.1.23. Λήμμα[4] Έστω $f_n, f: G = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ και $f_n \xrightarrow{Arz} f$ Τότε εάν $(x_m) \subseteq G, \lim_{m \rightarrow \infty} f_n(x_m) = f_n(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m)$ και $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = f(x_0)$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $(x_m) \subseteq G$. Εφόσον $f_n \xrightarrow{Arz} f$ τότε έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ οπότε για $x_0 \in G \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ Επιπλέον από την συνθήκη Arzela για το δοσμένο ε και $n_0 \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι υπάρχουν φυσικοί $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_r, n_0 < \kappa_1$ ώστε για $x_m \in G \exists \kappa_{i_m} \in \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r\}$ ώστε $|f_{\kappa_{i_m}}(x_m) - f(m)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Από υπόθεση $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = f(x_0)$ δηλαδή $\exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall m \geq m_0 \quad |f_n(x_m) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Οπότε εάν $m \geq m_0 \quad |f(x_m) - f(x_0)| \leq |f(x_m) - f_{\kappa_{i_m}}(x_m)| + |f_{\kappa_{i_m}}(x_m) - f_{\kappa_{i_m}}(x_0)| + |f_{\kappa_{i_m}}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

1.1.24. Παρατήρηση Από το λήμμα 1.1.22 έχουμε ότι αν

$(x_m) \in \kappa \alpha \iota f_n(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f_n(x_0)$ τότε εάν $f(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f(x_0) \Rightarrow f_n \xrightarrow{Arz} f$ που αποτελεί κριτήριο μη σύγκλισης της Arzela.

1.1.25. Παρατήρηση Εάν $f_n \xrightarrow{Arz} f \not\Rightarrow f_{\kappa_n} \xrightarrow{Arz} f$ το ακόλουθο παράδειγμα μας το επιβεβαιώνει.

Παράδειγμα

Έστω $f_n, f : [0,1) \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Η f_n ορίζεται ως εξής:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & n \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{n+1} & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Τότε $f_n \xrightarrow{Arz} f, f(x) = 0$ και f_{2n} δεν συγκλίνει κατά Arzela όπως έχουμε δει από το παράδειγμα 1.1.4.

Οπότε αρκεί να δείξω ότι $f_n \xrightarrow{Arz} f, f(x) = 0$.

Καταρχάς $f_n \xrightarrow{\kappa.σ} f$. Πράγματι έστω $x \in [0,1)$ τότε η $f_{2n}(x) = x^n \rightarrow 0$ και

$f_{2n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. Οπότε για κάθε $x \in [0,1)$ υπάρχει το $\lim f_n(x) = f(x) = 0$. Για

να δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{Arz} f$ μένει να δείξουμε ότι ικανοποιεί την συνθήκη Arzela. Έστω

$\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ Εφόσον $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

Θέτουμε $n^* = \max\{n, n_0\}$ τότε $n < 2n^* < 2n^* + 1$ και για κάθε $x \in [0,1)$

$$|f_{2n^*+1}(x) - f(x)| = |f_{2n^*+1}(x)| = \frac{1}{n^*+1} < \varepsilon \text{ αφού } n^* > n_0$$

Σχόλιο : Το 1934 οι **G. Fichtenholz** και **L. Kantorovitch** [5] εισήγαγαν μια νέα έννοια σύγκλισης που την ονόμασαν **almost uniform** . Το 1993 η **J. Ewert** [11] χρησιμοποιεί την ίδια ονομασία για να περιγράψει μια διαφορετική έννοια σύγκλισης την οποία θα την μελετήσουμε στην παράγραφο 1.3. αυτού του κεφαλαίου. Εμείς εδώ όταν θα αναφερόμαστε στη σύγκλιση των **G. Fichtenholz** και **L. Kantorovitch** θα χρησιμοποιούμε την ονομασία **Strong Arzela**.

1.1.26.Ορισμός Έστω X σύνολο και (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow (Y, \rho)$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει **Strong Arzela** στην f στον X αν συγκλίνει κατά **Arzela** αλλά και κάθε υπακολουθία της να συγκλίνει κατά **Arzela**.

1.1.27.Παρατηρήσεις

1. Από τον ορισμό 1.1.25 είναι προφανές ότι η **Strong Arzela** είναι ασθενέστερη από την ομοιόμορφη σύγκλιση και το αντίστροφο δεν ισχύει μέσω του παραδείγματος 1.1.5
2. Είναι προφανές ότι η **Strong Arzela** είναι ισχυρότερη από την **Arzela** σύγκλιση και το αντίστροφο δεν ισχύει όπως είδαμε από την παρατήρηση 1.1.24. Επομένως η **Strong Arzela** βρίσκεται μεταξύ της ομοιόμορφης σύγκλισης και της σύγκλισης κατά **Arzela**.

Σχόλιο : Το παρακάτω λήμμα μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μια ακολουθία συναρτήσεων να συγκλίνει **Strong Arzela** στο μηδέν.

1.1.28.Λήμμα[4] Έστω $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. Η f_n συγκλίνει Strong Arzela στο μηδέν αν και μόνο αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{i \rightarrow +\infty} |f_n(x_i)| = 0 \quad \forall x_i \in [a, b] \quad (1)$

Απόδειξη: Αρχικά θα δείξουμε ότι εάν f_n συγκλίνει Strong Arzela στο μηδέν έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{i \rightarrow +\infty} |f_n(x_i)| = 0$. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η (1) τότε υπάρχει $x_i \in [a, b]$ και (f_{n_k}) υπακολουθία της f_n ώστε $\lim_{i \rightarrow +\infty} |f_{n_k}(x_i)| \geq \delta > 0$. Τότε $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists i_k \in \mathbb{N}: \forall i \geq i_k$
 $|f_{n_k}(x_i)| \geq \frac{\delta}{2} \quad (*)$ Επιλέγουμε τυχαία $k_0 < k_1 < \dots < k_m$ φυσικούς τότε εάν $i > \max_{1 \leq \lambda \leq m} i_{k_\lambda}$ έχουμε από (*) ότι $\min_{1 \leq \lambda \leq m} |f_{n_{k_\lambda}}(x_i)| \geq \frac{\delta}{2}$ Άτοπο, αφού f_n από υπόθεση συγκλίνει Strong Arzela άρα f_n συγκλίνει Arzela.

Μένει να δείξουμε ότι εάν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{i \rightarrow +\infty} |f_n(x_i)| = 0 \Rightarrow f_n$ συγκλίνει Strong Arzela στο μηδέν.

Έστω f_n δεν συγκλίνει Strong Arzela στο μηδέν. Τότε $(f_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ υπακολουθία της f_n δεν συγκλίνει κατά Arzela στο μηδέν δηλαδή $\exists \delta > 0 \quad k_0 \in \mathbb{N} : k_0 < k_1 < \dots < k_m \quad \exists x_i \in G$ ώστε $\min_{1 \leq \lambda \leq m} |f_{n_{k_\lambda}}(x_i)| \geq \delta \quad \forall i = 1, 2, \dots$ τότε $\lim_{i \rightarrow +\infty} |f_{n_k}(x_i)| \geq \delta$ Άτοπο αφού $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{i \rightarrow +\infty} |f_n(x_i)| = 0$

Σχόλιο : Από το λήμμα έπεται άμεσα το παρακάτω πόρισμα

1.1.29. Πόρισμα[4] Έστω $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. Εάν η f_n συγκλίνει Strong Arzela στο μηδέν και $\lim_{m \rightarrow +\infty} |f_n(x_m)| = \xi_n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = 0$

Σχόλιο : Το παρακάτω λήμμα συνδέει την κατά σημείο σύγκλιση με την Strong Arzela σύγκλιση.

1.1.30.Λήμμα[15] Έστω X ψευδοσυμπαγής τοπολογικός χώρος και $f_n \in C(X)$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f \in C(X) \Rightarrow f_n$ συγκλίνει Strong Arzela στην f .

Απόδειξη: Η απόδειξη έπεται άμεσα από το θεώρημα 1.1.17 εφόσον $f_n, f \in C(X)$, X ψευδοσυμπαγής και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ οπότε θα έχουμε $f_n \xrightarrow{Arz} f$ δηλαδή $f_n \xrightarrow[Arzela]{Strong} f$

1.1.31.Πρόταση[15] Έστω A πυκνό υποσύνολο ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου X και $f_n \in C(X)$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f \in C(X)$ στο A . Τότε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ στον $X \Leftrightarrow f_n$ συγκλίνει Strong Arzela στην f στο A

Απόδειξη: ($\Rightarrow$)

Εφόσον X συμπαγής τοπολογικός χώρος και $f_n, f \in C(X)$, $f_n|_A \xrightarrow{\kappa.\sigma} f|_A$ από το θεώρημα Arzela 1.1.3 έχουμε το ζητούμενο.

($\Leftarrow$)

Έστω ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ στον X τότε $\exists \varepsilon > 0$ και $(f_{k_n}) \subseteq f_n$ ώστε $|f_{k_n}(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon$
 $\forall n = 1, 2, \dots$. Από υπόθεση $f_{k_n}|_A \xrightarrow{Arz} f|_A$ οπότε για το $\varepsilon > 0$ και τον $1 \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r : \min_{1 \leq i \leq r} |f_{k_{n_i}}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \quad (I)$. Για $i = 1, 2, \dots, r$ θέτουμε $U_i = \{x \in X : |f_{k_{n_i}}(x) - f(x)| > \varepsilon\}$. Παρατηρούμε ότι τα U_i ανοικτά για $i = 1, 2, \dots, r$ και $x_0 \in U_i$ για $i = 1, 2, \dots, r$ οπότε $\bigcap_{i=1}^r U_i \neq \emptyset$ και ανοικτό. Επομένως αφού A πυκνό εξ' ορισμού $A \cap (\bigcup_{i=1}^r U_i) \neq \emptyset$ άρα υπάρχει $\alpha \in A \cap (\bigcup_{i=1}^r U_i)$ ώστε $|f_{k_{n_i}}(\alpha) - f(\alpha)| > \varepsilon$ για $i = 1, 2, \dots, r$ και $\alpha \in A$ λόγω της (I)

1.2 Συγκλίσεις σχετικές με την Arzela

Ο B.Gageff [7] το 1932 ερεύνησε πότε το όριο μια ακολουθίας Borel μετρήσιμων συναρτήσεων μιας προσθετικής κλάσης a , είναι μια συνάρτηση της ίδιας κλάσης και λαμβάνοντας υπόψη την σύγκλιση κατά Arzela που εισήχθη από τον C.Arzela το 1899-1900, οδηγήθηκε τροποποιώντας την σε μια διαφορετική έννοια σύγκλισης. Αυτή η έννοια σύγκλισης ονομάστηκε από τους Z.Bukovsky, L.Bukovska και J.Ewert [8] Gageff quasi-uniform (GaQU). Όταν θα αναφερόμαστε σε αυτή την έννοια σύγκλισης θα χρησιμοποιούμε τον όρο "Gageff". Βασικό αποτέλεσμα της GaQU σύγκλισης είναι το εξής θεώρημα:

Έστω X σ -τοπολογικός χώρος, (Y, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $f_n: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ συνεχής, $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ στον X . Τότε f συνεχής $\Leftrightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει GaQU στην f στον X .

Ο B.Gageff [7] αναφέρει μια παρατήρηση του Szpilrajn ότι η GaQU σύγκλιση στο παραπάνω θεώρημα μπορεί να αντικατασταθεί από μια άλλη έννοια σύγκλισης που αργότερα το 1970 η ίδια έννοια σύγκλισης εισήχθη από τον H.Porpe. Αυτή η σύγκλιση ονομάστηκε Szpilrajn-Porpe quasi-uniform (SPQU) από τους Z.Bukovsky, L.Bukovska και J.Ewert [8] και είναι η εξής :

Έστω $f_n, f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \rho), n \in \mathbb{N}$. Η f_n συγκλίνει SPQU στην f αν:

1. f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f στον X και

2. Για κάθε $x \in X, \varepsilon > 0$ και $\forall m \in \mathbb{N} \exists n \geq m$ και $V \in M_x$ ώστε $\rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon, \forall y \in V$

Προηγουμένως το 1957 ο Iseki [9] αναφέρει ότι η $f_n: (X, \tau) \rightarrow (Y, \rho), n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει simply uniformly στο $x_0 \in X$ στην f αν:

1. f_n συγκλίνει στην f στο x_0 και

2. $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall m \in \mathbb{N} \exists n \geq m$ και $V \in M_{x_0}$ ώστε $\rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon, \forall y \in V$

Επιπλέον αναφέρει ότι ο ορισμός αυτός περιέχεται στο βιβλίο του Hahn [10]. Παρατηρούμε ότι η *simple uniform* στο x_0 είναι η SPQU στο x_0 . Όταν θα αναφερόμαστε στην SPQU θα χρησιμοποιούμε την ονομασία του Iseki *simple uniform*.

Η Ewert το 1993 [11] αναφέρει ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f *quasi-uniformly* στο x_0 αν $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \exists V \in M_{x_0}$ ώστε $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \forall x \in V$. Αυτός ο ορισμός μας λέει ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f *predoi quasi-uniformly* (PrQU) [12] σύμφωνα με τους Z.Bukovska, L.Bukovska και J.Ewert [2] αλλά σε ένα σημείο x_0 . Στην εργασία αυτή όταν θα αναφερόμαστε σε αυτή την έννοια σύγκλισης θα χρησιμοποιήσουμε την ονομασία της Ewert *quasi-uniform* στο x_0 . Αν βέβαια έχουμε την *quasi-uniform* για κάθε $x_0 \in X$ θα αναφερόμαστε σε αυτή την έννοια σύγκλισης με την ονομασία *quasi-uniform*.

1.2.1.Ορισμός Έστω X τοπολογικός χώρος, (Y, ρ) μετρικός χώρος και

$f_n, f : X \rightarrow (Y, \rho), n \in \mathbb{N}$. Η f_n συγκλίνει *Gagaeff* στην f στον X αν:

1. f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f στον X και
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists U_n, n \in \mathbb{N}$ ανοιχτό, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n : \forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x \in U_n$
 $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

Σε αυτή τη περίπτωση θα γράφουμε $f_n \xrightarrow{Ga} f$. Αν ικανοποιείται μόνο το 2 του ορισμού τότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f_n, f *ικανοποιούν την συνθήκη Gagaeff*.

1.2.2.Ορισμός Έστω X τοπολογικός χώρος (Y, ρ) μετρικός χώρος και

$f_n, f : X \rightarrow (Y, \rho), n \in \mathbb{N}$. Η f_n συγκλίνει *simply uniformly* στο $x_0 \in X$ στην f αν:

2. f_n συγκλίνει στην f στο x_0 και
3. $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall m \in \mathbb{N} \exists n \geq m$ και $V \in M_{x_0}$ ώστε $\rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon, \forall y \in V$

Εάν η f_n συγκλίνει *simply uniformly* στην f θα γράφουμε $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simply}} f$.

Αν ικανοποιείται μόνο η συνθήκη 2 του ορισμού τότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f_n, f ικανοποιούν την συνθήκη simple uniform.

1.2.3.Ορισμός Έστω X τοπολογικός χώρος (Y, ρ) μετρικός χώρος και

$f_n, f : X \rightarrow (Y, \rho), n \in \mathbb{N}$. Η f_n συγκλίνει *quasi-uniformly* στο $x_0 \in X$ στην f αν

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \exists V \in M_{x_0}$ ώστε $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \forall x \in V$.

Εάν η f_n συγκλίνει *quasi-uniformly* σε κάθε $x_0 \in X$ στην f τότε λέμε ότι η f_n συγκλίνει *quasi-uniformly* στην f θα γράφουμε $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{quasi-}} f$.

1.2.4.Ορισμός Έστω X τοπολογικός χώρος (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow (Y, \rho), n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *Alexandroff* στην f στον X αν:

1. f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f στον X και
2. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ αριθμήσιμη ανοικτή κάλυψη του X και ακολουθία $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \geq n_0$ ώστε $\forall x \in U_k \rho(f_{n_k}(x) - f(x)) < \varepsilon$

1.2.5. Παρατηρήσεις

1. Η βασική διαφορά μεταξύ της σύγκλισης κατά *Arzela* με τις *Gagaeff*, *simple uniform*, *quasi-uniform*, και *Alexandroff* συγκλίσεις είναι ότι απαιτείται ο χώρος X να είναι τοπολογικός, το οποίο δεν είναι αναγκαίο στη συνθήκη *Arzela*.

2. Οι συνθήκες *Gegaeff* και *simply uniform* δεν εμπερικλύουν την κατά σημείο σύγκλιση όπως θα δούμε με το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα[8]

Έστω X τοπολογικός χώρος και $g_n, f, g : X \rightarrow \mathbb{R}, g_n \xrightarrow{u} f$ και $f \neq g$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$f_n = \begin{cases} g_n, & n \text{ άρτιος} \\ g, & n \text{ περιττός} \end{cases}$ τότε οι f_n, f ικανοποιούν τις συνθήκες Gageff και simply uniform ενώ $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$.

Πράγματι. Καταρχάς παρατηρούμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ αφού $f \neq g$. Έστω $\varepsilon > 0$ αφού $g_n \xrightarrow{u} f \xRightarrow{f_n=g_n} \exists n_0 \text{ άρτιος}$ ώστε $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n(\text{άρτιος}), n \geq n_0, \forall x \in X$. Θέτουμε $X_n = X$ όταν n άρτιος και $n \geq n_0$ και $X_n = \emptyset$ διαφορετικά $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x \in X_n$ $|f_n(x) - f(x)| = |g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Άρα f_n, f ικανοποιούν και την συνθήκη *simple uniform*.

Έστω $x \in X, \varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$ αφού $g_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}(\text{άρτιος})$ ώστε

$$|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n(\text{άρτιος}) \geq n_0.$$

Θέτουμε $k = \max\{2m, n_0\}$ και $V = \{x \in X : |g_k(x) - f(x)| < \varepsilon\}$. Τα

ότε έχουμε ότι $k \geq m, V \in M_x$ και $\forall y \in V \quad |f_k(y) - f(y)| = |g_k(y) - f(y)| < \varepsilon$.

3. Η *quasi-uniform* σύγκλιση εμπεριέχει την σύγκλιση κατά σημείο. Πράγματι, έστω

$x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Εφόσον $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{quasi-}} f$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall V \in M_x \quad \rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon$

$\forall y \in V$ και συνεπώς αφού $V \in M_x \Leftrightarrow x \in V^0 \subseteq V$. Τότε $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ δηλαδή

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Συνεπώς $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$.

4. Με βάση τους ορισμούς 1.2.1, 1.2.2 και 1.2.3 οδηγούμαστε συμβολικά στις εξής

συνεπαγωγές: $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{quasi-}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simple}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{Ga} f$.

Πράγματι, αρχικά θα δείξουμε ότι εάν $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{quasi-}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simple}}$. Έστω $\varepsilon > 0$,

$x \in X$ και $m \in \mathbb{N}$. Εφόσον $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{quasi-}} f$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \exists V \in M_x$ ώστε

$$\rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon, \forall y \in V \quad \textbf{(I)}.$$

Θέτουμε $m^* = \max\{n_0, m\}$ έστω $n \geq m^* \geq m$ τότε από την **(I)** $\exists V \in M_x$ ώστε

$$\rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon, \quad \forall y \in V \text{ αφού } m^* \geq n_0 \text{ άρα } f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simple}}.$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι: $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simple}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{Ga} f$.

Έστω $\varepsilon > 0$ θέτουμε $Q_N = \text{int}\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, n \geq N\}$ τότε το Q_N είναι ανοικτό. Εφόσον $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simple}} f \Rightarrow \forall x \in X \text{ και } \forall n \in \mathbb{N}$ άρα και για το $N \exists m \geq N$ και $V \in M_x$ ώστε $|f_m(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in V$ οπότε $V \subset Q_N$ άρα $\{Q_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ ανοικτή κάλυψη του X και άρα $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x \in Q_N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Τα αντίστροφα δεν ισχύουν όπως θα δούμε παρακάτω λόγω των παραδειγμάτων 1.2.13 και 1.2.14

Σχόλιο : Το παρακάτω λήμμα είναι πολύ ενδιαφέρον διότι με μια διαφορετική σύγκλιση, την *Gagaeff* σύγκλιση, από την *Arzela* επιτυγχάνεται η συνέχεια του κατά σημείου ορίου μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων.

1.2.6.Λήμμα[8] Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \rho)$ f_n συνεχής. Τότε εάν $f_n \xrightarrow{Ga} f \Rightarrow f$ συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$.

Εφόσον $f_n \xrightarrow{Ga} f$ τότε υπάρχει $X_n, n \in \mathbb{N}$ ανοικτό, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ και

$\forall y \in X_n \quad \rho(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (1) και αφού $x \in X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in X_{n_0}$ και από (1) $\rho(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Από υπόθεση έχουμε ότι f_n συνεχής άρα f_{n_0} συνεχής στο x οπότε $\exists V \in M_x$ ώστε $\rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in V$.

Θέτουμε $U = V \cap X_{n_0} \in M_x$ εάν $y \in U$ τότε:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f_{n_0}(x)) + \rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + \rho(f_{n_0}(y), f(y)) < \varepsilon$$

1.2.7.Παρατήρηση Για την απόδειξη του παραπάνω λήμματος χρησιμοποιήσαμε μόνο την συνθήκη *Gagaeff*

Σχόλιο : Το παρακάτω θεώρημα συνδέει τις *simple* και *quasi uniform* συγκλίσεις του κατά σημείου ορίου μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων.

1.2.8.Θεώρημα[8] Έστω $f_n, f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \rho)$, $n \in \mathbb{N}, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συνεχής και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- i. f συνεχής
- ii. $f_n \xrightarrow{Ga} f$
- iii. $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simple}} f$
- iv. $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{quasi-}} f$

Απόδειξη: Από την παρατήρηση 1.2.5 (4) έχουμε ότι $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$. Επίσης από το λήμμα 1.2.6 έχουμε $(2) \Rightarrow (1)$. Οπότε αρκεί να δείξουμε τη συνεπαγωγή $(1) \Rightarrow (4)$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$.

Εφόσον $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Από υπόθεση f_n, f συνεχής στο X οπότε υπάρχουν U, V περιοχές του x ώστε $\rho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall y \in V$ και $\rho(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall y \in V$.

Θέτουμε $W = U \cap V \in M_x$ εφόσον $U, V \in M_x$ και εάν $y \in W$ έχουμε ότι:

$$\rho(f_n(y), f(y)) \leq \rho(f_n(y), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f(x)) + \rho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Άρα, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \exists W \in M_x \ \rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon \ \forall y \in W$.

1.2.9.Παρατηρήσεις

1. Από το θεώρημα 1.2.8 έχουμε ότι στον $C(X, Y)$ οι *Gagaeff, simple uniform* και η *quasi uniform* ταυτίζονται.

2. Δεν μπορούμε να έχουμε την επιπλέον υπόθεση $f_n \xrightarrow{Arz} f$ στο παραπάνω θεώρημα διότι αν θεωρήσουμε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ την ακολουθία συναρτήσεων του παραδείγματος 1.1.4 τότε έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{Arz} f$ όμως αφού f_n, f συνεχής $f_n \xrightarrow[uniformly]{Ga, simple, quasi} f$.

1.2.10.Ορισμός Μια κάλυψη $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ λέγεται *AU- κάλυψη* αν υπάρχουν πεπερασμένα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$ ώστε $\bigcup_{i=1}^n \overline{O}_{\alpha_i} = X$

1.2.11.Θεώρημα S.Mardesic και P. Papic [13] Έστω X completely regular T_1 -χώρος. Τότε X ψευδοσυμπαγής $\Leftrightarrow$ κάθε αριθμήσιμη ανοικτή κάλυψη είναι *AU – κάλυψη*.

Απόδειξη: [13]

Σχόλιο : Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει έναν χαρακτηρισμό της ψευδοσυμπαγείας μέσω των ιδιοτήτων των συγκλίσεων *simple uniform* και *Arzela*.

1.2.12.Θεώρημα[9] Έστω X completely regular T_1 -χώρος Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. X ψευδοσυμπαγής.
2. Εάν f_n μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει *simple uniform* στη συνεχή συνάρτηση $f \Rightarrow f_n \xrightarrow{Arz} f$

Απόδειξη: $1 \Rightarrow 2$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $N \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $n \geq N$ θέτουμε $O_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ εφόσον $f_n, f \in C(X)$ τότε

O_n ανοικτό $\forall n \geq N$. Από υπόθεση $f_n \xrightarrow[uniformly]{simple} f$ οπότε $\forall x \in X \quad \exists n \geq N$ και $V \in M_x$

ώστε $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in V \Rightarrow V \subseteq O_n$ ανοικτή αριθμήσιμη κάλυψη του X .

Εφόσον X ψευδοσυμπαγής από το θεώρημα S. Mardesic και P. Papic $\exists k_1, \dots, k_m \geq N$

ώστε $X = \bigcup_{i=1}^m \overline{O}_{k_i}$.

Εάν $x \in X \Rightarrow \exists k_{i_x} \in \{k_1, \dots, k_m\} : x \in \overline{O}_{k_{i_x}}$ δηλαδή $|f_{k_{i_x}}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ άρα $f_n \xrightarrow{Arz} f$.

$2 \Rightarrow 1$

Έστω X όχι ψευδοσυμπαγής τότε $\exists f \in C(X)$ όχι φραγμένη.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f \geq 0$

Θέτουμε $g_n(x) = \left(1 - \frac{1}{f(x)+1}\right)^n$ τότε g_n συνεχής και $0 \leq 1 - \frac{1}{f(x)+1} < 1$ οπότε από το παράδειγμα 1.1.4 έχουμε ότι $g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} 0$.

Άρα $g_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simple}} 0$ λόγω του θεωρήματος 1.2.8 αλλά $g_n \not\xrightarrow{Arz} 0$. Άτοπο.

Σχόλιο: Τα παρακάτω παραδείγματα έχουν ως στόχο να μας δείξουν ότι οι συνεπαγωγές $\text{quasi-uniform} \Rightarrow \text{simple uniform}$, $\text{simple uniform} \Rightarrow \text{Gagaeff}$ είναι γνήσιες.

1.2.13.Παράδειγμα[8] Έστω $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots$ και

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Τότε έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$, $f = f_0$ και $f_n \xrightarrow{Ga} f$ οπότε $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simple}} f$.

Πράγματι, αρχικά θα δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f_0$

Έστω $x \in [0,1]$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. Εάν $x \in [0,1)$ τότε $f_n(x) = x^n \rightarrow 0$

II. Εάν $x=1$ τότε $f_n(1) = 1 \rightarrow 1$

Άρα $\forall x \in [0,1]$ υπάρχει το $\lim f_n(x) = f(x)$ και μάλιστα είναι $f_0(x)$.

Αφού $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ για να έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{Ga} f$ αρκεί να δείξουμε ότι για τις f_n, f ισχύει η συνθήκη Gagaeff δηλαδή $\forall \varepsilon > 0 \exists x_n, n \in \mathbb{N}$ ανοικτό έτσι ώστε $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x \in X_n$ $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

Επομένως έστω $\varepsilon > 0$ και θέτουμε $X_n = X = [0,1]$ για $n=0$ και

$X_n = \{x \in [0,1) \mid f_n(x) < \varepsilon\}$ για $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι $X_n, n \geq 0$ ανοικτά και

$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ οπότε :

Εάν $x \in X_0 \Rightarrow |f_0(x) - f(x)| = |f(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$

$$\text{Εάν } x \in X_1 \Rightarrow f_1(x) < \varepsilon \Rightarrow |f_1(x) - 0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x)| < \varepsilon$$

.

.

$$\text{Εάν } x \in X_n \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - 0| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Άρα $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ και $\forall x \in X_n$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ Όμως $f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simple}} f$

Θέτουμε $x_0 = 1$, $0 < \varepsilon < 1$ και $n_0 = 1 \in \mathbb{N}$.

Εάν δείξω ότι $\forall m \geq 1$ και $\forall V \in M_{x_0}$ $\exists y \in V$ ώστε $|f_m(y) - f(y)| \geq \varepsilon$ έχουμε το ζητούμενο.

Παρατηρούμε ότι $\frac{\log \varepsilon}{\log y} \xrightarrow{y \rightarrow 1} +\infty$ οπότε υπάρχει y κοντά στο 1, $y \in V$ περιοχή του x_0

ώστε $m \leq \frac{\log \varepsilon}{\log y}$, $y \in V$ δηλαδή $|f_m(y) - f(y)| \geq \varepsilon$

1.2.14. Παράδειγμα[8] Έστω $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται ως εξής: $f_{2n}(x) = x^n$, $f_{2n+1}(x) = \frac{1}{n+1}$, $x \in [0, 1)$ και $f_n(1) = 1 \quad \forall n$ τότε $f_n \xrightarrow[\text{uniform}]{\text{simple}} f$ και $f_n \not\xrightarrow[\text{uniform}]{\text{quasi-}} f$.

Πράγματι, αρχικά θα δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.σ} f$, $f = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Έστω $x \in [0, 1]$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. Εάν $x \in [0, 1)$ τότε $f_{2n}(x) = x^n \rightarrow 0$ και $f_{2n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$

II. Εάν $x=1$ τότε $f_n(1) = 1 \rightarrow 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Οπότε δείξαμε ότι $\forall x \in [0, 1]$ υπάρχει το $\lim f_n(x) = f(x)$ και μάλιστα

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ οπότε για να δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow[\text{uniform}]{\text{simple}} f$ αρκεί οι f_n, f να

ικανοποιούν την συνθήκη simple uniform

Έστω $x \in [0, 1], \varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$.

Εφόσον $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ (I)

Θέτουμε $m^* = \max\{n_0, m\}$ τότε για $n = 2m^* + 1 > m$ και V περιοχή του X

$$|f_n(y) - f(y)| = ||f_{2m^*+1}(y) - f(y)|| = \begin{cases} |1 - 1| = 0, & y = 1 \\ |f_{2m^*+1}(y)|, & y \in V \setminus \{1\} \end{cases}$$

αφού $|f_{2m^*+1}(y)| = \frac{1}{m^*+1} < \varepsilon$ λόγω της (I) τότε έχουμε $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon, \forall y \in V$ και

άρα $f_n \xrightarrow[\text{uniform}]{\text{simple}} f$.

Ωστόσο $f_n \not\xrightarrow[\text{uniform}]{\text{quasi}} f$. Έστω $x_0 = 1$ και $0 < \varepsilon < 1$ και $n_0 \in \mathbb{N}$.

Θέτω $m = 2n > n$. Θέτουμε $n^*(x) = \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log x} \right\rceil + 1, x \in [0, 1]$. Εφόσον $n^*(x) \rightarrow +\infty$ τότε

$\exists y$ κοντά στο 1 με $y \in V \in M_{x_0}$ ώστε $2n^*(x) \geq n_0$ τότε $f_{2n^*}(y) = y^{n^*} \geq \varepsilon$ και άρα $|f_{2n^*}(y) - f(y)| \geq \varepsilon$

1.2.15.Παρατήρηση Οι συνεπαγωγές $f_n \xrightarrow[\text{uniform}]{\text{quasi}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{uniform}]{\text{simple}} f, f_n \xrightarrow[\text{uniform}]{\text{simple}} f \Rightarrow$

$f_n \xrightarrow{Ga} f$ είναι οι μόνες αληθείς μεταξύ των τεσσάρων εννοιών συγκλίσεων Arzela, quasi-uniform και Gageff. Δηλαδή οι έννοιες σύγκλισης quasi-uniform, simple-uniform και Gageff είναι διαφορετικές από την σύγκλιση Arzela. Τα παρακάτω παραδείγματα επιβεβαιώνουν αυτόν τον ισχυρισμό.

1.2.16.Παράδειγμα[8] Έστω $f_n: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n, n \geq 1$ τότε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει Gageff, quasi-uniformly, simply-uniformly και όχι Arzela.

Λύση: Καταρχάς $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f, f(x) = 0, x \in [0, 1]$.

Παρατηρούμε ότι $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συνεχής $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f, f$ συνεχής τότε από το θεώρημα 1.2.8

έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{Ga} f, f_n \xrightarrow[\text{uniformly}]{\text{simple}} f$ και $f_n \xrightarrow[\text{uniform}]{\text{quasi}} f$.

Όμως $f_n \not\xrightarrow{Arz} f$ όπως είδαμε στο 1.1.4 παράδειγμα

1.2.17.Παράδειγμα[8] Έστω $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots$ και $f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ τότε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει Gageff και όχι simply-uniformly, quasi-uniformly και Arzela.

Λύση: Καταρχάς $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$, $f(x) = f_0(x)$, $x \in [0,1]$ και μάλιστα $f_n \xrightarrow{Ga} f$ ενώ $f_n \not\xrightarrow[uniformly]{simple} f$ όπως έχουμε δείξει από το παράδειγμα 1.2.13.

Επίσης $f_n \not\xrightarrow[uniform]{quasi} f$ διότι αν $f_n \xrightarrow[uniform]{quasi} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[uniformly]{simple} f$ Άτοπο.

Οπότε μένει να αποδείξουμε ότι $f_n \not\xrightarrow{Arz} f$

Εάν $f_n \xrightarrow{Arz} f$ τότε αφού f_n συνεχής από το θεώρημα Arzela 1.1.3 f συνεχής. Άτοπο.

1.2.18.Παράδειγμα[8] Έστω $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f_{2n}(x) = x^n$ και $f_{2n+1}(x) = \frac{1}{n+1}$ και $f(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει Arzela, Gageff, και simply- uniformly και όχι quasi-uniformly.

Λύση: Καταρχάς $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ Για να δείξω ότι $f_n \xrightarrow{Arz} f$ αρκεί να δείξω ότι f_n, f ικανοποιούν την συνθήκη.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$.

Εφόσον $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

Θέτουμε $k_1 = \max\{m, n_0\}$ τότε

$m < k_1 < 2k_1 < 2k_1 + 1$ και εάν $x \in [0,1]$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. $x \in [0,1)$ τότε $|f_{2k_1+1}(x) - f(x)| = |f_{2k_1+1}(x)| = \frac{1}{k_1+1} < \varepsilon$ αφού $k_1 \geq n_0$

II. Εάν $x=1$ τότε $|f_{2k_1+1}(x) - f(x)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$

Άρα $f_n \xrightarrow{Arz} f$.

Από το παράδειγμα 1.2.14 έχουμε ότι $f_n \xrightarrow[uniformly]{simple} f$ όμως $f_n \not\xrightarrow[uniform]{quasi} f$

και εφόσον $f_n \xrightarrow[uniformly]{simple} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{Ga} f$.

1.2.19.Παράδειγμα[8] Έστω $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad n \geq 1$ που ορίζεται ως εξής:

$f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1] \cap Q$ και $f_n(x) = \frac{1}{n+1}$ $x \in [0,1] - Q$ για n άρτιος και $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1] - Q$ και $f_n(x) = \frac{1}{n}$, $x \in [0,1] \cap Q$ και $f_n(1) = 1$ για n περιττός.

Τότε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά Arzela και δεν συγκλίνει κατά Gageff, simply- uniformly και quasi-uniformly.

Λύση: Καταρχάς θα δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- I. $x \in [0,1) \cap Q$, τότε $f_{2n}(x) = x^{2n} \rightarrow 0$ και $f_{2n+1}(x) = \frac{1}{2n+2} \rightarrow 0$
- II. $x \in [0,1) - Q$ τότε $f_{2n}(x) = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$ και $f_{2n+1}(x) = x^{2n+1} \rightarrow 0$
- III. Εάν $x=1$ τότε $f_{2n}(x) = x^{2n} \rightarrow 1$ και $f_{2n+1}(x) = 1 \rightarrow 1$

Άρα για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει το $\lim f_n(x) = f(x)$ και μάλιστα

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Οπότε για να δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{Arz} f$ αρκεί να δείξουμε ότι οι f_n, f ικανοποιούν την συνθήκη Arzela.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Εφόσον $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ τότε $\exists m_0 \in \mathbb{N}: \forall m \geq m_0 \quad \frac{1}{m} < \varepsilon$

Και $\frac{1}{m+1} \rightarrow 0$ οπότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m \geq n_0 \quad \frac{1}{m+1} < \varepsilon$.

Έστω $x \in [0,1]$ τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- I. Εάν $x \in Q - [0,1)$ τότε θέτουμε $m^* = \max\{m, n_0\}$ και $m < m^* < 2m^*$ και
 $|f_{2m^*}(x) - f(x)| = |f_{2m^*}(x)| = \frac{1}{m^*+1} < \varepsilon$
- II. $x \in Q \cap [0,1)$ τότε θέτουμε $n^* = \max\{m, n_0\}$ και $m < n^* < 2n^* + 1$
και $|f_{2n^*+1}(x) - f(x)| = |f_{2n^*+1}(x)| = \frac{1}{n^*} < \varepsilon$
- III. Εάν $x=1$ τότε $m < 2m < 2m + 1$ και $|f_{2m+1}(x) - f(x)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$
- Όμως $f_n \xrightarrow{Ga} f$ γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι f_n, f δεν ικανοποιούν την συνθήκη Gageff
- Έστω $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ και (x_n) ανοικτό $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : 1 \in X_{n_0}$ και αφού X_{n_0} ανοικτό υπάρχει $(1 - \delta, 1] \subset X_{n_0}$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- I. Αν n_0 άρτιος τότε υπάρχει $x \in (1 - \delta, 1)$ ρητός οπότε $x \in X_{n_0}$ και $x \geq e^{\frac{\log \varepsilon}{n_0}}$
αφού $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ και $\log \varepsilon < 0$ ώστε $f_{n_0}(x) \geq \varepsilon$
- II. Αν n_0 περιττός τότε υπάρχει $x \in (1 - \delta, 1) \subset X_{n_0}$ άρρητος από την
πυκνότητα των αρρήτων και $y \geq e^{\frac{\log \varepsilon}{n_0}}$ ώστε $f_{n_0}(y) \geq \varepsilon$.

1.3.Almost uniform και countable uniform σύγκλιση

Το 1956 οι W.Bagley, E.H.Connell και J.D.Mcknight [17] αναφέρουν ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει uniformly at a point $x_0 \in X$ στην f αν $\forall \varepsilon > 0 \exists V \in \mathcal{N}_{x_0}$ και $n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon, \forall y \in V$ και $\forall n \geq n_0$. Βέβαια κατά την Ewert το 1993 [11] αναφέρει ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει almost uniformly στο $x_0 \in X$ στην f αν $\forall \varepsilon > 0 \exists V \in \mathcal{N}_{x_0}$ και $n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon, \forall y \in V$ και $\forall n \geq n_0$ δηλαδή αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει uniformly at a point $x_0 \in X$ στην f σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό πού αναφέρουν οι W.Bagley, E.H.Connell και J.D.Mcknight. Επίσης ο V.Jarnik το 1984

[18] “ εισάγει” τον ορισμό $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει uniformly at a point $x_0 \in X$ στην f αν $\forall \varepsilon > 0 \exists V \in n_{x_0}$ και $n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon, \forall y \in V$ και $\forall n \geq n_0$ ο οποίος είναι ακριβώς ίδιος με τους προηγούμενους ορισμούς των Ewert και W.Bagley, E.H.Connell και J.D.Mcknight. Για την πληρότητα της πληροφόρησης αναφέρουμε ότι ο C.Goffman [19] το 1976 εισάγει την ακόλουθη έννοια “ σύγκλισης ”:

Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει uniformly at a point $x_0 \in X$ αν $\forall \varepsilon > 0 \exists V \in n_{x_0}$ και $n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f_m(y)| < \varepsilon, \forall y \in V$ και $\forall n, m \geq n_0$ (*).

Παρατηρούμε όμως ότι η κατά σημείο σύγκλιση της $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν υπάρχει ως προϋπόθεση στην (*). Επομένως η ονομασία που έχει δοθεί από τον C.Goffman το 1976 μπορεί να θεωρηθεί ως ψευδεπίγραφη, γι’ αυτό το λόγο θα χρησιμοποιούμε την ονομασία uniformly Cauchy στο x_0 όταν θα αναφερόμαστε στην uniform at $x_0 \in X$ του Goffman.

Αργότερα το 1996 ο C.Petalas και T.Vidalis στην εργασία τους [20] χρησιμοποιούν την almost uniform σύγκλιση στο x_0 της Ewert και επιπλέον ορίζουν μια νέα έννοια σύγκλισης, την countable uniform σύγκλιση. Στην εργασία αυτή όταν θα αναφερόμαστε στην uniform at a point x_0 σύγκλιση των W.Bagley, E.H.Connell και J. D. McKnight θα χρησιμοποιούμε την ονομασία της Ewert almost uniform at a point x_0 .

1.3.1.Ορισμός Έστω X τοπολογικός χώρος, (Y, ρ) μετρικός χώρος και

$f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει almost uniformly στο $x_0 \in X$ στην f αν $\forall \varepsilon > 0 \exists V \in n_{x_0}$ και $n_0 \in \mathbb{N} : \rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon, \forall y \in V$ και $\forall n \geq n_0$. Εάν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει almost uniformly σε κάθε $x_0 \in X$ στην f τότε θα λέμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει almost uniformly στην f και θα γράφουμε $f_n \xrightarrow{a.u.} f$

1.3.2.Ορισμός Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου X . Η $(A_i)_{i \in I}$ λέγεται locally finite αν $\forall x \in X \exists V \in n_x$ ώστε $\{i \in I : V \cap A_i \neq \emptyset\}$ να είναι πεπερασμένο.

1.3.3.Ορισμός Έστω X τοπολογικός χώρος, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *countably uniformly* στην f αν $\forall \varepsilon > 0 \exists \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ locally finite ανοιχτή κάλυψη του X και ακολουθία $(k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$
 $\forall n \geq k_i$ και $\forall x \in U_n$

1.3.4.Παρατήρηση Με βάση τους ορισμούς 1.3.1 και 1.3.2. είναι εύκολο να δούμε ότι εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f τότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *countably uniformly* στην f και εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *countably uniformly* στην f τότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *almost uniformly* στην f .

Σχόλιο: Τα παρακάτω θεωρήματα 1.3.5. και 1.3.6. μας δείχνουν ότι η συνέχεια του κατά σημείου ορίου μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων επιτυγχάνεται και με τις έννοιες σύγκλισης *almost uniform* και *countable uniform* οι οποίες είναι ασθενέστερες από την ομοιόμορφη σύγκλιση.

1.3.5.Θεώρημα Έστω X τοπολογικός χώρος, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f: (X, \tau) \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συνεχής τότε:

Εάν $f_n \xrightarrow{a.u.} f \Rightarrow f$ συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$

Εφόσον $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ τότε $\exists V \in n_x$ και $n_0 \in \mathbb{N} : \rho(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall y \in V$ και $\forall n \geq n_0$

Από υπόθεση η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συνεχής στο $x \in X$ οπότε εάν επιλέξουμε $m \geq n_0$

$f_m, m \in \mathbb{N}$ είναι συνεχής στο $x \in X$ και άρα $\exists U \in n_x$ ώστε

$$\rho(f_m(x), f_m(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in U.$$

Θέτουμε $W = U \cap V \in n_x$ αφού $U, V \in n_x$ και εάν $y \in W$ έχουμε ότι

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), f_m(y)) + \rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon$$

Άρα, f συνεχής.

1.3.6.Θεώρημα Έστω X τοπολογικός χώρος, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f: (X, \tau) \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συνεχής τότε:

Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει countably uniformly στην $f \Rightarrow f$ συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$

Εφόσον η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει countably uniformly στην f τότε $\exists \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ locally finite ανοιχτή κάλυψη του X και ακολουθία $(k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \forall n \geq k_i$ και $\forall y \in U_n$

Εφόσον $x \in X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}: x \in U_{n_0}$ δηλαδή $\rho(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (I)

Από υπόθεση $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συνεχής στο $x \in X$ οπότε $\exists V \in \mathcal{n}_x$ ώστε $\rho(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \forall y \in V$ (II)

Θέτουμε $W = U_{n_0} \cap V \in \mathcal{n}_x$ και εάν $y \in W$ έχουμε ότι

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f_{n_0}(x)) + \rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + \rho(f_{n_0}(y), f(y)) < \varepsilon$$

λόγω των (I) και (II).

Άρα, f συνεχής.

Σχόλιο: Ένας πολύ κομψός χαρακτηρισμός της ψευδοσυμπάγειας που αφορά την ιδιότητα της AU-κάλυψης που δόθηκε από τους Mardesic και P.Papic [6]. Το παρακάτω θεώρημα δίνει έναν επιπλέον χαρακτηρισμό της ψευδοσυμπάγειας μέσω ιδιοτήτων συγκλίσεων almost uniform και uniform.

1.3.7.Θεώρημα[9] Έστω X completely regular T_1 -χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. X ψευδοσυμπαγής
2. Κάθε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει almost uniformly σε μια συνεχή συνάρτηση f στον X συγκλίνει και ομοιόμορφα στην f στον X .

Απόδειξη: $(1 \Rightarrow 2)$

Έστω X ψευδοσυμπαγής και η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει almost uniformly

Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $N \in \mathbb{N}$

Θέτουμε $O_N = \text{int}\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, n = N, N+1, \dots\}$ τότε $\{O_N\}$ είναι ανοιχτό, $N = 1, 2, \dots$ και αφού $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει almost uniformly $\forall x_0 \in X \exists V \in n_{x_0}$ και $N \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon, \forall y \in V$ και $\forall n \geq N$ οπότε $V \subseteq O_N$ και άρα $\{O_N\}$ αριθμήσιμη ανοιχτή κάλυψη του X . Από το θεώρημα Mardesic και P.Papic $\exists N_1, N_2, \dots, N_k \in \mathbb{N}$ ώστε $X = \bigcup_{i=1}^k \overline{O_{N_i}}$.

Παρατηρούμε ότι $\{O_N\}$ αύξουσα ακολουθία οπότε $\overline{O_{N_k}} = X$ όπου

$$N_k = \max\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$$

Για κάθε $n \geq N_k$ εάν $G_n = \{x \in X : \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\}$ τότε $O_{N_k} \subseteq G_n$ αφού

$$O_{N_k} = G_n^o, n \geq N_k \text{ συνεπώς } \overline{O_{N_k}} \subseteq \bigcap_{n=N_k}^{\infty} G_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N_k\}$$

Άρα, $\forall x \in X = \overline{O_{N_k}}$ έχουμε ότι $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall n \geq N_k$ δηλαδή η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στον X .

(2 $\Rightarrow$ 1)

Έστω X όχι ψευδοσυμπαγής τότε $\exists g \in C(X)$ όχι φραγμένη.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $g_n(x) = \min\{g(x), n\} \Rightarrow g_n \in C(X)$

Εφόσον $g \in C(X) \exists V \in n_x$ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε $g(x) < N, \forall x \in V$

Άρα, $g_n(x) = g(x) \forall n \geq N$ και $\forall x \in V$ δηλαδή $\forall \varepsilon > 0 \exists V \in n_x$ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|g_n(x) - g(x)| = 0 < \varepsilon, \forall n \geq N$ και $\forall x \in V$

Επομένως, $g_n \in C(X)$ συγκλίνει almost uniformly όμως g_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στον X αφού $\forall \varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $x_0 \in X : |g_n(x_0) - g(x_0)| > \varepsilon$ διότι g όχι φραγμένη.

Σχόλιο : Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος 1.3.7.

1.3.8.Θεώρημα[17] Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. X ψευδοσυμπαγής
2. Κάθε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει almost uniformly σε μια συνεχή συνάρτηση f στον X συγκλίνει και ομοιόμορφα στην f στον X .

Απόδειξη: $(2 \Rightarrow 1)$ όμοια όπως στο θεώρημα 1.3.7.

$(1 \Rightarrow 2)$

Έστω $f_n \in C(X)$ να συγκλίνει almost uniformly στην $f \in C(X)$ και όχι ομοιόμορφα στην f τότε $\exists \varepsilon > 0: \forall m \in \mathbb{N} \exists n \geq m |f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon$ για κάποια $(x_n) \in X$ ακολουθία.

Θέτουμε $g_n(x) = \max\{|f_n(x) - f(x)| - \varepsilon, 0\}$ και $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{g_n(x_n)} g_n(x)$

Εφόσον $f_n \in C(X)$ συγκλίνει almost uniformly στην $f \in C(X)$ τότε $\exists V \in \mathcal{O}_x$ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N$ και $\forall x \in V$ δηλαδή $g_n(x) = 0 \forall n \geq N$ και $\forall x \in V$.

Άρα, g καλά ορισμένη και συνεχής.

Επιπλέον $g_n(x_n) = |f_n(x) - f(x)| - \varepsilon > 0$ συνεπώς $g_n(x_n) \geq n$ και άρα g όχι φραγμένη το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι X ψευδοσυμπαγής.

1.3.9.Παρατήρηση Με βάση το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι εάν X ψευδοσυμπαγής τοπολογικός χώρος τότε η almost uniform σύγκλιση και η ομοιόμορφη σύγκλιση συμπίπτουν.

Σχόλιο : Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει έναν άλλο χώρο στον οποίο η almost uniform συμπίπτει με την ομοιόμορφη σύγκλιση και το οποίο είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 1.3.8.

1.3.10.Θεώρημα[9] Έστω X normal και T_1 χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. X αριθμήσιμα συμπαγής

2. Κάθε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει almost uniformly σε μια συνεχή συνάρτηση f στον X συγκλίνει και ομοιόμορφα στην f στον X .

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι αν X normal χώρος και X ψευδοσυμπαγής τότε X αριθμήσιμα συμπαγής οπότε από το θεώρημα 1.3.8. έχουμε τη συνεπαγωγή $(2 \Rightarrow 1)$ Επιπλέον αν X αριθμήσιμα συμπαγής τότε X συμπαγής και άρα από το θεώρημα 1.3.8. έχουμε το ζητούμενο.

1.3.11.Ορισμός Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου X . Η $(A_i)_{i \in I}$ λέγεται *star finite* αν για κάθε στοιχείο $A_j, j \in I$ της $(A_i)_{i \in I}$ ισχύει ότι $\{i \in I : A_j \cap A_i \neq \emptyset\}$ να είναι πεπερασμένο.

Σχόλιο: Ο καθηγητής S.Mardesic του πανεπιστημίου της Γιουγκοσλαβίας σε μια ευγενική επιστολή του στον S.Kasahara του ανακοίνωσε έναν ενδιαφέροντα χαρακτηρισμό της ψευδοσυμπαγείας, χωρίς απόδειξη, του S.Mrowka. Το αποτέλεσμα που αναφέρει ο S.Mardesic οφείλεται σε αυτόν και είναι το ακόλουθο.

1.3.12.Θεώρημα[14],[22] Έστω X completely regular χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. X ψευδοσυμπαγής
2. Κάθε locally finite ανοιχτή κάλυψη έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.
3. Κάθε star finite ανοιχτή κάλυψη έχει πεπερασμένη υποκάλυψη

Απόδειξη: $(1 \Rightarrow 2)$

Έστω $(V_i)_{i \in I}$ locally finite ανοιχτή κάλυψη του X και X ψευδοσυμπαγής. Υποθέτουμε ότι η $(V_i)_{i \in I}$ δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη τότε υπάρχει $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αριθμήσιμη υποοικογένεια της $(V_i)_{i \in I}$ τέτοια ώστε κάθε πεπερασμένη οικογένεια της δεν καλύπτει τον X . Επιλέγουμε $a_n \in V_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n: X \rightarrow [0,1]$, $f_n(a_n) = 1$ και $f_n(X \setminus V_n) \subseteq \{0\}$ συνεχής

θεωρούμε $f: X \rightarrow [0, \infty]$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$

Εφόσον $(V_i)_{i \in I}$ locally finite τότε εάν $x \in X \exists V \in n_x$ ώστε $\{n \in \mathbb{N}: V \cap V_n \neq \emptyset\}$

πεπερασμένο δηλαδή $N \in \mathbb{N} : \forall j \geq N f_j(x) = 0$

Άρα, f καλά ορισμένη και συνεχής

Επιπλέον $f(a_n) \geq n$ δηλαδή f όχι φραγμένη. Άτοπο

(2 $\Rightarrow$ 3)

Έστω $(V_i)_{i \in I}$ star finite ανοιχτή κάλυψη του X και $x \in X$ τότε εφόσον $X = \bigcup_{i \in I} V_i$

$\exists i_0 \in I: x \in V_{i_0}$ και αφού $(V_i)_{i \in I}$ star finite $\{i \in I: V_{i_0} \cap V_i \neq \emptyset\}$ πεπερασμένο

Θέτουμε $V = V_{i_0} \in n_x$ τότε $\{i \in I: V \cap V_i \neq \emptyset\}$ πεπερασμένο Άρα, $(V_i)_{i \in I}$ locally finite ανοιχτή κάλυψη του X και από υπόθεση έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

(3 $\Rightarrow$ 1)

Έστω $f \in C(X)$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f \geq 0$ Ορίζουμε

$O_1 = \{x \in X: f(x) < 2\}$ $O_n = \{x \in X: n-1 < f(x) < n+1\}$, $n=2, \dots$ τότε

$\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ανοιχτά αφού $f \in C(X)$ και $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ανοιχτή κάλυψη του X .

Παρατηρούμε ότι $O_n \cap O_i = \emptyset, \forall i \neq n-1, n, n+1$

Άρα, O_n star finite ανοιχτή κάλυψη του X και από υπόθεση έχει πεπερασμένη

υποκάλυψη δηλαδή $X = \bigcup_{i=1}^m O_{n_i}$ συνεπώς $f(x) < \max\{n_1 + 1, \dots, n_m + 1\}$

Άρα, f φραγμένη οπότε X ψευδοσυμπαγής.

Σχόλιο: Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει σε πιο χώρο η countable uniform σύγκλιση συμπίπτει με την ομοιόμορφη σύγκλιση.

1.3.13.Θεώρημα[20] Έστω X completely regular χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. X ψευδοσυμπαγής
2. Για κάθε (Y, ρ) μετρικό χώρο η countable uniform σύγκλιση και η ομοιόμορφη σύγκλιση συμπίπτουν.

3. Η countable uniform σύγκλιση και η ομοιόμορφη σύγκλιση συμπίπτουν στον $C(X, [0,1])$

Απόδειξη: $(1 \Rightarrow 2)$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από υπόθεση $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει countably uniformly στην f τότε $\exists \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ locally finite ανοιχτή κάλυψη του X και ακολουθία $(k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \forall n \geq k_i \text{ και } \forall x \in U_n$.

Αφού X ψευδοσυμπαγής completely regular χώρος και $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ locally finite ανοιχτή κάλυψη του X από το θεώρημα 1.3.12. υπάρχουν $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ ώστε $X = \bigcup_{p=1}^m U_{n_p}$ οπότε εάν $y \in X \Rightarrow \exists n^* \in \{n_1, \dots, n_m\}$ ώστε το $y \in U_{n^*}$ και άρα $\rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon$ δηλαδή υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq k_1 \rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon \forall y \in X$ συνεπώς η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

$(2 \Rightarrow 3)$

Έστω $f_n \in C(X)$ να συγκλίνει countably uniformly στην f τότε από υπόθεση έχουμε ότι και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

Εφόσον $f_n \in C(X, [0,1])$ και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f τότε $f \in C(X, [0,1])$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

$(3 \Rightarrow 1)$

Υποθέτουμε ότι X όχι ψευδοσυμπαγής τότε υπάρχει $(U_i)_{i \in I}$ locally finite ανοιχτή κάλυψη του X που δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μια αριθμήσιμη υποοικογένεια της locally finite $(U_i)_{i \in I}$ ανοιχτής κάλυψης που δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Αφού $X \in T_{3,5}$ τότε για κάθε $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ υπάρχει $V_n \neq \emptyset$ ανοιχτό ώστε $V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq U_n$

Θέτουμε $U_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$ ανοιχτό [21 θεώρημα 10.2.2.] τότε $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι locally finite ανοιχτή κάλυψη του X .

Επιλέγουμε $x_n \in \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ τότε $x_n \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{V_i}$, $V_0 = X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$

Εφόσον $X \in T_{3,5}$ υπάρχει $f_n: X \rightarrow [0,1], n \in \mathbb{N}$ συνεχής ώστε $f_1(x) = 0, x \in V_0$ και

$f_1(x_1) = 1, f_n(x) = 0, x \in \bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{V_i}$ και $f_n(x_n) = 1, n = 2, \dots$ τότε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει countably uniformly και όχι ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση.

Αναφορές Κεφαλαίου 1

- [1] C.Arzelà, Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue Rend. Dell' Accad. R.delle sci dell' Istituto di Bologna pagew 79-84 (1883/4)
- [2] N.Dunford-J.T.Schwartz, Linear Operators Part I General Theory, Wiley-Interscience, 6.10, 6.11 page 268
- [3] V.S. Varadarajn, A.M. Math.Soc.translation vol 48, pages 161-228 (1965)
- [4] G.Sirvint, Weak Compactness in Banach Spaces, Studia Math. 11, pages 71-94 (1949)

- [5] G.Fitchtenholz and L.Kantorovitch, Quelques Theoremes sur les Fonctionnelles lineaires, C.R.Acad.Sci.USSR,3, pages 310-312 (1934)
- [6] L.Hola and T.Salat, Graph Convergence, Uniform , Quasi Uniform and Continuous Convergence and Some Characterizations of Compactness, Acta Math. Univ.Comemian, 54-55, pages 121-132 (1988)
- [7] B.Gagaeff , Sur les Suites Convergentes des Fonctions Mesurables B, Fund. Math., (18) pages 182-188 (1932)
- [8] Z.Bukovska, L.Bukovsky and J.Ewert , Quasi-Uniform Convergence and L-Spaces, Real Anal. Exchange, 18 , pages 321-332 (1992/3)
- [9] K.Iseki, A Characterisation of Pseudo-compact Spaces, Proc. Japan Acad. Vol. 33, Number 6 pages 320-322 (1957)
- [10] H.Hahn: Reelle Funktionen, Leipzig (1932)
- [11] J.Ewert, Almost Uniform Convergence, Periodica Mathematica Hungarica vol 26(1), pages 77-84 (1993)
- [12] M.Predoi, Sur la Convergence quasi-uniforme, Period. Math. Hungar.,(10) pages 31-40 (1979)
- [13] Sibe Mardesic et Pavle Papic, Sur les Espaces dont toute Transformation Reelle Continue est Bornee, Matematico-Physicum et Astronomicum No4 pages 225-232 (1955)
- [14] K.Iseki, A remark on Countably Compact Normal Space, Proc. Japan Acad.,33,pages 131-133 (1957)
- [15] K.Iseki, Pseudo-compactness and μ -convergence, Proc.Japan Acad., vol 33,No 7, pages 368-371 (1957)

- [16] T.Isiwata, Some Characterizations of Countably Compact Spaces, Sci.Rep.Tokyo Kyoiku Daigaku,5, pages 185-189 (1956)
- [17] R.W.Bagley, E.H.Connell and J.D.Mcknight, On Properties Charasterizing Pseudo-compact Spaces, Proc. Amer. Math. Soc. Vol 9, pages 500-506 (1958)
- [18] V.Jarnik, Differential calculus II, Academia, Praha 1984 (Czech)
- [19] C.Goffman, Reelle Funktionen, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zurich (1976)
- [20]C.G.Petalas and T.Vidalis, Characterisation of Compactness through Convergence in Tychonoff Spaces, Proceedings of the American, Mathematical Society Vol 124, No 2, pages 633-636 (1996)
- [21] A.Wilansky, Topology for Analysis, Wiley, New York, (1970)
- [22] K . Iseki an d S . Kasahara : On pseudo-compact and countably comact spaces, Proc. Japan Acad. 33 pages 100-102 (1957)
- [23] L.Bukovsky, I.Reclaw, M.Repicky, Spaces not distinguishing pointwise an quasi-normal convergence of real functions, Topology Appl.,(41) pages 25-40, (1991)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

UNIFORM EQUAL ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Εισαγωγικά Σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα ασχοληθούμε με τις έννοιες της ισοσυνέχειας και exhaustiveness. Οι έννοιες αυτές συνδέονται μεταξύ τους όπως θα δούμε. Συγκεκριμένα η έννοια της ισοσυνέχειας συνεπάγεται την έννοια της exhaustiveness. Το 1941 ο G.Sirvint [1] μελετώντας την έννοια της ισοσυνέχειας εισάγει ένα νέο είδος ισοσυνέχειας που το οποίο ονομάζει quasi-equicontinuity, δίνοντας ένα χαρακτηρισμό της ασθενούς συμπίεσης. Το 1954 ο R.G.Bartle[2] εισάγει την έννοια της quasi-equicontinuity για U-δίκτυα. Στην εργασία αυτή όταν θα αναφερόμαστε στην έννοια της quasi-equicontinuity

θα χρησιμοποιούμε την ονομασία Arzela-ισοσυνέχεια, αφού από το πρώτο κεφάλαιο όταν αναφερόμαστε στην quasi-uniform σύγκλιση χρησιμοποιούμε την ονομασία Arzela σύγκλιση. Η έννοια της exhaustiveness εισήχθη το 2008 από τον Ν.Παπαναστασίου[3]. Η έννοια αυτή μας βοηθάει να δούμε την σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων από την άποψη των ιδιοτήτων της ακολουθίας και όχι των ιδιοτήτων των συναρτήσεων ως κάθε όρο ξεχωριστά. Ένα βασικό αποτέλεσμα αυτής της έννοιας αποτελεί η πρόταση 1.40 σύμφωνα με την οποία εάν η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι exhaustive και συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f τότε f είναι συνεχής συνάρτηση. Η πρόταση αυτή είναι πολύ ενδιαφέρουσα αφού εάν η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συνεχής και όχι exhaustive το παραπάνω αποτέλεσμα δεν ισχύει πάντοτε όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ένα εξίσου ενδιαφέρον και σημαντικό αποτέλεσμα αυτής της έννοιας αποτελεί το θεώρημα 2.1.7. το οποίο αποτελεί γενίκευση του γνωστού θεωρήματος Ascoli-Arzelà.

Στην επόμενη ενότητα θα ασχοληθούμε με την άλφα σύγκλιση, η οποία εισήχθη το 1929 από τον Κ.Καραθεοδωρή. Η άλφα σύγκλιση είναι γνήσια ισχυρότερη από την κατά σημείο σύγκλιση και δεν συγκρίνεται με την ομοιόμορφη σύγκλιση εκτός αν είτε το πεδίο ορισμού της είναι συμπαγές σύνολο είτε η οριακή συνάρτηση είναι συνεχής όπως μπορούμε να δούμε από την πρόταση 2.1.6 και το θεώρημα 2.1.5. Ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα της άλφα σύγκλισης αποτελεί το θεώρημα 2.1.5. όπου η έννοια της exhaustiveness κάνει την άλφα σύγκλιση και την κατά σημείο σύγκλιση να συμπίπτουν. Επιπλέον στην ενότητα αυτή αναφέρονται οι έννοιες weakly exhaustiveness και vanishing oscillation οι οποίες είναι ασθενέστερες από την έννοια της exhaustiveness.

Στην τρίτη ενότητα αναφέρεται η equal σύγκλιση η οποία εισήχθη το 1975 από τους Α. Császár και Μ. Laczkovich και είναι γνήσια ισχυρότερη της κατά σημείο σύγκλισης. Το 2002 ο Ν.Παπαναστασίου [4] εισήγαγε μια νέα έννοια σύγκλισης που την ονόμασε uniform equal σύγκλιση και η οποία είναι γνήσια μεταξύ της ομοιόμορφης και της equal σύγκλισης.

Τέλος στην τελευταία ενότητα αναφέρεται η strong uniform equal σύγκλιση που εισήχθη από τον Ν.Παπαναστασίου, την ίδια χρονική περίοδο που εισήγαγε την uniform equal σύγκλιση, και αποτελεί γενίκευση της uniform equal σύγκλισης καθώς και της

strong equal σύγκλισης που εισήχθη το 1941 από τον A.Denjoy [5]. Επιπλέον επιτυγχάνεται ένας χαρακτηρισμός της strong uniform σύγκλισης με την χρήση της strong equal σύγκλισης.

2.1. Arzela-ισοσυνέχεια και Exhaustiveness

2.1.1.Ορισμός Μια οικογένεια $F \subseteq C(X)$ λέγεται *Arzela-ισοσυνεχής* στον X αν $x_n \rightarrow x_0$ τότε $f(x_n) \xrightarrow{Arz} f(x_0) \forall f \in F$

2.1.2.Παρατήρηση Ο ορισμός 2.1. μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής: “ Μια οικογένεια $F \subseteq C(X)$ λέγεται *Arzela-ισοσυνεχής* στον X αν $x_n \rightarrow x_0$ τότε $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν φυσικοί $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_m, m \in \mathbb{N}$ και $n < \kappa_1$ ώστε $\min_{1 \leq i \leq m} |f(x_{\kappa_i}) - f(x_0)| < \varepsilon \forall f \in F$ ” Επιπλέον παρατηρούμε ότι $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, αφού $x_n \rightarrow x_0$ και $f \in F \subseteq C(X)$

2.1.3.Πρόταση Αν $F \subseteq C(X)$ ισοσυνεχής τότε F Arzela-ισοσυνεχής στον X .

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in X$ και $x_n \rightarrow x_0$

Από υπόθεση F ισοσυνεχής στο x_0 τότε $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall f \in F$ (I)

Εφόσον $x_n \rightarrow x_0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \delta \forall n \geq n_0$ και συνεπώς από την (I) έχουμε

ότι $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall f \in F$ οπότε υπάρχουν φυσικοί $n_0 < \kappa_1 < \kappa_2 <$

$\dots < \kappa_m, m \in \mathbb{N}$ ώστε $\min_{1 \leq i \leq m} |f(x_{\kappa_i}) - f(x_0)| < \varepsilon \forall f \in F$.

Άρα F Arzela-ισοσυνεχής στον X .

Σχόλιο: Από την παραπάνω πρόταση συμβολικά έχουμε ότι εάν F ισοσυνεχής και

$x_n \rightarrow x_0$ τότε $\varphi_n \xrightarrow{Arz} \varphi_0$ στην F όπου $\varphi_n(f) = f(x_n)$, $f \in F$

2.1.4.Πρόταση Εάν $F \subseteq C(X)$ ισοσυνεχής και $x_n \rightarrow x_0$ τότε $\varphi_n \xrightarrow{o.μ.} \varphi_0$ όπου $\varphi_n: F \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη: Έστω $x_n \rightarrow x_0$. Εφόσον F ισοσυνεχής στο x_0 τότε $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall f \in F \text{ (I)}.$$

Επιπλέον $x_n \rightarrow x_0$ οπότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq n_0$ και συνεπώς από την (I) έχουμε ότι $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall f \in F$ δηλαδή $|\varphi_n(f) - \varphi_0(f)| < \varepsilon \quad \forall f \in F$ και $\forall n \geq n_0$. Άρα $\varphi_n \xrightarrow{o.μ.} \varphi_0$.

Σχόλιο: Η παρακάτω πρόταση εξασφαλίζει τη συνέχεια του κατά σημείου ορίου με την προϋπόθεση ότι $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχής.

2.1.5.Πρόταση Εάν $F = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχής και $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ τότε f είναι συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $x_0 \in X$

Εφόσον $F = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχής στο $x_0 \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Επιπλέον από υπόθεση $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ οπότε $\forall x \in X \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\forall n \geq n_0 \text{ οπότε για } x_0 \in X \exists n_1(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N} : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall n \geq n_1$$

Θέτουμε $n^* = \max\{n_0, n_1\}$ τότε εάν $n \geq n^*$ έχουμε ότι

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Άρα δείξαμε ότι $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ δηλαδή ότι f συνεχής.

2.1.6.Ορισμός Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι, $x \in X$ και F οικογένεια των συναρτήσεων από τον X στον Y

(1) Αν F άπειρο τότε η οικογένεια F λέγεται *exhaustive* στο $x \in X$ αν $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ και A πεπερασμένο υποσύνολο του F ώστε $\forall y \in B_d(x, \delta)$ και $f \in F \setminus A$

$$\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

(2) Αν F πεπερασμένο τότε η οικογένεια F λέγεται *exhaustive* στο $x \in X$ αν $\forall f \in F$ συνεχής στο $x \in X$

Αν F *exhaustive* σε κάθε $x \in X$ τότε η F θα λέμε ότι είναι *exhaustive*

2.1.7.Ορισμός Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f_n: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

λέγεται *exhaustive* στο $x \in X$ αν $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N} : \rho(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ και $\forall y \in B_d(x, \delta)$

Εάν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *exhaustive* σε κάθε $x \in X$ τότε θα λέμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *exhaustive*

2.1.8.Παρατηρήσεις

1. Εάν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία συναρτήσεων για την οποία ισχύει ότι $f_n \neq f_m \quad \forall n \neq m$ τότε η οικογένεια $F = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι *exhaustive* στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *exhaustive* στο x_0

2. Εάν η οικογένεια F είναι ισοσυνεχής στο $x \in X$ τότε είναι και *exhaustive* στο $x \in X$
Πράγματι, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

i) Εάν F πεπερασμένο

Από υπόθεση F ισοσυνεχής στο $x \in X$ οπότε $F \subseteq C(X)$ και συνεπώς κάθε $f \in F$ είναι συνεχής στο $x \in X$. Άρα F *exhaustive* στο $x \in X$

ii) Εάν F άπειρο

Από υπόθεση F ισοσυνεχής στο $x \in X$ οπότε $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

ώστε $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon \quad \forall y \in B_d(x, \delta)$ και $\forall f \in F$

Θέτουμε $A = \emptyset$ τότε $\forall y \in B_d(x, \delta)$ και $\forall f \in F \setminus A \quad \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$ δηλαδή F είναι exhaustive στο $x \in X$

3. Εάν F exhaustive στο $x \in X$ τότε δεν συνεπάγεται ότι F ισοσυνεχής στο $x \in X$

Πράγματι, έστω $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, f_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, x \geq 0 \\ \frac{1}{2n}, x < 0 \end{cases}$ και θεωρούμε ότι

$F = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ τότε F είναι exhaustive στο 0 και όχι ισοσυνεχής στο 0.

Εφόσον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όχι συνεχής στο 0 τότε έχουμε ότι $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όχι ισοσυνεχής στο 0 και άρα F όχι ισοσυνεχής στο 0.

Όμως, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exhaustive στο 0.

Έστω $\varepsilon > 0$ ζητάμε να βρούμε $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f_n(0)| < \varepsilon$

$\forall x \in B_d(0, \delta)$ και $\forall n \geq n_0$

Έχουμε ότι $|f_n(x) - f_n(0)| = \begin{cases} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right| = 0 < \varepsilon, x \geq 0 \\ \left| \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{2n}, x < 0 \end{cases}$

θέλουμε $\frac{1}{2n} < \varepsilon$ δηλαδή $\frac{1}{2\varepsilon} < n$

Θέτοντας $n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1$ έχουμε ότι $\frac{1}{2n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ και $\forall x \in B_d(0, \delta), \delta > 0$

οποιοδήποτε. Άρα F είναι exhaustive στο 0.

2.1.9.Πρόταση[3] Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και F οικογένεια συναρτήσεων από τον X στον Y . Τότε

F ισοσυνεχής στο $x \in X \Leftrightarrow F$ exhaustive στο $x \in X$ και $\forall f \in F$ f συνεχής στο $x \in X$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Από την παρατήρηση 2.1.8.(2) έχουμε ότι εφόσον F ισοσυνεχής στο $x \in X$ τότε η F είναι exhaustive στο $x \in X$. Επιπλέον $F \subseteq C(X)$ αφού F ισοσυνεχής και άρα για κάθε $f \in F$ f συνεχής στο $x \in X$

($\Leftarrow$) Θέλουμε να δείξουμε ότι F ισοσυνεχής στο $x \in X$

Εφόσον για κάθε $f \in F$, f συνεχής στο $x \in X$ τότε $F \subseteq C(X)$ άρα αρκεί να δείξουμε

ότι $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ ώστε $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon \quad \forall y \in B_d(x, \delta)$ και $\forall f \in F$

Επομένως έστω $\varepsilon > 0$ από υπόθεση F είναι exhaustive στο $x \in X$ οπότε $\exists \delta_1 > 0$

και $A \subseteq F$ πεπερασμένο ώστε $\forall y \in B_d(x, \delta_1)$ και $\forall f \in F \setminus A \quad \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$

Επιπλέον f συνεχής στο $x \in X$ οπότε $\exists \delta_f > 0$ ώστε $\forall y \in B_d(x, \delta_f)$

$$\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_f, f \in A\} > 0$ τότε $\forall y \in B_d(x, \delta)$ και $\forall f \in F$

$$\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

Σχόλιο : Κάποια αποτελέσματα της ισοσυνέχειας ισχύουν και για την έννοια της exhaustiveness όπως γίνεται φανερό από την παρακάτω πρόταση

2.1.9.Πρόταση[3] Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Εάν

$f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ και $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι exhaustive στο $x \in X \Rightarrow f$ συνεχής στο $x \in X$

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$

Εφόσον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exhaustive στο $x \in X$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ και $\delta > 0$:

$$\rho(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{και} \quad \forall y \in B_d(x, \delta)$$

Έστω $y \in B_d(x, \delta)$ εφόσον $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ τότε για το $y \in B_d(x, \delta) \exists n_1 \in \mathbb{N}$:

$$\rho(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_1 \quad \text{και} \quad \text{για το } x \in X \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2$$

$$\rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Θέτουμε $n_3 = \max\{n_1, n_0, n_2\}$ τότε

$$\rho(f(y), f(x)) \leq \rho(f(y), f_{n_3}(y)) + \rho(f_{n_3}(y), f_{n_2}(x)) + \rho(f_{n_3}(x), f(x)) < \varepsilon$$

δηλαδή $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon \quad \forall y \in B_d(x, \delta)$ οπότε f συνεχής στο $x \in X$.

2.2 Άλφα σύγκλιση

Μια σημαντική έννοια σύγκλισης είναι η άλφα σύγκλιση. Η άλφα σύγκλιση εισήχθη από τον Κ.Καραθεόδωρη το 1929 [6] με την ονομασία *stetige convergence* και αναφερόταν σε μιγαδικές συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής. Ένα πολύ σημαντικό πόρισμα αυτής της έννοιας σύγκλισης είναι ότι η *stetige convergence* με πεδίο ορισμού ένα συμπαγές υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών συμπίπτει με την ομοιόμορφη σύγκλιση με αποτέλεσμα να μεταφέρει τη συνέχεια. Το 1947 ο C.Kuratowski στην εργασία του *Sur la Topologie des Espaces Fonctionnels* αναφέρεται σε αυτή την έννοια σύγκλισης με την ονομασία “συνεχή σύγκλιση”, ονομασία που χρησιμοποιεί ο

Κ.Καραθεοδώρης στο φημισμένο σύγγραμμα του Theory of Functions of Complex Variable. Το αποτέλεσμα του 1929 του Κ.Καραθεοδωρή γενικεύεται περαιτέρω έχοντας ότι το άλφα όριο είναι συνεχής συνάρτηση ανεξάρτητα από το αν η ακολουθία αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις. Μια πρώτη απόδειξη της γενίκευσης αυτής δόθηκε το 1959 από τον S.Stoilov, όπως μπορούμε να δούμε από την εργασία του “S.Stoilov, Continuous Convergence, Rev.Roumaine Math.Pures Appl 4, pages 341-344 (1959)”. Στην εργασία αυτή όταν θα αναφερόμαστε σε αυτή την έννοια σύγκλισης θα χρησιμοποιούμε την ονομασία άλφα σύγκλιση.

2.2.1.Ορισμός Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει άλφα στην f στο $x_0 \in X$ αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$,

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \text{ ισχύει ότι } f_n(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x_0)$$

Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $f_n \xrightarrow{a, x_0} f$.

Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει άλφα στην f σε κάθε $x_0 \in X$ τότε θα γράφουμε $f_n \xrightarrow{a} f$

2.2.2.Παρατηρήσεις

1. Είναι προφανές ότι η άλφα σύγκλιση συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση και το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πράγματι, καταρχάς θα δείξουμε ότι εάν $f_n \xrightarrow{a} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$

Έστω $x \in X$ τότε θεωρώντας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τη σταθερή ακολουθία x έχουμε ότι $x_n \rightarrow x$ και εφόσον $f_n \xrightarrow{a} f$ τότε $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ δηλαδή $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Άρα, $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$.

Με το παρακάτω παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η άλφα σύγκλιση είναι γνήσια ισχυρότερη από την κατά σημείο σύγκλιση.

Παράδειγμα

Έστω $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, η οποία δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x, & x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ -(n+1)nx + (n+1), & x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

τότε $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f, f = 0$ ενώ $f_n \not\xrightarrow{\alpha} f$ αφού για $x_n = \frac{1}{n+1}$ έχουμε ότι $x_n \rightarrow 0$ και $f_n(x_n) = 1 \rightarrow 1$ και για $y_n = \frac{1}{n}$ έχουμε ότι $y_n \rightarrow 0$ αλλά $f_n(y_n) = 0 \rightarrow 0 \neq 1$

2. Η άλφα σύγκλιση δεν συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Πράγματι, έστω $f_n: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ η οποία δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$f_n = \begin{cases} 1 - nx, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \text{τότε } f_n \xrightarrow{a} f \text{ ενώ } f_n \not\xrightarrow{\text{ο.μ.}} f$$

Καταρχάς, $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f, f = 0$

Έστω $x \in (0,1]$ τότε $x > 0$ και από την Αρχιμήδεια ιδιότητα $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n_0} < x \text{ εάν } n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < x \Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \text{δηλαδή } f_n(x) = 0$$

$$\forall n \geq n_0 \quad \text{οπότε } \forall x \in (0,1] \quad f_n(x) \rightarrow 0$$

Επιπλέον $f_n \xrightarrow{a} f$.

Πράγματι, έστω $x \in (0,1]$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0,1], x_n \rightarrow x$. Εφόσον $x > 0$ από την

Αρχιμήδεια ιδιότητα $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_1} < \frac{x}{2}$. Επιπλέον αφού $x_n \rightarrow x$ για $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$

$\exists n_2 \in \mathbb{N} : -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$ δηλαδή $\frac{x}{2} < x_n < \frac{3x}{2}, \quad \forall n \geq n_2$ δηλαδή

$$x_n > \frac{x}{2} \quad \forall n \geq n_2$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Εάν $n \geq n_0$ τότε $x_n > \frac{x}{2} > \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n}$ και άρα $f_n(x_n) = 0$.

Επομένως $f_n(x_n) \rightarrow 0 = f(x)$.

Ωστόσο $f_n \not\xrightarrow{\text{ο.μ.}} f$, αφού $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (0,1]\} = \sup\{|f_n(x)| : x \in (0,1]\} = 1 \rightarrow 1 \neq 0$

3. Η ομοιόμορφη σύγκλιση δεν συνεπάγεται την άλφα σύγκλιση.

Πράγματι, έστω f οποιαδήποτε ασυνεχή συνάρτηση. Θεωρώντας $f_n = f, \forall n \in \mathbb{N}$ τότε

$f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$ όμως αφού f ασυνεχής στο 0 τότε $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \rightarrow 0$ και $f(x_n) \nrightarrow f(0)$ δηλαδή υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n \rightarrow x_0 = 0$ και $f_n(x_n) \nrightarrow f(x_0)$.
Επομένως η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει άλφα στην f .

Σχόλιο: Το ερώτημα που τίθεται ύστερα από το παραπάνω παράδειγμα είναι εάν f συνεχής και $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$ τότε $f_n \xrightarrow{a} f$; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

2.2.3.Θεώρημα[3] Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$.

Αν $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$ και f συνεχής τότε $f_n \xrightarrow{a} f$

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X, x_n \xrightarrow{d} x$ αρκεί να δείξουμε ότι $f_n(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$.

Επομένως έστω $\varepsilon > 0$ εφόσον $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f \exists n_1 \in \mathbb{N}: \rho(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_1$ και

$\forall y \in X$. Επιπλέον από υπόθεση f συνεχής στο $x \in X$ και επειδή $x_n \xrightarrow{d} x$ από αρχή

μεταφοράς έχουμε ότι $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$ δηλαδή $\exists n_2 \in \mathbb{N}: \rho(f(x_n), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n \geq n_2$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ τότε εάν $n \geq n_0$ $\rho(f_n(x_n), f(x)) \leq \rho(f_n(x_n), f(x_n)) + \rho(f(x_n), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2.2.4.Πρόταση[3] Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$.

Εάν $f_n \xrightarrow{a} f$ τότε $f_{k_n} \xrightarrow{a} f$.

Απόδειξη: Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X, x_n \xrightarrow{d} x \in X$ θα δείξουμε ότι $f_{k_n}(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $y_n = \begin{cases} x_i, & n = k_i, \text{ για κάποιο } i \in \mathbb{N} \\ x, & \text{ διαφορετικά} \end{cases}$

τότε $y_{k_n} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $y_{k_n} \xrightarrow{d} x$.

Από υπόθεση $f_n \xrightarrow{a} f$ οπότε $f_n(y_{k_n}) \xrightarrow{\rho} f(x)$ και άρα $f_{k_n}(y_{k_n}) \xrightarrow{\rho} f(x)$ δηλαδή $f_{k_n} \xrightarrow{a} f$.

Σχόλιο: Το παρακάτω θεώρημα συνδέει την έννοια της exhaustiveness με την άλφα σύγκλιση.

2.2.5.Θεώρημα[3] Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

$$1) f_n \xrightarrow{a} f$$

$$2) (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ exhaustive και } f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$$

Απόδειξη: $(1) \Rightarrow (2)$ Έστω ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι exhaustive σε κάποιο σημείο $x_0 \in X$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\forall \delta > 0$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν

$$x_{n,\delta} \in B_d(x_0, \delta) \text{ και } k_n \geq n \text{ ώστε } \rho(f_{k_n}(x_{n,\delta}), f_{k_n}(x_0)) \geq \varepsilon$$

Από επαγωγή μπορούμε να βρούμε $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ και

$$\rho(f_{k_n}(x_n), f_{k_n}(x_0)) \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \quad (I)$$

εφόσον $f_n \xrightarrow{a} f$ και $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τότε από την πρόταση 2.2.4.

$$f_{k_n} \xrightarrow{a} f$$

$$\text{Επιπλέον } x_n \xrightarrow{d} x_0 \text{ και επειδή } f_{k_n} \xrightarrow{a} f \text{ έχουμε ότι } f_{k_n}(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x_0) \quad (II)$$

Από υπόθεση $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ συνεπώς $f_{k_n} \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ και άρα $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο

$$\text{στην } f \text{ στο } x_0 \text{ δηλαδή } f_{k_n}(x_0) \xrightarrow{\rho} f(x_0) \quad (III)$$

Από τις (II) & (III) έχουμε ότι $\rho(f_{k_n}(x_n), f_{k_n}(x_0)) \rightarrow 0$ το οποίο έρχεται σε

αντίφαση με την σχέση (I)

(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ θα δείξουμε ότι $f_n(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$

επομένως έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1$.

Επιπλέον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι exhaustive στο $x \in X$ οπότε $\exists \delta > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$
 $\rho(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall y \in B_d(x, \delta)$.

Από την σύγκλιση της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχουμε ότι $\exists n_2 \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \delta, \forall n \geq n_2$ δηλαδή
 $\exists n_2 \in \mathbb{N} : x_n \in B_d(x, \delta) \quad \forall n \geq n_2$

Θέτουμε $n_3 = \max\{n_0, n_2\}$ τότε εάν $n \geq n_3$ έχουμε ότι $\rho(f_n(x_n), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$

Θέτουμε $n_4 = \max\{n_1, n_3\}$ τότε εάν $n \geq n_4$ έχουμε ότι

$$\rho(f_n(x_n), f(x)) \leq \rho(f_n(x_n), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

2.2.6.Πόρισμα[3] Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$.

Εάν $f_n \xrightarrow{a} f$ τότε f συνεχής

Απόδειξη: Εφόσον $f_n \xrightarrow{a} f$ από το προηγούμενο θεώρημα η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι exhaustive και
 $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ συνεπώς από την πρόταση 2.1.9. έχουμε το συμπέρασμα.

2.2.7.Πρόταση Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι, $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ και X συμπαγές
 σύνολο. Εάν $f_n \xrightarrow{a} f$ τότε $f_n \xrightarrow{o.μ.} f$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$

Από υπόθεση $f_n \xrightarrow{a} f$ συνεπώς από το προηγούμενο πόρισμα f συνεχής στο X . Εφόσον
 X συμπαγές σύνολο τότε f ομοιόμορφα συνεχής στο X και άρα $\exists \delta > 0 : \forall x, y \in X$ και
 $d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (I)

Επιπλέον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exhaustive σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.5. οπότε $\forall x \in X \quad \exists \delta_x < \delta$,
 $\delta_x > 0$ και $n_x \in \mathbb{N} : \rho(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in B_d(x, \delta_x)$ και $\forall n \geq n_x$ (II)

Έχουμε ότι $X = \bigcup_{x \in X} B_d(x, \delta_x)$ τότε αφού X συμπαγές σύνολο υπάρχουν

$$x_1, x_2, \dots, x_k \in X \quad \text{ώστε} \quad X = \bigcup_{p=1}^k B_d(x_p, \delta_{x_p})$$

εφόσον $f_n \xrightarrow{a} f$ από το θεώρημα 2.2.5. $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ όποτε υπάρχει $m_p \in \mathbb{N}$:

$$\rho(f_n(x_p), f(x_p)) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq m_p, p = 1, 2, \dots, k$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_k}, m_1, m_2, \dots, m_k\}$ τότε εάν $n \geq n_0$ και $y \in X$

έχουμε ότι $y \in B_d(x_p, \delta_{x_p})$ για κάποιο $p \in \{1, 2, \dots, k\}$ δηλαδή $d(y, x_p) < \delta_{x_p}$ και

άρα από (I) & (II) έχουμε ότι $\rho(f(x_p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ και

$$\rho(f_n(x_p), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ αντίστοιχα.}$$

Επομένως, $\rho(f_n(y), f(y)) \leq \rho(f_n(y), f_n(x_p)) + \rho(f_n(x_p), f(x_p)) +$

$$\rho(f_n(x_p), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Άρα, $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$.

Σχόλιο: Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Ascoli το οποίο είναι το παρακάτω

Θεώρημα(Ascoli) Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος και $A \subseteq C(X)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1) A συμπαγές υποσύνολο του μετρικού χώρου $C(X)$.
- 2) A κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές

Εάν X μετρικός χώρος συμβολίζουμε με $Bd(X)$ τον χώρο των φραγμένων συναρτήσεων

$$\text{οπότε } Bd(X) = \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty \right\} \text{ με νόρμα } \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

2.2.8.Θεώρημα[3] Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και F άπειρο υποσύνολο του μετρικού χώρου $(Bd(X), \|\cdot\|)$. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (1) Εάν η οικογένεια F είναι κλειστή, φραγμένη και exhaustive τότε F συμπαγές
- (2) Εάν κάθε οριακό σημείο της F είναι συνεχής συνάρτηση και F συμπαγές τότε F κλειστή, φραγμένη και exhaustive.

Απόδειξη: (1) Αρκεί να δείξουμε ότι F ακολουθιακά συμπαγές.

Εφόσον X συμπαγής μετρικός χώρος τότε X διαχωρίσιμος επομένως έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πυκνή ακολουθία στον X και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$

Από υπόθεση F φραγμένη οπότε $\text{diam}(F) = \sup\{d(f, g) : f, g \in F\} = \alpha \Rightarrow$

$d(f, g) \leq \alpha, \forall f, g \in F \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \alpha, \forall f, g \in F$ και $\forall x \in X \Rightarrow$

$|f(x)| - |g(x)| \leq \alpha, \forall f, g \in F$ και $\forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq \alpha + |g(x)|, \forall f, g \in F$ και

$\forall x \in X$ Εφόσον $g \in F$ τότε g συνεχής και αφού X συμπαγής τότε g φραγμένη οπότε

$|g(x)| \leq b \quad \forall x \in X$

Άρα, $|f(x)| \leq \alpha + b := M, \forall x \in X$ και $\forall f \in F$

Επιπλέον έχουμε ότι $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ οπότε $|f_n(x_1)| \leq M$ δηλαδή $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι

φραγμένη στον $\mathbb{R}$ οπότε από το θεώρημα Bolzano Weierstrass έχει συγκλίνουσα

υπακολουθία έστω $(f_{k_n^1})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε το $\lim f_{k_n^1}(x_1)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$

δηλαδή $f_{k_n^1}(x_1) \rightarrow s_1 \in \mathbb{R}$. Όμοια $(f_{k_n^1}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη οπότε υπάρχει

ακολουθία $(f_{k_n^2})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (f_{k_n^1})_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε το όριο της να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ δηλαδή

$f_{k_n^2}(x_2) \rightarrow s_2 \in \mathbb{R}$

Επαγωγικά κατασκευάσαμε ακολουθίες $\dots \subseteq (k_n^{j+1}) \subseteq (k_n^j) \subseteq \dots \subseteq (k_n^1)$ ώστε $\forall j \in \mathbb{N}$ η

ακολουθία $(f_{k_n^j}(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $s_j \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $(f_{k_n^j}(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Επομένως έχουμε ότι

$f_{k_1^1}(x_1) \quad f_{k_2^1}(x_1) \quad f_{k_3^1}(x_1) \quad f_{k_4^1}(x_1) \dots \rightarrow s_1$

$f_{k_1^2}(x_2) \quad f_{k_2^2}(x_2) \quad f_{k_3^2}(x_2) \quad f_{k_4^2}(x_2) \dots \rightarrow s_2$

$f_{k_1^3}(x_3) \quad f_{k_2^3}(x_3) \quad f_{k_3^3}(x_3) \quad f_{k_4^3}(x_3) \dots \rightarrow s_3$

Κάθε γραμμή είναι υπακολουθία της προηγούμενης γραμμής και επιπλέον

$f_{k_n^2}(x_1) \rightarrow s_1$, αφού $(f_{k_n^2})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (f_{k_n^1})_{n \in \mathbb{N}}$ όμοια $f_{k_n^3}(x_1) \rightarrow s_1$ αλλά και $f_{k_n^3}(x_2) \rightarrow s_2$.

Θεωρούμε $(f_{k_n^n})_{n \in \mathbb{N}}$ την διαγώνιο ακολουθία τότε έχουμε ότι $(f_{k_n^n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (f_{k_n^1})_{n \in \mathbb{N}}$

και $(f_{k_n^n})_{n \geq 2} \subseteq (f_{k_n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ γενικότερα $(f_{k_n^n})_{n \geq j} \subseteq (f_{k_n^j})_{n \in \mathbb{N}}$ επομένως $f_{k_n^n}(x_j) \rightarrow s_1$

και συνεπώς $(f_{k_n^n}(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\forall j \in \mathbb{N}$

Θα δείξουμε ότι $(f_{k_n^n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy στο $\text{Bd}(X)$

Επομένως έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$

Από υπόθεση F exhaustive οπότε $\exists \delta_x > 0$ και $n_x \in \mathbb{N} : |f_{k_n^n}(x) - f_{k_n^n}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$\forall y \in B_d(x, \delta_x)$ και $\forall n \geq n_x$

Εφόσον $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πυκνή στον X τότε $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_d(x_j, \delta_{x_j})$ και αφού X συμπαγές

σύνολο τότε $X = \bigcup_{j=1}^p B_d(x_j, \delta_{x_j})$

Επιπλέον $(f_{k_n^n}(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι Cauchy και συνεπώς $\forall j \in \mathbb{N}$

$\exists N_j \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N_j \quad |f_{k_n^n}(x_j) - f_{k_m^m}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Θέτουμε $N = \max\{N_1, \dots, N_p, n_x\}$ τότε εάν $n, m \geq N$ έχουμε ότι εφόσον $x \in X$

τότε $x \in B_d(x_j, \delta_{x_j})$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ και άρα $|f_{k_n^n}(x) - f_{k_n^n}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$ και

$|f_{k_m^m}(x) - f_{k_m^m}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Επιπλέον αφού $n, m \geq N \geq N_j$ τότε $|f_{k_n^n}(x_j) - f_{k_m^m}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Επομένως έχουμε ότι $|f_{k_n^n}(x) - f_{k_m^m}(x)| \leq |f_{k_n^n}(x) - f_{k_n^n}(x_j)| +$

$+ |f_{k_n^n}(x_j) - f_{k_m^m}(x_j)| + |f_{k_m^m}(x_j) - f_{k_m^m}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Άρα, $(f_{k_n^n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy στο $\text{Bd}(X)$, $\forall x \in X$ συνεπώς συγκλίνει στον

$(\text{Bd}(X), \|\cdot\|)$ και έστω $f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_{k_n^n}(x)$ δηλαδή έχουμε ότι $f_{k_n^n} \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ και εφόσον

$(f_{k_n^n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι exhaustive από το θεώρημα 2.2.5. $f_{k_n^n} \xrightarrow{\alpha} f$ και επειδή X συμπαγές

σύνολο τότε $f_{k_n^n} \xrightarrow{o.μ.} f$

Από υπόθεση F κλειστό οπότε $f \in F$ και άρα F συμπαγές.

(2) Εφόσον F συμπαγές τότε F κλειστό και φραγμένο οπότε αρκεί να δείξω ότι F exhaustive.

Έστω ότι F όχι exhaustive σε κάποιο σημείο $x \in X$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$\forall \delta > 0$ και $\forall A \subseteq F$ υπάρχουν $x_{\delta, A} \in B_d(x, \delta)$ και $f_{\delta, A} \in F \setminus A$ ώστε

$|f_{\delta, A}(x_{\delta, A}) - f_{\delta, A}(x)| \geq \varepsilon$

Παίρνω $\delta=1$. Έστω $x_1 \in B_d(x, 1)$ και $A = \emptyset$ τότε $|f_1(x_1) - f_1(x)| \geq \varepsilon$ και $d(x, x_1) < 1$

Για $\delta=\frac{1}{2}$ έστω $x_2 \in B_d(x, \frac{1}{2})$ και $A = \{f_1\}$ τότε $|f_2(x_2) - f_2(x)| \geq \varepsilon$ και $d(x, x_2) < \frac{1}{2}$

Για $\delta=\frac{1}{3}$ έστω $x_3 \in B_d(x, \frac{1}{3})$ και $A = \{f_1, f_2\}$ τότε $|f_3(x_3) - f_3(x)| \geq \varepsilon$ και

$d(x, x_3) < \frac{1}{3}$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο για $\delta = \frac{1}{n}$ έστω $x_3 \in B_d(x, \frac{1}{3})$ και $A = \{f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\}$ τότε $|f_n(x_n) - f_n(x)| \geq \varepsilon$ και $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$

Από υπόθεση έχουμε $\varepsilon > 0$ τότε από αρχιμήδεια ιδιότητα $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ τότε

$\forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ δηλαδή $d(x, x_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ και συνεπώς $x_n \xrightarrow{d} x$

Επομένως επαγωγικά κατασκευάσαμε $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ τέτοιες ώστε

$f_n \neq f_m \quad \forall n \neq m, \quad x_n \xrightarrow{d} x$ και $|f_n(x_n) - f_n(x)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (II)

Εφόσον F συμπαγές υπάρχει $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $f \in F$ ώστε $f_{k_n} \xrightarrow{o.μ.} f$ (I), f

συνεχής οπότε από την αρχή μεταφοράς αφού $x_{k_n} \xrightarrow{d} x$ έχουμε ότι $f_{k_n}(x_{k_n}) \rightarrow f(x)$

δηλαδή $\exists n_1 \in \mathbb{N} : |f(x_{k_n}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_1$

Επιπλέον λόγω της (I) $\exists n_2 \in \mathbb{N} : \|f_{k_n} - f\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_2$

Θέτουμε $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ τότε $\forall n \geq n_3$

$|f_{k_n}(x_{k_n}) - f_{k_n}(x)| \leq |f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x_{k_n})| + |f(x_{k_n}) - f(x)| +$
 $|f(x) - f(x_{k_n})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (II).

Σχόλιο: Η έννοια της exhaustiveness μας οδηγεί σε νέους ορισμούς με ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Οι νέες αυτές έννοιες είναι πολύ σημαντικές αφού η χρήση τους θα μας δώσει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τη συνέχεια του κατά σημείου ορίου.

2.2.9.Ορισμός Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

είναι *weakly exhaustive* στο $x \in X$ αν $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall y \in B_d(x, \delta) \quad \exists n_y \in \mathbb{N} :$

$\forall n \geq n_y \quad \rho(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon$.

Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι weakly exhaustive για κάθε $x \in X$ τότε θα λέμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι weakly exhaustive.

2.2.10.Ορισμός Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f_n: X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *vanishing oscillation* στο $x \in X$ αν $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \exists \delta_n > 0 : \rho(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon \quad \forall y \in B_d(x, \delta_n)$.

Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *vanishing oscillation* για κάθε $x \in X$ τότε θα λέμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *vanishing oscillation*.

2.2.11.Θεώρημα[3] Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι, $f_n, f: X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$. Τότε: Η f συνεχής στο $x \in X \Leftrightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *weakly exhaustive* στο $x \in X$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$

Εφόσον f συνεχής στο $x \in X \quad \exists \delta > 0 : \rho(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall y \in B_d(x, \delta)$

Επιπλέον η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f οπότε για το $\forall y \in B_d(x, \delta)$ έχουμε ότι $\exists n_y \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_y \quad \rho(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{4}$ αλλά και για το $x \in X$ έχουμε ότι

$\exists n_x \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_x \quad \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{4}$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_x, n_y\}$ τότε εάν $n \geq n_0$ έχουμε ότι $\rho(f_n(y), f_n(x)) \leq$

$\rho(f_n(y), f(y)) + \rho(f(y), f(x)) + \rho(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

$(\Leftarrow)$ Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$

Εφόσον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *weakly exhaustive* στο $x \in X \quad \exists \delta > 0 : \forall y \in B_d(x, \delta) :$

$\exists n_y \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_y \quad \rho(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Επιπλέον η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f οπότε για το $y \in B_d(x, \delta)$ έχουμε

ότι $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \quad \rho(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ αλλά και για το $x \in X$ έχουμε ότι

$\exists n_x \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_x \quad \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_x, n_1, n_y\}$ τότε εάν $y \in B_d(x, \delta) \quad \rho(f(x), f(y)) \leq$

$\rho(f(x), f_{n_0}(x)) + \rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + \rho(f_{n_0}(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

2.2.12.Πρόταση[3] Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f_n: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι vanishing oscillation στο $x \in X \Leftrightarrow \text{osc}(f_n, x) \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 0$

Απόδειξη: Είναι άμεση από τον ορισμό της vanishing oscillation και της $\text{osc}(f_n, x) = \inf\{\text{diam} f_n(B_d(x, \delta)) : n \in \mathbb{N} \text{ και } \delta > 0\}$.

Σχόλιο: Με βάση τα παρακάτω παραδείγματα γίνεται αντιληπτό ότι η έννοια της weakly exhaustiveness είναι μια έννοια εντελώς διαφορετική από την vanishing oscillation.

2.2.13.Παράδειγμα[3] Έστω $f_n: (X, d) \rightarrow (Y, \rho), n \in \mathbb{N}$ ακολουθία συνεχών

συναρτήσεων, $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ και f όχι συνεχής στο $x \in X$. Τότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι vanishing oscillation στο $x \in X$ και όχι weakly exhaustive στο $x \in X$.

Πράγματι, εφόσον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συνεχής στο $x \in X$ τότε έχουμε ότι $\text{osc}(f_n, x) = 0 \rightarrow 0$ και άρα από την προηγούμενη πρόταση η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι vanishing oscillation στο $x \in X$.

Όμως η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι weakly exhaustive στο $x \in X$ και από υπόθεση $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ τότε από το θεώρημα 2.2.11. θα έχουμε ότι η f όχι συνεχής στο $x \in X$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας.

2.2.14.Παράδειγμα[3] Έστω $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$f_n = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, +\infty\right) \cup \{0\} \\ nx + 1, & x \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right) \\ -nx + 1, & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \end{cases} \quad \text{τότε}$$

$f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f, f = 0$ και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι weakly exhaustive στο 0 ενώ δεν είναι vanishing oscillation στο 0.

Πράγματι, εφόσον $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f, f = 0$ συνεχής τότε από το θεώρημα 2.2.11. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι weakly exhaustive οπότε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι weakly exhaustive στο 0. Όμως, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι

vanishing oscillation στο 0 αφού εάν θεωρήσουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι vanishing oscillation στο 0 τότε από την πρόταση 2.2.12. $\text{osc}(f_n, 0) \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 0$ το οποίο είναι αδύνατο αφού $\text{osc}(f_n, 0) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

2.3. Equal και Uniform Equal σύγκλιση

Οι A.Csaszar και M.Laczkovich εισήγαγαν το 1975 [7] μια νέα έννοια σύγκλισης που ονόμασαν equal σύγκλιση. Στην ίδια εργασία [7] θεωρούν ακόμα ένα νέο είδος σύγκλισης που την ονόμασαν διακριτή. Στη συνέχεια συνέκριναν τα equal όρια συναρτήσεων που ανήκουν σε μια οικογένεια A με τα αντίστοιχα διακριτά όρια. Πιο συγκεκριμένα δίνουν ικανές συνθήκες ώστε τα σύνολα των δυο αυτών ειδών ορίων να ταυτίζονται. Το 1979 οι

Csaszar και M.Laczkovich στην προσπάθεια τους να μελετήσουν τη σχέση της equal σύγκλισης με την ομοιόμορφη σύγκλιση οδηγήθηκαν στο ακόλουθο θεώρημα:

Έστω $X = \emptyset$ σύνολο, (Y, ρ) μετρικός χώρος και συναρτήσεις $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει equal στην f και

(2) υπάρχει $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του X ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο X_k .

Με την χρήση αυτού του θεωρήματος κατασκεύασαν μια ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει equally και όχι ομοιόμορφα.

Το 1991 η Z.Bukovska εισάγει την έννοια της equal σύγκλισης με το όνομα quasinormal και βελτιώνει το αποτέλεσμα των A.Csaszar και M.Laczkovich ως προς το εξής: Αν στο X ορίσουμε μια τοπολογία ώστε κάθε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε το X_k είναι κλειστό υποσύνολο του X για κάθε $k \in \mathbb{N}$ όπως μπορούμε να δούμε στην εργασία της [8]. Με τη χρήση αυτού του θεωρήματος αποδεικνύεται ότι η equal σύγκλιση είναι γνήσια ισχυρότερη από την κατά σημείο σύγκλιση.

Το 2002 ο N.Παπαναστασίου στην εργασία του [4] εισάγει ένα νέο τύπο σύγκλισης με το όνομα uniform equal σύγκλιση, ο οποίος αποτελεί γενίκευση της equal σύγκλισης. Μάλιστα αποδεικνύεται ότι η σύγκλιση αυτή βρίσκεται γνήσια ενδιάμεσα της ομοιόμορφης και της uniform pointwise σύγκλισης που εισήγαγε ο Σ.Μερκουράκης το 1995 όπως μπορούμε να δούμε στην εργασία του [9]

2.3.1.Ορισμός Έστω Γ μη κενό σύνολο και $f_n, f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *equally* στην f αν $\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \rightarrow 0$ έτσι ώστε $\forall \gamma \in \Gamma$
 $\exists n_0(\gamma) \in \mathbb{N} \quad |f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n, \quad \forall n \geq n_0(\gamma)$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f_n \xrightarrow{e} f$

2.3.2.Ορισμός Έστω Γ μη κενό σύνολο και $f_n, f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *uniformly equally* στην f αν $\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \rightarrow 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\text{card}\{n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f_n \xrightarrow{u.e.} f$

2.3.3.Ορισμός Έστω Γ μη κενό σύνολο και $f_n, f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *uniformly pointwise* στην f αν $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\forall \gamma \in \Gamma$ ισχύει ότι $\text{card}\{n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon\} \leq n_0$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f_n \xrightarrow{u.p.} f$

2.3.4.Παρατηρήσεις

1. Η ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται την uniform equal και το αντίστροφο δεν ισχύει όπως γίνεται φανερό από το παράδειγμα 2.3.5.

Πράγματι, έστω ότι $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$

Θέτουμε $\varepsilon_n = |f_n(\gamma) - f(\gamma)| + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \gamma \in \Gamma$ (τυχαίο) τότε εφόσον $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$ έχουμε

ότι $\sup_{\gamma \in \Gamma} \{|f_n(\gamma) - f(\gamma)|\} \rightarrow 0$ άρα $\varepsilon_n \rightarrow 0$

Θέτουμε $n_0 = 1 \in \mathbb{N}$ τότε $\{n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} = \emptyset$

Άρα, $\text{card}\{n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$

2. Η uniform equal σύγκλιση συνεπάγεται την equal σύγκλιση και το αντίστροφο δεν ισχύει όπως γίνεται φανερό στο παράδειγμα 2.3.6.

Πράγματι, έστω ότι $f_n \xrightarrow{u.e.} f$ τότε υπάρχει $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ώστε $\forall \gamma \in \Gamma A_\gamma = \{n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\}$ είναι πεπερασμένο δηλαδή $\exists n_\gamma \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\gamma \quad n \notin A_\gamma$ δηλαδή $\exists n_\gamma \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n, \quad \forall n \geq n_\gamma$.

Άρα, $f_n \xrightarrow{e} f$

3. Η equal σύγκλιση συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση και το αντίστροφο δεν ισχύει όπως γίνεται φανερό στο παράδειγμα 2.3.7.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και $\gamma \in \Gamma$

Εφόσον $f_n \xrightarrow{e} f$ τότε $\exists n_\gamma \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n, \forall n \geq n_\gamma$ και για κάποια $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \rightarrow 0$

Αφού $\varepsilon_n \rightarrow 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} \varepsilon_n < \varepsilon \forall n \geq n_0$

Θέτουμε $n_1 = \max\{n_0, n_\gamma\}$ τότε εάν $n \geq n_1$ $|f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n < \varepsilon$ δηλαδή

$$f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$$

4. Εάν $f_n \xrightarrow{e} f \Rightarrow f_{k_n} \xrightarrow{e} f$. Το ίδιο ισχύει και για την uniform equal σύγκλιση.

Πράγματι, εφόσον $f_n \xrightarrow{e} f$ τότε $\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \rightarrow 0$ έτσι ώστε $\forall \gamma \in \Gamma \exists n_\gamma \in \mathbb{N} |f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n, \forall n \geq n_\gamma$ έχουμε ότι $k_n \geq n \geq n_\gamma$

οπότε $\forall \gamma \in \Gamma \exists n_\gamma \in \mathbb{N} |f_{k_n}(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_{k_n}, \forall n \geq n_\gamma$

Θέτουμε $\theta_n = \varepsilon_{k_n}$ τότε $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\theta_n \rightarrow 0$ έτσι

ώστε $\forall \gamma \in \Gamma \exists n_\gamma \in \mathbb{N} |f_{k_n}(\gamma) - f(\gamma)| < \theta_n, \forall n \geq n_\gamma$ δηλαδή $f_{k_n} \xrightarrow{e} f$

Επίσης εάν $f_n \xrightarrow{u.e.} f \Rightarrow f_{k_n} \xrightarrow{u.e.} f$

Πράγματι, έστω $f_n \xrightarrow{u.e.} f$ τότε $\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\varepsilon_n \rightarrow 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\text{card}\{n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_0 \forall \gamma \in \Gamma$

Έστω $B = \{k_1, k_2, \dots, k_{n_0}\} \subset \mathbb{N}$ ώστε $|f_{k_l}(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_{k_l}, l = 1, \dots, n_0$ και

$A = \{k_1, k_2, \dots, k_{n_0}\} \cup \{n_1, n_2, \dots\}$ τότε $A \subseteq B$ και άρα $\text{card } A \leq \text{card } B \leq n_0$ οπότε

$\text{card}\{n \in \mathbb{N} : |f_{k_n}(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_{k_n}\} \leq \text{card}\{n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_0$

5. Η uniform equal σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την uniform pointwise σύγκλιση.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $f_n \xrightarrow{u.e.} f$ τότε $\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \rightarrow 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\text{card}\{n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_0 \forall \gamma \in \Gamma$

Επειδή $\varepsilon_n \rightarrow 0$ τότε $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \varepsilon_n < \varepsilon \forall n \geq n_1$

Θέτουμε $N_0 = n_0 + n_1$

Θα δείξουμε ότι $\forall \gamma \in \Gamma \text{ card}\{n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon\} \leq N_0$

Εάν $n \geq n_1$ και $|f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n$ τότε $|f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon \forall \gamma \in \Gamma$ συνεπώς

$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, n_1 - 1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\}$

οπότε $\text{card}\{n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_1 - 1 + \text{card}\{n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\}$
 $\varepsilon_n\}$ δηλαδή $\text{card}\{n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_1 - 1 + n_0 \leq n_1 + n_0 = N_0$

$\forall \gamma \in \Gamma$. Άρα, $f_n \xrightarrow{u.p.} f$

6. Η uniform pointwise είναι ισχυρότερη από την σύγκλιση κατά Arzela.

Πράγματι, Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$

Εφόσον $f_n \xrightarrow{u.p.} f$ τότε $A_\varepsilon = \{ n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \}$ είναι πεπερασμένο

Θέτουμε $n_x = \max A_\varepsilon + 1$ τότε $\forall n \geq n_x$ $n \notin A_\varepsilon$ και συνεπώς $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

δηλαδή δείξαμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$. Μένει να δείξουμε ότι (f_n, f) ικανοποιούν την συνθήκη κατά Arzela.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$

Εφόσον $f_n \xrightarrow{u.p.} f$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\forall x \in X$ ισχύει ότι

$\text{card}\{ n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n \} \leq n_0$. Για κάθε $i = \{1, 2, \dots, n_0 + 1\}$

θέτουμε $k_i = n + i \geq n$

Αν $x \in X$ τότε το A_ε σύνολο έχει το πολύ n_0 στοιχεία επομένως $\exists i \in \{1, 2, \dots, n_0 + 1\} :$

$k_i \notin A_\varepsilon$ δηλαδή $|f_{k_i}(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Άρα, $f_n \xrightarrow{Arz} f$.

Σχόλιο: Τα παρακάτω παραδείγματα έχουν ως στόχο να δείξουν ότι οι συνεπαγωγές $o.\mu.(u) \Rightarrow u.e. \Rightarrow e \Rightarrow \kappa.σ.(p.w.)$ είναι γνήσιες.

2.3.5.Παράδειγμα Έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση στο διάστημα

$\left[n, n + \frac{1}{n} \right], n \in \mathbb{N}$ τότε $f_n \not\xrightarrow{o.\mu.} f$ ενώ $f_n \xrightarrow{u.e.} f$

Πράγματι, καταρχάς $f_n \not\xrightarrow{o.\mu.} f$ αφού $\sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \{ |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \} = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} X_{\left[n, n + \frac{1}{n} \right]}(\gamma) = 1 \rightarrow$

$1 \neq 0$

Επομένως μένει να δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{u.e.} f$

Θέτουμε $\varepsilon_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ τότε $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών και

$\varepsilon_n \rightarrow 0$

Εάν $\gamma \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι $\{ n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n \} = \left\{ n \in \mathbb{N} : X_{\left[n, n + \frac{1}{n} \right]}(\gamma) \geq \right.$

$$\frac{1}{n} \} = \left\{ n \in \mathbb{N}: X_{\left[n, n + \frac{1}{n}\right]}(\gamma) = 1 \right\} = \left\{ n \in \mathbb{N}: \gamma \in \left[n, n + \frac{1}{n}\right] \right\} \text{ τότε}$$

$$\text{card}\{ n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n \} = \text{card}\left\{ n \in \mathbb{N}: \gamma \in \left[n, n + \frac{1}{n}\right] \right\} \leq 1$$

Επομένως, για $n_0 = 1 \in \mathbb{N}$ $\text{card}\{ n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n \} \leq n_0, \forall \gamma \in \mathbb{R}$

2.3.6. Παράδειγμα Για κάθε $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ θεωρούμε τα διαστήματα $\left[k, k + \frac{i}{k}\right],$

$i = 1, 2, \dots, k - 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n = X_{I_n}, I_n$ μια απαρίθμηση

των διαστημάτων $\left[k, k + \frac{i}{k}\right]$ τότε $f_n \xrightarrow{e} f, f = 0$ ενώ $f_n \not\xrightarrow{u.e.} f$

Πράγματι, θέτουμε $\varepsilon_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ τότε $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών πραγματικών

αριθμών και $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Αν $x \in \mathbb{R}$ τότε το x μπορεί να ανήκει μόνο σε πεπερασμένα

διαστήματα της A , A η οικογένεια των διαστημάτων $\left[k, k + \frac{i}{k}\right], k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ και

$i = 1, 2, \dots, k - 1$ διότι διαφορετικά θα υπήρχε ένα στοιχείο της A που θα έτεμνε άπειρα άλλα διαστήματα της A το οποίο δεν γίνεται να συμβαίνει αφού κάθε στοιχείο της A τέμνει ακριβώς $k - 2$ διαστήματα της.

Επομένως $\exists n_x \in \mathbb{N} \forall n \geq n_x, n \notin I_n$ δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R} \exists n_x \in \mathbb{N}: |f_n(x) - 0| = X_{I_n}(x) = 0 < \varepsilon_n, \forall n \geq n_x$.

Άρα, $f_n \xrightarrow{e} f, f = 0$

Όμως, $f_n \not\xrightarrow{u.e.} f$

Έστω $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ οποιαδήποτε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, $\varepsilon_n \rightarrow 0$

Αν $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ έχουμε ότι $\{ n \in \mathbb{N}: |f_n(k)| \geq \varepsilon_n \} = \{ n \in \mathbb{N}: X_{I_n}(k) \geq \varepsilon_n \} =$

$\{ n \in \mathbb{N}: X_{I_n}(k) = 1 \} = \{ n \in \mathbb{N}: k \in I_n \} = k - 1$, αφού το k ανήκει ακριβώς στα

διαστήματα $\left[k, k + \frac{1}{k}\right], \dots, \left[k, k + \frac{k-1}{k}\right]$ οπότε $\forall m \in \mathbb{N}$ έχουμε για τον φυσικό αριθμό

$k = m + 2$ ότι $\text{card}\{ n \in \mathbb{N}: |f_n(k)| \geq \varepsilon_n \} = \text{card}\{ n \in \mathbb{N}: k \in I_n \} = k - 1 > m$

Άρα, $f_n \not\xrightarrow{u.e.} f$.

2.3.7.Παράδειγμα Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n: C_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n((r_n)_{n \in \mathbb{N}}) = r_n + \frac{1}{n}$ τότε

$$f_n \xrightarrow{e} f, f = 0 \text{ όμως } f_n \xrightarrow{a} f \text{ και συνεπώς } f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f, f = 0$$

Πράγματι, αρχικά θα δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{e} f, f = 0$

Έστω $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, $\varepsilon_k \rightarrow 0$

Θέτουμε $x = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ τότε $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| = |f_n((\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}})| = \varepsilon_n + \frac{1}{n} > \varepsilon_n$

Επομένως $f_n \xrightarrow{e} f, f = 0$

Όμως, $f_n \xrightarrow{a} f, f = 0$

Έστω $r = (r_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C_0$ και $r^n = (r_k^n)_{k \in \mathbb{N}} \in C_0, n \in \mathbb{N}, r^n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} r$ θα δείξουμε ότι

$$f_n(r^n) \rightarrow 0$$

Έχουμε ότι $|f_n(r^n)| = |f_n((r_k^n)_{k \in \mathbb{N}})| = \left| r_n^n + \frac{1}{n} \right| \leq |r_n^n - r_n| + |r_n| + \frac{1}{n} \leq$

$\|r_n^n - r_n\|_\infty + |r_n| + \frac{1}{n}$ και εφόσον $\|r_n^n - r_n\|_\infty \rightarrow 0, |r_n| \rightarrow 0 \quad f_n(r^n) \rightarrow 0.$

2.3.8.Πρόταση[10] Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος, (Y, ρ) μετρικός χώρος και

$f_n, f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \rho), n \in \mathbb{N}$. Εάν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συνεχής και $f_n \xrightarrow{u.p.} f \Rightarrow f$ συνεχής.

Ειδικότερα εάν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συνεχής και $f_n \xrightarrow{u.e.} f \Rightarrow f$ συνεχής.

Απόδειξη: Από την παρατήρηση 2.3.4.(6) έχουμε ότι εφόσον $f_n \xrightarrow{u.p.} f$ τότε $f_n \xrightarrow{Arz} f$ και συνεπώς από το θεώρημα Arzela 1.1.3. έχουμε το ζητούμενο.

2.4 Strong Equal , Strong Uniform Equal και Strong Uniform σύγκλιση

2.4.1.Ορισμός Έστω Γ μη κενό σύνολο και $f_n, f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *strongly equally* στην f αν $\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ έτσι ώστε $\forall \gamma \in \Gamma \ \exists n_\gamma \in \mathbb{N} \ |f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n, \ \forall n \geq n_\gamma$
Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f_n \xrightarrow{s-e} f$

2.4.2.Ορισμός Έστω Γ μη κενό σύνολο και $f_n, f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *strongly uniformly equally* στην f αν $\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\text{card}\{n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_0, \forall \gamma \in \Gamma$
Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f_n \xrightarrow{s-u.e.} f$

2.4.3.Παρατηρήσεις

1. Είναι προφανές ότι η strong uniform equal σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την strong equal και το αντίστροφο δεν ισχύει όπως θα δούμε στο παράδειγμα 2.4.5.
2. Η strong uniform equal σύγκλιση είναι ισχυρότερη της uniform equal, ομοίως η strong equal είναι ισχυρότερη της equal σύγκλισης.

Πράγματι, έστω $f_n \xrightarrow{s-u.e.} f$ τότε υπάρχει $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\text{card}\{n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_0, \forall \gamma \in \Gamma$
Εφόσον $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ τότε $\varepsilon_n \rightarrow 0$ οπότε υπάρχει $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \rightarrow 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\text{card}\{n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_0$
 $\forall \gamma \in \Gamma$
Άρα, $f_n \xrightarrow{u.e.} f$.

Σχόλιο: Τα παρακάτω παραδείγματα έχουν ως στόχο να δείξουν ότι οι συνεπαγωγές $s-u.e. \Rightarrow s-e$, $s-u.e. \Rightarrow u.e.$ και $s-e \Rightarrow e$ είναι γνήσιες.

2.4.4.Παράδειγμα[4] Έστω $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ $f_n(\gamma) = \frac{1}{n}$ τότε $f_n \xrightarrow{u.e.} f, f_n \xrightarrow{e} f$ όμως

$f_n \not\xrightarrow{s-e} f$ και συνεπώς $f_n \not\xrightarrow{s-u.e.} f$

Πράγματι, εφόσον η uniform equal σύγκλιση είναι ισχυρότερη της equal σύγκλισης αρκεί να δείξουμε ότι $f_n \not\xrightarrow{u.e.} f$ και επιπλέον αφού η strong uniform equal σύγκλιση είναι ισχυρότερη της strong equal σύγκλισης τότε αρκεί να δείξουμε ότι $f_n \not\xrightarrow{s-e} f$.

Επομένως αφού τότε $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f, f = 0$ τότε από την παρατήρηση 2.3.3.(1) έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{u.e.} f$.

Όμως $f_n \not\xrightarrow{s-e} f$. Θέλουμε να δούμε αν υπάρχει $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$ έτσι ώστε $\forall x \in \mathbb{R} \exists n_x \in \mathbb{N} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n, \forall n \geq n_x$ δηλαδή $\frac{1}{n} < \varepsilon_n \forall n \geq n_x$

Εάν υπήρχε τέτοια ακολουθία $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τότε θα είχαμε ότι $\sum_{n=n_x}^{\infty} \frac{1}{n} < +\infty$ το οποίο δεν ισχύει συνεπώς η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει strong equally στην μηδενική συνάρτηση f .

2.4.5.Παράδειγμα[4] Έστω $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ η χαρακτηριστική στο διάστημα $[n, +\infty)$,

$n \in \mathbb{N}$ δηλαδή $f_n = X_{[n, +\infty)}, n \in \mathbb{N}$ τότε $f_n \xrightarrow{s-e} f, f = 0$ όμως $f_n \not\xrightarrow{u.e.} f$ και συνεπώς $f_n \not\xrightarrow{s-u.e.} f$

Πράγματι, καταρχάς $f_n \not\xrightarrow{u.e.} f$. Έστω $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \rightarrow 0$

Εάν $k \in \mathbb{N}$ τότε έχουμε ότι $\text{card}\{n \in \mathbb{N}: |f_n(k) - f(k)| \geq \varepsilon_n\} =$

$= \text{card}\{n \in \mathbb{N}: X_{[n, +\infty)}(k) \geq \varepsilon_n\} = \text{card}\{n \in \mathbb{N}: k \in [n, +\infty)\} = k$

Οπότε εάν m οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός τότε για $k = m + 1$ έχουμε ότι

$\text{card}\{n \in \mathbb{N}: |f_n(k) - f(k)| \geq \varepsilon_n\} = \text{card}\{n \in \mathbb{N}: k \in [n, +\infty)\} = k > m$

Άρα, η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει uniformly equally στην μηδενική συνάρτηση f και άρα ούτε strong uniformly equally.

Όμως, $f_n \xrightarrow{s-e} f, f = 0$

Πράγματι, έστω $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$ και έστω

$\gamma \in \mathbb{R} \exists n_\gamma \in \mathbb{N}: \gamma < n \forall n \geq n_\gamma$ δηλαδή $\exists n_\gamma \in \mathbb{N}: X_{[n, +\infty)}(\gamma) = 0 \forall n \geq n_\gamma$ δηλαδή

$\exists n_\gamma \in \mathbb{N}: f_n(\gamma) = 0 < \varepsilon_n \forall n \geq n_\gamma$ δηλαδή $\exists n_\gamma \in \mathbb{N} |f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n \forall n \geq n_\gamma$

Άρα, $f_n \xrightarrow{s-e} f, f = 0$

2.4.6. Παρατήρηση Η ομοιόμορφη σύγκλιση δεν συνεπάγεται την strong uniform equal σύγκλιση αλλά και η strong uniform σύγκλιση δεν συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Πράγματι, από το παράδειγμα 2.4.4. έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{o.μ.} f$, $f = 0$ ενώ $f_n \not\xrightarrow{s-u.e.} f$ και από το παράδειγμα 2.3.4 έχουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση f ενώ $f_n \xrightarrow{s-u.e.} f$ αφού για $\varepsilon_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ και $n_0 = 1 \in \mathbb{N}$ έχουμε το ζητούμενο.

2.4.7. Ορισμός Έστω Γ μη κενό σύνολο και $f_n, f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *strongly uniformly* στην f αν $\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n$, $\forall n \geq n_0$ και $\forall \gamma \in \Gamma$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f_n \xrightarrow{s-u} f$.

2.4.8. Παρατηρήσεις

1. Η strong uniform σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την strong uniform equal και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Πράγματι, καταρχάς θα δείξουμε ότι εάν $f_n \xrightarrow{s-u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{s-u.e.} f$

Εφόσον $f_n \xrightarrow{s-u} f$ τότε υπάρχει $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n$, $\forall n \geq n_0$ και $\forall \gamma \in \Gamma$ δηλαδή $\text{card}\{n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq n_0 - 1$ δηλαδή υπάρχει $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ και $m_0 = n_0 - 1$ ώστε

$\text{card}\{n \in \mathbb{N}: |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} \leq m_0$ δηλαδή $f_n \xrightarrow{s-u.e.} f$

Επιπλέον εάν $f_n \xrightarrow{s-u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{o.μ.} f$

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\varepsilon_n = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ και συνεπώς $\varepsilon_n \rightarrow 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\varepsilon_n < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Εφόσον $f_n \xrightarrow{s-u} f$ τότε για $m_0 = n_0 \in \mathbb{N}$ $|f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ και

$\forall \gamma \in \Gamma$ δηλαδή $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$.

2. Οι συνεπαγωγές $f_n \xrightarrow{s-u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{s-u.e.} f$, $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$ είναι γνήσιες.

Πράγματι από το παράδειγμα 2.4.4. έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$ όμως $f_n \not\xrightarrow{s-u.} f$ αφού εάν υπήρχε $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ έτσι ώστε $\forall \gamma \in \mathbb{R}$
 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $|f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n$, $\forall n \geq n_0$ τότε $\frac{1}{n} < \varepsilon_n$, $\forall n \geq n_0$ και συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty$ το οποίο δεν ισχύει.

Από το παράδειγμα 2.3.4. έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{s-u.e.} f$ όμως $f_n \not\xrightarrow{s-u.} f$

Πράγματι εάν $f_n \xrightarrow{s-u} f$ τότε από την παρατήρηση 2.4.3.(1) θα έπρεπε να ισχύει ότι

$f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$ το οποίο όμως δεν ισχύει οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{s-u.e.} f$

Έστω $\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$

Θέτουμε $n_0 = 1 \in \mathbb{N}$ τότε $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ $\text{card}\{n \in \mathbb{N} : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \geq \varepsilon_n\} =$

$\text{card}\left\{n \in \mathbb{N} : X_{[n, n + \frac{1}{n}]} \geq \frac{1}{2^{n+1}}\right\} = \text{card}\left\{n \in \mathbb{N} : X_{[n, n + \frac{1}{n}]} = 1\right\} = \text{card}\left\{n \in \mathbb{N} : \gamma \in$

$\left[n, n + \frac{1}{n}\right]\right\} \leq 1.$

Άρα, $f_n \xrightarrow{s-u.e.} f$

Σχόλιο: Η παρακάτω πρόταση συνδέει την strong equal σύγκλιση με την strong uniform.

2.4.9.Πρόταση[4] Έστω Γ μη κενό σύνολο και $f_n, f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η $f_n \xrightarrow{s-e} f \Leftrightarrow$

υπάρχει $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ κάλυψη του Γ ώστε $f_n|_{\Gamma_k} \xrightarrow{s-e} f|_{\Gamma_k}$, $k = 1, 2, \dots$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Εφόσον $f_n \xrightarrow{s-e} f$ τότε υπάρχει ακολουθία θετικών πραγματικών

αριθμών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ έτσι ώστε $\forall \gamma \in \Gamma$ $\exists n_\gamma \in \mathbb{N}$ $|f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n$, $\forall n \geq n_\gamma$.

Θέτουμε $\Gamma_k = \{\gamma \in \Gamma : |f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon_n, n \geq k\}$ τότε $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$ και

$f_n|_{\Gamma_k} \xrightarrow{s-e} f|_{\Gamma_k}$, $k = 1, 2, \dots$

($\Leftarrow$) Έστω $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$ και $f_n|_{\Gamma_k} \xrightarrow{s-e} f|_{\Gamma_k}$, $k = 1, 2, \dots$ τότε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $(\varepsilon_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{k_n} < \infty$ ώστε να ικανοποιεί τον ορισμό της strong uniform σύγκλισης.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ $\exists n(k) \in \mathbb{N} : \sum_{n \geq n(k)} \varepsilon_{k_n} < \frac{1}{2^k}$

Έστω λοιπόν $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μια αρίθμηση των $(\varepsilon_{k_{n(k)}})_{k \in \mathbb{N}}$ τότε $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ και επιπλέον ικανοποιεί τον ορισμό της strong equal σύγκλισης της $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην f

Αναφορές Κεφαλαίου 2

- [1] G. Sirvint, Weak Compactness in Banach spaces, Studia Math., pages 71-94 (1949)
- [2] R.G. Bartle, On Compactness In Functional Analysis, Trans. Am. Math. Soc., 79, pages 35-56 (1954)
- [3] V. Gregoriades, N. Papanastasiou, The notion of exhaustiveness and Ascoli-type theorems, Topology and its Applications, pages 1111-1128 (2008)
- [4] N. Panastassiou, On a New Type of Convergence of Sequences of Functions, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, L, pages 493-506 (2002)
- [5] A. Denjoy, Lecons Sur le Calcul des Coefficients d'une Serie Trigonometrique 2^e partie, Paris (1941)

- [6] C.Caratheodory, Stetige Konvergenz und Normale Familien von Funktionen, Math.Ann.101 ,pages 515-533 (1929)
- [7] A.Csaszar, M.Laczkovich, Some Remarks on Discrete Baire Classes, Acta Mat. Acad. Sci. Hungar. 33,pages 51-70 (1979)
- [8] Z.Bukovska, Qusinormal Convergence, Math. Slovaca 41(2), pages 137-146 (1991)
- [9] S.Mercourakis, On Cesaro Summable Sequences of Continuous Functions, Mathematica 42 (1), pages 87-104 (1995)
- [10] N.Papanastassiou and P.Kiriakouli, A Classification of pointwise convergent sequences of real valued functions, preprint

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3

ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΓΙΑ PARTIAL FUNCTIONS

Εισαγωγικά Σχόλια

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις μερικές συναρτήσεις (partial functions). Αυτές οι συναρτήσεις έχουν ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό σε σχέση με τις συναρτήσεις που μέχρι στιγμής ασχοληθήκαμε το οποίο είναι ότι δεν έχουν κοινό πεδίο ορισμού, επομένως οι έννοιες σύγκλισης που μελετήσαμε στις προηγούμενες ενότητες δεν μπορούν να ορισθούν γι' αυτού του είδους τις συναρτήσεις. Τις μερικές συναρτήσεις

τις συναντάμε στα οικονομικά μαθηματικά ως συναρτήσεις ωφέλειας (utility functions) αλλά και ως λύσεις διαφορικών εξισώσεων.

Το 2000 ο Naimpally εισήγαγε μια νέα έννοια σύγκλισης, πού την ονόμασε new uniform convergence (νέα ομοιόμορφη σύγκλιση) για ακολουθίες μερικών συναρτήσεων, οι οποίες όπως προαναφέραμε δεν έχουν κοινό πεδίο ορισμού όμως έχουν κοινό πεδίο τιμών. Σύμφωνα λοιπόν με τον Naimpally εάν (X, d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ μερικές συναρτήσεις η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει **new uniformly** στην f αν $\sup \{d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)): y \in Y\} \rightarrow 0$, όπου d_H είναι η Hausdorff ψευδομετρική που ορίζεται ως εξής:

Εάν A, B μη κενά σύνολα του (X, d) μετρικού χώρου θέτουμε $B_d(A, r) = \{x \in X : d(x, A) < r\}, r > 0$ και $B_d(B, \theta) = \{x \in X : d(x, B) < \theta\}, \theta > 0$ τότε $d_H(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 : A \subseteq B_d(B, \varepsilon) \text{ \& } B \subseteq B_d(A, \varepsilon)\}$

Το 1955 ο Kuratowski [1] ασχολήθηκε με συνεχείς μερικές συναρτήσεις πού έχουν συμπαγή πεδίο ορισμού. Επιπλέον το 1965 ο Sell [2] και το 1980 οι Abd, Allah, Brown [3] μελέτησαν συνεχείς μερικές συναρτήσεις αλλά που έχουν ανοιχτό πεδίο ορισμού ενώ το 1993 ο Filippov [4] με κλειστό πεδίο ορισμού. Επιπλέον σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε μερικές συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι απαραίτητα συνεχείς και έχουν πεδίο ορισμού τυχαίο υποσύνολο του (X, d) μετρικού χώρου. Αυτή η γενίκευση οφείλεται στις νέες έννοιες σύγκλισης πού εισήγαγαν το 2001 οι Ν.Παπαναστασίου και Ε.Αθανασιάδου πού τις ονόμασαν weak uniform convergence και new pointwise convergence και για τις οποίες έχουμε τις εξής γνήσιες συνεπαγωγές: new uniform convergence $\Rightarrow$ weak uniform convergence $\Rightarrow$ new pointwise convergence. Η σημαντικότητα της weak uniform convergence έγκειται στο ότι επιτυγχάνεται η διατήρηση της (ομοιόμορφης) ανοιχτότητας στο όριο μιας ακολουθίας μερικών συναρτήσεων. Αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί μια γενίκευση του θεωρήματος Naimpally [5]

Επιπλέον το 2001 οι Ν.Παπαναστασίου και Ε.Αθανασιάδου [6] όρισαν δύο ακόμη νέες έννοιες την new-a-convergence και την new exhaustiveness, όπου η τελευταία έννοια συνδέει την new pointwise convergence με την new-a-convergence αλλά και

οδηγεί σε μια νέα έννοια αυτή της new weakly exhaustiveness. Η new weakly exhaustiveness είναι πολύ ενδιαφέρουσα έννοια, διότι μας δίνει απάντηση στο ερώτημα πότε το όριο μια ακολουθίας μερικών συναρτήσεων είναι ανοιχτό όπως θα δούμε στο τέλος αυτής της ενότητας.

3.1.1.Ορισμός Έστω (X, d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ μερικές συναρτήσεις. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *weakly uniformly* στην f στο $A \subseteq Y$ αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχουν $n \geq 1$ ώστε $\forall y \in A \quad d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \varepsilon$
Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f_n \xrightarrow{w.u.} f$

3.1.2.Παρατήρηση Είναι προφανές ότι η new uniform σύγκλιση συνεπάγεται την weakly uniform σύγκλιση και το αντίστροφο δεν ισχύει σύμφωνα με το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα [6]

Έστω $\Gamma = \{x_1, x_2, \dots\}$ αριθμήσιμο υποσύνολο πραγματικών αριθμών, όπου τα $x_1, x_2, \dots$ είναι ανά δύο διαφορετικά.

Θέτουμε $f_n, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N}$ ως εξής:

$$f_{2n} = nX_{\left(x_n - \frac{n+2}{n+1}, x_n + \frac{n+2}{n+1}\right)} + \sum_{k \neq n} kX_{\left(x_k - \frac{1}{n+1}, x_k + \frac{1}{n+1}\right)}, \quad f_n = \sum_{k \geq 1} kX_{\left(x_k - \frac{1}{n+1}, x_k + \frac{1}{n+1}\right)}$$

για n περιττό και $f(x) = \begin{cases} k, & \text{αν } x = x_k \in \Gamma \\ 0, & \text{αν } x \notin \Gamma \end{cases}$ τότε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει weakly

uniformly στην f στο $\mathbb{N} \cup \{0\}$ και δεν συγκλίνει new uniformly στην f .

Πράγματι,

Έστω $\varepsilon > 0$ και για n περιττό τέτοιο ώστε $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ έχουμε ότι $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$d_H(f_n^{-1}(k), f^{-1}(k)) = \begin{cases} d_H\left(\left(x_k - \frac{1}{n+1}, x_k + \frac{1}{n+1}\right), \{x_k\}\right), & k \geq 1 \\ d_H\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \geq 1} \left(x_k - \frac{1}{n+1}, x_k + \frac{1}{n+1}\right), \mathbb{R} \setminus \Gamma\right), & k = 0 \end{cases}$$

όπου $d_H\left(\left(x_k - \frac{1}{n+1}, x_k + \frac{1}{n+1}\right), \{x_k\}\right) = \inf\left\{\varepsilon > 0: \{x_k\} \subseteq B_d\left(\left(x_k - \frac{1}{n+1}, x_k + \frac{1}{n+1}\right), \varepsilon\right)\right\} = \inf\left\{\varepsilon > 0: \left(x_k - \frac{1}{n+1}, x_k + \frac{1}{n+1}\right) \subseteq B_d(\{x_k\}, \varepsilon)\right\} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

όμοια έχουμε ότι $d_H\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \geq 1} \left(x_k - \frac{1}{n+1}, x_k + \frac{1}{n+1}\right), \mathbb{R} \setminus \Gamma\right) = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ οπότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει weakly uniformly στην f στο $\mathbb{N} \cup \{0\}$

Όμως, $d_H\left(f_{2n}^{-1}(n), f^{-1}(n)\right) d_H\left(\left(x_n - \frac{n+2}{n+1}, x_n + \frac{n+2}{n+1}\right), \{x_n\}\right) = \frac{n+2}{n+1} > 1$ οπότε $\sup\left\{d_H\left(f_{2n}^{-1}(k), f^{-1}(k)\right): k \geq 0\right\} \geq 1$ συνεπώς η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει new uniformly στην f .

Σχόλιο: Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει ότι μέσω της weak uniform convergence διατηρείται η (ομοιόμορφη) ανοιχτότητα.

3.1.3.Θεώρημα[6] Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία ομοιόμορφα ανοιχτών μερικών συναρτήσεων από τον μετρικό χώρο X στον Y με κοινό πεδίο τιμών $\mathbb{R}$. Αν $f_n \xrightarrow{w.u.} f$ στο $\mathbb{R} \Rightarrow f$ (ομοιόμορφα) ανοιχτή.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$, $x \in D(f)$ και $y = f(x)$

Για κάθε $r \in \mathbb{R}$ θεωρούμε $A_r(\varepsilon) = \left\{n \in \mathbb{N}: d_H\left(f_n^{-1}(r), f^{-1}(r)\right) \geq \varepsilon\right\}$

Μπορούμε να επιλέξουμε $n \in \mathbb{N} \setminus \bigcup_{r \in \mathbb{R}} A_r\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ αφού η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει weakly uniformly οπότε $f_n^{-1} \in B_d\left(f^{-1}, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, $\forall t \in f^{-1}(y)$ συνεπώς $d(x, f^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ αφού $y = f(x)$ και άρα $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάποιο $x_n \in f_n^{-1}(y)$

Εφόσον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ανοιχτή τότε $\exists \delta > 0$ ώστε

$$B_\rho(f_n(x_n), \delta) \subseteq f_n\left(B_d\left(x_n, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \quad (I)$$

Έστω $r \in B_\rho(f(x), \delta) \stackrel{f(x)=y=f_n(x_n)}{=} B_\rho(f_n(x_n), \delta)$ τυχαίο εάν δείξουμε ότι

$r \in f(B_d(x, \varepsilon))$ έχουμε το ζητούμενο.

Εφόσον $r \in B_\rho(f(x_n), \delta)$ λόγω της (I) $\exists z_n \in B_d(x_n, \frac{\varepsilon}{3}) \Leftrightarrow d(z_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ ώστε

$$f_n(z_n) = r$$

Εφόσον $n \notin A_r(\frac{\varepsilon}{3})$ τότε $f^{-1} \in B_d(f_n^{-1}, \frac{\varepsilon}{3})$ δηλαδή $d(f^{-1}(r), t) < \frac{\varepsilon}{3}$,

$\forall t \in f_n^{-1}(r)$ οπότε αφού $f_n(z_n) = r$ έχουμε ότι $d(z_n, f^{-1}(r)) < \frac{\varepsilon}{3}$ συνεπώς

$$d(z_n, w) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ για κάποιο } w \in f^{-1}(r)$$

Παρατηρούμε ότι $d(x, w) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z_n) + d(z_n, w) < \varepsilon$ δηλαδή

$$w \in B_d(x, \varepsilon) \text{ συνεπώς } r = f(w) \subseteq f(B_d(x, \varepsilon))$$

Άρα $B_\rho(f(x), \delta) \subseteq f(B_d(x, \varepsilon))$ οπότε f ομοιόμορφα ανοιχτή.

3.1.4.Ορισμός Έστω (X, d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ μερικές συναρτήσεις. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει new pointwise στην f αν $\forall \varepsilon > 0$

$$\forall y \in Y \quad d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) \rightarrow 0$$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f_n \xrightarrow{n-p.w.} f$

3.1.5.Παρατήρηση Είναι φανερό ότι η weak uniform σύγκλιση συνεπάγεται την new pointwise σύγκλιση και το αντίστροφο δεν ισχύει

Παράδειγμα[6]

Έστω $f_n, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N}$ ως εξής:

Έστω $\Gamma = \{x_1, x_2, \dots\}$ αριθμήσιμο σύνολο από αρρήτους, όπου τα $x_1, x_2, \dots$ είναι ανά δύο διαφορετικά και $S_n =$ ρητοί του διαστήματος $(x_n - 1, x_n + 1)$

$$\text{Ορίζουμε } f_n = \sum_{k \geq n} kX_{(x_k - \frac{n+2}{n+1}, x_k + \frac{n+2}{n+1})} + \sum_{k < n} kX_{(x_k - \frac{1}{n+1}, x_k + \frac{1}{n+1})} \quad \text{και}$$

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{αν } x = x_k \in \Gamma \\ 0, & \text{αν } x \notin \Gamma \end{cases} \quad \text{τότε } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ συγκλίνει new pointwise στην } f \text{ και δεν}$$

συγκλίνει weakly uniformly στην f στο $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Πράγματι,

παρατηρούμε ότι $\forall k \in \mathbb{N}$ και $0 < \varepsilon < 1$ έχουμε ότι $\{n \in \mathbb{N}: d_H(f_n^{-1}(k), f^{-1}(k)) \geq \varepsilon\} \supseteq \{1, 2, \dots, k\}$ οπότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει weakly uniformly στην f στο $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Όμως, η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει new pointwise στην f

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

$$1) \text{ εάν } k \in \mathbb{N} \text{ τότε } \forall n > k \text{ έχουμε ότι } d_H(f_n^{-1}(k), f^{-1}(k)) = d_H\left(\left(x_k - \frac{1}{n+1}, x_k + \frac{1}{n+1}\right), \{x_k\}\right) = \frac{1}{n+1}$$

2) εάν $k = 0$ και $n \in \mathbb{N}$ παρατηρούμε ότι $f_n^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ οπότε θεωρούμε

$x \in f^{-1}(0) \setminus f_n^{-1}(0)$ τότε έχουμε ότι

$$\text{είτε ότι } x \in \left(x_i - \frac{1}{n+1}, x_i + \frac{1}{n+1}\right) \setminus \{x_i\} \text{ για κάποιο } i < n \text{ και τότε } d(x, f_n^{-1}(0)) \leq \frac{1}{n+1}$$

είτε ότι $x \in (x_i - 1, x_i + 1) \setminus \{x_i\}$ για κάποιο $i \geq n$ και τότε από την πυκνότητα των

$$\text{ρητών που βρίσκονται στο διάστημα } (x_i - 1, x_i + 1) \text{ } d(x, f_n^{-1}(0)) = 0$$

είτε ότι $x \in \left(x_i - \frac{n+2}{n+1}, x_i + \frac{n+2}{n+1}\right) \setminus (x_i - 1, x_i + 1)$ για κάποιο $i \geq n$ τότε

$$d(x, f_n^{-1}(0)) \leq \frac{n+2}{n+1} - 1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Άρα έχουμε ότι } d_H(f_n^{-1}(0), f^{-1}(0)) = \sup\{d(x, f_n^{-1}(0)) : x \in f^{-1}(0)\} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Συνεπώς, } \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ } d_H(f_n^{-1}(k), f^{-1}(k)) \rightarrow 0.$$

3.1.6.Ορισμός Έστω (X, d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow$

$Y, n \in \mathbb{N}$ μερικές συναρτήσεις. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει new-α στην f $y_0 \in Y$ αν για κάθε

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ακολουθία στον } Y, \text{ } y_n \xrightarrow{d} y_0 \text{ έχουμε ότι } d_H(f_n^{-1}(y_0), f^{-1}(y_0)) \rightarrow 0$$

Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει new-α στην f για κάθε $y \in Y$ τότε θα λέμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

συγκλίνει new-α στην f και θα γράφουμε $f_n \xrightarrow{n-\alpha} f$.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα 3.1.5. η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει και new-α εκτός από new pointwise στην f

3.1.7.Πρόταση[6] Έστω (X, d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος. Εάν $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ μερικές συναρτήσεις και $f_n \xrightarrow{n-\alpha} f$ τότε για κάθε $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θα ισχύει ότι $f_{k_n} \xrightarrow{n-\alpha} f$

Απόδειξη: Άμεσο από τον ορισμό της new- α σύγκλισης.

3.1.8.Ορισμός Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ μερικές συναρτήσεις. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *new exhaustive* στο $y_0 \in Y$ αν $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\forall y \in B_\rho(y_0, \delta)$ και $\forall n \geq n_0 \quad d_H(f_n^{-1}(y), f_n^{-1}(y_0)) \leq \varepsilon$
Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *new exhaustive* αν είναι *new exhaustive* για κάθε $y \in Y$.

3.1.9.Θεώρημα[6] Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ μερικές συναρτήσεις. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1) $f_n \xrightarrow{n-\alpha} f$
- 2) Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *new exhaustive* και $f_n \xrightarrow{n-p.w.} f$

Απόδειξη: $(1 \Rightarrow 2)$ Έστω ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι *new exhaustive* στο $y_0 \in Y$ τότε $\exists \varepsilon > 0$ ώστε $\forall \delta > 0$ και $\forall n \in \mathbb{N} \exists y_\delta \in B_\rho(y_0, \delta)$ και $k_n \geq n$ ώστε

$$d_H(f_{k_n}^{-1}(y), f_{k_n}^{-1}(y_0)) \geq \varepsilon$$

Επαγωγικά για $\delta = \frac{1}{n}$ κατασκευάζουμε $y_n = y_{\delta_n}, n \geq 1$ και ακολουθία $k_1 < k_2 < \dots$

ώστε $\rho(y_n, y_0) < \delta_n = \frac{1}{n}$ και $d_H(f_{k_n}^{-1}(y), f_{k_n}^{-1}(y_0)) \geq \varepsilon$ (*)

Παρατηρούμε ότι

$$d_H(f_{k_n}^{-1}(y_n), f_{k_n}^{-1}(y_0)) \leq d_H(f_{k_n}^{-1}(y_n), f^{-1}(y_0)) + d_H(f^{-1}(y_0), f_{k_n}^{-1}(y_0))$$

οπότε αφού $f_n \xrightarrow{n-p.w.} f$ έχουμε ότι $d_H(f^{-1}(y_0), f_{k_n}^{-1}(y_0)) \rightarrow 0$ και από την πρόταση

$$3.1.7. d_H(f_{k_n}^{-1}(y_n), f^{-1}(y_0)) \rightarrow 0.$$

Άρα, $d_H(f_{k_n}^{-1}(y_n), f_{k_n}^{-1}(y_0)) \rightarrow 0$ άτοπο λόγω της (*).

(2 $\Rightarrow$ 1) Έστω $\varepsilon > 0$, $y \in Y$ και $y_n \rightarrow y$

Εφόσον $f_n \xrightarrow{n-p.w.} f \exists n_1 \in \mathbb{N} : d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_1$

Επιπλέον η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι new exhaustive στο $y \in Y$ οπότε $\exists \delta > 0$ και $n_2 \in \mathbb{N}$ έτσι

ώστε $\forall z \in B_\rho(y, \delta)$ και $\forall n \geq n_2 d_H(f_n^{-1}(z), f_n^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$

Επίσης $y_n \rightarrow y$ οπότε $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \rho(y_n, y) < \delta \forall n \geq n_3$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ τότε εάν $n \geq n_0 d_H(f_n^{-1}(y_n), f_n^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ οπότε

$$d_H(f_n^{-1}(y_n), f^{-1}(y)) \leq d_H(f_n^{-1}(y_n), f_n^{-1}(y)) + d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \varepsilon.$$

Άρα, $f_n \xrightarrow{n-\alpha} f$

3.1.10.Όρισμος Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f_n: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ μερικές συναρτήσεις. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *new weakly exhaustive* στο $y_0 \in Y$ αν $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ έτσι ώστε $\forall y \in B_\rho(y_0, \delta) \exists n_y \in \mathbb{N} d_H(f_n^{-1}(y), f_n^{-1}(y_0)) \leq \varepsilon \forall n \geq n_y$.

Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *new weakly exhaustive* αν είναι *new weakly exhaustive* σε κάθε $y \in Y$.

Σχόλιο: Η έννοια της weakly exhaustiveness είναι πολύ σημαντική όπως θα δούμε από το ακόλουθο θεώρημα και πόρισμα.

3.1.11.Θεώρημα[6] Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f_n, f: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$, μερικές συναρτήσεις, $f_n \xrightarrow{n-p.w.} f$, f 1-1 συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) f ανοιχτή στο $x_0 \in X$

2) Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *new weakly exhaustive* στο $y_0 = f(x_0) \in Y$

Απόδειξη: ($1 \Rightarrow 2$) Έστω $\varepsilon > 0$ και $y_0 = f(x_0)$

Εφόσον f ανοιχτή στο $x_0 \in X$ τότε $\exists \delta > 0 : B_\rho(y_0, \delta) \subseteq f\left(B_d\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$

επίσης f 1-1 συνάρτηση

$$\text{επομένως } f^{-1}(B_\rho(y_0, \delta)) \subseteq f^{-1}\left(f\left(B_d\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)\right) \subseteq B_d\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Έστω $y \in B_\rho(y_0, \delta)$ τότε εφόσον $y_0 \in B_\rho(y_0, \delta)$ έχουμε ότι $f^{-1}(y) \subseteq B_d\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ και

$$f^{-1}(y_0) \subseteq B_d\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right) \text{ συνεπώς } d_H(f^{-1}(y_0), f^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (I)$$

Επιπλέον, $f_n \xrightarrow{n-p.w.} f$ οπότε $d_H(f_n^{-1}(y_0), f^{-1}(y_0)) \rightarrow 0$ και

$$d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) \rightarrow 0 \text{ αφού } y, y_0 \in B_\rho(y_0, \delta) \text{ οπότε } \exists n_y \in \mathbb{N}$$

$$d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ και } d_H(f_n^{-1}(y_0), f^{-1}(y_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_y \quad (II)$$

Από (I) & (II) έχουμε ότι $d_H(f_n^{-1}(y), f_n^{-1}(y_0)) \leq d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) +$

$$d_H(f^{-1}(y), f^{-1}(y_0)) + d_H(f^{-1}(y_0), f_n^{-1}(y_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_y$$

Άρα, η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι new weakly exhaustive στο $y_0 = f(x_0) \in Y$

($1 \Rightarrow 2$) Έστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι new weakly exhaustive στο $y_0 = f(x_0) \in Y$ $\exists \delta > 0$ έτσι ώστε

$$\forall y \in B_\rho(y_0, \delta) \exists n_y \in \mathbb{N} \quad d_H(f_n^{-1}(y), f_n^{-1}(y_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_y \quad (*)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $B_\rho(y_0, \delta) \subseteq f\left(B_d\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$ και τότε θα έχουμε το ζητούμενο

επομένως θεωρούμε $y \in B_\rho(y_0, \delta)$

Εφόσον $f_n \xrightarrow{n-p.w.} f$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ και

$$d_H(f_n^{-1}(y_0), f^{-1}(y_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0$$

Θέτουμε $n_2 = \max\{n_0, n_y\}$ τότε έχουμε ότι $\forall n \geq n_2 \quad d_H(f_n^{-1}(y_0), f_n^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\text{και } d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (**)$$

Παρατηρούμε ότι

$$d_H(f^{-1}(y), f^{-1}(y_0)) \leq d_H(f^{-1}(y), f_n^{-1}(y)) +$$

$$d_H(f_n^{-1}(y_0), f_n^{-1}(y_0)) + d_H(f_n^{-1}(y_0), f^{-1}(y_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

λόγω των (*) και (**)

Επομένως, $d_H(f^{-1}(y), f^{-1}(y_0)) < \varepsilon$ και άρα $f^{-1}(y) \subseteq B_d(x_0, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow y \in$

$f(B_d(x_0, \varepsilon))$

Άρα, $B_\rho(y_0, \delta) \subseteq f(B_d(x_0, \frac{\varepsilon}{3}))$.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι από την απόδειξη του θεωρήματος δεν είναι απαραίτητη η υπόθεση ότι το new pointwise όριο να είναι μια 1-1 συνάρτηση ώστε να επιτυγχάνεται η ανοιχτότητα του. Επιπλέον παρατηρούμε ότι από τα θεωρήματα 3.1.9. και 3.1.11. οδηγούμαστε στην απάντηση της πολύ ενδιαφέρουσας ερώτησης πότε το όριο μιας ακολουθίας μερικών συναρτήσεων είναι ανοιχτό.

3.1.12.Πόρισμα[6] Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f_n, f: X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, μερικές συναρτήσεις, $f_n \xrightarrow{n-\alpha} f \Rightarrow f$ ανοιχτή συνάρτηση.

Αναφορές κεφαλαίου 3

[1] K.Kuratowski, Sur l'escapes des Functions Partielles, Ann. Di Mat. Pured Appl. 40, pages 267-272 (1955)

[2] G.R.Sell, On the Fundamental Theory of Ordinal Differential Equations, J.Differential Equations 1, pages 370-392 (1965)

[3] A.M. Abd-Allah and Brown, A Compact-Open Topology for Partial Maps with Open Domains, J.London Math. Soc. 21, pages 480-486 (1980)

[4] V.V.Filippov, The Topological Structure of Solution Spaces of Ordinary Differential Equations, Russian Math.Survey 48, pages 101-154 (1993)

[5] S.A.Naimpally, A New Uniform Convergence for Partial Functions, Acta Math.Hungar.88(1-2), pages 45-52 (2000)

[6] E.Athanassiadou and N.Papanastassiou, Om Some New Notions of Convergence of a Sequence of Partial Functions, Questions and Answers in General Topology 31, pages 1-9 (2013)

ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΝ - ΝΕΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

4

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια προσπάθεια να γενικεύσουμε και να επεκτείνουμε τις έννοιες σύγκλισης που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Παρουσιάζουμε νέες έννοιες σύγκλισης και ορισμένα νέα είδη *exhaustiveness* αλλά και κάποια αποτελέσματα πάνω σε αυτές τις νέες έννοιες.

4.1. Semi uniform σύγκλιση

Κατά την διάρκεια της μελέτης για την συγγραφή αυτής της διπλωματικής και ιδιαίτερα της almost uniform σύγκλισης οδηγηθήκαμε σε μια νέα έννοια σύγκλισης την semi-uniform σύγκλιση η οποία είναι γνήσια ασθενέστερη από την almost uniform σύγκλιση και γνήσια ισχυρότερη από την quasi-uniform σύγκλιση. Επιπλέον παρουσιάζουμε ένα θεώρημα που συνδέει την semi uniform σύγκλιση με τις έννοιες σύγκλισης simple uniform, quasi-uniform και almost uniform που μελετήσαμε στο πρώτο κεφάλαιο.

4.1.1.Ορισμός Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *semi-uniformly* στην f στο $x_0 \in X$ εάν $f_n(x_0)$ συγκλίνει στην $f(x_0)$ και $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει μια περιοχή V του x_0 τέτοια ώστε $\forall m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m : \forall y \in V$ έχουμε ότι $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$.
Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *semi-uniformly* στην f σε κάθε σημείο του X θα λέμε ότι $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *semi-uniformly* στην f και θα γράφουμε $f_n \xrightarrow{s.u.} f$

4.1.2.Παρατήρηση Είναι εύκολο να δούμε ότι semi-uniform σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την simple uniform σύγκλιση και ασθενέστερη από την almost uniform σύγκλιση. Επομένως έχουμε τις εξής συνεπαγωγές : almost uniform σύγκλιση $\Rightarrow$ semi-uniform σύγκλιση και semi-uniform σύγκλιση $\Rightarrow$ simple-uniform σύγκλιση

Σχόλιο: Χρησιμοποιώντας παραδείγματα θα δείξουμε ότι τα αντίστροφα των παραπάνω συνεπαγωγών δεν ισχύουν.

4.1.3.Παράδειγμα Έστω $f_{2n}(x) = \frac{1}{1+nx}$ και $f_{2n+1}(x) = \frac{1}{n+1}$ για $x \in (0,1]$ και $f_n(0) = 1$
 $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *semi-uniformly* στην $f, f = \begin{cases} 0, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

αλλά δεν συγκλίνει almost uniformly στην f .

Πράγματι, αρχικά θα δείξουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει semi-uniformly στην f .

Καταρχάς, είναι εύκολο να δούμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό 4.1.1. αρκεί να δείξουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει μια περιοχή V του x_0 τέτοια ώστε $\forall m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$: $\forall y \in V$ έχουμε ότι $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$

Επομένως έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$

Εφόσον $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

Έστω V περιοχή του $x \in X$ και $m \in \mathbb{N}$

Θέτουμε $n = 2n_1 + 1$, όπου $n_1 = \max\{n_0, m\}$ τότε $n \geq m$ και για κάθε $y \in V$ έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

i) εάν $y = 0 \in V$ τότε έχουμε ότι $|f_n(0) - f(0)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$

ii) εάν $y \in V, y \neq 0$ τότε $|f_n(y) - f(y)| = |f_n(y)| = |f_{2n_1+1}(y)| = \frac{1}{n_1+1} < \varepsilon$ αφού $n_1 \geq n_0$.

Άρα, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει semi-uniformly στην $f, f = \begin{cases} 0, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Όμως, η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει almost uniformly στην f

Έστω $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $x_0 = 0$ και $V = (-\delta, \delta) \cap [0,1], \delta > 0$ οποιαδήποτε περιοχή του x_0

Έστω $m \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει $m^* > m$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{m^*} < \delta$

Θέτουμε $n = 2m^* > 2m > m$ και $y = \frac{1}{m^*} \in V$ τότε $|f_n(y) - f(y)| = |f_{2m^*}(y)| = \frac{1}{1+m^* \frac{1}{m^*}} = \frac{1}{2} < \frac{1}{3} = \varepsilon$.

4.1.4.Παράδειγμα Έστω $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, η οποία δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x, & x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ -(n+1)nx + (n+1), & x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

τότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει simply-uniformly στην μηδενική συνάρτηση f και δεν συγκλίνει semi-uniformly στην f .

Πράγματι, αρχικά θα δείξουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει simply-uniformly στην f .

Καταρχάς, είναι εύκολο να δούμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην μηδενική συνάρτηση f και εφόσον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f$ είναι συνεχείς τότε από το θεώρημα 1.2.8. έχουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει simply-uniformly στην μηδενική συνάρτηση f .

Όμως η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει semi-uniformly στην f . Εφόσον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην μηδενική συνάρτηση f αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε V περιοχή του $x_0 \in X$ υπάρχει $m_0 \forall n \geq m_0$ ισχύει ότι $|f_n(y) - f(y)| > \varepsilon$ για κάποιο $y \in V$

Έστω $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$ και $V = (-\delta, \delta) \cap [0, 1]$, $\delta > 0$ οποιαδήποτε περιοχή του x_0

Εφόσον $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_0 \quad \frac{1}{n+1} < \delta$

Θέτουμε $y = \frac{1}{n+1} \in V$ τότε έχουμε ότι $|f_n(y) - f(y)| = \left| f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$.

Σχόλιο: Το παρακάτω θεώρημα συνδέει τις semi-uniform, simple-uniform και almost uniform συγκλίσεις.

4.1.5.Θεώρημα Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και έστω οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) f είναι συνεχής
- (ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει simply-uniformly στην f στον X
- (iii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει semi-uniformly στην f στον X
- (iv) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει almost uniformly στη f στον X .

Τότε έχουμε ότι : (a) iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii)

(b) εάν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι exhaustive τότε (ii) $\Rightarrow$ (i)

(c) εάν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι exhaustive και $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ τότε (i) $\Rightarrow$ (iv)

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) και (ii) $\Rightarrow$ (i) εφόσον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι exhaustive και $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ από την πρόταση 2.1.9. Επομένως μένει να δείξουμε την συνεπαγωγή (i) $\Rightarrow$ (iv)

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$ εφόσον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι exhaustive στο x υπάρχει V περιοχή του x και $n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in V$ και $\forall n \geq n_0$.

Επιπλέον από την υπόθεση έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.σ.} f$ οπότε $\exists n_1 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
 $\forall n \geq n_1$ και εφόσον f είναι συνεχής στο x τότε υπάρχει U περιοχή του x τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in U$

Θέτουμε $W = U \cap V$ τότε W είναι περιοχή του x και θέτουμε $n^* = \max\{n_1, n_0\}$ τότε $\forall y \in W$ και $\forall n \geq n^*$ έχουμε ότι $|f_n(y) - f(y)| \leq |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Άρα έχουμε W περιοχή του x και $n^* \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall y \in W$ και $\forall n \geq n^*$ να ισχύει ότι $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$.

4.1.6.Παράδειγμα Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής $f_n(x) = \frac{1}{n}$ για $x \leq 0$ και $f_n(x) = \frac{1}{2n}$ για $x > 0$ τότε έχουμε δει από την παρατήρηση 2.1.8.(3) ότι $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι exhaustive στο $x_0 = 0$ επιπλέον συγκλίνει κατά σημείο στην μηδενική συνάρτηση άρα από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει simply-uniformly , semi-uniformly και almost uniformly στην μηδενική συνάρτηση f .

4.1.7.Παράδειγμα Έστω $f_n: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & x \in (0, 1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$ τότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει άλφα στην μηδενική συνάρτηση όπως μπορούμε να δούμε από την

παρατήρηση 2.2.2. (2) και συνεπώς από το θεώρημα 2.2.5. η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι exhaustive και συγκλίνει κατά σημείο στην μηδενική συνάρτηση f και άρα από το από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει simply-uniformly , semi-uniformly και almost uniformly στην μηδενική συνάρτηση f

4.2.Είδη Exhaustiveness

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε κάποια είδη exhaustiveness. Όπως θα δούμε αυτές οι έννοιες είναι πολύ ενδιαφέρουσες αφού μπορούν να μας οδηγήσουν σε σημαντικά αποτελέσματα.

.

4.2.1.Ορισμός Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *simply-exhaustive* στο $x_0 \in X$ εάν $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall m \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια περιοχή V του x_0 και $n \geq m : \forall y \in V$ έχουμε ότι $|f_n(y) - f_n(x_0)| < \varepsilon$.
Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *simply-exhaustive* σε κάθε $x_0 \in X$ τότε λέμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *simply-exhaustive*.

4.2.2.Ορισμός Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.
Η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *semi-exhaustive* στο $x_0 \in X$ εάν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει μια περιοχή V του x_0 τέτοια ώστε $\forall m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m : \forall y \in V$ έχουμε ότι $|f_n(y) - f_n(x_0)| < \varepsilon$.
Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *semi-exhaustive* σε κάθε $x_0 \in X$ τότε λέμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *semi-exhaustive*.

4.2.3.Ορισμός Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.
Η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *Arzela-exhaustive* στο $x_0 \in X$ εάν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει μια περιοχή V του x_0 τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $k_1 < k_2 < \dots < k_m, m \in \mathbb{N}, n < k_1 : \forall y \in V$ υπάρχει $k_{i_y} \in \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ έχουμε ότι $|f_{k_{i_y}}(y) - f_{k_{i_y}}(x_0)| < \varepsilon$.
Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *arzela -exhaustive* σε κάθε $x_0 \in X$ τότε λέμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *arzela-exhaustive*.

4.2.4.Πρόταση Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.
Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *simply-exhaustive* και $f_n \xrightarrow{s.u.} f$ τότε f είναι συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$

Εφόσον $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall n \geq n_0$.

Επιπλέον αφού $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι simply-exhaustive για το $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια περιοχή V του x και $m \geq n_0 : \forall y \in V$ έχουμε ότι $|f_m(y) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Από υπόθεση $f_n \xrightarrow{s.u.} f$ συνεπώς υπάρχει μια περιοχή U του x τέτοια ώστε για τον $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n^* \geq m : \forall y \in V$ έχουμε ότι $|f_{n^*}(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Θέτουμε $W = U \cap V$ η οποία είναι περιοχή του x και εάν $y \in W$ τότε έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n^*}(x)| + |f_{n^*}(x) - f_{n^*}(y)| + |f_{n^*}(y) - f(y)| < \varepsilon$

4.2.5. Παρατήρηση Η simply-exhaustiveness είναι ασθενέστερη της semi-exhaustiveness συνεπώς η πρόταση 4.2.4. ισχύει και για την semi-exhaustiveness.

Σχόλιο : Το 1994 οι Drahovsky , T.Salat και V.Toma [1] εισήγαγαν μια νέα έννοια σύγκλισης την οποία την ονόμασαν quasi-uniform at a point και η οποία είναι μια τοπική έκδοση της Arzela σύγκλισης. Όταν θα αναφερόμαστε σε αυτή την έννοια σύγκλισης θα χρησιμοποιούμε την ονομασία Arzela at point και η οποία είναι η εξής : '' Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει Arzela στο $x_0 \in X$ στην f εάν $f_n(x_0)$ συγκλίνει στην $f(x_0)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια περιοχή V του x_0 και φυσικοί αριθμοί $k_1 < k_2 < \dots < k_m, m \in \mathbb{N}, n < k_1 : \forall x \in V$ υπάρχει $k_{i_x} \in \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ έχουμε ότι $|f_{k_{i_x}}(x) - f_{k_{i_x}}(x_0)| < \varepsilon$ ''

4.2.6. Πρόταση Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Εάν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Arzela-exhaustive στο $x_0 \in X$, συγκλίνει κατά σημείο στο x_0 στην f , όπου f είναι συνεχής στο τότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει arzela στο x_0 στην συνάρτηση f .

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $N \in \mathbb{N}$

Εφόσον η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στο x_0 στην f τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0$$

Επιπλέον η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *Arzela-exhaustive* στο x_0 συνεπώς υπάρχει μια περιοχή V του x_0 τέτοια ώστε για τον $n^* = \max\{n_0, N\}$ υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $k_1 < k_2 < \dots < k_m$, $m \in \mathbb{N}$, $n^* < k_1$: $\forall x \in V$ υπάρχει $k_{i_x} \in \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ έχουμε ότι

$$|f_{k_{i_x}}(x) - f_{k_{i_x}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Από υπόθεση έχουμε ότι η f είναι συνεχής επομένως υπάρχει W περιοχή του x_0 έτσι ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in W$

Θέτουμε $U = W \cap V$ η οποία είναι περιοχή του x και εάν $y \in U$ τότε έχουμε ότι $y \in V$

επομένως υπάρχει $k_{i_y} \in \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ έτσι ώστε $|f_{k_{i_y}}(y) - f_{k_{i_y}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ Έχουμε

$$\begin{aligned} \text{ότι } |f_{k_{i_y}}(y) - f(y)| &\leq |f_{k_{i_y}}(y) - f_{k_{i_y}}(x_0)| + |f_{k_{i_y}}(x_0) - f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| < \\ \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

4.2.7. Παράδειγμα Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής $f_n(x) = \frac{1}{n}$ για $x \leq 0$ και $f_n(x) = \frac{1}{2n}$ για $x > 0$ τότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι *Arzela-exhaustive* στο $x_0 = 0$, συγκλίνει κατά σημείο στην μηδενική συνάρτηση f και άρα από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *arzela* στο $x_0 = 0$ στην μηδενική συνάρτηση f .

4.3. Σύγκλιση σχετική με την Gageff

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε μια έννοια σύγκλισης πιο ισχυρή από την Gageff σύγκλιση καθώς και αναγκαίες συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτές οι δύο έννοιες συμπίπτουν.

4.3.1.Ορισμός Έστω X τοπολογικός χώρος, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow (Y, \rho), n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *AU-Gagaeff* στην f στον X αν η f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f στον X και $\forall \varepsilon > 0 \exists U_n \ n \in \mathbb{N}$ AU- κάλυψη του X ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x \in U_n$ ισχύει ότι $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

4.3.2.Παρατήρηση Είναι εύκολο να δούμε ότι η AU-Gagaeff σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την Gagaeff σύγκλιση.

4.3.3. Θεώρημα Έστω X completely regular τοπολογικός χώρος. Εάν X ψευδοσυμπαγής τότε η Gagaeff και η AU-Gagaeff συμπίπτουν.

Απόδειξη: Είναι άμεση από την παρατήρηση 4.3.2. κα το θεώρημα 1.2.11.

Σχόλιο: Οι ενότητες 4.1. και 4.2. παρουσιάστηκαν στο συνέδριο on Topology and its Applications στις 4 Ιουλίου 2014 στην Ναύπακτο.

4.4 Ideal και statistical σύγκλιση

Το 1951 οι Steinhaus [2] και Fast [3] εισήγαγαν ένα νέο είδος σύγκλισης την statistical σύγκλιση η οποία αποτελεί μια ειδική περίπτωση της Ideal σύγκλισης που εισήγαγαν το 2000/1 οι Kostyrko, Salat και Wilczynski [4]. Σε αυτή την ενότητα μελετάμε την Ideal σύγκλιση και επεκτείνουμε κάποιες από τις έννοιες σύγκλισης που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια για Ideal, καθώς και κάποια αποτελέσματα.

4.4.1.Ορισμός Ένα $I \subset P(\mathbb{N})$ λέγεται *Ιδεώδες στο $\mathbb{N}$* (Ideal στο $\mathbb{N}$) αν:

1. $A \cup B \in I, \forall A, B \in I$
2. Εάν $A \in I$ και $B \subset A \Rightarrow B \in I$.
3. $\emptyset \in I$.

Επιπλέον το I λέγεται *αποδεκτό (Asmissible)* αν $\{n\} \in I, \forall n \in \mathbb{N}$ και *κύριο* αν $\mathbb{N} \notin I$

Σημείωση Αν X τυχαίο και $X \neq \emptyset$ ένα $I \subset P(X)$ που ικανοποιεί τα 1,2,3 του παραπάνω ορισμού λέγεται *ιδεώδες*.

4.4.2.Παράδειγμα Έστω $F = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ πεπερασμένο}\} \Rightarrow F$ είναι κύριο αποδεκτό ιδεώδες.

Πράγματι, $\emptyset \in F$. Εάν $A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$ αφού $A, B \subset \mathbb{N}$ πεπερασμένα και εάν $A \in F$ και $B \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow B \in F$ αφού A πεπερασμένο. Άρα F ιδεώδες στο $\mathbb{N}$. Επιπλέον $\{n\} \in F \forall n \in \mathbb{N}$ δηλαδή I αποδεκτό και $\mathbb{N} \notin F$. Άρα F κύριο αποδεκτό ιδεώδες.

4.4.3.Ορισμός Έστω I αποδεκτό ιδεώδες στο $\mathbb{N}$ και (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ λέμε ότι $a_n \xrightarrow{I} a \in \mathbb{R}$ αν $\forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \in I$

4.4.4.Παράδειγμα Έστω $x_n \in \mathbb{R} : x_n \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \varepsilon$

$$\forall n \geq n_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} \subset \{1, 2, \dots, n_0\}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} \subset \mathbb{N} \text{ πεπερασμένο}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} \in F$$

$$\begin{array}{c} F \text{ αποδεκτό} \\ \Leftrightarrow \\ \text{Ιδεώδες στο } \mathbb{N} \end{array} \quad x_n \xrightarrow{F} x_0 \quad \text{Δηλαδή } x_n \rightarrow x_0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{F} x_0, F \text{ αποδεκτό ιδεώδες}$$

στο $\mathbb{N}$.

Σημείωση Αν $I \subset P(X)$ ιδεώδες $\Rightarrow$ το $F = \{A \subset X : X \setminus A \in I\}$ φίλτρο. Δηλαδή $\emptyset \notin F$, εάν $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$ και εάν $A \in F$ και $A \subset B \Rightarrow B \in F$.

4.4.5.Ορισμός Έστω I αποδεκτό ιδεώδες στο $\mathbb{N}$ και (x_n) μια ακολουθία στο $\mathbb{R}$ τότε

$$x_n \xrightarrow{I^*} x_0 \text{ αν } \exists K = \{\kappa_1 < \kappa_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus K \in I : x_{\kappa_n} \rightarrow x_0$$

4.4.6.Πρόταση Έστω I αποδεκτό ιδεώδες στο $\mathbb{N}$ τότε I^* σύγκλιση έπεται την I σύγκλιση.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \xrightarrow{I^*} x_0$ τότε $\exists K = \{\kappa_1 < \kappa_2 < \dots\}$, $\mathbb{N} \setminus K \in I : x_{\kappa_n} \rightarrow x_0$ δηλαδή $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_{\kappa_n} - x_0| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ άρα

$\{k_n \in K : |x_{k_n} - x_0| \geq \varepsilon\} = T \subset \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$. Άρα πεπερασμένο και εφόσον I αποδεκτό τότε $T \in I$ και $\mathbb{N} = (\mathbb{N} \setminus K) \cup K$.

Οπότε $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} \subset T \cup \mathbb{N} \setminus K \in I$

Δηλαδή $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} \in I$. Άρα $x_n \xrightarrow{I} x_0$.

4.4.7.Ορισμός Η πυκνότητα ενός συνόλου $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ $d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \# \frac{\{k \in A : k \leq n\}}{n}, n \in \mathbb{N}$.

4.4.8.Παρατηρήσεις

$$1. \text{ Αν } A \text{ πεπερασμένο} \Rightarrow d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A|}{n} = 0$$

$$2. d(\mathbb{N}) = 1$$

$$3. d(\mathbb{N} \setminus A) = 1, A: \text{ πεπερασμένο αφού } |A| = a \in \mathbb{N} \text{ τότε } d(\mathbb{N} \setminus A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-a}{n} = 1$$

4.4.9.Παράδειγμα Έστω $I_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$ είναι αποδεκτό κύριο ιδεώδες. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $\emptyset \in I_d$ εάν $A, B \in I_d$ τότε $A \cup B \in I_d$ και εάν $A \in I_d$ και $B \subseteq A$ έπεται ότι $B \in I_d$ άρα I_d ιδεώδες. Από την 2 παρατήρηση $\mathbb{N} \in I_d$ οπότε I_d κύριο και $\{n\} \in I_d$,

$n \in \mathbb{N}$ της παρατήρησης 1 . Άρα I_d αποδεκτό Ιδεώδες.

4.4.10.Παρατηρήσεις

1. Αν $A \subset \mathbb{N}$ πεπερασμένο έπεται ότι $d(A)=0 \Rightarrow A \in I_d$. Δηλαδή $F \subset I_d$ και μάλιστα $F \neq I_d$ αφού το $B=\{1,4,9,16,\dots\}=\{m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ άπειρο και $d(B)=0$. Πράγματι $d(B)=\lim_{n \rightarrow \infty} \# \frac{\{k \in B : k \leq n\}}{n}$ αφού $k \in B$ τότε $k = m^2, m \in \mathbb{N}$ οπότε ζητάμε το πλήθος των στοιχείων του B ώστε $m^2 \leq n \Rightarrow m \leq \sqrt{n}$. Οπότε $d(B)=\lim_{n \rightarrow \infty} \# \frac{\{k \in B : k \leq n\}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Άρα $B \notin F$ ενώ $B \in I_d$.
2. $x_n \xrightarrow{I_d} x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} \in I_d \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 d(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\}) = 0$ (ή αλλιώς λέμε ότι η (x_n) συγκλίνει statistical στο x_0). Εφόσον το I_d είναι ιδεώδες έχουμε ότι η I- σύγκλιση γενικεύει την statistical σύγκλιση (I_d - σύγκλιση)
3. Εάν η $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{I_d} x_0$

Πράγματι, $x_n \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} \subset \{1, 2, \dots, n_0\}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} \subset \{1, 2, 3, \dots, n_0 - 1\}$ πεπερασμένο

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} \in F \subset I_d \Rightarrow x_n \xrightarrow{I_d} x_0$

4.4.11.Παράδειγμα Έστω $\alpha_n = \begin{cases} n, & n \in A = \{1,4,9,16, \dots\} \\ \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N} \setminus A \end{cases}$ τότε $\alpha_n \not\rightarrow 0$ ενώ $\alpha_n \xrightarrow{I_d} 0$.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι $\alpha_n \not\rightarrow 0$ αφού $\alpha_n \rightarrow +\infty, n \in A$ και $\alpha_n \rightarrow 0, n \notin A$ αλλά αν $0 < \varepsilon < 1$ τότε $\{n \in \mathbb{N} : |\alpha_n - 0| \geq \varepsilon\} \subseteq \{1,2, \dots, n_0 - 1\} \cup A$ αφού $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \frac{1}{n} < \varepsilon$ δηλαδή $|\alpha_n - 0| < \varepsilon \forall n \geq n_0, n \notin A$.

Αλλά $A \in I_d$ και $\{n \in \mathbb{N} : |\alpha_n - 0| \geq \varepsilon\} \subseteq \{1,2, \dots, n_0 - 1\} \cup A$ αφού I_d ιδεώδες $\{n \in \mathbb{N} : |\alpha_n - 0| \geq \varepsilon\} \in I_d$. Άρα $\alpha_n \xrightarrow{I_d} 0$.

4.4.12.Ορισμός Έστω $f_n, f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ τότε $f_n \xrightarrow{I-\kappa.\sigma} f$ αν $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists A \in I \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \forall n \notin A$.

4.4.13.Ορισμός Έστω $f_n, f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ τότε

1. $f_n \xrightarrow{I-Ga} f$ αν I) $f_n \xrightarrow{I-\kappa.\sigma} f$ και II) $\forall \varepsilon > 0 \exists X_n, n \in \mathbb{N}$ ανοικτό : $X = \cup X_n$
 $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X_n \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$
2. $f_n \xrightarrow{I-s.u.} f$ αν I) $f_n \xrightarrow{I-\kappa.\sigma} f$ και II) $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \forall m \in \mathbb{N} \exists n \geq m \exists V$
περιοχή του x: $\rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon \forall y \in V$
3. $f_n \xrightarrow{I-q.u.} f$ αν $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists A \in I : \forall n \notin A \exists V$ περιοχή του x:
 $\rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon \forall y \in V$

Σχόλιο: Η παρακάτω πρόταση αποτελεί μια γενίκευση του θεωρήματος 1.2.8. για ideal.

4.4.14.Πρόταση Έστω $f_n, f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \rho), n \in \mathbb{N}, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συνεχής και $f_n \xrightarrow{I-\kappa.\sigma} f$.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. f συνεχής
2. $f_n \xrightarrow{I-Ga} f$

$$3. f_n \xrightarrow{I-s.u.} f$$

$$4. f_n \xrightarrow{I-q.u.} f$$

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$.

$(2) \Rightarrow (1)$: Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$.

Εφόσον $f_n \xrightarrow{Ga} f$ τότε υπάρχει $X_n, n \in \mathbb{N}$ ανοικτό, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall y \in X_n$ $\rho(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (1) και αφού $x \in X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in X_{n_0}$ και από (1) $\rho(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Από υπόθεση έχουμε ότι f_n συνεχής άρα f_{n_0} συνεχής στο x οπότε $\exists V \in M_x$ ώστε $\rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in V$.

Θέτουμε $U = V \cap X_{n_0} \in M_x$ εάν $y \in U$ τότε:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f_{n_0}(x)) + \rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + \rho(f_{n_0}(y), f(y)) < \varepsilon$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε τη συνεπαγωγή $(1) \Rightarrow (4)$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$.

Εφόσον $f_n \xrightarrow{I-k.s.} f$ τότε $\exists A \in I : \forall n \notin A \quad \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Από υπόθεση f_n, f συνεχής στο X οπότε υπάρχουν U, V περιοχές του x ώστε $\rho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall y \in V$ και $\rho(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall y \in U$.

Θέτουμε $W = U \cap V \in M_x$ εφόσον $U, V \in M_x$ και εάν $y \in W$ έχουμε ότι:

$$\rho(f_n(y), f(y)) \leq \rho(f_n(y), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f(x)) + \rho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Άρα, $\exists A \in I : \forall n \notin A \quad \exists W$ περιοχή του x : $\rho(f_n(y), f(y)) < \varepsilon \quad \forall y \in W$ δηλαδή

$$f_n \xrightarrow{I-q.u.} f.$$

4.5. Partial functions

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε νέες έννοιες σύγκλισης και exhaustiveness για ακολουθίες μερικών συναρτήσεων τις οποίες έχουμε μελετήσει στο κεφάλαιο 3 σε συνδυασμό με τις έννοιες σύγκλισης του κεφαλαίου 1 και 2.

4.5.1.Ορισμός Έστω (X,d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *new simply-uniformly* στην f αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *new pointwise* στην f και $\forall y \in Y$, $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall m \in \mathbb{N} \exists V$ περιοχή του y και $n \geq m$: $d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \varepsilon$ για όλα τα $y \in V$

4.5.2.Ορισμός Έστω (X,d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *new semi-uniformly* στην f αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *new pointwise* στην f και $\forall y \in Y$ και $\forall \varepsilon > 0 \exists V$ περιοχή του y : $\forall m \in \mathbb{N} \exists n \geq m$: $d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \varepsilon$ για όλα τα $y \in V$

4.5.3.Ορισμός Έστω (X,d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *new quasi-uniformly* στην f αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *new pointwise* στην f και $\forall y \in Y$ και $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \exists V$ περιοχή του y : $d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \varepsilon$ για όλα τα $y \in V$

4.5.4.Ορισμός Έστω (X,d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *new almost uniformly* στην f αν $\forall y \in Y$ και $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ και V περιοχή του y : $\forall n \geq n_0$ και $\forall y \in V d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \varepsilon$

4.5.5.Ορισμός Έστω (X,d) μετρικός χώρος, Y μη κενό σύνολο και $f_n, f : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *new uniform pointwise* στην f αν $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall y \in Y \text{ card}\{n \in \mathbb{N} : d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) \geq \varepsilon\} \leq n_0$

4.5.6.Ορισμός Έστω (X,d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *new simply-uniformly exhaustive* στο $y_0 \in Y$ αν $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall m \in \mathbb{N} \exists V$ περιοχή του y και $n \geq m$: $d_H(f_n^{-1}(y), f_n^{-1}(y_0)) < \varepsilon$ για όλα τα $y \in V$

4.5.7.Ορισμός Έστω (X,d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *new semi-uniformly exhaustive* στο $y_0 \in Y$ αν $\forall \varepsilon > 0 \exists V$ περιοχή του $y : \forall m \in \mathbb{N} \exists n \geq m : d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \varepsilon$ για όλα τα $y \in V$

4.5.8.Ορισμός Έστω (X,d) μετρικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f_n, f : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *new quasi-uniformly exhaustive* στο $y_0 \in Y$ αν $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \exists V$ περιοχή του $y : d_H(f_n^{-1}(y), f^{-1}(y)) < \varepsilon$ για όλα τα $y \in V$

Σχόλιο : Χρησιμοποιώντας αυτούς τους ορισμούς πετυχαίνουμε νέα αποτελέσματα για partial functions.

Αναφορές κεφαλαίου 4

[1] S.Drahovsky, T.Salat and V.Toma, Points of Uniform Convergence and Oscillation of Sequences of Functions (1994/5)

[2] Steinhaus, H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique (French). Colloq. Math., 2, pages 73-74 (1951)

- [3] Fast, H., Sur la convergence statistique. Colloq. Math., 2, pages 41-44, (1951).
- [4] Kostyrko, P., Salat, T., & Wilczyński, W, I-convergence. Real Anal. Exchange, 26(2), pages 669-685 (2000/1)
- [5] Laczko, M., & Reclaw, I, Ideal limits of sequences of continuous functions. Fund. Math., 203(1), pages 39-46, (2009)
- [6] Letavaj, P, I-convergence to a set. Acta Math. Univ. Comenianae, 80(1), pages 103-106. (2011)