



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

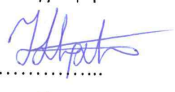
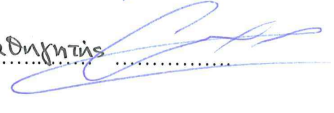
Ευαγγελία Χανδρή
Τα Μαθηματικά της Υπολογιστικής
Τομογραφίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΓΙΑ ΤΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ
ΕΘΝΙΚΟΥ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΗΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΘΗΝΑ 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη...
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
που απονέμει το

Τμήμα Μαθηματικών
του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών
Εγκρίθηκε την ...27^η /12/2012... από Εξεταστική Επιτροπή
αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
Ιωάννης Στρατής (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	
Χριστόδουλος Αθανασιάδης	Καθηγητής	
Γεράσιμος Μπαρμπάτης	Αναπλ. Καθηγητής	

Στο θείο μου

Εισαγωγή

Αυτή η διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών (Κατεύθυνση Εφαρμοσμένων Μαθηματικών) του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Σκοπός της είναι η μελέτη των μαθηματικών εργαλείων που χρειάζεται κάποιος για να καταλάβει τη θεωρία και τους αλγορίθμους της Υπολογιστικής Τομογραφίας.

Με τον όρο Αξονική Τομογραφία ή Υπολογιστική Τομογραφία εννοούμε τον ανασχηματισμό μιας συνάρτησης από το σύνολο των ολοκληρωμάτων της κατά μήκος γραμμών ή επιπέδων. Αυτό το μαθηματικό πρόβλημα συναντάται σε πολλές εφαρμογές στους τομείς της ιατρικής, της επιστήμης και της τεχνολογίας, με πιο σημαντική στη διαγνωστική ακτινολογία. Στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας περιγράφουμε τη γενική θεωρία και εξετάζουμε μερικές φυσικές αρχές που οδηγούν στην Υπολογιστική Τομογραφία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγουμε διάφορους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς, με πιο σημαντικό το μετασχηματισμό *Radon*. Αναλυτικότερα, δίνουμε σχέσεις και θεωρήματα που τον συνδέουν με τους υπόλοιπους μετασχηματισμούς, καθώς και τους ορισμούς των δυϊκών μετασχηματισμών, που είναι χρήσιμοι για τους τύπους αντιστροφής. Επίσης, ασχολούμαστε με θέματα μοναδικότητας και ευστάθειας, καθώς και με τα πεδία τιμών των μετασχηματισμών.

Στο τρίτο κεφάλαιο θέλουμε να δειγματοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς *Radon* και *Fourier* για μερικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι ουσιαστικά απροσδιόριστες για πεπερασμένο πλήθος κατευθύνσεων, ακόμα και στην ημι-διακριτή περίπτωση. Χρήσιμα αποτελέσματα αποδεικνύονται για συναρτήσεις περιορισμένες σε ζώνη, με τις ιδιότητες των οποίων ασχολούμαστε στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου. Στη δεύτερη παράγραφο εξετάζουμε την πιθανή ανάλυση του μετασχηματισμού *Radon* για πεπερασμένα πολλές κατευθύνσεις.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα περιγράψουμε αναλυτικά κάποιους αλγορίθμους ανασχηματισμού. Θα ξεκινήσουμε με τον ευρέως γνωστό αλγόριθμο *filtered backprojection* και θα μελετήσουμε την πιθανή λύση. Στη δεύτερη ενότητα θα δώσουμε μία ανάλυση σφάλματος του αλγορίθμου *Fourier* ο οποίος οδηγεί σε ένα βελτιωμένο αλγόριθμο, συγκρίσιμο σε ακρίβεια με τον *filtered backprojection*.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Στρατή Ιωάννη για την άριστη

συνεργασία την οποία είχα μαζί του, καθώς επίσης για την καθοδήγηση και υποστήριξή του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Αθανασιάδη Χριστόδουλο και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Μπαρμπάτη Γεράσιμο για την υποστήριξη και κατανόηση που έδειξαν προκειμένου να ολοκληρωθεί αυτή η εργασία.

Τέλος, θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους όσους με στήριξαν στην προσπάθειά μου αυτή. Ιδιαίτερώς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καλούς μου φίλους Νούτση Βασίλειο, Μητσάκο Νικόλαο και Παπαγεωργίου Γεώργιο για την πολύτιμη βοήθειά τους, καθώς και τη μητέρα μου και την αδελφή μου, για την κατανόηση και την υπομονή που έδειξαν όλο αυτό τον καιρό.

Περιεχόμενα

1	Υπολογιστική Τομογραφία	9
1.1	Το Βασικό Παράδειγμα: Transmission Computerized Tomography	9
1.2	Άλλες Εφαρμογές	11
2	Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί	16
2.1	Ορισμός και θεμελιώδεις ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωτικών τελεστών . . .	16
2.2	Τύποι αντιστροφής	22
2.3	Μοναδικότητα	28
2.4	Πεδία τιμών	32
2.5	Ο ασθενής μετασχηματισμός <i>Radon</i>	36
3	Δειγματοληψία και Ανάλυση	39
3.1	Το θεώρημα δειγματοληψίας	39
3.2	Ανάλυση	45
4	Αλγόριθμοι ανασχηματισμού	52
4.1	Αλγόριθμος διηθησμένης οπισθοπροβολής (<i>filtered backprojection</i>)	52
4.2	Ανασχηματισμός <i>Fourier</i>	61
4.3	Ένας άλλος αλγόριθμος	64
5	Παράρτημα	68
5.1	Ευθύ-Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης	68
5.2	Ανάλυση <i>Fourier</i>	68
5.3	Ολοκλήρωμα πρωτεύουσας τιμής <i>Cauchy</i>	70
5.4	Πολυώνυμα <i>Gegenbauer</i>	70
5.5	Σφαιρικές Αρμονικές	70
5.6	Ταχύς μετασχηματισμός <i>Fourier</i>	71

Κεφάλαιο 1

Υπολογιστική Τομογραφία

1.1 Το Βασικό Παράδειγμα: Transmission Computerized Tomography

Στην κλασσική ακτινολογία η τρισδιάστατη ανθρώπινη ανατομία προβάλλεται πάνω στο ακτινογραφικό φιλμ και απεικονίζεται σε δύο διαστάσεις. Αυτό όμως έχει ως αποτέλεσμα να χάνεται η πληροφορία της τρίτης διάστασης που αφορά στο βάθος των οργάνων του ανθρώπινου σώματος και επίσης μειώνεται η ευαισθησία των μεθόδων απεικόνισης σε μικρές αυξομειώσεις του συντελεστή απορρόφησης ακτίνων X.

Οι διάφορες μέθοδοι κλασσικής ακτινολογίας έχουν την ικανότητα να διακρίνουν πολύ μικρά ανατομικά αντικείμενα, που όμως πρέπει να έχουν σημαντικά διαφορετικό συντελεστή απορρόφησης από τους γύρω ιστούς.

Ορισμός 1.1 Η Αξονική τομογραφία ή Υπολογιστική τομογραφία (CT) είναι μια ιατρική μέθοδος απεικόνισης του ανθρώπινου σώματος, που χρησιμοποιεί την ακτινοβολία X. Η ψηφιακή επεξεργασία χρησιμοποιείται για να παράγει μια τρισδιάστατη εικόνα του εσωτερικού ενός οργάνου από μια σειρά δισδιάστατων εικόνων ακτίνων X, γύρω από έναν ενιαίο άξονα περιστροφής.

Η CT είναι μια διαγνωστική εξέταση που βασίζεται στον ανασχηματισμό μιας εικόνας από τη σύνθεση πολλών προβολών της περιοχής του σώματος που εξετάζεται. Υπάρχουν δυο βασικές μέθοδοι τομογραφικής απεικόνισης: η τομογραφία διέλευσης (transmission tomography) και η τομογραφία εκπομπής (emission tomography). Στην πρώτη, η πηγή και το ανιχνευτικό σύστημα βρίσκονται σε αντιδιαμετρική θέση και περιστρέφονται γύρω από το υπό εξέταση αντικείμενο (CT). Στη δεύτερη, η πηγή είναι η ίδια η υπό εξέταση περιοχή και γύρω από αυτήν περιστρέφεται το ανιχνευτικό σύστημα (SPECT, PET).

Το πιο βασικό παράδειγμα είναι η τομογραφία διέλευσης στη διαγνωστική ακτινολογία. Μια διατομή του ανθρώπινου σώματος έχει σαρωθεί από μια λεπτή δέσμη ακτίνων X, των οποίων η απώλεια έντασης καταγράφεται από έναν υπολογιστή για να παράγει μια δισδιάστατη εικόνα η οποία με τη σειρά της εμφανίζεται σε μια οθόνη. Ένα απλό φυσικό μοντέλο είναι το ακόλουθο: Έστω $f(x)$ ο συντελεστής απόσβεσης των ακτίνων X στο σημείο x , π.χ. όταν οι

ακτίνες X διασχίζουν μια μικρή απόσταση Δx , η σχετική απώλεια έντασης είναι

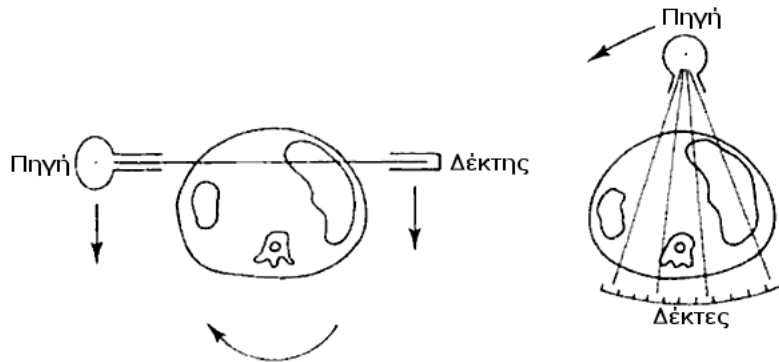
$$\Delta I/I = f(x)\Delta x \quad (1.1)$$

Έστω I_0 η αρχική ένταση της δέσμης L , την οποία φανταζόμαστε σαν ευθεία γραμμή, και έστω I_1 η ένταση της αφού περάσει από το σώμα. Από την (1.1) έχουμε ότι

$$I_1/I_0 = \exp\left[-\int_L f(x) dx\right] \quad (1.2)$$

δηλαδή, η διαδικασία σάρωσης μας παρέχει το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f κατά μήκος κάθε γραμμής L (line integral). Από όλα αυτά τα ολοκληρώματα πρέπει να ανασχηματίσουμε την f .

Ο μετασχηματισμός που απεικονίζει μια συνάρτηση του $\mathbb{R}^2$ στο σύνολο των ολοκληρωμάτων κατά μήκος γραμμής καλείται (δισδιάστατος) μετασχηματισμός *Radon*. Στην πράξη, τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν μόνο για πεπερασμένο πλήθος γραμμών L . Στην ουσία χρησιμοποιούνται δυο τεχνικές-γεωμετρίες σάρωσης. Η παλαιότερη τεχνική (1963) είναι η γεωμετρία παράλληλης σάρωσης, κατά την οποία ένα σύνολο παραλλήλων γραμμών ίσου μήκους χρησιμοποιούνται προς ένα πλήθος ίσα κατανεμημένων κατευθύνσεων. Απαιτούνται μόνο μία πηγή και ένας δέκτης, οι οποίοι κινούνται παράλληλα και περιστρέφονται κατά τη διάρκεια της σάρωσης. Η νεότερη, και ταχύτερη, τεχνική-γεωμετρία είναι η γεωμετρία αποκλίνουσας δέσμης (fan-beam scanning geometry) κατά την οποία η πηγή διατρέχει έναν κύκλο γύρω από το σώμα, εκτοξεύοντας μια ολόκληρη δέσμη ακτίνων X που μοιάζει με βεντάλια, οι οποίες καταγράφονται από μια γραμμική συστοιχία (array) δεκτών ταυτόχρονα σε κάθε θέση του δέκτη.



Σχήμα 1.1: (part1:parallel scanning, part 2:fan-beam scanning)

Επομένως, το πραγματικό πρόβλημα στην CT είναι να ανασχηματίσουμε την f από ένα πεπερασμένο πλήθος ολοκληρωμάτων κατά μήκος γραμμής, και η διαδικασία ανασχηματισμού να προσαρμοστεί στην τεχνική-γεωμετρία σάρωσης. Μερικές φορές δεν είναι δυνατό ή επιθυμητό να σαρωθεί όλη η διατομή. Αν κάποιος ενδιαφέρεται για ένα μικρό κομμάτι του σώματος, είναι καλύτερο να μην εκτεθεί και το υπόλοιπο σώμα στην ακτινοβολία. Αυτό σημαίνει ότι

υπολογίζονται μόνο οι γραμμές που «χτυπούν» την περιοχή του ενδιαφέροντος, ή που περνούν πολύ κοντά από αυτήν. Η αντίθετη περίπτωση εμφανίζεται αν στην περιοχή υπάρχει κάποιο αδιαφανές εμφύτευμα. Τότε πρέπει να ανασχηματίσουμε την f εκτός του εμφυτεύματος, με τα ολοκληρώματα κατά μήκος των γραμμών που διέρχονται μέσα από το εμφύτευμα να λείπουν.

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις μιλάμε για προβλήματα με μη επαρκή δεδομένα. Τόσο η δυνατότητα διερεύνησης της μοναδικότητας και της ευστάθειας όσο και η ανάπτυξη μεθόδων ανασχηματισμού για προβλήματα με μη επαρκή δεδομένα είναι, λοιπόν, απαραίτητα για μια σοβαρή μελέτη της CT .

Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει μόνο δισδιάστατα προβλήματα. Προκειμένου να εξασφαλίσουμε τρισδιάστατη εικόνα πρέπει να σαρώσουμε το σώμα στρώμα-στρώμα (layer by layer). Αν αυτό είναι πολύ χρονοβόρο (π.χ. μια εξέταση των χτύπων της καρδιάς) πρέπει να αναγάγουμε το πρόβλημα σε μια σειρά δισδιάστατων προβλημάτων. Τότε θα πρέπει να ασχοληθούμε με το πλήρες τρισδιάστατο πρόβλημα, στο οποίο θα επεξεργαζόμαστε ταυτόχρονα τα ολοκληρώματα κατά μήκος γραμμών διαμέσου των μερών του σώματος. Εφόσον είναι πρακτικά αδύνατο να σαρωθεί ένας ασθενής από την κορυφή μέχρι τα νύχια, τα ελλειπή προβλήματα δεδομένων στην τρισδιάστατη CT είναι ο κανόνας και όχι η εξαίρεση. Για παράδειγμα αναφέρουμε τη γεωμετρία-τεχνική σάρωσης κωνικής δέσμης, στην οποία η πηγή περιστρέφεται γύρω από το αντικείμενο σε κύκλο, στέλνοντας έναν κώνο ακτίνων X , οι οποίες καταγράφονται από έναν ανιχνευτή δισδιάστατης διάταξης. Ακόμα και στην υποθετική περίπτωση απείρου πλήθους θέσεων της πηγής, υπολογίζονται με αυτόν τον τρόπο μόνο εκείνες οι γραμμές που συναντούν την καμπύλη της πηγής. Αφού αυτές οι γραμμές αποτελούν μόνο ένα μικρό κλάσμα του συνόλου των γραμμών που συναντούν το αντικείμενο, το σύνολο δεδομένων είναι εξαιρετικά ελλιπές.

Τα προβλήματα που αναφέραμε είναι στην πραγματικότητα καθαρά μαθηματικά και λύνονται με μαθηματικά εργαλεία. Αυτό θα προσπαθήσουμε να κάνουμε σε αυτή την εργασία. Θα ενδιαφερόμαστε για θέματα όπως η μοναδικότητα, η ευστάθεια, η ακρίβεια, η ανάλυση και φυσικά ο ανασχηματισμός αλγορίθμων.

1.2 Άλλες Εφαρμογές

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η CT λαμβάνει χώρα στις περιπτώσεις όπου η εσωτερική δομή ενός αντικειμένου εξετάζεται εκθέτοντάς το σε κάποιου είδους ακτινοβολία που διαδίδεται κατά μήκος ευθειών γραμμών, της οποίας η απώλεια έντασης καθορίζεται από την (1.1). Μία από τις πολλές εφαρμογές αυτού του τύπου είναι το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο. Σε αυτό, μια δέσμη περνάει μέσα από ένα επίπεδο δείγμα (*planar specimen*) υπό διαφορετικές γωνίες πρόσπτωσης. Αφού η δέσμη έχει να διασχίσει το δείγμα εγκαρσίως, η γωνία πρόσπτωσης περιορίζεται σε ένα διάστημα λιγότερο από 180° , συνήθως 120° .

Σε άλλες εφαρμογές η πηγή ακτινοβολίας βρίσκεται μέσα στο αντικείμενο και ζητούμενο αποτελεί η κατανομή των πηγών, όπως για παράδειγμα στην πυρηνική ιατρική (*nuclear medicine*). Εδώ κάποιος θέλει να ανακαλύψει την κατανομή f μιας ραδιοφαρμακευτικής ουσίας (*radiopharmaceutical*) σε μια εγκάρσια τομή του σώματος μετρώντας την ακτινοβολία γύρω από το σώμα. Αν μ είναι ο συντελεστής εξασθένησης (*attenuation*) του σώματος (εδώ

δηλαδή το μ αναλαμβάνει το ρόλο που είχε η f στην παρ. 1.1), και υποθέτοντας ότι ισχύει ο ίδιος νόμος με την (1.1), η ένταση γύρω από το σώμα, I , που μετρείται από έναν ανιχνευτή ευθυγραμμισμένο κατά τρόπο ώστε να καταγράφει μόνο την ακτινοβολία κατά μήκος της ευθείας γραμμής L , δίνεται από τη σχέση

$$I = \int_L f(x) \exp\left\{- \int_{L(x)} \mu(y) dy\right\} dx \quad (1.3)$$

όπου $L(x)$ είναι το τμήμα της L ανάμεσα στο x και τον ανιχνευτή.

Αν το μ είναι αμελητέο, τότε το I είναι ουσιαστικά το ολοκλήρωμα κατά μήκος γραμμών της f . Όμως στην πράξη το μ δεν είναι μικρό. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ανασχηματίσουμε την f από σταθμισμένα ολοκληρώματα κατά μήκος γραμμών, με τη συνάρτηση βάρους να καθορίζεται από την απόσβεση μ . Ο σχετικός ολοκληρωτικός μετασχηματισμός είναι τώρα μια γενίκευση του μετασχηματισμού *Radon* ο οποίος καλείται εξασθενημένος μετασχηματισμός *Radon* (παράγραφος 2.5).

Μια σημαντική ειδική περίπτωση εμφανίζεται όταν οι πηγές εκτοξεύουν τα σωματίδια κατά ζεύγη προς αντίθετες κατευθύνσεις και η ακτινοβολία στις αντίθετες κατευθύνσεις μετρείται μόνο όταν τα δύο σωματίδια φθάνουν στους αντικριστούς ανιχνευτές ταυτόχρονα (PET). Σε αυτήν την περίπτωση, η (1.3) αντικαθίσταται από την

$$I = \int_L f(x) \exp\left\{- \int_{L_+(x)} \mu(y) dy - \int_{L_-(x)} \mu(y) dy\right\} dx \quad (1.4)$$

όπου $L_+(x)$, $L_-(x)$ είναι τα δύο τμήματα της L που καταλήγουν στο x . Αφού το άθροισμα των ολοκληρωμάτων μέσα στην εκθετική συνάρτηση ισοδυναμεί με το ολοκλήρωμα επί της L έχουμε

$$I = \exp\left\{- \int_{L(x)} \mu(y) dy\right\} \int_L f(x) dx \quad (1.5)$$

η οποία δεν οδηγεί σε έναν νέο μετασχηματισμό.

Στην *SPECT* καθώς και στην *PET* ενδιαφερόμαστε για την f , όχι για το μ . Ωστόσο, αφού το μ εισέρχεται στην ολοκληρωτική εξίσωση για την f πρέπει να το υπολογίσουμε οπωσδήποτε, είτε με πρόσθετες μετρήσεις είτε με μαθηματικά εργαλεία.

Μια άλλη πηγή προβλημάτων τύπου *CT* είναι η τομογραφία υπερήχων στην προσέγγιση γεωμετρικής ακουστικής (*geometrical acoustics*). Εδώ η σχετική ποσότητα είναι ο δείκτης διαθλάσεως n του υπό εξέταση αντικειμένου. Στην απλούστερη περίπτωση υπολογίζεται ο χρόνος διάδοσης-μετακίνησης $T(x, y)$ ενός ηχητικού σήματος που ταξιδεύει ανάμεσα σε δύο σημεία x και y , τα οποία βρίσκονται στην επιφάνεια του αντικειμένου. Η τροχιά του σήματος είναι η γεωδαισιακή Γ_n ως προς τη μετρική $ds = n\sqrt{d(x_1)^2 + d(x_2)^2 + d(x_3)^2}$ που ενώνει το x και το y . Έχουμε

$$T(x, y) = \int_{\Gamma_n(x, y)} n ds \quad (1.6)$$

Ξέροντας το $T(x, y)$ για πολλά ζευγάρια πομπών-δεκτών x και y θέλουμε να υπολογίσουμε το n . Η εξίσωση (1.6) είναι μια μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση για το n . Ο *Schomberg* (1978) ανέπτυξε έναν αλγόριθμο για το μη γραμμικό πρόβλημα. Γραμμικοποιώντας και θέτοντας (υποθέτοντας) όπου $n = n_0 + f$ με n_0 γνωστό και f μικρό παίρνουμε προσεγγιστικά

$$T(x, y) - \int_{\Gamma_{n_0}(x, y)} n_0 ds = \int_{\Gamma_{n_0}(x, y)} f ds \quad (1.7)$$

και πρέπει να ανασχηματίσουμε την f από τα ολοκληρώματα επί των καμπυλών $\Gamma_{n_0}(x, y)$. Αυτό είναι το πρόβλημα της ολοκληρωτικής γεωμετρίας σύμφωνα με τους *Gelfand et.al.* (1965). Οι τύποι αντιστροφής για ειδικές οικογένειες καμπυλών έχουν προέλθει από τους *Cormack* (1981), *Cormack* και *Quinto* (1980) και *Helgason* (1980). Στη σεισμολογία οι καμπύλες είναι κύκλοι σύμφωνα με τον *Anderson* (1984). Αν το n_0 είναι σταθερό, οι γεωδαισιακές είναι ευθείες γραμμές και καταλήγουμε στο πρόβλημα της *CT*.

Είναι γνωστό ότι τα προβλήματα αντιστροφής για υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις μερικές φορές μπορούν να αναχθούν σε ένα πρόβλημα της ολοκληρωτικής γεωμετρίας (*Romanou* 1974). Σαν παράδειγμα παραθέτουμε τη θεμελιώδη εξίσωση της τομογραφίας διάθλασης και δείχνουμε ότι η *CT* είναι μια οριακή περίπτωση της τομογραφίας διάθλασης. Τα ακριβή στοιχεία των ανωτέρω παραπομπών μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία του [5].

Θεωρούμε ένα αντικείμενο σκέδασης του $\mathbb{R}^2$ το οποίο περιγράφεται από το δείκτη διάθλασης του $n(x) = (1 + f(x))^{1/2}$ όπου η f μηδενίζεται έξω από τη μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή το αντικείμενο περιέχεται στο μοναδιαίο κύκλο. Αυτό το αντικείμενο εκτίθεται μια φορά σε ένα αρμονικό προσπίπτον κύμα $e^{-ikt} u_I(x)$ με συχνότητα κ . Θεωρούμε μόνο επίπεδα κύματα, δηλαδή

$$u_I(x) = e^{ik\theta \cdot x} \quad (1.8)$$

το μοναδιαίο διάνυσμα $\theta \in S^1$ είναι η κατεύθυνση της διάδοσης.

Στην (ευθεία) σκέδαση, κάποιος βρίσκει για δεδομένη f ένα σκεδασμένο κύμα $e^{-ikt} u_S(x)$ τέτοιο ώστε το $u = u_I + u_S$ ικανοποιεί την επαγόμενη κυματική εξίσωση

$$\Delta u + \kappa^2(1 + f)u = 0, \quad (1.9)$$

όπου Δ η Λαπλασιανή, και μια συνοριακή συνθήκη στο άπειρο. Προκειμένου να λύσουμε την (1.9) με την προσέγγιση του *Rytov* αντικαθιστούμε στην (1.9) όπου $u = u_I e^{\kappa w}$ όπου ο παράγοντας κ έχει εισαχθεί για ευκολία. Έχουμε

$$\kappa \Delta w + 2i\kappa^2 \theta \nabla w + \kappa^2 |\nabla w|^2 = -\kappa^2 f \quad (1.10)$$

με ∇ να είναι η κλίση. Η προσέγγιση *Rytov* u_R λαμβάνεται μη λαμβάνοντας υπόψη το $|\nabla w|^2$, δηλαδή $u_R = u_I e^{\kappa w_R}$ με το w_R να ικανοποιεί την

$$\nabla w_R + 2i\kappa \theta \nabla w_R = -\kappa f \quad (1.11)$$

ή την

$$\Delta(u_I w_R) + \kappa^2(u_I w_R) = -\kappa f u_I. \quad (1.12)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη συνάρτηση *Green* η οποία στην περίπτωση μας είναι η $H_0(\kappa|x|)$ με $4iH_0$ τη μηδενικής τάξης συνάρτηση *Hankel* πρώτου είδους. Αυτό που χρειαζόμαστε να ξέρουμε για την H_0 είναι η αναπαράσταση του ολοκληρώματος

$$H_0(\kappa|x|) = \frac{-i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^1} \exp\{i(|x_1|\alpha(\sigma) + x_2\sigma)\} \frac{d\sigma}{\alpha(\sigma)} \quad (1.13)$$

όπου $\alpha(\sigma) = \sqrt{\kappa^2 - \sigma^2}$. Η λύση της εξίσωσης (1.12) μπορεί τώρα να γραφτεί σαν

$$u_I w_R(x) = -\kappa \int_{\mathbb{R}^2} H_0(\kappa|x-y|) f(y) u_I(y) dy. \quad (1.14)$$

Αυτή (με την προσέγγιση του *Rytov*) επιλύει το ευθύ πρόβλημα της σκέδασης.

Στην αντίστροφη σκέδαση πρέπει να υπολογίσουμε την f από γνωστό u_S έξω από το σκεδαζόμενο αντικείμενο. Αν χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του *Rytov*, το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης μπορεί να λυθεί απλά λύνοντας την εξίσωση (1.14) για f , χρησιμοποιώντας σαν δεδομένο $g(\theta, s) = w_R(r\theta + s\theta^\perp)$ όπου r είναι ένας σταθερός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας, δηλαδή το w_R υπολογίζεται έξω από έναν κύκλο ακτίνας r . Εισάγοντας το u_I από την (1.8) και το H_0 από την (1.13) στην (1.14) οδηγούμαστε στην

$$\begin{aligned} g(\theta, s) &= -\kappa e^{-i\kappa r} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1} H_0(\kappa((r-r')^2 + (s-s')^2))^{1/2} f(r'\theta + s'\theta^\perp) e^{i\kappa r'} dr' ds' \\ &= \frac{i\kappa}{4\pi} e^{-i\kappa r} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1} e^{i(|r-r'|\alpha(\sigma) + (s-s')\sigma)} \frac{d\sigma}{\alpha(\sigma)} f(r'\theta + s'\theta^\perp) e^{i\kappa r'} dr' ds' d\sigma. \end{aligned}$$

Αφού $r > 1$ και $f(r'\theta + s'\theta^\perp) = 0$ για $|r'| > 1$ μπορούμε να παραλείψουμε την απόλυτη τιμή από το $|r-r'|$. Αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης έχουμε

$$g(\theta, s) = \frac{i\kappa}{4\pi} e^{-i\kappa r} \int_{\mathbb{R}^1} e^{is\sigma} \frac{e^{ir\alpha(\sigma)}}{\alpha(\sigma)} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-i(r'(\alpha(\sigma)-\kappa) + s'\sigma)} f(r'\theta + s'\theta^\perp) dr' ds' d\sigma.$$

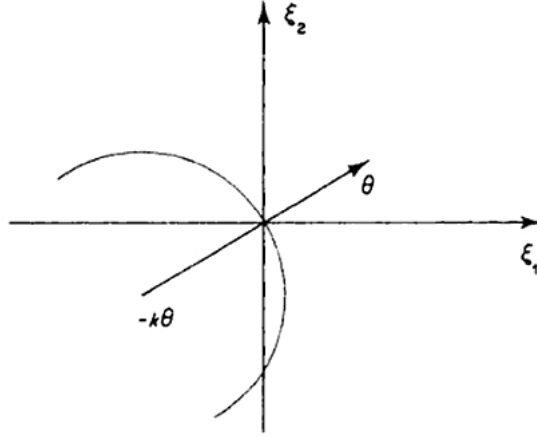
Η ολοκλήρωση ως προς το $y = r'\theta + s'\theta^\perp$ είναι ένας μετασχηματισμός *Fourier* στο $\mathbb{R}^2$, αφού

$$g(\theta, s) = \frac{i\kappa}{2} e^{-i\kappa r} \int_{\mathbb{R}^1} e^{is\sigma} \frac{e^{ir\alpha(\sigma)}}{\alpha(\sigma)} \hat{f}((\alpha(\sigma) - \kappa)\theta + \sigma\theta^\perp) d\sigma.$$

Η ολοκλήρωση ως προς σ είναι ένας αντίστροφος μετασχηματισμός *Fourier* στο $\mathbb{R}^1$. Από το θεώρημα αντιστροφής *Fourier* παίρνουμε ότι

$$\hat{f}((\alpha(\sigma) - \kappa)\theta + \sigma\theta^\perp) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} i \frac{\alpha(\sigma)}{\kappa} e^{ir(\kappa - \alpha(\sigma))} \hat{g}(\theta, \sigma) \quad (1.15)$$

όπου $\widehat{g}$ είναι ο μονοδιάστατος μετασχηματισμός *Fourier* ως προς το δεύτερο όρισμα. Αν το σ κινείται στο διάστημα $[-\kappa, \kappa]$, τότε $(\alpha(\sigma) - \kappa)\theta + \sigma\theta^\perp = \sqrt{(\kappa^2 - \sigma^2)\theta + \sigma\theta^\perp - \kappa\theta}$ διαγράφει ένα ημικύκλιο γύρω από το $-\kappa\theta$ που περνάει από την αρχή των αξόνων. Ως εκ τούτου, αν το θ μεταβάλλεται στο S^1 , η f δίνεται από την (1.15) σε έναν κύκλο ακτίνας τουλάχιστον κ .



Σχήμα 1.2: (ημικύκλιο στο οποίο η f δίνεται από την (1.15))

Υποθέτουμε ότι δεν ενδιαφερόμαστε για συχνότητες εκτός από κ και ότι η προσέγγιση του *Rytou* ισχύει, τότε η (1.15) λύνει το αντίστροφο πρόβλημα της σκέδασης. Στην πραγματικότητα η (1.15) είναι η αφετηρία της τομογραφίας διαθλάσεως. Αν υποθέσουμε ότι $\kappa \rightarrow \infty$ τότε $\frac{\alpha(\sigma)}{\kappa} \rightarrow 1$, $\alpha(\sigma) - \kappa \rightarrow 0$, και έτσι η (1.15) γίνεται

$$\widehat{f}(\sigma\theta^\perp) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} i \widehat{g}(\theta, \sigma) \quad (1.16)$$

δηλαδή οι κύκλοι στους οποίους ορίζεται η f γίνονται γραμμές. Έτσι, για μεγάλες συχνότητες και με την προσέγγιση του *Rytou*, τα ολοκληρώματα κατά μήκος γραμμών της f δίνονται από το σκεδαζόμενο πεδίο έξω από το σκεδαζόμενο αντικείμενο, δηλαδή η *CT* είναι μια περιορισμένη περίπτωση της κυματικής εξίσωσης του αντίστροφου προβλήματος της σκέδασης.

Κεφάλαιο 2

Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε και μελετάμε από θεωρητικής πλευράς διάφορους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς. Το υλικό αυτού του κεφαλαίου χρησιμεύει σαν βάση για το υπόλοιπο αυτής της εργασίας.

2.1 Ορισμός και θεμελιώδεις ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωτικών τελεστών

Ο (n -διάστατος) μετασχηματισμός *Radon* απεικονίζει μια συνάρτηση του $\mathbb{R}^n$ στο σύνολο των ολοκληρωμάτων στο υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$. Ειδικά, αν $\theta \in S^{n-1}$ και $s \in \mathbb{R}^1$ τότε

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = \int_{x\theta=s} f(x)dx = \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y)dy$$

είναι το ολοκλήρωμα της $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ με $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ ο χώρος *Schwartz*, στο κάθετο επίπεδο του θ με απόσταση s από το μηδέν. Προφανώς ο $\mathbf{R}f$ είναι μια συνάρτηση στο μοναδιαίο κύλινδρο $Z = S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ του $\mathbb{R}^{n+1}$, δηλαδή $\mathbf{R}f(-\theta, -s) = \mathbf{R}f(\theta, s)$. Επίσης γράφουμε

$$\mathbf{R}_\theta f(s) = \mathbf{R}f(\theta, s).$$

Ο (n -διάστατος) μετασχηματισμός $\mathbf{P}$ απεικονίζει μια συνάρτηση του $\mathbb{R}^n$ στο σύνολο των ολοκληρωμάτων κατά μήκος γραμμών. Ειδικά, αν $\theta \in S^{n-1}$ και $x \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathbf{P}f(\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + t\theta)dt$$

είναι το ολοκλήρωμα της $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ κατά μήκος ευθείας γραμμής διαμέσου του x με κατεύθυνση θ . Προφανώς, ο $\mathbf{P}f(\theta, x)$ δεν αλλάζει αν το x κινείται κατά την κατεύθυνση του θ . Εμείς κανονικά θα περιορίσουμε το x στο $\theta^\perp$ το οποίο καθιστά την $\mathbf{P}f$ μια συνάρτηση επί της εφαπτόμενης δέσμης

$$T = (\theta, x) : \theta \in S^{n-1}, x \in \theta^\perp$$

στο S^{n-1} . Επίσης γράφουμε

$$\mathbf{P}_\theta f(x) = \mathbf{P}f(\theta, x).$$

Ο $\mathbf{P}_\theta f$ καλείται μερικές φορές προβολή της f στο $\theta^\perp$. Για $n = 2$ ο $\mathbf{P}$ και ο $\mathbf{R}$ συμπίπτουν εκτός από το συμβολισμό των ορισμάτων. Φυσικά είναι πιθανό να εκφράσουμε τον $\mathbf{R}f(\omega, s)$ σαν ένα ολοκλήρωμα του $\mathbf{P}f$: για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ με $\theta \perp \omega$ έχουμε

$$\mathbf{R}f(\omega, s) = \int_{x \in \theta^\perp, x\omega=s} \mathbf{P}f(\theta, x) dx \quad (2.1)$$

Η αποκλίνουσα δέσμη του μετασχηματισμού ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{D}f(\alpha, \theta) = \int_0^\infty f(\alpha + t\theta) dt.$$

Αυτό είναι το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της ημιευθείας με τελικό σημείο $\alpha \in \mathbb{R}^n$ και κατεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$. Επίσης γράφουμε

$$\mathbf{D}_\alpha f(\theta) = \mathbf{D}f(\alpha, \theta).$$

Αν $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε $\mathbf{R}_\theta f, \mathbf{P}_\theta f, \mathbf{R}f, \mathbf{P}f$ είναι σε χώρους *Schwartz* στους $\mathbb{R}^1, \theta^\perp, Z, T$ αντίστοιχα, οι τελευταίοι να ορίζονται από τοπικές συντεταγμένες ή απλά περιορίζοντας τις συναρτήσεις του $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ στο Z , εκείνες του $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^{2n})$ στο T .

Εισάγονται παρακάτω πολλές σημαντικές ιδιότητες των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών ακολουθούμενοι από τύπους που αφορούν συνελίξεις και μετασχηματισμούς *Fourier*. Κάθε φορά που παίρνουμε συνελίξεις ή μετασχηματισμούς *Fourier* των συναρτήσεων στο Z ή στο T λαμβάνονται ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή

$$h * g(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^1} h(\theta, s - t) g(\theta, t) dt,$$

$$\widehat{h}(\theta, \sigma) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-is\sigma} h(\theta, s) ds$$

για $h, g \in \mathfrak{S}(Z)$ και

$$h * g(\theta, x) = \int_{\theta^\perp} h(\theta, x - y) g(\theta, y) dy, \quad x \in \theta^\perp$$

$$\widehat{h}(\theta, \xi) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int_{\theta^\perp} e^{-ix\xi} h(\theta, x) dx, \quad \xi \in \theta^\perp$$

για $h, g \in \mathfrak{S}(T)$.

Ξεκινάμε με το λεγόμενο "Θεώρημα προβολής" ή "*Fourier slice theorem*".

Θεώρημα 2.1 Για μία συνάρτηση $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$(\mathbf{R}_\theta f)^\wedge(\sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta), \quad \sigma \in \mathbb{R}^\ell,$$

$$(\mathbf{P}_\theta f)^\wedge(\eta) = (2\pi)^{1/2} \widehat{f}(\eta), \quad \eta \in \theta^\perp$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_\theta f)^\wedge(\sigma) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^\ell} e^{-i\sigma s} \mathbf{R}_\theta f(s) ds \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-i\sigma s} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy ds. \end{aligned}$$

Με $x = s\theta + y$ να είναι η νέα μεταβλητή της ολοκλήρωσης έχουμε $s = \theta x$, $dx = dy ds$, και επομένως

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_\theta f)^\wedge(\sigma) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sigma \theta x} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta). \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_\theta f)^\wedge(\eta) &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\theta^\perp} e^{-i\eta y} \mathbf{P}_\theta f(y) dy \\ &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\theta^\perp} e^{-i\eta y} \int_{\mathbb{R}^1} f(y + t\theta) dt dy \\ &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta x} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{1/2} \widehat{f}(\eta) \end{aligned}$$

■

Σαν απλή εφαρμογή, απορρέει ο τύπος

$$\mathbf{R}_\theta D^\alpha f = \theta^\alpha D^{|\alpha|} \mathbf{R}_\theta f \quad (2.2)$$

όπου το $D^{|\alpha|}$ ενεργεί πάνω στη δεύτερη μεταβλητή του $\mathbf{R}f$. Για την απόδειξη της παραπάνω εξίσωσης χρησιμοποιούμε το θεώρημα 2.1, τη σχέση

$$(D^{|\alpha|} f)^\wedge = i^{|\alpha|} \xi^{|\alpha|} \widehat{f}, \quad x^{|\alpha|} f^\wedge = i^{|\alpha|} D^{|\alpha|} \widehat{f}$$

(από τη σχέση 3 του παραρτήματος στην Ανάλυση *Fourier*) για $f \in \mathfrak{S}$, και το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός *Fourier* είναι αντιστρέψιμος στον $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^1)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_\theta D^\alpha f)(\sigma) &= (2\pi)^{(n-1)/2} (D^\alpha f)(\sigma\theta) \\ &= (2\pi)^{(n-1)/2} i^{|\alpha|} \sigma^{|\alpha|} \theta^\alpha \widehat{f}(\sigma\theta) \\ &= i^{|\alpha|} \sigma^{|\alpha|} \theta^\alpha (\mathbf{R}_\theta f)(\sigma) \\ &= \theta^\alpha (D^{|\alpha|} \mathbf{R}_\theta f)(\sigma). \end{aligned}$$

Προκειμένου να προκύψει ένας τύπος για την παράγωγο του $\mathbf{R}f$ ως προς θ δίνουμε έναν ισοδύναμο ορισμό του μετασχηματισμού *Radon* όσον αφορά τη δ -συνάρτηση. Θέτοντας

$$\delta^b(t) = \int_{-b}^b e^{its} ds$$

έχουμε ότι $\delta^b \rightarrow \delta$ κατά σημείο στον $\mathfrak{S}^1$. Οπότε, για $f \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta^b(s - x\theta) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\theta^\perp} f(t\theta + y) dy \delta^b(s - t) dt = \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy.$$

Με αυτή την έννοια γράφουμε

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(s - x\theta) dx. \quad (2.3)$$

Η (2.3) παρέχει μια φυσική επέκταση του $\mathbf{R}f$ στον $(\mathbb{R}^n - 0) \times \mathbb{R}^1$ αφού, για $r > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}f(r\theta, rs) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(rs - rx\theta) dx = r^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(s - x\theta) dx \\ &= r^{-1} \mathbf{R}f(\theta, s). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Δηλαδή, το $\mathbf{R}f$ επεκτείνεται σε μία ομογενή συνάρτηση βαθμού -1. Αυτή τη συνάρτηση μπορούμε να την παραγωγίσουμε ως προς την πρώτη της μεταβλητή και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \mathbf{R}f(\theta, s) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \delta(s - x\theta) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x_k \delta'(s - x\theta) dx \\ &= - \frac{\partial}{\partial s} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x_k \delta(s - x\theta) dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{R}(x_k f))(\theta, s).$$

Αυτή η τυπική διαδικασία καθώς και η παραγωγή της (2.4) μπορεί να δικαιολογηθεί με τη χρήση της προσέγγισης της δ-συνάρτησης δ^b . Για k έναν πολυδείκτη έχουμε

$$D_\theta^k \mathbf{R}f = (-1)^{|k|} \frac{\partial^{|k|}}{\partial s^{|k|}} \mathbf{R}(x^k f) \quad (2.5)$$

όπου D_θ δηλώνει την παράγωγο ως προς θ .

Από ευθείς υπολογισμούς από την προηγούμενη απόδειξη και από τη σχέση 4 του παραρτήματος στην Ανάλυση *Fourier* έχουμε

Θεώρημα 2.2 Για $f, g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\theta(f * g) &= \mathbf{R}_\theta f * \mathbf{R}_\theta g \\ \mathbf{P}_\theta(f * g) &= \mathbf{P}_\theta f * \mathbf{P}_\theta g. \end{aligned}$$

Παρακάτω θέλουμε να ορίσουμε τους δυϊκούς τελεστές $\mathbf{R}_\theta^\#, \mathbf{R}^\#, \mathbf{P}_\theta^\#, \mathbf{P}^\#$. Ξεκινάμε από

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} \mathbf{R}_\theta f(s) g(s) ds &= \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) g(s) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x\theta) dx. \end{aligned}$$

Ορίζοντας $\mathbf{R}_\theta^\# g(x) = g(x\theta)$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^1} \mathbf{R}_\theta f(s) g(s) ds = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathbf{R}_\theta^\# g(x) dx. \quad (2.6)$$

Ολοκληρώνοντας στον S^{n-1} έχουμε

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} \mathbf{R}f(\theta, s) g(\theta, s) ds d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathbf{R}^\# g(x) dx, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R}^\# g(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, x\theta) d\theta. \quad (2.8)$$

Ομοίως,

$$\int_{\theta^\perp} \mathbf{P}_\theta f(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathbf{P}_\theta^\# g(x) dx, \quad (2.9)$$

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \mathbf{P}f(\theta, x) g(\theta, x) dx d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathbf{P}^\# g(x) dx \quad (2.10)$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta^\# g(x) &= g(\theta, E_\theta x) \\ \mathbf{P}^\# g(x) &= \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta x) d\theta\end{aligned}$$

με E_θ την ορθογώνια προβολή στον $\theta^\perp$.

Σημειώνουμε ότι οι $\mathbf{R}$ και $\mathbf{R}^\#$ σχηματίζουν ένα δυϊκό ζευγάρι με την έννοια της ολοκληρωτικής γεωμετρίας: ενώ ο $\mathbf{R}$ ολοκληρώνει κατά όλα τα σημεία σε ένα επίπεδο, ο $\mathbf{R}^\#$ ολοκληρώνει κατά όλα τα επίπεδα διαμέσου ενός σημείου. Αυτό είναι η βάση για εκτεταμένες γενικεύσεις του μετασχηματισμού *Radon*. Το ίδιο εφαρμόζεται και στον $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^\#$.

Θεώρημα 2.3 Για $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ και $g \in \mathfrak{S}(Z), \mathfrak{S}(T)$ αντίστοιχα έχουμε

$$\begin{aligned}(\mathbf{R}^\# g) * f &= \mathbf{R}^\#(g * \mathbf{R}f) \\ (\mathbf{P}^\# g) * f &= \mathbf{P}^\#(g * \mathbf{P}f).\end{aligned}$$

Θεώρημα 2.4 Για $g \in \mathfrak{S}(Z)$ έχουμε

$$(\mathbf{R}^\# g)(\xi) = (2\pi)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} (\widehat{g}(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|) + \widehat{g}(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|)).$$

Θεώρημα 2.5 Για $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^\# \mathbf{R}f &= |S^{n-2}| |x|^{-1} * f, \\ \mathbf{P}^\# \mathbf{P}f &= 2|x|^{1-n} * f,\end{aligned}$$

με $|S^{m-1}|$ είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας S^{m-1} στον $\mathbb{R}^m$.

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει τους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς μόνο στον $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Αφού

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^1} |\mathbf{R}_\theta f(s)| ds &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx, \\ \int_{\theta^\perp} |\mathbf{P}_\theta f(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx, \\ \int_{S^{n-1}} |\mathbf{D}_\alpha f(\theta)| d\theta &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |x - \alpha|^{1-n} dx,\end{aligned}$$

οι τελεστές $\mathbf{R}_\theta$, $\mathbf{P}_\theta$ εύκολα επεκτείνονται στον $\mathfrak{S}_1(\mathbb{R}^n)$, και ο $\mathbf{D}_\alpha$ στον $\mathfrak{S}_1(\mathbb{R}^n, |x - \alpha|^{1-n})$. Κάθε φορά που εφαρμόζουμε αυτούς τους τελεστές σε συναρτήσεις εκτός του $\mathfrak{S}$ υποθέτουμε

σιωπηρά ότι εννοούμε τους επεκτεινόμενους τελεστές. Οι σχέσεις διυϊκότητας (2.6), (2.7), (2.8) ισχύουν κάθε φορά που μία από τις συναρτήσεις $(\mathbf{R}|f|)g$, $f(\mathbf{R}^\#|g|)$ είναι ολοκληρώσιμη, και αντιστοιχούν στις (2.9), (2.10).

Οι χώροι Hilbert $L_2(Z)$, $L_2(T)$ ορίζονται φυσικά από τα εσωτερικά γινόμενα

$$(g, h)_{L_2(Z)} = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, s) \bar{h}(\theta, s) ds, d\theta,$$

$$(g, h)_{L_2(T)} = \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} g(\theta, x) \bar{h}(\theta, x) dx, d\theta.$$

Έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα συνέχειας.

Θεώρημα 2.6 Έστω Ω^n η μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$. Τότε οι τελεστές

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\theta &: L_2(\Omega^n) \longrightarrow L_2([-1, 1], (1 - s^2)^{(1-n)/2}), \\ \mathbf{P}_\theta &: L_2(\Omega^n) \longrightarrow L_2(\theta^\perp, (1 - |x|^2)^{-1/2}), \\ \mathbf{R} &: L_2(\Omega^n) \longrightarrow L_2(Z, (1 - s^2)^{(1-n)/2}), \\ \mathbf{P} &: L_2(\Omega^n) \longrightarrow L_2(T, (1 - |x|^2)^{-1/2}), \\ \mathbf{D}_\alpha &: L_2(\Omega^n) \longrightarrow L_2(S^{n-1}), (|\alpha| > 1) \end{aligned}$$

είναι συνεχείς.

Από το θεώρημα (2.6) προκύπτει ότι οι τελεστές $\mathbf{R}_\theta$, $\mathbf{P}_\theta$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{D}_\alpha$ έχουν συνεχείς συζυγείς.

2.2 Τύποι αντιστροφής

Οι μη πεπλεγμένοι (ρητοί) τύποι αντιστροφής για τους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς είναι όχι μόνο προφανούς σημασίας για την ανάπτυξη των αλγορίθμων αντιστροφής, αλλά παίζουν επίσης σημαντικό ρόλο στη μελέτη της τοπικής εξάρτησης της λύσης από τα δεδομένα. Παρακάτω θα ορίσουμε τύπους αντιστροφής για τον $\mathbf{R}$ και τον $\mathbf{P}$.

Για $a < n$ ορίζουμε το γραμμικό τελεστή $\mathbf{I}^a$ ως

$$(\mathbf{I}^a f)^\sim(\xi) = |\xi|^{-a} \widehat{f}(\xi).$$

Ο $\mathbf{I}^a$ καλείται δυναμικό του Riesz (*Riesz potential*). Αν ο $\mathbf{I}^a$ εφαρμόζεται σε συναρτήσεις του Z ή του T ενεργεί πάνω στη δεύτερη μεταβλητή. Για $f \in \mathfrak{S}$, $(\mathbf{I}^a f)^\sim \in L_1(\mathbb{R}^n)$, συνεπώς ο τελεστής $\mathbf{I}^a f$ είναι καλώς ορισμένος και $\mathbf{I}^{-a} \mathbf{I}^a f = f$.

Θεώρημα 2.7 Έστω $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε για κάθε $a < n$ έχουμε

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \mathbf{I}^{-a} \mathbf{R}^\# \mathbf{I}^{a-n+1} g, \quad g = \mathbf{R} f \quad (2.11)$$

$$f = \frac{1}{|S^{n-2}|} (2\pi)^{-1} \mathbf{I}^{-a} \mathbf{P}^\# \mathbf{I}^{a-1} g, \quad g = \mathbf{P} f. \quad (2.12)$$

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις.

(1) Θέτοντας $a = 0$ στην (2.11) έχουμε

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \mathbf{R}^\# \mathbf{I}^{1-n} g$$

όπου ο $\mathbf{I}^{1-n}$ δρα σε μια συνάρτηση του $\mathbb{R}^1$. Αφού για $h \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^1)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}^{1-n} h)^\wedge(\sigma) &= |\sigma|^{n-1} \widehat{h}(\sigma) \\ &= (sgn(\sigma))^{n-1} \sigma^{n-1} \widehat{h}(\sigma) \end{aligned}$$

και αφού ο μετασχηματισμός *Hilbert* $\mathbf{H}$ ορίζεται από

$$(\mathbf{H}h)^\wedge(\sigma) = -i sgn(\sigma) \widehat{h}(\sigma),$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{I}^{1-n} h = \mathbf{H}^{n-1} h^{(n-1)},$$

και επομένως

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \mathbf{R}^\# \mathbf{H}^{n-1} g^{(n-1)} \quad (2.13)$$

όπου η $(n-1)$ -παράγωγος υπολογίζεται ως προς το δεύτερο όρισμα. Χρησιμοποιώντας την

$$\mathbf{H}^{n-1} = \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} \mathbf{H}, & n \text{ άρτιος} \\ (-1)^{(n-1)/2}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

και τη μη πεπλεγμένη μορφή του $\mathbf{R}^\#$ από την προηγούμενη παράγραφο, η (2.13) γράφεται ως

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} \int_{S^{n-1}} \mathbf{H} g^{(n-1)}(\theta, x\theta) d\theta, & n \text{ άρτιος} \\ (-1)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} g^{(n-1)}(\theta, x\theta) d\theta, & n \text{ περιττός} \end{cases} \quad (2.14)$$

(2) Το γεγονός ότι ο $\mathbf{H}$ εμφανίζεται στην (2.14) μόνο για n άρτιο έχει μια σημαντική πρακτική συνέπεια. Θυμόμαστε ότι το $g(\theta, x\theta)$ είναι το ολοκλήρωμα της f πάνω στο κάθετο επίπεδο του θ που περιέχει το x . Για n περιττό, η (2.14) μπορεί να υπολογιστεί εάν το $g(\theta, y\theta)$ είναι γνωστό για $\theta \in S^{n-1}$ και το y είναι στη γειτονιά του x , δηλαδή εάν γνωρίζουμε τα ολοκληρώματα της f κατά μήκος όλων των επιπέδων που συναντιούνται σε μια γειτονιά του x . Έτσι βλέπουμε ότι το πρόβλημα ανασχηματισμού μιας συνάρτησης από τα ολοκληρώματά της κατά μήκος επιπέδων είναι, για περιττή διάσταση, τοπικό με την ακόλουθη έννοια : η συνάρτηση είναι ορισμένη σε μερικά σημεία από τα ολοκληρώματα κατά μήκος των επιπέδων διαμέσου μιας γειτονιάς αυτών των σημείων. Αυτό δεν ισχύει για άρτια διάσταση, αφού ο μετασχηματισμός *Hilbert*

$$\mathbf{H}h(s) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{h(t)}{s-t} dt \quad (2.15)$$

δεν είναι τοπικός. Έτσι το πρόβλημα ανασχηματισμού μιας συνάρτησης από τα ολοκληρώματά της κατά μήκος επιπέδων δεν είναι, για άρτια διάσταση, τοπικό με την έννοια ότι για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση σε μερικά σημεία απαιτείται τα ολοκληρώματα κατά μήκος των επιπέδων να συναντούν το φορέα της συνάρτησης. Θα δούμε και αργότερα ότι η τοπικότητα μπορεί να αποκατασταθεί σε έναν περιορισμένο βαθμό.

(3) Για n άρτιο, θέλουμε να δώσουμε μία εναλλακτική μορφή της (2.14). Αντικαθιστώντας στην (2.14) το $\mathbf{H}$ όπως δίνεται από την (2.15) έχουμε

$$f(x) = (-1)^{n/2+1}(2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{g^{(n-1)}(\theta, t)}{x\theta - t} dt d\theta = (-1)^{n/2}(2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{g^{(n-1)}(\theta, x\theta + q)}{q} dq d\theta \quad (2.16)$$

όπου έχουμε κάνει την αντικατάσταση $t = q + x\theta$. Το εσωτερικό ολοκλήρωμα, το οποίο είναι ένα Ολοκλήρωμα πρωτεύουσας τιμής *Cauchy* (*Cauchy principal value integral*) (παράρτημα 5.3), μπορεί να εκφραστεί σαν ένα κοινό ολοκλήρωμα. Έχουμε

$$f(x) = (-1)^{n/2}(2\pi)^{-n} \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{g^{(n-1)}(\theta, x\theta + q) - g^{(n-1)}(\theta, x\theta - q)}{q} dq d\theta.$$

Τώρα, επιτρέπεται να αλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης και προκύπτει

$$f(x) = (-1)^{n/2}(2\pi)^{-n} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{q} \int_{S^{n-1}} (g^{(n-1)}(\theta, x\theta + q) - g^{(n-1)}(\theta, x\theta - q)) d\theta dq. \quad (2.17)$$

Αφού το g είναι άρτιος και το $n - 1$ είναι περιττός, το $g^{(n-1)}$ είναι περιττός. Κάνοντας την αντικατάσταση όπου θ να βάλουμε $-\theta$ για το δεύτερο όρο του εσωτερικού ολοκληρώματος, παρατηρούμε ότι τα ολοκληρώματα είναι τα ίδια.

Έτσι η (2.17) απλοποιείται στην

$$f(x) = c(n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_x^{(n-1)}(q)}{q} dq, \quad c(n) = (-1)^{n/2}(2\pi)^{-n} |S^{n-1}|,$$

$$F_x(q) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} g(\theta, x\theta + q) d\theta.$$

Η F_x είναι άρτια γιατί και η g είναι άρτια. Όμως η $F_x^{(n-1)}$ είναι περιττή και τελικά έχουμε τον αρχικό τύπο αντιστροφής του *Radon*

$$f(x) = 2c(n) \int_0^{\infty} \frac{1}{q} F_x^{(n-1)}(q) dq$$

ο οποίος για $n = 2$ γράφεται

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dF_x(q)}{q} \quad (2.18)$$

(4) Θέτοντας $a = n - 1$ στην (2.11) έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\mathbf{I}^{1-n}\mathbf{R}^\#g. \quad (2.19)$$

Αυτή είναι η βάση για τον ρ -filtered layergram αλγόριθμο (κεφάλαιο 4). Για n περιττό, ο $\mathbf{I}^{1-n}$ είναι ένας διαφορικός τελεστής

$$\mathbf{I}^{1-n} = (-\Delta)^{(n-1)/2}$$

με Δ η Λαπλασιανή. Ειδικά για $n = 3$,

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\Delta \int_{S^2} g(\theta, x\theta)d\theta$$

όπου η Δ ενεργεί πάνω στη μεταβλητή x . Αυτό προκύπτει επίσης από τον *Radon*.

(5) Εάν η f είναι μια ακτινική συνάρτηση, δηλαδή $f(x) = f_0(|x|)$ με μερικές συναρτήσεις f_0 στον $\mathbb{R}^1$ τότε η $g(s) = Rf(\theta, s)$ είναι ανεξάρτητη του θ και

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f_0((s^2 + |y|^2)^{1/2})dy \\ &= |S^{n-2}| \int_0^\infty r^{n-2} f_0((s^2 + r^2)^{1/2})dr \\ &= |S^{n-2}| \int_0^\infty (t^2 - s^2)^{(n-3)/2} t f_0(t) dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Έτσι η ολοκληρωτική εξίσωση του *Radon* περιορίζεται για ακτινικές συναρτήσεις σε μια ολοκληρωτική εξίσωση τύπου *Abel*, η οποία μπορεί να λυθεί με έναν μετασχηματισμό *Mellin* ή με την παρακάτω στοιχειώδη διαδικασία: ολοκληρώνοντας την (2.20) ως προς $s(s^2 - r^2)^{(n-3)/2}$ από r μέχρι ∞ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_r^\infty s(s^2 - r^2)^{(n-3)/2} g(s) ds &= |S^{n-2}| \int_0^\infty \int_s^\infty s((s^2 - r^2)(t^2 - s^2))^{(n-3)/2} t f_0(t) dt ds \\ &= |S^{n-2}| \int_r^\infty \int_r^t s((s^2 - r^2)(t^2 - s^2))^{(n-3)/2} ds t f_0(t) dt. \end{aligned}$$

Για το εσωτερικό ολοκλήρωμα έχουμε από την αντικατάσταση

$$s' = \frac{r^2 + t^2 - 2s^2}{r^2 - t^2}$$

την τιμή

$$c(n)(t^2 - r^2)^{n-2}, \quad c(n) = 2^{1-n} \int_{-1}^1 (1 - s'^2)^{(n-3)/2} ds',$$

συνεπώς

$$\int_r^\infty s(s^2 - r^2)^{(n-3)/2} g(s) ds = |S^{n-2}| c(n) \int_r^\infty (t^2 - r^2)^{n-2} t f_0(t) dt.$$

Έχουμε

$$\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty (t^2 - r^2)^{n-2} t f_0(t) dt = \begin{cases} -(n-2) \int_r^\infty (t^2 - r^2)^{n-3} t f_0(t) dt, & n > 2, \\ -\frac{1}{2} f_0(r), & n = 2. \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $(1/2r)(d/dr)n - 2$ περισσότερες φορές έχουμε

$$\left(\frac{1}{2r} \frac{d}{dr}\right)^{n-1} \int_r^\infty s(s^2 - r^2)^{(n-3)/2} g(s) ds = |S^{n-2}| c(n) (-1)^{n-1} \frac{(n-2)!}{2} f_0(r)$$

και αυτός είναι ξεκάθαρα ένας τύπος αντιστροφής για τον μετασχηματισμό *Radon* στην περίπτωση της ακτινικής συμμετρίας.

(6) Ο τύπος αντιστροφής για τον $\mathbf{P}$ συμπίπτει με τον τύπο αντιστροφής για τον $\mathbf{R}$ για $n = 2$. Για $n > 3$ είναι σχεδόν άχρηστος, αφού απαιτεί να γνωρίζουμε όλα τα ολοκληρώματα κατά μήκος γραμμών, ενώ μόνο ένα μικρό κλάσμα αυτών των ολοκληρωμάτων μπορούν να μετρηθούν στην πράξη.

Ένας τελείως διαφορετικός τύπος αντιστροφής για το μετασχηματισμό του *Radon* προκύπτει επεκτείνοντας τις f και $g = Rf$ σε σφαιρικές αρμονικές (Παράρτημα 5.5), δηλαδή

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N(n,\ell)} f_{\ell k}(|x|) Y_{\ell k}(x/|x|),$$

$$g(\theta, s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N(n,\ell)} g_{\ell k}(s) Y_{\ell k}(\theta).$$

Το παρακάτω θεώρημα δίνει μια σχέση ανάμεσα στην $f_{\ell k}$ και στην $g_{\ell k}$.

Θεώρημα 2.8 Έστω $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε έχουμε για $s > 0$

$$g_{\ell k}(s) = |S^{n-2}| \int_s^\infty C_\ell^{(n-2)/2} \left(\frac{s}{r}\right) \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right)^{(n-3)/2} f_{\ell k}(r) r^{n-2} dr \quad (2.21)$$

όπου $C_\ell^{(n-2)/2}$ είναι το (κανονικοποιημένο) πολυώνυμο *Gegenbauer* βαθμού ℓ . (Παράρτημα 5.4)

Απόδειξη. Μπορούμε να εκφράσουμε τα ολοκληρώματα πάνω στο $x\theta = s$ με ολοκληρώματα πάνω στο ημισφαίριο $\omega \in S^{n-1} : \omega\theta > 0$ περιστρέφοντας το σύστημα συντεταγμένων. Έχουμε

$$\int_{x\theta=s} f(x) dx = \int_{S^{n-1}, \omega\theta>0} f\left(\frac{s}{\theta\omega}\right) \frac{s^{n-1}}{(\theta\omega)^n} d\omega.$$

Εφαρμόζοντας αυτό στην συνάρτηση $f(x) = f_{\ell k}(|x|)Y_{\ell k}(x/|x|)$ έχουμε

$$\int_{x\theta=s} f_{\ell k}(|x|)Y_{\ell k}(x/|x|)dx = \int_{S^{n-1}, \theta\omega>0} f_{\ell k}\left(\frac{s}{\theta\omega}\right)Y_{\ell k}(\omega)\frac{s^{n-1}}{(\theta\omega)^n}d\omega.$$

Εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα *Funk – Hecke* (Παράρτημα 5.5). Ορίζοντας

$$h(t) = \begin{cases} f_{\ell k}\left(\frac{s}{t}\right)\left(\frac{s^{n-1}}{t^n}\right), & t > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{x\theta=s} f_{\ell k}(|x|)Y_{\ell k}dx &= g_{\ell k}(s)Y_{\ell k}(\theta), \\ g_{\ell k}(s) &= |S^{n-2}| \int_0^1 f_{\ell k}\left(\frac{s}{t}\right)\frac{s^{n-1}}{t^n}C_{\ell}^{(n-2)/2}(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}dt. \end{aligned}$$

Βάζοντας όπου $s/t = r$ προκύπτει η (2.21). ■

Η ολοκληρωτική εξίσωση (2.21) είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση τύπου *Abel* : στην πραγματικότητα μετατρέπεται σε μια *Abel* εξίσωση για $n = 2$ και $l = 0$. Μπορεί να λυθεί με τον μετασχηματισμό *Mellin*. Αυτό οδηγεί στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.9 Έστω $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. Τότε έχουμε για $r > 0$

$$\begin{aligned} f_{\ell k}(r) &= c(n)r^{2-n} \int_r^\infty (s^2 - r^2)^{(n-3)/2} C_{\ell}^{(n-2)/2}\left(\frac{s}{r}\right) g_{\ell k}^{(n-1)}(s) ds, \\ c(n) &= \frac{(-1)^{n-1} \Gamma((n-2)/2)}{2\pi^{n/2} \Gamma(n-2)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

(Για $n = 2$ μπορούμε να πάρουμε το όριο καθώς το n τείνει στο 2, δηλαδή $c(2) = -1/\pi$).

Η σχετικότητα της (2.22) προέρχεται από το γεγονός ότι δίνει μία σαφή λύση στο εξωτερικό πρόβλημα. Συνήθως καλείται τύπος αντιστροφής του *Cormack* αφού έχει προέλθει από την πρωτοποριακή εργασία του *Cormack* (1963). Παρατηρούμε ότι η υπόθεση $f \in \mathfrak{F}$ στα θεωρήματα (2.8), (2.9) έχει γίνει για να εξασφαλίσουμε ότι τα ολοκληρώματα (2.21), (2.22) θα έχουν νόημα. Για συναρτήσεις οι οποίες δεν φθίνουν αρκετά γρήγορα στο άπειρο, το εξωτερικό πρόβλημα δεν έχει μοναδική λύση, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ας κοιτάξουμε πιο προσεκτικά τη δισδιάστατη περίπτωση. Οι επεκτάσεις σε σφαιρικές αρμονικές είναι σειρές *Fourier*, οι οποίες με έναν λίγο διαφορετικό συμβολισμό, γίνονται

$$f(r, \omega) = \sum_{\ell} f_{\ell}(r) e^{i\ell\phi},$$

$$g(\omega, s) = \sum_{\ell} g_{\ell}(s) e^{i\ell\phi},$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Οι τύποι (2.21), (2.22) τώρα γράφονται ως

$$\begin{aligned} g_\ell(s) &= 2 \int_s^\infty T_{|\ell|}\left(\frac{s}{r}\right) \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right)^{-1/2} f_\ell(r) dr, \\ f_\ell(r) &= -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty (s^2 - r^2)^{-1/2} T_{|\ell|}\left(\frac{s}{r}\right) g'_\ell(s) ds \end{aligned} \quad (2.23)$$

με T_ℓ το πολυώνυμο *Chebyshev* πρώτου είδους.

2.3 Μοναδικότητα

Από τους τύπους αντιστροφής της ενότητας 2.2 γνωρίζουμε ότι η $f \in \mathfrak{S}$ είναι μοναδικά ορισμένη για καθεμία από τις συναρτήσεις $\mathbf{R}f, \mathbf{P}f$. Σε πολλές πρακτικές καταστάσεις γνωρίζουμε αυτές τις συναρτήσεις μόνο σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν αυτή η μερική πληροφορία εξακολουθεί να ορίζει μοναδικά την f .

Το ακόλουθο “Θεώρημα τρύπας” προκύπτει άμεσα από το θεώρημα (2.9).

Θεώρημα 2.10 Έστω $f \in \mathfrak{S}$, και έστω K ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Εάν $\mathbf{R}f(\theta, s) = 0$ για κάθε επίπεδο $x\theta = s$ που δε συναντάει το K , τότε η $f = 0$ έξω από το K .

Απόδειξη. Εάν το K είναι μια μπάλα (σφαίρα) το θεώρημα προκύπτει άμεσα από το (2.9). Στη γενικότερη περίπτωση μπορούμε να βρούμε για κάθε $x \neq K$ μία μπάλα που περιέχει το K αλλά όχι το x . Εφαρμόζοντας το θεώρημα σε αυτή τη μπάλα συμπεραίνουμε ότι $f(x) = 0$, επομένως το θεώρημα αποδεικνύεται για το K . ■

Αφού τα ολοκληρώματα πάνω σε επίπεδα μπορούν να εκφραστούν από ολοκληρώματα κατά μήκος γραμμών, έχουμε το αντίστοιχο θεώρημα για τον $\mathbf{P}$.

Θεώρημα 2.11 Έστω f , K όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Εάν $\mathbf{P}f(\theta, x) = 0$ για κάθε γραμμή $x + t\theta$ που δε συναντάει το K , τότε $f = 0$ έξω από το K .

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το πρόβλημα ανακατασκευής μιας συνάρτησης στο εξωτερικό κάποιων μπάλας από ολοκληρώματα πάνω σε επίπεδα ή κατά μήκος γραμμών έξω από τη μπάλα, είναι μοναδικά επιλύσιμο, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση φθίνει αρκετά γρήγορα στο άπειρο. Αυτή η υπόθεση δε μπορεί να παραληφθεί, όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα στον $\mathbb{R}^2$. Έστω $z = x_1 + ix_2$ και $f(x) = z^{-p}$ με $p \geq 2$ ακέραιος. Έχουμε δείξει ότι $\mathbf{R}f(\theta, s) = 0$ για $\theta \in S^1$ και $s > 0$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{R}f(\theta, s) &= \int_{\mathbb{R}^1} f(s\theta + t\theta^\perp) dt \\ &= (-\theta_2 + i\theta_1)^{-1} \int_L z^{-p} dz, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

όπου L είναι η ευθεία γραμμή $x\theta = s$. Θέτοντας $w = 1/z$ έχουμε

$$\int_L z^{-p} dz = - \int_C w^{p-2} dw$$

όπου C η εικόνα της L κάτω από το $w = 1/z$ είναι ένας πεπερασμένος κύκλος, αφού η L δεν περνάει από το 0. Από το θεώρημα του *Cauchy*, το ολοκλήρωμα πάνω στη C μηδενίζεται για $p \geq 2$, αφού $\mathbf{R}f(\theta, s) = 0$ για $s > 0$ και $p \geq 2$.

Πολλά περισσότερα μπορούμε να πούμε αν γνωρίζουμε ότι η f έχει συμπαγή φορέα. Το επόμενο θεώρημα δίνεται όσον αφορά το μετασχηματισμό της αποκλίνουσας δέσμης $\mathbf{D}$.

Θεώρημα 2.12 Έστω S ένα ανοιχτό σύνολο του S^{n-1} και έστω A μία συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο και ανοιχτό. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\theta \in S$ υπάρχει ένα $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε η ημιευθεία $\alpha + t\theta$, $t \geq 0$ δεν τέμνει τον Ω . Εάν $f \in C_0^\infty(\Omega)$ και $\mathbf{D}f(\alpha, \theta) = 0$ για $\alpha \in A$ και $\theta \in S$, τότε $f = 0$ στην «υπολογιζόμενη περιοχή» $[\alpha + t\theta : \alpha \in A, \theta \in S]$.

Απόδειξη. Ορίζουμε για κάθε ακέραιο $k \geq 0$ και $\alpha, x \in \mathbb{R}^n$

$$D_k f(\alpha, x) = \int_0^\infty t^k f(\alpha + tx) dt.$$

Πρέπει να αποδείξουμε, σύμφωνα με την υπόθεση του θεωρήματος, ότι

$$D_k f(\alpha, \theta) = 0, \quad \alpha \in A, \quad \theta \in S \quad (2.24)$$

για $k \geq 0$. Αφού η f έχει συμπαγή φορέα, η (2.24) συνεπάγεται το θεώρημα. Η απόδειξη της (2.24) γίνεται με επαγωγή. Για $k = 0$, η (2.24) προκύπτει από το ότι $\mathbf{D}f(\alpha, \theta) = 0$ για $\alpha \in A$ και $\theta \in S$. Έστω ότι η (2.24) ισχύει για $k \geq 0$. Τότε,

$$D_k f(\alpha, x) = 0, \quad \alpha \in A$$

για x στον ανοιχτό κώνο $C = [x \neq 0 : x/|x| \in S]$. Έστω $\alpha = \alpha(s)$ η παραμετρική αναπαράσταση του A . Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} D_{k+1} f(\alpha(s), x) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty t^{k+1} f(\alpha(s) + tx) dt \\ &= \int_0^\infty t^{k+1} \sum_{i=1}^n \alpha'_i(s) f_i(\alpha(s) + tx) dt \end{aligned}$$

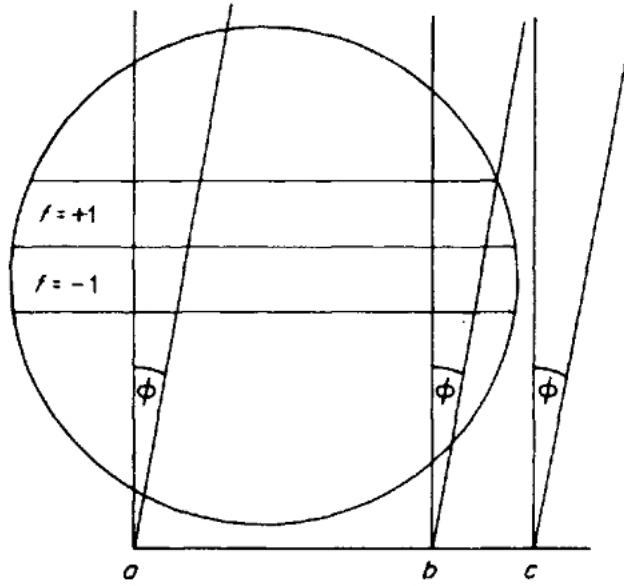
με f_i τη μερική παράγωγο της f ,

$$= \int_0^\infty t^k \sum_{i=1}^n \alpha'_i(s) \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(\alpha(s) + tx) dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha'_i(s) \frac{\partial}{\partial x_i} D_k f(\alpha(s), x) = 0$$

για $x \in C$ αφού η $D_k f(\alpha(s), x)$ μηδενίζεται στο ανοιχτό σύνολο C . Έτσι, η $D_{k+1} f(\alpha, x)$ είναι σταθερή κατά μήκος του A για $x \in C$. Αφού, από την υπόθεση του θεωρήματος, $D_{k+1} f(\alpha, x) = 0$ για τουλάχιστον ένα $\alpha \in A$, τότε $D_{k+1} f(\alpha, x)$ πρέπει να είναι μηδέν στο A για $x \in C$. Αυτή είναι η (2.24) με $k = k + 1$. ■

Η υπόθεση ότι η ημιευθεία δεν τέμνει τον Ω , μπορεί να φαίνεται παράξενο, αλλά δε μπορεί να παραληφθεί. Αυτό φαίνεται στο παράδειγμα του σχήματος, όπου ο Ω είναι ο μοναδιαίος δίσκος στο $\mathbb{R}^2$ και η f είναι η ομαλοποιημένη έκδοση της συνάρτησης, η οποία είναι $+1$ στην ανώτερη λωρίδα, -1 στην κατώτερη και 0 οπουδήποτε αλλού. Με A να είναι το τόξο ab και S να δίνεται από τη γωνία ϕ , η υπόθεση του θεωρήματος δεν ικανοποιείται. Σε αυτή την περίπτωση, η f δε μηδενίζεται στην υπολογιζόμενη περιοχή, παρόλο που ο Df είναι 0 στο $A \times S$. Όμως, αν το A τείνει να γίνει ac , τότε η υπόθεση του θεωρήματος ικανοποιείται, αλλά ο Df δεν είναι πλέον 0 στο $A \times S$.



Σχήμα 2.1: (Παράδειγμα μη μοναδικότητας)

Μία κατάσταση στην οποία εφαρμόζεται το θεώρημα (2.12) εμφανίζεται στην τρισδιάστατη τομογραφία. Αυτό μας λέει, στην πραγματικότητα, ότι ο τρισδιάστατος ανασχηματισμός ενός αντικειμένου είναι πιθανός αν οι πηγές των ακτίνων X διαγράφουν έναν κύκλο γύρω από το αντικείμενο. Όμως θα δούμε ότι το πρόβλημα του ανασχηματισμού δεν είναι καλώς ορισμένο, εκτός εάν η καμπύλη ικανοποιεί μια περιοριστική συνθήκη.

Στα επόμενα δύο θεωρήματα εκμεταλλευόμαστε την αναλυτικότητα του μετασχηματισμού *Fourier* σε συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Θεώρημα 2.13 Έστω A το σύνολο των κατευθύνσεων τέτοιο ώστε τα μη τετριμμένα ομογενή πολυώνυμα να μηδενίζονται στο A . Εάν $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $\mathbf{R}_\theta f = 0$ για $\theta \in A$, τότε $f = 0$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα (2.1) έχουμε ότι

$$\widehat{f}(\sigma\theta) = (2\pi)^{(1-n)/2}(\mathbf{R}_\theta f)\check{\gamma}(\sigma) = 0$$

για $\theta \in A$. Αφού η f έχει συμπαγή φορέα, η $\widehat{f}$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση, της οποίας η επέκταση της δυναμοσειράς μπορεί να γραφτεί σαν

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\xi)$$

με ομογενή πολυώνυμα α_k βαθμού k . Για $\xi = \sigma\theta$ έχουμε

$$\widehat{f}(\sigma\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \alpha_k(\theta) = 0$$

για κάθε σ και $\theta \in A$. Έπεται ότι $\alpha_k(\theta)$ μηδενίζεται για $\theta \in A$ επομένως $\alpha_k = 0$ και το θεώρημα αποδείχθηκε. ■

Θεώρημα 2.14 Έστω $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ και έστω $\mathbf{P}_\theta f = 0$ για άπειρο πλήθος κατευθύνσεων. Τότε $f = 0$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα (2.1) έχουμε για άπειρα θ

$$\widehat{f}(\eta) = (2\pi)^{-1/2}(\mathbf{P}_\theta f)\check{\gamma}(\eta) = 0$$

εάν $\eta\theta = 0$. Αφού η $\widehat{f}$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση, η $\widehat{f}(\eta)$ πρέπει να περιέχει τον παράγοντα $\eta\theta$ για κάθε μία από τις κατευθύνσεις θ . Επομένως η $\widehat{f}$ και επομένως μηδενίζεται ταυτοτικά. ■

Για το μετασχηματισμό της αποκλίνουσας δέσμης έχουμε το ακόλουθο θεώρημα μοναδικότητας, το οποίο μετατρέπεται στο θεώρημα (2.14) καθώς οι πηγές τείνουν στο άπειρο.

Θεώρημα 2.15 Έστω Ω^n η μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$ και έστω A ένα άπειρο σύνολο έξω από τον Ω^n . Εάν $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$ και $\mathbf{D}_\alpha f = 0$ για $\alpha \in A$ τότε $f = 0$.

Δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι τα τελευταία δύο θεωρήματα δεν ισχύουν για πεπερασμένα πολλές κατευθύνσεις ή πηγές. Όμως, ο βαθμός της μη μοναδικότητας στην πεπερασμένη περίπτωση είναι ενοχλητικός, ενόψει των εφαρμογών. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση των πεπερασμένων κατευθύνσεων του θεωρήματος (2.13).

Θεώρημα 2.16 Έστω $\theta_1, \dots, \theta_p \in S^{n-1}$, έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές, και έστω f να είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση στον $C_0^\infty(K)$. Τότε, για κάθε συμπαγές σύνολο K_0 που βρίσκεται στο εσωτερικό του K υπάρχει μια συνάρτηση $f_0 \in C_0^\infty(K)$, η οποία συμπίπτει με την f στο K_0 και για την οποία ισχύει $\mathbf{P}_{\theta_k} f_0 = 0, k = 1, 2, \dots, p$.

Απόδειξη. Έστω

$$q(\xi) = \prod_{k=1}^p \theta_k \xi$$

και έστω Q ο διαφορικός τελεστής που παράγεται από το $q(\xi)$ αντικαθιστώντας το ξ_ℓ με $-i\partial/\partial x_\ell$. Βρίσκουμε μια λύση h της $Qh = f$. Για $p = 1$ η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$-i\theta_1 \nabla h = f.$$

Θέτοντας $x = s\theta_1 + y, y \in \theta_1^\perp$, η λύση είναι η

$$h(x) = i \int_0^s f(t\theta_1 + y) dt.$$

Για $p > 1$ επαναλαμβάνουμε αυτή την κατασκευή. Τώρα έστω $\Psi \in C_0^\infty(K)$ να είναι μονάδα στο K_0 και θέτουμε $f_0 = Q\Psi h$. Έχουμε $f_0 \in C_0^\infty(K)$ και στο K_0 , $f_0 = Qh = f$. Επίσης, από (7.1),

$$\widehat{f_0}(\xi) = q(\xi)(\Psi h)\check{(\xi)},$$

και από το θεώρημα (2.1)

$$(\mathbf{P}_\theta f_0)\check{(\eta)} = (2\pi)^{1/2} \widehat{f_0}(\eta) = (2\pi)^{1/2} q(\eta)(\Psi h)\check{(\eta)} = 0$$

για $\eta \in \theta_k^\perp$. Έπεται ότι $\mathbf{P}_{\theta_k} f_0 = 0$ και το θεώρημα αποδείχθηκε. ■

Το θεώρημα (2.16) αναφέρει ότι για κάθε αντικείμενο υπάρχει ένα άλλο, διαφορετικό από το πρώτο μόνο σε μια αυθαίρετα μικρή περιοχή του συνόρου του, και για το οποίο οι προβολές στις κατευθύνσεις $\theta_1, \dots, \theta_p$ μηδενίζονται. Με μια πρώτη ματιά αυτό το κάνει να φαίνεται αδύνατο να ανακάμψει μια συνάρτηση από πεπερασμένα πολλές κατευθύνσεις. Μια πιο προσεκτική ματιά στην απόδειξη του θεωρήματος αποκαλύπτει ότι η f_0 είναι μία ιδιαίτερης ταλάντωσης συνάρτηση. Αφού το q είναι ένα πολυώνυμο βαθμού p , η $\widehat{f_0}$ προϋποθέτει μεγάλες τιμές για $|\xi| > 1$ σταθερό και p μεγάλο. Αυτό σημαίνει ότι για μεγάλο p το δεύτερο αντικείμενο συμπεριφέρεται με αρκετή αστάθεια στο λεπτό συνοριακό στρώμα, στο οποίο είναι διαφορετικό από το πρώτο. Προκειμένου να καλυφθεί αυτή η απροσδιοριστία στην περίπτωση των πεπερασμένα πολλών κατευθύνσεων πρέπει να βάλουμε περιορισμούς στη διακύμανση του αντικειμένου. Αυτό θα επιδιώξουμε στο τρίτο κεφάλαιο.

2.4 Πεδία τιμών

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι τα πεδία τιμών των τελεστών, που εισήχθησαν στην παράγραφο 2.1, είναι εξαιρετικά δομημένα. Αυτή η δομή βρίσκει εφαρμογές στη μελέτη της λύσης των αλγορίθμων και των προβλημάτων, στα οποία τα δεδομένα δεν είναι πλήρως καθορισμένα.

Θεώρημα 2.17 Έστω $f \in \mathfrak{S}$. Τότε για $m = 0, 1, \dots$

$$\int_{\mathbb{R}^1} s^m \mathbf{R}_\theta f(s) ds = p_m(\theta), \quad (2.25)$$

$$\int_{\theta^\perp} (xy)^m \mathbf{P}_\theta f(x) dx = q_m(y), \quad y \perp \theta$$

για p_m, q_m ομογενή πολυώνυμα βαθμού m , και το q_m είναι ανεξάρτητο του θ .

Απόδειξη. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} s^m \mathbf{R}_\theta f(s) ds &= \int_{\mathbb{R}^1} s^m \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (x\theta)^m f(x) dx \end{aligned}$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει $x = s\theta + y$. Προφανώς, αυτό είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού m του θ . Ομοίως,

$$\begin{aligned} \int_{\theta^\perp} (xy)^m \mathbf{P}_\theta f(x) dx &= \int_{\theta^\perp} (xy)^m \int_{\mathbb{R}^1} f(x + t\theta) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (zy)^m f(z) dz \end{aligned}$$

για $y \perp \theta$ όπου έχουμε αντικαταστήσει $z = x + t\theta$. Αυτό είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού m του y το οποίο είναι ανεξάρτητο του θ . ■

Η συνθήκη (2.25) για το μετασχηματισμό *Radon* έχει την ακόλουθη συνέπεια, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενα κεφάλαια. Εάν $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$ μπορούμε να επεκτείνουμε την $\mathbf{R}f$ όσον αφορά τα γινόμενα $C_\ell^\lambda Y_{kj}$, με C_ℓ^λ να είναι πολυώνυμα *Gegenbauer* και Y_{kj} σφαιρικές αρμονικές. Αυτές οι συναρτήσεις αποτελούν ένα πλήρως ορθογώνιο σύστημα του $L_2(Z, (1-s^2)^{\lambda-1/2})$. Η προέκταση γράφεται ως

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = (1-s^2)^{\lambda-1/2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j c_{\ell kj} C_\ell^\lambda(s) Y_{kj}(\theta)$$

όπου το j διατρέχει όλο το $N(n, k)$ των σφαιρικών αρμονικών βαθμού k . Τα C_ℓ^λ είναι ορθογώνια στο $[-1, 1]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $(1-s^2)^{\lambda-1/2}$, επομένως

$$\int_{-1}^1 C_\ell^\lambda(s) \mathbf{R}f(\theta, s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j c_{\ell kj} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{\lambda-1/2} (C_\ell^\lambda(s))^2 ds Y_{kj}(\theta).$$

Σύμφωνα με την (2.25) το αριστερό μέλος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ℓ του θ το οποίο, λόγω της ομαλότητας της $\mathbf{R}f$, είναι άρτιο αν το ℓ είναι άρτιο και περιττό αν το ℓ είναι περιττό. Επομένως, $c_{\ell k} \neq 0$ μόνο για $k = \ell, \ell - 2, \dots$ και η $\mathbf{R}f$ παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = (1 - s^2)^{\lambda-1/2} \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell}^{\lambda}(s) h_{\ell}(\theta) \quad (2.26)$$

όπου h_{ℓ} είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των σφαιρικών αρμονικών βαθμού $\ell, \ell - 2, \dots$.

Οι συνθήκες (2.25) καλούνται συνθήκες ευστάθειας των *Helgason – Ludwig*. Αυτές χαρακτηρίζουν το πεδίο ορισμού των $\mathbf{R}, \mathbf{P}$ με την εξής έννοια.

Θεώρημα 2.18 Έστω $g \in \mathfrak{S}(Z)$ άρτια (δηλαδή $g(\theta, s) = g(-\theta, -s)$) και υποθέτουμε ότι για κάθε $m = 0, 1, \dots$

$$\int_{\mathbb{R}^1} s^m g(\theta, s) ds = p_m(\theta)$$

είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού m του θ . Τότε, υπάρχει $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $g = \mathbf{R}f$. Εάν, επιπλέον, $g(\theta, s) = 0$ για $|s| \geq \alpha$, τότε $f(x) = 0$ για $|x| \geq \alpha$.

Θεώρημα 2.19 Έστω $g \in \mathfrak{S}(T)$ και $g(\theta, x) = 0$ για $|x| \geq \alpha$. Υποθέτουμε ότι για $m = 0, 1, \dots$

$$\int_{\theta^{\perp}} (xy)^m g(\theta, x) dx = q_m(y), \quad y \perp \theta$$

είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού m το οποίο δεν εξαρτάται από το θ . Τότε, υπάρχει $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ με $f(x) = 0$ για $|x| \geq \alpha$ και $g = \mathbf{P}f$.

Απόδειξη. Εάν ήδη γνωρίζαμε ότι $g = \mathbf{P}f$ θα μπορούσαμε να εκφράσουμε την $\mathbf{R}f(\omega, s)$ σε σχέση με την $\mathbf{P}f$ από την (2.1). Επομένως θέτουμε για κάποια $\theta \perp \omega$

$$h_{\theta}(\omega, s) = \int_{\theta^{\perp}, x\omega=s} g(\theta, x) dx$$

και προσπαθούμε να δείξουμε ότι το h_{θ} δεν εξαρτάται από την επιλογή του θ και ότι $h_{\theta} = \mathbf{R}f$ για κάποιες $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ με φορέα στο $|x| \leq \alpha$. Αρχικά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} s^m h_{\theta}(\omega, s) ds &= \int_{\mathbb{R}^1} s^m \int_{\theta^{\perp}, x\omega=s} g(\theta, x) dx ds \\ &= \int_{\theta^{\perp}} (x\omega)^m g(\theta, x) dx \\ &= q_m(\omega) \end{aligned} \quad (2.27)$$

με q_m το πολυώνυμο του θεωρήματος. Αφού το q_m δεν εξαρτάται από το θ , το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της (2.27) δεν εξαρτάται από το θ και το $h_\theta(\omega, s)$ μηδενίζεται για $|s| \geq \alpha$ εξαιτίας της $g(\theta, x) = 0$ για $|x| \geq \alpha$. Αφού τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L_2(-\alpha, \alpha)$ έπεται ότι το h_θ δεν εξαρτάται από το θ , και από την (2.27) βλέπουμε ότι η $h = h_\theta$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος (2.18). Επομένως $h = \mathbf{R}f$ για κάποιες $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ με φορέα στο $|x| \leq \alpha$.

Για $n > 2$ πρέπει να δείξουμε ότι $g = \mathbf{P}f$. Για θ σταθερό θα δείξουμε ότι τα ολοκλήρωμα της g και της $\mathbf{P}f$ πάνω σε αυθαίρετα επίπεδα του $\theta^\perp$ συμπίπτουν. Εάν $[x \in \theta^\perp : x\omega = s]$ είναι τέτοιο επίπεδο ώστε $\omega \in \theta^\perp$, το ολοκλήρωμα της g πάνω σε αυτό το επίπεδο δίνει την $h(\omega, s)$ και το ολοκλήρωμα της $\mathbf{P}f$ είναι

$$\begin{aligned} \int_{\theta^\perp, x\omega=s} \mathbf{P}f(\theta, x)dx &= \int_{\theta^\perp, x\omega=s} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t\theta)dt dx \\ &= \int_{\theta^\perp \cap \omega^\perp} \int_{-\infty}^{\infty} f(s\omega + y + t\theta)dt dy \\ &= \int_{\omega^\perp} f(s\omega + z)dz \\ &= \mathbf{R}f(\omega, s). \end{aligned}$$

Αφού $h = \mathbf{R}f$ τα ολοκλήρωμα συμπίπτουν. Αυτό σημαίνει ότι οι μετασχηματισμοί *Radon* των $g(\theta, \cdot), \mathbf{P}f(\theta, \cdot)$ στο $\theta^\perp$ συμπίπτουν. Αλλά ο μετασχηματισμός *Radon* στο $\mathfrak{S}(\theta^\perp)$ είναι αμφιμονοσήμαντος, επομένως $g = \mathbf{P}f$. ■

Το θεώρημα (2.19) δεν ισχύει αν παραληφθεί η συνθήκη $g(\theta, x) = 0$ για $|x| \geq \alpha$ (και το συμπέρασμα ότι $f(x) = 0$ για $|x| \geq \alpha$): έστω h μία μη τετριμμένη άρτια συνάρτηση του $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^1)$ τέτοια ώστε

$$\int_0^\infty s^m h(s)ds = 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

έστω $u \in C^\infty(S^{n-1})$ και έστω $g(\theta, x) = u(\theta)h(|x|)$. Τότε $g \in \mathfrak{S}(T)$, και

$$\begin{aligned} \int_{\theta^\perp} (xy)^m g(\theta, x)dx &= u(\theta) \int_{\theta^\perp} (xy)^m h(|x|)dx \\ &= u(\theta) \int_0^\infty s^{n-2+m} h(s)ds \int_{S^{n-1} \cap \theta^\perp} (\omega y)^m d\omega = 0 \end{aligned}$$

όπου έχουμε θέσει $x = s\omega$ στο $\theta^\perp$. Έτσι η g ικανοποιεί τη συνθήκη της ευστάθειας του θεωρήματος.

Για $n > 3$, έστω $\omega \perp \theta$. Τότε,

$$\int_{x \perp \theta, x\omega=s} g(\theta, x)dx = u(\theta) \int_{x \perp \theta, x\omega=s} h(|x|)dx = u(\theta)\mathbf{R}h(\omega, s)$$

με h να θεωρείται η ακτινική συνάρτηση $x \rightarrow h(|x|)$ και $\mathbf{R}$ είναι ο $(n-1)$ -διάστατος μετασχηματισμός *Radon*. Από την άλλη πλευρά, εάν $g = \mathbf{P}f$ για κάποιες $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε από την (2.1)

$$\int_{x \perp \theta, x\omega=s} g(\theta, x) dx = \mathbf{R}f(\omega, s)$$

και συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{R}f(\omega, s) = u(\theta)\mathbf{R}h(\omega, s)$$

για $\omega \perp \theta$. Αυτό είναι μία αντίφαση, εκτός εάν το u είναι σταθερό, αφού η $\mathbf{R}h$ είναι ανεξάρτητη του ω και $\mathbf{R}h \neq 0$ επειδή ο $\mathbf{R}$ είναι αμφιμονοσήμαντος.

2.5 Ο ασθενής μετασχηματισμός *Radon*

Στον $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε για συναρτήσεις με συμπαγή φορέα τον ασθενή μετασχηματισμό *Radon*

$$\mathbf{R}_\mu f(\theta, s) = \int_{x\theta=s} e^{-D_\mu(x, \theta^\perp)} f(x) dx.$$

Εδώ, με $\theta^\perp$ εννοούμε τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα στο $\theta \in S^1$ για τα οποία $\det(\theta, \theta^\perp) = +1$. Για $\theta = (\cos\phi, \sin\phi)^\top$, $\theta^\perp = (-\sin\phi, \cos\phi)^\top$ η μ είναι μια πραγματική συνάρτηση του $\mathbb{R}^2$, η οποία παίζει το ρόλο της παραμέτρου. Ο $\mathbf{R}_\mu$ είναι ο ολοκληρωτικός μετασχηματισμός της τομογραφίας εκπομπής (*emission tomography*). Σε αυτή την ενότητα θα επεκτείνουμε όσο είναι δυνατό τα αποτελέσματα των προηγούμενων ενότητων για τον $\mathbf{R}$ στον $\mathbf{R}_\mu$.

Μία ειδική περίπτωση εμφανίζεται αν η συνάρτηση μ έχει μία σταθερή τιμή μ_0 σε ένα κυρτό πεδίο ορισμού Ω που περιέχει το φορέα της f .

Εάν $s\theta + \tau(\theta, s)\theta^\perp$ δηλώνει ότι το σημείο στο οποίο ξεκινάει η ακτίνα από το $s\theta$ με κατεύθυνση στο $\theta^\perp$ «χτυπάει» το σύνορο του Ω , τότε

$$\mathbf{D}\mu(x, \theta^\perp) = (\tau(\theta, s) - x\theta^\perp)\mu_0 + \alpha(\theta, s), \quad \alpha(\theta, s) = \int_{\tau(\theta, s)}^\infty \mu(s\theta + t\theta^\perp) dt$$

για $x \in \Omega, x\theta = s$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\mu f(\theta, s) &= \int_{x\theta=s} e^{-(\tau(\theta, s) - x\theta^\perp)\mu_0 - \alpha(\theta, s)} f(x) dx \\ &= e^{-\tau(\theta, s)\mu_0 - \alpha(\theta, s)} \mathbf{T}_{\mu_0} f(\theta, s), \\ \mathbf{T}_{\mu_0} f(\theta, s) &= \int_{x\theta=s} e^{\mu_0 x\theta^\perp} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^1} e^{\mu_0 t} f(s\theta + t\theta^\perp) dt. \end{aligned}$$

Ο $\mathbf{T}_{\mu_0}$ είναι γνωστός ως εκθετικός μετασχηματισμός *Radon*.

Παρακάτω θα επεκτείνουμε μερικά από τα αποτελέσματα για τον $\mathbf{R}$ στους $\mathbf{R}_\mu, \mathbf{T}_\mu$. Οι αποδείξεις παραλείπονται αφού είναι τροποποιήσεις των αποδείξεων για τον $\mathbf{R}$.

Το θεώρημα προβολής για τον $\mathbf{T}_\mu$ αναφέρει

$$(\mathbf{T}_\mu f)^\sim(\theta, \sigma) = (2\pi)^{1/2} \widehat{f}(\sigma\theta + i\mu\theta^\perp). \quad (2.28)$$

Αυτός ο τύπος δεν είναι τόσο χρήσιμος όσο το θεώρημα (2.1) αφού δίνει την $\widehat{f}$ στη δισδιάστατη επιφάνεια του χώρου $\mathbb{C}^2$ δύο μιγαδικών μεταβλητών, ενώ ο τύπος αντιστροφής του *Fourier* ολοκληρώνει πάνω στον $\mathbb{R}^2$.

Τα θεώρημα (2.2) και (2.3) ισχύουν επίσης για τον $\mathbf{T}_\mu$:

$$\mathbf{T}_\mu(f * g) = \mathbf{T}_\mu f * \mathbf{T}_\mu g \quad (2.29)$$

$$(\mathbf{T}_\mu^\# g) * f = \mathbf{T}_\mu^\#(g * \mathbf{T}_\mu f). \quad (2.30)$$

Εδώ οι δυϊκοί τελεστές $\mathbf{T}_\mu^\#$ και $\mathbf{R}_\mu^\#$ είναι

$$\mathbf{T}_\mu^\# g(x) = \int_{S^1} e^{\mu x \theta^\perp} g(\theta, x\theta) d\theta,$$

$$\mathbf{R}_\mu^\# g(x) = \int_{S^1} e^{-D_\mu(x, \theta^\perp)} g(\theta, x\theta) d\theta.$$

Το θεώρημα (2.5) επεκτείνεται ακόμη για τον $\mathbf{R}_\mu$ στη μορφή

$$\mathbf{R}_\mu^\# \mathbf{R}_\mu f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^{-1} \cosh\left(\int_x^y \mu dt\right) f(y) dy. \quad (2.31)$$

Για τον $\mathbf{T}_\mu$ αυτό γίνεται

$$\mathbf{T}_\mu^\# \mathbf{T}_\mu f = k * f, \quad k(x) = 2 \frac{\cosh(\mu|x|)}{|x|}$$

Αυτός ο τύπος αντιστοιχεί στο θεώρημα (2.4) και είναι η αφετηρία για μια μέθοδο ανασχηματισμού του **r-filtered layergram type**. (Παράρτημα 5.6) Ένας τύπος αντιστροφής τύπου *Radon* για τον $\mathbf{T}_\mu$ λαμβάνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.20 Έστω $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Τότε,

$$f = \frac{1}{4\pi} \mathbf{T}_\mu^\# \mathbf{I}_\mu^{-1} g, \quad g = \mathbf{T}_\mu f$$

όπου ο $\mathbf{I}_\mu^{-1}$ είναι το γενικευμένο δυναμικό του *Riesz*

$$(\mathbf{I}_\mu^{-1} g)^\sim(\sigma) = \begin{cases} |\sigma| \widehat{g}(\sigma), & |\sigma| > |\mu|, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Το θεώρημα (2.20) είναι μία επέκταση του θεωρήματος (2.1) για τον $\mathbf{T}_\mu$ για $a = 0$. Είναι η βάση για έναν αλγόριθμο διηθησμένης οπισθοπροβολής (**filtered back-projection**) για την αντιστροφή του $\mathbf{T}_\mu$ (κεφάλαιο 4.1). Η πραγματική αριθμητική εφαρμογή για τον $\mathbf{R}$ ξεκινάει από την

$$\mathbf{T}_{-\mu}^\# w_b * f = \mathbf{T}_{-\mu}^\# (w_b * \mathbf{T}_\mu f) \quad (2.32)$$

η οποία προκύπτει από την (2.30) με

$$\widehat{w}_b(\theta, \sigma) = \begin{cases} |\sigma|, & |\mu| < |\sigma| < b, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θεώρημα 2.21 Έστω $f, \mu \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για $k > m \geq 0$ ακεραίους, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^1} \int_0^{2\pi} s^m e^{\pm i k \phi + 1/2(I \pm i \mathbf{H}) \mathbf{R}_\mu(\theta, s)} \mathbf{R}_\mu f(\theta, s) d\phi ds = 0.$$

όπου $\theta = (\cos \phi, \sin \phi)^\top$.

Το θεώρημα (2.21) γενικεύει το θεώρημα για τον ασθενή μετασχηματισμό *Radon*: εάν $\mu = 0$, τότε το θεώρημα (2.21) αναφέρει ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm i k \phi} \int_{\mathbb{R}^1} s^m \mathbf{R}_\mu f(\theta, s) ds d\phi = 0$$

για $k > m$. Αυτό σημαίνει ότι το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $\leq m$.

Κεφάλαιο 3

Δειγματοληψία και Ανάλυση

3.1 Το θεώρημα δειγματοληψίας

Ένα από τα βασικά προβλήματα στην επεξεργασία ψηφιακής εικόνας είναι η δειγματοληψία των εικόνων και ο ανασχηματισμός τους από τα δείγματα. Αφού μια εικόνα περιγράφεται από τη συνάρτηση πυκνότητας f , το μαθηματικό πρόβλημα είναι να διακριτοποιήσουμε την f .

Το θεμελιώδες θεώρημα στη δειγματοληψία είναι το θεώρημα δειγματοληψίας του *Shannon*, το οποίο ασχολείται με περιορισμένες σε ζώνη συναρτήσεις. Μια συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ καλείται περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b αν ο μετασχηματισμός *Fourier* της συνάρτησης είναι τοπικά ολοκληρώσιμος και μηδενίζεται έξω από τη μπάλα με ακτίνα b .

Το απλούστερο παράδειγμα μιας περιορισμένης σε ζώνη συνάρτησης στον $\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση

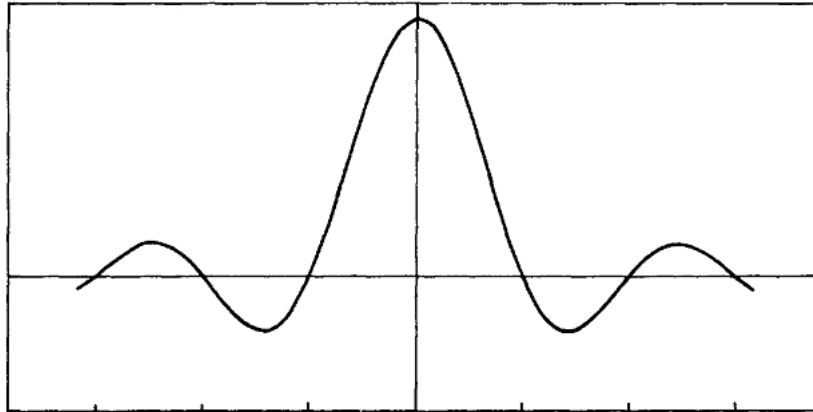
$$\begin{aligned} \text{sinc}(x) &= 1/2 \int_{-1}^1 e^{ix\xi} d\xi \\ &= \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Αφού ο αντίστροφος μετασχηματισμός *Fourier* της συνάρτησης μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$, το εύρος ζώνης της είναι 1. Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε τη συνάρτηση sinc ως $\text{sinc}(x) = \text{sinc}(x_1) \dots \text{sinc}(x_n)$, με $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Η συνάρτηση $\text{sinc}_b(x) = \text{sinc}(bx)$ είναι άλλο ένα παράδειγμα μιας περιορισμένης σε ζώνη συνάρτησης, και έχουμε με χ τη χαρακτηριστική συνάρτηση στο $[-1, 1]^n$

$$\widehat{\text{sinc}_b} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} b^{-n} \chi_{1/b}, \quad \chi_a(\xi) = \chi(a\xi).$$

Στο σχήμα βλέπουμε το γράφημα της sinc_b . Είναι θετική για $|x| < \pi/b$ και φθίνει με έναν ταλαντευόμενο τρόπο έξω από αυτό το διάστημα. Στην ορολογία της ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας, η συνάρτηση sinc_b αντιπροσωπεύει μια λεπτομέρεια μεγέθους $2\pi/b$. Επομένως, μια περιορισμένη σε ζώνη συνάρτηση δεν περιέχει λεπτομέρειες μικρότερες από $2\pi/b$, και για την εκπροσώπηση λεπτομερειών αυτού του μεγέθους πρέπει οι συναρτήσεις να έχουν εύρος ζώνης

τουλάχιστον b . Επίσης, να αναφέρουμε ότι οι λεπτομέρειες μεγέθους $2\pi/b$ ή λιγότερο σε μία εικόνα με πυκνότητα f περιγράφονται από τις τιμές της $\hat{f}(\xi)$ για $|\xi| > b$, ενώ οι τιμές της $\hat{f}(\xi)$ για $|\xi| < b$ είναι υπεύθυνες για πιο αδρά (*coarse*) χαρακτηριστικά. Επομένως, η μεταβλητή ξ καλείται μερικές φορές χωρική (*spacial*) συχνότητα.



Σχήμα 3.1: (Γράφημα της sinc_b)

Δεδομένου ότι οι εικόνες είναι συνήθως περιορισμένης έκτασης, οι συναρτήσεις πυκνότητας που έχουμε να εξετάσουμε, έχουν συμπαγή φορέα. Ο μετασχηματισμός *Fourier* μιας τέτοιας συνάρτησης είναι αναλυτικός και δε μπορεί να μηδενιστεί έξω από μια μπάλα εκτός και αν είναι ταυτοτικά 0. Όμως, οι εικόνες πυκνοτήτων δεν είναι συνήθως περιορισμένες σε ζώνη με την αυστηρή έννοια. Ως εκ τούτου, καλούμε μια συνάρτηση f ουσιωδώς περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b αν $\hat{f}(\xi)$ είναι αμελητέο για $|\xi| > b$.

Το θεώρημα δειγματοληψίας του *Shannon*, στην απλούστερη μορφή του, έχει ως εξής.

Θεώρημα 3.1 Έστω f περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b και έστω $h \leq \pi/b$. Τότε η f είναι μοναδικά ορισμένη από τις τιμές $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}^n$ και στον $L_2(\mathbb{R}^n)$,

$$f(x) = \sum_k f(hk) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{h}\right)(x - hk). \quad (3.1)$$

Επιπλέον έχουμε

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_k f(hk) e^{-ih\xi k} \quad (3.2)$$

στον $L_2([-(\pi/h), \pi/h]^n)$. Αν g είναι μια άλλη περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b συνάρτηση, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{g}(x) dx = h^n \sum_k f(hk) \bar{g}(hk). \quad (3.3)$$

Απόδειξη. Αφού η $\hat{f}$ μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-(\pi/h), \pi/h]^n$, η (3.2) είναι απλά η επέκταση *Fourier* της $\hat{f}$ στο $[-(\pi/h), \pi/h]^n$, και η (3.3) είναι σχέση *Parseval*. Πολλαπλασιάζοντας την (3.2) με τη χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{h/\pi}$ του $[-(\pi/h), \pi/h]^n$ έχουμε

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_k f(hk) \chi_{h/\pi}(\xi) e^{-ih\xi k}$$

σε όλο τον $\mathbb{R}^n$. Αφού η σειρά συγκλίνει στον $L_2(\mathbb{R}^n)$, μπορούμε να πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Fourier* όρο με τον όρο. Το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση (3.1). ■

Θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις. Η συνθήκη $h \leq \pi/b$ λέγεται συνθήκη του *Nyquist*. Αυτό προϋποθέτει ότι η f θα αποτελέσει αντικείμενο δειγματοληψίας, με δειγματοληπτική απόσταση τουλάχιστον το μισό από τη μικρότερη λεπτομέρεια που περιέχεται στην f . Αν αυτό ικανοποιείται, η f μπορεί να ανασχηματιστεί από τα δείγματά της με τη βοήθεια της σειράς *sinc* (3.1), και αυτή η διαδικασία ανασχηματισμού είναι σταθερή, με την έννοια ότι

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (h^n \sum_k |f(hk)|^2)^{1/2},$$

δηλαδή η (3.3) για $f = g$. Από τις (3.2), (3.3) βλέπουμε ότι βάσει της συνθήκης του *Nyquist*, οι μετασχηματισμοί *Fourier* και τα εσωτερικά γινόμενα μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς από το νόμο του τραπεζοειδούς.

Εάν η συνθήκη του *Nyquist* ικανοποιείται γνησίως, δηλαδή $h < \pi/b$, τότε η f καλείται υπέρ-δειγματοποιημένη. Το επόμενο θεώρημα έχει να κάνει με αυτή την περίπτωση.

Θεώρημα 3.2 Έστω η f περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b και έστω $h < \pi/b$. Έστω $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ να μηδενίζεται για $|x| \geq 1$ και

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x) dx = (2\pi)^{-n/2}.$$

Τότε

$$f(x) = \sum_k f(hk) \bar{\gamma}[(\frac{\pi}{h} - b)(x - hk)] \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x - hk). \quad (3.4)$$

Η σημασία του θεωρήματος (3.2) έγκειται στο γεγονός ότι η (3.4) συγκλίνει πιο γρήγορα από τη σειρά *sinc* (3.1). Ο λόγος είναι ότι η συνάρτηση $\bar{\gamma}$, όντας μία συνάρτηση του C_0^∞ του αντίστροφου μετασχηματισμού *Fourier*, φθίνει στο άπειρο γρηγορότερα από οποιαδήποτε δύναμη του $|x|$. Αυτό σημαίνει ότι για τον υπολογισμό της f από την (3.4) πρέπει να αξιολογήσουμε μόνο λίγους όρους της σειράς, δηλαδή μία υπέρ-δειγματοποιημένη συνάρτηση μπορεί να αξιολογηθεί πολύ αποτελεσματικά.

Εάν, από την άλλη μεριά, η συνθήκη του *Nyquist* δεν ικανοποιείται, δηλαδή εάν $h > \pi/b$, τότε η f καλείται υπό-δειγματοποιημένη. Αυτή είναι η περίπτωση, στην οποία η f δεν είναι περιορισμένη σε ζώνη, δηλαδή αν $b = \infty$. Εάν η f ωστόσο, υπολογίζεται από τη σειρά *sinc*

$$S_h f(x) = \sum_k f(hk) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x - hk)$$

τότε διαπράξαμε ένα σφάλμα, το οποίο θα εξετάσουμε τώρα.

Θεώρημα 3.3 Έστω $f \in \mathfrak{S}$. Τότε, υπάρχει μία L_∞ -συνάρτηση χ_x με $|\chi_x| \leq 1$ τέτοια ώστε

$$(S_h f - f)(x) = 2(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n - [-(\pi/h), \pi/h]^n} \chi_x(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi. \quad (3.5)$$

Επίσης έχουμε

$$\widehat{f}(\xi) - (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_k f(hk) e^{-ih\xi k} = - \sum_{\ell \neq 0} \widehat{f}(\xi - \frac{2\pi}{h}\ell). \quad (3.6)$$

Εάν $f, g \in \mathfrak{S}$ τότε

$$(f *^h g)(\xi) - (f * g)(\xi) = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}(\xi) \sum_{\ell \neq 0} \widehat{g}(\xi - \frac{2\pi}{h}\ell) \quad (3.7)$$

όπου η διακεκριμένη συνέλιξη ορίζεται ως

$$f *^h g(x) = h^n \sum_{\ell} f(x - h\ell) g(h\ell).$$

Θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις.

(1) Εάν η f είναι περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b και $h \leq \pi/b$, τότε η f μηδενίζεται έξω από το $[-(\pi/h), (\pi/h)^n]$ και έχουμε ότι $S_h f = f$, δηλαδή τη σχέση (3.1). Εάν η f είναι ουσιαστικά περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b με την έννοια ότι

$$\int_{|\xi| \geq b} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \leq \epsilon$$

και $h \leq \pi/b$ τότε

$$|S_h f - f| \leq 2(2\pi)^{-n/2} \epsilon$$

δηλαδή έχουμε μία λάθος εκτίμηση για τον ανασχηματισμό μιας ουσιαστικά περιορισμένης σε ζώνη με εύρος ζώνης b συνάρτησης από τις *sinc* σειρές της.

(2) Η φασματική σύνθεση του σφάλματος $S_h f - f$ είναι πολύ πιο ενδιαφέρουσα από την παραπάνω εκτίμηση. Σύμφωνα με τη σχέση

$$(S_h f - f)^\wedge - \widehat{f} = \chi_{h/\pi} - \widehat{f} = \chi_{h/\pi}(\widehat{f} + \widehat{a}) - \widehat{f} = (\chi_{h/\pi} - 1)\widehat{f} + \chi_{h/\pi}\widehat{a}$$

αποτελείται από δύο συναρτήσεις.

Ο μετασχηματισμός *Fourier* της πρώτης συνάρτησης είναι $(\chi_{h/\pi} - 1)\widehat{f}$, ο οποίος μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-(\pi/h), (\pi/h)^n]$, δηλαδή η συνάρτηση αυτή περιγράφει μόνο λεπτομέρειες μεγέθους μικρότερες από $2h$. Σύμφωνα με την ερμηνεία μας για το θεώρημα

δειγματοληψίας του *Shannon*, αυτό το μέρος του σφάλματος πρέπει να αναμένεται, αφού για την κατάλληλη δειγματοληψία τέτοιων λεπτομερειών απαιτείται δειγματοληπτική απόσταση λιγότερο από h .

Ο μετασχηματισμός *Fourier* της δεύτερης συνάρτησης είναι $\chi_{h/\pi\hat{a}}$ ο οποίος μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-(\pi/h), (\pi/h)]^n$, δηλαδή αυτή η συνάρτηση περιγράφει μόνο χαρακτηριστικά μεγέθους $2h$ και μεγαλύτερα. Έτσι βλέπουμε ότι η υπό-δειγματοποιημένη όχι μόνο παράγει ψευδείς λεπτομέρειες δύο φορές μεγαλύτερες ή μικρότερες από τη δειγματοληπτική απόσταση, αλλά, επίσης, ολικά αντικείμενα διατάραξης ή ομαλοποίησης της εικόνας.

Προκειμένου να αποφύγουμε την ομαλοποίηση (*aliasing*), πρέπει να περιορίσουμε σε ζώνη τη συνάρτηση πριν τη δειγματοληψία. Αυτό μπορεί να γίνει με διήθηση-φιλτράρισμα.

Έστω F να είναι μία περιορισμένη σε ζώνη συνάρτηση και θέτουμε

$$f_F = F * f.$$

Τότε, η f_F είναι επίσης περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b και είναι εφικτή η δειγματοληψία με μέγεθος βήματος $h \leq \pi/b$. Σε αυτό το πλαίσιο η F καλείται φίλτρο χαμηλής διόδου με συχνότητα διαχωρισμού b . Ένα παράδειγμα είναι το ιδανικό φίλτρο χαμηλής διόδου το οποίο ορίζεται ως

$$\hat{F}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq b, \\ 0, & |\xi| > b. \end{cases}$$

Οι σειρές *sinc* καθιστούν εφικτή την επίλυση χωρίς σφάλματα των κατάλληλων δειγμάτων συναρτήσεων. Όμως οι σειρές *sinc*, ακόμα και στη γενική τους μορφή, όπως στο θεώρημα (3.2), είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστούν. Ως εκ τούτου, θα πρέπει περιστασιακά να χρησιμοποιούμε απλές *B-spline* παρεμβολές.

Έστω χ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, δηλαδή η χ είναι ίση με 1 σε αυτό το διάστημα και ίση με μηδέν έξω από αυτό. Έστω

$$B = \chi * \dots * \chi, \quad k \text{ διανύσματα.}$$

Η B καλείται *B-spline* k τάξης. Προφανώς, η B είναι $k-2$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-(k/2), k/2]$ και μετατρέπεται σε ένα πολυώνυμο βαθμού $k-1$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\ell, \ell+1]$ για k άρτιο και $\left[\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}\right]$ για k περιττό, και ℓ ακέραιος.

Έστω $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^1)$ και $h > 0$. Με $B_{1/h}(s) = B(s/h)$ ορίζουμε

$$I_h g(s) = \sum_{\ell} g(h\ell) B_{1/h}(s - h\ell) \quad (3.8)$$

και θεωρούμε την $I_h g$ σαν μια προσέγγιση της g . Για $k = 1(2)$, η $I_h g$ είναι μία κατά τμήματα σταθερή (γραμμική) συνάρτηση παρεμβολής της g .

Στο ακόλουθο θεώρημα θα δούμε ότι το αποτέλεσμα της προσέγγισης μιας περιορισμένης σε ζώνη με εύρος ζώνης b συνάρτησης g από την $I_h g$ είναι ισοδύναμο με το να εφαρμόσουμε ένα φίλτρο χαμηλής διόδου και να προσθέσουμε μία υψηλής συχνότητας συνάρτηση.

Θεώρημα 3.4 Έστω g να είναι περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης π/h . Τότε

$$I_h g = F_h * g + a_h, \quad \widehat{F}_h(\sigma) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} (\text{sinc} \frac{\sigma h}{2})^k, & |\sigma| \leq \frac{\pi}{h} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου $\widehat{a}_h(\sigma) = 0$ για $|\sigma| \leq \pi/h$, και για $\alpha, \beta \geq 0$

$$|a_h|_{H^{-\beta}(\mathbb{R}^1)} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} \left(\frac{h}{\pi}\right)^{\beta-\alpha} |g|_{H^{-\alpha}(\mathbb{R}^1)}.$$

Η ημι-νόρμα $|\cdot|_{H^{-\alpha}(\mathbb{R}^1)}$ ορίζεται ως

$$|g|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^1)}^2 = \int |\sigma|^{2\alpha} |\widehat{g}(\sigma)|^2 d\sigma.$$

Μέχρι τώρα το Καρτεσιανό πλέγμα (*grid*) $h\mathbb{Z}^n$ και ο κύβος $[-(\pi/h), \pi/h]^n$ έπαιξαν ένα σημαντικό ρόλο: αν η f μηδενίζεται έξω από αυτό τον κύβο, είναι πιθανός ο ανασχηματισμός της f από της τιμές της στο πλέγμα. Αν αντικαταστήσουμε τον κύβο με ένα κατάλληλο σύνολο έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.5 Υποθέτουμε ότι τα σύνολα $K + 2\pi(W^{-1})^T k, k \in \mathbb{Z}^n$ είναι ξένα μεταξύ τους και έστω $g \in \mathfrak{S}$. Τότε, υπάρχει μία L_{∞} συνάρτηση χ_x , η οποία μηδενίζεται στο K , με $|\chi_x| \leq 1$ τέτοια ώστε

$$(S_W g - g)(x) = 2(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_x(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi.$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα (3.5) σε συναρτήσεις g οι οποίες μηδενίζονται στο πλέγμα $[W\ell : \ell \in \mathbb{Z}^n]$. Τότε,

$$|g(x)| \leq 2(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n - K} |\widehat{g}(\xi)| d\xi. \quad (3.9)$$

Εάν η g είναι μία $2a$ -περιοδική C^{∞} συνάρτηση, έχουμε ότι

$$\widehat{g} = (2\pi)^{n/2} \sum_k \widehat{g}_k \delta_{\pi k/a}$$

και περιμένουμε να ισχύει, από την (3.9) ότι

$$|g(x)| \leq 2 \sum_{\pi k/a \notin K} |\widehat{g}_k|. \quad (3.10)$$

Αυτό είναι στην πραγματικότητα η υπόθεση. Για να αποδείξουμε τη σχέση (3.10) διαλέγουμε μία πραγματική συνάρτηση $w \in \mathfrak{S}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα (3.5) στη συνάρτηση $wg \in \mathfrak{S}$, έχοντας

$$(wg)(x) = 2(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_x(\xi) (wg)\widehat{\chi}(\xi) d\xi.$$

όπου χ_x είναι μία L_∞ συνάρτηση η οποία μηδενίζεται στο K και $|\chi_x| \leq 1$. Προχωρώντας τυπικά έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_x(\xi)(wg)(\xi)d\xi &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_x(\xi)(\tilde{w} * \hat{g})(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{w} * \chi_x)(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \hat{g}(\tilde{w} * \chi_x) \end{aligned} \quad (3.11)$$

όπου $\hat{g}$ είναι η επέκταση της $\hat{g}$ από τον $\mathfrak{S}$ στον χώρο των φραγμένων C^∞ -συναρτήσεων, δηλαδή

$$\hat{g}(\tilde{w} * \chi_x) = (2\pi)^{n/2} \sum_k \hat{g}_k((\tilde{w} * \chi_x)(\pi k/a).$$

Η σχέση (3.11) εύκολα επαληθεύεται με σαφείς υπολογισμούς. Έπεται ότι

$$|(wg)(x)| \leq 2(2\pi)^{-n/2} \sum_k |\hat{g}_k| |(\tilde{w} * \chi_x)(\pi k/a)|$$

και η σχέση (3.10) έπεται θέτοντας $w \rightarrow 1$ με έναν κατάλληλο τρόπο: για $\psi \in C_0^\infty(\Omega^n)$ μία ακτινική συνάρτηση με μέση τιμή 1 θέτουμε $\tilde{w}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \epsilon^{-n} \psi(\xi/\epsilon)$, δηλαδή $w(0) = 1$. Έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$

$$|(wg)(x)| \leq 2 \sum_k |\hat{g}_k| \sup_{|\pi k/a - \xi| \leq \epsilon} |\chi_x(\xi)|$$

και η σχέση (3.10) έπεται θέτοντας $\epsilon \rightarrow 0$.

Αν η $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ έχει περίοδο 2π μόνο ως προς την πρώτη μεταβλητή, και είναι στον $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^1)$ ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, τότε

$$|g(x)| \leq 2(2\pi)^{-1/2} \sum_k \int_{(k,\sigma) \notin K} |\hat{g}_k(\sigma)| d\sigma. \quad (3.12)$$

3.2 Ανάλυση

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το μετασχηματισμό *Radon* Rf μιας συνάρτησης f , η οποία έχει φορέα τη μοναδιαία μπάλα Ω^n του $\mathbb{R}^n$ και η οποία είναι απόλυτα περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b κατά μία έννοια που θα γίνει ακριβής αργότερα. Θέλουμε να ανακαλύψουμε για ποιες διακριτές κατευθύνσεις $\theta \in S^{n-1}$ η συνάρτηση $R_\theta f$ πρέπει να δίνεται, εάν η f μπορεί να ανακτηθεί αξιόπιστα, δηλαδή οι λεπτομέρειες μεγέθους $2\pi/b$ μπορούν να επιλυθούν. Αφού οι συνθήκες δειγματοληψίας για το μετασχηματισμό $\mathbf{P}$ στις τρεις διαστάσεις μπορούν να προκύψουν εφαρμόζοντας τις συνθήκες δειγματοληψίας για τον $\mathbf{R}$ σε επίπεδα, θα εξετάσουμε μόνο τον $\mathbf{R}$.

Έστω H'_m το σύνολο των σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων βαθμού $\leq m$ οι οποίες είναι άρτιες για m άρτιο και περιττές για m περιτό. Θα δείξουμε ότι

$$\dim H'_m = \binom{m+n-1}{n-1} \quad (3.13)$$

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή. Για $m = 0, 1$ έχουμε $H'_0 = \langle 1 \rangle$, $H'_1 = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, επομένως

$$\dim H'_0 = 1 = \binom{n-1}{n-1}, \quad \dim H'_1 = n = \binom{n}{n-1},$$

δηλαδή η σχέση (3.13) ισχύει για $m = 0, 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για μερικά $m \geq 1$. Τότε

$$\begin{aligned} \dim H'_{m+2} &= \dim H'_m + N(n, m+2) = \binom{m+n-1}{n-1} + \frac{(2m+n+2)(n+m-1)!}{(m+2)!(n-2)!} \\ &= \frac{(n+m-1)!}{(m+2)!(n-1)!} ((m+1)(m+2) + (2m+n+2)(n-1)) \\ &= \frac{(n+m-1)!}{(m+2)!(n-1)!} (m+n)(m+n+1) \\ &= \frac{(n+m-1)!}{(m+2)!(n-1)!} \binom{m+n+1}{n-1}. \end{aligned}$$

Αυτή είναι η σχέση (3.13) βάζοντας όπου m το $m+2$.

Τώρα θα παραθέσουμε έναν ορισμό, ο οποίος είναι κρίσιμος για ερωτήσεις στην ανάλυση.

Ορισμός 3.1 Ένα σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ καλείται m -επιλύσιμο αν καμιά μη τετριμμένη $h \in H'_m$ δεν μηδενίζεται στο A . Αν το A είναι m -επιλύσιμο, τότε το πλήθος $|A|$ των στοιχείων του A ικανοποιεί τη σχέση

$$|A| \geq \dim H'_m = \binom{m+n-1}{n-1}. \quad (3.14)$$

Αντίστροφα, αν το $|A|$ ικανοποιεί τη (3.14) συνήθως μπορεί να είναι m -επιλύσιμο, εκτός αν το A βρίσκεται σε μια ορισμένη αλγεβρική πολλαπλότητα βαθμού m στον S^{n-1} .

Θεώρημα 3.6 Έστω ότι το σύνολο A m -επιλύσιμο, έστω $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$, και έστω $\lambda > -1/2$. Εάν ο $\mathbf{R}_\theta f$ μηδενίζεται για $\theta \in A$, τότε

$$\mathbf{R}_\theta f(s) = (1-s^2)^{\lambda-1/2} \sum_{\ell > m} C_\ell^\lambda(s) h_\ell(\theta) \quad (3.15)$$

με C_ℓ^λ τα πολυώνυμα Gegenbauer και $h_\ell \in H'_\ell$.

Το προηγούμενο θεώρημα μας λέει ότι η επέκταση του $\mathbf{R}_\theta f$ σε πολυώνυμα *Gegenbauer* ξεκινάει από τον $m+1$ όρο. Για m μεγάλο, ο $\mathbf{R}_\theta f$ είναι, συνεπώς, μια ιδιαίτερα ταλαντευόμενη συνάρτηση. Στην πραγματικότητα, θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι ο $|(\mathbf{R}_\theta f)|$ είναι αμελητέος σε ένα διάστημα ελαφρώς μικρότερο από το $[-m, m]$ για m μεγάλο. Προκειμένου να διατυπώσουμε καταστάσεις σαν αυτή, εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Για $0 < \vartheta < 1$ και $b \geq 0$ συμβολίζουμε με $\eta(\vartheta, b)$ οποιαδήποτε ποσότητα, η οποία εισάγει μία εκτίμηση της μορφής

$$0 \leq \eta(\vartheta, b) \leq C(\vartheta)e^{-\lambda(\vartheta)b} \quad (3.16)$$

παρέχοντας ότι $b \geq B(\vartheta)$, όπου τα $\lambda(\vartheta)$, $C(\vartheta)$, $B(\vartheta)$ είναι θετικοί αριθμοί. Έτσι, για $\vartheta < 1$ σταθερό, η $\eta(\vartheta, b)$ φθίνει εκθετικά καθώς το b τείνει στο άπειρο. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό η με ένα γενικό τρόπο, δηλαδή διαφορετικές ποσότητες να δηλώνονται με το ίδιο σύμβολο η , μόνο εάν αυτές ικανοποιούν τη σχέση (3.16). Συγκεκριμένα παραδείγματα συναρτήσεων η είναι

$$\eta_1(\vartheta, m) = \sup_{|r| \leq 1} \int_{-\vartheta m}^{\vartheta m} |J_m(r\sigma)| d\sigma. \quad (3.17)$$

Στην πραγματικότητα, ένας σύντομος υπολογισμός δείχνει ότι

$$\eta_1(\vartheta, m) \leq C(\vartheta)m^{1/2}e^{-(1-\vartheta^2)^{3/2}m/3}$$

Αφού για $\lambda > 0$, $d > 0$ και $\lambda - d/m > 0$ ισχύει

$$\sum_{\ell > m} \ell^d e^{-\lambda \ell} \leq \frac{1}{\lambda - d/m} m^d e^{-\lambda m} \quad (3.18)$$

όπως μπορούμε να δούμε από την ανισότητα

$$\sum_{\ell > m} \ell^d e^{-\lambda \ell} \leq \int_m^\infty x^d e^{-\lambda x} dx,$$

οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \eta_2(\vartheta, b) &= \sum_{m \geq b} \eta_1(\vartheta, m) \\ \eta_3(\vartheta, b) &= \sum_{m \geq b} \eta_2(\vartheta, m) \\ \eta_{4,d}(\vartheta, b) &= \sum_{m \geq b} m^d \eta_1(\vartheta, m) \end{aligned} \quad (3.19)$$

ικανοποιούν επίσης τη σχέση (3.16). Φυσικά, οι συναρτήσεις

$$b^d \eta(\vartheta, b), \quad \eta(\vartheta, (\frac{1}{\vartheta} - 1)b) \quad (3.20)$$

ικανοποιούν τη σχέση (3.16), αν την ικανοποιεί η συνάρτηση η .

Προκειμένου να εκφράσουμε τι εννοούμε με τον όρο «ουσιαστικά» (*essentially*) περιορισμένη σε ζώνη συνάρτηση, εισάγουμε το συμβολισμό

$$\epsilon_d(f, b) = \int_{|\xi| > b} |\xi|^d |\widehat{f}(\xi)| d\xi.$$

Για $0 < \vartheta$ και $b \geq 1$ έχουμε

$$\sum_{k \geq b/\vartheta} \epsilon_d(f, \vartheta k) \leq \frac{1}{\vartheta} \epsilon_{d+1}(f, b). \quad (3.21)$$

Αυτό το βλέπουμε ως ακολούθως. Εάν η h είναι μία μη αρνητική συνάρτηση, τότε

$$\sum_{k \geq b} \int_{\vartheta k}^{\infty} h(\sigma) d\sigma \leq \frac{1}{\vartheta} \int_{\vartheta b}^{\infty} \sigma h(\sigma) d\sigma \quad (3.22)$$

όπου έχουν νόημα τα ολοκληρώματα. Για να αποδείξουμε τη σχέση (3.22) γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq b} \int_{\vartheta k}^{\infty} h(\sigma) d\sigma &\leq \int_{\vartheta b}^{\infty} h(\sigma) d\sigma + \int_{\vartheta(b+1)}^{\infty} h(\sigma) d\sigma + \dots \\ &= \int_{\vartheta b}^{\vartheta(b+1)} h(\sigma) d\sigma + 2 \int_{\vartheta(b+1)}^{\vartheta(b+2)} h(\sigma) d\sigma + \dots \\ &\leq \int_{\vartheta b}^{\vartheta(b+1)} \frac{\sigma}{\vartheta} h(\sigma) d\sigma + \int_{\vartheta(b+1)}^{\vartheta(b+2)} \frac{\sigma}{\vartheta} h(\sigma) d\sigma + \dots \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για $b \geq 1$. Αυτό αποδεικνύει τη σχέση (3.22). Εφαρμόζοντας την (3.22) με

$$h(\sigma) = |\sigma|^{d+n-1} |\widehat{f}(\sigma\theta)|$$

και ολοκληρώνοντας στον S^{n-1} οδηγούμαστε στη σχέση (3.21).

Θεώρημα 3.7 Έστω το σύνολο A να είναι m -επιλύσιμο, και έστω $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$. Εάν η συνάρτηση $\mathbf{R}_\theta f$ μηδενίζεται για $\theta \in A$, τότε

$$\int_{|\sigma| \leq \vartheta m} |(\mathbf{R}_\theta f)^\sim(\sigma)| d\sigma \leq \eta(\vartheta, m) \|\mathbf{R}_\theta f\|_{L_1(\mathbb{R}^1)}$$

για $\theta \in S^{n-1}$.

Θεώρημα 3.8 Έστω το σύνολο A να είναι m -επιλύσιμο, και έστω $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$. Εάν η συνάρτηση $\mathbf{R}_\theta f$ μηδενίζεται για $\theta \in A$, τότε

$$\int_{|\xi| \leq \vartheta m} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \leq \eta(\vartheta, m) \|f\|_{L_1(\Omega)}.$$

Μία προφανής συνέπεια είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.9 Έστω ότι το σύνολο A είναι m -επιλύσιμο, και έστω $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$. Εάν η συνάρτηση $\mathbf{R}_\theta f$ μηδενίζεται για $\theta \in A$, τότε

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega^n)} \leq \frac{(2\pi)^{-n/2}}{1 - \eta(\vartheta, m)} \epsilon_0(f, \vartheta m).$$

Τα τελευταία δύο θεωρήματα ξεκάθαρα δίνουν την απάντηση στο ερώτημα της ανάλυσης. Το Θεώρημα (3.8) μας λέει ότι ο μετασχηματισμός *Fourier* μιας συνάρτησης στον Ω^n , της οποίας ο μετασχηματισμός *Radon* μηδενίζεται σε ένα m -επιλύσιμο σύνολο, είναι σχεδόν εξόλοκληρου συγκεντρωμένος έξω από τη μπάλα ακτίνας ϑm γύρω από την αρχή, δεδομένου ότι το m είναι μεγάλο. Με βάση αυτά που είπαμε στην παράγραφο (3.1), αυτό μπορεί να αναδιατυπωθεί για ϑ κλειστό στο 1.

Μία συνάρτηση στον Ω^n , της οποίας ο μετασχηματισμός *Radon* μηδενίζεται σε ένα m -επιλύσιμο σύνολο, δεν περιλαμβάνει-συγκρατεί λεπτομέρειες μεγέθους $2\pi/m$ ή μεγαλύτερου.

Ομοίως, το θεώρημα (3.9) εισάγει την ακόλουθη ερμηνεία. Εάν μια συνάρτηση f στον Ω^n είναι ουσιαστικά περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b με την έννοια ότι το $\epsilon_0(f, b)$ είναι αμελητέο, τότε η f μπορεί να ανακτηθεί αξιόπιστα από τις τιμές του $\mathbf{R}f$ σε ένα m -επιλύσιμο σύνολο, δεδομένου ότι το $b \leq \vartheta$ και ότι το b είναι μεγάλο. Ή διαφορετικά, με έναν λιγότερο ακριβή αλλά πιο πρακτικό τρόπο: μία συνάρτηση στον Ω^n , η οποία δεν περιέχει λεπτομέρειες μεγέθους $2\pi/b$ ή μικρότερου, μπορεί να ανακτηθεί αξιόπιστα από τις τιμές του μετασχηματισμού *Radon* της σε ένα m -επιλύσιμο σύνολο, δεδομένου ότι $m > b$.

Για να ολοκληρώσουμε αυτή την ενότητα, πρέπει να βρούμε ποια σύνολα είναι m -επιλύσιμα. Σύμφωνα με τη σχέση (3.14), έχουμε ότι, εκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις, ένα σύνολο είναι m -επιλύσιμο αν και μόνο εάν περιέχει

$$\binom{m+n-1}{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} m^{n-1} (1 + o(1/m)) \quad (3.23)$$

κατευθύνσεις. Έτσι, για m μεγάλο, ίσως σκεφτόμαστε ένα m -επιλύσιμο σύνολο σαν μία συλλογή από $m^{n-1}/(n-1)!$ κατευθύνσεις. Για $n = 2$, αυτό είναι σωστό. Έστω $A = \{\theta_1, \dots, \theta_p\} \subseteq S^1$, $\theta_j = \begin{pmatrix} \cos \phi_j \\ \sin \phi_j \end{pmatrix}$, $0 \leq \phi_j < \pi$. Προκειμένου να είναι το A m -επιλύσιμο

πρέπει να έχουμε $p \geq \dim H'_m = \binom{m+1}{1} = m+1$ και $\theta_1, \dots, \theta_p$ δεν πρέπει να είναι οι ρίζες μιας συνάρτησης $h_m \in H'_m$. Από Παράρτημα 5.5, ξέρουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση h_m είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο της μορφής

$$h_m(\theta) = \sum_{k=0}^m \{a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi\}$$

όπου $\theta = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$, και το $\sum$ δηλώνει άθροισμα μόνο για $k + m$ άρτιο. Εάν η h_m μηδενίζεται για $p > m$ ξένες μεταξύ τους γωνίες $\phi_j \in [0, \pi]$, τότε $h_m = 0$. Επομένως, για

$n = 2$, το σύνολο A είναι m -επιλύσιμο εάν και μόνο εάν περιέχει $p > m$ ξένες μεταξύ τους κατευθύνσεις στο γωνιακό διάστημα $[0, \pi]$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ανασχηματίσουμε αξιόπιστα συναρτήσεις με ουσιώδες εύρος ζώνης $b < \vartheta p$ από p ξένες μεταξύ τους κατευθύνσεις στο διάστημα $[0, \pi]$. Δε χρειάζεται καμία υπόθεση σχετικά με την κατανομή αυτών των κατευθύνσεων. Για παράδειγμα, οι κατευθύνσεις μπορούν να συγκεντρώνονται σε ένα μικρό γωνιακό διάστημα.

Τώρα, έστω $n = 3$. Εδώ, η συνθήκη ότι το σύνολο A είναι m -επιλύσιμο σημαίνει ότι $p \geq \dim H'_m = \binom{m+2}{2} = \frac{1}{2}(m+2)(m+1)$ και ότι οι μη τετριμμένες συναρτήσεις h_m της μορφής

$$h_m(\theta) = \sum_{\ell=0}^m \{a_\ell P_\ell(\cos\psi) + \sum_{k=1}^{\ell} (a_{\ell k} \cos k\phi + b_{\ell k} \sin k\phi) P_\ell^k(\cos\psi)\}$$

μηδενίζονται στο A , όπου ψ, ϕ είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες του θ . Θα δείξουμε ότι οι $(m+1)^2$ κατευθύνσεις $\theta_{j\ell}$ με σφαιρικές συντεταγμένες

$$0 \leq \psi_0 < \psi_1 < \dots < \psi_m < \pi \quad (3.24)$$

$$0 \leq \phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_m < \pi$$

δημιουργούν ένα m -επιλύσιμο σύνολο. Η απόδειξη εξαρτάται από το γεγονός ότι μια συνάρτηση στον H'_m , όντας ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού m σε έναν κύκλο του S^2 , μπορεί να έχει μόνο $2m$ μηδενικά σημεία στον κύκλο, εκτός αν είναι ταυτοτικά μηδέν. Για κάθε $i = 0, \dots, m$ θεωρούμε το μεγάλο κύκλο C_i στον οποίο $\phi = \phi_i$ ή $\phi = \phi_i + \pi$. Εάν η συνάρτηση $h_m \in H'_m$ μηδενίζεται στο (3.24) έχει $2m+2$ μηδενικά σημεία σε κάθε C_i , δηλαδή αυτά με τις σφαιρικές συντεταγμένες $\psi_j, \phi_i, j = 0, \dots, m$ και τους αντίποδες τους. Επομένως, $h_m = 0$ σε κάθε έναν από τους μεγάλους κύκλους C_i . Έπεται ότι η συνάρτηση h_m έχει $2m+2$ μηδενικά σημεία σε κάθε οριζόντιο κύκλο του S^2 , δηλαδή η $h_m = 0$ στον S^2 . Αυτό αποδεικνύει ότι το (3.24) είναι m -επιλύσιμο. Αφού, για $\phi_j = \pi j / (m+1), j = 0, \dots, m$ η συνάρτηση

$$P_{m+1}^{m+1}(\cos\psi) \sin(m+1)\phi$$

η οποία είναι στον H'_{m+1} , μηδενίζεται στο (3.24), τότε το σύνολο (3.24) δεν είναι $m+1$ -επιλύσιμο γενικά.

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο ότι η f μπορεί να ανακτηθεί αξιόπιστα από τις κατευθύνσεις του (3.24), δεδομένου ότι η f είναι ουσιαστικά περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b με $b \leq \vartheta m$.

Από τη σχέση (3.23) αναμένουμε ότι υπάρχουν m -επιλύσιμα σύνολα με $(m+2)(m+1)/2$ κατευθύνσεις. Ένα πιθανό υποψήφιο τέτοιο σύνολο, για m άρτιο, είναι το

$$0 < \psi_0 < \psi_1 < \dots < \psi_{m/2} < \pi/2 \quad (3.25)$$

$$\phi_i = 2\pi i / (m+1), \quad i = 0, \dots, m.$$

Για $m = 2$ μπορούμε να δείξουμε ότι το (3.25) είναι m -επιλύσιμο. Εάν η h μηδενίζεται στο (3.25) έχει τέσσερις ρίζες σε κάθε μεγάλο κύκλο C_i στον οποίο $\phi = \phi_i$ ή $\phi = \phi_i \pm \pi$, δηλαδή

αυτά με τις σφαιρικές συντεταγμένες $\psi_j, \phi_i, j = 0, 1$ και τους αντίποδες τους. Εάν $h \neq 0$ στο Βόρειο Πόλο αυτά είναι οι μόνες ρίζες της h στον $C_i, i = 0, 1, 2$. Έτσι, η h έχει έξι σημεία αλλαγής κατά μήκος κάθε κύκλου με ψ σταθερό στο (ψ_0, ψ_1) , το οποίο είναι αδύνατο. Εάν η $h = 0$ στο Βόρειο Πόλο, τότε έχει έξι ρίζες στον C_i , επομένως $h = 0$ στον C_i , επομένως $h = 0$ στον S^2 .

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι ο $\mathbf{R}_\theta f(s)$ είναι γνωστός, για $\theta \in A$ και για όλες τις τιμές του s . Στην πράξη, γνωρίζουμε τον $\mathbf{R}_\theta f(s)$ για πεπερασμένα πολλές τιμές του s . Με βάση το θεώρημα (2.1) ο $\mathbf{R}_\theta f$ είναι ουσιαστικά περιορισμένος σε ζώνη με εύρος ζώνης b εάν είναι και η f . Αυτό υποδηλώνει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα (3.3) στον $\mathbf{R}_\theta f$, με τη συνέπεια ότι η δειγματοληψία είναι σωστή εάν ικανοποιείται η συνθήκη του *Nyquist*, δηλαδή εάν $\mathbf{R}_\theta f(s_\ell)$ είναι γνωστό για

$$s_\ell = \ell/q, \quad \ell = -q, \dots, q, \quad q \geq b/\pi.$$

Από τη σχέση (3.23) ξέρουμε ότι το πλήθος p των κατευθύνσεων που χρειαζόμαστε για να ανακτήσουμε μία τέτοια συνάρτηση f είναι ουσιαστικά $p \geq b^{n-1}/(n-1)!$. Έτσι, για τους ελάχιστους αριθμούς p, q έχουμε περίπου

$$p = cq^{n-1}, \quad c = \pi^{n-1}/(n-1)! \quad (3.26)$$

Αλλά πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Το ότι $\mathbf{R}_\theta f(s_\ell) = 0$ συνεπάγεται μόνο ότι ο $\mathbf{R}_\theta f$ είναι μικρός, αλλά δεν ξέρουμε πόσο μεγάλος μπορεί να είναι ο $\mathbf{R}f$ εάν ο $\mathbf{R}_\theta f$ είναι μικρός για $\theta \in A$.

Προκειμένου να έχουμε μία θετική εκτίμηση, πρέπει να θέσουμε μία απαίτηση σταθερότητας στο A , η οποία μας εγγυάται ότι η $h \in H_m$ είναι μικρή σε όλο το S^{n-1} εάν είναι μικρή στο A .

Κεφάλαιο 4

Αλγόριθμοι ανασχηματισμού

4.1 Αλγόριθμος διηθησμένης οπισθοπροβολής (*filtered backprojection*)

Ο αλγόριθμος *filtered backprojection* είναι ο πιο σημαντικός αλγόριθμος, τουλάχιστον στον ιατρικό τομέα. Μπορεί να θεωρηθεί σαν μία υπολογιστική εφαρμογή του τύπου αντιστροφής (2.13). Όμως μία διαφορετική προσέγγιση, βασισμένη στον τύπο

$$W_b * f = \mathbf{R}^\#(w_b * \mathbf{R}f), \quad W_b = \mathbf{R}^\# w_b \quad (4.1)$$

του θεωρήματος (2.3) μας δίνει περισσότερη πληροφορία. Θεωρούμε αληθές ότι το W_b είναι ένα φίλτρο χαμηλής διόδου με συχνότητα αποκοπής b το οποίο γράφεται ως

$$\hat{W}_b(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \hat{\Phi}(|\xi|/b) \quad (4.2)$$

με $0 \leq \hat{\Phi} \leq 1$ και $\hat{\Phi}(\sigma) = 0$ για $\sigma \geq 1$.

Το θεώρημα (2.4) μας δίνει τη σχέση ανάμεσα στο W_b και στο w_b όσον αφορά τους μετασχηματισμούς *Fourier*:

$$\hat{W}_b(\xi) = (2\pi)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} (\hat{w}_b(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|) + \hat{w}_b(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|)).$$

Αφού το $\hat{W}_b$ είναι μία ακτινική συνάρτηση, διαγράφουμε το πρώτο όρισμα στην $\hat{w}_b$. Για $\hat{w}_b$ άρτιο παίρνουμε

$$\hat{w}_b(\sigma) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1/2-n} |\sigma|^{n-1} \hat{\Phi}(|\sigma|/b). \quad (4.3)$$

Από τις υποθέσεις μας για το $\hat{\Phi}$ έπεται ότι

$$0 \leq \hat{w}_b(\sigma) \leq \frac{1}{2} (2\pi)^{1/2-n} |\sigma|^{n-1}. \quad (4.4)$$

Η εκτίμηση της (4.1) καλεί για παρουσίαση (*performing*) τη μονοδιάστατη συνέλιξη ή τη *filtering* λειτουργία $w_b * \mathbf{R}f$ για κάθε κατεύθυνση στον S^{n-1} , ακολουθούμενη από την εφαρμογή του *backprojection* τελεστή $\mathbf{R}^\#$. Αυτό εξηγεί και το όνομα του αλγορίθμου.

Ο αλγόριθμος *filtered backprojection* είναι μια διακριτή εκδοχή της (4.1). Έστω $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$ και έστω $g = \mathbf{R}f$ δειγματοσιμεμένα στα

$$(\theta_j, s_\ell), \quad j=1, \dots, p, \quad \ell=-q, \dots, q$$

όπου $\theta_j \in S^{n-1}$ και $s_\ell = h\ell$, $h = 1/q$.

Με αυτές τις συνθήκες, η συνέλιξη $w * g$ αντικαθίσταται από τη διακριτή συνέλιξη

$$w_b \overset{h}{*} g(\theta_j, s) = h \sum_{\ell=-q}^q w_b(s - s_\ell) g(\theta_j, s_\ell). \quad (4.5)$$

Για να υπολογίσουμε την οπισθοπροβολή (*backprojection*)(4.1) χρειαζόμαστε έναν κανόνα ολοκλήρωσης (*quadrature rule*) στον S^{n-1} βασιτισμένο στους κόμβους $\theta_1, \dots, \theta_p$ με θετικά βάρη a_{pj} . Θεωρώντας αληθές ότι αυτός ο κανόνας θα είναι ακριβής στον H'_{2m} , οι άρτιες σφαιρικές αρμονικές βαθμού $2m$ για κάποια m , δηλαδή

$$\int_{S^{n-1}} v(\theta) d\theta = \sum_{j=1}^n a_{pj} v(\theta_j) \quad (4.6)$$

για $v \in H'_{2m}$. Η οπισθοπροβολή στην (4.1) αντικαθίσταται από τη διακριτή οπισθοπροβολή

$$\mathbf{R}_p^\# v(x) = \sum_{j=1}^p a_{pj} v(\theta_j, x \cdot \theta_j). \quad (4.7)$$

Ο πλήρης αλγόριθμος *filtered backprojection* γίνεται

$$f_{FB} = \mathbf{R}_p^\# w_b \overset{h}{*} g. \quad (4.8)$$

Με το ακόλουθο θεώρημα θα μελετήσουμε την επίδραση της διακριτοποίησης.

Θεώρημα 4.1 Έστω $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$. Υποθέτοντας ότι η (4.5) ισχύει στον H'_{2m} και ότι, για μερικά ϑ με $0 < \vartheta < 1$,

$$b \leq \vartheta m, \quad b \leq \pi/h. \quad (4.9)$$

Τότε, με η ορισμένη όπως στην ... , έχουμε

$$\begin{aligned} f_{FB} &= W_b * f + e_1 + e_2, \\ |e_1| &\leq \frac{1}{2} (2\pi)^{n/2} \epsilon_0^*(f, b), \epsilon_0^*(f, b) = |S^{n-1}| \sup_{\substack{\theta \in S^{n-1} \\ |\sigma| \geq b}} \int |\sigma|^{n-1} |\widehat{f}(\sigma\theta)| d\sigma, \\ |e_2| &\leq \|f\|_{L_\infty(\Omega^n)} \eta(\vartheta, m). \end{aligned}$$

Η εκτίμηση της $f_{FB}(x)$ απαιτεί τον υπολογισμό της $w * g(\theta_j, x \cdot \theta_j)$ για $j = 1, \dots, p$ το οποίο αντιστοιχεί σε $O(pq)$ πράξεις. Αν θέλουμε να τις μειώσουμε σε $O(p)$ θα εκτιμήσουμε την (4.6) μόνο σε κάποιο σημείο $s = s_\ell$, $\ell = -q, \dots, q$ και εισάγουμε το βήμα παρεμβολής (*interpolation step*) I_h στην (4.9), δηλαδή υπολογίζουμε

$$f_{FBI} = \mathbf{R}^\# I_h(w_b * g). \quad (4.10)$$

Για την I_h παίρνουμε την $B - spline$ προσέγγιση

$$I_h g(s) = \sum_I g(s_\ell) B_{1/h}(s - s_\ell)$$

βαθμού k .

Στο επόμενο θεώρημα θα μελετήσουμε την επίδραση της παρεμβολής, ανεξάρτητα των σφαλμάτων διακριτοποίησης, δηλαδή θα ερευνήσουμε την έκφραση $\mathbf{R}^\# I_h(w * g)$.

Θεώρημα 4.2 Έχουμε για $b \leq \pi/h$

$$\mathbf{R}^\# I_h(w * g) = G_h * W_b * f + e_3$$

όπου το φίλτρο G_h δίνεται από τη σχέση

$$\hat{G}_h(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \begin{cases} (\text{sinc}((h/2)|\xi|))^k, & |\xi| \leq \pi/h \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και το σφάλμα e_3 ικανοποιεί την $\hat{e}_3(\xi) = 0$ για $|\xi| \leq \pi/h$ και

$$\|e_3\|_{L_2(\Omega^n)} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1} h^a \|f\|_{H_0^a(\Omega^n)}.$$

Παράλληλη γεωμετρία στο Επίπεδο

Εδώ, η ποσότητα $g = \mathbf{R}f$ είναι διαθέσιμη για (θ_j, s_ℓ) ,

$j = 1, \dots, p$, $\ell = -q, \dots, q$, $\theta_j = \begin{pmatrix} \cos \phi_j \\ \sin \phi_j \end{pmatrix}$, $\phi_j = \pi(j-1)/p$, $s_\ell = h\ell$, $h = 1/q$. Ως κανόνα ολοκλήρωσης στον S^ℓ παίρνουμε τον κανόνα τραπεζίου με p κόμβους, οι οποίοι είναι ακριβείς στον H'_{2p-2} και χρησιμοποιούμε γραμμική παρεμβολή. Ο αλγόριθμος *filtered backprojection* για τον τύπο (4.10) γίνεται

Βήμα 1: Για $j = 1, \dots, p$ εφαρμόζουμε τις συνελίξεις

$$v_{j,k} = h \sum_{\ell=-q}^q w_b(s_k - s_\ell) g(\theta_j, s_\ell), \quad k = -q, \dots, q. \quad (4.11)$$

Για τις συναρτήσεις w_b θα δούμε στους τύπους (4.13)-(4.16)

Βήμα 2: Για κάθε ανακατασκευασμένο σημείο x , υπολογίζουμε τη διακριτή οπισθοπροβολή

$$f_{FBI}(x) = \frac{2\pi}{p} \sum_{j=1}^p ((1-u)v_{j,k} + uv_{j,k+1}) \quad (4.12)$$

όπου για κάθε x και j , τα k και u ορίζονται από $s = \theta_j \cdot x$, $k \leq s/h < k+1$, $u = s/h - k$.

Η συνάρτηση w_b εξαρτάται από την επιλογή του φίλτρου Φ στην εξίσωση (4.2) ή την (4.4). Για το φίλτρο

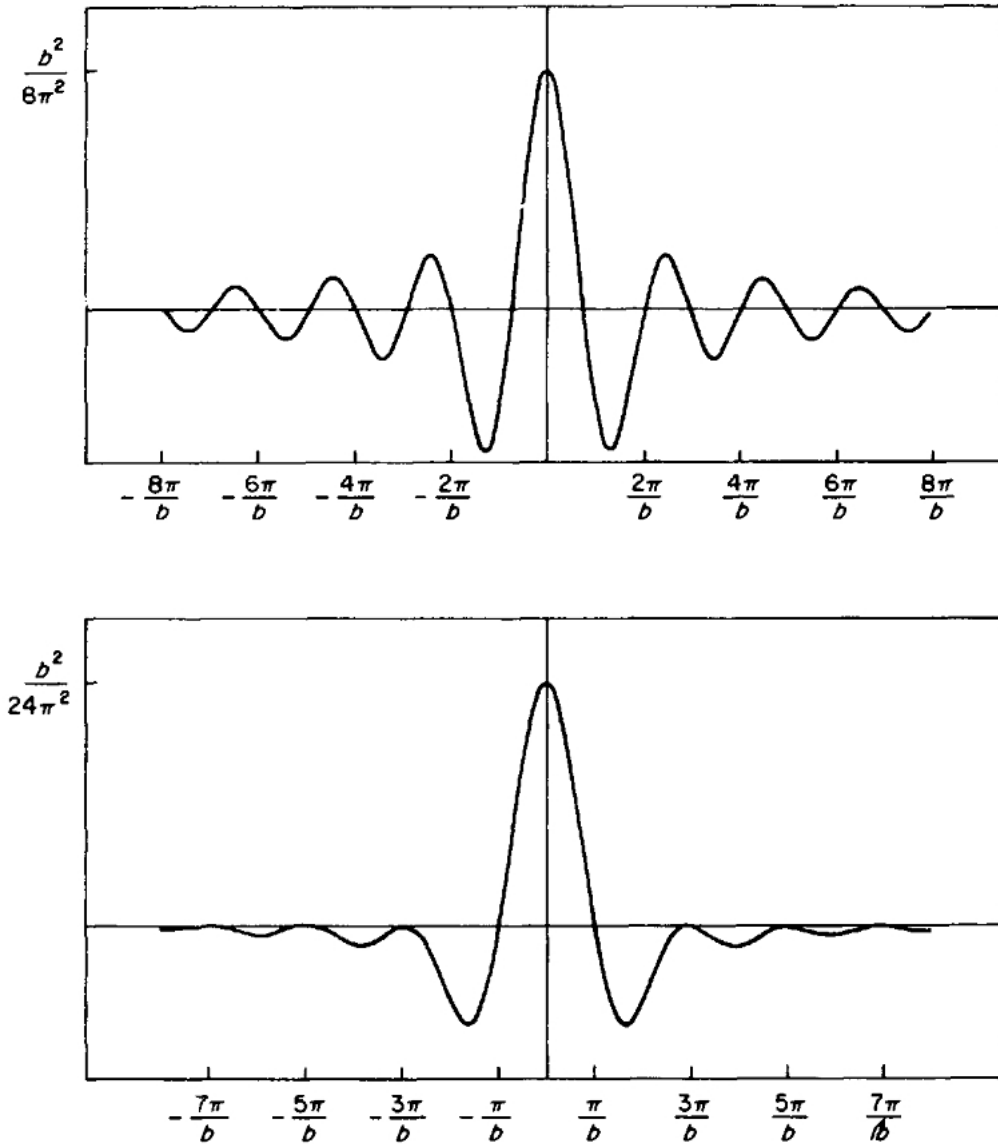
$$\hat{\Phi}(\sigma) = \begin{cases} 1 - \epsilon\sigma, & \sigma \leq 1, \\ 0, & \sigma > 1 \end{cases}$$

για κάποια παράμετρο $\epsilon \in [0, 1]$ παίρνουμε από την εξίσωση (4.4)

$$\begin{aligned} w_b(s) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-b}^b |\sigma| \left(1 - \epsilon \frac{|\sigma|}{b}\right) e^{is\sigma} d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^b \sigma \left(1 - \epsilon \frac{\sigma}{b}\right) \cos(s\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} w_b(s) &= \frac{b^2}{4\pi^2} \{u(bs) - \epsilon v(bs)\}, \\ u(s) &= \begin{cases} \frac{\cos s - 1}{s^2} + \frac{\sin(s)}{s}, & s \neq 0, \\ 1/2, & s = 0, \end{cases} \\ v(s) &= \begin{cases} \frac{2 \cos s}{s^2} + \left(1 - \frac{2}{s^2}\right) \frac{\sin(s)}{s}, & s \neq 0, \\ 1/3, & s = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.13)$$



Σχήμα 4.1: (Γράφημα του φίλτρου w_b στον *filtered – backprojection* αλγόριθμο για $\epsilon = 0$ (πάνω) $\epsilon = 1$ (κάτω))

Εάν πάρουμε $b = \pi/h$ (μέγιστη τιμή για το b) και εάν το w_b εκτιμάται μόνο για $s = s_\ell$, θα έχουμε τα εξής

$$w_b(s_\ell) = \frac{b^2}{2\pi^2} \begin{cases} 1/4 - \epsilon/6, & \ell=0, \\ -\epsilon/(\pi^2 \ell^2), & \ell \neq 0 \text{ άρτιο} \\ -(1-\epsilon)/(\pi^2 \ell^2), & \ell \text{ περιτό} \end{cases} \quad (4.14)$$

Οι *Shepp, Logan*(1974) πρότειναν το φίλτρο $\hat{\Phi}(\sigma) = \begin{cases} \text{sinc}(\sigma\pi/2), & \sigma \leq 1, \\ 0, & \sigma > 1. \end{cases}$ Αυτό οδηγεί στο

$$\begin{aligned} w_b(s) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-b}^b |\sigma| \text{sinc}\left(\frac{|\sigma|\pi}{2b}\right) e^{is\sigma} d\sigma \\ &= \frac{b}{2\pi^3} \int_0^b \sin\left(\frac{\sigma\pi}{2b}\right) \cos(\sigma s) d\sigma \\ &= \frac{b^2}{2\pi^3} u(bs) \\ u(s) &= \frac{\frac{\pi}{2} - s \sin s}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - s^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

με τις αντίστοιχες αλλαγές για $s = \pm\pi/2$.

Και πάλι, για $b = \pi/h$ και $s = s_\ell$ απλά παίρνουμε

$$w_b(s_\ell) = \frac{b^2}{\pi^4} \frac{1}{1 - 4\ell^2}. \quad (4.16)$$

Από την ανάλυση των σφαλμάτων των θεωρημάτων 1.1 και 1.2 μπορούμε να περιμένουμε από τον αλγόριθμο (4.12), με τις επιλογές (4.13), (4.16) για το w_b , να ανακατασκευάσουμε μια αξιόπιστη και ουσιώδη περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης b συνάρτηση f , παρέχοντας $b < p$ και $h \leq \pi/b$, b αρκετά μεγάλο.

Ο αριθμός των πράξεων για τον αλγόριθμο (4.12) είναι: Για τη συνέλιξη χρειαζόμαστε $O(pq^2)$ πράξεις οι οποίες μειώνονται στο $O(pq \log q)$ εάν χρησιμοποιούμε Ταχύ Μετασχηματισμό *Fourier (FFT)* (Παράρτημα 5.6). Η οπισθοπροβολή απαιτεί $O(p)$ πράξεις για κάθε x , σύνολο $O(pq^2)$ πράξεις εάν η f_{FBI} υπολογίζεται σε πλέγμα $(2q+1) \times (2q+1)$ με τα αντίστοιχα δείγματα της $\mathbf{R}_{\theta_j} f$. Για τη βέλτιστη σχέση $p = \pi q$ φτάνουμε τις $O(q^3)$ πράξεις, ανεξάρτητα από το εάν χρησιμοποιούμε *FFT* ή όχι.

Για την εκτίμηση σε n διαστάσεις χρειαζόμαστε $O(pq \log q)$ πράξεις για τη συνέλιξη και $O(pq^n)$ για την οπισθοπροβολή. Εάν πάρουμε $p = cq^{n-1}$ όπως προτείναμε στο (3.2.15) η συνολική δουλειά απαιτεί $O(q^{2n-1})$ πράξεις.

Γεωμετρία Αποκλίνουσας δέσμης στο Επίπεδο

Ο απλούστερος τρόπος να ασχοληθούμε με τα δεδομένα της *fan-beam* είναι να υπολογίσουμε τα παράλληλα δεδομένα από τα δεδομένα της *fan-beam* με κατάλληλη παρεμβολή. Παρακάτω προσαρμόζουμε τον αλγόριθμο *filtered backprojection* στα δεδομένα της *fan-beam*. Ξεκινώντας, πάλι, από τη σχέση (4.1) έχουμε

$$W_b * f(x) = \int_{S^\ell} \int_{-1}^1 w_b(x \cdot \theta - s) \mathbf{R}f(\theta, s) ds d\theta. \quad (4.17)$$

Χρησιμοποιούμε την ίδια παρατήρηση με τρίτο κεφάλαιο, δηλαδή ότι οι παράλληλες συντεταγμένες $s, \theta = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ σχετίζονται με τις συντεταγμένες της *fan-beam* α, β με τις σχέσεις

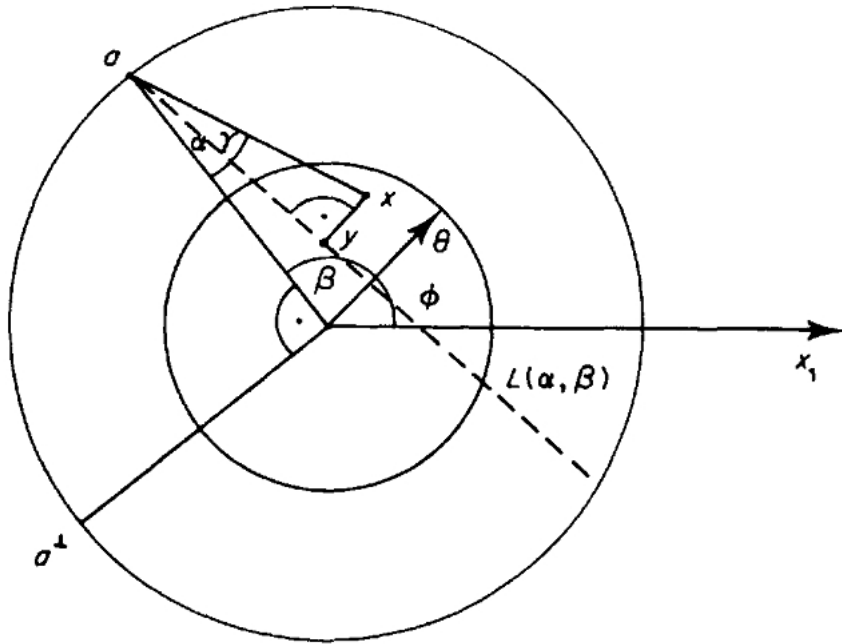
$$s = r \sin \alpha, \quad \phi = \beta + \alpha - \pi/2,$$

και $g(\beta, \alpha) = \mathbf{R}f(\theta, s)$. Η ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι

$$\frac{\partial(s, \phi)}{\partial(\alpha, \beta)} = \begin{vmatrix} r \cos \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = r \cos \alpha$$

Θέλουμε να εκφράσουμε το $|x \cdot \theta - s|$ ως προς α, β . Αυτή είναι η απόσταση μεταξύ του x και της ευθείας γραμμής $L(\alpha, \beta)$, η οποία είναι η διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα. Έστω y η ορθογώνια προβολή του x πάνω στην $L(\alpha, \beta)$ και έστω γ να είναι η γωνία μεταξύ του $x - a$ και του $-a$, δηλαδή

$$\cos(\pm\gamma) = \frac{(a - x, a)}{|a - x||a|}, \quad +\text{για } a^\perp \cdot x \leq 0, \quad -\text{για } a^\perp \cdot x \geq 0.$$



Σχήμα 4.2: (Μετασχηματισμός της (4.17) σε *fan-beam* συντεταγμένες)

Σημειώνουμε ότι η γωνία γ εξαρτάται μόνο από το x και το β , αλλά όχι από το α . Θεωρώντας το τρίγωνο xya βρίσκουμε ότι

$$|x - y| = |x \cdot \theta - s| = |x - a| |\sin(\gamma - \alpha)|.$$

Θα πραγματοποιήσουμε, λοιπόν, το μετασχηματισμό στην (4.17), και έχουμε

$$W_b * f(x) = r \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w_b(|x-a|\sin(\gamma-a))g(\beta, \alpha)\cos\alpha d\alpha d\beta.$$

Με μια πρώτη ματιά, το εσωτερικό ολοκλήρωμα φαίνεται σαν να μπορούσε να πραγματοποιηθεί από συνελίξεις. Δυστυχώς, λόγω της παρουσίας του διανύσματος $|x-a|$, ο πυρήνας συνέλιξης διαφέρει ανάλογα με το β και το x . Αυτό σημαίνει ότι το εσωτερικό ολοκλήρωμα πρέπει να υπολογιστεί για κάθε ζεύγος β, x , καθιστώντας τη διαδικασία πολύ λιγότερο αποδοτική από ότι στην περίπτωση της παραλληλίας. Προκειμένου να παρακάμψουμε αυτή τη διαδικασία, παρατηρούμε ότι, λόγω της (4.3), έχουμε

$$w_b(\rho s) = \rho^{-n} w_{\rho b}(s)$$

όπως επαληθεύεται εύκολα. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση με $n = 2$ και $\rho = |x-a|$ έχουμε

$$W_b * f(x) = r \int_0^{2\pi} |x-a|^{-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w_{|x-a|b}(\sin(\gamma-a))g(\beta, \alpha)\cos\alpha d\alpha d\beta. \quad (4.18)$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια εκτίμηση: ο αριθμός $|x-a|b$ στην (4.18) παίζει το ρόλο μιας συχνότητας αποκοπής και το εσωτερικό ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο ελάχιστα από αυτή τη διακοπτόμενη συχνότητα, εάν είναι αρκετά μεγάλη. Επομένως, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη συχνότητα $|x-a|b$ με μία επαρκώς μεγάλη c , η οποία να μην εξαρτάται από τα x, β . Έχουμε

$$W_b * f(x) \simeq r \int_0^{2\pi} |x-a|^{-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w_c(\sin(\gamma-a))g(\beta, \alpha)\cos\alpha d\alpha d\beta \quad (4.19)$$

και αναμένουμε αυτή να είναι μια καλή προσέγγιση για ουσιωδώς περιορισμένες σε ζώνη με εύρος b συναρτήσεις f εάν $c \geq |x-a|b$ για όλα τα x, β , για παράδειγμα για $c = (1+r)b$.

Η εφαρμογή της (4.19) είναι ανάλογη με την παράλληλη περίπτωση. Υποθέτουμε ότι η g λαμβάνεται από τα $\beta_j = 2\pi(j-1)/p, j = 1, \dots, p$ και $\alpha_\ell = h\ell, \ell = -q, \dots, q, h = \pi/2q$. Τότε, ο αλγόριθμος *filtered backprojection* γίνεται:

Βήμα 1: Για $j = 1, \dots, p$ υλοποιούμε τις συνελίξεις

$$v_{j,k} = h \sum_{\ell=-q}^q w_c(\sin(\alpha_k - \alpha_\ell))g(\beta_j, \alpha_\ell)\cos\alpha_\ell, \quad k = -q, \dots, q. \quad (4.20)$$

Βήμα 2: Για κάθε ανασχηματισμένο σημείο x υπολογίζουμε τη διακριτή οπισθοπροβολή

$$f_R(x) = \frac{2r\pi}{p} \sum_{j=1}^p |x-a_j|^{-2} ((1-u)v_{j,k} + uv_{j,k+1}) \quad (4.21)$$

όπου κάθε x, j, k, u καθορίζονται από τις σχέσεις

$$\gamma = \pm \arccos \frac{(a_j - x, a_j)}{|a_j - x||a_j|}, \quad k \leq \gamma/h < k+1, \quad u = \gamma/h - k.$$

Το πρόσημο είναι $' + '$ εάν $a_j^\perp \cdot x \leq 0$ και $' - '$ διαφορετικά.

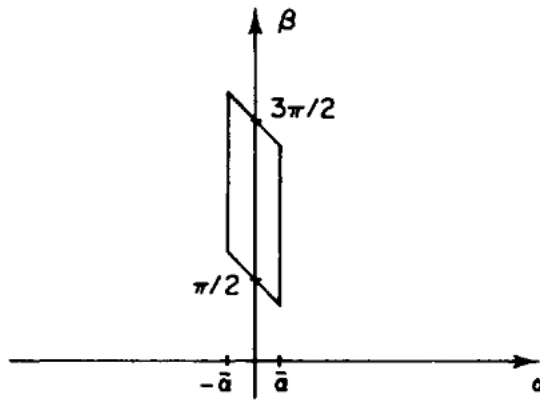
Ο αλγόριθμος, όπως περιγράφεται στις σχέσεις (4.20), (4.21), χρειάζεται δεδομένα από πηγές κατανεμημένες σε ολόκληρο τον κύκλο. Κοιτάζοντας το προηγούμενο σχήμα, βλέπουμε ότι θα αρκούσε να είχαμε πηγές σε ένα γωνιακό εύρος $\pi + 2\bar{\alpha}(r)$ αφού όλες οι γραμμές που «χτυπούν» την ανασχηματισμένη περιοχή Ω^2 μπορούν να ληφθούν από πηγές σε ένα τέτοιο τόξο $\bar{\alpha}(r)$, που είναι η μεγαλύτερη γωνία, για την οποία οι $L(\beta, \alpha)$ συναντούν την Ω^2 , δηλαδή $\bar{\alpha}(r) = \arcsin(1/r)$.

Είναι πολύ εύκολο να παραχθεί ένας τέτοιος αλγόριθμος. Πηγαίνουμε πίσω στη σχέση (4.17) αντικαθιστώντας τη με έναν ισοδύναμο τύπο

$$W_b * f(x) = 2 \int_0^\pi \int_{-1}^1 w_b(w \cdot \theta - s) \mathbf{R}f(\theta, s) ds d\theta.$$

Η εικόνα από το $\alpha - \beta$ επίπεδο του ορθογωνίου $[-1, 1] \times [0, \pi]$ στο $s - \phi$ επίπεδο είναι

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \bar{\alpha}(r) &\leq \beta \leq \frac{3\pi}{2} + \bar{\alpha}(r) \\ \alpha_-(\beta) &\leq \alpha \leq \alpha_+(\beta), \\ \alpha_-(\beta) &= \max\{-\bar{\alpha}(r), \frac{\pi}{2} - \beta\}, \alpha_+(\beta) = \min\{\bar{\alpha}(r), \frac{3\pi}{2} - \beta\}. \end{aligned}$$



Σχήμα 4.3: (Εικόνα του $\alpha - \beta$ επιπέδου του ορθογωνίου $[-1, 1] \times [0, \pi]$ στο $s - \phi$ επίπεδο)

Επομένως η σχέση (4.18) προϋποθέτει τον τύπο

$$W_b * f(x) = 2 \int_{(\pi/2)-\bar{\alpha}(r)}^{(3\pi/2)+\bar{\alpha}(r)} |x-a|^{-2} \int_{\alpha_-(\beta)}^{\alpha_+(\beta)} w_{|x-a|b}(\sin(\gamma-\alpha))g(\beta, \alpha) \cos \alpha d\alpha d\beta \quad (4.22)$$

και ο τύπος προκύπτει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και η (4.18), οδηγώντας σε έναν αλγόριθμο με την επιθυμητή ιδιότητα.

4.2 Ανασχηματισμός *Fourier*

Με αυτόν τον όρο εννοούμε μια απ' ευθείας αριθμητική εφαρμογή του θεωρήματος της προβολής (2.1)

$$\hat{f}(\sigma\theta) = (2\pi)^{(1-n)/2}(\mathbf{R}f)^\wedge(\theta, \sigma), \quad (4.23)$$

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Fourier*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \quad (4.24)$$

στην εξίσωση (4.23) παίρνουμε αμέσως ένα τύπο αντιστροφής για τον μετασχηματισμό *Radon* σε όρους του μετασχηματισμού *Fourier*. Τα προβλήματα εμφανίζονται με την διακριτοποίηση. Έστω, $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$ και έστω η ποσότητα $g = \mathbf{R}f$ είναι διαθέσιμη για (θ_j, s_ℓ)

$$j=1, \dots, p, \quad \ell=-q, \dots, q, \quad \theta_j \in S^{n-1}, \quad s_\ell = h\ell, \quad h=1/q.$$

Μια διακριτοποίηση των εξισώσεων (4.23), (4.24) οδηγεί στον τυπικό αλγόριθμο ανασχηματισμού *Fourier* στον οποίο το πλέγμα των πολικών συντεταγμένων

$$G_{p,q} = \{\pi r \theta_j : r=-q, \dots, q-1, \quad j=1, \dots, p\}$$

παίζει σημαντικό ρόλο.

Ο τυπικός αλγόριθμος *Fourier* αποτελείται από τρία βήματα

Βήμα 1:

Για $j=1, \dots, p$, υπολογίσετε τις προσεγγίσεις $\hat{g}_{jr}$ των $\hat{g}(\theta_j, r\pi)$ με τον τύπο

$$\hat{g}_{jr} = (2\pi)^{-1/2} h \sum_{\ell=-q}^{q-1} e^{-i\pi \ell r/q} g(\theta_j, s_\ell), \quad r=-q, \dots, q-1.$$

Από την (4.23) βλέπουμε ότι το πρώτο βήμα μας παρέχει μια προσέγγιση της $\hat{f}$ στον $G_{p,q}$: $\hat{f}(r\pi\theta_j) = (2\pi)^{(1-n)/2} \hat{g}_{jr}$ πάνω στα σφάλματα διακριτοποίησης.

Καλό είναι να χρησιμοποιήσουμε τον “Ταχύ Μετασχηματισμό” (*Fast Fourier Transform FFT*), διαφορετικά οι μετασχηματισμοί *Fourier* δε μπορούν να συναγωνιστούν άλλους αλγόριθμους. Επειδή δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την *FFT* στον $G_{p,q}$ πρέπει να αλλάξουμε το πλέγμα μας σε ένα κατάλληλο Καρτεσιανό με μια διαδικασία παρεμβολής:

Βήμα 2:

Για κάθε $k \in \mathbf{Z}^n$, $|k| < q$, βρείτε ένα σημείο $\xi_k = \pi r \theta_j \in G_{p,q}$ κοντά στο πk και βάλτε

$$\hat{f}_k = (2\pi)^{(1-n)/2} \hat{g}_{jr}.$$

Η $\hat{f}_k$ είναι η προσέγγιση της $\hat{f}(\pi k)$ από μια διαδικασία παρεμβολής "έγγυτερου γείτονα" στο πλέγμα πολικών συντεταγμένων.

Βήμα 3:

Υπολογίστε μια προσέγγιση f_m της $f(hm)$, $m \in \mathbf{Z}^n$ με τον τύπο

$$f_m = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} \sum_{|k| < q} e^{i\pi m \cdot k/q} \hat{f}_k, \quad |m| < q.$$

Αυτή είναι μια διακριτή μορφή του n -διάστατου αντίστροφου μετασχηματισμού *Fourier*.

Ο παραπάνω αλγόριθμος μας εφοδιάζει με μια βέλτιστη σχέση $p = \pi q$ μεταξύ του πλήθους των κατευθύνσεων p και του πλήθους $2q+1$ των μετρήσεων σε κάθε κατεύθυνση: τα μεγαλύτερα κελιά πολικών συντεταγμένων G_{pq} είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα με μήκος πλευρών π και $(\pi/p) \cdot \pi q$ αντίστοιχα. Αυτά γίνονται τετράγωνα για $p = \pi q$.

Εάν χρησιμοποιούμε μόνο τα βήματα 1 και 3 του παραπάνω αλγορίθμου, φτάνουμε στην επόμενη εκτίμηση για τον αλγόριθμο: οι p διακριτοί μετασχηματισμοί *Fourier* μήκους $2q$ του βήματος 1 απαιτούν $O(pq \log q)$ πράξεις και ο n -διάστατος διακριτός μετασχηματισμός *Fourier* του βήματος 3 χρειάζεται $O(q^n \log q)$ πράξεις. Εάν ισχύει $p = cq^{n-1}$ από το III.2.15 θα πάρουμε εκτίμηση $O(q^n \log q)$. Αυτή η εκτίμηση είναι καλύτερη από την $O(q^{2n-1})$ που βρήκαμε για τον αλγόριθμο *filtered backprojection* της παραγράφου 4.1. Αυτή η ικανότητα είναι ο λόγος του ενδιαφέροντος για τον ανασχηματισμό *Fourier*.

Δυστυχώς, ο ανασχηματισμός *Fourier*, όπως τον είδαμε πριν, έχει κάποια μειονεκτήματα και δε μπορεί να συναγωνιστεί με άλλες τεχνικές ανασχηματισμού όσο ανησυχούμε για την ακρίβεια. Για να βρούμε την πηγή του προβλήματος κάνουμε μια αυστηρή ανάλυση σφάλματος. Το σφάλμα του βήματος 1 εκτιμάται από τον τύπο

$$\sum_{\ell \neq 0} |\hat{g}(\theta_j, \pi r - 2\pi q \ell)|, \quad |r| \leq q$$

το οποίο είναι ασήμαντο εάν η f (στον τύπο η g) είναι περιορισμένη σε ζώνη με εύρος ζώνης πq . Παρομοίως, το σφάλμα του βήματος 3 είναι αμελητέο. Έτσι, το πρόβλημα υπάρχει για την παρεμβολή του βήματος 2.

Πριν αναλύσουμε το σφάλμα παρεμβολής το οποίο μας οδηγεί σε καλύτερη επιλογή των παραμέτρων ξ_k για το βήμα 2, θα δούμε μια ευρετική επιχειρηματολογία η οποία μας δείχνει ότι το σφάλμα παρεμβολής είναι υπερβολικά μεγάλο και επεξηγεί τα τεχνάσματα που παρατηρούμε στους υπολογισμούς.

Από το θεώρημα (3.4), ξέρουμε ότι μπορούμε να περιγράψουμε την επιρροή της παρεμβολής σε όρους συνέλιξης. Ειδικά, εάν η συνάρτηση f στον $\mathbf{R}^n$ παρεμβάλλεται με B -splines βαθμού k και βήμα π το αποτέλεσμα είναι

$$I_\pi \hat{f} = F_\pi * \hat{f} + a_\pi$$

όπου $\hat{a}_\pi(x)=0$ για $|x|\leq 1$ και

$$\hat{F}_\pi(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-n/2} (\text{sinc} \frac{\pi}{2} x)^k, & |x_i| \leq 1, \ i=1, \dots, n, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα στον Ω^n θα έχουμε

$$(I_\pi \hat{f})(x) = \left(\text{sinc} \frac{\pi}{2} x \right)^k f(x),$$

αποτέλεσμα το οποίο είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός *Fourier* της f . Αυτή είναι μια καλή προσέγγιση της f για $|x|$ μικρό, αλλά όσο η ποσότητα $(\text{sinc}(\pi/2)x)^k f$ εξασθενεί στα σύνορα του Ω^n , δεν έχουμε καλή ακρίβεια. Δεν βοηθάει να μεγαλώσουμε τον βαθμό k της παρεμβολής. Αντιστρόφως, παρατηρώντας το $(\text{sinc}(\pi/2)x)^k$, βλέπουμε ότι η αλλοίωση γίνεται όλο και μεγαλύτερη καθώς το k αυξάνεται. Φυσικά, η παρεμβολή στον ανασχηματισμό *Fourier* είναι διαφορετική από την απλή περίπτωση του ταυστικού γινομένου της $B - \text{spline}$ παρεμβολής που θεωρήσαμε εδώ, αλλά τα ευρήματα που λάβαμε από τον ανασχηματισμό *Fourier* είναι παρόμοια με αυτά που προβλέψαμε με το απλό μας μοντέλο. Πρέπει να προσέξουμε την ανάλυση σφάλματος στο πλαίσιο του χώρου *Sobolev*. Ξέρουμε ότι οι νόρμες

$$\|f\|_{H_0^\alpha(\Omega^n)} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^\alpha |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \quad (4.25)$$

$$\|f\|_{\tilde{H}_0^\alpha(\Omega^n)} = \pi^{n/2} \left(\sum_k (1+\pi^2|k|^2)^\alpha |\hat{f}(\pi k)|^2 \right)^{1/2} \quad (4.26)$$

είναι ισοδύναμες στον χώρο $H_0^\alpha(\Omega^n)$. Αυτό αληθεύει εάν τα ξ_k είναι κοντά σε πk με την έννοια:

Υπάρχει σταθερά h τέτοια ώστε για $k \in \mathbf{Z}^n$

$$|\xi_k - \pi k| \leq h|k| \quad (4.27)$$

Λήμμα 2.1

Έστω ξ_k μια κατανομή τέτοια ώστε να ισχύει η εξίσωση (4.27). Έστω επίσης $a \geq 0, \alpha \geq 0$. Τότε υπάρχει σταθερά $c(a, \alpha, n)$ τέτοια ώστε

$$\sum_{|k| \leq a/h} (1+\pi^2|k|^2)^\alpha |\hat{f}(\xi_k)|^2 \leq c(a, \alpha, n) \|f\|_{H_0^\alpha(\Omega^n)}^2 \quad (4.28)$$

για $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$.

Τώρα θα κάνουμε τον ανασχηματισμό *Fourier* με τα σημεία ξ_k μη λαμβάνοντας υπ' όψη τη διακριτοποίηση του βήματος 1, δηλαδή υπολογίζουμε τον (υποθετικό) μετασχηματισμό

$$f^*(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pi/2} \sum_{|k| \leq a/h} e^{i\pi x \cdot k} \hat{f}(\xi_k). \quad (4.29)$$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει την εκτίμηση σφάλματος.

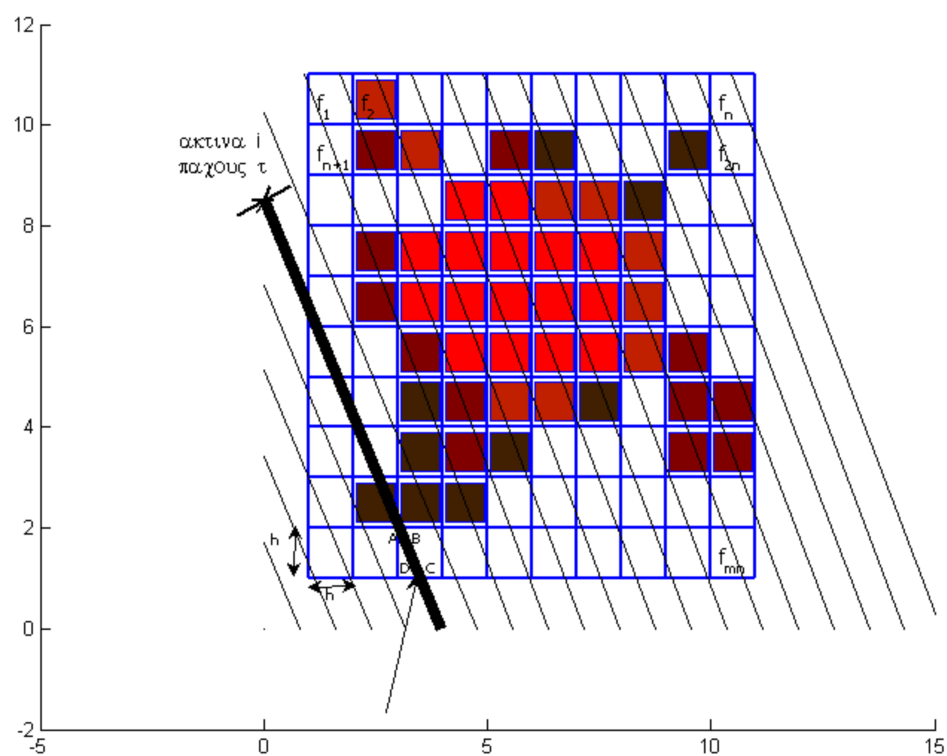
Θεώρημα 4.3 Έστω ξ_k όπως στο λήμμα και $0 \leq \alpha \leq 1$. Υπάρχει σταθερά $c(\alpha, a, n)$ τέτοια ώστε για $f \in C_0^\infty(\Omega^n)$ να ισχύει

$$\|f - f^*\|_{L_1(\Omega^n)} \leq c(\alpha, a, n) h^\alpha \|f\|_{H_0^\alpha(\Omega^n)}.$$

4.3 Ένας άλλος αλγόριθμος

Μια τελείως διαφορετική προσέγγιση στη δημιουργία εικόνων τομογραφίας είναι να υποθέσουμε ότι η διατομή (*cross section*) αποτελείται από ένα πίνακα αγνώστων, και μετά να δημιουργήσουμε αλγεβρικές εξισώσεις για τους αγνώστους ως προς τις προβολές των μετρημένων δεδομένων. Σε αυτή τη μέθοδο είναι βασικό να γνωρίζουμε τις διαδρομές των ακτίνων (*ray paths*) οι οποίες συνδέουν κάθε πομπό με τη θέση του αντίστοιχου δέκτη. Όταν η επίδραση της διάθλασης γίνεται σημαντική (οι ανομοιογένειες ξεπερνάνε το 10% της τιμής του μέσου υποβάθρου και το μήκος συσχέτισης αυτών είναι συγκρίσιμο με μένα μήκος κύματος) είναι αδύνατο να υπολογίσουμε τις διαδρομές των ακτίνων. Σε περίπτωση που οι ανομοιογένειες δεν ξεπερνάνε το 3% είναι δυνατό να συνδυάσουμε αλγεβρικές τεχνικές με ψηφιακή σκιαγράφιση των διαδρομών και να δημιουργήσουμε μια επαναληπτική διαδικασία στην οποία αρχικά αγνοούμε τη διάθλαση, μετά σκιαγραφούμε τις διαδρομές που ενώνουν τους πομπούς με τους αντίστοιχους δέκτες και τελικά σχεδιάζουμε ένα ακριβέστερο σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων.

Εικόνα 1



Για το παραπάνω τετράγωνο θα έχουμε $A_{ij} = \frac{\text{εμβαδόν } ABCD}{h^2}$ όπου $i=1, \dots, N$ είναι ο αριθμός της ακτίνας και $j=1, \dots, mn$ ο σειριακός αριθμός του κελιού.

Πάνω στην εικόνα $f(x, y)$ προσαρμόζουμε ένα πλέγμα διάστασης $m \times n$ μέγεθος κελιού $h \times h$ στο οποίο θεωρούμε ότι σε κάθε κελί η συνάρτηση έχει σταθερή τιμή. Έστω $f_j, j = 1, \dots, mn$ αυτή η σταθερή τιμή και $p_i, i = 1, \dots, N$ το άθροισμα της διαδρομής κάθε ακτίνας

$$\sum_{j=1}^{mn} A_{ij} f_j = p_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.30)$$

Το πρόβλημα αντιστροφής ανάγεται στην ανάκτηση της εικόνας έχοντας ως δεδομένα τα p_i . Μια και έχουμε δημιουργήσει τον πίνακα A , η ένταση σε κάθε κελί είναι λύση του γραμμικού συστήματος

$$Af = p. \quad (4.31)$$

Ο πίνακας A έχει κακή κατάσταση, για ένα πλέγμα 10×10 και 200 ακτίνες έχει δείκτη κατάστασης περίπου 1000 ο οποίος αυξάνεται πολύ με την αύξηση της διάστασης του πλέγματος, γιαυτό χρειαζόμαστε μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης για την λύση του συστήματος (4.31). Για τις δοκιμές, δημιουργήσαμε τεχνητά δεδομένα p_i για την Εικόνα 1, προσθέσαμε σταδιακά από 1% μέχρι 4% θόρυβο, και προχωρήσαμε στην ανάκτησή της.

Η λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων δεν συνίσταται διότι η πολυπλοκότητα υπερβαίνει το $(nm)^3$ το οποίο είναι απαγορευτικό. Επίσης, μια συνάρτηση του *Matlab* ονόματι *lsqlin* προσεγγίζει πολύ καλά τα μετρημένα δεδομένα $p_i, i = 1, \dots, N$ (τα οποία περιέχουν θόρυβο) αλλά η λύση $\hat{f}_i, i = 1, \dots, nm$ είναι πολύ μακριά από την πραγματική.

Για αρχή χρησιμοποιήσαμε κανονικοποίηση *Tikhonov*. Συνίσταται για τη λύση γραμμικών συστημάτων τα οποία προκύπτουν από φυσικές διαδικασίες στις οποίες οι μετρήσεις μας (παρατηρήσεις) είναι “μολυσμένες” με θόρυβο. Στο πρακτικό μέρος, προσπαθούμε να βρούμε ένα διάνυσμα f_λ το οποίο να ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό συναρτησιακό

$$J(\lambda, f) = \min_f \{ \|Af - p\|^2 + \lambda^2 \|Lf\|^2 \} \quad (4.32)$$

όπου L είναι η διακριτή προσέγγιση κάποιας παραγώγου.

Το διάνυσμα f_λ θα είναι η λύση του συστήματος

$$(C + \lambda^2 E) f_\lambda = A^T p \quad \text{όπου} \quad C = A^T A \text{ και } E = L^T L \quad (4.33)$$

Λύνοντας απ' ευθείας, η πολυπλοκότητα υπερβαίνει και πάλι το $(nm)^3$. Γιαυτό θεωρούμε την *SVD* παραγοντοποίηση (ιδιάζουσων τιμών)

$$A = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T \quad (4.34)$$

η οποία μας στοιχίζει σε πολυπλοκότητα $(nm)^2$. Για $L = I$ (κανονικοποίηση *Tikhonov* μηδενικού βαθμού) η λύση είναι

$$f_\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda_i^2} \frac{u_i^T p}{\sigma_i} v_i \quad (4.35)$$

για την οποία η πολυπλοκότητα είναι επίσης $(nm)^2$.

Για την κανονικοποίηση πρώτου βαθμού ο πίνακας L θα έχει την μορφή

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στο *Matlab* υπάρχει η συνάρτηση *gsvd*, η οποία μας δίνει τη δυνατότητα να λύσουμε το πρόβλημα ιδιζουσών τιμών των πινάκων A, L ώστε να προχωρήσουμε στη κανονικοποίηση 1^{ου} βαθμού, την οποία χρησιμοποιήσαμε στις δοκιμές μας.

Για δεύτερη δοκιμή, επειδή έχουμε ανάγκη από αραιή λύση, εμπνεύστηκα από την διπλωματική εργασία του συμφοιτητή μου Γιώργου Παπαγεωργίου, [6]. Σύμφωνα με τους ορισμούς της εργασίας, ο πίνακας A της εφαρμογής μας δεν πληρεί τις προϋποθέσεις, δεν έχει την κατάλληλη δομή ώστε η λύση να τείνει στην μοναδική. Επειδή χρειαζόμαστε περιορισμούς στη λύση (στις δοκιμές μας οι τιμές του διανύσματος f κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1), δηλαδή πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα

$$\min_{0 \leq f_i \leq 1} \|Af - p\|, \quad (4.36)$$

καταφέρνουμε να οδηγήσουμε τη λύση προς τη μοναδική. Ο αλγόριθμος καταλήγει στην ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού

$$\min_{0 \leq f_i \leq 1} \{\|Af - p\|_2 + \lambda \|Wf\|_1\}, \quad (4.37)$$

όπου με W συμβολίζουμε έναν πίνακα βάρους, στην περίπτωσή μας είναι διαγώνιος πίνακας με τις νόρμες κάθε στήλης ως στοιχεία.

Από τους αλγορίθμους που παρουσιάστηκαν στην εργασία, επιλέξαμε τον *Iteratively Reweighted Least Square*. Μπορούμε να υπολογίσουμε την l_1 νόρμα της (4.37) μέσω της προσέγγισης $\|f\|_1 \equiv f^T F^{-1} f$ όπου ο πίνακας F^{-1} ενημερώνεται σε κάθε επανάληψη: για κάποια επανάληψη k ο πίνακας $F = \text{διαγ}(|f^{k-1}|)$ και το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα

$$\min_{0 \leq f_i \leq 1} \left\{ \lambda f^T W F^{-1} f + \frac{1}{2} \|Af - p\|_2^2 \right\}. \quad (4.38)$$

Λύνοντας το πρόβλημα (4.38), έχουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο

$$(2\lambda W F^{-1} + A^T A) f_k = A^T p, \quad k=1, \dots \quad (4.39)$$

στο οποίο $F^{-1} = \text{διαγ}\left(\frac{1}{|f_{k-1}|}\right)$ και $f_0 = \{1, 1, \dots\}^T$. Τις ποσότητες $A^T A$ και $A^T p$ τις υπολογίζουμε μόνο μια φορά, όχι σε κάθε επανάληψη, για τη λύση του συστήματος (4.39) χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο *BVLS*, [7].

Κεφάλαιο 5

Παράρτημα

Σε αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνονται επεξηγηματικές παράγραφοι για όσα έχουν ειπωθεί στα προηγούμενα κεφάλαια.

5.1 Ευθύ-Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης

Η θεωρία της σκέδασης εξετάζει την επίδραση που έχει ένα μη ομογενές μέσο σε ένα προσπίπτον κύμα, δηλαδή την επίδραση ασυνεχειών. Θεωρώντας το ολικό πεδίο ως το άθροισμα ενός προσπίπτοντος πεδίου u^i και του σκεδαζόμενου πεδίου u^s , το *ευθύ πρόβλημα της σκέδασης* εξετάζει την εύρεση του u^s δεδομένου του προσπίπτοντος πεδίου u^i , της διαφορικής εξίσωσης του κύματος και της συνοριακής συνθήκης που επιβάλλεται στο σύνορο του σκεδαστή. Στο *αντίστροφο πρόβλημα της σκέδασης*, ζητείται να βρεθεί η φύση του μη ομογενούς μέσου και η γεωμετρία (σχήμα) του σκεδαστή από τη γνώση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του σκεδαζόμενου πεδίου u^s .

5.2 Ανάλυση *Fourier*

Ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι ο γραμμικός χώρος των C^∞ συναρτήσεων f του $\mathbb{R}^n$ για τις οποίες η

$$|f|_{k,\ell} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^k D^\ell f(x)|$$

είναι πεπερασμένη για όλα τα $k, \ell \in \mathbb{Z}_+^n$. Για $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, ο μετασχηματισμός *Fourier* της $\widehat{f}$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός *Fourier* της $\widehat{\widehat{f}}$ ορίζονται ως

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx,$$

$$\widetilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Ο τύπος αντιστροφής *Fourier* οδηγεί στη σχέση

$$\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}} = f, \quad f \in \mathfrak{S},$$

δηλαδή οι μετασχηματισμοί είναι αντίστροφοι ο ένας του άλλου και απεικονίζουν τον $\mathfrak{S}$ με έναν ένα προς ένα τρόπο στον εαυτό του. Εάν η f έχει συμπαγή φορέα, τότε η $\widehat{f}$ επεκτείνεται σε μία αναλυτική συνάρτηση στον $\mathbb{C}^n$. Εάν δεν δηλώνεται διαφορετικά, οι παρακάτω κανόνες ισχύουν στον $L_1(\mathbb{R}^n)$.

1) Για $r > 0$ έστω $f_r(x) = f(rx)$. Τότε

$$\widehat{f_r}(\xi) = r^{-n} \widehat{f}(r^{-1}\xi).$$

2) Για $y \in \mathbb{R}^n$ έστω $f_y(x) = f(x + y)$. Τότε

$$\widehat{f_y}(\xi) = e^{i\xi \cdot y} \widehat{f}(\xi).$$

3) Για $k \in \mathbb{Z}_+^n$ έχουμε για $f \in \mathfrak{S}$

$$(D^k f)^\wedge = i^{|k|} \xi^k \widehat{f}, \quad (x^k f)^\wedge = i^{|k|} D^k \widehat{f}.$$

4) Έχουμε για $g \in \mathfrak{S}$

$$(f * g)^\wedge = (2\pi)^{n/2} \widehat{f} \widehat{g}, \quad (fg)^\wedge = (2\pi)^{-n/2} \widehat{f} * \widehat{g}$$

όπου η συνέλιξη $f * g$ ορίζεται από τη σχέση

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

5) Έχουμε τη σχέση του *Parseval*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g dx.$$

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Fourier* έχουμε τους αντίστοιχους κανόνες από τη σχέση $\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$.

Ο $\mathfrak{S}'$ είναι ο χώρος των γραμμικών συναρτησοειδών T πάνω στον $\mathfrak{S}$, τα οποία είναι συνεχή με την ακόλουθη έννοια: υπάρχουν $k, \ell \in \mathbb{Z}_+^n$ και $c < \infty$ τέτοια ώστε

$$|Tf| \leq c \sum_{k' \leq k} |f|_{k', \ell}$$

για $f \in \mathfrak{S}$. Τα στοιχεία του $\mathfrak{S}'$ καλούνται κατανομές. Οι κατανομές είναι διαφορίσιμες σύμφωνα με τον τύπο

$$D^k T f = (-1)^{|k|} T D^k f.$$

Εάν η συνάρτηση $g \in C^\infty$ και όλοι οι παράγωγοί της αυξάνονται μόνο πολυωνυμικά, τότε το γινόμενο $gT = Tg$ είναι η κατανομή $gT(f) = T(gf)$. Τέλος, εάν η $g \in \mathfrak{S}$, τότε ορίζουμε τη συνέλιξη $(T * g)(x) = Tg_x$ όπου $g_x(y) = g(x - y)$.

5.3 Ολοκλήρωμα πρωτεύουσας τιμής *Cauchy*

Το Ολοκλήρωμα πρωτεύουσας τιμής *Cauchy* ορίζεται ως

$$Tf = \int \frac{f(x)}{x} dx \quad (5.1)$$

για $f \in \mathfrak{F}$, είτε από τα συνηθισμένα ολοκληρώματα

$$\int \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{|x| > h} \frac{f(x)}{x} dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} dx. \quad (5.2)$$

5.4 Πολυώνυμα *Gegenbauer*

Τα πολυώνυμα *Gegenbauer* C_ℓ^λ , $\lambda > -1/2$, βαθμού ℓ ορίζονται ως τα ορθογώνια πολυώνυμα στο $[-1, 1]$ με συνάρτηση βάρους $(1-x^2)^{\lambda-1/2}$. Κανονικοποιούμε το C_ℓ^λ απαιτώντας $C_\ell^\lambda(1) = 1$. Τότε έχουμε

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-1/2} C_\ell^\lambda(x) C_k^\lambda(x) dx = \begin{cases} \frac{2^{2\lambda-1} (\Gamma(\lambda+1/2))^2 \ell!}{(\ell+\lambda) \Gamma(\ell+2\lambda)}, & \ell = k \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (5.3)$$

με Γ τη συνάρτηση Γάμμα.

Για $\lambda = 0$ έχουμε το πολυώνυμο *Chebyshev* πρώτου είδους

$$T_\ell(x) = C_\ell^0(x) = \cos(\ell \arccos x), \quad |x| \leq 1 \quad (5.4)$$

και για $\lambda = 1$ το πολυώνυμο *Chebyshev* δεύτερου είδους

$$U_\ell(x) = (\ell+1) C_\ell^1(x) = \frac{\sin((\ell+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad |x| \leq 1 \quad (5.5)$$

5.5 Σφαιρικές Αρμονικές

Μία σφαιρική αρμονική Y_ℓ βαθμού ℓ είναι ο περιορισμός στο S^{n-1} ενός ομογενούς αρμονικού πολυωνύμου βαθμού ℓ του $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν

$$N(n, \ell) = \frac{(2\ell+n-2)(n+\ell-3)!}{\ell!(n-2)!}, \quad N(n, 0) = 1 \quad (5.6)$$

γραμμικά ανεξάρτητες σφαιρικές αρμονικές βαθμού ℓ , και οι σφαιρικές αρμονικές διαφορετικού βαθμού είναι ορθογώνιες στον S^{n-1} .

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα των σφαιρικών αρμονικών είναι το θεώρημα των *Funk – Hecke*: για μια συνάρτηση h στο $[-1, 1]$ έχουμε

$$\int_{S^{n-1}} h(\theta \cdot \omega) Y_\ell(\omega) d\omega = c(n, \ell) Y_\ell(\theta),$$

$$c(n, \ell) = |S^{n-2}| \int_{-1}^1 h(t) C_\ell^{(n-2)/2}(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt. \quad (5.7)$$

Για $n = 2$ η εξίσωση (5.7) οδηγεί στην

$$\int_0^{2\pi} h(\cos(\phi - \Psi)) e^{i\ell\phi} d\phi = 2 \int_{-1}^1 h(t) T_{|\ell|}(t) (1-t^2)^{-1/2} dt e^{i\ell\Psi}. \quad (5.8)$$

Επίσης, για $n = 2$ έχουμε $N(2, \ell) = 2$ γραμμικά ανεξάρτητες σφαιρικές αρμονικές βαθμού ℓ αν $\ell > 0$, δηλαδή

$$Y_{\ell,1}(\theta) = \cos\ell\phi, Y_{\ell,-1}(\theta) = \sin\ell\phi, \theta = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

και $Y_0 = 1$.

5.6 Ταχύς μετασχηματισμός *Fourier*

Ο Ταχύς Μετασχηματισμός *Fourier* είναι ένας αλγόριθμος υπολογισμού του διακριτού μετασχηματισμού *Fourier*

$$\mathcal{F}x_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi kni/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.10)$$

μιας ακολουθίας N μιγαδικών αριθμών (και του αντιστρόφου του). Ο *FFT* υπολογίζει τον διακριτό μετασχηματισμό *Fourier* πιο γρήγορα από τις $O(N^2)$ αριθμητικές πράξεις του “άμεσου” υπολογισμού με μόνο $O(N \log N)$ πράξεις.

Βιβλιογραφία

- [1] A. H. Anderson, A. C. Kak, “*Digital ray tracing in two-dimensional refractive fields*”, J. Acoust. Soc. Amer., vol 72, pp. 1593-1606, 1982
- [2] I. Daubechies R. DeVore, M. Fornasier, C. Sinan Güntürk, “*Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery*”, Comm. Pure Appl. Math., 63, 2010, 1-38.
- [3] G. T. Herman, “*Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections*”, 2nd ed., Springer, 2010.
- [4] A. C. Kak, M. Slaney, “*Principles of Computerized Tomographic Imaging*”, SIAM (Classics in Applied Mathematics no. 33), 2001.
- [5] F.Natterer, “*The Mathematics of Computerized Tomography*”, SIAM (Classics in Applied Mathematics no. 32), 2001.
- [6] G. Papageorgiou, “*Comparison of algorithms for the computation of sparse solutions of indefinite linear systems*”, Postgraduate Thesis, Department of Mathematics, University of Athens, 2012.
- [7] P.B. Stark, R.L. Parker, “*Bounded Variable Least Squares :an algorithm and applications*”, Computational Statistics, 10, 1995,129-141.