



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Το αποδεικτικό σχήμα του Toulmin
και η αξιοποίησή του
στη Διδακτική των Μαθηματικών

ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΥ ΕΥΡΥΔΙΚΗ

A.M. Δ200825

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών
Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε τηναπό Εξεταστική Επιτροπή
αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)Σπύρου Παναγιώτη (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.	
2)Πόταρη Δέσποινα...	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Ε.Κ.Π.Α	
3)Μούτσιος-Ρέντζος Ανδρέας	Διδάκτωρ Διδακτικής των Μαθηματικών	

Στην οικογένεια μου
για τη στήριξη τους...

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέπων καθηγητή μου κ. Σπύρου Παναγιώτη για την πολύτιμη βοήθειά του, τις γνώσεις του και την καθοδήγησή του καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου.
- Την κ. Πόταρη Δέσποινα για την τιμή που μου έκανε, να συμμετέχει στην Τριμελή Εξεταστική επιτροπή καθώς για τις συμβουλές της ως υπεύθυνη σπουδών μου.
- Τον κ. Μούτσιο – Ρέντζο Ανδρέα για την πολύτιμη βοήθειά του, την καθοδήγησή του με τις γνώσεις του, την υπομονή του και την συμπαράστασή του χωρίς τον οποίο δεν θα ήταν δυνατή η εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.
- Την οικογένειά μου για την αγάπη τους, υπομονή τους, και την στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.
- Τους φίλους μου Κατερίνα Δρακοπούλου, Μάριο – Ιωάννη Σώτηρα, Ηλία Σώτηρα, Δήμητρα Λαγκαδινού για την βοήθεια τους αλλά κυρίως για την συμπαράστασή τους στις δύσκολες στιγμές.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	6
Περίληψη	8
Abstract.....	9
Εισαγωγή.....	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	13
1.1. Το σχήμα – μοντέλο του Toulmin	13
1.2. Ο Toulmin και τα Μαθηματικά	19
Κεφάλαιο 2	24
2.1. Ιστορική αναδρομή στην έννοια της απόδειξης	24
2.2. Ορισμός της Απόδειξης	26
2.3. Ο ρόλος της απόδειξης στα Μαθηματικά	27
2.4. Απόδειξη και Αποδεικτικά σχήματα των μαθητών	29
2.5. Η Επιχειρηματολογία στην Μαθηματικά	34
2.6. Η σχέση της επιχειρηματολογίας με την απόδειξη	36
2.7. Ποια είναι η σχέση της επιχειρηματολογίας με την εικασία;	37
2.8. Σχέση μεταξύ Επιχειρηματολογίας – Απόδειξης στην Εκπαιδευτική Έρευνα.....	38
2.9. Η θεωρία της γνωστικής ενότητας και η δομική συνέχεια	39
2.10. Η Δομή των Επιχειρημάτων σύμφωνα με το σχήμα του Toulmin	41
2.10.1. Η δομή των Παραγωγικών Επιχειρημάτων με το σχήμα του Toulmin ...	41
2.10.2. Η δομή των Απαγωγικών Επιχειρημάτων με το σχήμα του Toulmin	41
2.10.3. Η δομή των Επαγωγικών Επιχειρημάτων με το σχήμα του Toulmin.....	46
2.11. Η γεωμετρική και η αλγεβρική απόδειξη στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση....	47
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	50
3.1. Η Επιχειρηματολογία στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση	51
3.1.1. Η έρευνα των Dockett & Perry	52
3.1.2. Η έρευνα των Evens & Houssart	54
3.1.3. Συμπεράσματα για την επιχειρηματολογία στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση	59
3.2. Ατομική επιχειρηματολογία μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης	60
3.2.1. Η έρευνα της Pedemonte και των Pedemonte και Reid για την επιχειρηματολογία των μαθητών στη γεωμετρία.....	61
3.2.2. Η έρευνα της Pedemonte για την επιχειρηματολογία των μαθητών στην άλγεβρα.....	86
3.2.3. Η έρευνα των Pedemonte & Buchbinder για τον ρόλο των παραδειγμάτων στην κατασκευή της απόδειξης.....	106
3.3. Η επιχειρηματολογία ολόκληρης της τάξης και η δομή της.....	116
3.3.1. Η έρευνα των Weber, Maher, Powell & Stohl-Lee	117
3.3.2. Η έρευνα του Krummheuer	119
3.3.3. Η έρευνα των Reid, Knipping, Crosby	120
3.3.4. Η έρευνα της Knipping	124
3.3.5. Συμπεράσματα για την επιχειρηματολογία ολόκληρης της τάξης και της δομής της.....	127
3.4. Η επιχειρηματολογία των εκπαιδευτικών	128
3.4.1. Η έρευνα των Giannakoulis, Mastorides, Potari & Zachariades (2010).....	128
3.4.2. Η έρευνα των Nardi, Biza & Zachariades	133

3.5. Η ανάγκη υιοθέτησης ολόκληρου του σχήματος του Toulmin στη Διδακτική των Μαθηματικών	137
3.5.1. Η έρευνα των Inglis, Mejia-Ramos & Simpson	138
3.5.2. Η έρευνα των Inglis & Mejia –Ramos.....	144
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	149
4.1. Γενικά Συμπεράσματα	149
4.2. Η ιδιαίτερη περίπτωση των πιθανοτήτων και προτάσεις για μελλοντική έρευνα	151
Βιβλιογραφία	155

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε για τη μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων για την απόδοση Μεταπτυχιακού Διπλώματος από το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών “ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών”. Αντλώντας από το πρόσφατο ενδιαφέρον των μαθηματικών εκπαιδευτών για το σχήμα του Toulmin, σε αυτή τη διπλωματική γίνεται μια προσπάθεια παρουσίασης και κριτικής συζήτησης της εφαρμογής του σχήματος στη μαθηματική εκπαίδευση. Το σχήμα αυτό αποτελεί ένα σχήμα ανάλυσης της λογικής μικρο-δομής της καθημερινής επιχειρηματολογίας. Στην απλή του μορφή αποτελείται από τα “δεδομένα”, το “συμπέρασμα” και την “εγγύηση”, ενώ στην πλήρη του μορφή αποτελείται από τρία επιπλέον στοιχεία την “υποστήριξη”, την “αντίκρουση” και το “βαθμό βεβαιότητας”. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μαθηματική απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική μορφή επιχειρήματος, αυτό το σχήμα δύναται να εφαρμοστεί στην ανάλυση των αποδείξεων. Το περιορισμένο σχήμα του Toulmin έχει χρησιμοποιηθεί για να αναλύσει α) την επιχειρηματολογία των μαθητών στα διαφορετικά επίπεδα μόρφωσης και σε διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα β) την επιχειρηματολογία ολόκληρης της τάξης και γ) την επιχειρηματολογία των εκπαιδευτικών. Ωστόσο, οι ερευνητές έχουν τονίσει την ανάγκη υιοθέτησης ολόκληρου του σχήματος ώστε να επιτευχθεί μια πιο αναλυτική περιγραφή τόσο της επιχειρηματολογίας που χρησιμοποιείται όσο και της διαδικασίας αιτιολόγησής. Τέλος παρουσιάζονται συνθετικά συμπεράσματα από την υπάρχουσα βιβλιογραφία καθώς και μια πρόταση για μελλοντική μελέτη.

Λέξεις κλειδιά: Toulmin· Απόδειξη· Επιχειρηματολογία.

Abstract

This dissertation has been prepared in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Masters Program of “Didactics and Methodology of Mathematics”. Drawing upon the recent interest of mathematics educators in Toulmin’s scheme, in this dissertation we attempt to map and critically discuss the implementation of the scheme in mathematics education. Toulmin’s scheme analyses the logical micro-structure of everyday argument. In its simple form consists from the ‘data’, the ‘claim’ and the ‘warrant’, while the full scheme has three additional elements: the ‘backing’, the ‘rebuttal’, and the ‘qualifier’. Considering that the mathematical proof can be regarded as a special form of argument, this scheme can be implemented for the analysis of proofs. The use of Toulmin’s restricted scheme has been used to analyse: a) the students’ arguments across different levels of education and in different mathematical topics, b) the classroom argumentation, and c) the teachers’ argumentation. Nevertheless, researchers have highlighted the need for adopting the full scheme in order to provide a more detailed description of both the arguments employed and the justification process. The dissertation concludes with a synthesis of the existing literature and with proposals for future research.

Key words: Toulmin; Proof; Argumentation.

Εισαγωγή

Τι είναι η Λογική; Η Λογική προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη “λόγος”. Πολλοί επιστήμονες έχουν προσπαθήσει να ορίσουν το τι ακριβώς είναι η λογική ποια είναι η φύση της, και τι είδους επιστήμη αποτελεί ωστόσο οι απόψεις δεν είναι συμβατές μεταξύ τους. Σύμφωνα με μερικούς από αυτούς η λογική είναι κλάδος της ψυχολογίας και αφορά τη μελέτη των τρόπων σκέψης. Σύμφωνα με άλλους αποτελεί το κλάδο της επιστημολογίας ο οποίος ερευνά τη διαδικασία μέσω της οποίας οι άνθρωποι κάνουν αφηρημένους συλλογισμούς δηλαδή η μελέτη του τρόπου με τον οποίο ένα σύνολο από προτάσεις με τη χρήση συγκεκριμένων κανόνων καταλήγει σε ένα ορθό συμπέρασμα (Μυτιληναίος, 2000). Η Λογική όμως έχει ορισθεί γενικότερα από τους Lacoff & Johnson (1999) ως εξής:

“Η λογική δεν περιλαμβάνει μόνο την δυνατότητά μας για λογικό συλλογισμό, αλλά επίσης την ικανότητα που έχουμε να διεξάγουμε έρευνα, να λύνουμε προβλήματα, να εκτιμούμε, να κριτικάρουμε, να αποφασίζουμε για το πώς θα πράξουμε και να φτάνουμε σε μια κατανόηση του εαυτού μας, των άλλων ανθρώπων και του κόσμου. “(σελ. 3-4)

Η Λογική Επιστήμη χωρίζεται σε τρεις κλάδους την Κλασική ή Τυπική Λογική (formal logic), την Άτυπη Λογική (informal logic) και την πιο πρόσφατη Ασαφή Λογική (fuzzy logic).

Η απαρχή της Λογικής έγκειται στον Αριστοτέλη. Η Κλασική ή Τυπική όπως ορίζει ο Αριστοτέλης, βασίζεται στο ότι κάθε πρόταση μπορεί να πάρει ακριβώς μία από τις τιμές σωστό ή λάθος στα πλαίσια μιας γλώσσας.

Μετά από αυτόν τον ορισμό η Λογική αναπτύχθηκε αυτόνομα σαν κλάδος των Θεωρητικών Μαθηματικών όπου μελετώνται οι σχέσεις ανάμεσα στις προτάσεις ενός επιχειρήματος χωρίς αναφορές που να αφορούν τη σκέψη και πλήρως εστιασμένες στους κανόνες που τις διέπουν ώστε να εξαχθούν τυπικά λογικά συμπεράσματα κάνοντας χρήση μιας τεχνικής, συμβολικής αφηρημένης γλώσσας.

Η απαίτηση αυτή του Αριστοτέλη δεν κατέστη δυνατό να εκπληρωθεί πλήρως καθώς δεν είναι δυνατή η χρήση τεχνητών τυπικών γλωσσών στην καθημερινή ζωή. Η χρήση των φυσικών γλωσσών δημιουργεί προβλήματα που οδηγούν σε παράδοξα όταν προσπαθούμε να εκτιμήσουμε πραγματικά-πρακτικά επιχειρήματα.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα εξής:

Κάθε άνθρωπος είναι θνητός.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
Άρα ο Σωκράτης είναι θνητός.

Κάθε Α είναι Θ.
Το Σ είναι Α.
Άρα το Σ είναι Θ.

Το γνωστό αυτό παράδειγμα του Αριστοτέλη αποτελεί δείγμα ορθού συλλογισμού και προφανώς αποτελεί έγκυρο επιχειρήμα γιατί δεν εξαρτάται από το περιεχόμενο των προτάσεων αλλά από τη δομή τους(Μυτιληναίος, 2000).

Αυτός ο σκύλος είναι πατέρας.	Αυτός Σ είναι Π.
Αυτός ο σκύλος είναι δικός σου.	Αυτός ο Σ είναι Δ.
Άρα αυτός ο σκύλος είναι δικός σου πατέρας.	Άρα αυτός ο Σ είναι Δ και Π.

Το παράδειγμα αυτό από τον πλατωνικό διάλογο “Ευθύδημος” παρόλο που φαίνεται να έχει την ίδια γλωσσική δομή με αυτή του προηγούμενου παραδείγματος ωστόσο η εγκυρότητα του επιχειρήματος εξαρτάται από το περιεχόμενο των προτάσεων (Δημητρακόπουλος, 1999).

Αυτό το γεγονός οδήγησε στη δημιουργία της λεγόμενης Άτυπης Λογικής που αφορά την πρακτική-καθημερινή λογική η οποία συνίσταται στη μελέτη, ανάλυση και αξιολόγηση της εγκυρότητας-ορθότητας των επιχειρημάτων κάνοντας χρήση της φυσικής γλώσσας που μεταχειρίζεται το άτομο στην καθημερινή επικοινωνία του. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις η άτυπη λογική δεν διαθέτει την αυστηρότητα της τυπικής λογικής και η επιχειρηματολογία σε αυτό το πλαίσιο έχει διαφορετικό χαρακτήρα από την επιχειρηματολογία στα πλαίσια της Αριστοτέλειας Τυπικής Λογικής.

Η επιχειρηματολογία, στα πλαίσια της καθημερινής ζωής, είναι εκείνο το γένος του λόγου το οποίο επιστρατεύει το άτομο ώστε να υποστηρίξει μια επίμαχη κρίση κάνοντας χρήση συλλογισμών αποτελούμενων από προτάσεις που δικαιολογούνται με τη χρήση επιπρόσθετων προτάσεων.

Όλοι οι συλλογισμοί και κατ’ επέκταση τα επιχειρήματα και της Τυπικής και της Άτυπης Λογικής κατηγοριοποιούνται σε τρία είδη:

- A. Παραγωγικοί συλλογισμοί – επιχειρήματα (deduction) οι οποίοι είναι συλλογισμοί “από το γενικό στο ειδικό” ή “από το όλον στο μέρος” όπου η κατασκευή του συλλογισμού – ισχυρισμού ξεκινάει από μερικά δεδομένα και έναν κανόνα.
- B. Απαγωγικοί συλλογισμοί - επιχειρήματα (adhbuction) οι οποίοι είναι συλλογισμοί “ από το ειδικό στο γενικό” ή “από το μέρος στο όλον” όπου η κατασκευή του συλλογισμού – ισχυρισμού ξεκινάει από ένα γεγονός που έχει παρατηρηθεί.
- C. Επαγωγικοί συλλογισμοί – επιχειρήματα (induction) οι οποίοι είναι συλλογισμοί – ισχυρισμοί όπου η κατασκευή τους βασίζεται σε γενίκευση από συγκεκριμένα παρατηρημένα γεγονότα.

Για να είναι η παρουσίαση πλήρης οφείλουμε να αναφερθούμε και στην πιο πρόσφατη Ασαφή Λογική. Ο ίδιος ο Αριστοτέλης παρατήρησε ότι ο ορισμός της Λογικής που διατύπωσε δεν είναι δυνατόν να περιγράψει τις καταστάσεις όλων των προτάσεων. Ειδικότερα αν αναφερθεί μια πρόταση που αφορά υποθετικό λόγο ή μελλοντική έκφραση τότε δεν είναι δυνατό να καταλήξουμε σε συμπέρασμα του τύπου σωστό - λάθος αλλά σε μια τρίτη λογική τιμή η οποία περιγράφει το υποθετικό συμπέρασμα. Για παράδειγμα αν αναφέρει κάποιος την πρόταση “Αύριο θα γίνει πόλεμος” τότε δεν είναι δυνατό να δώσουμε σε αυτήν την πρόταση ούτε την τιμή σωστό ούτε την τιμή λάθος. Αυτή η διαπίστωση οδήγησε στην πιο πρόσφατη Ασαφή λογική (fuzzy logic) με τον Lucasiewicz να είναι ο θεμελιωτής της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1. Το σχήμα – μοντέλο του Toulmin

Πολλοί φιλόσοφοι προσπάθησαν να αναπτύξουν κατάλληλη μεθοδολογία η οποία να καθιστά δυνατή την ανάλυση και αξιολόγηση των επιχειρημάτων ανεξαρτήτως του επιστημονικού πεδίου του οποίου ανήκουν. Ο Toulmin κατάφερε να αναπτύξει ένα σχήμα το οποίο κατέστησε δυνατή αυτή την απαίτηση. Ο Frans van Eemeren στην εισαγωγή του βιβλίου του Toulmin (1958) "Uses of Argument" αναφέρει ότι το βιβλίο αυτό προσπαθεί να απαντήσει το εξής ερώτημα:

“Υπάρχει ένα παγκόσμιο σύστημα νορμών, σύμφωνα με το οποίο όλα τα είδη επιχειρημάτων, σε όλες τις επιστήμες μπορούν να κριθούν ή πρέπει κάθε επιχείρημα να κριθεί σύμφωνα με τις δικές του νόρμες?” (σελ. i).

Το ερώτημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: “Είναι δυνατόν η λογική να είναι τυπική επιστήμη και ταυτόχρονα να μπορεί να εκτιμά πραγματικά – πρακτικά επιχειρήματα?” (Toulmin, 1958). Αυτή η προσέγγιση διαφέρει εμφανώς από την προσέγγιση του Αριστοτέλη και είναι ο λόγος για τον οποίο ο ίδιος ο Toulmin ανέφερε στην εισαγωγή του βιβλίου του τον χαρακτηρισμό “το βιβλίο Αντι - Λογικής του Toulmin”.

Ο Toulmin (1958) στην εισαγωγή του βιβλίου του "Uses of Argument" αναφέρει τα εξής για το τι είναι η Λογική σε αυτό το καινούργιο πλαίσιο:

“Η Λογική αφορά την ορθότητα των ισχυρισμών που κάνουμε - με το πόσο στέρεα είναι τα δεδομένα που παραθέτουμε για να τα υποστηρίξουμε, την αυστηρότητα των υποστηρίξεων που παρουσιάζουμε- ή για να αλλάξουμε την μεταφορά, το είδος των περιπτώσεων που χρησιμοποιούμε για να υποστηρίξουμε τους ισχυρισμούς μας. “(σελ. 7)

Στο βιβλίο "Uses of Argument" (Toulmin, 1958) ο συγγραφέας ανέπτυξε ένα σχήμα ανάλυσης της λογικής μικρο-δομής της καθημερινής επιχειρηματολογίας, το οποίο προσφέρει έναν διαδικαστικό τρόπο ελέγχου της εγκυρότητας του επιχειρήματος, κατά τον οποίο λαμβάνει υπόψη τόσο τα σταθερά όσο και τα μεταβλητά στοιχεία της επιχειρηματολογίας και δίνοντας σημασία στο εννοιολογικό περιεχόμενο (semantic content) του και στη δομή του (Inglis et al., 2007). Αυτός ο τρόπος ανάλυσης των επιχειρημάτων που προτείνει επιτρέπει οι εκτιμήσεις αλλά και η κριτική να είναι λογικά αμερόληπτες ώστε να μην υπάρχουν αντιρρήσεις – αντικρούσεις ανεξαρτήτως του πεδίου που ανήκει το επιχείρημα. Ο Toulmin

αντιπαραβάλει το σχήμα αυτό και τις ιδέες που υποκρύπτονται πίσω από αυτό στην φιλοσοφική ανάλυση της τυπικής λογικής.

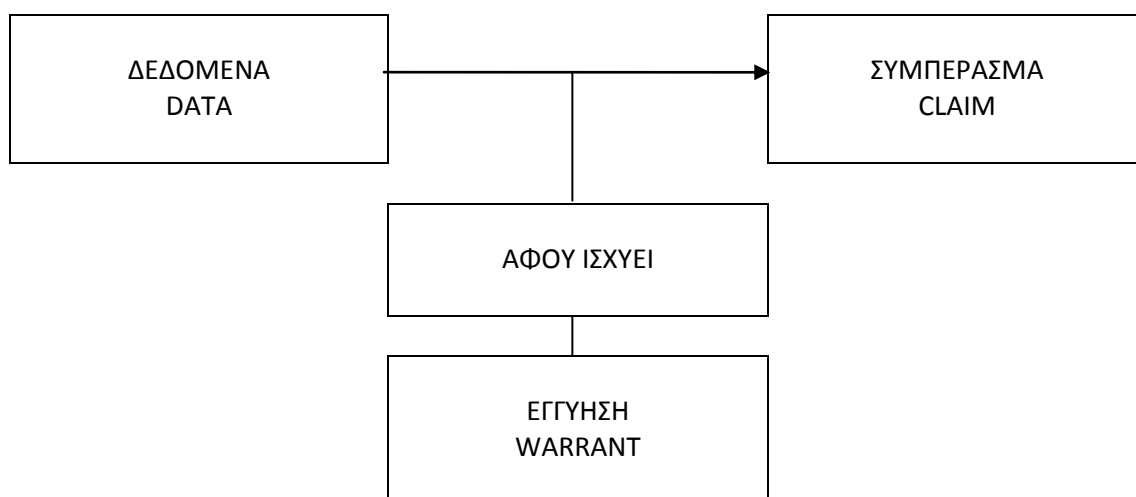
Ένα επιχείρημα, σύμφωνα με τον Toulmin, είναι σαν ένας “οργανισμός, έχει ανατομική δομή αλλά έχει και την λεπτότερη φυσιολογική δομή” (1958, σελ. 87). Για να ελεγχτεί η εγκυρότητα ενός επιχειρήματος πρέπει να ελεγχτεί τόσο η ανατομική του δομή δηλαδή οι φάσεις που διέπουν κάθε επιχείρημα από την αρχική τοποθέτηση μέχρι το τελικό συμπέρασμα και αποτελούν τα κύρια όργανα του, όσο και η φυσιολογική του δομή κατά την οποία μελετάται η κανονική λειτουργία των επιμέρους στοιχείων που αποτελούν το επιχείρημα και των ρυθμιστικών μηχανισμών δηλαδή αν αυτά τα στοιχεία συνάδουν με το πλαίσιο στο οποίο συγκαταλέγεται το επιχείρημα.

Κατά την επιχειρηματολογία διαπραγματευόμαστε ένα αμφιλεγόμενο θέμα για το οποίο υπάρχει διάσταση απόψεων. Για να υφίσταται ένα επιχείρημα είναι αναγκαία η ύπαρξη δεδομένων – αποδεκτών στοιχείων (data) χωρίς την ύπαρξη αυτών δεν είναι δυνατή η κατάληξη σε συμπέρασμα ή ισχυρισμό (claim) του οποίου η αλήθεια τίθεται προς εξακρίβωση – υιοθεσία. Η υποστήριξη του ισχυρισμού υποθέτει a priori την παραβολή δεδομένων. Σύμφωνα με τον Toulmin τα δεδομένα πρέπει να απαντάνε στο ερώτημα «Τι στοιχεία διαθέτεις για να συνεχίσω?» («What have you got to go on?»).

Η μετάβαση από τα δεδομένα στο συμπέρασμα απαιτεί την ύπαρξη μιας εγγυητικής μαρτυρίας ή εγγύησης (warrant). Η εγγύηση αυτή θα απαντά στο ερώτημα, σύμφωνα με τον Toulmin, «Πως είναι δυνατό από αυτά τα δεδομένα να καταλήξεις στο συμπέρασμα αυτό?» («How do you get there?»). Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δεν υποθέτει την παράθεση επιπροσθέτων πληροφοριών – δεδομένων αλλά την παράθεση των γενικών κανόνων, αρχών, αναφορών, αξιολογήσεων ή υποθετικών δηλώσεων, αποτελούν δηλαδή μια γενική εγγυητική αρχή που αποτελεί συνήθως κοινά αποδεκτή γνώση, η οποία καθιστά τη σύνδεση - γεφύρωση δυνατή και έγκυρη. Η φύση των εγγυήσεων είναι υπό αυτήν την έννοια επεξηγηματική και αιτιολογική ώστε να προσφέρει την απαραίτητη νομιμότητα στο επιχείρημα. Η διαφορά των εγγυήσεων με τα δεδομένα δεν είναι πάντα εμφανής ωστόσο οι λειτουργίες τους στο επιχείρημα είναι διακριτές. Οι διαφορές έγκεινται στα εξής: τα δεδομένα οφείλουν να είναι ρητά διατυπωμένα ενώ οι εγγυήσεις σε αρκετές περιπτώσεις είναι υπονοούμενες και άρρητες. Οι εγγυήσεις γενικά πιστοποιούν την ορθότητα όλων των επιχειρημάτων του ίδιου τύπου και είναι διατυπωμένες με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που είναι τα δεδομένα. Όπως αναφέρει και ο Toulmin η διαφορά είναι “στην πρώτη περίπτωση να μεταφέρει ένα κομμάτι πληροφορίας, στην άλλη να δώσει εξουσία σε ένα βήμα στην επιχειρηματολογία” (σελ. 91). Σε ένα επιχείρημα το ίδιο τμήμα της δήλωσης μπορεί να έχει διττή

λειτουργία είτε σαν δεδομένο είτε σαν εγγύηση ανάλογα με το πλαίσιο μέσα στο οποίο χρησιμοποιείται και τον τρόπο που ερμηνεύεται από τους συνδιαλεγόμενους.

Σε αυτό το στάδιο έχουμε μια πρώτη μορφή ανάλυσης των επιχειρημάτων η οποία αναφέρεται στην βιβλιογραφία σαν “Περιορισμένο Σχήμα του Toulmin ” ή “Απλό σχήμα του Toulmin ” και η μορφή του φαίνεται στο σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1. Απλό σχήμα του Toulmin ή Περιορισμένο Σχήμα του Toulmin

Τα στοιχεία αυτά όμως δεν είναι αρκετά για να αναλύσουν όλα τα είδη των επιχειρημάτων. Για τον λόγο αυτό λαμβάνονται υπόψη επιπρόσθετα στοιχεία.

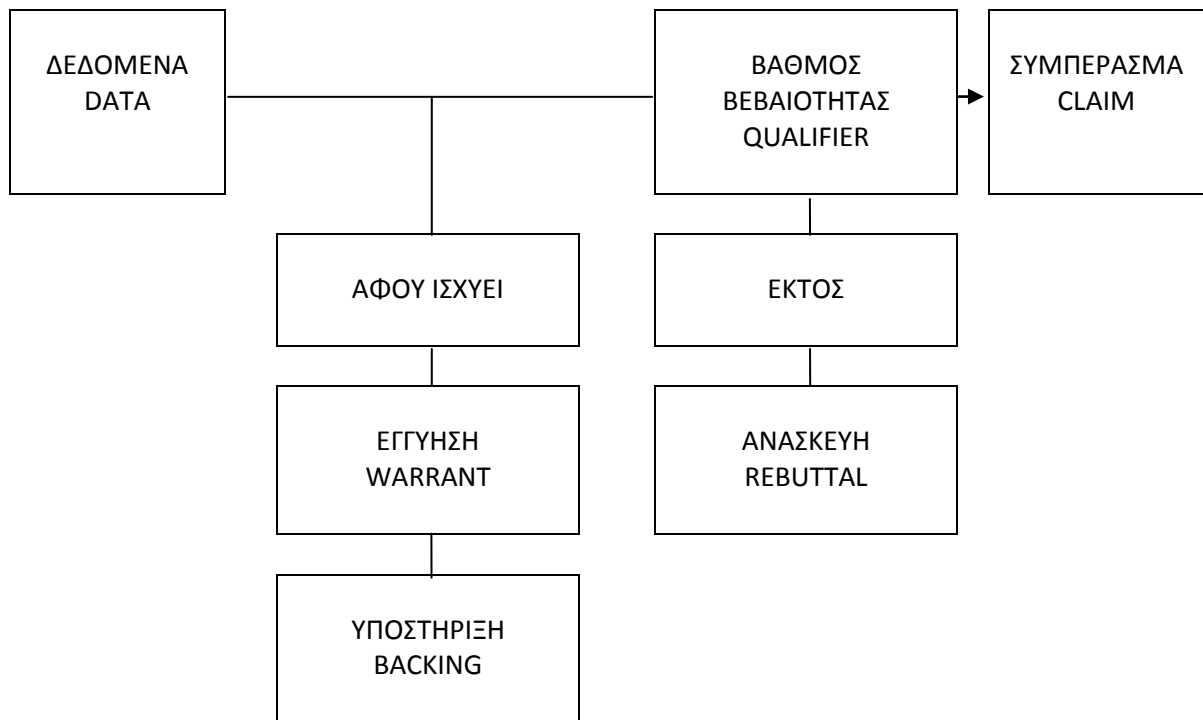
Οι εγγυήσεις, όπως είδαμε, μπορεί να είναι διαφορετικών ειδών και εξαρτώνται από το πεδίο στο οποίο ανήκει το επιχείρημα, αποτελούν δηλαδή field-dependent στοιχείο. Ανάλογα με το πεδίο που αυτά υπάγονται προσδίδουν και διαφορετικό βαθμό βεβαιότητας-δύναμης στον ισχυρισμό του οποίου η αληθοτιμή ζητείται. Ορισμένες εγγυήσεις επιτρέπουν να γίνεται η αποδοχή του ισχυρισμού απερίφραστα και χωρίς καμία αμφιβολία βάση των διατιθέμενων δεδομένων. Αυτό το γεγονός επιτρέπει την χρήση φράσεων επιστημικής τροπικότητας όπως τα βεβαιωτικά επιρρήματα πρέπει, αναγκαία, κ.α.. Άλλες εγγυήσεις υποβάλλονται σε αμφισβήτηση λόγω πιθανών εξαιρέσεων ή ειδικών συνθηκών κάτω από τις οποίες ισχύουν οπότε σε αυτή τη περίπτωση η εξαγωγή του συμπεράσματος δεν είναι αναγκαία αλλά υπό περιορισμούς και για αυτό το λόγο γίνεται χρήση διστακτικών επιρρημάτων όπως πιθανόν, ενδέχεται, ίσως, κ.α.. Οι φράσεις αυτές επιστημικής τροπικότητας αναφέρονται από τον Toulmin ως ο βαθμός βεβαιότητας (qualifier).

Όταν ο ομιλητής προφέρει στοιχεία υπέρ ενός επιχειρήματος δεν είναι επαρκές απλά να παρατεθούν οι εγγυήσεις, απαιτείται η παράθεση των λόγων για τον οποίο οι συγκεκριμένες εγγυήσεις αιτιολογούν και επεξηγούν το συγκεκριμένο

επιχείρημα. Υπάρχουν λοιπόν επιπρόσθετα στοιχεία, κατηγορικές δηλώσεις, στα οποία βασίζονται οι εγγυήσεις και προσφέρουν επιπρόσθετη υποστήριξη – διαβεβαίωση (backing) χωρίς την ύπαρξη της οποίας είναι δυνατό οι εγγυήσεις αυτές να υπόκεινται σε αμφισβήτηση. Το είδος της υποστήριξης που απαιτείται σε κάθε επιχείρημα εξαρτάται από το πλαίσιο στο οποίο ανήκει το επιχείρημα, είναι δηλαδή όπως και οι εγγυήσεις field-dependent στοιχείο. Η υποστήριξη αυτή δεν αποτελεί αναγκαίο στοιχείο του επιχειρήματος καθώς πολλές φορές είναι αυτονόητη και υπόρρητη. Ωστόσο η υποστήριξη μπορεί να τεθεί και αυτή σε αμφισβήτηση ή όπως αναφέρει ο Toulmin να τεθεί το ερώτημα “Γιατί συμβαίνει-ισχύει αυτό?”, σε αυτή την περίπτωση ο ομιλητής οφείλει να προσφέρει επιπλέον υποστήριξη μέχρι να συγκλείσουν οι απόψεις των συνδιαλεγόμενων.

Για να είναι πλήρης αυτή η αιτιολόγηση απαιτείται να παρατίθεται και η ανασκευή ή αντίκρουση του επιχειρήματος (rebuttal). Δηλαδή αν υπάρχουν συγκεκριμένες προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύουν αυτά τα δεδομένα, αν υπάρχουν εξαιρέσεις σύμφωνα με τις οποίες η χρήση των συγκεκριμένων δεδομένων με την προσθήκη των εγγυήσεων δεν οδηγούν στην εξαγωγή του συμπεράσματος του επιχειρήματος.

Η ανάλυση των επιχειρημάτων τώρα έχει την ακόλουθη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 1.2. γνωστή και ως “Το Σχήμα του Toulmin ” ή “Το Μοντέλο επιχειρηματολογίας του Toulmin”.

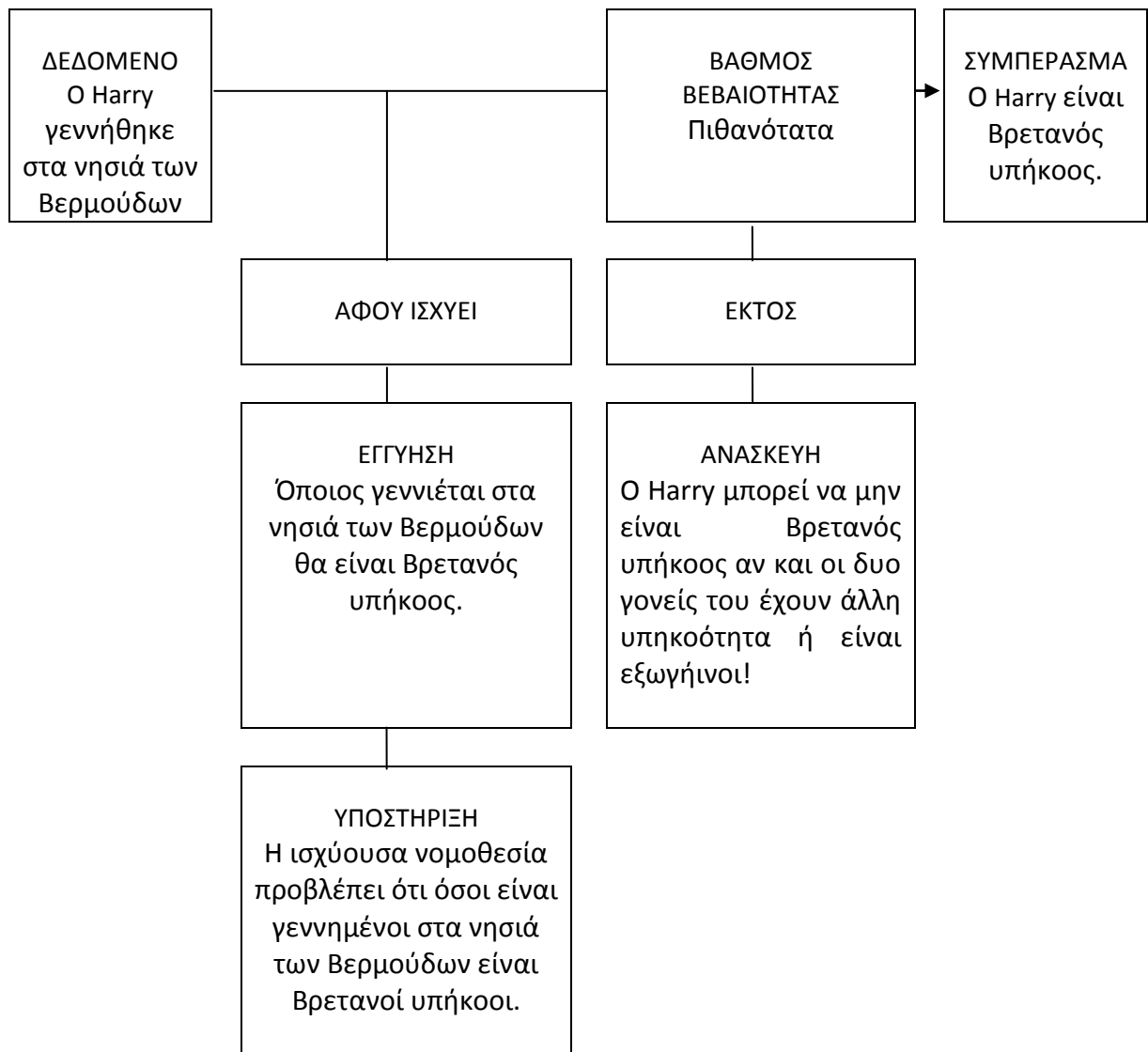


Σχήμα 1.2. Σχήμα του Toulmin

Για να γίνουν αντιληπτά τα στοιχεία του σχήματος θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα επιχειρηματολογίας από την καθημερινή ζωή που αναφέρει ο Toulmin στο βιβλίο του “Uses of Argument” (1998, σελ. 97).

Ο Harry γεννήθηκε στα νησιά των Βερμούδων άρα πιθανότατα είναι Βρετανός υπήκοος αφού όποιος γεννιέται στα νησιά των Βερμούδων αποκτά Βρετανική υπηκοότητα. Η ισχύουσα νομοθεσία προβλέπει ότι όποιος γεννιέται στα νησιά των Βερμούδων είναι Βρετανός υπήκοος. Ο Harry μπορεί να μην είναι Βρετανός υπήκοος αν και οι δυο γονείς του έχουν άλλη υπηκοότητα ή είναι εξωγήινοι!

Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να μοντελοποιηθεί σύμφωνα με το σχήμα του Toulmin όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3. Παράδειγμα εφαρμογής του σχήματος του Toulmin (1958, σελ. 97)

Το σχήμα του Toulmin χρησιμοποιήθηκε σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία όπως αυτό της νομικής επιστήμης, των οικονομικών, της πληροφορικής, των φυσικών επιστημών αλλά και των μαθηματικών. Η χρήση του επέτρεψε στους επιστήμονες την υιοθέτηση καινούργιων μεθόδων και τρόπου σκέψης, οι οποίες συντέλεσαν στην ανάπτυξη των διαφόρων επιστημονικών πεδίων.

1.2. Ο Toulmin και τα Μαθηματικά

Ο Toulmin στο βιβλίο του “Uses of Arguments” (1958) ασκεί κριτική κυρίως για το γεγονός ότι οι ενασχολούμενοι με τη λογική προσπάθησαν και την ανέπτυξαν με τον ίδιο τρόπο που έχει κατασκευαστεί και θεμελιωθεί η Γεωμετρία. Το αποτέλεσμα όπως έχουμε ήδη αναφέρει είναι η δημιουργία της Μαθηματικής Λογικής, η οποία αποτελεί μία παραγωγική τυπική θεωρητική επιστήμη της οποίας το αντικείμενο απαιτεί μεγάλο βαθμό αφάιρεσης και συνάδει με το πρότυπο του Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.). Συνεπώς οποιοδήποτε επιχείρημα πρέπει να έχει μορφή ανάλογη με αυτή που έχουν τα γεωμετρικά επιχειρήματα. Η Λογική όμως ανεπτυγμένη μόνη της με αυτόν τον τρόπο σαν ένας τυπικός θεωρητικός κλάδος θεωρεί ότι χάνει το χαρακτήρα της αφού είναι ανεξάρτητη της καθημερινής επιχειρηματολογίας. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει “Η Μαθηματική Λογική έχει εξελιχθεί σε έναν παγωμένο Λογισμό που δεν έχει καμιά λειτουργική σύνδεση με τους κανόνες εκτίμησης της δύναμης και πειστικότητας ενός επιχειρήματος” (σελ. 172).

Ένα αναλυτικό επιχείρημα ορίζεται σύμφωνα με τον Toulmin ως το επιχείρημα του οποίου η υποστήριξη (backing) της εγγύησης (warrant) περιλαμβάνει ρητά η άρρητα την πληροφορία που περιλαμβάνεται στο συμπέρασμα. Υπό αυτήν την έννοια τα μαθηματικά επιχειρήματα είναι πρωτίστως αναλυτικά. Επιπροσθέτως έχει αναφερθεί και στην φύση των Μαθηματικών τονίζοντας ότι:

“Τα καθαρά Μαθηματικά είναι ίσως η μόνη διανοητική δραστηριότητα της οποίας τα προβλήματα και οι λύσεις είναι “πάνω από τον χρόνο”. Ένα μαθηματικό πρόβλημα δε μπορεί να οδηγήσει ποτέ σε δίλημμα αφού η λύση του είναι άχρονη και αμετάβλητη επί της ουσίας της.”
(1958, σελ.118).

Το επιχείρημα λοιπόν στα μαθηματικά για αυτόν και κατ’ επέκταση η μαθηματική απόδειξη αφορά τυπικές προτάσεις στη σειρά και τη λογική σύνδεση μεταξύ τους και δεν έχει καμιά σχέση με τη καθημερινή ζωή και επιχειρηματολογία. Υπό αυτό το πρίσμα όπως αναφέρει ο Aberdein “η μαθηματική απόδειξη είναι μία από τις πιο επιτυχημένες εφαρμογές της τυπικής λογικής” (2005, σελ. 137) με αποτέλεσμα να μην θεωρείται από τον Toulmin ότι μπορεί εξίσου να αποτελέσει αντικείμενο το οποίο αφορά το σχήμα ανάλυσης επιχειρηματολογίας που έχει αναπτύξει.

Ωστόσο σε διάφορα σημεία του έργου του για να κάνει κατανοητές τις θέσεις που εκφράζει, παραθέτει μερικές απόψεις που αφορούν τη μαθηματικοποίηση καθημερινών προβλημάτων.

Ένα καθημερινό πρόβλημα ή μια πρόταση δύναται να μαθηματικοποιηθεί αν έχει αναπτυχθεί από το άτομο κατάλληλο σύστημα με λογική συνέπεια και

αναγκαιότητα. Η τυπική αναγκαιότητα ενός συστήματος είναι σημαντική γιατί επιτρέπει στον ενασχολούμενο να εστιάζει μόνο στις τυπικά εκφρασμένες προτάσεις μη λαμβάνοντας υπόψη τα υπόλοιπα στοιχεία της καθημερινής επιχειρηματολογίας. Οι εγγυήσεις που παρατίθενται κατά την επίλυσή του πρέπει να εστιάζουν σε δύο σημεία:

1. Στο αν η συγκεκριμένη εγγύηση είναι η κατάλληλη για το πρόβλημα που επεξεργαζόμαστε.
2. Αν το αποτέλεσμα που εξάγουμε από την εφαρμογή της συγκεκριμένης εγγύησης που έχει επιλεγεί είναι σωστό και οδηγεί στο επιθυμητό συμπέρασμα.
3. Τελικοί ισχυρισμοί οι οποίοι χρησιμοποιούνται ως εγγυήσεις που δεν μπορούν να αναλυθούν περαιτέρω, δεν επιδέχονται αιτιολόγησης και άρα αμφισβήτησης δεν απαιτούνται καθώς θεωρείται ότι χάνεται το νόημα της εφαρμογής. Για παράδειγμα το γεγονός ότι $1+1=2$ θεωρείται ως αυτονόητο και δεν δέχεται περαιτέρω απόδειξης.

Σε περίπτωση γενίκευσης των αποτελεσμάτων σε μαθηματικό επίπεδο τότε αυτά είναι δυνατόν να έχουν νόημα στο θεωρητικό τυπικό επίπεδο αλλά δύναται να μην είναι εφαρμόσιμα σε πρακτικό επίπεδο ή ακόμα και αυτή η γενίκευση να μην καθιστά το επιχείρημα πιο ισχυρό. Σε αυτή τη περίπτωση χρήζει ελέγχου όχι μόνο το σύστημα που έχουμε αναπτύξει για την επεξεργασία του προβλήματος αλλά και σύνδεσή του με την πρακτική εφαρμογή. Επίσης στην περίπτωση που η γενίκευση έχει νόημα και στο θεωρητικό επίπεδο αλλά και στο πρακτικό επίπεδο τότε απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στη μετάβαση από το ένα στο άλλο.

Στα Μαθηματικά υπάρχουν και προτάσεις που θεωρούνται αδύνατες. Η διαπίστωση ότι μια μαθηματική πρόταση είναι αδύνατη (π.χ. το $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να γραφεί σαν τετράγωνο ρητού αριθμού) δεν σημαίνει μόνο ότι η απόδειξή της περιέχει αντιφάσεις ή με μαθηματική ορολογία οδηγεί σε άτοπο, σημαίνει και ότι αυτή η πρόταση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν εγγύηση σε άλλα μαθηματικά επιχειρήματα.

Σε ύστερη εργασία του ο Toulmin σε συνεργασία με τους Rieke & Janik στο βιβλίο τους "An Introduction to Reasoning" (1979) επιχειρούν μια κατηγοριοποίηση των επιχειρημάτων ανάλογα με το πεδίο στο οποίο αυτά υπάγονται. Τα μαθηματικά επιχειρήματα υπάγονται στα επιστημονικά επιχειρήματα τα οποία διαφέρουν ως προς τα υπόλοιπα της καθημερινής επιχειρηματολογίας στο ότι προκύπτουν από ορισμούς και αξιώματα που ανήκουν σε ένα τυπικό σύστημα και στο γεγονός ότι η σύνδεση μεταξύ των δεδομένων και των ορισμών και αξιωμάτων είναι τυπική, καθολική και δεν έχει κανένα κοινό στοιχείο με την καθημερινή επιχειρηματολογία που αποτελεί όπως αναφέρουν οι συγγραφείς "αντικείμενο της εμπειρίας". Τα επιστημονικά επιχειρήματα με τη σειρά τους διαχωρίζονται σε κανονικά

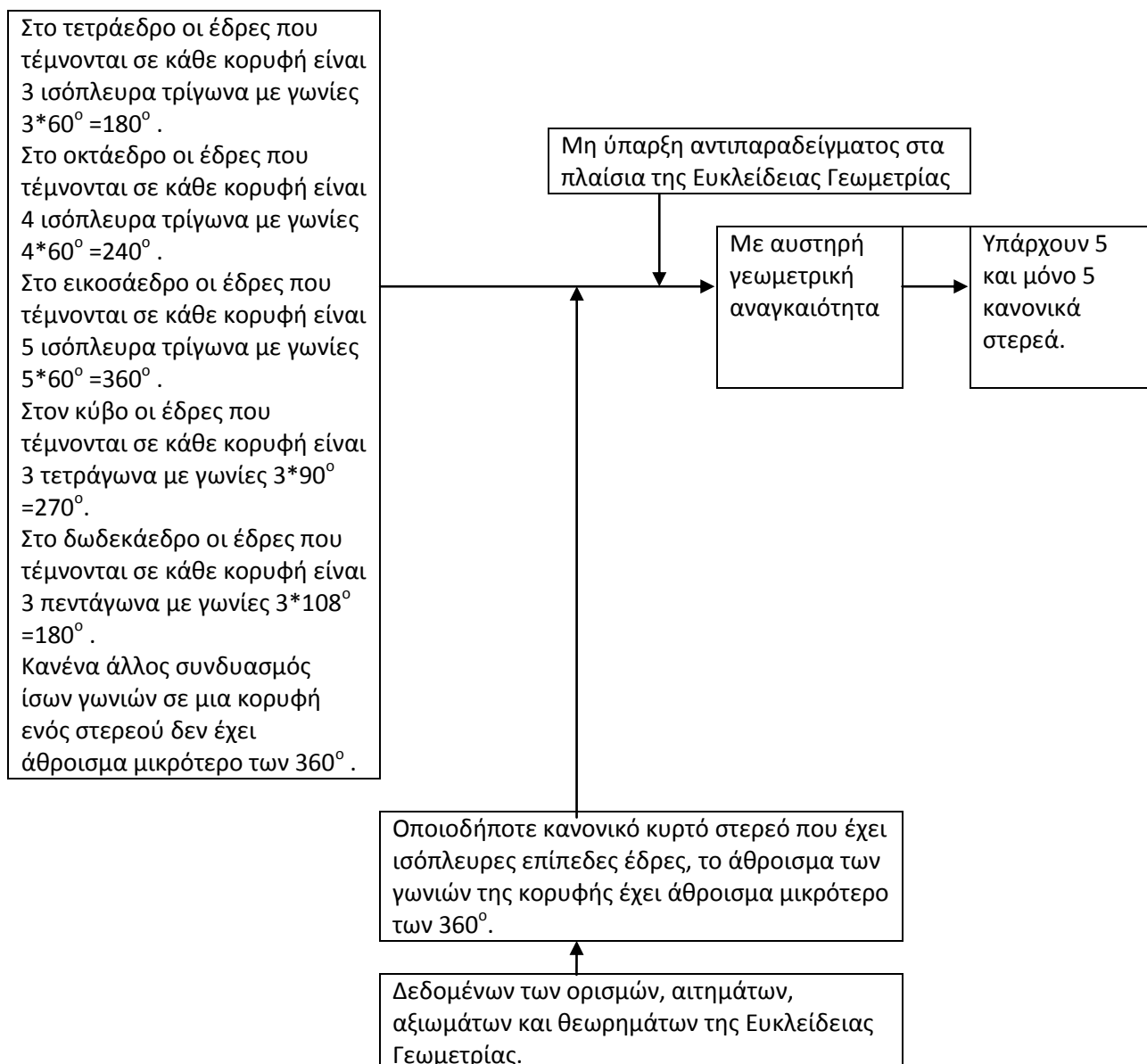
επιστημονικά επιχειρήματα (regular scientific arguments) και στα κριτικά επιστημονικά επιχειρήματα (critical scientific arguments).

Στα κανονικά επιστημονικά επιχειρήματα ο σκοπός της επιχειρηματολογίας είναι να αποδειχτεί ένα πραγματολογικό συμπέρασμα βάση κοινά αποδεκτών επιστημονικών θεωριών. Σε αυτά τα επιχειρήματα τα αξιώματα, θεωρήματα, κανόνες αποτελούν εργαλεία που χρησιμοποιούνται σαν εγγυήσεις και δεν τίθενται υπό αμφισβήτηση. Η μαθηματική απόδειξη λοιπόν αποτελεί ένα κατεξοχήν κανονικό επιστημονικό επιχείρημα.

Στα κριτικά επιστημονικά επιχειρήματα ο σκοπός της επιχειρηματολογίας είναι να τεθούν υπό κρίση, να τροποποιηθούν και να βελτιωθούν οι ήδη υπάρχουσες θεωρίες. Υπό αυτήν την έννοια “αναπαριστούν τρόπους επιχειρηματολογίας για τους υπάρχοντες κανονικούς επιστημονικούς τρόπους επιχειρηματολογίας” (Toulmin, Rieke & Janik, 1979). Σε αντίθεση με τα κανονικά επιστημονικά επιχειρήματα τα θεωρήματα, οι κανόνες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν πλέον ως εγγυήσεις αλλά αποτελούν το ίδιο το αντικείμενο της επιχειρηματολογίας. Στα μαθηματικά πολλοί σχολιαστές αναφέρουν δεν γίνονται επαναστάσεις, ωστόσο η ιστορία έχει δείξει ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου ήδη υπάρχουσες θεωρίες έχουν διατυπωθεί με μεγαλύτερο βαθμό αυστηρότητας και άρα υπό αυτήν την έννοια έχουν επιδεχθεί βελτίωσης. Ο Aberdein (2005) αναφέρει ότι :

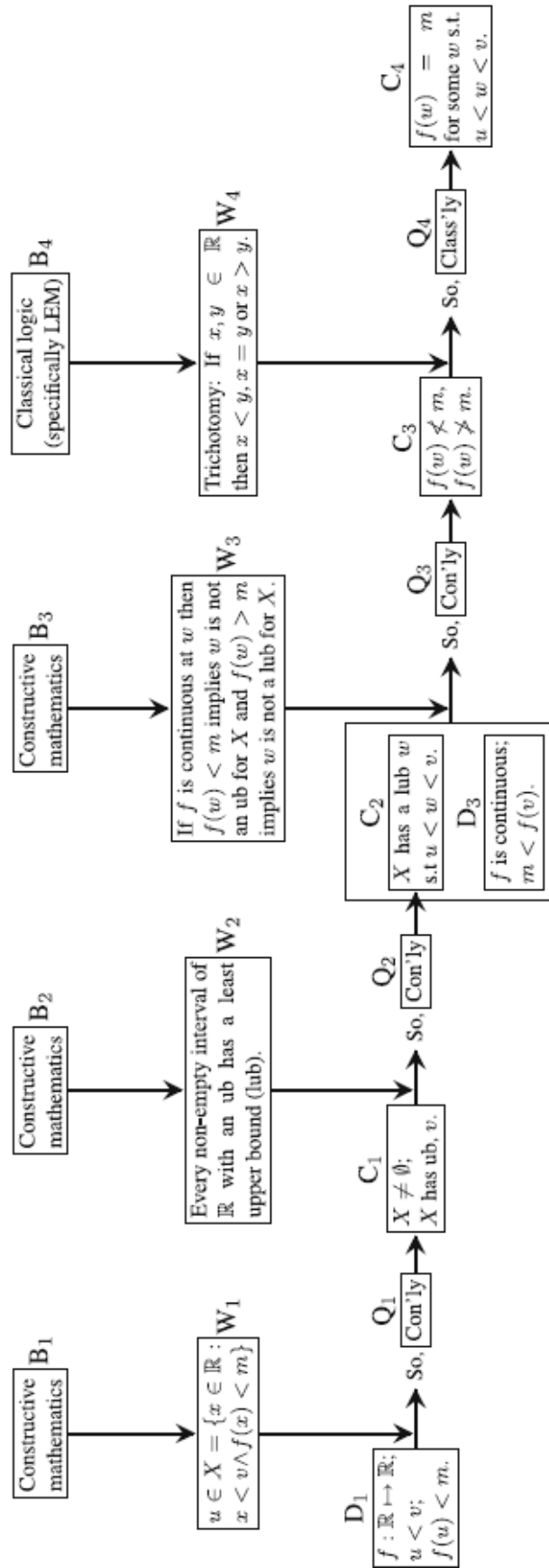
“τα μαθηματικά κριτικά επιχειρήματα είναι επιχειρήματα για τα μαθηματικά και όχι επιχειρήματα στα μαθηματικά. Για αυτόν τον λόγο, τα μαθηματικά κριτικά επιχειρήματα είναι σαν τα κριτικά επιχειρήματα σε οποιονδήποτε άλλο τομέα, δεν υπάρχει κανένα μαθηματικό στοιχείο στην εγγύηση που επικαλούνται ή σε άλλο στοιχείο της δομής τους. Πράγματι δεν θα μπορούσε να υπάρχει, αφού στοχεύουν στο εξωμαθηματικό στοιχείο ώστε να διευθετήσουν μια διαμάχη που δεν μπορεί να επιλυθεί με καθαρά μαθηματικά μέσα”(σελ.289-290).

Σε μια πρωτότυπη χρήση του σχήματος Toulmin στην επιστήμη των Μαθηματικών οι συγγραφείς παρουσιάζουν λόγω του μεγάλου ιστορικού ενδιαφέροντος που παρουσιάζει την απόδειξη του Θεαίτητου (415-368 π.Χ.), Αθηναίου μαθηματικού και μέλος της Ακαδημίας του Πλάτωνα, ότι υπάρχουν ακριβώς πέντε κανονικά πολυέδρα ή όπως έχουν μείνει στην ιστορία Πλατωνικά Στερεά, αφού ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι ήταν αυτά που συγκροτούσαν το υλικό σύμπαν. Η ανακάλυψη των τριών πρώτων κανονικών πολυέδρων, δηλαδή του κύβου, του τετραέδρου και του οκταέδρου μπορεί να χαρακτηριστεί σαν προφανής γεωμετρικά. Η ανακάλυψη όμως του δωδεκάεδρου και του εικοσάεδρου έχει χαρακτηριστεί ως μία από τις ωραιότερες και μοναδικές αποδείξεις των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Η απόδειξη αυτή βρίσκεται και στο τέλος του XIII βιβλίου των “Στοιχείων” του Ευκλείδη και σχηματοποιείται με το σχήμα του Toulmin στο σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4. Η απόδειξη του Θεαίτητου για τα Πλατωνικά Στερεά (Toulmin, Rieke & Janik, 1979, σελ. 126)

Η απόδειξη αυτή που παραθέτουν οι Toulmin, Rieke & Janik (1979) αποτελείται από ένα μόνο βήμα. Η πλειοψηφία των αποδείξεων στα μαθηματικά αποτελούνται από πολλά βήματα οι οποίες μπορούν επίσης να παρασταθούν με το σχήμα του Toulmin. Ο Aberdein (2005) αναπαριστά την κλασσική απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών η οποία φαίνεται στο σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5. Κλασσική απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών (Aberdain, 2005, σελ. 294).

Κεφάλαιο 2

2.1. Ιστορική αναδρομή στην έννοια της απόδειξης

Η απόδειξη είναι ένα κορυφαίο επίτευγμα της ανθρώπινης δραστηριότητας με ιδιαίτερη και περίπλοκη φύση. Η απόδειξη έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της επιστήμης των μαθηματικών αφού συνέβαλε στην θεωρητική τεκμηρίωση της επιστήμης αυτής, γεγονός που επέτρεψε την ανακάλυψη νέων μαθηματικών εννοιών και θεωριών. Η σημασία της απόδειξης στη μάθηση των μαθηματικών είναι επίσης πολύ σημαντική καθώς σύμφωνα με τον Hanna (2000, στον Κο,2010) η απόδειξη αποτελεί ένα όχημα που ενισχύει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών στο άτομο.

Στους Σουμέριους (2500 π.Χ.), Βαβυλώνιους (2000-538 π.Χ.), Αιγύπτιους (5000-332 π.Χ.), Κινέζους, Ινδούς η απόδειξη απουσίαζε από τα μαθηματικά. Τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν από την ενασχόλησή τους με την αριθμητική, γεωμετρία, αστρονομία ή αστρολογία δεν προσπαθούσαν να τα επιλύσουν κάνοντας χρήση γενικών προτάσεων, συμπερασμάτων ή εξηγήσεων, αλλά δίνοντας συγκεκριμένες λύσεις. Παρά το γεγονός ότι δεν έκαναν αποδείξεις, τα μαθηματικά που ανακάλυψαν ήταν πολύ αξιόλογα.

Οι Σουμέριοι ζύγιζαν, έκαναν υπολογισμούς που αφορούσαν τη μέτρηση της γης αλλά και των υγρών, έκαναν χρήση κλασμάτων και είχαν σύστημα αριθμών με βάση το 60. Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν τις τέσσερις πράξεις και τις ρίζες, έλυναν προβλήματα πρώτου και δευτέρου βαθμού. Υπολόγιζαν το εμβαδόν ορθογωνίων τριγώνων, παραλληλογράμμων, τραπεζίων αλλά και του κύκλου όπου για π έθεταν τον αριθμό 3. Ενδεικτικό είναι ότι είχαν ανακαλύψει το Πυθαγόρειο Θεώρημα από το 1600 π.Χ.. Οι Αιγύπτιοι ανέπτυξαν τα μαθηματικά λόγω των προβλημάτων που δημιουργούσε ο ποταμός Νείλος στις καλλιέργειές τους. Οι δύο πάπυροι που συνδέονται με τα αρχαία Αιγυπτιακά μαθηματικά είναι ο πάπυρος του Rhind (≈ 1650 π.Χ.) και ο πάπυρος της Μόσχας (≈ 2000 -1800 π.Χ.), στους οποίους υπάρχουν αριθμητικά προβλήματα που αφορούσαν υπολογισμό όγκων και εμβαδών καθώς και επίλυση εξισώσεων. Τα αρχαία κινέζικα μαθηματικά αφορούν την ανάπτυξη αλγορίθμων σε συγκεκριμένα προβλήματα. Στο ινδικό έργο “Σουλβασούτρας” περιέχονται γεωμετρικές κατασκευές και υπολογισμοί που χρησιμοποιούνταν για κατασκευές ναών. Όλοι αυτοί οι λαοί παρόλο το εύρος των γνώσεων που είχαν δεν κατέστη δυνατό να φτάσουν στην μαθηματική αφαίρεση που θα τους επέτρεπε να διατυπώσουν αυστηρά υποθέσεις και να τις αποδείξουν.

Οι προηγούμενοι λαοί οδηγήθηκαν σε παρακμή λόγω της πολιτικό-θρησκευτικής δομής της κοινωνίας η οποία δεν επέτρεψε την ανάπτυξη της γνώσης. Οι αρχαίοι Έλληνες όντας λαός φιλοπερίεργος θέλησε να δώσει λογικές εξηγήσεις για τον

κόσμο που τον περιέβαλε. Πρώτοι οι αρχαίοι Έλληνες ένιωσαν την ανάγκη να κάνουν απόδειξη στα μαθηματικά. Η εμφάνιση της απόδειξης οφείλεται σε διάφορους παράγοντες: μαθηματικούς, κοινωνικούς, φιλοσοφικούς, παιδαγωγικούς. Η γέννηση της φιλοσοφίας οδήγησε στην μετέπειτα ανάπτυξη των μαθηματικών με τον Θαλή (640 -546 π.Χ.) να είναι ο πρώτος ο οποίος αισθάνθηκε την ανάγκη να δικαιολογήσει τις υποθέσεις κάνοντας χρήση παραγωγικών συλλογισμών και για αυτόν τον λόγο θεωρείται ο πατέρας των μαθηματικών. Η πρώτη απόδειξη έγινε για την πρόταση “Η διάμετρος ενός κύκλου τον χωρίζει σε δύο ίσα μέρη”.

Η αξιωματική μέθοδος, δηλαδή η έννοια της λογικής απόδειξης από κάποιες αποδεκτές αρχές, συνεχίστηκε με τον Πυθαγόρα (572 -497 π.Χ.), τους Πυθαγορείους και μια πληθώρα μεγάλων μαθηματικών (Οινοπίδης ο Χίος, Ιπποκράτης ο Χίος, Ζήνων ο Ελεάτης, Λεύκιππος, Ιππίας ο Ηλείος, Θεόδωρος ο Κυρηναίος) οι οποίοι έκαναν αποδείξεις οι οποίες βασίζονταν στην οπτική αναπαράσταση. Η πεποίθηση ότι οι φυσικοί αριθμοί και οι λόγοι είναι ρυθμιστές του σύμπαντος οδήγησε στην πρώτη ρήξη των θεμελίων των μαθηματικών.

Η επιμονή των Ελλήνων για καλώς ορισμένες έννοιες και αυστηρούς συλλογισμούς δεν τους επέτρεπε να χρησιμοποιούν έννοιες όπως οι άρρητοι αριθμοί και το άπειρο, οι οποίες αποδείχτηκαν απαραίτητες για τη μετέπειτα ανάπτυξη των μαθηματικών. Ο Εύδοξος δημιουργώντας την θεωρία λόγων είναι αυτός που βοήθησε να ξεπεραστεί η κρίση αυτή. Ο Πλάτωνας και η φιλοσοφία του ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αιώνια και αναλλοίωτα που βρίσκονται σε κάποια ιδεατή διάσταση και άρα είναι ξεχωριστά από τον άνθρωπο, οδήγησε στην ανάγκη μεθόδων αποδείξεων οι οποίες δεν θα είχαν εμπειρικό χαρακτήρα αλλά θα έκαναν χρήση των κανόνων λογικής.

Ο Ευκλείδης (≈ 300 π.Χ.) στο περίφημο έργο του “Στοιχεία” συγκεντρώνει όλη την γνώση που είχε αποκτηθεί μέχρι εκείνη την εποχή οργανώνοντάς την σε 13 βιβλία. Το έργο αυτό μένει στους αιώνες σαν ένα υπόδειγμα παραγωγικής σκέψης αφού αποτελείται από αρχικές έννοιες όπως είναι οι ορισμοί, τα αιτήματα, τα αξιώματα και οι κοινές έννοιες και όλες οι προτάσεις απορρέουν από αυτές με παραγωγικές μεθόδους. Η συνέχεια ήταν με τον Αρχιμήδη(277-212 π.Χ.) ο οποίος με την μέθοδο της εξάντλησης έθεσε τα θεμέλια του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Ακολούθησαν σπουδαίοι μαθηματικοί από το 300 π.Χ. μέχρι το 500 μ.Χ. όπου τελειώνει η Ελληνιστική περίοδος, όπως ο Απολλώνιος που ασχολήθηκε με τις κωνικές τομές, ο Ίππαρχος ο οποίος θεωρείται πρόδρομος της τριγωνομετρίας, ο Διόφαντος που θεωρείται ο πατέρας της άλγεβρας, ο Πάππος, ο Πτολεμαίος που ασχολήθηκε με τις κινήσεις των πλανητών και ο Πρόκλος ο οποίος θεωρείται ο πρώτος σχολιαστής των Στοιχείων και σε αυτόν οφείλεται η διάσωσή τους.

Στη συνέχεια, ακολούθησε μια μακρά περίοδος όπου δεν δινόταν μεγάλη προσοχή στην αυστηρότητα.

Από τον 16^ο μέχρι τον 18^ο αιώνα, η συμβολική γραφή και η χρήση συμβόλων αποτελούσαν τους βασικούς τρόπους ανακάλυψης. Ο Viète (1540-1603 μ.Χ.) ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τον αλγεβρικό τρόπο γραφής, ο Napier (1550-1617 μ.Χ.) ανακάλυψε τους αλγορίθμους, ο Descartes (1596-1650 μ.Χ.) την αναλυτική γεωμετρία και ο Fermat (1601- 1665 μ.Χ.) ο οποίος ασχολήθηκε ανάμεσα σε άλλα με την θεωρία αριθμών. Το τέλος αυτής της περιόδου σηματοδοτείται από τη «συμβολική λύση» του Fourier (1768- 1830 μ.Χ.) στο πρόβλημα ροής της θερμότητας.

Ο 18^{ος} αιώνας ή αλλιώς χρυσός αιώνας της ανάλυσης και ο 19^{ος} αιώνας σηματοδοτούνται από την ανακάλυψη σπουδαίων θεωριών στα μαθηματικά, τα λεγόμενα σύγχρονα μαθηματικά. Οι Newton, Leibnitz, Bernoulli, Euler, Laplace, τον 18^ο αιώνα και οι Galois, Cauchy, Gauss, Bolyai, Lobatchevski τον 19^ο αιώνα οδήγησαν στην αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της άλγεβρας και της ανάλυσης, στην ανάπτυξη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών και στην ανάπτυξη αυστηρών αξιωματικών συστημάτων με τον Hilbert τον 20^ο αιώνα να θέτει τα θεμέλια της τυπικής αξιωματικής μεθόδου στη γεωμετρία.

2.2. Ορισμός της Απόδειξης

Η αναδρομή που κάναμε για την ιστορία της απόδειξης δεν οδήγησε σε έναν ενιαίο ορισμό για αυτήν. Το είναι η απόδειξη; Ποια είναι η αξία της; Γιατί αποδεικνύουμε; Υπάρχει ένας ενιαίος ορισμός ο οποίος να δείχνει την ιδιαιτερότητά της;

Πολλές είναι οι προσπάθειες που έχουν γίνει για να δοθεί ένας ορισμός για την έννοια της απόδειξης. Ο Ross (1998, αναφορά στον Knuth, 2002β) αναφέρει ότι «η ουσία των Μαθηματικών βρίσκεται στην απόδειξη». Ο πρώτος ορισμός που υπάρχει είναι αυτός του Αριστοτέλη όπου ορίζει ως απόδειξη τον τρόπο με τον οποίο εδραιώνονται τα αποτελέσματα. Σύμφωνα με την Wikipedia, η απόδειξη είναι μια πειστική παρουσίαση ότι κάποια μαθηματική πρόταση είναι απαραίτητα ορθή μέσα στα αποδεκτά πλαίσια του πεδίου των Μαθηματικών. Ωστόσο, αυτοί οι ορισμοί δεν είναι πλήρως αποδεκτοί για κάποιον που ασχολείται με τη Φιλοσοφία και τη Διδακτική των Μαθηματικών, καθώς δεν περιλαμβάνουν όλα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που απαρτίζουν την απόδειξη.

Η Knipping (2003) αναφέρει τον ορισμό που έχει ο Rav για την απόδειξη:

“Μια απόδειξη στα κλασσικά μαθηματικά ορίζεται σαν μια ακολουθία, συμπερασμάτων όπου το πέρασμα από το ένα συμπέρασμα στο άλλο βασίζεται στις έννοιες ή σε επιτρεπτούς χειρισμούς συμβόλων, και όχι στην αναφορά κανόνων της κατηγορηματικής λογικής”(Rav, 1999, αναφορά στην Knirring, 2003 σελ.13)

Αυτός ο ορισμός του Rav μας δείχνει ότι το πέρασμα από τον ένα ισχυρισμό στον άλλο είναι μη τυπικό γενικά. Ο Rav διαχωρίζει την τυπική απόδειξη, που προκύπτει από τη συντακτική εφαρμογή κανόνων, από την εννοιολογική απόδειξη (conceptual proof), που αποτελεί ένα επιχείρημα το οποίο δίνει έμφαση στο νόημα των εννοιών και τύπων που χρησιμοποιούνται.

Υπάρχουν διάφορες θεωρήσεις για την απόδειξη από τους ερευνητές. Οι ερευνητές οι οποίοι υποστηρίζουν την εμπειρική φύση της απόδειξης αλλά υπάρχουν και αυτοί οι οποίοι υποστηρίζουν την φορμαλιστική φύση της απόδειξης. Η Douek (1998) διαχωρίζει την απόδειξη σαν διαδικασία από την απόδειξη σαν προϊόν. Οι ερευνητές οι οποίοι θεωρούν την απόδειξη ως διαδικασία δίνουν έμφαση στη δομή της απόδειξης ενώ οι ερευνητές οι οποίοι θεωρούν την απόδειξη ως προϊόν δίνουν έμφαση στο νόημα της απόδειξης.

Η απόδειξη αν την εξετάσουμε από το πρίσμα της κοινωνικο-πολιτισμικής προσέγγισης προκύπτει μέσα από φάσεις κοινωνικής διαλεκτικής. Η πρώτη φάση αφορά την αναζήτηση της μεθοδολογίας που θα ακολουθηθεί για την κατασκευή της απόδειξης, η δεύτερη αφορά την ανάπτυξη και οργάνωση της επιχειρηματολογίας και η τρίτη φάση αφορά την παροχή των κατάλληλων αιτιολογήσεων ώστε να εδραιωθεί το αποτέλεσμα και να καταστεί αποδεκτό από τη μαθηματική κοινότητα.

Οι αποδείξεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης είναι οι εννοιολογικές αποδείξεις. Για αυτό και η έρευνα γύρω από την απόδειξη στην Μαθηματική Εκπαίδευση έχει αυτόν τον προσανατολισμό.

2.3. Ο ρόλος της απόδειξης στα Μαθηματικά

Είναι αναμφισβήτητος ο ρόλος της απόδειξης σαν μέσο επικύρωσης ορθότητας μιας εικασίας μέσα στα αποδεκτά όρια του πεδίου των Μαθηματικών. Αλλά η απόδειξη δεν έχει μόνο αυτόν τον ρόλο. Για τους μαθηματικούς η απόδειξη έχει μερικούς ακόμα ρόλους οι οποίοι γενικεύονται και στο ρόλο που παίζει η απόδειξη στη σχολική πραγματικότητα. Ο ρόλος της απόδειξης στο σχολείο σύμφωνα με τους ερευνητές είναι περιφερειακός (Knuth, 2002a) με αποτέλεσμα οι μαθητές να έχουν

δυσκολία και να μην αντιλαμβάνονται την αξία της για την ανθρώπινη σκέψη. Οι ρόλοι της απόδειξης είναι οι εξής σύμφωνα με την βιβλιογραφία.

Ο ρόλος της απόδειξης σαν μέσο επικύρωσης της αλήθειας μιας μαθηματικής πρότασης είναι ο πρωταρχικός ρόλος με τον οποίο έρχονται αντιμέτωποι οι μαθηματικοί αλλά και οι μαθητές στο σχολείο. Λόγω αυτής της τετριμμένης διαδικασίας οι μαθητές αρκούνται στο να εκτελέσουν απλά την διαδικασία ώστε να επιβεβαιώσουν την πρόταση που ήδη γνωρίζουν ότι είναι αληθής αναφέρει ο Schoenfeld (1994), (αναφορά στον Knuth, 2002 α).

Οι μαθηματικοί επιζητούν από μία απόδειξη να έχει *επεξηγηματικό χαρακτήρα*. Χαρακτηριστικά ο Hanna (1995, στον Knuth, 2002 α) αναφέρει: *“η καλύτερη απόδειξη είναι εκείνη που βοηθά τους μαθηματικούς να καταλάβουν το νόημα του προς απόδειξη θεωρήματος, ώστε όχι μόνο να δουν ότι είναι αληθές αλλά και γιατί είναι αληθές”*. Στη σχολική πραγματικότητα η απόδειξη αποκτά την υπόσταση της θεωρίας με μοναδικό στόχο την απομνημόνευση καθώς είναι σε μεγάλο βαθμό, ανάλογα με τη δυσκολία που εμφανίζει, αποκομμένη από το υπόλοιπο σώμα της ύλης. Δεν της προσδίδεται το κυριότερο χαρακτηριστικό της, αυτό δηλαδή του να εξηγεί γιατί τα πράγματα στα μαθηματικά συμβαίνουν έτσι όπως συμβαίνουν. Χαρακτηριστική είναι η δήλωση του ο Schoenfeld (1994, στον Knuth, 2002 α): *“Στα περισσότερα εκπαιδευτικά πλαίσια η απόδειξη δεν έχει κανένα προσωπικό νόημα ή επεξηγηματική δύναμη για τους μαθητές”*.

Τα μαθηματικά σύμφωνα με τους ερευνητές αποτελούν κοινωνικό κατασκεύασμα και με αυτή του την ιδιότητα είναι μέσο επικοινωνίας της μαθηματικής γνώσης. Για να αποτελέσει μια μαθηματική απόδειξη μέρος αυτού του κατασκευάσματος πρέπει να αποτελέσει πρώτα προϊόν μαθηματικής συζήτησης και αφού γίνει αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα να επικυρωθεί σαν μαθηματική γνώση. Οι Harel & Sowder (2007), (αναφορά στον Κο,2010) αναφέρουν δύο διαδικασίες επικοινωνίας που τελεί η απόδειξη: α. τη διαδικασία του να πειστεί το ίδιο το άτομο (ascertaining), β. τη διαδικασία του να πείσει το άτομο τα υπόλοιπα μέλη του συνόλου (persuading). Την ίδια τροχιά πρέπει να ακολουθεί και η απόδειξη μέσα στη σχολική κοινότητα. Σύμφωνα με τον Balacheff (1991, αναφορά στον Knuth, 2002α), *“Αυτό που δεν είναι εμφανές στο σχολικό πλαίσιο είναι ότι η μαθηματική απόδειξη είναι ένα εργαλείο για τους μαθηματικούς τόσο για τον καθορισμό της εγκυρότητας μιας πρότασης όσο και σαν ένα εργαλείο επικοινωνίας με άλλους μαθηματικούς”*.

Μέσω της απόδειξης είναι δυνατή η ανακάλυψη νέων μαθηματικών, με χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτό των Μη – Ευκλείδειων Γεωμετριών από τον Gauss. Η άρνηση του 5ου Ευκλείδειου Αιτήματος οδήγησε σε μία λογικά συνεπή θεωρία η οποία κατασκευάστηκε με καθαρά επαγωγικό τρόπο. Στη σχολική πραγματικότητα ρόλος αυτός παραγκωνίζεται σε μεγάλο βαθμό. Σύμφωνα με τον

Knuth (2002a),μόνο στο μάθημα της Γεωμετρίας με την χρήση Δυναμικών Γεωμετρικών Λογισμικών είναι δυνατή μια τέτοια προσέγγιση από τους μαθητές καθώς τους δίνεται η δυνατότητα πειράζοντας τα σχήματα να δημιουργήσουν εικασίες και με τη χρήση επαγωγικών μεθόδων να μπορέσουν να τις αποδείξουν.

Η απόδειξη αποτελεί μέσο συστηματοποίησης των αποτελεσμάτων των Μαθηματικών σε ένα αξιωματικό επαγωγικό σύστημα με την ύπαρξη ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων (Bell,1976 αναφορά στον Knuth,2002α). Αυτή η δομή πολλές φορές σύμφωνα με τους ερευνητές δεν είναι εμφανής στους μαθητές. Ακόμα και στο μάθημα της Γεωμετρίας όπου τα θεωρήματα και οι προτάσεις είναι άρρηκτα συνδεδεμένες μεταξύ τους υπάρχει δυσκολία να κατανοήσουν αυτήν την αξιωματική κατασκευή.

Όπως επισημαίνει ο De Villiers (1999, αναφορά στον Ko, 2010) η κατασκευή μιας απόδειξης βοηθάει το άτομο στην αυτοπραγμάτωση καθώς αποτελεί ένα μέσο *διανοητικής πρόκλησης*.

Όλοι αυτοί οι ρόλοι που περιγράψαμε για την απόδειξη είναι που την καθιστούν ένα κορυφαίο επίτευγμα της ανθρώπινης δραστηριότητας καθώς επίσης και την κάνουν τόσο ιδιαίτερη και περίπλοκη στη φύση της. Άξια αναφοράς είναι τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει η απόδειξη μέσα στη σχολική αίθουσα σύμφωνα με τον Stylianides (2007, αναφορά στον Ko, 2010). Η απόδειξη είναι ένα μαθηματικό επιχείρημα το οποίο:

1. Χρησιμοποιεί αληθείς προτάσεις που είναι αποδεκτές από την κοινότητα της τάξης και δεν δέχονται περαιτέρω αιτιολόγηση.
2. Χρησιμοποιεί γνωστές στην τάξη μορφές αιτιολόγησης.
3. Χρησιμοποιεί κατάλληλους τρόπους έκφρασης που είναι γνωστοί στην τάξη.

Όλους αυτούς τους ρόλους έχουν υποχρέωση να αναδεικνύουν μέσα στην σχολική αίθουσα οι εκπαιδευτικοί όλων των επιπέδων μέσω των διδακτικών πρακτικών που επιλέγουν για τους μαθητές τους.

2.4. Απόδειξη και Αποδεικτικά σχήματα των μαθητών

Η έρευνα στην απόδειξη έχει εστιάσει στην αποδεικτική διαδικασία μέσω διαφορετικών ειδών επιχειρημάτων και συλλογισμών.

Ο Balacheff (1988) αναφέρεται στα διαφορετικά είδη αιτιολόγησης και επιχειρηματολογίας στις διαδικασίες απόδειξης των μαθητών. Αντιλαμβάνεται τις αποδείξεις με την αυστηρή έννοια και ανάλογα με το επίπεδο γνωστικής ανάπτυξης που προσφέρουν στον μαθητή κατηγοριοποιούνται σε επίπεδα.

Οι αποδείξεις σε πρώτη φάση χωρίζονται από τον Balacheff σε πραγματολογικές (pragmatic) και εννοιολογικές (conceptual). Πραγματολογικές λέγονται οι αποδείξεις που προσφεύγουν σε πραγματικές ενδείξεις, ενώ αντιθέτως, εννοιολογικές λέγονται οι αποδείξεις που δεν περιλαμβάνουν κάποια δραστηριότητα αλλά στηρίζονται στη διατύπωση ιδιοτήτων και στη σχέση μεταξύ τους.

Οι μαθητές ανάλογα στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν απόδειξη διατρέχουν τέσσερα επίπεδα γνωστικής ανάπτυξης τα οποία αφορούν τον τρόπο με τον οποίο εργάζεται και όχι με το αν αυτός ο τρόπος οδηγεί στην κατασκευή ή όχι μιας σωστής τυπικής μαθηματικής απόδειξης.

1. *Ο απλοϊκός εμπειρισμός* (naive empiricism), όπου η αλήθεια ενός αποτελέσματος επιβεβαιώνεται αφού επαληθεύσουμε αρκετές περιπτώσεις.
2. *Το κρίσιμο πείραμα* (crucial experiment), ένα πείραμα το αποτέλεσμα του οποίου μας επιτρέπει να επιλέξουμε ανάμεσα σε δύο υποθέσεις.
3. *Το γενικό παράδειγμα* (generic example), όπου χρησιμοποιείται ένα αντικείμενο το οποίο είναι χαρακτηριστικό αντιπροσωπευτικό παράδειγμα της τάξης του.
4. *Το πείραμα σκέψης* (thought experiment), που σημαίνει ότι το ίδιο το πείραμα δεν είναι αναγκαίο να πραγματοποιηθεί, αλλά μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε μόνο ποια μπορεί να είναι τα αποτελέσματά του.

Οι Weber & Alcock (2004), σε συμφωνία με τις απόψεις του Balacheff θεωρούν υπάρχουν τρεις τρόποι κατασκευής μια τυπική απόδειξη: συντακτικά, σημασιολογικά και διαδικαστικά.

Στην συντακτική απόδειξη (syntactic proof) βγάζουμε συμπεράσματα μέσα από σύμβολα και τύπους με έναν λογικά επιτρεπτό τρόπο. Η συντακτική απόδειξη προκύπτει όταν χειριζόμαστε σωστά τους ορισμούς και τα δεδομένα και εξάγουμε συμπεράσματα βασισμένοι σε θεωρήματα και λογικούς κανόνες. Δεν χρησιμοποιούνται διαγράμματα ή κάποια άλλη διαισθητική, μη τυπική αναπαράσταση της μαθηματικής έννοιας. Για να κατασκευάσει κανείς μια συντακτική απόδειξη, πρέπει να μπορεί να παραθέτει τον ορισμό μιας μαθηματικής έννοιας καθώς επίσης να θυμάται σημαντικά δεδομένα και θεωρήματα σχετικά με την συγκεκριμένη έννοια. Ακόμα, με βάση τον ορισμό της έννοιας και συνδυασμένα δεδομένα, πρέπει να μπορεί να εξάγει έγκυρα συμπεράσματα. Το άτομο που διαθέτει αυτές τις ικανότητες λέμε ότι έχει συντακτικές γνώσεις (*syntactic knowledge*) ή μια τυπική κατανόηση (*formal understanding*) της έννοιας.

Στην σημασιολογική απόδειξη (semantic proof), χρησιμοποιούνται αντιπροσωπευτικά παραδείγματα (instantiations) του μαθηματικού αντικειμένου, για τα οποία η δήλωση που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει, και βάσει αυτών

βγάζουμε συμπεράσματα. Για να κατασκευάσει κανείς μια σημασιολογική απόδειξη, πρέπει να μπορεί να θέτει ως παραδείγματα σχετικά μαθηματικά αντικείμενα, δηλαδή να χρησιμοποιεί μη τυπικές, διαισθητικές αναπαραστάσεις σχετικών εννοιών. Τα παραδείγματα αυτά πρέπει να είναι εμπλουτισμένα ώστε να προτείνουν συμπεράσματα, και να αντανakλούν ακριβώς τα αντικείμενα και τις έννοιες που αναπαριστούν, να ταιριάζουν δηλαδή οι ιδιότητες τους με την τυπική θεωρία. Επίσης, πρέπει να μπορεί να συνδέει τον τυπικό ορισμό της έννοιας με τα παραδείγματα. Το άτομο που έχει αυτές τις ικανότητες λέμε ότι διαθέτει μια σημασιολογική κατανόηση (*semantic understanding*) ή μια αποτελεσματική διαισθητική κατανόηση (*effective intuitive understanding*) της έννοιας.

Στην διαδικαστική απόδειξη (*procedural proof*), οι μαθητές ψάχνουν την απόδειξη μιας δήλωσης παρόμοιας με αυτή που θέλουν να αποδείξουν και την χρησιμοποιούν ως βάση ώστε να δημιουργήσουν την νέα απόδειξη (Weber, 2005 αναφορά στους Moutsios-Rentzos & Simpson, 2011).

Η κατασκευή μόνο συντακτικών αποδείξεων έχει δύο σημαντικά μειονεκτήματα. Πρώτον, αν κάποιος μπορεί να κατασκευάσει μια απόδειξη μόνο συντακτικά, οι προτάσεις που μπορεί να αποδείξει είναι μάλλον περιορισμένες. Δεύτερον, είναι πιθανόν να μην είναι ικανοποιημένος με το κατά πόσο κατανοεί την απόδειξη και να μην πείθεται από τα ίδια του τα επιχειρήματα.

Οι ορισμοί της απόδειξης και του αποδεικτικού σχήματος που δόθηκαν από τους Harel και Sowder (1998) είναι ψυχολογικοί και μαθητοκεντρικοί. Με την έννοια «απόδειξη» εννοούν τη διαδικασία κατά την οποία ένα άτομο εξαλείφει ή εγείρει αμφιβολίες για την αλήθεια μιας παρατήρησης.

Η διαδικασία της απόδειξης περιλαμβάνει δύο στάδια, την επιβεβαίωση και την πειθώ. *Επιβεβαίωση* είναι η διαδικασία κατά την οποία ένα άτομο εξαφανίζει τις αμφιβολίες του για την αλήθεια μιας παρατήρησης, ενώ με την *πειθώ* το άτομο εξαφανίζει τις αμφιβολίες των άλλων. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν οι άνθρωποι για να εξαφανίσουν τις αμφιβολίες διαφέρουν ανάλογα με την χρονική περίοδο, τον πολιτισμό, τις συνθήκες. Έτσι, το *αποδεικτικό σχήμα* που χρησιμοποιεί ένα άτομο περιλαμβάνει όσα αποτελούν επιβεβαίωση και πειθώ για αυτό το άτομο.

Σύμφωνα με τους Harel και Sowder, τα αποδεικτικά σχήματα χωρίζονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες οι οποίες αποτελούνται από υποκατηγορίες. Κάθε κατηγορία αντιπροσωπεύει ένα γνωστικό στάδιο, μια διανοητική ικανότητα, στην μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών. Οι κατηγορίες αυτές δεν αποκλείουν η μία την άλλη, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ταυτόχρονα πάνω από ένα είδος αποδεικτικού σχήματος.

1. Αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πειθούς. Όταν οι μαθητές ακολουθούν τύπους για να επιλύσουν ένα πρόβλημα, μαθαίνουν ότι η επιτυχία έρχεται αν απομνημονεύσουν κάποια συγκεκριμένα βήματα παρά με δημιουργικότητα και ανακάλυψη. Όταν ο δάσκαλος είναι η μοναδική πηγή γνώσης, οι μαθητές δύσκολα αποκτούν εμπιστοσύνη στην ικανότητα τους να κάνουν μαθηματικά. Αυτός ο τρόπος μάθησης οδηγεί στη δημιουργία αποδεικτικών σχημάτων εξωτερικής πειθούς, σχήματα στα οποία οι αμφιβολίες εξαφανίζονται χάρη (α) στον τυπικό τρόπο παρουσίασης των επιχειρημάτων, (β) στα λόγια μιας αυθεντίας (δάσκαλος/ βιβλίο), (γ) στη συμβολική μορφή του επιχειρήματος. Τα δύο τελευταία αποδεικτικά σχήματα είναι άμεση συνέπεια λανθασμένης διδασκαλίας και δεν προτείνονται, καθώς οδηγούν στην αποδοχή ή απόρριψη ενός επιχειρήματος μόνο επιφανειακά. Ωστόσο, η χρήση της αυθεντίας σε μικρό βαθμό δεν είναι τελείως απορριπτέα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν ασχολούμαστε με έναν τομέα στον οποίο δεν είμαστε εξειδικευμένοι.

Τα αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πειθούς είναι τρία σύμφωνα με τους ερευνητές: το τελετουργικό αποδεικτικό σχήμα (ritual proof scheme), το αυταρχικό αποδεικτικό σχήμα (authoritarian proof scheme), και το συμβολικό αποδεικτικό σχήμα (symbolic proof scheme).

2. Εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα. Για να επιβεβαιωθεί, να αμφισβητηθεί ή να ανατραπεί μια εικασία, χρησιμοποιούμε φυσικά γεγονότα ή τις αισθήσεις. Δηλαδή, βασίζουμε την απόδειξη σε παραδείγματα, σε μετρήσεις, σε αντικαταστήσεις συγκεκριμένων αριθμών σε αλγεβρικές παραστάσεις ή σε αντιλήψεις, γι' αυτό και χωρίζονται σε *επαγωγικά* (inductive proof scheme) και *αντιληπτικά* αποδεικτικά σχήματα (perceptual proof scheme). Τα σχήματα αυτά χρησιμοποιούνται συχνά από τους μαθητές, ίσως επειδή στην καθημερινή μας ζωή σκεφτόμαστε αρκετά συχνά με παραδείγματα. Παρόλο που έχουν μειονεκτήματα, τα εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα έχουν κάποια αξία. Τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα εμπλουτίζουν τις εικόνες και βοηθούν στη καλύτερη αντίληψη ιδεών.

3. Αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα. Εδώ, μια εικασία επιβεβαιώνεται μέσω λογικών συμπερασμάτων. Χωρίζονται σε σχήματα μετασχηματισμού (transformational proof scheme) και σε αξιωματικά σχήματα (axiomatic proof scheme).

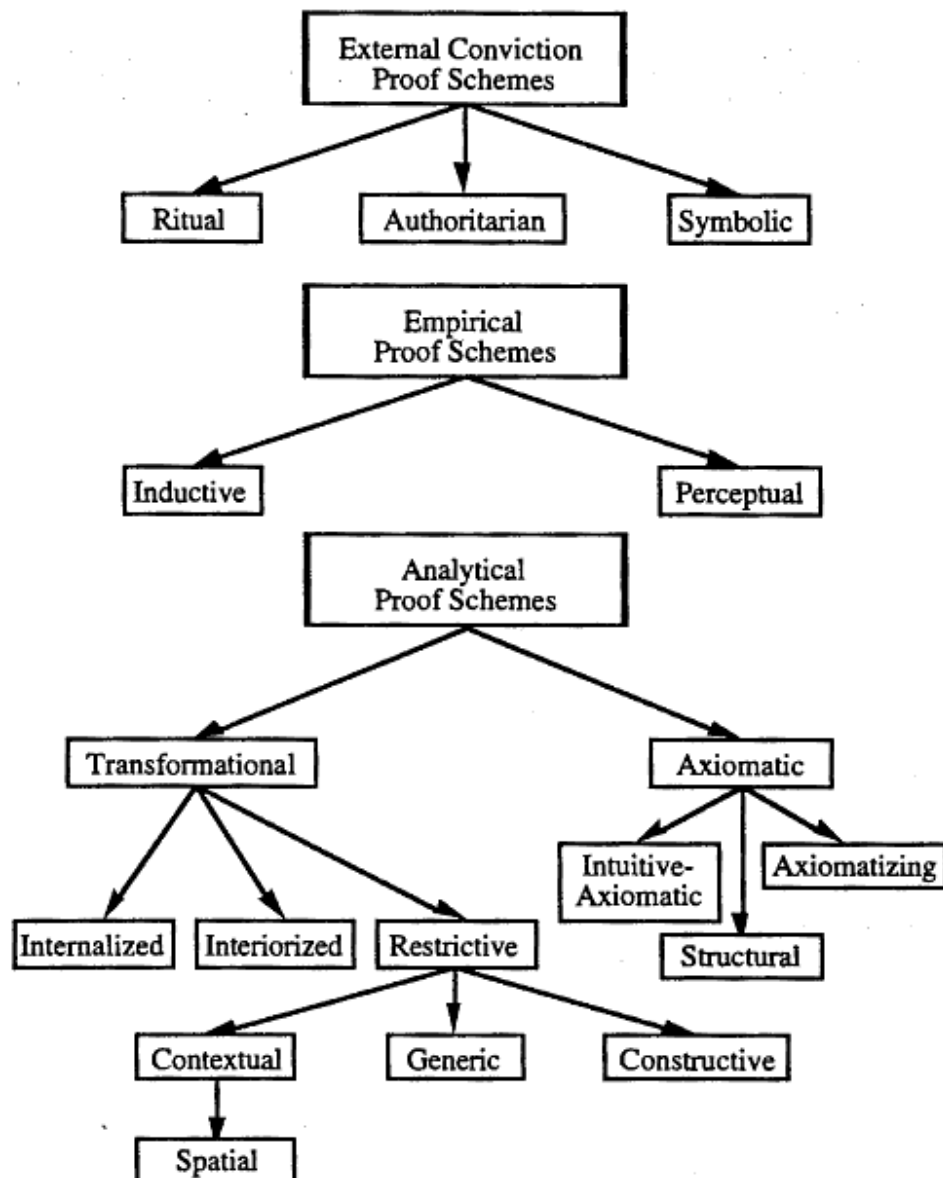
Ένα αποδεικτικό σχήμα μετασχηματισμού χαρακτηρίζεται από τα εξής:

- i. εξέταση της γενικότητας της εικασίας.
- ii. εκτέλεση νοητικών πράξεων που είναι στοχοκεντρικές και προληπτικές.
- iii. μετασχηματισμοί εικόνων ως μέρος μιας αφαιρετικής διαδικασίας.

Ανάλογα με τον μετασχηματισμό που περιλαμβάνουν κατηγοριοποιούνται περαιτέρω αναλόγως.

Στο αξιωματικό αποδεικτικό σχήμα, η δικαιολόγηση πρέπει να ξεκινά αρχικά από όρους που δεν έχουν οριστεί και από αξιώματα. Χωρίζονται σε διαισθητικά – αξιωματικά(intuitive axiomatic proof scheme), κατασκευαστικά (structural proof scheme) και σε αυτά που θέτουν αξιώματα (axiomatizing proof scheme).

Οι Harel και Sowder μάλιστα παραθέτουν ένα σχήμα που δείχνει την κατηγοριοποίηση αυτή.



Σχήμα 2.1. Η κατηγοριοποίηση των αποδεικτικών σχημάτων σύμφωνα με τους Harel & Sowder (1998, σελ. 245).

Σε μία προσπάθεια σύγκρισης των δύο θεωριών για τα αποδεικτικά σχήματα παρατηρούμε ότι εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα και παραγωγικό αποδεικτικό σχήμα των Harel και Sowder αντιστοιχούν στην πρακτική και εννοιολογική απόδειξη του Balacheff. Η διαφορά εστιάζεται στο ότι το παράδειγμα γεννήτορας (generic example) ανήκει στην κατηγορία των παραγωγικών αποδεικτικών σχημάτων.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η Douek παραθέτει δύο θεωρήσεις για την απόδειξη. Η απόδειξη ως προϊόν όπου δίνεται έμφαση στο νόημα της απόδειξης σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει ήδη ακολουθείται από τους Harel και Sowder. Ενώ η απόδειξη ως διαδικασία όπου δίνεται έμφαση στη δομή της ακολουθείται από τους Balacheff και Weber.

Οι Alcock και Inglis (2008) θεωρώντας την απόδειξη ως διαδικασία διαχωρίζουν δύο στρατηγικές κατασκευής απόδειξης :

- Syntactic proof construction: το πλαίσιο αναπαράστασης που επιχειρηματολογεί το άτομο είναι το ίδιο με την προς απόδειξη δήλωση.
- Semantic proof construction: το πλαίσιο αναπαράστασης που επιχειρηματολογεί το άτομο είναι διαφορετικό με την προς απόδειξη δήλωση.

Σε αυτό το πλαίσιο που περιγράψαμε θέτονται ζητήματα για την δομή της απόδειξης ως επιχείρημα και το σχήμα του Toulmin αποτελεί κατάλληλο μεθοδολογικό εργαλείο για την ανάλυσή της.

2.5. Η Επιχειρηματολογία στην Μαθηματικά

Πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να ορίσουν τι αποτελεί επιχειρηματολογία στο πλαίσιο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης χωρίς όμως οι απόψεις να είναι απόλυτα συμβατές μεταξύ τους. Παρόλο που η επιχειρηματολογία είναι αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής πρακτικής ωστόσο δεν μπορεί να αποδοθεί ενιαίος ορισμός.

Η φύση της επιχειρηματολογίας, σύμφωνα με τον Toulmin, είναι ατελής αν εστιάσουμε μόνο στα τυπικά επαγωγικά βήματα. Θεωρεί ότι το άτομο πρέπει να αποκτήσει κατανόηση και των μεθόδων και των χαρακτηριστικών που οδήγησαν στο συγκεκριμένο συμπέρασμα.

Ο Krummheuer (1995) ορίζει ότι η επιχειρηματολογία σε οποιαδήποτε κατάσταση πρέπει να περιέχει *“δηλώσεις που σχετίζονται μεταξύ τους με συγκεκριμένο τρόπο και που με αυτόν τον τρόπο τελούνται συγκεκριμένες λειτουργίες οι οποίες βοηθούν στην αλληλεπιδραστική τους αποτελεσματικότητα”* (σελ. 247). Η επιχειρηματολογία

αφορά την παραγωγή λόγου για ένα συγκεκριμένο ζήτημα ο οποίος είναι βασίζεται σε λογικές συνδέσεις (ατομική επιχειρηματολογία) ή την παραγωγή διαλόγου (Douek, 1998) που βασίζεται σε λογικές συνδέσεις. Η Pedemonte (2008) ορίζει την επιχειρηματολογία όταν αυτή νοείται σαν απόδειξη σαν “ένα σύνολο λογικών αιτιολογήσεων που παρουσιάζονται σαν συμπεράσματα” (σελ. 387). Η Yackel (2001) σε σύμπνοια με τις απόψεις του Krummheuer ορίζει την συλλογική επιχειρηματολογία (collective argumentation) που αφορά την αλληλεπίδραση των ατόμων για την απόδειξη ενός ισχυρισμού.

Η Yackel (2001) διαχωρίζει την επεξήγηση (explanation) από την αιτιολόγηση (justification) και την επιχειρηματολογία. Η επεξήγηση και η αιτιολόγηση σύμφωνα με την Yackel τελούν διαφορετικές λειτουργίες και για αυτό νοούνται ξεχωριστά. Η επεξήγηση αφορά στοιχεία τα οποία παραθέτουν είτε οι εκπαιδευτικοί είτε οι μαθητές ώστε να συγκεκριμενοποιήσουν πτυχές της μαθηματικής σκέψης τους που δεν είναι άμεσα αντιληπτή από τα υπόλοιπα άτομα, ενώ η αιτιολόγηση “δίνεται σαν απάντηση σε προκλήσεις όταν υπάρχουν εμφανείς παραβιάσεις των κανονιστικών μαθηματικών δραστηριοτήτων” (Cobb et al., 1992 αναφορά στην Yackel, 2001).

Οι εκφράσεις που χρησιμοποιούνται κατά την επιχειρηματολογία στα μαθηματικά έχουν δύο χαρακτηριστικά: α. το συντακτικό που αφορά την επιλογή των κατάλληλων λέξεων και τη μεταξύ τους σύνδεση και β. το σημασιολογικό που αφορά το περιεχόμενό τους.

Η Knipping (2008) προτείνει μια κατηγοριοποίηση των επιχειρημάτων ανάλογα με το είδος των εγγυήσεών τους. Στα εννοιολογικά επιχειρήματα (conceptual arguments) υπάγονται τα επιχειρήματα των οποίων οι εγγυήσεις είναι μαθηματικές έννοιες, θεωρήματα ή σχέσεις, για αυτόν το λόγο μπορεί να κατηγοριοποιηθούν και ως παραγωγικά εννοιολογικά επιχειρήματα (deductive conceptual arguments). Ως οπτικά επιχειρήματα (visual arguments) νοούνται τα επιχειρήματα στα οποία η αναφορά σε σχήματα αποτελεί την εγγύηση του επιχειρήματος. Τα οπτικά επιχειρήματα διαχωρίζονται σε εμπειρικά οπτικά επιχειρήματα (empirical visual arguments) αν το σχήμα είναι συγκεκριμένο και οι σχέσεις παρατηρούνται μόνο σε αυτό και σε εννοιολογικά οπτικά επιχειρήματα (conceptual visual arguments) αν το σχήμα αποτελεί “αναπαράσταση μιας ιδέας” και το επιχείρημα που βασίζεται σε αυτό το σχήμα μπορεί να αιτιολογήσει ένα γενικό συμπέρασμα για όλα τα επιχειρήματα με τις ίδιες ιδιότητες.

Όπως παρατηρούμε η επιχειρηματολογία στα μαθηματικά δεν είναι απλή υπόθεση. Η φύση του αντικειμένου είναι τέτοια που την καθιστά πολύπλευρη και ιδιόμορφη. Για να αναπτύξει ένα άτομο ενασχολούμενο με τα μαθηματικά μαθηματική επιχειρηματολογία χρειάζεται εμπειρία η οποία αποκομίζεται από την αλληλεπίδραση με άλλα άτομα.

2.6. Η σχέση της επιχειρηματολογίας με την απόδειξη

Στο πλαίσιο των σύγχρονων γλωσσικών θεωριών, έχουν προταθεί ορισμένα λειτουργικά (functional) και δομικά χαρακτηριστικά (structural characteristics), βάσει των οποίων η απόδειξη θεωρείται ειδική περίπτωση επιχειρηματολογίας και επομένως είναι δυνατή η σύγκρισή τους (Pedemonte, 2007).

- Τα λειτουργικά χαρακτηριστικά (functional characteristics) καθορίζουν το αμετάκλητο της επιχειρηματολογίας, τη χρησιμότητά της, το ρόλο της στην ομιλία. Τα λειτουργικά χαρακτηριστικά είναι κοινά και στην απόδειξη και στην επιχειρηματολογία δείχνοντας με αυτόν τον τρόπο την σύνδεσή τους και είναι τα εξής τέσσερα:

1. *Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη στα μαθηματικά θεωρούνται ως λογικές αιτιολογήσεις.*

Η επιστημολογική έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση υπογραμμίζει τη σημασία της αιτιολόγησης των επιμέρους στοιχείων που συνδέονται με την απόδειξη, όπου η αιτιολόγηση είναι το ρητό συμπέρασμα που απορρέει από ένα ή περισσότερα δεδομένα, που θεωρούνται αληθή, με τη βοήθεια της λογικής. Υπό αυτήν την έννοια η επιχειρηματολογία στα μαθηματικά ως απόδειξη είναι κοντά στην Αριστοτελική Διαλεκτική και συνεπώς στη θεωρία του Toulmin.

2. *Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη στα μαθηματικά έχουν ως σκοπό να πείσουν.*

Από επιστημολογική άποψη, σύμφωνα με πολλούς ερευνητές, η επιχειρηματολογία και η απόδειξη στα μαθηματικά αναπτύσσεται όταν το άτομο επιθυμεί να πείσει για την αλήθεια μιας δήλωσης απευθυνόμενος στη λογική του ατόμου ή των ατόμων που προσπαθεί να πείσει.

3. *Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη στα μαθηματικά απευθύνονται σε παγκόσμιο/καθολικό κοινό (universal audience).*

Ο σκοπός της επιχειρηματολογίας στα μαθηματικά είναι να πειστεί όχι μόνο το ίδιο το άτομο αλλά και το ακροατήριο/κοινό για την αλήθεια μιας πρότασης, γεγονός που σημαίνει ότι η επιχειρηματολογία πρέπει να είναι διαμορφωμένη έτσι ώστε να αντικρούει τα επιχειρήματα όλων των συνομιλούντων, είτε αυτή η διαδικασία πραγματοποιείται στα πλαίσια της σχολικής τάξης είτε πραγματοποιείται στο πλαίσιο της μαθηματικής κοινότητας.

4. Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη στα μαθηματικά ανήκουν στο ίδιο πεδίο “field”.

Σύμφωνα με τις γλωσσικές θεωρίες το νόημα της επιχειρηματολογίας πιθανώς να επιδέχεται αμφισβήτηση αν αλλάξει το γνωστικό πεδίο. Στα μαθηματικά, ως διαφορετικά πεδία νοούνται η άλγεβρα, η γεωμετρία, ο διαφορικός λογισμός, καθώς κάθε πεδίο έχει διαφορετικό αξιωματικό σύστημα.

- Τα δομικά χαρακτηριστικά (structural characteristics) παρέχουν ένα δομικό μοντέλο ανάλυσης της επιχειρηματολογίας.

Ο Duval (1995, αναφορά στην Pedemonte, 2007) θεωρεί ότι η απόδειξη ως λογική αλυσίδα παραγωγικών βημάτων αποτελείται από τα δεδομένα, τους ισχυρισμούς και τους κανόνες που περιλαμβάνουν τα αξιώματα, τα θεωρήματα, και τους ορισμούς, ενώ η απόδειξη δεν έχει απαραίτητως αυτά τα χαρακτηριστικά. Ο Toulmin θεωρεί όπως έχουμε ήδη αναφέρει ότι ένα επιχείρημα αποτελείται από τα δεδομένα, τον ισχυρισμό και τις εγγυήσεις. Θεωρώντας την απόδειξη λοιπόν ως ειδική περίπτωση επιχειρηματολογίας είναι δυνατή η σύγκριση των δύο σύμφωνα με την Pedemonte (2007). Συγκρίνοντας λοιπόν την τριαδική μορφή και των δύο μοντέλων παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά έγκειται στο ότι η εγγύηση στην επιχειρηματολογία συνήθως είναι μια εικασία, μια αρχή ή ένας κανόνας ενώ στην απόδειξη είναι τυπικά αξιώματα και θεωρήματα.

2.7. Ποια είναι η σχέση της επιχειρηματολογίας με την εικασία;

Οι Harel και Sowder ασχολούνται με τις έννοιες της παρατήρησης, της εικασίας και της απόδειξης λέγοντας τα εξής:

“Μια παρατήρηση μπορεί να είναι μία απλή αναγνώριση (“τώρα βρέχει”), μπορεί να βασίζεται σε μια εμπειρία ζωής (“πάντα βρέχει το χειμώνα”), ή μπορεί να χρειαστεί γενιές ολόκληρες για να πραγματοποιηθεί (“Η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι η απόλυτη αλήθεια”)” (Harel&Sowder, 1998, σελ. 240).

Οι παρατηρήσεις διαφέρουν σε τρία σημαντικά χαρακτηριστικά: πρωτοτυπία, τρόπος σκέψης και βεβαιότητα.

Η βεβαιότητα μιας παρατήρησης έχει σχέση με το πώς αξιολογείται η παρατήρηση. Ένα άτομο μπορεί να συλλάβει μία παρατήρηση είτε ως *εικασία* είτε ως *γεγονός*. *Εικασία* σύμφωνα με τους Harel & Sowder είναι “μια παρατήρηση που κάνει ένα

άτομο που έχει αμφιβολίες για την αλήθεια της. Η παρατήρηση του ατόμου παύει να είναι εικασία και γίνεται γεγονός την στιγμή που το άτομο είναι σίγουρο για την αλήθεια της” (Harel&Sowder, 1998, σελ. 241).

Η *εικασία*, σύμφωνα με την Pedemonte (2007a), αποτελείται από τρία στοιχεία: τα δεδομένα, την επιχειρηματολογία και ένα σύστημα αντιλήψεων. Η εικασία δεν είναι πάντα αποτέλεσμα επιχειρηματολογίας, σε αυτήν την περίπτωση νοείται ως δεδομένο (fact).

Η επιχειρηματολογία συνδέεται με την εικασία (Pedemonte, 2007) με δύο τρόπους ως εξής:

- Κατασκευαστική επιχειρηματολογία (constructive argumentation) ονομάζεται η επιχειρηματολογία που συμβάλλει στην κατασκευή της εικασίας και άρα προηγείται αυτής.
- Δομική επιχειρηματολογία (structurant argumentation) ονομάζεται η επιχειρηματολογία που αιτιολογεί μια εικασία, η οποία έχει προηγουμένως κατασκευαστεί ως δεδομένο (fact), και άρα έπεται αυτής.

Οι Pedemonte και Buchbinder (2011) αναφέρουν ότι συνήθως είναι παρόντα και τα δύο είδη επιχειρηματολογίας κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Πολλές φορές η απόδειξη συμπίπτει με τη δομική επιχειρηματολογία ή, αν δεν συμβαίνει αυτό, τότε έχει πολλά από τα στοιχεία της. Επίσης όταν κατά την επιχειρηματολογία κατασκευάζεται ταυτόχρονα και αιτιολογείται η εικασία, τότε αυτή χαρακτηρίζεται ως κατασκευαστική και ως δομική.

2.8. Σχέση μεταξύ Επιχειρηματολογίας – Απόδειξης στην Εκπαιδευτική Έρευνα

Ανακεφαλαιώνοντας όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα είδαμε ότι η σχέση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η Pedemonte (2007) αναφέρει ότι η απόδειξη στο πλαίσιο των σύγχρονων γλωσσικών θεωριών αποτελεί μια ειδική περίπτωση επιχειρηματολογίας και το σχήμα του Toulmin (1958) δύναται να αποτελέσει μεθοδολογικό εργαλείο σύγκρισής τους.

Κάποιοι ερευνητές, όπως οι Harel και Sowder (1998), θεωρούν ότι δεν υπάρχει διάσταση ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη, επιπροσθέτως χρησιμοποιούν τον όρο “απόδειξη” για να χαρακτηρίσουν όχι μόνο παραγωγικές αποδείξεις (deductive proofs) αλλά και εμπειρικές αποδείξεις (empirical proofs).

Άλλοι θεωρούν ότι υπάρχει διάσταση ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη σε κοινωνικό και επιστημολογικό επίπεδο (Balacheff, 1988, αναφορά στην

Pedemonte 2007) αλλά και σε γνωστικό, γλωσσικό και λογικό επίπεδο (Duval, 1995 αναφορά στην Pedemonte 2007). Σύμφωνα με τις έρευνες του Duval, υπάρχει “δομικό κενό” ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη ακόμα και αν γίνεται χρήση παρόμοιων γλωσσικών τύπων και προτασιακών συνδέσμων.

Στη μαθηματική απόδειξη, τα συμπεράσματα ακολουθούν το παραγωγικό μοντέλο (deductive) που αποτελείται από τα δεδομένα, τον ισχυρισμό και τους συμπερασματικούς κανόνες (αξιώματα, θεωρήματα ή ορισμοί). Ο Thurston (1994, αναφορά στην Pedemonte, 2007) υποστηρίζει ότι η μαθηματική απόδειξη ακολουθεί το παραγωγικό μοντέλο, αλλά η διαδικασία της απόδειξης ακολουθεί κυρίως κριτήρια βασισμένα στο περιεχόμενο παρά τυπικά κριτήρια. Ενώ στην επιχειρηματολογία, τα συμπεράσματα βασίζονται στο περιεχόμενο. Οι μαθητές κατά την κατασκευή μιας απόδειξης λαμβάνουν υπόψη τα στοιχεία που βασίζονται στο περιεχόμενο και όχι τα στοιχεία του τυπικού μοντέλου.

2.9. Η θεωρία της γνωστικής ενότητας και η δομική συνέχεια

Ως γνωστική ενότητα (cognitive unity) ορίζεται η συνέχεια που υπάρχει μεταξύ της επιχειρηματολογίας ως διαδικασίας κατασκευής μιας εικασίας – πρότασης και της κατασκευής μιας απόδειξης (Garutti et al., 1996). Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της επίλυσης προβλήματος αναπτύσσεται επιχειρηματολογία με σκοπό να παραχθεί μια εικασία. Η υπόθεση της γνωστικής ενότητας αφορά το γεγονός ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η επιχειρηματολογία χρησιμοποιείται από τον μαθητή για την κατασκευή της απόδειξης με το να οργανώσει τα επιχειρήματα που έχει κατασκευάσει προηγουμένως σε μια λογική σειρά.

Πειραματικές έρευνες (Boero et al, 1996; Garutti et al, 1996; Mariotti 2001, αναφορά στην Pedemonte 2007) έδειξαν ότι η απόδειξη είναι πιο εύκολα αντιληπτή στους μαθητές αν αναπτυχθεί πρώτα μια επιχειρηματολογία για την παραγωγή μιας εικασίας. Αν στην απόδειξη υπάρχουν στοιχεία όπως λέξεις, σχήματα, θεωρήματα τα οποία είχαν χρησιμοποιηθεί και στην επιχειρηματολογία τότε υπάρχει γνωστική ενότητα μεταξύ των δύο διαδικασιών.

Σε αυτό το σημείο οφείλουμε να δώσουμε τον ορισμό του συστήματος αναφοράς. Ως σύστημα αναφοράς (referential system) εννοούμε το σύστημα αναπαράστασης, δηλαδή τη γλώσσα, την ευρετική-στρατηγική που χρησιμοποιείται, τα σχήματα, και το γνωστικό σύστημα, δηλαδή αξιώματα, θεωρήματα, μαθηματική θεωρία κ.α.. Υπό αυτήν την έννοια η θεωρία της γνωστικής ενότητας λαμβάνει υπόψη της μόνο το σύστημα αναφοράς και το περιεχόμενο για την ανάλυση των δύο διαδικασιών.

Η αναπαραγωγική μάθηση της απόδειξης, κατά την οποία η απόδειξη απλά παρουσιάζεται στους μαθητές και δεν τη κατασκευάζουν οι ίδιοι, φαίνεται ότι είναι ανεπιτυχής. Αντιθέτως, μια διδασκαλία κατά την οποία παρουσιάζονται ανοιχτά στους μαθητές προβλήματα που απαιτούν μια εικασία διευκολύνει την εισαγωγή της μάθησης της απόδειξης, αφού η ανάπτυξη επιχειρηματολογίας σε πρώτη φάση φαίνεται ότι διευκολύνει την κατασκευή της απόδειξης.

Η σύγκριση, όμως, ανάμεσα στην επιχειρηματολογία ως μια διαδικασία κατασκευής εικασίας και στην απόδειξη μπορεί να γίνει υπό δύο διαφορετικές οπτικές με τη χρήση του σχήματος του Toulmin: (α) ανάλογα με το σύστημα αναφοράς και το περιεχόμενο, οπότε λαμβάνουμε υπόψη τη θεωρία της γνωστικής ενότητας αλλά και (β) ανάλογα με τη δομή, όπου ως δομή (structure) νοείται η γνωστική λογική σύνδεση που υπάρχει ανάμεσα στα στοιχεία μιας επιχειρηματολογίας αλλά και της απόδειξης και μπορεί να είναι παραγωγική, απαγωγική, επαγωγική και δεν καλύπτεται από αυτήν την θεωρία (Pedemonte, 2007).

Η λογική σύνδεση που υπάρχει στα βήματα της απόδειξης ενδέχεται να διαφέρει από τη λογική σύνδεση που υπάρχει στα βήματα της επιχειρηματολογίας. Στη μαθηματική απόδειξη, κάθε βήμα μπορεί να περιγραφεί ως παραγωγικό βήμα ενώ η επιχειρηματολογία ενδέχεται να έχει παραγωγική, απαγωγική αλλά και επαγωγική μορφή. Σε αυτήν την περίπτωση, η μετάβαση από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη απαιτεί δομική αλλαγή, η οποία πολλές φορές δεν είναι απλή για τους μαθητές.

Δομική συνέχεια (structural continuity), λοιπόν, ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη υπάρχει αν οι δύο διαδικασίες έχουν την ίδια δομή. Δηλαδή αν η επιχειρηματολογία ακολουθεί απαγωγική πορεία και η απόδειξη έχει επίσης απαγωγική μορφή, τότε υπάρχει δομική συνέχεια. Αν όμως η επιχειρηματολογία έχει απαγωγική μορφή και η απόδειξη έχει επαγωγική μορφή, τότε υπάρχει δομική διάσταση ανάμεσα τους.

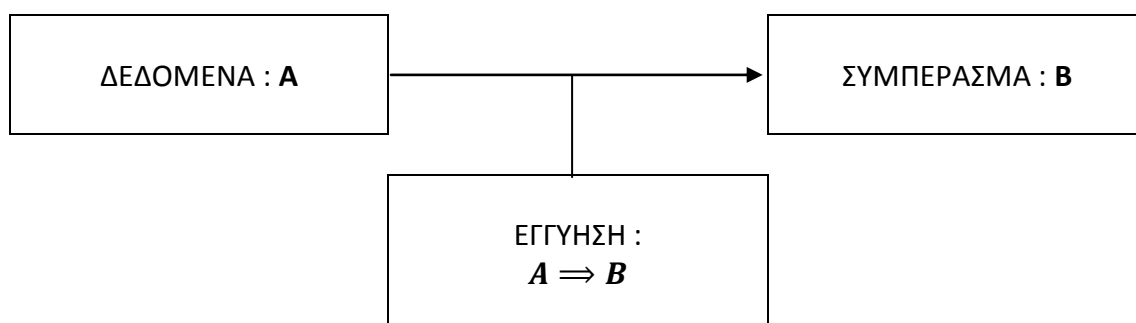
Αν ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και τη μαθηματική απόδειξη υπάρχει δομική συνέχεια, τότε, σύμφωνα με έρευνες, η μετάβαση από τη μία στην άλλη είναι ευκολότερη. Αν όμως υπάρχει δομική διάσταση, τότε χρειάζεται μετασχηματισμός της επιχειρηματολογίας, ο οποίος δεν είναι πάντα εφικτός για τους μαθητές (Pedemonte, 2007). Εν κατακλείδι η βασική διαπίστωση είναι ότι η επιχειρηματολογία είναι διακριτή από την απόδειξη και προηγείται αυτής.

2.10. Η Δομή των Επιχειρημάτων σύμφωνα με το σχήμα του Toulmin

Όλα τα είδη επιχειρημάτων έχουν μοντελοποιηθεί σύμφωνα με το σχήμα του Toulmin από τους ερευνητές που ασχολούνται με τη Φιλοσοφία των Μαθηματικών. Οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών χρησιμοποίησαν τα μοντέλα αυτά στο πλαίσιο που έχουμε ήδη αναφέρει για να αναλύσουν την επιχειρηματολογία των μαθητών.

2.10.1. Η δομή των Παραγωγικών Επιχειρημάτων με το σχήμα του Toulmin

Η δομή των παραγωγικών επιχειρημάτων (deductive) συμπίπτει με την μορφή του περιορισμένου σχήματος του Toulmin.



Σχήμα 2.2. Μοντελοποίηση Παραγωγικού επιχειρήματος με χρήση του σχήματος του Toulmin.

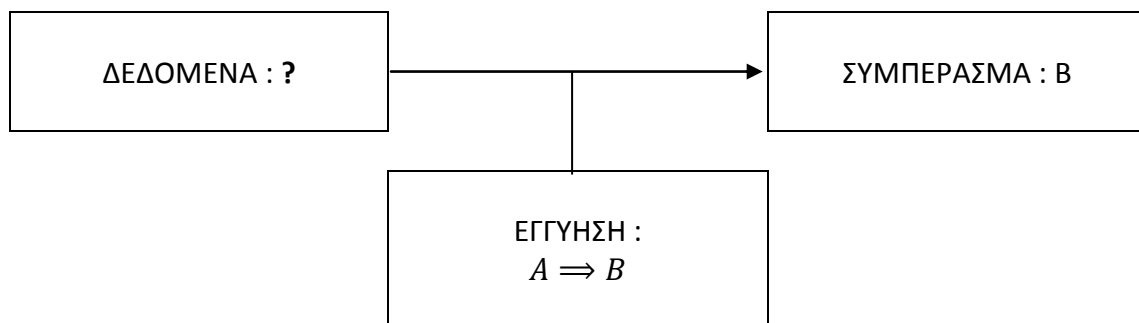
2.10.2. Η δομή των Απαγωγικών Επιχειρημάτων με το σχήμα του Toulmin

Πολλοί είναι οι ερευνητές οι οποίοι έχουν αναφερθεί στην απαγωγική μέθοδο. Στο πρώιμο έργο του, ο Pierce (1960), σύμφωνα με τους Pedemonte & Reid (2010), δίνει έμφαση στη λογική μορφή της απαγωγής κατά την οποία η επιχειρηματολογία κατευθύνεται από τον κανόνα και το συμπέρασμα στην υπόθεση. Στο ύστερο έργο του, την όρισε ως το μοντέλο συμπερασματολογίας που χρησιμοποιούμε κατά τη διαδικασία ανακάλυψης. Η απαγωγή ξεκινά από ένα γεγονός που έχει παρατηρηθεί, στη συνέχεια κατασκευάζεται ένας κανόνας, ύστερα πρέπει να αναζητηθούν τα δεδομένα προκειμένου να εφαρμοστεί ο κανόνας αυτός, και αφού ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία αναζήτησης τελικά θα προκύψει το συμπέρασμα. Δηλαδή η απαγωγή στην ουσία εξηγεί το γεγονός/φαινόμενο και, υπό αυτήν την έννοια, λειτουργεί ανάποδα. Αυτός είναι και ο λόγος που το συμπέρασμά της είναι

πιθανό και όχι βέβαιο. Ο Polya (1962, σελ.107, αναφορά στους) αναπαριστά την απαγωγική μέθοδο ως εξής:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Αν } A \text{ τότε } B \\ B \text{ αληθές} \end{array}}{A \text{ πολύ πιθανό}}$$

Η δομή των απαγωγικών επιχειρημάτων (abductive) σύμφωνα με το μοντέλο του Toulmin μπορεί να μοντελοποιηθεί με τον τρόπο που παρουσιάζεται στο σχήμα 2.3..

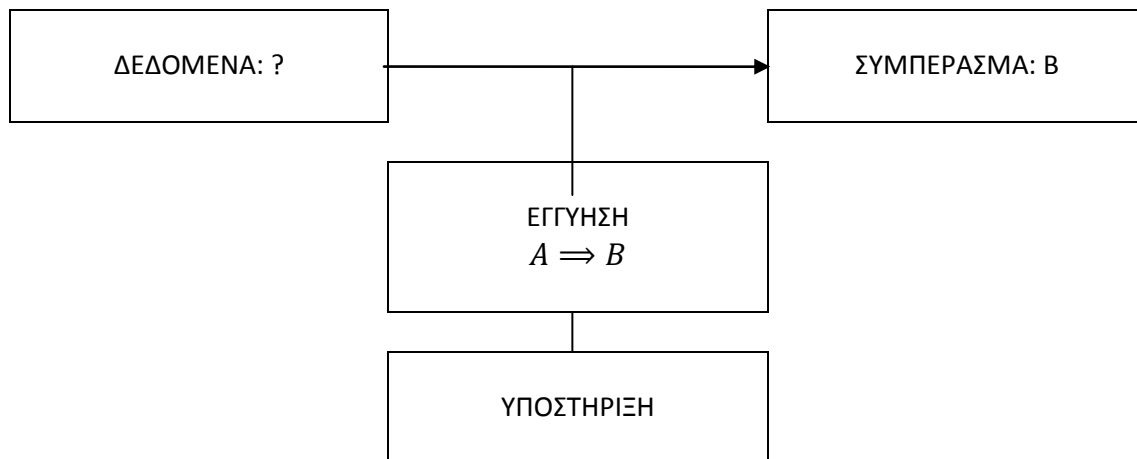


Σχήμα 2.3. Μοντελοποίηση Απαγωγικού επιχειρήματος με χρήση του σχήματος του Toulmin.

Η Pedemonte (2007) χρησιμοποιεί το ερωτηματικό επειδή “τα δεδομένα πρέπει να αναζητηθούν προκειμένου να εφαρμοστεί ο κανόνας συμπερασμού που θα αιτιολογεί το συμπέρασμα”.

Οι Pedemonte & Reid (2010) αναφέρουν ότι ο Eco (1983), βασιζόμενος στη θεωρία του Pierce (1960) για την απαγωγή, αναγνωρίζει τρία είδη απαγωγής:

1. *Overcoded abduction*: Συμβαίνει όταν το άτομο γνωρίζει μόνο έναν κανόνα που θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει και φαίνεται να ακολουθεί η υπόθεση. Η δομή του μπορεί να μοντελοποιηθεί όπως και στο σχήμα 2.3. ή με την προσθήκη επιπλέον της υποστήριξης όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4..



Σχήμα 2.4. Μοντελοποίηση Απαγωγικού επιχειρήματος με προσθήκη υποστήριξης με χρήση του σχήματος του Toulmin. (Pedemonte & Reid, 2010, σελ. 299)

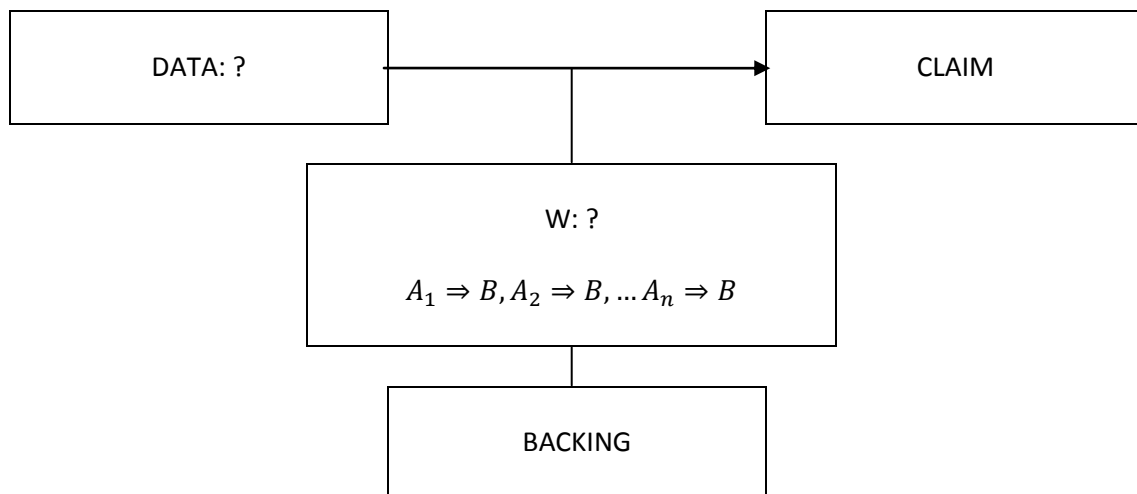
2. *Undercoded abduction*: Συμβαίνει όταν το άτομο γνωρίζει περισσότερους από έναν κανόνες που θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει και φαίνεται να ακολουθεί η υπόθεση. Ο Εκο θεωρεί ότι όλοι οι κανόνες είναι ισοπίθανοι για να επιλεγθούν, ωστόσο στην πράξη αυτό δεν συμβαίνει, καθώς η επιλογή γίνεται ανάλογα με τα στοιχεία που έχει στη διάθεσή του το άτομο.

Οι Pedemonte & Reid (2010) επιχειρηματολογούν υπέρ δύο διαφορετικών αναπαραστάσεων της undercoded απαγωγής.

- i. Undercoded απαγωγή 1^{ου} είδους

Όλοι οι κανόνες που δύναται να εφαρμοστούν στην επίλυση του προβλήματος έχουν την ίδια υποστήριξη, γεγονός που συνεπάγεται ότι ανήκουν στο ίδιο πεδίο των μαθηματικών και άρα είναι η ίδια θεωρία.

Το είδος αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη βοήθεια του σχήματος του Toulmin όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.:

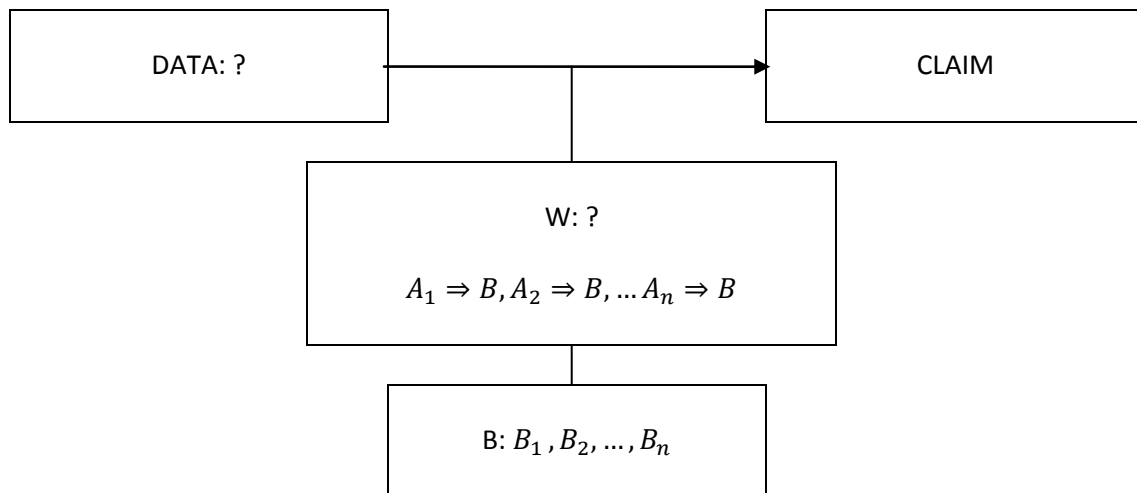


Σχήμα 2.5. Μοντελοποίηση Απαγωγικού επιχειρήματος Undercoded απαγωγή 1ου είδους με χρήση του σχήματος του Toulmin. (Pedemonte & Reid, 2010, σελ. 300)

i. Undercoded απαγωγή 2^{ου} είδους

Ο κάθε κανόνας που δυνητικά μπορεί να εφαρμοστεί έχει τη δική του υποστήριξη, γεγονός που συνεπάγεται ότι οι κανόνες που μπορεί να εφαρμοστούν μπορεί να ανήκουν και σε διαφορετικά πεδία των μαθηματικών.

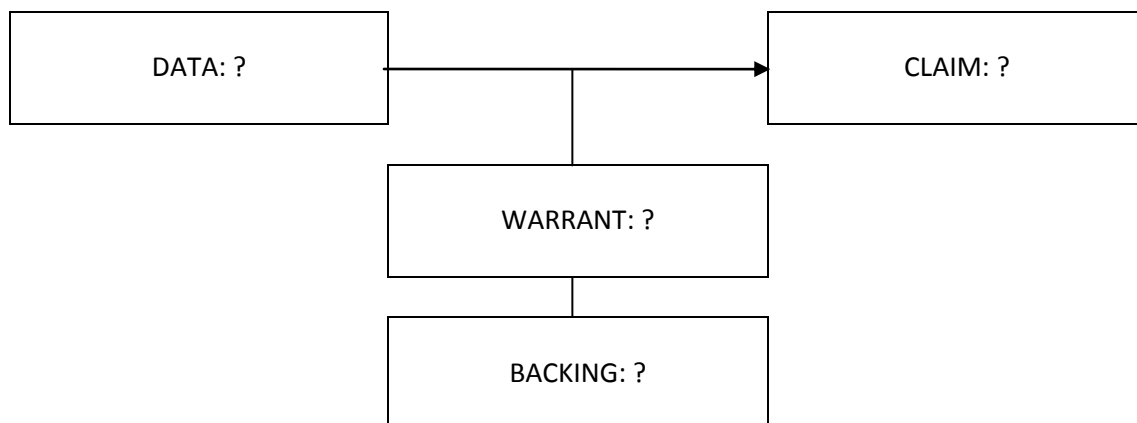
Το είδος αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη βοήθεια του σχήματος του Toulmin όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6.:



Σχήμα 2.6. Μοντελοποίηση Απαγωγικού επιχειρήματος Undercoded απαγωγή 2ου είδους με χρήση του σχήματος του Toulmin. (Pedemonte & Reid, 2010, σελ. 300)

3. Creative abduction: Συμβαίνει όταν το άτομο δεν γνωρίζει κανέναν κανόνα που να μπορούσε να εφαρμοστεί στη περίπτωση που εξετάζει και πρέπει να ανακαλύψει έναν καινούργιο κανόνα.

Με χρήση του σχήματος του Toulmin μπορεί να μοντελοποιηθεί όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7.:



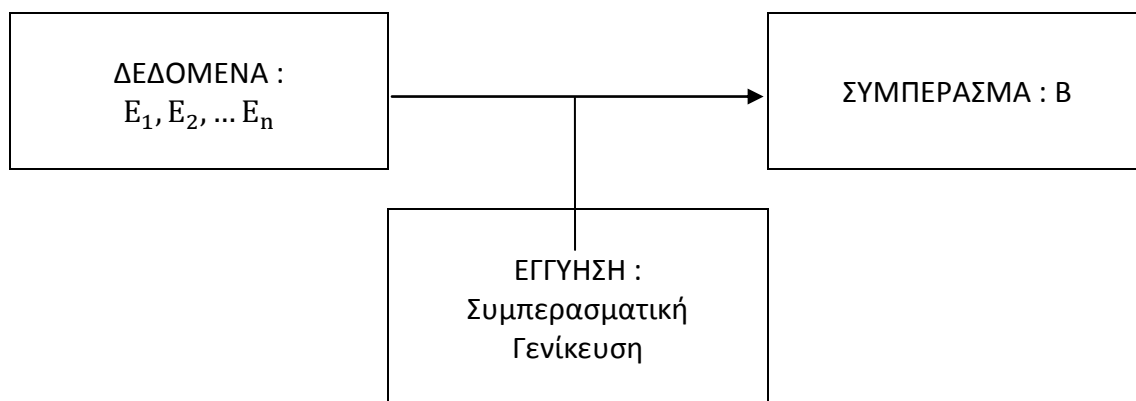
Σχήμα 2.7. Μοντελοποίηση Απαγωγικού επιχειρήματος με Creative abduction με χρήση του σχήματος του Toulmin. (Pedemonte & Reid, 2010, σελ. 301)

Οι Pedemonte & Reid (2010) συνεχίζουν αναφέροντας ότι ο Magnani (2001) ορίζει τις overcoded abduction και undercoded abduction ως επιλεκτικές απαγωγές (selective abductions). Ως επιλεκτική απαγωγή, ορίζουν τη “διαδικασία εύρεσης της κατάλληλης επεξηγηματικής υπόθεσης από ένα σύνολο πιθανών εξηγήσεων”.

2.10.3. Η δομή των Επαγωγικών Επιχειρημάτων με το σχήμα του Toulmin

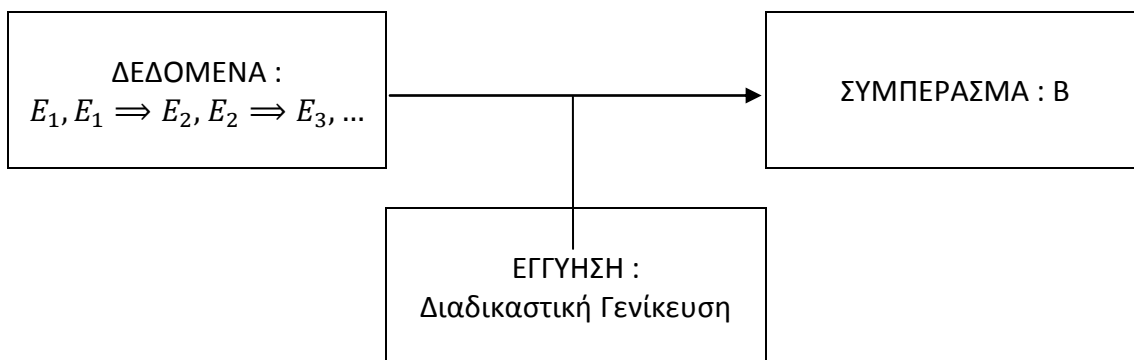
Τα επαγωγικά (inductive) επιχειρήματα, όπως έχουμε προαναφέρει, αφορούν τη κατασκευή του επιχειρήματος μετά από γενίκευση. Η γενίκευση μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους σύμφωνα με τον Harel (2001, σελ. 191, αναφορά στην Pedemonte, 2007).

1. Συμπερασματική Γενίκευση (Result Pattern Generalization, RPG), η οποία αφορά την γενίκευση με χρήση συμπερασμάτων από προηγούμενα βήματα και μπορεί να οπτικοποιηθεί με τη βοήθεια του σχήματος του Toulmin όπως φαίνεται στο σχήμα 2.8.:



Σχήμα 2.8. Μοντελοποίηση Επαγωγικού επιχειρήματος με Συμπερασματική Γενίκευση με χρήση του σχήματος του Toulmin. (Pedemonte, 2007, σελ. 29)

2. Διαδικαστική Γενίκευση (Process Pattern Generalization, PPG), η οποία αφορά τη γενίκευση κατά την οποία κάθε δεδομένο προκύπτει από το προηγούμενο και τελικά συνεπάγεται το συμπέρασμα. Υπάρχει δηλαδή μια κανονικότητα/σειρά ως προς τη διαδικασία. Μπορεί να μοντελοποιηθεί με το σχήματος του Toulmin όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9:



Σχήμα 2.9. Μοντελοποίηση Επαγωγικού επιχειρήματος με Διαδικαστική Γενίκευση με χρήση του σχήματος του Toulmin. (Pedemonte, 2007, σελ. 30)

2.11. Η γεωμετρική και η αλγεβρική απόδειξη στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Η μάθηση της απόδειξης αποτελεί κύριο στόχο των αναλυτικών προγραμμάτων σε πολλές χώρες και για πολλές γενιές. Το Αναλυτικό Πρόγραμμα και Κριτήρια Αξιολόγησης για τα Σχολικά Μαθηματικά (Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών NCTM, 2000, αναφορά στον Κο, 2010) δίνει έμφαση στο στόχο αυτό και προτείνει ο στόχος αυτός να διδάσκεται σε όλους τους μαθητές και σε όλα τα μαθήματα των Μαθηματικών, όχι μόνο στη Γεωμετρία.

Στο αναμορφωμένο Αναλυτικό Πρόγραμμα σπουδών στην Αμερική αναφέρεται ότι ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση μέχρι το τέλος της υποχρεωτικής του εκπαίδευσης να:

«αναγνωρίζει την αιτιολόγηση και την απόδειξη σαν θεμελιώδη στοιχεία των μαθηματικών, να κάνει και να αναλύει μαθηματικές εικασίες, να αναπτύσσει και να αξιολογεί μαθηματικά επιχειρήματα και αποδείξεις, και τέλος να επιλέγει και να χρησιμοποιεί διαφορετικούς τύπους αιτιολόγησης και μεθόδους απόδειξης» (NCTM, 2000, αναφορά στον Κο, 2010, σελ. 1110).

Παρόμοιες αρχές διέπουν και το ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα σπουδών, όπου αναφέρεται ότι στο γυμνάσιο θα πρέπει ο μαθητής να εισαχθεί στην αποδεικτική διαδικασία και να συνειδητοποιήσει ότι αυτή αποτελεί χρήσιμο και άμεσο τρόπο για την επαλήθευση γενικών νόμων, ενώ στο λύκειο ο μαθητής θα πρέπει να μυηθεί στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και να καλλιεργηθεί η «μαθηματική σκέψη».

Στις τάξεις του Λυκείου, το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών θα έπρεπε να περιλαμβάνει αρχές της επαγωγικής και παραγωγικής λογικής έτσι ώστε όλοι οι μαθητές να μπορούν: να κατασκευάζουν και να ελέγχουν υποθέσεις, να

σχηματίζουν αντιπαραδείγματα, να ακολουθούν λογικά επιχειρήματα, να κρίνουν την εγκυρότητα των επιχειρημάτων, να κατασκευάζουν απλά και έγκυρα επιχειρήματα- και έτσι ώστε οι μαθητές που επιθυμούν να εισέλθουν σε σχολές να μπορούν να: κατασκευάζουν τυπικές αποδείξεις για μαθηματικούς ισχυρισμούς, συμπεριλαμβανομένων των έμμεσων αποδείξεων και των αποδείξεων με μαθηματική επαγωγή.

Οι μαθητές όμως σύμφωνα με τον Chazan (1993) δεν αντιλαμβάνονται τους λόγους για τους οποίους η επαγωγική απόδειξη είναι τόσο σημαντική, σαν αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος οι έρευνες δείχνουν την προτίμηση των μαθητών για την εμπειρική επιχειρηματολογία έναντι της επαγωγικής όταν προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα.

Σε σύμπνοια με αυτές τις απόψεις οι Healy & Hoyles (2000) αναφέρουν ότι οι μαθητές έχουν δυσκολία τόσο στην άλγεβρα όσο και στην γεωμετρία:

- Στο να καταλαβαίνουν και να κατασκευάζουν αυστηρά επαγωγικά επιχειρήματα.
- Στο να κατανοούν τη διαφορά των επαγωγικών επιχειρημάτων από τα εμπειρικά επιχειρήματα.
- Στο να χρησιμοποιούν επαγωγικά επιχειρήματα για να εξαγάγουν καινούργια αποτελέσματα.

Παρά τις προσπάθειες των καθηγητών Μαθηματικών μέσα στις δεκαετίες να αναπτύξουν την αντίληψη των μαθητών για την απόδειξη, μόνο οι “καλύτεροι” μαθητές έχουν καταφέρει να την κατανοήσουν.

Σύμφωνα με τον Skemp (1976, 1987) υπάρχουν δύο είδη κατανόησης στα μαθηματικά: η εννοιολογική-σχεσιακή κατανόηση (relational understanding) όπου ο μαθητής καταλαβαίνει τι κάνει και γιατί το κάνει, και η εργαλειακή κατανόηση (instrumental understanding) όπου ο μαθητής εφαρμόζει μηχανικά μια αλγοριθμική διαδικασία. Αντίστοιχα, όταν κάποιος παράγει μια συντακτική απόδειξη μπορούμε να πούμε ότι καταλαβαίνει τι κάνει, ενώ όταν παράγει μια σημασιολογική απόδειξη καταλαβαίνει τι κάνει και γιατί το κάνει.

Ένας από τους κυριότερους λόγους που οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν και να δημιουργήσουν αποδείξεις είναι το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί, αντί να βελτιώνουν σταδιακά την αντίληψη των μαθητών για το τι αποτελεί δικαιολόγηση στα μαθηματικά, τους επιβάλουμε μεθόδους απόδειξης και συνεπαγωγές που τις περισσότερες φορές ούτε καν τους πείθουν. Επίσης, παρουσιάζουμε στους μαθητές έτοιμες αποδείξεις, αντί να ζητάμε να κάνουν δικές τους ανακαλύψεις και να σχηματίσουν εικασίες, με αποτέλεσμα να μην γνωρίζουν ότι η απόδειξη αποτελεί κατά κύριο λόγο ένα επιχείρημα πειθούς, ότι η απόδειξη είναι προϊόν της

ανθρώπινης δραστηριότητας όπου μπορούν και πρέπει να συμμετέχουν οι ίδιοι και ότι αποτελεί σημαντικό κομμάτι των μαθηματικών. (Harel & Sowder, 1998)

Ο Dreyfus (1990) ταξινομεί τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία στις εξής κατηγορίες:

- Οι μαθητές δεν αισθάνονται την ανάγκη απόδειξης καθώς αδυνατούν να κατανοήσουν την αναγκαιότητα και το νόημα της κατασκευής μιας τυπικής–αυστηρής μαθηματικής απόδειξης.
- Οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν το γεγονός ότι οι αποδείξεις εμπεριέχουν την έννοια του “λογικά αναπόφευκτου”.
- Οι μαθητές δεν είναι σε θέση στη πλειοψηφία τους να διατυπώσουν μια αυστηρή μαθηματική απόδειξη.

Αυτές οι δυσκολίες απαντώνται και στην ενασχόληση των μαθητών στο πεδίο της γεωμετρίας αλλά και στο πεδίο της άλγεβρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε τον τρόπο με τον οποίο αξιοποίησαν οι ερευνητές το σχήμα του Toulmin στη Διδακτική των Μαθηματικών.

Ο Toulmin αναφέρει ότι:

“Μόνο όταν το άτομο κατασκευάσει ένα πιο σύνθετο, εξαρτημένο από το πεδίο εφαρμογής σύνολο από λογικές κατηγορίες τότε μόνο θα αναδειχθεί η ακριβής πηγή των επιστημολογικών προβλημάτων του”. (1958, σελ. 230)

Όπως είναι φανερό από την πρότερη συζήτηση η Τυπική και Άτυπη Λογική είναι συμπληρωματικές μέθοδοι ανάλυσης της επιχειρηματολογίας. Ο Aberdain (2007) αναφέρει ότι η Άτυπη Λογική προσφέρει μια πραγματιστική θεώρηση των χαρακτηριστικών της επιχειρηματολογίας που δεν μπορούν να γίνουν εύκολα αντιληπτά μόνο με την αξιοποίηση της Τυπικής Λογικής. Ο συνδυασμός λοιπόν των δύο μπορεί να προσφέρει μια πιο εκλεπτυσμένη κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης και ανακάλυψης.

Σε αυτό το πλαίσιο η χρήση του σχήματος του Toulmin βρίσκει εφαρμογή και στην επιστήμη της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Η αξιοποίηση του σχήματος του Toulmin στη Διδακτική των Μαθηματικών έχει γίνει κυρίως με δύο βασικούς τρόπους. Ορισμένοι ερευνητές χρησιμοποίησαν το σχήμα αυτό σαν εργαλείο για να αναλυθούν οι αντιλήψεις των μαθητών όταν επιχειρηματολογούν σε συλλογικό πλαίσιο. Άλλοι ερευνητές χρησιμοποίησαν το σχήμα αυτό για να κατηγοριοποιήσουν και να εκτιμήσουν την ποιότητα των μαθηματικών επιχειρημάτων που χρησιμοποιούν τα άτομα ή για να κρίνουν αν ένα επιχείρημα αποτελεί μαθηματική απόδειξη.

Το σχήμα του Toulmin έχει χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο ανάλυσης της επιχειρηματολογίας σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης, δημοτικό, γυμνάσιο, λύκειο, πανεπιστήμιο. Αλλά και για να εκτιμήσει την επιχειρηματολογία όχι μόνο του μαθητή αλλά και του εκπαιδευτικού και ολόκληρης της τάξης.

Ο πρώτος ο οποίος θεώρησε ότι το σχήμα του Toulmin μπορούσε να αποτελέσει ένα αναλυτικό εργαλείο στη Διδακτική των Μαθηματικών ήταν ο Krummheuer. Χρησιμοποίησε το απλό σχήμα του Toulmin ώστε να αναλύσει τη συμπεριφορά των μαθητών κατά την ανάπτυξη συλλογικών πρακτικών επιχειρηματολογίας.

Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε 5 ενότητες όπου θα κάνουμε βιβλιογραφική ανασκόπηση του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιείται το σχήμα του Toulmin από τους ερευνητές Στην πρώτη παράγραφο παρουσιάζονται οι έρευνες που αφορούν

την επιχειρηματολογία που αναπτύσσεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Στην δεύτερη παράγραφο παρουσιάζονται οι έρευνες που αφορούν την ατομική επιχειρηματολογία μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στην τρίτη παράγραφο παρουσιάζονται οι έρευνες που αφορούν την επιχειρηματολογία ολόκληρης της τάξης και της δομής της. Στην τέταρτη παράγραφο παρουσιάζονται οι έρευνες που αφορούν και αναλύουν την επιχειρηματολογία των εκπαιδευτικών. Οι έρευνες που παρουσιάζονται στις τέσσερις πρώτες παραγράφους χρησιμοποιούν το απλό σχήμα του Toulmin. Στην πέμπτη παράγραφο παρουσιάζονται οι έρευνες οι οποίες επιχειρηματολογούν υπέρ της ανάγκης υιοθέτησης ολόκληρου του σχήματος καθώς αυτό προσφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια στη μοντελοποίηση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας.

3.1. Η Επιχειρηματολογία στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

Η παράγραφος αυτή εστιάζει στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την επιχειρηματολογία που αναπτύσσουν τα παιδιά ηλικίας 5-7 ετών καθώς και τα παιδιά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Η επιχειρηματολογία χαρακτηρίζεται από τον Krummheuer (1995) σαν:

“κοινωνικό φαινόμενο, όπου συνεργαζόμενα άτομα (προσπαθούν να) ρυθμίζουν τις προθέσεις τους και τις ερμηνείες τους παρουσιάζοντας λεκτικά το σκεπτικό των πράξεών τους” (σελ. 29)

Ο χαρακτηρισμός αυτός της επιχειρηματολογίας είναι ιδανικός για τον τρόπο με τον οποίο μικρά παιδιά κατασκευάζουν τη γνώση τους στην αλληλεπίδρασή τους με συνομήλικα άτομα ή με ενήλικες, αλλά και παιδιά του δημοτικού στην αλληλεπίδρασή τους με συμμαθητές τους στη σχολική αίθουσα.

Αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την ύπαρξη επιχειρηματολογίας σε παιδιά πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης υπό διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια και με διαφορετικούς σκοπούς.

Η πρώτη έρευνα που θα αναφέρουμε είναι των Dockett & Perry (2001) η οποία αναλύει την επιχειρηματολογία των μικρών παιδιών υπό το πρίσμα της κοινωνικο-κονστρουκτιβικής θεώρησης, αναζητώντας τα στοιχεία που την απαρτίζουν κάνοντας χρήση του σχήματος του Toulmin.

Η δεύτερη έρευνα είναι των Evens & Houssart (2004) και αναλύει τις γραπτές απαντήσεις μαθητών 11 χρονών σε μαθηματικό τεστ με ασκήσεις που απαιτούν βασικές αριθμητικές ικανότητες. Το σχήμα του Toulmin χρησιμοποιείται ως

μοντέλο ανάλυσης της επιχειρηματολογίας των μαθητών, τα στοιχεία της οποίας κατηγοριοποιούνται ανάλογα με το περιεχόμενό τους.

3.1.1. Η έρευνα των Dockett & Perry

Πολλές έρευνες έχουν διεξαχθεί όπου κατάλληλα κατασκευασμένες δραστηριότητες με τη μορφή παιχνιδιού προκαλούν τα παιδιά να επιχειρηματολογήσουν και μέσω αυτής της αλληλεπίδρασης να κατασκευάσουν τη γνώση τους. Επιχειρηματολογία έχει παρατηρηθεί σε μικρά παιδιά ακόμα και από την ηλικία των 3 ετών γεγονός που υποδεικνύει ότι η επιχειρηματολογία είναι ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της καθημερινής ζωής. Τα μικρά παιδιά επιχειρηματολογούν με μεγαλύτερη συχνότητα όταν εμπλέκονται σε διαδικασίες αιτιολόγησης των πράξεών τους, καθώς και σε καταστάσεις που χρήζουν διαπραγμάτευση και συμβιβασμού.

Οι ερευνητές θέτουν το ερώτημα “Γιατί είναι σημαντική η επιχειρηματολογία των μικρών παιδιών?” Η επιχειρηματολογία στα μικρά παιδιά είναι σημαντική καθώς τα βοηθά να αναπτύξουν τις γνώσεις τους καθώς και να κατανοήσουν το είδος της γνώση που έχουν αναπτύξει. Ο ίδιος ο Piaget έδινε ιδιαίτερη σημασία στην αιτιολόγηση που προσέφεραν τα παιδιά και τη θεωρούσε ενδεικτική του βαθμού κατανόησής τους. Αλλά και η θεωρία του Vygotsky θεωρεί ότι όλες οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες κατασκευάζονται μέσω της αλληλεπίδρασης με άλλα άτομα με χρήση του διαλόγου και άρα της επιχειρηματολογίας. Υπό αυτή την έννοια η μάθηση τελείται υπό το πρίσμα του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού.

“Ο διάλογος ανάμεσα στα παιδιά αλλά και στα παιδιά και τους ενήλικες τα βοηθά να εσωτερικεύσουν τη γλώσσα που χρησιμοποιούν αλλά και τη γνώση που κατασκευάζουν κατά την αλληλεπίδραση και να την εφαρμόσουν στις δικές τους ανεξάρτητες ξεχωριστές εμπειρίες. “ (Berk 1992, αναφορά στους Dockett & Perry, 2001, σελ. 245)

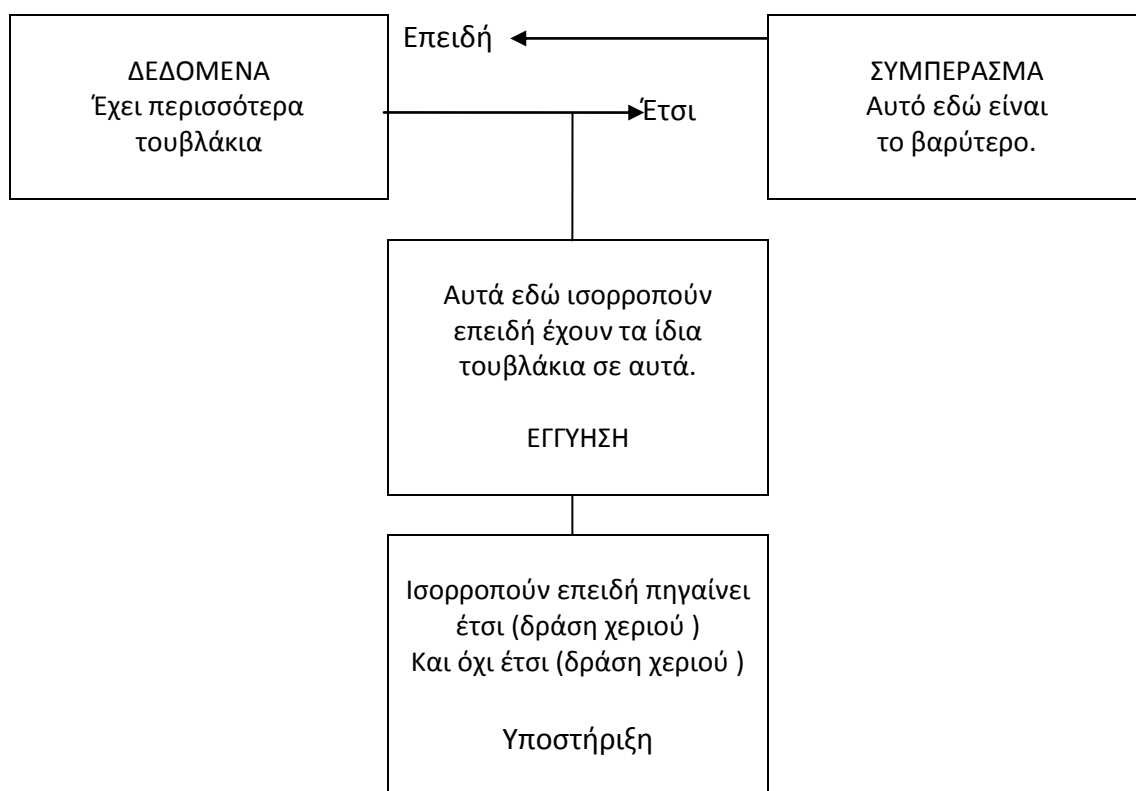
Οι Dockett & Perry κατασκεύασαν κατάλληλες δραστηριότητες με μαθηματικό περιεχόμενο (μεγέθη, αναλογίες) υπό τη μορφή παιχνιδιού ώστε οι μικροί μαθητές μέσω της αλληλεπίδρασης να εκθέσουν την επιχειρηματολογία τους. Ως παράδειγμα διαλόγου και “συνεργατικής διαδικασίας επιχειρηματολογίας”, όπως τη χαρακτηρίζουν οι ερευνητές, αναφέρουμε την αλληλεπίδραση της Άννας με τη συνομήλική της Βρυώνη (Πίνακας 3.1.) και σχηματοποιείται σύμφωνα με το σχήμα του Toulmin στο σχήμα 3.1. Επίσης παρατήρησαν και περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μικρών παιδιών με τους ενήλικους.

Πίνακας 3.1. Παράδειγμα διαλόγου μαθητών νηπιαγωγείου. (Dockett & Perry, 2001, σελ. 238)

Η Άννα(Α) και Βρυώνη(Β) αποτελούν μέλη τριών τάξεων νηπιαγωγείου που λαμβάνουν μέρος σε σχεδιασμένες δραστηριότητες παιχνιδιού. Βρίσκονται σε ένα μαγαζί που μπορείς και ζυγίζεις το οποίο είναι εφοδιασμένο με ζυγαριά, κουβάδες και τουβλάκια. Ο ερευνητής (R) παρατηρεί την αλληλεπίδρασή τους.

- A: Αυτό είναι ένα κατάστημα που ζυγίζουμε. Εδώ είναι μερικά κοτόπουλα.
 B: Αυτό εδώ είναι το ελαφρύ, αυτό εδώ είναι μεγαλύτερο. Αυτά ισορροπούν επειδή έχουν τα ίδια τουβλάκια.
 A: Ναι, και γίνονται βαρύτερα κάθε φορά. Όταν βάζουμε το κρέας μέσα (σφουγγάρι τουβλάκι).
 B: Το δικό μου ισορροπεί γιατί πάει έτσι(ευθεία).
 R: Τι σημαίνει αυτό;
 A: Είναι σαν εμμ. . . όπως αυτό (κρατάει την μπάρα ευθεία). Ισορροπεί γιατί πάει κάπως έτσι.
 B: Αλλά δεν πάει έτσι (μετακινεί τη μπάρα σε γωνία για να δείξει ότι δεν ισορροπεί).
 A: Και αν σταματήσει και είναι στην ίδια ευθεία (δηλαδή, επίπεδο), τότε ισορροπεί.
 R: Αν αυτή η πλευρά είναι πάνω και αυτή είναι προς τα κάτω. Γιατί συμβαίνει αυτό;
 A: Το ξέρω .., Η αιτία είναι ότι το ένα είναι βαρύτερο. Γιατί έχει περισσότερα τουβλάκια.
 B: Και αυτό είναι ελαφρύτερό του.

Σχήμα 3.1. Η σχηματοποίηση του διαλόγου με χρήση του σχήματος Toulmin (Dockett & Perry, 2001, σελ. 238)



Η έρευνα των Dockett & Perry (2001) έδειξε ότι ορισμένα παιδιά νηπιαγωγείου είναι σε θέση να επιχειρηματολογούν σε βασικό επίπεδο, υπό την έννοια της λογικής του Toulmin η επιχειρηματολογία τους ακολουθεί το απλό μοντέλο ανάλυσης, δηλαδή είναι σε θέση να προσφέρουν στοιχεία-εγγυήσεις που συνδέουν τα δεδομένα με το συμπέρασμα, σε ορισμένες περιπτώσεις παρατηρήθηκε ακόμα και η ρητή ύπαρξη περαιτέρω υποστηρίξεων. Ωστόσο ένα μεγάλο ποσοστό παιδιών έδινε άρρητες εγγυήσεις ή ακόμα και καθόλου εγγυήσεις.

Ο τρόπος με τον οποίο οργανώνει το παιδί τα δεδομένα, τις εγγυήσεις, τα συμπεράσματά του είναι ενδεικτικός της προσέγγισής του ως προς τον τρόπο με τον κατανοεί και επιλύει ένα πρόβλημα. Οι ερευνητές θεωρούν επιπροσθέτως ότι είναι σημαντικό για το παιδί να έχει επίγνωση ότι όταν θέτει έναν ισχυρισμό αυτός χρήζει αιτιολόγησης ώστε να γίνει αποδεκτός από το κοινωνικό σύνολο, είναι σημαντικό επίσης να έχει επίγνωση ότι ο τρόπος επιχειρηματολογίας που υιοθετείται σε κάθε περίπτωση εξαρτάται από τον συνομιλητή. Καταλήγουν ότι η ανάπτυξη της δεξιότητας της σωστής επιχειρηματολογίας από τόσο μικρή ηλικία αποτελεί θεμέλιο λίθο για μελλοντική ανάπτυξη και βελτίωση της, γεγονός ιδιαίτερα χρήσιμο για την μετέπειτα ανάπτυξη μαθηματικής επιχειρηματολογίας.

3.1.2. Η έρευνα των Evens & Houssart

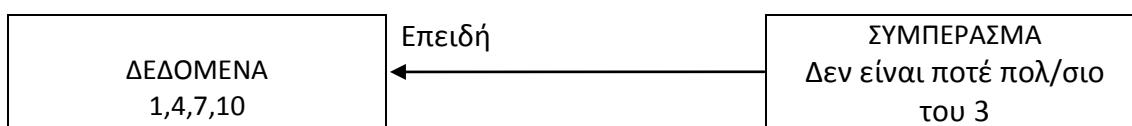
Οι Evens και Houssart (2004) έδωσαν σε μαθητές ηλικίας 11 ετών το πρόβλημα του πίνακα 3.2.:

Πίνακας 3. 2. Πρόβλημα των Evens και Houssart					
Ο κανόνας της ακολουθίας των αριθμών είναι “πρόσθεσε 3 κάθε φορά”					
1	4	7	10	13	16
Η ακολουθία συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο.					
Η Mary λέει,					
<i>“Ανεξάρτητα από το πόσο μακριά θα φτάσεις δεν θα υπάρξει ποτέ πολλαπλάσιο του 3 σε αυτή τη σειρά.”</i>					
Η Mary είναι σωστή ?					
Κυκλώστε: Ναι ή Όχι					
Εξηγήστε πως το γνωρίζετε.					

Ζητήθηκε από τους μαθητές να εκτιμήσουν αν η απάντηση της Mary είναι σωστή ή λανθασμένη και να αιτιολογήσουν την απάντηση τους κατά τη διάρκεια ενός γραπτού τεστ. Η μορφή της ερώτησης που έθεσαν οι ερευνητές είναι τέτοια όπου παρέχονταν τα δεδομένα και το συμπέρασμα και τους ζητούσαν να αιτιολογήσουν τον τρόπο με τον οποίο εξάγεται αυτό το συμπέρασμα από τα δεδομένα. Στην ουσία έπρεπε να εκφράσουν μια γραπτή εγγύηση, με την έννοια του Toulmin, η οποία θα συνδέει τα δύο στοιχεία.

Ο σκοπός της έρευνας είναι σε πρώτη φάση να κατηγοριοποιήσουν τις γραπτές απαντήσεις-εγγυήσεις των μαθητών, σε δεύτερη φάση να αναλύσουν τη δομή τους κάνοντας χρήση του σχήματος του Toulmin. Σε αυτήν την ηλικία οι μαθητές είναι σε θέση να προφέρουν επιχειρήματα για την αλήθεια μιας πρότασης αυτό όμως δεν φαίνεται να ισχύει και στην περίπτωση των μαθηματικών. Ενδεικτικό στοιχείο αυτής της δυσκολίας είναι το γεγονός ότι μεγάλο ποσοστό των μαθητών (32%) έδωσε λανθασμένες, άσχετες ή καθόλου απάντηση. Οι σωστές απαντήσεις των μαθητών βασίζονται κυρίως σε αναδιατυπώσεις και παραδείγματα, ωστόσο υπήρχε και σημαντικό ποσοστό απαντήσεων οι οποίες περιείχαν κάποια μορφή αιτιολόγησης.

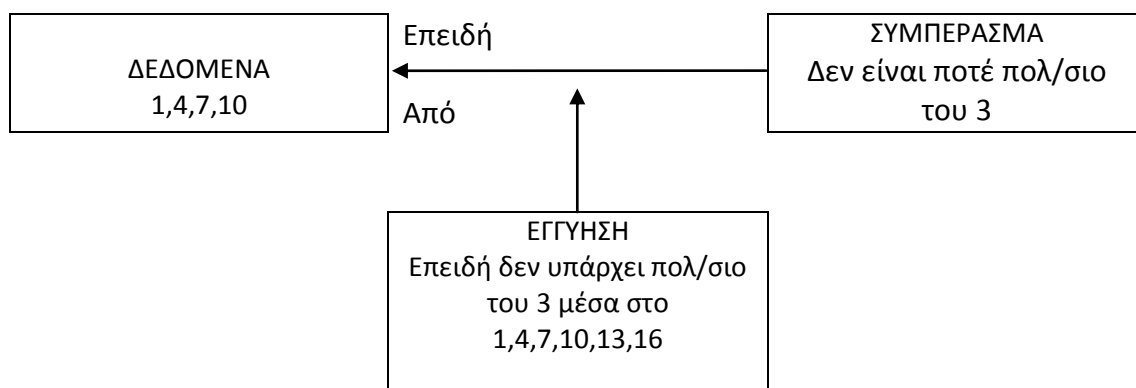
Σε ποσοστό 17% οι μαθητές επαναδιατύπωσαν το πρόβλημα ως απάντηση, χωρίς να προσθέσουν καμία περαιτέρω πληροφορία, θεωρώντας ότι αυτή η επαναδιατύπωση αποτελεί μαθηματικά έγκυρο επιχείρημα. Ενδεικτικό στοιχείο της δυσκολίας που έχουν να προσφέρουν εγγύηση για να υποστηρίξουν τη δήλωση. Η μορφή μιας ενδεικτικής απάντησης φαίνεται στο σχήμα 3.2.



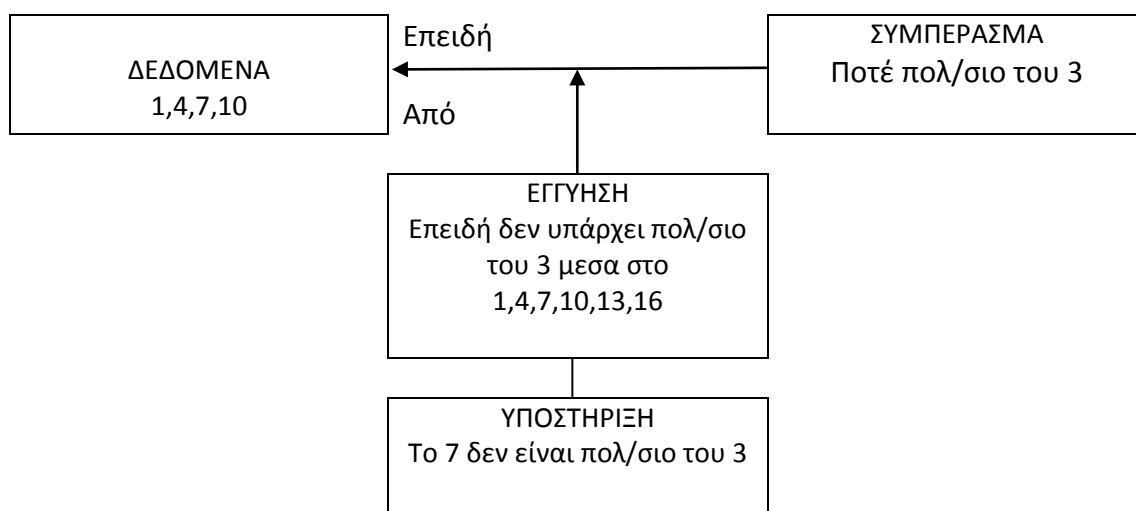
Σχήμα 3.2. Διάγραμμα ενδεικτικής απάντησης επαναδιατύπωσης. (Evens & Houssart, 2004, σελ. 274)

Σε ποσοστό 9% οι μαθητές παρείχαν ως απάντηση αριθμητικά παραδείγματα (Σχήμα 3.3.) και μερικοί εξ' αυτών προσέφεραν ως υποστήριξη την εξέταση ενός συγκεκριμένου παραδείγματος (Σχήμα 3.4.). Τα παραδείγματα, όπως έχουμε αναφέρει και στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι βασικό στοιχείο της επιχειρηματολογίας του ατόμου. Είναι δύσκολο για τους μαθητές αυτής της ηλικίας να παραβλέψουν την ύπαρξή τους ώστε να προσφέρουν πιο γενικές αιτιολογήσεις καθώς αποτελούν τα στοιχεία τα οποία σε πρώτη φάση είναι αυτά που τους οδηγούν στην εκτίμηση του συμπεράσματος. Το γεγονός ότι ορισμένες από τις απαντήσεις εξέφραζαν την άποψη ότι η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται είναι

ενδεικτική της μετάβασης προς τη κατασκευή γενικότερων απαντήσεων χωρίς όμως ακόμα αυτή να είναι δυνατή να εκφραστεί με ρητό μαθηματικό τρόπο.



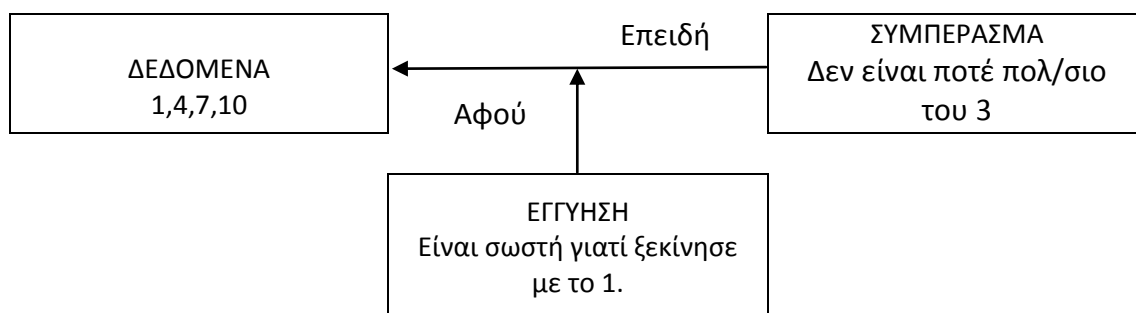
Σχήμα 3.3. Διάγραμμα ενδεικτικής απάντησης με παράδειγμα. (Evens & Houssart, 2004, σελ. 275)



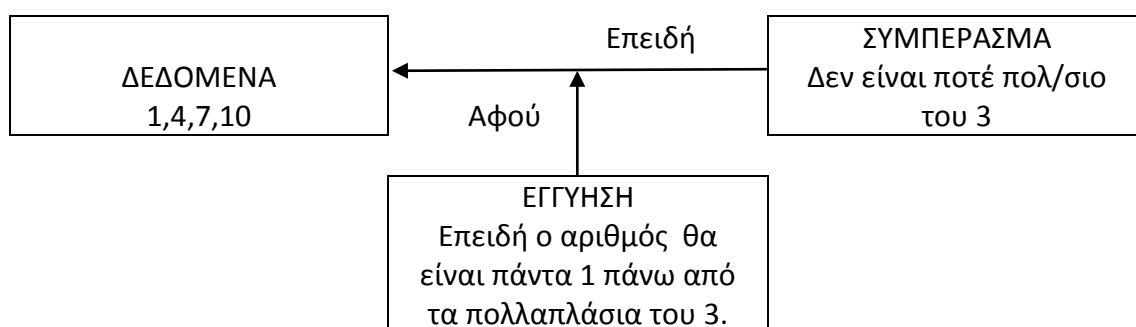
Σχήμα 3.4. Διάγραμμα ενδεικτικής απάντησης με παράδειγμα και ύπαρξη υποστήριξης. (Evens & Houssart, 2004, σελ. 276)

Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (42%) προσπάθησε να εκφράσει κάποια μορφή μαθηματικής αιτιολόγησης που δεν βασιζόταν μόνο στην εξέταση παραδειγμάτων αλλά υπήρχαν στοιχεία ενδεικτικά της αλγεβρικής μορφής που ακολουθούσαν τα δεδομένα. Οι απαντήσεις των μαθητών εστίαζαν σε δύο χαρακτηριστικά της ακολουθίας α. την αρχή της (Σχήμα 3.5.) και β. τη σχέση που υπήρχε ανάμεσα στα νούμερα (Σχήμα 3.6.), ωστόσο υπήρχαν απαντήσεις οι οποίες θεωρούνται πιο πλήρεις αφού περιλάμβαναν και τα δύο χαρακτηριστικά (Σχήμα 3.7.).

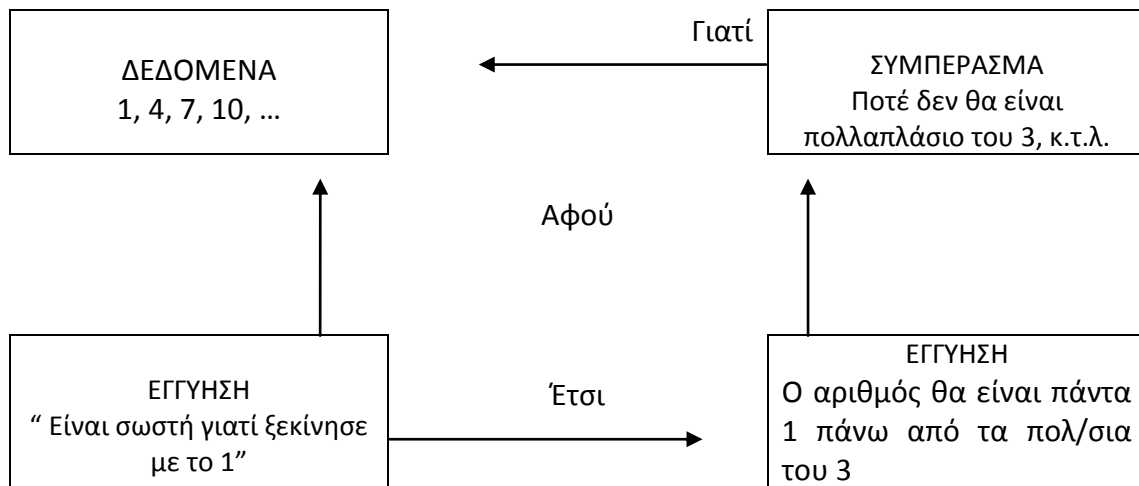
Οι απαντήσεις αυτές χαρακτηρίζονται σύμφωνα με τους ερευνητές από την έλλειψη λεπτομερειών αλλά και ακρίβειας με τους μαθητές όμως να έχουν καταλάβει το λόγο της ορθότητας της πρότασης που τους δίνεται. Οι ελλείψεις τους βασίζονται στο γεγονός ότι η συμπλήρωση αυτών των κενών απαιτεί την εξαντικειμενίκευση των αριθμών και την λειτουργία σε πιο αφαιρετικά επίπεδα σκέψης, διαδικασία δύσκολη για την ηλικία τους.



Σχήμα 3.5. Διάγραμμα ενδεικτικής απάντησης αιτιολόγησης. Υποκατηγορίας “Λήψη ως δεδομένου την αρχή της ακολουθίας”(Evens & Houssart, 2004, σελ. 278)



Σχήμα 3.6. Διάγραμμα ενδεικτικής απάντησης αιτιολόγησης. Υποκατηγορίας “δεδομένη η σύγκριση των αριθμών”(Evens & Houssart, 2004, σελ. 278)



Σχήμα 3.7. Διάγραμμα ενδεικτικής απάντησης αιτιολόγησης. Υποκατηγορίας “Λήψη ως δεδομένου την αρχή της ακολουθίας” και “δεδομένη η σύγκριση των αριθμών”(Evens & Houssart, 2004, σελ. 278)

Όλα τα είδη απαντήσεων παρατηρούμε ότι έχουν τη δομή του απλού σχήματος, ενδεικτικό στοιχείο της δυσκολίας που έχουν οι μαθητές να εκφράσουν πλήρη επιχειρηματολογία. Ένα δεύτερο στοιχείο είναι ότι η πλειοψηφία των μαθητών αντιλαμβάνονταν την αναγκαιότητα παροχής μιας αιτιολόγησης με αλγεβρικά στοιχεία ωστόσο κάτι τέτοιο δεν ήταν δυνατό από την πλειοψηφία τους, ενδεικτικό στοιχείο της δυσκολίας που έχει η ανάπτυξη μαθηματικής επιχειρηματολογίας. Η ανάπτυξη αιτιολογήσεων με μαθηματική γλώσσα απαιτεί οι μαθητές να έχουν αναπτύξει αφαιρετική σκέψη που θα τους επιτρέψει να λάβουν γνώση του μαθηματικού αντικειμένου που αντιπροσωπεύει κάθε στοιχείο με το οποίο αλληλεπιδρούν. Αυτή η διαδικασία είναι ιδιαίτερα δύσκολη για τους μαθητές αυτής της ηλικίας.

3.1.3. Συμπεράσματα για την επιχειρηματολογία στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση

Στην ενότητα αυτή διαπιστώσαμε ότι η επιχειρηματολογία είναι ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της καθημερινής επιχειρηματολογίας και ξεκινά από πολύ μικρή ηλικία.

Σε πολύ μικρές ηλικίες η επιχειρηματολογία έχει νόημα για τα παιδιά μόνο σε έργα που τους εξάπτουν το ενδιαφέρον σε περιβάλλον παιχνιδιού. Η επιχειρηματολογία με έναν ενήλικο ενισχύει την κατανόησή τους για το διαπραγματευόμενο θέμα, ενώ με έναν συνομήλικό τους έχει πιο διερευνητική φύση. Και στις δύο περιπτώσεις η επιχειρηματολογία τους ακολουθεί το απλό σχήμα του Toulmin αποτελούμενη μόνο από τα δεδομένα, τα συμπεράσματα και τις εγγυήσεις. Παρόλο που πολλές φορές τα παιδιά παρέχουν επιπρόσθετες εγγυήσεις αυτές συνήθως είναι ψυχολογικής φύσεως καθιστώντας εξαιρετικές τις περιπτώσεις όπου αυτές οι εγγυήσεις στην ουσία αποτελούν υποστηρίξεις. Η δέσμευση των παιδιών στην επιχειρηματολογία από τόσο μικρή ηλικία δημιουργεί ένα στέρεο υπόβαθρο για τη μετέπειτα δέσμευσή τους στη μαθηματική επιχειρηματολογία.

Με την πάροδο των ετών τα παιδιά αναπτύσσουν την ικανότητα να παράγουν εικασίες με μεγαλύτερη συχνότητα, ωστόσο τους είναι πιο δύσκολο να τις αιτιολογήσουν. Αυτό οφείλεται στο ότι τα παιδιά δεν έχουν ακόμα αναπτύξει αφαιρετικές διαδικασίες οι οποίες θα τους επιτρέψουν να παραβλέψουν την φυσική υπόσταση των μαθηματικών προβλημάτων με τα οποία έρχονται αντιμέτωπα και θα τους οδηγήσει να αναπτύξουν πιο πολύπλοκο, αφαιρετικό τρόπο σκέψης, ο οποίος με τη σειρά του θα βοηθήσει να προσφέρουν γενικές αιτιολογήσεις,

3.2. Ατομική επιχειρηματολογία μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο έχει χρησιμοποιηθεί το σχήμα του Toulmin από τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών για να αναλύσουν την επιχειρηματολογία μαθητών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σε διάφορα έργα.

Η μαθηματική απόδειξη αποτελεί ειδική περίπτωση επιχειρηματολογίας. Ωστόσο είναι αυτά τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της (αυστηρότητα, χρήση τυπικής γλώσσας, χρήση ορισμών, θεωρημάτων, μαθηματικών σχέσεων) τα οποία την καθιστούν ιδιαίτερα δύσκολη για τους μαθητές. Έχει υποστηριχτεί από πολλούς ερευνητές ότι η κατασκευή αυστηρής μαθηματικής απόδειξης δεν είναι δυνατή χωρίς την πρότερη ανάπτυξη διαισθητικών, μη- τυπικών αναπαραστάσεων των ιδεών που πραγματεύεται. Ο Fischbein υποστηρίζει ότι:

“η αφαίρεση των διαισθητικών αναπαραστάσεων από την τυπική μαθηματική σκέψη δεν είναι ούτε πιθανή ούτε επιθυμητή, καθώς αυτές είναι σημαντικές συνιστώσες της παραγωγικής μαθηματικής σκέψης”
(Fischbein, 1982, αναφορά στους Weber & Alcock, 2004, σελ.209)

Το απλό σχήμα του Toulmin χρησιμοποιείται ως ένα κανονιστικό εργαλείο με το οποίο κρίνουμε αν ένα επιχειρήμα αποτελεί μαθηματική απόδειξη ή για να περιγράψει την εξέλιξη ενός άτυπου επιχειρήματος σε ένα έγκυρο μαθηματικό επιχείρημα.

Στο πλαίσιο της επιχειρηματολογίας των μαθητών σε έργα Γεωμετρίας θα αναλύσουμε από κοινού τις έρευνες των Pedemonte (2007) και Pedemonte και Reid (2011). Ο λόγος είναι ότι οι δραστηριότητες που περιλαμβάνουν είναι οι ίδιες ωστόσο εξετάζονται τα ευρήματα από δύο διαφορετικές σκοπιές τις οποίες στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε μαζί.

Στο πλαίσιο της Άλγεβρας θα εξετάσουμε την έρευνα της Pedemonte (2008), η οποία χρησιμοποιώντας το σχήμα του Toulmin συνδυασμένο με το $ck\epsilon$ μοντέλο αναλύει τη γνωστική απόσταση ανάμεσα στην επιχειρηματολογία που περιλαμβάνει εικασία και στη μαθηματική απόδειξη.

Τέλος στο πλαίσιο της ατομικής επιχειρηματολογίας των μαθητών θα εξετάσουμε την έρευνα των Pedemonte & Buchbinder (2011) οι οποίοι εξετάζουν τον ρόλο των παραδειγμάτων στην διαδικασία απόδειξης σε έργα με τριγωνικούς αριθμούς.

3.2.1. Η έρευνα της Pedemonte και των Pedemonte και Reid για την επιχειρηματολογία των μαθητών στη γεωμετρία

Η Pedemonte (2007) στην έρευνά της στην Ιταλία δείχνει ότι στο πλαίσιο της Γεωμετρίας η ανάλυση του περιεχομένου της επιχειρηματολογίας δεν είναι επαρκής για να ερμηνεύσει τα φαινόμενα γνωστικής ενότητας ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και στη μαθηματική απόδειξη, αντίθετα χρειάζεται και δομική ανάλυση των δύο. Για να το επιτύχει αυτό κάνει χρήση του περιορισμένου σχήματος του Toulmin ώστε να κάνει γνωστική ανάλυση των σταδίων των δύο διαδικασιών.

Για να είναι εμφανής η διάσταση των δύο διαδικασιών χρησιμοποιεί γεωμετρικά προβλήματα τα οποία απαιτούν από τον μαθητή την ανάπτυξη εικασίας και άρα επιχειρηματολογίας ώστε να οδηγηθούν στη μαθηματική απόδειξη.

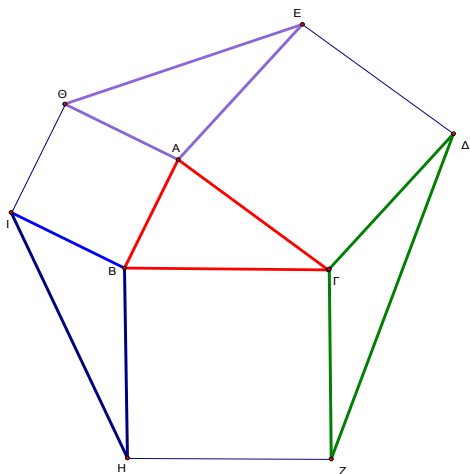
Οι Pedemonte & Reid (2010) στην ίδια έρευνα αναλύουν την απαγωγική επιχειρηματολογία μόνο και υπό ένα άλλο πρίσμα πέρα από αυτό της θεωρίας της γνωστικής ενότητας, χρησιμοποιούν την κατηγοριοποίηση της απαγωγικής επιχειρηματολογίας που έχει προταθεί από τους Pierce (1960) και Eco (1983) για να περιγράψουν την επιχειρηματολογία των μαθητών την οποία αναλύουν χρησιμοποιώντας ως μεθοδολογικό εργαλείο το σχήμα του Toulmin.

Στην παρούσα φάση θα επεξεργαστούμε τα παραδείγματα από την έρευνα σε δύο χρόνους και υπό την σκοπιά της γνωστικής ενότητας αλλά και στην περίπτωση που εμφανίζεται απαγωγική επιχειρηματολογία από την σκοπιά της κατηγοριοποίησης του Pierce (1960) και Eco (1983).

3.2.1.1. Το πρόβλημα της έρευνας στη γεωμετρία για απαγωγική επιχειρηματολογία

Οι ερευνητές έδωσαν 33 ζευγάρια μαθητών ηλικίας 15-16 ετών ένα γεωμετρικό πρόβλημα που αφορά τρίγωνα, για τη λύση του χρειάζεται σύγκριση τριγώνων και είναι το εξής:

Πίνακας 3.3.

Πρόβλημα 1: Δίνεται τρίγωνο ABC. Για κάθε πλευρά του τριγώνου κατασκευάστε το εξωτερικό τετράγωνο. Ενώστε τα ελεύθερα σημεία των τετραγώνων ώστε να σχηματιστούν 3 τρίγωνα. Συγκρίνετε το εμβαδόν των τριγώνων που κατασκευάσατε με το εμβαδό του τριγώνου ABC.	Το αντίστοιχο σχήμα είναι το εξής : 
---	--

Για τη λύση του προβλήματος αναμένεται η χρήση απαγωγικών επιχειρημάτων από τους μαθητές και κατόπιν η κατασκευή της επαγωγικής απόδειξης. Με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος Gabri Geometry (επιτράπηκε η χρήση λογισμικού ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να παρατηρήσουν ιδιότητες τις οποίες μπορεί να μην ήταν σε θέση να παρατηρήσουν αν κατασκεύαζαν το σχήμα στο χαρτί) οι μαθητές μπορούν να δουν την αναλογία ανάμεσα στις βάσεις και τα ύψη, να κατασκευάσουν μια εικασία σαν “γεγονός” και κατόπιν να προσπαθήσουν να την αιτιολογήσουν.

Από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών προέκυψαν δύο περιπτώσεις **απαγωγικής επιχειρηματολογίας** στη γεωμετρία.

1. Περίπτωση 1: Στην οποία φαίνεται η δομική διάσταση ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόσταση όπου η απαγωγική επιχειρηματολογία μετατρέπεται σε παραγωγική απόδειξη. (Abductive argumentation to construction of Deductive proof)

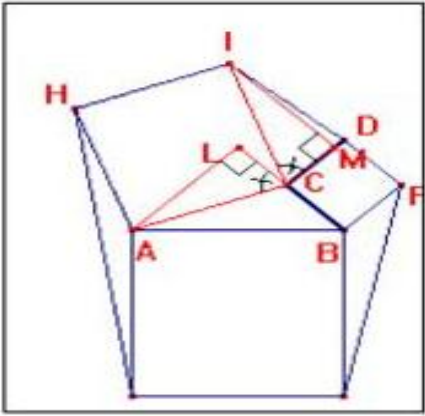
Στην περίπτωση αυτήν τα παραδείγματα που προέκυψαν είναι τεσσάρων ειδών τα οποία θα αναλύσουμε ως εξής:

- Undercoded Απαγωγική επιχειρηματολογία 1^{ου} είδους μετατρέπεται σε Παραγωγική απόδειξη. (Undercoded Abductive argumentation 1st case to construction of Deductive proof) στην παράγραφο 3.2.1.1.1.
 - Αποτυχημένη Undercoded απαγωγή 2ου είδους, Επιτυχής overcoded απαγωγή, κατασκευή παραγωγικής απόδειξης στην παράγραφο 3.2.1.1.2.
 - Κατασκευή λανθασμένης creative απαγωγής και Κατασκευή Λανθασμένης απόδειξης (Incorrect creative abduction to incorrect proof) στην παράγραφο 3.2.1.1.3.
 - Σωστή creative απαγωγή, Μη κατασκευή της απόδειξης στην παράγραφο 3.2.1.1.4.
2. Περίπτωση 2: Στην οποία φαίνεται η δομική συνέχεια ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόσταση όπου η απαγωγική επιχειρηματολογία μετατρέπεται σε απαγωγική απόδειξη. (Abductive argumentation to Abductive proof) και θα την αναπτύξουμε στην παράγραφο 3.2.1.2..

3.2.1.1.1. Undercoded Απαγωγική επιχειρηματολογία 1^{ου} είδους μετατρέπεται σε Παραγωγική απόδειξη. (Undercoded Abductive argumentation 1st case to construction of Deductive proof)

Η ανάλυση αρχίζει στο συμπέρασμα C_9 , στο σημείο αυτό οι μαθητές συγκρίνουν το εμβαδό του τριγώνου ABC και του τριγώνου ICD. Μέχρι αυτό το σημείο οι μαθητές έχουν κατασκευάσει τα ύψη AL και IM ώστε να συγκρίνουν το εμβαδό των τριγώνων (αφού έχουν παρατηρήσει ότι οι πλευρές CB και DC είναι ίσες). Οι μαθητές παρατηρούν ότι τα τρίγωνα ALC και IMC είναι ίσα. Αυτό το δεδομένο αποτελεί πλέον ένα “γεγονός”.

Πίνακας 3.4.

.... 44. Οι μαθητές όλοι μαζί : Αυτά τα δύο τρίγωνα είναι ίσα! 45. L: Όντως, ALC και το ICM είναι δύο ίσα τρίγωνα... Τί κοινό έχουν?	Το σχήμα όπως κατασκευάστηκε από τους μαθητές χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο Cabri Geometry  C_1: Τα τρίγωνα ALC και ICM είναι ίσα.
---	---

Οι μαθητές προσπαθούν να αιτιολογήσουν το συμπέρασμα C_1 . Το βήμα αυτό αποτελεί undercoded απαγωγικό βήμα γιατί το συμπέρασμα είναι δεδομένο, τα κριτήρια ισότητας γνωστά χωρίς ωστόσο να γνωρίζουν πιο από τα τρία πρέπει να χρησιμοποιήσουν και αναζητούν στοιχεία ώστε να εφαρμόσουν το κατάλληλο θεώρημα.

Πίνακας 3.5.

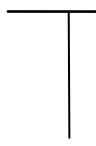
46. G: Κατανοούμε λοιπόν ότι η πλευρά <u>AC</u> είναι ίση με την πλευρά <u>IC</u> διότι είναι πλευρές του ίδιου τετραγώνου. 47. L: Περιμένετε! 48. G: Η πλευρά AC είναι ίση με τη IC γιατί... 49. L: Η IC... 50. G: Είναι ίση με τη CM γιατί? 51. L: Τότε...Επειδή είναι ίση με τη CM... Η γνώμη μου είναι... Όχι περίμενε... Αυτή η γωνία είναι ορθή και αυτή η γωνία είναι επίσης ορθή.	$D_1: AC=IC$ $?$ $\longrightarrow$ $C_1: \text{Τα τρίγωνα ALC και ICM είναι ίσα}$ W: ? ΓΠΓ, ΠΓΠ, ΠΠΠ κριτήριο ισότητας S: Θεωρήματα ισότητας τριγώνων Οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν ένα από τα κριτήρια ισότητας παρατηρώντας ότι στα δύο τρίγωνα ALC και ICM υπάρχουν δύο ίσες γωνίες και μία ίση πλευρά. Έτσι επιλέγουμε το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ
---	--

Οι μαθητές βρήκαν τα στοιχεία που απαιτούνται για τη σύγκριση και μπορούν να κατασκευάσουν την απόδειξη. Στην απόδειξη οι μαθητές πρέπει να διατυπώσουν τα δεδομένα D_1 ώστε να αποδείξουν ότι τα δύο τρίγωνα ALC και ICM είναι ίσα.

Η απαγωγική δομή της επιχειρηματολογίας μετατρέπεται σε παραγωγική δομή στην απόδειξη. Το συμπέρασμα C_1 χρησιμοποιείται για να εξάγουν οι μαθητές ότι τα ύψη είναι των τριγώνων ABC και ICD είναι ίσα και άρα και τα εμβαδά τους είναι ίσα.

Πίνακας 3.6. Απόδειξη

Θεωρώ το τρίγωνο ABC και το τρίγωνο ICD. Αμέσως θεωρώ τα τρίγωνα IMC και ALC και θα αποδειχτεί ότι είναι ίσα τρίγωνα με το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ γιατί ισχύουν τα εξής: • $AC = IC$ επειδή αποτελούν πλευρές του ίδιου τετραγώνου. • $ALC = IMC$ επειδή είναι ορθές γωνίες (γωνίες κατασκευασμένες ως τομή των πλευρών και των υψών).	$D_1: AC = IC$ $ALC = IMC$ $ACL = ICM$ $\longrightarrow$ $C_1: \text{τα τρίγωνα ALC και ICM είναι ίσα}$ W: ΓΠΓ κριτήριο ισότητας Το συμπέρασμα C_1 του προηγούμενου βήματος είναι το δεδομένο D_2, ώστε να εφαρμοστεί το συμπέρασμα στο δεύτερο βήμα όπου οι μαθητές θα συμπεράνουν ότι τα ύψη των τριγώνων είναι ίσα και άρα και το εμβαδό τους θα είναι ίσο.
--	---

• $ACL = ICM$ επειδή είναι συμπληρωματική της ίδιας ορθής γωνίας (-LCI). Ειδικότερα, $IM=AL$. Έτσι, τα τρίγωνα ABC και ICD έχουν το ίδιο μήκος βάσης (ως πλευρές του ίδιου τετραγώνου) και τα ίδια ύψη, και έτσι έχουν το ίδιο εμβαδό.	$D_2: C_1$  $C_2: \text{τα ύψη είναι ίσα}$ W: από την ισότητα των τριγώνων $D_3: C_2 \text{ και } BC=CD$  $C_3: \text{τα εμβαδά των τριγώνων ABC και ICD είναι ίσα}$ W: Τύπος εμβαδού.
---	--

Το απόσπασμα αυτό βάση της ανάλυσης που έκανε η Pedemonte (2007) παρατίθεται ως παράδειγμα γνωστικής ενότητας γιατί οι μαθητές χρησιμοποίησαν το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΓΠΓ τόσο στην επιχειρηματολογία που ανέπτυξαν όσο και στην απόδειξη. Επιπροσθέτως οι λέξεις καθώς και οι εκφράσεις που χρησιμοποιήθηκαν και στις δύο διαδικασίες είναι σχεδόν οι ίδιες. Η Pedemonte παρατηρεί ότι υπάρχει δομική απόσταση στη δομή των δύο διαδικασιών καθώς η απαγωγική δομή της επιχειρηματολογίας στο βήμα από το D_1 στο C_1 μετατρέπεται σε παραγωγική δομή στην απόδειξη. Σε αυτήν την περίπτωση οι μαθητές δεν φαίνεται να αντιμετωπίσαν δυσκολία στη μετάβαση από την απαγωγική επιχειρηματολογία στη παραγωγική απόδειξη.

Το απόσπασμα αυτό βάση της ανάλυσης των Pedemonte & Reid (2010) κατηγοριοποιήθηκε το είδος της απαγωγής που χρησιμοποιήθηκε ως undercoded απαγωγή 1^{ου} είδους καθώς οι μαθητές είχαν να επιλέξουν ένα από τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων για την επίλυση του προβλήματος βάση των δεδομένων που διέθεταν και μπορούσαν να εντοπίσουν. Και οι τρεις κανόνες, δηλαδή τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων, ανήκουν στο ίδιο γνωστικό πεδίο – γεγονός που φαίνεται να διευκολύνει τους μαθητές.

3.2.1.1.2. Αποτυχημένη Undercoded απαγωγή 2ου είδους, Επιτυχής overcoded απαγωγή, κατασκευή παραγωγικής απόδειξης

Οι μαθητές κάνοντας χρήση της συνάρτησης μέτρησης του Cabri Geometry βρήκαν ότι τα εμβαδά των δύο τριγώνων είναι ίσα, κατασκευάζουν τα ύψη για τα οποία παρατηρούν ότι είναι ίσα αλλά δεν μπορούν να το αιτιολογήσουν.

Πίνακας 3.7.

27. Υ: Λοιπόν... βλέπεις; Αυτά τα δύο τρίγωνα έχουν ίδιες βάσεις. 28. Γ: Γιατί; 29. Υ: Ναι, αυτό είναι τετράγωνο... 30. Γ: Α...Ναι...Είναι τετράγωνο...Οι βάσεις είναι πλευρές του τετραγώνου. 31. Υ: Αλλά το πρόβλημα είναι να βρούμε γιατί έχουν ίσα ύψη. 32.	$D_1: BC=CD$ $? AL=IM$ $\longrightarrow$ $C_1: Τα$ $εμβαδά$ $είναι ίσα$ $W: Τύπος$ $εμβαδού$
--	--

Οι μαθητές μπόρεσαν και αιτιολόγησαν ότι οι πλευρές BC και CD είναι ίσες ως πλευρές τετραγώνου. Κατόπιν ψάχνουν διαφορετικά θεωρήματα από αυτά που γνωρίζουν ώστε να αποδείξουν και την ισότητα των υψών.

Πίνακας 3.8.

47. Υ: Το ύψος είναι η διάμεσος; 48. Γ: Όχι, αυτό εξαρτάται αν σύρεις αυτό το σημείο η εικόνα αλλάζει 49. Υ: Ναι, αλλά ... μπορείτε να περιστρέψετε ίσως το τρίγωνο αλλά ... είναι δύσκολο ... 64. Γ: Περίμενε, αν σύρεις τα ... ύψη είναι πάντα παράλληλα προς την άλλη πλευρά 65. Υ: Όχι, πρέπει να βρούμε ένα θεώρημα για να δηλώσει ότι τα δύο ύψη είναι ίσα ...δεν ξέρω ...	$D_2: ?$ $\longrightarrow$ $C_2: Τα$ $ύψη είναι$ $ίσα$ $W: ? W_1, W_2, W_3$ $S: ? S_1, S_2, S_3$ Οι μαθητές ψάχνουν για ένα θεώρημα μεταξύ εκείνων που ξέρουν να δικαιολογήσουν τον ισχυρισμό C_2. Παρ' όλα αυτά, δεν μπορούν να επιλέξουν ένα θεώρημα. Στην περίπτωση αυτή, η υποστήριξη δεν είναι προφανής. Θα μπορούσε να είναι: S_1: Ιδιότητες τριγώνου (η εγγύηση W_1 αφορά τη σχέση μεταξύ των διαμέσων και των υψών) S_2: Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί (η εγγύηση W_2 αφορά την περιστροφή του τριγώνου ACL) S_3: Ιδιότητες παραλληλίας (η εγγύηση W_3 αφορά την οπτικοποίηση όπου $AL \parallel CD$ και $IM \parallel CB$)
--	---

Οι μαθητές έχουν τρεις διαφορετικές ιδέες για το πώς μπορούν να αποδείξουν την ισότητα των υψών. Η απαγωγική επιχειρηματολογία σε αυτή τη φάση μπορεί να χαρακτηριστεί ως undercoded 2^{ου} είδους αφού για κάθε ιδέα απαιτούνται για την απόδειξή της η χρήση διαφορετικών θεωρημάτων. Αυτό το γεγονός τους δημιουργεί σύγχυση αφού δεν μπορούν να αποφασίσουν ποια ιδέα είναι η κατάλληλη. Αυτό σημαίνει ότι η undercoded απαγωγή είναι αποτυχημένη στη συγκεκριμένη περίπτωση αφού δεν διευκόλυνε τους μαθητές. Η παρέμβαση του εκπαιδευτικού είναι καθοριστικής σημασίας αφού τους οδηγεί σε υιοθέτηση της μίας εξ' αυτών. Αυτή η παρέμβαση μετέτρεψε την undercoded απαγωγική επιχειρηματολογία των μαθητών σε overcoded απαγωγική επιχειρηματολογία αφού πλέον έχουν μόνο να προσδιορίσουν τα στοιχεία που απαιτούνται για την εφαρμογή της.

Πίνακας 3.9.

111. Δάσκαλος: Τι κάνεις; 112. Υ: Είναι δύσκολο... Έχουμε βρει ότι οι βάσεις αυτών των δύο τριγώνων είναι ίσες και τα ύψη τους επίσης, αλλά γιατί τα ύψη τους είναι ίσα; Το τρίγωνο περιστρέφεται γύρω από αυτό το σημείο. 113. Δάσκαλος: Έχει περιστραφεί; 114. Υ: Ναι έχει περιστραφεί 90 μοίρες, υπάρχει μία περιστροφή αλλά δεν είμαι σίγουρος ότι αυτό το γεγονός είναι χρήσιμο 115. Δάσκαλος: Τι διατηρείται κατά την περιστροφή; 116. Υ: Οι γωνίες και τα μήκη.. 117. G: Ναι, αλλά..Αν μία περιστροφή διατηρεί τα μήκη γιατί είναι τα ύψη είναι ίσα; 118. Υ: Εεεμμ...Γνωρίζουμε ότι η περιστροφή διατηρεί τα μήκη. 119. G: Ναι, αλλά πρέπει να πούμε ότι τα ύψη είναι ίσα... 120. Υ: Ααα... Ναι... Μπορούμε να το πούμε αυτό... Επειδή υπάρχει μία περιστροφή... Το ICM είναι η περιστροφή του τριγώνου ACL 121. G: Αα, εντάξει... Τα τρίγωνα περιστρέφονται και τα ύψη που είναι μέρη των τριγώνων είναι ίσα.	Η παρέμβαση του δασκάλου επιτρέπει στους μαθητές να επιλέξουν την κατάλληλη υποστήριξη (γεωμετρικό μετασχηματισμό) και το θεώρημα (η περιστροφή διατηρεί τα μήκη). Μετά από αυτό, ο μαθητής G αναζητά δεδομένα για την εφαρμογή του θεωρήματος. $D_{2G}: ? \longrightarrow C_{2G}: \text{Τα ύψη είναι ίσα}$ W₂: Η περιστροφή διατηρεί τα μήκη S₂: γεωμετρικός μετασχηματισμός Ο μαθητής Υ βοηθά το μαθητή G να βρει δεδομένα για την εφαρμογή του θεωρήματος. Το επιχείρημα κατασκευάστηκε. $D_2: \text{Τριγωνική περιστροφή στο C} \longrightarrow C_2: \text{Τα ύψη είναι ίσα}$ W₂: Η περιστροφή διατηρεί τα μήκη S₂: γεωμετρικός μετασχηματισμός
---	---

Η παρέμβαση του εκπαιδευτικού όπως αναφέραμε είναι μεγίστης σημασίας καθώς βοηθά τους μαθητές να περάσουν από την undercoded απαγωγική επιχειρηματολογία στην overcoded απαγωγική επιχειρηματολογία. Η επιλεγμένη από τον καθηγητή μεθοδολογία των γεωμετρικών μετασχηματισμών γίνεται η υποστήριξη των μαθητών και η εγγύηση πλέον θεωρείται δεδομένη, γεγονός που επιτρέπει στους μαθητές να ψάξουν για τα στοιχεία που να την αιτιολογούν καθώς δεν τους είναι τελείως εμφανής ο λόγος της επιλογής της συγκεκριμένης μεθοδολογίας για την επίλυση του προβλήματος. Μετά από αυτό το σημείο η απόδειξη είναι εύκολη για τους μαθητές αφού μετασχηματίζουν τα δύο βήματα της overcoded απαγωγικής επιχειρηματολογίας σε επαγωγικά βήματα της απόδειξης.

Πίνακας 3.10.

Επιχείρημα 2Α: Τα δύο τρίγωνα ACL και ICM είναι ίσα επειδή το τρίγωνο ACL μπορεί να συμπίσει με το τρίγωνο ICD αν περιστραφεί γύρω από το C κατά 90°. Επειδή η περιστροφή διατηρεί τις γωνίες και μήκη, τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Επιχείρημα 2Β: Έτσι, τα τρίγωνα ABC και ICD έχουν ίσα εμβαδά, επειδή έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη.	D_{2A}: Το τρίγωνο ICM είναι η περιστροφή του τριγώνου ACL κατά 90° C_{2A}: Το ACL και ICM είναι ίσα W_2: Η περιστροφή διατηρεί μήκη S_2: Γεωμετρικός Μετασχηματισμός Με την ισότητα των τριγώνων ACL και ICM, η ισότητα μεταξύ των υψών AC και IM προέρχεται κατά συνέπεια, με έμμεσο τρόπο. Οι μαθητές μπορούν να συμπεράνουν την απόδειξη. D_{2B}: C_{2A} C_{2B}: Τα ύψη είναι ίσα W: Κληροδοτείται η ισότητα $D_3 = D_1$: $BC=CD, C_{2B}$ $C_3 = C_1$: Τα εμβαδά των τριγώνων είναι ίσα W: Τύπος Εμβαδού
--	--

Οι Pedemonte & Reid (2010) με τη βοήθεια του σχήματος του Toulmin αναλύουν την επιχειρηματολογία των μαθητών στο συγκεκριμένο απόσπασμα από το οποίο φαίνεται ότι η χρήση undercoded απαγωγικής επιχειρηματολογίας 2^{ου} είδους δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές. Αυτό πιθανότατα σύμφωνα με τους συγγραφείς οφείλεται στο γεγονός:

1. Ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση να διαχειριστούν πολλές διαφορετικές πληροφορίες ταυτόχρονα
2. Είναι περίπλοκο για αυτούς να διαλέξουν ταυτόχρονα και την κατάλληλη θεωρία αλλά και τον κατάλληλο κανόνα που πρέπει να εφαρμόσουν στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Αντίθετα όταν οι μαθητές χρησιμοποίησαν overcoded απαγωγική επιχειρηματολογία μετά από τη βοήθεια του εκπαιδευτικού υπήρξε γνωστική ενότητα και οι μαθητές κατάφεραν και κατασκεύασαν την απόδειξη.

3.2.1.1.3. Κατασκευή λανθασμένης creative απαγωγής και Κατασκευή Λανθασμένης απόδειξης (Incorrect creative abduction to incorrect proof)

Οι μαθητές θεωρούν διαφορετικά είδη τριγώνων για το ABC και για την ακρίβεια θεωρούν ότι είναι ισόπλευρο και ισοσκελές. Παρατηρούν για αυτά τα ειδικά τρίγωνα ότι όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο τα τρία εξωτερικά τρίγωνα των πλευρών του είναι ίσα και άρα έχουν το ίδιο εμβαδό, όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε τα δύο εξωτερικά τρίγωνα είναι ίσα και άρα έχουν το ίδιο εμβαδό, οπότε καταλήγουν ότι στη περίπτωση που το τρίγωνο είναι ένα τυχαίο σκαληνό τρίγωνο τα εξωτερικά τρίγωνα δεν είναι ίσα άρα ούτε τα εμβαδά τους δεν είναι ίσα.

Πίνακας 3.11.

133. S: Αν το τρίγωνο ABC είναι ένα τυχαίο τρίγωνο, τα εξωτερικά τρίγωνα δεν είναι ίσα επειδή δεν έχουν ίσες πλευρές ή ίσες γωνίες. 134. C: Ναι, αλλά πρέπει να σκεφτούμε τα εμβαδά... 135. S: Πρέπει να πούμε αν τα εμβαδά είναι ίσα ή όχι 136. C: Ναι, αλλά πρέπει να βρούμε κάτι να μας πει αν είναι ίσα ή όχι. 137. S: Εγώ νομίζω δεν είναι ίσα... Δε φαίνεται να έχουν το ίδιο εμβαδό... Δες το σχήμα... Πως μπορεί να είναι ίσα ; 138. C: Δεν ξέρω... 139. S: Αν ABC είναι ισόπλευρο, έχουμε δει ότι τα εμβαδά των εξωτερικών τριγώνων είναι ίσα, γιατί τα τρίγωνα είναι ίσα, εάν το τρίγωνο είναι ισοσκελές μόνο δύο εξωτερικά τρίγωνα έχουν τα εμβαδά τους ίσα, επειδή είναι ίσα... Έτσι σε αυτή την περίπτωση στο γενικό τρίγωνο ABC, δεν είναι ίσα τρίγωνα... Τα εμβαδά είναι διαφορετικά. 140. C: Μα γιατί; Πώς μπορείς να λες ότι τα εμβαδά δεν είναι ίσα; 141. S: Υπάρχει θεώρημα που δηλώνει ότι τα ίσα τρίγωνα έχουν και ίσα εμβαδά... Έτσι αν τα δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα τότε και τα	Το επιχειρήμα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής : D₁: ABC είναι τυχαίο τρίγωνο C₁: Τα εξωτερικά τρίγωνα δεν είναι ίσα W: Οι γωνίες και οι πλευρές είναι διαφορετικές S: Θεωρήματα Ισότητας Η υποστήριξη του επιχειρήματος βασίζεται στα θεωρήματα ισότητας των τριγώνων. Οι μαθητές αναζητούν ρητά ίσες πλευρές ή ίσες γωνίες (133) για να δηλώσουν ότι τα τρίγωνα είναι ίσα. Επειδή δεν υπάρχουν ίσες πλευρές ή γωνίες καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα τρίγωνα δεν είναι ίσα. Από τη σχήμα η Silvia θεωρεί ότι τα εμβαδά των εξωτερικών τριγώνων είναι διαφορετικά. Τώρα οι μαθητές πρέπει να δικαιολογήσουν το γεγονός αυτό. Το επιχειρήμα είναι απαγωγικό: D₂: ? C₂: Τα εμβαδά των Εξωτερικών τριγώνων δεν είναι ίσα. W: ? S: ?
--	---

εμβαδά τους δεν είναι ίσα, έτσι δεν είναι ; 142. C: Εεμμ... Δεν είμαι σίγουρος... Αλλά δεν έχω καμία άλλη ιδέα...	Η Silvia κατασκευάζει ένα λανθασμένο “θεώρημα” (αν τα τρίγωνα είναι διαφορετικά τα εμβαδά τους είναι διαφορετικά) που πιθανώς απορρέει από το θεώρημα: “Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε τα εμβαδά τους είναι ίσα.” D_2: Τα εξωτερικά τρίγωνα δεν είναι ίσα → C_2: Τα εμβαδά των εξωτερικών τριγώνων δεν είναι ίσα W: Αν δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα τότε τα εμβαδά τους δεν είναι ίσα. ↓ S: Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε τα εμβαδά τους είναι ίσα Η υποστήριξη είναι σωστή, αλλά όχι η εγγύηση.
--	--

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν κάποια από τα θεωρήματα που ήδη γνωρίζουν και αυτός είναι ο λόγος που μπαίνουν στη διαδικασία και κατασκευάζουν ένα δικό τους θεώρημα βασισμένο στις παρατηρήσεις που κάνουν. Το θεώρημα που κατασκευάζουν δεν το αιτιολογούν και είναι λανθασμένο, γεγονός που τους οδηγεί στην κατασκευή λανθασμένης απόδειξης.

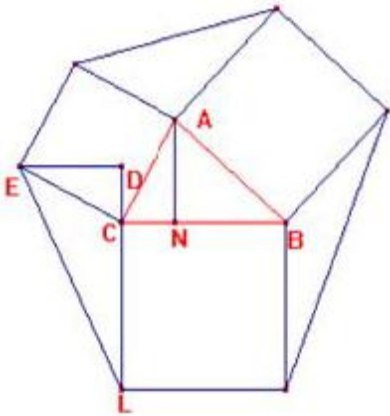
Πίνακας 3.12.

Στην απόδειξη οι μαθητές θεωρούν επίσης την περίπτωση κατά την οποία το ABC είναι ισόπλευρο και ισοσκελές. Στη συνέχεια, θεωρούν το ABC ως γεννήτορα τρίγωνο. Αν το ABC είναι τρίγωνο γεννήτορας... Τα εξωτερικά τρίγωνα έχουν διαφορετικά εμβαδά διότι τα εξωτερικά τρίγωνα δεν είναι ίσα.	Το επιχείρημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής : D_2: Τα εξωτερικά τρίγωνα δεν είναι ίσα → C_2: Τα εμβαδά των εξωτερικών τριγώνων δεν είναι ίσα W: Αν δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα τότε τα εμβαδά τους δεν είναι ίσα. S: Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε τα εμβαδά τους είναι ίσα
--	--

Από την ανάλυση της creative απαγωγικής επιχειρηματολογίας των μαθητών οι Pedemonte & Reid (2010) συμπεραίνουν ότι είναι πιο δύσκολο να κατασκευάσουν ένα θεώρημα που θα τους επιτρέψει να λύσουν το πρόβλημα από το να επιλέξουν κάποιο από τα ήδη γνωστά τους και να κατασκευάσουν μια άλλου είδους επιχειρηματολογία. Το γεγονός ότι δεν βρήκαν στοιχεία που να αποδεικνύουν το θεώρημα που κατασκεύασαν τους οδήγησε αναπόφευκτα στη κατασκευή της λανθασμένης απόδειξης.

3.2.1.1.4. Σωστή creative απαγωγή, Μη κατασκευή της απόδειξης

Πίνακας 3.13.

133. L: Το πρόβλημα είναι διαφορετικό τώρα... Πρέπει να πούμε γιατί τα ύψη είναι ίσα...  ΣΧΗΜΑ: Διάγραμμα για περίπτωση 4. 136. L: Αυτό είναι ένα τετράγωνο... Μπορούμε να πάρουμε ένα διαβήτη... Τοποθετούμε το κέντρο εδώ (στο σημείο A) και μπορούμε να ξεκινήσουμε από εδώ (σημείο E) και φθάνουμε ακριβώς εδώ (στο σημείο C) επειδή είναι ένα τόξο... Αν κάνουμε μία περιστροφή σε αυτό το σημείο... Αυτό το σημείο φθάνει εδώ, έτσι δεν είναι; 137. C: Ναι. 138. L: Έτσι... Μέσω αυτής της περιστροφής τα δύο ύψη συμπίπτουν. 139. C: Ναι, αλλά η περιστροφή... Ποιός είναι ο ορισμός της ; 140. L: Δεν έχουμε μελετήσει την περιστροφή... Πως ορίζεται ; 141. C: Δεν ξέρω... 142. L: Ωστόσο σε αυτήν την περιστροφή υπάρχουν ίσα ύψη... Ίσως η περιστροφή να διατηρεί τα μήκη... 143. C: Όχι, πρέπει να το αποδείξουμε. Σε αυτό το σημείο οι μαθητές αλλάζουν τακτική και θεωρούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων για να δείξουν ότι τα μικρά τρίγωνα ANC και ADE ότι είναι ίσα.	Το επιχείρημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής : D₁ : ? → C₁ : Τα ύψη είναι ίσα W : ? Αυτή είναι μια creative απαγωγή, διότι οι μαθητές κατασκευάζουν ένα νέο κανόνα για να δικαιολογήσουν τον ισχυρισμό τους. Ο νέος κανόνας είναι ένα σωστός κανόνας: διατηρούνται τα μήκη σε μια περιστροφή. Οι μαθητές εξετάζουν την περιστροφή της AE πάνω από το CN. Τα ερωτηματικά μπορούν να αντικατασταθούν ως εξής. D₁ : Το C είναι η περιστροφή του E → C₁ : Τα ύψη είναι ίσα W : Η Περιστροφή διατηρεί τα μήκη S: Εμπειρική γεωμετρική περιστροφή Η υποστήριξη αυτού του επιχειρήματος δεν είναι γεωμετρικός μετασχηματισμός. Η περιστροφή εξετάζεται με μια εμπειρική αίσθηση: η χρήση του διαβήτη επιτρέπει στο μαθητή να δει την περιστροφή. Η εγγύηση είναι ρητή από το μαθητή L, ο οποίος δηλώνει: ίσως η περιστροφή διατηρεί τα μήκη. Σημειώστε τη λέξη ίσως. Δεν υπάρχει θεωρητικό υπόβαθρο για την ενίσχυση του επιχειρήματος. Η περιστροφή δίνεται από το κέντρο A αλλά δεν υπάρχει αναφορά για τη γωνία περιστροφής.
--	---

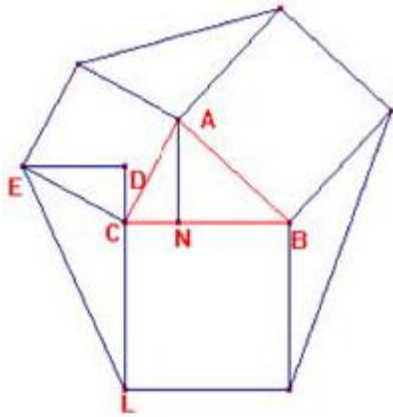
Οι μαθητές σε αυτό το παράδειγμα έχουν βρει ότι τα εμβαδά των δύο τριγώνων είναι ίσα με τη χρήση του λογισμικού και προσπαθούν να το αποδείξουν. Παρατηρούν ότι οι βάσεις των τριγώνων είναι ίσες και προσπαθούν να εξετάσουν αν και τα ύψη είναι ίσα. Οι μαθητές καταφέρνουν να κατασκευάσουν τον νέο κανόνα αλλά δεν είναι βέβαιοι για την ισχύ του και μην μπορώντας να τον αποδείξουν λόγω των περιορισμένων γνώσεών τους, τον εγκαταλείπουν και δεν κατασκευάζουν την απόδειξη.

Σύμφωνα με τους Pedemonte & Reid (2010) και σε αυτή την περίπτωση η χρήση creative απαγωγικής επιχειρηματολογίας φαίνεται να δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές αφού πάλι δεν καταλήγουν στην κατασκευή της απόδειξης.

3.2.1.2. Απαγωγική επιχειρηματολογία μετατρέπεται σε Απαγωγική απόδειξη. (Abductive argumentation to Abductive proof)

Η ανάλυση της απαγωγικής επιχειρηματολογίας αρχίζει στο συμπέρασμα C_6 , στο σημείο αυτό οι μαθητές επιβεβαιώνουν ότι το εμβαδό του τριγώνου ABC και του τριγώνου ECL είναι ίσα. Το δεδομένο C_6 είναι το δεδομένο της εικασίας το οποίο πρέπει να αιτιολογήσουν οι μαθητές με δομική επιχειρηματολογία.

Πίνακας 3.14.

103. C: Τα εμβαδά είναι πάντα ίσα... Με την αριθμομηχανή τα εμβαδά είναι ίσα. 104. N: Τώρα πρέπει να δούμε το γιατί...	Το σχήμα όπως κατασκευάστηκε από τους μαθητές χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο Cabri Geometry  C_6: Τα εμβαδά των δύο τριγώνων είναι ίσα.
---	--

Οι μαθητές πρέπει να αιτιολογήσουν το συμπέρασμα C_6 το οποίο είναι κατασκευασμένο σαν “γεγονός”.

Δύο απαγωγικά βήματα έχουν κατασκευαστεί σε αυτήν την επιχειρηματολογία. Το πρώτο βήμα έχει κατασκευαστεί για να αιτιολογήσει την ισότητα των εμβαδών των τριγώνων. Οι μαθητές αναζητούν μια σχέση ανάμεσα στις βάσεις και στα ύψη που κάνουν σταθερό το εμβαδό (βήμα 2). Το δεύτερο βήμα έχει κατασκευαστεί για να αιτιολογήσει ότι αυτή η σχέση είναι σταθερή. Οι βάσεις των τριγώνων είναι ίσες οπότε οι μαθητές τείνουν να αιτιολογήσουν και την ισότητα των υψών (βήμα 7).

Πίνακας 3.15.

105. C: Πρέπει να βρούμε πως η βάση και το ύψος αλλάζουν... εάν υπάρχει μία σχέση που να κάνει το εμβαδό σταθερό... το εμβαδό είναι σταθερό ... αλλά δεν καταλαβαίνω... έτσι πρέπει να βρούμε μια βάση με αντίστοιχο ύψος ίση με την αντίστοιχη βάση και το αντίστοιχό της ύψος στο άλλο τρίγωνο. 106. N: Αν πάρουμε τις σταθερές βάσεις και να αλλάξουμε τα ύψη ...	$D_6: ? \xrightarrow{\quad} C_6$ W: Τύπος εμβαδού Εάν η σχέση μεταξύ των βάσεων και των υψών πρέπει να είναι σταθερή, τα ύψη πρέπει να είναι ίσα, επειδή οι βάσεις είναι ίσες. $D_7: \text{ίσες βάσεις} \xrightarrow{\quad} C_7: D_6$ $?(\text{ίσα ύψη}) \quad \quad \quad CB*AN=CL*ED$ W: Μεταβατικότητα της ισότητας
--	--

Η σύγκριση ανάμεσα στα δύο ύψη οδηγεί σε σύγκριση των τριγώνων ANC και EDC. Οι μαθητές προσπαθούν να αποδείξουν την ισότητα. Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε και τα ύψη τους είναι ίσα. Αυτό το βήμα αποτελεί ένα απαγωγικό βήμα (βήμα 8). Οι μαθητές ψάχνουν δεδομένα ώστε να εφαρμόσουν το κριτήριο ισότητας για τα τρίγωνα ANC και EDC (βήμα 9). Η δομή της επιχειρηματολογίας είναι overcoded απαγωγική.

Πίνακας 3.16.

115. C: Μα γιατί είναι ίσα τα ύψη; 116. N: Έχουμε βλέπουμε ότι αυτή η πλευρά είναι ίση προς αυτή την πλευρά του τριγώνου ABC ... 117. C: Τότε το μικρό τρίγωνο είναι ίσο με το άλλο μικρό τρίγωνο ... 118. N: ... ναι είναι αλήθεια, οι δύο πλευρές είναι ίσες. 119. C: Έτσι, υπάρχει μια γωνία 90 ° 120. N: Χρειαζόμαστε μια ακόμα πλευρά ή μια γωνία ...	$? D_8: ANC=EDC \xrightarrow{\quad} C_8: D_7$ W: Μεταβατικότητα της ισότητας $? D_9 \xrightarrow{\quad} C_9: D_8$ W: ΓΠΓ κριτήριο ισότητας
--	--

Όταν οι μαθητές βρουν τα στοιχεία που απαιτούνται για την σύγκριση των τριγώνων ANC και EDC μπορούν να κατασκευάσουν την απόδειξη.

Απόδειξη: Στην απόδειξη το απαγωγικό βήμα είναι ακόμα εκεί (βήμα 7).

Πίνακας 3.17.

Οι μαθητές θεωρούν τα τρίγωνα ABC και ELC. Γνωρίζουμε ότι αυτή η βάση είναι ίση με τη βάση του τριγώνου. <u>Τώρα πρέπει να αποδείξουμε ότι τα ύψη είναι ίσα.</u> Έχει ελεγχθεί αυτό το γεγονός με τη βοήθεια του κριτηρίου ισότητας που αποδείχθηκε στο φύλλο με το σχήμα. Στο φύλλο με το σχήμα: Τρίγωνο ANC = Τρίγωνο EDC $EC = AC$ $EDC = ANC = 90^\circ$ $ECD = ACN$ επειδή $ACE = 90^\circ$, $DCN = 90^\circ$ και εάν η γωνία DCA απομακρυνθεί από τις άλλες δύο γωνίες έχουμε την ίδια γωνία.	D_7: ίσες βάσεις ? (ίσα ύψη) C_7: Τα εμβαδά των τριγώνων είναι ίσα W: Τύπος εμβαδού D_8: $ANC = EDC$ C_8: ίσα ύψη W: κληροδοτεί την ισότητα D_9: $EC = AC$ $EDC = ANC = 90^\circ$ $ECD = ACN$ C_9: D_8 W: ΓΠΓ κριτήριο ισότητας
--	---

Αυτό το απόσπασμα παρατίθεται ως παράδειγμα γνωστικής ενότητας από την Pedemonte (2007). Σε αυτό το παράδειγμα δεν υπήρξε δομική αλλαγή ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και στην απόδειξη. Η περιγραφή της απόδειξης παρουσιάζει την απαγωγική αιτιολόγηση των μαθητών. Οι μαθητές δεν είναι σε θέση να καλύψουν εντελώς την απόσταση που υπάρχει ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη καθώς το επιχείρημα στο βήμα 6 είναι overcoded απαγωγικό. Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος που η Pedemonte (2007) παρατηρεί δομική συνέχεια ανάμεσα στις δύο διαδικασίες.

3.2.1.3. Επαγωγική επιχειρηματολογία στη Γεωμετρία

Η Pedemonte (2007) παρατήρησε επαγωγική επιχειρηματολογία σε γεωμετρικό πρόβλημα που έδωσε σε 18 ζευγάρια μαθητών ηλικίας 16-17 ετών ένα και αφορά πολύγωνα και την κατασκευή τύπου. Είναι το εξής:

Πρόβλημα 2:

Να κατασκευάσετε τύπο ο οποίος να δίνει το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου.

Ο τύπος που δίνει το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου είναι $(n - 2) * 180^\circ$. Ο τύπος αυτός μπορεί να βρεθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους αλλά αναλύονται αυτοί που αφορούν την επαγωγική επιχειρηματολογία.

Η επαγωγή όπως αναφέραμε μπορεί να καταστεί δυνατή με δύο τρόπους τη Συμπερασματική Γενίκευση (Result Pattern Generalization, RPG) και τη Διαδικαστική Γενίκευση (Process Pattern Generalization, PPG).

Οι μαθητές θα μπορούσαν να θεωρήσουν διαφορετικά κανονικά πολύγωνα όπως τρίγωνο, τετράγωνο, πεντάγωνο να υπολογίσουν το άθροισμα των γωνιών τους να συγκρίνουν τα αθροίσματα και να καταλήξουν στο τύπο με γενίκευση για τις n πλευρές. Για να καταφέρουν οι μαθητές να κατασκευάσουν την απόδειξη χρειάζεται να καλύψουν τη δομική διάσταση ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και στην μαθηματική επαγωγική απόδειξη.

Επίσης οι μαθητές θα μπορούσαν να θεωρήσουν σαν πρώτο βήμα το τρίγωνο του οποίου το άθροισμα των γωνιών είναι 180° , στη συνέχεια να υπολογίσουν το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού τετραπλεύρου σαν παράθεση δύο τριγώνων και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του ότι είναι $2 * 180^\circ$. Κατόπιν να υπολογίσουν για το πεντάγωνο, κ.α. και γενικεύοντας να καταλήξουν στο n -γωνο και να συμπεράνουν ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι $(n - 2) * 180^\circ$. Σε αυτήν την περίπτωση η επαγωγή γίνεται με Διαδικαστική γενίκευση και υπάρχει δομική συνέχεια ανάμεσα στην επαγωγική επιχειρηματολογία και στην απόδειξη.

Από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών προέκυψαν δύο περιπτώσεις **επαγωγικής επιχειρηματολογίας** στη γεωμετρία.

1. Περίπτωση 1 στην οποία φαίνεται η δομική διάσταση ανάμεσα στην επαγωγική επιχειρηματολογία, που βασίζεται στην συμπερασματική γενίκευση, και στην απόδειξη. Σε αυτήν την περίπτωση οι μαθητές δεν καταφέρνουν να κατασκευάσουν την απόδειξη. Η περίπτωση αυτή θα μελετηθεί στην παράγραφο 3.2.1.3.1..

2. Περίπτωση 2 στην οποία φαίνεται η δομική συνέχεια ανάμεσα στην επαγωγική επιχειρηματολογία, που βασίζεται στην διαδικαστική γενίκευση, και στη μαθηματική επαγωγική απόδειξη. Σε αυτήν την περίπτωση οι μαθητές κατάφεραν να κατασκευάσουν την απόδειξη. Η περίπτωση αυτή θα μελετηθεί στην παράγραφο 3.2.1.3.2..

3.2.1.3.1. Ανάλυση περίπτωσης 1: Επαγωγική επιχειρηματολογία, που βασίζεται στην συμπερασματική γενίκευση και απόδειξη.

Οι μαθητές θεωρούν διάφορα πολύγωνα και κατασκευάζουν έναν πίνακα όπου υπολογίσουν το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών τους και κατασκευάζουν μια εικασία με συμπερασματική γενίκευση. Αντιλαμβάνονται ότι με την προσθήκη μιας πλευράς στο πολύγωνο το άθροισμα των γωνιών αυξάνει κατά 180° αλλά δεν αντιλαμβάνονται ότι η προσθήκη μιας πλευράς είναι ισοδύναμη με την προσθήκη ενός τριγώνου.

Πίνακας 3.18.

Η Alice κατασκευάζει τον ακόλουθο πίνακα:

Πλευρές	Άθροισμα (γωνίες)
3	180°
4	360° ($180^\circ * 2$)
5	540° ($180^\circ * 3$)
6	720° ($180^\circ * 4$)

29. Α: Έτσι, ο κανόνας είναι πιθανώς $180 * (n-2)$ για ένα πολύγωνο με n πλευρές.

30. Λ: Ναι .. n είναι ο αριθμός πλευρών.

$D_4: C_1, C_2, C_3$

C_4 : το
 άθροισμα
 των γωνιών
 ενός
 πολυγώνου
 με n -πλευρές
 είναι $180 * (n-2)$

W : Συμπερασματική Γενίκευση

Όπου C_1, C_2, C_3 τα συμπεράσματα που έχουν κατασκευαστεί σε προηγούμενο στάδιο:

C_1 : το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών για ένα 4-πλευρο πολύγωνο είναι 360° .

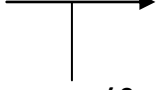
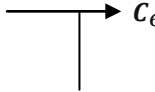
C_2 : το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών για ένα 5-πλευρο πολύγωνο είναι 540° .

C_3 : το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών για ένα 6-πλευρο πολύγωνο είναι 720° .

Οι μαθητές γνωρίζουν ότι πρέπει να αποδείξουν την εικασία και προσπαθούν να το κάνουν με μαθηματική επαγωγή αλλά δεν τα καταφέρνουν καθώς η δομική διάσταση των δύο διαδικασιών είναι μεγάλη.

Η απόδειξη των μαθητών είναι η ακόλουθη:

Πίνακας 3.19.

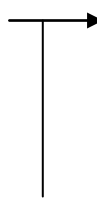
Βάση για $n = 3$ $180^\circ (3-2) = 180^\circ$ Βήμα $H_p: 180^\circ (n-2)$ $T_s: 180^\circ (n-1)$ $S(n) = 180^\circ (n-2) = 360-180n$ $S(n+1) = 180^\circ (n+1) - 360 = 180n + 180 - 360$ $= n + 1 - 2 = n-1$ Th Έχει αποδειχτεί η θέση αυτή μέσω της μαθηματικής επαγωγής.	Οι μαθητές γράφουν τη βάση της μαθηματικής επαγωγής ($n = 3$). D_5 : Το πολύγωνο  $C_5 : S(3)=180^\circ$ είναι τρίγωνο W : Θεώρημα για το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου Στη συνέχεια, θα πρέπει να γίνει σύνδεση του n βήματος με το βήμα $n+1$. D_6:  $C_6 : S(n+1)=180(n-1)$ $S(n)=180^\circ (n-2)$ W : ? Οι μαθητές αλλάζουν το n σε $n+1$ στον τύπο $S(n)$ κατασκευάζοντας ένα «κυκλικό» επιχειρήμα. Δεν μπορούν να δουν το $S(n+1)$ σαν $S(n)+180^\circ$ επειδή για αυτό το σημείο είναι σημαντικό να συνδεθεί το n με το $n+1$ (προσθέτοντας ένα τρίγωνο και προσθέτοντας στη συνέχεια 180° στο άθροισμα των γωνιών του προηγούμενου αθροίσματος γωνιών).
---	---

Αυτό το απόσπασμα παρατίθεται ως παράδειγμα γνωστικής ενότητας. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις ίδιες ιδιότητες και θεωρήματα στην επιχειρηματολογία. Κατά την επιχειρηματολογία όμως οι μαθητές γενικεύουν με συμπερασματική γενίκευση και όχι με διαδικαστική γενίκευση και πιθανότατα αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο δεν καταφέρνουν να κατασκευάσουν την απόδειξη. Οπότε η Pedemonte συμπεραίνει ότι υπάρχει διάσταση μεταξύ των δύο διαδικασιών την οποία οι μαθητές δεν μπόρεσαν να περάσουν στην απόδειξη επιτυχώς.

3.2.1.3.2. Ανάλυση περίπτωσης 2: Επαγωγική επιχειρηματολογία, που βασίζεται στην διαδικαστική γενίκευση, και απόδειξη.

Οι μαθητές θεωρούν διάφορα πολύγωνα και υπολογίζουν το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών τους. Αναπτύσσουν μια εικασία με συμπερασματική γενίκευση και προσπαθούν να την αιτιολογήσουν με διαδικαστική γενίκευση. Το δεύτερο κομμάτι της επιχειρηματολογίας που βασίζεται στη διαδικαστική γενίκευση είναι το κομμάτι της δομικής επιχειρηματολογίας που τους επιτρέπει να κατασκευάσουν την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή.

Πίνακας 3.20.

66. M: Αν το n είναι ίσο με 3, τότε το $f(n)$ είναι ίσο με $180 \cdot 1 \dots$ Αν το n είναι ίσο με 4, τότε το $f(n)$ είναι ίσο με 360, που είναι ίσο με $180 \cdot 2$. 67. L: Αν το n είναι ίσο με 5, τότε το $f(n)$ είναι ίσο με 540, που είναι ίσο με $180 \cdot 3 \dots$ 68. M: Οπότε το $f(n)$ είναι ίσο με $180 \cdot (n-2) \dots$ 69. L: Οκ, τώρα πρέπει να καταλάβουμε γιατί...	D_1: προηγούμενα συμπεράσματα  C_1: το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου με n πλευρές είναι $180 \cdot (n-2)$ W: Συμπερασματική Γενίκευση
---	--

Οι μαθητές κατασκεύασαν μια εικασία με συμπερασματική γενίκευση. Κατόπιν πρέπει να την αιτιολογήσουν και παράγουν μια δομική επιχειρηματολογία η οποία είναι επαγωγική και βασίζεται σε διαδικαστική γενίκευση.

Πίνακας 3.21.

70. M: Εντάξει ... περιμένετε! 71. L: F (4) είναι ίση με $180 + f(3)$ διότι υπάρχει ένα τρίγωνο περισσότερο ... έτσι $180 + 180 \dots$ 72. M: Εντάξει, τότε η f (5) είναι ... είναι $f(4) + 180 \dots$ που σημαίνει ότι f (n) είναι ίση με $f(n-1) + 180$ 73. L: Πάντα προσθέτουμε 180 στην προηγούμενη. 74. M: Εντάξει μπορούμε να γράψουμε το $f(n+1)$ σαν $f(n)+180 \dots$ $D_4 : D_2 \rightarrow C_2 D_3 \rightarrow C_3$	Οι μαθητές κατανοούν ότι η προσθήκη ενός τριγώνου στο πολύγωνο σημαίνει την προσθήκη 180° στο άθροισμα των γωνιών. D_2 : για ένα τρίγωνο $f(3)=180^\circ$ $\rightarrow$ C_2: για ένα 4-πλευρο πολύγωνο $f(4)=180+f(3)$ W : προσθέτοντας ένα τρίγωνο στο προηγούμενο πολύγωνο σημαίνει την προσθήκη 180° στο άθροισμα των γωνιών $D_3 : C_2 \rightarrow C_3$: για 5-πλευρο πολύγωνο $f(5)=180+f(4)$ W : προσθέτοντας ένα τρίγωνο στο προηγούμενο πολύγωνο σημαίνει την προσθήκη 180° στο άθροισμα των γωνιών Γενίκευση $D_4 : D_2 \rightarrow C_2 D_3 \rightarrow C_3 \rightarrow C_4$: για (n+1)-πλευρο πολύγωνο $f(n+1)=180+f(n)$ W: Διαδικαστική Γενίκευση
--	---

Σε αυτήν την περίπτωση οι μαθητές έχουν όλα τα στοιχεία που απαιτούνται για τη μαθηματική επαγωγή καθώς η διαδικαστική γενίκευση τους επιτρέπει να συνδέσουν ένα πολύγωνο με το επόμενο του και άρα να τα συγκρίνουν.

Η **απόδειξη** που κατασκεύασαν οι μαθητές είναι η ακόλουθη:

Πίνακας 3.22.

Βάση $F(3) = 180^\circ$ $F(n+1) = 180^\circ (n-1)$ $F(n+1) = F(n) + 180^\circ$ Είναι απαραίτητο να προστεθεί 180° στο $f(n)$ γιατί αν προσθέσουμε μια πλευρά στο πολύγωνο, προσθέτουμε ένα τρίγωνο επίσης. Το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων είναι 180°. Έτσι: $F(n+1) = 180^\circ (n-2) + 180^\circ$ $F(n+1) = 180^\circ (n-2+1)$ $F(n+1) = 180^\circ (n-1)$	D_5: Το πολύγωνο είναι τρίγωνο $\rightarrow E_5: S(3)=180^\circ$ W : Θεώρημα για το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων Στη συνέχεια γράφουμε τον τύπο για $n+1$ και το αποδεικνύουμε. D_6: $f(n)=180^\circ(n-2) \rightarrow E_6: f(n+1)=180^\circ(n-1)$ W : Διαδικαστική Γενίκευση
--	--

Αυτό το απόσπασμα παρατίθεται ως παράδειγμα γνωστικής ενότητας. Όλα τα ζευγάρια που κατάφεραν να κατασκευάσουν την απόδειξη είχαν πρώτα κατασκευάσει την εικασία με συμπερασματική γενίκευση την οποία αιτιολόγησαν με διαδικαστική γενίκευση και αυτή αποτέλεσε την γέφυρα η οποία κατέστησε δυνατή την σύνδεση της εικασίας με την μαθηματική επαγωγική απόδειξη.

3.2.1.4. Συμπεράσματα για την απόδειξη στη γεωμετρία

Η Pedemonte (2007) καταλήγει στο γεγονός ότι για την κατασκευή μαθηματικής επαγωγικής απόδειξης απαιτείται διαδικαστική γενίκευση.

- Αν υπάρχει γνωστική ενότητα ή/ και δομική συνέχεια ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη στο πλαίσιο της γεωμετρίας αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι οι μαθητές θα είναι σε θέση να κατασκευάσουν την απόδειξη.
- πολλές φορές οι μαθητές σκέφτονται με διαφορετικό τρόπο και γράφουν με διαφορετικό τρόπο.
- Στη γεωμετρία η επιχειρηματολογία των μαθητών συνήθως δεν είναι επαγωγική αλλά απαγωγική σε αντίθεση με την απόδειξη που είναι πάντα επαγωγική αυτό δημιουργεί πρόβλημα στους μαθητές καθώς δεν μπορούν να μετασχηματίσουν τα απαγωγικά βήματα σε επαγωγικά.

Οι Pedemonte & Reid (2010) έρχονται να προσθέσουν ότι η απαγωγική επιχειρηματολογία δημιουργεί και αυτή γνωστικές δυσκολίες στους μαθητές τόσο από μόνη της όσο και όταν αυτή σχετίζεται με την κατασκευή μιας παραγωγικής απόδειξης, καθώς προηγείται συνήθως αυτής και είναι δύσκολη η μετάβαση από την απαγωγική στην παραγωγική. Καταλήγουν στα εξής:

- Η κατασκευή της απόδειξης είναι πιο εύκολη από τους μαθητές όταν η απαγωγική επιχειρηματολογία είναι της μορφής overcoded ή undercoded 1^{ου} τύπου.
- Η undercoded απαγωγική επιχειρηματολογία 2^{ου} τύπου ή creative απαγωγική επιχειρηματολογία θεωρείται δύσκολη για τους μαθητές καθώς οι μαθητές χρειάζεται να διαχειριστούν πολλές πληροφορίες ταυτόχρονα γεγονός που δύναται να τους δημιουργήσει σύγχυση.

3.2.2. Η έρευνα της Pedemonte για την επιχειρηματολογία των μαθητών στην άλγεβρα

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η απόδειξη διδάσκεται σε μεγαλύτερο βαθμό στο πλαίσιο της γεωμετρίας παρά της άλγεβρας. Αυτό συμβαίνει γιατί η άλγεβρα αντιμετωπίζεται ως το μάθημα στο οποίο οι μαθητές διδάσκονται κανόνες και διαδικασίες ώστε να χειρίζονται αλγεβρικά σύμβολα και όχι σαν ένα μάθημα στο οποίο διδάσκονται σχέσεις. Συνεπώς, η άλγεβρα διδάσκεται σαν μια γλώσσα όπου δίνεται έμφαση στους συντακτικούς κανόνες και η αλγεβρική απόδειξη σαν μία γραμματική δομή που αποτελείται από μία αλληλουχία τύπων που ακολουθούν αυτούς τους κανόνες (Pedemonte, 2008). Οι Harel&Sowder (1998) επίσης έχουν επισημάνει ότι στη διδασκαλία της άλγεβρας δεν είναι εμφανής η ιδέα της απόδειξης ως μία αφαιρετική διαδικασία όπου η υπόθεση οδηγεί στο συμπέρασμα και αυτό δημιουργεί επιπρόσθετα εμπόδια στους μαθητές.

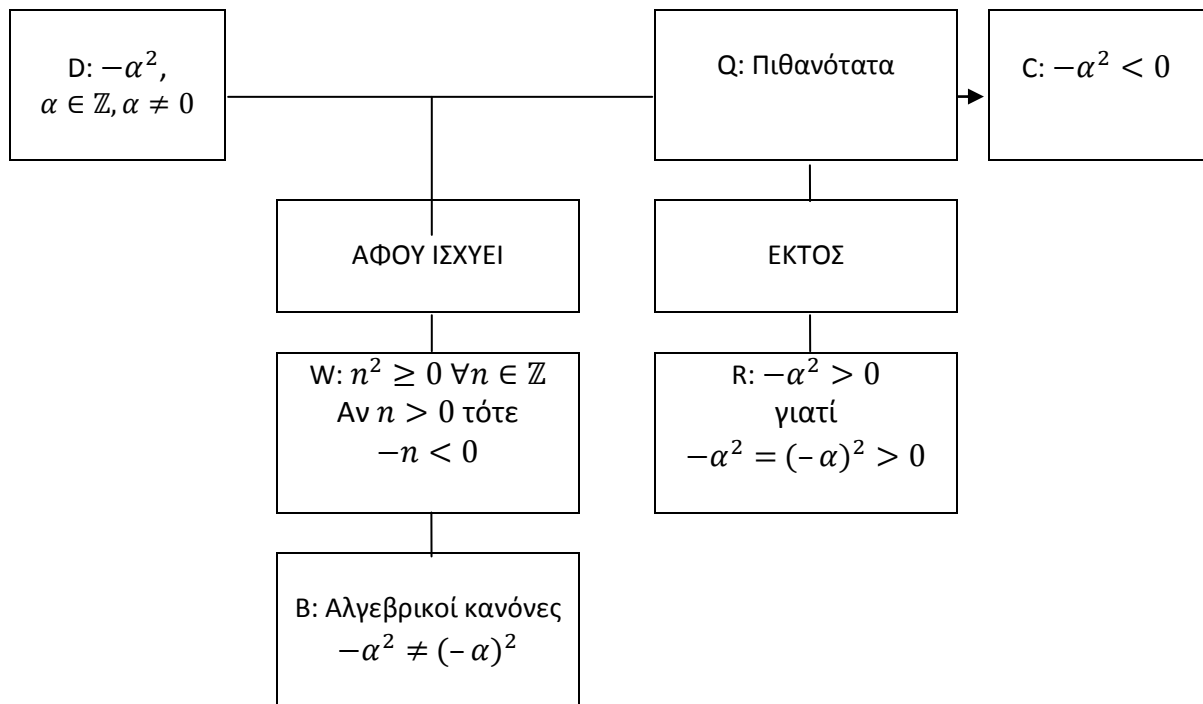
Η Pedemonte (2008) για να αναδείξει τις δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα αναλύει την επιχειρηματολογία των μαθητών κάνοντας χρήση του σχήματος του Toulmin.

Σε πρώτη φάση αναφέρουμε ένα παράδειγμα για το πώς ένα επιχείρημα στην άλγεβρα μπορεί να αναλυθεί με το σχήμα αυτό από την εργασία της Pedemonte.

Ερώτημα: “Ο αριθμός $-a^2$ είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός αν $a \neq 0$?”

Απάντηση: “Ο $-a^2$ είναι αρνητικός αριθμός (ισχυρισμός) γιατί το τετράγωνο οποιουδήποτε αριθμού είναι ένας θετικός αριθμός, αλλά με το μείον μπροστά γίνεται αρνητικός αριθμός (εγγύηση) ... εκτός και αν το τετράγωνο είναι για ολόκληρο τον αριθμός και το μείον... οπότε σε αυτήν την περίπτωση το $-a^2$ είναι ένας θετικός αριθμός (ανασκευή). Όχι ... αυτό είναι αδύνατο γιατί το $-a^2$ είναι διαφορετικό από το $(-a)^2$.”

Η απάντηση αυτή μπορεί να αναλυθεί ως εξής με το σχήμα του Toulmin.



Σχήμα 3.8. Ανάλυση αλγεβρικού επιχειρήματος με χρήση του σχήματος Toulmin. (Pedemonte, 2008, σελ. 388)

Το σχήμα του Toulmin όμως λαμβάνει υπόψη μόνο τη δομή του επιχειρήματος και αυτό στην άλγεβρα δεν είναι επαρκές καθώς δεν λαμβάνεται υπόψη και το σύστημα αναφοράς. Για τον λόγο αυτό η Pedemonte(2008) κάνει χρήση του σχήματος του Toulmin συνδυασμένο όμως με το μοντέλο *ckε*. Το μοντέλο αυτό επιτρέπει κατά την ανάλυση να λαμβάνουμε υπόψη και το γνωστικό σύστημα που κινητοποιείται κατά την διαδικασία της επιχειρηματολογίας και να το συγκρίνουμε με τα θεωρήματα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη.

Το *ckε* Μοντέλο Ανάλυσης Επιχειρηματολογίας

Στο *ckε* μοντέλο κάθε έννοια (concept *C*) χαρακτηρίζεται από μια τετράδα χαρακτηριστικών $C=(P, R, L, \Sigma)$ όπου :

P: Αντιπροσωπεύει ένα σύνολο προβλημάτων, είναι το πλαίσιο πρακτικής της έννοιας αλλά και το αρχικό πλαίσιο όπου μπορεί να εμφανιστεί αυτή.

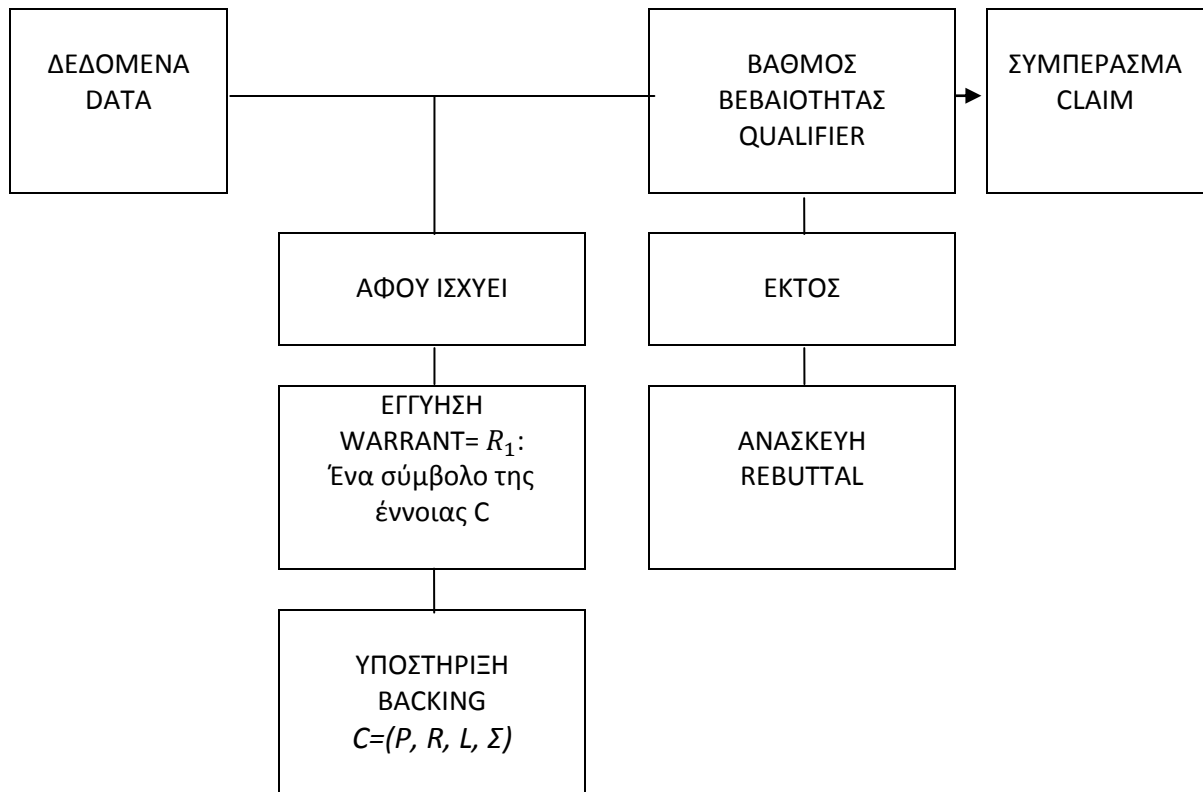
R: Αντιπροσωπεύει το σύνολο συμβόλων που χρησιμοποιούνται για την λύση των προβλημάτων που ανήκουν στο *P*.

L: Είναι το σύστημα αναπαράστασης και επιτρέπει την αναπαράσταση των προβλημάτων και των συμβόλων.

Σ : Είναι το σύνολο των δομών ελέγχου, δηλαδή το σύνολο που περιγράφει τον τομέα εγκυρότητας της έννοιας.

Η τετράδα αυτή σύμφωνα με την Pedemonte χρησιμεύει στο να μπορούμε να περιγράψουμε τις έννοιες που κινητοποιούν οι μαθητές κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος.

Το μοντέλο *ckz* μπορεί να συμπληρώσει το σχήμα του Toulmin ως εξής:



Σχήμα 3.9. Σχήμα του Toulmin με χρήση του μοντέλου *ckz*. (Pedemonte, 2008, σελ. 388)

Η εγγύηση και άρα το σύμβολο – μετασχηματισμός R_1 που χρησιμοποιείται κατά την επιχειρηματολογία έχει άμεση σχέση με την έννοια που έχει κινητοποιηθεί και μας επιτρέπει να την κατηγοριοποιήσουμε ανάλογα με το πεδίο – σύστημα αναπαράστασης στο οποίο υπάγεται. Αν το σύμβολο είναι το κατάλληλο για την επίλυση του προβλήματος τότε μπορεί ο κανόνας που έχει αναπτυχθεί να αντικατασταθεί από το αντίστοιχο θεώρημα και άρα υπάρχει συνέχεια ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη. Αν όμως δεν είναι το κατάλληλο για το συγκεκριμένο πρόβλημα τότε υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

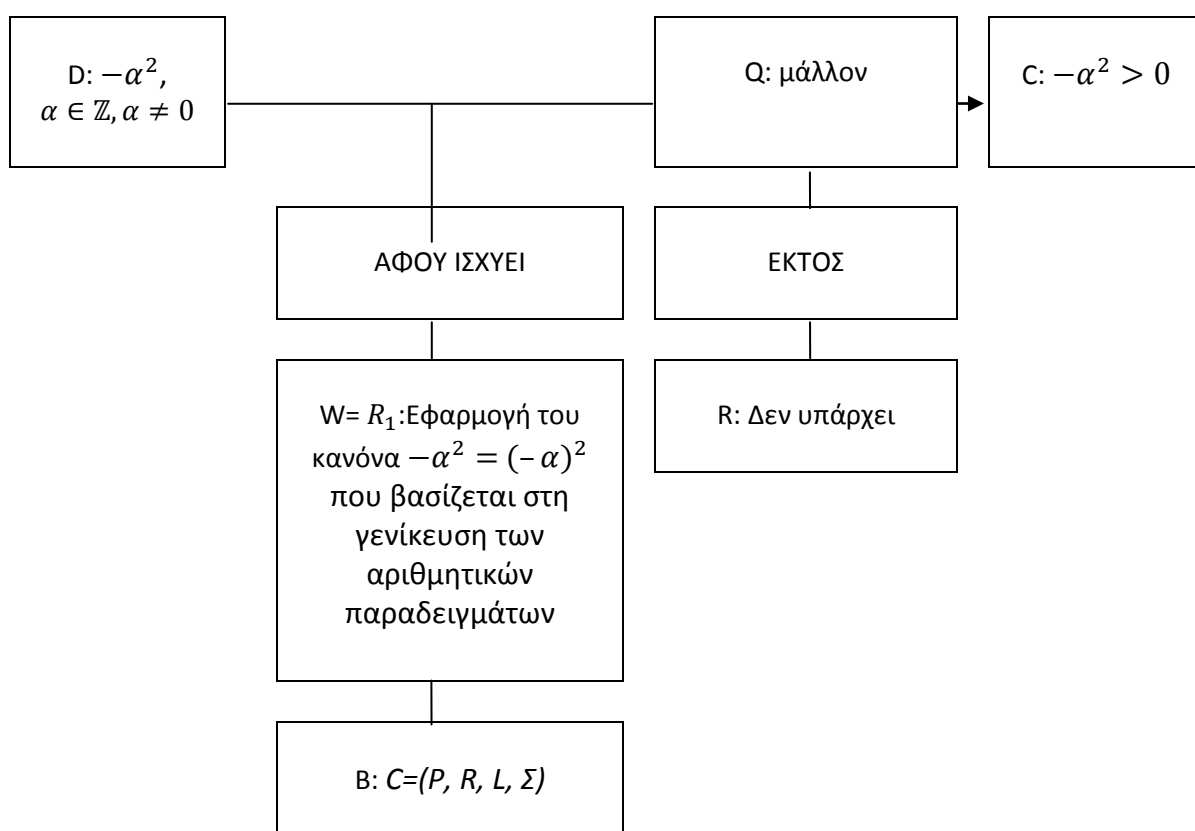
1. Ο μαθητής δεν είναι σε θέση να κάνει την αντικατάσταση με το κατάλληλο θεώρημα οπότε δεν μπορεί να κατασκευάσει την απόδειξη.
2. Ο μαθητής κατασκευάζει λανθασμένη απόδειξη που βασίζεται στην λανθασμένη επιχειρηματολογία.
3. Ο μαθητής εγκαταλείπει αυτήν την επιχειρηματολογία και κατασκευάζει καινούργια.

Για να καταλάβουμε πως λειτουργεί το καινούργιο μοντέλο η Pedemonte αναφέρει τη λανθασμένη απάντηση ενός μαθητή για το προηγούμενο ερώτημα το οποίο αναλύεται ως εξής:

Ερώτημα: “Ο αριθμός $-a^2$ είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός αν $a \neq 0$?”

Απάντηση: “Ο $-a^2$ μάλλον είναι θετικός αριθμός. Αν για a πάρω το 2, τότε το τετράγωνο του 2 είναι 4 το οποίο είναι θετικός αριθμός, αν για a πάρω το 3, τότε το τετράγωνο του 3 είναι 9 το οποίο είναι θετικός αριθμός... κ.τ.λ. Άρα το $-a^2$ μάλλον είναι θετικός αριθμός.”

Η επιχειρηματολογία αυτή μοντελοποιείται ως εξής:



Σχήμα 3.10. Παράδειγμα επιχειρηματολογίας μαθητή όπου έχει κινητοποιηθεί λανθασμένη αντίληψη. (Pedemonte, 2008, σελ. 389)

Ο μαθητής κατασκευάζει έναν κανόνα ο οποίος βασίζεται στη γενίκευση αριθμητικών παραδειγμάτων τα οποία ανήκουν στο αριθμητικό πεδίο. Η έννοια που κινητοποιεί (ότι δηλαδή το $-a^2 > 0$) εκφράζεται στο αλγεβρικό σύστημα αναπαράστασης αλλά ο τομέας εγκυρότητας Σ της έννοιας είναι το αριθμητικό πεδίο. Η εφαρμογή του λανθασμένου κανόνα $-a^2 = (-a)^2$ δεν επιτρέπει την κατασκευή σωστής απόδειξης. Σε αυτό το παράδειγμα υπάρχει συνέχεια στο

σύστημα αναπαράστασης της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης που όμως οδήγησε σε λανθασμένη απόδειξη.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στη σχέση της επιχειρηματολογίας και της αλγεβρικής απόδειξης σχετικά με την επίλυση ανοικτών προβλημάτων που αφορούν ιδιότητες αριθμών.

Η απόδειξη στην άλγεβρα παραγωγικό χαρακτήρα καθώς κάθε βήμα της απόδειξης προέρχεται από το προηγούμενο με χρήση κατάλληλου αλγεβρικού κανόνα. Γνωστικές έρευνες έχουν δείξει ότι η διαδικασία επίλυσης προβλήματος στην άλγεβρα αποτελείται από δύο φάσεις.

1. Η φάση της κατασκευαστικής επιχειρηματολογίας (constructive argumentation phase) ή φάση μετατροπής (conversion phase):

Μία εξίσωση κατά τον Duval (αναφορά στην Pedemonte, 2008) αποτελείται από αριθμούς και γράμματα, τα οποία συνδέονται με σύμβολα τελεστών (operative symbols) και σχεσιακά σύμβολα (relational symbols) που επιτρέπουν τη μετάβαση από τη μία εξίσωση στην άλλη. Στην φάση αυτή γίνεται η μετατροπή των δεδομένων από την φυσική γλώσσα στην αλγεβρική γλώσσα

2. Η φάση της απόδειξης (proof phase ή treatment phase):

Κατά τη φάση αυτή τα γράμματα αποτελούν αντικείμενα από μόνα τους και κάνοντας χρήση αλγεβρικών κανόνων κατασκευάζεται η απόδειξη.

Η μετάβαση από τη μία φάση στην άλλη είναι πολύ δύσκολη για τους μαθητές καθώς το σύστημα αναπαράστασης αλλάζει και δημιουργείται γνωστικό κενό. Η χρήση παραδειγμάτων δημιουργεί επιπρόσθετα προβλήματα καθώς στην αριθμητική κινούμαστε από το γνωστό στο άγνωστο ενώ στην άλγεβρα το αντίθετο.

Η Pedemonte (2007b, 2008) στην έρευνα της στο πλαίσιο της άλγεβρας υποθέτει:

- I. ότι η μετάβαση από τη μία φάση στην άλλη γίνεται πιο ομαλά για τους μαθητές αν πρώτα κατασκευάσουν δομική επιχειρηματολογία (structurant argumentation) που να δείχνει τη συνέχεια ανάμεσα στα δύο συστήματα αναφοράς.
- II. Ένα σωστά διατυπωμένο απαγωγικό βήμα στη δομική επιχειρηματολογία χρησιμεύει στο να διατηρείται η σύνδεση ανάμεσα στο σύστημα αναπαράστασης της κατασκευαστικής επιχειρηματολογίας και το σύστημα αναπαράστασης στην απόδειξη.

Στην έρευνά της χρησιμοποιεί δύο προβλήματα για να διαπιστώσει την αλήθεια αυτών των υποθέσεων.

Πρόβλημα 1: Πάρετε έναν οποιοδήποτε διψήφιο αριθμό, αντιστρέψτε τα ψηφία του και αφαιρέστε τον μεγαλύτερο αριθμό από τον μικρότερο αριθμό. Τι μπορείτε να πείτε για το αποτέλεσμα?

Από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών προέκυψαν δύο διαφορετικές διαδικασίες επίλυσης οι οποίες εστιάζουν στο αν η ύπαρξη απαγωγικών βημάτων στην φάση της επιχειρηματολογίας διευκολύνουν την κατασκευή της απόδειξης.

1. Περίπτωση 1: στην οποία από την λανθασμένη κατασκευαστική επιχειρηματολογία ο μαθητής μεταβαίνει απευθείας στην λανθασμένη απόδειξη χωρίς πρότερα να κατασκευάσει δομική επιχειρηματολογία. (Constructive Argumentation → No Structurant Argumentation → Incorrect Proof)
2. Περίπτωση 2: στην οποία ο μαθητής από την κατασκευαστική επιχειρηματολογία μεταβαίνει πρώτα στη δομική επιχειρηματολογία όπου παρατηρείται η ύπαρξη απαγωγικών βημάτων και οδηγείται στην κατασκευή της απόδειξης. (Constructive Argumentation → Structurant Argumentation → Proof)

Ανάλυση περίπτωσης 1: Constructive Argumentation → No Structurant Argumentation → Incorrect Proof

Η Ilaria κατασκευάζει μια εικασία από την γενίκευση των αριθμητικών παραδειγμάτων. Η δομή αυτής της επιχειρηματολογίας είναι επαγωγική και το σύστημα αναφοράς είναι η αριθμητική.

Πίνακας 3.23. Κατασκευαστική Επιχειρηματολογία Constructive argumentation

Ilaria

Αν οι αριθμοί είναι οι 15 και 51, τότε η διαφορά $51-15$ ισούται με 36

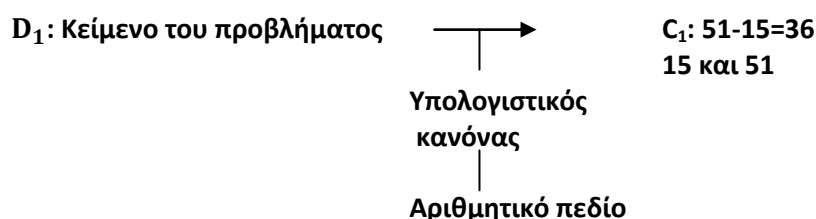
Αν οι αριθμοί είναι οι 16 και 61, τότε $61-16=45$

Αν οι αριθμοί είναι οι 35 και 53, τότε $53-35=18$

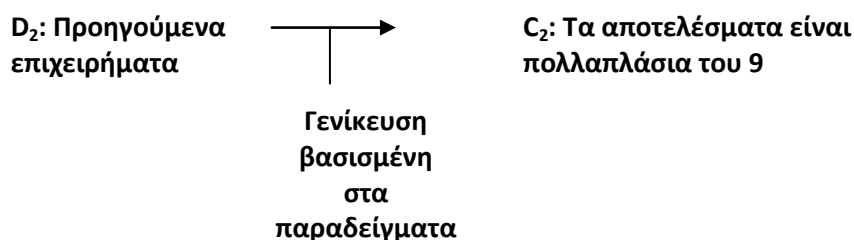
Όλα τα αποτελέσματα είναι πολλαπλάσια του 9

Ανάλυση

Η Ilaria μελετά μερικά αριθμητικά παραδείγματα. Το μοντέλο του πρώτου είναι το εξής:



Παρόμοια επιχειρήματα με το προηγούμενο κατασκευάζονται. Στη συνέχεια, η Ilaria κατασκευάζει μια εικασία γενικεύοντας τα αριθμητικά παραδείγματα



Τώρα, η Ilaria πρέπει να δικαιολογήσει την εικασία.

Η Ilaria μεταφράζει το κείμενο του προβλήματος από την φυσική γλώσσα στην αλγεβρική γλώσσα (οπότε το σύστημα αναπαράστασης L είναι το αλγεβρικό). Ο έλεγχος Σ της έννοιας που έχει κινητοποιηθεί επικυρώνεται τόσο στο αριθμητικό όσο και στο αλγεβρικό σύστημα. Οι κανόνες μετάφρασης R_1 , R_2 συνδέουν τη φυσική γλώσσα με το αριθμητικό πεδίο, ενώ ο κανόνας μετάφρασης R_3 ανήκει στο αλγεβρικό πεδίο.

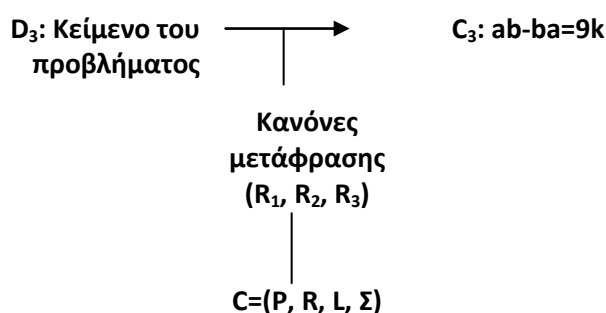
Πίνακας 3.24. Μετάφραση της εικασίας σε αλγεβρική γλώσσα

Ilaria

Μπορώ να γράψω τον ένα αριθμό ab και τον άλλον αριθμό με τα αντιστραμμένα τα ψηφία ba . Τότε $ab-ba=9k$.

Πρέπει να αποδείξω αυτόν τον τύπο.

Ανάλυση



Μια συγκεκριμένη ιδέα ενεργοποιείται από την Ilaria, και οι κανόνες μετάφρασης είναι οι εξής:

R_1 : Ένας διψήφιος αριθμός μπορεί να γραφεί ab

R_2 : Αν ab είναι ένας διψήφιος αριθμός τότε ba θα είναι ο αντιστραμμένος

R_3 : Τα πολλαπλάσια του 9 μπορούν να γραφούν $9k$

Η Ilaria για να κατασκευάσει την απόδειξη προσπαθεί να μεταφράσει τη φόρμουλα που έχει κατασκευάσει. Το σύστημα αναπαράστασης αλλά και ο έλεγχος της έννοιας ανήκουν στο αλγεβρικό πεδίο. Η σημασιολογική (semantic) υπόσταση των γραμμάτων που έχει θέσει έχει χαθεί καθώς το a και το b δεν αποτελούν πλέον τα ψηφία αριθμών (δεκάδες, μονάδες) αλλά αγνώστους από μόνα τους χωρίς κανένα νόημα. Αυτό οδηγεί την Ilaria να απορρίψει την αρχική εικασία της που βασιζόταν στα αριθμητικά παραδείγματα και να μην μπορέσει να κατασκευάσει την απόδειξη.

Πίνακας 3.25. Λανθασμένη απόδειξη

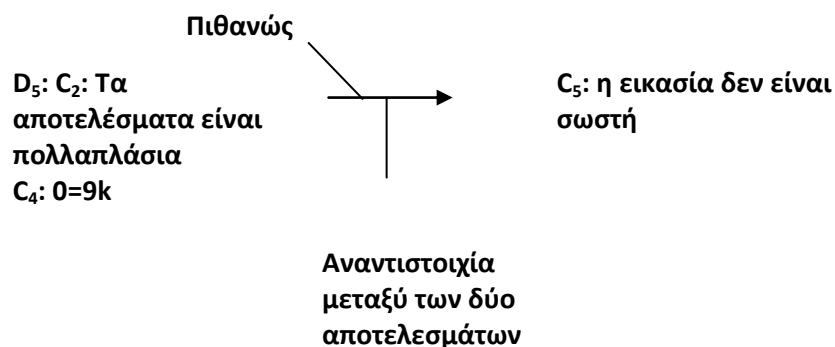
Ilaria

$ab-ba=0$. Τότε $0=9k$. Αυτό δεν είναι δυνατόν....δεν καταλαβαίνω...ίσως η εικασία δεν είναι σωστή.

Ανάλυση



Η Ilaria δεν μπορεί να συνεχίσει. Δεν καταλαβαίνει ότι έχει εφαρμόσει αλγεβρικούς κανόνες σε λανθασμένο τύπο. Θεωρεί ότι η εικασία δεν είναι σωστή.



Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η μαθήτρια δεν κατάφερε να γεφυρώσει το κενό που υπάρχει ανάμεσα στις δύο διαδικασίες αφού κατά τη μετάβασή της δεν διατήρησε το σημασιολογικό νόημα των αγνώστων που είχε θέσει.

Ανάλυση περίπτωσης 2: Constructive Argumentation → Structurant Argumentation → Proof

Η Francesca κατασκευάζει εικασία από τη γενίκευση των αριθμητικών παραδειγμάτων. Η δομή αυτής της επιχειρηματολογίας είναι επαγωγική και το σύστημα αναφοράς είναι η αριθμητική.

Πίνακας 3.26. Κατασκευαστική επιχειρηματολογία Constructive argumentation

Francesca

Αν πάρουμε τους αριθμούς 32 και 23....τότε...9

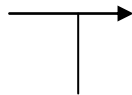
Αν πάρουμε τους 63 και 36...τότε...27

Αν πάρουμε τους 13 και 31...τότε...18

Όλα είναι πολλαπλάσια του 9

Ανάλυση

**D₁: Κείμενο του
προβλήματος
32 και 23**



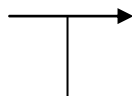
C₁: 32-23=9

Υπολογιστικοί
κανόνες

Αριθμητικό
πεδίο

Ύστερα από μερικά αριθμητικά παραδείγματα, η Francesca κατασκευάζει μια εικασία

**D₂: Προηγούμενα
επιχειρήματα**



**C₂: Τα
αποτελέσματα
είναι
πολλαπλάσια
του 9**

Γενίκευση βάσει
παραδειγμάτων

Η Francesca κατασκευάζει δομική επιχειρηματολογία ώστε να αιτιολογήσει την εικασία της. Το πρώτο βήμα είναι απαγωγικό **D₃** και βασίζεται στα προηγούμενα παραδείγματα. Υπάρχει συνέχεια ανάμεσα στην κατασκευαστική επιχειρηματολογία και την κατασκευαστική επιχειρηματολογία. Η

επιχειρηματολογία έχει και άλλο ένα απαγωγικό βήμα το οποίο σε συνδυασμό με τον πρώτο βοηθά στη διατήρηση της σημασιολογίας των γραμμάτων. Ο μετασχηματισμός R_1 που ισχύει και στην αριθμητικό αλλά και στο αλγεβρικό πεδίο είναι αυτός που διατηρεί τη συνέχεια ανάμεσα στα συστήματα αναπαράστασης των δύο διαδικασιών.

Πίνακας 3.27.

Francesca

Τώρα πρέπει να πούμε γιατί τα αποτελέσματα είναι πολλαπλάσια του 9...είναι δύσκολο...

Γράφει

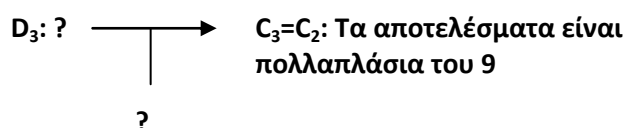
$$32 - 23 = 3 \times 10 + 2 - 2 \times 10 - 3 = 3(10 - 1) - 2(10 - 1) = 3 \times 9 - 2 \times 9$$

$$63 - 36 = 6 \times 10 + 3 - 3 \times 10 - 6 = 6(10 - 1) - 3(10 - 1) = 6 \times 9 - 3 \times 9$$

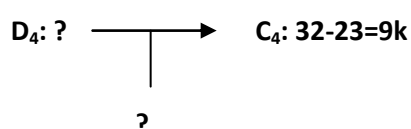
Είναι πολλαπλάσια του 9

Ανάλυση

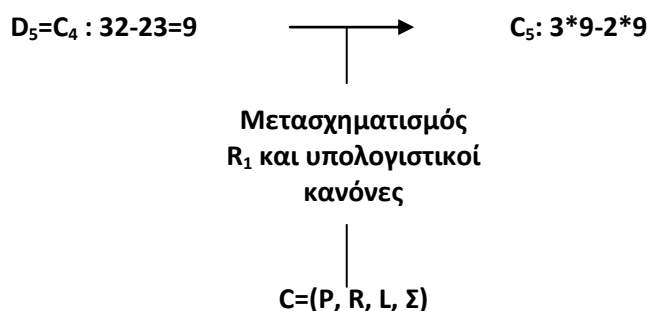
Το πρώτο απαγωγικό βήμα αναπαριστάται ως εξής:



Η Francesca μελετά όλα τα προηγούμενα παραδείγματα προσπαθώντας να καταλάβει γιατί τα αποτελέσματα είναι πολλαπλάσια του 9. Υπάρχει άλλο ένα απαγωγικό βήμα για το πρώτο παράδειγμα.



Η Francesca μετασχηματίζει την παράσταση 32-23 για να αποδείξει ότι είναι πολλαπλάσιο του 9.



Ο μετασχηματισμός R_1 στην ιδέα της Francesca είναι: «ένας αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή 10 φορές το πρώτο ψηφίο + το δεύτερο ψηφίο». Ο κανόνας αυτός εκφράζεται στο αριθμητικό πεδίο (L) αλλά μπορεί να γενικευτεί στο αλγεβρικό πεδίο

Στο επόμενο στάδιο είναι δυνατή η κατασκευή της απόδειξης από την Francesca.

Πίνακας 3.28. Απόδειξη

Francesca

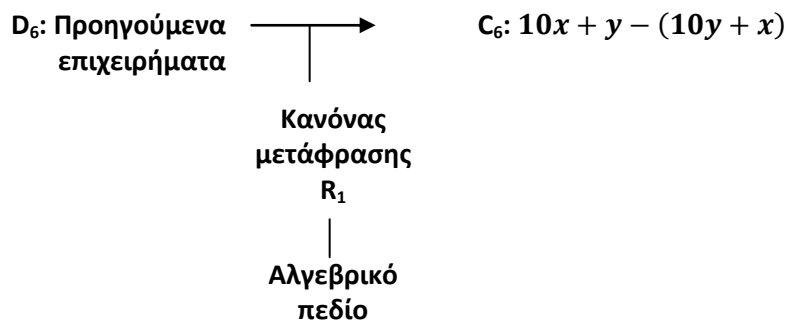
Τώρα αποδεικνύουμε γενικά

Με βάση τα παραδείγματα, μπορούμε να γράψουμε τους δύο αριθμούς στη μορφή $10x + y$ και $10y + x$. Τότε

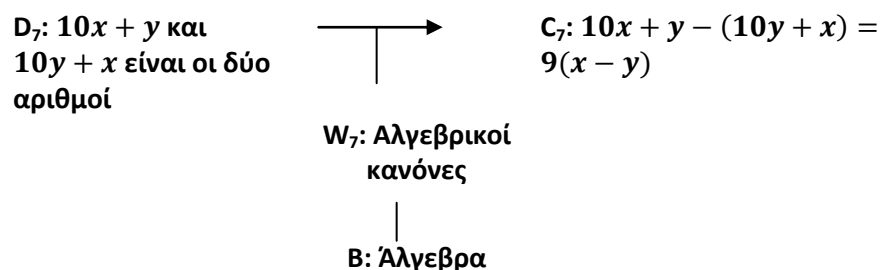
$$10x + y - (10y + x) = 10x + y - 10y - x = 9x - 9y = 9(x - y)$$

Είναι πολλαπλάσιο του 9

Ανάλυση



Παρατηρούμε ότι ο κανόνας δεν εφαρμόζεται λαμβάνοντας υπόψη το κείμενο του προβλήματος αλλά τα προηγούμενα αριθμητικά παραδείγματα.



Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η μαθήτρια κατάφερε να κατασκευάσει την απόδειξη γιατί η κατασκευαστική επιχειρηματολογία που ανέπτυξε έχει

επαγωγικό χαρακτήρα αφού η εικασία κατασκευάστηκε από γενίκευση των επιχειρημάτων. Η ύπαρξη της δομικής επιχειρηματολογίας με απαγωγικά βήματα βασισμένα στο αριθμητικό πεδίο οδήγησαν στην κατασκευή του μετασχηματισμού R_1 που ισχύει και στο αριθμητικό και στο αλγεβρικό πεδίο και βοήθησε να διατηρηθεί η σημασιολογία των αγνώστων. Η απόδειξη με χρήση του μετασχηματισμού R_1 είχε παραγωγικό χαρακτήρα.

Πρόβλημα 2: Τι συμπεραίνετε για την παράσταση $(p - 1)(q^2 - 1)/8$ αν το p και το q είναι περιττοί αριθμοί?

Από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών προέκυψαν δύο διαφορετικές διαδικασίες επίλυσης οι οποίες εστιάζουν στο αν η ύπαρξη απαγωγικών βημάτων στην φάση της επιχειρηματολογίας διευκολύνουν την κατασκευή της απόδειξης.

1. Περίπτωση 1: Κατασκευαστική Επιχειρηματολογία → Δομική Επιχειρηματολογία (ύπαρξη απαγωγικών βημάτων) → Σωστή απόδειξη. (Constructive argumentation → Structurant argumentation with abductive steps → Correct Proof).
2. Περίπτωση 2: Κατασκευαστική Επιχειρηματολογία → Δομική Επιχειρηματολογία (μη ύπαρξη απαγωγικών βημάτων) → Λανθασμένη απόδειξη. (Constructive argumentation → Structurant argumentation with no abductive steps → Incorrect Proof).

Η Pedemonte έχει αναλύσει τις απαντήσεις των μαθητών σε αυτό το πρόβλημα με δύο τρόπους: ο πρώτος αφορά τη χρήση μόνο του σχήματος του Toulmin (2007b), ενώ ο δεύτερος αφορά τη χρήση του σχήματος του Toulmin μαζί με το μοντέλο ckε (2008). Η δεύτερη ανάλυση είναι πιο πλήρης καθώς το εμπλουτισμένο αυτό μοντέλο επιτρέπει την κατηγοριοποίηση της εγγύησης ανάλογα με το σύστημα αναπαράστασης και μας επιτρέπει να ελέγχουμε το βαθμό στον οποίο η έννοια που κινητοποιήθηκε από τον μαθητή διευκολύνει τη μετάβαση ανάμεσα στα βήματα των δύο διαδικασιών.

Ανάλυση περίπτωσης 1: Constructive argumentation → Structurant argumentation with abductive steps → Correct Proof

Η Manuela κατασκευάζει εικασία από τη γενίκευση των αριθμητικών παραδειγμάτων. Η δομή αυτής της επιχειρηματολογίας είναι επαγωγική και το σύστημα αναφοράς είναι η αριθμητική.

Πίνακας 3.29. Κατασκευαστική Επιχειρηματολογία Constructive argumentation

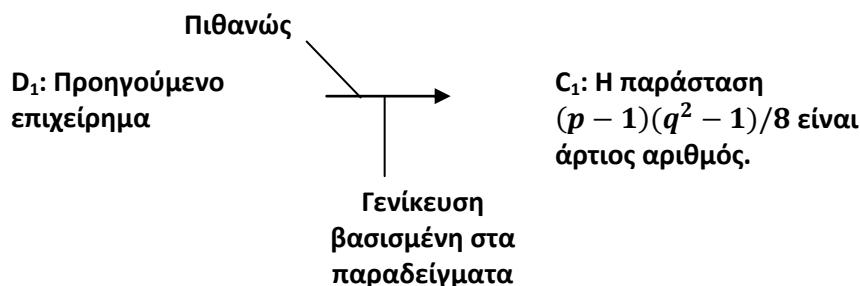
Manuela

Αν $p = 11$ και $q = 13$ τότε... (υπολογίζει) το αποτέλεσμα είναι 210

Αν $p = 7$ και $q = 9$ τότε... το αποτέλεσμα είναι 60

Είναι άρτιοι αριθμοί. Άρα πιθανώς ο $(p - 1)(q^2 - 1)/8$ είναι άρτιος.

Ανάλυση



Η εικασία είναι ένα γεγονός που κατασκευάστηκε ως γενίκευση αριθμητικών παραδειγμάτων. Τώρα ο μαθητής πρέπει να την δικαιολογήσει.

Η Manuela προσπαθεί να κατασκευάσει μια δομική επιχειρηματολογία ώστε να αιτιολογήσει την εικασία της. Αναλύει την παράσταση $(p-1)(q^2-1)/8$ κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των άρτιων και περιττών αριθμών. Δεν μπορεί να καταλήξει σε συμπέρασμα.

Πίνακας 3.30. Δομική επιχειρηματολογία I

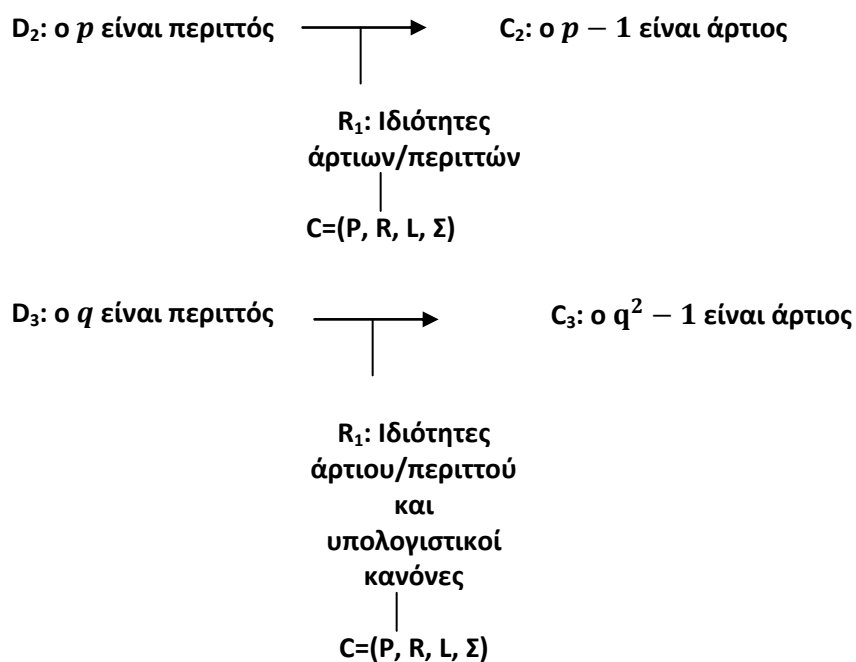
Manuela

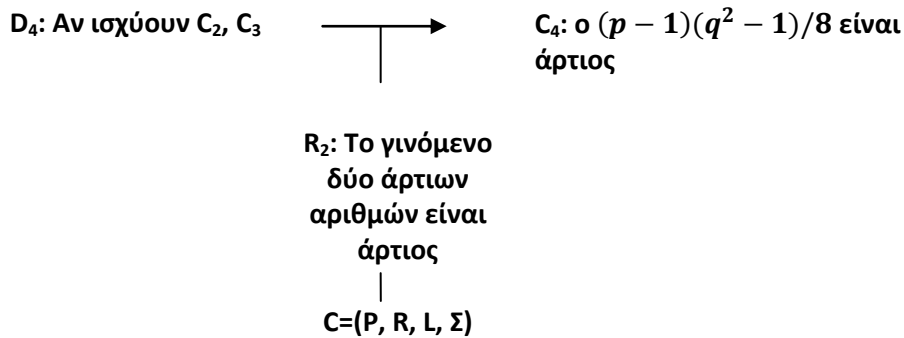
Αν ο p είναι περιττός, τότε ο $p-1$ είναι άρτιος

αν ο q είναι περιττός, τότε ο q^2-1 είναι άρτιος.

Τότε, αν ένας άρτιος πολλαπλασιαστεί με έναν άρτιο το αποτέλεσμα είναι άρτιος, άρα η παράσταση είναι άρτιος αριθμός.

Ανάλυση





Ο έλεγχος Σ είναι έγκυρος και στο αριθμητικό και στο αλγεβρικό πεδίο. Δε μπορούμε να πούμε σε ποιο πεδίο ενεργοποιεί την ιδέα (ίσως και στα δύο) επειδή ο έλεγχος είναι σαφής εδώ. Το σύστημα αναπαράστασης είναι η φυσική και εν μέρει η συμβολική γλώσσα. Ωστόσο, είναι σημαντικό όλοι οι κανόνες να είναι έγκυροι και στα δύο πεδία, αριθμητικό και αλγεβρικό.

Η Manuela καταλαβαίνει ότι ο ισχυρισμός C_4 δεν είναι επαρκής για να αιτιολογήσει την εικασία της και προσπαθεί να βρει στοιχεία που να της το επιτρέπουν.

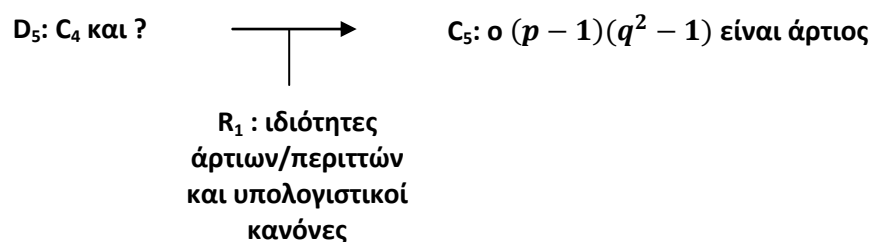
Πίνακας 3.31. Δομική επιχειρηματολογία II

Manuela

Γίνεται όμως και η διαίρεση με το 8.

Πρέπει να βρω κάτι άλλο για να πω ότι η παράσταση είναι άρτιος.

Ανάλυση



Αυτή είναι μία απαγωγική δομή.

Το τελευταίο επιχείρημα D_5 είναι αυτό που οδηγεί την Manuela να ψάξει για επιπλέον στοιχεία που θα αιτιολογήσουν την εικασία της. Προσπαθεί να αναλύσει την παράσταση (q^2-1) και με την χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων αντιλαμβάνεται ότι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει αυτή η παράσταση είναι 8, χωρίς όμως να διατυπώνει ότι η παράσταση διαιρείται ταυτόχρονα με το 8. Υποθέτουμε ότι έχει συναισθήσει αυτού του παράγοντα λόγω των αριθμητικών παραδειγμάτων που έχει χρησιμοποιήσει καθώς έχει δώσει διαφορετικές τιμές στη μεταβλητή q .

Πίνακας 3.32. Δομική Επιχειρηματολογία III

Manuela

Ο $q^2 - 1$ δεν μπορεί να ισούται με 2 ή 4 επειδή αν $q = 1$ τότε $q^2 - 1 = 0$ και αν $q = 3$ τότε $q^2 - 1 = 8$. Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός είναι το 8 και 8 διά 8 κάνει 1, άρα η παράσταση είναι άρτιος.

Ανάλυση

D₆: Αντικατάσταση
του $q^2 - 1$ με μερικά
παραδείγματα



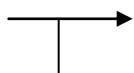
C₆: ο $q^2 - 1$ δεν μπορεί να ισούται
με 2 ή 4

Σύγκριση των
αριθμητικών
αντικαταστάσεων
στον τύπο

C=(P, R, L, Σ)

Εδώ ο έλεγχος Σ της ιδέας της Manuela πιθανώς είναι έγκυρος στο αριθμητικό και στο αλγεβρικό πεδίο. Πράγματι, το σύστημα αναπαράστασης L χρησιμοποιεί αριθμούς αλλά προσανατολίζεται στην αλγεβρική γλώσσα. Αυτή η συνδέει την προηγούμενη επιχειρηματολογία με την απόδειξη.

D₇:C₇



C₇: ο $q^2 - 1$ είναι τουλάχιστον 8

Σύγκριση των
αριθμητικών
αντικαταστάσεων
στον τύπο

C=(P, R, L, Σ)

Η δομική επιχειρηματολογία που έχει κατασκευάσει η Manuela χαρακτηρίζεται και από αριθμητική και από αλγεβρική αιτιολόγηση γεγονός που της επιτρέπει να βρεί τα στοιχεία που απαιτούνται για την κατασκευή της απόδειξης,

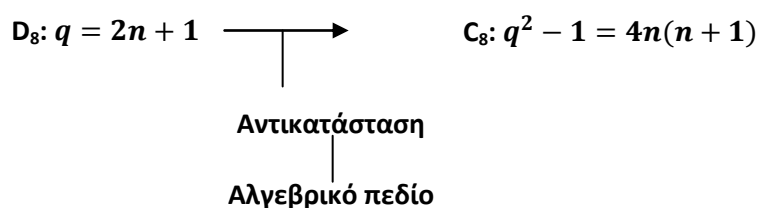
Πίνακας 3.33. Απόδειξη

Manuela

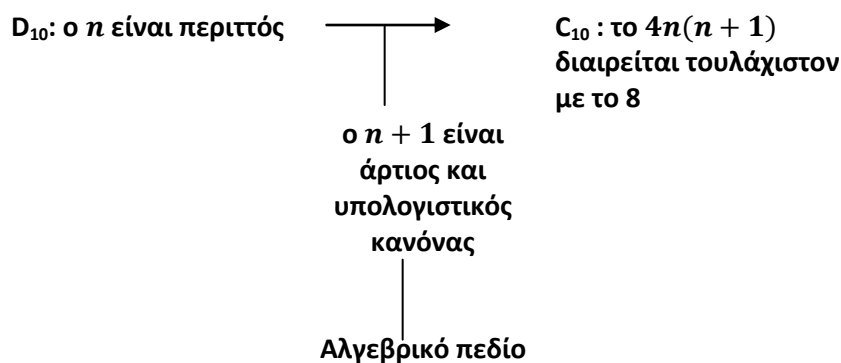
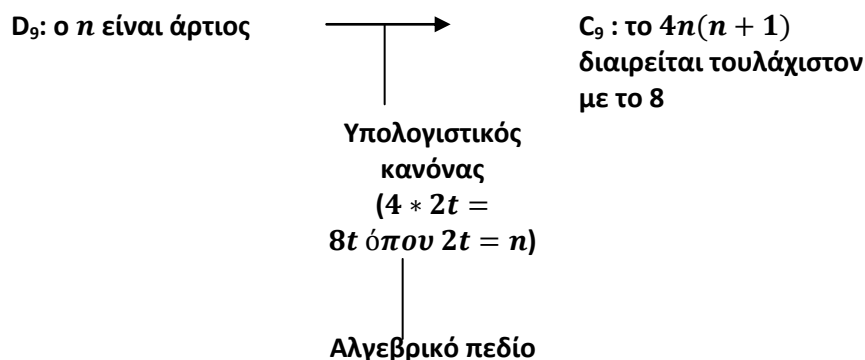
Αν $q = 2n + 1$ τότε $q^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(n + 1)$ το οποίο διαιρείται τουλάχιστον με το 4, με πηλίκο $n(n + 1)$, το οποίο σίγουρα διαιρείται με το 2, επειδή αν το n είναι άρτιος τότε εντάξει, ενώ αν το n είναι περιττός τότε το $n+1$ είναι άρτιος οπότε το $4n(n + 1)$ διαιρείται τουλάχιστον με το 8. Συμπεραίνουμε ότι το $q^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

Επομένως, ο $(p - 1)(q^2 - 1)/8$ είναι άρτιος αν τα p και q είναι περιττοί.

Ανάλυση



Η Manuela αναλύει τον τύπο $4n(n + 1)$ για να αποδείξει ότι ο $q^2 - 1$ είναι τουλάχιστον 8.



Συμπερασματικά οι λόγοι που οδήγησαν τη Manuela στη σωστή κατασκευή της απόδειξης είναι τρεις.

- I. Στην κατασκευαστική επιχειρηματολογία το σύστημα αναφοράς είναι η αριθμητική ενώ στην απόδειξη η άλγεβρα.
- II. Στην δομική επιχειρηματολογία ο έλεγχος της ιδέας είναι έγκυρος στο αριθμητικό πεδίο και επιτρέπει την ύπαρξη συνέχειας στο σύστημα αναφοράς από την κατασκευαστική επιχειρηματολογία στην απόδειξη.
- III. Στην δομική επιχειρηματολογία η ύπαρξη του απαγωγικού βήματος έκανε δυνατή την σύνδεση της με την απόδειξη.

Ανάλυση περίπτωσης 2: Constructive argumentation → Structurant argumentation with no abductive steps → Incorrect Proof

Ο Εlio δοκιμάζει διάφορες στρατηγικές. Η αρχική επιχειρηματολογία είναι ίδια με της Manuela και καταλήγει ότι η παράσταση $(p - 1)(q^2 - 1)$ είναι ένας άρτιος αριθμός. Παρόλα αυτά καταλήγει ότι αυτή η διαπίστωση δεν είναι χρήσιμη καθώς σύμφωνα με τα λεγόμενά του “γενικά δεν είναι αλήθες ότι αν διαιρέσω έναν άρτιο αριθμό με έναν άρτιο αριθμό το αποτέλεσμα θα είναι άρτιος αριθμός”. Κατόπιν δίνει τιμές στις μεταβλητές p και q και με γενίκευση καταλήγει να κατασκευάσει την εικασία.

Πίνακας 3.34. Συμπερασματική επιχειρηματολογία

Elio

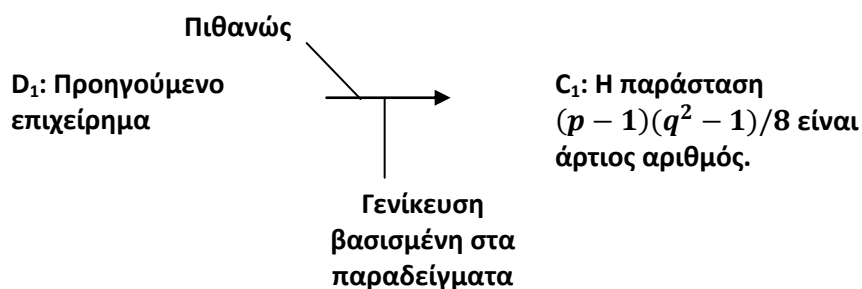
Αν $p = 1$ και $q = 3$ τότε $0 \times 8/8 = 0$

Αν $p = 5$ και $q = 7$ τότε $4 \times 48/8 = 24$

Αν $p = 11$ και $q = 13$ τότε $10 \times 168/8 = 210$

Φαίνεται ότι η παράσταση $(p - 1)(q^2 - 1)/8$ είναι άρτιος.

Ανάλυση



Η εικασία κατασκευάζεται σαν γενίκευση βασισμένη στα αριθμητικά παραδείγματα.

Η εικασία βασίζεται στα αριθμητικά παραδείγματα τα οποία επιτρέπουν στο μαθητή να καταλήξει ότι η παράσταση $(q^2 - 1)$ πιθανότατα διαιρείται με το 8.

Πίνακας 3.35. Δομική επιχειρηματολογία

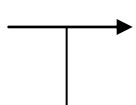
Ελιο

Και ...φαίνεται... ότι αντικαθιστώντας το q με έναν περιττό αριθμό, το $q^2 - 1$ διαιρείται με το 8.

Επομένως το $(p - 1)(q^2 - 1)/8$ είναι άρτιος αφού το $p - 1$ είναι άρτιος και το $(q^2 - 1)$ διαιρείται με το 8.

Ανάλυση

D₂: Ισχυρισμοί
βασισμένοι σε
αριθμητικά
παραδείγματα



C₂: το $q^2 - 1$ διαιρείται
πάντα με 8

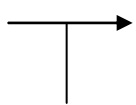
Γενίκευση
βασισμένη
σε
αριθμούς

C=(P, R, L,
Σ)

Ο έλεγχος Σ βασίζεται στα αριθμητικά παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν νωρίτερα για να δηλώσουν την εικασία.

Ο Ελιο συμπεραίνει ότι το $q^2 - 1$ διαιρείται με το 8. Επομένως, δικαιολογεί την εικασία.

D₃: το $p - 1$ είναι
άρτιος και C₂



C₃:C₁

Ιδιότητες
άρτιων/περιττώ
ν και
υπολογιστικοί
κανόνες

C=(P, R, L, Σ)

Ο έλεγχος Σ πάλι βασίζεται σε αριθμητικά παραδείγματα. Ο έλεγχος είναι έγκυρος στο αριθμητικό πεδίο.

Η δομική επιχειρηματολογία του Elio βασίζεται σε αριθμητικά παραδείγματα, έτσι ο έλεγχος της έννοιας που έχει κινητοποιηθεί είναι έγκυρος στο αριθμητικό πεδίο. Η μη ύπαρξη απαγωγικών βημάτων δε βοηθά τη σύνδεση των δύο διαδικασιών. Ο μαθητής προσπαθεί να κατασκευάζει την απόδειξη χωρίς καμία σύνδεση με την φάση της επιχειρηματολογίας και αποτυγχάνει.

Πίνακας 3.36. Προσπάθεια απόδειξης

Elio

Θα προσπαθήσω να αποδείξω την περίπτωση που p και q είναι περιττοί, οπότε $p = 2k + 1$ και $q = 2h + 1$

$(2k + 1 - 1) [(2h + 1)^2 - 1]/8 = 2k [(4h^2 + 1 + 4h) - 1]/8 = 2k (4h^2 + 4h)/8$
το οποίο δεν είναι πολλαπλάσιο του 2.

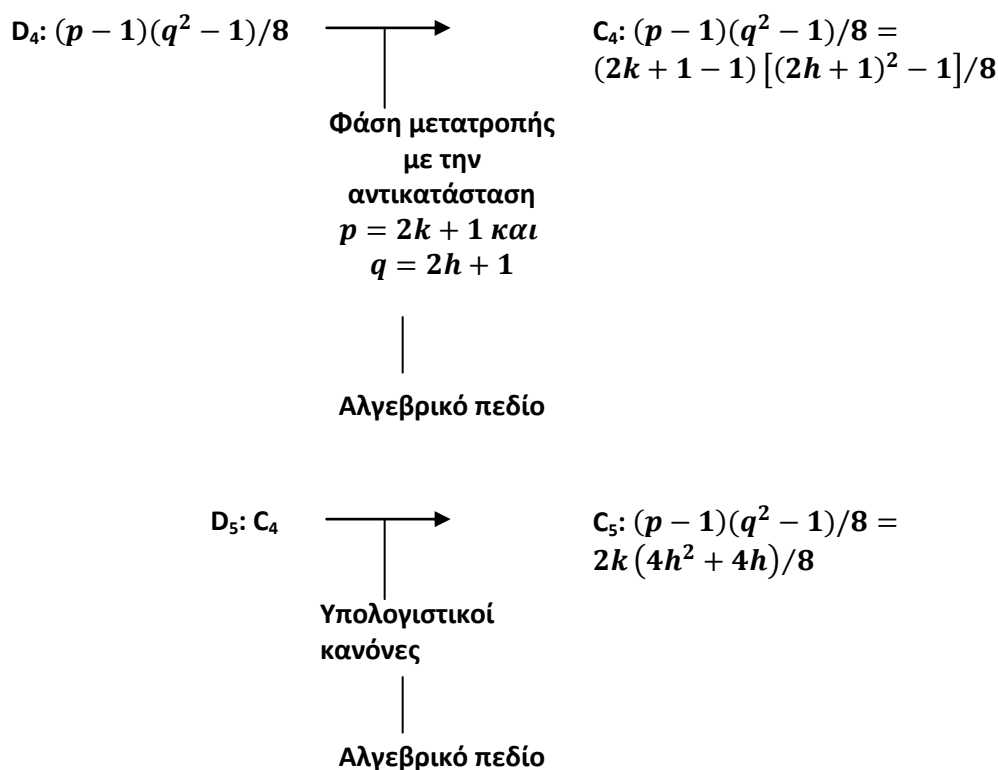
Απλοποιώντας έχουμε $k (4h^2 + 4h)/4$ και βγάζοντας κοινό παράγοντα το 2 έχουμε $2k (2h^2 + 2h)/4$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το h : $2kh (4h + 4)/8$

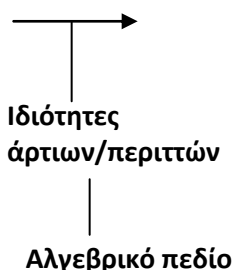
Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $4h$: $2k \times 4h (h + 1)/8$

Δεν μπορώ να το αποδείξω αλγεβρικά, αλλά είμαι σίγουρη ότι η παράσταση είναι άρτιος αριθμός.

Ανάλυση



D_6 : C_5 δεν είναι
πολλαπλάσιο του 2



C_6 : δεν μπορώ να συμπεράνω ότι
ο $(p-1)(q^2-1)/8$ είναι άρτιος

Στην απόδειξη ο Εlio εκτελεί άλλους μετασχηματισμούς του τύπου χωρίς επιτυχία. Τα υπόλοιπα επιχειρήματα είναι παρόμοια με τα προηγούμενα και καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα: ο Εlio δεν μπορεί να κατασκευάσει την απόδειξη.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι ο Εlio παρόλο που έχει λύσει το πρόβλημα δεν μπορεί να κατασκευάσει την απόδειξη για τους εξής λόγους:

- I. Η δομική επιχειρηματολογία βασίζεται στα αριθμητικά παραδείγματα και άρα ο έλεγχος της έννοιας είναι αριθμητικός ενώ για την απόδειξη χρειάζεται μετάβαση στο αλγεβρικό πεδίο.
- II. Η δομική επιχειρηματολογία δεν έχει απαγωγικό βήμα που θα διευκόλυνε τη μετάβαση και θα έδινε στον μαθητή τα στοιχεία που λείπουν για την κατασκευή της απόδειξης.

Συμπεράσματα για την άλγεβρα από την Pedemonte

Το σχήμα του Toulmin συνδυασμένο όμως με το μοντέλο $ck\varnothing$ αποτελεί έναν τρόπο ανάλυσης της διαδικασίας επίλυσης ανοικτών προβλημάτων στην άλγεβρα. Οι παράγοντες που φαίνονται να επιδρούν ώστε οι μαθητές να οδηγούνται πιο εύκολα στην σωστή απόδειξη είναι ότι:

- a. Ανάμεσα στην κατασκευαστική επιχειρηματολογία και την απόδειξη η ύπαρξη δομικής επιχειρηματολογίας διευκολύνει την μετάβαση.
- b. Αν η δομική επιχειρηματολογία περιλαμβάνει απαγωγικά βήματα τότε αυτά βοηθούν να διατηρηθεί η σύνδεση στην σημασιολογική φύση των αγνώστων μεταβλητών.
- c. Τα απαγωγικά βήματα της δομικής επιχειρηματολογίας, αν υπάρχουν, βοηθούν την κατασκευή της απόδειξης αν ευνοούν τη γνωστική ενότητα ανάμεσα στις δύο διαδικασίες.
- d. Αν η έννοια που έχει κινητοποιηθεί είναι έγκυρη τόσο στο αριθμητικό όσο και στο αλγεβρικό σύστημα αναφοράς τότε οι μαθητές διευκολύνονται σε μεγάλο βαθμό.
- e. Αν υπάρχει δομική συνέχεια ανάμεσα στις δύο διαδικασίες τότε αυτή συνήθως διευκολύνει την κατασκευή της απόδειξης στην άλγεβρα.

Γενικά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η απαγωγική επιχειρηματολογία διευκολύνει την κατασκευή της απόδειξης στο πλαίσιο της άλγεβρας.

3.2.3. Η έρευνα των Pedemonte & Buchbinder για τον ρόλο των παραδειγμάτων στην κατασκευή της απόδειξης

Τα παραδείγματα παίζουν σημαντικό ρόλο στη Διδακτική των Μαθηματικών, και γενικότερα στη Μαθηματική Επιστήμη, επειδή είναι εν δυνάμει φορείς γενικών αφηρημένων ιδεών. Η εξήγηση μέσω παραδειγμάτων αποτελεί ένα απαραίτητο, συνήθως άρρητο κομμάτι της επαγωγικής επιχειρηματολογίας (Watson & Mason, 2005).

Όταν υπάρχουν παραδείγματα στην επιχειρηματολογία, τότε είναι δυνατόν να επηρεαστεί και ο βαθμός βεβαιότητας που προσδίδεται στο επιχείρημα, καθώς και η αντίκρουση. Αν τα παραδείγματα υποστηρίζουν την εικασία που έχει κατασκευαστεί, τότε προσδίδεται στο επιχείρημα μεγάλος βαθμός βεβαιότητας. Αν όμως τα παραδείγματα παρουσιάζονται με τη μορφή αντιπαραδειγμάτων, τότε αποδυναμώνουν το επιχείρημα προσδίδοντάς του μικρό βαθμό βεβαιότητας.

Τα παραδείγματα εμφανίζονται τόσο στην κατασκευαστική όσο και στη δομική επιχειρηματολογία, με διαφορετικό ρόλο στην καθεμία. Κατά την κατασκευαστική επιχειρηματολογία, τα παραδείγματα βοηθούν στην κατασκευή της εικασίας, ενώ κατά τη δομική επιχειρηματολογία βοηθούν στην αιτιολόγησή της.

Οι Pedemonte & Buchbinder (2011) στην έρευνά τους σε μαθητές 17 ετών σχετικά με τον ρόλο των παραδειγμάτων προσπάθησαν να διαπιστώσουν τα εξής:

1. Ποιος είναι ο ρόλος των παραδειγμάτων στην κατασκευή και απόδειξη μιας εικασίας κατά τη διαδικασία επίλυσης ανοικτών προβλημάτων.
2. Τι χαρακτηριστικά έχουν τα επιχειρήματα που έχουν παραδείγματα στη σύνθεση τους και είτε οδηγούν στην κατασκευή της απόδειξης είτε όχι.

Για να διαπιστώσουν τη χρήση των παραδειγμάτων οι ερευνητές έθεσαν ως ανοικτό πρόβλημα στους μαθητές την εύρεση του τύπου που ικανοποιούν οι τριγωνικοί αριθμοί. Τριγωνικοί αριθμοί ονομάζονται οι αριθμοί που προκύπτουν από το άθροισμα των n πρώτων όρων. Σχηματικά μπορούμε να τους αναπαραστήσουμε με ισόπλευρα τρίγωνα των οποίων η βάση αποτελείται από n σημεία, η επόμενη γραμμή από $n-1$, ..., μέχρι την κορυφή που αποτελείται από 1 σημείο. Το ερώτημα τέθηκε ως εξής στους μαθητές:

“Θεωρήστε έναν τριγωνικό αριθμό. Μπορείτε να βρείτε το πλήθος των σημείων σε ένα τρίγωνο του οποίου η βάση αποτελείται από n σημεία;”

Από την γνωστική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών με χρήση του περιορισμένου σχήματος του Toulmin προέκυψαν τέσσερις διαφορετικοί τρόποι όπου τα παραδείγματα χρησιμοποιούνται στη διαδικασία επίλυσης.

Ανάλυση περίπτωσης 2: Διαδικαστική Γενίκευση → Όχι κατασκευή της απόδειξης

Η μαθήτρια Lara κατά την κατασκευαστική επιχειρηματολογία θεωρεί ορισμένα αριθμητικά παραδείγματα. Κατασκευάζει μια επαγωγική επιχειρηματολογία βασιζόμενη στη διαδικαστική γενίκευση αφού συνδέει κάθε παράδειγμα με το προηγούμενό του. Καταφέρνει με αυτόν τον τρόπο να κατασκευάσει έναν αναδρομικό τύπο $R_n = R_{n-1} + n$, τον οποίο όμως δεν μπορεί να αποδείξει. Για να υπάρξει δομική συνέχεια ανάμεσα στην επιχειρηματολογία που έχει κατασκευάσει και την απόδειξη χρειάζεται να κάνει χρήση της Μαθηματικής Επαγωγής η οποία πιθανότατα δεν της είναι οικεία και αυτός πιθανότατα είναι ο λόγος που δεν καταφέρνει να κατασκευάσει την απόδειξη.

Πίνακας 3.38.

Επιχειρηματολογία Lara	Ανάλυση
Αν n είναι 1, τότε το αποτέλεσμα είναι 1 ... Εάν $n = 2$, το αποτέλεσμα είναι $2 + 1$ που ισούται με 3 ... Αν $n = 3$, τότε έχουμε $3 + 2 + 1$ που ισούται με 6, αν το n είναι 4, τότε $4 + 3 + 2 + 1$ ισούται με 10... Κάθε φορά προθέτουμε το τελευταίο ψηφίο ... $n = 1 \quad R = 1$ $n = 2 \quad R = 2 + 1 = 3 = 1 + 2$ $n = 3 \quad R = 3 + 2 + 1 = 6 = 3 + 3$ $n = 4 \quad R = 4 + 3 + 2 + 1 = 10 = 6 + 4$ Γενικά για ένα τρίγωνο με n σημεία σε μία πλευρά έχουμε $R_n = R_{n-1} + n$. Τώρα έχω να αποδείξω τον κανόνα, αλλά δεν ξέρω πώς. Παρόλα αυτά, είμαι σίγουρη ότι είναι σωστά.	Η Lara κατασκευάζει την εικασία σα μια γενίκευση της διαδικασίας. Θεωρεί αποτελέσματα από τέσσερα διαδοχικά παραδείγματα και βρίσκει ένα γενικό νόμο που συνδέει κάθε επιχείρημα με το προηγούμενο του. Χρησιμοποιώντας το σχήμα του Toulmin μπορούμε να αναπαραστήσουμε την κατασκευαστική επιχειρηματολογία ως εξής: Ερώτηση: Είμαι σίγουρη πως είναι σωστό $D: C_1, C_1 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_3 \xrightarrow{\quad} C: R = R_{n-1} + n$ W: Διαδικαστική Γενίκευση Όπου $C_1, C_1 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_3$ είναι τα επιχειρήματα με τα οποία κάθε παράδειγμα είναι συνδεδεμένο με το προηγούμενό του. Κάθε ένα επιχείρημα μπορεί να αναπαρασταθεί με χρήση του μοντέλου του Toulmin. Για παράδειγμα, οι αναπαραστάσεις των $C_1 \rightarrow C_2$ και $C_2 \rightarrow C_3$ είναι: $D_1 = C_1: n = 1, R = 1 \xrightarrow{\quad} C_2: \text{για } n = 2$ $R = 2 + 1 = 3 = 1 + 2$ W: Υπολογιστικοί κανόνες. Κανόνας: Προσθέτουμε 2 στο R_1

	$D_2 = C_2: n = 2, R = 3 \longrightarrow C_3: n = 3,$ $R = 3 + 2 + 1 = 6$ $= 3 + 3$ W: Υπολογιστικοί κανόνες. Κανόνες: Προσθέτουμε 3 στο R_2 Ο βαθμός βεβαιότητας του επιχειρήματος $D \rightarrow C$ είναι ρητός. Η Lara λέει ότι ακόμα κι αν δεν είναι σε θέση να κατασκευάσει την απόδειξη, είναι βέβαια ότι το σκεπτικό της είναι σωστό. Ωστόσο, η ισχύς του επιχειρήματός της, δεν επηρεάζει την παραγωγή της απόδειξης.
--	---

Ανάλυση περίπτωσης 3: Διαδικαστική Γενίκευση $\rightarrow$ Κατασκευή της απόδειξης

Η μαθήτρια Sara θεωρεί πολλά αριθμητικά παραδείγματα, τα οποία της επιτρέπουν να κατασκευάσει μια εικασία. Έχουμε δηλαδή κατασκευαστική επιχειρηματολογία η οποία την οδηγεί στη συμπερασματική γενίκευση.

Πίνακας 3.39.

Κατασκευαστική Επιχειρηματολογία Sara	Ανάλυση
Η Sara έγραψε: $n = 1 \quad 1$ $n = 2 \quad 2 + 1$ $n = 3 \quad 3 + 2 + 1$ $n = 4 \quad 4 + 3 + 2 + 1$ $n = 5 \quad 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ $n = 6 \quad 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ $n = 7 \quad 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ Έπειτα παρατήρησε τι έγραψε και είπε: “Αν θεωρήσω ένα τρίγωνο με n σημεία σε μια πλευρά το αποτέλεσμα είναι: $n + (n - 1) + \dots + 1$”	Η Sara πιθανότατα κατασκεύασε την εικασία σα μια γενίκευση των αποτελεσμάτων. Σε αυτή την περίπτωση βρήκε ένα γενικό κανόνα. Χρησιμοποιώντας το σχήμα του Toulmin μπορούμε να αναπαραστήσουμε την κατασκευαστική επιχειρηματολογία ως εξής: $D: C_1, C_2, \dots, C_7 \longrightarrow C: \text{ένα τρίγωνο με } n$ $\text{σημεία, το αποτέλεσμα είναι: } n + (n - 1) + \dots + 1$ W: Συμπερασματική Γενίκευση

	Όπου $C_1, C_2, \dots, C_7$ είναι τα βήματα που παρήχθησαν από τα επιχειρήματα για το κάθε παράδειγμα. Η αναπαράσταση αυτών των εικασιών με χρήση του μοντέλου του Toulmin είναι απολύτως ανάλογες με αυτές της περίπτωσης 1: D_1: αν $n=1 \rightarrow C_1$: $R=1$ D_2: αν $n=2 \rightarrow C_2$: $R=2+1$ D_3: αν $n=3 \rightarrow C_3$: $R=3+2+1$... D_7: αν $n=7 \rightarrow C_7$: $R=7+6+5+4+3+2+1$
--	---

Στη συνέχεια προσπαθεί να αιτιολογήσει την εικασία που δημιούργησε στο προηγούμενο βήμα και έχουμε δομική επιχειρηματολογία κατά την οποία κατασκευάζει μια καινούργια εικασία. Για να την αιτιολογήσει δίνει ιδιαίτερη σημασία στους τριγωνικούς αριθμούς για $n=6$ και $n=7$. Αυτά τα παραδείγματα τα παίρνει ως αντιπροσωπευτικά κλάσεων το ένα των άρτιων αριθμών και το άλλο των περιττών αριθμών. Υπό αυτή την άποψη αποτελούν παραδείγματα γεννήτορες (generic examples) τα οποία την οδηγούν στη διαπίστωση ότι όλοι οι τριγωνικοί αριθμοί (και οι άρτιοι και οι περιττοί) ικανοποιούν την ίδια σχέση $\frac{n}{2} \cdot (n+1)$. Ιδιαίτερη σημασίας είναι το γεγονός ότι και τα δύο αυτά επιχειρήματα $D_1 \rightarrow C_1$ και $D_2 \rightarrow C_2$ έχουν παραγωγική μορφή.

Πίνακας 3.40.

Δομική Επιχειρηματολογία Sara	Ανάλυση
Ίσως μπορούμε να το γράψουμε με έναν καλύτερο τρόπο... Αν προσθέσουμε τον πρώτο αριθμό της κάθε περίπτωσης στο τελευταίο... και το δεύτερο αριθμό στον αριθμό πριν από τον τελευταίο... καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Η Sara παρατηρεί ότι το τελευταίο παράδειγμα ($n=7$) αλλά αναφέρεται επίσης και στα υπόλοιπα παραδείγματα ($n=5, n=6$). Το άθροισμα του πρώτου αριθμού (7) και του τελευταίου (1) είναι το ίδιο με το άθροισμα του (6) και του (2), δηλαδή 8. Επίσης το 5 και το 3 αλλά υπάρχει και το 4 που περισσεύει. Αν $n=6$ το άθροισμα είναι πάντα 7...	Τώρα η Sara θεωρεί παραδείγματα με ένα διαφορετικό τρόπο. Προσπαθεί να δικαιολογήσει την εικασία γράφοντας τη με ένα διαφορετικό τρόπο. Εδώ η εστίαση γίνεται σε δύο συγκεκριμένα παραδείγματα $n=7$ και $n=6$. $D_1: n=7 \xrightarrow{\quad} C_1$: ο αριθμός των σημείων είναι $(7+1) \cdot 3 + 4$ W: υπολογιστικοί κανόνες $D_2: n=6 \xrightarrow{\quad} C_2$: ο αριθμός των σημείων είναι $(6+1) \cdot 3$ W: υπολογιστικοί κανόνες

δεν υπάρχει κάποιος άλλος αριθμός να περισσεύει στη μέση... Γράφει: $n = 6 \quad 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ $n = 7 \quad 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ Αν ο n είναι άρτιος αριθμός μπορώ να γράψω το άθροισμα των n αριθμών από το 1 έως το n ως $\frac{n}{2} \cdot (n + 1)$ Αλλά εάν το n είναι ένας περιττός αριθμός, το άθροισμα των n αριθμών είναι: $\frac{n-1}{2} \cdot (n + 1) + \frac{n+1}{2}$ όπου είναι ο αριθμός στη μέση. Γράφει: $(n + 1) \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} =$ $\frac{n + 1}{2} \cdot (n - 1 + 1) = \frac{n + 1}{2} \cdot n$ που είναι το ίδιο! Οπότε το άθροισμα των n πρώτων αριθμών από το 1 έως το n είναι πάντα: $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Αργότερα η Σάρα κατασκευάζει μια απόδειξη.	Σε αυτό το σημείο, η Σάρα γενικεύει $D_3: D_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3$: αν n άρτιος, το άθροισμα των n αριθμών ισούται με $\frac{n}{2} \cdot (n + 1)$ W: Διαδικαστική Γενίκευση $D_4: D_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_4$: Αν n περιττός, το άθροισμα των n αριθμών ισούται με $(n + 1) \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$ W: Διαδικαστική Γενίκευση
---	--

Οι τύποι στους οποίους κατέληξε με τη διαδικαστική γενίκευση της έδωσαν όλα τα απαραίτητα στοιχεία που απαιτούνται για την απόδειξη.

Πίνακας 3.41.

Απόδειξη Sara	Ανάλυση
Η Σάρα γράφει: Αν n άρτιος αριθμός $T(n) = \left. \begin{array}{l} 1 + n + \\ 2 + n - 1 + \\ 3 + n - 2 + \\ \dots \end{array} \right\} \frac{n}{2} \text{ φορές}$ $T(n) = (n + 1) \cdot \frac{n}{2}$ Αν n περιττός	$D_5: n \text{ είναι } \longrightarrow C_5: T(n) = (n + 1) \cdot \frac{n}{2}$ άρτιος αριθμός W: αλγεβρικοί κανόνες $D_6: n \text{ είναι } \longrightarrow C_6: T(n) = (n + 1) \cdot \frac{n}{2}$ περιττός αριθμός W: αλγεβρικοί κανόνες

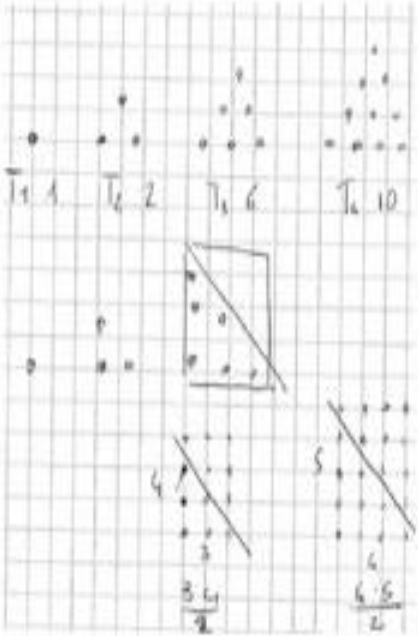
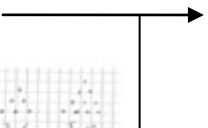
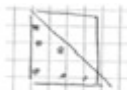
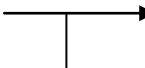
$T(n) = \left. \begin{array}{l} 1 + n + \\ 2 + n - 1 + \\ 3 + n - 2 + \\ \dots \end{array} \right\} \frac{n-1}{2} \text{ φορές} + \frac{n+1}{2}$ Τότε $T(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ για κάθε περίπτωση	$D_7: \begin{array}{ccc} D_5 & \longrightarrow & C_5 \longrightarrow C_6: T(n) = (n+1) \cdot \frac{n}{2} \\ D_6 & \longrightarrow & C_6 \end{array}$ για κάθε n W: όλοι οι n αριθμοί λήφθηκαν υπόψη (άρτιοι και περιττοί)
---	---

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι η Sara κατάφερε να λύσει το πρόβλημα γιατί υπήρξε γνωστική ενότητα ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη. Αυτό οφείλεται στη δομική συνέχεια ανάμεσα στις δύο διαδικασίες. Η δομική συνέχεια ήταν δυνατή γιατί η επιχειρηματολογία σε πρώτη φάση ήταν επαγωγική βασισμένη στη διαδικαστική γενίκευση και σε δεύτερη φάση παραγωγική λόγω των παραδειγμάτων γεννητόρων που χρησιμοποιήθηκαν. Από αυτό το γεγονός φαίνεται η άμεση σύνδεση των δύο αφού η επαγωγική επιχειρηματολογία της μαθήτριας οδήγησε στην ανάγκη της ύπαρξης των παραδειγμάτων αυτών.

Ανάλυση περίπτωσης 4: Διαδικαστική Γενίκευση με χρήση οπτικών παραδειγμάτων
→ Κατασκευή της απόδειξης

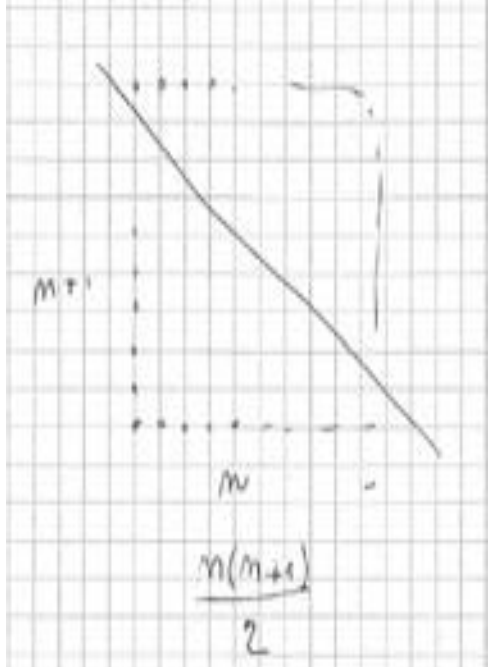
Ο Γιωνάννι θεωρεί την σχηματική – οπτική αναπαράσταση των τριγωνικών αριθμών και μετασχηματίζει τα ισοσκελή οξυγώνια τρίγωνα σε ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα. Εξετάζοντας τη δομή του T_3 αριθμού παρατηρεί ότι είναι τμήμα ενός παραλληλογράμμου (για την ακρίβεια τετραγώνου). Μπορεί σε αυτό το βήμα και δημιουργεί την εικασία ότι αν πάρει ένα αντίγραφο του T_3 τότε δημιουργείται παραλληλόγραμμο του οποίου το εμβαδό είναι το διπλάσιο του εμβαδού του T_3 . Το παράδειγμα αυτό γίνεται ο γεννήτορας της εικασίας του την οποία επιβεβαιώνει εξετάζοντας και την περίπτωση του T_4 τριγωνικού αριθμού. Με αυτή τη διαδικασία ο μαθητής ταυτόχρονα κατασκευάζει και αιτιολογεί την εικασία του, άρα έχουμε ταυτόχρονα και κατασκευαστική αλλά και δομική επιχειρηματολογία.

Πίνακας 3.42.

Κατασκευαστική και Δομική Επιχειρηματολογία Γιовαννι	Ανάλυση
 Όταν ο ίδιος θεωρεί την περίπτωση T_3 λέει: “Μπορώ να κατασκευάσω ένα ορθογώνιο ... είναι ένα διπλό τρίγωνο περιμένετε... έχω να κάνω το τρίγωνο διπλό γιατί τότε μπορώ να διαιρέσω δια 2.”	D_1:  C_1:   W: Αλλαγή Αναπαράστασης Ο Γιовαννι αλλάζει την αναπαράσταση, μετασχηματίζοντας τη διάταξη των κουκίδων στο τρίγωνο σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κουκίδες. Υπάρχει μια στιγμή κατά την οποία ένα από αυτά (το τρίγωνο T_3) γίνεται παράδειγμα γεννήτορας (generic example) γι' αυτόν. D_2:  C_2: Δύο αντίγραφα του T_3 δημιουργούν ένα ορθογώνιο, το οποίο διαιρεμένο δια 2 δίνει το T_3. W: Οπτικός Κανόνας Η εγγύηση αυτού του επιχειρήματος δεν είναι σαφής. Ο Γιовαννι είναι σε θέση να κάνει την εξής οπτικοποίηση ότι ένα ορθογώνιο είναι κατασκευασμένο από δύο αντίγραφα του T_3 και δημιουργεί μια σύνδεση μεταξύ αυτού και του T_3. D_3:  C_3: το μήκος του ορθογωνίου είναι 3 και το ύψος 4 W: Υπολογισμός εμβαδού για το ορθογώνιο Ο Γιовαννι μετρά τα σημεία στο ορθογώνιο που αποτελείται από τα δύο τρίγωνα T_3. Για το T_3 ο Τζιοβάνι βρίσκει έναν κανόνα: D_4: C_3  C_4: $T_3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$ W: Υπολογισμός Εμβαδού Μετά από αυτό, γράφει ένα άλλο επιχειρήμα για το T_4, το οποίο είναι επίσης ένα παράδειγμα γεννήτορας (generic example) γι' αυτόν. Και μετά από αυτό, μπορεί τελικά να γενικεύσει.

Ο μαθητής παίρνοντας ένα ορθογώνιο με πλευρές n και $n+1$ μπορεί και κατασκευάζει την απόδειξη.

Πίνακας 3.43.

Απόδειξη Giovanni	Ανάλυση
	Ανάλυση Ο Giovanni κατασκευάζει μια οπτική απόδειξη. D_5: σχήμα $\longrightarrow C_5: T_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$ W: Υπολογισμός εμβαδού Το προηγούμενο επιχείρημα είναι παραγωγικό, αλλά ο Giovanni γενικεύει τη διαδικασία που ανακαλύπτει στα παραδείγματα γεννήτορες (generic examples). Ο σχεδιασμός του T_n είναι το αποτέλεσμα μιας γενίκευσης του σχεδίου που παρουσιάζεται στα σχήματα. Σημειώστε ότι υπάρχουν δύο άρρητα επαγωγικά επιχειρήματα, όπου ο Giovanni γενικεύει την περίπτωση n, βασιζόμενος στη διαδικαστική γενίκευση. Αυτά είναι τα εξής: $D: D_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C$: δύο αντίγραφα του T_n κατασκευάζουν ένα ορθογώνιο, το οποίο αν διαιρεθεί δια 2, δίνει το T_n W: Διαδικαστική Γενίκευση $D: D_3 \longrightarrow C_3 \longrightarrow C$: το n-οστό ορθογώνιο έχει διαστάσεις n και $n+1$ W: Διαδικαστική Γενίκευση

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι ο Γιωναννί κατάφερε να κατασκευάσει την απόδειξη γιατί υπήρξε γνωστική ενότητα ανάμεσα στις διαδικασίες, αφού έγινε χρήση των ιδίων σχημάτων και στις δύο, αλλά και δομική συνέχεια ανάμεσα τους, αφού και οι δύο είχαν επαγωγική μορφή. Τέλος είναι αδιαμφισβήτητη η χρησιμότητα των γεννητόρων παραδειγμάτων αφού είναι αυτά που βοήθησαν τον μαθητή να κατασκευάσει της εικασία και να την αιτιολογήσει συνδέοντας την οπτική αναπαράσταση με τους αλγεβρικούς κανόνες.

Συμπερασματικά για την επίλυση του προβλήματος των τριγωνομετρικών αριθμών έπρεπε οι μαθητές σε πρώτη φάση να αναγνωρίσουν το μοτίβο που ακολουθούν οι αριθμοί αυτοί, να το γενικεύσουν με την κατασκευή μιας εικασίας και τέλος να το αιτιολογήσουν. Η ανάλυση της επιχειρηματολογίας των μαθητών με το περιορισμένο σχήμα του Toulmin στην περίπτωση των τριγωνομετρικών αριθμών οδήγησε τους ερευνητές στα εξής συμπεράσματα.

1. Η δομική επιχειρηματολογία με επαγωγική μορφή που βασίζεται στην συμπερασματική γενίκευση δεν ευνοεί την κατασκευή της απόδειξης.
2. Η δομική επιχειρηματολογία που βασίζεται σε παραδείγματα γεννήτορες και έχουν επαγωγική δομή ευνοούν την κατασκευή της απόδειξης.
3. Τα παραδείγματα γεννήτορες συνδέουν την επιχειρηματολογία με την απόδειξη αφού διευκολύνουν τόσο την γνωστική ενότητα όσο και τη δομική ενότητα.

3.3. Η επιχειρηματολογία ολόκληρης της τάξης και η δομή της

Αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την ανάλυση της επιχειρηματολογίας ολόκληρης της τάξης κάνοντας χρήση του σχήματος του Toulmin.

Ο τρόπος με τον οποίο είναι δυνατή η ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας στο πλαίσιο της τάξης είναι ο διάλογος. Ο διάλογος είναι η διαδικασία η οποία:

“επιτρέπει στους μαθητές να εξετάσουν τις ιδέες τους, να ακούσουν και ενσωματώσουν τις ιδέες άλλων, να εδραιώσουν τη σκέψη τους εκφράζοντας τις ιδέες τους με λόγια, και συνεπώς να κατασκευάσουν μια βαθύτερη κατανόηση των σημαντικών εννοιών” (McCrone 2005, σελ. 111, αναφορά στους Weber, Maher, Powell, Stohl-Lee, 2008, σελ. 247)

Ο διάλογος για να είναι εποικοδομητικός και να προάγει την μαθηματική επιχειρηματολογία χρειάζεται να έχει κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τα οποία είναι σημαντικά για την ανάπτυξη του επιθυμητού νοήματος. Μέσω του διαλόγου είναι δυνατό να αντικειμενοποιούνται πρότερες εμπειρίες των μαθητών, να λεκτικοποιούνται οι σκέψεις και οι ιδέες τους και να προωθείται η μαθηματική επιχειρηματολογία. Ενδεικτικά θα παρουσιάσουμε την έρευνα των Weber, Maher, Powell, Stohl-Lee (2008) η οποία εστιάζει στον τρόπο με τον οποίο ο διάλογος παράγει ευκαιρίες μάθησης.

Ο τρόπος με τον οποίο προωθείται ο διάλογος είναι ιδιαζούσης σημασίας. Σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση του διαλόγου παίζει τόσο ο ρόλος του εκπαιδευτικού αλλά και η συμπεριφορά και συμμετοχή των μαθητών. Η έρευνα του Krummheuer (2007) αναλύει την επιχειρηματολογία μαθητών πρώτης τάξης δημοτικού. Ο Krummheuer χρησιμοποιεί το σχήμα του Toulmin για να αναλύσει τη συμπεριφορά και συμμετοχή των μαθητών κατά την ανάπτυξη πρακτικών συλλογικής επιχειρηματολογίας. Η έρευνα των Reid, Knipping, Crosby (2011) πραγματεύεται τον τρόπο με τον οποίο οι αντικρούσεις αποκαλύπτουν τη λογική της πρακτικής που ακολουθείται στην σχολική αίθουσα.

Τέλος ο συνδυασμός όλων αυτών των στοιχείων δίνουν στην αποδεικτική διαδικασία ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Η αποδόμηση και ανακατασκευή της επιχειρηματολογίας ολόκληρης της τάξης, διαδικασία απαραίτητη ώστε να είναι εμφανή ακόμα και τα άρρητα συμφραζόμενα, δείχνει τη λογική που ακολουθείται από τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές. Το ζήτημα αυτό πραγματεύεται στην έρευνα της η Knipping (2008).

3.3.1. Η έρευνα των Weber, Maher, Powell & Stohl-Lee

Οι Weber, Maher, Powell & Stohl-Lee (2008) χρησιμοποιούν στην έρευνά τους το σχήμα του Toulmin για να αναδείξουν δύο στοιχεία. Πρώτον με ποιον τρόπο κατά τη συζήτηση μέσα στο πλαίσιο της σχολικής τάξης “προκαλούνται” οι μαθητές να είναι ρητοί για τις εγγυήσεις που χρησιμοποιούν κατά την επιχειρηματολογία τους. Δεύτερον ως εργαλείο για να δειχθεί πως κατά τη συλλογική συζήτηση και κάτω από ποιες συνθήκες είναι δυνατή η επιλογή των κατάλληλων εγγυήσεων για το πρόβλημα.

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της έρευνας των Weber & al.(2008) είναι ότι η έρευνα αυτή διεξήχθη σε καλοκαιρινή περίοδο μαθημάτων, οι δραστηριότητες δεν είχαν χρονικό περιθώριο για την ολοκλήρωσή τους και άρα οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να εκθέτουν τις απόψεις τους και να συνομιλούν μέχρι να καταλήξουν σε ένα κοινό αποδεκτό συμπέρασμα χωρίς χρονικό περιορισμό, γεγονός που όπως φαίνεται προάγει την κατανόηση των μαθητών, ωστόσο στα πλαίσια μιας σχολικής αίθουσας μια τέτοια αντιμετώπιση δεν είναι δυνατή λόγω χρονικών περιορισμών.

Το έργο που χρησιμοποίησαν στην έρευνά τους προερχόταν από τον χώρο των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ανάμεσα σε έξι εταιρίες αυτή που κατασκευάζει αμερόληπτα ζάρια. Οι μαθητές ήταν χωρισμένοι σε ζευγάρια και το κάθε ζευγάρι εξέταζε ένα ζάρι από δύο εταιρίες. Για να ελέγξουν αν το ζάρι ήταν αμερόληπτο, μοντελοποιήθηκε με χρήση του υπολογιστικού πακέτου Probability Explorer. Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης παρουσιάζονταν από τους μαθητές σε πίνακες. Στο τέλος όλοι οι πίνακες τοποθετήθηκαν μαζί και ζητήθηκε από τους μαθητές αφού εξετάσουν όλα τα ευρήματα να αποφασίσουν ποια από όλες τις εταιρείες κατασκευάζει αμερόληπτα ζάρια.

Ο σκοπός της έρευνας δεν είναι να εξετάσουν τις γνώσεις των μαθητών στις πιθανότητες και τη στατιστική αλλά να διαπιστώσουν με ποιους μηχανισμούς οι ομαδικές συζητήσεις συνεισέφεραν στην κατασκευή της μαθηματικής γνώσης. Καθώς η συζήτηση εξελίσσεται, το ενδιαφέρον των συνδιαλεγόμενων εστιάζεται στην εύρεση των κατάλληλων τύπων αιτιολόγησης που θα επιτρέψει τη μετατροπή των εμπειρικών δεδομένων σε παραγωγικά γενικά συμπεράσματα. Οι ερευνητές αφού ανέλυσαν τα πρακτικά των συνεδριών με το σχήμα του Toulmin, διαπίστωσαν ότι όταν ένας μαθητής επιχειρηματολογεί οι προκλήσεις που δέχεται από τους συμμαθητές του προωθούν τη κατανόηση ολόκληρης της τάξης με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

1. Οι μαθητές τείνουν, όταν επιχειρηματολογούν, να μην εκφράζουν ρητά τις εγγυήσεις που προσφέρουν για την αιτιολόγηση των συμπερασμάτων που εκφράζουν. Οι προκλήσεις που δέχεται το άτομο για επεξήγηση των

εγγυήσεων αυτών αναγκάζουν τη σαφή, ρητή και λεκτική διατύπωση τους γεγονότος που επιτρέπει πρώτα στον ίδιο τον ομιλητή να αποκτήσει πλήρη επίγνωση αυτών που εκφράζει και κατόπιν επιτρέπει στους συνδιαλεγόμενους του να έχουν καλύτερη κατανόηση του επιχειρήματος που παραθέτει. Από τη στιγμή που οι εγγυήσεις γίνονται ρητές αλλάζει η φύση τους και μετατρέπονται σε ισχυρισμούς που χρήζουν αιτιολόγησης, γεγονός που οδηγεί τον μαθητή να σκέφτεται πιο γενικές και αφηρημένες μαθηματικές ιδέες και συνεπώς τον βοηθά να αποκτήσει υψηλότερο επίπεδο μαθηματικής κατανόησης.

2. Σε πολλές περιπτώσεις οι προκλήσεις που δέχεται η επιχειρηματολογία ενός μαθητή μπορεί να οδηγήσει την ομάδα να αναγνωρίσει παρατυπίες στην μέθοδο αιτιολόγησης που χρησιμοποιήθηκε. Η πρόκληση που αφορά την προσπάθεια απόρριψης ή αποδοχής μιας μεθόδου αιτιολόγησης οδηγεί σε αναζήτηση και υιοθέτηση κατάλληλων κριτηρίων τα οποία χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για να αποδεχθούν ένα επιχείρημα ως αληθές. Τέτοιες περιπτώσεις για παράδειγμα εμφανίζονται όταν το άτομο βασίζεται στα συμπεράσματα για να επιχειρηματολογήσει και δεν λαμβάνει υπόψη το περιεχόμενο των δεδομένων.
3. Η ανάπτυξη από τους μαθητές παραγωγικής επιχειρηματολογίας βοηθά στην ανάπτυξη εικασιών και άτυπης επιχειρηματολογίας. Η διαπραγμάτευση των στοιχείων αυτών δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αντιπαρατεθούν γεγονός που θα επιτρέψει την ανάπτυξη γενικών μαθηματικών αρχών που οδηγεί στην κατασκευή παραγωγικών επιχειρημάτων, όπως οι μαθηματικές αποδείξεις. Αυτή η μέθοδος έχει διαπιστωθεί ότι προωθεί την κατανόηση και από την έρευνα της Pedemonte (2007) όπως διαπιστώσαμε και σε προηγούμενη παράγραφο.

Οι ερευνητές καταλήγουν στη σημασία της δημιουργίας κατάλληλου περιβάλλοντος με χρήση κατάλληλων δραστηριοτήτων οι οποίες θα παρέχουν ευκαιρίες ανάπτυξης “προκλήσεων” οι οποίες θα προωθήσουν τη μαθηματική επιχειρηματολογία, κατανόηση και μάθηση.

3.3.2. Η έρευνα του Krummheuer

Ο Krummheuer (2007) αναφέρει ότι “το να μαθαίνεις μαθηματικά είναι επιχειρηματολογική μάθηση” (“learning mathematics is argumentative learning”, σελ.62). Προϋπόθεση για να μάθει το άτομο μαθηματικά είναι να συμμετέχει σε καταστάσεις που προάγουν την μαθηματική επιχειρηματολογία με ρητό και εξειδικευμένο τρόπο, δηλαδή με τη χρήση κατάλληλης γλώσσας. Χρησιμοποιεί το σχήμα του Toulmin για να αναλύσει τον τρόπο με τον οποίο δομείται η επιχειρηματολογία κατά την αλληλεπίδραση της τάξης. Αυτό όμως από μόνο του θεωρεί ότι δεν είναι επαρκές καθώς δεν προσδιορίζει τη φύση της συμπεριφοράς και τη ποιότητα της συμμετοχής των μαθητών –δηλαδή αν το περιεχόμενο και η σύνταξη των λεγόμενων τους είναι ευθύνη των ιδίων ή όχι- κατά την ανάπτυξη πρακτικών συλλογικής επιχειρηματολογίας, για αυτόν τον λόγο υιοθετεί την ιδέα του Goffman για την αποσύνθεση του ρόλου του ομιλητή.

Οι ρόλοι που μπορεί να έχει ο ομιλητής ανάλογα με το αν η ευθύνη και η εφευρετικότητα των λεγόμενων του είναι προσωπική του υπόθεση ή όχι είναι οι εξής:

1. Ο ρόλος του “συγγραφέα”(author) κατά τον οποίο το άτομο εκφράζει τις προσωπικές του ιδέες με δικό του τρόπο.
2. Ο ρόλος του “αναμεταδότη” (relayer) κατά τον οποίο το άτομο δεν εκφράζει προσωπικές ιδέες, αλλά ιδέες άλλων ατόμων με τον ίδιο τρόπο που τις παρουσιάζουν και αυτά.
3. Ο ρόλος του “ενεδρευτή” (ghostee) κατά τον οποίο το άτομο χρησιμοποιεί εκφράσεις άλλων ατόμων για να εκθέσει τις προσωπικές ιδέες του.
4. Ο ρόλος του “εκπροσώπου” (spokesman) κατά τον οποίο το άτομο παραφράζει το περιεχόμενο προηγούμενων δηλώσεων άλλων ατόμων.

Ο μαθητής ανάλογα με τα στοιχεία που προσθέτει στην επιχειρηματολογία ολόκληρης της τάξης έχει και τον ανάλογο ρόλο. Δηλαδή ο μαθητής που συμβάλλει στην διαδικασία επιχειρηματολογίας με την παραγωγή εγγυήσεων έχει το ρόλο του “συγγραφέα”, ο οποίος είναι ενδεικτικός ότι το άτομο έχει κατανοήσει το αντικείμενο της δραστηριότητας και συμβάλλει ενεργά στην κατασκευή της απόδειξης της άσκησης. Ο μαθητής που έχει τον ρόλο του “εκπροσώπου” ή του “αναμεταδότη” ή και τους δύο είναι άτομα τα οποία δεν έχουν αποκτήσει αυτονομία στις δράσεις τους και δεν προάγουν ιδιαίτερα την επιχειρηματολογία. Μαθητές που έχουν τον ρόλο του “ενεδρευτή” είναι άτομα με αυτόνομη σκέψη που σημαίνει ότι κατανοούν τις δραστηριότητες στις οποίες λαμβάνουν μέρος απλά είτε δεν είναι σε θέση να τις εκφράσουν ρητώς με χρήση κατάλληλης γλώσσας είτε αισθάνονται ανασφάλεια που τους αποτρέπει από το να εκφραστούν με δικά τους λόγια.

Ο Krummheuer θεωρεί ότι είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να ερμηνεύει σωστά τα φαινόμενα που διαδραματίζονται στην τάξη κατά την καθημερινή πρακτική και να βελτιώνει την διδασκαλία του ώστε να προωθεί την επιχειρηματολογία (improving by interpreting). Το σχήμα του Toulmin μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για τον εκπαιδευτικό αφού αποτελεί έναν τρόπο να διακρίνει και να αναλύσει τα στοιχεία που προσθέτει ο μαθητής στην συλλογική επιχειρηματολογία της τάξης. Δεδομένου ότι οι αποφάσεις που παίρνει είναι άμεσες η κατηγοριοποίηση του τύπου του κάθε μαθητή, τόσο ως προς την επιχειρηματολογία ου όσο και ως προς το είδος συμμετοχής του, είναι σημαντική και τον βοηθά να διαφοροποιήσει το είδος της προσέγγισης που επιχειρεί με την κατάλληλη επιλογή ερωτήσεων και δραστηριοτήτων ώστε η αλληλεπίδραση στην σχολική αίθουσα να είναι ομαλή και να προωθείται το νόημα των δραστηριοτήτων.

3.3.3. Η έρευνα των Reid, Knipping, Crosby

Οι Reid, Knipping, Crosby (2011) χρησιμοποιούν το απλό σχήμα του Toulmin για να αναλύσουν την επιχειρηματολογία ολόκληρης της τάξης εστιάζοντας όμως στις αντικρούσεις (υπό την έννοια του αντίλογου(refutation)) που προφέρονται κατά την επιχειρηματολογία ανάμεσα στους μαθητές αλλά και ανάμεσα στους μαθητές με τον εκπαιδευτικό. Θεωρούν ότι οι τρόποι με τους οποίους αντικρούονται τα επιχειρήματα δείχνουν τη λογική της πρακτικής που ακολουθείται από την τάξη αλλά και το επιστημολογικό υπόβαθρο της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού.

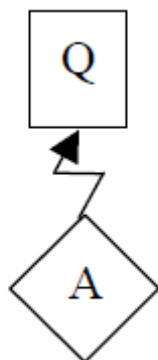
Όπως αναφέραμε ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός θα προωθήσει την επιχειρηματολογία που θα αναπτυχθεί κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής διαδικασίας έχει ιδιαίτερη σημασία και για έναν ακόμα λόγο. Θεωρείται ενδεικτικός των επιστημολογικών του πεποιθήσεων για την μαθηματική απόδειξη αλλά και για τον τρόπο με τον οποίο διδάσκει.

Τα είδη των αντικρούσεων που παρατηρήθηκαν κατά την παρατήρηση μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε διάφορα έργα είναι τα εξής:

1. Αντίκρουση επιχειρήματος που προέκυψε από μία ερώτηση.

Κατά την αποδεικτική διαδικασία στο πλαίσιο της τάξης ο εκπαιδευτικός θέτει ένα λανθασμένο ερώτημα το οποίο έχει ως σκοπό να εδραιώσει ένα ενδιάμεσο ή τελικό συμπέρασμα, το οποίο όμως χρήζει περαιτέρω διερεύνησης. Η διαδικασία διερεύνησης ξεκινά από το σημείο όπου όλοι οι μαθητές αντικρούουν την ερώτηση. Αυτή η διαδικασία δείχνει την Λακατοσιανή επιστημολογική θεώρηση του εκπαιδευτικού για τις

αντικρούσεις ως θεμελιώδες στοιχείο της προαγωγής της γνώσης μέσα στη τάξη. Η περίπτωση αυτή φαίνεται στο σχήμα 3.11..



Σχήμα 3.11 Αντίκρουση επιχειρήματος που προέκυψε από μία ερώτηση.
Q: Ερώτηση, A: Απάντηση, Η αντίκρουση συμβολίζεται με τη τεθλασμένη γραμμή. (Reid, Knipping, Crosby, 2011, σελ. 4)

2. Αντίκρουση της επάρκειας μιας εγγύησης ενώ τα δεδομένα και το συμπέρασμα είναι αποδεκτά.

Κατά τη διαπραγμάτευση του προβλήματος δίνονται είτε από τον εκπαιδευτικό είτε από τους μαθητές διάφορες εγγυήσεις οι οποίες ανεξάρτητα από το αν είναι σωστές ή όχι, αντικρούονται ως προς την επάρκειά τους να συνδέσουν τα δεδομένα με το συμπέρασμα. Μία ενδεικτική σχηματοποίηση αυτής της περίπτωσης φαίνεται στο σχήμα 3.12 Βάση των δεδομένων η μαθήτρια παραθέτει τη σωστή εγγύηση W2 η οποία όμως είναι ελλιπής. Ο εκπαιδευτικός επιζητεί από τη μαθήτρια στοιχεία ώστε να τεκμηριωθεί πλήρως αναγκάζοντάς την να αντικρούσει δίνοντας επιπλέον υποστηρικτικά επιχειρήματα. Η περίπτωση αυτή είναι ενδεικτική των πεποιθήσεων του εκπαιδευτικού καθώς εμμένει στους μαθητές ώστε η καθημερινή επιχειρηματολογία να μετατραπεί σε επιστημονική επιχειρηματολογία.

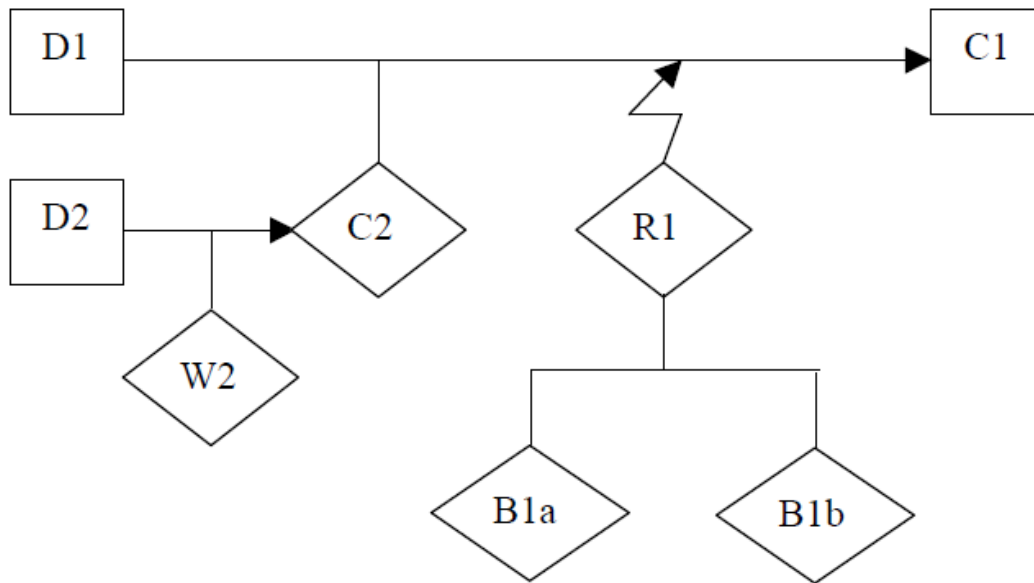


Figure 3. Refutation of sufficiency
(Di: Data, Ci: Conclusion, Wi: Warrant, Ri: Refutation,
B1a and B1b are backings supporting the warrant)

Σχήμα 3.12 Αντίκρουση της επάρκειας μιας εγγύησης ενώ τα δεδομένα και το συμπέρασμα είναι αποδεκτά. (Reid, Knipping, Crosby, 2011, σελ. 4)

3. Αντίκρουση της σχετικότητας των δεδομένων που υποστηρίζουν το συμπέρασμα.

Αυτή η περίπτωση σύμφωνα με τους ερευνητές είναι δυνατή όταν ο εκπαιδευτικός βασιζόμενος στην αυθεντία του αντικρούει επιχειρήματα των μαθητών χωρίς να τους προσφέρει περισσότερα στοιχεία για το αν είναι αληθή ή όχι και αναμένει από τους μαθητές να εκφράσουν πιο μαθηματικά τεκμηριωμένες εγγυήσεις στα επιχειρήματά τους.

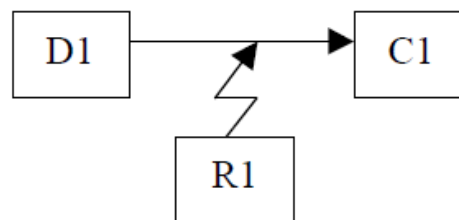


Figure 4. Refutation of relevance
(Di: Data, Ri: Refutation, Ci: Conclusion)

Σχήμα 3.13 Αντίκρουση της σχετικότητας των δεδομένων που υποστηρίζουν το συμπέρασμα. (Reid, Knipping, Crosby, 2011, σελ. 7)

4. Σύνθετη αντίκρουση.

Η αντίκρουση αυτή ονομάζεται σύνθετη από τους ερευνητές καθώς περιλαμβάνει στάδια. Ο μαθητής εκφράζει μια αρχική σκέψη (D1) για την οποία όμως δεν είναι σε θέση να δώσει εγγυήσεις. Ένας δεύτερος μαθητής εκφράζει και αυτός ένα επιχείρημα ($D2 \rightarrow C2$) το οποίο ο εκπαιδευτικός τον βοηθά άρρητα να το αντικρούσει. Η αντίκρουση αυτή προσφέρει στον πρώτο μαθητή τα δεδομένα (D3) ώστε να κατασκευάζει την απαραίτητη εγγύηση και να καταλήξει στο συμπέρασμα (C1). Σε αυτό το είδος είναι εμφανείς οι πεποιθήσεις που κατέχει ο εκπαιδευτικός αφού βοηθά να εξελιχθεί η διαδικασία παρεμβαίνοντας με την αυθεντία του σε κρίσιμα σημεία για την εξέλιξη του διδακτικού στιγμιότυπου.

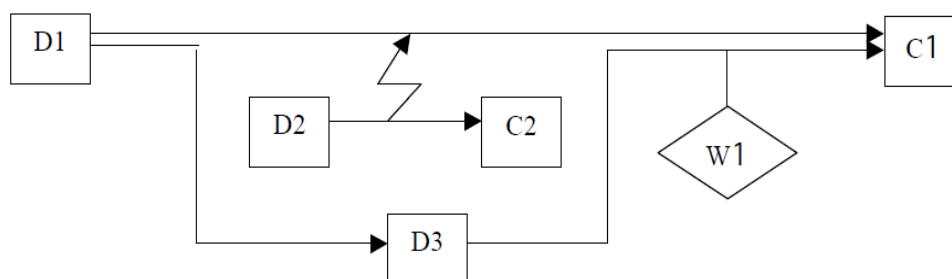


Figure 5. A complex refutation
(Di: Data, Ci: Conclusion, Wi: Warrant)

Σχήμα 3.14 Σύνθετη αντίκρουση. (Reid, Knipping, Crosby, 2011, σελ. 8)

Το σχήμα του Toulmin στην έρευνα των Reid, Knipping & Crosby (2011) αποτέλεσε το εργαλείο το οποίο βοήθησε στην ανάλυση της επιχειρηματολογίας ολόκληρης της τάξης και έκανε δυνατή την ανεύρεση των υποκρυπτόμενων επιστημολογικών πεποιθήσεων που κατέχουν οι εκπαιδευτικοί για τον ρόλο τους στην εξέλιξη της επιχειρηματολογίας αλλά και για τη μαθηματική απόδειξη. Αν οι επιστημολογικές πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού για τον τρόπο ανάπτυξης της γνώσης ακολουθούν τη θεωρία του Lakatos και γενικά τις σύγχρονες επιστημονικές θεωρήσεις για την κατασκευή της γνώσης μέσω της αλληλεπίδρασης των ατόμων, αυτές αντικατοπτρίζονται στις διδακτικές του πρακτικές με την υιοθέτηση ανάλογης στάσης ως προς τον τρόπο που προωθεί το διάλογο.

3.3.4. Η έρευνα της Knipping

Η Knipping (2008) στην έρευνά της μελετά τη δομή της επιχειρηματολογίας και τα χαρακτηριστικά της κάθε δομής που κατασκευάζεται από ολόκληρη την τάξη κατά τη διαπραγμάτευση μιας μαθηματικής απόδειξης ή ενός προβλήματος.

Η επιχειρηματολογία ολόκληρης της τάξης αποτελείται από επιμέρους επιχειρήματα των μαθητών αλλά και του εκπαιδευτικού τα οποία αναλύονται με το σχήμα του Toulmin. Κάθε επιμέρους επιχείρημα ορίζεται από την Knipping ως ένα argumentation stream (AS).

Η Knipping (2003) θεωρεί ότι η μετάβαση στο πλαίσιο της τάξης από τον ένα ισχυρισμό στον άλλο ή από το ένα argumentation stream στο άλλο, δεν γίνεται με γραμμικό τρόπο ή με τη διαδικασία της “ανακύκλωσης” όπως την ορίζει ο Duval, δηλαδή το συμπέρασμα να γίνεται υπόθεση για το επόμενο βήμα μέχρι να καταλήξουμε στην απόδειξη του θεωρήματος ή τη λύση της άσκησης, αλλά είναι μια διαδικασία περίπλοκη και σύνθετη.

Για να είναι δυνατή μια τέτοια ανάλυση της επιχειρηματολογίας ολόκληρης της τάξης προτείνει την εξής διαδικασία. Σε πρώτη φάση προτείνεται ο διαχωρισμός της αποδεικτικής διαδικασίας σε επεισόδια όπου θα ανακατασκευαστούν οι διάλογοι ώστε να περιέχονται και τα στοιχεία που είναι άρρητα και να είναι εμφανές το νόημα τους. Σε δεύτερη φάση προτείνεται η ανάλυση των επιμέρους επιχειρημάτων που αποτελούν την τοπική επιχειρηματολογία (local arguments) και κατόπιν η ανάλυση της σύνδεσής τους ώστε να φανεί ο τρόπος μετάβασης από το ένα επιχείρημα στο επόμενο, κατασκευή των argumentation streams, καθώς κατασκευάζεται η ολική επιχειρηματολογία της τάξης(global argument). Σε τρίτη φάση προτείνεται η σύγκριση των δομών που σχηματίζουν τα επιχειρήματα ώστε να αποκαλυφθεί η λογική που υποκρύπτεται. Οι φάσεις αυτές μπορούν να παρασταθούν πιο αναλυτικά με τα εξής βήματα.

Τα βήματα:

1. Χωρισμός των επεισοδίων.
2. Ανάλυση κάθε επεισοδίου ώστε να διευκρινιστούν οι στόχοι και οι ισχυρισμοί που αιτιολογήθηκαν.
3. Ανακατασκευή κάθε επιχειρήματος και ανάλυσή του με το σχήμα του Toulmin.
4. Εύρεση συνδέσεων ανάμεσα στα επιχειρήματα ώστε να καθοριστούν τα argumentation streams.
5. Εύρεση του μοτίβου που ακολουθούν τα argumentation streams.

Η έρευνα της Knippling (2008) έχει στοχεύει στην εύρεση της δομής που ακολουθούν η ολική επιχειρηματολογία (global argumentation structures). Από την ανάλυση διαφορετικών μαθημάτων, σε έργα που αφορούσαν την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος, στην τάξη η συγγραφέας κατέληξε Η δομή ενός μαθήματος μπορεί να έχει δύο διαφορετικές μορφές, τη μορφή της πηγής (Source Structure) και τη μορφή της δεξαμενής (Reservoir Structure).

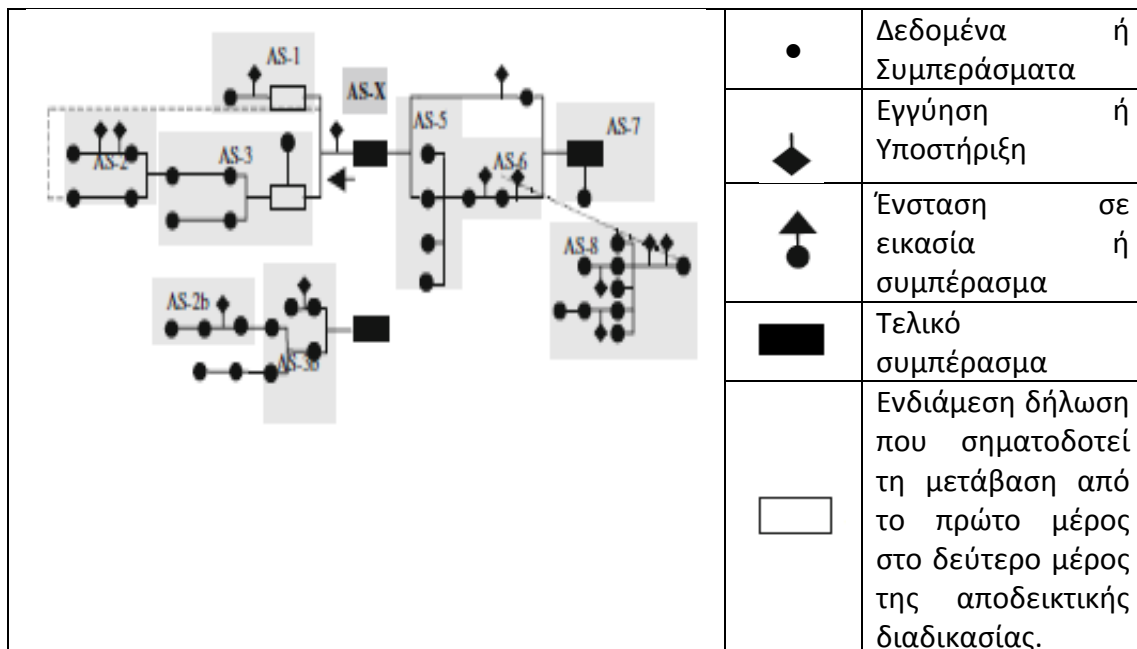
Όταν κατά τη συζήτηση στην τάξη για την απόδειξη μιας πρότασης “τα επιχειρήματα και οι ιδέες πηγάζουν από διαφορετικές πηγές, όπως το νερό που αναβλύζει από πολλές πηγές”(Knippling, 2008, σελ. 437) τότε το μάθημα έχει δομή που χαρακτηρίζεται ως source structure. Ο εκπαιδευτικός θέτει ανοικτά ερωτήματα που βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν εικασίες. Οι διάφορες εικασίες αλλά και επιχειρήματα γίνονται αντικείμενο συζήτησης στην τάξη με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται διαφορετικές αιτιολογήσεις, σε όλα τα στάδια της επεξεργασίας του θέματος, οι οποίες αναπαριστώνται στο σχήμα με παράλληλα streams. Οι λανθασμένες εικασίες έχουν ιδιαίτερη σημασία καθώς η συζήτηση για τη διάψευσή τους έχει πολλαπλά οφέλη για την βαθύτερη κατανόηση των μαθητών αλλά και τη ροή του μαθήματος. Ένα σχήμα για το πώς μοιάζει η δομή ενός source structure μαθήματος είναι αυτό που παραθέτει η Knippling από ένα μάθημα που αφορούσε την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος στη Γερμανία.

Πίνακας 3.44.

	•	Δεδομένα ή Συμπεράσματα
	◆	Εγγύηση ή Υποστήριξη
	▲	Ένσταση σε εικασία ή συμπέρασμα
	■	Τελικό συμπέρασμα
	□	Ενδιάμεση δήλωση που σηματοδοτεί τη μετάβαση από το πρώτο μέρος στο δεύτερο μέρος της αποδεικτικής διαδικασίας.

Η μορφή επιχειρηματολογίας Reservoir Structure όταν κατά τη συζήτηση στην τάξη για την απόδειξη μιας πρότασης “τα επιχειρήματα ρέουν προς ενδιάμεσα συμπεράσματα - στόχους που οργανώνουν την όλη επιχειρηματολογία σε διακριτά και αυτοδύναμα κομμάτια”(Knirring, 2008, σελ. 437) τότε το μάθημα έχει δομή reservoir structure. Για να κάνει πιο κατανοητή αυτή τη δομή η Knirring συνεχίζει αναφέροντας ότι “τα κομμάτια που απαρτίζουν την επιχειρηματολογία είναι σαν δεξαμενές που συγκεντρώνουν και διυλίζουν το νερό προτού του επιτρέψουν να ρεύσει στο επόμενο στάδιο”(σελ.437). Η ανάπτυξη εικασιών, η προσπάθεια διάψευσής τους, οι αντικρούσεις, τα παραδείγματα δεν έχουν κανένα ρόλο σε αυτή τη δομή η οποία εστιάζει μόνο στη μελέτη των σχέσεων ανάμεσα στα δεδομένα.

Πίνακας 3.45.



Συγκρίνοντας τις δύο μεθόδους παρατηρούμε ότι το κύριο χαρακτηριστικό της δομής source structure είναι να βοηθήσει τους μαθητές να καταλάβουν το λόγο για τον οποίο είναι σωστό το θεώρημα σε πρώτη φάση, και σε δεύτερη φάση να κατασκευάσουν την απόδειξη. Ενώ το κύριο χαρακτηριστικό της δομής reservoir structure είναι ότι η διαδικασία επικεντρώνεται στην κατασκευή της απόδειξης και όχι στην ανάπτυξη της κατανόησης.

Η Knipping θεωρεί ότι είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να είναι ενήμερος των μεθόδων που ακολουθεί για να προαγάγει την επιχειρηματολογία των μαθητών. Οι δύο τύποι μαθημάτων που αναλύσαμε είναι ενδεικτικοί του σημαντικού ρόλου που έχει ο εκπαιδευτικός. Ο τρόπος ανάλυσης της επιχειρηματολογίας ολόκληρης της τάξης που προτείνει μπορεί να αποτελέσει ένα εργαλείο διερεύνησης και σύγκρισης διδακτικών πρακτικών ιδιαίτερα κατά τη διδασκαλία διαφορετικών αποδεικτικών διαδικασιών.

3.3.5. Συμπεράσματα για την επιχειρηματολογία ολόκληρης της τάξης και της δομής της

Ο εκπαιδευτικός αντιμετωπίζει διλήμματα και προκλήσεις συνεχώς μέσα στην σχολική αίθουσα. Κάθε δραστηριότητα που δίνει στους μαθητές κάθε ερώτηση που θέτει, κάθε αντίκρουση και απάντηση που δίνει πρέπει να είναι κατάλληλα σχεδιασμένη ώστε να προαγάγει την κατανόηση των μαθητών. Για να επιτευχθεί ο στόχος αυτός πρέπει να διαθέτει εργαλεία τα οποία θα τον βοηθήσουν σε αυτό του το έργο.

Το σχήμα του Toulmin μπορεί να αποτελέσει ένα εργαλείο χρήσιμο για τον εκπαιδευτικό. Έχοντας συνεχώς υπόψη του τα στοιχεία της δομής μιας σωστά τεκμηριωμένης επιχειρηματολογίας είναι δυνατόν να εστιάζει σε συγκεκριμένα σημεία τα οποία θα προωθούν την σωστή δόμηση και κατασκευή της γνώσης από τους μαθητές.

3.4. Η επιχειρηματολογία των εκπαιδευτικών

Κατά την αλληλεπίδραση με τους μαθητές οι εκπαιδευτικοί είναι συνεχώς επιφορτισμένοι με το να προσφέρουν κατάλληλα επιχειρήματα στις απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές. Ο τρόπος με τον οποίο επιχειρηματολογούν αντικατοπτρίζει τόσο το επιστημονικό τους υπόβαθρο όσο και το επιστημολογικό τους υπόβαθρο.

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε δύο έρευνες που χρησιμοποιούν το σχήμα του Toulmin. Και οι δύο έρευνες έχουν ως αντικείμενο διερεύνησης τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών σε υποθετικές απαντήσεις μαθητών. Ωστόσο η ανάλυση τους διαφέρει.

Οι Giannakoulis, Mastorides, Potari & Zachariades (2010) διερευνούν τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών ως προς την μεθοδολογία που θα χρησιμοποιήσουν για την αντίκρουση (υπό την έννοια του refutation) των λανθασμένων απαντήσεων. Η μεθοδολογία που επιλέγει ο κάθε εκπαιδευτικός είναι ενδεικτική τόσο των γνώσεων του σε πρώτο επίπεδο όσο και των διδακτικών πρακτικών που ακολουθεί.

Η έρευνα των Nardi, Biza & Zachariades (2011) έχει ως σκοπό να ερευνήσει τα επιχειρήματα των εκπαιδευτικών όχι τόσο ως προς την μαθηματική τους ακρίβεια αλλά ως προς τους υπόλοιπους παράγοντες που επιδρούν σε αυτά. Παράγοντες που συνδέονται με τις πεποιθήσεις που κατέχουν για τα μαθηματικά και πως αυτά πρέπει να διδάσκονται στο σχολείο, με τις πρότερες εμπειρίες των ίδιων με τα μαθηματικά, με θεσμικούς περιορισμούς που θέτονται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών και τέλος με παράγοντες που συνδέονται με την επαγγελματική εμπειρία τους.

3.4.1. Η έρευνα των Giannakoulis, Mastorides, Potari & Zachariades (2010)

Οι Giannakoulis, Mastorides, Potari & Zachariades (2010) κάνουν μια κατηγοριοποίηση των τρόπων με τους οποίους οι καθηγητές των μαθηματικών απαντούν όταν καλούνται να πείσουν τους μαθητές για επιχειρήματα που έχουν κατασκευάσει και είναι λανθασμένα στο πλαίσιο της ανάλυσης.

Στην έρευνά τους χρησιμοποιούν τρία προβλήματα απειροστικού λογισμού και αντίστοιχες υποθετικές απαντήσεις μαθητών οι οποίες είναι λανθασμένες αφού περιέχουν τυπικές δυσκολίες - λάθη που αντιμετωπίζουν – κάνουν οι μαθητές κατά την επίλυσή τους. Η φύση των λαθών είναι αλγεβρική και αφορά τις ιδιότητες των ανισοτήτων και των απολύτων τιμών. Η δομή της επιχειρηματολογίας των 18 καθηγητών (έμπειρων και μη) αναλύθηκε με το σχήμα του Toulmin.

Τα προβλήματα είναι τα εξής:

Πρόβλημα 1:

A.1. Task 1

Q1: Let $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be two sequence such that $\alpha_n, b_n > 0$ for $n = 1, 2, \dots$. If $\alpha_n \rightarrow \alpha$ and $b_n \rightarrow b$ and $\alpha, b > 0$, then $a_n/b_n \rightarrow a/b$.

Proof: Since $\alpha_n \rightarrow \alpha$ and $a/2 > 0$ there exists $n_1 \in \mathbb{N}$ such that $|a_n - \alpha| < a/2$ for every $n \geq n_1$. So, we have $a/2 < a_n < 3a/2$ for every $n \geq n_1$. Similarly, since $b_n \rightarrow b$ and $b/2 > 0$, there exists $n_2 \in \mathbb{N}$ such that $b/2 < b_n < 3b/2$ for every $n \geq n_2$. From the above, we obtain $a/b < a_n/b_n < a/b$ for every $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, and so, $\lim a_n/b_n = a/b$.

Το λάθος έγκειται στο γεγονός ότι ο μαθητής μετέφερε την ιδιότητα της διαίρεσης κατά μέλη από την ισότητα στην ανίσωση που δεν ισχύει.

Πρόβλημα 2:

A.2. Task 2

Q2: If $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, and $|f(x)| \leq 1$ for $-1 \leq x \leq 1$, then $|f'(x)| \leq 4$ for $-1 \leq x \leq 1$.

Proof: Since $|f(1)| \leq 1$ we obtain $|a + b + c| \leq 1$. So, $|a| + |b| + |c| \leq 1$.

For $-1 \leq x \leq 1$ we have $|f'(x)| = |2ax + b| \leq |2ax| + |b| = 2|a||x| + |b| \leq 2|a| + |b|$.

So, $|f'(x)| \leq 2|a| + |b| \leq 2(|a| + |b| + |c|) \leq 2 \leq 4$ for every $-1 \leq x \leq 1$.

Το λάθος έγκειται στη δυσκολία που δημιουργείται όταν η ανισότητα έχει στη σύνθεσή της απόλυτα.

Πρόβλημα 3:

A.3. Task 3

Q3: Check if the following statement is correct.

"Let $(\alpha_n)_n, (b_n)_n$ be two sequences. If $0 \leq \alpha_n \leq b_n$ for every $n \in \mathbb{N}$, and $b_n \rightarrow b$, then $\alpha_n \rightarrow b$."

Proof: Since $b_n \rightarrow b$, for every $\varepsilon > 0$ there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $|b_n - b| < \varepsilon$ for every $n \geq n_0$. From the hypothesis we obtain $|\alpha_n - b| \leq |b_n - b|$. So, for every $\varepsilon > 0$ there exists $n_0 \in \mathbb{N}$, such that $|\alpha_n - b| < \varepsilon$ for every $n \geq n_0$. Thus, $\alpha_n \rightarrow b$. Therefore, the statement is correct.

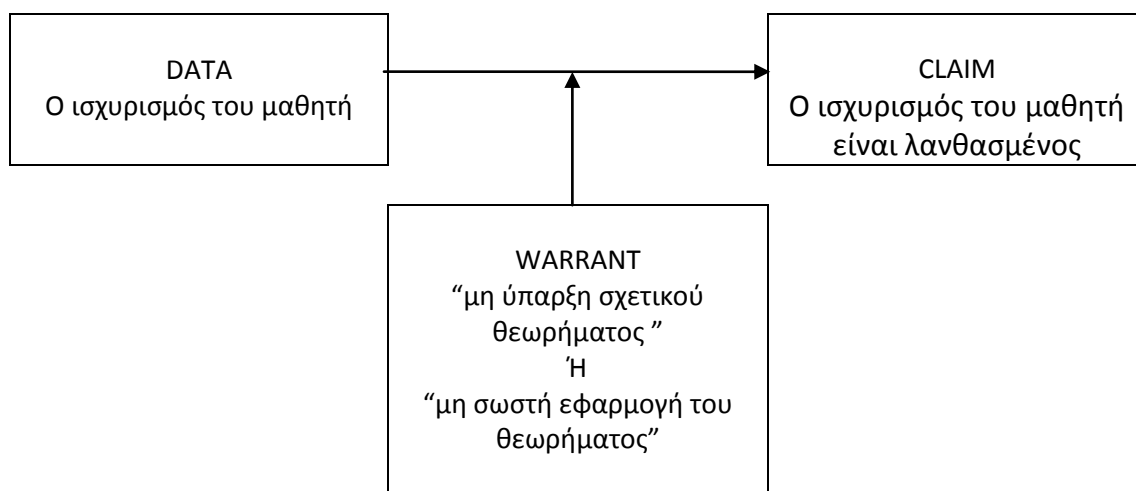
Το λάθος έγκειται στη μεταφορά ιδιοτήτων από την ισότητα στην ανισότητα αλλά και στις απόλυτες τιμές.

Η πλειοψηφία των καθηγητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα βάσισε την επιχειρηματολογία τους μόνο στη χρήση της μαθηματικής θεωρίας, λίγοι ήταν αυτοί οι οποίοι έκαναν χρήση μόνο αντιπαραδείγματος ενώ υπήρξαν και καθηγητές που έκαναν και χρήση θεωρητικού επιχειρήματος και αντιπαραδείγματος.

Η χρήση της θεωρίας από τους καθηγητές έγινε με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

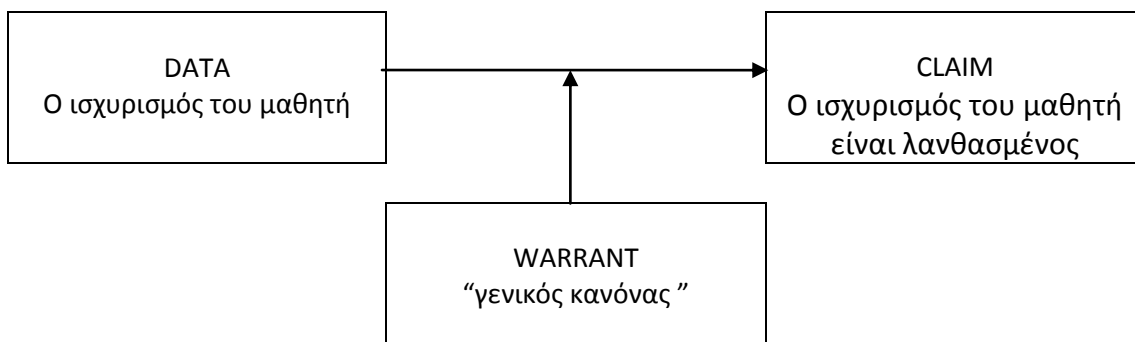
1. Η προσπάθειά να πείσουν τον υποθετικό μαθητή με το να κάνουν αναφορά ότι δεν υπάρχει κάποιο αντίστοιχο - σχετικό θεώρημα (non-existence of a relevant theorem, NET) που να αιτιολογεί τις αλγεβρικές πράξεις που έχει εκτελέσει.
2. Η προσπάθεια να πείσουν τον υποθετικό μαθητή με το να κάνουν αναφορά στην μη σωστή εφαρμογή του θεωρήματος (inappropriate implementation of a theorem, IIT) στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζει.
3. Η προσπάθεια να πείσουν τον υποθετικό μαθητή με το να κάνουν αναφορά του γενικού κανόνα (general rule, GR).

Οι δύο πρώτοι τρόποι αφορούν και οι δύο τη χρήση θεωρήματος και για αυτό κατηγοριοποιούνται μαζί ως ένας τρόπος επιχειρηματολογίας. Η μοντελοποίηση αυτού του τρόπου με τη βοήθεια του σχήματος του Toulmin γίνεται ως εξής:



Σχήμα 3.15. Giannakoulis et al. (2010, σελ. 164).

Ο δεύτερος τρόπος όπου ο δάσκαλος αναφέρεται στο γενικό κανόνα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

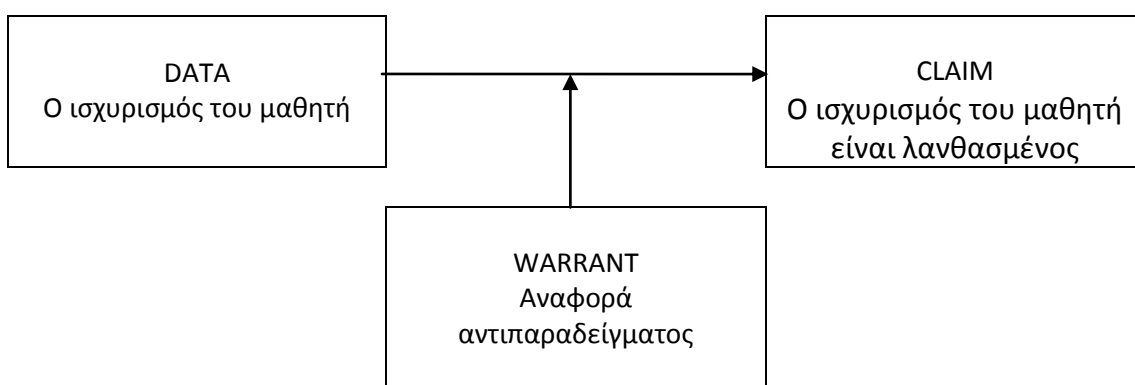


Σχήμα 3.16. Giannakoulis et al. (2010, σελ. 164).

Οι τρεις αυτοί τρόποι είναι ενδεικτικοί της πεποίθησης των εκπαιδευτικών ότι η θεωρία είναι αυτή που οφείλουμε να χρησιμοποιούμε όταν στοχεύουμε στην εγκυρότητα μιας απάντησης. Θεωρούνται υπό αυτή την έννοια μη παιδαγωγικά ορθοί καθώς στοχεύουν στην αυθεντία του δασκάλου και όχι στο να φέρουν το μαθητή σε μια τροχιά κατανόησης του σφάλματός του.

Όπως αναφέραμε η μειοψηφία των καθηγητών, μόνο 2 επί του συνόλου βάσισαν την επιχειρηματολογία τους στη χρήση αντιπαραδειγμάτων και στα τρία προβλήματα, ενώ 6 επί του συνόλου έδωσαν σε τουλάχιστον ένα πρόβλημα αντιπαραδείγμα. Τα αντιπαραδείγματα ως μέσο διάψευσης μαθηματικών ισχυρισμών των μαθητών δυσκολεύουν ιδιαίτερα τους εκπαιδευτικούς καθώς απαιτείται από μέρους τους καλή γνώση του αντικειμένου και εμπειρία.

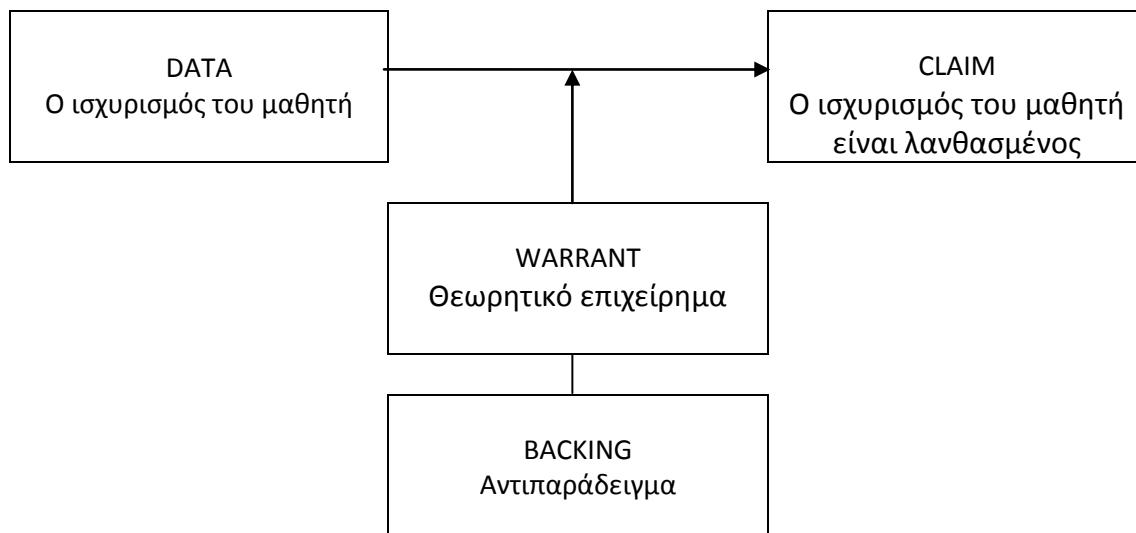
Η δομή της επιχειρηματολογίας των καθηγητών όταν έκαναν χρήση μόνο αντιπαραδειγμάτων είχε την απλή μορφή του σχήματος του και μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:



Σχήμα 3.17. Giannakoulis et al. (2010, σελ. 165).

Η δομή του επιχειρηματολογίας των καθηγητών είχε την απλή μορφή του σχήματος του Toulmin με τη προσθήκη όμως του στοιχείου της υποστήριξης όταν έκαναν χρήση θεωρητικού επιχειρήματος και αντιπαραδείγματος. Η εγγύηση σε αυτήν την

δομή αποτελείται από ένα θεωρητικό επιχείρημα, και η υποστήριξη από το αντιπαράδειγμα. Γεγονός που δείχνει ότι οι καθηγητές θεωρούν το θεώρημα ως ένα “δυνατότερο εργαλείο” από το αντιπαράδειγμα. Η δομή αυτή οπτικοποιείται ως εξής:



Σχήμα 3.18. Giannakoulis et al. (2010, σελ. 164).

Αυτό το είδος επιχειρηματολογίας παρόλο που θεωρείται μαθηματικά σωστό δεν χρησιμοποιείται σε μεγάλο ποσοστό από τους εκπαιδευτικούς. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί μεγάλη πλειοψηφία των εκπαιδευτικών δεν γνωρίζει ότι η χρήση αντιπαράδειγμάτων αποτελεί όχι μόνο έγκυρη μέθοδο απόδειξης αλλά και μέθοδο που προάγει την κατανόηση με την Λακατοσιανή έννοια.

Οι Giannakoulis, Mastorides, Potari & Zachariades (2010) έδειξαν ότι η επιχειρηματολογία που ακολουθούν οι καθηγητές όταν θέλουν να πείσουν έναν μαθητή για λανθασμένα επιχειρήματα που έχει κατασκευάσει, έχει μια δομή που μπορεί να αναλυθεί με το σχήμα του Toulmin. Περιλαμβάνει είτε τη χρήση της θεωρίας, είτε τη χρήση αντιπαράδειγμάτων, είτε συνδυασμό των δύο. Η ανάπτυξη του ειδικού αυτού τύπου επιχειρηματολογίας, δηλαδή της αντίκρουσης απαντήσεων των μαθητών, από τη μεριά του εκπαιδευτικού είναι ιδιαίτερα περίπλοκη και δύσκολη, καθώς πρέπει να λαμβάνει υπόψη του τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, από μαθηματικής άποψης αλλά και από διδακτικής άποψης, που πρέπει να υιοθετηθούν ώστε να βοηθήσει τον μαθητή να κατανοήσει το λάθος στον συλλογισμό του.

3.4.2. Η έρευνα των Nardi, Biza & Zachariades

Η έρευνα των Nardi, Biza & Zachariades (2011) έχει ως σκοπό να εξετάσει, να παρατηρήσει και να διακρίνει τη φύση των στοιχείων που επηρεάζουν την επιχειρηματολογία των εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που χρησιμοποιούν κατά τις διδακτικές πρακτικές τους. Θεωρούν ότι ο εκπαιδευτικός όταν καλείται να αποδεχθεί ή να απορρίψει ένα επιχείρημα από τους μαθητές του δεν βασίζεται μόνο στην επιστημονική του κατάρτιση αλλά υπάρχουν και άλλα στοιχεία που τον επηρεάζουν κυρίως παιδαγωγικής και επιστημολογικής φύσεως.

Οι ερευνητές για να διαπιστώσουν ποια είναι η φύση των στοιχείων που συμβάλουν στην επιχειρηματολογία των εκπαιδευτικών, τους έδωσαν υποθετικές απαντήσεις μαθητών σε ένα πρόβλημα απειροστικού λογισμού που αφορούσε την εφαπτομένη. Κατόπιν ζήτησαν από τους εκπαιδευτικούς πρώτα γραπτά και ύστερα σε συνέντευξη να εκφράσουν τις απόψεις τους σχετικά με τις απαντήσεις των μαθητών και τον τρόπο με τον οποίο θα τους ανταποκρίνονταν. Το πρόβλημα και οι υποθετικές απαντήσεις των μαθητών φαίνονται στο σχήμα 3. 19

Year 12 students, specialising in mathematics, were given the following exercise:
'Examine whether the line with equation $y = 2$ is tangent to the graph of function f , where $f(x) = 3x^3 + 2$.'

Two students responded as follows:

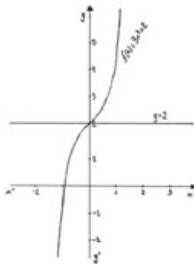
Student A
'I will find the common points between the line and the graph solving the system:

$$\begin{cases} y = 3x^3 + 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 + 2 = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

The common point is $A(0, 2)$.
The line is tangent of the graph at point A because they have only one common point (which is A).'

Student B
'The line is not tangent to the graph because, even though they have one common point, the line cuts across the graph, as we can see in the figure.'

a. In your view what is the aim of the above exercise?
b. How do you interpret the choices made by each of the students in their responses above?
c. What feedback would you give to each of the students above with regard to their response to the exercise?



Σχήμα 3.19. Το πρόβλημα της εφαπτομένης (Nardi, Biza & Zachariades, 2011, σελ. 171)

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για να αναλυθούν τα επιχειρήματα που προσκομίζουν οι εκπαιδευτικοί όταν από τους ερευνητές βασίζεται σε πρώτο επίπεδο στο σχήμα του Toulmin. Η χρήση του επιτρέπει στους ερευνητές να διακρίνουν τα στοιχεία που απαρτίζουν την επιχειρηματολογία τους. Ωστόσο από μόνο του, θεωρούν ότι, αυτό δεν είναι αρκετό καθώς δεν προσφέρει επιμέρους κατηγοριοποίηση των στοιχείων αυτών με αποτέλεσμα να μην είναι εμφανής η φύση τους. Αυτή η διαπίστωση οδήγησε τους ερευνητές στο ότι η χρήση του σχήματος αυτού χρειάζεται επανεξέταση ώστε να είναι δυνατή αυτή η κατηγοριοποίηση.

Σε δεύτερο επίπεδο το ενδιαφέρον των συγγραφέων εστιάζεται ιδιαίτερα στο στοιχείο των εγγυήσεων. Ο Toulmin αναφέρει ότι σε διαφορετικά πεδία οι εγγυήσεις υποστηρίζονται με διαφορετικό τρόπο. Ο Freeman (2005) θεωρεί, και μαζί με αυτόν συμφωνούν και οι Nardi, Biza & Zachariades, ότι είναι ασαφές και δεν διαχωρίζει ποιοι τομείς γνώσης είναι γενικά αποδεκτοί και θεωρούνται ότι μπορούν να προσδώσουν αυθεντία στο επιχείρημα. Για αυτόν τον λόγο ο Freeman(2005) προτείνει μια κατηγοριοποίηση των εγγυήσεων όχι ως προς το πεδίο που ανήκουν αλλά “ανάλογα με τον τύπο διαίσθησης, πεποιθήσεων ή πρότερης κατανόησης που επιδρούν σε αυτές”(Nardi, Biza & Zachariades, 2011, σελ. 160).

Η σύνθεση, λοιπόν, του σχήματος του Toulmin μαζί με την κατηγοριοποίηση των εγγυήσεων του Freeman αποτελεί για τους ερευνητές ένα πλήρες εργαλείο ανάλυσης της όχι μόνο της δομής αλλά και της φύσης της επιχειρηματολογίας των εκπαιδευτικών.

Τα είδη των εγγυήσεων που προέκυψαν, με παραβολή αντίστοιχων παραδειγμάτων, είναι οι εξής:

1. Οι a priori εγγυήσεις (a priori warrants) διαχωρίζονται σε επιστημολογικές και παιδαγωγικές.
 - a. A priori επιστημολογικές (a priori-epistemological warrants) ονομάζονται οι εγγυήσεις όπου το άτομο κάνει αναφορά στη μαθηματική θεωρία. Π.χ. “Η γεωμετρική μέθοδος για να προσδιορίσουμε την εφαπτομένη καλύπτει την περίπτωση του κύκλου και των κωνικών τομών, και όχι την εν λόγω συνάρτηση(Εγγύηση), για αυτό προτείνω να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της ανάλυσης (Συμπέρασμα)” (Nardi, Biza & Zachariades, 2011, σελ. 165).
 - b. A priori παιδαγωγικές (a priori-pedagogical warrants) ονομάζονται οι εγγυήσεις όπου το άτομο αναφέρει κάποια παιδαγωγική αρχή. Π.χ. “Για να αντικρούσουμε τον ισχυρισμό του μαθητή, πρέπει να τον προκαλέσουμε γνωστική σύγκρουση, ένα αντιπαράδειγμα μπορεί να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση(Εγγύηση), για αυτό προτείνω να

χρησιμοποιήσουμε αντιπαράδειγμα (Συμπέρασμα)” (Nardi, Biza & Zachariades, 2011, σελ. 165).

2. Οι θεσμικές εγγυήσεις (institutional warrants) διαχωρίζονται σε αυτές που αφορούν τη διδακτέα ύλη και στις επιστημολογικές.
 - a. Θεσμικές εγγυήσεις ως προς την διδακτέα ύλη (institutional curricular warrants) ονομάζονται οι εγγυήσεις όπου το άτομο επιλέγει μια διδακτική πρακτική η οποία προτείνεται ή απαιτείται από το εγχειρίδιο του αναλυτικού προγράμματος. Π.χ. “Το εγχειρίδιο έχει ασκήσεις όπου η συνέχεια μια συνάρτησης δείχνεται με την παρουσίαση της γραφικής παράστασης (Εγγύηση), για αυτό θα δεχόμουν ένα επιχείρημα βασισμένο στη γραφική παράσταση όσον αφορά τη συνέχεια μιας συνάρτησης (Συμπέρασμα)” (Nardi, Biza & Zachariades, 2011, σελ. 165).
 - b. Επιστημολογικές θεσμικές (institutional epistemological warrants) ονομάζονται οι εγγυήσεις όπου το άτομο αναφέρει πρακτικές που έχουν εδραιωθεί από την επιστημονική μαθηματική κοινότητα. Π.χ. “Μέσα στη μαθηματική κοινότητα, μόνο ακριβή, τυπικά επιχειρήματα είναι αποδεκτά και ένα οπτικό επιχείρημα δεν είναι ακριβές (Εγγύηση), για αυτόν τον λόγο δεν θα δεχόμουν ένα οπτικό επιχείρημα ως πλήρες επιχείρημα στην τάξη μου(Συμπέρασμα)” (Nardi, Biza & Zachariades, 2011, σελ. 165).
3. Οι εμπειρικές εγγυήσεις (empirical warrants) διαχωρίζονται σε επαγγελματικές εμπειρικές και σε προσωπικές εμπειρικές.
 - a. Επαγγελματικές εμπειρικές (empirical professional warrants) ονομάζονται οι εγγυήσεις όπου το άτομο κάνει αναφορά φαινομένων τα οποία εμφανίζονται συχνά μέσα στη διδακτική αίθουσα από τους μαθητές. Π.χ. “Έχω παρατηρήσει ορισμένες αντιλήψεις των μαθητών και το παράδειγμα $x \sin 1/x$ αντιβαίνει αυτών των αντιλήψεων (Εγγύηση), Για αυτό προτείνω την ανάπτυξη του παραδείγματος $x \sin 1/x$ ” (Συμπέρασμα) (Nardi, Biza & Zachariades, 2011, σελ. 166).
 - b. Προσωπικές εμπειρικές (empirical personal warrants) ονομάζονται οι εγγυήσεις όπου το άτομο αναφέρει τις προσωπικές του εμπειρίες μάθησης των μαθηματικών. Π.χ. “Σαν μαθητής δεν βασιζόμουν για όλα τα επιχειρήματά μου στο σχήμα (Εγγύηση), για αυτό προτείνω να μάθουν οι μαθητές να ξεχωρίζουν τις περιπτώσεις για τις οποίες η οπτική προσέγγιση είναι επαρκής” (Συμπέρασμα) (Nardi, Biza & Zachariades, 2011, σελ. 166).

4. Οι αξιολογικές εγγυήσεις (evaluative warrants) αφορούν την αιτιολόγηση μιας παιδαγωγικής πρακτικής λόγω προσωπικών απόψεων, αξιών και πεποιθήσεων. Π.χ. “Πιστεύω ότι οι μαθητές σήμερα έχουν μια πιο παθητική προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών τους (Εγγύηση), για αυτό τον λόγο πλέον είμαι λιγότερο διατεθειμένος να συνεργαστώ μαζί τους για να κατασκευάζουν τα δικά τους παραδείγματα από ότι συνήθιζα να είμαι” (Συμπέρασμα) (Nardi, Biza & Zachariades, 2011, σελ. 166).

Οι Nardi, Biza & Zachariades (2011) καταλήγουν στο ότι η επιχειρηματολογία ενός εκπαιδευτικού μπορεί να μην περιλαμβάνει μόνο ένα είδος εγγυήσεων αλλά πολλά, γεγονός που δείχνει το εύρος των παραγόντων που επιδρούν στην διαμόρφωση της, με τους περισσότερους από αυτούς τους παράγοντες να μην είναι μαθηματικοί.

3.5. Η ανάγκη υιοθέτησης ολόκληρου του σχήματος του Toulmin στη Διδακτική των Μαθηματικών

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η επιχειρηματολογία αποτελεί μια διαδικασία παροχής στοιχείων που σκοπό έχουν να πείσουν τους άλλους αλλά και να πειστούμε οι ίδιοι για την ισχύ ενός συμπεράσματος. Κατά την ανάλυση της επιχειρηματολογίας βασική προϋπόθεση για να αποκτήσουμε μια πιο αναλυτική περιγραφή της επιχειρηματολογίας του ατόμου και της διαδικασίας αιτιολόγησής του είναι να ληφθούν υπόψη όλα τα στοιχεία της επιχειρηματολογίας.

Στις προηγούμενες ενότητες οι ερευνητές χρησιμοποίησαν το απλό σχήμα του Toulmin για την ανάλυση της επιχειρηματολογίας αποτελούμενο από τα δεδομένα, τις εγγυήσεις, το συμπέρασμα και σε εξαιρετικές περιπτώσεις και από τις υποστηρίξεις. Η υιοθέτηση, λοιπόν, ολόκληρου του σχήματος του Toulmin στη Διδακτική των Μαθηματικών αποτελεί αναγκαιότητα για πληρέστερη κατανόηση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας είτε αυτή προέρχεται από τους μαθητές, είτε από τους φοιτητές των μαθηματικών σχολών είτε από τους μαθηματικούς.

Στη Διδακτική των Μαθηματικών οι έρευνες που υιοθέτησαν ολόκληρο το σχήμα του Toulmin είναι οι έρευνες των Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007) και Inglis & Mejia-Ramos (2008).

Η έρευνα των Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007) έχει ως υπόθεση ότι διαφορετικά είδη εγγυήσεων κατά την επιχειρηματολογία, οδηγούν το άτομο στο να τα “συνοδεύσει” και με διαφορετικό βαθμό βεβαιότητας γεγονός που οδηγεί να κατηγοριοποιηθούν οι εγγυήσεις και να ορίσουν τύπους εγγυήσεων (warrant-types) όπου ο καθένας αντιστοιχεί σε υιοθέτηση κατάλληλου βαθμού βεβαιότητας.

Η έρευνα των Inglis & Mejia-Ramos (2008) έχει ως σκοπό να ανιχνεύσει σε ποιο στοιχείο της μαθηματικής επιχειρηματολογίας εστιάζει κάθε άτομο ώστε να πεισθεί για την ορθότητα ή όχι μιας πρότασης με μαθηματικό περιεχόμενο. Κάθε άτομο έχει ξεχωριστά κριτήρια τα οποία λαμβάνει υπόψη για την διαμόρφωση της γνώμης του και αυτά δεν είναι απαραίτητα τα δεδομένα ή το συμπέρασμα μόνο.

3.5.1. Η έρευνα των Inglis, Mejia-Ramos & Simpson

Οι Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007) ήταν οι πρώτοι που θεώρησαν ότι με την υιοθέτηση του πλήρους σχήματος του Toulmin επιτυγχάνεται πιο ουσιαστική ανάλυση της επιχειρηματολογίας στα μαθηματικά. Η έρευνα που διεξήγαγαν περιελάμβανε μεταπτυχιακούς φοιτητές των μαθηματικών με υψηλές επιδόσεις. Δόθηκε μια σειρά από εικασίες από το πεδίο της θεωρίας αριθμών να εξετάσουν αν είναι αληθείς και να κατασκευάσουν την απόδειξη. Οι εικασίες εμφανίζονται στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 3.46.

Όλοι οι παρακάτω αριθμοί θα πρέπει να θεωρούνται ότι είναι θετικοί ακέραιοι Ορισμός : Abundant ονομάζεται ένας ακέραιος n του οποίου οι διαιρέτες όταν αθροίζονται έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του $2n$. Ορισμός : Τέλειος ονομάζεται ένας ακέραιος αριθμός n του οποίου οι διαιρέτες όταν αθροίζονται έχουν άθροισμα ακριβώς ίσο με $2n$. Ορισμός : Deficient ονομάζεται ένας ακέραιος αριθμός n του οποίου οι διαιρέτες οι διαιρέτες όταν αθροίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο του $2n$. Παράδειγμα : Το 12 είναι ένας abundant αριθμός ,επειδή $1+2+3+4+6+12=28$,το $28 > 12*2$. Παρόλα αυτά το 14 είναι ένας deficient αριθμός , επειδή $1+2+7+14=24$,το $24 < 2*14$. Ο στόχος είναι να εξεταστούν οι ακόλουθες εικασίες και να βρεθεί αν είναι σωστές ή λανθασμένες.
Εικασία 1 : Ένας αριθμός είναι abundant αν και μόνο αν είναι πολλαπλάσιο του 6. Εικασία 2 : Αν ο n είναι τέλειος τότε ο kn είναι abundant διότι $k \in \mathbb{N}$. Εικασία 3 : Αν p_1 και p_2 είναι πρώτοι αριθμοί, τότε $p_1 p_2$ είναι abundant . Εικασία 4 : Αν το n είναι deficient τότε κάθε διαιρέτης του n είναι deficient. Εικασία 5 : Αν n και m είναι abundant τότε $n+m$ είναι abundant. Εικασία 6 : Αν n και m είναι τ abundant τότε nm είναι abundant. Εικασία 7 : Αν το n είναι abundant τότε το n δεν είναι της μορφής p^m για κάποιους φυσικούς m και πρώτους p.
Παραδείγματα Μερικοί πρώτοι abundant αριθμοί είναι : 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40,.... Μερικοί πρώτοι τέλειοι αριθμοί είναι : 6, 28, 496, 8128

Από την ανάλυση των απαντήσεων των φοιτητών το πρώτο σημαντικό συμπέρασμα ήταν το γεγονός ότι το περιορισμένο σχήμα του Toulmin δεν είναι δυνατή η πλήρης

ανάλυση της επιχειρηματολογίας και άρα δεν είναι δυνατή η πλήρης κατηγοριοποίησή των επιχειρημάτων. Για να στηρίξουν αυτή τη θέση έφεραν τα εξής δύο παραδείγματα.

Ο Chris απάντησε σωστά ότι η 3^n εικασία είναι λανθασμένη και τότε ο ερευνητής τον ρώτησε τι θα απαντούσε αν η εκφώνηση τροποποιόταν ως εξής: “Αν οι p_1 και p_2 είναι πρώτοι αριθμοί, τότε $p_1 p_2$ δεν είναι abundant”. Ο Chris τότε έλεγξε δύο παραδείγματα ένα με μικρά νούμερα (2 & 3) και ένα με μεγάλα νούμερα (5 & 97) και ακολούθησε ο εξής διάλογος:

Πίνακας 3.47.

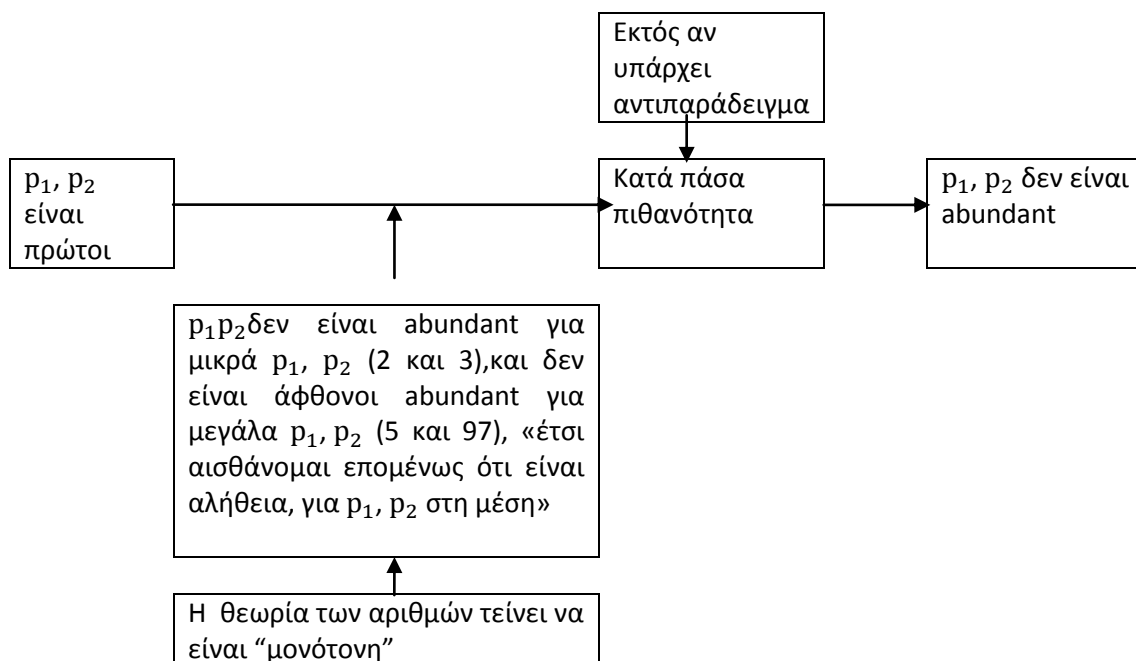
Διάλογος

Chris: Αφού οι μικροί αριθμοί που έβαλα στην εξίσωση έδειξαν ότι είναι τέλειος αριθμός και οι μεγάλοι έδειξαν ότι το γινόμενο $p_1 p_2$ είναι deficient, τότε πιθανότατα ισχύει για όλα τα p_1, p_2 .

Ερευνητής: Έτσι νομίζεις ?

Chris: Νομίζω ναι. Αλλά δεν είμαι σίγουρος γιατί. Ναι, το γεγονός ότι αυτό, κατά κάποιο τρόπο είναι μονότονο. Να το πω αλλιώς, ξέρω ότι αυτό ισχύει για μεγάλα p_1, p_2 , ξέρω ότι ισχύει για μικρά p_1, p_2 , άρα πρέπει να είναι αλήθεια και για τα p_1, p_2 που βρίσκονται στη μέση. Αλλά πρέπει να κάνω λίγη δουλειά για να το δείξω αυτό.

Μοντελοποίηση του επιχειρήματος



Ο David στο ίδιο ερώτημα απάντησε ως εξής:

- Ερευνητής: Αν άλλαξα την εκφώνηση, να έλεγε “δεν είναι abundant ” τι θα έλεγες τότε?
- David: Αυτό θα ήταν πιο λογικό. Γιατί οι πρώτοι αριθμοί μοιάζουν πολύ deficient.

Η διαφορά των δύο μεταπτυχιακών φοιτητών είναι ότι παρόλο που και οι δύο χρησιμοποίησαν μη – παραγωγική επιχειρηματολογία και έδωσαν τη σωστή απάντηση, το γεγονός ότι χρησιμοποίησαν διαφορετικά είδη εγγυήσεων κατά την επιχειρηματολογία τους, τους οδήγησε στο να τα “συνοδεύσουν” και με διαφορετικό βαθμό βεβαιότητας, γεγονός που έδειχνε το βαθμό στον οποίο είχαν πειστεί από τα επιχειρήματά τους. Ο Chris ήταν πλήρως πεπεισμένος για την ορθότητα των λεγόμενων του, ενώ ο David διατηρούσε ακόμα αμφιβολίες. Αν η ανάλυση δεν λάμβανε υπόψη της τη παράμετρο του βαθμού βεβαιότητας τότε δεν θα ήταν εμφανής η διαφορά των δύο φοιτητών.

Αυτή η διαπίστωση το ότι ,δηλαδή, διαφορετικά είδη εγγυήσεων “συνοδεύονται” και από διαφορετικό βαθμό βεβαιότητας γέννησε την ανάγκη να κατηγοριοποιηθούν οι εγγυήσεις και να ορίσουν τύπους εγγυήσεων (warrant-types) και τι βαθμό βεβαιότητας δύναται να δίνει ο κάθε τύπος. Οι κατηγορίες που προκύπτουν αντιστοιχούν υπό μία έννοια με τα αποδεικτικά σχήματα των Harel & Sowder(1998). Η διαφορά έγκειται όπως αναφέρουν οι ερευνητές στο ότι τα αποδεικτικά σχήματα στοχεύουν στην αφαίρεση της αβεβαιότητας ενώ οι εγγυήσεις στη μείωσή της.

Οι τύποι που ορίστηκαν είναι τρεις και για κάθε έναν παραθέτουμε αντίστοιχο παράδειγμα.

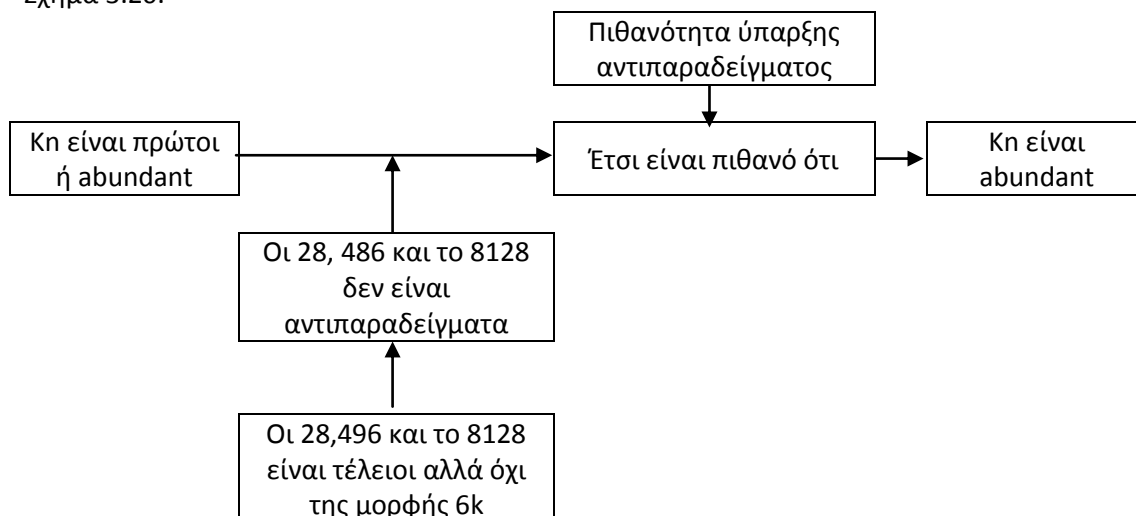
1. Επαγωγικός τύπος εγγύησης.

Ορίζεται ως ο τύπος κατά τον οποίο χρησιμοποιούνται παραδείγματα όλων των ειδών ,παραδείγματα γεννήτορες και κρίσιμα παραδείγματα αλλά και αντιπαραδείγματα, ώστε να μειωθεί η αβεβαιότητα για το συμπέρασμα του επιχειρήματος, να υιοθετηθεί η κατάλληλη έκφραση για το βαθμό βεβαιότητας και να προχωρήσουν στην κατασκευή της απόδειξης.

Ο Chris στο προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποίησε παραδείγματα για να πείσει τον εαυτό του ώστε να μπορέσει να κατασκευάσει την απόδειξη.

Ο David στην προσπάθειά του να πεισθεί για την αλήθεια της εικασίας 2 προσπάθησε βρει κάποιο αντιπαραδείγμα της οποίας παραθέτουμε την ανάλυση.

Σχήμα 3.20.



2. Δομικός – Διαισθητικός τύπος εγγύησης.

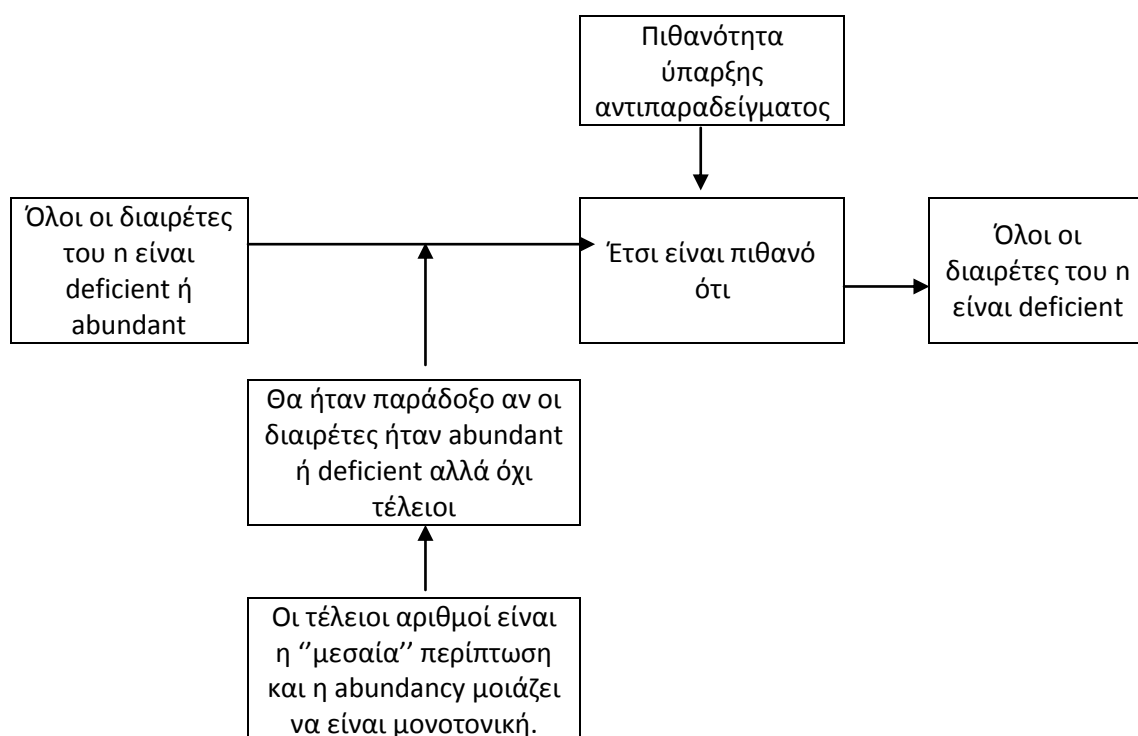
Ορίζεται ως ο τύπος κατά τον οποίο το άτομο χρησιμοποιεί διάφορες παρατηρήσεις ή κάποιου είδους νοητικές δομές, οπτικού ή άλλου τύπου, που το πείθουν για την αλήθεια του συμπεράσματος. Χρησιμοποιούνται από το άτομο για να μειώσουν την αβεβαιότητα του, ωστόσο υπάρχουν και περιπτώσεις που υποστηρίζουν ψευδή συμπεράσματα.

Ο Chris στην επιχειρηματολογία του για την εικασία 4 για να μειώσει την αβεβαιότητά του αναφέρει:

Chris: Αν το n είναι deficient, τότε ξέρουμε ότι.... κανένας από τους διαιρέτες του δεν είναι τέλειος αριθμός, οπότε κάθε διαιρέτης πρέπει να είναι είτε deficient ή abundant ... θα ήταν παράδοξο αν μπορούσαν να είναι deficient ή abundant αλλά όχι τέλειοι. Γιατί οι τέλειοι είναι σαν να είναι η μεσαία περίπτωση, οπότε πιθανότατα είναι αλήθεια.

Η επιχειρηματολογία του Chris μοντελοποιείται ως εξής:

Σχήμα 3.21.



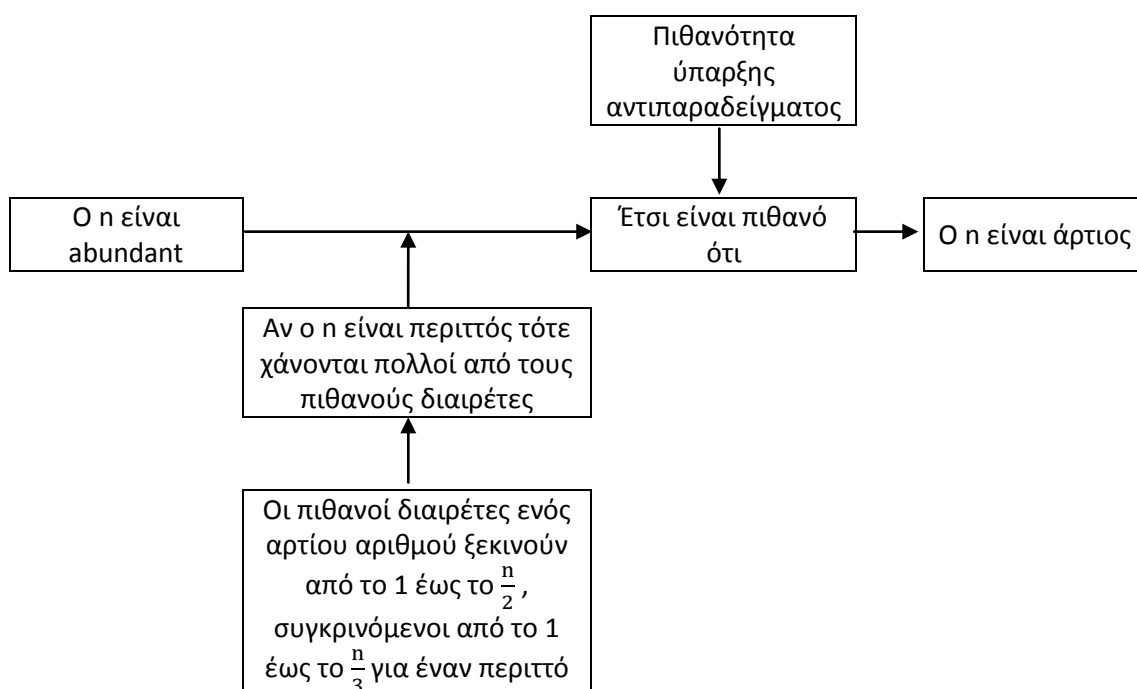
Ο Fred στην επιχειρηματολογία του χρησιμοποίησε δομική – διαισθητική εγγύηση η οποία όμως τον οδήγησε σε λανθασμένο συμπέρασμα. Στην επιχειρηματολογία που προσπαθούσε να κατασκευάσει για να απαντήσει στην 5^η εικασία, προσπαθούσε να δει τι είδους αριθμοί είναι οι abundant άρτιοι ή περιττοί και καταλήγει εσφαλμένα ότι είναι άρτιοι. Πριν το απόσπασμα που ακολουθεί έχει ήδη γίνει η ερώτηση αν θεωρεί ότι οι αριθμοί αυτοί είναι άρτιοι.

Πίνακας 3.48.

Fred	Μμμ, νομίζω ότι οι περιττοί αριθμοί δεν είναι abundant γενικά γιατί...
Ερευνητής	Όταν λες "γενικά τι εννοείς?"
Fred	Απλά τη γενική ιδέα, γιατί, αν ένας αριθμός είναι άρτιος τότε ένας διαιρέτης του είναι ο μισός αριθμός, το οποίο είναι ένα πολύ μεγάλο κομμάτι, αλλά αν ένας αριθμός είναι περιττός τότε χάνει ένα μεγάλο κομμάτι.
Ερευνητής	Οπότε νομίζεις ότι οι περιττοί αριθμοί δεν είναι abundant?
Fred	Νομίζω ότι αυτό είναι μάλλον απίθανο.

Η επιχειρηματολογία του Fred μοντελοποιείται ως εξής:

Σχήμα 3.22.



3. Παραγωγικός τύπος εγγύησης

Ορίζεται ως ο τύπος ο οποίος τυπικές μαθηματικές αιτιολογήσεις χρησιμοποιούνται ώστε να εγγυηθούν το συμπέρασμα του υπό αμφισβήτηση επιχειρήματος. Σαν παραγωγικές εγγυήσεις θεωρούνται: εγγυήσεις που προκύπτουν από αξιώματα, οι αλγεβρικοί χειρισμοί και τα αντιπαραδείγματα. Τα επιχειρήματα αυτού του είδους δεν δέχονται αντίκρουσης, ο βαθμός βεβαιότητάς τους είναι απόλυτος και χρησιμεύουν όχι στο να μειώσουν την αβεβαιότητα αλλά να την αφαιρέσουν πλήρως.

Οι Inglis, Mejia-Ramos και Simpson (2007) καταλήγουν στο ότι πρέπει να δίνεται σημασία όχι μόνο στις εγγυήσεις και το βαθμό καταλληλότητας τους για το κάθε επιχείρημα αλλά και στο αν ο βαθμός βεβαιότητας που έχει επιλεγεί είναι κατάλληλος για την εγγύηση που ανέπτυξαν κατά την επιχειρηματολογία.

3.5.2. Η έρευνα των Inglis & Mejia –Ramos

Η διαδικασία εκτίμησης ενός επιχειρήματος ή ο τρόπος με τον οποίο εκλαμβάνουμε ένα ερώτημα είναι διακριτός για κάθε άτομο. Οι ερευνητές θεωρούν σε μεγάλο ποσοστό ότι υπάρχουν δύο τρόποι με τον οποίο το άτομο εκτιμά το πόσο πειστικό είναι ένα επιχείρημα. Ο ένας αφορά το τι θεωρεί το άτομο πειστικό για τον εαυτό του και ο άλλος το τι θεωρεί πειστικό για τα υπόλοιπα άτομα. Το ίδιο φαινόμενο εμφανίζεται και στο πλαίσιο των μαθηματικών. Όταν ρωτάμε τους μαθητές πόσο πειστικό είναι ένα μαθηματικό επιχείρημα γεννάται το ερώτημα πως ερμηνεύουν αυτό το ερώτημα αλλά και ποιοι είναι οι παράγοντες που επιδρούν στην κατασκευή της απάντησής τους.

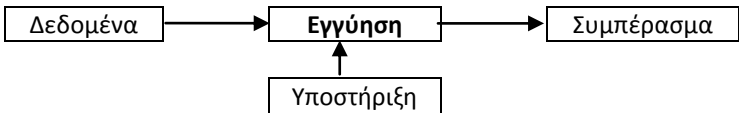
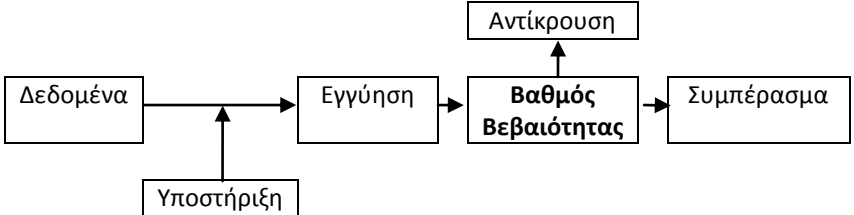
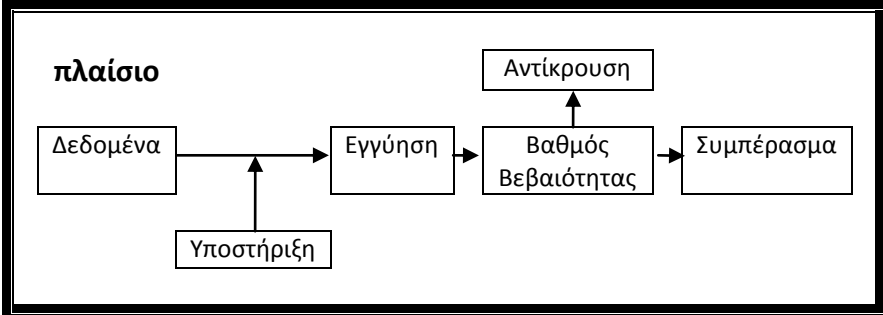
Οι Inglis & Mejia-Ramos (2008) χρησιμοποιώντας το πλήρες σχήμα του Toulmin επιχειρηματολογούν υπέρ μιας κατηγοριοποίησης η οποία θα λαμβάνει υπόψη της σε ποιο σημείο της επιχειρηματολογίας εστιάζει το ερωτώμενο άτομο την προσοχή του. Υπάρχουν 5 διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους οι ερευνητές θεωρούν ότι το ερώτημα “Πόσο πειστικό είναι αυτό το μαθηματικό επιχείρημα;” μπορεί να απαντηθεί ανάλογα με το ποιο είναι το σημείο εστίασης.

- Τύπος 0: Όταν το άτομο εστιάζει στα δεδομένα του επιχειρήματος και το αξιολογεί ανάλογα με το πόσο τα εμπιστεύεται.
- Τύπος 1: Όταν το άτομο εστιάζει στο πόσο πιθανό θεωρεί ότι είναι το συμπέρασμα του επιχειρήματος.
- Τύπος 2: Όταν το άτομο εστιάζει στην εγγύηση του επιχειρήματος και κατ'επέκταση στη συνδεόμενη με αυτό υποστήριξη. Η εγγύηση είναι το στοιχείο που συνδέει τα δεδομένα με το συμπέρασμα και άρα είναι αυτό το στοιχείο που αν επιδέχεται αμφισβήτηση αποδυναμώνεται η ισχύς όλου του επιχειρήματος. Άρα αν το άτομο εστιάζει στην εγγύηση στην ουσία δείχνει το βαθμό βεβαιότητας του για όλο το επιχείρημα.
- Τύπος 3: Όταν το άτομο εστιάζει στον βαθμό βεβαιότητας του επιχειρήματος. Σε αυτόν τον τύπο το άτομο αξιολογεί αν ο βαθμός βεβαιότητας που προσδίδεται στο επιχείρημα είναι ο κατάλληλος δεδομένου των υπόλοιπων στοιχείων.
- Τύπος 4: Όταν το άτομο χρησιμοποιεί αυτόν τον τύπο, δεν εστιάζει σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο της επιχειρηματολογίας αλλά στο αν το πλαίσιο στο οποίο ανήκει το επιχείρημα είναι το κατάλληλο για να το αξιολογήσει.

.

Οι τύποι που προέκυψαν απαντάνε σε βασικά ερωτήματα τα οποία φαίνονται στο σχήμα.

Πίνακας 3.49.(Inglis & Mejia –Ramos, 2008, σελ. 125)

Τύπος	Σημείο εστίασης της προσοχής σε δεδομένο επιχείρημα	Ερωτήσεις που αφορούν την εστίαση προσοχής
0.	Δεδομένα	Πόσο πολύ εμπιστεύεσαι τα δεδομένα;
1.	Συμπέρασμα	Πόσο πολύ εμπιστεύεσαι το συμπέρασμα?
2.	 <pre> graph LR A[Δεδομένα] --> B[Εγγύηση] B --> C[Συμπέρασμα] D[Υποστήριξη] --> B </pre>	Πόσο πολύ η εγγύηση (και η συνδεόμενη υποστήριξη) υποστηρίζει το συμπέρασμα;(δηλαδή ποιος είναι ο κατάλληλος βαθμός βεβαιότητας για το επιχείρημα?)
3.	 <pre> graph LR A[Δεδομένα] --> B[Εγγύηση] B --> C[Βαθμός Βεβαιότητας] C --> D[Συμπέρασμα] E[Υποστήριξη] --> B F[Αντίκρουση] --> C </pre>	Πόσο κατάλληλος είναι ο βαθμός βεβαιότητας (και η συνδεόμενη αντίκρουση) δεδομένου του υπόλοιπου επιχειρήματος?
4.	 πλαίσιο <pre> graph LR A[Δεδομένα] --> B[Εγγύηση] B --> C[Βαθμός Βεβαιότητας] C --> D[Συμπέρασμα] E[Υποστήριξη] --> B F[Αντίκρουση] --> C </pre>	Πόσο αποδεκτό είναι το επιχείρημα σε ένα δεδομένο πλαίσιο;

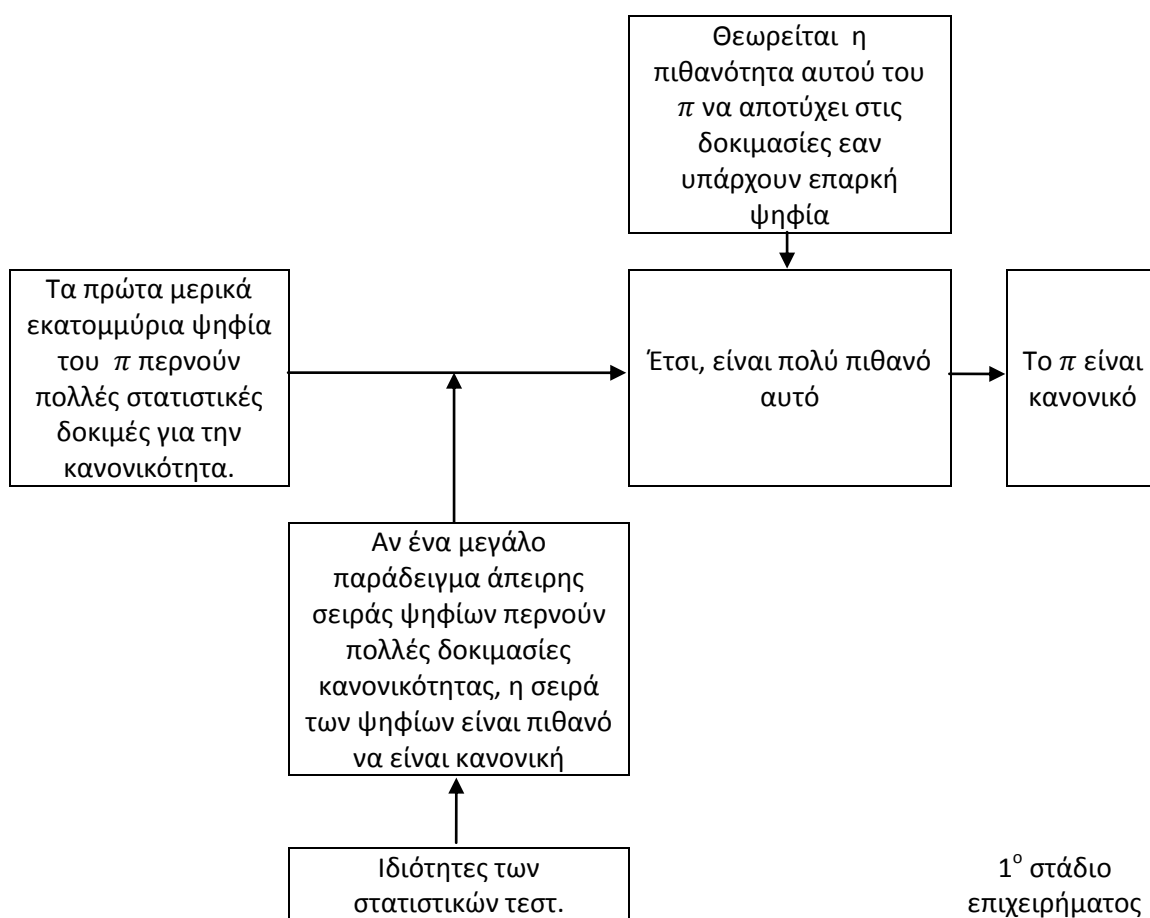
Στην έρευνά τους για να εξετάσουν πως αυτή η κατηγοριοποίηση χρησιμοποιείται στα μαθηματικά ζήτησαν από φοιτητές του μαθηματικού τμήματος αλλά και από ερευνητές μαθητικούς να αξιολογήσουν το ακόλουθο επιχείρημα του Gowers (2006).

“Όλα τα στοιχεία δείχνουν ότι δεν υπάρχει καμία συστηματικότητα στην ακολουθία των ψηφίων του π . Πράγματι, φαίνονται να συμπεριφέρονται όπως θα ήταν αν επιλέγαμε μια ακολουθία από τυχαία ψηφία ανάμεσα στο 0 και το 9. Αυτό το προαίσθημα ακούγεται ασαφές, αλλά μπορεί να γίνει ακριβές ως εξής: υπάρχουν πολλά τεστ που κάνουν οι στατιστικολόγοι στις ακολουθίες για να δουν αν τα ψηφία είναι πιθανό να έχουν δημιουργηθεί τυχαία, και φαίνεται ότι οι ακολουθίες των ψηφίων του π θα πέρναγαν αυτά τα τεστ. Σίγουρα τα πρώτα εκατομμύρια το καταφέρνουν. Ένα πρώτο τεστ είναι να δούμε αν οποιαδήποτε ακολουθία ψηφίων, όπως το 137, υπάρχει με μεγάλη συχνότητα μακροπρόθεσμα. Στην περίπτωση της σειράς των στοιχείων 137 κάποιος θα ανέμενε ότι θα ανέκυπτε περίπου $1/1000$ των περιπτώσεων στη δεκαδική επέκταση του π .

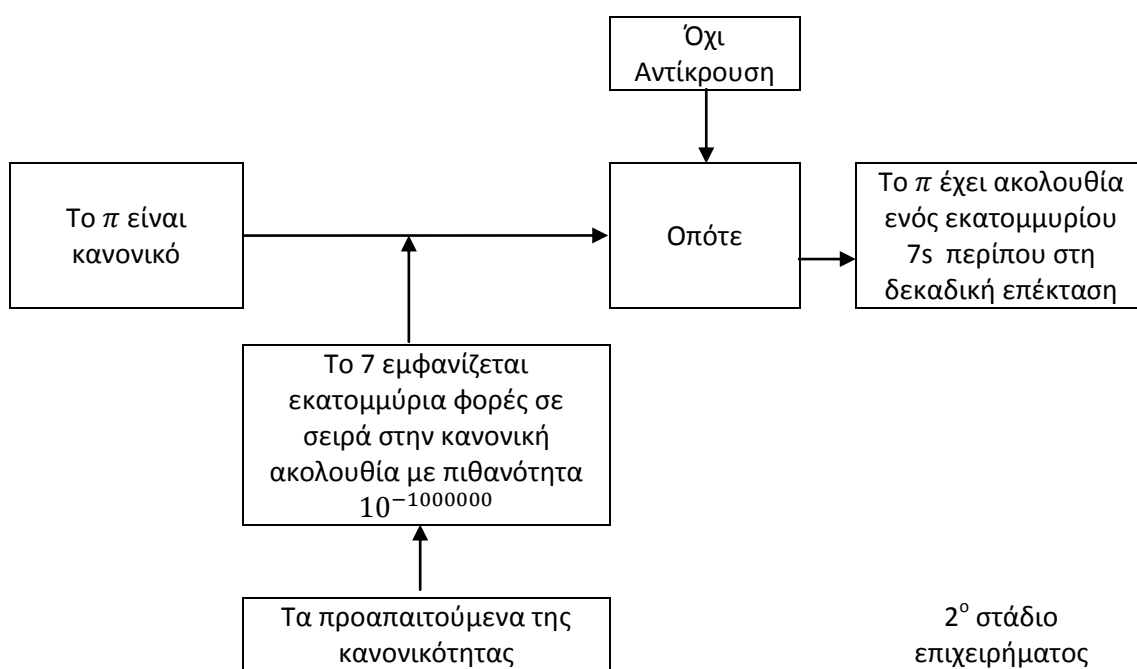
Σύμφωνα με την εμπειρία τέτοιες μικρές ακολουθίες στη δεκαδική επέκταση των άρρητων αριθμών που ανακύπτουν στη φύση, όπως το π , το e ή το $\sqrt{2}$, συμβαίνουν με τη σωστή συχνότητα. Αν συμβαίνει αυτό, τότε θα περιμέναμε να υπάρχουν ένα εκατομμύριο εφτάρια στη δεκαδική επέκταση του π περίπου μία στις $10^{-1000000}$ φορές, και φυσικά αυτό δεν μπορούμε να το ελέγξουμε άμεσα. Ακόμα, το επιχείρημα αυτό παρόλο που δεν ισχύει, ενώ δεν είναι απόδειξη, είναι πολύ πειστικό.”

Αυτό το επιχείρημα αποτελείται από δύο στάδια τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν ως εξής:

Σχήμα 3.23. (Inglis & Mejia –Ramos, 2008, σελ. 126)



Σχήμα 3.24. (Inglis & Mejia –Ramos, 2008, σελ. 126)



Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων ήταν όλων των τύπων. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα από τον κάθε τύπο.

- Τύπος 0: “Αυτό δεν είναι επιχείρημα. Για να είμαι πιο ακριβής, στη δήλωση αυτή δεν παρουσιάζεται κανένα ισχυρό αποδεικτικό στοιχείο. Απλά εξηγεί μόνο πως θα έμοιαζαν τα στατιστικά αποδεικτικά στοιχεία, αλλά δεν παρουσιάζει τα εμπειρικά αποτελέσματα από τα τεστ.” Εστιάζει στην έλλειψη δεδομένων.
- Τύπος 1: “Η κανονικότητα (των ψηφίων) του π δεν είναι παράλογη δεδομένου ότι σχεδόν όλοι οι πραγματικοί είναι κανονικοί.” Εστιάζει στο συμπέρασμα του πρώτου σταδίου του επιχειρήματος.
- Τύπος 2: “Τα αποδεικτικά στοιχεία προσδίδουν ιδιαίτερο βάρος στην εικασία; Αλλά αφού η απόδειξη είναι αδύνατη είναι μη ρεαλιστικό να θεωρείς ότι είναι βέβαιο.” Εστιάζει στην εγγύηση αφού δεδομένων των στοιχείων το συμπέρασμα μπορεί να είναι αληθές, θεωρεί ότι δεν είναι κατάλληλη η χρήση πιο μεγάλου βαθμού βεβαιότητας.
- Τύπος 3: “Παρά τα στατιστικά αποδεικτικά στοιχεία ότι το π είναι ένας “κανονικός αριθμός” (έλεγχος μόνο για μικρές ακολουθίες) θα μπορούσαν να υπάρχουν μερικές μικρές αμετάβλητες που θα εμπόδιζαν τη συγκεκριμένη μεγάλη ακολουθία αν υπάρχει.” Δεν δέχεται το συγκεκριμένο επιχείρημα σαν σύνολο γιατί θεωρεί ότι η εγγύηση που έχει δοθεί δεν αιτιολογεί τη χρήση του συγκεκριμένου βαθμού βεβαιότητας.
- Τύπος 4: “Το επιχείρημα εξαρτάται από μια έννοια τυχαιότητας στα ψηφία του π , η οποία μπορεί να είναι εύλογη αλλά δεν έχει αποδειχθεί. Αν ένα χειρόγραφο που είχε ένα ανάλογο επιχείρημα ερχόταν σε μένα για να το αξιολογήσω, θα πρότεινα να απορριφθεί για έλλειψη μαθηματικής αυστηρότητας. Ωστόσο αν κάποιος ήθελε να παράγει “καλά ψευδοτυχαία” ψηφία από τα ψηφία του π για ένα περιστασιακό πρόγραμμα του υπολογιστή θα έλεγα ότι το επιχείρημα του Gowers’ θα αιτιολογούσε αυτή τη στρατηγική.” Εστιάζει στο πλαίσιο αφού θεωρεί ότι στο πλαίσιο των τυπικών μαθηματικών δεν μπορεί να είναι αποδεκτό ένα τέτοιο επιχείρημα αλλά σε ένα διαφορετικό πλαίσιο θα μπορούσε να είναι αποδεκτό.

Οι ερευνητές έδειξαν με αυτό τον τρόπο ότι υπάρχουν πέντε διαφορετικοί τρόποι κατά τους οποίους μπορούμε να εκτιμήσουμε το βαθμό που μας πείθει ένα επιχείρημα. Οι τύποι 0 και 1 αφορούν ξεχωριστά – διακριτά στοιχεία της επιχειρηματολογίας. Οι τύποι 2 και 3 αφορούν το κύριο κομμάτι της επιχειρηματολογίας. Ο τύπος 4 αφορά το αν το επιχείρημα είναι αποδεκτό στο πλαίσιο που παρουσιάζεται. Αν δεν υιοθετούσαν το πλήρες σχήμα του Toulmin τότε δεν θα ήταν δυνατή αυτή η κατηγοριοποίηση. Οι εκπαιδευτικοί αλλά και οι ερευνητές πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους αυτές τις κατηγοριοποιήσεις ώστε να είναι ενήμεροι για το πώς ερμηνεύουν οι ερωτώμενοι το ερώτημα “Πόσο πειστικό είναι το επιχείρημα;” ώστε να γνωρίζουν ποιο ακριβώς στοιχείο της επιχειρηματολογίας θεωρούν πειστικό όταν απαντάνε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1. Γενικά Συμπεράσματα

Ο Hoyles αναφέρει ότι *“είμαστε πολύ μακριά από τη κατανόηση του πως κατακτούν οι μαθητές την απόδειξη”* (1997, αναφορά στην Knipping, 2008).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο ρόλος του εκπαιδευτικού εμπεριέχει δυσκολίες. Κάθε στιγμή μέσα στη σχολική αίθουσα καλείται να πάρει αποφάσεις οι οποίες οφείλουν να προάγουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές και την ανάπτυξη και βελτίωση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας τους.

Το σχήμα του Toulmin στην Διδακτική των Μαθηματικών αποτελεί ένα μεθοδολογικό εργαλείο ανάλυσης της επιχειρηματολογίας που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί με ποικίλους τρόπους.

Ο πρώτος τρόπος είναι ο εκπαιδευτικός να διαμορφώσει τη διδασκαλία του κατάλληλα ώστε να προωθείται η ανάπτυξη της συλλογικής επιχειρηματολογίας. Αυτό είναι δυνατό με την επιλογή κατάλληλων δραστηριοτήτων οι οποίες ενθαρρύνουν τη μέθοδο της ανακάλυψης, αξιοποιούν την εμπειρία των μαθητών και δημιουργούν ευκαιρίες αλληλεπίδρασης, στοιχεία τα οποία προάγουν την κατανόηση μέσω της ανταλλαγής απόψεων. Οι δραστηριότητες οι οποίες πληρούν αυτά τα κριτήρια και επιλέγονται από τον εκπαιδευτικό πρέπει να έχουν κατάλληλη δομή (λεκτική και συντακτική) ώστε να μην δημιουργούνται επιπλέον εμπόδια στους μαθητές.

Τα επιχειρήματα – διευκρινήσεις που παρουσιάζουν οι εκπαιδευτικοί μέσα στη σχολική αίθουσα να είναι κατάλληλα επιλεγμένα ώστε να γίνεται κατανοητό το νόημα που επιθυμεί ο εκπαιδευτικός να κατασκευάσει ο μαθητής. Οι ερωτήσεις να έχουν κατάλληλη δομή και περιεχόμενο ώστε ο μαθητής να εστιάζει στο σωστό σημείο, καθώς ο κάθε μαθητής είναι δυνατόν να ερμηνεύσει διαφορετικά την εκφώνησή τους. Αν για παράδειγμα ο μαθητής έχει δυσκολία με την επεξεργασία των δεδομένων ο εκπαιδευτικός οφείλει να προωθήσει τον διάλογο με στοχευόμενα ερωτήματα ή με παράθεση αντιπαραδειγμάτων.

Το σχήμα του Toulmin προσφέρει το κατάλληλο εργαλείο το οποίο βοηθά τους εκπαιδευτικούς να εντοπίζουν τις διαφορές αλλά και τα λάθη στην επιχειρηματολογία των μαθητών βάση της δομής και του περιεχομένου της. Η επίγνωση των ειδών εγγυήσεων, έτσι όπως τα έχουν ορίσει οι Inglis et al. (2007), που προσφέρουν οι μαθητές βοηθά περαιτέρω αφού ο εκπαιδευτικός είναι σε θέση να προσδιορίσει τα στοιχεία που πείθουν τους μαθητές προωθούν την κατανόησή τους ώστε να τα εντάξουν στο ρεπερτόριο των διδακτικών πρακτικών τους.

Πολλοί ερευνητές στις εργασίες τους (Krummheuer, 2007, Giannakoulis et al. 2010) προτείνουν τρόπους βελτίωσης των διδακτικών πρακτικών των μελλοντικών εκπαιδευτικών αλλά και των ενεργών εκπαιδευτικών. Η πανεπιστημιακή εκπαίδευση θεωρούν ότι οφείλει να προετοιμάζει τον εκπαιδευτικό για το δύσκολο έργο που έχει να φέρει σε πέρας. Ο Krummheuer (2007) προτείνει οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί να αναλύουν πρακτικά από μαθήματα υπό διαφορετικά πρίσματα ώστε να αποκτήσουν εμπειρία με τους διαφορετικούς τρόπους αλληλεπίδρασης της τάξης. Μια ακόμα μεθοδολογία που ακολουθεί είναι να ζητά από τους εκπαιδευόμενους να κατασκευάζουν διδακτικά πειράματα, να τα υλοποιούν σε τάξεις, να τα βιντεοσκοπούν, να τα απομαγνητοφωνούν και να τα αναλύουν. Αυτή η μέθοδος προετοιμάζει τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς ώστε να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν τα κρίσιμα συμβάντα μέσα στην τάξη, να αποκτήσουν ένα ρεπερτόριο διδακτικών πρακτικών τις οποίες κατόπιν θα μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν όταν βρεθούν στην πραγματικότητα της σχολικής αίθουσας. Αν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δεσμευτούν από την αρχή στην χρήση διδακτικών πρακτικών που προαγάγουν την επιχειρηματολογία και την συμμετοχή όλων των μαθητών τότε η εκπαίδευση των τελευταίων θα είναι πιο ουσιαστική.

Τέλος θα αναφερθούμε στην δριμεία κριτική του σχήματος του Toulmin από ερευνητές της φιλοσοφίας των Μαθηματικών. Θεωρούν ότι:

“ο βαθμός αφαίρεσης που απαιτείται για τη χρήση του διαγράμματος αυτού κάνει δυνατή την ύπαρξη πολλών διαφορετικών ασύμβατων ανακατασκευών αφήνοντας την υποψία ότι οποιαδήποτε κατασκευή μπορεί να υποστεί σημαντική και ακαθόριστη διαστρέβλωση” (Aberdein, 2007,σελ. 141).

Στη Διδακτική των Μαθηματικών η “ευελιξία” αυτή του σχήματος δίνει τη δυνατότητα στους ερευνητές αλλά και στους εκπαιδευτικούς να ανασκευάσουν τη μαθηματική επιχειρηματολογία των ατόμων, δεδομένου ότι οι μαθητές αφήνουν πολλά στοιχεία άρρητα καθώς είτε τα θεωρούν αυτονόητα είτε δεν δύναται να τα εκφράσουν κατάλληλα.

4.2. Η ιδιαίτερη περίπτωση των πιθανοτήτων και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Τα τελευταία χρόνια τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών σε όλο τον κόσμο έχουν εντάξει τις πιθανότητες και την στατιστική στα μαθηματικών βιβλία που διδάσκονται τόσο στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση όσο και στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Οι λόγοι για τους οποίους παρατηρείται αυτή η αλλαγή είναι λόγω της χρησιμότητάς τους στην καθημερινή ζωή, στις σύγχρονες επιστήμες αλλά και στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Η εποχή μας χαρακτηρίζεται από την Τεχνολογική Επανάσταση και το άτομο βομβαρδίζεται καθημερινά από πληθώρα πληροφοριών που καλείται να αξιολογήσει. Οι Πιθανότητες και η Στατιστική αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο αξιολόγησης δεδομένων.

Ο Toulmin (1958) αναφέρεται στην ιδιαίτερη φύση των πιθανοτήτων. Για αυτόν η έννοια της πιθανότητας σε οποιοδήποτε πεδίο αφορά την παράθεση πιθανών ενδεχομένων που οφείλουν να ληφθούν υπόψη. Τα κριτήρια με τα οποία όμως αξιολογούνται τα ενδεχόμενα είναι εξαρτημένα όχι μόνο από το πεδίο του προβλήματος αλλά και από το ίδιο το άτομο.

Οι πιθανότητες συνδέονται στενά με ένα μεγάλο αριθμό παραδόξων που δείχνουν την διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στη διαίσθηση και την εννοιολογική ανάπτυξη του πεδίου όπως αναφέρουν οι Godino, Batanero & Roa (2004).

Τι είναι όμως η μαθηματική διαίσθηση; Ο Hadamard (1954, αναφορά στους Ben Zeev & Star, 2002, σελ. 4) αναφέρουν ότι *“οι μαθηματικοί παραδοσιακά θεωρούσαν τη (μαθηματική) διαίσθηση σαν έναν τρόπο κατανόησης της απόδειξης και αντίληψης των προβλημάτων”*. Η γνωστική ψυχολογία *“είδε την διαίσθηση σαν ένα φαινόμενο που αρχικά προκύπτει μέσα από άρρητες και μη αναλύσιμες διαδικασίες”* (Ben Zeev & Star, 2002, σελ. 5).

Το ερώτημα όμως που απασχολεί τόσο τους ερευνητές αλλά και τους εκπαιδευτικούς είναι πως η διαίσθηση επηρεάζει τη διαδικασία μάθησης στο πλαίσιο του σχολείου;

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν δύο είδη θεωρήσεων για την μαθηματική διαίσθηση. Η *κλασσική δαισθητική άποψη* (Classical intuitionist view) κατά την οποία η μαθηματική διαίσθηση διαχωρίζεται από την τυπική επιχειρηματολογία. Σύμφωνα με αυτήν την θεωρία η διαίσθηση αντίκειται στην επιχειρηματολογία και η δαισθητική γνώση δεν είναι πρακτική ούτε εφαρμόσιμη. Συνδέεται μάλιστα με τις πρωταρχικές δαισθήσεις που αφορούν την καθημερινή άτυπη γνώση που αναπτύσσουν τα παιδιά προσχολικής ηλικίας. (Ben Zeev & Star, 2002, σελ. 6).

Η επαγωγική διαισθητική άποψη (Inferential Intuitionist view) κατά την οποία “η διαίσθηση δεν είναι ένας ιδιαίτερος μηχανισμός αλλά μια μορφή αιτιολόγησης που προκύπτει από την αλληλεπίδραση του ατόμου με το περιβάλλον” (Ben Zeev & Star, 2002, σελ. 6) και συνδέεται με τις δευτερεύουσες διαισθήσεις που κατασκευάζονται με μακροχρόνια τυπική εκπαίδευση.

Ένα ακόμα ερώτημα είναι γιατί οι πιθανότητες δημιουργούν τόσο μεγάλη δυσκολία στα άτομα; Η απάντηση βρίσκεται στην φύση της ίδιας της επιστήμης των πιθανοτήτων. Οι πιθανότητες ακόμα και σε αρχικό επίπεδο απαιτούν υψηλό βαθμό αφαίρεσης, γεγονός που δεν συμβαίνει με την επιστήμη της άλγεβρας και της γεωμετρίας όταν ενασχολούμαστε με αυτές επίσης σε αρχικό επίπεδο.

Ποια είναι όμως η ιδιαιτερότητα της πιθανοθεωρητικής επιχειρηματολογίας (Probabilistic reasoning); Η πιθανοθεωρητική επιχειρηματολογία σύμφωνα με τους Godino, Batanero και Roa (2004) διαφοροποιείται και από την λογική αλλά και από την αιτιολογική επιχειρηματολογία. Όπως αναφέρουμε και στο πρώτο κεφάλαιο η προτάσεις στη λογική και αιτιολογική επιχειρηματολογία έχουν δύο μόνο πιθανές απαντήσεις το σωστό ή λάθος. Στις πιθανότητες όμως για να αποφανθεί το άτομο για ένα αποτέλεσμα πρέπει πρώτα να διεξαχθεί το πείραμα. Α priori μπορούμε μόνο να σκεφτούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου. Η κατασκευή όμως του δειγματικού χώρου πολλές φορές είναι δύσκολη και κάνουμε λάθη. Ένα ακόμα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των πιθανοτήτων που κάνει δύσκολη την ανάπτυξη πιθανοθεωρητικής επιχειρηματολογίας είναι το γεγονός ότι αν διεξάγουμε πολλές φορές ένα τυχαίο πείραμα δεν είναι σίγουρο ότι θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Για να αναπτύξει το άτομο στοχαστική σκέψη και κατ' επέκταση τη πιθανοθεωρητική επιχειρηματολογία απαιτείται η κατασκευή σωστού διαισθητικού συστήματος, πρέπει το άτομο να μάθει να αποκωδικοποιεί και να ερμηνεύει τα δεδομένα, να γνωρίζει πότε και γιατί χρησιμοποιείται κάθε στοχαστικό μοντέλο και τέλος να έχει επίγνωση ότι αυτή η επιστήμη αντιμετωπίζει αμφιλεγόμενες έννοιες όπως η τυχαιότητα και η αιτιότητα.

Τα άτομα λοιπόν λόγω όλων αυτών των ιδιαιτεροτήτων που έχουν οι πιθανότητες και η στατιστική όταν επιχειρηματολογούν σε υποθετικά προβλήματα πιθανοτήτων συνήθως απαντούν λανθασμένα με χαρακτηριστικό παράδειγμα τις απαντήσεις των ατόμων στο Δίλημμα του Monty Hall.

Το Δίλημμα του Monty Hall είναι το εξής: Υποτίθεται ότι λαμβάνεται μέρος σε ένα τηλεπαιχνίδι. Ο παρουσιαστής σας δίνει τρεις πόρτες και σας ζητά να διαλέξετε μία από αυτές. Η μία κρύβει από πίσω ένα αυτοκίνητο και οι άλλες δύο κατσίκες. Ας υποθέσουμε ότι διαλέγετε την 1η πόρτα. Ο παρουσιαστής που γνωρίζει που βρίσκεται το αυτοκίνητο ανοίγει τη μία από τις δύο που απομένουν και αυτή έχει

από πίσω μία κατσίκια. Σας ρωτά ο παρουσιαστής αν θα αλλάξετε την επιλογή ή όχι. Τι θα διαλέγατε?

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δεν είναι εμφανής από την αρχή. Τα άτομα τείνουν να απαντήσουν ότι από την στιγμή που η μία πόρτα αποκλείεται η πιθανότητα στις δύο πόρτες είναι 50 % και άρα δεν έχει νόημα η αλλαγή της απόφασης του παίκτη. Η σωστή απάντηση διαφέρει ωστόσο. Ο διαγωνιζόμενος θα πρέπει να στραφεί προς την άλλη πόρτα. Αν το αυτοκίνητο είναι αρχικά εξίσου πιθανό να είναι πίσω από κάθε πόρτα, ένας παίκτης που επιλέγει την πόρτα 1 και δεν αλλάζει την επιλογή του έχει 1 στις 3 πιθανότητες να κερδίσει το αυτοκίνητο. Ενώ ένας παίκτης που επιλέγει την πόρτα 1 για παράδειγμα και επιλέγει να αλλάξει την επιλογή του έχει 2 σε 3 πιθανότητες να κερδίσει το αυτοκίνητο, αυτό συμβαίνει επειδή ο οικοδεσπότης έχει αφαιρέσει μια λανθασμένη επιλογή από τις πόρτες που δεν έχουν επιλεγεί αρχικά, έτσι οι διαγωνιζόμενοι που επιλέγουν να αλλάξουν την επιλογή τους διπλασιάζουν τις πιθανότητές τους να κερδίσουν το αυτοκίνητο.

Ο λόγος που τα άτομα απαντούν λανθασμένα σε αυτήν την απάντηση είναι το ότι έχουν δύο πεποιθήσεις για αυτού του είδους προβλήματα οι οποίες είναι οι εξής σύμφωνα με τους Ben – Zeen, Stibel, Dennis και Sloman:

1. Ο αριθμός των περιπτώσεων (Number of cases): Τα άτομα όταν έχουν την δυνατότητα επιλογής ανάμεσα σε N στοιχεία θεωρούν ότι η πιθανότητα επιλογής είναι πάντα $1/N$.
2. Σταθερή αναλογία (Constant Ratio): Τα άτομα θεωρούν ότι όταν μια εναλλακτική αποκλείεται τότε η αναλογία των πιθανοτήτων στις εναπομείνουσες εναλλακτικές παραμένει η ίδια.

Δύο επιπρόσθετοι λόγοι είναι:

- Το γεγονός ότι οι άνθρωποι δεν διαθέτουν αρκετή βραχυπρόθεσμη μνήμη η οποία να τους επιτρέπει την αναπαράσταση όλων των πιθανών συνδυασμών.
- Ένας ακόμα λόγος είναι η φύση του παιχνιδιού όπου μπορεί να δημιουργήσει ψυχολογικά εμπόδια τα οποία να εμποδίζουν την κρίση του ατόμου.

Ο λόγος που κάναμε μια τόσο εκτενή αναφορά στην πιθανοθεωρητική επιχειρηματολογία είναι ότι από την βιβλιογραφική ανασκόπηση που κάναμε διαπιστώσαμε την έλλειψη ανάλυσης αυτού του είδους επιχειρηματολογίας με το χρήση του σχήματος του Toulmin. Οι Weber, Maher, Powell και Stohl - Lee(2008) είναι οι μοναδικοί ερευνητές οι οποίοι έκαναν ανάλυση επιχειρήματος κάνοντας χρήση του σχήματος του Toulmin και έχοντας ως γνωστικό αντικείμενο τις πιθανότητες. Η έρευνά τους όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είχε σαν

σκοπό να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο ο διάλογος για την επίλυση ενός προβλήματος στις πιθανότητες και την στατιστική βοηθά στην κατασκευή της γνώσης των εμπλεκομένων.

Θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί και να αναλυθεί η επιχειρηματολογία φοιτητών μαθηματικών τμημάτων στο Δίλημμα του Monty Hall υπό το πρίσμα των ευρημάτων των Inglis et al. (2007). Θα μπορούσε να διερευνηθεί αυτό το είδος απαντήσεων ως προς τις εγγυήσεις που παρέχουν τα άτομα για την αιτιολόγηση της απάντησής τους. Οι εγγυήσεις αυτές θα διαφέρουν από τις εγγυήσεις που έχουν ήδη ορίσει οι Inglis et al. (2007); Και αν διαφέρουν σε ποια σημεία διαφέρουν; Ενδεικτικά θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι είναι πιθανό να διαφέρουν ως προς την φύση τους ή ως προς την επιλογή των λέξεων.

Σαν κατακλείδα αυτής της εργασίας θα ήθελε η συγγραφέας να αναφέρει ένα ρητό:

“Extraordinary claims require extraordinary proof”

Το να μάθουν οι μαθητές μας να επιχειρηματολογούν στα μαθηματικά δεν τους βοηθάει μόνο στη σχολική τους ενασχόληση με αυτό το μάθημα αλλά τους βοηθά να αναπτύσσουν κριτική σκέψη και άποψη. Για αυτόν τον λόγο είναι τόσο σημαντικό να γίνεται αυτή η διαδικασία όσο πιο σωστά γίνεται. Το σχήμα του Toulmin βοηθά ακριβώς σε αυτό το σημείο να αναγνωρίζει το άτομο αν ένα επιχείρημα είναι έγκυρο λαμβάνοντας υπόψη τόσο τη δομή του όσο και το περιεχόμενό του.

Βιβλιογραφία

- Δημητρακόπουλος, Κ.Ι. (1999). Σημειώσεις Μαθηματικής Λογικής.
- Μυτιληναίος, Μ. (2000). Λογική. Εκδόσεις Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών, Τμήμα Πληροφορικής
- Aberdein, A. (2005). The Informal Logic of Mathematical Proof, in J. P. Van Bendegem and B. Van Kerkhove (Eds.), *Perspectives on Mathematical Practices*, Kluwer, Dordrecht, 135-151.
- Aberdein, A. (2005). The Uses of Argument in Mathematics, *Argumentation*, 19, 287-301.
- Alcock, L. & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 111-129.
- Balacheff, N., (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En Pimm, D. (ed.), *Mathematics, teachers and children* (Hodder & Stoughton: Londres), 216-235.
- Ben-Zeev, T. & Star, J. (2002). Intuitive Mathematics: Theoretical and Educational Implications. *Mathematical Intuition*.
- Ben-Zeev, T., Stibel, J., Dennis, M. & Sloman, S. (). Increasing working memory demands improves probabilistic choice but not judgment on the Monty Hall Dilemma.
- Berk, L.E. (1994). Vygotsky's Theory: The importance of make-believe play. *Young Children*, 50(1), pp. 30-39.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 359-387.
- Dockett, S. & Perry, B. (2001). "Air is a kind of wind": Argumentation and the construction of knowledge. *Early Education and Care, and Reconceptualizing Play*. Volume 11, pp. 227-256.
- Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their mathematical implications. *Proceedings of the Cerme – I Conference*, Osnabrueck.
- Evens, H. & Houssart, J. (2004). Categorising pupils' written answers to a mathematics test question: "I know but can't explain". *Educational Research*, Vol.46, No. 3, pp. 269-282.

- Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-24.
- Freeman, J. B. (2005). Systematizing Toulmin's warrants: An epistemic approach. *Argumentation*, 19(3), 331-346.
- Garutti, R., Boero, P. & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and Difficulty of proof. *Proceedings of the International group of the Psychology of Mathematics PME – XXII*, 2, 345-352. Stellenbosch.
- Giannakoulis, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29, 160-168.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 24(1).
www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html
- Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds), *Research in collegiate mathematics education*, 3, 234-283. Providence: AMS.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students approaches to proof. *Learn Mathematics*, 17 (1), 7-16.
- Inglis, M. & Mejia-Ramos, J. P. (2008). How persuaded are you? A typology of Responses. *Research in Mathematics Education*, 10 (2), 119-133.
- Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. & Simpson, A. (2007) Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, pp. 3-21.
- KKnipping, C. (2003). Argumentation structures in classroom proving situations. *European Research in Mathematics Education III*, Thematic Group 4.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education*, 40(3), 427-441.
- Knuth, E. (2002a). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61-88.
- Knuth, E. (2002b). Secondary school mathematics teachers' conception of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.

- Ko, Y.Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: Implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics*, 8, 1109-1129.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In: P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp. 220-269.
- Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, pp. 60-82.
- Lacoff, G. & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh*. Publisher Basic Books.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- McCrone, S. S. (2005). The development of mathematical discussion: An investigation in a fifth grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(2), 111-133.
- Moutsios-Rentzos, A. & Simpson, A. (2011). University mathematics students and exam style proving questions: The A-B- Δ strategy classification scheme. *International Journal for Mathematics in Education*, 3 (3), 45-64.
- Nardi, E., Biza, I. & Zachariades, T. (2012) Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model of argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, 79, pp. 157-173.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23-41.
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 385-400.
- Pedemonte, B. & Buchbinder, O. (2008). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers.
- Pedemonte, B. & Reid, D. (2011). The role of Abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 281-303.
- Rav, Y. (1999). Conjectures and refutations in Grade 5 Mathematica, 7(3), 5-41.
- Reid, D., Knipping, C., & Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA*, 6(1), pp. 1-10.
- Toulmin, S. (1958). *The Uses of Argument*. UK. Cambridge University Press.

- Toulmin, S., Rieke, R. & Janik, A. (1979). An introduction to reasoning. Macmillan, London.
- Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and Syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209-234.
- Weber, K., Maher, C., Powell, A. & Stohl Lee, H. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 247-261.
- Yackel, E. (2001). Explanation, Justification, and Argumentation in mathematics classroom. In M. v. d. Heuvel – Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 9-24. Utrecht, The Netherlands.