Το Θεώρημα πυκνότητας Hales - Jewett

Διπλωματική εργασία

Θεόδωρος Καραγεώργος

Επιβλέπων καθηγητής

Παντελής Δοδός

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

2014

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η συγκεκριμένη εργασία έχει στόχο να παρουσιάσει μια σύντομη και στοιχειώδη απόδειξη του θεωρήματος πυκνότητας Hales - Jewett ή Density Hales - Jewett. Το θεώρημα αυτό είναι ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον αποτέλεσμα καθώς όχι μόνο παρουσιάζει ενδιαφέρον ως ένα συνδυαστικό αποτέλεσμα αλλά και γιατί έχει σαν πορίσματα άλλα σημαντικά θεωρήματα, όπως το θεώρημα Szemerédi. Η πρώτη διατύπωση του θεωρήματος καθώς και η πρώτη απόδειξή του , με τη χρήση εργοδικής θεωρίας , έγινε από τους H.Furstenberg and Y.Katznelson το 1991 ([2]). Στη συνέχεια δόθηκαν κι άλλες αποδείξεις όπως αυτή του T.Austin το 2011 ([12]) χρησιμοποιώντας τη θεωρία υπεργραφημάτων και του T.Tao ([7]). Η πιο γνωστή πάντως είναι η απόδειξη των D.H.J. Polymath ([4]) που αποτελεί την πρώτη καθαρά συνδυαστική απόδειξη του θεωρήματος. Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε την τελευταία απόδειξη των Π.Δοδός,Β.Κανελλόπουλος,Κ.Τύρος ([1]) η οποία είναι η πιο σύντομη αλλά και στοιχειώδης απόδειξη του θεωρήματος.
Η εργασία είναι χωρισμένη σε 4 κεφάλαια. Τα πρώτα δύο είναι η διατύπωση και η απόδειξη δύο γνωστών αποτελεσμάτων της θεωρίας Ramsey, το χρωματικό θεώρημα Hales - Jewett ([9]) και το θεώρημα Graham - Rothschild([3], [8]). Τα θεωρήματα αυτά θα αποτελέσουν και τα βασικά συνδυαστικά εργαλεία για την απόδειξη του θεωρήματος πυκνότητας Hales - Jewett (DHJ). Το τρίτο κεφάλαιο είναι η απόδειξη του DHJ ενώ το τελευταίο είναι αφιερωμένο σε σημαντικά πορίσματα του θεωρήματος αυτού. Στο τέλος των κεφαλαίων 3 και 4 βρίσκονται διαγράμματα με τα βήματα των αποδείξεων των θεωρημάτων που εμπεριέχονται σε αυτά.
Τέλος, προσπαθήσαμε να παραθέσουμε πολλά παραδείγματα και να δώσουμε τη διαίσθηση πίσω από τις διάφορες ιδέες στις οποίες θα αναφερθούμε.

Κεφάλαιο 2

Το χρωματικό θεώρημα Hales - Jewett

2.1 Ορισμοί

Ξεκινώντας θα δώσουμε κάποιους ορισμούς που θα μας χρειαστούν.

I. **Χρωματισμοί - Λέξεις - Μεταβλητές λέξεις και χώροι που παράγουν.**

Με $[k]$ θα συμβολίζουμε το σύνολο $\{1, \ldots, k\}$, όπου $k \in \mathbb{N}$, ενώ αν $k, n \in \mathbb{N}$ με $[k]^n$ θα συμβολίζουμε το σύνολο

$$A = \{a \text{ απεικόνιση }, a : [n] \to [k]\},$$

δηλαδή το σύνολο των $n-$ άδων με αυτές τις k τιμές ή αλλιώς το σύνολο των λέξεων μήκους n με αυτά τα k γράμματα.
Αν $r \in \mathbb{N}$ τότε $r-$ χρωματισμό ενός συνόλου A θα ονομάζουμε μια απεικόνιση

$$c : A \to [r].$$

Αν τώρα πάρουμε το $''$αλφάβητο$''$ $[k] \cup \{x_1, \ldots, x_m\}$, τότε θα ονομάζουμε $m-$ μεταβλητή λέξη στον χώρο $([k] \cup \{x_1, \ldots, x_m\})^n$ και θα την συμβολίζουμε με $L(x_1, \ldots, x_m)$ κάθε πεπερασμένη ακολουθία μήκους m από στοιχεία του παραπάνω $''$αλφαβήτου$''$ στην οποία εμφανίζεται <u>τουλάχιστον μια φορά</u> κάθε x_i , για κάθε $1 \leq i \leq n$. Τα x_i θα τα λέμε μεταβλητές.
Με $\ell(y_1, \ldots, y_m)$, όπου $y_1, \ldots y_m \in [k]$ θα εννοούμε την λέξη που παράγεται από την $L(x_1, \ldots, x_m)$ αν για κάθε $1 \leq i \leq m$ αντικαταστήσουμε το x_i με την τιμή y_i. Είναι

σαφές ότι η παραπάνω λέξη ανήκει στο $[k]^n$.
Έτσι , ορίζουμε την έννοια του $m-$διάστατου χώρου (ή $m-$χωρου) που παράγεται από τη $m-$μεταβλητή λέξη $L(x_1, \ldots, x_m)$ να είναι το σύνολο:

$$\{\ell(y_1, \ldots, y_m) : y_i \in [k], i \leq m\}.$$

Γενικά ,$m-$χωρο θα εννοούμε οποιαδήποτε τέτοια δομή που περιγράφεται παραπάνω εννοώντας οτί υπάρχει μια $m-$μεταβλητή λέξη ℓ που να της δίνει υπόσταση.
Ειδικότερα, αν $n = 1$ ο χώρος που ορίσαμε θα ονομάζεται συνδυαστική γραμμή.
Αν $W \subseteq [k]^n$ τότε θα συμβολίζουμε το σύνολο των συνδυαστικών γραμμών του W με $\mathrm{Lines}(W)$.
Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι για κάθε $V = \{\ell(y_1, \ldots, y_m) : y_i \in [k], i \leq m\}$ υπάρχει φυσιολογικός ισομορφισμός I_V μεταξύ αυτού και του $[k]^m$ που ορίζεται ως εξής:

$$I_V : [k]^m \to V$$

με

$$[k]^m \ni (a_1, \ldots, a_m) \to \ell(a_1, \ldots, a_m) \in V$$

Έχοντας την παραπάνω απεικόνιση κατά νου, για κάθε $k' \in \mathbb{N}$ με $2 \leq k' \leq k$ θέτουμε

$$V \restriction k' = \{\ell(a_1, \ldots, a_m) : a_i \in [k'], i \leq m\}$$

Αν V είναι ο χώρος (σύνολο) που παράγεται από μία μεταβλητή λέξη $L(x_1, \ldots, x_m)$, δηλαδή $V = \{\ell(y_1, \ldots, y_m) : y_i \in [k], i \leq m\}$ τότε με $V \restriction k-1$ θα εννοούμε τον χώρο $\{\ell(y_1, \ldots, y_m) : y_i \in [k-1], i \leq m\}$. Δηλαδή , δηλαδή όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί αντικαταστάσεων των μεταβλητών $x_1, \ldots, x_m$ από τα $k-1$ πρώτα γράμματα του $[k]$.

Παράδειγμα 2.1.1. *Έστω $k = 3, n = 4$ και ότι παίρνουμε τη $2-$μεταβλητή λέξη*

$$L(x_1, x_2) = 2\ x_1\ 1\ x_2,$$

όπου x_1, x_2 οι μεταβλητές.
Τότε

$$\ell(1,1) = 2\ 1\ 1\ 1$$

ενώ ο χώρος V που παράγεται είναι το σύνολο με τα παρακάτω στοιχεία:

$$\ell(1,1) = 2\ 1\ 1\ 1$$
$$\ell(1,2) = 2\ 1\ 1\ 2$$
$$\ell(2,1) = 2\ 2\ 1\ 1$$
$$\ell(2,2) = 2\ 2\ 1\ 2$$

II. $(i,j)-$ **αναλλοίωτοι υπόχωροι.**

Έστω $i,j \in [k], k \geq 2$ με $i \neq j$. Έστω επίσης $z = (z_1,\ldots,z_n), y = (y_1,\ldots,y_n) \in [k]^n$. Θα λέμε ότι τα z,y είναι $(i,j)-$ισοδύναμα αν για κάθε $i \in \{1,\ldots,n\}$ και για κάθε $a \in [k] \setminus \{i,j\}$ έχουμε ότι :

$$z_i = a \text{ αν και μόνο αν } y_i = a.$$

Δηλαδή δύο στοιχεία είναι $(i,j)-$ισοδύναμα αν διαφέρουν μόνο στις θέσεις που παίρνουν τις τιμές i και j.

Ορισμός 2.1.2. *Έστω $k,n \in \mathbb{N}, k \geq 2$ και $i,j \in [k]$ με $i \neq j$. Έστω επίσης $S \subseteq [k]^n$. Το σύνολο S καλείται $(i,j)-$αναλλοίωτο αν για κάθε $z \in S$ και για κάθε $y \in [k]^n$ αν z και y είναι $(i,j)-$ισοδύναμα τότε $y \in S$. Γενικότερα, έστω W συνδυαστικός υπόχωρος του $[k]^n$. Ένα $S \subseteq [k]^n$ θα λέγεται ότι είναι $(i,j)-$αναλλοίωτο στον W αν ${I_W}^{-1}(S \cap W)$ είναι $(i,j)-$αναλλοίωτο υποσύνολο του $[k]^n$, όπου I_W ο κανονικός ισομορφισμός που ορίσαμε προηγουμένως.*

Παρατηρούμε ότι ενώσεις,τομές και συμπληρώματα αναλλοίωτων υποσυνόλων είναι και αυτά αναλλοίωτα. Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να επεκταθεί εύκολα για χρωματισμούς ως εξης:

Ορισμός 2.1.3. *Έστω $k,n,m,d \in \mathbb{N}, k \geq 2$ και $i,j \in [k]$ με $i \neq j$. Έστω επίσης W υπόχωρος του $[k]^n$ διάστασης d και c ένας $m-$χρωματισμός του $[k]^n$. Λέμε ότι ο χρωματισμός c είναι $(i,j)-$αναλλοίωτος στον W αν για κάθε $p \in [m]$ το σύνολο $c^{-1}(\{p\})$ είναι $(i,j)-$αναλλοίωτο στον W.*
Αν το παραπάνω ισχύει για ένα υποσύνολο V των μεταβλητών του W με $|V| = t$, όπου $t \leq d$ τότε ο W ονομάζεται $(i,j)-$αναλλοίωτος τάξης t.
Τέλος αν $t = d$ τότε ονομάζεται πλήρως αναλλοίωτος.

Είμαστε ,τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το χρωματικό θεώρημα Hales - Jewett.

2.2 Το χρωματικό θεώρημα Hales - Jewett

Θεώρημα 2.2.1. ***(Χρωματικό θεώρημα Hales - Jewett.)***
Για κάθε $k \geq 2$, $r \geq 1$ και $m \geq 1$ υπάρχει φυσικός αριθμός N με την εξής ιδιότητα:
Για κάθε $n \geq N$ και για κάθε $m-$χρωματισμό του συνόλου $[k]^n$ υπάρχει μονοχρωματικός $r-$διάστατος υπόχωρος.
Ο αριθμός αυτός N θα συμβολίζεται με $\mathrm{HJ}(k,m,r)$.

Απόδειξη.
Η απόδειξη που θα δώσουμε ανήκει στον S.Shelah η οποία δεν είναι η πρώτη απόδειξη

που δόθηκε γι' αυτό το θεώρημα. Πλεονεκτεί ωστόσο συγκριτικά με αυτήν στο ότι βγάζει πολύ καλύτερα φράγματα για τον αριθμό HJ.
Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο k.
Η περίπτωση $k = 1$ είναι προφανής, γι' αυτό υποθέτουμε ότι $k \geq 2$ και ότι έχουμε αποδείξει το ζητούμενο για όλα τα $j \leq k$.
Η απόδειξη τότε, είναι άμεσο αποτέλεσμα του εξής λήμματος:

Λήμμα 2.2.2. *Έστω $n_0,\ n_1,\ n_2 \geq 0$ και $m \geq 1$. Τότε για κάθε $m-$χρωματισμό υπάρχει ακέραιος n, με την εξής ιδιότητα :*
Αν πάρω οποιοδήποτε χώρο διάστασης $n + n_0$ που να είναι $(i, j)-$αναλλοίωτος τάξης n_0, τότε θα περιέχει υπόχωρο διάστασης $n_0 + n_1 + n_2$ που θα είναι $(i, j)-$αναλλοίωτος τάξης $n_0 + n_1$.

Αν υποθέσουμε οτί ισχύει το λήμμα τότε παίρνουμε την απόδειξη του θεωρήματος ως εξής:

Απόδειξη του χρωματικού θεωρήματος Hales - Jewett2.2.1
Προφανώς ο χώρος $[k + 1]^n$ είναι $(i, k + 1)-$αναλλοίωτος τάξης 0 για οποιοδήποτε n καθώς οι σταθερές λέξεις παραμένουν αναλλοίωτες όταν αλλάξουμε το i με $k + 1$ μιας και δεν έχουν καμία μεταβλητή
Εφαρμόζουμε έτσι το παραπάνω λήμμα για $(n_0, n_1, n_2) = (0, \widetilde{n}, 0)$,όπου $\widetilde{n} = \mathrm{HJ}(k, m, r)$ (που είναι γνωστό από την επαγωγική μας υπόθεση) και επομένως υπάρχει n και $\widetilde{n}-$διάστατος υπόχωρος V του $[k + 1]^n$ πλήρως $(i, k + 1)-$αναλλοίωτος.
Έστω c ένας $m-$χρωματισμός του $[k]^n$.
Ο χρωματισμός αυτός επάγει έναν c' χρωματισμό του $[k]^{\widetilde{n}}$ με $c'(z) = c(I_{V\restriction k}(z))$.
Από την επαγωγική μας υπόθεση όμως υπάρχει $r-$διάστατος υπόχωρος W του $V \restriction k$ μονοχρωματικός.
Το V όμως είναι πλήρως $(i, k + 1)-$αναλλοίωτος και επομένως μπορούμε στις θέσεις εμφάνισης των μεταβλητών που παράγουν το χώρο να αντικαταστήσουμε το i με $k + 1$ στο W χωρίς να αλλάξει το χρώμα, αφού $W \subseteq V$.
Επομένως έχουμε το ζητούμενο και $n = \mathrm{HJ}(k + 1, m, r)$. □

Αποδεικνύουμε τώρα το λήμμα που χρησιμοποιήσαμε .
Απόδειξη του Λήμματος 2.2.2
Η ιδέα της απόδειξης εμφανίζεται ήδη στην περίπτωση $(n_0, n_1, n_2) = (0, 1, 0)$ την οποία και θα δείξουμε πρώτα.

Λήμμα 2.2.3. *Έστω $r \geq m$, όπου m το εύρος του χρωματισμού. Τότε κάθε $r-$χωρος V θα περιέχει συνδυαστική γραμμή $(i, j)-$αναλλοίωτη.*

Απόδειξη.
Έστω χώρος V που παράγεται από τη $r-$μεταβλητή λέξη L'.
Παίρνουμε στοιχεία $u_0, \ldots, u_r \in V$ ως εξής :

$$u_0 = \ell' \underbrace{(j, \ldots, j)}_{r}, u_1 = \ell'(i, j, \ldots, j), \ldots, u_r = \ell'(i, i, \ldots, i).$$

Αφού $r \geq m$ από την αρχή της περιστεροφωλιάς έχουμε ότι υπάρχει $1 \leq k \leq k' \leq n$ ώστε τα u_k και $u_{k'}$ να έχουν το ίδιο χρώμα.
Έστω p_k και $p_{k'}$ είναι οι θέση που βρίσκεται το τελευταίο i στα u_k και u'_k αντίστοιχα και υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $p_k < p_{k'}$.
Αλλά αυτό είναι το ίδιο με το να πούμε οτι η συνδυαστική γραμμή:

$$\ell(\underbrace{i, \ldots, i}_{p_k}, \underbrace{x_{p_{k+1}}, \ldots, x_{p_{k+1}}}_{p_{k'}-p_k}, \underbrace{j, \ldots, j}_{n-p_{k'}})$$

είναι $(i, j)-$αναλλοίωτη.
Πράγματι αν δώσω την τιμή j στα $x_{p_{k+1}}$ τότε παίρνω το u_k ενώ αν δώσω την τιμή i τότε παίρνω το u'_k που έχουν το ίδιο χρώμα.
Επομένως έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Παράδειγμα 2.2.4. *Στο $[k]^5$, τα $u_0, \ldots, u_5$ θα ήταν αντίστοιχα οι σειρές του παρακάτω πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & j & j & j & j \\ i & j & j & j & j \\ i & i & j & j & j \\ i & i & i & j & j \\ i & i & i & i & j \\ i & i & i & i & i \end{pmatrix},$$

ενώ αν υποθέσω ότι το u_2 και το u_4 είναι μονοχρωματικά τότε είναι $(i, j)-$αναλλοίωτη και η συνδυαστική γραμμή που παράγεται από τη μεταβλητή λέξη

$$i\ x_1\ x_1\ j\ j.$$

Περνάμε τώρα στην απόδειξη της γενικής περίπτωσης.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n_1.
Η περίπτωση $n_1 = 0$ είναι τετριμμένη (παίρνω τον ζητούμενο υπόχωρο να είναι ο ίδιος ο χώρος).
Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n_1 > 0$ και ότι έχουμε το ζητούμενο για $n_1 - 1$.
Επομένως από την επαγωγική μας υπόθεση για την τριάδα (n_0+1, n_1-1, n_2), όπου n_0, n_2 τυχαία υπάρχει ακέραιος n_* ώστε κάθε χώρος V'' διάστασης n_0+1+n_*, $(i, j)-$αναλλοίωτος τάξης $n_0 + 1$ να περιέχει υπόχωρο V' διάστασης $(n_0 + 1) + (n_1 - 1) + n_2 = n_0 + n_1 + n_2$,

$(i,j)-$αναλλοίωτο τάξης $(n_0+1)+(n_1-1)=n_0+n_1$.

Έτσι, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξή μας , αρκεί να βρούμε n αρκετά μεγάλο ώστε κάθε χώρος V διάστασης n_0+n, $(i,j)-$αναλλοίωτος και τάξης n_0 να περιέχει υπόχωρο V'' διάστασης n_0+1+n_*, $(i,j)-$αναλλοίωτο και τάξης n_0+1, γιατί τότε από την επαγωγική υπόθεση και τη συζήτηση που προηγήθηκε θα περιέχει και περεταίρω υπόχωρο διάστασης $n_0+n_1+n_2$,$(i,j)-$αναλλοίωτο τάξης n_0+n_1 που είναι το ζητούμενο.

Στο σημείο αυτό χρειάζεται να εισάγουμε κάποιους ακόμα συμβολισμούς.

Υπολέξη L' μια μεταβλητής λέξης L θα ονομάζουμε μια μεταβλητή λέξη που ο παραγώμενος απ' αυτήν χώρος είναι υπόχωρος (υποσύνολο) του παραγώμενου χώρου απ' την L.
Προφανώς το πλήθος μεταβλητών της L' είναι μικρότερο ή ίσο αυτού της L.
Δύο υπολέξεις της ℓ καλούνται συμπληρωματικές αν οι μεταβλητές της μιας και της άλλης αποτελούν διαμέριση των μεταβλητών της ℓ.
Έστω τώρα $L=L(x_1,\dots,x_r)$ μια $r-$μεταβλητή λέξη,$\{x_1,\dots,x_r\}=J\cup P, J\cap P=\emptyset$ και $L_1=L_1(x_i,x_i\in J), L_2=L_2(x_i,x_i\in P)$ δύο υπολέξεις της L.
Τότε συμβολίζουμε την $''$ συγκόλλιση $''$ των L_1,L_2 με $L_1^{\wedge}L_2$. Ειδικότερα, όταν για κάθε x_i μεταβλητή της L_1 και για κάθε x_j μεταβλητή της L_2 ισχύει ότι $i\le j$ τότε η $''$ συγκόλλιση $''$ ονομάζεται φυσιολογική και συμβολίζεται με $L_1^{\frown}L_2$.

Παράδειγμα 2.2.5. *Έστω $r=3,k=2,n=4$ και*

$$L=L(x_1,x_2,x_3)=1\ x_2\ x_1\ x_3,\ L_1=L_1(x_2)=1\ x_2,\ L_2=L_2(x_1,x_3)=x_1\ x_3.$$

Τότε

$$L_1^{\wedge}L_2=1\ x_2\ x_1\ x_3=L.$$

Αντίστοιχα ορίζονται οι πράξεις $^\wedge$ και $^\frown$ για υποχώρους (ορίζονται στις λέξεις που τους παράγουν) .

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη.

Προφανώς μπορώ να υποθέσω ότι $n>n_*+1$, γιατί αν ισχύει το ζητούμενο για κάποιο n προφανώς ισχύει και για τα μεγαλύτερα.
Έστω V τυχαίος υπόχωρος διάστασης n_0+n και V_0 ο n_0-υπόχωρός του , που είναι $(i,j)-$αναλλοίωτος υπόχωρος πλήρους τάξης, από την υπόθεση που κάναμε ότι τέτοιος υπάρχει.
Ορίζουμε W_0 χώρο διάστασης n_* και Z_0 χώρο διάστασης $n-n_*$ ώστε:

$$V=V_0^{\wedge}W_0^{\wedge}Z_0$$

ή ταυτίζοντας τον Z_0 με τον $[k]^{n-n^*}$ μέσω του φυσιολογικού ισομορφισμού I_{Z_0} :

$$V=V_0^{\wedge}W_0^{\wedge}I_{Z_0}([k]^{n-n_*}).$$

Ορίζουμε τώρα $m^{k^{n_0+n_*}}$ χρωματισμό (πολυχρωματισμός) $\widetilde{c}$ του $[k]^{n-n_*}$ ως εξής:

$$\tilde{c}(\alpha) := c(b^\wedge c^\wedge I_{Z_0}(\alpha)),$$

για κάθε $b \in V_0$ και $c \in W_0$.
Παίρνουμε $n - n_*$ μεγαλύτερο ή ίσο του $m^{k^{n_0+n_*}}$.
Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα μπορούμε να βρούμε $(i,j)-$αναλλοίωτη συνδυαστική γραμμή ℓ' του $[k]^{n-n_*}$ ώστε :

$$\widetilde{c}(\ell'(i)) = \widetilde{c}(\ell'(j))$$

ή αλλιώς πηγαίνοντας στον αρχικό χρωματισμό

$$c(b + c + I_{Z_0}(\ell'(i)) = c(b^\wedge c^\wedge I_{Z_0}(\ell'(j)),$$

για κάθε $b \in V_0$ και $c \in W_0$.
Παίρνουμε τώρα τον $(n_0 + 1 + n_*)-$χώρο V'' που ορίζεται σαν :

$$V'' := V_0^\wedge W_0^\wedge I_{Z_0}(\ell'),$$

δηλαδή η $''$σύζευξη$''$ του $V_0^\wedge W_0$ με την εικόνα μέσω του I_{Z_0} της αναλλοίωτης συνδυαστικής γραμμής του $[k]^{n-n_*}$ που είναι απο τον ορισμό του V_0 και την κατασκευή της ℓ' αναλλοίωτος χώρος τάξης $n_0 + 1$. □

Κεφάλαιο 3

Το θεώρημα Graham-Rothschild

3.1 Κάποια ακόμα θεωρήματα συνδυαστικής

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε το θεώρημα των πεπερασμένων τομών που θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη του πεπερασμένου θεωρήματος Milliken-Taylor που θα χρησιμοποιήσουμε με τη σειρά του για την απόδειξη του θεωρήματος Graham -Rothschild, του βασικού αποτελέσματος αυτού του κεφαλαίου. Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το θεώρημα των πεπερασμένων τομών εισάγουμε κάποιον συμβολισμό που θα μας χρειαστεί.

Με το σύμβολο $\mathcal{P}_n$ συμβολίζουμε τα υποσύνολα του $[n]$ και με το σύμβολο $\mathrm{FU}(\mathcal{D})$, όπου $\mathcal{D}$ πεπερασμένη συλλογή ξένων ανά δύο υποσυνόλων φυσικών αριθμών θα συμβολίζουμε το σύνολο

$$\mathrm{FU}(\mathcal{D}) = \left\{ \bigcup_{i\in T} D_i : D_i \in \mathcal{D}, i \in I \text{ και } \emptyset \neq T \subseteq I \right\}.$$

Επίσης αν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ με $\mathrm{FS}(\{a_1, \dots, a_n\})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο :

$$\mathrm{FS}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \left\{ \sum_{i\in T} a_i : \emptyset \neq T \in \mathcal{P}_n \right\}.$$

Αν T ένα υποσύνολο φυσικών τότε με $[T]^i$ θα συμβολίζουμε την οικογένεια των υποσυνόλων του με πληθικότητα i.
Ακόμα ορίζουμε διάταξη $\prec$ στα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ ως εξής:
Αν $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{N}$ τότε

$$D_1 \prec D_2 \Longleftrightarrow d_1 < d_2,$$

για κάθε $d_1 \in D_1$ και $d_2 \in D_2$.
Τέλος με $a(I)$, όπου $I\mathcal{P}_n$ θα συμβολίζουμε τον αριθμό $\sum_{i\in I} a_i$. Επίσης θα χρειαστούμε το θεώρημα van der Waerden (βλ.) το οποίο λέει το εξής:

Θεώρημα 3.1.1. ***(Van der Waerden)***
Αν $k, m \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $N = N(k, m)$ με την εξής ιδιότητα:
Για κάθε μη τετριμμένη αριθμητική πρόοδο $\mathcal{P}$ στους ακεραίους, με $|P| \geq N$ και για κάθε $m-$χρωματισμό αυτής υπάρχει μη τετριμμένη υποπρόοδος $\mathcal{P}'$ με $|\mathcal{P}'| = k$.

Περνάμε λοιπόν στο θεώρημα Folkman που με τη σειρά του θα μας δώσει το θεώρημα των πεπερασμένων τομών. Στο σημείο αυτό μπορεί κανείς να δει στο διάγραμμα 3.1 την αλληλουχία των θεωρημάτων αυτού του κεφαλαίου, τι δίνει το καθένα καθώς και τι χρειάζεται το καθένα απ' αυτά για να αποδειχτεί.

Θεώρημα 3.1.2. ***(Folkman.)*** *Αν $k, m \geq 1$ υπάρχει $F = F(m, k)$ φυσικός αριθμός με την εξής ιδιότητα:*
Αν πάρουμε $n \geq F$ και τυχαίο $m-$χρωματισμό του $[n]$ τότε υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k \in [n]$ ώστε το $\mathrm{FS}(\{a_1, \ldots, a_k\})$ να είναι μονοχρωματικό.

Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού θα χρειαστούμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 3.1.3. *Αν $m, k \geq 1$ τότε υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(m, k)$ με την εξής ιδιότητα:*
Αν πάρουμε $n \geq N$ και τυχαίο $m-$χρωματισμό του $[n]$, τότε υπάρχουν $a_1 < \ldots < a_k$ με $a(I) \leq n$ για κάθε $I \in \mathcal{P}_k$ ώστε ο χρωματισμός του $a(I)$ να εξαρτάται μόνο από το $max(I)$.

Δηλαδή βρίσκω σύνολο ώστε το πεπερασμένα αθροίσματα των στοιχείων του με κοινό μέγιστο δείκτη να έχουν το ίδιο χρώμα.

Απόδειξη του λήμματος.
Έστω $m, k \geq 1$ και $W(m, k)$ ο φυσικός αριθμός που προκύπτει από το θεώρημα Van der Waerden για $m-$χρωματισμό.
Θα κάνουμε επαγωγή στο k.
Για $k = 1$ δεν έχουμε να δείξουμε κάτι.
Έστω λοιπόν $k > 1$.
Παίρνουμε $n = n(m + 1) = 2W(m, n(m, k))$.
Έστω λοιπόν τυχαίος $m-$χρωματισμός του $[n]$. Αν κοιτάξουμε μόνο το $\{n/2 + 1, \ldots, n\}$ βρίσκουμε a_{k+1}, d με $n(m, k)/2 < a_{k+1}$ ώστε το σύνολο:

$$\{a_{k+1} + \lambda d : 0 \leq \lambda \leq n(m, k)\} \tag{3.1}$$

να είναι μονοχρωματικό.
Τώρα, ταυτίζοντας το $d[n(m, k)]$ με το $[n(m, k)]$ βρίσκουμε $a_1 < \ldots < a_n$ όλα διαιρετά από d με το άθροισμα τους να είναι το πολύ $dn(m, k)$, ώστε τα $a_1, \ldots, a_n$ να επαληθεύουν την επαγωγική υπόθεση.
Θεωρούμε $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$.
Τότε για $j < k + 1$ τα $a(I)$ όπου $max(I) = j$ είναι μονοχρωματικά από την επαγωγική υπόθεση.
Αν τώρα $max(I) = k + 1$ τότε $a(I) = a_{k+1} + \lambda d$ όπου $0 \leq \lambda \leq n(m, k)$ και άρα έχει το ίδιο

χρώμα με τα υπόλοιπα λόγω της 3.1.
Επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του θεωρήματος Folkman.
Παίρνουμε $F(m,k) = n = n(m,(m-1)k+1)$, οπού n του λήμματος και τυχαίο $m-$χρωματισμό του $[F]$.
Επομένως βρίσκουμε $a_1 < \ldots < a_{(m-1)k+1}$ στο $[F]$ που να ικανοποιούν το λήμμα.
Επάγουμε έπειτα χρωματισμό του $[(m-1)k+1]$ χρωματίζοντας κάθε στοιχείο i αυτού με το χρώμα των $a(I)$, όπου $max(I) = i$.
Από την αρχή της περιστεροφωλιάς βρίσκουμε $S \subseteq [(m-1)k+1], |S| \geq k$ μονοχρωματικό στον επαγώμενο χρωματισμό.
Παίρνουμε $A = \{a_i : i \in S\}$ και έχουμε ότι το $\mathrm{FS}(A)$ είναι μονοχρωματικό και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Περνάμε τώρα στο θεώρημα των πεπερασμένων τομών που λέει το εξής:

Θεώρημα 3.1.4. ***(Θεώρημα των πεπερασμένων τομών.)***
Για κάθε $k, m \geq 1$ υπάρχει $F = F(k,m)$ έτσι ώστε:
Αν $n \geq F$ και πάρουμε τυχαίο $m-$χρωματισμό του $\mathcal{P}_n$, τότε υπάρχει οικογένεια $\mathcal{D}$ ξένων ανά δύο συνόλων με $|\mathcal{D}| = k$ ώστε η $\mathrm{FU}(\mathcal{D})$ να είναι μονοχρωματική.

Η απόδειξη στηρίζεται στο θεώρημα του Folkman και σ' ένα λήμμα που είναι μια επέκταση του γνωστού θεωρήματος Ramsey:

Θεώρημα 3.1.5. ***(Θεώρημα Ramsey.)***
Για κάθε $k, t, r \geq 1$ υπάρχει $R = R(k,t,r)$ με την εξής ιδιότητα:
Αν χρωματίσουμε με $r-$χρώματα τα υποσύνολα του $[R]$ πληθικότητας k τότε υπάρχει $T \subseteq [R]$ με $|T| = t$ ώστε όλα τα υποσύνολά του πληθικότητας k να είναι μονοχρωματικά.

Το λήμμα που προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα και θα χρειαστούμε είναι το εξής:

Λήμμα 3.1.6. *Έστω k, c, t θετικοί ακέραιοι. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος m με την εξής ιδιότητα:*
Αν $C \subseteq \mathbb{N}, |C| \geq m$ πεπερασμένο τότε υπάρχει $V \subseteq C$ με $|V| = t$, ώστε για κάθε $1 \leq i \leq k$ να έχουμε $[V]^i$ μονοχρωματικό. Δηλαδή όλοι τα υποσύνολα ίδιας πληθικότητας να είναι μονοχρωματικά.

Απόδειξη.
Έστω k, c, t.
Τότε από το θεώρημα Ramsey υπάρχει $R = R(c,k,s)$ ώστε για κάθε $c-$χρωματισμό του $[\{1,\ldots,R\}]^k$ υπάρχει $T \subseteq [R]$ με $|T| = s$ ώστε το $[T]^k$ να είναι μονοχρωματικό.

Ορίζουμε τώρα $n_1, \ldots, n_k$ ως εξής:

$$\begin{aligned} n_1 &= R(c, 1, t) \\ n_2 &= R(c, 2, n_1) \\ &\vdots \\ n_i &= R(c, i, n_{i-1}), \end{aligned}$$

για $1 \leq i \leq k$.
Ορίζουμε $m = n_k$ και παίρνουμε $|C| > m$.
Τότε υπάρχει $C_{k-1} \subseteq C$ με $|C_{k-1}| = n_{k-2}$ και $[C_{k-1}]^k$ μονοχρωματικό, από τον ορισμό του n_k.
Από τον ορισμό του n_{k-2} υπάρχει $C_{k-2} \subseteq C_{k-1} \subseteq C$ με $C_{k-2}| = n_{k-3}$ και $[C_{k-2}]^{k-1}$ μονοχρωματικό .
Δηλαδή τα υποσύνολα του C_{k-2} πληθικότητας k (αφού περιέχεται στο C) καθώς και αυτά πληθικότητας $k-1$ (αφού περιέχεται στο C_{k-1}) βάφονται αντίστοιχα μονοχρωματικά.
Έτσι , προχωρόντας αντίστροφα βρίσκουμε:

$$C_0 \subseteq C_1 \subseteq \ldots \subseteq C_k = C,$$

όπου $|C_0| = t$ και για κάθε $1 \leq i \leq k$ το $[C_0]^i$ είναι μονοχρωματικό και άρα έχουμε το ζητούμενο. Δηλαδή στο C_0 το χρώμα κάθε υποσυνόλου εξαρτάται από την πληθικότητά του και μόνο. $\square$ Τώρα το θεώρημα που ζητάμε των πεπερασμένων τομών προκύπτει ως εξής από το παραπάνω λήμμα:

Έστω λοιπόν $F = F(c, k)$, ο θετικός ακέραιος που μας δίνει το θεώρημα Folkman.
Έστω επίσης το m που προκύπτει από το λήμμα για $|C| = F(c, k)$ και c τυχαίος χρωματισμός του $\mathcal{P}_m$.
Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $C \subseteq [m]$ με $|C| = t = F(c, k)$ ώστε για κάθε $1 \leq i \leq F(c, k)$ έχουμε $[C]^i$ μονοχρωματικό.
Επάγεται φυσιολογικά επομένως $c-$χρωματισμός όπου η κάθε πληθικότητα υποσυνόλων $[F(c, k)]$ χρωματίζει στοιχεία του $[F(c, k)]$.
Από το θεώρημα Folkman τώρα υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k \in [F(c, k)]$ ώστε $\mathrm{FS}(a_1, \ldots, a_k)$ μονοχρωματικό.
Αφού

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq F(c, k)$$

υπάρχει $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_k\}$ συλλογή ξένων ανά δύο υποσυνόλων του C τα οποία μπορούμε να τα επιλέξουμε ώστε $D_1 \prec \ldots \prec D_k$ (μας δίνει τη block μορφή στο Graham-Rothschild) με $|D_i| = a_i$ για κάθε i .
Παρατηρούμε ότι ο πληθάριθμος οποιασδήποτε ένωσης τους, αφού αυτά είναι ξένα είναι

στοιχείο του $\mathrm{FS}(\{a_1, \ldots, a_k\})$ και έτσι έπεται ότι επάγων χρωματισμός κάνει την $\mathrm{FU}(\mathcal{D})$ μονοχρωματική.
Επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

Τώρα από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ένα ακόμα γνωστό αποτέλεσμα της θεωρίας Ramsey το οποίο ουσιαστικά θα μας χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη του Graham - Rothschild. Αυτό είναι το πεπερασμένο θεώρημα Milliken -Taylor.
Μια $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με $max(F_i) < min(F_j)$, για $i \leq j$ θα την ονομάζουμε block ακολουθία.
Μια $\mathcal{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ θα λέγεται block υπακολουθία της $\mathcal{F}$ αν $G_i \in \mathrm{NU}(\mathcal{F})$.
Αν $\mathcal{F} \restriction m$ είναι η οικογένεια $F_1, \ldots, F_m$ τότε βάθος της $\mathcal{G}$ είναι το μέγιστο m για το οποίο η $\mathcal{G}$ είναι blockυπακολουθία της $\mathcal{F} \restriction m$ συμβολίζεται με $\mathrm{depth}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$.
Τέλος ,για κάθε $m \in [n]$ ορίζουμε:

$$\mathrm{Block}_m^{max}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{G} \in \mathrm{Block}_m(\mathcal{F}) : \mathrm{depth}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = n\}.$$

Θεώρημα 3.1.7. ***(Πεπερασμένο θεώρημα Milliken -Taylor)***
Για κάθε $d, m, r \in \mathbb{N}$ με $d \geq m$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα:
Αν $n \geq N$, τότε για κάθε block ακολουθία $\mathcal{F}$ με μήκος n και για κάθε $r-$ χρωματισμό του $\mathrm{Block}_m\mathcal{F}$ υπάρχει $\mathcal{G} \in \mathrm{Block}_d\mathcal{F}$ ώστε $\mathrm{Block}_m\mathcal{G}$ να είναι μονοχρωματικό.
Ο ελάχιστος αριθμός με αυτή την ιδιότητα θα συμβολίζεται με $\mathrm{MT}(d, m, r)$.

Την απόδειξη μπορεί να την βρει κανείς στα [8] και [11].

3.2 Το θεώρημα Graham - Rothschild

Πριν διατυπώσουμε αυτό το θεώρημα θα χρειαστεί να εισάγουμε τις έννοιες της block λέξης και του block χώρου.
Αν $L(x_1, \ldots, x_r)$ μια $r-$μεταβλητή λέξη , τότε αυτή θα ονομάζεται $r-$block μεταβλητή λέξη αν καμιά εμφάνιση της x_{i+1} δεν προηγείται της x_i, για κάθε $1 \leq i \leq r-1$. Ο χώρος που παράγει μια τέτοια λέξη θα ονομάζεται $r-$block χώρος.

Παράδειγμα 3.2.1. *Έστω $k = 2, n = 5$ και $r = 2$. Τότε $2-$block λέξεις του $[2]^5$ είναι οι*

$$1\ x_1\ x_1\ 2\ x_2$$
$$2\ x_1\ x_2\ 2\ x_2,$$

ενώ τέτοιες δεν είναι οι

$$1\ x_2\ x_1\ 2\ x_2$$
$$2\ x_1\ x_2\ 2\ x_1.$$

Έχουμε πλέον τα εργαλεία για να αποδείξουμε το θεώρημα Graham - Rothschild. Για την απόδειξή του θα χρησιμοποιήσουμε το χρωματικό θεώρημα Hales-Jewett καθώς και το πεπερασμένο θεώρημα Milliken -Taylor. Ένα πόρισμα του θεωρήματος Graham - Rothschild που θα δείξουμε στο τέλος του κεφαλαίου θα αποτελέσει βασικό εργαλείο της απόδειξης του θεωρήματος πυκνότητας Hales- Jewett που θα αποδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 3.2.2. ***(Θεώρημα Graham-Rothschild.)***
Για κάθε $k, m, r, t \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N = N(k, m, r, t)$ με την εξής ιδιότητα:
Για κάθε $n \geq N$ και για κάθε $m-$χρωματισμό των $r-$block υπόχωρων του $[k]^n$, υπάρχει $t-$block υπόχωρος V ώστε όλοι οι $r-$block υπόχωροί του V να είναι μονοχρωματικοί.
Τον αριθμό αυτό θα τον συμβολίζουμε με $\mathrm{GR}(k, m, r, t)$.

Απόδειξη.
Η στρατηγική της απόδειξης είναι να χρησιμοποιήσουμε το Hales-Jewett ώστε να περάσουμε σ' έναν υπόχωρο όπου ο χρωματισμός των block υποχώρων εξαρτάται μόνο από τη θέση των μεταβλητών .
Έστω $L \geq r$ αρκετά μεγάλο (θα το επιλέξουμε στη συνέχεια). Τότε:

Λήμμα 3.2.3. *Υπάρχει $M_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m-$ χρωματισμό των $r-$block χώρων του $[k]^{M_1+(L-1)}$ στους οποίους δεν εμφανίζονται οι μεταβλητές στις πρώτες M_1 θέσεις, υπάρχει μεταβλητή λέξη $W_1(x)$ του $[k]^{M_1}$ ώστε για κάθε $r-$ block μεταβλητή λέξη $U(x_1, \ldots, x_r)$ του $[k]^{L-1}$, το σύνολο*

$$\left\{w_1(1)^\frown U(x_1, \ldots, x_n), w_1(2)^\frown U(x_1, \ldots, x_n), \ldots, w_1(k)^\frown U(x_1, \ldots, x_n)\right\},$$

να είναι μονοχρωματικό.

Παρατήρηση 3.2.4. *Αφού οι μεταβλητές δεν εμφανίζονται στις πρώτες M_1 θέσεις τότε έχουμε ότι $[k]^{M_1}{}^\frown[k]^{L-1} = [k]^{M_1+(L-1)}$, δηλαδή η "σύζευξη" είναι φυσιολογική και άρα τα παραπάνω έχουν νόημα.*

Απόδειξη.
Έστω c ένας $m-$χρωματισμός των $r-$block χώρων του $[k]^{M_1+(L-1)}$ και $w \in [k]^{M_1}$.
Τότε, για κάθε $r-$block λέξη $U(x_1, \ldots, x_r)$ του $[k]^{L-1}$ το $w^\frown U(x_1, \ldots, x_r)$ έχει κάποιο χρώμα. Τότε, προκύπτει ο εξής χρωματισμός:

$$\widetilde{c} : [k]^n \to [r^{\widetilde{K}}],$$

όπου $\widetilde{K}$ το πλήθος των $r-$ block χώρων του $[k]^{L-1}$ με:

$$\widetilde{c}(w) = (c(w^\frown U_1), \ldots, c(w^\frown U_{\widetilde{K}})).$$

Επομένως από το θεώρημα Hales-Jewett υπάρχει M_1 αρκούντως μεγάλο και $W(x)$ μεταβλητή λέξη του $[k]^{M_1}$ ώστε το

$$\{w(1), \ldots, w(k)\}$$

να είναι μονοχρωματικό. Δηλαδή,

$$\widetilde{c}w(1) = \widetilde{c}w(x_2) = \ldots = \widetilde{c}w(x_k).$$

Κοιτώντας όμως τον ορισμό του επαγώμενου χρωματισμού βλέπουμε ότι έχουμε το ζητούμενο .
Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε M_2 ώστε για κάθε $m-$ χρωματισμό $r-$διάστατων block χώρων του $[k]^{M_1+M_2+(L-2)}$ στους οποίους δεν εμφανίζονται οι μεταβλητές στις θέσεις $\{M_1+1,\ldots,M_2\}$, υπάρχει μεταβλητή λέξη $W_2(x)$ του $[k]^{M_2}$ ώστε για κάθε $r-block$μεταβλητή λέξη της μορφής $u^\frown w_2(t)^\frown v$, όπου $u \in [k]^{M_1}$ και $v \in [k]^{L-2}$, το χρώμα της $u^\frown w_2(t)^\frown v$ δεν εξαρτάται από το t, όταν $1 \leq t \leq k$.
Προχωρώντας επαγωγικά , με αυτόν τον τρόπο, επιλέγουμε $M_1,\ldots,M_L$ που να έχουν την αντίστοιχη ιδιότητα για κάθε $M_i, 1 \leq i \leq L$.
Θέτουμε:

$$M = M_1 + \ldots + M_L.$$

Έστω τώρα $m-$χρωματισμός των $r-$διάστατων block χώρων του $[k]^M$.
Από την επιλογή του M_L υπάρχει μεταβλητή λέξη $W_L(x)$ ώστε το χρώμα κάθε $u^\frown w_L(t)$ για κάθε $r-block$ λέξη u του $[k]^{M_1+\ldots+M_{L-1}}$ να μην εξαρτάται από το $t \in [k]$.

Από την επιλογή του M_{L-1} υπάρχει μεταβλητή λέξη $W_{L-1}(x)$ ώστε το χρώμα της $u^\frown w_{L-1}(t)^\frown w_L(y_L)$ να μην εξαρτάται από το $t \in [k]$ για κάθε u και $y_L \in \{1,\ldots,k,x_n\}$ για τα οποία το $uw_{L-1}(t)w_L(y_L)$ είναι $n-block$ λέξη. (Αφού έχουμε επιλέξει δηλαδή το w_L τον κοιτάμε σαν 1-χώρο της μεταβλητής x_r που έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι το x_r εμφανίζεται στις θέσεις που δεν επηρρεάζουν το χρωμα!)

Προχωρούμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι η $W_1(x)$, του $[k]^{M_1}$, να έχει επιλεγεί ώστε το χρώμα του $w_1(t)^\frown w_2(y_2)^\frown \ldots^\frown w_L(y_L)$ να μην εξαρτάται από το $t \in [k]$ για κάθε $r-block$ μεταβλητή λέξη $y_2y_3\ldots y_L \in [k]^L$.
Ο ζητούμενος υπόχωρος τότε είναι ο $\{W_1(y_1)^\frown W_2(y_2)^\frown \ldots^\frown W_L(y_L)\}$.
Τώρα, ο $m-$χρωματισμός των $r-block$ λέξεων του παραπάνω χώρου επάγει ένα χρωματισμό των λέξεων $y_1y_2\ldots y_L$, που δεν είναι άλλο από το σύνολο των $r-block$ λέξεων του $[k]^L$.
Ο χρωματισμός αυτός έχει την ιδιότητα ότι το χρώμα μιας λέξης $L(x_1,\ldots,x_r)$ εξαρτάται μόνο από τις θέσεις που καταλαμβάνουν οι $x_1,\ldots,x_r$.
Άρα, επάγεται ένας χρωματισμός των υποσυνόλων $\{a_1,\ldots,a_r\}$ πληθικότητας r του $\{a_1,\ldots,a_L\}$, όπου a_i το σύνολο των θέσεων εμφάνισης της μεταβλητής x_i.
Επομένως μεταφράσαμε το πρόβλημα σε πρόβλημα χρωματισμού υποσυνόλων των φυσικών αριθμών.

Παράδειγμα 3.2.5. *Αν* $L(x_1,\ldots,x_3) = 1\ 2\ x_1\ x_1\ 1\ x_2\ x_3\ x_3$ *τότε*

$$\{a_1,a_2,a_3\} = \{\{3,4\},\{6\},\{7,8\}\}$$

Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει L αρκετά μεγάλο ώστε να υπάρχει block υπακολουθία του μήκους t ώστε όλες οι block υπακολουθίες της μήκους r να είναι μονοχρωματικές. Αυτό όμως το έχουμε από το πεπερασμένο θεώρημα Milliken-Taylor που αναφέραμε προηγουμένως.
Έτσι, παίρνοντας αυτές τις $t-$αδα θέσεων έχουμε τις θέσεις των $x_1, \ldots, x_t$ που θέλουμε.
□

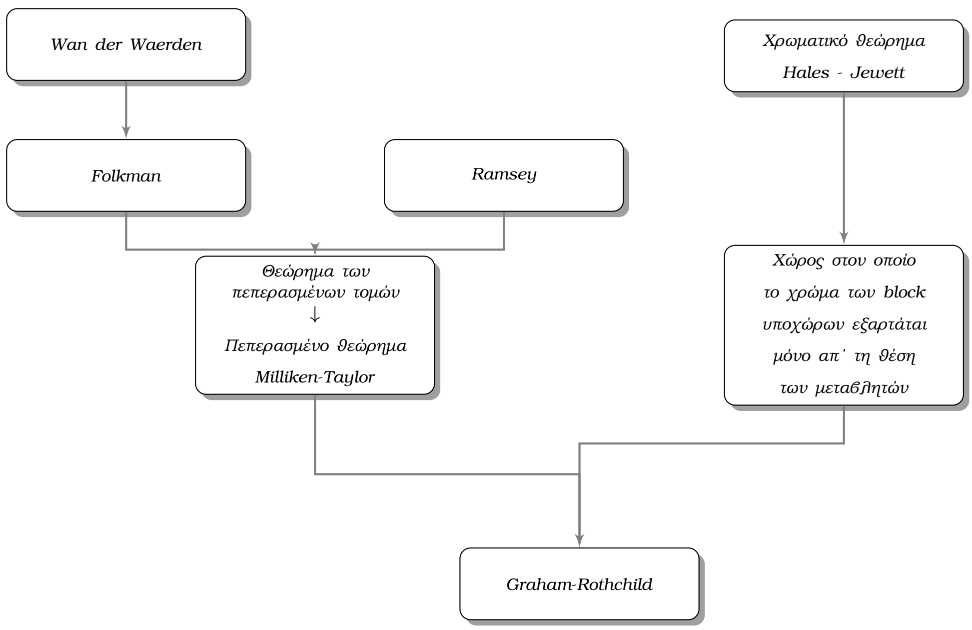
Το πόρισμα αυτού του θεωρήματος που μας δίνει μια πολύ σημαντική διχοτομική ιδιότητα των υπόχωρων του $[k]^n$ και θα παίξει βασικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος πυκνότητας Hales - Jewett είναι το εξής:

Πρόταση 3.2.6. *Για κάθε ακέραιο $k \geq 2$ και για κάθε ακέραιο $m \geq 1$ υπάρχει ακέραιος N με την ακόλουθη ιδιότητα.*
Για κάθε $n \geq N$ και για κάθε σύνολο $\mathcal{L}$ από συνδυαστικές γραμμές του $[k]^n$ υπάρχει ενας $m-$ υπόχωρος V του $[k]^n$ και μάλιστα block ώστε :

$$\textit{είτε} \quad \mathrm{Lines}(V) \subseteq \mathcal{L} \quad , \textit{είτε} \quad \mathrm{Lines}(V) \cap \mathcal{L} = \emptyset,$$

Ο ελάχιστος ακέραιος N με αυτή την ιδιότητα θα συμβολίζεται με $\mathrm{GR}(k,m)$.

Απόδειξη.
Έστω $\mathcal{L}$ σύνολο από συνδυαστικές γραμμές του $[k]^n$.
Ορίζουμε 2-χρωματισμό του $[k]^n$ ώστε το $\mathcal{L}$ να είναι μονοχρωματικό, π.χ μπλε και κάθε άλλη συνδυαστική γραμμή που δεν ανήκει σε αυτό να έχει άλλο χρώμα,π.χ κόκκινο.
Τότε από το θεώρημα Graham-Rothchild υπάρχει ενας $m-$ υπόχωρος V του $[k]^n$ που όλες του οι συνδυαστικές γραμμές να είναι μονοχρωματικές.
Έτσι είτε θα είναι όλες μπλε και άρα θα περιέχονται στο $\mathcal{L}$ (αφού αυτό είναι το σύνολο όλων των μπλε) είτε θα είναι όλες κόκκινες και άρα $\mathrm{Lines}(V) \cap \mathcal{L} = \emptyset$.
Έτσι έχουμε το ζητούμενο. □



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα της απόδειξης του θεωρήματος Graham-Rothschild.

Κεφάλαιο 4

Το θεώρημα πυκνότητας Hales - Jewett(Density Hales - Jewett)

4.1 Ορισμοί και κάποιες χρήσιμες προτάσεις

Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το βασικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου αλλά και της εργασίας γενικότερα, το θεώρημα πυκνότητας Hales - Jewett, εισάγουμε κάποιον συμβολισμό. Αν $A \subseteq [k]^n$, τότε θα ονομάζουμε πυκνότητα του A και θα συμβολίζουμε με $\mathrm{dens}(A)$ τον αριθμό

$$\mathrm{dens}(A) = \frac{|A|}{k^n}.$$

Αν $W \subseteq [k]^n$, τότε θα ονομάζουμε σχετική πυκνότητα του A στο W και θα συμβολίζουμε με $\mathrm{dens}_W(A)$ τον αριθμό

$$\mathrm{dens}_W(A) = \frac{|A \cap W|}{|W|}.$$

Επίσης, για κάθε μη κενό πεπερασμένο σύνολο X με $\mathbb{E}_{x \in X}$ θα συμβολίζουμε το μέσο όρο $\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X}$.
Αν είναι σαφές σε ποιο σύνολο αναφερόμαστε , τότε αυτό τον μέσο όρο θα τον συμβολίζουμε απλά με $\mathbb{E}_x$.

Θεώρημα 4.1.1. ***(Θεώρημα πυκνότητας Hales - Jewett)***
Για κάθε $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ και για κάθε $0 < d \leq 1$ υπάρχει φυσικός αριθμός N με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $n \geq N$ και $A \subseteq [k]^n$ με $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$, τότε το A περιέχει συνδυαστική γραμμή. Ο ελάχιστος N με αυτή την ιδιότητα θα συμβολίζεται με $\mathrm{DHJ}(k, \delta)$.

Στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου θα αποδείξουμε μερικές προτάσεις - λήμματα που θα μας χρειαστούν στην απόδειξη.
Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $''\mathrm{DHJ}_k''$ όταν θα γνωρίζουμε το $\mathrm{DHJ}(k, \delta)$, για κάθε

$0 < \delta \leq 1$.
Τα πρώτα δύο λήμματα που θα χρειαστούμε τα θεωρούμε δεδομένα και είναι δύο ανισότητες τύπου Markov.

Λήμμα 4.1.2. ***(1η ανισότητα Markov.)***
Έστω $0 < \varepsilon \leq 1, N \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_N \in [0,1]$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\mathbb{E}_{j\in[N]} a_j \geq \varepsilon$. Τότε για κάθε $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, έχουμε ότι :

$$|\{j \in [N] : a_j \geq \varepsilon'\}| \geq (\varepsilon - \varepsilon')N.$$

Λήμμα 4.1.3. ***(2η ανισότητα Markov.)***
Έστω $0 < \varepsilon \leq 1, N \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_N \in [0,1]$ και $\mathbb{E}_{j\in[N]} a_j \geq \varepsilon$. Έστω επίσης $0 < \delta \leq 1$ και ότι $a_j \leq \varepsilon + \delta$, για κάθε $1 \leq j \leq N$. Τότε :

$$|\{j \in [N] : a_j \geq \varepsilon - \delta\}| \geq (1 - \delta)N.$$

Η ακόλουθη πρόταση είναι το πολυδιάστατο ανάλογο θεώρημα του Density Hales-Jewett.

Πρόταση 4.1.4. ***(Πολυδιάστατο Hales-Jewett.)***
Έστω $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ και έστω ότι γνωρίζουμε το DHK_k.
Τότε για κάθε ακέραιο $m \geq 1$ και για κάθε $0 < \delta \leq 1$ υπάρχει ακέραιος $\mathrm{MDHJ}(k, m, \delta)$ με την ακόλουθη ιδιότητα:
Αν $n \geq \mathrm{MDHJ}(k, m, \delta)$ τότε κάθε $A \subseteq [k]^n$ με $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$ περιέχει $m-$διάστατο υπόχωρο .

Απόδειξη.
Θα γίνει με επαγωγή στο m.
Η περίπτωση $m = 1$ είναι ακριβώς το DHJ_k. Έστω λοιπόν $m \geq 1$ και ότι έχουμε αποδείξει το ζητούμενο μέχρι και το m.
Για κάθε $0 < \delta \leq 1$ θέτουμε:

$$\mathrm{MDHJ}(k, m+1, \delta) = M + \mathrm{MDHJ}\left(k, m, \frac{\delta}{2(k+1)^M}\right),$$

όπου $M = \mathrm{DHJ}\left(k, \frac{\delta}{2}\right)$.
Ισχυριζόμαστε οτί γι' αυτή την επιλογή ακεραίου έχουμε το ζητούμενο.
Πράγματι, έστω $n \geq \mathrm{MDHJ}(k, m+1, \delta)$ και A υποσύνολο του $[k]^n$ με $\mathrm{dens(A)} \geq \delta$.
Τότε για κάθε $x \in [k]^{n-M}$ ορίζω

$$A_x = \{y \in [k]^M : x^\frown y \in A\}.$$

Όμως ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \mathrm{dens}(A_x) &= \frac{1}{k^{n-M}} \sum_{x\in[k]^{n-M}} \mathrm{dens}(A_x) = \\ &= \frac{1}{k^{n-M}} \sum_{x\in[k]^{n-M}} \frac{|A_x|}{k^M} = \\ &= \frac{1}{k^n} \sum_{x\in[k]^{n-M}} |A_x| = \\ &= \mathrm{dens}(A) \geq \delta.\end{aligned}$$

Άρα, από το 4.1.2, υπάρχει υποσύνολο B του $[k]^{n-M}$ με $\mathrm{dens}(B) \geq \frac{\delta}{2}$ ώστε $\mathrm{dens}(A_x) \geq \frac{\delta}{2}$ για κάθε $x \in B$.
Από την επιλογή του M, για κάθε $x \in B$ υπάρχει συνδυαστική γραμμή ℓ_x του $[k]^M$ ώστε $\ell_x \subseteq A_x$.
Όμως το πλήθος των συνδυαστικών γραμμών του $[k]^M$ είναι το πολύ $(k+1)^M$ (πράγματι αφού είναι υποσύνολο του $[k+1]^M$)
Άρα, από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχει συνδιαστική γραμμή ℓ του $[k]^M$ και $C \subseteq B$ με

$$\mathrm{dens}(C) \geq \frac{\delta}{2(k+1)^M}$$

ώστε $\ell \subseteq A_x$ για κάθε $x \in C$.
Αφού:

$$n - M \geq \mathrm{MDHJ}\left(k, m, \delta 2^{-1}(k+1)^{-M}\right)$$

υπάρχει $m-$διάστατος υπόχωρος W του C με $W \subseteq C$.
Θέτουμε $V = W^\frown \ell$.
Τότε το V είναι ένας $(m+1)-$διάστατος υπόχωρος του $[k]^n$ και προφανώς $C \subseteq A$. □

Το επόμενο λήμμα μας λέει ουσιαστικά ότι κάθε πυκνό υποσύνολο του $[k]^n$ διανέμεται εξαιρετικά ομοιόμορφα αν περιοριστεί σε κατάλληλο υπόχωρο του $[k]^n$.

Λήμμα 4.1.5. *Έστω $k, m \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$, $m \geq 1$ και $0 < \varepsilon \leq 1$.*
Αν $n \geq \dfrac{k^m m}{\varepsilon}$, τότε για κάθε $A \subseteq [k]^n$ με $\mathrm{dens}(A) > \varepsilon$ υπάρχει $\ell < n$ και $m-$διάστατος υπόχωρος V του $[k]^\ell$ ώστε για κάθε $x \in V$ να έχουμε:

$$\mathrm{dens}(A_x) \geq \mathrm{dens}(A) - \varepsilon,$$

όπου $A_x = \{y \in [k]^{n-\ell} : x^\frown y \in A\}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $V_1 = [k]^m$ και παρατηρούμε όπως στην απόδειξη της πρότασης **;;** ότι $\mathbb{E}_{x \in V_1} \mathrm{dens}(A_x) = \mathrm{dens}(A)$.
Έστω $\rho = \dfrac{\varepsilon}{k^m - 1}$ και παίρνουμε μία τυχούσα αρίθμηση των στοιχείων του V_1.
Αν το V_1 <u>δεν</u> ικανοποιεί το ζητούμενο τότε υπάρχει $x_1 \in V_1$ ώστε $\mathrm{dens}(A_{x_1}) \geq \mathrm{dens}(A) + \rho$
.
Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{dens}(A_{x_2}) < \mathrm{dens}(A) - \varepsilon$ και ότι για κάθε $i \neq 2$ ισχύει ότι $\mathrm{dens}(A_{x_i}) < \mathrm{dens}(A) + \rho$.
Τότε :

$$\mathrm{dens}(A_{x_1}) + \ldots + \mathrm{dens}(A_{x_{k^m}}) < \mathrm{dens}(A) - \varepsilon + (k^m - 1)\mathrm{dens}(A) + \varepsilon = k^m \mathrm{dens}(A)$$

και άρα

$$\mathbb{E}_{x \in V_1} \mathrm{dens}(A_x) < \mathrm{dens}(A),$$

που είναι άτοπο.
Άρα όντως υπάρχει τέτοιο x_1.
Στη συνέχεια θέτουμε $V_2 = x_1 {}^\frown [k]^m$ και παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}_{x \in V_2} \mathrm{dens}(A_x) \geq \mathrm{dens}(A) + \rho$.
Αν το V_2 δεν ικανοποιεί τις απαιτήσεις του λήμματος τότε όπως πριν υπάρχει $x_2 \in V_2$ ώστε $\mathrm{dens}(A_{x_2}) \geq \mathrm{dens}(A) + 2\rho$.
Η διαδικασία θα τελειώσει μετά από $\lfloor \rho^{-1} \rfloor$ βήματα (αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τόσα) καθώς τότε το $\mathrm{dens}(A_{x_{\lfloor \rho^{-1} \rfloor + 1}}) > 1$ που είναι άτοπο.
Όμως, αφού υποθέσαμε ότι $(\lfloor \rho^{-1} \rfloor + 1)m < n$ έχουμε τα αναγκαία ώστε να πραγματοποιήσουμε όλα τα βήματα της διαδικασίας και επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

Το τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το ακόλουθο :

Πρόταση 4.1.6. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$ και υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το DHJ_k.*
Τότε για κάθε $m \geq 1$ και $0 < \delta \leq 1$ υπάρχει ακέραιος $\mathrm{MDHJ}^*(k, m, \delta)$ με την εξής ιδιότητα:
Αν $n \geq \mathrm{MDHJ}^*(k, m, \delta)$ τότε για κάθε $A \subseteq [k+1]^n$ με $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$ υπάρχει $m-$διάστατος υπόχωρος V του $[k+1]^n$ ώστε $V \restriction k$ να περιέχεται στο A.

Παρατήρηση: Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι αν μπορούσαμε έχοντας ότι $V \restriction k \subseteq A$ να παίρναμε ότι $V \subseteq A$ θα είχαμε το θεώρημα Hales-Jewett. Στην πραγματικότητα η παρατήρηση αυτή θα μας οδηγήσει αργότερα στην ξρήση της έννοιας του $(i, j)-$αναλλοίωτου υπόχωρου ,έννοια που χρησιμοποιήσαμε ήδη στην απόδειξη του χρωματικού θεωρήματος

Hales-Jewett.

Απόδειξη.
Θέτουμε $\mathrm{MDHJ}^*(k,m,\delta) = \dfrac{2}{\delta}(k+1)^M M$, όπου $M = \mathrm{MDHJ}(k,m,\frac{\delta}{2})$.
Έστω $n \geq \mathrm{MDHJ}^*(k,m,\delta)$ και $A \subseteq [k+1]^n$ με $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$.
Από το λήμμα 4.1.5, υπάρχει $\ell < n$ και $m-$διάστατος υπόχωρος W του $[k]^\ell$ ώστε για κάθε $x \in W$ να έχουμε $\mathrm{dens}(A_x) \geq \frac{\delta}{2}$.
Θέτουμε $Z = W \upharpoonright k$.
Τότε, αφενός έχουμε ότι $\mathbb{E}_{x\in Z}\mathrm{dens}(A_x) \geq \delta/2$ και επομένως $\mathbb{E}_{x\in Z}\mathrm{dens}(A_x)|Z| = |A \cap (Z^\frown[k+1]^{n-\ell})|$ αφού :

$$(A \cap x^\frown[k+1]^{n-\ell}) \cap (A \cap y^\frown[k+1]^{n-\ell}) = \emptyset, \text{ αν } x \neq y. \tag{4.1}$$

Τότε, από την 4.1 και από την παρατήρηση ότι $\bigcup A_{x_i} = A \cap (Z^\frown[k+1]^{n-\ell})$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |Z|\frac{\delta}{2} &\leq \sum_{x_i \in Z} \mathrm{dens}(A_{x_i}) = \mathrm{dens}(\bigcup A_{x_i}) = \\ &= \mathrm{dens}(A \cap (Z^\frown[k+1]^{n-\ell})) = \frac{|A \cap (Z^\frown[k+1]^{n-\ell})|}{(k+1)^{n-\ell}} \end{aligned}$$

και άρα

$$(k+1)^{n-\ell}|Z|\frac{\delta}{2} \leq |A \cap (Z^\frown[k+1]^{n-\ell})|.$$

και τελικά πάλι λόγω της 4.1 :

$$|(Z^\frown[k+1]^{n-\ell})|\frac{\delta}{2} \leq |A \cap (Z^\frown[k+1]^{n-\ell})|.$$

Αφετέρου , η οικογένεια $\{Z^\frown y : y \in [k+1]^{n-\ell}\}$ αποτελεί διαμέριση του συνόλου $Z^\frown[k+1]^{n-\ell}$ σε υποσύνολα ίσης πληθικότητας.
Επομένως υπάρχει $y_0 \in [k+1]^{n-\ell}$ ώστε:

$$|A \cap (Z^\frown y_0)| \geq \frac{\delta}{2}|Z^\frown y_0|.$$

Παρατηρούμε οτι το $Z^\frown y_0$ είναι ισομορφικό με το $[k]^M$.
Άρα, από την επιλογή του M, υπάρχει ένας $m-$διάστατος υπόχωρος $\widetilde{V}$ του $Z^\frown y_0$ ώστε $\widetilde{V} \subseteq A$.
Έστω V ο μοναδικός $m-$διάστατος υπόχωρος του $[k+1]^n$ με $V \upharpoonright k = \widetilde{V}$.
Τότε ο V είναι ο ζητούμενος υπόχωρος. □

4.2 Βρίσκοντας αναλλοίωτο υπόχωρο

Στο σημείο αυτό παιρνάμε στο κυρίως μέρος της απόδειξης του θεωρήματος Density Hales - Jewett.
Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο k.
Η περίπτωση $k = 2$ είναι το γνωστό θεώρημα του Sperner. Για να δουλέψει όμως πρέπει να μεταφράσουμε τα στοιχεία του $[2]^n$ σε στοιχεία του $\mathcal{P}([n])$. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την απεικόνιση:

$$f : [2]^n \to \mathcal{P}([n])$$

που ορίζεται με τον τύπο

$$f(x) = \{j \in [n] : x(j) = 1\}.$$

Πράγματι, βλέπουμε ότι αν υπάρχουν $A, B \subseteq [n]$ με $A \subseteq B$ τότε τα $f^{-1}(A)$ και $f^{-1}(B)$ σχηματίζουν συνδυαστική γραμμή.
Άρα, το πρόβλημα μεταφράζεται στο ισοδύναμό του:

Θεώρημα 4.2.1. *Για κάθε $0 < \delta \leq 1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε αν $\mathcal{A}$ συλλογή τουλάχιστον $\delta 2^n$ στοιχείων του $\mathcal{P}([n])$ τότε υπάρχουν $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$.*

Επομένως από Sperner αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε δ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\delta 2^n > \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

που είναι προφανές καθώς

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{2^n} = 0.$$

Έστω λοιπόν $k \geq 2$ και ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε το DHJ_k.
Πριν ξεκινήσουμε παρουσιάζουμε κάποιες αριθμητικές σταθερές που θα χρησιμοποιήσουμε . Ειδικότερα, για κάθε $0 < \delta \leq 1$ θέτουμε:

$$m_0 = DHJ(k, \delta/4), \theta = \frac{\delta/4}{(k+1)_0^m - k_0^m}, \eta = \frac{\delta\theta}{48} \text{ και } \gamma = \frac{\delta\eta^2}{k} \tag{4.2}$$

Το επαγωγικό βήμα θα γίνει μέσω της ακόλουθης διχοτομίας:

Πρόταση 4.2.2. ***(Density Increment Argument - Επιχείρημα αυξανόμενης πυκνότητας.)*** *Έστω $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$ και υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το DHJ_k. Τότε για κάθε $0 < \delta \leq 1$ και για κάθε ακέραιο $d \geq 1$ υπάρχει ακέραιος $N(k, d, \delta)$ με την ακόλουθη ιδιότητα:*
Αν $n \geq N(k, d, \delta)$ και $A \subseteq [k+1]^n$ με $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$, τότε είτε το A περιέχει συνδυαστική γραμμή , είτε υπάρχει ένας $d-$διάστατος υπόχωρος V του $[k+1]^n$ ώστε $\mathrm{dens}_V(A) \geq \delta + \gamma/2$ όπου γ είναι όπως στην (4.2).

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.2 ,οι αριθμοί $\mathrm{DHJ}(k+1,\delta)$ προκείπτουν μέσω μιας διαδικασίας επανάληψης όπως θα δείξουμε στο τέλος. Αν το πιστέψουμε προς το παρόν αυτό μένει να δείξουμε την πρόταση 4.2.2.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται σε μια σειρά από λήμματα. Υπενθυμίζουμε οτί από δω και στο εξής θεωρούμε δεδόμενο οτι γνωρίζουμε τα DHJ_k. Επίσης, για κάθε ακέραιο $m \geq 1$ και $0 < \varepsilon \leq 1$ θέτουμε:

(4.3) $$n(m,\varepsilon) = \frac{(k+1)^m m}{\varepsilon}.$$

Το πρώτο λήμμα μας λέει ότι αν πάρουμε n επαρκώς μεγάλο τότε μπορούμε να βρούμε περιορισμό υποχώρου σε k γράμματα ώστε τα ″συμπληρώματα″ των συνδυαστικών γραμμών αυτού να τέμνονται σταθερά πάνω από κάποια φιξαρισμένη θετική ποσότητα.
Πιο αναλυτικά:

Λήμμα 4.2.3. *Έστω $0 < \delta \leq 1$ και $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq m_0$. Αν $n \geq n(GR(k,m), \eta^2/2)$ τότε για κάθε $A \subseteq [k+1]^n$ με $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$ υπάρχει φυσικός $\ell < n$ και $m-$διάστατος υπόχωρος U του $[k+1]^\ell$ έτσι ώστε:*

(a) *Για κάθε* $u \in U$ *έχουμε* $\mathrm{dens}(A_u) \geq \delta - \eta^2/2$ *και*

(b) *Για κάθε* $\ell \in \mathrm{Lines}(U \upharpoonright k)$ *έχουμε* $\mathrm{dens}\left(\bigcap_{u\in\ell} A_u\right) \geq \theta,$

όπου A_u όπως στο Λήμμα 4.1.5.

Απόδειξη.
Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.1.5 και βρίσκουμε $\ell < n$ και $m-$διάστατο υπόχωρο Y του $[k+1]^\ell$ με διάσταση $\mathrm{GR}(k,m)$ ώστε $\mathrm{dens}(A_v) \geq \delta - \eta^2/2$ για κάθε $v \in V$.
Θέτουμε,

$$\mathcal{L} = \{\ell \in \mathrm{Lines}(V \upharpoonright k) : \mathrm{dens}(\bigcap_{v\in\ell} A_v) \geq \theta\}$$

Από την Πρόταση 3.2.6, υπάρχει $m-$διάστατος υπόχωρος Y του $V \upharpoonright k$ ώστε είτε $\mathrm{Lines}(Y) \subseteq \mathcal{L}$ είτε $\mathrm{Lines}(Y) \cap \mathcal{L} = \emptyset$.
Αν $\mathrm{Lines}(Y) \subseteq \mathcal{L}$, τότε θέτουμε U να είναι ο μοναδικός υπόχωρος του $[k+1]^\ell$ ώστε $U \upharpoonright k = Y$.
Εύκολα βλέπουμε ότι το U ικανοποιεί τα ζητούμενα του λήμματος.
Πράγματι, αφού $U \upharpoonright k = Y \subseteq V \upharpoonright k$ έπεται ότι $U \subseteq V$ και άρα $\mathrm{dens}(A_u) \geq \delta - \frac{\eta^2}{2}$.

Επομένως έχουμε το (a).
Το (b) είναι προφανές από τον ορισμό του U.
Επομένως , αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Lines}(Y) \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$.

Έστω λοιπόν m_0-διάστατος υπόχωρος Z του Y.
Από την επιλογή του η και το γεγονός ότι $Z \subseteq Y$, έχουμε ότι $\mathrm{dens}(A_z) \geq \delta/2$ για κάθε $z \in Z$.
Επίσης, παρατηρούμε ότι :

(4.4) $$\mathbb{E}_{y \in [k+1]^{n-\ell}} \mathrm{dens}_{Z^\frown y}(A) = \mathbb{E}_{z \in Z} \mathrm{dens}(A_z).$$

Επομένως από την 4.1.2 , υπάρχει $B \subseteq [k+1]^{n-\ell}$ με $\mathrm{dens}(B) \ \geq \delta/4$ ώστε,

$$|A \cap (Z^\frown y)| \geq (\delta/4)|Z^\frown y| \text{ για κάθε } y \in B.$$

Έστω τώρα τυχόν $y \in B$.
Από τα προηγούμενα και την επιλογή του m_0 στην (1), υπάρχει $\ell_y \in \mathrm{Lines}(Z)$ ώστε $\ell_y^\frown y \subseteq A$.
Ο αριθμός των συνδυαστικών γραμμών του Z όμως , είναι $(k+1)^{m_0} - k^{m_0}$.
Άρα , από την αρχή της περιστεριώνα, υπάρχει $C \subseteq B$ με $\mathrm{dens}(C) \geq \theta$ ώστε $\ell_0^\frown y \subseteq A$ για κάθε $y \in C$.
Επομένως έχουμε $\ell_0 \in \mathrm{Lines}(Y) \cap \mathcal{L}$.
Τώρα για να πάρουμε το ζητούμενο παρατηρούμε ότι $C \subseteq \left(\bigcap_{u \in \ell_0} \mathrm{dens}(A_u) \right)$.
Πράγματι, αν $y \in C$ τότε $\ell_0^\frown y \subseteq A$ και άρα $u^\frown y \in A$, για κάθε $u \in \ell_0$. Επομένως $y \in \left(\bigcap_{u \in \ell_0} \mathrm{dens}(A_u) \right)$.
Έτσι τελικά , $\mathrm{dens}\left(\bigcap_{u \in \ell_0} \mathrm{dens}(A_u) \right) \geq \mathrm{dens}(C) \geq \theta$, και επομένως:

$$\ell_0 \in \mathrm{Lines}(Y) \cap \mathcal{L}.$$

Άτοπο.
Επομένως $\mathrm{Lines}(Y) \subseteq \mathcal{L}$. □

Το δεύτερο λήμμα μας λέει οτι αν δεν μπορούμε να βρούμε υπόχωρο του $[k+1]^n$ ώστε το A να έχει μεγάλη πυκνότητα τότε θα μπορούμε να βρούμε υπόχωρο W του $[k+1]^n$ αρκετά μεγάλης διάστασης με τις εξής δύο ιδιότητες. Από τη μία το A μέσα στο W θα έχει περίπου την ίδια πυκνότητα μ' αυτήν που έχει στο $[k+1]^n$ και από την άλλη θα υπάρχουν αρκετές γραμμές που θα περιέχονται στο $A \cap (W \upharpoonright k)$.
Δηλαδή λέει το εξής:

Λήμμα 4.2.4. *Έστω* $0 < \delta \leq 1$ *και* $m \in \mathbb{N}$ *με* $m \geq m_0$. *Έστω ακόμα* $n \geq n(GR(k,m), \eta^2/2)$ *και* $A \subseteq [k+1]^n$ *με* $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$.
Τότε:

> *<u>είτε</u> υπάρχει* $m-$ *διάστατος υπόχωρος* X *του* $[k+1]^n$ *ώστε* $\mathrm{dens}_X(A) \geq \delta + \eta^2/2$
> *<u>είτε</u> υπάρχει* $m-$ *διάστατος υπόχωρος* W *του* $[k+1]^n$ *ώστε* $\mathrm{dens}_W(A) \geq \delta - 2\eta$

και

$$|\{\ell \in \mathrm{Lines}(W \upharpoonright k) : \ell \subseteq A\}| \geq (\theta/2)|\mathrm{Lines}(W \upharpoonright k)|. \tag{4.5}$$

Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι για κάθε $m-$διάστατο υπόχωρο X του $[k+1]^n$ ισχύει $\mathrm{dens}_X(A) < \delta + \eta^2/2$.
Από το λήμμα 4.2.3 , υπάρχει $\ell < n$ και $m-$διάστατος υπόχωρος U του $[k]^\ell$ ώστε

$$\mathrm{dens}(A_u) \geq \delta - \eta^2/2$$

για κάθε $u \in U$ και

$$\bigcap_{u \in \ell} \mathrm{dens}(A_u) \geq \theta,$$

για κάθε $\ell \in \mathrm{Lines}(U \upharpoonright k)$.
Από την πρώτη σχέση παίρνουμε ότι για κάθε $u \in U$

$$\mathbb{E}_{y \in [k+1]^{n-\ell}} \mathrm{dens}_{U^\frown y}(A) = \mathbb{E}_{u \in U} \mathrm{dens}(A_u) \geq \delta - \eta^2/2.$$

Όμως για κάθε $y \in [k+1]^{n-\ell}$ το σύνολο $U^\frown y$ είναι ένας $m-$διάστατος υπόχωρος του $[k+1]^n$. Άρα εξ υποθέσεως $\mathrm{dens}_{U^\frown y}(A) < \delta + \eta^2/2$ για κάθε $y \in [k+1]^{n-\ell}$.
Τότε, από τη 4.1.3, έχουμε ότι υπάρχει υποσύνολο H_1 του $[k+1]^{n-\ell}$ με $\mathrm{dens}(H_1) \geq 1 - \eta$ και $\mathrm{dens}_{U^\frown y}(A) \geq \delta - 2\eta$ για κάθε $y \in H_1$.

Τώρα για κάθε $y \in [k+1]^{n-\ell}$ ορίζουμε:

$$\mathcal{L}_y = \{\ell \in \mathrm{Lines}(U \upharpoonright k) : y \in \bigcap_{u \in \ell} A_u\}$$

Στο σημείο αυτό κάνουμε την εξής παρατήρηση:
Αν θέσουμε :

$$J \subseteq [k+1]^n \text{ με } J := \left\{\ell^\frown y \in A : \ell \in \mathrm{Lines}(U \upharpoonright k),\ y \in [k+1]^{n-l}\right\},$$

όπου γράφοντας $\ell^\frown y$ εννοούμε $u^\frown y$ για κάθε $u \in \ell$ έχουμε ότι:

$$|\mathcal{L}_{y_1}| + \ldots + |\mathcal{L}_{y_{(k+1)^{n-\ell}}}| = |\bigcap_{u \in \ell_1} A_u| + \ldots + |\bigcap_{u \in \ell_p} A_u| = |J|,$$

όπου $p = |\mathrm{Lines}(U \restriction k)|$.
Αφού $\mathrm{dens}(\bigcap_{u\in\ell} A_u) \geq \theta$ για κάθε $\ell \in \mathrm{Lines}(U \restriction k)$ έχουμε :

$$\mathbb{E}_{y\in[k+1]^{n-\ell}} \frac{|\mathcal{L}_y|}{|\mathrm{Lines}(U \restriction k)|} = \mathbb{E}_{\ell\in\mathrm{Lines}(U\restriction k)} \mathrm{dens}(\bigcap_{u\in\ell} A_u) \geq \theta.$$

Άρα, από την 4.1.2 υπάρχει $H_2 \subseteq [k+1]^{n-\ell}$ με $\mathrm{dens}(H_2) \geq \theta/2$ έτσι ώστε $|\mathcal{L}_y| \geq (\theta/2)|\mathrm{Lines}(U \restriction k)|$ για κάθε $y \in H_2$.
Από την επιλογή των η και θ , έχουμε $\eta < \theta/2$ και άρα $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$.
Επιλέγουμε λοιπόν $y_0 \in H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ και θέτουμε $W = U^\frown y_0$.
Τώρα, αφού $y_0 \in H_1$ έχουμε ότι $\mathrm{dens}_{U^\frown y_0}(A) \geq \delta - 2\eta$.

Από την άλλη , αφού $y_0 \in H_2$ έχουμε ότι $|\mathcal{L}_{y_0}| \geq (\theta/2)|\mathrm{Lines}(U \restriction k)|$ και επομένως αφού y_0 σταθερό:

$$\begin{aligned} |\{\ell \in \mathrm{Lines}(W \restriction k) : \ell \subseteq A\}| &= |\{\ell \in \mathrm{Lines}(U \restriction k) : \ell^\frown y_0 \subseteq A\}| \geq \\ &\geq \frac{\theta}{2}|\mathrm{Lines}(U \restriction k)| = \\ &= \frac{\theta}{2}|\mathrm{Lines}(W \restriction k)|, \end{aligned}$$

και επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

Από εδώ και πέρα κεντρικό ρόλο παίζει η έννοια του $(i,j)-$αναλλοίωτου συνόλου καθώς και του αναλλοίωτου συνόλου σε υπόχωρο.
Πιο συγκεκριμένα για ένα $m-$διάστατο χώρο V του $[k]^n$ ένα $A \subseteq [k]^n$ θα λέγεται $(i,j)-$αναλλοίωτο στον V αν η αντίστροφη εικόνα του μέσω του κανονικού ισομορφισμού του V είναι $(i,j)-$ αναλλοίωτο σύνολο στο $[k]^m$. Επίσης αν $i, i' \in [k]$ και $x \in [k]^n$ με $x^{i\to i'}$ θα συμβολίζουμε το στοιχείο $y \in [k]^n$ για το οποίο $y(j) = x(j)$ για κάθε $j \in [n] \setminus i(x)$ και $y(j) = i'$, για κάθε $j \in i(x)$.

Τώρα για να προχωρήσουμε στην απόδειξη χρειάζεται να εισάγουμε κάποιες ακόμα αριθμητικές σταθερές . Για κάθε $0 < \delta \leq 1$ και αν m_0, η, όπως στην (4.2) θέτουμε :

$$\lambda = \frac{k+1}{k} \text{ και } M_0 = max\left\{m_0, \frac{log\eta^{-1}}{log\lambda}\right\}. \tag{4.6}$$

Λήμμα 4.2.5. *Έστω $0 < \delta \leq 1$ και $m \geq M_0$. Έστω επίσης $n \geq n(GR(k,m), \eta^2/2)$ και $A \subseteq [k+1]^n$ με $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$. Υποθέτουμε ακόμη οτι το A δεν περιέχει συνδυαστική γραμμή και ότι για κάθε $m-$διάστατο υπόχωρο X του $[k+1]^n$ ισχύει $\mathrm{dens}_X(A) < \delta + \eta^2/2$. Τότε υπάρχει $m-$διάστατος υπόχωρος W του $[k+1]^n$ και C υποσύνολο του W με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(I) $\mathrm{dens}_W(C) \geq \theta/4$ *και* $C = \bigcap_{i=1}^k C_i$, *όπου* C_i *είναι* $(i, k+1)-$*αναλλοίωτο υποσύνολο του* W, *για κάθε* $i \in [k]$.

(II) $\mathrm{dens}_W(A \cap (W \setminus C)) \geq (\delta + 6\eta)\mathrm{dens}_W(W \setminus C)$ *και επιπλέον* $\mathrm{dens}_W(A \cap (W \setminus C)) \geq (\delta - 3\eta)$.

Απόδειξη.
Από τις υποθέσεις μας , μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.2.4 και να βρούμε $m-$διάστατο υπόχωρο W του $[k+1]^n]$ ώστε $\mathrm{dens}(A) \geq \delta - 2\eta$ που να ικανοποιεί την ανισότητα (4.5).
Για κάθε $\ell \in \mathrm{Lines}(W \restriction k)$ υποθέτουμε ότι $\overline{\ell}$ είναι η μοναδική συνδυαστική γραμμή του W ώστε $\overline{\ell} \restriction k$.
Ορίζουμε:

$$B = \{\overline{\ell}(k+1) : \ell \in \mathrm{Lines}(W \restriction k) \text{ με } \ell \subseteq A\}$$

και $C = B \cup (A \cap (W \restriction k))$.
Θα δείξουμε ότι τα W και C είναι τα ζητούμενα. Πρώτα δείχνουμε το (a).
Για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας ταυτίζουμε το W με το $[k+1]^m$ μέσω του κανονικού ισομορφισμού I_W.
Θέτουμε $C_i = \{I_W(x) : x \in [k+1]^m \text{ και } x^{j \to i} \in I_W^{-1}(A)\}$ για κάθε $i \in [k]$ και παρατηρούμε ότι C_i είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο υποσύνολο του W που προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του.
Βλέπουμε τότε ότι $C = C_1 \cap \ldots \cap C_k$.
Πράγματι:
Αν $x \in C_1 \cap \ldots \cap C_k$ και δεν εμφανίζεται πουθενά το $k+1$ τότε $x = x^{k+1 \to i} \in A \cap (W \restriction k)$ για κάθε i.
Αλλιώς, αν $x^{k+1 \to i} \in A \cap (W \restriction k)$ για κάθε i επομένως το x είναι επέκταση συνδυαστικής γραμμής του $A \cap (W \restriction k)$ και άρα $x \in B$. Επομένως, $x \in C$.
Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αν $x \in B$ τότε από τον ορισμό του B έχουμε το ζητούμενο. Αν τώρα, $x \in A \cap (W \restriction k)$ με την ταύτιση που κάναμε για το W έχουμε ότι στο x δεν εμφανίζεται το $k+1$.
Άρα , $x = x^{k+1 \to i} \in A \cap (W \restriction k)$ για κάθε i και άρα έχουμε και τον αντίστροφο εγκλεισμό.
Έπειτα παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\mathrm{Lines}(W \restriction k) \ni \ell \longrightarrow \overline{\ell}(k+1) \in W$ είναι 1-1.
Επομένως, από τα (4.2),(4.5) και (4.6) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |C| \geq |B| &= |\{\ell \in \mathrm{Lines}(W \restriction k) : \ell \subset A\}| \\ &\geq (\theta/2)|\mathrm{Lines}(W \restriction k)| = (\theta/2)((k+1)^m - k^m) \\ &\geq (\theta(1-\eta)/2)(k+1)^m \geq (\theta/2)|W|. \end{aligned}$$

Επομένως ικανοποιείται το (I).

Για το (II) , παρατηρούμε αρχικά πως αφού από την υπόθεσή μας το A δεν περιέχει συνδυαστική γραμμή του $[k+1]^n$ έχουμε ότι $A \cap C \subset W \restriction k$.
Επομένως, $\mathrm{dens}_W(A \cap C) \leq \frac{1}{\lambda^m} \leq \frac{1}{\lambda^M} \leq \eta$. Αφού όμως $\mathrm{dens}_W(A) \geq \delta - 2\eta$, παίρνουμε

ότι $\mathrm{dens}_W(A \cap (W \setminus C)) \geq \delta - 3\eta$.
Επιπλέον, από την (4.2)

$$\frac{\mathrm{dens}_W(A \cap (W \setminus C))}{\mathrm{dens}_W(W \setminus C)} \geq \frac{\delta - 3\eta}{1 - \theta/4} \geq \frac{\delta - 3\eta}{1 + \theta/4} \geq \delta + 6\eta$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Το επόμενο πόρισμα ολοκληρώνει το πρώτο σκέλος (παραπέμπουμε στο διάγραμμα 4.1) της απόδειξης της πρότασης 4.2.2.
Δείχνει πως αν το A δεν περιέχει συνδυαστική γραμμή, τότε σχετίζεται περισσότερο απ' ότι θα περιμέναμε μ' ένα δομημένο υποσύνολο του $[k+1]^n$.

Πόρισμα 4.2.6. *Έστω $0 < \delta \leq 1$ και $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq M_0$. Έστω ακόμα $n \geq n(GR(k,m), \eta^2/2)$ και $A \subseteq [k+1]^n$ με $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$. Υποθέτουμε οτι το A δεν περιέχει συνδυαστική γραμμή του $[k+1]^n$.*
Τότε υπάρχει ένας $m-$διάστατος υπόχωρος W του $[k+1]^n$ και μια οικογένεια $\{D_1, \dots, D_k\}$ υποσυνόλων του W ώστε D_i να είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο υποσύνολο του W για κάθε $i \in [k]$ και επιπλέον ,αν θέσουμε $D = D_1 \cap \ldots \cap D_k$ έχουμε $\mathrm{dens}_W(D) \geq \gamma$ και $\mathrm{dens}_W(A \cap D) \geq (\delta + \gamma)\mathrm{dens}_W(D)$.

Απόδειξη. Πρώτα υποθέτουμε ότι υπάρχει $m-$διάστατος υπόχωρος X του $[k+1]^n$ ώστε $\mathrm{dens}_X(A) \geq \delta + \eta^2/2$.
Έπειτα θέτουμε $W = X$ και $D_i = X$ για κάθε $i \in [k]$.
Αφού $\eta^2/2 \geq \gamma$, είναι σαφές ότι οι παραπάνω επιλογές μου δίνουν το ζητούμενο.
Αν τώρα δεν υπάρχει τέτοιος υπόχωρος , από το Λήμμα 10, υπάρχει $m-$διάστατος υπόχωρος W του $[k+1]^n$ και ένα σύνολο $C = C_1 \cap \ldots \cap C_k$, όπου C_i είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτος στον W για κάθε $i \in [k]$, ώστε $\mathrm{dens}_W(A \cap (W \setminus C)) \geq (\delta + 6\eta)\mathrm{dens}_W(W \setminus C)$ και επιπλέον $\mathrm{dens}_W(A \cap (W \setminus C)) \geq (\delta - 3\eta)$.
Θέτουμε :

$$P_1 = W \setminus C_1 \text{ και } P_i = (W \setminus C_i) \cap C_1 \cap \ldots \cap C_{i-1} \text{ για } i \in 2, \dots, k.$$

Επίσης για κάθε $i \in [k]$ έστω

$$\lambda_i = \frac{\mathrm{dens}_W(P_i)}{\mathrm{dens}_W(W \setminus C)} \text{ και } \delta_i = \frac{\mathrm{dens}_W(A \cap P_i)}{\mathrm{dens}_W(P_i)}$$

με τη σύμβαση ότι $\delta_i = 0$ αν τύχει $P_i = \emptyset$.
Τότε,η οικογένεια $\{P_1, \dots, P_k\}$ είναι διαμέριση του $W \setminus C$ και άρα

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_i = \frac{\mathrm{dens}_W(A \cap (W \setminus C))}{\mathrm{dens}_W(W \setminus C) \geq \delta + 6\eta}.$$

Επομένως υπάρχει $i_0 \in [k]$ ώστε $\lambda_{i_0} \geq 3\eta/k$ και $\delta_{i_0} \geq \delta + 3\eta$, γιατί αν δεν υπήρχε ,τότε για κάθε i θα είχαμε $\lambda_i < 3\eta/k$ και $\delta_i < \delta + 3\eta$ και επομένως αν αθροίσουμε βλέπουμε ότι δεν ισχύει η (4.2)
Θέτουμε :

$$D_i = C_i \text{ αν } i < i_0, D_{i_0} = W \setminus C_{i_0} \text{ και } D_i = W \text{ αν } i > i_0.$$

Προφανώς από τις κατασκευές που κάναμε το D_i είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο στο W, για κάθε $i \in [k]$.
Επιπλέον, έχουμε $D_1 \cap \ldots \cap D_k = P_{i_0}$ και άρα

$$\mathrm{dens}_W(P_{i_0}) = \lambda_{i_0} \mathrm{dens}_W(W \setminus C) \geq (3\eta/k)(\delta - 3\eta) \geq \gamma$$

και

$$\mathrm{dens}_W(A \cap P_{i_0}) = \delta_{i_0} \mathrm{dens}_W(P_{i_0}) \geq (\delta + 3\eta)\mathrm{dens}_W(A \cap P_{i_0}) \geq (\delta + \gamma)\mathrm{dens}_W(A \cap P_{i_0})$$

όπως θέλαμε. □

4.3 ″Διαμερίζοντας″ αναλλοίωτους υποχώρους

Το δεύτερο κομμάτι της απόδειξης της Πρότασης 4.2.2 είναι μια διαδικασία ″γεμίσματος″(tilling) που μας επιτρέπει να ″διαμερίσουμε″ ένα οποιοδήποτε ″μεγάλο″ δομημένο υποσύνολο του $[k+1]^n$, δηλαδή της μορφής $D_1 \cap \ldots \cap D_k$, όπου D_i $(i, k+1)-$ αναλλοίωτο για κάθε $i \in [k]$ από υποχώρους ″οσοδήποτε″ μεγάλης διάστασης.
Πρώτα θα διαμερίσουμε ένα οποιοδήποτε αναλλοίωτο σύνολο.
Πρωτού το κάνουμε αυτό, ορίζουμε κάποιες ακόμα αριθμητικές σταθερές .
Αν $0 < \beta \leq 1$ και $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 1$ θέτουμε:

$$M_1 = \mathrm{MDHJ}^*(k, m, \beta) \text{ και } F(m, \beta) = \left\lceil \frac{(k+1+m)^{M_1}(k+1)^{M_1 - m} M_1}{\beta} \right\rceil . \tag{4.7}$$

Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.3.1. *Έστω $0 < \beta \leq 1$ και $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 1$. Έστω επίσης $i \in [k]$. Αν $n \geq F(m, \beta)$ τότε για κάθε $(i, k+1)-$αναλλοίωτο υποσύνολο D του $[k+1]^n$ με $\mathrm{dens}(D) \geq 2\beta$ υπάρχει οικογένεια $\mathcal{V}$ από ξένους ανά δύο $m-$διάστατους υποχώρους του $[k+1]^n$ που περιέχονται στο D και ισχύει οτι $\mathrm{dens}(D \setminus \bigcup \mathcal{V}) \leq 2\beta$.*

Απόδειξη.
Ορίζουμε $\Theta = \dfrac{(k+1)^{m-M_1}}{\beta(k+1+m)^{M_1}}$.
Για κάθε $x \in [k+1]^{n-M_1}$ θέτουμε $D_x = \{y \in [k+1]^{M_1} : x^\frown y \in D\}$.
Αφού $\mathbb{E}_{x \in [k+1]^{n-M_1}} \mathrm{dens}(D_x) = \mathrm{dens}(D) \geq 2\beta$, όπως έχουμε ήδη δείξει και επομένως από

το λήμμα 4.1.2 υπάρχει $T_1 \subseteq [k+1]^{n-M_1}$ με $\mathrm{dens}(T_1) \geq \beta$ ώστε $\mathrm{dens}(D_x) \geq \beta$ για κάθε $x \in T_1$.
Έστω $x \in T_1$ τυχόν.
Από την επιλογή του M_1 στην 4.8 και από το λήμμα 4.1.4, υπάρχει υπόχωρος V_x του $[k+1]^{M_1}$ διάστασης m ώστε $V \restriction k \subseteq D_x$.
Από τον ορισμό του D_x έπεται οτι $x^\frown(V \restriction k) \subseteq D$ και άρα $x^\frown V_x \subseteq D$, αφού το D είναι $(i, k+1)-$ αναλλοίωτο .
Δηλαδή, για κάθε $x \in T_1$ υπάρχει υπόχωρος V_x του $[k+1]^{M_1}$ διάστασης m ώστε $x^\frown V_x \subseteq D$.
Ο αριθμός των $m-$υπόχωρων του $[k+1]^{M_1}$ είναι το πολύ $(k+m+1)^{M_1}$.
Άρα, από την αρχή του περιστεριώνα (με τον τρόπο που την έχουμε ήδη εφαρμόσει) υπάρχει υπόχωρος V_1 του $[k+1]^{M_1}$ και $S_1 \subseteq T_1$ ώστε $\mathrm{dens}(S_1) \geq \dfrac{\beta}{(k+1+m)^{M_1}}$ και $x^\frown V_1 \subseteq D$, για κάθε $x \in S_1$.
Παρατηρούμε οτι το S_1 είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο, αφού αν $x \in S_1$ τότε $x^\frown V_1 \subseteq D$ και αφού το D είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο τότε $x^{k+1 \to i \frown} V_1 \subseteq D$ και επομένως $x^{k+1\to i} \in S_1$.
Ορίζουμε $\mathcal{V}_1 = \{x^\frown V_1 : x \in S_1\}$.
Είναι σαφές οτι τα σύνολα της $\mathcal{V}_1$ είναι $m-$διάστατοι υπόχωροι του $[k+1]^n$, ξένοι ανά δύο έτσι ώστε:

$$\bigcup \mathcal{V}_1 \subseteq D.$$

Επιπλέον, απο την επιλογή του Θ και για τυχόν $x \in S_1$ έχουμε ότι :

$$\mathrm{dens}(\bigcup \mathcal{V}_1) = \sum \mathrm{dens}\,(\mathcal{V}_1) = |S_1| dens(x^\frown V_1) \geq \Theta.$$

Αν τώρα $\mathrm{dens}(D \setminus \bigcup \mathcal{V}_1) < 2\beta$,τότε έχουμε το ζητούμενο.
Αλλιώς, θέτουμε $D_1 = D \setminus \bigcup \mathcal{V}_1$.
Το σύνολο D_1 δεν είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο αλλά $''$σχεδόν$''$ αναλλοίωτο υπό την ακόλουθη έννοια:
Για κάθε $y \in [k+1]^{M_1}$ αν θέσουμε $D_1^y = \{x \in [k+1]^{n-M_1} : x^\frown y \in D_1\}$ βλέπουμε οτι το σύνολο αυτό είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο.

Πράγματι:
Αν $y \in V_1^c$ τότε για κάθε $x \in D_1^y$ ισχύει $x^\frown y \in D_1$ και άρα $x^{k+1\to i \frown} y \in D$ αφού το D είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο.
Αφού όμως $y \in V_1^c$, έχουμε ότι $x^{k+1 \to i \frown} y \in D_1$.
Διαφορετικά, αν $y \in V_1$ τότε $D_1^y = \{x \in [k+1]^{n-M_1} : x^\frown y \in D\} \setminus S_1$ και άρα έχουμε το ζητούμενο αφού S_1 και D είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτα.

Τώρα για κάθε ζεύγος $(x, y) \in [k+1]^{n-2M_1} \times [k+1]^{M_1}$ ορίζουμε:

$$D_1^{(x,y)} = \{z \in [k+1]^{M_1} : x^\frown z^\frown y \in D_1\}.$$

Όπως πριν, βλέπουμε οτι το $D_1^{(x,y)}$ είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο(το δείχνουμε όπως προηγουμένως).
Επιπλέον, $\mathbb{E}_{(x,y)}\mathrm{dens}(D_1^{(x,y)}) = \mathrm{dens}(D_1) \geq 2\beta$.
Με τα ίδια επιχειρήματα όπως πριν, είναι δυνατό να επιλέξουμε $m-$διάστατο υπόχωρο V_2 του $[k+1]^{M_1}$ ώστε για το σύνολο $S_2 = \{(x,y) \in [k+1]^{n-2M_1} \times [k+1]^{M_1} : x^\frown V_2^\frown y \subseteq D_1\}$ να έχουμε $\mathrm{dens}(S_2) \geq \beta(k+1+m)^{-M_1}$.
Παρατηρούμε επίσης οτι για κάθε $y \in [k+1]^{M_1}$ το σύνολο :

$$S_2^y = \{x \in [k+1]^{n-2M_1} : x^\frown V_2^\frown y \subseteq D_1\}$$

είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο.
Θέτουμε :

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cup \{x^\frown V_2^\frown y : (x,y) \in S_2\}.$$

Τότε το $\mathcal{V}_2$ είναι μια οικογένεια από ξένους ανά δύο $m-$διάστατους υποχώρους του $[k+1]^n$ που περιέχονται στο D και $\mathrm{dens}(\bigcup \mathcal{V}_2) \geq \mathrm{dens}(\bigcup \mathcal{V}_1) + \Theta$.
Συνεχίζουμε ομοίως.
Σε κάθε νέο βήμα η πυκνότητα της ένωσης των στοιχείων της νέας οικογένειας υποχώρων θα αυξάνεται κατά Θ.
Άρα η διαδικασία θα τελειώσει το πολύ σε $\lfloor \Theta^{-1} \rfloor$ επαναλήψεις αν το n είναι επαρκώς μεγάλο ώστε να μπορούν να γίνουν οι επαναλήψεις αυτές.
Όμως, αφού $n \geq M_1/\Theta$ η διαδικασία θα φτάσει στο τέλος και άρα θα έχουμε άτοπο.
Επομένως σε κάποιο στάδιο της έχουμε το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας αναδρομή στο $r \in [k]$, για κάθε $0 < \beta \leq 1$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 1$ ορίζουμε τον ακέραιο $F^{(r)}(m, \beta)$ με τον κανόνα $F^{(1)}(m, \beta) = F(m, \beta)$ και $F^{(r+1)}(m, \beta) = F^{(r)}(F(m, \beta), \beta)$. Με το επόμενο πόρισμα ολοκληρώνεται το δεύτερο βασικό κομμάτι της απόδειξης της πρότασης 4.2.2.

Πόρισμα 4.3.2. *Έστω $0 < \beta \leq 1, m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 1$ και $r \in [k]$. Έστω $n \geq F^{(r)}(m, \beta)$ και για κάθε $i \in [r]$ έστω D_i να είναι $(i, k+1)-$ αναλλοίωτο υποσύνολο του $[k+1]^n$. Θέτουμε $D = D_1 \cap \ldots \cap D_r$. Αν $\mathrm{dens}(D) \geq 2r\beta$, τότε ύπαρχει οικογένεια $\mathcal{V}$ ξένων ανά δύο $m-$διάστατων υπόχωρων του $[k+1]^n$ που να περιέχονται όλοι στο D ώστε $\mathrm{dens}(D \setminus \bigcup \mathcal{V}) < 2r\beta$.*

Απόδειξη.
Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο r.
Η περίπτωση $''r = 1''$ είναι το λήμμα 4.3.1.
Υποθέτουμε λοιπόν ότι έχουμε το αποτέλεσμα μέχρι το $r \in [k-1]$, σταθεροποιούμε $n \geq F^{(r+1)}(m, \beta)$ και έστω $D_1, \ldots, D_{r+1}$ οικογένεια υποσυνόλων του $[k+1]^n$ όπως στη διατύπωση του πορίσματος.
Από την επαγωγική μας υπόθεση, υπάρχει οικογένεια $\mathcal{V}_1$ ξένων ανά δύο $F(m, \beta)-$υπόχωρων του $[k+1]^n$ που περιέχονται στο $D' = D_1 \cap \ldots \cap D_r$ και είναι τέτοιοι ώστε $\mathrm{dens}(D' \setminus \bigcup \mathcal{V}_1 <$

$2r\beta$.
Θέτουμε $\mathcal{V}_2 = \{V \in \mathcal{V}_1 : \mathrm{dens}_V(D_{r+1}) \geq 2\beta\}$.
Για κάθε $V \in \mathcal{V}_2$ έστω $\mathcal{B}_V$ η οικογένεια $m-$υπόχωρων του V που προκύπτουν από το λήμμα 4.3.1 όταν εφαρμοστεί στο σύνολο $V \cap D_{r+1}$.
Τότε θέτοντας $\mathcal{V} = \{W : V \in \mathcal{V}_2$ και $W \in \mathcal{B}_V\}$ έχουμε τη ζητούμενη οικογένεια. □

Τώρα χρησιμοποιώντας τα δύο τελικά αποτελέσματα των δύο βημάτων της απόδειξης (βλ. 4.1) είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την πρόταση 4.2.2.

Απόδειξη πρότασης 4.2.2 .
Για κάθε $0 < \delta \leq 1$ και για κάθε $d \in \mathbb{N}$ με $d \geq 1$ έστω $\beta = \gamma^2/4k, m(d) = max\{M_0, F^{(k)}(d, \beta)\}$.
Ορίζουμε :

$$N(\kappa, d, \delta) = n(\mathrm{GR}(k, m(d)), \eta^2/2). \tag{4.8}$$

και σταθεροποιούμε $n \geq N(\kappa, d, \delta)$ και υποσύνολο $A \subseteq [k_1]^n$ με $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$.
Υποθέτουμε ότι το A δεν περιέχει συνδυαστική γραμμή.
Τότε, χρησιμοποιώντας το πρώτο βήμα της απόδειξης, από το πόρισμα 4.2.6, υπάρχει υπόχωρος W του $[k+1]^n$ διάστασης $m(d)$ και οικογένεια $\{D_1, \ldots, D_k\}$ ψποσυνόλων του W έτσι ώστε D_i να είναι $(i, k+1)-$αναλλοίωτο υποσύνολο στο W για κάθε $i \in [k]$ και θέτοντας $D = D_1 \cap \ldots \cap D_k$, να έχουμε ότι $\mathrm{dens}_W(D) \geq \gamma$ και $\mathrm{dens}_W(A \cap D) \geq (\delta + \gamma)\mathrm{dens}_W(D)$.
Από το δεύτερο βήμα τώρα και από το πόρισμα 4.3.2, υπάρχει οικογένεια $\mathcal{V}$ ξένων ανά δύο $d-$διάστατςν υπόχωρων ώστε $\bigcup \mathcal{V} \subseteq D$ και $\mathrm{dens}_W(D \setminus \bigcup \mathcal{V}) < 2k\beta\frac{\gamma^2}{2}$.
Συνδυάζοντας τα προηγούμενα βλέπουμε ότι $\mathrm{dens}_W(A \cap \bigcup \mathcal{V}) \geq (\delta + \frac{\gamma}{2})\mathrm{dens}_W(\bigcup \mathcal{V})$.
Έτσι, υπάρχει $V \in \mathcal{V}$ ώστε $\mathrm{dens}_W(A \cap V) \geq (\delta + \frac{\gamma}{2})\mathrm{dens}_W(V)$ ή ισοδύναμα

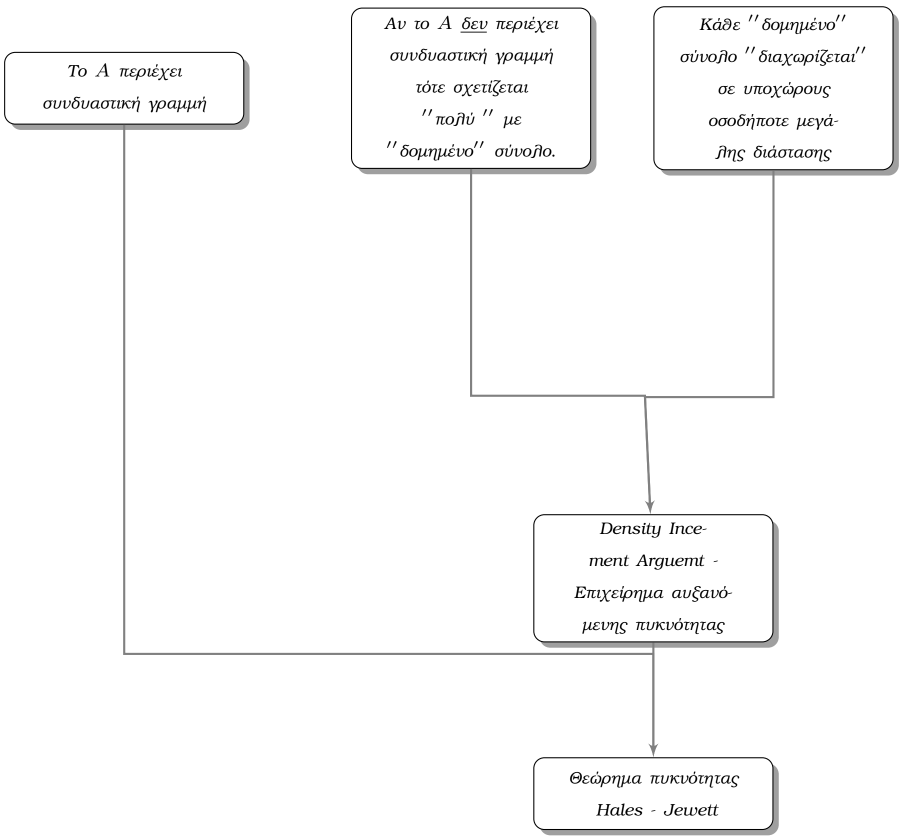
$$\mathrm{dens}_V(A) \geq (\delta + \frac{\gamma}{2}).$$

□

4.4 Από το επιχείρημα αυξανόμενης πυκνότητας στο θεώρημα πυκνότητας Hales - Jewett

Τέλος, μένει να δείξουμε πως από την πρόταση 4.2.2 παίρνουμε το θεώρημα 4.1.1. Η ιδέα είναι απλή. Έστω ότι παίρνουμε τυχόν A όπως στη διατύποωση του θεωρήματος 4.1.1 και ότι το A δεν περιέχει συνδυαστική γραμμή. Τότε παίρνουμε d τόσο μεγάλο ώστε όταν

πάμε στο $A \cap V$ να μπορούμε να επαναλάβουμε την πρόταση 4.2.2 για το $A \cap V$ και για $\delta' = \delta + \dfrac{\gamma}{2}$. Προχωράμε ομοίως. Τότε κάνοντας $\lfloor \frac{2}{\gamma} \rfloor$ τέτοια βήματα θα έχουμε βρει $V_1, \ldots, V_{\lfloor \frac{2}{\gamma} \rfloor}$ υποχώρους και $\mathrm{dens}_{V_{\lfloor \frac{2}{\gamma} \rfloor}}(A \cap V_1 \cap \ldots V_{\lfloor \frac{2}{\gamma} \rfloor - 1}) > 1$ που είναι άτοπο.
Άρα όντως το A περιέχει συνδυαστική γραμμή και άρα έχουμε το θεώρημα 4.1.1. $\square$
Τέλος παραθέτουμε το διάγραμμα της παραπάνω απόδειξης ώστε ο αναγνώστης να έχει άμεση εποπτεία της αποδεικτικής διαδικασίας:



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα της απόδειξης του θεωρήματος πυκνότητας Hales - Jewett.

Κεφάλαιο 5

Σημαντικά θεωρήματα Πορίσματα του θεωρήματος πυκνότητας Hales - Jewett

5.1 Το θεώρημα Szemerédi

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε άμεσα δύο πολύ σημαντικά θεώρηματα η απόδειξη των οποίων χωρίς τη χρήση του θεωρήματος πυκνότητας Hales - Jewett είναι ιδιαίτερα στριφνή και εκτενής και που η χρησιμότητα τους είναι τεράστια. Πρόκειται για το θεώρημα Szemerédi καθώς και την πολυδιάστατη μορφή αυτού.

Θεώρημα 5.1.1. ***(Θεώρημα Szemerédi.)***
Έστω $0 < \delta < 1$ και $k \geq 1$. Τότε υπάρχει $N = N(k, \delta)$ με την εξής ιδιότητα:
Κάθε $A \subseteq [N]$ με $\mathrm{dens}(A) \geq \delta$ περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k.

Παρατήρηση 5.1.2. *Βλέπουμε ότι το θεώρημα Szemerédi σχετίζεται με το Van der Waerden ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που σχετίζεται το χρωματικό Hales-Jewett με το θεώρημα πυκνότητας Hales-Jewett.*

Απόδειξη.
Έστω $\delta > 0, n \geq \mathrm{DHJ}(k, \delta), k^n \leq N$ και $A \subseteq [N]$ με $\mathrm{dens} A \geq \delta$. Ορίζουμε συνάρτηση

$$f : [k]^n \to [k^n]$$

με :

$$f(j_1, \ldots, j_n) = 1 + \left(\sum_{i=1}^{n} (j_i - 1) k^{i-1} \right).$$

Η f είναι 1-1 και μπορούμε να την κάνουμε επί σε υποσύνολο του $[N]$. Τότε αφού $\text{dens}A \geq \delta = \text{dens}_{f([k]^n)}(A) \geq \delta$ έπεται ότι $\text{dens}(f^{-1}(A)) \geq \delta$ και άρα από το Density Hales - Jewett το $f^{-1}(A)$ περιέχει συνδυαστική γραμμή ℓ.

Όμως τότε, παρατηρούμε ότι:

$$f(\ell(i+1)) - f(\ell(i)) = \sum_{j \in J} k^j,$$

όπου $J \subseteq [n]$ οι θέσεις εμφάνισης της μεταβλητής στην ℓ.
Έτσι, τα $f(\ell(1), \ldots, f(\ell(k))$ μας δίνουν τη ζητούμενη πρόοδο. □

5.2 Το πολυδιάστατο θεώρημα Szemerédi

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την πολυδιάστατη μορφή του θεωρήματος Szemerédi.
Υπενθυμίζουμε ότι αν $Z \subseteq \mathbb{N}^m$ τότε ένα σύνολο W λέγεται ομοιοθετικό του Z αν υπάρχουν $u \in \mathbb{N}^m$ και $\lambda \in \mathbb{N}$ ώστε $W = \{u + \lambda z : z \in Z\}$.

Θεώρημα 5.2.1. ***(Πολυδιάστατο θεώρημα Szemerédi.)***
Έστω $m \geq 1, 0 < \delta < 1$ και $X \subseteq \mathbb{N}^m$ πεπερασμένο. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(t', \delta)$(όπου το t' είναι η μέγιστη συντεταγμένη των στοιχείων του X) με την εξής ιδιότητα:
Αν $A \subseteq [N]^m$ με $\text{dens}_{[N]^m}(A) = \delta$ τότε το A περιέχει ομοιοθετικό σύνολο του X.

Απόδειξη.
Έστω $m \geq 1, 0 < \delta < 1$ και $X = \{u_1, \ldots, u_t\}$ και $t' = \max_{i,j} u_{ij}$, όπου $u_i = (u_{i1}, \ldots, u_{im})$ για κάθε $i \leq t$.
Παρατηρούμε ότι αν έχουμε συνδυαστική γραμμή στο $[[t']^m]^n$ αυτή περιέχει τη συνδυαστική γραμμή αν περιορίσουμε το $[t']^m$ στα γράμματα $\{u_1, \ldots, u_t\}$.
Ορίζουμε $f : \{[t']^m\}^n \to [t'^n]^m$, όπου $n = \text{DHJ}(t'^m, \delta)$ ως εξής:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{m \text{ φορές}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - 1)t'^{i-1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} (x_{im} - 1)t'^{i-1} \right),$$

όπου $(x_1, \ldots, x_n) = (\underbrace{x_{11}, \ldots, x_{1m}}_{x_1}, \underbrace{x_{21}, \ldots, x_{2m}}_{x_2}, \ldots, \underbrace{x_{n1}, \ldots, x_{nm}}_{x_n})$.
Έστω $A \subseteq [t'^n]^m$ με $\text{dens}(A) \geq \delta$.
Παρατηρώντας ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι $1-1$ και επί έπεται ότι το $f^{-1}(A)$ είναι υποσύνολο του $[[t']^m]^n$ με $\text{dens}(f^{-1}(A)) \geq \delta$.
Από την επιλογή του n έπεται ότι το $f^{-1}(A)$ περιέχει συνδυαστική γραμμή ℓ του $[[t']^m]^n$.
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η ℓ μεταφέρεται μέσω της f στο ζητούμενο υποσύνολο του A.
Επειδή εμάς μας ενδιαφέρουν μόνο τα στοιχεία $\ell(u_1), \ldots, \ell(u_t)$ πάμε να δείξουμε τι γίνεται

σε αυτά.
Έστω $J \subseteq [n]$ οι θέσεις εμφάνισης της μεταβλητής στην ℓ.
Τότε για κάθε $u_i, 1 \leq i \leq t$ έχουμε :

$$
\begin{aligned}
&f(\ell(u_i)) = \\
&= \underbrace{(1,\ldots,1)}_{m \text{ φορές}} + \left(\sum_{l\in J^c}(u_{i1}-1)t'^{l-1} + \sum_{j\in J}(u_{i1}-1)t'^{j-1}, \ldots, \sum_{l\in J^c}(u_{im}-1)t'^{l-1} + \sum_{j\in J}(u_{im}-1)t'^{j-1}\right) \\
&= \underbrace{\left(1+\sum_{l\in J^c}(u_{i1}-1)t'^{l-1} - \sum_{j\in J}t'^{j-1}, \ldots, 1+\sum_{l\in J^c}(u_{im}-1)t'^{l-1} - \sum_{j\in J}t'^{j-1}\right)}_{u} + \underbrace{\sum_{j\in J}t'^{j-1}}_{\lambda}(u_{i1},\ldots,u_{im}) \\
&= u + \lambda u_i,
\end{aligned}
$$

όπου όπως φαίνεται παραπάνω
$u = \left(1+\sum_{l\in J^c}(u_{i1}-1)t'^{l-1} - \sum_{j\in J}t'^{j-1}, \ldots, 1+\sum_{l\in J^c}(u_{im}-1)t'^{l-1} - \sum_{j\in J}t'^{j-1}\right)$
και $\lambda = \sum_{j\in J} t'^{j-1}$.
Άρα

$$f\left(\{\ell(u_1),\ldots,\ell(u_t)\}\right) = \{u+\lambda u_i, 1\leq i\leq t\}$$

και επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

Βιβλιογραφία

[1] P.Dodos,V.Kanellopoulos and K.Tyros, *A simple proof of the density Hales - Jewett Theorem*, Inter.Math.Res.Not,(to appear) .

[2] H.Furstenberg and Y.Katznelson, *A density version of the Hales - Jewett theorem*,Journal d'Anal.Math,57 (1991),64-119.

[3] R.L.Graham and B.L.Rothschild ,*Ramsey's theorem for n-parameter sets* ,Trans.Amer.Math.Soc.,159(1971), 257-292.

[4] A.H.Hales and R.I.Jewett, *Regularity and positioanal games* , Trans.Amer.Math.Soc.,106(1963),222-229.

[5] D.H.J. Polymath, *A new proof of the density Hales - Jewett theorem*, Ann.Math.,175(2012),1283-1327.

[6] S.Shelah, *Primitive recursive bounds of van der Waerden numbers*,J.Amer.Math.Soc.,1(1988),683-697.

[7] T.C.Tao, *Polymath1 and three new proofs of the density Hales - Jewett theorem*, available at http://terrytao.wordpress.com/.

[8] R.McCutheon ,*Elementary methods in ergodic Ramsey theory*, Springer Edition,(2000),57-59.

[9] T.C.Tao, *Ramsey theory*,available at http://terrytao.wordpress.com/.

[10] Y.Setyawan , *Combinatorial number theory: Results of Hilbert,Schur,Folkman and Hindman*, Simon Fusier University,(1998).

[11] R.L.Graham,B.L.Rothschild,J.H.Spencer , *Ramsey theory*, Wiley-Interscience,(1990).

[12] T.Austin ,*Deducing the density Hales - Jewett theorem from an infinitary removal lemma*,J.Theor.Probability,24(2011),615-633.