ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Το Θεώρημα Schur-Zassenhauss και Συνομολογία Ομάδων

Πολίτης Σπυρίδων

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2012

Έστω N μία κανονική υποομάδα μιας ομάδας G.Μία υποομάδα X της G τέτοια ώστε $G = NX$ και $N \cap X = 1$ λέγεται συμπλήρωμα της N στην G και σε αυτήν την περίπτωση η G λέγεται διασπώμενη επέκταση επί της N.Ένα θεώρημα διάσπασης λέει ότι μια ομάδα G διασπάται επί μίας κανονικής υποομάδας N.Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι η G αναλύεται σαν γινόμενο δύο υποομάδων της,$G = NX$ έτσι ώστε κάθε στοιχείο $g \in G$ να γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $g = nx$ όπου $n \in N$ και $x \in X$

Ένα από τα θεμελιώδη θεωρήματα διάσπασης στην θεωρία των πεπερασμένων ομάδων ειναι το Θεώρημα Schur το οποίο λέει ότι αν A είναι μία κανονική αβελιανή υποομάδα μίας ομάδας G και Μ.Κ.Δ$(|A|, |\frac{G}{A}|) = 1$ τότε η G περιέχει υποομάδα X τάξης $|\frac{G}{A}|$ και κάθε δύο τέτοιες είναι συζυγείς στην G.Δηλαδή, η G είναι διασπώμενη επέκταση επί της A και κάθε δύο συμπληρώματα της A στην G είναι συζυγη. Η απόδειξη αυτού του Θεωρήματος,και για την ύπαρξη συμπληρωμάτων και για τη συζυγία κάθε δύο συμπληρωμάτων βασίζεται σε έννοιες ,οι οποίες καθιερώθηκαν αργότερα ως βασικές στη Συνομολογική Θεωρία Ομάδων.

Σε αυτή την εργασία τονίζουμε αυτην την σχέση και δίνουμε δύο αποδείξεις του Θεωρήματος Schur- Zassenhaus το οποίο γενικεύει το Θεώρημα Schur, η κανονική υποομάδα εδώ δεν είναι κατ ανάγκη αβελιανή.

Θεώρημα Schur-Zassenhaus:Εστω G πεπερασμένη ομάδα και N μία κανονική υποομάδα της.Υποθέτουμε Μ.Κ.Δ$(|N|, |\frac{G}{N}|) = 1$.Τότε η G περιέχει υποομάδες τάξης $|\frac{G}{N}|$ και κάθε δύο τέτοιες είναι συζυγείς στην G.

Αξίζει ν' αναφερθεί ότι για την απόδειξη της συζυγίας των συμπληρωμάτων στο Θεώρημα Schur-Zassenhaus χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα Feit-Thompson που λέει ότι μία ομάδα περιττής τάξης είναι επιλύσιμη.

Ή πρώτη απόδειξη είναι στα πλαίσια της Θεωρίας Ομάδων και η δεύτερη μέσω εργαλείων της Συνομολογικής Θεωρίας Ομάδων,ιδιαίτερα μέσω της ερμηνείας της $H^2(G, N)$ ως ένα σύνολο επεκτάσεων ομάδων.

Στο κεφάλαιο 1 δίνουμε μία ομαδοθεωρητική απόδειξη του Θεωρήματος Schur-Zassenhaus.

Στο κεφάλαιο 2 μελετάμε την ομάδα $H^2(G, A)$ και την ερμηνεία της ως ένα σύνολο επεκτάσεων $\mathcal{E}(G, A)$ της A επί G.Επίσης αν $\phi : H \to G$ ομομορφισμός ομάδων και $\xi : M \to N$ ομομορφισμός $\mathbb{Z}G$-προτύπων,μελετάμε τις απεικονίσεις $\varphi^* : \mathcal{E}(G, A) \to \mathcal{E}(H, A_\varphi)$ και $\xi_* : \mathcal{E}(G, M) \to \mathcal{E}(G, N)$.

Τέλος στο κεφάλαιο 3 ,αποδεικνύουμε βασικά αποτελέσματα της Συνομολογικής Θεωρίας Ομάδων,μέσω των οποίων δίνουμε μία δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Schur.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ορισμος 1.1. Έστω G πεπερασμένη ομάδα με $|G| = p^\lambda n$ όπου $(p, n) = 1$. Τότε μια υποομάδα τάξης p^λ της G λέγεται Sylow p-υποομάδα της G.

Είναι γνωστά τα παρακάτω για μια ομάδα G με $|G| = p^\lambda n$ όπου $(p, n) = 1$:
i) Κάθε p-υποομάδα της G περιέχεται σε μια Sylow p-υποομάδα της G.
ii) Κάθε δυο Sylow p-υποομάδες της G είναι συζυγείς.
iii) Μια Sylow p-υποομάδα της G είναι η μόνη Sylow p-υποομάδα της $N_G(P)$ όπου $N_G(P) = \{g \in G : gPg^{-1} = P\}$.

Ισχυρισμός Frattini: Αν H μια πεπερασμένη κανονική υποομάδα μιας ομάδας G και P μια Sylow p-υποομάδα της H, τότε $G = N_G(P)H$.

Αποδειξη. Έστω $g \in G$. Αφού $H \trianglelefteq G$ και $P \leqslant H$ έχουμε ότι για κάθε $x \in P \Rightarrow g^{-1}xg \in H$, άρα $g^{-1}Pg \leqslant H$. Επίσης $g^{-1}Pg$ είναι μια Sylow p-υποομάδα της H. Άρα υπάρχει $h \in H$ τέτοιο ώστε $g^{-1}Pg = h^{-1}Ph$ δηλαδή $(gh^{-1})^{-1}P(gh^{-1}) = P \Rightarrow gh^{-1} \in N_G(P)$.
Άρα $gh^{-1} = a \Rightarrow g = ah$. □

Ορισμος 1.2. Μια υποομάδα H μιας ομάδας G λέγεται πλήρως αναλλοίωτη (fully invariant) αν $a(H) \leq H$ για κάθε $a \in EndG$ και χαρακτηριστική (characteristic) στην G αν $a(H) \leq H$ για κάθε $a \in AutG$. Παρατηρούμε ότι αν H χαρακτηριστική στην G τότε $a(H) = H$ αφού $a(H) \leq H$ και $a^{-1}(H) \leq H$.

Προταση 1.3. *i) Οι πλήρως αναλλοίωτες υποομάδες της G, είναι χαρακτηριστικές στην G και οι χαρακτηριστικές υποομάδες είναι κανονικές στην G.*
ii) Οι σχέσεις "πλήρως αναλλοίωτες" και "χαρακτηριστικές" είναι μεταβατικές σχέσεις.
iii) Αν H χαρακτηριστική στην K και $K \trianglelefteq G$ τότε $H \trianglelefteq G$.

Αποδειξη. i) Αν θέσουμε $\phi_g : G \to G$ με $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ τότε $\phi_g \in AutG$ και άρα $\phi_g(H) = H$ για κάθε $g \in G \Rightarrow H \trianglelefteq G$.

ii) Προφανής
iii) Θέτουμε $a_g : K \to K$ με $a_g(x) = gxg^{-1}$. Τότε a_g αυτομορφισμός και αφού H χαρακτηριστική στην K, $a_g(H) = H$ για κάθε $g \in H$, δηλαδή $ghg^{-1} \in H$ για κάθε $h \in H$ και για κάθε $g \in G$. □

Ορισμος 1.4. Έστω G ομάδα. Μια κανονική σειρά της G, $\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$ λέγεται επιλύσιμη σειρά της G αν G_i/G_{i-1} αβελιανή για κάθε i.

Ορισμος 1.5. Μια ομάδα G λέγεται επιλύσιμη αν έχει επιλύσιμη σειρά.

Προταση 1.6. *Αν G επιλύσιμη ομάδα και H minimal κανονική υποομάδα της, τότε H είναι στοιχειώδης αβελιανή p-υποομάδα, δηλαδή κάθε στοιχείο στην H έχει τάξη p.*

Αποδειξη. Αφού G επιλύσιμη τότε H επιλύσιμη. Επομένως $H' < H$. Όμως η H' είναι χαρακτηριστική υποομάδα στην H και αφού $H \trianglelefteq G \Rightarrow H' \trianglelefteq G$. Όμως H είναι minimal, άρα $H' = 1$, δηλαδή η H είναι αβελιανή. Αν τώρα $p/|H|$ και $H_p = \{x \in H : x^p = 1\}$ τότε H_p είναι χαρακτηριστική υποομάδα της H και άρα όπως προηγουμένως $H_p \trianglelefteq G$ άρα $H_p = 1$ ή $H_p = H$. Όμως το θεώρημα Cauchy μας εξασφαλίζει ότι η H περιέχει μη τετριμμενο στοιχείο τάξης p. Άρα $H_p = H$. □

Θεωρημα 1.7 (Feit-Thompson). *Αν G ομάδα με περιττή τάξη, δηλαδή $|G| = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε η G είναι επιλύσιμη.*

Ορισμος 1.8. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Ένας Hall-διαιρέτης του n είναι ένας διαιρέτης του n τέτοιος ώστε $(d, \dfrac{n}{d}) = 1$.

Ορισμος 1.9. Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Μια Hall υποομάδα H της G είναι μια υποομάδα της G τέτοια ώστε $(|H|, |\dfrac{G}{H}|) = 1$. Επιπλέον αν **Π** είναι ένα σύνολο πρώτων αριθμών τότε μια Hall **Π**-υποομάδα είναι μια υποομάδα τέτοια ώστε:
1. $|H|$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών απο το σύνολο **Π**.
2. Κανένας πρώτος αριθμός απο το σύνολο **Π** δεν διαιρεί το $|G/H|$.

Παρατηρηση 1.10. i) Κάθε Sylow υποομάδα μιας ομάδας G είναι Hall **Π**-υποομάδα.
ii) Η A_5, η μοναδική (σε ισομορφισμό) απλή ομάδα τάξης 60, δεν περιέχει Hall-$\{3, 5\}$ υποομάδα με τάξη 15 αφού τότε αν θεωρήσουμε την αναπαράσταση $p : A_5 \to Sym(A_5/H) = S_4$ τότε $kerp \trianglelefteq A_5$ και αφού A_5 απλή $\Rightarrow kerp = 1$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $|A_5| > |S_4|$.

Ορισμος 1.11. Αν **Π** είναι ένα σύνολο πρώτων αριθμών τότε μια υποομάδα H της G λέγεται κανονική **Π**-υποομάδα αν $H \trianglelefteq G$ και $|H| = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ όπου $p_i \in \Pi$, $i = 1, \ldots, k$.

Παρατηρηση 1.12. Έστω Η, Κ **Π**-υποομάδες μιας ομάδας G με $K \trianglelefteq G$. Τότε προφανώς $H \cap K$, HK/K είναι **Π**-υποομάδες από τα οποία έπεται ότι HK είναι **Π**-υποομάδα. Επομένως η υποομάδα που παράγεται απο όλες τις κανονικές **Π**-υποομάδες μιας ομάδας G είναι **Π**-υποομάδα και μάλιστα η μέγιστη κανονική **Π**-υποομάδα της G η οποία συμβολίζεται με $O_{\mathbf{\Pi}}(G)$.

Ορισμος 1.13. Έστω G ομάδα και **Π** ένα σύνολο πρώτων αριθμών.Μια υποομάδα H της G ονομάζεται Sylow **Π**-υποομάδα αν είναι μέγιστη **Π**-υποομάδα της G.

Προταση 1.14. *Έστω G ομάδα και* **Π** *ένα σύνολο πρώτων αριμών.*
i) Αν H είναι υποκανονική **Π**-*υποομάδα της G, τότε $H \leq O_{\mathbf{\Pi}}(G)$.*
ii)$O_{\mathbf{\Pi}}(G)$ είναι η τομή όλων των Sylow **Π**-*υποομάδων της G.*

Αποδειξη. i) Χρησιμοποιώντας επαγωγή έχουμε οτι υπάρχει κανονική σειρά $H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft ... \triangleleft H_l = G$. Αν $l \leq 1$ τότε $H \trianglelefteq G$ και άρα από τον ορισμό της $O_{\mathbf{\Pi}}(G)$ έχουμε ότι $H \leq O_{\mathbf{\Pi}}(G)$. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύιε για $\leq l-1$ και θα αποδείξουμε οτι ισχύει για l. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε οτι $H \leq O_{\mathbf{\Pi}}(H_{l-1})$. Αλλά $O_{\mathbf{\Pi}}(H_{l-1})$ είναι χαρακτηριστική υποομάδα στην H_{l-1} αφού για κάθε $a \in Aut(H_{l-1})$, $a(O_{\mathbf{\Pi}}(H_{l-1})) \leq O_{\mathbf{\Pi}}(H_{l-1})$.
Απο την προηγούμενη πρόταση $O_{\mathbf{\Pi}}(H_{l-1}) \trianglelefteq G$. Άρα $O_{\mathbf{\Pi}}(H_{l-1}) \leq O_{\mathbf{\Pi}}(G)$ και άρα $H \leq O_{\mathbf{\Pi}}(H_{l-1})$.
ii) Έστω $R = O_{\mathbf{\Pi}}(G)$ και S μια Sylow **Π**-υποομάδα της G. Τότε RS είναι μια **Π**-υποομάδα της G. Άρα $R \leq S$ αφού S μέγιστη **Π**-υποομάδα. Από την άλλη η τομή όλων των Sylow **Π**-υποομάδων είναι κανονική στην G, άρα περιέχεται στην R.

Θεωρημα 1.15 (Schur-Zassenhauss). *Έστω G πεπερασμένη ομάδα και N κανονική υποομάδα της. Υποθέτουμε οτι $|N| = n$ και $|G : N| = m$ όπου $(n, m) = 1$. Τότε η G περιέχει υποομάδες τάξης m και κάθε δυο τέτοιες είναι συζυγείς στην G.*

Αποδειξη. Διακρίνουμε περιπτώσεις:
Περίπτωση 1 N αβελιανή.
Θέτουμε $Q = G/N$. Από κάθε $x \in Q$ διαλέγουμε αντιπρόσωπο t_x στην G οπότε το σύνολο $\{t_x : x \in Q\}$ είναι ένα σύστημα αντιπροσώπων της N στην G. Αφού $t_x t_y N = t_{xy} N$ έχουμε ότι υπάρχει $c(x, y) \in N$ τέτοιο ώστε $t_x t_y = t_{xy} c(x, y)$.
Από την προσεταιριστική ιδιότητα $t_x(t_y t_z) = (t_x t_y)t_z$ έχουμε ότι:

$$t_x(t_y t_z) = t_x(t_{yz} c(y, z)) = t_{xyz} c(x, yz) c(y, z)$$

και

$$(t_x t_y)t_z = (t_{xy} c(x, y))t_z = t_{xy} t_z t_z^{-1} c(x, y) t_z = t_{xyz} c(xy, z) z^{-1} c(x, y) z$$

Συνεπώς $c(x, yz)c(y, z) = c(xy, z)z^{-1}c(x, y)z$ (1) για όλα τα $x, y, z \in Q$.
Θεωρούμε τώρα το γινόμενο $d(y) = \prod_{x \in Q} c(x, y) \in N$. Εφαρμόζοντάς

το στην (1) έχουμε

$$d(z)z^{-1}d(y)z = d(y \cdot z)c(y,z)^m$$

Επειδή N αβελιανή $\Rightarrow d(y \cdot z) = z^{-1}d(y)zd(z)c(y,z)^{-m}$.
Αφού $(m,n) = 1$ υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $xm + yn = 1$. Άρα $d(y)^{-xm-yn} = d(y)^{-1} \Rightarrow (d(y)^{-x})^m = d(y)^{-1}$.
Θέτουμε $d(y)^{-x} = e(y)$.

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην σχέση $d(yz) = z^{-1}d(y)zd(z)d(y,z)^{-1}$ έχουμε $e(y \cdot z)^{-m} = (z^{-1}e(y)ze(z)c(y,z))^{-m}$ (2). Επειδή N αβελιανή και $(n,m) = 1 \Rightarrow e(y \cdot z) = z^{-1}e(y)ze(z)c(y,z)$.
Επομένως ορίζουμε $f : Q \to G$ με $f(x) = t_x e(x)$. Η f είναι ομομορφισμός ομάδων αφού $f(y)f(z) = t_y e(y) t_z e(z) = t_y t_z t_z^{-1} e(y) t_z e(z) = t_y t_z z^{-1} e(y) z e(z) = t_{yz} c(y,z) z^{-1} e(y) z e(z) = t_{yz} e(y \cdot z) = f(yz)$ όπου για την προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε η σχέση (2).
Άρα η απεικόνιση $f : G/N \to G$ είναι ομομορφισμός ομάδων και μάλιστα μονομορφισμός αφού αν $x \in Q = G/N$ με $t_x e_x = 1 \Rightarrow t_x \in N$. Επομένως $t_x N = N \Rightarrow x = N \Rightarrow kerf = \{N\}$, δηλαδή $G/N \cong Imf \leq G$ και άρα $|Imf| = m$.

Υποθέτουμε τώρα πως H, H^* υποομάδες της G με $|H| = |H^*| = m$. Τότε $G = HN = H^*N$ και $H \cap N = 1 = H^* \cap N$. Ορίζουμε τους ομομορφισμούς ομάδων $f_1 : HN/N \to H$, $f_2 : H^*N/N \to H^*$ με $f_1(u_x N) = u_x, u_x \in H$ και $f_2(u_x^* N) = u_x^*$ αντίστοιχα.
Τώρα αν $x \in Q \Rightarrow x = t_x N$ για κάποιον αντιπρόσωπο $t_x \in G$ και άρα $x = t_x N = u_x N = u_x^* N$ αφού $G/N = HN/N = H^*N/N$. Επομένως $u_x^* = u_x a(x)$ για κάποιο $a(x) \in N$. Όμως $u_{xy}^* = u_x^* u_y^*$ αφού $u_{xy}^* N = u_x^* u_y^* N$, διότι για κάθε $x, y \in Q$

$$x \cdot y = u_{xy}^* N \Rightarrow u_x^* N u_y^* N = u_x^* u_y^* N$$

$$u_{xy}^* = u_x^* u_y^* = u_x a(x) u_y a(y)$$

$$= u_x u_y u_y^{-1} a(x) u_y a(y) = u_{xy} y^{-1} a(x) y a(y)$$

Από την άλλη $u_{xy}^* = u_{xy} a(xy)$. Άρα $u_{xy} a(xy) = u_{xy} y^{-1} a(x) y a(y) \Rightarrow a(xy) = y^{-1} a(x) y a(y)$ (3).
Θέτουμε τώρα $b = \prod_{x \in Q} a(x) \in N$ και χρησιμοποιώντας την (3) συνάγουμε ότι $b = y^{-1} b y a(y)^m$.
Αφού $(m,n) = 1$, υπάρχουν $z, \psi \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $zm + \psi n = 1$. Ισχύει $b = b^{zm+\psi n} = (b^z)^m (b^\psi)^n = (b^z)^m$ αφού $(b^z)^n = 1$ ($|N| = n$).
Άρα $b = (c)^m$ όπου $c \in N$ και $c^m = (y^{-1}cy)^m a(y)^m = (y^{-1}cya(y))^m$ και χρησιμοποιώντας το επιχείρημα ότι η N είναι αβελιανή και $(m,n) = 1 \Rightarrow c = y^{-1}cya(y)$ ή $a(y) = (y^{-1}cy)^{-1}c = y^{-1}c^{-1}yc$. Επίσης $u_y^* = u_y a(y) = u_y y^{-1} c^{-1} y c = c^{-1} u_y c$ αφού εξόρισμού της δράσης έχουμε $y^{-1}c^{-1}y = u_y^{-1} c^{-1} u_y$. Άρα υπάρχει $c \in N$ τέτοιο ώστε $H^* = c^{-1}Hc$.

Γενική περίπτωση (ύπαρξη): Εφαρμόζουμε επαγωγή στην τάξη της ομάδας G. Έστω N κανονική υποομάδα της G με $|G|, |G/N|$ σχετικά πρώτους.
Έστω p ένας πρώτος αριθμός που διαιρεί την τάξη της N και P μια Sylow p-υποομάδα της N. Αφού $|G/N|, |N|$ σχετικά πρώτοι $p \not| |G/N|$ άρα η P είναι μια Sylow p-υποομάδα της G.
Αφού $P \subset N$ και $N \trianglelefteq G \Rightarrow g^{-1}pg \in N$ για κάθε $g \in G, p \in P$. Αν $N_G(P)$ η κανονικοποιούσα υποομάδα της G και και $Z(P)$ το κέντρο της P έχουμε ότι $N_G(P) \leq N_G(Z(P))$ αφού $Z(P)$ χαρακτηριστική υποομάδα της P. Από τον ισχυρισμό Frattini έχουμε ότι $G = N_G(P)N$ και άρα

$$|G/N_G(P)| = |N_G(P)N/N_G(P)| = |N/N_G(P) \cap N|$$

και

$$|G/N| = |N_G(P)N/N| = |N_G(P)/N_G(P) \cap N|$$

Περίπτωση 1: P όχι κανονική στην G. Τότε $N_G(P) \lneq G$. Επίσης η ομάδα $N_G(P) \cap N$ είναι κανονική στην $N_G(P)$ αφού $N \trianglelefteq G$. Επίσης $|N_G(P)/N_G(P) \cap N| = |G/N|$ οπότε οι $N_G(P)$ και $N_G(P) \cap N$ ικανοποιούν το θεώρημα δηλαδή $(|N_G(P) \cap N|, |N_G(P)/N_G(P) \cap N|) = 1$ και από την επαγωγική υπόθεση αφού $|N_G(P)| < |G|$ υπάρχει υποομάδα H με τάξη $|N_G(P)/N_G(P) \cap N| = m$.

Περίπτωση 2: $P \trianglelefteq G$. Τότε $P \trianglelefteq N$ και άρα $N/P \trianglelefteq G/P$ και $|N/P|/|N|$. Χρησιμοποιώντας το 3ο Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων έχουμε ότι $\dfrac{G/P}{N/P} \cong G/N$ άρα $|\dfrac{G/P}{N/P}| = |G/N|$. Επίσης έχουμε ότι $(|N/P|, |\dfrac{G/P}{N/P}|) = 1$ και από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $K \leq G/P$ με $|K| = |G/N|$ αφού $|G/P| < |G|$. Άρα το K θα είναι της μορφής $A/P \leq G/P$ και $|A/P| = |G/N|$.
Αφού $P \neq 1$ και P p-ομάδα έχουμε $Z(P) \neq 1$ και $Z(P) \trianglelefteq A$ αφού $Z(P)$ είναι χαρακτηριστική υποομάδα της P και $P \trianglelefteq A$.
Επομένως $P/Z(P) \triangleleft A/Z(P)$ και $P/Z(P)$ είναι p-ομάδα και φυσικά τετριμμένη αν η P είναι αβελιανή. Επίσης $\dfrac{A/Z(P)}{P/Z(P)} \cong A/P$ άρα $|\dfrac{A/Z(P)}{P/Z(P)}| = |G/N|$.
Αφού $|A/Z(P)| < |G|$ έχουμε πάλι από την επαγωγική υπόθεση ότι η $A/Z(P)$ περιέχει υποομάδα $B/Z(P)$ με $|\dfrac{A/Z(P)}{B/Z(P)}| = |G/N|$. Επίσης $(|Z(P)|, |B/Z(P)|) = 1$. Άρα αν $|B| < |G|$ χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση από την οποία έχουμε ότι υπάρχει $C \leq B$ υποομάδα με $|C| = |B/Z(P)| = |G/N|$.
Αν $|B| = |G|$ τότε $B = G$ άρα $A = G$ οπότε $|G/P| = |G/N|$. Άρα $N = P$ δηλαδή η N είναι κανονική Sylow p-υποομάδα της G.

Αν N είναι κανονική (όχι αβελιανή) Sylow p-υποομάδα της G, τότε θεωρούμε το κέντρο $Z(N)$ και θεωρούμε $N/Z(N)$ και $\dfrac{G/Z(N)}{N/Z(N)} \cong G/N$.
Άρα αφού $|G/Z(N)| < |G|$, υπάρχει υποομάδα $K/Z(N)$ με $|K/Z(N)| = |G/N|$ από την επαγωγική υπόθεση.
Άρα $|K| = |Z(N)||G/N|$ και $|Z(N)| < |N|$ αφού η N δεν είναι αβελιανή, άρα $|K| < |N||G/N| = |G|$. Χρησιμοποιώντας πάλι την επαγωγική υπόθεση η K περιέχει υποομάδα H με $|K/H| = |G/N|$.

Τώρα μένει να αποδείξουμε ότι κάθε δυο τέτοιες υποομάδες με τάξη m είναι συζυγείς στην G.

Περίπτωση 1: G/N επιλύσιμη. Έστω $\mathbf{\Pi}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών που διαιρούν το m και $R = O_{\mathbf{\Pi}}(G)$ η μέγιστη κανονική $\mathbf{\Pi}$-ομάδα της G. Θεωρούμε επίσης H,K υποοομάδες της G με $|H| = |K| = m$. Τότε H,K είναι Hall $\mathbf{\Pi}$-υποομάδες της G με $|H| = |K| = m$.Επομένως από την Πρόταση 1.14 έχουμε ότι $R \leq H \cap K$. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $R = 1$ και ότι $m > 1$ για να έχουμε $H \neq G$.
Εφαρμόζουμε επαγωγή στην τάξη της G για να δείξουμε το ζητούμενο.
Έστω L/N minimal κανονική υποομάδα της G/N. Από τη Πρόταση 1.6 L/N είναι στοιχειώδης αβελιανή p-ομάδα αφού G/N επιλύσιμη για κάποιο $p \in \mathbf{\Pi}$.
Επίσης $H \cap L$ είναι Sylow p-υποομάδα της L αφού $H \cap L \cong (H \cap L)N/N$ και $|L/H \cap L| = |HL/H|$. Άρα $p \not| |HL/H|$.
Ανάλογα $K \cap L$ είναι Sylow p-υποομάδα της L. Άρα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Sylow οι ομάδες $K \cap L, H \cap L$ είναι συζυγείς στην L, δηλαδή υπάρχει $g \in L \subseteq G$ τέτοιο ώστε $H \cap L = g^{-1}(K \cap L)g = g^{-1}Kg \cap L$. Θεωρούμε τις υποομάδες $S = K \cap L$ και $J = H(g^{-1}Kg)$. Τότε παρατηρούμε ότι $S \trianglelefteq J$.
Αν υποθέσουμε ότι $J = G$ έχουμε ότι $S \trianglelefteq G$ και αφού η S είναι $\mathbf{\Pi}$-ομάδα και $R = 1 \Rightarrow S = 1$. Επομένως $p \not| |L|$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει αφού L/N είναι p-ομάδα και άρα $p/|L/N| \Rightarrow p/|L|$. Άρα $J \lneq G$. Από υπόθεση επαγωγής αφού $|J| < |G|$ οι υποομάδες $H, g^{-1}Kg$ της G είναι συζυγείς στην J και άρα στην G. Έτσι οι υποομάδες H, K είναι συζυγείς στην G.

Περίπτωση 2: N επιλύσιμη. Εφαρμόζουμε ξανά επαγωγή στην τάξη της ομάδας G. Αν H,K υποομάδες τάξης m έχουμε ότι $N' \trianglelefteq G$ αφού $N \trianglelefteq G$ και N' χαρακτηριστική υποομάδα της N.
Αν $N' = 1$ τότε N αβελιανή και άρα αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση για να φτάσουμε στο ζητούμενο.
Άρα υποθέτουμε ότι $N' \neq 1$. Τότε $|G/N'| < |G|$ και από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι οι υποομάδες $HN'/N', KN'/N'$ της G/N' είναι συζυγείς σε αυτήν, δηλαδή υπάρχει στοιχείο $gN' \in G/N'$ τέτοιο ώστε $g^{-1}N'(HN'/N')gN' = KN'/N'$. Άρα $g^{-1}Hg \leq KN'$ και προφανώς $K \leq KN'$. Χρησιμοποιώντας τώρα την επαγωγική υπόθεση και το

γεγονός ότι $N' < N$ αφού N επιλύσιμη συμπεραίνουμε ότι οι υποομάδες $g^{-1}Hg, K$ είναι συζυγείς στην KN'. Άρα οι υποομάδες H,K είναι συζυγείς στην G.

Τέλος, η γενική περίπτωση αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα Feit-Thompson. Συγκεκριμένα αφού $(|N|, |G/N|) = 1$ τότε τουλάχιστον μια από τις δυο τάξεις θα είναι περιττός αριθμός. Άρα από το θεώρημα Feit-Thompson η ομάδα με την περιττή τάξη θα είναι επιλύσιμη και άρα από τα προηγούμενα έχουμε το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ορισμος 2.1. Μια βραχεία ακριβής ακολουθία ομάδων είναι μια ακολουθία της μορφής $1_A \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 1_C$ όπου A, B, C ομάδες, i, π ομομορφισμοί ομάδων, $keri = \{1_A\}, Imi = ker\pi, Im\pi = C$, δηλαδή i μονομορφισμός και π επιμορφισμός και $Imi = ker\pi$.

Ορισμος 2.2. Έστω G, N ομάδες. Μια επέκταση της N επί G είναι μια ομάδα E τέτοια ώστε περιέχει κανονική υποομάδα $E_1 \trianglelefteq E$ με $E_1 \cong N$ και $E/E_1 \cong G$.

Παρατηρηση 2.3. Οι παραπάνω ορισμοί είναι ισοδύναμοι αφού αν $1_N \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία ομάδων τότε $N \cong i(N)$ αφού i μονομορφισμός και $E/ker\pi \cong G$ από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών και από το ότι η π είναι επί. Όμως από ακρίβεια $E/i(N) \cong G$. Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι έχουμε μια επάκταση της N επί G, δηλαδή ομάδα E που περιέχει υποομάδα $E_1 \trianglelefteq E, E_1 \cong N$ και $E/E_1 \cong G$ τότε η ακολουθία $1_N \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1_G$ είναι βραχεία ακριβής ακολουθία ομάδων, $i = i_1 o f_1$ όπου $f_1 : N \to E$ ένας ισομορφισμός ομάδων και $i_1 : E_1 \to E$ η εμφυτεύση.
Ανάλογα, $\pi = f_2 o \pi_1$ όπου $f_2 : E/E_1 \to G$ ένας ισομορφισμός ομάδων και $\pi_1 : E \to E/E_1$ ο φυσικός επιμορφισμός.

Επομένως στα επόμενα όταν εννοούμε μια επέκταση της N επί G είναι ισοδύναμο με το να θεωρούμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία ομάδων $1_N \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1_G$.

Ορισμος 2.4. Έστω G, N ομάδες. Δύο επεκτάσεις της N επί G (α), (α′) λέγονται ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\phi : E \to E'$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\alpha)\ 1_N & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_1} & E & \xrightarrow{\pi_1} & G & \longrightarrow & 1_G \\
 & & Id_N\Big\| & & \phi\Big\downarrow & & Id_G\Big\| & & \\
(\alpha')\ 1_N & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_2} & E' & \xrightarrow{\pi_2} & G & \longrightarrow & 1_G
\end{array}$$

Δηλαδή $\phi \circ i_1 = i_2 \circ Id_N$ και $Id_G \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \phi$.

Σχόλιο: Στον προηγούμενο ορισμό ο ομομορφισμός $\phi : E \to E'$ είναι αναγκαστικά ισομορφισμός.
Πράγματι η ϕ είναι $1-1$ αφού αν $x \in E$ με $\phi(x) = 1_{E'}$, τότε $\pi_2(\phi(x)) = 1_G$. Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε $\pi_1(x) = 1_G$. Χρησιμοποιώντας την ακρίβεια του πρώτου διαγράμματος και αφού $x \in ker\pi_1$, υπάρχει $a_1 \in A$ τέτοιο ώστε $x = i_1(a_1)$ και άρα $\phi(x) = \phi(i_1(a_1)) = 1_E$. Χρησιμοποιώντας πάλι την μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε ότι $i_2(a_1) = 1_{E'}$ και αφού i_2 είναι μονομορφισμός $a_1 = 1_N$. Άρα η ϕ είναι $1-1$.
Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται οτι η ϕ είναι επί, άρα τελικά η ϕ είναι ισομορφισμός.

Να υπενθυμίσουμε ότι ο ακέραιος ομαδοδακτύλιος $\mathbb{Z}G$ ως αβελιανή ομάδα είναι ελεύθερη επί των στοιχείων της G και εφοδιάζεται με δομή δακτυλίου μέσω του πολλαπλασιασμού της G δηλαδή αν $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}G$ με $w_1 = \sum_{g\in G} n_g g$ και $w_2 = \sum_{h\in G} m_h h \Rightarrow w_1 w_2 = \sum_{g,h\in G}(n_g m_h)(gh)$.

Ορισμος 2.5. Ένα αριστερό $\mathbb{Z}G$-πρότυπο είναι μια αβελιανή ομάδα $(A, +)$ εφοδιασμένη με έναν ομομορφισμό δακτυλίων $\vartheta : \mathbb{Z}G \to End(A)$ όπου $End(A) = \{\phi : A \to A : \phi$ ομομορφισμός ομάδων $\}$ ο δακτύλιος των ενδομορφισμών του A.

Παρατηρηση 2.6. Αν A $\mathbb{Z}G$-πρότυπο, δηλαδή υπάρχει $\vartheta : \mathbb{Z}G \to End(A)$ ομομορφισμός δακτυλίων, τότε $\vartheta|_G \to Aut(A)$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Αντίστροφα, αν $\rho : G \to Aut(A)$ ομομορφισμός ομάδων ,τότε ο ρ επεκτείνεται σε μοναδικό ομομορφισμό δακτυλίων $\bar{\rho} : \mathbb{Z}G \to End(A)$ τέτοιο ώστε $\bar{\rho}|_G = \rho$.

Έστω N, G ομάδες με N αβελιανή. Θεωρούμε μια επέκταση της N επί G, δηλαδή (α) $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$. Επίσης θεωρούμε την N ως υποομάδα της E μέσω του μονομορφισμού i, δηλαδή ταυτίζουμε την N με την i(N). Τότε ορίζεται μια δράση της G στην ομάδα N ως εξής:

Θεωρούμε $g \in G$ και $a \in N$. Τότε αφού η π είναι επί, υπάρχει $x \in E$ με $\pi(x) = g$. Θέτουμε $(g, a) \to g * a = xax^{-1}$. Η δράση αυτή είναι καλά ορισμένη.
Αν $y \in E$ ώστε $\pi(y) = g$ τότε $\pi(x) = \pi(y)$ άρα $\pi(xy^{-1}) = 1_G$. Αυτό σημαίνει ότι $xy^{-1} \in ker\pi = Imi$. Επομένως υπάρχει $a_0 \in N$ τέτοιο ώστε $xy^{-1} = a_0$ άρα $x = a_0 y$, $xax^{-1} = a_0 yay^{-1} a_0^{-1} = yay^{-1} a_0 a_0^{-1} = yay^{-1}$ επειδή N αβελιανή.
Επίσης, προφανώς ικανοποιούνται τα δυο αξιώματα της δράσης.
Τώρα θεωρώντας την απεικόνιση $\vartheta : G \to Aut(N)$ με $\vartheta(g) = g * a = xax^{-1}$, όπου $\pi(x) = g$, η ϑ είναι ομομορφισμός ομάδων αφού η G δρα

στην N. Άρα με βάση την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\bar{\vartheta} : \mathbb{Z}G \to End(N)$ με $\bar{\vartheta}|_G \equiv \vartheta$. Έτσι το N γίνεται ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο.

Παρατηρηση 2.7. Έστω G ομάδα και N ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο. Τότε βάσει της παρατήρησης 2.6 υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\rho : G \to Aut(N)$. Έστω τώρα (α) $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ επέκταση της N επί G. Τότε υπάρχει $\vartheta : G \to Aut(N)$ ομομορφισμός ομάδων. Από εδώ και στο εξής όταν θεωρούμε ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο N θα θεωρούμε ότι $\rho \equiv \vartheta$.

Ορισμος 2.8. Μια ακριβής ακολουθία ομάδων $1 \to A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \to 1$ λέγεται διασπώμενη αν υπάρχει $s : C \to B$ ομομορφισμός ομάδων τέτοιος ώστε $fos \equiv Id_C$.

Προταση 2.9. *Έστω G ομάδα και N ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο και (α) $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ μια επέκταση της N επί G. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα για την (α):*
i) Η (α) $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ είναι διασπώμενη.
ii) Υπάρχει υποομάδα $\tilde{G} \leq E$ τέτοια ώστε $\tilde{G} \cong G$ και κάθε στοιχείο $x \in E$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = y\tilde{g}$ όπου $y \in N$ και $\tilde{g} \in \tilde{G}$.
iii) Η (α) είναι ισοδύναμη με την επέκταση (α′) $0 \to N \xrightarrow{i'} N \rtimes_\vartheta G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$ όπου $N \rtimes_\vartheta G$ είναι το ημιευθύ γινόμενο που ορίζεται από τον ομομορφισμό ομάδων $\vartheta : G \to Aut(N)$ με $\vartheta(g) = \vartheta_g$ όπου $\vartheta_g(y) = g * a = \tilde{g}y\tilde{g}^{-1}$, $\pi(\tilde{g}) = g$. Ακριβέστερα, αν $(y, g), (z, h) \in N \propto G$ τότε ορίζουμε $(y, g)(z, h) = (y + \vartheta_g(z), gh) = (y + g*z, gh) = (y + \tilde{g}z\tilde{g}^{-1}, gh)$. Εύκολα κανείς μπορεί να επαληθεύσει ότι η $N \times G$ με την παραπάνω πράξη αποτελεί ομάδα και ονομάζεται το ημιευθύ γινόμενο της N επί G. Τέλος, $i' : N \to N \rtimes_\vartheta G, i'(y) = (y, 0)$ η ένθεση και $\pi' : N \rtimes_\vartheta G \to G$ με $\pi'(y, g) = g$ η προβολή.

Αποδειξη. $i) \Rightarrow ii)$ Έστω ότι η (α) είναι διασπώμενη. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $s : G \to E$ ομομορφισμός ομάδων με $\pi \circ s = Id_G$. Τότε η s είναι μονομορφισμός αφού έχει αριστερό αντίστροφο και άρα $G \cong s(G) = \tilde{G}$ και $\pi : s(G) \to G$ είναι ισομορφισμός. Επίσης κάθε στοιχείο $x \in E$ γράφεται ως $x = ys(g)$ με $y \in N$ και $s(g) \in s(G)$ αφού $E = Ns(G)$. Μάλιστα η γραφή αυτή είναι μοναδική αφού αν $x = y_1 s(g_1)$ τότε $\pi(y_1 s(g_1)) = \pi(ys(g)) = \pi(y_1)\pi(s(g_1)) = \pi(y)\pi(s(g))$. Όμως $\pi(y_1) = \pi(y) = 1_G$ λόγω ακρίβειας. Άρα $g = \pi(s(g)) = \pi(s(g_1)) = g_1 \Rightarrow y_1 = y$.

$ii) \Rightarrow i)$ Έστω τώρα ότι κάθε στοιχείο x της E γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = y\tilde{g}$ με $y \in N$, $\tilde{g} \in \tilde{G}$ και $\tilde{G}$ η ομάδα της υπόθεσης, $\tilde{G} \cong G$ και $\pi|_{\tilde{G}} : \tilde{G} \to G$ ισομορφισμός ομάδων. Τότε θεωρούμε $\lambda = (\pi|_{\tilde{G}})^{-1} : G \to \tilde{G}$ η οποία είναι ισομορφισμός ομάδων και μάλιστα

$\pi(\lambda(g)) = g$ για κάθε $g \in G$.

$i), ii) \Rightarrow iii)$ Έστω ότι η ακολουθία (α) $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ διασπάται. Τότε $|G| = |Ns(G)| = |N \rtimes_\vartheta G|$.
Άρα υπάρχει $1-1$ και επί απεικόνιση $f : N \times G \to E = Ns(G)$ με $f(y,g) = ys(g)$. Επίσης υπάρχει μοναδική "δομή ομάδας" στο σύνολο $N \times G$ ώστε η f να γίνεται ισομορφισμός.
Για να υπολογίσουμε την δομή αυτή αρκεί να υπολογίσουμε το γινόμενο $(ys(g))(zs(h))$. Έχουμε:

$$(ys(g))(zs(h)) = ys(g)zs(g)^{-1}s(g)s(h) = (y + g * z)s(gh)$$

Άρα η πράξη στο σύνολο $N \times G$ που κάνει την f ισομορφισμό ομάδων είναι η $(y,g)(z,h) = (y + g * z, gh)$. Έτσι με αυτή την πράξη το σύνολο $N \times G$ γίνεται ομάδα και είναι το ημιευθύ γινόμενο της N επί G.

Μένει να δείξουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
(\alpha')\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal] & N \rtimes_\vartheta G \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
(\alpha)\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "\pi"] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Πράγματι, αν $y \in N$ τότε

$$f(i'(y)) = f(y,0) = y = i(y)$$

άρα $f \circ i' \equiv i$ και αν $(y,g) \in N \rtimes_\vartheta G$ τότε

$$\pi'(y,g) = g = \pi(ys(g)) = \pi(f(y,g))$$

άρα $\pi' \equiv \pi \circ f$.
Άρα η επέκταση (α) είναι ισοδύναμη με την επέκταση (α′).

$iii) \Rightarrow i), ii)$ Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η επέκταση (α) $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ είναι ισοδύναμη με την επέκταση (α′) $0 \to N \xrightarrow{i'} N \rtimes_\vartheta G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\phi : E \to N \rtimes_\vartheta G$ ομομορφισμός ομάδων που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
(\alpha)\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
(\alpha')\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & N \rtimes_\vartheta G \arrow[r, "\pi'"] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $\phi \circ i' \equiv i'$ και $\pi' \circ \phi \equiv \pi$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi \circ i : G \to E$ όπου $i_G : G \to N \rtimes_\vartheta G$ με

$i_G = (0, g)$. Προφανώς η $\phi \circ i_G$ είναι ομομορφισμός ομάδων και επιπλέον για κάθε $g \in G$ ισχύει:

$$\pi(\phi^{-1}(i_G(g))) = \pi(\phi^{-1}(0, g)) = \pi'(0, g) = g$$

δηλαδή $\pi \circ (\phi^{-1} \circ i_G) \equiv Id_G$, άρα η επέκταση (α) είναι διασπώμενη. $\square$

Παρατηρηση 2.10. Η προηγούμενη πρόταση μας λέει ότι αν (α) $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ επέκταση της N επί G , η οποία διασπάται τότε αυτή είναι ισοδύναμη με την επέκταση (α′) $0 \to N \xrightarrow{i'} N \rtimes_\vartheta G \xrightarrow{\pi'} G$ όπου $N \propto G$ το ημιευθύ γινόμενο της N επί G όπως ορίστηκε στην πρόταση 2.9. Με άλλα λόγια το σύνολο [(α′)]=$\{(c)|(c)$ επέκταση της N επί G ισοδύναμη με τη (α′) $\}$ περιέχει όλες τις διασπώμενες επεκτάσεις της N επί G.

Παρατηρηση 2.11. Σκοπός μας τώρα είναι να δείξουμε ότι σε κάθε διασπώμενη επέκταση (α) $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ υπάρχει 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των ομομορφισμών $s : G \to E$ με $\pi \circ s = Id_G$ και ορισμένων συναρτήσεων $d : G \to N$ που καλούνται παραγωγίσεις. Για αυτόν τον λόγο μέσω του επόμενου ορισμού εισάγουμε την έννοια της παραγώγισης.

Ορισμος 2.12. Έστω N ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο. Μια απεικόνιση $d : G \to N$ λέγεται παραγώγιση (derivation) αν για κάθε $g, h \in G$ ισχύει $d(gh) = d(g) + gd(h)$.
Άμεσα έχουμε ότι $d(1) = 0$.
Αν συμβολίσουμε με $Der(G, N) = \{f : G \to N : f$ παραγώγιση$\}$ τότε το σύνολο αυτό αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη:
Αν $f_1, f_2 \in Der(G, N)$ τότε $(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$ για κάθε $g \in G$.

Προταση 2.13. *Έστω G ομάδα και N ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο. Θεωρούμε την επέκταση (α′) $0 \to N \xrightarrow{i'} N \rtimes_\vartheta G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$ της N επί G όπου $i'(a) = (a, 0)$ και $\pi'(a, g) = g$. Τότε υπάρχει μια $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ των ομομορφισμών ομάδων $s : G \to N \rtimes_\vartheta G$ με $\pi' \circ s \equiv Id_G$ και των παραγωγίσεων $d : G \to N$.*

Αποδειξη. Έστω $s : G \to N \rtimes_\vartheta G$ ομομορφισμός ομάδων με $\pi \circ s \equiv Id_G$. Τότε $s(g) = (d(g), g)$ όπου $d : G \to N$ απεικόνιση.
Αφού f ομομορφισμός ομάδων έχουμε ότι $s(g)s(h) = s(gh)$ δηλαδή $(d(g), g), (d(h), h)) = (d(gh), gh) \Rightarrow (d(g) + gd(h), gh) = (d(gh), gh) \Rightarrow d(gh) = d(g) + gd(h)$ για κάθε $g, h \in G$.
Αντίστροφα, αν $d : G \to N$ παραγώγιση τότε εκτελώντας τις παραπάνω πράξεις έχουμε ότι $s : G \to N \rtimes_\vartheta G$ με $s(g) = (d(g), g)$ είναι ομομορφισμός ομάδων και $\pi \circ s \equiv Id_G$. $\square$

Παρατηρηση 2.14. Έστω τώρα τυχαία διασπώμενη επέκταση της N επί G (α) $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$. Τότε από την πρόταση 1.23 υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\Phi : N \rtimes_\vartheta G \to E$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό, δηλαδή

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\alpha')\; 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i'} & E & \xrightarrow{\pi'} & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \Phi\downarrow & & \| & & \\
(\alpha)\; 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & N \rtimes_\vartheta G & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Αν $s : G \to E$ με $\pi \circ s = Id_G$ τότε ο $\Phi^{-1} \circ s : G \to N \rtimes_\vartheta G$ είναι ομομορφισμός ομάδων με $\pi' \circ \Phi^{-1} \circ s = \pi \circ s = Id_G$. Αντίστροφα, αν $s' : G \to N \rtimes_\vartheta G$ ομομορφιμός ομάδων με $\pi' \circ' = Id_G$, τότε $\Phi \circ s' : G \to E$ ομομορφισμός ομάδων με $\pi \circ \Phi \circ s' = \pi' \circ s' = Id_G$.
Άρα αν $A = \{s : G \to E : s$ ομομορφισμός ομάδων με $\pi \circ s = Id_G\}$ και $B = \{s' : G \to N \rtimes_\vartheta G : s'$ ομομορφισμός ομάδων με $\pi' \circ s' = Id_G\}$, τότε υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων A και B. Επομένως από την πρόταση 2.13 για την διασπώμενη επέκταση της N επί G (α) $0 \to N \to^i E \to^\pi G \to 1$ υπάρχει 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου A και του συνόλου $Der(G, N)$.

Ορισμος 2.15. Έστω $0 \to N \xrightarrow{i'} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ διασπώμενη επέκταση της N επί G. Δυο $s_1, s_2 : G \to E$ ομομορφισμοί ομάδων με $\pi \circ s_1 = \pi \circ s_2 = Id_G$ καλούνται N-συζυγείς αν υπάρχει $a \in N$ τέτοιο ώστε $s_1(g) = as_2(g)a^{-1}$ για κάθε $g \in G$. Αν $s : G \to E$ ομομορφισμός ομάδων με $\pi \circ s = Id_G$ τότε με $[s] = \{\tau : G \to E$ ομομορφιμός ομάδων$/\exists a \in N$ ώστε $\tau(g) = as(g)a^{-1}\ \forall g \in G\}$ συμβολίζουμε το σύνολο των N-συζυγών ομομορφισμών ομάδων προς την s.

Παραδειγμα 2.16. Έστω G ομάδα και N ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο.Θεωρούμε την διασπώμενη επέκταση της N επί G, (α′) $0 \to N \xrightarrow{i'} N \rtimes_\vartheta G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$. Αν $s_1, s_2 : G \to N \rtimes_\vartheta G$ ομομορφισμός ομάδων με $\pi' \circ s_1 = \pi' \circ s_2$ έχουμε ότι:
s_1, s_2 συζυγή $\Leftrightarrow s_1(g) = (a, 1)s_2(g)(-a, 1) \Leftrightarrow$
$(d_1(g), g) = (a, 1)(d_2(g), g)(-a, 1) \Leftrightarrow (d_1(g), g) = (a + d_2(g) - ga, g) \Leftrightarrow$
$d_1(g) = a + d_2(g) - ga \Leftrightarrow d_2(g) - d_1(g) = ga - a$ δηλαδή $d_2(g) - d_1(g) = f(g)$ όπου $f : G \to N$ με $f(g) = ga - a$ για κάποιο $a \in N$.

Η f καλείται πρωταρχική παραγώγιση (inner derivation) και αν $P(G, N)$ το σύνολο αυτών τότε $P(G, N) \subseteq Der(G, N)$ και μάλιστα $P(G, N) \leq Der(G, N)$.

Προταση 2.17. *Θεωρούμε (α′)* $0 \to N \xrightarrow{i'} N \rtimes_\vartheta G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$ *την διασπώμενη επέκταση της* N *επί* G *του παραδείγματος 2.16 και έστω* $[s] = \{\tau : G \to N \rtimes_\vartheta G$ *ομομορφιμός ομάδων*$/\exists a \in N$ *ώστε* $\tau(g) = as(g)a^{-1}\ \forall g \in G\}$ *η κλάση των* N*-συζυγών ομομορφισμών. Τότε η απεικόνιση* $\Phi : [s] \to Der(G, N)/P(G, N)$ *είναι* $1 - 1$ *και επί.*

Αποδειξη. Πράγματι αν s_1, s_2 N-συζυγείς κλάσεις με $d_1+P(G,N) = d_2 + P(G,N)$, τότε $d_2 - d_1 \in P(G,N)$ και άρα υπάρχει $a \in N$ τέτοιο ώστε $(d_2 - d_1)(g) = ga - a$. Άρα $s_2(g) = as_1(g)a^{-1}$ για κάθε $g \in G$, δηλαδή $[s_1] = [s_2]$.
Τέλος η Φ είναι επί. $\square$

Έστω G ομάδα και N ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο. Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου (a) $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ επέκταση της N επί G η οποία δεν είναι διασπώμενη. Τότε επιλέγουμε απεικόνιση $s : G \to E$ τέτοια ώστε $s(1) = 1$ και $\pi \circ s = Id_G$.
Αν s ομομορφισμός ομάδων τότε η παραπάνω επέκταση είναι διασπώμενη και άρα από τα προηγούμενα είναι ισοδύναμη με την (a′), όπου (a′) έχει οριστεί στην πρόταση 2.9. Άρα μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου η s δεν είναι ομομορφισμός ομάδων.
Σε αυτή την περίπτωση θα κατασκευάσουμε συνάρτηση $f_s : G \times G \to N$ η οποία θα μετράει το "σφάλμα" της s από το να είναι ομομορφισμός ομάδων.
Παρατηρούμε ότι αν $s : G \to E$ με $\pi \circ s = Id_G$ τότε για κάθε $g, h \in G$ ισχύει $\pi(s(gh)) = \pi(s(g)s(h))$. Άρα $\pi(s(g)s(h)s(gh)^{-1}) = 1_G$, δηλαδή $s(g)s(h)s(gh)^{-1}) \in ker\pi$. Λόγω ακρίβειας $s(g)s(h)s(gh^{-1}) \in Imi$ άρα υπάρχει απεικόνιση $f_s : G \times G \to N$ με $s(g)s(h) = f_s(g,h)s(gh)$ (1). Χρησιμοποιώντας ακόμη ότι $s(1) = 1$ συνάγουμε ότι $f_s(g,1) = f_s(1,g) = 0$.
Επίσης η προσεταιριστική ιδιότητα $s(g)((s(h)s(k)) = (s(g)s(h))s(k)$ και η (1) δίνουν ότι

$$gf_s(h,k) + f_s(g,hk) = f_s(g,h) + f_s(gh,k),\ \forall g,h,k \in G\ (2)$$

Άρα κάθε απεικόνιση $s : G \to E$ με $s(1) = 1$ και $\pi \circ s = Id_G$ επάγει συνάρτηση $f_s : G \times G \to N$ η οποία καλείται factor set και ικανοποιεί τη σχέση (2).
Αφού $|E| = |Ns(G)| = |N \times G|$ υπάρχει απεικόνιση $\Phi : N \times G \to Ns(G)$ η οποία είναι $1-1$ και επί. Για να υπολογίσουμε την "δομή ομάδας" στο σύνολο $N \times G$ που κάνει την Φ ισομορφισμό ομάδων αρκεί να υπολογίσουμε το γινόμενο:

$$\begin{aligned}(as(g))(bs(h)) &= as(g)bs(g)^{-1}s(g)s(h)\\ &= (a + g * b)f_s(g,h)s(gh)\\ &= (a + g * b + f_s(g,h))s(gh)\end{aligned}$$

ρα $(a,g)(b,h) = (a+gb+f_s(g,h), gh)$ και με αυτήν την πράξη το γινόμενο $N \times G$ γίνεται ομάδα και συμβολίζεται με E_{f_s}.
Τέλος, το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccccccccc} (c)\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_1} & E_{f_s} & \xrightarrow{\pi_1} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \Phi\downarrow & & \| & & \\ (\alpha)\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

όπου $i_1(a) = (a, 1)$ *και* $\pi_1(a, g) = g$ *για κάθε* $a \in N$, $(a, g) \in E_{f_s}$.
Πράγματι $\Phi(i_1(a)) = \Phi(a, 1) = as(1) = i(a)$ *άρα* $\Phi \circ i_1 \equiv i$ *και* $\pi(\Phi(a, g)) = \pi(as(g)) = g = \pi_1(a, g)$ *άρα* $\pi \circ \Phi \equiv \pi_1$.

Ας δούμε τώρα πως στην παραπάνω επέκταση της N *επί* G *(a)* $0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ *πως σχετίζονται μεταξύ τους δυο* $s_1, s_2 : G \to E$ *με* $\pi \circ s_1 = \pi \circ s_1 = Id_G$ *και* $s_1(1) = s_2(1) = 1$.
Έστω f_1, f_2 *οι αντίστοιχοι factor sets των απεικονίσεων* s_1, s_2. *Έχουμε για κάθε* $g \in G$ *ότι* $\pi(s_1(g)) = \pi(s_2(g)) = g$ *άρα* $s_2(g) = f_3(g)s_3(g)$ *όπου* $f_3 : G \to N$.
Από την άλλη έχουμε ότι

$$s_1(g)s_1(h) = f_1(g, h)s_1(gh)$$
$$s_2(g)s_2(h) = f_2(g, h)s_2(gh)$$
$$\Rightarrow f_3(g)s_1(g)f_3(h)s_1(h) = f_2(g, h)f_3(gh)s_1(gh)$$
$$\Rightarrow f_3(g)s_1(g)f_3(h)s_1(g)^{-1} = s_1(g)s_1(h) = (f_2(g, h) + f_3(gh))s_1(gh)$$
$$\Rightarrow (f_3(g) + g * f_3(h) + f_1(g, h))s_1(gh) = (f_2(g, h) + f_3(gh))s_1(gh)$$
$$\Rightarrow f_2(g, h) - f_1(g, h) = f_3(g) + g * f_3(h) - f_3(gh), \ \forall g, h \in G$$

Αν συμβολίσουμε με $Z^2(G, N) = \{f : G \times G \to N : f factor\ set\}$ *τότε* $Z^2(G, N)$ *αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη* $(f_1 + f_2)(g, h) = f_1(g, h) + f_2(g, h)$ *για κάθε* $(g, h) \in G \times G$.
Επίσης, αν $B^2(G, N) = \{\phi : G \times G \to N : \exists\ \phi_1 : G \to N \text{ ώστε } \phi(g, h) = \phi_1(g) + g * \phi_1(g) - \phi_1(gh)\ \forall (g, h) \in G \times G\}$ *τότε* $B^2(G, N)$ *είναι υποομάδα της* $Z^2(G, N)$.
Τα στοιχεία της $B^2(G, N)$ *καλούνται principal factor sets.*

Πρόταση 2.18. *Έστω* G *ομάδα,* N $\mathbb{Z}G$*-πρότυπο, (β)* $0 \to N \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{\pi_1} G \to 1$, *(β′)* $0 \to N \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{\pi_2} G \to 1$ *επεκτάσεις της* N *επί* G *και* $s_i : G \to E_i$ *απεικονίσεις με* $\pi_i \circ s_i = Id_G$, $i = 1, 2$.
Τότε έχουμε ότι οι παραπάνω επεκτάσεις είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν οι αντίστοιχοι factor sets διαφέρουν κατά ένα principal factor set, δηλαδή $f_2(g, h) - f_1(g, h) = g * \xi(h) + \xi(g) - \xi(gh)$ *για κάθε* $g, h \in G$.

Απόδειξη. $\Leftarrow$ Θεωρούμε $\Phi : E_1 \to E_2$ με $\Phi(as_1(g)) = (a - \xi(g))s_2(g)$.
Τότε η Φ είναι καλά ορισμένη και ομομορφισμός ομάδων αφού αν $(as_1(g))(bs_1(h)) \in E_1$ τότε:

$$\Phi((as_1(g))(bs_1(h)) = \Phi[(a + g * b + f_1(g, h))(s_1(gh))]$$
$$= (a + gxb + f_1(g, h) - \xi(gh)s_2(gh)$$

και

$$(a - \xi(g)))s_2(g)(b - \xi(h))s_2(h) = (a - \xi(g))s_2(g)(b - \xi(h))s_2(g)^{-1}s_2(g)s_2(h)$$
$$= (a - \xi(g) + g \times (b - \xi(h)) + f_2(g, h))s_2(gh)$$
$$= (a - \xi(g) + g \times b - g \times \xi(h) + f_2(g, h))s_2(gh)$$
$$= (a + g \times b - \xi(g) - g \times \xi(h) + f_2(g, h))s_2$$

Όμως $f_1(g,h)-\xi(g,h)=f_2(g,h)-\xi(g)-g\times\xi(h)$ γεγονός που δείχνει ότι $\Phi((as_1(g))(bs_1(h))=\Phi(as_1(g))\Phi(bs_1(h))$.
Τέλος μένει να δείξουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\beta) & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{\pi_1} & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \Phi\downarrow & & \| & & \\
(\beta')\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{\pi_2} & G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

είναι μεταθετικό αλλά αυτό είναι άμεσο μιας και $\pi_2(\Phi(as_1(g)))=\pi_2((a-\xi(g))s_2(g))=g=\pi_1(as_1(g))$ για κάθε $(as_1(g))\in E_1$ και $\phi(i_1(a))=\phi(a)=a=i_2(a)$ για κάθε $a\in N$.

$\Rightarrow$ Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι επεκτάσεις $(\beta),(\beta')$ της N επί G είναι ισοδύναμες. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $F:E_1\to E_2$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\beta)\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{\pi_1} & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & F\downarrow & & \| & & \\
(\beta')\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{\pi_2} & G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

δηλαδή $F\circ i_1\equiv i_2$ και $\pi_2\circ F\equiv\pi_1$.
Έστω $f_1:G\times G\to N$ ο factor set που απορρέει από την s_1. Τότε $F(f_1(g,h))=F(i_1(f_1(g,h)))=i_2(f_1(g,h))=f_1(g,h)$ για κάθε $(g,h)\in G\times G$.
Επίσης για την συνάρτηση $F\circ s_1:G\to E_2$ παρατηρούμε ότι $\pi_2\circ(F\circ s_1)=(\pi_2\circ F)\circ s_1=\pi_1\circ s_1=Id_G$ και $F(s_1(1))=F(1)=1$.
Ακόμα $s_1(g)s_1(h)=f_1(g,h)s_1(gh)\Rightarrow F(s_1(g))F(s_1(h))=F(f_1(g,h))F(s_1(gh))$ άρα $f_2(g,h)-F(f_1(g,h))\in B^2(G,N)$ δηλαδή $f_2(g,h)-f_1(g,h)\in B^2(G,N)$ □

Πορισμα 2.19. *Έστω (α) $0\to N\xrightarrow{i}E\xrightarrow{\pi}G\to 1$ μια επέκταση της N επί G και έστω $[(\alpha)]=\{\beta:0\to N\to E_1\to G\to 1$ επέκταση της N επί G/β ισοδύναμη με $\alpha\}$. Τότε αν $\mathcal{E}(G,N)=\{[(\alpha)]:(\alpha)$ επέκταση της N επί $G\}$ υπάρχει $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $\mathcal{E}(G,N)$ και του συνόλου $Z^2(G,N)/B^2(G,N)$.*

Αποδειξη. Αν (α) $0\to N\xrightarrow{i}E\xrightarrow{\pi}G\to 1$ τότε υπάρχει $s:G\to E$ με $\pi\circ s=Id_G$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Lambda:\mathcal{E}(G,N)\to Z^2(G,N)/B^2(G,N)$ ως εξής:
$\Lambda([(\alpha)])=f_s+B^2(G,N)$ όπου f_s ο αντίστοιχος factor set που απορρέει από την απεικόνιση E.
Η Λ είναι καλά ορισμένη αφού αν $[(\alpha_1)]=[(\alpha_2)]$ τότε οι επεκτάσεις (α_1)

και (α_2) είναι ισοδύναμες και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι οι αντίστοιχοι factors sets f_1, f_2 που απορρέουν από τις απεικονίσεις s_1, s_2 των επεκτάσεων (α_1), (α_2) διαφέρουν κατά ένα principal factor set, δηλαδή $f_2 - f_1 \in B^2(G,N)$ άρα $f_1 + B^2(G,N) = f_2 + B^2(G,N)$. Επίσης η απεικόνιση είναι $1-1$ και επί.

<u>επί</u>: Αν $f + B^2(G,N) \in Z^2(G,N)/B^2(G,N)$ τότε αν θεωρήσουμε την επέκταση της N επί G (c) $0 \to N \to E_f \to G \to 1$ τότε $\Lambda([(c)]) = f + B^2(G,N)$.

<u>$1-1$</u>: Αν $[(\alpha_1)], [(\alpha_2)] \in \mathcal{E}(G,N)$ τέτοιες ώστε $\Lambda([(\alpha_1)]) = f_1 + B^2(G,N) = f_2 + B^2(G,N) = \Lambda([(\alpha_2)])$ τότε $f_2 - f_1 \in B^2(G,N)$ και άρα πάλι από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η (α_1) είναι ισοδύναμη με την (α_2), δηλαδή $[(\alpha_1)] = [(\alpha_2)]$.

Παρατηρηση 2.20. Η κλάση των επεκτάσεων που αντιστοιχεί στο στοιχείο $0 + B^2(G,N)$ μέσω της Λ είναι ακριβώς οι διασπώμενες επεκτάσεις της N επί G.
Θεωρούμε $\Lambda^{-1} : Z^2(G,N)/B^2(G,N) \to \mathcal{E}(G,N)$ η οποία δίνεται ως $\Lambda^{-1}(f + B^2(G,N)) = [(\alpha)]$ όπου (α) $0 \to N \to E_f \to G \to 1$.. Τότε $\Lambda^{-1}(0 + B^2(G,N)) = [(\alpha')]$ όπου (α′): $0 \to N \xrightarrow{i} N \rtimes_\vartheta G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$ η διασπώμενη επέκταση της N επί G.

Έστω G ομάδα και N ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο. Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δείξουμε ότι υπάρχει 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ της αβελιανής ομάδας $H^2(G,N)$ και του συνόλου των κλάσεων των επεκτάσεων της N επί G, $\mathcal{E}(G,N)$.

Παρατηρηση 2.21. Για την μελέτη της αβελιανής ομάδας $H^2(G,N) = Ext^2_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ θα θεωρήσουμε μια συγκεκριμένη προβολική επίλυση του τεριμμένου $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}$ την Bar Resolution. Υπενθυμίζουμε ότι αν G ομάδα, τότε πάντα ορίζεται το τετριμμένο $\mathbb{Z}G$-πρότυπο $\mathbb{Z}$ από τον ομομορφισμό ομάδων $\vartheta : G \to Aut(\mathbb{Z})$ με $g \to \vartheta(g)$ όπου $\vartheta(g) \equiv \vartheta_g$ και $\vartheta_g(m) = m$ για κάθε $g \in G,\ m \in \mathbb{Z}$ δηλαδή $\vartheta_g \equiv Id_{\mathbb{Z}}$ για κάθε $g \in G$.

Για την κατασκευή της Bar Resolution του τετριμμένου $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}$ χρήσιμη είναι η παρακάτω πρόταση.

Προταση 2.22. *Έστω G ομάδα και $X \neq \emptyset$ σύνολο. Τότε αν η G δρα στο σύνολο X η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}X$ εφοδιάζεται με δομή $\mathbb{Z}G$-προτύπου. Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbb{Z}X = \{\sum_{x \in X} m_x \cdot x : m_X \in \mathbb{Z}$ και $m_X \neq 0$ για πεπερασμένο πλήθος $x \in X\}$, είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση το X.*

Αποδειξη. $\Rightarrow$ Αφού το X είναι G-σύνολο, η ομάδα $\mathbb{Z}X$ μπορεί να εφοδιαστεί με δομή $\mathbb{Z}G$-προτύπου ως εξής:
Αν $g \in G$ και $m \in \mathbb{Z}X$ ($m = \sum_{x \in X} m_X$ όπου $m_X \in \mathbb{Z}$, $m_X \neq 0$ για πεπερασμένο πλήθος $x \in X$), τότε $g * m = \sum_{x \in X} m_x(g \cdot x)$.
Προφανώς ικανοποιούνται τα δυο αξιώματα της δράσης και άρα έχουμε ομομορφισμό ομάδων $\vartheta : G \to Aut(\mathbb{Z}X)$. Κατά την παρατήρηση 2.6 υπάρχει μοναδικός $\bar{\vartheta} : \mathbb{Z}G \to End(\mathbb{Z}X)$ ομομορφισμός δακτυλίων με $\bar{\vartheta}|_G \equiv \vartheta$ εφοδιάζοντας με δομή $\mathbb{Z}G$-προτύπου την αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}X$.
$\square$

Ορισμος 2.23. Έστω G ομάδα και X G-σύνολο. Τότε $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ όπου $X_i = [x_i] = \{y \in X : \exists g \in G \text{ ώστε } y = gx_i\}$ και I ένα σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών της δράσης G στο X, δηλαδή $|I \cap [x_i]| = 1$ για κάθε $x_i \in X$. Αν $G_i = Stab_G(x_i) = \{g \in G : gx_i = x_i\}$ οι σταθεροποιούσες υποομάδες της G τότε η δράση της G στο X λέγεται ελεύθερη αν και μονο αν $G_i = \{1_G\}$ για κάθε $i \in I$.

Παρατηρηση 2.24. Έστω X ένα G σύνολο, $X \neq \emptyset$, G ομάδα. Τότε γνωρίζουμε οτι το X διαμερίζεται στις τροχιές, X_i, δηλαδή $X = \coprod_{i \in I} X_i$ όπου I είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών X_i της δράσης της G στο X και X_i G-υποσύνολα του G-συνόλου X.
Γνωρίζουμε ότι $X_i \cong G/G_i$ σαν G-σύνολα όπου G_i η σταθεροποιούσα ενός $x_i \in X_i$. Άρα οι ελεύθερες αβελιανές ομάδες $\mathbb{Z}X_i$, $\mathbb{Z}(G/G_i)$ με βάσεις X_i, G/G_i αντίστοιχα, είναι ισόμορφες ως $\mathbb{Z}G$ πρότυπα. Επίσης $\mathbb{Z}X = \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}X_i$, άρα $\mathbb{Z}X \cong \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}(G/G_i)$ ως $\mathbb{Z}G$ πρότυπα.
Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε τα εξής δύο αποτελέσματα:

Αν η δράση της G στο X είναι ελεύθερη δράση, τότε $\mathbb{Z}X \cong \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}(G)$ δηλαδή η ομάδα $\mathbb{Z}X$ αποτελεί ελεύθερο $\mathbb{Z}G$-πρότυπο και το πλήθος των στοιχείων της βάσης του $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}X$ είναι όσο το πλήθος των τροχιών X_i της δράσης της G στο X.

Είμαστε τώρα σε θέση να κατασκευάσουμε την Bar-Resolution του τετριμμένου $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}$.

Παρατηρηση 2.25. Έστω G ομάδα θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $G \times G \times ... \times G$ $n+1$-φορές το οποίο και συμβολίζουμε με G^{n+1}. Επίσης θεωρούμε την ελεύθερη αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}G^{n+1}$. Η ομάδα G^{n+1} αποτελεί G-σύνολο με δράση που ορίζεται μέσω του πολλαπλασιασμού της G:
Αν $g \in G$, $(g_{i_1}, ..., g_{i_n}) \in G^{n+1}$, $g_{i_j} \in G$, $0 \leq j \leq n$ τότε $g(g_{i_0}, ..., g_{i_n}) = (gg_{i_0}, ..., gg_{i_n})$ και άρα από την πρόταση 2.22 η ελεύθερη αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}G^{n+1}$ εφοδιάζεται με δομή $\mathbb{Z}G$-προτύπου. Η δράση της G στην ομάδα

G^{n+1} είναι ελεύθερη δράση αφού αν $g \in G$ και $(g_{i_0}, g_{i_1}, ..., g_{i_n}) \in G_{n+1}$ τότε

$$g(g_{i_0}, ..., g_{i_n}) = (g_{i_0}, ..., g_{i_n}) \Leftrightarrow (gg_{i_0}, ..., gg_{i_n}) = (g_{i_0}, ..., g_{i_n}) \Leftrightarrow g = 1$$

Αυτό σημαίνει ότι στην ανάλυση του G-συνόλου G^{n+1} σε τροχιές X_i όπου $i \in I$ και I ένα σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών X_i της δράσης της G στο X οι σταθεροποιούσες υποομάδες G_i της G είναι τετριμμένες και άρα το $\mathbb{Z}G$-πρότυπο $\mathbb{Z}G^{n+1}$ κατά την παρατήρηση 2.24 είναι ελεύθερο με βάση ένα σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών X_k της δράσης της G όπου $X_k = [x_k] = \{y \in G^{n+1} : \exists g \in G \text{ ώστε } y = gx_k\}$ και $G^{n+1} = \coprod_{k \in I} X_k$.

Μάλιστα, κάθε τροχιά X_k περιέχει μοναδικό στοιχείο της μορφής $(1, g_{k_1}, ..., g_{k_n})$ αφού αν $X_k = [x_k]$ και διαλέξουμε αντιπρόσωπο $z \in X_k$ τότε $z = (z_{k_0}, ..., z_{k_n})$ όπου $z_{k_j} \in G,\ 0 \leq j \leq n$. Άρα το στοιχείο z μπορεί να γραφτεί ως $z_{k_0}(1, z_{k_0}^{-1} z_{k_1}, ..., z_{k_0}^{-1} z_{k_n})$ και $(1, z_{k_0}^{-1} z_{k_1}, ..., z_{k_0}^{-1} z_{k_n}) \in X_k$ αφού $z \in X_k$.

Άρα σε κάθε τροχιά της δράσης της G επί της G^{n+1}, υπάρχει μοναδικός αντιπρόσωπος της μορφής $(1, g_{k_1}, ..., g_{k_n}) \in X_k$. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε σαν βάση του $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}G^{n+1}$ τα στοιχεία της μορφής $z_k \in X_k$ όπου $z_k = (1, g_{k_1}, ..., g_{k_n}),\ g_{k_j} \in G,\ 1 \leq j \leq n$ δηλαδή $\mathbb{Z}G^{n+1} = \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}G z_k,\ z_k \in X_k$ το οποίο και συμβολίζουμε με F_n. Επίσης αποδεικνύεται πιο βολικό να εισάγουμε τον Bar-συμβολισμό [| ...|]. Ακριβέστερα, αν $(1, g_{i_1}, ..., g_{i_n})$ στοιχείο της βάσης, τότε

$$(1, g_{i_1}, ..., g_{i_n}) = (1, g_{i'_1}, g_{i'_1} \cdot g_{i'_2}, ..., g_{i'_1} \cdot g_{i'_2} ... \cdot g_{i'_n})$$

όπου $g_{i'_1} = g_{i_1},\ g_{i'_2} = g_{i_1}^{-1} g_{i_2}, ..., g_{i'_n} = g_{i_{n-1}}^{-1} g_{i_n}$ και συμβολίζουμε με $[g_{i'_1} | g_{i'_2} | ... | g_{i'_n}]$ το στοιχείο $(1, g_{i'_1}, g_{i'_1} \cdot g_{i'_2}, g_{i'_1} \cdot g_{i'_2} \cdot g_{i'_3}, ..., g_{i'_1} \cdot ... \cdot g_{i'_n})$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τις απεικονίσεις $d_j : F_n \to F_{n-1}$ με

$$d_j([g_{i_1} | g_{i_2} | ... | g_{i_n}]) = \begin{cases} g_{i_1}[g_{i_2} | ... | g_{i_n}] & \text{αν } j = 0 \\ [g_{i_1} | g_{i_2} | ... | g_{i_{j-1}} | g_{i_{j+1}} | ... | g_{i_n}] & \text{αν } 0 < j < n \\ [g_{i_1} | g_{i_2} | ... | g_{i_{n-1}}] & \text{αν } j = n \end{cases}$$

Τότε οι απεικονίσεις d_j είναι ομομορφισμοί $\mathbb{Z}G$-προτύπων αφού αν $g \in G$ τότε

$$d_j(g[g_{i_1} | g_{i_2} | ... | g_{i_n}]) = \begin{cases} gg_{i_1}[g_{i_2} | ... | g_{i_n}] & \text{αν } j = 0 \\ g\,[g_{i_1} | g_{i_2} | ... | g_{i_{j-1}} | g_{i_{j+1}} | ... | g_{i_n}] & \text{αν } 0 < j < n \\ g\,[g_{i_1} | g_{i_2} | ... | g_{i_{n-1}}] & \text{αν } j = n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} gd_j([g_{i_1} | g_{i_2} | ... | g_{i_n}]) & \text{αν } j = 0 \\ gd_j([g_{i_1} | g_{i_2} | ... | g_{i_{j-1}} | g_{i_{j+1}} | ... | g_{i_n}]) & \text{αν } 0 < j < n \\ gd_j([g_{i_1} | g_{i_2} | ... | g_{i_{n-1}}]) & \text{αν } j = n \end{cases}$$

$$= gd_j([g_{i_1}|g_{i_2}|...|g_{i_n}])$$

Θέτουμε $\vartheta_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$. Τότε οι ϑ_n είναι ομομορφισμοί $\mathbb{Z}G$-προτύπων για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εισάγουμε τωρα δύο ορισμούς για να αποδείξουμε την ακρίβεια του παρακάτω συμπλέγματος.

$$... \to F_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to ... \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G = F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

Ορισμος 2.26. Έστω (A_*, ϑ_*), (B_*, d_*) συμπλέγματα στην κατηγορία R-Mod. Ένας μορφισμός $f_* : (A_*, \vartheta_*) \to (B_*, d_*)$ συμπλεγμάτων καλείται "null-homotopic" αν υπάρχουν ομομορφισμοί R προτύπων $s_n : A_n \to B_{n+1}$ τέτοιες ώστε $f_n = d_{n+1}s_n + s_{n-1}\vartheta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\vartheta_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\vartheta_n} & A_{n-1} & \longrightarrow ... \\
 & & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_n} & & & \\
\longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{d_n} & B_{n-1} & \longrightarrow ...
\end{array}$$

Ορισμος 2.27. Στην κατηγορία R-Mod ένα αλυσωτό σύμπλεγμα (A_*, ϑ_*) έχει την ιδιότητα "contracting homotopy" αν ο ταυτοτικός μορφισμός $Id_{A_*} : (A_*, \vartheta_*) \to (A_*, \vartheta_*)$ είναι "nullhomotopic", δηλαδή $Id_n = \vartheta_{n+1}s_n + s_{n-1}\vartheta_n$ για κάθε $n > 0$ και $\epsilon s_{-1} = Id_A$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
A_{n+1} & \xrightarrow{\vartheta_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\vartheta_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & ... & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\vartheta_1} & A_0 & \xrightarrow{\epsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle Id_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Id_{n-1}} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle Id_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Id_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Id_A} & & \\
A_{n+1} & \xrightarrow{\vartheta_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\vartheta_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & ... & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\vartheta_1} & A_0 & \xrightarrow{\epsilon} & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Παρατηρηση 2.28. Αν ένα αλυσωτό σύμπλεγμα (A_*, ϑ_*) έχει την "contracting homotopy" τότε $H_n(A_*) = 0$ για $n > 0$ αφού αν $x + Im\vartheta_{n+1} \in ker\vartheta_n / Im\vartheta_{n+1}$ τότε

$$x + Im\vartheta_{n+1} = Id_n(x) + Im\vartheta_{n+1} = \vartheta_{n+1}(s_n(x)) + s_{n-1}(\vartheta_n(x)) + Im\vartheta_{n+1}$$
$$= \vartheta_{n+1}(s_n(x)) + Im\vartheta_{n+1} = Im\vartheta_{n+1}$$

άρα $x \in Im\vartheta_{n+1}$ δηλαδή $ker\vartheta_n = Im\vartheta_{n+1}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.29. *Το αλυσωτό σύμπλεγμα*

$$... \to F_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to ... \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G = F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

αποτελεί ελεύθερη επίλυση του τετριμμένου $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για να δείξουμε ότι η παραπάνω ακολουθία αποτελεί αλυσωτό σύμπλεγμα χρησιμοποιούμε επαγωγή στο μήκος της ακολουθίας.
<u>Για $n = 2$</u> $\vartheta_1 \circ \vartheta_2 \equiv 0$
Αρκεί να δείξουμε ότι $\vartheta_1 \circ \vartheta_2 \equiv 0$ στα στοιχεία της βάσης του $\mathbb{Z}G$-προτύπου F_2. Ακριβέστερα, έστω $(1, g_1, g_1g_2) = [g_1|g_2] \in F_2$ $g_i \neq 1$ $i = 1, 2$. Τότε

$$\vartheta_1(\vartheta_2(1, g_1, g_1g_2)) = \vartheta_1(d_0(1, g_1, g_1g_2) - d_1(1, g_1, g_1g_2) + d_2(1, g_1, g_1g_2))$$
$$= \vartheta_1((g_1, g_1g_2) - (1, g_1g_2) + (1, g_1)) = \vartheta_1(g_1, g_1g_2) - \vartheta_1(1, g_1g_2) + \vartheta_1(1, g_1)$$
$$= g_1g_2 - g_1 - (g_1g_2 - 1) + g_1 - 1 = 0$$

Υποθέτουμε ότι στο επαγωγικό βήμα ισχύει $\partial_{n-2} \circ \partial_{n-1} = 0$ και θα αποδείξουμε ότι $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \Rightarrow$

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = (\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i d_i + (-1)^{n-1}d_{n-1}) \circ (\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i d_i + (-1)^n d_n)$$
$$= (\partial_{n-2} + (-1)^{n-1}d_{n-1}) \circ (\partial_{n-1} + (-1)^n d_n)$$
$$= \partial_{n-2}\circ\partial_{n-1} + \partial_{n-2}\circ((-1)^n d_n) + (-1)^{n-1}d_{n-1}\circ(\partial_{n-1}) + (-1)^{2n-1}d_{n-1}\circ d_n$$
$$= 0 + \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i d_i\circ((-1)^n d_n) + (-1)^{n-1}d_{n-1}\circ(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i d_i) + (-1)^{2n-1}d_{n-1}\circ d_n$$

από επαγωγική υπόθεση

$$= \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+n}d_i \circ d_n + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+n-1}d_{n-1} \circ d_i + (-1)^{2n-1}d_{n-1} \circ d_n \ (*)$$

Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι $d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$ για κάθε $i < j$ έχουμε:

$$(*) = \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+n}d_{n-1}\circ d_i + \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+n-1}d_{n-1}\circ d_i + (-1)^{2n-2}d_{n-1}\circ d_{n-1}$$
$$= (-1)^{2n-2}d_{n-1} \circ d_{n-1} + (-1)^{2n-1}d_{n-1} \circ d_n$$
$$= (-1)^{2n-2}d_{n-1} \circ d_{n-1} + (-1)^{2n-1}d_{n-1} \circ d_{n-1}$$
$$= -(-1)^{2n-1}d_{n-1} \circ d_{n-1} + (-1)^{2n-1}d_{n-1} \circ d_{n-1} = 0$$

□

Το σύμπλεγμα

$$... \to F_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to ... \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G = F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

έχει την contracting homotopy, όπου $\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ ο $\mathbb{Z}G$-ομομορφισμός με $\epsilon(x) = \sum m_g,\ x = \sum_{g\in G} m_g g$.

Πράγματι, ορίζουμε $s_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G = F^0$ με $s_{-1}(1_\mathbb{Z}) = 1_{\mathbb{Z}G}$ τότε $s_{-1}(m + n) = (m+n)1_{\mathbb{Z}G} = m1_{\mathbb{Z}G} + n1_{\mathbb{Z}G} = s_{-1}(m) + s_{-1}(n)$ για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι για να ορίσουμε $s_n : F_n \to F_{n+1}$ ομομορφισμό αβελιανών ομάδων αρκεί να τον ορίσουμε στα στοιχεία της βάσης της ελεύθερης αβελιανής F_n δηλαδή στην ομάδα $F^{n+1} = \underbrace{G \times G \times ... \times G}_{n+1 \text{ φορες}}$. Έτσι θέτουμε $s_n((g_0, g_1, ..., g_n)) = (1, g_0, g_0g_1, ..., g_0g_1...g_n) = [g_0|g_1|...|g_n] \in F_{n+1}$. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι $s_n : F_n \to F_{n+1}$ αποτελεί ομομορφισμό αβελιανών ομάδων. Επίσης οι απεικονίσεις $s_n : F_n \to F_{n+1}$ ικανοποιούν τα εξής:
i) $\epsilon s_{-1}(m) = m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ δηλαδή $\epsilon s_{-1} = Id_\mathbb{Z}$.
ii) $Id_n = \partial_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n$ για κάθε $n > 0$.

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & F_n \arrow[r, "\vartheta_n"] \arrow[d, "Id_n"] \arrow[dl, "s_n"'] & F_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "Id_{n-1}"] \arrow[dl, "s_{n-1}"] & ... \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "\vartheta_1"] \arrow[d, "Id_1"] \arrow[dl, "s_1"'] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "Id_0"] \arrow[dl, "s_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "Id_\mathbb{Z}"] \arrow[dl, "s_{-1}"] & 0 \\
... \arrow[r] & F_n \arrow[r, "\vartheta_n"] & F_{n-1} \arrow[r] & ... \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "\vartheta_1"] & \mathbb{Z}G \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Το i) είναι άμεσο. Για το ii) αρκεί να επαληθευτεί στα στοιχεία της βάσης της ελεύθερης αβελιανής ομάδας F_n.
Πράγματι

$$(\partial_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n)(g_0, ..., g_n)$$

$$= \partial_{n+1}(1, g_0, ..., g_n) + s_{n-1}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n))$$

$$= (g_0, ..., g_n) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^{k+1}(1, g_0, ..., g_{k-1}, g_{k+1}, ..., g_n) +$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(1, g_0, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n) = (g_0, ..., g_n)$$

Άρα κατά την παρατήρηση 2.28 το αλυσωτό σύμπλεγμα

$$F_* : ... \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to ... \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

έχει την contracting homotopy, δηλαδή $H_n(F_*) = 0$ για κάθε $n > 0$, άρα αποτελεί ελεύθερη επίλυση του τετριμμένου $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}$, η οποία καλείται unormalized bar resolution.

Παρατηρηση 2.30. Θεωρούμε το G-σύνολο G^{n+1} όπως ορίστηκε στην παρατήρηση 2.25 και θεωρούμε το υποσύνολο $A \subseteq G^{n+1}$ το οποίο αποτελείται από στοιχεία της $\{(g_0, g_1, ..., g_n) : g_i \in G$ και $\exists j \in \{0, ..., m\}$ ώστε $g_j = g_{j+1}\}$.

Το υποσύνολο $A \subseteq G^{n+1}$ δέχεται δομή G-συνόλου ως εξής:
Αν $g \in G$ και $x = (x_0, x_1, ..., x_n) \in A$, τότε $gx = (gx_0, gx_1, ..., gx_n)$ η οποία είναι καλά ορισμένη αφού $x_j = x_{j+1}$ για κάποιο $j \in \{0, ..., n\}$ και άρα $gx_j = gx_{j+1}$.
Μάλιστα η δράση της G στο σύνολο A είναι ελεύθερη δράση άρα κατά την παρατήρηση 2.24 το το $\mathbb{Z}(A)$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$-υποπρότυπο του F_n με βάση τα στοιχεία της μορφής $[g_0|g_1|...|g_n]$ και $g_j = 1$ για κάποιο $j \in \{0, ..., n\}$ και συμβολίζεται με D_n.

Λημμα 2.31. *Αν $\partial_n : F_n \to F_{n-1}$ οι ομομορφισμοί που ορίστηκαν στην παρατήρηση 2.25 τότε $\partial_n(D_n) \subseteq D_{n-1}$ και άρα οι ομομορφισμοί ∂_n επεκτείνονται σε ομομορφισμούς $\bar{\partial}_n : F_n/D_n \to F_{n-1}/D_{n-1}$.*

Αποδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\partial_n(D_n) \subseteq D_{n-1}$ στα στοιχεία της βάσης της ελεύθερης αβελιανής D_n έστω $(g_0, g_1, ..., g_n)$ στοιχείο της βάσης. Τότε $g_j = g_{j+1}$ για κάποιο $j \in \{0, ..., n\}$. Τότε

$$\partial_n(g_0, g_1, ..., g_n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j d_j(g_0, g_1, ..., g_n)$$

$$= (-1)^0(g_1, ..., g_n) + (-1)^1(g_0, g_2, ..., g_n) + ... + (-1)^j(g_0, g_1, ..., g_{j-1}, g_{j+1}, ..., g_n)$$
$$+ (-1)^{j+1}(g_0, g_1, ..., g_j, g_{j+2}, ..., g_n) + (-1)^n(g_0, g_1, ..., g_{n-1})$$
$$= (g_1 - g_0 + g_0 + ... + (-1)^n g_0, ..., g_j - g_j + ... + (-1)^{j-1} g_j + (-1)^j g_{j+1} + (-1)^{j+1} g_j + ... +$$
$$(-1)^n g_j, g_{j+1} - g_{j+1} + ... + (-1)^j g_{j+1} + (-1)^{j+1} g_j + ... + (-1)^n g_{j+1}, ..., g_n - g_n + ... + (-1)^n g_{n-1})$$

αφού $g_j = g_{j+1}$ τότε $x_j = x_{j+1}$ όπου $x_j = g_j - g_j + ... + (-1)^{j-1} g_j + (-1)^j g_{j+1} + (-1)^{j+1} g_j + ... + (-1)^n g_j$ και $x_{j+1} = g_{j+1} - g_{j+1} + ... +$

$(-1)^j g_{j+1} + (-1)^{j+1} g_j + ... + (-1)^n g_{j+1}$ και άρα $\partial_n(g_0, g_1, ..., g_n) \in D_{n-1}$ για κάθε $n > 0$.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.32. *Το αλυσωτό σύμπλεγμα*

$$... \to F_n/D_n \xrightarrow{\bar{\partial_n}} F_{n-1}/D_{n-1} \to ... \to F_1/D_1 \xrightarrow{\bar{\partial_1}} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

αποτελεί ελεύθερη επίλυση του τετριμμένου $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}$ και καλείται normalized Bar resolution.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για να αποδείξουμε ότι είναι σύμπλεγμα χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n. Για να πάρουμε την ακρίβεια αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων $s_n : F_n \to F_{n+1}$ που ορίστηκαν στο λήμμα 2.31 επεκτείνονται σε ομομορφισμούς αβελιανών ομάδων $\bar{s_n} : F_n/D_n \to F_{n+1}/D_{n+1}$. Πράγματι, $s_n(D_n) \subseteq D_{n+1}$ για κάθε n αφού αν $(g_0, g_1, ..., g_n)$ στοιχείο της βάσης της ελεύθερης αβελιανής D_n τότε $g_j = g_{j+1}$ για κάποιο $j \in \{0, ..., n\}$.
Επίσης εύκολα μπορεί να επαληθεύσει κανείς ότι:
i) $\epsilon\bar{s}_{-1}(m) = m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ δηλαδή $\epsilon\bar{s}_{-1} = \bar{Id}_{\mathbb{Z}}$.
ii) $\bar{Id}_n = \bar{\partial}_{n+1}\bar{s}_n + \bar{s}_{n-1}\bar{\partial}_n$ για κάθε $n > 0$.

Άρα όπως και στο Λήμμα 2.31 το παραπάνω σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων έχει την contracting homotopy και αποτελεί ελεύθερη επίλυση του τετριμμένου $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.33. Έστω F_n, D_n τα $\mathbb{Z}G$-πρότυπα που ορίστηκαν προηγουμένως και έστω $x \in F_n$. Τότε το x γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x = \sum \lambda_{a_i} a_i$ όπου $a_i = [g_{i_1}|g_{i_2}|...|g_{i_n}]$. Η έκφραση του x μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί $x = \sum \lambda_{b_i} b_i + \sum \lambda_{c_j} c_j$ όπου $b_i = [x_{i_1}|x_{i_2}|...|x_{i_n}]$ και $x_{i_k} = 1$ για κάποιο $1 \leq k \leq n$ και $c_j = [y_{j_1}|y_{j_2}|...|y_{j_n}]$, $y_{j_l} \neq 1$ για κάθε $1 \leq l \leq n$. Έτσι $F_n = D_n \oplus Q_n$ όπου Q_n είναι το ελεύθερο $\mathbb{Z}G$-πρότυπο με βάση το σύνολο $B_n = \{\{[y_{j_1}|y_{j_2}|...|y_{j_n}] : y_{j_l} \neq 1,\ 1 \leq l \leq n\}$.

Άρα υπάρχουν $\mathbb{Z}G$-ισομορφισμοί $f_n : F_n/D_n \to Q_n$ με $f_n(x+D_n) = f_n(\sum \lambda_{b_i} b_i + \sum \lambda_{c_j} c_j + D_n) = \sum \lambda_{c_j} c_j$, για κάθε $n > 0$.

Έτσι αν θεωρήσουμε τις απεικονίσεις $q_n = f_{n-1} \circ \bar{\partial_n} \circ f_n^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} F_n/D_n & \xrightarrow{\bar{\partial_n}} & F_{n-1}/D_{n-1} \\ {\scriptstyle f_n}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_{n-1}}\big\downarrow \\ Q_n & \xrightarrow{q_n} & Q_{n-1} \end{array}$$

τότε οι q_n είναι ομομορφισμοί $\mathbb{Z}G$-προτύπων και αφού η ακολουθία F_*/D_* : $...F_n/D_n \xrightarrow{\bar{\partial_n}} F_{n-1}/D_{n-1} \to ... \to F_1/D_1 \xrightarrow{\bar{\partial_1}} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$ είναι ακριβής και f_n ισομορφισμοί για κάθε n τότε και η ακολουθία

$$Q_* : ...Q_n \xrightarrow{q_n} Q_{n-1} \to ... \xrightarrow{q_2} Q_1 \xrightarrow{q_1} \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$$

είναι ακριβής.

Η παραπάνω διαδικασία μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την ελεύθερη επίλυση του τετριμμένου $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}$, Q_* έναντι της F_*/D_*.

Υπολογίζοντας τώρα τις τιμές των $q_1,\ q_2,\ q_3$ έχουμε

$$q_1([x]) = (x-1)\,[\,]$$

όπου $[\,] = (1)$ βάση του ελεύθερου $\mathbb{Z}G$-προτύπου $\mathbb{Z}G$.

$$\begin{gathered} q_2([x|y]) = f_1(\bar{\partial}_2(f_2^{-1}([x|y]))) = f_1(\bar{\partial}_2([x|y]+D_2)) \\ = f_1((x,xy)+D_1-(1,xy)+D_1+(1,x)+D_1) \\ = x(f_1(1,y)+D_1) - f_1((1,xy)+D_1) + f_1((1,x)+D_1) \\ = x\,[y] - [xy] + [x] \end{gathered}$$

επειδή η f_1 είναι $\mathbb{Z}G$ ομομορφισμός.

$$q_3([x|y|z]) = f_2(\bar{\partial}_3(f_3^{-1}([x|y|z]))) = f_2(\bar{\partial}_3([x|y|z]+D_3))$$
$$= f_2((x,xy,xyz)+D_2-(1,xy,xyz)+D_2+(1,x,xyz)+D_2)-(1,x,xy)+D_2)$$

$$= x(f_2(1,y,yz)+D_2)-f_2((1,xy,xyz)+D_2)+f_2((1,x,xyz)+D_2)-f_2((1,x,xy)+D_2)$$

$$= x\,[y|z] - [xy|z] + [x|yz] - [x|y]$$

όπου $x, y, z \neq 1$.

Θεωρημα 2.34. *Έστω G ομάδα και N $\mathbb{Z}G$-πρότυπο. Τότε:*

$$H^1(G,N) = \frac{Der(G,N)}{P(G,N)}$$

και

$$H^2(G,N) = \frac{Z^2(G,N)}{B^2(G,N)}$$

όπου $Der(G,N)$, $P(G,N)$ τα σύνολα των derivations και inner derivations αντίστοιχα και $Z^2(G,N)$, $B^2(G,N)$ τα σύνολα των factor sets και principal factor sets αντίστοιχα.

Αποδειξη. Θεωρούμε την ελεύθερη επίλυση

$$Q_* : ...Q_n \xrightarrow{q_n} Q_{n-1} \to ... \xrightarrow{q_2} Q_1 \xrightarrow{q_1} Q_0 = \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

και εφαρμόζουμε τον συναρτήτη $Hom_{\mathbb{Z}G}(-,N)$.

Αφού ο $Hom_{\mathbb{Z}G}(-,N)$ είναι προσθετικός και αριστερά ακριβής έχουμε το παρακάτω συναλυσωτό σύμπλεγμα

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},N) \xrightarrow{\epsilon^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},N) \xrightarrow{q_1^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(Q_1,N) \xrightarrow{q_2^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(Q_2,N) \xrightarrow{q_3^*}$$

$$Hom_{\mathbb{Z}G}(Q_3,N) \xrightarrow{q_4^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(Q_4,N) \to ... \xrightarrow{q_n^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(Q_n,N) \xrightarrow{q_{n+1}^*} ...$$

απ'οπου $H^1(G,N) = \dfrac{kerq_2^*}{Imq_1^*}$, $H^2(G,N) = \dfrac{kerq_3^*}{Imq_2^*}$.

Τότε $d \in kerq_2^* \Leftrightarrow q_2^*(d) = 0 \Leftrightarrow d \circ q_2 \equiv 0 \Leftrightarrow d(q_2([x|y]) = 0$ για κάθε $[x|y]$ στοιχείο της βάσης του ελεύθερου $\mathbb{Z}G$ προτύπου Q_2 $\Leftrightarrow$ $d(x\,[y] - [x|y] + [x]) = 0 \Leftrightarrow d([x|y]) = xd([y]) + d([x]) \Leftrightarrow d$ derivation.

$d \in Im\partial_1^* \Leftrightarrow$ υπάρχει $h : \mathbb{Z}G \to N$ με $d = q_1^*(h) = h \circ q_1 \Leftrightarrow q([g]) = (g-1)$

Άρα $d([g]) = h((g-1)\,[\,]) = (g-1)h([\,]) = (g-1)a$ όπου $a = h([\,])$, $a \in N$ δηλαδή d inner derivation.

Παρόμοια

$$f \in ker\partial_3^* \Leftrightarrow q_3^*(f) = 0 \Leftrightarrow f \circ q_3 \equiv 0 \Leftrightarrow f(q_3\,[x|y|z]) = 0$$

για κάθε $[x|y|z]$ στοιχείο της βάσης του ελεύθερου του ελεύθερου $\mathbb{Z}G$-προτύπου Q_3.

$$\Leftrightarrow f(x\,[y|z] - [xy|z] + [x|yz] - [x|y]) = 0$$

$$\Leftrightarrow xf([y|z]) + f([x|yz]) = f([x|y]) + f([xy|z]) \Leftrightarrow f\ factorset$$

$$f \in Imq_2^* \Leftrightarrow \exists \varphi : Q_1 \rightarrow \text{ ώστε } f = q_2^*(\varphi) = \varphi \circ q_2$$
$$f([x|y]) = \varphi(q_2\,[x|y])$$

για κάθε $[x|y]$ στοιχείο της βάσης του ελεύθερου του ελεύθερου $\mathbb{Z}G$-προτύπου Q_2

$$= \varphi(x\,[y] - [xy] + [x]) = x\varphi([y]) - \varphi([xy]) + \varphi([x])$$

δηλαδή η f είναι principal factor set. □

Πορισμα 2.35. *Έστω G ομάδα και N ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο. Τότε υπάρχει 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ της αβελιανής ομάδας $H^2(G,N)$ και του συνόλου των κλάσεων των επεκτάσεων της N επί G, $\mathcal{E}(G,N)$.*

Αποδειξη. Άμεσο από το προηγούμενο θεώρημα και το πόρισμα 2.19. □

1) Έστω G ομάδα, M, N $\mathbb{Z}G$-πρότυπα και $\xi : M \to N$ ομομορφισμός $\mathbb{Z}G$-προτύπων. Τότε ο ξ επάγει ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $\xi_* : H^2(G,N) \to H^2(G,M)$.

2) Έστω G, H ομάδες, N $\mathbb{Z}G$-πρότυπο και $\varphi : H \to G$ ομομορφισμός ομάδων. Τότε ο φ επάγει ομορφισμό αβελιανών ομάδων $\varphi^* : H^2(G,N) \to H^2(H,N_\varphi)$.

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε τους ομομορφισμούς φ^*, ξ_* στο πλαίσιο των επεκτάσεων, δηλαδή:

$$\varphi^* : \mathcal{E}(G,N) \to \mathcal{E}(H,N_\varphi)$$

$$\xi_* : \mathcal{E}(G,M) \to \mathcal{E}(G,N)$$

Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $\phi : H \to G$ ομομορφισμός ομάδων.Ο ομομορφσμός ομάδων $\phi : H \to G$ εφοδιάζει με δομή $\mathbb{Z}H$-προτύπου το $\mathbb{Z}G$-πρότυπο N ως εξής:
Αν $h \in H$ και $a \in N$ τότε θέτουμε $h * a = \phi(h) \cdot a$.
Η δράση αυτή είναι καλά ορισμένη, άρα επάγει ομομορφισμό ομάδων $\rho : H \to Aut(N)$ με $\rho_h(a) = h * a$ για κάθε $a \in N$.
Άρα, στη συνέχεια συμβολίζουμε με N_ϕ το $\mathbb{Z}H$ πρότυπο που ορίστηκε πιο πάνω.

Θεωρούμε μια επέκταση της N επί G (a) $0 \to N \xrightarrow{i_1} E \xrightarrow{\rho_1} G \to 1_G$ και το σύνολο $F = E \times_G H := \{(e,h) \in E \times H / \rho_1(e) = \phi(h)\}$. Τότε η F είναι υποομάδα της $E \times H$. Ορίζουμε $f : E \times_G H \to E$, $p_2 : E \times_G H \to H$ με $f(e,h) = e$, $p_2(e,h) = h$ αντίστοιχα.

Τότε οι f, p_2 είναι ομομορφισμοί ομάδων ως περιορισμοί των αντίστοιχων προβολών $\pi_1 : E \times H \to E$, $\pi_2 : E \times H \to H$. Θέτουμε $i_2 : N_\phi \to F$ με $i_2(a) = (i_1(a), 1_H)$, $a \in N_\phi$. Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη αφού $\rho_1(i_1(a)) = 1_G = \phi(1_h)$ και ομομορφισμός ομάδων.
Έτσι έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα το οποίο είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\alpha')\ 0 & \longrightarrow & N_\varphi & \xrightarrow{i_2} & F & \xrightarrow{\rho_2} & H & \longrightarrow & 1_H \\
 & & \Big\| & & {\scriptstyle f}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\Big\downarrow & & \\
(\alpha)\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_1} & E & \xrightarrow{\rho_1} & G & \longrightarrow & 1_G
\end{array}$$

Πράγματι, στο πρώτο τετράγωνο έχουμε για κάθε $a \in N_\varphi$ $f(i_2(a)) = f(i_1(a), 1_H) = i_1(a)$ και στο δεύτερο τετράγωνο για κάθε $(e,h) \in F$ $\phi(\rho_2(e,h)) = \phi(h) = \rho_1(e) = \rho_1(f(e,h))$.
Παρατηρούμε ότι η $i_2 : N_\phi \to E \times_G H$ με $i_2(a) = (i_1(a), 1_H)$ είναι μονομορφισμός ομάδων. Επίσης η $\rho_2 : F \to H$ είναι επιμορφισμός αφού

αν $h \in H$ *τότε θεωρούμε το στοιχείο* $\phi(h)$ *και χρησιμοποιώντας ότι η* ρ_1 *είναι επιμορφισμός υπάρχει* $e \in E$ *τέτοιο ώστε* $\rho_2(e,h) = h$.

Τέλος $Imi_2 = kerp_2$ *αφού αν* $y \in Imi_2$ *υπάρχει* $x \in N_\varphi$ *τέτοιο ώστε* $y = i_2(x) = (i_1(x), 1_H)$. *Όμως* $\rho_2(i_2(x)) = \rho_2(i_1(x), 1_H) = 1_H$ *άρα* $Imi_2 \subseteq ker\rho_2$.

Αντίστροφα, αν $z \in ker\rho_2 \subseteq F$ *τότε* $z = (e,h)$ *για κάποιο* $(e,h) \in F$.

Έχουμε $\rho_2(e,h) = 1_H$ *αφού* $z \in ker\rho_2$.
Άρα $h = 1_H$, *δηλαδή* $z = (e, 1_H)$. *Επίσης* $\phi(\rho_2(e, 1_H)) = 1_H \Rightarrow \rho_1(f(e, 1_H)) = 1_H \Rightarrow \rho_1(e) = 1_H \Rightarrow e \in ker\rho_1 = Imi_1 \Rightarrow e = i_1(a)$ *για κάποιο* $a \in N$ *άρα* $z = (i_1(a), 1_H) = i_2(a)$, $z \in Imi_2$, $ker\rho_2 \subseteq Imi_2$.

Δηλαδή η ακολουθία (α΄): $0 \to N_\phi \xrightarrow{i_2} F \xrightarrow{\rho_2} H \to 1_H$ *αποτελεί βραχεία ακριβή ακολουθία ομάδων, επομένως είναι μια επέκταση της* N_ϕ *επί* H.
Έτσι αν θεωρήσουμε την δράση συζυγίας που επάγει η H *στην* N *μέσω της επέκτασης (α΄) τότε:*

$$h \cdot a = (e,h) \cdot a \cdot (e,h)^{-1} = (e,h) \cdot a \cdot (e^{-1}, h^{-1}) = (e,h) \cdot i_2(a) \cdot (e^{-1}, h^{-1})$$

$$= (e,h) \cdot (i_1(a), 1_H) \cdot (e^{-1}, h^{-1}) = (e \cdot i_1(a) \cdot e^{-1}, 1_H) = e \cdot a \cdot e^{-1}$$

δηλαδή η δράση συμπίπτει με την δράση που επάγεται από τον ομομορφισμό ομάδων ϕ, *άρα* $[(\alpha')] \in \mathcal{E}(H, N_\varphi)$ *όπου*
$[(\alpha')] = \{(\beta) : 0 \to N \to F_1 \to H : (\beta)$ *επέκταση της* N *επί* H, *(β) ισοδύναμη με την (α΄)*$\}$

Επομένως από μια επέκταση της N *επί* G, *(a):* $0 \to N \xrightarrow{i_1} E \xrightarrow{\rho_1} G \to 1_G$ *κατασκευάσαμε την επέκταση της* N_ϕ *επί* H *(α΄):* $0 \to N_\phi \xrightarrow{i_2} F \xrightarrow{\rho_2} H \to 1_H$ *όπου* $F = E \times_G H$.

Σημειώνουμε ότι το ζεύγος (F, ρ_2, f) *αποτελεί το pull-back των ομομορφισμών* φ, ρ_1.

Υπενθυμίζουμε εδώ την έννοια του pull-back στην κατηγορία των ομάδων και ομομορφισμών ομάδων.

Ορισμος 2.36. Έστω A, B, C ομάδες και $f : B \to A$, $g : C \to A$ ομομορφισμοί ομάδων.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"'] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Έστω ότι υπάρχουν ομάδα P και ομομορφισμοί ομάδων $\alpha : P \to C,\ \beta : P \to B$ τέτοιοι ώστε:
1) Το παρακάτω διάγραμμα να μετατίθεται, δηλαδή $g \circ \alpha = f \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"'] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

2) Αν D ομάδα και $\alpha' : D \to C,\ \beta' : D \to B$ ομομορφισμοί ομάδων τέτοιοι ώστε $g \circ \alpha' = f \circ \beta'$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\vartheta : D \to C$ τέτοιος ώστε $\alpha \circ \vartheta = \alpha'$ και $\beta \circ \vartheta = \beta'$.
Τότε λέμε ότι το ζεύγος (P, α, β) αποτελεί ένα pull back των ομομορφισμών $g,\ f$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, dotted, "\vartheta"] \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "g"'] \\ & B \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

Ισχύει ότι υπάρχει το pull back και είναι μοναδικό ως προς φυσικό ισομορφισμό. Έτσι μέσω της έννοιας του pull-back για $\phi : H \to G$, ομομορφισμό ομάδων μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση $Z : \mathcal{E}(G, N) \to \mathcal{E}(H, N_\varphi)$ ως εξής: Έστω (α): $0 \to N \xrightarrow{i_1} E \xrightarrow{\rho_1} G \to 1_G$ η επέκταση της N επί G που ορίστηκε στην αρχή της ενότητας και $[(\alpha)]$ η κλάση των ισοδύναμων επεκτάσεων της N επί G προς την (α). Θέτουμε $Z([\alpha]) = [(\alpha')]$ όπου (α′): $0 \to N_\phi \xrightarrow{i_2} E \times_G H \xrightarrow{\rho_2} H \to 1_H$ η επέκταση της N_ϕ επί H όπως ορίστηκε στην αρχή της ενότητας μέσω του ομομορφισμού ομάδων $\phi : H \to G$. Θα δείξουμε ότι η Z είναι καλά ορισμένη.

Πράγματι, θεωρούμε επέκταση της N επί G (β): $0 \to N \xrightarrow{j_1} E_1 \xrightarrow{q_1} G \to 1_G$ ισοδύναμη με την (α). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ισομορφισμός ομάδων $\xi_1 : E_1 \to E$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
(\beta)\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, equal, "Id_N"'] & E_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "\xi_1"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal, "Id_G"'] & 1_G \\
(\alpha)\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_1"] & E \arrow[r, "\rho_1"] & G \arrow[r] & 1_G
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $\rho_1 \circ \xi_1 = q_1, \ \xi_1 \circ j_1 = i_1$.

Επίσης έχουμε τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
(\beta)\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j_1"] & E_1 \arrow[r, "q_1"] & G \arrow[r] & 1_H \\
(\beta')\ 0 \arrow[r] & N_\varphi \arrow[r, "j_2"] \arrow[u, equal, "Id_N"] & E_1 \times_G H \arrow[r, "q_2"] \arrow[u, "f_1"] & H \arrow[r] \arrow[u, "\phi"] & 1_H
\end{tikzcd}$$

όπου $f_1(e_1, h) = e_1, \ q_2(e_1, h) = h, \ j_2(a) = (j_1(a), 1_H)$, $(e_1, h) \in E_1 \times_G H, \ a \in N_\varphi$

$$\begin{tikzcd}
(\alpha)\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_1"] & E \arrow[r, "\rho_1"] & G \arrow[r] & 1_H \\
(\alpha')\ 0 \arrow[r] & N_\varphi \arrow[r, "i_2"] \arrow[u, equal, "Id_N"] & E \times_G H \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[u, "f_2"] & H \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] & 1_H
\end{tikzcd}$$

όπου $f_2(e, h) = e, \ \rho_2(e, h) = h, \ i_2(a) = (i_1(a), 1_H), \ (e, h) \in E \times_G H, \ a \in N_\varphi$

Θεωρούμε τα εξής διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times_G H \arrow[drr, "q_2"] \arrow[ddr, "\xi_1 \circ f_1"'] & & \\
& E \times_G H \arrow[r, "\rho_2"'] \arrow[d, "f_2"] & H \arrow[d, "\phi"'] \\
& E \arrow[r, "\rho_1"] & G
\end{tikzcd}$$

Τότε εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι τα ζεύγη $(E \times_G H, \rho_2, f_2)$, $(E_1 \times_G H, q_2, \xi_1 \circ f_1)$ είναι pull-back των ομομορφισμών $\rho_1, \ \varphi$. Άρα από την καθολική ιδιότητα του pull-back υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός ομάδων $\xi_2 : E_1 \times_G H \to E \times_G H$.

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \times_G H \arrow[dr, dotted, "\xi_2"] \arrow[drr, "q_2"] \arrow[ddr, "\xi_1 \circ f_1"'] & & \\
& E \times_G H \arrow[r, "\rho_2"'] \arrow[d, "f_2"] & H \arrow[d, "\phi"'] \\
& E \arrow[r, "\rho_1"] & G
\end{tikzcd}
$$

τέτοιος ώστε $\rho_2 \circ \xi_2 = q_2$ και $f_2 \circ \xi_2 = \xi_1 \circ f_1$.
Μάλιστα ο ισομορφισμός ομάδων $\xi_2 : E_1 \times_G H \to E \times_G H$ δίνεται από τον τύπο $\xi_2(e_1, h) = (\xi_1(e_1), h)$.
Μένει να δείξουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται

$$
\begin{tikzcd}
(\beta')\ 0 \arrow[r] & N_\varphi \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, equal, "Id_N"'] & E_1 \times_G H \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "\xi_2"'] & H \arrow[r] \arrow[d, equal, "Id_H"'] & 1_H \\
(\alpha')\ 0 \arrow[r] & N_\varphi \arrow[r, "i_2"] & E \times_G H \arrow[r, "\rho_2"] & H \arrow[r] & 1_H
\end{tikzcd}
$$

Πράγματι, $\xi_2(j_2(a)) = \xi_2(j_1(a), 1_H) = (\xi_1(j_1(a)), 1_H) = (i_1(a), 1_H) = j_1(a)$ για κάθε $a \in N_\varphi$ και $\rho_2(\xi_2(e_1, h)) = q_2(e_1, h) = h$ για κάθε $(e_1, h) \in E_1 \times_G H$.
Άρα η επέκταση της N_φ επί H, (β′) είναι ισοδύναμη με την επέκταση της N_φ επί H ,(β). Με άλλα λόγια η απεικόνιση $Z : \mathcal{E}(G, N) \to \mathcal{E}(H, N_\varphi)$ είναι καλά ορισμένη.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου N, M $\mathbb{Z}G$-πρότυπα και $f : N \to M$ ομομορφισμός $\mathbb{Z}G$-προτύπων. Έστω $[(c)] \in \mathcal{E}(G, N)$ δηλαδή επέκταση της N επί G ,(c) : $0 \to N \xrightarrow{i_1} E \xrightarrow{\rho_1} G \to 1_G$ τέτοια ώστε το N είναι $\mathbb{Z}G$-πρότυπο με δράση $(g, n) \to g \cdot n = x \cdot n \cdot x^{-1}$, $\rho_1(x) = g$.
Το M εφοδιάζεται με δομή $\mathbb{Z}E$-προτύπου μέσω του $\mathbb{Z}G$-ομομορφισμού

ρ_1 ως εξής:

Αν $e \in E$ και $m \in M$ θέτουμε $e * m = \rho_1(e) \cdot m$. Έτσι έχουμε τον ομομορφισμό ομάδων $\vartheta : E \to Aut(M)$ με $\vartheta(e) = \vartheta_e$ όπου $\vartheta_e(m) = e * m$.

Επομένως ορίζεται το ημιευθύ γινόμενο της M επί E $M \rtimes_\vartheta E$ με πράξη: $(k, d)(l, e) = (k + \vartheta_d(l), de)$ για κάθε $(k, d), (l, e) \in M \times E$.

Θεωρούμε επίσης την μικρότερη κανονική υποομάδα S της $M \rtimes_\vartheta E$ που παράγεται από τα στοιχεία $(-f(n), i_1(n))$, $n \in N$ και τους ομομορφισμούς ομάδων:

$$\phi_1 : E \to M \rtimes_\vartheta E/S \text{ με } \phi_1(e) = (0_M, e)S \ \forall e \in E$$

$$\phi_2 : M \to M \rtimes_\vartheta E/S \text{ με } \phi_2(m) = (m, 1_E)S \ \forall m \in M$$

δηλαδή $\phi_1 \equiv \pi_1 \circ j_1 : E \to M \rtimes_\vartheta E/S$ με $j_1(e) = (0_M, e)$ για κάθε $e \in E$ και $\phi_2 \equiv \pi_1 \circ j_2 : M \to M \rtimes_\vartheta E/S$ με $j_2(m) = (m, 1_E)$ για κάθε $m \in M$.
Τώρα, εύκολα παρατηρεί κανείς ότι τα παρακάτω διαγράμματα μετατίθενται.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i_1"'] \arrow[d, "(1)\,f"'] & E \arrow[d, "\phi_1"'] \\
M \arrow[r, "\phi_2"'] & M \rtimes_\vartheta E
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i_1"'] \arrow[d, "(2)\,f"'] & E \arrow[d, "\rho_1"'] \\
M \arrow[r, "1_G"'] & G
\end{tikzcd}$$

όπου $1_G(m) = 1_G$ για κάθε $m \in M$.
Άρα αν θεωρήσουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[d, "\phi_1"] \arrow[ddr, "\rho_1"] & \\
M \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[drr, "1_G"] & M \rtimes_\vartheta E/S \arrow[dr, dotted, "\rho"] & \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

μπορούμε να βρούμε ομομορφισμό ομάδων $\rho : M \rtimes_{\vartheta} E/S \to G$ τέτοιον ώστε $\rho \circ \phi_2 = 1_G$ και $\rho \circ \phi_1 = \rho_1$.
Πράγματι, θέτοντας $\rho((m,e)S) = \rho_1(e)$ έχουμε ότι η ρ είναι καλά ορισμένη αφού αν $(m_1, e_1)S = (m_2, e_2)S$ τότε $(m_1, e_1)(m_2, e_2)^{-1} \in S$ όπου $(m_2, e_2)^{-1} = (-e_2^{-1} m_2, e_2^{-1})$.Άρα $(m_1 - e_1 e_2^{-1} * m_2, e_1 e_2^{-1}) \in S$. Επομένως $(m_1 - e_1 e_2^{-1} * m_2, e_1 e_2^{-1}) =$
$(\alpha_1, \beta_1)(-f(n_1), i_1(n_1))(-\beta_1^{-1}\alpha_1, \beta_1^{-1})(\alpha_2, \beta_2)(-f(n_2), i_1(n_2))(-\beta_2^{-1}\alpha_2, \beta_2^{-1})...$
$(\alpha_k, \beta_k)(-f(n_k), i_1(n_k))(-\beta_k^{-1}\alpha_k, \beta_k^{-1})$
$= (\alpha_1 - \beta_1 * f(n_1), \beta_1 i_1(n_1))(-\beta_1^{-1}\alpha_1, \beta_1^{-1})(\alpha_2, \beta_2)(-f(n_2), i_1(n_2))(-\beta_2^{-1}\alpha_2, \beta_2^{-1})...$
$(\alpha_k, \beta_k)(-f(n_k), i_1(n_k))(-\beta_k^{-1}\alpha_k, \beta_k^{-1})$

$= (\alpha_1 - \beta_1 * f(n_1) - \beta_1 i_1(n_1) * \beta_1^{-1}\alpha_1, \beta_1 i_1(n_1)\beta_1^{-1})...(\alpha_k, \beta_k)(-f(n_k), i_1(n_k))(-\alpha_k, \beta_k^{-1})$
$= (\alpha_1 - \beta_1 * f(n_1) - \beta_1 i_1(n_1) * \beta_1^{-1}\alpha_1 - ..., \beta_1 i_1(n_1)\beta_1^{-1}\beta_2 i_1(n_2)\beta_2^{-1}...\beta_k i_1(n_k)\beta_k^{-1})$
όπου $(\alpha_i, \beta_i) \in M \rtimes_{\vartheta} E$ για $i = 1, 2, ..., k$.

Συνεπώς $e_1 e_2^{-1} = \beta_1 i_1(n_1)\beta_1^{-1}\beta_2 i_1(n_2)\beta_2^{-1}...\beta_k i_1(n_k)\beta_k^{-1} \Rightarrow$
$\rho_1(e_1 e_2^{-1}) = \rho_1(\beta_1 i_1(n_1)\beta_1^{-1}\beta_2 i_1(n_2)\beta_2^{-1}...\beta_k i_1(n_k)\beta_k^{-1})$
$= \rho_1(\beta_1)\rho_1(i_1(n_1))\rho_1(\beta_1^{-1})\rho_1(\beta_2)\rho_1(i_1(n_2))\rho_1(\beta_2^{-1})...\rho_1(\beta_k)\rho_1(i_1(n_k))\rho_1(\beta_k^{-1})$
$= \rho_1(\beta_1)\rho_1(\beta_1^{-1})\rho_1(\beta_2)\rho_1(\beta_2^{-1})...\rho_1(\beta_k)\rho_1(\beta_k^{-1}) = 1$
Άρα $\rho_1(e_1) = \rho_1(e_2)$ δηλαδή η ρ είναι καλά ορισμένη.

Τέλος εύκολα παρατηρεί κανείς ότι η ρ είναι επιμορφισμός ομάδων.
Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάσαμε μια επέκταση ομάδων (c') : $0 \to M \xrightarrow{\phi_2} M \rtimes_{\vartheta} E/S \xrightarrow{\rho} G \to 1_G$.
Παρατηρούμε επίσης εύκολα ότι η απεικόνιση $\phi_2 : M \to M \rtimes_{\vartheta} E/S$ με $\phi_2(m) = (m, 1_e)S$ είναι μονομορφισμός ομάδων. Τέλος πρέπει να δείξουμε ότι $Im\phi_2 = ker\rho$ για να πάρουμε την ακρίβεια της (c').

$\underline{ker\rho \subseteq Im\phi_2}$ Έστω $(m,e)S \in M \rtimes_{\vartheta} E/S$ τέτοιο ώστε $\rho((m,e)S) = 1_G$.
Τότε $\rho_1(e) = 1_G$ και από την ακρίβεια της ακολουθίας (c): $0 \to N \xrightarrow{i_1} E \xrightarrow{\rho_1} G \to 1_G$, $Imi_1 = ker\rho_1$, υπάρχει $a \in N$ τέτοιο ώστε $i_1(a) = e$.
Επομένως $(m,e)S = (m, i_1(a))S = (m, 1_E)S(0_M, i_1(a))S =$
$(m, 1_E)S(-f(a), 1_E)S = (m - f(a), 1_E)S$ όπου $(m - f(a), 1_E)S = \phi_2(m - f(a)) = \phi_2(z)$ άρα υπάρχει $z \in M$ τέτοιο ώστε $\phi_2(z) = (m,e)S$.

$\underline{Im\phi_2 \subseteq ker\rho}$ Είναι άμεσο από το διάγραμμα (2).

Επομένως η ακολουθία (c'): $0 \to M \xrightarrow{\phi_2} M \rtimes_{\vartheta} E/S \xrightarrow{\rho} G \to 1_G$ είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία ομάδων, δηλαδή μια επέκταση της M επί G.
Επίσης η δράση που επάγει η ομάδα G στην ομάδα M μέσω της επέκτασης

(c') είναι η $g{\cdot}m = (x,e)S(m,1_E)S(-x,e^{-1})S = \rho((x,e)S){\cdot}m = \rho_1(e){\cdot}m$ δηλαδή η δομή του $\mathbb{Z}G$-προτύπου M που επάγει η G μέσω της (c') είναι η ίδια με αυτήν του $\mathbb{Z}G$-προτύπου M όπως ορίστηκε αρχικά. Άρα αν $[(c')]$ η κλάση των ισοδύναμων επεκτάσεων της M επί G προς την $[(c')]$ τότε $[(c')] \in \mathcal{E}(G,M)$.
Άρα αυτό που καταφέραμε είναι το εξής:
Αν N,M $\mathbb{Z}G$-πρότυπα όπως ορίστηκαν στην αρχή της ενότητας και $[(c)] \in \mathcal{E}(G,N)$ δηλαδή (c): $0 \to N \xrightarrow{i_1} E \xrightarrow{\rho_1} G \to 1_G$ μια επέκταση της N επί G τότε κατασκευάσαμε επέκταση της M επί G, (c') $0 \to M \xrightarrow{\phi_2} M \rtimes_\vartheta E/S \xrightarrow{\rho} G \to 1_G$ με $[(c')] \in \mathcal{E}(G,M)$ τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(c)\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_1} & E & \xrightarrow{\rho_1} & G & \longrightarrow & 1_G \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & {\scriptstyle \phi_1}\downarrow & & {\scriptstyle Id_G}\Vert & & \\
(c')\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\phi_2} & M \rtimes_\vartheta E/S & \xrightarrow{\rho} & G & \longrightarrow & 1_G
\end{array}$$

γεγονός που απορρέει από τα διαγράμματα (1) και (2).
Σημειώνουμε ότι το ζεύγος $(M \rtimes_\vartheta E, \phi_2, \phi_1)$ αποτελεί push out των ομομορφισμών f, i_1.

Θα δείξουμε τώρα ότι η απεικόνιση $[(c)] \to [(c')]$ είναι καλά ορισμένη. Για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την καθολική ιδιότητα του push-out. Υπενθυμίζουμε την έννοια του push out στην κατηγορία των ομάδων και των ομομορφισμών ομάδων.

Ορισμος 2.37. Έστω A, B, C ομάδες και $f : A \to B$ $g : A \to C$ ομομορφισμοί ομάδων.

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow[f]{} & B \\
{\scriptstyle g}\downarrow & & \\
C & &
\end{array}$$

Έστω ότι υπάρχουν ομάδα R και ομομορφισμοί ομάδων $c : C \to R$, $d : B \to R$ τέτοιοι ώστε:
1) Το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται:

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow[f]{} & B \\
{\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow \\
C & \xrightarrow[c]{} & R
\end{array}$$

δηλαδή $d \circ f = c \circ g$.

2) Αν Ε ομάδα και $d' : B \to E$, $c' : C \to E$ ομομορφισμοί ομάδων τέτοιοι ώστε το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "d'"'] \\
C \arrow[r, "c'"'] & E
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $d' \circ f = c' \circ g$

.

Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\phi : R \to E$ τέτοιος ώστε:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "d"] \arrow[ddr, "d'"] & \\
C \arrow[r, "c"] \arrow[drr, "c'"] & R \arrow[dr, dotted, "\phi"] & \\
& & E
\end{tikzcd}$$

$\phi \circ d = d'$

$\phi \circ c = c'$

Τότε ότι το ζεύγος (R, c, d) αποτελεί ένα push-out των ομομορφισμών $g,\ f$.

Μέσω της έννοιας του push-out μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση $W : \mathcal{E}(G,N) \to \mathcal{E}(G,M)$ Αν $[(c)]$: $\left[0 \to N \xrightarrow{i_1} E \xrightarrow{\rho_1} G \to 1_G\right]$ ένα σοιχείο της $\mathcal{E}(G,N)$ θέτουμε $W([(c)]) = [(c')]$ όπου (c'): $0 \to M \xrightarrow{i_2} M \rtimes_\vartheta E/S \xrightarrow{\rho_2} G \to 1_G$ η επέκταση της Μ επί G με S να αποτελεί την μικρότερη κανονική υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία $(-f(n), i_1(n)),\ n \in N$ δηλαδή $S =<< (-f(n), i_1(n)) >>$ και $i_2(m) = (m, 1_e)S,\ \rho_2((m,e)S) = \rho_1(e)$ για κάθε $m \in M,\ (m,e)S \in M \rtimes_\vartheta E/S$. Τότε η W είναι καλά ορισμένη.

Πράγματι θεωρούμε επέκταση της Ν επί G $(d) :\ 0 \to N \xrightarrow{j_1} E_1 \xrightarrow{q_1} G \to 1_G$ ισοδύναμη με την (c). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ισομορφισμός ομάδων $\xi_1 : E_1 \to E$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό, δηλαδή:

$$\begin{array}{ccccccccc} (d):\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{j_1} & E_1 & \xrightarrow{q_1} & G & \longrightarrow & 1_G \\ & & Id_N \Big\| & & \xi_1 \Big\downarrow & & Id_G \Big\| & & \\ (c):\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_1} & E & \xrightarrow{\rho_1} & G & \longrightarrow & 1_G \end{array}$$

δηλαδή $\rho_1 \circ \xi_1 = q_1,\ \xi_1 \circ j_1 = i_1$.

Επίσης έχουμε τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα.
Θεωρούμε επίσης τις επαγόμενες επεκτάσεις των M επί G:

$$(d'):\ 0 \to M \xrightarrow{j_2} M \rtimes_{\vartheta_1} E_1/S_1 \xrightarrow{q_2} G \to 1_G$$

$$(c'):\ 0 \to M \xrightarrow{i_2} M \rtimes_{\vartheta} E/S \xrightarrow{\rho_2} G \to 1_G$$

όπου $j_2(m) = (m, 1_{E_1})S_1,\ j_1(m) = (m, 1_E)S,\ q_2((m, e_1)S_1) = q_2(e_1)$, $\rho_2((m, e)S) = \rho_1(e)$ για κάθε $m \in M$, $(m, e_1)S_1 \in M \rtimes_{\vartheta_1} E_1/S_1,\ (m, e)S \in M \rtimes_{\vartheta} E/S$ και $S_1,\ S$ οι μικρότερες κανονικές υποομάδες των $M \rtimes_{\vartheta_1} E_1$ και $M \rtimes_{\vartheta} E$ αντίστοιχα που περιέχουν τα στοιχεία της μορφής $(-f_n, j_1(n))$ και $(-f(n), i_1(n))$ δηλαδή $S_1 =<< (-f(n), j_1(n)) >>,\ S =<< (-f(n), i_1(n) >>$.

Παρατηρούμε ότι τα παρακάτω διαγράμματα είναι μεταθετικά

$$\begin{array}{ccccccccc} (d):\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{j_1} & E_1 & \xrightarrow{q_1} & G & \longrightarrow & 1_G \\ & & \Big\downarrow f & & \phi_1 \Big\downarrow & & Id_G \Big\| & & \\ (d'):\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j_2} & M \rtimes_{\vartheta_1} E_1/S_1 & \xrightarrow{q_2} & G & \longrightarrow & 1_G \end{array}$$

όπου $\phi_1(e_1) = (0, e_1)S_1$ για κάθε $e_1 \in M_1$

$$\begin{array}{ccccccccc} (c):\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_1} & E & \xrightarrow{\rho_1} & G & \longrightarrow & 1_G \\ & & \Big\downarrow f & & \phi_2 \Big\downarrow & & Id_G \Big\| & & \\ (c'):\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_2} & M \rtimes_{\vartheta} E/S & \xrightarrow{\rho_2} & G & \longrightarrow & 1_G \end{array}$$

όπου $\phi_2(e) = (0, e)S$ για κάθε $e \in M$

Θεωρούμε τώρα το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "f"] & E_1 \arrow[d, "\phi_1"] \arrow[dr, "\phi_2\circ\xi_1"] & \\
M \arrow[r, "j_2"] \arrow[drr, "i_2"] & M \rtimes_{\vartheta_1} E_1/S_1 & \\
 & & M \rtimes_{\vartheta} E/S
\end{tikzcd}$$

στο οποίο παρατηρεί κανείς ότι τα ζεύγη $(M \rtimes_{\vartheta_1} E_1/S_1, j_2, \phi_1)$, $(M \rtimes_{\vartheta} E/S, i_2, \phi_2 \circ \xi_1)$ είναι push out των ομομορφισμών (f, j_1).

Άρα χρησιμοποιώντας την καθολική ιδιότητα των push out υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $\xi_2 : M \rtimes_{\vartheta_1} E_1/S_1 \to M \rtimes_{\vartheta} E/S$ τέτοιος ώστε $\xi_2 \circ \phi_1 = \phi_2 \circ \xi_1$ και $\xi_2 \circ j_2 = i_2$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "f"] & E_1 \arrow[d, "\phi_1"] \arrow[dr, "\phi_2\circ\xi_1"] & \\
M \arrow[r, "j_2"] \arrow[drr, "i_2"] & M \rtimes_{\vartheta_1} E_1/S_1 \arrow[dr, dotted, "\xi_2"] & \\
 & & M \rtimes_{\vartheta} E/S
\end{tikzcd}$$

και μάλιστα έχει τύπο $\xi_2((m, e_1)S_1) = (m, \xi_1(e_1))S$.

Συνεπώς το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{tikzcd}
(d):\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, equal, "Id_M"'] & M \rtimes_{\vartheta_1} E_1/S_1 \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "\xi_2"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal, "Id_G"'] & 1_G \\
(c'):\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_2"] & M \rtimes_{\vartheta} E/S \arrow[r, "\rho_2"] & G \arrow[r] & 1_G
\end{tikzcd}$$

αφού για κάθε $(m, x)S_1 \in M \rtimes_{\vartheta_1} E_1/S_1$ έχουμε

$\rho_2(\xi_2((m, x)S_1)) = \rho_2((m, \xi_1(x))S) = \rho_1(\xi_1(x)) = q_1(x) = q_2((m, x)S_1)$

και προφανώς $\xi_2 \circ j_2 = i_2$ από το προηγούμενο διάγραμμα.

Ετσι η επέκταση (d') της M επί G είναι ισοδύναμη με την επέκταση

(c') της M επί G δηλαδή η απεικόνιση $W : \mathcal{E}(G, N) \to \mathcal{E}(G, M)$ με $W([c]) = [c']$ είναι καλά ορισμένη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σε αυτήν την ενότητα δείχνουμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα της συνομολογικής θεωρίας πεπερασμένων ομάδων τα οποία χρησιμοποιούμε για την απόδειξη του θεωρήματος Schur-Zassenhaus.

Ορισμος 3.1. Έστω R, S δακτύλιοι. Ένας συνομολογιακός συναρτήτης U^* από την κατηγορία των R-προτύπων στην κατηγορία των S-προτύπων αποτελείται από μια οικογένεια προσθετικών συναρτητών $\{U^n : n \in \mathbb{Z}\}$: R-Mod$\to$ S-Mod μαζί με φυσικούς ομομορφισμούς $\delta : U^n(M') \to U^{n+1}(M'')$ έτσι ώστε για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \to M'' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M' \to 0$ η επαγόμενη ακολουθία S-προτύπων

$$... \xrightarrow{\delta} U^n(M'') \xrightarrow{i_*} U^n(M) \xrightarrow{\pi_*} U^n(M') \xrightarrow{\delta} U^{n+1}(M'') \xrightarrow{i_*} U^{n+1}(M) \to ...$$

να είναι ακριβής.

Παρατηρηση 3.2. Ας θεωρήσουμε δυο βραχείες ακριβείς ακολουθίες R-προτύπων $0 \to M'' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M' \to 0$, $0 \to N'' \xrightarrow{j} N \xrightarrow{\rho} N' \to 0$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν ομομορφισμοί R-προτύπων $\phi'' : M'' \to N''$, $\phi : M \to N$, $\phi' : M' \to N'$ που κάνουν το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi''"'] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"'] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N'' \arrow[r, "j"] & N \arrow[r, "\rho"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Αφού U^n συναρτήτες έχουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
U^n(M'') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\phi''_*"'] & U^n(M) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi_*"'] & U^n(M') \arrow[d, "\phi'_*"'] \\
U^n(N'') \arrow[r, "j"] & U^n(N) \arrow[r, "\rho"] & U^n(N')
\end{tikzcd}$$

Ο χαρακτηρισμός "φυσικός ομομορφισμός" στον προηγούμενο ορισμό του $\delta : U^n(M') \to U^{n+1}(M'')$ σημαίνει ότι απαιτούμε και το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} U^n(M') & \xrightarrow{\delta} & U^{n+1}(M'') \\ \phi'_* \Big\downarrow & & \phi''_* \Big\downarrow \\ U^n(N') & \xrightarrow{\gamma} & U^{n+1}(N'') \end{array}$$

Ορισμος 3.3. Ένας συνομολογιακός συναρτήτης $U^* : R - Mod \to S - Mod$ λέγεται καθολικός αν $U^n = 0$ για $n < 0$ και $U^n(J) = 0$ όταν το J είναι εμφυτευτικό R-πρότυπο και $n > 0$.

Ορισμος 3.4. Έστω U^*, V^* συνομολογιακοί συναρτήτες από την κατηγορία $R - Mod$ στην κατηγορία $S - Mod$. Ένας μορφισμός $v^* : U^* \to V^*$ συνομολογιακών συναρτητών αποτελείται από μια οικογένεια φυσικών μετασχηματισμών $v^n : U^n \to V^n$, έτσι ώστε να είναι συμβιβαστοί με τους φυσικούς ομομορφισμούς $\delta : U^n(M') \to U^{n+1}(M'')$.
Αυτό σημαίνει ότι αν $0 \to M'' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M' \to 0$, $0 \to N'' \xrightarrow{j} N \xrightarrow{\rho} N' \to 0$ βραχείες ακριβείς ακολουθίες R-προτύπων, τότε έχουμε ότι το διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{array}{ccccc} U^n(M'') & \xrightarrow{u^n(i)} & U^n(M) & \xrightarrow{u^n(\pi)} & U^n(M') \\ v^n_{M''} \Big\downarrow & & v^n_M \Big\downarrow & & v^n_{M'} \Big\downarrow \\ V^n(M'') & \xrightarrow{v^n(i)} & V^n(M) & \xrightarrow{v^n(\pi)} & V^n(M') \end{array}$$

αλλά και το παρακάτω διάγραμμα θέλουμε να μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc} U^n(M') & \xrightarrow{\delta} & U^{n+1}(M'') \\ v^n_{M'} \Big\downarrow & & v^{n+1}_{M''} \Big\downarrow \\ V^n(M') & \xrightarrow{d} & V^{n+1}(M'') \end{array} \qquad (1)$$

Όταν λέμε ότι οι φυσικοί μετασχηματισμοί $v^n : U^n \to V^n$ είναι συμβιβαστοί με του φυσικούς ομομορφισμούς $\delta : U^n(M') \to U^{n+1}(M'')$, $d : V^n(M') \to V^{n+1}(M'')$ εννοούμε ότι το διάγραμμα 1 μετατίθεται.

Ισχύει το ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα.

Θεωρημα 3.5. *Έστω U^*, $V^* : R - Mod \to S - Mod$ συνομολογιακοί συναρτητές έτσι ώστε ο U^* να είναι καθολικός. Τότε κάθε φυσικός μετασχηματισμός $v^0 : U^0 \to V^0$ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε μορφισμό συνομολογιακών συναρτητών $v^* : U^* \to V^*$.*

Θα εφαρμόσουμε αυτό το Θεώρημα στην περίπτωση του συνομολογιακού συναρτητή $H^*(G, -)$ για να πάρουμε τις ιδιότητες που θέλουμε.

Παρατηρηση 3.6. Έστω G ομάδα και A $\mathbb{Z}G$-πρότυπο. Τότε $H^0(G,A) = Ext^0_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A) = Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A) \approx \{a \in A : ga = a, g \in G\} = A^G$.Παρατηρούμε ότι το A^G είναι $\mathbb{Z}G$-υποπρότυπο του A και μάλιστα είναι το μεγαλύτερο τετριμμένο $\mathbb{Z}G$-υποπρότυπο του A.

Προταση 3.7. *Έστω $A \in \mathbb{Z}G - Mod$, $m \in \mathbb{Z}$ και $Y_m : A \to A$ η απεικόνιση με $Y_m(x) = mx$ για κάθε $x \in A$. Τότε ο Y_m είναι $\mathbb{Z}G$-ομομορφισμός και επάγει ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $H^n(Y_m) : H^n(G,A) \to H^n(G,A)$ με $H^n(Y_m)(w) = mw$.*

Αποδειξη. Ο συναρτήτης $H^*(G,-)$ είναι καθολικός αφού εξόρισμού $H^n(G,-) = Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},-) = 0$ για $n < 0$ και $Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},I) = 0$ όταν το I είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$-πρότυπο.
Πράγματι αν το I είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$-πρότυπο τότε θεωρούμε την ελεύθερη επίλυση $0 \to I \xrightarrow{Id} I \to 0 \to 0....$ Εφαρμόζουμε τον συναρτήτη $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},-)$ και έχουμε

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},I) \xrightarrow{Id_*} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},I) \to 0$$

απ'οπου συμπεραίνουμε ότι $Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},I) = 0$ για $n > 0$.
Άρα ο συνομολογιακός συναρτήτης $H^*(G,-)$ είναι καθολικός.
Έπιπλέον, στην θέση 0 έχουμε τον φυσικό μετασχηματισμό

$$H^0(Y_m) : H^0(G,-) \to H^0(G,-)$$

$$a \to ma$$

Πράγματι, αν A_1, A_2 $\mathbb{Z}G$-πρότυπα και $f : A_1 \to A_2$ $\mathbb{Z}G$ ομομορφισμός τότε το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{tikzcd} A_1^G \arrow[r, "H^0(Y_m)_{A_1}"] \arrow[d, "H^0(f)"'] & A_1^G \arrow[d, "H^0(f)"'] \\ A_2^G \arrow[r, "H^0(Y_m)_{A_2}"] & A_2^G \end{tikzcd}$$

Άρα κατά το θεώρημα 3.5 έχουμε ότι ο φυσικός μετασχηματισμός $H^0(Y_m) : H^0(G,-) \to H^0(G,-)$ επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μορφισμό συνομολογιακών συναρτητών $H^0(Y_m)^* : H^*(G,-) \to H^*(G,-)$. Θεωρώντας $f_{m,n} : H^n(G,A) \to H^n(G,A)$ με $f_{m,n}(a) = ma$ τότε $f_{m,n}$ μορφισμός συνομολογιακών συναρτητών. Επιπλέον $f_{m,0} = H^0(Y_m)$. Άρα από την μοναδικότητα του θεωρήματος 3.5 έχουμε $f_{m,n} = H^n(Y_m)$ για κάθε n. □

Παρατηρηση 3.8. Έστω G ομάδα και Η υποομάδα. Αν Α $\mathbb{Z}G$-πρότυπο, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το Α ως $\mathbb{Z}H$-πρότυπο μέσω του περιορισμού της δράσης της υποομάδας Η στην Α. Έτσι, ορίζεται συναρτητής

$$|_H : \mathbb{Z}G - Mod \to \mathbb{Z}H - Mod$$

που στέλνει τα $\mathbb{Z}G$-πρότυπα Α σε $\mathbb{Z}H$-πρότυπα μέσω του περιορισμού της δράσης, δηλαδή $|_H(A) = A|_H$. Από την άλλη έχουμε τους συναρτητές

$$\mathbb{Z}G - Mod \xrightarrow{H^*(G,-)} Ab$$

και

$$\mathbb{Z}H - Mod \xrightarrow{H^*(H,-)} Ab$$

Συμβολίζουμε με $\bar{H}(G,-)$ τον συναρτητή $H^*(H,-) \circ |_H : \mathbb{Z}G - Mod \to Ab$.Έυκολα βλέπουμε ότι ο $\bar{H}(G,-)$ είναι συνομολογιακός συναρτητής επειδή ο $|_H$ είναι ακριβής συναρτητής.

Προταση 3.9. *Θεωρούμε την απεικόνιση* $res^0 : H^0(G,-) \to \bar{H}^0(H,-)$ *με* $res^0(a) = a$ *για κάθε* $a \in A^G$, $res^0_A : H^0(G,A) \to \bar{H}^0(H,A)$ *.Τότε η απεικόνιση* res^0 *είναι φυσικός μετασχηματισμός και επάγει μορφισμό συνομολογιακών συναρτητών* $res^* : H^*(G,-) \to \bar{H}^*(H,-)$

Αποδειξη. Από την πρόταση 3.7 έχουμε ότι ο συνομολογιακός συναρτητής $H^*(G,-)$ είναι καθολικός. Επίσης η απεικόνιση
$res^0 : H^0(G,-) \to \bar{H}^0(H,-)$ αποτελεί φυσικό μετασχηματισμό αφού αν $A_1,\ A_2$ $\mathbb{Z}G$-πρότυπα και $f : A_1 \to A_2$ $\mathbb{Z}G$ ομομορφισμός έχουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc} A_1^G & \xrightarrow{res^0_{A_1}} & A_1^H \\ {\scriptstyle H^0(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H^0(f)}\downarrow \\ A_2^G & \xrightarrow{res^0_{A_2}} & A_2^H \end{array}$$

Άρα κατά το θεώρημα 3.5 ο φυσικός μετασχηματισμός $res^0 : H^0(G,-) \to \bar{H}^0(H,-)$ επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μορφισμό συνομολογιακών συναρτητών $res^* : H^*(G,-) \to \bar{H}^*(H,-)$. Αν θεωρήσουμε $h_n : H^n(G,A) \to \bar{H}(H,A)$ με $h_n(a) = a$ για κάθε $a \in H^n(G,A)$ τότε h^* μορφισμός συνομολογιακών συναρτητών. Επιπλέον στη θέση 0 έχουμε ότι $h_0(a) = res^0_A(a)$ για κάθε $a \in A^G$. Άρα από την μοναδικότητα του θεωρήματος 3.5 έχουμε ότι $h^* = res^*$. □

Παρατηρηση 3.10. Έστω G ομάδα και $K \leq G$ με $|G : K| < +\infty$. Αν Τ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων τότε ή $G = \bigcup_{i=1}^n t_i K$.Θεωρούμε τον συναρτητή $H^*(K,-) \circ |_K : \mathbb{Z}G - Mod \xrightarrow{|_K} \mathbb{Z}K - Mod \xrightarrow{H^*(K,-)} Ab$. Θέτουμε $\bar{H}(K,-) = H^*(K,-) \circ |_K$ και βλέπουμε ότι ο $\bar{H}(K,-)$ είναι συνομολογιακός συναρτητής.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$cor^0 : A^K = \bar{H}^0(K,A) \to A^G = H^0(G,A)$$

με $cor^0(a) = \sum_{i=1}^n t_i a$.

Πρόταση 3.11. *Η απεικόνιση*

$$cor^0 : A^K = \bar{H}^0(K,A) \to A^G = H^0(G,A)$$

είναι φυσικός μετασχηματισμός και επάγει μορφισμό συνομολογιακών συναρτητών $cor^* : \bar{H}^*(K,-) \to H^*(G,-)$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη αφού αν $a \in A^K$ $(ka = a\ \forall k \in K)$ τότε $g(\sum_{i=1}^n t_i a) = \sum_{i=1}^n t_i a$.
Πράγματι, $g(\sum_{i=1}^n t_i a) = \sum_{i=1}^n (gt_i)a$ όπου $gt_i \in G = \bigcup_{j=1}^n t_j K$. Άρα για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχει μοναδικό $1 \leq j \leq n$ τέτοιο ώστε $gt_i = t_j k_j$, $k \in K$ δηλαδή

$$g(\sum_{i=1}^n t_i a) = \sum_{i=1}^n (gt_i)a = \sum_{j=1}^n (t_j k_j)a = \sum_{j=1}^n t_j(k_j a) = \sum_{j=1}^n t_j a$$

Επίσης η $cor^0 : A^K = H^0(K,A) \to A^G = H^0(G,A)$ είναι φυσικός μετασχηματισμός αφού αν A_1, A_2 $\mathbb{Z}G$-πρότυπα και $f : A_1 \to A_2$ $\mathbb{Z}G$-ομομορφισμός τότε το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc} A_1^K & \xrightarrow{cor^0_{A_1}} & A_1^G \\ {\scriptstyle H^0(f)}\big\downarrow & & {\scriptstyle H^0(f)}\big\downarrow \\ A_2^K & \xrightarrow{cor^0_{A_2}} & A_2^G \end{array}$$

όπου $H^0(f)cor^0_{A_1}(a) = H^0(f)(\sum_{i=1}^n t_i a) = \sum_{i=1}^n t_i H^0(f)(a) = cor^0_{A_2}(H^0(f)(a))$ για κάθε $a \in A_1^K$.
Επίσης ο συνομολογιακός συναρτητής

$$\bar{H}^*(K,-) : \mathbb{Z}G - Mod \xrightarrow{|_K} \mathbb{Z}K - Mod \xrightarrow{H^*(K,-)} Ab$$

είναι καθολικός αφού αν I είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$-πρότυπο τότε το $I|_K$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}K$-πρότυπο.
Πράγματι $Hom_{\mathbb{Z}K}(-, I|_K) = Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}K \otimes_{\mathbb{Z}K} -, I)$ και αφού $\mathbb{Z}K \otimes_{\mathbb{Z}K} -$ ακριβής συναρτητής και I εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$-πρότυπο τότε $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}K \otimes_{\mathbb{Z}K} -, I) = 0$, δηλαδή $I|_K$ εμφυτευτικό $\mathbb{Z}K$-πρότυπο.

Άρα κατά το θεώρημα 3.5 ο φυσικός μετασχηματισμός $cor^0 : H^0(K,A) \to H^0(G,A)$ επεκτείνεται με μοναδικό τρόπον σε μορφισμό συνομολογιακών συναρτητών $cor^* : H^*(K,A) \to H^*(G,A)$. $\square$

Πορισμα 3.12. *Έστω G ομάδα και $K \leq G$ με $|G : K| = m$.Τότε $cor \circ res : H^*(G, -) \to H^*(G, -)$ είναι πολλαπλασιασμός με m.*

Αποδειξη. Για κάθε n έχουμε

$$H^n(G, -) \xrightarrow{res^n} H^n(K, -) \xrightarrow{cor^n} H^n(G, -)$$

όπου στη θέση 0 έχουμε

$$A^G \xrightarrow{res^0} A^K \xrightarrow{cor^0} A^G$$

$cor^0(res^0(a)) = cor^0(a) = \sum_{i=1}^m t_i a = \sum_{i=1}^m a = ma$.
Άρα χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.7 και την μοναδικότητα του θεωρήματος 3.5 έχουμε ότι $cor^n \circ res^n$ =(πολλαπλασιασμός με m). $\square$

Πορισμα 3.13. *Έστω G ομάδα με $|G| = m < +\infty$ και A $\mathbb{Z}G$-πρότυπο. Τότε $mH^i(G, A) = 0$, $i > 0$.*

Αποδειξη. Θεωρούμε επίσης και τους μορφισμούς συνομολογιακών συναρτητών

$$res^* : H^*(G, A) \to H^*(\{1_G\}, A)$$
$$cor^* : H^*(\{1_G\}, A) \to H^*(G, A)$$

και την σύνθεση τους $cor^* \circ res^*$

$$H^*(G, A) \xrightarrow{res^*} H^*(\{1_G\}, A) \xrightarrow{cor^*} H^*(G, A)$$

Χρησιμοποιώντας το πόρισμα 3.12 έχουμε ότι $cor^* \circ res^*$ είναι πολλαπλασιασμός με m. Όμως $H^*(\{1_G\}, A) = 0$ για $* \neq 0$ άρα $mH^*(G, A) = 0$. $\square$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θα δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος Schur-Zassenhaus που αφορά την ύπαρξη συμπληρώματος.Πρώτα δίνουμε μια απόδειξη στην περίπτωση όπου η κανονική υποομάδα είναι αβελιανή.

Θεωρημα 3.14. (*Schur*). *Έστω G πεπερασμένη ομάδα, $A \triangleleft G$, A αβελιανή με $|G/A| = n$, $|A| = m$ και Μ.Κ.Δ($|A|, |G/A|$)=1. Τότε υπάρχει $K \leq G$ με $G = A \cdot K$, $A \cap K = \{1_G\}$. Επιπλέον κάθε δυο τέτοιες υποομάδες είναι συζυγείς.*

Αποδειξη. Η αβελιανή ομάδα Α επειδή είναι κανονική είναι εφοδιασμένη με δομη $\mathbb{Z}G$-προτύπου μέσω συζυγίας.Έυκολα βλέπουμε ότι μέσω της δομής αυτής η Α εφοδιάζεται με δομή $\mathbb{Z}(G/A)$-προτύπου ως $gA * a = gag^{-1}A$.
Θεωρούμε τώρα την αβελιανή ομάδα $H^2(G/A, A)$.
Ο πολλαπλασιασμός $Y_m : A \to A$ με $Y_m(a) = ma$ επάγει απεικόνιση $Y^* : H^2(G/A, A) \to H^2(G/A, A)$ η οποία είναι πολλαπλασιασμός με m από την Πρόταση 3.7 δηλαδή $Y_m^*(w) = mw$ για κάθε $w \in H^2(G/A, A)$.
Όμως $ma = 0$ για κάθε $a \in A$ αφού $|A| = m$ άρα $mH^2(G/A, A) = 0$.

Επίσης, από το πόρισμα 3.13 έχουμε $nH^2(G/A, A) = 0$.
Αφού $(m, n) = 1$ υπάρχουν κ, $\lambda \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $\kappa m + \lambda n = 1$, άρα αν $w \in H^2(G/A, A)$ τότε $w = \kappa m w + \lambda n w = 0$. Επομένως $H^2(G/A, A) = 0$.

Σύμφωνα με την πρόταση 2.19 η επέκταση της A επί G/A (α): $0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/A \to 0$ όπου $i(a) = a$ για κάθε $a \in A$ και $\pi(g) = gA$ για κάθε $g \in G$ είναι διασπώμενη, δηλαδή υπάρχει $K \leq G$ τέτοια ώστε $K \cong G/A$ και $G = A \cdot K$.
Με εντελώς ανάλογο τρόπο, όπως στην περίπτωση $H^2(G/A, A) = 0$ δείχνουμε ότι $H^1(G/A, A) = 0$. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.17 έχουμε ότι κάθε δυο υποομάδες $K, \Lambda \leq G$ τέτοιες ώστε $G = A \cdot K = A \cdot \Lambda$ και $K \cap A = \Lambda \cap A = \{1_G\}$ είναι συζυγείς, δηλαδή υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $K = g\Lambda g^{-1}$. □

Θεωρημα 3.15 (Schur-Zassenhauss). *Έστω G πεπερασμένη ομάδα, $N \triangleleft G$ με Μ.Κ.Δ$(|N|, |G/N|) = 1$. Τότε η N έχει συμπλήρωμα στην G. Με άλλα λόγια υπάρχει υποομάδα $K \leq G$ τέτοια ώστε $G = N \cdot K$, $N \cap K = \{1_G\}$.*

Αποδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $|N| = n$, $|G/N| = m$ και $(n, m) = 1$.
Αρκεί να δείξουμε ότι η G έχει υποομάδα S τέτοια ώστε $|S| = m$.
Αυτό θα γίνει με επαγωγή στην τάξη της ομάδας N.

Για $n = 1$ ισχύει.

Υποθέτουμε ότι $n > 1$ και έστω p ένας πρώτος αριθμός με $p|n$. Θεωρούμε P Sylow p-υποομάδα της N.
Αφού οι $|N|, |G/N|$ είναι σχετικά πρώτοι, η P είναι Sylow p-υποομάδα της G.
Θεωρούμε την υποομάδα $N \cap N_G(P)$ της $N_G(P)$. Παρατηρούμε ότι $N \cap N_G(P) \triangleleft N_G(P)$ αφού $N \triangleleft G$. Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό Frattini έχουμε $G = N_G(P) \cdot N$.
Επομένως, $m = |G/N| = |N_G(P) \cdot N/N| = |N_G(P)/N \cap N_G(P)| \Rightarrow |N_G(P)/N \cap N_G(P)| = m$.
Επίσης παρατηρούμε ότι Μ.Κ.Δ$(|N \cap N_G(P)|, |N_G(P)/N \cap N_G(P)|) = 1$ αφού $N \cap N_G(P) \leq N$. Άρα έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία ομάδων

$$0 \to N \cap N_G(P)/P \xrightarrow{i_1} N_G(P)/P \xrightarrow{p_1} \frac{N_G(P)/P}{N \cap N_G(P)/P} \to 0$$

όπου i_1 η ένθεση και p_1 η προβολή.
Από το Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων έχουμε ότι

$$\frac{N_G(P)/P}{N \cap N_G(P)/P} \cong \frac{N_G(P)}{N \cap N_G(P)}$$

Άρα $|\dfrac{N_G(P)/P}{N \cap N_G(P)/P}| = m$.

Επίσης $|N \cap N_G(P)/P| < n$ και Μ.Κ.Δ$(|N \cap N_G(P)/P|, |\dfrac{N_G(P)/P}{N \cap N_G(P)/P}|) = 1$.

Άρα από υπόθεση επαγωγής η ομάδα $N_G(P)/P$ περιέχει υποομάδα H/P τέτοια ώστε $|H/P| = m$.

Θεωρούμε το κέντρο της Sylow p-υποομάδας της N ,$Z(P)$. Γνωρίζουμε ότι η υποομάδα $Z(P)$ είναι χαρακτηριστική στην P και αφού $P \trianglelefteq H$ χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.3(iii) έχουμε ότι $Z(P) \trianglelefteq H$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι αφού η P είναι p-υποομάδα έχουμε ότι $Z(P) \neq 1$ άρα $|P/Z(P)| < n$.

Έτσι έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία ομάδων

$$0 \to P/Z(P) \xrightarrow{i_2} H/Z(P) \xrightarrow{p_2} \frac{H/Z(P)}{P/Z(P)} \to 0$$

όπου i_2 η ένθεση και p_2 η προβολή.

Από υπόθεση επαγωγής αφού Μ.Κ.Δ$(|\frac{P}{Z(P)}|, |\dfrac{H/Z(P)}{P/Z(P)}|) = 1$ και $|\frac{P}{Z(P)}| < n$, υπάρχει $\frac{A}{Z(P)} \leq \frac{H}{Z(P)}$ υποομάδα τάξης m.

Θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία ομάδων

$$0 \to Z(P) \xrightarrow{i_3} A \xrightarrow{p_3} \frac{A}{Z(P)} \to 0$$

όπου i_1 η ένθεση και p_1 η προβολή.

Από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε ότι $H^2(A/Z(P), Z(P)) = 0$ αφού Μ.Κ.Δ$(|\frac{A}{Z(P)}|, |Z(P)|) = 1$. Άρα η παραπάνω βραχεία ακριβής ακολουθία ομάδων είναι διασπώμενη απ'οπου έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] P.J Hilton, U.Stammbach *A course in homological algebra* , Springer-Verlag.

[2] Joseph J.Rotman *An introduction to the theory of groups* , Fourth edition, Springer-Verlag.

[3] Kenneth Brown *Cohomology of groups* , Springer-Verlag.

[4] Derek J.S Robinson *A course in the theory of groups* , Second edition, Springer-Verlag.

[5] Joseph J.Rotman *An introduction to Homological Algebra*, Academic Press.